



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Στατιστική Μοντελοποίηση της Φθοράς

Διπλωματική Εργασία

ΘΕΟΔΩΡΕΛΛΗ ΜΑΡΙΑ

Επιβλέπουσα: Καρόνη Χρυσής, Καθηγήτρια Ε.Μ.Π.

Τριμελής επιτροπή:

Χ. Καρόνη,

Χ. Κουκουβίνος,

Φ. Βόντα

Καθηγήτρια Ε.Μ.Π,

Καθηγητής Ε.Μ.Π,

Αναπλ. Καθηγήτρια Ε.Μ.Π

Αθήνα, Φεβρουάριος 2019

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Οι μηχανικοί στις βιομηχανίες παραγωγής χρησιμοποιούν πειράματα επιταχυνόμενης διακοπής εδώ και πολλές δεκαετίες, ώστε να μπορέσουν να πάρουν αξιόπιστη πληροφορία γρήγορα. Η ανάγκη να επεκτείνουμε μαζί τον χρόνο και τις επιταχυνόμενες μεταβλητές απαιτεί γενικά την χρήση πλήρως παραμετρικών μοντέλων. Τα τελευταία 30 χρόνια έχουν αναπτυχθεί στατιστικές μέθοδοι για την εξαγωγή συμπερασμάτων αξιοπιστίας από δεδομένα φθοράς. Όταν μία κατάλληλη μεταβλητή φθοράς μπορεί να μετρηθεί, τα δεδομένα φθοράς, όταν αναλύονται σωστά, μπορούν να προσφέρουν περισσότερη πληροφορία επειδή υπάρχουν ποσοτικές μετρήσεις για όλες τις μονάδες (όχι μόνο αυτές που απέτυχαν). Δεδομένου ότι πολλές συσκευές αποτυγχάνουν λόγω της φθοράς, η διαδικασία φθοράς είναι κάποιο είδος στοχαστικής διαδικασίας.

Στο πρώτο κεφάλαιο εισάγεται η έννοια της φθοράς των δεδομένων αξιοπιστίας και αναφέρονται επιγραμματικά, κάποιες διαδικασίες φθοράς. Στο δεύτερο κεφάλαιο μελετάται η μοντελοποίηση της φθοράς μέσω των διαδικασιών Wiener και Markov. Στο τρίτο κεφάλαιο μελετάται η διαδικασία Γάμμα. Το επόμενο κεφάλαιο αναλύει τα μοντέλα φθοράς με συμμεταβλητές και την ανάλυση παλινδρόμησης κατωφλίου.

Στο πέμπτο κεφάλαιο παρατίθενται οι μέθοδοι για τις δοκιμασίες επιταχυνόμενης διακοπής. Στο έκτο και τελευταίο κεφάλαιο ακολουθούν τρία παραδείγματα και εφαρμόζονται οι παραπάνω μέθοδοι για την στατιστική ανάλυσή τους.

ABSTRACT

Engineers in the manufacturing industries have used accelerated test (AT) experiments for many decades, in order to acquire reliability information quickly. The need to extrapolate in both time and the accelerating variables generally necessitates the use of fully parametric models.

The past 30 years have seen the development of statistical methods for obtaining results for reliability from degradation data. When an appropriate degradation variable can be measured, degradation data, when properly analyzed, can provide much more information because there are quantitative measurements on all units (not just those that failed). Since many devices fail because of degradation, the degradation process is some type of stochastic process.

The first chapter introduces the meaning of the degradation of reliability data and some degradation procedures are referenced briefly. In the second chapter the modeling of the degradation is studied through the Wiener and Markov procedures. The third chapter introduces Gamma procedure. The next chapter analyzes degradation models with covariates and the threshold regression.

Methods for the accelerated life tests are presented in the fifth chapter. In the sixth and final chapter, three examples are described and all the previous methods are applied in their statistical analysis.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά την Καθηγήτρια του
Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου κ. Χρυσής Καρώνη,
για την συνεχή ενθάρρυνση, καθοδήγηση και εμπιστοσύνη
που έδειξε καθ' όλη την διάρκεια εκπόνησης αυτής της διπλωματικής.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου για τα
εφόδια που μου προσέφεραν, τη φροντίδα, την συμπαράσταση και
την υπομονή τους.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ.....	2
ABSTRACT.....	3
ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ.....	4

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Αξιοπιστία : Μοντέλα διάρκειας ζωής για την φθορά

1.1 Γενικά.....	9
1.2 Φθορά δεδομένων αξιοπιστίας.....	10
1.3 Διαδικασίες για δεδομένα φθοράς.....	12

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Μοντέλα για δεδομένα διάρκειας ζωής χωρίς συμμεταβλητές

2.1 Εισαγωγή.....	13
2.2 Συνάρτηση ρυθμού αποτυχίας (Failure rate function).....	14
2.3 Τυχαίος ρυθμός επιδείνωσης (Random deterioration rate).....	15
2.4 Διαδικασία Wiener.....	15
2.5 Διαδικασίες Markov.....	18
2.6 Μονότονα αυξανόμενες διαδικασίες μεταπήδησης.....	19
2.7 Μοντελοποίηση φθοράς.....	20

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Ανέλιξη Γάμμα

3.1 Ιστορική αναδρομή.....	25
----------------------------	----

3.2 Ορισμός της μη σταθερής διαδικασίας Γάμμα.....	27
3.3 Μέση τιμή και διασπορά της διαδικασίας Γάμμα.....	28
3.4 Αθροιστική συνάρτηση κατανομής του χρόνου αποτυχίας.....	28
3.5 Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του χρόνου αποτυχίας.....	29
3.6 Διαδικασία φθοράς Γάμμα συνδυασμένη με τυχαίο φορτίο.....	29
3.7 Εκτίμηση παραμέτρων για την διαδικασία Γάμμα.....	30
3.7.1 Μέθοδος Μέγιστης Πιθανοφάνειας.....	31
3.7.2 Μέθοδος των Ροπών.....	32
3.8 Μέθοδος της Μπεϋνζιανής στατιστικής.....	33
3.9 Ορισμός της σταθερής διαδικασίας Γάμμα.....	35
3.10 Προσέγγιση διακριτού χρόνου της σταθερής διαδικασίας Γάμμα.....	36
3.11 Διαδικασία Γάμμα ως όριο της σύνθετης διαδικασίας Poisson.....	37
3.11.1 Μετασχηματισμός Laplace της σύνθετης διαδικασίας Poisson..	37
3.11.2 Μετασχηματισμός Laplace της διαδικασίας Γάμμα.....	38

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Μοντέλα για δεδομένα διάρκειας ζωής με συμμεταβλητές

4.1 Εισαγωγή.....	40
4.2 Ανάλυση παλινδρόμησης (Threshold Regression).....	42
4.2.1 Το μοντέλο πρώτης μετάβασης (FHT).....	44
4.2.2 Παραδείγματα FHT μοντέλων.....	45

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Μοντέλα επιταχυνόμενης διάρκειας ζωής για την φθορά

5.1 Εισαγωγή.....	50
-------------------	----

5.1.2 Ποσοτικές έναντι ποιοτικών δοκιμασιών επιταχυνόμενης διακοπής.....	51
5.2 Βασικές ιδέες επιταχυνόμενης διακοπής.....	52
5.2.1 Διαφορετικοί τύποι επιτάχυνσης.....	52
5.2.2 Μέθοδοι επιτάχυνσης.....	52
5.2.3 Τύποι αποκρίσεων.....	53
5.3 Στατιστικά μοντέλα για επιτάχυνση.....	55
5.3.1 Γενικές συναρτήσεις μετασχηματισμού χρόνου.....	55
5.3.2 Μοντέλα επιταχυνόμενης κλίμακας και αποτυχίας στο χρόνο....	57
5.3.3 Το μοντέλο παλινδρόμησης αναλογικής διακινδύνευσης.....	58
5.4 Επιτάχυνση του ποσοστού χρήσης.....	58
5.4.1 Απλά μοντέλα επιτάχυνσης του ποσοστού χρήσης.....	58
5.4.2 Κύκλοι αποτυχίας που εξαρτώνται από τον βαθμό χρήσης.....	59

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Εφαρμογές

6.1 Εφαρμογή 1: Μοντελοποίηση επιταχυνόμενης φθοράς χωρίς συµµεταβλητές.....	61
6.1.1 Μοντέλο.....	61
6.1.2 Συµπέρασμα.....	65
6.1.3 Εφαρμογή της διαδικασίας Wiener (Εφαρμογή 1η).....	69
6.1.3.1 Εκθετικός μετασχηματισμός του χρόνου.....	70
6.1.3.2 Μετασχηματισμός δύναμης του χρόνου.....	76
6.1.3.3 Συµπεράσματα.....	83
6.2 Εφαρμογές 2 και 3: Μοντελοποίηση της φθοράς µε συµµεταβλητές.....	85
6.2.1 Το πακέτο “threg” της R.....	85
6.2.2 Εκτίµηση των συντελεστών παλινδρόμησης χρησιµοποιώντας το threg..	86
6.2.3 Υπολογισµός αναλογικής διακινδύνευσης, µέθοδος hr.....	88

6.2.4 Καμπύλες των εκτιμώμενων συναρτήσεων επιβίωσης, διακινδύνευσης και πυκνότητας, μέθοδος plot.....	90
6.2.5 Προβλέψεις.....	91
6.2.6 Εφαρμογή των συναρτήσεων που παρέχονται από το threg της R (Εφαρμογή 2 ^η).....	91
6.2.7 Εφαρμογή μη αναλογικής διακινδύνευσης (Εφαρμογή 3η).....	96
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α.....	102
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β.....	104
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	118

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο

Αξιοπιστία : Μοντέλα διάρκειας ζωής για την φθορά

1.1 Γενικά

Οι αλλαγές στην τεχνολογία είχαν και θα συνεχίσουν να έχουν ισχυρή επίδραση σε αλλαγές στον τομέα της στατιστικής αξιολόγησης των δεδομένων αξιοπιστίας. Αυτές οι αλλαγές περιλαμβάνουν υψηλότερα επίπεδα ολοκλήρωσης σε ηλεκτρονικές συσκευές, βελτιώσεις στην τεχνολογία μέτρησης και την ανάπτυξη αισθητήρων και έξυπνων τσιπ σε περισσότερα προϊόντα, δραματική αύξηση της υπολογιστικής ισχύος και της τεχνολογίας αποθήκευσης, την ανάπτυξη νέων, ισχυρών στατιστικών μεθόδων για γραφικά συμπεράσματα, τον πειραματικό σχεδιασμό και τον σχεδιασμό ελέγχων αξιοπιστίας. Οι μηχανικοί στις βιομηχανίες παραγωγής χρησιμοποιούν πειράματα επιταχυνόμενης διακοπής εδώ και πολλές δεκαετίες (Meeker, 2010). Ο σκοπός των πειραμάτων επιταχυνόμενης διακοπής είναι να πάρουν αξιόπιστη πληροφορία γρήγορα. Κομμάτια δοκιμής ενός υλικού, συστατικά, υποσυστήματα ή ολόκληρα συστήματα υπόκεινται σε μεγαλύτερα από τα συνηθισμένα επίπεδα μίας ή περισσότερων επιταχυνόμενων μεταβλητών, όπως η θερμοκρασία ή η πίεση. Έπειτα τα αποτελέσματα χρησιμοποιούνται για να προβλέψουν την διάρκεια ζωής των μονάδων σε συνηθισμένες συνθήκες. Η παρέκταση επιβεβαιώνεται (σωστά ή λάθος) από τη βάση των φυσικά κινούμενων μοντέλων ή από το συνδυασμό ενός εμπειρικού μοντέλου προσαρμοσμένο με μία ικανοποιητική ποσότητα προηγούμενης εμπειρίας σε πειράματα με παρόμοιες μονάδες. Η ανάγκη να επεκτείνουμε μαζί τον χρόνο και τις επιταχυνόμενες μεταβλητές απαιτεί γενικά την χρήση πλήρως παραμετρικών μοντέλων.

Οι κατασκευαστές στις μέρες μας δέχονται μεγάλη πίεση για να εξελίξουν νέα, καλύτερης τεχνολογίας προϊόντα σε χρόνο ρεκόρ, ενώ παράλληλα θέλουν βελτίωση της παραγωγικότητας, της αξιοπιστίας στον τομέα των προϊόντων και της συνολικής ποιότητας. Αυτό το γεγονός έχει παρακινήσει την εξέλιξη μεθόδων όπως την ταυτόχρονη μηχανική και έχει ενθαρρύνει την ευρεία χρήση των σχεδιασμένων πειραμάτων για τα προϊόντα και την βελτίωση της διαδικασίας. Οι απαιτήσεις για υψηλότερη αξιοπιστία έχουν αυξήσει την ανάγκη για αμεσότερη δοκιμασία υλικών, εξαρτημάτων και συστημάτων. Αυτό βρίσκεται σε συμφωνία με την φιλοσοφία της μοντέρνας ποιότητας για την παραγωγή προϊόντων υψηλής

αξιοπιστίας : κατορθώνεις υψηλή αξιοπιστία βελτιώνοντας την διαδικασία του σχεδιασμού και της παραγωγής. Τα δεδομένα επιβίωσης καταγράφουν το χρόνο μέχρι την εμφάνιση ενός “κλειδιού γεγονότος”, όπως ο θάνατος ενός ασθενούς, η εμφάνιση όγκου, η έξοδος από το νοσοκομείο ή η διακοπή του θηλασμού. Τα δεδομένα επιβίωσης περιέχουν συχνά αποκομμένες παρατηρήσεις για τις οποίες δεν μπορούμε να καταγράψουμε τον ακριβή χρόνο του γεγονότος. Για παράδειγμα, σε μία μελέτη για τους παράγοντες κινδύνου του καρκίνου του πνεύμονα, ο χρόνος διάγνωσης του καρκίνου του πνεύμονα θα πρέπει να καταγράφεται για κάθε άτομο που προσβάλλεται. Ωστόσο, στο τέλος της παρακολούθησης της μελέτης, μερικά άτομα μπορεί να μην έχουν διαγνωσθεί με καρκίνο του πνεύμονα. Αυτά τα άτομα μπορεί να εμφανίσουν ή και όχι καρκίνο του πνεύμονα αργότερα, αλλά αυτό είναι άγνωστο την στιγμή που τα δεδομένα πρέπει να αναλυθούν. Οι μη ολοκληρωμένοι παρατηρήσιμοι χρόνοι του γεγονότος που συναντώνται στα δεδομένα επιβίωσης, κάνουν την ανάλυση τους διαφορετική από τις άλλες κλασικές μεθόδους, οι οποίες χρησιμοποιούνται για πλήρως παρατηρήσιμα δεδομένα, όπως η συνηθισμένη γραμμική παλινδρόμηση. Τα δεδομένα διάρκειας ζωής προκύπτουν σε πολλά πρακτικά πεδία, όπως στην ιατρική, στην δημόσια υγεία, συμπεριλαμβανομένου επίσης της μηχανικής, της κοινωνιολογίας, της δημογραφίας και των οικονομικών.

1.2 Φθορά δεδομένων αξιοπιστίας

Στις σύγχρονες εφαρμογές υψηλής αξιοπιστίας, ίσως να μην περιμένουμε να δούμε αποτυχίες στους ελέγχους αξιοπιστίας, με αποτέλεσμα να υπάρχουν περιορισμένες πληροφορίες σχετικά με την αξιοπιστία που απαιτείται για τον σχεδιασμό του προϊόντος. Έστω ότι έχουν τεθεί σε δοκιμή 500 μονάδες και τρέχουν για 1000 ώρες λειτουργίας για ένα προϊόν, το οποίο απαιτείται να διαρκεί 5000 ώρες. Εάν στο τέλος της δοκιμασίας δεν υπάρχουν αποτυχίες, θα υπήρχε ελάχιστη ή και καθόλου πληροφορία για την ποσοτικοποίηση της αξιοπιστίας (ανάλογα με τις υποθέσεις που κάποιος μπορεί να είναι διατεθειμένος να κάνει). Ωστόσο, αν με την πάροδο του χρόνου μπορούσαμε να παρακολουθήσουμε μία φθορά (ή μία απόδοση) μιας μεταβλητής που σχετίζεται στενά με την αποτυχία (π.χ. το μήκος μιας ρωγμής κόπωσης ή την έξοδο φωτός από ένα λείζερ) για όλες τις μονάδες ελέγχου, τότε θα υπήρχε μεγάλη ποσότητα πληροφορίας για την αξιοπιστία.

Υπάρχουν και ορισμένα άλλα πλεονεκτήματα για την χρήση επαναλαμβανόμενων μέτρων δεδομένων φθοράς για την αξιολόγηση της αξιοπιστίας. Για παράδειγμα, τα δεδομένα φθοράς

παρέχουν πληροφορία, η οποία είναι πολύ πιο πλούσια για την κατασκευή και την αξιολόγηση της επάρκειας των φυσικών/χημικών μοντέλων, που χρησιμοποιούνται για την επιτάχυνση της δοκιμασίας.

Σήμερα, ο όρος της φθοράς αναφέρεται είτε σε φθορά της απόδοσης (π.χ. η έξοδος φωτός από μία λυχνία LED), είτε σε κάποιο μέτρο της πραγματικής χημικής φθοράς (π.χ. η συγκέντρωση μιας επιβλαβούς χημικής ένωσης). Τα τελευταία 30 χρόνια, έχουμε δει πολλά διαφορετικά είδη εφαρμογών, όπου υπήρχαν διαθέσιμα δεδομένα φθοράς. Οι Gertsbakh και Kordonsky (1969) σκέφτηκαν πρώτοι ορισμένες ιδέες σχετικά με την χρήση των μοντέλων φθοράς στην αξιοπιστία. Από την δεκαετία του 1990 μέχρι και σήμερα, έχουν αναπτυχθεί στατιστικές μέθοδοι για την εξαγωγή συμπερασμάτων αξιοπιστίας από δεδομένα φθοράς. Αρχικά αναπτύχθηκαν από ερευνητές ή μηχανικούς που είχαν ανάγκη τις μεθόδους. Ωστόσο, στατιστικές μέθοδοι για την ανάλυση των δεδομένων φθοράς έχουν τώρα ξεκινήσει να αναπτύσσονται σε εμπορικό στατιστικό λογισμικό. Κάποιοι μηχανικοί (π.χ. Murray (1993)) είχαν χρησιμοποιήσει ανεπίσημες απλές μεθόδους ανάλυσης που προσαρμόζουν τα μοντέλα στο απλό μονοπάτι ($\{Y(t): t \geq 0\}$, όπου $Y(t)$ είναι η τιμή της ανέλιξης την χρονική στιγμή t) για μεμονωμένες μονάδες και τα προβλέπουν μέχρι κάποιο επίπεδο αποτυχίας, παρέχοντας ψευδή δεδομένα αποτυχίας, τα οποία θα μπορούσαν να αναλυθούν με κοινές μεθόδους ανάλυσης δεδομένων διάρκειας ζωής. Οι Lu και Meeker (1993) και οι Meeker, Escobar και Lu (1998) χρησιμοποίησαν ένα πιο εξελιγμένο μοντέλο τυχαίων επιδράσεων για να περιγράψουν την μονάδα-προς-μονάδα μεταβλητότητα και έδειξαν πως το μοντέλο φθοράς, μαζί με έναν ορισμό αποτυχίας, οδηγεί σε μία κατανομή του χρόνου αποτυχίας. Σε ορισμένους τομείς εφαρμογών, είναι απαραίτητο να μοντελοποιηθεί η στοχαστική συμπεριφορά στα δειγματικά μονοπάτια με την πάροδο του χρόνου. Για παράδειγμα, οι Lawless και Crowder (2004) χρησιμοποίησαν ένα τέτοιο μοντέλο.

Έχουν υπάρξει αρκετά παραδείγματα όπου η φυσική απόκριση σε έναν έλεγχο αξιοπιστίας είναι μία μεταβλητή φθοράς, αλλά οι αναλυτές (τουλάχιστον αρχικά) μετέτρεπαν τα δεδομένα φθοράς σε δεδομένα χρόνου αποτυχίας, επειδή όλα τα βιβλία ελέγχων και το λογισμικό που γνώριζαν αφορούσαν μόνο δεδομένα ανάλυσης διάρκειας ζωής. Η εφαρμογή η οποία περιγράφεται από τους Meeker, Escobar και Lu (1998) είναι μία τέτοια εφαρμογή. Σε τέτοια παραδείγματα, ο περιορισμένος αριθμός αποτυχιών παρέχει μόνο περιορισμένη πληροφορία για την αξιοπιστία και τα αποτελέσματα μιας ανάλυσης φθοράς ήταν πιο πληροφοριακά.

Όταν μία κατάλληλη μεταβλητή φθοράς μπορεί να μετρηθεί, τα δεδομένα φθοράς, όταν αναλύονται σωστά, μπορούν να προσφέρουν περισσότερη πληροφορία επειδή υπάρχουν ποσοτικές μετρήσεις για όλες τις μονάδες (όχι μόνο αυτές που απέτυχαν). Πράγματι, είναι δυνατή η δημιουργία ισχυρών συμπερασμάτων αξιοπιστίας από δεδομένα φθοράς ακόμα και όταν δεν υπάρχουν αποτυχίες. Φυσικά, δεν είναι πάντοτε δυνατό να βρεθεί μία μεταβλητή φθοράς που να αντιστοιχεί σε μία κατάσταση αστοχίας ενδιαφέροντος.

Ακόμα και όταν δεν είναι διαθέσιμη μία μεταβλητή φθοράς επαναλαμβανομένων μέτρων, μπορεί να είναι δυνατή η διενέργεια καταστροφικών δοκιμών για την αξιολόγηση μονάδων που δεν έχουν αποτύχει.

1.3 Διαδικασίες για δεδομένα φθοράς

Τις τελευταίες δεκαετίες οι διαδικασίες φθοράς έχουν λάβει μεγάλη προσοχή και έχουν αναθεωρηθεί ορισμένες από τις έρευνες που έγιναν πάνω σε αυτές. Στο ξεκίνημα της μελέτης που έγινε πάνω στην αξιοπιστία, οι μηχανικοί περιέγραψαν τις αβεβαιότητες σχετικά με τους χρόνους αποτυχίας χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση επιβίωσης. Γνωρίζοντας το σχήμα μιας τέτοιας συνάρτησης, μπορούν να καθορίσουν και να μελετήσουν τις ιδιότητες του ρυθμού αποτυχίας και με βάση αυτό μπορούν να καθορίσουν τις καλύτερες δυνατές πολιτικές συντήρησης (Abdel-Hameed, 2010). Για να εκτιμηθεί η συνάρτηση επιβίωσης με ακρίβεια (από στατιστικής άποψης), πρέπει να παρατηρηθούν οι χρόνοι αποτυχίας πολλών αντικειμένων και αυτές οι τυχαίες μεταβλητές αποτυχίας θεωρούνται ανεξάρτητες. Στην πράξη, δεν είναι πάντα δυνατόν να παρατηρηθούν πολλές αποτυχίες, και ακόμα και αν είναι δυνατόν να επιτευχθούν τέτοιοι χρόνοι αποτυχίας, δεν είναι ανεξάρτητοι, καθώς όλοι μπορούν να επηρεαστούν από ένα κοινό περιβάλλον. Η άλλη προσέγγιση είναι να εκτιμηθεί η αποτυχία μιας συσκευής με βάση τα χαρακτηριστικά της διαδικασίας που προκάλεσε την αποτυχία της, συνήθως μία διαδικασία φθοράς. Μία τέτοια διαδικασία είναι κοινή στην εκτίμηση της ποσότητας των ρωγμών, της ποσότητας της διάβρωσης και του ερπυσμού και της ποσότητας της μόλυνσης. Δεδομένου ότι πολλές συσκευές αποτυγχάνουν λόγω της φθοράς, η διαδικασία φθοράς είναι κάποιο είδος στοχαστικής διαδικασίας. Υπάρχουν διαφορετικές υποψήφιες συναρτήσεις για τέτοιες διαδικασίες, όπως οι διαδικασίες Lévy, συναρτήσεις των διαδικασιών Wiener, όπως επίσης και οι διαδικασίες Markov απλής μεταπήδησης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο

Μοντέλα για δεδομένα διάρκειας ζωής χωρίς συμμεταβλητές

2.1 Εισαγωγή

Ο χρόνος αποτυχίας των δεδομένων χρησιμοποιείται συνήθως για την εκτίμηση της αξιοπιστίας του προϊόντος (Bagdonavicius και Nikulin, 2000). Η αποτυχία υψηλά αξιόπιστων μονάδων είναι σπάνια και θα πρέπει παράλληλα να χρησιμοποιούνται και άλλες πληροφορίες για τον χρόνο αποτυχίας αποκομμένων δεδομένων. (Δεδομένα για τα οποία δεν δίνεται ο ακριβής χρόνος αποτυχίας). Ένας τρόπος για να αποκτήσουμε αυτές τις συμπληρωματικές πληροφορίες για την αξιοπιστία, είναι να μετρήσουμε κάποιες παραμέτρους που χαρακτηρίζουν την φθορά (π.χ. ηλικία) του προϊόντος στο χρόνο. Ένας άλλος τρόπος, είναι να χρησιμοποιήσουμε υψηλότερα επίπεδα πειραματικών παραγόντων ή συμμεταβλητών (όπως η θερμοκρασία, η τάση ή η πίεση), για να αυξήσουμε τον αριθμό των αποτυχιών και ως εκ τούτου να ληφθεί αξιόπιστη πληροφορία πιο γρήγορα. Ένας τρίτος τρόπος είναι να συνδυαστούν και οι δύο μέθοδοι.

Οι Lu και Meeker (1993), Boulanger και Escobar (1994), Tseng, Hamada και Chiao (1994), Hamada (1995), Chiao και Hamada (1996), και Meeker, Escobar και Lu (1998) μελέτησαν καινούρια μοντέλα φθοράς. Η φθορά σε αυτά τα μοντέλα μοντελοποιείται με την διαδικασία $D(t, \theta)$, όπου t είναι ο χρόνος και θ είναι κάποια πιθανή πολυδιάστατη τυχαία μεταβλητή. Οι Suzuki, Maki και Yokogawa (1993) χρησιμοποίησαν γραμμικά μοντέλα φθοράς για να μελετήσουν την αύξηση της μετρούμενης αντίστασης (αντοχής) ως προς το χρόνο. Ο Dowling (1993) χρησιμοποίησε κυρτά μοντέλα φθοράς για να μελετήσει την ανάπτυξη των ρωγμών κόπωσης. Οι Meeker και Escobar (1998) χρησιμοποίησαν κοίλα μοντέλα φθοράς για να μελετήσουν την ανάπτυξη πρόκλησης αστοχιών αποκόλλησης νημάτων από ένωση χλωριούχου χαλκού σε πίνακες τυπωμένων κυκλωμάτων. Οι Carey και Koenig (1991) χρησιμοποίησαν παρόμοια μοντέλα για να περιγράψουν την φθορά ηλεκτρονικών εξαρτημάτων. Ο Yanagisawa (1997) χρησιμοποίησε μοντέλα φθοράς για να εκτιμήσει την φθορά των ηλιακών κυττάρων του άμορφου πυριτίου.

2.2 Συνάρτηση ρυθμού αποτυχίας (Failure rate function)

Μία κατανομή διάρκειας ζωής αντιπροσωπεύει την αβεβαιότητα του χρόνου αποτυχίας ενός εξαρτήματος ή μιας κατασκευής. Έστω ότι η διάρκεια ζωής έχει μία αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας $F(t)$, με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(t)$, τότε η συνάρτηση του ρυθμού αποτυχίας (ή ρυθμού διακινδύνευσης) ορίζεται ως:

$$r(t) = \frac{f(t)}{1-F(t)} = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)}, t > 0 \quad (2.2.1)$$

Μία πιθανή ερμηνεία της συνάρτησης του ρυθμού αποτυχίας είναι το ότι το $r(t)dt$ αντιπροσωπεύει την πιθανότητα αποτυχίας ενός εξαρτήματος με χρόνο λειτουργίας t , στο χρονικό διάστημα $[t, t+dt]$. Η $r(t)$ καλείται και συνάρτηση διακινδύνευσης (hazard function). Για εξαρτήματα ή κατασκευές που χειροτερεύουν ο ρυθμός αποτυχίας αυξάνεται. Ολοκληρώνοντας και στην συνέχεια θέτοντας σε εκθέτη και τα δύο μέλη της εξίσωσης (2.2.1), παίρνουμε την συνάρτηση επιβίωσης

$$\bar{F}(t) = \exp\left\{-\int_0^t r(\tau)d\tau\right\}.$$

Οι κατανομές της διάρκειας ζωής και οι συναρτήσεις ρυθμού αποτυχίας ή διακοπής είναι χρήσιμες στην μηχανική, αλλά και στον βιοιατρικό χώρο καθώς και αλλού. Σε αυτούς τους τομείς οι καταστάσεις στις οποίες μπορεί να βρίσκεται ένας εξοπλισμός είναι δύο : είτε να λειτουργεί, είτε όχι. Από την άλλη, μία κατασκευή μπορεί να βρίσκεται σε περισσότερες καταστάσεις, ανάλογα με τον βαθμό της φθοράς της.

Ένα σοβαρό μειονέκτημα των βαθμών αποτυχίας είναι το ότι δεν μπορούν να παρατηρηθούν ή να μετρηθούν για ένα συγκεκριμένο εξάρτημα. Λόγω της συνήθους έλλειψης δεδομένων αποτυχίας, μία αξιόπιστη προσέγγιση η οποία βασίζεται αποκλειστικά στις κατανομές διάρκειας ζωής και στους μη παρατηρήσιμους ρυθμούς αποτυχίας είναι μη ικανοποιητική. Σύμφωνα με τον Singpurwalla (1995), μία καλύτερη προσέγγιση θα ήταν η επιλογή ενός μοντέλου βασισμένο στην φυσική εξήγηση της αποτυχίας και των χαρακτηριστικών του λειτουργικού περιβάλλοντος. Τα δυναμικά περιβάλλοντα, όπως οι εφαρμοσμένες πιέσεις και τα φορτία, επηρεάζουν την αποτυχία και μεταβάλλονται μέσα στον χρόνο. Ως εκ τούτου, συνίσταται να μοντελοποιούμε την φθορά μέσα από μία χρονοεξαρτώμενη στοχαστική διαδικασία $\{X(t), t \geq 0\}$, όπου $X(t)$ είναι μία τυχαία ποσότητα για κάθε $t \geq 0$.

2.3 Τυχαίος ρυθμός επιδείνωσης (Random deterioration rate)

Η πιο απλή στοχαστική διαδικασία ορίζεται ως μία χρονοεξαρτώμενη συνάρτηση της οποίας ο μέσος ρυθμός επιδείνωσης της φθοράς ανά μονάδα είναι μία τυχαία ποσότητα. Ένα παράδειγμα αυτού του τύπου στοχαστικής διαδικασίας είναι η αθροιστική ποσότητα επιδείνωσης της φθοράς στο χρόνο t , η οποία ορίζεται ως $X(t) = At$ για κάθε $t \geq 0$, όπου ο μέσος ρυθμός επιδείνωσης της φθοράς A ακολουθεί μία κατανομή πιθανότητας. Τα μοντέλα αξιοπιστίας με βάση έναν τυχαίο ρυθμό επιδείνωσης, έχουν εξελιχθεί από τους Ellingwood και Mori (1993) και Mori και Ellingwood (1993, 1994). Ωστόσο σύμφωνα με τους Pandey και van Noortwijk (2007) τα δειγματικά μονοπάτια τέτοιων μοντέλων είναι ευθείες γραμμές και μία μόνο επιθεώρηση καθορίζει εκ των προτέρων την μελλοντική επιδείνωση. Παρά το γεγονός ότι το μοντέλο τυχαίου ρυθμού επιδείνωσης μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μία προσέγγιση, θα πρέπει να είμαστε προσεκτικοί από την στιγμή που αρχίζουν να εμπλέκονται οι επιθεωρήσεις. Έτσι, για τον σκοπό της επιθεώρησης και της μοντελοποίησης συντήρησης, μπορούμε να βασιστούμε σε άλλες στοχαστικές διαδικασίες (όπως η διαδικασία Markov, της οποίας η κατανομή Γάμμα είναι μία ειδική περίπτωση), οι οποίες μπορούν να συλλάβουν κατάλληλα την χρονική μεταβλητότητα, η οποία σχετίζεται με την εξέλιξη της φθοράς.

2.4 Διαδικασία Wiener

Υπάρχει μία πληθώρα φυσικών φαινομένων που μπορούν να μοντελοποιηθούν ικανοποιητικά με τη διαδικασία Wiener (ή Wiener-Lévy ή Brown). Ένα μικρό σωματίδιο που βρίσκεται μέσα σε κάποιο ρευστό κινείται ακανόνιστα. Μια τέτοια κίνηση λέγεται κίνηση Brown. Ο Einstein εξήγησε αυτή την κίνηση στα πλαίσια της στατιστικής μηχανικής σαν αποτέλεσμα των συνεχών συγκρούσεων του σωματιδίου με τα μόρια του ρευστού (Φίλης, 2006). Επίσης, έχει χρησιμοποιηθεί και για την μοντελοποίηση της αξίας ανταλλαγής μετοχών. Μία χαρακτηριστική ιδιότητα αυτής της διαδικασίας, στο πλαίσιο της δομικής αξιοπιστίας, είναι το ότι η αντίσταση της δομής αυξάνεται και μειώνεται εναλλακτικά, ανάλογα με την ανταλλακτική αξία της μετοχής. Γι' αυτόν τον λόγο, η κίνηση Brown δεν είναι κατάλληλη για την μοντελοποίηση της φθοράς, η οποία είναι μονότονη. Για παράδειγμα, ένα ανάχωμα, του οποίου το ύψος υπόκειται σε μία κίνηση Brown, σύμφωνα με το μοντέλο, μπορεί αυθόρμητα κάποια στιγμή να αυξηθεί, γεγονός που είναι πρακτικά αδύνατον.

Παρόλο που η κίνηση Brown δεν είναι κατάλληλη για την μοντελοποίηση μονοτονικά αυξανόμενης γήρανσης, σίγουρα έχει κάποια μαθηματικά πλεονεκτήματα. Για παράδειγμα, είναι διαθέσιμες σαφείς εκφράσεις, όταν πίεση και η δύναμη υποτίθεται ότι ακολουθούν ανεξάρτητες κινήσεις Brown.

Οι Doksum και Hoyland (1992) εφάρμοσαν την κίνηση Brown σε ένα πείραμα δοκιμής επιταχυνόμενης διάρκειας ζωής με μεταβλητή το φορτίο. Το μοντέλο αποτυχίας κόπωσης αντιστοιχεί στην κατασκευή ενός μετασχηματισμού από μία μη στάσιμη διαδικασία Wiener σε μία στάσιμη διαδικασία Wiener. Αυτό επιτυγχάνεται εκτελώντας έναν μονότονο μετασχηματισμό από τον (επιταχυνόμενο) ή τον ημερολογιακό χρόνο στον μετασχηματισμένο χρόνο ή τον χρόνο λειτουργίας. Στην μηχανική, αυτός ο μετασχηματισμός είναι συνήθως μετασχηματισμός δύναμης, όπου η δύναμη είναι μία γνωστή σταθερά βασισμένη στις φυσικές ιδιότητες του συστήματος. Οι Doksum και Hoyland (1992) παρουσίασαν την κατανομή πιθανότητας κατά την οποία μία διαδικασία φθοράς φτάνει ένα κρίσιμο όριο για πρώτη φορά. Αυτή είναι μία αντίστροφη Γκαουσιανή κατανομή, η οποία μπορεί και εκείνη να μετασχηματιστεί ως προς τον χρόνο. Ο μετασχηματισμός της κλίμακας του χρόνου εφαρμόστηκε επιτυχώς από τους Doksum και Normand (1995), σε μία διαδικασία βιοδείκτη (βιοδείκτης είναι ένας υγιής άνθρωπος, ο οποίος χρησιμοποιείται ως δείκτης και αντιπροσωπεύει την ανοσολογική εξέλιξη μίας νόσου, όπως ο ιός HIV) και από τους Whitmore και Schenkelberg (1997) σε ένα μοντέλο φθοράς αυτορυθμιζόμενων καλωδίων θέρμανσης.

Ο Whitmore (1995) επέκτεινε την διαδικασία φθοράς Wiener με την πιθανότητα των ατελών επιθεωρήσεων. Τα λάθη μέτρησης υποτίθεται ότι είναι ανεξάρτητα, κανονικά κατανομημένα, τυχαίες ποσότητες ακολουθώντας κανονικές κατανομές και είναι ανεξάρτητα από την διαδικασία φθοράς. Μία άλλη ενδιαφέρουσα επέκταση είναι η δισδιάστατη διαδικασία Wiener του Whitmore (1998), στο οποίο συνδυάζονται οι διαδικασίες φθοράς και ένας δείκτης (όπως μία συμμεταβλητή σε ιατρικές εφαρμογές).

Έστω ότι X_t είναι η μετατόπιση του σωματιδίου τη χρονική στιγμή t και $X_0 = 0$. Η μετατόπιση που υφίσταται το σωματίδιο στο διάστημα (t, τ) οφείλεται σε μεγάλο αριθμό συγκρούσεων και κατά συνέπεια του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος η διαφορά $X_\tau - X_t$ είναι μία στοχαστική διαδικασία κατανομημένη κατά Gauss. Επίσης, επειδή το ρευστό είναι σε ισορροπία η κατανομή της διαφοράς $X_{t+h} - X_t$ θα υποτεθεί επίσης Gauss. Όπως θα δούμε αργότερα μία διαδικασία Y_t τέτοια ώστε η στατιστική της είναι ταυτόσημη με αυτήν της Y_{t+h} , για κάθε h λέγεται αμετάβλητη κατά τη στενή έννοια.

Επειδή οι συγκρούσεις είναι τελείως «τυχαίες» θα υποθέσουμε ότι η διαδικασία έχει ανεξάρτητα τμήματα. Αυτές είναι οι διαισθητικές εξηγήσεις της διαδικασίας Wiener.

Αυστηρά τώρα λέμε ότι μια διαδικασία $\{X_t, t \geq 0\}$ είναι Wiener εάν

α. $\{X_t, t \geq 0\}$ έχει αμετάβλητα και ανεξάρτητα τμήματα.

β. Η X_t είναι κανονική $\forall t \geq 0$.

γ. $E(X_t) = 0 \forall t \geq 0$.

δ. $P(X_0 = 0) = 1$ δηλαδή $X_0 = 0$ με πιθανότητα 1 (μ.π. 1).

Η κίνηση Brown μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να περιγράψει πολλά φυσικά φαινόμενα. Έχει το όνομα του Άγγλου βοτανολόγου Robert Brown, ο οποίος πρώτος περιέγραψε (1827) την «ακανόνιστη» κίνηση ενός μικρού σώματος μέσα σε ένα υγρό ή αέριο. Ο Γερμανός φυσικός Albert Einstein (1905) έδειξε ότι η κίνηση αυτή μπορεί να ερμηνευθεί θεωρώντας ότι το σωματίδιο «βομβαρδίζεται» από τα μόρια του υγρού ή του αερίου και για αυτό κινείται ακανόνιστα με «τυχαίο» τρόπο στο χώρο. Τέλος, ο Αμερικανός μαθηματικός Norbert Wiener όρισε αυστηρά και μελέτησε σε βάθος (1918) την ανέλιξη αυτή αποδεικνύοντας πολλές ιδιότητές της (γι' αυτό και η ανέλιξη είναι γνωστή και ως διαδικασία Wiener).

Ο θερμικός θόρυβος στα ηλεκτρικά κυκλώματα και η κίνηση τιμών του χρηματιστηρίου είναι άλλα παραδείγματα διαδικασίας Wiener.

Παρατηρούμε ότι

$$\text{Var}(X_t) = \text{Var}(X_t - X_0) = \text{Var}(X_{t+\tau} - X_t) \quad (2.4.1)$$

$$\text{Var}(X_\tau) = \text{Var}(X_\tau - X_0) \quad (2.4.2)$$

αφού $X_t = X_t - X_0$ μ.π. 1 και οι $(X_t - X_0)$, $(X_{t+\tau} - X_t)$ έχουν την ίδια στατιστική. Από τις (2.4.1) και (2.4.2) προκύπτει ότι

$$\text{Var}(X_t) + \text{Var}(X_\tau) = \text{Var}(X_{t+\tau} - X_t) + \text{Var}(X_t - X_0)$$

επειδή οι $(X_t - X_0)$, $(X_{t+\tau} - X_t)$ είναι ανεξάρτητες είναι και ασυσχέτιστες. Με βάση τις ιδιότητες αυτών των ασυσχέτιστων διαδικασιών προκύπτει ότι $\text{Var}(X_{t+\tau} - X_t) + \text{Var}(X_t - X_0) = \text{Var}(X_{t+\tau} - X_t + X_t - X_0)$. Οπότε τελικά προκύπτει ότι

$$\text{Var}(X_t) + \text{Var}(X_\tau) = \text{Var}(X_{t+\tau} - X_t) + \text{Var}(X_t - X_0) = \text{Var}(X_{t+\tau}) \quad (2.4.3).$$

Η (2.4.3) είναι της μορφής $f(t_1+t_2) = f(t_1) + f(t_2)$ όπου $f(t) \geq 0, t \geq 0$. Οι μόνες συναρτήσεις που ικανοποιούν αυτή τη σχέση και λαμβάνουν τιμές στο \mathbb{R} είναι της μορφής $f(t) = \sigma^2 t, \forall t \geq 0$, όπου $\sigma \in \mathbb{R}$. Από την (2.4.3) βλέπουμε ότι

$$\text{Var}(X_{t+\tau} - X_\tau) = \text{Var}(X_{t+\tau}) - \text{Var}(X_\tau).$$

Θέτουμε $t + \tau \equiv s$ τότε $\text{Var}(X_s - X_\tau) = \sigma^2 s - \sigma^2 \tau = \sigma^2 (s - \tau)$ και γενικά

$$\text{Var}(X_t - X_\tau) = \sigma^2 |t - \tau|, \text{ όπου } t \geq \tau \text{ ή } t \leq \tau. \quad (2.4.4)$$

Η παράμετρος σ^2 λέγεται παράμετρος μεταβλητότητας και υπολογίζεται εμπειρικά. Η συσχέτιση είναι:

$$\begin{aligned} R(t, \tau) &= E(X_t, X_\tau) = E\{[(X_t - X_\tau) + X_\tau] X_\tau\} \\ &= E[(X_t - X_\tau) X_\tau] + E(X_\tau^2) = 0 + \sigma^2 \tau \end{aligned}$$

επειδή $X_\tau = X_t - X_0$ και τα τμήματα $(X_t - X_\tau)$ και $(X_\tau - X_0)$ είναι ανεξάρτητα εφ' όσον $t > \tau$.
Εν γένει

$$R(t, \tau) = \sigma^2 \min(t, \tau), \text{ όπου } t \geq \tau \text{ ή } t \leq \tau. \quad (2.4.5)$$

2.5 Διαδικασίες Markov

Σύμφωνα με τους Barlow και Proschan (1965) η επιδείνωση της φθοράς συνήθως υποτίθεται ότι είναι μία διαδικασία Markov. Μιλώντας χοντρικά, μία διαδικασία Markov είναι μία στοχαστική διαδικασία με την ιδιότητα ότι δίνοντας στο $X(t)$ την τιμή του $X(\tau)$, όπου $\tau > t$, οι τιμές που προκύπτουν είναι ανεξάρτητες από το $X(u)$, όπου $u < t$. Δηλαδή, η δεσμευμένη κατανομή του μελλοντικού $X(\tau)$, δοθέντος του παρόντος $X(t)$ και του παρελθόντος $X(u)$, όπου $u < t$, είναι ανεξάρτητη από το παρελθόν. Οι τάξεις από διαδικασίες Markov, οι οποίες είναι χρήσιμες στην μοντελοποίηση της στοχαστικής επιδείνωσης είναι οι διαδικασίες Markov διακριτού χρόνου, οι οποίες έχουν ένα πεπερασμένο ή αριθμήσιμο χώρο κατάστασης (οι οποίες ονομάζονται Markovιανές αλυσίδες) και οι διαδικασίες Markov συνεχούς χρόνου με ανεξάρτητες προσauξήσεις, όπως η κίνηση Brown (η οποία επίσης καλείται κατανομή Gauss η διαδικασία Wiener), (βλέπε και παράγραφο 2.4) η σύνθετη διαδικασία Poisson και η κατανομή Γάμμα. Η υπόθεση των ανεξάρτητων προσauξήσεων είναι πιο περιοριστική από την Markovιανή ιδιότητα. Επειδή οι προσauξήσεις $X(\tau) - X(t)$ είναι ανεξάρτητες του $X(t)$ και του $X(\tau) = X(t) + [X(\tau) - X(t)]$, η στοχαστική διαδικασία $\{X(t), t \geq 0\}$ είναι Markovιανή. Ως

εκ τούτου, η συσσώρευση ζημιών με ανεξάρτητες προσαυξήσεις οδηγεί στην Μαρκοβιανή ιδιότητα.

