



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΕΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**  
**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**  
**ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**

---

**Συναρτησιακοί πολυωνυμικοί τελεστές και χρήση αυτών στην αναλυτική  
και αριθμητική μελέτη μη-γραμμικών διαφορικών εξισώσεων**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**Νικόλαος Π. Νικολετάτος-Κεκάτος**

Επιβλέπων: Γ. Α Αθανασούλης, Καθηγητής ΕΜΠ.

Εξεταστική Επιτροπή: Γ. Α Αθανασούλης, Καθηγητής ΕΜΠ.

Β. Παπανικολάου, Καθηγητής ΕΜΠ.

Ν. Γιαννακάκης, Αναπληρωτής Καθηγητής ΕΜΠ.

**Αθήνα, Μάρτιος, 2019**





**NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS**  
**SCHOOL OF APPLIED MATHEMATICS AND PHYSICAL SCIENCES**

**Functional polynomial operators and applications in the analytic and numerical  
study of nonlinear differential equations**

**MASTER DIPLOMA THESIS**  
Nikolaos P. Nikoletatos-Kekatos

Advisor: G.A. Athanassoulis, Professor NTUA

Committee: G.A. Athanassoulis, Professor NTUA

B. Papanikolaou, Professor NTUA

N. Yianakakis, Associate Professor NTUA

**Athens, March 2019**



*Στην θεία μου  
Μικέλα Νικολετάτου*

“Ψυχή πᾶσα ἀθάνατος. τὸ γὰρ ἀεκίνητον ἀθάνατον· τὸ  
δ’ ἄλλο κινοῦν καὶ ὑπ’ ἄλλου κινούμενον, παῦλαν ἔχον  
κινήσεως, παῦλαν ἔχει ζωῆς. μόνον δὴ τὸ αὐτὸ κινοῦν, ἅτε  
οὐκ ἀπολεῖπον ἑαυτό, οὔποτε λήγει κινούμενον, ἀλλὰ καὶ  
τοῖς ἄλλοις ὅσα κινεῖται τοῦτο πηγὴ καὶ ἀρχὴ κινήσεως”

ΠΛΑΤΩΝ



## Ευχαριστίες

Αυτό το πόνημα μου, όπως και κάθε τι άλλο που έχω καταφέρει, αναγνωρίζω ότι δεν αποτελούν μόνον δικές μου κατακτήσεις. Πίσω από εμένα και από κάθε βήμα μου, υπάρχουν οι άνθρωποι που με δίδαξαν και συμπορεύτηκα μαζί τους. Για αυτό τον λόγο, το ελάχιστο που οφείλω είναι να τους εκφράσω την ευχαριστία μου.

Πρωτίστως θέλω να ευχαριστήσω τον καθηγητή Γεράσιμο Α. Αθανασούλη, όχι μόνον για την επίβλεψη και την συνδρομή του κατά την εκπόνηση της παρούσης εργασίας, αλλά κυρίως για το ότι στέκεται διδάσκαλος, ακούραστος συνομιλητής και συνοδοιπόρος εν αγωνία. Ο κύριος Αθανασούλης μου έδωσε απλόχερα την επιστημονική γνώση και καθοδήγησή του, συν αυτού όμως, είναι ο άνθρωπος που, ακόμα και όταν δουλεύοντας ο ωροδείκτης ολοκληρώσει έναν κύκλο, μένει στην θέση του, μεριάζει τα χαρτιά και συνεχίζει με το λόγο του να σε παρακινεί και να σε βοηθά να βελτιώσεις τη σκέψη σου, να θέσεις τα ερωτήματα, να αντιληφθείς τον κόσμο και να τοποθετηθείς σε αυτόν. Είναι τιμή μου να είμαι μαθητής του και τον ευγνωμονώ που με βοήθησε να κυνηγήσω τους στόχους μου, να εισέλθω στον κόσμο της επιστήμης, αλλά και να γίνω καλύτερος άνθρωπος συνολικά. Τον ευχαριστώ για το φως και την έμπνευση που μου έδωσε.

Στην συνέχεια, θέλω να ευχαριστήσω ιδιαίτερος τους Κωνσταντίνο Π. Μαυροειδή και Ευάγγελο Φίλιππα, τους οποίους γνώρισα στον τομέα Ναυτικής και Θαλάσσιας Υδροδυναμικής. Τους ευχαριστώ για τις πολύωρες εποικοδομητικές συζητήσεις, αλλά και την ηθική υποστήριξη τους σε αυτήν την προσπάθεια μου.

Τέλος, δε θα μπορούσα να παραλείψω τους ανθρώπους που αποτελούν το θεμέλιο λίθο του κόσμου μου, την οικογένειά μου. Όπως και σε κάθε άλλη προσπάθειά μου, στάθηκαν δίπλα μου αρωγοί, με αγάπη και πίστη σε αυτό που κάνω. Έτσι, λοιπόν, σε κάθε ένα μέλος της απευθύνω ένα μεγάλο ευχαριστώ, στους γονείς μου Παναγιώτη και Αικατερίνη, στη θεία μου Ελένη και, τέλος, στην γιαγιά μου Διαμάντω. Σε αυτούς τους ανθρώπους οφείλω τα πάντα και η ύπαρξή τους είναι η μεγαλύτερη ευλογία που έχω λάβει.

Νικόλαος Π. Νικολετάτος-Κεκάτος





## Σύνοψη

Στη παρούσα εργασία διεξάγεται μια μελέτη επί του θέματος των μη γραμμικών τελεστών όπως αυτοί ανακύπτουν και χρησιμοποιούνται μέσω της Γενικής Θεωρίας Συστημάτων.

Η μελέτη μη γραμμικών συστημάτων ξεκινά το 1887 στο έργο του Ιταλού μαθηματικού Vito Volterra (Volterra, 1930/1955/2005), όπου για πρώτη φορά διαμορφώνεται ένας λογισμός συναρτησιακών απεικονίσεων και δίδονται αναλυτικές εκφράσεις μη γραμμικών συναρτησιακών, ορισμένων στο χώρο των συνεχών συναρτήσεων, υπό την υπόθεση της διαφορισιμότητας. Στις μέρες μας τα αντικείμενα αυτά καλούνται, συναρτησιακά Volterra, πολυώνυμα Volterra, σειρές Volterra κτλ, και αναφερόμαστε σε παραγώγους Volterra και λογισμό Volterra. Ο Vito Volterra επέκτεινε τον νέο αυτό λογισμό που δημιούργησε και σε γενικότερες απεικονίσεις (τελεστές) στο χώρο των συνεχών συναρτήσεων, μελετώντας σε βάθος κάποιες κλάσεις εξ αυτών των τελεστών, τους οποίους στις μέρες μας ονομάζουμε (γραμμικούς και μη γραμμικούς) τελεστές Volterra. Το έργο του Volterra αποτελεί το σημείο εκκίνησης για την αναζήτηση και μελέτη αναλυτικών αναπαραστάσεων μη γραμμικών τελεστών. Το 1910, ο Maurice Rene Fréchet αποδεικνύει την ύπαρξη αναπαραστάσεων στην μορφή του Volterra, για συναρτησιακά ορισμένα στο χώρο των συνεχών συναρτήσεων, υπό την υπόθεση μόνον της συνέχειας. Ο Fréchet αντιμετώπιζει το ερώτημα στην κατεύθυνση εύρεσης μιας προσεγγιστικής αναπαράστασης, και αυτό που τελικώς διατύπωσε, αποτελεί την πρώτη γενίκευση του θεμελιώδους θεωρήματος της θεωρίας προσέγγισης, του θεωρήματος προσέγγισης Weierstrass, για συναρτησιακά. Σε αυτή την μελέτη του, με στόχο να επιτύχει το προαναφερθέν αποτέλεσμα, βλ. (Gray, 1984)<sup>(1)</sup>, ήταν αναγκαία η παραγωγή “πολυωνυμικών συναρτησιακών” (αντικείμενα με τα οποία κατασκευάζει την προσέγγιση). Έτσι λοιπόν, ο Fréchet, για πρώτη φορά διατυπώνει την έννοια του τελεστικού πολυωνύμου, αποκαλώντας αυτά τα αντικείμενα στις μέρες μας ομογενείς πολυωνυμικούς τελεστές ή, στους κόλπους της θεωρίας συστημάτων, τετραγωνικά, κυβικά, , τεταρτοτάξια κτλ, μη γραμμικά συστήματα.

Στην αμιγώς μαθηματική, αναλυτική οπτική, ανακύπτει το ερώτημα αυστηρής γενίκευσης αυτών των αντικειμένων και κατασκευών που προαναφέρθηκαν. Η γενίκευση αυτή αποσαφηνίζεται μέσω των δύο επιμέρους ερωτημάτων. Πρώτον, «Ποια είναι η θεμελιώδης αλγεβρική/αναλυτική δομή μέσω της οποίας προκύπτουν επαρκείς συνθήκες, οι οποίες διασφαλίζουν την ύπαρξη προσεγγιστικών αναπαραστάσεων της προαναφερθείσας μορφής;» και δεύτερον, «Ποιες είναι οι ελάχιστες υποθέσεις αναλυτικών ιδιοτήτων και δομής των χώρων στους οποίους ορίζονται αυτοί οι τελεστές, ούτως ώστε να έχουμε ύπαρξη αναπαραστάσεων αυτής της μορφής;». Το 1948, ο Marsal Hendry Stone γενικεύει σε μεγάλο βαθμό το θεώρημα προσέγγισης Weierstrass, διατυπώνοντας το Θεώρημα Stone-Weierstrass, επιτρέποντας την μελέτη αναπαραστάσεων συνεχών συναρτησιακών, ορισμένα σε γενικούς μετρικούς χώρους. Περεταίρω γενικεύσεις του θεωρήματος Stone-Weierstrass εμφανίζονται την δεκαετία του εβδομήντα στοχεύοντας σε προσεγγίσεις και/ή αναπαραστάσεις συνεχών τελεστών, ανάμεσα σε γενικούς (abstract ή functional) χώρους, από πολυωνυμικούς τελεστές.

Αφιερώνουμε το μεγαλύτερο μέρος του δεύτερου Κεφαλαίου στην μελέτη της αλγεβρικής δομής των πολυωνύμων σε γραμμικούς χώρους, όπου ορίζουμε τα πολυώνυμα μέσω πολυγραμμικών απεικονίσεων και παρουσιάζουμε ιδιότητες που γενικεύουν τις αντίστοιχες των

---

<sup>(1)</sup> Ιστορικό άρθρο.

κλασικών (αλγεβρικών) πολωνύμων, φτάνοντας στην polarization formula. Μέσω της polarization formula δίδουμε ένα κριτήριο το οποίο μας λέει πότε μια απεικόνιση αποτελεί πολωνυμική απεικόνιση και τελικώς παράγουμε τους ομογενείς πολωνυμικούς τελεστές (μη γραμμικά πολωνυμικά συστήματα). Το τελευταίο μέρος του κεφαλαίου, αφιερώνεται στον ορισμό και την βασική μελέτη της συνέχειας των πολυγραμμικών και πολωνυμικών απεικονίσεων, καθώς επίσης διατυπώνουμε τις εκφράσεις, σε κλειστή μορφή, των αντικειμένων όπου γενικότερα καλούνται συνεχής πολωνυμικοί τελεστές Volterra.

Στο τέλος της δεκαετίας του σαράντα και κατά τις δύο επόμενες δεκαετίες, δημοσιεύτηκε ένας μεγάλος αριθμός άρθρων και διδακτορικών αφιερωμένα στην αναλυτική και μεθοδολογική θεμελίωση της γενικής θεωρίας συστημάτων (π.χ. Volterra Series, Weiner Series, Identification). Αυτό συνέβη ταυτόχρονα σε διαφορετικά επιστημονικά πεδία όπως η βιολογία, ηλεκτρολογία, και μηχανική, τόσο στο πλαίσιο της ντετερμινιστικής αλλά και της στοχαστικής θεώρησης. Ένα κύμα ανάπτυξης στη μοντελοποίηση συστημάτων και ανάλυσης σημάτων ξεκίνησε στο M.I.T, με αφετηρία το έργο του Norbert Wiener (1958/2013), το οποίο ακολουθήθηκε από τις διδακτορικές διατριβές των Y. W. Lee, (M.B. Brilliant, 1958), (George, 1959), M. Schetzen, και (P. Boyd, 1985). Ακόμα, ο J.F. Barret είχε πολύ σημαντική συμβολή στην διερεύνηση των αναλυτικών πτυχών της γενικής θεωρίας συστημάτων, ξεκινώντας με το άρθρο (Barrett, 1957/1963) και συνεχίζοντας με μια σειρά έργων σε μεγάλο τμήμα του φάσματος της θεματολογίας, όπως την ανάλυση σήματος, αναλυτικά συστήματα, διαφορικές εξισώσεις, ευστάθεια και άλλα.

Στα πλαίσια αυτών των διαδικασιών, έγινε χρήση άπειρων σειρών Volterra για την αναπαράσταση συστημάτων, ειδικότερα στο πεδίο των εφαρμογών, όμως αναφορικά με το μαθηματικό υπόβαθρο, αυτή η θεώρηση είναι έγκυρη μόνο για αναλυτικά συστήματα (τελεστές). Μια πεπερασμένη σειρά Volterra, η οποία λαμβάνεται μέσω της θεώρησης του θεωρήματος Stone-Weierstrass, μπορεί να θεωρηθεί, μορφολογικά, ως μια αποκομμένη άπειρη σειρά Volterra (truncated series). Παρόλα αυτά, η φύση των ολοκληρωτικών πυρήνων Volterra είναι διαφορετική, με συνέπεια οι ιδιότητες των συστημάτων για τα οποία χρησιμοποιούνται να είναι ουσιαδώς διαφορετικές.

Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζουμε τα βασικά αποτελέσματα της θεωρίας προσέγγισης, δηλαδή το Θεώρημα προσέγγισης Weierstrass και την πρώτη γενίκευση αυτού, το Θεώρημα Stone-Weierstrass. Χρησιμοποιώντας το τελευταίο, συμπεραίνουμε ότι τα συνεχή συναρτησιακά ορισμένα σε συμπαγείς μετρικούς χώρους προσεγγίζονται από συναρτησιακά πολωνύμια Volterra. Παρόλα αυτά, το ερώτημα προσεγγιστικής αναπαράστασης τελεστών παραμένει. Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζουμε επεκτάσεις του Θεωρήματος Stone-Weierstrass για τελεστές, σε χώρους Hilbert και Banach. Έπειτα, χρησιμοποιώντας της φυσικές ιδιότητες της αιτιότητας και την χρονική αμεταβλητότητα, παρουσιάζουμε ένα αποτέλεσμα προσεγγιστικής αναπαράστασης συνεχών αιτιοκρατικών και χρονικά αμετάβλητων τελεστών, στον χώρο των συνεχών συναρτήσεων, ως εφαρμογή του θεωρήματος Stone-Weierstrass

Στο τελευταίο κεφάλαιο αυτής της εργασίας, ακολουθώντας τα άρθρα (Flake, 1963) και (Barrett, 1957/1963), χρησιμοποιούμε τις σειρές Volterra στην επίλυση εξαναγκασμένων, συνήθων, μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων μιας συγκεκριμένης μορφής. Αναπαριστούμε των επιλύοντα τελεστή της εξίσωσης μέσω μιας πεπερασμένης σειράς Volterra. Εισάγοντας στην εξίσωση της προκύπτουσες εκφράσεις, και χρησιμοποιώντας παρόμοια επιχειρήματα με αυτά που χρησιμοποιούνται στον Λογισμό Μεταβολών και τις ασυμπτωτικές τεχνικές, βρίσκουμε ότι κάθε συνάρτηση ολοκληρωτικού πυρήνα επιλύει ένα καλώς θεθεμένο πρόβλημα γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων. Όταν οι συντελεστές της αρχικής συνήθους μη

γραμμικής διαφορικής εξίσωσης είναι σταθεροί, τα προβλήματα για τον προσδιορισμό των πυρήνων μπορούν να επιλυθούν με χρήση πολυδιάστατου μετασχηματισμού Laplace σε κλειστή μορφή. Τέλος, παρουσιάζουμε αριθμητικά αποτελέσματα. Υπολογίζουμε αριθμητικά την λύση που λαμβάνουμε μέσω της σειράς Volterra και κάνουμε συγκρίσεις με την αριθμητική λύση του προβλήματος, μέσω της μεθόδου Runge-Kutta.



## Summary

In this work, a study is conducted on the subject of nonlinear operators as they arise through and are used in the General Systems Theory.

The study of non-linear functionals begins in 1887 with the work of the Italian mathematician Vito Volterra (see Volterra, 1930/1955/2005), in which, for the first time, a Calculus is developed and analytical expressions are given for non-linear functionals defined over the space of continuous functions, under the hypothesis of differentiability. Nowadays we call those objects Volterra functionals, Volterra polynomials, Volterra series etc., and we speak about Volterra derivatives and Volterra calculus. Volterra also extended his new calculus to more general mappings (operators) in the space of continuous functions, and studied in depth some classes of them, nowadays called (linear and nonlinear) Volterra operators. This is where a generic explicit analytical representation of nonlinear operators stems from. Later, in 1910, Maurice Rene Fréchet managed to prove the existence of Volterra representations for functionals defined over the space of continuous functions, using only the hypothesis of continuity of these functionals. Fréchet addressed the problem in the perspective of an approximate representation and what he finally managed to do, was the first generalization of the fundamental theorem of approximation theory, the Weierstrass approximation theorem, for functionals. Through his study, in order to achieve the result mentioned above, see (Gray, 1984)<sup>(2)</sup>, it was necessary to derive “polynomial functionals” (elements to approximate with). So, for the first time, Fréchet formulates the concept of operator polynomials and, nowadays, we call these objects homogeneous polynomial operators or, in the field of system theory, quadratic, cubic, quartic etc., non-linear systems.

From the purely mathematical, analytical perspective, the inquiry to rigorously generalize the said mathematical objects and constructions can be clarified by two questions. First, «What is the fundamental algebraic/analytical structure through which there occur sufficient conditions capable of ensuring approximate representations of the aforementioned form?» and, second, «Which are the least assumptions of analytical properties and structure of operators’ domain and range spaces, so that such representations exist?». In the year 1948, Marsal Hendry Stone generalizes the Weierstrass approximation theorem to a large extent, forming the Stone-Weierstrass theorem, allowing for the study of representations of continuous functionals defined over compact metric spaces. Further generalizations of the Stone-Weierstrass theorem appeared in 70s aiming at establishing approximations and/or representations of continuous operators between general (abstract or function) spaces, by polynomial operators.

We devote most of the second Chapter to the study of the algebraic structure of polynomials in linear spaces, where we define abstract polynomials through multilinear mappings and present various properties generalizing the corresponding ones of classical (algebraic) polynomials, reaching finally the Polarization formula. Using this formula, we give a criterion which tells as when a mapping is a polynomial mapping and, finally, we derive homogeneous polynomial operators. The last part of the second Chapter is devoted to the definition and a basic study of continuity of multilinear and polynomial mappings, and the presentation of closed-form expressions of what is referred to as continuous Volterra polynomial operators, in general.

In late 40s and the next two decades, a large number of articles and PhD’s were published, devoted to the conceptual and methodological foundation of general system theory (e.g. Volterra Series, Weiner Series, Systems’ analysis and synthesis, Identification methods). That

---

<sup>(2)</sup> Historical article

happened simultaneously in different scientific fields such as biology, electrical engineering and mechanical engineering, both within the deterministic and stochastic frame. A wave of growth in system modeling and signal processing, was initiated at M.I.T, starting with the work of Norbert Wiener (1958/2013) followed by the PhDs of Y. W. Lee, (M.B. Brilliant, 1958), (A. George, 1959), M. Schetzen (P. Boyd, 1985) and others. Also, J.F Barret had a major contribution in the development of the functional-analytic aspects of system theory, starting with (Barrett, 1957/1963) and continuing with a series of works in a variety of system-theoretic topics, such as signal processing, analytic systems, differential equations, stability and others.

In the context of those procedures, use of infinite Volterra series representations of systems has taken place, especially in the field of applications, but, regarding the underline mathematical background, that consideration is valid only for analytic systems (operators). A finite Volterra series representation, derived through the Stone-Weierstrass theorem, can, of course, be considered, morphologically, as a truncated infinite series. The nature of the integral kernels, though, is different and, as a consequence, the system properties, for which they are used, is essentially different, as well.

The third Chapter starts with a presentation of the classical results of approximation theory, i.e. the Weierstrass Theorem and its first essential generalization, the Stone-Weierstrass Theorem. Using the latter, we deduce the approximability of continuous functionals on compact metric spaces by means of Volterra polynomial functionals, but the question for approximate representations of operators cannot be solved in that context. In the fourth chapter we present extensions of the Stone-Weierstrass Theorem for operators in Hilbert and Banach spaces. Further, using the physical properties of Causality and Time Invariance, we present an approximability result for continuous, causal and time invariant operators, by means of polynomial operators, in the space of continuous functions  $C([\alpha, b])$ , as an application of the Stone-Weierstrass Theorem.

In the last Chapter of this work, following (Flake, 1963) and (Barrett, 1957/1963), we utilize Volterra series to solve forced non-linear ordinary differential equations of specific type. We represent the resolvent operator of the equation via a Volterra series of finite terms. Substituting the resulting expressions into the differential equation, and using arguments similar to those utilized in the Calculus of Variations and in asymptotic technics, we find that each kernel solves a well-posed problem of linear partial differential equations. When the coefficients of the initial nonlinear ODE are constants, the problems for kernels can be solved by multiple Laplace transform, resulting in closed-form expressions. We also give numerical results, and compare the solutions obtained through Volterra series with direct numerical solutions of the given ODE obtained via the Runge-Kutta method.

