ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΕΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΠΜΣ: ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Βελτιστη προσεγγιση συναρτησης με χρηση ενος και δυο κριτηριων

Ιωάννης Λυκογιώργος

Αθήνα, Φλεβάρης 2019

Αφιερώνεται στον αδερφό μου Θεόδωρο,
για όλα αυτά που με μάθαινε ασυνείδητα όταν ήμασταν παιδιά και όλα αυτά που
με μαθαίνει με την στάση ζωής του τώρα που δεν είμαστε παιδιά.

Η παρούσα Μεταπτυχιακή Διατριβή εκπονήθηκε στο πλαίσιο των σπουδών για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στις Εφαρμοσμένες Μαθηματικές Επιστήμες που απονέμει το Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του ΕΜΠ.

Εγκρίθηκε την ..../..../..... από την εξεταστική επιτροπή:

Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
Μπακόπουλος Αλέξανδρος	Ομότιμος Καθηγητής ΕΜΠ
Κοκκίνης Βασίλειος	Επίκουρος Καθηγητής ΕΜΠ
Κολέτσος Ιωάννης	Επίκουρος Καθηγητής ΕΜΠ

ΥΠΕΥΘΥΝΗ ΔΗΛΩΣΗ

"Δηλώνω υπεύθυνα ότι η παρούσα διατριβή εκπονήθηκε κάτω από τους διεθνείς ηθικούς και ακαδημαϊκούς κανόνες δεοντολογίας και προστασίας της πνευματικής ιδιοκτησίας. Σύμφωνα με τους κανόνες αυτούς, δεν έχω προβεί σε ιδιοποίηση ξένου επιστημονικού έργου και έχω πλήρως αναφέρει τις πηγές που χρησιμοποίησα στην εργασία αυτή."

Ιωάννης Λυκογιώργος

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέπων της εργασίας μου, ομότιμο καθηγητή του ΕΜΠ κύριο Αλέξανδρο Μπακόπουλο, όχι μόνο γιατί με ώθησε να ασχοληθώ με ένα τόσο ενδιαφέρον θέμα αλλά και για την καθοδήγηση και στήριξή του καθ΄ όλη την διάρκεια της έρευνας και της συγγραφής.

Ευχαριστώ επίσης τον Δάσκαλο, ομότιμο καθηγητή του ΕΜΠ κύριο Θεμιστοκλή Ρασσιά τόσο για τις πολλές φορές που αφιέρωσε τον χρόνο του για να μιλήσουμε για μαθηματικά, όσο και για την ενίσχυση του έρωτά μου για τα μαθηματικά και την διδασκαλία.

Ευχαριστώ τον Αναπληρωτή Καθηγητή του τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων κύριο Μιχαήλ Ξένο για τον χρόνο που αφιέρωσε σε εμένα, την στήριξή του στην προσπάθειά μου καθώς και για το ήθος που με έμαθε να έχω στην δουλειά μου.

Ευχαριστώ τον Αναπληρωτή Καθηγητή του τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων κύριο Ιωάννη Γιαννούλη για τα γράμματα που με έμαθε, για τον τρόπο που προσεγγίζει την διδασκαλία έχοντας ως επίκεντρο τον μαθητή και την ενδυνάμωση αυτού, και για την γενικότερη στάση ζωής του την οποία προσπαθώ ν΄ ακολουθώ.

Ευχαιστώ τον καθηγητή του τμηματος Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής κύριο Γεώργιο Ακρίβη τόσο για την εμβάθυνση που με ώθησε να κάνω στα μαθηματικά, όσο και για την πατρική του στάση απέναντί μου μέσα από τις συζητήσεις που κάνουμε κατά καιρό στις οποίες με βοηθά να βλέπω τα πράγματα πιο ξεκάθαρα.

Ευχαριστώ τον καθηγητή του τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων κύριο Θεόδωρο Βλάχο μιας και τα μαθήματα υπήρξαν καταλυτικά στο να αναπτυχθεί περαιτέρω το πάθος μου για τα μαθηματικά και ο τρόπος διδασκαλίας του αποτελεί κίνητρο για μένα να βελτιώνομαι συνεχώς.

Ευχαριστώ τα ”αδέρφια” μου Βασίλη Σίντο, Νίκο Παπαγιάννη και Φάνη Γεροδήμο. Ο Βασίλης ήταν ο πρώτος που με στήριξε και με έσμπρωξε να ακολουθήσω το όνειρό μου και να γίνω μαθηματικός. Ο Νίκος ήταν πάντα εκεί να με ακούει και να μου προτείνει λύσεις όταν τα έβρισκα δύσκολα είτε επαγγελματικά ως μαθηματικός, είτε στο μεταπτυχιακό. Ο Φάνης ήταν ο άνθρωπος που με στήριξε και με έπεισε να μην τα παρατήσω το περασμένο καλοκαίρι όταν είχα απογοητευτεί πλήρως.

Ευχαριστώ τους Θεόδωρο Χωρίκη και Αντώνη Χαραλαμπόπουλο γιατί άθελά τους με έμαθαν να πηδώ ψηλότερα.

Τέλος ευχαριστώ την εξαίρετη συνάδελφο Τόνια Καππέ και τον εξαιρετικό φοιτητή της ΣΕΜΦΕ και αναδεχτό μου Γιώργο Παναγόπουλο. Η βοήθεια της Τόνιας στην συγγραφή της εργασίας ήταν κάτι παραπάνω από σημαντική. Χωρίς την Τόνια δεν υπήρχε περίπτωση να μπορώ να παρουσιάσω στην εξεταστική του Φλεβάρη 2019. Ο Γιώργος απλόχερα με βοήθησε με την διαμονή μου στην Αθήνα τα δύο χρόνια που ανεβοκατέβαινα από Γιάννενα ώστε να παρακολουθώ τα μαθήματα. Χωρίς την βοήθεια του Γιώργου ο βαθμός δυσκολίας του εγχειρήματος θα ήταν εκθετικά μεγαλύτερος.

Περιληψη

Στην παρούσα εργασία μελετάμε το πρόβλημα της βέλτιστης προσέγγισης συνάρτησης με χρήση της νόρμας $L2$, της νόρμας Chebyshev και της ταυτόχρονης χρήσης των δύο νορμών.

Στο 1^o κεφάλαιο δίνονται εισαγωγικές έννοιες και ορισμοί και γίνεται η τοποθέτηση του προβλήματος προσέγγισης μίας συνάρτησης.

Στο 2^o κεφάλαιο εξειδικεύουμε την μελέτη μας στην πολυωνυμική προσέγγιση συνεχούς συνάρτησης. Αποδεικνύουμε την ύπαρξη βέλτιστης πολυωνυμικής προσέγγισης και δίνουμε τις ικανές συνθήκες ώστε αυτή να είναι μοναδική. Τέλος διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε το θεώρημα Weierstrass κάνοντας χρήση των πολυωνύμων Bernstein.

Στο 3^o κεφάλαιο μελετάμε την βέλτιστη προσέγγιση συνεχούς συνάρτησης με χρήση της νόρμας $L2$ για το διακριτό πρόβλημα και για το συνεχές. Στο συνεχές πρόβλημα αποδεικνύουμε πως η βέλτιστη πολυωνυμική προσέγγιση είναι αυτή που έχει ως συντελεστές του πολυωνύμου, τους συντελεστές Fourier. Τέλος κάνουμε μία γενικότερη μελέτη της συνάρτησης σφάλματος του συνεχούς προβλήματος όπου αποδεικνύουμε ενδιαφέροντα συμπεράσματα όπως η ασυμπτωτική συμπεριφορά της συνάρτησης σφάλματος, η ανισότητα Bessel και η ταυτότητα Parseval.

Στο 4^o κεφάλαιο μελετάμε την βέλτιστη προσέγγιση συνεχούς συνάρτησης με χρήση της νόρμας Chebyshev για το διακριτό και για το συνεχές πρόβλημα. Αποδεικνύουμε την ισοδυναμία μεταξύ της ιδιότητας ίσων σφαλμάτων και της μοναδικότητας του min-max πολυωνύμου. Τέλος μελετάμε την ειδική περίπτωση προσέγγισης πολυωνυμικής συνάρτησης βαθμού $n + 1$ με πολυώνυμο βαθμού το πολύ n, αφού δώσουμε τις βασικές ιδιότητες των πολυωνύμων Chebyshev.

Τέλος στο 5^o κεφάλαιο μελετάμε το πρόβλημα της βέλτιστης προσέγγισης συνεχούς συνάρτησης με ταυτόχρονη ελαχιστοποίηση της νόρμας $L2$ και της νόρμας Chebyshev, αφού πρώτα κάνουμε μια εισαγωγή στην Πολυκριτηριακή Λήψη Αποφάσεων (ΠΛΑ), την Πολυκριτηριακή Βελτιστοποίηση (ΠΒ) και τον Τετραγωνικό Προγραμματισμό (ΤΠ).

Abstract

In this thesis we study the problem of optimal function approximation using the $L2$ norm, the Chebyshev norm and finally using both of them simultaneously. In chapter 1 we give definitions and introductory concepts and we lay the setting for the problem of function approximation. In chapter 2 we specialize our study in the polynomial approximation of a continuous function. We prove existence of optimal polynomial approximation and give sufficient conditions for uniqueness. Finally we state and prove Weierstrass theorem using Bernstein polynomials.

In chapter 3 we study the optimal polynomial approximation of a continuous function using the norm $L2$ both for the discrete and continuous setting. At the continuous setting we prove that the optimal polynomial approximation is the one with polynomial coefficients the Fourier coefficients. Finally we further study the behavior of the error function deducing interesting results like its asymptotic behavior, the Bessel inequality and the Parseval identity.

In chapter 4 we study the optimal polynomial approximation of a continuous function using the norm Chebyshev both for the discrete and continuous setting. We prove the equivalence between the property of alternate errors and the existence-uniqueness of the min-max polynomial. Finally we study the special case of polynomial approximation of polynomial function of degree n+1 using a polynomial of degree at most n, after we give the basic properties of Chebyshev polynomials. Finally in chapter 5 we study the problem of optimal polynomial approximation of a continuous function by minimizing simultaneously both the $L2$ and the Chebyshev norm of the error function, after we give a brief introduction to multi-criteria decision analysis, multi-criteria optimization and quadratic programming.

Περιεχομενα

Περίληψη **i**

Abstract **ii**

1 ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ **3**

1.1 Το πρόβλημα της προσέγγισης συναρτήσεων 3

1.2 Χώροι με νόρμα και προσεγγίσεις συναρτήσεων 4

2 ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ **9**

2.1 Εισαγωγικά 9

2.2 Διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης 9

2.3 Θεώρημα Weierstrass 14

3 ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ ΝΟΡΜΑΣ $L2$ **21**

3.1 Διακριτό πρόβλημα 21

3.2 Συνεχές πρόβλημα 24

3.3 Μελέτη συνάρτησης σφάλματος 27

4 ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ ΝΟΡΜΑΣ CHEBYSHEV **29**

4.1 Η ιδιότητα των ίσων σφαλμάτων 29

4.2 Διακριτό πρόβλημα 33

4.3 Συνεχές πρόβλημα 35

4.3.1 Πολυώνυμα Chebyshev 36

4.3.2 Εύρεση min-max πολυωνύμου για πολυωνυμική συνάρτηση f βαθμού $n+1$ 38

5 ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ ΝΟΡΜΑΣ $L2$ ΚΑΙ ΤΗΣ ΝΟΡΜΑΣ CHEBYSHEV 41

5.1 Εισαγωγικά 41

5.2 Πολυκριτηριακή λήψη αποφάσεων (ΠΛΑ) 42

5.2.1 Εισαγωγικά 42

5.2.2 Ορισμοί - Θεμελίωση ΠΛΑ 44

5.2.3 Ταξινόμηση προβλημάτων ΠΛΑ 44

5.2.4 Μαθηματική μοντελοποίηση - αναπαράσταση προβλημάτων ΠΛΑ 45

5.3 Πολυκριτηριακή βελτιστοποίηση (ΠΒ) 51

5.3.1 Εισαγωγικά 51

5.3.2 Μαθηματική μοντελοποίηση προβλημάτων ΠΒ 52

5.3.3 Επίλυση προβλημάτων ΠΒ 54

5.4 Τετραγωνικός προγραμματισμός 55

5.4.1 Εισαγωγικά 55

5.4.2 Μαθηματική μοντελοποίηση 55

5.5 Βέλτιστη προσέγγιση συνάρτησης με ταυτόχρονη ελαχιστοποίσης της νόρμας $L2$ και της νόρμας Chebyshev της συνάρτησης σφαλμάτος 56

5.5.1 Μοντελοποίηση 56

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

1.1 Το πρόβλημα της προσέγγισης συναρτήσεων

Το πρόβλημα της προσέγγισης συνίσταται στην αναπαράσταση μίας δοθείσης συνάρτησης f από έναν συνδυασμό πεπερασμένου ή άπειρου πλήθους στοιχειωδών συναρτήσεων. Ακόμα, υπάρχει το ενδεχόμενο να μην γνωρίζουμε την αναλυτική μορφή της συνάρτησης f, αλλά να γνωρίζουμε τις τιμές της συνάρτησης f, $f_i = f(x_i)$, σε ένα πλήθος σημείων x_i, $i = 0, 1, \ldots n$ και να θέλουμε να προσεγγίσουμε αυτά τα εμπειρικά δεδομένα με μία στοιχειώδη συνάρτηση συγκεκριμένης μορφής (π.χ. ένα πολυώνυμο).

Όπως τοποθετήθηκε το πρόβλημα είναι προφανές πως θα πρέπει να μελετήσουμε ξεχωριστά τη συνεχή περίπτωση, όταν δηλαδή η συνάρτηση $f(x)$ είναι μία συνεχής συνάρτηση, ορισμένη στο διάστημα $[a, b]$, δηλαδή $f \in C[a, b]$ και ξεχωριστά την διακριτή περίπτωση, όταν δηλαδή η συνάρτηση f είναι γνωστή μόνον σε ένα συγκεκριμένο σύνολο σημείων x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$.

Σημειώνουμε εδώ πως τόσο στη συνεχή, όσο και στην διακριτή περίπτωση, η συνάρτηση f θα είναι στοιχείο ενός γραμμικού χώρου L και η προσεγγιστική συνάρτηση f^* θα εκλέγεται από έναν υπόχωρο U του γραμμικού χώρου L.

Στην παρούσα εργασία, οι γραμμικοί χώροι που θα χρησιμοποιήσουμε είναι ο χώρος των συναρτήσεων f που είναι συνεχείς στο διάστημα $[a, b]$, τον οποίο θα συμβολίζουμε με $C[a, b]$ και ο χώρος όλων των διανυσμάτων με συντεταγμένες πραγματικούς αριθμούς, τον οποίο θα συμβολίζουμε με $\mathbb{R}^n$ (όταν το διάνυσμα έχει n συντεταγμένες). Έτσι, στη συνεχή περίπτωση έχουμε:

$$f \in C[a, b]$$

ενώ στη διακριτή περίπτωση:

$$f = (f_0, f_1, \ldots, f_n)^T,$$

όπου $f_i = f(x_i)$, $i = 0(1)n$ που είναι στοιχείο του $\mathbb{R}^{n+1}$.

Η προσεγγιστική συνάρτηση f^*, και στις δύο περιπτώσεις, θα έχει τη μορφή:

$$f^*(x) = C_0\Phi_0(x) + C_1\Phi_1(x) + \cdots + C_m\Phi_m(x),$$

όπου C_i, $i = 0, 1, \ldots, m$ προσδιορίσιμες πραγματικές σταθερές.

Οι συναρτήσεις $\Phi_i(x)$, $i = 0, 1, \ldots, m$ μπορούν να είναι οποιεσδήποτε συνεχείς συναρτήσεις, όμως για τους σκοπούς της παρούσας εργασίας θα περιοριστούμε στην πολυωνυμική προσέγγιση, δηλαδή προσέγγιση της συνάρτησης f με πολυώνυμο κατάλληλου βαθμού. Η θεωρία που θα αναπτυχθεί θα ισχύει αυτούσια και για την προσέγγιση της συνάρτησης f με έναν γραμμικό συνδυασμό ορισμένου αριθμού αυθαίρετα επιλεγμένων συνεχών συναρτήσεων.

1.2 Χώροι με νόρμα και προσεγγίσεις συναρτήσεων

Το πρόβλημα θα γίνει πιο αντιληπτό αν το αναδιατυπώσουμε σε έναν χώρο με νόρμα. Παρακάτω θα δώσουμε κάποια στοιχεία από τις νόρμες, ώστε να είμαστε σε θέση να μετρήσουμε το μέγεθος της συνάρτησης σφάλματος

$$\epsilon(x) = f(x) - f^*(x),$$

όπου f^* η βέλτιστη προσέγγιση της f.

Έστω X γραμμικός χώρος. Τότε η νόρμα είναι μια απεικόνιση $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}^+$ που πληροί τα ακόλουθα:

1. $\|x\| \geq 0 \ \forall x \in X$ και $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_X$.
2. $\|ax\| = |a|\|x\| \ \forall x \in X$ και $a \in \mathbb{R}$.
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \ \forall x, y \in X$.

Οι πιο γνωστές και χρήσιμες για την θεωρία προσέγγισης νόρμες μίας συνάρτησης $f \in C[a, b]$ είναι:

- Η Ευκλείδεια ή $L2$ νόρμα:

$$\|f\|_2 = \left[\int_a^b |f(x)|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}.$$

- Η supremum ή μέγιστη νόρμα, ή νόρμα του Chebyshev:

$$\|f\|_\infty = \max_{a \le x \le b} |f(x)|.$$

Οι δύο παραπάνω νόρμες είναι ειδικές περιπτώσεις της L_p-νόρμας:

$$\|f\|_p = \left[\int_a^b |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}},\ p \ge 1.$$

Στη διακριτή περίπτωση οι αντίστοιχες νόρμες ορίζονται από την σχέση:

$$\|f\|_p = \left[\sum_{i=0}^{n} |f(x_i)|^p \right]^{\frac{1}{p}},$$

όπου f είναι το διάνυσμα με συνιστώσες τις τιμές της συνάρτησης f στα σημεία x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$.

Οι ορισμοί για τη νόρμα μπορούν να γενικευτούν, εισάγοντας μία συνάρτηση $w(x)$, την ονομαζόμενη συνάρτηση βάρους.