2.6 Μονότονα αυξανόμενες διαδικασίες μεταπήδησης

Σύμφωνα με την επισκόπηση του Singpurwalla (1995), πάνω στις στοχαστικές διαδικασίες φθοράς, ο Mercer (1959, 1961) ίσως είναι ο πρώτος που περιγράφει την φθορά με μία στοχαστική διαδικασία. Οι Mercer και Smith (1959) πρότειναν την μοντελοποίηση της φθοράς ενός ιμάντα μεταφοράς σαν μία διαδικασία ενός μονοδιάστατου τυχαίου περιπάτου, στην οποία τα βήματα της φθοράς συμβαίνουν τυχαία στο χρόνο με σταθερό μέσο ρυθμό με τα μεγέθη του βήματος να είναι μη αρνητικά, ανεξάρτητα και κανονικά κατανομημένα. Ορίζουν την αποτυχία, ως το γεγονός κατά το οποίο η φθορά φθάνει ένα επίπεδο στο οποίο ο ιμάντας θεωρείται ότι έχει καταστραφεί τελείως.

Ο Esary (1973) μελέτησε τις κατανομές διάρκειας ζωής συσκευών που υποβάλλονται σε μια ακολουθία διαταραχών που συμβαίνουν τυχαία στο χρόνο καθώς τα γεγονότα ανήκουν σε μια ομογενή διαδικασία Poisson. Για παράδειγμα, εξήγαγαν την πιθανότητα ότι η ζημιά που προκαλείται από διαταραχές συσσωρεύεται μέχρι την υπέρβαση του ορίου, το οποίο οδηγεί σε αποτυχία. Εκτός από τα μοντέλα για τη φθορά η οποία συσσωρεύεται σε διακριτές ποσότητες σε απομονωμένα σημεία στο χρόνο, θεωρούν μοντέλα για συνεχή φθορά ως ένα όριο διακριτών μοντέλων διαταραχών. Τα τελευταία μοντέλα αντιπροσωπεύουν στοχαστικές διαδικασίες με προσαυξήσεις, οι οποίες είναι μη αρνητικές, σταθερές και ανεξάρτητες (όπως η σύνθετη διαδικασία Poisson και η κατανομή Γάμμα). Επίσης θεωρούνται τυχαία όρια αποτυχίας. Οι Abdel-Hameed και Proschan (1973) επέκτειναν τα σταθερά μοντέλα διαταραχών του Esary (1973) σε μη σταθερά θεωρώντας ότι οι διαταραχές προέρχονται από μία μη ομογενή διαδικασία Poisson, αντί από μία ομογενή διαδικασία Poisson. Οι Sobczyk και Spencer (1992) χρησιμοποίησαν την σύνθετη διαδικασία Poisson, ανάμεσα σε άλλες, για την μοντελοποίηση της τυχαίας κόπωσης.

Ο Abdel-Hameed (1984) εξήγαγε ιδιότητες κατανομής διάρκειας ζωής (όπως ιδιότητες ρυθμού αποτυχίας) συσκευών που υπόκεινται σε μη αυξανόμενη διαδικασία απλής μεταπήδησης. Οι Shaked και Shanthikumar (1988) μελέτησαν τις πιθανολογικές ιδιότητες του χρόνου που χρειάζεται μία τέτοια διαδικασία, η οποία ξεκινάει από το μηδέν, μέχρι να περάσει ένα μη αρνητικό όριο, το οποίο καλείται χρόνος πρώτου περάσματος. Μία ειδική περίπτωση διαδικασίας απλής μεταπήδησης είναι η μονόπλευρη διαδικασία Lévy, (έχοντας ανεξάρτητες και σταθερές προσαυξήσεις), η οποία μελετήθηκε από τον Abdel-Hameed

(1984). Και οι δύο έρευνες μελετάνε την πολιτική της αντικατάστασης ηλικίας. Ο Zuckerman (1978) επίσης θεώρησε την φθορά ως μία μονόπλευρη διαδικασία Lévy, αλλά όρισε το επίπεδο του ορίου ελέγχου στο οποίο γίνεται προληπτική αντικατάσταση, ως μία μεταβλητή απόφασης και όχι ως ένα διάστημα αντικατάστασης ηλικίας. Αυτή η μελέτη επεκτείνει το μοντέλο αντικατάστασης του Zuckerman (1980), στο οποίο η φθορά περιγράφεται ως μία σύνθετη διαδικασία Poisson.

2.7 Μοντελοποίηση φθοράς

Η κίνηση Brown είναι μία στοχαστική διαδικασία $\{X(t), t \geq 0\}$ με ανεξάρτητες, πραγματικών τιμών προσαυξήσεις και μειώσεις, ακολουθώντας μία Κανονική κατανομή με μέση τιμή μt και διακύμανση $\sigma^2 t$ για κάθε $t \geq 0$. Η σύνθετη διαδικασία Poisson είναι μία στοχαστική διαδικασία με ανεξάρτητες και κανονικά κατανομημένες μεταπηδήσεις που συμβαίνουν σύμφωνα με μία κατανομή Poisson. Η διαδικασία Γάμμα είναι μία στοχαστική διαδικασία με ανεξάρτητες, μη αρνητικές προσαυξήσεις, οι οποίες ακολουθούν μία κατανομή Γάμμα με μία κανονική παράμετρο κλίμακας. Όπως η σύνθετη διαδικασία Poisson, η κατανομή Γάμμα είναι μία διαδικασία μεταπήδησης. Σύμφωνα με τους Singpurwalla και Wilson (1998), η κύρια διαφορά μεταξύ αυτών των δύο διαδικασιών μεταπήδησης, είναι η ακόλουθη. Οι σύνθετες διαδικασίες Poisson έχουν πεπερασμένο αριθμό μεταπηδήσεων σε πεπερασμένα χρονικά διαστήματα, ενώ οι διαδικασίες Γάμμα έχουν άπειρο αριθμό μεταπηδήσεων σε πεπερασμένα χρονικά διαστήματα. Οι πρώτες είναι κατάλληλες για την μοντελοποίηση χρήσεων όπως η ζημιά που προκαλείται λόγω σποραδικών σοκ και οι τελευταίες είναι κατάλληλες για την περιγραφή σταδιακών βλαβών από συνεχή χρήση.

Σε γενικές γραμμές, οι διαδικασίες Lévy είναι στοχαστικές διαδικασίες οι οποίες είναι συνεχείς στο χρόνο με ανεξάρτητες και στάσιμες προσαυξήσεις με δεξιά συνεχή μονοπάτια δείγματος, τα οποία έχουν αριστερά όρια. Μία στοχαστική διαδικασία έχει στάσιμες προσαυξήσεις, αν η κατανομή πιθανότητας των προσαυξήσεων $X(t+h) - X(t)$ εξαρτάται μόνο από το h , για κάθε $t, h \geq 0$. Κάθε διαδικασία Lévy μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα μιας κίνησης Brown, ενός ντετερμινιστικού κομματιού (γραμμικού στο χρόνο) και ενός ακεραίου κομματιού σύνθετων διαδικασιών Poisson, όπου όλες οι συμμετέχουσες διαδικασίες είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Τα δειγματικά μονοπάτια των διαδικασιών Lévy είναι ασυνεχή με πιθανότητα 1 αν η διαδικασία είναι μονότονη, επειδή μία τέτοια διαδικασία μπορεί να

αποσυντεθεί σε ένα γραμμικό κομμάτι και σε ένα ακέραιο κομμάτι σύνθετων διαδικασιών Poisson. Τα δειγματικά μονοπάτια της κίνησης Brown είναι συνεχή με πιθανότητα 1.

Γενικά η φθορά μπορεί να μοντελοποιηθεί με πολλούς τρόπους :

- Ως ένα μαύρο-κουτί χρονικής διάρκειας μέχρι την αποτυχία (όπως μία κατανομή διάρκειας ζωής), (a black-box statistical time to failure)
- Ως ένα γκρι κουτί μοντέλο φορτίου αντοχής βασισμένο σε μία μετρήσιμη ποσότητα υποδηλώνοντας την χρόνο-εξαρτώμενη φθορά και αποτυχία (όπως η κίνηση Brown και η κατανομή Γάμμα), (a grey-box stress-strength model)
- Ως ένα άσπρο κουτί μοντέλο μέσα από προσομοίωση της φυσικής, μετρήσιμης φθοράς και αποτυχίας (as a white-box model).

Οι δύο τελευταίες περιπτώσεις μπορούν να χωριστούν σε περιπτώσεις κατά τις οποίες η κατάσταση του συστήματος παρακολουθείται συνεχώς και σε περιπτώσεις κατά τις οποίες θα πρέπει να πραγματοποιούνται περιοδικοί έλεγχοι.

Στην βιβλιογραφία για την μοντελοποίηση της φθοράς η κατανομή Γάμμα (βλέπε παράγραφο 3.2) όπως επίσης και η κίνηση Brown (βλέπε παράγραφο 2.4) έχουν χρησιμοποιηθεί για να προβλέψουν την τιμή της μετρούμενης ποσότητας. Ο Dekker (1998) χρησιμοποιεί την διαδικασία της κίνησης Brown για να περιγράψει διαφορετικές μορφές της φθοράς των δρόμων από ασφαλτο. Οι Van Noortwijk και Klatter (1999) μοντελοποίησαν την εξέλιξη του καθαρισμού τρυπών σε χαλάκια μπλοκ με μία κατανομή Γάμμα. Ο Van Noortwijk (2009) χρησιμοποιεί επίσης την γενικευμένη κατανομή Γάμμα για να περιγράψει την διάβρωση της άμμου, την παρακμή του επιπέδου κορυφής και την ακτοπλοϊκή μεταφορά. Παρόλο που ο Dekker (1998) μιλάει για την ιδιότητα των αρνητικών προσαυξήσεων της κίνησης Brown (η οποία είναι μερικές φορές ανεπιθύμητη), δεν συγκρίνουν αυτήν την κατανομή με την κατανομή Γάμμα. Από την άλλη, στο άρθρο των Van Noortwijk και Klatter (1999) και του Van Noortwijk (2007), τα πιθανά μειονεκτήματα της κατανομής Γάμμα δεν αναφέρονται και αυτή η κατανομή δεν συγκρίνεται με την κίνηση Brown. Οι Meeker και Escobar (1998) αναφέρουν έναν άλλο τρόπο μοντελοποίησης της φθοράς. Θεωρούν την φθορά διαφορετικών μονάδων, μετρούμενη σε διαφορετικά χρονικά σημεία καταλήγοντας σε ένα διαφορετικό δρόμο φθοράς για κάθε μονάδα. Προτείνουν ένα μοντέλο παλινδρόμησης, όπου η συνάρτηση παλινδρόμησης εξαρτάται από τον (μετασχηματισμένο) χρόνο. Οι παράμετροι παλινδρόμησης μπορεί να είναι τυχαίες και κάθε μονάδα μπορεί να έχει διαφορετικές παραμέτρους. Ο όρος του σφάλματος υποτίθεται ότι είναι κανονικά κατανεμημένος. Ωστόσο, πρέπει να σημειωθεί

ότι ένα μοντέλο παλινδρόμησης δεν μπορεί να συμπεριλάβει την χρονική μεταβλητότητα που σχετίζεται με την εξέλιξη της φθοράς. Συνεπώς, η φθορά σε ένα συγκεκριμένο κομμάτι δείγματος είναι ντετερμινιστική στο μοντέλο παλινδρόμησης, ενώ ποικίλει πιθανοκρατικά στην κίνηση Brown και στο μοντέλο κατανομής Γάμμα. Έχουν γραφτεί πολλά για την μοντελοποίηση της φθοράς συστημάτων που εκτίθενται σε εξωτερικές καιρικές συνθήκες. Για παράδειγμα, οι Chan και Meeker (2001) συσχέτισαν την φθορά με τους περιβαλλοντικούς παράγοντες, όπως τον καιρό. Αυτοί οι παράγοντες μετασχηματίζονται σε έναν ρυθμό φθοράς. Μία προσέγγιση χρονοσειράς προτείνεται για να προβλέψει την καθημερινή φθορά. Ο Heutink (2004) περιέγραψε τον τρόπο με τον οποίο η μεθοδολογία συντήρησης, που χρησιμοποιείται στην Ολλανδία, εφαρμόζεται στα συστήματα προστασίας βαφών. Το μοντέλο επέκτασης της διατήρησης της διάρκειας ζωής, στο οποίο η φθορά μοντελοποιείται με μία κατανομή Γάμμα, με αναμενόμενη φθορά μη γραμμική στο χρόνο, εφαρμόζεται επιτυχώς στη βελτιστοποίηση της διατήρησης της επίστρωσης του φράγματος καταϊγίδας-κύματος στο Haringvliet.

Στο άρθρο τους οι Nicolai, Dekker και Noortwijk (2007) δεν μοντελοποιούν την φθορά της επίστρωσης πάνω σε δύο συγκεκριμένες μεταλλικές δομές μόνο με μία κατανομή Γάμμα και με μία κίνηση Brown, αλλά προσομοιώνουν επίσης μία φυσική διαδικασία η οποία αναφέρεται ως δύο σταδίων χτυπήματος και ανάπτυξης διαδικασία. Και οι δύο προηγούμενες στοχαστικές διαδικασίες ανήκουν στην κατηγορία των διαδικασιών Lévy. Περιορίζοντας αυτήν την κατηγορία σε διαδικασίες με συνεχή δειγματικά μονοπάτια, οδηγούμαστε στην διαδικασία Wiener ή στην κίνηση Brown. Από την άλλη πλευρά, επιβάλλοντας την μονοτονία μπορεί να οδηγήσει σε διαδικασίες μεταπήδησης, η κατανομή Γάμμα είναι μία διαδικασία μεταπήδησης. Η προσομοίωση μιας φυσικής διαδικασίας είναι πιθανόν να δώσει μια περισσότερη διορατικότητα και ίσως να ταιριάζει καλύτερα, δεδομένου ότι σχετίζεται περισσότερο με μία πραγματική φυσική διαδικασία. Επειδή η φθορά του περιβάλλοντος είναι αργή, τα δεδομένα είναι σπάνια. Όλες οι κατανομές προσαρμόζονται σε δεδομένα δύο τύπων : δεδομένα τα οποία βασίζονται σε κρίση των εμπειρογνομώνων και σε αποτελέσματα επιθεωρήσεων. Με αυτόν τον τρόπο, συγκρίνουμε αυτές τις κατανομές εμπειρικά και καθορίζουμε τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα για κάθε μοντέλο. Επιπλέον, θεωρούμε την καταλληλότητα των μοντέλων, καθώς και τη δυνατότητα εφαρμογής και για τους δύο τύπους δεδομένων, δηλαδή, κρίση των εμπειρογνομώνων και δεδομένα επιθεωρήσεων.

Υποθέτουμε ότι μία αύξουσα στοχαστική διαδικασία $Z(t)$ περιγράφει το επίπεδο φθοράς κάποιων αντικειμένων. Μερικές φορές ο τύπος της συνάρτησης της μέσης τιμής της φθοράς

$m(t) = E[Z(t)]$ είναι γνωστός, ενώ άλλες φορές όχι. Για παράδειγμα, ο μέσος ρυθμός προστασίας της φθοράς των ελαστικών $m'(t)$ μειώνεται σταδιακά με τον χρόνο και μετά από κάποιο σύντομο χρονικό διάστημα, σταθεροποιείται πρακτικά στην τιμή γ_0 . Μπορεί επομένως, να μοντελοποιηθεί από την συνάρτηση $m'(t) = \gamma_0 + \gamma_1 e^{-\gamma_2 t}$. Σε αυτήν την περίπτωση η μέση τιμή της φθοράς είναι

$$m(t) = \gamma_0 t + \frac{\gamma_1}{\gamma_2} (1 - \gamma_1 e^{-\gamma_2 t}), \gamma_i > 0. \quad (2.7.1)$$

Αν η αρχική επιταχυνόμενη περίοδος φθοράς λείπει, τότε η $m(t) = \gamma_0 t$ είναι μία γραμμική συνάρτηση.

Η μέση σχετική φωτεινότητα των διόδων εκπομπής φωτός είναι η μη-γραμμική συνάρτηση $d(t) = (1 + \gamma_0 t^{\gamma_1})^{-1}$ και η μέση φθορά μπορεί να προσδιορισθεί ως

$$m(t) = \gamma_0 t^{\gamma_1}. \quad (2.7.2)$$

Σε αυτήν την περίπτωση $m(0) = 0$ και η μέση φθορά αυξάνεται. Υπάρχει μία προς μία αντιστοιχία ανάμεσα στις τιμές του $m(t)$ και $d(t)$.

Σε πολλές εφαρμογές στις οποίες η φθορά προσεγγίζει ένα σημείο κορεσμού όπου και σταματάει (π.χ όταν η οξειδωση σταματάει), η μέση φθορά μπορεί να οριστεί από την συνάρτηση

$$m(t) = \gamma_0 (1 - e^{-\gamma_1 t^{\gamma_2}}), \gamma_i > 0. \quad (2.7.3)$$

Υποθέτουμε ότι $m(0) = 0$ και ότι η $m(t)$ είναι αύξουσα και συνεχώς παραγωγίσιμη στο $[0, \infty]$.

Θεωρούμε δύο περιπτώσεις :

1. Η συνάρτηση $m(t)$ παραμετροποιείται με έναν συγκεκριμένο τρόπο : $m(t) = m(t, \gamma)$, όπου $\gamma = (\gamma_0, \dots, \gamma_m)^T$ είναι άγνωστοι παράμετροι. Οι παραμετροποιήσεις (2.7.1) – (2.7.3) είναι παραδείγματα τέτοιων παραμετροποιήσεων.

2. Η συνάρτηση $m(t)$ είναι τελείως άγνωστη.

Υποθέτουμε ότι η διαδικασία φθοράς είναι μία διαδικασία με ανεξάρτητες προσαυξήσεις, π.χ για κάθε $0 = t_0 < \dots < t_m$ οι τυχαίες μεταβλητές $Z(t_i) - Z(t_{i-1})$, ($i = 1, \dots, m$) είναι ανεξάρτητες. Η διαδικασία $Z(t)$ είναι αύξουσα στον χρόνο, όπως επίσης και η διακύμανσή της. Υποθέτουμε ότι αυτή η διακύμανση είναι ανάλογη της μέσης φθοράς :

$$\text{Var}\{Z(t)\} = \sigma^2 m(t).$$

Εάν η μέση φθορά είναι μία γραμμική συνάρτηση του χρόνου, τότε η διακύμανση είναι ανάλογη με το χρόνο. Υπό ένα τέτοιο μοντέλο, για $s < t$ έχουμε $\text{cov}(Z(s), Z(t)) = \sigma^2 m(s)$ και $\text{corr}(Z(s), Z(t)) = \sqrt{m(s)/m(t)}$.

Έστω ότι $\Delta Z(t) = Z(t + \Delta t) - Z(t)$, τότε

$$\mathbf{E}(\Delta Z(t)) = m(t + \Delta t) - m(t) \text{ και}$$

$$\text{Var}\{\Delta Z(t)\} = \sigma^2(m(t + \Delta t) - m(t)).$$

Σημειώνουμε ότι το μοντέλο με τις Γκαουσιανές προσαυξήσεις $Z(t) \sim N(m(t), \sigma^2 m(t))$, δεν είναι καλό, επειδή υπάρχει μία θετική πιθανότητα μιας αρνητικής φθοράς. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με το γεγονός ότι η φθορά αυξάνεται. Μία άλλη διαδικασία η οποία ικανοποιεί την συνθήκη ότι οι κατανομές των $Z(t)$ και $\Delta Z(t)$ πρέπει να είναι της ίδιας οικογένειας, και η $Z(t)$ να έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις, είναι η κατανομή Γάμμα με δεξιά συνεχείς τροχιές (βλέπε παράγραφο 3.2). Έτσι υποθέτουμε ότι $Z(t) = \sigma^2 \gamma(t)$, όπου $\gamma(t)$ είναι μία διαδικασία με ανεξάρτητες προσαυξήσεις:

$$\gamma(t) \sim G(1, \nu(t)) = G(1, \frac{m(t)}{\sigma^2}),$$

$$\Delta \gamma(t) = \gamma(t + \Delta) - \gamma(t) \sim G(1, \frac{\Delta m(t)}{\sigma^2}).$$

Η $\gamma(t)$ ακολουθεί την κατανομή Γάμμα με παράμετρο κλίμακας 1 και παράμετρο σχήματος

$$\nu(t) = \frac{m(t)}{\sigma^2} \text{ και η πυκνότητα του } \gamma(t) \text{ είναι } p_{\gamma(t)}(x) = \frac{x^{\nu(t)-1}}{\Gamma(\nu(t))} e^{-x}, x \geq 0.$$

Τότε

$$\mathbf{E}(Z(t)) = m(t) \text{ και } \text{Var}(Z(t)) = \sigma^2 m(t).$$

Μία αποτυχία η οποία προκαλείται από την φθορά συμβαίνει όταν το $Z(t)$ φτάνει την τιμή z_0 . Εκείνη η στιγμή της αποτυχίας είναι

$$T = \sup\{t: Z(t) < z_0\} = \inf\{t: Z(t) \geq z_0\}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο

Ανέλιξη Γάμμα

3.1 Ιστορική αναδρομή

Η εφαρμογή της διαδικασίας Γάμμα στην συντήρηση σχολιάζεται εκτενώς από τον van Noortwijk (2009). Μετά την εμφάνιση της κατανομής Γάμμα στην περιοχή της αξιοπιστίας το 1975, χρησιμοποιείται ευρέως για την στοχαστική μοντελοποίηση της φθοράς της βελτιστοποίησης της συντήρησης. Επειδή η κατανομή Γάμμα είναι κατάλληλη για την μοντελοποίηση της χρονικής μεταβλητότητας της φθοράς, έχει αποδειχθεί ότι είναι χρήσιμη στον προσδιορισμό των βέλτιστων αποφάσεων ελέγχου και συντήρησης.

Κατά τη διάρκεια των τελευταίων δεκαετιών, αυξάνεται συνεχώς το κόστος συντήρησης των μηχανικών δομών και υποδομών (όπως δρόμοι, σιδηρόδρομοι, γέφυρες, κτίρια και βιομηχανικές εγκαταστάσεις). Σύμφωνα με τους Dekker και Scarf (1998), αυτό συμβαίνει κυρίως λόγω της συνεχούς επέκτασης του αποθέματος των δομών και των υποδομών, τις πιο αυστηρές απαιτήσεις επιδόσεων, και την εξωτερική ανάθεση της συντήρησης. Προκειμένου να μειωθεί το κόστος της συντήρησης και της αποτυχίας, εφαρμόζονται όλο και περισσότερο στον τομέα της διαχείρισης της συντήρησης επιστημονικές τεχνικές, όπως μαθηματικά μοντέλα βελτιστοποίησης.

Μία χαρακτηριστική ιδιότητα της βελτιστοποίησης της συντήρησης είναι ότι οι αποφάσεις συνήθως πρέπει να παίρνονται κάτω από αβεβαιότητα (όπως η φθορά και το κόστος). Στη διαχείριση της συντήρησης, γενικά η πιο σημαντική αβεβαιότητα είναι η αβεβαιότητα του χρόνου αποτυχίας (διάρκεια ζωής) και / ή του ρυθμού φθοράς. Μέχρι τις αρχές της δεκαετίας του ενενήντα, τα περισσότερα μαθηματικά μοντέλα συντήρησης βασίζονταν στην περιγραφή της αβεβαιότητας της γήρανσης χρησιμοποιώντας μία κατανομή διάρκειας ζωής. Ένα μειονέκτημα μιας κατανομής διάρκειας ζωής είναι ότι ποσοτικοποιεί μόνο το εάν ένα συστατικό λειτουργεί ή όχι. Προκειμένου να αναπαραστήσουμε την γήρανση με μία κατανομή διάρκειας ζωής, εφαρμόζουμε την γνωστή συνάρτηση ρυθμού αποτυχίας. Ωστόσο, ο ρυθμός αποτυχίας είναι χρήσιμος μόνο για την εξαγωγή συμπερασμάτων για μεγάλο πλήθος εξαρτημάτων, παρά για ένα. Στην πραγματικότητα, οι ρυθμοί αποτυχίας δεν μπορούν να μετρηθούν ή να παρατηρηθούν για ένα μόνο εξάρτημα.

Στη δομική μηχανική είναι γενικά πιο ελκυστικό να βασίζουμε ένα μοντέλο αποτυχίας στη φυσική εξήγηση της αποτυχίας και τα χαρακτηριστικά του λειτουργικού περιβάλλοντος. Ως

εκ τούτου, προτείνεται η μοντελοποίηση της φθοράς σε σχέση με την χρονο-εξαρτώμενη στοχαστική διαδικασία. Στην δομική μηχανική υποστηρίζονται χρονο-εξαρτώμενες συναρτήσεις, για τις οποίες οι συμμεταβλητές (όπως ο μέσος ρυθμός φθοράς ανά μονάδα χρόνου) είναι τυχαίες ποσότητες. Ωστόσο, ο Pandey (2007) επισήμανε ότι η χρονική μεταβλητότητα δεν λαμβάνεται υπόψη σε αυτά τα μοντέλα τυχαίας μεταβλητής. Για παράδειγμα, στην περίπτωση ενός γραμμικού κανόνα φθοράς με μέσο τυχαίο ρυθμό φθοράς, μία μικρή έρευνα η οποία έχει γίνει ήδη, αποκαλύπτει πλήρως την μελλοντική εξέλιξη της φθοράς.

Για να μοντελοποιήσουμε σωστά την χρονική μεταβλητότητα της φθοράς, θα πρέπει να βασιστούμε σε άλλες στοχαστικές διαδικασίες (όπως οι Μαρκοβιανές διαδικασίες). Οι Μαρκοβιανές διαδικασίες περιλαμβάνουν στοχαστικές διαδικασίες με ανεξάρτητες προσαυξήσεις, όπως η κίνηση Brown, η σύνθετη διαδικασία Poisson και η κατανομή Γάμμα. Για την στοχαστική μοντελοποίηση της μονότονης και σταδιακής φθοράς, η κατανομή Γάμμα είναι η πλέον κατάλληλη.

Η κατανομή Γάμμα ήταν η πρώτη κατανομή που εφαρμόστηκε από τον Moran (1954) σε μία σειρά από δημοσιεύσεις και επίσης, εκδόθηκε ένα βιβλίο στα μέσα του περασμένου αιώνα, για την μοντελοποίηση της ροής του νερού μέσα σε ένα φράγμα. Το 1975, ο Abdel-Hameed πρότεινε να χρησιμοποιείται η κατανομή Γάμμα για την μοντελοποίηση της φθοράς που συμβαίνει τυχαία στο χρόνο. Κατά την διάρκεια των τριών τελευταίων δεκαετιών, η κατανομή Γάμμα, προσαρμόστηκε ικανοποιητικά σε δεδομένα σχετικά με τον ερπυσμό του σκυροδέματος, την αύξηση των ρωγμών κόπωσης, τις πύλες του διαβρωμένου χάλυβα, την λέπτυνση λόγω διάβρωσης και χλωριούχου διείσδυσης στο σκυρόδεμα. Στατιστικές μέθοδοι οι οποίες αναπτύχθηκαν περιλαμβάνουν την μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας, την μέθοδο των ροπών, όπως επίσης και την Μπενζιανή μέθοδο με τέλειο και ατελή έλεγχο.

Μετά από το πρώτο του άρθρο ο Abdel-Hameed (1975), χρησιμοποίησε την διαδικασία φθοράς Γάμμα, ως δομικό στοιχείο για την ανάπτυξη μαθηματικών μοντέλων για την βελτιστοποίηση της χρονοεξαρτώμενης συντήρησης και της συντήρησης που εξαρτάται από την κατάσταση. Τα κύρια χαρακτηριστικά του τελευταίου μοντέλου είναι η περιοδική εξέταση, η αποτυχία η οποία γίνεται αντιληπτή μόνο κατά την εξέταση, το τυχαίο επίπεδο αποτυχίας, το μη προεξοφλημένο κόστος και το ένα μόνο στοιχείο. Πρόσφατα ο Abdel-Hameed (2004) συμπεριέλαβε την απεριοδική εξέταση και το προεξοφλημένο κόστος σ' αυτό το μοντέλο. Οι επεκτάσεις του μοντέλου συντήρησης με βάση την κατάσταση του Abdel-Hameed (2004), αλλά με σταθερό επίπεδο αποτυχίας, περιλαμβάνουν απεριοδική εξέταση

συνδυασμένη με τις πιθανότητες μερικής επιδιόρθωσης και ένα σύστημα σειράς δύο συστατικών. Ο Park (1988) πρότεινε παραλλαγές με σταθερό επίπεδο αποτυχίας, του μοντέλου συντήρησης με βάση την κατάσταση του Abdel-Hameed (2004) στο οποίο οι αποτυχίες ανιχνεύονταν αμέσως. Οι επεκτάσεις στο μοντέλο του Park (1988) με σταθερό επίπεδο αποτυχίας, περιλαμβάνουν διάκριση μεταξύ του πρώτου και του επόμενου χρονικού διαστήματος επιθεωρήσεων, προεξοφλημένο κόστος, ατελή επιθεώρηση, απεριόριστη επιθεώρηση, δύο τρόπους αστοχίας και δύο τρόπους υποβάθμισης.

Για να μοντελοποιήσουμε την στοχαστική φθορά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε είτε μία συνάρτηση βαθμού αποτυχίας, είτε μία στοχαστική διαδικασία, όπως μία τυχαία βαθμιαία φθορά, μία διαδικασία Markov, μία κίνηση Brown, και μία μη φθίνουσα διαδικασία μεταπήδησης (της οποίας μία ειδική περίπτωση είναι η κατανομή Γάμμα)

Προκειμένου η στοχαστική διαδικασία φθοράς να είναι μονότονη, θα ήταν καλύτερο να την θεωρήσουμε ως μια διαδικασία Γάμμα. Μοντελοποιούμε την φθορά με μία διαδικασία Γάμμα, η οποία περιλαμβάνει πιθανόν χρονικά εξαρτημένες μεταβλητές, όπως και στα μοντέλα στα οποία η πιθανότητα ενός τραυματικού γεγονότος εξαρτάται από την φθορά. Οι περιπτώσεις παραμετροποιημένων και τελείως άγνωστων συναρτήσεων μέσης φθοράς, μελετούνται ακόμη. Θεωρούμε μοντέλα στα οποία η φθορά μετριέται με σφάλματα.

Με άλλα λόγια, μια διαδικασία Γάμμα είναι μια στοχαστική διαδικασία με ανεξάρτητες, μη-αρνητικές προσαυξήσεις (π.χ., οι προσαυξήσεις της κορυφής σε επίπεδο παρακμής ενός αναχώματος) η οποία ακολουθεί μία κατανομή Γάμμα με κανονική παράμετρο κλίμακας. Ο Abdel-Hameed (1975) ήταν ο πρώτος που πρότεινε την διαδικασία Γάμμα ως το κατάλληλο μοντέλο για την φθορά η οποία συμβαίνει τυχαία στο χρόνο. Στην δισέλιδη δημοσίευσή του, αποκαλούσε αυτήν την στοχαστική διαδικασία ως “διαδικασία φθοράς Γάμμα”. Ένα πλεονέκτημα της μοντελοποίησης των διαδικασιών φθοράς μέσω της διαδικασίας Γάμμα, είναι το ότι οι μαθηματικοί υπολογισμοί που απαιτούνται είναι σχετικά απλοί.

3.2. Ορισμός της μη σταθερής διαδικασίας Γάμμα

Με μαθηματικούς όρους, η διαδικασία Γάμμα ορίζεται ως εξής :

Υπενθυμίζουμε ότι μία τυχαία ποσότητα X ακολουθεί μία Κανονική κατανομή με παράμετρο σχήματος $v > 0$ και παράμετρο κλίμακας $u > 0$, αν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δίνεται από τον παρακάτω τύπο :

$$G(x|v,u) = \frac{u^v}{\Gamma(v)} x^{v-1} \exp\{-ux\} I_{(0,\infty)}(x) ,$$

όπου $I_A(x)=1$ για κάθε $x \in A$ και $I_A(x)=0$ για κάθε $x \notin A$ και $\Gamma(\alpha) = \int_{z=0}^{\infty} z^{\alpha-1} e^{-z} dz$ είναι η συνάρτηση Γάμμα για $\alpha > 0$. Επιπλέον, έστω ότι $v(t)$ είναι μη φθίνουσα, δεξιά συνεχής συνάρτηση πραγματικών τιμών για $t \geq 0$, με $v(0) \equiv 0$. Η διαδικασία Γάμμα με συνάρτηση σχήματος $v(t) > 0$ και παράμετρο κλίμακας $u > 0$ είναι μία συνεχής στο χρόνο στοχαστική διαδικασία $\{X(t), t \geq 0\}$ με τις ακόλουθες τρεις ιδιότητες :

1. $X(0)=0$ με πιθανότητα 1
2. $X(\tau) - X(t) \sim G(v(\tau)-v(t), u)$ για κάθε $\tau > t \geq 0$
3. Η $X(t)$ έχει ανεξάρτητες προσauξήσεις.

3.3 Μέση τιμή και διασπορά της διαδικασίας Γάμμα

Έστω ότι $X(t)$ είναι η φθορά σε χρόνο t , $t \geq 0$ και έστω ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της διαδικασίας Γάμμα, δίνεται από τον τύπο

$$f_{X(t)}(x) = G(x|v(t), u) \quad (3.3.1)$$

με μέση τιμή και διασπορά

$$E(X(t)) = \frac{v(t)}{u}, \quad \text{Var}(X(t)) = \frac{v(t)}{u^2} \quad (3.3.2)$$

Ο συντελεστής μεταβλητότητας της διασποράς ορίζεται από το λόγο της τυπικής απόκλισης προς τη μέση τιμή και δίνεται από τον τύπο:

$$CV(X(t)) = \frac{\sqrt{\text{Var}(X(t))}}{E(X(t))} = \frac{1}{\sqrt{v(t)}} \quad (3.3.3)$$

ο οποίος μειώνεται όσο ο χρόνος αυξάνει. Από την άλλη, ο λόγος της διασποράς προς την μέση τιμή ισούται με $1/u$ και επομένως δεν εξαρτάται από τον χρόνο.

3.4 Αθροιστική συνάρτηση κατανομής του χρόνου αποτυχίας

Ένα εξάρτημα θεωρείται ότι έχει αστοχήσει όταν η αντίσταση της φθοράς του, η οποία συμβολίζεται με $R(t) = r_0 - X(t)$, πέφτει κάτω από το φορτίο s . Υποθέτουμε ότι οι αρχικές τιμές της αντοχής r_0 και του φορτίου s είναι σταθερές και γνωστές. Ορίζουμε ως $y = r_0 - s$ και συμβολίζουμε το χρόνο στον οποίο συμβαίνει μία αποτυχία με την διάρκεια ζωής T_y (το οποίο καλείται επίσης ως το πρώτο χτύπημα του χρόνου στο επίπεδο y). Λόγω του ότι η φθορά ακολουθεί την κατανομή Γάμμα, στην σχέση (3.3.1) η κατανομή διάρκειας ζωής μπορεί να γραφτεί ως

$$\begin{aligned}
F(t) &= \Pr\{T_y \leq t\} = \Pr\{X(t) \geq y\} \\
&= \int_{x=y}^{\infty} f_{X(t)}(x) dx = \frac{\Gamma(v(t), yu)}{\Gamma(v(t))}, \quad (3.4.1)
\end{aligned}$$

όπου $\Gamma(\alpha, x) = \int_{z=x}^{\infty} z^{\alpha-1} e^{-z} dz$ είναι η ελλιπής κατανομή Γάμμα για $x \geq 0$ και $\alpha > 0$. Η σχέση (3.4.1) μοιάζει με μία εντυπωσιακή δυαδικότητα ανάμεσα στο κενό (φθορά) και στο χρόνο (διάρκεια ζωής), που κάνει το μοντέλο της διαδικασίας Γάμμα να επιδέχεται ανάλυση.

3.5 Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του χρόνου αποτυχίας

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσίδας για την παράγωγο, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της διάρκειας ζωής είναι

$$f(t) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\Gamma(v(t), yu)}{\Gamma(v(t))} \right] = \frac{\partial}{\partial \tilde{v}} \left[\frac{\Gamma(\tilde{v}, yu)}{\Gamma(\tilde{v})} \right] \Big|_{\tilde{v}=v(t)} v'(t) \quad (3.5.1)$$

υπό την προϋπόθεση ότι η συνάρτηση σχήματος $v(t)$ είναι παραγωγίσιμη. Ως εκ τούτου,

$$f(t) = \frac{v'(t)}{\Gamma(v(t))} \int_{yu}^{\infty} \{ \log(z) - \psi(v(t)) \} z^{v(t)-1} e^{-z} dz, \quad (3.5.2)$$

όπου η συνάρτηση $\psi(\alpha)$ είναι η παράγωγος του λογαρίθμου της κατανομής Γάμμα:

$$\psi(\alpha) = \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{\partial \log \Gamma(\alpha)}{\partial \alpha} \quad \text{όπου } \alpha > 0.$$

Η συνάρτηση $\psi(\alpha)$ καλείται κατανομή digamma και μπορεί να υπολογιστεί ακριβώς χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο που αναπτύχθηκε από τον Bernardo (1976). Χρησιμοποιώντας μία σειρά από επεκτάσεις και μια συνεχής επέκταση κλάσματος, η πρώτη μερική παράγωγος του $\Gamma(\tilde{v}, yu) / \Gamma(\tilde{v})$ ως προς \tilde{v} στην εξίσωση (3.5.1), μπορεί να υπολογιστεί από τον αλγόριθμο του Moore (1982).

3.6 Διαδικασία φθοράς Γάμμα συνδυασμένη με τυχαίο φορτίο

Στην πρόταση του να χρησιμοποιήσει την διαδικασία Γάμμα ως μοντέλο στοχαστικής φθοράς, ο Abdel-Hameed (1975) πήγε το αντοχής-φορτίο μοντέλο της εξίσωσης (3.4.1), ένα βήμα παραπέρα, θεωρώντας το επίπεδο της χειροτέρευσης της αποτυχίας $y = r_0 - s$, ως μία τυχαία

ποσότητα $Y > 0$. Για κάθε $t \geq 0$, η πιθανότητα της αποτυχίας στο διάστημα του χρόνου $(0, t]$, μπορεί να γραφτεί ως το ολοκλήρωμα της συνέλιξης

$$\begin{aligned} \Pr\{X(t) \geq Y\} &= \int_{x=0}^{\infty} f_{X(t)}(x) \Pr\{Y \leq x\} dx \\ &= \int_{x=0}^{\infty} \int_{y=0}^x f_{X(t)}(x) f_Y(y) dy dx, \end{aligned} \quad (3.6.1)$$

όπου $X(t)$ ακολουθεί μία κατανομή Γάμμα με παράμετρο σχήματος $v(t)$ και παράμετρο κλίμακας u και η Y έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_Y(y)$ και αθροιστική συνάρτηση κατανομής $G(y) = \Pr\{Y \leq y\}$. Η πιθανότητα $\Pr\{Y > x\} = 1 - G(x) = \bar{G}(x)$ μπορεί να ερμηνευθεί ως η πιθανότητα μια συσκευή να επιβιώσει x μονάδες φθοράς. Ο Abdel-Hameed (1975) έδειξε ότι η αθροιστική συνάρτηση κατανομής (3.6.1) έχει αυξανόμενο ρυθμό αποτυχίας, αν η $v(t)$ είναι κυρτή και η $G(x)$ έχει αυξανόμενο ρυθμό αποτυχίας.

3.7 Εκτίμηση παραμέτρων για την διαδικασία Γάμμα

Σύμφωνα με την υπόθεση της μοντελοποίησης της χρονικής μεταβλητότητας της φθοράς με μία διαδικασία Γάμμα, το ερώτημα που μένει να απαντηθεί είναι το πώς η αναμενόμενη χειροτέρευση αυξάνει στο χρόνο. Εμπειρικές μελέτες έδειξαν ότι η αναμενόμενη χειροτέρευση στο χρόνο t είναι συνήθως ανάλογη μιας δύναμης :

$$E(X(t)) = \frac{v(t)}{u} = \frac{ct^b}{u} = at^b \propto t^b \quad (3.7.1)$$

για κάποιες φυσικές σταθερές $a > 0$ (ή $c > 0$) και $b > 0$. Με λίγη προσπάθεια, υπάρχει διαθέσιμη μηχανική γνώση για το σχήμα της αναμενόμενης φθοράς όσον αφορά την παράμετρο b στην σχέση (3.7.1). Η κατανομή Γάμμα καλείται σταθερή όταν η αναμενόμενη φθορά είναι γραμμική στο χρόνο, π.χ. όταν $b=1$ στην εξίσωση (3.7.1) και μη σταθερή όταν $b \neq 1$. Ο Cinlar (1977) έδειξε πως μπορούμε να μετατρέψουμε μία μη σταθερή διαδικασία Γάμμα σε σταθερή και πως μπορούμε να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους μιας σταθερής διαδικασίας Γάμμα χρησιμοποιώντας την μέθοδο των ροπών και την μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας. Για να εφαρμόσουμε το μοντέλο της διαδικασίας Γάμμα σε πρακτικά παραδείγματα, πρέπει να εφαρμόσουμε στατιστικές μεθόδους για την εκτίμηση των παραμέτρων της διαδικασίας Γάμμα. Μία τυπική ομάδα δεδομένων αποτελείται από τους χρόνους παρατήρησης t_i , $i=1, \dots, n$, όπου $0=t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$, και τις αντίστοιχες παρατηρήσεις των αθροιστικών ποσοτήτων της χειροτέρευσης x_i , $i=1, \dots, n$, όπου $0=x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$. Θεωρούμε μία

διαδικασία Γάμμα με παράμετρο σχήματος $v(t) = ct^b$ και παράμετρο κλίμακας u . Υποθέτουμε ότι η τιμή του εκθέτη b είναι γνωστή, αλλά του c και του u είναι άγνωστες. Οι δύο πιο κοινές μέθοδοι εκτίμησης παραμέτρων είναι η μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας και η μέθοδος των ροπών.

3.7.1 Μέθοδος Μέγιστης Πιθανοφάνειας

Οι εκτιμητές των c και u μπορούν να υπολογιστούν μεγιστοποιώντας την συνάρτηση της πιθανοφάνειας των στοιχείων. Η συνάρτηση πιθανοφάνειας παρατηρούμενων στοιχείων φθοράς $\delta_i = x_i - x_{i-1}$, $i=1, \dots, n$ είναι το γινόμενο των ανεξάρτητων συναρτήσεων πυκνότητας Γάμμα

$$l = (\delta_1, \dots, \delta_n | c, u) = \prod_{i=1}^n f_{X(t_i) - X(t_{i-1})}(\delta_i) \\ = \prod_{i=1}^n \frac{u^c [t_i^b - t_{i-1}^b]^c}{\Gamma(c[t_i^b - t_{i-1}^b])} \delta_i^{c[t_i^b - t_{i-1}^b] - 1} \exp\{-u\delta_i\}. \quad (3.7.1.1)$$

Υπολογίζοντας τις πρώτες μερικές παραγώγους της συνάρτησης πιθανοφάνειας των στοιχείων ως προς c και u , ο Cinlar (1977) έδειξε ότι οι εκτιμήσεις της μέγιστης πιθανοφάνειας για τα \hat{c} και \hat{u} μπορούν να υπολογιστούν από τις σχέσεις

$$\hat{u} = \frac{\hat{c}t_n^b}{x_n}, \\ \sum_{i=1}^n [t_i^b - t_{i-1}^b] \{\psi(\hat{c}[t_i^b - t_{i-1}^b]) - \log \delta_i\} = t_n^b \log\left(\frac{\hat{c}t_n^b}{x_n}\right) \quad (3.7.1.2)$$

Δοθέντος του εκτιμητή μέγιστης πιθανοφάνειας του u της εξίσωσης (3.7.1.2), η αναμενόμενη φθορά σε χρόνο t δίνεται από τον τύπο $E(X(t)) = x_n \left[\frac{t^b}{t_n^b} \right]$.

Επειδή οι αθροιστικές ποσότητες της φθοράς μετριοούνται, ο τελευταίος έλεγχος περιέχει όλη την πληροφορία. Αυτό επιβεβαιώνεται από το γεγονός ότι η αναμενόμενη φθορά στον τελευταίο έλεγχο (στον χρόνο t_n) ισούται με x_n , το οποίο είναι $E(X(t_n)) = x_n$.

Η μέθοδος της μέγιστης πιθανοφάνειας για την εκτίμηση των παραμέτρων c και u , μπορεί να επεκταθεί της παραμέτρου της δύναμης b . Η παράμετρος b μπορεί να καθοριστεί μεγιστοποιώντας αριθμητικά την συνάρτηση πιθανοφάνειας (3.7.1.1). Η παραπάνω

συνάρτηση πιθανοφάνειας μπορεί να επεκταθεί ώστε να περιλαμβάνει τις προσανξήσεις περισσότερων του ενός εξαρτημάτων.

