ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
Εργαστήριο Ατμοκινητήρων & Λεβήτων
Τομέας Θερμότητας της Σχολής Μηχανολόγων Μηχανικών

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑΣ ΣΕ ΕΠΕΜΒΑΣΕΙΣ ΕΞΟΙΚΟΝΟΜΗΣΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Του Φοιτητή

Ευθυμιάδη Θεόδωρου

Επιβλέπων

Καρέλλας Σωτήριος, Αναπληρωτής Καθηγητής,
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών, ΕΜΠ

Αθήνα, Φεβρουάριος 2019

Ευχαριστίες

Με την παράδοση της διπλωματικής μου εργασίας ολοκληρώνεται ο κύκλος των σπουδών μου στη σχολή μηχανολόγων μηχανικών. Θέλω να ευχαριστήσω τους ανθρώπους που με στήριξαν ανελλιπώς και με συμβούλεψαν επανειλημμένως καθ' όλη τη διάρκεια των προηγούμενων ετών.

Αρχικά την οικογένειά μου, η οποία με στήριξε με κάθε τρόπο παρά τις όποιες δυσκολίες και με βοηθούσε διαρκώς να γίνομαι καλύτερος. Ειδικά θέλω να ευχαριστήσω τον πατέρα μου, Ευθυμιάδη Απόστολο, για την πολύτιμη επιστημονική και φιλοσοφική καθοδήγησή του.

Τέλος, θέλω να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή κύριο Καρέλλα Σωτήριο για την εξαιρετική του διδασκαλία, την υπομονή που έδειξε απέναντί μου, και ειδικά για τον ενθουσιασμό του να βοηθά τους φοιτητές του στο ξεκίνημα της επαγγελματικής τους πορείας.

Περίληψη

Στην παρούσα διπλωματική εργασία παρουσιάζεται μία μέθοδος εκτίμησης της εξοικονόμησης ενέργειας που επιτυγχάνεται μέσω της λήψης μέτρων εξοικονόμησης ενέργειας. Πρόκειται για τη μέθοδο χάραξης γραμμής βάσης (baseline modeling), η οποία περιλαμβάνει τη λήψη μετρήσεων της κατανάλωσης ενέργειας και των παραγόντων που την επηρεάζουν πριν και μετά τη λήψη μέτρων εξοικονόμησης. Η εκτίμηση της επιτευχθείσας εξοικονόμησης γίνεται με την εφαρμογή της μεθόδου της γραμμικής παλινδρόμησης και συνοδεύεται από στατιστική αβεβαιότητα. Η ποσοτικοποίηση της αβεβαιότητας αυτής είναι ιδιαίτερα σημαντική, καθώς επιτρέπει την εκτίμηση του κινδύνου που χαρακτηρίζει την επέμβαση και την ορθολογική αξιολόγησή της από επενδυτικής απόψεως. Η εξίσωση προσδιορισμού της αβεβαιότητας που προκύπτει από τη μέθοδο της παλινδρόμησης συγκρίνεται με άλλες, προσεγγιστικές εκφράσεις της αβεβαιότητας.

Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται εισαγωγή ορισμένων θεμελιωδών εννοιών για τη χάραξη γραμμής βάσης, καθώς και σύνοψη του νομοθετικού πλαισίου και των διεθνών προτύπων που αφορούν την εξοικονόμηση ενέργειας. Επιπλέον παρουσιάζονται ερευνητικές προσεγγίσεις πάνω σε θέματα εκτίμησης της αβεβαιότητας στην εξοικονόμηση ενέργειας, καθώς και μερικές μέθοδοι τεχνοοικονομικής αξιολόγησης επενδύσεων εξοικονόμησης. Στο δεύτερο κεφάλαιο αναπτύσσεται λεπτομερώς η θεωρία της μονοδιάστατης γραμμικής παλινδρόμησης, όπου η κατανάλωση ενέργειας Y συσχετίζεται με μία ανεξάρτητη μεταβλητή X (συνήθως την εξωτερική θερμοκρασία). Η θεωρία του δευτέρου κεφαλαίου επεκτείνεται στο τρίτο κεφάλαιο, όπου χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις εκτίμησης της κατανάλωσης ενέργειας προσδιορίζεται η εξίσωση εκτίμησης της εξοικονόμησης ενέργειας και της αβεβαιότητας αυτής. Παρουσιάζονται οι προσεγγιστικές εξισώσεις αβεβαιότητας κατά IPMVP και ASHRAE και συγκρίνονται με αυτήν που προκύπτει αναλυτικά από την μέθοδο της γραμμικής παλινδρόμησης. Όλα τα παραπάνω ισχύουν όταν η κατανάλωση ενέργειας εξαρτάται από μία ανεξάρτητη μεταβλητή. Στο τέλος του τρίτου κεφαλαίου παρατίθεται η αριθμητική εφαρμογή μίας νοσοκομειακής μονάδας για την καλύτερη κατανόηση όσων αναπτύχθηκαν στο δεύτερο και τρίτο κεφάλαιο. Στο τέταρτο κεφάλαιο αναπτύσσεται η θεωρία της πολυδιάστατης γραμμικής παλινδρόμησης και η εφαρμογή της για την εκτίμηση της εξοικονόμησης. Ουσιαστικά το τέταρτο κεφάλαιο αναπτύσσεται κατά αναλογία του δεύτερου και τρίτου κεφαλαίου, ωστόσο οι εξισώσεις της απλής γραμμικής παλινδρόμησης αντικαθίστανται από αντίστοιχες εξισώσεις πινάκων. Στο τέλος του τέταρτου κεφαλαίου χρησιμοποιείται ως αριθμητική εφαρμογή το παράδειγμα που παρουσιάζεται στον Οδηγό Ενεργειακών Ελέγχων [1] και αφορά μία ξενοδοχειακή μονάδα. Η μεθοδολογία του τέταρτου κεφαλαίου εφαρμόζεται διεξοδικά και τα αποτελέσματα συγκρίνονται με αυτά του Οδηγού Ενεργειακών Ελέγχων, όπου χρησιμοποιείται η έκφραση της αβεβαιότητας κατά ASHRAE.

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή 1

1.1 Γενικά 1

1.1.1 Η αβεβαιότητα στις επεμβάσεις εξοικονόμησης ενέργειας 1

1.1.2 Η κατανάλωση βάσης 1

1.1.3 Η μεθοδολογία εκτίμησης της εξοικονόμησης 2

1.2 Ιστορικό των προτύπων απαιτήσεων αβεβαιότητας 3

1.2.1 Γενικά 3

1.2.2 Το διεθνές πρωτόκολλο IPMVP και το πρότυπο της ASHRAE 3

1.2.3 Οι Οδηγίες τής Εὐρωπαΐκης Ένωσης και η νομοθεσία 4

1.2.4 Τα Ευρωπαϊκά πρότυπα 6

1.3 Ερευνητικό Έργο στον Υπολογισμό Αβεβαιότητας Εξοικονόμησης Ενέργειας 7

1.3.1 Γενικά 7

1.3.2 Η Γκαουσιανή προσέγγιση 7

1.3.3 Η Μπαεσιανή προσέγγιση 8

1.4 Διαχείριση Κινδύνου – Οικονομική Αξιολόγηση Επενδύσεων Εξοικονόμησης Ενέργειας 9

1.5 Σκοπός 11

2 Μονοδιάστατη Γραμμική Παλινδρόμηση 12

2.1 Εισαγωγή 12

2.2 Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων 13

2.3 Αξιολόγηση του μοντέλου 14

2.3.1 Στατιστικός έλεγχος παραμέτρων παλινδρόμησης 14

2.3.2 Κριτήριο στατιστικού ελέγχου : στατιστική t* 16

2.3.3 Ο συντελεστής προσδιορισμού R^2 18

2.4 Αξιοποίηση του μοντέλου για την εκτίμηση της κατανάλωσης ενέργειας 19

2.4.1 Εκτίμηση της κατανάλωσης βάσης με μία μέτρηση 19

2.4.2 Εκτίμηση της κατανάλωσης βάσης με Μ μετρήσεις 23

2.5 Σύγκριση – Παρατηρήσεις 26

3 Εκτίμηση της εξοικονόμησης ενέργειας μετά τη λήψη μέτρων 29

3.1 Εισαγωγικό παράδειγμα 29

3.2 Εκτίμηση της εξοικονόμησης ενέργειας μίας μ – οστής περιόδου 30

3.2.1 Προσδιορισμός εξοικονόμησης ενέργειας και αβεβαιότητας 30

3.2.2 Απαιτήσεις ακριβείας – Ελάχιστος Επαληθεύσιμος Στόχος Εξοικονόμησης Ενέργειας (ΕΕΣΕΕ) 32

3.3 Εκτίμηση της μέσης εξοικονόμησης ενέργειας κατά την πάροδο Μ περιόδων..... 38
3.3.1 Προσδιορισμός εξοικονόμησης ενέργειας και αβεβαιότητας..... 38
3.3.2 Απαιτήσεις ακριβείας – Ελάχιστος Επαληθεύσιμος Στόχος Εξοικονόμησης Ενέργειας (ΕΕΣΕΕ)..... 39
3.4 Αριθμητική εφαρμογή – εκτίμηση της επιτευχθείσας εξοικονόμησης πετρελαίου νοσοκομειακής μονάδας μέσω της εγκατάστασης ηλιακών συλλεκτών 45
4 Πολυδιάστατη Γραμμική Παλινδρόμηση..... 59
4.1 Εισαγωγή 59
4.2 Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων..... 60
4.3 Αξιολόγηση του μοντέλου..... 60
4.3.1 Στατιστικός έλεγχος παραμέτρων παλινδρόμησης..... 60
4.3.2 Ο συντελεστής πολλαπλού προσδιορισμού R^2 61
4.4 Εκτίμηση κατανάλωσης ενέργειας μίας μ-οστής περιόδου 62
4.5 Εκτίμηση εξοικονόμησης ενέργειας μία μ – οστής περιόδου 63
4.5.1 Εκτίμηση εξοικονόμησης και αβεβαιότητας..... 63
4.5.2 Απαιτήσεις ακριβείας – Ελάχιστος Επαληθεύσιμος Στόχος Εξοικονόμησης Ενέργειας..... 64
4.6 Εκτίμηση της μέσης κατανάλωσης ενέργειας κατά την πάροδο Μ περιόδων..... 64
4.7 Εκτίμηση της μέσης εξοικονόμησης ενέργειας κατά την πάροδο Μ περιόδων..... 65
4.7.1 Εκτίμηση εξοικονόμησης ενέργειας και αβεβαιότητας..... 65
4.7.2 Απαιτήσεις ακριβείας – Ελάχιστος Επαληθεύσιμος Στόχος Εξοικονόμησης Ενέργειας (ΕΕΣΕΕ)..... 65
4.8 Αριθμητική εφαρμογή Οδηγού Ενεργειακών Ελέγχων..... 67
5 Συμπεράσματα 72
6 Προτάσεις για επόμενη εργασία..... 74
6.1 Αναλυτικότερα μοντέλα αβεβαιότητας 74
6.2 Δειγματοληψία..... 74
7 Βιβλιογραφία..... 75

1 Εισαγωγή

1.1 Γενικά

1.1.1 Η αβεβαιότητα στις επεμβάσεις εξοικονόμησης ενέργειας

Η εξοικονόμηση ενέργειας αποτελεί μείζον ζήτημα του 21ου αιώνα, δεδομένης της συνεχώς αυξανόμενης ζήτησης, καθώς και των περιβαλλοντικών επιπτώσεων που απορρέουν από την κατανάλωση ορυκτών καυσίμων. Την τελευταία εικοσαετία, η διεθνής κοινότητα έχει επιδοθεί σε μία συστηματική προσπάθεια τυποποίησης και βελτιστοποίησης των επεμβάσεων εξοικονόμησης ενέργειας μέσα από σειρά διεθνών προτύπων και εγχώριων νομοθεσιών. Οι επεμβάσεις εξοικονόμησης ενέργειας αποτελούν βασική επενδυτική προτεραιότητα για όλες τις ανεπτυγμένες χώρες. Στη χώρα μας έχουν δοθεί οικονομικά κίνητρα για την επιδότηση επενδύσεων εξοικονόμησης ενέργειας (προγράμματα ΕΠΕ και ΕΠΑΝ του υπουργείου ανάπτυξης) τις τελευταίες δεκαετίες.

Ωστόσο, τα έργα εξοικονόμησης υστερούν από επενδυτικής απόψεως, καθώς δεν χαρακτηρίζονται από συγκεκριμένες χρηματοροές κατά την περίοδο αποπληρωμής. Αντιθέτως, οι χρηματοροές εμφανίζονται υπό την μορφή «εκτιμώμενης απώλειας εξόδων», γεγονός που καθιστά τις επενδύσεις εξοικονόμησης αβέβαιες και λιγότερο ελκυστικές. Σε κάθε περίπτωση απαιτείται ο ακριβής προσδιορισμός της εξοικονόμησης ενέργειας που επετεύχθη, προκειμένου να μπορεί να γίνει ορθολογική οικονομική αξιολόγηση κάθε επέμβασης εξοικονόμησης.

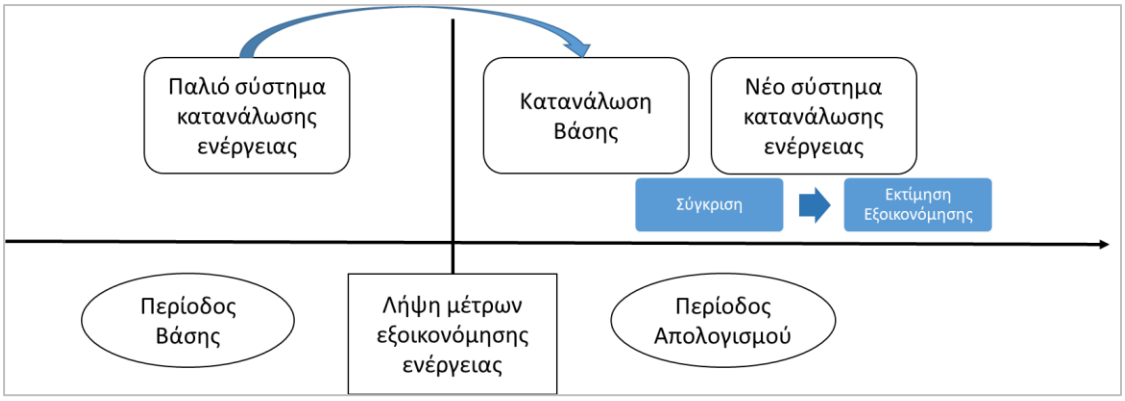
Για την άρση αυτού του εμποδίου αναπτύχθηκαν πολλές επιστημονικές τεχνικές στον τομέα της ανάλυσης αβεβαιότητας των μετρήσεων και εκτιμήσεων εξοικονόμησης ενέργειας. Το πρώτο σχετικό πρωτόκολλο που εκδόθηκε διεθνώς ήταν το North American Monitoring & Verification Protocol Version 1 (NAMVP) [2], το οποίο εισήγαγε τους όρους «ενεργειακός έλεγχος» (energy audit) και «κατανάλωση βάσης» (baseline consumption).

Το NAMVP αποτέλεσε τη βάση μίας Κοινής Υπουργικής Απόφασης (ΚΥΑ) το 1999 [13] με τίτλο «Διαδικασίες, απαιτήσεις και κατευθύνσεις για τις ενεργειακές επιθεωρήσεις σε βιομηχανία και κτίρια». Στην εν λόγω ΚΥΑ αναφέρεται ο ορισμός του ενεργειακού ελέγχου ως εξής:

«*Ενεργειακός Έλεγχος: διαδικασία δια τον καθορισμό της γραμμής ενεργειακής βάσης της κατανάλωσης και την επαλήθευση της επιτυγχανόμενης εξοικονόμησης ενέργειας*». Ουσιαστικά πρόκειται για μία συστηματική μαθηματική διαδικασία εκτίμησης της εξοικονόμησης ενέργειας, η οποία περιλαμβάνει την χάραξη και την αξιοποίηση της γραμμής βάσης της ενεργειακής κατανάλωσης.

1.1.2 Η κατανάλωση βάσης

Ως κατανάλωση βάσης (baseline consumption) ορίζεται η ενέργεια που θα κατανάλωνε μία εγκατάσταση ή ένα σύστημα εάν συνέχιζε να λειτουργεί μετά τη λήψη μέτρων εξοικονόμησης ενέργειας ακριβώς όπως πριν τη λήψη μέτρων εξοικονόμησης. Η αντίστοιχη διαδικασία ονομάζεται «χάραξη γραμμής βάσης» (baseline modelling) και γίνεται καλύτερα αντιληπτή μέσω του παρακάτω σχήματος.



Σχήμα 1.1 Γραφική απεικόνιση της μεθόδου baseline modelling

Η μελέτη χωρίζεται σε δύο τμήματα, την περίοδο βάσης (baseline period) και την περίοδο απολογισμού (reporting period).

Κατά την περίοδο βάσης , πριν τη λήψη μέτρων εξοικονόμησης, λαμβάνονται μετρήσεις κατανάλωσης ενέργειας και άλλων μεταβλητών που την επηρεάζουν. Η πιο συνήθης ανεξάρτητη μεταβλητή είναι η μέση εξωτερική θερμοκρασία. Χρησιμοποιώντας αυτές τις μετρήσεις και εφαρμόζοντας τη μέθοδο της γραμμικής παλινδρόμησης χαράσσεται η «γραμμή βάσης». Η γραμμή βάσης αποτελεί ουσιαστικά μία μαθηματική εξίσωση που συσχετίζει την κατανάλωση ενέργειας με τις ανεξάρτητες μεταβλητές που την επηρεάζουν (π.χ. εξωτερική θερμοκρασία).

1.1.3 Η μεθοδολογία εκτίμησης της εξοικονόμησης

Μετά την λήψη μέτρων εξοικονόμησης, κατά την περίοδο απολογισμού, λαμβάνονται νέες μετρήσεις της κατανάλωσης ενέργειας του νέου βελτιωμένου πλέον συστήματος, καθώς και των ανεξάρτητων μεταβλητών που επηρεάζουν την κατανάλωση. Με χρήση της γραμμής βάσης και με βάση τις τιμές των ανεξάρτητων μεταβλητών κατά την περίοδο απολογισμού υπολογίζεται η κατανάλωση βάσης. Η κατανάλωση βάσης αποτελεί μία εκτίμηση της κατανάλωσης ενέργειας που θα παρουσίαζε το παλιό σύστημα κατανάλωσης ενέργειας εάν λειτουργούσε υπό τις συνθήκες της περιόδου απολογισμού. Πρόκειται ουσιαστικά για μία «προβολή» της λειτουργίας του παλιού συστήματος στο μέλλον. Τέλος, συγκρίνοντας την κατανάλωση βάσης με τις μετρήσεις κατανάλωσης ενέργειας κατά την περίοδο απολογισμού προκύπτει η εκτίμηση της επιτευχθείσας εξοικονόμησης ενέργειας.

Η εκτίμηση της εξοικονόμησης ενέργειας θα χαρακτηρίζεται από κάποια αβεβαιότητα, δεδομένου ότι προκύπτει από τη στατιστική επεξεργασία πλήθους μετρήσεων, οι οποίες συνοδεύονται από μετρητικά σφάλματα. Συνεπώς, η εκτίμηση της εξοικονόμησης μέσω της χάραξης γραμμής βάσης θα δώσει ως αποτέλεσμα ένα διάστημα εμπιστοσύνης της μορφής:

$$Εκτίμηση\ Εξοικονόμησης\ \pm Αβεβαιότητα\ Εξοικονόμησης$$

Στο NAMVP τέθηκε ως απαίτηση ο στόχος εξοικονόμησης ενέργειας ΔΕ να είναι μεγαλύτερος από την αβεβαιότητα της εκτίμησης εξοικονόμησης σ(ΔΕ). Ως αβεβαιότητα ορίστηκε εδώ η ρίζα του μέσου τετραγωνικού σφάλματος RMSE (Root Mean Squared Error), μέγεθος που προκύπτει από την γραμμική παλινδρόμηση. Τα παραπάνω γράφονται υπό μαθηματική μορφή:

$$RMSE = \sigma(\Delta E) < \Delta E$$
$$=> \ RMSE < \Delta E$$

Η παραπάνω ανίσωση αποτελεί την πρώτη απαίτηση ακριβείας ως προς την αβεβαιότητα της εκτίμησης εξοικονόμησης ενέργειας.

Το NAMVP έθεσε τις βάσεις για την διεξαγωγή των ενεργειακών ελέγχων και την εξέλιξη των μαθηματικών τεχνικών στον τομέα της εκτίμησης εξοικονόμησης ενέργειας. Ακολούθησαν σειρά προτύπων και ευρωπαϊκών οδηγιών για τη θεμελίωση και τη λεπτομερή περιγραφή των ενεργειακών ελέγχων, τα οποία συνοψίζονται στην επόμενη ενότητα.

Η παρούσα διπλωματική εργασία εστιάζει στην μαθηματική τεχνική της χάραξης γραμμής βάσης και ειδικά στις μαθηματικές εκφράσεις προσδιορισμού της αβεβαιότητας που αναπτύχθηκαν. Τέλος, προτείνεται η χρήση μίας αναλυτικότερης έκφρασης αβεβαιότητας σε σχέση με τους προσεγγιστικούς τύπους που έχουν επικρατήσει με την πάροδο των ετών. Οι διάφορες μέθοδοι συγκρίνονται μεταξύ τους μέσα από αριθμητικές εφαρμογές.

1.2 Ιστορικό των προτύπων απαιτήσεων αβεβαιότητας

1.2.1 Γενικά

Σε αυτήν την ενότητα παρατίθεται μία ιστορική αναδρομή των προτύπων, των ευρωπαϊκών οδηγιών και των αντίστοιχων εναρμονιστικών νόμων που διαμόρφωσαν το πεδίο της εξοικονόμησης ενέργειας στη χώρα μας. Ως δευτερογενής πηγή χρησιμοποιήθηκε η σύνοψη που γίνεται στον Οδηγό Ενεργειακών Ελέγχων [1], ενώ ιδιαίτερη βάση δίνεται στις απαιτήσεις αβεβαιότητας που συνόδευαν κάθε πρότυπο ή ευρωπαϊκή οδηγία.

Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, το πρώτο διεθνές πρωτόκολλο για την εξοικονόμηση ενέργειας ήταν το NAMVP [2], το οποίο εκδόθηκε το 1996. Το NAMVP εισήγαγε τις έννοιες «Ενεργειακός Έλεγχος» και «κατανάλωση βάσης», ενώ έθεσε το πρώτο κριτήριο ακριβείας για την αβεβαιότητα εκτίμησης της εξοικονόμησης ενέργειας, απαιτώντας ο στόχος εξοικονόμησης ενέργειας ΔΕ να είναι μεγαλύτερος από το RMSE.

$$RMSE < \Delta E \tag{1.1}$$

Το πρότυπο αυτό αποτέλεσε βάση για την ΚΥΑ Δ6/Β/ΥΚ/οικ.11038/1999 [13] με τίτλο «Διαδικασίες απαιτήσεις και κατευθύνσεις για τις ενεργειακές επιθεωρήσεις σε βιομηχανία και κτίρια». Η εν λόγω ΚΥΑ βρήκε εφαρμογή σε επενδύσεις εξοικονόμησης σε βιομηχανία και κτίρια κατά την περίοδο 1999-2006 μέσω του προγράμματος ΕΠΑΝ (Επιχειρησιακό Πρόγραμμα Ανάπτυξης) του τότε υπουργείου ανάπτυξης. Η βασική μεθοδολογία του NAMVP παραμένει έως σήμερα σωστή και αποτέλεσε σημείο αφετηρίας για την έκδοση διαφόρων προτύπων και οδηγών.

Το έτος 2002 εκδόθηκαν δύο πολύ σημαντικά πρότυπα, το διεθνές πρωτόκολλο IPMVP (International Performance Measurement and Verification Protocol) [3] και το πρότυπο ASHRAE 14 [4].

1.2.2 Το διεθνές πρωτόκολλο IPMVP και το πρότυπο της ASHRAE

Το διεθνές πρωτόκολλο IPMVP αποτελεί συνέχεια του αρχικού προτύπου NAMVP, που εκδόθηκε το 1996. Το πρότυπο αυτό περιλαμβάνει τεχνικές εκτίμησης της εξοικονόμησης ενέργειας και της αβεβαιότητας, καθώς και διάφορα παραδείγματα εφαρμογής. Επανεκδόθηκε δύο φορές τα επόμενα χρόνια (2012, 2016) και αποτελεί σημείο αναφοράς όσον αφορά τη διεξαγωγή ενεργειακών ελέγχων. Στο IPMVP ορίζονται αυστηρότερες απαιτήσεις ακριβείας σε σχέση με το NAMVP, το οποίο απαιτούσε η αβεβαιότητα να είναι

μικρότερη της εκτίμησης εξοικονόμησης. Εδώ η μέγιστη αποδεκτή αβεβαιότητα ισούται με το μισό της εκτίμησης εξοικονόμησης:

$$\sigma(\Delta E) < 0{,}5\ \Delta E$$

Και σε αυτό το πρότυπο, όπως στο NAMVP, η αβεβαιότητα εκτιμάται μέσω της ρίζας του μέσου τετραγωνικού σφάλματος RMSE. Συνεπώς το κριτήριο ακριβείας γράφεται ως εξής:

$$RMSE < 0{,}5\ \Delta E \tag{1.2}$$

Το πρότυπο ASHRAE 14 με τίτλο «Μετρήσεις εξοικονόμησης ενέργειας και ζήτησης» (Measurement of Energy and Demand Savings) αποτέλεσε έκτοτε τη βασική μεθοδολογία μέτρησης και επαλήθευσης της εξοικονόμησης ενέργειας. Σε αυτό αναπτύχθηκε μία αναλυτική θεωρία για τον προσδιορισμό της αβεβαιότητας της εκτίμησης εξοικονόμησης. Οι απαιτήσεις ακριβείας ως προς την αβεβαιότητα διατυπώθηκαν ως εξής:

$$Αβεβαιότητα \leq 50\%\ ετήσιας\ εξοικονόμησης\ (με\ βαθμό\ εμπιστοσύνης\ 68\%)$$

Η παραπάνω απαίτηση γράφεται με όρους στατιστικής ως εξής:

$$t\{1-\alpha = 0{,}68\}\sigma(\Delta E) \leq 0{,}5\Delta E$$

Ο όρος t πρόκειται για την στατιστική κατά Student, η οποία λαμβάνει τιμές ανάλογα με το βαθμό εμπιστοσύνης και ισούται περίπου με 1 για (1-α)=0,68:

$$1\sigma(\Delta E) \leq 0{,}5\Delta E$$

$$=>\ \sigma(\Delta E) \leq 0{,}5\ \Delta E,\ (1-\alpha = 0{,}68) \tag{1.3}$$

Παρατηρούμε πως οι απαιτήσεις ακριβείας που τίθενται στο πρότυπο ASHRAE 14 ταυτίζονται με αυτές του IPMVP. Ωστόσο, στο πρότυπο της ASHRAE δεν χρησιμοποιείται ως εκτιμητής της αβεβαιότητας η ρίζα του μέσου τετραγωνικού σφάλματος RMSE. Η αβεβαιότητα σ(ΔΕ) υπολογίζεται από την προσεγγιστική εξίσωση που εισήγαγαν δύο μέλη της ASHRAE, οι T. Agami Reddy και David E. Claridge σε δημοσίευσή τους στο περιοδικό HVAC&R RESEARCH τον Ιανουάριο του 2000 [32]. Η εξίσωση αυτή υιοθετήθηκε από την ASHRAE στο πρότυπο ASHRAE 14.

$$\frac{\Delta E_{save,m}}{E_{save,m}} = t\,\frac{1{,}26\ CV\sqrt{\left(1+\frac{2}{n}\right)\frac{1}{m}}}{F} \tag{1.4}$$

Η εξίσωση θα αναπτυχθεί αναλυτικά σε επόμενα κεφάλαια, ωστόσο αξίζει να σημειωθεί πως η αβεβαιότητα $\Delta E_{save,m}$ είναι συνάρτηση του αριθμού των μετρήσεων κατά την περίοδο απολογισμού m. Έτσι, η αβεβαιότητα κατά ASHRAE μειώνεται όσο λαμβάνονται περαιτέρω μετρήσεις κατά την περίοδο απολογισμού, ενώ η αβεβαιότητα κατά IPMVP (ρίζα του μέσου τετραγωνικού σφάλματος RMSE) παραμένει σταθερή με την αύξηση του μεγέθους δείγματος m.

1.2.3 Οι Οδηγίες τής Ευρωπαϊκής Ένωσης και η νομοθεσία

Την ίδια χρονιά ψηφίστηκε η ευρωπαϊκή οδηγία 2002/91/ΕΚ για την ενεργειακή απόδοση των κτιρίων (Energy Performance of Buildings Directive – EPBD) [5]. Ακολούθησε το 2006 η οδηγία 2006/32/ΕΚ για την εξοικονόμηση ενέργειας (Energy Saving Directive – ESD) [7]. Με την οδηγία αυτή ορίστηκε ένα γενικότερο Ευρωπαϊκό πλαίσιο για την αξιολόγηση των επεμβάσεων εξοικονόμησης ενέργειας. Αυτό επετεύχθη μέσω της διαδικασίας **Μέτρηση και Επαλήθευση (M&E)** (Measurement and Verification – M&V).

Οι οδηγίες EPDB και ESD εναρμονίστηκαν στη χώρα μας τα επόμενα χρόνια. Συγκεκριμένα, το έτος 2008, εναρμονίστηκε η οδηγία EPDB μέσω του νόμου 3661/2008 [6], ενώ επί τη βάση της οδηγίας ESD εκδόθηκε η ΚΥΑ Δ6/Β/14826 [14], με σκοπό την προώθηση μέτρων εξοικονόμησης ενέργειας στο δημόσιο τομέα. Με την απόφαση αυτή θεσμοθετήθηκε ο ρόλος του Ενεργειακού Διαχειριστή σε όλες τις εγκαταστάσεις του δημοσίου τομέα, ο οποίος είναι υπεύθυνος για την παρακολούθηση της ενεργειακής απόδοσης των εγκαταστάσεων και τη σύνταξη σχετικών τεχνικών εκθέσεων.

Η εναρμόνιση της οδηγίας EPBD ολοκληρώθηκε το 2010 με την ΚΥΑ Δ6/Β/οικ.5825/9-4-2010 [15] , η οποία ενέκρινε τον Κανονισμό Ενεργειακής Απόδοσης Κτιρίων (ΚΕΝΑΚ). Με αυτήν την ΚΥΑ εισήχθη η έννοια της «ενεργειακής επιθεώρησης», η οποία αναφερόταν στην ενεργειακή πιστοποίηση των κτιρίων και στον εντοπισμό πιθανών δυνατοτήτων ενεργειακής αναβάθμισης αυτών.

Η οδηγία ESD εναρμονίστηκε το έτος 2010 μέσω του νόμου 3855/2010 [8], με τον οποίο προωθήθηκαν οι Ενεργειακές Υπηρεσίες και οι Ενεργειακοί Έλεγχοι. Συγκεκριμένα δόθηκε ο εξής ορισμός για τους Ενεργειακούς Ελέγχους:

Ενεργειακός Έλεγχος: «*Η συστηματική διαδικασία από την οποία προκύπτει επαρκής γνώση του υφιστάμενου συνόλου χαρακτηριστικών ενεργειακής κατανάλωσης ενός κτιρίου ή μιας ομάδας κτιρίων, μιας βιομηχανικής δραστηριότητας ή και εγκατάστασης, καθώς και ιδιωτικών και δημόσιων υπηρεσιών. Με τον ενεργειακό έλεγχο εντοπίζονται και προσδιορίζονται ποσοτικά οι οικονομικά αποτελεσματικές δυνατότητες εξοικονόμησης ενέργειας και συντάσσεται σχετική έκθεση αποτελεσμάτων*»

Επίσης, με βάση το νόμο 3855/2010 [8], δημιουργήθηκε μία διαφοροποίηση ως προς την διεξαγωγή ενεργειακών ελέγχων σε βιομηχανία και κτίρια. Οι ενεργειακοί έλεγχοι στα κτίρια γίνονταν με βάση τον Κανονισμό Ενεργειακής Απόδοσης Κτιρίων (ΚΕΝΑΚ), ενώ στη βιομηχανία με βάση την ΚΥΑ του 1999[13].

Αναφέρεται σε αυτό το σημείο πως όλα τα παραπάνω χρησιμοποιούσαν ως βασική μεθοδολογία αυτήν που αναπτύχθηκε στο NAMVP [2] και χρησιμοποιούσαν ως απαίτηση ακριβείας την ανίσωση (1.1).

Η νομοθεσία γύρω απ' τις επεμβάσεις εξοικονόμησης συνέχισε να εξελίσσεται και τα επόμενα χρόνια. Ακολούθησαν δύο ακόμα ευρωπαϊκές οδηγίες. Η οδηγία 2010/31/ΕΕ για την ενεργειακή απόδοση των κτιρίων [9], η οποία αντικατέστησε την οδηγία EPBD (Energy Performance of Buildings Directive – 2002). Η 2010/31/ΕΕ εναρμονίστηκε με τον νόμο 4122/2013 [10], αλλά δεν έδωσε λύση στη διαφοροποιημένο χειρισμό των ενεργειακών ελέγχων μεταξύ κτιρίων και βιομηχανίας.

Επιπλέον, το 2012, ακολούθησε η ευρωπαϊκή οδηγία 2012/27/ΕΕ για την ενεργειακή απόδοση (Energy Efficiency Directive – EED) [11], η οποία ήρθε με τη σειρά της να αντικαταστήσει την οδηγία ESD (Energy Saving Directive – 2006). Η εναρμόνισή της ήρθε λίγο αργότερα, μετά την έκδοση μερικών πολύ σημαντικών προτύπων.

Κατά τα έτη 2011 - 2014 εκδόθηκαν οι σειρές των προτύπων ΕΛΟΤ EN ISO 50000 [16-21] και ΕΛΟΤ EN 16247 [22-26].

1.2.4 Τα Ευρωπαϊκά πρότυπα

Τα πρότυπα ΕΛΟΤ EN ISO 50000 αναφέρονται διεξοδικά στα συστήματα διαχείρισης ενέργειας. Επίσης περιγράφουν διαδικασίες διεξαγωγής ενεργειακών ελέγχων, όπως η διαδικασία ελέγχου και ο σχεδιασμός αυτού. Αναπτύσσονται επίσης διαδικασίες προσδιορισμού του πεδίου ελέγχου, των δεικτών ενεργειακής απόδοσης και των μεταβλητών που επηρεάζουν την κατανάλωση ενέργειας. Ωστόσο, δεν αναφέρεται κάποια αναλυτική μαθηματική τεχνική για την ανάπτυξη γραμμής βάσης σε αυτά ούτε συνιστάται κάποιος αναλυτικός προσδιορισμός της αβεβαιότητας.

Η σειρά προτύπων ΕΛΟΤ EN 16247 αφορά αποκλειστικά τους ενεργειακούς ελέγχους. Περιλαμβάνει πρότυπα που εξειδικεύονται στα κτίρια, τις διεργασίες και τις μεταφορές, ενώ στο τελευταίο αποτυπώνονται τα απαραίτητα προσόντα των ενεργειακών ελεγκτών. Ορίστηκαν συγκεκριμένες απαιτήσεις ποιότητας για τον ενεργειακό έλεγχο, καθώς και τα στάδια που πρέπει να ακολουθούνται. Τα πρότυπα περιλαμβάνουν επίσης υποδείξεις και τυπικές επεμβάσεις εξοικονόμησης για κάθε τομέα εφαρμογής ξεχωριστά. Ωστόσο, ούτε σε αυτά προβλέπονται συγκεκριμένες απαιτήσεις ακριβείας όσον αφορά την αβεβαιότητα της εξοικονόμησης ενέργειας.

Τελικά , το 2015, πραγματοποιήθηκε η εναρμόνιση της οδηγίας EED (Energy Efficiency Directive – 2012) μέσω του νόμου 4342/2015 [12]. Ο νόμος αυτός όρισε πως οι ενεργειακοί έλεγχοι θα γίνονται με βάση το πρότυπο ΕΛΟΤ EN 16247 και η αντιμετώπιση θα είναι ενιαία σε βιομηχανία και κτίρια. Επίσης, ορίστηκαν οι κατευθυντήριες γραμμές των ενεργειακών ελέγχων, οι οποίες παρατίθενται συνοπτικά στον Οδηγό Ενεργειακών Ελέγχων [1]:

- Βασίζονται σε επικαιροποιημένα, μετρήσιμα, ανιχνεύσιμα λειτουργικά δεδομένα
- Περιλαμβάνουν λεπτομερή επισκόπηση των χαρακτηριστικών της ενεργειακής κατανάλωσης
- Βασίζονται, όπου είναι δυνατόν, σε ανάλυση κόστους κύκλου ζωής (Life Cycle Cost Analysis - LCCA) και όχι σε απλές περιόδους αποπληρωμής (Simple Payback Periods - SPP)
- Είναι αναλογικοί και επαρκώς αντιπροσωπευτικοί ώστε να δίδουν αξιόπιστη εικόνα της συνολικής ενεργειακής απόδοσης και να εντοπίζουν με αξιοπιστία τις σημαντικότερες ευκαιρίες για βελτίωση.

Τέλος, ορίστηκε επακριβώς πως οι ενεργειακοί έλεγχοι πρέπει να στηρίζονται στις πραγματικές ενεργειακές καταναλώσεις και όχι σε εκτιμήσεις αυτών. Δεδομένου ότι, βάσει του νόμου 4342/2015, οι ενεργειακοί έλεγχοι θα διεξάγονταν πλέον με βάση το πρότυπο ΕΛΟΤ EN 16247, δεν προβλεπόταν κάποια απαίτηση ακριβείας σχετικά με την αβεβαιότητα.

Τα έτη 2016 – 2017 εκδόθηκε μία νέα σειρά ευρωπαϊκών προτύπων, η σειρά ΕΛΟΤ EN ISO 17740 [27-31]. Σε αυτήν αναπτύσσεται μεθοδολογία εκτίμησης της εξοικονόμησης ενέργειας και της αβεβαιότητας αυτής παρόμοια με αυτήν του IPMVP. Γίνεται συσχέτιση μεταξύ της κατανάλωσης ενέργειας και των παραγόντων που την επηρεάζουν με τη χρήση γραμμής βάσης. Η θεωρία εφαρμόζεται και σε ευρύτερες περιοχές, επιχειρώντας να εντοπίσει παράγοντες που επηρεάζουν την κατανάλωση ενέργειας σε επίπεδο περιοχής. Όσον αφορά τις απαιτήσεις ακριβείας τα πρότυπα αυτά ταυτίζονται με το IPMVP. Η αβεβαιότητα εκτιμάται απ’ τη ρίζα του μέσου τετραγωνικού σφάλματος και πρέπει να είναι μικρότερη απ’ το 50% της εξοικονόμησης ενέργειας.

Όλα τα παραπάνω συνοψίζονται το 2017 στον Οδηγό Ενεργειακών Ελέγχων [1], ο οποίος αποτέλεσε τη βάση για την παρούσα ιστορική αναδρομή. Σε αυτόν αναπτύσσεται η τεχνική χάραξης γραμμής βάσης, ενώ παρατίθενται αριθμητικά παραδείγματα και υπολογιστικά φύλλα excel που εκτελούν τους σχετικούς υπολογισμούς. Γίνεται εκτενής ανάλυση αβεβαιότητας χρησιμοποιώντας την κατανομή κατά Student και δίνεται μία καθοδήγηση για τις απαιτήσεις ακριβείας ως εξής:

Ο στόχος εξοικονόμησης ενέργειας πρέπει να είναι ελαφρώς μεγαλύτερος από 2σ(ΔΕ). Αυτό οφείλεται στο ότι το μονόπλευρο διάστημα εμπιστοσύνης (t=2)σ(ΔΕ) αντιστοιχεί σε επίπεδο εμπιστοσύνης 96,57%. Συνεπώς, ο στόχος πρέπει να είναι ελαφρώς μεγαλύτερος κατά π, ώστε η πιθανότητα 3,43% να αφορά το ενδεχόμενο να μην εκπληρωθεί ο επιπλέον στόχος π. Η αβεβαιότητα σ(ΔΕ) εκτιμάται μέσω του προσεγγιστικού τύπου που αναφέρεται στο πρότυπο ASHRAE 14 (εξίσωση1.4).

Στην παρούσα διπλωματική εργασία παρουσιάζεται αναλυτικά η μέθοδος χάραξης γραμμής βάσης και προτείνεται η χρήση της αναλυτικής εξίσωσης της αβεβαιότητας που προκύπτει από τη μέθοδο της γραμμικής παλινδρόμησης, έναντι του προσεγγιστικού τύπου των T. Agami Reddy & P.E. David E. Claridge [32].

1.3 Ερευνητικό Έργο στον Υπολογισμό Αβεβαιότητας Εξοικονόμησης Ενέργειας

1.3.1 Γενικά

Όπως είδαμε στην προηγούμενη υποενότητα, την τελευταία εικοσαετία πραγματοποιήθηκε μία κλιμακούμενη διεθνής προσπάθεια τυποποίησης της διαδικασίας των ενεργειακών ελέγχων. Οι απαιτήσεις ακριβέστερου προσδιορισμού της επιτευχθείσας εξοικονόμησης ενέργειας διαρκώς αυξάνονται, προκειμένου να προωθηθούν οι επενδύσεις εξοικονόμησης ενέργειας. Η πολυετής αυτή νομοθετική προσπάθεια συνοδεύεται από την εξέλιξη των αντίστοιχων μαθηματικών τεχνικών. Διάφορες μέθοδοι πρόβλεψης, όπως η γραμμική παλινδρόμηση, οι οποίες εξελίχθηκαν για την εξυπηρέτηση των αναγκών διαφόρων τομέων, όπως η πληροφορική, εφαρμόστηκαν και στην εξοικονόμηση ενέργειας. Στην υποενότητα αυτή παρατίθενται επιστημονικές εργασίες που αφορούν τον υπολογισμό της αβεβαιότητας στις επεμβάσεις εξοικονόμησης ενέργειας.

1.3.2 Η Γκαουσιανή προσέγγιση

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η τεχνική «Gaussian Process Modeling», η οποία εφαρμόστηκε για τον προσδιορισμό της εξοικονόμησης ενέργειας και της αβεβαιότητας αυτής από τους Yeonsook Heo και Victor. M. Zavala σε δημοσίευσή τους στο περιοδικό Energy and Buildings το 2012 [34]. Η εν λόγω τεχνική εφαρμόζεται κατά κόρον στην επιστήμη των υπολογιστών και αποτελεί μέθοδο συσχέτισης μεταβλητών και εκτίμησης μελλοντικών αποτελεσμάτων διαφορετική από τη γραμμική παλινδρόμηση. Σύμφωνα με τους Heo και Zavala, η τεχνική αυτή μπορεί να περιγράψει καλύτερα πιθανά μη γραμμικά φαινόμενα και συσχετίσεις μεταξύ των διαφόρων μεταβλητών απ' ότι τα γραμμικά μοντέλα. Επιπλέον, η μέθοδος μπορεί να επιτύχει ακριβή αποτύπωση των διαφόρων πηγών αβεβαιότητας, ενώ η εφαρμογή της οδηγεί σε οικονομικότερες διαδικασίες μέτρησης και επαλήθευσης (Measurement and Verification).

Η τεχνική χρησιμοποιεί τις Γκαουσιανές Διαδικασίες (Gaussian Processes), οι οποίες αναλύονται στην απλουστευμένη τους μορφή από τον M. Ebden [35].

Η χρήση Γκαουσιανών Διαδικασιών ομοιάζει με τη μέθοδο των «Κ κοντινότερων γειτόνων» (K nearest neighbors). Στο παράδειγμά μας χρησιμοποιείται μια Γκαουσιανή Διαδικασία για να εκτιμηθεί η κατανάλωση ενέργειας Y σε μία άγνωστη κατάσταση X (έστω εξωτερική θερμοκρασία), χρησιμοποιώντας τις μετρήσεις (X,Y) που είναι ήδη γνωστές. Έτσι, αν υποθέσουμε πως λαμβάνεται ένα δείγμα N μετρήσεων (X_v, Y_v) και απαιτείται η εκτίμηση της κατανάλωσης ενέργειας κατά τη λειτουργία του συστήματος υπό θερμοκρασία X_μ, τότε η εκτίμηση της κατανάλωσης $\widetilde{Y_\mu}$ επηρεάζεται από κάθε ένα σημείο (X_v, Y_v). Η επιρροή κάθε σημείου (X_v, Y_v) στην εκτίμηση $\widetilde{Y_\mu}$εξαρτάται από την απόστασή της θερμοκρασίας X_v απ' την ζητούμενη θερμοκρασία X_μ., ενώ τα κοντινά σημεία ασκούν μεγαλύτερη επιρροή απ' ότι τα μακρινά. Το μέγεθος της επιρροής που έχει ένα τυχαίο σημείο x επάνω σε ένα άλλο τυχαίο σημείο x' ποσοτικοποιείται μέσω της «συνάρτησης συνδιακύμανσης» (covariance function). Ένα τυπικό παράδειγμα συνάρτησης συνδιακύμανσης k(x,x'), όπως δίνεται από τον M. Ebden [35] είναι το εξής:

$$k(x, x') = \sigma_f^2 \exp\left[\frac{-(x-x')^2}{2l^2}\right] \tag{1.5}$$

Με σ_f^2 συμβολίζεται η μέγιστη δυνατή επιτρεπτή συνδιακύμανση μεταξύ των δύο τυχαίων σημείων, η οποία συνεπάγεται τη μέγιστη δυνατή επιρροή που μπορεί να έχει ένα σημείο στην εκτίμηση της κατανάλωσης ενέργειας ενός άλλου. Παρατηρούμε πως η συνδιακύμανση $k(x, x')$ ισούται με σ_f^2 μόνον όταν οι τιμές x και x' ταυτίζονται, ενώ τείνει στο μηδέν όσο οι τιμές απομακρύνονται μεταξύ τους. Η παράμετρος απόστασης l καθορίζει το πόσο γρήγορα μειώνεται η επιρροή ενός σημείου x πάνω σε ένα τυχαίο σημείο x', καθώς η μεταξύ τους απόσταση αυξάνει. Η κατανάλωση βάσης και η αβεβαιότητα αυτής προκύπτουν γνωρίζοντας τη συνάρτηση συνδιακύμανσης και εκτελώντας μερικές πράξεις πινάκων. Έτσι, όταν χρησιμοποιούνται Γκαουσιανές Διαδικασίες, δεν απαιτείται ο εκ των προτέρων προσδιορισμός της μορφής του μοντέλου εκτίμησης της κατανάλωσης ενέργειας (γραμμικό, πολυωνυμικό, εκθετικό κλπ.), αλλά ο τύπος της συνάρτησης συνδιακύμανσης. Οι συναρτήσεις αυτές ποικίλουν, περιλαμβάνοντας πολυωνυμικούς, εκθετικούς, λογαριθμικούς ή και τριγωνομετρικούς όρους. Η επιλογή της συνάρτησης συνδιακύμανσης γίνεται με βάση τη μορφή που παρουσιάζουν τα μετρητικά δεδομένα και φυσικά την εμπειρία. Έτσι, παραδείγματος χάριν, αν τα δεδομένα εμφανίζουν κάποια περιοδικότητα, είναι πιθανόν η συνάρτηση συνδιακύμανσης να περιλαμβάνει κάποιον τριγωνομετρικό όρο. Εκτός όμως από τον τύπο της συνάρτησης συνδιακύμανσης απαιτείται και ο προσδιορισμός ορισμένων παραμέτρων, όπως οι σ_f^2 και l στο παράδειγμά μας. Οι παράμετροι αυτοί ονομάζονται υπερπαράμετροι (hyperparameters). Η επιλογή των κατάλληλων τιμών των υπερπαραμέτρων του μοντέλου γίνεται είτε εμπειρικά, είτε με τη χρήση κάποιας μεθόδου βελτιστοποίησης.