Τότε η L_p-νόρμα (συνεχής περίπτωση), είναι:

$$\|f\|_{p,w} = \left[\int_a^b w(x)|f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}},$$

ενώ η l_p-νόρμα (διακριτή περίπτωση), είναι:

$$\|f\|_{p,w_i} = \left[\sum_{i=0}^{n} w_i |f(x_i)|^p \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Το εσωτερικό γινόμενο δύο συναρτήσεων ως προς συνάρτηση βάρους $w(x)$, ορίζεται ως:

- $< f, g >= \int_a^b w(x) f(x) g(x) dx$ (συνεχής περίπτωση),

- $< f, g >= \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) g(x_i)$ (διακριτή περίπτωση).

Οι συναρτήσεις f, g λέγονται ορθογώνιες αν-ν $< f, g >= 0$.

Οι συναρτήσεις $\Phi_0(x), \Phi_1(x), \ldots, \Phi_m(x)$ αποτελούν ορθοκανονικό σύστημα αν-ν:

$$< \Phi_i(x), \Phi_j(x) >= \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Κάθε νόρμα στον γραμμικό χώρο X επάγει μία μετρική (ή συνάρτηση απόστασης) θέτοντας:

$$dist(x, y) = \|x - y\|.$$

Τώρα το πρόβλημα που διατυπώσαμε νωρίτερα, μπορεί να επαναδιατυπωθεί: "Δοθέντος ενός υπόχωρου Y του X κι ενός σημείου $x \in X$, υπάρχει στοιχείο $y \in Y$ που είναι πιο κοντά στο x; Δηλαδή μπορούμε να βρούμε $y \in Y$ έτσι ώστε $\|x - y\| = \min_{z \in Y} \|x - z\|$; Αν υπάρχει τέτοια βέλτιστη προσέγγιση στο x είναι μοναδική;" Είναι εύκολο να δούμε πως μία ικανοποιητική απάντηση σε αυτή την ερώτηση απαιτεί ο Y να είναι κλειστός υπόχωρος του X. Διαφορετικά, τα στοιχεία που ανήκουν στο σύνορο του Y, $\partial Y = \bar{Y} \setminus Y^\circ$ δεν θα έχουν πλησιέστερα σημεία. Π.χ. ποιο σημείο του διαστήματος $[0, 1)$ είναι πιο κοντά στο 1; Λιγότερο εμφανής είναι η ανάγκη επιπλέον απαιτήσεων για το Y ώστε να εξασφαλίσουμε την ύπαρξη (και σίγουρα την μοναδικότητα) πλησιέστερων σημείων. Προς το παρόν, θεωρούμε την περίπτωση όπου ο Y είναι κλειστός υπόχωρος του χώρου με νόρμα X.

Στην παρούσα εργασία υποθέτουμε ότι δίνεται η πραγματική συνάρτηση $f \in C[a, b]$ και η νόρμα $\|\cdot\|_p$, $p = 2$ ή ∞, ή δίνονται οι τιμές της συνάρτησης f, $f_i = f(x_i)$ στα σημεία x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ και οι αντίστοιχες νόρμες του διανύσματος με συνιστώσες τιμές f_i.

Τότε το πρόβλημά μας είναι να βρούμε ένα πολυώνυμο βαθμού το πολύ n, το $p_n^*(x)$ που γενικά ονομάζεται βέλτιστο πολυώνυμο προσσέγγισης τέτοιο ώστε:

$$\|p_n^*(x) - f(x)\|_p \leq \|p_n(x) - f(x)\|_p \;\forall p_n \in \Pi_n.$$

Με άλλα λόγια, αν καλέσουμε με:

$$\epsilon(x) = p_n(x) - f(x)$$

το σφάλμα στο τυχόν σημείο $x \in [a, b]$, ορίζουμε μία συνάρτηση σφάλμα στο $[a, b]$, την $\epsilon(x)$. Τότε το πρόβλημά μας ανάγεται στην ελαχιστοποίηση της συνάρτησης $\epsilon(x)$ στο διάστημα αυτό που επιτυγχάνεται με την ελαχιστοποίηση κάποιας εκ των δύο νορμών (που προαναφέραμε) της $\epsilon(x)$.

Αντίστοιχα, στο διακριτό πρόβλημα, έχουμε ένα διάνυσμα-σφάλμα κατά την προσέγγιση των εμπειρικών δεδομένων κι επιζητούμε την ελαχιστοποίηση μίας εκ των δύο προαναφερομένων νορμών του.

Για $p = 2$ έχουμε τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων και το βέλτιστο πολυώνυμο προσέγγισης για την συνάρτηση f ονομάζεται και <u>πολυώνυμο ελαχίστων τετραγώνων</u>, ενώ για $p = \infty$ έχουμε την άριστη ομοιόμορφη προσέγγιση ή τεχνική του Chebyshev και το βέλτιστο πολυώνυμο προσέγγισης είναι γνωστό ως <u>min-max</u> πολυώνυμο.

<u>Τονίζουμε πως, εν γένει, για τα ίδια δεδομένα, το βέλτιστο πολυώνυμο προσέγγισης των ελαχίστων τετραγώνων δεν συμπίπτει με το min-max πολυώνυμο της τεχνικής του Chebyshev.</u>

Σημειώνουμε τέλος πως στην διακριτή περίπτωση εκείνο που έχει πρακτικό ενδιαφέρον είναι η περίπτωση που ο βαθμός m του βέλτιστου πολυωνύμου προσέγγισης είναι

$$m < n.$$

Αυτό γιατί για $m = n$ η βέλτιστη λύση δίνεται από το πολυώνυμο παρεμβολής ενώ για $m > n$, επάρχουν άπειρες βέλτιστες λύσεις στο πρόβλημά μας που δίνονται από τον τύπο:

$$p_m^*(x) = p_n(x) + p_{m-n-1}(x) \prod_{j=0}^{n} (x - x_j),$$

όπου $p_n(x)$ το αντίστοιχο πολυώνυμο παρεμβολής, βαθμού n, και $p_{m-n-1}(x)$ οποιοδήποτε πολυώνυμο βαθμού $m - n - 1$. Αυτό συμβαίνει διότι οι συνιστώσες $\epsilon_i,\ i = 0, 1, \ldots, n$ του διανύσματος σφάλματος για $m = n$ είναι:

$$\epsilon_i = \epsilon(x_i) = p_m(x_i) - f(x_i) = p_n(x_i) - f(x_i) = f(x_i) - f(x_i) = 0,$$

αφού το $p_n(x_i) = f(x_i),\ i = 0, 1, \ldots n$, ενώ για $m > n$ είναι:

$$\epsilon_i = p_m^*(x_i) - f_i = p_n(x_i) + p_{m-n-1}(x_i) \prod_{j=0}^{n} (x_i - x_j) - f_i = f(x_i) + 0 - f(x_i) = 0.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

2.1 Εισαγωγικά

Το αρχικό πρόβλημα όπως πρωτοδιατυπώθηκε από τον Chebyshev αφορά τον χώρο $C[a,b]$ εφοδιασμένο με την ομοιόμορφη νόρμα $\|f\|_\infty = \max\limits_{a\leq x\leq b} |f(x)|$. Η λέξη "ομοιόμορφη" χρησιμοποιείται εδώ διότι η σύγκλιση ως προς αυτή τη νόρμα είναι ισοδύναμη με την ομοιόμορφη σύγκλιση στο $[a,b]$:

$$\|f_n - f\|_\infty \to 0 \Leftrightarrow f_n \to f \text{ ομοιόμορφα στο } [a,b]$$

(συμβολισμός $f_n \rightrightarrows f$ στο $[a,b]$).

Στην παρούσα εργασία ενδιαφερόμαστε για προσεγγίσεις από στοιχεία του $Y = \Pi_n$ (υποχώρος όλων των πολυωνύμων βαθμού μέχρι n στο $C[a,b]$. Ο Π_n είναι πεπερασμένης διάστασης υποχώρος του $C[a,b]$ με $\dim \Pi_n = n+1$.

2.2 Διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης

Το κομβικό σημείο της πολυωνυμικής προσέγγισης είναι το γεγονός πως κάθε χώρος Π_n, είναι πεπερασμένης διάστασης. Πρώτα μελετάμε το πιο αφηρημένο πλαίσιο των πεπερασμένης διάστασης υποχώρων χώρων με νόρμα.

Λήμμα 2.1. *Έστω V διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης. Τότε όλες οι νόρμες στον V είναι ισοδύναμες, δηλαδή αν $\|\cdot\|_A$, $\|\cdot\|_B$ είναι δύο νόρμες του V, τότε υπάρχουν σταθερές c_1, c_2 τέτοιες ώστε*

$$0 < c_1, c_2 < \infty \text{ και } c_1\|x\|_A \leq \|x\|_B \leq c_2\|x\|_A \ \forall x \in V.$$

Θεώρημα 2.2. *Κάθε πεπερασμένης διάστασης χώρος με νόρμα είναι πλήρης (δηλαδή κάθε ακολουθία Cauchy που ανήκει σε αυτόν είναι συγκλίνουσα). Πιο συγκεκριμένα, αν Y είναι ένας πεπερασμένης διάστασης υποχώρος ενός χώρου με νόρμα X, τότε ο Y είναι κλειστός υποχώρος του X.*

Πόρισμα 2.3. *Έστω Y πεπερασμένης διάστασης χώρος με νόρμα, και $x \in Y$ και $M > 0$. Τότε κάθε κλειστή μπάλα $\{y \in Y : \|x - y\| \leq M\}$ είναι συμπαγής.*

Απόδειξη. Επειδή η παράλληλη μεταφορά είναι ισομετρία, αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο $\{y \in Y : \|y\| \leq M\}$ (η κλειστή μπάλα γύρω από το 0) είναι συμπαγής.

Έστω τώρα ότι Y είναι $n-$διάστατος και $\{e_i\}_{i=1}^n$ μία βάση του. Τότε από το Λήμμα 2.1 γνωρίζουμε ότι υπάρχει σταθερά $c_1 > 0$ τέτοια ώστε:

$$c_1 \sum_{i=1}^{n} |a_i| \leq \| \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \| \; \forall x = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i.$$

Τότε:

$$c_1 |a_i| \leq \| \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \| \leq M$$
$$\Rightarrow |a_i| \leq \frac{M}{A} \; \forall i = 1, \ldots, n.$$

Έτσι, το σύνολο $\{y \in Y : \|y\| \leq M\}$ είναι ένα κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς $\{x = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i : |a_i| \leq \frac{M}{A},\ i = 1, \ldots n\} = \left[-\frac{M}{A}, \frac{M}{A}\right]^n$. □

Θεώρημα 2.4. *Έστω Y πεπερασμένης διάστασης υποχώρος ενός γραμμικού χώρου με νόρμα X κι έστω $x \in X$. Τότε υπάρχει ένα (όχι απαραίτητα μοναδικό) διάνυσμα $y^* \in Y$, τέτοιο ώστε $\|x - y^*\| = \min_{y \in Y} \|x - y\| \; \forall y \in Y$. Δηλαδή, υπάρχει βέλτιστη προσέγγιση του x από στοιχεία του Y.*

Απόδειξη. Επειδή $0 \in Y$, τότε κάθε πλησιέστερο σημείο y^* θα ικανοποιεί τη σχέση $\|x - y^*\| \leq \|x\| = \|x - 0\|$. Άρα αρκεί να βρω ένα y^* στο συμπαγές σύνολο $K = \{y \in Y : \|x - y\| \leq \|x\|\}$.

Παρατηρώ ότι η συνάρτηση $f(y) = \|x - y\|$ είναι συνεχής,

$$|f(y) - f(z)| = |\|x - y\| - \|x - z\|| \leq \|y - z\|$$

κι επομένως λαμβάνει μία ελάχιστη τιμή y^* στο K. □

Πόρισμα 2.5. *(Ύπαρξη βέλτιστης προσέγγισης) Για κάθε $f \in C[a,b]$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει ένα (όχι απαραίτητα μοναδικό) πολυώνυμο $p_n^* \in \Pi_n$ τέτοιο ώστε:*

$$\|f - p_n^*\| = \min_{p \in \Pi_n} \|f - p\|.$$

Το παραπάνω πόρισμα δεν λέει πως το p_n^* θα είναι πολυώνυμο βαθμού n αλλά το πολύ n.

Αφού εξασφαλίσαμε την ύπαρξη βέλτιστης πολυωνυμικής προσέγγισης, προχωράμε στην μελέτη της μοναδικότητας και των απαραίτητων προϋποθέσεων ώστε να την επιτύχουμε.

Λήμμα 2.6. *Έστω Y ένας πεπερασμένης διάστασης υποχώρος ενός γραμμικού χώρου με νόρμα X, κι έστω ότι κάθε $x \in X$ έχει μοναδικό πλησιέστερο σημείο $y_x \in X$. Τότε η απεικόνιση πλησιέστερου σημείου $x \mapsto y_x$ είναι συνεχής.*

Απόδειξη. Έστω $p(x) = y_x$ η απεικόνιση πλησιέστερου σημείου κι έστω ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X : x_n \to x$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $p(x_n) \to p(x)$. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει υπακολουθία της $(p(x_n))$ η οποία συγκλίνει στο $p(x)$, αφού ο χώρος είναι πλήρης.

Επειδή η ακολουθία (x_n) είναι φραγμένη στο X, έστω $\|x_n\| \leq M \ \forall n \in \mathbb{N}$, έχουμε:

$$\|p(x_n)\| \leq \|p(x_n) - x_n\| + \|x_n\| \leq 2\|x_n\| \leq 2M.$$

Επομένως, η $(p(x_n))$ είναι φραγμένη ακολουθία στον Y, ο οποίος είναι χώρος πεπερασμένης διάστασης. Τότε από το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass υπάρχει υπακολουθία της $(p(x_n))$ η οποία συγκλίνει έστω στο $p_0 \in Y$. Τότε, αφού κάθε $x \in X$ έχει μοναδικό πλησιέστερο σημείο $y_x \in Y$ σημαίνει πως αφού η (x_n) συγκλίνει, θα συγκλίνει και η $(p(x_n))$. Συνεπώς, η $(p(x_n))$ θα συγκλίνει στο $p_0 \in Y$ και το μόνο που πρέπει να δείξουμε είναι ότι $p_0 = p(x)$. Όμως,

$$\|p(x_n) - x_n\| \leq \|p(x) - x_n\| \ \forall n \in \mathbb{N}$$

(από τον ορισμό του $p(x_n) = y_{x_n}$).

Επομένως, αφήνοντας το $n \to \infty$, έχουμε:

$$\|p_0 - x\| \leq \|p(x) - x\|.$$

Επειδή το πλησιέστερο σημείο είναι μοναδικό, προκύπτει ότι $p_0 = p(x)$. □

Ενθυμούμενοι τον ορισμό του κυρτού συνόλου:

Ένα υποσύνολο K ενός διανυσματικού χώρου V είναι κυρτό αν το K περιέχει το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο οποιαδήποτε σημεία του. Πιο συγκεκριμένα,

$$K \text{ κυρτό } \Leftrightarrow (x, y \in K,\ 0 \leq \lambda \leq 1 \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda)y \in K).$$

Θεώρημα 2.7. *Έστω Y υποχώρος ενός χώρου με νόρμα X Κι έστω $x \in X$. Τότε το σύνολο Y_X που αποτελείται από όλες τις βέλτιστες προσεγγίσεις του x από το σύνολο Y, είναι ένα φραγμένο, κυρτό σύνολο.*

Απόδειξη. Όπως είδαμε στο Θεώρημα 2.4, το σύνολο Y_X είναι υποσύνολο της κλειστής μπάλας $\{y \in X : \|x-y\| \leq \|x\|\}$ κι επομένως είναι φραγμένο (γενικότερα το σύνολο Y_X είναι υποσύνολο της σφαίρας $\{y \in X : \|x-y\| = d\}$ όπου $d = dist(x, Y) = \inf_{y \in Y} \|x-y\|$).

Έτσι, για δοθέντα $y_1, y_2 \in Y_X$ και $0 \leq \lambda \leq 1$, θέλουμε να δείξουμε ότι το διάνυσμα $y^* = \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \in Y_X$. Όμως, $y_1, y_2 \in Y_X$ σημαίνει πως:

$$\|x - y_1\| = \|x - y_2\| = \min_{y \in Y} \|x - y\|.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\|x - y^*\| &= \|x - (\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2)\| = \|\lambda(x - y_1) + (1-\lambda)(x - y_2)\| \\ &\leq \lambda\|x - y_1\| + (1-\lambda)\|x - y_2\| = \min_{y \in Y} \|x - y\|.\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\|x - y^*\| = \min_{y \in Y} \|x - y\| \Rightarrow y^* \in Y_X.$$

□

Από τα ανωτέρω συμπεραίνουμε πως αν το Y_X περιέχει παραπάνω από ένα σημείο, τότε περιέχει ένα ολόκληρο ευθύγραμμο τμήμα. Επομένως, το Y_X είναι είτε κενό, είτε περιέχει ακριβώς ένα σημείο, ή περιέχει άπειρα σημεία. Η ως άνω παρατήρηση μας δίνει μια ικανή συνθήκη για μοναδικότητα του πλησιέστερου σημείου:

"Αν ο χώρος με νόρμα X δεν περιέχει ευθύγραμμα τμήματα σε καμία σφαίρα $\{x \in X : \|x\| = r\}$, τότε η βέλτιστη προσέγγιση (σε κάθε κυρτό υποσύνολο Y) θα είναι απαραίτητα μοναδική."

Μία νόρμα $\|\cdot\|$ σε έναν διανυσματικό χώρο ονομάζεται αυστηρά κυρτή, αν για κάθε ζεύγος σημείων $x, y \in X$ με $x \neq y$ και $\|x\| = r = \|y\|$, έχουμε

$\|\lambda x + (1-\lambda)y\| < r \; \forall \lambda : 0 < \lambda < 1$. Δηλαδή το ανοιχτό ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ δύο οποιωνδήποτε σημείων της σφαίρας με ακτίνα r, βρίσκεται ολόκληρο μέσα στην ανοιχτή μπάλα με ακτίνα r. Με άλλα λόγια, μόνον τα συνοριακά σημεία του ευθύγραμμου τμήματος βρίσκονται επί της σφαίρας. Για απλότητα λέμε πως ο χώρος X είναι αυστηρά κυρτός, εννοώντας πως αναφερόμαστε σε μία ιδιότητα της νόρμας του X. Για κάθε τέτοιο χώρο παίρνουμε άμεσο πόρισμα από το Θεώρημα 2.7.

