



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**

**ΣΧΟΛΗ ΝΑΥΠΗΓΩΝ-ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**

**ΤΟΜΕΑΣ ΝΑΥΤΙΚΗΣ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΙΑΣ**

**ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΣΤΡΕΠΤΙΚΩΝ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ ΑΞΟΝΙΚΟΥ  
ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ**

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

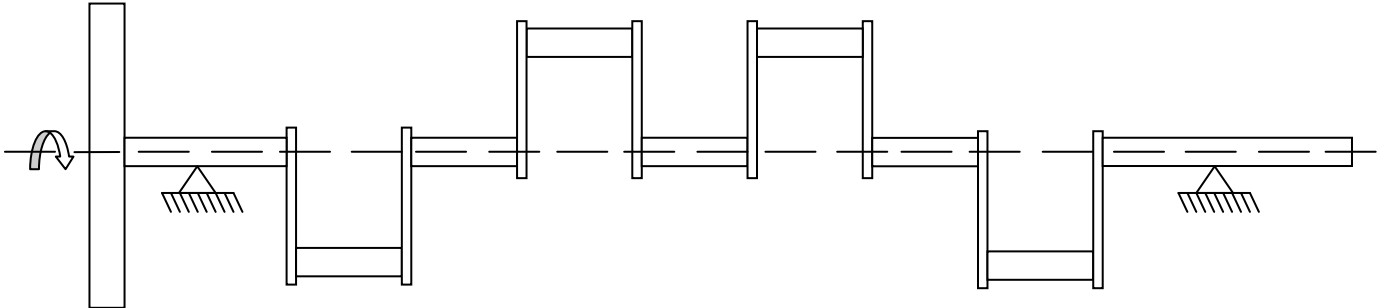
*N. A. Παϊκόπουλος*

*A.μ : 08107608*

*Αθήνα 2019*

## Πρότυπος Στροφαλοφόρος Άξονας

### Σκαρίφημα



### Σφόνδυλος

$$D_1 = 6 \text{ cm}$$

$$L_1 = 0.4 \text{ cm}$$

$$D_2 = 21 \text{ cm}$$

$$L_2 = 1.7 \text{ cm}$$

$$D_3 = 24 \text{ cm}$$

$$L_3 = 3.3 \text{ cm}$$

### Άξονικό / Κομβία βάσης

$$D = 3 \text{ cm}$$

$$L = 17 \text{ cm (μετά τον σφόνδυλο)}$$

$$L = 10.2 \text{ cm (ανάμεσα στα στρόφαλα)}$$

$$L = 22.4 \text{ cm (τελευταίο τμήμα)}$$

### Αγκώνας στροφάλου

$$H = 14.6 \text{ cm}$$

$$B = 3.9 \text{ cm}$$

$$L = 0.8 \text{ cm}$$

$$\text{απόσταση KB από άξονα περιστροφής, } l = 4.73 \text{ cm}$$

### Κομβίο στροφάλου

$$D = 3 \text{ cm}$$

$$L = 10.2 \text{ cm}$$

$$\text{απόσταση KB από άξονα περιστροφής, } r = 9.46 \text{ cm}$$

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

### Γενικά

Για να θέσουμε σε λειτουργία ένα μηχανισμό πρόωσης (πχ έλικα), μια αντλία ή ένα κινητήρα παραγωγής ηλεκτρικού ρεύματος, μεταφέρουμε μηχανική ισχύ από μια μηχανή η οποία παράγει μηχανική ενέργεια. Η μεταφορά αυτή, της ισχύος, γίνεται μέσω της περιστροφικής κίνησης ενός άξονα, που παρεμβάλλεται της μηχανής και του "φορτίου" (έλικα, αντλία, κινητήρας...κτλ) [1]. Το πόσο αποτελεσματικά μεταφέρεται η μηχανική ισχύς από το ένα άκρο του άξονα στο άλλο εξαρτάται από το πως συμπεριφέρεται ο άξονας ως ένα δυναμικό σύστημα [1].

Πιο συγκεκριμένα σε ένα πλοίο όπου η μηχανική ισχύς παράγεται από κινητήρα εσωτερικής καύσης, το αξονικό σύστημα που μελετάται ως προς τη δυναμική του, αποτελείται από τον στροφαλοφόρο του κινητήρα, τον ενδιάμεσο άξονα (ή τους ενδιάμεσους) και τον ελικοφόρο άξονα. Το θέμα των ταλαντώσεων των αξονικών συστημάτων ξεκινά από τη μελέτη της δυναμικής των εμβολοφόρων μηχανών εσωτερικής καύσης, που "κρύβουν" και το κύριο αίτιο διέγερσης ταλαντώσεων στα συστήματα αυτά.

Οι ταλαντώσεις των εμβολοφόρων κινητήρων χωρίζονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες [2]:

- α) Εσωτερικές ταλαντώσεις
- β) Εξωτερικές ταλαντώσεις

Εσωτερικές θεωρούνται οι ταλαντώσεις που πραγματοποιούν τα διάφορα τμήματα (εξαρτήματα) της μηχανής μεταξύ τους. Ενώ οι εξωτερικές αναφέρονται σε ταλαντώσεις που πραγματοποιεί ολόκληρη η μηχανή, σαν σύνολο. Το θέμα των εξωτερικών ταλαντώσεων αποκλίνει από το ζήτημα που πραγματεύεται η παρούσα εργασία, οπότε πέρα από τον ορισμό αυτό, δε θα αναλυθεί περαιτέρω.

Αναφερόμενοι στις εσωτερικές ταλαντώσεις εννοούμε ένα ευρύ φάσμα προβλημάτων που περιλαμβάνει στρεπτικές, αξονικές καθώς και καμπτικές ταλαντώσεις. Στα είδη αυτά των ταλαντώσεων υπόκειται η στροφαλοφόρος και η εκκεντροφόρος άτρακτος καθώς και άλλα, βοηθητικά συστήματα του κινητήρα, όπως : υπερπληρωτής, αντλίες κλπ. Στις εσωτερικές ταλαντώσεις μπορούν να περιληφθούν και άλλα είδη ταλαντώσεων, όπως περιστροφική ταλάντωση του εμβόλου, ταλαντώσεις του μηχανισμού των βαλβίδων και άλλες. Από τα παραπάνω είδη εσωτερικών ταλαντώσεων το πιο κρίσιμο είναι, οι στρεπτικές ταλαντώσεις της στροφαλοφόρου ατράκτου του κινητήρα [2].

### Ορισμός - Προβλήματα Στρεπτικών Ταλαντώσεων στα Πλοία του σήμερα

Στρεπτική ταλάντωση μιας ατράκτου είναι, η ταλάντωση (στροφική) αυτής γύρω από τον άξονα περιστροφής της [4].

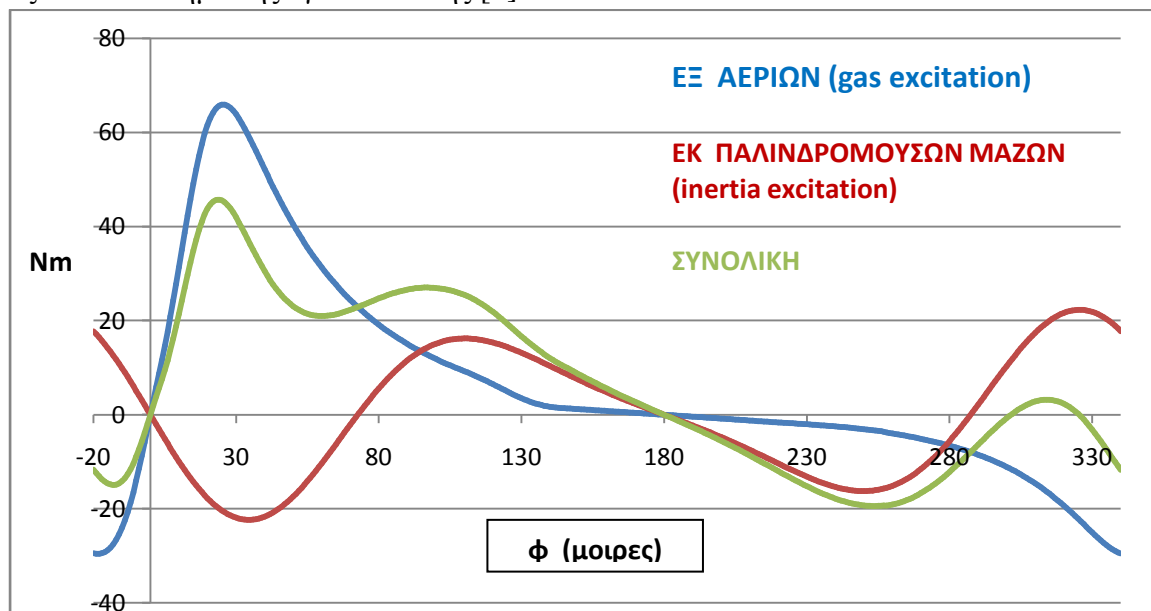
Τα αξονικά συστήματα που αφορούν στην πρόωση του πλοίου, είναι ζωτικής σημασίας για την λειτουργία του, καθότι η προωστήρια εγκατάσταση είναι αυτή που μετατρέπει το σκάφος σε "ζωντανό" - λειτουργικό οργανισμό. Κύριο χαρακτηριστικό της νέας τάσης ναυπήγησης για μεγάλα, σε διαστάσεις, φορητά πλοία (VLCC, LCS, Bulk Carriers), είναι να επιτευχθεί αύξηση του μεταφερόμενου φορτίου. Αυτό έχει ως

αποτέλεσμα το μηχανοστάσιο να έχει όλο και περισσότερο, μικρότερο μήκος, και να βρίσκεται όσο γίνεται προς την πρύμνη του πλοίου. Ένα τέτοιο αξονικό σύστημα, θα έχει μικρού μήκους ελικοφόρο άξονα, και θα στρέφει μια έλικα μεγάλης διαμέτρου. Σε αδρές γραμμές, ένα τέτοιο σύστημα έχει σχετικά υψηλές φυσικές συχνότητες σε στρεπτική ταλάντωση, και είναι πιθανότερο να συμπέσουν με τις αυτές του υπόλοιπου αξονικού (κινητήρας-μειωτήρας) [4]. Ακόμα, στα πλοία αυτά η απαίτηση για μεγάλη ισχύ συνοδεύεται με απαίτηση για μεγάλη διάμετρο έλικας, που σε συνδυασμό με τον χαμηλό αριθμό στροφών (μεγάλοι 2-Χ κινητήρες), οδηγεί σε άξονες μεγάλης διαμέτρου, άρα περισσότερο άκαμπτους. Σημαντικό επίσης είναι να αναφερθεί, πως όταν το πλοίο είναι σε λειτουργία (και έμφορτο) στη θάλασσα, οι παραμορφώσεις που υφίσταται το αξονικό σύστημα, εντείνουν ακόμα περισσότερο την καταπόνηση των στοιχείων του αξονικού κατά την στρεπτική ταλάντωση [4].

### Αίτια

Ως πηγή διέγερσης στρεπτικών ταλαντώσεων σε αξονικά συστήματα ναυτικών εγκαταστάσεων θεωρείται η λειτουργία του ίδιου του κινητήρα.

Η στρεπτική διέγερση αυτή οφείλεται στις επιμέρους διεγέρσεις των εμβόλων του κινητήρα. Αυτά καταπονούν-διεγείρουν στρεπτικώς την στροφαλοφόρο άτρακτο λόγω της δύναμης των αερίων (gas excitation) καθώς και λόγω των δυνάμεων αδράνειας (inertia excitation) που αναπτύσσονται από την κίνηση των μαζών (εμβόλου, διωστήρα, βάκτρου κτλ). Η ανομοιομορφία, ως προς το χρόνο, αυτού του είδους διέγερσης (ροπής) προκαλεί την εμφάνιση των στρεπτικών ταλαντώσεων στο αξονικό σύστημα της εγκατάστασης [3].



Σχ.1 Στρεπτική διέγερση από ένα έμβολο, σε 2-Χ κινητήρα

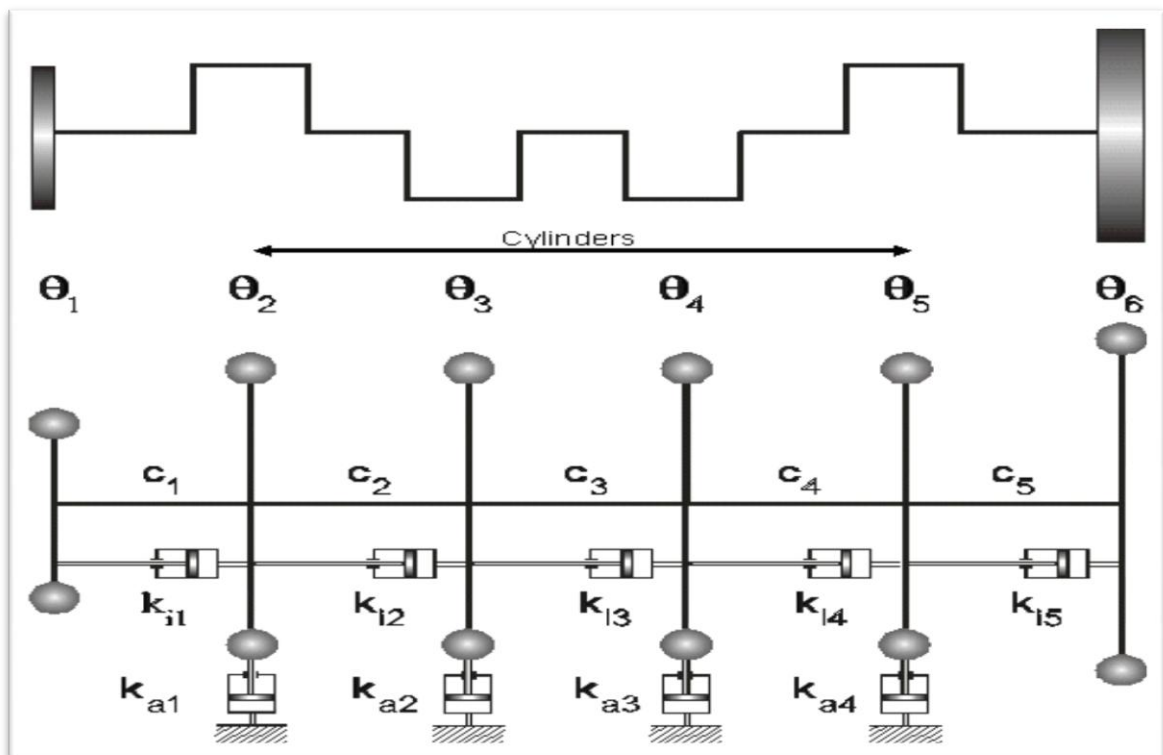
Κατά συνέπεια εμφανίζονται εναλλασσόμενες χρονικά στρεπτικές τάσεις οι οποίες μπορούν να οδηγήσουν μέχρι και σε θραύση των στοιχείων του συστήματος, παρόλο που η αντοχή των τα καθιστά ικανά να μεταφέρουν τη στρεπτική ροπή [3].

Το φαινόμενο είναι ιδιαίτερα έντονο και επικίνδυνο για το σύστημα σε περίπτωση συντονισμού, δηλαδή όταν κάποια από τις συχνότητες που εμπεριέχονται στην κυματομορφή της στρεπτικής διέγερσης γίνεται ίση με κάποια φυσική συχνότητα ταλάντωσης του συστήματος [3].

### Μαθηματική Μοντελοποίηση

Η μοντελοποίηση που ακολουθήθηκε στα πλαίσια της παρούσας εργασίας ακολουθεί την κλασική μέθοδο της διακριτοποίησης του συνεχούς μηχανολογικού συστήματος (εδώ, αξονικού).

Το οποιοδήποτε αξονικό σύστημα (συνεχές) μπορεί να αναλυθεί σε μεμονωμένες μάζες, οι οποίες συνδέονται με κομμάτια άξονα, τα οποία χαρακτηρίζονται μόνο από την αντίστασή τους σε στρέψη (στρεπτική ακαμψία) [1]. Οι μάζες που κατανομούνται κατά μήκος του αξονικού, χαρακτηρίζονται με τη σειρά τους μόνο από την στρεπτική ροπή αδράνειάς τους. Καταλήγοντας έτσι σε ένα μοντέλο "μειωμένης τάξης" όπως καλείται για τον άξονα-αξονικό σύστημα [1]. Το μοντέλο είναι μειωμένης τάξης, γιατί έχει λιγότερους βαθμούς ελευθερίας κίνησης, ως προς τις στρεπτικές ταλαντώσεις, από το συνεχές και από αυτό μπορούν να εξαχθούν μόνο ορισμένες (πλήθος,  $n$ ) από τις (θεωρητικά άπειρες) φυσικές του συχνότητες (είναι,  $n =$  αριθμός μεμονωμένων μαζών - 1).



Σχ. 2 Διακριτοποίηση στροφαλοφόρου άξονα.

Ο κάθε βαθμός ελευθερίας περιγράφει τη γωνία περιστροφής της μάζας [1].

Στο σχ. 2 φαίνεται η διακριτοποίηση ενός στροφαλοφόρου άξονα σε αδράνειες ( $\Theta$  ή  $I$ ) και στρεπτικές ακαμψίες ( $c$  ή  $k$ ). Τα τμήματα άξονα που έχουν κάποια

συγκεντρωμένη μάζα (έμβολο-διωστήρας, γρανάζια, σφόνδυλος, κτλ) μοντελοποιούνται ως πολικές ροπές αδράνειας ( $\Theta$ ), ενώ τα τμήματα του άξονα που είναι ανάμεσα στις συγκεντρωμένες μάζες μοντελοποιούνται ως δυστρεπτότητες ( $c$ ). Τα υπόλοιπα σύμβολα ( $k_i$ ,  $k_a$ ) συμβολίζουν την απόσβεση (damping), εσωτερική και εξωτερική αντίστοιχα. Το συγκεκριμένο σύστημα έχει έξι ( $n = 6$ ) βαθμούς ελευθερίας, δηλαδή έξι γωνίες περιστροφής, μία για κάθε μάζα.

Θέλοντας να καταστρώσουμε τις εξισώσεις που διέπουν τις ελεύθερες κινήσεις του συστήματος, αγνοούμε αρχικά τις αποσβέσεις. Η κίνηση του συστήματος διέπεται από την αρχή διατήρησης της ορμής για περιστροφική κίνηση, περί σταθερού άξονος (2ος νόμος Νεύτωνα) [1],

$$I\ddot{\varphi} = \sum T$$

οπότε, για το σύστημα του σχήματος 2, θα έχουμε το παρακάτω σύστημα διαφορικών εξισώσεων (2ας τάξεως, πεπλεγμένες) [1],

$$I_1 \ddot{\varphi}_1 + k_1 (\varphi_1 - \varphi_2) = 0$$

$$I_2 \ddot{\varphi}_2 + k_1 (\varphi_2 - \varphi_1) + k_2 (\varphi_2 - \varphi_3) = 0$$

$$I_3 \ddot{\varphi}_3 + k_2 (\varphi_3 - \varphi_2) + k_3 (\varphi_3 - \varphi_4) = 0, \quad (\text{σύστημα 1})$$

$$I_4 \ddot{\varphi}_4 + k_3 (\varphi_4 - \varphi_3) + k_4 (\varphi_4 - \varphi_5) = 0$$

$$I_5 \ddot{\varphi}_5 + k_4 (\varphi_5 - \varphi_4) + k_5 (\varphi_5 - \varphi_6) = 0$$

$$I_6 \ddot{\varphi}_6 + k_5 (\varphi_5 - \varphi_6) = 0$$

Επίλυση του συστήματος με την μέθοδο Holzer - Tolle (αριθμητική-επαναληπτική), [3]

Βασικά δεν είναι δυνατό να προσδιοριστούν οι απόλυτες τιμές των ευρών ταλαντώσεως  $A_i$ , παρα μόνο το σχετικό εύρος,  $\frac{A_2}{A_1}, \frac{A_3}{A_1}, \frac{A_4}{A_1}, \dots, \frac{A_v}{A_1}$ .

Οπότε μας ενδιαφέρει, μέσο της μεθόδου αυτής, να προσδιορίσουμε τα,

$$\alpha_1 = \frac{A_1}{A_1} = 1, \quad \alpha_2 = \frac{A_2}{A_1}, \quad \alpha_3 = \frac{A_3}{A_1}, \quad \dots, \quad \alpha_v = \frac{A_v}{A_1}$$

Οι λύσεις του συστήματος αυτού είναι της μορφής,

$$\varphi_i = A_i \cos(\omega t) \quad \text{για } i = 1 \text{ έως } v$$

Με αντικατάσταση των τιμών αυτών στο σύστημα διαφορικών προκύπτει,

$$A_1 (I_1 \omega_e^2 - k_1) + A_2 k_1 = 0$$

.....

$$A_{k+1} k_{k+1} + A_k (I_k \omega_e^2 - k_{k-1} - k_k) + A_{k+1} k_k = 0$$

.....

$$A_{v-1} k_{v-1} + A_v (I_v \omega_e^2 - k_{v-1}) = 0$$

Διαιρώντας με  $A_1$  το σύστημα γίνεται ως κάτωθι,

$$(I_1 \omega_e^2 - k_1) + \alpha_2 k_1 = 0$$

.....

$$\alpha_{k-1} k_{k-1} + \alpha_k (I_k \omega_e^2 - k_{k-1} - k_k) + \alpha_{k+1} k_k = 0$$

.....

$$\alpha_{v-1} k_{v-1} + \alpha_v (I_v \omega_e^2 - k_{v-1}) = 0$$

Αθροίζοντας τις  $\kappa$  πρώτες εξισώσεις, παίρνουμε

$$R_\kappa = \sum_{i=1}^{\kappa} \alpha_i \cdot I_i \cdot \omega_e^2 = \kappa (\alpha_\kappa - \alpha_{\kappa+1}) \quad \text{για } \kappa = 1 \text{ έως } v-1$$

Ενώ αθροίζοντας όλες τις εξισώσεις, παίρνουμε

$$R_v = \sum_{i=1}^v \alpha_i \cdot I_i \cdot \omega_e^2 = 0$$

Έτσι προκύπτει η διαδικασία προσδιορισμού των  $\alpha_i$  και  $\omega_e$

$$\alpha_1 = 1 \qquad R_1 = \alpha_1 I_1 \omega^2$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 - (R_1 / k_1) \qquad R_2 = R_1 + \alpha_2 I_2 \omega^2$$

.....

$$\alpha_{\kappa+1} = \alpha_\kappa - (R_\kappa / k_\kappa) \qquad R_{\kappa+1} = R_\kappa + \alpha_{\kappa+1} I_{\kappa+1} \omega^2$$

$$\alpha_v = \alpha_{v-1} - (R_{v-1} / k_{v-1}) \quad R_v = R_{v-1} + \alpha_v I_v \omega^2$$

- Επιλέγουμε μία τιμή για το  $\omega$
- Υπολογίζονται με βάση τη παραπάνω διαδικασία,  $(\alpha_i, R_i)$ .

Όταν, για κάποια τιμή του  $\omega$  που δόθηκε, προκύψει εναπομένονσα στρεπτική ροπή ίση με μηδέν ( $R_v = 0$ ) τότε σημαίνει ότι  $\omega = \omega_e$ .

Σε περίπτωση που δεν καταλήγουμε σε  $R_v = 0$ , δοκιμάζουμε για άλλη τιμή του  $\omega$ .

Η ύπαρξη ακίνητων διατομών, ανάμεσα σε 2 μάζες που ταλαντώνονται προς αντίθετες κατευθύνσεις (κόμβοι) καθορίζεται από τα πρόσημα του λόγου των σχετικών ευρών  $\frac{\alpha_{\kappa+1}}{\alpha_{\kappa}}$ . Για κάθε αρνητικό τέτοιο λόγο έχουμε κόμβο μεταξύ των μαζών  $\kappa+1$  και  $\kappa$ .

Όταν  $\omega < \omega_{e1}$  τότε 0 – 1 κόμβος και  $R_v > 0$

Όταν  $\omega_{e1} < \omega < \omega_{e2}$  τότε 1 - 2 κόμβοι και  $R_v < 0$

Όταν  $\omega_{e2} < \omega < \omega_{e3}$  τότε 2 - 3 κόμβοι και  $R_v > 0$

Όταν  $\omega_{e3} < \omega < \omega_{e4}$  τότε 3 - 4 κόμβοι και  $R_v < 0$

Επί του πρακτέου, στη μελέτη συστημάτων με εμβολοφόρους κινητήρες σπάνια μας ενδιαφέρουν ιδιαίτερα υψηλόβαθμες ιδιοσυχνότητες αφού όσο αυξάνεται ο βαθμός ταλάντωσης τόσο μειώνεται το εύρος αυτής.

Επίλυση με τη μέθοδο Ανάλυσης Κανονικών Τρόπων Ταλάντωσης για γραμμικά συστήματα (Modal Analysis of Linear Systems), [1]

Η μέθοδος, σε αντίθεση με την προηγούμενη, είναι αναλυτική και καταλήγει σε επίλυση ενός προβλήματος ιδιοτιμών [1].

Το παραπάνω σύστημα\_1 γράφεται σε μορφή μητρώων,



$$[I][\ddot{\Phi}] + [K][\Phi] = 0$$

ή

$$\begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \\ \ddot{\varphi}_3 \\ \ddot{\varphi}_4 \\ \ddot{\varphi}_5 \\ \ddot{\varphi}_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_1 + k_2 & -k_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_4 & k_4 + k_5 & -k_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_5 & k_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ελεύθερες κινήσεις είναι αυτές που κάνει το σύστημα όταν αφήνεται να κινηθεί χωρίς εξωτερικές ροπές. Οι κινήσεις αυτές διεγείρονται από οποιονδήποτε συνδυασμό αρχικών συνθηκών (αρχικών γωνιακών ταχυτήτων είτε αρχικών γωνιακών μετατοπίσεων) [1].

Οι στρεπτικές ακαμψίες των αξονικών τμημάτων είναι [1],

$$k = \frac{GJ}{L},$$

G : το μέτρο διάτμησης του υλικού της ατράκτου

J : η πολική ροπή αδράνειας της διατομής της ατράκτου

L : μήκος του αξονικού τμήματος

Η εσωτερική ροπή που δημιουργεί η στρεπτική αυτή ακαμψία (στρεπτικό ελατήριο), είναι ανάλογη της γωνιακής μετατόπισης, οπότε έχουμε την παρακάτω γραμμική σχέση μεταξύ ροπής και γωνίας [1],

$$T_{12} = k_1 (\varphi_1 - \varphi_2), \quad \text{ενδεικτικά για την πρώτη μάζα.}$$

Οι ελεύθερες κινήσεις ταλαντευόμενων γραμμικών συστημάτων είναι γραμμικός συνδυασμός στοιχειωδών κινήσεων. Αποτέλεσμα της γραμμικότητας που διέπει τις εξισώσεις του συστήματος, είναι οι στοιχειώδεις αυτές κινήσεις, να είναι αρμονικές ταλαντώσεις. Αυτές αποτελούν την ταυτότητα της δυναμικής συμπεριφοράς του κάθε συστήματος και καλούνται "φυσικές ταλαντώσεις" έχοντας καθορισμένη χρονική κατανομή (ιδιοσυχνότητα) και χωρική κατανομή (ιδιομορφή) [1].

Οπότε, υποθέτοντας ότι το σύστημα εκτελεί αυτού του είδους τις κινήσεις έχουμε για την κάθε μια μάζα [1],

$$\varphi_1 = A_1 \cos(\omega t)$$

$$\varphi_2 = A_2 \cos(\omega t)$$

$$\varphi_3 = A_3 \cos(\omega t)$$

$$\varphi_4 = A_4 \cos(\omega t)$$

$$\varphi_5 = A_5 \cos(\omega t)$$

$$\varphi_6 = A_6 \cos(\omega t)$$

Ζήτημα είναι τώρα ο προσδιορισμός των ιδιοτήτων της ελεύθερης κίνησης του συστήματος, δηλαδή των ιδιοσυχνοτήτων ( $\omega_1$  έως  $\omega_6$ ) και των ιδιομορφών ( $A_1$  έως  $A_6$ ). Αντικαθιστώντας στην εξίσωση κίνησης παίρνουμε,

$$[K - \omega^2 I] [A] \cos(\omega t) = 0$$

που σημαίνει,

$$[K - \omega^2 I] [A] = 0$$

$$\text{άρα, } K A = \omega^2 I A$$

Με βάση την κλασική ανάλυση των γραμμικών συστημάτων, αναγνωρίζουμε ότι τα ζεύγη,  $\{\omega^2, A\}$ , είναι οι ιδιοτιμές ( $\omega^2$ ) και αντίστοιχα τα ιδιοδιανύσματα ( $A$ ) του μητρώου ελαστικότητας σε σχέση με το μητρώο ροπών αδράνειας.

### Ιδιοσυχνότητες

Ταυτίζονται με τις λύσεις (ιδιοτιμές) του χαρακτηριστικού πολυωνύμου,

$$P(\omega) = \det(K - \omega^2 I) = 0$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο  $P(\omega)$  προκύπτει,  $n$  - βαθμού ως προς ( $\omega^2$ ), όπου  $n$  είναι οι βαθμοί ελευθερίας του συστήματος [1].

### Ιδιομορφές

Η χωρική κατανομή των γωνιακών μετατοπίσεων, των μαζών που συνοδεύει μια ιδιοσυχνότητα καλείται ιδιομορφή και ταυτίζεται με τη λύση της διανυσματικής εξίσωσης,

$$[K - \omega^2 I] [A] = 0$$

Καταλήξαμε λοιπόν ότι ο υπολογισμός των φυσικών στρεπτικών ταλαντώσεων σε αξονικό σύστημα με αυθαίρετο αριθμό μαζών (πολικών ροπών αδράνειας), είναι στην ουσία η επίλυση ενός γενικευμένου προβλήματος ιδιοτιμών [1].

### Επίλυση με τη μέθοδο Αριθμητικής Ανάλυσης, Runge - Kutta 4ης τάξης, (RK-4).

Η μέθοδος χρησιμοποιείται για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων πρώτου βαθμού, καθώς και για συστήματα αυτών [6]. Χρησιμοποιήθηκε και αυτή στη συγκεκριμένη εργασία για την πραγματοποίηση των αριθμητικών "πειραμάτων"-υπολογισμών.

Από την αριθμητική επίλυση προκύπτουν οι συναρτήσεις,  $\varphi(t)$  και  $\dot{\varphi}(t)$  για κάθε μια μάζα του διακεκριμένου αξονικού συστήματος.

Έστω η διαφορική εξίσωση πρώτου βαθμού,

$$\dot{y} = f(t, y), \quad t \in [t_0, b] \quad \text{με} \quad y(t_0) = y_0$$

με τη συνάρτηση  $f(t, y)$ , και τις αρχικές συνθήκες  $t_0$  και  $y_0$  να είναι γνωστά, και η προς προσδιορισμό συνάρτηση να είναι η  $y(t)$ .

Με βάση την ακολουθία χρονικών τιμών  $t_k$ , που ξεκινά από  $t_0$  και έχει βήμα  $h$ , η μέθοδος κατασκευάζει μια ακολουθία τιμών  $y_k$ , ξεκινώντας από το δεδομένο  $y_0$ .

Συγκεκριμένα, 
$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}(z_1 + 2z_2 + 2z_3 + z_4), \quad \text{όπου}$$

$$z_1 = h f(x_k, y_k)$$

$$z_2 = h f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{z_1}{2}\right)$$

$$z_3 = h f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{z_2}{2}\right)$$

$$z_4 = h f(x_k + h, y_k + z_3)$$

με  $h = \frac{t_0 - b}{n}$ , να είναι το βήμα της μεθόδου.

Καταλήγοντας, έχουμε την προσεγγιστική (αριθμητική) λύση της διαφορικής εξίσωσης,  $y_k = f(t_k)$ .

Συστήματα διαφορικών εξισώσεων, [6].

Η μέθοδος εφαρμόζεται εντελώς αντίστοιχα και σε συστήματα διαφορικών εξισώσεων πρώτου βαθμού. Έστω ένα σύστημα με,  $n$  αριθμό εξισώσεων και  $n$  αρχικές συνθήκες,

$$\vec{y}_n = \begin{bmatrix} y_1' = f_1(t, y_1, \dots, y_n) \\ y_2' = f_2(t, y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ y_{n-1}' = f_{n-1}(t, y_1, \dots, y_n) \\ y_n' = f_n(t, y_1, \dots, y_n) \end{bmatrix}, \quad \text{και} \quad \vec{y}_n(t_0) = \begin{bmatrix} y_1(t_0) \\ y_2(t_0) \\ \vdots \\ y_{n-1}(t_0) \\ y_n(t_0) \end{bmatrix}$$

Οπότε,

$$\vec{y}_{k+1} = \vec{y}_k + \frac{1}{6}(\vec{z}_1 + 2\vec{z}_2 + 2\vec{z}_3 + \vec{z}_4)$$

Και ως λύση παράγεται το επόμενο διάνυσμα,

$$\overrightarrow{y_{n,k}} = \begin{bmatrix} y_{1,k}(t_k) \\ y_{2,k}(t_k) \\ \vdots \\ y_{n-1,k}(t_k) \\ y_{n,k}(t_k) \end{bmatrix}$$

Οι εξισώσεις που διέπουν τη δυναμική των αξονικών συστημάτων είναι διαφορικές εξισώσεις δευτέρου βαθμού, όπως είδαμε παραπάνω, οπότε για να εφαρμοστεί η μέθοδος πρέπει να μειωθεί η τάξη τους κατά ένα βαθμό. Επίσης αυτό πρέπει να γίνει χωρίς να επηρεαστεί η ουσιαστική δομή τους, ώστε να μην αλλάξει ο τρόπος που περιγράφουν τη δυναμική του συστήματος.