1.3.3 Η Μπαγιεσιανή βαθμονόμηση

Μία τέτοια μέθοδος βελτιστοποίησης είναι η Μπαγιεσιανή Βαθμονόμηση (Bayesian Calibration), η οποία παρουσιάστηκε αναλυτικά από τους Marc C. Kennedy και Anthony O'Hagan σε δημοσίευσή τους στο περιοδικό Royal Statistical Society το 2001 [36]. Πρόκειται ουσιαστικά για έναν ευρετικό αλγόριθμο που προσδιορίζει τις τιμές των υπερπαραμέτρων έτσι, ώστε η απόκλιση των εκτιμήσεων του μοντέλου από τα μετρητικά δεδομένα να είναι οι ελάχιστες δυνατές. Επιπλέον, κάθε υπερπαράμετρος δίνεται υπό την μορφή κανονικής κατανομής με συγκεκριμένη μέση τιμή και διακύμανση. Η διακύμανση της κάθε υπερπαραμέτρου επιλέγεται έτσι, ώστε η συνολική διακύμανση του μοντέλου να

προσομοιώνει ικανοποιητικά την διακύμανση των μετρήσεων. Έτσι, αφού δοθεί στον αλγόριθμο μία αρχική κατανομή που να περιγράφει κάθε υπερπαράμετρο, υπολογίζεται η εκτίμηση της εξαρτημένης μεταβλητής Y (στο παράδειγμά μας η κατανάλωση ενέργειας). Έπειτα, υπολογίζονται η απόκλιση της εκτίμησης από την μετρηθείσα κατανάλωση και οι πιθανές αποκλίσεις της διακύμανσης των εκτιμήσεων από την διακύμανση των μετρήσεων. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται για διάφορες κατανομές των υπερπαραμέτρων, έως ότου βρεθεί ο βέλτιστος δυνατός συνδυασμός κατανομών.

Η μέθοδος αυτή εφαρμόστηκε στην ανάλυση αβεβαιότητας επεμβάσεων εξοικονόμησης ενέργειας από τους Y. Heo, R. Choudhary, G.A. Augenbroe σε δημοσίευσή τους στο περιοδικό Energy and Buildings το 2012 [37]. Σύμφωνα με το συγκεκριμένο άρθρο, οι εκτιμήσεις των βαθμονομημένων πλέον μοντέλων μπορούν να περιγράψουν με ακριβέστερο τρόπο τη συμπεριφορά του κτιρίου και να ποσοτικοποιήσουν την αβεβαιότητα που σχετίζεται με κάθε ξεχωριστή παράμετρο. Επίσης δίνεται η δυνατότητα να ληφθούν υπόψιν περισσότερες πηγές αβεβαιότητας. Τα αποτελέσματα της μεθόδου δίνονται υπό τη μορφή διαστημάτων εμπιστοσύνης, και συνεπώς μπορούν με ευκολία να χρησιμοποιηθούν για την ποσοτικοποίηση των κινδύνων και τελικά την οικονομική αξιολόγηση της επένδυσης.

1.4 Διαχείριση Κινδύνου – Οικονομική Αξιολόγηση Επενδύσεων Εξοικονόμησης Ενέργειας

Στις προηγούμενες υποενότητες αναλύθηκαν το θεσμικό πλαίσιο γύρω απ' τις επεμβάσεις εξοικονόμησης ενέργειας καθώς και διάφορες σχετικές μαθηματικές τεχνικές. Αντικείμενο των τεχνικών αυτών αποτελεί ο το δυνατόν ακριβής προσδιορισμός της εξοικονόμησης ενέργειας που επετεύχθη από κάποια επέμβαση και η αβεβαιότητα αυτής. Ωστόσο, τα παραπάνω δεν αποτελούν αυτοσκοπό, αλλά εντάσσονται στο γενικότερο πλαίσιο τεχνοοικονομικής αξιολόγησης των επεμβάσεων εξοικονόμησης ενέργειας. Ακολουθεί μια σύντομη παρουσίαση εργασιών στο χώρο της οικονομικής αξιολόγησης και της διαχείρισης κινδύνου σε έργα εξοικονόμησης.

Μία σχετική μελέτη δημοσιεύτηκε στο περιοδικό Energy Policy από τους Evan Mills, Steve Kromer, Garry Weiss και Paul A. Mathew το 2006 [39]. Οι ερευνητές υπογράμμισαν τη σημαντικότητα συνεργασίας μεταξύ μηχανικών και οικονομικών αξιολογητών – επενδυτών για την προώθηση των επεμβάσεων εξοικονόμησης. Ωστόσο, οι επενδυτές τείνουν να παραβλέπουν τις επενδύσεις εξοικονόμησης συγκριτικά με άλλες πιθανές επενδύσεις, καθώς δεν μπορούν να αξιολογήσουν τους κινδύνους που σχετίζονται με αυτές. Αυτό οφείλεται στο γεγονός, ότι η εξοικονόμηση ενέργειας και η σχετική αβεβαιότητα δεν ποσοτικοποιούνται σε ικανοποιητικό βαθμό. Στην εργασία τους, οι τέσσερις ερευνητές ταξινόμησαν τους κινδύνους που σχετίζονται με τις επεμβάσεις εξοικονόμησης σε 5 βασικές κατηγορίες:

- Οικονομικούς (Economic)
- Συγκυριακούς (Contextual)
- Τεχνολογικούς (Technology)
- Λειτουργικούς (Operational)
- Μέτρησης και Επαλήθευσης (Measurement and Verification)

Η κάθε κατηγορία χωρίζεται σε δύο υποκατηγορίες, τους εγγενείς (intrinsic) κινδύνους, οι οποίοι είναι σε κάποιο βαθμό ελεγχόμενοι, και τους εξωγενείς (extrinsic), οι οποίοι δεν είναι ελεγχόμενοι. Έτσι, κάθε πιθανός κίνδυνος που μπορεί να εντοπίσει ο επενδυτής κατατάσσεται σε μία εκ των δέκα υποκατηγοριών και προτείνονται πιθανές λύσεις για τον

περιορισμό / αντιμετώπισή του. Συλλέγονται στοιχεία προκειμένου να ποσοτικοποιηθεί ο κάθε δυνατός κίνδυνος με τη μεγαλύτερη δυνατή ακρίβεια. Σε αυτό το σημείο υπεισέρχονται στην ανάλυση τεχνικές όπως η γραμμική παλινδρόμηση και οι Γκαουσιανές διαδικασίες. Η αβεβαιότητα των διαφόρων παραμέτρων συγκεντρώνεται σε ένα ενιαίο μοντέλο οικονομικής αξιολόγησης χρησιμοποιώντας κάποια τεχνική Monte – Carlo. Πρόκειται για μία στοχαστική διαδικασία, η οποία υπολογίζει προσεγγιστικά όλα τα πιθανά σενάρια εξέλιξης ενός στατιστικού φαινομένου και την αντίστοιχη πιθανότητα εμφάνισής τους. Εκτιμώντας τα παραπάνω, επιτρέπει τον προσδιορισμό της στατιστικά ορθότερης λύσης ενός προβλήματος.

Στα συμπεράσματα της εργασίας τους, οι μελετητές τονίζουν πως υπάρχουν διαθέσιμες διάφορες τεχνικές διαχείρισης κινδύνου ανεπτυγμένες στον επιχειρηματικό κόσμο. Αρκεί αυτές να ενσωματωθούν στις επεμβάσεις εξοικονόμησης ενέργειας. Η πρακτική αυτή θα προωθούσε σημαντικά τις επεμβάσεις εξοικονόμησης από επενδυτικής απόψεως και θα επέτρεπε στους ενεργειακούς διαχειριστές να συνεργαστούν με τους επενδυτές και να εμπλακούν ενεργά στη διαδικασία λήψεως αποφάσεων. Η προώθηση των επεμβάσεων εξοικονόμησης ενέργειας θα μπορούσε να δημιουργήσει την ανάγκη για νέες υπηρεσίες. Τέτοια θα ήταν η παροχή ασφάλισης έναντι της εξοικονόμησης ενέργειας που εγγυάται ένα συμβόλαιο παροχής υπηρεσιών εξοικονόμησης ενέργειας.

Μία άλλη μελέτη στον τομέα της οικονομοτεχνικής αξιολόγησης δημοσίευσαν οι Gürkan Kumbaroglu, και Reinhard Madlener στο περιοδικό Energy and Buildings το 2012 [39]. Σε αυτήν παρουσιάστηκε μία μέθοδος οικονομοτεχνικής αξιολόγησης επεμβάσεων εξοικονόμησης σε κτίρια, η οποία εξετάζει όλους τους πιθανούς συνδυασμούς μέτρων εξοικονόμησης μεγιστοποιώντας την καθαρά παρούσα αξία. Η αβεβαιότητα της τιμής της ενέργειας αντιμετωπίζεται με τη χρήση μίας μεθόδου Monte Carlo. Η μέθοδος χωρίζεται σε τέσσερα τμήματα:

1. Τμήμα αποθήκευσης και επεξεργασίας δεδομένων συστήματος διαχείρισης ενέργειας
2. Εργαλείο αξιολόγησης της ενεργειακής συμπεριφοράς του κτιρίου με βάση τα τεχνικά χαρακτηριστικά του κελύφους και του ενεργειακού εξοπλισμού, καθώς και των εξωτερικών κλιματικών συνθηκών.
3. Τμήμα δεδομένων πιθανών επεμβάσεων, όπου περιλαμβάνονται όλες οι δυνατές εναλλακτικές συνοδευόμενες από την εκτιμώμενη εξοικονόμηση ενέργειας και CO_2, τις εκτιμήσεις απαραίτητου επενδυτικού κεφαλαίου και λειτουργικών εξόδων, καθώς και πιθανές ιδιαιτερότητες κάθε εναλλακτικής.
4. Εργαλείο οικονομικής αξιολόγησης με κριτήριο τη μεγιστοποίηση της καθαράς παρούσας αξίας (net present value).

Τα παραπάνω εφαρμόζονται για σταθερές (static) και μεταβαλλόμενες (dynamic) τιμές όλων των παραμέτρων, ενώ στη δεύτερη περίπτωση εξετάζεται και το ενδεχόμενο αναβολής μίας επέμβασης εξοικονόμησης έως ότου μεταβληθούν ορισμένες παράμετροι. Ως αριθμητική εφαρμογή χρησιμοποιήθηκε ένα κτίριο γραφείων στη Γερμανία. Οι μελετητές κατέληξαν στα εξής συμπεράσματα:

- Οι μεταβολές στην τιμή της ενέργειας επηρεάζουν σημαντικά την κερδοφορία των επεμβάσεων εξοικονόμησης
- Όταν η τιμή της ενέργειας παραμένει σχετικά σταθερή, τα περισσότερα μέτρα εξοικονόμησης κρίνονται επικερδή

- Όταν η τιμή της ενέργειας μεταβάλλεται σημαντικά συνιστάται η αναβολή της όποιας επέμβασης εξοικονόμησης και η επαναξιολόγηση αυτής όταν η τιμή σταθεροποιηθεί

1.5 Σκοπός

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η αναλυτική παρουσίαση της μεθόδου χάραξης γραμμής βάσεως (baseline modeling) για την εκτίμησης της εξοικονόμησης ενέργειας και της αβεβαιότητας αυτής, με χρήση της θεωρίας της γραμμικής παλινδρόμησης. . Η μαθηματική ανάλυση της γραμμικής παλινδρόμησης, τόσο της μονοδιάστατης, όσο και της πολυδιάστατης, στηρίχθηκε στο βιβλίο των Michael H. Kutner, Christopher J. Nachtsheim, John Neter και William Li "Applied Linear Statistical Models" [33]. Η αξιοποίηση της παραπάνω θεωρίας για την εκτίμηση της εξοικονόμησης ενέργειας στηρίχθηκε στον Οδηγό Ενεργειακών Ελέγχων [1]. Στο δεύτερο κεφάλαιο αναπτύσσεται λεπτομερώς η θεωρία της μονοδιάστατης γραμμικής παλινδρόμησης, όπου η κατανάλωση ενέργειας Y συσχετίζεται με μία ανεξάρτητη μεταβλητή X (συνήθως την εξωτερική θερμοκρασία). Η θεωρία του δευτέρου κεφαλαίου επεκτείνεται στο τρίτο κεφάλαιο, όπου χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις εκτίμησης της κατανάλωσης ενέργειας προσδιορίζεται η εξίσωση εκτίμησης της εξοικονόμησης ενέργειας και της αβεβαιότητας αυτής. Παρουσιάζονται οι προσεγγιστικές εξισώσεις αβεβαιότητας κατά IPMVP και ASHRAE και συγκρίνονται με αυτήν που προκύπτει αναλυτικά από την μέθοδο της γραμμικής παλινδρόμησης. Όλα τα παραπάνω αφορούν την περίπτωση όπου η κατανάλωση ενέργειας εξαρτάται από μία ανεξάρτητη μεταβλητή. Στο τέλος του τρίτου κεφαλαίου παρατίθεται η αριθμητική εφαρμογή μίας νοσοκομειακής μονάδας για την καλύτερη κατανόηση όσων αναπτύχθηκαν στο δεύτερο και τρίτο κεφάλαιο. Στο τέταρτο κεφάλαιο αναπτύσσεται η θεωρία της πολυδιάστατης γραμμικής παλινδρόμησης και η εφαρμογή της για την εκτίμηση της εξοικονόμησης. Ουσιαστικά το τέταρτο κεφάλαιο αναπτύσσεται κατά αναλογία του δεύτερου και τρίτου κεφαλαίου, ωστόσο οι εξισώσεις της απλής γραμμικής παλινδρόμησης αντικαθίστανται από αντίστοιχες εξισώσεις πινάκων. Στο τέλος του τέταρτου κεφαλαίου χρησιμοποιείται ως αριθμητική εφαρμογή το παράδειγμα που παρουσιάζεται στον Οδηγό Ενεργειακών Ελέγχων [1] και αφορά μία ξενοδοχειακή μονάδα. Η μεθοδολογία του τέταρτου κεφαλαίου εφαρμόζεται διεξοδικά και τα αποτελέσματα συγκρίνονται με αυτά του Οδηγού Ενεργειακών Ελέγχων, όπου χρησιμοποιείται η έκφραση της αβεβαιότητας κατά ASHRAE.

2 Μονοδιάστατη Γραμμική Παλινδρόμηση

2.1 Εισαγωγή

Έστω μια εξαρτημένη μεταβλητή Y, που συνήθως πρόκειται για την κατανάλωση ενέργειας ενός συστήματος και μία ανεξάρτητη μεταβλητή X, η οποία αναμένεται να επηρεάζει την κατανάλωση ενέργειας όπως π.χ. η μηνιαία κατανάλωση ενέργειας ενός συστήματος ψύξης και η μέση εξωτερική θερμοκρασία του μήνα. Για να περιγράψουμε τη σχέση μεταξύ τους θα χρησιμοποιήσουμε το μοντέλο της μονοδιάστατης γραμμικής παλινδρόμησης. Έτσι, η εξίσωση που θα συσχετίζει τα παραπάνω μεγέθη θα περιλαμβάνει τους παράγοντες β_1 και β_0, που περιγράφουν την κλίση της ευθείας και το σημείο τομής της με τον άξονα Y αντίστοιχα, καθώς και το σφάλμα της παλινδρόμησης ε:

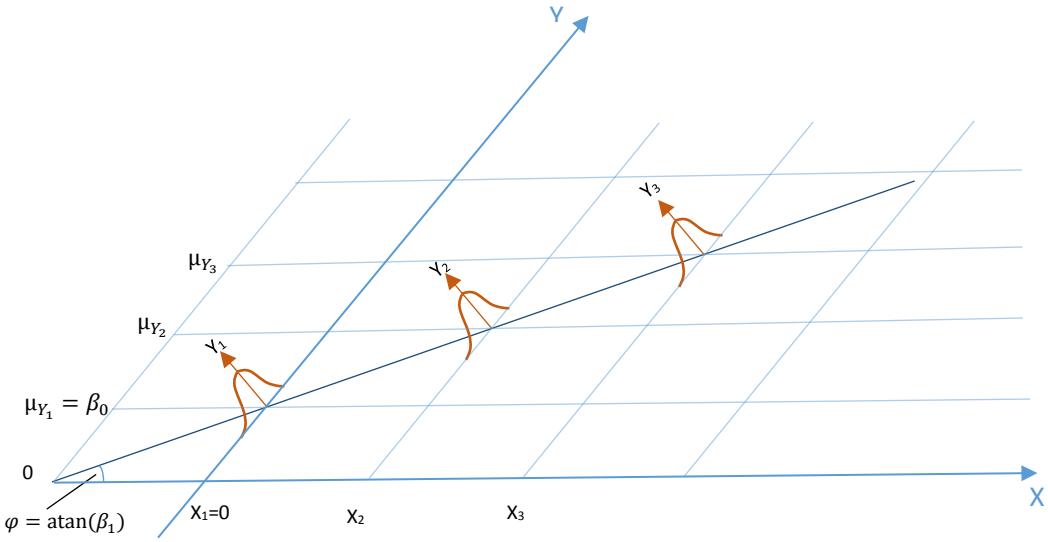
$$Y = \beta_1 X + \beta_0 + \varepsilon \tag{2.1}$$

Βασική παραδοχή του μοντέλου είναι πως το σφάλμα ε ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu_\varepsilon=0$ και τυπική απόκλιση $\sigma_\varepsilon=\sigma$. Γι' αυτό και το μοντέλο αναφέρεται ως μοντέλο παλινδρόμησης κανονικού σφάλματος (normal error regression model). Με βάση την παραπάνω εξίσωση, για κάθε τιμή X_ν, η αντίστοιχη τιμή Y_ν θα αποτελεί μία τυχαία μεταβλητή, η οποία θα ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu_{Y\nu}$ και τυπική απόκλιση $\sigma\{Y_\nu\}$ όπου:

$$\mu_{Y_\nu} = \beta_1 X_\nu + \beta_0 \tag{2.2.α}$$

$$\sigma\{Y_\nu\} = \sigma \tag{2.2.β}$$

Για την καλύτερη κατανόηση, η εξίσωση (2.1) απεικονίζεται γραφικά:

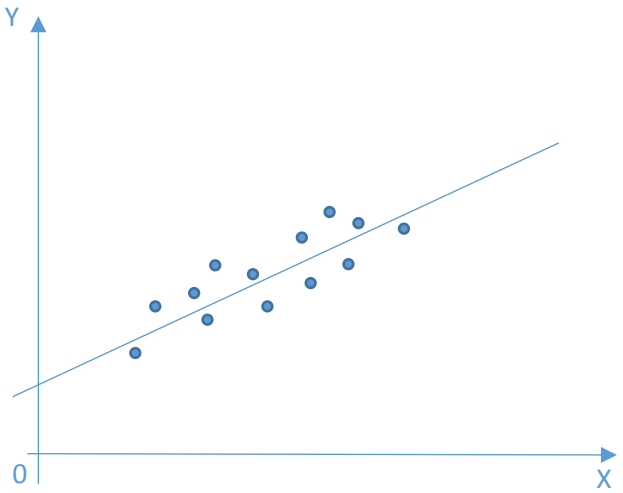


Σχήμα 2.1 Γραφική απεικόνιση της εξίσωσης της μονοδιάστατης γραμμικής παλινδρόμησης και των κατανομών των Y_ν που αντιστοιχούν σε κάθε X_ν

Στο σχήμα 2.1 απεικονίζονται με καφέ χρώμα τρεις διαφορετικές κατανομές του Y_ν για τρεις διαφορετικές τιμές του X_ν. Οι μέσες τιμές των κατανομών μ_{Y_ν} υπολογίζονται από την εξίσωση (2.2.α) και βρίσκονται πάνω στην σκούρα μπλε γραμμή, η οποία αποτελεί τον γεωμετρικό τόπο των σημείων της (2.2.α). Η μορφή των τριών καμπυλών είναι κοινή, μιας και οι τρεις ακολουθούν την κανονική κατανομή με τυπική απόκλιση σ. Η διασπορά των τιμών κάθε Y_ν

γύρω απ' τη μέση τιμή του πιθανώς περιλαμβάνει την επίδραση άλλων παραγόντων στην μεταβλητή Y, η οποία δεν συνυπολογίζεται στην εξίσωση της γραμμικής παλινδρόμησης. Αν παραδείγματος χάριν χρησιμοποιούμε ένα μοντέλο μονοδιάστατης γραμμικής παλινδρόμησης για να εκφράσουμε την μηνιαία κατανάλωση ενέργειας ενός συστήματος ψύξης σαν συνάρτηση της μέσης εξωτερικής θερμοκρασίας του μήνα, πιθανώς να αγνοούμε την επίδραση που μπορεί να έχουν στην κατανάλωση ενέργειας η μέση εξωτερική υγρασία ή το προφίλ χρήσης του συστήματος. Όσο μικρότερη είναι η τυπική απόκλιση, τόσο πιο συγκεντρωμένες θα είναι οι τιμές του κάθε Y_ν γύρω απ' τη μέση τιμή μ_{Y_ν} και συνεπώς τόσο ακριβέστερη θα είναι η συσχέτιση των μεταβλητών X και Y μέσω της εξίσωσης (2.1).

Οι παράμετροι β_0 και β_1 , όπως αυτές εμφανίζονται στην εξίσωση (2.1) εκτιμώνται από τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Για την εφαρμογή της τελευταίας απαιτείται ένα δείγμα ζευγών μετρήσεων (Y_ν, X_ν). Η μέθοδος υπολογίζει τη βέλτιστη ευθεία, δηλαδή αυτή που περνά κατά μέσον όρο πιο κοντά στα σημεία του δείγματος.



Σχήμα 2.2. Η βέλτιστη ευθεία δεν διέρχεται από κάποιο απ' τα σημεία αλλά κείται το δυνατόν κοντά σε όλα.

Από μαθηματικής απόψεως, η βέλτιστη ευθεία είναι εκείνη, για την οποία το άθροισμα των αποστάσεων των N σημείων του δείγματος από αυτήν είναι ελάχιστο. Έτσι, αν για κάθε τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής X_ν, μετρήθηκε μία τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής Y_ν, η αντίστοιχη εκτίμηση της τιμής Y_ν από το μοντέλο της γραμμικής παλινδρόμησης θα υπολογιστεί απ' την εξίσωση (2.1):

$$\widetilde{Y_\nu} = b_1 X_\nu + b_0 + \varepsilon$$

$$\widetilde{\mu_{Y_\nu}} = \mathrm{b}_1 \mathrm{X}_\nu + \mathrm{b}_0$$

2.2 Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων

Η εξίσωση προσδιορισμού των παραμέτρων β_1 και β_0, και συνεπώς της βέλτιστης ευθείας, είναι η ελαχιστοποίηση του αθροίσματος των τετραγώνων των διαφορών των τιμών των μετρήσεων Y_ν από τις αντίστοιχες τιμές των εκτιμήσεων της εξαρτημένης μεταβλητής $\widetilde{\mu_{Y_\nu}}$:

$$\sum_{\nu=1}^{N}(Y_\nu - \widetilde{\mu_{Y_\nu}})^2 = \sum_{\nu=1}^{N}(Y_\nu - b_1 X_\nu - b_0)^2 = f(b_1, b_0) \qquad (2.3)$$

Όπως προκύπτει απ' την εξίσωση (2.3.), για κάθε δείγμα (X_ν, Y_ν) το άθροισμα των τετραγώνων των διαφορών εξαρτάται μόνο από τις παραμέτρους b_1 και b_0 και άρα η ελαχιστοποίηση

αυτού ανάγεται σε πρόβλημα εύρεσης ακροτάτου (και συγκεκριμένα ελαχίστου) της συνάρτησης δύο μεταβλητών $f(b_1,b_0)$. Το τελευταίο επιλύεται με ταυτόχρονο μηδενισμό των μερικών παραγώγων της f ως προς b_1 και b_0 :

$$\frac{\partial f}{\partial b_1} = 0 \qquad (2.4.\alpha)$$

$$\frac{\partial f}{\partial b_0} = 0 \qquad (2.4.\beta)$$

Η επίλυση του συστήματος των εξισώσεων (2.4.α) – (2.4.β) οδηγεί στον προσδιορισμό των κάτωθι λύσεων για τα b_1 και b_0:

$$b_1 = \frac{\sum_{\nu=1}^{N}(X_\nu - \bar{X}_\mathrm{N})(Y_\nu - \bar{Y}_\mathrm{N})}{\sum_{\nu=1}^{N}(X_\nu - \bar{X}_\mathrm{N})^2} \qquad (2.5.\alpha)$$

$$b_0 = \bar{Y}_\mathrm{N} - b_1\bar{X}_\mathrm{N} \qquad (2.5.\beta)$$

Όπου με $\bar{X}_\mathrm{N}$ και $\bar{Y}_\mathrm{N}$ συμβολίζονται η μέσες τιμές των μετρήσεων των μεταβλητών X και Y από το δείγμα που ελήφθη.

$$\bar{X}_\mathrm{N} = \frac{\sum_{\nu=1}^{N} X_\nu}{N} \qquad (2.6.\alpha)$$

$$\bar{Y}_\mathrm{N} = \frac{\sum_{\nu=1}^{N} Y_\nu}{N} \qquad (2.6.\beta)$$

Πρέπει να σημειωθεί πως η ευθεία που υπολογίστηκε διέρχεται πάντοτε απ' το σημείο $(\bar{X}_\mathrm{N}, \bar{Y}_\mathrm{N})$. Η παραπάνω υπολογιστική διαδικασία ονομάζεται «Μέθοδος των Ελαχίστων Τετραγώνων».

2.3 Αξιολόγηση του μοντέλου

2.3.1 Στατιστικός έλεγχος παραμέτρων παλινδρόμησης

Παρατηρώντας τις εξισώσεις (2.5.α) και (2.5.β) γίνεται άμεσα αντιληπτό πως οι τιμές των b_1 και b_0 εξαρτώνται αποκλειστικά από τις τιμές των μετρήσεων (X_ν, Y_ν) και το μέγεθος δείγματος N. Συνεπώς, κάθε διαφορετικό δείγμα μετρήσεων θα οδηγεί και σε δύο διαφορετικές τιμές b_1 και b_0. Αποδεικνύεται πως οι μεταβλητές b_1 και b_0 ακολουθούν κανονική κατανομή με μέση τιμή και τυπική απόκλιση $(\mu_{b_1}, \sigma\{b_1\})$ και $(\mu_{b_0}, \sigma\{b_0\})$ αντίστοιχα:

$$\mu_{b_1} = \beta_1 \qquad (2.7.\alpha)$$

$$\sigma^2\{b_1\} = \frac{\sigma^2}{\sum_{\nu=1}^{N}(X_\nu - \bar{X}_\mathrm{N})^2} \qquad (2.7.\beta)$$

$$\mu_{b_0} = \beta_0 \qquad (2.8.\alpha)$$

$$\sigma^2\{b_0\} = \sigma^2\left(\frac{1}{N} + \frac{\bar{X}_\mathrm{N}{}^2}{\sum_{\nu=1}^{N}(X_\nu - \bar{X}_\mathrm{N})^2}\right) \qquad (2.8.\beta)$$

Κάθε εφαρμογή της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων αποτελεί μία απόπειρα εκτίμησης των τιμών β_1 και β_0, οι οποίες δεν δύνανται να υπολογισθούν επακριβώς. Αντ' αυτού υπολογίζονται οι τιμές b_1 και b_0, οι οποίες αποτελούν εκτιμητές των β_1 και β_0 αντίστοιχα. Αποδεικνύεται επίσης πως οι παράμετροι b_1 και b_0 αποτελούν τους καλύτερους δυνατούς εκτιμητές των β_1 και β_0 καθώς παρουσιάζουν την μικρότερη αβεβαιότητα απ' όλους τους αμερόληπτους εκτιμητές.

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, οι μεταβλητές b_1 και b_0 ακολουθούν κανονική κατανομή και άρα οι μεταβλητές $\frac{b_1-\beta_1}{\sigma\{b_1\}}$ και $\frac{b_0-\beta_0}{\sigma\{b_0\}}$ θα ακολουθούν την τυποποιημένη κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και τυπική απόκλιση 1. Για τον υπολογισμό των $\sigma^2\{b_1\}$και $\sigma^2\{b_0\}$ απαιτείται η τιμή της διασποράς των σφαλμάτων σ^2, η οποία εκτιμάται μέσω του αμερόληπτου εκτιμητή της, του μέσου τετραγωνικού σφάλματος ΜΤΣ. Έτσι, αντί των διακυμάνσεων $\sigma^2\{b_1\}$ και $\sigma^2\{b_0\}$ υπολογίζονται οι εκτιμητές τους $s^2\{b_1\}$ και $s^2\{b_0\}$ αντίστοιχα.

$$s^2\{b_1\} = \frac{MT\Sigma}{\sum_{\nu=1}^{N}(X_\nu - \bar{X}_N)^2} \qquad (2.9.\alpha)$$

$$s^2\{b_0\} = MT\Sigma\left(\frac{1}{N} + \frac{\bar{X}_N{}^2}{\sum_{\nu=1}^{N}(X_\nu - \bar{X}_N)^2}\right) \qquad (2.9.\beta)$$

$$MT\Sigma = \frac{\sum_{\nu=1}^{N}\left(Y_\nu - \mu_{\widetilde{Y_\nu}}\right)^2}{N-2} = \frac{\sum_{\nu=1}^{N}(Y_\nu - b_1 X_\nu - b_0)^2}{N-2} \qquad (2.9.\gamma)$$

Γνωρίζοντας λοιπόν τις διακυμάνσεις $s^2\{b_1\}$ και $s^2\{b_0\}$ και συνεπώς τις αντίστοιχες τυπικές αποκλίσεις μέσω της σχέσης $s = \sqrt{s^2}$, μπορούμε να τις αξιοποιήσουμε για τον προσδιορισμό των ορίων εμπιστοσύνης των παραμέτρων b_1 και b_0 .Αποδεικνύεται πως οι μεταβλητές $\frac{b_1-\beta_1}{s\{b_1\}}$ και $\frac{b_0-\beta_0}{s\{b_0\}}$ ακολουθούν κατανομή Student με (N-2) βαθμούς ελευθερίας. Συνεπώς, σε επίπεδο σημαντικότητας α, το διάστημα εμπιστοσύνης των παραπάνω μεταβλητών θα είναι το [t{α/2;N-2},t{1-α/2;N-2}]:

$$t\left\{\frac{\alpha}{2}; N-2\right\} \le \frac{b_1-\beta_1}{s\{b_1\}} \le t\{1-\frac{\alpha}{2}; N-2\} \qquad (2.10)$$

Λόγω συμμετρίας της κατανομής Student έπεται ότι:

$$t\left\{\frac{\alpha}{2}; N-2\right\} = -t\{1-\frac{\alpha}{2}; N-2\} \qquad (2.11)$$

Αντικαθιστώντας την (2.11) στην (2.10) και λύνοντας ως προς β_1 προκύπτει το διάστημα εμπιστοσύνης του β_1 σε επίπεδο σημαντικότητας α:

$$b_1 - t\left\{1-\frac{\alpha}{2}; N-2\right\} s\{b_1\} \le \beta_1 \le b_1 + t\left\{1-\frac{\alpha}{2}; N-2\right\} s\{b_1\} \qquad (2.12)$$

Έτσι, για επίπεδο σημαντικότητας α=0.05 λαμβάνουμε το διάστημα $[b_1 - t\{0.975; N-2\}s\{b_1\}, b_1 + t\{0.975; N-2\}s\{b_1\}]$, στο οποίο αναμένεται να βρίσκεται η τιμή β_1 με πιθανότητα $p = 1-\alpha = 95\%$. Ομοίως προσδιορίζεται και το διάστημα εμπιστοσύνης της παραμέτρου β_0 για επίπεδο σημαντικότητας α:

$$b_0 - t\left\{1-\frac{\alpha}{2}; N-2\right\} s\{b_0\} \le \beta_0 \le b_0 + t\left\{1-\frac{\alpha}{2}; N-2\right\} s\{b_0\} \qquad (2.13)$$

Στο σημείο αυτό ολοκληρώθηκε ο υπολογισμός των παραμέτρων της παλινδρόμησης b_1 και b_0 καθώς και των στατιστικών κατανομών που αυτές ακολουθούν ως τυχαίες μεταβλητές εξαρτώμενες από το εκάστοτε δείγμα που χρησιμοποιήθηκε για τον υπολογισμό τους. Για να προχωρήσουμε περαιτέρω πρέπει να ελεγχθεί το κατά πόσο υφίσταται γραμμική συσχέτιση μεταξύ των δύο υπό εξέτασιν μεταβλητών, κάτι που μπορεί να επιτευχθεί με την διεξαγωγή ενός δίπλευρου στατιστικού ελέγχου. Ο εν λόγω έλεγχος θα εξετάζει το κατά πόσο η τιμή της παραμέτρου β_1 διαφέρει στατιστικά απ' το μηδέν και διατυπώνεται ως εξής:

$$H_0: \beta_1 = 0 \qquad (2.14.\alpha)$$

$$H_\alpha: \beta_1 \neq 0 \qquad (2.14.\beta)$$

Η αποδοχή της μηδενικής υπόθεσης H_0 μας οδηγεί στην αδυναμία εξαγωγής συμπεράσματος για την ύπαρξης γραμμικής συσχέτισης μεταξύ των προς εξέτασιν μεταβλητών, ενώ η απόρριψή της στην ύπαρξη γραμμικής συσχέτισης.

2.3.2 Κριτήριο στατιστικού ελέγχου : στατιστική t*

Για την διεξαγωγή του ελέγχου χρησιμοποιείται η στατιστική t*, όπου

$$t^* = \frac{b_1}{s\{b_1\}} \qquad (2.15)$$

Το αποτέλεσμα του ελέγχου, σε επίπεδο σημαντικότητας α, βασίζεται στον κάτωθι κανόνα:

$$\text{Αν } |t^*| \leq t_\delta = t\left(1 - \frac{a}{2}; N - 2\right), \text{γίνεται δεκτή η } \mathrm{H}_0 \qquad (2.16.\alpha)$$

$$\text{Αν } |t^*| > t_\delta = t\left(1 - \frac{a}{2}; N - 2\right), \text{απορρίπτεται η } \mathrm{H}_0 \qquad (2.16.\beta)$$

Εάν αντικαταστήσουμε την (2.15) στην (2.16.α) και λύσουμε ως προς b_1 λαμβάνουμε το εξής κριτήριο αποδοχής της H_0:

$$|b_1| \leq t\left(1 - \frac{a}{2}; N - 2\right) |s\{b_1\}| \qquad (2.17)$$

Η τυπική απόκλιση $s\{b_1\}$ λαμβάνει μόνο θετικές τιμές ενώ η παράμετρος b_1 μπορεί να λάβει και αρνητικές (αρνητική γραμμική συσχέτιση) και συνεπώς απαιτείται να γίνει διαχωρισμός των σχετικών περιπτώσεων:

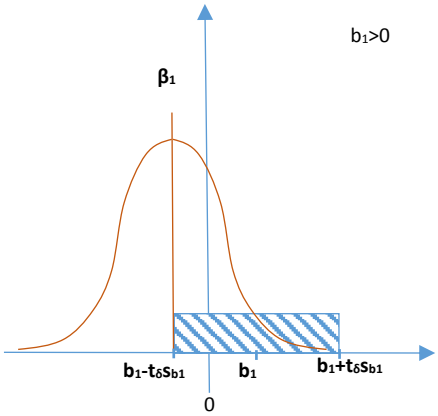
$\underline{b_1 > 0}$:

$$b_1 \leq t\left(1 - \frac{a}{2}; N - 2\right) s\{b_1\} => b_1 - t\left(1 - \frac{a}{2}; N - 2\right) s\{b_1\} \leq 0 \qquad (2.18.\alpha)$$

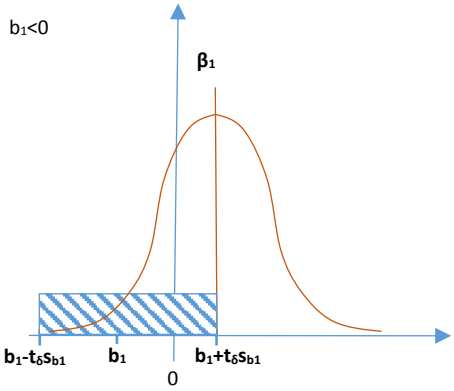
$\underline{b_1 < 0}$:

$$b_1 \geq -t\left(1 - \frac{a}{2}; N - 2\right) s\{b_1\} => b_1 + t\left(1 - \frac{a}{2}; N - 2\right) s\{b_1\} \geq 0 \qquad (2.18.\beta)$$

Αν το b_1 είναι θετικό, η εξίσωση (2.18.α) απαιτεί το αριστερό όριο του διαστήματος εμπιστοσύνης του β_1 να είναι αρνητικό. Αν το b_1 είναι αρνητικό, η εξίσωση (2.18.β) απαιτεί το δεξί όριο του διαστήματος εμπιστοσύνης του β_1 να είναι θετικό. Και στις δύο παραπάνω περιπτώσεις το διάστημα εμπιστοσύνης του β_1 θα περιλαμβάνει την τιμή μηδέν και ως εκ τούτου η παράμετρος β_1 δεν θα διαφέρει στατιστικά απ' το μηδέν. Οι ανισώσεις (2.18.α) και (2.18.β) αποτελούν κριτήριο αποδοχής της μηδενικής υπόθεσης και απεικονίζονται γραφικά ως ακολούθως:



Σχήμα 2.3.α Το διάστημα εμπιστοσύνης του β_1 περιλαμβάνει την τιμή μηδέν (2.18.α)



Σχήμα 2.3.β Το διάστημα εμπιστοσύνης του β_1 περιλαμβάνει την τιμή μηδέν (2.18.β)

Η ικανοποίηση των ανισώσεων (2.18.α) και (2.18.β) οδηγεί στην αποδοχή της μηδενικής υπόθεσης και στην αδυναμία εξαγωγής συμπεράσματος ως προς την ύπαρξη γραμμικής συσχέτισης μεταξύ των δύο υπό εξέτασιν μεταβλητών.

Εναλλακτικά, αντικαθιστώντας την εξίσωση (2.15) στην (2.16.β) και ακολουθώντας την ίδια συλλογιστική πορεία όπως παραπάνω θα καταλήξουμε στις συμπληρωματικές ανισώσεις των (2.18.α) και (2.18.β):

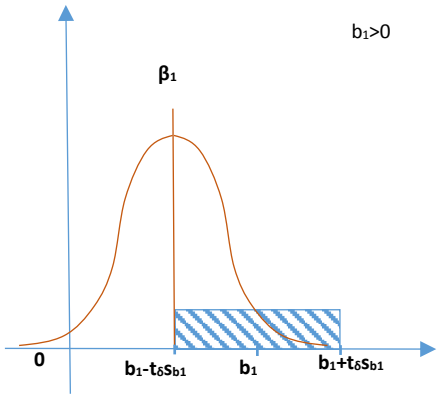
$\underline{b_1 > 0}$:

$$b_1 - t\left(1 - \frac{a}{2}; N - 2\right) s\{b_1\} > 0 \qquad (2.19.\alpha)$$

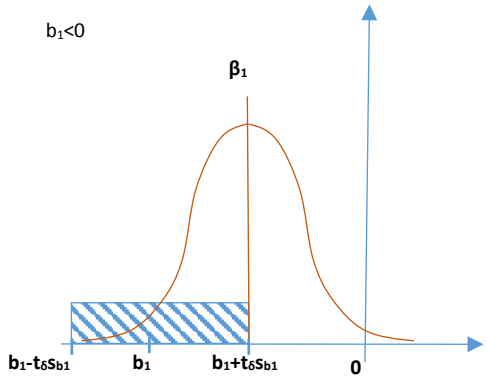
$\underline{b_1 < 0}$:

$$b_1 + t\left(1 - \frac{a}{2}; N - 2\right) s\{b_1\} < 0 \qquad (2.19.\beta)$$

Αν το b_1 είναι θετικό, η εξίσωση (2.19.α) απαιτεί η τιμή μηδέν να βρίσκεται αριστερότερα του αριστερού ορίου του διαστήματος εμπιστοσύνης του β_1, έτσι ώστε ολόκληρο το διάστημα εμπιστοσύνης του β_1 να βρίσκεται δεξιότερα του μηδενός. Αντιθέτως, αν b_1 αρνητικό, η εξίσωση (2.19.β) απαιτεί η τιμή μηδέν να βρίσκεται δεξιότερα του δεξιού ορίου του διαστήματος εμπιστοσύνης του β_1, έτσι ώστε ολόκληρο το διάστημα εμπιστοσύνης του β_1 να βρίσκεται αριστερότερα του μηδενός. Εφόσον οι τελευταίες εξισώσεις ικανοποιούνται, η παράμετρος β_1 δεν δύναται να λάβει την τιμή μηδέν, όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα:



Σχήμα 2.4.α Ολόκληρο το διάστημα εμπιστοσύνης είναι θετικό (2.19.α)



Σχήμα 2.4.β Ολόκληρο το διάστημα εμπιστοσύνης είναι αρνητικό (2.19.β)

Η ικανοποίηση των ανισώσεων (2.19.α) και (2.19.β) συνεπάγεται ότι σε επίπεδο σημαντικότητας α η παράμετρος β_1 δεν λαμβάνει την τιμή μηδέν, η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται και ως εκ τούτου υφίσταται γραμμική συσχέτιση μεταξύ των υπό εξέτασιν μεταβλητών.

2.3.3 Ο συντελεστής προσδιορισμού R^2

Ως πρόσθετο μέτρο αξιολόγησης της γραμμικής συσχέτισης χρησιμοποιείται ο συντελεστής προσδιορισμού R^2. Για τον υπολογισμό του απαιτούνται μερικά ενδιάμεσα αποτελέσματα. Το ολικό άθροισμα τετραγώνων SSTO (total sum of squares), το άθροισμα τετραγώνων σφαλμάτων SSE (error sum of squares) και το άθροισμα τετραγώνων παλινδρόμησης SSR (regression sum of squares):

$$SSTO = \sum_{\nu=1}^{N}\left(Y_\nu - \bar{Y}_N\right)^2 \tag{2.20}$$

$$SSE = \sum_{\nu=1}^{N}\left(Y_\nu - \widetilde{\mu_{Y_\nu}}\right)^2 \tag{2.21}$$

$$SSR = \sum_{\nu=1}^{N}\left(\widetilde{\mu_{Y_\nu}} - \bar{Y}_N\right)^2 \tag{2.22}$$

Το ολικό άθροισμα τετραγώνων SSTO αποτελεί μέτρο της συνολικής διακύμανσης των τιμών Y γύρω απ' τη μέση τιμή τους. Το άθροισμα των σφαλμάτων παλινδρόμησης SSR αποτελεί μέτρο της διακύμανσης των τιμών Y γύρω απ' τη μέση τιμή τους, η οποία μπορεί να ερμηνευτεί μέσω του μοντέλου της παλινδρόμησης, ενώ αυτή που δεν μπορεί να ερμηνευτεί εκτιμάται μέσω του αθροίσματος τετραγώνων σφαλμάτων SSE. Διαιρώντας το SSR με το SSTO λαμβάνουμε το συντελεστή προσδιορισμού:

$$R^2 = \frac{SSR}{SSTO} = \frac{\sum_{\nu=1}^{N}\left(\widetilde{\mu_{Y_\nu}} - \bar{Y}_N\right)^2}{\sum_{\nu=1}^{N}(Y_\nu - \bar{Y}_N)^2} = \frac{\sum_{\nu=1}^{N}(b_1 X_\nu + b_0 - \bar{Y}_N)^2}{\sum_{\nu=1}^{N}(Y_\nu - \bar{Y}_N)^2} \tag{2.23}$$

Ο συγκεκριμένος συντελεστής αποτελεί μέτρο του ποσοστού της διακύμανσης των τιμών Y που μπορεί να εξηγηθεί απ' το μοντέλο της παλινδρόμησης. Λαμβάνει τιμές από 0 έως 1 και είναι αδιάστατος. Έτσι, όταν ο R^2 λαμβάνει την τιμή 1, ολόκληρη η διακύμανση της τυχαίας μεταβλητής Y δύναται να εξηγηθεί από το μοντέλο της παλινδρόμησης και συνεπώς

υφίσταται τέλεια γραμμική συσχέτιση μεταξύ των υπό εξέτασιν μεταβλητών. Εναλλακτικά, όταν ο R^2 λαμβάνει την τιμή 0, μηδενικό ποσοστό της διακύμανσης της μεταβλητής Y δύναται να εξηγηθεί μέσω του μοντέλου της γραμμικής παλινδρόμησης. Όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του R^2, τόσο καλύτερη θα είναι η γραμμική συσχέτιση μεταξύ των μεταβλητών. Το διεθνές πρωτόκολλο IPVMP προτείνει την τιμή 0,75 ως μία ικανοποιητική ένδειξη για την ύπαρξη καλής γραμμικής συσχέτισης.