Πόρισμα 2.8. *Αν ο X έχει αυστηρά κυρτή νόρμα, τότε για κάθε υποχώρο Y του X και κάθε σημείο $x \in X$, υπάρχει το πολύ μία βέλτιστη προσέγγιση του x από τον Y. Δηλαδή το σύνολο Y_X είναι είτε κενό, είτε αποτελείται από μοναδικό σημείο.*

Για να φθάσουμε σε μία συνθήκη που είναι ευκολότερα ελέγξιμη ας μεταφράσουμε τον αρχικό μας ορισμό σε μία δήλωση σχετική με την τριγωνική ανισότητα στον X.

Λήμμα 2.9. *Ένας χώρος με νόρμα X έχει αυστηρά κυρτή νόρμα αν και μόνον αν η τριγωνική ανισότητα ισχύει αυστηρά για μη παράλληλα διανύσματα. Δηλαδή αν και μόνον αν:*

$$x \neq ay, \; y \neq ax \; a \in \mathbb{R} \Rightarrow \|x+y\| < \|x\| + \|y\|.$$

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Υποθέτω πως ο X είναι αυστηρά κυρτός και θα δείξω ότι $\|x + y\| < \|x\| + \|y\|$.

Έστω x, y μη παράλληλα διανύσματα στον X. Τότε τα διανύσματα $\frac{x}{\|x\|}$, $\frac{y}{\|y\|}$ είναι διαφορετικά. Επομένως, για τον κυρτό συνδυασμό των μοναδιαίων διανυσμάτων, έχουμε:

$$\begin{aligned}
&\left\| \left(\frac{\|x\|}{\|x\| + \|y\|} \right) \frac{x}{\|x\|} + \left(\frac{\|y\|}{\|x\| + \|y\|} \right) \frac{y}{\|y\|} \right\| < 1 \\
&\Leftrightarrow \left\| \frac{x+y}{\|x\| + \|y\|} \right\| < 1 \\
&\Leftrightarrow \|x+y\| < \|x\| + \|y\|.
\end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Υποθέτω πως η τριγωνική ανισότητα ισχύει αυστηρά σε μη παράλληλα διανύσματα και έστω $x, y \in X$ με $x \neq y$ και $\|x\| = r = \|y\|$. Αν x, y είναι παράλληλα, θα πρέπει $y = -x$. Τότε:

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\| = |2\lambda - 1|\|x\| < r$$

αφού $-1 < 2\lambda - 1 < 1$ όταν $0 < \lambda < 1$.

Διαφορετικά, τα x και y είναι μη παράλληλα. Έτσι, για κάθε $0 < \lambda < 1$ τα διανύσματα λx και $(1-\lambda)y$ είναι παρομοίως μη παράλληλα και τότε:

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\| < \lambda\|x\| + (1-\lambda)\|y\| = r.$$

□

2.3 Θεώρημα Weierstrass

Στο υπόλοιπο κομμάτι της εργασίας θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα της βέλτιστης προσέγγισης μίας δοθείσας συνάρτησης $f \in C[a,b]$ με στοιχεία από τον χώρο Π_n, δηλαδή τον υποχώρο των πολυωνύμων βαθμού το πολύ n στον $C[a,b]$.

Γνωρίζουμε πως το πρόβλημα έχει λύση (όχι απαραίτητα μοναδική) την οποία θα συμβολίζουμε p_n^*. Θέτουμε:

$$E_n(f) = \min_{p\in\Pi_n} \|f-p\| = \|f-p_n^*\|.$$

Ισχύει:

$$\Pi_n \subset \Pi_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow E_n(f) \geq E_{n+1}(f)\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ο στόχος μας είναι να δείξουμε ότι $E_n(f) \to 0$.

Θα το επιτύχουμε αυτό αποδεικνύοντας το παρακάτω Θεώρημα.

Θεώρημα 2.10. *(Θεώρημα προσέγγισης Weierstrass) Έστω $f \in C[a,b]$. Τότε $\forall \epsilon > 0$, υπάρχει πολυώνυμο $p : \|f-p\|_\infty < \epsilon$.*

Συνέπεια του θεωρήματος Weierstrass, είναι πως

$$E_n(f) \to 0 \Leftrightarrow p_n^* \rightrightarrows f.$$

Αυτό είναι ένα πρόβλημα για τον προσδιορισμό της ακριβούς φύσης του $E_n(f)$ ως συνάρτηση των f και n.

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη του θεωρήματος Weierstrass θα δούμε μία απλοποίηση: το διάστημα $[a,b]$ δεν παίζει ρόλο.

Λήμμα 2.11. *Αν το θεώρημα Weierstrass ισχύει για $f \in C[0,1]$, ισχύει και για $f \in C[a,b]$ και αντίστροφα. Πιο συγκεκριμένα, οι $C[0,1]$ και $C[a,b]$ είναι γραμμικά ισομετρικοί ως χώροι με νόρμα.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε πως η συνάρτηση:

$$\sigma(x) = a + (b-a)x,\ 0 \leq x \leq 1$$

ορίζει μία συνεχή, 1-1 απεικόνιση από το $[0,1]$ στο $[a,b]$. Δοθείσης $f \in C[a,b]$, προκύπτει πως η $g(x) = f(\sigma(x))$ ορίζει ένα στοιχείο του χώρου $C[0,1]$. Επιπλέον:

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |g(x)| = \max_{a \leq t \leq b} |f(t)|.$$

Τώρα, δοθέντος $\epsilon > 0$, υποθέτουμε πως μπορούμε να βρούμε πολυώνυμο p : $\|g - p\| < \epsilon$. Δηλαδή υποθέτουμε πως:

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |f(a + (b-a)x) - p(x)| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \max_{a \leq t \leq b} |f(t) - p\left(\frac{t-a}{b-a}\right)| < \epsilon.$$

Αν όμως η $p(x)$ είναι πολυώνυμο του x, τότε η $q(t) = p\left(\frac{t-a}{b-a}\right)$ είναι πολυώνυμο του t που ικανοποιεί την $\|f - q\| < \epsilon$.

Η απόδειξη για το αντίστροφο είναι πανομοιότυπη:

Αν $g(x) \in C([0,1])$, τότε $f(t) = g\left(\frac{t-a}{b-a}\right) \in C[a,b]$, κ.τ.λ. □

Με βάση το ως άνω λήμμα, προκύπτει πως αρκεί να αποδείξουμε το θεώρημα Weierstrass για οποιοδήποτε διάστημα $[a,b]$ μας βολεύει. Εμείς θα το κάνουμε στο $[0,1]$.

Απόδειξη του Bernstein

Η απόδειξη του θεωρήματος Weierstrass που θα παρουσιάσουμε εδώ οφείλεται στο μεγάλο Ρώσο μαθηματικό S.N. Bernstein του 1912. Ο βασικός λόγος που κάνει την απόδειξη ενδιαφέρουσα είναι πως παρουσιάζει μία ακολουθία πολυωνύμων που προσεγγίζουν μία δοθείσα $f \in C[0,1]$.

Αν f είναι μία φραγμένη συνάρτηση στο $[0,1]$, ορίζουμε την ακολουθία των πολυωνύμων Bernstein της f ως ακολούθως:

$$(B_n(f))(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k},\ 0 \leq x \leq 1.$$

Παρατηρούμε πως τα $B_n(f)$ είναι πολυώνυμα βαθμού το πολύ n. Επιπλέον, είναι εύκολο να δούμε πως:

$$(B_n(f))(0) = f(0) \text{ και } (B_n(f))(1) = f(1).$$

Εν γένει $(B_n(f))(x)$ είναι ένας σταθμικός μέσος όρος των αριθμών $f\left(\frac{k}{n}\right)$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

Το θεώρημα του Bernstein μας λέει πως η ακολουθία πολυωνύμων $B_n(f)$ συγκλίνει ομοιόμορφα προς την f, δηλαδή $B_n(f) \rightrightarrows f \ \forall f \in C[0,1]$.

Η απόδειξη απαιτεί να κοιτάξουμε μόνον 3 εύκολες περιπτώσεις:

$$f_0(x) = 1,\ f_1(x) = x,\ f_2(x) = x^2.$$

Λήμμα 2.12. *Ισχύουν τα εξής:*

(α) $B_n(f_0) = f_0$ *και* $B_n(f_1) = f_1$.

(β) $B_n(f_2) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) f_2 + \frac{1}{n} f_1 \Rightarrow B_n(f_2) \rightrightarrows f_2$.

(γ) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n} \leq \frac{1}{4n}$ *αν* $0 \leq x \leq 1$.

(δ) Για δοθέν $\delta > 0$ *και* $0 \leq x \leq 1$, *συμβολίζουμε με* F *το υποσύνολο των* k *στο* $\{0, 1, \ldots, n\}$ *για τα οποία* $|\frac{k}{n} - x| \geq \delta$. *Τότε:*

$$\sum_{k \in F} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{4n\delta^2}.$$

Απόδειξη. (α) Λόγω της διωνυμικής κατανομής, έχουμε:

$$B_n(f_0) = B_n(1) = \sum_{k=0}^{n} 1 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1 = f_0(x).$$

Για να δείξουμε πως $B_n(f_1) = f_1$ παρατηρούμε αρχικά πως:

$$\frac{k}{n}\binom{n}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \binom{n-1}{k-1}.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
B_n(f_1) &= B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \\
&= x\sum_{k=0}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-k} \\
&= x\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}x^{j}(1-x)^{(n-1)-j} \\
&= x\cdot 1 = x = f_1(x).
\end{aligned}$$

(β) Παρατηρούμε πως:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k} &= \frac{k}{n}\binom{n-1}{k-1} \\
&= \begin{cases} \frac{n-1}{n}\frac{k-1}{n-1}\binom{n-1}{k-1} + \frac{1}{n}\binom{n-1}{k-1}, & k \geq 1 \\ \left(1-\frac{1}{n}\right)\binom{n-2}{k-2} + \frac{1}{n}\binom{n-1}{k-1}, & k \geq 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Οπότε:

$$\begin{aligned}
(B_n(f_2))(x) &= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \\
&= \left(1-\frac{1}{n}\right)\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}x^k(1-x)^{n-k} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^k(1-x)^{n-k} \\
&= \left(1-\frac{1}{n}\right)x^2 + \frac{1}{n}x \\
&= \left(1-\frac{1}{n}\right)f_2(x) + \frac{1}{n}f_1(x).
\end{aligned}$$

Τότε:

$$\|B_n(f_2) - f_2\| = \frac{1}{n}\|f_1 - f_2\| \to 0 \text{ καθώς το } n \to \infty.$$

(γ) Παρατηρούμε πως:

$$\left(\left(\frac{k}{n}\right) - x\right)^2 = \left(\frac{k}{n}\right)^2 - 2x\left(\frac{k}{n}\right) + x^2.$$

Τότε:

$$
\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \\
= & \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}-2x\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \\
+ & x^2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \\
= & \left(1-\frac{1}{n}\right)x^2+\frac{1}{n}x-2xx+x^2 \\
= & \frac{x(1-x)}{n}\leq\frac{1}{4n}\ \forall x\in[0,1],
\end{aligned}
$$

όπου η προτελευταία ισότητα προέκυψε από τα (α) και (β).

(δ) Παρατηρούμε πως:

$$1\leq\left(\frac{k}{n}-x\right)^2/\delta^2\ \forall k\in F.$$

Οπότε:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k\in F}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} & \leq \frac{1}{\delta^2}\sum_{k\in F}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \\
& \leq \frac{1}{\delta^2}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \\
& \leq \frac{1}{\delta^2}\frac{1}{4n}=\frac{1}{4n\delta^2},
\end{aligned}
$$

όπου η τελευταία ανισότητα προέκυψε από το (γ).

□

Ολοκλήρωση απόδειξης Bernstein

Έστω $f\in C([0,1])$ και $\epsilon>0$. Μιας και η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, $\exists\delta:|f(x)-f(y)|<\frac{\epsilon}{2}$ οποτεδήποτε $|x-y|<\delta$.

Θα χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα 2.12 για να εκτιμήσουμε το $\|f-B_n(f)\|$.

Επειδή οι αριθμοί $\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$ είναι μη αρνητικοί και αθροίζουν στην μονάδα, έχουμε:

$$\begin{aligned}
|f(x)-B_n(f)(x)| &= \left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f\left(\frac{k}{n}\right)x^k(1-x)^{n-k}\right| \\
&= \left|\sum_{k=0}^{n}\left(f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.
\end{aligned}$$

Σταθεροποιώντας το n και συμβολίζοντας με F το υποσύνολο των k που ανήκουν στο $\{0,1,\ldots,n\}$ για τα οποία $\left|\frac{k}{n}-x\right| \geq \delta$, έχουμε ότι $\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right| < \frac{\epsilon}{2}$ $\forall k \notin F$, ενώ $\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq 2\|f\|$ $\forall k \in F$. Επομένως,

$$\begin{aligned}
|f(x)-(B_n(f))(x)| &\leq \frac{\epsilon}{2}\sum_{k\notin F}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}+2\|f\|\sum_{k\in F}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \\
&< \frac{\epsilon}{2}1+2\|f\|\frac{1}{4n\delta^2} < \epsilon \ \forall n > \frac{\|f\|}{\epsilon\delta^2}.
\end{aligned}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ ΝΟΡΜΑΣ $L2$

3.1 Διακριτό πρόβλημα

Ας υποθέσουμε ότι y_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ είναι το πλήθος των εμπειρικών δεδομένων, που αντιστοιχούν στις τιμές της συνάρτησης f στα σημεία x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$.

Έστω επίσης $p_m^*(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$ το βέλτιστο πολυώνυμο προσέγγισης, βαθμού το πολύ m με $m < n$ και a_i, $i = 0, 1, \ldots, m$ προσδιοριστέοι πραγματικοί συντελεστές, που προσεγγίζει τα εμπειρικά δεδομένα y_i στα σημεία x_i.

Έτσι δημιουργείται ένα διάνυσμα-σφάλμα, το $\epsilon = (\epsilon_0, \epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)^t$, όπου $\epsilon_i = p_m^*(x_i) - y_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

Για να επιτύχουμε την βέλτιστη προσέγγιση με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, θα πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε την Ευκλείδεια νόρμα του σφάλματος:

$$\|\epsilon\|_2 = \|f - p\|_2 = \left(\sum_{i=0}^{n} |f(x_i) - p(x_i)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

ή ισοδύναμα την ποσότητα:

$$E = \sum_{i=0}^{n} |\epsilon_i|^2 = \sum_{i=0}^{n} (p_m(x) - y_i)^2 = \sum_{i=0}^{n} (a_0 + a_1 x + \ldots a_m x_i^m - y_i)^2.$$

Για την ελαχιστοποίηση της ποσότητας E, πρέπει:

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = 2\sum_{i=0}^{n}(a_0 + a_1 x + \dots a_m x_i^m - y_i)x_i^j = 0,\ j = 0, 1, \dots, m$$

$$a_0\sum_{i=0}^{n} x_i^j + a_1\sum_{i=0}^{n} x_i^{j+1} + \dots + a_m\sum_{i=0}^{n} x_i^{j+m} = \sum_{i=0}^{n} x_i^j y_i,\ j = 0, 1, \dots, m.$$

Χρησιμοποιώντας τους συμβολισμούς:

$$s_k = \sum_{i=0}^{n} x_i^k,\ k = 0, 1, \dots, 2m$$
$$v_l = \sum_{i=0}^{n} x_i^l y_i,\ l = 0, 1, \dots, m$$

οι ως άνω εξισώσεις ισοδυναμούν με το ακόλουθο $(m+1)\times(m+1)$ γραμμικό σύστημα με αγνώστους τους συντελεστές $a_i,\ i = 0, 1, \dots, m$ του βέλτιστου πολυωνύμου προσέγγισης

$$\begin{aligned} s_0 a_0 + s_1 a_1 + \dots + s_m a_m &= v_0 \\ s_1 a_0 + s_2 a_1 + \dots + s_{m+1} a_m &= v_1 \\ &\dots \\ s_m a_0 + s_{m+1} a_1 + \dots + s_{2m} a_m &= v_m \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα $S\tilde{a} = \tilde{v}$, όπου:

$$S = \begin{bmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_m \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_m & s_{m+1} & \dots & s_{2m} \end{bmatrix},\ \tilde{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix},\ \tilde{v} = \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}.$$

Το ως άνω σύστημα ονομάζεται κανονικό σύστημα ή σύστημα του Gram.

Θα δείξουμε πως το ως άνω σύστημα έχει μοναδική λύση η οποία ελαχιστοποιεί την ποσότητα E. Τότε θα έχουμε βρει το βέλτιστο πολυώνυμο προσέγγισης βαθμού m και η μορφή του θα προκύψει από την εύρεση των σταθερών $a_i,\ i = 0, 1, \dots, m$ μέσω της επίλυσης του κανονικού συστήματος.

Ορίζω τον πίνακα $X \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(m+1)}$ και το διάνυσμα $\tilde{y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ ως:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^m \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^m \end{bmatrix}, \ \tilde{y} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},$$

οπότε $S = X^t X$ και $\tilde{v} = X^t \tilde{y}$.

Για να δείξουμε ότι το κανονικό σύστημα έχει μοναδική λύση αρκεί να δείξουμε ότι το αντίστοιχο ομογενές σύστημα $S\tilde{a} = \tilde{0}$ έχει μοναδική λύση την μηδενική.

Υποθέτουμε ότι υπάρχει λύση του ομογενούς συστήματος τέτοια ώστε $\tilde{a} \neq \tilde{0}$. Τότε:

$$\begin{gathered} S\tilde{a} = \tilde{0} \Leftrightarrow \tilde{a}^t S\tilde{a} = \tilde{0} \Leftrightarrow a^t(X^t X)\tilde{a} = \tilde{0} \Leftrightarrow \\ (X\tilde{a})^t(Xa) = 0 \Leftrightarrow \|X\tilde{a}\|_2^2 = 0 \Leftrightarrow X\tilde{a} = \tilde{0}. \end{gathered}$$

Χρησιμοποιώντας στην τελευταία σχέση τις αναλυτικές εκφράσεις για τον πίνακα X και το διάνυσμα $\tilde{a}$ καταλήγουμε στις $n+1$ σχέσεις:

$$p_m^*(x_i) = a_0 + a_1 x_i + \cdots + a_m x_i^m = 0, \ i = 0, 1, \dots, n.$$

Δηλαδή το $p_m^*(x)$ έχει $n+1$ ρίζες. Όμως $m < n$. Επομένως το $p_m^*(x) \equiv 0$ που σημαίνει $a_i = 0$, $i = 0, 1, \dots, m \Rightarrow \tilde{a} = \tilde{0}$. Άτοπο.