Έστω το προηγούμενο σύστημα, 6 βαθμών ελευθερίας,

$$I_1 \ddot{\varphi}_1 + k_1 (\varphi_1 - \varphi_2) = 0$$

$$I_2 \ddot{\varphi}_2 + k_1 (\varphi_2 - \varphi_1) + k_2 (\varphi_2 - \varphi_3) = 0$$

$$I_3 \ddot{\varphi}_3 + k_2 (\varphi_3 - \varphi_2) + k_3 (\varphi_3 - \varphi_4) = 0$$

$$I_4 \ddot{\varphi}_4 + k_3 (\varphi_4 - \varphi_3) + k_4 (\varphi_4 - \varphi_5) = 0$$

$$I_5 \ddot{\varphi}_5 + k_4 (\varphi_5 - \varphi_4) + k_5 (\varphi_5 - \varphi_6) = 0$$

$$I_6 \ddot{\varphi}_6 + k_5 (\varphi_5 - \varphi_6) = 0$$

ισοδύναμα γράφεται,

$$\ddot{\varphi}_1 = \frac{k_1}{I_1} (\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\ddot{\varphi}_2 = \frac{k_1}{I_2} (\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{k_2}{I_2} (\varphi_3 - \varphi_2)$$

$$\ddot{\varphi}_3 = \frac{k_2}{I_3} (\varphi_2 - \varphi_3) + \frac{k_3}{I_3} (\varphi_4 - \varphi_3)$$

$$\ddot{\varphi}_4 = \frac{k_3}{I_4} (\varphi_3 - \varphi_4) + \frac{k_4}{I_4} (\varphi_5 - \varphi_4)$$

$$\ddot{\varphi}_5 = \frac{k_4}{I_5} (\varphi_4 - \varphi_5) + \frac{k_5}{I_5} (\varphi_6 - \varphi_5)$$

$$\ddot{\varphi}_6 = \frac{k_5}{I_6} (\varphi_5 - \varphi_6)$$

Θέτοντας,

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \varphi_1, & x_2 &= \dot{\varphi}_1 \\
 x_3 &= \varphi_2, & x_4 &= \dot{\varphi}_2 \\
 x_5 &= \varphi_3, & x_6 &= \dot{\varphi}_3 \\
 x_7 &= \varphi_4, & x_8 &= \dot{\varphi}_4 \\
 x_9 &= \varphi_5, & x_{10} &= \dot{\varphi}_5 \\
 x_{11} &= \varphi_6, & x_{12} &= \dot{\varphi}_6
 \end{aligned}$$

έχουμε, ισοδύναμα με το αρχικό,

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_2 &= \frac{k_1}{I_1} (x_3 - x_1) \\
 \dot{x}_4 &= \frac{k_1}{I_2} (x_5 - x_3) + \frac{k_2}{I_2} (x_1 - x_3) \\
 \dot{x}_6 &= \frac{k_2}{I_3} (x_7 - x_5) + \frac{k_3}{I_3} (x_3 - x_5) \\
 \dot{x}_8 &= \frac{k_3}{I_4} (x_9 - x_7) + \frac{k_4}{I_4} (x_5 - x_7) \\
 \dot{x}_{10} &= \frac{k_4}{I_5} (x_{11} - x_9) + \frac{k_5}{I_5} (x_7 - x_9) \\
 \dot{x}_{12} &= \frac{k_6}{I_6} (x_{11} - x_9)
 \end{aligned}$$

Στη μορφή αυτή του συστήματος εφαρμόζεται η μέθοδος RK-4, και παράγει το διάλυμα-λύση (με τις αντίστοιχες προσαρμογές στις αρχικές συνθήκες),

$$\overrightarrow{x}_{12,k} = \begin{bmatrix} x_{1,k}(t_k) \\ x_{2,k}(t_k) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{11,k}(t_k) \\ x_{12,k}(t_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{1,k}(t_k) \\ \dot{\varphi}_{1,k}(t_k) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi_{6,k}(t_k) \\ \dot{\varphi}_{6,k}(t_k) \end{bmatrix}$$

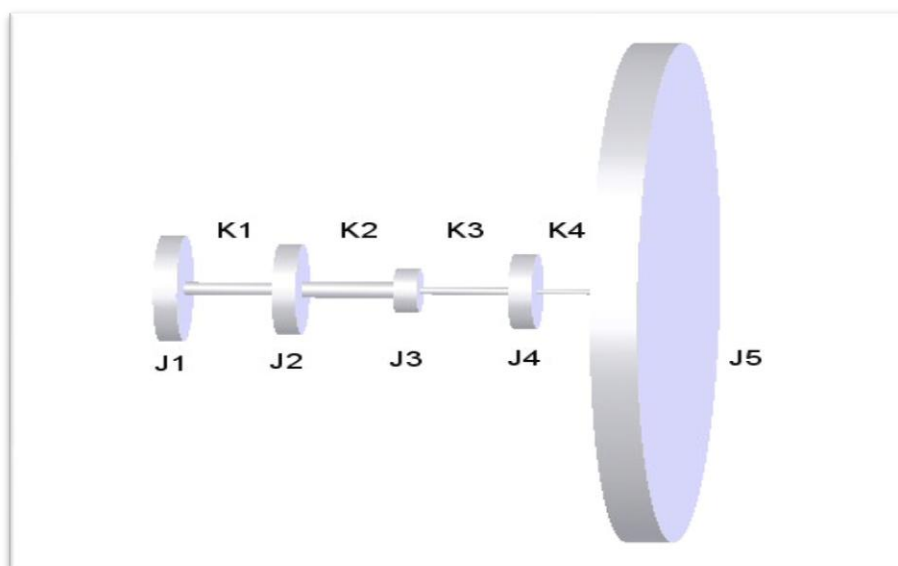
βρίσκοντας έτσι, αριθμητικά τις γωνιακές μετατοπίσεις και τις γωνιακές ταχύτητες για κάθε μάζα. Με τη μέθοδο αυτή βρίσκουμε τη συμπεριφορά (θέση και ταχύτητα), κάθε μάζας ξεχωριστά, ανάλογα με τις αρχικές συνθήκες που την "τροφοδοτούμε" κάθε φορά.

### Ροπή Αδράνειας Μάζας - Εισαγωγή Μη Γραμμικότητας

Μια συγκεντρωμένη μάζα κατά μήκος ενός αξονικού χαρακτηρίζεται, όπως προαναφέρθηκε, μόνο από την ροπή αδράνειάς της [1]. Επί παραδείγματι η έλικα στην άκρη του αξονικού συστήματος αντικαθίσταται από την ροπή αδράνειάς της ως προς τον άξονα περιστροφής του αξονικού. Οπότε μπορούμε να φανταστούμε έναν δίσκο στη θέση της έλικας, με την ίδια ροπή αδράνειας με αυτή.

Αντικαθιστώντας όλες τις συγκεντρωμένες μάζες του αξονικού με έναν αντίστοιχο για κάθε μάζα δίσκο, παράγουμε το ισοδύναμο διακεκριμένο σύστημα, στο οποίο έχουμε ήδη αναφερθεί [1]. Χαρακτηριστική ιδιότητα του καθένα από αυτούς τους δίσκους, είναι ότι είναι ζυγοσταθμισμένος ως προς τον άξονα περιστροφής του αξονικού συστήματος.

$$I_S = \frac{\pi D^4}{32} \rho L = I_{\text{συγκ. μάζας}}$$



Σχήμα 3

Εντελώς ισοδύναμο με το δίσκο, μπορούμε στη θέση της μάζας να θεωρήσουμε ότι υφίσταται μια ράβδος (βλ. σχήμα 4) με το επίπεδό της κάθετα στον άξονα περιστροφής, και στα δύο της άκρα έχει συγκεντρωμένες μάζες. Το σύστημα αυτό θα είναι δυναμικά ισοδύναμο με το πραγματικό εφόσον ισχύουν τα παρακάτω [2],

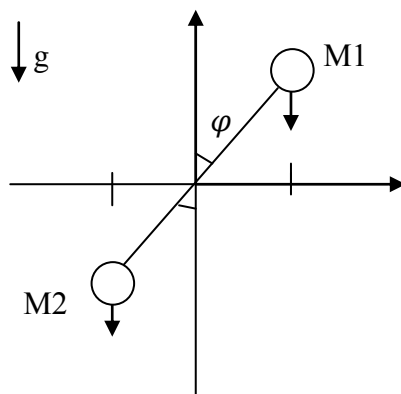
1.  $M_1 + M_2 = M_{\text{συγκ. μάζας}}$
2.  $M_2 L_2 - M_1 L_1 = 0$
3.  $M_1 L_1^2 + M_2 L_2^2 = I_{\text{συγκ. μάζας}}$

Η δεύτερη των εξισώσεων είναι σημαντική γιατί εκφράζει την εκκεντρότητα του συστήματος ράβδος-μάζες. Το μέγεθος αυτό μας δείχνει αν "περισεύουν" ροπές (εσωτερικές) τέτοιες ώστε να μην καθιστούν το σύστημα αφ' εαυτού σταθερό, ως προς τον άξονα περιστροφής.

Στην μέχρι τώρα ανάλυση, οι δυναμικές εξισώσεις των αξονικών συστημάτων δεν περιέχουν όρους που να αφορούν την εκκεντρότητα. Δηλαδή σε όποια γωνία στρέψης κι αν αφηθεί το αξονικό σύστημα θα ισορροπήσει αφού δεν "περισεύουν" εσωτερικές ροπές ως προς τον άξονα περιστροφής του.

#### Εισαγωγή εκκεντρότητας στις δυναμικές εξισώσεις

Αρχικά, θεωρούμε τη ράβδο με τις δύο μάζες ως ένα εκκρεμές, με μήκη  $L_1$  και  $L_2$  αντίστοιχα,



Σχήμα 4

Βασιζόμενοι στο 2ο νόμο του Νεύτωνα [1],

$$I\ddot{\varphi} = \sum T$$

παίρνουμε,

$$I\ddot{\varphi} = -M_2gL_2 \sin \varphi + M_1gL_1 \sin \varphi$$

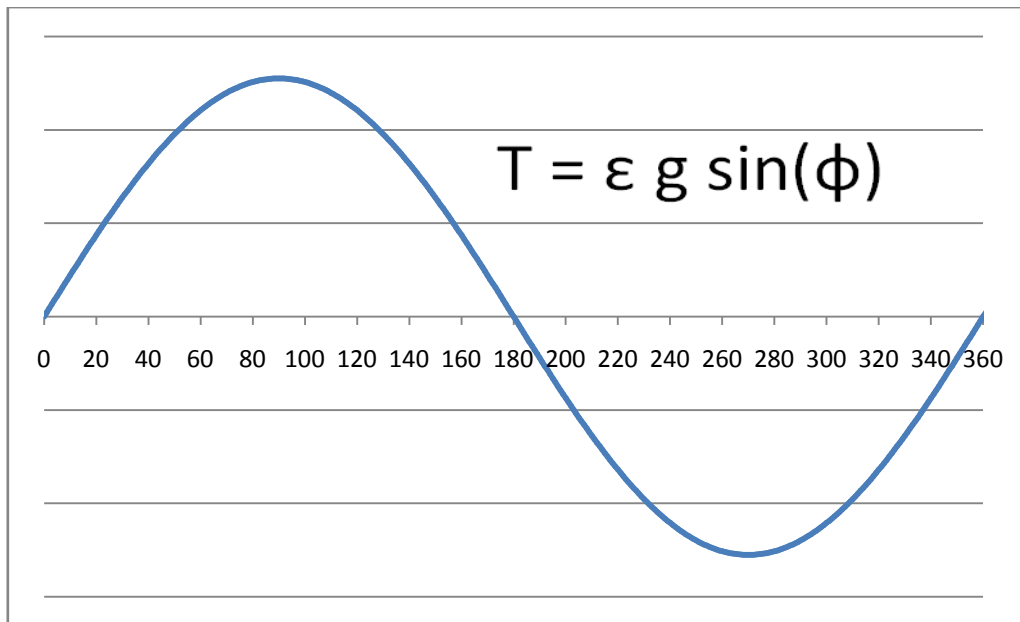
$$I\ddot{\varphi} = -g \sin \varphi (M_2L_2 - M_1L_1)$$

συμβολίζοντας την εκκεντρότητα με " $\varepsilon$ ", καταλήγουμε,

$$I\ddot{\varphi} = -\varepsilon g \sin \varphi$$

Ως φαίνεται, η ένταση της συνεισφοράς του μη γραμμικού όρου καθορίζεται από την τιμή της εκκεντρότητας " $\varepsilon$ ". Ουσιαστικά η τιμή της εκκεντρότητας καθορίζει την επίδραση της βαρύτητας στη μάζα που περιστρέφεται.

Είναι προφανές ότι στην περίπτωση μηδενικής εκκεντρότητας ( $\varepsilon = 0$ ), ο παραπάνω όρος απαλείφεται από τις εξισώσεις. Αν όμως,  $\varepsilon > 0$  ή  $\varepsilon < 0$ , ο μη γραμμικός όρος ( $-g \sin \varphi$ ) εισάγεται στις δυναμικές εξισώσεις που περιγράφουν το αξονικό μας σύστημα και προφανώς επηρεάζει την απόκρισή του.



Διάγραμμα 1

Στο διάγραμμα 1 φαίνεται ποιοτικά η σχέση μεταξύ ροπής-γωνίας. Βλέπουμε ότι όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή της εκκεντρότητας "ε", τόσο μεγαλύτερη γίνεται η επιρροή του όρου αυτού στην εξίσωση.

### Σύστημα έξι μαζών

Εξετάζουμε εδώ το σύστημα του σχήματος 2, εισάγοντας εκκεντρότητα για κάθε μάζα (  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_6$  ) του αξονικού (στροφαλοφόρου) συστήματος. Έχουμε οπότε,

$$I_1 \ddot{\varphi}_1 + k_1 (\varphi_1 - \varphi_2) + \epsilon_1 g \sin \varphi_1 = 0$$

$$I_2 \ddot{\varphi}_2 + k_1 (\varphi_2 - \varphi_1) + k_2 (\varphi_2 - \varphi_3) + \epsilon_2 g \sin \varphi_2 = 0$$

$$I_3 \ddot{\varphi}_3 + k_2 (\varphi_3 - \varphi_2) + k_3 (\varphi_3 - \varphi_4) + \epsilon_3 g \sin \varphi_3 = 0$$

$$I_4 \ddot{\varphi}_4 + k_3 (\varphi_4 - \varphi_3) + k_4 (\varphi_4 - \varphi_5) + \epsilon_4 g \sin \varphi_4 = 0$$

$$I_5 \ddot{\varphi}_5 + k_4 (\varphi_5 - \varphi_4) + k_5 (\varphi_5 - \varphi_6) + \epsilon_5 g \sin \varphi_5 = 0$$

$$I_6 \ddot{\varphi}_6 + k_5 (\varphi_5 - \varphi_6) + \epsilon_6 g \sin \varphi_6 = 0$$

Παρατηρούμε ότι οι όροι που αφορούν την εκκεντρότητα περιέχουν τη γωνία στρέψης κάθε μάζας και όχι τη σχετική γωνία μεταξύ δύο μαζών.

Το οποίο σύστημα εξισώσεων ισοδύναμα γράφεται,



$$\ddot{\varphi}_1 = \frac{k_1}{I_1}(\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{\varepsilon_1}{I_1} g \sin \varphi_1$$

$$\ddot{\varphi}_2 = \frac{k_1}{I_2}(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{k_2}{I_2}(\varphi_3 - \varphi_2) - \frac{\varepsilon_2}{I_2} g \sin \varphi_1$$

$$\ddot{\varphi}_3 = \frac{k_2}{I_3}(\varphi_2 - \varphi_3) + \frac{k_3}{I_3}(\varphi_4 - \varphi_3) - \frac{\varepsilon_3}{I_3} g \sin \varphi_1$$

$$\ddot{\varphi}_4 = \frac{k_3}{I_4}(\varphi_3 - \varphi_4) + \frac{k_4}{I_4}(\varphi_5 - \varphi_4) - \frac{\varepsilon_4}{I_4} g \sin \varphi_1$$

$$\ddot{\varphi}_5 = \frac{k_4}{I_5}(\varphi_4 - \varphi_5) + \frac{k_5}{I_5}(\varphi_6 - \varphi_5) - \frac{\varepsilon_5}{I_5} g \sin \varphi_1$$

$$\ddot{\varphi}_6 = \frac{k_5}{I_6}(\varphi_5 - \varphi_6) - \frac{\varepsilon_6}{I_6} g \sin \varphi_1$$

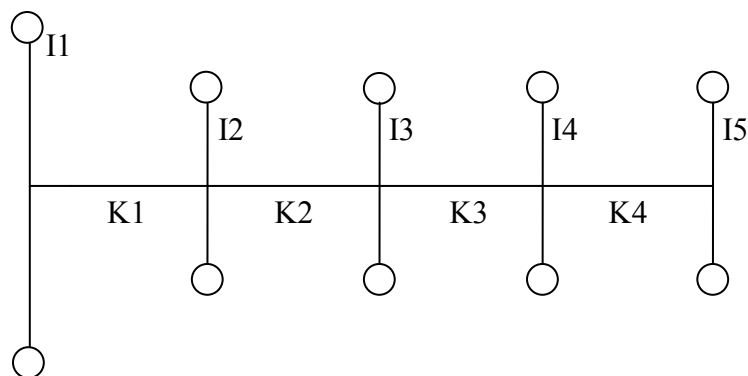
Στο σημείο αυτό ακολουθείται η προαναφερθείσα πορεία για αριθμητική επίλυση, με τη μέθοδο RK-4. Οπότε καταλήγουμε στο διάνυσμα-λύση,

$$\overrightarrow{x}_{12,k} = \begin{bmatrix} x_{1,k}(t_k) \\ x_{2,k}(t_k) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{11,k}(t_k) \\ x_{12,k}(t_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{1,k}(t_k) \\ \dot{\varphi}_{1,k}(t_k) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi_{6,k}(t_k) \\ \dot{\varphi}_{6,k}(t_k) \end{bmatrix}$$

Ολοκληρώνοντας, αξίζει να αναφερθεί η σημασία των λόγων  $\left\{ \frac{k}{I}, \frac{\varepsilon g}{I} \right\}$ . Ο πρώτος, καταδεικνύει την επίδραση της ελαστικότητας επί της αδράνειας, και ο δεύτερος την επίδραση της βαρύτητας επί της αδράνειας. Είναι δύο διαφορετικές ποσότητες, που δείχνουν πόσο επηρεάζεται η συμμετοχή της ροπής αδράνειας στην "κυβέρνηση" των ελεύθερων κινήσεων του συστήματος.

## 1. Μαθηματική Μοντελοποίηση

Ο πρότυπος στροφαλοφόρος άξονας του εργαστηρίου αποτελείται από έναν σφόνδυλο, στο ένα άκρο του, και τέσσερα πλήρη στρόφαλα. Οπότε το πλήρες διακεκριμένο μοντέλο για αυτόν τον άξονα αποτελείται από 5 μάζες και 4 δυστρεπτότητες (στρεπτική ακαμψία).



Εικόνα 1.2 Διακεκριμένο μοντέλο πρότυπου στροφαλοφόρου άξονα.

Το σύστημα μοντελοποιείται αρχικά στην πιο βασική μορφή τού, δηλαδή χωρίς απόσβεση και εξωτερική διέγερση. Η επίλυση του συστήματος εξισώσεων που προκύπτει, δίνει τις ιδιοσυχνότητες - ιδιομορφές του αξονικού.

### Μαθηματική μοντελοποίηση με βάση τη Νευτώνεια Δυναμική

Εφαρμόζοντας τον 2ο νόμο του Νεύτωνα, για περιστροφική κίνηση,

$$I\ddot{\varphi} = \sum T \quad (1)$$

σε κάθε μάζα του συστήματος παίρνουμε,

- πρώτη μάζα (σφόνδυλος),

$$I_1 \ddot{\varphi}_1 = -k_1\varphi_1 + k_1\varphi_2 \Rightarrow I_1 \ddot{\varphi}_1 + k_1(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$$

- δεύτερη μάζα (πλήρες στρόφαλο),

$$I_2 \ddot{\varphi}_2 = -k_1\varphi_2 + k_1\varphi_1 - k_2\varphi_2 + k_2\varphi_3 \Rightarrow I_2 \ddot{\varphi}_2 + k_1(\varphi_2 - \varphi_1) + k_2(\varphi_2 - \varphi_3) = 0$$

- τρίτη μάζα (πλήρες στρόφαλο)

$$I_3 \ddot{\varphi}_3 = -k_2\varphi_3 + k_2\varphi_2 - k_3\varphi_3 + k_3\varphi_4 \Rightarrow I_3 \ddot{\varphi}_3 + k_2(\varphi_3 - \varphi_2) + k_3(\varphi_3 - \varphi_4) = 0$$

- τέταρτη μάζα (πλήρες στρόφαλο)

$$I_4 \ddot{\varphi}_4 = -k_3\varphi_4 + k_3\varphi_3 - k_4\varphi_4 + k_4\varphi_5 \Rightarrow I_4 \ddot{\varphi}_4 + k_3(\varphi_4 - \varphi_3) + k_4(\varphi_4 - \varphi_5) = 0$$

- πέμπτη μάζα (πλήρες στρόφαλο)

$$I_5 \ddot{\varphi}_5 = -k_4\varphi_5 + k_4\varphi_4 \Rightarrow I_5 \ddot{\varphi}_5 + k_4(\varphi_5 - \varphi_4) = 0$$

Οπότε συγκεντρωτικά έχουμε το παρακάτω σύστημα διαφορικών εξισώσεων,

$$I_1 \ddot{\varphi}_1 + k_1(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$$

$$I_2 \ddot{\varphi}_2 + k_1(\varphi_2 - \varphi_1) + k_2(\varphi_2 - \varphi_3) = 0$$

$$I_3 \ddot{\varphi}_3 + k_2(\varphi_3 - \varphi_2) + k_3(\varphi_3 - \varphi_4) = 0$$

$$I_4 \ddot{\varphi}_4 + k_3(\varphi_4 - \varphi_3) + k_4(\varphi_4 - \varphi_5) = 0$$

$$I_5 \ddot{\varphi}_5 + k_4(\varphi_5 - \varphi_4) = 0$$

### Μαθηματική μοντελοποίηση με βάση την Αναλυτική Δυναμική (Lagrangian Dynamics)

Για δυναμικά συστήματα που η συμπεριφορά τους διέπεται από συντηρητικά πεδία δυνάμεων, με βάση την αρχή των Δυνατών Έργων, οι εξισώσεις κίνησης παράγονται από τις εξισώσεις Lagrange - Euler,

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_i} - \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_i} \right\} = 0 \quad (2)$$

όπου,  $L = T - V$ , η Lagrangian του συστήματος

- $T$ , η κινητική ενέργεια του συστήματος μαζών
- $V$ , η δυναμική (ελαστική) ενέργεια του συστήματος μαζών

Άρα έχουμε,

$$T = \frac{1}{2} I_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2} I_3 \dot{\varphi}_3^2 + \frac{1}{2} I_4 \dot{\varphi}_4^2 + \frac{1}{2} I_5 \dot{\varphi}_5^2$$

$$V = \frac{1}{2} K_1(\varphi_2 - \varphi_1)^2 + \frac{1}{2} K_2(\varphi_3 - \varphi_2)^2 + \frac{1}{2} K_3(\varphi_4 - \varphi_3)^2 + \frac{1}{2} K_4(\varphi_5 - \varphi_4)^2$$

Κάθε μια από τις πέντε εξισώσεις του συστήματος παράγεται με βάση την (2),

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_1} - \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} \right\} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_2} - \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} \right\} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_3} - \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_3} \right\} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_4} - \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_4} \right\} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_5} - \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_5} \right\} = 0$$

Αναλυτικά έχουμε,

$$L = \frac{1}{2} I_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2} I_3 \dot{\varphi}_3^2 + \frac{1}{2} I_4 \dot{\varphi}_4^2 + \frac{1}{2} I_5 \dot{\varphi}_5^2 - \frac{1}{2} K_1 (\varphi_2 - \varphi_1)^2 - \frac{1}{2} K_2 (\varphi_3 - \varphi_2)^2 - \frac{1}{2} K_3 (\varphi_4 - \varphi_3)^2 - \frac{1}{2} K_4 (\varphi_5 - \varphi_4)^2$$

και παίρνοντας παραγώγους ως προς γωνίες,

- $\frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = K_1 \varphi_2 - K_1 \varphi_1$
- $\frac{\partial L}{\partial \varphi_2} = -K_1 \varphi_2 + K_1 \varphi_1 + K_2 \varphi_3 - K_2 \varphi_2$
- $\frac{\partial L}{\partial \varphi_3} = -K_2 \varphi_3 + K_2 \varphi_2 + K_3 \varphi_4 - K_3 \varphi_3$
- $\frac{\partial L}{\partial \varphi_4} = -K_3 \varphi_4 + K_3 \varphi_3 + K_4 \varphi_5 - K_4 \varphi_4$
- $\frac{\partial L}{\partial \varphi_5} = -K_4 \varphi_5 + K_4 \varphi_4$

ως προς γωνιακές ταχύτητες,

- $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} = I_1 \dot{\varphi}_1$
- $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} = I_2 \dot{\varphi}_2$

- $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_3} = I_3 \dot{\varphi}_3$

- $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_4} = I_4 \dot{\varphi}_4$

- $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_5} = I_5 \dot{\varphi}_5$

και ως προς τον χρόνο,  $t$ , έχουμε,

- $\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} \right\} = I_1 \ddot{\varphi}_1$

- $\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} \right\} = I_2 \ddot{\varphi}_2$

- $\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_3} \right\} = I_3 \ddot{\varphi}_3$

- $\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_4} \right\} = I_4 \ddot{\varphi}_4$

- $\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_5} \right\} = I_5 \ddot{\varphi}_5$

Οπότε σύμφωνα με τη δομή των εξισώσεων (2) καταλήγουμε στις ίδιες διαφορικές εξισώσεις με αυτές που ακολουθούν τον 2ο νόμο του Νεύτωνα.

Έχουμε,

$$K_1 \varphi_2 - K_1 \varphi_1 - I_1 \ddot{\varphi}_1 = 0$$

$$-K_1 \varphi_2 + K_1 \varphi_1 + K_2 \varphi_3 - K_2 \varphi_2 - I_2 \ddot{\varphi}_2 = 0$$

$$-K_2 \varphi_3 + K_2 \varphi_2 + K_3 \varphi_4 - K_3 \varphi_3 - I_3 \ddot{\varphi}_3 = 0$$

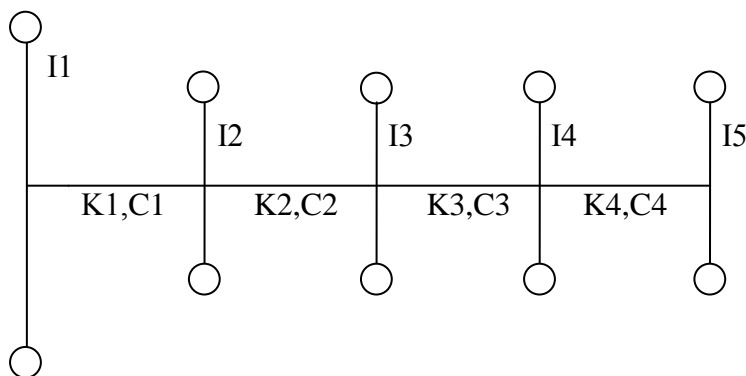
$$-K_3 \varphi_4 + K_3 \varphi_3 + K_4 \varphi_5 - K_4 \varphi_4 - I_4 \ddot{\varphi}_4 = 0$$

$$-K_4 \varphi_5 + K_4 \varphi_4 - I_5 \ddot{\varphi}_5 = 0$$

### Μαθηματική μοντελοποίηση συστήματος με απόσβεση

Στην πραγματικότητα το σύστημα, εκτός των δύο φορέων ενέργειας ( μάζες, άτρακτοι ) φέρει και στοιχεία που καταναλώνουν ενέργεια, όπως παθητικές αντιστάσεις, τότε το πλάτος της ταλάντωσης μειώνεται συνεχώς. Η ροπή αυτή απόσβεσης πάντα αντιτίθεται στην κίνηση και η συμπεριφορά της ( χρονική μεταβολή της ) εξαρτάται από το είδος της.

- Αντίσταση σε ξηρά τριβή, έχει σταθερή τιμή
- Αντίσταση στην αργή κίνηση των σωμάτων μέσα σε ρευστό είναι ανάλογη της ταχύτητας (  $\dot{\varphi}$  )
- Αντίσταση στην αντίστοιχη γρήγορη κίνηση είναι ανάλογη με το τετράγωνο της ταχύτητας [  $(\dot{\varphi})^2$  ]



Εικόνα 1.3 Διακεκριμένο μοντέλο πρότυπου στροφαλοφόρου άξονα με αποσβέσεις

Για συστήματα με εμβολοφόρες Μ.Ε.Κ η συγγενέστερη μορφή απόσβεσης είναι αυτή της αντίστασης, ανάλογης προς την ταχύτητα περιστροφής.

### Μαθηματική μοντελοποίηση με βάση την Αναλυτική Δυναμική (Lagrangian Dynamics)

Με βάση την αρχή των Δυνατών Έργων, οι εξισώσεις κίνησης του συστήματος παράγονται από τις εξισώσεις Lagrange - Euler,

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_i} - \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_i} \right\} = Q_i \quad (2)$$

Εδώ εμφανίζεται και η απόσβεση που είναι μη συντηρητική δύναμη. Μεταβολή του έργου της ως προς τη γωνιακή μετατόπιση είναι η ροπή στο δεξί μέλος των εξισώσεων (2).

$$Q_i = \frac{d}{d\varphi_i} W_i = F_i$$

όπου  $W_i$ , είναι το έργο που παράγει η μη συντηρητική δύναμη κατά τη γωνιακή μετατόπιση,  $\varphi_i$ .

Το έργο της απόσβεσης για κάθε μάζα είναι,

- $W_1 = F_1\varphi_1$
- $W_2 = F_2\varphi_2$
- $W_3 = F_3\varphi_3$
- $W_4 = F_4\varphi_4$
- $W_5 = F_5\varphi_5$

Οποτε,

- $Q_1 = \frac{d}{d\varphi_1} W_1 = F_1$
- $Q_2 = \frac{d}{d\varphi_2} W_2 = F_2$
- $Q_3 = \frac{d}{d\varphi_3} W_3 = F_3$
- $Q_4 = \frac{d}{d\varphi_4} W_4 = F_4$

όπου,

- $F_1 = c_1 (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1)$
- $F_2 = c_2 (\dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_2) + c_1 (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1)$
- $F_3 = c_3 (\dot{\varphi}_4 - \dot{\varphi}_3) + c_2 (\dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_2)$
- $F_4 = c_4 (\dot{\varphi}_5 - \dot{\varphi}_4) + c_3 (\dot{\varphi}_4 - \dot{\varphi}_3)$
- $F_5 = c_5 (\dot{\varphi}_5 - \dot{\varphi}_4)$

Κάθε μια από τις πέντε εξισώσεις του συστήματος παράγεται με βάση την (2),

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_1} - \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} \right\} = F_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_2} - \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} \right\} = F_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_3} - \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_3} \right\} = F_3$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_4} - \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_4} \right\} = F_4$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_5} - \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_5} \right\} = F_5$$

Όπως και στο μοντέλο χωρίς απόσβεση έχουμε,

$$L = \frac{1}{2} I_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2} I_3 \dot{\varphi}_3^2 + \frac{1}{2} I_4 \dot{\varphi}_4^2 + \frac{1}{2} I_5 \dot{\varphi}_5^2 - \frac{1}{2} K_1 (\varphi_2 - \varphi_1)^2 - \frac{1}{2} K_2 (\varphi_3 - \varphi_2)^2 - \frac{1}{2} K_3 (\varphi_4 - \varphi_3)^2 - \frac{1}{2} K_4 (\varphi_5 - \varphi_4)^2$$

παίρνοντας παραγώγους ως προς γωνίες,

- $\frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = K_1 \varphi_2 - K_1 \varphi_1$
- $\frac{\partial L}{\partial \varphi_2} = -K_1 \varphi_2 + K_1 \varphi_1 + K_2 \varphi_3 - K_2 \varphi_2$
- $\frac{\partial L}{\partial \varphi_3} = -K_2 \varphi_3 + K_2 \varphi_2 + K_3 \varphi_4 - K_3 \varphi_3$
- $\frac{\partial L}{\partial \varphi_4} = -K_3 \varphi_4 + K_3 \varphi_3 + K_4 \varphi_5 - K_4 \varphi_4$
- $\frac{\partial L}{\partial \varphi_5} = -K_4 \varphi_5 + K_4 \varphi_4$

ως προς γωνιακές ταχύτητες,

- $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} = I_1 \dot{\varphi}_1$
- $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} = I_2 \dot{\varphi}_2$



- $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_3} = I_3 \dot{\varphi}_3$
- $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_4} = I_4 \dot{\varphi}_4$
- $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_5} = I_5 \dot{\varphi}_5$

και ως προς τον χρόνο,  $t$ , έχουμε,

- $\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} \right\} = I_1 \ddot{\varphi}_1$
- $\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} \right\} = I_2 \ddot{\varphi}_2$
- $\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_3} \right\} = I_3 \ddot{\varphi}_3$
- $\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_4} \right\} = I_4 \ddot{\varphi}_4$
- $\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_5} \right\} = I_5 \ddot{\varphi}_5$

Οπότε σύμφωνα με τη δομή των εξισώσεων,  $\frac{\partial L}{\partial \varphi_i} - \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_i} \right\} = Q_i$   
έχουμε,

$$\begin{aligned}
 & K_1 \varphi_2 - K_1 \varphi_1 - I_1 \ddot{\varphi}_1 = c_1 (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) \\
 & -K_1 \varphi_2 + K_1 \varphi_1 + K_2 \varphi_3 - K_2 \varphi_2 - I_2 \ddot{\varphi}_2 = c_2 (\dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_2) + c_1 (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) \\
 & -K_2 \varphi_3 + K_2 \varphi_2 + K_3 \varphi_4 - K_3 \varphi_3 - I_3 \ddot{\varphi}_3 = c_3 (\dot{\varphi}_4 - \dot{\varphi}_3) + c_2 (\dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_2) \\
 & -K_3 \varphi_4 + K_3 \varphi_3 + K_4 \varphi_5 - K_4 \varphi_4 - I_4 \ddot{\varphi}_4 = c_4 (\dot{\varphi}_5 - \dot{\varphi}_4) + c_3 (\dot{\varphi}_4 - \dot{\varphi}_3) \\
 & -K_4 \varphi_5 + K_4 \varphi_4 - I_5 \ddot{\varphi}_5 = c_5 (\dot{\varphi}_5 - \dot{\varphi}_4)
 \end{aligned}$$

### Εκκεντρότητες των τροφάλων

Οι δυναμικές εξισώσεις που αναπτύχθηκαν μέχρι τώρα για το αξονικό δεν περιέχουν όρους που να αφορούν την εκκεντρότητα ( βλέπε "Εισαγωγή" ) που εκ φύσεως της μορφής του, έχει ο τροφαλοφόρος.