2.4 Αξιοποίηση του μοντέλου για την εκτίμηση της κατανάλωσης ενέργειας

2.4.1 Εκτίμηση της κατανάλωσης βάσης με μία μέτρηση

Έχοντας εξασφαλίσει την ύπαρξη γραμμικής συσχέτισης μπορούμε πλέον να χρησιμοποιήσουμε τους συντελεστές b_1 και b_0 που υπολογίστηκαν παραπάνω για τον προσδιορισμό της εξαρτημένης μεταβλητής Y σαν συνάρτηση της ανεξάρτητης μεταβλητής X. Έστω X_μ μία σταθερή τιμή του X, η οποία μπορεί είτε να προέρχεται από το δείγμα που χρησιμοποιήθηκε παραπάνω είτε να χρησιμοποιείται για πρώτη φορά. Όπως αναφέρθηκε νωρίτερα, με τις εξισώσεις (2.2.α) και (2.2.β), σε αυτήν την τιμή X_μ θα αντιστοιχεί μία κανονική κατανομή του Y_μ με μέση τιμή $\mu_{Y_\mu} = \beta_1 X_\mu + \beta_0$ και τυπική απόκλιση σ, έτσι ώστε:

$$Y_\mu = \beta_1 X_\mu + \beta_0 + \varepsilon = \mu_{Y_\mu} + \varepsilon \tag{2.24}$$

Χρησιμοποιώντας τους αμερόληπτους εκτιμητές b_1 και b_0 για την εκτίμηση των β_1 και β_0 αντίστοιχα θα υπολογίσουμε την εκτίμηση της κατανομής του Y_μ.

$$\widetilde{Y_\mu} = b_1 X_\mu + b_0 + \varepsilon = \widetilde{\mu_{Y_\mu}} + \varepsilon \tag{2.25}$$

$$\widetilde{\mu_{Y_\mu}} = b_1 X_\mu + b_0 \tag{2.26}$$

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, οι συντελεστές b_1 και b_0 αποτελούν τυχαίες μεταβλητές εξαρτώμενες απ' το δείγμα που χρησιμοποιήθηκε για τον υπολογισμό τους. Συνεπώς, και η εκτίμηση $\widetilde{\mu_{Y_\mu}}$ θα αποτελεί τυχαία μεταβλητή, η οποία θα ακολουθεί κανονική κατανομή, ως γραμμικός συνδυασμός των τιμών Y_ν. Η μέση τιμή της κατανομής υπολογίζεται εφαρμόζοντας τον τελεστή $E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$ σε αμφότερα τα μέλη της εξίσωσης (2.26):

$$E\left\{\widetilde{\mu_{Y_\mu}}\right\} = E\{b_1 X_\mu + b_0\} = E\{b_1\} X_\mu + E\{b_0\} = \beta_1 X_\mu + \beta_0$$

$$=> \; E\left\{\widetilde{\mu_{Y_\mu}}\right\} = \mu_{Y_\mu} \tag{2.27}$$

Αποδεικνύεται λοιπόν πως η μέση τιμή της εκτίμησης $\widetilde{\mu_{Y_\mu}}$ ισούται με τη μέση τιμή της κατανομής του Y_μ, όπως αυτή περιγράφεται στην εξίσωση (2.2.α). Άρα, η εκτίμηση $\widetilde{\mu_{Y_\mu}}$ αποτελεί αμερόληπτο εκτιμητή της μέσης τιμής της κατανάλωσης μ_{Y_μ}.

Δεδομένου ότι τόσο το σημείο $(\bar{X}_N, \bar{Y}_N)$, όσο και το σημείο $\left(X_\mu, \widetilde{\mu_{Y_\mu}}\right)$ βρίσκονται πάνω στην ευθεία που υπολογίστηκε από τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, οι συντεταγμένες τους θα πρέπει να ικανοποιούν την εξίσωση αυτής:

$$\widetilde{\mu_{Y_\mu}} - \bar{Y}_N = b_1\left(X_\mu - \bar{X}_N\right) \tag{2.28}$$

Αποδεικνύεται πως οι μεταβλητές b_1 και $\bar{Y}$ είναι στατιστικώς ανεξάρτητες. Συνεπώς, λύνοντας την (2.28) ως προς $\widetilde{\mu_{Y_\mu}}$, μπορούμε να υπολογίσουμε τη διακύμανση $\sigma^2\{\widetilde{\mu_{Y_\mu}}\}$:

$$\sigma^2\left\{\widetilde{\mu_{Y_\mu}}\right\} = \sigma^2\{\bar{Y}_N + b_1(X_\mu - \bar{X}_N)\} = \sigma^2\{\bar{Y}_N\} + (X_\mu - \bar{X}_N)^2\sigma^2\{b_1\} \qquad (2.29)$$

Η διακύμανση της μέσης τιμής $\sigma^2\{\bar{Y}\}$ υπολογίζεται από το κεντρικό οριακό θεώρημα:

$$\sigma^2\{\bar{Y}_N\} = \frac{\sigma^2\{Y_\nu\}}{N} = \frac{\sigma^2}{N} \qquad (2.30)$$

Η διακύμανση της παραμέτρου b_1 έχει υπολογιστεί νωρίτερα στην εξίσωση (2.7.β). Αντικαθιστώντας λοιπόν τις (2.7.β) και (2.30) στην (2.29) υπολογίζουμε την διακύμανση $\sigma^2\{\widetilde{\mu_{Y_\mu}}\}$:

$$\sigma^2\{\widetilde{\mu_{Y_\mu}}\} = \sigma^2\left[\frac{1}{N} + \frac{(X_\mu - \bar{X}_N)^2}{\sum_{\nu=1}^{N}(X_\nu - \bar{X}_N)^2}\right] \qquad (2.31)$$

Εκτιμώντας την διακύμανση των σφαλμάτων σ^2 μέσω του μέσου τετραγωνικού σφάλματος λαμβάνουμε τον αμερόληπτο εκτιμητή $s^2\{\widetilde{\mu_{Y_\mu}}\}$:

$$s^2\{\widetilde{\mu_{Y_\mu}}\} = MT\Sigma\left[\frac{1}{N} + \frac{(X_\mu - \bar{X}_N)^2}{\sum_{\nu=1}^{N}(X_\nu - \bar{X}_N)^2}\right] \qquad (2.32)$$

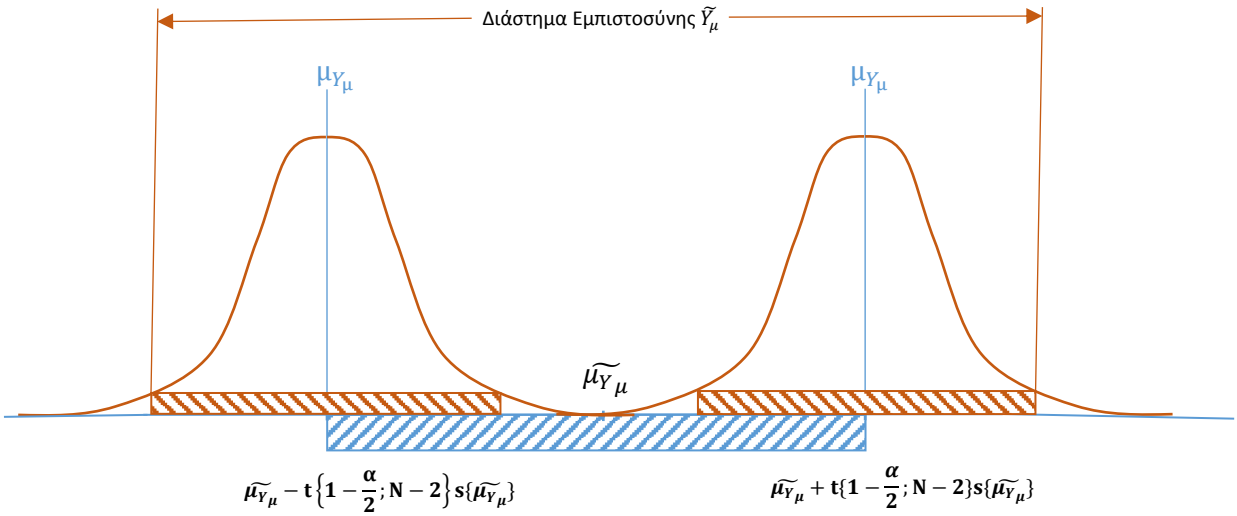
Έχοντας πλέον αποδείξει πως η εκτίμηση $\widetilde{\mu_{Y_\mu}}$ ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή μ_{Y_μ} και διακύμανση $\sigma^2\{\widetilde{\mu_{Y_\mu}}\}$ μπορούμε να αποφανθούμε πως η μεταβλητή $\frac{\widetilde{\mu_{Y_\mu}} - \mu_{Y_\mu}}{s\{\widetilde{\mu_{Y_\mu}}\}}$ θα ακολουθεί κατανομή Student με N-2 βαθμούς ελευθερίας. Έτσι, σε επίπεδο σημαντικότητας α, το διάστημα εμπιστοσύνης της εν λόγω μεταβλητής θα είναι:

$$t\left\{\frac{\alpha}{2}; N-2\right\} \le \frac{\widetilde{\mu_{Y_\mu}} - \mu_{Y_\mu}}{s\{\widetilde{\mu_{Y_\mu}}\}} \le t\{1 - \frac{\alpha}{2}; N-2\} \qquad (2.33)$$

Λαμβάνοντας υπόψιν ότι $t\left\{\frac{\alpha}{2}; N-2\right\} = -t\{1 - \frac{\alpha}{2}; N-2\}$ και λύνοντας ως προς μ_{Y_μ} λαμβάνουμε το διάστημα εμπιστοσύνης της μέσης τιμής της κατανομής του Y_μ σε επίπεδο σημαντικότητας α:

$$\widetilde{\mu_{Y_\mu}} - t\left\{1 - \frac{\alpha}{2}; N-2\right\} s\{\widetilde{\mu_{Y_\mu}}\} \le \mu_{Y_\mu} \le \widetilde{\mu_{Y_\mu}} + t\{1 - \frac{\alpha}{2}; N-2\} s\{\widetilde{\mu_{Y_\mu}}\} \qquad (2.34)$$

Έχοντας υπολογίσει το διάστημα εμπιστοσύνης της μέσης τιμής της κατανομής του Y_μ μπορούμε πλέον να προσδιορίσουμε το διάστημα εμπιστοσύνης κάθε μίας εκτίμησης $\widetilde{Y_\mu}$. Για την καλύτερη κατανόηση του προβλήματος η εξίσωση (2.34) απεικονίζεται γραφικά:



Σχήμα 2.5 Το διάστημα εμπιστοσύνης του $\widetilde{Y}_\mu$ προκύπτει από την άθροιση των δύο επιμέρους διαστημάτων εμπιστοσύνης

Στο σχήμα 2.5 απεικονίζεται το διάστημα εμπιστοσύνης της μέσης τιμής μ_{Y_μ}, σύμφωνα με την εξίσωση (2.34) μέσω του γαλάζιου διαγραμμισμένου χωρίου. Έτσι, η μέση τιμή του Y_μ αναμένεται να διαφέρει από την εκτίμηση $\widetilde{\mu_{Y_\mu}}$ που υπολογίστηκε στην εξίσωση (2.26), και η μέγιστη δυνατή απόκλιση $\left(\pm t\left\{1-\frac{\alpha}{2}; N-2\right\} s\{\widetilde{\mu_{Y_\mu}}\}\right)$ σε επίπεδο σημαντικότητας α παρουσιάζεται στο δεξί και αριστερό όριο του διαστήματος εμπιστοσύνης. Επιπλέον, ανεξαρτήτως της θέσεως του μ_{Y_μ}, η τιμή Y_μ αποτελεί τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή μ_{Y_μ} και τυπική απόκλιση σ. Η κατανομή αυτή απεικονίζεται με τις καφέ καμπύλες για τα δύο ακραία σενάρια, όπου η μέση τιμή μ_{Y_μ} παρουσιάζει μέγιστη απόκλιση από την εκτίμηση $\widetilde{\mu_{Y_\mu}}$. Τα αντίστοιχα διαστήματα εμπιστοσύνης του Y_μ γύρω από τη μέση τιμή του απεικονίζονται με τα καφέ διαγραμμισμένα χωρία. Συνεπώς, λαμβάνοντας υπόψιν τόσο τη διασπορά της μέσης τιμής μ_{Y_μ} γύρω απ' την εκτίμηση $\widetilde{\mu_{Y_\mu}}$, όσο και τη διασπορά του Y_μ γύρω από τη μέση τιμή μ_{Y_μ}, μπορούμε να υπολογίσουμε το διάστημα εμπιστοσύνης της εκτίμησης $\widetilde{Y}_\mu$, το οποίο απεικονίζεται με τα καφέ βέλη στην κορυφή του σχήματος 2.5.

Εφαρμόζοντας τον τελεστή Ε σε αμφότερα τα μέλη της εξίσωσης (2.25) προκύπτει:

$$\widetilde{Y}_\mu = \widetilde{\mu_{Y_\mu}} + \varepsilon \Rightarrow$$

$$E\{\widetilde{Y}_\mu\} = E\left\{\widetilde{\mu_{Y_\mu}}\right\} + E\{\varepsilon\} = \mu_{Y_\mu} + 0 \Rightarrow$$

$$E\{\widetilde{Y}_\mu\} = \mu_{Y_\mu} \tag{2.35}$$

Ομοίως, λαμβάνοντας υπόψιν πως οι μεταβλητές $\widetilde{\mu_{Y_\mu}}$ και ε είναι ανεξάρτητες, υπολογίζουμε τη διασπορά της εκτίμησης $\widetilde{Y}_\mu$:

$$\widetilde{Y}_\mu = \widetilde{\mu_{Y_\mu}} + \varepsilon \Rightarrow$$

$$\sigma^2\{\widetilde{Y}_\mu\} = \sigma^2\left\{\widetilde{\mu_{Y_\mu}}\right\} + \sigma^2\{\varepsilon\} = \sigma^2\left[\frac{1}{N} + \frac{(X_\mu - \bar{X}_N)^2}{\sum_{\nu=1}^{N}(X_\nu - \bar{X}_N)^2}\right] + \sigma^2 \Rightarrow$$

$$\sigma^2\{\widetilde{Y_\mu}\} = \sigma^2\left[1 + \frac{1}{N} + \frac{(X_\mu - \bar{X}_N)^2}{\sum_{\nu=1}^{N}(X_\nu - \bar{X}_N)^2}\right] \qquad (2.36)$$

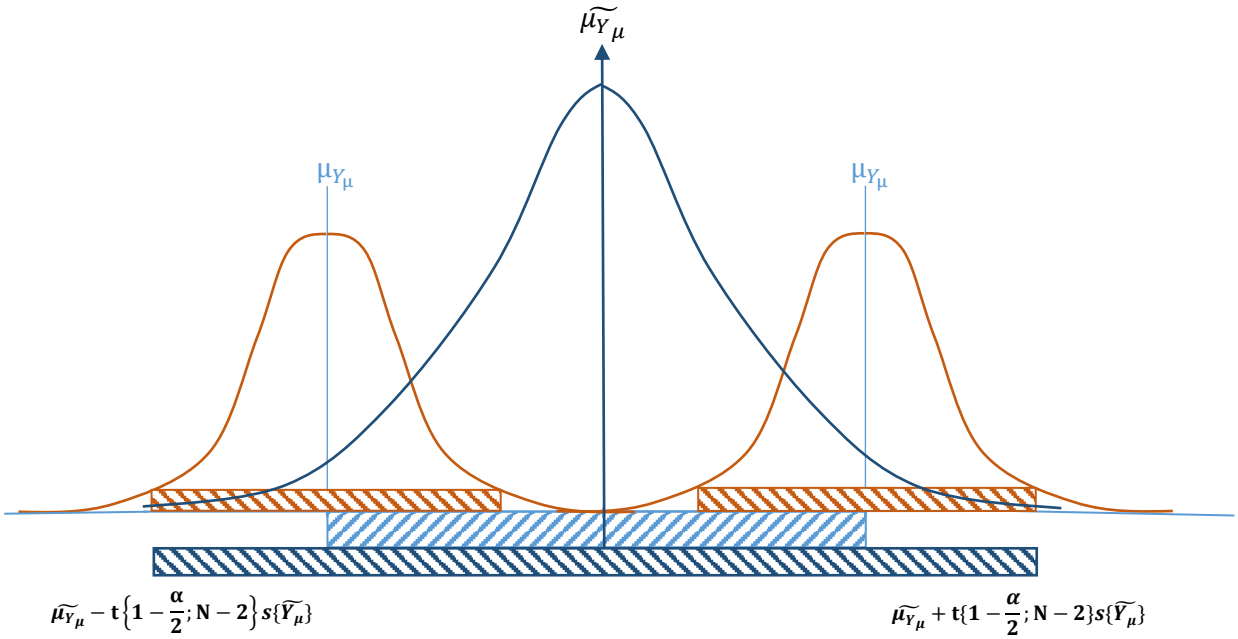
Η μέση τιμή μ_{Y_μ} θα εκτιμηθεί από τον αμερόληπτό εκτιμητή της $\widetilde{\mu_{Y_\mu}}$ ενώ η διασπορά σ^2 θα εκτιμηθεί για μία ακόμη φορά από το μέσο τετραγωνικό σφάλμα ΜΤΣ:

$$s^2\{\widetilde{Y_\mu}\} = MT\Sigma\left[1 + \frac{1}{N} + \frac{(X_\mu - \bar{X}_N)^2}{\sum_{\nu=1}^{N}(X_\nu - \bar{X}_N)^2}\right] \qquad (2.37)$$

Αποδεικνύεται πως η τυχαία μεταβλητή $\frac{\widetilde{Y_\mu} - \widetilde{\mu_{Y_\mu}}}{s\{\widetilde{Y_\mu}\}}$ ακολουθεί κατανομή Student με N-2 βαθμούς ελευθερίας. Συνεπώς, τα όρια του διαστήματος εμπιστοσύνης της εκτίμησης $\widetilde{Y_\mu}$ σε επίπεδο σημαντικότητας α θα δίνονται από την κάτωθι ανίσωση:

$$\widetilde{\mu_{Y_\mu}} - \mathrm{t}\left\{1 - \frac{\alpha}{2}; \mathrm{N} - 2\right\} s\{\widetilde{Y_\mu}\} \leq \widetilde{Y_\mu} \leq \widetilde{\mu_{Y_\mu}} + \mathrm{t}\{1 - \frac{\alpha}{2}; \mathrm{N} - 2\} s\{\widetilde{Y_\mu}\} \qquad (2.38)$$

Το παραπάνω διάστημα εμπιστοσύνης καθώς και τα δύο επιμέρους που αξιοποιήθηκαν για τη συγκρότηση αυτού απεικονίζονται γραφικά στο επόμενο σχήμα:



Σχήμα 2.6 Τα δύο παλαιότερα διαστήματα εμπιστοσύνης (καφέ και γαλάζιο χρώμα) αντικαταστάθηκαν από ένα νέο ισοδύναμο (μπλε σκούρο χρώμα)

Στο σημείο αυτό ολοκληρώθηκε ο υπολογισμός της εκτίμησης $\widetilde{Y_\mu}$ που αντιστοιχεί σε μία σταθερή τιμή X_μ και στον υπολογισμό του διαστήματος εμπιστοσύνης αυτής. Η διασπορά $s^2\{\widetilde{Y_\mu}\}$ που υπολογίστηκε στην εξίσωση (2.37) αποτελεί το μέτρο της αβεβαιότητας του μοντέλου. Είναι σημαντικό να αναφερθεί πως η διασπορά, και συνεπώς η αβεβαιότητα, αυξάνει, όσο η τιμή X_μ απομακρύνεται από τη μέση τιμή $\bar{X}_N$ λόγω της αύξησης του όρου $\left(X_\mu - \bar{X}_N\right)^2$. Επομένως, συνιστάται η επιλογή του δείγματος που χρησιμοποιείται για την κατασκευή του μοντέλου να είναι το δυνατόν τέτοια, ώστε η μέση τιμή $\bar{X}_N$ να κείται κοντά στην περιοχή της μεταβλητής X που παρουσιάζει ενδιαφέρον προς μελέτη. Έτσι, στο παράδειγμα της μηνιαίας κατανάλωσης ενέργειας ενός ψυκτικού συστήματος, η οποία

εκφράζεται σαν συνάρτηση της μέσης εξωτερικής θερμοκρασίας του μήνα, πιθανώς να ενδείκνυται η κατασκευή ξεχωριστού μοντέλου για τους θερινούς μήνες (υψηλές θερμοκρασίες) και για τους φθινοπωρινούς και εαρινούς μήνες (μέσες θερμοκρασίες).

2.4.2 Εκτίμηση της κατανάλωσης βάσης με Μ μετρήσεις

Η ανωτέρω συλλογιστική πορεία ολοκληρώνεται με την εκτίμηση της μέσης τιμής ενός συνόλου Μ εκτιμήσεων $\widetilde{Y_\mu}$ που αντιστοιχούν σε ένα σύνολο Μ τιμών της ανεξάρτητης μεταβλητής Χ, καθώς και με τον προσδιορισμό του αντίστοιχου διαστήματος εμπιστοσύνης.

Έστω ένα δείγμα Ν ζευγών μετρήσεων (X_ν, Y_ν) με μέση τιμή $(\bar{X}_N, \bar{Y}_N)$. Το δείγμα αυτό χρησιμοποιείται για την κατασκευή ενός μοντέλου μονοδιάστατης γραμμικής παλινδρόμησης. Έστω μία σειρά Μ μετρήσεων X_μ, οι οποίες δύνανται είτε να διαφέρουν πλήρως από τις X_ν, είτε να ταυτίζονται μερικώς με αυτές. Σε κάθε τιμή X_μ αντιστοιχεί μία κατανομή Y_μ με μέση τιμή μ_{Y_μ} και τυπική απόκλιση σ, η οποία εκτιμάται μέσω του εκτιμητή $\widetilde{Y_\mu}$, όπως παρουσιάστηκε στις εξισώσεις (2.25) και (2.26):

$$\widetilde{Y_\mu} = b_1 X_\mu + b_0 + \varepsilon = \widetilde{\mu_{Y_\mu}} + \varepsilon \tag{2.25}$$

$$\widetilde{\mu_{Y_\mu}} = b_1 X_\mu + b_0 \tag{2.26}$$

Η μέση τιμή $\bar{Y}_M$, της οποίας η βέλτιστη δυνατή εκτίμηση αποτελεί σκοπό της ανάλυσης, θα είναι και αυτή τυχαία μεταβλητή που θα ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu_{\overline{Y_M}} = \frac{\sum_{\mu=1}^{M} \mu_{Y_\mu}}{M}$ και τυπική απόκλιση $\frac{\sigma}{\sqrt{M}}$.

Αθροίζοντας τις δύο παραπάνω εξισώσεις για τα Μ διαφορετικά X_μ και διαιρώντας με Μ λαμβάνουμε:

$$\widetilde{\overline{Y_M}} = \frac{\sum_{\mu=1}^{M} \widetilde{Y_\mu}}{M} = b_1 \bar{X}_M + b_0 + \frac{\sum_{\mu=1}^{M} \varepsilon}{M} = \widetilde{\mu_{\overline{Y_M}}} + \overline{\varepsilon_M} \tag{2.39}$$

$$\widetilde{\mu_{\overline{Y_M}}} = b_1 \bar{X}_M + b_0 = \frac{\sum_{\mu=1}^{M} \widetilde{\mu_{Y_\mu}}}{M} \tag{2.40}$$

Για την εκτίμηση λοιπόν της τυχαίας μεταβλητής $\bar{Y}_M$ θα χρησιμοποιηθεί ο εκτιμητής $\widetilde{\overline{Y_M}}$ ενώ για την εκτίμηση της μέσης τιμής $\mu_{\overline{Y_M}}$ θα χρησιμοποιηθεί ο εκτιμητής $\widetilde{\mu_{\overline{Y_M}}}$.

Εργαζόμενοι κατ' αναλογία με τον προσδιορισμό του διαστήματος εμπιστοσύνης μίας εκτίμησης $\widetilde{Y_\mu}$, το διάστημα εμπιστοσύνης του εκτιμητή $\widetilde{\overline{Y_M}}$ θα χωριστεί σε δύο βήματα. Αρχικά, θα υπολογιστεί το διάστημα εμπιστοσύνης της $\mu_{\overline{Y_M}}$ γύρω από τον αμερόληπτο εκτιμητή $\widetilde{\mu_{\overline{Y_M}}}$, προσδιορίζοντας την κατανομή που ακολουθεί ο εκτιμητής $\widetilde{\mu_{\overline{Y_M}}}$. Έπειτα, θα προστεθεί σε αυτό η διασπορά της τυχαίας μεταβλητής $\bar{Y}_M$ γύρω από την μέση τιμή της $\mu_{\overline{Y_M}}$.

Μέσω του μοντέλου της γραμμικής παλινδρόμησης μπορούμε να εκτιμήσουμε την κατανομή Y_μ για κάθε τιμή X_μ μέσω του εκτιμητή $\widetilde{Y_\mu}$. Η μέση τιμή $\widetilde{\mu_{Y_\mu}}$ υπολογίζεται απ' την εξίσωση (2.26). Τόσο το σημείο $(\bar{X}_N, \bar{Y}_N)$ των μέσων τιμών των Ν σημείων που χρησιμοποιήθηκαν αρχικά για την κατασκευή του μοντέλου, όσο και κάθε σημείο $\left(X_\mu, \widetilde{\mu_{Y_\mu}}\right)$.βρίσκονται πάνω στην ευθεία της παλινδρόμησης και συνεπώς θα ικανοποιούν την εξίσωση αυτής:

$$\widetilde{\mu_{Y_\mu}} - \bar{Y}_N = b_1\left(X_\mu - \bar{X}_N\right)$$

Εφόσον η παραπάνω εξίσωση ισχύει για κάθε ζεύγος $\left(X_\mu, \widetilde{\mu_{Y_\mu}}\right)$, αθροίζοντας τις επιμέρους εξισώσεις και για τα M διαφορετικά σημεία λαμβάνουμε:

$$\sum_{\mu=1}^{M}\left(\widetilde{\mu_{Y_\mu}} - \bar{Y}_\mathrm{N}\right) = \sum_{\mu=1}^{M}\left(b_1\left(X_\mu - \bar{X}_N\right)\right)$$

$$\sum_{\mu=1}^{M}\widetilde{\mu_{Y_\mu}} - \mathrm{M}\bar{Y}_\mathrm{N} = b_1\left(\sum_{\mu=1}^{M} X_\mu - M\bar{X}_N\right)$$

$$\frac{\sum_{\mu=1}^{M}\widetilde{\mu_{Y_\mu}}}{\mathrm{M}} - \bar{Y}_\mathrm{N} = b_1\left(\frac{\sum_{\mu=1}^{M} X_\mu}{\mathrm{M}} - \bar{X}_N\right)$$

$$\widetilde{\mu_{Y_M}} - \bar{Y}_\mathrm{N} = b_1(\bar{X}_M - \bar{X}_N)$$

$$\widetilde{\mu_{Y_M}} = \bar{Y}_\mathrm{N} + b_1(\bar{X}_M - \bar{X}_N) \qquad (2.41)$$

Όπως φαίνεται στην εξίσωση (2.41), εφόσον κάθε ζεύγος $\left(X_\mu, \widetilde{\mu_{Y_\mu}}\right)$ βρίσκεται πάνω στην ευθεία της παρεμβολής, τότε και η μέση τιμή αυτών θα βρίσκεται επάνω στην ευθεία. Εργαζόμενοι ομοίως με την εξίσωση (2.29), δεδομένου ότι οι μεταβλητές $\bar{Y}_\mathrm{N}$ και b_1 είναι στατιστικά ανεξάρτητες λαμβάνουμε την διασπορά της $\widetilde{\mu_{Y_\mu}}$:

$$\widetilde{\mu_{Y_M}} = \bar{Y}_\mathrm{N} + b_1(\bar{X}_M - \bar{X}_N) =>$$

$$\sigma^2\{\widetilde{\mu_{Y_M}}\} = \sigma^2\{\bar{Y}_\mathrm{N}\} + (\bar{X}_M - \bar{X}_N)^2\sigma^2\{b_1\}$$

$$\sigma^2\{\widetilde{\mu_{Y_M}}\} = \sigma^2\left[\frac{1}{N} + \frac{(\bar{X}_M - \bar{X}_N)^2}{\sum_{\nu=1}^{N}(X_\nu - \bar{X}_N)^2}\right] \qquad (2.42)$$

Η διακύμανση σ^2 εκτιμάται απ' το μέσο τετραγωνικό σφάλμα ΜΤΣ:

$$s^2\{\widetilde{\mu_{Y_M}}\} = MT\Sigma\left[\frac{1}{N} + \frac{(\bar{X}_M - \bar{X}_N)^2}{\sum_{\nu=1}^{N}(X_\nu - \bar{X}_N)^2}\right] \qquad (2.43)$$

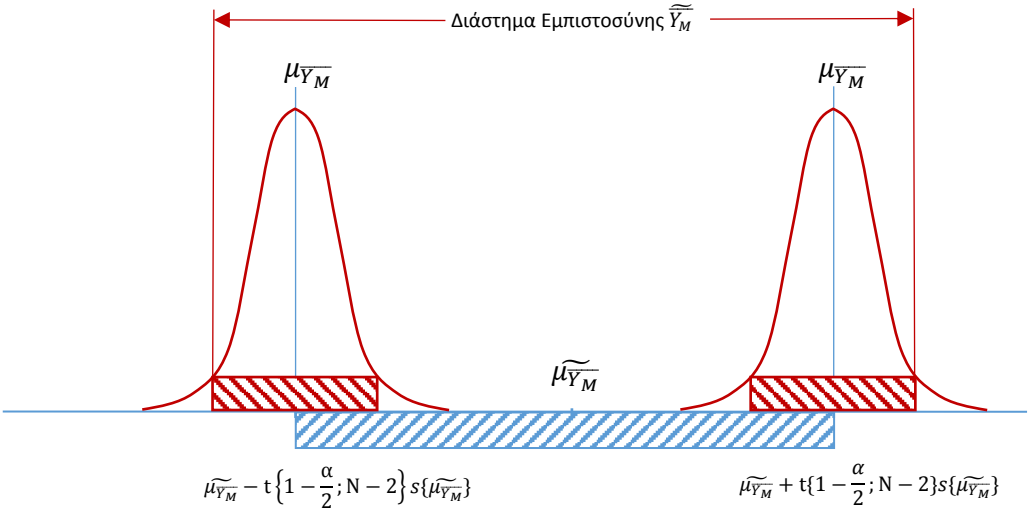
Η μέση τιμή της κατανομής του $\widetilde{\mu_{Y_M}}$ υπολογίζεται με εφαρμογή του τελεστή E σε αμφότερα τα μέλη της εξίσωσης (2.40):

$$E\{\widetilde{\mu_{Y_M}}\} = \mathrm{E}\left\{\frac{\sum_{\mu=1}^{M}\widetilde{\mu_{Y_\mu}}}{\mathrm{M}}\right\} = \frac{\sum_{\mu=1}^{M} E\left\{\widetilde{\mu_{Y_\mu}}\right\}}{\mathrm{M}} = \frac{\sum_{\mu=1}^{M}\mu_{Y_\mu}}{\mathrm{M}} = \mu_{\overline{Y_M}} \qquad (2.44)$$

Η τυχαία μεταβλητή $\widetilde{\mu_{Y_M}}$ ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu_{\overline{Y_M}}$ και τυπική απόκλιση $\sigma\{\widetilde{\mu_{Y_M}}\}$ ως γραμμικός συνδυασμός μεταβλητών που ακολουθούν την κανονική κατανομή. Συνεπώς, η μεταβλητή $\frac{\widetilde{\mu_{Y_M}} - \mu_{\overline{Y_M}}}{s\{\widetilde{\mu_{Y_M}}\}}$ θα ακολουθεί κατανομή Student με N-2 βαθμούς ελευθερίας. Τα όρια του διαστήματος εμπιστοσύνης της μέσης τιμής $\mu_{\overline{Y_M}}$ σε επίπεδο σημαντικότητας α θα δίνονται όπως και προηγουμένως:

$$\widetilde{\mu_{Y_M}} - \mathrm{t}\left\{1 - \frac{\alpha}{2}; \mathrm{N} - 2\right\} s\{\widetilde{\mu_{Y_M}}\} \le \mu_{\overline{Y_M}} \le \widetilde{\mu_{Y_M}} + \mathrm{t}\{1 - \frac{\alpha}{2}; \mathrm{N} - 2\} s\{\widetilde{\mu_{Y_M}}\} \qquad (2.45)$$

Έχοντας υπολογίσει το διάστημα εμπιστοσύνης της μέσης τιμής $\mu_{\overline{Y_M}}$, μπορούμε να τοποθετήσουμε στο χώρο την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $\bar{Y}_\mathrm{M}$. Η εξίσωση (2.45) απεικονίζεται γραφικά για καλύτερη κατανόηση:



Σχήμα 2.7 Διάστημα εμπιστοσύνης της εκτίμησης της μέσης τιμής $\widetilde{\overline{Y_M}}$ σειράς Μ εκτιμήσεων $\widetilde{Y_\mu}$ σε επίπεδο σημαντικότητας α

Το διάστημα εμπιστοσύνης της μέσης τιμής $\mu_{\overline{Y_M}}$, όπως προκύπτει απ' την ανίσωση (2.45) απεικονίζεται γραφικά μέσω του γαλάζιου διαγραμμισμένου χωρίου. Επιπλέον, το διάστημα εμπιστοσύνης της μεταβλητής $\overline{Y}_M$ γύρω απ' την μέση τιμή της κατανομής της, την $\mu_{\overline{Y_M}}$, απεικονίζεται μέσω των κόκκινων διαγραμμισμένων χωρίων. Με τις κόκκινες καμπύλες απεικονίζεται η μορφή της κατανομής της μεταβλητής $\overline{Y}_M$ στα δύο ακραία σενάρια όπου η μέση τιμή αυτής παρουσιάζει μέγιστη απόκλιση απ' την εκτίμηση $\mu_{\widetilde{\overline{Y_M}}}$. Οι κόκκινες καμπύλες του σχήματος 2.7 είναι αισθητά «στενότερες» απ' τις αντίστοιχες καφέ καμπύλες του σχήματος 2.5. Αυτό οφείλεται στο ότι η διασπορά της κατανομής της τυχαίας μεταβλητής $\overline{Y}_M$ ισούται με $\frac{\sigma^2}{M}$ και είναι αισθητά μικρότερη από την διασπορά της κατανομής μίας μόνο τιμής Y_μ, η οποία ισούται με σ^2.

Κατ' αντιστοιχία με τα προηγούμενα, για να υπολογίσουμε τη διασπορά της εκτίμησης $\widetilde{\overline{Y_M}}$, στηριζόμαστε στο γεγονός ότι οι μεταβλητές $\mu_{\widetilde{\overline{Y_M}}}$ και $\overline{\varepsilon_M}$ είναι στατιστικώς ανεξάρτητες και συνεπώς, με βάση την εξίσωση (2.39), προκύπτει:

$$\widetilde{\overline{Y_M}} = \mu_{\widetilde{\overline{Y_M}}} + \overline{\varepsilon_M}$$

$$\sigma^2\left\{\widetilde{\overline{Y_M}}\right\} = \sigma^2\left\{\mu_{\widetilde{\overline{Y_M}}}\right\} + \sigma^2\{\overline{\varepsilon_M}\}$$

Η $\sigma^2\left\{\mu_{\widetilde{\overline{Y_M}}}\right\}$ αντικαθίσταται από την εξίσωση (2.42), ενώ η $\sigma^2\{\overline{\varepsilon_M}\}$ υπολογίζεται από το κεντρικό οριακό θεώρημα:

$$\sigma^2\left\{\widetilde{\overline{Y_M}}\right\} = \sigma^2\left[\frac{1}{N} + \frac{(\bar{X}_M - \bar{X}_N)^2}{\sum_{\nu=1}^{N}(X_\nu - \bar{X}_N)^2}\right] + \frac{\sigma^2}{M}$$

$$\sigma^2\left\{\widetilde{\overline{Y_M}}\right\} = \sigma^2\left[\frac{1}{M} + \frac{1}{N} + \frac{(\bar{X}_M - \bar{X}_N)^2}{\sum_{\nu=1}^{N}(X_\nu - \bar{X}_N)^2}\right] \qquad (2.46)$$

Εκτιμώντας την διασπορά σ^2 χρησιμοποιώντας το μέσο τετραγωνικό σφάλμα ΜΤΣ λαμβάνουμε τον εκτιμητή $s^2\left\{\widetilde{\overline{Y_M}}\right\}$:

$$s^2\left\{\widetilde{\overline{Y_M}}\right\} = MT\Sigma\left[\frac{1}{M} + \frac{1}{N} + \frac{(\bar{X}_M - \bar{X}_N)^2}{\sum_{\nu=1}^{N}(X_\nu - \bar{X}_N)^2}\right] \qquad (2.47)$$

Αποδεικνύεται πως η μεταβλητή $\frac{\widetilde{\widetilde{Y_M}}-\widetilde{\mu_{\widetilde{Y_M}}}}{s\{\widetilde{\widetilde{Y_M}}\}}$ ακολουθεί κατανομή Student με N-2 βαθμούς ελευθερίας. Το διάστημα εμπιστοσύνης της εκτίμησης $\widetilde{\widetilde{Y_M}}$ σε επίπεδο σημαντικότητας α οριοθετείται από την κάτωθι ανίσωση:

$$\widetilde{\mu_{\widetilde{Y_M}}} - \mathrm{t}\left\{1-\frac{\alpha}{2};\mathrm{N}-2\right\} s\left\{\widetilde{\widetilde{Y_M}}\right\} \leq \widetilde{\widetilde{Y_M}} \leq \widetilde{\mu_{\widetilde{Y_M}}} + t\{1-\frac{\alpha}{2};N-2\}s\left\{\widetilde{\widetilde{Y_M}}\right\} \qquad (2.48)$$

2.5 Σύγκριση – Παρατηρήσεις

Για λόγους σύγκρισης ξαναγράφεται η ανίσωση (2.38), η οποία οριοθετεί το διάστημα εμπιστοσύνης μίας εκτίμησης $\widetilde{Y_\mu}$ σε επίπεδο σημαντικότητας α:

$$\widetilde{\mu_{Y_\mu}} - \mathrm{t}\left\{1-\frac{\alpha}{2};\mathrm{N}-2\right\} s\{\widetilde{Y_\mu}\} \leq \widetilde{Y_\mu} \leq \widetilde{\mu_{Y_\mu}} + \mathrm{t}\{1-\frac{\alpha}{2};\mathrm{N}-2\}s\{\widetilde{Y_\mu}\} \qquad (2.38)$$

Παρατηρώντας τις ανισώσεις (2.48) και (2.38) γίνεται αντιληπτό πως το διάστημα εμπιστοσύνης μίας εκτίμησης $\widetilde{Y_\mu}$ έχει ως κέντρο τον εκτιμητή $\widetilde{\mu_{Y_\mu}}$, ενώ το διάστημα εμπιστοσύνης της εκτίμησης $\widetilde{\widetilde{Y_M}}$ έχει ως κέντρο τη μέση τιμή των M εκτιμητών $\widetilde{\mu_{Y_\mu}}$. Επιπλέον, και οι δύο εκτιμήσεις ακολουθούν κατανομή Student με N-2 βαθμούς ελευθερίας, αλλά χαρακτηρίζονται από διαφορετικές τυπικές αποκλίσεις. Οι εκφράσεις της διασποράς των $\widetilde{Y_\mu}$ και $\widetilde{\widetilde{Y_M}}$ δίνονται από τις εξισώσεις (2.37) και (2.47) αντίστοιχα:

$$s^2\{\widetilde{Y_\mu}\} = MT\Sigma\left[1+\frac{1}{N}+\frac{(X_\mu-\bar{X}_N)^2}{\sum_{\nu=1}^{N}(X_\nu-\bar{X}_N)^2}\right] = MT\Sigma + s^2\{\bar{Y}_\mathrm{N}\} + \left(X_\mu-\bar{X}_N\right)^2 s^2\{b_1\} \quad (2.37)$$

$$s^2\left\{\widetilde{\widetilde{Y_M}}\right\} = MT\Sigma\left[\frac{1}{M}+\frac{1}{N}+\frac{(\bar{X}_M-\bar{X}_N)^2}{\sum_{\nu=1}^{N}(X_\nu-\bar{X}_N)^2}\right] = \frac{MT\Sigma}{M} + s^2\{\bar{Y}_\mathrm{N}\} + (\bar{X}_M-\bar{X}_N)^2 s^2\{b_1\} \quad (2.47)$$

Ο υπολογισμός της διασποράς τόσο της κάθε μίας εκτίμησης $\widetilde{Y_\mu}$, όσο και της εκτίμησης της μέσης τιμής $\widetilde{\widetilde{Y_M}}$ ανάγεται στην άθροιση τριών όρων.

Ο πρώτος όρος περιγράφει τη διασπορά της εκτιμώμενης μεταβλητής γύρω απ' τη μέση τιμή της και διαφέρει στις δύο εξισώσεις. Η κατανομή κάθε τιμής Y_μ χαρακτηρίζεται απ' τη διακύμανση σ^2 ενώ η κατανομή της μέσης τιμής $\bar{Y}_\mathrm{M}$ χαρακτηρίζεται απ' τη διακύμανση $\frac{\sigma^2}{M}$ με βάση το κεντρικό οριακό θεώρημα. Η διακύμανση κάθε εκτιμώμενης μεταβλητής χαρακτηρίζει και την αντίστοιχη εκτίμηση. Συνεπώς, η εκτίμηση της μέσης τιμής $\widetilde{\widetilde{Y_M}}$ παρουσιάζει μικρότερη διακύμανση απ' ότι η εκτίμηση μίας τιμής $\widetilde{Y_\mu}$.

Ο όρος $s^2\{\bar{Y}_\mathrm{N}\}$ είναι κοινός και στις δύο εξισώσεις και εξαρτάται από το αρχικό δείγμα των N σημείων. Όσο μεγαλύτερο το πλήθος των N σημείων που χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή του μοντέλου, τόσο μικρότερη θα είναι και η διακύμανση.

Ο όρος $s^2\{b_1\}$ είναι επίσης κοινός και επίσης εξαρτάται από το αρχικό δείγμα σημείων. Ωστόσο, ο όρος με τον οποίο είναι πολλαπλασιασμένος διαφέρει στις δύο εξισώσεις. Όπως αναφέρθηκε νωρίτερα, η εκτίμηση $\widetilde{Y_\mu}$ παρουσιάζει μικρότερη αβεβαιότητα, όσο η τιμή X_μ τείνει προς τη μέση τιμή $\bar{X}_N$ των N σημείων που χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή του μοντέλου. Αντίστοιχα, η εκτίμηση της μέσης τιμής $\widetilde{\widetilde{Y_M}}$ παρουσιάζει μικρότερη αβεβαιότητα, όσο η μέση τιμή $\bar{X}_M$ της σειράς των M σημείων X_μ τείνει προς την μέση τιμή του παλιού δείγματος $\bar{X}_N$. Συμπερασματικά, το μοντέλο της γραμμικής παλινδρόμησης παρουσιάζει μικρότερη αβεβαιότητα όταν χρησιμοποιείται για την εκτίμηση τιμών της

μεταβλητής Y που αντιστοιχούν σε τιμές X κοντά στο διάστημα των σημείων που χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή του.

Παράδειγμα:

Τα παραπάνω εφαρμόζονται στο παράδειγμα του συστήματος ψύξης. Έστω ότι λαμβάνονται εννέα ζεύγη μετρήσεων (E,T), όπου E είναι η μηνιαία κατανάλωση ενέργειας ενός συστήματος ψύξης και T η μέση εξωτερική θερμοκρασία του μήνα. Οι μετρήσεις έγιναν κατά τη διάρκεια των θερινών μηνών (Ιούνιος, Ιούλιος, Αύγουστος) τριών κατά σειρά ετών και η μέση τιμή των εννέα θερμοκρασιών ήταν $\bar{T}_N = 31^{o}$C. Τα εννέα ζεύγη μετρήσεων χρησιμοποιούνται για την κατασκευή ενός μοντέλου μονοδιάστατης γραμμικής παλινδρόμησης που συσχετίζει τις μεταβλητές E και T. Ο αντίστοιχος στατιστικός έλεγχος οδήγησε στο συμπέρασμα πως υφίσταται γραμμική συσχέτιση μεταξύ των μεταβλητών και συνεπώς το μοντέλο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση της μεταβλητής E σαν συνάρτηση της T. Ζητούμενο είναι η εκτίμηση της κατανάλωσης ενέργειας του συστήματος ψύξης το επόμενο καλοκαίρι, το οποίο μπορεί να υπολογιστεί με δύο διαφορετικούς τρόπους:

1) Γίνεται μια εκτίμηση των μέσων μηνιαίων θερμοκρασιών των μηνών Ιουνίου, Ιουλίου και Αυγούστου του επόμενου καλοκαιριού, η οποία στηρίζεται στις θερμοκρασίες των προηγούμενων χρόνων. Σε κάθε τιμή T_μ που εκτιμήθηκε αντιστοιχίζεται ένα διάστημα εμπιστοσύνης $\tilde{E}_\mu \pm \Delta E_\mu$, $\alpha = \alpha_0$ για την κατανάλωση ενέργειας του συστήματος, όπου α_0 είναι το επιθυμητό επίπεδο σημαντικότητας. Προτείνονται οι τιμές α=5% και α=10% που αντιστοιχούν σε βαθμό εμπιστοσύνης 95% και 90% αντίστοιχα. Έστω α=5%. Όσο μικρότερο είναι το α, και όσο περισσότερο απέχει η κάθε τιμή θερμοκρασίας T_μ από τη μέση τιμή $\bar{T}_\nu = 31^{o}$, τόσο μεγαλύτερη θα είναι η αβεβαιότητα ΔE_μ.Έτσι, συμπεραίνουμε ότι τον κάθε μήνα που έχει μέση θερμοκρασία T_μ, το σύστημα ψύξης θα καταναλώσει κατ' ελάχιστο $\tilde{E}_\mu - \Delta E_\mu$ και κατά μέγιστο $\tilde{E}_\mu + \Delta E_\mu$ με πιθανότητα 95%. Επαναλαμβάνοντας τον υπολογισμό για κάθε μήνα και αθροίζοντας τα ελάχιστα και τα μέγιστα μπορούμε να οδηγηθούμε σε συμπέρασμα για ολόκληρο το καλοκαίρι. Δεδομένου ότι τα τρία ενδεχόμενα είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα, η πιθανότητα να βρίσκονται όλες οι παραπάνω εκτιμήσεις εντός των ορίων εμπιστοσύνης τους ισούται με το γινόμενο των επιμέρους πιθανοτήτων. Συνεπώς, η συνολική ενέργεια που αναμένεται να καταναλώσει το σύστημα ψύξης το επόμενο καλοκαίρι θα είναι $\left(\sum \tilde{E}_\mu \pm \sum \Delta E_\mu\right)$ με πιθανότητα $P = 0.95^3 = 0.8573 = 85.73\%$.
2) Γίνεται μια εκτίμηση της μέσης τιμής των τριών μέσων μηνιαίων θερμοκρασιών με βάση τις τιμές των προηγούμενων ετών. Στην τιμή $\bar{T}_M$ που εκτιμήθηκε αντιστοιχίζεται ένα διάστημα εμπιστοσύνης της μέσης μηνιαίας κατανάλωσης ενέργειας $\widetilde{\overline{E_M}} \pm \Delta\overline{E_\mu}$, $\alpha = 5\%$. Όσο πιο κοντά βρίσκεται η τιμή $\bar{T}_M$ στην μέση τιμή $\bar{T}_N = 31^{o}$ που χρησιμοποιήθηκε για την κατασκευή του μοντέλου, τόσο μικρότερη θα είναι η αβεβαιότητα $\Delta\overline{E_M}$. Πολλαπλασιάζοντας τα μέσα μηνιαία αποτελέσματα με τον αριθμό των μηνών οδηγούμαστε σε συμπέρασμα για όλο το καλοκαίρι. Το σύστημα ψύξης θα καταναλώσει το επόμενο καλοκαίρι $3\left(\widetilde{\overline{E_M}} \pm \Delta\overline{E_M}\right)$ με πιθανότητα 95%. Σε κάθε περίπτωση, η εκτίμηση της μέσης τιμής οδηγεί σε μικρότερη αβεβαιότητα για το ίδιο επίπεδο σημαντικότητας

Στο παραπάνω παράδειγμα η μέθοδος της γραμμικής παλινδρόμησης χρησιμοποιήθηκε για την *εκ των προτέρων (a priori)* εκτίμηση της μελλοντικής τιμής της εξαρτημένης μεταβλητής (κατανάλωση ενέργειας συστήματος ψύξης) βασιζόμενη σε μία εκτίμηση της μελλοντικής τιμής της ανεξάρτητης μεταβλητής (μέση μηνιαία εξωτερική θερμοκρασία). Η θερμοκρασία της επόμενης θερινής περιόδου εκτιμήθηκε με βάση τα δεδομένα προηγούμενων ετών. Γίνεται άμεσα αντιληπτό πως μια τέτοια εκτίμηση χαρακτηρίζεται από περιορισμένη ακρίβεια, δεδομένου ότι κάθε θερινή περίοδος αποτελεί ένα ανεξάρτητο στατιστικά γεγονός και η μέση θερμοκρασία της δεν επηρεάζεται από τη μέση θερμοκρασία των θερινών περιόδων προηγούμενων ετών. Προκειμένου λοιπόν μία *εκ των προτέρων (a priori)* εκτίμηση μιας εξαρτημένης μεταβλητής να παρουσιάζει ενδιαφέρον, απαιτείται η τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής κατά τη μελλοντική περίοδο που παρουσιάζει ενδιαφέρον προς μελέτη να μπορεί να εκτιμηθεί με σχετική ακρίβεια. Παραδείγματος χάριν, εάν υπολογίζεται η κατανάλωση ενέργειας ενός εργοστασίου κατασκευής ανταλλακτικών ως συνάρτηση του όγκου παραγωγής, οι μελλοντικές τιμές του όγκου παραγωγής δύναται να εκτιμηθούν με βάση τις υφιστάμενες παραγγελίες.