Συνεπώς το σύστημα έχει μοναδική λύση κι επομένως η μοναδική λύση του συστήματος είναι: $\tilde{a} = S^{-1}\tilde{v}$.

Θα δείξουμε πως η μοναδική λύση $\tilde{a} = S^{-1}\tilde{v}$ ελαχιστοποιεί την ποσότητα E. Αυτή η ιδιότητα του βέλτιστου πολυωνύμου προσέγγισης ονομάζεται ιδιότητα ελάχιστων τετραγώνων.

$$\begin{aligned} E &= \|X\tilde{a} - y\|_2^2 = (X\tilde{a} - y)^t(X\tilde{a} - \tilde{y}) \\ &= (\tilde{a}^t X^t - y^t)(X\tilde{a} - \tilde{y}) \\ &= a^t X^t X a - a^t X^t y - y^t X a + y^t y \\ &= a^t S a - a^t v - v^t a + y^t y \\ &= (a^t S a - a^t v - v^t a + v^t S^{-1} v) - v^t S^{-1} v + y^t y \\ &= E_1 + y^t y - v^t S^{-1} v. \end{aligned}$$

Επειδή η ποσότητα $y^t y - v^t S^{-1} v$ είναι ανεξάρτητη του $\tilde{a}$ και μπορεί να υπολογιστεί από τα δεδομένα μας, αν αποδεικνύαμε πως $E_1 > 0$, για να πετύχουμε την ελαχιστοποίηση του E αρκεί να πετύχουμε την ελαχιστοποίηση του E_1. Αλλά:

$$\begin{aligned}
E_1 &= (\tilde{a}^t S - \tilde{v}^t)\tilde{a} - (\tilde{a}^t - \tilde{v}^t S^{-1})v \\
&= (\tilde{a}^t S - \tilde{v}^t)\tilde{a} - (\tilde{a}^t S - \tilde{v}^t)S^{-1}\tilde{v} \\
&= (\tilde{a}^t S - \tilde{v}^t)(\tilde{a} - S^{-1}\tilde{v}) = (a^t - v^t S^{-1})S(a - S^{-1}v) \\
&= (a - S^{-1}v)^t X^t X(a - S^{-1}v) \\
&= [X(a - S^{-1}v)]^t [X(a - S^{-1}v)] = \|X(\tilde{a} - S^{-1}\tilde{v}\|_2^2 \geq 0,
\end{aligned}$$

αφού S συμμετρικός ($S = S^T$) $\Leftrightarrow (S^{-1})^T = (S^T)^{-1}$. Άρα $E_1 \geq 0$. Όμως

$$\begin{aligned}
\min E_1 = 0 &\Leftrightarrow \|X(\tilde{a} - S^{-1}v)\|_2^2 = 0 \\
\Leftrightarrow X(\tilde{a} - S^{-1}\tilde{v}) = 0 &\Leftrightarrow \tilde{a} - S^{-1}\tilde{v} = 0 \Leftrightarrow \tilde{a} = S^{-1}\tilde{v}.
\end{aligned}$$

3.2 Συνεχές πρόβλημα

Έστω $f \in C[a,b]$ και $p_m^*(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ το βέλτιστο πολυώνυμο προσέγγισης βαθμού n, με a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ πραγματικούς προσδιορίσιμους συντελεστές.

Θεωρώ $\{p_i^\perp\}_{i=0}^n$ ορθοκανονικά πολυώνυμα στο $[a,b]$ και συνάρτηση βάρους $w(x) = 1$. Τότε το βέλτιστο πολυώνυμο προσέγγισης γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των ορθοκανονικών πολυωνύμων $p_i^\perp(x)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, δηλαδή:

$$p_n^*(x) = \beta_0 p_0^\perp(x) + \cdots + \beta_n p_n^\perp(x) = \sum_{i=0}^n \beta_i p_i^\perp(x)$$

όπου οι συντελεστές b_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ ορίζονται μονοσήμαντα από τους συντελεστές a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$.

Όπως και στην διακριτή περίπτωση αρκεί να ελαχιστοποιήσουμε την ποσότητα:

$$\begin{aligned}
&E = \|\epsilon(x)\|_2^2 = \int_a^b \left[\sum_{i=0}^n \beta_i p_i^\perp(x) - f(x)\right]^2 dx \\
&\Leftrightarrow \frac{\partial E}{\partial \beta_j} = 2\int_a^b \left[\sum_{i=0}^n \beta_i p_i^\perp(x) - f(x)\right] p_j^\perp(x)dx = 0,\ j = 0, 1, \ldots, n \\
&\Leftrightarrow \sum_{i=0}^n \beta_i \int_a^b p_i^\perp(x) p_j^\perp(x)dx = \int_a^b f(x) p_j^\perp(x)dx,\ j = 0, 1, \ldots, n.
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\beta_j = \int_a^b f(x)p_j^{\perp}(x)dx = \frac{< p_j^{\perp}, f >}{< p_j^{\perp}, p_j^{\perp} >},\ j = 0, 1, \ldots, n$$

όπου η προτελευταία ισότητα προέκυψε επειδή τα $p_j^{\perp}$, $j = 0, 1, \ldots n$ είναι ορθοκανονικά πολυώνυμα.

Οι συντελεστές β_j, $j = 0, 1, \ldots, m$ που βρήκαμε με αυτόν τον τρόπο ονομάζονται <u>συντελεστές Fourier</u>, και έτσι προσδιορίσαμε το βέλτιστο πολυώνυμο προσέγγισης.

Για να βεβαιωθούμε πως όντως πρόκειται για ελάχιστο θα πρέπει να εξετάσουμε αν ο Εσσιανός πίνακας της $E(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ είναι θετικά ορισμένος.

Υπολογίσαμε ήδη ότι:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial \beta_j} &= 2\int_a^b \left[\sum_{i=0}^{n} \beta_i p_i^{\perp}(x) - f(x)\right] p_j^{\perp}(x)dx \\
&= 2\int_a^b \sum_{i=0}^{n} \beta_i p_i^{\perp} p_i^{\perp}(x) p_j^{\perp}(x)dx - 2\int_a^b f(x)p_j^{\perp}(x)dx \\
&= 2\int_a^b \beta_j p_j(x)p_j(x)dx - 2 < f, p_j > \\
&= 2\beta_j < p_j, p_j > -2 < f, p_j >,\ j = 0, 1, \ldots, n.
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \beta_j \partial \beta_i} = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & i \neq j \\ 2\|p_j(x)\|_2^2, & i = j \end{array} \right\},$$

δηλαδή,

$$H_{E(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)} = \begin{bmatrix} 2\|p_0^{\perp}(x)\|_2^2 & & & \\ & 2\|p_1^{\perp}(x)\|_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 2\|p_n^{\perp}(x)\|_2^2 \end{bmatrix}.$$

Επομένως ο Εσσιανός είναι διαγώνιος με στοιχεία της κυρίας διαγωνίου τα $2\|p_j(x)\|_2^2$ για $j = 0, 1, \ldots, n$ τα οποία είναι ποσότητες θετικές και ταυτόχρονα αποτελούν τις ιδιοτιμές του πίνακα (αφού είναι διαγώνιος). Επομένως ο Εσσιανός είναι θετικά ορισμένος και όντως οι συντελεστές Fourier προσδιορίζουν το βέλτιστο πολυώνυμο με χρήση της νόρμας $L2$.

<u>Μοναδικότητα</u>

Έστω ότι υπάρχει ένα άλλο πολυώνυμο βαθμού το πολύ n

$$p_n^*(x) = \beta_0' p_0^\perp(x) + \ldots \beta_n' p_n^\perp(x) = \sum_{i=0}^{n} \beta_i' p_i^\perp(x)$$

διαφορετικό από το βέλτιστο πολυώνυμο προσέγγισης $p_n^*(x)$ το οποίο ελαχιστοποιεί κι αυτό την ποσότητα E. Τότε:

$$\begin{aligned} E &= \int_a^b [p_n'(x) - f(x)]^2 dx = \int_a^b [p_n'(x) - p_n^*(x) + p_n^*(x) - f(x)]^2 dx \\ &= \int_a^b [p_n'(x) - p_n^*(x)]^2 dx + 2\int_a^b [p_n'(x) - p_n^*(x)][p_n^*(x) - f(x)] dx \\ &+ \int_a^b [p_n^*(x) - f(x)]^2 dx. \end{aligned}$$

Θέτω:

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b [p_n'(x) - p_n^*(x)]^2 dx, \\ B &= \int_a^b [p_n'(x) - p_n^*(x)][p_n^*(x) - f(x)] dx \end{aligned}$$

κι επομένως η ως άνω ισότητα γράφεται:

$$\begin{aligned} & A + 2B + E \\ \Leftrightarrow \ & A + 2B = 0. \end{aligned}$$

Όμως:

$$\begin{aligned} B &= \int_a^b [p_m'(x) - p_m^*(x)][p_m^*(x) - f(x)] dx \\ &= \int_a^b \left[\sum_{i=0}^{m} (\beta_i' - \beta_i) p_i^\perp(x) [p_m^*(x) - f(x)] \right] dx \\ &= \int_a^b \left[\sum_{i=0}^{m} (\beta_i' - \beta_i) [p_m^*(x) - f(x)] \right] p_i(x) dx = 0. \end{aligned}$$

Οπότε:

$$\begin{aligned} A = 0 \ &\Leftrightarrow \int_a^b [p_m'(x) - p_m^*(x)]^2 dx = 0 \\ &\Leftrightarrow p_m'(x) = p_m^*(x). \end{aligned}$$

3.3 Μελέτη συνάρτησης σφάλματος

Στην προηγούμενη παράγραφο προσδιορίσαμε τους συντελεστές β_j, $j = 0, 1, \ldots, n$ του πολυωνύμου με το οποίο θέλουμε να προσεγγίσουμε βέλτιστα την συνάρτηση $f \in C[a, b]$ όταν χρησιμοποιούμε τη νόρμα $L2$ και βρίσκουμε πως αυτοί πρέπει να ισούνται με τους συντελεστές Fourier χρησιμοποιώντας το κριτήριο της $1^{\eta\varsigma}$ και $2^{\eta\varsigma}$ παραγώγου.

Τώρα θα μελετήσουμε αυτόνομα την συνάρτηση σφάλματος χωρίς την επιπλέον υπόθεση της διαφορισιμότητας.

Έστω λοιπόν τα ορθοκανονικά πολυώνυμα $\{p_i^\perp\}_{i=0}^n$ στο $[a, b]$. Τότε:

$$\begin{aligned}
\|\epsilon(x)\|_2^2 &= \int_a^b \left[\sum_{i=0}^n \beta_i p_i^\perp(x) - f(x)\right]^2 dx \\
&= \int_a^b \left(\sum_{i=0}^n \beta_i p_i^\perp(x)\right)^2 - 2\int_a^b f(x) \sum_{i=0}^n \beta_i p_i^\perp(x) dx + \int_a^b f^2(x) dx \\
&= \int_a^b f^2(x) dx - 2\sum_{i=0}^n \beta_i \int_a^b f(x) p_i(x) dx \\
&+ \int_a^b \left[\sum_{i=0}^n \beta_i^2 (p_i^\perp)^2 + 2\sum_{j=0}^n \beta_i p_i^\perp(x) \beta_j p_j^\perp(x)\right] dx.
\end{aligned}$$

Θέτουμε $F_i = \displaystyle\int_a^b f(x) p_i(x) dx$ και ακολούθως παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
\|\epsilon(x)\|_2^2 &= \int_a^b f^2(x) dx - 2\sum_{i=0}^n \beta_i F_i + \int_a^b \beta_i^2 dx \\
&= \int_a^b f^2(x) dx - 2\sum_{i=0}^n \beta_i F_i + \int_a^b \beta_i^2 dx + \sum_{i=0}^n F_i^2 - \sum_{i=0}^n F_i^2 \\
&= \int_a^b f^2(x) dx - \sum_{i=0}^n F_i^2 + \sum_{i=0}^n (F_i - \beta_i)^2.
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\|f - p\|_2 = \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx - \sum_{i=0}^n F_i^2(x) + \sum_{i=0}^n (F_i - \beta_i)^2}.$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα:

1) Η βέλτιστη προσέγγιση είναι όντως η:

$$p_n^*(x) = \sum_{i=0}^{n} F_i p_i^{\perp}(x).$$

2) Είναι μοναδική μιας και το σφάλμα ελαχιστοποιείται μόνον όταν $\beta_i = F_i$.

3) Ισχύει η ανισότητα Bessel:

$$\int_a^b f^2(x)dx \geq \sum_{i=0}^{n} F_i^2.$$

4) Από το θεώρημα Weierstrass και σχέσης της νόρμας $L2$ με τη νόρμα Chebyshev προκύπτει πως η ασυμπτωτική συμπεριφορά της συνάρτησης σφάλματος με χρήση της νόρμας $L2$ είναι: $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - p_n^*\| = 0$.

   Επομένως για το βέλτιστο πολυώνυμο προσέγγισης (δηλαδή αυτό με $\beta_i = F_i$) ισχύει πως: $\lim_{n\to\infty} \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx - \sum_{i=0}^{n} F_i^2} = 0$, απ'οπου προκύπτει η ταυτότητα Parseval η οποία αποτελεί την γενίκευση του Πυθαγόρειου θεωρήματος σε απειροδιάστατους χώρους:

$$\int_a^b f^2(x)dx = \sum_{i=0}^{\infty} F_i^2(x).$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ ΝΟΡΜΑΣ CHEBYSHEV

4.1 Η ιδιότητα των ίσων σφαλμάτων

Όπως αναφέραμε νωρίτερα όταν χρησιμοποιούμε τη $\|\cdot\|_\infty$ για την εύρεση του βέλτιστου πολυωνύμου, αυτό ονομάζεται min-max πολυώνυμο. Στην παρούσα ενότητα θα θεμελιώσουμε το γεγονός πως η μοναδικότητα του min-max πολυωνύμου και η ισχύς της ιδιότητας των ίσων σφαλμάτων για το min-max πολυώνυμο είναι ισοδύναμα.

Λήμμα 4.1. *Έστω $f \in C[a,b]$ και p_n^* η καλύτερη προσέγγιση για την f από τον χώρο Π_n. Τότε υπάρχουν τουλάχιστον δύο διαφορετικά σημεία $x_1, x_2 \in C[a,b]$: $f(x_1) - p_n^*(x_1) = -[f(x_2) - p_n^*(x_2)] = \|f - p_n^*\|$.*

Απόδειξη. Έστω $E = E_n(f) = \|f - p_n^*\| = \max\limits_{a \le x \le b} |f(x) - p_n^*(x)|$.

Έστω πως δεν ισχύει το συμπέρασμα του λήμματος.

Τότε υποθέτουμε πως $f(x_1) - p_n^*(x_1) = E$ για κάποιο x_1 αλλά

$$e = \min_{a \le x \le b} (f(x) - p_n^*(x)) > -E.$$

Έτσι $E + e \neq 0$ κι έτσι $q = p_n^* + \frac{E+e}{2} \in \Pi_n$ με $q \neq p_n^*$.

Ισχυριζόμαστε πως το q είναι καλύτερη προσέγγιση για την f από ότι το p_n^*

το οποίο είναι άτοπο. Πράγματι:

$$E - \left(\frac{E+e}{2}\right) \geq f(x) - p_n^*(x) - \left(\frac{E+e}{2}\right) \geq e - \left(\frac{E+e}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{E-e}{2} \leq f(x) - q(x) \leq -\left(\frac{E-e}{2}\right) \Leftrightarrow \|f-q\| < \frac{E-e}{2} < E = \|f - p_n^*\|.$$

□

Για τη γενική περίπτωση θα επαναλάβουμε τις ίδιες σκέψεις με το λήμμα επαγωγικά. Χρησιμοποιούμε τον εξής επιπλέον συμβολισμό:

Δοθείσης $g \in C[a,b]$, λέμε πως το $x \in [a,b]$ είναι ένα $(+)$ σημείο (αντίστοιχα ένα $(-)$ σημείο) για την g αν $g(x) = \|g\|$ (αντίστοιχα $g(x) = -\|g\|$). Ένα σύνολο διακεκριμένων σημείων $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$ θα λέγεται σύνολο εναλασσόμενων σημείων για την g, αν τα x_i είναι εναλασσόμενα $(+)$ σημεία και $(-)$ σημεία, δηλαδή αν $\begin{cases} |g(x_i)| = \|g\|, & i = 0,1,\ldots,n \\ g(x_i) = -g(x_{i-1}), & i = 1,2,\ldots,n. \end{cases}$

Θεώρημα 4.2. *(Ιδιότητα ίσων σφαλμάτων) Έστω $f \in C[a,b]$ και p_n^* είναι η καλύτερη προσέγγιση της f στο Π_n. Τότε υπάρχει ένα σύνολο εναλασσόμενων σημείων για την $f - p_n^*$ που αποτελείται από τουλάχιστον $n+2$ στοιχεία.*

Απόδειξη. Αν $f \in \Pi_n \Rightarrow \|f - p\| = 0$ και δεν υπάρχει κάτι να δείξουμε.

Έτσι υποθέτουμε πως $f \notin \Pi_n$ και τότε $E = E_n(f) = \|f - p_n^*\| > 0$.

Θεωρούμε την ομοιόμορφα συνεχή συνάρτηση $\Phi = f - p_n^*$.

Παίρνουμε διαμέριση του $[a,b]$, $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ έτσι ώστε $|\Phi(x) - \Phi(y)| < \frac{\epsilon}{2}$ $\forall x,y \in [t_i, t_{i+1}]$, $i = 0,1,\ldots,k-1$.

Αν το $[t_i, t_{i+1}]$ περιέχει ένα $(+)$ σημείο για την $\Phi = f - p_n^*$, τότε η $\Phi > 0$ $\forall x \in [t_i, t_{i+1}]$. Αντίστοιχα αν περιέχει ένα $(-)$ για την Φ. Συνεπώς κανένα διάστημα $[t_i, t_{i+1}]$ <u>δεν</u> μπορεί να περιέχει ταυτόχρονα $(+)$ και $(-)$ σημεία.