Εφόσον πρόκειται για δυναμικό σύστημα που η συμπεριφορά του διέπεται από συντηρητικά πεδία δυνάμεων, οι εξισώσεις κίνησης παράγονται από,

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_i} - \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_i} \right\} = 0 \quad (2)$$

όπου,  $L = T - V$ , η Lagrangian του συστήματος

- $T$ , η κινητική ενέργεια του συστήματος μαζών
- $V$ , η δυναμική (ελαστική, υψομετρικό δυναμικό) ενέργεια του συστήματος μαζών

Άρα έχουμε,

$$T = \frac{1}{2} I_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2} I_3 \dot{\varphi}_3^2 + \frac{1}{2} I_4 \dot{\varphi}_4^2 + \frac{1}{2} I_5 \dot{\varphi}_5^2$$

Στη δυναμική ενέργεια, σε αυτή την περίπτωση, συμπεριλαμβάνεται η ενέργεια λόγω θέσης ή υψομετρικής διαφοράς (βλέπε. σχ.4 από "εισαγωγή"),

$$V = \frac{1}{2} K_1(\varphi_2 - \varphi_1)^2 + \frac{1}{2} K_2(\varphi_3 - \varphi_2)^2 + \frac{1}{2} K_3(\varphi_4 - \varphi_3)^2 + \frac{1}{2} K_4(\varphi_5 - \varphi_4)^2 +$$
$$+ M_{2,1}gL_{2,1} \cos \varphi_2 - M_{2,2}gL_{2,2} \cos \varphi_2 + M_{3,1}gL_{3,1} \cos \varphi_3 - M_{3,2}gL_{3,2} \cos \varphi_3$$
$$+ M_{4,1}gL_{4,1} \cos \varphi_4 - M_{4,2}gL_{4,2} \cos \varphi_4 + M_{5,1}gL_{5,1} \cos \varphi_5 - M_{5,2}gL_{5,2} \cos \varphi_5$$

ή

$$V = \frac{1}{2} K_1(\varphi_2 - \varphi_1)^2 + \frac{1}{2} K_2(\varphi_3 - \varphi_2)^2 + \frac{1}{2} K_3(\varphi_4 - \varphi_3)^2 + \frac{1}{2} K_4(\varphi_5 - \varphi_4)^2$$
$$- \varepsilon_2 \cos \varphi_2 - \varepsilon_3 \cos \varphi_3 - \varepsilon_4 \cos \varphi_4 - \varepsilon_5 \cos \varphi_5$$

παραγώγους ως προς γωνίες,

- $\frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = K_1 \varphi_2 - K_1 \varphi_1$
- $\frac{\partial L}{\partial \varphi_2} = -K_1 \varphi_2 + K_1 \varphi_1 + K_2 \varphi_3 - K_2 \varphi_2 + \varepsilon_2 \sin \varphi_2$
- $\frac{\partial L}{\partial \varphi_3} = -K_2 \varphi_3 + K_2 \varphi_2 + K_3 \varphi_4 - K_3 \varphi_3 + \varepsilon_3 \sin \varphi_3$
- $\frac{\partial L}{\partial \varphi_4} = -K_3 \varphi_4 + K_3 \varphi_3 + K_4 \varphi_5 - K_4 \varphi_4 + \varepsilon_4 \sin \varphi_4$
- $\frac{\partial L}{\partial \varphi_5} = -K_4 \varphi_5 + K_4 \varphi_4 + \varepsilon_5 \sin \varphi_5$

ως προς γωνιακές ταχύτητες,

- $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} = I_1 \dot{\varphi}_1$
- $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} = I_2 \dot{\varphi}_2$
- $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_3} = I_3 \dot{\varphi}_3$
- $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_4} = I_4 \dot{\varphi}_4$
- $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_5} = I_5 \dot{\varphi}_5$

και ως προς τον χρόνο,  $t$ , έχουμε,

- $\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} \right\} = I_1 \ddot{\varphi}_1$
- $\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} \right\} = I_2 \ddot{\varphi}_2$
- $\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_3} \right\} = I_3 \ddot{\varphi}_3$
- $\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_4} \right\} = I_4 \ddot{\varphi}_4$
- $\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_5} \right\} = I_5 \ddot{\varphi}_5$

Καταλήγουμε στις δυναμικές εξισώσεις του συστήματος,

$$I_1 \ddot{\varphi}_1 + k_1 (\varphi_1 - \varphi_2) = 0$$

$$I_2 \ddot{\varphi}_2 + k_1 (\varphi_2 - \varphi_1) + k_2 (\varphi_2 - \varphi_3) + \varepsilon_2 g \sin \varphi_2 = 0$$

$$I_3 \ddot{\varphi}_3 + k_2 (\varphi_3 - \varphi_2) + k_3 (\varphi_3 - \varphi_4) + \varepsilon_3 g \sin \varphi_3 = 0$$

$$I_4 \ddot{\varphi}_4 + k_3 (\varphi_4 - \varphi_3) + k_4 (\varphi_4 - \varphi_5) + \varepsilon_4 g \sin \varphi_4 = 0$$

$$I_5 \ddot{\varphi}_5 + k_4 (\varphi_5 - \varphi_4) + \varepsilon_5 g \sin \varphi_5 = 0$$

Μαθηματική μοντελοποίηση συστήματος με εκκεντρότητα & απόσβεση

Οι εξισώσεις κίνησης του συστήματος θα έχουν τη δομή,

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_i} - \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_i} \right\} = Q_i$$

Η μεταβολή του έργου της απόσβεσης ως προς τη γωνιακή μετατόπιση είναι η ροπή στο δεξί μέλος των δυναμικών εξισώσεων,

$$Q_i = \frac{d}{d\varphi_i} W_i = F_i$$

όπου  $W_i$ , είναι το έργο που παράγει η μη συντηρητική δύναμη κατά τη γωνιακή μετατόπιση,  $\varphi_i$ .

Το έργο της απόσβεσης,

- $W_1 = F_1 \varphi_1$
- $W_2 = F_2 \varphi_2$
- $W_3 = F_3 \varphi_3$
- $W_4 = F_4 \varphi_4$
- $W_5 = F_5 \varphi_5$

Οποτε,

- $Q_1 = \frac{d}{d\varphi_1} W_1 = F_1$
- $Q_2 = \frac{d}{d\varphi_2} W_2 = F_2$
- $Q_3 = \frac{d}{d\varphi_3} W_3 = F_3$
- $Q_4 = \frac{d}{d\varphi_4} W_4 = F_4$

Όπου κατά τα γνωστά,

- $F_1 = c_1 (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1)$
- $F_2 = c_2 (\dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_2) + c_1 (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1)$
- $F_3 = c_3 (\dot{\varphi}_4 - \dot{\varphi}_3) + c_2 (\dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_2)$
- $F_4 = c_4 (\dot{\varphi}_5 - \dot{\varphi}_4) + c_3 (\dot{\varphi}_4 - \dot{\varphi}_3)$
- $F_5 = c_5 (\dot{\varphi}_5 - \dot{\varphi}_4)$

Ενώ, η ποσότητα  $L = T - V$ , παράγεται από,

$$T = \frac{1}{2} I_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2} I_3 \dot{\varphi}_3^2 + \frac{1}{2} I_4 \dot{\varphi}_4^2 + \frac{1}{2} I_5 \dot{\varphi}_5^2$$

$$V = \frac{1}{2} K_1(\varphi_2 - \varphi_1)^2 + \frac{1}{2} K_2(\varphi_3 - \varphi_2)^2 + \frac{1}{2} K_3(\varphi_4 - \varphi_3)^2 + \frac{1}{2} K_4(\varphi_5 - \varphi_4)^2$$

$$- \varepsilon_2 \cos \varphi_2 - \varepsilon_3 \cos \varphi_3 - \varepsilon_4 \cos \varphi_4 - \varepsilon_5 \cos \varphi_5$$

όπως και στην περίπτωση, χωρίς απόσβεση.

Παίρνοντας παραγώγους για κάθε μάζα,  $\frac{\partial L}{\partial \varphi_i}$ ,  $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_i}$ ,  $\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_i} \right\}$  όπως προηγούμενα, καταλήγουμε στις δυναμικές εξισώσεις του συστήματος,

$$K_1 \varphi_2 - K_1 \varphi_1 - I_1 \ddot{\varphi}_1 = c_1 (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1)$$

$$- K_1 \varphi_2 + K_1 \varphi_1 + K_2 \varphi_3 - K_2 \varphi_2 - I_2 \ddot{\varphi}_2 + \varepsilon_2 g \sin \varphi_2 = c_2 (\dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_2) + c_1 (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1)$$

$$- K_2 \varphi_3 + K_2 \varphi_2 + K_3 \varphi_4 - K_3 \varphi_3 - I_3 \ddot{\varphi}_3 + \varepsilon_3 g \sin \varphi_3 = c_3 (\dot{\varphi}_4 - \dot{\varphi}_3) + c_2 (\dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_2)$$

$$- K_3 \varphi_4 + K_3 \varphi_3 + K_4 \varphi_5 - K_4 \varphi_4 - I_4 \ddot{\varphi}_4 + \varepsilon_4 g \sin \varphi_4 = c_4 (\dot{\varphi}_5 - \dot{\varphi}_4) + c_3 (\dot{\varphi}_4 - \dot{\varphi}_3)$$

$$- K_4 \varphi_5 + K_4 \varphi_4 - I_5 \ddot{\varphi}_5 + \varepsilon_5 g \sin \varphi_5 = c_5 (\dot{\varphi}_5 - \dot{\varphi}_4)$$

Εκκεντρότητα στροφαλοφόρου άξονα

Κάθε ένα από τα τέσσερα στρόφαλα έχει τη δική του εκκεντρότητα ( $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5$ ), η οποία εισάγει στις δυναμικές εξισώσεις, μη γραμμικούς όρους στρεπτικής ροπής, λόγω βαρύτητας ( βλ. "Εισαγωγή").

Υπολογισμός εκκεντρότητας των μαζών

Η διακριτοποίηση του συστήματος γίνεται όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα, ( βλ. Κεφ.2 "Μοντελοποίηση ΙΙ" )

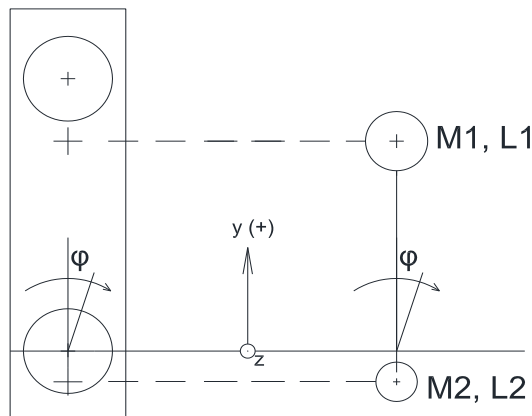
<i>Μάζα-Αδράνεια</i>	<i>Τμήματα Αξονικού</i>
1	ΣΦΟΝΔΥΛΟΣ
2	ΑΞΟΝΑΣ+ΣΤΡΟΦΑΛΟ+1/2Κ.ΣΤΡΟΦΑΛΟΥ
3	1/2Κ.ΣΤΡΟΦΑΛΟΥ+ΣΤΡΟΦΑΛΟ+Κ.ΒΑΣΗΣ+ΣΤΡΟΦΑΛΟ+1/2Κ.ΣΤΟΦΑΛΟΥ
4	1/2Κ.ΣΤΡΟΦΑΛΟΥ+ΣΤΡΟΦΑΛΟ+Κ.ΒΑΣΗΣ+ΣΤΡΟΦΑΛΟ+1/2Κ.ΣΤΟΦΑΛΟΥ
5	1/2Κ.ΣΤΡΟΦΑΛΟΥ+ΣΤΡΟΦΑΛΟ+Κ.ΒΑΣΗΣ+ΣΤΡΟΦΑΛΟ+Κ.ΣΤΟΦΑΛΟΥ+ΣΤΡΟΦΑΛΟ+ΑΞΟΝΑΣ

Κάθε ένα από τα τμήματα - μάζες του αξονικού έχει τη δική του εκκεντρότητα, εκτός του σφονδύλου που έχει μηδενική ( $\varepsilon_1 = 0$ ). Τα τμήματα μοντελοποιούνται με δύο μάζες συνδεόμενες με μία ράβδο, σύμφωνα με την κατασκευαστική δομή του άξονα. Οπότε για κάθε μάζα πρέπει να βρεθεί, το άνω και κάτω έκκεντρο ( $M_1$  και  $M_2$ ), καθώς και η απόστασή του κάθε ενός από τον άξονα περιστροφής-z ( $L_1$  και  $L_2$ ). Εντελώς αντίστοιχα θα μπορούσαμε να βρούμε τη συνολική μάζα και την απόστασή του ΚΒ αυτής από τον άξονα περιστροφής - z.

$$\varepsilon g = ( M_{i+1}L_{i+1} - M_iL_i ) g = M_{ολικο} \gamma_{ολικο} g$$

όπου  $i = 1, 2, 3, 4$

Έχουμε αναλυτικά, για τη θέση του κέντρου βάρους (επίπεδο x,y) και τη μάζα (kg) του κάθε κομματιού κάθε μιας μάζας



Σχήμα\_1  
Αναγωγή στροφάλου σε ισοδύναμο σύστημα ράβδου - μαζών

Μάζα 2

Άνω Έκκεντρο

<b>ΚΟΜΒΙΟ ΒΑΣΗΣ</b>		<b>M (kg)</b>	<b>x</b>	<b>y</b>
L (m)	0.17	0.471651	0	0.006366
D (m)	0.03			
<b>ΑΓΚΩΝΑΣ</b>				
L (m)	0.0078	0.042983	0	0.012375
B (m)	0.039			
H (m)	0.018			

<b>M<sub>2</sub></b>	<b>X</b>	<b> Y  = L<sub>2</sub></b>
0.514635	0	0.006868

Κάτω Έκκεντρο

<b>ΚΟΜΒΙΟ ΒΑΣΗΣ</b>		<b>M (kg)</b>	<b>x</b>	<b>y</b>
L (m)	0.17	0.471651	0	-0.006366
D (m)	0.03			
<b>ΑΓΚΩΝΑΣ</b>				
L (m)	0.0078	0.30566	0	-0.06063
B (m)	0.039			
H (m)	0.128			
<b>ΚΟΜΒΙΟ ΒΑΣΗΣ</b>				
L (m)	0.102	0.565981	0	-0.0965
D (m)	0.03			

<b>M<sub>1</sub></b>	<b>X</b>	<b> Y  = L<sub>1</sub></b>
1.060302	0	0.07182

Μάζα 3, 4

Άνω Έκκεντρο

<b>ΚΟΜΒΙΟ ΒΑΣΗΣ</b>		<b>M (kg)</b>	<b>x</b>	<b>y</b>
L (m)	0.051	0.141495	0	0.006366
D (m)	0.03			
<b>ΑΓΚΩΝΑΣ</b>				
L (m)	0.0078	0.30566	0	0.060625
B (m)	0.039			
H (m)	0.128			
<b>ΚΟΜΒΙΟ ΔΙΩΣΤΗΡΑ</b>				
L (m)	0.102	0.565981	0	0.0965
D (m)	0.03			

<b>ΑΓΚΩΝΑΣ</b>				
L (m)	0.0078	0.30566	0	0.060625
B (m)	0.039			
H (m)	0.128			
<b>ΚΟΜΒΙΟ ΒΑΣΗΣ</b>				
L (m)	0.051	0.141495	0	0.006366
D (m)	0.03			

<b><math>M_4</math></b>	<b>X</b>	<b><math> Y  = L_4</math></b>
1.460293	0	0.05221

Κάτω Εκκεντρο

<b>ΚΟΜΒΙΟ ΒΑΣΗΣ</b>		<b>M (kg)</b>	<b>x</b>	<b>y</b>
L (m)	0.051	0.141495	0	-0.00637
D (m)	0.03			
<b>ΑΓΚΩΝΑΣ</b>				
L (m)	0.0078	0.042983	0	-0.01238
B (m)	0.039			
H (m)	0.018			
<b>ΑΓΚΩΝΑΣ</b>				
L (m)	0.0078	0.042983	0	-0.01238
B (m)	0.039			
H (m)	0.018			
<b>ΚΟΜΒΙΟ ΒΑΣΗΣ</b>				
L (m)	0.051	0.141495	0	-0.00637
D (m)	0.03			

<b><math>M_3</math></b>	<b>X</b>	<b><math> Y  = L_3</math></b>
0.368958	0	0.007766

Μάζα 5

Άνω Εκκεντρο

<b>ΑΓΚΩΝΑΣ</b>				
L (m)	0.0078	0.042983	0	0.012375
B (m)	0.039			
H (m)	0.018			
<b>ΚΟΜΒΙΟ ΒΑΣΗΣ</b>				
L (m)	0.102	0.282991	0	0.006366
D (m)	0.03			
<b>ΑΓΚΩΝΑΣ</b>				
L (m)	0.0078	0.30566	0	0.060625
B (m)	0.039			
H (m)	0.128			



<b>ΚΟΜΒΙΟ ΔΙΩΣΤΗΡΑ</b>				
L (m)	0.102	0.565981	0	0.0965
D (m)	0.03			
<b>ΑΓΚΩΝΑΣ</b>				
L (m)	0.0078	0.30566	0	0.060625
B (m)	0.039			
H (m)	0.128			
<b>ΚΟΜΒΙΟ ΒΑΣΗΣ</b>				
L (m)	0.218	0.604823	0	0.006366
D (m)	0.03			
<b>ΚΟΜΒΙΟ ΒΑΣΗΣ</b>				
L (m)	0.06	0.115601	0	0.005305
D (m)	0.025			

<b><math>M_g</math></b>	<b>X</b>	<b><math> Y  = L_g</math></b>
1.678033	0	0.031685

Κάτω Έκκεντρο

<b>ΚΟΜΒΙΟ ΔΙΩΣΤΗΡΑ</b>		<b>M (kg)</b>	<b>x</b>	<b>y</b>
L (m)	0.102	0.565981	0	-0.0965
D (m)	0.03			
<b>ΑΓΚΩΝΑΣ</b>				
L (m)	0.0078	0.30566	0	-0.06063
B (m)	0.039			
H (m)	0.128			
<b>ΚΟΜΒΙΟ ΒΑΣΗΣ</b>				
L (m)	0.102	0.282991	0	-0.00637
D (m)	0.03			
<b>ΑΓΚΩΝΑΣ</b>				
L (m)	0.0078	0.042983	0	-0.01238
B (m)	0.039			
H (m)	0.018			
<b>ΑΓΚΩΝΑΣ</b>				
L (m)	0.0078	0.042983	0	-0.01238
B (m)	0.039			
H (m)	0.018			
<b>ΚΟΜΒΙΟ ΒΑΣΗΣ</b>				
L (m)	0.218	0.604823	0	-0.00637
D (m)	0.03			
<b>ΚΟΜΒΙΟ ΒΑΣΗΣ</b>				
L (m)	0.06	0.115601	0	-0.00531
D (m)	0.025			

<b><math>M_7</math></b>	<b><math>X</math></b>	<b><math> Y  = L_7</math></b>
2.2237	0	0.044285

Συγκεντρωτικά έχουμε,

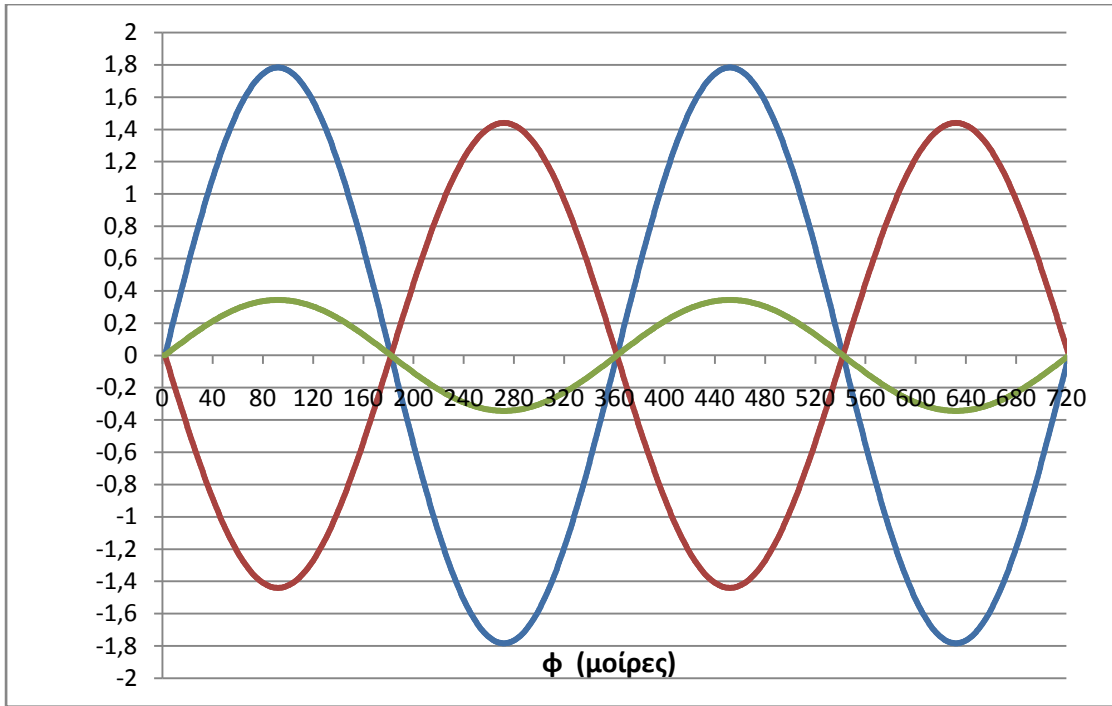
Μάζα	$\epsilon$
2	0.0906
3	- 0.0734
4	- 0.0734
5	0.0912

Παρατηρούμε ότι η εκκεντρότητα του συστήματος συνολικά δεν είναι μηδενική ( $\epsilon \neq 0$ ), κάτι που οφείλεται στην κατανομή της μάζας (κατά μήκος) πριν το πρώτο πλήρες στρόφαλο, και μετά το τελευταίο. Αυτό σημαίνει ότι το σύστημά μας θα επηρεάζεται και από τη βαρύτητα κατά την περιστροφή του.

Μάζα	<i>μη γραμμική ροπή</i>
2	$0.0906 \text{ g} \sin \varphi_2$
3	$- 0.0734 \text{ g} \sin \varphi_3$
4	$- 0.0734 \text{ g} \sin \varphi_4$
5	$0.0912 \text{ g} \sin \varphi_5$

Πιο συγκεκριμένα στο διάγραμμα\_1 φαίνεται η ροπή που εισάγεται, αθροιστικά, από τις μάζες (2 και 5, μπλε χρώμα - 3 και 4, κόκκινο χρώμα - ολική, πράσινο χρώμα).

Αποτέλεσμα αυτής της πολύ μικρής εναπομένουσας εκκεντρότητας, είναι να αναπτύσσεται μια εναλλασσόμενη στρεπτική δύναμη, πολύ μικρού πλάτους κατά την περιστροφή του αξονικού. Στο κεφάλαιο 3, υπολογίζεται η συμπεριφορά του αξονικού με τη μέθοδο RK-4, οπότε λαμβάνεται υπόψη η εκκεντρότητα στις δυναμικές εξισώσεις και επιρροή της στην ταλαντευτική συμπεριφορά του συστήματος.



Διάγραμμα\_1

Nm

## 2. Προσδιορισμός Ιδιοσυχνοτήτων - Σύστημα χωρίς Εκκεντρότητα

Στο παρόν κεφάλαιο υπολογίζονται οι ιδιοσυχνότητες του συστήματος χωρίς να λαμβάνονται υπόψη οι εκκεντρότητες των μαζών που το απαρτίζουν. Θεωρούμε οπότε πως η περιστροφή του στροφαλοφόρου δεν επηρεάζεται από τη βαρύτητα.

Όπως ήδη αναφέρθηκε οι περιστρεφόμενες μάζες τυποποιούνται με βάση την πολική ροπή αδράνειας τους, και τα τμήματα του αξονικού που τις συνδέουν, με βάση τη στρεπτική ακαμψία τους [1].

Κάθε τμήμα του αξονικού προσφέρει σε στρεπτική αδράνεια και στρεπτική ακαμψία. Οπότε μια μοντελοποίηση προσεγγίζει περισσότερο την πραγματική συμπεριφορά του συστήματος όταν έχουν ληφθεί υπόψη και οι δύο παραπάνω παράμετροι για κάθε τμήμα του άξονα.

Πολλές φορές όμως είναι αρκετό να μοντελοποιηθεί το σύστημα, λαμβάνοντας υπόψη ότι κάποια τμήματα μόνο περιστρέφονται (κομβίο στρόφαλου, στρόφαλα) και αλλά προσφέρουν μόνο στρεπτική ακαμψία (κομβία βάσεως). Αυτή θα είναι και η πρώτη μοντελοποίηση που θα αναπτυχθεί παρακάτω.

### Μοντελοποίηση 1

<b>Στρεπτική Αδράνεια</b>	<b>kgm<sup>2</sup></b>	<b>Στρεπτική Ακαμψία</b>	<b>N m / rad</b>
$I_1$	σφόνδυλος	$K_1$	κομβιον βάσεως
$I_2$	πλήρες στρόφαλο	$K_2$	κομβιον βάσεως
$I_3$	πλήρες στρόφαλο	$K_3$	κομβιον βάσεως
$I_4$	πλήρες στρόφαλο	$K_4$	κομβιον βάσεως
$I_5$	πλήρες στρόφαλο		

### Αναγωγή των μαζών - Προσδιορισμός ροπών αδράνειας

#### Σφόνδυλος

Ο σφόνδυλος αντιμετωπίζεται ως μια μάζα με την αντίστοιχη ροπή αδράνειάς της. Χωρίζεται σε τρεις επιμέρους μάζες (τρία τμήματα), σύμφωνα με τη γεωμετρία του, και υπολογίζεται η κάθε ροπή αδράνειας ξεχωριστά.

Οπότε έχουμε,

$$I_{\text{σφονδύλου}} = I_1 + I_2 + I_3$$

όπου,

- $I_1 = J_1 \times \rho \times 0.033$
- $I_2 = J_2 \times \rho \times 0.017$
- $I_3 = J_3 \times \rho \times 0.004$

Όπου,  $J_1, J_2, J_3$  είναι οι πολικές ροπές αδράνειας επιφάνειας, και  $\rho$  είναι η πυκνότητα του υλικού του σφονδύλου ( $7057.4 \text{ kg/m}^3$ ).

$$J_1 = \int_{21/2}^{24/2} 2\pi r^3 dr = 2\pi \frac{r^4}{4} \Big|_{21/2}^{24/2} = 0.000134789 \text{ m}^4$$

$$J_2 = \int_0^{21/2} 2\pi r^3 dr = \frac{\pi}{2} \left(\frac{21}{2}\right)^4 = 0.000190931 \text{ m}^4$$

$$J_3 = \int_0^3 2\pi r^3 dr = \frac{\pi}{2} (3)^4 = 0.000001272 \text{ m}^4$$

Οπότε,

- $I_1 = J_1 \times \rho \times 0.033 = 0.000134789 \times 7057.4 \times 0.033 = 0.03139 \text{ kgm}^2$
- $I_2 = J_2 \times \rho \times 0.017 = 0.000190931 \times 7057.4 \times 0.017 = 0.02291 \text{ kgm}^2$
- $I_3 = J_3 \times \rho \times 0.004 = 0.000001272 \times 7057.4 \times 0.004 = 0.0000359 \text{ kgm}^2$

$$\text{Άρα, } I_{\text{σφονδύλου}} = 0.05433 \text{ kgm}^2$$

### Πλήρες στροφάλο

Αποτελείται από την ροπή αδράνειας της μάζας των δύο αγκώνων και από αυτή του αξονικού τμήματος του κομβίου στροφάλου.

$$I_{\text{στροφ. άλου}} = I_{\text{κ.στροφαλου}} + 2 \times I_{\text{αγκωνα}}$$

όπου,

- $I_{\text{κ.στροφαλου}} = (J + r^2 A_1) \times \rho \times 0.101$
- $I_{\text{αγκωνα}} = (J_z + l^2 A_2) \times \rho \times 0.03$

με,

- $J = \frac{\pi D_{\text{κομβίου}}^4}{32}$ , η πολική ροπή αδράνειας κυκλικής διατομής
- $r$ , η απόσταση του κομβίου στροφάλου από τον άξονα περιστροφής =  $0.0946 \text{ m}$
- $J_z = J_x + J_y = \frac{14.6^3 + 3.9^3}{12} + \frac{14.6^3 + 3.9^3}{12} = 0.00144 \text{ cm}^4$ , η ροπή αδράνειας της επιφάνειας του αγκώνα ως προς τον άξονα περιστροφής
- $l = 0.0473 \text{ m}$ , η απόσταση του ΚΒ του αγκώνα από τον άξονα περιστροφής

- $A_1 = \frac{\pi D_{\text{κομβίου}}^2}{32} = 7.068 \text{ cm}^2$ , επιφάνεια κυκλικής διατομής του κομβίου
- $A_2 = 14.6 \times 3.9 = 56.94 \text{ cm}^2$ , επιφάνεια στροφάλου
- $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$ , είναι η πυκνότητα του υλικού των στοιχείων του άξονα

οπότε,

- $I_{\text{κ.στροφαλου}} = 0.00000666 \times 7850 \times 0.102 = 0.00533 \text{ kgm}^2$
- $I_{\text{αγκωνα}} = 0.0000236 \times 7850 \times 0.039 = 0.00144 \text{ kgm}^2$

$$I_{\text{στροφ άλου}} = 0.00828 \text{ kgm}^2$$

οπότε,

<b>Στρεπτική Αδράνεια</b>		<b>kgm<sup>2</sup></b>
$I_1$	σφόνδυλος	0.05433
$I_2$	πλήρες στρόφαλο	0.00828
$I_3$	πλήρες στρόφαλο	0.00828
$I_4$	πλήρες στρόφαλο	0.00828
$I_5$	πλήρες στρόφαλο	0.00828

#### Αναγωγή των μηκών - Προσδιορισμός στρεπτικής ακαμψίας

Θεωρούμε συνεισφορά σε στρεπτική ακαμψία μόνο από τα κομβία βάσης [1],

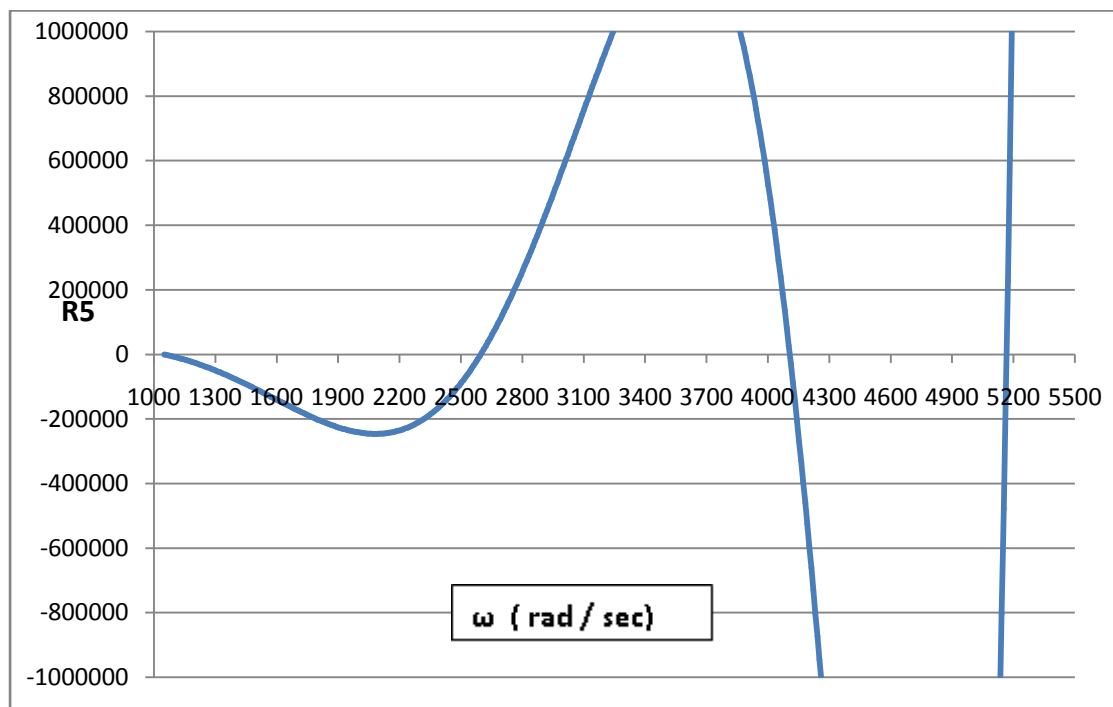
$$K = \frac{G J}{L_{\text{shaft}}}$$

όπου,

- $J = \frac{\pi 3^4}{32}$  η πολική ροπή αδράνειας κυκλικής διατομής
- $G$ , το μέτρο ελαστικότητας σε διάτμηση, του υλικού ( $8.10E+10 \text{ N/m}^2$ )
- $L_{\text{shaft}}$ , το μήκος του κομβίου βάσεως κάθε φορά

<b>Στρεπτική Ακαμψία</b>		<b>N m / rad</b>
$K_1$	$L_{\text{shaft}} = 0.17 \text{ m}$	37889.7
$K_2$	$L_{\text{shaft}} = 0.102 \text{ m}$	63149.5
$K_3$	$L_{\text{shaft}} = 0.102 \text{ m}$	63149.5
$K_4$	$L_{\text{shaft}} = 0.102 \text{ m}$	63149.5

Έχοντας όλα τα απαραίτητα δεδομένα για την εύρεση των ιδιοσυχνοτήτων του συστήματος, με βάση την αριθμητική μέθοδο Holzer - Tolle [3], παίρνουμε το διάγραμμα εναπομένουσας ροπής,



Διάγραμμα\_1

Στο διάγραμμα διαβάζουμε τις ιδιοσυχνότητες του συστήματος,

<i>Ιδιοσυχνότητες</i>	<i>rad / sec</i>	<i>Hz</i>
$\omega_1$	1050.86	167.249
$\omega_2$	2595.4	413.070
$\omega_3$	4104.4	653.235
$\omega_4$	5165	822.035

Αναλυτική εύρεση ιδιοσυχνοτήτων για το σύστημα 5 μαζών

Το χαρακτηριστικό πολώνυμο  $P(\omega)$ , [1] για αυτή την περίπτωση θα είναι 5ου βαθμού ως προς  $(\omega^2)$ , και προκύπτει από την παρακάτω ορίζουσα που συσχετίζει το μητρώο αδράνειας και το μητρώο ακαμψίας,

$$P(\omega) = \det(K - \omega^2 I) = 0$$

$$\det \left[ \begin{pmatrix} K_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & K_4 \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} I_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & I_5 \end{pmatrix} \right] = 0$$

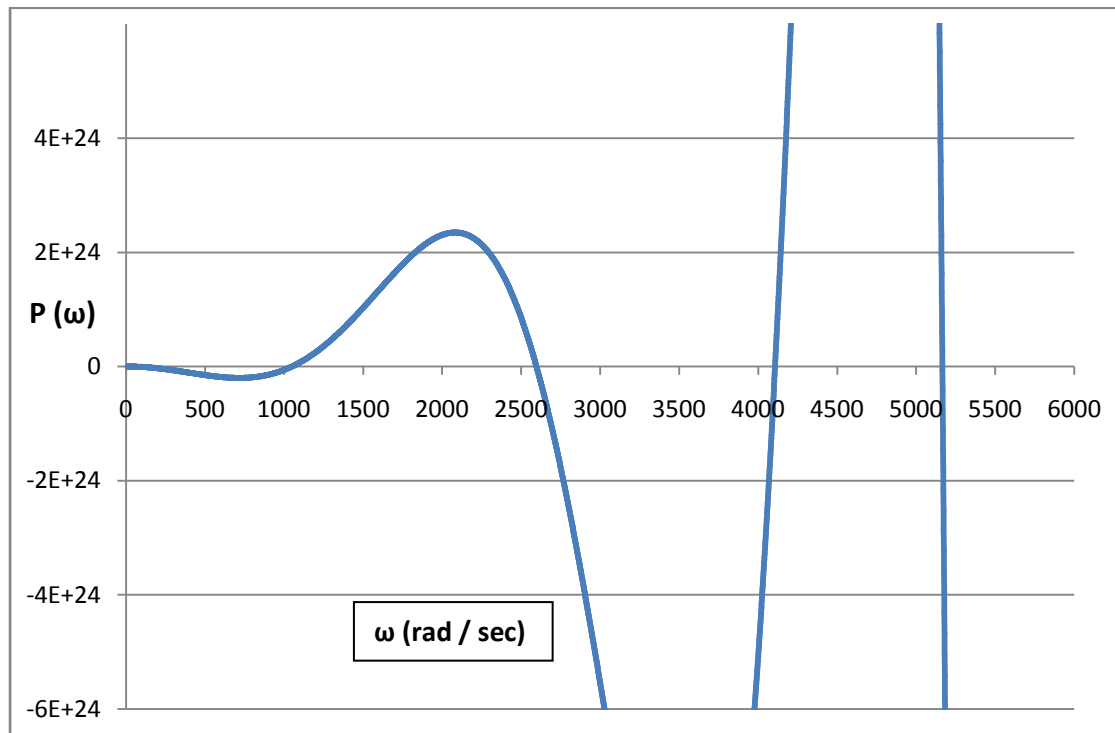
Αναπτύσσοντας την ορίζουσα του 5x5 πίνακα που προκύπτει παίρνουμε,

$$P(\omega) = \omega^2 [c_4(\omega^2)^4 + c_3(\omega^2)^3 + c_2(\omega^2)^2 + c_1\omega^2 + c_0] = 0$$

Όπου οι συντελεστές του πολυωνύμου είναι συναρτήσεις της ροπής αδράνειας ( $I_1, \dots, I_5$ ) και της στρεπτικής ακαμψίας ( $K_1, \dots, K_4$ ),

$$c_4 = c_3 = c_2 = c_1 = c_0 = f(I, K)$$

Έχουμε οπότε,



Διάγραμμα\_2

Οι ιδιοσυχνότητες προκύπτουν ως ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου,

<i>Ιδιοσυχνότητες</i>	<i>rad / sec</i>	<i>Hz</i>
$\omega_1$	1050.86	167.249
$\omega_2$	2595.4	413.070
$\omega_3$	4104.4	653.235
$\omega_4$	5165	822.035

Παρατηρούμε σχεδόν πλήρη συμφωνία τιμών μεταξύ των αποτελεσμάτων της αριθμητικής μεθόδου Holzer - Tolle και της αναλυτικής.