3.7.2 Μέθοδος των Ροπών

Υπενθυμίζεται ότι η μέση τιμή και η διασπορά της αθροιστικής χειροτέρευσης σε χρόνο t δίνονται από τους τύπους

$$\begin{aligned} E(X(t)) &= \frac{ct^b}{u} \quad , \\ \text{Var}(X(t)) &= \frac{ct^b}{u^2} \end{aligned} \quad (3.7.2.1)$$

Όταν ο εκθέτης b είναι γνωστός, η μη σταθερή διαδικασία Γάμμα, μπορεί εύκολα να μετασχηματιστεί σε σταθερή διαδικασία Γάμμα χρησιμοποιώντας έναν μονότονο μετασχηματισμό από τον χρόνο ή τον ημερολογιακό χρόνο t , στον μετασχηματισμένο ή τον χρόνο λειτουργίας $z(t) = t^b$. Υπενθυμίζουμε ότι μία στοχαστική διαδικασία έχει σταθερές προσανξήσεις αν η κατανομή πιθανότητας των προσανξήσεων $X(t+h) - X(t)$ εξαρτάται μόνο από το h για κάθε $t, h \geq 0$. Αντικαθιστώντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό του χρόνου $t(z) = z^{1/b}$ στην σχέση (3.7.2.1) παίρνουμε :

$$\begin{aligned} E(X(t(z))) &= \frac{cz}{u} \quad , \\ \text{Var}(X(t(z))) &= \frac{cz}{u^2} \end{aligned} \quad (3.7.2.2)$$

Αυτό οδηγεί σε μία σταθερή διαδικασία Γάμμα σε σχέση με τον μετασχηματισμένο χρόνο z . Ομοίως, οι μετασχηματισμένοι χρόνοι παρατήρησης γίνονται $z_i = t_i^b, i = 1, \dots, n$. Ορίζουμε επιπλέον τους μετασχηματισμένους χρόνους ανάμεσα στις παρατηρήσεις ως $w_i = t_i^b - t_{i-1}^b$ και για μαθηματική ευκολία, $D_i = X_i - X_{i-1}$ για $i = 1, \dots, n$. Οι προσανξήσεις φθοράς D_i ακολουθούν μία κατανομή Γάμμα με παράμετρο σχήματος cw_i και παράμετρο κλίμακας u για κάθε $i = 1, \dots, n$, και οι προσανξήσεις D_1, \dots, D_n είναι ανεξάρτητες. Τα X_i και D_i συμβολίζουν τυχαίες ποσότητες και τα x_i και d_i τις αντίστοιχες παρατηρήσεις. Σύμφωνα με τον Cinlar (1977), η μέθοδος των ροπών που εκτιμά τα \hat{c} και \hat{u} δίνει τους τύπους

$$\frac{\hat{c}}{\hat{u}} = \frac{\sum_{i=1}^n \delta_i}{\sum_{i=1}^n w_i} = \frac{x_n}{t_n^b} = \bar{\delta} \quad ,$$

$$\frac{x_n}{\hat{u}} \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^n w_i^2}{[\sum_{i=1}^n w_i]^2} \right) = \sum_{i=1}^n (\delta_i - \bar{\delta} w_i)^2 \quad (3.7.2.3)$$

Σαφώς, η μέθοδος των ροπών οδηγεί σε απλούς τύπους για την εκτίμηση παραμέτρων, οι οποίοι μπορούν εύκολα να υπολογιστούν. Σημειώνουμε ότι η πρώτη εξίσωση των εκτιμητών μέγιστης πιθανοφάνειας (3.7.1.2) είναι η ίδια με την πρώτη εξίσωση της εκτίμησης της μεθόδου των ροπών (3.7.2.3).

3.8 Μέθοδος της Μπεϋζιανής στατιστικής

Το θεώρημα του Bayes παρέχει μία λύση στο πρόβλημα του πως μαθαίνουμε από τα δεδομένα. Στο πλαίσιο της εκτίμησης των αγνώστων παραμέτρων c και u του μετασχηματισμένου χρόνου της διαδικασίας Γάμμα, η μπεϋζιανή προσέγγιση υποθέτει ότι αυτοί οι παράμετροι έχουν μια κατανομή πιθανότητας. Το θεώρημα του Bayes μπορεί να γραφτεί ως

$$\pi(c, u | \delta_1, \dots, \delta_n) = \frac{l(\delta_1, \dots, \delta_n | c, u) \pi(c, u)}{\int_0^\infty \int_0^\infty l(\delta_1, \dots, \delta_n | c, u) \pi(c, u) dc du}, \quad (3.8.1)$$

όπου $l(\delta_1, \dots, \delta_n | c, u)$ είναι η συνάρτηση πιθανοφάνειας των δεδομένων παρατήρησης $\delta_1, \dots, \delta_n$ όταν δίνεται το διάνυσμα των παραμέτρων (c, u) , $\pi(c, u)$ είναι η αρχική πυκνότητα του (c, u) πριν την παρατήρηση των δεδομένων παρατήρησης, $\pi(c, u | \delta_1, \dots, \delta_n)$ είναι η τελική πυκνότητα του (c, u) μετά την παρατήρηση των δεδομένων παρατήρησης, και $\pi(\delta_1, \dots, \delta_n)$ είναι η περιθωριακή πυκνότητα των δεδομένων παρατήρησης. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Bayes, μπορούμε να αλλάξουμε την αρχική κατανομή στην τελική πυκνότητα όσο γίνονται διαθέσιμα καινούρια δεδομένα παρατήρησης. Στο σημείο αυτό προκύπτει το ερώτημα, ποια κατανομή πιθανότητας θα επιλεγεί ως αρχική των c και u . Ας βρούμε πρώτα την αρχική κατανομή της παραμέτρου κλίμακας u όταν η παράμετρος c είναι γνωστή, η οποία έχει αρχική πυκνότητα $\pi(u, c)$. Είναι γνωστό ότι η οικογένεια των κατανομών Γάμμα είναι μια συζευγμένη οικογένεια ως προς την συνάρτηση πιθανοφάνειας Γάμμα με άγνωστη παράμετρο κλίμακας, καθώς και η αρχική και η τελική κατανομή ανήκουν στην οικογένεια των κατανομών Γάμμα. Αν η αρχική κατανομή της παραμέτρου κλίμακας u δίνεται από μία κατανομή Γάμμα με παράμετρο σχήματος a και παράμετρο κλίμακας β , όταν η τιμή του c δίνεται, τότε η τελική κατανομή είναι επίσης μία κατανομή Γάμμα με παράμετρο σχήματος

$\alpha + \sum_{i=1}^n c[t_i^b - t_{i-1}^b] = \alpha + ct_n^b$ και παράμετρο κλίμακας $\beta + \sum_{i=1}^n \delta_i = \beta + x_n$. Ο Dufresne (1991) εφάρμοσε αυτήν την μπεϋνζιανή προσέγγιση για να προσδιορίσει την τελική κατανομή της παραμέτρου κλίμακας μιας σταθερής διαδικασίας Γάμμα (π.χ. $b=1$) υπό τέλεια επιθεώρηση. Οι Kallen και van Noortwijk (2005) επέκτειναν την μπεϋνζιανή εκτίμηση από τέλειο σε ατελή έλεγχο.

Η μπεϋνζιανή εκτίμηση της παραμέτρου κλίμακας της Γάμμα διαδικασίας μπορεί να επεκταθεί σε μπεϋνζιανή εκτίμηση της παραμέτρου κλίμακας και της συνάρτησης σχήματος. Υπενθυμίζουμε ότι $w_i = t_i^b - t_{i-1}^b$, $i = 1, \dots, n$. Σε συνδυασμό με την αρχική πυκνότητα του $\pi(c)$ το θεώρημα του Bayes (3.8.1) μπορεί να ξαναγραφτεί ως

$$\begin{aligned} \pi(c, u | \delta_1, \dots, \delta_n) &= \pi(u | c, \delta_1, \dots, \delta_n) \pi(c | \delta_1, \dots, \delta_n) \\ &\propto \prod_{i=1}^n \frac{u^{cw_i}}{\Gamma(cw_i)} \delta_i^{cw_i-1} \exp\{-u\delta_i\} \\ &\quad \times \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} u^{\alpha-1} \exp\{-u\beta\} \pi(c) \\ &= \text{Ga}(u | \alpha + ct_n^b, \beta + x_n) \\ &\quad \times \left[\frac{1}{\beta + x_n} \right]^{\alpha + ct_n^b} \frac{\beta^\alpha \Gamma(\alpha + ct_n^b)}{\Gamma(\alpha) \prod_{i=1}^n \Gamma(cw_i)} \\ &\quad \times \prod_{i=1}^n \delta_i^{cw_i-1} \pi(c). \end{aligned}$$

Όταν η παράμετρος c είναι άγνωστη, οι παράμετροι της αρχικής πυκνότητας του u εξαρτώνται από το c , επομένως η αρχική πυκνότητα του u δοθέντος του c είναι μία κατανομή Γάμμα με παράμετρο σχήματος $\alpha(c)$ και παράμετρο κλίμακας $\beta(c)$. Μία ενδιαφέρουσα επιλογή για τις παραμέτρους σχήματος και κλίμακας είναι $\alpha(c) = c\tau^b$, $\tau > 0$, και $\beta(c) = \beta$. Σύμφωνα με αυτήν την υπόθεση, η τελική μέση τιμή της παραμέτρου κλίμακας της διαδικασίας Γάμμα u όταν η τιμή του c δίνεται, μπορεί να γραφτεί ως

$$E(U | c, \delta_1, \dots, \delta_n) = \frac{\alpha(c) + t_n^b}{\beta(c) + x_n} = \frac{c[\tau^b + t_n^b]}{\beta + x_n},$$

όπου c είναι γνωστό και το U άγνωστο. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (3.7.1), η προβλεπόμενη μέση τιμή της αθροιστικής ποσότητας της χειροτέρευσης σε χρόνο t , παίρνει την μορφή

$$E\left(\frac{Ct^b}{U} \mid \delta_1, \dots, \delta_n\right) = E\left(\frac{C[\beta(C)+x_n]t^b}{a(C)+Ct_n^{b-1}} \mid \delta_1, \dots, \delta_n\right),$$

όπου C και U είναι τυχαίες ποσότητες.

3.9 Ορισμός της σταθερής διαδικασίας Γάμμα

Όταν η αναμενόμενη χειροτέρευση είναι γραμμική στο χρόνο, είναι βολικό να ξαναγράψουμε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του $X(t)$ της σχέσης (3.3.1) ,χρησιμοποιώντας την ακόλουθη παραμετρικοποίηση:

$$f_{X(t)}(x) = \text{Ga}(x \mid [\mu^2 t] / \sigma^2, \mu / \sigma^2) \quad (3.9.1)$$

για κάθε $\mu, \sigma > 0$ με $E(X(t)) = \mu t$ και $\text{Var}(X(t)) = \sigma^2 t$.

Μία διαδικασία Γάμμα με $\mu = \sigma = 1$ καλείται τυποποιημένη διαδικασία Γάμμα. Λόγω της σταθερότητας της παραπάνω διαδικασίας στοχαστικής φθοράς, η μέση τιμή και η διακύμανση της φθοράς είναι γραμμικά στο χρόνο. Χρησιμοποιώντας την σχέση (3.4.1), η κατανομή της διάρκειας ζωής μπορεί να ξαναγραφτεί ως εξής

$$\begin{aligned} F(t) &= \Pr\{T_y \leq t\} = \Pr\{X(t) \geq y\} \\ &= \int_{x=y}^{\infty} f_{X(t)}(x) dx = \frac{\Gamma\left(\frac{[\mu^2 t]}{\sigma^2}, \frac{[y\mu]}{\sigma^2}\right)}{\Gamma\left(\frac{[\mu^2 t]}{\sigma^2}\right)}. \end{aligned} \quad (3.9.2)$$

Η σταθερότητα της διαδικασίας Γάμμα βασικά προκύπτει από την ιδιότητα των προσυζήσεων οι οποίες είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν τον ίδιο τύπο κατανομής με το άθροισμά τους. Με μαθηματικούς όρους, αυτή η ιδιότητα καλύπτεται από την ονομαζόμενη άπειρη διαιρετότητα. Μία τυχαία μεταβλητή X είναι απείρως διαιρετή, αν για κάθε ακέραιο $n \geq 2$, υπάρχουν n ανεξάρτητες και πανομοιότυπα κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές $D_1^{(n)}, \dots, D_n^{(n)}$ και το άθροισμά τους $\sum_{i=1}^n D_i^{(n)}$ ακολουθεί την ίδια κατανομή με το X . Με βάση τους μετασχηματισμούς Laplace, ο ορισμός της απείρου διαιρετότητας μπορεί να τροποποιηθεί ως εξής

$$E(e^{-sX}) = \prod_{i=1}^n E(e^{-sD_i^{(n)}}), \quad n \geq 2.$$

Για τον υπολογισμό της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας του χρόνου αποτυχίας μιας σταθερής διαδικασίας Γάμμα, οι Park και Padgett (2005) πρότειναν να προσεγγίσουν την αθροιστική συνάρτηση κατανομής με την κατανομή Birnbaum–Saunders (1969) :

$$F(t) = \Pr\{X(t) \geq y\} \approx \Phi\left(\frac{\mu t - y}{\sigma\sqrt{t}}\right)$$

$$= \Phi\left(\sqrt{\frac{y\mu}{\sigma^2}} \left[\sqrt{\frac{\mu t}{y}} - \sqrt{\frac{y}{\mu t}}\right]\right),$$

όπου Φ είναι η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τυποποιημένης Κανονικής κατανομής. Αυτή η προσέγγιση μπορεί να εφαρμοστεί όταν $\mu \gg \sigma$.

3.10 Προσέγγιση διακριτού χρόνου της σταθερής διαδικασίας Γάμμα

Μία χρήσιμη ιδιότητα της διαδικασίας Γάμμα με σταθερές προσαυξήσεις είναι το ότι η πυκνότητα της κατανομής Γάμμα στην σχέση (3.9.1) μετατρέπεται σε μία εκθετική πυκνότητα αν $t = (\sigma/\mu)^2$. Όταν το μήκος της μονάδας του χρόνου επιλέγεται να είναι $(\sigma/\mu)^2$, οι προσαυξήσεις της φθοράς είναι εκθετικά κατανομημένες με μέση τιμή σ^2/μ . Για αυτήν την μονάδα του χρόνου, πολλές πιθανοθεωρητικές ιδιότητες μπορούν να εκφραστούν σε αναλυτική μορφή. Για παράδειγμα, η πιθανότητα της αποτυχίας στην μονάδα του χρόνου t μειώνεται σε μια τροποποιημένη κατανομή Poisson με μέση τιμή $1 + [y\mu]/\sigma^2$:

$$q_i = \frac{1}{(i-1)!} \left[\frac{y\mu}{\sigma^2}\right]^{i-1} \exp\left\{-\frac{y\mu}{\sigma^2}\right\}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.10.1)$$

Αυτή η μονάδα του χρόνου διευκολύνει σημαντικά τους αλγεβρικούς χειρισμούς και επιπλέον συχνά οδηγεί σε μια πολύ καλή προσέγγιση της βέλτιστης απόφασης. Μία φυσική εξήγηση της εμφάνισης της κατανομής Poisson είναι ότι αντιπροσωπεύει την πιθανότητα του ότι ακριβώς i εκθετικά κατανομημένες μεταπηδήσεις με μέση τιμή σ^2/μ προκαλούν την αποτυχία του εξαρτήματος και έτσι προκαλεί την αθροιστική ποσότητα της φθοράς να ξεπεράσει την τιμή $t_0 - s$. Σημειώνουμε ότι όσο μικρότερο είναι το μήκος της μονάδας του χρόνου για το οποίο οι προσαυξήσεις είναι εκθετικά κατανομημένες, π.χ. η μικρότερη $t = (\sigma/\mu)^2$, τόσο λιγότερο αβέβαιη είναι η διαδικασία της φθοράς.

3.11 Διαδικασία Γάμμα ως όριο της σύνθετης διαδικασίας Poisson

Μία σημαντική ιδιότητα της διαδικασίας Γάμμα είναι το ότι είναι μία διαδικασία μεταπήδησης. Η διαδικασία Γάμμα μπορεί να θεωρηθεί ως μία σύνθετη διαδικασία Poisson με προσauξήσεις οι οποίες ακολουθούν την Γάμμα κατανομή, στην οποία ο ρυθμός της Poisson τείνει στο άπειρο και τα μεγέθη των προσauξήσεων τείνουν στο μηδέν, αντίστοιχα. Χρησιμοποιώντας την τεχνική των μετασχηματισμών Laplace, μπορεί ναδειχθεί ότι η διαδικασία Γάμμα μπορεί να αναδιαμορφωθεί στα πλαίσια ενός ορίου μιας σύνθετης διαδικασίας Poisson. Με αυτόν τον τρόπο, πρώτα δίνουμε στον μετασχηματισμό Laplace μιας σύνθετης διαδικασίας Poisson, η οποία αντικαθιστά τις μεταπήδησεις με ένταση μ , έχοντας τυχαίο μέγεθος. Στη συνέχεια, πρέπει να δείξουμε ότι ο μετασχηματισμός Laplace της διαδικασίας Γάμμα, μπορεί να ξαναγραφεί με την ίδια μορφή όπως ο μετασχηματισμός Laplace της σύνθετης διαδικασίας Poisson.

3.11.1 Μετασχηματισμός Laplace της σύνθετης διαδικασίας Poisson

Έστω ότι η συνεχής στο χρόνο διαδικασία στοχαστικής φθοράς $\{X(t), t \geq 0\}$, είναι μία σύνθετη διαδικασία Poisson, η οποία δίνεται από τον τύπο $X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} D_i$, όπου

- Ο αριθμός των μεταπήδησεων $\{N(t), t \geq 0\}$ είναι μία διαδικασία Poisson με ένταση μεταπήδησης μ ,
- Οι μεταπήδησεις $\{D_i, i=1,2,\dots,n\}$ είναι ανεξάρτητες και πανομοιότυπα κατανεμημένες τυχαίες ποσότητες που έχουν κατανομή $\Pr\{D \leq \delta\} = F_D(\delta)$,
- Η διαδικασία $\{N(t), t \geq 0\}$ και η ακολουθία $\{D_i, i=1,2,\dots,n\}$ είναι ανεξάρτητες.

Ο μετασχηματισμός Laplace της σύνθετης διαδικασίας Poisson $X(t)$ είναι

$$E(e^{-sX(t)}) = \exp\{\mu t(E(e^{-sD}) - 1)\} \quad (3.11.1.1)$$

Σύμφωνα με τον Finetti (1975), αυτός ο μετασχηματισμός Laplace μπορεί να ξαναγραφτεί ως:

$$E(e^{-sX(t)}) = \exp\left\{\mu t \int_{\delta=0}^{\infty} (e^{-s\delta} - 1) dF_D(\delta)\right\}$$

$$= \exp\left\{t \int_{\delta=0}^{\infty} (e^{-s\delta}-1) [-dQ(\delta)]\right\}, \quad (3.11.1.2)$$

όπου $s>0$ και $Q(\delta) = \mu[1 - F_D(\delta)] = \mu \int_{z=\delta}^{\infty} f_D(z) dz$ το οποίο αναπαριστά την ένταση των μεταπηδήσεων των οποίων η τιμή είναι μεγαλύτερη από δ , για κάθε $\delta>0$. Η αρνητική παράγωγος του $Q(\delta)$, $q(\delta) = -Q'(\delta)$ καλείται μέτρο Lévy του $\{X(t), t \geq 0\}$. Το μέγεθος $q(\delta) = \mu f_D(\delta)$ είναι ένα θετικό μέγεθος, αλλά όχι ένα μέτρο πιθανότητας επειδή $\int_{\delta=0}^{\infty} q(\delta) d\delta = \mu \neq 1$. Σημειώνουμε ότι ο αναμενόμενος αριθμός των μεταπηδήσεων για όλα τα μεγέθη ανά μονάδα χρόνου (ένταση μεταπηδήσεων) είναι πεπερασμένος και ως εκ τούτου το $Q(0) = \mu$ είναι πεπερασμένος αριθμός. Πράγματι, για μία σύνθετη διαδικασία Poisson, ο αριθμός των μεταπηδήσεων σε οποιοδήποτε χρονικό διάστημα είναι πεπερασμένος με πιθανότητα 1. Επιπλέον, η μέση τιμή του $X(t)$ είναι επίσης πεπερασμένη και παίρνει τις τιμές

$$E(X(t)) = t \int_{\delta=0}^{\infty} \delta [-dQ(\delta)] = \mu t \int_{\delta=0}^{\infty} \delta f_D(\delta) d\delta = \mu E(D)t.$$

3.11.2 Μετασχηματισμός Laplace της διαδικασίας Γάμμα

Από την άλλη πλευρά, ο μετασχηματισμός Laplace του $X(t)$, η οποία είναι μία σταθερή διαδικασία Γάμμα, είναι

$$\begin{aligned} E(e^{-sX(t)}) &= \left[\frac{u}{u+s} \right]^{ct} \\ &= \exp\left\{ ct \int_{\delta=0}^{\infty} (e^{-s\delta}-1) \frac{e^{-u\delta}}{\delta} d\delta \right\} \\ &= \exp\left\{ t \int_{\delta=0}^{\infty} (e^{-s\delta}-1) [-dQ(\delta)] \right\}, \quad (3.11.2.1) \end{aligned}$$

όπου $s>0$ και $Q(\delta) = c \int_{z=\delta}^{\infty} \frac{e^{-uz}}{z} dz = cE_1(u\delta)$ αναπαριστά την ένταση των μεταπηδήσεων των οποίων το μέγεθος είναι μεγαλύτερο από δ για κάθε $\delta>0$ και το εκθετικό ολοκλήρωμα δίνεται

$$\text{από τον τύπο } E_1(x) = \int_{t=x}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

Το μέτρο Lévy της διαδικασίας Γάμμα είναι $q(\delta) = -Q'(\delta) = c\delta^{-1}e^{-u\delta}$. Επειδή $\int_{\delta=0}^{\infty} q(\delta) d\delta = \infty$, αυτό το μέγεθος είναι άπειρο. Ως εκ τούτου, ο μέσος αριθμός των μεταπηδήσεων όλων των

μεγεθών ανά μονάδα χρόνου (ένταση μεταπήδησης) είναι επίσης άπειρος, άρα $Q(0) = \lim_{\delta \rightarrow 0} Q(\delta) = \infty$.

Πράγματι, για μία διαδικασία Γάμμα, ο αριθμός των μεταπηδήσεων για κάθε χρονικό διάστημα είναι άπειρος με πιθανότητα 1. Παρ' όλα αυτά, η $E(X(t))$ είναι πεπερασμένη, δεδομένου ότι οι περισσότερες μεταπηδήσεις είναι εξαιρετικά μικρές:

$$E(X(t)) = t \int_{\delta=0}^{\infty} \delta dQ(\delta) = ct \int_{\delta=0}^{\infty} \delta \frac{e^{-u\delta}}{\delta} d\delta = \frac{ct}{u}.$$

Η συμφωνία μεταξύ των σχέσεων (3.11.1.2) και (3.11.2.1) μας δείχνει ότι η διαδικασία Γάμμα, είναι πράγματι μία διαδικασία μεταπήδησης. Για την ακρίβεια, η διαδικασία Γάμμα μπορεί να θεωρηθεί ως όριο μιας σύνθετης διαδικασίας Poisson κατά τον ακόλουθο τρόπο. Έστω ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του μεγέθους της μεταπήδησης είναι μία κατανομή Γάμμα με παράμετρο σχήματος $\nu > 0$ και παράμετρο κλίμακας $u > 0$ και έστω ότι η ένταση των μεταπηδήσεων Poisson είναι $\mu = c\Gamma(\nu)/u^\nu$. Σύμφωνα με τον Dufresne (1991), ο μετασχηματισμός Laplace της σύνθετης διαδικασίας Poisson είναι

$$E(e^{-sX(t)}) = \exp\left\{ct \frac{\Gamma(\nu)}{u^\nu} \int_{\delta=0}^{\infty} (e^{-s\delta} - 1) \times \frac{u^\nu}{\Gamma(\nu)} \delta^{\nu-1} \exp\{-u\delta\} d\delta\right\} \quad (3.11.2.2).$$

Σαφώς, ο μετασχηματισμός Laplace της σύνθετης διαδικασίας Poisson με ένταση μεταπήδησης $c\Gamma(\nu)/u^\nu$ και μεγέθη μεταπηδήσεων που ακολουθούν μία κατανομή Γάμμα με παράμετρο σχήματος ν και παράμετρο κλίμακας u , προσεγγίζει τον μετασχηματισμό Laplace της διαδικασίας Γάμμα με συνάρτηση σχήματος ct και συνάρτηση παραμέτρου u , όσο το ν τείνει στο μηδέν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο

Μοντέλα για δεδομένα διάρκειας ζωής με συμμεταβλητές

4.1 Εισαγωγή

Η επίδραση των συμμεταβλητών στην φθορά μοντελοποιείται. Η εκτίμηση της αξιοπιστίας και της φθοράς των χαρακτηριστικών από τα δεδομένα με συμμεταβλητές θεωρείται σε δυναμικά περιβάλλοντα. Μοντέλα φθοράς με συμμεταβλητές μπορούν επίσης να χρησιμοποιηθούν για να εκτιμήσουν την αξιοπιστία όταν το περιβάλλον είναι δυναμικό. Σε αυτήν την περίπτωση, οι συμμεταβλητές δεν μπορούν να ελεγχθούν από έναν πειραματιστή. Για παράδειγμα, ο ρυθμός φθοράς των ελαστικών εξαρτάται από την ποιότητα των δρόμων, την θερμοκρασία και από άλλους παράγοντες. Τα μοντέλα φθοράς μπορούν επίσης να χρησιμοποιηθούν όταν απαιτούνται οι βέλτιστες τιμές των συμμεταβλητών, οι οποίες μεγιστοποιούν την αξιοπιστία του προϊόντος. Για παράδειγμα, η φθορά της εκπομπής φωτός των διόδων χαρακτηρίζεται από την μείωση της φωτεινότητας τους και ο ρυθμός φθοράς εξαρτάται από παράγοντες όπως το είδος του μετάλλου, την εποξειδική επίστρωση, το εποξειδικό υλικό των φακών, την αρχική θερμοκρασία σκλήρυνσης και την διάρκεια σκλήρυνσης.

Συμβολίζουμε με $\vec{x}(\cdot) = (x_0(\cdot), \dots, x_s(\cdot))^T$, το διάνυσμα του οποίου η πρώτη συντεταγμένη είναι $x_0(t) \equiv 1$ και αποτελείται από s μεταβλητές. Σε αυτά που ακολουθούν υποθέτουμε ότι η ντετερμινιστική ή στοχαστική διαδικασία $\vec{x}(\cdot)$ είναι συνεχής από δεξιά, φραγμένη με πεπερασμένα από αριστερά όρια. Συμβολίζουμε άτυπα με $Z_{\vec{x}(\cdot)}(t)$ το επίπεδο φθοράς υπό την συμμεταβλητή $\vec{x}(\cdot)$, την χρονική στιγμή t . Υποθέτουμε ότι η φθορά σε μερικές σταθερές καταστάσεις $\vec{x}^0(\cdot)$ καθορίζεται από την προαναφερθείσα διαδικασία Γάμμα $Z_{\vec{x}^0(\cdot)}(t) = \sigma^2 \gamma(t)$ με μέση τιμή $E\{Z_{\vec{x}^0(\cdot)}(t)\} = m(t)$ και διακύμανση $\text{Var}\{Z_{\vec{x}^0(\cdot)}(t)\} = \sigma^2 m(t)$.

Χρειαζόμαστε ένα μοντέλο το οποίο να περιγράφει την φθορά κάτω από οποιοδήποτε διάνυσμα με συμμεταβλητές $\vec{x}(\cdot)$. Η στιγμή της αποτυχίας, η οποία προκαλείται από την φθορά υπό την συμμεταβλητή $\vec{x}(\cdot)$ είναι $T_{\vec{x}(\cdot)} = \sup\{t: Z_{\vec{x}(\cdot)}(t) < z_0\}$, π.χ., η στιγμή κατά την οποία η φθορά φθάνει ένα κρίσιμο επίπεδο z_0 , υπό την συμμεταβλητή $\vec{x}(\cdot)$.

Έστω

$$\begin{aligned} S_{\vec{x}(\cdot)}(t) &= \mathbf{P}\{T_{\vec{x}(\cdot)} > t \mid \vec{x}(s), 0 \leq s \leq t\} \\ &= \mathbf{P}\{Z_{\vec{x}(\cdot)}(t) < z_0 \mid \vec{x}(s), 0 \leq s \leq t\}. \end{aligned}$$

είναι η συνάρτηση επιβίωσης της τυχαίας μεταβλητής $T_{\vec{x}(\cdot)}$ και έστω

$$f_{\vec{x}(\cdot)}(t) = S_{\vec{x}^0(\cdot)}^{-1}(S_{\vec{x}(\cdot)}(t)).$$

Τότε για κάθε $\vec{x}(\cdot)$,

$$S_{\vec{x}^0(\cdot)}(f_{\vec{x}(\cdot)}(t)) = S_{\vec{x}(\cdot)}(t).$$

Η στιγμή t κάτω υπό την συμμεταβλητή $\vec{x}(\cdot)$ είναι ισοδύναμη με την στιγμή $f_{\vec{x}(\cdot)}(t)$ κάτω υπό την συμμεταβλητή $\vec{x}^0(\cdot)$.

Θεωρούμε το μοντέλο των αθροιστικά συσσωρευμένων καταστροφών (additive accumulation of damages, AAD) (Bagdonavičius, 1978):

$$\frac{d f_{\vec{x}(\cdot)}(t)}{dt} = r\{\vec{x}(\cdot)\}$$

με αρχική συνθήκη $f_{\vec{x}(\cdot)}(0) = 0$, όπου r είναι μία θετική συνάρτηση στον \mathbf{R}^{s+1} .

Αυτό το μοντέλο υπονοεί ότι

$$f_{\vec{x}(\cdot)}(t) = \int_0^t r(\vec{x}(\tau)) d\tau.$$

Η συνάρτηση r παραμετρικοποιείται ως ακολούθως:

$$r\{\vec{x}(t)\} = e^{\beta^T \vec{y}(t)},$$

όπου $\beta = (\beta_0, \dots, \beta_s)^T$ είναι το διάνυσμα των άγνωστων παραμέτρων και $\vec{y}(t) = \varphi(\vec{x}(t))$ με $\varphi: \mathbf{R}^{s+1} \rightarrow \mathbf{R}^{s+1}$ να είναι κάποια συγκεκριμένη συνάρτηση. Αν $\vec{y} = \vec{x}$, έχουμε ένα λογαριθμικό γραμμικό μοντέλο παλινδρόμησης. Μερικές φορές η γνώση των φυσικών διαδικασιών θα μπορούσε να μας προτείνει άλλες μορφές της συνάρτησης φ . Για παράδειγμα, αν $s=1$ (δηλαδή υπάρχει μία μεταβλητή), τότε η συνάρτηση φ μπορεί να πάρει μία από τις παρακάτω μορφές :

$$\varphi(1, x_1) = (1, \log(x_1))^T \quad (\text{μοτέλο power rule})$$

$$\varphi(1, x_1) = (1, 1/x_1)^T \quad (\text{μοντέλο Arrhenius})$$

$$\varphi(1, x_1) = (1, \log(\frac{x_1}{1-x_1}))^T \quad (\text{μοντέλο Meeker-Luvalle}).$$

Ακόμα και αν το $\vec{y}(t)$ είναι διαφορετικό από το $\vec{x}(t)$, θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\vec{x}(t)$ αντί του $\vec{y}(t)$ σε ότι ακολουθεί. Τα λογαριθμικά γραμμικά μοντέλα θα είναι συνήθως

ικανοποιητικά στις ακόλουθες δύο καταστάσεις: πρώτον, στην εκτίμηση της αξιοπιστίας σε ένα δυναμικό περιβάλλον και δεύτερον, στην αναζήτηση βέλτιστων τιμών των συμμεταβλητών. Σε τέτοιες περιπτώσεις, η τιμή της μεταβλητής κάτω από την οποία εκτιμάται η αξιοπιστία, είναι στην περιοχή των τιμών των μεταβλητών, οι οποίες χρησιμοποιήθηκαν στα πειράματα από τα οποία πήραμε τα δεδομένα. Σε δοκιμασία επιταχυνόμενης διακοπής, το πιο σημαντικό κομμάτι είναι η καλή επιλογή της συνάρτησης φ , επειδή η αξιοπιστία υπό τα συνηθισμένα επίπεδα φορτίου εκτιμάται από τα δεδομένα της επιταχυνόμενης διακοπής και το συνηθισμένο φορτίο δεν ανήκει στην περιοχή των επιταχυνόμενων καταπονήσεων.

Το AAD μοντέλο υποδηλώνει ότι η στιγμή t , υπό την μεταβλητή $\vec{x}(\cdot)$, είναι ισοδύναμη με την στιγμή

$$\int_0^t e^{\beta^T \vec{x}(s)} ds$$

υπό την μεταβλητή $\vec{x}^0(\cdot)$. Αυτό μας δίνει το παρακάτω μοντέλο:

$$Z_{\vec{x}(\cdot)}(t) = \sigma^2 \gamma \left(\int_0^t e^{\beta^T \vec{x}(s)} ds \right).$$

Έχουμε

$$m_{\vec{x}(\cdot)}(t) = \mathbf{E} \{ Z_{\vec{x}(\cdot)}(t) < z_0 \mid \vec{x}(s), 0 \leq s \leq t \} = m \left(\int_0^t e^{\beta^T \vec{x}(s)} ds \right),$$

$$\sigma_{\vec{x}(\cdot)}^2(t) = \text{Var} \{ Z_{\vec{x}(\cdot)}(t) < z_0 \mid \vec{x}(s), 0 \leq s \leq t \} = \sigma^2 m_{\vec{x}(\cdot)}(t).$$

4.2 Ανάλυση παλινδρόμησης κατωφλίου (Threshold Regression)

Ανάμεσα στα πολλά στατιστικά μοντέλα που χρησιμοποιούνται για τα δεδομένα επιβίωσης, αυτό που χρησιμοποιείται ευρέως είναι το μοντέλο αναλογικής διακινδύνευσης του Cox, το οποίο επικαλύπτει μία δομή παλινδρόμησης για τις συμμεταβλητές στην κορυφή μιας βασικής συνάρτησης διακινδύνευσης, η οποία έχει μία αυθαίρετη μορφή. Όπως υπονοεί και το όνομά του, το μοντέλο αναλογικής διακινδύνευσης του Cox υποθέτει ότι οι μεταβλητές μετατρέπουν την βασική συνάρτηση διακινδύνευσης κατά αναλογικό τρόπο. Ως εκ τούτου, είναι σημαντικό να ελεγχθεί αν ικανοποιείται η υπόθεση της αναλογικής διακινδύνευσης, προτού χρησιμοποιήσουμε το μοντέλο του Cox. Όταν δεν ικανοποιείται η υπόθεση της αναλογικής διακινδύνευσης, τότε το μοντέλο δεν θα πρέπει να χρησιμοποιείται ή τουλάχιστον να χρησιμοποιείται με προσοχή (Caroni, 2017).

Η μεθοδολογία της παλινδρόμησης κατωφλίου είναι ένα πολύ δυνατό εργαλείο στην ανάλυση των δεδομένων επιβίωσης. Η παλινδρόμηση κατωφλίου δεν υποθέτει αναλογική διακινδύνευση και μπορεί να χρησιμοποιηθεί αντί της παλινδρόμησης της αναλογικής διακινδύνευσης του Cox, όταν η υπόθεση αναλογικής διακινδύνευσης δεν ισχύει. Η χαρακτηριστική ιδιότητα της παλινδρόμησης κατωφλίου είναι ότι ο χρόνος του γεγονότος ορίζεται ως η πρώτη φορά κατά την οποία μία υποβόσκουσα στοχαστική διαδικασία “χτυπάει” ένα σύνορο κατωφλίου. Για παράδειγμα, σε μία εργασία ιατρικής, το γεγονός που μας ενδιαφέρει είναι ο θάνατος, επομένως, η ώρα θανάτου είναι η στιγμή που η υποβόσκουσα κατάσταση υγείας του ασθενή φτάνει σε ένα σύνορο, το μηδέν.

Πολλοί ερευνητές έχουν εξετάσει τα μοντέλα πρώτης μετάβασης (First Hitting Time, FHT) ως μοντέλα για δεδομένα επιβίωσης. Τα μοντέλα πρώτης μετάβασης προκύπτουν φυσικά σε πολλά είδη στοχαστικών διαδικασιών, από την διαδικασία Wiener μέχρι τις μαρκοβιανές αλυσίδες. Σε κείμενα για την ανάλυση επιβίωσης, η κατάσταση της υποκείμενης διαδικασίας αντιπροσωπεύει την δύναμη ενός αντικειμένου ή την υγεία ενός ατόμου. Το αντικείμενο “αποτυγχάνει” ή το άτομο φτάνει σε ένα κλινικό καταληκτικό σημείο, όταν η διαδικασία φθάσει σε ένα δυσμενές κατώφλι ορίου για πρώτη φορά. Η χρονική κλίμακα μπορεί να είναι ο ημερολογιακός χρόνος ή κάποιο άλλο λειτουργικό μέτρο της φθοράς ή της εξέλιξης της νόσου. Σε πολλές εφαρμογές, η διαδικασία είναι κρυμμένη (π.χ. μη παρατηρήσιμη). Η παλινδρόμηση κατωφλίου αναφέρεται στα μοντέλα πρώτου χτυπήματος (first hitting times) με δομές παλινδρόμησης που μπορούν να συμπεριλάβουν δεδομένα με συμμεταβλητές. Οι παράμετροι αυτής της διαδικασίας, κατάσταση κατωφλίου και χρονική κλίμακα μπορεί να εξαρτώνται από τις συμμεταβλητές.

Πολλοί τύποι διάρκειας ζωής ή δεδομένα διάρκειας ζωής μπορούν να ερμηνευθούν ως πρώτης μετάβασης (FHT's) ενός ορίου ή μιας κατώτερης κατάστασης κατωφλίου μέσα από δειγματικά μονοπάτια μιας στοχαστικής διαδικασίας, τα οποία μπορεί να είναι κρυμμένα ή παρατηρήσιμα. Τα FHT μοντέλα έχουν μακρά ιστορία εφαρμογής σε διάφορους τομείς, όπως η ιατρική, η περιβαλλοντική επιστήμη, η μηχανική, οι επιχειρήσεις, τα οικονομικά και η κοινωνιολογία. Επίσης μπορούν να περιγράψουν τον χρόνο παραμονής στο νοσοκομείο, τον χρόνο επιβίωσης ενός μεταμοσχευμένου ασθενή, τον χρόνο έναρξης καρκίνου που προκαλείται από επαγγελματική έκθεση, τον χρόνο αποτυχίας μιας μηχανής, τον χρόνο εξάντλησης της απογραφής, τον χρόνο επιβίωσης μιας νέας επιχείρησης, τον χρόνο μετάβασης για την αλλαγή των τιμών των μετοχών και την διάρκεια ενός γάμου. Αυτά τα FHT μοντέλα γίνονται σταδιακά ευρέως εφαρμοζόμενα, λόγω της εννοιολογικής τους

προσέγγισης, του ρεαλισμού τους και της εφαρμογής τους. Πρόσφατα, το ενδιαφέρον για αυτά τα μοντέλα έχει ενταθεί και εξαπλωθεί, και βρίσκονται καινούριες περιοχές εφαρμογής τους. Οι πιθανές νέες εφαρμογές απαιτούν νέες εννοιολογικά απόψεις, θεωρητικές προόδους, αναλυτικές τεχνικές και μεθοδολογικές επεκτάσεις.

Για να κάνουμε τα FHT μοντέλα πραγματικά πολύτιμα στις εφαρμογές, πρέπει να μπορούν να επεκταθούν ώστε να μπορούν να συμπεριλάβουν δομές παλινδρόμησης. Οι δομές παλινδρόμησης επιτρέπουν στις επιδράσεις των συμμεταβλητών να εξηγήσουν την έμφυτη διασπορά των δεδομένων, λαμβάνοντας έτσι υπόψη τη μεταβλητότητα και τα συμπεράσματα. Επίσης, οι δομές παλινδρόμησης παρέχουν επιστημονικές γνώσεις σχετικά με πιθανούς τυχαίους ρόλους των συμμεταβλητών στις υποκείμενες διαδικασίες, όρια συνόλων και χρονικές κλίμακες. Η λέξη κατώφλι (threshold) αναφέρεται στο γεγονός ότι το FHT ενεργοποιείται από την υποκείμενη διαδικασία φθάνοντας ένα κατώτερο όριο μέσα σε ένα σύνολο ορίων.

4.2.1 Το μοντέλο πρώτης μετάβασης (FHT)

Ένα μοντέλο πρώτης μετάβασης έχει δύο βασικές συνιστώσες :

1. Μία γονική στοχαστική διαδικασία $\{X(t), t \in \mathcal{T}, x \in \mathcal{X}\}$ με αρχική τιμή $X(0) = x_0$, όπου \mathcal{T} είναι ο χώρος του χρόνου και \mathcal{X} είναι ο χώρος της κατάστασης της διαδικασίας και
2. Ένα σύνολο ορίων \mathcal{B} , όπου $\mathcal{B} \subset \mathcal{X}$. Θα αναφερόμαστε στο σύνολο ορίων \mathcal{B} ως όριο ή εμπόδιο ή κατώφλι, ανάλογα με το ποιος όρος είναι πιο περιγραφικός ή πιο συμβατικός με το κείμενο.

Η διαδικασία $\{X(t)\}$ μπορεί να έχει μία ποικιλία ιδιοτήτων, όπως μία ή πολλές διαστάσεις, την Μαρκοβιανή ιδιότητα, συνεχείς ή διακριτές καταστάσεις και μονότονα μονοπάτια δείγματος. Το αν το δειγματικό μονοπάτι της γονικής διαδικασίας είναι παρατηρήσιμο ή λανθάνον (μη παρατηρήσιμο) είναι ένα σημαντικό ξεχωριστό χαρακτηριστικό του μοντέλου FHT. Οι λανθάνουσες διαδικασίες είναι οι πιο συνηθισμένες. Το σύνολο ορίων \mathcal{B} μπορεί επίσης να έχει διαφορετικά χαρακτηριστικά τα οποία θα απεικονιστούν σε επόμενα παραδείγματα.

Παίρνοντας την αρχική τιμή $X(0) = x_0$ της διαδικασίας να βρίσκεται έξω από το σύνολο ορίων \mathcal{B} , η πρώτη μετάβαση του χρόνου του \mathcal{B} είναι η τυχαία μεταβλητή S η οποία ορίζεται ως εξής

$$S = \inf \{ t: X(t) \in \mathcal{B} \} \quad (4.2.1.1).$$

Έτσι, ο χρόνος πρώτης μετάβασης είναι ο χρόνος κατά τον οποίο η στοχαστική διαδικασία συναντά για πρώτη φορά το σύνολο \mathcal{B} . Αναφερόμαστε στην κατάσταση κατά την οποία η διαδικασία συναντά για πρώτη φορά το σύνολο ορίων, δηλαδή το $X(S) \in \mathcal{B}$, ως κατάσταση κατωφλίου. Το σύνολο ορίων ορίζει μία κατάσταση διακοπής για την διαδικασία και επομένως, το FHT είναι συνήθως ένας χρόνος διακοπής υπό την επίσημη έννοια αυτού του όρου στην θεωρία των στοχαστικών διαδικασιών. Σημειώνεται εδώ, ότι όταν η γονική διαδικασία είναι λανθάνουσα, δεν υπάρχει άμεσος τρόπος παρατήρησης του FHT γεγονότος στον χώρο κατάστασης της διαδικασίας.

Σε κάποιες εκδοχές του FHT μοντέλου, δεν είναι εγγυημένο ότι η διαδικασία $\{X(t)\}$ θα φτάσει το σύνολο ορίων \mathcal{B} και έτσι $P(S < \infty) < 1$. Έστω ότι το $S = \infty$ συμβολίζει την απουσία ενός πεπερασμένου χρόνου χτυπήματος με $P(S = \infty) = 1 - P(S < \infty)$. Η επόμενη συζήτηση θα δείξει καταστάσεις όπου αυτή η συνθήκη είναι εύλογη και ένα επιθυμητό χαρακτηριστικό μοντέλου. Το βασικό FHT μοντέλο (4.2.1.1) υποθέτει ότι το \mathcal{B} είναι καθορισμένο εγκαίρως. Ωστόσο, σε κάποιες εφαρμογές, αυτό εξαρτάται από τον χρόνο, δηλαδή $\mathcal{B}(t)$. Αυτή η παραλλαγή μπορεί να είναι ντετερμινιστική ή να ακολουθεί μία στοχαστική διαδικασία.

4.2.2 Παραδείγματα FHT μοντέλων

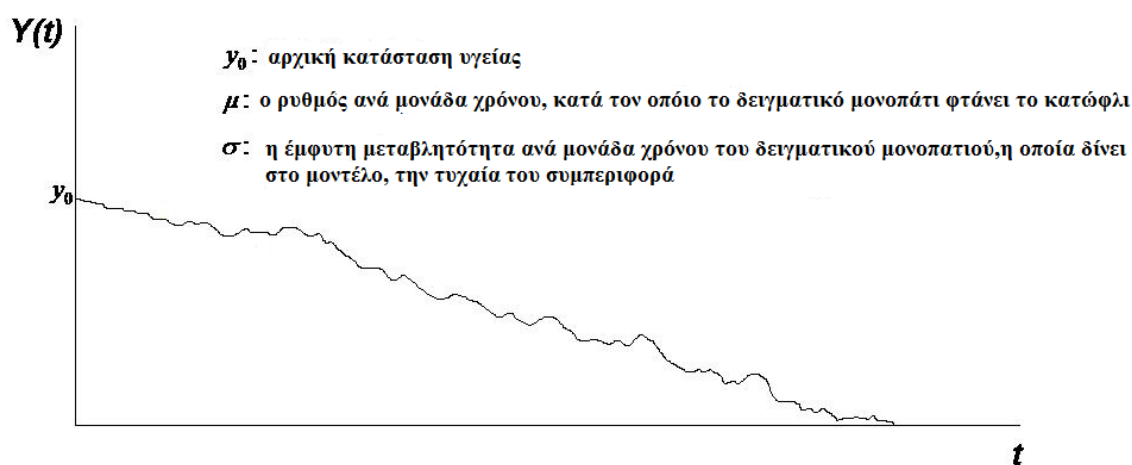
Οι γονικές στοχαστικές διαδικασίες μπορούν να λάβουν πολλές μορφές, από τις διαδικασίες Wiener μέχρι τις Μαρκοβιανές αλυσίδες. Ομοίως, η φύση της καταστάσεως του ορίου μπορεί να ποικίλει ευρέως, για παράδειγμα, ένα καθορισμένο κατώφλι σε μία διαδικασία Wiener ή μία απορροφητική κατάσταση σε μία Μαρκοβιανή αλυσίδα. Καθώς η προηγούμενη περιγραφή ενός μοντέλου πρώτου χτυπήματος είναι αρκετά αφηρημένη, θα παρουσιάσουμε τώρα μερικά βασικά παραδείγματα για να απεικονίσουμε την ποικιλία που συναντάμε στις εφαρμογές.