Ονομάζουμε το $[t_i, t_{i+1}]$ ως $(+)$ διάστημα (αντίστοιχα $(-)$ διάστημα) αν περιέχει ένα $(+)$ σημείο (αντίστοιχα $(-)$ σημείο) της $\Phi = f - p_n^*$. Ένα $(+)$ διάστημα κι ένα $(-)$ διάστημα θα είναι αυστηρά διαχωρισμένα, δηλαδή δεν μπορεί ούτε να ακουμπήσουν (αφού θα υπάρχει κάποιο διάστημα που περιέχει το μηδέν για την Φ).

Ξαναονομάζουμε τα $(+)$ και $(-)$ διαστήματα από τα αριστερά προς τα δεξιά, αγνοώντας τα διαστήματα που δεν ανήκουν σε καμία από τις δύο κατηγορίες και χωρίς βλάβη της γενικότητας το πρώτο διάστημα είναι ένα (+) διάστημα:

$$\begin{array}{rl} I_1, I_2, \dots I_{k_1} & (+) \text{ διαστήματα} \\ I_{k_1+1}, I_{k_1+2}, \dots, I_{k_2} & (-) \text{ διαστήματα} \\ \dots & \dots \\ I_{k_{m-1}+1}, I_{k_{m-1}+2}, \dots, I_{k_m} & (-1)^{m-1} \text{ διαστήματα.} \end{array}$$

Με S θα συμβολίσουμε την ένωση όλων των προσημασμένων διαστημάτων, $S = \cup_{j=1}^{k_m} I_j$ και με N την ένωση όλων των υπολοίπων. Δηλαδή τα S, N είναι συμπαγή σύνολα με $S \cup N = [a, b]$.

Παρόλο που μπορεί $S \cap N \neq \emptyset$, όμως $S^\circ \cap N^\circ = \emptyset$.

Ο στόχος μας είναι να δείξουμε πως $m \geq n + 2$.

Υποθέτουμε πως $m < n + 2$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο.

Αφού τα (+) διαστήματα είναι αυστηρά διαχωρισμένα από τα (−) διαστήματα, μπορούμε να βρούμε σημεία $z_1, z_2, \dots, z_{m-1} \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \max I_{k_1} < z_1 < \min I_{k_1+1} \\ \max I_{k_2} < z_2 < \min I_{k_2+1} \\ \dots \\ \max I_{k_m-1} < z_{m-1} < \min I_{k_{m-1}+1} \end{aligned}$$

Κατασκευάζουμε το πολυώνυμο:

$$q(x) = (z_1 - x)(z_2 - x) \cdots (z_{m-1} - x) \in \Pi_n \text{ αφού } m - 1 \leq n.$$

Θα δείξουμε ότι το $p_n^* + \lambda q \in \Pi_n$ είναι καλύτερη προσέγγιση για την f από το p_n^* το οποίο είναι άτοπο.

Ισχυριζόμαστε πως τα q και $f - p_n^*$ έχουν το ίδιο πρόσημο.

Πράγματι το q δεν έχει μηδενικά σε κανένα από τα (±) διαστήματα, επομένως διατηρεί πρόσημο σε αυτά. Επομένως: $q > 0$ στα $I_1, \dots, I_{k_1}$ αφού όλα τα $z_j - x > 0$ σε όλα αυτά τα διαστήματα και $q < 0$ στα $I_{k_1+1}, \dots, I_{k_2}$ αφού όλα τα $z_j - x < 0$ ενώ $z_j - x > 0$ για $j > 1$ σε όλα αυτά τα διαστήματα κ.ο.κ.

Τώρα θα βρούμε κατάλληλο $\lambda \in \mathbb{R}$. Έστω $e = \max\limits_{x \in \mathbb{N}} |f(x) - p_n^*(x)|$. Τότε $e < E$.

Επιλέγουμε τότε το $\lambda > 0$ έτσι ώστε $\lambda \|q\| < \min\{E - e, \frac{E}{2}\}$. Τότε το $p_n^* + \lambda q$ είναι καλύτερη προσέγγιση για την f από το p. Πράγματι:

- <u>αν $x \in \mathbb{N}$</u>

$$|f(x) - (p_n^*(x) + \lambda q(x))| \leq |f(x) - p_n^*(x)| + \lambda |q(x)| \leq e + \lambda \|q\| < E.$$

- <u>αν $x \notin \mathbb{N}$</u>

  Τότε το x ανήκει σε ένα (+) ή (−) διάστημα. Γνωρίζουμε πως $|f(x) - p_n^*(x)| > \frac{E}{2} > \lambda\|q\|$ κι επομένως τα $f(x) - p_n^*(x)$ και $\lambda q(x)$ έχουν το ίδιο πρόσημο.

  Επομένως

  $$|f(x) - (p_n^*(x) + \lambda q(x))| \leq |f(x) - p_n^*(x)| - \lambda|q(x)| \leq E - \lambda \min_{x \in S} |q(x)| < E$$

  επειδή το q δεν μηδενίζεται στο S.

Το ως άνω έρχεται σε αντίθεση με το γεγονός πως το p_n^* είναι η βέλτιστη προσέγγιση για την f στο Π_n. □

<u>ΣΧΟΛΙΑ</u>

(1) Ο αριθμός $n + 2$ ισούται με $1 + \dim \Pi_n$.

(2) Αν το $f - p_n^*$ αλλάζει πρόσημο $n + 2$ φορές, τότε το $f - p_n^*$ πρέπει να έχει τουλάχιστον $n + 1$ ρίζες. Επομένως το p_n^* παρεμβάλλει την f σε $n + 1$ σημεία.

Τώρα θα δείξουμε την μοναδικότητα του πολυωνύμου βέλτιστης προσέγγισης. Μιας και η νόρμα Chebyshev στον $C[a, b]$ δεν ειναι αυστηρά κυρτή, αυτό είναι ένα απρόσμενο αλλά καλοδεχούμενο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 4.3. *Έστω $f \in C[a, b]$. Τότε το πολυώνυμο βέλτιστης προσέγγισης της f από τον χώρο Π_n είναι μοναδικό.*

Απόδειξη. Έστω $p_n^*, q \in \Pi_n : \|f - p_n^*\| = \|f - q\| = E_n(f) = E$. Τότε και το $r = \frac{p+q}{2} \in \Pi_n$ είναι τέτοιο ώστε $\|f - r\| = E$.

Τότε από το Θεώρημα 4.2 και το $f - r$ έχει σύνολο εναλασσόμενων σημείων $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$ που περιέχει $n + 2$ στοιχεία.

Επομένως

$$\forall i : (f - p_n^*)(x_i) + (f - q)(x_i) = \pm 2E$$

ενώ

$$-E \leq (f - p_n^*)(x_i), (f - q)(x_i) \leq E.$$

Από αυτές τις δύο σχέσεις προκύπτει ότι:

$$(f - p_n^*)(x_i) = (f - q)(x_i) = \pm E \ \forall i.$$

Δηλαδή τα $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$ είναι σύνολο εναλασσόμενων σημείων και για το $f-p_n^*$ και για το $f-q$. Πιο συγκεκριμένα, το πολυώνυμο $q-p_n^* = (f-p_n^*)-(f-q)$ έχει $n+2$ ρίζες. Επειδή $q - p_n^* \in \Pi_n$ όμως σημαίνει $q - p_n^* \equiv 0 \Leftrightarrow q = p_n^*$. $\square$

Θεώρημα 4.4. *Έστω $f \in C[a,b]$ και $p \in \Pi_n$. Αν $f - p$ έχει σύνολο εναλασσόμενων σημείων που περιέχει τουλάχιστον $n+2$ στοιχεία, τότε το p είναι το βέλτιστο πολυώνυμο προσέγγισης της f στον Π_n.*

Απόδειξη. Έστω $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$ ένα σύνολο εναλασσόμενων σημείων για το $f - p$ κι έστω $q \in \Pi_n$ είναι μία καλύτερη προσέγγιση της f από ότι είναι το p. Δηλαδή: $\|f - q\| < \|f - p\|$. Τότε:

$$|f(x_i) - p(x_i)| = \|f - p\| > \|f - q\| \geq |f(x_i) - q(x_i)| \ \forall i = 0, 1, \ldots, n+1.$$

Όμως επειδή $|a| > |b|$, έχουμε ότι $a(a-b) > 0$.

Επομένως το $q - p = (f - p) - (f - q)$ αλλάζει πρόσημο $n+2$ φορές αφού το ίδιο κάνει το $f - p$. Τότε όμως το $q - p$ θα έχει τουλάχιστον $n+1$ ρίζες. Επειδή $q - p \in \Pi_n$ συμπεραίνουμε $q \equiv p$. Άτοπο.

Επομένως το p είναι η βέλτιστη προσέγγιση της f στον Π_n. $\square$

4.2 Διακριτό πρόβλημα

Έστω y_i, $i = 0, 1, \ldots, n+1$ το πλήθος των εμπειρικών δεδομένων, δηλαδή οι τιμές της συνάρτησης f που αντιστοιχούν στα σημεία x_i, $i = 0, 1, \ldots, n+1$.

Αν $p_n^*(x)$ είναι το βέλτιστο πολυώνυμο προσέγγισης που προσαρμόζεται στα παραπάνω δεδομένα και ϵ είναι το διάνυσμα σφάλμα με συνιστώσες $\epsilon_i = \epsilon(x_i) = p_n^*(x_i) - y_i$, $i = 0, 1, \ldots, n+1$, ο σκοπός είναι η ελαχιστοποίηση της μέγιστης νόρμας $\|\epsilon\|_\infty$ στα σημεία x_i, $i = 0, 1, \ldots, n+1$ ή ισοδύναμα $\min\left[\max_i |\epsilon(x_i)|\right]$, $i = 0, 1, \ldots, n+1$.

Από το ως άνω προκύπτει η ονομασία του βέλτιστου πολυωνύμου προσέγγισης στην ομοιόμορφη προσέγγιση ως min-max πολυώνυμο.

Θεώρημα 4.5. *Αν η $f \in C[a,b]$ ορίζεται στο διατεταγμένο σύνολο σημείων x_i, $i = 0, 1, \ldots, n+1$, τότε υπάρχει μοναδικό πολυώνυμο $p_n^* \in \Pi_n$ που προσεγγίζει την συνάρτηση f στα συγκεκριμένα σημεία ομοιόμορφα.*

Επιπλέον, αν

$$E = E_n(f) = \max_{x_i} |\epsilon(x_i)| = \max_{x_i} |p_n^*(x_i) - f(x_i)|, \ i = 0, 1, \ldots, n+1,$$

τότε

$$|\epsilon(x_i)| = E, \ i = 0, 1, \ldots, n+1$$
$$\epsilon(x_i) = -\epsilon(x_{i+1}), \ i = 0, 1, \ldots, n.$$

Απόδειξη. Έστω τυχαίο $p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_n x^n \in \Pi_n$ και

$$M = \max_{x_i} |p_n(x_i) - f(x_i)|, \ i = 0, 1, \ldots, n+1.$$

Αν $M = 0$, το ζητούμενο min-max πολυώνυμο θα ταυτίζεται με το πολυώνυμο παρεμβολής στα συγκεκριμένα σημεία, θα είναι μοναδικό και $E = 0$.

Για $M > 0$:

Ορίζουμε τα u_i ως:

$$p_n(x_i) - f(x_i) = (-1)^i u_i M, \ i = 0, 1, \ldots, n+1.$$

Από τον ορισμό του M και του u_i προκύπτει $|u_i| \leq 1$, $i = 0, 1, \ldots, n+1$.

Θεωρώντας γνωστές τις ποσότητες u_i, προκύπτει ένα γραμμικό σύστημα $(n+2) \times (n+2)$ με αγνώστους τους συντελεστές του πολυωνύμου p_n, a_j, $j = 0, 1, \ldots, n$ και το M.

$$\begin{aligned}
-u_0 M + a_0 + x_0 u_1 + x_0^2 a_2 + \cdots + x_0^n a_n &= f_0 \\
u_1 M + a_0 + x_1 a_1 + x_1^2 a_2 + \cdots + x_1^n a_n &= f_1 \\
&\cdots \\
(-1)^{n+1} u_{n+1} M + a_0 + x_{n+1} a_1 + x_{n+1}^2 a_2 + \cdots + x_{n+1}^n a_n &= f_{n+1}
\end{aligned}$$

ή

$$\begin{bmatrix} -u_0 & 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ u_1 & 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots x_1^n & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n+1} u^{n+1} & 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \ldots & x_{n+1}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \\ a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{n+1} \end{bmatrix}.$$

Η ορίζουσα του συστήματος είναι $D = -u_0 D_0 - u_1 D_1 - \cdots - u_{n+1} D_{n+1}$, όπου D_i, $i = 0, 1, \ldots, n+1$ οι ελάσσονες ορίζουσες των στοιχείων της πρώτης στήλης.

Οι D_i είναι ορίζουσες Vandermonde και μάλιστα $D_i > 0$. $i = 0, 1, \ldots, n+1$ αφού τα σημεία x_i, $i = 0, 1, \ldots, n+1$ είναι διατεταγμένα.

Από την μέθοδο Cramer προκύπτει:

$$M = \frac{D_0 f_0 - D_1 f_1 + \cdots + (-1)^{n+1} D_{n+1} f_{n+1}}{D}.$$

Επειδή $M > 0$, ο αριθμητής είναι διάφορος του μηδέν και για να βρούμε το min-max πολυώνυμο $p_n^*(x)$ αρκεί να προσδιορίσουμε τα u_i, $i = 0, 1, \ldots, n+1$ ώστε το M να γίνει ελάχιστο. Αυτό συμβαίνει αν μεγιστοποιήσουμε το $|D|$.

Επειδή: $|u_i| \leq 1$, $D_i > 0$, $i = 0, 1, \ldots, n+1$, έχουμε:

$$|D| = \left| \sum_{i=0}^{n+1} (-1) u_i D_i \right| \leq \sum_{i=0}^{n+1} |u_i||D_i| \leq \sum_{i=0}^{n+1} D_i.$$

Προφανώς η $|D|$ μεγιστοποιείται όταν $|u_i| = 1$ δηλαδή $u_i = 1$ ή $u_i = -1$. Και στις δύο περιπτώσεις η ορίζουσα D του γραμμικού συστήματος είναι διάφορη του μηδενός και το σύστημα έχει μοναδική λύση. Άρα το τυχαίο πολυώνυμο $p_n(x)$ που θεωρήσαμε στην αρχή της απόδειξης είναι το min-max πολυώνυμο $p_n^*(x)$ και είναι μοναδικό. Τότε:

$$E = |M| = \frac{|D_0 f_0 - D_1 f_1 + \cdots + (-1)^{n+1} D_{n+1} f_{n+1}|}{D_0 + D_1 + \cdots + D_{n+1}}.$$

Οπότε:

$$\begin{aligned} \epsilon(x_i) &= p_n^*(x_i) - f_i = (-1)^i M \text{ αν } u_i = 1 \\ \text{ή } \epsilon(x_i) &= p_n^*(x_i) - f_i = -(-1)^i M \text{ αν } u_i = -1. \end{aligned}$$

Σε κάθε περίπτωση:

$$\begin{aligned} |\epsilon(x_i)| = |M| = E \quad &, \quad i = 0, 1, \ldots, n+1 \\ \epsilon(x_i) = -\epsilon(x_{i+1}) \quad &, \quad i = 0, 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

□

4.3 Συνεχές πρόβλημα

Έστω $p_n^* \in \Pi_n$ με $p_n^*(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, όπου a_i, $i = 0, 1, \ldots n$ προσδιοριστέοι πραγματικοί συντελεστές, το βέλτιστο ή min-max πολυώνυμο που προσεγγίζει την $f \in C[a, b]$.

Ο προσδιορισμός του p_n^* επιτυγχάνεται κατά τα γνωστά με την ελαχιστοποίηση της ποσότητας:

$$E = \|\epsilon(x)\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |\epsilon(x)| = \max_{x\in[a,b]} |p_n^*(x) - f(x)|,$$

όπου $\epsilon(x)$ η συνάρτηση σφάλμα κατά την προσέγγιση.

Στην παράγραφο 4.1, είδαμε πως η ιδιότητα των ίσων σφαλμάτων για το min-max πολυώνυμο ισοδυναμεί με την μοναδικότητα του min-max πολυωνύμου.

Η διαφορά με την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων είναι πως δεν υπάρχει γενική μέθοδος για τον αναλυτικό προσδιορισμό του min-max πολυωνύμου εκτός ειδικών περιπτώσεων. Μία τέτοια περίπτωση είναι η εύρεση του min-max πολυωνύμου βαθμού το πολύ n όταν η συνάρτηση που προσεγγίζει την f είναι πολυώνυμο βαθμού ακριβώς $n+1$. Προς τούτο χρησιμοποιούμε τα πολυώνυμα Chebyshev.

4.3.1 Πολυώνυμα Chebyshev

Τα πολυώνυμα του Chebyshev $T_n(x)$, βαθμού n, $n \geq 0$ που ορίζονται στο διάστημα $[-1,1]$, δίνονται από τον τύπο:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)).$$

Θέτοντας $x = \cos\phi,\ 0 \leq \phi \leq \pi$ όπου $x \in [-1,1]$ έχουμε:

$$T_n(x) = \cos(n\phi).$$

Οπότε:

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) &= \cos(n+1)\phi + \cos(n-1)\phi \\ &= 2\cos(n\phi)\cos\phi = 2xT_n(x). \end{aligned}$$

Επομένως μεταξύ τριών διαδοχικών πολυωνύμων Chebyshev ισχύει η αναδρομική σχέση:

$$T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0,\ n = 1, 2, \ldots$$

Τα πρώτα πέντε πολυώνυμα Chebyshev είναι:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1 \end{aligned}$$

Παραθέτουμε κάποιες βασικές ιδιότητες των πολυωνύμων Chebyshev.

($C1$) Ο συντελεστής a_n του μεγιστοβάθμιου όρου ενός πολυωνύμου Chebyshev $T_n(x)$, βαθμού $n \geq 1$, ισούται με 2^{n-1} κι επιπλέον τα πολυώνυμα του Chebyshev, περιέχουν είτε μόνον άρτιες δυνάμεις του x, είτε μόνον περιττές δυνάμεις του x, ανάλογα αν είναι άρτιου ή περιττού βαθμού αντίστοιχα.

