



**Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο**  
**Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών**  
**Τομέας Ρευστών**  
**Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών**

**Αυτοματοποιημένη Μέθοδος Βελτιστοποίησης Πτερυγώσεων**  
**Στροβιλομηχανών με χρήση Συζυγών Μεθόδων και Διαχείριση**  
**Περιορισμών**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**ΓΕΩΡΓΙΟΣ Κ. ΚΑΡΠΟΥΖΑΣ**

Επιβλέπων : ΚΥΡΙΑΚΟΣ Χ. ΓΙΑΝΝΑΚΟΓΛΟΥ  
Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Ιούλιος 2011



# Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία εντάσσεται στις προσπάθειες της Μονάδας Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής και Βελτιστοποίησης (ΜΠΥΡ&Β) και της σχετικής ερευνητικής ομάδας του Εργαστηρίου Θερμικών Στροβιλομηχανών (ΕΘΣ) του ΕΜΠ να δημιουργήσουν υψηλού επιπέδου τεχνογνωσία σε θέματα βελτιστοποίησης-σχεδιασμού αεροδυναμικών μορφών (aerodynamic shape optimization) και ειδικότερα εδώ, μέσω των συζυγών (adjoint) τεχνικών.

Σκοπός αυτής της διπλωματικής εργασίας είναι η εφαρμογή των συνεχών συζυγών μεθόδων (continuous adjoint methods) στη βελτιστοποίηση πτερυγώσεων στροβιλομηχανών εισάγοντας ροϊκούς και κατασκευαστικούς περιορισμούς, πέραν της συνάρτησης-στόχου που εκφράζει απώλειες λόγω συνεκτικότητας. Οι συζυγείς μέθοδοι χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό της κλίσης της συνάρτησης κόστους (εδώ των απωλειών ολικής πίεσης  $\Delta p_t$ ) ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού. Ο λόγος που είναι πραγματικά επιβεβλημένη η εισαγωγή πρόσθετων περιορισμών είναι ότι η βελτιστοποίηση ως προς τη συνάρτηση-στόχο οδηγεί συχνά σε μη αποδεκτές αεροδυναμικές μορφές (λ.χ. μη-αποδεκτό πτερύγιο στροβίλου λόγω μεγάλης λέπτυνσης) και σε μείωση της στροφής της ροής στην πτερυγώση. Για τους παραπάνω λόγους, επεκτείνεται (με συμπληρωματική-νέα μαθηματική διατύπωση και τον προγραμματισμό του αντίστοιχου συμπληρωματικού τμήματος λογισμικού) η συζυγής μέθοδος σε πτερύγια στροβιλομηχανών με στόχο τη μείωση των απωλειών ολικής πίεσης με περιορισμούς ως προς την γωνία εξόδου της ροής και το ελάχιστο επιτρεπόμενο πάχος πτερυγίου σε διάφορες θέσεις του.

Για την υλοποίηση των παραπάνω, στο πλαίσιο αυτής της διπλωματικής εργασίας, προστέθηκαν και χρησιμοποιήθηκαν οι περιορισμοί της γωνίας εξόδου ροής και του πάχους πτερυγίου στον προϋπάρχοντα κώδικα του εργαστηρίου. Από μαθηματικής σκοπιάς, στο συνάρτησιακό των απωλειών ολικής πίεσης προστέθηκαν δύο επιπλέον όροι που σχετίζονται με τη γωνία εξόδου της ροής και το πάχος πτερυγίου, πολλαπλασιασμένοι με συντελεστές βαρύτητας τις τιμές των οποίων ορίζει, κατά βούληση, ο χρήστης.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία χρησιμοποιούνται, ως εξισώσεις κατάστασης (πρωτεύον πρόβλημα) οι εξισώσεις Navier-Stokes για μόνιμη ροή ασυμπίεστου ρευστού, μαζί με το μοντέλο τύρβης  $k-\omega$  SST. Για την επίλυση των εξισώσεων ροής και των συζυγών εξισώσεων χρησιμοποιείται το ανοιχτό λογισμικό Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής, OpenFOAM. Σε αυτό, προγραμματίζεται το συμπληρωματικό τμήμα κώδικα που αφορά τους περιορισμούς στις συζυγείς μεθόδους. Η συνεχής συζυγής μέθοδος με περιορισμούς εφαρμόστηκε για τη βελτιστοποίηση της μορφής

2D περυγίου στροβίλου καθώς και για τη βελτιστοποίηση 3D περυγίου συμπίεστη. Για τη γένεση πλέγματος της 2D εφαρμογής χρησιμοποιήθηκε προϋπάρχων γενέτης πλέγματος του εργαστηρίου ενώ για την 3D εφαρμογή εξελίχθηκε, εμπλουτίστηκε και γενικεύτηκε παλαιότερος κώδικας του εργαστηρίου. Στα προβλήματα βελτιστοποίησης της παρούσας διπλωματικής δεν χρησιμοποιήθηκε κάποιου είδους παραμετροποίηση της γεωμετρίας (λ.χ. συναρτήσεις Bezier, πολυώνυμα κλπ) όπως σε προηγούμενες εργασίες, αλλά ως μεταβλητές σχεδιασμού χρησιμοποιήθηκαν οι κομβικές συντεταγμένες του περιγράμματος της αεροτομής του περυγίου. Μιας και η δομή δεδομένων του OpenFOAM και του οικείου λογισμικού είναι διαφορετική, δημιουργήθηκε κώδικας μετατροπής του πλέγματος, ώστε να επικοινωνούν μεταξύ τους. Ακόμη, εξαιτίας της μη-χρήσης παραμετροποίησης δημιουργήθηκε πρόγραμμα το οποίο εξομαλύνει τις υπερακοντίσεις που συνήθως εμφανίζουν οι κατανομές των κομβικών τιμών των παραγώγων ευαισθησίας, οι οποίες αν χρησιμοποιηθούν χωρίς την απαραίτητη εξομάλυνση, οδηγούν σε δημιουργία αεροτομών ή περυγίων με μη-αποδεκτό σχήμα.

Σε δεύτερη φάση, όλα τα παραπάνω εντάχθηκαν σε μια διαδικασία (ένα βρόχο) βελτιστοποίησης χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της απότομης καθόδου. Σε πρώτο στάδιο, έχοντας την αρχική γεωμετρία, δημιουργείται πλέγμα από τον πλεγματοποιητή του εργαστηρίου. Στη συνέχεια, μετατρέπεται η δομή δεδομένων του πλέγματος σε δομή δεδομένων OpenFOAM, στο οποίο λύνονται οι εξισώσεις ροής, οι συζυγείς εξισώσεις και τέλος υπολογίζεται η κλίση της συνάρτησης-στόχου ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού (δηλ. τις συντεταγμένες των κόμβων του πλέγματος που βρίσκονται επί του τρέχοντος στερεού ορίου). Ακολουθεί η εξομάλυνση της παραγώγου ευαισθησίας με χρήση της εξίσωσης Laplace και ένας κύκλος βελτιστοποίησης τελειώνει με την ανανέωση της γεωμετρίας με τη μέθοδο της απότομης καθόδου, χρησιμοποιώντας τις παραγώγους ευαισθησίας που προέκυψαν από την εξομάλυνση. Όπως προαναφέρθηκε, η παραπάνω διαδικασία βελτιστοποίησης δοκιμάζεται σε ένα 2D περύγιο στροβίλου και σε ένα 3D περύγιο συμπίεστη με και χωρίς περιορισμούς, εξετάζοντας την επίδρασή των τελευταίων, στα αποτελέσματα του προβλήματος βελτιστοποίησης.

# Περιεχόμενα

<b>Περίληψη</b>	<b>iii</b>
<b>Περιεχόμενα</b>	<b>v</b>
<b>Κατάλογος Σχημάτων</b>	<b>vii</b>
<b>Ευχαριστίες</b>	<b>xi</b>
<b>1 Εισαγωγή</b>	<b>1</b>
<b>2 Ευθύ πρόβλημα - Επίλυση των Εξισώσεων Ροής</b>	<b>5</b>
2.1 Εξισώσεις Ροής . . . . .	5
2.2 Αλγόριθμος SIMPLE . . . . .	6
2.2.1 Εξισώσεις μέσης Ροής . . . . .	6
2.2.2 Αλγόριθμος SIMPLE - Υλοποίηση στο OpenFOAM . . . . .	7
2.3 k- $\omega$ SST Μοντέλο Τύρβης . . . . .	9
<b>3 Η συνεχής συζυγής μέθοδος για στρωτές ροές ασυμπίεστου ρευστού</b>	<b>11</b>
3.1 Εξισώσεις Ροής . . . . .	11
3.2 Εισαγωγή των συζυγών μεταβλητών . . . . .	12
3.3 Γενικευμένες συναρτήσεις κόστους . . . . .	14
3.3.1 Ελαχιστοποίηση απωλειών ολικής πίεσης . . . . .	15
3.4 Διατύπωση συνεχών συζυγών πεδιακών εξισώσεων και οριακών συνθηκών	18
3.4.1 Συζυγείς συνθήκες στα όρια εισόδου $S_I$ . . . . .	21
3.4.2 Συζυγείς συνθήκες στα όρια εξόδου $S_O$ . . . . .	22
3.4.3 Συζυγείς συνθήκες στα στερεά όρια $S_W$ . . . . .	24
3.4.4 Συζυγείς συνθήκες στα περιοδικά όρια . . . . .	25
3.4.5 Συζυγείς συνθήκες στα όρια συμμετρίας . . . . .	25
3.5 Τελική - Γενική έκφραση των παραγώγων ευαισθησίας . . . . .	26
3.5.1 Ελαχιστοποίηση απωλειών ολικής πίεσης . . . . .	26
3.6 Βελτιστοποίηση με Περιορισμούς . . . . .	27
3.6.1 Περιορισμός Πάχους . . . . .	27
3.6.2 Σχεδιασμός με συγκεκριμένη γωνία εξόδου . . . . .	28
3.6.3 Ελαχιστοποίηση απωλειών ολικής πίεσης με περιορισμούς τη στροφή ροής και το πάχος πτερυγίου σε προβλήματα στροβιλομηχανών . . . . .	30

<b>4 Βελτιστοποίηση 2Δ Αεροτομής Πτερυγίου Στροβίλου</b>	<b>33</b>
4.1 Αλγόριθμος Βελτιστοποίησης . . . . .	34
4.2 Αποτελέσματα βελτιστοποίησης . . . . .	43
<b>5 Γένεση 3Δ πλέγματος - Πλεγματοποιητής 3DTurboGen</b>	<b>51</b>
5.1 Διαδικασία γένεσης πλέγματος με τον 3DTurboGen . . . . .	51
<b>6 Εφαρμογή 3Δ Πτερυγίου Συμπιεστή</b>	<b>59</b>
6.1 Αλγόριθμος Βελτιστοποίησης . . . . .	60
6.1.1 Αποτελέσματα ευθέως και συζυγούς προβλήματος για το αρχικό πτερύγιο . . . . .	67
6.1.2 Αποτελέσματα Βελτιστοποίησης . . . . .	70
<b>7 Ανακεφαλαίωση-Συμπεράσματα</b>	<b>73</b>
<b>Α΄ Πλέγμα OpenFoam - Πλέγμα LTT - Foam2LTT Converter</b>	<b>75</b>
Α΄.1 Πλέγμα OpenFoam . . . . .	75
Α΄.2 Πλέγμα LTT . . . . .	78
Α΄.3 Μετατροπές Πλέγματος από OpenFoam σε LTT - foam2LTT Converter	81
<b>Β΄ Εργαλείο CreatePatch για διόρθωση περιοδικών επιφανειών</b>	<b>85</b>
<b>Γ΄ Λειτουργία OpenFOAM</b>	<b>87</b>
<b>Δ΄ Αποδείξεις σχέσεων 3.45, 3.46, 3.55 και 3.56</b>	<b>89</b>
Δ΄.1 Απόδειξη των οριακών συνθηκών 3.45 και 3.46 . . . . .	89
Δ΄.2 Απόδειξη των οριακών συνθηκών 3.55 και 3.56 . . . . .	90
<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>93</b>

# Κατάλογος Σχημάτων

2.1	Πεπερασμένος Όγκος P - κέντρο κελιού, N - κέντρο γειτονικών κελιών, $S_f$ διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια με μέτρο την επιφάνεια σε $m^2$ . . .	6
4.1	Αλγόριθμος βελτιστοποίησης πτερύγωσης στροβίλου. . . . .	34
4.2	Αρχική μορφή αεροτομής πτερυγίου στροβίλου. . . . .	35
4.3	Πλέγμα που προέκυψε από τον 2D γενέτη πλέγματος του εργαστηρίου. -Πάνω: πλέγμα 2Dgridgen, -Μέση: πύκνωση γύρω από την αεροτομή, -Κάτω: διαστρωματώσεις τετραπλεύρων κοντά στην αεροτομή. . . . .	37
4.4	Προοπτική εικόνα στην οποία φαίνεται η προσθήκη ενός κελιού πάχους με το stackhyb. . . . .	38
4.5	Αλλαγή σειράς αποθήκευσης περιοδικών επιφανειών (η πάνω και η κάτω γραμμή του σχήματος). <b>n</b> είναι επιφάνεια έναρξης περιοδικών επιφανειών με 644 συνολικά επιφάνειες. α) <b>μαύρη/έντονη αρίθμηση</b> (σωστή) με το createPatch β) <b>κόκκινη/ασθενής αρίθμηση</b> η αρχική (λάθος). . . . .	39
4.6	-Αριστερά: Νορμα-2 του υπολοίπου των εξισώσεων του ευθέος προβλήματος -Δεξιά: Νόρμα-2 του υπολοίπου των εξισώσεων του συζυγούς προβλήματος. . . . .	40
4.7	Αποτελεσμα ομαλοποίησης της παραγωγού ευαισθησίας με στόχο την μείωση απωλειών ολικής πίεσης με τον περιορισμό της στροφής της ροής, με την επίλυση της εξίσωσης Laplace. . . . .	41
4.8	Αποτελέσματα ευθέος προβλήματος στον πρώτο κύκλο βελτιστοποίησης. -Πάνω: μέτρο ταχύτητας $ v $ -Μέση: στατική πίεση $p$ -Κάτω: τυρβώδης συνεκτικότητα $\nu_t$ . . . . .	43
4.9	Αποτελέσματα ευθέος προβλήματος στον πρώτο κύκλο βελτιστοποίησης. -Πάνω: Τυρβώδης Κινητική Ενέργεια $k$ -Κάτω: Ρυθμός Καταστροφής Τύρβης $\omega$ . . . . .	44
4.10	Αποτελέσματα συζυγούς προβλήματος στον πρώτο κύκλο βελτιστοποίησης. -Πάνω: μέτρο συζυγούς ταχύτητας $v_a$ -Κάτω: συζυγής πίεση $p_a$ . . . . .	45

4.11	<b>Πάνω:</b> Αεροτομή που προέκυψε μετά απο βελτιστοποίηση με συνάρτηση στόχο τη μείωση διαφοράς ολικής πίεσης $\Delta p_t$ χωρίς περιορισμούς σε σύγκριση με την αρχική αεροτομή. <b>Κάτω:</b> Αεροτομή που προέκυψε μετά από βελτιστοποίηση με συνάρτηση στόχο τη μείωση διαφοράς ολικής πίεσης $\Delta p_t$ με περιορισμό πάχους σε σύγκριση με την αρχική αεροτομή. . . . .	46
4.12	Αεροτομή που προέκυψε μετά από βελτιστοποίηση με συνάρτηση στόχο την μείωση ολικής πίεσης $\Delta p_t$ με περιορισμό πάχους και στροφή της ροής σε σχέση με την αρχική αεροτομή. . . . .	47
4.13	Πεδίο μέτρου ταχύτητας $ v $ μετά από 10 κύκλους βελτιστοποίησης για μείωση απωλειών ολικής πίεσης. -Πάνω: χωρίς περιορισμούς -Μέση: με περιορισμό πάχους -Κάτω: με περιορισμό πάχους και στροφή της ροής. . . . .	48
4.14	Πεδίο πίεσης $p$ μετά από 10 κύκλους βελτιστοποίησης για μείωση απωλειών ολικής πίεσης. -Πάνω: χωρίς περιορισμούς -Μέση: με περιορισμό πάχους -Κάτω: με περιορισμό πάχους και στροφή της ροής. . . . .	49
4.15	Πεδίο τυρβώδους συνεκτικότητας $\nu_t$ μετά από 10 κύκλους βελτιστοποίησης για μείωση απωλειών ολικής πίεσης. -Πάνω: χωρίς περιορισμούς -Μέση: με περιορισμό πάχους -Κάτω: με περιορισμό πάχους και στροφή της ροής. . . . .	50
5.1	Επιφάνεια ενδιάμεση στις επιφάνειες κελύφους ποδός και κεφαλής στις οποίες λύνονται ελλειπτικές εξισώσεις με όρους πηγής. -Πάνω: όλοι οι κόμβοι ενδιάμεσης επιφάνειας. -Κάτω: απομονωμένοι κόμβοι επιφάνειας. . . . .	53
5.2	Αριστερά: Πλέγμα χωρίς μεταφορά πληροφορίας καθετότητας και πύκνωσης κοντά στα όρια από το σημείο πρόσπτωσης προς την είσοδο. Δεξιά: Πλέγμα με μεταφορά πληροφορίας από το σημείο πρόσπτωσης προς την είσοδο. . . . .	55
5.3	Πάνω: Δημιουργία ενδιάμεσων γενέτειρων εκ περιστροφής επιφανειών. Κάτω: Προκύπτουσες επιφάνειες με τη μέθοδο επίλυσης ελλειπτικών εξισώσεων με όρους πηγής. . . . .	56
5.4	Αριστερά: Πλέγμα χωρίς πύκνωση στην ακτινική διεύθυνση. Δεξιά: Πλέγμα με πύκνωση στην ακτινική διεύθυνση. . . . .	56
5.5	Παράδειγμα γένεσης πλέγματος για περύγιο συμπιεστή . . . . .	57
5.6	Παράδειγμα γένεσης πλέγματος για περύγιο συμπιεστή με συστροφή (screwness) . . . . .	57
6.1	Αριστερά: αρχικό επιφανειακό πλέγμα περυγίου συμπιεστή, Δεξιά: ενδιάμεση αεροτομή περυγίου. . . . .	59
6.2	Αλγόριθμος βελτιστοποίησης περύγωσης 3Δ στάτορα συμπιεστή. . . . .	60
6.3	Στο παραπάνω διάγραμμα απεικονίζονται οι γενέτειρες εκ περιστροφής επιφανειών του κελύφους ποδός, του κελύφους κεφαλής, καθώς και οι τομές της περύγωσης στην ακτινική διεύθυνση. . . . .	61



6.4	Υπολογιστικό πλέγμα πτερυγίου στάτορα συμπιεστή. -Πάνω: γενική εικόνα υπολογιστικού χωρίου. -Μέση: υπολογιστικό πλέγμα στο κέλυφος κεφαλής. -Κάτω: απεικονίζεται το επίπεδο αξονικής και ακτινικής διεύθυνσης. . . . .	62
6.5	Διανύσματα ταχυτήτων στην είσοδο . . . . .	64
6.6	Νόρμα-2 των υπολοίπων των εξισώσεων ευθέος και συζυγούς προβλήματος. -Αριστερά: ευθύ πρόβλημα. -Δεξιά: συζυγές πρόβλημα	65
6.7	Στατικές πιέσεις σε σταθερή πτερύγωση συμπιεστή που περιλαμβάνει 28 πτερύγια στον πρώτο κύκλο βελτιστοποίησης . . . . .	66
6.8	Αποτελέσματα ευθέος προβλήματος του αρχικού πτερυγίου σε μια τομή του υπολογιστικού χωρίου. -Πάνω: μέτρο ταχύτητας $ v $ , -Μέση: στατική πίεση $p$ , -Κάτω: τυρβώδης συνεκτικότητα $\nu_t$ . . . . .	67
6.9	Αποτελέσματα συζυγούς προβλήματος του αρχικού πτερυγίου σε μια τομή του υπολογιστικού χωρίου. -Πάνω: μέτρο συζυγούς ταχύτητας $ v_a $ , -Κάτω: συζυγής στατική πίεση $p_a$ . . . . .	68
6.10	Παράγωγος ευαισθησίας μείωσης απωλειών ολικής πίεσης στο αρχικό πτερύγιο. Πάνω απεικονίζεται η παράγωγος στην πλευρά υποπίεσης και κάτω στην πλευρά υπερπίεσης. Η κατεύθυνση της κίνησης των κόμβων του πτερυγίου ανά κύκλο βελτιστοποίησης είναι αντίθετη από την κατεύθυνση της παραγωγού καθώς η τελευταία πολλαπλασιάζεται με αρνητικό συντελεστή (-η) σύμφωνα με την εξίσωση ανανέωσης γεωμετρίας της απότομης καθόδου (εξίσωση 6.1). . . . .	69
6.11	-Πάνω: αρχική πτερύγωση, -Μέση: πτερύγωση μετά από βελτιστοποίηση με στόχο την μείωση $\Delta p_t$ , -Κάτω: πτερύγωση μετά από βελτιστοποίηση με στόχο την μείωση $\Delta p_t$ με περιορισμούς πάχους.	70
6.12	Ολική πίεση $p_{tot}$ . Αριστερά: σε μια επιφάνεια στο σημείο εκφυγής κάθετη στην κατεύθυνση της ροής. -Δεξιά: στην γωνία της πλευράς υποπίεσης και του κελύφους ποδός. -Πάνω: αρχική πτερύγωση, -Μέση: πτερύγωση μετά από βελτιστοποίηση με στόχο τη μείωση $\Delta p_t$ , -Κάτω: πτερύγωση μετά από βελτιστοποίηση με στόχο τη μείωση $\Delta p_t$ με περιορισμούς πάχους. . . . .	72
A'.1	Παράδειγμα πλέγματος Openfoam δύο εξαέδρων με το κελί με αριθμό 0 να αποτελείται από τους κόμβους (0 1 2 3 4 5 6 7) και το κελί με αριθμό 1 να αποτελείται από τους κόμβους (1 8 9 3 5 10 11 7). Η αριστερή επιφάνεια (0 4 6 2) θεωρείται είσοδος ροής, η δεξιά (8 9 11 10) έξοδος ροής ενώ όλες οι άλλες οριακές επιφάνειες θεωρούνται ότι διαμορφώνουν τα στερεά τοιχώματα . . . . .	76
A'.2	Τοπολογία κόμβων πλέγματος LTT για τετράεδρα (πάνω αριστερά), πυραμίδες (πάνω δεξιά), πρίσματα (κάτω αριστερά), εξάεδρα (κάτω δεξιά)	79
A'.3	-μαύρη/(έντονη) αρίθμηση: ταυτότητα κόμβων -κόκκινη/(ασθενής) αρίθμηση: $\log_{fr}$ κόμβων . . . . .	80

Γ.1	Γενική μορφή καταλόγων και αρχείων σε μια τυπική περίπτωση OpenFOAM . . . . .	88
-----	--	----

# Ευχαριστίες

Με την εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας στην Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης του Εργαστηρίου Θερμικών Στροβιλομηχανών της Σχολής Μηχανολόγων Μηχανικών του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου, ολοκληρώνονται οι σπουδές μου ως προπτυχιακός φοιτητής.

Σε αυτό το σημείο θα ήθελα να εκφράσω την ειλικρινή μου ευγνωμοσύνη προς τον Καθηγητή Κ.Χ Γιαννάκογλου για τη δυνατότητα που μου έδωσε να ασχοληθώ με το ενδιαφέρον αυτό θέμα, την ουσιαστική καθοδήγηση και τη διάθεση σημαντικού μέρους του χρόνου του. Ευχαριστώ, ιδιαίτερα τον Διδάκτορα Α.Ζυμάρη για την καθοδήγηση και την βοήθειά του στην εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής.

Επιπλέον, ευχαριστώ τον Διδάκτορα Δ.Παπαδημητρίου και τον υποψήφιο Διδάκτορα Ε.Παπουτσή-Κιαχιά για την συμβολή τους σε αυτή την εργασία, καθώς και όλη την ερευνητική ομάδα ΜΠΥΡΔ&Β/ΕΜΠ για την προθυμία βοήθειας σε οποιαδήποτε απορία.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου Κωσταντίνο και Παναγιώτα για την υπομονή τους σε όλη την διάρκεια της φοίτησης μου στο ΕΜΠ, καθώς και τους φίλους μου και τον 3D♣.

Γεώργιος Κ. Καρπούζας  
Ιούλιος, 2011



# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

Οι συζυγείς μέθοδοι (adjoint methods) χρησιμοποιούνται σε φυσικά προβλήματα, τα οποία διέπονται από συστήματα μερικών διαφορικών εξισώσεων (μ.δ.ε.), για τον υπολογισμό παραγώγων ευαισθησίας ως προς τι μεταβλητές σχεδιασμού. Λ.χ. αν το σχήμα μιας αεροτομής καθορίζεται από τις συντεταγμένες ενός αριθμού σημείων ελέγχου καμπύλων Bezier ή από τους συντελεστές ενός πολυωνύμου και αν η συνάρτηση ενδιαφέροντος (συνάρτηση-στόχος αν πρόκειται για βελτιστοποίηση) είναι η μείωση της οπισθέλκουσας της αεροτομής σε προκαθορισμένες συνθήκες ροής, τότε η συζυγής μέθοδος υπολογίζει τις παραγώγους ευαισθησίας δηλαδή το πόσο θα αλλάξει η τιμή της οπισθέλκουσας σε σχέση με την ενδεχόμενη (μικρή) αλλαγή τιμής κάθε μεταβλητής σχεδιασμού. Η παρούσα διπλωματική εργασία ασχολείται με προβλήματα βελτιστοποίησης ή ειδικότερα, τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας σε προβλήματα τα οποία διέπονται από τις εξισώσεις Navier - Stokes για ασυμπίεστες ροές. Οι συζυγείς μέθοδοι στηρίζονται στη διατύπωση και επίλυση ενός συστήματος μ.δ.ε., το οποίο αποτελεί το 'συζυγές' πρόβλημα (adjoint problem) των εξισώσεων κατάστασης. Οι συζυγείς μέθοδοι έχουν μεγάλο πλεονέκτημα σε σχέση με άλλες μεθόδους υπολογισμού παραγώγων ευαισθησίας (λ.χ. πεπερασμένες διαφορές) από άποψη υπολογιστικού χρόνου, καθώς για τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας απαιτούνται δύο επιλύσεις, μια των εξισώσεων κατάστασης και μια των συζυγών τους εξισώσεων, ανεξαρτήτως του πλήθους των παραμέτρων ελέγχου του προβλήματος.

Η ανάπτυξη των συζυγών μεθόδων αποσκοπεί, σε μεγάλο βαθμό, στην ενσωμάτωση τους σε αλγορίθμους βελτιστοποίησης της γεωμετρίας αεροδυναμικών μορφών. Οι μεταβλητές σχεδιασμού, ως προς τις οποίες υπολογίζονται οι παράγωγοι ευαισθησίας, καθορίζουν τη γεωμετρία της μορφής. Στόχος είναι η αντικατάσταση των κλασικών μεθόδων υπολογισμού παραγώγων ευαισθησίας (όπως είναι η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών), οι οποίες ήταν ιδιαίτερα δαπανηρές σε υπολογιστικό χρόνο, με τις πιο γρήγορες συζυγείς μεθόδους στους αυτοματοποιημένους αλγορίθμους βελτιστοποίησης.

Εκτός από τις συνεχείς (continuous) συζυγείς μεθόδους ([12],[13]) τις οποίες χρησιμοποιεί αυτή η διπλωματική εργασία, υπάρχουν και οι διακριτές (discrete) συζυγείς μέθοδοι ([14],[15],[16]). Η βασική διαφορά μεταξύ των δύο κατηγοριών

έγκειται στον τρόπο με τον οποίο προκύπτουν οι συζυγείς εξισώσεις και με το πότε πραγματοποιείται η διακριτοποίησή τους. Πιο συγκεκριμένα, στη συνεχή μέθοδο η μαθηματική διατύπωση γίνεται χρησιμοποιώντας τις συνεχείς εξισώσεις της ροής πριν αυτές διακριτοποιηθούν για να λυθούν αριθμητικά. Η συνάρτηση κόστους επαυξάνεται με την προσθήκη σε αυτήν των εξισώσεων ροής πολλαπλασιασμένων με τις συζυγείς μεταβλητές. Με τη χρήση του θεωρήματος της απόκλισης και κατάλληλη διαχείριση των χωρικών και επιφανειακών (σε 3Δ προβλήματα) ή επικαμπύλιων (σε 2Δ προβλήματα) ολοκληρωμάτων, εξάγονται οι συνεχείς συζυγείς εξισώσεις, οι οριακές συνθήκες τους και η έκφραση υπολογισμού των ζητούμενων παραγώγων ευαισθησίας. Η διακριτοποίηση των συζυγών εξισώσεων γίνεται σε δεύτερο στάδιο, προκειμένου αυτές να επιλυθούν αριθμητικά. Στην περίπτωση της διακριτής συζυγούς μεθόδου, η διατύπωση του συζυγούς προβλήματος βασίζεται στις διακριτοποιημένες εξισώσεις ροής. Πιο συγκεκριμένα, η διακριτή μορφή της συνάρτησης στόχου επαυξάνεται με το γινόμενο των διακριτοποιημένων υπολοίπων των εξισώσεων κατάστασης, πολλαπλασιασμένων με το πεδίο των συζυγών μεταβλητών. Έπειτα από κατάλληλη διαχείριση των όρων, η τελική μορφή των παραγώγων ευαισθησίας δεν εξαρτάται από την παράγωγο των μεταβλητών κατάστασης ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού.

Τα περισσότερα πρακτικά προβλήματα μηχανικού, διέπονται από περιορισμούς (λ.χ. κατασκευαστικούς, οικονομικούς κλπ). Για παράδειγμα, στο σχεδιασμό πτερυγίων στροβιλομηχανών, η προσπάθεια μείωσης απωλειών ολικής πίεσης πρέπει να συνοδεύεται από την επιβολή των περιορισμών του πάχους των πτερυγίων ή και της στροφής της ροής. Θεωρητικά, η βελτιστοποίηση ενός πτερυγίου στροβιλομηχανών έχοντας απλά ως στόχο τη μείωση απωλειών ολικής πίεσης, αναμένεται να οδηγήσει σε ένα ευθύγραμμο και πολύ λεπτό πτερύγιο. Τέτοια μορφή πτερυγίου είναι μη αποδεκτή, καθώς υπάρχει κίνδυνος να ξεπεραστεί το όριο διαρροής του υλικού και το πτερύγιο να σπάσει. Από την άλλη η μείωση της καμπυλότητας του πτερυγίου οδηγεί σε μείωση της στροφής της ροής, κάτι που θεωρείται μη αποδεκτό είτε επειδή αλλιώνεται η στροφή της ροής στις σταθερές πτερυγώσεις είτε επειδή σχετίζεται με τη συναλλαγή έργου (Θεώρημα Euler) στις περιστρεφόμενες πτερυγώσεις.

Στο πλαίσιο αυτής της διπλωματικής χρησιμοποιείται η συνεχής συζυγής μέθοδος για τη βελτιστοποίηση πτερυγώσεων στροβιλομηχανών λαμβάνοντας υπόψη τους περιορισμούς ως προς το πάχος του πτερυγίου και την στροφή της ροής. Οι περιορισμοί προστίθενται στο στόχο της μείωσης απωλειών ολικής πίεσης, ως δύο επιπλέον στόχοι. Οι τρεις στόχοι του προβλήματος βελτιστοποίησης συμπυκνώνονται σε έναν, με χρήση κατάλληλων συντελεστών βαρύτητας, οι τιμές των οποίων επιλέγονται από το χρήστη. Η επίλυση του ευθέως προβλήματος πραγματοποιήθηκε χρησιμοποιώντας το πακέτο ανοιχτού κώδικα OpenFOAM, το οποίο έχει εμπλουτιστεί με επιλύτη συνεχών συζυγών εξισώσεων, στο πλαίσιο παλαιότερης διδακτορικής διατριβής ([1]) της ΜΠΥΡΔ&Β/ΕΘΣ. Για τη δημιουργία 3Δ πλέγματος, εξελίχθηκε οικείο (in-house) λογισμικό γένεσης πλέγματος εμπλουτίζοντας και γενικεύοντάς το. Για τη δημιουργία 2Δ υπολογιστικών πλεγμάτων, χρησιμοποιήθηκε οικείο λογισμικό του ΜΠΥΡΔ&Β/ΕΜΠ. Επίσης, δημιουργήθηκε πρόγραμμα διαχείρισης και επικοινωνίας των συνιστωσών του αλγορίθμου βελτιστοποίησης, καθώς και

---

πρόγραμμα μετατροπής της δομής των δεδομένων του OpenFOAM σε άλλη δομή συμβατή με κάθε οικείο λογισμικό Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής του ΜΠΥΡΔ&B/ΕΘΣ. Το παραπάνω λογισμικό εφαρμόστηκε στη βελτιστοποίηση ενός 2Δ πτερυγίου στάτορα στρόβιλου και στο σχεδιασμό 3Δ πτερύγιου στάτορα συμπιεστή.

Δομή της διπλωματικής:

- Στο κεφάλαιο 2 αναλύεται ο τρόπος αριθμητικής επίλυσης του ευθέως προβλήματος όπως υλοποιείται στο OpenFOAM. Συγκεκριμένα, αναλύεται ο αλγόριθμος SIMPLE για την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων Navier-Stokes για ασυμπίεστες ροές.
- Στο κεφάλαιο 3 αναλύεται η μέθοδος της συνεχούς συζυγούς μεθόδου. Συγκεκριμένα, αναλύεται η διαδικασία υπολογισμού της παραγώγου ευαισθησίας απωλειών ολικής πίεσης. Επιπλέον, παρουσιάζεται ο τρόπος με τον οποίο εισήχθησαν οι περιορισμοί του πάχους και της στροφής της ροής στο πρόβλημα βελτιστοποίησης.
- Το κεφάλαιο 4 περιλαμβάνει το πρόβλημα βελτιστοποίησης του 2Δ πτερυγίου στάτορα στρόβιλου. Παρουσιάζεται ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης, καθώς και τα αποτελέσματα της διαδικασίας.
- Στο κεφάλαιο 5 αναλύεται η γένεση δομημένων πλεγμάτων με την επίλυση ελλειπτικών εξισώσεων με όρους πηγής. Όλη η διαδικασία δημιουργίας πλέγματος εφαρμόζεται στο γενέτη πλέγματος 3DTurbogen.
- Το κεφάλαιο 6 περιλαμβάνει την εφαρμογή του 3Δ πτερυγίου συμπιεστή. Παρουσιάζονται τα αποτελέσματα και συμπεράσματα από τη διαδικασία βελτιστοποίησης.
- Στο κεφάλαιο 7 συνοψίζονται τα συμπεράσματα.

Ανακεφαλαιώνοντας, η διπλωματική αυτή εργασία, που εντάσσεται στις ερευνητικές δραστηριότητες του ΜΠΥΡΔ&B/ΕΜΠ, για την ανάπτυξη μεθόδων βελτιστοποίησης βασισμένων σε συζυγείς μεθόδους, συμβάλλει στα εξής:

- Στον υπάρχοντα κώδικα της συζυγούς μεθόδου του ΜΠΥΡΔ&B/ΕΘΣ, διατυπώθηκαν και εντάχθηκαν οι περιορισμοί του πάχους του πτερυγίου και της στροφής της ροής.
  - Για τις ανάγκες γένεσης 3Δ πλέγματος εξελίχθηκε υπάρχον λογισμικό γένεσης δομημένων πλεγμάτων του ΜΠΥΡΔ&B/ΕΘΣ και εμπλουτίστηκε με πολλές δυνατότητες και επιλογές γένεσης πλέγματος.
  - Δημιουργήθηκε το πρόγραμμα foam2LTT, το οποίο μετατρέπει τη δομή δεδομένων πλέγματος από μορφή OpenFOAM σε μορφή LTT (οικείου λογισμικού), ώστε να είναι δυνατή η επικοινωνία των δύο ανωτέρω λογισμικών.
-

- Χρησιμοποιώντας την εξίσωση Laplace ([17]), εξομαζύνθηκαν οι υπερακοντίσεις της παραγωγού ευαισθησίας στους κόμβους του οριακού πλέγματος, επιτρέποντας έτσι την χρήση τους σε μια διαδικασία βελτιστοποίησης.
  - Όλες οι συνιστώσες της βελτιστοποίησης εντάχθηκαν σε πρόγραμμα διαχείρισης (program-manager), το οποίο αναλαμβάνει τη διαδικασία βελτιστοποίησης χωρίς την παρέμβαση χρήστη.
-



## Κεφάλαιο 2

# Ευθύ πρόβλημα - Επίλυση των Εξισώσεων Ροής

### 2.1 Εξισώσεις Ροής

Στην παρούσα διπλωματική εργασία, το πρωτεύον πρόβλημα διέπεται από τις εξισώσεις μόνιμης ροής συνεκτικού ασυμπίεστου ρευστού. Άρα οι λεγόμενες “εξισώσεις κατάστασης” του προβλήματος είναι οι 2Δ/3Δ εξισώσεις Navier-Stokes έπειτα από λήψη μέσων τιμών κατά Reynolds (RANS; Reynolds Averaged Navier-Stokes) σε συνδυασμό με το μοντέλο τύρβης δύο εξισώσεων k- $\omega$  SST. Οι ισχύουσες εξισώσεις για τέτοια προβλήματα ροών χωρίς μετάδοση θερμότητας διατυπώνονται στη μορφή:

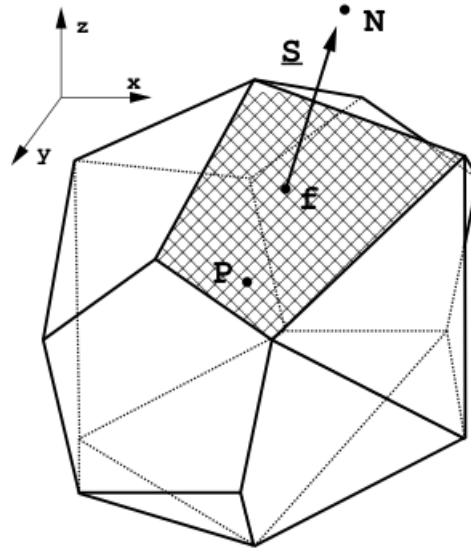
$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot (\vec{v} \vec{v}) - \nabla \cdot ((\nu + \nu_t) \nabla \vec{v}) = - \nabla p \quad (2.2)$$

όπου  $\vec{v}$ ,  $p$  είναι το διάνυσμα της ταχύτητας και η στατική πίεση, διαιρεμένη με την σταθερή πυκνότητα αντίστοιχα. Επίσης, με  $\nu$  συμβολίζεται η σταθερή κινηματική συνεκτικότητα του ρευστού, ενώ με  $\nu_t$  η τυρβώδης συνεκτικότητα που υπολογίζεται, στη παρούσα διπλωματική, μέσω του μοντέλου τύρβης k- $\omega$  SST (βλ. κεφάλαιο 2.3).

Στο λογισμικό ανοιχτού κώδικα OpenFOAM, το οποίο χρησιμοποιείται για την επίλυση των εξισώσεων κατάστασης, όλα τα δεδομένα αποθηκεύονται στο κέντρο του εκάστοτε κελιού του πλέγματος (cell-centered, collocated αποθήκευση).

Οι εξισώσεις κατάστασης λύνονται χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο SIMPLE (Semi Implicit Method for Pressure Linked Equations) ([27]), που περιγράφεται στην παρακάτω ενότητα.



Σχήμα 2.1: Πεπερασμένος Όγκος

P - κέντρο κελιού, N - κέντρο γειτονικών κελιών,  $S_f$  διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια με μέτρο την επιφάνεια σε  $m^2$ .

## 2.2 Αλγόριθμος SIMPLE

### 2.2.1 Εξισώσεις μέσης Ροής

Στις εξισώσεις κατάστασης του ασυμπίεστου ρευστού (2.1,2.2) δεν υπάρχει ρητή εξίσωση για τον υπολογισμό της πίεσης. Για να προκύψει μια τέτοια εξίσωση, χρησιμοποιείται μια 'μερική' διακριτοποίηση της εξίσωσης ορμής 2.2.

$$a_P \vec{v}_P = H(\vec{v}) - \nabla p \quad (2.3)$$

$$H(\vec{v}) = - \sum_N a_N \vec{v}_N \quad (2.4)$$

όπου με  $\vec{v}_P$  συμβολίζεται η ταχύτητα στο κέντρο του υπό εξέταση κελιού (όγκου αναφοράς), ενώ με  $\vec{v}_N$  συμβολίζονται οι ταχύτητες στα κέντρα των γειτονικών του κελιών (βλ. σχήμα 2.1 για την επεξήγηση του όγκου αναφοράς). Με  $a_P, a_N$  συμβολίζονται οι βαθμωτοί συντελεστές των ταχυτήτων  $\vec{v}_P, \vec{v}_N$  οι οποίοι υπολογίζονται συναρτήσει της ταχύτητας (μη γραμμικές εξισώσεις κατάστασης). Η άθροιση στον όρο  $H(\vec{v})$  πραγματοποιείται στους γείτονες  $N$  του υπό εξέταση όγκου αναφοράς.