## Περιεχόμενα

Ευχαριστίες .....	i
Σύνοψη .....	iii
Πίνακας Περιεχομένων .....	v
<b>1 Εισαγωγή .....</b>	<b>I-1</b>
1.1 Γενική θεωρία συστημάτων .....	I-1
Ορισμός και ταξινόμηση συστημάτων.....	I-3
1.2 Ο τελεστής ως το μαθηματικό πρότυπο της θεωρίας συστημάτων.....	I-5
Μαθηματική αναπαράσταση γενικού συστήματος.....	I-5
Θεμελιώδεις αναλυτικές και φυσικές ιδιότητες γενικών μη-γραμμικών.....	I-7
συστημάτων	
Η συνήθης δυϊκότητα μεταξύ τελεστών και συναρτησιακών στην θεωρία... I-7	
συστημάτων	
1.3 Γραμμικά και μη-γραμμικά συστήματα.....	I-8
Αναπαράσταση γενικού γραμμικού τελεστή.....	I-9
Ομογενή μη γραμμικά συστήματα.....	I-9
Πολυωνυμικά συστήματα.....	I-11
Αναπαραστάσεις ομογενών και πολυωνυμικών συστημάτων.....	I-11
1.4 Το πρόβλημα της προσέγγισης μη γραμμικών συστημάτων.....	I-11
Προσέγγιση συνεχών τελεστών μέσω του Θεωρήματος	
Stone-Weierstrass .....	I-11
Προσέγγιση διαφορίσιμων (αναλυτικών) τελεστών μέσω του	
Θεωρήματος Volterra-Taylor (σειρές Volterra) .....	I-13
Σειρές Wiener.....	I-16
1.5 Επίλυση συνήθων διαφορικών εξισώσεων με χρήση σειρών Volterra .....	I-17
1.6 Μέθοδοι ταυτοποίησης συστημάτων .....	I-18
Βιβλιογραφία Κεφαλαίου I .....	I-21

<b>2. Πολυωνυμικοί τελεστές .....</b>	<b>Π-1</b>
2.1 Πολυγραμμικές μορφές και πολυώνυμα σε γραμμικούς χώρους .....	Π-1
Ορισμός πολυγραμμικής μορφής και το ομογενές πολυώνυμο .....	Π-1
Συμμετρικές πολυγραμμικές μορφές .....	Π-4
Το μη ομογενές πολυώνυμο .....	Π-7
2.2 Διαδοχικές διαφορές και πολυώνυμα σε γραμμικούς χώρους .....	Π-8
Τελεστής μεταφοράς και τελεστής πρώτης διαφοράς .....	Π-8
Τελεστές διαφοράς ανωτέρας τάξεως .....	Π-10
Polarization formula .....	Π-17
Η σχέση συνδυαστικής προσθετικότητας των ομογενών πολυωνυμικών τελεστών.....	Π-19
Γινόμενο πολυωνύμων σε γραμμικούς χώρους .....	Π-20
2.3 Συνέχεια πολυγραμμικών μορφών και πολυωνύμων .....	Π-21
Συνέχεια πολυγραμμικών μορφών .....	Π-22
Συνέχεια πολυωνύμων .....	Π-24
2.4 Κριτήριο πολυωνυμικής απεικόνισης .....	Π-24
2.5 Αναπαράσταση πολυγραμμικών μορφών σε μορφή πίνακα .....	Π-30
2.6 Πολυώνυμα Volterra .....	Π-33
Συμβολισμός των πολυωνύμων Volterra .....	Π-35
Μορφή των πολυωνύμων Volterra στη γενική Θεωρεία Συστημάτων .....	Π-36
Βιβλιογραφία Κεφαλαίου Π .....	Π-39
<b>3 Το θεώρημα Stone-Weierstrass και εφαρμογές .....</b>	<b>ΠΙ-1</b>
3.1 Το θεώρημα Stone-Weierstrass .....	ΠΙ-1
3.2 Προσεγγιστική αναπαράσταση συνεχών (μη-γραμμικών) συναρτησιακών .....	ΠΙ-9
Προσέγγιση με χρήση πολυωνύμων Volterra στον χώρο των συνεχών συναρτησιακών $\mathcal{C}(C([a, b]) \rightarrow \mathbb{R})$ .....	ΠΙ-9
Σχόλια για το πεδίο ορισμού των συναρτησιακών του Θεωρήματος 1 .....	ΠΙ-12



Προσέγγιση και αναπαράσταση με συναρτησιακά πολώνυμα στους χώρους των συνεχών συναρτησιακών $\mathcal{C}(L_p((a, b)) \rightarrow \mathbb{R})$ .....	III-13
Βιβλιογραφία Κεφαλαίου III .....	III-16
<b>4 Προσέγγιση / αναπαράσταση συνεχών (μη-γραμμικών) τελεστών μέσω πολωνυμικών τελεστών .....</b>	<b>IV-1</b>
<b>4.1 Προσεγγιστική αναπαράσταση συνεχών (μη-γραμμικών) τελεστών σε χώρους Hilbert .....</b>	<b>IV-1</b>
Επέκταση του Θεωρήματος Stone-Weierstrass σε πραγματικούς, διαχωρίσιμους χώρους Hilbert .....	IV-1
Αναπαράσταση του προσεγγιστικού πολωνυμικού τελεστή του Θεωρήματος 1, στον συναρτησιακό χώρο $L_2$ .....	IV-7
<b>4.2 Προσεγγιστική αναπαράσταση συνεχών (μη-γραμμικών) τελεστών σε χώρους Banach .....</b>	<b>IV-10</b>
<b>4.3 Προσεγγιστική αναπαράσταση συνεχών, αιτιοκρατικών, χρονικά αμετάβλητων τελεστών.....</b>	<b>IV-12</b>
Επέκταση του Θεωρήματος Stone-Weierstrass για άλγεβρες αιτιοκρατικών και χρονικά αμετάβλητων τελεστών.....	IV-12
Άλγεβρες τελεστών $\mathcal{A}_{op}$ , κατάλληλες για την εφαρμογή του Θεωρήματος 1 .....	IV-15
Βιβλιογραφία Κεφαλαίου IV .....	IV-22
<b>5 Επίλυση συνήθων διαφορικών εξισώσεων με πολωνυμική μη γραμμικότητα στο πεδίο του χρόνου, με την χρήση συναρτησιακών σειρών Volterra .....</b>	<b>V-1</b>
<b>5.1 Τοποθέτηση του προβλήματος .....</b>	<b>V-1</b>
Υποθέσεις για την επίλυση .....	V-2
Εξεταζόμενα προβλήματα .....	V-2
<b>5.2 Παράδειγμα I. ΔΕ πρώτης τάξεως με τετραγωνική μη-γραμμικότητα και μηδενική αρχική τιμή .....</b>	<b>V-3</b>
Αναλυτικός υπολογισμός της πρώτης παραγώγου σειράς Volterra.....	V-4
Γενική μορφή της πρώτης παραγώγου του $N$ – οστού όρου της σειράς Volterra .....	V-6
Αναλυτικός υπολογισμός του όρου $y^2(t)$ μέσω της σειράς Volterra .....	V-12

<b>5.3 Προσδιορισμός των πυρήνων Volterra .....</b>	<b>V-13</b>
<b>Προσδιορισμός των πυρήνων Volterra για ΔΕ πρώτης τάξεως με τετραγωνική μη-γραμμικότητα και μηδενική αρχική τιμή .....</b>	<b>V-13</b>
<b>Σύνοψη και γενίκευση της διαδικασίας υπολογισμού των πυρήνων Volterra .....</b>	<b>V-17</b>
<b>5.4. Εύρεση των πυρήνων Volterra της ΔΕ πρώτης τάξεως με τετραγωνική μη γραμμικότητα και μηδενική αρχική συνθήκη .....</b>	<b>V-18</b>
<b>Επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων με χρήση πολυδιάστατου μετασχηματισμού Laplace .....</b>	<b>V-18</b>
<b>Επίλυση του προβλήματος (<math>\Pi_2</math>) με χρήση μετασχηματισμού Laplace.....</b>	<b>V-20</b>
<b>Αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace και εξαγωγή του πυρήνα <math>h_2 \dots</math></b>	<b>V-22</b>
<b>Επίλυση του προβλήματος (<math>\Pi_3</math>) με χρήση μετασχηματισμού Laplace.....</b>	<b>V-24</b>
<b>Αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace και εξαγωγή του πυρήνα <math>h_3 \dots</math></b>	<b>V-25</b>
<b>5.5. Αριθμητικά αποτελέσματα του Παραδείγματος I .....</b>	<b>V-30</b>
<b>Αριθμητική επίλυση του προβλήματος .....</b>	<b>V-31</b>
<b>Αναλυτικός υπολογισμός της προσεγγιστικής λύσης σε σειρά Volterra .....</b>	<b>V-31</b>
<b>Αριθμητικός υπολογισμός της προσεγγιστικής λύσης σε σειρά Volterra .....</b>	<b>V-32</b>
<b>Αποτελέσματα αριθμητικών υπολογισμών .....</b>	<b>V-32</b>
<b>5.6. Παράδειγμα II. ΔΕ πρώτης τάξεως με κυβική μη-γραμμικότητα και μηδενική αρχική τιμή.....</b>	<b>V-43</b>
<b>Εξισώσεις για τον προσδιορισμό των πυρήνων Volterra και επίλυση αυτών .....</b>	<b>V-44</b>
<b>5.7. Αριθμητικός υπολογισμός της προσεγγιστικής λύσης σε σειρά Volterra του Παραδείγματος II .....</b>	<b>V-48</b>
<b>5.8. Επίλυσης ΔΕ με πολωνομική μη γραμμικότητα και μη μηδενικές αρχικές τιμές, με την χρήση σειρών Volterra .....</b>	<b>V-53</b>
<b>Παράδειγμα III. ΔΕ πρώτης τάξεως με τετραγωνική μη-γραμμικότητα και μη μηδενική αρχική τιμή .....</b>	<b>V-53</b>
<b>Παράδειγμα IV. ΔΕ δεύτερης τάξεως με τετραγωνική μη-γραμμικότητα και μη μηδενικές αρχικές συνθήκες.....</b>	<b>V-55</b>
<b>Βιβλιογραφία Κεφαλαίου V .....</b>	<b>V-60</b>



# 1 Εισαγωγή

## 1.1 Γενική θεωρία συστημάτων

Η εικόνα του κόσμου που μας περιστοιχίζει βρίθει φαινομένων και διεργασιών τα οποία ο ανθρώπινος νους θέλησε να κατανοήσει και να δώσει απαντήσεις στα ερωτήματα που δημιουργούν. Το πρώτο βήμα στη προσπάθεια κατανόησης των φυσικών φαινομένων είναι η προσεκτική παρατήρησή τους, όμως είναι προφανές ότι ένα μεγάλο μέρος των απαντήσεων βρίσκεται στην κατανόηση των ενδότερων διεργασιών και στοιχείων από τα οποία επιτελούνται. Με αυτόν τον τρόπο πίσω από την εικόνα ακόμα και των φαινομενικά απλών και συνήθων καταστάσεων ανακλύπτον πολυσύνθετοι κόσμοι στους οποίους κρύβονται οι αναζητούμενες απαντήσεις, πέρα από το ορατό και το απτό.

Ο ανθρώπινος νους μέσω της επιστήμης, για την επίλυση αυτού του προβλήματος, λειτούργησε αναγωγικά. Προσπαθούμε να αναγάγουμε το πρόβλημα σε απλούστερα πολυπλοκότητας, τα οποία πηγάζουν από την αναγνώριση και απομόνωση των επιμέρους στοιχείων και διεργασιών που συνθέτουν το φαινόμενο. Η φάση της ανάλυσης ξεκινά στο σημείο της αναγνώρισης και αναγωγής στα στοιχεία και ολοκληρώνεται στην επιμέρους βαθύτερη μελέτη αυτών. Έπειτα αυτού περνάμε στο στάδιο της σύνθεσης όπου προσπαθούμε να κατανοήσουμε και να μοντελοποιήσουμε την διασύνδεση και αλληλεπίδραση των επιμέρους στοιχείων με στόχο να καταστεί δυνατή η πληρέστερη ερμηνεία του φαινομένου. Η διαδικασία αυτή της ανάλυσης και σύνθεσης έχει αποφέρει σημαντική πρόοδο στην επιστήμη και την τεχνολογία δίνοντας την δυνατότητα κατανόησης σύνθετων φαινομένων και δημιουργίας τεχνολογίας μέσω της κατασκευής σύνθετων συστημάτων.

Έτσι έχουμε μια μέθοδο διεξαγωγής της έρευνας η οποία στηρίζεται στην φιλοσοφική βάση του αναγωγισμού<sup>(1)</sup>. Παρόλα αυτά προκύπτουν κάποια ερωτήματα τα οποία έρχονται να αμφισβητήσουν τουλάχιστον την εφαρμοσιμότητα αυτής της μεθοδολογίας σε συγκεκριμένες περιπτώσεις. Επί παραδείγματι τα βιολογικά συστήματα (οι ζωντανοί οργανισμοί) είναι μια εξ αυτών των περιπτώσεων. Η μελέτη της δομής και των λειτουργιών των κυττάρων, των θεμέλιων λίθων θα λέγαμε της ζωής, είναι μια πολυσύνθετη και δύσκολη εργασία η οποία δίνει σημαντικές απαντήσεις και εργαλεία για παράδειγμα στην ιατρική. Φτάνοντας όμως να διατυπώσουμε

---

<sup>(1)</sup> Με τον όρο «αναγωγισμός» μπορεί να αναφερόμαστε γενικά σε διάφορες φιλοσοφικές ιδέες όπως ο «οντολογικός αναγωγισμός» «θεωρητικός αναγωγισμός» ή και «μεθοδολογικός αναγωγισμός». Εδώ με τον όρο αυτόν αναφερόμαστε στον μεθοδολογικό αναγωγισμό ο οποίος χαρακτηρίζει την προσπάθεια μέσω της διαδικασίας της ανάλυσης να επιτευχθεί αναγωγή των φαινομένων σε απλούστερα (στοιχειώδη φαινόμενα).

την ερώτηση «*Μπορούμε να κατανοήσουμε το σύνολο των λειτουργιών της ζωής μέσα από την επιμέρους μελέτη των κυττάρων;*», τότε η απάντηση δεν είναι προφανής.

Πάνω σε αυτής της μορφής ερωτήματα, προερχόμενα από την βιολογία, για πρώτη φορά ανέκυψε η αμφισβήτηση του αναγωγισμού στα πλαίσια της επιστήμης σε επίπεδο εφαρμοσιμότητας αλλά και νομιμότητας. Φυσικά μπορεί κανείς να σκεφτεί ότι διαθέτοντας τον απαιτούμενο χρόνο και προσπάθεια, δύναται να αναγάγει σταδιακά όλες τις λειτουργίες ενός οργανισμού σε κυτταρικό επίπεδο, όμως μια ρητή απάντηση σε αυτό περνά διαμέσου της διερεύνησης του ερωτήματος τόσο σε πρακτικό αλλά και φιλοσοφικό επίπεδο και δεν θα επεκταθούμε στο παρόν επί αυτού.

Λαμβάνοντας λοιπόν υπόψιν την ύπαρξη συστημάτων μεγάλης δομικής και λειτουργικής πολυπλοκότητας στα οποία ο αναγωγισμός δεν είναι εύκολο ή δυνατών να επεκταθεί σε όλα τα επίπεδα έως την βάση της δομής και λειτουργίας τους (υποθέτοντας ότι μπορούμε να την αναγνωρίσουμε), αναζητούμε μια διαφορετική θεώρηση και μεθοδολογική προσέγγιση.

Η γενική θεωρία συστημάτων αποτελεί το διεπιστημονικό πεδίο στο οποίο εισήχθησαν και αναπτύχθηκαν **ολιστικές** θεωρήσεις και μεθοδολογίες. Σε αυτήν το εξεταζόμενο σύστημα αντιμετωπίζεται στο σύνολο του και μελετάται η λειτουργική του ενότητα.

Η αρχική πρόταση και σχηματοποίηση αυτής της θεωρίας εντοπίζεται στα βιβλία των (Bertalanffy, 1968), (Ashby, 1956). Από το έργο του βιολόγου Ludwig von Bertalanffy, (General System Theory, 1968) θα παραθέσουμε ένα απόσπασμα σχετικά με τον στόχο αυτής της θεωρίας.

Στο δεύτερο κεφάλαιο αυτού του βιβλίου «The meaning of general system theory», αφότου έχει σημειωθεί η καθολικότητα επί των διαφορετικών επιστημονικών πεδίων, εμφάνισης ερωτημάτων τα οποία εξατομικευμένες αναλύσεις των στοιχείων τους δεν μπορούν να απαντήσουν (π.χ ατομική θεώρηση και ερωτήματα διάταξης), ερωτημάτων που απαιτούν την θεώρηση διαφορετικών συστημάτων ως ένα (π.χ κοινωνία, οικονομία, έθνος σε ερωτήματα ρύθμισης της οικονομίας), αλλά και την ταυτόχρονη ανάδυση κοινών βασικών αρχών σε διαφορετικής φύσεως προβλήματα, διαβάζουμε την ακόλουθη τοποθέτηση:

*« there exist models, principles, and laws that apply to generalized systems or their subclasses, irrespective of their particular kind, the nature of their component elements, and the relations or "forces" between them. It seems legitimate to ask for a theory, not of systems of a more or less special kind, but of universal principles applying to systems in general »* <sup>(2)</sup>

(General System Theory, p 32)

Η Γενικής Θεωρίας Συστημάτων μπορεί αν οριστεί ως η διεπιστημονική μελέτη της οργάνωσης των φαινομένων και των διαδικασιών, ανεξαρτήτων της υλικής του συγκρότησης ή άλλων ειδικών χαρακτηριστικών αυτών. Το αντικείμενο έρευνας, εν προκειμένω, είναι οι γενικές αρχές που διέπουν ευρείες κλάσεις συστημάτων, καθώς και γενικές έννοιες και μαθηματικά πρότυπα (μαθηματικές θεωρίες) που μπορούν να εφαρμοσθούν σε κλάσεις συστημάτων, ανεξαρτήτως του υλικού υποβάθρου και του τύπου αυτών.

---

(2) **Μετάφραση:** υπάρχουν μοντέλα, αρχές και νόμοι που ισχύουν για τα γενικευμένα συστήματα ή τις υποκατηγορίες τους, ανεξάρτητα από το ιδιαίτερο είδος τους, τη φύση των συνιστωσών τους και τις σχέσεις ή τις δυνάμεις μεταξύ τους. Φαίνεται νόμιμο να ζητάμε μια θεωρία, όχι συστημάτων κατά γενική ομολογία ειδικού είδους, αλλά για τις γενικές αρχές που ισχύουν για τα συστήματα γενικά.

Στα πλαίσια της Θεωρίας Συστημάτων αναπτύχθηκαν και υλοποιήθηκαν σημαντικές ιδέες και μεθοδολογίες οι οποίες – πιθανότατα – δεν θα μπορούσαν να αναπτυχθούν στα πλαίσια του αναγωγισμού. Ως παραδείγματα αναφέρουμε τις έννοιες (και τις αντίστοιχες τεχνικές που τις υλοποιούν) της ανάδρασης (feedback), του συστήματος ελέγχου (control system), της ταυτοποίησης συστήματος (system identification), του βέλτιστου ελέγχου συστημάτων (optimal system control), της λειτουργικής ανακατασκευής του όλου συστήματος (functional reconstruction of the system) και, τέλος, την ανάπτυξη υβριδικών συστημάτων μέσω της λειτουργικής αντικατάστασης επί μέρους στοιχείων του συστήματος από «λειτουργικά ισοδύναμα» διαφορετικής υλικής βάσης (π.χ., τεχνητά μέλη ανθρώπου ή τεχνητές προσομοιώσεις υποσυστημάτων σε πολύπλοκες πειραματικές διατάξεις). Επίσης, δόθηκε έμφαση στην έννοια του ανοικτού συστήματος (open system) και αναπτύχθηκαν έννοιες και μεθοδολογίες για τη μελέτη της αλληλεπίδρασης ανοικτών συστημάτων με το περιβάλλον τους, άνοιξε ο δρόμος για τη μελέτη των διαδικασιών αυτοοργάνωσης πολύπλοκων συστημάτων, και διευκολύνθηκε σημαντικά η ανάπτυξη νέων επιστημονικών και τεχνολογικών κλάδων, όπως είναι η χαοτική δυναμική, η τεχνητή νοημοσύνη, τα νευρωνικά δίκτυα κ.ά.

### **Ορισμός και ταξινόμηση συστημάτων (Αθανασούλης, 2006)**

Η έννοια του συστήματος σε πλήρη γενικότητα, όπως έχει μορφοποιηθεί τα τελευταία χρόνια μέσα από τη Γενική Θεωρία Συστημάτων (General Systems Theory), είναι πολύ ευρεία, και είναι δύσκολο να ορισθεί ικανοποιητικά κατά μονοσήμαντο τρόπο. Θα παρουσιάσουμε τρεις ορισμούς (έναν περιγραφικό, έναν λειτουργικό και έναν μαθηματικό), καθένας από τους οποίους φωτίζει την έννοια του συστήματος από διαφορετική άποψη.

**Ορισμός 1 [Περιγραφικός/Υλικός]:** Σύστημα είναι διάταξη (συνδυασμός) συνιστωσών ή στοιχείων<sup>(3)</sup>, συνδεδεμένων ή συσχετισμένων μεταξύ τους με τέτοιο τρόπο ώστε να αποτελούν μια ολότητα. ■

(Elgerd, 1967, p.1, DiStefano III, Stubberud and Williams, 1990)

**Ορισμός 2 [Λειτουργικός]:** Σύστημα είναι διάταξη (συνδυασμός) συνιστωσών ή στοιχείων, με τη δράση και αλληλεπίδραση των οποίων παράγεται λειτουργία (αποτέλεσμα) που δεν είναι δυνατόν να παραχθεί από τις επί μέρους συνιστώσες. ■

(Κρικέλης, 1981, σελ. 31)

**Ορισμός 3 [Μαθηματικός]:** Σύστημα είναι μια απεικόνιση (ένας τελεστής, operator) που μετασχηματίζει μια διέγερση (σήμα εισόδου)  $F$  σε μια απόκριση (σήμα εξόδου)  $X$ . Η απεικόνιση αυτή αναπαρίσταται συμβολικά ως εξής:

$$y = \mathcal{T}[x]. \quad \blacksquare \quad (1)$$

(Schetzen, 2006, p.1)

Όπως είναι φανερό, ο πρώτος ορισμός δίνει έμφαση στην *υλική ενότητα* ενός συστήματος, ο δεύτερος στη *λειτουργική δράση* του, και ο τρίτος στη *μαθηματική μοντελοποίηση* του συστήματος.

Η ανάπτυξη που ακολουθεί παίρνει ως αφετηρία τον τρίτο ορισμό, ο οποίος θεωρεί ως σύστημα κάθε τι (κάθε «συνδυασμό συνιστωσών») του οποίου η δράση μπορεί να αναπαρασταθεί με έναν καλά ορισμένο μαθηματικό τελεστή. Από την άποψη αυτή, η θεωρία των συστημάτων

<sup>(3)</sup> Οι συνιστώσες μπορεί να είναι φυσικά ή τεχνικά αντικείμενα (φαινόμενα), ή διαδικασίες οποιασδήποτε, σαφώς ορισμένης μορφής.

μπορεί να θεωρηθεί ως μια όψη της θεωρίας των τελεστών (βλ., π.χ., Holtzman, 1970). Με άλλα λόγια, έννοια βάσης της Θεωρίας των Συστημάτων είναι το μαθηματικό μοντέλο, το οποίο αποτελεί την «αφηρημένη ενότητα μιας καθορισμένης ομάδας ιδιοτήτων του συστήματος, υπό ορισμένες συνθήκες λειτουργίας» (Κρικέλης 1981, σελ. 3.2).

Ένα σύστημα  $\mathcal{T}$  μπορεί να δέχεται μια ή περισσότερες (βαθμωτές) διεγέρσεις (εισόδους) και να «παρέχει» μια ή περισσότερες (βαθμωτές) αποκρίσεις (εξόδους).

