

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ»

Επιβλέπων: Αν. Καθηγητής Χριστόφορος Προβατίδης

**Θέμα: Παραμετρική Ανάλυση και Σύγκριση Αλγορίθμων Επίλυσης
Αντίστροφων Προβλημάτων για την Εκτίμηση Μηχανικών
Αλλοιώσεων σε Επίπεδο Πρόβλημα**

Εισηγήτρια: Μαργαρίτα Σατράκη

ΑΘΗΝΑ 2007

Πρόλογος

Η παρούσα εργασία έγινε με σκοπό την απόκτηση του μεταπτυχιακού τίτλου «Υπολογιστική Μηχανική» στα πλαίσια του Διατμηματικού Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Ιδιαίτερες ευχαριστίες απευθύνονται στον επιβλέποντα της εργασίας, Αναπληρωτή Καθηγητή της Σχολής Μηχανολόγων Μηχανικών, Δρα Χριστόφορο Προβατίδη καθώς επίσης και στους Δρα Τσαμασφύρο και Δρα Θεοτόκογλου, μέλη της κριτικής επιτροπής της εργασίας για τον κόπο και τη διάθεση να ασχοληθούν με το θέμα αυτό.

Ένα μεγάλο ευχαριστώ χρωστώ στον Υποψήφιο Διδάκτορα της Σχολής Μηχανολόγων Μηχανικών, Ιωάννη Κουκούλη, για την πολύτιμη του βοήθεια και καθοδήγηση καθόλη τη διάρκεια της εκπόνησης της εργασίας.

Δεν θα μπορούσα ποτέ να ξεχάσω τον Επίκουρο Καθηγητή της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, Δρα Σταύρο Κ. Κουρκουλή, τον οποίο ευχαριστώ ιδιαίτερα για τη συνεχή του βοήθεια και υποστήριξη τα τελευταία χρόνια.

Τέλος, τίποτα από όλα αυτά δεν θα μπορούσε να ολοκληρωθεί χωρίς την σιωπηλή αλλά σημαντική υποστήριξη της οικογένειάς μου, για την οποία είμαι ευγνώμων.

Περίληψη

Η παρούσα εργασία ασχολείται με τη μελέτη του αντίστροφου προβλήματος της εύρεσης ελαττωμάτων μέσα σε επίπεδη πλάκα. Τα ελαττώματα αυτά μπορεί να είναι είτε οπές είτε ρωγμές. Το αντίστροφο πρόβλημα μετατρέπεται σε πρόβλημα βελτιστοποίησης, θεωρώντας ως συνάρτηση κόστους μία ποσοτικοποίηση του σφάλματος του υπολογισμένου χρησιμοποιώντας υπολογιστική μηχανική σε σχέση με το πειραματικά μετρούμενο, και μελετάται συνολικά.

Αρχικά, γίνεται μία ανάλυση ευαισθησίας για να υπάρξει μία ποιοτική κατανόηση του προβλήματος και της εξάρτησής του από τις μεταβλητές σχεδίασης.

Στη συνέχεια, γίνεται παραμετρική ανάλυση για το πρόβλημα της μίας οπής, που σκοπό έχει τη σύγκριση διαφορετικών μεθοδολογιών βελτιστοποίησης (Γενετικός Αλγόριθμος, Προσομοιούμενη Ανόπτηση, Ακολουθιακός Τετραγωνικός Προγραμματισμός - Sequential Quadratic Programming -, Μέθοδος Hooke and Jeeves, Μέθοδος Προσέγγισης Υποπροβλήματος - Subproblem Approximation Method -, Μέθοδος Πρώτης Τάξης - First Order Method-) και μεθόδων ανάλυσης – επίλυσης της φόρτισης επί της κατασκευής (Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων και Μέθοδος Συνοριακών Στοιχείων). Η μελέτη γίνεται για διάφορες θέσεις και μεγέθη ελαττωμάτων από τα οποία εξάγονται αντίστοιχα συμπεράσματα.

Ακολουθεί μία μελέτη του προβλήματος των δύο οπών, για το οποίο επίσης μελετούνται διάφορες θέσεις και μεγέθη ελαττωμάτων. Το πρόβλημα αυτό επιλύεται χρησιμοποιώντας μόνο τη Μέθοδο Συνοριακών Στοιχείων (κάτι που δικαιολογείται από συμπεράσματα της προηγούμενης μελέτης) αλλά και πάλι με διάφορες μεθοδολογίες βελτιστοποίησης (Γενετικός Αλγόριθμος, Ακολουθιακός Τετραγωνικός Προγραμματισμός - Sequential Quadratic Programming - , Μέθοδος Hooke and Jeeves).

Τέλος, θεωρείται το πρόβλημα της μίας ρωγμής, η οποία προσομοιώνεται με πεπλατυσμένη ελλειπτική οπή (οπή «συρρικνωμένη» κατά τη μία της διάσταση). Δοκιμάζονται δύο συντελεστές «συρρίκνωσης» για να μελετηθούν τα όρια των μεθόδων κατά τη μετάβαση από το σχετικά απλό πρόβλημα της οπής προς το ιδιόμορφο πρόβλημα της μαθηματικής ρωγμής. Τελικά γίνεται μία μελέτη, όπως και στο πρόβλημα των δύο οπών, δηλαδή με διάφορες μεθοδολογίες βελτιστοποίησης αλλά μόνο με τη Μέθοδο Συνοριακών Στοιχείων.

Στο τελευταίο πρόβλημα, γίνεται μία προσπάθεια επίλυσης με χρήση μειωμένων δεδομένων για τον υπολογισμό της συνάρτησης κόστους έτσι ώστε να είναι πιο εύκολα πραγματοποιήσιμη η μέθοδος πειραματικά αλλά και να δειχθεί η ικανότητα όπως και τα όρια των προαναφερμένων μεθόδων βελτιστοποίησης στο συγκεκριμένο πρόβλημα.

Τα αποτελέσματα από όλες τις μελέτες συγκρίνονται και αξιολογούνται και στο τέλος εξάγονται συνολικά συμπεράσματα.

Summary

The present project is studying the inverse problem of identifying cracks and holes in a plate. The inverse problem is transformed into an optimization problem by considering a quantification of the error as a cost function.

Initially, a sensitivity analysis is performed, in order to obtain a qualitative understanding of the behaviour of the problem and its dependence on the design variables.

Next, a parametric analysis of the problem of one circular hole is performed, aiming to compare different methods of optimization (Genetic Algorithm, Simulated Annealing, Sequential Quadratic Programming, Hooke and Jeeves, Subproblem Approximation Method, First Order Method) and methods for solving and analysing the loading on the body (Finite Element Method and Boundary Element Method). The analysis is done for various positions and sizes of holes and corresponding conclusions are extracted.

Following, a study of the problem of two holes, for which, again, different positions and sizes of the holes are considered. This problem is now solved using only the Boundary Element Method (as justified from results of the previous analysis) but again employing different optimization techniques (Genetic Algorithm, Sequential Quadratic Programming, Hooke and Jeeves).

Finally, the problem of a crack is considered, which is simulated by a problem with a flatted (depressed) elliptic hole (hole 'shrunk' by one dimension). Different 'shrinkage ratios' are considered in order to study the limits of the methods as we go from the relatively simple problem of a circular hole to the singular problem of the mathematical crack. A study of this problem is done, as for the problem of two holes, using different optimization methods but only with the Boundary Element Method.

For the final part of the project, an effort is done to solve the inverse problem of the crack using less data (less sampling points) for the calculation of the objective function, rendering the problem more experimentally realistic as well as revealing the ability and the limits of the above mentioned optimization methods on the specific problem.

The results of all problems are compared and overall conclusions are presented.

Περιεχόμενα

Σελίδα

Πρόλογος.....	v
Περίληψη.....	vii
Summary	ix
1. Εισαγωγή.....	1
2. Εισαγωγή σε Αντίστροφα Προβλήματα.....	5
3. Περιγραφή μεθόδων βελτιστοποίησης	7
a. Γενικά για τη βελτιστοποίηση	7
b. Μέθοδοι που υλοποιούνται από το λογισμικό του ANSYS 10.0	10
i. Subproblem Approximation Method.....	10
ii. First Order Method.....	11
c. Μέθοδοι που υλοποιούνται από το λογισμικό του MATLAB 7.0.....	12
i. Sequential Quadratic Programming.....	13
ii. Γενετικός Αλγόριθμος	15
d. Μέθοδος Hooke and Jeeves	16
e. Μέθοδος Προσομοιούμενης Ανόπτωσης	18
4. Βελτιστοποίηση με χρήση των Μεθόδων Πεπερασμένων και Συνοριακών Στοιχείων.....	19
Το πρόβλημα που μελετήθηκε.....	20
i. Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων	21
ii. Μέθοδος Συνοριακών Στοιχείων.....	25
5. Περιγραφή συγκεκριμένου προβλήματος και αποτελέσματα	31
i. Περιγραφή γεωμετρίας.....	31

ii. Περιγραφή στηρίξεων και φορτίων.....	31
iii. Περιγραφή υλικού.....	31
Ισοδυναμία επίπεδης έντασης και επίπεδης παραμόρφωσης.....	32
iv. Περιγραφή ελαττωμάτων.....	35
v. Ορισμός συνάρτησης κόστους.....	35
vi. Ορισμός των περιορισμών.....	36
vii. Σύγκριση πλέγματος.....	37
viii. Ανάλυση ευαισθησίας.....	41
ix. Τιμές παραμέτρων για τις μεθόδους που διερευνήθηκαν.....	46
x. Επεξήγηση συμβόλων στους πίνακες.....	47
xi. Προσέγγιση του προβλήματος μίας κυκλικής οπής.....	49
xii. Προσέγγιση του προβλήματος δύο κυκλικών οπών.....	57
xiii. Προσέγγιση του προβλήματος μίας ρωγμής.....	60
6. Συμπεράσματα – Συζήτηση.....	67
Ενδεικτικές πορείες σύγκλισης για της μεθόδους που έχουνε χρησιμοποιηθεί.....	67
Στατιστικά Στοιχεία για τις μεθόδους που διερευνήθηκαν.....	73
1. Επεξεργασία αποτελεσμάτων από το πρόβλημα της μίας οπής.....	73
2. Επεξεργασία αποτελεσμάτων από το πρόβλημα των δύο οπών.....	81
3. Επεξεργασία αποτελεσμάτων από το πρόβλημα της μίας ρωγμής.....	84
Γενικότερα συμπεράσματα και προτάσεις για περαιτέρω μελέτη.....	89
Βιβλιογραφία.....	93
Βιβλία.....	93
Άρθρα.....	94
Περαιτέρω Βιβλιογραφία για βελτιστοποίηση.....	95
Πηγές αλγορίθμων.....	96

1. Εισαγωγή

Ένα από τα μεγαλύτερα προβλήματα στη Μηχανική των Κατασκευών είναι η ύπαρξη ατελειών μέσα σε σώματα, που οδηγούν σε αλλαγή των ιδιοτήτων τους με αναπάντεχα και συχνά καταστροφικά αποτελέσματα. Για να αποφευχθούν αστοχίες των υλικών γίνεται προσπάθεια να ανιχνευθούν και να ταυτοποιηθούν οι ατέλειες στο εσωτερικό τους με όσο το δυνατόν μεγαλύτερη ακρίβεια.

Οι μέθοδοι που προτείνονται για την ανίχνευση των ατελειών ποικίλουν και επιλέγονται ανάλογα με το αντίστοιχο πρόβλημα που καλούμαστε να λύσουμε.

Παρόλο που οι μέθοδοι καταστροφικού ελέγχου συχνά δίνουν πιο ακριβή και αξιόπιστα αποτελέσματα, δεν είναι πάντα εφικτό ούτε επιθυμητό να καταστρέφονται τα σώματα έτσι προτείνονται μέθοδοι μη καταστροφικού ελέγχου, όπως:

- Υπέρηχοι (Ultrasound Inspection)
- Ηλεκτρονική/Αξονική Τομογραφία (Computer Tomography)
- Οπτικός Έλεγχος (Visual and Optical Inspection)
- Ακουστική Εκπομπή (Acoustic Emission)

Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιείται μία μέθοδος που μπορεί να ενταχθεί στις μη καταστροφικές μεθόδους ελέγχου υλικών αλλά συνήθως δεν αναφέρεται σαν μία από αυτές. Συγκεκριμένα θεωρούμε το πρόβλημα ανίχνευσης του ελαττώματος σαν ένα αντίστροφο πρόβλημα. Η έννοια «αντίστροφο πρόβλημα» χρησιμοποιείται όταν δεν γνωρίζουμε πλήρως τα χαρακτηριστικά του προβλήματος που λύνουμε (καταστατική εξίσωση υλικού, γεωμετρία της κατασκευής, συνοριακές συνθήκες) αλλά γνωρίζουμε την ανταπόκρισή του σε ένα αίτιο. Στην περίπτωσή μας δεν γνωρίζουμε ακριβώς τη δομή του σώματος (δηλ. που και αν έχει ελαττώματα) αλλά μπορούμε να μετρήσουμε τη μετατόπισή του συνόρου του αν του ασκήσουμε εξωτερικό φορτίο.

Η διαδικασία έχει ως εξής: Εφαρμόζουμε γνωστές στηρίξεις και φορτία στο υπό μελέτη δοκίμιο και μετράμε την απόκριση του. Αυτό γίνεται με αριθμητική επίλυση του ευθέως προβλήματος, όπου θεωρούμε το ελάττωμα που θέλουμε να ανιχνεύσουμε. Στη συνέχεια παίρνοντας τις τιμές των μετατοπίσεων από αυτό το πρόβλημα, λύνουμε το πρόβλημα του δοκιμίου με τις ίδιες στηρίξεις και φορτία και για συγκεκριμένη αρχική θέση και χαρακτηριστικά ελαττώματος. Συγκρίνουμε την

απόκρισή του με την αντίστοιχη του δοκιμίου που μελετήθηκε με το ευθύ πρόβλημα και η διαδικασία της αριθμητικής επίλυσης και σύγκρισης συνεχίζεται έχοντας ως μεταβλητές τα χαρακτηριστικά του ελαττώματος και προσπαθώντας να ελαχιστοποιήσουμε τη διαφορά ανάμεσα στην απόκριση του δοκιμίου με το υπό μελέτη ελάττωμα και του δοκιμίου με το ελάττωμα με τα μεταβλητά χαρακτηριστικά.

Τα αντίστροφα προβλήματα μέχρι πρόσφατα αντιμετωπίζονταν εμπειρικά. Τα τελευταία χρόνια, όμως, παρατηρείται μία μεγάλη κινητικότητα στο χώρο των αντίστροφων προβλημάτων με αρκετές διαφορετικές προσεγγίσεις από διαφορετικούς ερευνητές. Συνήθως μελετούνται ισότροπα υλικά αλλά κάποιες απόπειρες για μελέτη ανισότροπων υλικών και συγκεκριμένα ανισότροπων στρωματοδών σύνθετων υλικών, έγιναν από τον Rus, 2005.

Το συγκεκριμένο πρόβλημα πηγάζει από την πραγματική κατάσταση, όπου σε ένα δοκίμιο πρέπει να εφαρμοστεί η συγκεκριμένη μη καταστροφική μέθοδος για να ανιχνευθούν πιθανά ελαττώματα στο εσωτερικό του και έτσι η λογική πορεία είναι να γίνουν πειραματικές μετρήσεις των μετατοπίσεων για συγκεκριμένη στήριξη και φόρτιση και, στη συνέχεια, αυτές οι μετρήσεις να θεωρηθούν σαν μεγέθη αναφοράς για υπολογισμό της αντικειμενικής συνάρτησης. Για πολλούς λόγους (χρονική και οικονομική δυσκολία πειραμάτων, μικρότερη ακρίβεια πειραματικών μετρήσεων κλπ), η συνήθης προσέγγιση σε τέτοια προβλήματα είναι να χρησιμοποιείται μία μέθοδος Υπολογιστικής Μηχανικής (Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων, Μέθοδος Συνοριακών Στοιχείων κλπ) και να μελετάται η παραμόρφωση (η θέση του μετατοπισμένου σώματος) του σώματος με το ελάττωμα υπό συγκεκριμένη φόρτιση. Η παραμόρφωση ποσοτικοποιείται με κάποιες μετρήσεις σε συγκεκριμένα σημεία και η ανίχνευση του ελαττώματος στηρίζεται στην ελαχιστοποίηση της διαφοράς ανάμεσα στις μετρούμενες τιμές και στις υπολογιζόμενες από την μέθοδο που χρησιμοποιείται. Αυτή η προσέγγιση χρησιμοποιείται μεταξύ άλλων και από τους Tosaka 1995, Stavroulakis 1997, 1998, Liu 2002.

Άλλες μέθοδοι που δεν βασίζονται σε μοντέλο (non-model based) έχουν προταθεί από τον Fang, 2005 και οι οποίες συνδυαζόμενες με νευρωνικά δίκτυα φαίνεται να μπορούν να δώσουν εκτιμήσεις σε πραγματικό χρόνο.

Η επιτυχία της επίλυσης ενός αντίστροφου προβλήματος έγκειται κυρίως στην κατάλληλη επιλογή μεθόδου βελτιστοποίησης, συνάρτησης κόστους και μεθόδου

επίλυσης της φόρτισης επί της κατασκευής. Τα πλεονεκτήματα της χρήσης της Μεθόδου Συνοριακών Στοιχείων αντί της Μεθόδου Πεπερασμένων Στοιχείων σε αντίστροφα προβλήματα όπως τα παρουσιάζει ο Fang, 2005 είναι η σημαντικά μικρότερη απαίτηση σε υπολογιστικό χρόνο για δύο λόγους: Πρώτον, δεν χρειάζεται να ξαναδιακριτοποιείται (η γεωμετρία) το σώμα σε κάθε επανάληψη και δεύτερον είναι από κατασκευής της πιο γρήγορη μέθοδος εφόσον λύνει για πολύ μικρότερο αριθμό αγνώστων.

Όσον αφορά στην επιλογή της φόρτισης, φαίνεται να έχει ιδιαίτερη σημασία στην περίπτωση της ρωγμής, γιατί σε περίπτωση που η φόρτιση προκαλεί κλείσιμο της ρωγμής γίνεται εξαιρετικά δύσκολη η ανίχνευσή της. Αυτό τονίζεται από τους Endelhardt, 2003 και Stavroulakis, 2001.

Όσον αφορά στην συνάρτηση κόστους, φαίνεται να είναι ιδιαίτερα δημοφιλής η επιλογή του λογαρίθμου της ποσότητας στην οποία καταλήγουν για ελαχιστοποίηση (Rus, 2005, Stavroulakis, 2001). Ενώ δεν φαίνεται να υπάρχει ξεκάθαρη απόδειξη ότι αυτή η επιλογή κάνει το πρόβλημα πιο εύκολο, δίνονται ενδείξεις μέσω δοκιμών ότι πραγματικά είναι πιο κατάλληλη (Gallego, 2001, Stavroulakis, 2001)

Ιδιαίτερα δημοφιλείς φαίνεται να είναι τα τελευταία χρόνια οι μέθοδοι soft computing. Συγκεκριμένα βλέπουμε μεθόδους όπως Γενετικός Αλγόριθμος ή Νευρωνικά Δίκτυα να χρησιμοποιούνται από τους Fang, 2005, Stavroulakis, 1997, Stavroulakis, 1998, Stavroulakis, 2001, Liu, 2002. Συνδυασμός των δύο μεθόδων εφαρμόζεται από τον Engelhardt, 2003 για ανίχνευση οπής και ρωγμής.

Τα είδη των ελαττωμάτων συνήθως περιορίζονται σε οπές ή ρωγμές ενώ μπορεί να ποικίλει ο αριθμός των παραμέτρων.

Πιο εξελιγμένα μοντέλα (Rus, 2005, Tosaka, 1995) εισάγουν και θόρυβο στις μετρήσεις καθιστώντας τα πιο ρεαλιστικά εφόσον τελικός σκοπός είναι η χρήση πειραματικών μετρήσεων για σύγκριση με το μοντέλο.

Συνήθως μελετούνται στατικά προβλήματα αλλά προσπάθειες για αντιμετώπιση δυναμικών προβλημάτων γίνονται από τους Engelhardt, 2003 και Lee, 2005, με χρήση κυματικών φαινομένων.

Λόγω των πολλών προσεγγίσεων σε παρόμοια προβλήματα επικρατεί μία σύγχυση κατά πόσο κάποιες προσεγγίσεις υπερτερούν σε σχέση με κάποιες άλλες. Στόχος της

παρούσας εργασίας είναι να συγκρίνει κάποιες από τις προσεγγίσεις αυτές και να καταλήξει σε σχετικά συμπεράσματα.

Σαν πρόβλημα αναφοράς επελέγη το στατικό πρόβλημα της διδιάστατης ελαστικότητας σε μία ισότροπη πλάκα με ένα ή δύο ελαττώματα. Έγιναν διάφορες δοκιμές με τις φορτίσεις και φάνηκε ότι στην περίπτωση των οπών δεν υπήρχε κανένα πρόβλημα, αλλά για τη ρωγμή έπρεπε να απορριφθούν κάποια είδη φορτίσεων έτσι ώστε να μην κλείνουν τα χείλη της ρωγμής. Τελικά χρησιμοποιήθηκαν οι ίδιες φορτίσεις για όλα τα είδη ελαττωμάτων. Ακόμη, αφού έγινε μία μικρή μελέτη, φάνηκε πως η ελαχιστοποίηση του λογαρίθμου μίας ποσότητας δίνει καλύτερα αποτελέσματα από την ελαχιστοποίηση της ίδιας ποσότητας.

Παρόλο που στη βιβλιογραφία γίνεται κυρίως χρήση της Μεθόδου Συνοριακών Στοιχείων για επίλυση της φόρτισης επί της κατασκευής, θεωρήθηκε χρήσιμο να γίνουν δοκιμές και με τη Μέθοδο Πεπερασμένων Στοιχείων εφόσον είναι πιο διαδεδομένη και διαθέσιμη στο κοινό και ακόμη και αν δεν φαίνεται να υπερτερεί ή ακόμα και αν μειονεκτεί λίγο σε σχέση με τη Μέθοδο Συνοριακών Στοιχείων θα προτιμηθεί από πολλούς για τους λόγους που έχουν αναφερθεί πιο πάνω.

Όσον αφορά στις μεθόδους βελτιστοποίησης που χρησιμοποιήθηκαν για να επιλυθεί το αντίστροφο πρόβλημα δοκιμάστηκαν κάποιες που προτιμήθηκαν με κριτήρια διαθεσιμότητας και αποτελεσματικότητας. Συγκεκριμένα δοκιμάστηκαν κάποιες μέθοδοι που είναι ενταγμένες στο λογισμικό του ANSYS 10.0 (First Order Method, Subproblem Approximation Method) και άλλες που υπάρχουν σαν υπορουτίνες στο MATLAB 7.0 (S.Q.P., Γενετικός Αλγόριθμος) λόγω ακριβώς της διαθεσιμότητας τους προς το κοινό, ενώ κάποιες άλλες επελέγησαν με κριτήριο την επιτυχία τους ως μεθόδους βελτιστοποίησης (Hooke and Jeeves, Προσομοιούμενη Ανόπτηση).

2. Εισαγωγή σε Αντίστροφα Προβλήματα

Η κλασική έννοια της επίλυσης ενός προβλήματος συνήθως παραπέμπει στην επίλυση ενός ευθέως προβλήματος, δηλαδή θεωρούνται γνωστές οι γεωμετρικές και καταστατικές ιδιότητες του υλικού και οι εξωτερικές δυνάμεις. Άγνωστα μεγέθη είναι κάποιες μεταβλητές πεδίου, συνήθως οι μετατοπίσεις, ενώ για να υπάρχει μοναδική λύση του προβλήματος πρέπει να θεωρηθούν κατάλληλες συνοριακές συνθήκες.

$$Y_{M \times 1} = S_{M \times N} X_{N \times 1} \text{ (Liu, 2003)}$$

Όταν οι μετατοπίσεις είναι γνωστές αλλά κάποια άλλη παράμετρος (καταστατική εξίσωση υλικού, γεωμετρία της κατασκευής, συνοριακές συνθήκες ή συνδυασμός τους) είναι άγνωστη, τότε το πρόβλημα λέγεται αντίστροφο. Το αντίστροφο ενός συγκεκριμένου προβλήματος μπορεί να τοποθετηθεί με πολλούς τρόπους ανάλογα με τις άγνωστες παραμέτρους.

$$X_{N \times 1}^e = S_{N \times M}^{-g} Y_{M \times 1}^m, \text{ (Liu, 2003)}$$

όπου οι δείκτες e και m αντιστοιχούν στις τιμές που υπολογίζονται (estimated) και στις τιμές που μετρούνται (measured) αντίστοιχα. Ο πίνακας $S_{N \times M}^{-g}$ είναι ο γενικευμένος αντίστροφος πίνακας του $S_{N \times M}$ που ορίζεται ανάλογα με τον αριθμό των αγνώστων και των εξισώσεων του προβλήματος, για παράδειγμα για τον πίνακα $S_{2 \times 1}$ ο γενικευμένος αντίστροφος υπολογίζεται με τη Μέθοδο Ελαχίστων Τετραγώνων:

$$S_{1 \times 2}^{-g} = (S_{1 \times 2}^T S_{2 \times 1}^T)^{-1} S_{1 \times 2}^T$$

Τα αντίστροφα προβλήματα κατατάσσονται σε τρεις κατηγορίες, ανάλογα με τον αριθμό των αγνώστων (N) και των εξισώσεων (M) που υπάρχουν στην διατύπωση του προβλήματος:

- Υπο-ορισμένα (under-posed), όταν $M < N$.
- Καλώς ορισμένα (even-posed), όταν $M = N$.
- Υπερ-ορισμένα (over-posed), όταν $M > N$.

Είναι πολύ πιθανό το αντίστροφο πρόβλημα να είναι κακώς ορισμένο (ill-posed). Αυτό σημαίνει ότι μπορεί να μην έχει λύση με την αυστηρή έννοια, η λύση μπορεί να μην είναι μοναδική και/ή να μην εξαρτάται με συνεχή τρόπο από τα δεδομένα του

προβλήματος (δηλαδή να παραβιάζει τα αξιώματα του Hadamard της καλής τοποθέτησης προβλήματος, βλέπε Hadamard, 1902). Γι'αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό να γίνεται προσεκτική διατύπωση του προβλήματος και της πειραματικής διαδικασίας που θα δώσει τα δεδομένα ώστε να αποφευχθούν τέτοιας μορφής δυσκολίες.

Συνήθως τα αντίστροφα προβλήματα τοποθετούνται ως προβλήματα βελτιστοποίησης, όπου η συνάρτηση κόστους είναι το σφάλμα ως προς μία ποσότητα αναφοράς (που είναι ουσιαστικά η λύση του ευθέως προβλήματος).

Αυτό εκφράζεται μαθηματικά ως εξής: (Stavroulakis, 2001)

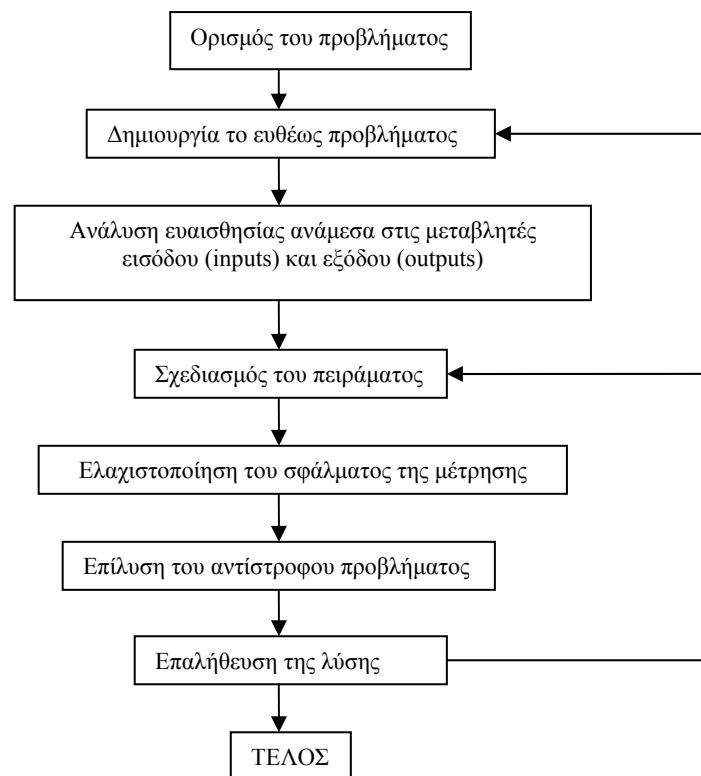
$$SX = Y$$

$$I(X) = \|SX - Y\|, \text{ όπου } \|\cdot\| \text{ ορίζει μία νόρμα.}$$

Όμως το Y είναι μετρημένο πειραματικά και έτσι έχει θόρυβο. Έτσι τελικά θα έχουμε: $\|Y - Y^m\| \leq \delta$ όπου δ το επίπεδο του θορύβου.

$$I(X) = \|SX - Y^m\|$$

Τελικά αναζητούμε το ελάχιστο της πιο πάνω συνάρτησης, ακολουθώντας την πορεία που φαίνεται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1: Γενική πορεία για επίλυση αντίστροφων προβλημάτων (Liu, 2003).

3. Περιγραφή μεθόδων βελτιστοποίησης

a. Γενικά για τη βελτιστοποίηση

Τι είναι βελτιστοποίηση: «Είναι η διαδικασία μεγιστοποίησης ή ελαχιστοποίησης μίας αντικειμενικής συνάρτησης ικανοποιώντας παράλληλα κάποιους περιορισμούς.....

Τα προβλήματα βελτιστοποίησης με περιορισμούς μπορούν να διατυπωθούν στην ακόλουθη μη γραμμική προγραμματιστική μορφή:

Ελαχιστοποίησε: $f(x)$

$$\text{με περιορισμούς: } \begin{array}{l} g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m \\ h_j(x) = 0, j = 1, \dots, l \end{array}$$

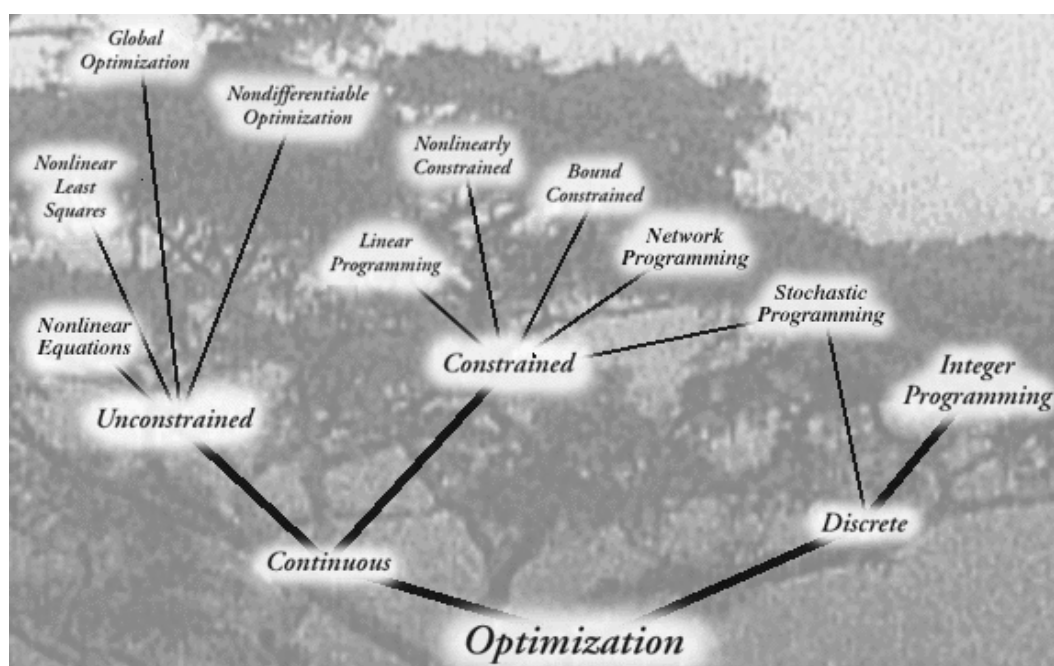
όπου $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ είναι ένα διάνυσμα στήλη n -πραγματικών μεταβλητών σχεδίασης, $f(x)$ είναι η αντικειμενική συνάρτηση ή συνάρτηση κόστους, g είναι οι ανισοτικοί περιορισμοί και h οι ισοτικοί περιορισμοί.» (Belegundu, 1999)

Πότε ένα σημείο είναι ελάχιστο μίας συνάρτησης (*Optimality Conditions*): Ο ορισμός του ελαχίστου μίας συνάρτησης κατά τον Belegundu, 1999 δίνεται ως εξής:

- Αν η f είναι C^1 συνεχής τότε απαραίτητη συνθήκη για να είναι το x^* τοπικό ελάχιστό της είναι:
 - $f'(x^*) = 0, x \in \mathfrak{R}$
 - $\nabla f(x^*) = 0, x \in \mathfrak{R}^n, n > 1$
- Αν η f είναι C^2 συνεχής τότε ικανές συνθήκες για να είναι το x^* ισχυρό τοπικό ελάχιστό της είναι:
 - $f'(x^*) = 0, f''(x^*) > 0, x \in \mathfrak{R}$
 - $\nabla f(x^*) = 0, \nabla^2 f(x^*)$ είναι θετικά ορισμένο, $x \in \mathfrak{R}^n, n > 1$

Οι σημαντικότερες έννοιες στο πεδίο της βελτιστοποίησης είναι:

- Συνάρτηση Κόστους (ή Αντικειμενική Συνάρτηση), την οποία επιθυμούμε να ελαχιστοποιήσουμε ή να μεγιστοποιήσουμε.
- Μεταβλητές Σχεδίασης, από τις οποίες εξαρτάται η συνάρτηση κόστους και οι οποίες μπορούν να μεταβληθούν για να ελαχιστοποιηθεί ή μεγιστοποιηθεί η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.
- Περιορισμοί, μέσω των οποίων επιτρέπονται κάποιες τιμές για τις μεταβλητές σχεδίασης και απαγορεύονται κάποιες άλλες. Οι περιορισμοί δεν είναι απαραίτητο να υπάρχουν.



Σχήμα 2: Το δέντρο της βελτιστοποίησης

(Πηγή: <http://www-fp.mcs.anl.gov/otc/Guide/OptWeb/index.html>).

Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για την αντιμετώπιση προβλημάτων βελτιστοποίησης διαχωρίζονται με ποικίλα κριτήρια. Κάποια από αυτά είναι η τάξη της παραγώγου που χρησιμοποιούν, αν είναι στοχαστικές ή αιτιοκρατικές, αν μπορούν να θεωρήσουν περιορισμούς ή όχι, πόσες μεταβλητές σχεδίασης μπορούν να αντιμετωπίσουν κ.λ.π. Κάποιος διαχωρισμός και παρουσίαση των κατηγοριών βελτιστοποίησης δίνεται στο Σχήμα 2.

Πιο κάτω δίνονται ονομαστικά κάποιες μέθοδοι όπως παρουσιάζονται στα βιβλία του Fletcher, 1980, 1981 διαχωρίζοντας τις σε μεθόδους που μπορούν να θεωρήσουν περιορισμούς και μεθόδους που δεν μπορούν.

- Βελτιστοποίηση χωρίς Περιορισμούς (Unconstrained Optimization):
 - Μέθοδος Αναζήτησης Γραμμής (Line Search Method)
 - Μέθοδοι τύπου Newton (Newton-like Methods)
 - Μέθοδοι Συζυγών Διευθύνσεων (Conjugate Direction Methods)
 - Μέθοδοι Περιορισμένου Βήματος (Restricted Step Methods)
- Βελτιστοποίηση με Περιορισμούς (Constrained Optimization):
 - Γραμμικός Προγραμματισμός (Linear Programming)
 - Μέθοδος Simplex (Simplex Method)
 - Τετραγωνικός Προγραμματισμός (Quadratic Programming)
 - Μέθοδοι Lagrangian (Lagrangian Methods)
 - Μέθοδος Ενεργού Συνόλου (Active Set Method)
 - Συμπληρωματική Οδήγηση (Complementary Pivoting)
 - Μη γραμμικός Προγραμματισμός (Nonlinear programming)
 - Μέθοδοι Lagrange-Newton (Lagrange-Newton Methods)
 - Μέθοδος Επιτρεπτής Κατεύθυνσης (Feasible Direction Method)

Οι αλγόριθμοι και τα υπολογιστικά προγράμματα επίλυσης προβλημάτων χωρίς περιορισμούς είναι γενικά πιο ανεπτυγμένα και πιο αποδοτικά έτσι, συχνά, τα προβλήματα με περιορισμούς μετατρέπονται σε προβλήματα χωρίς περιορισμούς χρησιμοποιώντας τις ποινικοποιημένες αντικειμενικές συναρτήσεις, δηλαδή ενσωματώνοντας τους περιορισμούς στην αντικειμενική συνάρτηση. Αυτό μπορεί να γίνει, για παράδειγμα, προσθέτοντας μία συνάρτηση που ποσοτικοποιεί την παραβίασή τους.