1. Διαδικασία Bernoulli και αρνητικός Διωνυμικός χρόνος πρώτου χτυπήματος. Ο αριθμός των δοκιμών S , ο οποίος απαιτείται για να επιτευχθεί η μ -οστή επιτυχία σε μία διαδικασία Bernoulli $\{B_t, t = 1, 2, \dots\}$ ακολουθεί αρνητική διωνυμική κατανομή με παραμέτρους m και p , όπου p είναι η πιθανότητα επιτυχίας σε κάθε δοκιμή. Για να το ρυθμίσουμε αυτό, θεωρούμε μία γονική διαδικασία $\{X_t, t = 0, 1, 2, \dots\}$ με αρχική τιμή $X_0 = x_0 = m$ και έστω $X_t = x_0 - B_t, t = 1, 2, \dots$, όπου $\{B_t\}$ είναι η προηγούμενη διαδικασία Bernoulli. Ο πρώτος χρόνος χτυπήματος

είναι η πρώτη δοκιμή Bernoulli $t = S$ για το οποίο το X_t είναι ίσο με 0. Ο αριθμός των εκτοξεύσεων των πυραύλων που απαιτούνται για την λήψη m δορυφόρων σε τροχιά είναι ένα απλό παράδειγμα αυτού του FHT μοντέλου.

2. Διαδικασία Poisson και χρόνος πρώτης μετάβασης Erlang. Ο χρόνος S μέχρι την πραγματοποίηση του m γεγονότος σε μία διαδικασία Poisson $\{N(t), t \geq 0\}$ με τον ρυθμό παραμέτρου λ να ακολουθεί κατανομή Erlang με παραμέτρους m και λ . Θεωρούμε πάλι την γονική διαδικασία $\{X(t), t \geq 0\}$ με αρχική τιμή $X(0) = x_0 = m$ και έστω $X(t) = x_0 - N(t)$, όπου $\{N(t), t \geq 0\}$ είναι η προηγούμενη διαδικασία Poisson. Ο χρόνος πρώτης μετάβασης είναι η πρώτη φορά $t = S$ για την οποία ισχύει $X(t) = 0$. Αυτό το FHT μοντέλο απεικονίζεται από τον χρόνο της αποτυχίας ενός μηχανολογικού συστήματος που αποτελείται από m παράλληλα εξαρτήματα, που έχουν ταυτόσημες και ανεξάρτητες εκθετικές διάρκειες ζωής, οι οποίες τίθενται σε λειτουργία διαδοχικά καθώς συμβαίνουν αποτυχίες.

3. Διαδικασία Wiener και αντίστροφη Γκαουσιανή χρόνου πρώτης μετάβασης (βλέπε παράγραφο 2.4). Θεωρούμε μία διαδικασία Wiener $\{X(t), t \geq 0\}$ με παράμετρο μέσου μ και παράμετρο διακύμανσης σ^2 . Όταν θεωρούμε ότι η διαδικασία Wiener είναι η υποβόσκουσα διαδικασία κατάστασης υγείας, μπορούμε να ορίσουμε το $Y(0) = y_0 > 0$ ως την αρχική κατάσταση υγείας, και ως T την πρώτη φορά, κατά την οποία ένα δειγματικό μονοπάτι της διαδικασίας της κατάστασης υγείας φτάνει το επίπεδο 0, για παράδειγμα, $T = \inf\{t : Y(t) = 0\}$. (T , θεωρείται ως ο χρόνος του γεγονότος στην ανάλυση των δεδομένων επιβίωσης από την παλινδρόμηση κατωφλίου). Το Γράφημα 4.2.2.1 παρουσιάζει την απεικόνιση ενός δειγματικού μονοπατιού μίας τέτοιας υποβόσκουσας διαδικασίας κατάστασης υγείας.



Γράφημα 4.2.2.1: Η διαδικασία Wiener, ως η υποβόσκουσα διαδικασία κατάστασης υγείας.

Χρησιμοποιώντας είτε τις πίσω είτε τις μπροστινές διαδικασίες διάχυσης, οι οποίες υπόκεινται στην αρχική κατάσταση και στην οριακή συνθήκη για το απορροφητικό φράγμα, μπορεί να προκύψει ότι το T ακολουθεί την αντίστροφη Γκαουσιανή κατανομή με την παρακάτω συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π).

$$f(t|\mu, \sigma^2, y_0) = \frac{y_0}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t^3}} \exp\left[-\frac{(y_0 + \mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right] \quad (4.2.2.1)$$

όπου $\sigma^2 > 0$, $y_0 > 0$ και $-\infty < \mu < \infty$. Η σ.π.π είναι κατάλληλη και όταν $\mu \leq 0$. Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής (α.σ.κ) του χρόνου πρώτης μετάβασης (FHT) είναι

$$F(t|\mu, \sigma^2, y_0) = \Phi\left[-\frac{(y_0 + \mu t)^2}{\sigma^2 t}\right] + \exp\left(-\frac{2y_0\mu}{\sigma^2}\right) \Phi\left[\frac{\mu t - y_0}{\sqrt{\sigma^2 t}}\right], \quad (4.2.2.2)$$

όπου $\Phi(\cdot)$ είναι η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της Τυποποιημένης Κανονικής κατανομής. Σημειώνουμε ότι αν $\mu > 0$ η διαδικασία Wiener ίσως να μην χτυπήσει ποτέ το όριο στο μηδέν και ως εκ τούτου υπάρχει μία πιθανότητα το FHT να είναι ∞ , με $P(\text{FHT} = \infty) = 1 - \exp(-2y_0\mu / \sigma^2)$.

Εξετάζοντας προσεκτικά τις εξισώσεις (4.2.2.1) και (4.2.2.2), μπορεί ναδειχθεί ότι και οι δύο $f(t|\mu, \sigma^2, y_0)$ και $F(t|\mu, \sigma^2, y_0)$, ουσιαστικά εξαρτώνται μόνο από το y_0/σ και το μ/σ . Ως εκ τούτου, θα πρέπει να κρατήσουμε σταθερή μία από τις τρεις παραμέτρους (μ, y_0, σ), για να αποφευχθεί η υπερ-παραμετρικοποίηση. Επειδή η διαδικασία φθοράς είναι υποβόσκουσα χωρίς να έχει οριστεί κλίμακα μέτρησης, επιλέγουμε να θέσουμε την παράμετρο διακύμανσης $\sigma^2 = 1$, χωρίς απώλεια της γενικότητας. Έτσι μπορούμε να παλινδρομήσουμε τις άλλες δύο παραμέτρους της διαδικασίας, y_0 και μ στα δεδομένα των συμμεταβλητών.

Υποθέτουμε ότι το διάνυσμα των συμμεταβλητών είναι $X^T = (1, X_1, \dots, X_k)$ όπου X_1, \dots, X_k είναι οι συμμεταβλητές και το στοιχείο-οδηγός 1 στο X^T επιτρέπει έναν σταθερό όρο στην σχέση παλινδρόμησης. Υποθέτουμε ότι το μ και το $\ln(y_0)$ είναι γραμμικοί συντελεστές παλινδρόμησης. Επομένως, το $\ln(y_0)$ και το μ μπορεί να συσχετιστεί με τους ακόλουθους τύπος παλινδρόμησης :

$$\ln(y_0) = \gamma_0 + \gamma_1 X_1 + \dots + \gamma_k X_k = X^T \gamma \quad (4.2.2.3)$$

$$\mu = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \dots + \beta_k X_k = X^T \beta \quad (4.2.2.4)$$

όπου $\gamma = (\gamma_0, \dots, \gamma_k)^T$ και $\beta = (\beta_0, \dots, \beta_k)^T$ είναι τα διανύσματα των συντελεστών παλινδρόμησης. Εάν μερικές συμμεταβλητές θεωρούνται ασήμαντες στην πρόβλεψη του $\ln(y_0)$ ή του μ , τότε αυτές οι συμμεταβλητές μπορούν να αφαιρεθούν από το μοντέλο παλινδρόμησης, θέτοντας τα αντίστοιχα στοιχεία του γ ή του β ίσα με μηδέν. Για παράδειγμα, εάν η συμμεταβλητή X_1 στο

X^T δεν είναι σημαντική στην πρόβλεψη του $\ln(y_0)$, τότε μπορούμε να θέσουμε το γ_1 ίσο με το μηδέν στην εξίσωση (4.2.2.3).

Ο Lancaster (1972) περιγράφει την διάρκεια μιας βιομηχανικής απεργίας χρησιμοποιώντας αυτό το μοντέλο. Στο κείμενο του, η $\{X(t)\}$ αναπαριστά την απόσταση μεταξύ των θέσεων της διεύθυνσης και των εργατών για χρόνο t μετά από την έναρξη της απεργίας. Ο αρχικός διαχωρισμός των μερών είναι $X(0) = x_0 > 0$. Η απεργία τελειώνει όταν η διαδικασία φτάνει στο μηδενικό επίπεδο, όπου τα μέρη συμφωνούν και συμβιβάζονται. Οι Onar και Padgett (2000) επέκτειναν το μοντέλο διάχυσης Wiener σε ένα επιταχυνόμενο περιβάλλον δοκιμών. Οι Pettit και Young (1999) έθεσαν το μοντέλο σε ένα μπεϋνζιανό πλαίσιο.

4. Διαδικασία Gamma και αντίστροφη Gamma χρόνου πρώτης μετάβασης (Όπως είδαμε στην παράγραφο τάδε 3.2). Θεωρούμε μία γονική διαδικασία $\{X(t), t \geq 0\}$ με αρχική τιμή $X(0) = x_0 > 0$. Έστω $X(t) = x_0 - Z(t)$, όπου $\{Z(t), t \geq 0\}$ είναι μία διαδικασία Gamma με παράμετρο κλίμακας β , παράμετρο σχήματος α και $Z(0) = 0$. Ο πρώτος χρόνος χτυπήματος του μηδενικού επιπέδου της γονικής διαδικασίας ($X = 0$) έχει αθροιστική συνάρτηση κατανομής την αντίστροφη Gamma, η οποία ορίζεται από την ταυτότητα $P(S > t) = P(Z(t) < x_0)$. Η ταυτότητα προκύπτει από το γεγονός ότι μία διαδικασία Γάμμα έχει μονότονα (μη μειωμένα) δειγματικά μονοπάτια. Η διαθεσιμότητα των υπολογιστικών ρουτινών για την α.σ.κ. της Γάμμα επιτρέπει στην α.σ.κ να μπορεί να υπολογιστεί εύκολα. Ο Singpurwalla (1995) και οι Lawless και Crowder (2004) θεώρησαν την κατανομή Γάμμα ως ένα μοντέλο φθοράς. Οι Park και Padgett (2005) θεώρησαν την γεωμετρική κίνηση Brown και τις διαδικασίες Γάμμα, μαζί σε ένα επιταχυνόμενο μοντέλο φθοράς.

5. Ornstein-Uhlenbeck διαδικασία και Ricciardi-Sato χρόνος πρώτης μετάβασης. Η Ornstein-Uhlenbeck διαδικασία (OU) είναι μία παραλλαγή μιας διαδικασίας Wiener, που σημαίνει ότι αναστρέφοντας σε αυτό, τείνει να μετατοπιστεί πίσω προς ένα σταθερό επίπεδο ισορροπίας και επομένως έχει την ιδιότητα της ομοιοστασίας. Οι Aalen και Gjessing (2004) πρότειναν την FHT κατανομή για μία τέτοια διαδικασία, ως ένα μοντέλο επιβίωσης και εξήγαγαν σχετικά αποτελέσματα. Επισήμαναν ότι η μορφή της FHT κατανομής βρίσκεται στους Ricciardi και Sato (1988), οι οποίοι την έχουν μελετήσει εκτεταμένα.

6. Αλυσίδα Markov και απορροφητική κατάσταση χρόνου πρώτης μετάβασης. Οι Μαρκοβιανές αλυσίδες $\{X_t, t = 0, 1, 2, \dots\}$ είναι ένας σημαντικός τύπος γονικής διαδικασίας. Ο χώρος κατάστασης \mathcal{X} αποτελείται από τις πιθανές καταστάσεις της αλυσίδας. Ο χώρος

χρόνου T είναι τα βήματα μετάβασης της αλυσίδας. Ο χρόνος πρώτης μετάβασης είναι ο ελάχιστος αριθμός βημάτων που απαιτούνται για να μετακινηθεί από μία αρχική κατάσταση $X(0) = x_0$ σε ένα σύνολο οριακών καταστάσεων \mathcal{B} . Η FHT κατανομή εξαρτάται από τον πίνακα μετάβασης της αλυσίδας με ακριβή μαθηματικό τρόπο. Ως παράδειγμα, μία μαρκοβιανή αλυσίδα μπορεί να μοντελοποιήσει την μεταβολή της μάρκας των προϊόντων στο πεδίο της συμπεριφοράς των καταναλωτών. Ένας πρώτος χρόνος χτυπήματος που θα μας ενδιέφερε μπορεί να είναι ο αριθμός των αγορών που θα γίνουν στην κατηγορία προϊόντων, προτού ο καταναλωτής ο οποίος επί του παρόντος χρησιμοποιεί την μάρκα x_0 , θα μεταβεί σε άλλη μάρκα, έστω β . Σε αυτήν την περίπτωση το \mathcal{B} είναι το μεμονωμένο σύνολο $\{\beta\}$.

7. Ήμι-Μαρκοβιανές αλυσίδες και οι χρόνοι πρώτης μετάβασής τους. Όλα τα προηγούμενα παραδείγματα είναι ειδικές περιπτώσεις των Μαρκοβιανών αλυσίδων. Μία ήμι-μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X(t), t \geq 0\}$, επεκτείνει το μοντέλο της Μαρκοβιανής αλυσίδας συμπεριλαμβάνοντας τον τυχαίο χρόνο που η διαδικασία βρίσκεται σε κάθε κατάσταση. Παρόλο που η Μαρκοβιανή ιδιότητα χάθηκε γενικά από αυτήν την επέκταση. Το μοντέλο παραμένει εξαιρετικής πρακτικής αξίας. Σε ένα ήμι-μαρκοβιανό μοντέλο, ο χρόνος πρώτης μετάβασης αντιπροσωπεύει τον χρόνο που η διαδικασία βρίσκεται στην αρχική και σε ακόλουθες καταστάσεις προτού εισέλθει πρώτα σε μία από τις καταστάσεις που ορίζουν το σύνολο \mathcal{B} . Υπάρχουν πολλά σημαντικά παραδείγματα αυτού του πολυκρατικού μοντέλου, μερικά πιο πολύπλοκα από άλλα. Το μοντέλο κλωνικής μετατροπής σε δύο στάδια για καρκίνο παρέχει ένα παράδειγμα κρούσματος. Πρόκειται για ένα μοντέλο χημικής καρκινογένεσης που, στη βασική του μορφή, υποθέτει μία ομάδα (στελεχών) κυττάρων που είναι ευαίσθητα σε κακοήγη μετασχηματισμό. Τα κύτταρα προχωρούν μέσα από ένα αρχικό στάδιο και στη συνέχεια μέσω κακοήθους μετατροπής σύμφωνα με μία Μαρκοβιανή διαδικασία δύο σταδίων με σταθερούς ρυθμούς μετάβασης. Μόλις δημιουργηθεί ένα κακόηθες κύτταρο, ένα δεύτερο στατιστικό μοντέλο περιγράφει την εξέλιξη μέσω σταδίων ενεργού καρκίνου μέχρι θανάτου (ομοιόσταση, αγγειογένεση, μετάσταση, θάνατος). Το μοντέλο έχει εφαρμοστεί, για παράδειγμα, σε μία μελέτη του κινδύνου του καρκίνου του πνεύμονα που τέθηκαν οι Κινέζοι ανθρακωρύχοι από την έκθεση τους σε αρσενικό, ράδιο και καπνό (Hazelton, 2001).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^ο

Μοντέλα επιταχυνόμενης διάρκειας ζωής για την φθορά

5.1 Εισαγωγή

Η εκτίμηση της κατανομής του χρόνου αποτυχίας ή της μακροπρόθεσμης απόδοσης των συστατικών των προϊόντων υψηλής αξιοπιστίας είναι ιδιαίτερα δύσκολη. Τα περισσότερα μοντέρνα προϊόντα έχουν σχεδιαστεί για να λειτουργούν χωρίς αποτυχία για χρόνια, δεκαετίες ή περισσότερο. Έτσι, λίγες μονάδες θα αποτύχουν ή θα υποβαθμιστούν αισθητά σε μια δοκιμασία πρακτικού μήκους σε κανονικές συνθήκες χρήσης. Για παράδειγμα, ο σχεδιασμός και η κατασκευή ενός δικτύου τηλεπικοινωνιών ίσως επιτρέπουν μόνο οχτώ μήνες να ελέγξουν τα εξαρτήματα τα οποία αναμένονται να είναι στην παραγωγή για 10 ή 15 χρόνια. Για τέτοιες εφαρμογές τα μοντέλα επιταχυνόμενης διακοπής χρησιμοποιούνται στις βιομηχανίες παραγωγής για να αξιολογήσουν ή να επιδείξουν τα συστατικά και την αξιοπιστία του συστήματος, για να πιστοποιήσουν τα εξαρτήματα, για να ανιχνεύσουν τρόπους αστοχίας έτσι ώστε να μπορέσουν να διορθωθούν, να συγκρίνουν διαφορετικούς κατασκευαστές, και ούτω καθεξής. Τα μοντέλα επιταχυνόμενης διακοπής γίνονται όλο και πιο σημαντικά εξαιτίας της ραγδαίας εξέλιξης της τεχνολογίας, πιο περίπλοκα προϊόντα με περισσότερα εξαρτήματα, των υψηλότερων απαιτήσεων των πελατών για καλύτερη αξιοπιστία και την ανάγκη για ραγδαία εξέλιξη των προϊόντων. Υπάρχουν δύσκολα πρακτικά και στατιστικά θέματα τα οποία περιλαμβάνονται στην επιτάχυνση της ζωής ενός περίπλοκου προϊόντος, το οποίο μπορεί να αποτύχει με πολλούς τρόπους. Γενικά, η πληροφορία από τα τεστ με υψηλά επίπεδα μίας ή περισσότερων μεταβλητών επιτάχυνσης (π.χ. ο χρησιμοποιούμενος βαθμός, η θερμοκρασία, η τάση ή η πίεση) επεκτείνεται μέσω ενός φυσικά λογικού στατιστικού μοντέλου, για να εκτιμήσουμε την διάρκεια ζωής ή την μακροπρόθεσμη απόδοση σε χαμηλότερα, κανονικά επίπεδα των επιταχυνόμενων μεταβλητών.

Οι στατιστικολόγοι στις βιομηχανίες παραγωγής συχνά καλούνται να σχεδιάσουν και να αναλύσουν δεδομένα από δοκιμασίες επιταχυνόμενης διακοπής. Με μια πρώτη ματιά, η στατιστική της επιταχυνόμενης διακοπής φαίνεται να περιλαμβάνει κάτι περισσότερο από την ανάλυση παλινδρόμησης, ίσως μερικούς περίπλοκους παράγοντες, όπως τα αποκομμένα

δεδομένα. Ωστόσο, η ίδια η φύση των μοντέλων της επιταχυνόμενης διακοπής, απαιτεί πάντα την επέκταση σε επιταχυνόμενες μεταβλητές και συχνά στο χρόνο. Αυτό σημαίνει ότι είναι σημαντική η επιλογή του μοντέλου. Βασιζόμενοι στην πρακτική της κοινής στατιστικής για να την προσαρμογή καμπύλων σε δεδομένα, μπορούμε να οδηγηθούμε στην χρησιμοποίηση ενός ακατάλληλου μοντέλου ή ακόμα και σε μη λογικά αποτελέσματα. Οι στατιστικολόγοι, οι οποίοι δουλεύουν σε προγράμματα επιταχυνόμενης διακοπής πρέπει να γνωρίζουν τις γενικές αρχές της μοντελοποίησής της και τις τρέχουσες βέλτιστες πρακτικές.

5.1.2 Ποσοτικές έναντι ποιοτικών δοκιμασιών επιταχυνόμενης διακοπής

Οι Meeker και Escobar (2006) στην μελέτη τους, ανέφεραν ότι, μέσα στα όρια της πειθαρχίας της αξιοπιστίας, ο όρος ‘επιταχυνόμενη διακοπή’ χρησιμοποιείται για να περιγράψει δύο εντελώς διαφορετικά είδη χρήσιμων, σημαντικών δοκιμών, τα οποία έχουν εντελώς διαφορετικούς σκοπούς. Για να ξεχωρίσουμε αυτές τις δύο δοκιμές, χρησιμοποιούμε συχνά τους όρους ‘ποσοτικές δοκιμές επιταχυνόμενης διακοπής’ και ‘ποιοτικές δοκιμές επιταχυνόμενης διακοπής’.

Μία ποσοτική δοκιμασία επιταχυνόμενης διακοπής ενώνει τους συνδυασμούς υψηλότερων απ’ ότι των συνηθισμένων επιπέδων ορισμένων επιταχυνόμενων μεταβλητών. Ο σκοπός μίας ποσοτικής δοκιμής επιταχυνόμενης διακοπής είναι να μας δώσει πληροφορίες για την κατανομή του χρόνου αποτυχίας ή την κατανομή της φθοράς για συγκεκριμένη ‘χρήση’ επιπέδων αυτών των μεταβλητών. Γενικά, οι τρόποι αστοχίας αυτού που μας ενδιαφέρει είναι γνωστοί εκ των προτέρων, και υπάρχει αρκετή διαθέσιμη γνώση, η οποία περιγράφει την σχέση μεταξύ του μηχανισμού αποτυχίας και των επιταχυνόμενων μεταβλητών (η οποία είτε βασίζεται στην θεωρία της φυσικής ή της χημείας, είτε σε μεγάλες ποσότητες από προηγούμενη εμπειρία με παρόμοιες δοκιμές) και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αναγνωρίσει ένα μοντέλο, το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δικαιολογήσει την επέκταση.

Από την άλλη, μία ποιοτική δοκιμασία επιταχυνόμενης διακοπής ενώνει τους υψηλότερους απ’ ότι των συνηθισμένων συνδυασμούς των μεταβλητών, όπως η θερμοκρασία του κύκλου και οι κραδασμοί. Ο σκοπός αυτών των δοκιμασιών είναι να εντοπίσουν τις αδυναμίες του προϊόντος, οι οποίες προκαλούνται από τις ατέλειες κατά την διαδικασία σχεδιασμού ή κατασκευής του προϊόντος.

Όταν συμβαίνει μία αποτυχία σε μία ποιοτική δοκιμασία επιταχυνόμενης διακοπής, είναι αναγκαίο να βρούμε και να μελετήσουμε προσεκτικά το τι προκάλεσε την αποτυχία και να αξιολογήσουμε εάν ο τρόπος αποτυχίας θα μπορούσε να συμβεί στην πραγματική χρήση ή όχι. Η γνώση και η φυσική/χημική μοντελοποίηση του συγκεκριμένου τρόπου αποτυχίας είναι χρήσιμα στο να μας βοηθήσουν να κάνουμε αυτήν την αξιολόγηση. Όταν προσδιορίζεται ότι θα μπορούσε να συμβεί μία αποτυχία κατά την πραγματική χρήση, τότε είναι απαραίτητο να αλλάξουμε τον σχεδιασμό του προϊόντος ή την διαδικασία παραγωγής του, έτσι ώστε να εξαλείψουμε την αιτία που το προκάλεσε.

Επειδή τα αποτελέσματα μίας ποιοτικής δοκιμασίας επιταχυνόμενης διακοπής χρησιμοποιούνται για να κάνουμε αλλαγές στον σχεδιασμό του προϊόντος ή στην διαδικασία παραγωγής, είναι δύσκολο ή τουλάχιστον επικίνδυνο να χρησιμοποιούμε τα δεδομένα των δοκιμασιών για να προβλέψουμε τι θα συμβεί μετά από κανονική χρήση. Έτσι, οι ποιοτικές δοκιμασίες επιταχυνόμενης διακοπής θεωρούνται ως μη στατιστικές.

5.2.Βασικές ιδέες της επιταχυνόμενης δοκιμής

5.2.1 Διαφορετικοί τύποι επιτάχυνσης

Ο όρος ‘επιτάχυνση’ έχει πολλές διαφορετικές σημασίες στον τομέα της αξιοπιστίας, αλλά σε γενικές γραμμές ο όρος υπονοεί να κάνουμε τον ‘χρόνο’ (σε οποιαδήποτε κλίμακα και να μετράμε την διάρκεια ζωής της συσκευής ή του εξαρτήματος) να τρέχει πιο γρήγορα, έτσι ώστε να μπορούμε να πάρουμε γρηγορότερα την πληροφορία της αξιοπιστίας.

5.2.2 Μέθοδοι επιτάχυνσης

Υπάρχουν διαφορετικοί μέθοδοι για την επιτάχυνση της αξιοπιστίας μιας δοκιμής, κάποιοι από τους οποίους είναι οι ακόλουθοι :

1. Αύξηση του ρυθμού χρήσης του προϊόντος. Αυτή η μέθοδος είναι κατάλληλη για προϊόντα τα οποία δεν τα χρησιμοποιούμε συχνά. Για παράδειγμα, ο μέσος όρος ζωής ενός ρουλεμάν για ένα συγκεκριμένο πλυντήριο ρούχων είναι 12 χρόνια, με βάση την παραδοχή ότι βάζουμε 8 πλύσεις την εβδομάδα. Αν το μηχάνημα δοκιμαστεί με 112 πλύσεις την εβδομάδα (16 την μέρα), τότε ο μέσος όρος ζωής μειώνεται σε περίπου 10 μήνες, κάτω από την υπόθεση ότι η αύξηση του ποσοστού χρήσης δεν αλλάζει τους κύκλους της κατανομής αποτυχίας. Επίσης, επειδή δεν είναι απαραίτητο να αποτύχουν όλες οι μονάδες σε μία δοκιμασία διάρκειας ζωής,

θα μπορούσαμε να πάρουμε χρήσιμες πληροφορίες για ένα προϊόν μέσα σε εβδομάδες, αντί για μήνες.

2. Αύξηση της έντασης της έκθεσης στην ακτινοβολία. Αρκετοί τύποι ακτινοβολίας μπορούν να οδηγήσουν στην φθορά του υλικού και στην αποτυχία του προϊόντος. Για παράδειγμα, οργανικά υλικά (από το ανθρώπινο δέρμα μέχρι υλικά όπως εποξικά και πολυβινυλοχλωρίδιο ή PVC) θα φθαρούν όταν εκτεθούν σε υπεριώδη (UV) ακτινοβολία. Η μοντελοποίηση και η επιτάχυνση των διαδικασιών φθοράς, αυξάνοντας την ένταση της ακτινοβολίας γίνεται συνήθως με έναν τρόπο παρόμοιο με επιτάχυνση με αυξανόμενο ρυθμό χρήσης.

3. Αύξηση του ρυθμού γήρανσης του προϊόντος. Αυξάνοντας το επίπεδο των πειραματικών μεταβλητών, όπως η θερμοκρασία ή η υγρασία μπορεί να επιταχύνει τις χημικές διαδικασίες ορισμένων μηχανισμών αποτυχίας, όπως η χημική φθορά (η οποία έχει ως αποτέλεσμα την ενδεχόμενη αποδυνάμωση και την αποτυχία) ενός κολλητικού μηχανισμού δεσμών ή η ανάπτυξη ενός αγωγίμου νήματος μέσα σε έναν αγωγό (το οποίο τελικά προκαλεί ένα μικρό κύκλωμα).

4. Αύξηση του επιπέδου πίεσης (π.χ. αύξηση της κυκλικής θερμοκρασίας ή της τάσης) κάτω από την αντίστοιχη δοκιμασία στην οποία οι μονάδες λειτουργούν. Μία μονάδα θα αστοχήσει όταν η δύναμή της πέφτει κάτω από την εφαρμοζόμενη διαδικασία. Έτσι, μία μονάδα κάτω από υψηλή πίεση θα αποτύχει γενικά πιο γρήγορα, απ' ό,τι αν το επίπεδο της πίεσης ήταν χαμηλότερο.

Μπορούν επίσης να χρησιμοποιηθούν συνδυασμοί αυτών των μεθόδων της επιτάχυνσης. Μεταβλητές όπως η τάση και η κυκλική θερμοκρασία μπορούν να αυξήσουν τον ρυθμό μιας ηλεκτροχημικής αντίδρασης (επιταχύνοντας έτσι τον ρυθμό γήρανσης) και την πίεση σε σχέση με την δύναμη. Σε τέτοιες καταστάσεις, όταν η επίδραση μιας επιταχυνόμενης μεταβλητής είναι περίπλοκη, ίσως δεν υπάρχει αρκετή φυσική γνώση, ώστε να παρέχει ένα κατάλληλο φυσικό μοντέλο για επιτάχυνση (και επέκταση).

5.2.3 Τύποι αποκρίσεων

Είναι χρήσιμο να γίνει διαχωρισμός ανάμεσα στις δοκιμασίες επιταχυνόμενης διακοπής βάσει της φύσης της απόκρισης.

1. Επιταχυνόμενες διωνυμικές δοκιμές (Accelerated Binary Tests). Η απόκριση σε μία επιταχυνόμενη διωνυμική δοκιμή είναι διωνυμική. Δηλαδή, το εάν το προϊόν έχει αποτύχει ή όχι, είναι η μόνη πληροφορία αξιοπιστίας, η οποία μπορεί να ληφθεί από κάθε μονάδα.

2. Δοκιμές επιταχυνόμενης διάρκειας ζωής. (Accelerated Life Tests). Η απόκριση σε μία δοκιμασία επιταχυνόμενης διάρκειας ζωής σχετίζεται άμεσα με την διάρκεια ζωής του προϊόντος. Τυπικά, τα δεδομένα των δοκιμασιών επιταχυνόμενης διάρκειας ζωής είναι δεξιά αποκομμένα, επειδή η δοκιμασία σταματά πριν αποτύχουν όλες οι μονάδες. Σε άλλες περιπτώσεις, η απάντηση σε μία δοκιμασία επιταχυνόμενης διάρκειας ζωής είναι ένα αποκομμένο διάστημα, επειδή οι αποτυχίες ανακαλύπτονται σε συγκεκριμένες στιγμές επιθεώρησης.

3. Δοκιμές επιταχυνόμενων επαναλαμβανόμενων μετρήσεων φθοράς (Accelerated Repeated Measures Degradation Tests). Σε μία δοκιμασία επιταχυνόμενων επαναλαμβανόμενων μετρήσεων φθοράς, μετρείται η φθορά σε ένα δείγμα μονάδων για διαφορετικά χρονικά σημεία. Γενικά, κάθε μονάδα παρέχει πολλές μετρήσεις φθοράς. Η απόκριση της φθοράς θα μπορούσε να είναι πραγματική χημική ή φυσική φθορά ή φθορά στην επίδοση.

4. Δοκιμασίες επιταχυνόμενης καταστροφικής φθοράς (Accelerated Destructive Degradation Tests). Μία δοκιμασία επιταχυνόμενης καταστροφικής φθοράς είναι παρόμοια με μία δοκιμασία επιταχυνόμενων επαναλαμβανόμενων μετρήσεων φθοράς, εκτός από το ότι οι μετρήσεις είναι καταστροφικές, και έτσι μπορούμε να πάρουμε μόνο μία παρατήρηση για κάθε μία μονάδα δοκιμασίας.

Αυτά τα διαφορετικά είδη των μοντέλων της επιταχυνόμενης διακοπής, μπορούν να συνδεθούν στενά, επειδή μπορούν να περιλαμβάνουν τους ίδιους υποβόσκοντες φυσικούς/χημικούς μηχανισμούς για αποτυχία και μοντέλα για επιτάχυνση. Ωστόσο, διαφέρουν στα διαφορετικά είδη στατιστικών μοντέλων και στην ανάλυση την οποία επιδέχονται, λόγω των διαφορών στο είδος της απόκρισης που παρατηρείται. Σε μερικές περιπτώσεις, οι αναλυτές χρησιμοποιούν δεδομένα επιπέδου φθοράς για να ορίσουν τους χρόνους αποτυχίας. Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό όλων των μοντέλων επιταχυνόμενης διακοπής είναι η ανάγκη να παρεκτείνουν εξωτερικά το εύρος των διαθέσιμων δεδομένων: οι δοκιμές γίνονται σε συνθήκες επιτάχυνσης, αλλά απαιτούνται εκτιμήσεις σε φυσιολογικές συνθήκες. Τέτοια παρέκταση απαιτεί δυνατές υποθέσεις μοντέλου.

5.3 Στατιστικά μοντέλα για επιτάχυνση

Για την ερμηνεία των δεδομένων επιτάχυνσης απαιτούνται μοντέλα, τα οποία συσχετίζουν επιταχυνόμενες μεταβλητές όπως η θερμοκρασία, η τάση, η πίεση, το μέγεθος κ.λ.π. με τον χρόνο επιτάχυνσης. Για να δοκιμάσουμε πάνω από κάποιο εύρος τις επιταχυνόμενες μεταβλητές, μπορούμε να προσαρμόσουμε ένα μοντέλο στα δεδομένα, για να περιγράψουμε την επίδραση που έχουν οι μεταβλητές στις διαδικασίες πρόκλησης αποτυχίας. Η γενική ιδέα είναι να ελέγξουμε τις επιταχυνόμενες μεταβλητές σε υψηλά επίπεδα, να επιταχύνουμε τις διαδικασίες αποτυχίας και να επεκτείνουμε τα χαμηλότερα επίπεδα των επιταχυνόμενων μεταβλητών. Σε κάποιες περιπτώσεις, ένα φυσικά λογικό μοντέλο μπορεί να επιτρέψει μία τέτοια επέκταση.

Φυσικά μοντέλα επιτάχυνσης. Για την πλήρη κατανόηση των μηχανισμών αποτυχίας, μπορούμε να έχουμε ένα μοντέλο το οποίο βασίζεται στην φυσική/χημική θεωρία η οποία περιγράφει την διαδικασία πρόκλησης της αποτυχίας στο σύνολο των δεδομένων και μας παρέχει την επέκταση των ήδη υπάρχουσών συνθηκών. Η σχέση ανάμεσα στις επιταχυνόμενες μεταβλητές και στον μηχανισμό της πραγματικής αποτυχίας είναι συνήθως εξαιρετικά περίπλοκη. Ωστόσο, συχνά υπάρχει ένα απλό μοντέλο το οποίο περιγράφει κατάλληλα την διαδικασία. Για παράδειγμα, αποτυχία μπορεί να προκύψει από μία περίπλοκη χημική διαδικασία με πολλά βήματα, αλλά ίσως να υπάρχει ένα κυρίαρχο βήμα και μία καλή κατανόηση αυτού του μέρους της διαδικασίας, τα οποία ίσως να μας παρέχουν ένα μοντέλο, το οποίο είναι κατάλληλο για επέκταση.

Εμπειρικά μοντέλα επιτάχυνσης. Όταν υπάρχει λίγη κατανόηση της χημικής ή φυσικής διαδικασίας, η οποία οδηγεί στην αποτυχία, τότε ίσως είναι απίθανο να αναπτύξουμε ένα μοντέλο βασισμένο στην φυσική/χημική θεωρία. Ένα εμπειρικό μοντέλο είναι ίσως η μόνη εναλλακτική λύση. Ένα εμπειρικό μοντέλο ίσως να παρέχει μία εξαιρετική προσαρμογή στα διαθέσιμα δεδομένα, αλλά παρέχει επεκτάσεις χωρίς λογική. Σε κάποιες καταστάσεις, ίσως υπάρχει εκτεταμένη εμπειρία με συγκεκριμένους συνδυασμούς μεταβλητών και μηχανισμών αποτυχίας και αυτή η εμπειρία ίσως μας παρέχει την απαιτούμενη επιβεβαίωση για την επέκταση στις συνηθισμένες καταστάσεις.

5.3.1 Γενικές συναρτήσεις μετασχηματισμού χρόνου

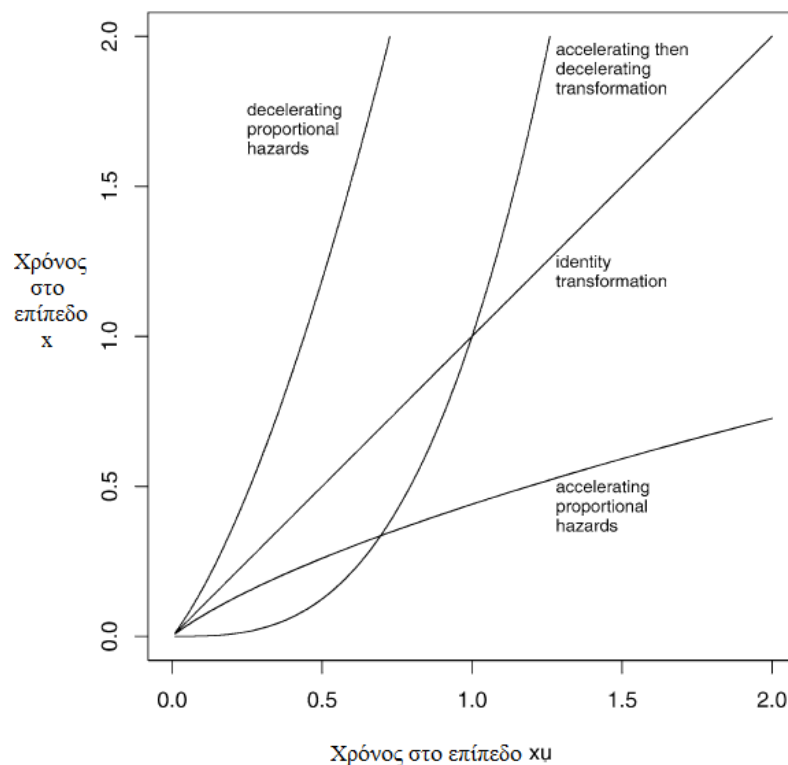
Ένα μοντέλο μετασχηματισμού χρόνου χαρτογραφεί τον χρόνο σε ένα επίπεδο x , έστω x_U , σε χρόνο σε ένα άλλο επίπεδο του x . Αυτό μπορεί να εκφραστεί ως $T(x) = Y[T(x_U), x]$, όπου x_U

δηλώνει τις υπάρχουσες συνθήκες. Για να είναι η συνάρτηση $Y(t,x)$ συνάρτηση μετασχηματισμού χρόνου θα πρέπει να έχει τις εξής ιδιότητες :

1. $Y(0,x) = 0$, για κάθε x .
2. Το $Y(0,x)$ να είναι μη αρνητικό, το οποίο σημαίνει ότι $Y(t,x) \geq 0$ για κάθε t,x .
3. Για σταθερό x , το $Y(t,x)$ αυξάνεται μονότονα ως προς t .
4. Όταν εκτιμάμε ως προς x_U , τότε ο μετασχηματισμός είναι ο ταυτοτικός μετασχηματισμός (π.χ. $Y(t, x_U) = t$ για κάθε t).

Ένα ποσοστημόριο της κατανομής του $T(x)$ μπορεί να προσδιοριστεί ως συνάρτηση του x και το αντίστοιχο ποσοστημόριο της κατανομής του $T(x_U)$. Συγκεκριμένα, $t_p(x) = Y[t_p(x_U),x]$ για $0 \leq p \leq 1$. Όπως φαίνεται στο Γράφημα 5.3.1.1 η γραφική παράσταση του $T(x_U)$ ως προς το $T(x)$ δείχνει μία συγκεκριμένη τάξη των συναρτήσεων μετασχηματισμού. Συγκεκριμένα,

- Το $T(x)$, το οποίο βρίσκεται εξ' ολοκλήρου κάτω από την διαγώνιο γραμμή, υποδηλώνει επιτάχυνση.
- Το $T(x)$, το οποίο βρίσκεται εξ' ολοκλήρου πάνω από την διαγώνιο γραμμή, υποδηλώνει επιβράδυνση.
- Το $T(x)$ μπορεί να τέμνει την διαγώνιο, και σ' αυτήν την περίπτωση ο μετασχηματισμός επιταχύνεται κάποιες φορές και επιβραδύνεται κάποιες άλλες. Σ' αυτήν την περίπτωση οι αθροιστικές συναρτήσεις κατανομών των $T(x)$ και $T(x_U)$ τέμνονται.



Γράφημα 5.3.1.1: Γενικές συναρτήσεις μετασχηματισμού χρόνου με $x_u < x$.

5.3.2 Μοντέλα επιταχυνόμενης κλίμακας και αποτυχίας στο χρόνο (Scale-Accelerated Failure-Time Models , SAFTs)

Ένα απλό, συχνά χρησιμοποιούμενο μοντέλο για τον χαρακτηρισμό της επίδρασης που έχουν οι επεξηγηματικές μεταβλητές $x = (x_1, \dots, x_k)'$ στην διάρκεια ζωής T , είναι το μοντέλο επιταχυνόμενης κλίμακας και αποτυχίας στο χρόνο (SAFTs). Το μοντέλο, το οποίο συναντάται πολύ συχνά στην στατιστική, γενικά αναφέρεται ως 'μοντέλο χρόνου επιταχυνόμενης αποτυχίας'. Ωστόσο, είναι ένα πολύ ιδιαίτερο είδος μοντέλου χρόνου επιταχυνόμενης αποτυχίας. Κάποιες από τις επεξηγηματικές μεταβλητές x , χρησιμοποιούνται για επιτάχυνση, άλλα άλλες μπορεί να είναι ενδιαφέρουσες για άλλους λόγους (π.χ. για αποφάσεις βελτιστοποίησης του σχεδιασμού του προϊόντος). Υπό την επίδραση ενός μοντέλου SAFT, η διάρκεια ζωής του x , $T(x)$, κλιμακώνεται από έναν ντετερμινιστικό παράγοντα, ο οποίος ίσως εξαρτάται από το x και άγνωστες σταθερές παραμέτρους. Πιο συγκεκριμένα, ένα μοντέλο για την τυχαία μεταβλητή $T(x)$ είναι SAFT εάν $T(x) = T(x_U)/\mathcal{A}\mathcal{F}(x)$ (x), όπου ο επιταχυντικός παράγοντας $\mathcal{A}\mathcal{F}(x)$ είναι μία θετική συνάρτηση του x , η οποία ικανοποιεί την σχέση $\mathcal{A}\mathcal{F}(x_U) = 1$. Η διάρκεια ζωής επιταχύνεται (επιβραδύνεται) όταν $\mathcal{A}\mathcal{F}(x) > 1$, ($\mathcal{A}\mathcal{F}(x) < 1$). Από την πλευρά της ποσοστιαίας κατανομής,

$$t_p(x) = \frac{t_p(x_U)}{\mathcal{A}\mathcal{F}(x)} \quad (5.3.2.1).$$

Παρατηρούμε ότι κάτω από την επίδραση ενός μοντέλου SAFT, η πιθανότητα να συμβεί η αποτυχία κάτω από ορισμένες συνθήκες x μέχρι την χρονική στιγμή t , ορίζεται ως $\Pr[T(x) \leq t] = \Pr[T(x_U) \leq \mathcal{A}\mathcal{F}(x) \times t]$. Είναι κοινός τρόπος (αλλά σίγουρα όχι απαραίτητος) να υποθέτουμε ότι η διάρκεια ζωής $T(x)$ ακολουθεί κατανομή λογαριθμικής κλίμακας, με παραμέτρους (μ, σ) , όπως μία λογαριθμοκανονική κατανομή στην οποία το μ είναι μία συνάρτηση επιταχυνόμενων μεταβλητών και το σ είναι μία σταθερά (π.χ. η οποία δεν εξαρτάται από το x). Σε αυτήν την περίπτωση,

$$F(t; x_U) = \Pr[T(x_U) \leq t] = \Phi\left[\frac{\log(t) - \mu_U}{\sigma}\right],$$

όπου το Φ συμβολίζει μία τυπική αθροιστική συνάρτηση κατανομής (π.χ τυπική κανονική) και μ_U είναι η παράμετρος θέσης για την κατανομή του $\log[T(x_U)]$. Έτσι,

$$F(t; x) = \Pr[T(x) \leq t] = \Phi\left(\frac{\log(t) - \{\mu_U - \log[\mathcal{A}\mathcal{F}(x)]\}}{\sigma}\right).$$

Το $T(x)$ ακολουθεί κατανομή λογαριθμικής κλίμακας, με παράμετρο θέσης $\mu = \mu_U - \log[AF(x)]$ και παράμετρο κλίμακας σ , η οποία δεν εξαρτάται από το x .