### Βαθμωτό σύστημα- Σύστημα 1E1E

Ένα σύστημα που διεγείρεται από μια βαθμωτή συνάρτηση  $x(\cdot)$  και δίδει ως έξοδο μια επίσης βαθμωτή συνάρτηση  $y(\cdot)$ , θα αναφέρεται και ως **βαθμωτό σύστημα** ή – ακριβέστερα – ως **σύστημα 1E1E** (1 Είσοδος, 1 Έξοδος)<sup>(4)</sup>.

### Συστήματα NEME

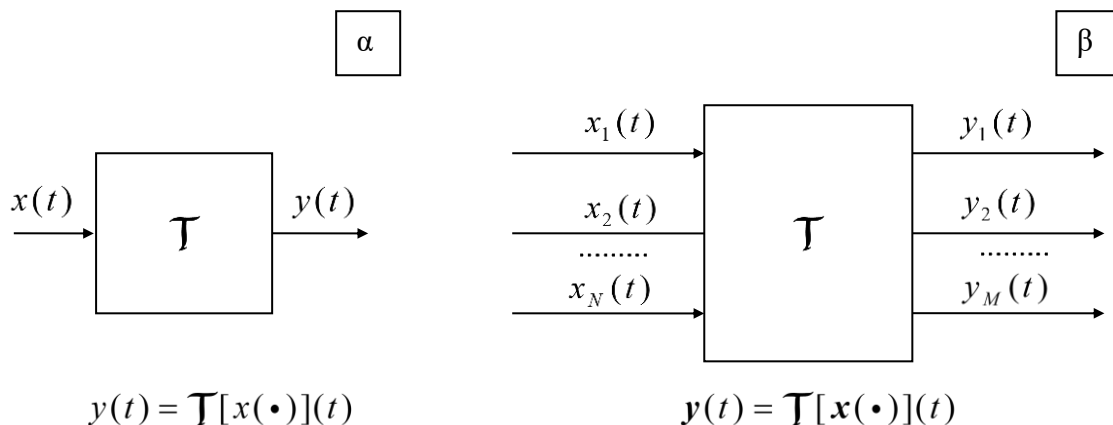
Ένα σύστημα που διεγείρεται από  $N$  βαθμωτές διεγέρσεις, οι οποίες συνήθως θεωρούνται ως μια διανυσματική συνάρτηση

$$\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), \dots, x_N(t))^T \text{ (}^5\text{)},$$

και παρέχει  $M$  βαθμωτές συναρτήσεις εξόδου, επίσης θεωρούμενες ως μια διανυσματική συνάρτηση εξόδου

$$\mathbf{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t), \dots, y_M(t))^T,$$

θα αναφέρεται και ως **σύστημα NEME** (N Είσοδοι, M Έξοδοι)<sup>(6)</sup>. Σημειώνουμε επίσης ότι οι διεγέρσεις (είσοδοι) μπορεί να είναι είτε συνήθεις ντετερμινιστικές συναρτήσεις, είτε γενικευμένες ντετερμινιστικές συναρτήσεις, είτε στοχαστικές συναρτήσεις.



**Σχήμα 1: Αναπαράσταση συστήματος με τη βοήθεια δομικού διαγράμματος. (α) Σύστημα 1E1E, (β) Σύστημα NEME**

Στα πλαίσια αυτής της εργασίας θα περιοριστούμε στην μελέτη βαθμωτών συστημάτων.

<sup>(4)</sup> Στα Αγγλικά χρησιμοποιείται η συντομογραφία SISO = Single Input Single Output (system).

<sup>(5)</sup> Ο άνω δείκτης  $(\cdot)^T$  συμβολίζει τον ανάστροφο πίνακα (δηλαδή η  $\mathbf{x}(t)$  νοείται εδώ ως διάνυσμα στήλης).

<sup>(6)</sup> Στα Αγγλικά χρησιμοποιείται συχνά και η συντομογραφία MIMO = Multiple Input Multiple Output (system).

## 1.2 Ο τελεστής ως το μαθηματικό πρότυπο της θεωρίας συστημάτων

### Μαθηματική αναπαράσταση γενικού συστήματος

Κάθε σύστημα συνεχούς χρόνου μπορεί να αναπαρασταθεί μαθηματικά μέσω της απεικόνισης:

$$\mathbf{T}: X(I \rightarrow \mathbb{R}) \supseteq \mathcal{D}(\mathbf{T}) \ni x(\bullet) \longrightarrow y(\bullet) = \mathbf{T}[x(\bullet)](\bullet) \in Y(I \rightarrow \mathbb{R}). \quad (1)$$

Αυτό σημαίνει ότι αναπαριστούμε την σχέση διέγερσης-απόκρισης,  $x(\bullet)$  και  $y(\bullet)$ , αντιστοίχως, μέσω της δράσης ενός τελεστή  $\mathbf{T}[\bullet]$  ο οποία μετασχηματίζει την διέγερση, αποδίδοντας την απόκριση. Γράφουμε συνοπτικά:

$$y(t) = \mathbf{T}[x(\bullet)](t). \quad (2)$$

Στην απεικόνιση (1), το σύνολο  $I$  αποτελεί το χρονικό διάστημα λειτουργίας του συστήματος. Το διάστημα αυτό, ενδέχεται να είναι της μορφής  $I := (-\infty, +\infty)$  είτε  $(-\infty, T]$ , αλλά στις περισσότερες πρακτικές καταστάσεις είναι της μορφής  $I := [t_0, +\infty)$  ή  $[t_0, T]$ . Αυτό καθώς, είτε παρατηρούμε και διεξάγουμε μετρήσεις σε ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα, είτε αφήνουμε το σύστημα να λειτουργήσει για μεγάλους χρόνους έως ότου εξαλειφθούν τα όποια μεταβατικά φαινόμενα και το σύστημα φτάσει σε μόνιμη κατάσταση λειτουργίας. Τα σύνολα  $X, Y$  αποτελούν τους γενικότερους χώρους συναρτήσεων στους οποίους ανήκουν οι θεωρούμενες συναρτήσεις διέγερσης και απόκρισης αντιστοίχως. Το σύνολο  $\mathcal{D}(\mathbf{T})$ , είναι το πεδίο ορισμού της απεικόνισης  $\mathbf{T}$  (τελεστής), δηλαδή το υποσύνολο του χώρου των διεγέρσεων οι οποίες είναι δεκτές ως διεγέρσεις του συστήματος που μελετάται.

Κατά αυτόν τον τρόπο «εσωκλείουμε» τις διεργασίες που επιτελούνται κατά την λειτουργία του συστήματος στο γενικό μαθηματικό αντικείμενο  $\mathbf{T}$  και επικεντρωνόμαστε στην μελέτη της σχέσης εισόδου-εξόδου, δηλαδή διέγερσης-απόκρισης μέσω αυτού του μαθηματικού αντικειμένου. Συχνά το σύστημα (2) αναπαρίσταται συμβολικά στην μορφή:

$$x(\bullet) \xrightarrow{\text{Input}} \boxed{\begin{array}{c} \text{System} \\ \mathbf{T}[\bullet] \end{array}} \xrightarrow{\text{Output}} y(\bullet).$$

Ένα κεντρικό ερώτημα στην γενική θεωρία συστημάτων είναι πώς ο τελεστής  $\mathbf{T}$  μπορεί να αναπαρασταθεί (ή να προσεγγισθεί ικανοποιητικά) μέσω συγκεκριμένων (απλών, γνωστής μορφής) τελεστών. Και εδώ, ακολουθούμε την συνήθη αναλυτική (μαθηματική) οπτική, με σκοπό να απαντήσουμε το ανωτέρω ερώτημα μέσω ορισμένων χαρακτηριστικών αναλυτικών ιδιοτήτων του τελεστή  $\mathbf{T}$ , όπως συνέχεια, διαφορισιμότητα κτλ.

### Θεμελιώδεις αναλυτικές και φυσικές ιδιότητες γενικών μη-γραμμικών συστημάτων

#### Συνέχεια και διαφορισιμότητα

Όσα αναπτύσσουμε σε αυτήν την εργασία, αναφορικά με το ερώτημα της αναπαράστασης και προσέγγισης του τελεστή  $\mathbf{T}[\bullet]$ , έχουν ως πρωταρχική τους υπόθεση την συνέχεια του τελεστή, όπως αυτή ορίζεται βάση της δομής των χώρων συναρτήσεων  $X, Y$ , ανάμεσα στους οποίους πραγματοποιείται η απεικόνιση. Επίσης, στο εδάφιο 1.5 θα χρειαστεί να ορίσουμε την έννοια της διαφορισιμότητας του τελεστή  $\mathbf{T}[\bullet]$ , επιπροσθέτως της συνέχειας.

Πέρα από τις αναλυτικές ιδιότητες της **συνέχειας και διαφορισιμότητας** που απαιτούνται έχουμε και κάποιες ακόμα φυσικές ιδιότητες των συστημάτων.



## Αιτιότητα

Η οπτική με την οποία αντιμετωπίζουμε τα φυσικά ή τεχνητά (μηχανικά) συστήματα, έχει ως βασική της αρχή το ότι η λειτουργία του συστήματος είναι αποτέλεσμα κάποιου υπαρκτού η προϋπάρχοντος αίτιου και δεν μπορεί να είναι απρόκλητη. Συστήματα στα οποία η απόκριση εξαρτάται από ταυτόχρονες και παρελθοντικές αλλά **όχι μελλοντικές διεγέρσεις** ονομάζονται **αιτιοκρατικά** (Causal Systems).

**Παρατήρηση:** Σημειώνουμε ότι *όλα τα γνωστά φυσικά συστήματα είναι αιτιοκρατικά*. Σαφώς μπορεί κάποιος να κατασκευάσει και να μελετήσει συστήματα των οποίων η απόκριση στον παρόντα χρόνο λειτουργίας είναι συνάρτηση μελλοντικών ή εκτιμήσεων πιθανών μελλοντικών διεγέρσεων (π.χ χρηματιστήριο), τα οποία δεν είναι αιτιοκρατικά, αλλά στο πλαίσιο αυτής της εργασίας, αυτές οι περιπτώσεις δεν θα μας απασχολήσουν.

**Ορισμός 1 [Αιτιοκρατικό Σύστημα]:** Αιτιοκρατικό σύστημα (Causal System) είναι κάθε σύστημα του οποίου η απόκριση σε χρόνο  $t$  εξαρτάται αποκλειστικά από την παρελθούσα ιστορία της διέγερσης σε όλους τους χρόνους  $\tau < t$  (ενδεχομένως  $\tau \leq t$ )<sup>(7)</sup>. ■

Μέσω της μαθηματικής αναπαράστασης του συστήματος, ο ανωτέρω Ορισμός 1, του αιτιοκρατικού συστήματος, μπορεί να δοθεί **ισοδύναμα**, ως εξής.

**Ορισμός 2 [Αιτιοκρατικό Σύστημα]:** Ορίζουμε ως αιτιοκρατικό σύστημα, κάθε σύστημα  $\mathcal{T}[\cdot]$ , για το οποίο ισχύει ότι:

$$\left( \forall x_1, x_2 \in X(I \rightarrow \mathbb{R}) \right) \left( x_1(\tau) = x_2(\tau), \forall \tau < t, t \in I \right) : \left[ \mathcal{T}[x_1(\cdot)](t) = \mathcal{T}[x_2(\cdot)](t) \right].$$

■

## Χρονικά μεταβλητά και χρονικά αμεταβλητά συστήματα

Σε αντίθεση με την αιτιότητα, η οποία αποτελεί γενικό χαρακτηριστικό των μελετώμενων συστημάτων, ερχόμαστε τώρα σε μια ειδικότερη ιδιότητα αναφορικά με το είδος της εξάρτησης του τελεστή από την μεταβλητή του χρόνου, η οποία συναντάται σε ένα μεγάλο κομμάτι αυτών.

Συστήματα με έμμεσα χρονικά εξαρτημένη απόκριση, δηλαδή η εξάρτηση του τελεστή από την μεταβλητή του χρόνου να έρχεται μέσω της χρονικής εξάρτησης της συνάρτησης διέγερσης και όχι ρητά, χαρακτηρίζονται ως **χρονικά αμετάβλητα** συστήματα (TIS: Time Invariant Systems). Στην βιβλιογραφία συναντάμε και τον όρο (Stationary Systems) αναφερόμενοι στα χρονικά αμετάβλητα συστήματα. Συστήματα με άμεσα εξαρτημένη από την μεταβλητή του χρόνου συνάρτηση απόκρισης, ονομάζονται **χρονικά μεταβλητά** (TVS: Time Variant Systems).

Απλούστερα, σε ένα χρονικά αμετάβλητο σύστημα, μια «καθυστέρηση» ή «επίσπευση» στην χρονικά εξαρτημένη συνάρτηση διέγερσης, δηλαδή  $x(t - \delta)$  ή  $x(t + \delta)$  αντιστοίχως, αυτομάτως θα έχει ως αποτέλεσμα μια «καθυστέρηση» ή «επίσπευση» στην συνάρτηση εξόδου, δηλαδή  $y(t - \delta)$  ή  $y(t + \delta)$ . Αυτό σημαίνει ότι ο τελεστής του συστήματος  $\mathcal{T}[\cdot]$  δεν εξαρτάται ρητά από την μεταβλητή του χρόνου αλλά έμμεσα, μέσω της συνάρτησης διέγερσης.

**Ορισμός 3 [Χρονικά αμετάβλητο σύστημα-Χρονικά αμετάβλητος Τελεστής]:** Έστω η συνάρτηση απόκρισης ενός συστήματος  $y(t) = \mathcal{T}[x(\cdot)](t)$ , όπου το σύστημα (τελεστής)

---

<sup>(7)</sup> Το αν συμπεριλαμβάνουμε στον ορισμό της αιτιότητας και συνεισφορά από ταυτόχρονη διέγερση είναι ένα σημείο διαφοροποίησης στην βιβλιογραφία το οποίο μπορεί να προσαρμοστεί στην μοντελοποίηση του εκάστοτε προβλήματος.

$\mathcal{T}[\cdot]$  είναι είτε γραμμικό είτε μη γραμμικό<sup>(8)</sup> και  $x(\cdot)$  συνάρτηση διέγερσης. Έστω ακόμα, μια νέα συνάρτηση διέγερσης  $x_1(t) = x(t - \tau)$ , η οποία αποτελεί μετατόπιση της αρχικής συνάρτησης. Το σύστημα θα καλείται **χρονικά αμετάβλητο σύστημα** (time-invariant system, TIS) αν ισχύει ότι:

$$y_1(t) = \mathcal{T}[x_1(\cdot)](t) = \mathcal{T}[x(\cdot)](t - \tau) = y(t - \tau). \quad \blacksquare \quad (3)$$

Δηλαδή μια μετατόπιση στην συνάρτηση διέγερσης έχει ως αποτέλεσμα ίδια μετατόπιση της συνάρτησης απόκρισης του συστήματος.

### Στατικά και δυναμικά συστήματα

**Ορισμός 4 [Στατικό και Δυναμικό σύστημα]:** Ένα σύστημα θα ονομάζεται **στατικό** (ή **σύστημα χωρίς μνήμη**) εάν ή τιμή της απόκρισης σε μία δεδομένη χρονική στιγμή  $t$  εξαρτάται μόνο από την αντίστοιχη τιμή της διέγερσης στην ίδια χρονική στιγμή. Αντίθετα, ένα σύστημα θα ονομάζεται **δυναμικό** (ή **σύστημα με μνήμη**) εάν ή τιμή της απόκρισης σε μια χρονική στιγμή  $t$  εξαρτάται από τη χρονική ιστορία της διεγέρσεως μέχρι την τρέχουσα στιγμή  $t$ , ή τουλάχιστον από ένα τμήμα αυτής.  $\blacksquare$

Ένα σύστημα του οποίου η απόκριση εξαρτάται από την ιστορία της διέγερσης στο χρονικό διάστημα  $[t - \Delta, t]$ ,  $\Delta > 0$ , θα λέμε ότι έχει μνήμη μήκους  $\Delta$ . Ένα στατικό σύστημα έχει μνήμη μηδενικού μήκους.

Τα δυναμικά προβλήματα μηχανικών συστημάτων οδηγούν κατά κανόνα σε δυναμικά συστήματα (με την έννοια του ορισμού 3, ανωτέρω).

### Η συνήθης δυϊκότητα μεταξύ τελεστών και συναρτησιακών στην θεωρία συστημάτων

Βάση των ανωτέρω, το σύστημα ορίζεται μαθηματικά ως μια απεικόνιση (τελεστής), την οποία αποσαφηνίσαμε στην εναρκτήρια σχέση (1). Αντιλαμβανόμεστε σχηματικά, μέσω των γραφημάτων των συναρτήσεων  $x(\cdot)$ ,  $y(\cdot)$ , πάνω από το διάστημα  $I$ , ότι το σύστημα  $\mathcal{T}[\cdot]$  μετασχηματίζει το γράφημα της πρώτης στο γράφημα της δεύτερης.

Αν τώρα έρθουμε να ανακαλέσουμε το ότι η τιμή της συνάρτησης απόκρισης  $y(\cdot)$  σε κάθε χρόνο  $\hat{t} \in I$  (fixed), είναι συνάρτηση ολόκληρης της συνάρτησης διέγερσης  $x(\cdot)$  έως και την χρονική στιγμή  $\hat{t}$ , καταλαβαίνουμε ότι η σχέση απόκρισης-διέγερσης στον χρόνο  $\hat{t}$  είναι συναρτησιακή. Γράφουμε τότε:

$$y(\hat{t}) = \mathcal{T}[x(\cdot)](\hat{t}). \quad (4)$$

Το αριστερά μέλος της Εξ. (4) είναι βαθμωτή ποσότητα, ενώ το δεξιά είναι συναρτησιακό το οποίο εξαρτάται γενικά από την ιστορία της διέγερσης. Ακριβέστερα το συναρτησιακό γράφεται:

$$\mathcal{T}[x(\cdot)](\hat{t}) \equiv \mathcal{T}[x(\cdot|_{t_0}^{\hat{t}})],$$

όπου  $t_0$  το αριστερό άκρο του διαστήματος  $I$ . Με αυτόν τον τρόπο γίνετε σαφές ότι μιλούμε για ένα συναρτησιακό το οποίο εξαρτάται από τις τιμές της συνάρτησης όρισμα, στο διάστημα  $[t_0, \hat{t}] \subseteq \mathcal{T}$ .

<sup>(8)</sup> Για τον μη εξοικειωμένο αναγνώστη η έννοιες της γραμμικότητας και μη γραμμικότητας αναπτύσσονται στην συνέχεια, στο εδάφιο 1.3.

Συνεπώς, εδώ ανευρίσκεται ένας διαφορετικός τρόπος μελέτης του συστήματος  $\mathcal{T}[\bullet]$  μέσω της συναρτησιακής σχέσης:

**Συνάρτηση διέγερσης στο διάστημα  $[t_0, \hat{t}]$  - Τιμή της απόκρισης στον χρόνο  $\hat{t}$**

Σε αυτήν την θεώρηση λοιπόν, αντιλαμβανόμαστε το σύστημα σε κάθε χρονική στιγμή  $\hat{t}$  ως ένα συνεχές συναρτησιακό πάνω στην συνάρτηση διέγερσης στο διάστημα  $[t_0, \hat{t}]$ . Επειδή σε αυτήν την θεώρηση λαμβάνουμε μεμονωμένες τιμές  $\mathcal{T}[\bullet](\hat{t})$ , οφείλουμε να διερευνήσουμε εκ των υστέρων, δομώντας αυτές τις τιμές ως την συνάρτηση απόκρισης, την συνέχεια του τελεστή  $\mathcal{T}[\bullet]$ .

Παράδειγμα αντικειμένου της ανωτέρω μορφής είναι ο γραμμικός τελεστής Volterra:

$$V[x(\bullet)](t) = \int_{t_0}^t h(t, \tau)x(\tau) d\tau.$$

Τοποθετούμε τις συναρτήσεις  $x(\bullet)$  στον χώρο  $L^2(I \rightarrow \mathbb{R})$ , όπου  $I = (t_0, T) \subseteq \mathbb{R}$ . Τότε ο ανωτέρω τελεστής  $V[\bullet]$  για κάθε  $t \in I$  ορίζει μια οικογένεια συναρτησιακών πάνω στο χώρο  $L^2(I \rightarrow \mathbb{R})$ .

### 1.3 Γραμμικά και μη γραμμικά συστήματα

**Το γραμμικό σύστημα**

**Ορισμός 1 [Γραμμικό σύστημα]:** Ένα σύστημα καλείται γραμμικό αν ισχύει ότι:

$$\forall x, y \in \mathcal{D}(\mathcal{T}) \text{ και } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\mathcal{T}[\alpha x(\bullet) + \beta y(\bullet)] = \alpha \mathcal{T}[x(\bullet)] + \beta \mathcal{T}[y(\bullet)]. \quad \blacksquare \quad (1)$$

Αναλύοντας την Εξ. (1) πρώτον βλέπουμε ότι ο τελεστής  $\mathcal{T}$  πληροί την **ιδιότητα της προσθετικότητας**, δηλαδή θεωρώντας τις σταθερές  $\alpha = \beta = 1$  θα έχουμε:

$$\mathcal{T}[x(\bullet) + y(\bullet)] = \mathcal{T}[x(\bullet)] + \mathcal{T}[y(\bullet)].$$

Αυτό σημαίνει ότι η απόκριση του συστήματος σε άθροισμα διεγέρσεων ισούται με το άθροισμα των αποκρίσεων σε κάθε μια εξ αυτών ξεχωριστά. Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως **αρχή της επαλληλίας**.

Δεύτερον ο τελεστής  $\mathcal{T}$  πληροί την ιδιότητα της **ομοιογένειας πρώτης τάξης**, δηλαδή αν θεωρήσουμε  $\alpha \neq 0$ ,  $\beta = 0$ , έχουμε ότι:

$$\mathcal{T}[\alpha x(\bullet)] = \alpha \mathcal{T}[x(\bullet)].$$

Αυτό σημαίνει ότι η απόκριση σε ένα πολλαπλάσιο μιας αρχικής διέγερσης έχει ως αποτέλεσμα την αρχική απόκριση πολλαπλασιασμένη με την ίδια σταθερά. Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή και ως **αρχή της ομοιογένειας**.

**Αναπαράσταση γενικού γραμμικού τελεστή**

Στην περίπτωση των γραμμικών συστημάτων έχουμε την δυνατότητα διατύπωσης μιας γενικής αναπαράστασης για μία ευρεία κλάση συστημάτων. Περιοριζόμενοι σε δυναμικά

συστήματα που είναι συνεχή(είς) με την supremum νόρμα αλλά και με την  $L_1$ -νόρμα, δηλαδή:  $(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0)$

$$: \left[ \|h\|_\infty < \delta \Rightarrow \|\mathcal{T}[x+h] - \mathcal{T}[x]\|_\infty \leq \varepsilon \right],$$

και

$$(\exists M > 0) : \left[ \|h\|_\infty < \delta \Rightarrow \|\mathcal{T}[x+h] - \mathcal{T}[x]\|_\infty \leq M \|h\|_{L_1} < \varepsilon \right].$$

**Τότε**, οδηγούμεθα σε αναπαραστάσεις του γραμμικού τελεστή  $\mathcal{T}[\bullet]$ , στη μορφή:

$$y(t) := \mathcal{T}[x(\bullet)](t) = \int_{-\infty}^t h(t, \tau) x(\tau) d\tau, \quad (2)$$

ή

$$y(t) := \mathcal{T}[x(\bullet)](t) = h_0 + \int_{t_0}^t h(t, \tau) x(\tau) d\tau, \quad (3)$$

όπου  $h(t; \tau)$  είναι κατάλληλη συνάρτηση, η οποία περιγράφει τη δράση του (γραμμικού) συστήματος. Η συνάρτηση  $h(t, \tau)$  αποτελεί το «αναλυτικό λειτουργικό ισοδύναμο» του συστήματος, και είναι ανεξάρτητη από τις λεπτομέρειες της υλικής σύστασης αυτού. Από την άποψη της Μαθηματικής Θεωρίας Συστημάτων, η συνάρτηση  $h(t; \tau)$  είναι το (γραμμικό) σύστημα.