Ένα από τα μεγαλύτερα άλματα προβλήματα στη βελτιστοποίηση αφορά στην εύρεση του ολικού ελαχίστου, Οι περισσότερες μέθοδοι φαίνεται να παρουσιάζουν αδυναμία απεγκλωβισμού από τοπικά ελάχιστα. Προς το παρόν, σύμφωνα με την περιορισμένη μου γνώση, αυτό αντιμετωπίζεται είτε με στοχαστικές μεθοδολογίες, είτε με πολλές δοκιμές ξεκινώντας από διαφορετικά αρχικά διανύσματα μεταβλητών σχεδίασης.

b. Μέθοδοι που υλοποιούνται από το λογισμικό του ANSYS 10.0.

(Η περιγραφή τους δίνεται στο εγχειρίδιο του πακέτου και παρατίθεται και εδώ)

Οι μέθοδοι που περιλαμβάνονται στο λογισμικό και χρησιμοποιήθηκαν είναι δύο, η Subproblem Approximation Method και η First Order Method. Και για τις δύο μεθόδους το πρόγραμμα πραγματοποιεί μια σειρά από κύκλους «ανάλυσης-εκτίμησης-προσαρμογής», δηλαδή επιλύει το πρόβλημα με μία αρχική σχεδίαση, τα αποτελέσματα αναλύονται και κρίνονται με βάση συγκεκριμένα κριτήρια σχεδίασης και η σχεδίαση μεταβάλλεται/προσαρμόζεται εάν είναι απαραίτητο. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι να ικανοποιηθούν συγκεκριμένα κριτήρια σύγκλισης.

i. Subproblem Approximation Method

(Μέθοδος Προσέγγισης Υποπροβλήματος)

Μπορεί να περιγραφεί ως μία προηγμένη μέθοδος μηδενικής τάξης που απαιτεί γνώση μόνο των εξαρτώμενων μεταβλητών και όχι των παραγώγων τους. Δύο ιδέες παίζουν σημαντικό ρόλο στη μέθοδο: η χρήση προσέγγισης (παρεμβολής) της εξάρτησης της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τις μεταβλητές σχεδίασης και η μετατροπή του προβλήματος με περιορισμούς σε πρόβλημα χωρίς περιορισμούς.

Η προσέγγιση της εξάρτησης της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τις μεταβλητές σχεδίασης γίνεται με παρεμβολή καμπύλης, με χρήση της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων. Κάθε κύκλος βελτιστοποίησης παράγει ένα ακόμη σημείο που ανανεώνει την παρεμβολή. Τελικά η βελτιστοποίηση μετατρέπεται σε ελαχιστοποίηση της συνάρτησης παρεμβολής της αντικειμενικής συνάρτησης.

Η μετατροπή του προβλήματος σε πρόβλημα χωρίς περιορισμούς γίνεται με στόχο να εφαρμοστούν τεχνικές ελαχιστοποίησης των τελευταίων που θεωρούνται πιο αποτελεσματικές. Η μετατροπή επιτυγχάνεται με εφαρμογή ποινικοποίησης στην αντικειμενική συνάρτηση.

Για τη μέθοδο αυτή, ο βελτιστοποιητής αρχικά παράγει τυχαία διανύσματα μεταβλητών σχεδίασης για να υπολογίσει μία αρχική προσέγγιση της παρεμβολής της αντικειμενικής συνάρτησης.

ii. First Order Method

(Μέθοδος Πρώτης Τάξης)

Όπως και η προηγούμενη μέθοδος, μετατρέπει το πρόβλημα με περιορισμούς σε πρόβλημα χωρίς περιορισμούς, προσθέτοντας συναρτήσεις ποινικοποίησης στην αντικειμενική συνάρτηση. Αντίθετα όμως από τη Subproblem Approximation Method, η συγκεκριμένη μέθοδος τελικά ελαχιστοποιεί την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης και όχι την προσέγγισή της μέσω κάποιας παρεμβολής.

Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιεί τιμές των παραγώγων των εξαρτημένων μεταβλητών ως προς τις μεταβλητές σχεδίασης. Σε κάθε επανάληψη, γίνονται υπολογισμοί των παραγώγων (είτε με τη μέθοδο απότομης καθόδου είτε με τη μέθοδο συζυγών κατευθύνσεων) με στόχο να προσδιοριστεί κατεύθυνση αναζήτησης και στη συνέχεια εφαρμόζεται μέθοδος αναζήτησης γραμμής για την ελαχιστοποίηση του προβλήματος χωρίς περιορισμούς.

Συγκριτικά με την προηγούμενη μέθοδο, η συγκεκριμένη είναι πιο απαιτητική υπολογιστικά αλλά και πιο ακριβής. Όμως η μεγάλη ακρίβεια δεν εξασφαλίζει πάντα την καλύτερη επίλυση του προβλήματος. Υπάρχει μεγάλος κίνδυνος, με χρήση της τελευταίας μεθόδου, η διαδικασία να εγκλωβιστεί σε τοπικό ελάχιστο ή και σε μη αποδεκτή (infeasible) περιοχή. Για τον λόγο αυτό, στο εγχειρίδιο του πακέτου προτείνεται τη χρήση συνδυασμού της μεθόδου αυτής με άλλες όπως τη Subproblem Approximation Method και τη Random Designs Generation.

c. Μέθοδοι που υλοποιούνται από το λογισμικό του MATLAB 7.0.

(Η περιγραφή τους δίνεται στο εγχειρίδιο του πακέτου και παρατίθεται και εδώ)

Το MATLAB 7.0 διαθέτει το Optimization Toolbox με διάφορες υπορουτίνες. Για επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης διατίθενται οι υπορουτίνες:

- bintprog (Δυικός ακέραιος προγραμματισμός - Binary integer programming)
- fgoalattain (Επίτευξη στόχου πολλών μεταβλητών - Multiobjective goal attainment)
- fminbnd (Βαθμωτή μη γραμμική ελαχιστοποίηση με όρια - Scalar nonlinear minimization with bounds)
- fmincon (Μη γραμμική ελαχιστοποίηση με περιορισμούς - Constrained nonlinear minimization)
- fminimax (Βελτιστοποίηση με εύρεση του ελάχιστου εκ των μεγίστων - Minimax optimization)
- fminsearch, fminunc (Μη γραμμική ελαχιστοποίηση χωρίς περιορισμούς - Unconstrained nonlinear minimization)
- fseminf (Ημιάπειρη ελαχιστοποίηση - Semi-infinite minimization)
- linprog (Γραμμικός προγραμματισμός - Linear programming)
- quadprog (Τετραγωνικός προγραμματισμός - Quadratic programming).

Υπάρχει ακόμα το Genetic Algorithm and Direct Search Toolbox που εμπλουτίζει τη βιβλιοθήκη βελτιστοποίησης του MATLAB με αλγορίθμους που μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε προβλήματα που είναι δύσκολο να λυθούν με τις κλασσικές μεθόδους βελτιστοποίησης.

Για τις ανάγκες της διπλωματικής εργασίας χρησιμοποιήθηκαν οι υπορουτίνες fmincon (μέθοδος S.Q.P.) και ga (μέθοδος Γενετικού Αλγορίθμου) για το λόγο ότι είναι δύο αποτελεσματικές μέθοδοι και επίσης δίνουν τη δυνατότητα σύγκρισης αιτιοκρατικών με στοχαστικών μεθόδων.

i. Sequential Quadratic Programming

(S.Q.P. - Τεχνική ακολουθιακού τετραγωνικού προγραμματισμού - Matlab's function fmincon)

Η μέθοδος αυτή επιχειρεί να βρει ελάχιστο, υπό περιορισμούς, μίας βαθμωτής συνάρτησης πολλών μεταβλητών ξεκινώντας από μία αρχική εκτίμηση. Συγκεκριμένα, βρίσκει το ελάχιστο μίας μη γραμμικής πολυμεταβλητής συνάρτησης:

$$\begin{aligned} \min f(x), \text{ με περιορισμούς} \quad & c(x) \leq 0 \\ & c_{eq}(x) = 0 \\ & Ax \leq b \\ & A_{eq}x = b_{eq} \\ & l_b \leq x \leq u_b \end{aligned}$$

Στην περίπτωση μας, γίνεται χρήση της βελτιστοποίησης μεσαίου μεγέθους (medium-scale optimization) κατά την οποία η υπορουτίνα `fmincon` χρησιμοποιεί τη μέθοδο S.Q.P. (Sequential Quadratic Programming) και ο *Hessian πίνακας*(*) της *συνάρτησης Lagrange*(*) στο σημείο x υπολογίζεται με μία *προσέγγιση Quasi-Newton*(*).

Τα βήματα της μεθόδου αυτής είναι τα εξής:

- Ενημέρωση του *Hessian πίνακα*(*) της *συνάρτησης Lagrange*(*).
- Επίλυση του *Quadratic Programming Problem*(*).
- Έρευνα γραμμής και υπολογισμός της ποινικοποιημένης συνάρτησης.

Τα πλεονεκτήματα της S.Q.P. είναι πολλά, κάποια εκ των οποίων και τα εξής (Belegundu, 1999):

- Μπορεί να ξεκινήσει από μη αποδεκτή περιοχή.
- Οι παράγωγοι μόνο των ενεργών περιορισμών είναι απαραίτητοι.
- Μπορούν να αντιμετωπιστούν ισοτικοί και ανισοτικοί περιορισμοί.
- Η μέθοδος αποδεικνύεται ότι συγκλίνει υπό ορισμένες συνθήκες.

(*) Επεξήγηση όρων

- Ο πίνακας *Hessian* ορίζεται ως εξής (Belegundu, 1999):

$$f \in C^2 \Rightarrow \nabla^2 f \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ & & \dots & \dots \\ \text{symmetric} & & & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix}$$

- Η συνάρτηση *Lagrange*: $L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot g_i(x)$, όπου λ είναι οι συντελεστές Lagrange και g οι περιορισμοί του προβλήματος.

- Το *Quadratic Programming Problem* αφορά στην ελαχιστοποίηση ή μεγιστοποίηση μίας δευτεροβάθμιας αντικειμενικής συνάρτησης με γραμμικούς περιορισμούς. Αντίστοιχα υπάρχουν τα *Linear Programming Problems* και *Nonlinear Programming Problems* όπου και η αντικειμενική συνάρτηση και οι περιορισμοί είναι ταυτόχρονα γραμμικοί ή μη γραμμικοί αντίστοιχα.

Ένα παράδειγμα τέτοιου προβλήματος όπως δίνεται από τον Belegundu, 1999, είναι το εξής:

$$\text{Ελαχιστοποίησε } \frac{1}{2} x^T Q x + c^T x \text{ με περιορισμούς } \begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

- Η μέθοδος *Newton* είναι μία μέθοδος δεύτερης τάξης για ελαχιστοποίηση συναρτήσεων πολλών μεταβλητών. Το σκεπτικό της συνίσταται στην εύρεση της διεύθυνσης s η οποία ελαχιστοποιεί την παράσταση: $\nabla f^T \cdot s = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} s_i$, υπό την συνθήκη: $s^T Q s = 1$, όπου Q ο *Hessian* πίνακας της αντικειμενικής συνάρτησης. Οι μέθοδοι *Quasi-Newton* στοχεύουν στη μείωση του υπολογιστικού κόστους για την εύρεση του *Hessian* πίνακα. (Προβατίδης, 2004)

ii. Γενετικός Αλγόριθμος

(Genetic Algorithm -Matlab function ga)

Μία περιγραφή του γενετικού αλγορίθμου δίνεται πιο κάτω: Ο αλγόριθμος ξεκινάει δημιουργώντας ένα τυχαίο αρχικό πληθυσμό. Στη συνέχεια, ο αλγόριθμος δημιουργεί μία σειρά από νέους πληθυσμούς, τις γενεές. Σε κάθε βήμα, ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί τις οντότητες (άτομα) της τρέχουσας γενεάς για να δημιουργήσει την επόμενη γενεά. Για να δημιουργήσει νέα γενεά, ο αλγόριθμος εκτελεί τα επόμενα βήματα:

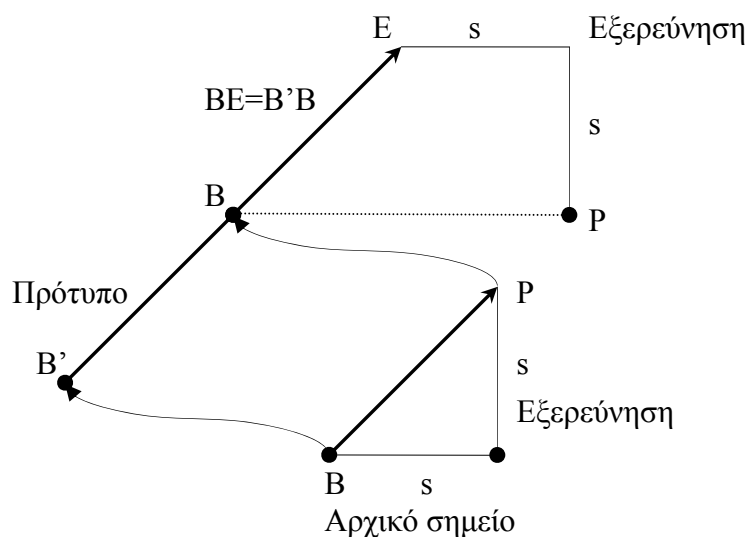
- Βαθμολογεί κάθε άτομο ανάλογα με την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, στην οποία αντιστοιχεί.
- Κλιμακώνει τις βαθμολογίες του κάθε ατόμου ώστε να τα μετατρέψει σε πιο χρήσιμο και αποδοτικό εύρος τιμών.
- Επιλέγει τους γονείς ανάλογα με την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης στην οποία αντιστοιχούν.
- Παράγει τα παιδιά από τους γονείς. Αυτό γίνεται είτε με τυχαίες αλλαγές στα γονίδια των γονέων (μετάλλαξη), είτε με συνδυασμούς των γονιδίων από ένα ζεύγος γονέων (διασταύρωση).
- Αντικαθιστά τον τρέχοντα πληθυσμό με τα παιδιά για να σχηματίσει την επόμενη γενεά.
- Ο αλγόριθμος σταματάει όταν ικανοποιηθεί ένα συγκεκριμένο κριτήριο.

Το λογισμικό του MATLAB 7.0 έχει τη δυνατότητα χρήσης του Γενετικού Αλγορίθμου ακόμα και σαν υβριδική μέθοδο, δηλαδή με υποστήριξη από τις `fminsearch` (simplex search method), `patternsearch` (pattern search algorithm), `fminunc` (subspace trust region method), `fmincon` (S.Q.P.) για βελτίωση του τελικού διανύσματος των μεταβλητών σχεδίασης. Όταν τελειώσουν οι επαναλήψεις που έχουν οριστεί για τον Γενετικό Αλγόριθμο, τότε ξεκινάει η υπορουτίνα που έχει επιλεγεί και εκκινεί με το καλύτερο, μέχρι εκείνη τη στιγμή, διάνυσμα.

c. Μέθοδος Hooke and Jeeves (Belegundu, 1999)

Στη μέθοδο αυτή επιλέγεται ένα αρχικό βήμα και η έρευνα αρχίζει από ένα αρχικό σημείο. Η μέθοδος περιλαμβάνει βήματα εξερεύνησης και έρευνα σε πρότυπο (pattern), όπως φαίνεται στο Σχήμα 3. Η γενική πορεία της μεθόδου φαίνεται στο Σχήμα 4.

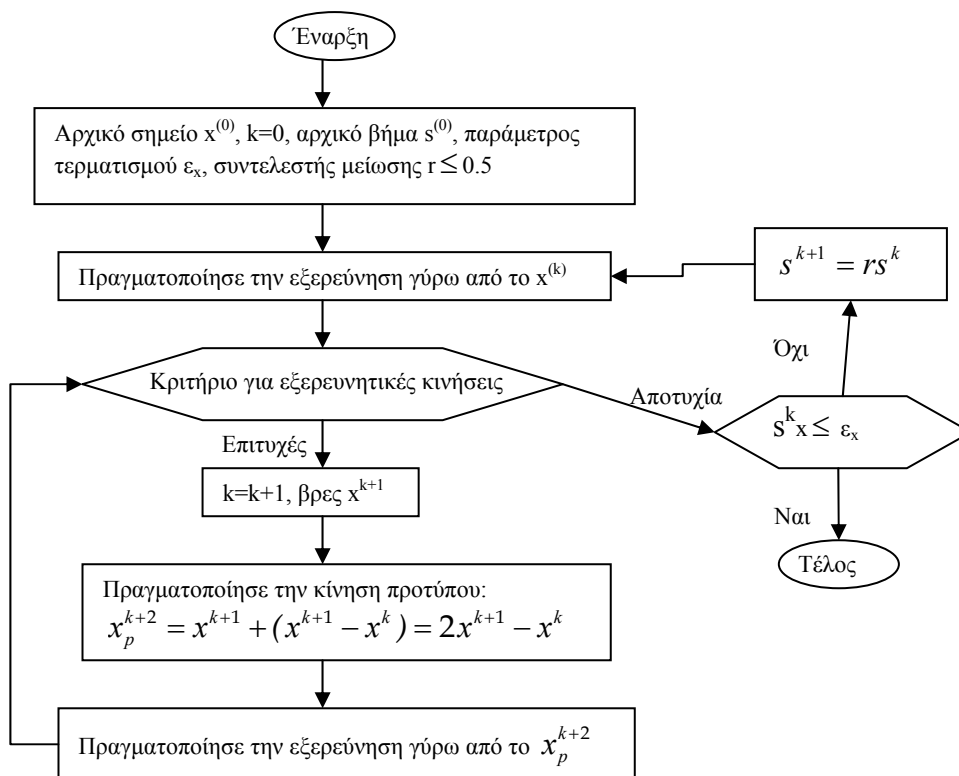
Πιο κάτω περιγράφεται πως γίνεται η εξερεύνηση γύρω από ένα αυθαίρετο σημείο y . Το αρχικό βήμα s μπορεί να επιλεγεί στο διάστημα $0.05-1$, αλλά μπορούν να δοκιμαστούν και τιμές μεγαλύτερες της μονάδας. Έστω $x=y$. Αν e_i είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κατά την κατεύθυνση x_i , τότε η αντικειμενική συνάρτηση υπολογίζεται στο $x+se_i$. Αν η συνάρτηση μειώνεται, τότε το x ανανεώνεται σε $x+se_i$ ενώ στην αντίθετη περίπτωση η συνάρτηση υπολογίζεται στο $x-se_i$. Αν η συνάρτηση μειώνεται κατά αυτή την κατεύθυνση, τότε το x ανανεώνεται σε $x-se_i$. Αν δεν συμβαίνει κανένα από τα δύο, τότε το αρχικό x παραμένει στην ίδια θέση. Η έρευνα επαναλαμβάνεται για $i=1$ μέχρι n (όπου n ο αριθμός των διαστάσεων του χώρου στον οποίο αναζητείται η λύση - δηλαδή ο αριθμός των μεταβλητών της βελτιστοποίησης). Σε αυτό το στάδιο το αρχικό σημείο είναι το y ενώ το νέο σημείο είναι το x . Η εξερεύνηση θεωρείται επιτυχής αν η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης στο x είναι μικρότερη από την αντίστοιχη στη θέση y κατά μία προκαθορισμένη ποσότητα.



Σχήμα 3: Εξερεύνηση και έρευνα προτύπου.

Ο αλγόριθμος που χρησιμοποιείται στην παρούσα εργασία περιγράφεται πιο κάτω. Η εξερεύνηση ξεκινάει από ένα αρχικό σημείο B με συντεταγμένες x_B . s είναι το

μέγεθος του βήματος και $r(<1)$ είναι μία παράμετρος μείωσης του βήματος. Η εξερεύνηση γίνεται γύρω από το σημείο B. Αν η εξερεύνηση δεν είναι επιτυχής τότε το βήμα μειώνεται σε rs . Αν η εξερεύνηση είναι επιτυχής όπως φαίνεται και στο Σχήμα 3, η διεύθυνση προτύπου BP, που δίνεται από το $(x_P - x_B)$ υιοθετείται. Το P είναι τώρα το νέο σημείο βάσης και μετονομάζεται σε B, ενώ το αρχικό σημείο B μετονομάζεται σε B' όπως φαίνεται στο Σχήμα 3. Το B'B επεκτείνεται κατά την κατεύθυνση προτύπου στο E ($x_E = 2x_B - x_{B'}$). Η εξερεύνηση γίνεται τώρα γύρω από το σημείο E. Αν η εξερεύνηση είναι επιτυχής, αν δηλαδή $f_P < f_B$, μία νέα κατεύθυνση προτύπου BP υιοθετείται όπως φαίνεται στο Σχήμα 3. Μετονομάζουμε $P \rightarrow B$, $B \rightarrow B'$. Αν $f_P \geq f_B$ γίνεται εξερεύνηση γύρω από το σημείο B. Το βήμα συνεχίζει να μειώνεται όσο οι εξερευνήσεις είναι ανεπιτυχείς. Αν ϵ_x είναι η παράμετρος σύγκλισης, σταματάμε την εξερεύνηση όταν το βήμα από το σημείο βάσης είναι μικρότερο από ϵ_x .



Σχήμα 4: Διάγραμμα ροής της μεθόδου (Liu, 2003).

Συγκεκριμένα για τη μέθοδο Hooke and Jeeves η εξερεύνηση σε πρότυπο γίνεται κατά τους άξονες του συστήματος συντεταγμένων. Όταν πραγματοποιηθεί μία εξερεύνηση σε πρότυπο έχουμε νέα πληροφορία για την αντικειμενική συνάρτηση. Χρησιμοποιώντας αυτή την πληροφορία μπορεί να βρεθεί μία νέα ομάδα ορθογώνιων κατευθύνσεων.

*d. Μέθοδος Προσομοιούμενης Ανόπτωσης (Simulated Annealing)
(Belegundu, 1999)*

Οι συμβατικές μέθοδοι ελαχιστοποίησης επιδιώκουν να βελτιώσουν ένα σημείο αντικαθιστώντας το με ένα άλλο που αντιστοιχεί σε χαμηλότερη τιμή της συνάρτησης κόστους. Αυτή η στρατηγική μπορεί να οδηγήσει σε τοπικά ελάχιστα. Μία πιο στιβαρή μέθοδος, που αναζητάει το ολικό ελάχιστο, πρέπει να εφαρμόζει διαφορετική στρατηγική σύμφωνα με την οποία μία μεγαλύτερη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης να είναι αποδεκτή υπό συγκεκριμένες προϋποθέσεις. Η μέθοδος Προσομοιούμενης Ανόπτωσης εφαρμόζει μία τέτοια στρατηγική. Η ανόπτωση είναι μία μέθοδος που ανακουφίζει τα υλικά που έχουν εισέλθει στην περιοχή της κράτυνσης από παραμένουσες τάσεις. Μεταλλικά μέρη και μέρη φτιαγμένα από γυαλί υπόκεινται σε διαδικασίες ανόπτωσης για να ανακουφιστούν από τις τάσεις. Μέρη στα οποία υπάρχουν παραμένουσες τάσεις είναι ψαθυρά και είναι επιρρεπή σε πρόωμη αστοχία. Μέταλλα, όπως ο χάλυβας, έχουν μεταπτώσεις φάσεων όταν μεταβάλλεται η θερμοκρασία. Αν ένα μέταλλο θερμανθεί σε ένα υψηλό επίπεδο θερμοκρασίας, τα άτομα είναι σε μία σταθερή κατάσταση κίνησης. Ελεγχόμενη αργή πτώση της θερμοκρασίας επιτρέπει στα άτομα να προσαρμοστούν σε μία ευσταθή κατάσταση ισορροπίας με ελάχιστη ενέργεια. Η πιθανότητα $p(\Delta E)$ για αλλαγή στην ενέργεια κατά ΔE δίνεται από τη συνάρτηση κατανομής πιθανότητας Boltzmann:

$p(\Delta E) = e^{-\frac{\Delta E}{kT}}$, όπου T η θερμοκρασία του σώματος και k η σταθερά του Boltzmann.

Ο Metropolis παρατήρησε ότι η πιθανότητα υψηλών ενεργειών είναι μεγαλύτερη σε υψηλές θερμοκρασίες και υπάρχει κάποια πιθανότητα υψηλών ενεργειών καθώς η θερμοκρασία πέφτει. Η ενέργεια στη διαδικασία ανόπτωσης κάποτε μεγαλώνει ακόμα και αν η τάση είναι να υπάρχει πτώση. Αυτή η ιδιότητα, εφαρμοζόμενη σε προβλήματα βελτιστοποίησης, λέγεται αλγόριθμος του Metropolis. Σε εφαρμογές βελτιστοποίησης, ξεκινάμε από μία αρχική θερμοκρασία T , την οποία θέτουμε σε υψηλό επίπεδο. Η σταθερά του Boltzmann μπορεί να τεθεί ίση με 1. Η μεταβολή Δf της συνάρτησης είναι αποδεκτή όταν αντιπροσωπεύει μείωση. Όταν αντιπροσωπεύει αύξηση γίνεται αποδεκτή με μία πιθανότητα $p(\Delta E) = e^{-\frac{\Delta f}{T}}$. Αυτό επιτυγχάνεται παράγοντας ένα τυχαίο αριθμό r με τιμή ανάμεσα στο 0 και 1 και κρατώντας τη νέα τιμή αν $r \leq p$. Ο αλγόριθμος του Metropolis επεκτάθηκε, υλοποιήθηκε και μελετήθηκε περαιτέρω από άλλους ερευνητές.

4. Βελτιστοποίηση με χρήση των Μεθόδων Πεπερασμένων και Συνοριακών Στοιχείων

Το 1960, ο Lucien Schmit αναγνώρισε τη δυνατότητα της Μεθόδου Πεπερασμένων Στοιχείων να συνδυαστεί με μεθόδους βελτιστοποίησης και έτσι σήμερα πολλά εμπορικά διαθέσιμα πακέτα πεπερασμένων στοιχείων έχουν εντάξει στο λογισμικό τους και μεθόδους βελτιστοποίησης (Belegundu, 1999). Αντίστοιχα έχουν δημιουργηθεί ανεξάρτητοι κώδικες για επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης που καλούνε πακέτα πεπερασμένων στοιχείων για να υπολογίσουν για παράδειγμα την τιμή της συνάρτησης κόστους ή την τυχόν παραβίαση περιορισμών.

Για παρόμοιους λόγους, με προσθήκη και του πλεονεκτήματός της για εξοικονόμηση χρόνου, έχει χρησιμοποιηθεί και η Μέθοδος των Συνοριακών Στοιχείων σε προβλήματα βελτιστοποίησης. Στην περίπτωση αυτή, όμως, υπάρχει το προφανές μειονέκτημα της περιορισμένης διάδοσης της μεθόδου αυτής σε εμπορικά διαθέσιμα πακέτα και της ανάγκης δημιουργίας κώδικα εφαρμογής της μεθόδου.

Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται γενικά για την επίλυση ευθέων προβλημάτων και μπορούν να ενσωματωθούν σε μεθόδους βελτιστοποίησης είναι: (Liu, 2003):

- Μέθοδος Πεπερασμένων Διαφορών (Finite Difference Method - FDM)
- Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων (Finite Element Method - FEM)
- Μέθοδος Στοιχείων Λωρίδας (Strip Element Method - SEM)
- Μέθοδος Συνοριακών Στοιχείων (Boundary Element Method - BEM)
- Μέθοδοι χωρίς κάρναβο (Mesh - Free Methods)
- Επιλύτες Διάδοσης Κύματος (Wave Propagation Solvers)

Πιο κάτω θα δοθεί κάποια περιγραφή των Μεθόδων Πεπερασμένων και Συνοριακών Στοιχείων που χρησιμοποιήθηκαν τελικά για την αντιμετώπιση του συγκεκριμένου προβλήματος.

Το πρόβλημα που μελετήθηκε:

Το πρόβλημα που καλούμαστε να λύσουμε είναι ένα στατικό διδιάστατο πρόβλημα γραμμικής ελαστικότητας. Στη γενική του μορφή το πρόβλημα αυτό περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{\partial \sigma^{kj}}{\partial x_j} + b^k = 0$$

Η οποία μπορεί να εξαχθεί εύκολα με χρήση της αρχής διατήρησης της ορμής.

$$\sigma = \text{τάση Cauchy} = \frac{\text{δύναμη}}{\text{μονάδα παραμορφωμένης επιφάνειας}}$$

x = συντεταγμένες θέσης σημείου στο παραμορφωμένο σώμα

b = δύναμη βαρύτητας

Για την επίλυση μίας διαφορικής εξίσωσης γνωρίζουμε ότι απαιτείται η γνώση συνοριακών συνθηκών. Αυτές μπορούν να είναι τύπου Dirichlet (να ορίζονται οι τιμές της μετατόπισης στο σύνορο), Neumann (να ορίζεται η τιμή της τάσης στο σύνορο) ή μικτού τύπου (σε κάποιο μέρος του συνόρου να έχουμε συνθήκες Dirichlet και στο υπόλοιπο Neumann). Τέλος υπάρχουν και οι συνθήκες τύπου Robin που συνδέουν την τιμή της μετατόπισης και την τιμή της τάσης σε κάποιο μέρος του συνόρου.

Για παράδειγμα:

$$\begin{aligned} u &= u_g \text{ on } \partial\Omega^D \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= g \text{ or } \sigma \cdot n = \tau_g \text{ on } \partial\Omega^N \\ au + b \frac{\partial u}{\partial n} &= g \text{ on } \partial\Omega^R \end{aligned}$$

Για να μην έχουμε κίνηση ελεύθερου σώματος πρέπει $\partial\Omega^D \neq \emptyset$, άρα το πρόβλημα δεν μπορεί να έχει μόνο συνοριακές συνθήκες τύπου Neumann.

i. Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων

Η Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων είναι μία αριθμητική μέθοδος προσέγγισης της λύσης μερικών διαφορετικών εξισώσεων. Η μέθοδος απαιτεί τη διακριτοποίηση του πεδίου ορισμού σε υποπεριοχές- τα πεπερασμένα στοιχεία. Σε κάθε στοιχείο η λύση προσεγγίζεται από μία έκφραση, συνήθως πολυωνυμική.

Η γενική πορεία για την επίλυση ενός προβλήματος με τη χρήση της Μεθόδου Πεπερασμένων Στοιχείων είναι η εξής:

1. Εύρεση της διαφορικής εξίσωσης και των συνοριακών συνθηκών που περιγράφουν το πρόβλημα.
2. Εύρεση της ασθενούς μορφής της διαφορικής μορφής.
3. Επιλογή κατάλληλου χώρου πεπερασμένων στοιχείων.
4. Διακριτοποίηση της ασθενούς μορφής στον χώρο των πεπερασμένων στοιχείων.
5. Επίλυση της διακριτοποιημένης ασθενούς μορφής.

Η ασθενής μορφή της διαφορικής μορφής βρίσκεται ως εξής:

$$\frac{\partial \sigma^{kj}}{\partial x_j} + b^k = 0$$

Πρώτα εκφράζουμε την εξίσωση ως προς τις μετατοπίσεις που είναι και οι άγνωστες μεταβλητές και παίρνουμε τις εξισώσεις της κλασσικής γραμμική ελαστικότητας (Landau, 1986)

$$\mu \nabla^2 u + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot u) + b = 0$$

Στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε με μία συνάρτηση βάρους και ολοκληρώνουμε σε όλο το χωρίο:

$$\int_{\Omega} (\mu \nabla^2 u + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot u)) v dx dy + \int_{\Omega} b v dx dy = 0$$

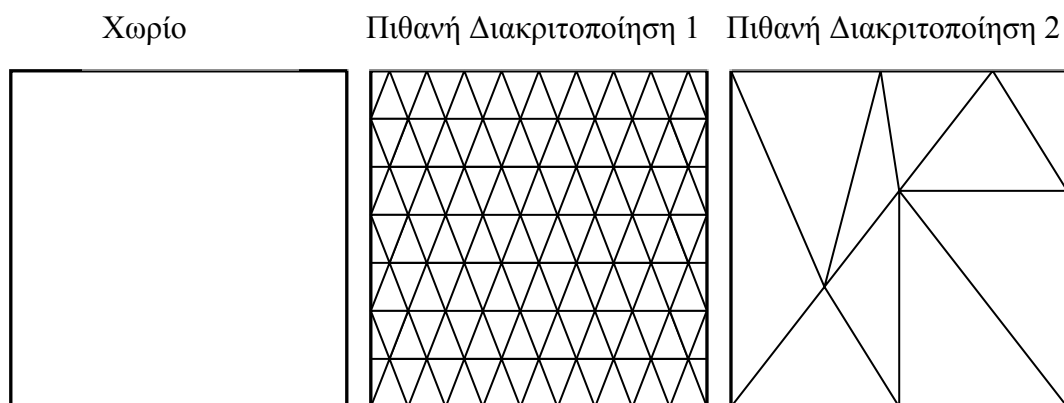
Πιο κάτω παρουσιάζεται ενδεικτικά η εύρεση της ασθενούς μορφής για τον πρώτο και τον τελευταίο όρο της πιο πάνω διαφορικής εξίσωσης.

Ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
 -\mu \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx dy + \int_{\partial \Omega^N} \mu \nabla u v \, d\Omega + \int_{\Omega} b v \, dx dy &= 0 \\
 -\mu \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx dy + \int_{\partial \Omega^N} \mu \nabla u v \, d\Omega + \int_{\Omega} b v \, dx dy &= 0
 \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το λογισμικό ANSYS μπορούμε να επιλέξουμε διάφορους χώρους πεπερασμένων στοιχείων, για απλοποίηση εδώ θα περιγραφεί η μέθοδος με τον πιο απλό.

Συγκεκριμένα διακριτοποιούμε το χωρίο σε μικρότερα στοιχεία (έστω τρίγωνα), το σχήμα και το μέγεθος των οποίων επηρεάζει την ακρίβεια της λύσης. Κάποιες πιθανές διακριτοποιήσεις φαίνονται στο Σχήμα 5.



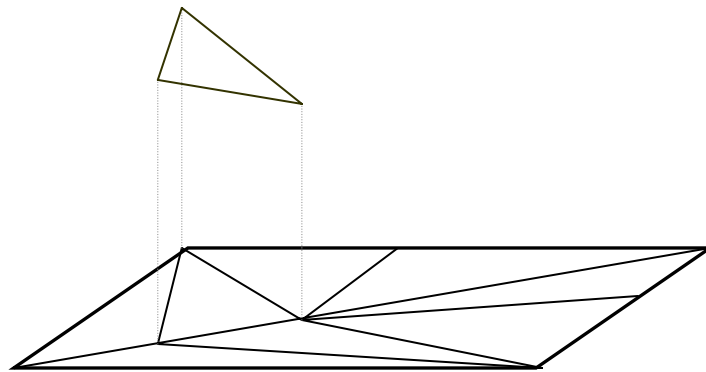
Σχήμα 5: Το χωρίο στο οποίο αναζητούμε τη λύση της διαφορικής εξίσωσης και πιθανές διακριτοποιήσεις που μπορεί να επιλεγούν.