5.3.3 Το μοντέλο παλινδρόμησης αναλογικής διακινδύνευσης

Για μία συνεχή αθροιστική συνάρτηση κατανομής $F(t; \mathbf{x}_U)$ και $\Psi(\mathbf{x}) > 0$, ορίζουμε τον μετασχηματισμό του χρόνου

$$T(\mathbf{x}) = F^{-1}(1 - \{1 - F[T(\mathbf{x}_U); \mathbf{x}_U]\}^{1/\Psi(\mathbf{x})}; \mathbf{x}_U).$$

Μπορεί ναδειχθεί ότι ανάμεσα στο $T(\mathbf{x})$ και στο $T(\mathbf{x}_U)$ υπάρχει αναλογική σχέση διακινδύνευσης

$$h(t; \mathbf{x}) = \Psi(\mathbf{x})h(t; \mathbf{x}_U) \quad (5.3.3.1).$$

Αυτή η συνάρτηση μετασχηματισμού του χρόνου απεικονίζεται γραφικά στο Γράφημα 5.3.1.1. Σε αυτό το παράδειγμα, η ποσότητα της επιτάχυνσης (ή επιβράδυνσης), $T(\mathbf{x}_U)/T(\mathbf{x})$, εξαρτάται από την θέση στο χρόνο και το μοντέλο δεν είναι SAFT. Εάν το $F(t; \mathbf{x}_U)$ ακολουθεί κατανομή Weibull με παράμετρο κλίμακας η_U και παράμετρο θέσης β_U , τότε $T(\mathbf{x}) = T(\mathbf{x}_U)/AF(\mathbf{x})$, όπου $AF(\mathbf{x}) = [\Psi(\mathbf{x})]^{1/\beta_U}$. Αυτό συνεπάγεται ότι αυτό το συγκεκριμένο μοντέλο παλινδρόμησης αναλογικής διακινδύνευσης, είναι επίσης ένα SAFT μοντέλο παλινδρόμησης.

5.4 Επιτάχυνση του ποσοστού χρήσης

5.4.1 Απλά μοντέλα επιτάχυνσης του ποσοστού χρήσης

Αυξάνοντας το ποσοστό χρήσης μπορεί να γίνει μία αποτελεσματική μέθοδος επιτάχυνσης για κάποια προϊόντα. Η επιτάχυνση του ποσοστού χρήσης είναι κατάλληλη για προϊόντα όπως ηλεκτρικούς κινητήρες, ρελέ και διακόπτες, φωτοτυπικά μηχανήματα, εκτυπωτές και οικιακές συσκευές, όπως τοστιέρες και πλυντήρια. Επίσης είναι κοινή πρακτική να αυξάνουμε το ρυθμό του κύκλου (ή συχνότητας) σε δοκιμές κοπώσεως. Ο τρόπος με τον οποίο αυξάνεται ο ρυθμός χρήσης εξαρτάται από το προϊόν.

Υπάρχει μία βασική υπόθεση στην οποία βασίζονται τα απλά μοντέλα επιτάχυνσης του ποσοστού χρήσης. Η χρήσιμη ζωή θα πρέπει να μοντελοποιείται κατάλληλα με κύκλους λειτουργίας, όπως η κλίμακα του χρόνου και ο ρυθμός του κύκλου (ή συχνότητας) δεν θα πρέπει να επηρεάζουν την κατανομή αποτυχίας των κύκλων. Αυτό είναι λογικό εάν ο κύκλος

προσομοιώνει την πραγματική χρήση και εάν η συχνότητα του κύκλου είναι τόσο χαμηλή ώστε οι μονάδες οι οποίες βρίσκονται υπό δοκιμή να επιστρέφουν σε σταθερή θέση μετά από κάθε κύκλο (π.χ. ψύξη).

Σε τέτοιες απλές καταστάσεις, όπου η κατανομή των κύκλων αποτυχίας δεν εξαρτάται από τον ρυθμό του κύκλου, λέμε ότι επικρατεί η αμοιβαιότητα. Αυτό συνεπάγεται ότι το υποβόσκων μοντέλο για την διάρκεια ζωής εναντίον του ποσοστού χρήσης είναι το SAFT, όπου $AF(UseRate) = UseRate/UseRate_U$ είναι ο παράγοντας με τον οποίο η δοκιμή επιταχύνεται. Για παράδειγμα, ο Nelson (1990) αναφέρει ότι η αποτυχία των κυλιόμενων ρουλεμάν, μπορεί να επιταχυνθεί λειτουργώντας τα τρεις ή περισσότερες φορές πάνω από την κανονική ταχύτητα. Ο Johnston (1979) απέδειξε ότι οι κύκλοι μέχρι την αποτυχία των ηλεκτρικών μονώσεων μίκραιναν, περίπου, με έναν παράγοντα $AF(412) = 412/60 \approx 6.87$ όταν η εφαρμοζόμενη τάση σε δοκιμές αντοχής, αυξήθηκε από 60 Hz σε 412 Hz.

Σε δοκιμές επιταχυνόμενης διάρκειας ζωής ALTs με αυξημένο ποσοστό χρήσης προσπαθούμε να προσομοιώσουμε την πραγματική χρήση. Έτσι, οι άλλοι περιβαλλοντικοί παράγοντες θα πρέπει να ελέγχονται ούτως ώστε να μιμούνται τα περιβάλλοντα της πραγματικής χρήσης. Αν ο ρυθμός του κύκλου είναι αρκετά υψηλός, μπορεί να προκαλέσει διάσπαση της αμοιβαιότητας. Για παράδειγμα, είναι απαραίτητο να έχουμε μονάδες υπό δοκιμή (όπως τοστιέρα) να κρύνουν ανάμεσα στους κύκλους λειτουργίας. Διαφορετικά, η συσσώρευση θερμότητας μπορεί να κάνει την κατανομή των κύκλων αποτυχίας να εξαρτάται από τον ρυθμό του κύκλου.

5.4.2 Κύκλοι αποτυχίας που εξαρτώνται από τον βαθμό χρήσης

Κάνοντας δοκιμές σε μεγαλύτερες συχνότητες, θα μπορούσαμε να μειώσουμε τον αριθμό των δοκιμών και επίσης θα μπορούσαμε να επηρεάσουμε την κατανομή των κύκλων αποτυχίας εξαιτίας του δείγματος θέρμανσης ή άλλων αποτελεσμάτων. Σε ορισμένες περίπλοκες καταστάσεις, ο ρυθμός φθοράς ή ο ρυθμός χειροτέρευσης εξαρτάται από την συχνότητα του κύκλου. Επίσης, ένα προϊόν μπορεί να φθείρεται ενώ βρίσκεται σε αδρανή κατάσταση, καθώς και κατά την διάρκεια της χρήσης του. Η κατανομή της αβεβαιότητας είναι γνωστό ότι συμβαίνει, για παράδειγμα, σε ορισμένα εξαρτήματα σε αντιγραφικά μηχανήματα, όπου τα εξαρτήματα τείνουν να αντέχουν περισσότερο (σε όρους κύκλων, όταν η εκτύπωση γίνεται σε υψηλότερους ρυθμούς. Ο Dowling (1993) περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο η αύξηση του

ρυθμού του κύκλου μπορεί να επηρεάσει τον ρυθμό ανάπτυξης των ρωγμών σε κάθε κύκλο δοκιμής κοπώσεως. Σε τέτοιες περιπτώσεις, η εμπειρική power-rule σχέση $A_f(\text{UseRate}) = (\text{UseRate}/\text{UseRate}_U)^p$ χρησιμοποιείται συχνά, όπου το p μπορεί να εκτιμηθεί κάνοντας δοκιμές σε δύο ή περισσότερους ρυθμούς χρήσης.

Εν συνεχεία, μελετήθηκε ένα παράδειγμα για την αύξηση του ποσοστού του κύκλου για χαμηλού κύκλου δοκιμές κοπώσεως. Η ζωή κοπώσεως μετράται συνήθως σε κύκλους αποτυχίας. Για να εκτιμήσουμε την ζωή κοπώσεως χαμηλών κύκλων μεταλλικών δειγμάτων, η δοκιμή γίνεται χρησιμοποιώντας ποσοστά κύκλου τα οποία κυμαίνονται από 10 Hz μέχρι 50 Hz (όπου το 1 Hz είναι ένας κύκλος φορτίου ανά δευτερόλεπτο), ανάλογα με τον τύπο του υλικού και τον διαθέσιμο εξοπλισμό δοκιμών. Στα περίπου 50 Hz, η συσσώρευση στους 10^6 κύκλους θα απαιτούσε περίπου 5 ώρες δοκιμών. Η συσσώρευση 10^7 κύκλων θα απαιτούσε περίπου 2 μέρες και η συσσώρευση 10^8 κύκλων θα απαιτούσε περίπου 20 μέρες. Υψηλότερες συχνότητες χρησιμοποιούνται σε μελέτες κοπώσεως υψηλού κύκλου.

Μερικές δοκιμές κοπώσεως πραγματοποιούνται για την εκτίμηση του ρυθμού αύξησης των ρωγμών, συχνά ως μία συνάρτηση επεξηγηματικών μεταβλητών, όπως το φορτίο και η θερμοκρασία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6^ο

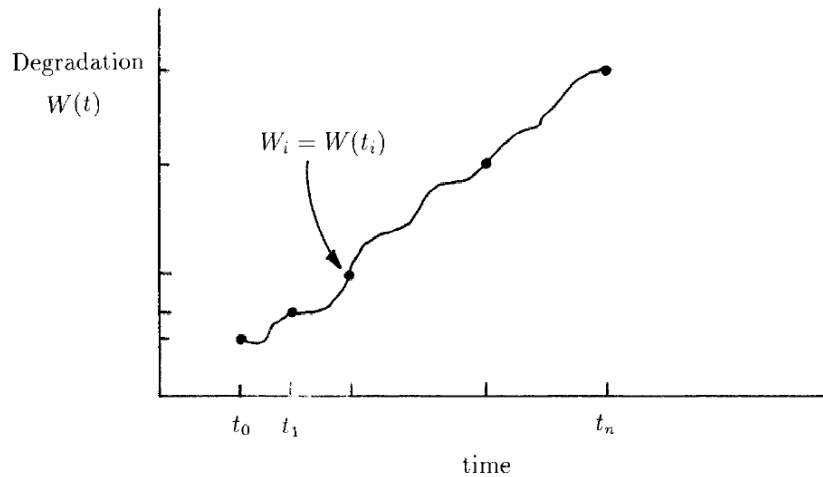
Εφαρμογές

6.1 Εφαρμογή 1^η : Μοντελοποίηση της επιταχυνόμενης φθοράς χωρίς συµμεταβλητές

Οι έλεγχοι για την φθορά των μηχανημάτων επιτρέπουν στη βιομηχανία να εκτιμούν την πιθανή διάρκεια ζωής προϊόντων μεγάλης διάρκειας ζωής, που δεν αποτυγχάνουν εύκολα κάτω από επιταχυνόμενες συνθήκες σε ελέγχους διάρκειας ζωής. Εδώ παρουσιάζεται ένα γενικό στατιστικό μοντέλο για την παρουσίαση της φθοράς ενός εξαρτήματος από έναν εξοπλισμό. Αυτή η διαδικασία φθοράς στο μοντέλο είναι η (πρότυπη) διαδικασία διάχυσης Wiener μετασχηματίζοντας τον χρόνο. Το μοντέλο περιλαμβάνει την παρεκβολή ή πρόβλεψη κατά Arrhenius για ελέγχους με υψηλές καταπονήσεις. Η διάρκεια ζωής ενός αντικειμένου ορίζεται ως ο χρόνος έως ότου η χρήση του φτάσει σε ένα συγκεκριμένο κατώφλι αποτυχίας. Το μοντέλο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να προβλέψει την διάρκεια ζωής ενός αντικειμένου ή την εξέλιξη της φθοράς του για κάποιο συγκεκριμένο χρόνο στο μέλλον.

6.1.1 Μοντέλο

Τα περισσότερα αντικείμενα φθείρονται με την πάροδο του χρόνου και καταστρέφονται όταν η φθορά τους φτάσει ένα συγκεκριμένο κατώφλι αποτυχίας. Υποθέτουμε ότι ένα βασικό μέτρο που διέπει την αποτυχία μπορεί να αναπαρασταθεί από το στατιστικό μοντέλο της διαδικασίας Wiener $\{W(t)\}$ με μέση τιμή δ και διασπορά $\nu > 0$. Η διαδικασία Wiener (παράγραφος 2.4) εφαρμόζεται ως μοντέλο φθοράς σε πολλές μελέτες, όπως για παράδειγμα των Doksum και Hóyland (1992) και του Lu (1995). Το Γράφημα 6.1.1.1 παρουσιάζει ένα αντιπροσωπευτικό μονοπάτι δείγματος της διαδικασίας Wiener. Το μονοπάτι δείχνει την φθορά ενός αντικειμένου στο χρόνο, στο οποίο μεγάλες τιμές υποδηλώνουν μεγάλη φθορά. Υποθέτουμε ότι η φθορά μετράται σε $n+1$ χρονικά σημεία t_i , για $t_0 < t_1 \dots < t_n$. Οι μετρήσεις για κάθε χρόνο t_i συμβολίζονται με $W_i = W(t_i)$.



Γράφημα 6.1.1.1. Αντιπροσωπευτικό μονοπάτι δείγματος διαδικασίας διάχυσης Wiener. Το μονοπάτι δείχνει την φθορά ενός αντικειμένου στο χρόνο.

Το προηγούμενο μοντέλο Wiener υποθέτει ότι το δ , δηλαδή ο ρυθμός της φθοράς του μονοπατιού, είναι σταθερός. Ωστόσο, εάν δεν είναι σταθερός, μπορούμε να βρούμε έναν μονότονο μετασχηματισμό του χρόνου, ο οποίος μπορεί να κάνει το δ σταθερό. Υποθέτουμε ότι αυτού του είδους ο μετασχηματισμός είναι κατάλληλος σε αυτή την μελέτη και τον συμβολίζουμε ως

$$t = \tau(r), \quad (6.1.1.1)$$

όπου το r συμβολίζει τον ωρολογιακό χρόνο ή τον ημερολογιακό χρόνο και t , τον μετασχηματισμένο χρόνο. Ο μετασχηματισμός θα πρέπει να ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $\tau(0) = 0$. Ο μετασχηματισμένος χρόνος t καλείται συχνά χρόνος λειτουργίας και από φυσικής απόψεως, μπορεί να θεωρηθεί ως η μέτρηση της φυσικής εξέλιξης της φθοράς, όπως η οξείδωση, η αλλοίωση και ούτω καθεξής. Εξ' αιτίας αυτής της φυσικής βάσης του t , ο μετασχηματισμός $t = \tau(r)$ θα εξαρτάται από τον συγκεκριμένο μηχανισμό φθοράς που επικρατεί σε μια δοσμένη εφαρμογή. Έστω ότι το $t_i = \tau(r_i)$ δηλώνει τον αντίστοιχο χρόνο λειτουργίας του ωρολογιακού χρόνου r_i , για $i = 0, 1, \dots, n$.

Στην περίπτωση που μελετάμε εδώ, θεωρούμε τους δύο παρακάτω τύπους μετασχηματισμού του χρόνου (6.1.1.1)

$$t = 1 - \exp(-\lambda r^\gamma), \quad (6.1.1.2a)$$

$$t = r^\lambda, \quad (6.1.1.2b)$$

όπου το λ και το γ είναι θετικές παράμετροι. Ο εκθετικός μετασχηματισμός του χρόνου στη σχέση (6.1.1.2a) είναι κατάλληλος για πολλές εφαρμογές στις οποίες η φθορά προσεγγίζει ένα σημείο κορεσμού ή όπου η χειροτέρευση τελειώνει (για παράδειγμα, όπου η οξείδωση παύει).

Ο μετασχηματισμός έχει δύο παραμέτρους, την παράμετρο λ , η οποία είναι συνήθως άγνωστη και πρέπει να εκτιμηθεί σε κάθε εφαρμογή, και την παράμετρο γ , η οποία είναι συχνά μία βασική σταθερά, η οποία έχει οριστεί ως ακέραιος αριθμός ή κλάσμα με βάση τις φυσικές ιδιότητες του αντικειμένου. Ένα παράδειγμα του μετασχηματισμού (6.1.1.2a) παραθέτεται στους Carey και Koenig (1991). Στην μελέτη τους, η διαδιδόμενη καθυστέρηση ενός λογικού κυκλώματος μειώνεται (αυξάνεται) βάση ενός αναμενόμενου μονοπατιού της σχέσης (6.1.1.2a) με $\gamma=1/2$. Ο Whitmore (1995) βρήκε έναν παρόμοιο μετασχηματισμό του χρόνου σε σχέση με την φθορά του κέρδους του τρανζίστορ. Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε $\gamma=1$. Ο μετασχηματισμός με τη δύναμη του χρόνου στην σχέση (6.1.1.2b) προτείνεται γενικά από την επικράτηση των σχέσεων της δύναμης σε φυσικά μοντέλα. Ο μετασχηματισμός (6.1.1.2b) υποδηλώνει ότι η φθορά θα συνεχίσει να αυξάνεται απεριόριστα. Όπως στον μετασχηματισμό (6.1.1.2a), η παράμετρος λ στην σχέση (6.1.1.2b) πρέπει να εκτιμάται σε κάθε εφαρμογή.

Όταν τα δεδομένα για τις δοκιμές φθοράς συλλέγονται κάτω από επιταχυνόμενες ή υψηλής πίεσης καταστάσεις (όπως η αυξημένη θερμοκρασία), η σχέση μεταξύ του επιπέδου της πίεσης και των παραμέτρων των μοντέλων πρέπει να καθοριστεί έτσι ώστε οι παράμετροι να μπορούν να προσαρμοστούν στις χαμηλότερες συνθήκες που υπάρχουν κατά την πραγματική χρήση του προϊόντος. Στο μοντέλο μας, έχουμε τις παραμέτρους της διαδικασίας Wiener, δ και ν , και τις παραμέτρους του μετασχηματισμού του χρόνου (6.1.1.1). Χάρην ευκολίας, υποθέτουμε ότι ο μετασχηματισμός του χρόνου $t = \tau(t)$ έχει μόνο μία παράμετρο, η οποία είναι άγνωστη και, ως εκ τούτου, πρέπει να εκτιμηθεί. Αυτήν την παράμετρο την συμβολίζουμε με λ , όπως κάναμε και στις σχέσεις (6.1.1.2a) και (6.1.1.2b). Εν συνεχεία, γράφουμε τον μετασχηματισμό ως $t=\tau(t;\lambda)$ για να δείξουμε την εξάρτησή του από τις παραμέτρους. Λόγω οικονομίας, αλλά και με βάση την μέχρι τώρα εμπειρία μας, είναι καλύτερο να χρησιμοποιούμε απλούς τύπους συναρτήσεων για την περιγραφή των σχέσεων ανάμεσα στις παραμέτρους του μοντέλου και της πίεσης. Θα περιγράψουμε την πίεση με ένα απλό ποσοτικό μέτρο, το οποίο συμβολίζουμε με s . Αφού εφαρμόσουμε συνεχείς μονότονους μετασχηματισμούς στις παραμέτρους και στην μέτρηση της πίεσης s , υποθέτουμε ότι οι σχέσεις μεταξύ της μετασχηματισμένης πίεσης και των μετασχηματισμένων παραμέτρων είναι γραμμικές, όπως οι ακόλουθες.

$$\begin{aligned} A(\delta) &= \alpha_0 + \alpha_1 H(s) \\ B(\nu) &= b_0 + b_1 H(s) \\ C(\lambda) &= c_0 + c_1 H(s) \end{aligned} \quad (6.1.1.3)$$

Εδώ τα $A(\delta)$, $B(v)$, $C(\lambda)$ και $H(s)$ συμβολίζουν τους μετασχηματισμούς. Σημειώνουμε ότι τα A , B και C στην (6.1.1.3) μπορούν να ερμηνευθούν ως ένα νέο σύνολο παραμέτρων για το μοντέλο, ενώ το H μπορεί να θεωρηθεί ως ένα υποκατάστατο μέτρο της πίεσης. Για ευκολία στην εξήγηση, θεωρούμε μόνο μη παραμετρικούς μετασχηματισμούς στην (6.1.1.3), όπως έναν λογαριθμικό ή έναν αμοιβαίο μετασχηματισμό. Οι μη παραμετρικοί μετασχηματισμοί επαρκούν για την μελέτη μας, αν και οι γενικές εφαρμογές ενδέχεται να απαιτούν μετασχηματισμούς με παραμέτρους, οι οποίες πρέπει να εκτιμηθούν.

Η γραμμική σχέση ανάμεσα στον λογαριθμικό ρυθμό μιας χημικής αντίδρασης και της αντίστοιχης απόλυτης θερμοκρασίας ονομάζεται εξίσωση Arrhenius. Η φυσική εξίσωση συναντάται κυρίως σε δοκιμές αντοχής. Καθώς οι εξισώσεις (6.1.1.3) αφορούν τις στατιστικές παραμέτρους του μοντέλου φθοράς στο επίπεδο του φορτίου, θα αναφερόμαστε σε αυτές ως οι εξισώσεις Arrhenius και στον μετασχηματισμό $H(s)$, ως ο μετασχηματισμός Arrhenius. Στην κλασική σχέση Arrhenius, θέτουμε $H(s) = 1/s$, όπου το s αντιπροσωπεύει την απόλυτη θερμοκρασία σε Kelvin.

Εάν οι γραμμικοί συντελεστές των εξισώσεων Arrhenius στην (6.1.1.3) ήταν γνωστοί, τότε οι προβλέψεις αξιοπιστίας θα προχωρούσαν ως εξής. Δεδομένου του επιπέδου χρήσης του φορτίου, έστω s_0 , θα υπολογίζαμε πρώτα το $H_0 = H(s_0)$ και μετά θα υπολογίζαμε τα $A_0 = a_0 + a_1 H_0$, $B_0 = b_0 + b_1 H_0$ και $C_0 = c_0 + c_1 H_0$ από την (6.1.1.3). Στην συνέχεια, θα επιλύαμε ως προς τις παραμέτρους διαδικασίας δ_0 και v_0 και την παράμετρο μετασχηματισμού του χρόνου λ_0 υπό τις συνθήκες του κανονικού επιπέδου, αντιστρέφοντας τους ακόλουθους μονότονους μετασχηματισμούς: $A_0 = A(\delta_0)$, $B_0 = B(v_0)$, $C_0 = C(\lambda_0)$. Τώρα μπορούν να γίνουν οι δύο ειδών παρακάτω προβλέψεις:

1) Πρόβλεψη Ενός Μελλοντικού Επιπέδου Φθοράς

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να προβλέψουμε το επίπεδο της φθοράς W_f για κάποιο μελλοντικό (ωρολογιακό) χρόνο t_f για ένα καινούριο προϊόν. Υποθέτουμε ότι το μέτρο φθοράς βαθμονομείται έτσι ώστε ένα νέο προϊόν να μην έχει αρχικά φθορά και επομένως $W(0) = 0$. Στην συνέχεια εκμεταλλευόμαστε το γεγονός ότι $W_f \sim N(\delta_0 t_f, v_0 t_f)$, όπου t_f ορίζει τον χρόνο λειτουργίας που αντιστοιχεί στο t_f , π.χ. $t_f = \tau(t_f; \lambda_0)$. Αυτή η Κανονική Κατανομή είναι η προβλεπόμενη κατανομή του W_f του ωρολογιακού χρόνου t_f κάτω από συνηθισμένο επίπεδο πίεσης. Τα όρια πρόβλεψης για το W_f έχουν την μορφή $\delta_0 t_f \pm z \sqrt{v_0 t_f}$, όπου το z συμβολίζει έναν κατάλληλο τυπικό, κανονικό αριθμό.

2) Πρόβλεψη Διάρκειας Ζωής

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να προβλέψουμε την διάρκεια ζωής ενός νέου προϊόντος. Πρέπει πρώτα να ορίσουμε ένα κατώφλι αποτυχίας για την διαδικασία φθοράς. Έστω $\omega > 0$ συμβολίζει το κατώφλι. Έπειτα χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι ο χρόνος πρώτου χτυπήματος T σε αυτό το κατώφλι, θα ακολουθεί αντίστροφη Γκαουσιανή κατανομή $IG(\omega/\delta_0, \omega^2/\nu_0)$ κάτω από φυσιολογικές συνθήκες. Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής $F(t)$ αυτής της κατανομής μπορεί στην συνέχεια να χρησιμοποιηθεί για να κάνουμε προβλέψεις για το T . Αυτή η συνάρτηση θα έχει τύπο

$$F(t) = \Phi\left[(\delta_0 - \omega)(\nu_0 t)^{-\frac{1}{2}}\right] + \exp(2 \delta_0 / \nu_0) \Phi\left[-(\delta_0 t + \omega)(\nu_0 t)^{-\frac{1}{2}}\right], \quad (6.1.1.4)$$

όπου το Φ συμβολίζει την συνάρτηση της τυποποιημένης Κανονικής κατανομής. Πρέπει να ληφθεί υπόψη ότι το T αναφέρεται στον χρόνο λειτουργίας του προϊόντος κάτω από τις συνηθισμένες συνθήκες χρήσης. Το αντίστροφο του μετασχηματισμού του χρόνου $t = \tau(r; \lambda_0)$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να μετατρέψει αυτές τις προβλέψεις σχετικά με την T σε ισοδύναμες προβλέψεις σχετικά με την διάρκεια ζωής του αντικειμένου που μετράται σε ωρολογιακό χρόνο.

6.1.2 Συμπέρασμα

Στην πράξη, οι γραμμικοί συντελεστές των εξισώσεων Arrhenius στην (6.1.1.3) πρέπει να εκτιμηθούν από τα δεδομένα ελέγχων επιταχυνόμενης φθοράς. Τώρα δίνουμε νέους συμβολισμούς στην παρουσίαση αυτών των δεδομένων ελέγχων και στον καθορισμό των γενικών χαρακτηριστικών των ελέγχων φθοράς.

Υποθέτουμε ότι τοποθετούνται για έλεγχο m_k καινούρια προϊόντα σε κάθε ένα από τα K επίπεδα φορτίου, τα οποία συμβολίζονται με s_k , για $k=1, \dots, K$. Έστω W_{ijk} και r_{ijk} συμβολίζουν το παρατηρούμενο επίπεδο φθοράς και τον ωρολογιακό χρόνο αντίστοιχα, για την i -οστή παρατήρηση, του j -οστού προϊόντος, στο k -οστό επίπεδο φορτίου. Εδώ έχουμε $j=1, \dots, m_k$ και $i=0, \dots, n_{jk}$. Έτσι, m_k είναι ο αριθμός των προϊόντων σε έλεγχο στο k -οστό επίπεδο στρες και $n_{jk} + 1$ είναι ο αριθμός των παρατηρήσεων, οι οποίες έγιναν για το j -οστό προϊόν σε αυτό το επίπεδο φορτίου. Υποθέτουμε ότι $n_{jk} \geq 2$ για κάθε προϊόν έτσι ώστε τα δεδομένα να είναι ικανοποιητικά για την εκτίμηση των παραμέτρων.

Χρησιμοποιούμε την μέθοδο μέγιστης πιθανοφάνειας για να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους δ , ν και λ για κάθε προϊόν. Έστω ότι συμβολίζουμε τις εκτιμήτριες με $(\widehat{\delta}_{jk}, \widehat{\nu}_{jk}, \widehat{\lambda}_{jk})$ για το j -οστό αντικείμενο, στο k -οστό επίπεδο φορτίου. Για να περιγράψουμε την μέθοδο που χρησιμοποιούμε για την εκτίμηση, θα αφήσουμε τους δείκτες j και k και θα επικεντρωθούμε στις $n+1$ παρατηρήσεις (W_i, t_i) , $i=0,1,\dots,n$, οι οποίες γίνονται σε κάθε ένα προϊόν. Επειδή οι μη αλληλεπικαλυπτόμενες προσαυξήσεις είναι ανεξάρτητες, εξετάζουμε τις πρώτες διαφορές των παρατηρήσεων. Για $i = 1,2,\dots,n$ ορίζουμε $\Delta W_i = W_i - W_{i-1}$ και $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, όπου $t_i = \tau(t_i; \lambda)$. Η εξάρτηση των διαφορών Δt_i ως προς την άγνωστη παράμετρο λ , αφήνεται σε αυτήν την σημείωση. Αφού έχουμε

$$\Delta W_i \sim N(\delta \Delta t_i, \nu \Delta t_i), \quad (6.1.2.1)$$

η δειγματοληπτική συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι

$$L(\delta, \nu, \lambda) = \prod_{i=1}^n (2\pi\nu\Delta t_i)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2\nu} \sum_{i=1}^n \frac{(\Delta W_i - \delta\Delta t_i)^2}{\Delta t_i}\right]. \quad (6.1.2.2)$$

Βασίζοντας την δειγματοληπτική συνάρτηση πιθανοφάνειας στις πρώτες διαφορές, η αρχική παρατήρηση $W_0 = W(t_0)$ δεν εμφανίζεται ρητά στην συνάρτηση. Η αρχική παρατήρηση για ένα προϊόν είναι ανεξάρτητη των παραμέτρων της διαδικασίας φθοράς και ως εκ τούτου, καμία πληροφορία δεν χάνεται παραλείποντας την αρχική παρατήρηση από την πιθανότητα. Σε κάποιες εφαρμογές, ίσως να υπάρχει ανάγκη να μοντελοποιήσουμε την αρχική παρατήρηση και να την συμπεριλάβουμε στα συμπεράσματα.

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας (6.1.2.2) μπορεί να μεγιστοποιηθεί άμεσα χρησιμοποιώντας μία συνηθισμένη, τρισδιάστατη, αριθμητική βελτιστοποίηση (η προσέγγιση χρησιμοποιείται στην περίπτωση που μελετάμε). Μία εναλλακτική προσέγγιση είναι να σταθεροποιήσουμε το λ αρχικά και έπειτα να μεγιστοποιήσουμε την συνάρτηση πιθανοφάνειας (6.1.2.2), ως προς το δ και το ν . Αυτή η βελτιστοποίηση δίνει τους ακόλουθους κλασικούς εκτιμητές, ο καθένας από τους οποίους εξαρτάται από το λ .

$$\widehat{\delta}(\lambda) = \frac{W_n - W_0}{t_n - t_0} \quad (6.1.2.3a)$$

$$\widehat{\nu}(\lambda) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{[\Delta W_i - \widehat{\delta}(\lambda)\Delta t_i]^2}{\Delta t_i} \quad (6.1.2.3b)$$

Αντικαθιστώντας, αυτούς τους εκτιμητές, στην (6.1.2.2) και απλοποιώντας παίρνουμε την ακόλουθη μερικώς μεγιστοποιημένη συνάρτηση πιθανοφάνειας.

$$L(\lambda) = [2\pi\hat{\nu}(\lambda)]^{-\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^n (\Delta t_i)^{-\frac{1}{2}} \exp(-n/2) \quad (6.1.2.4)$$

Υπενθυμίζουμε εδώ ότι το Δt_i είναι συνάρτηση του λ . Η συνάρτηση (6.1.2.4) μπορεί να μεγιστοποιηθεί μελετώντας την μονοδιάστατα ως προς το λ , δίνοντας την εκτίμηση της μέγιστης πιθανοφάνειας $\hat{\lambda}$. Αντικαθιστώντας αυτήν την εκτίμηση, σε κάθε μία από τις (6.1.2.3a) και (6.1.2.3b), παίρνουμε τις απόλυτες εκτιμήτριες της μέγιστης πιθανοφάνειας, των $\hat{\delta}$ και $\hat{\nu}$.

Επομένως, με μία από τις προηγούμενες αριθμητικές μεθόδους, παίρνουμε τις εκτιμήτριες της τριπλέτας των παραμέτρων $(\widehat{\delta}_{jk}, \widehat{\nu}_{jk}, \widehat{\lambda}_{jk})$ για το j-οστό προϊόν, στο k-οστό επίπεδο φορτίου. Συνεχίζοντας την υπόθεση ότι οι μετασχηματισμοί A, B, C και H είναι γνωστοί αυτήν τη στιγμή, μπορούμε να υπολογίσουμε τα μετασχηματισμένα στατιστικά στοιχεία $A_{jk} = A(\widehat{\delta}_{jk})$, $B_{jk} = B(\widehat{\nu}_{jk})$, $C_{jk} = C(\widehat{\lambda}_{jk})$ και $H_k = H(s_k)$, για κάθε j και k.

Η ακριβής πολυμεταβλητή κατανομή των τριπλετών $\mathbf{Y}_{jk} = (A_{jk}, B_{jk}, C_{jk})$ είναι άγνωστη, αν και γνωρίζουμε από την θεωρία της πιθανοφάνειας ότι θα είναι ασυμπτωτικά trivariate normal.

Έτσι, έστω ότι $\mathbf{X}_k = (1, H_k)$ και

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{pmatrix}$$

Τότε ξέρουμε ότι

$$\mathbf{Y}_{jk} \sim \text{approx. } N_3(\mathbf{X}_k \mathbf{B}, \Sigma_k) \quad (6.1.2.5)$$

όπου Σ_k συμβολίζει τον πίνακα συνδιακύμανσης της τριπλέτας για κάθε προϊόν στο επίπεδο φορτίου k. Χρησιμοποιώντας την (6.1.2.5), οι γραμμικές συμμεταβλητές των εξισώσεων Arrhenius (2.3) μπορούν να εκτιμηθούν με την πολυμεταβλητή παλινδρόμηση των τριπλετών \mathbf{Y}_{jk} στις τιμές των H_k . Αυτή η παλινδρόμηση πρέπει να λάβει υπόψη την ετεροσκεδαστική δομή του σφάλματος, η οποία αντανακλάται στον πίνακα συνδιακύμανσης Σ_k . Η ακριβής

μορφή του πίνακα συνδυακόμενης θα ποικίλει από την μία εφαρμογή στην άλλη. Η ανάλυση παλινδρόμησης παρουσιάζεται στην παράγραφο 6.1.3.

Μόλις οι εκτιμώμενες εξισώσεις Arrhenius είναι διαθέσιμες, η ανάλυση πρόβλεψης που περιγράφεται στο προηγούμενο κομμάτι, μπορεί να εφαρμοστεί, με την προϋπόθεση ότι θα ξεπεραστούν τα δύο παρακάτω εναπομείναντα εμπόδια. Πρώτον, πρέπει να ληφθούν υπόψη τα σφάλματα δειγματοληψίας στις εκτιμώμενες συμμεταβλητές στην (6.1.1.3), όταν χρησιμοποιούνται για την προβλεπόμενη ανάλυση. Δεύτερον, πρέπει να προσδιοριστούν οι σωστοί μετασχηματισμοί $A(\delta)$, $B(v)$, $C(\lambda)$ και $H(s)$. Αυτά τα δύο εμπόδια πρέπει να αντιμετωπιστούν για κάθε περίπτωση ξεχωριστά.

Σε μερικές εφαρμογές, τα σφάλματα δειγματοληψίας στις εκτιμώμενες συμμεταβλητές στην (6.1.1.3), αντιπροσωπεύουν επιδράσεις δευτερευούσης σημασίας και, ως εκ τούτου, μπορούν να αγνοηθούν στην ανάλυση πρόβλεψης. Όταν τα σφάλματα δειγματοληψίας έχουν μία ουσιαστική επίδραση στις προβλέψεις, απαιτείται στρατηγική για να ληφθεί υπόψη η επίδραση τους. Η ανάπτυξη ακριβών αναλυτικών αποτελεσμάτων δεν φαίνεται να είναι εφικτή. Μία πρακτική προσέγγιση, μπορεί να χρησιμοποιήσει ανάλυση ευαισθησίας, προσομοίωση ή μία Μπεύζιανή διαδικασία. Αυτές οι μέθοδοι δίνονται σε αύξουσα σειρά πολυπλοκότητας. Η εκτίμηση του πίνακα συμμεταβλητών \mathbf{B} στο μοντέλο παλινδρόμησης (6.1.2.5) είναι το κλειδί στις προβλέψεις. Η εκτίμηση, η οποία συμβολίζεται με $\hat{\mathbf{B}}$, ακολουθεί μία ασυμπτωτική, πολυμεταβλητή, Κανονική κατανομή που μπορεί να εκτιμηθεί χρησιμοποιώντας την συμβατική θεωρία της παλινδρόμησης. Η εκτιμώμενη κατανομή, μπορεί στη συνέχεια να χρησιμοποιηθεί για τον καθορισμό των περιοχών των παραμέτρων για μία απλή ανάλυση ευαισθησίας. Μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή σύνθετων διαστημάτων εμπιστοσύνης για ένα μελλοντικό επίπεδο φθοράς W_f ή την διάρκεια ζωής T ενός προϊόντος, δημιουργώντας προσομοιωμένα αποτελέσματα του \mathbf{B} . Τέλος, η ασυμπτωτική κατανομή, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό των Μπεύζιανών διαστημάτων εμπιστοσύνης.

Η αναγνώριση των σωστών μετασχηματισμών $A(\delta)$, $B(v)$, $C(\lambda)$ και $H(s)$ μπορεί να προσεγγιστεί χρησιμοποιώντας έναν συνδυασμό γνώσης του αντικειμένου και στατιστικών διαδικασιών. Το θέμα μπορεί να προτείνει, για παράδειγμα, ότι η $H(s)$ έχει την μορφή Arrhenius που αναφέρθηκε πριν. Επίσης, μπορεί να προτείνει μορφές για το $A(\delta)$, $B(v)$ και $C(\lambda)$. Οι υποψήφιοι μετασχηματισμοί θα μπορούσαν επίσης να εντοπιστούν, εξετάζοντας τα

κατάλληλα γραφήματα, τα οποία υποστηρίζονται από τυπικές δοκιμές καλής προσαρμογής. Για να απεικονίσουμε την προσέγγιση για το $A(\delta)$, σημειώνουμε ότι έχουμε m_k παρατηρήσεις A_{jk} , $j = 1, \dots, m_k$, για κάθε επίπεδο φορτίου s_k . Ως εκ τούτου, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένα τεστ γραμμικότητας Anova, το οποίο βασίζεται στα αθροίσματα τετραγώνων για το απλό σφάλμα και στην έλλειψη καλής προσαρμογής.

6.1.3 Εφαρμογή της διαδικασίας Wiener (Εφαρμογή 1^η)

Το τμήμα Chemelex της Raychem Corporation στην πόλη Redwood της Καλιφόρνιας, κατασκευάζει ένα αυτορυθμιζόμενο καλώδιο θέρμανσης, το οποίο βρίσκει εκτεταμένη εφαρμογή σε συνθήκες που απαιτούν υψηλή αξιοπιστία. Αυτά τα καλώδια, υπόκεινται σε εκτεταμένες δοκιμές φθοράς, τόσο για την εξασφάλιση της αξιοπιστίας των σημερινών προϊόντων, όσο και για την υποστήριξη της ανάπτυξης νέων και βελτιωμένων σχεδιασμών προϊόντων. Το σύνολο των δεδομένων αυτής της εφαρμογής, είναι μία καλυμμένη έκδοση ενός τυπικού συνόλου δοκιμασιών. Αυτή η κάλυψη δεν μεταβάλλει τις ουσιαστικές στατιστικές ιδιότητες που μελετώνται, αλλά προστατεύει συμφέροντα της εταιρείας. Τα στοιχεία που δοκιμάστηκαν σε αυτήν την εφαρμογή, είναι δείγματα μήκους καλωδίων, που κόβονται από μία παρτίδα παραγωγής. Η φθορά του καλωδίου υποδεικνύεται με την αύξηση της ηλεκτρικής του αντοχής με την πάροδο του χρόνου. Ως μέτρο φθοράς W θα χρησιμοποιηθεί ο φυσικός λογάριθμος της αντοχής. Η φθορά του καλωδίου επιταχύνεται από την θερμική καταπόνηση και έτσι η θερμοκρασία (μετρούμενη σε $^{\circ}\text{K}$) χρησιμοποιείται ως μέτρο πίεσης. Τα δεδομένα της δοκιμασίας αποτελούνται από μετρήσεις σχετικά με την λογαριθμική αντοχή σε αρκετά χρονικά σημεία για κάθε προϊόν. Οι μετρήσεις της λογαριθμικής αντοχής είναι τυποποιημένες στο 0, για χρόνο $t=0$ έτσι ώστε να προσαρμοστούν για μικρές διαφορές στα μήκη καλωδίων των προϊόντων. Αυτός ο τύπος καλωδίου παρουσιάζει μία ελαφριά βελτίωση στην απόδοση (π.χ μία πτώση της αντοχής), όταν τίθεται για πρώτη φορά σε λειτουργία. Αυτή η αρχική βελτίωση αποδίδεται στην σκλήρυνση του πολυμερούς καλωδίου. Για το λόγο αυτό, για την ανάλυση λαμβάνονται υπόψη μόνο οι μετρήσεις που λαμβάνονται μετά από αυτή τη φάση σκλήρυνσης.

Πέντε προϊόντα δοκιμασίας ψήθηκαν σε φούρνο σε τρεις θερμοκρασίες δοκιμασίας. Χρησιμοποιήθηκαν οι ακόλουθες τρεις θερμοκρασίες δοκιμασίας 200°C , 240°C και 260°C , δίνοντας συνολικά 15 στοιχεία δοκιμής. Καταγράφηκαν 10 μετρήσεις, μετά την φάση σκλήρυνσης σε κάθε στοιχείο που δοκιμάστηκε στους 200°C . Ομοίως, καταγράφηκαν 11

μετρήσεις σε καθένα από τα τέσσερα στοιχεία που δοκιμάστηκαν στους 240 °C, αλλά, για το 5^ο αντικείμενο που δοκιμάστηκε σε εκείνη την θερμοκρασία μόνο 10 μετρήσεις ήταν διαθέσιμες. Η τελευταία μέτρηση λείπει, εξαιτίας μίας βλάβης της δοκιμαστικής διάταξης. Τέλος, σε κάθε αντικείμενο που δοκιμάστηκε στους 260 °C καταγράφηκαν 7 μετρήσεις. Τα δεδομένα των δοκιμών εμφανίζονται στο Παράρτημα Α (Πίνακας 6.1.3.1). Οι χρόνοι μέτρησης στον Πίνακα 6.1.3.1 είναι σε χιλιάδες ώρες.

Ο σχεδιασμός και το πρωτόκολλο των δοκιμασιών βασίζονται σε εσωτερικές προδιαγραφές της εταιρείας. Τα επιλεγμένα επίπεδα θερμοκρασίας και ο αριθμός των προϊόντων που δοκιμάστηκαν σε κάθε θερμοκρασία, προσδιορίστηκαν από τους περιορισμούς του διαθέσιμου εξοπλισμού δοκιμασιών και την υλικοτεχνική υποστήριξη του χειρισμού των εξαρτημάτων ελέγχου. Τα επίπεδα θερμοκρασίας επελέγησαν ώστε να καλύπτουν το εύρος από το μέγιστο επίπεδο που θα μπορούσαμε να συναντήσουμε στις εγκαταστάσεις της διάταξης, μέχρι το επίπεδο όπου το πολυμερές του καλωδίου υφίσταται μία φυσική αλλαγή φάσης. Οι πρώτες μετρήσεις δοκιμασίας έγιναν σε εβδομαδιαία περίπου διαστήματα, με το διάστημα να επιμηκύνεται για τις επόμενες μετρήσεις. Η δοκιμασία διακόπηκε όταν τα στοιχεία ελέγχου πέρασαν το κατώφλι αποτυχίας για τις θερμοκρασίες δοκιμής 240 °C και 260 °C. Σύμφωνα με τις προδιαγραφές της εταιρείας, το καλώδιο θεωρείται ότι έχει αποτύχει όταν η αντοχή του διπλασιάζεται (π.χ η λογαριθμική του αντοχή φτάνει το $\ln(2) = 0.693$). Η δοκιμασία συνεχίστηκε στην χαμηλότερη θερμοκρασία δοκιμής (200 °C) μέχρις ότου ο εξοπλισμός ελέγχου ζητήθηκε για άλλα έργα.

Θα μελετηθούν και οι δύο μορφές του μετασχηματισμού του χρόνου που δίνονται στην (6.1.1.2). Μόλις ολοκληρώθηκαν οι αναλύσεις και είχανε τα τελικά αποτελέσματα, οι επιστήμονες της εταιρείας βρήκαν λόγους για να προτιμήσουν τον έναν μετασχηματισμό αντί του άλλου, βασιζόμενοι σε επιστημονικές εκτιμήσεις. Παρόλα αυτά, υπάρχει κάποια αβεβαιότητα σχετικά με την κατάλληλη αλλαγή, την οποία μόνο πρόσθετα εμπειρικά στοιχεία μπορούν να εξαλείψουν.