Η διακριτοποιημένη εξίσωση συνέχειας 2.1 παίρνει την μορφή:

$$\nabla \cdot \vec{v} = \sum_f \vec{S} \cdot \vec{v}_f = 0 \quad (2.5)$$

όπου με  $\vec{v}_f$  συμβολίζεται η ταχύτητα στο κέντρο  $f$  της κοινής επιφάνειας των κελιών

$P$  και  $N$  ενώ με  $\vec{S}$  συμβολίζεται το κάθετο σε αυτή την επιφάνεια διάνυσμα, με μέτρο ίσο με το εμβαδό αυτής της επιφάνειας και φορά από το σημείο  $P$  στο σημείο  $N$ . Η παρακάτω εξίσωση που προκύπτει από την 2.3, διαιρώντας με τον συντελεστή  $a_P$ , χρησιμοποιείται για να εκφραστεί η ταχύτητα στο κέντρο των κελιών  $P$

$$\vec{v}_P = \frac{H(\vec{v})}{a_P} - \frac{1}{a_P} \nabla p \quad (2.6)$$

η οποία, με παρεμβολή στις επιφάνειες των κελιών παίρνει την μορφή

$$\vec{v}_f = \left( \frac{H(\vec{v})}{a_P} \right)_f - \left( \frac{1}{a_P} \right)_f (\nabla p)_f \quad (2.7)$$

Ο συνδυασμός των εξισώσεων 2.5, 2.7 οδηγεί στην παρακάτω τελική μορφή της εξίσωσης πίεσης:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left( \frac{1}{a_P} \nabla p \right) &= \nabla \cdot \left( \frac{H(\vec{v})}{a_P} \right) \\ &= \sum_f \vec{S} \cdot \left( \frac{H(\vec{v})}{a_P} \right)_f \end{aligned} \quad (2.8)$$

Η άθροιση στην εξίσωση 2.8 γίνεται στις επιφάνειες που απαρτίζουν τον όγκο αναφοράς και οι τιμές εκεί έχουν υπολογιστεί με παρεμβολή. Η τελική έκφραση του συστήματος των διακριτοποιημένων εξισώσεων Navier-Stokes για ασυμπίεστο ρευστό είναι:

$$a_p \vec{v}_p = H(\vec{v}) - \sum_f \vec{S} \cdot (p)_f, \quad (2.9)$$

$$\sum_f \vec{S} \cdot \left[ \left( \frac{1}{a_P} \right)_f (\nabla p)_f \right] = \sum_f \vec{S} \cdot \left( \frac{H(\vec{v})}{a_P} \right)_f \quad (2.10)$$

$$F = \vec{S} \cdot \vec{v}_f = S \cdot \left[ \left( \frac{H(\vec{v})}{a_P} \right)_f - \left( \frac{1}{a_P} \right)_f (\nabla p)_f \right] \quad (2.11)$$

με την 2.9 να αποτελεί την εξίσωση ορμής και την 2.10 να αποτελεί την εξίσωση πίεσης. Οι ταχύτητες που υπολογίζονται από την εξίσωση 2.9 δεν ικανοποιούν την εξίσωση συνέχειας (momentum prediction) και το μέτρο του διανύσματος ροής (flux  $F$ ) διορθώνεται μέσω της εξίσωσης 2.11, χρησιμοποιώντας την πίεση που έχει υπολογιστεί μέσω της 2.10 (momentum correction).

### 2.2.2 Αλγόριθμος SIMPLE - Υλοποίηση στο OpenFOAM

Οι εξισώσεις ροής στα προβλήματα αυτής της διπλωματικής εργασίας επιλύθηκαν χρησιμοποιώντας την υλοποίηση του αλγορίθμου **SIMPLE** στο λογισμικό

OpenFOAM (έκδοση 1.6-ext). Ακολουθεί η περιγραφή του αλγορίθμου καθώς και κομμάτια του κώδικα, που είναι προγραμματισμένοι σε **C++**:

1. Πραγματοποιείται αρχικοποίηση όλων των μεταβλητών ροής
2. Δημιουργείται το πρώτο μέλος της εξίσωσης ορμής (UEqn) το οποίο δεν περιλαμβάνει την κλίση της πίεσης. Από το κομμάτι αυτό της εξίσωσης υπολογίζονται οι συντελεστές του αριστερού μέλους (πεπλεγμένο-implicit κομμάτι της εξίσωσης), χρησιμοποιώντας τους κατάλληλους τελεστές (**fvm** - **implicit**) διακριτοποίησης. Ο πρώτος όρος αυτής της εξίσωσης αντιστοιχεί στον όρο μεταφοράς ενώ ο δεύτερος στον όρο διάχυσης. Με **nuEff** συμβολίζεται το άθροισμα της κινηματικής και τυρβώδους συνεκτικότητας. Στην εξίσωση εφαρμόζεται χαλάρωση στην φάση της διακριτοποίησης για την ενίσχυση της διαγώνιας κυριαρχίας.

```
tmp<fvVectorMatrix> UEqn
(
  fvm::div(phi, U) - fvm::laplace(nuEff, U)
);
UEqn.relax();
```

3. Στο δεξί μέλος της ανωτέρω εξίσωσης προστίθεται η κλίση της πίεσης χρησιμοποιώντας τον κατάλληλο ρητό τελεστή (**fv** - **explicit**), επιλύεται υπολογίζονται ταχύτητες  $\vec{v}$ .
 

```
solve (UEqn == -fvc::grad(p));
```
4. Υπολογίζεται ο όρος  $a_p$  συναρτήσει των ταχυτήτων που μόλις βρέθηκαν και ξαναυπολογίζονται νέες ταχύτητες (εξίσωση 2.3). Οι ταχύτητες αυτές είναι μια πρώτη εκτίμηση καθώς δεν ικανοποιούν την εξίσωση συνέχειας.
 

```
volScalarField AU = UEqn().A();
U = UEqn().H()/AU;
```

5. Υπολογίζονται τα μέτρα των διανυσμάτων ροής (flux F) στα κέντρα των επιφανειών παρεμβάλλοντας τις τιμές της ταχύτητας στα κέντρα των κελιών (2.10)

```
phi = fvc ::interpolate(U) & mesh.Sf();
```

6. Επιλύεται η εξίσωση πίεσης pEqn
 

```
fvScalarMatrix pEqn
(
  fvm::laplacian(1.0/AU, p) == fvc::div(phi)
);
pEqn.solve();
```

7. Διορθώνονται τα μέτρα των διανυσμάτων ροής (flux F) με βάση τις τιμές της πίεσης που μόλις υπολογίστηκαν (2.11).

**phi -= pEqn.flux();**

8. Εφαρμόζεται στη λύση της πίεσης χαλάρωση  
**p.relax();**

9. Διορθώνονται εκ νέου οι ταχύτητες με βάση τις νέες πιέσεις με την βοήθεια των οποίων πλέον ικανοποιείται η εξίσωση συνέχειας  
**U -= fvc::grad(p)/AU;**

10. Έχοντας υπολογίσει τα πεδία ταχυτήτων και πιέσεων, λύνονται οι εξισώσεις τύρβης (βλ. κεφάλαιο 2.3). Συγκεκριμένα για το μοντέλο τύρβης k-ω επιλύονται οι δύο εξισώσεις του k εξ.2.12 και του ω εξ.2.13 από τις οποίες υπολογίζεται η τυρβώδης συνεκτικότητα  $\nu_t$  με τη βοήθεια της εξίσωσης 2.14.  
**turbulence->correct();**

11. Επανάληψη των παραπάνω βημάτων μέχρι σύγκλισης της λύσης.

## 2.3 k-ω SST Μοντέλο Τύρβης

Το μοντέλο k-ω SST [8] είναι ένα από τα πιο διαδεδομένα μοντέλα τύρβης. Είναι μοντέλο δύο εξισώσεων, δηλαδή στις μεταβλητές ροής προστίθενται και άλλες δύο μεταβλητές μέσω των οποίων υπολογίζεται το πεδίο της τυρβώδους συνεκτικότητας  $\nu_t$ . Η πρώτη μεταβλητή είναι η τυρβώδης κινητική ενέργεια k (turbulent kinetic energy) και η δεύτερη μεταβλητή είναι ο ρυθμός καταστροφής της τύρβης ω (turbulence specific dissipation). Η πρώτη μεταβλητή υποδηλώνει την κινητική ενέργεια της τύρβης και η δεύτερη την κλίμακα της τύρβης.

Η διαμόρφωση SST (Shear Stress Transport) μέσα στο οριακό στρώμα, καθιστά το μοντέλο κατάλληλο για προσομοίωση ροών με πλέγματα χαμηλών αριθμών Reynolds (Low Reynolds) χωρίς την προσθήκη συναρτήσεων τοίχου (Wall Functions). Επίσης, με την διαμόρφωση SST το μοντέλο k-ω συμπεριφέρεται ως μοντέλο k-ε μακριά από τα στερεά τοιχώματα, αποφεύγοντας έτσι την μεγάλη ευαισθησία που εμφανίζουν τα κλασσικά μοντέλα k-ω στις τιμές εισόδου των τυρβωδών μεταβλητών, διατηρώντας ταυτόχρονα την υψηλή ικανότητα των μοντέλων k-ω στη πρόλεξη της αποκόλλησης της ροής κοντά στα στερεά τοιχώματα.

Οι εξισώσεις τύρβης λύνονται απεμπλεγμένα από τις εξισώσεις ροής. Αρχικά, υπολογίζεται το k λύνοντας την εξίσωση της τυρβώδους κινητικής ενέργειας.

$$\frac{\partial k}{\partial t} + v_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = P_k - \beta^* k \omega + \frac{\partial \left[ (\nu + \sigma_k \nu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right]}{\partial x_j} \quad (2.12)$$

Το  $\omega$  που υπάρχει στην εξίσωση προκύπτει από προηγούμενη επανάληψη. Στη συνέχεια, ανανεώνεται το  $\omega$  λύνοντας την εξίσωση του ρυθμού καταστροφής τύρβης.

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + v_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = S^2 - \beta \omega^2 + \frac{\partial \left[ (\nu + \sigma_k \nu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right]}{\partial x_j} + 2(1 - F_1) \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \quad (2.13)$$

Έπειτα η τυρβώδης συνεκτικότητα υπολογίζεται μέσω της παρακάτω σχέσης

$$\nu_t = \frac{a_1 k}{\max(a_1 \omega, S F_2)} \quad (2.14)$$

Οι σταθερές και όροι που εμφανίζονται στις τρεις ανωτέρω εξισώσεις δίνονται από :

$$\begin{aligned} S_{ij} &= \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \\ F_2 &= \tanh \left[ \left[ \max \left( \frac{2\sqrt{k}}{\beta^* \omega y}, \frac{500\nu}{y^2 \omega} \right) \right]^2 \right] \\ P_k &= \min \left( \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{x_j}, 10\beta^* k \omega \right) \\ F_1 &= \tanh \left[ \left[ \min \left[ \max \left( \frac{2\sqrt{k}}{\beta^* \omega y}, \frac{500\nu}{y^2 \omega} \right), \frac{4\sigma_{\omega 2} k}{CD_{k\omega} y^2} \right] \right]^4 \right] \\ CD_{k\omega} &= \max \left( 2\rho \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_i}, 10^{-10} \right) \\ \varphi &= \varphi_1 F_1 + \varphi_2 (1 - F_1) \\ a_1 &= \frac{5}{9}, \quad a_2 = 0.44 \\ \beta_1 &= \frac{3}{40}, \quad \beta_2 = 0.0828 \\ \beta^* &= \frac{9}{100} \\ \sigma_{k1} &= 0.85, \quad \sigma_{k2} = 1 \\ \sigma_{\omega 1} &= 0.5, \quad \sigma_{\omega 2} = 0.856 \end{aligned}$$

## Κεφάλαιο 3

# Η συνεχής συζυγής μέθοδος για στρωτές ροές ασυμπίεστου ρευστού

### 3.1 Εξισώσεις Ροής

Η παρούσα διπλωματική εργασία ασχολείται με εξισώσεις που διέπουν προβλήματα μόνιμης στρωτής ροής και συγκεκριμένα με τις Navier–Stokes για ασυμπίεστο ρευστό. Οι ισχύουσες εξισώσεις, για προβλήματα ροών χωρίς μετάδοση θερμότητας, [9], διατυπώνονται στη μορφή:

$$R^p = \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad (3.1)$$

$$R_i^v = v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.2)$$

όπου με

- $v_i$  συμβολίζονται οι συνιστώσες της ταχύτητας,
- $p$  είναι η κινηματική στατική πίεση (δηλαδή, η στατική πίεση του ρευστού διαιρεμένη με τη σταθερή πυκνότητα),
- $\nu$  είναι η κινηματική συνεκτικότητα του ρευστού η οποία θεωρείται σταθερή,
- $\nu_t$  είναι η τυρβώδη κινηματική συνεκτικότητα του ρευστού,
- Ως διάνυσμα μεταβλητών της ροής θεωρείται το  $\vec{U} = [p, v_i]^T$ ,
- Τέλος, για τα υπόλοιπα (Residuals) των διακριτοποιημένων εξισώσεων ροής ισχύει  $R_1^U = R^p$  και  $R_{i+1}^U = R_i^v$  για  $i = 1, 2, 3$ .

Οι εξισώσεις της ροής μαζί με τις οριακές συνθήκες του προβλήματος αποτελούν τις εξισώσεις κατάστασης των προβλημάτων του κεφαλαίου 3. Σε προβλήματα εσωτερικών ροών οι οριακές συνθήκες που πρέπει να επιβληθούν και οι οποίες συμπληρώνουν τις εξισώσεις 3.1, 3.2 στο εσωτερικό του πεδίου είναι οι εξής:

(α) στην είσοδο του πεδίου, Dirichlet συνθήκη για κάθε συνιστώσα της ταχύτητας και μηδενική Neumann για τη στατική πίεση,

(β) στην έξοδο του πεδίου, μηδενική Neumann συνθήκη για την ταχύτητα και μηδενική Dirichlet για την πίεση

(γ) στα στερεά τοιχώματα, μηδενική Dirichlet για την ταχύτητα (συνθήκη μη-ολίσθησης) και μηδενική Neumann για την πίεση.

### 3.2 Εισαγωγή των συζυγών μεταβλητών

Οι συζυγείς μέθοδοι οι οποίοι ανήκουν στις αιτιοκρατικές μεθόδους βελτιστοποίησης προϋποθέτουν την ύπαρξη ενός ή περισσοτέρων κριτηρίων βελτιστοποίησης. Αυτό το κριτήριο σε προβλήματα βελτιστοποίησης αεροδυναμικών μορφών εκφράζεται μαθηματικά από μια συνάρτηση κόστους  $F = F(\vec{U}(\vec{b}), \vec{b})$ , η οποία εξαρτάται από τις μεταβλητές της ροής  $\vec{U}$  και τις μεταβλητές σχεδιασμού  $\vec{b}$ , οι οποίες καθορίζουν τη γεωμετρία της προς σχεδιασμό μορφής. Έτσι, η συνάρτηση κόστους είναι μια σύνθετη συνάρτηση στην οποία η τιμή της εξαρτάται αφενός από τις μεταβλητές σχεδιασμού  $\vec{b}$  δηλαδή από τη γεωμετρία της μορφής και αφετέρου από τη ροϊκή λύση,  $\vec{U}$ , η οποία επίσης αποτελεί συνάρτηση του  $\vec{b}$ . Το  $\vec{U}$ , όπως είναι φυσικό, μεταβάλλεται αν μεταβληθούν οι τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού, αν αλλάξει δηλαδή η γεωμετρία της προς σχεδιασμό μορφής και ικανοποιηθούν οι εξισώσεις κατάστασης στο τροποποιημένο χωρίο ροής. Συνεπώς, οι μεταβλητές σχεδιασμού  $\vec{b}$  ελέγχουν την τιμή της συνάρτησης κόστους.

Η διατύπωση του συζυγούς προβλήματος προϋποθέτει τη δημιουργία της επαυξημένης συνάρτησης κόστους,  $F_{aug}$ . Αυτή δημιουργείται από την πρόσθεση στη συνάρτηση κόστους, του χωρικού (στο πεδίο ροής) ολοκληρώματος, των εξισώσεων της ροής  $R$  πολλαπλασιασμένων με τις συζυγείς  $\vec{\Psi}$  (adjoint) μεταβλητές. Επομένως, η επαυξημένη συνάρτηση κόστους ορίζεται ως

$$F_{aug} = F + \int_{\Omega} \Psi_l R_l^U d\Omega \quad (3.3)$$

Όπως προαναφέρθηκε, στο δεξί μέλος της εξίσωσης 3.3 προστίθεται το ολοκλήρωμα, στο πεδίο ροής  $\Omega$ , των υπολοίπων των εξισώσεων κατάστασης (τα οποία είναι μηδενικά δεδομένου ότι πρέπει να ικανοποιούνται οι εξισώσεις κατάστασης και οι αντίστοιχες οριακές συνθήκες) πολλαπλασιασμένων με το διάνυσμα των συζυγών μεταβλητών  $\vec{\Psi} = [q, u_i]^T$ . Με  $q$  και  $u_i$  συμβολίζονται, αντιστοίχως, οι συζυγείς ως προς την πίεση και το διάνυσμα της ταχύτητας, μεταβλητές. Η έκφραση 3.3 μπορεί εναλλακτικά να γραφεί, χωριστά για τις εξισώσεις της ορμής και αυτήν της συνέχειας, ως

$$F_{aug} = F + \int_{\Omega} u_i R_i^v d\Omega + \int_{\Omega} q R^p d\Omega \quad (3.4)$$

Σκοπός της συζυγούς μεθόδου είναι να υπολογιστούν οι παράγωγοι ευαισθησίας  $\frac{\delta F}{\delta b_m}$ , οι οποίες εκφράζουν τις μεταβολές της συνάρτησης κόστους  $F$  ως προς ενδεχόμενες μεταβολές των μεταβλητών σχεδιασμού,  $b_m$ , έτσι ώστε να πραγματοποιηθεί ελαχιστοποίηση της συνάρτησης κόστους. Προς το παρόν θεωρείται ότι τα προβλήματα δεν έχουν περιορισμούς όπως λ.χ. ως προς το πάχος πτερυγίου



στροβιλομηχανής ή τη στροφή της ροής εξόδου. Δεδομένου ότι το ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος των εξισώσεων 3.3 είναι εξ ορισμού ίσο με μηδέν, αντί της παραγώγου ευαισθησίας  $\frac{\delta F}{\delta b_m}$ , αρκεί να υπολογισθεί η παράγωγος της επαυξημένης συνάρτησης κόστους  $\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m}$ . Ο ρυθμός μεταβολής γράφεται:

$$\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m} = \frac{\delta F}{\delta b_m} + \int_{\Omega} u_i \frac{\delta R_i^v}{\delta b_m} d\Omega + \int_{\Omega} q \frac{\delta R^p}{\delta b_m} d\Omega + \int_{\Omega} (u_i R_i^v + q R^p) \frac{\delta(d\Omega)}{\delta b_m} \quad (3.5)$$

Η εξίσωση 3.5 συναρτά το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης κόστους των ρυθμών μεταβολής αφενός μεν των ποσοτήτων ροής  $\frac{\delta p}{\delta b_m}$  και  $\frac{\delta v_i}{\delta b_m}$ , αφετέρου δε των στοιχειωδών όγκων ελέγχου του χωρίου ροής  $\frac{\delta(d\Omega)}{\delta b_m}$ . Μπορεί δε, με χρήση των ταυτοτήτων

$$\frac{\delta \Phi}{\delta b_m} = \frac{\partial \Phi}{\partial b_m} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} \quad (3.6)$$

$$\frac{\delta(d\Omega)}{\delta b_m} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\delta x_k}{\delta b_m} \right) d\Omega \quad (3.7)$$

να γραφεί στην παρακάτω μορφή

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m} &= \frac{\delta F}{\delta b_m} + \int_{\Omega} u_i \frac{\partial R_i^v}{\partial b_m} d\Omega + \int_{\Omega} q \frac{\partial R^p}{\partial b_m} d\Omega + \int_{\Omega} \left( u_i \frac{\partial R_i^v}{\partial x_k} + q \frac{\partial R^p}{\partial x_k} \right) \frac{\delta x_k}{\delta b_m} d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} (u_i R_i^v + q R^p) \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\delta x_k}{\delta b_m} \right) d\Omega \end{aligned} \quad (3.8)$$

Οι τελευταίες έχουν αναπτυχθεί και αποδειχθεί στη διδακτορική διατριβή του Δ. Παπαδημητρίου [2], βλ. επίσης [10], [11]. Στην 3.6, με  $\Phi = \Phi(x_i(\vec{b}), \vec{b})$  συμβολίζεται οποιαδήποτε ποσότητα της ροής, όπως για λ.χ. οι ροϊκές μεταβλητές (πίεσεις, ταχύτητες, κ.λ.π.) αλλά και τα υπόλοιπα  $R_l^U$  των εξισώσεων ροής. Αν  $\Phi = R_l^U$ , στο εσωτερικό του πεδίου ροής, η εξίσωση 3.6 οδηγεί στις σχέσεις

$$\frac{\delta R_l^U}{\delta b_m} = \frac{\partial R_l^U}{\partial b_m} = \frac{\partial R_l^U}{\partial x_k} = 0 \quad (3.9)$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα της απόκλισης (Green-Gauss) στο τελευταίο ολοκλήρωμα της εξίσωσης 3.8 και με αμοιβαίες απαλοιφές όρων, η μεταβολή της συνάρτησης κόστους εκφράζεται ως

$$\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m} = \frac{\delta F}{\delta b_m} + \int_{\Omega} u_i \frac{\partial R_i^v}{\partial b_m} d\Omega + \int_{\Omega} q \frac{\partial R^p}{\partial b_m} d\Omega + \int_S (u_i R_i^v + q R^p) \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS \quad (3.10)$$

όπου  $S$  είναι το όριο του πεδίου της ροής ( $S \equiv \partial\Omega$ ).

Στην έκφραση 3.10 μπορεί να καταλήξει κανείς απευθείας από την εξίσωση 3.3 εφαρμόζοντας σε αυτήν τον κανόνα του Leibniz που διέπει τις μεταβολές

ολοκληρωμάτων όταν αυτές συνδυάζονται με μεταβολές στο χωρίο ολοκλήρωσης [1].

Στην έκφραση 3.10 εμφανίζονται μόνο οι άμεσες μεταβολές των εξισώσεων της ροής  $\frac{\partial R_l^U}{\partial b_m}$ . Απουσιάζουν δηλαδή από αυτήν οι 'μεταφορικοί' όροι της μορφής  $\frac{\partial R_l^U}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m}$ . Η εμπλοκή των άμεσων μεταβολών  $\frac{\partial}{\partial b_m}$ , αντί των ολικών  $\frac{\delta}{\delta b_m}$ , είναι ιδιαίτερα βολική αφού, έχοντας αντικαταστήσει τις αναλυτικές εκφράσεις των εξισώσεων  $R_l^U$ , επιτρέπεται πλέον η εναλλαγή της σειράς παραγωγίσις στους όρους εκείνους με μικτές παραγωγούς των μεταβλητών της ροής ( $\Phi = U_l$ ) ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού και τις χωρικές συντεταγμένες. Δηλαδή, ισχύει ότι

$$\frac{\partial}{\partial b_m} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial b_m} \right) \quad (3.11)$$

Η εξίσωση 3.11 αποτελεί απόρροια του γεγονότος ότι η άμεση μεταβολή  $\frac{\partial}{\partial b_m}$  είναι απεμπλεγμένη από οποιαδήποτε χωρική μετατόπιση  $\delta x_k$ .

### 3.3 Γενικευμένες συναρτήσεις κόστους

Γενικά, μια συνάρτηση κόστους αποτελείται από ολοκληρώματα ροϊκών ποσοτήτων στα όρια  $S$  ή και στο εσωτερικό  $\Omega$  του πεδίου ροής. Μια τέτοια συνάρτηση γράφεται, γενικά, στη μορφή

$$F = \int_S F_S dS + \int_\Omega F_\Omega d\Omega \quad (3.12)$$

όπου με  $F_S$  και  $F_\Omega$  συμβολίστηκαν οι προς ολοκλήρωση ποσότητες στο  $S$  και στο  $\Omega$ , αντιστοίχως. Αν το όριο αποτελείται από διάφορα τμήματα, έστω είσοδο  $S_I$ , έξοδο  $S_O$  και στερεά τοιχώματα  $S_W$  (δηλαδή  $S = S_I \cup S_O \cup S_W$ ) τότε, για κάθε τμήμα του ορίου, προκειμένου να γίνει διαχωρισμός, η ποσότητα  $F_S$  θα γράφεται ως  $F_{S_I}$ ,  $F_{S_O}$  και  $F_{S_W}$ . Στη γενική περίπτωση, ισχύει  $F_{S_I} \neq F_{S_O} \neq F_{S_W}$ . Στην περίπτωση δε, που το όριο  $S$  αποτελείται και από άλλα διαφορετικά τμήματα, ισχύουν τα ανάλογα και γι' αυτά.

Η παράγωγος ευαισθησίας της γενικευμένης συνάρτησης κόστους 3.12 (υπολογιζόμενη με διαδικασία αντίστοιχη αυτής της προηγούμενης ενότητας) δίνεται από την έκφραση

$$\begin{aligned} \frac{\delta F}{\delta b_m} &= \int_S \frac{\partial F_S}{\partial b_m} dS + \int_S \frac{\partial F_S}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS + \int_S F_S \frac{\delta(dS)}{\delta b_m} \\ &+ \int_\Omega \frac{\partial F_\Omega}{\partial b_m} d\Omega + \int_\Omega \frac{\partial F_\Omega}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} d\Omega + \int_\Omega F_\Omega \frac{\delta(d\Omega)}{\delta b_m} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Λαμβάνοντας υπόψη την εξίσωση 3.7 και εφαρμόζοντας το θεώρημα της απόκλισης

το τελευταίο ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους της 3.13 γράφεται

$$\int_{\Omega} F_{\Omega} \frac{\delta(d\Omega)}{\delta b_m} = \int_S F_{\Omega} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS - \int_{\Omega} \frac{\partial F_{\Omega}}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} d\Omega \quad (3.14)$$

Επομένως, η 3.13 γίνεται

$$\frac{\delta F}{\delta b_m} = \int_S \frac{\partial F_S}{\partial b_m} dS + \int_S \left( \frac{\partial F_S}{\partial x_k} + F_{\Omega} n_k \right) \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS + \int_S F_S \frac{\delta(dS)}{\delta b_m} + \int_{\Omega} \frac{\partial F_{\Omega}}{\partial b_m} d\Omega \quad (3.15)$$

όπου οι άμεσες μεταβολές  $\frac{\partial F_S}{\partial b_m}$  και  $\frac{\partial F_{\Omega}}{\partial b_m}$  δίνονται από τις σχέσεις

$$\frac{\partial F_S}{\partial b_m} = \frac{\partial F_S}{\partial v_i} \frac{\partial v_i}{\partial b_m} + \frac{\partial F_S}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial b_m} \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial F_{\Omega}}{\partial b_m} = \frac{\partial F_{\Omega}}{\partial v_i} \frac{\partial v_i}{\partial b_m} + \frac{\partial F_{\Omega}}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial b_m} \quad (3.17)$$

Με την αντικατάσταση της μεταβολής της συνάρτησης κόστους, εξίσωση 3.15, στην εξίσωση 3.10 καθίσταται, όπως θα δούμε και στη συνέχεια, δυνατός ο μετασχηματισμός της έκφρασης του  $\frac{\delta F_{avg}}{\delta b_m}$  με στόχο την ομαδοποίηση όρων και την παραγωγή των συζυγών εξισώσεων, των οριακών τους συνθηκών και της τελικής έκφρασης των παραγώγων ευαισθησίας.

Η χρήση των εξισώσεων 3.7 και 3.15 οδήγησε στην απλοποίηση της εξίσωσης 3.10 έτσι ώστε να μην περιέχει πλέον μεταβολές  $\frac{\delta(d\Omega)}{\delta b_m}$ , των στοιχειωδών όγκων ελέγχου του χωρίου ροής (όπως η εξίσωση 3.5) αλλά, αντί αυτών, τις στοιχειώδεις μεταβολές  $\frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS$  στο όριο του χωρίου.

Συνεπώς, η μέθοδος είναι ανεξάρτητη από τις μεταβολές των συντεταγμένων θέσεων των σημείων του χωρίου ροής. Η απουσία χωρικών ολοκληρωμάτων τα οποία εξαρτώνται από μεταβολές του πεδίου ροής και η εμφάνιση μόνο συνοριακών ολοκληρωμάτων στην έκφραση των παραγώγων ευαισθησίας έχει ως αποτέλεσμα τη μείωση του υπολογιστικού κόστους.

Στη συνέχεια, παρουσιάζεται η συνάρτηση-στόχος της μείωσης απωλειών ολικής πίεσης, η οποία χρησιμοποιείται στις εφαρμογές αυτής της διπλωματικής εργασίας και βασίζεται στη σχέση 3.15.

### 3.3.1 Ελαχιστοποίηση απωλειών ολικής πίεσης

Ένα από τα πιο συχνά προβλήματα εσωτερικής αεροδυναμικής, είναι ο σχεδιασμός αγωγού βέλτιστης μορφής ώστε να επιτευχθούν οι ελάχιστες απώλειες ολικής πίεσης μεταξύ εισόδου ( $S_I$ ) και της εξόδου ( $S_O$ ) του χωρίου της ροής, εφόσον δεν υπάρχει συναλλαγή έργου. Τέτοιες εφαρμογές είναι η ελαχιστοποίηση των απωλειών λόγω συνεκτικότητας σε έναν αγωγό ή στην ακίνητη περυγώση στροβιλομηχανής και για κινητές περυγώσεις η αντίστοιχη συνάρτηση κόστους θα διατυπώνονταν χρησιμοποιώντας τη σχετική ολική πίεση (αντί της ολικής πίεσης). Οι οριακές συνθήκες που διέπουν το πρόβλημα της ροής είναι, για την είσοδο, καθορισμένη

κατανομή ταχύτητας και για την έξοδο, καθορισμένη τιμή στατικής πίεσης (που τίθεται συνήθως ίση με μηδέν).

Η συνάρτηση κόστους αποτελείται μόνο από συνοριακά ολοκληρώματα και εκφράζεται ως εξής

$$F = \int_{S_{I,O}} F_{S_{I,O}} dS \quad (3.18)$$

όπου η προς ολοκλήρωση ποσότητα  $F_{S_{I,O}}$  στα όρια εισόδου και εξόδου του χωρίου δίνεται από την έκφραση

$$F_{S_{I,O}} = - \left( p + \frac{1}{2} v^2 \right) v_i n_i \quad (3.19)$$

Εδώ, με  $v = |\vec{v}|$  συμβολίζεται το μέτρο του διανύσματος της ταχύτητας. Η παραπάνω ποσότητα εκφράζει την ολική πίεση πολλαπλασιασμένη με την παροχή μάζας (όγκου)<sup>1</sup> του ασυμπίεστου ρευστού που διέρχεται από στοιχειώδη διατομή της εισόδου ή εξόδου του πεδίου ροής. Το αρνητικό πρόσημο στα ολοκληρώματα της εξίσωσης 3.18 υφίσταται λόγω του ότι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα, με συνιστώσες  $n_i$ , κατευθύνεται εξ ορισμού προς το εξωτερικό του πεδίου ροής. Οι μεταβολές των  $F_{S_{I,O}}$  ως προς τις ποσότητες της ροής δίνονται από τις εκφράσεις

$$\frac{\partial F_{S_{I,O}}}{\partial v_i} = -\frac{1}{2} v^2 n_i - v_{\langle n \rangle} v_i - p n_i, \quad \frac{\partial F_{S_{I,O}}}{\partial p} = -v_i n_i$$

όπου με  $v_{\langle n \rangle}$  συμβολίζεται η κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας, δηλαδή ισχύει ότι  $v_{\langle n \rangle} = v_i n_i$ . Αργότερα, με  $\vec{v}_{\langle t \rangle}$  συμβολίζεται η εφαπτόμενη συνιστώσα της ταχύτητας. Η τελευταία παριστάνεται ως διάνυσμα για να καλύψει και 3D προβλήματα και ισχύει ότι  $\vec{v}_{\langle t \rangle} = \vec{v} - v_{\langle n \rangle} \vec{n}$ . Επισημαίνεται ότι, στις εξισώσεις, οι δείκτες  $n$  και  $t$  ακόμη και αν επαναλαμβάνονται, δεν υποδηλώνουν άθροιση αλλά μόνο την κατεύθυνση του αντίστοιχου μεγέθους (κάθετη ή εφαπτομενική). Συνεπώς, για την αποφυγή σύγχυσης με τους υπόλοιπους δείκτες, τοποθετούνται μέσα σε άγκιστρα  $\langle \rangle$ .

Με βάση τις σχέσεις 3.16 και 3.17 και δεδομένου ότι  $F_\Omega = 0$ , η ολική μεταβολή της συνάρτησης κόστους, εξίσωση 3.15, στην προκειμένη περίπτωση, γράφεται

$$\begin{aligned} \frac{\delta F}{\delta b_m} = & - \int_{S_I} \left[ \left( p + \frac{1}{2} v^2 \right) n_i + v_{\langle n \rangle} v_i \right] \frac{\partial v_i}{\partial b_m} dS - \int_{S_I} v_i n_i \frac{\partial p}{\partial b_m} dS \\ & - \int_{S_O} \left[ \left( p + \frac{1}{2} v^2 \right) n_i + v_{\langle n \rangle} v_i \right] \frac{\partial v_i}{\partial b_m} dS - \int_{S_O} v_i n_i \frac{\partial p}{\partial b_m} dS \end{aligned} \quad (3.20)$$

Στην εξίσωση 3.20, ελήφθη υπόψη ότι η γεωμετρία και η θέση των κόμβων στην είσοδο και στην έξοδο του χωρίου δεν επηρεάζονται από μεταβολές των μεταβλητών

<sup>1</sup>Η παροχή μάζας πολλαπλασιάζεται στη συνάρτηση κόστους με σκοπό τα μεγέθη που θα προκύπτουν να είναι αντίστοιχα της ισχύος

σχεδιασμού  $b_m$ , ισχύει δηλαδή

$$\frac{\delta x_k}{\delta b_m} = 0 \quad (3.21)$$

$$\frac{\delta(dS)}{\delta b_m} = 0 \quad (3.22)$$

$$(3.23)$$

Αυτό ισχύει αν τα όρια  $S_I$  και  $S_O$  δεν ανήκουν στο προς σχεδιασμό όριο της αεροδυναμικής μορφής. Στην ειδική περίπτωση που τα όρια  $S_I$  ή/και  $S_O$  δεν είναι σταθερά, αν λ.χ. επιτρέπεται να μεταβάλλονται οι διατομές εισόδου/εξόδου ενός αγωγού, τότε, στην παραπάνω έκφραση (και συνεπώς και στην τελική έκφραση των παραγώγων ευαισθησίας) παραμένουν οι όροι  $\int_S \frac{\partial F_S}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS$  και  $\int_S F_S \frac{\delta(dS)}{\delta b_m}$  της εξίσωσης 3.15. Εφόσον έχει λυθεί το πρόβλημα της ροής, οι όροι αυτοί είναι άμεσα υπολογίσιμοι (χωρίς επιβάρυνση του υπολογιστικού κόστους της μεθόδου), αφού εξαρτώνται από τις ροϊκές μεταβλητές και τις γεωμετρικές μεταβολές των ορίων εισόδου/εξόδου.

Τέλος, αν χρησιμοποιηθούν οι συνθήκες  $\frac{\partial v_i}{\partial b_m} = 0$  και  $\frac{\partial p}{\partial b_m} = 0$ , οι οποίες ισχύουν σε είσοδο και έξοδο αντιστοίχως, η έκφραση 3.20 γίνεται

$$\frac{\delta F}{\delta b_m} = - \int_{S_I} v_i n_i \frac{\partial p}{\partial b_m} dS - \int_{S_O} \left( \frac{1}{2} v^2 n_i + v_{(n)} v_i \right) \frac{\partial v_i}{\partial b_m} dS \quad (3.24)$$

Ακολουθεί η απόδειξη των συνθηκών  $\frac{\partial v_i}{\partial b_m} = 0$  και  $\frac{\partial p}{\partial b_m} = 0$  στην είσοδο και έξοδο, αντιστοίχως, του χωρίου ροής. Όπως προαναφέρθηκε, στην είσοδο επιβάλλεται καθορισμένη κατανομή ταχύτητας (συνθήκη Dirichlet για τα  $v_i$ ). Επομένως, αφού η παραπάνω οριακή συνθήκη είναι ανεξάρτητη από την παραμετροποίηση της σχεδιαζόμενης μορφής, η ολική μεταβολή του διανύσματος της ταχύτητας σε κάθε θέση της εισόδου είναι μηδενική

$$\frac{\delta v_i}{\delta b_m} = 0 \quad (3.25)$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση 3.6 (για  $\Phi = v_i$ ), ισχύει ότι

$$\frac{\partial v_i}{\partial b_m} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} = 0$$

και με βάση την εξίσωση 3.21 προκύπτει ότι, στην είσοδο του πεδίου ροής,

$$\frac{\partial v_i}{\partial b_m} = 0 \quad (3.26)$$

Στην έξοδο επιβάλλεται μηδενική Dirichlet συνθήκη για τη στατική πίεση και αφού

εκεί ισχύει η εξίσωση 3.21, προκύπτει αντίστοιχα ότι

$$\frac{\delta p}{\delta b_m} = \frac{\partial p}{\partial b_m} = 0 \quad (3.27)$$

### 3.4 Διατύπωση συνεχών συζυγών πεδιακών εξισώσεων και οριακών συνθηκών

Στη μεταβολή της επαυξημένης συνάρτησης κόστους, εξίσωση 3.10, εμφανίζονται οι άμεσες μεταβολές των υπολοίπων των εξισώσεων της ροής, δηλαδή οι ποσότητες  $\frac{\partial R_i^v}{\partial b_m}$  και  $\frac{\partial R^p}{\partial b_m}$ . Για τη διατύπωση των συζυγών εξισώσεων, οι εν λόγω ποσότητες πρέπει να αντικατασταθούν με τις αναλυτικές τους εκφράσεις, όπως αυτές υπολογίζονται από τη διαφόριση,  $\frac{\partial(\cdot)}{\partial b_m}$ , των εξισώσεων της ροής 3.1 και 3.2. Επομένως, από τις προαναφερθείσες εξισώσεις και με χρήση της εξίσωσης 3.11, προκύπτουν οι

$$\frac{\partial R^p}{\partial b_m} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_j}{\partial b_m} \right) \quad (3.28)$$

και

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_i^v}{\partial b_m} &= \frac{\partial v_j}{\partial b_m} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial b_m} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial p}{\partial b_m} \right) \\ &- (\nu + \nu_t) \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial b_m} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_j}{\partial b_m} \right) \right], \quad i = 1, 2, (3) \end{aligned} \quad (3.29)$$

Από τα ολοκληρώματα του δεξιού μέλους της εξίσωσης 3.10, το  $\int_{\Omega} q \frac{\partial R^p}{\partial b_m} d\Omega$ , με βάση την εξίσωση 3.28, γίνεται

$$\int_{\Omega} q \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_j}{\partial b_m} \right) d\Omega = \int_S q \frac{\partial v_j}{\partial b_m} n_j dS - \int_{\Omega} \frac{\partial q}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial b_m} d\Omega \quad (3.30)$$

Για το έτερο χωρικό ολοκλήρωμα της εξίσωσης 3.10,  $\int_{\Omega} u_i \frac{\partial R_i^v}{\partial b_m} d\Omega$ , η ανάλυση κάθε μη-συνεκτικού όρου δίνει

$$\int_{\Omega} u_i \frac{\partial v_j}{\partial b_m} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\Omega = \int_S u_i v_i n_j \frac{\partial v_j}{\partial b_m} dS - \int_{\Omega} v_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left( u_i \frac{\partial v_j}{\partial b_m} \right) d\Omega \quad (3.31)$$

$$\int_{\Omega} u_i v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial b_m} \right) d\Omega = \int_S u_i v_j n_j \frac{\partial v_i}{\partial b_m} dS - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i v_j) \frac{\partial v_i}{\partial b_m} d\Omega \quad (3.32)$$

$$\int_{\Omega} u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial p}{\partial b_m} \right) d\Omega = \int_S u_i n_i \frac{\partial p}{\partial b_m} dS - \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial b_m} d\Omega \quad (3.33)$$

Οι συνεκτικοί όροι του ίδιου ολοκληρώματος γράφονται

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} (\nu + \nu_t) u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial b_m} \right) \right] d\Omega &= - \int_S (\nu + \nu_t) u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial b_m} \right) n_j dS \\ &+ \int_{\Omega} (\nu + \nu_t) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial b_m} \right) d\Omega \\ &= - \int_S (\nu + \nu_t) u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial b_m} \right) n_j dS \\ &+ \int_S (\nu + \nu_t) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial b_m} n_j dS \\ &- \int_{\Omega} (\nu + \nu_t) \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \frac{\partial v_i}{\partial b_m} d\Omega \end{aligned} \quad (3.34)$$

και, ομοίως

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} (\nu + \nu_t) u_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_j}{\partial b_m} \right) \right] d\Omega &= - \int_S (\nu + \nu_t) u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial v_j}{\partial b_m} \right) n_j dS \\ &+ \int_S (\nu + \nu_t) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial b_m} n_i dS \\ &- \int_{\Omega} (\nu + \nu_t) \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial b_m} d\Omega \end{aligned} \quad (3.35)$$

Αντικαθιστώντας τις 3.30 ως 3.35 στην 3.10, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m} &= \frac{\delta F}{\delta b_m} + \int_S \left[ u_j v_j n_i + u_i v_j n_j + (\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i \right] \frac{\partial v_i}{\partial b_m} dS \\ &- \int_S (\nu + \nu_t) \frac{\partial}{\partial b_m} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j u_i dS \\ &+ \int_{\Omega} \left\{ -v_j \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - (\nu + \nu_t) \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial q}{\partial x_i} \right\} \frac{\partial v_i}{\partial b_m} d\Omega \\ &+ \int_S u_j n_j \frac{\partial p}{\partial b_m} dS - \int_{\Omega} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \frac{\partial p}{\partial b_m} d\Omega + \int_S u_i R_i^v \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS + \int_S q R^p \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS \end{aligned} \quad (3.36)$$

Αντικαθιστώντας τη γενική έκφραση της παραγώγου  $\frac{\delta F}{\delta b_m}$  στην 3.36, σύμφωνα με

τις εξισώσεις 3.15, 3.16 και 3.17, αυτή λαμβάνει τη μορφή

$$\begin{aligned}
\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m} = & \int_S \left[ u_j v_j n_i + u_i v_j n_j + (\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i + \frac{\partial F_S}{\partial v_i} \right] \frac{\partial v_i}{\partial b_m} dS \\
& + \int_\Omega \left\{ -v_j \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - (\nu + \nu_t) \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial q}{\partial x_i} + \frac{\partial F_\Omega}{\partial v_i} \right\} \frac{\partial v_i}{\partial b_m} d\Omega \\
& + \int_S \left( u_j n_j + \frac{\partial F_S}{\partial p} \right) \frac{\partial p}{\partial b_m} dS + \int_\Omega \left( -\frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial F_\Omega}{\partial p} \right) \frac{\partial p}{\partial b_m} d\Omega \\
& - \int_S (\nu + \nu_t) \frac{\partial}{\partial b_m} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j u_i dS + \int_S u_i R_i^v \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS + \int_S q R^p \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS \\
& + \int_S \left( \frac{\partial F_S}{\partial x_k} + F_\Omega n_k \right) \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS + \int_S F_S \frac{\delta(dS)}{\delta b_m} \tag{3.37}
\end{aligned}$$

Από την εξίσωση 3.37, γίνεται αντιληπτό ότι η παράγωγος ευαισθησίας της συνάρτησης κόστους έχει πλέον εκφραστεί συναρτήσει δύο ειδών μεταβολών:

(α) των άμεσων μεταβολών των ροϊκών μεταβλητών  $\frac{\partial p}{\partial b_m}$ ,  $\frac{\partial v_i}{\partial b_m}$  στο εσωτερικό αλλά και στα όρια του πεδίου και

(β) των μεταβολών γεωμετρικών ποσοτήτων  $\frac{\delta x_k}{\delta b_m}$ ,  $\frac{\delta(dS)}{\delta b_m}$  μόνο στα όρια του πεδίου ροής.