Θεωρούμε ότι η λύση του προβλήματος σε κάθε ένα από αυτά τα στοιχεία δίνεται από μία γραμμική συνάρτηση:

$$u = u_1 \phi_1 + u_2 \phi_2 + u_3 \phi_3,$$

όπου u_1, u_2, u_3 είναι οι τιμές της λύσης στις κορυφές του κάθε τριγώνου και ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 είναι οι συναρτήσεις βάσης (στην περίπτωση που μελετάμε οι συναρτήσεις βάσης είναι γραμμικές συναρτήσεις με τιμή 1 στην κορυφή που αντιστοιχούν και 0 σε όλες τις άλλες κορυφές). Η επιλογή των συναρτήσεων βάσης καθορίζει και την μορφή της

προσεγγιστικής λύσης. Για παράδειγμα στο Σχήμα 6 φαίνεται η μορφή της λύσης σε ένα στοιχείο αν χρησιμοποιηθούν γραμμικές συναρτήσεις σχήματος.



Σχήμα 6: Η μορφή της λύσης σε ένα στοιχείο όπως προσεγγίζεται χρησιμοποιώντας γραμμικές συναρτήσεις σχήματος.

Η μετατόπιση είναι διανυσματικό μέγεθος, στην περίπτωση της διδιάστατης ελαστικότητας έχει 2 συνιστώσες :

$$u = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_1^3 \\ u_2^3 \end{Bmatrix} = \Phi u^j$$

Χρησιμοποιώντας τη γραμμική προσέγγιση σε κάθε στοιχείο στην ασθενή μορφή του προβλήματος μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα ως προς τους αγνώστους που είναι οι κομβικές μετατοπίσεις.

$$\begin{aligned}
& -\mu \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx dy + \int_{\partial\Omega^N} \mu \nabla u v \, d\kappa + \int_{\Omega} b v \, dx dy = 0 \\
& \sum_{k \in \Omega} \left(-\mu \int_k \nabla u \nabla v \, dx dy + \int_{\partial\kappa^N} \mu \nabla u v \, d\kappa + \int_k b v \, dx dy \right) = \sum_{k \in \Omega} \left(-\mu \int_k \nabla u \nabla v \, dx dy + \int_{\partial\kappa^N} \mu \nabla u v \, d\kappa + \int_k b v \, dx dy \right) = 0 \\
& \sum_{k \in \Omega} \left(-\mu \int_k \left[\begin{array}{c} (\phi_{1,x} u_1 + \phi_{2,x} u_2 + \phi_{3,x} u_3) (\phi_{1,x} v_1 + \phi_{2,x} v_2 + \phi_{3,x} v_3) \\ (\phi_{1,y} u_1 + \phi_{2,y} u_2 + \phi_{3,y} u_3) (\phi_{1,y} v_1 + \phi_{2,y} v_2 + \phi_{3,y} v_3) \end{array} \right] dx dy \right. \\
& \left. + \int_{\partial\kappa^N} b_N (\phi_1 v_1 + \phi_2 v_2 + \phi_3 v_3) \, d\kappa + \int_k \rho g (\phi_1 v_1 + \phi_2 v_2 + \phi_3 v_3) \, dx dy \right) = 0 \\
& \sum_{k \in \Omega} -\mu \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \int_k \begin{bmatrix} \phi_{1,x} \phi_{1,x} + \phi_{1,y} \phi_{1,y} & \phi_{1,x} \phi_{2,x} + \phi_{1,y} \phi_{2,y} & \phi_{1,x} \phi_{3,x} + \phi_{1,y} \phi_{3,y} \\ \phi_{2,x} \phi_{1,x} + \phi_{2,y} \phi_{1,y} & \phi_{2,x} \phi_{2,x} + \phi_{2,y} \phi_{2,y} & \phi_{2,x} \phi_{3,x} + \phi_{2,y} \phi_{3,y} \\ \phi_{3,x} \phi_{1,x} + \phi_{3,y} \phi_{1,y} & \phi_{3,x} \phi_{2,x} + \phi_{3,y} \phi_{2,y} & \phi_{3,x} \phi_{3,x} + \phi_{3,y} \phi_{3,y} \end{bmatrix} dx dy \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \\
& + \sum_{k \in \Omega} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \int_{\partial\kappa^N} \mu g_N \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} d\kappa + \sum_{k \in \Omega} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \int_k b \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} dk = 0 \\
& \sum_{k \in \Omega} -\mu \int_k \begin{bmatrix} \phi_{1,x} \phi_{1,x} + \phi_{1,y} \phi_{1,y} & \phi_{1,x} \phi_{2,x} + \phi_{1,y} \phi_{2,y} & \phi_{1,x} \phi_{3,x} + \phi_{1,y} \phi_{3,y} \\ \phi_{2,x} \phi_{1,x} + \phi_{2,y} \phi_{1,y} & \phi_{2,x} \phi_{2,x} + \phi_{2,y} \phi_{2,y} & \phi_{2,x} \phi_{3,x} + \phi_{2,y} \phi_{3,y} \\ \phi_{3,x} \phi_{1,x} + \phi_{3,y} \phi_{1,y} & \phi_{3,x} \phi_{2,x} + \phi_{3,y} \phi_{2,y} & \phi_{3,x} \phi_{3,x} + \phi_{3,y} \phi_{3,y} \end{bmatrix} dx dy \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \\
& - \sum_{k \in \Omega} \int_{\partial\kappa^N} \mu g_N \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} d\kappa - \sum_{k \in \Omega} \int_k b \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} dk
\end{aligned}$$

Τελικά λύνουμε το σύστημα που προκύπτει μετά από τους πιο πάνω υπολογισμούς και υπολογίζουμε τις κομβικές τιμές της προσεγγιστικής λύσης. Για να βρούμε την προσεγγιστική λύση σε κάθε σημείο του χωρίου χρησιμοποιούμε και πάλι τις συναρτήσεις σχήματος και παρεμβάλλουμε.

ii. Μέθοδος Συνοριακών Στοιχείων

Η Μέθοδος Συνοριακών Στοιχείων είναι και αυτή, όπως και η Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων, μία αριθμητική μέθοδος προσέγγισης της λύσης μερικών διαφορικών εξισώσεων. Για να εφαρμοστεί η μέθοδος αυτή, απαιτείται η διακριτοποίηση μόνο του συνόρου του πεδίου ορισμού και έτσι καταλήγει σε μικρότερο σύστημα προς επίλυση, συγκριτικά με τη Μέθοδο Πεπερασμένων Στοιχείων. Η μέθοδος αυτή στηρίζεται στην επαναδιατύπωση της μερικής διαφορικής εξίσωσης σε μία ολοκληρωτική εξίσωση που ορίζεται στο σύνορο και σε ένα ολοκλήρωμα που συσχετίζει την λύση στο σύνορο με τη λύση σε σημεία μέσα στο πεδίο ορισμού, κάτι που δεν είναι εφικτό για όλες τις μορφές διαφορικών εξισώσεων. Όταν όμως η διαφορική εξίσωση επιτρέπει την εφαρμογή της μεθόδου, τότε συγκριτικά με ανταγωνιστικές της μεθόδους, όπως η Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων και η Μέθοδος Πεπερασμένων Διαφορών, είναι πιο εύκολη και συχνά πολύ πιο αποτελεσματική.

Πιο κάτω δίνεται μία παρουσίαση της μεθόδου στην περίπτωση της επίπεδης ελαστικότητας (θεωρείται επίπεδη παραμορφωσιακή κατάσταση επειδή η θεμελιώδης λύση είναι γνωστή γι' αυτό το είδος προβλήματος αλλά μπορεί εύκολα να μετατραπεί σε επίπεδη εντατική κατάσταση) όπως περιγράφεται από τον Brebbia, 1992.

Η ισχύουσα εξίσωση της ελαστικότητας είναι:

$$\sigma_{kj,j} + b_k = 0 \text{ in } \Omega$$

Η οποία συνήθως πρέπει να ικανοποιεί τους εξής περιορισμούς:

Συνοριακές Συνθήκες Dirichlet: $u_k = \bar{u}_k$ στο Γ_1

Συνοριακές Συνθήκες Neumann: $p_k = \sigma_{kj} n_j = \bar{p}_k$ στο Γ_2

Βρίσκουμε την ασθενή μορφή της εξίσωσης:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{kj,j} + b_k) u_k^* d\Omega = 0$$

Και ολοκληρώνουμε κατά μέλη τον πρώτο όρο:

$$-\int_{\Omega} \sigma_{kj} \varepsilon_{kj}^* d\Omega + \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega = -\int_{\Gamma} p_k u_k^* d\Gamma$$

Ολοκληρώνοντας και πάλι κατά μέλη βρίσκουμε τη συζυγή εξίσωση της αρχικής και θεωρώντας ότι το σύνορο αποτελείται από 2 τμήματα Γ_1 και Γ_2 παίρνουμε:

$$\int_{\Omega} \sigma_{kj,j}^* u_k d\Omega + \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega = - \int_{\Gamma_1} p_k u_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \bar{p}_k u_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u}_k p_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u_k p_k^* d\Gamma$$

Ξαναολοκληρώνουμε κατά μέλη προσπαθώντας να επανακτήσουμε την αρχική εξίσωση και παρατηρούμε ότι η νέα εξίσωση διαφέρει από την αρχική εφόσον έχουμε εντάξει τους περιορισμούς στην εξίσωση.

$$\int_{\Omega} (\sigma_{kj,j}^* + b_k) u_k^* d\Omega = \int_{\Gamma_2} (p_k - \bar{p}_k) u_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (\bar{u}_k - u_k) p_k^* d\Gamma$$

Αυτή είναι και η γενική έκφραση που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εξάγουμε την συνοριακή ολοκληρωτική εξίσωση.

Επιστρέφοντας στην προτελευταία εξίσωση και χρησιμοποιώντας σαν συνάρτηση βάρους τη θεμελιώδη λύση για σημειακό φορτίο $b_l = \Delta^i$ κατά την κατεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος e_l , παίρνουμε:

$$\sigma_{lj,j}^* + \Delta^i e_l = 0$$

Η θεμελιώδης λύση μπορεί να γραφεί:

$$\begin{aligned} u_k^* &= u_{lk}^* e_l \\ p_k^* &= p_{lk}^* e_l \end{aligned}$$

Όπου u_{lk}^* και p_{lk}^* είναι οι k συνιστώσες της μετατόπισης και της τάσης λόγω μοναδιαίου σημειακού φορτίου κατά την l κατεύθυνση. Το πρώτο ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int_{\Omega} \sigma_{kj,j}^* u_k d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{lj,j}^* u_l d\Omega = - \int_{\Omega} \Delta^i u_l e_l d\Omega = -u_l^i e_l$$

Όπου u_l^i αντιπροσωπεύει την l συνιστώσα της μετατόπισης στο σημείο i της εφαρμογής του φορτίου.

Έτσι έχουμε:

$$u_l^i + \int_{\Gamma_1} p_{lk}^* \bar{u}_k d\Gamma + \int_{\Gamma_2} p_{lk}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma_1} u_{lk}^* p_k d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u_{lk}^* \bar{p}_k d\Gamma + \int_{\Omega} u_{lk}^* b_k d\Omega$$

Οι τιμές της μετατόπισης σε κάθε εσωτερικό σημείο ως συνάρτηση των συνοριακών τιμών u_k και p_k , των δυνάμεων στο χωρίο και των γνωστών θεμελιωδών λύσεων δίνονται από:

$$u_l^i + \int_{\Gamma} p_{lk}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{lk}^* p_k d\Gamma + \int_{\Omega} u_{lk}^* b_k d\Omega$$

γνωστή και ως ταυτότητα του Somigliana.

Αυτή η εξίσωση ισχύει για κάθε σημείο στο χωρίο του προβλήματος. Άρα ισχύει και για το σύνορο. Παίρνοντας την έκφραση αυτή σε διάφορα σημεία του συνόρου, παράγεται σύστημα εξισώσεων, η λύση του οποίου θα δώσει τις τιμές της λύσης στο σύνορο. Μετά από κάποια ανάλυση της συμπεριφοράς των ολοκληρωμάτων καταλήγουμε στην:

$$c_{lk}^i u_l^i + \int_{\Gamma} u_k p_{lk}^* d\Gamma = \int_{\Gamma} p_k u_{lk}^* d\Gamma + \int_{\Omega} b_k u_{lk}^* d\Omega$$

Όπου τα ολοκληρώματα είναι κύριες τιμές κατά Cauchy και Γ είναι ομαλό σύνορο στο i .

Η θεμελιώδης λύση για ένα ισότροπο υλικό σε επίπεδη παραμόρφωση δίνεται από:

$$u_{lk}^* = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \ln\left(\frac{1}{r}\right) \delta_{lk} + \frac{\partial r}{\partial x_l} \frac{\partial r}{\partial x_k} \right]$$

$$p_{lk}^* = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left[\frac{\partial r}{\partial n} \left\{ (1-2\nu) \delta_{kl} + 2 \frac{\partial r}{\partial x_k} \frac{\partial r}{\partial x_l} \right\} - (1-2\nu) \left(\frac{\partial r}{\partial x_l} n_k - \frac{\partial r}{\partial x_k} n_l \right) \right]$$

Όπου u_{lk}^* και p_{lk}^* είναι οι k συνιστώσες της μετατόπισης και της τάσης λόγω μοναδιαίου σημειακού φορτίου κατά την l κατεύθυνση στο σημείο i .

Γράφουμε τη θεμελιώδη λύση σε μορφή πίνακα:

$$u^* = \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* \end{bmatrix} \quad p^* = \begin{bmatrix} p_{11}^* & p_{12}^* \\ p_{21}^* & p_{22}^* \end{bmatrix}$$

Και οι μετατοπίσεις, τάσεις και δυνάμεις γράφονται ως διανύσματα:

$$u = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad p = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} \quad b = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix}$$

Έτσι η εξίσωση γίνεται:

$$c^i u^i + \int_{\Gamma} p^* u d\Gamma = \int_{\Gamma} u^* p d\Gamma + \int_{\Omega} u^* b d\Omega$$

Όπου u^i είναι η μετατόπιση στο εσωτερικό ή συνοριακό σημείο i όπου ασκείται το φορτίο. c^i είναι ένας πίνακας με σταθερές που οι τιμές τους εξαρτώνται από το είδος του φορτίου που θεωρούμε. Αν “ i ” είναι εσωτερικό σημείο τότε:

$$c^i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ενώ αν είναι συνοριακό σημείο σε ομαλή επιφάνεια:

$$c^i = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Αν είναι γωνιακό σημείο τότε:

$$c^i = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

Αν χρησιμοποιήσουμε γραμμικά στοιχεία η μετατόπιση και η τάση δίνεται από:

$$u = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \end{Bmatrix} = \Phi u^j$$

$$p = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1^1 \\ p_2^1 \\ p_1^2 \\ p_2^2 \end{Bmatrix} = \Phi p^j$$

και οι συναρτήσεις σχήματος:

$$\phi_1 = -\frac{1}{2}(\xi - 1)$$

$$\phi_2 = \frac{1}{2}(\xi + 1)$$

Έτσι καταλήγουμε:

$$c^i u^i + \sum_{j=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_j} p^* \Phi d\Gamma \right\} u^j = \sum_{j=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_j} u^* \Phi d\Gamma \right\} p^j$$

$$[I] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} p^* d\Gamma \right\}$$

Αν όμως χρησιμοποιήσουμε στοιχεία δεύτερης τάξης έχουμε τις εξής εκφράσεις για τα ίδια μεγέθη:

$$u = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_1^3 \\ u_2^3 \end{Bmatrix} = \Phi u^j$$

$$p = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1^1 \\ p_2^1 \\ p_1^2 \\ p_2^2 \\ p_1^3 \\ p_2^3 \end{Bmatrix} = \Phi p^j$$

$$\phi_1 = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1)$$

$$\phi_2 = (1 - \xi^2)$$

$$\phi_3 = \frac{1}{2}\xi(\xi + 1)$$

$$x = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_1^3 \\ x_2^3 \end{Bmatrix} = \Phi x^j$$

$$c^i u^i + \sum_{j=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_j} p^* \Phi d\Gamma \right\} u^j = \sum_{j=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_j} u^* \Phi d\Gamma \right\} p^j$$

$$\int_{\Gamma_j} p^* \Phi d\Gamma = \int_{-1}^{+1} p^* \Phi |G| d\xi$$

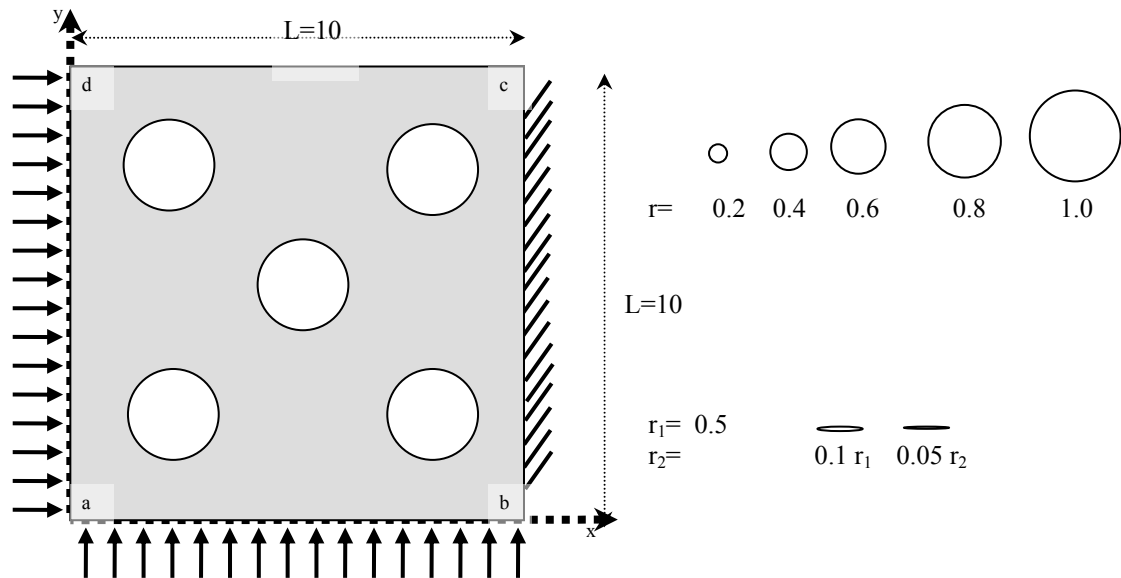
$$\int_{\Gamma_j} u^* \Phi d\Gamma = \int_{-1}^{+1} u^* \Phi |G| d\xi$$

$$|G| = \frac{d\Gamma}{d\xi} = \left\{ \left(\frac{dx_1}{d\xi} \right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\xi} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

5. Περιγραφή συγκεκριμένου προβλήματος και αποτελέσματα¹

i. Περιγραφή γεωμετρίας

Δοκιμάζεται πρόβλημα επίπεδης παραμορφωσιακής κατάστασης με τις διαστάσεις όπως φαίνονται στο Σχήμα 7.



Σχήμα 7: Οι διαστάσεις του προβλήματος και οι διάφορες σπές και ρωγμές που δοκιμάζονται.

ii. Περιγραφή στηρίξεων και φορτίων

Το σώμα στηρίζεται στη μία του πλευρά, bc ($x=10$), και φορτίζεται με ομοιόμορφο κατανεμημένο φορτίο 1000 στις δύο πλευρές ab, da ($x=0, y=0$).

iii. Περιγραφή υλικού

Το υλικό είναι ομογενές, ισότροπο, με γραμμικώς ελαστική συμπεριφορά και ιδιότητες: $E=100000$, $\nu=0.3$. Υποβάλλεται σε κατάσταση επίπεδης παραμορφωσιακής κατάστασης, η οποία είναι ισοδύναμη με κατάσταση επίπεδης εντατικής κατάστασης με διαφορετικές ιδιότητες υλικού ($E=94674.6$, $\nu=0.23$).

Ισοδυναμία επίπεδης έντασης και επίπεδης παραμόρφωσης

¹ Δεν δίνονται μονάδες για τα μεγέθη. Θεωρείται ότι ανήκουν στο ίδιο σύστημα (π.χ. S.I.).

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι να γίνει εμφανής η ισοδυναμία των δύο καταστάσεων. Ενδεικτικά δίνονται κάποιες προσεγγίσεις από τη βιβλιογραφία:

1. (Τσαμασφύρος, 1990): **Επίπεδη παραμόρφωση** έχουμε όταν το διάνυσμα της μετατόπισης σε κάθε σημείο του σώματος είναι παράλληλο προς ένα επίπεδο (έστω το xOy) και επιπλέον το διάνυσμα είναι ανεξάρτητο από το z . Δηλαδή έχουμε:

$$\begin{aligned}u &= u(x, y) \\v &= v(x, y) \\w &= 0\end{aligned}$$

Οι συνιστώσες του τανυστή των τροπών είναι:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \varepsilon_{zz} &= \varepsilon_{zy} = \varepsilon_{zx} = 0\end{aligned}$$

Ενώ σαν συναρτήσεις των τάσεων δίνονται από τις σχέσεις:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \bar{\nu} \sigma_{yy}), \quad \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \bar{\nu} \sigma_{xx}), \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2\bar{\mu}} \sigma_{xy}$$

Όπου οι νέες ελαστικές σταθερές σχετίζονται με τις κλασικές:

$$\bar{E} = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad \bar{\nu} = \frac{\nu}{1-\nu}, \quad 2\bar{\mu} = \frac{\bar{E}}{1+\bar{\nu}} = 2\mu$$

Οι συνιστώσες του τανυστή τάσεων δίνονται από:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}] = \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_{xx} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \theta \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}] = \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_{yy} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \theta \\ \sigma_{zz} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \nu (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \theta \\ \sigma_{xy} &= \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{xy} \\ \sigma_{yz} &= \sigma_{zx} = 0\end{aligned}$$

Όπου $\theta = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}$

Χρησιμοποιώντας τις σταθερές του Lamé οι πιο πάνω εκφράσεις γίνονται:

$$\sigma_{xx} = 2\mu\varepsilon_{xx} + \lambda\theta$$

$$\sigma_{yy} = 2\mu\varepsilon_{yy} + \lambda\theta$$

$$\sigma_{xy} = 2\mu\varepsilon_{xy}$$

Επίπεδη ένταση έχουμε όταν υπάρχει ένα προνομιακό σύστημα συντεταγμένων ως προς το οποίο έχουμε σε κάθε σημείο του σώματος $\sigma_{zx} = \sigma_{zy} = \sigma_{zz} = 0$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}), \quad \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}), \quad \varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{xy}, \quad \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{xz} = 0$$

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy})$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx})$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{1-\nu}\varepsilon_{xy}$$

$$\sigma_{xx} = 2\mu\varepsilon_{xx} + \lambda^*\theta^*$$

$$\sigma_{yy} = 2\mu\varepsilon_{yy} + \lambda^*\theta^*$$

$$\sigma_{xy} = 2\mu\varepsilon_{xy}$$

Όπου

$$\lambda^* = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}, \quad \theta^* = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}$$

Από τις τελευταίες σχέσεις φαίνεται και η ισοδυναμία των δύο επίπεδων καταστάσεων, ότι δηλαδή τα αποτελέσματα που δίνει η μία για συγκεκριμένο υλικό είναι τα ίδια που θα έδινε και η άλλη για διαφορετικό υλικό.

2. (Προβατίδης, 2004)

Με αντίστοιχο τρόπο καταλήγει:

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{Bmatrix} = E \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

Όπου για επίπεδη εντατική κατάσταση έχουμε:

$$E = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Ενώ για επίπεδη παραμορφωσιακή κατάσταση:

$$E = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}$$

3. (Προβατίδης, 2004)

Από τη θεώρηση του δυνατού έργου έχουμε:

$$\delta W_k = \int_V \delta \varepsilon^T \sigma dV = \delta (a^e)^T . K . a^e$$

$$K = B^T E B$$

Ανεξάρτητα από το είδος του προβλήματος (επίπεδη εντατική ή παραμορφωσιακή κατάσταση) το μητρώο ελαστικότητας τίθεται στη μορφή:

$$E = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{12} & d_{11} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix}$$

Όπου οι συντελεστές για κάθε κατάσταση δίνονται από τις εκφράσεις:

$$\text{Επίπεδη εντατική κατάσταση: } d_{11} = \frac{E}{1-\nu^2}, d_{12} = \frac{\nu E}{1-\nu^2} = \nu d_{11}, d_{33} = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Επίπεδη παραμορφωσιακή κατάσταση:

$$d_{11} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, d_{12} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{\nu}{1-\nu} d_{11}, d_{33} = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

iv. Περιγραφή ελαττωμάτων

Θεωρούμε ότι μέσα στα όρια του σώματος περικλείονται ελαττώματα, όπως οπές ή ρωγμές. Μία αρκετά γενική περίπτωση θα ήταν να έχουμε μεταβλητά όλα τα χαρακτηριστικά των ελαττωμάτων (δηλ. να αναζητείται ο αριθμός, η μορφή, η θέση και το μέγεθος των ελαττωμάτων). Επειδή όμως το πρόβλημα αυτό θα ήταν πολύ μεγάλο και υπολογιστικά χρονοβόρο, αν όχι αδύνατο, γίνονται κάποιες παραδοχές.

Για παράδειγμα, θεωρείται ότι ο αριθμός των ελαττωμάτων (1 ή 2 για κυκλική οπή, 1 για πεπλατυσμένη ελλειπτική οπή), καθώς και η μορφή τους (κυκλική οπή ή ελλειπτική οπή) είναι γνωστά. Για την περίπτωση της ελλειπτικής οπής θεωρείται γνωστός και ο προσανατολισμός της. Και έτσι τελικά αναζητείται η θέση και το μέγεθός τους.

v. Ορισμός συνάρτησης κόστους

Για το πρόβλημα που μελετάται στην παρούσα εργασία, θεωρήθηκαν δύο περιπτώσεις με τις αντίστοιχες εκφράσεις για τις συναρτήσεις κόστους:

1. Δεδομένα από όλες τις ελεύθερες πλευρές:

$$F = 1000 + \log \left(10^{-6} + \sum_{side} \left(\frac{\sum (\Delta u_x)^2}{(\max(u_x^{real})^2)} + \frac{\sum (\Delta u_y)^2}{(\max(u_y^{real})^2)} \right) \right)$$

2. Μειωμένα δεδομένα:

$$F = 1000 + \log \left(10^{-6} + \frac{\sum (\Delta u_y)^2}{(\max(u_y^{real})^2)} \right)$$

Συγκεκριμένα για την πρώτη περίπτωση ως σφάλμα θεωρήθηκε το άθροισμα των τετραγώνων των διαφορών των μετατοπίσεων σε συγκεκριμένα σημεία, ως προς τις αντίστοιχες μετατοπίσεις που υπολογίζονται στο ευθύ πρόβλημα (ή μετρούνται πειραματικά), ανηγμένες ως προς το τετράγωνο της μέγιστης μετατόπισης της αντίστοιχης πλευράς (αυτές ξεχωριστά ως προς τους δύο άξονες για να γίνεται πιο σωστά η αναγωγή). Προτιμήθηκε ο λογάριθμος της ποσότητας αυτής, γιατί, όπως υποστηρίζεται στη βιβλιογραφία (Stavrulakis, 2001) και όπως φαίνεται στην ανάλυση ευαισθησίας που παρουσιάζεται πιο κάτω, έχει πιο καλή συμπεριφορά με

πιο απότομο ελάχιστο σε σχέση με την ποσότητα χωρίς το λογάριθμο. Αυτό κάνει τη βελτιστοποίηση πιο αποτελεσματική και εύκολη. Για αποφυγή απειρισμών προστέθηκε μία μικρή ποσότητα μέσα στο λογάριθμο, ενώ για να είναι πάντα θετική η ποσότητα που ελαχιστοποιεί η βελτιστοποίηση, προστέθηκε ένας αριθμός στη συνολική ποσότητα.

Όταν παίρνουμε δεδομένα από όλες τις πλευρές η συνάρτηση κόστους θεωρεί τα σφάλματα ανηγμένα ως προς την αντίστοιχη πλευρά και τα προσθέτει αφού υπολογίσει τον λογάριθμο τους ενώ για μειωμένα δεδομένα απλά δεν γίνεται η άθροιση, ούτε κατά τις δύο διευθύνσεις αλλά ούτε και κατά τις 3 πλευρές.

vi. Ορισμός των περιορισμών

Εφαρμόζονται οι εξής περιορισμοί:

1. Τα χαρακτηριστικά των ελαττωμάτων έχουν όρια: συντεταγμένες κέντρου $[1.0,9.0]$, ακτίνες $[0.1,2.0]$.
2. Στην περίπτωση περισσότερων του ενός ελαττωμάτων τα όρια τους πρέπει να έχουν απόσταση μεταξύ τους και από τα άκρα μεγαλύτερη από συγκεκριμένη σταθερά (0.2).

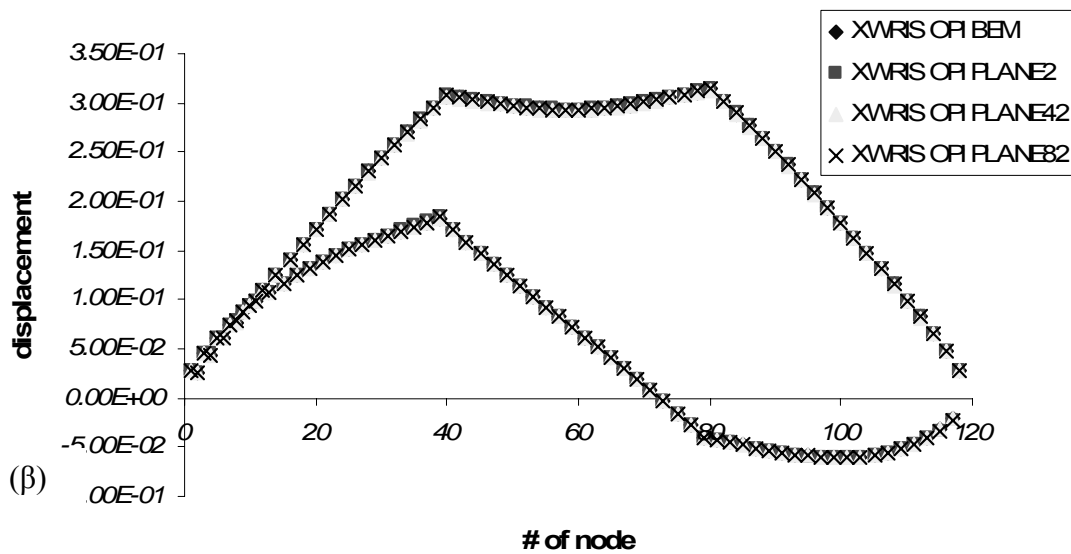
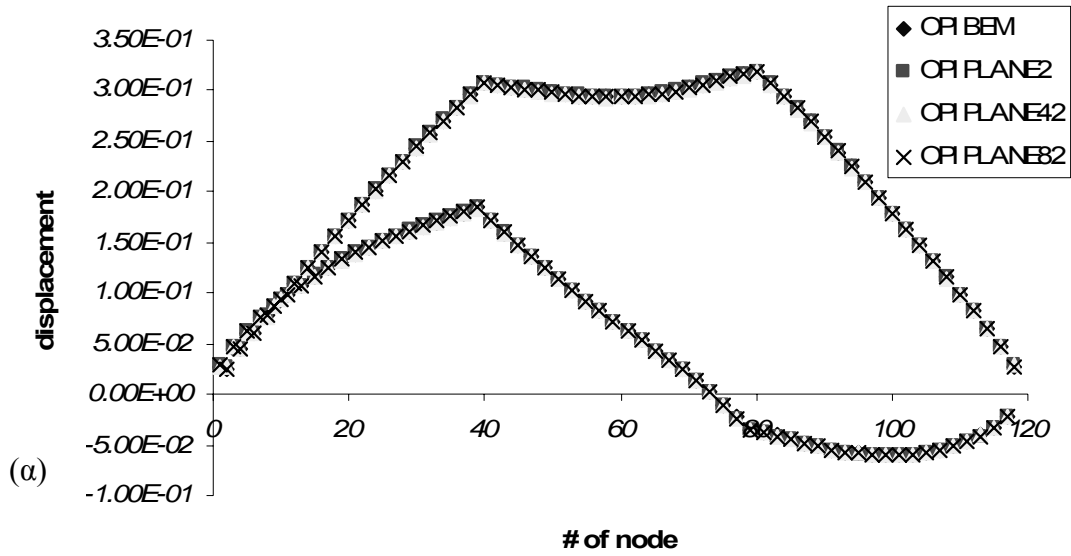
Αντί για την τιμή της ακτίνας τελικά θεωρείται το πενταπλάσιο αυτής για να είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με τις υπόλοιπες μεταβλητές και να έχουν το ίδιο βήμα και περίπου τα ίδια όρια στην πορεία βελτιστοποίησης.

vii. Σύγκριση πλέγματος

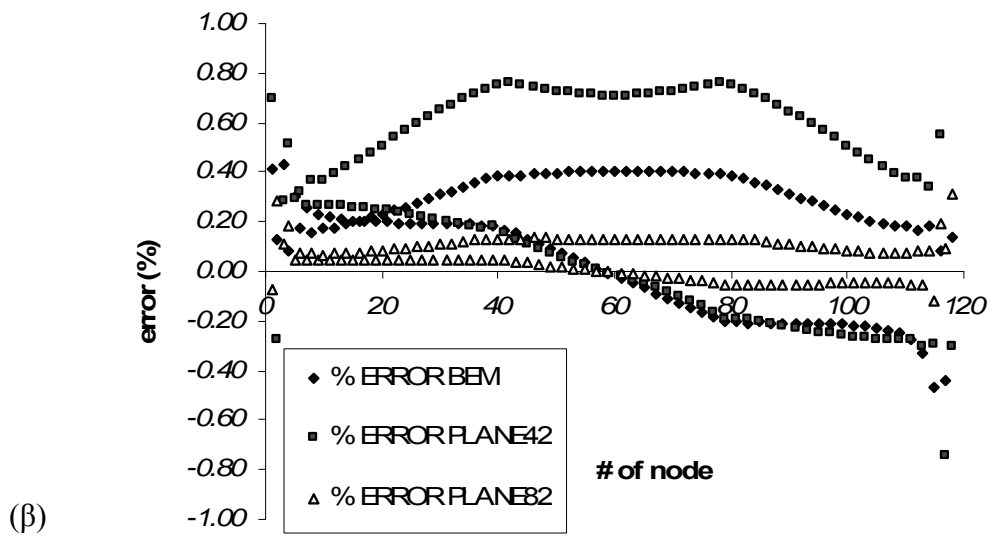
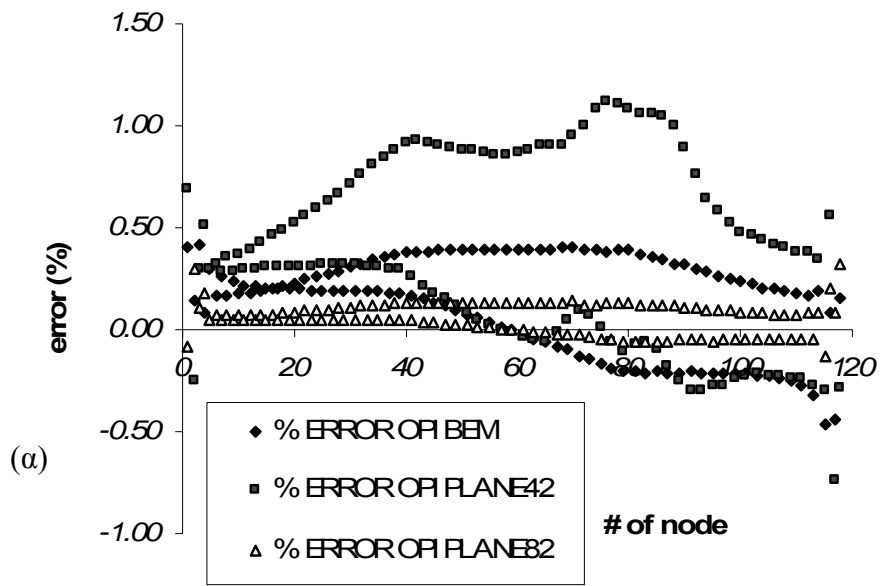
Προτού γίνει η ολοκληρωμένη παραμετρική ανάλυση για τις παραμέτρους που περιγράφονται πιο πάνω έγινε σύγκριση ανάμεσα σε διάφορα πλέγματα. Θεωρήθηκαν δύο προβλήματα, της αρηγμάτωτης πλάκας και της πλάκας με μία οπή στο (2.5, 2.5) ακτίνας 0.6.