6.1.3.1 Εκθετικός μετασχηματισμός του χρόνου

Χρησιμοποιώντας τον κώδικα της R θα υπολογιστούν οι εκτιμήσεις ($\widehat{\delta}_{jk}$, $\widehat{\nu}_{jk}$, $\widehat{\lambda}_{jk}$) για το j-οστό προϊόν ($j = 1, \dots, 5$) στο k-οστό επίπεδο θερμοκρασίας ($k = 1, 2, 3$) μεγιστοποιώντας την δειγματική συνάρτηση πιθανοφάνειας (6.1.2.2) για κάθε ένα από τα 15 στοιχεία. Σε αυτήν την

εφαρμογή της μεθόδου μέγιστης πιθανοφάνειας, χρησιμοποιήθηκε ο εκθετικός μετασχηματισμός του χρόνου (6.1.1.2a), θέτοντας τιμή στην παράμετρο γ ίση με το 1. Έτσι, κατά την ρύθμιση της δειγματικής συνάρτησης πιθανοφάνειας (6.1.2.2), κάθε χρονική στιγμή μετασχηματίστηκε ως εξής:

$$t_{ijk} = 1 - \exp(-\lambda r_{ijk})$$

Η εκτίμηση των παραμέτρων για κάθε ένα από τα στοιχεία εμφανίζεται στον Πίνακα 6.1.3.1.1. (για εντολές στην R, βλέπε παράρτημα B,1a) Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι οι εκτιμήσεις των παραμέτρων είναι λογικά σταθερές μεταξύ των αντικειμένων σε κάθε επίπεδο θερμοκρασίας. Δύο εξαιρέσεις μπορεί να είναι το στοιχείο 5 στην θερμοκρασία δοκιμασίας 200 °C και το στοιχείο 3 στην θερμοκρασία δοκιμασίας 240 °C. Τα ευρήματα που παρουσιάζονται εδώ, βασίζονται στο σύνολο των δεδομένων, διότι δεν υπήρχε εξωτερικός λόγος για να πιστέψουμε ότι κανένα από τα δύο απομακρυσμένα σημεία είναι άκυρο ή μη αντιπροσωπευτικό.

(α) Θερμοκρασία δοκιμασίας 200°C

Εκτίμηση παραμέτρων	Αντικείμενο				
	1	2	3	4	5
$\hat{\delta}$	0.491761	0.451204	0.470917	0.467334	0.374491
$\hat{\lambda}$	0.121387	0.138672	0.132734	0.126406	0.185547
$\hat{\nu}$	0.000084	0.000115	0.000109	0.000151	0.000353

(β) Θερμοκρασία δοκιμασίας 240°C

Εκτίμηση παραμέτρων	Αντικείμενο				
	1	2	3	4	5
$\hat{\delta}$	1.276841	1.145118	1.474396	1.130496	1.156756
$\hat{\lambda}$	0.282031	0.325312	0.224453	0.339453	0.320267
$\hat{\nu}$	0.000815	0.000744	0.001230	0.000385	0.000462

(γ) Θερμοκρασία δοκιμασίας 260°C

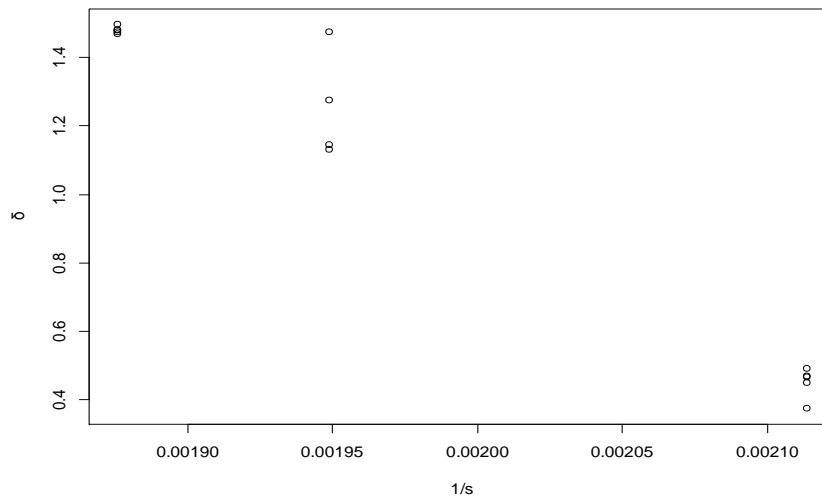
Εκτίμηση παραμέτρων	Αντικείμενο				
	1	2	3	4	5
$\hat{\delta}$	1.480203	1.481923	1.470604	1.475081	1.496364
$\hat{\lambda}$	0.648438	0.640313	0.653125	0.655781	0.636328
$\hat{\nu}$	0.001450	0.001378	0.001598	0.001482	0.001250

Πίνακας 6.1.3.1.1 : Εκτίμηση των παραμέτρων για όλα τα προϊόντα δοκιμασίας βασιζόμενοι στον εκθετικό μετασχηματισμό του χρόνου.

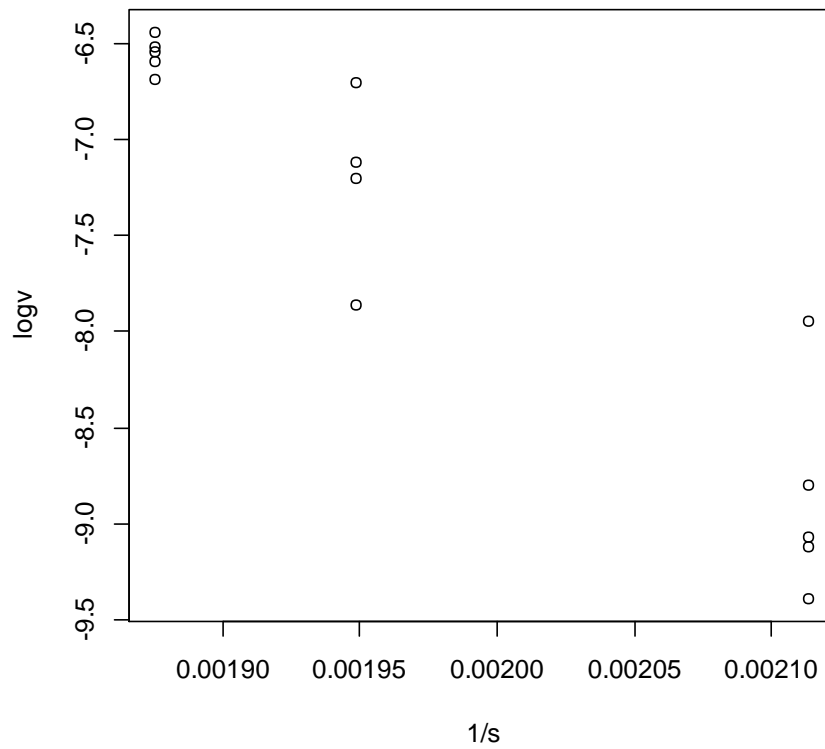
Εν συνεχεία, κάθε ομάδα εκτιμήσεων των παραμέτρων μετασχηματίστηκε σύμφωνα με τις εξισώσεις (6.1.3.1.1) και παραστάθηκε γραφικά ως προς την αντίστοιχη απόλυτη θερμοκρασία (για εντολές στην R, βλέπε παράρτημα B,1b).

$$A(\delta) = \delta, \quad B(v) = \ln(v), \quad C(\lambda) = 1/\lambda \quad (6.1.3.1.1)$$

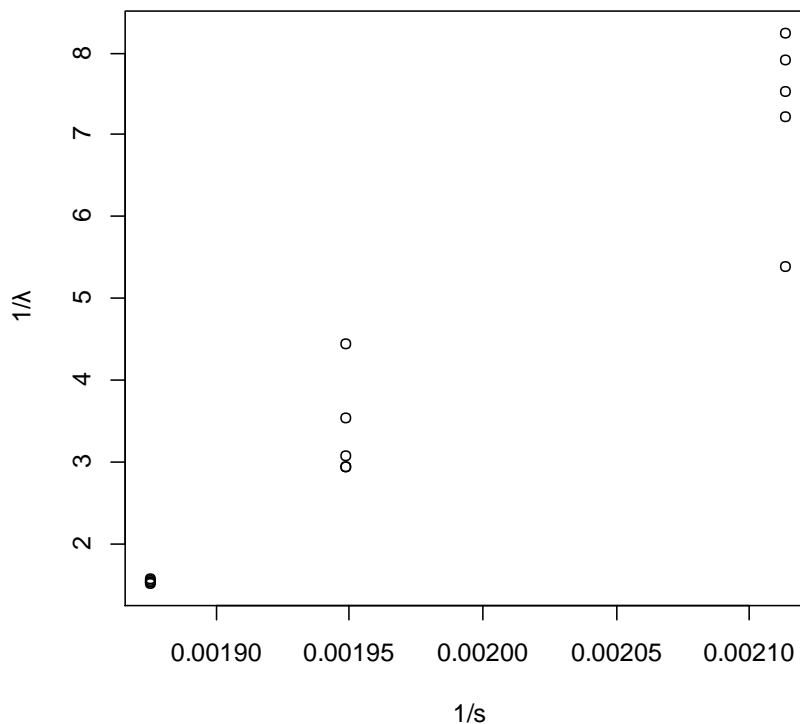
Αυτά τα γραφήματα για τις μετασχηματισμένες παραμέτρους εμφανίζονται στα Γραφήματα 6.1.3.1.1-6.1.3.1.3. Ήταν δύσκολο να αποφασιστεί αν οι μετασχηματισμοί αυτοί ήταν λογικοί από επιστημονικής απόψεως, λόγω του ότι λίγα ήταν γνωστά για τις στατιστικές ιδιότητες του μηχανισμού φυσικής φθοράς. Έτσι, η τελική κρίση θα πρέπει να βασιστεί στην επάρκεια της στατιστικής προσαρμογής, η οποία θα περιγραφεί παρακάτω.



Γράφημα 6.1.3.1.1: Γραφική παράσταση των μετασχηματισμένων εκτιμήσεων $A(\delta) = \delta$, ως προς την αντίστοιχη θερμοκρασία σε Kelvin βασιζόμενο στον εκθετικό μετασχηματισμό του χρόνου $t = 1 - \exp(-\lambda t)$.



Γράφημα 6.1.3.1.2: Γραφική παράσταση των μετασχηματισμένων εκτιμήσεων $B(v) = \ln(v)$, ως προς την αντίστοιχη θερμοκρασία σε Kelvin βασιζόμενο στον εκθετικό μετασχηματισμό του χρόνου $t = 1 - \exp(-\lambda t)$.



Γράφημα 6.1.3.1.2: Γραφική παράσταση των μετασχηματισμένων εκτιμήσεων $C(\lambda) = 1/\lambda$, ως προς την αντίστοιχη θερμοκρασία σε Kelvin βασιζόμενο στον εκθετικό μετασχηματισμό του χρόνου $t = 1 - \exp(-\lambda t)$.

Τα Γραφήματα 6.1.3.1.1-6.1.3.1.3 δείχνουν χονδρικά γραμμικές σχέσεις αλλά επίσης παρουσιάζουν σχέδια ετεροσκεδαστικότητας που πρέπει να συμπεριληφθούν. Ειδικά στα Γραφήματα 6.1.3.1.2 και 6.1.3.1.3 για το $\ln(\hat{v})$ και το $1/\hat{\lambda}$, η διασπορά των σημείων συρρικνώνεται καθώς η αντίστοιχη θερμοκρασία μειώνεται (δηλ. καθώς αυξάνεται η θερμοκρασία). Στην πραγματικότητα, φαίνεται ότι η μεταβλητότητα εξαφανίζεται ακριβώς πάνω από τη μέγιστη θερμοκρασία δοκιμασίας στους 260 °C ή στους 533 K, όπου $1/s_3 = 0.001876$. Έχει ήδη αναφέρει ότι το πολυμερές καλωδίου παρουσιάζει μια αλλαγή φάσης κοντά σε αυτό το επίπεδο θερμοκρασίας. Καθώς οι ιδιότητες αντίστασης του πολυμερούς μεταβάλλονται από την αλλαγή φάσης, υπήρχε υποψία ότι αυτός ο παράγοντας θα μπορούσε να εξηγήσει γιατί η μεταβλητότητα των μετρήσεων αντίστασης συγκλίνει στο μηδέν κατά την προσέγγιση αυτής της κρίσιμης θερμοκρασίας. Αυτή η κρίσιμη θερμοκρασία θα συμβολιστεί με s_c και θα καθοριστεί στους 535 °K. Συνεπώς, η ετεροσκεδαστικότητα στα τρία Γραφήματα

6.1.3.1.1-6.1.3.1.3 προτείνει να εξεταστεί η ακόλουθη κλιμακωτή έκδοση του μετασχηματισμού Arrhenius.

$$H(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s_c} \quad \text{για } s \leq s_c \quad (6.1.3.1.2)$$

Παρατηρείται ότι η $H(s)$ στην (6.1.3.1.2) είναι μία φθίνουσα συνάρτηση του s με $H(s_c) = 0$. Η ετεροσκεδαστικότητα προτείνει ότι η κατάλληλη μορφή του πίνακα συνδυακύμανσης στο (6.1.2.5) είναι

$$\Sigma_k = H_k \Sigma, \quad (6.1.3.1.3)$$

όπου η $H_k = H(s_k)$ βασίζεται στην συνάρτηση (6.1.3.1.2) και το Σ συμβολίζει έναν βασικό πίνακα συνδιακύμανσης που είναι κοινός σε όλα τα στοιχεία. Μπορεί τώρα να χρησιμοποιηθεί μια στατιστική ρουτίνα λογισμικού για την σταθμισμένη πολυμεταβλητή παλινδρόμηση για την εκτίμηση του πίνακα συντελεστών B στην (6.1.2.5) και του πίνακα συνδιακύμανσης Σ στην (6.1.3.1.3), χρησιμοποιώντας τις αντίστοιχες τιμές H_k ως βάρη. Το αποτέλεσμα στην (6.1.3.1.3) δείχνει ότι οι ακόλουθοι μετασχηματισμοί θα δώσουν ένα σύνολο κεντροθετημένων ποσοτήτων με σταθερή διακύμανση σε κάθε επίπεδο θερμοκρασίας s_k .

$$\mathcal{A}_{jk} = \frac{A_{jk} - a_0 - a_1 H_k}{\sqrt{H_k}} \quad (6.1.3.1.3a)$$

$$\mathcal{B}_{jk} = \frac{B_{jk} - b_0 - b_1 H_k}{\sqrt{H_k}} \quad (6.1.3.1.3b)$$

$$\mathcal{C}_{jk} = \frac{C_{jk} - c_0 - c_1 H_k}{\sqrt{H_k}} \quad (6.1.3.1.3c)$$

Έπειτα, πραγματοποιήθηκε ένας ANOVA έλεγχος για την γραμμικότητα για κάθε παραμετρικό μετασχηματισμό στην (6.1.3.1.1), βασιζόμενο σε αυτά τα τρία σύνολα ποσοτήτων στις (6.1.3.1.3). Αρχικά, μιλώντας για τις τιμές του \mathcal{A}_{jk} στην (6.1.3.1.3a), πραγματοποιήθηκε ένας έλεγχος Hartley για ίσες διακυμάνσεις πληθυσμών σε κάθε ένα από τα τρία επίπεδα ελέγχου θερμοκρασιών, ο οποίος έδωσε ως αποτέλεσμα ότι η υπόθεση των ίσων διακυμάνσεων δεν μπορεί να απορριφθεί. Στη συνέχεια, το συγκεντρωμένο συνολικό άθροισμα των τετραγώνων των ποσοτήτων \mathcal{A}_{jk} διαμερίστηκε σε συνιστώμενα ποσά

τετραγώνων που σχετίζονται με την εντός και μεταξύ της μεταβολής της θερμοκρασιακής στάθμης, αντίστοιχα. Ο έλεγχος ANOVA έδειξε ότι δεν ήταν σημαντική. Παρόμοιοι έλεγχοι διεξήχθησαν για τα \mathcal{B}_{jk} και \mathcal{C}_{jk} . Κανένα από αυτά τα αποτελέσματα των ελέγχων δεν είναι σημαντικό. Έτσι, οι έλεγχοι υποστηρίζουν το συμπέρασμα ότι κάθε μετασχηματισμός παραμέτρων στην (6.1.3.1.1) παράγει μια γραμμική εξίσωση Arrhenius.

6.1.3.2 Μετασχηματισμός δύναμης του χρόνου

Η ίδια ανάλυση που περιγράφηκε στην παράγραφο 6.1.3.1 επαναλήφθηκε χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό δύναμης του χρόνου (6.1.1.2b) αντί του εκθετικού μετασχηματισμού του χρόνου. Κατά τη ρύθμιση της δειγματικής συνάρτησης πιθανοφάνειας (6.1.2.2), κάθε ωρολογιακός χρόνος μετασχηματίστηκε ως εξής:

$$t_{ijk} = \Gamma_{ijk}^{\lambda}$$

Ο Πίνακας 6.1.3.2.1 περιέχει τις εκτιμήσεις της μέγιστης πιθανοφάνειας των παραμέτρων δ , ν και λ για κάθε αντικείμενο (για εντολές στην R, βλέπε παράρτημα B,2a). Αν και τα σύμβολα παραμέτρων είναι τα ίδια με αυτά του εκθετικού μετασχηματισμού του χρόνου, η ερμηνεία τους είναι διαφορετική. Η παράμετρος λ , εδώ δηλώνει τον μετασχηματισμό δύναμης του χρόνου. Η παράμετρος μετατόπισης δ και η παράμετρος διακύμανσης ν τώρα σχετίζονται με μία διαφορετική χρονική κλίμακα λειτουργίας.

(α) Θερμοκρασία δοκιμασίας 200°C

Εκτίμηση παραμέτρων	Αντικείμενο				
	1	2	3	4	5
$\hat{\delta}$	0.066491	0.069662	0.069698	0.063750	0.080496
$\hat{\lambda}$	0.774375	0.742578	0.759375	0.782578	0.678438
$\hat{\nu}$	0.000023	0.000035	0.000031	0.000038	0.000105

(β) Θερμοκρασία δοκιμασίας 240°C

Εκτίμηση παραμέτρων	Αντικείμενο				
	1	2	3	4	5
$\hat{\delta}$	0.401248	0.424226	0.367110	0.425316	0.365103
$\hat{\lambda}$	0.604218	0.554727	0.663203	0.555430	0.665467
$\hat{\nu}$	0.000401	0.000474	0.000208	0.000681	0.000211

(γ) Θερμοκρασία δοκιμασίας 260°C

Εκτίμηση παραμέτρων	Αντικείμενο				
	1	2	3	4	5
$\hat{\delta}$	0.786183	0.778877	0.785770	0.789130	0.782369
$\hat{\lambda}$	0.664688	0.667969	0.662813	0.664141	0.669609
$\hat{\nu}$	0.001003	0.000937	0.001096	0.001072	0.000869

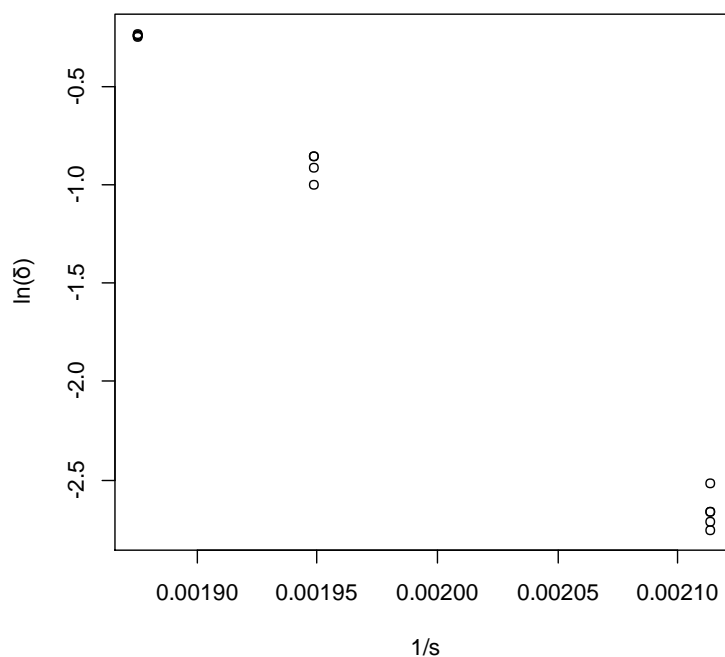
Πίνακας 6.1.3.2.1 : Εκτίμηση των παραμέτρων για όλα τα προϊόντα δοκιμασίας βασιζόμενοι στον μετασχηματισμό δύναμης του χρόνου.

Τα αποτελέσματα του Πίνακα 6.1.3.2.1 δείχνουν και πάλι ότι οι εκτιμήσεις των παραμέτρων είναι εύλογα σταθερές μεταξύ των στοιχείων σε κάθε επίπεδο θερμοκρασίας. Το στοιχείο 5 στη θερμοκρασία δοκιμής 200 ° C και το στοιχείο 3 στους 240 °C παραμένει κάπως απομακρυσμένο, όπως και το στοιχείο 5 στους 240 °C. Η ανάλυση εξακολουθεί να βασίζεται σε ολόκληρο το σύνολο δεδομένων, διότι δεν υπήρχε εξωτερικός λόγος για να θεωρηθεί ότι οποιοδήποτε από αυτά τα απομακρυσμένα σημεία είναι άκυρο ή μη αντιπροσωπευτικό.

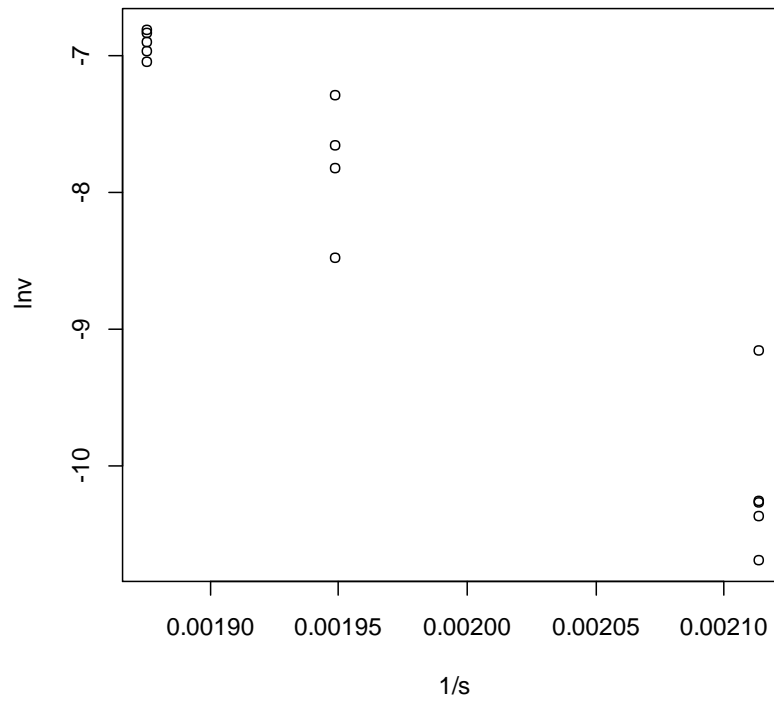
Εν συνεχεία, κάθε ομάδα εκτιμήσεων των παραμέτρων μετασχηματίστηκε σύμφωνα με τις εξισώσεις (6.1.3.2.1) και παραστάθηκε γραφικά ως προς την αντίστοιχη απόλυτη θερμοκρασία.

$$A(\delta) = \ln(\delta), \quad B(\nu) = \ln(\nu) \quad (6.1.3.2.1)$$

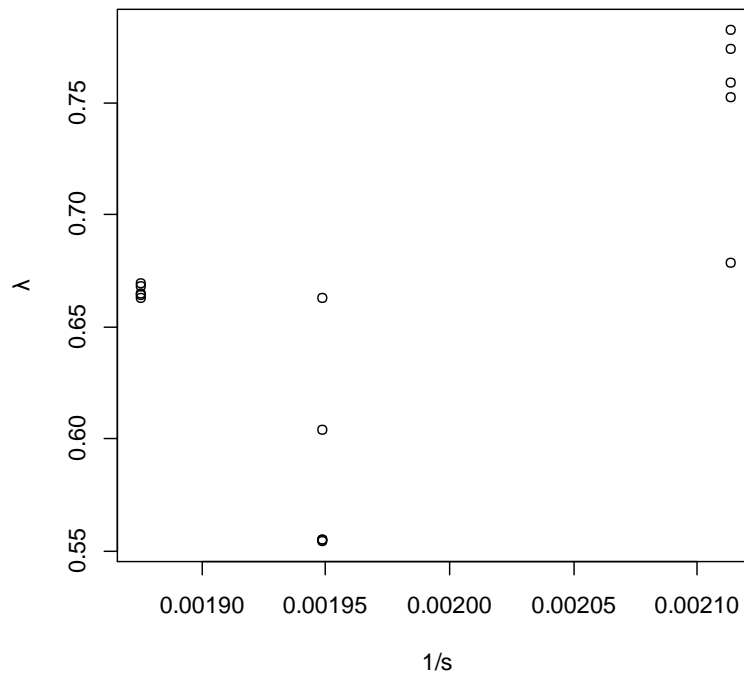
Αυτά τα γραφήματα (για εντολές στην R, βλέπε παράρτημα B,2b) για τις μετασχηματισμένες παραμέτρους εμφανίζονται στα Γραφήματα 6.1.3.2.1-6.1.3.2.2. Τα δύο αυτά γραφήματα φαίνονται να είναι σχεδόν γραμμικά. Δεν ήταν δυνατόν να προσδιοριστεί ένας κατάλληλος μετασχηματισμός για το λ .



Γράφημα 6.1.3.2.1 : Γραφική παράσταση των μετασχηματισμένων εκτιμήσεων $A(\delta) = \ln(\delta)$, ως προς την αντίστοιχη θερμοκρασία σε Kelvin βασιζόμενο στον μετασχηματισμό δύναμης του χρόνου $t = r^\lambda$.



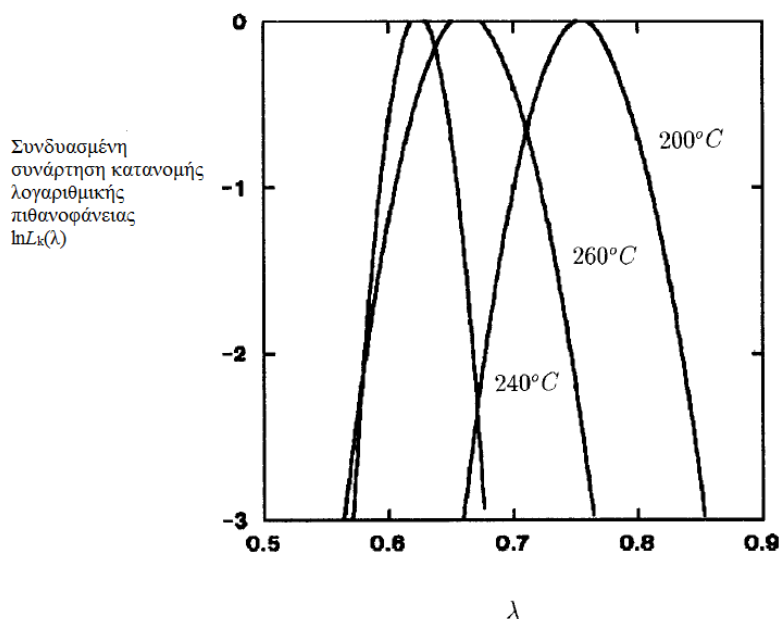
Γράφημα 6.1.3.2.2 : Γραφική παράσταση των μετασχηματισμένων εκτιμήσεων $B(v) = \ln(v)$, ως προς την αντίστοιχη θερμοκρασία σε Kelvin βασιζόμενο στον μετασχηματισμό δύναμης του χρόνου $t = r^\lambda$.



Γράφημα 6.1.3.2.3 : Γραφική παράσταση των εκτιμήσεων του λ ,ως προς την αντίστοιχη θερμοκρασία σε Kelvin βασιζόμενο στον μετασχηματισμό δύναμης του χρόνου $t = r^\lambda$.

Το Γράφημα 6.1.3.2.3 δείχνει την γραφική παράσταση του $\hat{\lambda}$ ως προς την αντίστοιχη θερμοκρασία. Η τιμή του $\hat{\lambda}$ φαίνεται να είναι χαμηλότερη στο επίπεδο της ενδιάμεσης αντίστοιχης θερμοκρασίας (240 °C) και σαφώς αυξημένη στο υψηλότερο επίπεδο αμοιβαίας θερμοκρασίας (200 °C). Για την περαιτέρω διερεύνηση της παραμέτρου λ , γίνεται ο υπολογισμός της συνδυασμένης συνάρτηση κατανομής λογαριθμικής πιθανοφάνειας $\ln L_k(\lambda)$ για όλα τα στοιχεία που δοκιμάστηκαν σε επίπεδο θερμοκρασίας s_k , ως εξής:

$$\ln L_k(\lambda) = \sum_{j=1}^{m_k} \ln L_{jk}(\lambda) \quad \text{για } k=1,2,3 \quad (6.1.3.2.2)$$



Γράφημα 6.1.3.2.4: Γραφική παράσταση της συνδυασμένης συνάρτησης κατανομής λογαριθμικής πιθανοφάνειας $\ln L_k(\lambda)$ για όλα τα προϊόντα για κάθε θερμοκρασία δοκιμασίας s_k . Η κάθετη κλίμακα μετράει την μείωση από το μέγιστο επίπεδο λογαριθμικής πιθανοφάνειας για κάθε συνάρτηση, (Πηγή : Whitmore Schenkelberg, 1997).

Εδώ το $L_{jk}(\lambda)$ συμβολίζει το προφίλ της συνάρτησης πιθανοφάνειας του τύπου (6.1.2.4) για το j -οστό προϊόν, το οποίο δοκιμάζεται στην θερμοκρασία s_k . Το Γράφημα 6.1.3.2.4 δείχνει ένα γράφημα της συνδυασμένης συνάρτησης κατανομής λογαριθμικής πιθανοφάνειας για κάθε επίπεδο θερμοκρασίας. Η κάθετη κλίμακα μετράει την μείωση από το μέγιστο επίπεδο λογαριθμικής πιθανοφάνειας. Οι συναρτήσεις είναι πολύ κοντά στην τετραγωνική μορφή. Από την θεωρία της πιθανοφάνειας, γνωρίζουμε ότι το διάστημα που σχετίζεται με κάθε συνάρτηση με μία μείωση του -1.92 από την μέγιστη λογαριθμική πιθανοφάνεια είναι προσεγγιστικά ένα 95% επίπεδο εμπιστοσύνης για το λ , σε αυτό το επίπεδο θερμοκρασίας. Τα διαστήματα δείχνουν ότι η παράμετρος λ είναι μεγαλύτερη στους 200 °C από τους 240 °C, και παίρνει μία ενδιάμεση τιμή στους 260 °C. Έτσι, τόσο το Γράφημα 6.1.3.1.3 όσο και το Γράφημα 6.1.3.2.3 δείχνουν ότι το λ δεν σχετίζεται με την θερμοκρασία με μονοτονικό τρόπο.

Τα Γραφήματα 6.1.3.2.1 - 6.1.3.2.3 δείχνουν ότι υπάρχουν σχέδια ομοσκεδαστικότητας, τα οποία είναι παρόμοια με αυτά που φαίνονται στα Γραφήματα 6.1.3.1.1 - 6.1.3.1.3. Επομένως, χρησιμοποιούμε τον ίδιο μετασχηματισμό Arrhenius όπως στην (6.1.3.1.1). Η κρίσιμη θερμοκρασία για αυτόν τον μετασχηματισμό παραμένει στους $s_k = 535^\circ\text{K}$.

Οι έλεγχοι ANOVA για γραμμικότητα, μαζί με τους ελέγχους Hartley για ίσες διακυμάνσεις, δείχνουν ότι οι μετασχηματισμοί παραμέτρων στην (6.1.3.2.1) υποδεικνύουν γραμμικές εξισώσεις Arrhenius. Οι στατιστικές αναλύσεις που βασίζονται στις δύο μορφές του μετασχηματισμού του χρόνου έχουν δώσει αποτελέσματα που είναι συγκρίσιμα όσον αφορά την προσαρμογή του μοντέλου στα δεδομένα. Η οξειδωση του πολυμερούς καλωδίου θεωρείται ο κύριος μηχανισμός φθοράς. Αν η οξειδωση ήταν μια αυτο-περιοριζόμενη αντίδραση τότε ο εκθετικός μετασχηματισμός του χρόνου θα μπορούσε να είναι κατάλληλος. Οι επιστήμονες της εταιρείας δεν απέκλεισαν αυτό το αυτό-περιοριζόμενο χαρακτηριστικό. Ωστόσο, αν η οξειδωση είναι αυτοπεριορισμένη τότε η ασυμπτωτική λογαριθμική αντίσταση του καλωδίου θα έχει μια αναμενόμενη τιμή του δ , που αντιστοιχεί σε $r = \infty$ ή $t=1$. Η εξίσωση Arrhenius $A(\delta) = \alpha_0 + \alpha_1 H(s)$ τοποθετούμενη κάτω από τον εκθετικό μετασχηματισμό του χρόνου, βλέπε (6.1.1.2a), δείχνει ότι το δ μεταβάλλεται με την θερμοκρασία ελέγχου, πράγμα που σημαίνει ότι η ασυμπτωτική λογαριθμική αντίσταση μεταβάλλεται ανάλογα με την αύξηση της θερμοκρασίας. Οι επιστήμονες της εταιρείας θεώρησαν ότι αυτό το χαρακτηριστικό ήταν απίθανο αν και δεν υπάρχουν εμπειρικά στοιχεία που να βασίζονται σε μελέτες μακράς διάρκειας για να διευθετήσουν το ζήτημα. Ως εκ τούτου, οι συνέπειες του εκθετικού μετασχηματισμού του χρόνου ήταν μη αποδεκτές. Η συμπεριφορά του μοντέλου με βάση τον μετασχηματισμό της δύναμης του χρόνου είναι πιο ικανοποιητική. Αρκετό ενδιαφέρον είναι το γεγονός ότι οι μετασχηματισμοί $A(\delta)$ και $B(v)$ είχαν και οι δύο μία λογαριθμική μορφή που ήταν μία πολύ ικανοποιητική ιδιότητα. Ο μετασχηματισμός δυνάμεως του χρόνου υπονοούσε επίσης ότι η λογαριθμική αντίσταση θα αυξανόταν χωρίς όριο καθώς το καλώδιο γερνούσε, το οποίο ήταν μία εύλογη συμπεριφορά. Η αβεβαιότητα σχετικά με τη μορφή της εξίσωσης Arrhenius για την παράμετρο δύναμης λ , ήταν μια δυσκολία, αλλά το γεγονός ότι οι εκτιμήσεις του λ , είχαν μόνο ένα μικρό εύρος τιμών ήταν καθησυχαστικό. Οι επιπτώσεις του μετασχηματισμού δυνάμεως του χρόνου ήταν σαφώς καλύτερες.

Η εκτίμηση του επιπέδου χρήσης του λ_0 εξακολουθεί να απαιτείται και όπως βλέπουμε στο Γράφημα 6.1.3.2.3, δεν είναι σαφές πώς να εξάγουμε τα αποτελέσματα των ελέγχων για να πάρουμε αυτήν την εκτίμηση. Αντί να προσπαθήσουμε να βρούμε μια εκτίμηση, πραγματοποιούμε μια ανάλυση ευαισθησίας. Θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα η αντίσταση ενός νέου προϊόντος να διπλασιαστεί για παράδειγμα, μέσα στα πρώτα 10 χρόνια της ζωής του. Πρέπει πρώτα να μετατρέψουμε αυτόν τον ωρολογιακό χρόνο σε λειτουργικό χρόνο χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό $t_f = 87.6^{\lambda_0}$, όπου $t_f=87.6$ χιλιάδες ώρες που αντιστοιχούν σε 10 χρόνια. Λαμβάνοντας ένα εύρος εύλογων τιμών για το λ_0 και αγνοώντας

τα δειγματοληπτικά σφάλματα στις άλλες εκτιμήσεις των παραμέτρων, χρησιμοποιούμε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής της (6.1.1.4) με $t=t_f$ για τον υπολογισμό της απαιτούμενης πιθανότητας αποτυχίας. Ο ακόλουθος πίνακας δίνει αυτήν την πιθανότητα αποτυχίας για ένα μέρος ενδιαφέροντος των τιμών του λ_0 .

$\lambda_0 :$	0.74	0.75	0.76	0.77	0.78
$P(T \leq t_f) :$	0.0000	0.0042	0.2629	0.9145	0.9996

Ο πίνακας δείχνει ότι η πιθανότητα αποτυχίας είναι πολύ ευαίσθητη στο λ_0 σε αυτό το τμήμα της περιοχής, που κυμαίνεται από το 0 έως το 1 σε σύντομο διάστημα. Η ανάλυση ευαισθησίας δείχνει ότι η πιθανότητα αποτυχίας είναι μικρή μόνο αν το λ_0 είναι μικρότερο του 0,75. Επειδή οι 200 ° C είναι η θερμοκρασία δοκιμασίας που βρίσκεται πλησιέστερα στο επίπεδο της θερμοκρασίας χρήσης, είναι χρήσιμο να εξετάσουμε τις εκτιμήσεις του λ , για τα πέντε προϊόντα που ελέγχθηκαν σε αυτήν την θερμοκρασία (βλ. Πίνακα 6.1.3.2.1α). Τρία από τα πέντε προϊόντα έχουν εκτιμήσεις για το λ , οι οποίες είναι μεγαλύτερες από την κρίσιμη τιμή 0.75 και οι υπόλοιπες δύο, οι οποίες είναι μικρότερες, ένα μικτό αποτέλεσμα. Επομένως, υπό τον μετασχηματισμό δυνάμεως του χρόνου, αυτό το σύνολο δεδομένων δεν παρείχε ακριβείς πληροφορίες σχετικά με την πιθανότητα αποτυχίας 10 ετών για αυτό το προϊόν. Θα πρέπει να προγραμματιστούν περαιτέρω έλεγχοι φθοράς. Αυτοί οι πρόσθετοι έλεγχοι ίσως να δώσουν μια καλύτερη εκτίμηση της παραμέτρου του επιπέδου χρήσης λ_0 και να διευθετήσει το ζήτημα της κατάλληλης μορφής για το μετασχηματισμό $C(\lambda)$. Ως τελική παρατήρηση, διαπιστώνεται ότι αυτό το είδος καλωδίου θέρμανσης έχει αποδειχθεί πολύ αξιόπιστο στις εγκαταστάσεις του χώρου μέχρι σήμερα, γεγονός που δείχνει ότι το λ_0 μπορεί πράγματι να είναι πολύ κάτω από την κρίσιμη τιμή.

6.1.3.3 Συμπεράσματα

Το μοντέλο και η μελέτη που παρουσιάστηκαν εδώ έχουν αφήσει ανέπαφα ορισμένα πρακτικά ζητήματα. Πολλά από αυτά μπορούν να αντιμετωπιστούν με κατάλληλες τεχνικές επεκτάσεις. Τα σφάλματα μέτρησης προκύπτουν από μη επαρκές εργαστηριακό προσωπικό, διαδικασίες και εξοπλισμό. Μια επέκταση του μοντέλου, παρόμοια με αυτή που περιγράφεται στο Whitmore (1995), μπορεί να λάβει υπόψη της τα λάθη μέτρησης. Ωστόσο, στην πειραματική ρύθμιση, τα σφάλματα μέτρησης πιθανόν να αλληλοσυνδέονται επειδή οι μετρήσεις των προϊόντων ελέγχου γίνονται συγχρόνως υπό τις ίδιες συνθήκες ελέγχου. Για

παράδειγμα, στην περίπτωση που μελετάται, όλα τα προϊόντα ελέγχου στον ίδιο φούρνο αποσύρονται μαζί και ψύχονται σε θερμοκρασία δωματίου πριν μετρηθούν οι αντιστάσεις τους. Στη συνέχεια επιστρέφουν στους φούρνους και τοποθετούνται στην θερμοκρασία ελέγχου. Οποιοσδήποτε ατέλειες μέτρησης σε αυτήν την ρύθμιση θα επηρεάσουν όλα τα προϊόντα της παρτίδας.

Μία διαδικασία διάχυσης Wiener ίσως να μην μπορεί να περιγράψει τη διαδικασία φθοράς που παρουσιάζει ενδιαφέρον σε ορισμένες εφαρμογές. Για παράδειγμα, η φθορά μπορεί να παρουσιάζει αυστηρά μονοτονικό τρόπο ή να συμπεριλαμβάνει συμπεριφορά μεταπήδησης. Υπό αυτές τις συνθήκες, η διαδικασία Wiener μπορεί να αντικατασταθεί από μια πιο κατάλληλη διαδικασία, όπως μια διαδικασία Hougaard (Lee και Whitmore, 1993). Η οικογένεια Hougaard περιλαμβάνει τις διαδικασίες Γάμμα και τις αντίστροφες Γκαουσιανές διαδικασίες ως ειδικές περιπτώσεις. Η φθορά μπορεί επίσης να είναι μια πολυδιάστατη διαδικασία στην οποία οι οριακές συνθήκες που ορίζουν την αποτυχία είναι πιο περίπλοκες από ένα απλό κατώφλι αποτυχίας.

Το μοντέλο που παρουσιάζεται εδώ υποθέτει ότι η πίεση s είναι ένα απλό ποσοτικό μέτρο, όπως η θερμοκρασία. Αυτή η υπόθεση είναι περισσότερο περιοριστική παρά απαραίτητη. Η πίεση s μπορεί να είναι ένα πολυδιάστατο φυσικό μέτρο. Το μοντέλο θα εξακολουθούσε να ισχύει, υπό την προϋπόθεση ότι υπάρχει μια συνάρτηση $H(s)$ που χαρτογραφεί κάθε μέτρο s σε έναν πραγματικό αριθμό. Ο αριθμός $H(s)$ τότε γίνεται ένας δείκτης πίεσης για το πολυδιάστατο μέτρο s . Η πρόκληση σε αυτή την επέκταση θα ήταν να ανακαλύψουμε την κατάλληλη μορφή της συνάρτησης $H(s)$.

Η κλιμακωτή εκδοχή του μετασχηματισμού Arrhenius στην (6.1.3.1.2) υποθέτει ότι το s_c είναι το ίδιο για όλες τις παραμέτρους και είναι γνωστό. Ωστόσο, στην περίπτωση που μελετάται, υπάρχουν κάποιες ενδείξεις ότι αυτή η κρίσιμη θερμοκρασία δεν είναι οριοθετημένη και μπορεί να είναι λίγο διαφορετική για διαφορετικές παραμέτρους. Ίσως το s_c πρέπει να αντιμετωπιστεί ως μια άλλη παράμετρος που πρέπει να εκτιμηθεί για κάθε εξίσωση Arrhenius. Το ζήτημα αυτό είναι ένα από τα πολλά που υποδεικνύουν τη γενική ανάγκη για καλύτερη κατανόηση της σχέσης μεταξύ των στατιστικών παραμέτρων και των φυσικών παραμέτρων των επιστημονικών θεωριών που στηρίζουν κάθε εφαρμογή.

Τα αποτελέσματα της περίπτωσης που μελετάται καταδεικνύουν την ανάγκη εξέτασης του κατάλληλου σχεδιασμού για ελέγχους φθοράς. Το μοντέλο παρέχει ένα πλαίσιο για τη μελέτη

ζητημάτων σχεδιασμού, όπως η επιλογή των επιπέδων πίεσης, ο αριθμός των προϊόντων που δοκιμάζονται και ο αριθμός και οι αποστάσεις των μετρήσεων σε κάθε προϊόν. Ο σχεδιασμός πρέπει να αποσκοπεί όχι μόνο στη βελτιστοποίηση της ακρίβειας της πρόβλεψης, αλλά και στην ικανότητα αυτόματου ελέγχου που θα επιτρέψει την επικύρωση του ίδιου του μοντέλου μέσω κατάλληλων διαγνωστικών.

6.2 Εφαρμογές 2 και 3 : Μοντελοποίηση της φθοράς με συμμεταβλητές

6.2.1 Το πακέτο “threg” της R

Η παλινδρόμηση κατωφλίου είναι μία στατιστική μεθοδολογία για την ανάλυση των δεδομένων διάρκειας επιβίωσης, λαμβάνοντας υπόψη τις μεταβλητές (βλέπε και παράγραφο 4.2).

Ο Xiao (2015) ανέπτυξε το πακέτο threg της R, το οποίο περιλαμβάνει το πιο σημαντικό μοντέλο παλινδρόμησης κατωφλίου που έχει αναπτυχθεί μέχρι σήμερα και το πιο ευρέως χρησιμοποιούμενο, δηλαδή το μοντέλο παλινδρόμησης κατωφλίου Wiener. Αυτό το μοντέλο εφαρμόζεται στις περιπτώσεις όπου η υποβόσκουσα διαδικασία υγείας ακολουθεί μία διαδικασία διάχυσης Wiener και θεωρούμε ότι η αποτυχία συμβαίνει όταν η διαδικασία χτυπάει ένα προκαθορισμένο όριο για πρώτη φορά. Ο πρώτος χρόνος χτυπήματος σε αυτήν την κατάσταση ακολουθεί μία αντίστροφη Γκαουσιανή κατανομή, η οποία έχει μια πολύ εύκολα διαχειρίσιμη μαθηματική συνάρτηση. Η παλινδρόμηση κατωφλίου στην γενική της μορφή καλύπτει μια ευρεία συλλογή μοντέλων που εκτείνεται πολύ πιο πέρα από τους πρώτους χρόνους χτυπήματος των διαδικασιών διαχύσεως Wiener. Δημιουργήθηκαν διαφορετικές οικογένειες από μοντέλα παλινδρόμησης κατωφλίου, υποθέτοντας διαφορετικούς τύπους στοχαστικών διαδικασιών και διαφορετικών ορίων ή κατωφλίων. Για παράδειγμα, μπορούμε να έχουμε διαδικασίες Γάμμα, καμπυλόγραμμα όρια, Μαρκοβιανές αλυσίδες με καταστάσεις απορρόφησης (βλέπε και παράγραφο 2.5), και πολλά ακόμη.