Ωστόσο, η αξία του μοντέλου της γραμμικής παλινδρόμησης θα γίνει καλύτερα αντιληπτή στο επόμενο κεφάλαιο, όπου θα χρησιμοποιηθεί για την *εκ των υστέρων (a posteriori)* εκτίμηση μίας εξαρτημένης μεταβλητής. Συγκεκριμένα, θα πραγματοποιηθεί εκτίμηση της εξοικονόμησης ενέργειας που επετεύχθη μέσω της αντικατάστασης ενός παλαιότερου συστήματος κατανάλωσης ενέργειας από ένα νεότερο με καλύτερες επιδόσεις.

3 Εκτίμηση της εξοικονόμησης ενέργειας μετά τη λήψη μέτρων

3.1 Εισαγωγικό παράδειγμα

Για την ομαλότερη εισαγωγή στο επόμενο τμήμα της ανάλυσης επανερχόμαστε στο παράδειγμα του συστήματος ψύξης. Έστω λοιπόν ένα σύστημα ψύξης που ενδείκνυται να αντικατασταθεί από ένα νέο, προκειμένου να μειωθεί η κατανάλωση ηλεκτρικής ενέργειας. Η αντικατάσταση έλαβε χώρα κατά το μήνα Σεπτέμβριο του έτους 2018. Μετά το πέρας της εγκατάστασης του νέου συστήματος είναι επιθυμητή η αξιολόγηση αυτού μέσω της εκτίμησης της εξοικονόμησης ενέργειας που επετεύχθη. Για τις ανάγκες του παραδείγματος γίνεται η παραδοχή πως η κατανάλωση ηλεκτρικής ενέργειας τόσο του παλιού, όσο και του νέου συστήματος ψύξης δύναται να μετρηθεί με σχετική ακρίβεια μέσω κατάλληλου μετρητικού συστήματος.

Μία απλουστευμένη προσέγγιση θα ήταν η σύγκριση των καταναλώσεων ηλεκτρικής ενέργειας κατά τις θερινές περιόδους 2016, 2017 και 2018, πριν την εγκατάσταση του νέου συστήματος ψύξης, με τις αντίστοιχες καταναλώσεις των θερινών περιόδων 2019, 2020 κλπ., κατά τη λειτουργεία του νέου συστήματος. Η διαφορά μεταξύ των δύο θα μπορούσε να αποτελεί την εκτίμηση της εξοικονόμησης ενέργειας που επετεύχθη. Βασικό μειονέκτημα της παραπάνω προσέγγισης αποτελεί η αδυναμία συνυπολογισμού της επίδρασης που έχουν άλλοι εξωτερικοί παράγοντες στην κατανάλωση ενέργειας, όπως η μέση μηνιαία εξωτερική θερμοκρασία. Εάν παραδείγματος χάριν οι θερινές περίοδοι 2019 και 2020, που ακολουθούν την εγκατάσταση του νέου συστήματος, είναι σημαντικά θερμότερες από αυτές των προηγούμενων ετών, ενδέχεται να παρατηρηθεί ακόμα και αύξηση της κατανάλωσης ηλεκτρικής ενέργειας. Το γεγονός αυτό δεν οφείλεται στις επιδόσεις του νέου συστήματος, αλλά στην υψηλή θερμοκρασία των θερινών περιόδων 2019 και 2020. Αντίστοιχα, εάν οι θερινές περίοδοι 2019 και 2020, που ακολουθούν την εγκατάσταση, είναι σημαντικά ψυχρότερες, το νέο σύστημα θα παρουσιάζει ιδιαίτερα χαμηλή κατανάλωση ενέργειας, γεγονός που θα οφείλεται μερικώς στις καλύτερες επιδόσεις που το χαρακτηρίζουν και μερικώς στις «ήπιες» συνθήκες λειτουργίας του σε σχέση με τις θερινές περιόδους 2016 – 2018, κατά τις οποίες λειτουργούσε το παλιότερο σύστημα. Και στις δύο παραπάνω περιπτώσεις η αξιολόγηση του νέου συστήματος ψύξης δεν θα είναι ορθολογική.

Ιδανικά, η εξοικονόμηση ενέργειας υπολογίζεται ως η διαφορά της ενέργειας που καταναλώνει το νέο σύστημα σε μία περίοδο από την ενέργεια που θα κατανάλωνε το παλιό σύστημα κατά την ίδια περίοδο αν δεν είχε αντικατασταθεί. Η τελευταία αναφέρεται και ως κατανάλωση βάσης (baseline consumption). Στο παράδειγμά μας, η εξοικονόμηση ενέργειας κατά τον μήνα Ιούνιο του έτους 2019 θα ισούταν με την διαφορά της ενέργειας που κατανάλωσε το νέο σύστημα κατά τη λειτουργία του τον Ιούνιο του 2019 από την ενέργεια που θα κατανάλωνε το παλιό σύστημα τον Ιούνιο του 2019, εφόσον δεν είχε πραγματοποιηθεί η αντικατάστασή του τον Σεπτέμβριο του 2018. Ωστόσο, τα παραπάνω μεγέθη δεν δύναται να προσδιοριστούν επακριβώς. Η κατανάλωση του νέου συστήματος τον Ιούνιο του 2019 μετριέται από κάποιο μετρητικό όργανο και χαρακτηρίζεται από κάποιο μετρητικό σφάλμα. Η ενέργεια που θα κατανάλωνε το παλιό σύστημα τον Ιούνιο του 2019 εάν δεν είχε αντικατασταθεί τον Σεπτέμβρη του 2018 θα εκτιμηθεί απ’ το μοντέλο της γραμμικής παλινδρόμησης και θα χαρακτηρίζεται από την αβεβαιότητα του μοντέλου, η οποία εξαρτάται από πληθώρα παραγόντων. Η διαφορά λοιπόν της μέτρησης της

κατανάλωσης ενέργειας του νέου συστήματος κατά τον μήνα Ιούνιο του 2019 από την εκτίμηση της κατανάλωσης βάσης απ' το μοντέλο της παλινδρόμησης αποτελεί την καλύτερη δυνατή εκτίμηση της εξοικονόμησης ενέργειας που επετεύχθη με την εγκατάσταση του νέου συστήματος ψύξης.

Στην περίπτωση αυτή, το μοντέλο της γραμμικής παλινδρόμησης χρησιμοποιείται για την πραγματοποίηση μίας *εκ των υστέρων (a posteriori)* εκτίμησης της κατανάλωσης ενέργειας. Συγκεκριμένα, εκτιμάται η ενέργεια που θα είχε καταναλώσει το παλιό σύστημα ψύξης κατά τη διάρκεια ενός μηνός με μέση μηνιαία θερμοκρασία ίση με αυτή που μετρήθηκε κατά το μήνα Ιούνιο του 2019. Η εφαρμογή του μοντέλου λαμβάνει χώρα μετά την πάροδο του μήνα Ιουνίου του 2019 και συνεπώς η μέση θερμοκρασία κατά τον μήνα Ιούνιο είναι γνωστή και δε χρειάζεται να εκτιμηθεί. Έτσι, με βάση την γνωστή τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής (μέση μηνιαία θερμοκρασία) το μοντέλο χρησιμοποιείται για την εκτίμηση της εξαρτημένης μεταβλητής (κατανάλωση ενέργειας παλιού συστήματος). Η *εκ των υστέρων* εκτίμηση χαρακτηρίζεται από μεγαλύτερη ακρίβεια απ' ότι η *εκ των προτέρων*, μιας και στηρίζεται σε ιστορικές τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής και όχι σε προβλέψεις αυτής, οι οποίες συνοδεύονται από σχετική αβεβαιότητα.

3.2 Εκτίμηση της εξοικονόμησης ενέργειας μίας μ – οστής περιόδου

3.2.1 Προσδιορισμός εξοικονόμησης ενέργειας και αβεβαιότητας

Έχοντας αποκτήσει μία καλύτερη εικόνα του προβλήματος, θα προχωρήσουμε σε μία πιο συστηματική προσέγγιση του παραπάνω παραδείγματος με σκοπό την θεμελίωση των εννοιών που σχετίζονται με την εκτίμηση της εξοικονόμηση ενέργειας και την αβεβαιότητα αυτής.

Έστω ένα υφιστάμενο σύστημα ψύξης, το οποίο θεωρείται μη αποδοτικό και ενδείκνυται να αντικατασταθεί από ένα νέο. Για την αξιολόγηση της εξοικονόμησης ενέργειας που επετεύχθη θα χρησιμοποιηθεί μοντέλο μονοδιάστατης γραμμικής παλινδρόμησης που θα εκφράζει την μηνιαία κατανάλωση ενέργειας του παλιού συστήματος ψύξης ως συνάρτηση της μέσης εξωτερικής θερμοκρασίας του μήνα. Για την κατασκευή του μοντέλου ελήφθησαν N ζεύγη μετρήσεων μέσης μηνιαίας θερμοκρασίας – μηνιαίας κατανάλωσης ενέργειας (X_ν, Y_ν). Η περίοδος λειτουργείας του παλιού συστήματος, κατά την οποία λαμβάνονται και οι σχετικές N μετρήσεις, αναφέρεται ως **περίοδος βάσης (baseline period)**. Χρησιμοποιώντας το συγκεκριμένο δείγμα κατασκευάζεται το μοντέλο γραμμικής παλινδρόμησης εφαρμόζοντας όσα αναφέρθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο. Στη συνέχεια, το παλιό σύστημα ψύξης αντικαθίσταται από ένα νέο με καλύτερες επιδόσεις. Τον επόμενο μήνα, αφού το νέο σύστημα ψύξης έχει τεθεί σε λειτουργία, λαμβάνεται νέα μέτρηση μέσης μηνιαίας θερμοκρασίας – μηνιαίας κατανάλωσης ενέργειας (X_μ, Y_μ). Η περίοδος λειτουργίας του νέου συστήματος, όπου ζητούμενο αποτελεί η εκτίμηση της εξοικονόμησης ενέργειας αναφέρεται ως **περίοδος απολογισμού (reporting period)**. Η μέτρηση της κατανάλωσης ενέργειας θα συνοδεύεται από μία σχετική αβεβαιότητα, η οποία μπορεί να εκτιμηθεί μέσω του μετρητικού σφάλματος του οργάνου. Κατά κανόνα η μέτρηση θα ακολουθεί κανονική κατανομή με τυπική απόκλιση $\sigma_{\mu\varepsilon\tau}$ και σε επίπεδο σημαντικότητας α, θα δίνεται ως ακολούθως:

$$Y_\mu = Y_{0\mu} \pm z\{1 - \frac{\alpha}{2}\}\sigma_{\mu\varepsilon\tau} \qquad (3.1)$$

Με τον όρο $Y_{0\mu}$ περιγράφεται το πραγματικό ποσό ενέργειας που κατανάλωσε το νέο σύστημα ψύξης τον μ-οστό μήνα, ενώ με τον όρο Y_μ περιγράφεται η κατανάλωση ενέργειας

που μετρήθηκε και αποτελεί εκτίμηση του $Y_{0\mu}$. Με τον όρο $z\{\alpha\}$ περιγράφεται η στατιστική που χαρακτηρίζει την κανονική κατανομή σε επίπεδο σημαντικότητας α. Συνεπώς, το διάστημα εμπιστοσύνης της πραγματικής κατανάλωσης $Y_{0\mu}$,σε επίπεδο σημαντικότητας α, θα δίνεται από την κάτωθι εξίσωση:

$$Y_{0\mu} = Y_{\mu} \pm z\{1 - \frac{\alpha}{2}\}\sigma_{\mu\varepsilon\tau} \tag{3.2}$$

Η ενέργεια που θα κατανάλωνε το παλιό ψυκτικό σύστημα, εφόσον λειτουργούσε τον μ-οστό μήνα της περιόδου απολογισμού με μέση μηνιαία θερμοκρασία X_{μ}, συμβολίζεται με $\widetilde{Y_{\mu}}$ και θα εκτιμηθεί μέσω του μοντέλου της γραμμικής παλινδρόμησης:

$$\widetilde{Y_{\mu}} = b_1 X_{\mu} + b_0 + \varepsilon = \widetilde{\mu_{Y_{\mu}}} + \varepsilon$$

$$\widetilde{\mu_{Y_{\mu}}} = b_1 X_{\mu} + b_0$$

Η εκτίμηση $\widetilde{Y_{\mu}}$ συνοδεύεται από τη σχετική αβεβαιότητα του μοντέλου, η οποία ποσοτικοποιείται μέσω του αντίστοιχου διαστήματος εμπιστοσύνης, σε επίπεδο σημαντικότητας α:

$$\widetilde{Y_{\mu}} = \widetilde{\mu_{Y_{\mu}}} \pm \mathrm{t}\{1 - \frac{\alpha}{2}; \mathrm{N} - 2\} s\{\widetilde{Y_{\mu}}\} \tag{3.3}$$

$$s^2\{\widetilde{Y_{\mu}}\} = MT\Sigma \left[1 + \frac{1}{N} + \frac{\left(X_{\mu} - \bar{X}_{\nu}\right)^2}{\sum_{\nu=1}^{N}(X_{\nu} - \bar{X})^2}\right]$$

Έχοντας ολοκληρώσει τα παραπάνω μπορούμε τώρα να προσδιορίσουμε την εκτίμηση της εξοικονόμησης ενέργειας $\widetilde{\Delta Y_{\mu}}$ κατά τον μ-οστό μήνα:

$$\widetilde{\Delta Y_{\mu}} = \widetilde{Y_{\mu}} - Y_{0\mu} \tag{3.4}$$

Δεδομένου ότι τόσο η εκτίμηση $\widetilde{Y_{\mu}}$, όσο και η ενέργεια που καταναλώθηκε $Y_{0\mu}$, αποτελούν τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την κατανομή Student και την κανονική κατανομή αντίστοιχα, τότε και η εκτίμηση της εξοικονόμησης ενέργειας θα αποτελεί τυχαία μεταβλητή. Συγκεκριμένα, θα ακολουθεί κατανομή Student με N-2 βαθμούς ελευθερίας με μέση τιμή $\mu_{\widetilde{\Delta Y_{\mu}}}$ και τυπική απόκλιση $\sigma\{\widetilde{\Delta Y_{\mu}}\}$:

$$\mu_{\widetilde{\Delta Y_{\mu}}} = \widetilde{\mu_{Y_{\mu}}} - Y_{\mu} = b_1 X_{\mu} + b_0 - Y_{\mu} \tag{3.5}$$

$$\sigma^2\{\widetilde{\Delta Y_{\mu}}\} = s^2\{\widetilde{Y_{\mu}}\} + s^2\{Y_{\mu}\} = s^2\{\widetilde{Y_{\mu}}\} + \sigma_{\mu\varepsilon\tau}^2 \tag{3.6}$$

Τελικά, το διάστημα εμπιστοσύνης της εκτίμησης της εξοικονόμησης ενέργειας σε επίπεδο σημαντικότητας α δίνεται ως εξής:

$$\widetilde{\Delta Y_{\mu}} = \mu_{\widetilde{\Delta Y_{\mu}}} \pm \mathrm{t}\{1 - \frac{\alpha}{2}; \mathrm{N} - 2\}\sigma\{\widetilde{\Delta Y_{\mu}}\} \tag{3.7}$$

Διαιρώντας την τελευταία εξίσωση με $\bar{Y}_N$ λαμβάνουμε την εκτίμηση της εξοικονόμησης ενέργειας $\widetilde{\delta\varepsilon_{\mu}}$ ως ποσοστό της μέσης τιμής των παλαιών καταναλώσεων:

$$\widetilde{\delta\varepsilon_{\mu}} = \frac{\mu_{\widetilde{\Delta Y_{\mu}}}}{\bar{Y}_N} \pm \mathrm{t}\left\{1 - \frac{\alpha}{2}; \mathrm{N} - 2\right\} \frac{\sigma\{\widetilde{\Delta Y_{\mu}}\}}{\bar{Y}_N}$$

$$\widetilde{\delta\varepsilon_{\mu}} = \mu_{\widetilde{\delta\varepsilon_{\mu}}} \pm \mathrm{t}\left\{1 - \frac{\alpha}{2}; \mathrm{N} - 2\right\} \sigma_{\widetilde{\delta\varepsilon_{\mu}}} \tag{3.8}$$

Δίνοντας τυχαίες τιμές στις παραμέτρους της εξίσωσης (3.8) θα μπορούσαμε παραδείγματος χάριν να λάβουμε σαν αποτέλεσμα μία δήλωση της μορφής: «Κατά τον μ-οστό μήνα της περιόδου απολογισμού εκτιμάται πως επετεύχθη εξοικονόμηση ενέργειας της τάξεως του $6\% \pm 1{,}4\%$ σε επίπεδο σημαντικότητας 5% (εναλλακτικά σε επίπεδο εμπιστοσύνης 95%)».

3.2.2 Απαιτήσεις ακριβείας – Ελάχιστος Επαληθεύσιμος Στόχος Εξοικονόμησης Ενέργειας (ΕΕΣΕΕ)

Έχοντας προσδιορίσει την εκτίμηση της εξοικονόμησης ενέργειας ως απόλυτη τιμή ή ως ποσοστό, καθώς και την αβεβαιότητα αυτής, θα εξετάσουμε τις σχετικές απαιτήσεις ακριβείας. Στον Οδηγό Ενεργειακών Ελέγχων [1] αναφέρονται δύο μέθοδοι εκτίμησης της αβεβαιότητας και της ελάχιστης εξοικονόμησης ενέργειας, η οποία θεωρείται στατιστικά σημαντική. Η μία μέθοδος προτάθηκε από το διεθνές πρωτόκολλο IPMVP [3] (International Performance Measurement an Verification Protocol) και η άλλη από πρότυπο της ASHRAE [4]. Ακολουθεί η ανάπτυξη των παραπάνω μεθόδων και η σύγκριση των αποτελεσμάτων τους με αυτά που προκύπτουν από την αναλυτική μέθοδο της γραμμικής παλινδρόμησης. Με βάση τον Οδηγό Ενεργειακών Ελέγχων, ένα γενικό κριτήριο ακριβείας που προτάθηκε από το διεθνές πρωτόκολλο IPMVP είναι ο στόχος εξοικονόμησης ενέργειας να είναι μεγαλύτερος απ' το διπλάσιο γινόμενο του σφάλματος εκτιμήσεως. Χρησιμοποιώντας τους συμβολισμούς της παρούσας ανάλυσης, το παραπάνω κριτήριο γράφεται ως εξής:

$$\mu_{\widetilde{\Delta Y}_\mu} > 2\sigma\{\widetilde{\Delta Y}_\mu\} \tag{3.9}$$

Η ανίσωση (3.9) αποτελεί ουσιαστικά κριτήριο ισχύος ενός μονόπλευρου στατιστικού ελέγχου. Ο έλεγχος έχει σκοπό να εξακριβώσει το αν η εκτίμηση της εξοικονόμησης ενέργειας είναι στατιστικά μεγαλύτερη απ' την τιμή μηδέν σε επίπεδο σημαντικότητας α:

$$\widetilde{\Delta Y}_\mu > 0$$

$$\mu_{\widetilde{\Delta Y}_\mu} - \mathrm{t}\{1-\alpha; \mathrm{N}-2\}\sigma\{\widetilde{\Delta Y}_\mu\} > 0 \tag{3.10}$$

Οι εξισώσεις (3.9) και (3.10) ταυτίζονται όταν η στατιστική t λαμβάνει την τιμή 2. Δεδομένου ότι ο στατιστικός έλεγχος είναι μονόπλευρος η τιμή αυτή αντιστοιχεί σε επίπεδο σημαντικότητας α=3,43%. Συμπερασματικά, στο κριτήριο ακριβείας που προτείνεται από το IPMVP απαιτείται η εκτιμώμενη εξοικονόμηση ενέργειας να είναι στατιστικά μεγαλύτερη του μηδενός σε επίπεδο σημαντικότητας $3{,}43\%$ (εναλλακτικά με πιθανότητα $96{,}57\%$). Η εξίσωση (3.10) δύναται να γραφτεί και με τους ποσοστιαίους όρους διαιρώντας την με τη μέση τιμή του παλιού δείγματος $\bar{Y}_N$:

$$\mu_{\widetilde{\delta\varepsilon}_\mu} - \mathrm{t}\{1-\alpha; \mathrm{N}-2\}\sigma_{\widetilde{\delta\varepsilon}_\mu} \geq 0 \tag{3.11}$$

Επιπλέον, η τιμή της ποσοστιαίας εξοικονόμησης ενέργειας $\mu_{\widetilde{\delta\varepsilon}_\mu}$, για την οποία η ανίσωση (3.11) ισχύει ως ισότητα, αναφέρεται στον Οδηγό Ενεργειακών Ελέγχων ως Ελάχιστος Επαληθεύσιμος Στόχος Εξοικονόμησης Ενέργειας (ΕΕΣΕΕ).

Ουσιαστικά ο ΕΕΣΕΕ ταυτίζεται με την αβεβαιότητα της εκτίμησης της εξοικονόμησης. Η ελάχιστη εξοικονόμηση ενέργειας που θεωρείται αποδεκτή είναι αυτή που ισούται με την αβεβαιότητα που συνοδεύει την εκτίμησή της. Έτσι, ακόμα και στο χειρότερο δυνατό σενάριο, όπου η πραγματική εξοικονόμηση ενέργειας βρίσκεται στο κάτω άκρο του διαστήματος εμπιστοσύνης, τότε αυτή θα ισούται με το μηδέν και δεν θα είναι αρνητική.

$$\left(\widetilde{\Delta Y_\mu}\right)_{min} = (EE\Sigma EE) - \mathrm{t}\{1-\alpha; \mathrm{N}-2\}\sigma_{\widetilde{\delta\varepsilon_\mu}} = 0$$

Με βάση την προσέγγιση του IPMVP το τυπικό σφάλμα πρόβλεψης $s\{\widetilde{Y_\mu}\}$ εκτιμάται από το μέσο τετραγωνικό σφάλμα ΜΤΣ, το οποίο είναι σταθερό, και συνεπώς ο ΕΕΣΕΕ λαμβάνει μία και μόνη σταθερή τιμή. Το τυπικό σφάλμα της εκτίμησης της εξοικονόμησης ενέργειας στην περίπτωση αυτή δίνεται απ' την εξίσωση (3.6):

$$\sigma^2\{\widetilde{\Delta Y_\mu}\} = s^2\{\widetilde{Y_\mu}\} + \sigma^2_{\mu\varepsilon\tau} = MT\Sigma + \sigma^2_{\mu\varepsilon\tau}$$

Και συνεπώς ο ελάχιστος επαληθεύσιμος στόχος εξοικονόμησης ενέργειας κατά IPMVP θα ισούται με:

$$(EE\Sigma EE)_{IPMVP} = \mathrm{t}\{1-\alpha; \mathrm{N}-2\}\sigma_{\widetilde{\delta\varepsilon_\mu}} = 2\frac{\sqrt{MT\Sigma+\sigma^2_{\mu\varepsilon\tau}}}{\bar{Y}_N} \qquad (3.12)$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω έκφραση του σφάλματος $\sigma\{\widetilde{\Delta Y_\mu}\}$, καθώς και την (3.5) στην (3.10) λαμβάνουμε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων που ικανοποιούν την απαίτηση ακριβείας που προτάθηκε από το IPMVP σε επίπεδο σημαντικότητας α:

$$\mu_{\widetilde{\Delta Y_\mu}} - \mathrm{t}\{1-\alpha; \mathrm{N}-2\}\sigma\{\widetilde{\Delta Y_\mu}\} \geq 0$$

$$b_1X_\mu + b_0 - Y_\mu - t_a\sqrt{MT\Sigma + \sigma^2_{\mu\varepsilon\tau}} \geq 0$$

$$Y_\mu \leq b_1X_\mu + b_0 - t_a\sqrt{MT\Sigma + \sigma^2_{\mu\varepsilon\tau}} \qquad (3.13)$$

Ο ΕΕΣΕΕ, όπως προβλέπετε από το πρότυπο της ASHRAE, αναφέρεται στον Οδηγό Ενεργειακών Ελέγχων ως εξής (προσαρμοσμένος στα σύμβολα της παρούσας ανάλυσης):

$$(EE\Sigma EE)_{ASHRAE} = \frac{1{,}26}{0{,}5\bar{Y}_N}\sqrt{MT\Sigma\left(1+\frac{2}{N}\right)\frac{1}{M}} \qquad (3.14)$$

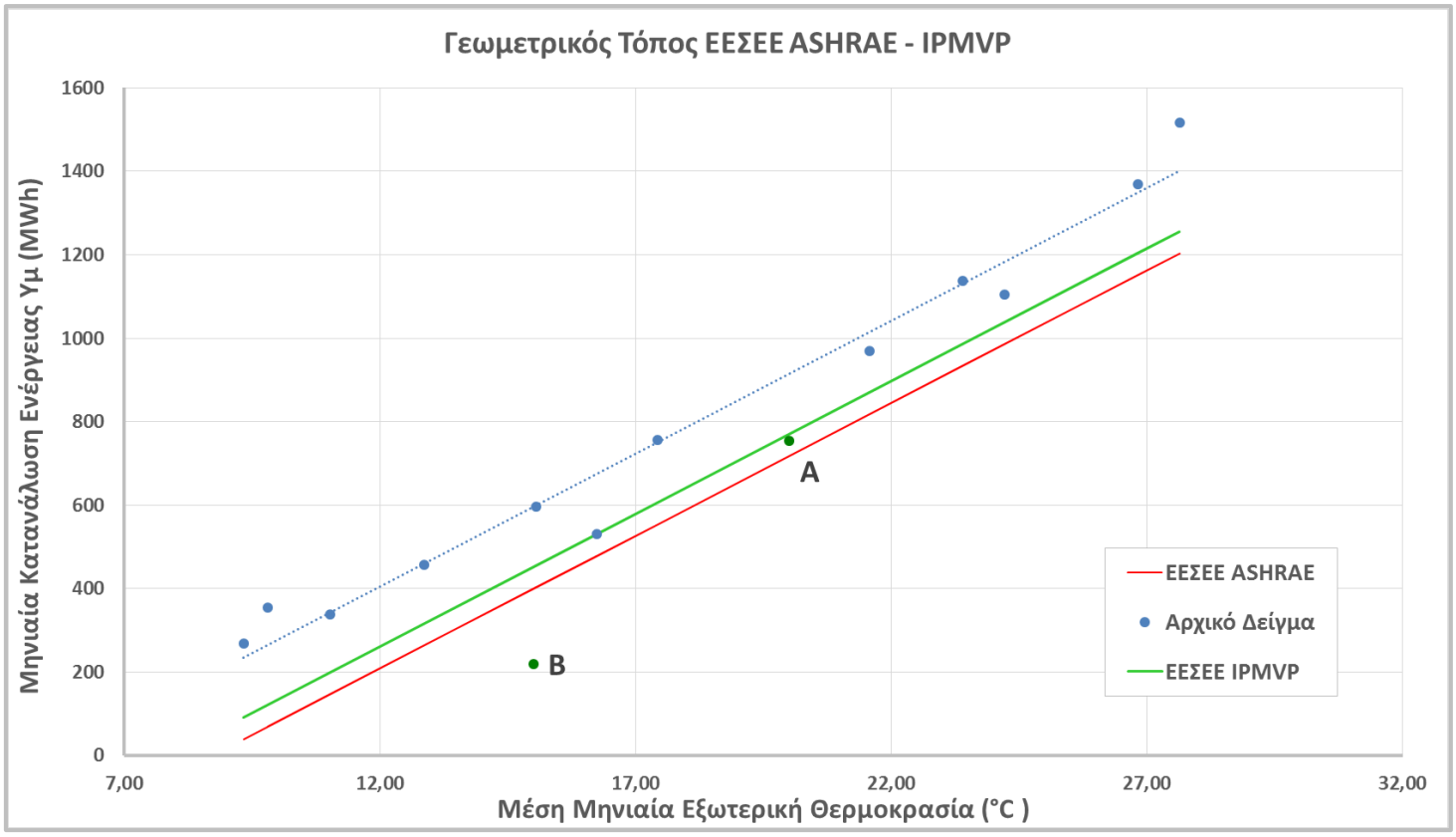
Η εξίσωση αυτή εφαρμόζεται για πλήθος Μ μετρήσεων κατά την περίοδο απολογισμού και εμπίπτει στην περίπτωση της μίας μέτρησης όταν Μ=1. Αντικαθιστώντας τον ΕΕΣΕΕ με την ποσοστιαία εξοικονόμηση και γράφοντας την (3.14) ως ανίσωση λαμβάνουμε:

$$\frac{\mu_{\widetilde{\Delta Y_\mu}}}{\bar{Y}_N} \geq \frac{1{,}26}{0{,}5\bar{Y}_N}\sqrt{MT\Sigma\left(1+\frac{2}{N}\right)\frac{1}{M}}$$

$$\frac{\widetilde{\mu_{Y_\mu}} - Y_\mu}{\bar{Y}_N} \geq \frac{1{,}26}{0{,}5\bar{Y}_N}\sqrt{MT\Sigma\left(1+\frac{2}{N}\right)\frac{1}{M}}$$

$$Y_\mu \leq b_1X_\mu + b_0 - 2{,}52\sqrt{MT\Sigma\left(1+\frac{2}{N}\right)\frac{1}{M}} \qquad (3.15)$$

Η ανίσωση (3.15) οριοθετεί τον γεωμετρικό τόπο τον αποδεκτών σημείων από άποψη εξοικονόμησης ενέργειας όπως ορίζεται από το πρότυπο της ASHRAE. Οι ανισώσεις (3.13) και (3.15) απεικονίζονται γραφικά στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα (3.1) Γεωμετρικός τόπος των σημείων (X_μ,Y_μ) που ικανοποιούν τις ανισώσεις (3.13) και (3.15)

Η πράσινη ευθεία του σχήματος (3.1) αποτελεί τον γεωμετρικό τόπο των ζευγών μετρήσεων (X_μ, Y_μ) που ικανοποιούν την ανίσωση (3.13) ως ισότητα και συνεπώς οδηγούν σε εκτίμηση εξοικονόμησης ενέργειας ίση με τον ΕΕΣΕΕ κατά IPMVP. Κάθε σημείο που βρίσκεται χαμηλότερα της πράσινης ευθείας ικανοποιεί την (3.13) ως ανίσωση και άρα η αντίστοιχη εκτίμηση της εξοικονόμησης ενέργειας είναι στατιστικά σημαντική. Κάθε σημείο σε θέση υψηλότερη της πράσινης ευθείας δεν ικανοποιεί τις απαιτήσεις ακριβείας και η αντίστοιχη εκτίμηση εξοικονόμηση ενέργειας δεν θεωρείται αποδεκτή κατά IPMVP. Αντίστοιχα ισχύουν και για την κόκκινη ευθεία, η οποία αποτελεί το όριο του γεωμετρικού τόπου των αποδεκτών σημείων κατά ASHRAE. Παρατηρούμε πως και οι δύο ευθείες αποτελούν ουσιαστικά παράλληλες μετατοπίσεις της ευθείας της παλινδρόμησης (γαλάζια διακεκομμένη ευθεία) προς τα κάτω. Έτσι, εάν κατά τη διάρκεια ενός μηνός με μέση εξωτερική θερμοκρασία 20°C το νέο σύστημα ψύξης παρουσιάσει μηνιαία κατανάλωση 755 MWh (σημείο A), τότε η εξοικονόμηση ενέργειας που επετεύχθη κατά το συγκεκριμένο μήνα είναι στατιστικά σημαντική με βάση το πρότυπο IPMVP, καθώς το σημείο A βρίσκεται κάτω απ' την πράσινη ευθεία. Ωστόσο, με βάση το πρότυπο ASHRAE, δεν μπορούμε να αποφανθούμε για το αν επετεύχθη στατιστικά σημαντική εξοικονόμηση ενέργειας, καθώς το σημείο βρίσκεται πάνω απ' την κόκκινη ευθεία. Ομοίως, το σημείο B είναι αποδεκτό με βάση οποιοδήποτε εκ' των δύο προτύπων.

Εν αντιθέσει με την εκτίμηση του σφάλματος εκτιμήσεως $s\{\widetilde{Y}_\mu\}$ που αναφέρεται στον Οδηγό Ενεργειακό Ελέγχων, στην παρούσα ανάλυση προτείνεται μία πιο σύνθετη μορφή, όπως αυτή προέκυψε απ' την ανάλυση αβεβαιότητας της μονοδιάστατης γραμμικής παλινδρόμησης στο προηγούμενο κεφάλαιο:

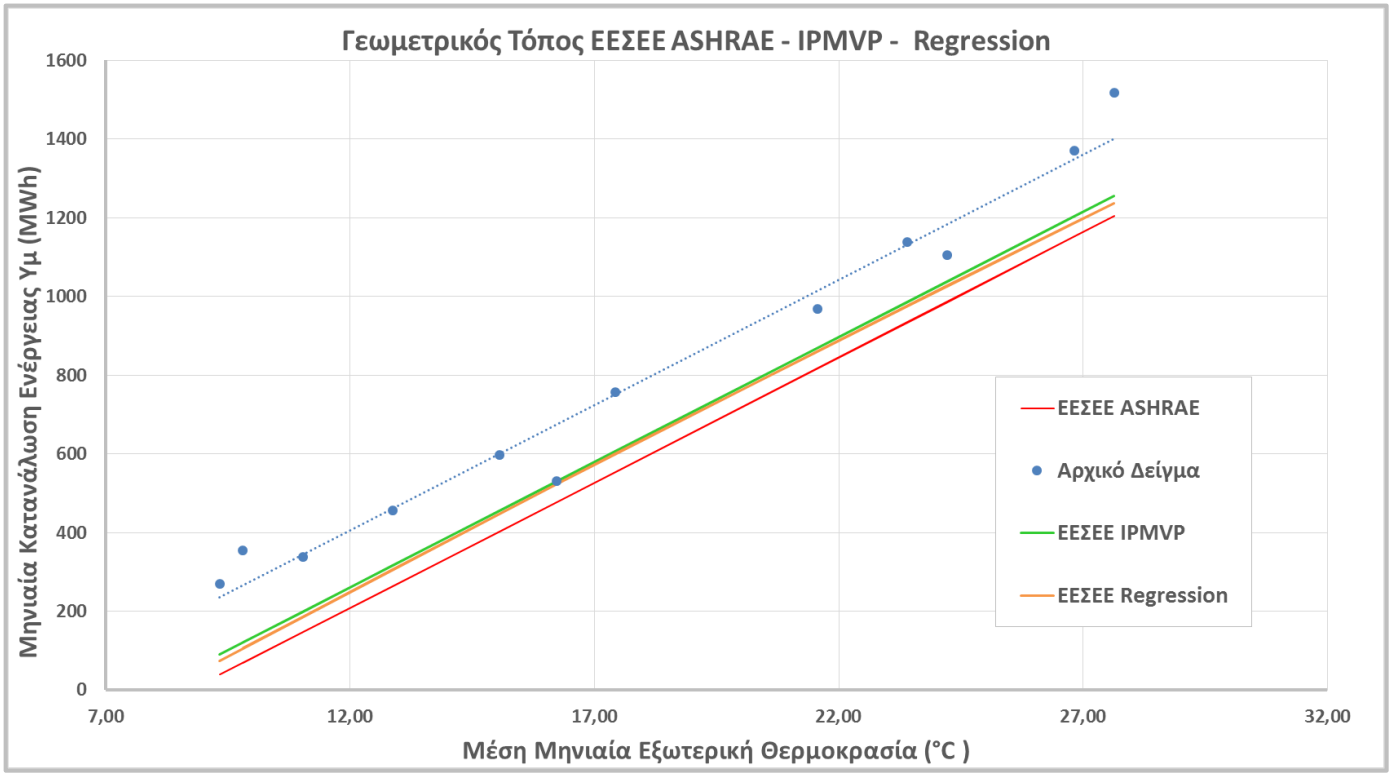
$$s^2\{\widetilde{Y}_\mu\} = MT\Sigma\left[1 + \frac{1}{N} + \frac{(X_\mu - \bar{X}_N)^2}{\sum_{\nu=1}^{N}(X_\nu - \bar{X}_N)^2}\right]$$

Είναι σημαντικό να υπενθυμίσουμε πως αυτή η έκφραση του σφάλματος αποτελεί συνάρτηση της τιμής X_μ και πως η αβεβαιότητα μειώνεται, όσο η τιμή X_μ τείνει προς τη μέση τιμή $\bar{X}_N$ του δείγματος που χρησιμοποιήθηκε για την κατασκευή του μοντέλου. Εργαζόμενοι ομοίως με παραπάνω, αντικαθιστούμε την νέα έκφραση του σφάλματος εκτιμήσεως καθώς και την εξίσωση (3.5) στην ανίσωση (3.10):

$$\mu_{\widetilde{\Delta Y}_\mu} - \mathrm{t}\{1-\alpha; \mathrm{N}-2\}\sigma\{\widetilde{\Delta Y}_\mu\} \geq 0$$

$$b_1 X_\mu + b_0 - Y_\mu - t_a\sqrt{MT\Sigma\left[1 + \frac{1}{N} + \frac{(X_\mu - \bar{X}_N)^2}{\sum_{\nu=1}^{N}(X_\nu - \bar{X}_N)^2}\right] + \sigma_{\mu\varepsilon\tau}^2} \geq 0$$

$$Y_\mu \leq b_1 X_\mu + b_0 - t_a\sqrt{MT\Sigma\left[1 + \frac{1}{N} + \frac{(X_\mu - \bar{X}_N)^2}{\sum_{\nu=1}^{N}(X_\nu - \bar{X}_N)^2}\right] + \sigma_{\mu\varepsilon\tau}^2} \qquad (3.16)$$



Σχήμα (3.2) Σύγκριση του γεωμετρικού τόπου των σημείων που ικανοποιούν τις απαιτήσεις ακριβείας με βάση την προσέγγιση του προτύπου IPMVP (πράσινη γραμμή), του προτύπου ASHRAE (κόκκινη γραμμή) και της προσέγγισης της μονοδιάστατης γραμμικής παλινδρόμησης (καφέ γραμμή)

Στο σχήμα (3.2) απεικονίζεται ο γεωμετρικός τόπος του ΕΕΣΕΕ εφόσον χρησιμοποιηθεί η αναλυτική προσέγγιση της γραμμικής παλινδρόμησης έναντι των εκτιμήσεων που αναφέρονται στον Οδηγό Ενεργειακών Ελέγχων. Πρακτικά, η καμπύλη που προκύπτει απ' την εξίσωση (3.16) αποτελεί μία σχεδόν παράλληλη μετατόπιση της ευθείας (3.15) προς τα κάτω, καθιστώντας ένα επιπλέον σύνολο σημείων μη αποδεκτό. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα η διαφορά μεταξύ των καμπυλών του προτύπου IPMVP και της θεωρίας της γραμμικής

παλινδρόμησης είναι αρκετά μικρή. Η διαφορά αναμένεται να είναι αισθητά μεγαλύτερη στο επόμενο στάδιο, όπου θα τεθούν οι απαιτήσεις ακριβείας για ένα σύνολο Μ εκτιμήσεων, καθώς η εξίσωση κατά IPMVP δεν λαμβάνει υπόψιν το μέγεθος δείγματος Μ.

Καλύτερη εικόνα των απαιτήσεων ακριβείας επιτυγχάνεται μέσω της γραφικής απεικόνισης της ανίσωσης (3.11), η οποία περιλαμβάνει τους ποσοστιαίους όρους εξοικονόμησης ενέργειας:

$$\mu_{\widetilde{\delta\varepsilon_\mu}} - \mathrm{t}\{1-\alpha; \mathrm{N}-2\}\sigma_{\widetilde{\delta\varepsilon_\mu}} > 0$$

$$\mathrm{t}\{1-\alpha; \mathrm{N}-2\}\sigma_{\widetilde{\delta\varepsilon_\mu}} < \mu_{\widetilde{\delta\varepsilon_\mu}} \qquad (3.17)$$

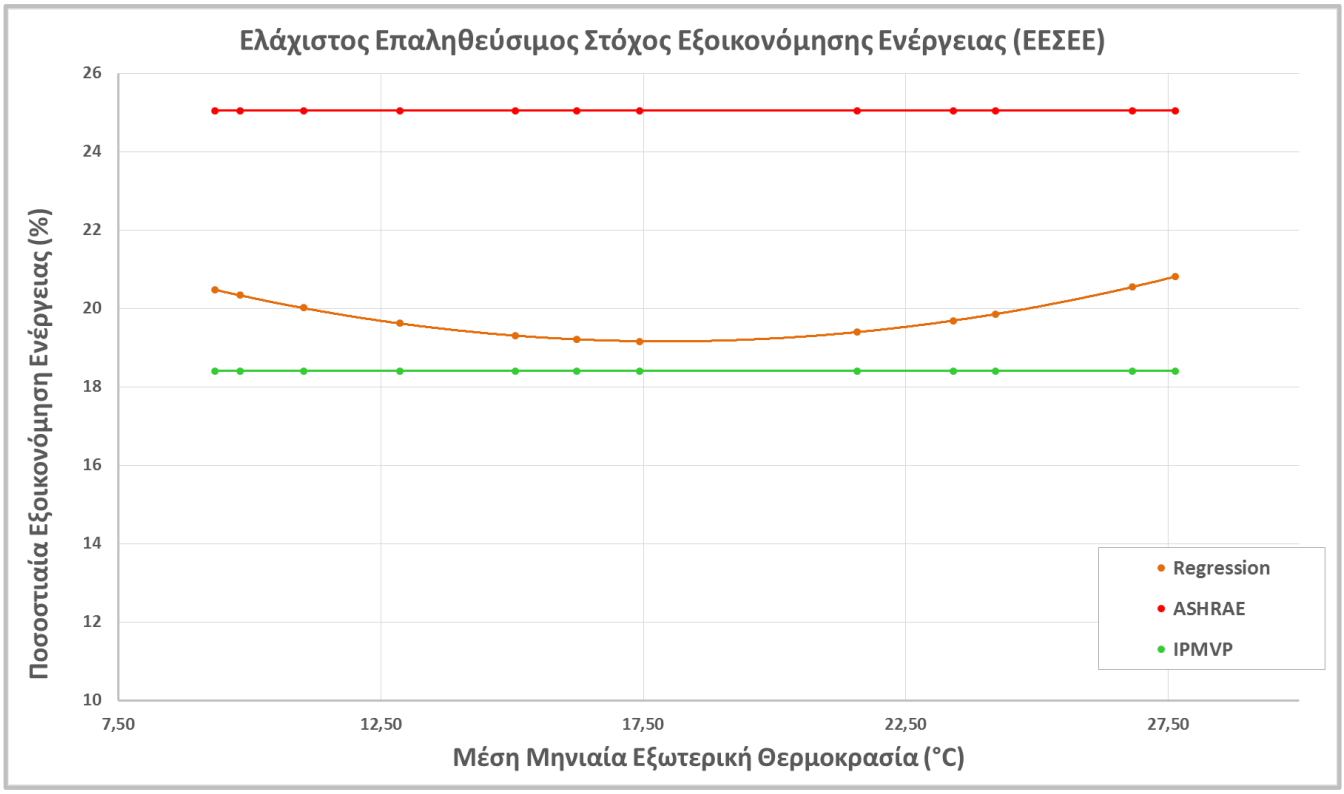
Στην εξίσωση (3.17) αντικαθίστανται οι δύο διαφορετικές εκφράσεις του ποσοστιαίου σφάλματος σύμφωνα με την προσέγγιση του προτύπου IPMVP και την προσέγγιση της γραμμικής παλινδρόμησης. Οι δύο ανισώσεις γράφονται ως εξισώσεις, ώστε να προσδιοριστεί ο ΕΕΣΕΕ κάθε προσέγγισης:

$$(EE\Sigma EE)_{IPMVP} = \mathrm{t}\{1-\alpha; \mathrm{N}-2\}\frac{\sqrt{MT\Sigma+\sigma_{\mu\varepsilon\tau}^2}}{\bar{Y}_N} \qquad (3.18.\alpha)$$

$$(EE\Sigma EE)_{REGRESSION} = \mathrm{t}\{1-\alpha; \mathrm{N}-2\}\ \frac{\sqrt{MT\Sigma\left[1+\frac{1}{N}+\frac{(X_\mu-\bar{X}_N)^2}{\sum_{\nu=1}^{N}(X_\nu-\bar{X}_N)^2}\right]+\sigma_{\mu\varepsilon\tau}^2}}{\bar{Y}_N} \qquad (3.18.\beta)$$

$$(EE\Sigma EE)_{ASHRAE} = \frac{1{,}26\sqrt{MT\Sigma\left[\left(1+\frac{2}{N}\right)\frac{1}{M}\right]}}{0{,}5\bar{Y}_N} \qquad (3.18.\gamma)$$

Παρατίθεται και η έκφραση του ΕΕΣΕΕ κατά ASHRAE για λόγους συγκρίσεως. Οι τρεις παραπάνω ανισώσεις παρίστανται γραφικά στο επόμενο σχήμα λαμβάνοντας την παράμετρο t ίση με 2, τιμή που αντιστοιχεί σε βαθμό εμπιστοσύνης περίπου 96-97%:



Σχήμα (3.3) Ελάχιστος επαληθεύσιμος στόχος εξοικονόμησης ενέργειας ΕΕΣΕΕ σύμφωνα με το πρότυπο IPMVP, το πρότυπο κατά ASHRAE και τη μέθοδο της γραμμικής παλινδρόμησης

Στο σχήμα (3.3) παρατηρούμε πως ακολουθώντας την προσέγγιση του IPMVP (ανίσωση 3.18.α) ο ΕΕΣΕΕ λαμβάνει μία σταθερή τιμή ίση με 18,4%. Έτσι, ανεξάρτητα απ' τη μέση εξωτερική θερμοκρασία, εφόσον η εκτίμηση της εξοικονόμησης ενέργειας ενός μήνα είναι ίση ή μεγαλύτερη από το 18,4% της μέσης κατανάλωσης του παλιού δείγματος $\bar{Y}_N$, τότε η εξοικονόμηση ενέργειας θεωρείται στατιστικά σημαντική κατά IPMVP. Το ίδιο ισχύει και για την προσέγγιση της ASHRAE, απλά η αντίστοιχη σταθερή τιμή του ΕΕΣΕΕ είναι υψηλότερη και ισούται με 25,04 % (ανίσωση (3.18.γ)). Αντιθέτως, χρησιμοποιώντας την έκφραση του σφάλματος της γραμμικής παλινδρόμησης (ανίσωση 3.18.β), ο ΕΕΣΕΕ μεταβάλλεται ως συνάρτηση της θερμοκρασίας κατά την περίοδο απολογισμού, λαμβάνοντας την ελάχιστη τιμή του όταν εκείνη ταυτίζεται με τη μέση τιμή $\bar{X}_N$ του αρχικού δείγματος μετρήσεων. Ο ΕΕΣΕΕ που ορίζεται απ' την μέθοδο της παλινδρόμησης κυμαίνεται από 19,15% έως 20,8%. Γίνεται άμεσα αντιληπτό πως οι εξισώσεις ASHRAE και IPMVP δεν λαμβάνουν υπόψιν την επίδραση της μέσης εξωτερικής θερμοκρασίας στον ΕΕΣΕΕ. Η εξίσωση της ASHRAE είναι εμπειρική και προσομοιώνει καλύτερα την αβεβαιότητα σε μεγαλύτερο πλήθος μετρήσεων. Γι' αυτό δεν συνιστά αξιόπιστο κριτήριο στην εκτίμηση της εξοικονόμησης κατά τη διάρκεια μίας μόνης περιόδου μ.