Οι συντελεστές, δηλαδή, με τους οποίους πολλαπλασιάζονται οι μεταβολές των άμεσων μεταβολών των ροϊκών μεταβλητών εξαρτώνται μόνο από το ροϊκό (που θεωρείται γνωστό) και το συζυγές του πεδίο (το οποίο θα υπολογιστεί από την επίλυση των συζυγών εξισώσεων). Αντιστοίχως, τα ολοκληρώματα στα οποία εμπεριέχονται οι μεταβολές γεωμετρικών ποσοτήτων δεν εξαρτώνται από τις μεταβολές των ροϊκών μεταβλητών. Ο υπολογισμός των μεταβολών των ροϊκών μεταβλητών δεν είναι επιθυμητός δεδομένου ότι για αυτό απαιτείται η μέθοδος της ευθείας διαφόρισης (ή των πεπερασμένων διαφορών) δηλαδή πολύ αυξημένο υπολογιστικό κόστος. Από την άλλη, οι μεταβολές γεωμετρικών ποσοτήτων, για δεδομένη παραμετροποίηση, είναι υπολογίσιμες με πολύ μικρό υπολογιστικό κόστος.

Επομένως για την απεμπλοκή του υπολογισμού των άμεσων μεταβλητών δηλαδή με την απαλοιφή των ολοκληρωμάτων της εξίσωσης 3.37 τα οποία εμπεριέχουν τις μεταβολές αυτές, επιτυγχάνεται η έκφραση των παραγώγων ευαισθησίας να συναρτάται μόνο από μεταβολές γεωμετρικών ποσοτήτων οι οποίες είναι μικρού υπολογιστικού κόστους. Οι εξισώσεις οι οποίες πρέπει να μηδενιστούν έτσι ώστε να απαλειφθούν τα παραπάνω ολοκληρώματα λέγονται συζυγής εξισώσεις.

Πιο συγκεκριμένα, από την έκφραση 3.37, απαλείφοντας τα χωρικά ολοκληρώματα που εμπεριέχουν τις μεταβολές των ροϊκών μεταβλητών, προκύπτουν οι συζυγείς πεδιακές εξισώσεις. Επειδή στην έκφραση 3.37 χρησιμοποιήθηκε η γενική διατύπωση 3.15 για τη μεταβολή της συνάρτησης κόστους, οι συζυγείς εξισώσεις θα γραφούν επίσης σε γενική μορφή. Αυτό σημαίνει ότι θα ισχύουν για κάθε συνάρτηση κόστους (της μορφής 3.12) αρκεί κατά περίπτωση να αντικατασταθούν κατάλληλα οι ποσότητες  $\frac{\partial F_S}{\partial b_m}$  και  $\frac{\partial F_\Omega}{\partial b_m}$ . Η παραπάνω απαλοιφή



οδηγεί στις εξισώσεις

$$R^q = \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{\partial F_\Omega}{\partial p} = 0 \quad (3.38)$$

$$R_i^u = -v_j \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - (\nu + \nu_t) \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial q}{\partial x_i} + \frac{\partial F_\Omega}{\partial v_i} = 0, \quad i = 1, 2, (3) \quad (3.39)$$

Οι εξισώσεις αυτές είναι ανεξάρτητες από τις μεταβολές των παραμέτρων σχεδιασμού  $\delta b_m$ , ενώ το ίδιο ισχύει και για τις συζυγείς οριακές συνθήκες.

Ικανοποιώντας τις συζυγείς εξισώσεις 3.38 και 3.39, προκύπτει η απλοποιημένη της 3.37 έκφραση

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m} &= \int_S \left[ u_j v_j n_i + u_i v_j n_j + (\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i + \frac{\partial F_S}{\partial v_i} \right] \frac{\partial v_i}{\partial b_m} dS \\ &+ \int_S \left( u_j n_j + \frac{\partial F_S}{\partial p} \right) \frac{\partial p}{\partial b_m} dS - \int_S (\nu + \nu_t) \frac{\partial}{\partial b_m} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j u_i dS \\ &+ \int_S u_i R_i^v \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS + \int_S q R^p \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS \\ &+ \int_S \left( \frac{\partial F_S}{\partial x_k} + F_\Omega n_k \right) \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS + \int_S F_S \frac{\delta(dS)}{\delta b_m} \end{aligned} \quad (3.40)$$

Η επίλυση των συζυγών εξισώσεων έχει υπολογιστικό κόστος αντίστοιχο, εν γένει, με αυτό του προβλήματος της ροής επί το πλήθος των επιθυμητών στόχων, μιας και πρόκειται για εξισώσεις 'αντίστοιχης' μορφής με αυτή των εξισώσεων ροής (είναι όμως γραμμικές). Εκτός αυτού, η συζυγής λύση είναι ανεξάρτητη από τις μεταβλητές σχεδιασμού δεδομένου ότι οι συζυγείς εξισώσεις καθώς και οι οριακές τους συνθήκες δεν εξαρτώνται από τις άμεσες μεταβολές των μεταβλητών ροής. Σε συνδυασμό με τα παραπάνω και θεωρώντας ότι το κόστος υπολογισμού των μεταβολών  $\frac{\delta x_k}{\delta b_m}$  και  $\frac{\delta(dS)}{\delta b_m}$ <sup>2</sup> είναι αμελητέο συγκριτικά με αυτό της αριθμητικής επίλυσης των εξισώσεων της ροής (γεγονός το οποίο ισχύει) συνάγεται ότι το υπολογιστικό κόστος της συζυγούς μεθόδου είναι ανεξάρτητο του πλήθους  $M$  των μεταβλητών σχεδιασμού.

Για την τελική έκφραση των παραγώγων ευαισθησίας πρέπει να ληφθούν υπόψη οι οριακές συνθήκες του προβλήματος της ροής και, από αυτές, να εξαχθούν οι συζυγείς οριακές συνθήκες. Αυτό περιγράφεται στις ενότητες 3.4.1 ως 3.4.5.

### 3.4.1 Συζυγείς συνθήκες στα όρια εισόδου $S_I$

Στα τμήματα εισόδου ρευστού στο χωρίο ( $S_I$ ), ισχύουν οι εξισώσεις 3.21 και 3.26. Με βάση τη συνθήκη  $\frac{\partial v_i}{\partial b_m} = 0$ , εξίσωση 3.26, το πρώτο ολοκλήρωμα της εξίσωσης 3.40, διατυπωμένο για το  $S_I$  απαλείφεται. Επίσης, στο  $S_I$  μηδενίζονται τα τέσσερα

<sup>2</sup>οι όροι αυτοί εμπεριέχονται στην έκφραση παραγώγων ευαισθησίας, 3.40

τελευταία ολοκληρώματα της 3.40 που εμπεριέχουν μεταβολές της θέσης των οριακών κόμβων και γεωμετρικών ποσοτήτων στην είσοδο. Έτσι, για τον υπολογισμό του  $\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_m}$ , τα ολοκληρώματα κατά μήκος της εισόδου τα οποία απομένουν είναι τα

$$-\int_{S_I} \phi_{1,ij} \frac{\partial}{\partial b_m} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) dS + \int_{S_I} \phi_2 \frac{\partial p}{\partial b_m} dS \quad (3.41)$$

όπου

$$\phi_{1,ij} = (\nu + \nu_t) u_i n_j, \quad \phi_2 = u_j n_j + \frac{\partial F_{S_I}}{\partial p} \quad (3.42)$$

Για να απαλειφθούν τα ολοκληρώματα 3.41 από την εξίσωση 3.40, αρκεί να επιβληθούν στην είσοδο του πεδίου ροής οι συνθήκες

$$\phi_{1,ij} \frac{\partial}{\partial b_m} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = 0 \quad (3.43)$$

$$\phi_2 = 0 \quad (3.44)$$

Οι παραπάνω συνθήκες ισοδυναμούν με το να επιβληθεί η κάθετη στο όριο  $S_I$  συνιστώσα της συζυγούς ταχύτητας ίση με

$$u_{\langle n \rangle} = u_i n_i = -\frac{\partial F_{S_I}}{\partial p} \quad (3.45)$$

και να μηδενιστεί η εφαπτομενική της συνιστώσα

$$\vec{u}_{\langle t \rangle} = \vec{u} - u_{\langle n \rangle} \vec{n} = 0 \quad (3.46)$$

Η τιμή της συζυγούς πίεσης στην είσοδο του χωρίου υπολογίζεται μέσω προεκβολής από το εσωτερικό του πεδίου (ότι ακριβώς ίσχυε για τη στατική πίεση στο πρόβλημα της ροής).

Στο παράρτημα Δ' αποδεικνύονται οι σχέσεις 3.45 και 3.46

### 3.4.2 Συζυγείς συνθήκες στα όρια εξόδου $S_O$

Στα όρια εξόδου του πεδίου ροής ( $S_O$ ) ισχύουν οι εξισώσεις 3.21 και 3.27. Επομένως, το δεύτερο ολοκλήρωμα της εξίσωσης 3.40, διατυπωμένο για την έξοδο του πεδίου, μηδενίζεται. Ακόμη, όπως και στην περίπτωση της εισόδου, μηδενίζονται τα τέσσερα τελευταία ολοκληρώματα, αφού οι κόμβοι στην έξοδο είναι επίσης ανεπηρέαστοι από μεταβολές των μεταβλητών σχεδιασμού.

Αυτό συνεπάγεται ότι οι εναπομείναντες όροι της έκφρασης 3.40 στην έξοδο του

πεδίου ροής είναι οι εξής

$$-\int_{S_O} \phi_{1,ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial b_m} \right) dS + \int_{S_O} \phi_{3,i} \frac{\partial v_i}{\partial b_m} dS \quad (3.47)$$

όπου το  $\phi_{1,ij}$  δίνεται στην εξίσωση 3.43 και

$$\phi_{3,i} = u_j v_j n_i + u_i v_j n_j + (\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i + \frac{\partial F_{S_O}}{\partial v_i} \quad (3.48)$$

Υπολογιστικά πειράματα έχουν δείξει ότι ο πρώτος όρος της έκφρασης 3.47 μπορεί να θεωρηθεί αμελητέος, ενδεχομένως λόγω του ότι η θέση του ορίου  $S_O$  είναι τέτοια ώστε εκεί το πεδίο ταχύτητας να διέπεται από ικανοποιητική ομοιογένεια. Αυτό ισχύει, ασφαλώς, για εξωτερικές ροές αλλά ακόμη και σε προβλήματα εσωτερικής αεροδυναμικής, οι δοκιμές έδειξαν ότι ο όρος αυτός μπορεί να αμεληθεί χωρίς συνέπειες. Συνεπώς, ο όρος  $\phi_{1,ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial b_m} \right)$  μπορεί να αμεληθεί, [28].

Προκειμένου να απαλειφεί ο δεύτερος όρος της 3.47, πρέπει να επιβληθεί η συνθήκη  $\phi_{3,i} = 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Η διανυσματική συνθήκη  $\phi_{3,i} = 0$  γράφεται στο οριόδετο σύστημα, αναλυόμενη σε δύο συνιστώσες, μια κατά την κάθετη και μια κατά την εφαπτομενική στο τοίχωμα. Αυτές προκύπτουν από τον πολλαπλασιασμό της εξίσωσης 3.48 με το μοναδιαίο κάθετο και το μοναδιαίο εφαπτομενικό ως προς την επιφάνεια διάνυσμα, αντίστοιχα, και γράφονται ως

$$q = u_j v_j + u_{(n)} v_{(n)} + (\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j n_i + \frac{\partial F_{S_O}}{\partial v_{(n)}} \quad (3.49)$$

$$0 = u_{(t)} v_{(n)} + (\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j t_i + \frac{\partial F_{S_O}}{\partial v_{(t)}} \quad (3.50)$$

Από τη δεύτερη συνθήκη έχει απεμπλακεί η συζυγής πίεση  $q$ . Οι δύο παραπάνω εξισώσεις, μαζί με την τρίτη 'πληροφορία' (που υπολογίζεται από το εσωτερικό του πεδίου με προεκβολή μιας συνιστώσας του διανύσματος της συζυγούς ταχύτητας), αρκούν για να προσδιοριστεί πλήρως η έξοδος του συζυγούς πεδίου ροής σε κάθε κύκλο ενός επαναληπτικού αλγορίθμου. Παρότι οι εξισώσεις 3.49 και 3.50 μπορούν να επιλυθούν ως προς οποιαδήποτε δύο μεγέθη από τα  $q$ ,  $u_{(t)}$  και  $u_{(n)}$ , η εξίσωση 3.49 προτιμάται να χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό της συζυγούς πίεσης  $q$  με βάση τις τιμές των συζυγών μεταβλητών της προηγούμενης επανάληψης (όπως αντίστοιχα στο πρόβλημα της ροής είχαμε γνωστή τη πίεση στην έξοδο του πεδίου ροής) και η εξίσωση 3.50 για τον προσδιορισμό της εφαπτομενικής συζυγούς ταχύτητας  $u_{(t)}$ .

Στις περιπτώσεις όπου η έξοδος του χωρίου ροής και, συνεπώς, και το τοπικό πλέγμα δεν έχει καθόλου ή έχει μικρή καμπυλότητα, η οποία μπορεί να αμεληθεί, (λ.χ. προβλήματα ροής σε αγωγούς ή σε στροβιλομηχανές) οι παραπάνω

εξισώσεις 3.49, 3.50, μπορούν να απλοποιηθούν περαιτέρω και να γίνουν

$$q = u_j v_j + u_{(n)} v_{(n)} + 2(\nu + \nu_t) \frac{\partial u_{(n)}}{\partial n} + \frac{\partial F_{S_O}}{\partial v_{(n)}} \quad (3.51)$$

$$0 = u_{(t)} v_{(n)} + (\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial u_{(t)}}{\partial n} + \frac{\partial u_{(n)}}{\partial t} \right) + \frac{\partial F_{S_O}}{\partial v_{(t)}} \quad (3.52)$$

Στη δεύτερη εξίσωση, ο όρος  $\frac{\partial u_{(n)}}{\partial t}$  μπορεί να αμεληθεί αφού υπάρχει ομοιομορφία καθ' ύψος στην έξοδο του πεδίου (συχνή θεώρηση αν η θέση της εξόδου βρίσκεται μακριά από την προς βελτιστοποίηση μορφή). Στην περίπτωση αυτή, από την εξίσωση 3.52 προκύπτει ότι η εφαπτομενική συζυγής ταχύτητα δεν εξαρτάται από τη συζυγή πίεση στην έξοδο του πεδίου ροής.

### 3.4.3 Συζυγείς συνθήκες στα στερεά όρια $S_W$

Στα στερεά όρια ( $S_W$ ) ισχύει η συνθήκη μη-ολίσθησης, δηλαδή ότι  $v_i = 0$ . Αυτό συνεπάγεται ότι η ολική μεταβολή οποιασδήποτε συνιστώσας του διανύσματος της ταχύτητας, στις θέσεις αυτές, είναι μηδενική,  $\frac{\delta v_i}{\delta b_m} = 0$ . Στην περίπτωση κατά την οποία το τμήμα του στερεού ορίου παραμετροποιείται μέσω των  $b_m$  και, συνεπώς, μεταβάλλεται όταν αυτά μεταβάλλονται (δηλαδή ισχύει  $\frac{\delta x_k}{\delta b_m} \neq 0$ ), τότε από την ιδιότητα 3.6, προκύπτει ότι εκεί

$$\frac{\partial v_i}{\partial b_m} = - \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} \quad (3.53)$$

Με βάση την εξίσωση 3.53, στα στερεά όρια, από το τμήμα της εξίσωσης 3.40 διατυπωμένης μόνο κατά το μήκος του  $S_W$  απομένουν τα ολοκληρώματα

$$\begin{aligned} & - \int_{S_W} \left[ (\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i \right] \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS \\ & + \int_{S_W} \phi_2 \frac{\partial p}{\partial b_m} dS - \int_{S_W} \phi_{1,ij} \frac{\partial}{\partial b_m} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j dS + \int_{S_W} u_i R_i^v \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS \\ & + \int_{S_W} q R^p \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS + \int_{S_W} \left( \frac{\partial F_{S_W}}{\partial x_k} + F_{\Omega} n_k \right) \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS + \int_{S_W} F_{S_W} \frac{\delta(dS)}{\delta b_m} \end{aligned} \quad (3.54)$$

όπου οι ποσότητες  $\phi_{1,ij}$  και  $\phi_2$ , ορισμένες στα στερεά όρια, δίνονται από τις εκφράσεις

$$\phi_{1,ij} = (\nu + \nu_t) u_i n_j, \quad \phi_2 = u_j n_j + \frac{\partial F_{S_W}}{\partial p}$$

Για να απαλειφθούν τα ολοκληρώματα στα οποία εμφανίζονται οι όροι  $\frac{\partial}{\partial b_m} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$  και  $\frac{\partial p}{\partial b_m}$ , επιβάλλονται οι εξής συνθήκες

$$u_{\langle n \rangle} = -\frac{\partial F_{Sw}}{\partial p} \quad (3.55)$$

$$\vec{u}_{\langle t \rangle} = 0 \quad (3.56)$$

Στην περίπτωση κατά την οποία τμήμα του στερεού ορίου δεν αποτελεί μέρος της προς βελτιστοποίηση γεωμετρίας, τότε γι' αυτό ισχύει,  $\frac{\delta x_k}{\delta b_m} = 0$  και επομένως ισχύουν τα όσα αναφέρθηκαν και για την είσοδο του πεδίου ροής. Ας επισημανθεί ότι, εφεξής, με τον όρο 'στερεά όρια/τοιχώματα' θα αναφερόμαστε αποκλειστικά στα τμήματα του στερεού ορίου τα οποία επηρεάζονται από τις μεταβολές των μεταβλητών σχεδιασμού. Οποιαδήποτε άλλη 'ειδική' περίπτωση θα αποσαφηνίζεται στο κείμενο. Στο παράρτημα Δ' αποδεικνύονται οι σχέσεις 3.55 και 3.56

### 3.4.4 Συζυγείς συνθήκες στα περιοδικά όρια

Για την περίπτωση ροών σε περυγώσεις στροβιλομηχανών, όσο αφορά τις 2D εφαρμογές, επιβάλλεται η ισότητα των μεγεθών της ροής ( $p$  και  $v_i$ ) μεταξύ των δύο αντίστοιχων περιοδικών πλεγματικών κόμβων. Οι ίδιες ακριβώς συνθήκες επιβάλλονται και στο συνεχές συζυγές πρόβλημα. Η επιβολή αυτών των συνθηκών μηδενίζει όλους τους όρους της εξίσωση 3.40 καθότι μεταξύ δύο περιοδικών κόμβων τα κάθετα διανύσματα είναι παράλληλα με ίσο μέτρο και αντίθετη φορά. Συνεπώς, επιβάλλοντας την ισότητα τιμών των συζυγών μεγεθών μεταξύ δύο αντιστοιχών περιοδικών θέσεων, αλληλοαναιρούνται οι αντίστοιχες συνεισφορές των προς ολοκλήρωση ποσοτήτων και, άρα, απαλείφονται όλες οι συνεισφορές των ολοκληρωμάτων κατά μήκος των περιοδικών ορίων. Όσο αφορά τις 3D εφαρμογές σε ροές σε περυγώσεις στροβιλομηχανών, επιβάλλεται περιφεριακή περιοδικότητα στα περιοδικά όρια. Συγκεκριμένα, επιβάλλεται η ισότητα των μεγεθών της ροής ( $p$  και  $v = (v_\theta, v_r, v_z)$ ). Οι ίδιες συνθήκες επιβάλλονται και στο συνεχές συζυγές πρόβλημα.

### 3.4.5 Συζυγείς συνθήκες στα όρια συμμετρίας

Στα όρια συμμετρίας του πεδίου, όπως στο πρόβλημα της ροής, έτσι και στο συζυγές πρόβλημα επιβάλλονται η κάθετη στο όριο συνιστώσα και κλίση της συζυγούς ταχύτητας να είναι ίσες με μηδέν.

### 3.5 Τελική – Γενική έκφραση των παραγώγων ευαισθησίας

Έχοντας απαλείψει τις συζυγείς εξισώσεις καθώς και τις οριακές τους συνθήκες, η εξίσωση 3.37 λαμβάνει την παρακάτω μορφή

$$\begin{aligned}
\frac{\delta F}{\delta b_m} = & \int_{S_W} \left( \frac{\partial F_{S_W}}{\partial x_k} + F_{\Omega} n_k \right) \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS + \int_{S_W} F_{S_W} \frac{\delta(dS)}{\delta b_m} \\
& - \int_{S_W} \left[ (\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i \right] \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS \\
& + \int_{S_W} u_i R_i^v \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS + \int_{S_W} q R^p \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS \\
& + \int_{S_W} (\nu + \nu_t) \frac{\partial F_{S_W}}{\partial p} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_i n_j dS \\
& + \int_{S_W} (\nu + \nu_t) \frac{\partial F_{S_W}}{\partial p} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\delta(n_i n_j)}{\delta b_m} dS
\end{aligned} \tag{3.57}$$

Επιλύοντας τις εξισώσεις της ροής και τις συζυγείς εξισώσεις, τα πεδία της ροής και των συζυγών μεταβλητών καθίστανται γνωστά. Συνεπώς, όλες οι ποσότητες που εμφανίζονται στη 3.57 είναι γνωστές. Αυτό ισχύει γιατί εξαρτώνται από τις ροϊκές και τις συζυγείς μεταβλητές καθώς και τις μεταβολές καθαρά γεωμετρικών ποσοτήτων, όπως οι ποσότητες  $\frac{\delta(dS)}{\delta b_m}$  και  $\frac{\delta x_k}{\delta b_m}$ .

Στη συνέχεια, παρουσιάζονται οι τελικές εκφράσεις για τις παραγώγους ευαισθησίας καθώς και οι οριακές συνθήκες των συζυγών μεταβλητών της συνάρτησης κόστους των απωλειών ολικής πίεσης.

#### 3.5.1 Ελαχιστοποίηση απωλειών ολικής πίεσης

Για τη συνάρτηση στόχο της εξίσωσης 3.18, οι οριακές συνθήκες της συζυγούς ταχύτητας στην είσοδο του πεδίου, όπως προκύπτουν από τις εξισώσεις 3.45 και 3.46, είναι οι εξής

$$u_{\langle n \rangle} = v_{\langle n \rangle}, \quad \vec{u}_{\langle t \rangle} = 0 \tag{3.58}$$

Στην έξοδο, από τις εξισώσεις 3.49 και 3.50, προκύπτει ότι

$$q = u_j v_j + u_{\langle n \rangle} v_{\langle n \rangle} + (\nu + \nu_t) \frac{\partial u_{\langle n \rangle}}{\partial x_j} n_j - \frac{1}{2} v^2 - v_{\langle n \rangle}^2 - p \tag{3.59}$$

$$0 = u_{\langle t \rangle} v_{\langle n \rangle} + (\nu + \nu_t) \frac{\partial u_{\langle t \rangle}}{\partial x_j} n_j - v_{\langle n \rangle} v_{\langle t \rangle} \tag{3.60}$$

και στα στερεά όρια, από τις εξισώσεις 3.55, 3.56, ότι

$$u_{\langle n \rangle} = 0, \quad \vec{u}_{\langle t \rangle} = 0 \quad (3.61)$$

Η γενική έκφραση για τις παραγώγους ευαισθησίας, εξίσωση 3.57, γίνεται

$$\frac{\delta F}{\delta b_m} = - \int_{S_W} \left[ (\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i \right] \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS + \int_{S_W} q R^p \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS$$

ενώ, αντικαθιστώντας την έκφραση του υπολοίπου  $R^p$ , λαμβάνει τη μορφή

$$\frac{\delta F}{\delta b_m} = - \int_{S_W} (\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS - \int_{S_W} q \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_i} n_k - \frac{\partial v_i}{\partial x_k} n_i \right) \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS \quad (3.62)$$

## 3.6 Βελτιστοποίηση με Περιορισμούς

### 3.6.1 Περιορισμός Πάχους

Σε πολλά προβλήματα βελτιστοποίησης υπάρχουν κάποιοι γεωμετρικοί περιορισμοί οι οποίοι αν δεν τηρηθούν, η βελτιστοποίηση θα οδηγήσει σε αφύσικες αεροδυναμικές μορφές. Ένας τέτοιος περιορισμός είναι το πάχος πτερυγίου σε προβλήματα στροβιλομηχανών τα οποία αν λεπτύνουν πολύ θα ξεπεραστεί το όριο θραύσης του υλικού και το πτερύγιο θα κινδυνεύει να σπάσει. Στο πλαίσιο αυτής της διπλωματικής αναπτύχθηκε το συναρτησιακό του πάχους το οποίο εισάγεται με συντελεστή βαρύτητας "δίπλα" στο συναρτησιακό της μείωσης ολικών απωλειών πίεσης. Το συναρτησιακό του ελάχιστου επιτρεπόμενου πάχους είναι το παρακάτω:

$$F_{dis} = \sum_{i=1}^n [(dis^2 - dis_{ini}^2)^2]_i \quad (3.63)$$

$$dis = \sqrt{(x - x_{op})^2 + (y - y_{op})^2 + (z - z_{op})^2} \quad (3.64)$$

$$dis_{ini} = \sqrt{(x_{ini} - x_{op,ini})^2 + (y_{ini} - y_{op,ini})^2 + (z_{ini} - z_{op,ini})^2} \quad (3.65)$$

Η μεταβλητή  $dis$  (distance) είναι η μικρότερη απόσταση μεταξύ ενός σημείου της αεροτομής που επιλέγει ο χρήστης με το απέναντι (opposite) κοντινότερό του. Η μεταβλητή  $dis_{ini}$  είναι η μικρότερη απόσταση μεταξύ ενός σημείου της αεροτομής που επιλέγει ο χρήστης με το απέναντι (opposite, δείκτης "op") κοντινότερό του στο πρώτο κύκλο βελτιστοποίησης (initial). Δηλαδή στο πρώτο κύκλο βελτιστοποίησης  $dis_{ini} = dis$ . Εν τέλει το συναρτησιακό προκύπτει από τη διαφορά των τετραγώνων της παρούσας απόστασης μεταξύ ενός σημείου της αεροτομής με το απέναντι του μείον την απόσταση αυτού με το κοντινότερό του στο πρώτο κύκλο βελτιστοποίησης.

Όταν η αεροτομή λεπταίνει ή παχαινει τότε η  $F$  μεγαλώνει.

Η παράγωγος ευαισθησίας προκύπτει παραγωγίζοντας ως προς τις γεωμετρικές μεταβλητές αφού δεν υπάρχει μεταβλητή ροής. Επομένως, το η παράγωγος ευαισθησίας του ελάχιστου επιτρεπόμενου πάχους προκύπτει :

$$\frac{\delta F_{dis}}{\delta x} = 4(dis^2 - dis_{ini}^2)(x - x_{op}) \quad (3.66)$$

$$\frac{\delta F_{dis}}{\delta y} = 4(dis^2 - dis_{ini}^2)(y - y_{op}) \quad (3.67)$$

$$\frac{\delta F_{disj}}{\delta z} = 4(dis^2 - dis_{ini}^2)(z - z_{op}) \quad (3.68)$$

και πιο σύντομα με άλλη γραφή και για  $n$  σημεία και εφόσον η κίνηση του κόμβου είναι προς την κάθετη κατεύθυνση

$$\frac{\delta F_{dis}}{\delta b_m} = \frac{\delta F_{dis}}{\delta x_{i,m}} n_i = [4(dis_m^2 - dis_{ini\ m}^2)(x_{i,m} - x_{op\ i,m})] n_i, \quad (3.69)$$

$$i = 1, 2, 3, \quad m = 1, 2, ..n$$

Στις εφαρμογές αυτής της διπλωματικής επιλέγεται να υπολογιστούν οι περιορισμοί πάχους σε 6 μέρη της αεροτομής. Δηλαδή, από 6 σημεία στην πλευρά υποπίεσης της αεροτομής (suction side) υπολογίζεται η ελάχιστη απόσταση με 6 σημεία στην πλευρά υπερπίεσης (pressure side), και έτσι προκύπτουν παράγωγοι ευαισθησίας σε αυτούς κόμβους πάνω στην αεροτομή. Ο αριθμός των κόμβων που ορίζονται οι περιορισμοί του πάχους είναι ελάχιστος, σε σχέση με τον αριθμό κόμβων όλης της αεροτομής. Σε όλους τους άλλους κόμβους η παράγωγος ευαισθησίας είναι μηδέν και γι'αυτό για να ομαλοποιηθεί η παράγωγος ευαισθησίας σε όλους τους κόμβους εφαρμόζεται η εξίσωση Laplace (βλ. εξίσωση 4.1). Επομένως, το συναρτησιακό πάχος λειτουργεί κατά κάποιο τρόπο σαν ελατήριο το οποίο εμποδίζει την λέπτυνση του περυγίου.

### 3.6.2 Σχεδιασμός με συγκεκριμένη γωνία εξόδου

Συχνά σε πολλά προβλήματα βελτιστοποίησης και ιδιαίτερα σε στροβιλομηχανές, επιβάλλεται να υπάρχει περιορισμός της στροφής της ροής. Σε αυτή την περίπτωση η συνάρτηση περιορισμός αποτελείται μόνο από το ολοκλήρωμα εξόδου :

$$F = \int_{S_0} F_{S_0}^{a_{deg}} dS \quad (3.70)$$

όπου η προς ολοκλήρωση ποσότητα  $F_{S_0}^{a_{deg}}$  δίνεται από τη σχέση

$$F_{S_0}^{a_{deg}} = \frac{1}{2} (a_2 - a_2^{tar})^2 = \frac{1}{2} \left( \tan^{-1} \frac{v_{(tu)}}{v_{(n)}} - a_2^{tar} \right)^2 \quad (3.71)$$



όπου  $a_2$  η γωνία εξόδου της ροής

Οι μεταβολές του  $F_{SO}$  ως προς τις ποσότητες της ροής δίνονται από τις εκφράσεις

$$\frac{\partial F_{SO}^{deg}}{\partial v_i} = (a_2 - a_2^{tar}) \frac{\partial a_2}{\partial v_i}, \quad \frac{\partial F_{SO}^{deg}}{\partial p} = 0 \quad (3.72)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_2}{\partial v_1} &= \frac{\partial a_2}{\partial v_{\langle tu \rangle}} \sin \phi + \frac{\partial a_2}{\partial v_{\langle r \rangle}} \cos \phi \\ \frac{\partial a_2}{\partial v_2} &= \frac{\partial a_2}{\partial v_{\langle tu \rangle}} \cos \phi - \frac{\partial a_2}{\partial v_{\langle r \rangle}} \sin \phi \end{aligned} \quad (3.73)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_2}{\partial v_3} &= \frac{\partial a_2}{\partial v_{\langle n \rangle}} \\ \frac{\partial a_2}{\partial v_{\langle tu \rangle}} &= \frac{v_{\langle n \rangle}}{v_{\langle n \rangle}^2 + v_{\langle tu \rangle}^2} \\ \frac{\partial a_2}{\partial v_{\langle n \rangle}} &= -\frac{v_{\langle tu \rangle}}{v_{\langle n \rangle}^2 + v_{\langle tu \rangle}^2} \\ \frac{\partial a_2}{\partial v_{\langle r \rangle}} &= 0 \end{aligned} \quad (3.74)$$

$$\begin{aligned} v_{\langle tu \rangle} &= v_1 \sin \phi + v_2 \cos \phi \\ v_{\langle r \rangle} &= v_1 \sin \phi - v_2 \cos \phi \\ v_{\langle n \rangle} &= v_3 \end{aligned} \quad (3.75)$$

όπου  $v_1, v_2, v_3$  οι συνιστώσες ταχύτητας ως προς  $x, y, z$  αντιστοίχα,

$v_{tu}$  η εφαπτομενική συνιστώσα ταχύτητας στην έξοδο

$v_r$  η ακτινική συνιστώσα ταχύτητας στην έξοδο

$v_n$  η κάθετη συνιστώσα ταχύτητας στην έξοδο

Για τη συνάρτηση-περιορισμό της εξίσωσης 3.70, οι οριακές συνθήκες της συζυγούς ταχύτητας στην είσοδο του πεδίου, όπως προκύπτουν από τις εξισώσεις 3.45 και 3.46, είναι οι εξής

$$u_{\langle n \rangle} = 0, \quad \vec{u}_{\langle t \rangle} = 0 \quad (3.76)$$

Στην έξοδο, από τις εξισώσεις 3.49 και 3.50, προκύπτει ότι

$$q = u_j v_j + u_{\langle n \rangle} v_{\langle n \rangle} + (\nu + \nu_t) \frac{\partial u_{\langle n \rangle}}{\partial x_j} n_j + \frac{\partial F_{S_0}^{a_{deg}}}{\partial v_{\langle n \rangle}} \quad (3.77)$$

$$0 = u_{\langle t \rangle} v_{\langle n \rangle} + (\nu + \nu_t) \frac{\partial u_{\langle t \rangle}}{\partial x_j} n_j + \frac{\partial F_{S_0}^{a_{deg}}}{\partial v_{\langle t \rangle}} \quad (3.78)$$

$$\frac{\partial F_{S_0}^{a_{deg}}}{\partial v_{\langle t \rangle}} = \frac{\partial F_{S_0}^{a_{deg}}}{\partial v_i} t_i \quad \frac{\partial F_{S_0}^{a_{deg}}}{\partial v_{\langle n \rangle}} = \frac{\partial F_{S_0}^{a_{deg}}}{\partial v_i} n_i \quad (3.79)$$

$$\frac{\partial F_{S_0}^{a_{deg}}}{\partial v_1} = \left[ \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}}{v_1} \right) - a^{tar} \right] \frac{1}{\frac{v_2^2 + v_3^2}{v_1^2} + 1} \left( -\frac{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}}{v_1^2} \right) \quad (3.80)$$

$$\frac{\partial F_{S_0}^{a_{deg}}}{\partial v_2} = \left[ \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}}{v_1} \right) - a^{tar} \right] \frac{1}{\frac{v_2^2 + v_3^2}{v_1^2} + 1} \left( \frac{v_1 v_2}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} \right) \quad (3.81)$$

$$\frac{\partial F_{S_0}^{a_{deg}}}{\partial v_3} = \left[ \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}}{v_1} \right) - a^{tar} \right] \frac{1}{\frac{v_2^2 + v_3^2}{v_1^2} + 1} \left( \frac{v_1 v_3}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} \right) \quad (3.82)$$

και στα στερεά όρια, από τις εξισώσεις 3.55, 3.56, ότι

$$u_{\langle n \rangle} = 0, \quad \vec{u}_{\langle t \rangle} = 0 \quad (3.83)$$

Η γενική έκφραση για τις παραγώγους ευαισθησίας, εξίσωση 3.57, γίνεται

$$\frac{\delta F}{\delta b_m} = - \int_{S_W} \left[ (\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i \right] \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS + \int_{S_W} q R^p \frac{\delta x_k}{\delta b_m} n_k dS$$

ενώ, αντικαθιστώντας την έκφραση του υπολοίπου  $R^p$ , λαμβάνει τη μορφή

$$\frac{\delta F}{\delta b_m} = - \int_{S_W} (\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS - \int_{S_W} q \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_i} n_k - \frac{\partial v_i}{\partial x_k} n_i \right) \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS \quad (3.84)$$

### 3.6.3 Ελαχιστοποίηση απωλειών ολικής πίεσης με περιορισμούς τη στροφή ροής και το πάχος πτερυγίου σε προβλήματα στροβιλομηχανών

Σε αυτήν την ενότητα αναλύεται το πρόβλημα βελτιστοποίησης συνεχούς συζυγούς μεθόδου με περιορισμούς. Ένα από τα συνηθισμένα προβλήματα στις στροβιλομηχανές είναι η μείωση των απωλειών ολικής πίεσης μεταξύ εισόδου και εξόδου κρατώντας σταθερή την στροφή της ροής και χωρίς να μειώνεται το πάχος του πτερυγίου. Στην συνάρτηση-στόχο της μείωσης απωλειών ολικής πίεσης, καθώς και στις συναρτήσεις-περιορισμούς της γωνίας εξόδου και του ελάχιστου

επιτρεπόμενου πάχους τοποθετούνται συντελεστές βαρύτητας  $w_i$ , δηλαδή:

$$F = w_{\Delta pt} F_{\Delta pt} + w_{a^o} F_{a^o} + w_{dis,i} F_{dis,i} = \quad (3.85)$$

$$= w_{\Delta pt} \int_{S_{I,o}} F_{S_{I,o}}^{\Delta pt} dS + w_2 \int_{S_o} F_{S_o}^{adeg} dS + w_i F_i^{dis} \quad (3.86)$$

ί είναι ο αριθμός των σημείων στα οποία ο χρήστης επιλέγει να βάλει περιορισμό πάχους.