### Αναγωγή σε ισοδύναμο σύστημα 3 μαζών

Ο σφόνδυλος μένει ως έχει λόγω της σχετικά μεγάλης αδράνειάς του, ενώ τη θέση των τεσσάρων τροφάλων καταλαμβάνουν δύο πλήρη στρόφαλα, με διπλάσια ροπή αδράνειας από πριν.

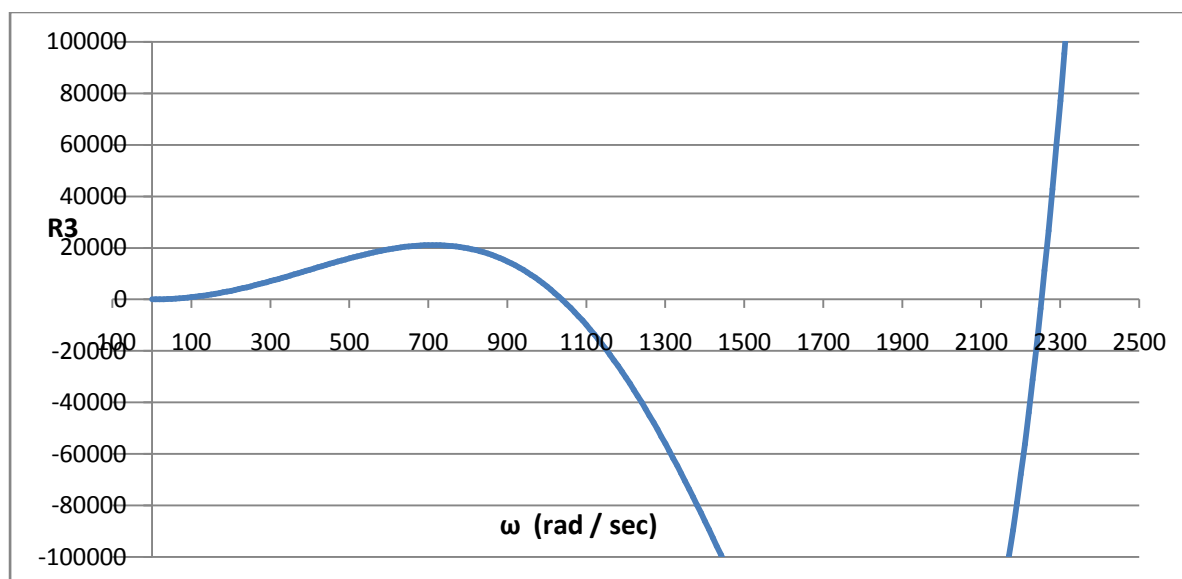
<b>Στρεπτική Αδράνεια</b>		<b><math>kgm^2</math></b>
$I_1$	σφόνδυλος	0.0544
$I_2$	$I_2 + I_3$	0.01644
$I_3$	$I_4 + I_5$	0.01644

Για τη στρεπτική ακαμψία έχουμε,

<b>Στρεπτική Ακαμψία</b>		<b><math>N m / rad</math></b>
$K_1$	$\frac{1}{\left(\frac{1}{K_1}\right) + \left(\frac{1}{K_2}\right)}$	29154.91
$K_2$	$\frac{1}{\left(\frac{1}{K_3}\right) + \left(\frac{1}{K_4}\right)}$	31574.74

Οπότε προκύπτουν οι ιδιοσυχνότητες (μόνο 2 απ' τις 4 αναγκαστικά),

<b>Ιδιοσυχνότητες</b>	<b><math>rad / sec</math></b>	<b><math>Hz</math></b>
$\omega_1$	1037.86	165.177
$\omega_2$	2252.48	358.492



Διάγραμμα\_3

### Αναλυτική εύρεση ιδιοσυχνοτήτων

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο  $P(\omega)$ , [1] για αυτή την περίπτωση θα είναι 3ου βαθμού ως προς  $(\omega^2)$ , και προκύπτει από την παρακάτω ορίζουσα που συσχετίζει το μητρώο αδράνειας και το μητρώο ακαμψίας [1],

$$P(\omega) = \det(K - \omega^2 I) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} K_1 & -K_1 & 0 \\ -K_1 & K_1 + K_2 & -K_2 \\ 0 & -K_2 & K_2 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}\right) = 0$$

Οπότε και προκύπτει μια τρίτου βαθμού εξίσωση ως προς  $\omega_e^2$

$$\omega_e^4 - p \omega_e^2 + q = 0$$

Οι δύο ρίζες της είναι,

$$\omega_{eI}^2 = \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$\omega_{eII}^2 = \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$\text{όπου } p = \frac{K_1}{I_1} + \frac{K_1 + K_2}{I_2} + \frac{K_2}{I_3} \quad \text{και} \quad q = K_1 K_2 \cdot \frac{I_1 + I_2 + I_3}{I_1 \cdot I_2 \cdot I_3}$$

Τροφοδοτώντας  $p, q$  με τα  $(I, K)$  που έχουμε υπολογίσει παίρνουμε,

<i>Ιδιοσυχνότητες</i>	<i>rad / sec</i>	<i>Hz</i>
$\omega_1$	1037.84	165.177
$\omega_2$	2252.431	358.492

Όπου και παρατηρούμε πλήρη συμφωνία τιμών με τα αποτελέσματα της αριθμητικής μεθόδου Holzer - Tolle.

### Αναγωγή σε ισοδύναμο σύστημα 2 μαζών

Μειώνοντας περισσότερο την τάξη του μοντέλου, υποθέτουμε ότι ο στροφαλοφόρος αποτελείται μόνο από δύο μάζες. Με αυτή τη μοντελοποίηση είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε μόνο μια ιδιοσυχνότητα του συστήματος, την πρώτη [1]. Ο σφόνδυλος λαμβάνεται ως μια μάζα, ενώ η αδράνεια των τεσσάρων στροφάλων συγχωνεύεται σε μία.

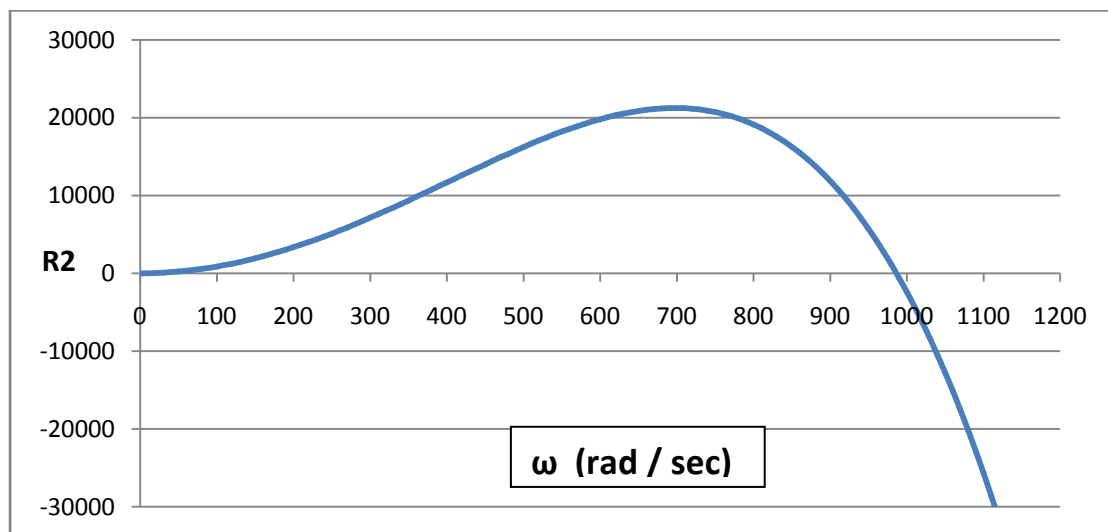
Οι ενδιάμεσες στρεπτικές ακαμψίες συγχωνεύονται σε μία για όλο το μήκος του άξονα.

Οπότε έχουμε,

<i>Στρεπτική Αδράνεια</i>		<i>kgm<sup>2</sup></i>
$I_1$	σφόνδυλος	0.0544
$I_2$	$I_2 + I_3 + I_4 + I_5$	0.0329

<i>Στρεπτική Ακαμψία</i>		<i>N m / rad</i>
$K$	$\frac{1}{\left(\frac{1}{K_1}\right) + \left(\frac{1}{K_2}\right) + \left(\frac{1}{K_3}\right) + \left(\frac{1}{K_4}\right)}$	19941.94

Από το διάγραμμα εναπομένουσας ροπής, της μεθόδου Holzer - Tolle [3] βλέπουμε την πρώτη ιδιοσυχνότητα,



Διάγραμμα\_4

<i>Ιδιοσυχνότητα</i>	<i>rad / sec</i>	<i>Hz</i>
$\omega_1$	986.45	156.99

Αναλυτική εύρεση πρώτης ιδιοσυχνότητας

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο  $P(\omega)$ , [1] για αυτή την περίπτωση θα είναι 2ου βαθμού ως προς  $(\omega^2)$ , και προκύπτει από την παρακάτω ορίζουσα που συσχετίζει το μητρώο αδράνειας και το μητρώο ακαμψίας [1],

$$P(\omega) = \det(K - \omega^2 I) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} K & -K \\ -K & K \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}\right) = 0$$

Οπότε και προκύπτει,

$$\omega_e^2[(\omega_e^2 I_1 I_2 - K(I_1 + I_2))] = 0$$

Οι δύο ρίζες της είναι,

$$\omega_{e1} = 0$$

και

$$\omega_{e2} = \sqrt{\frac{K(I_1 + I_2)}{I_1 I_2}}$$

Τροφοδοτώντας την τελευταία σχέση με τα (I, K) που έχουμε υπολογίσει παίρνουμε,

<i>Ιδιοσυχνότητα</i>	<i>rad / sec</i>	<i>Hz</i>
$\omega_1$	986.45	156.99

Παρατηρούμε, και εδώ, σχεδόν πλήρη ταύτιση μεταξύ της αναλυτικής και της αριθμητικής μεθόδου.

## Μοντελοποίηση II

Η ουσιαστική διαφορά αυτής της μοντελοποίησης από την προηγούμενη είναι ότι λαμβάνονται υπόψη οι στρεπτικές ακαμψίες όλων των μελών του αξονικού, συμπεριλαμβανομένων των στροφάλων και των κομβίων στροφάλου. Επίσης λαμβάνονται υπόψη και οι στρεπτικές αδράνειες των κομβίων βάσεως.

### Ροπές αδράνειας τμημάτων στροφαλοφόρου άξονα

<i>Μάζα-Αδράνεια</i>	<i>Τμήματα Αξονικού</i>
1	ΣΦΟΝΔΥΛΟΣ
2	ΑΞΟΝΑΣ+ΣΤΡΟΦΑΛΟ+1/2Κ.ΣΤΡΟΦΑΛΟΥ
3	1/2Κ.ΣΤΡΟΦΑΛΟΥ+ΣΤΡΟΦΑΛΟ+Κ.ΒΑΣΗΣ+ΣΤΡΟΦΑΛΟ+1/2Κ.ΣΤΟΦΑΛΟΥ
4	1/2Κ.ΣΤΡΟΦΑΛΟΥ+ΣΤΡΟΦΑΛΟ+Κ.ΒΑΣΗΣ+ΣΤΡΟΦΑΛΟ+1/2Κ.ΣΤΟΦΑΛΟΥ
5	1/2Κ.ΣΤΡΟΦΑΛΟΥ+ΣΤΡΟΦΑΛΟ+Κ.ΒΑΣΗΣ+ΣΤΡΟΦΑΛΟ+Κ.ΣΤΟΦΑΛΟΥ+ΣΤΡΟΦΑΛΟ+ΑΞΟΝΑΣ

Δηλαδή,

- $I_2 = I^1 + I^2 + I^3 + I^4 + I^5$
- $I_3 = I^5 + I^6 + I^7 + I^8 + I^9$
- $I_4 = I^9 + I^{10} + I^{11} + I^{12} + I^{13}$
- $I_5 = I^{13} + I^{14} + I^{15} + I^{16} + I^{17} + I^{18}$

Η ροπή αδράνειας επιφάνειας για άξονα κυκλικής διατομής, σταθερής ως προς το μήκος του δίνεται [1],

$$J = \frac{\pi D_{shaft}^4}{32}$$

Οπότε,  $I_{shaft} = J \times \rho \times L_{shaft}$

- $L_{shaft}$ , είναι το μήκος του αντίστοιχου τμήματος του κομβίου βάσεως κάθε φορά.
- $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$ , είναι η πυκνότητα του υλικού των στοιχείων του άξονα

$$J = \frac{\pi 3^4}{32}$$

$L_{shaft}$ (m)	Στρεπτική Αδράνεια	$kgm^2$
0.17	$I^1$	1.06E-04
0.102	$I^5$	6.37E-05
0.102	$I^9$	6.37E-05
0.102	$I^{13}$	6.37E-05
0.218	$I^{17}$	1.36E-04
0.06	$I^{18}$	3.75E-05

οπότε έχουμε για την αδράνεια,

Στρεπτική Αδράνεια	$kgm^2$
$I_1$	0.05433
$I_2$	0.00422
$I_3$	0.00828
$I_4$	0.00828
$I_5$	0.0125

### Στρεπτική ακαμψία στροφάλων

#### I. Κομβίο στροφάλου

Η ροπή αδράνειας επιφάνειας για άξονα κυκλικής διατομής, σταθερής ως προς το μήκος του δίνεται,

$$J = \frac{\pi D_{\text{κομβίου}}^4}{32}$$

Οπότε,

$$K_{K.\text{στρ.}} = K^{3,7,11,15} \frac{GJ}{L_{\text{κομβίου}}}$$

όπου,

- $G$ , το μέτρο ελαστικότητας σε διάτμηση, του υλικού ( $8.10E+10 \text{ N/m}^2$ )
- $L_{\text{κομβίου}} = 0.102 \text{ m}$ , το μήκος του κομβίου στροφάλου

Έχουμε,

$$\frac{1}{K^{3,7,11,15}} = 1.584E-05 \text{ rad} / \text{N m}$$

## 2. Στρόφαλα

Η ποσότητα της στρεπτικής ακαμψίας που σε αυτή την περίπτωση μετατρέπεται σε δυσκαμψία, υπολογίζεται θεωρώντας κάθε αγκώνα σαν πακτωμένη δοκό διατομής ( $0.039 \times 0.0078 \text{ m}^2$ ) που καταπονείται σε κάμψη [2], οπότε,

$$\frac{1}{K^{2,4,6,8,10,12,14,16}} = \frac{1}{K_{\text{στροφαλου}}} = \frac{r}{EJ_B}$$

- $E$ , το μέτρο ελαστικότητας του υλικού ( $2.106E+11 \text{ N/m}^2$ )
- $J_B = \frac{0.039^3 \cdot 0.0078}{12}$ , η ροπή αδράνειας επιφάνειας σε κάμψη κατά τον άξονα z.

Οπότε,

$$\frac{1}{K_{\text{στροφαλου}}} = 1.188E-05 \text{ rad / N m}$$

Έχουμε,

<i>Μάζα-Αδράνεια</i>	<i>Τμήματα Αξονικού</i>
1	ΣΦΟΝΔΥΛΟΣ
2	ΑΞΟΝΑΣ+ΣΤΡΟΦΑΛΟ+1/2Κ.ΣΤΡΟΦΑΛΟΥ
3	1/2Κ.ΣΤΡΟΦΑΛΟΥ+ΣΤΡΟΦΑΛΟ+Κ.ΒΑΣΗΣ+ΣΤΡΟΦΑΛΟ+1/2Κ.ΣΤΟΦΑΛΟΥ
4	1/2Κ.ΣΤΡΟΦΑΛΟΥ+ΣΤΡΟΦΑΛΟ+Κ.ΒΑΣΗΣ+ΣΤΡΟΦΑΛΟ+1/2Κ.ΣΤΟΦΑΛΟΥ
5	1/2Κ.ΣΤΡΟΦΑΛΟΥ+ΣΤΡΟΦΑΛΟ+Κ.ΒΑΣΗΣ+ΣΤΡΟΦΑΛΟ+Κ.ΣΤΟΦΑΛΟΥ+ΣΤΡΟΦΑΛΟ+ΑΞΟΝΑΣ

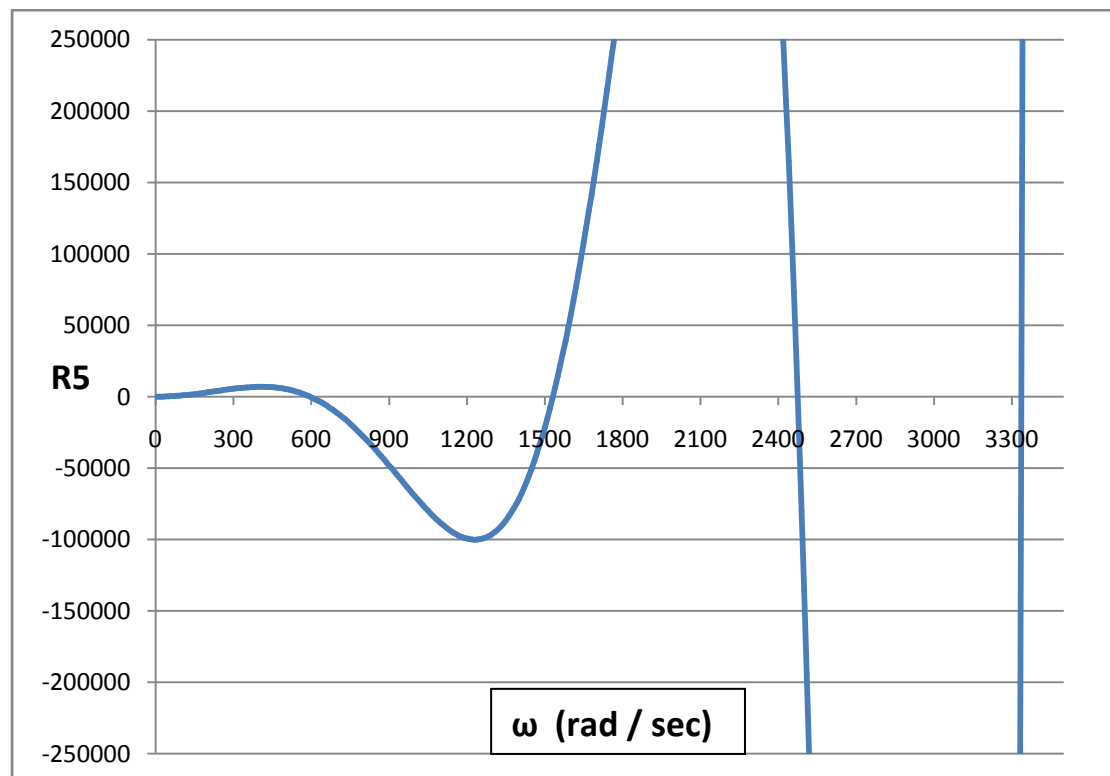
Δηλαδή,

- $\frac{1}{K_1} = \frac{1}{K^1} + \frac{1}{K^2} + \frac{1}{K^3} + \frac{1}{K^4} + \frac{1}{K^5}$
- $\frac{1}{K_2} = \frac{1}{K^5} + \frac{1}{K^6} + \frac{1}{K^7} + \frac{1}{K^8} + \frac{1}{K^9}$
- $\frac{1}{K_3} = \frac{1}{K^9} + \frac{1}{K^{10}} + \frac{1}{K^{11}} + \frac{1}{K^{12}} + \frac{1}{K^{13}}$
- $\frac{1}{K_4} = \frac{1}{K^{13}} + \frac{1}{K^{14}} + \frac{1}{K^{15}} + \frac{1}{K^{16}} + \frac{1}{K^{17}} + \frac{1}{K^{18}}$

<i>Στρεπτική Ακαμψία</i>	<i>N m / rad</i>
$K_1$	21647.78
$K_2$	18037.89
$K_3$	18037.89
$K_4$	18037.89

### Ιδιοσυχνότητες

Έχοντας όλα τα απαραίτητα δεδομένα (I, K) για το σύστημα, χρησιμοποιώντας την αριθμητική μέθοδο Holzer - Tolle [3], παίρνουμε το διάγραμμα εναπομένουσας ροπής,



Διάγραμμα\_5

από το οποίο διακρίνουμε τις τέσσερις ιδιοσυχνότητες του συστήματος,

<i>Ιδιοσυχνότητες</i>	<i>rad / sec</i>	<i>Hz</i>
$\omega_1$	595.12	94.7163
$\omega_2$	1531.4	243.7299
$\omega_3$	2474.83	393.8814
$\omega_4$	3337	531.1000



Αναλυτική εύρεση ιδιοσυχνοτήτων για το σύστημα 5 μαζών

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο  $P(\omega)$ , [1] για αυτή την περίπτωση θα είναι 5ου βαθμού ως προς  $(\omega^2)$ , και προκύπτει από την παρακάτω ορίζουσα που συσχετίζει το μητρώο αδράνειας και το μητρώο ακαμψίας [1],

$$P(\omega) = \det(K - \omega^2 I) = 0$$

$$\det \left[ \begin{pmatrix} K_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & K_4 \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} I_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & I_5 \end{pmatrix} \right] = 0$$

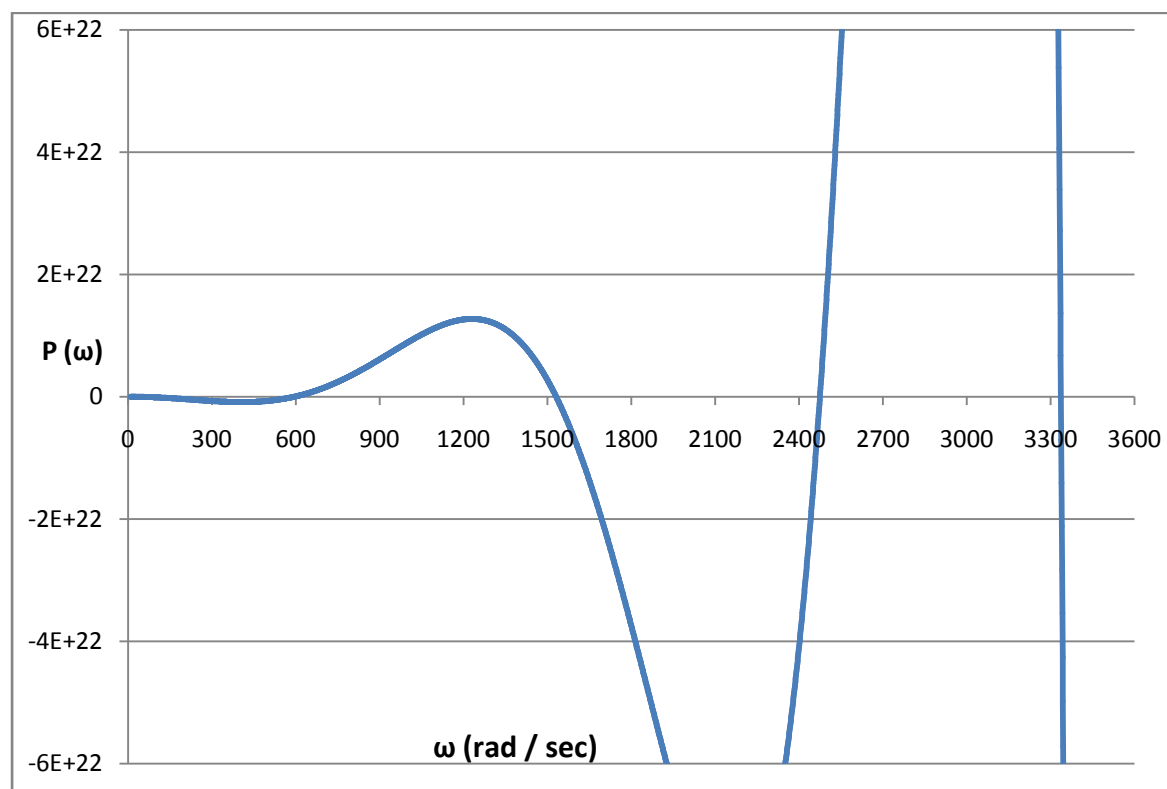
Αναπτύσσοντας την ορίζουσα του 5x5 πίνακα που προκύπτει παίρνουμε,

$$P(\omega) = \omega^2 [c_4(\omega^2)^4 + c_3(\omega^2)^3 + c_2(\omega^2)^2 + c_1\omega^2 + c_0] = 0$$

Όπου οι συντελεστές του πολυωνύμου είναι συναρτήσεις της ροπής αδράνειας ( $I_1, \dots, I_5$ ) και της στρεπτικής ακαμψίας ( $K_1, \dots, K_4$ ),

$$c_4 = c_3 = c_2 = c_1 = c_0 = f(I, K)$$

Έχουμε οπότε,



Διάγραμμα \_ 6

Οι ιδιοσυχνότητες προκύπτουν ως ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου,

<i>Ιδιοσυχνότητες</i>	<i>rad / sec</i>	<i>Hz</i>
$\omega_1$	595.12	94.72
$\omega_2$	1531.4	243.73
$\omega_3$	2474.83	393.88
$\omega_4$	3337	531.1

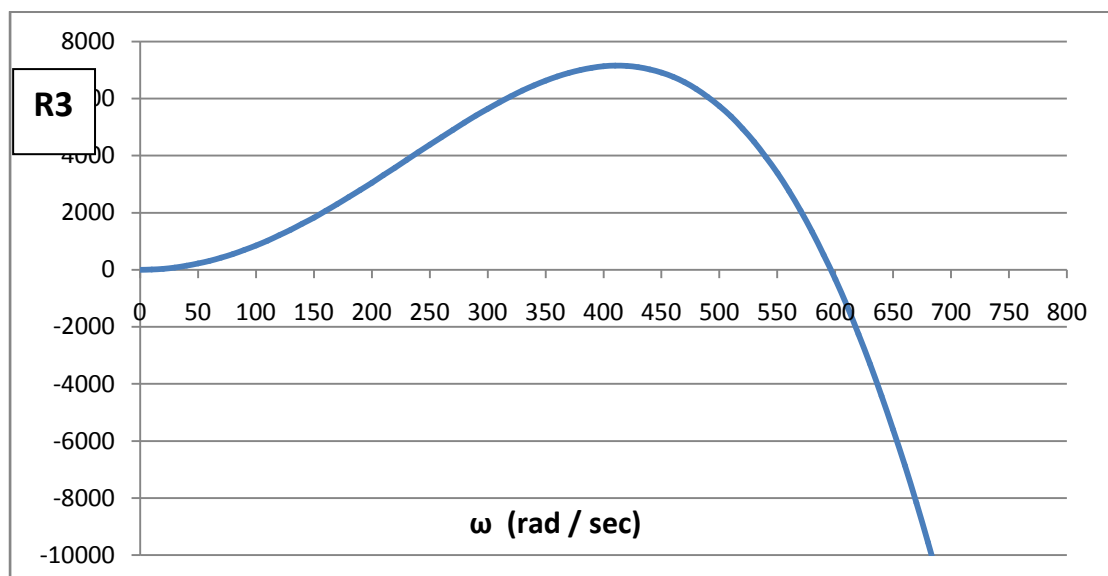
Αναγωγή σε ισοδύναμο σύστημα 3 μαζών

Όπως και στην περίπτωση της μοντελοποίησης I, ο σφόνδυλος μένει ως έχει λόγω της σχετικά μεγάλης αδράνειάς του, ενώ τη θέση των τεσσάρων τροφάλων καταλαμβάνουν δύο πλήρη στρόφαλα.

<i>Στρεπτική Αδράνεια</i>		<i>kgm<sup>2</sup></i>
$I_1$	σφόνδυλος	0.05433
$I_2$	$I_2 + I_3$	0.0125
$I_3$	$I_4 + I_5$	0.02078

Για τη στρεπτική ακαμψία έχουμε,

<i>Στρεπτική Ακαμψία</i>		<i>N m / rad</i>
$K_1$	$\frac{1}{\left(\frac{1}{K_1}\right) + \left(\frac{1}{K_2}\right)}$	13529.32
$K_2$	$\frac{1}{\left(\frac{1}{K_3}\right) + \left(\frac{1}{K_4}\right)}$	9018.95



Διάγραμμα\_7

Όπου από το διάγραμμα\_7, εναπομένουσας ροπής, βλέπουμε τις ιδιοσυχνότητες,

<i>Ιδιοσυχνότητες</i>	<i>rad / sec</i>	<i>Hz</i>
$\omega_1$	596.14	94.87
$\omega_2$	1459.97	232.36

Αναλυτική εύρεση ιδιοσυχνοτήτων

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο  $P(\omega)$ , [1] για αυτή την περίπτωση θα είναι του βαθμού ως προς  $(\omega^2)$ , και προκύπτει από την παρακάτω ορίζουσα,

$$P(\omega) = \det(K - \omega^2 I) = 0$$

$$\det \left( \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 & 0 \\ -K_1 & K_1 + K_2 & -K_2 \\ 0 & -K_2 & K_2 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \right) = 0$$

Οπότε και προκύπτει μια τρίτου βαθμού εξίσωση ως προς  $\omega_e^2$

$$\omega_e^4 - p \omega_e^2 + q = 0$$

Οι δύο ρίζες της είναι,

$$\omega_{e1}^2 = \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$\omega_{e11}^2 = \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$\text{όπου } p = \frac{K_1}{I_1} + \frac{K_1 + K_2}{I_2} + \frac{K_2}{I_3} \quad \text{και} \quad q = K_1 K_2 \cdot \frac{I_1 + I_2 + I_3}{I_1 \cdot I_2 \cdot I_3}$$

Τροφοδοτώντας  $p, q$  με τα  $(I, K)$  που έχουμε υπολογίσει παίρνουμε,

<i>Ιδιοσυχνότητες</i>	<i>rad / sec</i>	<i>Hz</i>
$\omega_1$	596.14	94.87
$\omega_2$	1459.97	232.36

Όπως και στην περίπτωση της μοντελοποίησης I, παρατηρούμε πλήρη συμφωνία τιμών μεταξύ των αποτελεσμάτων της αριθμητικής μεθόδου Holzer - Tolle και της αναλυτικής.