Έχοντας σχεδιάσει τα παραπάνω διαγράμματα, μπορούμε εύκολα και γρήγορα να αποφανθούμε για το αν η εκτίμηση της εξοικονόμησης ενέργειας που επετεύχθη τον μ-οστό μήνα είναι στατιστικώς σημαντική. Είναι σημαντικό να αναφερθεί πως αυτά τα διαγράμματα δύνανται να κατασκευαστούν έχοντας στη διάθεσή μας μόνο το αρχικό δείγμα των N μετρήσεων που προκύπτουν απ' τη λειτουργεία του παλιού ψυκτικού συστήματος κατά την περίοδο βάσης. Συνεπώς, μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως σχεδιαστικό εργαλείο. Δεδομένων των ΕΕΣΕΕ που ορίζονται από την γραμμική παλινδρόμηση, την ASHRAE και το IPMVP, γίνεται άμεσα αντιληπτό πως η αντικατάσταση του παλιού συστήματος με ένα νέο,

το οποίο αναμένεται να επιτύχει εξοικονόμηση ενέργειας ίση με 10-15% θα ήταν άσκοπη, καθώς οποιαδήποτε εκτίμηση εξοικονόμησης μέσα στο διάστημα αυτό δεν θα θεωρείτο στατιστικά σημαντική. Γνωρίζοντας τον γεωμετρικό τόπο των αποδεκτών σημείων σαν συνάρτηση του επιπέδου σημαντικότητας α, τόσο ο μελετητής, όσο και ο επενδυτής, αποκτούν καλύτερη εικόνα του προβλήματος και μπορούν να εκτιμήσουν καλύτερα το τι ποσοστό εξοικονόμησης ενέργειας θα αποτελούσε έναν ρεαλιστικό στόχο.

Εφόσον η μέτρηση (X_μ,Y_μ) βρίσκεται εντός του γεωμετρικού τόπου των σημείων που ικανοποιούν τις απαιτήσεις ακριβείας, το διάστημα εμπιστοσύνης της εκτίμησης της εξοικονόμησης ενέργειας προσδιορίζεται απ' την εξίσωση (3.7) ή εν είδει ποσοστού απ' την εξίσωση (3.8). Σε περίπτωση όμως που η μέτρηση (X_μ,Y_μ) δεν εμπίπτει στον γεωμετρικό τόπο των αποδεκτών σημείων, τότε δεν μπορούμε να αποφανθούμε για το αν η εκτίμηση της εξοικονόμησης ενέργειας κατά τον μ-οστό μήνα είναι στατιστικά μεγαλύτερη ή ίση του μηδενός. Σε αυτή την περίπτωση απαιτούνται περαιτέρω μετρήσεις κατά τους επόμενους μήνες της περιόδου απολογισμού, οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν για τον σχεδιασμό αντίστοιχων διαγραμμάτων με τα παραπάνω. Τα νέα διαγράμματα θα εξετάζουν το κατά πόσο η εκτίμηση της μέσης εξοικονόμησης ενέργειας που επετεύχθη κατά τους Μ μήνες λειτουργίας του νέου συστήματος είναι στατιστικά σημαντική. Υπενθυμίζεται στο σημείο αυτό πως το σφάλμα εκτίμησης της μέσης τιμής Μ τιμών είναι μικρότερο απ' ότι το σφάλμα εκτίμησης κάθε μίας τιμής ξεχωριστά. Το γεγονός αυτό πρόκειται να αξιοποιήσουμε στο επόμενο μέρος της ανάλυσης.

3.3 Εκτίμηση της μέσης εξοικονόμησης ενέργειας κατά την πάροδο Μ περιόδων

3.3.1 Προσδιορισμός εξοικονόμησης ενέργειας και αβεβαιότητας

Έστω λοιπόν ένα σύνολο Μ μετρήσεων μέσης μηνιαίας θερμοκρασίας – μηνιαίας κατανάλωσης (X_μ,Y_μ), οι οποίες ελήφθησαν αφού το νέο σύστημα ψύξης τέθηκε σε λειτουργία κατά την περίοδο απολογισμού. Κάθε μία από τις παραπάνω μετρήσεις θα χαρακτηρίζεται από σχετική αβεβαιότητα και το αντίστοιχο διάστημα εμπιστοσύνης δίνεται απ' την εξίσωση (3.1). Η μέση τιμή των Μ μετρήσεων $\bar{Y}_M$ θα παρουσιάζει μικρότερη αβεβαιότητα απ' ότι κάθε μία μέτρηση ξεχωριστά:

$$\bar{Y}_M = \bar{Y}_{0M} \pm z\left\{1-\frac{\alpha}{2}\right\}\frac{\sigma_{\mu\varepsilon\tau}}{\sqrt{M}} \tag{3.19}$$

Όπου με $\bar{Y}_{0M}$ συμβολίζεται η πραγματική μέση κατανάλωση κατά τους Μ μήνες λειτουργίας

$$\bar{Y}_{0M} = \frac{\sum_{\mu=1}^{M} Y_{0\mu}}{M} \tag{3.20}$$

Από την (3.19) προκύπτει το διάστημα εμπιστοσύνης της πραγματικής μέσης κατανάλωσης κατά τους Μ μήνες $\bar{Y}_{0M}$ σε επίπεδο σημαντικότητας α:

$$\bar{Y}_{0M} = \bar{Y}_M \pm z\left\{1-\frac{\alpha}{2}\right\}\frac{\sigma_{\mu\varepsilon\tau}}{\sqrt{M}} \tag{3.21}$$

Η μέση ενέργεια $\widetilde{\bar{Y}_M}$ που θα κατανάλωνε μηνιαία το παλιό σύστημα ψύξης, εφόσον δεν είχε αντικατασταθεί και λειτουργούσε κατά τη διάρκεια των Μ μηνών της περιόδου απολογισμού, θα εκτιμηθεί από το μοντέλο της γραμμικής παλινδρόμησης:

$$\widetilde{\bar{Y}_M} = b_1\bar{X}_M + b_0 + \frac{\sum_{\mu=1}^{M}\varepsilon}{\mathrm{M}} = \widetilde{\mu_{\bar{Y}_M}} + \overline{\varepsilon_M}$$
$$\widetilde{\mu_{\bar{Y}_M}} = b_1\bar{X}_M + b_0$$

Η εκτίμηση της μέσης μηνιαίας κατανάλωσης ενέργειας, ως τυχαία μεταβλητή, χαρακτηρίζεται από σχετική αβεβαιότητα, η οποία υπολογίστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Το διάστημα εμπιστοσύνης σε επίπεδο σημαντικότητας α δίνεται ως εξής:

$$\widetilde{\overline{Y_M}} = \mu_{\widetilde{\overline{Y_M}}} \pm t\{1 - \frac{\alpha}{2}; N - 2\} s\left\{\widetilde{\overline{Y_M}}\right\} \tag{3.22}$$

$$s^2\left\{\widetilde{\overline{Y_M}}\right\} = MT\Sigma\left[\frac{1}{M} + \frac{1}{N} + \frac{(\bar{X}_M - \bar{X}_N)^2}{\sum_{\nu=1}^{N}(X_\nu - \bar{X}_N)^2}\right]$$

Η εκτίμηση της μέσης μηνιαίας εξοικονόμησης ενέργειας προκύπτει αφαιρώντας την πραγματική μέση μηνιαία κατανάλωση ενέργειας από την εκτίμηση της μέσης μηνιαίας κατανάλωσης ενέργειας που θα παρουσίαζε το παλιό σύστημα κατά το διάστημα των M μηνών:

$$\widetilde{\overline{\Delta Y}}_M = \widetilde{\overline{Y_M}} - \bar{Y}_{0M} \tag{3.23}$$

Η εκτίμηση $\widetilde{\overline{\Delta Y}}_M$, ως διαφορά τυχαίων μεταβλητών που ακολουθούν κατανομή Student και κανονική κατανομή αντίστοιχα, θα ακολουθεί κατανομή Student με N-2 βαθμούς ελευθερίας, μέση τιμή $\mu_{\widetilde{\overline{\Delta Y}}_M}$ και τυπική απόκλιση $\sigma\{\widetilde{\overline{\Delta Y}}_M\}$:

$$\mu_{\widetilde{\overline{\Delta Y}}_M} = \mu_{\widetilde{\overline{Y_M}}} - \bar{Y}_M \tag{3.24}$$

$$\sigma^2\left\{\widetilde{\overline{\Delta Y}}_M\right\} = s^2\left\{\widetilde{\overline{Y_M}}\right\} + s^2\{\bar{Y}_M\} = s^2\left\{\widetilde{\overline{Y_M}}\right\} + \frac{\sigma^2_{\mu\varepsilon\tau}}{M} \tag{3.25}$$

Το διάστημα εμπιστοσύνης της εκτίμησης της μέσης μηνιαίας εξοικονόμησης ενέργειας θα δίνεται σε επίπεδο σημαντικότητας α από την κάτωθι εξίσωση:

$$\widetilde{\overline{\Delta Y}}_M = \mu_{\widetilde{\overline{\Delta Y}}_M} \pm \mathrm{t}\left\{1 - \frac{\alpha}{2}; \mathrm{N} - 2\right\} \sigma\left\{\widetilde{\overline{\Delta Y}}_M\right\} \tag{3.26}$$

Τα μεγέθη της εξίσωσης (3.26) μετασχηματίζονται στα αντίστοιχα ποσοστιαία διαιρώντας την εξίσωση με τον όρο $\bar{Y}_N$:

$$\widetilde{\delta\varepsilon}_M = \mu_{\widetilde{\delta\varepsilon}_M} \pm \mathrm{t}\left\{1 - \frac{\alpha}{2}; \mathrm{N} - 2\right\} \sigma_{\widetilde{\delta\varepsilon}_M} \tag{3.27}$$

3.3.2 Απαιτήσεις ακριβείας – Ελάχιστος Επαληθεύσιμος Στόχος Εξοικονόμησης Ενέργειας (ΕΕΣΕΕ)

Οι απαιτήσεις ακριβείας που περιγράφονται στην ανίσωση (3.10) γράφονται αναλόγως και για τους όρους της μέσης εξοικονόμησης ενέργειας. Έτσι, ο μονόπλευρος στατιστικός έλεγχος που διενεργείται εξετάζει το κατά πόσο η εκτίμηση της μέσης μηνιαίας εξοικονόμησης ενέργειας είναι στατιστικά μεγαλύτερη του μηδενός σε επίπεδο σημαντικότητας α:

$$\mu_{\widetilde{\overline{\Delta Y}}_M} - \mathrm{t}\{1 - \alpha; \mathrm{N} - 2\}\sigma\left\{\widetilde{\overline{\Delta Y}}_M\right\} > 0 \tag{3.28}$$

Η εξίσωση (3.28) γράφεται ομοίως και με τη χρήση των ποσοστιαίων μεγεθών:

$$\mu_{\widetilde{\delta\varepsilon}_M} - \mathrm{t}\{1 - \alpha; \mathrm{N} - 2\}\sigma_{\widetilde{\delta\varepsilon}_M} > 0 \tag{3.29}$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (3.24) και (3.25) στην εξίσωση (3.28) μπορούμε να προσδιορίσουμε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων $(\bar{X}_M, \bar{Y}_M)$, τα οποία ικανοποιούν τις απαιτήσεις ακριβείας:

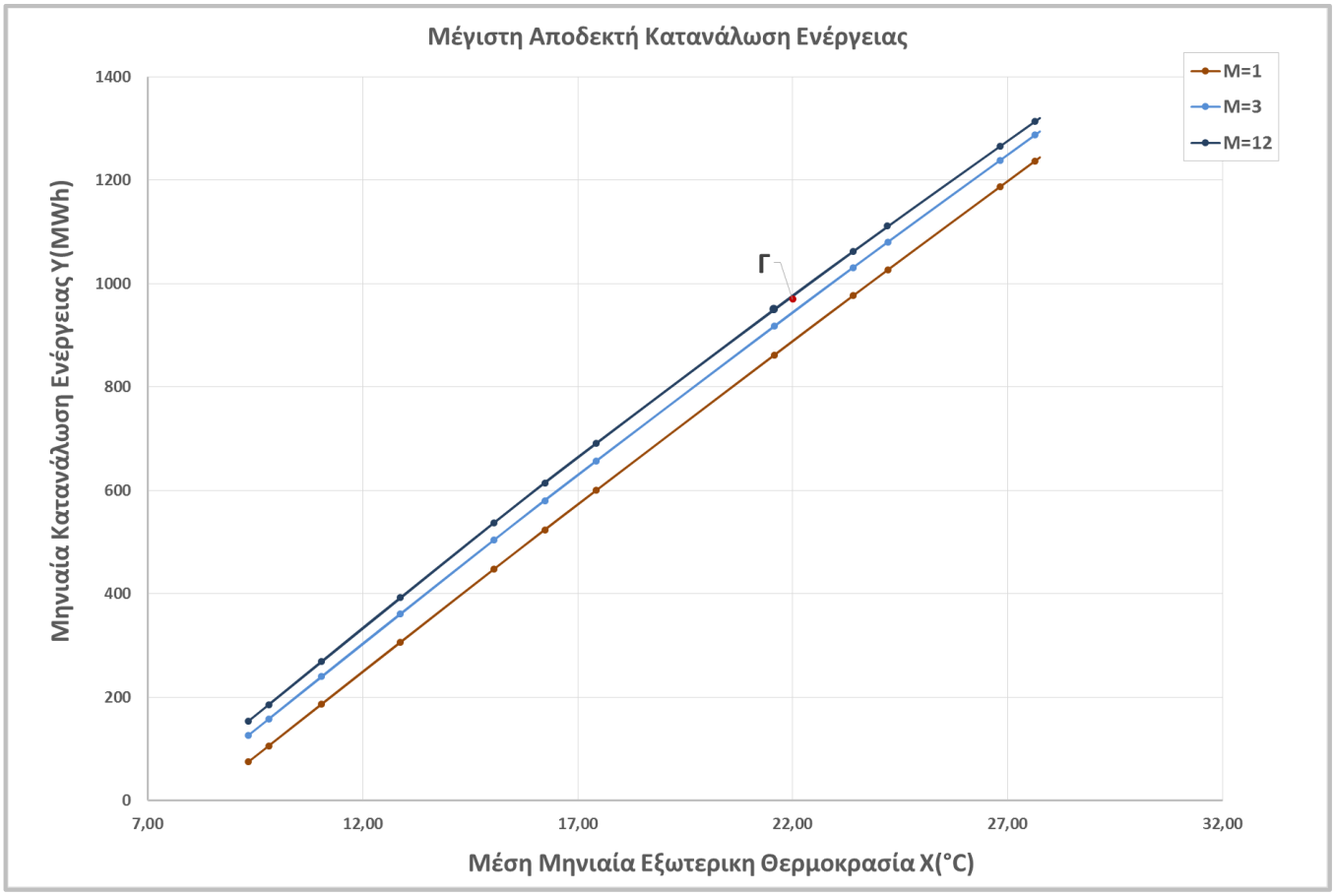
$$\widetilde{\mu_{\bar{Y}_M}} - \bar{Y}_M - \mathrm{t}\{1-\alpha; \mathrm{N}-2\}\sigma\left\{\widetilde{\Delta\bar{Y}_M}\right\} \geq 0$$

$$\bar{Y}_M \leq \widetilde{\mu_{\bar{Y}_M}} - \mathrm{t}\{1-\alpha; \mathrm{N}-2\}\sigma\left\{\widetilde{\Delta\bar{Y}_M}\right\} \qquad (3.30)$$

Το τυπικό σφάλμα της εκτίμησης της μέσης μηνιαίας εξοικονόμησης ενέργειας αντικαθίσταται μέσω της εξίσωσης (3.25), ενώ για λόγους διευκόλυνσης χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $t_a = \mathrm{t}\{1-\alpha; \mathrm{N}-2\}$:

$$\bar{Y}_M \leq b_1\bar{X}_M + b_0 - t_\alpha\sqrt{MT\Sigma\left[\frac{1}{M}+\frac{1}{N}+\frac{(\bar{X}_M-\bar{X}_N)^2}{\sum_{\nu=1}^{N}(X_\nu-\bar{X}_N)^2}\right]+\frac{\sigma_{\mu\varepsilon\tau}^2}{M}} \qquad (3.31)$$

Λαμβάνοντας την τυπική απόκλιση του οργάνου $\sigma_{\mu\varepsilon\tau}$ ίση με μηδέν σχεδιάζουμε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων που ικανοποιούν την ανίσωση (3.31) για διάφορες τιμές του μεγέθους δείγματος M. Για M=1 η παραπάνω ανίσωση εμπίπτει στην περίπτωση μίας μέτρησης και ταυτίζεται με την ανίσωση (3.16).



Σχήμα (3.4) Σύγκριση των απαιτήσεων ακριβείας κατά τη λήψη μίας μέτρησης μέσης θερμοκρασίας-κατανάλωσης με εκείνες κατά τη λήψη δείγματος 3 και 12 μετρήσεων μέσης θερμοκρασίας-κατανάλωσης

Στο σχήμα (3.4) απεικονίζεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων (X_μ,Y_μ) που ικανοποιούν την ανίσωση (3.16) ως ισότητα (καφέ γραμμή M=1). Η εμφάνισή ενός τέτοιου ζεύγους μετρήσεων κατά τον μ-οστό μήνα λειτουργίας του νέου συστήματος συνεπάγεται την επίτευξη εξοικονόμησης ενέργειας ίση με τον ΕΕΣΕΕ. Η εμφάνιση ζεύγους μετρήσεων που ευρίσκεται χαμηλότερα της μπλε γραμμής του σχήματος (3.4) συνεπάγεται μεγαλύτερη εξοικονόμηση ενέργειας από τον ΕΕΣΕΕ, ενώ κάθε ζεύγος μετρήσεων υψηλότερα της καφέ γραμμής δεν

συνεπάγεται στατιστικά επαληθεύσιμη εξοικονόμηση ενέργειας. Επιπλέον απεικονίζεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $(\bar{X}_3, \bar{Y}_3)$ και $(\bar{X}_{12}, \bar{Y}_{12})$ που ικανοποιούν την ανίσωση (3.31) ως ισότητα (γαλάζια και μπλε σκούρα γραμμή) για M=3 και M=12 αντίστοιχα. Ομοίως με παραπάνω, η εμφάνιση ενός τέτοιου ζεύγους τιμών μέσων όρων κατά τους 3 ή 12 μήνες λειτουργείας του νέου συστήματος συνεπάγεται την επίτευξη μέσης μηνιαίας εξοικονόμησης ενέργειας ίσης με τον ΕΕΣΕΕ. Η εμφάνιση ζεύγους τιμών μέσων όρων που ευρίσκεται χαμηλότερα της αντίστοιχης γραμμής του σχήματος (3.4) συνεπάγεται εξοικονόμηση ενέργειας μεγαλύτερη του ΕΕΣΕΕ, ενώ κάθε σημείο υψηλότερα της γραμμής δεν συνεπάγεται στατιστικά επαληθεύσιμη εξοικονόμηση ενέργειας. Παρατηρούμε πως για κάθε τιμή X, η γαλάζια και η μπλε καμπύλη βρίσκονται υψηλότερα της καφέ και συνεπώς οι απαιτήσεις ακριβείας κατά την λήψη μίας μόνης μέτρησης είναι αυστηρότερες απ' ότι κατά την λήψη μέσου όρου 3 ή 12 μετρήσεων.

Έστω παραδείγματος χάριν ότι κατά τον μ-οστό μήνα λειτουργίας του νέου συστήματος ελήφθη μέτρηση $(X_\mu, Y_\mu)=(15, Y_0)$. Η μέγιστη τιμή που δύναται να λάβει η κατανάλωση ενέργειας Y_0, προκειμένου η εξοικονόμηση ενέργειας να είναι στατιστικά σημαντική είναι ίση με την κατανάλωση $Y_\mu(X_\mu = 15) = 448$ που προβλέπεται απ' την ανίσωση (3.16). Επιπλέον, έστω ότι κατά τη λειτουργεία του νέου συστήματος για 12 μήνες ελήφθησαν 12 μετρήσεις (X_μ, Y_μ) με μέση τιμή $(\bar{X}_{12}, \bar{Y}_{12}) = (15, \bar{Y}_0)$. Η μέγιστη τιμή που δύναται να λάβει η μέση μηνιαία κατανάλωση ενέργειας $\bar{Y}_0$, προκειμένου η μέση μηνιαία εξοικονόμηση ενέργειας να είναι στατιστικά σημαντική, είναι ίση με την κατανάλωση $\bar{Y}_{12}(\bar{X}_{12} = 15) = 537$ όπως προβλέπεται απ' την ανίσωση (3.31). Η μέγιστη αποδεκτή τιμή της μέσης μηνιαίας κατανάλωσης ενέργειας $\bar{Y}_{12}(\bar{X}_{12} = 15)$ είναι αισθητά μεγαλύτερη απ' ότι αυτή της μηνιαίας κατανάλωσης ενέργειας $Y_\mu(X_\mu = 15)$. Συνεπώς, για τα ίδια επίπεδα θερμοκρασίας, η μέση μηνιαία κατανάλωση ενέργειας $\bar{Y}_{12}$ παρουσιάζει ευρύτερο πεδίο τιμών στατιστικά σημαντικής εξοικονόμησης ενέργειας απ' ότι η μηνιαία κατανάλωση Y_μ. Αυτό σημαίνει πως στην πράξη, η αξιοποίηση της προσέγγιση της μέσης τιμής δίνει τη δυνατότητα επαλήθευσης της εξοικονόμησης ενέργειας για ένα σύστημα με χειρότερες επιδόσεις απ' ότι η προσέγγιση της μίας μόνης μέτρησης. Ως εκ τούτου, το σημείο Γ(22,970) εμπίπτει στο γεωμετρικό τόπο της μέσης τιμής 12 μετρήσεων αλλά όχι σε αυτόν των 3 ή της μίας. Έτσι, εάν σε διάστημα 12 μηνών με μέση θερμοκρασία 22 °C εκτιμηθεί μέση μηνιαία εξοικονόμηση ενέργειας ίση με 970 MWh, τότε η εκτίμηση θεωρείται στατιστικά σημαντική. Αντιθέτως, εάν σε διάστημα 3 μηνών με μέση θερμοκρασία 22 °C εκτιμηθεί μέση μηνιαία εξοικονόμηση 970 MWh, τότε αυτή δεν θεωρείται στατιστικά σημαντική.

Αξίζει να σημειωθεί πως οι παραπάνω γεωμετρικοί τόποι παρουσιάζουν καμπύλη μορφή με ακρότατο στη θέση $X = \bar{X}_N = 17{,}95\ °C$, όπου η αβεβαιότητα του μοντέλου της παλινδρόμησης λαμβάνει την ελάχιστη τιμή της. Στη θέση αυτή, δεδομένης της μειωμένης αβεβαιότητας, η εξοικονόμηση ενέργειας μπορεί να επαληθευτεί για μεγαλύτερες τιμές της κατανάλωσης ενέργειας Y. Η σύγκριση του μοντέλου της παλινδρόμησης με τις προσεγγίσεις κατά IPMVP και ASHRAE θα ακολουθήσουν στη συνέχεια, όπου θα εργαστούμε με τους ποσοστιαίους όρους και οι διαφοροποιήσεις γίνονται ευκολότερα αντιληπτές.

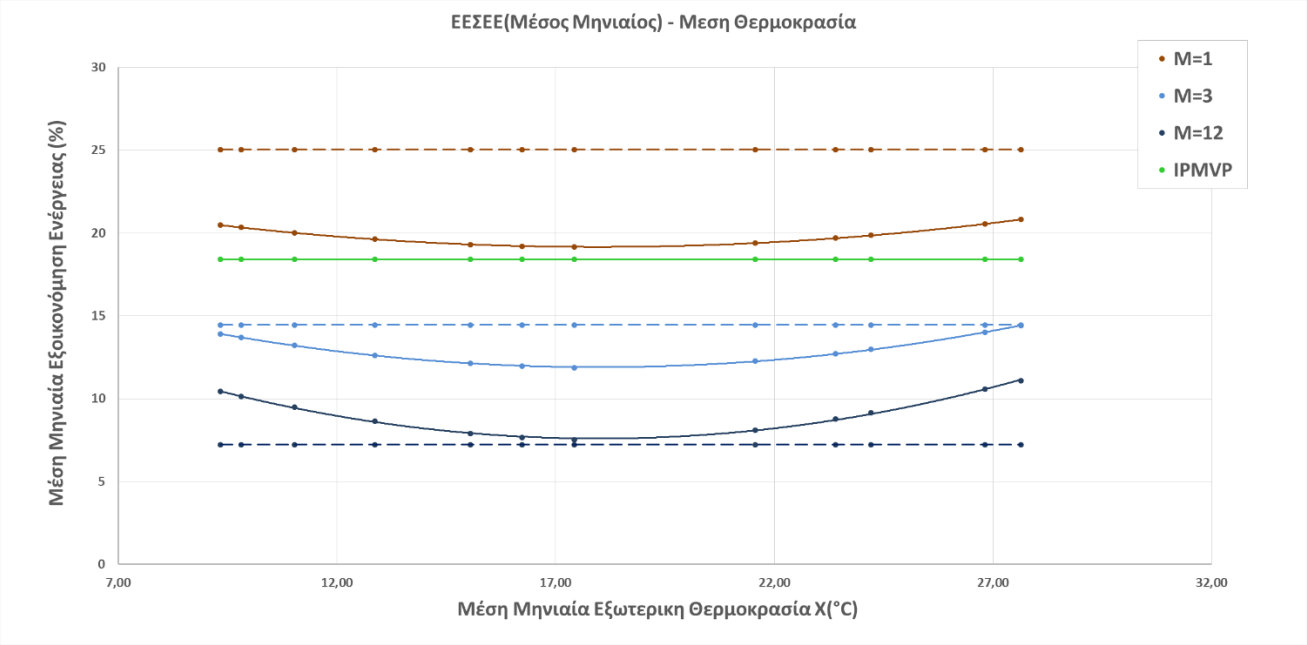
Η παραπάνω συλλογιστική πορεία ολοκληρώνεται με την σχεδίαση των διαγραμμάτων της ποσοστιαίας εξοικονόμησης που απαιτείται να επιτευχθεί κατά τη λήψη μίας σειράς M μετρήσεων. Για το σκοπό αυτό αξιοποιείται η ανίσωση (3.29):

$$\mu_{\widetilde{\delta\varepsilon}_M} - \mathrm{t}\{1-\alpha; \mathrm{N}-2\}\sigma_{\widetilde{\delta\varepsilon}_M} > 0$$

$$t\{1-\alpha; N-2\}\sigma_{\widetilde{\delta\varepsilon}_M} < \mu_{\widetilde{\delta\varepsilon}_M}$$

$$t_\alpha \frac{\sqrt{MT\Sigma\left[\frac{1}{M}+\frac{1}{N}+\frac{(\bar{X}_M-\bar{X}_N)^2}{\Sigma_{\nu=1}^{N}(X_\nu-\bar{X}_N)^2}\right]+\frac{\sigma_{\mu\varepsilon\tau}^2}{M}}}{\bar{Y}_N} \leq \mu_{\widetilde{\delta\varepsilon}_M} \qquad (3.32)$$

Η ανίσωση (3.32) απεικονίζεται γραφικά στο επόμενο σχήμα για διάφορες τιμές του M, t_α ίσο με 2 και $\sigma_{\mu\varepsilon\tau}$ ίσο με μηδέν. Επιπλέον απεικονίζονται οι ευθείες που ορίζουν τον ΕΕΣΕΕ κατά ASHRAE και IPMVP για λόγους συγκρίσεως:



Σχήμα (3.5) Μεταβολή του ελάχιστου επαληθεύσιμου στόχου εξοικονόμησης ενέργειας (ΕΕΣΕΕ) ως συνάρτηση της μέσης εξωτερικής θερμοκρασίας και του μεγέθους δείγματος M σύμφωνα με τις προσεγγίσεις της γραμμικής παλινδρόμησης, της ASHRAE και του IPMVP

Παρατηρώντας το σχήμα (3.5) γίνεται άμεσα αντιληπτό πως οι απαιτήσεις ακριβείας μειώνονται σημαντικά με την αύξηση του μεγέθους δείγματος M. Η πράσινη ευθεία ορίζει τον ΕΕΣΕΕ κατά IPMVP, ο οποίος ισούται με 18,4% και παραμένει σταθερός με την αύξηση του M. Το γεγονός αυτό καθιστά την προσέγγιση του IPMVP ακατάλληλη για την εκτίμηση του ΕΕΣΕΕ στην περίπτωση πολλών μετρήσεων. Οι διακεκομμένες ευθείες ορίζουν τον ΕΕΣΕΕ κατά ASHRAE για M=1, 3, 12. Παρατηρούμε πως ο ΕΕΣΕΕ μειώνεται σημαντικά με την αύξηση του M και λαμβάνει μία σταθερή τιμή για κάθε μία τιμή του M. Τέλος, οι καμπύλες ορίζουν τον ΕΕΣΕΕ που προκύπτει με εφαρμογή της μεθόδου της γραμμικής παλινδρόμησης. Και εδώ παρατηρούμε σημαντική μείωση του ΕΕΣΕΕ με την αύξηση του M. Επιπλέον, για κάθε τιμή του M, ο ΕΕΣΕΕ δεν λαμβάνει μία μόνη τιμή, αλλά μεταβάλλεται ανάλογα με τη μέση εξωτερική θερμοκρασία. Λαμβάνει την ελάχιστη τιμή του όταν η μέση θερμοκρασία του δείγματος M μετρήσεων ταυτίζεται με την μέση θερμοκρασία του δείγματος των N μετρήσεων που ελήφθη κατά την περίοδο βάσεως ($X = \bar{X}_N = 17{,}95\ °C$).

Συγκεκριμένα, για M=1 ο ΕΕΣΕΕ κατά ASHRAE ισούται με 25,04%, ενώ με βάση την προσέγγιση της παλινδρόμησης κυμαίνεται από 19,15% έως 20,08%. Για M=3 η προσέγγιση της ASHRAE προβλέπει ΕΕΣΕΕ 14,46%, ενώ στη μέθοδο της παλινδρόμησης κυμαίνεται από 11,88% έως 14,39%. Τέλος, για M=12 παρουσιάζεται ο ελάχιστος ΕΕΣΕΕ, ο οποίος κατά

ASHRAE ισούται με 7,23%, ενώ με βάση την παλινδρόμηση κυμαίνεται από 7,52% έως 11,07%. Έτσι, στο συγκεκριμένο παράδειγμα, η επίδοση ενός νέου συστήματος που έχει στόχο να επιτύχει εξοικονόμηση ενέργειας 10-15%, πιθανότατα μπορεί να επαληθευθεί λαμβάνοντας ένα δείγμα 12 μετρήσεων, ενώ σε καμία περίπτωση δεν θα μπορούσε να επαληθευθεί από μία μόνη μέτρηση. Πρέπει να σημειωθεί πως η αύξηση του πλήθους μετρήσεων Μ συνεπάγεται και μεγαλύτερο κόστος αξιολόγησης της επένδυσης. Συνεπώς, ο μελετητής θα πρέπει να συμβιβάσει τις ανάγκες για υψηλότερη ακρίβεια με το αυξανόμενο κόστος και να επιλέξει το κατάλληλο πλήθος μετρήσεων.

Παρατηρούμε πως η εξίσωση της ASHRAE άλλοτε υπερεκτιμά και άλλοτε υποτιμά τον ΕΕΣΕΕ σε σχέση με την εξίσωσης της γραμμικής παλινδρόμησης. Συνεπώς δεν μπορούμε να εξάγουμε ένα γενικό συμπέρασμα για το πώς συμπεριφέρονται οι δύο μέθοδοι. Για την καλύτερη κατανόηση θα υπολογιστεί η απόκλιση μεταξύ των ΕΕΣΕΕ που προκύπτουν με εφαρμογή των δύο μεθόδων για διάφορες τιμές του πλήθους Μ και της μέσης τιμής του δείγματος $\bar{X}_M$ κατά την περίοδο απολογισμού:

$$\Delta(EE\Sigma EE) = (EE\Sigma EE)_{regression} - (EE\Sigma EE)_{ASHRAE}$$

$$\Delta(EE\Sigma EE) = 2\frac{\sqrt{MT\Sigma\left[\frac{1}{M}+\frac{1}{N}+\frac{(\bar{X}_M-\bar{X}_N)^2}{\sum_{\nu=1}^{N}(X_\nu-\bar{X}_N)^2}\right]+\frac{\sigma_{\mu\varepsilon\tau}^2}{M}}}{\bar{Y}_N} - \frac{1{,}26\sqrt{MT\Sigma\left[\left(1+\frac{2}{N}\right)\frac{1}{M}\right]}}{0{,}5\bar{Y}_N} \qquad (3.33)$$

	X_N-17	X_N-16	X_N-15	X_N-14	X_N-13	X_N-12	X_N-11	X_N-10	X_N-9	X_N-8	X_N-7	X_N-6	X_N-5	X_N-4	X_N-3	X_N-2	X_N-1	X_N	X_N+1	X_N+2	X_N+3	X_N+4	X_N+5	X_N+6	X_N+7	X_N+8	X_N+9	X_N+10	X_N+11	X_N+12	X_N+13	X_N+14	X_N+15	X_N+16	X_N+17
M/X	**0,95**	**1,95**	**2,95**	**3,95**	**4,95**	**5,95**	**6,95**	**7,95**	**8,95**	**9,95**	**10,95**	**11,95**	**12,95**	**13,95**	**14,95**	**15,95**	**16,95**	**17,95**	**18,95**	**19,95**	**20,95**	**21,95**	**22,95**	**23,95**	**24,95**	**25,95**	**26,95**	**27,95**	**28,95**	**29,95**	**30,95**	**31,95**	**32,95**	**33,95**	**34,95**
1,00	-1,16	-1,65	-2,12	-2,57	-3,00	-3,40	-3,78	-4,13	-4,45	-4,75	-5,01	-5,24	-5,43	-5,60	-5,72	-5,82	-5,87	-5,89	-5,87	-5,82	-5,72	-5,60	-5,43	-5,24	-5,01	-4,75	-4,45	-4,13	-3,78	-3,40	-3,00	-2,57	-2,12	-1,65	-1,16
2,00	2,32	1,73	1,16	0,61	0,09	-0,41	-0,89	-1,34	-1,75	-2,13	-2,47	-2,78	-3,04	-3,26	-3,43	-3,55	-3,63	-3,65	-3,63	-3,55	-3,43	-3,26	-3,04	-2,78	-2,47	-2,13	-1,75	-1,34	-0,89	-0,41	0,09	0,61	1,16	1,73	2,32
3,00	4,11	3,47	2,85	2,25	1,67	1,12	0,59	0,09	-0,38	-0,81	-1,21	-1,56	-1,86	-2,11	-2,32	-2,46	-2,55	-2,58	-2,55	-2,46	-2,32	-2,11	-1,86	-1,56	-1,21	-0,81	-0,38	0,09	0,59	1,12	1,67	2,25	2,85	3,47	4,11
4,00	5,27	4,61	3,96	3,32	2,71	2,12	1,56	1,02	0,52	0,05	-0,38	-0,76	-1,10	-1,38	-1,60	-1,77	-1,86	-1,90	-1,86	-1,77	-1,60	-1,38	-1,10	-0,76	-0,38	0,05	0,52	1,02	1,56	2,12	2,71	3,32	3,96	4,61	5,27
5,00	6,11	5,43	4,76	4,10	3,47	2,85	2,26	1,70	1,17	0,68	0,22	-0,18	-0,54	-0,84	-1,09	-1,26	-1,37	-1,40	-1,37	-1,26	-1,09	-0,84	-0,54	-0,18	0,22	0,68	1,17	1,70	2,26	2,85	3,47	4,10	4,76	5,43	6,11
6,00	6,76	6,06	5,37	4,70	4,05	3,42	2,81	2,23	1,68	1,17	0,69	0,27	-0,11	-0,43	-0,68	-0,87	-0,98	-1,02	-0,98	-0,87	-0,68	-0,43	-0,11	0,27	0,69	1,17	1,68	2,23	2,81	3,42	4,05	4,70	5,37	6,06	6,76
7,00	7,28	6,57	5,87	5,19	4,53	3,88	3,26	2,66	2,10	1,57	1,08	0,63	0,24	-0,09	-0,36	-0,55	-0,67	-0,71	-0,67	-0,55	-0,36	-0,09	0,24	0,63	1,08	1,57	2,10	2,66	3,26	3,88	4,53	5,19	5,87	6,57	7,28
8,00	7,71	6,99	6,28	5,59	4,92	4,26	3,63	3,02	2,44	1,90	1,40	0,94	0,54	0,19	-0,09	-0,29	-0,41	-0,46	-0,41	-0,29	-0,09	0,19	0,54	0,94	1,40	1,90	2,44	3,02	3,63	4,26	4,92	5,59	6,28	6,99	7,71
9,00	8,07	7,35	6,63	5,94	5,25	4,59	3,95	3,33	2,74	2,19	1,67	1,20	0,79	0,43	0,15	-0,06	-0,19	-0,23	-0,19	-0,06	0,15	0,43	0,79	1,20	1,67	2,19	2,74	3,33	3,95	4,59	5,25	5,94	6,63	7,35	8,07
10,00	8,38	7,65	6,94	6,23	5,54	4,87	4,22	3,59	3,00	2,43	1,91	1,43	1,01	0,65	0,35	0,14	0,00	-0,04	0,00	0,14	0,35	0,65	1,01	1,43	1,91	2,43	3,00	3,59	4,22	4,87	5,54	6,23	6,94	7,65	8,38
11,00	8,66	7,92	7,20	6,49	5,80	5,12	4,46	3,83	3,22	2,65	2,12	1,64	1,20	0,83	0,53	0,31	0,18	0,13	0,18	0,31	0,53	0,83	1,20	1,64	2,12	2,65	3,22	3,83	4,46	5,12	5,80	6,49	7,20	7,92	8,66
12,00	8,90	8,16	7,44	6,72	6,02	5,34	4,68	4,04	3,43	2,85	2,31	1,82	1,38	1,00	0,69	0,47	0,33	0,28	0,33	0,47	0,69	1,00	1,38	1,82	2,31	2,85	3,43	4,04	4,68	5,34	6,02	6,72	7,44	8,16	8,90
13,00	9,12	8,38	7,64	6,93	6,22	5,54	4,87	4,22	3,61	3,02	2,48	1,98	1,53	1,15	0,84	0,61	0,47	0,42	0,47	0,61	0,84	1,15	1,53	1,98	2,48	3,02	3,61	4,22	4,87	5,54	6,22	6,93	7,64	8,38	9,12
14,00	9,31	8,57	7,83	7,11	6,40	5,71	5,04	4,39	3,77	3,18	2,63	2,13	1,68	1,29	0,97	0,74	0,59	0,55	0,59	0,74	0,97	1,29	1,68	2,13	2,63	3,18	3,77	4,39	5,04	5,71	6,40	7,11	7,83	8,57	9,31
15,00	9,49	8,74	8,00	7,28	6,57	5,88	5,20	4,55	3,92	3,33	2,77	2,26	1,81	1,41	1,09	0,86	0,71	0,66	0,71	0,86	1,09	1,41	1,81	2,26	2,77	3,33	3,92	4,55	5,20	5,88	6,57	7,28	8,00	8,74	9,49
16,00	9,65	8,90	8,16	7,43	6,72	6,02	5,34	4,69	4,06	3,46	2,90	2,39	1,92	1,53	1,20	0,96	0,82	0,77	0,82	0,96	1,20	1,53	1,92	2,39	2,90	3,46	4,06	4,69	5,34	6,02	6,72	7,43	8,16	8,90	9,65
17,00	9,80	9,05	8,31	7,58	6,86	6,16	5,48	4,82	4,18	3,58	3,02	2,50	2,04	1,63	1,31	1,06	0,91	0,86	0,91	1,06	1,31	1,63	2,04	2,50	3,02	3,58	4,18	4,82	5,48	6,16	6,86	7,58	8,31	9,05	9,80
18,00	9,93	9,18	8,44	7,71	6,99	6,29	5,60	4,94	4,30	3,70	3,13	2,61	2,14	1,73	1,40	1,16	1,01	0,95	1,01	1,16	1,40	1,73	2,14	2,61	3,13	3,70	4,30	4,94	5,60	6,29	6,99	7,71	8,44	9,18	9,93
19,00	10,06	9,30	8,56	7,83	7,11	6,40	5,72	5,05	4,41	3,80	3,23	2,71	2,23	1,83	1,49	1,24	1,09	1,04	1,09	1,24	1,49	1,83	2,23	2,71	3,23	3,80	4,41	5,05	5,72	6,40	7,11	7,83	8,56	9,30	10,06
20,00	10,18	9,42	8,67	7,94	7,22	6,51	5,82	5,15	4,51	3,90	3,33	2,80	2,32	1,91	1,58	1,33	1,17	1,12	1,17	1,33	1,58	1,91	2,32	2,80	3,33	3,90	4,51	5,15	5,82	6,51	7,22	7,94	8,67	9,42	10,18
21,00	10,29	9,53	8,78	8,04	7,32	6,61	5,92	5,25	4,61	3,99	3,42	2,88	2,41	1,99	1,65	1,40	1,25	1,19	1,25	1,40	1,65	1,99	2,41	2,88	3,42	3,99	4,61	5,25	5,92	6,61	7,32	8,04	8,78	9,53	10,29
22,00	10,39	9,63	8,88	8,14	7,42	6,71	6,01	5,34	4,70	4,08	3,50	2,97	2,49	2,07	1,73	1,47	1,32	1,26	1,32	1,47	1,73	2,07	2,49	2,97	3,50	4,08	4,70	5,34	6,01	6,71	7,42	8,14	8,88	9,63	10,39
23,00	10,48	9,73	8,98	8,24	7,51	6,80	6,10	5,43	4,78	4,16	3,58	3,04	2,56	2,14	1,80	1,54	1,38	1,33	1,38	1,54	1,80	2,14	2,56	3,04	3,58	4,16	4,78	5,43	6,10	6,80	7,51	8,24	8,98	9,73	10,48
24,00	10,57	9,81	9,06	8,32	7,59	6,88	6,19	5,51	4,86	4,24	3,66	3,12	2,63	2,21	1,86	1,61	1,45	1,39	1,45	1,61	1,86	2,21	2,63	3,12	3,66	4,24	4,86	5,51	6,19	6,88	7,59	8,32	9,06	9,81	10,57

Σχήμα (3.6) Μεταβολή της απόκλισης του ΕΕΣΕΕ σύμφωνα με τις δύο μεθόδους για διάφορες τιμές των Μ και $\bar{X}_M$

Παρατηρώντας το σχήμα (3.6) γίνεται αντιληπτό πως τα αποτελέσματα που λαμβάνουμε από τις δύο μεθόδους μεταβάλλονται σημαντικά με τη μεταβολή των παραμέτρων. Για χαμηλές τιμές του μεγέθους Μ και σε μέση θερμοκρασία $\bar{X}_M$ σχετικά κοντά στην μέση θερμοκρασία του αρχικού δείγματος $\bar{X}_N$ η μέθοδος της ASHRAE τείνει να δίνει μεγαλύτερες τιμές ΕΕΣΕΕ. Αντιθέτως, όσο το Μ αυξάνει και όσο απομακρυνόμαστε από τη μέση τιμή $\bar{X}_N$ η μέθοδος της παλινδρόμησης παρουσιάζει μεγαλύτερες τιμές ΕΕΣΕΕ, καθώς η μέθοδος της ASHRAE δεν λαμβάνει υπόψιν την αύξηση της αβεβαιότητας με την απομάκρυνση από τη μέση τιμή $\bar{X}_N$.