Οι τρεις παραπάνω όροι οι οποίοι έχουν ήδη αναπτυχθεί ήδη μεμονωμένα σε προηγούμενες ενότητες η γενική έκφραση των παραγώγων ευαισθησίας είναι ίδια και για τους δύο στόχους και ισούται με:

$$\frac{\delta F}{\delta b_m} = - \int_{S_w} (\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS \quad (3.87)$$

$$- \int_{S_w} q \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_i} n_k - \frac{\partial v_i}{\partial x_k} n_i \right) \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS \quad (3.88)$$

$$+ [4(dis_m^2 - dis_{ini\ m}^2)(x_{i,m} - x_{op\ i,m})] n_i \quad (3.89)$$

Οι οριακές συνθήκες της συζυγούς ταχύτητας στην είσοδο του πεδίου προκύπτουν:

$$u_{\langle n \rangle} = w_1 v_{\langle n \rangle}, \quad \vec{u}_{\langle t \rangle} = 0 \quad (3.90)$$

Οι οριακές συνθήκες στην έξοδο είναι:

$$q = u_j v_j + u_{\langle n \rangle} v_{\langle n \rangle} + (\nu + \nu_t) \frac{\partial u_{\langle n \rangle}}{\partial x_j} n_j + w_1 \frac{\partial F_{S_o}^{\Delta pt}}{\partial v_{\langle n \rangle}} + w_2 \frac{\partial F_{S_o}^{adeg}}{\partial v_{\langle n \rangle}} \quad (3.91)$$

$$(3.92)$$

$$0 = u_{\langle t \rangle} v_{\langle n \rangle} + (\nu + \nu_t) \frac{\partial u_{\langle t \rangle}}{\partial x_j} n_j + w_1 \frac{\partial F_{S_o}^{\Delta pt}}{\partial v_{\langle t \rangle}} + w_2 \frac{\partial F_{S_o}^{adeg}}{\partial v_{\langle t \rangle}} \quad (3.93)$$

όπου για λόγους πληρότητας ξαναγράφονται τα συναρτησιακά στην έξοδο για τους δύο στόχους

α) για το στόχο των απωλειών ολικής πίεσης:

$$\frac{\partial F_{S_o}^{\Delta pt}}{\partial v_{\langle n \rangle}} = -\frac{1}{2} v^2 - v_{\langle n \rangle}^2 - p \quad (3.94)$$

$$\frac{\partial F_{S_o}^{\Delta pt}}{\partial v_{\langle t \rangle}} = -v_{\langle n \rangle} v_{\langle t \rangle} \quad (3.95)$$

$$(3.96)$$

β) για το περιορισμό της γωνίας εξόδου ροής:

$$\frac{\partial F_{S_0}^{a_{deg}}}{\partial v_{\langle t \rangle}} = \frac{\partial F_{S_0}^{a_{deg}}}{\partial v_i} t_i \quad \frac{\partial F_{S_0}^{a_{deg}}}{\partial v_{\langle n \rangle}} = \frac{\partial F_{S_0}^{a_{deg}}}{\partial v_i} n_i \quad (3.97)$$

$$\frac{\partial F_{S_0}^{a_{deg}}}{\partial v_1} = \left[ \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}}{v_1} \right) - a^{tar} \right] \frac{1}{\frac{v_2^2 + v_3^2}{v_1^2} + 1} \left( -\frac{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}}{v_1^2} \right) \quad (3.98)$$

$$\frac{\partial F_{S_0}^{a_{deg}}}{\partial v_2} = \left[ \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}}{v_1} \right) - a^{tar} \right] \frac{1}{\frac{v_2^2 + v_3^2}{v_1^2} + 1} \left( \frac{v_1 v_2}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} \right) \quad (3.99)$$

$$\frac{\partial F_{S_0}^{a_{deg}}}{\partial v_3} = \left[ \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}}{v_1} \right) - a^{tar} \right] \frac{1}{\frac{v_2^2 + v_3^2}{v_1^2} + 1} \left( \frac{v_1 v_3}{\sqrt{v_2^2 + v_3^2}} \right), \quad (3.100)$$

Τέλος, στα στερεά όρια ισχύει

$$u_{\langle n \rangle} = 0, \quad u_{\langle t \rangle} = 0 \quad (3.101)$$

Η παράγωγος ευαισθησίας της συνάρτησης στόχου προκύπτει:

$$\begin{aligned} \frac{\delta F}{\delta b_m} = & - \int_{S_W} (\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS \\ & - \int_{S_W} q \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_i} n_k - \frac{\partial v_i}{\partial x_k} n_i \right) \frac{\delta x_k}{\delta b_m} dS \\ & + w_i [4(dis_m^2 - dis_{ini\ m}^2)(x_{i,m} - x_{op\ i,m})] n_i \end{aligned} \quad (3.102)$$

## Κεφάλαιο 4

# Βελτιστοποίηση 2Δ Αεροτομής Πτερυγίου Στροβίλου

Η συνεχής συζυγής μέθοδος με περιορισμούς εφαρμόστηκε για τη βελτιστοποίηση μορφής 2Δ πτερύγωσης στάτορα στροβίλου. Η βελτιστοποίηση ενός πτερυγίου με στόχο τη μείωση απωλειών ολικής πίεσης εισόδου-εξόδου οδηγεί σε δημιουργία αφύσικα λεπτού και σχεδόν ευθύγραμμου πτερυγίου. Αυτό, από την μία, δημιουργεί προβλήματα αντοχής του υλικού του πτερυγίου και, από την άλλη, προκαλεί την μείωση της στροφής της ροής, το οποίο δεν είναι επιθυμητό. Σε αυτήν την εφαρμογή, η συνάρτηση στόχος  $F$  είναι η μείωση των ολικών απωλειών πίεσης εισόδου-εξόδου  $\Delta p_{tin-out}$ , με περιορισμούς την στροφή της ροής και το ελάχιστο επιτρεπόμενο πάχος του πτερυγίου. Σε κάθε συναρτησιακό τοποθετήθηκαν συντελεστές βαρύτητας  $w_i$ .

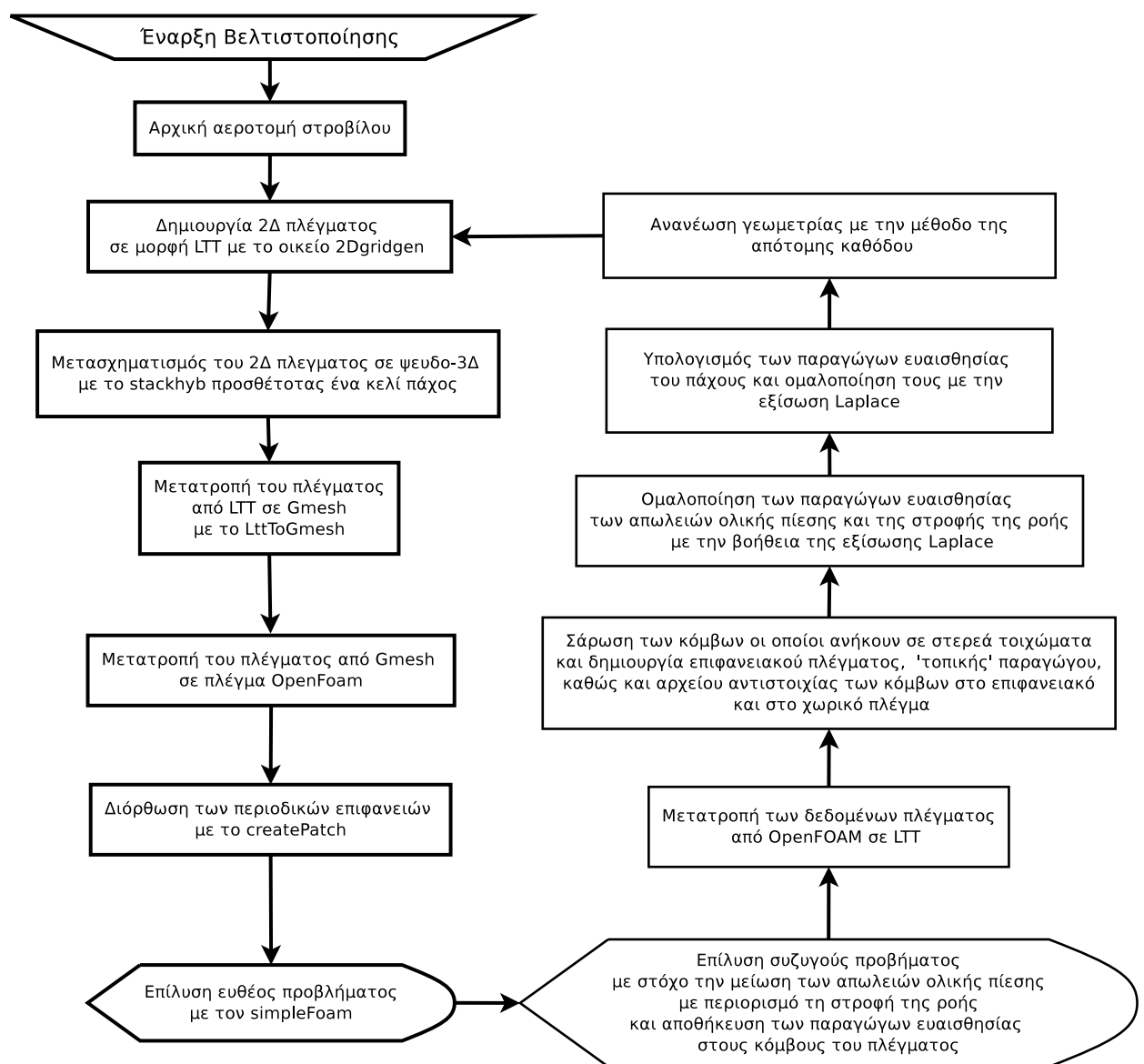
Οι εξισώσεις ροής που χρησιμοποιήθηκαν είναι οι Reynolds Averaged Navier Stokes για ασυμπίεστη ροή, με μοντέλο τύρβης k- $\omega$  SST. Οι εξισώσεις του ευθέως καθώς και του συζυγούς προβλήματος επιλύθηκαν με το ανοιχτό πακέτο OpenFOAM. Κύριο πρόβλημα σε όλη τη διαδικασία βελτιστοποίησης είναι η γένεση πλέγματος, καθώς οι πλεγματοποιητές του OpenFOAM αδυνατούν να δημιουργήσουν πλέγμα για εφαρμογές στις στροβιλομηχανές. Συγκεκριμένα, ο ένας πλεγματοποιητής του OpenFOAM, το blockMesh χρησιμοποιείται για απλά πλέγματα, ενώ ο άλλος πλεγματοποιητής, το snappyHexMesh δεν δημιουργεί 2Δ πλέγματα. Για το λόγο αυτό, χρησιμοποιήθηκαν οικεία προγράμματα του ΜΠΥΡΔ&Β/ΕΜΠ, για δημιουργία πλέγματος. Ακόμη, χρησιμοποιήθηκαν μια σειρά από προγράμματα, τα οποία είναι απαραίτητα είτε για μετατροπή δεδομένων πλέγματος, είτε για την επικοινωνία προγραμμάτων, είτε για διάφορες άλλες αλλαγές, έτσι ώστε η διαδικασία βελτιστοποίησης να είναι αυτοματοποιημένη.

Η αρχική μορφή του πτερυγίου που θα εφαρμοστεί η παραπάνω μέθοδος βελτιστοποίησης φαίνεται στο σχήμα 4.2 . Το πτερύγιο έχει γωνία κλίσης  $38.44^\circ$ , με λόγο βήματος προς χορδή ίσο με 0.8 και δεν αλλάζουν κατά τη διαδικασία βελτιστοποίησης. Ο αριθμός Reynolds βασισμένος στη χορδή είναι ίσος με  $Re_c = 5.000.000$  και ο αριθμός Mach στην είσοδο της ροής  $Mach = 0.28$ . Οι μεταβλητές σχεδιασμού είναι όλες οι συντεταγμένες των κόμβων του περιγράμματος της αεροτομής, δηλαδή δεν υπάρχει κάποιου είδους παραμετροποίηση (λ.χ.

πολυώνυμα Bezier Bernstein, Splines, NURBS κτλ).

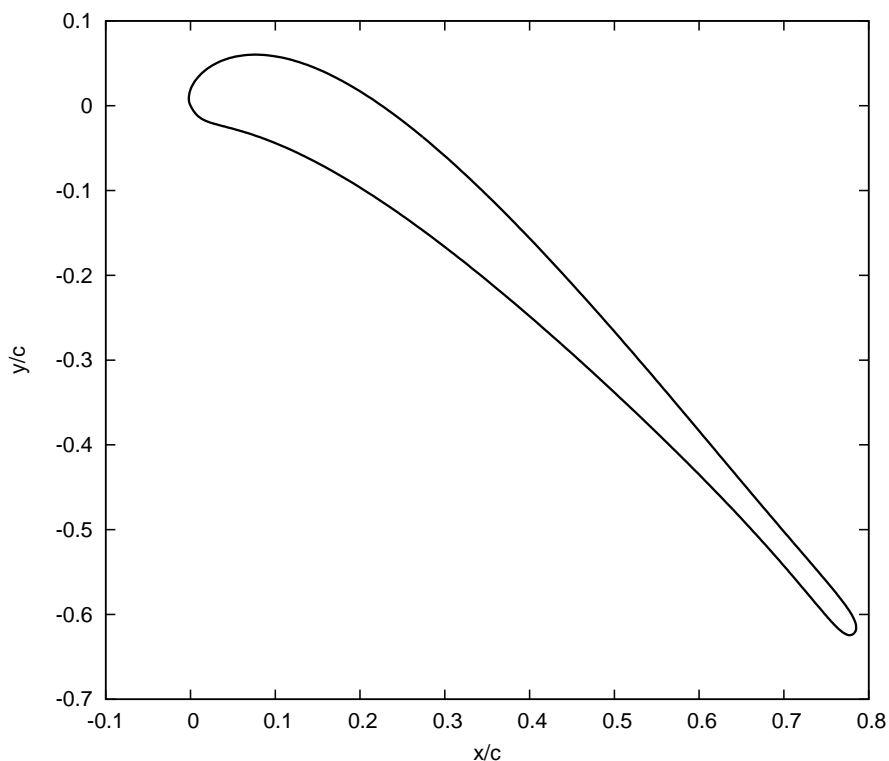
## 4.1 Αλγόριθμος Βελτιστοποίησης

Υπεύθυνο για όλη τη διαχείριση των δεδομένων καθώς και την οργάνωση των συνιστωσών του αλγορίθμου είναι το πρόγραμμα (script) manager. Ακολουθεί το διάγραμμα 4.1 βελτιστοποίησης και δείχνει την ροή των πληροφοριών κατά τη διαδικασία βελτιστοποίησης.



Σχήμα 4.1: Αλγόριθμος βελτιστοποίησης πτερύγωσης στροβίλου.

Η αρχική μορφή της αεροτομής στην οποία θα εφαρμοστεί η προαναφερθείσα μέθοδος βελτιστοποίησης φαίνεται στο σχήμα 4.2



Σχήμα 4.2: Αρχική μορφή αεροτομής πτερυγίου στροβίλου.

• **Δημιουργία 2Δ πλέγματος με τον γενέτη πλέγματος 2Dgridgen.**

Αρχικά ο πλεγματοποιητής του εργαστηρίου 2Dgridgen τροφοδοτείται με την αεροτομή. Ο συγκεκριμένος πλεγματοποιητής δημιουργεί 2Δ μη δομημένο πλέγμα σε μορφή LTT (βλέπε παράρτημα Α) με ευρεία δυνατότητα επιλογών. Στη συγκεκριμένη εφαρμογή το πλέγμα είναι υβριδικό και κοντά στο όριο του πτερυγίου δημιουργήθηκε πυκνό πλέγμα O τύπου (O type) αποτελούμενο από τετράπλευρα, επειδή οι πλεγματικές γραμμές στο όριο του πτερυγίου πρέπει να είναι περίπου κάθετες. Δημιουργήθηκαν 22 τετράπλευρα στη κάθετη κατεύθυνση του πτερυγίου, στα οποία επιβλήθηκε αραίωση με γεωμετρική πρόοδο. Έξω από το 'στρώμα' (layer) των τετραπλεύρων, το πλέγμα αποτελείται εξ ολοκλήρου από τρίγωνα για το λόγο ότι προσαρμόζονται καλύτερα στις διάφορες γεωμετρίες. Ακόμη, δηλώθηκαν συντεταγμένες ελλείψεων γύρω από την αεροτομή στις οποίες απαιτείται πύκνωση τριγώνων. Η είσοδος τοποθετήθηκε 4 χορδές πριν την ακμή πρόσπτωσης (leading edge) και η έξοδος 6 χορδές μετά την ακμή εκφυγής της αεροτομής (trailing edge). Επίσης, δηλώνονται στα περιοδικά όρια  $\log fr=1$ , στην είσοδο  $\log fr=4$ , στην έξοδο  $\log fr=5$ , πάνω στο πτερύγιο  $\log fr=3$  και στους εσωτερικούς κόμβους  $\log fr=0$ . Περισσότερα στοιχεία για τη σημασία του δείκτη  $\log fr$  υπάρχουν στο παράρτημα

Α'. Το παραπάνω πλέγμα αποθηκεύεται σε δύο αρχεία με κατάληξη `.nod` και `.hyb` (βλ παράρτημα Α). Το επιφανειακό πλέγμα που προέκυψε, αποτελείται από 10120 τετράπλευρα και 39830 τρίγωνα.

- **Δημιουργία ψευδο-3Δ πλέγματος με το πρόγραμμα `stackhyb`.**

Το ευθύ και το συζυγές προβλήμα λύνονται χρησιμοποιώντας το `OpenFOAM`, το οποίο λύνει εξισώσεις 2Δ ροής σε ψευδο-3Δ πλέγμα (3Δ πλέγμα με ένα κελί πάχος). Για τη δημιουργία 3Δ πλέγματος καλείται ένα επιπλέον λογισμικό του εργαστηρίου το `stackhyb`. Αυτό δέχεται ως είσοδο το 2Δ πλέγμα που προέκυψε από το `2Dgridgen` και το μετατρέπει σε 3Δ προσθέτοντας ένα κελί στην ακτινική κατεύθυνση.

- **Μετατροπή μορφής δεδομένων πλέγματος από `LTT` σε `Gmesh`.**

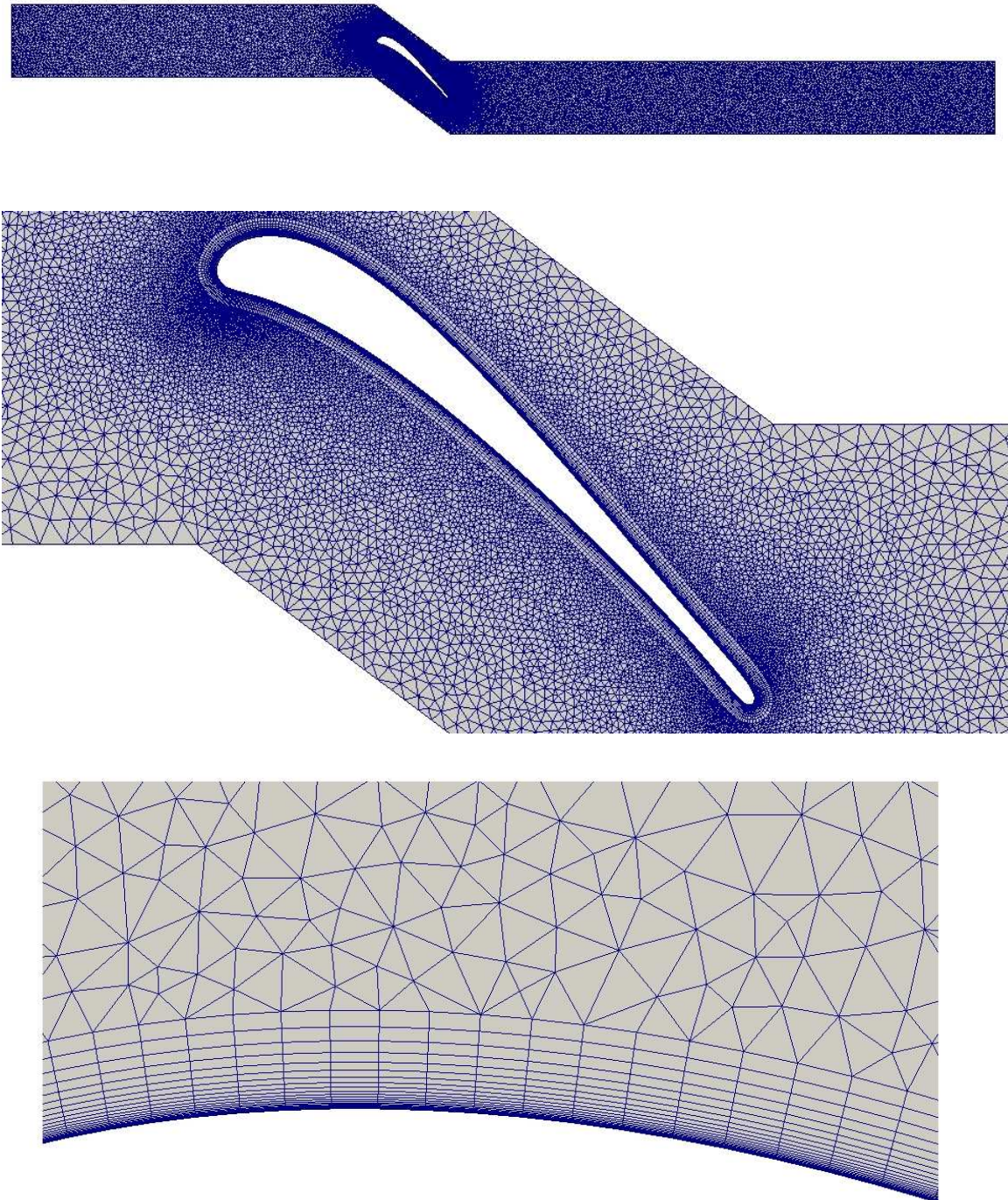
Το υπάρχον πλέγμα τροφοδοτείται στο πρόγραμμα `LTTtoGmsh`, το οποίο μετατρέπει το 3Δ πλέγμα από μορφή `LTT` σε μια παρόμοια μορφή `Gmesh`. Τα δύο αρχεία πλέγματος με κατάληξη `.nod` `.hyb` μορφής `LTT` μετασχηματίζονται σε ένα αρχείο με κατάληξη `.msh` μορφής `Gmesh`. Επιπλέον, προστίθενται οι παρακάτω σειρές στο τέλος του αρχείου με κατάληξη `.msh` για να αντιστοιχιστούν οι ομάδες των οριακών κόμβων (`patch`) (λ.χ εισόδος κτλ) με κάποιο όνομα (λ.χ.`inlet`).

```
$PhysicalNames
5
2 "frontBack"
3 "wall"
6 "periodic2"
4 "inlet"
5 "outlet"
$EndPhysicalNames
```

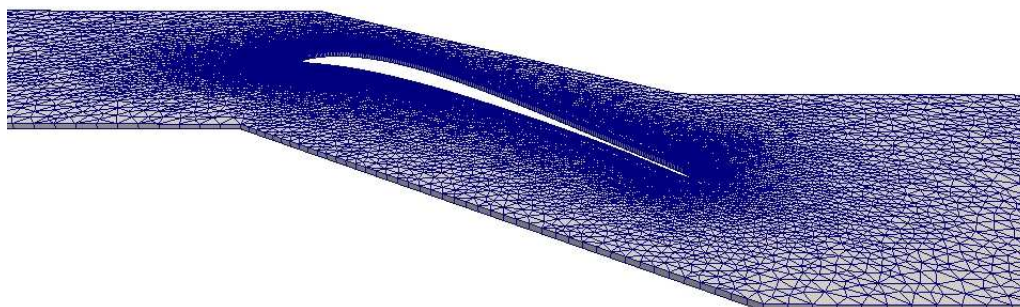
- **Μετατροπή δεδομένων από `Gmesh` σε `OpenFoam`.**

Σειρά έχει η μετατροπή δεδομένων πλέγματος από `Gmesh` σε `OpenFoam`. Αυτό πραγματοποιείται με το μετατροπέα που έχει το `OpenFoam`, που λέγεται **`gmshToFoam`**. Αρχικά, δημιουργούνται όλοι οι κατάλογοι οι οποίοι είναι απαραίτητοι για την λειτουργία του `OpenFOAM` (παράρτημα Γ'), μέσα στον κατάλογο της περίπτωσης `case/`. Στη συνέχεια, τοποθετείται το αρχείο πλέγματος με κατάληξη `.msh` στον κατάλογο `case/` και με την εντολή `gmshToFoam mesh.msh` όπου `mesh` το όνομα του πλέγματος, μετατρέπεται σε μορφή `OpenFoam`. Έτσι δημιουργούνται τα αρχεία `points`, `faces`, `owner`, `neighbour`, `boundary` (βλ. παράρτημα Γ').





Σχήμα 4.3: Πλέγμα που προέκυψε από τον 2Δ γενέτη πλέγματος του εργαστηρίου.  
-Πάνω: πλέγμα 2Dgridgen, -Μέση: πυκνώση γύρω από την αεροτομή, -Κάτω: διαστρωματώσεις τετραπλεύρων κοντά στην αεροτομή.

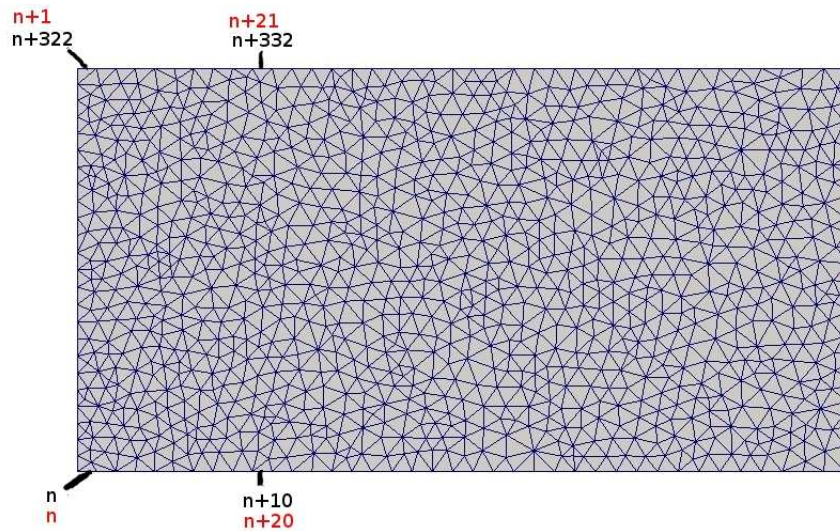


Σχήμα 4.4: Προοπτική εικόνα στην οποία φαίνεται η προσθήκη ενός κελιού πάχους με το `stackhyb`.

#### • Διόρθωση αποθήκευσης περιοδικών επιφανειών

Σύμφωνα με την παραπάνω διαδικασία, οι περιοδικές επιφάνειες της κάτω και της πάνω πλευράς ανήκουν σε μία ομάδα επιφανειών (`periodic patch`). Το OpenFOAM για να διαχειριστεί τα περιοδικά όρια, πρέπει α) ο αριθμός των επιφανειών των περιοδικών ορίων να είναι ίδιος και β) να είναι αποθηκευμένες πρώτα οι επιφάνειες του πρώτου περιοδικού ορίου και στη συνέχεια του άλλου. Για παράδειγμα, στη συγκεκριμένη εφαρμογή, τα περιοδικά όρια αποτελούνται από συνολικά 644 επιφάνειες, το πρώτο περιοδικό όριο να αποτελείται από 322 και το δεύτερο από 322 και η αντίστοιχη περιοδική επιφάνεια της επιφάνειας 1 να είναι η 323. Αυτό φαίνεται σχήμα 4.5.

Η λύση στο παραπάνω πρόβλημα δόθηκε χρησιμοποιώντας ένα εκτελέσιμο του OpenFOAM, `createPatch`. Αρχικά, το πλέγμα που τροφοδοτείται στο OpenFOAM, μπορεί να έχει ίδιο αριθμό επιφανειών στο πάνω και στο κάτω περιοδικό όριο, αλλά δεν είναι αποθηκευμένες με τη σωστή σειρά. Έτσι το `createPatch` ξαναποθηκεύει τις περιοδικές επιφάνειες στη σωστή σειρά, έτσι ώστε να αντιστοιχιστούν σωστά οι περιοδικοί κόμβοι. Περισσότερα για το εργαλείο `createPatch` στο παράρτημα Β΄.



Σχήμα 4.5: Αλλαγή σειράς αποθήκευσης περιοδικών επιφανειών (η πάνω και η κάτω γραμμή του σχήματος).  $n$  είναι επιφάνεια έναρξης περιοδικών επιφανειών με 644 συνολικά επιφάνειες. α) **μαύρη/έντονη αρίθμηση** (σωστή) με το createPatch β) **κόκκινη/ασθενής αρίθμηση** η αρχική (λάθος).

#### • Επίλυση ευθέος και συζυγούς προβλήματος.

Ακολουθεί η επίλυση του ευθέος προβλήματος με μοντέλο τύρβης ( $k-\omega$ ). Οι οριακές συνθήκες που επιβάλλονται είναι οι παρακάτω:

Patches	$U$	$p$	$k$	$\omega$	nut
Inlet	(165 0 0)	zerogradient	intensity 0.05	1020937.5	calculated
Outlet	zerogradient	0	zerogradient	zerogradient	calculated
Periodic	cyclic	cyclic	cyclic	cyclic	cyclic
Walls	(0 0 0)	zerogradient	1E-8	1E-8	0
FrontBack	empty	empty	empty	empty	empty

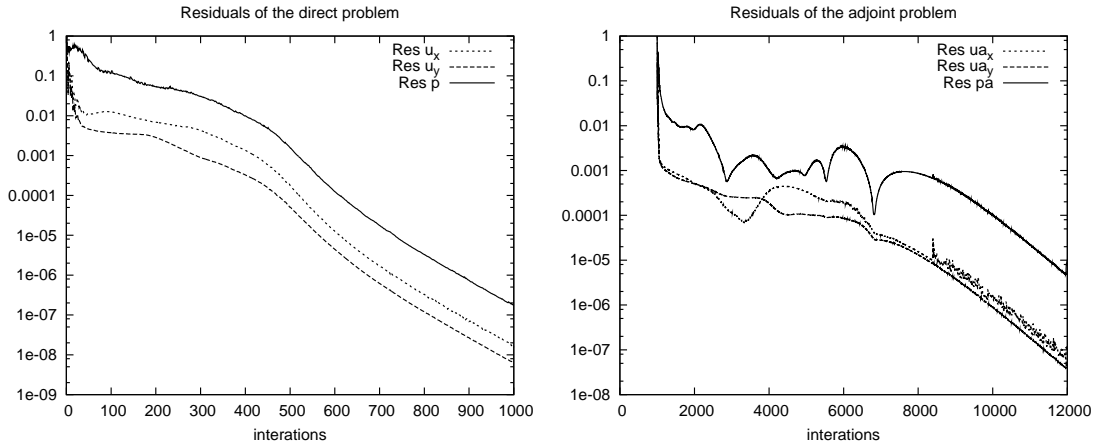
Το patch FrontBack περιλαμβάνει τις εμπρός και τις πίσω επιφάνειες και δηλώνεται empty για επίλυση 2Δ ροής σε ψευδο-3Δ πλέγμα.

Ο αριθμός Reynolds ως προς τη χορδή  $Re_c = 5.000.000$  και ο αριθμός Mach στην είσοδο είναι 0.28. Το πλέγμα είναι κατάλληλο έτσι ώστε να επιτρέπεται η χρήση ενός μοντέλου τύρβης χαμηλών αριθμών Reynolds με μέσο  $y_+ = 0.1$ . Το ρευστό θεωρείται αέρας με συνεκτικότητα  $\nu = 1.5 \cdot 10^{-5} \frac{m^2}{s}$ .

#### • Μετατροπή δεδομένων πλέγματος από OpenFoam σε LTT

Επιλύεται το συζυγές πρόβλημα και εκτυπώνεται σε αρχείο, η παράγωγος των συναρτησιακών της πίεσης και της γωνίας εξόδου ροής στους κόμβους. Το πλέγμα μορφής OpenFoam μετασχηματίζεται σε δομή δεδομένων LTT με το λογισμικό Foam2LTT (βλ. παράρτημα Α) και πλέον τα αρχεία πλέγματος boundary, points, faces, owner, neighbour αντικαθίστανται με δύο της μορφής LTT με ονομασία case.nod και case.hyb. Η μετατροπή διέπεται από κανόνες οι οποίοι αναλύονται στο παράρτημα Α'.

Σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης, οι εξισώσεις του ευθέος και του συζυγούς προβλήματος συγκλίνουν και ενδεικτικά φαίνεται παρακάτω η Νορμα-2 των υπολοίπων των εξισώσεων.



Σχήμα 4.6: -Αριστερά: Νορμα-2 του υπολοίπου των εξισώσεων του ευθέος προβλήματος -Δεξιά: Νόρμα-2 του υπολοίπου των εξισώσεων του συζυγούς προβλήματος.

#### • Δημιουργία επιφανειακού πλέγματος από το χωρικό

Σειρά έχει η απομόνωση της αεροτομής στροβίλου από όλο το πλέγμα. Σε πρώτη φάση, σαρώνονται όλοι οι κόμβοι οι οποίοι είναι διαμορφώσεις τοίχου στο χωρικό πλέγμα, δηλαδή σε αυτούς που ισχύει  $\log_{10} \text{fr} = 3$  ή 13 κτλ. στο αρχείο `case.nod`. Σε δεύτερη φάση, δημιουργείται το επιφανειακό πλέγμα και αποθηκεύεται σε δύο αρχεία με όνομα `case2.hyb` και `case2.nod`. Στη συνέχεια, αποθηκεύεται σε ένα αρχείο η αντιστοιχία των κόμβων του επιφανειακού πλέγματος με του χωρικού πλέγματος (forward addressing). Γνωρίζοντας πλέον την αντιστοιχία των κόμβων, μπορεί πλέον να αντιστοιχιστεί η παράγωγος των συναρτησιακών των απωλειών ολικής πίεσης και της στροφής της ροής στους κόμβους της αεροτομής.

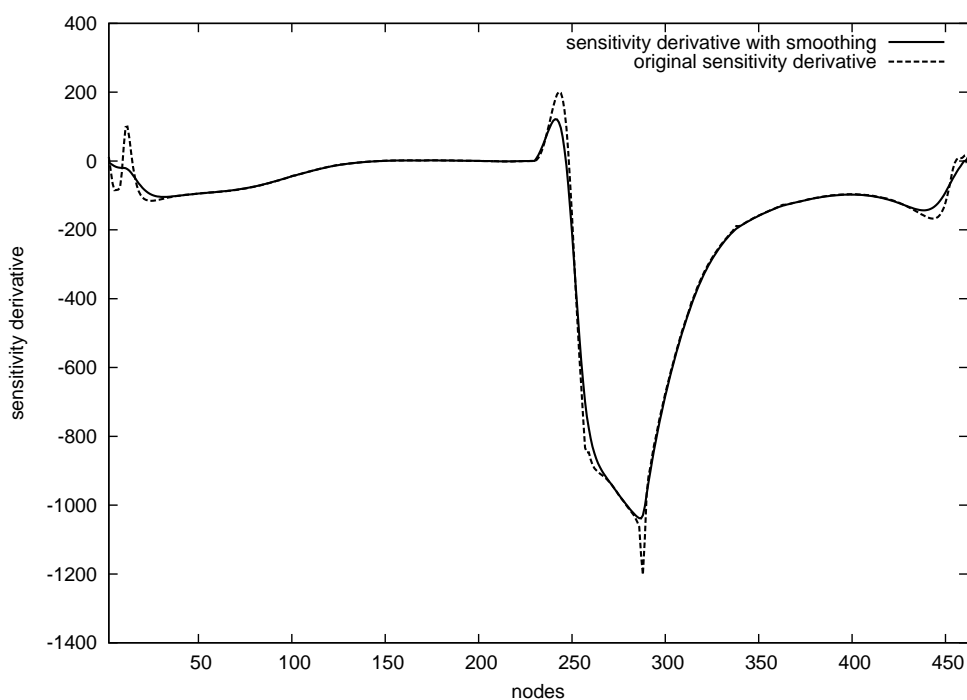
#### • Ομαλοποίηση της παραγωγού ευαισθησίας με επίλυση της εξίσωσης Laplace

Οι μεταβλητές σχεδιασμού του προβλήματος είναι όλοι οι κόμβοι του οριακού πλέγματος. Η βελτιστοποίηση ως προς όλες τις μεταβλητές σχεδιασμού μπορεί να δημιουργήσει ανώμαλο περίγραμμα αεροτομής πτερυγίου εξ αιτίας διάφορων υπερακοντίσεων της παραγωγού ευαισθησίας. Η λύση στο πρόβλημα δόθηκε με την ομαλοποίηση της παραγωγού ευαισθησίας, λύνοντας μια μονοδιάστατη εξίσωση Laplace κατά μήκος της 1Δ καμπύλης του πτερυγίου (σχήμα 4.7).

$$\bar{g} - \nabla \cdot (\epsilon \nabla \bar{g}) = g \quad (4.1)$$

$\mathbf{g}$  παράγωγος ευαισθησίας,

$\bar{g}$  παράγωγος ευαισθησίας που προκύπτει από ομαλοποίηση



Σχήμα 4.7: Αποτέλεσμα ομαλοποίησης της παραγώγου ευαισθησίας με στόχο την μείωση απωλειών ολικής πίεσης με τον περιορισμό της στροφής της ροής, με την επίλυση της εξίσωσης Laplace.

#### • Υπολογισμός παραγώγου ευαισθησίας του πάχους

Σειρά έχει ο υπολογισμός της παραγώγου ευαισθησίας του πάχους. Αρχικά, όπως αναφέρεται και σε προηγούμενο κεφάλαιο, ο χρήστης δηλώνει τα σημεία όπου θέλει να υπολογίσει την παράγωγο του πάχους. Σε αυτά, σαρώνονται οι απέναντι κόμβοι της αεροτομής και υπολογίζεται η μικρότερη απόσταση. Στο πρώτο κύκλο βελτιστοποίησης η παράγωγος ευαισθησίας του πάχους είναι 0 και οι αποστάσεις αυτές είναι οι αρχικές (initial). Σε αυτήν την εφαρμογή υπολογίζονται 6 πάχη, δηλαδή η απόσταση των 6 σημείων της pressure side με τα αντίστοιχα 6 κοντινότερά τους στην suction side. Με βάση αυτά τα πάχη, υπολογίζεται η παράγωγος ευαισθησίας του πάχους, η οποία θα έχει τιμή διαφορετική του μηδενός μόνο σε αυτά τα 12 σημεία.

Για να διαμοιραστεί η παράγωγος ευαισθησίας του πάχους σε όλους τους κόμβους του περιγράμματος, εφαρμόζεται ομαλοποίηση (smoothing) με μεγάλο συντελεστή ομαλοποίησης  $\epsilon$  με τη βοήθεια της εξίσωσης Laplace (εξίσωση 4.1), από την οποία και προκύπτει η ομαλοποιημένη παράγωγος πάχους πάνω στα σημεία της αεροτομής.