Στα Σχήματα 8 παρουσιάζονται οι μετατοπίσεις των κόμβων στο σύνορο, χρησιμοποιώντας διαφορετικά στοιχεία και συγκεκριμένα τα στοιχεία PLANE2 (6-κομβικό τριγωνικό στοιχείο πλάκας), PLANE42 (4-κομβικό τετραπλευρικό στοιχείο πλάκας), και PLANE82 (8-κομβικό τετραπλευρικό στοιχείο πλάκας) του ANSYS και στοιχεία δοκού δεύτερης τάξης (που ορίζονται όταν χρησιμοποιείται η Μέθοδος Συνοριακών Στοιχείων). Στα Σχήματα 9 παρουσιάζονται τα σφάλματα που προκύπτουν στις μετατοπίσεις των κόμβων χρησιμοποιώντας τα συγκεκριμένα στοιχεία θεωρώντας ως λύση αναφοράς τα αποτελέσματα του στοιχείου PLANE2. Παρατηρήθηκε ότι η λύση του ευθέως προβλήματος για τις δύο περιπτώσεις με και χωρίς οπή, χρησιμοποιώντας την ίδια πυκνότητα καννάβου δεν εμφανίζει μεγάλες διαφορές όταν λύνεται με διαφορετικό στοιχείο (Σχήματα 8-9). Από δοκιμές με διαφορετικές πυκνότητες καννάβου και χρησιμοποιώντας το ίδιο στοιχείο (PLANE2) παρατηρήθηκε ότι η πυκνότητα του καννάβου δεν επηρεάζει σημαντικά την λύση εφόσον είναι αρκετά πυκνός στην περιοχή του ελαττώματος.

Όταν δοκιμάστηκαν τα ίδια στοιχεία για επίλυση του αντίστροφου προβλήματος, τα συμπεράσματα ήταν διαφορετικά. Όπως φαίνεται από τον Πίνακα 1, τα στοιχεία PLANE42 και PLANE82 της Μεθόδου Πεπερασμένων Στοιχείων αποτυγχάνουν όσον αφορά στην σύγκλιση στην βελτιστοποίηση, αντίθετα, το στοιχείο PLANE2 και τα στοιχεία που χρησιμοποιούνται στη Μέθοδο των Συνοριακών Στοιχείων (quadratic) δίνουν πολύ καλύτερα αποτελέσματα (όταν γίνεται η σύγκριση των δύο τελευταίων- στην ολοκληρωμένη παραμετρική ανάλυση- φαίνεται ότι υπερτερούν τα BEM). Αυτό μάλλον οφείλεται στην αδυναμία των τετραπλευρικών στοιχείων να μοντελοποιήσουν σωστά την αρχική καθώς και την παραμορφωμένη γεωμετρία του προβλήματος.



Σχήμα 8: Οι μετατοπίσεις των κόμβων για το πρόβλημα με σπή (α) και χωρίς σπή (β). Ο αριθμός του κόμβου δείχνει και τη θέση του (ξεκινάει από τη θέση (10,10) και μετράει αριστερόστροφα με 40 κόμβους σε κάθε πλευρά).



Σχήμα 9: Τα σφάλματα των διαφορετικών καννάβων θεωρώντας ως λύση αναφοράς τη λύση που δίνει το στοιχείο PLANE2 με τη Μέθοδο Πεπερασμένων Στοιχείων, για το πρόβλημα με σπή (α) και χωρίς σπή (β).

Πίνακας 1: Επίλυση του αντίστροφου προβλήματος χρησιμοποιώντας τις Μεθόδους Συνοριακών Στοιχείων και Πεπερασμένων Στοιχείων (η τελευταία με σύγκριση διαφορετικών στοιχείων). Το O ανταποκρίνεται σε επιτυχή επίλυση του προβλήματος ενώ το X σε ανεπιτυχή

X_0, Γ_0	X_{opt}	7.5-7.5	7.5-2.5
	Γ_{opt}	0.8	0.8
2.5-2.5, 0.5	BEM element	O	O
	PLANE2	O	O
	PLANE42	X	X
	PLANE82	X	X
2.5-7.5, 0.5	BEM element	O	O
	PLANE2	O	O
	PLANE42	X	X
	PLANE82	X	X
7.5-2.5, 0.5	BEM element	X	
	PLANE2	X	
	PLANE42	X	
	PLANE82	O	
5.0-5.0, 0.5	BEM element	O	O
	PLANE2	O	O
	PLANE42	X	X
	PLANE82	X	X
7.5-7.5, 0.5	BEM element		O
	PLANE2		O
	PLANE42		X
	PLANE82		X

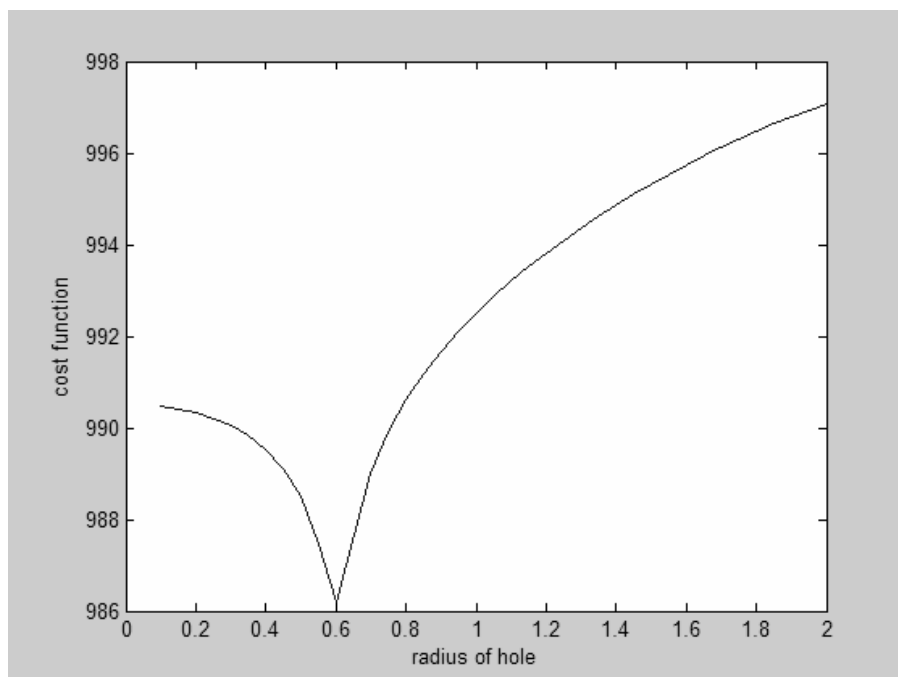
Χρησιμοποιώντας τα συμπεράσματα από την πιο πάνω μελέτη, επιλέγεται το στοιχείο PLANE2 για την εφαρμογή της Μεθόδου Πεπερασμένων Στοιχείων κατά την παραμετρική ανάλυση, ενώ η πυκνότητα του καννάβου επιλέγεται με τρόπο ώστε να είναι ικανά πυκνός στην περιοχή του ελαττώματος αλλά όχι υπερβολικά πυκνός με αποτέλεσμα να καθυστερεί πολύ η επίλυση του αντίστροφου προβλήματος. (Γίνεται μία μικρή «βελτιστοποίηση» και καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως ικανοποιητικός κάνναβος είναι ο εξής: 20 ισομεγέθη στοιχεία σε κάθε πλευρά και 16 ισομεγέθη στοιχεία σε κάθε οπή. Στην περίπτωση της ρωγμής, χρησιμοποιούνται και πάλι 16 στοιχεία αλλά δεν είναι πλέον ισομεγέθη, αντίθετα υπάρχει μία συγκέντρωση κόμβων κοντά στο άκρο της ρωγμής, όπου αναμένεται και συγκέντρωση τάσεων.)

viii. Ανάλυση ευαισθησίας

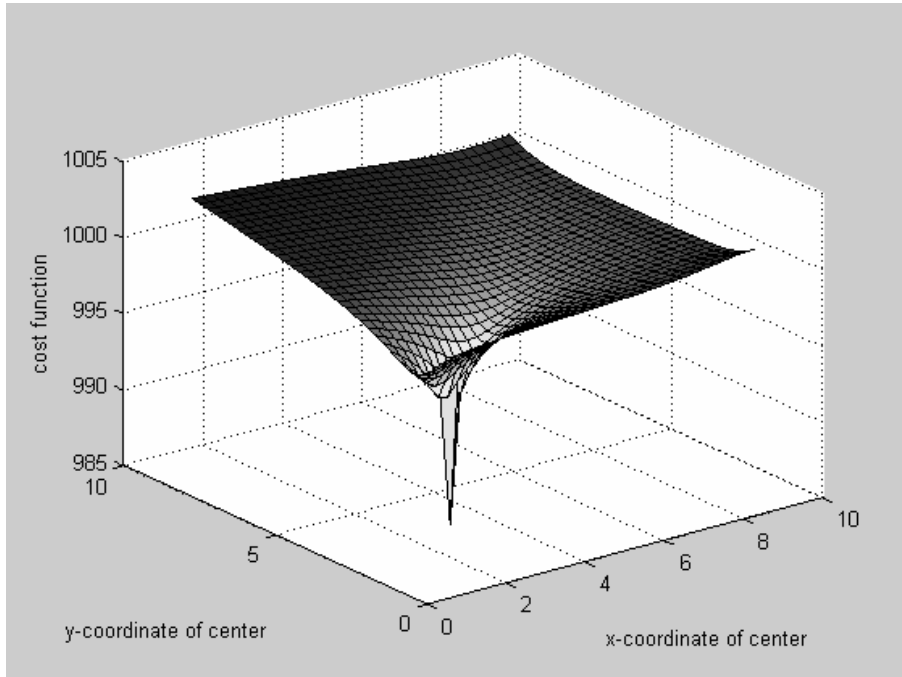
Για καλύτερη κατανόηση της συμπεριφοράς του προβλήματος, γίνεται ένας έλεγχος ευαισθησίας της συνάρτησης κόστους ως προς τις μεταβλητές του προβλήματος (sensitivity analysis). Για εποπτικούς λόγους, η ανάλυση ευαισθησίας γίνεται για ένα μόνο ελαττώμα (και συγκεκριμένα οπή) και θεωρώντας την ακτίνα γνωστή. Στη συνέχεια, θεωρώντας τη θέση του ελαττώματος γνωστή, εξετάζεται η ευαισθησία του προβλήματος σε μεταβολές της ακτίνας. Ακόμη γίνονται δοκιμές για έλεγχο της συμπεριφοράς του προβλήματος για γνωστή μεν ακτίνα αλλά με σφάλμα $\pm 10\%$ σε σχέση με την πραγματική. Κάποιες ενδεικτικές δοκιμές γίνονται επίσης για να φανεί η διαφορετική κατανομή της συνάρτησης κόστους όταν χρησιμοποιούμε λογάριθμο για τον υπολογισμό της ή όχι.

Οι έλεγχοι αυτοί γίνονται με επίγνωση ότι δεν είναι οι πλέον κατάλληλοι εφόσον αγνοούν την αλληλεπίδραση της μεταβολής των μεταβλητών θέσης με το μέγεθος του ελαττώματος αλλά αποτελούν μία προσπάθεια ποιοτικής κατανόησης του προβλήματος που καλούμαστε να λύσουμε.

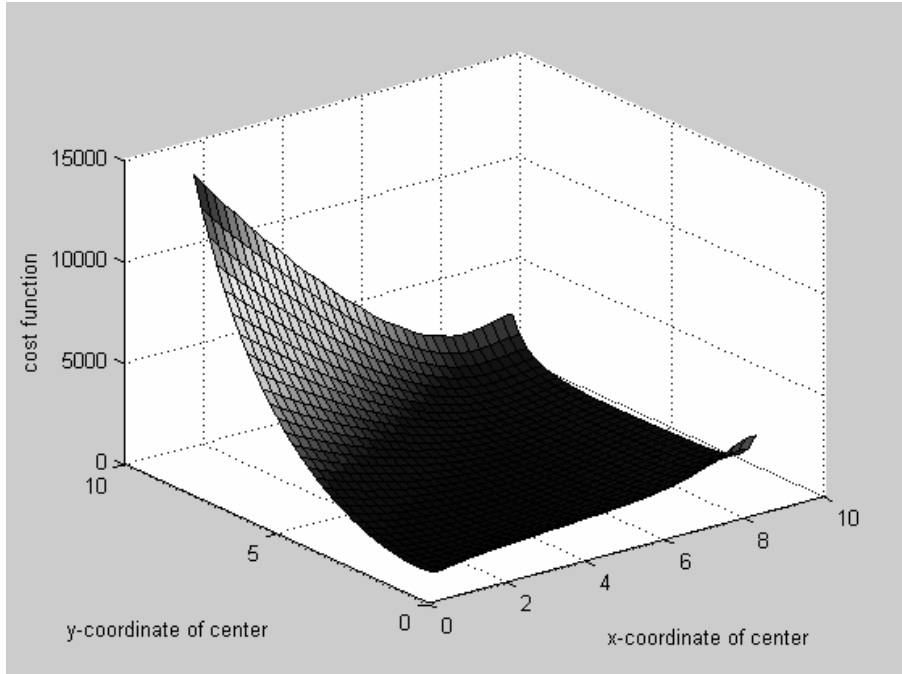
Ενδεικτικά τα διαγράμματα για οπή στη θέση (2.5-2.5) με ακτίνα 0.6:



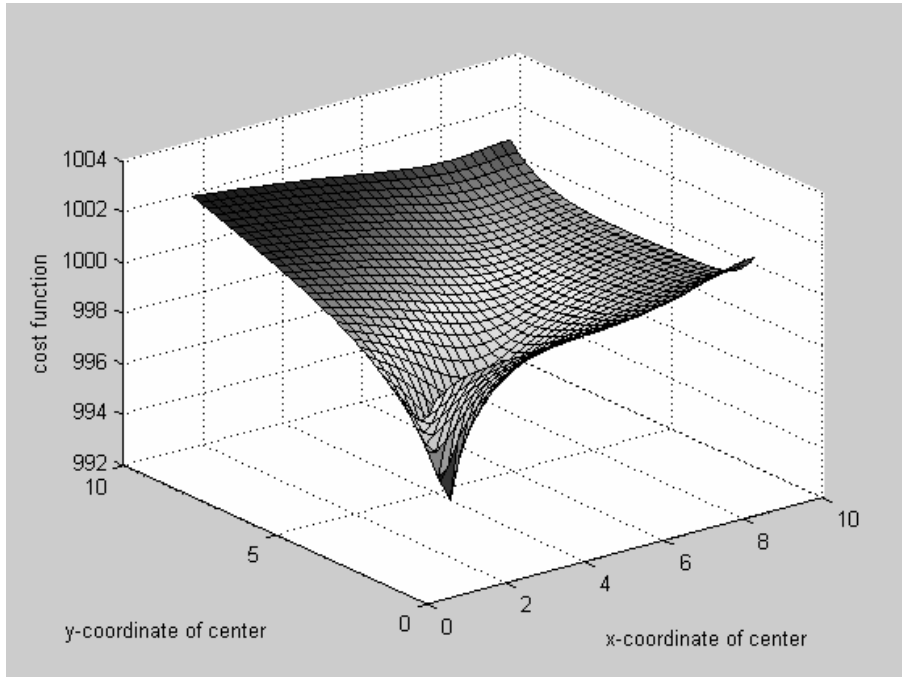
Σχήμα 10: Η συμπεριφορά της αντικειμενικής συνάρτησης για γνωστή θέση ελαττώματος και μεταβλητή ακτίνα.



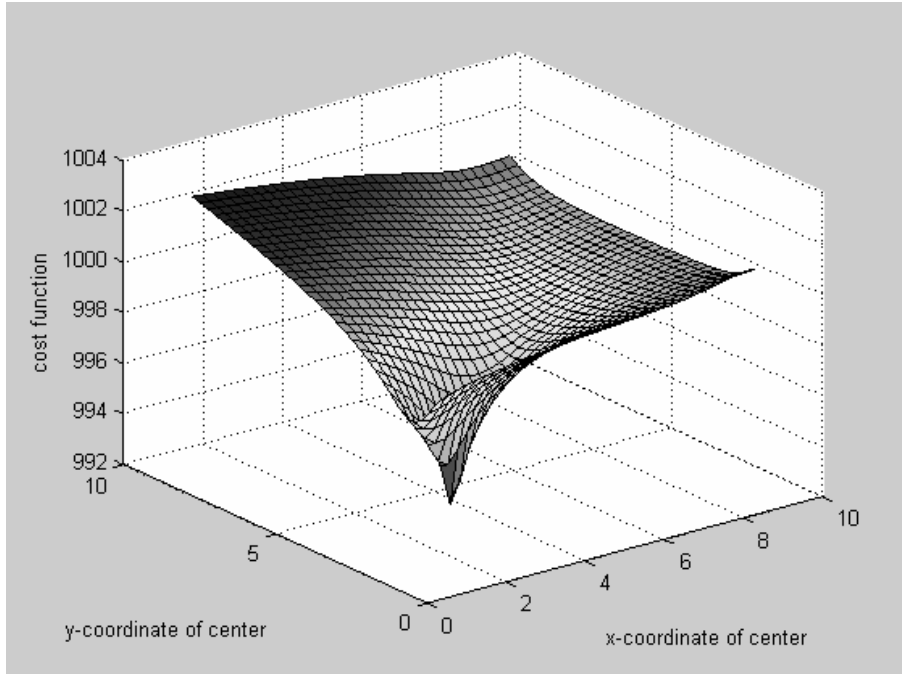
Σχήμα 11: Η συμπεριφορά της αντικειμενικής συνάρτησης για γνωστή ακτίνα και μεταβλητή θέση ελαττώματος λαμβάνοντας πληροφορία από όλα τα δεδομένα και χρησιμοποιώντας το λογάριθμο για υπολογισμό της αντικειμενικής συνάρτησης.



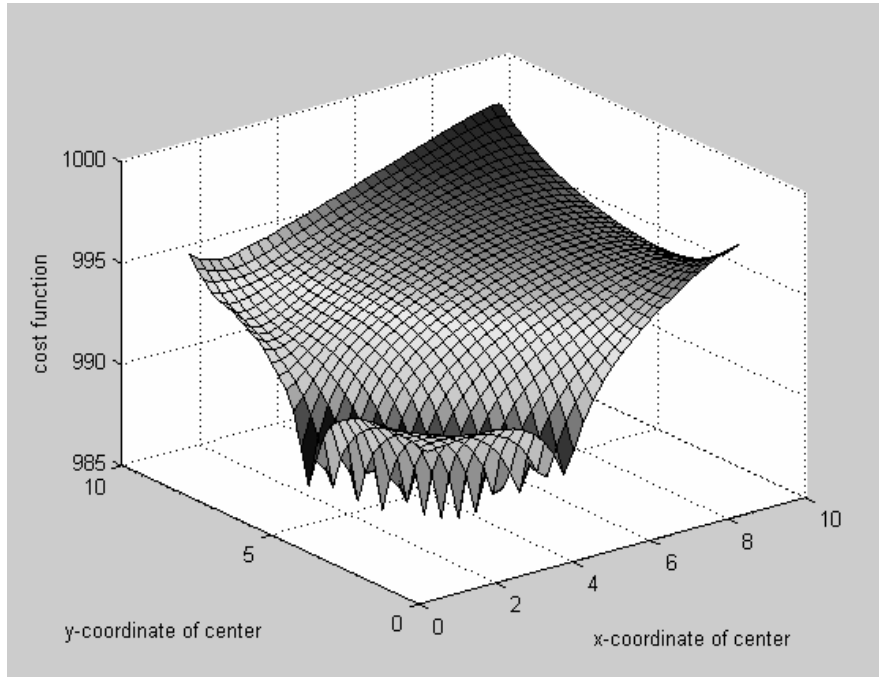
Σχήμα 12: Όπως και στο Σχήμα 11 αλλά χρησιμοποιώντας γραμμική σχέση για τον υπολογισμό της αντικειμενικής συνάρτησης.



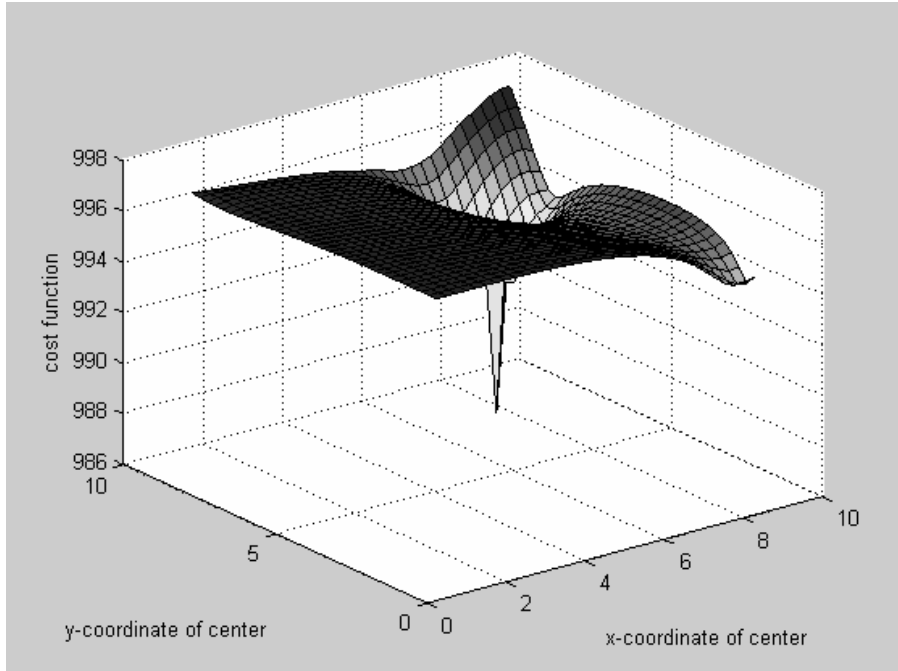
Σχήμα 13: Η συμπεριφορά της αντικειμενικής συνάρτησης για γνωστή ακτίνα $r'=1.1r$ (δηλαδή σφάλμα στην ακτίνα +10%) και μεταβλητή θέση ελαττώματος λαμβάνοντας πληροφορία από όλα τα δεδομένα και χρησιμοποιώντας το λογάριθμο για υπολογισμό της αντικειμενικής συνάρτησης.



Σχήμα 14: Η συμπεριφορά της αντικειμενικής συνάρτησης για γνωστή ακτίνα $r'=0.9r$ (δηλαδή σφάλμα στην ακτίνα -10%) και μεταβλητή θέση ελαττώματος λαμβάνοντας πληροφορία από όλα τα δεδομένα και χρησιμοποιώντας το λογάριθμο για υπολογισμό της αντικειμενικής συνάρτησης.



Σχήμα 15: Η συμπεριφορά της αντικειμενικής συνάρτησης για γνωστή ακτίνα και μεταβλητή θέση ελαττώματος λαμβάνοντας πληροφορία από μειωμένα δεδομένα και χρησιμοποιώντας το λογάριθμο για υπολογισμό της αντικειμενικής συνάρτησης (θέση και μέγεθος ελαττώματος, $x=(2.5-2.5)$, $r=0.6$).



Σχήμα 16: Όπως και στο Σχήμα 15, αλλά για διαφορετική θέση και μέγεθος ελαττώματος, $x=(7.5-7.5)$, $r=0.6$.

Από το Σχήμα 10 συμπεραίνουμε ότι εάν ανιχνευθεί (ή είναι γνωστή) η θέση του ελαττώματος τότε ο υπολογισμός του μεγέθους του θα είναι ιδιαίτερα εύκολος λόγω της συμπεριφοράς της συνάρτησης κόστους (συνεχής με ένα μόνο τοπικό ελάχιστο που είναι και το ολικό). Από το Σχήμα 11 εξάγονται αντίστοιχα συμπεράσματα για την περίπτωση που είναι γνωστό το μέγεθος του ελαττώματος και αναζητείται η θέση του. Συγκρίνοντας τα Σχήματα 11-12 έχουμε κάποια ένδειξη ότι είναι πιο κατάλληλη η λογαριθμική συνάρτηση κόστους σε σχέση με τη γραμμική επειδή εμφανίζεται πιο απότομο το ελάχιστο. Ακόμα συγκρίνοντας τα Σχήματα 11,13-14 παρατηρούμε ότι ακόμα και όταν η ακτίνα είναι γνωστή αλλά χωρίς μεγάλη ακρίβεια, η συμπεριφορά της συνάρτησης κόστους είναι και πάλι ευνοϊκή για ανίχνευση της θέσης του ελαττώματος. Αυτό είναι μία καλή ένδειξη ότι η βελτιστοποίηση με όλα τα μεγέθη ως μεταβλητές (μέγεθος και θέση ελαττώματος) θα έχει μια καλή πορεία. Από τα Σχήματα 11, 16 παρατηρούμε ότι όταν χρησιμοποιούνται μειωμένα δεδομένα για τον υπολογισμό της συνάρτησης κόστους η συμπεριφορά της γίνεται χειρότερη, ευτυχώς όμως όχι σημαντικά. Αυτό δείχνει πως ακόμη υπάρχουν αρκετά καλές ενδείξεις για καλή πορεία της βελτιστοποίησης. Το Σχήμα 15 παρουσιάζει κάποια περίεργη συμπεριφορά της συνάρτησης κόστους που εμφανίστηκε για μία μόνο από τις θέσεις ελαττώματος που δοκιμάστηκαν. Από αυτό το διάγραμμα συμπεραίνουμε ότι γενικά στα αντίστροφα προβλήματα είναι χρήσιμο να χρησιμοποιούνται πολλά δεδομένα και ότι μείωσή τους μπορεί να μετατρέψει το πρόβλημα από εύκολο (Σχήμα 11) σε δύσκολο ή και αδύνατο να λυθεί (Σχήμα 15).

ix. Τιμές Παραμέτρων για τις μεθόδους που διερευνήθηκαν

Γενετικός Αλγόριθμος

Γενεές (Generations)=100

Όριο χρόνου χωρίς βελτίωση (StallTimeLimit)=Inf

Όριο γενεών χωρίς βελτίωση (StallGenLimit)=Inf

Εύρος αρχικού πληθυσμού (PopInitRange)=[0.5;10]

Μέγεθος πληθυσμού (PopulationSize)=36 (για 1 οπή και 1 ρωγμή),

72 (για 2 οπές)

Προσομοιούμενη Ανόπτηση

Συνάρτηση που παράγει τη νέα θερμοκρασία από την παλιά: $T_{new}=0.8 \cdot T_{old}$

Συνάρτηση που παράγει τη νέα λύση από την παλιά:

$(x + (\text{randperm}(\text{length}(x)) == \text{length}(x)) * \text{randn}/30)$

Αρχική Θερμοκρασία= 10^{-1}

Θερμοκρασία στην οποία σταματά αυτόματα= 10^{-7}

Μέγιστος αριθμός διαδοχικών απορρίψεων=1000

Μέγιστος αριθμός επιτυχιών σε μία θερμοκρασία=30

Μέγιστος αριθμός προσπαθειών σε μία θερμοκρασία=70

Τιμή στην οποία σταματά αυτόματα=-Inf

Hooke and Jeeves

Βήμα (s)=0.8

Συντελεστής μείωσης του βήματος (r)=0.5

Ανοχή στο μέγεθος του βήματος= 10^{-10}

S.Q.P

Μέγιστος αριθμός επαναλήψεων (MaxIter)=1000

Μέγιστος Αριθμός Υπολογισμού Συνάρτησης Κόστους

(MaxFunEvals)=900000

Ανοχή στην παραβίαση των περιορισμών (TolCon)= 10^{-10}

Ανοχή στην αλλαγή της συνάρτησης κόστους (TolFun)= 10^{-10}

Ανοχή στην αλλαγή της τιμής της μεταβλητής σχεδίασης (TolX)= 10^{-6}

Subproblem Approximation Problem

Μέγιστος αριθμός επαναλήψεων=20

Μέγιστος αριθμός διαδοχικών μη αποδεκτών επαναλήψεων=20

First Order Method

Μέγιστος αριθμός επαναλήψεων=100

Όριο (σε ποσοστό επί τοις εκατό) που εφαρμόζεται στο μέγεθος του βήματος της έρευνας γραμμής=100

Η εμπρός διαφορά (σε ποσοστό επί τοις εκατό) που εφαρμόζεται στο εύρος των μεταβλητών σχεδίασης που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της κλίσης=0.2

Έγιναν διάφορες δοκιμές με τη Subproblem Approximation Method και φάνηκε ότι ακόμα και μετά από πολλές επαναλήψεις, η μέθοδος αυτή αδυνατεί να συγκλίνει με μεγάλη ακρίβεια στο σωστό διάνυσμα μεταβλητών. Έτσι τελικά προτιμήθηκε να γίνονται λίγες επαναλήψεις και στη συνέχεια να εφαρμόζεται η First Order Method, στην οποία και αποδίδονται οι επιτυχίες τελικά της υβριδικής μεθόδου. Έτσι τελικά μπορούμε να πούμε ότι η Subproblem Approximation Method χρησιμοποιείται κυρίως για επίσπευση της αρχικής πορείας της μεθόδου και για εντοπισμό μίας (αρκετά ευρείας περιοχής) σύγκλισης αλλά τελικά είναι η First Order Method που επιτυγχάνει τη σύγκλιση, όταν αυτή επιτυγχάνεται.

x. Επεξήγηση συμβόλων στους πίνακες

FEM: Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων (Finite Element Method)

BEM: Μέθοδος Συνοριακών Στοιχείων (Boundary Element Method)

x_{opt} : Πραγματική τιμή συντεταγμένων κέντρου ελαττώματος

x_{opt} : ($x_{κέντρου}$ - $y_{κέντρου}$) για ένα ελάττωμα

x_{opt} : ($x_{κέντρου,1}$ - $y_{κέντρου,1}$ - $x_{κέντρου,2}$ - $y_{κέντρου,2}$) για δύο ελαττώματα

r_{opt} : Πραγματική τιμή ακτίνας ελαττώματος για κυκλική οπή, ή μισό μήκος μεγάλου άξονα της έλλειψης για ελλειπτική οπή.

x_0 : Αρχικές τιμές συντεταγμένων κέντρου για τη διαδικασία βελτιστοποίησης

x_0 : $(x_0 - y_0)$ για ένα ελάττωμα

x_0 : $(x_{0,1} - y_{0,1} - x_{0,2} - y_{0,2})$ για δύο ελαττώματα

r_0 : Αρχική τιμή ακτίνας ελαττώματος για κυκλική οπή, ή μισού μήκους μεγάλου άξονα της έλλειψης για ελλειπτική οπή, για τη διαδικασία βελτιστοποίησης.

scale: Λόγος μήκους μικρού άξονα προς μήκος μεγάλου άξονα έλλειψης (για την περίπτωση της ρωγμής)

Γ.Α.: Μέθοδος Γενετικού Αλγορίθμου

Π.Α.: Μέθοδος Προσομοιούμενης Ανόπτησης

H-J: Μέθοδος Hooke and Jeeves

S.Q.P.: Sequential Quadratic Programming

Sup App. & First Order: Subproblem Approximation Problem and First Order Methods

Για τις επιτυχείς επιλύσεις του αντίστροφου προβλήματος, στον πίνακα δίνεται και ο αριθμός των επαναλήψεων μέχρι τον υπολογισμό του τελικού διανύσματος των μεταβλητών σχεδίασης.

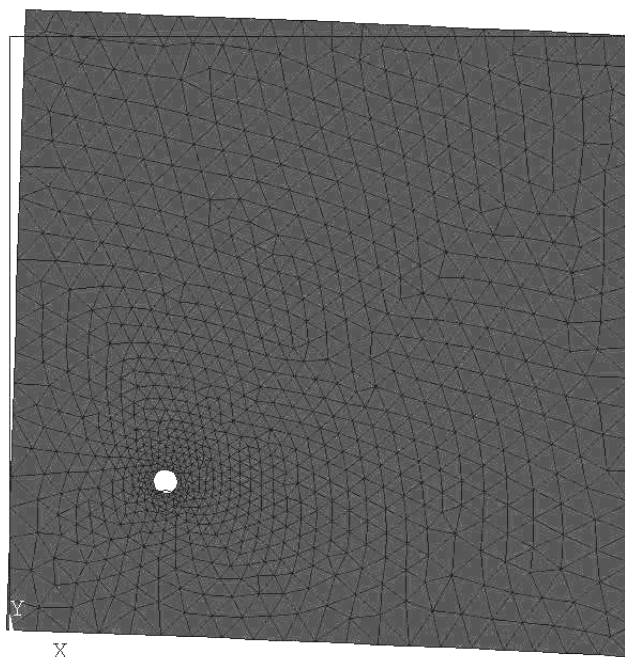
Χρωματικά σύμβολα για τα κελιά του πίνακα:



Επιτυχής με ανοχή <1%
Επιτυχής με ανοχή 1-10%
Ατέρμον βρόχος
Ανεπιτυχής

Για την εξαγωγή στατιστικών αποτελεσμάτων για σύγκριση των μεθόδων θεωρούνται ως επιτυχείς οι περιπτώσεις: Επιτυχής με ανοχή 1-10% και Επιτυχής με ανοχή <1% ενώ ως ανεπιτυχής θεωρούνται οι περιπτώσεις: Ανεπιτυχής και Ατέρμον βρόχος.

xi. Προσέγγιση του προβλήματος μίας κυκλικής οπής.



Σχήμα 17: Το παραμορφωμένο σχήμα και οι απαραμόρφωτες πλευρές της αρχικής γεωμετρίας θεωρώντας μία οπή στη θέση (2.5-2.5) με ακτίνα 0.2 και επιλύοντας χρησιμοποιώντας τη Μέθοδο Πεπερασμένων Στοιχείων.

Μελετάται το πρόβλημα της μίας οπής μέσα σε σώμα (Σχήμα 17) που βρίσκεται σε κατάσταση επίπεδης παραμορφωσιακής κατάστασης. Οι διαστάσεις του σώματος είναι 10×10 ενώ η ακτίνα των οπών που δοκιμάζονται είναι: 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0. Το σώμα στηρίζεται στη μία του πλευρά ($x=10$) και φορτίζεται σε άλλες δύο πλευρές ($x=0, y=0$). Δεδομένα λαμβάνονται από τις τρεις αστήρικτες πλευρές ($y=0, 10, x=0$).

Το πρόβλημα λύνεται με τη Μέθοδο Πεπερασμένων Στοιχείων και με τη Μέθοδο Συνοριακών Στοιχείων. Γίνεται προσπάθεια να χρησιμοποιηθεί κάναβος ίδιας πυκνότητας (δεν είναι δυνατό να χρησιμοποιηθεί ο ίδιος ακριβώς κάναβος εφόσον η Μέθοδος Συνοριακών Στοιχείων απαιτεί διακριτοποίηση μόνο του συνόρου σε αντίθεση με τη Μέθοδο Πεπερασμένων Στοιχείων που απαιτεί διακριτοποίηση όλου του χωρίου) έτσι ώστε να υπάρχει κάποια δυνατότητα σύγκρισης των αποτελεσμάτων. Συγκεκριμένα χρησιμοποιούνται 20 στοιχεία για τη διακριτοποίηση κάθε πλευράς του εξωτερικού συνόρου και 16 στοιχεία για το σύνορο της οπής. Τα στοιχεία που χρησιμοποιούνται και για τις δύο μεθόδους είναι δεύτερης τάξης, ενώ

πιο συγκεκριμένα για τη Μέθοδο Πεπερασμένων Στοιχείων χρησιμοποιείται το τριγωνικό στοιχείο δεύτερης τάξης PLANE2 του ANSYS. Τέλος, παίρνουμε τιμές της μετατόπισης από όλους τους κόμβους κάθε πλευράς του αστήρικτου εξωτερικού συνόρου για τον υπολογισμό της συνάρτησης κόστους.