Η προσέγγιση της γραμμικής παλινδρόμησης θεωρείται ακριβέστερη δεδομένης της αναλυτικότερης διαδικασίας από την οποία προέκυψε, καθώς και την δυνατότητά της να λαμβάνει υπόψιν την επίδραση εξωτερικών παραγόντων. Ωστόσο, η μέθοδος της ASHRAE παρουσιάζει ικανοποιητικά αποτελέσματα δεδομένου του προσεγγιστικού χαρακτήρα της και της απλούστευσης των υπολογισμών που επιφέρει.. Σημαντικό της μειονέκτημα αποτελεί το γεγονός ότι δεν λαμβάνει υπόψιν τις μεταβολές της μέσης θερμοκρασίας. Η προσέγγιση του IPMVP είναι υπερβολικά απλουστευμένη και δεν συνιστάται, ειδικά στην περίπτωση αξιολόγησης μέσης εξοικονόμησης κατά την διάρκεια Μ περιόδων. Πρέπει να σημειωθεί πως ολόκληρη η παραπάνω ανάλυση αναπτύχθηκε με δεδομένο πως το μετρητικό σφάλμα ισούται με το μηδέν. Η παραδοχή αυτή δεν είναι αληθής σε καμία περίπτωση, ωστόσο η εκτίμηση του μετρητικού σφάλματος δεν αποτελεί αντικείμενο του παρόντος.

Έχοντας θεμελιώσει τις απαιτήσεις ακριβείας διαθέτουμε πλέον όλα τα απαραίτητα εργαλεία για την ορθολογική εκτίμηση της εξοικονόμησης ενέργειας με τη μέθοδο της μονοδιάστατης γραμμικής παλινδρόμησης. Στο παράδειγμα που αναπτύχθηκε χρησιμοποιήθηκαν ως εξαρτημένη μεταβλητή Y και ανεξάρτητη μεταβλητή X η μηνιαία κατανάλωση ενέργειας και η μέση μηνιαία εξωτερική θερμοκρασία αντίστοιχα. Η παραπάνω μεθοδολογία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την συσχέτιση δύο οποιωνδήποτε μεταβλητών, λαμβάνοντας δείγμα μετρήσεων κατά την περίοδο βάσης. Έπειτα, μετά από μία εξωτερική επέμβαση - δράση στη συσχέτιση των δύο μεταβλητών (αντίστοιχη της εγκατάστασης νέου ψυκτικού συστήματος), λαμβάνονται νέες μετρήσεις κατά την περίοδο απολογισμού. Τελικά, μπορούμε να εκτιμήσουμε σε τι βαθμό η μεταβολή στην μεταβλητή Y οφείλεται στην εξωτερική επέμβαση – δράση και σε τι βαθμό στη διαφορά των τιμών της μεταβλητής X κατά τις περιόδους βάσης και απολογισμού. Παραδείγματος χάριν, έστω ότι συσχετίζεται ο μέσος χρόνος κατεργασίας ενός τεμαχίου με το μέγεθος του όγκου παραγωγής. Χρησιμοποιώντας την γραμμική παλινδρόμηση δύναται να εκτιμηθεί η επίδραση που θα έχει ο σχηματισμός μία νέας γραμμής παραγωγής στον μέσο χρόνο κατεργασίας, αφαιρώντας την επίδραση που θα έχει σε αυτόν μία ταυτόχρονη πιθανή μεταβολή του όγκου παραγωγής.

3.4 Αριθμητική εφαρμογή – εκτίμηση της επιτευχθείσας εξοικονόμησης πετρελαίου νοσοκομειακής μονάδας μέσω της εγκατάστασης ηλιακών συλλεκτών

Ακολουθεί η εφαρμογή όσων αναπτύχθηκαν στα τελευταία δύο κεφάλαια για την εκτίμηση της μηνιαίας εξοικονόμησης πετρελαίου που επετεύχθη από επέμβαση εξοικονόμησης σε μία νοσοκομειακή μονάδα.

Στην υπό εξέτασιν νοσοκομειακή μονάδα πραγματοποιήθηκε εγκατάσταση ηλιακών συλλεκτών. Για την ορθολογική αξιολόγηση της επέμβασης εξοικονόμησης ελήφθησαν μηνιαίες μετρήσεις παραγγελίας πετρελαίου κατά τα έτη 2008 – 2009, τα οποία αποτελούν την περίοδο βάσης. Επιπλέον, κατά τους ίδιους μήνες, ελήφθησαν μετρήσεις μέσης εξωτερικής θερμοκρασίας. Οι παραπάνω μετρήσεις παρατίθενται στον πίνακα που ακολουθεί:

Μήνας	Θερμοκρασία X_ν(°C)	Παραγγελία Πετρελαίου Y_ν (L)
Ιαν-08	9	67.568
Φεβ-08	8	84.523
Μαρ-08	9	45.066
Απρ-08	13	45.075
Μαϊ-08	20,7	42.127
Ιουν-08	25,6	22.399
Ιουλ-08	27,8	20.300
Αυγ-08	27,9	0
Σεπ-08	23,2	42.696
Οκτ-08	19,6	19.150
Νοε-08	16,7	44.817
Δεκ-08	12,7	64.574
Ιαν-09	12,2	84.201
Φεβ-09	10,4	64.346
Μαρ-09	12,4	55.182
Απρ-09	16,6	64.311
Μαϊ-09	21	38.768
Ιουν-09	25,4	19.248
Ιουλ-09	27,6	21.525
Αυγ-09	27,5	19.529
Σεπ-09	24	19.570
Οκτ-09	20	19.525
Νοε-09	16	58.722
Δεκ-09	14,2	58.715

$$N = 24, \qquad \bar{X}_{24} = 18{,}35\ °\mathrm{C}\,, \qquad \bar{Y}_{24} = 42581\ L$$

<u>Υπολογισμός των συντελεστών της παλινδρόμησης και στατιστικός έλεγχος αυτών</u>

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων για το δείγμα των N=24 ζευγών (X_ν,Y_ν) υπολογίζουμε την κλίση της βέλτιστης ευθείας b_1 , το σημείο τομής με τον άξονα Y, b_0, καθώς και το τυπικό σφάλμα αυτών. Για την διευκόλυνση των αριθμητικών πράξεων, συνιστάται να υπολογιστούν αρχικά μερικά ενδιάμεσα αποτελέσματα, τα οποία παρουσιάζουν σχετική δυσκολία στο χειρισμό και εμφανίζονται συχνά στις εξισώσεις που ακολουθούν:

Το άθροισμα των τετραγώνων των διαφορών κάθε μίας τιμής X_ν από τη μέση τιμή $\bar{X}_{24}$:

$$\sum_{\nu=1}^{24}(X_\nu - \bar{X}_{24})^2 = 1032$$

Το άθροισμα των τετραγώνων των διαφορών κάθε μίας τιμής Y_ν από τη μέση τιμή $\bar{Y}_{24}$:

$$\sum_{\nu=1}^{24}(Y_\nu - \bar{Y}_{24})^2 = 12.103.255.804$$

Το άθροισμα των γινομένων των αποστάσεων των τιμών X_ν και Y_ν από τη μέση τιμή τους αντίστοιχα:

$$\sum_{\nu=1}^{24}(X_\nu - \bar{X}_{24})(Y_\nu - \bar{Y}_{24}) = -3.020.813$$

Ακολουθεί ο υπολογισμός των παραμέτρων της παλινδρόμησης:

$$b_1 = \frac{\sum_{\nu=1}^{24}(X_\nu - \bar{X}_{24})(Y_\nu - \bar{Y}_{24})}{\sum_{\nu=1}^{24}(X_\nu - \bar{X}_{24})^2} = \frac{-3.020.813}{1032} = -2927{,}7\ \frac{L}{°\mathrm{C}}$$

$$b_0 = \bar{Y}_{24} - b_1\bar{X}_{24} = 42581 - (-2927{,}7)18{,}35 = 96316\ L$$

Για τον υπολογισμός της διακύμανσης των παραμέτρων της παλινδρόμησης, και συνεπώς του τυπικού σφάλματος αυτών, απαιτείται ο προσδιορισμός μερικών ακόμα ενδιάμεσων αποτελεσμάτων:

Το άθροισμα των τετραγώνων των σφαλμάτων SSE (error sum of squares):

$$SSE = \sum_{\nu=1}^{N}\left(Y_\nu - \widetilde{Y_\nu}\right)^2 = \sum_{\nu=1}^{24}(Y_\nu - b_1X_\nu - b_0)^2 = 3.259.181.761$$

Το μέσο τετραγωνικό σφάλμα ΜΤΣ (αναφέρεται και ως MSE: Mean squared error):

$$MT\Sigma = \frac{\sum_{\nu=1}^{N}(Y_\nu - \widetilde{Y_\nu})^2}{\mathrm{N}-2} = \frac{SSE}{\mathrm{N}-2} = \frac{1.030.590.621}{24-2} = 148.144.626$$

Το μέσο τετραγωνικό σφάλμα ΜΤΣ χρησιμοποιείται ως εκτιμητής της διακύμανσης σ^2 των σφαλμάτων του μοντέλου της γραμμικής παλινδρόμησης:

$$\mathrm{s}^2\{b_1\} = \frac{MT\Sigma}{\sum_{\nu=1}^{N}(X_\nu - \bar{X}_\mathrm{N})^2} = \frac{148.144.626\ lt^2}{1032\ (°\mathrm{C})^2} = 143579$$

$$=> \quad \mathrm{s}\{b_1\} = 378{,}92\frac{L}{°C}$$

$$\mathrm{s}^2\{b_0\} = MT\Sigma\left(\frac{1}{N} + \frac{\bar{X}_\mathrm{N}{}^2}{\sum_{\nu=1}^{N}(X_\nu - \bar{X}_\mathrm{N})^2}\right) = 148.144.626\ \left(\frac{1}{24} + \frac{18{,}35^2}{1032}\right) = 54540889$$

$$=> \quad \mathrm{s}\{b_0\} = 7385{,}18\ L$$

Έχοντας προσδιορίσει τους συντελεστές της παλινδρόμησης και τα τυπικά σφάλματα αυτών, μπορούμε πλέον να εξετάσουμε το αν η κλίση της ευθείας διαφέρει στατιστικά απ' την τιμή

μηδέν. Όπως αναπτύχθηκε στο δεύτερο κεφάλαιο, διενεργείται στατιστικός έλεγχος t, σε επίπεδο σημαντικότητας α. Έτσι, για α=0.05, πρέπει να ικανοποιείται η ακόλουθη συνθήκη:

$$|t^*| = \left|\frac{b_1}{s\{b_1\}}\right| = \left|\frac{-2927,7}{378,92}\right| > t_\delta = t\left(1-\frac{a}{2}; N-2\right) = t\left(1-\frac{0,05}{2}; 24-2\right)$$

$$=> 7,72 > 2,0739$$, που ισχύει

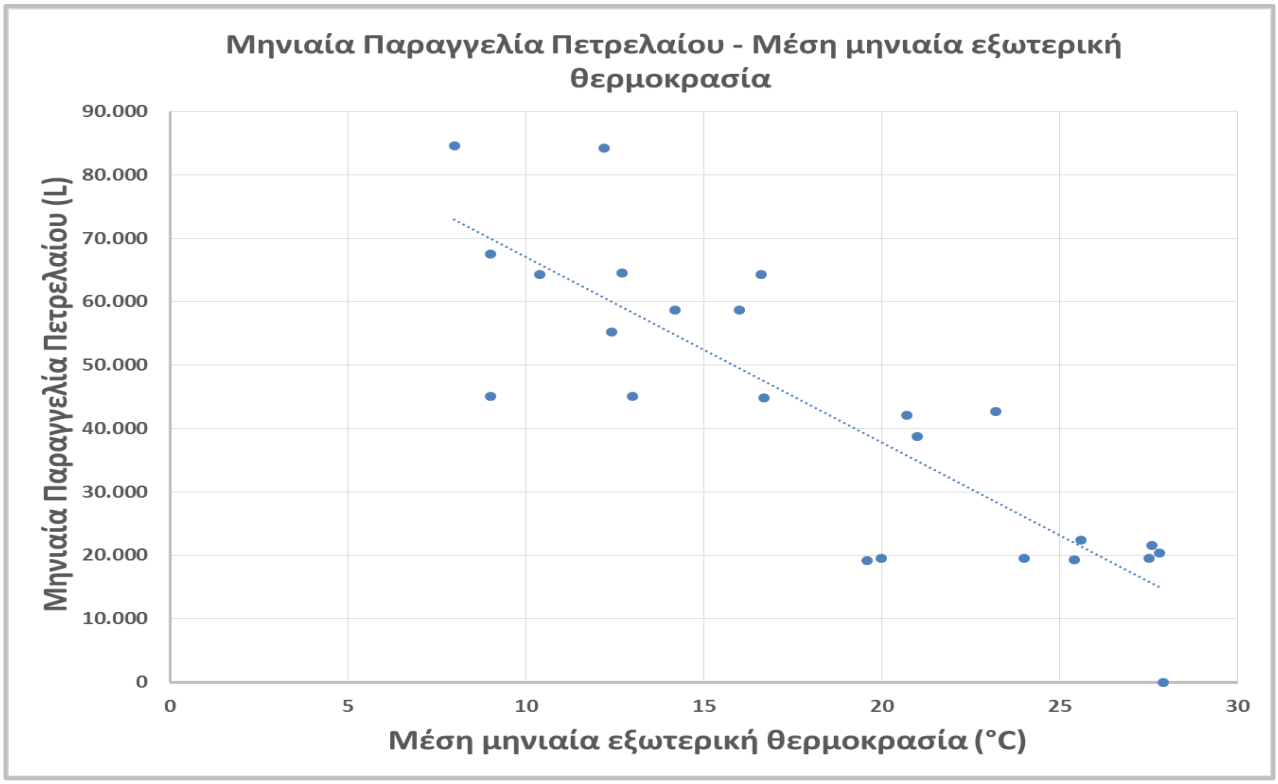
Συνεπώς, μπορούμε να αποφανθούμε πως σε επίπεδο σημαντικότητας 5% (βαθμό εμπιστοσύνης 95%) η κλίση της βέλτιστης ευθείας διαφέρει απ' το μηδέν και συνεπώς υφίσταται γραμμική συσχέτιση μεταξύ των δύο υπό εξέτασιν μεταβλητών.

Ο συντελεστής προσδιορισμού θα δίνεται ως γνωστόν:

$$R^2 = \frac{\sum_{\nu=1}^{N}\left(\mu_{\widetilde{Y_\nu}}-\bar{Y}_N\right)^2}{\sum_{\nu=1}^{N}(Y_\nu-\bar{Y}_N)^2} = \frac{\sum_{\nu=1}^{24}(b_1X_\nu+b_0-\bar{Y}_{24})^2}{\sum_{\nu=1}^{24}(Y_\nu-\bar{Y}_{24})^2} = 0,7307 < 0,75$$

Η τιμή του συντελεστή προσδιορισμού είναι μικρότερη απ' την ελάχιστη τιμή 0.75, η οποία προτείνεται ως ελάχιστο όριο απ' το διεθνές πρωτόκολλο IPMVP.

Τα σημεία του δείγματος και η βέλτιστη ευθεία παρίστανται γραφικά στο επόμενο σχήμα:



Σχήμα (3.7) Γραμμική συσχέτιση μεταξύ της μηνιαίας παραγγελίας πετρελαίου της νοσοκομειακής μονάδας με τη μέση μηνιαία εξωτερική θερμοκρασία

Παρατηρώντας τόσο τη διασπορά των σημείων του σχήματος (3.7), όσο και τη χαμηλή τιμή του συντελεστή R^2, γίνεται άμεσα αντιληπτό πως δεν υφίσταται ικανοποιητική γραμμική συσχέτιση μεταξύ των υπό εξέτασιν μεταβλητών. Το γεγονός αυτό οφείλεται στο ότι η συσχέτιση έγινε μεταξύ θερμοκρασίας και παραγγελιών πετρελαίου, ενώ το μέγεθος που πραγματικά επηρεάζεται από τη θερμοκρασία είναι η κατανάλωση πετρελαίου. Οι παραγγελίες πετρελαίου δεν ταυτίζονται πλήρως με τις καταναλώσεις, αλλά έπονται αυτών

με μία χρονική υστέρηση, η οποία εξαρτάται από το απόθεμα που διατηρεί η νοσοκομειακή μονάδα.

Εναλλακτικά, θα ακολουθηθεί η προσέγγιση των κυλιόμενων μέσων όρων (ΚΜΟ). Η τιμή παραγγελίας πετρελαίου κάθε μηνός θα αντικατασταθεί από το μέσο όρο των παραγγελιών του τρέχοντος, του προηγούμενου και του επόμενου μήνα, σύμφωνα με τη σχέση:

$$Y_\nu = \frac{Y_{\nu-1}+Y_\nu+Y_{\nu+1}}{3}$$

Για την εφαρμογή της σχέσης κατά τον Ιανουάριο του 2008 απαιτείται η τιμή της παραγγελίας πετρελαίου κατά τον Δεκέμβριο του 2007, η οποία λαμβάνεται ίση με την τιμή της παραγγελίας του Δεκεμβρίου του 2008. Ομοίως, για την εφαρμογή της σχέσης κατά τον Δεκέμβριο του 2009, απαιτείται η τιμή της παραγγελίας πετρελαίου κατά τον Ιανουάριο του 2010, η οποία λαμβάνεται ίση με τη παραγγελία κατά τον Ιανουάριο του 2009. Χρησιμοποιώντας τους ΚΜΟ εξομαλύνεται η χρονική υστέρηση μεταξύ των παραγγελιών και των καταναλώσεων. Έτσι, οι τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής του νέου δείγματος θα αποτελούν μια πιο ικανοποιητική εκτίμηση των μηνιαίων καταναλώσεων πετρελαίου. Μετά το μετασχηματισμό των δεδομένων προκύπτει το νέο δείγμα, το οποίο δίνεται στον ακόλουθο πίνακα τιμών:

Θερμοκρασία X_ν(°C)	Μηνιαία Κατανάλωση Y_ν(L)
9	72221,67
8	65719
9	58221,33
13	44089,33
20,7	36533,67
25,6	28275,33
27,8	14233
27,9	20998,67
23,2	20615,33
19,6	35554,33
16,7	42847
12,7	64530,67
12,2	71040,33
10,4	67909,67
12,4	61279,67
16,6	52753,67
21	40775,67
25,4	26513,67
27,6	20100,67
27,5	20208
24	19541,33
20	32605,67
16	45654
14,2	67212,67

$$N = 24, \qquad \bar{X}_{24} = 18{,}35\ °\mathrm{C}\,, \qquad \bar{Y}_{24} = 42893\ L$$

<u>Υπολογισμός των συντελεστών της παλινδρόμησης για το νέο δείγμα και στατιστικός έλεγχος αυτών</u>

Κατ' αναλογία με παραπάνω υπολογίζονται κάποια ενδιάμεσα αποτελέσματα για τη διευκόλυνση των αριθμητικών πράξεων, οι συντελεστές της παλινδρόμησης, καθώς και ο συντελεστής R^2:

$$\sum_{\nu=1}^{24}(X_\nu - \bar{X}_{24})^2 = 1032$$

$$\sum_{\nu=1}^{24}(Y_\nu - \bar{Y}_{24})^2 = 8.601.274.366$$

$$\sum_{\nu=1}^{24}(X_\nu - \bar{X}_{24})(Y_\nu - \bar{Y}_{24}) = -2.794.893$$

Ακολουθεί ο υπολογισμός των παραμέτρων της παλινδρόμησης:

$$b_1 = \frac{\sum_{\nu=1}^{24}(X_\nu - \bar{X}_{24})(Y_\nu - \bar{Y}_{24})}{\sum_{\nu=1}^{24}(X_\nu - \bar{X}_{24})^2} = \frac{-2.794.893}{1032} = -2708{,}76\ \frac{L}{°\mathrm{C}}$$

$$b_0 = \bar{Y}_{24} - b_1\bar{X}_{24} = 42893 - (-2708{,}76)18{,}35 = 92610{,}1\ L$$

Η διακύμανση των παραμέτρων της παλινδρόμησης και συνεπώς το τυπικό σφάλμα αυτών υπολογίζονται ως εξής:

$$SSE = \sum_{\nu=1}^{N}\left(Y_\nu - \widetilde{Y}_\nu\right)^2 = \sum_{\nu=1}^{24}(Y_\nu - b_1X_\nu - b_0)^2 = 1.030.590.621$$

$$MT\Sigma = \frac{\sum_{\nu=1}^{N}(Y_\nu - \widetilde{Y}_\nu)^2}{\mathrm{N}-2} = \frac{SSE}{\mathrm{N}-2} = \frac{1.030.590.621}{24-2} = 46.845.028$$

$$\mathrm{s}^2\{b_1\} = \frac{MT\Sigma}{\sum_{\nu=1}^{N}(X_\nu - \bar{X}_\mathrm{N})^2} = \frac{148.144.626\ lt^2}{1032\ (°\mathrm{C})^2} = 45401$$

$$=> \quad \mathrm{s}\{b_1\} = 213{,}08\frac{L}{°C}$$

$$\mathrm{s}^2\{b_0\} = MT\Sigma\left(\frac{1}{N} + \frac{\bar{X}_\mathrm{N}{}^2}{\sum_{\nu=1}^{N}(X_\nu - \bar{X}_\mathrm{N})^2}\right) = 148.144.626\left(\frac{1}{24} + \frac{18{,}35^2}{1032}\right) = 17.246.454$$

$$=> \quad \mathrm{s}\{b_0\} = 4152{,}89\ L$$

Έχοντας προσδιορίσει τους συντελεστές της παλινδρόμησης και τα τυπικά σφάλματα αυτών, διενεργείται ο κατάλληλος στατιστικός έλεγχος t, σε επίπεδο σημαντικότητας α=0.05:

$$\left|\frac{b_1}{s\{b_1\}}\right| = \left|\frac{-2708{,}76}{213{,}08}\right| = |t^*| > t_\delta = t\left(1 - \frac{a}{2}; N-2\right) = t\left(1 - \frac{0{,}05}{2}; 24-2\right)$$

$$=> 12{,}71 > 2{,}0739$$, που ισχύει

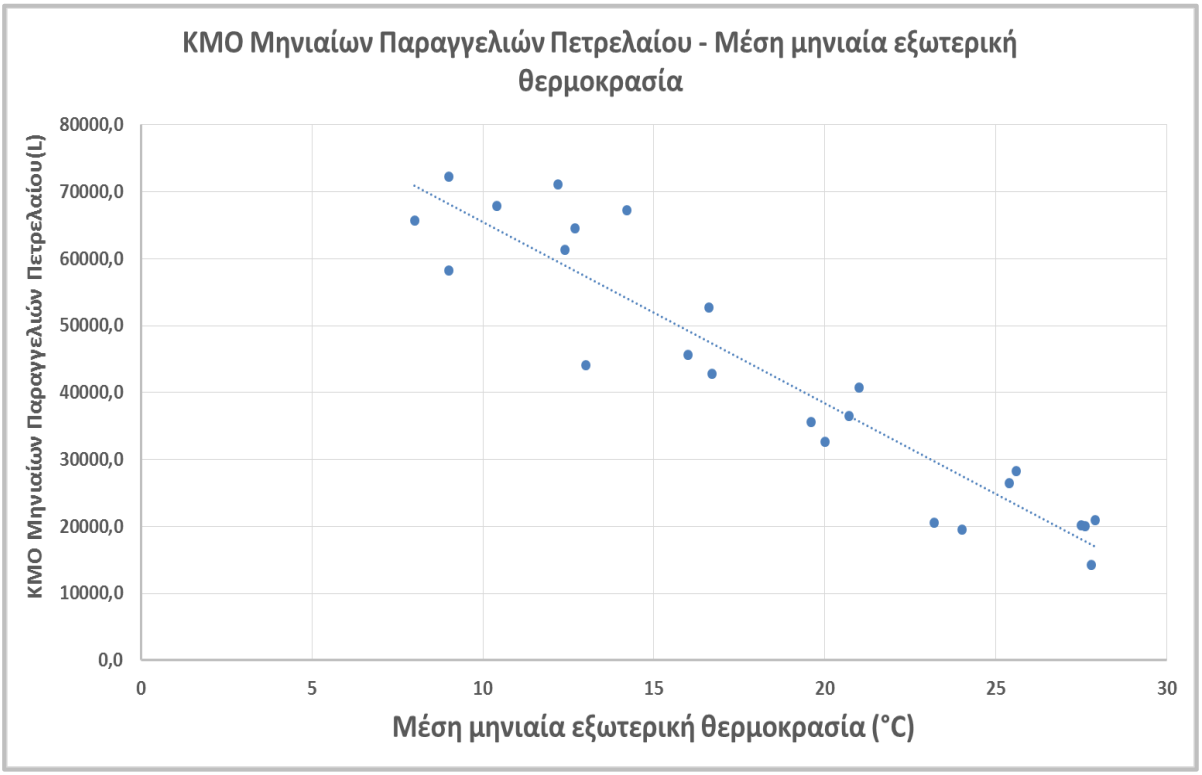
Ως εκ τούτου, μπορούμε να αποφανθούμε πως υφίσταται γραμμική συσχέτιση μεταξύ των υπό εξέτασιν μεταβλητών, καθώς η κλίση της ευθείας που προέκυψε απ' την εφαρμογή της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων είναι στατιστικά διάφορη του μηδενός.

Έπειτα, υπολογίζεται ο συντελεστής προσδιορισμού R^2:

$$R^2 = \frac{\sum_{\nu=1}^{N}\left(\mu_{\widetilde{Y}_\nu} - \bar{Y}_N\right)^2}{\sum_{\nu=1}^{N}(Y_\nu - \bar{Y}_N)^2} = \frac{\sum_{\nu=1}^{24}(b_1X_\nu + b_0 - \bar{Y}_{24})^2}{\sum_{\nu=1}^{24}(Y_\nu - \bar{Y}_{24})^2} = \frac{7.570.683.745}{8.601.274.366}$$

$$R^2 = 0{,}8802$$

Τα σημεία του νέου δείγματος και η αντίστοιχη βέλτιστη ευθεία παρίστανται γραφικά στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα (3.8) Συσχέτιση μεταξύ των κυλιόμενων μέσων όρων των παραγγελιών πετρελαίου της νοσοκομειακής μονάδας ανά τρίμηνο με τη μέση μηνιαία εξωτερική θερμοκρασία

Εν αντιθέσει με το αρχικό δείγμα, το δείγμα που προέκυψε μέσω του μετασχηματισμού των κυλιόμενων μέσων όρων χαρακτηρίζεται από ικανοποιητική συσχέτιση μεταξύ των δύο υπό εξέτασιν μεταβλητών. Το γεγονός αυτό γίνεται εύκολα αντιληπτό παρατηρώντας την αυξημένη τιμή του συντελεστή προσδιορισμού R^2, καθώς και την αισθητά μικρότερη διασπορά των σημείων του σχήματος (3.8).

<u>Υπολογισμός των διαστημάτων εμπιστοσύνης μίας εκτίμησης $\tilde{Y}_\mu$ και της μέσης τιμής Μ εκτιμήσεων $\widetilde{\widetilde{Y_M}}$</u>

Έχοντας εξασφαλίσει την ύπαρξη καλής γραμμικής συσχέτισης μεταξύ των υπό εξέτασιν μεταβλητών, μπορούμε να αξιοποιήσουμε το μοντέλο της γραμμικής παλινδρόμησης για την εκτίμηση μίας τιμής της μηνιαίας κατανάλωσης πετρελαίου $\tilde{Y}_\mu$, ως συνάρτηση της μέσης εξωτερικής θερμοκρασίας X_μ:

$$\widetilde{\mu_{Y_\mu}} = b_1 X_\mu + b_0 = -2708{,}76\, X_\mu + 92.610{,}10\ (L)$$

$$s^2\{\tilde{Y}_\mu\} = MT\Sigma\left[1 + \frac{1}{N} + \frac{\left(X_\mu - \bar{X}_N\right)^2}{\sum_{\nu=1}^{N}(X_\nu - \bar{X}_N)^2}\right] = 46.845.028\left[1 + \frac{1}{24} + \frac{\left(X_\mu - 18{,}35\ \right)^2}{1032}\right]$$

$$=> s^2\{\tilde{Y}_\mu\} = 48.796.904 + 45.401{,}3\left(X_\mu - 18{,}35\ \right)^2 (L)^2$$

Έτσι, το διάστημα εμπιστοσύνης μίας εκτίμησης $\tilde{Y}_\mu$ θα δίνεται ως ακολούθως:

$$\tilde{Y}_\mu = \widetilde{\mu_{Y_\mu}} \pm t_a s\{\tilde{Y}_\mu\}$$

$$\tilde{Y}_{\mu} = -2708{,}76\, X_{\mu} + 92.610{,}10 \pm t_{a}\sqrt{48.796.904 + 45.401{,}3\left(X_{\mu} - 18{,}35\,\right)^{2}}(L)$$

Κατ' αντιστοιχία, υπολογίζεται το διάστημα εμπιστοσύνης της μέσης τιμής Μ εκτιμήσεων:

$$\widetilde{\overline{Y_M}} = \mu_{\widetilde{\overline{Y_M}}} \pm t\{1 - \tfrac{\alpha}{2}; N - 2\} s\left\{\widetilde{\overline{Y_M}}\right\}$$

$$\mu_{\widetilde{\overline{Y_M}}} = b_1 \bar{X}_M + b_0 = -2708{,}76\, \bar{X}_M + 92.610{,}10\ (L)$$

$$s^2\left\{\widetilde{\overline{Y_M}}\right\} = MT\Sigma\left[\frac{1}{M} + \frac{1}{N} + \frac{(\bar{X}_M - \bar{X}_N)^2}{\sum_{\nu=1}^{N}(X_\nu - \bar{X}_N)^2}\right] = 46.845.028\left[\frac{1}{M} + \frac{1}{24} + \frac{\left(X_{\mu} - 18{,}35\,\right)^2}{1032}\right]$$

$$=> s^2\left\{\widetilde{\overline{Y_M}}\right\} = \frac{46.845.028}{\mathrm{M}} + 1.951.876{,}2 + 45.401{,}3(\bar{X}_M - 18{,}35\,)^2(L)^2$$

<u>Απαιτήσεις Ακριβείας</u>

Έχοντας υπολογίσει το διάστημα εμπιστοσύνης των προβλέψεων της γραμμικής παλινδρόμησης, μπορούμε να χαράξουμε τα διαγράμματα των απαιτήσεων ακριβείας και να προσδιορίσουμε τον ελάχιστο επαληθεύσιμο στόχο εξοικονόμησης ενέργειας (ΕΕΣΕΕ), ο οποίος επαληθεύει την ανίσωση (3.32) ως ισότητα:

$$EE\Sigma EE = t_{\alpha}\frac{\sqrt{MT\Sigma\left[\frac{1}{M}+\frac{1}{N}+\frac{(\bar{X}_M-\bar{X}_N)^2}{\sum_{\nu=1}^{N}(X_\nu-\bar{X}_N)^2}\right]+\frac{\sigma_{\mu\varepsilon\tau}^2}{M}}}{\bar{Y}_N}$$

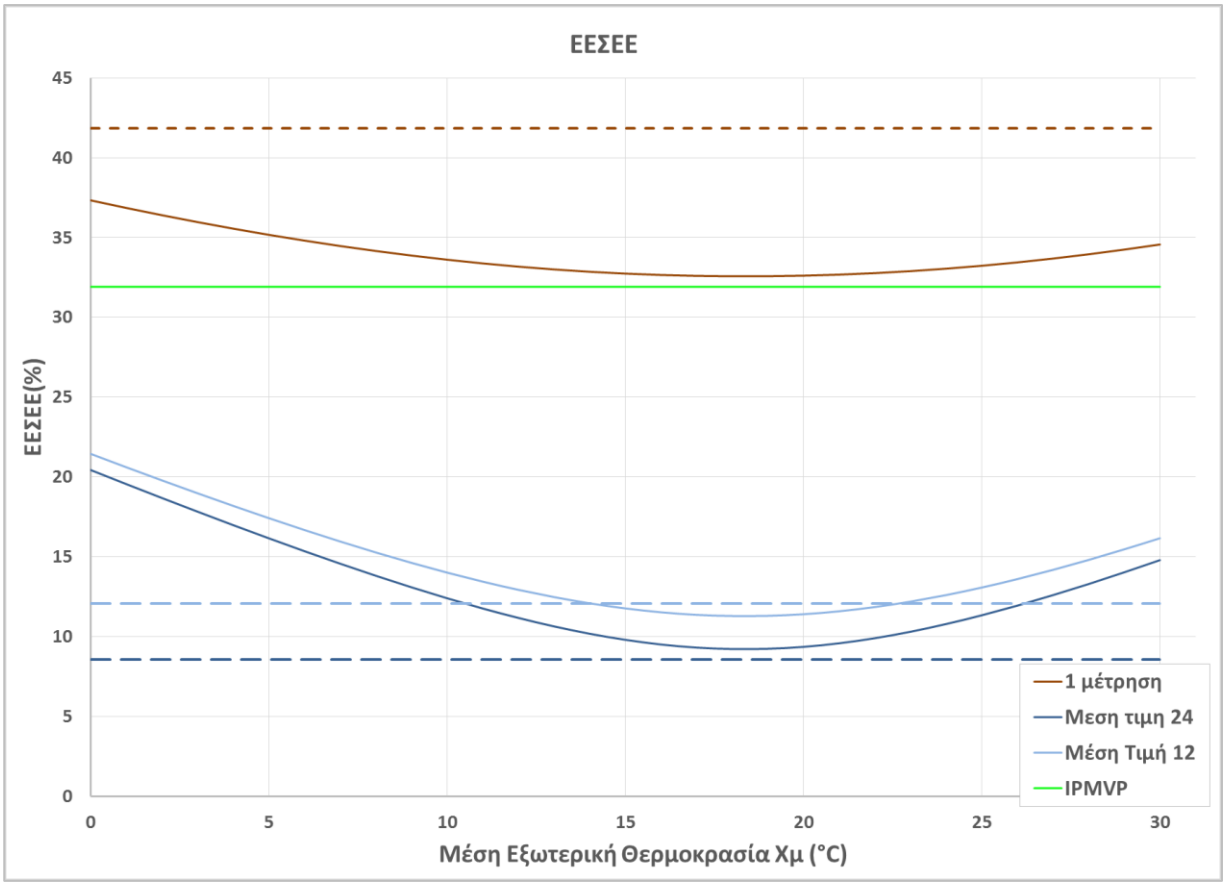
Στο παράδειγμά μας ο ΕΕΣΕΕ αναφέρεται ουσιαστικά σε μηνιαία ποσοστιαία εξοικονόμηση λίτρων πετρελαίου ως προς την παλιά μέση μηνιαία κατανάλωση πετρελαίου και δεν αναφέρεται σε μονάδες ενέργειας. Από την ανάλυση έως αυτό το σημείο είναι γνωστές οι τιμές των κάτωθι παραμέτρων:

$$N = 24, \qquad \bar{X}_{24} = 18{,}35\ °C, \qquad \bar{Y}_{24} = 42893\ \mathrm{L}$$

$$MT\Sigma = 46.845.028$$

$$\sum_{\nu=1}^{24}(X_\nu - \bar{X}_{24})^2 = 1032$$

Στην παράμετρο t_{α} δίνεται η τιμή 2, η οποία αντιστοιχεί σε επίπεδο εμπιστοσύνης 96,57%, ενώ δεν υπάρχουν στοιχεία για το σφάλμα του μετρητικού οργάνου και η $\sigma_{\mu\varepsilon\tau}^2$ λαμβάνεται ίση με μηδέν. Η παραπάνω καμπύλη για τον ΕΕΣΕΕ χαράσσεται για Μ=1, Μ=12 και Μ=24. Στο ίδιο διάγραμμα απεικονίζονται οι ευθείες του ΕΕΣΕΕ κατά ASHRAE και IPMVP.



Σχήμα (3.9) Ο ΕΕΣΕΕ ως συνάρτηση της μέσης θερμοκρασίας για μία μόνη μέτρηση (M=1), μετρήσεις ενός έτους (M=12) και μετρήσεις δύο ετών (M=24) κατά ASHRAE, IPMVP και σύμφωνα με τη μέθοδο της γραμμικής παλινδρόμησης

Όπως φαίνεται στο σχήμα (3.9), ο ΕΕΣΕΕ για μία μέτρηση μετά τη λήψη μέτρων σύμφωνα με τη γραμμική παλινδρόμηση (καφέ καμπύλη) κυμαίνεται από 32,5% έως 37,3%. Σύμφωνα με το IPMVP(πράσινη ευθεία) ισούται με 31,9%, ενώ κατά ASHRAE(καφέ διακεκομμένη) ισούται με 41,85%. Για ένα σύνολο μετρήσεων ενός έτους κυμαίνεται από 11,3% έως 21,4% με βάση την παλινδρόμηση(γαλάζια καμπύλη), ενώ ισούται με 12,08% σύμφωνα με την ASHRAE(γαλάζια διακεκομμένη). Τέλος, για μετρήσεις δύο ετών κυμαίνεται από 9,2% έως 20,4% με βάση την παλινδρόμηση (σκούρα μπλε καμπύλη) και ισούται με 8,5% με βάση την ASHRAE. Γίνεται άμεσα αντιληπτό πως οι απαιτήσεις ακριβείας μειώνονται σημαντικά με την λήψη πολλαπλών μετρήσεων. Ωστόσο, μετά τη λήψη ικανού πλήθους μετρήσεων ο ΕΕΣΕΕ σταθεροποιείται σταδιακά και συνεπώς η επιλογή του απαραίτητου πλήθους εναπόκειται στην κρίση του μελετητή. Εάν παραδείγματος χάριν ο στόχος εξοικονόμησης ενέργειας εκτιμάτο περίπου ίσος με 20%-25%, η λήψη 12 μετρήσεων θα ήταν αρκετά ικανοποιητική .Παρατηρούμε και εδώ πως η προσέγγιση του IPMVP παρουσιάζει σημαντική απόκλιση από τις άλλες μεθόδους όταν αυξάνεται το μέγεθος του δείγματος M. Το κριτήριο της ASHRAE προσεγγίζει ικανοποιητικά την τάξη μεγέθους του ΕΕΣΕΕ, αλλά φαίνεται να χαρακτηρίζεται από σαφώς μικρότερη ακρίβεια απ' ότι το μοντέλο της παλινδρόμησης.

Μετά την λήψη των μέτρων εξοικονόμησης ενέργειας, κατά την περίοδο απολογισμού, ελήφθησαν νέες μετρήσεις μηνιαίας παραγγελίας πετρελαίου – μέσης εξωτερικής θερμοκρασίας. Συγκεκριμένα ελήφθησαν 24 μετρήσεις κατά τα έτη 2013 και 2014, οι οποίες παρατίθενται στον ακόλουθο πίνακα:

Μήνας	Θερμοκρασία X_ν(°C)	Παραγγελία Πετρελαίου Y_ν (L)
Ιαν-13	12	56.155,72
Φεβ-13	12,9	35.955,79
Μαρ-13	14,8	47.362,76
Απρ-13	17,9	34.533,90
Μαϊ-13	22,2	34.639,25
Ιουν-13	24,7	19.126,39
Ιουλ-13	27,6	7.073,70
Αυγ-13	28,8	9.691,70
Σεπ-13	25	8.546,10
Οκτ-13	20,4	9.548,00
Νοε-13	17,2	17.643,46
Δεκ-13	13	46.152,40
Ιαν-14	13,3	51.502,40
Φεβ-14	13,3	51.988,50
Μαρ-14	14,3	10.680,00
Απρ-14	16,5	27.103,00
Μαϊ-14	20	19.082,20
Ιουν-14	24,5	5.107,20
Ιουλ-14	26,8	15.686,20
Αυγ-14	28	7.364,50
Σεπ-14	25	12.501,94
Οκτ-14	20,1	0,00
Νοε-14	17	20.667,99
Δεκ-14	14,2	45.408,66

$$M = 24, \qquad \bar{X}_{24} = 19{,}56\ °\mathrm{C}, \qquad \bar{Y}_{24} = 24730\ L$$

Εφόσον το μοντέλο της γραμμικής παλινδρόμησης χρησιμοποιήθηκε για τη συσχέτιση της μέσης μηνιαίας θερμοκρασίας με τον κυλιόμενο μέσο όρο των μηνιαίων παραγγελιών πετρελαίου, το παραπάνω δείγμα πρέπει να μετασχηματιστεί σε κυλιόμενους μέσους όρους, προκειμένου να χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση της εξοικονόμησης πετρελαίου. Για τον προσδιορισμό του κυλιόμενου μέσου όρου κατά τον μήνα Ιανουάριο του 2013 απαιτείται η παραγγελία πετρελαίου του μήνα Δεκεμβρίου του 2012, η οποία λαμβάνεται ίση με αυτή του Δεκεμβρίου του 2013. Επιπλέον, για τον υπολογισμό του κυλιόμενου μέσου όρου για τον μήνα Δεκέμβριο του 2014 απαιτείται η παραγγελία κατά το μήνα Ιανουάριο του 2015, η οποία λαμβάνεται ίση με αυτή του Ιανουαρίου 2014. Από τον μετασχηματισμό των κυλιόμενων μέσων όρων προκύπτει τελικά το νέο δείγμα τιμών μέσης μηνιαίας θερμοκρασίας – μηνιαίας κατανάλωσης πετρελαίου:

Μήνας	Θερμοκρασία X_ν(°C)	Κατανάλωση Πετρελαίου Y_ν (L)
Ιαν-13	12	46087,97
Φεβ-13	12,9	46491,42333
Μαρ-13	14,8	39284,15

Απρ-13	17,9	38845,30333
Μαϊ-13	22,2	29433,18
Ιουν-13	24,7	20279,78
Ιουλ-13	27,6	11963,93
Αυγ-13	28,8	8437,166667
Σεπ-13	25	9261,933333
Οκτ-13	20,4	11912,52
Νοε-13	17,2	24447,95333
Δεκ-13	13	38432,75333
Ιαν-14	13,3	49881,1
Φεβ-14	13,3	38056,96667
Μαρ-14	14,3	29923,83333
Απρ-14	16,5	18955,06667
Μαϊ-14	20	17097,46667
Ιουν-14	24,5	13291,86667
Ιουλ-14	26,8	9385,966667
Αυγ-14	28	11850,88
Σεπ-14	25	6622,146667
Οκτ-14	20,1	11056,64333
Νοε-14	17	22025,55
Δεκ-14	14,2	39193,01667

$$M = 24, \qquad \bar{X}_{24} = 19{,}56\ °\mathrm{C}, \qquad \bar{Y}_{24} = 24676\ L$$

Η κατανάλωση πετρελαίου που θα παρουσίαζε το παλιό μήνα κατά τον μ-οστό μήνα θα εκτιμηθεί απ' τη σχέση της παλινδρόμησης και θα συνοδεύεται απ' την αντίστοιχη αβεβαιότητα, όπως υπολογίστηκε παραπάνω:

$$\tilde{Y}_\mu = \widetilde{\mu_{Y_\mu}} \pm t_a s\{\tilde{Y}_\mu\}$$

$$\tilde{Y}_\mu = -2708{,}76\, X_\mu + 92.610{,}10 \pm t_a \sqrt{48.796.904 + 45.401{,}3\left(X_\mu - 18{,}35\right)^2}\,(L)$$

Η εκτίμηση της εξοικονόμησης πετρελαίου κατά τον μ-οστό μήνα ως ποσοστό της μέσης κατανάλωσης του παλιού δείγματος $\bar{Y}_N$ θα δίνεται ως:

$$\widetilde{\delta\varepsilon_\mu} = \mu_{\widetilde{\delta\varepsilon_\mu}} \pm \mathrm{t}\left\{1 - \frac{\alpha}{2}; \mathrm{N} - 2\right\} \sigma_{\widetilde{\delta\varepsilon_\mu}}$$

$$\widetilde{\delta\varepsilon_\mu} = \frac{\widetilde{\mu_{Y_\mu}} - Y_\mu}{\bar{Y}_N} \pm 2\,\frac{\sqrt{s^2\{\tilde{Y}_\mu\} + \sigma^2_{\mu\varepsilon\tau}}}{\bar{Y}_N}$$

Αντίστοιχα, η μέση μηνιαία κατανάλωση πετρελαίου που θα παρουσίαζε το παλιό σύστημα κατά το διάστημα Μ μηνών εκτιμάται απ' το μοντέλο της παλινδρόμησης:

$$\widetilde{\overline{Y_M}} = \widetilde{\mu_{\overline{Y_M}}} \pm t\{1 - \tfrac{\alpha}{2}; N - 2\} s\left\{\widetilde{\overline{Y_M}}\right\}$$

$$\widetilde{\mu_{\overline{Y_M}}} = b_1 \bar{X}_M + b_0 = -2708{,}76\, \bar{X}_M + 92.610{,}10\ (L)$$

$$s^2\left\{\widetilde{\overline{Y_M}}\right\} = \frac{46.845.028}{\mathrm{M}} + 1.951.876{,}2 + 45.401{,}3(\bar{X}_M - 18{,}35\ )^2(L)^2$$

Η εκτίμηση της μέσης μηνιαίας εξοικονόμησης πετρελαίου κατά την πάροδο Μ μηνών $\widetilde{\overline{\Delta Y}}_M$ ως ποσοστό της μέσης κατανάλωσης πετρελαίου του παλιού δείγματος $\bar{Y}_N$ θα δίνεται ως:

$$\widetilde{\delta\varepsilon}_M = \mu_{\widetilde{\delta\varepsilon}_M} \pm \alpha_{\widetilde{\delta\varepsilon}_M}$$

$$\widetilde{\delta\varepsilon}_M = \mu_{\widetilde{\delta\varepsilon}_M} \pm \mathrm{t}\left\{1 - \frac{\alpha}{2}; \mathrm{N} - 2\right\}\sigma_{\widetilde{\delta\varepsilon}_M}$$

$$\widetilde{\delta\varepsilon}_M = \frac{\mu_{\widetilde{\overline{\Delta Y}}_M}}{\bar{Y}_N} \pm 2\,\frac{\sigma\{\widetilde{\overline{\Delta Y}}_M\}}{\bar{Y}_N}$$

$$\mu_{\widetilde{\overline{\Delta Y}}_M} = \mu_{\widetilde{\overline{Y_M}}} - \bar{Y}_M$$

$$\mu_{\widetilde{\overline{Y_M}}} = b_1\bar{X}_M + b_0 = -2708{,}76\,\bar{X}_M + 92.610{,}10\ (L)$$

$$\sigma^2\left\{\widetilde{\overline{\Delta Y}}_M\right\} = s^2\left\{\widetilde{\overline{Y_M}}\right\} + \frac{\sigma^2_{\mu\varepsilon\tau}}{M}$$