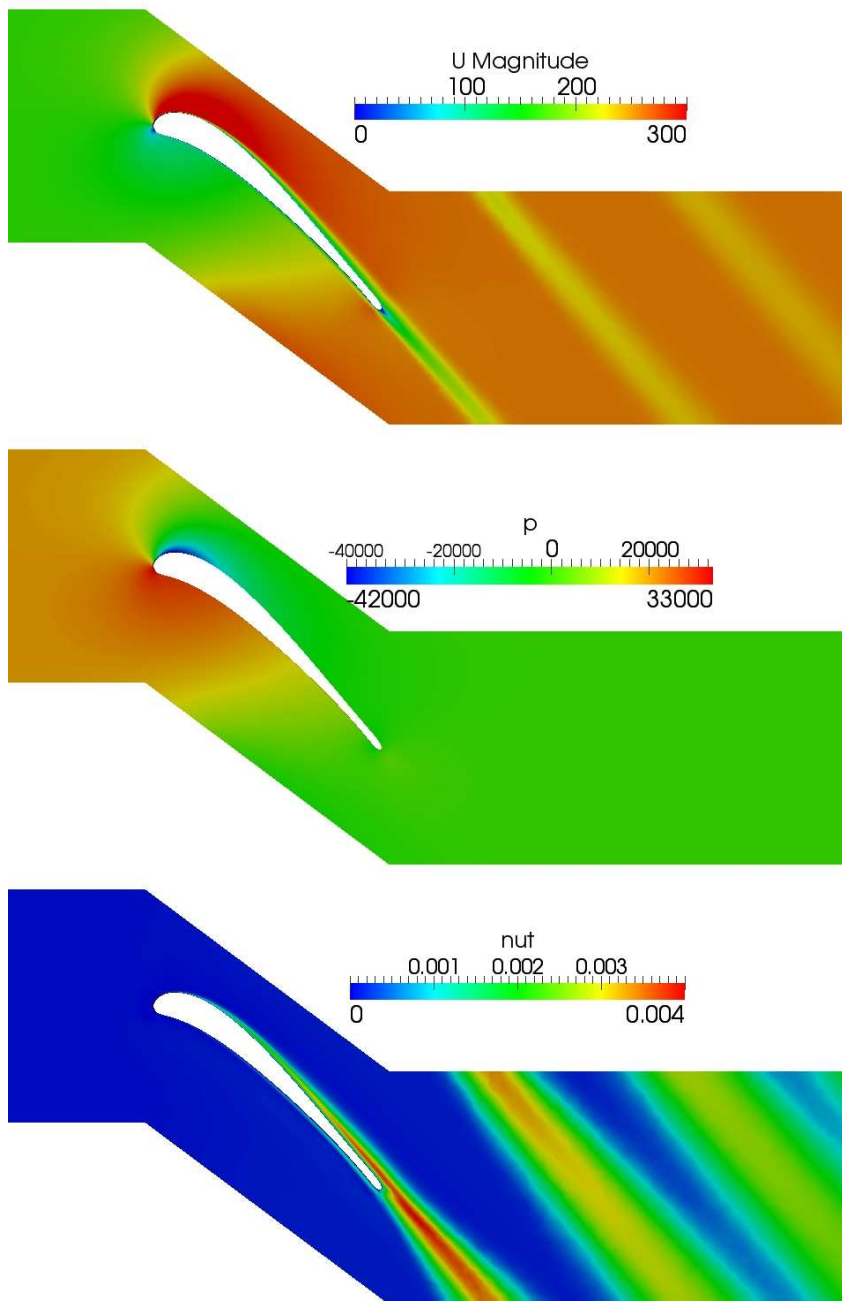
#### • Ανανέωση γεωμετρίας με την απότομη κάθοδο

Τέλος, ένας κύκλος βελτιστοποίησης τελειώνει με την η απότομη κάθοδο στην οποία γίνεται ανανέωση της γεωμετρίας του πλέγματος με βάση τις παραγώγους ευαισθησίας που έχουν υπολογιστεί. Η μετατόπιση των κόμβων πραγματοποιείται μόνο ως προς την κάθετη κατεύθυνση ( $\vec{n}$  normal διάνυσμα).

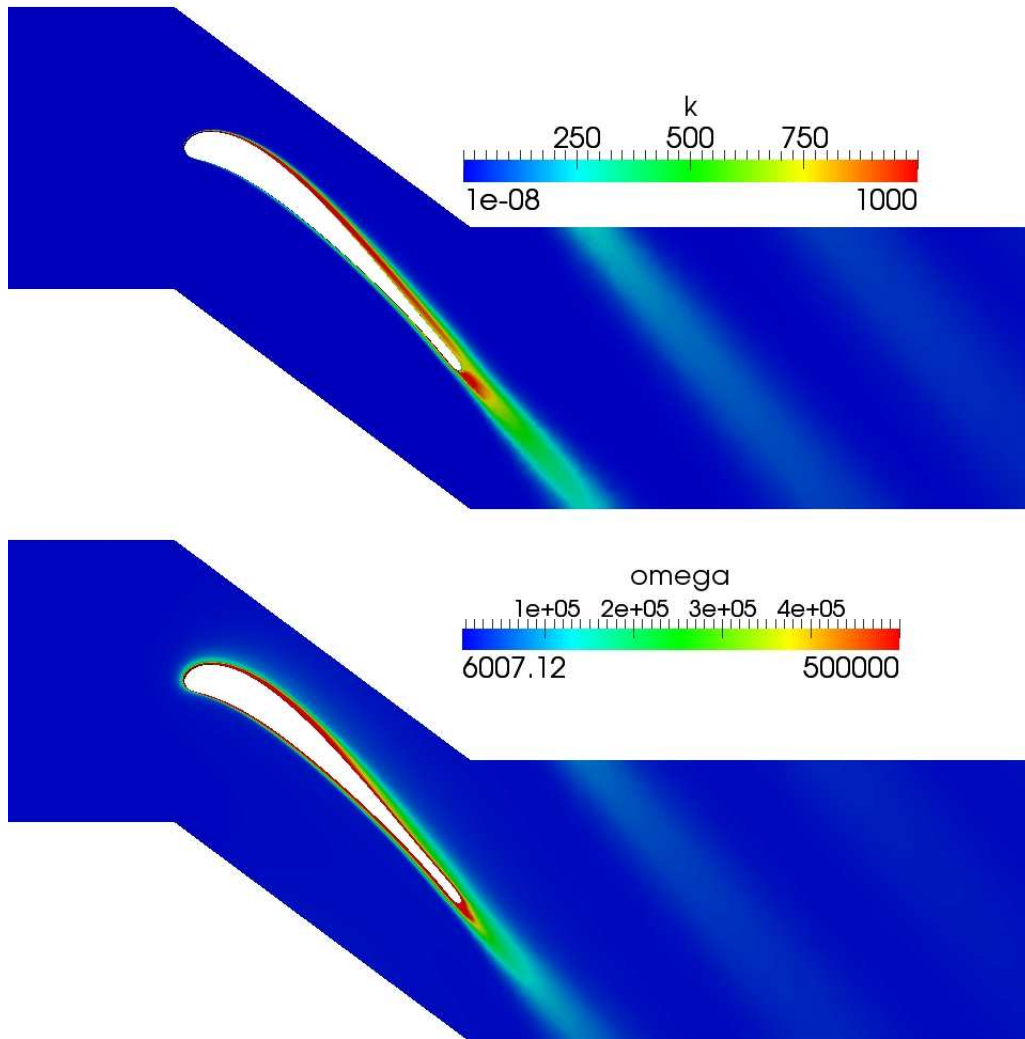
$$\vec{b}_{k+1} = \vec{b}_k - \eta_1 \left[ \frac{\delta f}{\delta b_{\Delta pt+ao}} \vec{n}_{normal} \right] - \eta_2 \left[ \frac{\delta f}{\delta b_{wid}} \vec{n}_{normal} \right] \quad (4.2)$$

## 4.2 Αποτελέσματα βελτιστοποίησης

Στα σχήματα 4.8 και 4.9 απεικονίζονται οι μεταβλητές ροής του ευθέως προβλήματος για την γεωμετρία της αρχικής αεροτομής του στροβίλου.



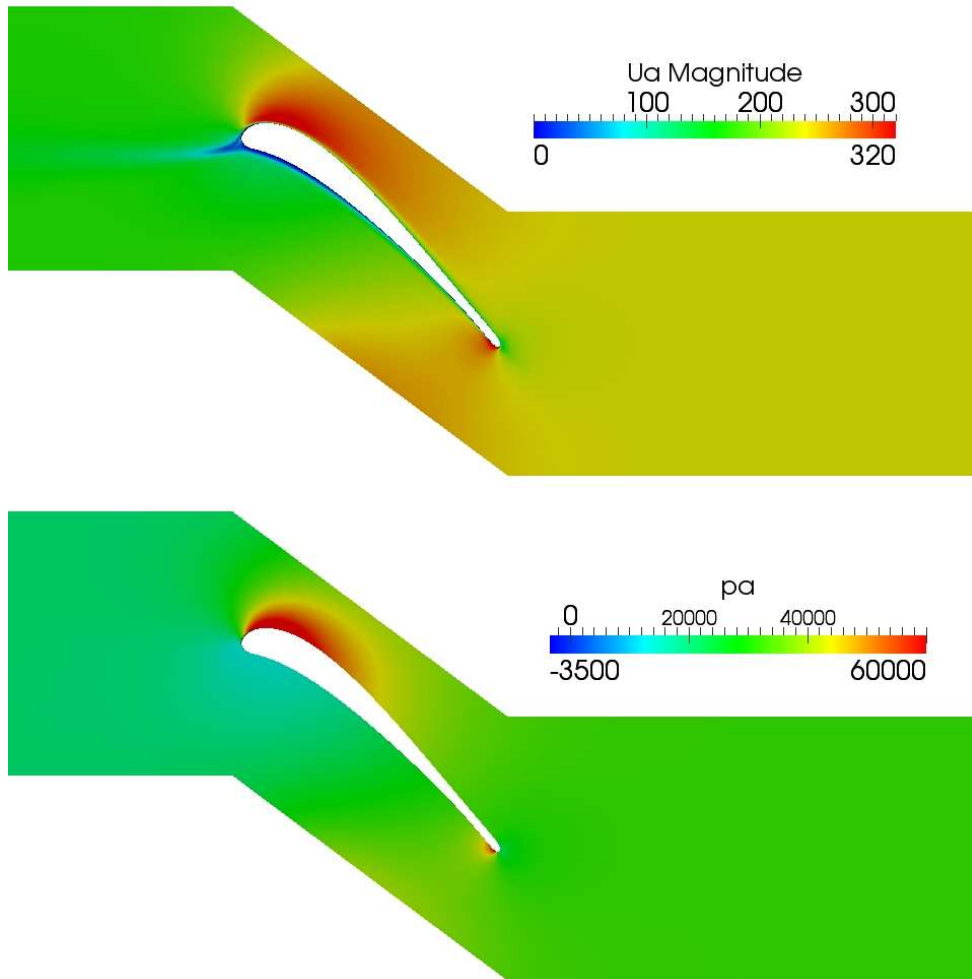
Σχήμα 4.8: Αποτελέσματα ευθέως προβλήματος στον πρώτο κύκλο βελτιστοποίησης.  
-Πάνω: μέτρο ταχύτητας  $|v|$  -Μέση: στατική πίεση  $p$  -Κάτω: τυρβώδης συνεκτικότητα  $\nu_t$ .



Σχήμα 4.9: Αποτελέσματα ευθέως προβλήματος στον πρώτο κύκλο βελτιστοποίησης.  
-Πάνω: Τυρβώδης Κινητική Ενέργεια  $k$  -Κάτω: Ρυθμός Καταστροφής Τύρβης  $\omega$ .

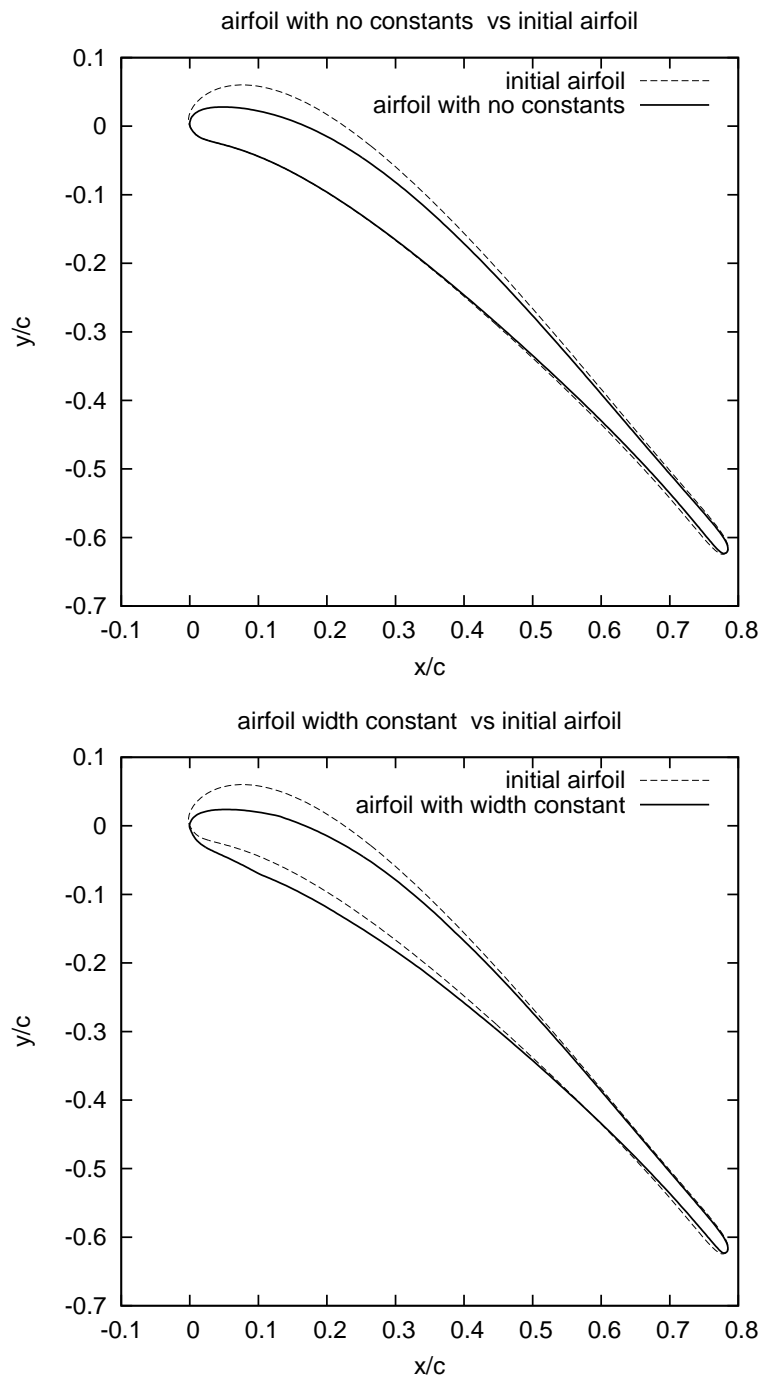


Στο σχήμα 4.10 απεικονίζονται οι μεταβλητές του συζυγούς προβλήματος. Στην συζυγή ταχύτητα παρατηρείται και ο ομόρρους της συζυγούς λύσης στο σημείο πρόσπτωσης. Αυτό εξηγείται γιατί η πληροφορία στο συζυγές πρόβλημα 'μεταφέρεται' ανάποδα από ότι στο ευθύ πρόβλημα αφού ο όρος μεταφοράς στις συζυγείς εξισώσεις έχει αρνητικό πρόσημο.

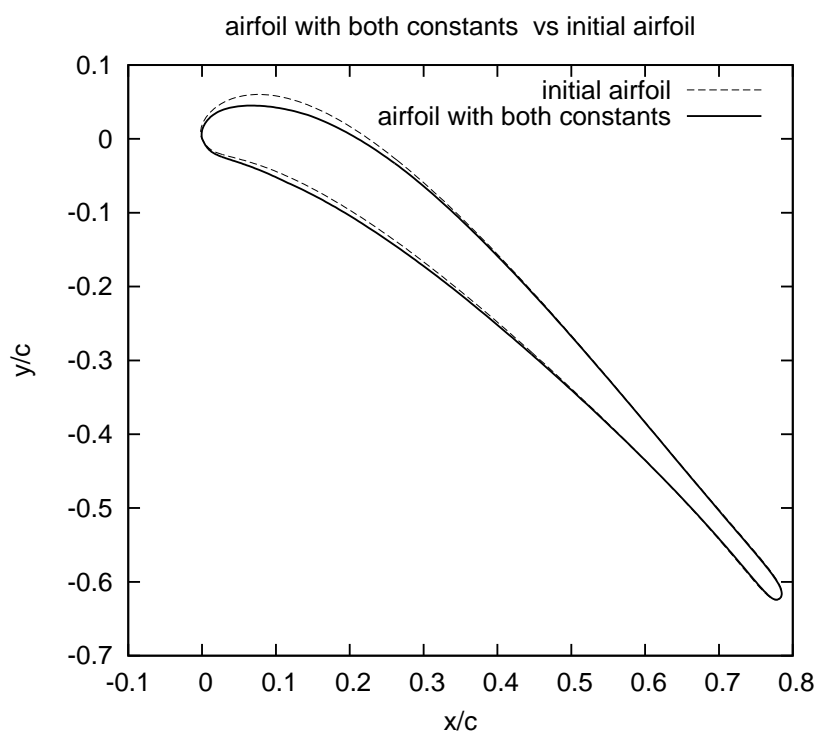


Σχήμα 4.10: Αποτελέσματα συζυγούς προβλήματος στον πρώτο κύκλο βελτιστοποίησης. -Πάνω: μέτρο συζυγούς ταχύτητας  $v_a$  -Κάτω: συζυγής πίεση  $p_a$ .

Ακολουθούν τα αποτελέσματα βελτιστοποίησης αεροτομής στροβίλου με και χωρίς περιορισμούς, μετά απο 10 κύκλους βελτιστοποίησης. Στα σχήματα 4.11,4.12 απεικονίζονται οι μορφές του περιγράμματος που προέκυψαν, σε σχέση με την αρχική μορφή αεροτομής.



Σχήμα 4.11: **Πάνω:** Αεροτομή που προέκυψε μετά απο βελτιστοποίηση με συνάρτηση στόχο τη μείωση διαφοράς ολικής πίεσης  $\Delta p_t$  χωρίς περιορισμούς σε σύγκριση με την αρχική αεροτομή. **Κάτω:** Αεροτομή που προέκυψε μετά από βελτιστοποίηση με συνάρτηση στόχο τη μείωση διαφοράς ολικής πίεσης  $\Delta p_t$  με περιορισμό πάχους σε σύγκριση με την αρχική αεροτομή.

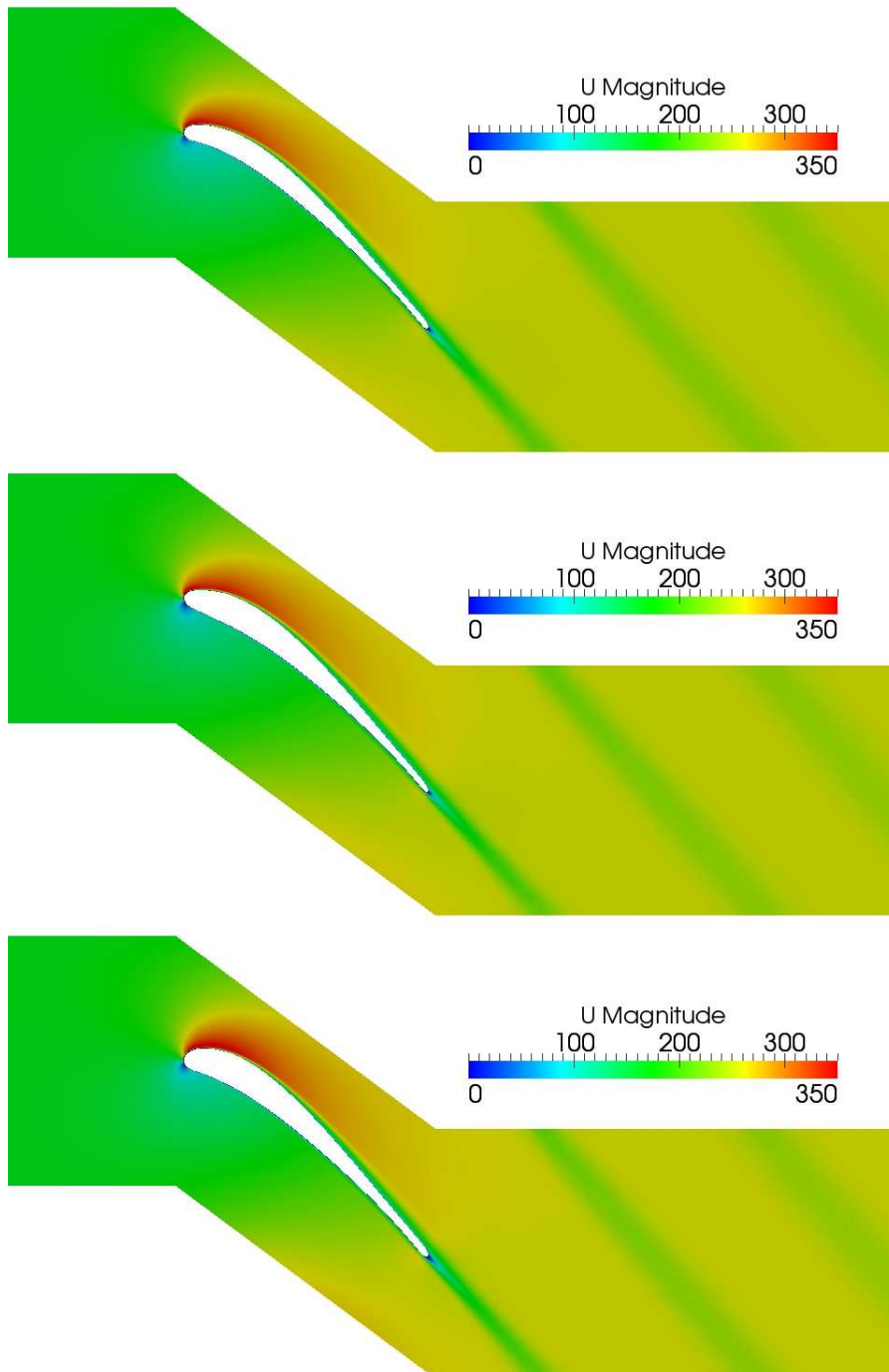


Σχήμα 4.12: Αεροτομή που προέκυψε μετά από βελτιστοποίηση με συνάρτηση στόχο την μείωση ολικής πίεσης  $\Delta p_t$  με περιορισμό πάχους και στροφή της ροής σε σχέση με την αρχική αεροτομή.

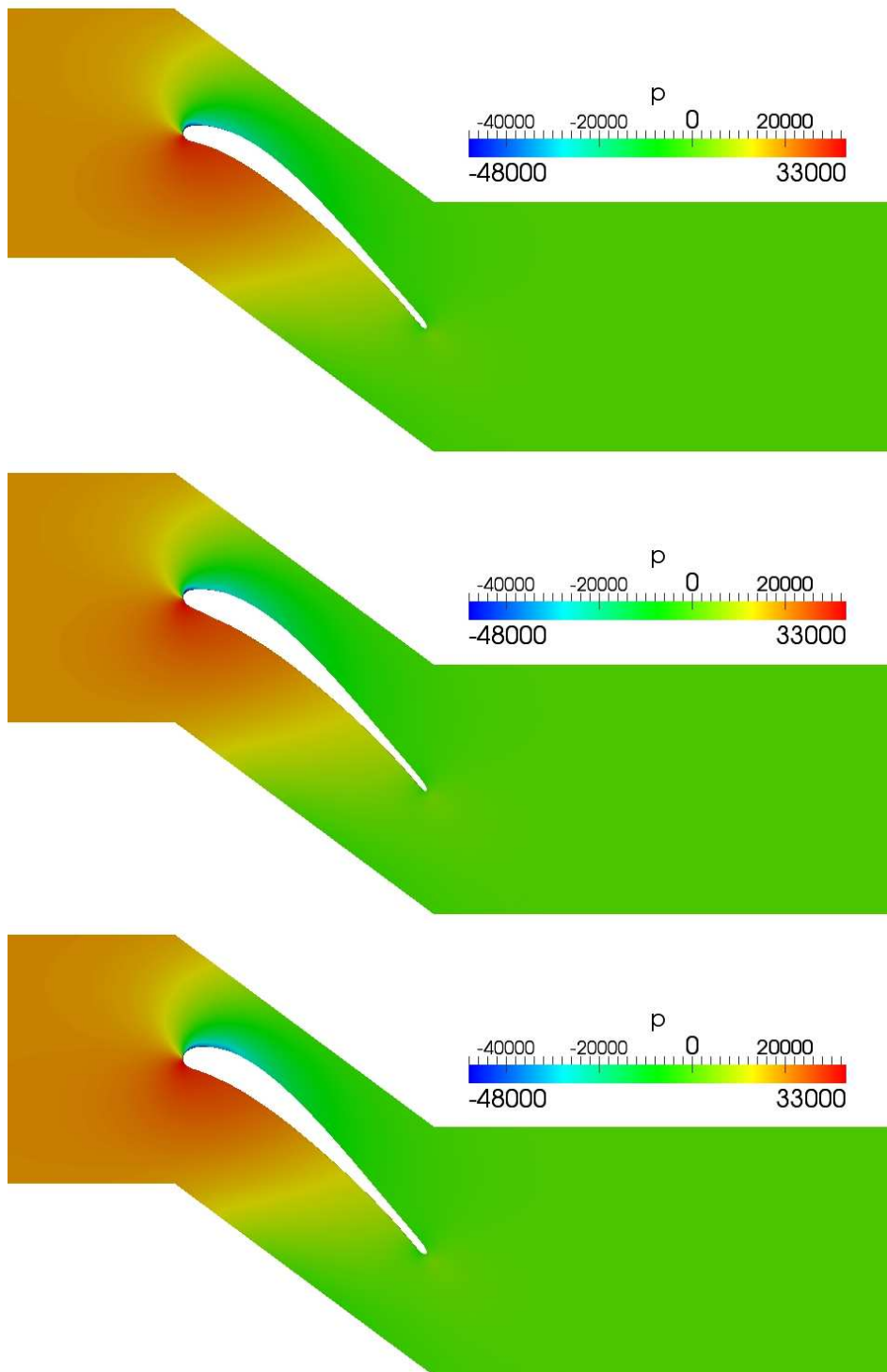
	$p_{t \text{ inlet}}$	$p_{t \text{ outlet}}$	$\Delta p_t$	$\% \Delta p_t$	Στροφή(°)
<b>Αρχική</b>	33604	31995.76	1608.5	-	49.28
<b><math>\Delta p_t</math></b>	32458.21	31050.29	1408	12.46	48.64
<b><math>\Delta p_t</math> + πάχους</b>	32614.19	31183.01	1431.2	11.01	48.724
<b><math>\Delta p_t</math> + πάχους + στροφής</b>	33276.04	31744	1532	4.74	49.09

Από τα αποτελέσματα παρατηρείται μείωση 12.46% μείωσης απωλειών ολικής πίεσης όταν δεν χρησιμοποιούνται περιορισμοί, αλλά παράλληλα όπως φαίνεται στο σχήμα 4.11 μειώνεται το πάχος της αεροτομής καθώς αλλάζει και η στροφή της ροής κατά  $0.8^\circ$ . Η βελτιστοποίηση με περιορισμό πάχους οδηγεί σε μικρότερη μείωση απωλειών που γίνεται ίση με 11.01% και τηρείται το πάχος της αεροτομής. Στην περίπτωση με τους δύο περιορισμούς, οι απώλειες μειώνονται κατά 4.74%, η στροφή της ροής κατά  $0.1^\circ$  και τηρείται το πάχος του πτερυγίου. Άρα απαιτείται η χρήση των περιορισμών του πάχους και της στροφής της ροής στις εφαρμογές στροβιλομηχανών, καθώς μετασχηματίζουν το πρόβλημα βελτιστοποίησης και η βέλτιστη αεροτομή του πτερυγίου που προκύπτει τηρεί κάποιους κατασκευαστικούς και ροϊκούς περιορισμούς.

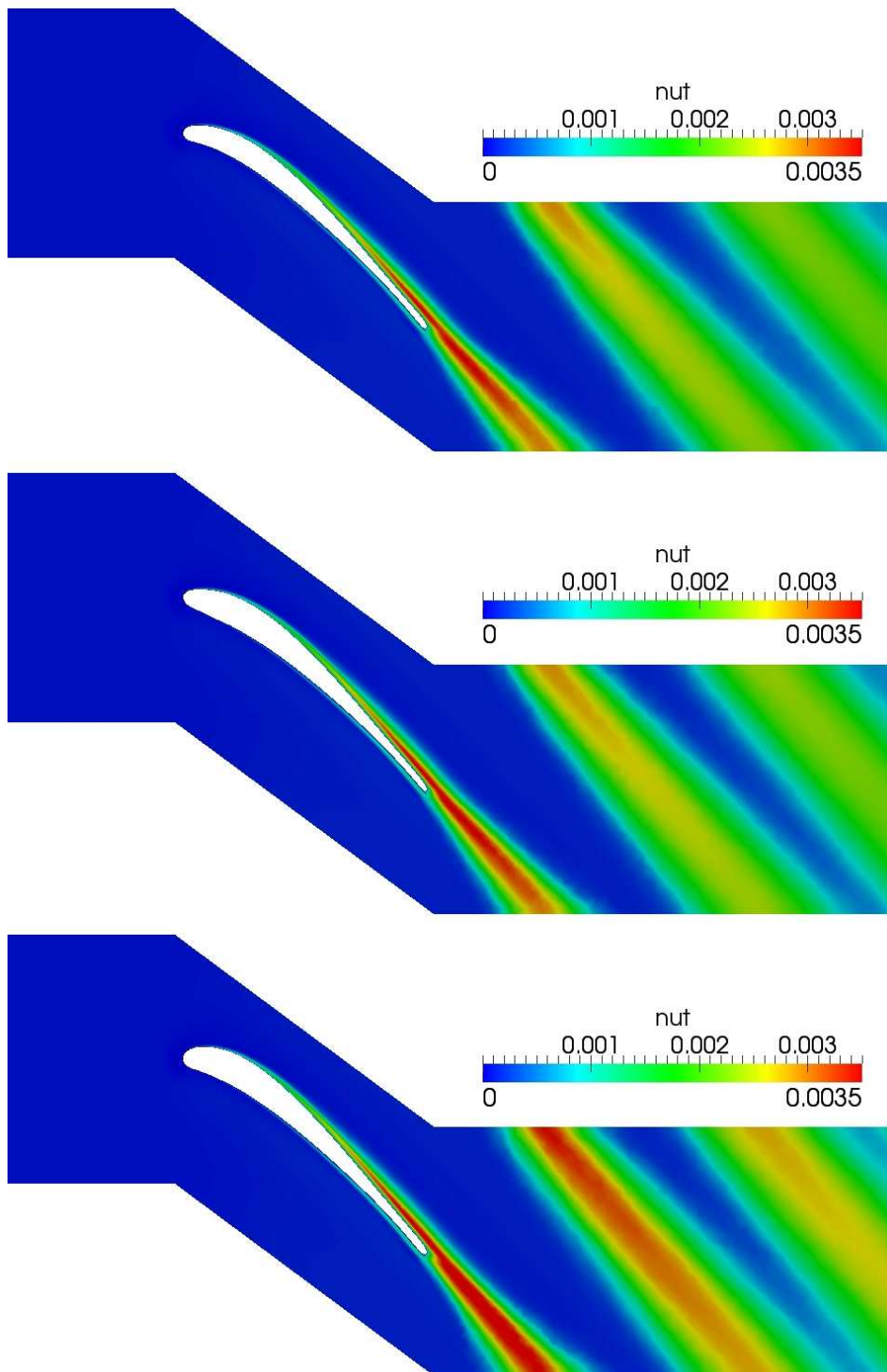
Στα σχήματα 4.13, 4.14, 4.15 φαίνονται οι διαφορές της ροής στις προκύπτουσες αεροτομές μετά απο βελτιστοποίηση με και χωρίς περιορισμούς.



Σχήμα 4.13: Πεδίο μέτρου ταχύτητας  $|v|$  μετά από 10 κύκλους βελτιστοποίησης για μείωση απωλειών ολικής πίεσης. -Πάνω: χωρίς περιορισμούς -Μέση: με περιορισμό πάχους -Κάτω: με περιορισμό πάχους και στροφή της ροής.



Σχήμα 4.14: Πεδίο πίεσης  $p$  μετά από 10 κύκλους βελτιστοποίησης για μείωση απωλειών ολικής πίεσης. -Πάνω: χωρίς περιορισμούς -Μέση: με περιορισμό πάχους -Κάτω: με περιορισμό πάχους και στροφή της ροής.



Σχήμα 4.15: Πεδίο τυρβώδους συνεκτικότητας  $\nu_t$  μετά από 10 κύκλους βελτιστοποίησης για μείωση απωλειών ολικής πίεσης. -Πάνω: χωρίς περιορισμούς -Μέση: με περιορισμό πάχους -Κάτω: με περιορισμό πάχους και στροφή της ροής.

## **Κεφάλαιο 5**

# **Γένεση 3D πλέγματος - Πλεγματοποιητής 3DTurboGen**

Για τις ανάγκες της παρούσας διπλωματικής εργασίας εξελίχθηκε το πρόγραμμα γένεσης πλέγματος 3Dturbogen του ΜΠΥΡΔ&Β/ΕΜΠ. Ο παλαιότερος κώδικας ο οποίος είχε προγραμματιστεί για αξονικό στρόβιλο, γενικεύτηκε και εμπλουτίστηκε με επιλογές γένεσης πλέγματος, με σκοπό να προσαρμόζεται ανάλογα με τις απαιτήσεις της εκάστοτε περίπτωσης.

Ο πλεγματοποιητής δημιουργεί δομημένο πλέγμα για περιφερειακές πτερυγώσεις στροβιλομηχανών. Έχει την δυνατότητα να δημιουργήσει πλέγματα είτε για πτερύγωση συμπίεστή, είτε στροβίλου καθώς ακόμη και για αξονικές, ακτινικές και μικτής ροής μηχανές.

Ο πλεγματοποιητής τροφοδοτείται με τα αρχεία `hub.curve`, `shroud.curve`, `profile.curve`, `in3D`. Στα αρχεία `hub.curve`, `shroud.curve` γράφονται οι συντεταγμένες των γενέτειρων των εκ περιστροφής επιφανειών, του κελύφους ποδός (`hub`) και του κελύφους κεφαλής (`shroud`) αντίστοιχα, με την πρώτη στήλη να είναι η ακτινική και η δεύτερη η αξονική συνιστώσα  $z$ . Στο αρχείο `profile.curve` είναι αποθηκευμένες οι αεροτομές οι οποίες εισάγονται στον πλεγματοποιητή. Συγκεκριμένα, στην πρώτη σειρά γράφεται ο αριθμός των αεροτομών, στην δεύτερη ο αριθμός των κόμβων της κάθε αεροτομής, στην τρίτη ο κόμβος του σημείου πρόσπτωσης και στην συνέχεια ακολουθούν οι συντεταγμένες των κόμβων των αεροτομών. Στο αρχείο `in3d` επιλέγονται από τον χρήστη διάφορες ιδιότητες του πλέγματος (πύκνωση, αριθμός κόμβων κτλ.) καθώς και διάφορες επιλογές για την επίλυση ελλειπτικών εξισώσεων με όρους πηγής.

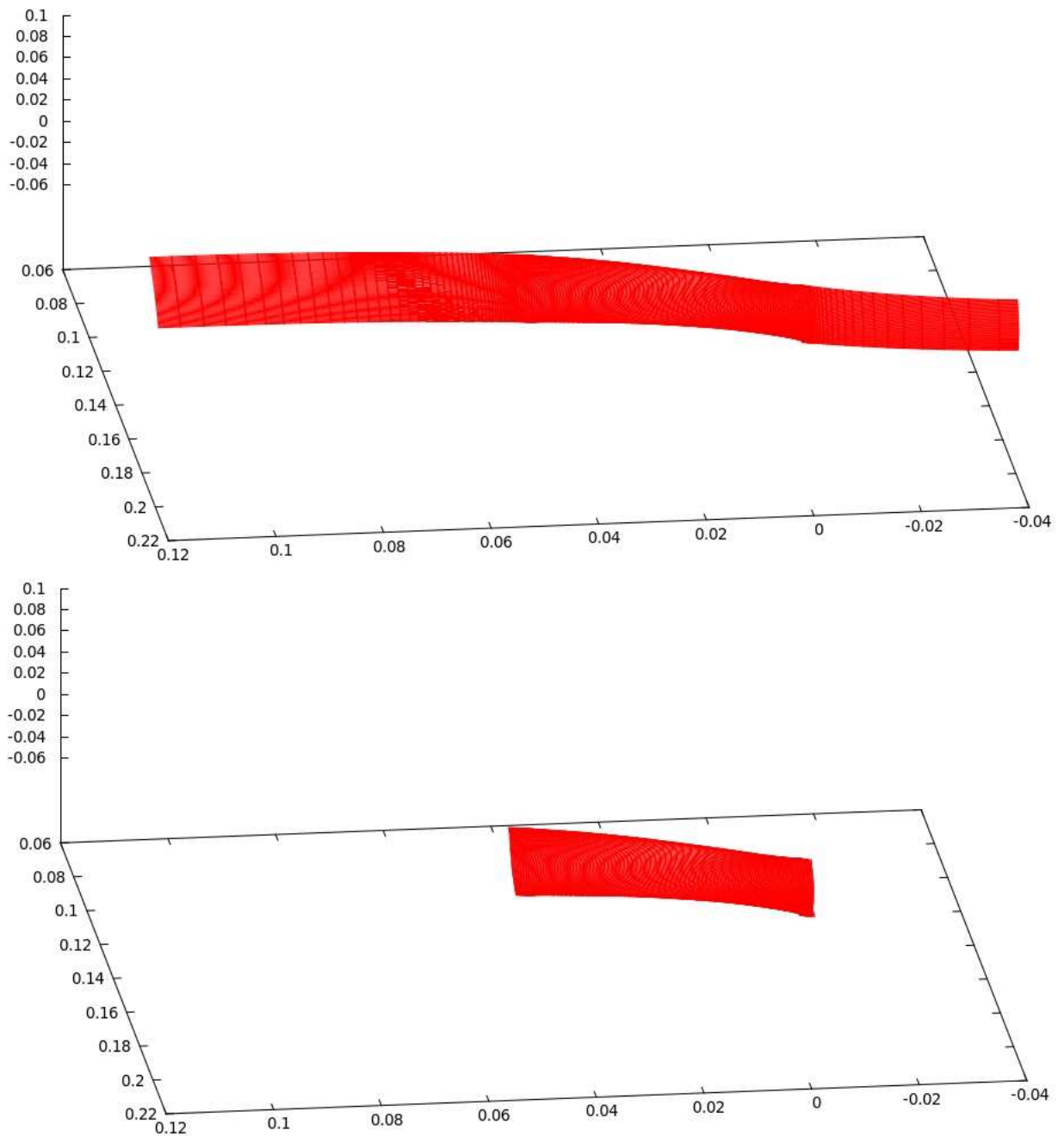
### **5.1 Διαδικασία γένεσης πλέγματος με τον 3DTurboGen**

Όλη η φιλοσοφία γένεσης πλέγματος με τον πλεγματοποιητή 3DTurboGen είναι η δημιουργία επιφανειών κατά την ακτινική διεύθυνση, και στη συνέχεια ένωση αυτών των επιφανειών για την δημιουργία 3D πλέγματος.

Η διαδικασία γένεσης πλέγματος παρουσιάζεται αναλυτικά παρακάτω:

- Σε πρώτη φάση διαβάζονται οι συντεταγμένες των κόμβων της κεφαλής ποδός (hub).
- Διαβάζονται οι συντεταγμένες των κόμβων της αεροτομής από το αρχείο profile.curve, που βρίσκονται πάνω στην επιφάνεια του κελύφους ποδός και παράλληλα υπολογίζεται η φορά αποθήκευσης των κόμβων.
- Στην συνέχεια, πυκνώνονται οι κόμβοι της αεροτομής με βάση τις επιλογές στο αρχείο in3D. Ανάλογα με την φορά αποθήκευσης κόμβων της αεροτομής, στρέφεται είτε η πλευρά υποπίεσης είτε η πλευρά υπερπίεσης, έτσι ώστε στο κάτω μέρος να βρίσκονται οι κόμβοι της πλευράς υποπίεσης.
- Βρίσκεται ο κοντινότερος κόμβος της γενέτειρας του κελύφους ποδός με το σημείο πρόσπτωσης της αεροτομής, και επιβάλλεται σε αυτόν να έχουν τις ίδιες συντεταγμένες.
- Ακολουθεί η πυκνωση της νέας γενέτειρας στο κομμάτι από την είσοδο μέχρι το σημείο πρόσπτωσης.
- Οι συντεταγμένες των περιοδικών ορίων προκύπτουν από ένα τετραβάθμιο πολυώνυμο. Οι συντελεστές του πολυωνύμου προκύπτουν από τα σημεία και τις κλίσεις εισόδου και σημείου πρόσπτωσης του περιοδικού ορίου. Υπολογίζεται η κλίση του πολυωνύμου του περιοδικού ορίου του κελύφους ποδός στο σημείο πρόσπτωσης σύμφωνα με την κλίση την ευθείας που ενώνει το σημείο πρόσπτωσης και το σημείο που προκύπτει από τον μέσο όρο των κόμβων οι οποίοι βρίσκονται σε απόσταση 10% από το σημείο πρόσπτωσης. Υπολογίζεται η κλίση και οι συντεταγμένες του κόμβου του πολυωνύμου στην είσοδο. Αντίστοιχη διαδικασία πραγματοποιείται σε όλα τα περιοδικά όρια.
- Από τον πλέον γνωστό πρώτο και τελευταίο κόμβο της εισόδου δημιουργούνται οι εσωτερικοί κόμβοι της εισόδου χρησιμοποιώντας γεωμετρική πρόοδο και τηρώντας παράλληλα την ακτινική απόσταση.
- Πραγματοποιείται αρχικοποίηση των συντεταγμένων των εσωτερικών κόμβων της επιφάνειας.
- Από το πλέγμα που προέκυψε απομονώνεται ένα κομμάτι (μεταξύ κάποιων κόμβων πριν το σημείο πρόσπτωσης και κάποιων κόμβων μετά το σημείο εκφυγής, σχήμα 5.1), και σε αυτό δημιουργείται πλέγμα με την επίλυση ελλειπτικών εξισώσεων με όρους πηγής. Οι ελλειπτικές εξισώσεις καθώς και ο τρόπος υπολογισμού των όρων πηγής περιγράφεται παρακάτω.