### Μη γραμμικά συστήματα

Αν θέλουμε να ορίσουμε το μη γραμμικό σύστημα, μπορούμε να πούμε ότι «μη γραμμικό σύστημα είναι κάθε σύστημα το οποίο δεν είναι γραμμικό» Παραδοχή της επιστήμης είναι ότι ο κόσμος γύρω μας είναι μη γραμμικός αλλά και οι τεχνολογικές επιδιώξεις μας στο μεγαλύτερο μέρος τους είναι θέμα μελέτης, κατασκευής και ελέγχου μη γραμμικών συστημάτων.

Η constructive συζήτηση στο θέμα των μη γραμμικών συστημάτων ξεκινά το 1887 από τον V. Volterra, βλ. (Volterra, 2005/1930), και συστηματοποιείται στις εργασίες του M. Fréchet, βλ. (Fréchet, 1910), όπου για πρώτη φορά δόθηκαν συνθήκες για τον χαρακτηρισμό ενός τελεστή ως ομογενή πολωνυμικό  $n$ -τάξης.

#### Ομογενή μη γραμμικά συστήματα

Μια κατηγορία «απλών» μη γραμμικών συστημάτων συστήνεται από εκείνα που πληρούν την ιδιότητα της ομοιογένειας  $n$ -βαθμού,  $n > 1$ , δηλαδή:  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{T}_{(n)}[\alpha x(\bullet)] = \alpha^n \mathcal{T}_{(n)}[x(\bullet)].$$

Αυτό σημαίνει ότι η απόκριση σε ένα πολλαπλάσιο μιας αρχικής διέγερσης έχει ως αποτέλεσμα την αρχική απόκριση πολλαπλασιασμένη με την ίδια σταθερά υψωμένη στην  $n$ -οστή δύναμη.

#### Τετραγωνικά (quadratic) συστήματα

**Ορισμός 2 [Τετραγωνικό σύστημα]:** Τετραγωνικό σύστημα ορίζεται κάθε σύστημα  $\mathcal{T}$  για το οποίο ισχύει ότι:  $\forall x, y, z \in \mathcal{D}(\mathcal{T}) \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{(2)}[\alpha x(\cdot)] &= \alpha^2 \mathcal{T}_{(2)}[x(\cdot)], \\ \mathcal{T}_{(2)}[x + y + z] &= \mathcal{T}_{(2)}[x + y] + \mathcal{T}_{(2)}[y + z] + \mathcal{T}_{(2)}[x + z] - \\ &\quad - \mathcal{T}_{(2)}[x] - \mathcal{T}_{(2)}[y] - \mathcal{T}_{(2)}[z]. \quad \blacksquare\end{aligned}\tag{4}$$

Το σύστημα πληροί την ομογένεια δευτέρου βαθμού. Ακόμα σε αντιπαράθεση με το γραμμικό σύστημα, η προσθετικότητα αντικαθίσταται από την Εξ. (4). Θα μπορούσαμε να ονομάσουμε αυτήν την ιδιότητα ως **συνδυαστική προσθετικότητα δευτέρας τάξεως**. Η ιδιότητα αυτή, λαμβάνει την εξής λειτουργική ερμηνεία. Με σκοπό να γνωρίζουμε την απόκριση σε άθροισμα διεγέρσεων, αρκεί να γνωρίζουμε την απόκριση στα ανά δύο αθροίσματα των διεγέρσεων καθώς και σε κάθε μία ξεχωριστά.

### Κυβικά (cubic) συστήματα

**Ορισμός 3 [Κυβικό σύστημα]:**Κυβικό σύστημα ορίζεται κάθε σύστημα  $\mathcal{T}$ , για το οποίο ισχύει:  $\forall x, y, z, w \in \mathcal{D}(\mathcal{T}), \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\mathcal{T}[\alpha x(\cdot)] &= \alpha^3 \mathcal{T}[x(\cdot)], \\ \mathcal{T}[x + y + z + w] &= \mathcal{T}[x + y + z] + \mathcal{T}[x + y + w] + \mathcal{T}[y + z + w] + \\ &\quad + \mathcal{T}[z + x + w] - \mathcal{T}[x + y] - \mathcal{T}[x + w] - \mathcal{T}[y + w] - \\ &\quad - \mathcal{T}[y + z] - \mathcal{T}[z + x] - \mathcal{T}[z + w] + \\ &\quad + \mathcal{T}[x] + \mathcal{T}[y] + \mathcal{T}[z] + \mathcal{T}[w]. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

### Το ομογενές πολυωνυμικό σύστημα $n$ -τάξης

Για το ομογενές πολυωνυμικό σύστημα  $n$ -τάξης, πρώτον έχουμε ότι:  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{T}_{(n)}[\alpha x(\cdot)] = \alpha^n \mathcal{T}_{(n)}[x(\cdot)],$$

καθώς επίσης και την κατ' αναλογία με το τετραγωνικό και κυβικό σύστημα, ιδιότητα της συνδυαστικής προσθετικότητας. Για να μπορέσουμε να γράψουμε αυτήν την σχέση, χρειαζόμαστε να εισάγουμε κάποιες προπαρασκευαστικές, βοηθητικές έννοιες:

Θεωρούμε το σύνολο  $A = \{1, 2, \dots, n\}$  και συμβολίζουμε με  $S_j$  το σύνολο των υποσυνόλων του συνόλου  $A$ , για τα οποία υποσύνολα ισχύει ότι:

- α) Τα στοιχεία τους είναι διατεταγμένα με την σχέση ( $<$ ).
- β) Το πλήθος των στοιχείων κάθε συνόλου  $J \in S_j$  είναι ίσο με  $j$ .

Με αυτόν τον τρόπο για κάθε  $j < n$  το σύνολο  $S_j$  περιέχει ακριβώς τα υποσύνολα του  $A$  που προκύπτουν από τις  $n$  ανά  $j$  διαφορετικές επιλογές των στοιχείων του  $A$ .

Με βάση τα ανωτέρω μπορούμε να γράψουμε:

$$\mathcal{T}_{(n)}[x_1 + x_2 \cdots + x_{n+1}] = \sum_{j=1}^n \left( (-1)^{n-j} \sum_{J \in S_j} \mathcal{T}_{(n)} \left[ \sum_{k \in J} x_k \right] \right).$$

### Πολυωνυμικά συστήματα

Ερχόμαστε τώρα στον ορισμό των πολυωνυμικών συστημάτων. Τα πολυωνυμικά συστήματα ορίζονται ως εκείνα τα οποία αποτελούν άθροισμα ομογενών συστημάτων.

**Ορισμός 4 [Πολυωνυμικό Σύστημα]:** Καλούμε πολυωνυμικό σύστημα  $N$ -βαθμού, κάθε σύστημα  $\mathcal{T}[\bullet] \equiv \mathcal{P}[\bullet]$  για το οποίο ισχύει:

$$\mathcal{P}[x(\bullet)](t) = \sum_{n=0}^N \mathcal{T}_{(n)}[x(\bullet)](t),$$

όπου για  $n \geq 1$ ,  $\mathcal{T}_{(n)}[\bullet]$  είναι ομογενές σύστημα  $n$ -βαθμού και  $\mathcal{T}_0[\bullet]$  το σταθερό σύστημα. ■

Οι ομογενείς τελεστές είναι άμεσα συνδεδεμένοι με την γενίκευση της έννοιας του ομογενούς πολυώνυμου σε αυτό που καλούμε ομογενές τελεστικό πολυώνυμο. Επακόλουθο αυτού είναι ο ορισμός των μη ομογενών τελεστικών πολυωνύμων κατά αναλογία με τα συνήθη πραγματικά πολυώνυμα, τα οποία χτίζονται ως γραμμικοί συνδυασμοί επί της βάσης των μονωνύμων. Στο δεύτερο κεφάλαιο ασχολούμαστε εκτενώς με το αντικείμενο των τελεστικών πολυωνύμων, ξεκινώντας από τον ορισμό και την μελέτη της αλγεβρικής δομής τους σε γραμμικούς χώρους.

### Αναπαραστάσεις ομογενών και πολυωνυμικών συστημάτων κατά Volterra

Περιοριζόμενοι και εδώ σε δυναμικά συστήματα που είναι συνεχή με την supremum νόρμα αλλά και με την  $L_1$ -νόρμα, καταλήγουμε στην αναπαράσταση των ομογενών πολυωνυμικών (μη γραμμικών τελεστών)  $\mathcal{T}_{(n)}[\bullet]$ , στη μορφή:

$$\mathcal{T}_{(n)}[x(\bullet)](t) = \int_T \dots \int_T h_n(t, \tau_1, \dots, \tau_n) x(\tau_1) \dots x(\tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n,$$

και εφόσον οι πολυωνυμικοί τελεστές ορίζονται ως αθροίσματα ομογενών πολυωνυμικών, έχουμε την αναπαράσταση του πολυωνυμικού μη γραμμικού συστήματος, στην μορφή:

$$\mathcal{P}[x(\bullet)](t) = \sum_{n=1}^N \int_T \dots \int_T h_n(t, \tau_1, \dots, \tau_n) x(\tau_1) \dots x(\tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n.$$

Εκτενής συζήτηση για την χρήση των ανωτέρω αναπαραστάσεων στη μελέτη συστημάτων (μέσω των οριζόμενων συναρτησιακών τους), βλ. συνήθης δυϊκότητα συναρτησιακών και τελεστών ανωτέρω, γίνεται στο άρθρο (Barrett, 1963).

## 1.4 Το πρόβλημα της προσέγγισης μη γραμμικών συστημάτων

### Προσέγγιση συνεχών τελεστών μέσω του Θεωρήματος Stone-Weierstrass

Στη γενική θεωρία συστημάτων, τίθεται το ερώτημα του αν είναι δυνατή η προσεγγιστική αναπαράσταση γενικών μη γραμμικών συστημάτων μέσω της σύνθεσης απλούστερων. Στη μαθηματική του όψη αυτό το ερώτημα είναι έως ένα βαθμό ισοδύναμο με το ερώτημα της προσέγγισης γενικών μη γραμμικών τελεστών από μια κλάση απλούστερων.

Το πρόβλημα αυτό, εάν τοποθετηθεί στο πλαίσιο της απαιτούμενης συνέχειας των τελεστών, μπορεί να αντιμετωπιστεί με την βοήθεια θεωρημάτων προσέγγισης ανάλογων του Θεωρήματος Weierstrass. Στο θεώρημα προσέγγισης Weierstrass αποδεικνύεται ότι:

**Θεώρημα [Weierstrass, 1885]:** Για κάθε συνεχή συνάρτηση  $f(\bullet) \in C([a, b] \rightarrow \mathbb{R})$  και για κάθε  $\varepsilon > 0$ , υπάρχει πολυώνυμο  $p_n(\bullet)$ , βαθμού  $n := n(\varepsilon)$ , έτσι ώστε:  $\|f - p_n\|_\infty < \varepsilon$ . ■

Ο Maurice Fréchet στο άρθρο του (Fréchet, 1910) αντικαθιστά στο θεώρημα προσέγγισης Weierstrass το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων  $f(\cdot)$  (το διάστημα  $[a, b]$ ) από τον χώρο των συνεχών συναρτήσεων  $C((a, b) \rightarrow \mathbb{R})$  και αποδεικνύει το ακόλουθο:

**Θεώρημα [Fréchet, 1910]:** Για κάθε συνεχές συναρτησιακό  $\mathcal{F}[\cdot]$  οριζόμενο πάνω στις συνεχείς συναρτήσεις  $x(\cdot) \in C((a, b) \rightarrow \mathbb{R})$  ισχύει ότι:

$$\mathcal{F}[x(\cdot)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ h_n^{(0)} + \int_a^b h_n^{(1)}(\tau_1) x(\tau_1) d\tau_1 + \int_a^b \int_a^b h_n^{(2)}(\tau_1, \tau_2) x(\tau_1) x(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \dots \right. \\ \left. \dots + \int_a^b \dots \int_a^b h_n^{(r_n)}(\tau_1, \dots, \tau_{r_n}) x(\tau_1) \dots x(\tau_{r_n}) d\tau_1 \dots d\tau_{r_n} \right],$$

όπου οι συναρτήσεις  $h_n^{(j)}(\tau_1, \dots, \tau_j)$ ,  $j = 1, 2, \dots, r_n$ , είναι συνεχείς και προσδιορίζονται από το συναρτησιακό  $\mathcal{F}[\cdot]$ , ανεξαρτήτως της συνάρτησης  $x(\cdot)$ . <sup>(9)</sup> ■

Αυτή ήταν η πρώτη προσπάθεια επέκτασης του θεωρήματος προσέγγισης Weierstrass για συναρτησιακά ορισμένα στο χώρο  $C((a, b) \rightarrow \mathbb{R})$ .

Μια γενίκευση του θεωρήματος προσέγγισης Weierstrass, σε πολύ γενικότερους χώρους, επιτεύχθηκε από τον M.H.Stone στο έργο (The Generalized Weierstrass Approximation Theorem, 1948), αποτελώντας το ευρέως γνωστό και ιδιαίτερα σημαντικό θεώρημα Stone-Weierstrass. Το θεώρημα Stone-Weierstrass γενικεύει το θεώρημα προσέγγισης Weierstrass από συμπαγή σύνολα της πραγματικής ευθείας, σε άλγεβρες συναρτήσεων πάνω σε συμπαγή υποσύνολα μετρικών χώρων οι οποίες πληρούν μια σειρά ιδιοτήτων.

**Θεώρημα [Stone-Weierstrass Approximation Theorem (Stone, 1948)]:** Έστω  $X$  συμπαγής μετρικός χώρος και  $C(X \rightarrow \mathbb{R})$  το σύνολο των συνεχών, πραγματικών συναρτήσεων επί του  $X$ , εφοδιασμένο με την συνήθη supremum νόρμα. Έστω  $\mathcal{A}$  γραμμικός υπόχωρος του  $C(X \rightarrow \mathbb{R})$  ο οποίος επιπροσθέτως αποτελεί άλγεβρα συναρτήσεων, με την συνήθη πράξη γινομένου, περιέχει την σταθερή συνάρτηση  $f(x) = 1$  και διαχωρίζει σημεία στον χώρο  $X$ . Τότε το σύνολο  $\mathcal{A}$  είναι πυκνός υπόχωρος του  $C(X \rightarrow \mathbb{R})$ , δηλαδή:

$$(\forall f \in C(X \rightarrow \mathbb{R})) (\forall \varepsilon > 0) (\exists p_\varepsilon \in \mathcal{A}) : [\|f - p_\varepsilon\| < \varepsilon]. \quad \blacksquare$$

Με αυτόν τον τρόπο η περίπτωση των συναρτησιακών απεικονίσεων καλύπτεται από το θεώρημα και έτσι μπορούμε να προσεγγίσουμε γενικά συνεχή μη γραμμικά συναρτησιακά με την χρήση πολυωνυμικών συναρτησιακών.

Στο Κεφάλαιο 3, εδάφιο 3.1, παρουσιάζουμε τα θεώρηματα προσέγγισης Weierstrass και Stone-Weierstrass. Αναπτύσσουμε μια σειρά διαφορετικών οπτικών στην διαδικασία των αποδείξεών τους με στόχο να αναδείξουμε την φύση και τα χαρακτηριστικά του προβλήματος της προσέγγισης. Στο εδάφιο 3.2, εφαρμόζουμε το θεώρημα Stone-Weierstrass στην άλγεβρα των συναρτησιακών πολυωνύμων Volterra, τα οποία ορίζονται στο δεύτερο Κεφάλαιο, εδάφιο 2.6. Επίσης αναφερόμαστε στο άρθρο του (Ahmed, 1976), στο οποίο διερευνάται το ερώτημα της ύπαρξης

---

<sup>(9)</sup> Το θεώρημα αυτό δίδεται όπως ακριβώς διατυπώνεται από τον Fréchet στην αντίστοιχη εργασία του. Σήμερα γνωρίζουμε ότι η αναφερόμενη σύγκλιση είναι ομοιόμορφη μόνον όταν το πεδίο ορισμού του συναρτησιακού περιορισθεί σε συμπαγές υποσύνολο του χώρου των συνεχών συναρτήσεων.

προσεγγιστικού συναρτησιακού στην περίπτωση συναρτησιακών ορισμένων στους χώρους Banach  $L_p$ , το οποίο αναπαρίσταται στην μορφή των πολυωνυμικών συναρτησιακών που εισήγαγε ο Maurice Fréchet, βλ. Θεώρημα Fréchet ανωτέρω.

Στη συνέχεια προκύπτει το ερώτημα της προσέγγισης τελεστών. Το θεώρημα Stone-Weierstrass δεν μπορεί να εφαρμοστεί στην περίπτωση απεικονίσεων ανάμεσα σε χώρους συναρτήσεων καθώς προϋποθέτει ότι ο χώρος εικόνα είναι η πραγματική ευθεία. Προκύπτει έτσι η ανάγκη επεκτάσεων του Θεωρήματος Stone-Weierstrass σε τελεστές. Σε αυτήν την κατεύθυνση έχουν γίνει εκτεταμένες προσπάθειες. Στο άρθρο της, η (Prenter, 1970) αποδεικνύει ότι οι συνεχείς πολυωνυμικοί τελεστές πάνω σε έναν πραγματικό, διαχωρίσιμο χώρο Hilbert, είναι πυκνό υποσύνολο του χώρου των συνεχών τελεστών πάνω από συμπαγή σύνολα. Αποτελέσματα για το πρόβλημα της προσέγγισης τελεστών σε γενικούς νορμικούς χώρους βρίσκονται στα άρθρα των (Prenter, 1969) και (Istrăţescu, 1977). Παρουσιάζουμε αυτά τα αποτελέσματα στα εδάφια 4.1 και 4.2.

Στον απόηχο του αποτελέσματος της Prenter, τίθεται το ερώτημα του αν τα προσεγγιστικά πολυώνυμα σέβονται την αιτιότητα στην περίπτωση ενός προσεγγιζόμενου αιτιοκρατικού τελεστή. Στο άρθρο (Porter, Clark and DeSantis, 1975) αποδεικνύεται ότι στην βάση του αποτελέσματος της Prenter είναι εφικτή η αναπαράσταση του προσεγγιστικού πολυωνυμικού τελεστή στην μορφή:

$$\mathcal{F}[x(\cdot)](\cdot) = \sum_{n=1}^N \int_{t_0}^T \dots \int_{t_0}^T h_n(\cdot, \tau_1, \dots, \tau_n) x(\tau_1) \dots x(\tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n,$$

αλλά κυρίως το ότι στην περίπτωση ενός αιτιοκρατικού τελεστή, η ανωτέρω αναπαράσταση σέβεται την συνθήκη της αιτιότητας, δηλαδή υπάρχουν ολοκληρωτικοί πυρήνες  $h_n$ , έτσι ώστε:

$$h_n(\cdot, \tau_1, \dots, \tau_n) = 0 \text{ όταν } \max(\tau_i) > t.$$

Στο άρθρο (Gallman and Narendra, 1976) διατυπώνεται ένα θεώρημα ύπαρξης πολυωνυμικής προσέγγισης, για την περίπτωση χρονικά αμετάβλητων και αιτιοκρατικών μη γραμμικών συστημάτων. Το αποτέλεσμα του άρθρου μπορεί να χαρακτηριστεί ειδικό, καθώς οι αιτιοκρατικοί τελεστές μελετώνται μέσω των συναρτησιακών που ορίζουν σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού των συναρτησιακών ορισμάτων τους. Σε συνδυασμό με την υπόθεση της χρονικής αμεταβλητότητας, μέσω εφαρμογής του θεωρήματος Stone-Weierstrass απαντάται θετικά το ερώτημα προσεγγισιμότητας από στοιχεία μιας άλγεβρας τελεστών. Διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε το θεώρημα αυτό στο εδάφιο 4.3. Αναπτύσσεται επίσης η παραγωγή άλγεβρας μη γραμμικών τελεστών από υποσύνολα αυτών. Η ανάπτυξη αυτή οδηγεί στις άλγεβρες των προσεγγιστικών πολυωνυμικών τελεστών Volterra με διαχωρίσιμους και μη διαχωρίσιμους πυρήνες καθώς επίσης και στην άλγεβρα των προσεγγιστικών Zadeh hierarchy τελεστών.

### **Προσέγγιση διαφορίσιμων (αναλυτικών) τελεστών μέσω του Θεωρήματος Volterra-Taylor (σειρές Volterra)**

Μια διαφορετική οπτική στο πρόβλημα της προσέγγισης, η οποία κατά βάση αναπτύχθηκε στον χώρο των εφαρμογών, είναι η αναπαράσταση της εξόδου ενός συστήματος μέσω μιας συγκλίνοιας άπειρης (ή πεπερασμένης με όρο υπολοίπου) σειράς ομογενών πολυωνύμων Volterra της εισόδου. Αυτό είναι εφικτό όταν το σύστημα  $\mathcal{T}[\cdot]$  είναι αναλυτικό (ή επαρκώς διαφορίσιμο, μέχρι και την τάξη του υπολοίπου). Ο χώρος των διεγέρσεων μπορεί να είναι ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων ή άλλος, έτσι ώστε να ισχύουν οι προαναφερθείσες συνθήκες. Πηγή



πληροφοριών για το αντικείμενο των αναλυτικών συστημάτων, καθώς και της γενικότερης χρήσης των σειρών Volterra στην θεωρία συστημάτων είναι το βιβλίο (Barrett, 2012) και τα άρθρα (Barrett, 1977b), (Barrett, 1981).

Η ιδέα των άπειρων σειρών Volterra, προέρχεται από τις αναλυτικές πραγματικές συναρτήσεις. Για αυτό τον λόγο είναι άμεσα συνδεδεμένη με την έννοια του αναλυτικού συναρτησιακού. Συστήματα των οποίων ο τελεστής μπορεί να λάβει αυτήν την αναπαράσταση συχνά καλούνται **συστήματα Volterra**, αν και ο όρος χρησιμοποιείται εξίσου και για τα πολυωνυμικά συστήματα. Στο βιβλίο (Rugh, 1981) βρίσκουμε τον ακόλουθο ορισμό.