Οι Lee και Whitmore (2006) μελετήσανε σε βάθος την σύνδεση που υπάρχει μεταξύ της παλινδρόμησης κατωφλίου και της παλινδρόμησης αναλογικής διακινδύνευσης του Cox. Έδειξαν ότι κάποια μοντέλα παλινδρόμησης κατωφλίου μπορούν να τροποποιηθούν έτσι ώστε να έχουν την ιδιότητα της αναλογικής διακινδύνευσης. Επίσης επισήμαναν ότι παρόλο που η ιδιότητα της αναλογικής διακινδύνευσης δεν ισχύει σε αρκετές εφαρμογές, ωστόσο συχνά

υποθέτουμε το αντίθετο για ευκολία. Το μοντέλο διάχυσης Wiener, το οποίο καλύπτεται από το πακέτο της R `threg` δεν απαιτεί να ικανοποιείται η ιδιότητα της αναλογικής διακινδύνευσης. Η κατανομή της συνάρτησης διακινδύνευσης του πρώτου χτυπήματος μπορεί να πάρει αρκετές μορφές, οι οποίες συνήθως συναντώνται σε πρακτικές εφαρμογές. Υπάρχουν αρκετά πλεονεκτήματα για τα οποία η παλινδρόμηση κατωφλίου μπορεί να θεωρηθεί μία προσέγγιση μοντέλου. Αυτά τα πλεονεκτήματα περιλαμβάνουν περισσότερο ρεαλισμό στην περιγραφή πραγματικών παγκόσμιων φαινομένων, επειδή λαμβάνουν ρητά υπόψη τους, την υποβόσκουσα κατάσταση υγείας και έχουν έναν ρεαλιστικό μηχανισμό για τα δεδομένα διάρκειας ζωής, κυρίως για τον πρώτο χρόνο χτυπήματος ενός κατωφλίου ή ενός ορίου. Όσο πλουσιότερη είναι η δομή του μοντέλου της παλινδρόμησης του κατωφλίου, τόσο καλύτερες πληροφορίες μπορεί να προσφέρει για τα δεδομένα που αναλύονται. Για παράδειγμα, το μοντέλο παλινδρόμησης κατωφλίου Wiener, έχει ξεχωριστές συναρτήσεις παλινδρόμησης για το αρχικό επίπεδο κατάστασης ενός ασθενή (βασική κατάσταση υγείας) και για την παράμετρο του μέσου της πορείας της υγείας του ασθενούς (πορεία της υγείας), οι οποίες μαζί δίνουν στο μοντέλο την δυνατότητα να καταγράψει την πολύπλευρη επίδραση των μεταβλητών στην πορεία της υγείας του ασθενούς.

6.2.2 Εκτίμηση των συντελεστών παλινδρόμησης χρησιμοποιώντας το πακέτο `threg`

Η εκτίμηση της μέγιστης πιθανοφάνειας χρησιμοποιείται για να εκτιμήσουμε τους συντελεστές παλινδρόμησης των εξισώσεων (4.2.2.3) και (4.2.2.4). Ένα αντικείμενο i στο σύνολο των δεδομένων, που έχει έναν ακριβή, παρατηρήσιμο χρόνο θανάτου, παρέχει τις πληροφορίες σχετικά με την πιθανότητα να συμβεί το γεγονός εκείνη την χρονική στιγμή και συνεπώς συμβάλλει στην FHT πυκνότητα πιθανότητας $f(t^{(i)}|\mu^{(i)}, y_0^{(i)})$ στην δειγματοληπτική συνάρτηση πιθανοφάνειας, όπου $t^{(i)}$ είναι ο παρατηρούμενος χρόνος θανάτου. Το αντικείμενο j στο σύνολο των δεδομένων, το οποίο επιβιώνει μέχρι το τέλος της έρευνας, παρέχει μία δεξιά αποκομμένη παρατήρηση και το μόνο που γνωρίζουμε για αυτό το αντικείμενο είναι το ότι ο χρόνος του γεγονότος είναι μεγαλύτερος από τον χρόνο της έρευνας. Επομένως η πληροφορία που συνεισφέρει ένα αντικείμενο που έχει επιβιώσει στην δειγματοληπτική συνάρτηση πιθανότητας είναι το ότι η συνάρτηση επιβίωσης μπορεί να εκτιμηθεί για τον χρόνο $t^{(j)}$ για αυτό το αντικείμενο, ως $1 - F(t^{(j)}|\mu^{(j)}, y_0^{(j)})$. Ανάμεσα στα n αντικείμενα που έχει το δείγμα, θα μετράμε από το 1 έως το n_1 , τα αντικείμενα με παρατηρήσιμους χρόνους

θανάτου και από το n_1+1 έως το n , αντικείμενα με δεξιά αποκομμένες παρατηρήσεις. Επομένως, η λογαριθμική συνάρτηση πιθανοφάνειας γίνεται

$$\ln L(\beta, \gamma) = \sum_{i=1}^{n_1} \ln f(t^{(i)} | \mu^{(i)}, y_0^{(i)}) + \sum_{j=n_1+1}^n \ln [1 - F(t^{(j)} | \mu^{(j)}, y_0^{(j)})] \quad (6.2.2.1)$$

Η συνάρτηση `threg` χρησιμοποιείται για την εκτίμηση των συντελεστών παλινδρόμησης του μοντέλου της παλινδρόμησης κατωφλίου. Για να καθορίσουμε τις εισόδους στην δειγματοληπτική λογαριθμική συνάρτηση πιθανοφάνειας της εξίσωσης (6.2.2.1), χρειάζονται τα παρακάτω δύο ορίσματα στην συνάρτηση `threg` :

1) `formula` : Ένα αντικείμενο “formula” με την απόκριση στα αριστερά του τελεστή `~`, και τις ανεξάρτητες μεταβλητές στα δεξιά. Η απόκριση θα πρέπει να είναι ένα αντικείμενο “Surv”, το οποίο μας δίνει η συνάρτηση `Surv` από το πακέτο `survival`. Στα δεξιά του τελεστή `~`, πρέπει να χρησιμοποιηθεί ένας τελεστής `|`, για τον οποίο στα αριστερά του τελεστή `|` οι χρήστες καθορίζουν ανεξάρτητες μεταβλητές που θα χρησιμοποιηθούν στην συνάρτηση γραμμικής παλινδρόμησης για το $\ln(y_0)$ στο μοντέλο παλινδρόμησης κατωφλίου και στα δεξιά του, οι χρήστες καθορίζουν ανεξάρτητες μεταβλητές που θα χρησιμοποιηθούν στην συνάρτηση γραμμικής παλινδρόμησης για το μ στο μοντέλο παλινδρόμησης κατωφλίου. Εάν οι χρήστες θέλουν να χρησιμοποιήσουν μία σταθερά $\ln(y_0)$ ή μ , μπορούν να βάλουν ένα 0 ή 1 σαν σύμβολο κράτησης στα αριστερά ή στα δεξιά του τελεστή `|`, αντί να καταχωρήσουν τις ανεξάρτητες μεταβλητές για το $\ln(y_0)$ ή το μ .

2) `data` : Καθορίζει τα δεδομένα εισόδου. Ένα τέτοιο σύνολο δεδομένων πρέπει να είναι ένα σύνολο δεδομένων επιβίωσης που να περιλαμβάνει τουλάχιστον την μεταβλητή του χρόνου επιβίωσης και την αποκομμένη μεταβλητή. Για την αποκομμένη μεταβλητή το 1 θα πρέπει να χρησιμοποιείται για να υποδεικνύει τα άτομα με παρατηρούμενη αποτυχία και το 0 για τις δεξιά αποκομμένες παρατηρήσεις. Το σύνολο των δεδομένων μπορεί επίσης να περιλαμβάνει και άλλες ανεξάρτητες μεταβλητές, που θα χρησιμοποιηθούν στο μοντέλο παλινδρόμησης κατωφλίου.

Η συνάρτηση βελτιστοποίησης `nlm` από το πακέτο `stats` της βασικής κατανομής της R, ενσωματώνεται στην εντολή `threg` για να βρεθεί το ελάχιστο της ελαχιστοποιημένης λογαριθμοποιημένης συνάρτησης πιθανοφάνειας στην εξίσωση (6.2.2.1) και να πάρουμε τις εκτιμήσεις των συντελεστών παλινδρόμησης της μέγιστης πιθανοφάνειας για τους συντελεστές παλινδρόμησης για τα διανύσματα γ και β στο μοντέλο παλινδρόμησης

κατωφλίου. Να σημειώσουμε εδώ ότι η plm βασίζεται στην επαναληπτική σχέση της μεθόδου Newton- Raphson :

$$\theta_{i+1} = \theta_i - \left[\frac{\partial^2 h(\theta)}{\partial \theta \partial \theta^T} \Big|_{\theta=\theta_i} \right]^{-1} \frac{\partial h(\theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_i}, \quad (6.2.2.2)$$

όπου ο πίνακας της δεύτερης παραγώγου καλείται Εσσιανός πίνακας και το διάνυσμα της πρώτης παραγώγου καλείται κλίση. Η ταχύτητα σύγκλισης της plm είναι αρκετά γρήγορη για την λογαριθμοποιημένη συνάρτηση πιθανοφάνειας του μοντέλου παλινδρόμησης κατωφλίου στην εξίσωση (6.2.2.1). Σημειώνουμε εδώ, ότι ίσως εμφανιστούν κάποια προειδοποιητικά μηνύματα που προκύπτουν από την συνάρτηση plm μαζί με τα αποτελέσματα της συνάρτησης threg, όταν ο Εσσιανός πίνακας είναι μη αντιστρέψιμος για τις τιμές μερικών σημείων εκκίνησης της διαδικασίας Newton-Raphson, αλλά μπορούμε να τα αγνοήσουμε.

6.2.3 Υπολογισμός αναλογικής διακινδύνευσης, μέθοδος hr

Υποθέτουμε ότι έχουμε χρησιμοποιήσει την συνάρτηση threg με μεταβλητές πρόβλεψης $\{X_1, \dots, X_k, G\}$ για την πρόβλεψη του $\ln(y_0)$ και του μ , στο μοντέλο παλινδρόμησης κατωφλίου, όπου το G είναι μία κατηγορική μεταβλητή, τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την hr για να εκτιμήσουμε την αναλογία κινδύνου για το επίπεδο $G=g$ ως προς το επίπεδο $G=0$, για ένα σενάριο στο οποίο δίνονται οι τιμές των υπόλοιπων μεταβλητών και του χρόνου $X_1 = X_2 = \dots = X_{k-1} = X_{k-1}$ και $t=t_0$. Επομένως, θέτουμε $(z^g)^T = (1, X_1, \dots, X_{k-1}, g)$, και έτσι χρησιμοποιώντας την συνάρτηση threg, τα y_0 και μ μπορούν να εκτιμηθούν για το δοσμένο $(z^g)^T$ ως εξής : $\hat{y}_0^g = \exp\{(x^g)^T \hat{\gamma}\}$ και $\hat{\mu}^g = (x^g)^T \hat{\beta}$, όπου $\hat{\gamma}$ και $\hat{\beta}$ είναι τα διανύσματα των εκτιμώμενων τιμών για τις μεταβλητές παλινδρόμησης (παράγραφος 6.2.2). Τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε τις εκτιμώμενες συναρτήσεις πυκνότητας και επιβίωσης σε χρόνο t_0 ως εξής:

$$f(t_0 | \hat{\mu}^g, \hat{y}_0^g), \quad (6.2.3.1)$$

$$S(t_0 | \hat{\mu}^g, \hat{y}_0^g) = 1 - F(t_0 | \hat{\mu}^g, \hat{y}_0^g). \quad (6.2.3.2)$$

Συνεχίζοντας, η εκτίμηση της συνάρτησης διακινδύνευσης για χρόνο t_0 , υπολογίζεται ως εξής:

$$h(t_0 | \hat{\mu}^g, \hat{y}_0^g) = \frac{f(t_0 | \hat{\mu}^g, \hat{y}_0^g)}{S(t_0 | \hat{\mu}^g, \hat{y}_0^g)} = \frac{f(t_0 | \hat{\mu}^g, \hat{y}_0^g)}{1 - F(t_0 | \hat{\mu}^g, \hat{y}_0^g)}, \quad (6.2.3.3)$$

όπου οι $f(\cdot)$ και $F(\cdot)$ δίνονται από τις εξισώσεις (4.2.2.1) και (4.2.2.2), θέτοντας όπου σ^2 το 1, και αντικαθιστώντας τα y_0 και μ με τις εκτιμήσεις τους στο επίπεδο g . Ομοίως, αν αλλάξουμε το επίπεδο μη αναφοράς g σε επίπεδο αναφοράς 0, τότε παίρνουμε τα $f(t_0|\hat{\mu}^0, \hat{y}_0^0)$, $S(t_0|\hat{\mu}^0, \hat{y}_0^0)$ και $h(t_0|\hat{\mu}^0, \hat{y}_0^0)$. Η αναλογία κινδύνου του επιπέδου $G = g$ ως προς το επίπεδο $G = 0$ στο $X_1=X_1, \dots, X_{k-1} = X_{k-1}$ και σε χρόνο $t=t_0$ είναι επομένως :

$$\text{Αναλογική διακινδύνευση} = \frac{h(t_0|\hat{\mu}^g, \hat{y}_0^g)}{h(t_0|\hat{\mu}^0, \hat{y}_0^0)}. \quad (6.2.3.4)$$

Χρησιμοποιώντας τους παραπάνω τύπους, η μέθοδος `hr` για αντικείμενα “`threg`” εκτιμάει τις αναλογίες κινδύνου για μία κατηγορική μεταβλητή με τρία ορίσματα : `var`, `scenario` και `timevalue`. Οι χρήσεις των τριών αυτών ορισμάτων δίνονται παρακάτω:

`object`: ένα αντικείμενο της τάξης “`threg`”, το οποίο δίνεται από την συνάρτηση “`threg`”.

1) `var` : καθορίζει το όνομα της κατηγορικής μεταβλητής G , για το οποίο υπολογίζονται οι αναλογίες κινδύνου. Σημειώνουμε εδώ ότι η κατηγορική μεταβλητή G , που έχει καθοριστεί για το όρισμα `var`, θα πρέπει να είναι μία παραγοντική μεταβλητή στην R . Εάν το G δεν είναι παραγοντική μεταβλητή, θα πρέπει να την μετασχηματίσουμε μέσω της συνάρτησης `factor` της R , και έπειτα να την συμπεριλάβουμε στο `threg`, για να προσαρμόσουμε το μοντέλο παλινδρόμησης καταωφλίου. Στην συνέχεια, μπορούμε να καθορίσουμε αυτήν την παραγοντική μεταβλητή σαν όρισμα στο `var` της συνάρτησης `hr` για τον υπολογισμό των αναλογιών διακινδύνευσης για το G .

2) `timevalue`: Καθορίζει την επιθυμητή τιμή του χρόνου, για την οποία θέλουμε να υπολογίσουμε τις αναλογίες διακινδύνευσης. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και διάλυσμα για αυτό το όρισμα.

3) `scenario`: Καθορίζει όλες τις τιμές των εκτιμητών εκτός από το G . Ο καθορισμός αυτών των τιμών αναφέρεται ως `scenario`. Οι υπολογισμένες αναλογίες διακινδύνευσης είναι με αναφορά ως προς το καθορισμένο `scenario`. Δεν χρειάζεται να καθορίσουμε ένα επίπεδο τιμής για την κατηγορική μεταβλητή G στο όρισμα `scenario`, αφού όλα τα επίπεδα μη αναφοράς g του G , απαριθμούνται στον υπολογισμό αναλογιών διακινδύνευσης σε σχέση με το επίπεδο αναφοράς. Το επίπεδο αναφοράς επιλέγεται ως προς το χαμηλότερο επίπεδο της κατηγορικής μεταβλητής που καθορίζεται στο όρισμα `var`, και όλα τα άλλα επίπεδα αυτής της παραγοντικής μεταβλητής είναι επίπεδα μη αναφοράς. Σημειώνουμε εδώ, ότι στο όρισμα `scenario`, δεν παίζει ρόλο η σειρά της παρουσίασης των μεταβλητών, και ο κάθε όρος του

ορίσματος χωρίζεται με +. Αν το G είναι η μόνη εκτιμήτρια στο μοντέλο, τότε το όρισμα scenario δεν χρειάζεται.

6.2.4 Καμπύλες των εκτιμώμενων συναρτήσεων επιβίωσης, διακινδύνευσης και πυκνότητας, μέθοδος plot

Η μέθοδος plot για threg αντικείμενα, χρησιμοποιείται για να απεικονίσει τα γραφήματα των εκτιμώμενων συναρτήσεων επιβίωσης, διακινδύνευσης και πυκνότητας για διαφορετικά επίπεδα για μία παραγοντική μεταβλητή πρόβλεψης, η οποία έχει συμπεριληφθεί στην παλινδρόμηση κατωφλίου από το threg.

Από τις εξισώσεις (6.2.3.1) - (6.2.3.3) μπορούν να υπολογισθούν οι εκτιμήσεις των συναρτήσεων επιβίωσης, διακινδύνευσης και πυκνότητας, για δοσμένο χρόνο t_0 . Εάν αντικαταστήσουμε το t_0 με t , το οποίο τρέχει για όλους τους παρατηρήσιμους χρόνους των δεδομένων, οι εξισώσεις (6.2.3.1) - (6.2.3.3), γίνονται συναρτήσεις του χρόνου t στο επίπεδο g , και οι καμπύλες αυτών των συναρτήσεων μπορούν να παρασταθούν γραφικά. Όταν επικαλύπτουμε τις καμπύλες διαφορετικών επιπέδων του G σε μία γραφική παράσταση, μπορούμε να συγκρίνουμε τις αντίστοιχες εκτιμήσεις των συναρτήσεων σε διαφορετικά επίπεδα του G. Αυτά τα είδη των γραφικών παραστάσεων μπορούν να μας δώσουν πρόσθετες πληροφορίες για την έρευνα. Η μέθοδος plot για αντικείμενα threg, δημιουργεί τα γραφήματα με τα ακόλουθα ορίσματα :

- 1) object: ένα αντικείμενο “threg”, το οποίο δίνεται από την συνάρτηση “threg”.
- 2) var : καθορίζει το όνομα της κατηγορικής μεταβλητής G, για κάθε επίπεδο του οποίου τα γραφήματα θα δημιουργούνται με βάση το δοσμένο scenario. Η χρήση του ορίσματος var είναι η ίδια όπως στην μέθοδο hr.
- 3) scenario: Καθορίζει τις τιμές για όλες τις εκτιμήτριες εκτός από το G. Η χρήση του ορίσματος scenario είναι η ίδια όπως στην μέθοδο hr.
- 4) graph: Καθορίζει τον τύπο των καμπυλών που θα δημιουργηθούν. Η επιλογή “hz” είναι για να απεικονίσουμε την καμπύλη της συνάρτησης διακινδύνευσης, η επιλογή “sv” είναι για να απεικονίσουμε την καμπύλη της συνάρτησης επιβίωσης και η επιλογή “ds” είναι για να απεικονίσουμε την καμπύλη της συνάρτησης πυκνότητας.
- 5) nolegend: Εάν δεν θέλουμε να βάλουμε λεζάντες στην γραφική παράσταση τότε το όρισμα nolegend είναι ίσο με 1. Σημειώνουμε ότι ακόμα και αν θέσουμε το nolegend ίσο με 1, μπορούμε ακόμα να προσθέσουμε λεζάντες, αφού δημιουργηθεί το γράφημα, χρησιμοποιώντας την συνάρτηση legend της R.

6) nocolor: εάν θέλουμε να απεικονίσουμε όλες τις καμπύλες σε μαύρο χρώμα, τότε θέτουμε το όρισμα nocolor ίσο με 1.

6.2.5 Προβλέψεις

Η μέθοδος predict για τα αντικείμενα threg, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να προβλέψουμε την αρχική τιμή της κατάστασης υγείας y_0 , την τιμή της πορείας της διαδικασίας της υγείας μ , την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του χρόνου επιβίωσης $f(t|\mu, y_0)$, την συνάρτηση επιβίωσης $S(t|\mu, y_0)$ και την συνάρτηση διακινδύνευσης $h(t|\mu, y_0)$ για καθορισμένο scenario και χρόνο. Το καθορισμένο scenario είναι παρόμοιο με αυτό των μεθόδων hr και plot. Η μόνη διαφορά είναι ότι εδώ πρέπει να παρέχουμε τις τιμές scenario για τις ψευδομεταβλητές, οι οποίες προέρχονται από την παραγοντική μεταβλητή G , όταν χρησιμοποιούμε την μέθοδο predict, ενώ δεν χρειάζεται να παρέχουμε αυτές τις τιμές όταν χρησιμοποιούμε τις hr και plot, αφού το πρόγραμμα θα υπολογίσει αυτόματα όλα τα επίπεδα των hr και plot. Η μέθοδος predict έχει τρία ορίσματα:

- 1) object: ένα αντικείμενο “threg”, το οποίο δίνεται από την συνάρτηση “threg”.
- 2) timevalue: Καθορίζει την επιθυμητή τιμή του χρόνου, για την οποία υπολογίζονται οι προβλεπόμενες τιμές. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και διάνυσμα για αυτό το όρισμα. Αν αυτό το διάνυσμα παραληφθεί, τότε όλες οι προβλεπόμενες τιμές της έρευνας, θα υπολογισθούν.
- 3) scenario: Καθορίζει όλες τις τιμές των παραγόντων συμπεριλαμβάνοντας και τις ψευδομεταβλητές οι οποίες υφίστανται για τον παράγοντα G . Αν αυτό το διάνυσμα παραληφθεί, τότε όλες οι προβλεπόμενες τιμές του χρόνου, θα υπολογισθούν και σε αυτήν την περίπτωση οι τιμές των συμμεταβλητών για κάθε αντικείμενο θα χρησιμοποιηθούν για τις αντίστοιχες τιμές του scenario.

6.2.6 Εφαρμογή των συναρτήσεων που παρέχονται από το πακέτο threg της R (Εφαρμογή 2^η)

Οι Xiao et al. (2015) ανέλυσαν την εφαρμογή της παλινδρόμησης κατωφλίου πάνω σε δεδομένα διάρκειας ζωής, χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις που παρέχονται από το πακέτο threg. Χρησιμοποίησε ένα σύνολο δεδομένων που περιέχει 137 ασθενείς με οξεία λευχαιμία (Πίνακας 6.2.6.1) που υποβάλλονται σε θεραπεία μεταμόσχευσης μυελού των οστών, η οποία είναι η πιο συνηθισμένη θεραπεία για οξεία λευχαιμία. Η ανάρρωση, η οποία ακολουθεί μετά

	group	time	indicator	recipient_age	donor_age	recipient_sex	donor_sex	recipient_cmv	donor_cmv	waiting_time	fab	mtx
1	1	2081	0	26	33	1	0	1	1	98	0	0
2	1	1602	0	21	37	1	1	0	0	1720	0	0
3	1	1496	0	26	35	1	1	1	0	127	0	0
4	1	1462	0	17	21	0	1	0	0	168	0	0
5	1	1433	0	32	36	1	1	1	1	93	0	0

Πίνακας 6.2.6.1 : Απόσπασμα δεδομένων με πηγή αναφοράς: Klein και Moeschberger, 2003

την μεταμόσχευση μυελού των οστών, εξαρτάται από αρκετούς παράγοντες κινδύνου, οι οποίοι είναι γνωστοί την στιγμή της μεταμόσχευσης. Στα παραδείγματα που ακολουθούν, επιλέχθηκαν τρεις παράγοντες κινδύνου, οι οποίοι θεωρούνται ως πιο σημαντικοί, για τις συναρτήσεις που παρέχει το πακέτο threg. Αυτοί οι τρεις παράγοντες κινδύνου είναι :

1. Η ηλικία του ασθενή (η μεταβλητή recipient_age)
2. Κατηγορίες κινδύνου που βασίζονται στην κατάσταση των ασθενών την στιγμή της μεταμόσχευσης (η μεταβλητή group). Αυτές οι κατηγορίες είναι: οξεία λεμφοβλαστική λευχαιμία (με κωδικό 1 για το group), οξεία μυελοκυτταρική λευχαιμία χαμηλού κινδύνου (με κωδικό 2 για το group) και οξεία μυελοκυτταρική λευχαιμία υψηλού κινδύνου (με κωδικό 3 για το group)
3. Η French- American- British (FAB) ταξινόμηση βάσει τυπικών μορφολογικών κριτηρίων (η μεταβλητή fab), η οποία κωδικοποιείται με 1, εάν ο ασθενής πάσχει από οξεία λεμφοβλαστική λευχαιμία με ταξινόμηση FAB των M4 ή M5, και 0 διαφορετικά. Οι παραπάνω ασθενείς θεωρούνται ότι έχουν αυξημένο πιθανό κίνδυνο υποτροπής ή θανάτου που σχετίζεται με την θεραπεία.

Η μεταβλητή του χρόνου της μελέτης (χρόνος υποτροπής, θανάτου ή τέλους της μελέτης) είναι η time (μετρημένος σε ημέρες) και η αποκομμένη μεταβλητή indicator είναι δείκτης, ο οποίος κωδικοποιείται με 1, για θάνατο ή υποτροπιασμό, και 0, διαφορετικά). Η μέγιστη παρακολούθηση για αυτούς τους 137 ασθενείς ήταν 7 έτη.

Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση threg, (βλέπε Παράγραφο 6.2.1) την οποία εισάγαμε προηγουμένως, γίνεται η προσαρμογή του μοντέλου παλινδρόμησης κατωφλίου για το σύνολο

των 137 ασθενών που αναφέραμε παραπάνω, οι οποίοι υποβλήθηκαν σε μεταμόσχευση μυελού των οστών (για εντολές στην R, βλέπε παράρτημα B,3a). Οι μεταβλητές recipient_age και fab χρησιμοποιούνται ως οι εκτιμήσεις για το $\ln(y_0)$ και τα group και fab ως εκτιμήσεις για το μ . Να σημειώσουμε εδώ, ότι γίνεται η μετατροπή των μεταβλητών fab και group, σε παραγοντικές μεταβλητές f.group και f.fab, αφού είναι κατηγορικές. Από τα αποτελέσματα της R που φαίνονται στον Πίνακα 6.2.6.2, συμπεραίνουμε ότι και οι τρεις εκτιμητές είναι σημαντικοί.

Call:

```
threg(formula = Surv(time, indicator) ~ recipient_age + f.fab |
```

```
f.group + f.fab, data = bmt)
```

	coef	se(coef)	z	p
lny0: (Intercept)	3.09629902	0.276452140	11.2001268	<0.01
lny0: recipient_age	-0.03196957	0.007711182	-4.1458717	3.4e-05
lny0: f.fab1	-0.42065450	0.177761812	-2.3663941	1.8e-02
mu: (Intercept)	0.01493740	0.009118815	1.6380856	1.0e-01
mu: f.group2	0.02679506	0.011619710	2.3060005	2.1e-02
mu: f.group3	0.01281571	0.013266828	0.9659962	3.3e-01
mu: f.fab1	-0.02396574	0.010601310	-2.2606397	2.4e-02

Log likelihood =-674.64, AIC =1363.28

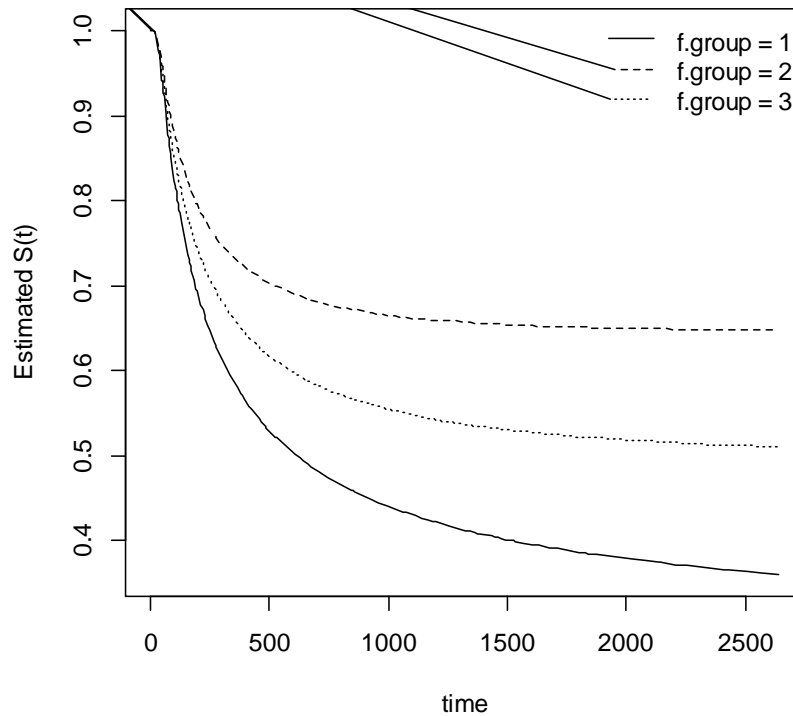
Πίνακας 6.2.6.2: Αποτελέσματα της προσαρμογής του μοντέλου παλινδρόμησης κατωφλίου για τα δεδομένα των 137 ασθενών

Στην συνέχεια χρησιμοποιώντας την μέθοδο hr (βλέπε Παράγραφο 6.2.3), υπολογίζουμε την αναλογία διακινδύνευσης για την παραγοντοποιημένη μεταβλητή του group, f.group, χρησιμοποιώντας το σενάριο ότι ο ασθενής είναι 18 χρονών, η μεταβλητή FAB είναι ίση με 0

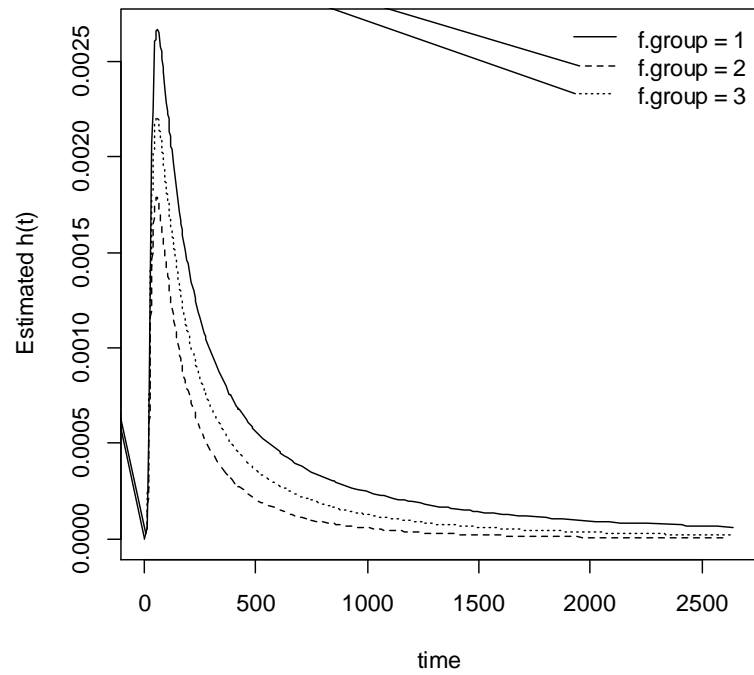
και ο χρόνος είναι 500 μέρες (για εντολές στην R, βλέπε παράρτημα B,3b). Τα αποτελέσματα φαίνονται παρακάτω:

```
timevalue f.group2 f.group3
[1,] 500 0.3691302 0.6379671
```

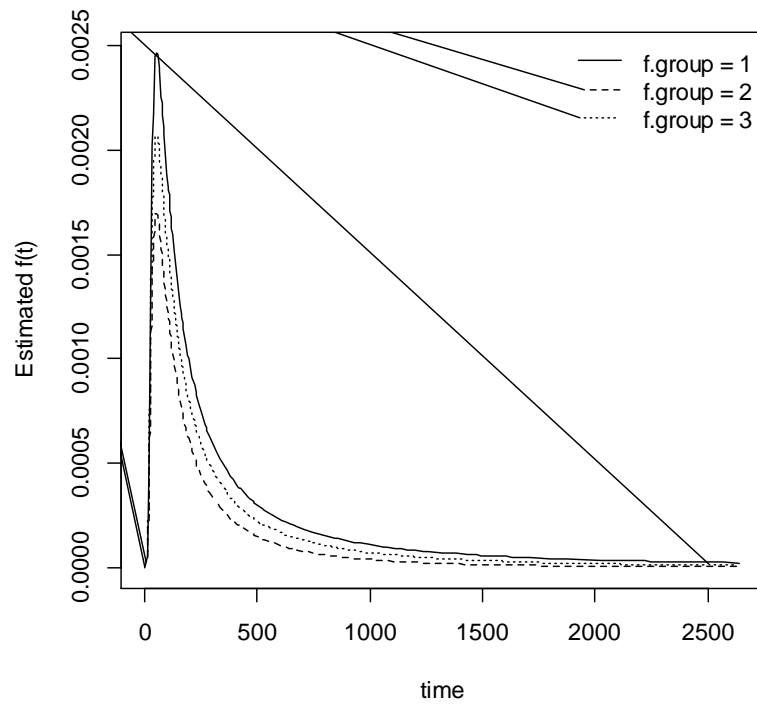
Η μέθοδος plot χρησιμοποιείται για την απεικόνιση των καμπυλών της συνάρτησης επιβίωσης, της διακινδύνευσης και της πυκνότητας αντίστοιχα, για τα διαφορετικά επίπεδα της μεταβλητής f.group. Το σενάριο παραμένει το ίδιο με προηγουμένως, δηλαδή ότι ο ασθενής είναι 18 χρονών και η μεταβλητή FAB είναι ίση με 0 (για εντολές στην R, βλέπε παράρτημα B,3c). Τα τρία γραφήματα παρατίθενται παρακάτω:



Γράφημα 6.2.6.1: Οι εκτιμώμενες συναρτήσεις επιβίωσης της παλινδρόμησης κατωφλίου για τα δεδομένα μεταμόσχευσης μυελού των οστών.



Γράφημα 6.2.6.2 : Οι εκτιμώμενες συναρτήσεις διακινδύνευσης της παλινδρόμησης κατωφλίου για τα δεδομένα μεταμόσχευσης μυελού των οστών.



Γράφημα 6.2.6.3 : Οι εκτιμώμενες συναρτήσεις πυκνότητας της παλινδρόμησης κατωφλίου για τα δεδομένα μεταμόσχευσης μυελού των οστών.

Τέλος, μέσω της μεθόδου `predict` γίνεται ο υπολογισμός των εκτιμώμενων τιμών για το `scenario` σύμφωνα με το οποίο ο ασθενής είναι 18 χρονών, η μεταβλητή `FAB` είναι ίση με 0 και η μεταβλητή `risk category` είναι ίση με 3 για χρόνο 2000 μέρες (για εντολές στην R, βλέπε παράρτημα B,3c). Το αποτέλεσμα της R είναι το ακόλουθο:

```

timevalue  y0      mu      f      S      h
[1,] 2000  12.43912  0.02775311  1.749514e-05  0.5184183  3.374714e-05

```

6.2.7 Εφαρμογή μη αναλογικής διακινδύνευσης (εφαρμογή 3^η)

Σε αυτήν την παράγραφο θα κάνουμε μία σύντομη σύγκριση μεταξύ της παλινδρόμησης καταωφλίου και της παλινδρόμησης αναλογικής διακινδύνευσης του Cox, χρησιμοποιώντας τα δεδομένα `lkr`, τα οποία είναι ένα σύνολο δεδομένων ασθενών με λευχαιμία σε ύφεση (Πίνακας 6.2.7.1).

	weeks	relapse	treatment1	treatment2	wbc3cat
1	1	1	0	1	2
2	1	1	0	1	3
3	2	1	0	1	3
4	2	1	0	1	3
5	3	1	0	1	3

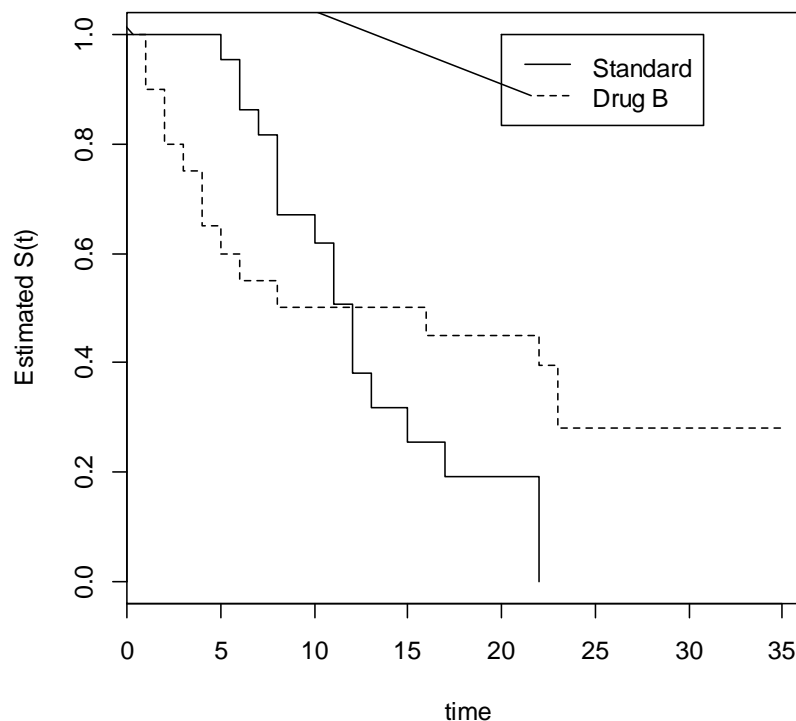
Πίνακας 6.2.7.1 : Απόσπασμα δεδομένων με πηγή αναφοράς: Garrett (1997).

Σε αυτό το σύνολο δεδομένων υπάρχουν 42 ασθενείς. Οι μεταβλητές που χρησιμοποιήθηκαν είναι οι εξής:

weeks: καιρός (μετρημένος σε εβδομάδες) που παρέμειναν σε ύφεση
relapse: εάν υποτροπίασαν οι ασθενείς (1=ναι, 0=όχι)
treatment1: 1=drug A, 0=standard, 21 ασθενείς έλαβαν ένα νέο πειραματικό φάρμακο (drug A) και οι υπόλοιποι 21 έλαβαν ένα συνηθισμένο φάρμακο
treatment2: 1=drug B, 0=standard, 20 ασθενείς έλαβαν ένα διαφορετικό φάρμακο (drug B), ενώ στους υπόλοιπους 22 δόθηκε ένα συνηθισμένο φάρμακο
wbc3cat: 1= κανονικός, 2= μέτριος, 3= υψηλός, αριθμός των λευκών αιμοσφαιρίων, ο οποίος είναι ένας ισχυρός δείκτης παρουσίας της λευχαιμίας

Η μεταβλητή treatment2 παραβιάζει την υπόθεση της αναλογικής διακινδύνευσης, όπως θα δούμε παρακάτω. Επομένως, επικεντρωνόμαστε σε αυτήν την μεταβλητή για να δείξουμε το πλεονέκτημα του μοντέλου της παλινδρόμησης κατωφλίου ως προς το μοντέλο του Cox, όταν παραβιάζεται η υπόθεση της αναλογικής διακινδύνευσης.

Αρχικά, κάνουμε την γραφική παράσταση της μη παραμετρικής εκτιμήτριας Kaplan- Meier των καμπυλών επιβίωσης για τα δύο επίπεδα της μεταβλητής treatment2 (για εντολές στην R, βλέπε παράρτημα B,4a), η οποία παρουσιάζεται παρακάτω, στο Γράφημα 6.2.7.1.



Γράφημα 6.2.7.1 : Γραφική παράσταση της Kaplan-Meier για την μεταβλητή treatment2 για τα δεδομένα lkr.

Από το Γράφημα 6.2.7.1, μπορούμε να δούμε καθαρά, ότι οι δύο καμπύλες επιβίωσης διασταυρώνουν η μία την άλλη. Πριν από το χρονικό σημείο, περίπου της 12^{ης} εβδομάδας, η εκτιμώμενη πιθανότητα επιβίωσης (πιθανότητα παραμονής σε ύφεση) για την ομάδα που χρησιμοποίησε το drugB είναι χαμηλότερη από την ομάδα που χρησιμοποίησε την standard θεραπεία. Ωστόσο, από εκείνο το χρονικό σημείο και έπειτα τα πράγματα αντιστρέφονται, δηλαδή η εκτιμώμενη πιθανότητα επιβίωσης για την ομάδα που χρησιμοποίησε το drugB γίνεται υψηλότερη από την ομάδα που χρησιμοποίησε την standard θεραπεία. Το ότι οι δύο καμπύλες επιβίωσης διασταυρώνονται, σημαίνει ότι δεν ικανοποιείται η υπόθεση της αναλογικής διακινδύνευσης, γεγονός το οποίο δεν μας επιτρέπει να εφαρμόσουμε το μοντέλο του Cox.

Από την άλλη, το μοντέλο της παλινδρόμησης καταωφλίου, το οποίο βασίζεται στην διαδικασία Wiener, δεν προϋποθέτει να ισχύει η υπόθεση της αναλογικής διακινδύνευσης. Επομένως, μπορούμε να εφαρμόσουμε αυτό το μοντέλο στην μεταβλητή treatment2, χρησιμοποιώντας την συνάρτηση threg και τα αποτελέσματα παρουσιάζονται παρακάτω στον Πίνακα 6.2.7.2 (για εντολές στην R, βλέπε παράρτημα B,4b).

Call:

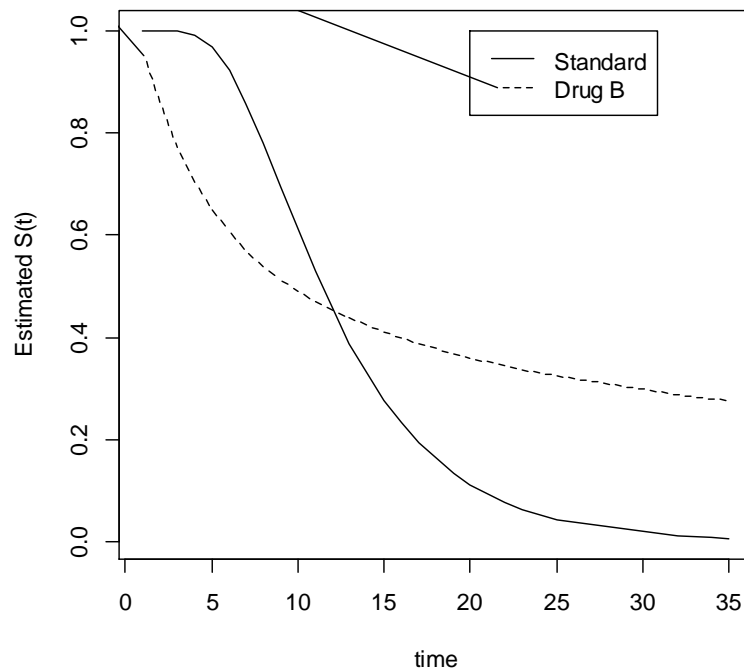
```
threg(formula = Surv(weeks, relapse) ~ f.treatment2 | f.treatment2,
      data = lkr)
```

	coef	se(coef)	z	p
lny0: (Intercept)	2.0097844	0.1705141	11.786620	0.0e+00
lny0: f.treatment21	-1.2739233	0.2441634	-5.217504	1.8e-07
mu: (Intercept)	-0.5886165	0.1340127	-4.392246	1.1e-05
mu: f.treatment21	0.5888365	0.1535081	3.835866	1.3e-04

Log likelihood =-104.64, AIC =217.28

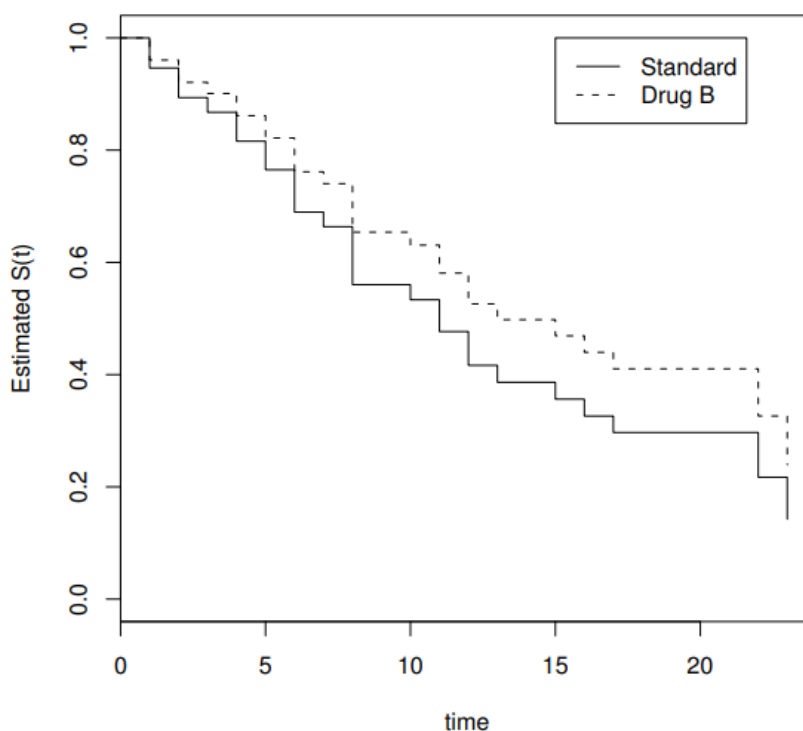
Πίνακας 6.2.7.2 : Αποτελέσματα της προσαρμογής της μεταβλητής treatment2, χρησιμοποιώντας την συνάρτηση threg

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας την μέθοδο plot για τα “threg” αντικείμενα, κάνουμε την γραφική παράσταση των εκτιμώμενων καμπυλών επιβίωσης για τα δύο επίπεδα της μεταβλητής treatment2, (για εντολές στην R, βλέπε παράρτημα B,4c) το οποίο εμφανίζεται στο Γράφημα 6.2.7.2.