Στον Πίνακα 2 παρουσιάζονται αναλυτικά τα αποτελέσματα από την επίλυση του προβλήματος με τη Μέθοδο του Γενετικού Αλγορίθμου ξεκινώντας από 10 τυχαία διανύσματα και χρησιμοποιώντας τη Μέθοδο Πεπερασμένων Στοιχείων. Στον Πίνακα 3 έχουμε τα αντίστοιχα αποτελέσματα χρησιμοποιώντας τη Μέθοδο Συνοριακών Στοιχείων. Στον Πίνακα 4 δίνονται συγκεντρωτικά τα αποτελέσματα με χρήση των μεθόδων Γενετικού Αλγορίθμου, Προσομοιούμενης Ανόπτησης, Hooke and Jeeves, S.Q.P και Subproblem Approximation & First Order. Όλες οι μέθοδοι, εκτός από την Subproblem Approximation & First Order (που εφαρμόζεται από το ANSYS και έτσι χρησιμοποιεί μόνο πεπερασμένα στοιχεία) δοκιμάζονται και με τις δύο μεθόδους ανάλυσης της φόρτισης επί της κατασκευής (BEM και FEM).

Πίνακας 2: Τα αποτελέσματα για την επίλυση του αντίστροφου προβλήματος με παραδοχή ύπαρξης μίας κυκλικής σπής με χρήση Υβριδικού Γενετικού Αλγορίθμου και της Μεθόδου Πεπερασμένων Στοιχείων για 10 τυχαία αρχικά διανύσματα

X_{opt}	Γ_{opt}	Γ.Α. 1	Υβριδ. Γ.Α. 1	Γ.Α. 2	Υβριδ. Γ.Α. 2	Γ.Α. 3	Υβριδ. Γ.Α. 3	Γ.Α. 4	Υβριδ. Γ.Α. 4	Γ.Α. 5	Υβριδ. Γ.Α. 5	Γ.Α. 6	Υβριδ. Γ.Α. 6	Γ.Α. 7	Υβριδ. Γ.Α. 7	Γ.Α. 8	Υβριδ. Γ.Α. 8	Γ.Α. 9	Υβριδ. Γ.Α. 9	Γ.Α. 10	Υβριδ. Γ.Α. 10
2.5-2.5	0.2	3636	3729	3636	3751	3636	3827	3636	3827	3636	3827	3636	3803	3636	3726	3636	3827	3636	3827	3636	3827
	0.4	3636	3738	3636	3732	3636	3735	3636	3735	3636	3735	3636	3739	3636	3722	3636	3735	3636	3735	3636	3735
	0.6	3636	3716	3636	3747	3636	3895	3636	3895	3636	3895	3636	3813	3636	3732	3636	3745	3636	3895	3636	3895
	0.8	3636	3746	3636	3734	3636	3736	3636	3736	3636	3736	3636	3758	3636	3730	3636	3733	3636	3736	3636	3736
	1	3636	3723	3636	3741	3636	3729	3636	3729	3636	3729	3636	3743	3636	3734	3636	3729	3636	3729	3636	3729
2.5-7.5	0.2	3636	3740	3636	3795	3636	3758	3636	3758	3636	3758	3636	3731	3636	3793	3636	3782	3636	3758	3636	3758
	0.4	3636	3728	3636	3740	3636	3740	3636	3740	3636	3725	3636	3736	3636	3729	3636	3733	3636	3740	3636	3740
	0.6	3636	3721	3636	3722	3636	3725	3636	3725	3636	3723	3636	3739	3636	3719	3636	3724	3636	3722	3636	3725
	0.8	3636	3723	3636	3731	3636	3726	3636	3726	3636	3716	3636	3726	3636	3735	3636	3722	3636	3730	3636	3726
	1	3636	3723	3636	3729	3636	3729	3636	3729	3636	3735	3636	3736	3636	3730	3636	3732	3636	3732	3636	3729
7.5-2.5	0.2	3636	3792	3636	3792	3636	3792	3636	3792	3636	3796	3636	3734	3636	3811	3636	3792	3636	3755	3636	3792
	0.4	3636	3728	3636	3733	3636	3741	3636	3741	3636	3739	3636	3742	3636	3722	3636	3741	3636	3781	3636	3741
	0.6	3636	3723	3636	3719	3636	3739	3636	3739	3636	3723	3636	3723	3636	3721	3636	3728	3636	3730	3636	3739
	0.8	3636	3733	3636	3723	3636	3723	3636	3730	3636	3720	3636	3728	3636	3730	3636	3723	3636	3722	3636	3723
	1	3636	3735	3636	3726	3636	3726	3636	3736	3636	3729	3636	3734	3636	3741	3636	3726	3636	3742	3636	3726
5.0-5.0	0.2	3636	3811	3636	3751	3636	3751	3636	3770	3636	3816	3636	3764	3636	3771	3636	3751	3636	3755	3636	3751
	0.4	3636	3734	3636	3738	3636	3738	3636	3749	3636	3739	3636	3755	3636	3733	3636	3753	3636	3742	3636	3738
	0.6	3636	3728	3636	3722	3636	3728	3636	3732	3636	3725	3636	3729	3636	3737	3636	3724	3636	3723	3636	3728
	0.8	3636	3735	3636	3727	3636	3728	3636	3732	3636	3737	3636	3743	3636	3742	3636	3737	3636	3731	3636	3728
	1	3636	3746	3636	3731	3636	3745	3636	3736	3636	3739	3636	3740	3636	3729	3636	3736	3636	3729	3636	3745
7.5-7.5	0.2	3636	3832	3636	3781	3636	3749	3636	3811	3636	3741	3636	3864	3636	3792	3636	3787	3636	3827	3636	3749
	0.4	3636	3745	3636	3758	3636	3735	3636	3772	3636	3755	3636	3737	3636	3747	3636	3730	3636	3734	3636	3735
	0.6	3636	3730	3636	3752	3636	3735	3636	3749	3636	3736	3636	3741	3636	3728	3636	3732	3636	3726	3636	3735
	0.8	3636	3726	3636	3728	3636	3728	3636	3732	3636	3727	3636	3732	3636	3741	3636	3735	3636	3731	3636	3728
	1	3636	3739	3636	3734	3636	3733	3636	3736	3636	3738	3636	3737	3636	3728	3636	3739	3636	3731	3636	3733

Πίνακας 3: Τα αποτελέσματα για την επίλυση του αντίστροφου προβλήματος με παραδοχή ύπαρξης μίας κυκλικής σπής με χρήση Υβριδικού Γενετικού Αλγορίθμου και της Μεθόδου Συνοριακών Στοιχείων για 10 τυχαία αρχικά διανύσματα

x_{opt}	Γ_{opt}	Γ.Α. 1	Υβριδ. Γ.Α. 1	Γ.Α. 2	Υβριδ. Γ.Α. 2	Γ.Α. 3	Υβριδ. Γ.Α. 3	Γ.Α. 4	Υβριδ. Γ.Α. 4	Γ.Α. 5	Υβριδ. Γ.Α. 5	Γ.Α. 6	Υβριδ. Γ.Α. 6	Γ.Α. 7	Υβριδ. Γ.Α. 7	Γ.Α. 8	Υβριδ. Γ.Α. 8	Γ.Α. 9	Υβριδ. Γ.Α. 9	Γ.Α. 10	Υβριδ. Γ.Α. 10
2.5-2.5	0.2	2492	2589	2441	2559		2565	2423	2517	2371	2464		2632		2571	2430	2531	2397	2514		2545
	0.4		2594		2433		2469	2354	2441	2482	2592	2493	2581	2495	2579		2625	2493	2577	2468	2586
	0.6	2430	2522	2560	2659		2594	2564	2669	2505	2616		2641	2428	2549	2522	2631	2597	2683	2489	2580
	0.8	2428	2528	2597	2693	2614	2698	2651	2747		2669	2551	2651		2667	2458	2643		2619	2535	2648
	1	2501	2599	2574	2680	2610	2712	2553	2638	2497	2589	2481	2578	2481	2586		2599		2710	2645	2739
2.5-7.5	0.2	2435	2521	2438	2526	2430	2532	2427	2506	2436	2534	2427	2528		2463	2446	2533	2306	2534	2389	2562
	0.4	2539	2523	2540	2523	2491	2577	2542	2527	2510	2597	2488	2584		2635	2520	2611	2509	2588	2471	2569
	0.6	2474	2566	2461	2548	2495	2582	2493	2582	2472	2667	2506	2592	2517	2595	2490	2578	2541	2630	2504	2593
	0.8	2494	2582	2527	2626	2519	2604	2539	2633	2504	2597	2544	2629	2572	2658	2548	2646	2589	2679	2415	2663
	1		2676	2515	2603	2586	2680	2519	2623	2569	2658	2496	2591	2540	2634	2503	2595	2478	2583	2526	2621
7.5-2.5	0.2	2399	2497	2379	2469	2389	2484	2435	2526	2373	2457		2590	2397	2494	2394	2488	2355	2440	2339	2418
	0.4	2540	2630	2518	2602	2449	2536	2505	2600	2453	2541	2448	2527	2526	2611	2576	2675	2519	2606	2483	2571
	0.6	2483	2568	2483	2567	2516	2608		2637	2450	2546	2565	2655	2496	2591	2528	2619	2504	2597	2495	2590
	0.8	2509	2595	2440	2535	2500	2641	2591	2678	2617	2709	2540	2635	2566	2658	2520	2608	2579	2670		2619
	1	2522	2614	2612	2714	2557	2652	2531	2629	2517	2613	2472	2565	2500	2608	2558	2645	2609	2718	2515	2610
5.0-5.0	0.2		2578		2618		2585	2461	2554	2495	2599		2508	2371	2553		2410		2549		2662
	0.4		2713		2686	2606	2702	2550	2642	2628	2728		2621		2709	2454	2539		2580		2694
	0.6	2581	2670		2687		2710	2560	2657		2722	2656	2747	2495	2582	2612	2701		2758	2504	2600
	0.8	2524	2613		2716	2701	2801	2710	2799		2696		2733		2719		2827	2704	2792		2676
	1	2666	2777	2650	2754	2625	2718	2734	2828	2696	2801		2834		2760	2635	2727	2636	2724	2656	2749
7.5-7.5	0.2		2643	2404	2503		2562	2352	2444		2479	2235	2328		2553	2505	2597	2489	2587		2533
	0.4		2645		2633	2461	2553	2414	2523	2424	2541		2506		2500	2431	2521		2610		2483
	0.6		2476		2703		2683	2517	2614	2578	2667	2587	2686	2654	2745		2691		2619	2550	2645
	0.8	2647	2752		2619	2486	2589	2546	2638	2502	2597		2646		2736	2556	2645		2681	2577	2679
	1	2462	2561		2682		2672		2688	2599	2696		2604	2565	2667		2700	2618	2723	2578	2683

Πίνακας 4: Συγκεντρωτικά τα αποτελέσματα για την επίλυση του αντίστροφου προβλήματος με παραδοχή ύπαρξης μίας κυκλικής οπής με χρήση των μεθόδων Γενετικού Αλγορίθμου, Προσομοιούμενης Ανόπτησης, Hooke and Jeeves, S.Q.P και Subproblem Approximation & First Order

x_0, Γ_0		τυχαίο		2.5-5.0, 0.5		5.0-2.5, 0.5		5.0-7.5, 0.5		7.5-5.0, 0.5	
x_{opt}	Γ_{opt}	Γ.Α. FEM	Γ.Α. BEM	Π.Α. BEM	Π.Α. FEM	Π.Α. BEM	Π.Α. FEM	Π.Α. BEM	Π.Α. FEM	Π.Α. BEM	Π.Α. FEM
2.5-2.5	0.2			3748	3431	3926	3226	3554			
	0.4			3792	2825	3506	3984	3347			
	0.6			3663	2548	3800	3811	3194			
	0.8			3614	3507	3855	3851				
	1			3181		3739	3686			3384	
2.5-7.5	0.2			3307	1829	3576	2938	2787	3331	2884	3863
	0.4			3074	3636	2529	2852	3198	3593	3231	3401
	0.6			3661	3083	3031	2368	2412	2331	3415	3214
	0.8			3542	2222		2541	2921	3158	2013	3505
	1			2751	2051	2257	2772	3598	2724	2933	2949
7.5-2.5	0.2			3457	3729	3826	3553	3580		3329	1262
	0.4			3322	2652	3633	3096	3526	2483	3706	3381
	0.6			3269	2724	3093	3007	3074	3248	2914	3610
	0.8			2513	2898	2234	3399	2963	2038	3613	3354
	1			3314	2850	2800	2107	3237	2564	3180	3051
5.0-5.0	0.2			3731	888	2687	1105	3798		2647	2253
	0.4			3212	2751	2574	1484	987	3184	2293	2788
	0.6			3896	3584	3494	3560	3742	3753	2137	3458
	0.8			2946	3370	2317	3182	3519	3616	3760	3469
	1			3577	3174	3239	3390	2530	3606	2802	2551
7.5-7.5	0.2			3710	3474	3649	3259	3339	3558	3750	3508
	0.4			3596	3467	3676	3080	3757	3798	3667	1845
	0.6			3564	3216	3477	3304	3849	3890	3705	3508
	0.8			3413	3409	3292	3343	3714	3693	3288	3718
	1			3484	3482	3313	3282	3588	3335	3465	3444

Πίνακας 4 (συνέχεια)

x_0, r_0		2.5-2.5, 0.5							2.5-7.5, 0.5						
x_{opt}	r_{opt}	Π.Α. BEM	Π.Α. FEM	H-J BEM	H-J FEM	S.Q.P. BEM	S.Q.P. FEM	Sup App. & First Order FEM	Π.Α. BEM	Π.Α. FEM	H-J BEM	H-J FEM	S.Q.P. BEM	S.Q.P. FEM	Sup App. & First Order FEM
2.5-2.5	0.2														523
	0.4														209
	0.6														
	0.8														
	1														
2.5-7.5	0.2	3467	3418	179		154	265	322							
	0.4	1619	3299	114	252	129	134	169							
	0.6	3289	2890	107	245	147	156	780							
	0.8	3349	3101	74	219	170	156	145							
	1	3358	3109	76	219	174	190	181							
7.5-2.5	0.2	3355		136	262	133			3238		286				
	0.4	2717	3452	104	243	151	170	321	3023	3381	113	322	200		190
	0.6	3230	3352	93	232	186	172	178		3097		270	231	238	148
	0.8	3353	3141	64	216	170	200	121	2827	2717	223	325	222	186	136
	1	3241	2849	76	215	669		135	2813	3001	89	212	211	186	158
5.0-5.0	0.2	3829	2388	153	261	120	259	406	3358		275	241	111		978
	0.4	3791	3711	123	269	119	123	134	3338	2455	110	251	153	152	
	0.6	3512	3702	125	284	162	161	177	3240	3511	111	278	138	125	321
	0.8	3605	2863	419	415	172	181	287	3138	3648	373	373	184	168	973
	1	3253	3195	156	249	159	174	130	3597	3472	96	243	139	196	214
7.5-7.5	0.2	3686	2959	160	682	135	179	46	3591	2598	516	373	176	251	799
	0.4	3350	3501	195	407	145	156	721	3614	2228	231	264	115	122	419
	0.6	3394	3478	242	357	191	206	136	3616	3622	472	463	182	162	153
	0.8	3197	3284	204	387	233		175	3486	3516	193	310	143	164	243
	1	3404	3253	198	287	223		177	3312	3412	147	240	180	181	671

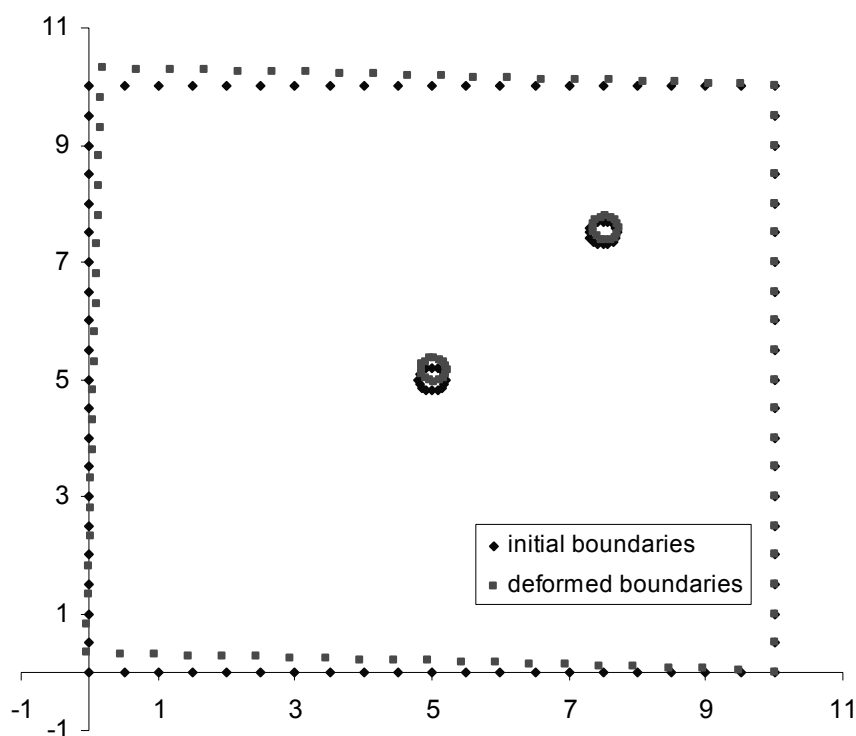
Πίνακας 4 (συνέχεια)

x_0, r_0		7.5-2.5, 0.5							5.0-5.0, 0.5						
x_{opt}	r_{opt}	Π.Α. BEM	Π.Α. FEM	H-J BEM	H-J FEM	S.Q.P. BEM	S.Q.P. FEM	Sup App. & First Order FEM	Π.Α. BEM	Π.Α. FEM	H-J BEM	H-J FEM	S.Q.P. BEM	S.Q.P. FEM	Sup App. & First Order FEM
2.5-2.5	0.2	3631		248	327	103	275	519	3727		125	238	107	314	
	0.4	3567	3467	282	251	135	130	184	3814		297	277	145	151	151
	0.6	3580	3435	119	258	154	150	173	3173	3850	379	307	133	128	169
	0.8	3487	2927	113	261	165	143	147	3426	3674	103	5860	150	135	
	1	3243	3214	66	198	173	155	207	3221	3337	183	12806	173	167	146
2.5-7.5	0.2							322	3609	2531	105	264	103	213	798
	0.4							94	2935	1358	116	249	129	170	
	0.6							183	3468	1923	82	212	119	118	
	0.8							147	3711	2683	57	203	173	131	194
	1							200	2873	3447	82	218	162	166	124
7.5-2.5	0.2								3365	3167	96	232	119	203	
	0.4								3577	3299	296	231	161	180	187
	0.6								2058	2384	309	315	141	139	168
	0.8								2061	1601	69	211	161	131	149
	1								3045	2392	74	213	253	158	171
5.0-5.0	0.2							230							
	0.4														
	0.6							210							
	0.8	3446						190							
	1	3371						143							
7.5-7.5	0.2							223	3483	2019	485	343	117		
	0.4							223	3616	3820	108	255	134	125	439
	0.6							225	3830	3333	418	415	142	151	196
	0.8							187	3303	3614	113	316	167	156	168
	1							208	3545	3522	67	212	166	139	226

Πίνακας 4 (συνέχεια)

$X_0 \Gamma_0$		7.5-7.5, 0.5						
X_{opt}	Γ_{opt}	Π.Α. BEM	Π.Α. FEM	H-J BEM	H-J FEM	S.Q.P. BEM	S.Q.P. FEM	Sup App. & First Order FEM
2.5-2.5	0.2			249	301			636
	0.4			304	293			368
	0.6							
	0.8						181	
	1							
2.5-7.5	0.2	3524				124	199	894
	0.4	3319	3505	116	241	148	137	171
	0.6	3391	3481	101	300	163	189	
	0.8	3362	3443	95	241	176	181	
	1	3399	3523	119	266	164	163	156
7.5-2.5	0.2	3753		98	244	114	177	
	0.4	3645	3436	76	230	116	134	289
	0.6	3573	3453	120	331	139	180	175
	0.8	3399	3503	76	226	178	171	151
	1	3413	2238	105	227	156	163	173
5.0-5.0	0.2	2864	3981	135	302	118	201	207
	0.4	2971	3122	108	246	123	133	
	0.6	2663	3716	123	294	148	133	
	0.8	3744	3634	443	443	149	158	166
	1	3471	3628	165	296	189	144	270
7.5-7.5	0.2							
	0.4							
	0.6							
	0.8							
	1							

xii. Προσέγγιση του προβλήματος δύο κυκλικών οπών.



Σχήμα 18: Το παραμορφωμένο σχήμα και οι απαραμόρφωτες πλευρές της αρχικής γεωμετρίας θεωρώντας δύο οπές ακτίνας 0.2 στις θέσεις (5.0-5.0) και (7.5-7.5) χρησιμοποιώντας τη Μέθοδο Συνοριακών Στοιχείων.

Μελετάται το πρόβλημα των δύο οπών μέσα σε σώμα (Σχήμα 18) που βρίσκεται σε κατάσταση επίπεδης παραμορφωσιακής κατάστασης. Οι διαστάσεις του σώματος και των ελαττωμάτων καθώς επίσης και οι φορτίσεις και στηρίξεις είναι ίδιες με το πρόβλημα της μίας οπής. Το ίδιο ισχύει και για τον κάνναβο που χρησιμοποιείται. Σε αυτή την περίπτωση όμως χρησιμοποιείται μόνο η Μέθοδος Συνοριακών Στοιχείων.

Στον Πίνακα 5 παρουσιάζονται αναλυτικά τα αποτελέσματα από τη χρήση της Μεθόδου του Γενετικού Αλγορίθμου χρησιμοποιώντας 10 τυχαία αρχικά διανύσματα, ενώ στον Πίνακα 6 παρουσιάζονται συγκεντρωτικά τα αποτελέσματα από τις μεθόδους Γενετικού Αλγορίθμου, Hooke and Jeeves και S.Q.P.

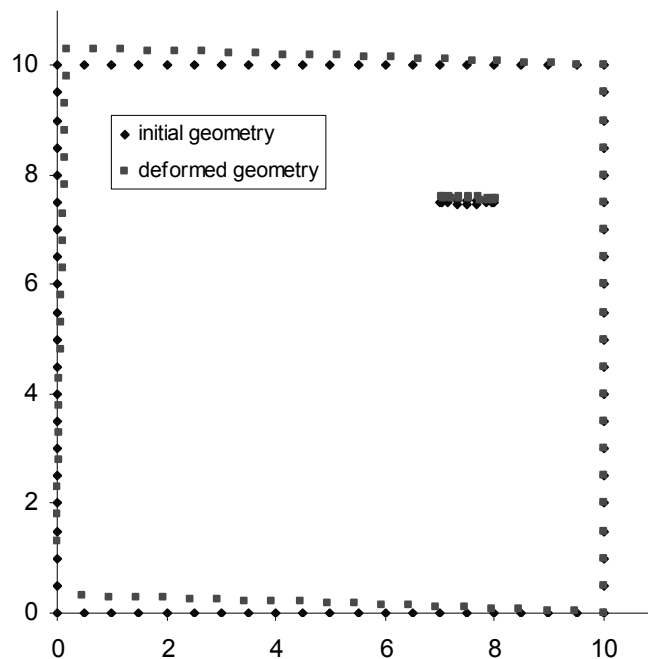
Πίνακας 5: Τα αποτελέσματα για την επίλυση του αντίστροφου προβλήματος με παραδοχή ύπαρξης δύο κυκλικών οπών με χρήση Υβριδικού Γενετικού Αλγορίθμου και της Μεθόδου Συνοριακών Στοιχείων για 10 τυχαία αρχικά διανύσματα

χ_{opt}	$\Gamma_{opt,1}$ ($=\Gamma_{opt,2}$)	Γ.Α. 1	Υβριδ. Γ.Α. 1	Γ.Α. 2	Υβριδ. Γ.Α. 2	Γ.Α. 3	Υβριδ. Γ.Α. 3	Γ.Α. 4	Υβριδ. Γ.Α. 4	Γ.Α. 5	Υβριδ. Γ.Α. 5	Γ.Α. 6	Υβριδ. Γ.Α. 6	Γ.Α. 7	Υβριδ. Γ.Α. 7	Γ.Α. 8	Υβριδ. Γ.Α. 8	Γ.Α. 9	Υβριδ. Γ.Α. 9	Γ.Α. 10	Υβριδ. Γ.Α. 10
2.5-2.5- 2.5-7.5	0.2	3601	3986	3845	4172	3809	4210	3739	4091	3802	4191	3691	4267	3864	4221	3518	3863	3924	4272	3623	4081
	1	3992	4277	4136	4439	3904	4230	4076	4323	4082	4490		4433	4044	4345	3964	4255	4214	4582	3996	4287
2.5-2.5- 7.5-2.5	0.2	3765	4022	3695	3984	3701	4076			3740	4044	3821	4146	3849	4253	3903	4249	3800	4145	3812	4133
	1		4280	4029	4452	3987	4277		4361	3904	4241	3968	4315	3959	4261		4350		4084	4174	4490
2.5-2.5- 5.0-5.0	0.2		4734	3965	4362	3876	4321	3873	4295	3807	4131	4023	4399	3944	4372	3747	4109	3932	4254	3784	4128
	1	3890	4288	4092	4403	4164	4662	4106	4562	4137	4438	3667	4006	4255	4598					3986	4466
2.5-2.5- 7.5-7.5	0.2	3867	4270	3856	4236	3865	4185		4302	3947	4297	3954	4333		4345				4288		4336
	1		4489				4437		4441		4435		4490	4068	4385	4171	4574				4570
2.5-7.5- 7.5-2.5	0.2	3754	3998	3673	3945	3924	4148			3863	4157	3869	4122	3856	4103	3734	3950	3803	4016	3761	4033
	1	4067	4396	4038	4298	4298	4554	4067	4396	4262	4536	4067	4396	4038	4298	4298	4554	3970	4285	4064	4365
2.5-7.5- 5.0-5.0	0.2	3945	4285		4123	3946	4377		4341	3848	4102	3771	4126	3832	4123	3772	4156		4216	3993	4253
	1		4554	4092	4382		4664		4710	4156	4419	4105	4442	3989	4371		4623	4067	4371	4116	4401
2.5-7.5- 7.5-7.5	0.2	3768	4057		4102	3772	4117	3939	4245		4417		4107				4126		4279	3798	4140
	1	3985	4249	3962	4299	3651	3876	4015	4284		4176	4013	4345	3939	4235			4029	4335		4567
7.5-2.5- 5.0-5.0	0.2	3814	4084		3962		4323		4233	3900	4185		4205	4027	4371	3470	3790	3760	4038	3962	4330
	1	4270	4568		4524		4103	4232	4531	4121	4396		4465		4456			3998	4404	4222	4571
7.5-2.5- 7.5-7.5	0.2		4143		4332		4408	3576	3954			3822	4202	3442	3829	3792	4134	3877	4112	3872	4300
	1	3894	4343	4026	4467	3760	4086			3748	4131	4006	4391	3984	4385		4321		4278	3659	
5.0-5.0- 7.5-7.5	0.2		4128	4006	4337	3820	4212	3920	4251	3812	4179	3939	4256		4127	3896	4220	3708	4063	3852	4264
	1	4170	4580	4201	4677		4634		4553	4061	4468	4250	4573	4252	4644		4481	4103	4496	3982	4414

Πίνακας 6: Συγκεντρωτικά τα αποτελέσματα για την επίλυση του αντίστροφου προβλήματος με παραδοχή ύπαρξης δύο κυκλικών οπών με χρήση των μεθόδων Γενετικού Αλγορίθμου, Hooke and Jeeves και S.Q.P.

X _{opt}	Γ _{opt,1} (=Γ _{opt,2})	X ₀ , Γ _{0,1} (=Γ _{0,2})	2.5-2.5- 2.5-7.5 0.5		2.5-2.5- 7.5-2.5 0.5		2.5-2.5- 5.0-5.0 0.5		2.5-2.5- 7.5-7.5 0.5		2.5-7.5- 7.5-2.5 0.5		2.5-7.5- 5.0-5.0 0.5		2.5-7.5- 7.5-7.5 0.5		7.5-2.5- 5.0-5.0 0.5		7.5-2.5- 7.5-7.5 0.5		5.0-5.0- 7.5-7.5 0.5		
			Γ.Α. BEM	H-J BEM	S.Q.P. BEM	H-J BEM	S.Q.P. BEM	H-J BEM	S.Q.P. BEM	H-J BEM	S.Q.P. BEM	H-J BEM	S.Q.P. BEM	H-J BEM	S.Q.P. BEM	H-J BEM	S.Q.P. BEM	H-J BEM	S.Q.P. BEM	H-J BEM	S.Q.P. BEM	H-J BEM	S.Q.P. BEM
2.5-2.5- 2.5-7.5	0.2																	564		701	1405	582	
	1																			938	1103	818	1004
2.5-2.5- 7.5-2.5	0.2																					535	659
	1																						
2.5-2.5- 5.0-5.0	0.2											680				718					745		
	1											1165				1022					954	861	
2.5-2.5- 7.5-7.5	0.2											785											
	1											1049	976										
2.5-7.5- 7.5-2.5	0.2																					725	1010
	1																					1105	
2.5-7.5- 5.0-5.0	0.2				989							823	698								856		
	1				978								960								1444	1092	
2.5-7.5- 7.5-7.5	0.2				858							831								658			
	1											828	902										
7.5-2.5- 5.0-5.0	0.2				1047	871						1149	1097							1069			
	1				657							687								1404			
7.5-2.5- 7.5-7.5	0.2																						
	1																						
5.0-5.0- 7.5-7.5	0.2				947	543																	
	1				1361	910																	

xiii. Προσέγγιση του προβλήματος μίας ρωγμής.

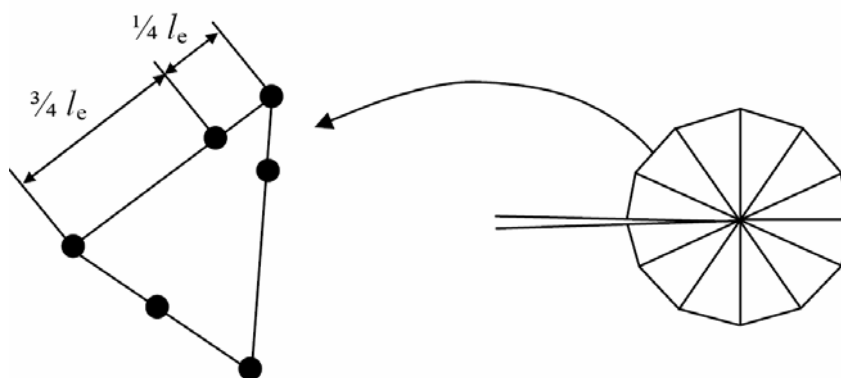


Σχήμα 19: Τα απαραμόρφωτα και παραμορφωμένα σύνορα θεωρώντας ρωγμή στη θέση (7.5 7.5) με μισό μήκος 0.6 και συντελεστή συρρίκνωσης του μήκους του μικρού άξονα σε σχέση με το μήκος του μεγάλου άξονα της ελλειπτικής οπής 0.05 χρησιμοποιώντας τη Μέθοδο Συνοριακών Στοιχείων.

Μελετάται το πρόβλημα της μίας ρωγμής μέσα σε σώμα (Σχήμα 19) που βρίσκεται σε κατάσταση επίπεδης παραμορφωσιακής κατάστασης. Οι διαστάσεις του σώματος είναι 10x10 ενώ η ρωγμή προσομοιάζεται με ελλειπτική οπή. Δοκιμάζονται οι εξής τιμές για το μισό μήκος του μεγάλου άξονα της έλλειψης: 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, ενώ δοκιμάζονται και δύο διαφορετικοί λόγοι μήκους του μικρού άξονα ως προς το μήκος του μεγάλου άξονα: 0.1 και 0.05. Οι φορτίσεις και στηρίξεις όπως επίσης και ο κένναβος είναι ίδια όπως και στην περίπτωση της μίας οπής.

Για την περίπτωση της ρωγμής, θεωρήθηκε απαραίτητο να διερευνηθεί η επιλογή κατάλληλης διακριτοποίησης κοντά στην οπή. Για το λόγο αυτό δοκιμάστηκε ρωγμή με γεωμετρία όπως φαίνεται στο Σχήμα 20 και λόγω της συγκέντρωσης τάσεων που αναμένεται στην κορυφή της, διακριτοποιήθηκε με τον τρόπο που φαίνεται στο ίδιο σχήμα. Στη συνέχεια έγινε δεύτερη επίλυση, θεωρώντας τη ρωγμή ως πεπλατυσμένη οπή και με πύκνωση στην περιοχή της. Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα των τιμών των μετατοπίσεων στα σύνορα από τις δύο επιλύσεις παρατηρήθηκε ότι δεν υπάρχει μετρήσιμη διαφορά. Εφόσον στη βελτιστοποίηση μας ενδιαφέρουν αυτές οι τιμές

μόνο (και όχι οι τιμές της τάσεις στην κορυφή της οπής για παράδειγμα) προτιμήθηκε η δεύτερη αντιμετώπιση της ρωγμής ως πεπλατυσμένη οπή. Αυτή η αντιμετώπιση είχε και το πλεονέκτημα ότι μπορούσε να αντιμετωπιστεί πιο εύκολα από τον κώδικα Συνοριακών Στοιχείων που ήταν διαθέσιμος.



Σχήμα 20: Ενδεικτική διακριτοποίηση στην κορυφή της ρωγμής για καλύτερη ακρίβεια της λύσης.

(Πηγή: <http://www.hallf.kth.se/kurser/0506/4C1111/Brottmekanik/Tutorial%203%20-%20Crack%20Problem.pdf>)

Δεύτερο πρόβλημα που θεωρήθηκε είναι το πιθανό κλείσιμο της ρωγμής κατά την φόρτισή της, κάτι που όπως αναφέρεται στη βιβλιογραφία (Stavroulakis, 2001) προκαλεί δυσκολία στην ανίχνευσή της. Για το λόγο αυτό εισάγεται μία μεταβλητή ελέγχου που τελικά δείχνει ότι η επιλογή της φόρτισης είναι η κατάλληλη έτσι ώστε να μην κλείνει η ρωγμή, ανεξάρτητα από τη θέση της. Για το λόγο αυτό δεν κρίνεται απαραίτητη η εισαγωγή στοιχείων επαφής στα χείλη της ρωγμής.

Στον Πίνακα 7 παρουσιάζονται αναλυτικά τα αποτελέσματα από την επίλυση του προβλήματος με τη Μέθοδο του Γενετικού Αλγορίθμου, ενώ στον Πίνακα 8 δίνονται συγκεντρωτικά τα αποτελέσματα από τις μεθόδους Γενετικού Αλγορίθμου, Hooke and Jeeves και S.Q.P. Οι Πίνακες 9, 10 είναι οι αντίστοιχοι για το πρόβλημα που χρησιμοποιούμε μειωμένα δεδομένα για τον υπολογισμό της συνάρτησης κόστους.