**Ορισμός [Σύστημα Volterra]:** Καλούμε σύστημα Volterra, κάθε σύστημα το οποίο επιδέχεται την ακόλουθη αναπαράσταση (υπο την προϋπόθεση ότι η σειρά συγκλίνει):

$$y(\hat{t}) = \mathcal{T}[x(\bullet)](\hat{t}) = h_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{t_0}^{\hat{t}} \dots \int_{t_0}^{\hat{t}} h_n(\hat{t}, \tau_1, \dots, \tau_n) x(\tau_1) \dots x(\tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n. \quad \blacksquare \quad (1)$$

(Rugh, 1981, σελ. 19)

**Παρατήρηση 1:** Βλέπουμε ότι οι δύο θεωρήσεις, πολυωνυμική προσέγγιση και σειρές Volterra, υπό μίαν έννοια, συναντιούνται στο σημείο όπου λάβουμε πεπερασμένο αριθμό όρων της σειράς (truncated series). Τότε βρισκόμαστε ενώπιον ενός μη ομογενούς πολυωνύμου Volterra, όμως οι πυρήνες ενός προσεγγιστικού συναρτησιακού πολυωνύμου  $k$ -βαθμού, οι οποίοι προκύπτουν μέσω της θεώρησης του Θεωρήματος Stone Weierstrass, δεν είναι κατ' ανάγκη ίδιοι με τους πυρήνες των  $k$  πρώτων συναρτησιακών της άπειρης σειράς Volterra.

Ξέρουμε ότι η αναλυτικότητα μιας πραγματικής συνάρτησης σημαίνει ότι γύρο από κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της, μπορεί να προσεγγιστεί κατά σημείο από την σειρά Taylor. Η σχηματική-φορμαλιστική αναλογία αυτού και της Εξ. (1), είναι η εξής.

Μπορούμε να φανταστούμε την Εξ. (1) ως το ανάπτυγμα Taylor του συναρτησιακού  $\mathcal{T}[x(\bullet)](\hat{t})$  γύρο από το σημείο  $x_0(\bullet) = \mathbf{0}$ , με τις συναρτήσεις  $h_n(\hat{t}, \tau_1, \dots, \tau_n)$  να υποκαθιστούν τους συντελεστές Taylor (παράγωγοι) και την αύξουσα ακολουθία διαδοχικών ολοκληρώσεων να αντιπροσωπεύει τον αυξανόμενο βαθμό των όρων. Όντως αν ορισθούν οι απαιτούμενες έννοιες η σειρά Volterra είναι το ανάπτυγμα Volterra-Taylor ενός συνεχούς και λείου συναρτησιακού οριζόμενου στις συνεχείς συναρτήσεις.

Για να μιλήσουμε συγκεκριμένα για την διαδικασία παραγωγής της Εξ. (1), οφείλουμε πρώτα να ορισθεί η έννοια της διαφορισμότητας για συναρτησιακά. Η ανάπτυξη ακολουθεί την γενίκευση των εννοιών της παραγώγου συναρτήσεων πολλών μεταβλητών σε συνεχείς συναρτησιακές απεικονίσεις, ολοκληρωτικού τύπου, οριζόμενες στο σύνολο των συνεχών συναρτήσεων.

Ο Vito Volterra περιγράφει για πρώτη φορά την παραγωγή ολοκληρωτικών συναρτησιακών μέσω της διαδικασία του περάσματος από το διακριτό στο συνεχές (Volterra, 1930/1957/2005) εφαρμοζόμενη πάνω σε εκφράσεις πεπερασμένων αθροισμάτων.

Μέσω αυτού του πρίσματος, ανοίγει ο δρόμος για τον ορισμό της ανάλογης έννοιας της μερικής παραγώγου για συναρτησιακά ολοκληρωτικού τύπου οριζόμενα στις συνεχείς συναρτήσεις (δηλ. εντοπισμένη μεταβολή, γύρο από σημείο  $\xi$ , του πεδίου ορισμού της συνάρτησης όρισμα). Το συνεχές ανάλογο της μερικής παραγώγου καλείται παράγωγος Volterra και συμβολίζεται  $\mathcal{F}'[x(\bullet); \xi]$ . Ο ορισμός της είναι κατασκευαστικός και απαιτεί την θεώρηση μιας αυστηρής

οριακής διαδικασίας. Εκτενής ανάπτυξη στο θέμα υπάρχει στις σημειώσεις (Athanassoulis, Συναρτησιακά και συναρτησιακές παράγωγοι, 2018).

Παράλληλα, το συνεχές ανάλογο της έννοιας της κατά κατεύθυνσης παραγώγου για συναρτησιακά, αποτελεί η έννοια της παραγώγου κατά Gateaux. Σε αυτήν, λαμβάνουμε μια  $\varepsilon$  – μικρή (σε περιοχή του μηδενός) μεταβολή του συναρτησιακού ορίσματος  $x(\cdot)$  στην «κατεύθυνση»  $h(\cdot)$ , δηλαδή  $x(\cdot) + \varepsilon h(\cdot)$ .

Ορίζουμε την Gateaux παράγωγο ως εξής:

$$\delta \mathcal{F}[x; h] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{F}[x + \varepsilon h] - \mathcal{F}[x]}{\varepsilon} \equiv \frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{F}[x + \varepsilon h] \Big|_{\varepsilon=0}. \quad (2)$$

Το ενοποιητικό βήμα σε αυτό το σημείο είναι η απόδειξη του ότι η παράγωγος Gateaux προκύπτει μέσω **συνεχώς κατανεμημένων τοπικών μεταβολών** της συνάρτησης όρισμα στην κατεύθυνση  $h$  και λαμβάνοντας έπειτα το όριο  $\varepsilon \rightarrow 0$ , δηλαδή υπάρχει σχέση «κατευθυντικής-μερικής», Gateaux-Volterra παραγώγου αντιστοίχως, και μπορεί να ορισθεί διαφορικό. Αυτό το αποτέλεσμα διατυπώνεται ως Θεώρημα Volterra, η πλήρης απόδειξη του οποίου βρίσκεται στις σημειώσεις (Athanassoulis, 2019).

Εκεί αποδεικνύεται ότι για κάθε συναρτησιακό  $\mathcal{F} : C([a, b] \rightarrow \mathbb{R}) \supseteq \mathcal{D}(\mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{R}$ , το οποίο είναι συνεχές με την supremum και την  $L_1$  νόρμα καθώς επίσης πληροί και συγκεκριμένες υποθέσεις παραγωγισιμότητας, ισχύει ότι:

$$\mathcal{F}[x + \varepsilon h] - \mathcal{F}[x] = \int_a^b \mathcal{F}'[x; \xi] \varepsilon h(\xi) d\xi + \varepsilon o(1) \quad (3)$$

Εφοδιασμένοι με τις ανωτέρω έννοιες και διασφαλίζοντας ότι οι πρώτες  $N + 1$  παράγωγοι του συναρτησιακού  $\mathcal{F}[x(\cdot)]$  κατά την σταθερή κατεύθυνση  $h(\cdot)$  υπάρχουν και είναι συνεχείς στο ευθύγραμμο τμήμα  $\overline{x, x + h} = \{x + \varepsilon h, \varepsilon \in [0, 1]\} \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{F})$ , θέτουμε:

$$g(\varepsilon) = \mathcal{F}[x + \varepsilon h]. \quad (4)$$

Αναπτύσσουμε κατά Taylor την συνάρτηση  $g(\cdot)$  γύρο από το σημείο  $g(1) = \mathcal{F}[x + h]$  και λαμβάνουμε:

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2!} g''(0) + \dots + \frac{1}{N + 1!} g^{(N+1)}(\theta), \quad 0 < \theta < 1. \quad (5)$$

Χρησιμοποιώντας την Εξ. (4) και τον ορισμό της παραγώγου κατά Gateaux και καταλήγουμε στη σχέση:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x + h] = \mathcal{F}[x] + \delta \mathcal{F}[x; h] + \frac{1}{2!} \delta^2 \mathcal{F}[x; h] + \dots + \\ \dots + \frac{1}{N + 1!} \delta^{N+1} \mathcal{F}[x; \theta h], \quad 0 < \theta < 1. \end{aligned} \quad (6)$$

Το ανωτέρω αποτέλεσμα διατυπώνεται ως **Θεώρημα Gateaux-Taylor**.

Το τελικό συμπέρασμα διατυπώνεται ως ακολούθως. Εάν το συναρτησιακό  $\mathcal{F}[x(\cdot)]$  και οι  $N$  πρώτες παράγωγοι κατά Volterra αυτού, ικανοποιούν τις απαιτήσεις του Θεωρήματος Volterra, τότε αποδεικνύεται μέσω της Εξ. (6) ότι:

$$\mathcal{F}[x+h] = \mathcal{F}[x] + \int_a^b \mathcal{F}'[x; \xi_1] h(\xi_1) d\xi_1 + \int_a^b \int_a^b \mathcal{F}''[x; \xi_1, \xi_2] h(\xi_1) h(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 + \dots (7)$$

Το αποτέλεσμα αυτό καλείται **Θεώρημα Volterra-Taylor**.

Οι αναλυτικές διατυπώσεις και αποδείξεις βρίσκονται στις σημειώσεις (Athanassoulis, 2019).

Βάση των ανωτέρω εύκολα διαπιστώνεται ότι μεταφέροντας το ανάπτυγμα Volterra-Taylor γύρω από το σημείο  $x_0(\bullet) = \mathbf{0}$  λαμβάνουμε ακριβώς την μορφή της σειράς Volterra. Δηλαδή στην Εξ. (7) στη θέση της συνάρτησης  $x$  θα έχουμε  $x_0$  και έπειτα θέτουμε  $x = x_0 + h$ .

Τότε λαμβάνεται η σχέση:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x] = \mathcal{F}[x_0] + \int_a^b \mathcal{F}'[x; \xi_1] \Big|_{x=x_0} (x(\xi_1) - x_0(\xi_1)) d\xi_1 + \\ + \int_a^b \int_a^b \mathcal{F}''[x; \xi_1, \xi_2] \Big|_{x=x_0} (x(\xi_1) - x_0(\xi_1))(x(\xi_2) - x_0(\xi_2)) d\xi_1 d\xi_2 + \dots \end{aligned}$$

Εφόσον έχουμε ότι  $x_0(\bullet) = \mathbf{0}$ , έχουμε ότι:

$$\mathcal{F}[x] = \mathbf{K}_0 + \int_a^b \mathbf{K}_1(\xi_1) x(\xi_1) d\xi_1 + \int_a^b \int_a^b \mathbf{K}_2(\xi_1, \xi_2) x(\xi_1) x(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 + \dots ,$$

όπου  $\mathbf{K}_0 = \mathcal{F}[\mathbf{0}]$ ,  $\mathbf{K}_1(\xi_1) = \mathcal{F}'[x; \xi_1] \Big|_{x=\mathbf{0}}$ ,  $\mathbf{K}_2(\xi_1, \xi_2) = \mathcal{F}''[x; \xi_1, \xi_2] \Big|_{x=\mathbf{0}}$  και ούτω καθεξής.

### Σειρές Wiener

Κλείνοντας αυτό το εδάφιο σημειώνουμε την συμβολή του N. Wiener στην γενική Θεωρία συστημάτων και ειδικότερα στην κατεύθυνση της ανάλυσης σημάτων, (N. Wiener, 1958/2013). Ο N. Wiener αξιοποίησε τις ιδέες του Volterra κατασκευάζοντας της ονομαζόμενες σειρές Wiener (Wiener Series). Παρατηρώντας προσεκτικά την αναπαράσταση της σειράς Volterra βλέπουμε ότι είναι ανεξάρτητη του συναρτησιακού ορίσματος  $x(\bullet)$  (συνάρτηση διέγερσης) και αυτό προσδίδει θετικό πρόσημο σε ένα κομμάτι των εφαρμογών. Δηλαδή οι σειρές Volterra εξαρτώνται μόνο από το εξεταζόμενο σύστημα (τελεστή), μέσω των ολοκληρωτικών πυρήνων  $h_n$ . Παρόλα αυτά οι σειρές Volterra είναι «δύσχρηστες» στην περίπτωση που υπάρχει η ανάγκη λήψης μεγάλου αριθμού πυρήνων για την αναπαραγωγή του συστήματος, καθώς ανακύπτει η ανάγκη προσδιορισμού συναρτήσεων όλο και μεγαλύτερου πλήθους μεταβλητών, αναφερόμενοι στους ολοκληρωτικούς πυρήνες  $h_n$ . Τέλος σε μια σειρά Volterra ο πυρήνας  $h_n$  εξαρτάται από τους  $n-1$  προηγούμενους πυρήνες. Η ιδέα του Wiener, θέλοντας να χρησιμοποιήσει τις σειρές για να προσεγγίσει συστήματα των οποίων η απόκριση είναι ένα στοχαστικό σήμα, ήταν να τις διαμορφώσει κατά τρόπο τέτοιο ώστε ο όρος τάξεως  $N$  της διαμορφωμένης σειράς συναρτησιακών να είναι ασυσχέτιστος με τα ομογενή συναρτησιακά τάξεως έως  $N-1$ . Συνέπεια αυτού είναι ότι η αναπαράσταση είναι εξαρτημένη από την συνάρτηση διέγερσης. Η κατασκευή αυτή υλοποιήθηκε από τον Wiener για είσοδο Brownian motion (white noise). Γράφουμε:

$$s(t) := \mathcal{T}[x(\bullet)] = \sum_{n=1}^N g_n[k_n; x(t)],$$

όπου  $s$  το προσεγγιζόμενο σήμα,  $g_n$  τα συναρτησιακά Wiener,  $k_n$  οι πυρήνες, και  $x(\bullet)$  η συνάρτηση διέγερσης. Συγκεντρώνοντας τα διαφοροποιητικά στοιχεία σε σχέση με τις σειρές Volterra, έχουμε ότι οι σειρές Wiener:

α) Περιέχουν πάντα σταθερό όρο (DC term or direct current).

β) Οι τελεστές  $g_n$  είναι μη ομογενείς καθώς πάντα περιέχουν όρους ερχόμενους από χαμηλότερης τάξης προσέγγισης.

γ) Επιλέγοντας την διέγερση να είναι λευκός θόρυβος (white noise) οι πυρήνες των τελεστών μπορούν να κατασκευαστούν έτσι ώστε να είναι ορθογώνιοι μεταξύ τους επιφέροντας το ότι κάθε ένας εξ αυτών είναι ασυσχέτιστος (uncorrelated) και ανεξάρτητος με τους χαμηλότερης τάξης τελεστές στην σειρά.

Στο χώρο της ανάλυσης σημάτων οι σειρές Wiener χρησιμοποιήθηκαν εντατικά και το έργο του Wiener σε αυτήν την κατεύθυνση συνεχίστηκε από τους Y. W. Lee και M. Schetzen, βλ. Lee-Schetzen cross-correlation method, (Lee and Schetzen, 1965). Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να βρει πληροφορίες στο άρθρο (Barrett, 1982), όπου γίνεται αναφορά στην σχέση των σειρών Wiener και της μεθόδου των Y. W. Lee και M. Schetzen καθώς και διερευνάται και το θέμα της μεταφοράς της αναπαράστασης του Wiener στο πεδίο των συχνοτήτων. Μια συμβολή στην περιοχή της ανάλυσης σήματος και ειδικότερα στο πρόβλημα αυτοσυσχέτισης (autocorrelation), βρίσκεται στο άρθρο (Barrett, 1980).

Κλείνοντας αυτό το εδάφιο αναφέρουμε την τεχνική αναφορά (Barrett, 1977a), όπου εκεί βρίσκεται μια καταγραφή της βιβλιογραφίας, αναφορικά με τις σειρές Volterra και τα συναφή με αυτές θέματα, από το 1940 έως το 1976.

### 1.5 Επίλυση συνήθων διαφορικών εξισώσεων με χρήση σειρών Volterra

Μια ακόμα γωνία θέασης του αντικειμένου της γενικής θεωρίας συστημάτων, είναι η μελέτη του μαθηματικού μοντέλου του συστήματος μέσω του πρίσματος των ανωτέρω.

Το μαθηματικό μοντέλο ενός συγκεκριμένου συστήματος, μπορεί να αναπαρασταθεί στη γενική μορφή

$$\mathbf{S}[y(\bullet)](t) = x(t). \quad (1)$$

Έτσι λοιπόν το σύστημα αναπαρίσταται μέσω της απεικόνισης:

$$\mathbf{S} : Y \ni y(\bullet) \rightarrow \mathbf{S}[y(\bullet)](\bullet) = x(\bullet) \in X.$$

Αν είμαστε σε θέση να επιλύσουμε το πρόβλημα (1), δηλαδή να διατυπώσουμε την σχέση που αντιστοιχίζει σε κάθε συνάρτηση διέγερσης  $x(\bullet) \in X$  μια συνάρτηση απόκρισης  $y(\bullet) \in Y$ , και η οποία να είναι καλώς ορισμένη, τότε αυτή ορίζει τον αντίστροφο του τελεστή  $\mathbf{S}$ :

$$y(t) = \mathbf{S}^{-1}[x(\bullet)](t). \quad (2)$$

Τότε ο αντίστροφος του τελεστή  $\mathbf{S}$  δεν είναι άλλος από τον τελεστή  $\mathbf{T} \equiv \mathbf{S}^{-1}$ , δηλαδή ο τελεστής που αναπαριστά το σύστημα ως σχέση εισόδου-εξόδου.

Υποθέτοντας αρχικά ότι μελετούμε ένα βαθμωτό σύστημα, μια εκ των περιπτώσεων της μορφής του τελεστή  $\mathbf{S}$  είναι να αποτελεί (μη γραμμικό) διαφορικό τελεστή. Αυτό μεταφράζεται στο ότι το σύστημα εκφράζεται μέσω μιας (μη γραμμικής) μη ομογενούς, συνήθους διαφορικής εξίσωσης. Η αναπαράσταση σε σειρά Volterra μπορεί να αξιοποιηθεί στην επίλυση

εξαναγκασμένων, μη γραμμικών συνήθων διαφορικών εξισώσεων (Forced Odes) μέσω των οποίων περιγράφονται μη γραμμικά συστήματα.

Υπο την υπόθεση του ότι το σύστημα  $\mathcal{T}$  μπορεί να λάβει προσεγγιστική αναπαράσταση στη μορφή σειράς Volterra πεπερασμένου πλήθους όρων, είναι δυνατή η προσεγγιστική επίλυση της μη γραμμικής διαφορικής εξίσωσης που διέπει το σύστημα αναλυτικά, μέσω της χρήσης αυτής της σειράς. Στο άρθρο (Flake, Volterra series representation of nonlinear systems, 1963), παρουσιάζεται μια μέθοδος επίλυσης της διαφορικής εξίσωσης που διέπει το σύστημα, μέσω προσδιορισμού των ολοκληρωτικών πυρήνων της σειράς Volterra (Volterra kernels). Η μέθοδος καλύπτει συστήματα τα οποία υπόκεινται σε διεγέρσεις  $x \in C(I \rightarrow \mathbb{R})$  και των οποίων ο διαφορικός τελεστής  $\mathcal{S}[\cdot]$  είναι της μορφής:

$$\mathcal{S}[y(\cdot)](t) := \mathcal{L}[y(\cdot)](t) + \mathcal{P}[y(\cdot), y'(\cdot), \dots, y^{(N-1)}(\cdot)](t),$$

όπου  $\mathcal{L}[\cdot]$  γραμμικός τελεστής και  $\mathcal{P}[\cdot]$  πολωνυμική συνάρτηση  $N$  μεταβλητών. Η μέθοδος αναπτύσσεται και επεξηγείται μέσω παραδειγμάτων καθώς επίσης διεξάγονται και αριθμητικοί υπολογισμοί στο Κεφάλαιο 5.

Τέλος, όταν έχουμε εξίσωση με σταθερούς συντελεστές, λαμβάνουμε αναλυτική έκφραση του μη γραμμικού διαφορικού τελεστή.

## 1.6 Μέθοδοι ταυτοποίησης συστημάτων

Η ταυτοποίηση των συστημάτων (System identification), αποτελεί ίσως το δυσκολότερο πρόβλημα στην θεωρία συστημάτων. Ταυτοποίηση του συστήματος, με την γενικότερη έννοια, σημαίνει εύρεση του μοντέλου που περιγράφει το εξεταζόμενο σύστημα μέσω της μέτρησης και της ανάλυσης των δεδομένων που μπορούμε να συλλέξουμε από αυτό. Ειδικότερα προσπαθούμε να βρούμε εκφράσεις που συνδέουν την διέγερση και την απόκριση του συστήματος, είτε έμμεσες (dynamics, διαφορικές εξισώσεις), είτε άμεσες (συναρτησιακές αναπαραστάσεις), έτσι ώστε να το προσδιορίσουμε.

Κάθε πρόβλημα ταυτοποίησης είναι ένα αντίστροφο πρόβλημα το οποίο δεν αποτελεί κατά Hadamard καλώς τεθειμένο πρόβλημα. Υπάρχουν περιπτώσεις όπου δεν μπορούμε να αποδείξουμε αυστηρά ύπαρξη λύσης και έπειτα, μη έχοντας την δυνατότητα συλλογής άπειρων δεδομένων ( $t \rightarrow \infty$ ), δεν μπορούμε να αποδείξουμε μοναδικότητα της λύσης. Τέλος, μη έχοντας συνεχή εξάρτηση της λύσης του αντίστροφου προβλήματος από τα δεδομένα, σχεδόν πάντα λαμβάνουμε μη ευσταθείς λύσεις. Παρόλα αυτά, η συνήθης κατάσταση, στα πραγματικά προβλήματα είναι η ανάγκη ταυτοποίησης του συστήματος καθώς δεν υπάρχει τρόπος να γνωρίζουμε εκ των προτέρων το μαθηματικό μοντέλο αυτού. Συνεπώς, αν και σε επίπεδο μαθηματικής αυστηρότητας τα προβλήματα αυτά είναι κακώς τεθειμένα, η επίλυση τους είναι σημαντική και για αυτό δεν μπορούμε να αποστραφούμε από αυτά.

Σε αυτήν την εργασία, δεν θα ασχοληθούμε με ερωτήματα ταυτοποίησης, όμως δεν μπορούμε να παραλείψουμε την αναφορά σε αυτό το σημαντικό και ενδιαφέρον θέμα. Η ανάπτυξη μεθόδων ταυτοποίησης συστημάτων αποτελεί ένα πρόβλημα το οποίο μελετήθηκε παράλληλα με την εισαγωγή και ανάπτυξη της γενικής θεωρίας συστημάτων, συνεχίζοντας έως της μέρες μας να αποτελεί πεδίο επιστημονικής έρευνας, με πλήθος ανοιχτών ερωτημάτων. Ένα άρθρο στο οποίο γίνεται μια σύνοψη της δραστηριότητας στην περιοχή της ταυτοποίησης συστημάτων

είναι (Cheng *et al.*, 2016). Επίσης, πηγή άντλησης πληροφοριών επί του θέματος είναι το άρθρο (Ljung, 2008).