($C2$) Δύο διαφορετικά πολυώνυμα Chebyshev είναι ορθογώνια μεταξύ τους στο $[-1, 1]$ ως προς την συνάρτηση βάρους $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ δηλαδή

$$< T_m, T_n >= \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} T_m(x) T_n(x) dx = 0, \ m \neq n.$$

($C3$) Κάθε πολυώνυμο $Q_m(x)$, βαθμού m, $m < n$ είναι ορθογώνιο ως προς το πολυώνυμο Chebyshev $T_n(x)$, βαθμού n, οριζόμενο στο $[-1, 1]$, ως προς την συνάρτηση βάρους $w(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, δηλαδή:

$$< Q_m, T_n >= \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} Q_m(x) T_n(x) dx = 0, \ m < n.$$

($C4$) Αν $T_n(x)$ είναι το οποιοδήποτε πολυώνυμο του Chebyshev βαθμού n, θα ισχύει η σχέση:

$$< T_n, T_n >= \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} T_n^2(x) dx = \begin{cases} \pi, & n = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & n \neq 0. \end{cases}$$

($C5$) Οι ρίζες ενός πολυωνύμου $T_n(x)$ του Chebyshev, βαθμού n, $n \geq 1$, είναι πραγματικές, διακεκριμένες κι ανήκουν στο $(-1, 1)$, δίνονται από τις σχέσεις:

$$x_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n}, \ k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

($C6$) Min-max ιδιότητα

Από όλα τα πολυώνυμα $Q_m(x)$, βαθμού πρωτου μέχρι και n, με συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου την μονάδα, το πολυώνυμο $T_n(x)$ του Chebyshev, βαθμού n, επί τον παράγοντα $\frac{1}{2^{n-1}}$ έχει την μικρότερη μέγιστη απόλυτη τιμή στο $[-1, 1]$, δηλαδή:

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} \left| \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) \right| \leq \max_{-1 \leq x \leq 1} |Q_m(x)|, \ 1 \leq m \leq n.$$

4.3.2 Εύρεση min-max πολυωνύμου για πολυωνυμική συνάρτηση f βαθμού $n+1$

Εδώ θα μελετήσουμε την ειδική περίπτωση που η συνάρτηση f είναι πολυώνυμο βαθμού $n+1$ και μπορούμε να προσδιορίσουμε αναλυτικά το min-max πολυώνυμο βαθμού το πολύ n.

Θεώρημα 4.6. *Αν $p_{n+1}(x)$ πολυώνυμο, βαθμού $n+1$, με συντελεστή μεγιστοβαθμίου όρου την μονάδα και ορισμένο στο $[-1,1]$, το min-max πολυώνυμο βαθμού το πολύ m, που προσεγγίζει βέλτιστα το παραπάνω πολυώνυμο δίνεται από την έκφραση:*

$$p_n^*(x) = p_{n+1}(x) - \frac{1}{2^n} T_{n+1}(x).$$

Απόδειξη. Αν $p_n^*(x)$ το min-max πολυώνυμο βαθμού το πολύ n το οποίο προσεγγίζει το $p_{n+1}(x)$ στο $[-1,1]$ θα πρέπει το:

$$\max_{x\in[-1,1]} |p_n^*(x) - p_{n+1}(x)|$$

να γίνει ελάχιστο.

Από την ιδιότητα $(C6)$ των πολυωνύμων Chebyshev:

$$\max_{x\in[-1,1]} \left|\frac{1}{2^n} T_{n+1}(x)\right| \leq \max_{x\in[-1,1]} |Q_{n+1}(x)|, \; n \geq 0,$$

όπου $Q_{n+1}(x)$ οποιοδήποτε πολυώνυμο βαθμού $n+1$ με συντελεστή μεγιστοβαθμίου όρου την μονάδα.

Το $p_{n+1}(x) - p_n^*(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού $n+1$, με συντελεστή μεγιστοβαθμίου όρου την μονάδα κι επειδή θέλουμε την ελαχιστοποίηση της ποσότητας $\max\limits_{x\in[-1,1]} |p_{n+1}(x) - p_n^*(x)|$ θα έχουμε:

$$\frac{1}{2^n} T_{n+1}(x) = p_{n+1}(x) - p_n^*(x),$$

απ'οπου:

$$p_n^*(x) = p_{n+1}(x) - \frac{1}{2^n} T_{n+1}(x).$$

□

Θεώρημα 4.7. *Αν $p_{n+1}(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού $n+1$, με συντελεστή μεγιστοβαθμίου όρου το a_{n+1}, τότε το min-max πολυώνυμο, βαθμού το πολύ n,* *που προσεγγίζει βέλτιστα το πολυώνυμο στο διάστημα* $[-1,1]$, *δίνεται από την έκφραση:*

$$p_n^*(x) = p_{n+1}(x) - \frac{a_{n+1}}{2^n} T_{n+1}(x).$$

Απόδειξη. Αν $p_n^*(x)$ είναι το min-max πολυώνυμο, βαθμού το πολύ n, που προσεγγίζει το $p_{n+1}(x)$, θα πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε την ποσότητα:

$$\max_{x\in[-1,1]} |p_n^*(x) - p_{n+1}(x)| = |a_{n+1}| \max_{x\in[-1,1]} \left| \frac{1}{a_{n+1}} p_n^*(x) - \frac{1}{a_{n+1}} p_{n+1}(x) \right|.$$

Δηλαδή θέλουμε το πολυώνυμο $\frac{1}{a_{n+1}} p_n^*(x)$ να είναι το min-max πολυώνυμο που προσεγγίζει το $\frac{1}{a_{n+1}} p_{n+1}(x)$ το οποίο έχει συντελεστή μεγιστοβαθμίου όρου την μονάδα κι επομένως σύμφωνα με το Θεώρημα 4.6 κι αφού πολλαπλασιάσουμε με την σταθερά a_{n+1}, έχουμε το ζητούμενο. □

Θεώρημα 4.8. *Έστω* $p_{n+1}(x)$ *πολυώνυμο βαθμού* $n+1$, *με συντελεστή μεγιστοβαθμίου όρου το* a_{n+1}.

Αν $p_{n+1}(x) = \sum_{i=0}^{n+1} \beta_i T_i(x)$, *όπου* β_i, $i = 0, 1, \ldots, n+1$ *προσδιορίσιμες σταθερές, είναι η μονοσήμαντα ορισμένη έκφραση του* $p_{n+1}(x)$ *ως γραμμικού συνδυασμού των πολυωνύμων Chebyshev* $T_i(x)$, $i = 0, 1, \ldots, n+1$, *τότε η έκφραση* $\sum_{i=0}^{n} \beta_i T_i(x)$ *αποτελεί το min-max πολυώνυμο βαθμού το πολύ* n, *που προσεγγίζει το πολυώνυμο* $p_{n+1}(x)$ *στο* $[-1,1]$.

Απόδειξη. Από ιδιότητα $(C1)$ των πολυωνύμων Chebyshev γνωρίζουμε πως ο συντελεστής του μεγιστοβαθμίου όρου ενός πολυωνύμου Chebyshev $T_i(x)$ είναι 2^{i-1}.

Από την έκφραση του πολυωνύμου $p_{n+1}(x)$, βαθμού $n+1$, ως γραμμικού συνδυασμού πολυωνύμων Chebyshev είναι προφανές πως: $a_{n+1} = 2^n \beta_{n+1}$.

Από την ως άνω σχέση και το Θεώρημα 4.7, έχουμε ότι το min-max πολυώνυμο

$p_n^*(x)$ βαθμού το πολύ n, είναι:

$$\begin{aligned} p_n^*(x) &= p_{n+1}(x) - \frac{a_{n+1}}{2^n} T_{n+1}(x) \\ &= \sum_{i=0}^{n+1} \beta_i T_i(x) - \frac{2^n \beta_{n+1}}{2^n} T_{n+1}(x) \\ &= \sum_{i=0}^{n} \beta_i T_i(x). \end{aligned}$$

$\square$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΒΕΛΤΙΣΤΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΗΣ ΝΟΡΜΑΣ $L2$ ΚΑΙ ΤΗΣ ΝΟΡΜΑΣ CHEBYSHEV

5.1 Εισαγωγικά

Η βέλτιστη προσέγγιση συνάρτησης με ταυτόχρονη ελαχιστοποίηση της νόρμας $L2$ και της νόρμας Chebyshev υπάγεται στον ευρύτερο κλάδο της πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης (ΠΒ) που έχει ως αντικείμενο την μαθηματική βελτιστοποίηση προβλημάτων που περιέχουν περισσότερες από μία συναρτήσεις - στόχους (αντικειμενικές συναρτήσεις) οι οποίες πρέπει να βελτιστοποιηθούν ταυτόχρονα. Με την σειρά της η πολυκριτηριακή βελτιστοποίηση είναι κλάδος της πολυκριτηριακής λήψης αποφάσεων (ΠΛΑ) που ως αντικείμενο έχει την αξιολόγηση πολλαπλών (συχνά συγκρουόμενων) κριτηρίων στην επιστήμη της λήψης αποφάσεων. Όπως θα δούμε παρακάτω το πρόβλημα της βέλτιστης προσέγγισης συνάρτησης με ταυτόχρονη ελαχιστοποίηση τόσο της νόρμας $L2$ όσο και της νόρμας Chebyshev τελικά ανάγεται στην μελέτη ενός προβλήματος τετραγωνικού προγραμματισμού (quadratic programming). Θα δώσουμε κάποια βασικά στοιχεία από την πολυκριτηριακή λήψη αποφάσεων, την πολυκριτηριακή βελτιστοποίηση και τον τετραγωνικό προγραμματισμό πριν περάσουμε στην μελέτη και αλγοριθμική επίλυση του προβλήματος της βέλτιστης προσέγγισης συνάρτησης με ταυτόχρονη ελαχιστοποίηση της νόρμας $L2$ και της νόρμας Chebyshev.

5.2 Πολυκριτηριακή λήψη αποφάσεων (ΠΛΑ)

5.2.1 Εισαγωγικά

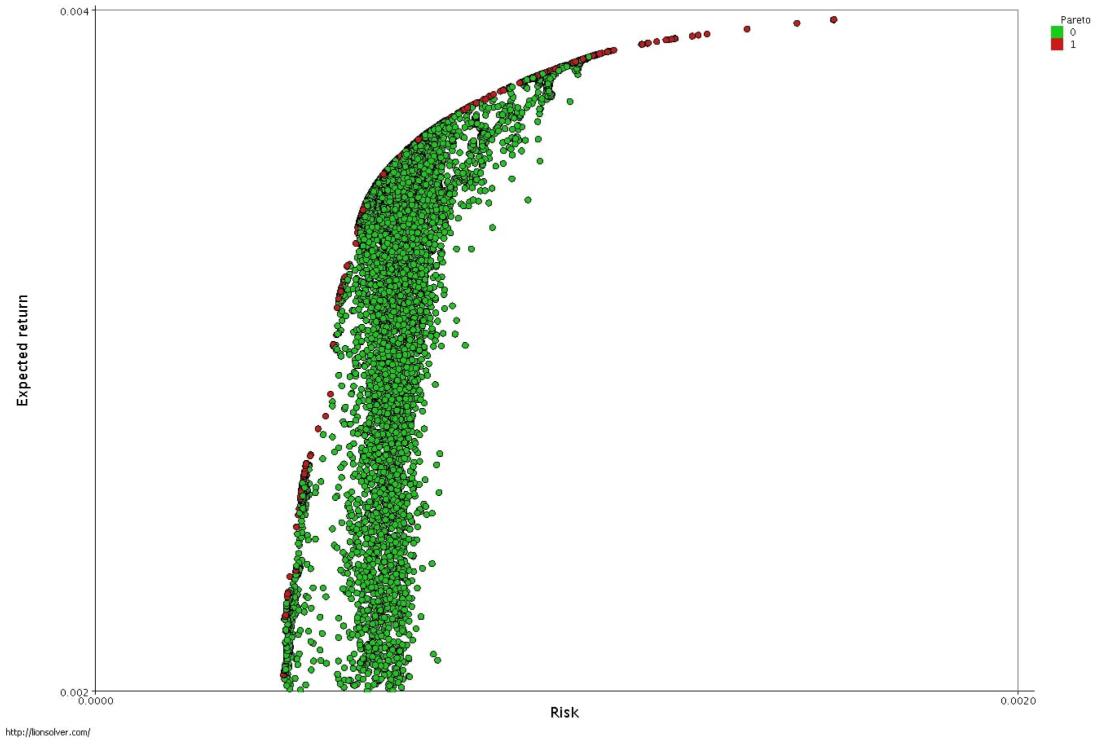
Ο κλάδος της ΠΛΑ είναι περιοχή της επιχειρησιακής έρευνας με αντικείμενο την αξιολόγηση πολλαπλών (συχνά αλληλοσυγκρουόμενων) κριτηρίων για την λήψη αποφάσεων τόσο την καθημερινή ζωή όσο και στις επιχειρήσεις, την κυβέρνηση, την ιατρική κ.α. Τα αλληλοσυγκρουόμενα κριτήρια είναι συχνά απαντώμενα όταν κάποιος αξιολογεί επιλογές: το κόστος ή η τιμή είναι συνήθως ένα από τα τυπικά κριτήρια και κάποιο μέτρο ποιότητας συνήθως αποτελεί ένα άλλο κριτήριο αλληλοσυγκρουόμενο με το κόστος.

Παράδειγμα 1

Στην αγορά αυτοκινήτου το κόστος, η άνεση, η ασφάλεια και η οικονομία στα καύσιμα μπορεί να είναι κάποια από τα κριτήρια που μπορεί να λάβουμε υπόψη. Σπάνια συμβαίνει το πιο φτηνό αυτοκίνητο να είναι και το άνετο και το πιο ασφαλές.

Παράδειγμα 2

Στη διαχείριση χαρτοφυλακίου ενδιαφερόμαστε να έχουμε υψηλές αποδόσεις ενώ ταυτόχρονα να έχουμε το ελάχιστο δυνατό ρίσκο. Συνήθως όμως οι μετοχές οι οποίες έχουν την δυνατότητα για υψηλές αποδόσεις, συνοδεύονται κι από υψηλό ρίσκο επένδυσης. Στο σχήμα φαίνεται ένα τυπικό διάγραμμα απόδοσης - ρίσκου.



Σχήμα 5.1: Διάγραμμα δύο κριτηρίων στην διαχείριση χαρτοφυλακίου με επιδιωκόμενους στόχους την μεγιστοποίηση απόδοσης και την ελαχιστοποίηση κόστους.

5.2.2 Ορισμοί - Θεμελίωση ΠΛΑ

Ο κλάδος της ΠΛΑ έχει ως αντικείμενο την δομημένη κατασκευή κι επίλυση προβλημάτων σχεδιασμού κι αποφάσεων με πολλαπλά κριτήρια. Ο σκοπός είναι η υποστήριξη του λήπτη αποφάσεων (ΛΑ) ο οποίος αντιμετωπίζει τέτοια προβλήματα. Τυπικά δεν υπάρχει μοναδική βέλτιστη λύση για τέτοια προβλήματα και είναι απαραίτητο να χρησιμοποιηθούν οι προτιμήσεις του ΛΑ για να αξιολογήσουμε τις πιθανές λύσεις.

Η "επίλυση" ενός τέτοιου προβλήματος μπορεί να ερμηνευτεί ποικιλοτρόπως:

1) Επιλογή της "καλύτερης" εναλλακτικής από ένα σύνολο διαθέσιμων εναλλακτικών λύσεων (όπου το "καλύτερη" ερμηνεύεται ως η πλέον προτιμώμενη εναλλακτική λύση, βασιζόμενοι στις προτιμήσεις του ΛΑ).

2) Επιλογή ενός μικρού συνόλου καλών λύσεων ή ταξινόμηση των εναλλακτικών λύσεων σε κλάσεις προτίμησης.

3) Εύρεση όλων των "αποτελεσματικών" ή "μη κυριαρχημένων" εναλλακτικών λύσεων.

Η δυσκολία του προβλήματος πηγάζει από την παρουσία περισσότερων του ενός κριτηρίων. Δεν μπορούμε να βρούμε μοναδική βέλτιστη λύση αν δεν ενσωματώσουμε την πληροφορία προτιμήσεων του ΛΑ. Έτσι η έννοια της βέλτιστης λύσης αντικαθίσταται από ένα σύνολο μη κυριαρχούμενων λύσεων οι οποίες έχουν την ιδιότητα πως δε μπορούμε να απομακρυνθούμε από αυτή κινούμενοι σε άλλη λύση χωρίς να θυσιάσουμε τουλάχιστον ένα κριτήριο. Έτσι ο ΛΑ επιλέγει λύση που βρίσκεται στο σύνολο μη-κυριαρχούμενων λύσεων. Αλλιώς θα μπορούσε να επιλέξει λύση η οποία αποδίδει καλύτερα ως προς ένα από τα κριτήρια, χωρίς να αποδώσει χειρότερα σε κανένα από αυτά. Εν γένει τα σύνολα των μη κυριαρχούμενων λύσεων είναι πολύ μεγάλα για να κάνει ο ΛΑ την τελική επιλογή. Έτσι πρέπει να υπάρξει "trade-off" μεταξύ κάποιων κριτηρίων.

5.2.3 Ταξινόμηση προβλημάτων ΠΛΑ

Ένας βασικός διαχωρισμός των προβλημάτων ΠΛΑ βασίζεται στο αν οι λύσει ορίζονται αναλυτικά ή πεπλεγμένα:

1) Πολυκριτηριακά προβλήματα αξιολόγησης (ΠΠΑ):

Αυτά συνίστανται από έναν πεπερασμένο αριθμό εναλλακτικών, των οποίων γνωρίζουμε την αναλυτική μορφή στην αρχή της διαδικασίας επίλυσης. Κάθε εναλλακτική αναπαρίσταται από την απόδοσή της σε πολλαπλά κριτήρια. Έτσι το πρόβλημα αναδιατυπώνεται ως: "εύρεση της καλύτερης εναλλακτικής λύσης για τον ΛΑ ή ενός συνόλου καλών εναλλακτικών λύσεων". Τέλος, μπορούμε να ταξινομήσουμε τις λύσεις σε σύνολα διατεταγμένων (ως προς τις προτιμήσεις του ΛΑ) κλάσεων (όπως τα credit ratings των χωρών), ή να ομαδοποιήσουμε τις εναλλακτικές λύσεις σε <u>μη</u> διατεταγμένα (ως προς τις προτιμήσεις του ΛΑ) σύνολα (όπως η διάγνωση ασθενών βασισμένη στα συμπτώματά τους).