Σχήμα 5.1: Επιφάνεια ενδιάμεση στις επιφάνειες κελύφους ποδός και κεφαλής στις οποίες λύνονται ελλειπτικές εξισώσεις με όρους πηγής. -Πάνω: όλοι οι κόμβοι ενδιάμεσης επιφάνειας. -Κάτω: απομονωμένοι κόμβοι επιφάνειας.

Κάθε δομημένο πλέγμα παραμετροποιείται με ένα σύστημα καμπυλόγραμμων συντεταγμένων  $\xi^i$ , ( $i = 1, 2$ ) δηλαδή  $(\xi, \eta)$  και ισχύουν οι εξισώσεις:

$$g^{ij} \frac{\partial^2 x_r}{\partial x^i \partial x^j} - g^{ij} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial x_r}{\partial x^k} = 2\mu N_r \quad (5.1)$$

Όπου  $g^1 = \nabla \xi$ ,  $g^2 = \nabla \eta$  είναι τα ανταλλοίωτα γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα (contravariant). Το  $\mu$  είναι η μέση καμπυλότητα και το  $N_r$  το κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια. Οι δύο αυτές ποσότητες υπολογίζονται με σκοπό οι συντεταγμένες των κόμβων που θα προκύψουν μετά από την επίλυση των εξισώσεων να βρίσκονται πάνω στην επιφάνεια. Οι εξισώσεις 5.1 είναι τρεις μερικές διαφορικές εξισώσεις διατυπωμένες ως προς  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $x_3 = z$ . Τα σύμβολα Christoffel ορίζονται μέσω των παραγώγων του μετρικού τανυστή ως

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{lk} \left( \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right) \quad (5.2)$$

Με  $-g^{ij} \Gamma_{ij}^k = f^k$  με  $f^k$  οι όροι πηγής, η εξίσωση 5.2 γράφεται

$$g^{ij} \frac{\partial^2 x_k}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial x_k}{\partial x^j} f^j = 2\mu N_k \quad (5.3)$$

και για λόγους πληρότητας γράφονται αναλυτικά οι εξισώσεις

$$g^{11} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + 2g^{12} \frac{\partial x^2}{\partial \xi \partial \eta} + g^{22} \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} + f_1 \frac{\partial x}{\partial \xi} + f_2 \frac{\partial x}{\partial \eta} = 2\mu N_x \quad (5.4)$$

$$g^{11} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + 2g^{12} \frac{\partial y^2}{\partial \xi \partial \eta} + g^{22} \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} + f_1 \frac{\partial y}{\partial \xi} + f_2 \frac{\partial y}{\partial \eta} = 2\mu N_y \quad (5.5)$$

$$g^{11} \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + 2g^{12} \frac{\partial z^2}{\partial \xi \partial \eta} + g^{22} \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} + f_1 \frac{\partial z}{\partial \xi} + f_2 \frac{\partial z}{\partial \eta} = 2\mu N_z \quad (5.6)$$

Στα όρια του πλέγματος στα οποία θα λυθούν ελλειπτικές εξισώσεις με όρους πηγής επιβάλλεται γνωστή πρώτη απόσταση πλεγματοικών γραμμών και καθετότητα. Αυτό συμβαίνει γιατί λ.χ. στην πλεγματοική γραμμή με  $\eta = 1$  δεν μπορούν να υπολογιστούν οι παράγωγοι  $x_\xi$ ,  $y_\xi$  και  $z_\xi$ . Σύμφωνα με αυτή τη μέθοδο, οι παράγωγοι  $x_\xi$ ,  $y_\xi$  και  $z_\xi$  υπολογίζονται επιβάλλοντας στο όριο ορθογωνικό πλέγμα και επιθυμητή (γνωστή) απόσταση πρώτου κόμβου. Αναλυτικότερα, από τις παραγώγους  $x_\eta$ ,  $y_\eta$  και  $z_\eta$  και του κάθετου διανύσματος (normal) υπολογίζεται με εξωτερικό γινόμενο τα  $x_\eta$ ,  $y_\eta$  και  $z_\eta$  και πολλαπλασιάζονται με την απόσταση  $ds$ . Η απόσταση  $ds$  επιβάλλεται να είναι ένα ποσοστό του μέσου όρου της απόστασης της πρώτης πλεγματοικής γραμμής στα όρια.

Στις 3 εξισώσεις 5.5 υπάρχουν 2 άγνωστοι ( $f_1, f_2$ ) και επιλέγεται να λυθούν οι δύο από τις τρεις εξισώσεις.

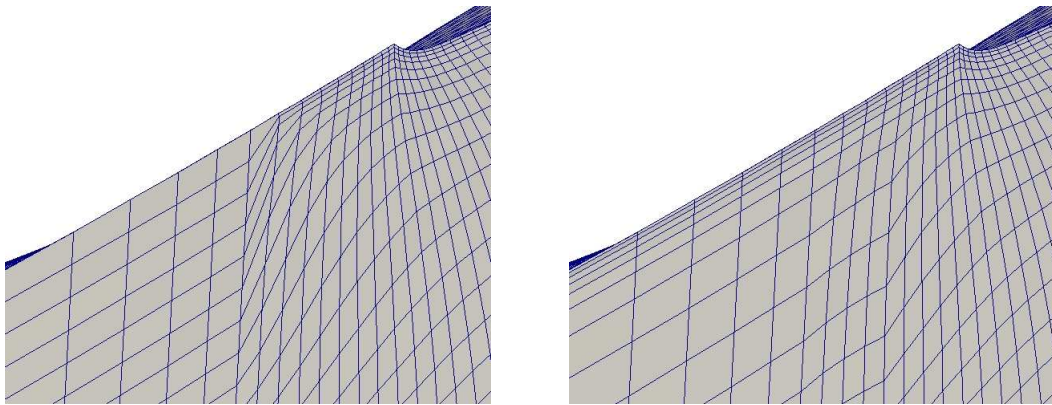
Από τα όρια διαμοιράζονται τα  $f_1$  και  $f_2$  στους εσωτερικούς κόμβους με την

παρακάτω κατανομή

$$f^1(\xi, \eta) = f^1(\xi, 1)\exp(-a\eta) + f^1(\xi, \eta_{max})\exp(-a(\eta_{max} - \eta)) \quad (5.7)$$

$$f^2(\xi, \eta) = f^2(\xi, 1)\exp(-a\eta) + f^2(\xi, \eta_{max})\exp(-a(\eta_{max} - \eta)) \quad (5.8)$$

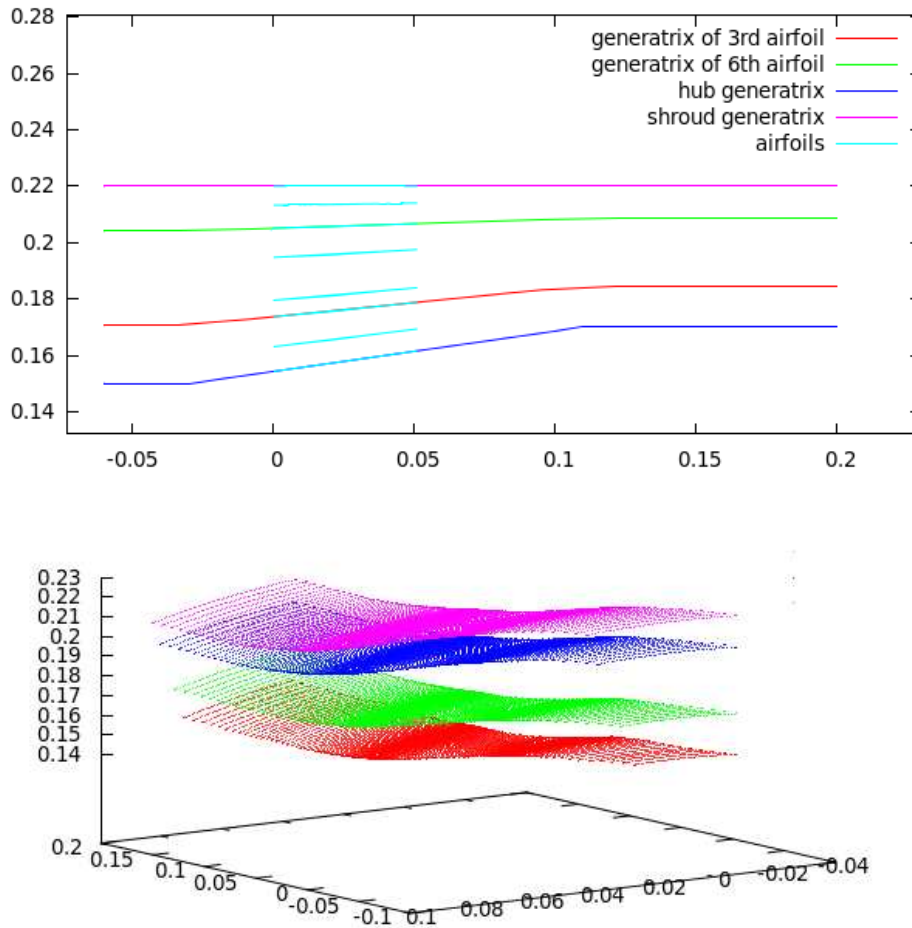
Σε αυτό το τμήμα του επιφανειακού πλέγματος, επιλέγεται μια πλεγματική γραμμή που προέκυψε από την επίλυση ελλειπτικών εξισώσεων και υπολογίζεται η πύκνωση των κόμβων(σχήμα 5.2). Με βάση αυτή την πύκνωση μεταφέρεται πληροφορία και στα τμήματα τα οποία δεν απομονώθηκαν. Αντίστοιχη διαδικασία χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των συντεταγμένων των κόμβων της επιφάνειας του κελύφους κεφαλής.



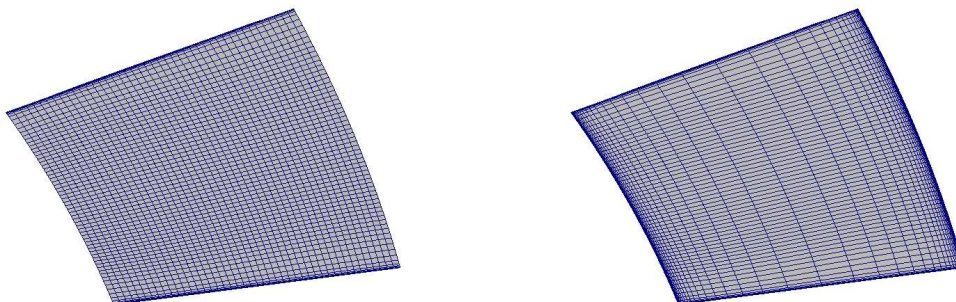
Σχήμα 5.2: Αριστερά: Πλέγμα χωρίς μεταφορά πληροφορίας καθετότητας και πύκνωσης κοντά στα όρια από το σημείο πρόσπτωσης προς την είσοδο. Δεξιά: Πλέγμα με μεταφορά πληροφορίας από το σημείο πρόσπτωσης προς την είσοδο.

Σε περίπτωση που ο χρήστης επιθυμεί να δημιουργήσει και άλλες ενδιάμεσες επιφάνειες, υπολογίζονται ενδιάμεσες γενέτιρες εκ περιστροφής επιφανειών, πάνω στις οποίες βρίσκονται οι ενδιάμεσες αεροτομές που τροφοδοτήθηκε ο γενέτης πλέγματος. Συγκεκριμένα, υπολογίζεται το ποσοστό της απόστασης του σημείου πρόσπτωσης της ενδιάμεσης αεροτομής με το σημείο πρόσπτωσης της αεροτομής στο κέλυφος ποδός, σε σχέση με την απόσταση των σημείων πρόσπτωσης του σημείου πρόσπτωσης του κελύφους ποδός και κεφαλής. Με βάση αυτό το ποσοστό υπολογίζεται η ενδιάμεση γενέτιρα σε όλα τα σημεία από την είσοδο μέχρι το σημείο πρόσπτωσης. Αντίστοιχη διαδικασία πραγματοποιείται και στο κομμάτι από το σημείο εκφυγής μέχρι την έξοδο. Από την ενδιάμεση γενέτιρα καθώς και από την ενδιάμεση αεροτομή, υπολογίζονται οι ενδιάμεσες επιφάνειες του πλέγματος με την μέθοδο επίλυσης ελλειπτικών εξισώσεων που προαναφέρθηκε (σχήμα 5.3).

Από τις επιφάνειες που έχουν δημιουργηθεί, καθώς και από τις αεροτομές του πτερυγίου που υπάρχουν στα δεδομένα, υπολογίζονται οι συντεταγμένες των κόμβων στην ακτινική διεύθυνση. Τέλος, πυκνώνονται οι κόμβοι κατά την ακτινική διεύθυνση, με σκοπό να μικρύνει απόσταση των πρώτων κόμβων από το κέλυφος ποδός και κεφαλής (σχήμα 5.4).

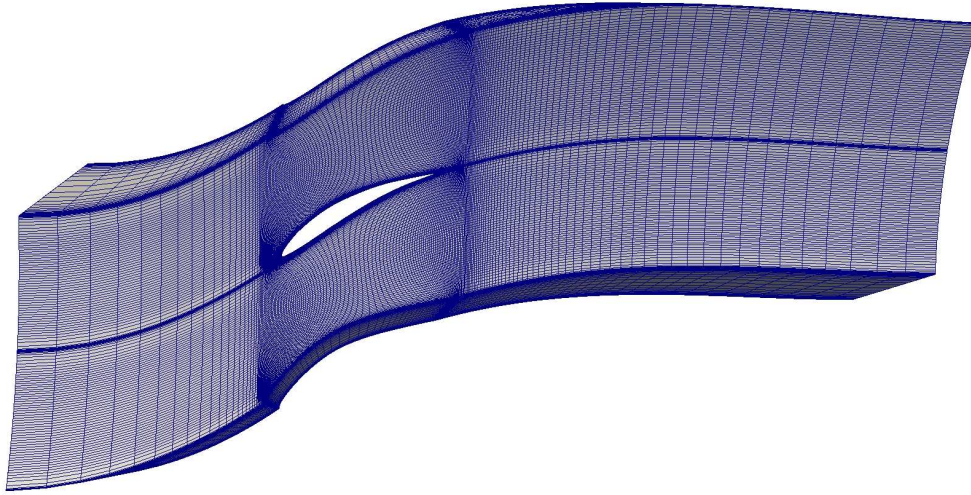


Σχήμα 5.3: Πάνω: Δημιουργία ενδιάμεσων γενέτριων εκ περιστροφής επιφανειών. Κάτω: Προκύπτουσες επιφάνειες με τη μέθοδο επίλυσης ελλειπτικών εξισώσεων με όρους πηγής.

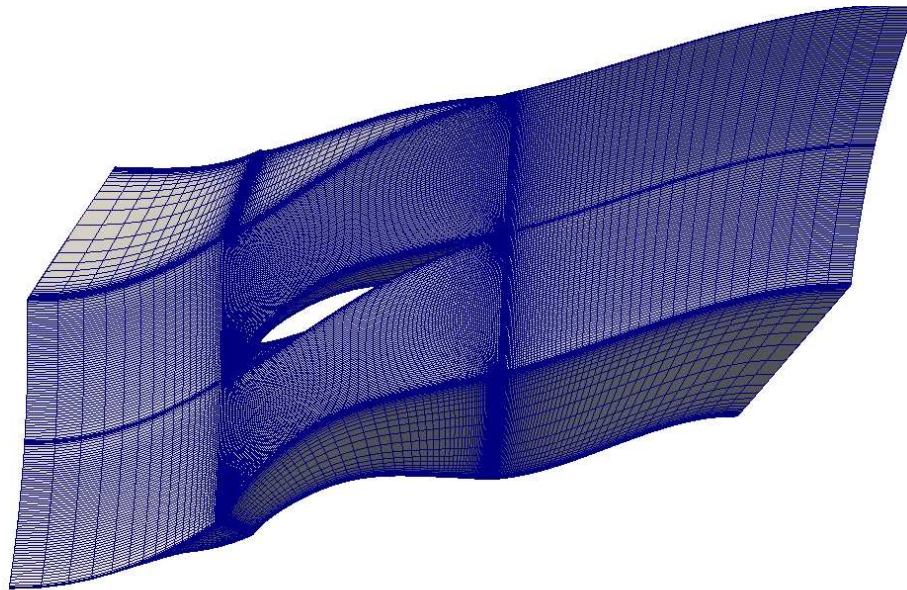


Σχήμα 5.4: Αριστερά: Πλέγμα χωρίς πύκνωση στην ακτινική διεύθυνση. Δεξιά: Πλέγμα με πύκνωση στην ακτινική διεύθυνση.

Στα σχήματα 5.5 και 5.6 παρουσιάζονται κάποια παραδείγματα γένεσης πλέγματος πτερυγίων στροβιλομηχανών με τον πλεγματοποιητή 3DTurboGen.



Σχήμα 5.5: Παράδειγμα γένεσης πλέγματος για πτερύγιο συμπίεστή



Σχήμα 5.6: Παράδειγμα γένεσης πλέγματος για πτερύγιο συμπίεστή με συστροφή (scewness)

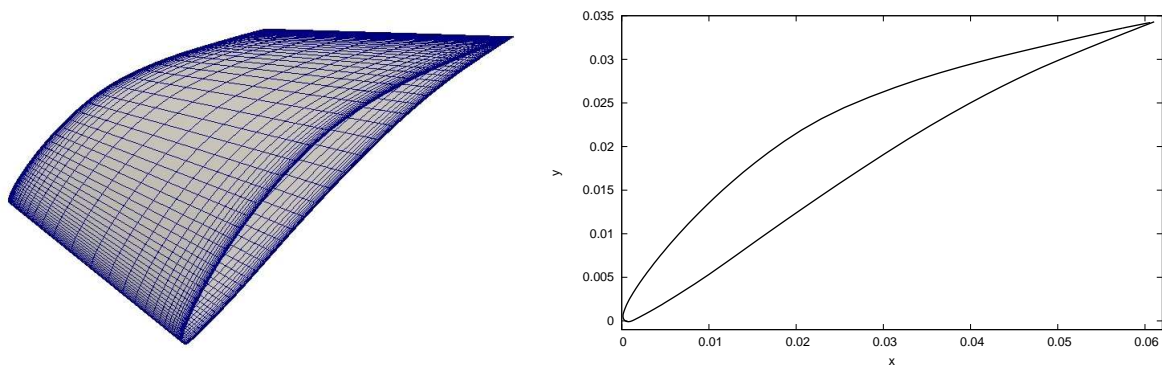


## Κεφάλαιο 6

### Εφαρμογή 3D Πτερυγίου Συμπιεστή

Η συνεχής συζυγής μέθοδος εφαρμόστηκε για τη βελτιστοποίηση μορφής 3D πτερυγίου στάτορα συμπιεστή. Η συνάρτηση-στόχος  $F$  είναι η μείωση ολικών απωλειών πίεσης  $\Delta p_{tin-out}$ , με τον περιορισμό του ελάχιστου επιτρεπτού πάχους του πτερυγίου. Οι εξισώσεις ροής που χρησιμοποιήθηκαν είναι οι Reynolds Averaged Navier-Stokes για ασυμπίεστη ροή, με μοντέλο τύρβης  $k-\omega$  SST. Για την επίλυση του ευθέος και του συζυγούς προβλήματος χρησιμοποιήθηκε το OpenFOAM.

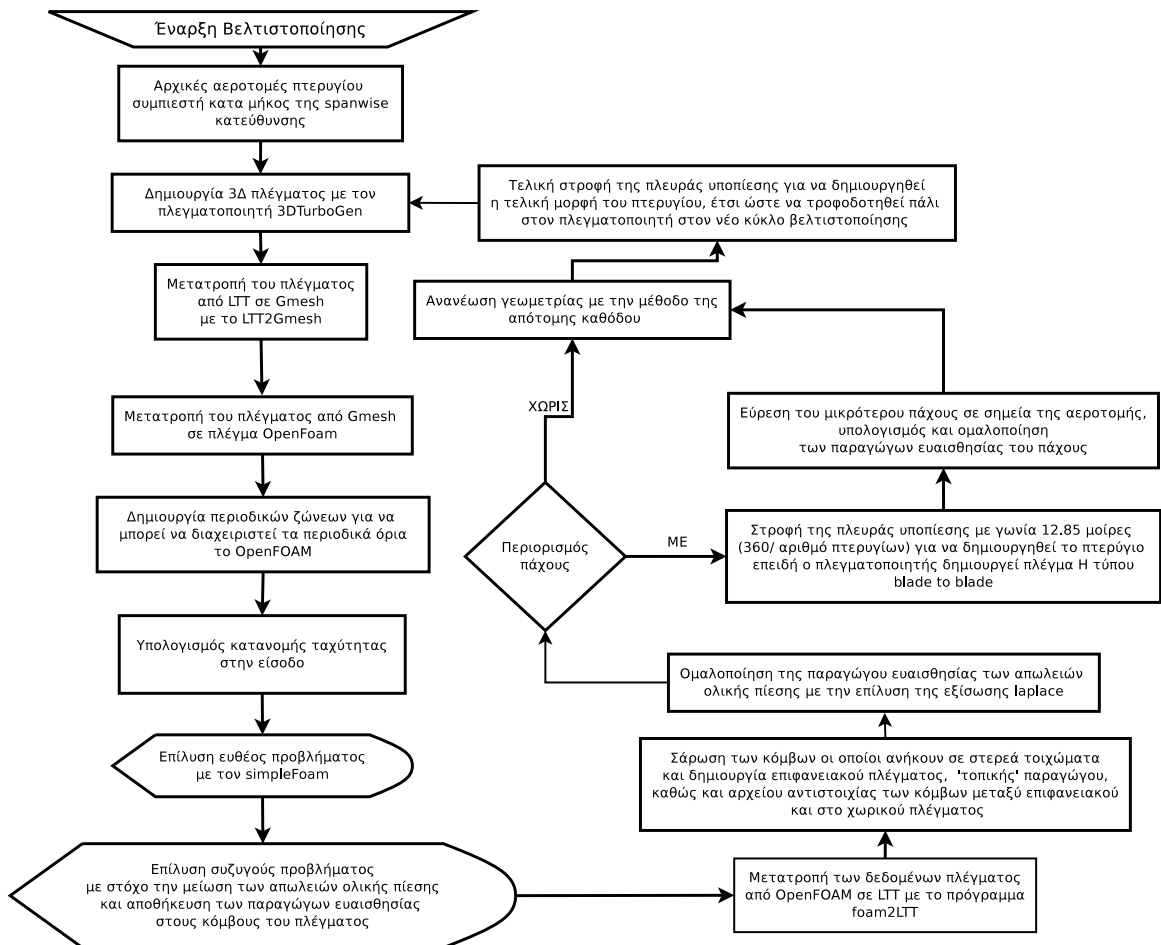
Για το υπολογιστικό πλέγμα χρησιμοποιήθηκε ο κώδικας 3Dturbogen του ΜΠΥΡΔ&Β/ΕΜΠ (βλ. κεφάλαιο 5). Το πλέγμα είναι κατάλληλο έτσι ώστε να επιτρέπεται η χρήση ενός μοντέλου τύρβης χαμηλών αριθμών Reynolds με μέσο  $y_+ = 0.4$ . Τα πλέγματα που δημιουργούνται στον πλεγματοποιητή, προκύπτουν από την επίλυση ελλειπτικών εξισώσεων με όρους πηγής σε επιφάνειες και στην συνέχεια οι επιφάνειες ενώνονται με γραμμική παρεμβολή στην ακτινική διεύθυνση σχηματίζοντας το 3D πλέγμα. Ακόμη, δημιουργήθηκε πρόγραμμα διαχείρισης δεδομένων και επικοινωνίας προγραμμάτων. Το αρχικό πτερύγιο έχει γωνία σφήνωσης  $30^\circ$  και ο αριθμός Reynolds βασισμένος στην χορδή είναι  $Re_c = 95.000$ . Η αρχική μορφή του πτερυγίου φαίνεται στο σχήμα 6.1.



Σχήμα 6.1: Αριστερά: αρχικό επιφανειακό πλέγμα πτερυγίου συμπιεστή, Δεξιά: ενδιάμεση αεροτομή πτερυγίου.

## 6.1 Αλγόριθμος Βελτιστοποίησης

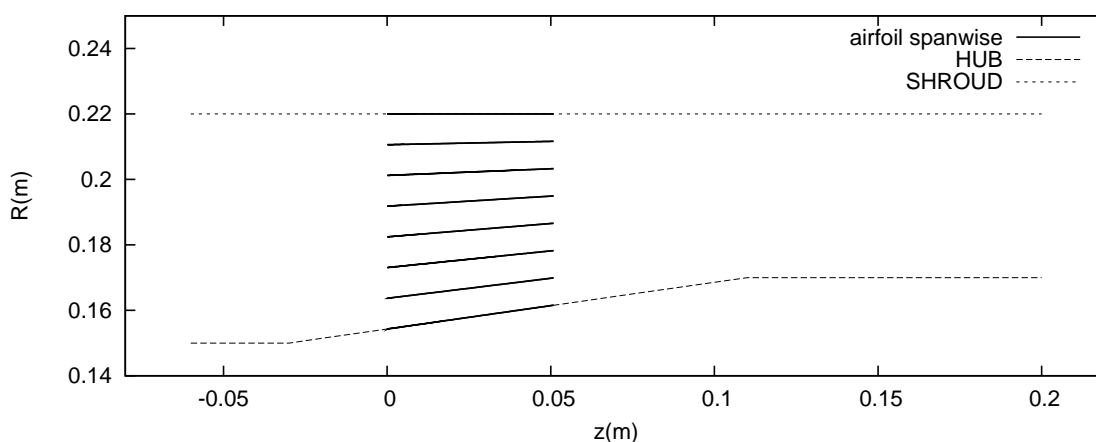
Όλη η διαδικασία βελτιστοποίησης στην εφαρμογή του 3Δ πτερυγίου στάτορα συμπίεστη μοιάζει με την αντίστοιχη διαδικασία στην εφαρμογή του 2Δ πτερυγίου στροβίλου (σχήμα 4.1). Η κυριότερη διαφορά έγκειται στο γεγονός ότι η τροφοδοσία των δεδομένων στον πλεγματοποιητή καθώς και οριακή συνθήκη ταχύτητας στην είσοδο. Όλη η διαδικασία βελτιστοποίησης φαίνεται στο σχήμα 6.2.



Σχήμα 6.2: Αλγόριθμος βελτιστοποίησης πτερύγωσης 3Δ στάτορα συμπίεστη.



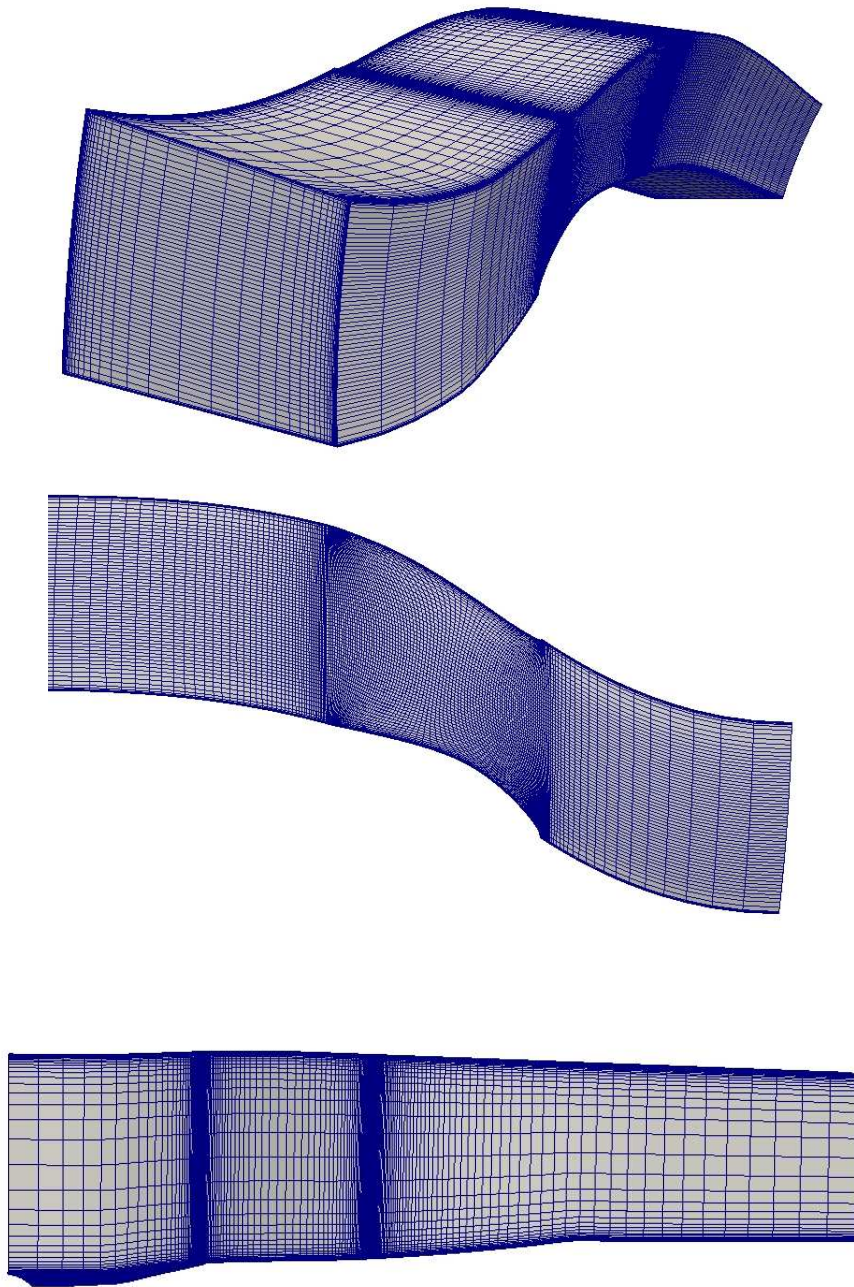
Η δημιουργία υπολογιστικού πλέγματος πραγματοποιήθηκε με το 3DTurboGen (κεφάλαιο 5). Οι γενέτειρες των εκ περιστροφής επιφανειών του κελύφους ποδός (hub) και του κελύφους κεφαλής (shroud) φαίνονται στο σχήμα 6.3 και δεν αλλάζουν κατά τη διάρκεια βελτιστοποίησης. Το κέλυφος κεφαλής είναι κύλινδρος, αφού η γενέτειρά του έχει σταθερή ακτίνα και το κέλυφος ποδός είναι κώνος, με τη γενέτειρά του να είναι ευθεία στο σύστημα  $R(z)$ . Ακόμα δίνονται τομές του πτερυγίου, κατά μήκος της ακτινικής (spanwise) διεύθυνσης, έτσι ώστε να μπορεί να τροφοδοτηθεί σωστά η μορφή του πτερυγίου στον πλεγματοποιητή 3DTurboGen.



Σχήμα 6.3: Στο παραπάνω διάγραμμα απεικονίζονται οι γενέτειρες εκ περιστροφής επιφανειών του κελύφους ποδός, του κελύφους κεφαλής, καθώς και οι τομές της πτερυγώσης στην ακτινική διεύθυνση.

Στη συγκεκριμένη εφαρμογή, σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης ο πλεγματοποιητής τροφοδοτήθηκε με 8 τομές του πτερυγίου στην ακτινική διεύθυνση. Ο συμπιεστής έχει 28 πτερύγια και τα περιοδικά όρια στο υπολογιστικό πλέγμα σχηματίζουν γωνία  $12.88^\circ$ . Ο πλεγματοποιητής δημιουργεί πλέγμα H τύπου από πτερύγιο σε πτερύγιο και επιβάλλεται πύκνωση κοντά στα στερεά όρια. Αναλυτικότερα, στην περιοχή μεταξύ του  $10^{ov}$  κόμβου πριν το σημείο πρόσπτωσης και του  $10^{ov}$  κόμβου μετά από το σημείο εκφυγής δημιουργήθηκε πλέγμα με την επίλυση ελλειπτικών εξισώσεων. Το 3D πλέγμα φαίνεται στο σχήμα 6.4, αποτελείται από 459.008 εξάεδρα και αποθηκεύεται σε δύο αρχεία μορφής LTT με κατάληξη .nod .hyb.

Το πλέγμα μορφής LTT μετατρέπεται σε μορφή Gmesh με το οικείο πρόγραμμα Ltt2Gmsh. Για τις ανάγκες της 3D εφαρμογής προστέθηκε και  $\log fr = 7$ , για τον λόγο ότι στην 3D εφαρμογή τα περιοδικά όρια πρέπει να ανήκουν σε διαφορετικά patch, έτσι ώστε να τις διαχειριστεί κατάλληλα το OpenFOAM. Ακόμη επισημαίνεται ότι τα  $\log fr$  σε αυτή την εφαρμογή δεν τηρούν απόλυτα την μορφή LTT, αλλά δηλώνονται με σκοπό να ομαδοποιηθούν κατάλληλα τα όρια του πλέγματος.



Σχήμα 6.4: Υπολογιστικό πλέγμα πτερυγίου σάτορα συμπιεστή.  
-Πάνω: γενική εικόνα υπολογιστικού χωρίου.  
-Μέση: υπολογιστικό πλέγμα στο κέλυφος κεφαλής.  
-Κάτω: απεικονίζεται το επίπεδο αξονικής και ακτινικής διεύθυνσης.

Οι παρακάτω σειρές προστίθενται στο τέλος του αρχείου .msh για να δηλωθούν τα διάφορα logfr με το κάποιο όνομα.

```
$PhysicalNames
6
2 "HubAndShroud"
3 "airfoil"
6 "ggicyclic1"
7 "ggicyclic2"
4 "inlet"
5 "outlet"
$EndPhysicalNames
```

Στη συνέχεια, τα δεδομένα πλέγματος μορφής Gmesh μετατρέπονται σε δεδομένα πλέγματος OpenFOAM, με το πρόγραμμα gmshToFoam. Σειρά έχει η αντιστοιχία των περιοδικών επιφανειών για να τις διαχειριστεί το OpenFOAM. Σε πρώτη φάση, τα περιοδικά όρια ggicyclic1 και ggicyclic2, στο αρχείο boundary, δηλώνονται με τύπο ggicyclic (type ggicyclic) και ακόμη δηλώνεται η γωνία μεταξύ των δύο περιοδικών επιφανειών. Σε δεύτερη φάση, από τα patch ggicyclic1 και ggicyclic2, δημιουργούνται οι ζώνες (zones) αυτών των patch με τις εντολές:

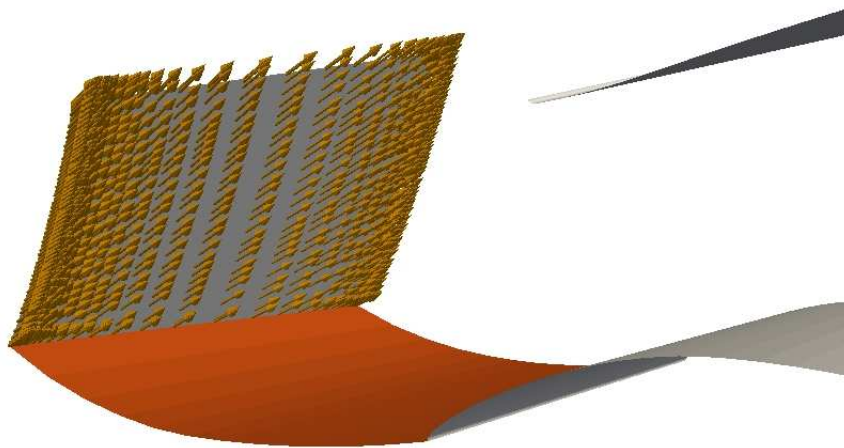
```
faceSet ggicyclic1zone new patchToFace ggicyclic1
faceSet ggicyclic2zone new patchToFace ggicyclic2
```

Οι οριακές συνθήκες στο OpenFOAM δηλώνονται σε καρτεσιανές συντεταγμένες. Επειδή το OpenFOAM δεν έχει την δυνατότητα να διαχειριστεί δεδομένα ταχυτήτων σε κυλινδρικές συντεταγμένες  $(v_r, v_\theta, v_z)$ , υπολογίστηκαν με πρόγραμμα εξωτερικά από το OpenFOAM, οι αντίστοιχες ταχύτητες στην είσοδο, σε καρτεσιανές συντεταγμένες. Συγκεκριμένα η ροή εισέρχεται με  $(v_r, v_\theta, v_z) = (0, 20, 20)$  m/s. Η διαδικασία αυτή περιλαμβάνει τα παρακάτω βήματα:

1. Από το αρχείο boundary διαβάζεται ο αριθμός εκκίνησης και ο συνολικός αριθμός επιφανειών εισόδου.
2. Με τη βοήθεια των παραπάνω δύο αριθμών απομονώνονται οι επιφάνειες εισόδου από το αρχείο faces.
3. Με βάση το παραπάνω αρχείο faces αντιστοιχίζονται οι κόμβοι και οι συντεταγμένες τους, στις οριακές επιφάνειες εισόδου.
4. Σύμφωνα με αυτές τις συντεταγμένες, υπολογίζονται οι συντεταγμένες των κέντρων των επιφανειών εισόδου

$$x_{face} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n}, y_{face} = \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{n}, z_{face} = \sum_{i=1}^n \frac{z_i}{n}$$

5. Υπολογίζεται η γωνία  $\phi = \angle(y_{face}, x_{face})$
6. Τέλος υπολογίζονται οι ταχύτητες στις επιφάνειες εισόδου σε καρτεσιανές συντεταγμένες
- $$u_x = -v_\theta \cdot \cos(\theta)$$
- $$u_y = v_\theta \cdot \cos(\theta)$$
- Η z συνιστώσα ταχύτητας είναι ίδια σε κυλινδρικό και καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.
- Οι ταχύτητες αυτές τοποθετούνται στο φάκελο /0 και απεικονίζονται στο σχήμα 6.5



Σχήμα 6.5: Διανύσματα ταχυτήτων στην είσοδο

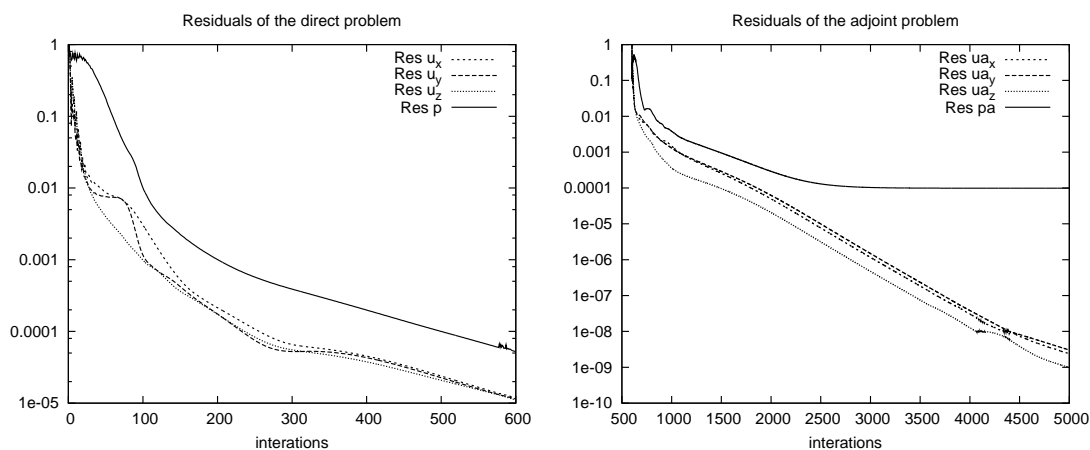
Ακολουθεί η επίλυση του ευθέως προβλήματος (Direct) με μοντέλο τύρβης (k- $\omega$  SST). Οι οριακές συνθήκες που επιβλήθηκαν είναι οι παρακάτω:

Patches	U	p	k	$\omega$	nut
<b>Inlet</b>	$u_{in}$	zerogradient	3,375	22500	0.00015
<b>Outlet</b>	zerogradient	0	zerogradient	zerogradient	zerogradient
<b>ggicyclic1</b>	cyclicggi	cyclicggi	cyclicggi	cyclicggi	cyclicggi
<b>ggicyclic2</b>	cyclicggi	cyclicggi	cyclicggi	cyclicggi	cyclicggi
<b>airfoil</b>	(0 0 0)	zerogradient	1E-8	1E-8	0
<b>HubAndShroud</b>	(0 0 0)	zerogradient	1E-8	1E-8	0

Η ταχύτητα στην είσοδο είναι αποθηκευμένη στο αρχείο  $u_{in}$  και ο αριθμός των σειρών ισούται με τον αριθμό των επιφανειών της εισόδου. Ο αριθμός Reynolds ως προς τη χορδή ισούται με  $Re_c = 95.000$ . Το πλέγμα είναι κατάλληλο έτσι ώστε να επιτρέπεται η χρήση ενός μοντέλου τύρβης χαμηλών αριθμών Reynolds με μέσο  $y_+ = 0.4$ . Το ρευστό θεωρείται αέρας με συνεκτικότητα  $\nu = 1.5 \cdot 10^{-5} \frac{m^2}{s}$ .