### Αναγωγή σε ισοδύναμο σύστημα 2 μαζών

Υποθέτουμε ότι ο στροφαλοφόρος αποτελείται μόνο από δύο μάζες, όπως και στην περίπτωση της μοντελοποίησης I. Με αυτή αναγωγή του μοντέλου είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε μόνο την πρώτη ιδιοσυχνότητα [1]. Ο σφόνδυλος λαμβάνεται ως μια μάζα, ενώ η αδράνεια των τεσσάρων στροφάλων συγχωνεύεται σε μία.

Οι ενδιάμεσες στρεπτικές ακαμψίες συγχωνεύονται σε μία για όλο το μήκος του άξονα, όπως και στην μοντελοποίηση I.

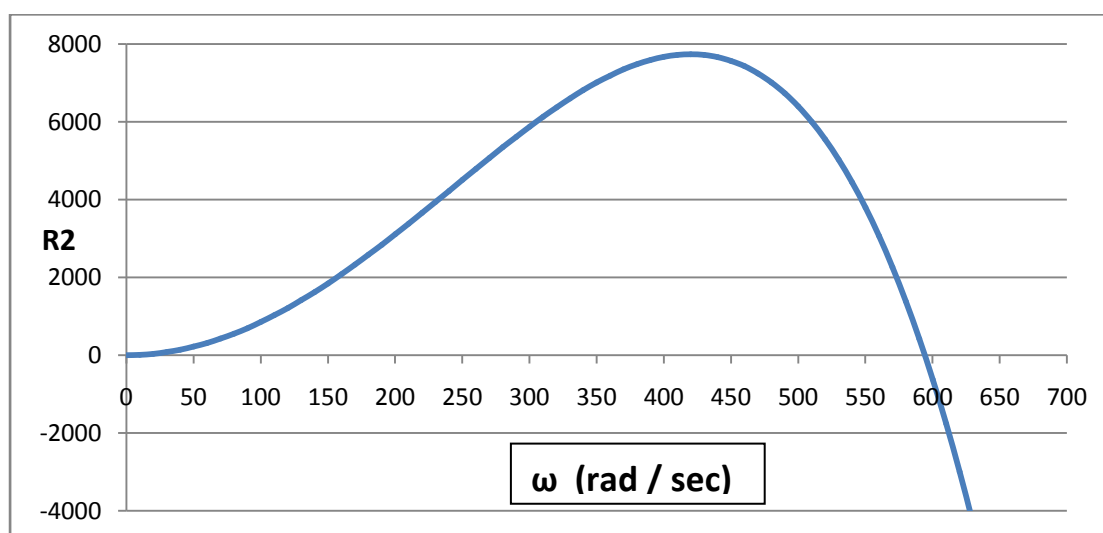
Οπότε έχουμε,

<b>Στρεπτική Αδράνεια</b>		<b>kgm<sup>2</sup></b>
$I_1$	σφόνδυλος	0.05433
$I_2$	$I_2 + I_3 + I_4 + I_5$	0.03328

και

<b>Στρεπτική Ακαμψία</b>		<b>N m / rad</b>
$K$	$\frac{1}{\left(\frac{1}{K_1}\right) + \left(\frac{1}{K_2}\right) + \left(\frac{1}{K_3}\right) + \left(\frac{1}{K_4}\right)}$	7284.91

Από το διάγραμμα\_7, εναπομένουσας ροπής, της μεθόδου Holzer - Tolle [3] βλέπουμε την πρώτη ιδιοσυχνότητα,



Διάγραμμα\_8

<b>Ιδιοσυχνότητα</b>	<b>rad / sec</b>	<b>Hz</b>
$\omega_1$	594.12	94.56

Αναλυτική εύρεση πρώτης ιδιοσυχνότητας

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο  $P(\omega)$ , [1] για αυτή την περίπτωση θα είναι 2ου βαθμού ως προς  $(\omega^2)$ , και προκύπτει από την παρακάτω ορίζουσα που συσχετίζει το μητρώο αδράνειας και το μητρώο ακαμψίας,

$$P(\omega) = \det(K - \omega^2 I) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} K & -K \\ -K & K \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}\right) = 0$$

Οπότε και προκύπτει,

$$\omega_e^2[(\omega_e^2 I_1 I_2 - K(I_1 + I_2))] = 0$$

Οι δύο ρίζες της είναι,

$$\omega_{eI} = 0$$

και

$$\omega_{eII} = \sqrt{\frac{K(I_1 + I_2)}{I_1 I_2}}$$

Τροφοδοτώντας την τελευταία σχέση με τα (I, K) που έχουμε υπολογίσει παίρνουμε,

<i>Ιδιοσυχνότητα</i>	<i>rad / sec</i>	<i>Hz</i>
$\omega_1$	594.12	94.56

Όπως ήταν αναμενόμενο παρατηρείται, και εδώ, σχεδόν πλήρης ταύτιση μεταξύ της αναλυτικής και της αριθμητικής μεθόδου.

## Συγκέντρωση αποτελεσμάτων - Συγκρίσεις

### Πλήρες διακεκριμένο σύστημα - 5 μάζες

<i>Ιδιοσυχνότητες</i>	<i>Μοντέλο I</i>	<i>Μοντέλο II</i>
$\omega_1$ (Hz)	167.249	94.716
$\omega_2$ (Hz)	413.071	243.729
$\omega_3$ (Hz)	653.236	393.881
$\omega_4$ (Hz)	822.035	531.100

### Σύστημα 3 μαζών

<i>Ιδιοσυχνότητες</i>	<i>Μοντέλο I</i>	<i>Μοντέλο II</i>
$\omega_1$ (Hz)	165.177	94.879
$\omega_2$ (Hz)	358.485	232.361

### Σύστημα 2 μαζών

<i>Ιδιοσυχνότητα</i>	<i>Μοντέλο I</i>	<i>Μοντέλο II</i>
$\omega_1$ (Hz)	156.998	94.557

Μια πρώτη παρατήρηση είναι η μείωση των τιμών των ιδιοσυχνοτήτων κατά την αναγωγή σε συστήματα με λιγότερες μάζες. Αυτό είναι λογικό αφού μείωση των διακεκριμένων μαζών σημαίνει, αύξηση της συγκέντρωσης ροπής αδράνειας ( $\uparrow I$ ), και μείωση της στρεπτικής ακαμψίας ( $\downarrow K$ ) που συνδέει τις μάζες. Οπότε οδηγούμαστε σε πιο εύκαμπτα αξονικά συστήματα ή αλλιώς "χαμηλόσυχνα".

Η μεγάλη διαφορά στις τιμές ιδιοσυχνότητας ανάμεσα στις δύο μοντελοποιήσεις ( I & II) έγκειται κυρίως στη διαφορά υπολογισμού τις στρεπτικής ακαμψίας για κάθε μία από τις δύο. Στην πρώτη μοντελοποίηση δεν λήφθηκε υπόψη η συμμετοχή των στροφάλων (και κομβίων) στη στρεπτική ακαμψία, παρά μόνο των κομβίων βάσεως. Οπότε οδηγηθήκαμε σε σχετικά μεγάλες τιμές ακαμψίας ( $\uparrow K$ ), άρα σε ένα πιο άκαμπτο - "υψίσυχο" σύστημα, από το πραγματικό.

Στη δεύτερη μοντελοποίηση λήφθηκαν υπόψη οι συνεισφορές από όλα τα τμήματα του άξονα σε στρεπτική ακαμψία, ( $\downarrow K$ ). Παράχθηκε οπότε ένα πληρέστερο διακεκριμένο μοντέλο, αρκετά πιο εύκαμπτο και πιο κοντά στο πραγματικό σύστημα.

### Ιδιομορφές Ταλαντώσεως (modes)- Κόμβοι

Η χωρική κατανομή των γωνιακών μετατοπίσεων των μαζών, καλείται ιδιομορφή και είναι μοναδική για κάθε μια ιδιοσυχνότητα του συστήματος [1]. Η κάθε ξεχωριστή ιδιοσυχνότητα του συστήματος συνοδεύεται από ένα και μόνο, τρόπο ταλάντωσης των μαζών του αξονικού.

Στο αξονικό τμήμα ανάμεσα σε δύο μάζες που ταλαντώνονται προς διαφορετικές κατευθύνσεις, υπάρχει μια διατομή η οποία αναγκαστικά παραμένει ακίνητη, και καλείται κόμβος ταλάντωσης. Οπότε ο κόμβος εμφανίζει τη μέγιστη τιμή στρεπτικής τάσης και μηδενικό εύρος ταλάντωσης [1],[3]. Από την ιδιομορφή της ταλάντωσης κάθε φορά υπολογίζουμε τη θέση και τον αριθμό των κόμβων.

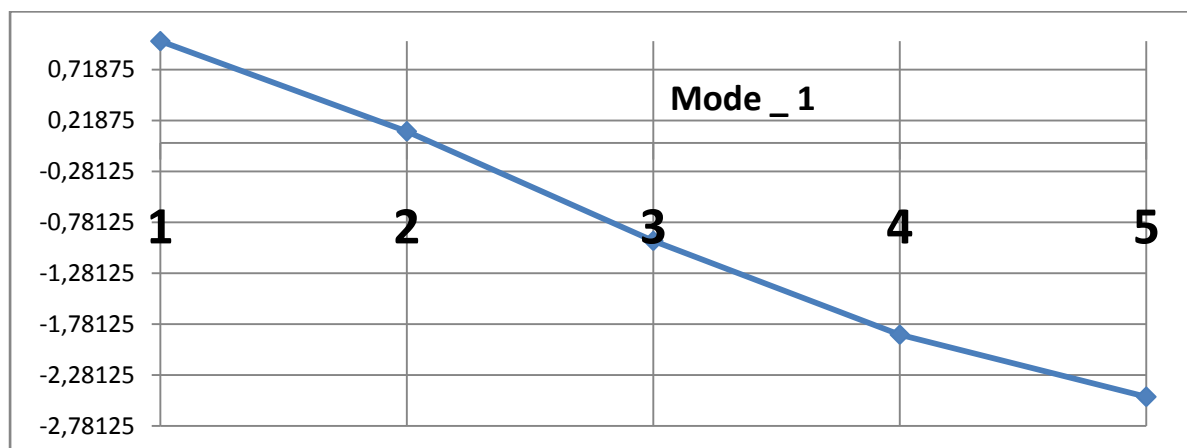
Με βάση τα αποτελέσματα της μεθόδου Holzer-Tolle, που αναπτύχθηκε παραπάνω για τις διάφορες περιπτώσεις, μπορούμε σχετικά εύκολα να καταλήξουμε στη θέση των μαζών κατά την στρεπτική ταλάντωση (βλ. "Εισαγωγή"), [3].

### Μοντελοποίηση II - Σύστημα 5 μαζών

Από τα αποτελέσματα της μεθόδου έχουμε,

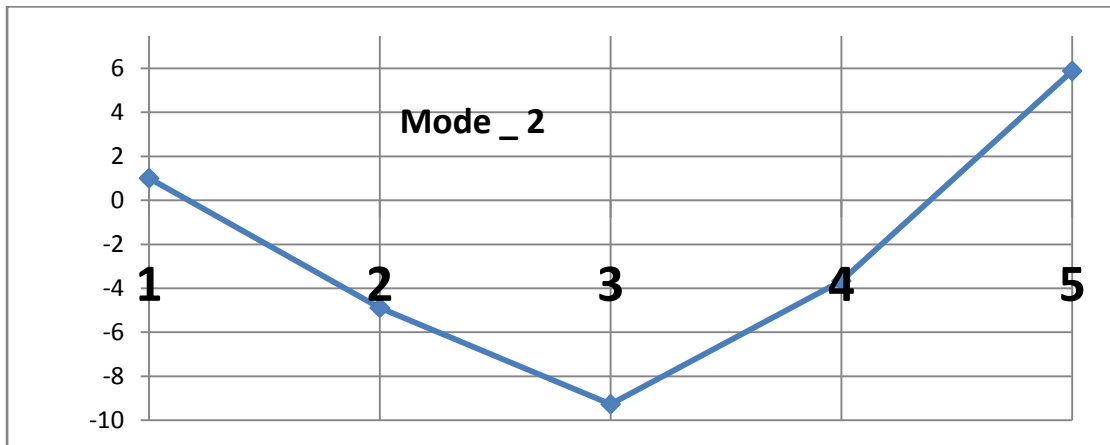
Mode_1	$\omega_1 = 580\text{rad/sec}$
$\alpha_1$	1
$\alpha_2$	0.111
$\alpha_3$	-0.964
$\alpha_4$	-1.884
$\alpha_5$	-2.496

Στο διάγραμμα\_9 φαίνεται ακριβώς η ιδιομορφή που αντιστοιχεί στην πρώτη ιδιοσυχνότητα του συστήματος. Στον οριζόντιο άξονα φαίνονται αριθμημένες οι διακεκριμένες μάζες, και στον κατακόρυφο ο λόγος της γωνίας της μάζας\_1 προς τη γωνία της εκάστοτε μάζας (από 1 μέχρι 5).



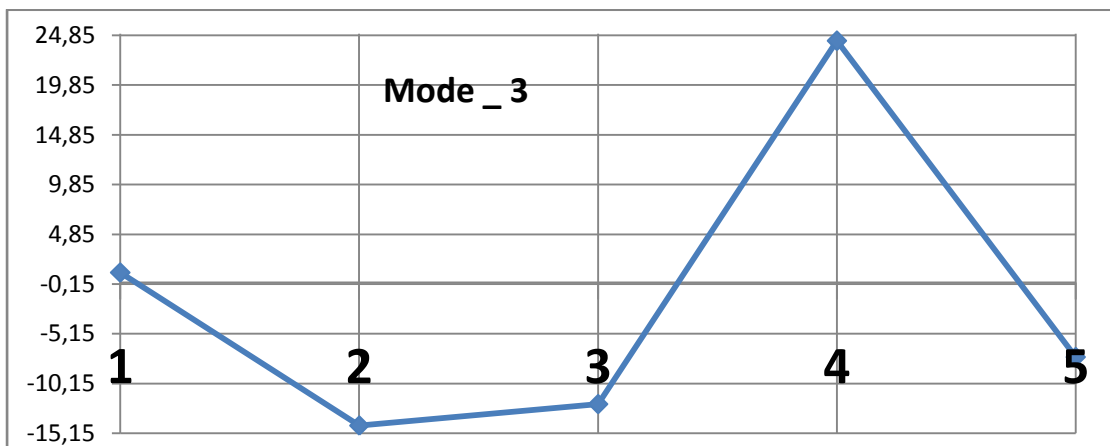
Διάγραμμα\_9

Mode_2	$\omega_2 = 1293 \text{ rad/sec}$
$\alpha_1$	1
$\alpha_2$	-4.886
$\alpha_3$	-9.269
$\alpha_4$	-3.674
$\alpha_5$	5.876



Διάγραμμα\_10

Mode_3	$\omega_3 = 2004 \text{ rad/sec}$
$\alpha_1$	1
$\alpha_2$	-14.372
$\alpha_3$	-12.226
$\alpha_4$	24.293
$\alpha_5$	-7.487

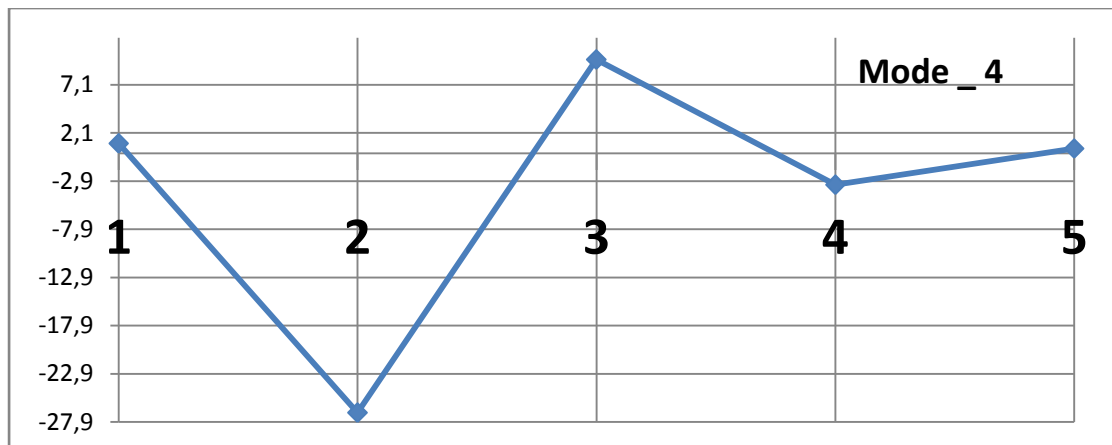


Διάγραμμα\_11



Για την τέταρτη και τελευταία ιδιομορφή έχουμε,

Mode_4	$\omega_4 = 2678 \text{rad/sec}$
$\alpha_1$	1
$\alpha_2$	-26.947
$\alpha_3$	9.713
$\alpha_4$	-3.277
$\alpha_5$	0.484



Προφανώς οι κόμβοι, σε κάθε μια ιδιομορφή, συνάδουν αριθμητικά με το βαθμό της ταλάντωσης και βρίσκονται στα σημεία όπου η μπλε γραμμή τέμνει τον οριζόντιο άξονα.

### 3. Προσδιορισμός Ιδιοσυχνοτήτων - Σύστημα με Εκκεντρότητα

Οι μαθηματικές μοντελοποιήσεις που αναπτύχθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο είναι πολύ βασικές μέθοδοι μελέτης διακεκριμένων συστημάτων, σε στρεπτικές ταλαντώσεις. Αποτελούν κλασικές και αξιόπιστες επιλογές για προσδιορισμό στρεπτικών ιδιοσυχνοτήτων (και ιδιομορφών), έχοντας αρκετά μεγάλη ακρίβεια σε σχέση πάντα με τον όγκο "μαθηματικών πράξεων - τεχνικών" που απαιτούν.

Στο κεφάλαιο αυτό αναπτύσσεται ένα πληρέστερο μοντέλο προσδιορισμού της συμπεριφοράς του αξονικού, σε στρεπτικές ταλαντώσεις. Τα αποτελέσματα είναι χρονικές συναρτήσεις της γωνίας και της γωνιακής ταχύτητας, κάτι που ήταν ανέφικτο με τις δύο προηγούμενες μεθόδους (Holzer-Tolle και  $P(\omega) = 0$ ). Είμαστε σε θέση πλέον να γνωρίζουμε τη θέση και την ταχύτητα κάθε διακριτής μάζας, σε κάθε χρονική στιγμή, καθώς και τη συνολική κίνηση του συστήματος σαν στερεό απαραμόρφωτο σώμα.

Το σημαντικότερο είναι ότι το μοντέλο λαμβάνει υπόψη τους μη γραμμικούς όρους που εισάγονται από την ύπαρξη εκκεντρότητας, για κάθε διακριτή μάζα. Με την ποσότητα της "εκκεντρότητας", σε ένα αξονικό σύστημα μπορούμε να προσομοιάσουμε μια βλάβη σε κάποια συγκεκριμένη μάζα του. Επί παραδείγματι, αν από κάποιο πτερύγιο της έλικας λείπει υλικό (έχει "φαγωθεί" - θραύση), η δομή του αξονικού αλλάζει, και αυτόματα και η συμπεριφορά του. Εκτός από την αλλαγή στη ροπή αδράνειας της έλικας, διαταράσσεται και η κατανομή της μάζας της ως προς τον άξονα περιστροφής του αξονικού ( εισάγεται εκκεντρότητα ,  $\varepsilon \neq 0$  ). Μια αντίστοιχη αλλαγή-βλάβη μπορεί να εμφανιστεί σε οποιαδήποτε διακεκριμένη μάζα του αξονικού, σε στρόφαλο, έμβολο, γρανάζι, σφόνδυλο κτλ.

Το συγκεκριμένο μοντέλο λαμβάνει υπόψη του τις βλάβες, ως διαφορές στην εκκεντρότητα των μαζών και εισάγει τα αποτελέσματά τους στη δυναμική συμπεριφορά του συστήματος.

#### Δυναμικές εξισώσεις

Οι εξισώσεις κίνησης που διέπουν τη συμπεριφορά του αξονικού, λαμβανομένης υπόψη της εκκεντρότητας είναι οι παρακάτω ( βλ. κεφ.1, "Εκκεντρότητες στροφάλων"),

$$I_1 \ddot{\varphi}_1 = -k_1 (\varphi_1 - \varphi_2) - \varepsilon_1 g \sin \varphi_1$$

$$I_2 \ddot{\varphi}_2 = -k_1 (\varphi_2 - \varphi_1) - k_2 (\varphi_2 - \varphi_3) - \varepsilon_2 g \sin \varphi_2$$

$$I_3 \ddot{\varphi}_3 = -k_2 (\varphi_3 - \varphi_2) - k_3 (\varphi_3 - \varphi_4) - \varepsilon_3 g \sin \varphi_3$$

$$I_4 \ddot{\varphi}_4 = -k_3 (\varphi_4 - \varphi_3) - k_4 (\varphi_4 - \varphi_5) - \varepsilon_4 g \sin \varphi_4$$

$$I_5 \ddot{\varphi}_5 = -k_4 (\varphi_5 - \varphi_4) - \varepsilon_5 g \sin \varphi_5$$

Η επίλυση του συστήματος γίνεται με τη μέθοδο Runge - Kutta 4ης τάξης, (RK-4), η οποία αναπτύχθηκε σε περιβάλλον Fortran (CrankShaft.for). Οπότε οι εξισώσεις πρέπει να έρθουν στην κατάλληλη μορφή (βλ. Εισαγωγή, "RK-4").

Διαιρώντας με την αδράνεια παίρνουμε τους παρακάτω συντελεστές,

- $B_{11} = \frac{K_1}{I_1}$
- $B_{12} = \frac{K_1}{I_2}, B_{22} = \frac{K_2}{I_2}$
- $B_{23} = \frac{K_2}{I_3}, B_{33} = \frac{K_3}{I_3}$
- $B_{34} = \frac{K_3}{I_4}, B_{44} = \frac{K_4}{I_4}$
- $B_{45} = \frac{K_4}{I_5}$
  
- $A_1 = \frac{\varepsilon_1}{I_1} g$
- $A_2 = \frac{\varepsilon_2}{I_2} g$
- $A_3 = \frac{\varepsilon_3}{I_3} g$
- $A_4 = \frac{\varepsilon_4}{I_4} g$
- $A_5 = \frac{\varepsilon_5}{I_5} g$

Έχουμε,

$$\ddot{\varphi}_1 = -B_{11}(\varphi_1 - \varphi_2) - A_1 \sin \varphi_1$$

$$\ddot{\varphi}_2 = -B_{12}(\varphi_2 - \varphi_1) - B_{22}(\varphi_2 - \varphi_3) - A_2 \sin \varphi_2$$

$$\ddot{\varphi}_3 = -B_{23}(\varphi_3 - \varphi_2) - B_{33}(\varphi_3 - \varphi_4) - A_3 \sin \varphi_3$$

$$\ddot{\varphi}_4 = -B_{34}(\varphi_4 - \varphi_3) - B_{44}(\varphi_4 - \varphi_5) - A_4 \sin \varphi_4$$

$$\ddot{\varphi}_5 = -B_{45}(\varphi_5 - \varphi_4) - A_5 \sin \varphi_5$$

Από το σύστημα διαφορικών εξισώσεων δευτέρου βαθμού πρέπει να μεταβούμε σε σύστημα εξισώσεων πρώτου βαθμού ( βλ. "Εισαγωγή" ), οπότε θέτουμε τα επόμενα,

$$x_1 = \varphi_1, \quad x_2 = \dot{\varphi}_1$$

$$x_3 = \varphi_2, \quad x_4 = \dot{\varphi}_2$$

$$x_5 = \varphi_3, \quad x_6 = \dot{\varphi}_3$$

$$x_7 = \varphi_4, \quad x_8 = \dot{\varphi}_4$$

$$x_9 = \varphi_5, \quad x_{10} = \dot{\varphi}_5$$

Καταλήγοντας στην δομή την οποία απαιτεί η μέθοδος RK-4 να "βλέπει", για να παράγει το διάνυσμα-λύση,

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -B_{11}(x_1 - x_3) - A_1 \sin x_1$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = -B_{12}(x_3 - x_1) - B_{22}(x_3 - x_5) - A_2 \sin x_3$$

$$\dot{x}_5 = x_6$$

$$\dot{x}_6 = -B_{23}(x_5 - x_3) - B_{33}(x_5 - x_7) - A_3 \sin x_5$$

$$\dot{x}_7 = x_8$$

$$\dot{x}_8 = -B_{34}(x_7 - x_5) - B_{44}(x_7 - x_9) - A_4 \sin x_7$$

$$\dot{x}_9 = x_{10}$$

$$\dot{x}_{10} = -B_{45}(x_9 - x_7) - A_5 \sin x_9$$

Στο πρόγραμμα CraknkShaft.for η αδράνεια και η εκκεντρότητα της κάθε διακριτής μάζας, με  $\varepsilon \neq 0$ , λογίζονται ως ισοδύναμου συστήματος ράβδου - μαζών,

$$M_2 L_2 - M_1 L_1 = \varepsilon$$

$$M_1 L_1^2 + M_2 L_2^2 = I$$

Ενώ του σφονδύλου, με  $\varepsilon = 0$ , λογίζεται ως συμπαγούς δίσκου,

$$I_{\sigma\phi\omicron\delta\upsilon\lambda\omicron\upsilon} = I_{\delta\iota\sigma\kappa\omicron\upsilon} = J_{\delta\iota\sigma\kappa\omicron\upsilon} \times \rho \times L$$

### Ισοδύναμο σύστημα ράβδου - μαζών

Στη θέση κάθε συγκεντρωμένης μάζας του διακεκριμένου συστήματος, που έχει,  $\varepsilon \neq 0$ , αντιστοιχεί μια ράβδος, με δύο μάζες συγκεντρωμένες στα δύο άκρα της (βλ. κεφ. 1, "Εκκεντρότητα").

Για να είναι το σύστημα των δύο μαζών δυναμικά ισοδύναμο με τη συγκεντρωμένη μάζα που αντικαθιστά [2], πρέπει,

1.  $M_1 + M_2 = M_{\text{συγκ. μάζας}}$
2.  $M_2 L_2 - M_1 L_1 = \varepsilon$
3.  $M_1 L_1^2 + M_2 L_2^2 = I_{\text{συγκ. μάζας}}$

Αν ισχύουν τα παραπάνω τότε το πρότυπο των δύο μαζών αντιδρά σε σύστημα δυνάμεων και ροπών όπως ακριβώς και η συγκεντρωμένη μάζα που έχουμε θεωρήσει αρχικά [2].

<i>Μάζα</i>	<i>M (kg)</i>	<i>I (kgm<sup>2</sup>)</i>	<i>ε</i>
1 (σφόνδυλος)	6.9	0.05433	0
2	1.575	0.00836	0.0726
3	1.829	0.00828	0
4	1.829	0.00828	- 0.0396
5	3.907	0.00843	0.0453

### Μάζα 2

$$M_1 + M_2 = 1.575$$

$$M_1 L_1 - M_2 L_2 = 0.07262$$

$$M_1 L_1^2 + M_2 L_2^2 = 0.00836$$

Με βάση την πραγματική κατανομή μάζας του αξονικού (βλ. κεφ. 1, "Εκκεντρότητα"), έχουμε,

$$M_1 = 0.5146 \text{ kg}$$

$$M_2 = 1.0603 \text{ kg}$$

οπότε,

$$0.5146 L_1 - 1.0603 L_2 = 0.07262$$

$$0.5146 L_1^2 + 1.0603 L_2^2 = 0.00836$$

που αποτελεί ένα μη γραμμικό σύστημα 2 εξισώσεων με δύο αγνώστους.

Για τη γραφική λύση του συστήματος, έχουμε  $L_2 = f(L_1)$ ,

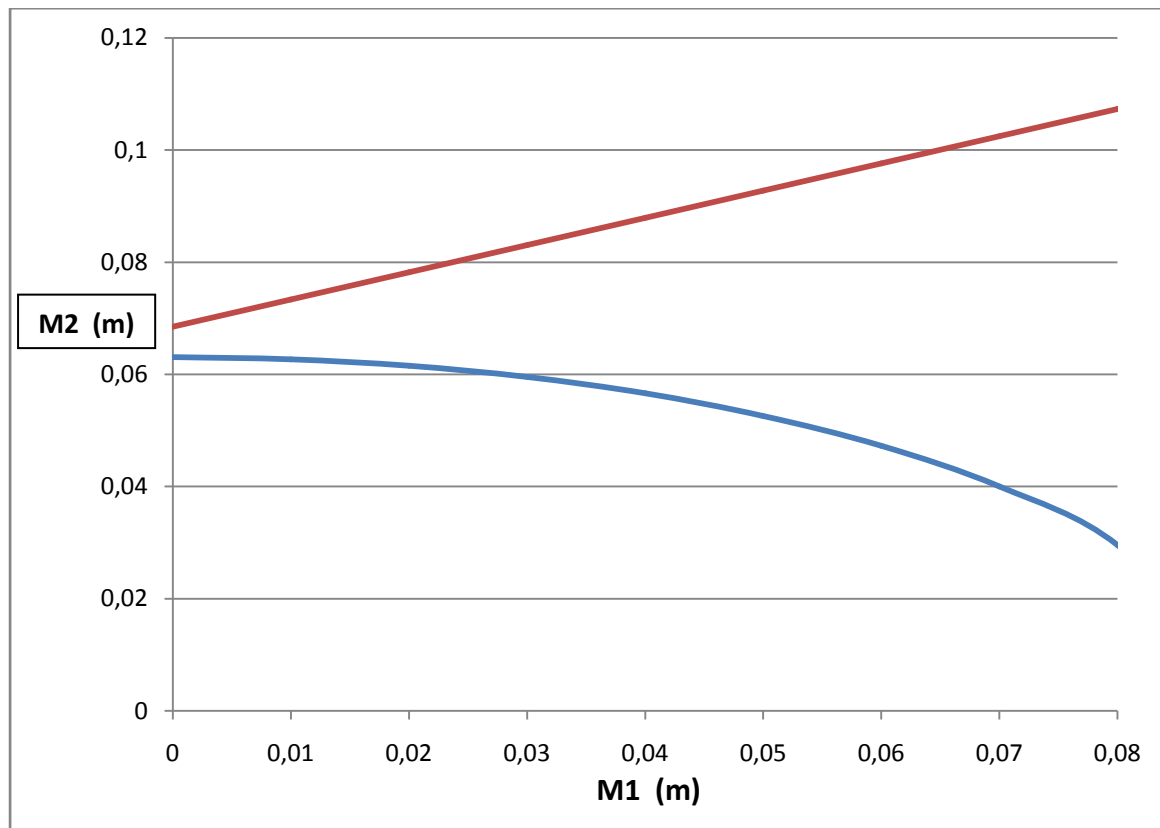
από την εξίσωση εκκεντρότητας,

$$L_2 = \frac{\varepsilon + M_1 L_1}{-M_2}$$

από την εξίσωση ροπής αδράνειας,

$$L_2 = \sqrt{\frac{I - M_1 L_1^2}{M_2}}$$

σε κοινό διάγραμμα παίρνουμε,



Δεν υπάρχει σημείο τομής των δύο καμπυλών στο πεδίο τιμών που μας ενδιαφέρει οπότε το σύστημα είναι αδύνατο.

Οπότε προχωρούμε εναλλακτικά στη γραφική λύση του συστήματος  $M_2 = f(M_1)$ ,

Έχοντας για τα μήκη

$$L_1 = 0.041 \text{ m}$$

$$L_2 = 0.0525 \text{ m}$$

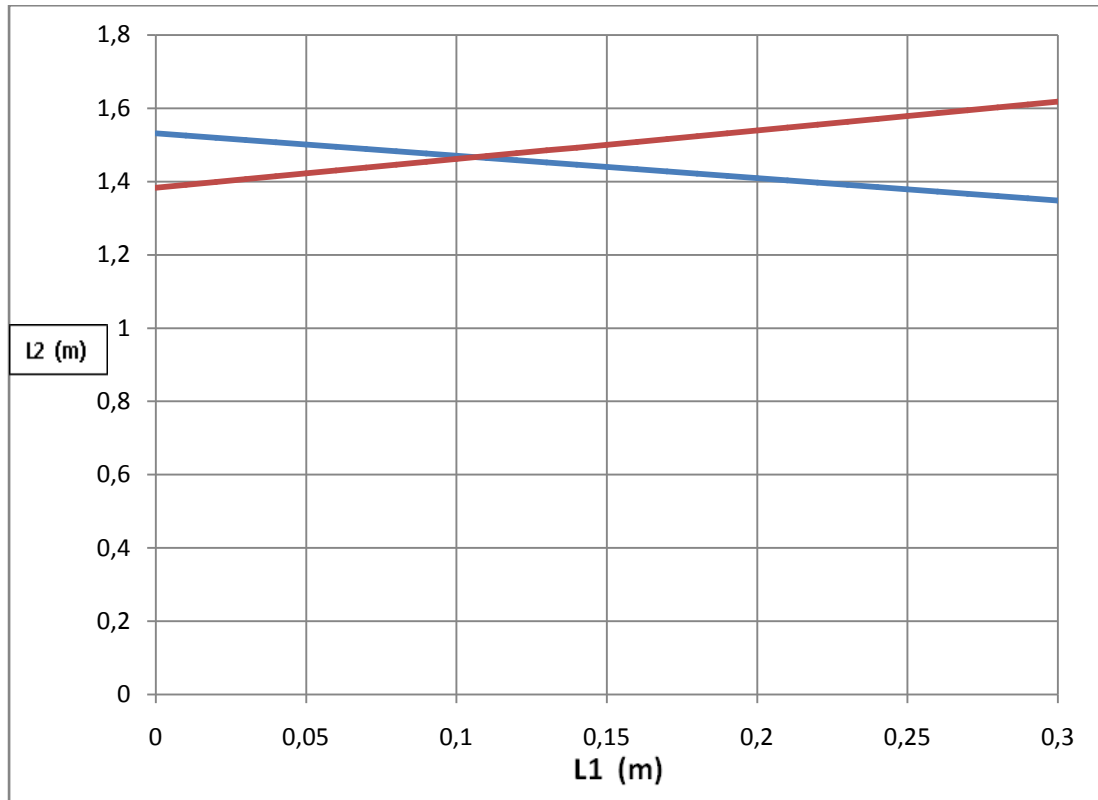
με γνώμονα να ικανοποιούνται ταυτόχρονα οι εξισώσεις εκκεντρότητας και ροπής αδράνειας.