2) Πολυκριτηριακά προβλήματα σχεδιασμού (ΠΠΣ):

   Αυτά αναφέρονται και ως πολυκριτηριακά προβλήματα μαθηματικού προγραμματισμού. Εδώ οι λύσεις δεν είναι γνωστές με αναλυτική μορφή, αλλά μπορούν να βρεθούν μέσω της επίλυσης ενός μαθηματικού μοντέλου. Το πλήθος των λύσεων είναι είτε μη αριθμήσιμο (στην περίπτωση των συνεχών μεταβλητών) ή το πολύ αριθμήσιμο (στην περίπτωση των διακριτών μεταβλητών).

Είτε πρόκειται για ΠΠΑ είτε για ΠΠΣ η πληροφορία των προτιμήσεων του ΛΑ είναι απαραίτητη για να διαφοροποιηθούν οι λύσεις. Οι μέθοδοι επίλυσης των προβλημάτων ΠΛΑ ταξινομούνται βασισμένες στον χρόνο κατά τον οποίο γίνεται διαθέσιμη η πληροφορία προτιμήσεων του ΛΑ.

5.2.4 Μαθηματική μοντελοποίηση - αναπαράσταση προβλημάτων ΠΛΑ

Τα προβλήματα ΠΛΑ μπορούν να αναπαρασταθούν και να μοντελοποιηθούν μαθηματικά σε δύο διαφορετικές μορφές:

1) Αναπαράσταση στον χώρο κριτηρίων

   Υποθέτουμε πως αξιολογούμε λύσεις ενός προβλήματος πολλαπλών κριτηρίων. Επιπλέον υποθέτουμε πως για κάθε κριτήριο, όσο υψηλότερη η τιμή του, τόσο καλύτερα. Τότε ανάμεσα σε όλες τις πιθανές λύσεις, ενδιαφερόμαστε για αυτές που αποδίδουν καλά σε <u>όλα</u> τα κριτήρια. Είναι ασύνηθες βέβαια μία λύση να αποδίδει καλά σε όλα τα κριτήρια, γι' αυτό είναι σημαντική η εύρεση τρόπου trade-off μεταξύ των κριτηρίων.

Εισάγοντας μαθηματικό φορμαλισμό το πρόβλημα αναπαρίσταται ως:

$$\begin{aligned}&maxq\\&\text{δοθέντος:}\\&q \in Q\end{aligned}$$

όπου q είναι το διάνυσμα των k κριτηρίων - συναρτήσεων (αντικειμενικές συναρτήσεις) και $Q \subseteq \mathbb{R}^k$ είναι το σύνολο των εφικτών λύσεων.

Αν το Q ορίζεται αναλυτικά (μέσω ενός συνόλου λύσεων), το πρόβλημα ονομάζεται ΠΠΑ.

Αν το Q ορίζεται πεπλεγμένα (μέσω ενός συνόλου περιορισμών) το πρόβλημα ονομάζεται ΠΠΣ.

2) Αναπαράσταση στον χώρο αποφάσεων

Ο χώρος αποφάσεων αντιστοιχεί στο σύνολο των πιθανών αποφάσεων οι οποίες είναι διαθέσιμες. Οι τιμές των συναρτήσεων - κριτηρίων (αντικειμενικές συναρτήσεων) θα είναι συνέπεια των αποφάσεων που λαμβάνουμε. Επομένως μπορούμε να ορίσουμε ένα αντίστοιχο πρόβλημα στον χώρο των αποφάσεων. Για παράδειγμα, στον σχεδιασμό ενός προϊόντος επιλέγουμε τις παραμέτρους σχεδιασμού (μεταβλητές σχεδιασμού) κάθε μία εκ των οποίων επηρεάζει τις μετρικές απόδοσης (κριτήρια) μέσω των οποίων αξιολογούμε το προϊόν.

Εισάγοντας μαθηματικό φορμαλισμό το πρόβλημα αναπαρίσταται ως:

$$\begin{aligned}&maxq = f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)\\&\text{δοθέντος:}\\&q \in Q = \{f(x) : x \in X : X \subseteq \mathbb{R}^n\}\end{aligned}$$

όπου Q το σύνολο των εφικτών λύσεων και x το διάνυσμα μεταβλητών απόφασης μεγέθους n.

Υπάρχουν δύο αλληλοσχετιζόμενες έννοιες που είναι σημαντικές στην ΠΛΑ:

- μη κυριαρχία (ορίζεται βάσει της αναπαράστασης του χώρου κριτηρίων)
- αποτελεσματικότητα (ορίζεται βάσει της αναπαράστασης του χώρου μεταβλητών απόφασης)

Ορισμός 5.1. *Η $q^* \in Q$ είναι μη κυριαρχούμενη λύση αν <u>δεν</u> υπάρχει άλλη $q \in Q : q \geq q^*$ και $q \neq q^*$.*

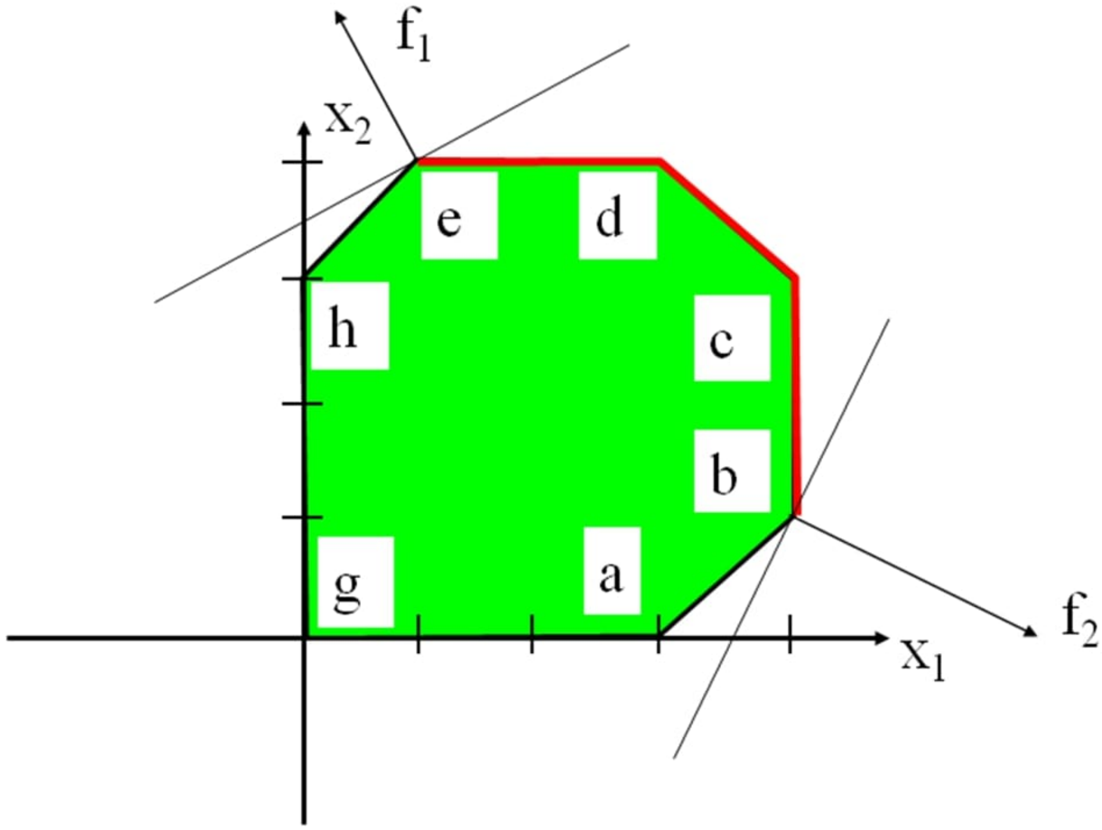
Μία λύση είναι μη κυριαρχούμενη αν δεν είναι υποδεέστερη ως προς οποιαδήποτε άλλη διαθέσιμη λύση ως προς όλα τα κριτήρια που λαμβάνουμε υπόψη.

Ορισμός 5.2. *Η $x^* \in X$ είναι αποτελεσματική αν δεν υπάρχει $x \in X : f(x) \geq f(x^*)$ και $f(x) \neq f(x^*)$.*

Αν ένα πρόβλημα ΠΛΑ αναπαρασταθεί καλώς, τότε η πιο προτιμητέα λύση ενός ΛΑ θα είναι μία αποτελεσματική λύση στον χώρο αποφάσεων και η εικόνα της είναι ένα μη κυριαρχούμενο σημείο στον χώρο κριτηρίων.

<u>Παράδειγμα</u>

Παρακάτω θα δούμε γραφικά τις αναπαραστάσεις στον χώρο αποφάσεων και στον χώρο κριτηρίων ενός προβλήματος πολυκριτηριακού γραμμικού προγραμματισμού δύο μεταβλητών.

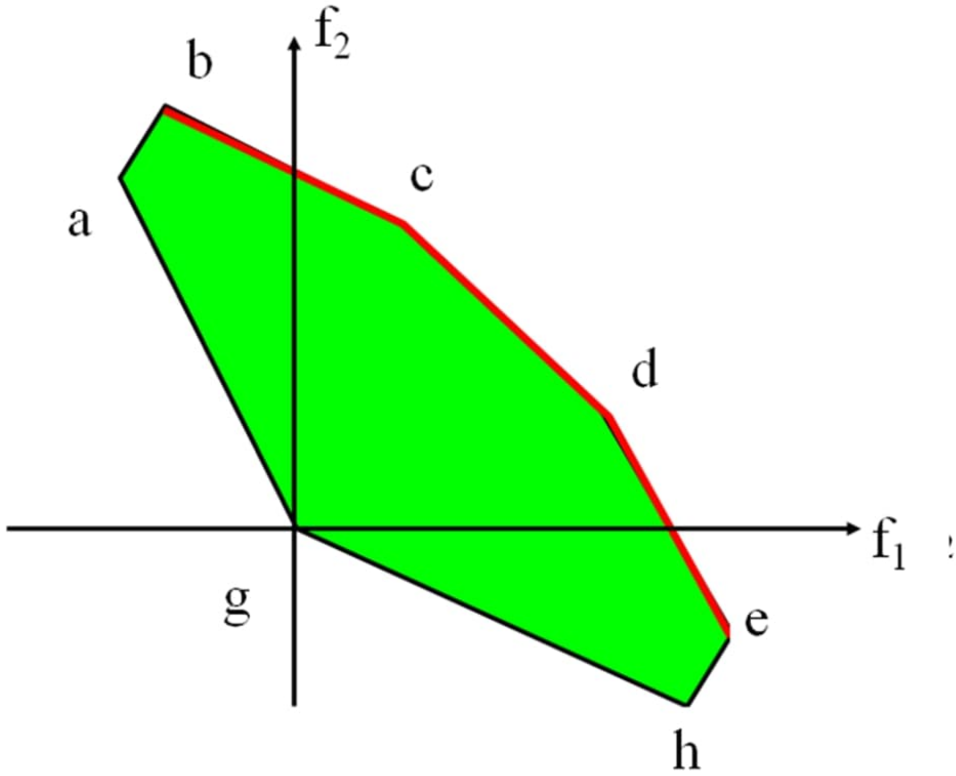


Σχήμα 5.2: Αναπαράσταση στον χώρο αποφάσεων

$$\max f_1(x) = -x_1 + 2x_2$$
$$\max f_2(x) = 2x_1 - x_2$$
δοθέντος:
$$x_1 \leq 4$$
$$x_2 \leq 4$$
$$x_1 + x_2 \leq 7$$
$$-x_1 + x_2 \leq 3$$
$$x_1 - x_2 \leq 3$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Στο ως άνω σχήμα τα σημεία e, b μεγιστοποιούν την πρώτη και την δεύτερη αντικειμενική συνάρτηση ατίστοιχα. Το κόκκινο σύνορο ανάμεσα σε αυτά τα δύο σημεία αναπαριστά το σύνολο των αποτελεσματικών λύσεων. Παρατηρούμε πως για κάθε εφικτή λύση εκτός του συνόλου αποτελεσματικών λύσεων είναι δυνατόν να βελτιώσουμε τις δύο αντικειμενικές συναρτήσεις ταυτόχρονα για κάποια σημεία στο σύνολο των αποτελεσματικών λύσεων. Αντίστοιχα για κάθε στοιχείο του συνόλου αποτελεσματικών λύσεων <u>δεν</u> είναι δυνατόν να βελτιώσουμε και τις δύο αντικειμενικές συναρτήσεις κινούμενοι προς κάποια άλλη εφικτή λύση. Εδώ πρέπει να θυσιάσουμε το ένα από τα δύο κριτήρια για να βελτιώσουμε το άλλο.

Το παραπάνω πρόβλημα μπορεί να αναπαρασταθεί στον χώρο των κριτηρίων αντικαθιστώντας τα x_1, x_2 με τις f_1, f_2 (δυϊκό πρόβλημα).



Σχήμα 5.3: Αναπαράσταση στον χώρο κριτηρίων

$$
\begin{aligned}
& \max f_1 \\
& \max f_2 \\
\text{δοθέντος:} \quad & f_1 + 2f_2 \leq 12 \\
& 2f_1 + f_2 \leq 12 \\
& f_1 + f_2 \leq 7 \\
& f_1 - f_2 \leq 9 \\
& -f_1 + f_2 \leq 9 \\
& f_1 + 2f_2 \geq 0 \\
& 2f_1 + f_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Είναι ευκολότερο να ανιχνεύσουμε τις μη κυριαρχούμενες λύσεις (που αντιστοιχούν στις αποτελεσματικές λύσεις στον χώρο αποφάσεων) στον χώρο κριτηρίων. Η βόρειοανατολική περιοχή του συνόλου εφικτών λύσεων, δίνει το σύνολο των μη κυριαρχούμενων λύσεων (για προβλήματα μεγιστοποίησης). Προφανώς για προβλήματα ελαχιστοποίησης η νοτιοδυτική περιοχή θα μας δώσει το σύνολο αυτό.

5.3 Πολυκριτηριακή βελτιστοποίηση (ΠΒ)

5.3.1 Εισαγωγικά

Η ΠΒ (ή αλλιώς πολυκριτηριακός προγραμματισμός ή διανυσματική βελτιστοποίηση) είναι ερευνητική περιοχή της ΠΛΑ, με αντικείμενο προβλήματα μαθηματικής βελτιστοποίησης που περιέχουν περισσότερες από μία αντικειμενικές συναρτήσεις οι οποίες πρέπει να βελτιστοποιηθούν ταυτόχρονα. Έχει πολλές εφαρμογές σε πολλά πεδία της επιστήμης όπως η μηχανική, τα οικονομικά, τα logistics όπου βέλτιστες αποφάσεις πρέπει να παρθούν παρουσία trade-offs μεταξύ δύο ή περισσότερων αλληλοσυγκρουόμενων κριτηρίων.

Για ένα μη τετριμμένο πρόβλημα ΠΒ <u>δεν</u> υπάρχει μοναδική λύση η οποία βελτιστοποιεί ταυτόχρονα κάθε συνάρτηση - στόχο. Λέμε πως οι αντικειμενικές συναρτήσεις αλληλοσυγκρούονται και υπάρχει ένας αριθμός (μπορεί και άπειρος) από βέλτιστες λύσεις (λύσεις Pareto). Μία λύση καλείται Pareto βέλτιστη ή Pareto αποτελεσματική, ή μη κυριαρχούμενη αν καμία από τις αντικειμενικές συναρτήσεις δεν μπορεί να βελτιωθεί χωρίς να υποβαθμίσουμε κάποια άλλη.

Αν δεν υπάρχει κάποια επιπλέον πληροφόρηση υποκειμενικών προτιμήσεων, όλες οι Pareto - βέλτιστες λύσεις θεωρούνται ισοδύναμες (αφού στα διανύσματα δεν μπορώ να έχω ολική διάταξη).

Η λύση ενός τέτοιου προβλήματος μπορεί να είναι:

1) Εύρεση συνόλου Pareto - βέλτιστων λύσεων.

2) Ποσοτικοποίηση των trade-offs για να ικανοποιήσουν τους διαφορετικούς στόχους.

3) Εύρεση μοναδικής λύσης που ικανοποιεί τις προσωπικές προτιμήσεις ενός ΛΑ.