Πίνακας 7: Τα αποτελέσματα για την επίλυση του αντίστροφου προβλήματος με παραδοχή ύπαρξης ελλειπτικής οπής με χρήση Υβριδικού Γενετικού Αλγορίθμου και της Μεθόδου Συνοριακών Στοιχείων για 10 τυχαία αρχικά διανύσματα

χ_{opt}	r_{opt}	scale	Γ.Α. 1	Υβριδ. Γ.Α. 1	Γ.Α. 2	Υβριδ. Γ.Α. 2	Γ.Α. 3	Υβριδ. Γ.Α. 3	Γ.Α. 4	Υβριδ. Γ.Α. 4	Γ.Α. 5	Υβριδ. Γ.Α. 5	Γ.Α. 6	Υβριδ. Γ.Α. 6	Γ.Α. 7	Υβριδ. Γ.Α. 7	Γ.Α. 8	Υβριδ. Γ.Α. 8	Γ.Α. 9	Υβριδ. Γ.Α. 9	Γ.Α. 10	Υβριδ. Γ.Α. 10
2.5-2.5	0.5	0.1	2381	2584	2544	2653	2336	2590	2381	2490	2512	2619	2475	2559	2492	2595	2412	2524	2452	2573	2412	2539
		0.05	2511	2662	2509	2628	2487	2606	2434	2635	2384	2493	2335	2484	2459	2575	2452	2606	2120	2500	2427	2522
2.5-7.5	0.5	0.1	2517	2626	2447	2634	2518	2636	2180	2613	2420	2625	2474	2616	2322	2581	2428	2554	2414	2608	2530	2659
		0.05	2513	2636	1938	2612	2552	2681	2434	2604	2456	2587	2592	2700	2443	2560	2441	2597	2509	2599	2436	2579
7.5-2.5	0.5	0.1	2477	2577	2266	2559	2435	2528	2407	2537	2493	2593	2377	2525	2407	2564	2466	2564	2531	2647	2549	2646
		0.05	2443	2551	2488	2637	2495	2629	2476	2565	2399	2616	2527	2618	2318	2616	2508	2631	2412	2551	2446	2585
5.0-5.0	0.5	0.1	2603	2714	2503	2682	2540	2714	2532	2697	2493	2708	2538	2747	2603	2706	2483	2774	2314	2681	1417	2732
		0.05	2575	2714	2574	2670	2569	2683	2621	2770	2601	2710	2235	2669	2479	2639	2593	2708	2544	2706	2622	2743
7.5-7.5	0.5	0.1	2476	2644	2411	2577	2509	2636	2441	2609	2411	2577	2390	2534	2404	2574	2431	2549	2370	2487	2477	2645
		0.05	2454	2650	2419	2601	2485	2602	2535	2635	2515	2617	2482	2648	2427	2584	2366	2519	2451	2595	2288	2583

Πίνακας 8: Συγκεντρωτικά τα αποτελέσματα για την επίλυση του αντίστροφου προβλήματος με παραδοχή ύπαρξης μίας ελλειπτικής σπής (ρωγμής) με χρήση των μεθόδων Γενετικού Αλγορίθμου, Hooke and Jeeves και S.Q.P.

x_0, r_0				2.5-2.5, 0.2		2.5-7.5, 0.2		7.5-2.5, 0.2		5.0-5.0, 0.2		7.5-7.5, 0.2	
x_{opt}	r_{opt}	scale	Γ.Α. BEM	H-J BEM	S.Q.P. BEM	H-J BEM	S.Q.P. BEM	H-J BEM	S.Q.P. BEM	H-J BEM	S.Q.P. BEM	H-J BEM	S.Q.P. BEM
2.5-2.5	0.5	0.1				257	192	291	225	265	144	252	158
		0.05						231	123	220	118		
2.5-7.5	0.5	0.1		335	112			233	163	248	90	276	103
		0.05		288	91			301	108	247	103	254	118
7.5-2.5	0.5	0.1		210	146					200	130	225	148
		0.05		227	153	192	238			188	133	231	138
5.0-5.0	0.5	0.1		216	126	212	126	203	134			258	126
		0.05		242	144	247	120	258	127			283	125
7.5-7.5	0.5	0.1		241	189	215	122	244	112	220	107		
		0.05		287	148	232	137	269	130	255	124		

Πίνακας 9: Τα αποτελέσματα για την επίλυση του αντίστροφου προβλήματος με παραδοχή ύπαρξης ελλειπτικής οπής (ρωγμής) με χρήση Υβριδικού Γενετικού Αλγορίθμου και της Μεθόδου Συνοριακών Στοιχείων για 10 τυχαία αρχικά διανύσματα, θεωρώντας μειωμένα δεδομένα

x_{opt}	Γ_{opt}	scale	Γ.Α. 1	Υβριδ. Γ.Α. 1	Γ.Α. 2	Υβριδ. Γ.Α. 2	Γ.Α. 3	Υβριδ. Γ.Α. 3	Γ.Α. 4	Υβριδ. Γ.Α. 4	Γ.Α. 5	Υβριδ. Γ.Α. 5	Γ.Α. 6	Υβριδ. Γ.Α. 6	Γ.Α. 7	Υβριδ. Γ.Α. 7	Γ.Α. 8	Υβριδ. Γ.Α. 8	Γ.Α. 9	Υβριδ. Γ.Α. 9	Γ.Α. 10	Υβριδ. Γ.Α. 10
2.5-2.5	0.5	0.1		2691	2465	2616		2615		2620		2651		2634		2601		2517		2597	2227	2550
		0.05		2739		2643		2605	2358	2582		2647		2696				2595	2347	2607	2423	2661
2.5-7.5	0.5	0.1	2480	2627		2617	2420	2607	2420	2508	2460	2561	2296	2662	2513	2670	2319	2619	2432	2650	2081	2626
		0.05	2540	2657		2688	2468	2585	2474	2599	2388	2660	2433	2565	2491	2598	2473	2598	2465	2628	2532	2625
7.5-2.5	0.5	0.1		2652	2485	2654	2369	2588		2618	2392	2567		2718	2361	2551	2585	2745		2712	2468	2662
		0.05	2466	2699	2488	2672	2527	2677	2261	2732	2506	2687	2465	2716		2726	2344	2659	2025	2528	2461	2597
5.0-5.0	0.5	0.1	2348	2672	2569	2752		2797	2606	2748	2564	2705	2581	2724		2778	1948	2745	2518	2643		2763
		0.05		2691	2528	2724	2498	2680	2507	2617		2638	2650	2695		2619		2704	2618	2742		2720
7.5-7.5	0.5	0.1	2491	2617	2470	2642	2482	2598	2405	2610	2335	2559	2493	2592	2472	2621	2479	2581	2517	2617	2535	2642
		0.05	2397	2523	2504	2636	2404	2570	2460	2584	2475	2602	2460	2628	2427	2565	2497	2623		2479	2553	2658

Πίνακας 10: Συγκεντρωτικά τα αποτελέσματα για την επίλυση του αντίστροφου προβλήματος με παραδοχή ύπαρξης μίας ελλειπτικής οπής (ρωγμής) με χρήση διάφορων μεθόδων χρησιμοποιώντας μειωμένα δεδομένα

x ₀ , Γ ₀			2.5-2.5, 0.2			2.5-7.5, 0.2		7.5-2.5, 0.2		5.0-5.0, 0.2		7.5-7.5, 0.2	
x _{opt}	Γ _{opt}	scale	Γ.Α. BEM	H-J BEM	S.Q.P. BEM	H-J BEM	S.Q.P. BEM	H-J BEM	S.Q.P. BEM	H-J BEM	S.Q.P. BEM	H-J BEM	S.Q.P. BEM
2.5-2.5	0.5	0.1				245	86	163	138	283	108	154	118
		0.05							160				
2.5-7.5	0.5	0.1		101	145			112	122	96	79	257	128
		0.05		85				254		106	84		
7.5-2.5	0.5	0.1		190	155	174	130			208	123	125	115
		0.05		180	157		144			188	125	220	117
5.0-5.0	0.5	0.1		266	141	258	99	304	84			194	78
		0.05		278	103	304	88	360	103			345	90
7.5-7.5	0.5	0.1		255	157	252	137	233	126	231	134		
		0.05		221	163	462	114		124	229	121		

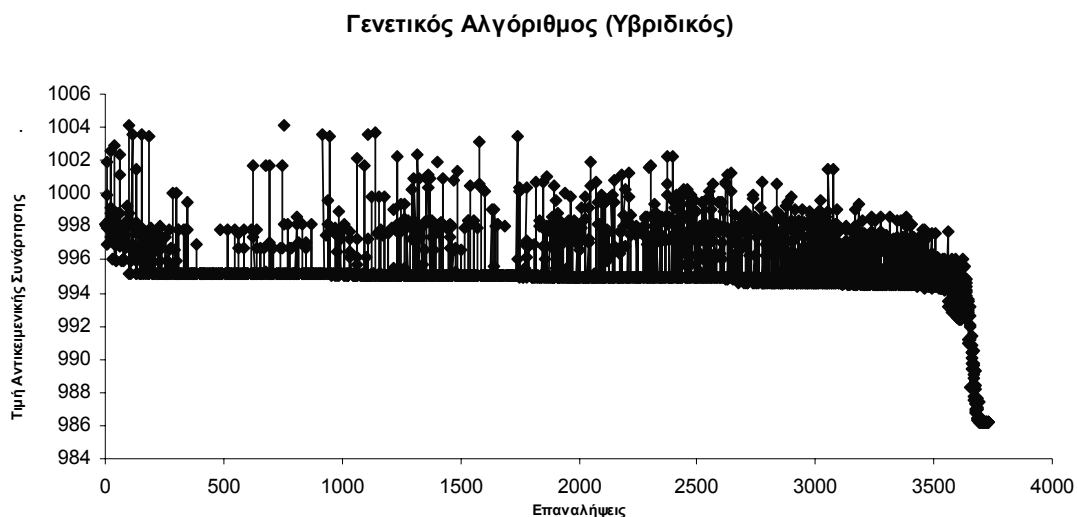
6. Συμπεράσματα - Συζήτηση

Έγινε παραμετρική ανάλυση για τη μελέτη ελαττωμάτων σε επίπεδο πρόβλημα. Τα συμπεράσματα που εξάγονται από την παρούσα εργασία αφορούν στη μελέτη της επίδρασης της θέσης και του μεγέθους του ελαττώματος καθώς επίσης και στη σημασία της επιλογής του αρχικού σημείου από το οποίο ξεκινάει η βελτιστοποίηση. Ακόμη συμπεράσματα εξάγονται σχετικά με την καταλληλότητα των μεθοδολογιών βελτιστοποίησης καθώς επίσης και των μεθόδων επίλυσης της φόρτισης επί της κατασκευής για το αντίστροφο πρόβλημα που μελετάται.

Ενδεικτικές πορείες σύγκλισης για τις μεθόδους που έχουν χρησιμοποιηθεί

Τα διαγράμματα αντιστοιχούν στα αποτελέσματα στα οποία κατέληξε η Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων για το πρόβλημα μίας οπής στη θέση (5.0-5.0) με ακτίνα 0.8, θεωρώντας αρχική οπή στη θέση (2.5-2.5) με ακτίνα 0.5.

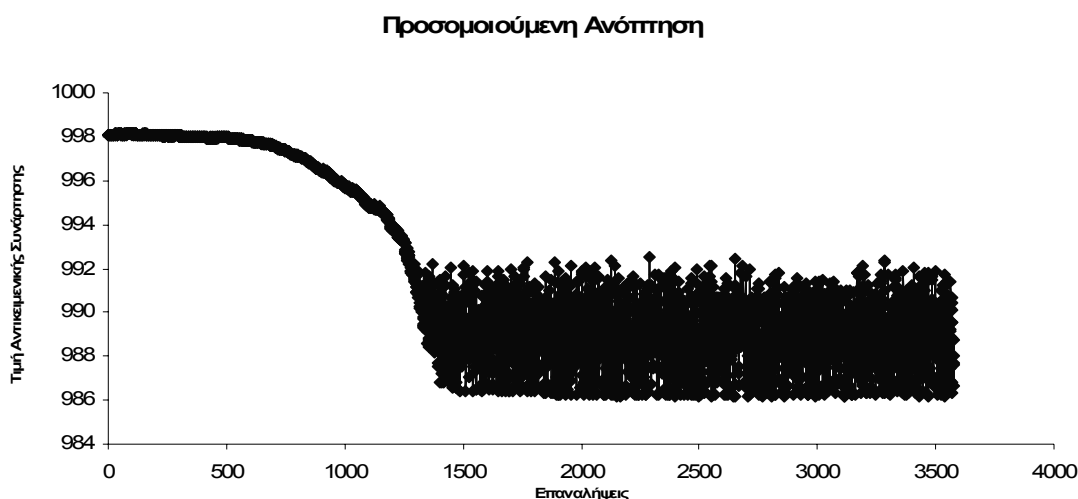
Γενικά παρατηρούμε αρκετά χαρακτηριστικές πορείες σύγκλισης για τις μεθόδους που μελετούνται.



Σχήμα 21: Πορεία σύγκλισης Υβριδικού Γενετικού Αλγορίθμου.

Στο Σχήμα 21 φαίνεται η πορεία σύγκλισης του Υβριδικού Γενετικού Αλγορίθμου. Παρατηρούμε ότι υπάρχουν 2 διακριτά κομμάτια, το πρώτο του Γενετικού Αλγορίθμου (σταματάει στις 3600 επαναλήψεις) και το δεύτερο της *fminsearch*. Στο πρώτο υπάρχουν μεγάλες αυξομειώσεις της τιμής της συνάρτησης κόστους και μικρή

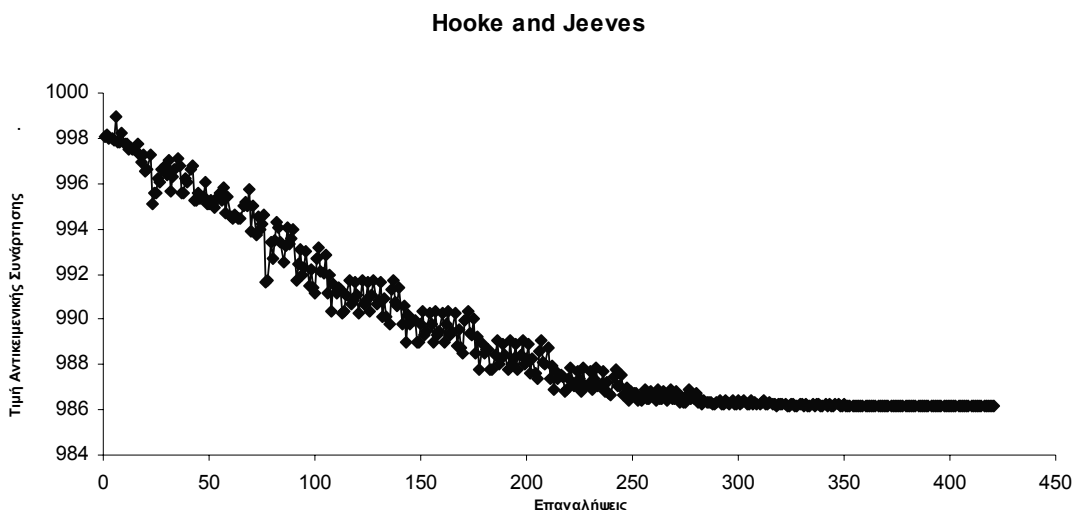
ουσιαστική βελτίωση του βέλτιστου διανύσματος μεταβλητών σχεδίασης (σε κάποιες περιπτώσεις η βελτίωση είναι μεγαλύτερη, αλλά σχεδόν πάντα γίνεται με αργούς ρυθμούς). Στο δεύτερο έχουμε μεγάλη και συνεχή βελτίωση με την `fminsearch`, εφόσον όμως ο Γενετικός Αλγόριθμος έχει εντοπίσει την περιοχή σύγκλισης.



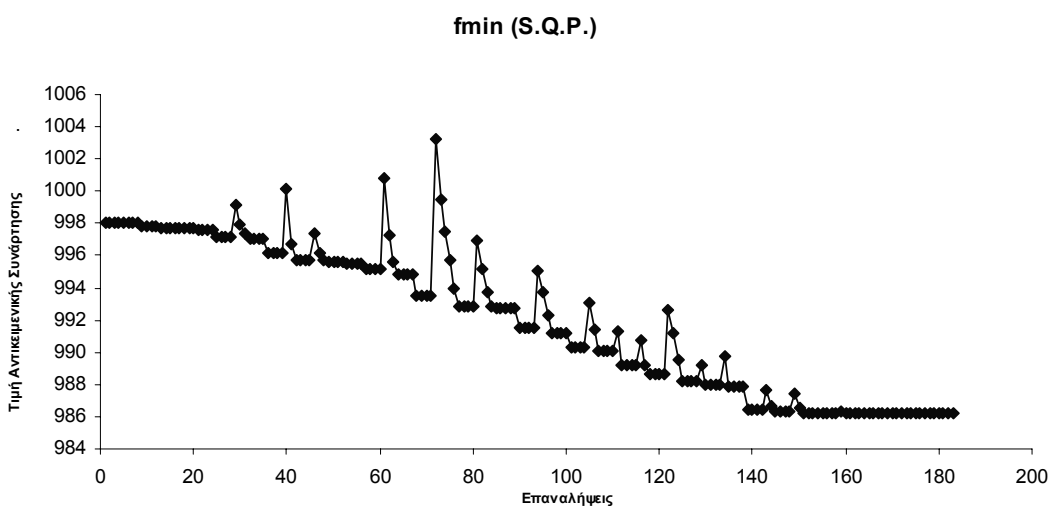
Σχήμα 22: Πορεία σύγκλισης Προσομοιούμενης Ανόπτησης.

Από το Σχήμα 22 παρατηρούμε ότι η μέθοδος της Προσομοιούμενης Ανόπτησης, εντοπίζει μία πιθανή περιοχή σύγκλισης κοντά στο μισό αριθμό των συνολικών επαναλήψεων της (κάπου στις 1500 επαναλήψεις) και μετά κάνει εξερευνητικές κινήσεις με μεγάλες αυξομειώσεις στις τιμές της συνάρτησης κόστους, λόγω της χαρακτηριστικής ικανότητας της μεθόδου να αποδέχεται και διανύσματα μεταβλητών σχεδίασης που δίνουν υψηλότερες τιμές της συνάρτησης κόστους από τη βέλτιστη. Αυτό βοηθάει σημαντικά τη μέθοδο ώστε να αποφεύγει τα τοπικά ελάχιστα και τελικά να δίνει το ολικό.

Μελετώντας τα Σχήματα 23, 24 φαίνεται ότι οι μέθοδοι Hooke and Jeeves και S.Q.P. έχουν σχεδόν την ίδια πορεία. Συγκλίνουν σε πολύ χαμηλότερο αριθμό επαναλήψεων σε σχέση με τις προηγούμενες δύο μεθόδους, όπως αναμένεται από το γεγονός ότι είναι και οι δύο αιτιοκρατικές μέθοδοι ενώ οι προηγούμενες στοχαστικές. Ακόμη, έχουν και οι δύο μία καθοδική πορεία (ως προς την τιμή της συνάρτησης κόστους), με πολύ μικρές διαταραχές που οφείλονται σε κάποιες εξερευνητικές κινήσεις των μεθόδων μέχρι να προσαρμοστούν προς τη κατεύθυνση που δίνει και το (τοπικό) βέλτιστο.



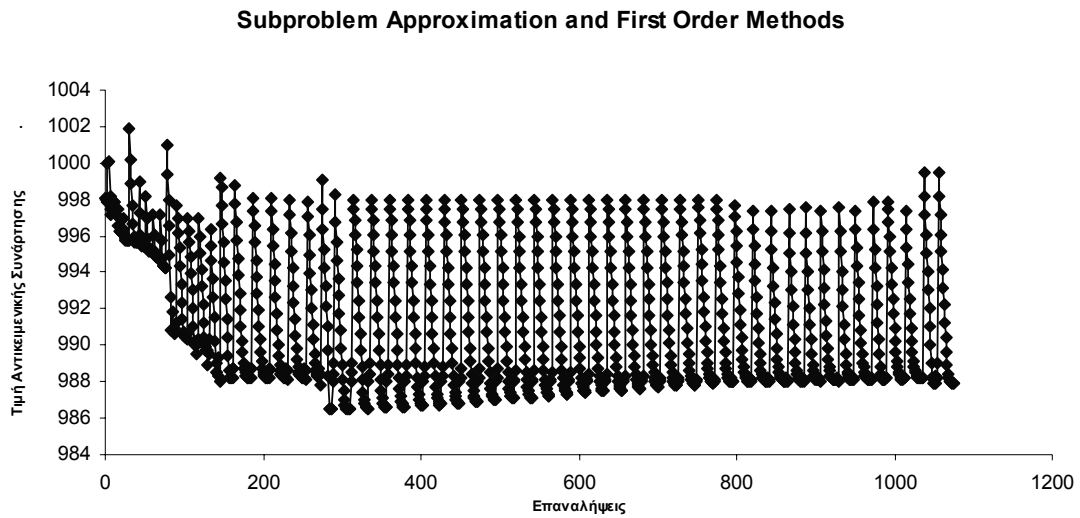
Σχήμα 23: Πορεία σύγκλισης μεθόδου Hooke and Jeeves.



Σχήμα 24: Πορεία σύγκλισης μεθόδου S.Q.P..

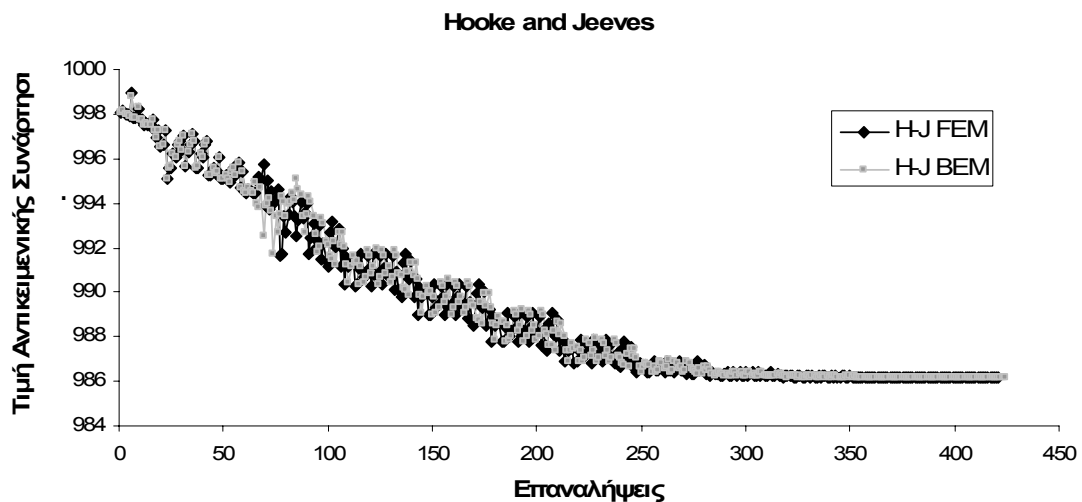
Η πορεία σύγκλισης της τελευταίας μεθόδου, που παρουσιάζεται στο Σχήμα 25, δείχνει ότι δεν υπερτερεί σε σχέση με τις υπόλοιπες μεθόδους. Ενώ είναι αιτιοκρατική απαιτεί σημαντικά μεγαλύτερο αριθμό επαναλήψεων από τις μεθόδους Hooke and Jeeves και S.Q.P., ενώ έχει και μεγάλες αυξομειώσεις στην τιμή της συνάρτησης κόστους, οι οποίες όμως (όπως φαίνεται από άλλα τρεξίματα που γίνονται με την ίδια μέθοδο) δεν βοηθάνε στην αποφυγή τοπικών ελαχίστων. Η Subproblem Approximation Method, που στο Σχήμα 25 σταματάει στις 20 επαναλήψεις, είναι ιδιαίτερα στιβαρή και χρονοβόρα, ενώ η First Order Method, παρόλο που δίνει

γρήγορες βελτιώσεις στην τιμή της συνάρτησης κόστους, αργεί να συγκλίνει και η πορεία της εξαρτάται πολύ από την επιλογή των παραμέτρων της.

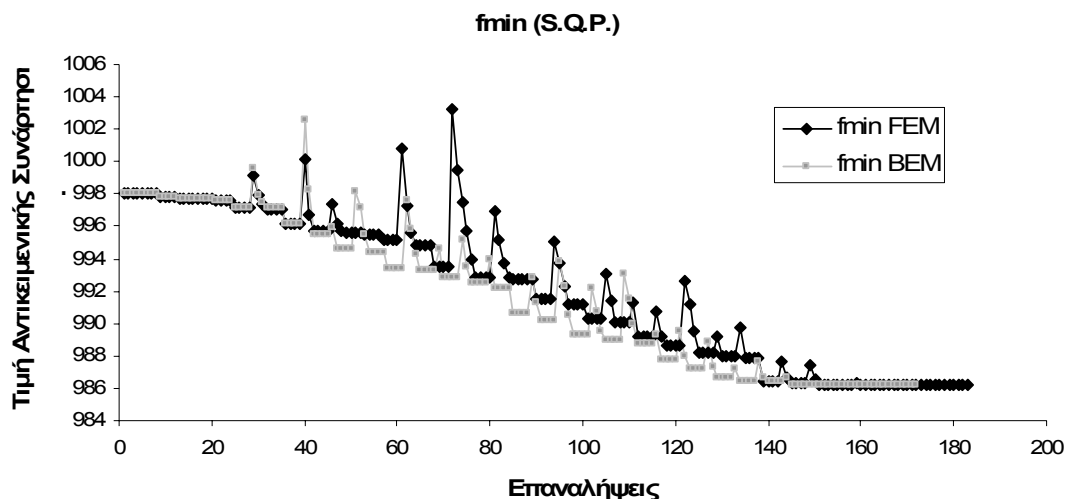


Σχήμα 25: Πορεία σύγκλισης Subproblem Approximation και First Order Methods.

Από τα Σχήματα 26, 27 φαίνεται να μην υπάρχει μεγάλη διαφορά στην εφαρμογή των μεθόδων βελτιστοποίησης είτε με τη Μέθοδο Πεπερασμένων Στοιχείων, είτε με τη Μέθοδο Συνοριακών Στοιχείων, ως προς την πορεία σύγκλισης. Μικρές διαφορές που φαίνονται στα διαγράμματα, μπορεί να οφείλονται στη μικρή διαφορά στις τιμές των μεγεθών που δίνουν οι δύο μέθοδοι από κατασκευής τους (αποτελούν διαφορετικές αριθμητικές προσεγγίσεις της λύσης ενός προβλήματος) ακόμα και σε σφάλματα στρογγυλοποίησης και αποκοπής. Αυτές οι διαφορές, όμως, δεν φαίνονται να είναι ικανές να αλλάξουν την πορεία σύγκλισης των μεθόδων.

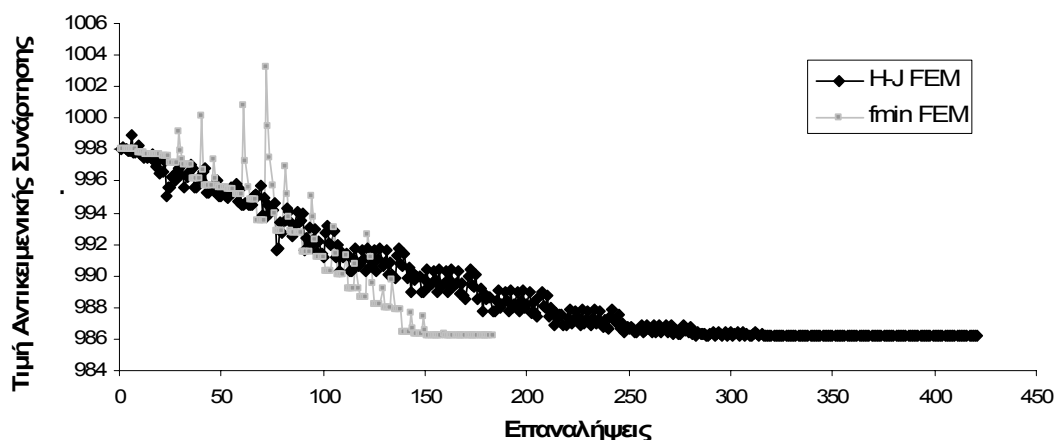


Σχήμα 26: Σύγκριση πορείας σύγκλισης της μεθόδου Hooke and Jeeves, χρησιμοποιώντας τις Μεθόδους Πεπερασμένων και Συνοριακών Στοιχείων.

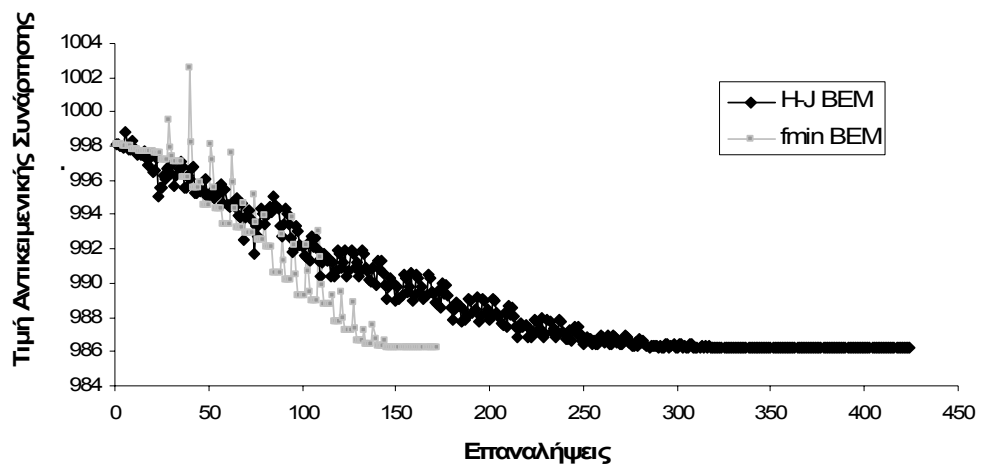


Σχήμα 27: Σύγκριση πορείας σύγκλισης της μεθόδου S.Q.P., χρησιμοποιώντας τις μεθόδους Πεπερασμένων και Συνοριακών Στοιχείων.

Στα Σχήματα 28, 29 παρουσιάζεται συγκριτικά η πορεία σύγκλισης των μεθόδων Hooke and Jeeves και S.Q.P. χρησιμοποιώντας είτε τη Μέθοδο Πεπερασμένων Στοιχείων (Σχήμα 28) είτε τη Μέθοδο Συνοριακών Στοιχείων (Σχήμα 29). Και στις δύο περιπτώσεις παρατηρούμε μία μικρή υπεροχή της S.Q.P. ως προς τον αριθμό των επαναλήψεων που απαιτούνται για τη σύγκλιση. Τα διαγράμματα ίσως είναι παραπλανητικά ως προς τον αριθμό επαναλήψεων της μεθόδου Hooke and Jeeves, ο οποίος εξαρτάται από τις τιμές των παραμέτρων που επιλέγονται. Για σκοπούς σύγκρισης των δύο μεθόδων, θεωρείται ότι η Hooke and Jeeves έχει συγκλίνει κάπου στις 300 επαναλήψεις για τις περιπτώσεις που παρουσιάζονται στα συγκεκριμένα διαγράμματα.



Σχήμα 28: Σύγκριση πορείας σύγκλισης των μεθόδων Hooke and Jeeves και S.Q.P. , χρησιμοποιώντας τη Μέθοδο Πεπερασμένων Στοιχείων.



Σχήμα 29: Σύγκριση πορείας σύγκλισης των μεθόδων *Hooke and Jeeves* και *S.Q.P.*, χρησιμοποιώντας τη Μέθοδο Συνοριακών Στοιχείων.

Στατιστικά Στοιχεία για τις μεθόδους που διερευνήθηκαν

1. Επεξεργασία αποτελεσμάτων από το πρόβλημα της μίας οπής

Από τα αποτελέσματα της παραμετρικής ανάλυσης εξάγονται τα εξής στατιστικά στοιχεία:

Πίνακας 11: Σύγκριση συνολικών αποτελεσμάτων από όλες τις μεθόδους για τις Μεθόδους Πεπερασμένων Στοιχείων και Συνοριακών Στοιχείων για το πρόβλημα της μίας οπής

Μέθοδος	Μέσος Όρος Επιτυχίας Μεθόδων (%)
BEM	83.4
FEM	79.5

Πίνακας 12: Σύγκριση επαναλήψεων που απαιτούνται από τις Μεθόδους Συνοριακών και Πεπερασμένων Στοιχείων για το πρόβλημα της μίας οπής (χωρίς να θεωρηθεί η Subproblem Approximation Problem και οι στοχαστικές)

Μέθοδος	Επαναλήψεις
BEM	167.5
FEM	316.1

Πίνακας 13: Σύγκριση χρόνου που απαιτείται για τις Μεθόδους Συνοριακών και Πεπερασμένων Στοιχείων για το πρόβλημα της μίας οπής.

Μέθοδος	Χρόνος για επίλυση 1 ευθέως προβλήματος
BEM	0.078 sec
FEM	1.67sec

Στους Πίνακες 11-13 γίνεται μία σύγκριση ανάμεσα στις Μεθόδους Πεπερασμένων και Συνοριακών Στοιχείων ως προς τα ποσοστά επιτυχίας τους (Πίνακας 11), των αριθμό των επαναλήψεων που απαιτούν (Πίνακας 12) και τον απαιτούμενο χρόνο για μία επανάληψη (Πίνακας 13). Παρατηρούμε ότι η Μέθοδος των Συνοριακών Στοιχείων υπερτερεί της Μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων κατά κύριο λόγο ως προς τον απαιτούμενο χρόνο επίλυσης αλλά και ως προς το ποσοστό επιτυχίας και το πλήθος των επαναλήψεων.

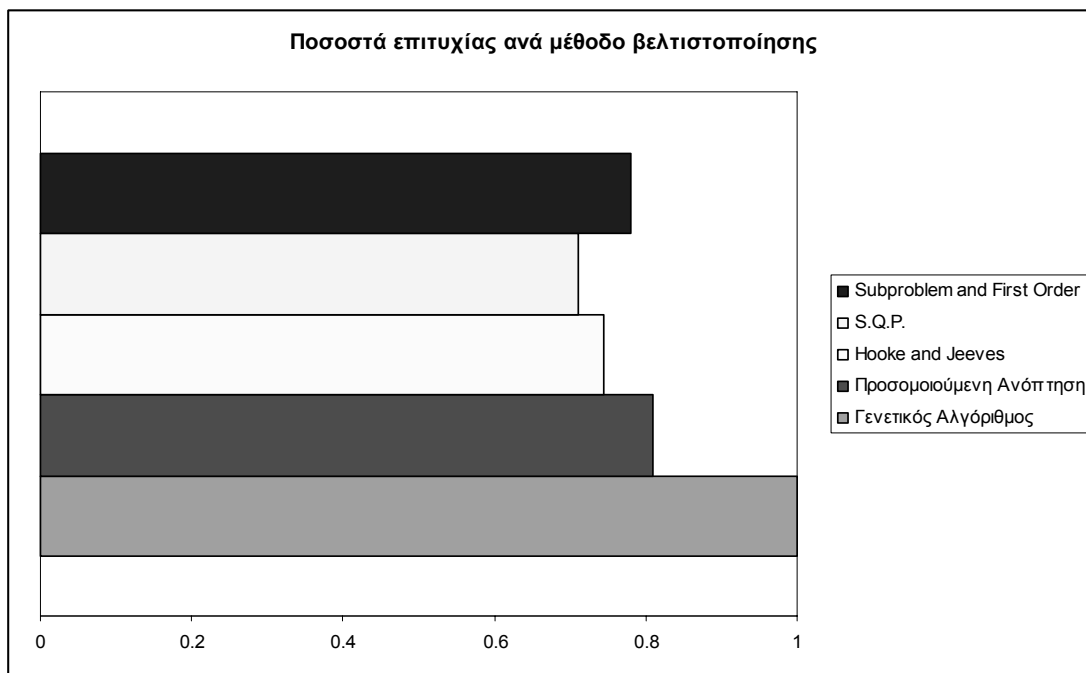
Η υπεροχή των Συνοριακών Στοιχείων οδήγησε στην αποκλειστική τους χρήση στα υπόλοιπα παραδείγματα που επιλύθηκαν. Έτσι η παραμετρική ανάλυση γίνεται πλέον ανάμεσα σε διαφορετικές θέσεις και μεγέθη των ελαττωμάτων, διαφορετικά αρχικά

σημεία, και διαφορετικές μεθόδους βελτιστοποίησης (οι οποίες καλούνε τη Μέθοδο Συνοριακών Στοιχείων). Τα ίδια επιχειρήματα ισχύουν και για την περίπτωση της ρωγμής.

Στους Πίνακες 14, 15 και στα Σχήματα 30, 31 παρουσιάζονται συνολικά τα αποτελέσματα όλων των μεθόδων που έχουνε χρησιμοποιηθεί για το πρόβλημα της εύρεσης της 1 οπής. Τα αποτελέσματα συγκρίνονται ως προς τα ποσοστά επιτυχίας της κάθε μεθόδου και ως προς τον αριθμό των επαναλήψεων που απαιτούνται μέχρι την σύγκλιση.