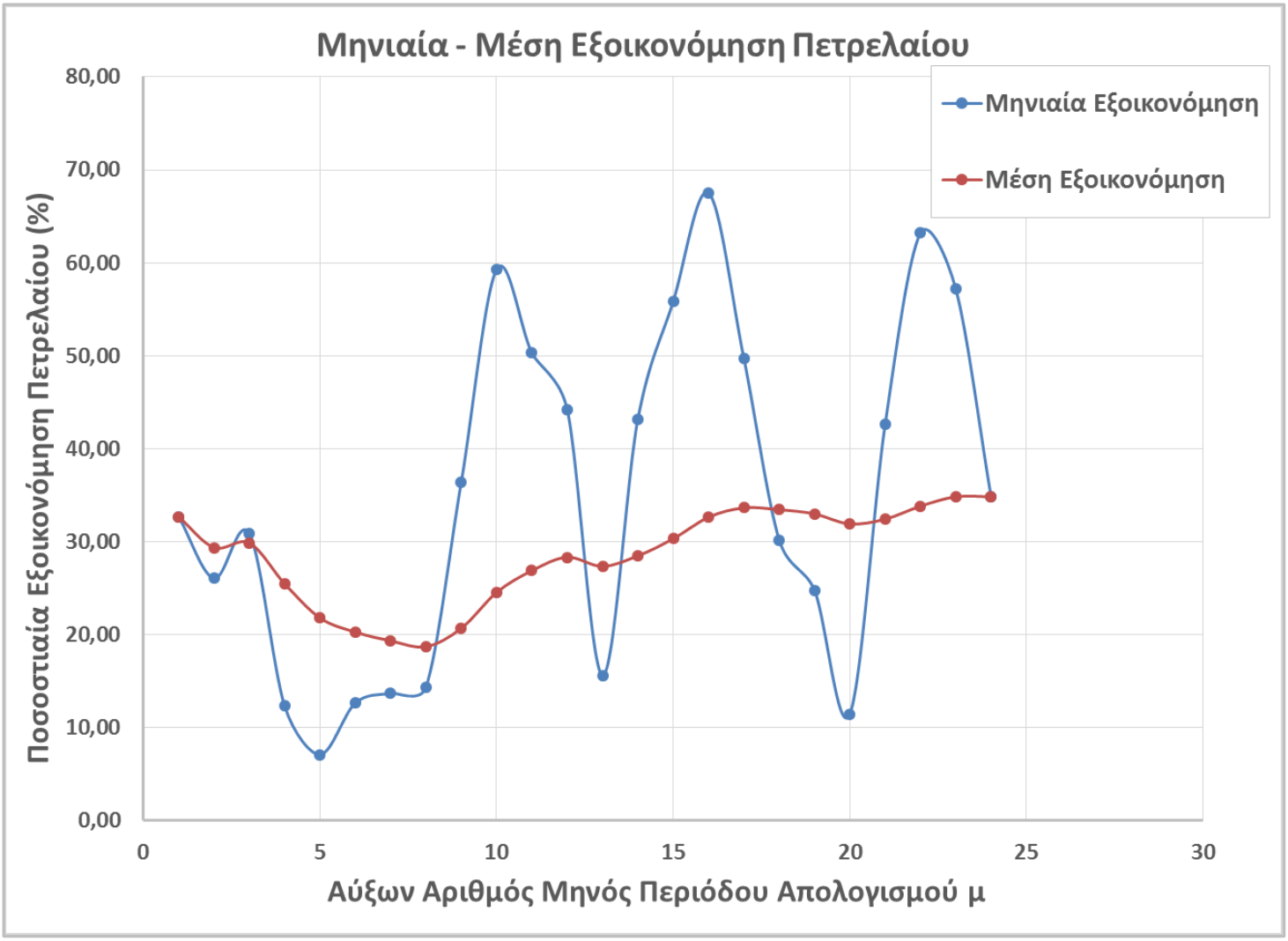
$$s^2\left\{\widetilde{\overline{Y_M}}\right\} = \frac{46.845.028}{\mathrm{M}} + 1.951.876{,}2 + 45.401{,}3(\bar{X}_M - 18{,}35\ )^2(L)^2$$

Η τυπική απόκλιση της μέτρησης λαμβάνεται ίση με το μηδέν. Τα αποτελέσματα που προκύπτουν απ' την εφαρμογή των παραπάνω εξισώσεων παρατίθενται στον παρακάτω πίνακα:

μ	$Y_\mu(L)$	$\widetilde{\mu_{Y_\mu}}(L)$	$\frac{\widetilde{\mu_{Y_\mu}} - Y_\mu}{\bar{Y}_N}$ (%)	$\frac{\mu_{\widetilde{\overline{\Delta Y}}_M}}{\bar{Y}_N}$(%)	$\alpha_{\widetilde{\delta\varepsilon}_M}$(%)
1	46087,97	60104,98	32,68	32,68	33,18
2	46491,42	57667,10	26,05	29,37	24,21
3	39284,15	52520,47	30,86	29,86	20,19
4	38845,30	44123,32	12,31	25,47	17,68
5	29433,18	32475,67	7,09	21,80	15,87
6	20279,78	25703,78	12,65	20,27	14,60
7	11963,93	17848,39	13,72	19,34	13,72
8	8437,17	14597,88	14,36	18,71	13,15
9	9261,93	24891,16	36,44	20,68	12,68
10	11912,52	37351,43	59,31	24,55	12,22
11	24447,95	46019,45	50,29	26,89	11,78
12	38432,75	57396,23	44,21	28,33	11,36
13	49881,10	56583,60	15,63	27,35	11,02
14	38056,97	56583,60	43,19	28,48	10,74
15	29923,83	53874,85	55,84	30,31	10,50
16	18955,07	47915,58	67,52	32,63	10,30
17	17097,47	38434,94	49,75	33,64	10,12
18	13291,87	26245,53	30,20	33,45	9,96
19	9385,97	20015,40	24,78	32,99	9,84
20	11850,88	16764,89	11,46	31,92	9,75
21	6622,15	24891,16	42,59	32,42	9,66
22	11056,64	38164,06	63,20	33,82	9,55

23	22025,55	46561,20	57,20	34,84	9,42
24	39193,02	54145,72	34,86	34,84	9,29

Σύμφωνα με την τελευταία γραμμή, κατά την πάροδο των 24 μηνών επετεύχθη μέση μηνιαία ποσοστιαία εξοικονόμηση ενέργειας ίση με $34{,}84\% \pm 9{,}29\%$ με βαθμό εμπιστοσύνης 95%. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι στήλες 4 και 5, οι οποίες περιλαμβάνουν τις τιμές της μηνιαίας εξοικονόμησης πετρελαίου κατά τον μ-οστό μήνα, καθώς και της μέσης μηνιαίας εξοικονόμησης κατά τους Μ μήνες λειτουργίας συμπεριλαμβανομένου του μ-οστού μήνα, αντίστοιχα. Έτσι, κατά τους πρώτους δύο μήνες λειτουργίας του έτους 2013 επετεύχθη εξοικονόμηση πετρελαίου ίση με 32,68% και 26,05% της μέσης κατανάλωσης της περιόδου βάσεως αντίστοιχα (4η στήλη). Κατά τον πρώτο μήνα η μέση εξοικονόμηση ταυτίζεται με την μηνιαία, ενώ κατά τον δεύτερο ισούται με τον μέσο όρο της εξοικονόμησης των δύο μηνών και λαμβάνει την τιμή 29,37% (5η στήλη). Τα παραπάνω απεικονίζονται γραφικά στο κάτωθι σχήμα:

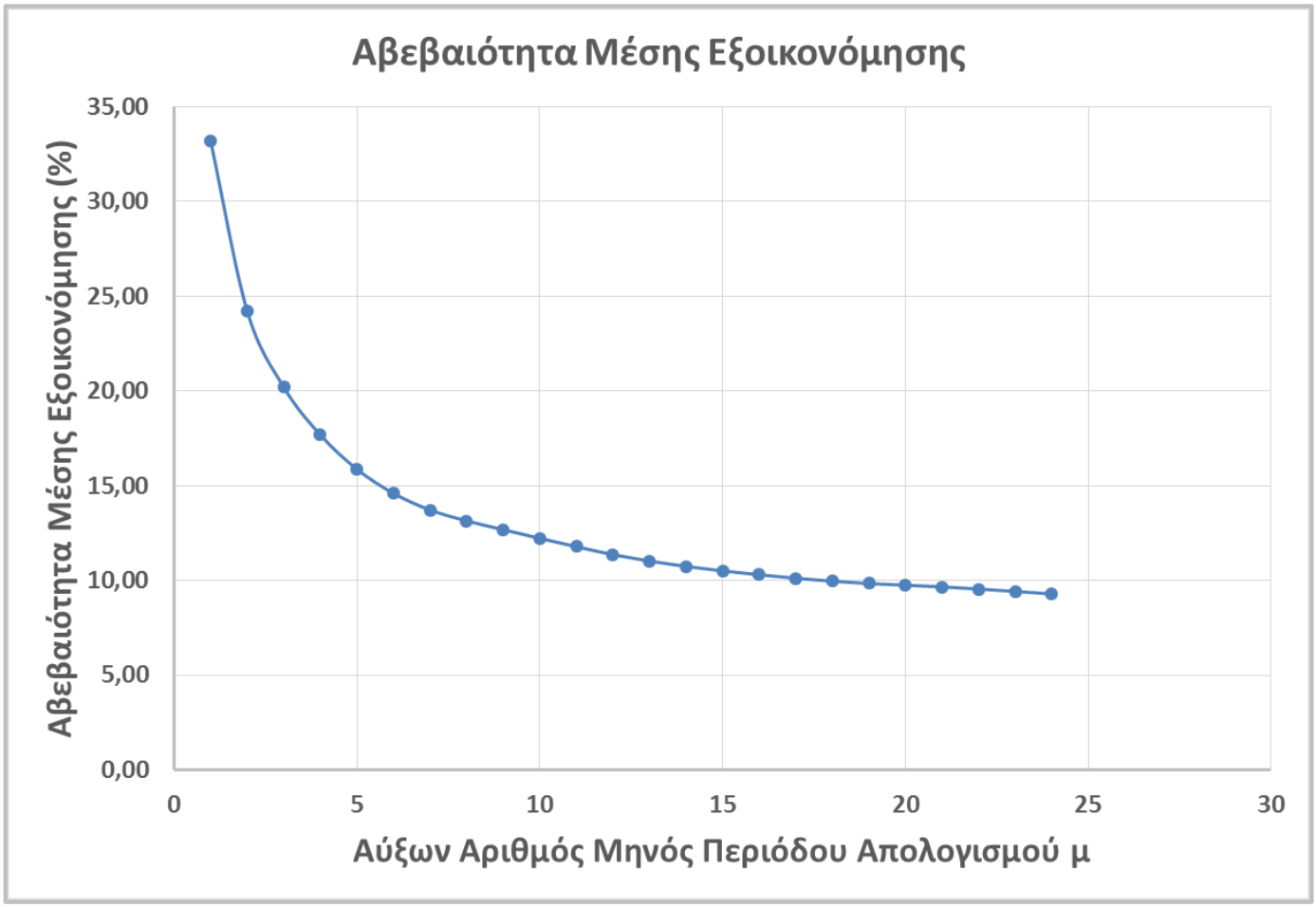


Σχήμα (3.10) Ποσοστιαία μηνιαία και ποσοστιαία μέση εξοικονόμηση ενέργειας ως συνάρτηση του αριθμού των μηνών μ κατά την περίοδο απολογισμού

Παρατηρώντας το σχήμα (3.10) γίνεται άμεσα αντιληπτό πως η μηνιαία εξοικονόμηση ενέργειας (μπλε καμπύλη) παρουσιάζει σημαντική διακύμανση. Συγκεκριμένα, λαμβάνει

τιμές από 7% έως 67,5%. Αντιθέτως, η μέση εξοικονόμηση ενέργειας (κόκκινη καμπύλη) χαρακτηρίζεται από μεγαλύτερη σταθερότητα, λαμβάνοντας τιμές από 18,7% έως 34,8%. Επιπλέον, δεδομένης της μορφή της κόκκινης καμπύλης, φαίνεται πως το σύστημα τείνει να συγκλίνει σε μόνιμη κατάσταση και συνεπώς η μέση εξοικονόμηση αναμένεται να σταθεροποιηθεί περεταίρω. Το γεγονός αυτό καθιστά την μέση μηνιαία εξοικονόμηση ενέργειας πολύ πιο αξιόπιστο δείκτη της επιτευχθείσας εξοικονόμησης ενέργειας.

Επιπλέον, ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η τελευταία στήλη του πίνακα, η οποία περιλαμβάνει τις τιμές της αβεβαιότητας της μέσης εξοικονόμησης ενέργειας κατά την πάροδο μ μηνών. Οι τιμές αυτές ουσιαστικά ταυτίζονται με τους αντίστοιχους ΕΕΣΕΕ για μ περιόδους. Τα αποτελέσματα απεικονίζονται γραφικά στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα (3.11) Αβεβαιότητα της μέσης εξοικονόμησης ως ποσοστό της μέσης τιμής του παλιού δείγματος συναρτήσει του αριθμού του μ-οστού μήνα κατά την περίοδο απολογισμού

Η αβεβαιότητα είναι αντιστρόφως ανάλογη του πλήθους Μ και συνεπώς μειώνεται με την αύξηση του Μ τείνοντας ασυμπτωτικά προς την τιμή μηδέν. Έτσι, ξεκινώντας από την τιμή 33,18 % μειώνεται σταδιακά με την λήψη περεταίρω μετρήσεων λαμβάνοντας τελικά την τιμή 9,29%.

Αξιοποιώντας τόσο την μειωμένη διακύμανση που παρουσιάζει η μέση εξοικονόμηση συγκριτικά με την μηνιαία, όσο και την μείωση της αβεβαιότητας μέσω της αύξησης του πλήθους των μετρήσεων κατά την περίοδο απολογισμού, αποκτάμε μία ικανοποιητική

εικόνα για την επιτευχθείσα εξοικονόμηση πετρελαίου. Παρατίθενται ενδεικτικά οι εκτιμήσεις της μέσης μηνιαίας εξοικονόμησης πετρελαίου για M=1, M=12 και M=24:

$$M = 1: \quad \widetilde{\delta\varepsilon}_1 = 32{,}68\ \% \pm 33{,}18\ \% => -0{,}50\% \leq \widetilde{\delta\varepsilon}_1 \leq 65{,}86\%$$

$$M = 12: \quad \widetilde{\delta\varepsilon}_{12} = 28{,}33\ \% \pm 11{,}36\ \% => 16{,}97\% \leq \widetilde{\delta\varepsilon}_{12} \leq 39{,}69\%$$

$$M = 24: \quad \widetilde{\delta\varepsilon}_{24} = 34{,}84\ \% \pm 9{,}29\ \% => 25{,}55\% \leq \widetilde{\delta\varepsilon}_{24} \leq 44{,}13\%$$

Έτσι, στο τέλος του πρώτου έτους έχει επιτευχθεί τουλάχιστον 17% εξοικονόμηση πετρελαίου, ενώ στο τέλος του δεύτερου έτους έχει επιτευχθεί τουλάχιστον 25,55% εξοικονόμηση πετρελαίου. Με βάση τα παραπάνω διαστήματα εμπιστοσύνης, δίνονται οι ΕΕΣΕΕ που προκύπτουν για τα διάφορα μεγέθη δείγματος:

$$M = 1: \quad (EE\Sigma EE)_1 = \alpha_{\widetilde{\delta\varepsilon}_1} = 33{,}18\ \%$$

$$M = 12: \quad (EE\Sigma EE)_{12} = \alpha_{\widetilde{\delta\varepsilon}_{12}} = 11{,}36\ \%$$

$$M = 24: \quad (EE\Sigma EE)_{24} = \alpha_{\widetilde{\delta\varepsilon}_{24}} = 9{,}29\ \%$$

Για λόγους συγκρίσεως θα υπολογιστεί η εκτίμηση της εξοικονόμησης πετρελαίου χωρίς την χρήση των μεθόδων της χάραξης γραμμής βάσης και της γραμμικής παλινδρόμησης. Στην περίπτωση αυτή η καλύτερη εκτίμηση της εξοικονόμησης πετρελαίου θα προέκυπτε με χρήση των μέσων όρων του παλιού και του καινούργιου δείγματος:

$$\widetilde{\delta\varepsilon}_{24} = \frac{\bar{Y}_N - \bar{Y}_{\mathrm{M}}}{\bar{Y}_{\mathrm{N}}} = \frac{42893 - 24676}{42893} = 42{,}47\%$$

Η τιμή αυτή της εξοικονόμησης πετρελαίου είναι αισθητά μεγαλύτερη από αυτή που υπολογίστηκε με τη μέθοδο της γραμμικής παλινδρόμησης και σχεδόν ταυτίζεται με το άνω άκρο του διαστήματος εμπιστοσύνης $34{,}84\ \% + 9{,}29\ \% = 44{,}13\%$. Το γεγονός αυτό οφείλεται στο ότι η απλουστευμένη προσέγγιση δεν λαμβάνει υπόψιν την επίδραση που έχει στην κατανάλωση πετρελαίου (και συνεπώς στην εξοικονόμηση) η μέση εξωτερική θερμοκρασία. Συγκεκριμένα, η μέση θερμοκρασία της περιόδου απολογισμού ήταν μεγαλύτερη από αυτήν της περιόδου βάσεως κατά περισσότερο από ένα βαθμό κελσίου.

$$\bar{X}_{\mathrm{N}} = 18{,}35\ °C$$

$$\bar{X}_{\mathrm{M}} = 19{,}56\ °C$$

Μία τόσο σημαντική διαφορά επηρεάζει σημαντικά την κατανάλωση πετρελαίου, δεδομένου ότι οι ανάγκες σε θέρμανση μειώνονται αισθητά. Συνεπώς, η μειωμένη κατανάλωση πετρελαίου που μετρήθηκε κατά την περίοδο απολογισμού δεν οφείλεται αποκλειστικά στην βελτιωμένη λειτουργία της νοσοκομειακής μονάδας μετά την εγκατάσταση του νέου εξοπλισμού. Ένα σημαντικό ποσοστό αυτής οφείλεται στην υψηλότερη μέση θερμοκρασία κατά την περίοδο απολογισμού.

4 Πολυδιάστατη Γραμμική Παλινδρόμηση

4.1 Εισαγωγή

Η πολυδιάστατη γραμμική παλινδρόμηση αποτελεί ευρέως εφαρμοζόμενη μέθοδο στις στατιστικές αναλύσεις. Η εφαρμογή της καθιστά δυνατή τη συσχέτιση μίας εξαρτημένης μεταβλητής με ένα σύνολο ανεξάρτητων μεταβλητών. Ομοιάζει σημαντικά με την απλή γραμμική παλινδρόμηση, αλλά χαρακτηρίζεται από μεγαλύτερη πολυπλοκότητα, η οποία εμφανίζεται υπό την μορφή εξισώσεων με πίνακες. Συνεπώς απαιτούνται κάποιες γνώσεις γραμμικής άλγεβρας, όσον αφορά τις ιδιότητες των πινάκων και τις πράξεις μεταξύ αυτών, οι οποίες θα θεωρηθούν δεδομένες.

Η γενική εξίσωση της πολυδιάστατης γραμμικής παλινδρόμησης λαμβάνει τη μορφή:

$$\mathrm{Y}_\nu = \beta_0 + \beta_1 \mathrm{X}_{\nu 1} + \beta_2 \mathrm{X}_{\nu 2} + \cdots + \beta_p \mathrm{X}_{\nu p} + \cdots + \beta_P \mathrm{X}_{\nu P} + \varepsilon_\nu \tag{4.1}$$

Όπου $\mathrm{X}_{\nu p}$ είναι οι τιμές που λαμβάνουν οι P ανεξάρτητες μεταβλητές κατά τη ν-οστή χρονική περίοδο και β_p οι συντελεστές της παλινδρόμησης. Χρησιμοποιείται και εδώ το μοντέλο των κανονικών σφαλμάτων και συνεπώς το σφάλμα ε ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή μηδέν και τυπική απόκλιση σ:

$$\mu_{Y_\nu} = \beta_0 + \beta_1 \mathrm{X}_{\nu 1} + \beta_2 \mathrm{X}_{\nu 2} + \cdots + \beta_P \mathrm{X}_{\nu P} \tag{4.2}$$

$$\sigma\{\mathrm{Y}_\nu\} = \sigma \tag{4.3}$$

Οι συντελεστές β_p εκτιμώνται μέσω εφαρμογής της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων, για την οποία απαιτείται πλήθος N σετ μετρήσεων ($\mathrm{X}_{\nu 1}$, $\mathrm{X}_{\nu 2}$, ..., $\mathrm{X}_{\nu P}$, Y_ν). Επιστρέφοντας στο παράδειγμα του συστήματος ψύξης εξαρτημένη μεταβλητή θα είναι η κατανάλωση ενέργειας, ενώ ανεξάρτητες μεταβλητές θα είναι η μέση εξωτερική θερμοκρασία, η μέση εξωτερική υγρασία, η μέση πληρότητα κτιρίου, κλπ. Από το σύνολο των μετρήσεων δημιουργούνται οι πίνακες Y και X:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_N \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1P} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2P} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{\mathrm{N}1} & X_{\mathrm{N}2} & \dots & X_{\mathrm{N}P} \end{bmatrix}$$

$$\bar{Y}_N = \frac{\sum Y_\nu}{N} \qquad \bar{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{N}} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sum X_{\nu 1}}{N} & \frac{\sum X_{\nu 2}}{N} & \dots & \frac{\sum X_{\nu P}}{N} \end{bmatrix}$$

Η πρώτη στήλη του πίνακα X έχει συμπληρωθεί από μονάδες για πρακτικούς λόγους, όπως θα γίνει αντιληπτό στη συνέχεια. Εφαρμόζοντας την εξίσωση (4.1) για κάθε ν-οστό σετ μετρήσεων λαμβάνουμε το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{aligned} \mathrm{Y}_1 &= \beta_0 + \beta_1 \mathrm{X}_{11} + \beta_2 \mathrm{X}_{12} + \cdots + \beta_P \mathrm{X}_{1P} + \varepsilon_1 \\ \mathrm{Y}_2 &= \beta_0 + \beta_1 \mathrm{X}_{21} + \beta_2 \mathrm{X}_{22} + \cdots + \beta_P \mathrm{X}_{2P} + \varepsilon_2 \\ &\vdots \\ \mathrm{Y}_\mathrm{N} &= \beta_0 + \beta_1 \mathrm{X}_{\mathrm{N}1} + \beta_2 \mathrm{X}_{\mathrm{N}2} + \cdots + \beta_P \mathrm{X}_{NP} + \varepsilon_N \end{aligned} \tag{4.4}$$

Το σύστημα (4.4) γράφεται υπό μορφή πινάκων:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1P} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2P} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{\mathrm{N}1} & X_{\mathrm{N}2} & \dots & X_{\mathrm{N}P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_N \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}^{1} \tag{4.5}$$

Παρατηρούμε πως οι μονάδες που καταλαμβάνουν την πρώτη στήλη του πίνακα X είναι απαραίτητες για την σωστή γραφή της εξίσωσης (4.5) καθώς πολλαπλασιάζονται με τον σταθερό συντελεστή β_0.

4.2 Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων

Οι συντελεστές $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_P$ εκτιμώνται μέσω των αμερόληπτων εκτιμητών τους $b_0, b_1, \dots, b_P$ αντίστοιχα, οι οποίοι υπολογίζονται με εφαρμογή της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων. Όπως και στην απλή γραμμική παλινδρόμηση αυτό επιτυγχάνεται ελαχιστοποιώντας το άθροισμα των τετραγώνων των σφαλμάτων:

$$\sum_{\nu=1}^{N}(Y_\nu - \mu_{Y_\nu})^2 = \sum_{\nu=1}^{N}(Y_\nu - \beta_0 - \beta_1 X_{\nu 1} - \dots - \beta_P \mathrm{X}_{\nu P})^2 = f(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_P) \tag{4.6}$$

Εργαζόμενοι αναλόγως με το κεφάλαιο 2 μηδενίζουμε ταυτόχρονα τις P+1 μερικές παραγώγους της fως προς τους συντελεστές β_0 έως β_P . Η επίλυση του συστήματος των P+1 εξισώσεων μας οδηγεί στην εξίσωση προσδιορισμού των συντελεστών b:

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_P \end{bmatrix} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y}^{2} \tag{4.7}$$

4.3 Αξιολόγηση του μοντέλου

4.3.1 Στατιστικός έλεγχος παραμέτρων παλινδρόμησης

Έχοντας υπολογίσει του αμερόληπτους εκτιμητές b_p μπορούμε να προσδιορίσουμε το μέσο τετραγωνικό σφάλμα

$$MT\Sigma = \frac{\sum_{\nu=1}^{N}\left(Y_\nu - \mu_{\widehat{Y_\nu}}\right)^2}{\mathrm{N}-P-1} = \frac{\sum_{\nu=1}^{N}(Y_\nu - b_0 - b_1 X_{\nu 1} - \dots - b_P \mathrm{X}_{\nu P})^2}{\mathrm{N}-P-1} \tag{4.8}$$

Κάθε συντελεστής της παλινδρόμησης b_p αποτελεί τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί κατανομή Student με N-P-1 βαθμούς ελευθερίας, μέση τιμή β_p και τυπική απόκλιση $\sigma\{b_p\}$. Όλες οι τυπικές αποκλίσεις $\sigma\{b_p\}$ υπολογίζονται ταυτόχρονα με χρήση της κάτωθι εξίσωσης:

$$\boldsymbol{\sigma}^2\{\boldsymbol{b}\} = \begin{bmatrix} \sigma^2\{b_0\} & \sigma\{b_0, b_1\} & \dots & \sigma\{b_0, b_P\} \\ \sigma\{b_1, b_0\} & \sigma^2\{b_1\} & \dots & \sigma\{b_1, b_P\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma\{b_P, b_0\} & \sigma\{b_P, b_1\} & \dots & \sigma^2\{b_P\} \end{bmatrix} = \sigma^2(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1} \tag{4.9}$$

Με τους όρους $\sigma\{b_i, b_j\}$ περιγράφεται η συνδιακύμανση μεταξύ δύο συντελεστών, ενώ με τους όρους $\sigma^2\{b_p\}$ που βρίσκονται στην κύρια διαγώνιο περιγράφεται η διακύμανση του αντίστοιχου συντελεστή. Εκτιμώντας την διακύμανση των σφαλμάτων σ^2 μέσω του

[1] Τα μεγέθη που εμφανίζονται σε έντονη γραφή (bold) συμβολίζουν πίνακες

[2] Το σύμβολο ′ αναφέρεται σε ανάστροφο πίνακα (transpose) ενώ το σύμβολο -1 αναφέρεται σε αντίστροφο πίνακα

αμερόληπτου εκτιμητή του, του μέσου τετραγωνικού σφάλματος ΜΤΣ, λαμβάνουμε τους αμερόληπτους εκτιμητές των διακυμάνσεων $s^2\{b_p\}$:

$$\boldsymbol{s^2\{b\}} = \begin{bmatrix} s^2\{b_0\} & s\{b_0, b_1\} & \dots & s\{b_0, b_P\} \\ s\{b_1, b_0\} & s^2\{b_1\} & \dots & s\{b_1, b_P\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s\{b_P, b_0\} & s\{b_P, b_1\} & \dots & s^2\{b_P\} \end{bmatrix} = MT\Sigma(\boldsymbol{X'X})^{-1} \qquad (4.10)$$

Το διάστημα εμπιστοσύνης κάθε συντελεστή β_p σε επίπεδο σημαντικότητας α θα δίνεται ως:

$$\mathrm{b}_p - \mathrm{t}\left\{1 - \frac{\alpha}{2}; \mathrm{N} - \mathrm{P} - 1\right\} s\{b_p\} \leq \beta_p \leq \mathrm{b_p} + \mathrm{t}\left\{1 - \frac{\alpha}{2}; \mathrm{N} - \mathrm{P} - 1\right\} s\{b_p\} \qquad (4.11)$$

Θα πρέπει στη συνέχεια να ελεγχθεί το κατά πόσο ο κάθε συντελεστής β_p διαφέρει στατιστικά απ' το μηδέν και συνεπώς το αν υφίσταται γραμμική συσχέτιση μεταξύ της εξαρτημένης μεταβλητής Y και της κάθε ανεξάρτητης μεταβλητής X_p. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω της διεξαγωγής ενός στατιστικού ελέγχου t για κάθε συντελεστή β_p:

$$H_0: \beta_\mathrm{p} = 0 \qquad (4.12.\alpha)$$

$$H_\alpha: \beta_\mathrm{p} \neq 0 \qquad (4.12.\beta)$$

Η αποδοχή της μηδενικής υπόθεσης H_0 μας οδηγεί στην αδυναμία εξαγωγής συμπεράσματος για την ύπαρξης γραμμικής συσχέτισης μεταξύ των μεταβλητών Y και X_p, ενώ η απόρριψή της στην ύπαρξη στατιστικώς σημαντικής γραμμικής συσχέτισης.

Για την διεξαγωγή του ελέγχου χρησιμοποιείται η στατιστική t_p*, όπου

$$t_p^* = \frac{b_p}{s\{b_p\}} \qquad (4.13)$$

Το αποτέλεσμα του ελέγχου, για επίπεδο σημαντικότητας α, βασίζεται στον κάτωθι κανόνα:

$$\text{Αν } |t_p^*| \leq t_\delta = t\left(1 - \frac{a}{2}; N - P - 1\right), \text{γίνεται δεκτή η } \mathrm{H_0} \qquad (4.14)$$

$$\text{Αν } |t_p^*| > t_\delta = t\left(1 - \frac{a}{2}; N - P - 1\right), \text{απορρίπτεται η } \mathrm{H_0} \qquad (4.15)$$

Εφόσον αποδειχτεί πως όλοι οι συντελεστές β_p είναι στατιστικά σημαντικοί η ανάλυση συνεχίζεται κανονικά. Σε περίπτωση που κάποιος απ' αυτούς δεν είναι στατιστικά σημαντικός, θα πρέπει είτε να βρεθούν ακριβέστερες μετρήσεις της ανεξάρτητης μεταβλητής X_p, είτε να εξεταστεί το ενδεχόμενο αφαίρεσης της μεταβλητής X_p από το μοντέλο της παλινδρόμησης. Σε κάθε περίπτωση, η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων θα πρέπει να εφαρμοστεί εκ' νέου στο καινούριο δείγμα που δημιουργείται.

4.3.2 Ο συντελεστής πολλαπλού προσδιορισμού R^2

Ως δείκτης της ποιότητας της παλινδρόμησης χρησιμοποιείται, όπως και στην απλή παλινδρόμηση, ο συντελεστής προσδιορισμού R^2. Όποτε αναφερόμαστε σε πολλαπλή παλινδρόμηση χρησιμοποιούμε τον όρο συντελεστής πολλαπλού προσδιορισμού, προκειμένου να γίνει διάκριση μεταξύ των δύο περιπτώσεων. Και εδώ ο R^2 υπολογίζεται ως λόγος αθροισμάτων τετραγώνων. Ωστόσο, τα διάφορα αθροίσματα παρουσιάζουν μεγαλύτερη πολυπλοκότητα στον υπολογισμό τους. Υπολογίζεται αρχικά ένας βοηθητικός πίνακας, ο H:

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X'X})^{-1}\boldsymbol{X'} \qquad (4.16)$$

Ο πίνακας H είναι απαραίτητος για τον υπολογισμό των αθροισμάτων τετραγώνων:

$$SSTO = \boldsymbol{Y}' \left[\boldsymbol{I} - \left(\frac{1}{N}\right)\boldsymbol{J}\right]\boldsymbol{Y}^{3} \tag{4.17}$$

$$SSE = \boldsymbol{Y}'(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{H})\,\boldsymbol{Y} \tag{4.18}$$

$$SSR = \boldsymbol{Y}' \left[\boldsymbol{H} - \left(\frac{1}{N}\right)\boldsymbol{J}\right]\boldsymbol{Y} \tag{4.19}$$

Ο συντελεστής πολλαπλού προσδιορισμού προκύπτει ως λόγος των αθροισμάτων τετραγώνων:

$$R^2 = \frac{SSR}{SSTO} = 1 - \frac{SSE}{SSTO} \tag{4.20}$$

Υπενθυμίζεται πως ο συγκεκριμένος συντελεστής, όπως και στην απλή παλινδρόμηση, ισούται με το ποσοστό της διακύμανσης που μπορεί να ερμηνευτεί απ' το μοντέλο. Λαμβάνει τιμές από 0 έως 1 και είναι αδιάστατος. Ο συντελεστής πολλαπλού προσδιορισμού αυξάνεται πάντα με την προσθήκη επιπλέον μεταβλητών X_p στο μοντέλο, ακόμα και όταν αυτές δεν είναι στατιστικά σημαντικές. Γι' αυτό και χρησιμοποιείται εναλλακτικά ο διορθωμένος συντελεστής προσδιορισμού R_a^2 (adjusted coefficient of determination), ο οποίος λαμβάνει υπόψιν του τον αριθμό των μεταβλητών του μοντέλου, με αποτέλεσμα να αυξάνεται μόνο όταν προστίθενται σε αυτό στατιστικά σημαντικές μεταβλητές.

$$R_a^2 = 1 - \frac{\frac{SSE}{N-P-1}}{\frac{SSTO}{N-1}} = 1 - \left(\frac{N-1}{N-P-1}\right)\frac{SSE}{SSTO} \tag{4.21}$$

Όπως και στην περίπτωση της απλής παλινδρόμησης, μία ικανοποιητική τιμή του διορθωμένου συντελεστή προσδιορισμού είναι 0,75, όπως προτείνεται από το διεθνές πρωτόκολλο IPMVP [3].

4.4 Εκτίμηση κατανάλωσης ενέργειας μίας μ-οστής περιόδου

Έχοντας εξασφαλίσει την ύπαρξη καλής γραμμικής συσχέτισης μπορούμε πλέον να αξιοποιήσουμε το μοντέλο της πολυδιάστατης παλινδρόμησης για την εκτίμηση μελλοντικών καταναλώσεων. Εφόσον το σύστημα ψύξης αντικατασταθεί από ένα νέο, αποδοτικότερο, μπορούμε επιπλέον να εκτιμήσουμε την επιτευχθείσα εξοικονόμηση ενέργειας κατά την μ-οστή περίοδο. Έστω ένα σετ τιμών μέσης θερμοκρασίας, μέσης υγρασίας, μέσης πληρότητας κτιρίου, κλπ. κατά την μ-οστή περίοδο ($X_{\mu 1}$, $X_{\mu 2}$, ..., $X_{\mu P}$), το οποίο εισάγεται σε ένα πίνακα $\mathbf{X_\mu}$. Το σετ συνοδεύεται από μία μέτρηση κατανάλωσης ενέργειας Y_μ.

$$\boldsymbol{X_\mu} = [1 \quad X_{\mu 1} \quad X_{\mu 2} \quad \dots \quad X_{\mu P}] \tag{4.22}$$

Η αντίστοιχη μέση εκτίμηση της κατανάλωσης ενέργειας του παλιού συστήματος θα δίνεται ως:

$$\widetilde{\mu_{Y_\mu}} = \boldsymbol{X_\mu b} = [1 \quad X_{\mu 1} \quad X_{\mu 2} \quad \dots \quad X_{\mu P}] \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_P \end{bmatrix} \tag{4.23}$$

[3] Το σύμβολο **I** αναφέρεται στον μοναδιαίο πίνακα, ένα πίνακα NxN με όλα του τα στοιχεία μηδενικά εκτός από εκείνα της κυρίας διαγωνίου που ισούνται με μονάδες. Το σύμβολο **J** αναφέρεται σε έναν NxN πίνακα που έχει όλα του τα στοιχεία ίσα με μονάδες.

Η μέση εκτίμηση της κατανάλωσης ενέργειας θα συνοδεύεται από το αντίστοιχο σφάλμα, το οποίο ποσοτικοποιείται μέσω της διακύμανσης $\sigma^2\{\widetilde{\mu_{Y_\mu}}\}$:

$$\sigma^2\left\{\widetilde{\mu_{Y_\mu}}\right\} = \sigma^2 \boldsymbol{X_\mu}(\boldsymbol{XX'})^{-1}\boldsymbol{X'_\mu} = \boldsymbol{X_\mu}\boldsymbol{\sigma^2}\{\boldsymbol{b}\}\boldsymbol{X'_\mu} \tag{4.24}$$

Η διακύμανση σ² εκτιμάται μέσω του μέσου τετραγωνικού σφάλματος ΜΤΣ:

$$s^2\left\{\widetilde{\mu_{Y_\mu}}\right\} = MT\Sigma(\boldsymbol{X_\mu}(\boldsymbol{XX'})^{-1}\boldsymbol{X'_\mu}) = \boldsymbol{X_\mu}\boldsymbol{s^2}\{\boldsymbol{b}\}\boldsymbol{X'_\mu} \tag{4.25}$$

Το σφάλμα της εκτίμησης $\widetilde{Y_\mu}$ θα είναι προσαυξημένο συγκριτικά με αυτό της μέσης εκτίμησης $\widetilde{\mu_{Y_\mu}}$, έτσι ώστε να περιλαμβάνει την διασπορά των τιμών Y γύρω από τη μέση τιμή τους, όπως και στην απλή παλινδρόμηση:

$$\sigma^2\{\widetilde{Y_\mu}\} = \sigma^2 + \sigma^2\left\{\widetilde{\mu_{Y_\mu}}\right\} = \sigma^2\left[1 + \boldsymbol{X_\mu}(\boldsymbol{XX'})^{-1}\boldsymbol{X'_\mu}\right] = \sigma^2 + \boldsymbol{X_\mu}\boldsymbol{\sigma^2}\{\boldsymbol{b}\}\boldsymbol{X'_\mu} \tag{4.26}$$

Και εκτιμώντας την διακύμανση σ² μέσω του μέσου τετραγωνικού σφάλματος ΜΤΣ:

$$s^2\{\widetilde{Y_\mu}\} = MT\Sigma + s^2\left\{\widetilde{\mu_{Y_\mu}}\right\} = MT\Sigma\left[1 + \boldsymbol{X_\mu}(\boldsymbol{XX'})^{-1}\boldsymbol{X'_\mu}\right] = MT\Sigma + \boldsymbol{X_\mu}\boldsymbol{s^2}\{\boldsymbol{b}\}\boldsymbol{X'_\mu} \tag{4.27}$$

Το διάστημα εμπιστοσύνης της εκτίμησης της κατανάλωσης ενέργειας του παλιού συστήματος $\widetilde{Y_\mu}$ θα δίνεται όπως και στην απλή παλινδρόμηση, σε επίπεδο σημαντικότητας α. Το μόνο που αλλάζει είναι οι βαθμοί ελευθερίας:

$$\widetilde{Y_\mu} = \widetilde{\mu_{Y_\mu}} \pm t\left\{1 - \frac{a}{2}; N - P - 1\right\} s\{\widetilde{Y_\mu}\} \tag{4.28}$$

4.5 Εκτίμηση εξοικονόμησης ενέργειας μία μ – οστής περιόδου

4.5.1 Εκτίμηση εξοικονόμησης και αβεβαιότητας

Η συλλογιστική πορεία που ακολουθείται για τον προσδιορισμό της επιτευχθείσας εξοικονόμησης ενέργειας είναι σχεδόν πανομοιότυπη με αυτή που ακολουθήθηκε στην απλή γραμμική παλινδρόμηση.

Η τιμή της κατανάλωσης ενέργειας Y_μ που μετρήθηκε θα συνοδεύεται από μετρητικό σφάλμα. Το διάστημα εμπιστοσύνης της πραγματικής κατανάλωσης ενέργειας $Y_{0\mu}$ κατά τη μ-οστή περίοδο δίνεται από την εξίσωση (3.2):

$$Y_{0\mu} = Y_\mu \pm z\{1 - \frac{\alpha}{2}\}\sigma_{\mu\varepsilon\tau}$$

Η εξοικονόμηση ενέργειας κατά τον μ-οστό μήνα εκτιμάται σύμφωνα με τις σχέσεις (3.5), (3.6), (3.7):

$$\widetilde{\Delta Y_\mu} = \mu_{\widetilde{\Delta Y_\mu}} \pm \mathrm{t}\{1 - \frac{\alpha}{2}; \mathrm{N} - P - 1\}\sigma\{\widetilde{\Delta Y_\mu}\} \tag{4.29}$$

$$\mu_{\widetilde{\Delta Y_\mu}} = \widetilde{\mu_{Y_\mu}} - Y_\mu = b_0 + \sum_{p=1}^{P}(b_p X_{\mu p}) - Y_\mu \tag{4.30}$$

$$\sigma^2\{\widetilde{\Delta Y_\mu}\} = s^2\{\widetilde{Y_\mu}\} + \sigma^2_{\mu\varepsilon\tau} = MT\Sigma + \boldsymbol{X_\mu}\boldsymbol{s^2}\{\boldsymbol{b}\}\boldsymbol{X'_\mu} + \sigma^2_{\mu\varepsilon\tau} \tag{4.31}$$

Διαιρώντας την εξίσωση (4.29) με $\bar{Y}_N$ λαμβάνουμε το διάστημα εμπιστοσύνης της εκτίμηση της εξοικονόμησης ενέργειας $\widetilde{\delta\varepsilon_\mu}$ ως ποσοστό της μέσης τιμής των παλαιών καταναλώσεων:

$$\widetilde{\delta\varepsilon_\mu} = \frac{\mu_{\widetilde{\Delta Y_\mu}}}{\bar{Y}_N} \pm \mathrm{t}\left\{1 - \frac{\alpha}{2}; \mathrm{N} - \mathrm{P} - 1\right\}\frac{\sigma\{\widetilde{\Delta Y_\mu}\}}{\bar{Y}_N}$$

$$\widetilde{\delta\varepsilon_\mu} = \mu_{\widetilde{\delta\varepsilon_\mu}} \pm \mathrm{t}\left\{1 - \frac{\alpha}{2}; \mathrm{N} - \mathrm{P} - 1\right\} \sigma_{\widetilde{\delta\varepsilon_\mu}} \tag{4.32}$$

4.5.2 Απαιτήσεις ακριβείας – Ελάχιστος Επαληθεύσιμος Στόχος Εξοικονόμησης Ενέργειας

Έχοντας προσδιορίσει την εκτίμηση της εξοικονόμησης ενέργειας ως απόλυτη τιμή ή ως ποσοστό, καθώς και την αβεβαιότητα αυτής, μπορούμε να εξετάσουμε τις σχετικές απαιτήσεις ακριβείας. Με βάση τον Οδηγό Ενεργειακών Ελέγχων [1], η μέση εκτίμηση της εξοικονόμησης ενέργειας θα πρέπει να είναι κατ' ελάχιστον διπλάσια απ' το σφάλμα:

$$\mu_{\widetilde{\delta\varepsilon_\mu}} - \mathrm{t}_\alpha \sigma_{\widetilde{\delta\varepsilon_\mu}} \geq 0 \,, t_\alpha = 2 \tag{4.33}$$

$$t_\alpha = \mathrm{t}\{1 - \alpha; \mathrm{N} - P - 1\} = 2$$

Όταν η ανίσωση (4.33) ισχύει ως ισότητα, η μέση εκτίμηση της ποσοστιαίας εξοικονόμησης ενέργειας ταυτίζεται με τον Ελάχιστο Επαληθεύσιμο Στόχο Εξοικονόμησης Ενέργειας κατά την μ-οστή περίοδο (ΕΕΣΕΕ):

$$EE\Sigma EE_\mu = 2\frac{\sqrt{MT\Sigma + \boldsymbol{X_\mu s^2\{b\}X'_\mu} + \sigma^2_{\mu\varepsilon\tau}}}{\bar{Y}_N} \tag{4.34}$$

Εν αντιθέσει με την περίπτωση της απλής παλινδρόμησης δεν δύναται να χαραχθεί γραφική παράσταση του ΕΕΣΕΕ σαν συνάρτηση των ανεξάρτητων μεταβλητών X, παρά μόνο στην περίπτωση των δύο ανεξάρτητων μεταβλητών. Στην περίπτωση αυτή, ο γεωμετρικός τόπος του ΕΕΣΕΕ θα ήταν ένα επίπεδο με «κορυφές» και «κοιλάδες», το οποίο δεν θα είχε κάποια ιδιαίτερη αξία παρατήρησης. Στην περίπτωση περισσότερων μεταβλητών η χάραξη του γεωμετρικού τόπου του ΕΕΣΕΕ θα απαιτούσε περισσότερες των τριών διαστάσεων.