Έχουμε, από την εξίσωση εκκεντρότητας,

$$M_2 = \frac{\varepsilon + M_1 L_1}{-L_2}$$

από την εξίσωση ροπής αδράνειας,

$$M_2 = \sqrt{\frac{I - M_1 L_1^2}{L_2}}$$



Από το σημείο τομής των δύο καμπυλών έχουμε,

$$M_1 = 0.106 \text{ kg}$$

$$M_2 = 1.467 \text{ kg}$$

### Μάζα 3

$$M_3 + M_4 = 1.829$$

$$M_4 L_4 - M_3 L_3 = 0$$

$$M_3 L_3^2 + M_4 L_4^2 = 0.00828$$

Με βάση την πραγματική κατανομή μάζας του αξονικού (βλ. κεφ.1, "Εκκεντρότητα"),

$$M_3 = 0.9146 \text{ kg}$$

$$M_4 = 0.9146 \text{ kg}$$

οπότε,

$$0.9146 L_4 - 0.9146 L_3 = 0$$

$$0.9146 L_3^2 + 0.9146 L_4^2 = 0.00828$$

Για τη γραφική λύση του συστήματος, έχουμε  $L_4 = f(L_3)$ ,

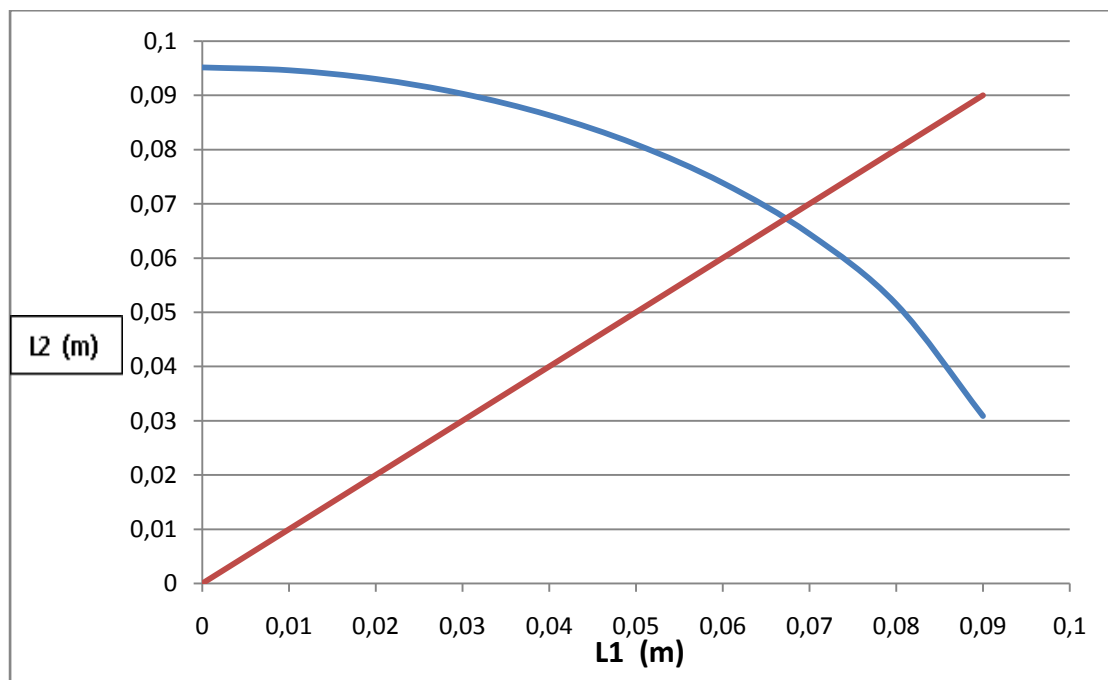
από την εξίσωση εκκεντρότητας,

$$L_4 = \frac{\varepsilon + M_3 L_3}{M_4}$$

από την εξίσωση ροπής αδράνειας,

$$L_4 = \sqrt{\frac{I - M_3 L_3^2}{M_4}}$$

σε κοινό διάγραμμα παίρνουμε,



Από το σημείο τομής των δύο καμπυλών έχουμε,

$$L_3 = 0.0673 \text{ m}$$

$$L_4 = 0.0673 \text{ m}$$



Μάζα 4

$$M_5 + M_6 = 1.829$$

$$M_5 L_5 - M_6 L_6 = -0.0396$$

$$M_5 L_5^2 + M_6 L_6^2 = 0.00828$$

Με βάση την πραγματική κατανομή μάζας του αξονικού (βλ. κεφ. 1, "Εκκεντρότητα"),

$$M_5 = 1.461 \text{ kg}$$

$$M_6 = 0.369 \text{ kg}$$

οπότε,

$$1.461 L_5 - 0.369 L_6 = -0.0396$$

$$1.461 L_5^2 + 0.369 L_6^2 = 0.00828$$

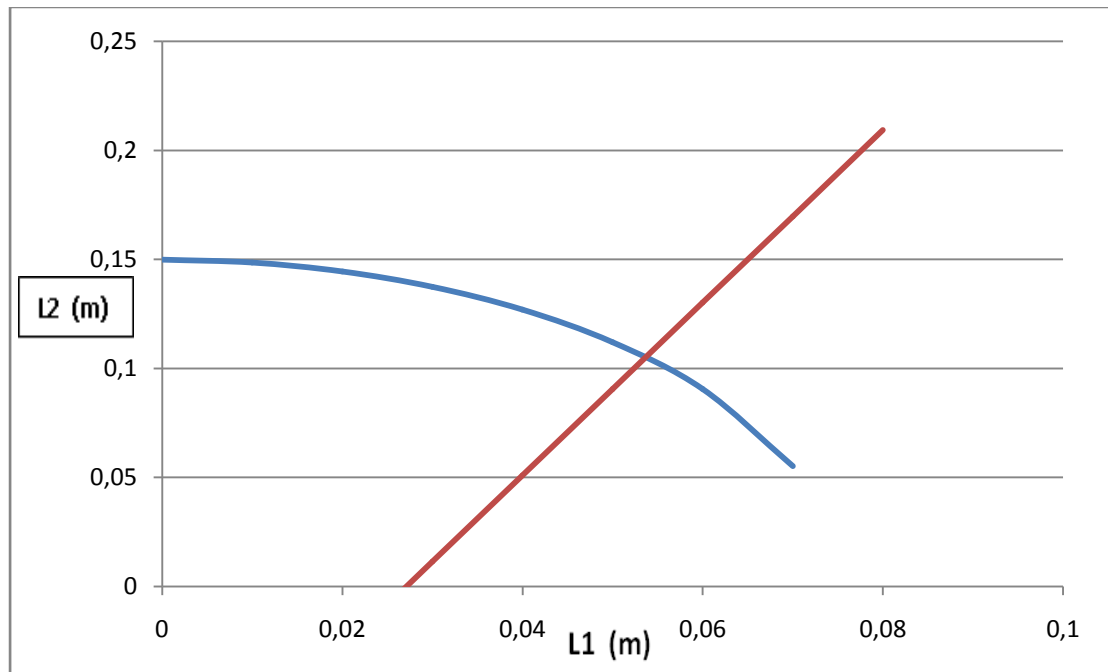
Για τη γραφική λύση του συστήματος, έχουμε  $L_6 = f(L_5)$ , από την εξίσωση εκκεντρότητας,

$$L_6 = \frac{\varepsilon + M_5 L_5}{-M_6}$$

από την εξίσωση ροπής αδράνειας,

$$L_6 = \sqrt{\frac{I - M_5 L_5^2}{M_6}}$$

σε κοινό διάγραμμα παίρνουμε,



Από το σημείο τομής των δύο καμπυλών έχουμε,

$$L_5 = 0.0538 \text{ m}$$

$$L_8 = 0.105 \text{ m}$$

### Μάζα 5

$$M_7 + M_8 = 3.902$$

$$M_7 L_7 - M_8 L_8 = 0.0453$$

$$M_7 L_7^2 + M_8 L_8^2 = 0.0125$$

Με βάση την πραγματική κατανομή μάζας του αξονικού (βλ. κεφ. 1, "Εκκεντρότητα"),

$$M_7 = 1.678 \text{ kg}$$

$$M_8 = 2.224 \text{ kg}$$

οπότε,

$$1.678 L_7 - 2.224 L_8 = 0.0453$$

$$1.678 L_7^2 + 2.224 L_8^2 = 0.0125$$

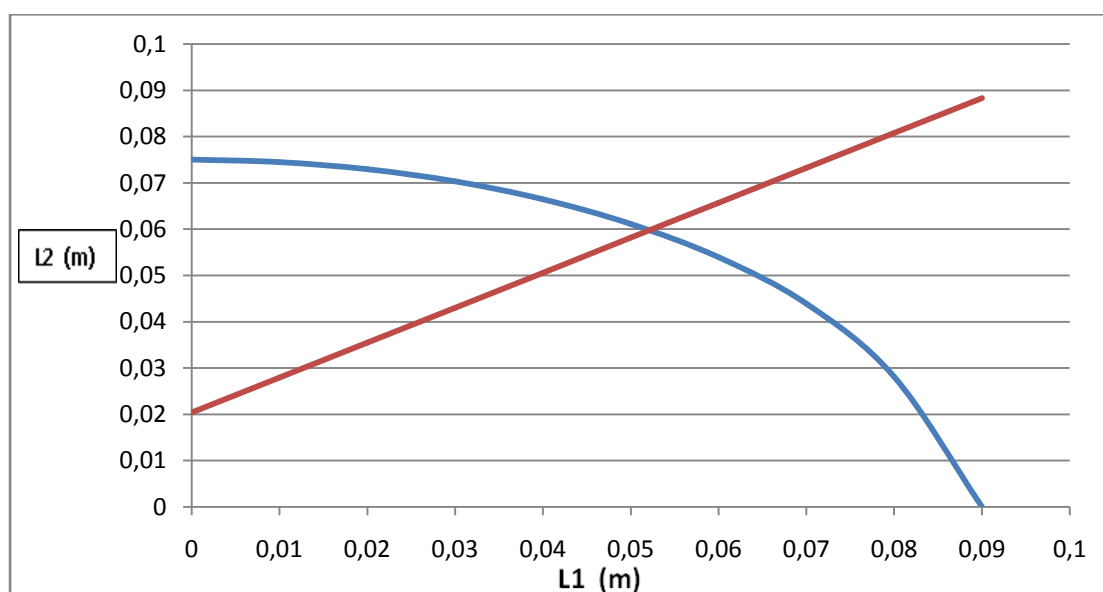
Για τη γραφική λύση του συστήματος, έχουμε  $L_8 = f(L_7)$ , από την εξίσωση εκκεντρότητας,

$$L_7 = \frac{\varepsilon + M_7 L_7}{-M_8}$$

από την εξίσωση ροπής αδράνειας,

$$L_7 = \sqrt{\frac{I - M_7 L_7^2}{M_8}}$$

σε κοινό διάγραμμα παίρνουμε,



Από το σημείο τομής των δύο καμπυλών έχουμε,

$$L_7 = 0.0525 \text{ m}$$

$$L_8 = 0.06 \text{ m}$$

### Συγκεντρωτικά

<i>Μάζα</i>	<i>(kg)</i>	<i>(m)</i>
<b>2</b>	$M_1 = 0.106$ $M_2 = 1.467$	$L_1 = 0.041$ $L_2 = 0.0525$
<b>3</b>	$M_3 = 0.9146$ $M_4 = 0.9146$	$L_3 = 0.673$ $L_4 = 0.673$
<b>4</b>	$M_5 = 1.4603$ $M_6 = 0.3689$	$L_5 = 0.0538$ $L_6 = 0.105$
<b>5</b>	$M_7 = 1.678$ $M_8 = 2.2237$	$L_7 = 0.0525$ $L_8 = 0.06$

### Ισοδυναμία ροπής αδράνειας σφονδύλου

Η θέση του σφονδύλου θεωρούμε ότι καταλαμβάνεται από έναν συμπαγή κυκλικό δίσκο, που πρέπει να έχει την ίδια ροπή αδράνειας με τον πραγματικό ο οποίος αποτελείται από τρεις μάζες (βλ. κεφάλαιο 2),

$$I_{\sigma\phi\omicron\delta\upsilon\lambda\omicron\upsilon} = I_{\delta\iota\sigma\kappa\omicron\upsilon} = J_{\delta\iota\sigma\kappa\omicron\upsilon} \times \rho \times 0.033 = 0.05433 \text{ kgm}^2$$

$$\text{όπου, } J_{\delta\iota\sigma\kappa\omicron\upsilon} = \frac{\pi D_{\delta\iota\sigma\kappa\omicron\upsilon}^4}{32}$$

Οπότε,

$$D_{\delta\iota\sigma\kappa\omicron\upsilon} = \sqrt[4]{\frac{0.05433 * 32}{0.033 * 7057.4 * \pi}}$$

$$D_{\delta\iota\sigma\kappa\omicron\upsilon} = 0.22078 \text{ m}$$

Έχουμε,

$$I_{\delta\acute{\iota}\sigma\kappa\omicron\upsilon} = \frac{\pi * D^4 * \rho * 0.033}{32} = 0.05433 \text{ } kgm^2$$

Ισοδυναμία στρεπτικής ακαμψίας

Το πρόγραμμα CrackShaft.for αντιλαμβάνεται τα τμήματα του άξονα ανάμεσα στις διακεκριμένες μάζες ως τμήματα σταθερής διατομής (χωρίς στρόφαλα, κομβία στροφάλων). Πρέπει οπότε, να έχουν τέτοιο μήκος ώστε να παράγουν την στρεπτική ακαμψία που υπολογίστηκε στο κεφάλαιο 2. Οπότε βρίσκουμε το μήκος αυτό,

$$K_i = \frac{G J_i}{L_i} = \frac{G \frac{\pi D_i^4}{32}}{L_i} \rightarrow L_i = \frac{G \pi D^4}{32 K_i}$$

όπου,

$$D_i = D_{\text{κομβίου βάσης}} = 0.03 \text{ } m$$

Έχουμε,

<i>Τμήμα</i>	<i>K<sub>i</sub> (Nm/rad)</i>	<i>L<sub>i</sub> (m)</i>
<b>1</b>	21647.7835	0.297548
<b>2</b>	18037.8955	0.357095
<b>3</b>	18037.8955	0.357095
<b>4</b>	18037.8955	0.357095

### Αποτελέσματα του προγράμματος CrankShaft.for

Τα αποτελέσματα χωρίζονται σε τέσσερις περιπτώσεις (τέσσερα αριθμητικά πειράματα) με βάσει τις αρχικές συνθήκες που δόθηκαν κάθε φορά. Η θέση της μάζας (γωνία) μετρείται σε (rad) και η ταχύτητα περιστροφής της σε (rad / sec).

Οι συναρτήσεις θέσης και ταχύτητας (  $\varphi(t)$ ,  $\dot{\varphi}(t)$  ) λαμβάνονται σε ηλεκτρονικό αρχείο κειμένου ( .txt ) ως χρονικές ιστορίες, με διάρκεια 10sec.

- Αριθμός "χρονικών σημείων" :  $N = 10000$
- Χρονικό βήμα του προγράμματος :  $b = 0.001 \text{ sec.}$
- Συχνότητα "δειγματοληψίας" :  $f_s = 1 / b = 1000 \text{ Hz}$
- Χρονική διάρκεια :  $t = 10 \text{ sec.}$

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχουν οι χρονικές συναρτήσεις της ταχύτητας περιστροφής, καθώς από αυτές μπορούν να εξαχθούν οι ιδιοσυχνότητες του συστήματος μέσω διακριτού μετασχηματισμού Fourier ( Discrete Fourier Transformation ).

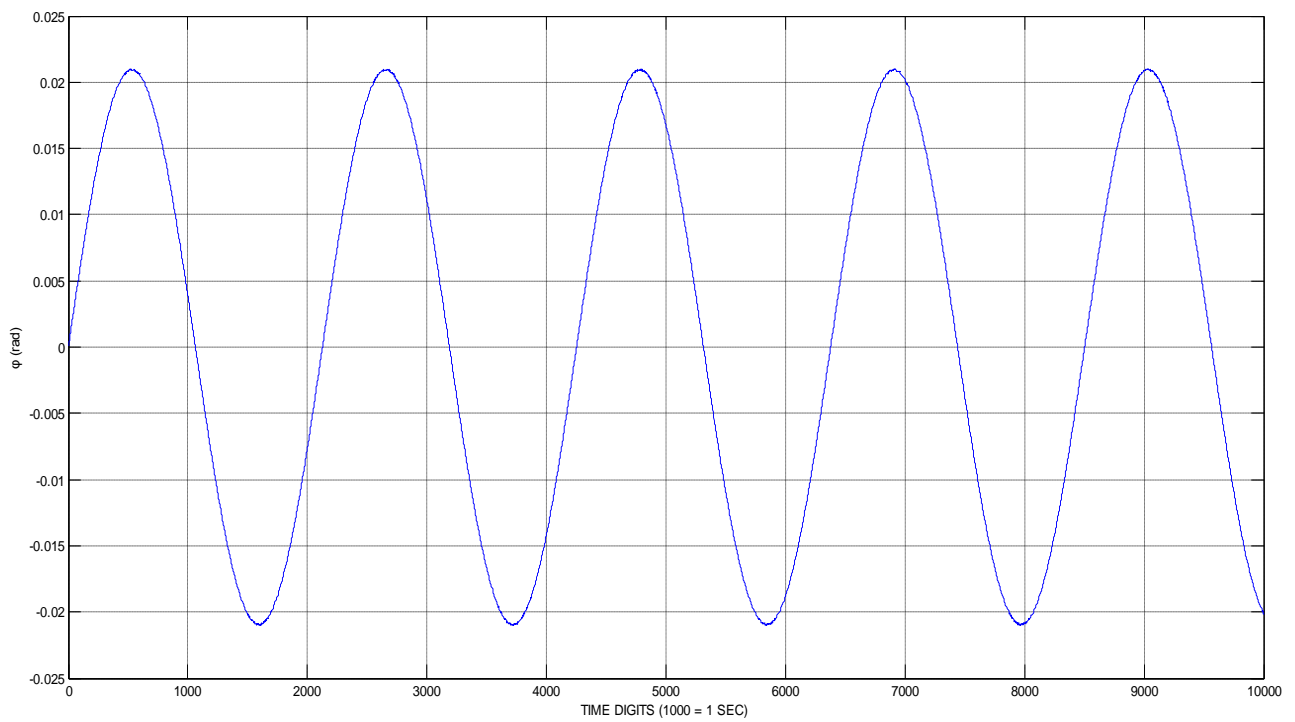
### Αριθμητικό πείραμα 1

Αρχικές συνθήκες,

$\varphi_1$	0
$\dot{\varphi}_1$	0.1
$\varphi_2$	0
$\dot{\varphi}_2$	0
$\varphi_3$	0
$\dot{\varphi}_3$	0
$\varphi_4$	0
$\dot{\varphi}_4$	0
$\varphi_5$	0
$\dot{\varphi}_5$	0

Αποτέλεσμα είναι το διάνυσμα λύση,

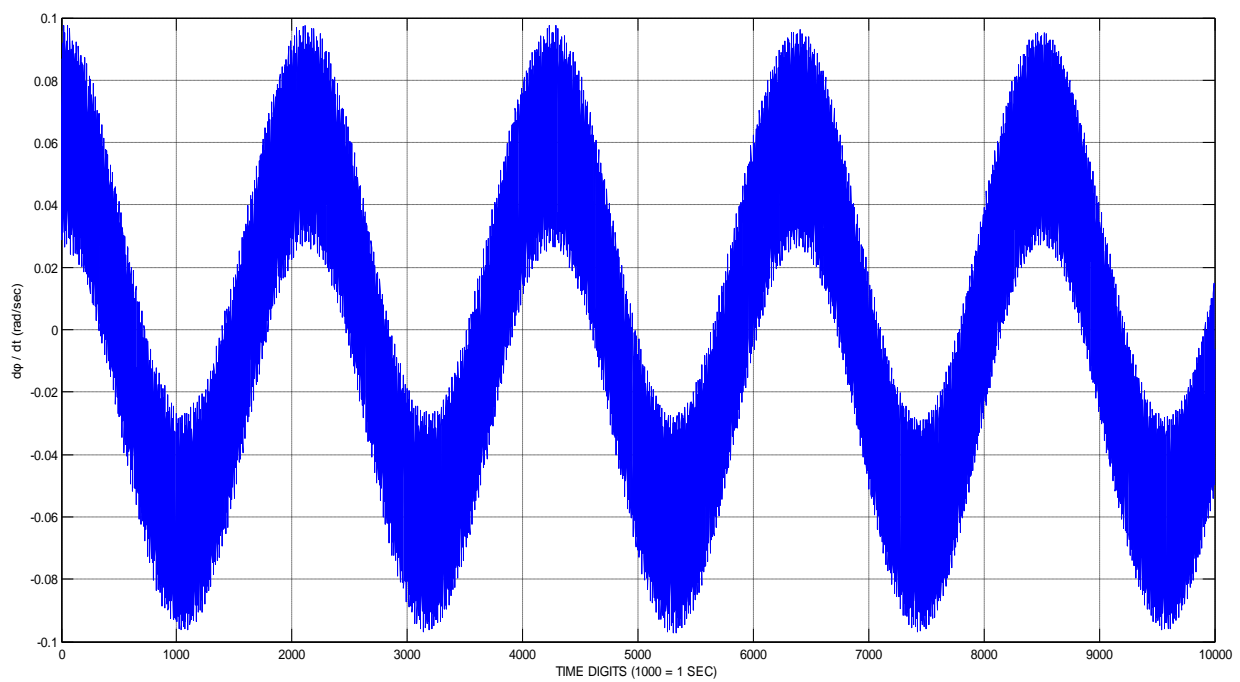
$\varphi_1(t)$
$\dot{\varphi}_1(t)$
$\varphi_2(t)$
$\dot{\varphi}_2(t)$
$\varphi_3(t)$
$\dot{\varphi}_3(t)$
$\varphi_4(t)$
$\dot{\varphi}_4(t)$
$\varphi_5(t)$
$\dot{\varphi}_5(t)$



Διάγραμμα\_1

Στο διάγραμμα\_1 φαίνεται η χρονική ιστορία της γωνίας, η οποία, μακροσκοπικά είναι ίδια για κάθε διακριτή μάζα του συστήματος.

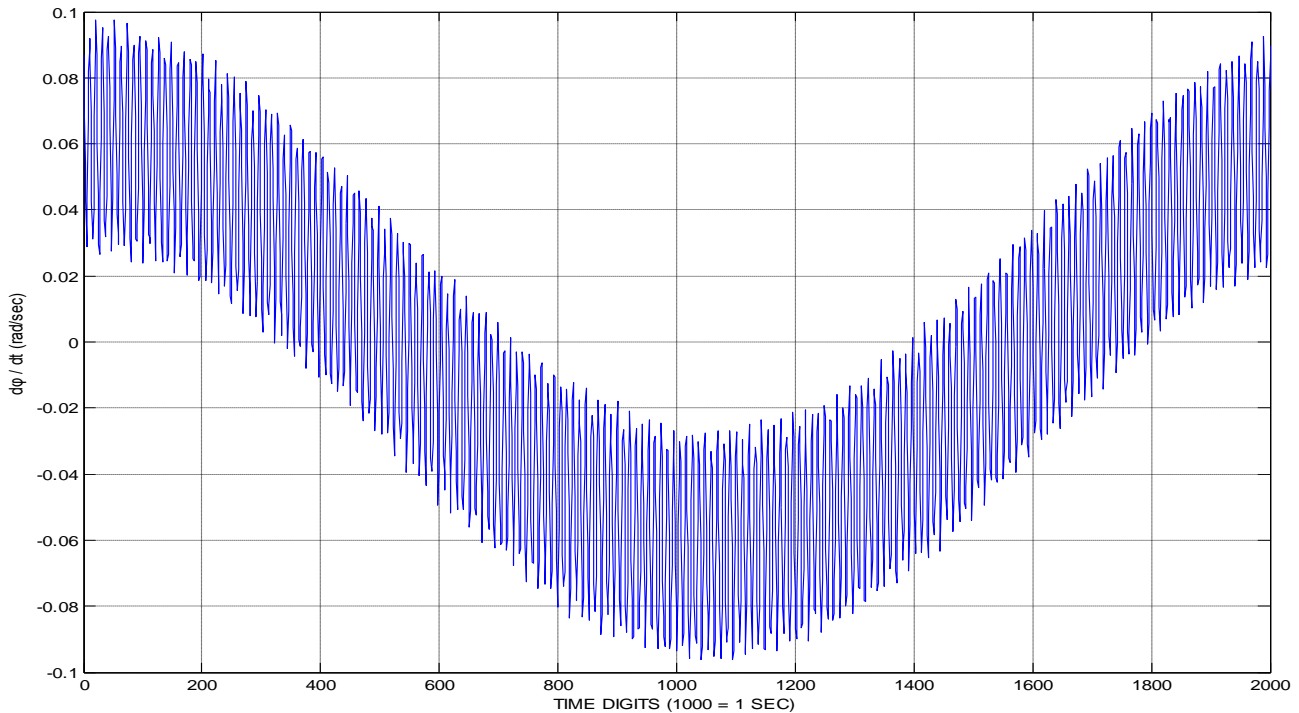
Παρακάτω φαίνεται η χρονική εξέλιξη της ταχύτητας περιστροφής του σφονδύλου,



Διάγραμμα\_2

Στο διάγραμμα\_2 φαίνεται η συμπεριφορά της γωνιακής ταχύτητας του σφονδύλου. Φαίνεται καθαρά η κύρια συχνότητα περιστροφής, η οποία είναι η γωνιακή ταχύτητα του συνολικού στροφαλοφόρου, που φυσικά στρέφεται ως απαραμόρφωτο στερεό σώμα [1].

Σε μικρότερη κλίμακα ( διάγραμμα\_3) φαίνονται οι ταλαντώσεις της γωνιακής ταχύτητας, που συνοδεύουν την συχνότητα περιστροφής του άξονα.



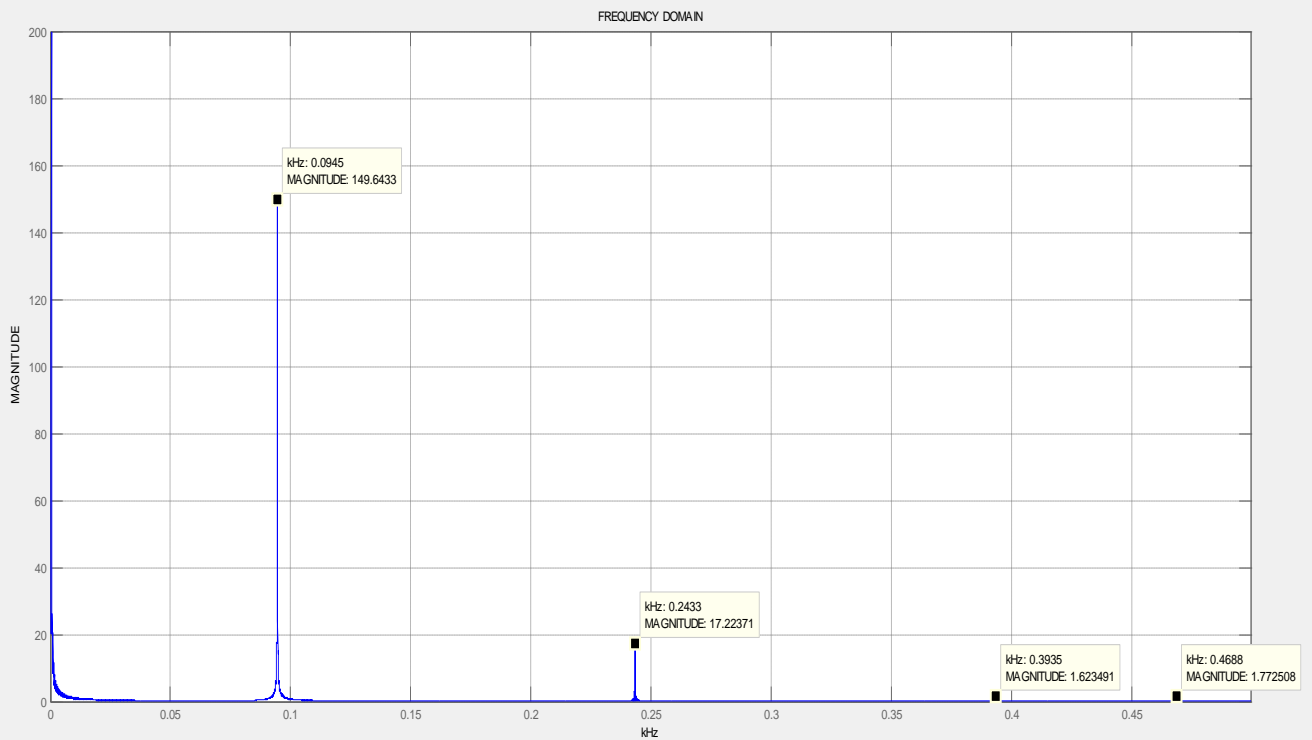
Διάγραμμα\_3

Μακροσκοπικά, η συμπεριφορά της γωνιακής ταχύτητας κάθε διακριτής μάζας προκύπτει ίδια με αυτή του σφονδύλου. Αυτό είναι λογικό αφού στο διάγραμμα\_2 φαίνεται η κίνηση του στροφαλοφόρου ως στερεό σώμα την οποία ακολουθούν όλες οι μάζες που τον αποτελούν. Σε μικρότερη κλίμακα όμως η συμπεριφορά διαφέρει γιατί υπάρχουν "παρασιτικές" ταλαντευτικές κινήσεις, διαφόρων συχνοτήτων, από τις επιμέρους μάζες.

Ακολουθως, το διάγραμμα\_4 είναι το φάσμα συχνοτήτων, το οποίο εξάχθηκε από τη χρονική ιστορία της περιστροφικής ταχύτητας του σφονδύλου (διάγραμμα\_2).

Φαίνονται καθαρά οι παρακάτω συχνότητες ταλάντωσης,

- 94.4 Hz
- 243.3 Hz
- 393.5 Hz
- 468.8 Hz



Διάγραμμα\_4

Παρατηρούμε εύκολα πως η μηδενική συχνότητα είναι αυτή με την υψηλότερη ισχύ, κάτι το οποίο είναι λογικό αφού αντικατοπτρίζει την ταχύτητα περιστροφής όλου του συστήματος, ως απαραμόρφωτο στερεό. Ενώ, ισχυρότερη από τις υπόλοιπες τέσσερις, άρα και κυρίαρχη συχνότητα ταλάντωσης είναι η πρώτη, στα 94,5 Hz.

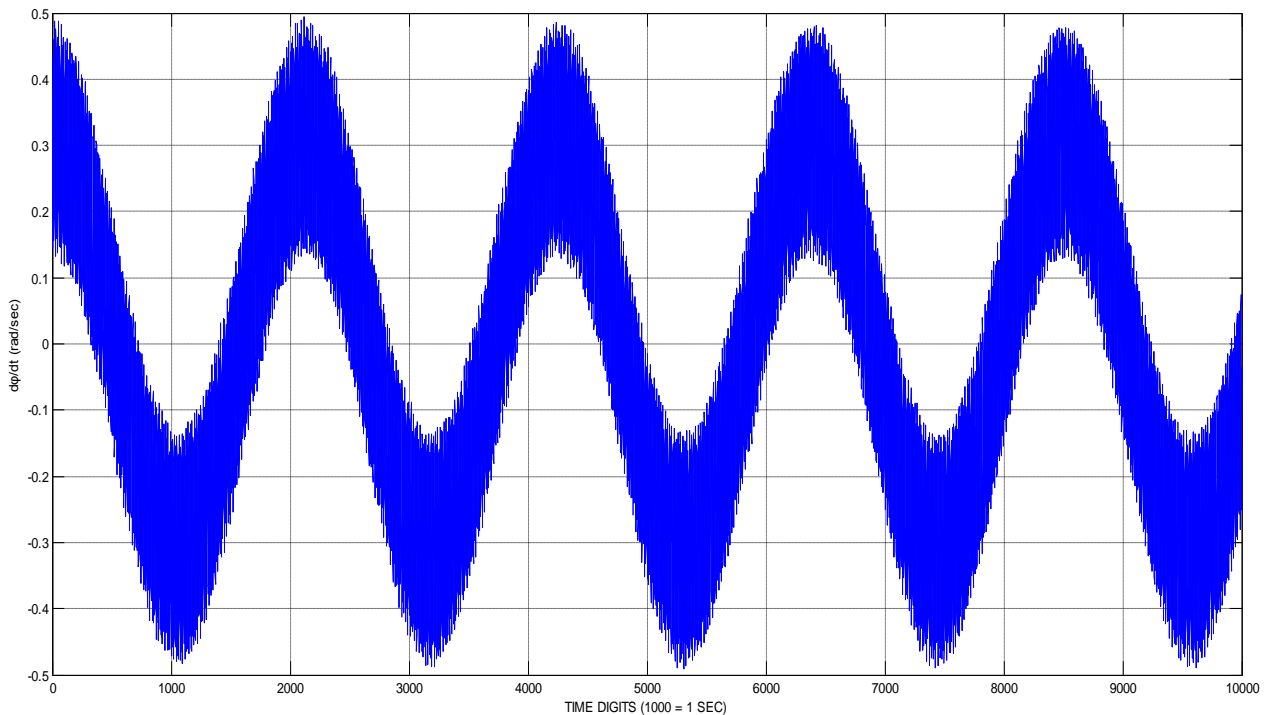
Αριθμητικό πείραμα 2

Αρχικές συνθήκες,

$\varphi_1$	0
$\dot{\varphi}_1$	0.5
$\varphi_2$	0
$\dot{\varphi}_2$	0
$\varphi_3$	0
$\dot{\varphi}_3$	0
$\varphi_4$	0
$\dot{\varphi}_4$	0
$\varphi_5$	0
$\dot{\varphi}_5$	0



Η χρονική εξέλιξη της ταχύτητας περιστροφής του σφονδύλου (η οποία μακροσκοπικά είναι ίδια για όλες τις μάζες του συστήματος) φαίνεται στο διάγραμμα\_5, φέρουσα όλες τις διαφορετικές συχνότητες ταλάντωσης.