Πίνακας 14: Σύγκριση μεθόδων S.Q.P. – Hooke and Jeeves – Προσομοιούμενη Ανόπτηση – Υβριδικός Γενετικός Αλγόριθμος και Subproblem Approximation Problem & First Order Methods ελέγχοντας αν υπάρχει «προτίμηση» σε Μέθοδο Πεπερασμένων Στοιχείων ή σε Μέθοδο Συνοριακών Στοιχείων για το πρόβλημα της μίας οπής

Μέθοδος Βελτιστοποίησης	Μέθοδος Επίλυσης Προβλήματος	Επιτυχίες Επαναλήψεις	Ποσοστό Επιτυχίας (%)	Ποσοστό Επιτυχίας με τουλάχιστον ένα εκ των αρχικών σημείων (%)
S.Q.P.	BEM	74/100	74	100
	FEM	68/100	68	
	Συνολικά	142/200	71	
Hooke and Jeeves	BEM	75/100	75	100
	FEM	74/100	74	
	Συνολικά	149/200	74.5	
Προσομοιούμενη Ανόπτηση	BEM	169/200	84.5	100
	FEM	155/200	77.5	
	Συνολικά	324/400	81	
Γενετικός Αλγόριθμος και fminsearch (Υβριδικός Γενετικός Αλγόριθμος)	BEM	250/250	100	100
	FEM	250/250	100	
	Συνολικά	500/500	100	
Subproblem Approximation Problem + First Order Methods	FEM	78/100	78	100
	Συνολικά	78/100	78	

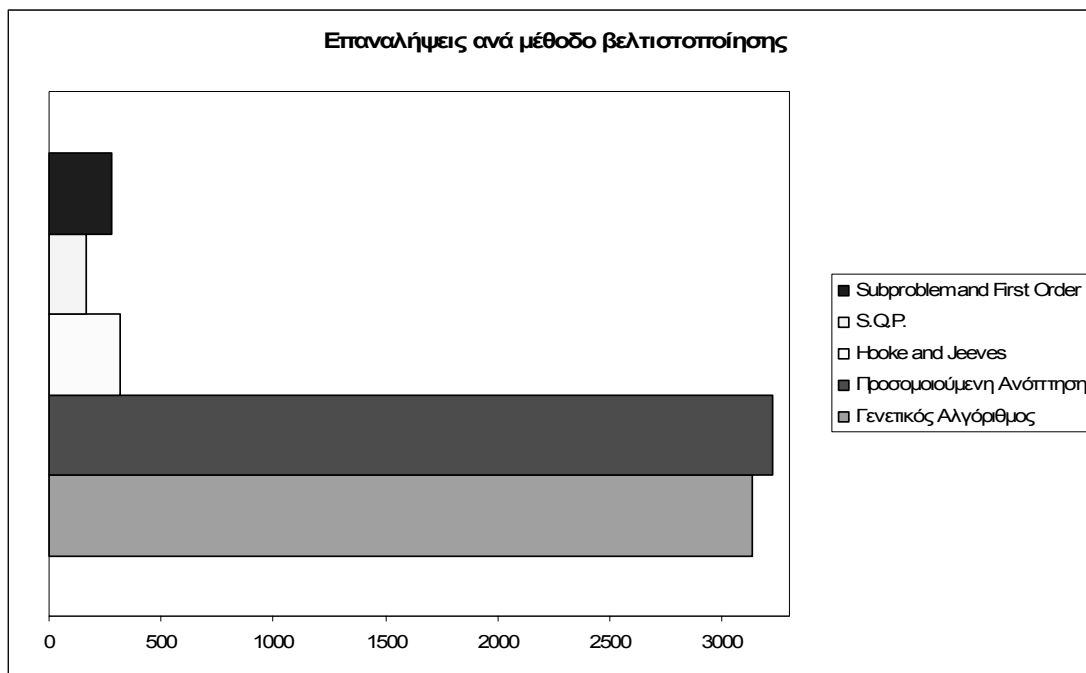


Σχήμα 30: Σύγκριση ποσοστών επιτυχίας ανά μέθοδο βελτιστοποίησης για το πρόβλημα της μίας οπής θεωρώντας όλες τις μεθόδους επίλυσης της φόρτισης πάνω στην κατασκευή και όλα τα τελικά και αρχικά σημεία.

Πίνακας 15: Σύγκριση επαναλήψεων για το πρόβλημα της μίας οπής

Μέθοδος	Μέθοδος Επίλυσης Προβλήματος	Μέσος Όρος Επαναλήψεων
S.Q.P.	BEM	159.6
	FEM	171.1
	Συνολικά	165.4
Hooke and Jeeves*	BEM	175.4
	FEM	461.1
	Συνολικά	318.2
Προσομοιούμενη Ανόπτηση	BEM	3305.7
	FEM	3137.6
	Συνολικά	3221.6
Γενετικός Αλγόριθμος και fminsearch (Υβριδικός Γενετικός Αλγόριθμος)	BEM	3746.6
	FEM	2516.1
	Συνολικά	3131.4
Subproblem Approximation Problem + First Order Methods	FEM	281.8

* (ευαίσθητη σε παραμέτρους όπως το βήμα και ο λόγος μείωσης του βήματος)



Σχήμα 31: Σύγκριση επαναλήψεων ανά μέθοδο βελτιστοποίησης για το πρόβλημα της μίας οπής θεωρώντας όλες τις μεθόδους επίλυσης της φόρτισης επί της κατασκευής και όλα τα τελικά και αρχικά σημεία.

Ο Γενετικός Αλγόριθμος, όπως φαίνεται από τα τρεξίματα που έχουνε γίνει, λόγω του περιορισμού στον αριθμό των γενεών δεν προλαβαίνει να συγκλίνει. Στην περίπτωση όμως της μίας κυκλικής οπής και της ελλειπτικής οπής με δεδομένα από όλες τις πλευρές, τότε σε όλα τα τρεξίματα ο Γενετικός Αλγόριθμος πετυχαίνει να δώσει μία πολύ καλή προσέγγιση για την περιοχή στην οποία βρίσκεται το ελάττωμα. Συγκεκριμένα δίνει τις μεταβλητές με σφάλμα 1-10% του πεδίου ορισμού και αυτό εξασφαλίζει ένα καλό αρχικό σημείο για την *fminsearch* (συγκεκριμένα σε όλες τις περιπτώσεις που ο Γενετικός Αλγόριθμος δίνει τόσο καλή προσέγγιση, τότε η *fminsearch* συγκλίνει πάντοτε στο σωστό διάνυσμα μεταβλητών με την απαιτούμενη ακρίβεια). Λίγο χειρότερες οι περιπτώσεις των δύο κυκλικών οπών και της ελλειπτικής οπής με μειωμένα δεδομένα, όπου σε ορισμένες περιπτώσεις ο Γενετικός Αλγόριθμος αποτυγχάνει να βρει την περιοχή της κάθε μεταβλητής. Στην πρώτη περίπτωση (των δύο κυκλικών οπών), αυτό συχνά έχει ως αποτέλεσμα την αποτυχία της *fminsearch* να συγκλίνει στο σωστό διάνυσμα μεταβλητών, ενώ στη δεύτερη περίπτωση (ελλειπτικής οπής με μειωμένα δεδομένα), φαίνεται ότι η *fminsearch* μπορεί (31 περιπτώσεις από τις 32 στις οποίες φαίνεται να αποτυγχάνει ο Γενετικός Αλγόριθμος) να αντιμετωπίσει την αδυναμία του Γενετικού Αλγορίθμου και να συγκλίνει. Αυτό δείχνει ότι παρόλο που ο Γενετικός Αλγόριθμος δεν κατάφερε να

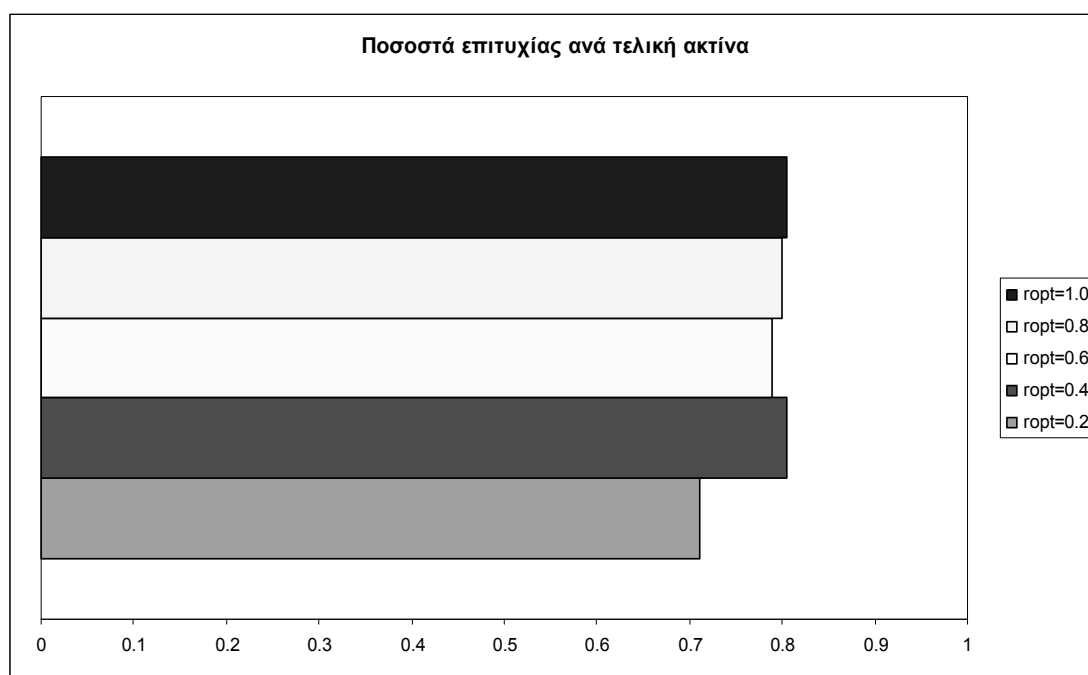
φτάσει κοντά στο σωστό διάλυμα, δίνει μία καλή εκτίμηση έτσι ώστε η `fminsearch` να οδηγηθεί σε καλή πορεία. Γενικά μπορούμε να πούμε ότι, στην πλειοψηφία των περιπτώσεων, ο Γενετικός Αλγόριθμος φαίνεται να έχει αρκετά μεγάλη επιτυχία ακόμα και εφαρμοζόμενος μόνος του, αλλά έχει καλύτερα αποτελέσματα όταν συνδυάζεται με την `fminsearch` για βελτίωση της ακρίβειας του. Συγκριτικά με τις υπόλοιπες μεθόδους ο Γενετικός Αλγόριθμος (σε υβριδική μορφή) φαίνεται να δίνει τα πιο καλά αποτελέσματα, όπως είναι αναμενόμενο λόγω της δυσκολίας που εμφανίζουν τα αντίστροφα προβλήματα, κάτι που οι στοχαστικοί αλγόριθμοι καταφέρνουν να αντιμετωπίσουν. Λόγω, όμως, του μεγάλου αριθμού υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης που απαιτούνται για τη μέθοδο αυτή δεν προτείνεται παρά μόνο για περιπτώσεις που αποτυγχάνουν οι άλλες μέθοδοι.

Τα ίδια σχόλια ισχύουν και για τη μέθοδο Προσομοιούμενης Ανόπτησης, που συγκριτικά με το Γενετικό Αλγόριθμο έχει χαμηλότερο ποσοστό επιτυχίας αλλά συγκριτικά με τις αιτιοκρατικές μεθόδους υπερτερεί, με βάση το ίδιο κριτήριο. Συγκρίνοντας όμως τον αριθμό επαναλήψεων που απαιτείται με τον αντίστοιχο για τις αιτιοκρατικές, καταλήγουμε και πάλι στο ίδιο συμπέρασμα, όπως και με το Γενετικό Αλγόριθμο, ότι δηλαδή πρέπει να χρησιμοποιείται μόνο όταν αποτύχουν οι άλλες μέθοδοι. Μεγάλη προσοχή χρειάζεται στην επιλογή του μοτίβου κίνησης, κάτι το οποίο επηρεάζει σημαντικά τον αριθμό των επαναλήψεων που απαιτούνται. Για να γίνει αποτελεσματική επιλογή χρειάζεται κατανόηση του προβλήματος που επιλύεται (Kirkpatrick, 1983) κάτι το οποίο δεν είναι πάντα εφικτό σε αντίστροφα προβλήματα.

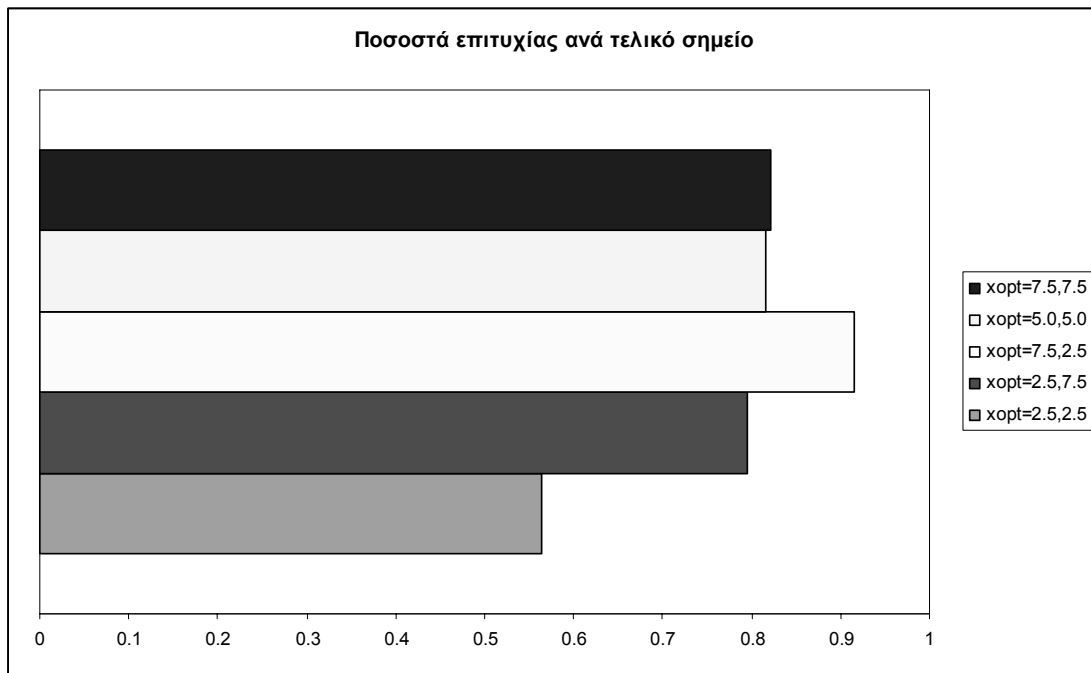
Ανάμεσα στις αιτιοκρατικές μεθόδους, όπως έχει προαναφερθεί στην περιγραφή των μεθόδων, φαίνεται να αποτυγχάνει η Subproblem Approximation Method που υλοποιείται από το λογισμικό της ANSYS αλλά έχει καλύτερα αποτελέσματα όταν συνδυάζεται με την First Order Method του ίδιου λογισμικού (τα ποσοστά που δίνονται πιο πάνω είναι για το συνδυασμό των δύο μεθόδων. Παρατηρήθηκε ότι αν γίνουν αλλαγές στις παραμέτρους της First Order επιτυγχάνεται ακόμα καλύτερη συμπεριφορά αλλά με δραματική αύξηση του απαιτούμενου χρόνου για σύγκλιση της μεθόδου. Για τους λόγους αυτούς, οι δύο αυτές μέθοδοι δεν προτείνονται παρά μόνο στην περίπτωση που απαιτείται μία πρώτη επίλυση ενός προβλήματος και δεν υπάρχει πρόσβαση στους αλγορίθμους των άλλων μεθόδων. Και σε αυτή την περίπτωση απαιτείται προσοχή στην επιλογή των παραμέτρων τους.

Καταλήγοντας στις δύο τελευταίες μεθόδους, S.Q.P. και Hooke and Jeeves, δεν φαίνεται να υπάρχει ιδιαίτερος λόγος προτίμησης της μίας σε σχέση με την άλλη εφόσον φαίνεται να έχουν και οι δύο τα πλεονεκτήματά τους. Η μέθοδος Hooke and Jeeves έχει μεγαλύτερα ποσοστά επιτυχίας αλλά φαίνεται να είναι ιδιαίτερα ευαίσθητη στην επιλογή του βήματος και του συντελεστή μείωσής του. Αντίθετα η μέθοδος S.Q.P. είναι πιο γρήγορη (λιγότερες επαναλήψεις) αλλά είναι πιο στιβαρή (λιγότερο ευαίσθητη σε αλλαγή παραμέτρων) και μπορεί εύκολα να χρησιμοποιηθεί από όποιον διαθέτει το λογισμικό του MATLAB 7.0 καθώς υπάρχει έτοιμη σε υπορουτίνα.

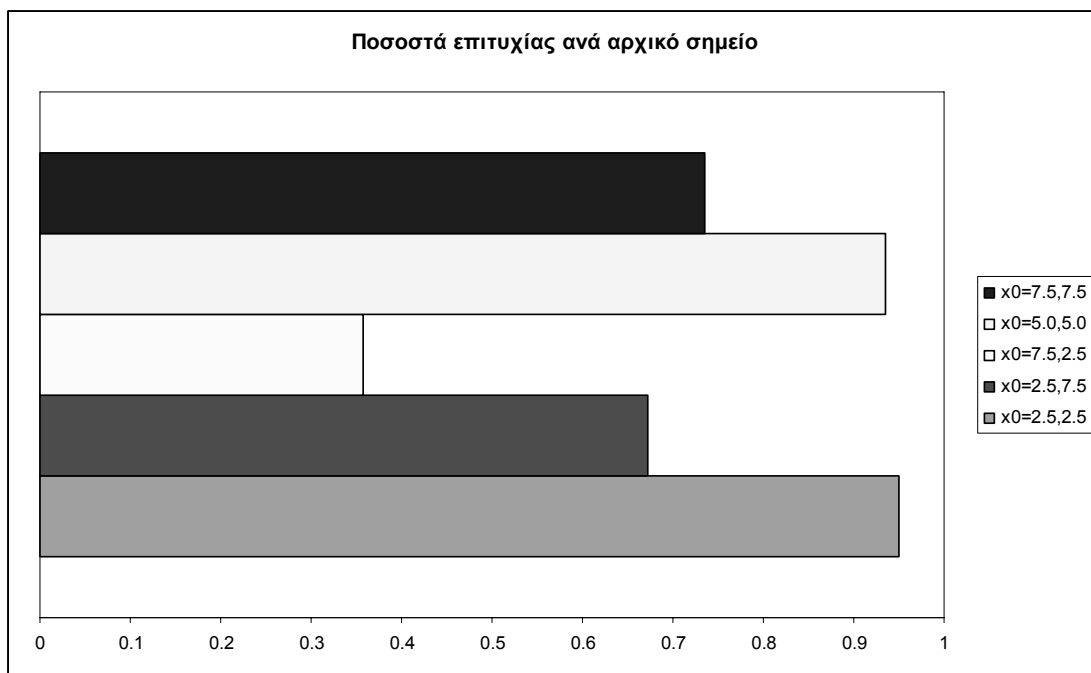
Μελετώντας τα αποτελέσματα από την επίλυση του πρώτου προβλήματος της 1 οπής ως προς τα αρχικά και τελικά διανύσματα που χρησιμοποιούνται παρατηρούμε ότι όλα τα μεγέθη οπών που δοκιμάζονται εντοπίζονται με την ίδια ευκολία (Σχήμα 32). Ελαφρώς μικρότερο το ποσοστό ανίχνευσης μικρών οπών (για ακτίνα 0.2) αλλά αρκετά υψηλό ώστε να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι η μέθοδος επιτυγχάνει να τις ανιχνεύσει.



Σχήμα 32: Σύγκριση ποσοστών επιτυχίας ανά τελική ακτίνα για το πρόβλημα της μίας οπής θεωρώντας όλες τις μεθόδους και όλα τα αρχικά σημεία.



Σχήμα 33: Σύγκριση ποσοστών επιτυχίας ανά τελικό σημείο για το πρόβλημα της μίας οπής θεωρώντας όλες τις μεθόδους και όλα τα αρχικά σημεία.



Σχήμα 34: Σύγκριση ποσοστών επιτυχίας ανά αρχικό σημείο για το πρόβλημα της μίας οπής θεωρώντας όλες τις μεθόδους και όλα τα τελικά σημεία.

Η θέση του τελικού σημείου (Σχήμα 33) δεν φαίνεται να επηρεάζει πολύ την επιτυχία της μεθόδου. Εμφανίζεται πιο εύκολα ανιχνεύσιμη η θέση (7.5,2.5) και πιο δύσκολα ανιχνεύσιμη η θέση (2.5,2.5).

Όσον αφορά στη θέση του αρχικού σημείου που χρησιμοποιείται, μπορούμε να πούμε ότι εμφανίζεται μία τάση αδυναμίας ανίχνευσης ελαττωμάτων όταν ξεκινάμε από συγκεκριμένο αρχικό σημείο (7.5-2.5) (Σχήμα 34). Συγκεκριμένα από τις 4 θέσεις ελαττωμάτων που δοκιμάστηκαν, μόνο μία ανιχνεύτηκε. Ίσως η θέση αυτή να μην είναι αποτελεσματική για τη βελτιστοποίηση επειδή είναι ανάμεσα στο ακίνητο και στο φορτισμένο σύνορο, κάτι που δημιουργεί ιδιαίτερα έντονο εντατικό και παραμορφωσιακό πεδίο στην περιοχή. Ακόμα, αν θεωρήσουμε τη συμμετρία της γεωμετρίας του προβλήματός μας, περιμένουμε ότι το σημείο (5.0,5.0) θα λειτουργεί καλά ως αρχικό σημείο εφόσον έχει καλύτερες πιθανότητες να είναι κοντά στο ελάττωμα από οποιοδήποτε άλλο σημείο. Αυτό δεν είναι απόλυτο κριτήριο, εφόσον το επιχείρημα της συμμετρίας της γεωμετρίας δεν επάγεται συμμετρία και στην κατανομή της συνάρτησης κόστους, ιδιαίτερα λόγω της ύπαρξης ελαττώματος αλλά και της ασυμμετρίας στη φόρτιση και τη στήριξη. Παρόλα αυτά το σημείο αυτό φαίνεται να είναι αρκετά καλό ως αρχικό σημείο κάτι που δικαιολογεί τον διαισθητικό τρόπο σκέψης που παρουσιάστηκε πιο πάνω. Το σημείο (2.5,7.5) φαίνεται να είναι επίσης καλό αρχικό σημείο, χωρίς όμως να υπάρχει κάποια προφανής δικαιολογία.

Ίσως να αξίζει να σημειωθεί ότι τα Σχήματα 33, 34 μοιάζουν «συμπληρωματικά», δηλαδή αυτό που φαίνεται να είναι χειρότερο σαν αρχικό σημείο παρουσιάζεται να είναι το καλύτερο ως τελικό και το αντίστροφο.

2. Επεξεργασία αποτελεσμάτων από το πρόβλημα των δύο οπών

Τα αποτελέσματα της παραμετρικής ανάλυσης για το πρόβλημα των δύο οπών παρουσιάζονται στους επόμενους πίνακες και σχήματα και εξάγονται τα εξής στατιστικά στοιχεία:

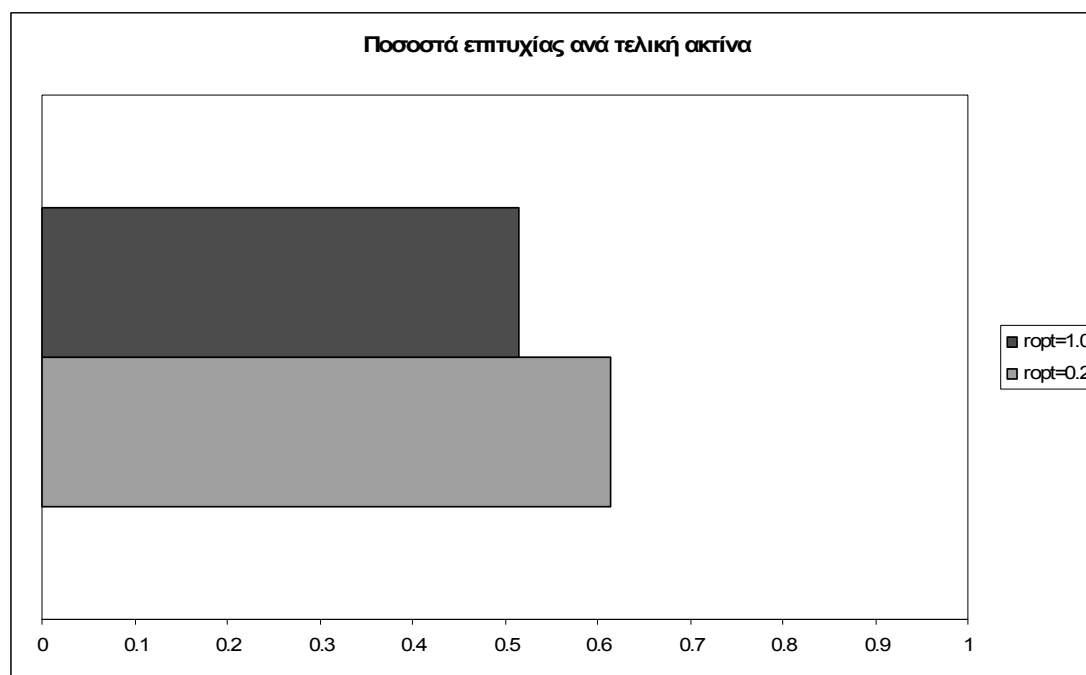
Πίνακας 16: Σύγκριση μεθόδων S.Q.P. – Hooke and Jeeves – Υβριδικός Γενετικός Αλγόριθμος για το πρόβλημα των δύο οπών

Μέθοδος	Επιτυχείς επαναλήψεις	Ποσοστό επιτυχίας (%)	Ποσοστό επιτυχίας με τουλάχιστον ένα εκ των αρχικών σημείων (%)
S.Q.P.	21/60	35.0	70
Hooke and Jeeves	38/60	63.3	90
Υβριδικός Γενετικός Αλγόριθμος	197/200	93.8	100

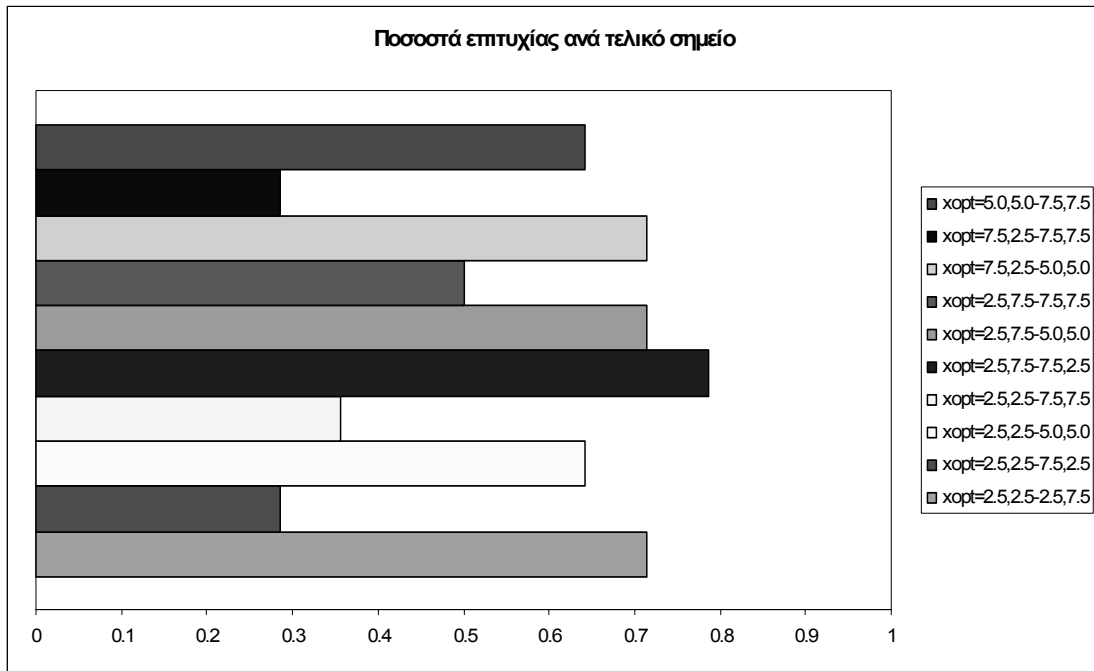
Πίνακας 17: Σύγκριση επαναλήψεων που απαιτούνται από τις μεθόδους βελτιστοποίησης για το πρόβλημα των δύο οπών.

Μέθοδος	Μέσος Όρος Επαναλήψεων
S.Q.P.	769.5
Hooke and Jeeves*	1003.0
Υβριδικός Γενετικός Αλγόριθμος	4302.7

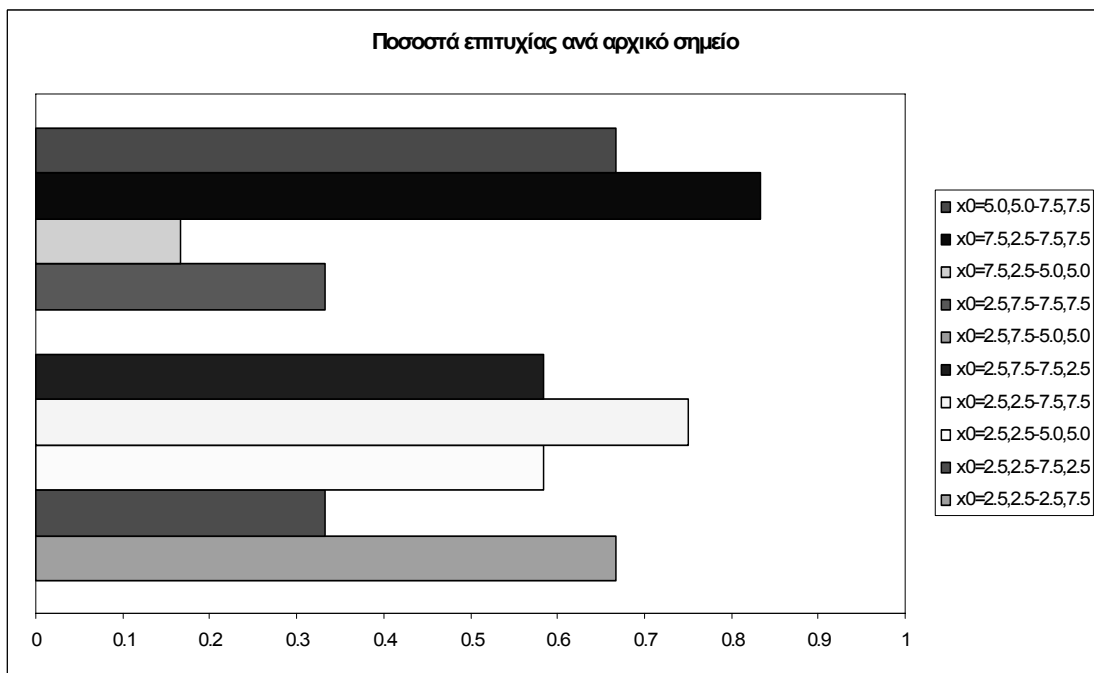
*(ευαίσθητη σε παραμέτρους όπως το βήμα και ο λόγος μείωσης του βήματος)



Σχήμα 35: Σύγκριση ποσοστών επιτυχίας ανά τελική ακτίνα για το πρόβλημα των δύο οπών θεωρώντας όλες τις μεθόδους και όλα τα αρχικά σημεία.



Σχήμα 36: Σύγκριση ποσοστών επιτυχίας ανά τελικό σημείο για το πρόβλημα των δύο οπών θεωρώντας όλες τις μεθόδους και όλα τα αρχικά σημεία.



Σχήμα 37: Σύγκριση ποσοστών επιτυχίας ανά αρχικό σημείο για το πρόβλημα των δύο οπών θεωρώντας όλες τις μεθόδους και όλα τα τελικά σημεία.

Από τον Πίνακα 16 παρατηρούμε ότι για τις δύο οπές είναι ακόμα πιο εμφανής η δυνατότητα των στοχαστικών αλγορίθμων να ξεπερνούν δυσκολίες όπως τοπικά ελάχιστα, κάτι το οποίο φαίνεται να επηρεάζει πολύ τις άλλες μεθόδους. Τα ποσοστά επιτυχίας της μεθόδου Hooke and Jeeves όπως και της S.Q.P. έχουνε πέσει πολύ συγκριτικά με τη μία οπή και πλέον φαίνεται αναγκαίο να προταθεί να γίνονται δοκιμές από περισσότερα αρχικά σημεία σε σχέση με τη μία οπή για να προσεγγιστεί με σχετική ασφάλεια το πρόβλημα. Ακόμη θα μπορούσαμε να πούμε ότι και πάλι η μέθοδος Hooke and Jeeves εμφανίζεται πιο αποτελεσματική (αυτή τη φορά με μεγαλύτερη διαφορά, έως και διπλάσια ποσοστά επιτυχίας). Δραματική είναι και η αύξηση του απαιτούμενου αριθμού επαναλήψεων για την κάθε μέθοδο (Πίνακας 17).

Από το Σχήμα 35 φαίνεται ότι, όπως και στην περίπτωση της μίας οπής, το μέγεθος του ελαττώματος (στο εύρος μεγεθών που έχει θεωρηθεί στην παρούσα εργασία) δεν επηρεάζει σημαντικά την επιτυχία της μεθόδου. Ακόμη, δεν φαίνεται να υπάρχει κάποιο μοτίβο που να δείχνει ποια τελικά διανύσματα είναι πιο εύκολα ανιχνεύσιμα (Σχήμα 36) ή ποια είναι κατάλληλα αρχικά διανύσματα ανάλογα με το που βρίσκονται τα ελαττώματα (Σχήμα 37).

3. Επεξεργασία αποτελεσμάτων από το πρόβλημα της μίας ρωγμής

Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της παραμετρικής ανάλυσης για το πρόβλημα της 1 ρωγμής χρησιμοποιώντας όλα τα δεδομένα από τις μετατοπίσεις στους συνοριακούς κόμβους (Πίνακες 18-19, Σχήματα 38-40) ή μειωμένα δεδομένα, μόνο από τη μία πλευρά της πλάκας (Πίνακες 20-21, Σχήματα 41-43).