Ωστόσο, το γεγονός πως ο ΕΕΣΕΕ λαμβάνει την ελάχιστη τιμή του όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή ταυτίζεται με τη μέση τιμή του αρχικού δείγματος εξακολουθεί να ισχύει. Στην πολλαπλή παλινδρόμηση αυτό συνεπάγεται την ταύτιση των πινάκων $\bar{X}_N$ και X_μ:

$$\boldsymbol{X_\mu} = \begin{bmatrix} 1 & X_{\mu 1} & X_{\mu 2} & \dots & X_{\mu P} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\bar{X}_N} \tag{4.35}$$

Έτσι, η ελάχιστη τιμή που δύναται να λάβει ο ΕΕΣΕΕ για την μ-οστή περίοδο θα ισούται με:

$$\left(EE\Sigma EE_\mu\right)_{min} = 2\frac{\sqrt{MT\Sigma + (\boldsymbol{\bar{X}_N})\boldsymbol{s^2\{b\}}(\boldsymbol{\bar{X}_N})' + \sigma^2_{\mu\varepsilon\tau}}}{\bar{Y}_N} \tag{4.36}$$

4.6 Εκτίμηση της μέσης κατανάλωσης ενέργειας κατά την πάροδο M περιόδων

Στη συνέχεια θα προσδιοριστεί το αντίστοιχο διάστημα εμπιστοσύνης για την εκτίμηση της μέσης κατανάλωσης ενέργειας ανά μ-οστή περίοδο κατά την πάροδο M περιόδων. Έπειτα θα υπολογιστεί η εκτίμηση της μέσης εξοικονόμησης ενέργειας, το διάστημα εμπιστοσύνης αυτής, καθώς και ο ΕΕΣΕΕ κατά την πάροδο M περιόδων. Έστω M σετ μετρήσεων ($X_{\mu 1}$, $X_{\mu 2}$, ..., $X_{\mu P}$, Y_μ), όπου μ=1,2,...,M με μέση τιμή ($\bar{X}_{M1}, \bar{X}_{M2}, \dots, \bar{X}_{MP}, \bar{Y}_M$), οι οποίες ελήφθησαν μετά την αντικατάσταση του παλαιού συστήματος ψύξης. Οι μέσες τιμές των P ανεξάρτητων μεταβλητών κατά τις M περιόδους εισάγονται σε έναν πίνακα:

$$\boldsymbol{\bar{X}_M} = \begin{bmatrix} 1 & \bar{X}_{M1} & \bar{X}_{M2} & \dots & \bar{X}_{MP} \end{bmatrix} \tag{4.37}$$

Ομοίως με την περίπτωση της μέσης εκτίμησης μίας τιμής, η μέση εκτίμηση της μέσης τιμής θα δίνεται όπως στην εξίσωση (4.23):

$$\mu_{\widetilde{\overline{Y_M}}} = (\bar{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{M}})\boldsymbol{b} = [1 \quad \bar{X}_{M1} \quad \bar{X}_{M2} \quad \dots \quad \bar{X}_{MP}] \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_P \end{bmatrix} \tag{4.38}$$

Η μέση εκτίμηση της μέσης τιμής θα συνοδεύεται από σφάλμα αντίστοιχο με αυτό που υπολογίστηκε στην εξίσωση (4.25) για την μέση εκτίμηση μίας τιμής:

$$s^2\{\mu_{\widetilde{\overline{Y_M}}}\} = MT\Sigma(\bar{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{M}})(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}')^{-\mathbf{1}}(\bar{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{M}})' = (\bar{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{M}})\boldsymbol{s}^{\mathbf{2}}\{\boldsymbol{b}\}(\bar{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{M}})' \tag{4.39}$$

Η διακύμανση που προέκυψε από την εξίσωση (4.39), προσαυξημένη κατά την διακύμανση των τιμών $\overline{Y_M}$ γύρω απ' τη μέση τιμή τους, μας δίνει τελικά τη διακύμανση της εκτίμησης της μέσης τιμής $\widetilde{\overline{Y_M}}$:

$$s^2\left\{\widetilde{\overline{Y_M}}\right\} = MT\Sigma\left[\frac{1}{M} + (\bar{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{M}})(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}')^{-\mathbf{1}}(\bar{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{M}})'\right] = \frac{MT\Sigma}{M} + (\bar{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{M}})\boldsymbol{s}^{\mathbf{2}}\{\boldsymbol{b}\}(\bar{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{M}})' \tag{4.40}$$

Έτσι, το διάστημα εμπιστοσύνης της εκτίμησης της μέσης κατανάλωσης ενέργειας θα δίνεται όπως στην απλή παλινδρόμηση, απλά με διαφορετικούς βαθμούς ελευθερίας:

$$\widetilde{\overline{Y_M}} = \mu_{\widetilde{\overline{Y_M}}} \pm t\{1 - \tfrac{\alpha}{2}; N - P - 1\}s\left\{\widetilde{\overline{Y_M}}\right\} \tag{4.41}$$

4.7 Εκτίμηση της μέσης εξοικονόμησης ενέργειας κατά την πάροδο Μ περιόδων

4.7.1 Εκτίμηση εξοικονόμησης ενέργειας και αβεβαιότητας

Κάθε μία από τις μετρήσεις κατανάλωσης ενέργειας θα χαρακτηρίζεται από σχετική αβεβαιότητα και το αντίστοιχο διάστημα εμπιστοσύνης δίνεται απ' την εξίσωση (4.1). Η μέση τιμή των Μ μετρήσεων $\bar{Y}_M$ θα παρουσιάζει μικρότερη αβεβαιότητα απ' ότι κάθε μία μέτρηση ξεχωριστά. Το διάστημα εμπιστοσύνης της πραγματικής μέσης κατανάλωσης κατά την πάροδο Μ περιόδων δίνεται απ' την εξίσωση (3.19):

$$\bar{Y}_{0M} = \bar{Y}_M \pm z\left\{1 - \frac{\alpha}{2}\right\}\frac{\sigma_{\mu\varepsilon\tau}}{\sqrt{M}}$$

Το διάστημα εμπιστοσύνης της εκτίμησης της μέσης εξοικονόμησης ενέργειας θα δίνεται σε επίπεδο σημαντικότητας α από την εξίσωση (3.24). Και εδώ εμφανίζονται διαφορετικοί βαθμοί ελευθερίας:

$$\widetilde{\overline{\Delta Y}}_M = \mu_{\widetilde{\overline{\Delta Y}}_M} \pm \mathrm{t}\left\{1 - \frac{\alpha}{2}; \mathrm{N} - P - 1\right\}\sigma\left\{\widetilde{\overline{\Delta Y}}_M\right\} \tag{4.42}$$

$$\mu_{\widetilde{\overline{\Delta Y}}_M} = \mu_{\widetilde{\overline{Y_M}}} - \bar{Y}_M = (\bar{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{M}})\boldsymbol{b} - \bar{Y}_M \tag{4.43}$$

$$\sigma^2\left\{\widetilde{\overline{\Delta Y}}_M\right\} = s^2\left\{\widetilde{\overline{Y_M}}\right\} + \frac{\sigma^2_{\mu\varepsilon\tau}}{M} = \frac{MT\Sigma}{M} + (\bar{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{M}})\boldsymbol{s}^{\mathbf{2}}\{\boldsymbol{b}\}(\bar{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{M}})' + \frac{\sigma^2_{\mu\varepsilon\tau}}{M} \tag{4.44}$$

Τα μεγέθη της εξίσωσης (4.42) μετασχηματίζονται στα αντίστοιχα ποσοστιαία διαιρώντας την εξίσωση με τον όρο $\bar{Y}_N$:

$$\widetilde{\delta\varepsilon}_M = \mu_{\widetilde{\delta\varepsilon}_M} \pm \mathrm{t}\left\{1 - \frac{\alpha}{2}; \mathrm{N} - P - 1\right\}\sigma_{\widetilde{\delta\varepsilon}_M} \tag{4.45}$$

4.7.2 Απαιτήσεις ακριβείας – Ελάχιστος Επαληθεύσιμος Στόχος Εξοικονόμησης Ενέργειας (ΕΕΣΕΕ)

Το κριτήριο ακριβείας γράφεται για την μέση εξοικονόμηση κατ' αναλογία της περίπτωσης της εξοικονόμησης μίας περιόδου:

$$\mu_{\widetilde{\delta\varepsilon}_M} - \mathrm{t}_\alpha \sigma_{\widetilde{\delta\varepsilon}_M} \geq 0\,, t_\alpha = 2 \qquad (4.46)$$
$$t_\alpha = \mathrm{t}\{1-\alpha; \mathrm{N} - P - 1\} = 2$$

Όταν η ανίσωση (4.46) ισχύει σαν ισότητα, η εκτίμηση της μέσης ποσοστιαίας εξοικονόμησης ενέργειας ταυτίζεται με τον Ελάχιστο Επαληθεύσιμο Στόχο Εξοικονόμησης Ενέργειας κατά την πάροδο Μ περιόδων:

$$EE\Sigma EE_M = 2\frac{\sqrt{\frac{MT\Sigma}{M} + (\bar{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{M}})\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{2}}\{\boldsymbol{b}\}(\bar{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{M}})' + \frac{\sigma^2_{\mu\varepsilon\tau}}{M}}}{\bar{Y}_N} \qquad (4.47)$$

Όπως και στην περίπτωση της εκτίμησης μίας τιμής κατανάλωσης, έτσι και εδώ η γραφική απεικόνιση του γεωμετρικού τόπου του ΕΕΣΕΕ δεν είναι δυνατή. Ο ΕΕΣΕΕ θα λαμβάνει την ελάχιστη δυνατή τιμή του όταν η μέση τιμή του νέου δείγματος θα ταυτίζεται με τη μέση τιμή του αρχικού:

$$\bar{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{M}} = [1 \quad \bar{X}_{M1} \quad \bar{X}_{M2} \quad \dots \quad \bar{X}_{MP}] = \bar{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{N}} \qquad (4.48)$$

Έτσι, η ελάχιστη τιμή που δύναται να λάβει ο ΕΕΣΕΕ για την πάροδο Μ περιόδων θα ισούται με:

$$(EE\Sigma EE_M)_{min} = 2\frac{\sqrt{\frac{MT\Sigma}{M} + (\bar{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{N}})\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{2}}\{\boldsymbol{b}\}(\bar{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{N}})' + \frac{\sigma^2_{\mu\varepsilon\tau}}{M}}}{\bar{Y}_N} \qquad (4.49)$$

4.8 Αριθμητική εφαρμογή Οδηγού Ενεργειακών Ελέγχων

Ακολουθεί αριθμητική εφαρμογή για την καλύτερη κατανόηση όλων όσων αναπτύχθηκαν στο τέταρτο κεφάλαιο. Χρησιμοποιείται η μέθοδος της πολυδιάστατης γραμμικής παλινδρόμησης για την εκτίμηση της εξοικονόμησης ενέργειας κατά την πάροδο Μ περιόδων μετά την λήψη μέτρων εξοικονόμησης. Για λόγους σύγκρισης θα χρησιμοποιηθεί ως παράδειγμα αυτό που δίνεται στον Οδηγό Ενεργειακών Ελέγχων [1] στην παράγραφο 8.1.3 για P=2 ανεξάρτητες μεταβλητές. Όλα τα αποτελέσματα που παρατίθενται στον Οδηγό θα υπολογιστούν αναλυτικά και θα γίνει σύγκριση της αβεβαιότητας που προκύπτει με τις μεθόδους της παλινδρόμησης και της ASHRAE. Το συγκεκριμένο παράδειγμα αναφέρεται σε μία ξενοδοχειακή μονάδα, όπου ελήφθησαν μέτρα εξοικονόμησης ενέργειας. Για την εκτίμηση της κατανάλωσης βάσης γίνεται συσχέτιση μεταξύ της κατανάλωσης ηλεκτρικής ενέργειας Y(MWh), της μέσης μηνιαίας εξωτερικής θερμοκρασίας X_1(°C) και της μέσης πληρότητας του ξενοδοχείου X_2(%). Οι τιμές των υπό εξέτασιν μεταβλητών δίνονται στον κάτωθι πίνακα:

ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΒΑΣΗΣ			
ΜΗΝΑΣ	X1(°C)	X2(%)	Y(MWh)
ΜΑΡ	15	37	32
ΑΠΡ	17	45	45
ΜΑΪ	19	65	68
ΙΟΥΝ	22	82	76
ΙΟΥΛ	26	92	105
ΑΥΓ	27	100	130
ΣΕΠ	24	92	115
ΟΚΤ	19	90	78
ΝΟΕ	16,5	85	68

$$N = 9, \qquad P = 2, \qquad \bar{Y}_9 = 79{,}67\ MWh, \qquad \bar{X}_{91} = 20{,}61°C\ , \qquad \bar{X}_{92} = 76{,}44\ \%$$

Σχηματίζονται αρχικά οι πίνακες **X** και **Y**:

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & 15 & 37 \\ 1 & 17 & 45 \\ 1 & 19 & 65 \\ 1 & 22 & 82 \\ 1 & 26 & 92 \\ 1 & 27 & 100 \\ 1 & 24 & 92 \\ 1 & 19 & 90 \\ 1 & 16{,}5 & 85 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} 32 \\ 45 \\ 68 \\ 76 \\ 105 \\ 130 \\ 115 \\ 78 \\ 68 \end{bmatrix}$$

Απαραίτητοι για τον υπολογισμό των συντελεστών b και της αβεβαιότητας αυτών είναι οι πίνακες $(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-\mathbf{1}}$και $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y}$, οι οποίοι παρατίθενται παρακάτω:

$$(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-\mathbf{1}} = \begin{bmatrix} 2{,}959293 & -0{,}14891 & 0{,}00289 \\ -0{,}14891 & 0{,}015974 & -0{,}00236 \\ 0{,}00289 & -0{,}00236 & 0{,}000598 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X'Y} = \begin{bmatrix} 717 \\ 15813 \\ 59901 \end{bmatrix}$$

Στη συνέχεια υπολογίζονται οι συντελεστές της παλινδρόμησης b_0, b_1 και b_2. Το σύστημα εξισώσεων απ' το οποίο προκύπτουν ανάγεται σε ένα πολλαπλασιασμό πινάκων:

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = (\boldsymbol{X'X})^{-1}\boldsymbol{X'Y} = \begin{bmatrix} -59{,}71 \\ 4{,}522 \\ 0{,}604 \end{bmatrix}$$

Η τυπική απόκλιση των σφαλμάτων εκτιμάται από το μέσο τετραγωνικό σφάλμα:

$$MT\Sigma = \frac{\sum_{\nu=1}^{N}\left(Y_\nu - \mu_{\widehat{Y_\nu}}\right)^2}{\mathrm{N}-P-1} = \frac{\sum_{\nu=1}^{N}(Y_\nu - b_0 - b_1 X_{\nu 1} - \cdots - b_P \mathrm{X}_{\nu P})^2}{9-2-1} = 71{,}93\ (MWh)^2$$

Γνωρίζοντας όλα τα παραπάνω μπορούμε πλέον να υπολογίσουμε το τυπικό σφάλμα των κατανομών των συντελεστών b:

$$\boldsymbol{s^2\{b\}} = \begin{bmatrix} s^2\{b_0\} & s\{b_0, b_1\} & \dots & s\{b_0, b_P\} \\ s\{b_1, b_0\} & s^2\{b_1\} & \dots & s\{b_1, b_P\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s\{b_P, b_0\} & s\{b_P, b_1\} & \dots & s^2\{b_P\} \end{bmatrix} = MT\Sigma(\boldsymbol{X'X})^{-1} = \begin{bmatrix} 212{,}87 & -10{,}71 & 0{,}21 \\ -10{,}71 & 1{,}15 & -0{,}17 \\ 0{,}21 & -0{,}17 & 0{,}043 \end{bmatrix}$$

$$s^2\{b_0\} = 212{,}87 \ \Rightarrow\ s\{b_0\} = 14{,}59\ MWh$$

$$s^2\{b_1\} = 1{,}15 \ \Rightarrow\ s\{b_1\} = 1{,}07\frac{MWh}{°C}$$

$$s^2\{b_2\} = 0{,}043 \ \Rightarrow\ s\{b_2\} = 0{,}20\frac{MWh}{\mu o\nu\acute{\alpha}\delta\alpha\ \%}$$

Ακολουθεί ο στατιστικός έλεγχος t, ώστε να διαπιστωθεί εάν οι μεταβλητές που συμπεριλήφθηκαν στο μοντέλο είναι στατιστικά σημαντικές. Ως κριτήριο αποδοχής θα χρησιμοποιηθεί η μονόπλευρη τιμή της στατιστικής t για επίπεδο σημαντικότητας α=0,05:

$$t\{\alpha; N-P-1\} = t\{0.05; 9-2-1\} = 1{,}943$$

$$t_1^* = \frac{b_1}{s\{b_1\}} = \frac{4{,}522}{1{,}07} = 4{,}22 > 1{,}943$$

$$t_2^* = \frac{b_2}{s\{b_2\}} = \frac{0{,}604}{0{,}20} = 2{,}91 > 1{,}943$$

Οι τιμές που λαμβάνει η στατιστική t^* είναι ικανοποιητικές και για τις δύο ανεξάρτητες μεταβλητές και συνεπώς και οι δύο μεταβλητές θεωρούνται στατιστικά σημαντικές.

Στη συνέχεια υπολογίζεται ο συντελεστής πολλαπλού προσδιορισμού προκειμένου να αξιολογηθεί η ποιότητα της γραμμικής συσχέτισης. Απαιτείται αρχικά ο υπολογισμός του πίνακα **H** και των αθροισμάτων τετραγώνων. Οι τιμές του πίνακα **H** δεν παρατίθενται.

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X'X})^{-1}\boldsymbol{X'}$$

$$SSTO = \boldsymbol{Y}'\left[\boldsymbol{I} - \left(\frac{1}{N}\right)\boldsymbol{J}\right]\boldsymbol{Y}^{4} = 8186$$
$$SSE = \boldsymbol{Y}'(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{H})\,\boldsymbol{Y} = 431{,}61$$
$$SSR = \boldsymbol{Y}'\left[\boldsymbol{H} - \left(\frac{1}{N}\right)\boldsymbol{J}\right]\boldsymbol{Y} = 7754{,}39$$

Έχοντας υπολογίσει τα παραπάνω προκύπτει τελικά ο συντελεστής πολλαπλού προσδιορισμού:

$$R_a^2 = 1 - \frac{\frac{SSE}{N-P-1}}{\frac{SSTO}{N-1}} = 1 - \left(\frac{N-1}{N-P-1}\right)\frac{SSE}{SSTO} = 1 - \frac{(9-1)}{(9-2-1)}\frac{431{,}61}{8186} = 0{,}9297$$

Η τιμή που λαμβάνει ο R_a^2 είναι ιδιαίτερα ικανοποιητική και συνεπώς υφίσταται καλή γραμμική συσχέτιση μεταξύ των υπό εξέτασιν μεταβλητών. Η διακύμανση της κατανάλωσης ενέργειας μπορεί να εξηγηθεί απ' το μοντέλο της παλινδρόμησης σε ποσοστό 92,97%.

Έχοντας εξασφαλίσει την ύπαρξη καλής γραμμικής συσχέτισης μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση της παλινδρόμησης για την εκτίμηση της μέσης κατανάλωσης ενέργειας κατά την πάροδο Μ μηνών, η οποία θα συνοδεύεται απ' την αντίστοιχη αβεβαιότητα:

$$\widetilde{\widetilde{Y_M}} = \mu_{\widetilde{Y_M}} \pm t\{1 - \frac{\alpha}{2}; N - P - 1\}s\left\{\widetilde{\widetilde{Y_M}}\right\}$$

$$\mu_{\widetilde{Y_M}} = (\bar{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{M}})\boldsymbol{b} = [1 \quad \bar{X}_{M1} \quad \bar{X}_{M2}]\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = [1 \quad \bar{X}_{M1} \quad \bar{X}_{M2}]\begin{bmatrix} -59{,}71 \\ 4{,}522 \\ 0{,}604 \end{bmatrix}$$

$$s^2\left\{\widetilde{\widetilde{Y_M}}\right\} = MT\Sigma\left[\frac{1}{M} + (\bar{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{M}})(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}')^{-\boldsymbol{1}}(\bar{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{M}})'\right] = \frac{MT\Sigma}{M} + (\bar{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{M}})\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{2}}\{\boldsymbol{b}\}(\bar{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{M}})'$$

$$=> \; s\left\{\widetilde{\widetilde{Y_M}}\right\} = \sqrt{\frac{71{,}93}{M} + (\bar{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{M}})\begin{bmatrix} 212{,}87 & -10{,}71 & 0{,}21 \\ -10{,}71 & 1{,}15 & -0{,}17 \\ 0{,}21 & -0{,}17 & 0{,}043 \end{bmatrix}(\bar{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{M}})'}$$

Παρατηρούμε πως τόσο η μέση εκτίμηση, όσο και η αβεβαιότητα αποτελούν συνάρτηση του μεγέθους δείγματος Μ και του πίνακα των μέσων τιμών $\bar{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{M}}$.

Στον Οδηγό ενεργειακών ελέγχων δίνονται επίσης οι τιμές της κατανάλωσης ενέργειας και των ανεξάρτητων μεταβλητών μετά τη λήψη μέτρων εξοικονόμησης. Οι αριθμητικές τιμές παρατίθενται στον ακόλουθο πίνακα:

ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΑΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ			
ΜΗΝΑΣ	X1(°C)	X2(%)	Y(MWh)
ΑΠΡ	17	55	35
ΜΑΪ	21	75	62
ΙΟΥΝ	23	85	74
ΙΟΥΛ	25	95	82
ΑΥΓ	27	100	95

[4] Το σύμβολο **I** αναφέρεται στον μοναδιαίο πίνακα, ένα πίνακα NxN με όλα του τα στοιχεία μηδενικά εκτός από εκείνα της κυρίας διαγωνίου που ισούνται με μονάδες. Το σύμβολο **J** αναφέρεται σε έναν NxN πίνακα που έχει όλα του τα στοιχεία ίσα με μονάδες.

$$M = 5, \qquad \bar{Y}_5 = 69{,}6\ MWh, \qquad \bar{X}_{51} = 22{,}6°C\ , \qquad \bar{X}_{52} = 82\ \%$$

Εφαρμόζοντας τις εξισώσεις (4.42), (4.43), (4.44) εκτιμάμε την επιτευχθείσα εξοικονόμηση ενέργεια και την αβεβαιότητα αυτής:

$$\widetilde{\widetilde{\Delta Y}}_M = \mu_{\widetilde{\widetilde{\Delta Y}}_M} \pm \mathrm{t}\left\{1 - \frac{\alpha}{2}; \mathrm{N} - P - 1\right\} \sigma\left\{\widetilde{\widetilde{\Delta Y}}_M\right\}$$

$$\mu_{\widetilde{\widetilde{\Delta Y}}_M} = \widetilde{\mu_{Y_M}} - \bar{Y}_M = [1 \quad \bar{X}_{M1} \quad \bar{X}_{M2}] \begin{bmatrix} -59{,}71 \\ 4{,}522 \\ 0{,}604 \end{bmatrix} - \bar{Y}_M$$

$$\sigma\left\{\widetilde{\widetilde{\Delta Y}}_M\right\} = \sqrt{s^2\left\{\widetilde{\widetilde{Y_M}}\right\} + \frac{\sigma^2_{\mu\varepsilon\tau}}{M}} = \sqrt{\frac{71{,}93}{M} + (\bar{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{M}}) \begin{bmatrix} 212{,}87 & -10{,}71 & 0{,}21 \\ -10{,}71 & 1{,}15 & -0{,}17 \\ 0{,}21 & -0{,}17 & 0{,}043 \end{bmatrix} (\bar{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{M}})' + \frac{\sigma^2_{\mu\varepsilon\tau}}{M}}$$

Η εξοικονόμηση θα υπολογιστεί ως ποσοστό της κατανάλωσης βάσης $\widetilde{\mu_{Y_M}}$ όπως γίνεται στο παράδειγμα του Οδηγού. Επιπλέον, θα υπολογιστεί ο ΕΕΣΕΕ σύμφωνα με την εξίσωση της παλινδρόμησης και σύμφωνα με την εξίσωση της ASHRAE για σύγκριση των αποτελεσμάτων. Ξαναγράφονται οι εξισώσεις υπολογισμού του ΕΕΣΕΕ σύμφωνα με τις δύο προσεγγίσεις:

$$EE\Sigma EE_M = 2\frac{\sqrt{\frac{MT\Sigma}{M} + (\bar{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{M}})\boldsymbol{s}^{\boldsymbol{2}}\{\boldsymbol{b}\}(\bar{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{M}})' + \frac{\sigma^2_{\mu\varepsilon\tau}}{M}}}{\bar{Y}_N}$$

$$(EE\Sigma EE)_{ASHRAE} = \frac{1{,}26\sqrt{MT\Sigma\left[\left(1 + \frac{2}{N}\right)\frac{1}{M}\right]}}{0{,}5\bar{Y}_N}$$

Ο προσεγγιστικός τύπος της ASHRAE δεν απαιτεί την εκτέλεση πολλαπλασιασμού πινάκων, γεγονός που τον καθιστά ιδιαίτερα εύχρηστο. Ωστόσο, οι πίνακες που απαιτούνται για τον υπολογισμό του ΕΕΣΕΕ σύμφωνα με τη γραμμική παλινδρόμηση έχουν ήδη υπολογιστεί σε προηγούμενα στάδια της ανάλυσης. Η επίδραση της απόκλισης των εξωτερικών παραγόντων από την μέση τιμή του αρχικού δείγματος $\bar{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{N}}$ εμπεριέχεται σε αυτόν ακριβώς τον πολλαπλασιασμό πινάκων, γεγονός που μειώνει την ακρίβεια της εκτίμησης του τύπου της ASHRAE. Τα αποτελέσματα όλων των παραπάνω υπολογισμών παρουσιάζονται συγκεντρωτικά στον κάτωθι πίνακα:

ΜΗΝΑΣ	Μ	$\bar{X}_{M1}$ (°C)	$\bar{X}_{M2}$ (%)	$\bar{Y}_M$ (MWh)	$\widetilde{\mu_{Y_M}}$ (MWh)	$\frac{\widetilde{\widetilde{\Delta Y}}_M}{\widetilde{\mu_{Y_M}}}$ (%)	ΕΕΣΕΕ-ASHRAE(%)	ΕΕΣΕΕ-Regression(%)
ΑΠΡ	1	17	55	35	50,38	30,53	29,66	23,61
ΜΑΪ	2	19	65	48,5	65,47	25,92	20,97	17,09
ΙΟΥΝ	3	20,33	71,67	57	75,52	24,53	17,12	14,33
ΙΟΥΛ	4	21,5	77,5	63,25	84,32	24,99	14,83	12,95
ΑΥΓ	5	22,6	82	69,6	92,02	24,36	13,26	12,43

Στις στήλες 3 έως 5 του παραπάνω πίνακα παρατηρούμε τη μεταβολή των μέσων όρων θερμοκρασίας ($\bar{X}_{M1}$), πληρότητας ($\bar{X}_{M2}$) και κατανάλωσης ενέργειας ($\bar{Y}_M$) με την προσθήκη κάθε μίας επιπλέον μέτρησης κατά την περίοδο απολογισμού. Στη στήλη 6 παρατίθεται η εκτίμηση της μέσης μηνιαίας κατανάλωσης ενέργειας $\widetilde{\mu_{Y_M}}$ κατά την πάροδο Μ μηνών, ενώ στη στήλη 7 η ποσοστιαία μέση εξοικονόμηση ενέργεια ως ποσοστό της μέσης κατανάλωσης της στήλης 6. Συνιστάται η ποσοστιαία εξοικονόμηση ενέργειας να υπολογίζεται διαιρώντας την εξοικονόμηση $\widetilde{\widetilde{\Delta Y}}_M$ με την μέση τιμή του παλιού δείγματος $\bar{Y}_N$, ωστόσο εδώ

ακολουθήθηκε η πρακτική του Οδηγού Ενεργειακών ελέγχων για λόγους συγκρίσεως αποτελεσμάτων. Τέλος, στις στήλες 8 και 9 δίνονται οι τιμές του Ελάχιστου Επαληθεύσιμου Στόχου Εξοικονόμησης Ενέργειας (ΕΕΣΕΕ) σύμφωνα με τις εξισώσεις της ASHRAE και της γραμμικής παλινδρόμησης. Υπενθυμίζεται πως ο ΕΕΣΕΕ ισούται ουσιαστικά με την αβεβαιότητα εκτίμησης της εξοικονόμησης για συγκεκριμένο μέγεθος δείγματος M και μέση τιμή ανεξάρτητων μεταβλητών $\overline{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{M}}$. Τα παραπάνω αποτελέσματα όσον αφορά την εκτίμηση της εξοικονόμησης ενέργειας και του ΕΕΣΕΕ κατά ASHRAE ταυτίζονται πλήρως με αυτά που παρατίθενται στο παράδειγμα του Οδηγού. Παρατηρώντας τη στήλη 9 γίνεται αντιληπτό πως στο συγκεκριμένο παράδειγμα η μέθοδος της ASHRAE τείνει να υπερεκτιμά την αβεβαιότητα σε σχέση με τον αναλυτικό τύπο της παλινδρόμησης.

5 Συμπεράσματα

Στην παρούσα διπλωματική εργασία πραγματοποιήθηκε μία σύνοψη του νομοθετικού πλαισίου που αφορά τις επεμβάσεις εξοικονόμησης ενέργειας στην Ελλάδα. Ιδιαίτερη σημασία δόθηκε στο κομμάτι της αξιολόγησης των επενδύσεων μέσω της εκτίμησης της επιτευχθείσας εξοικονόμησης ενέργειας, χρησιμοποιώντας στατιστικές μεθόδους. Συγκεκριμένα, ακολουθήθηκε η προσέγγιση που παρουσιάζεται στον Οδηγό Ενεργειακών Ελέγχων, η οποία προβλέπει την αξιοποίηση του μοντέλου της γραμμικής παλινδρόμησης για τη χάραξη γραμμής βάσης (baseline). Η γραμμή βάσης χρησιμοποιείται ως εργαλείο εκτίμησης της κατανάλωσης ενέργειας που παρουσιάζει το σύστημα σαν συνάρτηση των εξωτερικών παραγόντων (π.χ. θερμοκρασία, υγρασία, κλπ.). Έτσι, αξιοποιώντας τη γραμμή βάσης μπορούμε να «προβάλουμε» το παλιό σύστημα κατανάλωσης ενέργειας στο μέλλον και να προσομοιώσουμε τη λειτουργία του υπό τις μελλοντικές εξωτερικές συνθήκες. Τελικά, συγκρίνοντας τις επιδόσεις που θα παρουσίαζε το παλιό σύστημα αν δεν είχε αντικατασταθεί, με τις βελτιωμένες που μετρούνται κατά την περίοδο απολογισμού, (reporting period) αποκτάμε μια εκτίμηση της εξοικονόμησης ενέργειας που επετεύχθη.

Η θεωρία που περιγράφει τα παραπάνω μαθηματικά εργαλεία αναπτύχθηκε διεξοδικά, τόσο για την μονοδιάστατη, όσο και για την πολυδιάστατη γραμμική παλινδρόμηση. Όσα αναπτύχθηκαν στη θεωρία εφαρμόστηκαν σε αριθμητικά παραδείγματα με πραγματικά δεδομένα από επεμβάσεις εξοικονόμησης ενέργειας. Κατά την ανάπτυξη των παραδειγμάτων γίνεται σύγκριση της μεθόδου (baseline modelling) με απλούστερες εκτιμήσεις της εξοικονόμησης, οι οποίες δεν λαμβάνουν υπόψιν την επίδραση εξωτερικών παραγόντων. Οι τελευταίες τείνουν άλλοτε να υποτιμούν και άλλοτε να υπερεκτιμούν την επιτευχθείσα εξοικονόμηση ενέργειας οδηγώντας σε εσφαλμένα συμπεράσματα. Συνεπώς, η χρήση κάποιου μοντέλου εκτίμησης της κατανάλωσης βάσεως κρίνεται απαραίτητη για την ορθή αξιολόγηση μίας επέμβασης εξοικονόμησης ενέργειας.

Σημαντικό τμήμα της ανάλυσης αφιερώθηκε στον προσδιορισμό της αβεβαιότητας που συνοδεύει την εκτίμηση της εξοικονόμησης ενέργειας, καθώς και κάθε ενδιάμεσου αποτελέσματος που οδηγεί σε αυτήν. Η εξίσωση της αβεβαιότητας που προέκυψε από την παραπάνω αναλυτική διαδικασία συγκρίθηκε με τις προσεγγιστικές εξισώσεις για την αβεβαιότητα που αναφέρονται στον Οδηγό Ενεργειακών Ελέγχων [1]. Συγκεκριμένα αναφέρονται δύο πιθανές εκφράσεις, οι οποίες είχαν προταθεί από παλιότερο πρότυπο της ASHRAE [4] και από το διεθνές πρωτόκολλο IPMVP (International Performance Measurement and Verification Protocol) [3], αντίστοιχα. Η μαθηματική έκφραση της ASHRAE είναι η ακριβέστερη εκ των δύο και ως εκ τούτου, η αναλυτική εξίσωση της παλινδρόμησης συγκρίθηκε με αυτήν.

Και οι δύο εξισώσεις λαμβάνουν υπόψιν την μείωση της αβεβαιότητας με την λήψη περισσότερων μετρήσεων κατά την περίοδο απολογισμού. Ωστόσο, η προσεγγιστική εξίσωση της ASHRAE δεν προβλέπει την μείωση της αβεβαιότητας, όταν η μέση τιμή των εξωτερικών παραγόντων κατά την περίοδο απολογισμού βρίσκεται κοντά στην μέση τιμή των εξωτερικών παραγόντων κατά την περίοδο βάσεως. Κοινώς, η εξίσωση της γραμμικής παλινδρόμησης μπορεί να εκτιμήσει με μεγαλύτερη ακρίβεια την εξοικονόμηση ενέργειας, όταν εφαρμόζεται για τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής κοντινές σε αυτές που είχε το δείγμα απ’ το οποίο η ίδια κατασκευάστηκε. Το γεγονός αυτό λαμβάνεται υπόψιν μόνο στην αναλυτική εξίσωση αβεβαιότητας που προκύπτει απ’ τη μέθοδο της παλινδρόμησης και αποτελεί τον κύριο λόγο εμφάνισης αποκλίσεων μεταξύ των δύο μεθόδων. Οι αποκλίσεις αυτές δεν παρουσιάζουν

μία σταθερή συμπεριφορά, αλλά μεταβάλλονται ανάλογα με το μέγεθος δείγματος και την μέση τιμή των ανεξάρτητων μεταβλητών κατά την περίοδο απολογισμού. Ως εκ' τούτου, η προσεγγιστική εξίσωση της ASHRAE άλλοτε τείνει να υπερεκτιμά και άλλοτε να υποτιμά την αβεβαιότητα συγκριτικά με την αναλυτική εξίσωση της παλινδρόμησης. Η τελευταία θεωρείται ακριβέστερη, δεδομένης της συστηματικής διαδικασίας από την οποία προέκυψε. Η χρήση της εξίσωσης της ASHRAE απλοποιεί τους υπολογισμούς, ειδικά στην περίπτωση της πολυδιάστατης παλινδρόμησης, καθώς δεν προϋποθέτει την εκτέλεση πολλαπλασιασμού πινάκων. Ωστόσο, οι υπόλοιποι υπολογισμοί της πολυδιάστατης παλινδρόμησης απαιτούν επανειλημμένα την χρήση πινάκων και συνεπώς όλοι οι απαραίτητοι πίνακες για τον προσδιορισμό της αβεβαιότητας έχουν ήδη υπολογιστεί. Οι αριθμητικές πράξεις μπορούν εύκολα να προγραμματιστούν σε ένα μαθηματικό πρόγραμμα όπως το MATLAB ή κάποιο στατιστικό πακέτο. Συμπερασματικά, η χρήση της εξίσωσης της ASHRAE δεν συνιστάται, καθώς αυξάνει περαιτέρω την ήδη υπάρχουσα αβεβαιότητα.

6 Προτάσεις για επόμενη εργασία

6.1 Αναλυτικότερα μοντέλα αβεβαιότητας

Όπως παρουσιάστηκε στην εισαγωγή, έχει ήδη γίνει εφαρμογή των Γκαουσιανών διαδικασιών στην εκτίμηση της εξοικονόμησης ενέργειας και της αβεβαιότητας αυτής [34]. Σύμφωνα με τους συγγραφείς, οι Γκαουσιανές διαδικασίες μπορούν να περιγράψουν τυχόν μη γραμμικά φαινόμενα και συσχετίσεις μεταξύ των υπό εξέτασιν μεταβλητών με μεγαλύτερη ακρίβεια απ' ότι η γραμμική παλινδρόμηση. Ωστόσο, η μορφή των εξισώσεων που τις περιγράφουν παρουσιάζει αυξημένη πολυπλοκότητα και ο ακριβής προσδιορισμός τους απαιτεί κάποια μέθοδο βελτιστοποίησης, όπως η Μπαγεσιανή βαθμονόμηση [36],[37]. Θα ήταν σκόπιμο να γίνει συγκριτική μελέτη μεταξύ των Γκαουσιανών διαδικασιών και της γραμμικής παλινδρόμησης. Ζητούμενο είναι να διαπιστωθεί το αν η μεγαλύτερη ακρίβεια που τις χαρακτηρίζει είναι απαραίτητη στις επεμβάσεις εξοικονόμησης, έναντι των υψηλών υπολογιστικών απαιτήσεων. Θα μπορούσαν να γίνουν μελέτες – περιπτώσεις (case studies) για να διαπιστωθεί ποια εκ των δύο μεθόδων οδηγεί σε χαμηλότερο συνολικό κόστος μέτρησης και επαλήθευσης σε κάθε υπό μελέτη περίπτωση.

6.2 Δειγματοληψία

Όσο ακριβές και αν είναι ένα μαθηματικό μοντέλο, δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επεξεργασία «κακής ποιότητας» δεδομένων. Έτσι, αν τα μετρητικά δεδομένα παρουσιάζουν μεγάλες διακυμάνσεις και δεν δύναται να συσχετισθούν με κάποιο λογικό τρόπο, τότε και η αυξημένη ακρίβεια ενός μοντέλου είναι άχρηστη. Συνεπώς, σημαντική προτεραιότητα κάθε μεθόδου μέτρησης και επαλήθευσης αποτελεί η συστηματική δειγματοληψία, η οποία θα οδηγήσει και στον ακριβή προσδιορισμό του μετρητικού σφάλματος. Στις εξισώσεις της αβεβαιότητας εμφανίζεται ο όρος μετρητικού σφάλματος $\sigma_{\mu\varepsilon\tau}$ χωρίς να δίνονται ιδιαίτερες εξηγήσεις για το πώς προκύπτει. Όλες οι πηγές αβεβαιότητας των μετρήσεων πρέπει να συνδυαστούν καταλλήλως, ώστε να προκύψει ένα τελικό μετρητικό σφάλμα και οι μετρήσεις να δίνονται υπό την μορφή διαστήματος εμπιστοσύνης:

$$\mu\acute{\varepsilon}\tau\rho\eta\sigma\eta = \alpha\nu\alpha\gamma\rho\alpha\varphi\acute{o}\mu\varepsilon\nu\eta\ \tau\iota\mu\acute{\eta}\ \pm t_{\alpha}\ \sigma_{\mu\varepsilon\tau} \tag{6.1}$$

Όπου t_a είναι η στατιστική κατά student σε επίπεδο σημαντικότητας α.

Επιπλέον, σημαντικό κομμάτι της δειγματοληψίας αποτελεί η επιλογή των ορίων του συστήματος, το οποίο αφορούν οι μετρήσεις. Εάν τα δεδομένα που προέρχονται από ένα σύστημα δεν εμφανίζουν ικανοποιητική συσχέτιση, τότε ενδέχεται το σύστημα να πρέπει να χωριστεί σε υποσυστήματα και το κάθε ένα να μελετηθεί ξεχωριστά. Ίσως ο κυλιόμενος μέσος όρος των μετρήσεων να οδηγεί σε καλύτερη συσχέτιση, όπως στο παράδειγμα του κεφαλαίου 3. Ενδιαφέρον παρουσιάζει και η επιλογή των κατάλληλων μεταβλητών, οι οποίες πρέπει να συμπεριληφθούν στο μοντέλο, είτε με βάση την εμπειρία, είτε μέσω της διεξαγωγής επαναλαμβανόμενων δοκιμών.

Συνοψίζοντας, όλες οι πιθανές αποφάσεις που πρέπει να ληφθούν προκειμένου να επιλεγούν τα καλύτερα δυνατά δεδομένα στην καλύτερη δυνατή μορφή για ανάλυση αποτελούν αντικείμενο του ενεργειακού αξιολογητή. Η συστηματική οργάνωση και καταγραφή όλων των τεχνικών που μπορούν να εφαρμοστούν για την καλύτερη δυνατή εκτέλεση των παραπάνω θα μπορούσαν να αποτελέσουν αντικείμενο μελλοντικής εργασίας. Πολλές σχετικές πληροφορίες αναφέρονται σε όλα τα διεθνή πρότυπα ενεργειακών ελέγχων που αναπτύχθηκαν στην εισαγωγή [1], [3], [4], [17-21], [22-26].

7 Βιβλιογραφία

1. Οδηγός Ενεργειακών Ελέγχων σε κτίρια, βιομηχανία και μεταφορές. Υπουργείο Περιβάλλοντος και Ενέργειας, Αθήνα Ιανουάριος 2017, http://www.ypeka.gr/LinkClick.aspx?fileticket=u1Ez6ny5W90%3D&tabid=281&language=el-GR
2. The North American Measurement and Verification Protocol, (NAMVP), Version 1 (1966),https://www.google.gr/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwjj8rOoxr7MAhXLDMAKHbowAnYQFgggMAA&url=http%3A%2F%2Fwww.nj.gov%2Fdep%2Faqm%2Fnemvp3.pdf&usg=AFQjCNFzlsLIPYij9JdQY4ymbJy8bjTzBA
3. IPMVP – International Performance Measurement and Verification Protocol (2012)
4. ASHRAE Standard 14- 2002, Measurement of Energy and Demand Savings, http://www.eeperformance.org/uploads/8/6/5/0/8650231/ashrae_guideline_14-2002_measurement_of_energy_and_demand_saving.pdf
5. Οδηγία 2002/27/ΕΚ για την ενεργειακή απόδοση των κτιρίων (Energy Performance of Buildings Directive - EPBD)
6. Νόμος 3661/2008 για την εναρμόνιση της οδηγίας 2002/27/ΕΚ: Μέτρα για τη μείωση της ενεργειακής κατανάλωσης των κτιρίων και άλλες διατάξεις (ΦΕΚ Α' 89/19-5-2008)
7. Οδηγία 2006/32/ΕΚ για την εξοικονόμηση ενέργειας (Energy Saving Directive -ESD)
8. Νόμος 3855/2010 για την εναρμόνιση της οδηγίας 2006/32/ΕΚ: Μέτρα για τη βελτίωση της ενεργειακής απόδοσης κατά την τελική χρήση (ΦΕΚ Α' 95/23-6-2010)
9. Οδηγία 2010/31/ΕΕ για την Ενεργειακή Απόδοση Κτιρίων
10. Νόμος 4122/2013 για την εναρμόνιση της οδηγίας 2010/31/ΕΕ: Ενεργειακή Απόδοση των Κτιρίων (ΦΕΚ Α' 42/19-2-2013)
11. Οδηγία 2012/27/ΕΕ για την ενεργειακή απόδοση (Energy Efficiency Directive - EED)
12. Νόμος 4342/2015 για την εναρμόνιση της οδηγίας 2012/27/ΕΕ και την κατάργηση των παλιών οδηγιών 2004/8/ΕΚ και 2006/32/ΕΚ (ΦΕΚ Α' 143/09-11-2015)
13. ΚΥΑ/Δ6/Β/ΥΚ/οικ.11038/1999: Διαδικασίες, απαιτήσεις και κατευθύνσεις για τη διεξαγωγή ενεργειακών επιθεωρήσεων (ΦΕΚ Β' 1526/1999)
14. ΚΥΑ/Δ6/Β/14826: Μέτρα για την βελτίωση της ενεργειακής απόδοσης και την εξοικονόμηση ενέργειας στο δημόσιο και ευρύτερο δημόσιο τομέα (ΦΕΚ Β' 1122/17-6-2008)
15. ΚΥΑ/Δ6/Β/οικ.5825: Έγκριση Κανονισμού Ενεργειακής Απόδοσης Κτιρίων – ΚΕΝΑΚ (ΦΕΚ Β' 407/9-4-2010)
16. ΕΛΟΤ EN ISO 50001:2011, Συστήματα διαχείρισης της ενέργειας - Απαιτήσεις και οδηγίες εφαρμογής
17. ISO 50002:2014, Ενεργειακοί έλεγχοι – Απαιτήσεις με οδηγίες χρήσεως
18. ISO 50003:2014, Συστήματα διαχείρισης ενέργειας – απαιτήσεις για παρόχους ενεργειακών ελέγχων και πιστοποίησης συστημάτων διαχείρισης ενέργειας
19. ISO 50004:2014, Συστήματα διαχείρισης ενέργειας – Οδηγίες εφαρμογής, συντήρησης και βελτίωσης ενός συστήματος διαχείρισης ενέργειας
20. ISO 50006:2014, Συστήματα διαχείρισης ενέργειας – Μέτρηση ενεργειακής επίδοσης με χρήση γραμμών ενεργειακής βάσης και δείκτες ενεργειακής επίδοσης – Γενικές αρχές και οδηγίες
21. ISO 50015:2014, Συστήματα διαχείρισης ενέργειας – Μέτρηση και επαλήθευση της ενεργειακής επίδοσης Οργανισμών – Γενικές αρχές και οδηγίες

22. EN 16247-1: 2014, Ενεργειακοί έλεγχοι– Μέρος 1 : Γενικές απαιτήσεις
23. EN 16247-2: 2014, Ενεργειακοί έλεγχοι – Μέρος 2 : Κτίρια
24. EN 16247-3: 2014, Ενεργειακοί έλεγχοι – Μέρος 3
25. EN 16247-4: 2014, Ενεργειακοί έλεγχοι – Μέρος 4 : Μεταφορές
26. EN 16247-5: 2014, Ενεργειακοί έλεγχοι – Προσόντα ενεργειακών ελεγκτών
27. . ISO 17.741:2016 Γενικοί τεχνικοί κανόνες για μέτρηση, υπολογισμό και επαλήθευση της ΕΕ στα έργα
28. ISO 17.742:2015 Ενεργειακή απόδοση και υπολογισμός εξοικονόμησης για χώρες, περιοχές και πόλεις
29. ISO 17.743:2016 Εξοικονόμηση ενέργειας – Ορισμός μεθοδολογικού πλαισίου υπολογισμού και εκθέσεως της ΕΕ
30. ISO/FDIS 17.747 Προσδιορισμός της εξοικονόμησης ενέργειας σε οργανισμούς
31. ISO 15686-5:2008, Buildings & constructed assets – Service life planning –Part 5: Life cycle costing.
32. T. Agami Reddy & P.E. David E. Claridge (2000),"Uncertainty of 'Measured' Energy Savings from Statistical Baseline Models", HVAC & R RESEARCH, Vol 6, No.1, http://auroenergy.com/wp-content/uploads/2016/05/2000_Reddy_HVACR_Uncertainty-of-Measurement.pdf
33. Michael H. Kutner, Christopher J. Nachtsheim, John Neter, William Li,(2005) "Applied Linear Statistical Models" fifth edition, McGraw Hill Irwin, https://mysite.science.uottawa.ca/rkulik/mat3378/mat3378-textbook.pdf
34. Yeonsook Heo & Victor M. Zavala (2012),"Gaussian process modeling for measurement and verification of building energy savings", Energy and Buildings, Vol 53, pp. 7-18, ELSEVIER, https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037877881200312X
35. M. Ebden (2008), "Gaussian Processes for Regression: A Quick Introduction", https://arxiv.org/pdf/1505.02965.pdf
36. Marc C. Kennedy & Anthony O'Hagan, (2001), 'Bayesian Calibration of Computer Models', Royal Statistical Society, 63, Part 3, pp. 425-464, https://rss.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1111/1467-9868.00294
37. Y. Heo, R. Choudhary, G.A. Augenbroe, (2012),'Calibration of building energy models for retrofit analysis under uncertainty', Energy and Buildings, Vol 47, pp. 550-560, ELSEVIER, https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037877881100644X
38. Evan Mills, Steve Kromer, Gary Weiss, Paul A. Mathew, (2006),'From volatility to value: analysing and managing financial and performance risk in energy savings projects', Energy Policy, Volume 34, Issue 2, pp. 188-199, ELSEVIER, https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0301421504002721
39. Gürkan Kumbaroglu, Reinhard Madlener, (2012), 'Evaluation of economically optimal retrofit investment options for energy savings in buildings', Energy and Buildings, Vol 49, pp.327-334, ELSEVIER, https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378778812000990