Εφοδιασμένοι με τις αναπαραστάσεις μη γραμμικών συστημάτων, τις οποίες συζητήσαμε ανωτέρω (Volterra Series, Wiener Series), υποθέτοντας ότι το εξεταζόμενο σύστημα επιδέχεται αναπαράσταση αυτής της μορφής, η ταυτοποίηση του συστήματος νοείται στη βάση της ανεύρεσης των ολοκληρωτικών πυρήνων της αναπαράστασης. Δηλαδή, χρειαζόμαστε μια μέθοδο η οποία να αξιοποιεί τα δεδομένα της εξόδου και της εισόδου, ούτως ώστε να προσδιορίζονται οι συναρτήσεις των ολοκληρωτικών πυρήνων της αναπαράστασης. Μέθοδοι ταυτοποίησης αναπτύσσονται τόσο στο πεδίο του χρόνου αλλά και στο πεδίο των συχνοτήτων.

Αν έχουμε μετρήσει  $K$  τιμές της εισόδου και εξόδου ενός αιτιοκρατικού και χρονικά αμετάβλητου συστήματος με μνήμη  $M$ , χρησιμοποιώντας την διακριτή αναπαράσταση Volterra  $N$  όρων, έχουμε ότι:

$$y(t_k) = \sum_{n=1}^N \sum_{\tau_1=0}^M \sum_{\tau_2=0}^{\tau_1} \dots \sum_{\tau_n=0}^{\tau_{n-1}} h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) x(t_k - \tau_1) \dots x(t_k - \tau_n), \quad k = 1(1)K,$$

και μπορούμε να γράψουμε σε διανυσματική μορφή:

$$Y := [y(0) \ y(1) \ \dots \ y(K)]$$

$$H := [h_1(0) \cdot h_1(1) \cdot \dots \cdot h_1(M) \ \dots \ h_N(0, \dots, 0) \cdot h_N(1, \dots, 0) \cdot \dots \cdot h_N(M, \dots, M)]$$

$$X := \begin{bmatrix} \overset{k \rightarrow}{x(0)} & x(1) & \dots \\ 0 & x(0) & \dots \\ \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \\ x^2(0) & x^2(1) & \dots \\ 0 & x(0)x(1) & \dots \\ 0 & x^2(0) & \dots \\ \vdots & & \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ n \downarrow \end{matrix}$$

Συνεπώς, εάν ο πίνακας  $X$  είναι τετραγωνικός και αντιστρέψιμος, τότε επιλύοντας ένα γραμμικό σύστημα  $K$  εξισώσεων ( $H = YX^{-1}$ ), λαμβάνουμε τις τιμές των ολοκληρωτικών πυρήνων. Εύκολα βλέπουμε ότι για την εύρεση του  $N$ -οστού πυρήνα απαιτείται η εύρεση  $(M + 1)^N$  ποσοτήτων. Κατά αυτόν τον τρόπο, αν και μπορούμε να λάβουμε στη μορφή πίνακα το σύστημα, το μέγεθος του πίνακα  $X$ , σε σύγκριση με τον όγκο δεδομένων, είναι εκθετικά μεγαλύτερο. Θέλοντας λοιπόν να εξάγουμε την αναπαράσταση από μεγάλο πλήθος δεδομένων, με στόχο την βέλτιστη δυνατή ταυτοποίηση του συστήματος, η ανωτέρω μέθοδος είναι ακατάλληλη. Για αυτό τον λόγο συνήθως ακολουθείτε μια διαφορετική μέθοδος ταυτοποίησης, στην οποία χρησιμοποιούνται αναπαραστάσεις των συναρτήσεων πυρήνων με χρήση συναρτήσεων βάσης. Δηλαδή, αναπαριστούμε τις συναρτήσεις των πυρήνων μέσω πολυωνυμικών ή άλλων εκφράσεων, π.χ Laguerre, Kautz, Meixner συναρτήσεις ή wavelets, ούτως ώστε να απαιτείται ο προσδιορισμός μικρού πλήθους συντελεστών για την εύρεση του κάθε πυρήνα. Ο

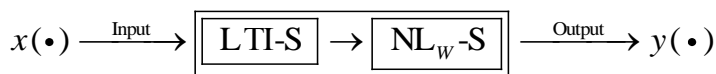
ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να βρει πληροφορίες στα άρθρα (Marmarelis, 1993), (da Rosa, Campello and Amaral, 2007) και (Moodi and Bustan, 2010), (Wiener, 1958)

Στην ανάλυση σήματος, όταν χρησιμοποιούμε την αναπαράσταση του Wiener, και θέλοντας να προσδιορίσουμε τους πυρήνες από δεδομένα, αντιμετωπίζουμε πρόβλημα στην μέτρηση και συλλογή αυτών των δεδομένων. Δεν μπορούμε, σε πειραματικό επίπεδο, να αναπαράγουμε την συνάρτηση διέγερση, η οποία στην θεώρηση που παράγει αυτήν την αναπαράσταση είναι λευκός θόρυβος. Για αυτό τον λόγο αναπτύχθηκαν άλλες μεθοδολογίες στην επίλυση αυτού του προβλήματος ξεκινώντας με την cross correlation μέθοδο (Lee and Schetzen, 1965). Αργότερα αναπτύχθηκαν μεθοδολογίες οι οποίες στηρίζονται στην διεξαγωγή στατιστικής ανάλυσης των δεδομένων για την εύρεση των πυρήνων, βλ. (Glentis, Koukoulas and Kalouptsidis, 1999).

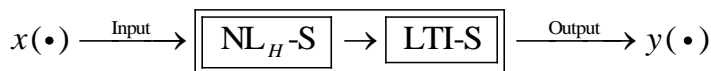
Κλείνοντας αυτό το εδάφιο αναφερόμαστε σε μια διαφορετική οπτική στο πρόβλημα της ταυτοποίησης των συστημάτων. Σε αυτήν λοιπόν την θεώρηση αναφερόμαστε με τον όρο σύνθεση συστημάτων (System synthesis). Εδώ, η ιδέα είναι η κατασκευή του συστήματος μέσω απλούστερων, εκμεταλλευόμενοι τα διαθέσιμα δεδομένα. Απλούστερα, χρησιμοποιούμε γραμμικά και απλά μη γραμμικά συστήματα (π.χ ομογενή πολυωνμικά συστήματα), βλ. (Porter, 1980), τα διατάσσουμε και ορίζουμε ένα σύνολο παραμέτρων. Έχοντας αυτήν την κατασκευή και τα δεδομένα εισόδου-εξόδου, διεξάγουμε την ταυτοποίηση στην βάση του προσδιορισμού των παραμέτρων έτσι ώστε τα αποτελέσματα να αναπαράγονται από την εν λόγω σύνθεση απλών συστημάτων. Τότε, όταν η ανωτέρω διαδικασία είναι επιτυχής, λέμε ότι το εξεταζόμενο σύστημα αναλύεται ως σύνθεση των επιμέρους που χρησιμοποιήθηκαν. Η μέθοδος αυτή δεν αποτελεί τετριμμένη διαδικασία. Για να επιτύχουμε πρέπει να εκμεταλλευτούμε κάθε διαθέσιμη πληροφορία για το σύστημα και την φυσική από την οποία διέπεται. Η επιλογή των επιμέρους συστημάτων, της διάταξης, και των όποιων παραμέτρων δεν είναι τετριμμένη διαδικασία. Οι επιλογές αυτές καθορίζουν την συνέπεια και την ευστάθεια του μοντέλου που λαμβάνουμε.

Υπάρχουν τέσσερα διαδεδομένα μοντέλα δομής (structure model) για την ταυτοποίηση των συστημάτων. Δηλαδή πρότυπα διατάξεων συστημάτων στην βάση των οποίων διεξάγεται η ταυτοποίηση του εξεταζόμενου συστήματος. Το πρώτο είναι το μοντέλο του Wiener, το δεύτερο το μοντέλο Hammerstein και τέλος τα μοντέλα Wiener-Hammerstein και Hammerstein-Wiener. Συμβολικά, αυτά τα μοντέλα περιγράφονται ως εξής:

A) Wiener:



B) Hammerstein:



Δ) Wiener-Hammerstein:



Δ) Hammerstein-Wiener:



Το μοντέλο του Wiener αποτελείται από ένα δυναμικό γραμμικό σύστημα και ένα στατικό μη γραμμικό. Στο μοντέλο του Hammerstein το στατικό μη γραμμικό σύστημα προηγείται του γραμμικού. Σημαντική διαφορά ανάμεσα στα μοντέλα A και B είναι η εξής. Στο πρώτο, το μη γραμμικό σύστημα  $NL_W$ , είναι πολυώνυμο, ενώ στο δεύτερο, το μη γραμμικό σύστημα αναπαρίσταται μέσω του τελεστή Hammerstein:

$$NL_H[x(\bullet)](t) = \int_D K(t, \tau, x(\tau)) f(\tau, x(\tau)) d\tau,$$

όπου  $f(\bullet)$  είναι πολυωνυμική έκφραση ως προς  $x(\tau)$ . Τα μοντέλα  $\Gamma$  και  $\Delta$ , αποτελούν συνδυασμούς των δύο αρχικών μοντέλων και έχουν χρησιμοποιηθεί εκτενώς σε προβλήματα ταυτοποίησης στην περιοχή της ανάλυσης σημάτων, βλ. (Wills *et al.*, 2013)(Zhang, Schoukens and Schoukens, 2017).





## Βιβλιογραφία Κεφαλαίου Ι

- Ahmed, N. U. (1976) ‘An approximation theorem for continuous functions on  $L_p(1 \leq p < \infty)$  spaces including representation’, *Information and Control*. Academic Press, 30(2), pp. 143–150. doi: 10.1016/S0019-9958(76)90317-X.
- Ashby, W. R. (1956) ‘Cybernetics and Requisite Variety’, *An Introduction to Cybernetics*.
- Athanassoulis, G. A. (no date) ‘Functionals and functional derivatives’, in *Lecture Notes*.
- Barrett, J. F. (1963) ‘The use of functionals in the analysis of non-linear physical systems†’, *Journal of Electronics and Control*. doi: 10.1080/00207216308937611.
- Barrett, J. F. (1977a) ‘Bibliography on Volterra series, Hermite functional expansions, and related subjects’.
- Barrett, J. F. (1977b) ‘On systems defined by implicit analytic nonlinear functional equations’, *EUT Report, Eindhoven University of Technology, Faculty of Electrical Engineering*.
- Barrett, J. F. (1980) ‘Formula for output autocorrelation and spectrum of a Volterra system with stationary Gaussian input’, *IEE Proceedings D Control Theory and Applications*, 127(6), p. 286. doi: 10.1049/ip-d.1980.0049.
- Barrett, J. F. (1981) ‘Banach-space theory of analytic systems’, *IEE Proceedings D Control Theory and Applications*, 128(5), p. 188. doi: 10.1049/ip-d.1981.0041.
- Barrett, J. F. (1982) ‘Functional Series Representation of Nonlinear Systems – Some Theoretical Comments’, *IFAC Proceedings Volumes*. Elsevier, 15(4), pp. 313–318. doi: 10.1016/S1474-6670(17)63007-6.
- Barrett, J. F. (2012) ‘Nonlinear system analysis by Volterra and Hermite functional expansions’. University of Southampton.
- Bertalanffy, L. Von (1968) ‘General System Theory: Foundations’, *Development Applications New York George Braziller*.
- Brilliant, M. B. (1958) ‘Theory of the analysis of nonlinear systems’. Massachusetts Institute of Technology, Research Laboratory of Electronics.
- Cheng, C. M. *et al.* (2016) ‘Volterra-series-based nonlinear system modeling and its engineering applications: A state-of-the-art review’, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 87. doi: 10.1016/j.ymssp.2016.10.029.
- DiStefano III, J., Stubberud, A. R. and Williams, I. J. (1990) *Feedback and Control Systems*. 2nd Editio.
- Elgerd, O. I. (1967) *Control System Theory*. McGraw-Hill
- Flake, R. H. (1963) ‘Volterra series representation of nonlinear systems’, *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers, Part II: Applications and Industry*, 81(6), pp. 330–335. doi: 10.1109/TAI.1963.6371765.
- Fréchet, M. (1910) ‘Sur les fonctionnelles continues’, *Annales scientifiques de l’École normale supérieure*, 27, pp. 193–216. doi: 10.24033/asens.619.
- Gallman, P. G. and Narendra, K. S. (1976) ‘Representations of nonlinear systems via the stone-weierstrass theorem’, *Automatica*. Pergamon, 12(6), pp. 619–622. doi: 10.1016/0005-1098(76)90043-1.
- George, D. A. (1959) ‘Continuous nonlinear systems’.

- Glentis, G.-O. A., Koukoulas, P. and Kalouptsidis, N. (1999) 'Efficient algorithms for Volterra system identification', *IEEE Transactions on Signal Processing*, 47(11), pp. 3042–3057. doi: 10.1109/78.796438.
- Gray, J. D. (1984) 'The shaping of the riesz representation theorem: A chapter in the history of analysis', *Archive for History of Exact Sciences*. doi: 10.1007/BF00348293.
- Holtzman, J. M. (1970) *Nonlinear system theory; a functional analysis approach*. Prentice-Hall.
- Istrătescu, V. I. (1977) 'A Weierstrass theorem for real Banach spaces', *Journal of Approximation Theory*. Academic Press, 19(2), pp. 118–122. doi: 10.1016/0021-9045(77)90033-8.
- Lee, Y. W. and Schetzen, M. (1965) 'Measurement of the Wiener Kernels of a Non-linear System by Cross-correlation†', *International Journal of Control*, 2(3), pp. 237–254. doi: 10.1080/00207176508905543.
- Ljung, L. (2008) 'Perspectives on System Identification', *IFAC Proceedings Volumes*. Elsevier, 41(2), pp. 7172–7184. doi: 10.3182/20080706-5-KR-1001.01215.
- Marmarelis, V. Z. (1993) 'Identification of nonlinear biological systems using laguerre expansions of kernels', *Annals of Biomedical Engineering*. Kluwer Academic Publishers, 21(6), pp. 573–589. doi: 10.1007/BF02368639.
- Moodi, H. and Bustan, D. (2010) 'On Identification of Nonlinear Systems Using Volterra Kernels Expansion on Laguerre and Wavelet Function', *2010 Chinese Control and Decision Conference, CCDC 2010*. doi: 10.1109/CCDC.2010.5498146.
- Porter, W. A. (1980) 'Synthesis of Polynomic Systems', *Siam Journal on Mathematical Analysis - SIAM J MATH ANAL*, 11. doi: 10.1137/0511029.
- Porter, W. A., Clark, T. M. and DeSantis, R. M. (1975) 'Causality structure and the Weierstrass theorem', *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. Academic Press, 52(2), pp. 351–363. doi: 10.1016/0022-247X(75)90102-X.
- Poythress. Boyd, S. (1985) 'Volterra Series, Engineering Fundamentals'.
- Prenter, P. . (1970) 'A Weierstrass theorem for real, separable Hilbert spaces', *Journal of Approximation Theory*, 3(4), pp. 341–351. doi: 10.1016/0021-9045(70)90039-0.
- Prenter, P. M. (1969) 'A weierstrass theorem for normed linear spaces', *Bulletin of the American Mathematical Society*, 75(4), pp. 860–862. doi: 10.1090/S0002-9904-1969-12329-3.
- da Rosa, A., Campello, R. J. G. B. and Amaral, W. C. (2007) 'Choice of free parameters in expansions of discrete-time Volterra models using Kautz functions', *Automatica*. Pergamon, 43(6), pp. 1084–1091. doi: 10.1016/J.AUTOMATICA.2006.12.007.
- Rugh, W. J. (1981) *Nonlinear system theory: the Volterra/Wiener approach*. Johns Hopkins University Press.
- Schetzen, M. (2006) *The Volterra and Wiener theories of nonlinear systems*. Krieger Pub.
- Stone, M. H. (1948) 'The Generalized Weierstrass Approximation Theorem', *Mathematics Magazine*. Taylor & Francis, Ltd.Mathematical Association of America, 21(4), p. 167. doi: 10.2307/3029750.
- Volterra, V. (2005) *Theory of functionals and of integral and integro-differential equations*. Dover Publications.

Wiener, N. (1958) *Nonlinear problems in random theory*. Martino Fine Books.

Wills, A. *et al.* (2013) ‘Identification of Hammerstein–Wiener models’, *Automatica*. Pergamon, 49(1), pp. 70–81. doi: 10.1016/J.AUTOMATICA.2012.09.018.

Zhang, E., Schoukens, M. and Schoukens, J. (2017) ‘Structure Detection of Wiener–Hammerstein Systems With Process Noise’, *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 66(3), pp. 569–576. doi: 10.1109/TIM.2016.2647418.

Αθανασούλης, Γ. Α. (2006) ‘Παράρτημα 1: Έννοιες και τεχνικές από την Θεωρία Συστημάτων. Γραμμικά Συστήματα’, in *Δυναμική του Πλοίου (Διδακτικές Σημειώσεις)*.

Κρικέλης, Ν. Ι. (1981) *Εισαγωγή στον αυτόματο έλεγχο*. Αθήνα: Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.



## 2 Πολυωνυμικοί τελεστές

Ο σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι να ορισθεί η έννοια του πολυωνύμου σε γενικούς γραμμικούς χώρους με νόρμα. Προς τούτο απαιτείται μια έννοια «γυνομένου», η οποία ορίζεται με την βοήθεια των πολυγραμμικών μορφών. Ξεκινάμε λοιπόν εισάγοντας τις πολυγραμμικές μορφές για να ορίσουμε μέσω αυτών το ομογενές και το μη ομογενές πολυώνυμο τάξης  $k$ . Στη συνέχεια ορίζουμε τον τελεστή διαφοράς και εφαρμόζοντας τον πάνω στα πολυώνυμα διατυπώνουμε μια σειρά αποτελεσμάτων τα οποία μας οδηγούν στην polarization formula. Η polarization formula αποτελεί μια ταυτότητα ανάμεσα στο πολυώνυμο και την συμμετρική πολυγραμμική μορφή που το παράγει. Μέσω της polarization formula μπορούμε να ανακτήσουμε την πολυγραμμική μορφή από το πολυώνυμο το οποίο παράγει σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού. Ορίζουμε το γινόμενο των πολυωνύμων στο χώρο εικόνα. Βασιζόμενοι στα ανωτέρω, διατυπώνουμε ένα κριτήριο για τις πολυωνυμικές απεικονίσεις. Κλείνοντας, εφοδιάζουμε τους χώρους με νόρμα, διερευνούμε την συνέχεια των πολυγραμμικών μορφών και μέσω αυτών την συνέχεια των πολυωνύμων. Για τις συνεχείς πολυγραμμικές μορφές αποδεικνύουμε ότι μπορούμε να έχουμε αναπαράσταση αυτών στη μορφή απειροπίνακα. Τέλος ορίζουμε τους πολυωνυμικούς τελεστές Volterra με τους οποίους θα ασχοληθούμε στα επόμενα κεφάλαια.

### 2.1 Πολυγραμμικές μορφές και πολυώνυμα σε γραμμικούς χώρους

Θα ξεκινήσουμε παραθέτοντας τον ορισμό της πολυγραμμικής μορφής σε γραμμικούς χώρους, καθώς οι πολυγραμμικές μορφές αποτελούν την έννοια μέσω της οποίας ορίζεται το πολυώνυμο σε γενικούς (συναρτησιακούς) χώρους. Πηγή για όσα αναπτύσσουμε στην συνέχεια αποτελούν τα βιβλία (Cartan, 1971) και (Ma, 1995).

#### Ορισμός της πολυγραμμικής μορφής και του ομογενούς πολυωνύμου

**Ορισμός 1 [Πολυγραμμική μορφή]:** Έστω  $X, X_1, \dots, X_n$  γραμμικοί χώροι πάνω στο πεδίο  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ . Η απεικόνιση  $f : X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \rightarrow X$  καλείται  $n$ -γραμμική ( $n$ -linear form) ή πολυγραμμική (multilinear form) αν για κάθε  $k \in \{1, \dots, n\}$ , η μερική απεικόνιση  $f_k : X_k \rightarrow F$  είναι γραμμική.

Δηλαδή, για κάθε σύνολο στοιχείων  $\{c_i\}$ ,  $c_i \in X_i, i \neq k$ , και οποιαδήποτε  $x_k, y_k \in X_k$  και  $\alpha \in \mathbb{K}$ :

$$\text{a) } f_k(c_1, c_2, \dots, x_k + y_k, \dots, c_n) = f_k(c_1, c_2, \dots, x_k, \dots, c_n) + f_k(c_1, c_2, \dots, y_k, \dots, c_n),$$

$$\text{b) } f_k(c_1, c_2, \dots, \alpha x_k, \dots, c_n) = \alpha f_k(c_1, c_2, \dots, x_k, \dots, c_n).$$

Επιπλέον ορίζουμε 0-γραμμική απεικόνιση κάθε απεικόνιση  $f: X \rightarrow F$ , τέτοια ώστε:

$$(\forall x \in X) f x = \text{σταθ}. \blacksquare$$

Στην συνέχεια υιοθετούμε τον συμβολισμό  $X^n$  για το καρτεσιανό γινόμενο  $\underbrace{X \times \dots \times X}_{n \text{ - times}}$ .

**Ορισμός 2 [Ομογενές πολυώνυμο]:** Έστω  $X, Y$  γραμμικοί χώροι. Η απεικόνιση (τελεστής)  $P: X \rightarrow Y$ , καλείται  **$k$ -ομογενές πολυώνυμο** ( $k$ -homogeneous polynomial) ή **ομογενές πολυώνυμο βαθμού  $k$** , εάν υπάρχει  $k$ -γραμμική απεικόνιση  $p: X^k \rightarrow Y$ , τέτοια ώστε:

$$P(x) = p(\underbrace{x, x, \dots, x}_{k \text{ - times}})$$

και δεν υπάρχει  $(k - \ell)$ -γραμμική απεικόνιση  $q: X^{k-\ell} \rightarrow Y$ , ( $\ell = 1(1)(k-1)$ ) ώστε:

$$P(x) = q(\underbrace{x, x, \dots, x}_{(k-\ell) \text{ - times}}). \blacksquare$$

Δηλαδή, το πολυώνυμο  $P$  παράγεται από μία πολυγραμμική απεικόνιση και ο βαθμός του ορίζεται ως η ελάχιστη «τάξη» της πολυγραμμικής απεικόνισης, η οποία το παράγει.  $\blacksquare$

Αν  $P$  είναι  $k$ -ομογενές πολυώνυμο, λόγω της ανά ορίσμα γραμμικότητας της πολυγραμμικής μορφής που το παράγει, έχουμε:

$$P(\lambda x) = \lambda(p(x, \lambda x, \dots, \lambda x)) = \dots = \lambda^k p(x, \dots, x),$$

συνεπώς:

$$P(\lambda x) = \lambda^k P(x). \tag{1}$$

Δηλαδή, το  $k$ -ομογενές πολυώνυμο είναι ομογενής συνάρτηση βαθμού  $k$ .