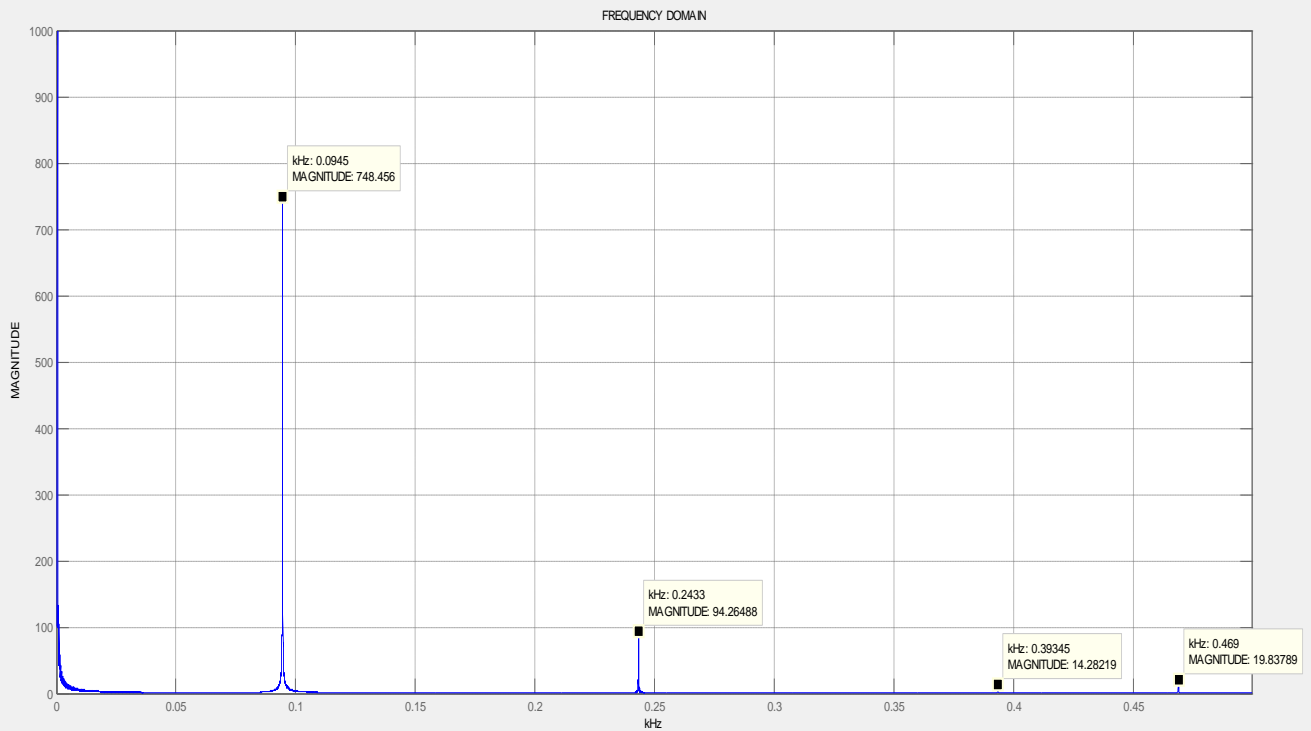


Διάγραμμα\_5

Ακολουθως, όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, στο διάγραμμα\_6 (επόμενη σελίδα) είναι το φάσμα συχνοτήτων, το οποίο εξάχθηκε από τη χρονική ιστορία της περιστροφικής ταχύτητας του σφονδύλου (διάγραμμα\_2).

Φαίνονται καθαρά οι παρακάτω συχνότητες ταλάντωσης, που είναι όμοιες με αυτές του προηγούμενου αριθμητικού πειράματος, όπως αναμενόταν.

- 94.5 Hz
- 243.3 Hz
- 393.5 Hz
- 468.8 Hz



Διάγραμμα\_6

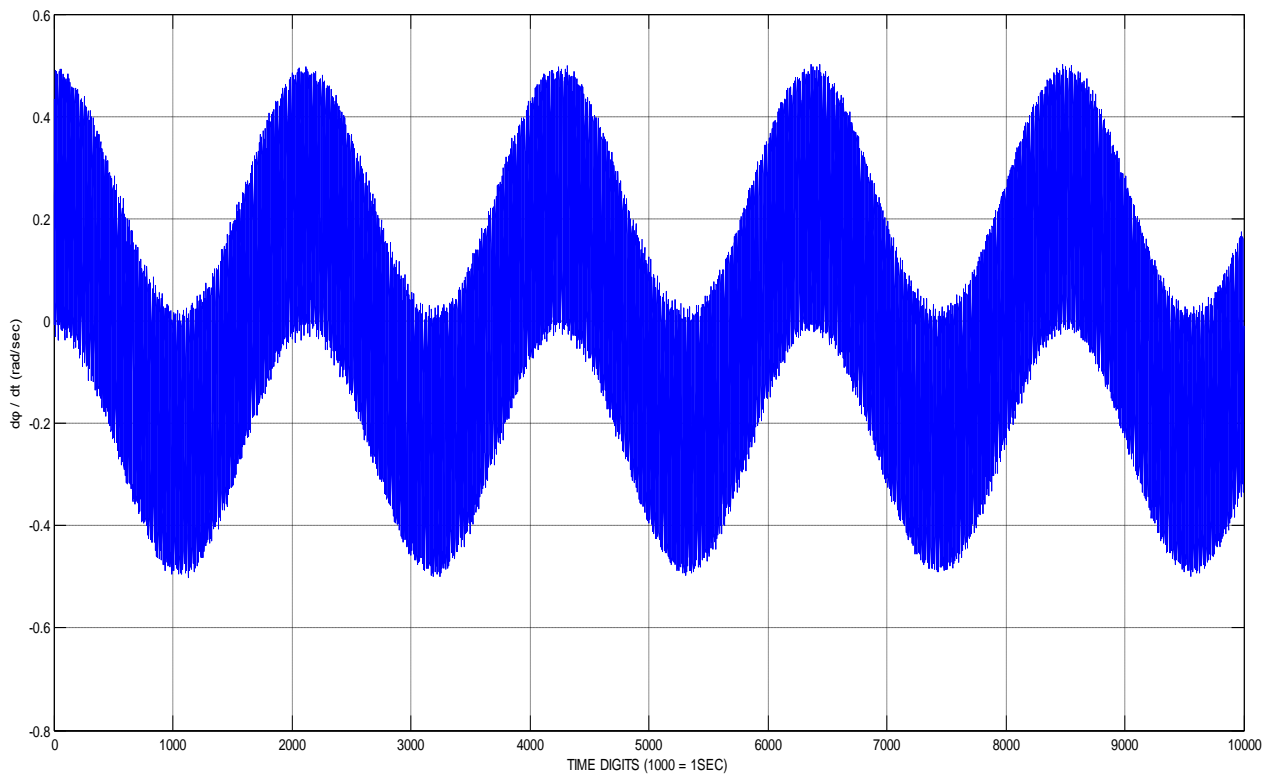
Αριθμητικό πείραμα 3

Αρχικές συνθήκες,

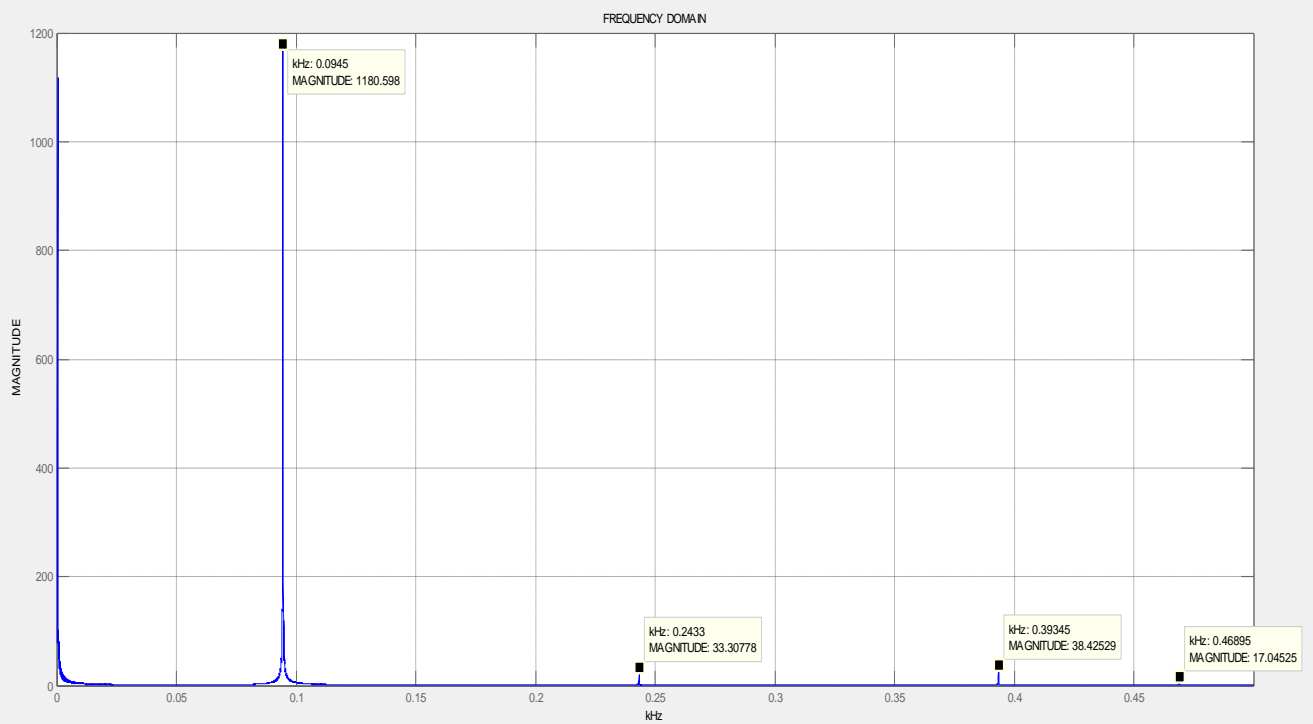
$\varphi_1$	0
$\dot{\varphi}_1$	0.5
$\varphi_2$	0
$\dot{\varphi}_2$	0
$\varphi_3$	0
$\dot{\varphi}_3$	0
$\varphi_4$	0
$\dot{\varphi}_4$	0
$\varphi_5$	0
$\dot{\varphi}_5$	-0.5

Στο διάγραμμα\_7, φαίνεται όπως και πριν, η χρονική εξέλιξη της ταχύτητας περιστροφής του σφονδύλου (και συνολικά του τροφαλοφόρου).

Ακολουθώς, όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, στο διάγραμμα\_6 (επόμενη σελίδα) είναι το φάσμα συχνοτήτων, το οποίο εξάχθηκε από τη χρονική ιστορία της περιστροφικής ταχύτητας του σφονδύλου (διάγραμμα\_2).



Διάγραμμα\_7



Διάγραμμα\_8

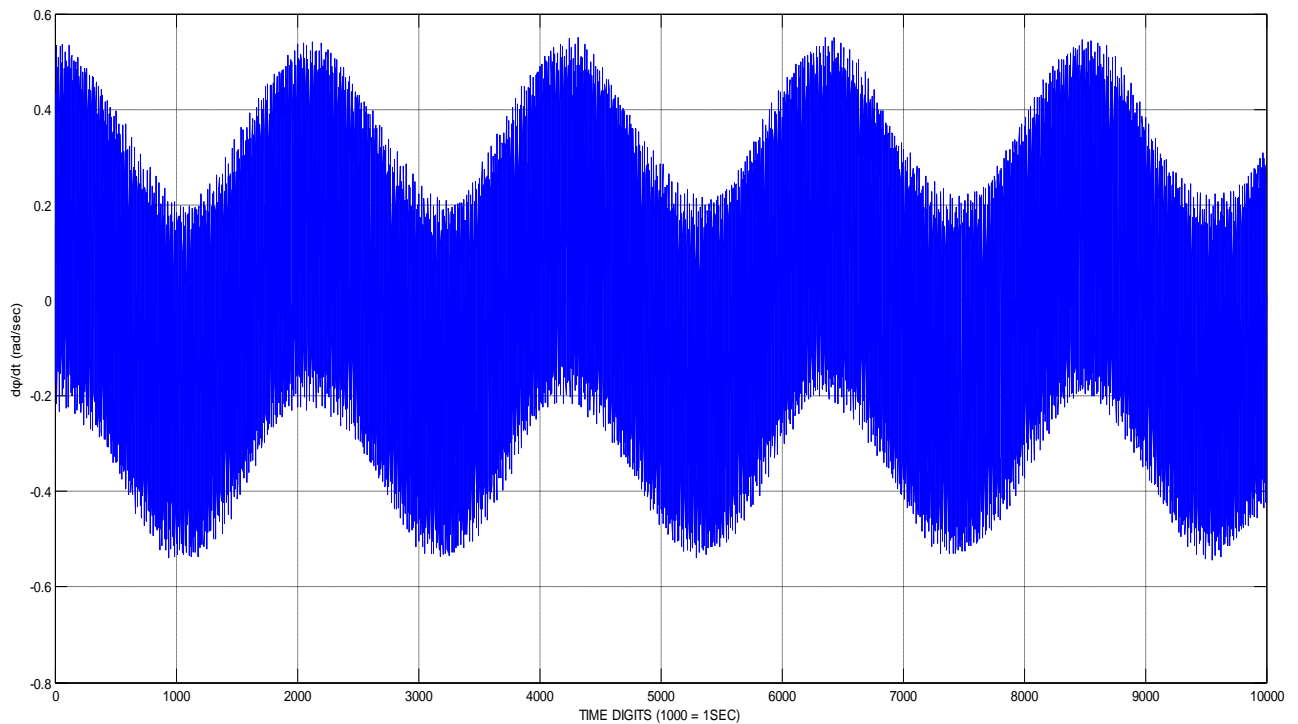
Οι ιδιοσυχνότητες είναι οι αυτές όπως προκύπτουν και στα προηγούμενα αριθμητικά πειράματα

- 94.5 Hz
- 243.3 Hz
- 393.4 Hz
- 468.9 Hz

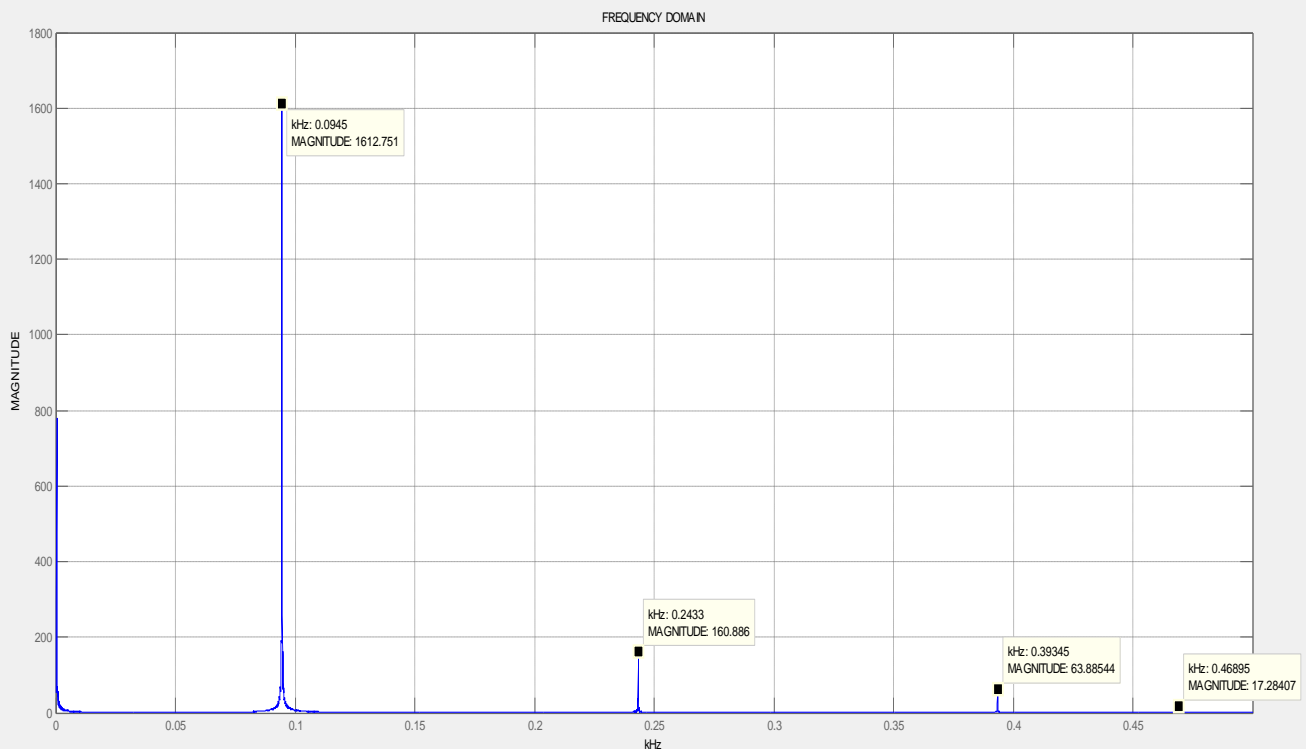
Αριθμητικό πείραμα 4

Αρχικές συνθήκες,

$\varphi_1$	0
$\dot{\varphi}_1$	0.5
$\varphi_2$	0
$\dot{\varphi}_2$	0
$\varphi_3$	0
$\dot{\varphi}_3$	0
$\varphi_4$	0
$\dot{\varphi}_4$	0
$\varphi_5$	0
$\dot{\varphi}_5$	-1



Διάγραμμα\_9



Διάγραμμα\_10

Ολοκληρώνοντας τα αριθμητικά πειράματα, παίρνουμε τα τελευταία δύο διαγράμματα (9 και 10), που παράχθηκαν με βάση τις αρχικές συνθήκες της προηγούμενης σελίδας. Προκύπτουν και εδώ οι ίδιες ιδιοσυχνότητες.

- 94.5 Hz
- 243.3 Hz
- 393.4 Hz
- 468.9 Hz

### Συγκέντρωση αποτελεσμάτων - Συγκρίσεις

Αυτό που θα περιμέναμε να δούμε, ως απόδειξη της σωστής λειτουργίας της μεθόδου, είναι συμφωνία αποτελεσμάτων της, με αυτά του κεφαλαίου 2 (Μοντελοποίηση II).

Από τη στιγμή που η RK-4 λαμβάνει υπόψη τις εκκεντρότητες των μαζών, και δεδομένου ότι συνολικά η εκκεντρότητα της ατράκτου είναι μηδενική, τα αποτελέσματα δεν θα πρέπει να διαφέρουν μεταξύ των μεθόδων του κεφαλαίου 2, οι οποίες θεωρούν μηδενική εκκεντρότητα για κάθε διακριτή μάζα του συστήματος (άρα και μηδενική συνολική)

Για τις τιμές των ιδιοσυχνοτήτων έχουμε συγκεντρωτικά,

<i>Ιδιοσυχνότητες (Hz)</i>	<i>Holzer - Tolle</i>	<i><math>P(\omega) = 0</math></i>	<i>RK - 4</i>
$\omega_1$	94.72	94.72	94.50
$\omega_2$	243.73	243.73	243.30
$\omega_3$	393.88	393.88	393.40
$\omega_4$	531.10	531.10	468.90

Φαίνεται πως οι τιμές συμπίπτουν σχεδόν απόλυτα, εξαιρώντας την τελευταία ιδιοσυχνότητα. Το γεγονός αυτό καταδεικνύει πως η μέθοδος RK-4, λαμβάνοντας υπόψη της την εκκεντρότητα των συστημάτων, καταλήγει στα σωστά αποτελέσματα.

Η διαφορά στη τελευταία τιμή (της τάξεως του 11.7%) αφενός είναι σχετικά μικρή, αφετέρου αφορά ταλάντωση τέταρτης τάξης, άρα υψίσυχνη με πολύ χαμηλότερο εύρος από τις υπόλοιπες και πολύ μικρή ένταση.

Με βάση τα προηγούμενα φάσματα συχνοτήτων, παρατηρούμε ότι η ταλάντωση με την ισχυρότερη συμβολή (και μικρότερη συχνότητα) είναι η πρωτοβάθμια, την οποία η μέθοδος RK-4 υπολογίζει ακριβώς, όπως και τις υπόλοιπες δύο μικρότερης έντασης.

Καταλήγοντας, με βάση τα παραπάνω αποδείχθηκε πως η μέθοδος RK-4 υπολογίζει σωστά και με πολύ καλή ακρίβεια τη συμπεριφορά ενός συστήματος με εκκεντρότητα στις διακεκριμένες μάζες του.

#### 4. Πειραματικός Προσδιορισμός Ιδιοσυχνοτήτων

Στο κεφάλαιο αυτό παρατίθενται και αναλύονται τα πειραματικά αποτελέσματα από την καταγραφή της απόκρισης του στροφαλοφόρου σε κρουστική διέγερση. Κάνοντας χρήση ασύρματου επιταχυνσιομέτρου καταγράφεται η χρονική ιστορία των τριών συνιστωσών της επιτάχυνσης (κεντρομόλος, επιτρόχια, αξονική) του σημείου στο οποίο έχει τοποθετηθεί, στην κατασκευή [4],[5].

Οπότε σαν αποτέλεσμα παίρνουμε τρία σήματα (τρεις γραφικές παραστάσεις) που το καθένα παριστά μια αποσβενύμενη ταλάντωση επιτάχυνσης, και έτσι περιγράφεται πλήρως η δυναμική του σημείου στο οποίο βρίσκεται το επιταχυνσιόμετρο [4],[5].

#### Διαφορές Θεωρητικών & Πειραματικών Αποτελεσμάτων

Στη μέχρι τώρα ανάλυση το φαινόμενο των στρεπτικών ταλαντώσεων μελετήθηκε αποσυμπλεγμένο από τις άλλες φυσικές κινήσεις του συστήματος, οι οποίες συμβαίνουν ταυτόχρονα με αυτό [1]. Οι εξισώσεις που χρησιμοποιήθηκαν για να περιγράψουν την κίνηση του στροφαλοφόρου ενέχουν την υπόθεση ότι η διέγερση οδηγεί το σύστημα μόνο σε στρεπτική κίνηση, και μάλιστα χαμηλού εύρους, ώστε να μην διεγείρονται τα υπόλοιπα είδη κινήσεων. Στην φυσική πραγματικότητα όμως η δυναμική της ελεύθερης κίνησης του συστήματος είναι συζευγμένη, και οι στρεπτικές ταλαντώσεις δεν γίνεται να συμβαίνουν "μόνες τους" αλλά ταυτόχρονα με καμπτικές και αξονικές ταλαντώσεις του στροφαλοφόρου συστήματος [4].

Τα παραπάνω έχουν ως αποτέλεσμα η συμπεριφορά που έχει υπολογιστεί στα προηγούμενα κεφάλαια, να παρέχει μια εξιδανικευμένη περιγραφή της δυναμικής του πρότυπου συστήματος. Το συγκεκριμένο στροφαλοφόρο αξονικό είναι εδρασμένο μόνο στα δύο άκρα του, και έχει μεγάλο ανυποστήρικτο μήκος, κάτι που το καθιστά επιρρεπές σε ανάπτυξη καμπτικών ταλαντώσεων. Οπότε η καταλληλότερη μοντελοποίηση για να το περιγράψει είναι αυτή των δύο μαζών που επικοινωνούν με έναν άξονα, στην οποία περίπτωση μπορούμε να υπολογίσουμε μόνο την πρώτη φυσική στρεπτική συχνότητα [1]. Για τους λόγους αυτούς λοιπόν αναμένεται διαφορά ανάμεσα στους θεωρητικούς υπολογισμούς, που αφορούν το πλήρες σύστημα (Κεφάλαια 2 & 3) και στα πειραματικά αποτελέσματα που αφορούν τις ιδιοσυχνότητες του συστήματος.

Το σημαντικότερο όμως είναι ότι τα πραγματικά στροφαλοφόρα συστήματα έχουν πολλαπλές ενδιάμεσες εδράσεις με τέτοιο τρόπο ώστε οι στρεπτικές ταλαντώσεις να είναι το κύριο δυναμικό φαινόμενο που παράγεται, και οι υπόλοιπες κινήσεις να περιορίζονται σε μεγάλο βαθμό. Υπό αυτό το πρίσμα, η ανάλυση των προηγούμενων κεφαλαίων είναι πραγματικά χρήσιμη στην πρόβλεψη της απόκρισης των αξονικών συστημάτων σε στρεπτικές ταλαντώσεις.

#### Όργανο Μέτρησης Επιτάχυνσης

Το επιταχυνσιόμετρο που χρησιμοποιήθηκε ανήκει στις μικροηλεκτρομηχανικές συσκευές ( MEMS : micro-electro-mechanical systems ) [4], και εντός του υπάρχει ο ταλαντωτής και τα απαιτούμενα ηλεκτρονικά κυκλώματα :

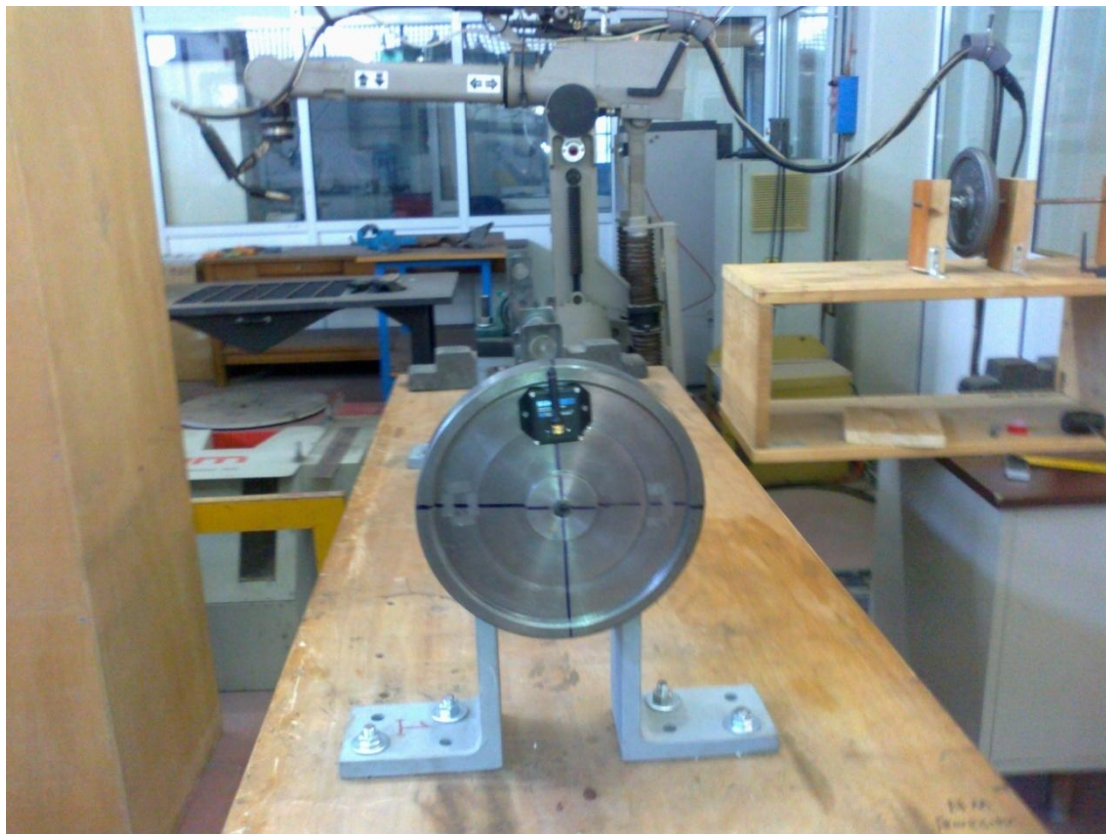
- Κάρτα ADC
- Μικροεπεξεργαστής 16bits
- Κάρτα μνήμης 2 MB
- Κάρτα πομποδέκτη για την επικοινωνία με το σταθμό βάσης του

Η κάρτα μνήμης έχει τη δυνατότητα αποθήκευσης 1000000 τιμών, και το εύρος της συχνότητας δειγματοληψίας είναι 1 έως 512 Hz. Στις συγκεκριμένες μετρήσεις η συχνότητα δειγματοληψίας είχε ρυθμιστεί στα 500 Hz. Υπάρχει δυνατότητα μέτρησης επιταχύνσεων μέχρι 10g, με ακρίβεια 10mg (  $g = 9.81 \text{ m} / \text{sec}^2$  ). Η συσκευή έχει βάρος 47gr και οι γεωμετρικές της διαστάσεις είναι 43mm x 58mm x 39mm (πλάτος x μήκος x ύψος).

#### Περιγραφή Πειραματικής Διάταξης - Διαδικασίας

Η πειραματική διάταξη είναι ο πρότυπος στροφαλοφόρος άξονας με τον αισθητήρα τοποθετημένο σε κάποια από τις μάζες του. Ο μηχανισμός που διεγείρει το σύστημα είναι η κρουστική μεταφορά ορμής μεταξύ του διεγέρτη και του αξονικού συστήματος. Η διεγερση του συστήματος γίνεται με σφυρί το οποίο έχει μεγάλη αδράνεια ώστε να μεταφέρεται όσο το δυνατόν πληρέστερα η ορμή κατά την κρούση, να μην επιστρέφει στο ίδιο το σφυρί λόγω δράσης-αντίδρασης.

Το επιταχυνσιόμετρο τοποθετήθηκε στην άκρη του σφονδύλου ( Εικόνα\_1), για την πρώτη μέτρηση, και έπειτα στον αγκώνα του πρώτου στροφάλου ( Εικόνα\_2), για τη λήψη της δεύτερης μέτρησης.



Εικόνα\_1

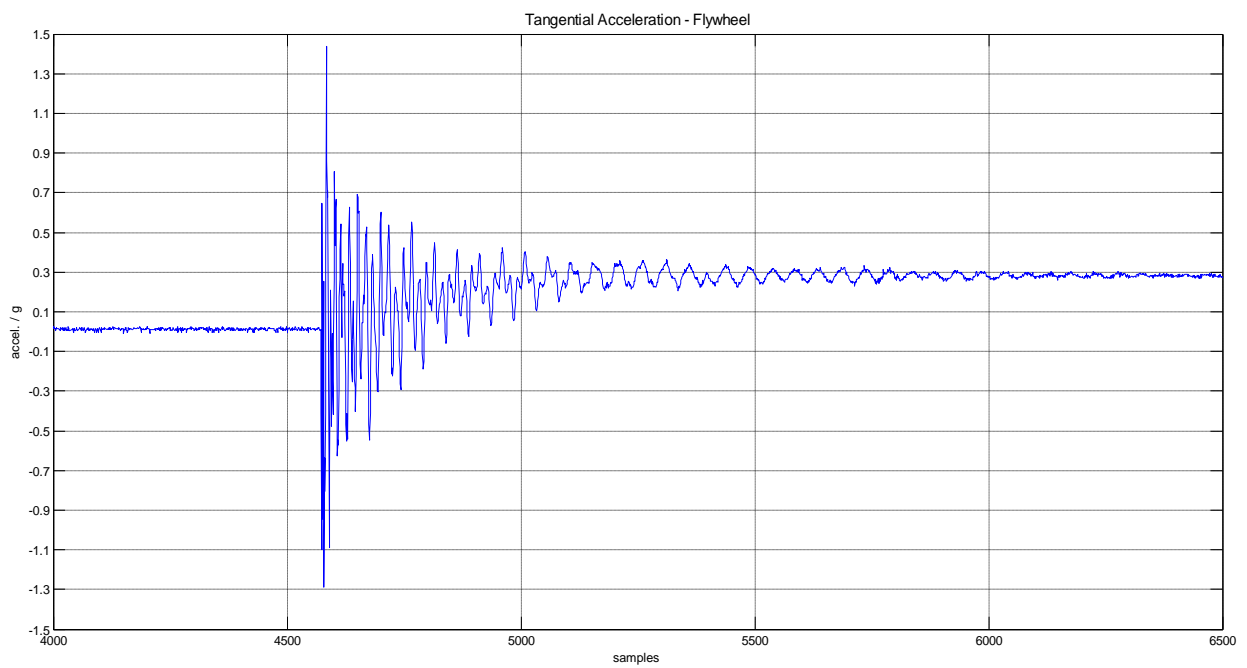




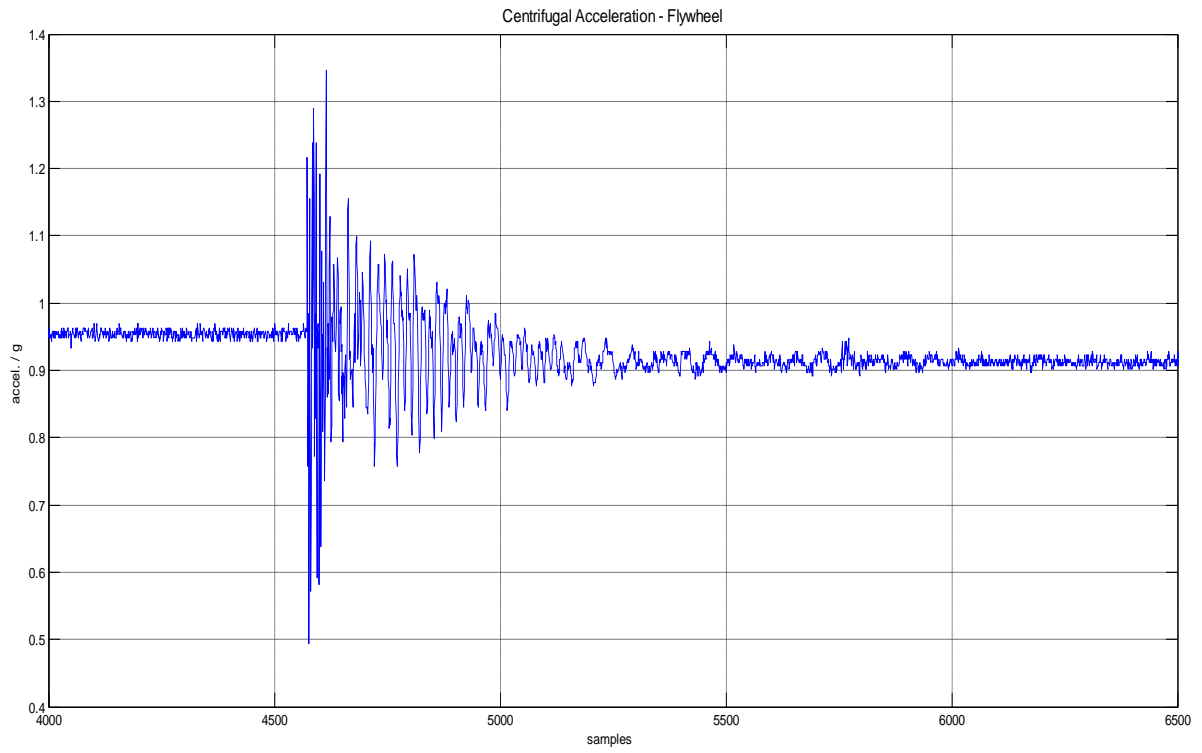
Εικόνα\_2

### Πειραματικές Μετρήσεις

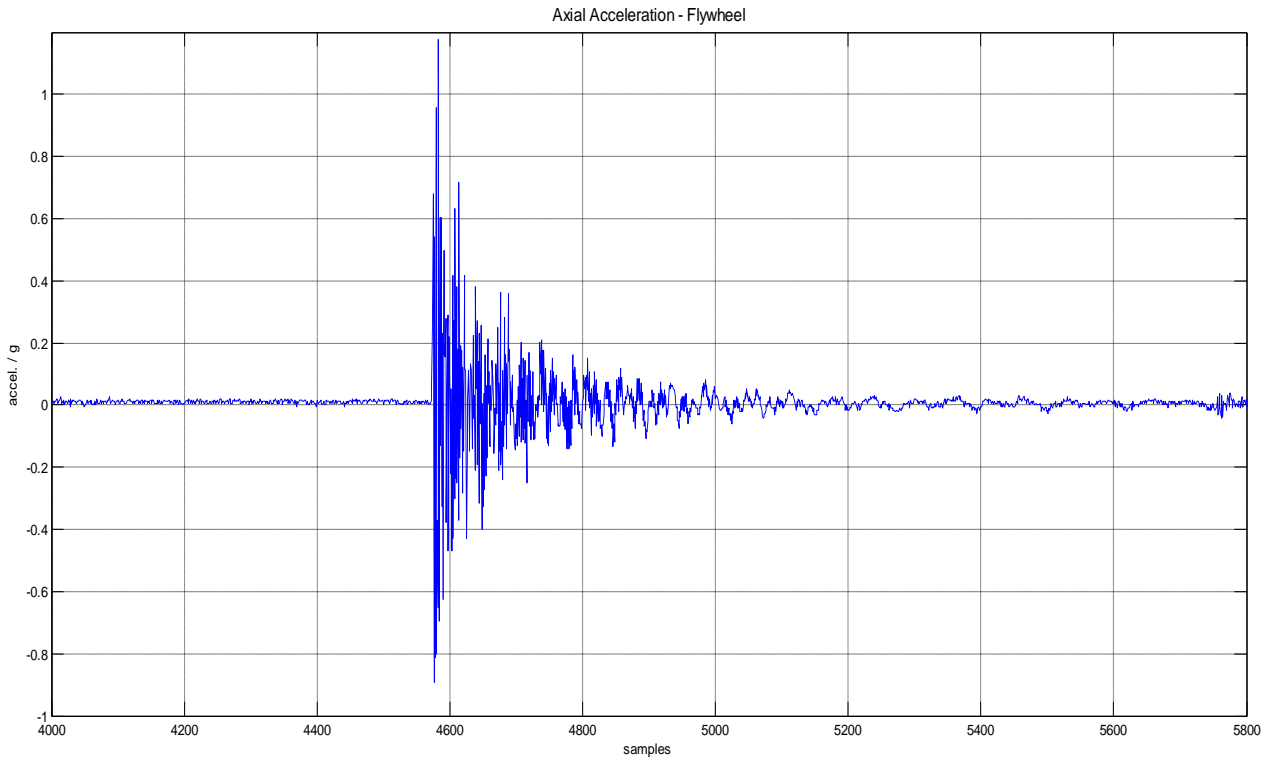
#### 1. Μέτρηση στο Σφόνδυλο - Διέγερση στο πρώτο Στρόφαλο