Γράφημα 6.2.7.2 : Εκτιμώμενες συναρτήσεις επιβίωσης της παλινδρόμησης κατωφλίου για την μεταβλητή treatment2 για τα δεδομένα Ikr.

Μπορούμε να δούμε στο Γράφημα 6.2.7.2, ότι η διασταύρωση των δύο εκτιμώμενων καμπυλών επιβίωσης των δύο επιπέδων της μεταβλητής treatment2 που είχαμε συναντήσει στην γραφική παράσταση της Kaplan-Meier (Γράφημα 6.2.7.1), απεικονίζεται επίσης και στο Γράφημα 6.2.7.2. Ωστόσο, αν τελικά εφαρμόσω το μοντέλο του Cox, οι εκτιμώμενες καμπύλες επιβίωσης των δύο ομάδων, αποτυγχάνουν να απεικονίσουν την διασταύρωση, όπως φαίνεται στο Γράφημα 6.2.7.3.

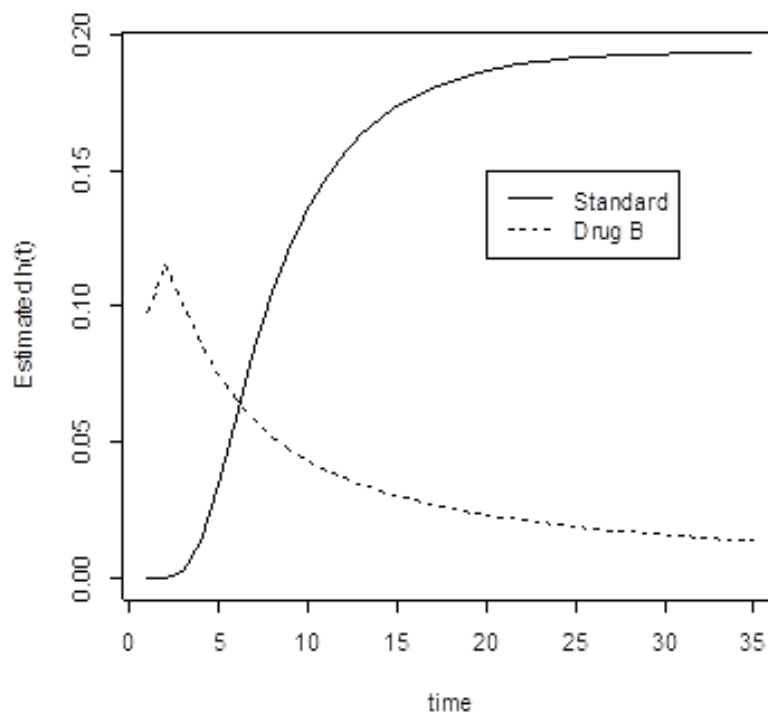


Γράφημα 6.2.7.3: Εκτιμώμενες συναρτήσεις επιβίωσης της παλινδρόμησης του Cox για τα δεδομένα lkr.

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας την μέθοδο hr για τα “threg” αντικείμενα για να υπολογίσουμε την αναλογία της διακινδύνευσης (δηλαδή την πιθανότητα εμφάνισης της λευχαιμίας της ομάδας με το φάρμακο B σε σχέση με το standard φάρμακο) σε διαφορετικά χρονικά σημεία, αποκαλύπτονται τα πλεονεκτήματα του μοντέλου της παλινδρόμησης κατωφλίου ως προς το μοντέλο του Cox, όταν δεν ισχύει η υπόθεση της αναλογικής διακινδύνευσης. Εφαρμόζοντας την μέθοδο για την 5^η εβδομάδα το αποτέλεσμα είναι 2.08. Ομοίως, εφαρμόζοντας την μέθοδο hr για την 20^η εβδομάδα, η αναλογία της διακινδύνευσης προκύπτει ίση με 0.12(για εντολές στην R, βλέπε παράρτημα B,4e).

Είναι προφανές ότι η αναλογία της διακινδύνευσης διαφέρει αρκετά ανάμεσα στην 5^η και την 20^η εβδομάδα. Παρατηρούμε ότι την 20^η εβδομάδα μειώνεται κατακόρυφα και φτάνει στην τιμή 0.12. Να τονίσουμε εδώ ότι η ομάδα αναφοράς είναι η ομάδα με το standard φάρμακο. Η αλλαγή της αναλογίας διακινδύνευσης με την πάροδο του χρόνου είναι αρκετά μεγάλη και μας αποκαλύφθηκε μέσω της συνάρτησης threg. Παρακάτω, στο Γράφημα 6.2.7.4, βλέπουμε την γραφική παράσταση των εκτιμώμενων συναρτήσεων διακινδύνευσης, την οποία φτιάξαμε μέσω της συνάρτησης threg. Παρατηρούμε ότι οι καμπύλες της συνάρτησης διακινδύνευσης των δύο διαφορετικών θεραπειών διασταυρώνονται και έτσι εξηγείται γιατί η εκτιμώμενη

αναλογία διακινδύνευσης της ομάδας με το φάρμακο B ως προς την ομάδα με το standard φάρμακο μειώνεται από έναν αριθμό, ο οποίος είναι μεγαλύτερος του 1, (2.08), σε έναν αριθμό μικρότερο του 1(0.12).



Γράφημα 6.2.7.4: Εκτιμώμενες συναρτήσεις διακινδύνευσης της παλινδρόμησης κατωφλίου για τα δεδομένα Ikr.

Από την άλλη, μπορούμε να υπολογίσουμε μία σταθερή αναλογία διακινδύνευσης μέσω του μοντέλου του Cox (0.73). Αυτή η τιμή παραμένει σταθερή σε όλο το χρονικό διάστημα, για την ομάδα με το drug B ως προς τη ομάδα με το standard φάρμακο, λόγω της υπόθεσης της αναλογικής διακινδύνευσης. Προφανώς, το αποτέλεσμα αυτό είναι παραπλανητικό.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

Τα δεδομένα της παραγράφου 6.1.3

Αντικείμενο					
Χρόνος	1	2	3	4	5
(α) Θερμοκρασία δοκιμασίας 200 °C.					
0.496	-0.120682	-0.118779	-0.123600	-0.126501	-0.124359
0.688	-0.112403	-0.109853	-0.115186	-0.118941	-0.111966
0.856	-0.103608	-0.101593	-0.105657	-0.110288	-0.107869
1.024	-0.096047	-0.094567	-0.098569	-0.103419	-0.100304
1.192	-0.085673	-0.084698	-0.088613	-0.095465	-0.085916
1.360	-0.077677	-0.076070	-0.079332	-0.084769	-0.077947
2.008	-0.045218	-0.040623	-0.045835	-0.052268	-0.045597
2.992	0.000526	0.004237	0.000533	-0.008265	0.000524
4.456	0.059261	0.063742	0.061032	0.051139	0.059544
5.608	0.093394	0.095117	0.093612	0.082414	0.084912
(β) Θερμοκρασία δοκιμασίας 240°C.					
0.160	-0.005152	-0.019888	-0.045961	-0.023188	-0.044267
0.328	0.056930	0.046278	0.015198	0.040737	0.018173
0.496	0.112631	0.101628	0.067119	0.095504	0.072214
0.688	0.173202	0.162705	0.128670	0.156129	0.131555
0.856	0.214266	0.202604	0.168271	0.196349	0.171394
1.024	0.272668	0.257563	0.221611	0.250900	0.225281
1.192	0.311422	0.297875	0.260910	0.291937	0.266314

1.360	0.351988	0.338902	0.302126	0.332887	0.306105
2.008	0.489847	0.461855	0.440738	0.473130	0.443941
2.992	0.656780	0.629991	0.606275	0.638651	0.611724
4.456	0.851985	0.798431	0.834114	0.798457	-

(γ) Θερμοκρασία δοκιμασίας 260°C.

0.160	0.123360	0.127605	0.120759	0.105206	0.120115
0.328	0.251084	0.254944	0.247156	0.232389	0.247949
0.496	0.393107	0.394496	0.391516	0.375789	0.388406
0.688	0.517137	0.518485	0.513872	0.500556	0.511850
0.856	0.598797	0.599265	0.595704	0.583362	0.595220
1.024	0.693925	0.694445	0.688930	0.679117	0.690324
1.192	0.774347	0.774428	0.770313	0.758314	0.770782

Πίνακας 6.1.3.1: Δεδομένα δοκιμής καλωδίων θέρμανσης. Η φθορά μετράται ως ο φυσικός λογάριθμος της αντοχής. Ο χρόνος μετράται σε χιλιάδες ώρες. Η παύλα δηλώνει μία τιμή που λείπει (Πηγή: Whitmore και Schenkelberg, 1997).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

Προγράμματα που χρησιμοποιούνται στην R

1a) Πρόγραμμα για την Παράγραφο 6.1.3.1

```
#Περνάω τα δεδομένα για την θερμοκρασία 200°C

group1<-c(0.496,0.688,0.856,1.024,1.192,1.360,2.008,2.992,4.456,5.608)

group2<-c(-0.120682,-0.112403,-0.103608,-0.096047,-0.085673,-0.077677,-
0.045218,0.000526,0.059261, 0.093394)

group3<-c(-0.118779,-0.109853,-0.101593,-0.094567,-0.084698,-0.076070,-
0.040623,0.004237,0.063742,0.095117)

group4<-c(-0.123600,-0.115186,-0.105657,-0.098569,-0.088613,-0.079332,-
0.045835,0.000533,0.061032,0.093612)

group5<-c(-0.126501,-0.118941,-0.110288,-0.103419,-0.095465,-0.084769,-0.052268,-
0.008265,0.051139,0.082414)

group6<-c(-0.124359,-0.111966,-0.107869,-0.100304,-0.085916,-0.077947,-
0.045597,0.000524,0.059544,0.084912)

T200<-list(r=group1,W1=group2,W2=group3,W3=group4,W4=group5,W5=group6)

#Φτιάχνω την συνάρτηση μέγιστης πιθανοφάνειας και την μεγιστοποιώ για να
βρω τα δ, λ, ν

n<-length(T200$r)

t<-function(λ){1-exp(-λ*T200$r)}

δ<-function(λ){(T200$W1[n]-T200$W1[1])/(t(λ)[n]-t(λ)[1])}

Δt<-function(λ){diff(t(λ))}

S<-function(λ){(diff(T200$W1)-(δ(λ)*Δt(λ)))^2/Δt(λ)}

ν<-function(λ){sum(S(λ)/n)}

L<-function(λ){(2*pi*ν(λ))^-n/2*prod((Δt(λ))^-1/2)*exp(-n/2)}

logL<-function(λ){-log(L(λ))}

o<-optim(λ <- c(0.1), logL, hessian=TRUE)
```



```
est2001<-c(δ(ο$par),ο$par, ν(ο$par))
```

```
#Ομοίως τα κάνω όλα (δηλαδή και για τα 5 προϊόντα αλλάζοντας το W1 σε W2,W3,W4,W5 αντίστοιχα)
```

```
est200<-c(est2001,est2002,est2003,est2004,est2005)
```

```
dim(est200)<-c(3,5)
```

```
est200
```

	[,1]	[,2]	[,3]	[,4]	[,5]
[1,]	0.491761	0.451204	0.470917	0.467334	0.374491
[2,]	0.121387	0.138672	0.132734	0.126406	0.185547
[3,]	0.000084	0.000115	0.000109	0.000151	0.000353

```
#Κάνω τα ίδια βήματα και για τις θερμοκρασίες 240°C και 260°C
```

```
g1<-c(0.160,0.328,0.496,0.688,0.856,1.024,1.192,1.360,2.008,2.992,4.456)
```

```
g2<-c(-0.005152,0.056930,0.112631,0.173202,0.214266,0.272668,0.311422,0.351988,0.489847,0.656780,0.851985)
```

```
g3<-c(-0.019888,0.046278,0.101628,0.162705,0.202604,0.257563,0.297875,0.338902,0.461855,0.629991,0.798431)
```

```
g4<-c(-0.045961,0.015198,0.067119,0.128670,0.168271,0.221611,0.260910,0.302126,0.440738,0.606275,0.834114)
```

```
g5<-c(-0.023188,0.040737,0.095504,0.156129,0.196349,0.250900,0.291937,0.332887,0.473130,0.638651,0.798457)
```

```
g6<-c(-0.044267,0.018173,0.072214,0.131555,0.171394,0.225281,0.266314,0.306105,0.443941,0.611724)
```

```
T240<-list(r=g1,W1=g2,W2=g3,W3=g4,W4=g5,W5=g6)
```

```
n<-length(T240$r)
```

```
t<-function(λ){1-exp(-λ*T240$r)}
```

```
δ<-function(λ){(T240$W1[n]-T240$W1[1])/(t(λ)[n]-t(λ)[1])}
```

```

Δt<-function(λ){diff(t(λ))}

S<-function(λ){((diff(T240$W1)-(δ(λ)*Δt(λ)))^2)/Δt(λ)}

v<-function(λ){sum(S(λ)/n)}

L<-function(λ){(2*pi*v(λ))^-n/2*prod((Δt(λ))^-1/2)*exp(-n/2)}

logL<-function(λ){-log(L(λ))}

o<-optim(λ <- c(0.1), logL, hessian=TRUE)

est2401<-c(δ(o$par),o$par, v(o$par))

#Ομοίως τα κάνω όλα και παίρνω

est240<-c(est2401,est2402,est2403,est2404,est2405)

dim(est240)<-c(3,5)

est240

      [,1]      [,2]      [,3]      [,4]      [,5]
[1,] 1.276841  1.145118  1.474396  1.130496  1.156756
[2,] 0.282031  0.325313  0.224453  0.339453  0.339453
[3,] 0.000815  0.000744  0.001230  0.000385  0.000462

#Τα δεδομένα για T=260°C

g11<-c(0.160,0.328,0.496,0.688,0.856,1.024,1.192)

g12<-c(0.123360,0.251084,0.393107,0.517137,0.598797,0.693925,0.774428)

g12<-c(0.123360,0.251084,0.393107,0.517137,0.598797,0.693925,0.774347)

g13<-c(0.127605,0.254944,0.394496,0.518485,0.599265,0.694445,0.774428)

g14<-c(0.120759,0.247156,0.391516,0.513872,0.595704,0.688930,0.770313)

g15<-c(0.105206,0.232389,0.375789,0.500556,0.583362,0.679117,0.758314)

g16<-c(0.120115,0.247949,0.388406,0.511850,0.595220,0.690324,0.770782)

T260<-list(r=g11,W1=g12,W2=g13,W3=g14,W4=g15,W5=g16)

n<-length(T260$r)

```

```

t<-function(λ){1-exp(-λ*T260$r)}

δ<-function(λ){(T260$W1[n]-T260$W1[1])/(t(λ)[n]-t(λ)[1])}

Δt<-function(λ){diff(t(λ))}

S<-function(λ){((diff(T260$W1)-(δ(λ)*Δt(λ)))^2)/Δt(λ)}

v<-function(λ){sum(S(λ)/n)}

L<-function(λ){(2*pi*v(λ))^(n/2)*prod((Δt(λ))^(1/2))*exp(-n/2)}

logL<-function(λ){-log(L(λ))}

o<-optim(λ <- c(0.1), logL, hessian=TRUE)

est2601<-c(δ(o$par),o$par, v(o$par))

#Ομοίως τα κάνω όλα και παίρνω

est260<-c(est2601,est2602,est2603,est2604,est2605)

dim(est260)<-c(3,5)

est260

      [,1]      [,2]      [,3]      [,4]      [,5]
[1,] 1.480203  1.481923  1.470603  1.475081  1.496364
[2,] 0.648438  0.640313  0.653125  0.655781  0.636328
[3,] 0.001449  0.001378  0.001598  0.001482  0.001250

#Ο τελικός πίνακας με όλες τις εκτιμήσεις για δ, λ, ν είναι:

est <- rbind(est200,est240,est260)

0.491761  0.451204  0.470917  0.467334  0.374491

0.121387  0.138672  0.132734  0.126406  0.185547

0.000084  0.000115  0.000109  0.000151  0.000353

1.276841  1.145118  1.474396  1.130496  1.156756

0.282031  0.325312  0.224453  0.339453  0.339453

0.000815  0.000744  0.001230  0.000385  0.000462

```

```
1.480203  1.481923  1.470604  1.475081  1.496364
0.648438  0.640313  0.653125  0.655781  0.636328
0.001450  0.001378  0.001598  0.001482  0.001250
```

```
#Οι εκτιμήσεις όλων των δ είναι
```

```
δest<-c(est[1,1:5],est[4,1:5],est[7,1:5])
```

```
δest<-matrix(δest,nrow=3,ncol=5,byrow=T)
```

1b) Πρόγραμμα για την Παράγραφο 6.1.3.1

```
#Γραφική παράσταση των δ ως προς την αντίστοιχη θερμοκρασία
```

```
K200<-473.15
```

```
K240<-513.15
```

```
K260<-533.15
```

```
temp<-
```

```
c(1/K200,1/K200,1/K200,1/K200,1/K200,1/K240,1/K240,1/K240,1/K240,1/K240,1/K260,1/K260,1/K260,1/K260,1/K260)
```

```
temp<-matrix(temp,nrow=3,ncol=5,byrow=T)
```

```
plot(temp,δest,xlab='1/s',ylab='δ')
```

```
#Οι εκτιμήσεις όλων των ν είναι
```

```
vest<-c(est[3,1:5],est[6,1:5],est[9,1:5])
```

```
vest<-matrix(vest,nrow=3,ncol=5,byrow=T)
```

```
vest<-log(vest)
```

```
#Γραφική παράσταση των logν ως προς την αντίστοιχη θερμοκρασία
```

```
plot(temp,vest,xlab='1/s',ylab='logν')
```

```
#Οι εκτιμήσεις όλων των λ
```

```
lest<-c(est[2,1:5],est[5,1:5],est[8,1:5])
```

```

lest<-matrix(lest,nrow=3,ncol=5,byrow=T)

lest<-1/lest

#Γραφική παράσταση των 1/λ ως προς την αντίστοιχη θερμοκρασία
plot(temp,lest,xlab='1/s',ylab='1/λ')

```

2a) Πρόγραμμα για την Παράγραφο 6.1.3.2

```

#Περνάω τα δεδομένα για την θερμοκρασία 200°C

group1<-c(0.496,0.688,0.856,1.024,1.192,1.360,2.008,2.992,4.456,5.608)

group2<-c(-0.120682,-0.112403,-0.103608,-0.096047,-0.085673,-0.077677,-
0.045218,0.000526,0.059261,0.093394)

group3<-c(-0.118779,-0.109853,-0.101593,-0.094567,-0.084698,-0.076070,-
0.040623,0.004237,0.063742,0.095117)

group4<-c(-0.123600,-0.115186,-0.105657,-0.098569,-0.088613,-0.079332,-
0.045835,0.000533,0.061032,0.093612)

group5<-c(-0.126501,-0.118941,-0.110288,-0.103419,-0.095465,-0.084769,-0.052268,-
0.008265,0.051139,0.082414)

group6<-c(-0.124359,-0.111966,-0.107869,-0.100304,-0.085916,-0.077947,-
0.045597,0.000524,0.059544,0.084912)

T200<-list(r=group1,W1=group2,W2=group3,W3=group4,W4=group5,W5=group6)

#Φτιάχνω την συνάρτηση μέγιστης πιθανοφάνειας και την μεγιστοποιώ για να
βρω τα δ, λ, ν

n<-length(T200$r)

t<-function(λ){T200$r^( λ)}

δ<-function(λ){(T200$W1[n]-T200$W1[1])/(t(λ)[n]-t(λ)[1])}

Δt<-function(λ){diff(t(λ))}

S<-function(λ){((diff(T200$W1)-(δ(λ)*Δt(λ)))^2)/Δt(λ)}

```

```

v<-function(λ){sum(S(λ)/n)}

L<-function(λ){(2*pi*v(λ))^(n/2)*prod((Δt(λ))^(1/2))*exp(-n/2)}

logL<-function(λ){-log(L(λ))}

o<-optim(λ <- c(0.1), logL, hessian=TRUE)

est2001<-c(δ(o$par),o$par, v(o$par))

#Ομοίως τα κάνω όλα (δηλαδή και για τα 5 προϊόντα αλλάζοντας το W1 σε
W2,W3,W4,W5 αντίστοιχα)

est200<-c(est2001,est2002,est2003,est2004,est2005)

dim(est200)<-c(3,5)

est200

      [,1]      [,2]      [,3]      [,4]      [,5]
[1,] 0.066491 0.069662 0.069698 0.063750 0.080496
[2,] 0.774375 0.752578 0.759375 0.782578 0.678438
[3,] 0.000023 0.000035 0.000031 0.000035 0.000105

#Κάνω τα ίδια βήματα και για τις θερμοκρασίες 240°C και 260°C

g1<-c(0.160,0.328,0.496,0.688,0.856,1.024,1.192,1.360,2.008,2.992,4.456)

g2<-c(-
0.005152,0.056930,0.112631,0.173202,0.214266,0.272668,0.311422,0.351988,0.489847,0.656780,0.
851985)

g3<-c(-
0.019888,0.046278,0.101628,0.162705,0.202604,0.257563,0.297875,0.338902,0.461855,0.629991,0.
798431)

g4<-c(-
0.045961,0.015198,0.067119,0.128670,0.168271,0.221611,0.260910,0.302126,0.440738,0.606275,0.
834114)

g5<-c(-
0.023188,0.040737,0.095504,0.156129,0.196349,0.250900,0.291937,0.332887,0.473130,0.638651,0.
798457)

g6<-c(-

```

```

0.044267,0.018173,0.072214,0.131555,0.171394,0.225281,0.266314,0.306105,0.443941,0.611724)

T240<-list(r=g1,W1=g2,W2=g3,W3=g4,W4=g5,W5=g6)

n<-length(T240$r)

t<-function( $\lambda$ ){T240$r^ $\lambda$ }

 $\delta$ <-function( $\lambda$ ){(T240$W1[n]-T240$W1[1])/(t( $\lambda$ )[n]-t( $\lambda$ )[1])}

 $\Delta t$ <-function( $\lambda$ ){diff(t( $\lambda$ ))}

S<-function( $\lambda$ ){((diff(T240$W1)-( $\delta$ ( $\lambda$ )* $\Delta t$ ( $\lambda$ )))^2)/ $\Delta t$ ( $\lambda$ )}

v<-function( $\lambda$ ){sum(S( $\lambda$ )/n)}

L<-function( $\lambda$ ){(2*pi*v( $\lambda$ ))^(n/2)*prod(( $\Delta t$ ( $\lambda$ ))^(1/2))*exp(-n/2)}

logL<-function( $\lambda$ ){-log(L( $\lambda$ ))}

o<-optim( $\lambda$  <- c(0.1), logL, hessian=TRUE)

est2401<-c( $\delta$ (o$par),o$par, v(o$par))

#Ομοίως τα κάνω όλα και παίρνω

est240<-c(est2401,est2402,est2403,est2404,est2405)

dim(est240)<-c(3,5)

est240

      [,1]      [,2]      [,3]      [,4]      [,5]
[1,] 0.401248 0.424227 0.367110 0.425316 0.365103
[2,] 0.604219 0.554727 0.663203 0.555430 0.555430
[3,] 0.000401 0.000474 0.000208 0.000681 0.000211

#Τα δεδομένα για T=260°C

g11<-c(0.160,0.328,0.496,0.688,0.856,1.024,1.192)

g12<-c(0.123360,0.251084,0.393107,0.517137,0.598797,0.693925,0.774428)

g12<-c(0.123360,0.251084,0.393107,0.517137,0.598797,0.693925,0.774347)

g13<-c(0.127605,0.254944,0.394496,0.518485,0.599265,0.694445,0.774428)

```

```

g14<-c(0.120759,0.247156,0.391516,0.513872,0.595704,0.688930,0.770313)
g15<-c(0.105206,0.232389,0.375789,0.500556,0.583362,0.679117,0.758314)
g16<-c(0.120115,0.247949,0.388406,0.511850,0.595220,0.690324,0.770782)
T260<-list(r=g11,W1=g12,W2=g13,W3=g14,W4=g15,W5=g16)
n<-length(T260$r)
t<-function(λ){T260$r^λ}
δ<-function(λ){(T260$W1[n]-T260$W1[1])/(t(λ)[n]-t(λ)[1])}
Δt<-function(λ){diff(t(λ))}
S<-function(λ){((diff(T260$W1)-(δ(λ)*Δt(λ)))^2)/Δt(λ)}
v<-function(λ){sum(S(λ)/n)}
L<-function(λ){(2*pi*v(λ))^(n/2)*prod((Δt(λ))^(1/2))*exp(-n/2)}
logL<-function(λ){-log(L(λ))}
o<-optim(λ <- c(0.1), logL, hessian=TRUE)
est2601<-c(δ(o$par),o$par, v(o$par))
#Ομοίως τα κάνω όλα και παίρνω
est260<-c(est2601,est2602,est2603,est2604,est2605)
dim(est260)<-c(3,5)
est260
      [,1]      [,2]      [,3]      [,4]      [,5]
[1,] 0.786183  0.778877  0.785770  0.789130  0.782369
[2,] 0.664688  0.667969  0.662812  0.664141  0.669609
[3,] 0.001002  0.000937  0.001096  0.001072  0.000870
#Ο τελικός πίνακας με όλες τις εκτιμήσεις για δ, λ, ν
est <- rbind(est200,est240,est260)
      0.066491  0.069662  0.069698  0.063750  0.080496

```


0.774375	0.752578	0.759375	0.782578	0.678438
0.000023	0.000035	0.000031	0.000038	0.000105
0.401248	0.424226	0.367110	0.425316	0.365103
0.604218	0.554727	0.663203	0.555430	0.555430
0.000401	0.000474	0.000208	0.000681	0.000211
0.786183	0.778877	0.785770	0.789130	0.782369
0.664688	0.667969	0.662813	0.664141	0.669609
0.001003	0.000937	0.001096	0.001072	0.000869

2b) Πρόγραμμα για την Παράγραφο 6.1.3.2

```

#Οι εκτιμήσεις όλων των δ
dest<-c(est[1,1:5],est[4,1:5],est[7,1:5])
dest<-matrix(dest,nrow=3,ncol=5,byrow=T)

#Γραφική παράσταση των lnδ ως προς την αντίστοιχη θερμοκρασία
K200<-473.15
K240<-513.15
K260<-533.15

temp<-
c(1/K200,1/K200,1/K200,1/K200,1/K200,1/K240,1/K240,1/K240,1/K240,1/K240,1/K260,1/K260,1/K260,1/K260,1/K260)

temp<-matrix(temp,nrow=3,ncol=5,byrow=T)

plot(temp,log(dest),xlab='1/s',ylab='lnδ')

#Οι εκτιμήσεις όλων των ν

```

```

vest<-c(est[3,1:5],est[6,1:5],est[9,1:5])

vest<-matrix(vest,nrow=3,ncol=5,byrow=T)

vest<-log(vest)

#Γραφική παράσταση των logn ως προς την αντίστοιχη θερμοκρασία
plot(temp,vest,xlab='1/s',ylab='lnv')

#Οι εκτιμήσεις όλων των λ
lest<-c(est[2,1:5],est[5,1:5],est[8,1:5])

lest<-matrix(lest,nrow=3,ncol=5,byrow=T)

#Γραφική παράσταση των λ ως προς την αντίστοιχη θερμοκρασία
plot(temp,lest,xlab='1/s',ylab='λ')

```

3a) Πρόγραμμα για την Παράγραφο 6.2.6

```

#Προσαρμογή του μοντέλου

library(threg)

data("bmt", package= "threg")

bmt$f.group<- factor(bmt$group)

bmt$f.fab<- factor(bmt$fab)

fitbmt<- threg(Surv(time,indicator)~recipient_age + f.fab | f.group + f.fab, data = bmt)

fitbmt

```

3b) Πρόγραμμα για την Παράγραφο 6.2.6

```

# Εφαρμογή της μεθόδου hr για το fitbmt, ηλικία 18, FAB=0 και χρόνος 500
μέρες

hr(fitbmt, var=f.group, timevalue = 500, scenario = recipient_age(18) + f.fab1(0))

```

3c) Πρόγραμμα για την Παράγραφο 6.2.6

```
#Γράφημα της συνάρτησης επιβίωσης, με σενάριο ηλικία 18, FAB=0
plot(fitbmt, var=f.group, scenario = recipient_age(18) + f.fab1(0), graph = "sv", nocolor = 1)

#Γράφημα της συνάρτησης διακινδύνευσης, με σενάριο ηλικία 18, FAB=0
plot(fitbmt, var=f.group, scenario = recipient_age(18) + f.fab1(0), graph = "hz", nocolor = 1)

#Γράφημα της συνάρτησης πυκνότητας, με σενάριο ηλικία 18, FAB=0
plot(fitbmt, var=f.group, scenario = recipient_age(18) + f.fab1(0), graph = "ds", nocolor = 1)
```

3d) Πρόγραμμα για την Παράγραφο 6.2.6

```
#Μέθοδος predict για το fitbmt
predict(fitbmt, timevalue = 2000, scenario = recipient_age(18) + f.fab1(0) + f.group2(0) + f.group3(1))
```

4a) Πρόγραμμα για την Παράγραφο 6.2.7

```
#Γραφική παράσταση της εκτιμήτριας Kaplan-meier
library(survival)
install.packages("Formula")
install.packages("threg")
library(Formula)
library(threg)
data("lkr", package= "threg")
lkr$f.treatment2<- factor(lkr$treatment2)
fitkaplan<-survfit(Surv(weeks,relapse)~f.treatment2,data=lkr)
plot(fitkaplan, xlab= "time", ylab= "Estimated S(t)", lty=1:2)
legend(20, 1, c("Standard", "Drug B"), lty=1:2)
```

4b) Πρόγραμμα για την Παράγραφο 6.2.7

```
#Προσαρμογή του μοντέλου
```

```
fit<- threg(Surv(weeks, relapse)~f.treatment2|f.treatment2, data=lkr)
```

```
fit
```

4c) Πρόγραμμα για την Παράγραφο 6.2.7

```
#Γραφική παράσταση των εκτιμώμενων καμπυλών επιβίωσης για τα δύο  
επίπεδα του treatment2
```

```
plot(fit, var = f.treatment2, graph = "sv", nolegend = 1, nocolor = 1)
```

```
legend(20, 1, c("Standard", "Drug B"), lty=1:2)
```

4d) Πρόγραμμα για την Παράγραφο 6.2.7

```
#Γραφική παράσταση των συναρτήσεων επιβίωσης με το μοντέλο του Cox ( αν  
και δεν ισχύει η υπόθεση αναλογικής διακινδύνευσης)
```

```
fitcox<-coxph(Surv(weeks,relapse)~f.treatment2,data=lkr)
```

```
summary(fitcox)
```

```
fitcox1<-survfit(fitcox)
```

```
plot(fitcox1,xlab= "time", ylab= "Estimated S(t)",lty=1:2)
```

4e) Πρόγραμμα για την Παράγραφο 6.2.7

```
#Η μέθοδος hr υπολογίζει την αναλογική διακινδύνευση της ομάδας B ως προς  
την standard για την εβδομάδα 5.
```

```
hr(fit, var=f.treatment2, timevalue = 5)
```

```
#Εβδομάδα 20
```

```
hr(fit, var=f.treatment2, timevalue = 20)
```

```
#Γραφική παράσταση για τις εκτιμώμενες συναρτήσεις διακινδύνευσης για την
```

παλινδρόμηση του κατωφλίου

```
plot(fit,var=f.treatment2, graph="hz", nolegend=1, nocolor=1)
```

```
legend(20,0.15,c("Standard", "Drug B"), lty=1:2)
```

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Aalen, O.O. and Gjessing, H.K. (2004). Survival models based on the Ornstein-Uhlenbeck process. *Lifetime Data Analysis*, **10**, 407-423.
2. Abdel-Hameed, M. (2010). Degradation Processes: An Overview, in “Advances in Degradation Modelling”, *Statistics for Industry and Technology*. Editors M.S. Nikulin et. Al, Boston: Birkhauser.
3. Abdel-Hameed, M. (1975). A gamma wear process. *IEEE Trans Reliab*, **24**, 152-153.
4. Abdel-Hameed, M.S. (2004). Optimal predictive maintenance policies for a deteriorating system cost cases. *Communications in Statistics*, **33**, 735-745.
5. Abdel-Hameed, M.S. (1984). Life distribution properties of devices subject to a pure jump damage process. *Journal of Applied Probability*, **21**, 816-825.
6. Abdel-Hameed, M.S. and Proschan, F. (1973). Nonstationary shock models. *Stochastic Processes and Their Applications*, **1**, 383-404.
7. Bagdonavičius, V. (1978). Testing the hypothesis of the additive accumulation of damages. *Probability Theory and its Applications*, **23**, 403-408.
8. Bagdonavičius, V. and Nikulin, M.S. (2000). Estimation in Degradation Models with Explanatory Variables. *Lifetime Data Analysis*, **7**, 85-103.
9. Barlow, R.E. and Proschan, F. (1965). Mathematical theory of reliability. *New York: Wiley*.
10. Bernardo, J.M. (1976). Algorithm AS 103: psi (digamma) function. *Applied Statistics*, **25**, 315-317.
11. Birnbaum, Z.W. and Saunders, S.C. (1969). A new family of life distributions. *Journal of Applied Probability*, **6**, 319-327.
12. Boulanger, M. and Escobar, L.A. (1994). Experimental design for a class of accelerated degradation tests. *Technometrics*, **36**, 260-272.
13. Carey, M.B. and Koenig, R.H. (1991). Reliability assessment based on accelerated degradation: A case study, *IEEE Transactions on Reliability*, **40**, 499–506.
14. Caroni, C. (2017). *First Hitting Time Regression Models*. London: Wiley-ISTE.
15. Chan, V. and Meeker, W.Q.(2001). Estimation of degradation-based reliability in outdoor environments. *Technical report*, Iowa State University, Ames.
16. Chiao, C.H. and Hamada, M. (1996) Using degradation data from an experimet to achive robust reliability for light emmiting diodes. *Quality and Reliability Engineering International*, **12**, 89–94.

17. Cinlar, E., Bazant, Z.P, and Osman, E. (1977). Stochastic process for extrapolating concrete creep. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, **103**, 1069-1088.
18. Dekker, R. and Nicolai, R.P. and van Noortwijk, J.M. (2007). A comparison of models for measurable deterioration: An application to coatings on steel structures. *Reliability Engineering and System Safety*, **92**, 1635-1650.
19. Dekker, R., Plasmeijer, R.P. and Swart, J.H. (1998). Evaluation of a new maintenance concept for the preservation of highways. *IMA Journal of Mathematics Applied in Business and Industry*, **9**, 109–56.
20. Dekker, R. and Scarf, P.A. (1998). On the impact of optimization models in maintenance decision making: the state of the art. *Reliability Engineering & System Safety*, **60**, 111-9.
21. Doksum, K.A. and Hóyland, A. (1992). Models for variable-stress accelerated life testing experiments based on Wiener processes and the inverse Gaussian distribution. *Technometrics*, **34**, 74-82.
22. Doksum, K.A. and Normand, S.L. (1992). Gaussian models for degradation processes- Part I: methods for the analysis of biomarker data. *Lifetime Data Analysis*, **1**, 131- 144.
23. Dowling, N.E. (1993). *Mechanical Behavior of Materials*, Prentice Hall: Englewood Cliffs.
24. Dufrense, F., Gerber, H.U. and Shiu, E.S.W. (1991). *Risk theory with the gamma process*. *ASTIN Bull*, **21**, 177-192.
25. Ellingwood, B.R. and Mori, Y. (1993). Probabilistic methods for condition assessment and life prediction of concrete structures in nuclear power plants. *Nuclear Engineering and Design*, **142**, 155-166.
26. Esary, J.D., Marshall, A.W. and Proschan, F. (1973). Shock models and wear processes. *The Annals of Probability*, **1**, 627-649.
27. Escobar, L.A. and Meeker, W.Q. (2006). A Review of Accelerated Test Models. *Statistical Science*, **21**, 552-577.
28. Finetti, B. (1975). Theory of probability, a critical introductory treatment, *vol. 2*. Chichester, Wiley.
29. Garrett, J.M. (1997). Odds Ratios and Confidence Intervals for Logistic Regression Models with Effect Modification, *Stata Technical Bulletin*, **36**, 15-22.
30. Gertsbakh, I. B., and Kordonsky, K. B. (1969). Models of Failure, *English translation from the Russian version*, New York: Springer-Verlag.

31. Hamada, M., (1995). Analysis of experiments for reliability improvement and robust reliability, in *Recent Advances in Life-Testing and Reliability*, (N. Balakrishnan, ed.), CRC Press: Boca Raton.
32. Hazelton, W.D., Luebeck, E.G., Heidenreich, W.F. and Moolgavkar, S.H. (2001). Analysis of a historical cohort of Chinese tin miners with arsenic, radon, cigarette smoke, and pipe smoke exposures using the biologically based two-stage clonal expansion model. *Radiation Research*, **156**, 78-94.
33. Heutink, A., van Beek, A. and van Noortwijk, J.M., Klatter, H.E. and Barendregt, A. (2004). Environment-friendly maintenance of protective paint systems at lowest costs. *In: Proceedings of the XXVII FATIPEC congress*, Paris, **19-21**, 351-64.
34. Johnston, D.R., Laforte, J.T., Podhorez, P.E. and Galpern, H.N. (1979). Frequency acceleration of voltage endurance. *IEEE Transactions on Electrical Insulation*, **14**, 121-126.
35. Kallen, M.J. and van Noortwijk, J.M. (2005). Optimal maintenance decisions under imperfect inspection. *Reliability Engineering and System Safety*, **90**, 177-185.
36. Klein, J.P. and Moeschberger, M.L. (2003). *Survival Analysis: Techniques for Censored and Truncated Data*. 2nd edition. New York: Springer-Verlag.
37. Lancaster, T. (1972). A stochastic model for the duration of a strike. *Journal of the Royal Statistical Society*, **135**, 257-271.
38. Lawless, J.F. and Crowder, M. (2004). Covariates and random effects in a gamma process model with application to degradation and failure. *Lifetime Data Analysis*, **10**, 213-227
39. Lee, M-L.T. and Whitmore, G.A. (1993). Stochastic processes directed by randomized time. *Journal of Applied Probability*, **30**, 302-314.
40. Lee, M-L.T. and Whitmore, G.A. (2006). Threshold Regression for Survival Analysis: Modeling Event Times by a Stochastic Process Reaching a Boundary. *Statistical Science*, **21**, 501-513.
41. Lu, C. J., and Meeker, W.Q. (1993), Using degradation measures to estimate a time-to failure distribution. *Technometrics*, **35**, 161-174.
42. Meeker, W.Q. (2010). Trends in the Statistical Assessment of Reliability, in “Advances in Degradation Modelling”, *Statistics for Industry and Technology*. Editors M.S. Nikulin et. Al, Boston: Birkhauser.
43. Meeker, W.Q. and Escobar, L.A. (1998). *Statistical methods for reliability data*. New York: Wiley.

44. Meeker, W.Q., Escobar, L.A., and Lu, C.J. (1998). Accelerated degradation tests: modeling and analysis, *Technometrics* , **40**, 89-99.
45. Mercer, A. (1961). Some simple wear-dependent renewal processes. *Journal of the Royal Statistical Society (Methodol)*, **23**, 368-376.
46. Mercer, A. and Smith, C.S. (1959). A random walk in which the steps occur randomly in time. *Biometrika*. **46**, 30-35.
47. Moore, R.J. (1982). Algorithm AS 187: derivatives of the incomplete gamma integral. *Journal of Applied Statistics*, **31**, 330-335.
48. Moran, P.A.P. (1954). A probability theory of dams and storage systems. *Australian Journal of Applied Science*, **5**, 116-124.
49. Mori, Y. and Ellingwood, B.R. (1993). Time-dependent system reliability analysis by adaptive importance sampling. *Structural Safety*, **12**, 59-73.
50. Mori, Y. and Ellingwood, B.R. (1994). Maintaining: reliability of concrete structures, I: role of inspection/repair. *Journal of Structural Engineering*, **120**, 824-845.
51. Murray, W.P. (1993). Archival life expectancy of 3M magneto-optic media, *Journal of the Magnetics Society of Japan*, **17**, Supplement S1, 309-314.
52. Nelson, W. (1990). Accelerated Testing: Statistical Models, *Test Plans and Data Analyses*. Wiley, New York.
53. Nikolai, P.R., Dekker, R. and van Noortwijk, M.J. (2007). A comparison of models for measurable deterioration: An application to coatings on steel structures, *Reliability Engineering and System Safety*, **92**, 1635-1650.
54. Nikulin, M.S. (2010) et al. (eds.), Advances in Degradation Modeling, *Statistics for Industry and Technology*, DOI 10.1007/978-0-8176-4924-1_2, Birkhauser Boston, a part of Springer Science + Business Media, LLC.
55. Onar, A. and Padgett, W.J. (2000). Inverse Gaussian accelerated test models based on cumulative damage. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **66**, 233-247.
56. Pandey, M.D., Yuan, X.X. and van Noortwijk, J.M. (2007). A comparison of probabilistic deterioration models for life-cycle management of structures. *Structure and Infrastructure Engineering*.
57. Park, K.S. (1988). Optimal continuous-wear limit replacement under periodic inspections. *IEEE Transactions on Reliability*, **37**, 97-102.
58. Park, C. and Padgett, W.J. (2005). Accelerated degradation models for failure based on geometric Brownian motion and gamma processes. *Lifetime Data Analysis*, **11**, 511-527.

59. Pettit, L.I. and Young, K.D. (1999). Bayesian analysis for inverse Gaussian lifetime data with measures of degradation. *Journal of Statistical Computation Simulation*, **63**,217-234.
60. Ricciardi, L.M. and Sato, S. (1998). First-passage-time density and moments of the Ornstein –Uhlenbeck process. *Journal of Applied Probability*, **25**, 43-57.
61. Schenkelberg, F. and Whitmore, G.A. (1997). Modelling Accelerated Degradation Data Using Wiener Diffusion With A Time Scale Transformation. *Lifetime Data Analysis*, **3**, 27-45.
62. Shaked, M. and Shanthikumar, J.G. (1988). On the first-passage times of pure jump process. *Journal of Applied Probability*, **25**, 501-509.
63. Singpurwalla, N.D. (1995). Survival in dynamic environments. *Statistical Science*, **10**, 86-103.
64. Singpurwalla, N.D. and Wilson, S.P. (1998). Failure models indexed by two scales. *Advances in Applied Probability*, **30**, 1058-1072.
65. Sobczyk, K. and Spencer, Jr. (1992). Random fatigue: from data to theory. *San Diego: Academic Press*.
66. Suzuki, K., Maki, K. and Yokogawa, S. (1993). An analysis of degradation data of a carbon film and properties of the estimators. *In Statistical Sciences and Data Analysis*, (K. Matusita, M. Puri, and T. Hayakawa, eds.), Utrecht/Netherlands: VSP.
67. Tseng, S.T., Hamada, M.S. and Chiao, C.H. (1994). Using Degradation Data from a Fractional Experiment to Improve Fluorescent Lamp Reliability. *The Institute for Improvement in Quality and Productivity*, University of Waterloo, Ontario, Canada, Research Report RR-94-05.
68. Van Noortwijk, J.M. (2007). A survey of the application of gamma processes in maintenance. Publication No. 18, *HKV Consultants, Lelystad*, The Netherlands.
69. Van Noortwijk, J.M. (2009). A survey of the application of gamma processes in maintenance. *Reliability Engineering and System Safety*, **94**, 2-21.
70. Van Noortwijk, J.M. and Klatter, H.E.(1999). Optimal inspection decisions for the block mats of the Eastern–Scheldt barrier. *Reliability Engineering & System Safety*,**65**, 203–11.
71. Whitmore, G.A. (1995). Estimation degradation by a Wiener diffusion process subject to measurement error. *Lifetime Data Analysis*, **5**, 307-319.
72. Whitmore, G.A., Crowder, M.J. and Lawless, J.F. (1998). Failure inference from a marker process based on a bivariate Wiener model. *Lifetime Data Analysis*, **4**, 229-251.
73. Whitmore, G.A. and Schenkelberg, F. (1997). Modelling accelerated degradation data using Wiener diffusion with a time scale transformation. *Lifetime Data Analysis*, **3**, 27-45.

74. Xiao, T. (2015). Threg: Threshold Regression. R package version 1.0.3, URL <http://CRAN.R-project.org/package=threg>.
75. Xiao, T., Whitmore, G.A., He, X. and Lee, M.L. (2015). The R package threg to Implement Threshold Regression Models, *Journal of Statistical Software*, **66**, 1-16.
76. Yanagisava, T. (1997). Estimation of the degradation of amorphous silicon cells, *Microelectronics and Reliability*, **37**, 549–554.
77. Zuckerman, D. (1978). Optimal replacement policy for the case where the damage process is a one-sided Lévy process. *Stochastic Processes and Their Applications*, **7**, 141-151.
78. Zuckerman, D. (1980). Inspection and replacement policies. *Journal of Applied Probability*, **17**, 168-177.
79. Φίλης, Γ.Α. (2006). *Στοχαστικές διαδικασίες*, Κρήτη.