Λύνεται το συζυγές πρόβλημα και εκτυπώνεται σε αρχείο η παράγωγος του συναρτησιακού των απωλειών ολικής πίεσης. Το πρόγραμμα foam2LTT μετατρέπει τη δομή δεδομένων πλέγματος από OpenFOAM σε LTT και αποθηκεύει το μετασχηματισμένο πλέγμα σε δύο αρχεία case.nod και case.hyb.

Οι εξισώσεις του ευθέος και του συζυγούς προβλήματος σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης συγκλίνουν και ενδεικτικά φαίνονται παρακάτω η νόρμα-2 των υπολοίπων των εξισώσεων.



Σχήμα 6.6: Νόρμα-2 των υπολοίπων των εξισώσεων ευθέος και συζυγούς προβλήματος. -Αριστερά: ευθύ πρόβλημα. -Δεξιά: συζυγές πρόβλημα

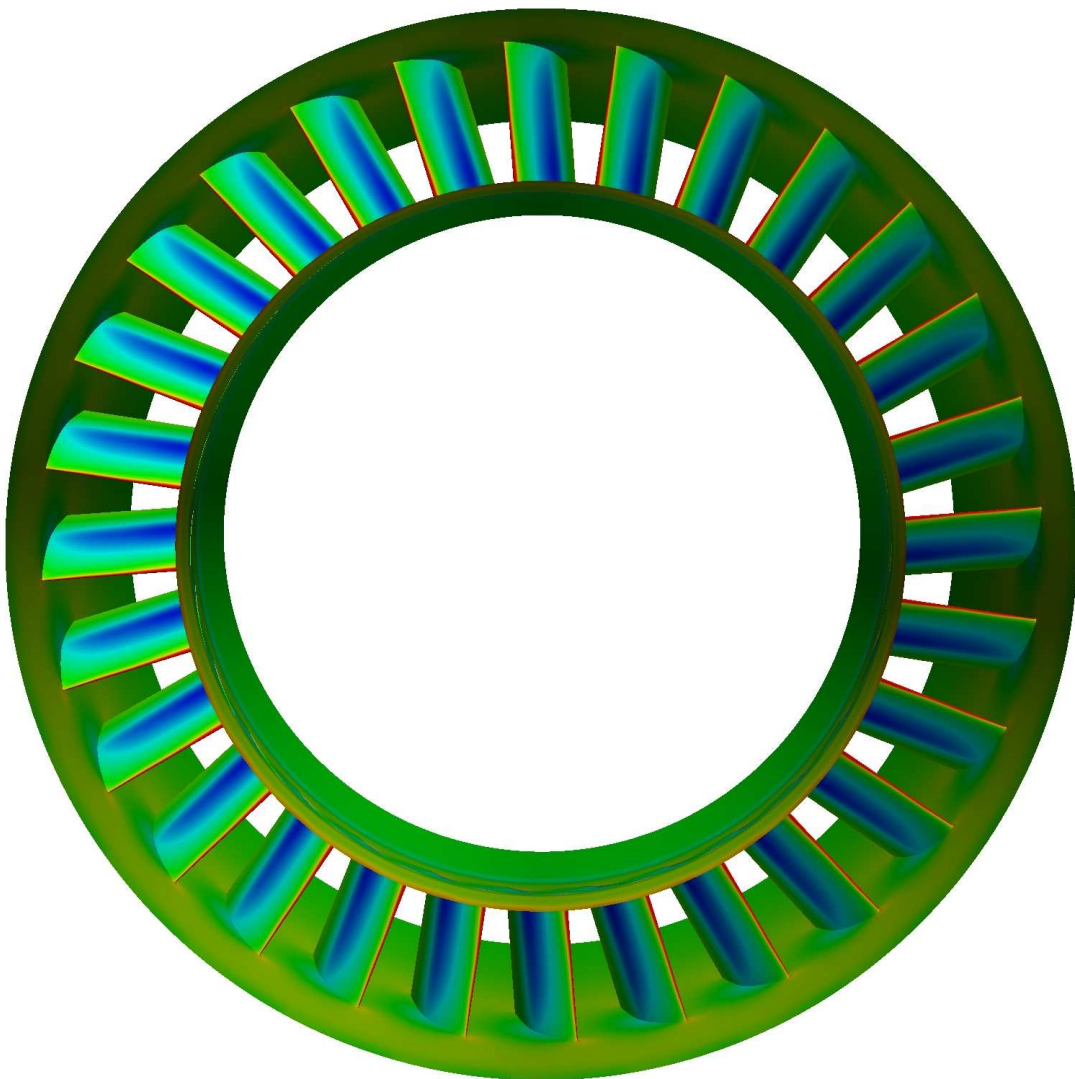
Στη συνέχεια, αφού σαρωθούν οι κόμβοι από ολόκληρο το υπολογιστικό χωρίο, αποθηκεύονται οι κόμβοι οι οποίοι έχουν  $\log fr = 3,13$  κτλ.. Με βάση αυτούς τους κόμβους, δημιουργείται το επιφανειακό πλέγμα της αεροτομής, καθώς και ένα αρχείο στο οποίο αποθηκεύεται η αντιστοιχία των κόμβων του επιφανειακού και του χωρικού πλέγματος. Το επιφανειακό πλέγμα αποτελείται από 45 αεροτομές στην ακτινική διεύθυνση, και η καθεμία αποτελείται από 141 σημεία. Γνωρίζοντας πλέον την αντιστοιχία των κόμβων, δημιουργείται η τοπική παράγωγος στους κόμβους της αεροτομής. Μιας και η παράγωγος ευαισθησίας έχει αρκετές υπερακοντίσεις, για την αποφυγή δημιουργίας αφύσικων περυγίων, ομαλοποιείται η παράγωγος ευαισθησίας με την επίλυση της εξίσωσης Laplace (εξίσωση 4.1) κατά μήκος καθεμιάς εκ των 45 αεροτομών.

Εξ αιτίας διαφόρων προβλημάτων που προκύπτουν στη βελτιστοποίηση περυγώσεων στροβιλομηχανών με στόχο μόνο την μείωση απωλειών ολικής πίεσης, τα οποία έχουν αναφερθεί σε προηγούμενα κεφάλαια, υπολογίζεται η παράγωγος ευαισθησίας του περιορισμού του πάχους. Σε κάθε μία αεροτομή, σε κάποιους κόμβους τους οποίους τους επιλέγει ο χρήστης, υπολογίζεται η μικρότερη απόσταση με τους κόμβους της απέναντι πλευράς. Σύμφωνα με αυτή, υπολογίζεται το συναρτησιακό του πάχους και για να διαμοιραστεί η παράγωγος αυτή σε όλους τους κόμβους, επιλύεται μια εξίσωση Laplace (4.1) με μεγάλο συντελεστή ομαλοποίησης  $\epsilon$ .

Τέλος, σειρά έχει η απότομη κάθοδος στην οποία γίνεται ανανέωση της

γεωμετρίας του πλέγματος με βάση τις παραγώγους ευαισθησίας που έχουν υπολογιστεί. Η αλλαγή των κόμβων πραγματοποιείται μόνο ως προς την κάθετη κατεύθυνση ( $\vec{n}$  normal διάνυσμα).

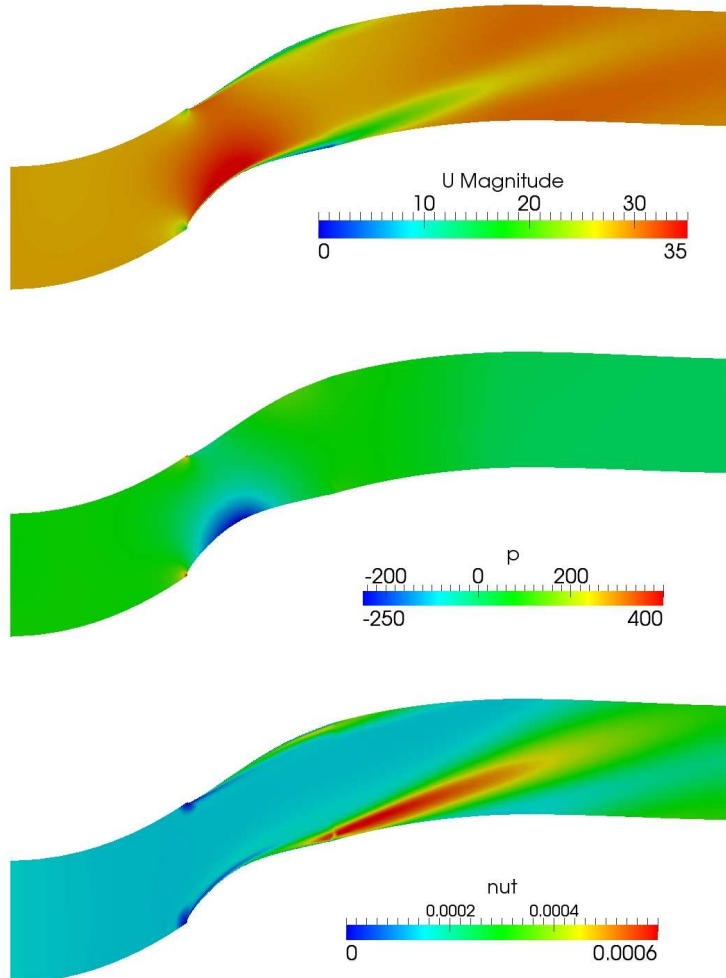
$$\vec{b}_{k+1} = \vec{b}_k - \eta_1 \left[ \frac{\delta f}{\delta b_{\Delta pt}} \vec{n}_{normal} \right] - \eta_2 \left[ \frac{\delta f}{\delta b_{wid}} \vec{n}_{normal} \right] \quad (6.1)$$



Σχήμα 6.7: Στατικές πιέσεις σε σταθερή περύγωση συμπίεστή που περιλαμβάνει 28 περύγια στον πρώτο κύκλο βελτιστοποίησης

### 6.1.1 Αποτελέσματα ευθέος και συζυγούς προβλήματος για το αρχικό πτερύγιο

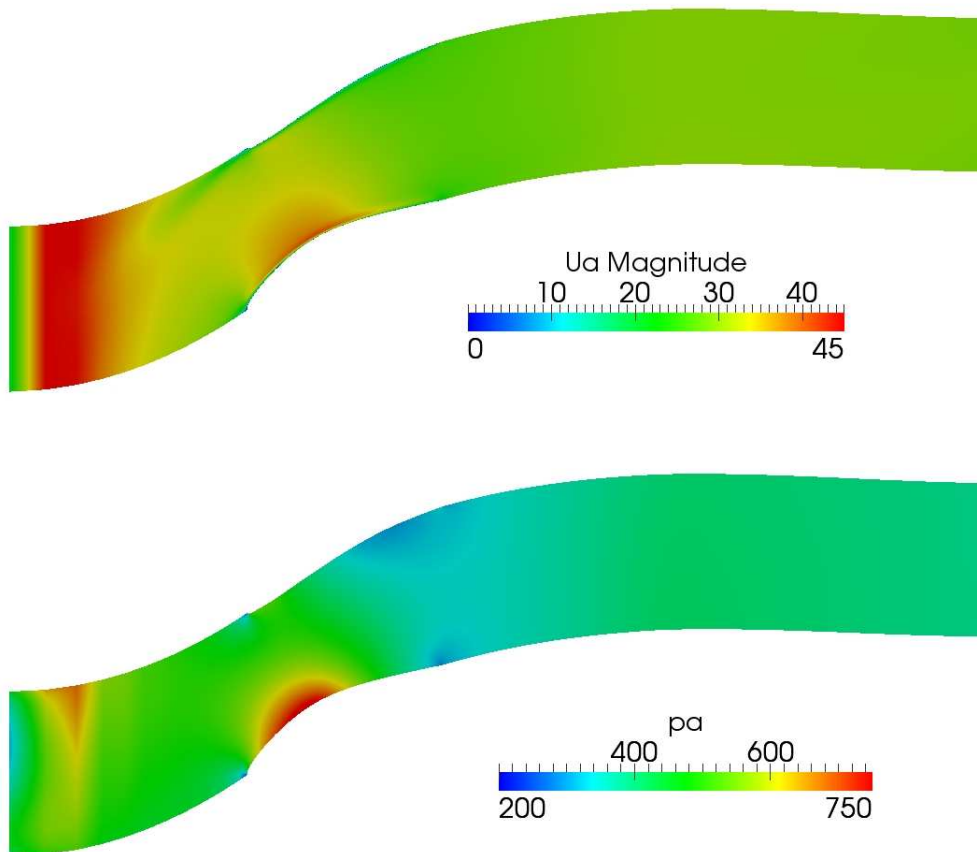
Ακολουθούν εικόνες από τις μεταβλητές ροής του ευθέος και του συζυγούς προβλήματος για το αρχικό πτερύγιο σε μια τομή του υπολογιστικού χωρίου. Στο σχήμα 6.8 απεικονίζεται το μέτρο της ταχύτητας, η στατική πίεση και η τυρβώδης συνεκτικότητα. Στα σχήματα του μέτρου της ταχύτητας και της τυρβώδους συνεκτικότητας παρατηρείται ο ομόρρους που δημιουργείται στο σημείο εκφυγής, ενώ στο σχήμα της στατικής πίεσης παρατηρείται η ζώνη υποπίεσης στην πλευρά υποπίεσης του πτερυγίου.



Σχήμα 6.8: Αποτελέσματα ευθέος προβλήματος του αρχικού πτερυγίου σε μια τομή του υπολογιστικού χωρίου.

-Πάνω: μέτρο ταχύτητας  $|v|$ , -Μέση: στατική πίεση  $p$ , -Κάτω: τυρβώδης συνεκτικότητα  $\nu_t$

Ακολουθούν τα αποτελέσματα του συζυγούς προβλήματος στα σχήματα 6.9 και 6.10 για το αρχικό πτερύγιο. Στο σχήμα 6.9 απεικονίζεται το μέτρο της συζυγούς ταχύτητας και η συζυγής πίεση. Από το σχήμα 6.9 φαίνεται να υπάρχουν μεγάλες τιμές των συζυγών μεταβλητών στο κέντρο περίπου της πλευράς υποπίεσης. Αποτέλεσμα αυτών των μεγάλων τιμών είναι και οι μεγάλες τιμές της παραγώγου ευαισθησίας στην περιοχή αυτή στο σχήμα 6.10.

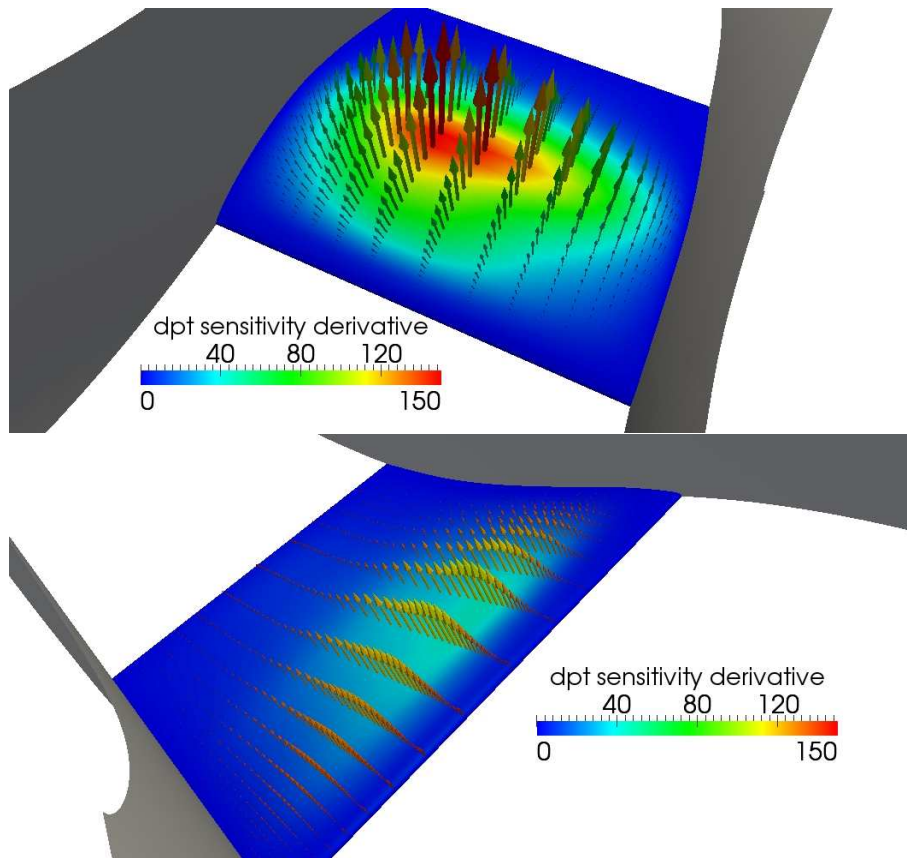


Σχήμα 6.9: Αποτελέσματα συζυγούς προβλήματος του αρχικού πτερυγίου σε μια τομή του υπολογιστικού χωρίου.

-Πάνω: μέτρο συζυγούς ταχύτητας  $|v_a|$ ,

-Κάτω: συζυγής στατική πίεση  $p_a$ .

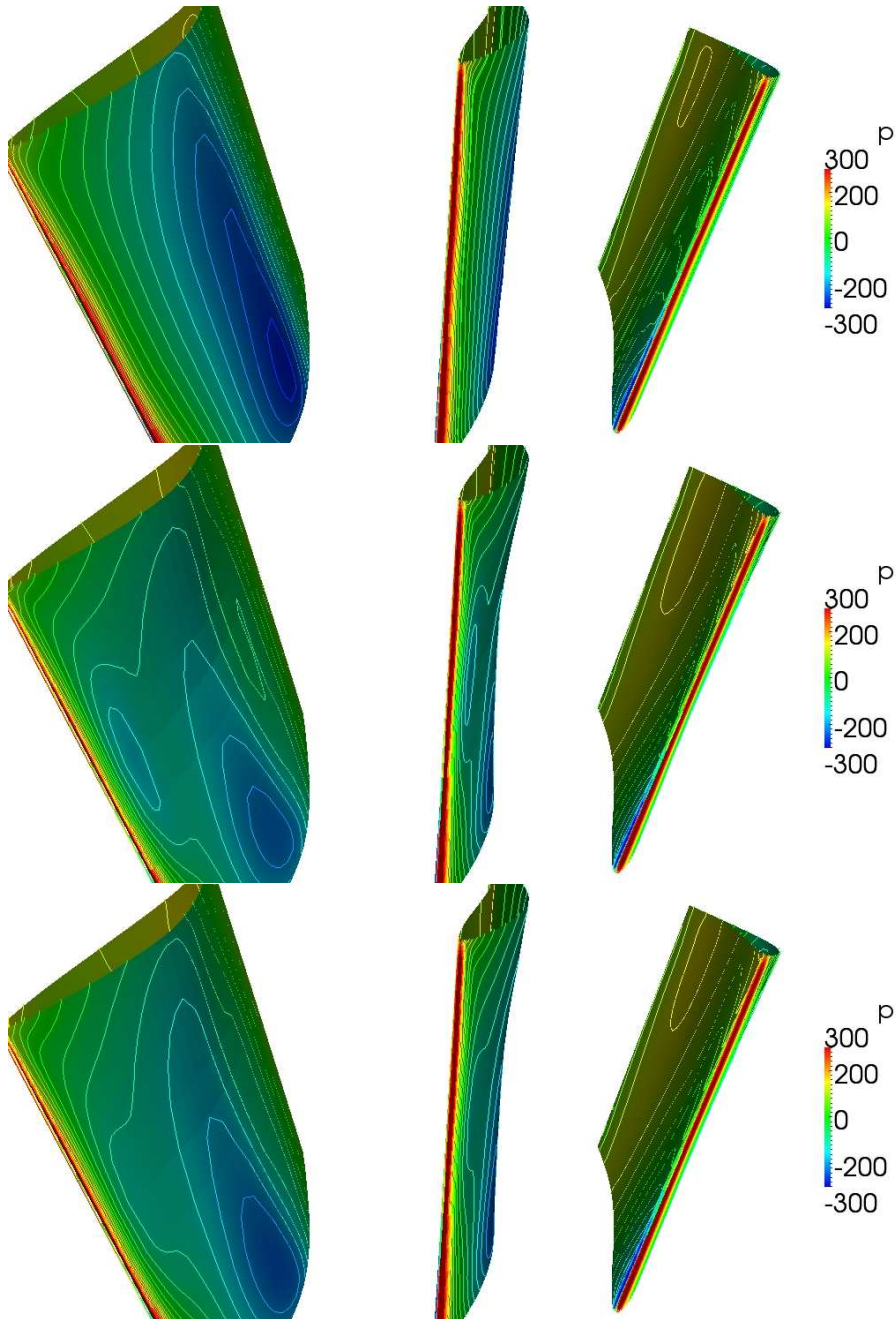




Σχήμα 6.10: Παράγωγος ευαισθησίας μείωσης απωλειών ολικής πίεσης στο αρχικό περυγίο. Πάνω απεικονίζεται η παράγωγος στην πλευρά υποπίεσης και κάτω στην πλευρά υπερπίεσης. Η κατεύθυνση της κίνησης των κόμβων του περυγίου ανά κύκλο βελτιστοποίησης είναι αντίθετη από την κατεύθυνση της παραγωγού καθώς η τελευταία πολλαπλασιάζεται με αρνητικό συντελεστή (-η) σύμφωνα με την εξίσωση ανανέωσης γεωμετρίας της απότομης καθόδου (εξίσωση 6.1).

### 6.1.2 Αποτελέσματα Βελτιστοποίησης

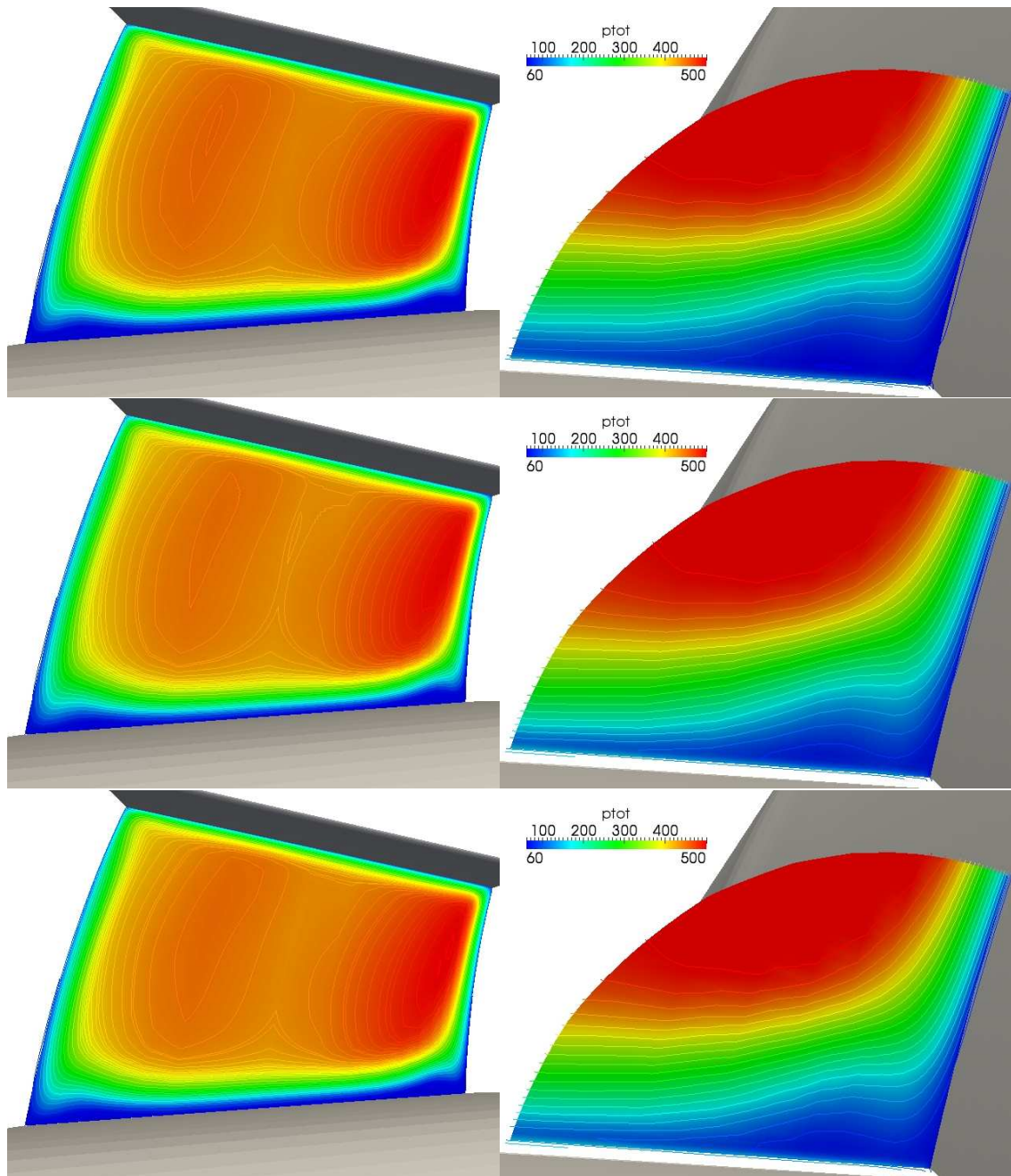
Στο σχήμα 6.11 απεικονίζονται οι μορφές των πτερυγίων που προέκυψαν μετά από 4 κύκλους βελτιστοποίησης, με και χωρίς περιορισμούς πάχους, σε σχέση με την αρχική μορφή του πτερυγίου.



Σχήμα 6.11: -Πάνω: αρχική πτερύγωση, -Μέση: πτερύγωση μετά από βελτιστοποίηση με στόχο την μείωση  $\Delta p_t$ , -Κάτω: πτερύγωση μετά από βελτιστοποίηση με στόχο την μείωση  $\Delta p_t$  με περιορισμούς πάχους.

	$p_t \text{ inlet}$	$p_t \text{ outlet}$	$\Delta p_t$	$\% \Delta p_t$
<b>Αρχική</b>	495.99	402.13	93.86	-
<b><math>\Delta p_t</math></b>	490.34	401.38	88.96	5.22
<b><math>\Delta p_t</math> + πάχος</b>	492.86	401.83	91.03	3.01

Τα αποτελέσματα στον παραπάνω πίνακα δείχνουν ότι η βελτιστοποίηση του περυγίου με τη συνεχή συζυγή μέθοδο μείωσε τις απώλειες ολικής πίεσης. Στο σχήμα 6.9 φαίνεται πόσο θα μειωθεί η συνάρτηση-κόστους, δηλαδή οι απώλειες ολικής πίεσης σε περίπτωση που ο κόμβος κινηθεί προς το κάθετο διάνυσμα της επιφάνειας. Τα αποτελέσματα μετά από 4 κύκλους βελτιστοποίησης δείχνουν ότι οι απώλειες ολικής πίεσης μειώνονται κατά 5.22%, αλλά παράλληλα όπως φαίνονται και στο σχήμα 6.11 μειώνεται αρκετά και το πάχος του περυγίου. Λαμβάνοντας υπόψη το πάχος του περυγίου με την εισαγωγή του συναρτησιακού του πάχους, οι απώλειες ολικής πίεσης μειώνονται κατά 3.01%. Στο σχήμα 6.12 φαίνεται ότι η μείωση απωλειών ολικής πίεσης οφείλεται κατά κύριο λόγο στη μείωση της ζώνης αποκόλλησης της ροής στην γωνία της κεφαλής ποδός και της πλευράς υποπίεσης.



Σχήμα 6.12: Ολική πίεση  $p_{tot}$ . Αριστερά: σε μια επιφάνεια στο σημείο εκφυγής κάθετη στην κατεύθυνση της ροής. -Δεξιά: στην γωνία της πλευράς υποπίεσης και του κελύφους ποδός.

-Πάνω: αρχική πτερύγωση,

-Μέση: πτερύγωση μετά από βελτιστοποίηση με στόχο τη μείωση  $\Delta p_t$ ,

-Κάτω: πτερύγωση μετά από βελτιστοποίηση με στόχο τη μείωση  $\Delta p_t$  με περιορισμούς πάχους.

# Κεφάλαιο 7

## Ανακεφαλαίωση-Συμπεράσματα

Η διπλωματική αυτή εργασία είχε σκοπό την εφαρμογή των συζυγών μεθόδων σε εφαρμογές στροβιλομηχανών εμπλουτίζοντας υπάρχον λογισμικό της ΜΠΥΡΔ&B/ΕΘΣ όπου και όταν αυτό χρειάστηκε. Κύριοι άξονες της διπλωματικής είναι 4:

1. Η διατύπωση και η προσθήκη των περιορισμών του ελάχιστου επιτρεπόμενου πάχους και της γωνίας στροφής στον ήδη υπάρχοντα κώδικα της συνεχούς συζυγούς μεθόδου του ΜΠΥΡΔ&B που έχει αναπτυχθεί σε παλαιότερη διδακτορική διατριβή, στο ανοιχτό λογισμικό Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής, OpenFOAM. Ο περιορισμός της στροφής της ροής προστέθηκε στον παλαιότερο κώδικα συζυγών μεθόδων, καθώς αποτελεί ροϊκό περιορισμό, ενώ ο περιορισμός του ελάχιστου επιτρεπόμενου πάχους υπολογίζεται εξωτερικά, καθώς είναι γεωμετρικός περιορισμός και δεν επιφέρει υπολογιστικό κόστος.
2. Δεύτερος άξονας είναι η γένεση πλέγματος για 3D εφαρμογές στροβιλομηχανών. Εξελήχθη και γενικεύτηκε υπάρχοντα κώδικας του ΜΠΥΡΔ&B με σκοπό να δημιουργεί πυκνά πλέγματα με ορθογωνικό πλέγμα κοντά στα στερεά τοιχώματα. Το πλέγμα που δημιουργεί, είναι κατάλληλο έτσι ώστε να επιτρέπεται η χρήση ενός μοντέλου τύρβης χαμηλών αριθμών Reynolds με  $y_+ < 1$ . Ο πλεγματοποιητής είναι αρκετά γρήγορος λ.χ η γένεση πλέγματος διαρκεί 1 λεπτό για πλέγμα της τάξης των 500.000 κελιών.
3. Η ομαλοποίηση της παραγωγού ευαισθησίας με επίλυση της εξίσωσης Laplace. Η ομαλοποίηση της παραγωγού ευαισθησίας ήταν απαραίτητη μιας και στις εφαρμογές της παρούσας διπλωματικής δεν υπήρχε κάποια παραμετροποίηση.
4. Η ένταξη όλων των συνιστωσών σε μια αυτόματη διαδικασία βελτιστοποίησης. Η δυσκολία έγκειται στο γεγονός ότι χρησιμοποιήθηκαν πλεγματοποιητές του εργαστηρίου, οι οποίοι χειρίζονται δεδομένα πλέγματος σε μορφή LTT, ενώ η επίλυση των εξισώσεων τόσο του ευθέος, τόσο και του συζυγούς πραγματοποιούνται στο OpenFOAM. Επομένως, δημιουργήθηκαν μια σειρά από προγράμματα (λ.χ. μετατροπείς δεδομένων πλέγματος, διαχείριση

δεδομένων) τα οποία είναι απαραίτητα για την πραγματοποίηση κύκλων βελτιστοποίησης.

Η συνεχής συζυγής μέθοδος με περιορισμούς εφαρμόστηκε σε μία 2Δ αεροτομή πτερυγίου στοβίλου (βλ. κεφάλαιο 4) και σε ένα 3Δ πτερύγιο στροβίλου (βλ. κεφάλαιο 6). Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι μειώθηκαν οι απώλειες ολικής πίεσης με και χωρίς χρήση περιορισμών. Στην περίπτωση της 2Δ αεροτομής, οι απώλειες ολικής πίεσης χωρίς την χρήση περιορισμών μειώθηκαν κατά 12,46%, αλλά παράλληλα λέπτυνε επικύνδυνα το πτερύγιο και μειώθηκε η στροφή της ροής κατά  $0.6^\circ$ . Στην περίπτωση που χρησιμοποιήθηκαν οι περιορισμοί, όπως είναι φυσικό, η μείωση ήταν μικρότερη καθώς η μείωση απωλειών ολικής πίεσης είναι αντίθετη στο πάχος του πτερυγίου και στην στροφή της ροής. Συγκεκριμένα οι απώλειες μειώθηκαν κατά 4,75%, το πάχος του πτερυγίου τηρήθηκε, καθώς και η στροφή της ροής μειώθηκε ελάχιστα ( $0.2^\circ$ ). Στην περίπτωση του 3Δ πτερυγίου συμπιεστή οι απώλειες ολικής πίεσης μειώθηκαν κατά 5.22% χωρίς περιορισμούς και 3.01% με περιορισμό πάχους. Από τα αποτελέσματα η βελτιστοποίηση κρίνεται επιτυχημένη καθώς η βελτιστοποίηση δεν πραγματοποιήθηκε με κύριο γνώμονα μόνο την μείωση απωλειών ολικής πίεσης αλλά δόθηκε ιδιαίτερη βάση σε προβλήματα τα οποία διέπονται από ροϊκούς και κατασκευαστικούς περιορισμούς. Το μεγάλο πλεονέκτημα των συζυγών μεθόδων σε σχέση με άλλους μεθόδους βελτιστοποίησης φαίνεται από το γεγονός ότι όλοι οι υπολογισμοί της παρούσας διπλωματικής έγιναν σε ένα Laptop με δύο πυρήνες (i5 M 460 2.53Ghz).

Ως μελλοντική εξέλιξη του αλγορίθμου προτείνεται η χρήση των συζυγών μεταβλητών που προκύπτουν από την παραγωγή της τυρβώδους συνεκτικότητας, λογισμικό που υπάρχει ήδη στο ΜΠΥΡΔ&Β. Ακόμα προτείνεται η χρήση LES(Large Eddy Simulation), DES(Detached Eddy Simulation) ή DNS(Direct Numerical Simulation) μοντέλων τύρβης για περαιτέρω ακρίβεια στους υπολογισμούς. Τέλος, προτείνεται η δοκιμή άλλης μορφής του συναρτησιακού του περιορισμού του πάχους (λ.χ. περίμετρος ή εμβαδόν τμημάτων αεροτομής).

# Παράρτημα Α΄

## Πλέγμα OpenFoam - Πλέγμα LTT - Foam2LTT Converter

### Α΄.1 Πλέγμα OpenFoam

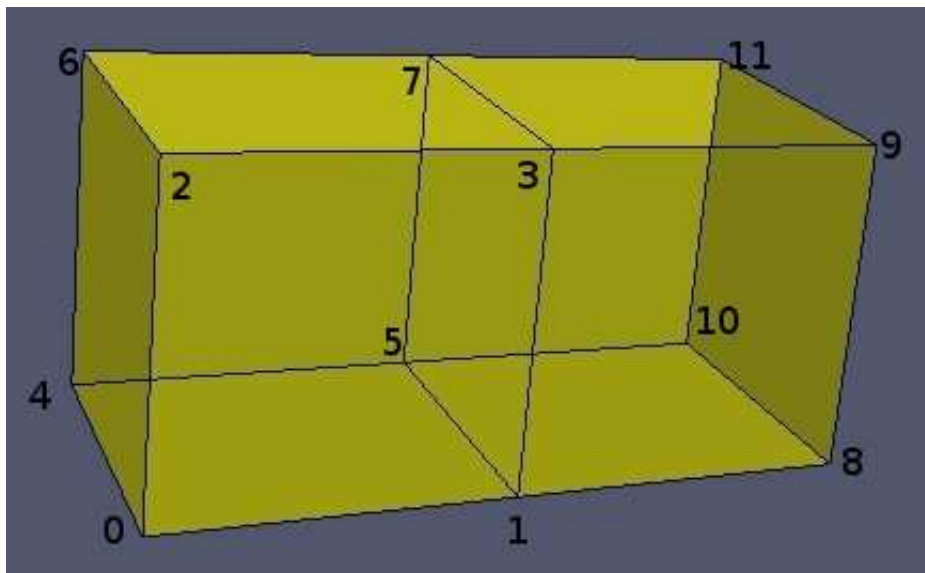
Τα δεδομένα πλέγματος του OpenFoam βρίσκονται σε κάθε κατάλογο **case/constant/polymesh/** όπου κατάλογος **case** είναι η ονομασία της εκάστοτε περίπτωσης την οποία εξετάζει ο χρήστης. Τα δεδομένα πλέγματος είναι τα αρχεία **points, faces, owner, neighbour και boundary**. Τα πλέγματα του OpenFoam είναι πάντα 3D και κάθε στοιχείο του πλέγματος (points faces κτλ) γράφεται από μία φορά.

- Το αρχείο **points** περιλαμβάνει τις καρτεσιανές συντεταγμένες των κόμβων του πλέγματος. Η μέτρηση των κόμβων αρχίζει από το μηδέν. Άρα για παράδειγμα οι συντεταγμένες του κόμβου 29 είναι γραμμένες στην 30 γραμμή.
- Το αρχείο **faces** περιλαμβάνει όλες τις επιφάνειες όλων των κελιών (cells) του πλέγματος. Στην πρώτη σειρά γράφεται ο αριθμός των επιφανειών όλων των κελιών και από κάτω ακολουθούν οι επιφάνειες γράφοντας πρώτα από πόσους κόμβους αποτελείται η κάθε επιφάνεια και στη συνέχεια, ποιοι κόμβοι την αποτελούν, οι οποίοι προέρχονται από το αρχείο points. Απαιτείται να γράφονται πρώτα γράφονται οι εσωτερικές επιφάνειες μετά ακολουθούν οι οριακές επιφάνειες δηλαδή αυτές που βρίσκονται στο όριο του πλέγματος.
- Στο αρχείο **owner** γράφεται σε ποιο κελί ανήκει κάθε επιφάνεια. Στην πρώτη σειρά γράφεται ο συνολικός αριθμός των επιφανειών ο οποίος είναι ίδιος με τον αντίστοιχο αριθμό στο αρχείο faces. Στη συνέχεια, γράφεται ο αριθμός του κελιού στον οποίο ανήκει η κάθε επιφάνεια.
- Στο αρχείο **neighbour** γράφεται οι γειτνιάσεις κάθε επιφάνειας δηλαδή ποια γειτονικά κελιά έχει κάθε επιφάνεια. Όλες οι επιφάνειες έχουν γειτονικά

κελιά εκτός από τις οριακές επιφάνειες. Άρα στην πρώτη σειρά γράφεται το σύνολο των επιφανειών οι οποίες έχουν γείτονες, όπου πρακτικά ο αριθμός αυτός ισούται με τον αριθμό των εσωτερικών επιφανειών. Στη συνέχεια, ακολουθούν τα κελιά τα οποία είναι γείτονες στην κάθε επιφάνεια. Επομένως, σε ένα πλέγμα δύο κελιών, τα οποία έχουν μία κοινή επιφάνεια, στο αρχείο `owner` θα γραφτεί ο αριθμός 1 και στο αρχείο `neighbour` ο αριθμός 2 για την συγκεκριμένη επιφάνεια εφόσον αυτή ανήκει στο κελί με αριθμό 1.

- Τέλος στο αρχείο **boundary** δημιουργούνται τα λεγόμενα patches δηλαδή ομάδες επιφανειών στις οποίες ο χρήστης θέλει να απαιτήσει κάποια οριακή συνθήκη. Στην πρώτη σειρά γράφεται το σύνολο των patches και ακολουθούν τα ονόματα, το είδος των οριακών συνθηκών, η επιφάνεια εκκίνησης και το σύνολο επιφανειών των patches. Τέτοιες ομάδες είναι λ.χ. για είσοδο ροής, έξοδο, τοίχο, συμμετρία κτλ. Ακόμη, για το λόγο ότι το OpenFoam είναι τρισδιάστατος επιλύτης, για επίλυση διδιάστατης ροής απαιτείται πλέγμα πάχους ενός κελιού δηλαδή στην ουσία 3D αλλά με οριακή συνθήκη `empty`.