Διάγραμμα\_1



Διάγραμμα\_2



Διάγραμμα\_3

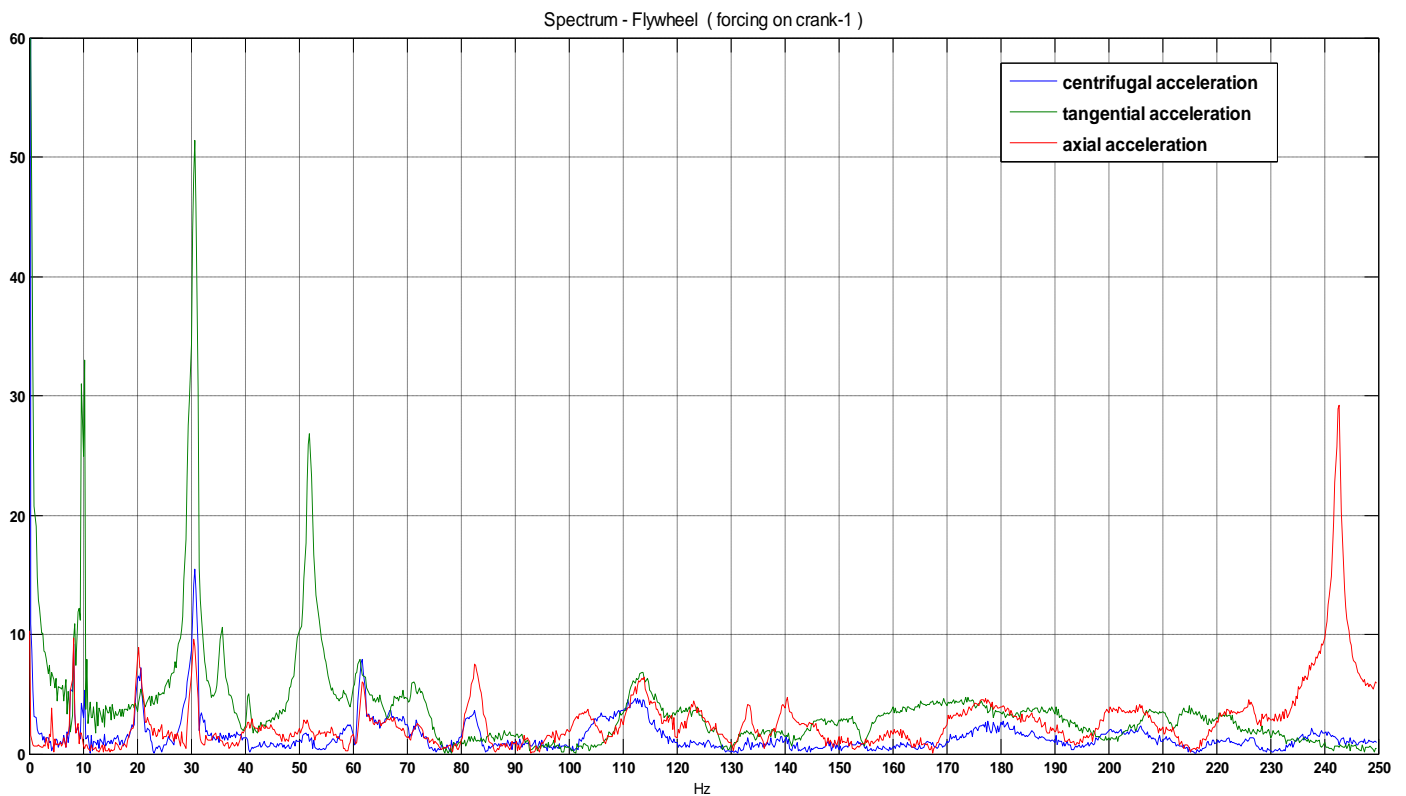
Στα διαγράμματα\_1,2,3 φαίνεται η χρονική ιστορία (το σήμα) της επιτρόχιας, κεντρομόλου και αξονικής επιτάχυνσης αντίστοιχα. Στον οριζόντιο άξονα είναι τα "χρονικά σημεία" (samples) τα οποία διαιρεμένα με τη συχνότητα δειγματοληψίας του αισθητήρα (500 Hz) δίνουν τη χρονική διάρκεια της μέτρησης. Στον κάθετο άξονα φαίνεται η αντίστοιχη επιτάχυνση η οποία έχει αναχθεί στην επιτάχυνση της βαρύτητας.

Χαρακτηριστική για την κεντρομόλο επιτάχυνση είναι η τιμή στην αρχή του χρόνου, που είναι περίπου ίση με g. Αυτό είναι λογικό, μιας και ο κάθετος άξονας του αισθητήρα είναι τοποθετημένος στην διεύθυνση του διανύσματος της βαρύτητας. Στα δύο πρώτα διαγράμματα, μετά το πέρας της ταλάντωσης παρατηρούμε μια σταθερή τιμή επιτάχυνσης διάφορη της αρχικής (για  $\varphi = 0$ ), λόγω τελικής θέσης του αξονικού, στραμμένου κατά μικρή γωνία  $\varphi$ . Στο τρίτο διάγραμμα, που είναι το σήμα της αξονικής επιτάχυνσης δεν παρατηρείται κάτι αντίστοιχο, αφού ο άξονας δεν έχει ελευθερία συνολικής αξονικής μετακίνησης.

### Φάσμα Συχνοτήτων

Με βάση το μετασχηματισμό Fourier, περνάμε από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο της συχνότητας, για κάθε μια χρονοσειρά. Η διαδικασία αναπτύχθηκε σε περιβάλλον Matlab, εισάγοντας σε αυτό τα αρχεία των σημάτων που λήφθηκαν από τις μετρήσεις.

### Σφόνδυλος - Διέγερση στο πρώτο Στρόφαλο

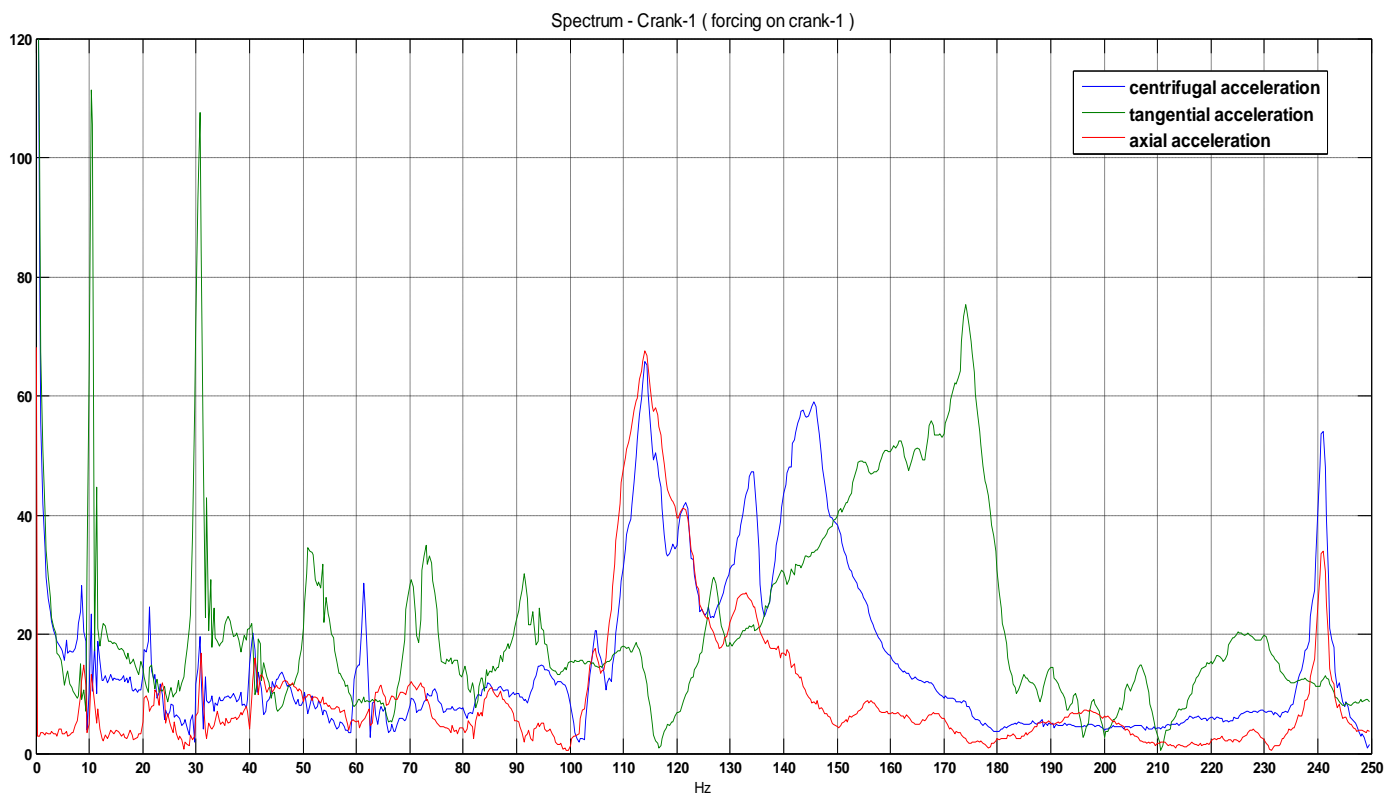


Διάγραμμα\_4

Από το προηγούμενο διάγραμμα να ξεχωρίζουν για την έντασή τους οι παρακάτω συχνότητες,

- Συχνότητες Επιτροχίας επιτάχυνση (tangential): 10, 30, 52 Hz
- Συχνότητες Κεντρομόλου επιτάχυνσης (centrifugal): 243 Hz
- Συχνότητες Αξονικής επιτάχυνσης (axial): Φαίνεται να συμβαδίζουν με αυτές της κεντρομόλου , αλλά πολύ εξασθενημένες σε ένταση.

### Πρώτο Στρόφαλο - Διέγερση στο πρώτο Στρόφαλο

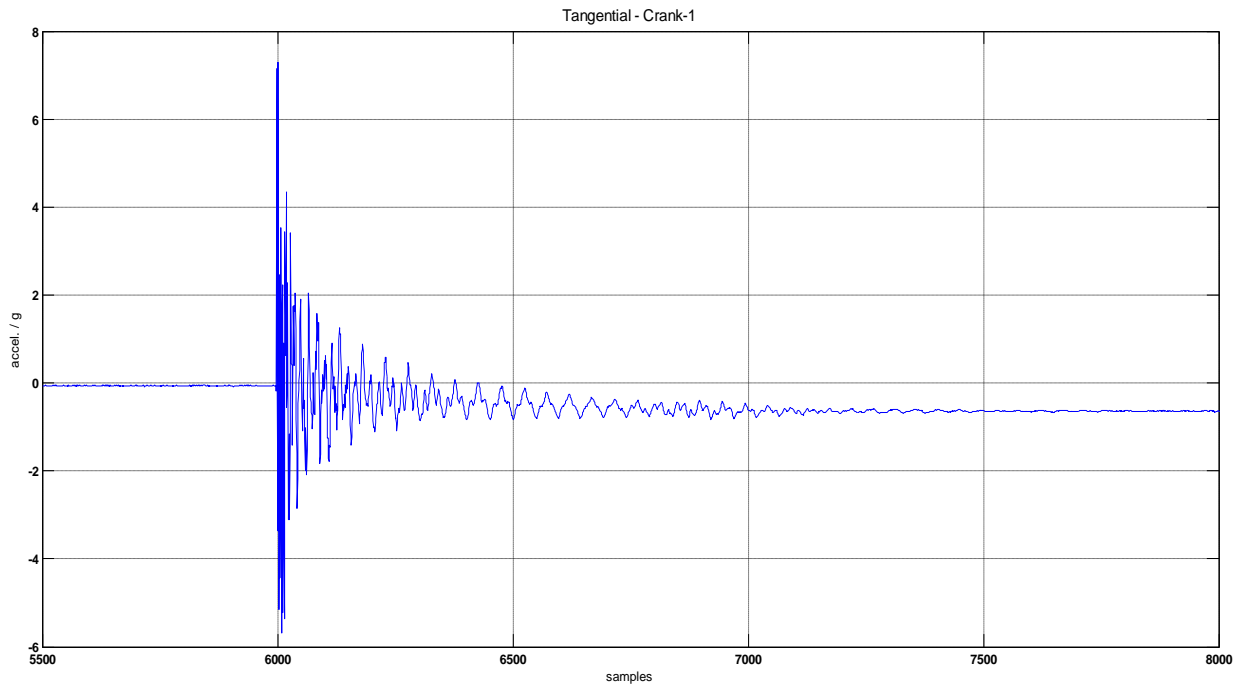


### Διάγραμμα\_5

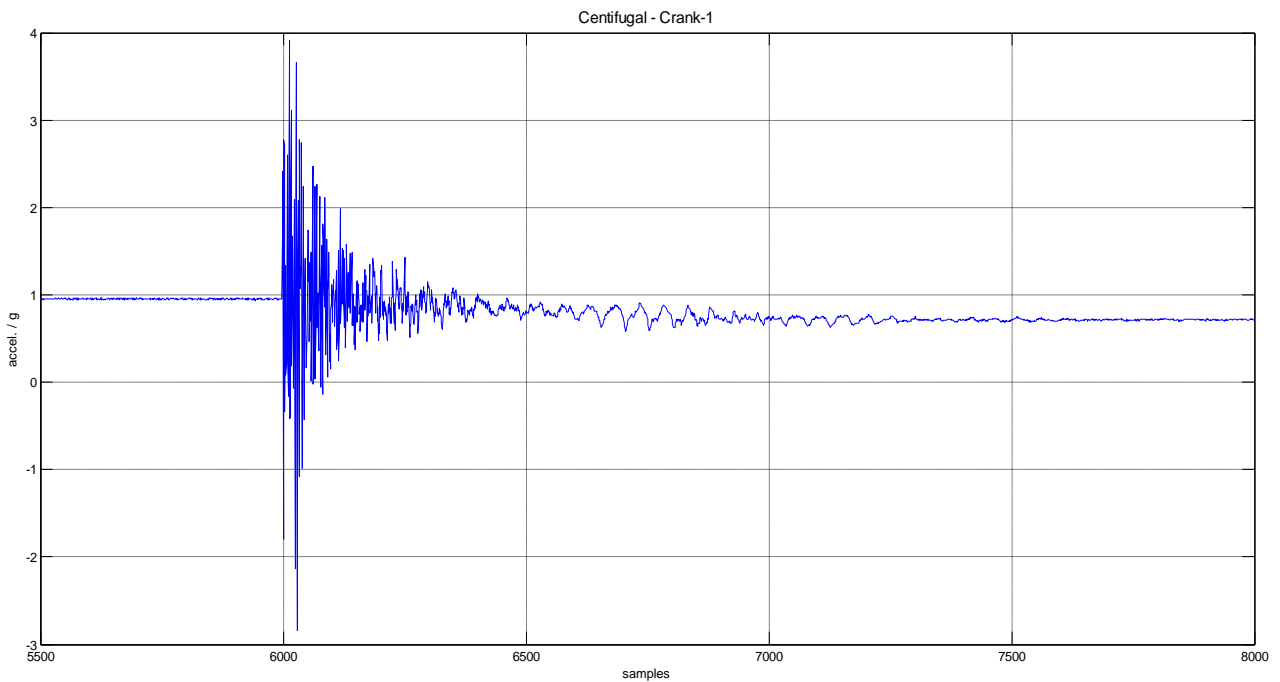
- Συχνότητες Επιτροχίας επιτάχυνση (tangential): 10, 30-32, 175 Hz  
Φαίνονται επίσης, πιο εξασθενημένες οι συχνότητες των, 52, 74, 92 Hz
- Συχνότητες Κεντρομόλου επιτάχυνσης (centrifugal): 115, 145, 243 Hz

- Συχνότητες Αξονικής επιτάχυνσης (axial): 115, 243 Hz  
Φαίνεται και εδώ να συμβαδίζουν με αυτές της κεντρομόλου σχεδόν σε όλο το φάσμα, σε τιμές συχνοτήτων, και ένταση.

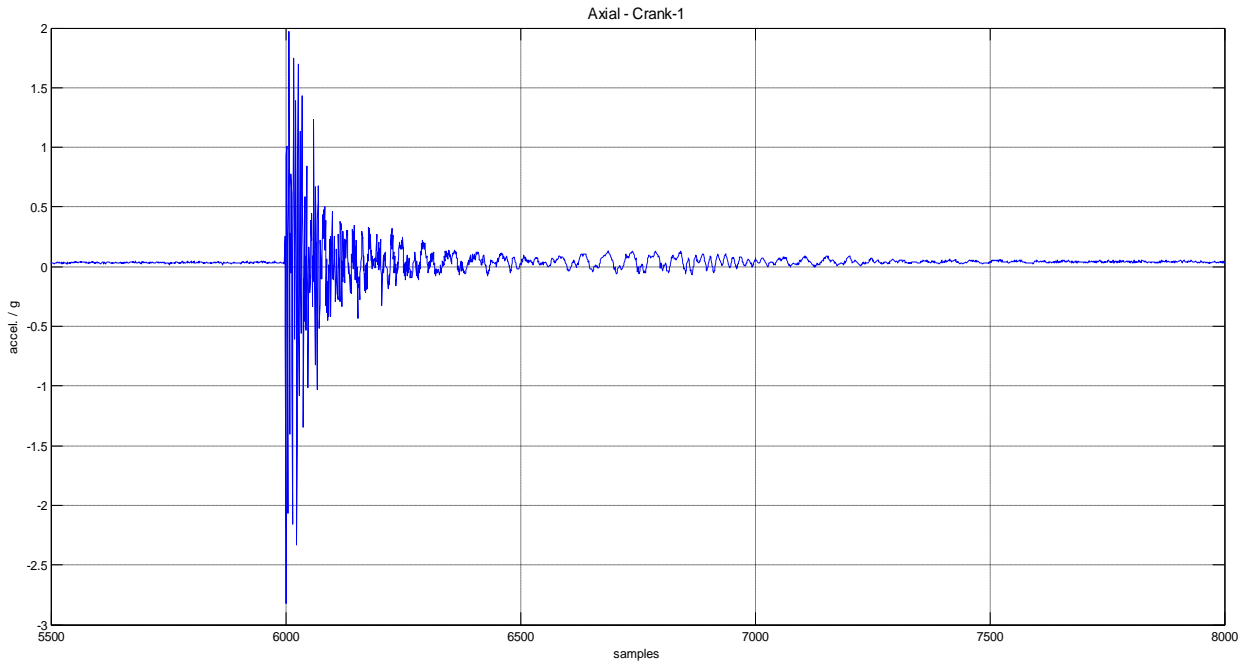
## 2. Μέτρηση στο πρώτο Στρόφαλο - Διέγερση στο τέταρτο Στρόφαλο



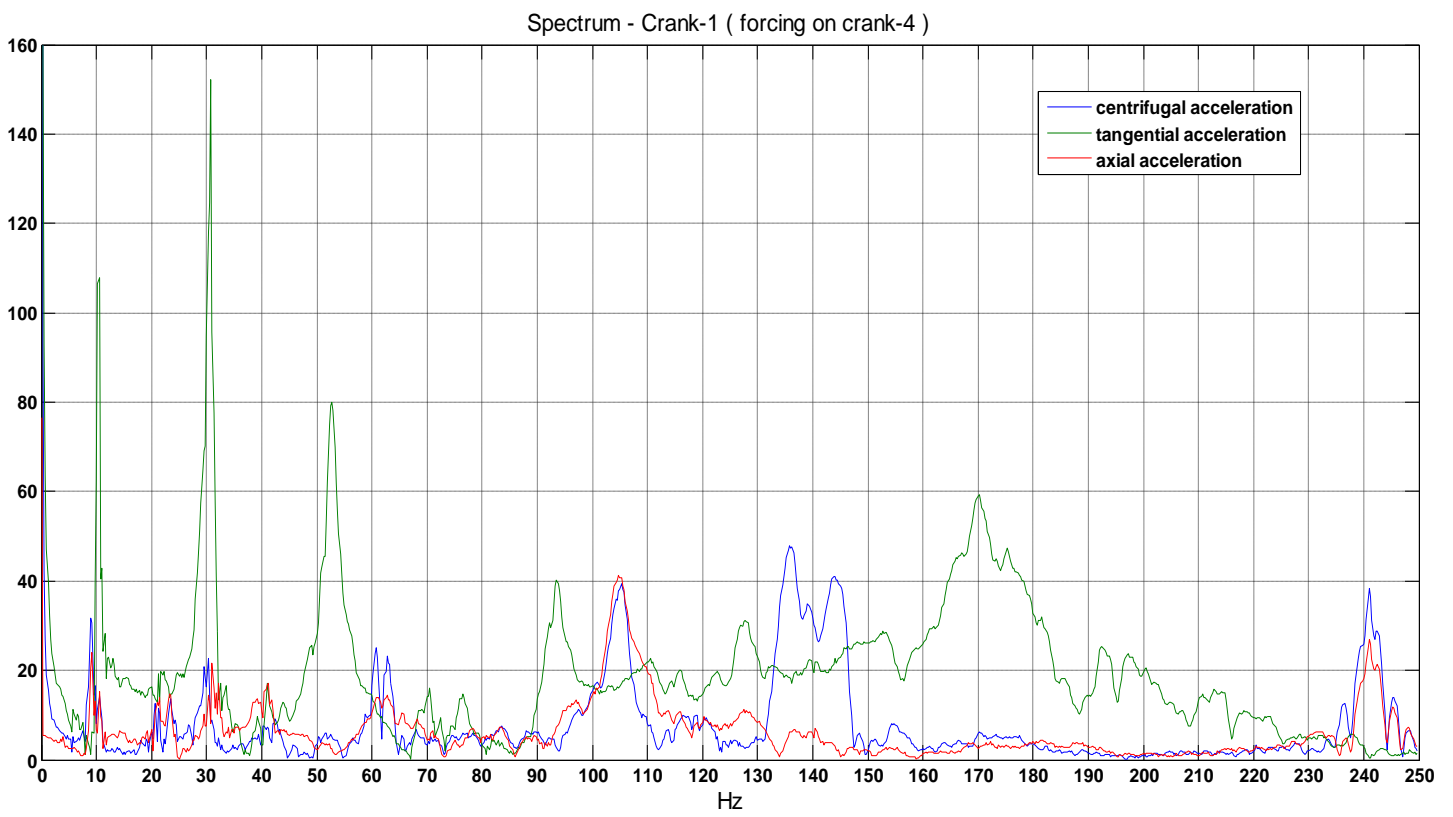
Διάγραμμα\_6



Διάγραμμα\_7



Διάγραμμα\_8



Διάγραμμα\_9

Από το προηγούμενο φάσμα μπορούμε να δούμε τα παρακάτω,

- Συχνότητες Επιτρόχιας επιτάχυνση (tangential): 10, 30-32, 52 Hz  
Φαίνονται επίσης, πιο εξασθενημένες οι συχνότητες των, 92-93, 170 Hz
- Συχνότητες Κεντρομόλου επιτάχυνσης (centrifugal): 105, 135, 145, 243 Hz
- Συχνότητες Αξονικής επιτάχυνσης (axial): 115, 243 Hz  
Φαίνεται και εδώ να συμβαδίζουν με αυτές της κεντρομόλου σχεδόν σε όλο το φάσμα, σε τιμές συχνοτήτων, και ένταση.

Σύγκριση Θεωρητικών και Πειραματικών Αποτελεσμάτων - Σχολιασμός

Οι ιδιοσυχνότητες, που προέκυψαν από τις θεωρητικές/αριθμητικές προσεγγίσεις, συγκεντρωτικά φαίνονται στον παρακάτω πίνακα (Κεφ. 3)

<i>Ιδιοσυχνότητες (Hz)</i>	<i>Holzer - Tolle</i>	<i><math>P(\omega) = 0</math></i>	<i>RK - 4</i>
$\omega_1$	94.72	94.72	94.50
$\omega_2$	243.73	243.73	243.30
$\omega_3$	393.88	393.88	393.40
$\omega_4$	531.10	531.10	468.90

Πίνακας\_1

Ενώ, από τα φάσματα που προέκυψαν από μετρήσεις των επιταχυνσιομέτρων συγκεντρωτικά έχουμε,

<i>Ιδιοσυχνότητες (Hz)</i>	<i>Επιτρόχια επιτάχυνση (tang.)</i>	<i>Κεντρομόλος επιτάχυνση (centrif.)</i>	<i>Αξονική επιτάχυνση (axial)</i>
	10	105	115
	30-32	115	243
	52	135	
	92-93	145	
	170	243	
	175		

Πίνακας\_2

Παρατηρούμε τις πιο ισχυρές ιδιοσυχνότητες του πειραματικού συστήματος (10, 30-32, 52 Hz) να μην εμφανίζονται καθόλου στα αριθμητικά αποτελέσματα του πίνακα\_1. Βλέπουμε πως οι μόνες συχνότητες που φαίνεται να συμφωνούν με τα θεωρητικά/αριθμητικά αποτελέσματα είναι οι: 92-93 και 243 Hz, οι οποίες εμφανίζονται στα προηγούμενα φάσματα με σχετικά χαμηλό ενεργειακό περιεχόμενο σε αντίθεση με τα θεωρητικά φάσματα (δεν πρωταγωνιστούν στη συμπεριφορά του αξονικού).

Όπως αναφέρθηκε και στην εισαγωγή, οι διαφορές αυτές ήταν αναμενόμενες, και οφείλονται στις παρακάτω αριθμημένες αιτίες:

1. Στη φυσική πραγματικότητα οι ταλαντώσεις στρεπτικές/καμπτικές/αξονικές είναι συζευγμένες μεταξύ τους [4], οπότε η διέγερση ενός είδους ταλαντώσεων, εγείρει τη δημιουργία του άλλου, και αντίστροφα.
2. Η θεωρητική/αριθμητική προσέγγιση των προηγούμενων κεφαλαίων δεν λαμβάνει υπόψη την ανωτέρω σύζευξη των μορφών ταλαντώσεων, υποθέτει ότι οι στρεπτικές ταλαντώσεις συμβαίνουν μόνες τους (γραμμικότητα, αρκετά αληθής για μικρά εύρη ταλάντωσης).
3. Η θεωρητική προσέγγιση υποθέτει ότι το αξονικό εδράζεται επαρκώς, οπότε το ανυποστήρικτο μήκος μεταξύ των εδράνων είμαι σχετικά μικρό. Το πραγματικό αξονικό αντίθετα, στο εργαστήριο, εδράζεται ουσιαστικά μόνο στις ακραίες θέσεις, άρα έχει μεγάλο ανυποστήρικτο μήκος. Ας θυμηθούμε την εξίσωση του μέτρου δυστρεπτότητας [1],

$$K = \frac{G J}{L}$$

Θυμούμενοι δε, και την εξίσωση της ιδιοσυχνότητας [1],

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{I}}$$

(για απλό σύστημα, μόνο και μόνο για να έχουμε μια ποιοτική αντίληψη της αλλαγής των ιδιοσυχνοτήτων σχετικά με τη δυστρεπτότητα),

έχουμε την ιδιοσυχνότητα ( $\omega$ ) να μικραίνει, όταν αυξάνεται το μήκος μεταξύ των θεωρούμενων εδράνων (L), αφού τότε αυξάνεται η δυστρεπτότητα (K).

Σε περίπτωση, λοιπόν που το αξονικό ήταν πληρέστερα εδρασμένο (όχι μόνο στα δύο άκρα του), οι καμπτικές/αξονικές κινήσεις θα περιορίζονταν σε μεγάλο βαθμό. Αυτό θα είχε ως αποτέλεσμα ένα πιο άκαμπτο/περιορισμένο σύστημα, με δραστική μείωση του βέλους κάμψης, οπότε η ενέργεια που διαχέεται τώρα σε αυτά δύο είδη ταλαντώσεων, θα "χρησιμοποιείτο" από το σύστημα για ανάπτυξη στρεπτικών



ταλαντώσεων. Οπότε θα υπήρχε αρκετά καλή σχέση μεταξύ των θεωρητικών ιδιοσυχνοτήτων του πλήρους συστήματος ( Κεφ. 2 & 3) με αυτές που θα βρίσκαμε από ανάλυση των αντίστοιχων σημάτων.

Στον πίνακα\_3 φαίνεται η ποσοστιαία διαφορά μεταξύ των στρεπτικών ιδιοσυχνοτήτων που προέκυψαν από τα πειράματα και τη μέθοδο Runge-Kutta 4. Η διαφορά αυτή φαίνεται να μην αλλάζει ιδιαίτερος, καθώς αυξάνεται η τάξη της ιδιοσυχνότητας, και να κυμαίνεται από 90 μέχρι 80 τοις εκατό.

<i><math>\omega</math> (Hz) / πείραμα</i>	<i><math>\omega</math> (Hz) / RK-4</i>	<i>Ποσοστιαία διαφορά (%)</i>
<i>10</i>	<i>94.50</i>	<i>89.42</i>
<i>30-32</i>	<i>243.30</i>	<i>87.67 - 86.85</i>
<i>52</i>	<i>393.40</i>	<i>86.78</i>
<i>92-93</i>	<i>468.90</i>	<i>80.38 - 80.17</i>
<i>170</i>	<i>-</i>	<i>-</i>
<i>175</i>	<i>-</i>	<i>-</i>

Πίνακας\_3

Η απόλυτη τιμή της διαφοράς φαίνεται να είναι μεγάλη, παρατηρείται όμως κανονικότητα στις αποκλίσεις (90-80%) και όχι άτακτη διαφοροποίηση. Αυτό ενισχύει το γεγονός ότι το μοντέλο μειωμένης τάξης (μειωμένων βαθμών ελευθερίας) στο οποίο βασίζονται τα αριθμητικά/θεωρητικά αποτελέσματα είναι ορθά δομημένο, και επιτυχημένο μέσο για την πρόβλεψη συμπεριφοράς πραγματικών αξονικών συστημάτων.

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- [1] Ιωάννης Γεωργίου : "Δυναμική & Ταλαντώσεις Κινητήρων και Αξονικών Συστημάτων Πρόωσης Πλοίων" ΕΜΠ 2007
- [2] Κωνστ. Δ. Ρακόπουλος : "Μ.Ε.Κ. ΙΙ. Εμβάθυνση στην Κατασκευή και Λειτουργία"
- [3] Χρίστος Αθ. Φραγκόπουλος : "Στρεπτικές Ταλαντώσεις" ΕΜΠ 1989
- [4] Ι. Γεωργίου, Ν. Κίντζιος : "Χρήση τεχνολογίας ασύρματων επιταχυνσιομέτρων για τη μέτρηση στρεπτικών ταλαντώσεων σε αξονικά συστήματα πλοίου" ΕΛΙΝΤ 2012
- [5] Ι. Γεωργίου, Ν. Κίντζιος : "Μέτρηση - ανάλυση ταλαντώσεων και κινήσεων στροφαλοφόρων αξονικών συστημάτων με ασύρματα επιταχυνσιόμετρα" ΕΛΙΝΤ 2013
- [6] Α. Μπακόπουλος, Ι. Χρυσοβέργης : "Εισαγωγή στην αριθμητική ανάλυση"