5.3.2 Μαθηματική μοντελοποίηση προβλημάτων ΠΒ

Εισάγοντας μαθηματικό φορμαλισμό, ένα πρόβλημα ΠΒ, αναπαρίσταται ως εξής:

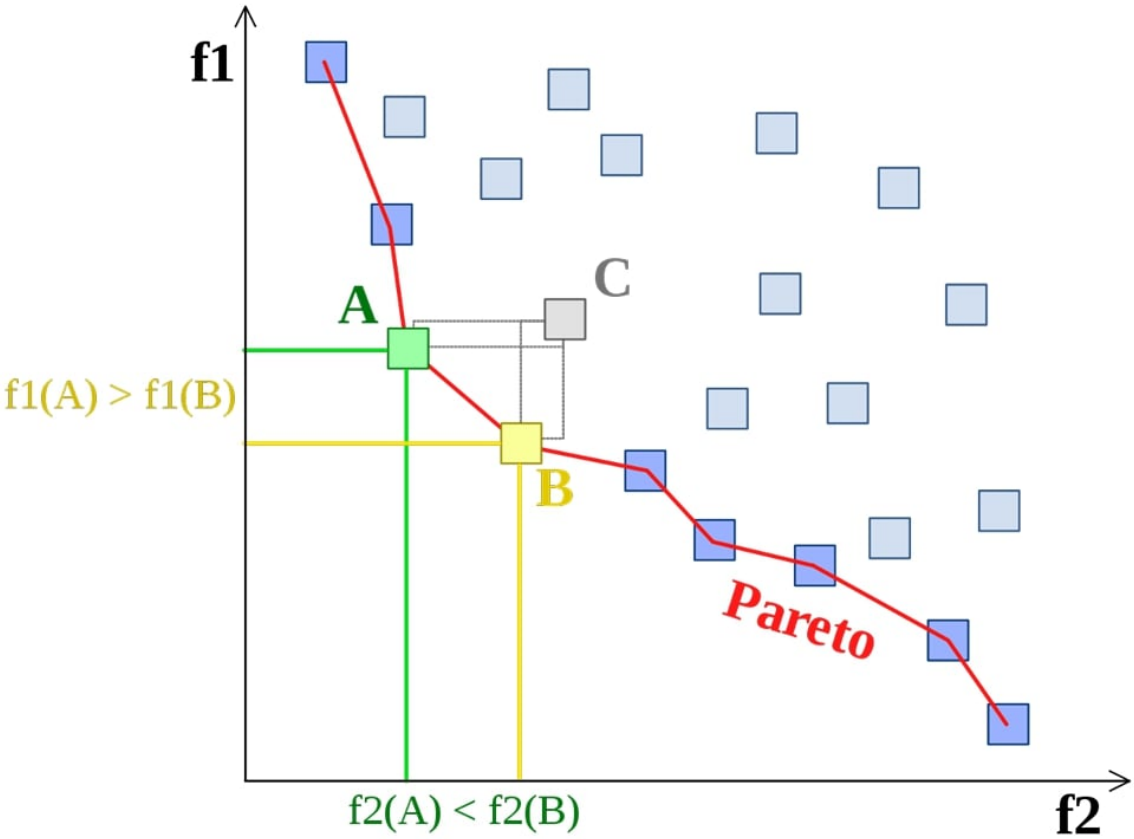
$$\begin{aligned} &\min(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)) \\ &\text{δοθέντος: } x \in X, \end{aligned}$$

όπου $k \geq 2$ το πλήθος των αντικειμενικών συναρτήσεων και X το σύνολο των εφικτών λύσεων των διανυσμάτων απόφασης. Ορίζεται συνήθως από σχέσεις - περιορισμούς.

Η διανυσματική αντικειμενική συνάρτηση είναι:

$$\begin{aligned} &f : X \to \mathbb{R}^k, \\ &f(x) = (f_1(x), \ldots, f_k(x))^T. \end{aligned}$$

Αν κάποια από τις επιμέρους αντικειμενικές συναρτήσεις $f_i(x)$, $i = 1, \ldots, k$ θέλει μεγιστοποίηση, αυτό είναι ισοδύναμο με την ελαχιστοποίηση της $-f_i(x)$.



Σχήμα 5.4: Παράδειγμα ενός συνόλου Pareto-βέλτιστων λύσεων.

Τα σημεία που φαίνονται αναπαριστούν εφικτές λύσεις και προτιμούμε μικρότερες τιμές από μεγαλύτερες. Το σημείο C δεν ανήκει στο σύνολο των Pareto-βέλτιστων λύσεων επειδή κυριαρχείται και από το A και από το B. Τα σημεία A, B δεν κυριαρχούνται αυστηρά από κανένα άλλο, κι επομένως ανήκουν στο σύνολο των Pareto-βέλτιστων λύσεων.

Το στοιχείο $x^* \in X$ ονομάζεται εφικτή λύση ή εφικτή απόφαση. Το διάνυσμα $z^* := f(x^*) \in \mathbb{R}^k$ για μία εφικτή λύση x^* ονομάζεται τιμή της διανυσματικής αντικειμενικής συνάρτησης. Στην ΠΒ δεν υπάρχει εφικτή λύση η οποία ελαχιστοποιεί όλες τις αντικειμενικές συναρτήσεις ταυτόχρονα. Γι΄ αυτό και εστιάζουμε στις Pareto-βέλτιστες λύσεις. Με μαθηματικούς όρους μία εφικτή λύση $x^1 \in X$ λέμε πως κυριαρχεί μίας άλλης λύσης $x^2 \in X$ αν:

1) $f_i(x^1) \leq f_i(x^2)\ \forall i = 1, 2, \ldots, k$

2) $f_j(x^1) < f_j(x^2)$ για τουλάχιστον ένα $j = 1, 2, \ldots, k$.

Η λύση $x^* \in X$ (και το αντίστοιχο αποτέλεσμα $f(x^*)$) είναι Pareto-βέλτιστη αν δεν υπάρχει άλλη λύση που να κυριαρχεί επ΄ αυτής. Το σύνολο των Pareto-βέλτιστων λύσεων λέγεται Pareto σύνορο.

5.3.3 Επίλυση προβλημάτων ΠΒ

Μιας και συνήθως υπάρχουν πολλές Pareto-βέλτιστες λύσεις για προβλήματα ΠΒ, η λέξη "επίλυση" ενός τέτοιου προβλήματος μπορεί να έχει διαφορετικές ερμηνείες.

Πολλές μεθοδολογίες μετατρέπουν το αρχικό πρόβλημα με τις πολλαπλές αντικειμενικές συναρτήσεις σε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης με ένα κριτήριο. Αυτή η διαδικασία ονομάζεται scalarization, και το προκύπτον πρόβλημα scalarized. Αυτή η διαδικασία παρόλο που είναι υπολογιστικά επιλύσιμη εντούτοις έχει το μειονέκτημα της απώλειας πληροφορίας.

Άλλες φορές η επίλυση ενός προβλήματος ΠΒ σημαίνει την προσέγγιση ή τον υπολογισμό όλων (ή ενός αντιπροσωπευτικού συνόλου) των Pareto-βέλτιστων λύσεων.

Όταν δώσουμε βαρύτητα στην λήψη αποφάσης, ο στόχος της επίλυσης ενός προβλήματος ΠΒ αναφέρεται στην υποστήριξη του ΛΑ στο να βρει την Pareto-βέλτιστη λύση που ταιριάζει στις προσωπικές του προτιμήσεις.

Μπορούμε να ταξινομήσουμε τις μεθόδους επίλυσης προβλημάτων ΠΒ σε τέσσερις κατηγορίες:

1) Μέθοδοι άνευ υποκειμενικών προτιμήσεων

   Όταν ο ΛΑ δεν παρέχει πληροφορία σχετικά με τις προτιμήσεις του τότε η μέθοδος ταξινομείται ως άνευ προτιμήσεων.

2) A priori μέθοδοι

   Αυτές οι μέθοδοι απαιτούν την παροχή της πληροφορίας υποκειμενικών προτιμήσεων του ΛΑ πριν την έναρξη της διαδικασίας επίλυσης. Παραδείγματα τέτοιων μεθόδων είναι:

   – μέθοδος της συνάρτησης χρησιμότητας

   – goal programming μέθοδοι.

3) A posteriori μέθοδοι

   Αυτές έχουν στόχο την εύρεση όλων των Pareto-βέλτιστων λύσεων ή ενός αντιπροσωπευτικού συνόλου αυτών. Ταξινομούνται σε δύο κατηγορίες:

   – Μαθηματικού προγραμματισμού όπου έχουμε έναν επαναληπτικό αλγόριθμο και σε κάθε βήμα του παράγεται μία Pareto-βέλτιστη λύση.

   – Εξελικτικοί αλγόριθμοι όπου σε ένα βήμα του επαναληπτικού αλγόριθμου παράγεται ένα σύνολο Pareto-βέλτιστων λύσεων.

4) Interactive μέθοδοι

   Η διαδικασία επίλυσης είναι επαναληπτική και ο ΛΑ αλληλεπιδρά συνεχώς με την μέθοδο (εκφράζει προτίμηση σε κάθε επανάληψη).

Το πρόβλημα που θα μελετήσουμε εμείς (ταυτόχρονη ελαχιστοποίηση της νόρμας $L2$ και της νόρμας Chebyshev της συνάρτησης σφάλματος) θα επιλυθεί με μεθοδολογία που υπάγεται στις a-posteriori μεθόδους μαθηματικού προγραμματισμού και πιο συγκεκριμένα με την τεχνική του τετραγωνικού προγραμματισμού ΤΠ (QP: quadratic programming).

5.4 Τετραγωνικός προγραμματισμός

5.4.1 Εισαγωγικά

Ο ΤΠ είναι η διαδικασία επίλυσης ενός ειδικού προβλήματος μαθηματικής βελτιστοποίησης με γραμμικούς περιορισμούς. Πρόκειται δηλαδή για το πρόβλημα βελτιστοποίησης μίας τετραγωνικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών με γραμμικούς περιορισμούς σε αυτές τις μεταβλητές. Ο ΤΠ αποτελεί ειδική περίπτωση μη γραμμικού προγραμματισμού.

5.4.2 Μαθηματική μοντελοποίηση

Το πρόβλημα τετραγωνικού προγραμματισμού με n μεταβλητές και m περιορισμούς μοντελοποιείται ως εξής:
Δοθέντων:

1) Ενός πραγματικού n-διάστατου διανύσματος c,

2) ενός $n \times n$ πραγματικού συμμετρικού πίνακα Q,

3) ενός $m \times n$ πραγματικού πίνακα A,

4) ενός m-διάστατου πραγματικού διανύσματος b,

ο στόχος του ΤΠ είναι η εύρεση ενός n-διάστατου πραγματικού διανύσματος x που είναι τέτοιο ώστε:

$$\begin{aligned} &\min \frac{1}{2} x^T Q x + c^T x \\ &\text{δοθέντος: } Ax \leq b. \end{aligned}$$

Ο συμβολισμός $Ax \leq b$ σημαίνει πως κάθε συνιστώσα του διανύσματος Ax είναι μικρότερη ή ίση της αντίστοιχης συνιστώσας του διανύσματος b.

Στην περίπτωση που ο πίνακας Q είναι θετικά ορισμένος, το πρόβλημα είναι ειδική περίπτωση προβλήματος κυρτής βελτιστοποίησης.

5.5 Βέλτιστη προσέγγιση συνάρτησης με ταυτόχρονη ελαχιστοποίσης της νόρμας $L2$ και της νόρμας Chebyshev της συνάρτησης σφαλμάτος

5.5.1 Μοντελοποίηση

Έστω μία συνάρτηση $f \in C[a, b]$ και ο χώρος Π_n.

Έστω η απεικόνιση:

$$\begin{aligned} F: \quad & \Pi_n \to \mathbb{R}_+^2 \text{ με} \\ & F(p) = (\|f-p\|_{sup}, \|f-p\|_2) \text{ για } p \in \Pi_n, \end{aligned}$$

όπου $\mathbb{R}_+^2 = \{(\alpha, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+\}$.

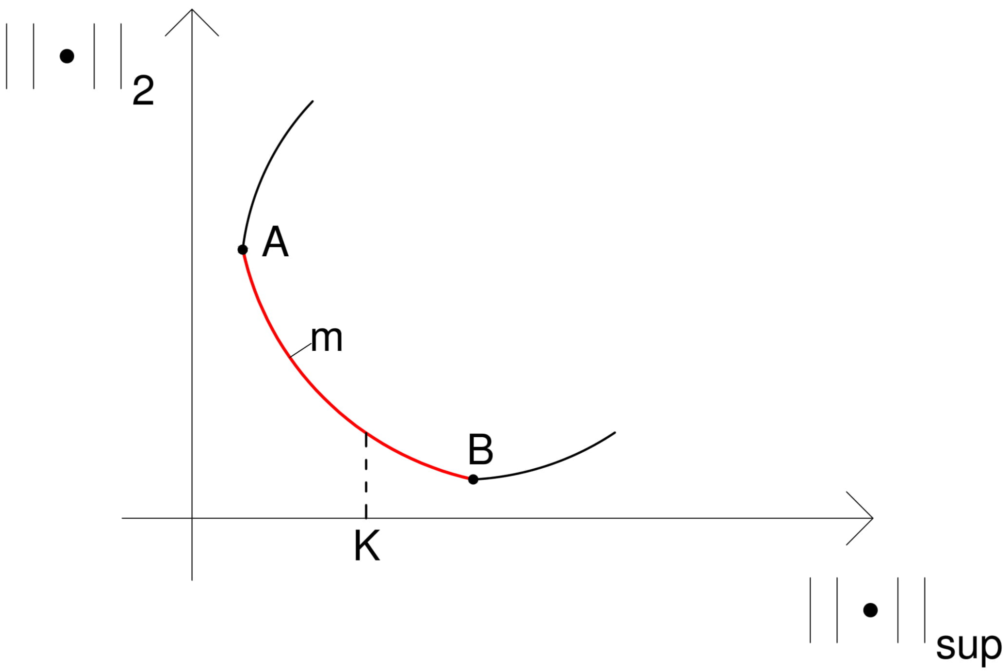
Επιπλέον θεωρώ την φυσική μερική διάταξη $\leq$ στον $\mathbb{R}_+^2$, δηλαδή:

$$F(p) \leq F(q) \Leftrightarrow \begin{cases} \|f-p\|_{\text{sup}} \leq \|f-q\|_{\text{sup}} \\ \text{και} \\ \|f-p\|_2 \leq \|f-q\|_2 \end{cases}$$

Έτσι λοιπόν το πρόβλημά μας διατυπώνεται ως:

$$\text{Βρες } p \in \Pi_n : F(p) \leq F(q) \ \forall q \in \Pi_n.$$

Παρακάτω δίνουμε μία εικόνα του Π_n μέσω της F έχοντας υπόψη το θεώρημα 2.7 και την ικανή συνθήκη που προέκυψε από εκεί: ”αν ο χώρος με νόρμα X δεν περιέχει ευθύγραμμα τμήματα σε καμία σφαίρα $\{x \in X : \|x\| = r\}$, τότε η βέλτιστη προσέγγιση (σε κάθε κυρτό υποσύνολο Y) θα είναι απαραίτητα μοναδική”.



Σχήμα 5.5: Vectorial approximation-minimal set

Το σημείο A αντιστοιχεί στην βέλτιστη προσέγγιση της f με χρήση μόνον της νόρμας Chebyshev, ενώ το σημείο B αντιστοιχεί στην βέλτιστη προσέγγιση της f με χρήση μόνον της νόρμας $L2$. Όπως είδαμε αντίστοιχα στο παράδειγμα στην ΠΛΑ, το minimal σύνολο (δηλαδή αυτό που αποτελείται από σημεία στα οποία η μείωση της τιμής της μίας εκ των δύο νορμών, αντιστοιχεί σε αύξηση της τιμής της άλλης) αποτελείται από όλα τα σημεία ανάμεσα στο A και το B και στο σχήμα φαίνεται με το κόκκινο χρώμα.

Αλγεβρικά το minimal σύνολο m είναι το:

$$m = \left\{ \begin{array}{ll} (\alpha,\beta): & \alpha = \|f-p\|_{\sup},\ \beta = \|f-p\|_2 \text{ με} \\ & \alpha = \min \text{ για δοθέν } \beta \text{ ή} \\ & \beta = \min \text{ για δοθέν } \alpha \end{array} \right\}.$$

Ιδιότητες του m

1) Είναι αυστηρά κυρτή και φθίνουσα καμπύλη.

2) Κάθε στοιχείο του m αποτελεί λύση του προβλήματος ελαχιστοποίησης του σταθμισμένου αθροίσματος:

$$\min G(p) = \min(\lambda\|f-p\|_{\sup} + (1-\lambda)\|f-p\|_2),\ 0 \le \lambda \le 1.$$

3) Κάθε σημείο (α,β) του m αναπαριστά την λύση του προβλήματος ελαχιστοποίησης υπό περιορισμούς:

   α) $\min\|f-p\|_2$ για $\|f-p\|_{\sup} \le \alpha$,
   β) $\min\|f-p\|_{\sup}$ για $\|f-p\|_2 \le \beta$.

4) Μοναδικότητα: Για δοθέν στοιχείο (α,β) του m, υπάρχει μοναδικός τελεστής $F \in \mathcal{L}\ : \left\{ \begin{array}{c} \|f-p\|_{\sup} = \alpha \\ \|f-p\|_2 = \beta \end{array} \right.$.

Η ιδιότητα 3 θα μας οδηγήσει στην εύρεση του αλγορίθμου επίλυσης του προβλήματος. Η ιδιότητα 2 μας λέει πως υπάρχει $1-1$ αντιστοιχία μεταξύ του προβλήματος της ταυτόχρονης ελαχιστοποίησης της νόρμας $L2$ και της νόρμας *Chebyshev* της συνάρτησης σφάλματος και του scalarized προβλήματος. Το δεύτερο πρόβλημα είναι πιο εύκολα επιλύσιμο, όμως έχουμε απώλεια πληροφορίας ενώ το πρώτο όπως το διατυπώσαμε διατηρεί όλη την δομή. Παρόλα αυτά το scalarized πρόβλημα βρίσκει πολλές εφαρμογές όπως στην μηχανική μάθηση (machine learning) όπου έχουν αναπτυχθεί αλγόριθμοι και τεχνικές απώλειας της ελάχιστης πληροφορίας κατά τον υποβιβασμό διάστασης ενός προβλήματος (π.χ. στα νευρωνικά δίκτυα οι αλγόριθμοι Fisher και PCA).

Αλγόριθμος επίλυσης του προβλήματος

$$\min\|f-p\|_2$$
$$\text{δοθέντος: } \|f-p\|_\infty \le k$$

όπου $k > 0$ παράμετρος επιλογής για εκάστοτε trade-off. Σε κάθε βήμα του επαναληπτικού αλγορίθμου επιλέγω $n+1$ σημεία με την μεγαλύτερη κατ΄ απόλυτο τιμή του $f(x) - p(x)$ και τότε ξαναελαχιστοποιώ χρησιμοποιώντας τετραγωνικό προγραμματισμό.

Βιβλιογραφια

[1] Γαλάνης Δ. Σοφοκλής, Θεωρία Προσέγγισης, Πανεπιστημιακές Παραδόσεις, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Ιωάννινα, 2012

[2] Νούτσος Δημήτρης, Θεωρία Προσέγγισης, Πανεπιστημιακές Παραδόσεις, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Ιωάννινα, 2012

[3] Μπακόπουλος Α., Χρυσοβεργής Ι., Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση, Εκδόσεις Συμεών, 2009

[4] Μπακόπουλος Α., Βέλτιστες Προσεγγίσεις Συναρτήσεων και Τελεστές, Πανεπιστημιακές Παραδόσεις, ΕΜΠ, 2018

[5] Balopoulos Alex, Topology of a General Approximation System and Applications, Journal of Approximation Theory 4, p. 147-158, (1971)

[6] Carothers N. J., A Short Course on Approximation Theory, Lecture Notes, Bowling Green State University