#### Ακολουθεί ένα απλό παράδειγμα πλέγματος με δύο κελιά



Σχήμα Α'.1: Παράδειγμα πλέγματος Openfoam δύο εξαέδρων με το κελί με αριθμό 0 να αποτελείται από τους κόμβους (0 1 2 3 4 5 6 7) και το κελί με αριθμό 1 να αποτελείται από τους κόμβους (1 8 9 3 5 10 11 7). Η αριστερή επιφάνεια (0 4 6 2) θεωρείται είσοδος ροής, η δεξιά (8 9 11 10) έξοδος ροής ενώ όλες οι άλλες οριακές επιφάνειες θεωρούνται ότι διαμορφώνουν τα στερεά τοιχώματα



<b>points</b>	<b>faces</b>	<b>owner</b>	<b>neighbour</b>	<b>boundary</b>
12	11	11	1	3
(	(	(	(	(
(0 0 0)	4(1 3 7 5)	0	1	inlet
(1 0 0)	4(0 4 6 2)	0	)	{
(0 1 0)	4(8 9 11 10)	1		type patch;
(1 1 0)	4(0 2 3 1)	0		nFaces 1;
(0 0 1)	4(4 5 7 6)	0		startFace 1;
(1 0 1)	4(1 3 9 8)	1		}
(0 1 1)	4(5 10 11 7)	1		outlet
(1 1 1)	4(2 6 7 3)	0		{
(2 0 0)	4(3 7 11 9)	1		type patch;
(2 1 0)	4(0 1 5 4)	0		nFaces 1;
(2 0 1)	4(1 8 10 5)	1		startFace 2;
(2 1 1)	)	)		}
)				walls
				{
				type patch;
				nFaces 8;
				startFace 3;
				}
				)

Όπως φαίνεται στο παραπάνω παράδειγμα στο αρχείο `points` γράφονται οι καρτεσιανές συντεταγμένες των 12 σημείων του πλέγματος σε μέτρα μετρούμενα από το 0, δηλαδή το πρώτο σημείο είναι το 0 και το τελευταίο είναι το 11. Στο αρχείο `faces` γράφονται από μία όλες οι επιφάνειες με πρώτη επιφάνεια την εσωτερική και μετά όλες τις οριακές. Στο αρχείο `owner` γράφεται σε ποιο κελί ανήκει κάθε επιφάνεια, η πρώτη επιφάνεια η οποία είναι και η μόνη εσωτερική ανήκει στο κελί 0 αλλά έχει γειτονικό κελί το κελί 1 από το αρχείο `neighbour`. Στο αρχείο `boundary` γράφονται οι οριακές συνθήκες οι οποίες θέλει να επιβάλλει ο χρήστης. Από την επιφάνεια 1 (`nstartface`) μέχρι και για επιπλέον 1 (`nfaces`) επιφάνειες επιβάλλεται είσοδος ροής κτλ.

## Α'.2 Πλέγμα LTT

Τα δεδομένα πλέγματος που είναι συμβατά με τους κώδικες αριθμητικής πρόλεξης πεδίων ροής που έχει αναπτύξει το Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών (**Ltt**) είναι τοποθετημένα σε δύο αρχεία.

Στο πρώτο αρχείο, το οποίο έχει κατάληξη **.nod** γράφεται στην πρώτη γραμμή το πλήθος των κόμβων. Στη συνέχεια, γράφονται ακέραιοι αριθμοί-labels (logfr στην ορολογία του επιλύτη της ροής) όλων των κόμβων οι οποίες προσδιορίζουν αν ο κόμβος είναι εσωτερικός (logfr=0), περιοδικός (logfr=1), συμμετρικός (logfr=2), τοίχος (logfr=3), είσοδος (logfr=4) ή έξοδος (logfr=5). Ακολουθούν όλες οι συντεταγμένες όλων των κόμβων, πρώτα κατά x, μετά οι συντεταγμένες κατά y και τέλος οι συντεταγμένες κατά z.

Στο δεύτερο αρχείο, το οποίο έχει την ίδια ρίζα ονόματος και είτε έχει κατάληξη **.ele** αν το πλέγμα αποτελείται μόνο από τετράεδρα είτε **.hyb** σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση, γράφεται η συνδεσμολογία των κόμβων του πλέγματος με την οποία φτιάχνονται όλα τα κελιά (**cells** ή **elements**) του πλέγματος τα οποία μπορεί να είναι τετράεδρα, πυραμίδες, πρίσματα ή εξάεδρα. Στην πρώτη γραμμή γράφεται ο αριθμός των **τετραέδρων**, **πυραμίδων**, **πρισμάτων** και **εξάεδρων** και όσα από αυτά δεν υπάρχουν, δηλώνονται με μηδενικό πλήθος. Στη συνέχεια, ακολουθούν με την ίδια σειρά η συνδεσμολογία των κόμβων με την οποία δημιουργούνται τα elements. Η μέτρηση των κόμβων αρχίζει από το 1.

Στο σχήμα Α'.2 φαίνονται οι κανόνες συνδεσμολογίας των κόμβων:

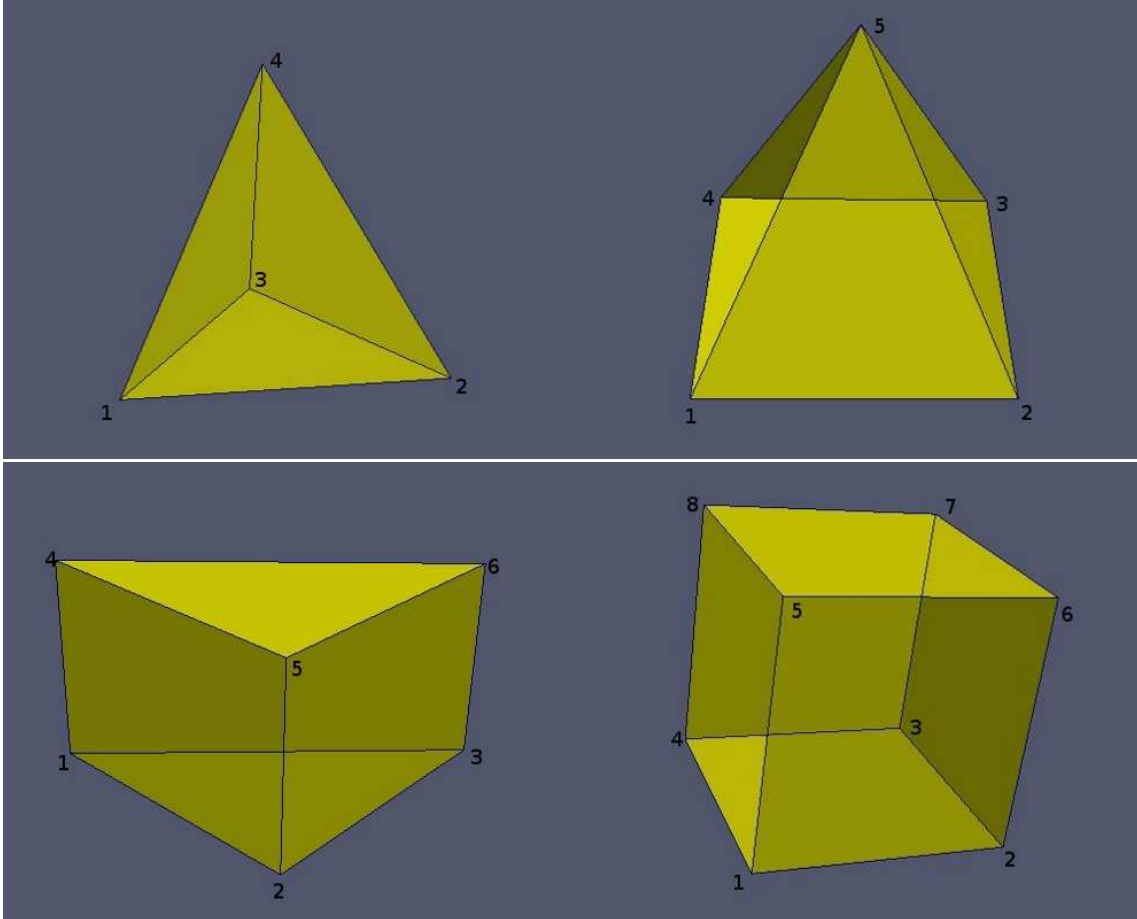
Στα τετράεδρα πρέπει  $(\vec{14} \times \vec{12}) \cdot \vec{13} > 0$

Στις πυραμίδες πρέπει  $(\vec{15} \times \vec{12}) \cdot \vec{14} > 0$

Στα πρίσματα πρέπει  $(\vec{14} \times \vec{12}) \cdot \vec{13} > 0$

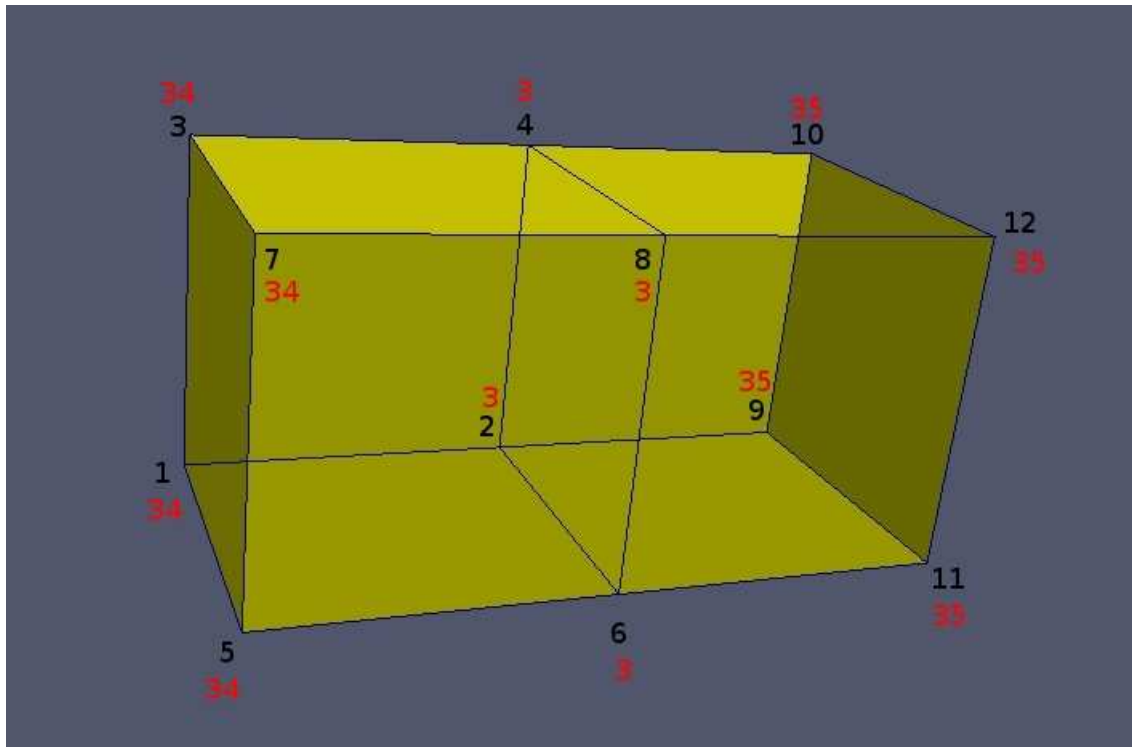
Στα εξάεδρα πρέπει  $(\vec{15} \times \vec{12}) \cdot \vec{14} > 0$

Ακόμη στα πρίσματα πρέπει ο κόμβος 4 να βρίσκεται απέναντι από τον 1 και στα εξάεδρα ο κόμβος 5 να βρίσκεται απέναντι από τον κόμβο 1

**Τοπολογία πλέγματος LTT**

Σχήμα Α'.2: Τοπολογία κόμβων πλέγματος LTT για τετράεδρα (πάνω αριστερά), πυραμίδες (πάνω δεξιά), πρίσματα (κάτω αριστερά), εξάεδρα (κάτω δεξιά)

Παράδειγμα πλέγματος με 2 εξάεδρα στο οποίο η αριστερή επιφάνεια ορίζεται ως είσοδος, η δεξιά ως έξοδος και όλες οι άλλες οριακές επιφάνειες ως διαμορφώσεις τοίχου.



Σχήμα Α.3: -μαύρη/(έντονη) αρίθμηση: ταυτότητα κόμβων -κόκκινη/(ασθενής) αρίθμηση: logfr κόμβων

#### case.nod

12											
34	3	34	3	34	3	34	3	35	35	35	35
0	1	0	1	0	1	0	1	2	2	2	2
0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0
0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1

#### case.hyb

0	0	0	2
6	8	4	2
11	12	10	9
5	7	3	1
6	8	4	2

### **Α'.3 Μετατροπές Πλέγματος από OpenFoam σε LTT - foam2LTT Converter**

Η μετατροπή του πλέγματος από OpenFoam σε LTT πραγματοποιήθηκε σε πρόγραμμα το οποίο δημιουργήθηκε σε γλώσσα προγραμματισμού fortran και περιγράφεται στον παρακάτω αλγόριθμο

1. Διαβάζονται και αποθηκεύονται σε πίνακες όλα τα δεδομένα πλέγματος από τα αρχεία του OpenFoam, δηλαδή από τα points, faces, neighbour, owner, boundary.
2. Από το αρχείο neighbour και owner δημιουργούνται όλα τα κελιά με βάση τις επιφάνειες τις οποίες τα αποτελούν. Αρχικά, σαρώνονται 'ταυτότητες' των επιφανειών (owners) οι οποίες δείχνουν σε πιο κελί ανήκει κάθε επιφάνεια και με βάση αυτές δημιουργείται πίνακας στον οποίο αποθηκεύονται ποιές επιφάνειες αποτελούν κάθε κελί(cell). Όμως, αρκετά κελιά δεν έχουν σχηματιστεί πλήρως γιατί λ.χ. η κοινή επιφάνεια δύο γειτονικών κελιών έχει μία μόνο ταυτότητα η οποία δείχνει το κελί στο οποίο ανήκει δηλαδή για παράδειγμα στο σχήμα Α'.1 η επιφάνεια 0 αποτελούμενη από τους κόμβους (1 3 7 5) δίνεται ταυτότητα owner 0. Άρα το κελί με αριθμό 1 δεν έχει σχηματιστεί πλήρως. Για αυτό το λόγο, σαρώνονται οι ταυτότητες των επιφανειών των γειτονικών κελιών (neighbour) και προστίθενται στον ίδιο όπως και πριν πίνακα. Πλέον όλα τα κελιά του πλέγματος έχουν δημιουργηθεί πλήρως με βάση τις επιφάνειες.
3. Γνωρίζοντας από τον παραπάνω πίνακα όλες τις επιφάνειες οι οποίες αποτελούν κάθε κελί, δημιουργείται πίνακας ο οποίος δείχνει το είδος κάθε κελιού δηλαδή αν είναι τετράεδρο, πυραμίδα, πρίσμα, εξάεδρο. Σε περίπτωση ενός κελιού το οποίο έχει αριθμό επιφανειών ίσο με 4 ή 6, αυτό αναγνωρίζεται με τετράεδρο ή εξάεδρο αντίστοιχα. Σε περίπτωση ενός κελιού με αριθμό επιφανειών ίσο με 5 πραγματοποιείται σάρωση των σημείων αυτών των επιφανειών και αν υπάρχει μία μόνο επιφάνεια με αριθμό κόμβων ίσο με 4 τότε αυτό το κελί αναγνωρίζεται ως πυραμίδα. Σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση τα κελιά αναγνωρίζονται ως πρίσματα.
4. Ακολουθεί η δημιουργία ταυτοτήτων είδους οριακών συνθηκών (logfr) στους κόμβους. Για να αναγνωρίσει το πρόγραμμα τις οριακές συνθήκες από το OpenFoam πρέπει η ονομασία των επιφανειών να έχει ως εξής:

είσοδος → inlet

εξοδος → outlet

περιοδικές επιφάνειες → periodic

επιφάνειες τοίχου → Walls

συμμετρικές επιφάνειες → symmetry

Στην αρχή του προγράμματος οι ταυτότητες οριακών συνθηκών όλων των κόμβων του πλέγματος θεωρούνται 0. Στη συνέχεια, σαρώνονται οι κόμβοι των περιοδικών επιφανειών οι οποίες είναι ήδη γνωστές από το αρχείο boundary και επιβάλλεται  $\logfr=1$ . Ακολουθούν οι κόμβοι των συμμετρικών επιφανειών στους οποίους επιβάλλεται  $\logfr=2$ . Σε περίπτωση που ένας κόμβος έχει ήδη οριστεί ως περιοδικός και σαρωθεί και ως συμμετρικός τότε επιβάλλεται  $\logfr=12$ . Δηλαδή προκύπτει από τον τύπο:

$$\logfr=10*\logfr+ilogfr$$

Αυτοί οι κόμβοι είναι γωνιακοί δηλαδή κοινοί κόμβοι δύο επιφανειών οι οποίες διαφορετικές οριακές συνθήκες. Η ίδια διαδικασία πραγματοποιείται και για τα άλλα  $\logfr$ . Επίσης υπάρχουν έλεγχοι οι οποίοι απαγορεύουν την σάρωση ενός κόμβου πάνω από μία φορά για ένα  $\logfr$  (λχ απαγορεύεται  $\logfr=122$ ).

5. Ακολουθεί η δημιουργία των κελιών με βάση τους κόμβους. Αρχικά γίνεται ανακατάταξη των κόμβων των επιφανειών έτσι ώστε να έχουν όλες την ίδια φορά (αριστερόστροφα ή δεξιόστροφα). Στη συνέχεια, γίνεται επιλογή των κόμβων των επιφανειών οι οποίες ανήκουν σε κάθε κελί. Έχοντας ήδη φτιάξει τα κελιά σύμφωνα με τις επιφάνειες και ξέροντας τους κόμβους τους οποίους αποτελούν την καθεμία, γίνεται επιλογή κόμβων οι οποίοι αποτελούν κάθε κελί έτσι ώστε να μην διπλογραφούν κόμβοι. Η διαδικασία αυτή διαφέρει ανάλογα με το είδος του κάθε κελιού. Στα τετράεδρα, πρώτα επιλέγεται η πρώτη επιφάνεια του κελιού όπου γράφονται κόμβοι της και, στη συνέχεια, σαρώνονται όλοι οι κόμβοι των άλλων επιφανειών οι οποίες ανήκουν στο κελί μέχρι να βρεθεί διαφορετικός από αυτούς οι οποίοι έχουν ήδη αποθηκευτεί. Στις πυραμίδες, η διαδικασία είναι ίδια με τα τετράεδρα με τη διαφορά ότι η πρώτη επιφάνεια που επιλέγεται είναι αυτή που αποτελείται από τέσσερις κόμβους. Στα πρίσματα, αποθηκεύονται οι κόμβοι των επιφανειών οι οποίες αποτελούνται από τρεις κόμβους. Στα εξάεδρα, αποθηκεύονται οι κόμβοι δύο τυχαίων απέναντί επιφανειών οι οποίες ανήκουν στο κελί.
6. Έχοντας αποθηκεύσει τους κόμβους με τους οποίους αποτελείται κάθε κελί, ακολουθεί η ανακατάταξή τους με κριτήριο την τήρηση της τοπολογίας δεδομένων πλέγματος LTT. Η διαδικασία αυτή διαφέρει ανάλογα με το είδος του κάθε κελιού. Όπως φαίνεται στο σχήμα Α'.2 οι κόμβοι 4 σε πρίσματα και 5 σε εξάεδρα πρέπει να βρίσκονται απέναντι από τον κόμβο 1. Έτσι στα πρίσματα γίνεται ανακατάταξη των κόμβων μέχρι οι κόμβοι 1-2-4-5 να ανήκουν σε κάποια επιφάνεια, ενώ στα εξάεδρα γίνεται ανακατάταξη κόμβων μέχρι οι κόμβοι 1-2-5-6 να ανήκουν σε κάποια επιφάνεια.
7. Τέλος, τα κελιά δεν πρέπει να έχουν αρνητικό όγκο. Αυτό πραγματοποιείται με τον ακόλουθο τρόπο:  
 Στα τετράεδρα πρέπει  $(\vec{14} \times \vec{12}) \cdot \vec{13} > 0$   
 Σε αντίθετη περίπτωση πραγματοποιείται εναλλαγή κόμβων 2 με 3  
 Στις πυραμίδες πρέπει  $(\vec{15} \times \vec{12}) \cdot \vec{14} > 0$   
 Σε αντίθετη περίπτωση πραγματοποιείται εναλλαγή κόμβων 2 με 3

Στα πρίσματα πρέπει  $(\vec{14} \times \vec{12}) \cdot \vec{13} > 0$

Σε αντίθετη περίπτωση πραγματοποιείται εναλλαγή κόμβων 1,2,3 με 4,5,6 αντίστοιχα

Στα εξάεδα πρέπει  $(\vec{15} \times \vec{12}) \cdot \vec{14} > 0$

Σε αντίθετη περίπτωση πραγματοποιείται εναλλαγή κόμβων 1,2,3,4 με 5,6,7,8 αντίστοιχα

Έχοντας πραγματοποιήσει τους παραπάνω ελέγχους πλέον η τοπολογία είναι η σωστή και γράφονται στα αρχεία case.nod και case.ele ή case.hyb τα δεδομένα πλέγματος LTT





## Παράρτημα Β΄

### Εργαλείο CreatePatch για διόρθωση περιοδικών επιφανειών

Το εργαλείο **createPatch** διορθώνει την σειρά αποθήκευσης των περιοδικών επιφανειών έτσι ώστε να μπορεί να τις διαχειριστεί το **OpenFoam**. Ακολουθεί παρακάτω το αρχείο **createPatchDict** το οποίο τοποθετείται στον κατάλογο **/case/system/**, στο οποίο ο χρήστης δίνει τις επιλογές διόρθωσης. Ακολουθεί ένα παράδειγμα αρχείου **createPatchDict**, το οποίο χρησιμοποιήθηκε στην εφαρμογή του διδιάστατου στροβίλου. Με τις παρακάτω επιλογές, το εργαλείο **createPatch** παίρνει το υπάρχον **patch** με όνομα **periodic2** με τύπο (type) απλό (**patch**), και το αντικαθιστά με ένα άλλο **patch** με ονομασία **periodic** και με τύπο **cyclic**, με σωστή σειρά αποθήκευσης των περιοδικών επιφανειών για να τις διαχειριστεί σωστά το **OpenFOAM**.

```
FoamFile
{
  version 2.0;
  format ascii;
  class dictionary;
  object createPatchDict;
}

// ***** //

// Tolerance used in matching faces. Absolute tolerance is span of
// face times this factor. To load incorrectly matches meshes set this
// to a higher value.
matchTolerance 1E-3;

// Do a synchronisation of coupled points after creation of any patches.
pointSync true;
```

```
// Patches to create.
patches
(
{
// Name of new patch
name periodic;

// Type of new patch
dictionary
{
type cyclic;
}
//name of patches
constructFrom patches;
patches (periodic2);
}
);
```

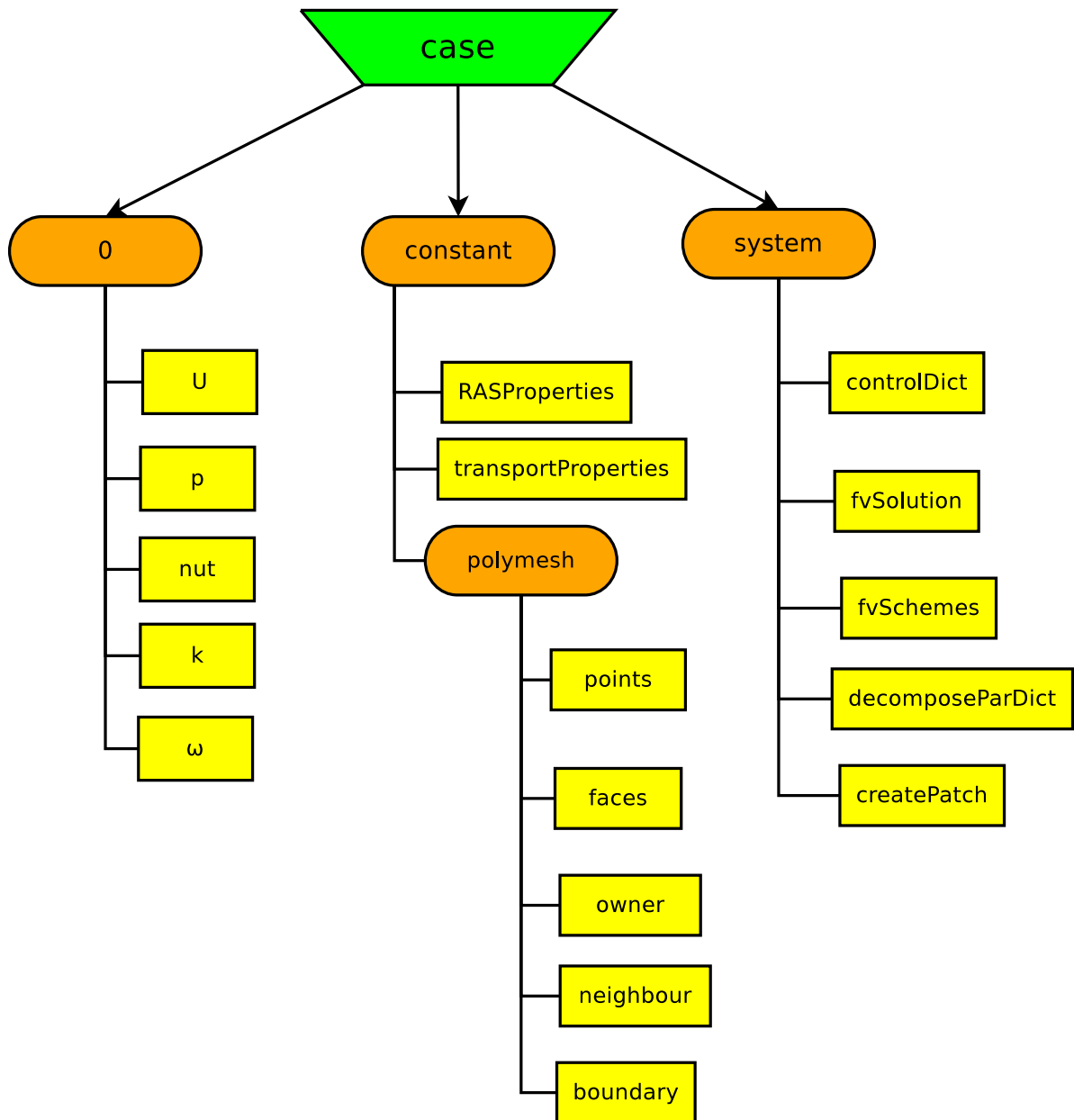
---

# Παράρτημα Γ΄

## Λειτουργία OpenFOAM

Για την λειτουργία του OpenFOAM στις εφαρμογές της παρούσας διπλωματικής, είναι απαραίτητοι οι κατάλογοι **\$/0**, **\$/constant**, **\$/system** μέσα στο όνομα της εκάστοτε περίπτωσης **\$/case**.

- Η αρχικοποίηση καθώς και οι οριακές συνθήκες των μεταβλητών ροής (**/U**, **/p**, **/k**, **/ω**, **/ν<sub>t</sub>**) του προβλήματος περιέχονται στον κατάλογο **\$/0**,
- Ο κατάλογος **\$/constant** περιέχει κάποιους παράμετρους οι οποίοι μένουν σταθεροί κατά την διάρκεια επίλυσης των εξισώσεων ροής. Συγκεκριμένα, περιέχει:
  1. ένα αρχείο **/transportProperties** στο επιλέγονται οι ιδιότητες του ρευστού όπως η συνεκτικότητα  $\nu$ ,
  2. ένα αρχείο με όνομα **/RASProperties** αν το μοντέλο τύρβης που θα χρησιμοποιηθεί είναι RAS (Reynolds-Averaged Simulation)
  3. ένας κατάλογος με όνομα **\$/polymesh** στο οποίο υπάρχουν τα δεδομένα πλέγματος **/boundary**, **/owner** κτλ.
- Ο κατάλογος **\$/system** περιέχει τα αρχεία **/controlDict**, **/fvSchemes**, **/fvSolution**, **/decomposeParDict**, **/createPatch**
  1. Στο αρχείο **controlDict** υπάρχουν επιλογές σχετικά με τον χρόνο έναρξης επίλυσης ροής, χρονικό βήμα, αριθμό αποθήκευσης κτλ
  2. Στο αρχείο **/fvSchemes** επιλέγονται τα σχήματα διακριτοποίησης όρων των εξισώσεων ροής
  3. Στο αρχείο **/fvSolution** επιλέγονται οι επιλύτες των εξισώσεων ροής καθώς και παράμετροι χαλάρωσης των μεταβλητών ροής
  4. Στο αρχείο **/decomposeParDict** επιλέγονται παράμετροι με τους οποίους η ροή λύνεται σε παράλληλους επεξεργαστές



Σχήμα Γ.1: Γενική μορφή καταλόγων και αρχείων σε μια τυπική περίπτωση OpenFOAM

## Παράρτημα Δ'

### Αποδείξεις σχέσεων 3.45, 3.46, 3.55 και 3.56

#### Δ'.1 Απόδειξη των οριακών συνθηκών 3.45 και 3.46

Οι παρακάτω αποδείξεις έχουν αποδειχθεί σε προηγούμενες διδακτορικές διατριβές του ΜΠΥΡΔ&Β/ΕΘΣ των Δ.Παπαδημητρίου([2]), Α.Ζυμάρη([1]) και για λογους πληρότητας ακολουθούν οι αποδείξεις.

Η οριακή συνθήκη 3.45, προέκυψε από την απαίτηση μηδενισμού του συντελεστή  $\phi_2$ . Η συνθήκη 3.46 μηδενισμού της εφαπτομενικής συζυγούς ταχύτητας αποδεικνύεται παρακάτω.

Ισχύει ότι

$$\begin{aligned}\phi_{1,ij} \frac{\partial}{\partial b_m} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) &= \nu (u_{(n)} n_i + u_{(t)} t_i) n_j \frac{\partial}{\partial b_m} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \\ &= \nu u_k n_k n_i n_j \frac{\partial}{\partial b_m} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \nu u_k t_k t_i n_j \frac{\partial}{\partial b_m} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)\end{aligned}\quad (\Delta'.1)$$

Ο πρώτος όρος του δεξιού μέλους ισούται με μηδέν, αφού

$$\begin{aligned}\nu u_k n_k n_i n_j \frac{\partial}{\partial b_m} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) &= \nu u_k n_k \frac{\partial}{\partial b_m} \left[ \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} n_j \right) n_i + \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} n_i \right) n_j \right] \\ &= 2\nu u_k n_k \frac{\partial}{\partial b_m} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} n_j n_i \right) \\ &= 2\nu u_k n_k \frac{\partial}{\partial b_m} \left( \frac{\partial v_{(n)}}{\partial n} \right) \\ &= -2\nu u_k n_k \frac{\partial}{\partial b_m} \left( \frac{\partial v_{(t)}}{\partial t} \right) = 0\end{aligned}\quad (\Delta'.2)$$

μιας και η κλίση  $\frac{\partial v_{(t)}}{\partial t}$  της εφαπτομενικής ταχύτητας κατά την εφαπτομενική κατεύθυνση, στην είσοδο του χωρίου, είναι ανεξάρτητη των  $b_m$ . Σημειώνεται ότι,

προηγουμένως χρησιμοποιήθηκε η εξίσωση της συνέχειας

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (v_{\langle n \rangle} n_j + v_{\langle t \rangle} t_j) \simeq \frac{\partial v_{\langle n \rangle}}{\partial n} + \frac{\partial v_{\langle t \rangle}^k}{\partial t^k} = 0$$

Επομένως, για να ισχύει η 3.43, αρκεί να μηδενιστεί ο δεύτερος όρος του δεξιού μέλους της εξίσωσης Δ'.1. Αυτό εξασφαλίζεται με την απαίτηση να ισχύει

$$u_k t_k = 0 \quad (\Delta'.3)$$

δηλαδή το μηδενισμό της εφαπτομενικής ταχύτητας.

## Δ'.2 Απόδειξη των οριακών συνθηκών 3.55 και 3.56

Οι συνθήκες 3.55 και 3.56 δίνουν  $\phi_2 = 0$  (απαλοιφή του δεύτερου ολοκληρώματος της έκφρασης 3.53). Αρκεί, επομένως, να αποδειχτεί ότι οι παραπάνω συνθήκες αρκούν για την απαλοιφή και του όρου  $\frac{\partial}{\partial b_m} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$  στο τρίτο ολοκλήρωμα της έκφρασης 3.53. Εφαρμόζοντας τις παραπάνω συνθήκες, ο σχετικός όρος γράφεται ως εξής

$$\begin{aligned} \phi_{1,ij} \frac{\partial}{\partial b_m} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) &= \nu \frac{\partial}{\partial b_m} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) u_i n_j = \nu u_{\langle n \rangle} \frac{\partial}{\partial b_m} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_i n_j \\ &= -\nu \frac{\partial F_{Sw}}{\partial p} \frac{\partial}{\partial b_m} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_i n_j \\ &= -\nu \frac{\partial F_{Sw}}{\partial p} \frac{\delta}{\delta b_m} \left[ \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_i n_j \right] + \nu \frac{\partial F_{Sw}}{\partial p} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\delta x_k}{\delta b_n} n_i n_j \\ &\quad + \nu \frac{\partial F_{Sw}}{\partial p} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\delta (n_i n_j)}{\delta b_m} \end{aligned} \quad (\Delta'.4)$$

Επίσης ισχύει ότι

$$\frac{\delta}{\delta b_m} \left[ \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_i n_j \right] = 0 \quad (\Delta'.5)$$

Η απόδειξη της εξίσωσης Δ'.5 παρουσιάζεται στην αμέσως επόμενη παράγραφο.

Από την έκφραση Δ'.4 απομένουν, επομένως, οι όροι

$$\begin{aligned} \phi_{1,ij} \frac{\partial}{\partial b_m} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) &= -\nu \frac{\partial F_{Sw}}{\partial p} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_i n_j \\ &\quad + \nu \frac{\partial F_{Sw}}{\partial p} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\delta (n_i n_j)}{\delta b_m} \end{aligned} \quad (\Delta'.6)$$

οι οποίοι εμφανίζονται στην τελική έκφραση των παραγώγων ευαισθησίας.

**Απόδειξη σχέσης Δ'.5**

Από την εξίσωση της συνέχειας, εξίσωση 3.1, εκφράζοντας το διάνυσμα της ταχύτητας στο οριόδετο σύστημα συντεταγμένων, έχουμε ότι

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (v_{\langle n \rangle} n_j + v_{\langle t \rangle}^k t_j^k) = 0 \quad (\Delta'.7)$$

Από την εξίσωση Δ'.7 για το συνεκτικό ρευστό, όπου ισχύει  $v_i = v_{\langle n \rangle} = v_{\langle t \rangle}^k = 0$ , η εξίσωση της συνέχειας λαμβάνει, στο οριόδετο σύστημα τη μορφή

$$\frac{\partial v_{\langle n \rangle}}{\partial n} + \frac{\partial v_{\langle t \rangle}^k}{\partial t^k} = 0 \quad (\Delta'.8)$$

Λόγω του ότι η εφαπτομενική παράγωγος  $\frac{\partial v_{\langle t \rangle}^k}{\partial t^k}$  στο στερεό τοίχωμα είναι προφανώς ίση με μηδέν (αφού εκεί  $v_{\langle t \rangle}^k = 0$ ), η εξίσωση Δ'.8 γίνεται

$$\frac{\partial v_{\langle n \rangle}}{\partial n} = 0 \quad (\Delta'.9)$$

Κατά συνέπεια, ο όρος Δ'.5 λαμβάνει τη μορφή

$$\nu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_i n_j = \nu \left[ \frac{\partial (v_i n_i)}{\partial x_j} n_j + \frac{\partial (v_j n_j)}{\partial x_i} n_i \right] = 2\nu \frac{\partial v_{\langle n \rangle}}{\partial n} = 0 \quad (\Delta'.10)$$

και κατά συνέπεια και η μεταβολή της είναι μηδενική.





# Βιβλιογραφία

- [1] Ζυμάρης, Α. Δ.: Συζυγείς (Adjoint) μέθοδοι για το σχεδιασμό μορφών με βέλτιστη αεροδυναμική συμπεριφορά σε στρωτές και τυρβώδεις ροές. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών ΕΜΠ, 2010.
- [2] Παπαδημητρίου, Δ.: Συζυγείς (Adjoint) διατυπώσεις για την ανάλυση - σχεδίαση πτερυγώσεων στροβιλομηχανών και τη βέλτιστη προσαρμογή πλέγματος με a posteriori εκτίμηση σφάλματος. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών ΕΜΠ, 2006.
- [3] Κ.Χ. Γιαννάκογλου, Μέθοδοι Βελτιστοποίησης στην Αεροδυναμική, Αθήνα (2006)
- [4] Κ.Χ. Γιαννάκογλου 'Συνεκτικές ροές στις Στροβιλομηχανές', Αθήνα 2004
- [5] Κ. Μαθιουδάκης, καθηγητής Ε.Μ.Π. 'Λειτουργία αεριοστροβίλων και ατμοστροβίλων' Εκδόσεις ΕΜΠ (2η Έκδοση), Αθήνα, 2009
- [6] Κ.Δ. Παπαηλιού, Κ.Μ. Μαθιουδάκης, Κ.Χ. Γιαννάκογλου 'Εισαγωγή στις θερμικές στροβιλομηχανές' Εκδόσεις ΕΜΠ, Αθήνα, 2000
- [7] Ρακόπουλος Κ., 'Αρχές βιομηχανικών αεριοστροβίλων' Εκδόσεις Φούντα, Αθήνα, 2001
- [8] Menter, F. R. (1993), "Zonal Two Equation k-omega Turbulence Models for Aerodynamic Flows", AIAA Paper 93-2906.
- [9] Wilquem, F. and Degrez, G.: A two dimensional multiblock incompressible Euler/Navier-Stokes flow solver.
- [10] Papadimitriou, D.I. and Giannakoglou, K.C.: A continuous adjoint method with objective function derivatives based on boundary integrals for inviscid and viscous flows. Computers & Fluids, 36(2):325-341, 2007.
- [11] Papadimitriou, D.I. and Giannakoglou, K.C.: Aerodynamic shape optimization using first and second order adjoint and direct approaches. Archives of Computational Methods in Engineering, 15(4):447-488, 2008.
- [12] Jameson A. Aerodynamic design via control theory. Journal of Scientific Computing 1988; 3:233-260.

- 
- [13] Anderson WK, Venkatakrishnan V. Aerodynamic design optimization on unstructured grids with a continuous adjoint formulation. AIAA Paper 97-0643, 1997.
- [14] Shubin GR, Frank PD. A comparison of the implicit gradient approach and the variational approach to aerodynamic design optimization. Boeing Computer Services Report AMS-TR-163, 1991.
- [15] Burgreen GW, Baysal O. Three-dimensional aerodynamic shape optimization using discrete sensitivity analysis. AIAA Journal 1996; 34(9):1761–1770.
- [16] Giles MB, Pierce NA. Adjoint equations in CFD: duality, boundary conditions and solution behaviour. AIAA Paper 97-1850, The 13th Computational Fluid Dynamics Conference Proceedings, Snowmass, CO, 1997.
- [17] Siva K. Nadarajah and Antony Jameson A comparison of the Continuous and Discrete Adjoint approach to automatic aerodynamic optimization. AIAA-2000-0667
- [18] OpenFOAM v1.7 User Guide ([www.openfoam.com](http://www.openfoam.com))
- [19] OpenFOAM v1.7 Programmers Guide ([www.openfoam.com](http://www.openfoam.com))
- [20] Horhe Hasak, Error Analysis and Estimation for the Finite Volume Method with Applications to Fluid Flows, 1996, phd Imperial College
- [21] Joel H. Ferziger/Milovan Peric, Computational methods for fluid dynamics third, rev edition, Springer
- [22] Hirsch, C. : Numerical computation of external and internal flows, Vol.1: Fundamentals of numerical discretization. John Wiley & Sons, 1990.
- [23] Hirsch, C. : Numerical computation of external and internal flows, Vol.2: Computational Methods for inviscid and viscous flows. John Wiley & Sons, 1990.
- [24] A.S Zymaris, D.I. Papadimitriou, K.C. Giannakoglou and C. Othmer : Adjoint wall functions: A new concept for use in aerodynamic shape optimization. Journal of Computational Physics, 229(13):5228 – 5245, 2010.
- [25] D.I.Papadimitriou and K.C.Giannakoglou: Direct, adjoint and mixed approaches for the computation of Hessian in airfoil design problems. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 56(10):1929–1943, 2008.
- [26] D.I.Papadimitriou and K.C.Giannakoglou: Total pressure loss minimization in turbomachinery cascades using a new continuous adjoint formulation. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part A: Journal of Power and Energy, 221(6):865–872, 2007.
- [27] Careto, L.S., Gisman, A.D., Patankar, S.V., Spalding, D.B. Two calculation procedures for steady three-dimensional flows with recirculation. *Proceedings of the Third International Conference on Numerical Methods in Fluid Mechanics*, Paris (1972).
-

- 
- [28] Othmer, C.: A continuous adjoint formulation for the computation of topological and surface sensitivities of ducted flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 58(8): 861-877, 2008.
-