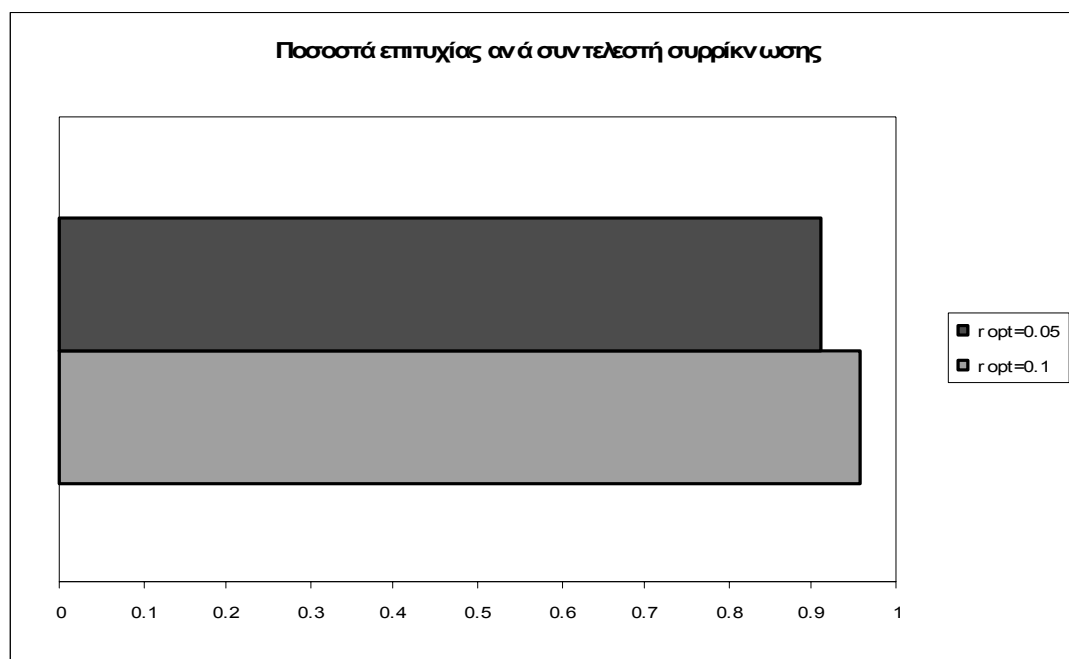
Πίνακας 18: Σύγκριση μεθόδων S.Q.P. – Hooke and Jeeves – Υβριδικός Γενετικός Αλγόριθμος για το πρόβλημα της ρωγμής

Μέθοδος	Επιτυχείς επαναλήψεις	Ποσοστό επιτυχίας (%)	Ποσοστό επιτυχίας με τουλάχιστον ένα εκ των αρχικών σημείων (%)
S.Q.P.	37/40	92.5	100
Hooke and Jeeves	37/40	92.5	100
Υβριδικός Γενετικός Αλγόριθμος	100/100	100.0	100

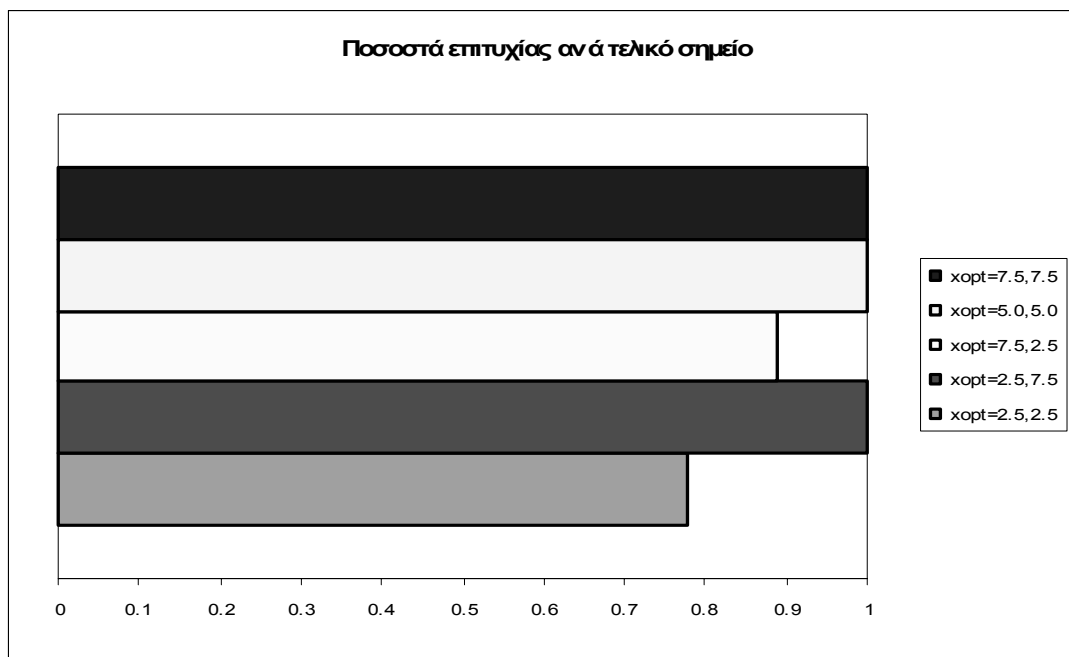
Πίνακας 19: Σύγκριση επαναλήψεων που απαιτούνται από τις μεθόδους βελτιστοποίησης για το πρόβλημα της ρωγμής

Μέθοδος	Μέσος Όρος Επαναλήψεων
S.Q.P.	136.8
Hooke and Jeeves*	244.0
Υβριδικός Γενετικός Αλγόριθμος	2615.2

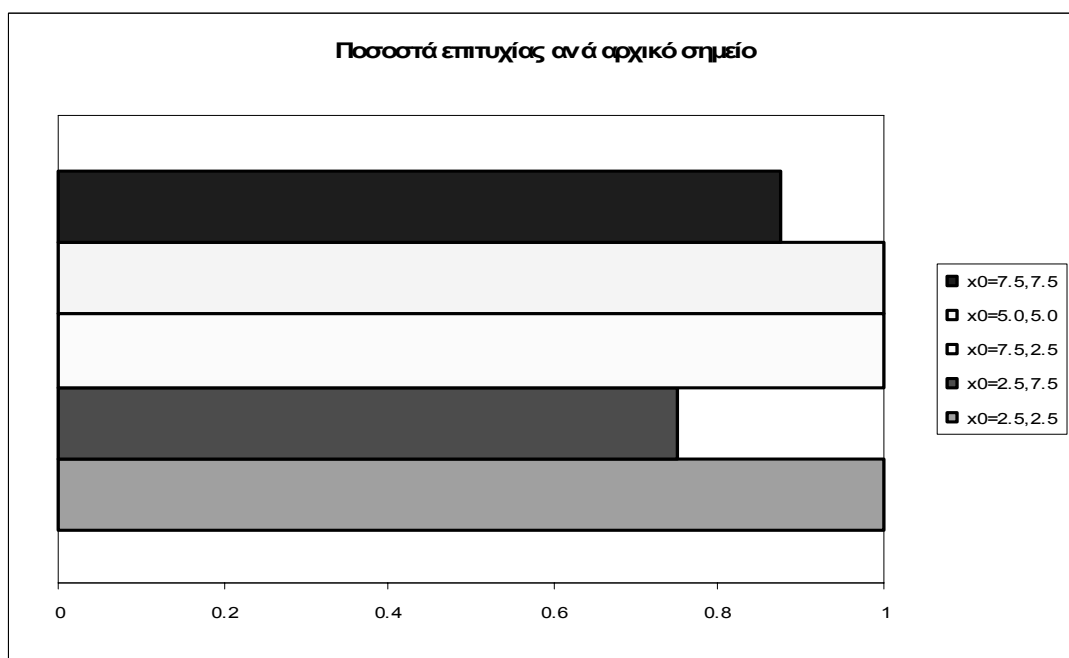
*(ευαίσθητη σε παραμέτρους όπως το βήμα και ο λόγος μείωσης του βήματος)



Σχήμα 38: Σύγκριση ποσοστών επιτυχίας ανά συντελεστή συρρίκνωσης για το πρόβλημα της ρωγμής και με όλα τα δεδομένα θεωρώντας όλες τις μεθόδους και όλα τα αρχικά και τελικά σημεία.



Σχήμα 39: Σύγκριση ποσοστών επιτυχίας ανά τελικό σημείο για το πρόβλημα της ρωγμής και με όλα τα δεδομένα θεωρώντας όλες τις μεθόδους και όλα τα αρχικά σημεία.



Σχήμα 40: Σύγκριση ποσοστών επιτυχίας ανά αρχικό σημείο για το πρόβλημα της ρωγμής και με όλα τα δεδομένα θεωρώντας όλες τις μεθόδους και όλα τα τελικά σημεία.

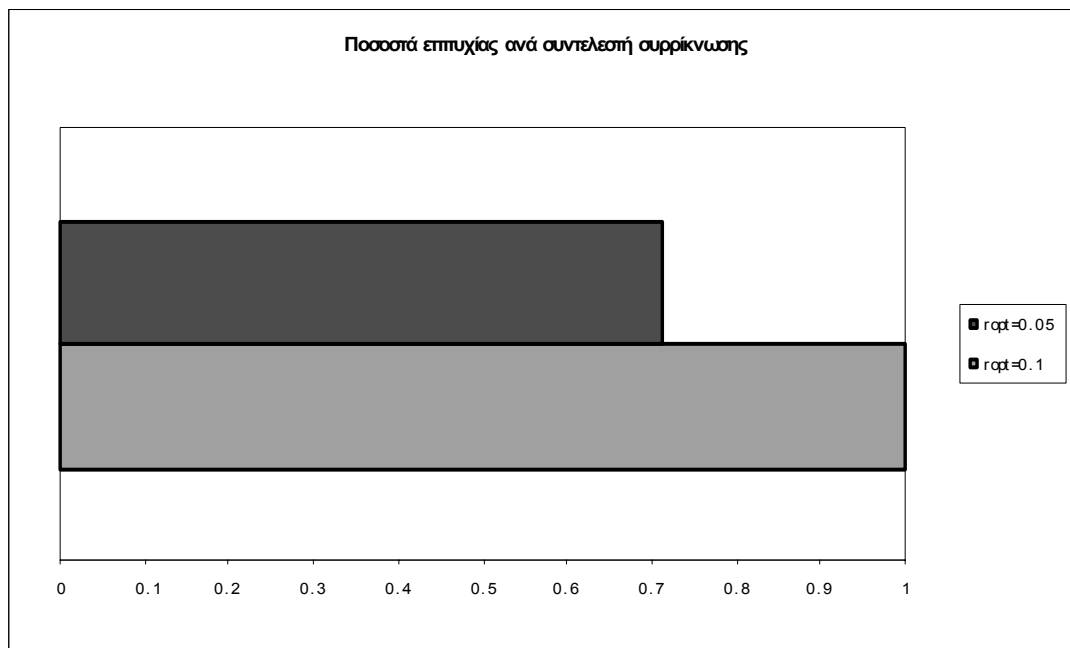
Πίνακας 20: Σύγκριση μεθόδων S.Q.P. – Hooke and Jeeves – Υβριδικός Γενετικός Αλγόριθμος για το πρόβλημα της ρωγμής με μειωμένα δεδομένα

Μέθοδος	Επιτυχίες επαναλήψεις	Ποσοστό επιτυχίας (%)	Ποσοστό επιτυχίας με τουλάχιστον ένα εκ των αρχικών σημείων (%)
S.Q.P.	34/40	85.0	100
Hooke and Jeeves	33/40	82.5	90
Υβριδικός Γενετικός Αλγόριθμος	99/100	99.0	100

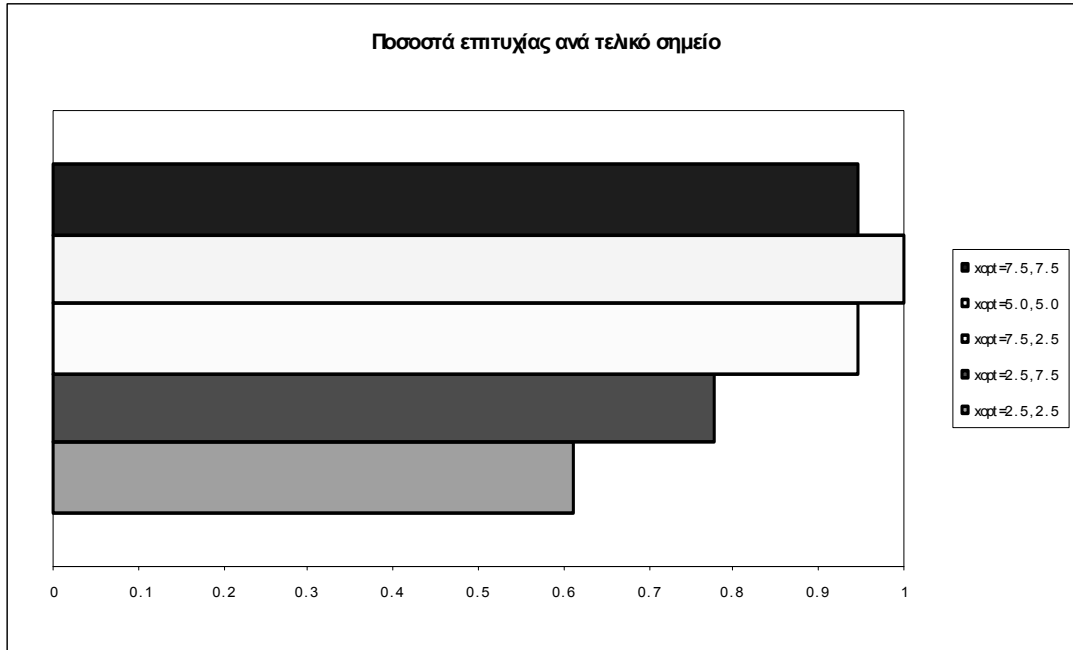
Πίνακας 21: Σύγκριση επαναλήψεων για το πρόβλημα της ρωγμής με μειωμένα δεδομένα

Μέθοδος	Μέσος Όρος Επαναλήψεων
S.Q.P.	120.1
Hooke and Jeeves*	224.9
Υβριδικός Γενετικός Αλγόριθμος	2641.2

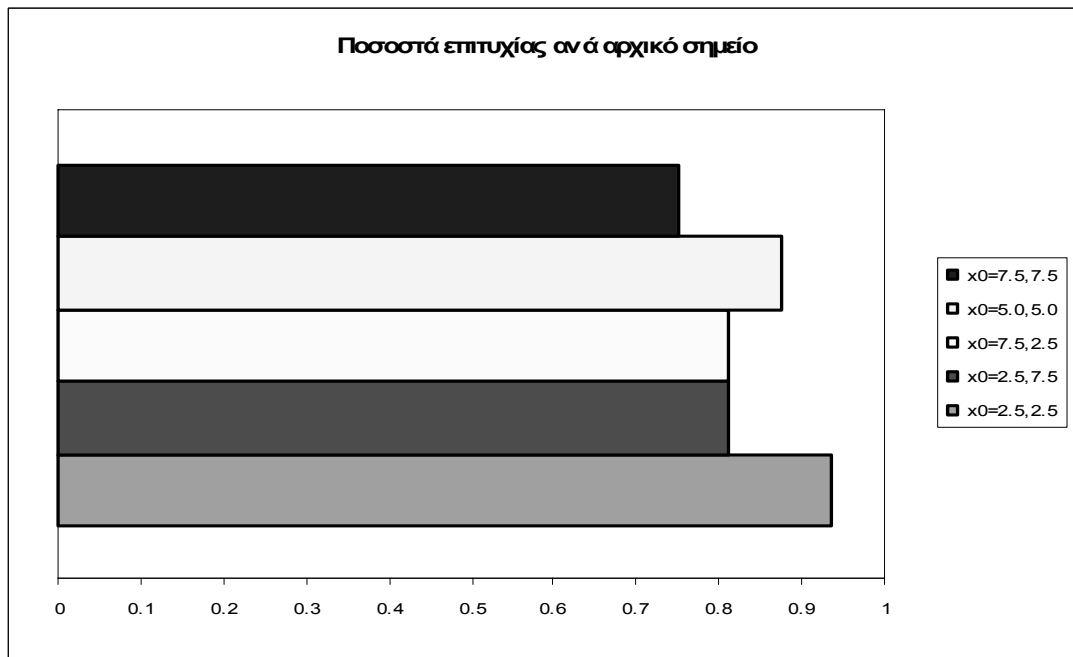
*(ευαίσθητη σε παραμέτρους όπως το βήμα και ο λόγος μείωσης του βήματος)



Σχήμα 41: Σύγκριση ποσοστών επιτυχίας ανά συντελεστή συρρίκνωσης για το πρόβλημα της ρωγμής με μειωμένα δεδομένα θεωρώντας όλες τις μεθόδους και όλα τα αρχικά και τελικά σημεία.



Σχήμα 42: Σύγκριση ποσοστών επιτυχίας ανά τελικό σημείο για το πρόβλημα της ρωγμής με μειωμένα δεδομένα θεωρώντας όλες τις μεθόδους και όλα τα αρχικά σημεία.



Σχήμα 43: Σύγκριση ποσοστών επιτυχίας ανά αρχικό σημείο για το πρόβλημα της ρωγμής με μειωμένα δεδομένα θεωρώντας όλες τις μεθόδους και όλα τα τελικά σημεία.

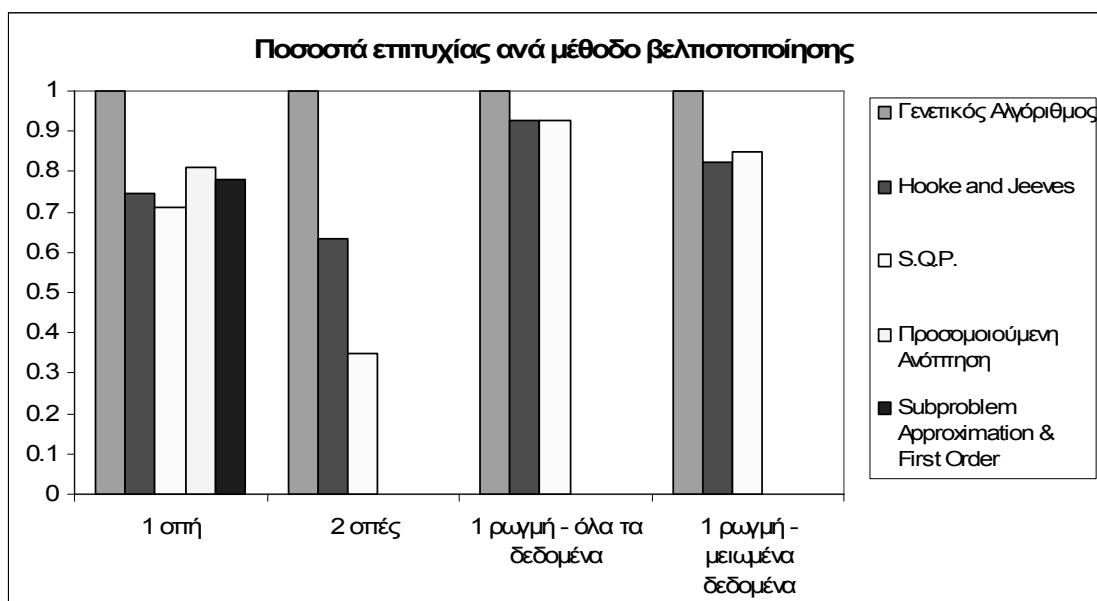
Στην περίπτωση της ρωγμής παρατηρούμε ότι όσο πιο μικρό είναι το άνοιγμα της ρωγμής (τόσο πιο μικρός ο συντελεστής συρρίκνωσης), τόσο πιο δύσκολα ανιχνεύεται η ρωγμή (Σχήμα 38). Αυτό γίνεται ακόμα πιο εμφανές όταν έχουμε μειωμένα δεδομένα (Σχήμα 41). Όπως και στα προηγούμενα προβλήματα, δεν φαίνεται να υπάρχει κάποιο μοτίβο που να δείχνει ποια τελικά διανύσματα είναι πιο εύκολα ανιχνεύσιμα (Σχήματα 39, 42) ή ποια είναι κατάλληλα αρχικά διανύσματα ανάλογα με το που βρίσκονται τα ελαττώματα (Σχήματα 40, 43). Ακόμη δεν φαίνεται να υπάρχει ομοιότητα στα ποσοστά επιτυχίας συγκεκριμένων θέσεων ως τελικά (Σχήματα 33, 39, 42) ή ως αρχικά διανύσματα (Σχήματα 34, 40, 43) ανάμεσα στα προβλήματα της οπής και της ρωγμής.

Τα συμπεράσματα για τις μεθόδους βελτιστοποίησης είναι παρόμοια με την περίπτωση της μίας οπής.

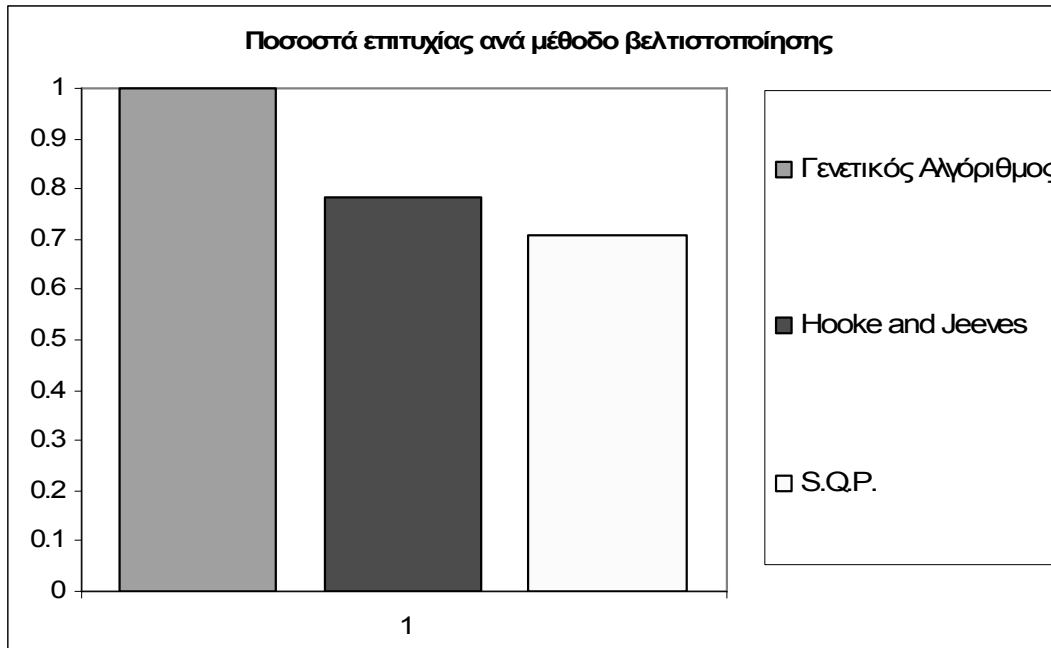
Ενδιαφέροντα συμπεράσματα εξάγονται από τη χρήση μειωμένων δεδομένων (μετατοπίσεις μόνο κατά την κατεύθυνση y της ελεύθερης πλευράς). Φαίνεται ότι, παρόλο που είναι πιο ασφαλές να χρησιμοποιηθούν δεδομένα από όλες τις πλευρές, γενικότερα τα αποτελέσματα είναι αρκετά καλά και σε αυτή την περίπτωση. Χειρότερη φαίνεται η περίπτωση της ρωγμής που βρίσκεται στο (2.5-2.5), αλλά όπως έδειξε και η ανάλυση ευαισθησίας το σημείο αυτό εμφανίζει ιδιαιτερότητες όταν χρησιμοποιούνται μειωμένα δεδομένα. Ακόμα το ίδιο σημείο φάνηκε να έχει χαμηλά ποσοστά επιτυχίας ως τελικό σημείο ακόμα και στην περίπτωση της 1 οπής.

Γενικότερα συμπεράσματα και προτάσεις για περαιτέρω μελέτη

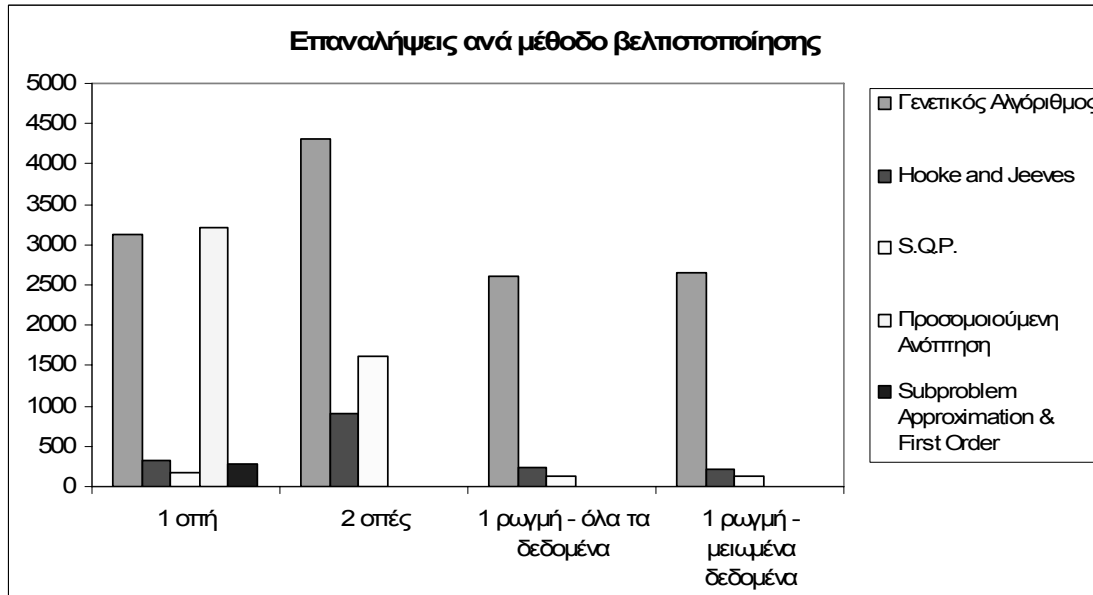
Ιδιαίτερα ενθαρρυντικά είναι τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας για την επίλυση αντίστροφου προβλήματος επίπεδης πλάκας με ελάττωμα ή ελαττώματα. Στις περιπτώσεις ελαττωμάτων που δοκιμάστηκαν, και που παρουσιάζονται συγκεντρωτικά στα Σχήματα 44-47, φάνηκε ότι το πρόβλημα μπορεί να λυθεί σίγουρα με χρήση στοχαστικών μεθοδολογιών. Οι αιτιοκρατικές μέθοδοι δίνουν αρκετά καλά αποτελέσματα αρκεί να δοκιμαστούν «αρκετά» αρχικά σημεία (το «αρκετά» ορίζεται ανάλογα με τον αριθμό των μεταβλητών που έχουμε στο πρόβλημά μας) και με κατάλληλη επιλογή των παραμέτρων της κάθε μεθόδου. Από άποψη χρόνου επίλυσης υπερτερούν οι αιτιοκρατικές με σημαντικά μικρότερες απαιτήσεις σε αριθμό επαναλήψεων. Το ασφαλέστερο είναι να συνδυάζονται μέθοδοι και να δοκιμάζονται αρκετά αρχικά σημεία. Από το τελευταίο συμπέρασμα και από παρατηρήσεις κατά τη διάρκεια της μελέτης του προβλήματος φαίνεται ότι τα αντίστροφα προβλήματα δεν διαφέρουν καθόλου από τα κλασικά προβλήματα βελτιστοποίησης.



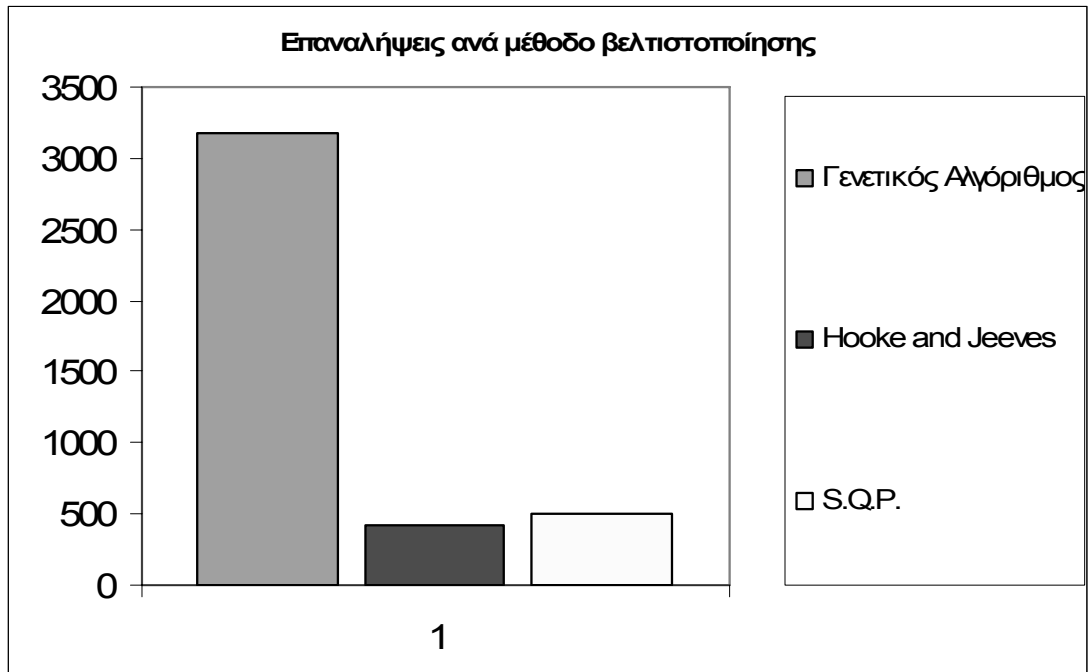
Σχήμα 44: Σύγκριση ποσοστών επιτυχίας ανά μέθοδο βελτιστοποίησης για όλα τα προβλήματα που μελετήθηκαν.



Σχήμα 45: Σύγκριση ποσοστών επιτυχίας ανά μέθοδο βελτιστοποίησης (θεωρείται ο μέσος όρος επιτυχίας για όλα τα προβλήματα που μελετήθηκαν και μόνο οι μέθοδοι που δοκιμάστηκαν για όλα τα προβλήματα).



Σχήμα 46: Σύγκριση αριθμού επαναλήψεων ανά μέθοδο βελτιστοποίησης για όλα τα προβλήματα που μελετήθηκαν.



Σχήμα 47: Σύγκριση αριθμού επαναλήψεων ανά μέθοδο βελτιστοποίησης (θεωρήθηκε ο μέσος όρος του αριθμού επαναλήψεων για όλα τα προβλήματα που μελετήθηκαν και μόνο οι μέθοδοι που δοκιμάστηκαν για όλα τα προβλήματα).

Μελλοντική μελέτη σε αυτό το θέμα θα μπορούσε να επικεντρωθεί στη σχέση ανάμεσα στη θέση του αρχικού σημείου ή στο είδος της φόρτισης και στη θέση και το είδος του ελαττώματος που αναζητείται. Ακόμη, χρήσιμη θα ήταν η σύγκριση των μεθόδων που παρουσιάζονται εδώ με άλλες πιο εξελιγμένες, όπως νευρωνικά δίκτυα, και στην προσπάθεια επίλυσης του αντίστροφου προβλήματος σε πραγματικό χρόνο με προοπτικές εφαρμογής σε μεθόδους μη καταστροφικού ελέγχου υλικών. Ακόμη το μοντέλο θα μπορούσε να γενικευτεί σε τρεις διαστάσεις και να προσομοιώσει σύνθετα υλικά με πολλές εφαρμογές.

Βιβλιογραφία²

Βιβλία

1. Προβατίδης X., *Ανάλυση Μηχανολογικών Κατασκευών-II*, Ε.Μ.Π., Αθήνα 2004.
2. Τσαμασφύρος Γ.Ι., *Μηχανική Παραμορφώσιμων Σωμάτων I*, Εκδόσεις Συμμετρία, 1990.
3. Belegundu A. D., Chandrupatla T. R., *Optimization Concepts and Applications in Engineering*, Prentice Hall Inc, 1999.
4. Brebbia C. A. and Dominguez J., *Boundary Elements, An Introductory Course*, Second Edition, Computational Mechanics Publications and McGraw-Hill Incorporated, 1992.
5. Fletcher R., *Practical Methods of Optimization, Volume 1, Unconstrained Optimization*, Wiley, 1980.
6. Fletcher R., *Practical Methods of Optimization, Volume 2, Constrained Optimization*, Wiley, 1981.
7. Gill, P., Murray W., *Numerical methods for constrained optimization*, Academic Press, 1974.
8. Liu G.R., Han X., *Computational Inverse Techniques in non destructive evaluation*, CRC Press LLC, 2003.
9. Εγχειρίδιο ANSYS 10.0.
10. Εγχειρίδιο MATLAB 7.0.
11. Stavroulakis G. E, *Inverse and Crack Identification Problems in Engineering Mechanics*, Applied Optimization, Volume 46, Kluwer Academic Publishers, 2001.

² Η βιβλιογραφία δίνεται σε αλφαβητική σειρά

Αρθρα

12. Engelhardt M. Stavroulakis G. E., Antes H., *Crack Identification as an Optimization Task*, Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics, 511-512, 2003.
13. Fang X., Luo H. Tang J., *Structural damage detection using neural network with learning rate improvement*, Computers and Structures 83, 2150-2161, Elsevier, 2005.
14. Gallego R., Rus G., *Sensitivity computation in elasticity with respect to shape, material properties and topology*, Advances in Boundary Element Techniques, 2001.
15. Hadamard J., *Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique*, Princeton University Bulletin, 49-52, 1902.
16. Kirkpatrick S., Gelatt C. D. Jr., Vecchi M. P., *Optimization by Simulated Annealing*, Science, 220, 671-680, 1983.
17. Landau L. D., Lifshitz E. M., *Theory of Elasticity*, Butterworth-Heinemann, Oxford, 1986.
18. Lee U., Kim S., *Identification of Multiple Directional Damages in a Thin Cylindrical Shell*, International Journal of Solids and Structures 43(9), 2723-2743, 2006.
19. Liu S. W., Huang Jin H., Sung J. C., Lee C. C., *Detection of cracks using neural networks and computational mechanics*, Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering 191, 2831-2845, 2002.
20. Rus G., Lee S.-Y., Gallego R., *Defect identification in laminated composite structures by BEM by incomplete static data*, International Journal of Solids and Structures 42, 1743-1758, Elsevier, 2005.
21. Stavroulakis G. E., Antes H., *Nondestructive elastostatic identification of unilateral cracks through BEM and neural networks*, Computational Mechanics 20, 439-451, Springer- Verlag, 1997.
22. Stavroulakis G. E., Antes H., *Neural crack identification in steady state elastodynamics*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 165, 129-146, Elsevier, 1998.

23. Tosaka N., *Unknown defect identification in elastic field by boundary element method with filtering procedures*, Engineering Analysis with Boundary Elements 15, 207-215, Elsevier, 1995.

Περαιτέρω Βιβλιογραφία για βελτιστοποίηση

24. Conn A., Gould N., Toint Ph., *Trust-Region Methods*, SIAM 2000.
25. Dennis J., Schnabel R., *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*, Classics in Applied Mathematics, Volume 16, SIAM, 1996.
26. Gill P., Murray W. and Wright M., *Practical Optimization*, Academic Press, 1981.
27. Nocedal J. and Wright S., *Numerical Optimization*, Springer Verlag, 1999.

Πηγές αλγορίθμων

Οι μέθοδοι βελτιστοποίησης καθώς και οι αλγόριθμοι επίλυσης με χρήση των Μεθόδων Πεπερασμένων Στοιχείων και Συνοριακών Στοιχείων έχουν αναπτυχθεί πολύ τα τελευταία χρόνια και έχει καταστεί εξαιρετικά δύσκολο και χρονοβόρο (αν όχι μη αποτελεσματικό) για τον καθένα να γράφει και να χρησιμοποιεί τους δικούς του κώδικες. Έτσι και αυτή η εργασία ολοκληρώθηκε με επεξεργασία κωδίκων που στην αρχική τους μορφή προέρχονται από διάφορες πηγές:

- Προσομοιούμενη Ανόπτηση: Joachim Vandekerckhove,
<http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/loadFile.do?objectId=10548&objectType=file> με βάση τον Kirkpatrick, 1983.
- Hooke and Jeeves: Βιβλίο Belegundu A, Chandrupatla T., (implementation Κλειώ Βόσου).
- Μέθοδος Συνοριακών Στοιχείων: Βιβλίο Brebbia C.A. Dominguez J. (implementation σε Fortran Ιωάννης Κουκούλης).
- Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων: χρήση προγράμματος ANSYS με συνοδευτικά προγράμματα (implementation Ιωάννης Κουκούλης).

Γενικότερα, κάποιες χρήσιμες πηγές προγραμμάτων που δίνει ο Gill, 1981 είναι:

1. Numerical Analysis Group, Oxford University Computing Laboratory.
2. Division of Numerical Analysis and Computing, National Physical Laboratory, Teddington, Middlesex, TW11 0LW.
3. Division of Computer Science, Atomic Energy Research Establishment, Harwell, Didcot, Oxfordshire.
4. Numerical Optimization Centre, Hatfield Polytechnic, Hertfordshire.
5. George Washington University, Washington DC.
6. Madison Academic Computing Centre, Madison, Wisconsin.
7. Applied Mathematics Division, Argonne National Laboratory, Illinois.
8. Computer Journal.

9. BIT Numerical Mathematics

10. ACM Transactions on Mathematical Software.

Φυσικά πλέον, το διαδίκτυο έχει συγκεντρώσει αρκετές πηγές και έχει καταστεί πολύ χρήσιμο κατά την αναζήτηση κωδίκων- freeware. Κάποιες χρήσιμες ιστοσελίδες είναι οι ακόλουθες:

1. INFORMS OR/MS Resource Collection:

<http://www2.informs.org/Resources/Cool/>

2. Mathematical Programming Society: <http://www.mathprog.org/>

3. Optimization Applications: <http://iris.gmu.edu/%7Easofer/applic.html>

4. Optimization online: <http://www.optimization-online.org/>

5. Foundations of Computational Mathematics:

<http://www.damtp.cam.ac.uk/user/na/FoCM/>

6. NEOS Server for Optimization: <http://www-neos.mcs.anl.gov/neos/>

7. NEOS Guide Optimization Tree:

<http://www-fp.mcs.anl.gov/otc/Guide/OptWeb/index.html>

8. Optimization Technology Center at Argonne National Laboratory and Northwestern University: <http://www.ece.northwestern.edu/OTC/>

9. Decision Tree for Optimization Software: <http://plato.la.asu.edu/guide.html>