Βάση του ορισμού που δώσαμε, το  $k$ -ομογενές πολυώνυμο  $P: X \rightarrow Y$ , παράγεται μέσω της σύνθεσης δύο απεικονίσεων. Δηλαδή:

$$X \xrightarrow{d} X^k \xrightarrow{p} Y$$

όπου  $d_{\text{diag}}$  η διαγώνια απεικόνιση, έτσι ώστε:

$$d_{\text{diag}}(x) = (\underbrace{x, \dots, x}_{k \text{ - times}}),$$

και η σύνθεση  $p \circ d_{\text{diag}}$ , της  $k$ -γραμμικής μορφής  $p$  με την διαγώνια απεικόνιση  $d_{\text{diag}}$ , παράγει το πολυώνυμο  $P$ , βαθμού  $k$ :

$$P(x) = p(x, \dots, x), \forall x \in X.$$

**Ορισμός 3 [Σταθερό Πολυώνυμο]:** Ορίζουμε το σταθερό πολυώνυμο ως το ομογενές πολυώνυμο  $P: X \rightarrow Y$ , μηδενικού βαθμού. Από τον ορισμό της 0-γραμμικής απεικόνισης, ισχύει:

$$P(x) = c, \forall x \in X, c = \text{σταθ}. \blacksquare$$

Το σταθερό πολυώνυμο θα συμβολίζεται πάντα ως  $P_0$  παραλείποντας το όρισμα.

**Παρατήρηση 1:** Βάση του Ορισμού 2, το ομογενές πολυώνυμο  $P$  το οποίο για  $c_0 \in X$ , εκφράζεται μέσω της  $k$ -γραμμικής μορφής  $p$ , ως:

$$P(x) = p(\underbrace{x, \dots, x}_{k-1}; c_0), \quad \forall x \in X$$

είναι πολυώνυμο βαθμού  $k-1$  και όχι  $k$  καθώς υπάρχει  $(k-1)$ -γραμμική μορφή  $q$ , τέτοια ώστε:

$$q(\underbrace{x, \dots, x}_{k-1}) = p(\underbrace{x, \dots, x}_{k-1}; c_0), \quad \forall x \in X.$$

Δίνουμε ένα παράδειγμα της παραπάνω παρατήρησης.

**Παράδειγμα 1:** Έστω  $I := [0, T]$  και  $X := C(I, \mathbb{R})$ ,  $Y := C(I, \mathbb{R})$ . Θεωρούμε την τριγραμμική απεικόνιση  $p : X^3 \rightarrow Y$ ,

$$p(x_1(\cdot), x_2(\cdot), x_3(\cdot))(t) = \int_0^t \int_0^t \int_0^t K(t, \tau_1, \tau_2, \tau_3) x_1(\tau_1) x_2(\tau_2) x_3(\tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3,$$

όπου η μεταβλητή  $t \in I$  και η συνάρτηση  $K(t, \tau_1, \tau_2, \tau_3) \in C(I^4, \mathbb{R})$ . Από την ανωτέρω τριγραμμική απεικόνιση παράγεται το ακόλουθο ομογενές τελεστικό πολυώνυμο βαθμού  $k=3$ ,  $P : X \rightarrow Y$ :

$$P[x(\cdot)](t) = \int_0^t \int_0^t \int_0^t K(t, \tau_1, \tau_2, \tau_3) x(\tau_1) x(\tau_2) x(\tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3.$$

Σταθεροποιώντας την συνάρτηση  $x_3(\cdot)$  στην τριγραμμική απεικόνιση  $p$  (δηλαδή, θέτοντας  $x_3(\cdot) = l_0(\cdot) \in X$ ), παράγουμε το ομογενές πολυώνυμο  $Q : X \rightarrow Y$ :

$$\begin{aligned} Q[x(\cdot)](t) &= p(x(\cdot), x(\cdot), l_0(\cdot))(t) \\ &= \int_0^t \int_0^t \left( \int_0^t K(t, \tau_1, \tau_2, \tau_3) l_0(\tau_3) d\tau_3 \right) x(\tau_1) x(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2. \end{aligned}$$

Το πολυώνυμο  $Q$  είναι όμως δευτέρου βαθμού, εφ' όσον μπορεί να παραχθεί και από την διγραμμική απεικόνιση  $q : X^2 \rightarrow Y$ ,

$$q(x_1(\cdot), x_2(\cdot))(t) = \int_0^t \int_0^t K_1(t, \tau_1, \tau_2) x_1(\tau_1) x_2(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2$$

όπου  $K_1(t, \tau_1, \tau_2) = \int_0^t K(t, \tau_1, \tau_2, \tau_3) l_0(\tau_3) d\tau_3$ .

Σύμφωνα με τον Ορισμό 2, κάθε πολυγραμμική μορφή  $p : X^k \rightarrow Y$  παράγει ένα πολυώνυμο  $P : X \rightarrow Y$ . Όμως, ένα συγκεκριμένο πολυώνυμο μπορεί να παραχθεί από περισσότερες από μία πολυγραμμικές μορφές.



**Παράδειγμα 2:** Έστω  $I := [0, T]$  και  $X := C(I, \mathbb{R})$ ,  $Y := C(I, \mathbb{R})$ . Θεωρούμε τις τρεις παρακάτω διγραμμικές μορφές,  $q_1, q_2, q_3 : X^2 \rightarrow Y$ :

$$\alpha) q_1(x_1(\cdot), x_2(\cdot))(t) = \int_0^t \int_0^t K_1(t, \tau_1, \tau_2) x_1(\tau_1) x_2(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2$$

$$\beta) q_2(x_1(\cdot), x_2(\cdot))(t) = \int_0^t \int_0^t K_2(t, \tau_1, \tau_2) x_1(\tau_1) x_2(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2$$

$$\gamma) q_3(x_1(\cdot), x_2(\cdot))(t) = \int_0^t \int_0^t \frac{1}{2} (K_1(t, \tau_1, \tau_2) + K_2(t, \tau_1, \tau_2)) x_1(\tau_1) x_2(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2$$

όπου η μεταβλητή  $t \in I$  και οι συναρτήσεις πυρήνα  $K_1(\cdot, \cdot, \cdot), K_2(\cdot, \cdot, \cdot) \in C(I^3, \mathbb{R})$ .

Αυτές οι τρεις διγραμμικές μορφές παράγουν τρία πολυώνυμα των οποίων η διαφοροποίηση οφείλεται στην μορφή των συναρτήσεων πυρήνα  $K_1, K_2$ . Εισάγοντας την συνθήκη:

$$K_2(t, \tau_1, \tau_2) = K_1(t, \tau_2, \tau_1) \quad (\Sigma 1)$$

τότε και οι τρεις διγραμμικές μορφές παράγουν το ίδιο ομογενές πολυώνυμο βαθμού  $k=2$ :

$$Q_1[x(\cdot)](t) \equiv Q_2[x(\cdot)](t) \equiv Q_3[x(\cdot)](t)$$

Αυτό συμβαίνει καθώς:

$$\begin{aligned} Q_1[x(\cdot)](t) &= \int_0^t \int_0^t K_1(t, \tau_1, \tau_2) x(\tau_1) x(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\ &= \int_0^t \int_0^t K_1(t, \tau_2, \tau_1) x(\tau_2) x(\tau_1) d\tau_1 d\tau_2 \\ &= \int_0^t \int_0^t K_2(t, \tau_1, \tau_2) x(\tau_2) x(\tau_1) d\tau_1 d\tau_2 = Q_2[x(\cdot)](t) \end{aligned}$$

και επίσης,

$$Q_3[x(\cdot)](t) = \frac{1}{2} Q_1[x(\cdot)](t) + \frac{1}{2} Q_2[x(\cdot)](t).$$

Όπως θα δούμε στην συνέχεια, η αντιστοιχία πολυγραμμικής μορφής και πολυωνύμου καθίσταται αμφιμονοσήμαντη αν περιορισθούμε σε συμμετρικές πολυγραμμικές μορφές. Παραθέτουμε τον ορισμό της συμμετρικής πολυγραμμικής μορφής:

### Συμμετρικές πολυγραμμικές μορφές

**Ορισμός 2 [Συμμετρική πολυγραμμική μορφή]:** Έστω η  $k$ -γραμμική απεικόνιση  $p : X^k \rightarrow X$ . Η  $p$  καλείται συμμετρική  $k$ -γραμμική μορφή, αν ισχύει:

$$p(x_1, \dots, x_k) = p_\sigma(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)}) , \quad \forall \sigma ,$$

όπου με  $\sigma := (\sigma(1), \dots, \sigma(k))$  συμβολίζουμε μια οποιαδήποτε μετάθεση (permutation) του συνόλου των δεικτών  $\{1, 2, \dots, k\}$ . ■

**Πρόταση και Ορισμός [Συμμετρικοποίηση]:** Κάθε  $k$ -γραμμική απεικόνιση  $p : X^k \rightarrow X$ , παράγει μία (μοναδική) συμμετρική  $k$ -γραμμική απεικόνιση ως εξής:

$$\tilde{p}(x_1, x_2, \dots, x_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma} p(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(k)}) \quad (1)$$

Η απεικόνιση  $\tilde{p}$  καλείται *συμμετρικοποίηση* της  $p$ . Αν  $p$  συμμετρική τότε  $p = \tilde{p}$ . ■

*Απόδειξη:* Για οποιοδήποτε ζεύγος δεικτών  $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ ,  $i \neq j$ , στο άθροισμα του δεξιά μέλους της Εξ (1) υπάρχει ο όρος:

$$p(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots),$$

αλλά και ο όρος:

$$p(\dots, x_j, \dots, x_i, \dots).$$

Εφόσον κάθε μετάθεση  $\sigma := (\sigma(1), \dots, \sigma(k))$  μπορεί να εκφραστεί ως σύνθεση αντιμεταθέσεων, για οποιαδήποτε αντιμετάθεση των ορισμάτων της συνάρτησης  $\tilde{p}$ , το άθροισμα του δεξιά μέλους της Εξ. (1) μένει αμετάβλητο. Έχουμε ότι:

$$\tilde{p}(\dots, x_j, \dots, x_i, \dots) = \tilde{p}(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots), \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, k\}, \quad i \neq j.$$

Άρα η  $k$ -γραμμική απεικόνιση  $\tilde{p} : X^k \rightarrow X$  είναι συμμετρική.

**Πόρισμα 1:** Από την Εξ. (1) είναι προφανές ότι για οποιαδήποτε  $k$ -γραμμική απεικόνιση  $p : X^k \rightarrow X$  (όχι κατ' ανάγκην συμμετρική) ισχύει:

$$p(x, x, \dots, x) = \tilde{p}(x, x, \dots, x) \quad \blacksquare \quad (2)$$

**Παράδειγμα 3 [Συνέχεια παραδείγματος 2]:** Με τα δεδομένα του Παραδείγματος 2, παρατηρούμε ότι:

$$\alpha) q_1(x_1(\cdot), x_2(\cdot))(t) = \int_0^t \int_0^t K_1(t, \tau_1, \tau_2) x_1(\tau_1) x_2(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2$$

$$\beta) q_2(x_1(\cdot), x_2(\cdot))(t) = \int_0^t \int_0^t K_1(t, \tau_2, \tau_1) x_1(\tau_1) x_2(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2$$

$$\gamma) q_3(x_1(\cdot), x_2(\cdot))(t) = \int_0^t \int_0^t \frac{1}{2} (K_1(t, \tau_1, \tau_2) + K_1(t, \tau_2, \tau_1)) x_1(\tau_1) x_2(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2$$

Η διγραμμική μορφή  $q_3$  είναι η συμμετρικοποίηση της  $q_1$ , καθώς:

$$\begin{aligned} \tilde{q}_1(x_1(\cdot), x_2(\cdot))(t) &= \frac{1}{2} (q_1(x_1(\cdot), x_2(\cdot)) + q_1(x_2(\cdot), x_1(\cdot))) (t) = \\ &= \int_0^t \int_0^t \frac{1}{2} K_1(t, \tau_1, \tau_2) x_1(\tau_1) x_2(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \int_0^t \int_0^t \frac{1}{2} K_1(t, \tau_1, \tau_2) x_2(\tau_1) x_1(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^t \int_0^t \frac{1}{2} K_1(t, \tau_1, \tau_2) x_1(\tau_1) x_2(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \int_0^t \int_0^t \frac{1}{2} K_1(t, \tau_2, \tau_1) x_2(\tau_2) x_1(\tau_1) d\tau_1 d\tau_2 = \\
&= \int_0^t \int_0^t \frac{1}{2} (K_1(t, \tau_1, \tau_2) + K_1(t, \tau_2, \tau_1)) x_1(\tau_1) x_2(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = q_3(x_1(\cdot), x_2(\cdot))(t)
\end{aligned}$$

Είναι προφανές ότι η διγραμμική μορφή  $q_3$  είναι εξίσου, η συμμετριοποίηση της  $q_2$ .

Σε αυτό το παράδειγμα, βλέπουμε έμπρακτα ότι μια διγραμμική μορφή και η συμμετριοποίηση της παράγουν το ίδιο πολυώνυμο. Περαιτέρω θα αποδείξουμε ότι δοθέντος ενός ομογενούς πολυωνύμου βαθμού  $k$ , υπάρχει μοναδική συμμετρική  $k$ -γραμμική απεικόνιση, η οποία το παράγει.

Αξίζει να σημειωθεί ότι θα μπορούσαμε να είχαμε εισαγάγει την συμμετρία στις πολυγραμμικές μορφές πριν από τον ορισμό του ομογενούς πολυωνύμου βαθμού  $k$  και να αναφερόμασταν απευθείας στο παραγόμενο, μέσω μίας συμμετρική πολυγραμμική μορφή, ομογενές πολυώνυμο. Αντί αυτού, χάριν σαφήνειας, επιλέξαμε να τονίσουμε το ότι η θεώρηση όλων των πολυγραμμικών μορφών ως «γεννήτριες» πολυωνύμων δημιουργεί έναν πληθωρισμό χωρίς αντίκτυπο στο πλήθος των διαφορετικών πολυωνύμων που παράγονται.

Βάση της παραπάνω παρατήρησης και του Πορίσματος 1, χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να γράφουμε το  $k$ -ομογενές πολυώνυμο, στην μορφή:

$$P(x) = \tilde{p}(x, \dots, x),$$

όπου  $\tilde{p}$  η συμμετριοποίηση της  $k$ -γραμμικής μορφής  $p$  που το παράγει.

**Σχόλια σχετικά με τον συμβολισμό και την ορολογία:** Από αυτό το σημείο θα συμβολίζουμε με  $p = p_k$  την  $k$ -γραμμική μορφή, και με  $x^{\{k\}} := \underbrace{(x, \dots, x)}_{k \text{ - times}}$ , την  $k$ -πλειάδα της μεταβλητής

$x$ . Με την βοήθεια αυτού του συμβολισμού, το  $k$ -ομογενές πολυώνυμο,  $P : X \rightarrow Y$ , μπορεί να γραφεί στην μορφή:

$$P(x) = \tilde{p}_k x^{\{k\}} \equiv \tilde{p}_k(x^{\{k\}}).$$

Στην συνέχεια, κάθε φορά που θα αναφερόμαστε στην  $k$ -γραμμική μορφή που παράγει το εκάστοτε ομογενές πολυώνυμο βαθμού  $k$  θα εννοούμε πάντα την συμμετρική πολυγραμμική μορφή και θα συμβολίζουμε απλώς χρησιμοποιώντας το αντίστοιχο μικρό γράμμα αυτού με το οποίο συμβολίζουμε το πολυώνυμο,  $P(x) = p_k x^{\{k\}}$ . Γενικότερα κάθε πολυγραμμική μορφή που θα εμφανίζεται, θα θεωρείται συμμετρική εκτός και αν δηλούται ρητά το αντίθετο. ■

Σε αυτό το σημείο θα διατυπώσουμε συνθήκες που εξασφαλίζουν την συμμετρία σε ορισμένες συγκεκριμένες πολυγραμμικές μορφές.

**Παράδειγμα 4:** Έστω  $X := \mathbb{R}^n$  και  $Y := \mathbb{R}$ . Ορίζουμε την διγραμμική απεικόνιση

$$p : X^2 \rightarrow Y :$$

$$p_2(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} r_i z_j,$$

όπου  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$  και  $\mathbf{x}_1 := (r_1, \dots, r_n)$ ,  $\mathbf{x}_2 := (z_1, \dots, z_n)$ . Η διγραμμική μορφή  $p(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ , είναι συμμετρική αν και μόνον αν:

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\},$$

δηλαδή όταν οι συντελεστές  $a_{ij}$  σχηματίζουν έναν συμμετρικό πίνακα  $A$ .

**Παράδειγμα 5:** Έστω  $I := [0, T]$  και  $X := C(I, \mathbb{R})$ ,  $Y := \mathbb{R}$ . Ορίζουμε την  $k$ -γραμμική απεικόνιση  $p_k : X^k \rightarrow Y$ :

$$p(x_1(\cdot), \dots, x_k(\cdot)) = \int_{t_0}^T \dots \int_{t_0}^T h_k(\tau_1, \dots, \tau_k) x_1(\tau_1) \dots x_k(\tau_k) d\tau_1 \dots d\tau_k,$$

όπου  $h_k(\cdot) \in C(I^k, \mathbb{R})$ .

Κάθε  $k$ -γραμμική απεικόνιση της ανωτέρω ολοκληρωτικής μορφής, είναι συμμετρική αν και μόνο αν ο ολοκληρωτικός πυρήνας της είναι συμμετρική συνάρτηση.

### Το μη ομογενές πολυώνυμο

Κλείνοντας αυτήν την εισαγωγική παράγραφο, παραθέτουμε τον ορισμό του μη ομογενούς πολυωνύμου βαθμού  $k$ , καθώς επίσης και δύο παραδείγματα τέτοιων πολυωνύμων.

**Ορισμός 5 [Μη ομογενές πολυώνυμο]:** Η απεικόνιση  $P : X \rightarrow Y$  καλείτε **μη ομογενές πολυώνυμο βαθμού  $k$** , αν:

$$P(x) = P_0 + P_1(x) + P_2(x) + \dots + P_k(x),$$

όπου κάθε  $P_j$ ,  $j = 0(1)k$ , είναι ομογενές πολυώνυμο βαθμού  $j$ . ■

**Παράδειγμα 6:** Έστω  $I := [t_0, T]$  και  $X := C(I, \mathbb{R})$ ,  $Y := \mathbb{R}$ . Ορίζουμε  $P : X \rightarrow Y$ , να είναι μη ομογενές πολυώνυμο βαθμού  $k = 3$ :

$$P[x(\cdot)] = P_0 + P_1[x(\cdot)] + P_2[x(\cdot)] + P_3[x(\cdot)]$$

Δύο ειδικές μορφές κυβικού πολυωνύμου είναι οι ακόλουθες:

$$P[x(\cdot)] = c + \int_{t_0}^T h_1(\tau_1) x(\tau_1) d\tau_1 + \int_{t_0}^T \int_{t_0}^T h_2(\tau_1, \tau_2) x(\tau_1) x(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \\ + \int_{t_0}^T \int_{t_0}^T \int_{t_0}^T h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) x(\tau_1) x(\tau_2) x(\tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3,$$

$$Q[x(\cdot)] = c + x(T) + x(T) \int_{t_0}^T K_1(\tau) x(\tau) d\tau + \\ + x(T) \int_{t_0}^T \int_{t_0}^T K_2(\tau_1, \tau_2) x(\tau_1) x(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2.$$

**Παράδειγμα 7:** Έστω  $I := [t_0, T]$  και  $X := C^2(I, \mathbb{R})$ ,  $Y := C(I, \mathbb{R})$ . Ορίζουμε  $P : X \rightarrow Y$ , να είναι μη ομογενές πολυώνυμο βαθμού  $k = 3$ :

$$P[x(\cdot)](t) = P_0 + P_1[x(\cdot)](t) + P_2[x(\cdot)](t) + P_3[x(\cdot)](t),$$

όπου τα ομογενή πολυώνυμα  $P_j$ ,  $0 \leq j \leq 3$ , ορίζονται ως εξής:

$$P_0 = c, \quad c \in \mathbb{R},$$

$$P_1[x(\cdot)](t) = c(t)x''(t), \quad c(\cdot) \in C(I, \mathbb{R}),$$

$$P_2[x(\cdot)](t) = 0,$$

$$P_3[x(\cdot)](t) = (x_1(t)x_2(t)x_3(t))|_{x_1=x_2=x_3=x} = x^3(t),$$

Συνεπώς λαμβάνουμε το μη ομογενές πολυώνυμο:

$$P[x(\cdot)](t) = c(t)x''(t) + x^3(t) + c.$$

## 2.2 Διαδοχικές διαφορές και πολυώνυμα σε γραμμικούς χώρους

Σε αυτό το εδάφιο ορίζουμε τον τελεστή διαφοράς με σκοπό να τον χρησιμοποιήσουμε στον ορισμό των διαδοχικών διαφορών πολυωνύμων. Ορίζοντας τις διαδοχικές διαφορές, θα μπορέσουμε να εξάγουμε δύο βασικά αποτελέσματα για το χειρισμό των πολυωνυμικών απεικονίσεων. Αρχικά θα αποδείξουμε το ανάλογο του διωνυμικού αναπτύγματος αποτέλεσμα για τα ομογενή πολυώνυμα. Δεδομένου αυτού, θα αποδείξουμε ότι δοθέντος ενός πολυωνύμου βαθμού  $k$  (ομογενές είτε μη ομογενές), η εφαρμογή του τελεστή διαφοράς σε αυτό έχει ως αποτέλεσμα ένα πολυώνυμο βαθμού  $k-1$ . Τέλος θα αποδείξουμε ότι εφαρμόζοντας διαδοχικά,  $k$  φορές, τον τελεστή διαφοράς σε ένα πολυώνυμο βαθμού  $k$ , έχουμε ως αποτέλεσμα το σταθερό πολυώνυμο. Αυτά τα αποτελέσματα θα μας οδηγήσουν άμεσα στην polarization formula και μια σειρά πορισμάτων για τα πολυώνυμα.

### Τελεστής μεταφοράς και τελεστής πρώτης διαφοράς

Συμβολίζουμε με  $\Phi(X \rightarrow Y)$ , τον χώρο όλων των απεικονίσεων από τον χώρο  $X$  στον  $Y$ . Έστω απεικόνιση (τελεστής)  $f: X \rightarrow Y$ , και  $h \in X$ . Ορίζουμε τον **τελεστή μεταφοράς** (shifting operator):

$$S_h: \Phi(X \rightarrow Y) \rightarrow \Phi(X \rightarrow Y),$$

έτσι ώστε η απεικόνιση  $S_h f: X \rightarrow Y$ , να έχει την μορφή:

$$(S_h f)(x) = f(x+h), \quad \forall x, h \in X.$$

Ο τελεστή μεταφοράς έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

α) Είναι **γραμμικός**:  $\forall f, g \in X$  και  $\forall \lambda \in \mathbb{K}$  ισχύουν οι σχέσεις

$$S_h(f+g) = S_h f + S_h g,$$

$$S_h(\lambda f) = \lambda S_h f.$$

β) Ορίζεται η **σύνθεση**  $S_{h_1} \circ S_{h_2}$  ( $\equiv S_{h_1} S_{h_2}$ ) και είναι **επίσης τελεστής μεταφοράς**:

$$S_{h_1} S_{h_2} f = S_{h_1} \circ (S_{h_2} f).$$

Εφ' όσον για κάθε  $x \in X$  και  $h_1, h_2 \in X$ , ισχύει ότι:

$$S_{h_2} \circ (S_{h_1} f(x)) = S_{h_2} f(x+h_1) = f(x+h_1+h_2),$$

και έχουμε  $S_{h_2} \circ (S_{h_1} f) = S_{h_1+h_2} f$ , για κάθε  $f \in \Phi(X \rightarrow Y)$ . Κατά συνέπεια,

$$S_{h_2} \circ S_{h_1} = S_{h_1+h_2} = S_{h_1} \circ S_{h_2},$$

δηλαδή, η σύνθεση τελεστών μεταφοράς (σε αντίθεση με την σύνθεση γενικών τελεστών) είναι **αντιμεταθετική**.

γ)  $S_0 f = f$ , άρα  $S_0 = I$ , όπου  $I$  ο **ταυτοτικός τελεστής**.

δ)  $S_h \circ S_{-h} = I$ , άρα κάθε τελεστής μεταφοράς έχει **αντίστροφο**.

Προχωράμε τώρα στον ορισμό των **τελεστών διαφοράς**. Έστω απεικόνιση (τελεστής)  $f : X \rightarrow Y$ , και  $h \in X$ . Χρησιμοποιώντας τον τελεστή μεταφοράς  $S_h$  ορίζουμε τον **τελεστή πρώτης (πρόσθιας) διαφοράς**:

$$\Delta_h : \Phi(X \rightarrow Y) \rightarrow \Phi(X \rightarrow Y)$$

έτσι ώστε για την απεικόνιση  $\Delta_h f : X \rightarrow Y$ , να έχουμε:

$$\Delta_h f := S_h f - S_0 f \equiv S_h f - f. \quad (1)$$

Ο τελεστής πρώτης διαφοράς έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

α) Είναι **γραμμικός**  $f : \forall f, g \in X$  και  $\forall \lambda \in \mathbb{K}$  ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned} \Delta_h (f + g) &= S_h (f + g) + S_0 (f + g) \\ &= S_h f - f + S_h g - g \\ &= \Delta_h f + \Delta_h g. \end{aligned}$$

$$\Delta_h (\lambda f) = \lambda \Delta_h f.$$

β) Ορίζεται η **σύνθεση**  $\Delta_{h_1} \circ \Delta_{h_2} (\equiv \Delta_{h_1} \Delta_{h_2})$  και είναι **αντιμεταθετική**:

Πράγματι, από την

$$\begin{aligned} \Delta_{h_1} \Delta_{h_2} f &= \Delta_{h_1} (\Delta_{h_2} f) = \Delta_{h_1} (S_{h_2} f - f) \\ &= S_{h_1} S_{h_2} f - S_{h_2} f - S_{h_1} f + f \end{aligned}$$

και την αντιμεταθετικότητα της σύνθεσης του τελεστή μεταφοράς, συμπεραίνουμε ότι

$$\Delta_{h_1} \Delta_{h_2} f = \Delta_{h_2} \Delta_{h_1} f.$$

Ο τελεστής  $\Delta_{h_1} \circ \Delta_{h_2} \equiv \Delta_{h_1} \Delta_{h_2}$  είναι επίσης γραμμικός και ονομάζεται **τελεστής δεύτερης (διαδοχικής) διαφοράς**. Γενικότερα, ορίζεται η σύνθεση  $\Delta_{h_1} \circ \dots \circ \Delta_{h_k} f$  (βλ. παρακάτω, Ορισμός 6) και είναι ανεξάρτητη της σειράς εμφάνισης των παραγόντων.

γ)  $\Delta_0 f = S_0 f - f = 0$ .

### Τελεστές διαφοράς ανωτέρας τάξεως

**Ορισμός 1 [Τελεστές διαφοράς ανωτέρας τάξεως]:** Έστω απεικόνιση  $f : X \rightarrow Y$ . Ορίζουμε την διαφορά δεύτερης τάξης, εφαρμόζοντας τον τελεστή διαφοράς, για  $h_2 \in X$ , στην απεικόνιση  $\Delta_{h_1} f(\cdot)$ :

$$\Delta_{h_2} \Delta_{h_1} f(x) = f(x + h_1 + h_2) - f(x + h_1) - f(x + h_2) + f(x).$$

Εφαρμόζοντας επαναληπτικά τον τελεστή διαφοράς  $\Delta_{h_j}$ ,  $j = 1(1)k$  στην απεικόνιση  $f$ , ορίζουμε την διαφορά  $k$ -τάξης του τελεστή  $f$  και συμβολίζουμε ως:

$$\Delta_{h_k h_{k-1} \dots h_1}^{(k)} f := \Delta_{h_k} (\Delta_{h_{k-1}} (\Delta_{h_{k-2}} \dots (\Delta_{h_1} f(\cdot)))) .$$

Στην περίπτωση όπου  $h_1 = h_2 = \dots = h_k = h$ , μπορούμε να συμβολίζουμε την διαφορά  $k$ -τάξης του τελεστή  $f$  ως:

$$\Delta_h^k f := \Delta_{h h \dots h}^{(k)} f . \quad \blacksquare$$

**Θεώρημα 1 [Διωνυμικό ανάπτυγμα]:** Έστω  $k$ -ομογενές πολυώνυμο,  $P_k : X \rightarrow Y$ ,  $k \geq 1$ , το οποίο παράγεται από την συμμετρική  $k$ -γραμμική μορφή  $p_k : X^k \rightarrow Y$ . Τότε, ισχύει η ταυτότητα (Διωνυμικό ανάπτυγμα):

$$\begin{aligned} S_h P_k(x) &\equiv P_k(x+h) \equiv p_k(x+h, x+h, \dots, x+h) = \\ &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} p_k(x^{\{k-j\}}, h^{\{j\}}). \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (2)$$

**Σχόλιο για τον συμβολισμό:** Στην Εξ. (2), και στην συνέχεια, χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό  $v^{\{j\}}$  για να δηλώσουμε την πλειάδα  $(\underbrace{v, \dots, v}_{j\text{-times}})$ , ώστε να γράφουμε σε συνεπτυγμένη μορφή τα

πολλαπλά ορίσματα του τελεστή  $p_k$ , όταν αυτά είναι ίδια:

$$p_k(x^{\{k-j\}}, h^{\{j\}}) := p_k(\underbrace{x, \dots, x}_{(k-j)\text{-times}}, \underbrace{h, \dots, h}_{j\text{-times}}). \quad (1)$$

**Απόδειξη Θεωρήματος 1:** Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή. Πριν, όμως, από αυτό, θα κάνουμε μια εισαγωγική συζήτηση για την διευκρίνιση του συμβολισμού και ορισμένων από τους χειρισμούς που ακολουθούν.

Χρησιμοποιώντας την ανά συνιστώσα γραμμικότητα της πολυγραμμικής μορφής, αποσυνθέτουμε το πρώτο και το δεύτερο όρισμα  $x + h$ , οπότε βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} S_h p_k x^{\{k\}} &= p_k(x+h, x+h, \dots, x+h) \\ &= p_k(x, x+h, \dots, x+h) + p_k(h, x+h, \dots, x+h) \end{aligned}$$

(1) Λόγω της συμμετρίας της πολυγραμμικής μορφής  $p_k$ , η αναδιάταξη των ορισμάτων δεν επηρεάζει τους υπολογισμούς. Μπορούμε, επί παραδείγματι, να γράψουμε:

$$p_k(x, x, h, x, h, x, \dots, x) = p_k(x^{\{k-2\}}, h^{\{2\}}) = p_k(h^{\{2\}}, x^{\{k-2\}}).$$

$$\begin{aligned}
&= p_k(x, x, x+h, \dots, x+h) + p_k(x, h, x+h, \dots, x+h) + \\
&\quad + p_k(h, x, x+h, \dots, x+h) + p_k(h, h, x+h, \dots, x+h).
\end{aligned}$$

Λόγω της συμμετρίας της απεικόνισης  $p_k$ , το ανωτέρω αποτέλεσμα γράφεται και στην μορφή:

$$\begin{aligned}
S_h p_k x^{\{k\}} &= p_k(x, x, x+h, \dots, x+h) + 2p_k(x, h, x+h, \dots, x+h) + \\
&\quad + p_k(h, h, x+h, \dots, x+h) \tag{3}
\end{aligned}$$

Στον πρώτο όρο του δεξιά μέλους της Εξ. (3), τα ορίσματα είναι: δύο φορές το  $x$  και  $k-2$  φορές το  $x+h$  (η ακριβής θέση τους δεν έχει σημασία, εφ' όσον η απεικόνιση  $p_k$  είναι συμμετρική). Άρα, με βάση τον συμβολισμό που εισαγάγαμε ανωτέρω, μπορούμε για τους όρους της Εξ. (3) να γράψουμε:

$$\begin{aligned}
p_k(x, x, x+h, \dots, x+h) &= p_k(x^{\{2\}}, (x+h)^{\{k-2\}}), \\
p_k(x, h, x+h, \dots, x+h) &= p_k(x, h, (x+h)^{\{k-2\}}), \\
p_k(h, h, x+h, \dots, x+h) &= p_k(h^{\{2\}}, (x+h)^{\{k-2\}}).
\end{aligned}$$

Μέχρι εδώ έχουμε αναλύσει, χρησιμοποιώντας την κατά συνιστώσα γραμμικότητα, δύο φορές (δύο βήματα). Παρατηρούμε ότι εμφανίζεται μια «μορφολογική» αναλογία ανάμεσα στο διωνυμικό ανάπτυγμα:

$$(x+h)^2 = xx + 2xh + hh$$

και την σχέση:

$$S_h p_k x^{\{k\}} = p_k(x, x, (x+h)^{\{k-2\}}) + 2p_k(x, h, (x+h)^{\{k-2\}}) + p_k(h, h, (x+h)^{\{k-2\}}).$$

Αν αναλύσουμε περαιτέρω, χρησιμοποιώντας την κατά συνιστώσα γραμμικότητα, θα προκύψουν έξι όροι, οι τέσσερις εκ των οποίων είναι δύο συμμετρικά ζεύγη και αθροίζονται:

$$\begin{aligned}
S_h p_k x^{\{k\}} &= p_k(x^{\{3\}}, (x+h)^{\{k-3\}}) + p_k(x, x, h, (x+h)^{\{k-3\}}) + \\
&\quad + 2p_k(x, h, x, (x+h)^{\{k-3\}}) + 2p_k(x, h, h, (x+h)^{\{k-3\}}) + \\
&\quad + p_k(h, h, x, (x+h)^{\{k-3\}}) + p_k(h^{\{3\}}, (x+h)^{\{k-3\}}) \\
&= p_k(x^{\{3\}}, (x+h)^{\{k-3\}}) + 3p_k(x, h, x, (x+h)^{\{k-3\}}) + \\
&\quad + 3p_k(x, h, h, (x+h)^{\{k-3\}}) + p_k(h^{\{3\}}, (x+h)^{\{k-3\}})
\end{aligned}$$

Σε κάθε νέα ανάλυση δημιουργούνται  $2r$  όροι, όπου  $r$  το πλήθος των όρων της αμέσως προηγούμενης ανάλυσης. Οι  $(2r-2)$  όροι κάθε νέου βήματος χωρίζονται σε συμμετρικά ζεύγη και αθροίζονται. Μετά τις αθροίσεις εμφανίζονται οι συντελεστές του διωνυμικού αναπτύγματος  $(x+h)^j$ , όπου  $j$  το πλήθος των αναλύσεων. Μετά από  $k$  αναλύσεις θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
S_h p_k x^{\{k\}} &= \binom{k}{0} p_k x^{\{k\}} + \binom{k}{1} p_k(x^{\{k-1\}}, h^{\{1\}}) + \dots + \binom{k}{k-1} p_k(x^{\{1\}}, h^{\{k-1\}}) + \binom{k}{k} p_k h^{\{k\}} \\
&= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} p_k(x^{\{k-j\}}, h^{\{j\}}). \tag{4}
\end{aligned}$$



Επιβεβαιώνουμε την ανωτέρω σχέση με επαγωγή. Προφανώς η Εξ. (4) ισχύει για  $k = 1$ . Υποθέτοντας ότι ισχύει για  $k$  (γενικό), θα δείξουμε ότι ισχύει για  $(k + 1)$ , δηλαδή:

$$S_h p_{k+1} x^{\{k+1\}} = \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} p_{k+1}(x^{\{k-j\}}, h^{\{j\}}). \quad (5)$$

Ξεκινάμε γράφοντας την αρχική σχέση για  $k+1$  και χρησιμοποιούμε την ανά συνιστώσα γραμμικότητα στο τελευταίο όρισμα:

$$S_h p_{k+1} x^{\{k+1\}} := p_{k+1}(x+h)^{\{k+1\}} = p_{k+1}((x+h)^{\{k\}}, x) + p_{k+1}((x+h)^{\{k\}}, h) \quad (6)$$

Μπορούμε να εφαρμόσουμε την επαγωγική υπόθεση σε κάθε έναν από τους δύο όρους του δεξιά μέλους της Εξ. (6), θεωρώντας τα  $x, h$  (που εμφανίζονται ως τελευταία ορίσματα αυτών) ως παραμέτρους. Κατά συνέπεια, αυτά τα  $x, h$  θα διατηρηθούν αναλλοίωτα σε όλους τους όρους που θα προκύψουν. Τότε:

$$\begin{aligned} S_h p_{k+1} x^{\{k+1\}} &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} p_{k+1}(x^{\{k-j\}}, h^{\{j\}}, x) + \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} p_{k+1}(x^{\{k-j\}}, h^{\{j\}}, h) = \\ &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} p_{k+1}(x^{\{k-j+1\}}, h^{\{j\}}) + \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} p_{k+1}(x^{\{k-j\}}, h^{\{j+1\}}) = \end{aligned}$$

[Από το πρώτο άθροισμα αποσπούμε τον πρώτο όρο και από το δεύτερο τον τελευταίο]

$$\begin{aligned} &= p_k(x^{\{k+1\}}, h^{\{0\}}) + \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} p_{k+1}(x^{\{k-j+1\}}, h^{\{j\}}) + \\ &+ \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} p_{k+1}(x^{\{k-j\}}, h^{\{j+1\}}) + p_{k+1}(x^{\{0\}}, h^{\{k+1\}}) = \end{aligned}$$

[Χρησιμοποιούμε τον βοηθητικό δείκτη  $j'$  όπου  $(j = j' + 1)$ , ώστε να αλλάξουμε το πεδίο άθροισης του πρώτου αθροίσματος]

$$\begin{aligned} &= p_{k+1}(x^{\{k+1\}}, h^{\{0\}}) + \sum_{j'=0}^{k-1} \binom{k}{j'+1} p_{k+1}(x^{\{k-j'\}}, h^{\{j'+1\}}) + \\ &+ \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} p_{k+1}(x^{\{k-j\}}, h^{\{j+1\}}) + p_{k+1}(x^{\{0\}}, h^{\{k+1\}}) = \end{aligned}$$

$$= p_{k+1}(x^{\{k+1\}}, h^{\{0\}}) + \sum_{j=0}^{k-1} \left[ \binom{k}{j+1} + \binom{k}{j} \right] p_{k+1}(x^{\{k-j\}}, h^{\{j+1\}}) + p_{k+1}(x^{\{0\}}, h^{\{k+1\}}).$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα:

$$\binom{k}{j+1} + \binom{k}{j} = \binom{k+1}{j+1},$$

το προηγούμενο άθροισμα γράφεται:

$$S_h p_{k+1} x^{\{k+1\}} = p_{k+1}(x^{\{k+1\}}, h^{\{0\}}) + \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k+1}{j+1} p_{k+1}(x^{\{k-j\}}, h^{\{j+1\}}) + p_{k+1}(x^{\{0\}}, h^{\{k+1\}}).$$

Χρησιμοποιώντας τον βοηθητικό δείκτη  $\ell = j + 1$  αλλάζουμε το πεδίο άθροισης του αθροίσματος και λαμβάνουμε:

$$S_h P_{k+1} x^{\{k+1\}} = p_{k+1}(x^{\{k+1\}}, h^{\{0\}}) + \sum_{\ell=1}^k \binom{k+1}{\ell} p_{k+1}(x^{\{k-\ell+1\}}, h^{\{\ell\}}) + p_{k+1}(x^{\{0\}}, h^{\{k+1\}}).$$

Παρατηρούμε ότι μπορούμε να εντάξουμε τον πρώτο όρο του δεξιά μέλους της ανωτέρω εξίσωσης εντός του αθροίσματος αποτελώντας τον όρο που προκύπτει για  $\ell = 0$  καθώς επίσης μπορούμε να εντάξουμε εντός του αθροίσματος και τον τελευταίο όρο να προκύπτει για  $\ell = k + 1$ . Έχουμε:

$$\begin{aligned} S_h P_{k+1} x^{\{k+1\}} &= p_{k+1}(x^{\{k+1\}}, h^{\{0\}}) + \sum_{\ell=1}^k \binom{k+1}{\ell} p_{k+1}(x^{\{k-\ell+1\}}, h^{\{\ell\}}) + p_{k+1}(x^{\{0\}}, h^{\{k+1\}}) = \\ &= \sum_{\ell=0}^{k+1} \binom{k+1}{\ell} p_{k+1}(x^{\{k-\ell+1\}}, h^{\{\ell\}}) \end{aligned}$$

Άρα ο ισχυρισμός μας αποδείχθηκε.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 1 ολοκληρώνεται.

**Θεώρημα 2:** Έστω  $P : X \rightarrow Y$ , μη ομογενές πολυώνυμο βαθμού  $k$ . Η πρώτη διαφορά αυτού  $\Delta_h P$ , είναι πολυώνυμο βαθμού  $k - 1$ . ■

*Απόδειξη:* Η απόδειξη θα γίνει χρησιμοποιώντας επαγωγή. Έστω  $k = 1$ , δηλαδή το  $P$  είναι πολυώνυμο πρώτου βαθμού. Τότε, για  $h \in X$ , έχουμε:

$$\Delta_h P(x) = \Delta_h P_0(x) + \Delta_h P_1(x) = 0 + p_1(x + h) - p_1 x = p_1 h,$$

όπου η ποσότητα  $p_1 h$  είναι ανεξάρτητη του  $x$ . Άρα, το  $\Delta_h P(x)$  είναι πολυώνυμο μηδενικού βαθμού.

Έστω ότι ο ισχυρισμός ισχύει για  $k - 1$ , δηλαδή, αν  $P$  είναι μη ομογενές πολυώνυμο βαθμού  $k - 1$ , τότε η πρώτη διαφορά αυτού,  $\Delta_h P$ , είναι πολυώνυμο βαθμού  $k - 2$ .

Θεωρούμε τώρα το μη ομογενές πολυώνυμο  $P$ , βαθμού  $k$ . Βάση του ορισμού του μη ομογενούς πολυωνύμου, μπορούμε να γράψουμε:

$$P(x) = P_k(x) + R(x), \quad \forall x \in X,$$

όπου  $P_k(x) = p_k x^{\{k\}}$  είναι ομογενές πολυώνυμο βαθμού  $k$  και  $R$  είναι μη ομογενές πολυώνυμο βαθμού  $k - 1$ .

Λαμβάνοντας την πρώτη διαφορά του πολυωνύμου  $P$ , έχουμε:

$$\Delta_h P(x) = \Delta_h P_k(x) + \Delta_h R(x).$$

Αναπτύσσουμε την διαφορά του ομογενούς πολυωνύμου  $P_k$  στο δεξιά μέλος της ανωτέρω εξίσωσης:

$$\Delta_h P(x) = P_k(x + h) - P_k(x) + \Delta_h R(x).$$

Κάνοντας χρήση του Θεωρήματος 1 μπορούμε να εκφράσουμε την ποσότητα  $P_k(x+h)$  μέσω της  $k$ -γραμμικής μορφής που παράγει το πολυώνυμο  $P_k$ , ως εξής:

$$P_k(x+h) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} p_k(x^{\{k-j\}}, h^{\{j\}}), \quad \forall x, h \in X.$$

Τότε, η πρώτη διαφορά του πολυωνύμου  $P$  μπορεί να γραφεί στην μορφή:

$$\begin{aligned} \Delta_h P(x) &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} p_k(x^{\{k-j\}}, h^{\{j\}}) - p_k x^{\{k\}} + \Delta_h R(x) = \\ &\quad \text{[Αποσπούμε τον πρώτο όρο από το άθροισμα]} \\ &= p_k(x^{\{k\}}, h^{\{0\}}) + \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} p_k(x^{\{k-j\}}, h^{\{j\}}) - p_k x^{\{k\}} + \Delta_h R(x) = \\ &\quad \text{[Αποσπούμε ξανά τον πρώτο όρο από το άθροισμα]} \\ &= k p_k(x^{\{k-1\}}, h^{\{1\}}) + \sum_{j=2}^k \binom{k}{j} p_k(x^{\{k-j\}}, h^{\{j\}}) + \Delta_h R(x). \end{aligned}$$

Ξαναγράφουμε την παραπάνω σχέση:

$$\Delta_h P(x) = k p_k(x^{\{k-1\}}, h^{\{1\}}) + \sum_{j=2}^k \binom{k}{j} p_k(x^{\{k-j\}}, h^{\{j\}}) + \Delta_h R(x), \quad \forall x, h \in X$$

Βλέπουμε ότι για κάθε  $h \in X$ , ο πρώτος όρος του δεξιά μέλους της ανωτέρω σχέσης είναι πολυώνυμο βαθμού  $k-1$ . Αυτό καθώς, για κάθε  $h \in X$ , υπάρχει  $(k-1)$ -γραμμική μορφή, έστω  $q_{k-1}$ , τέτοια ώστε:

$$q_{k-1} x^{\{k-1\}} = p_k(x^{\{k-1\}}, h^{\{1\}}), \quad \forall x \in X,$$

η οποία ορίζει ένα ομογενές πολυώνυμο βαθμού  $k-1$ . Αντιστοίχως το άθροισμα που εμφανίζεται στην παραπάνω σχέση, αποτελεί άθροισμα ομογενών πολυωνύμων βαθμού από μηδέν έως  $k-2$ . Από την επαγωγική υπόθεση, εφόσον το πολυώνυμο  $R$  είναι βαθμού  $k-1$ , η πρώτη διαφορά αυτού είναι πολυώνυμο βαθμού  $k-2$ . Συνεπώς βάση των παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η πρώτη διαφορά του πολυωνύμου  $P$ , βαθμού  $k$ , είναι πολυώνυμο βαθμό  $k-1$ .

Η απόδειξη του Θεωρήματος 2 ολοκληρώνεται.

**Θεώρημα 3:** Έστω  $P: X \rightarrow Y$ , μη ομογενές πολυώνυμο βαθμού  $k$ . Η  $k$ -τάξης διαφορά αυτού,  $\Delta_{h_k h_{k-1} \dots h_1}^{(k)} P$ , είναι πολυώνυμο βαθμού μηδέν (δηλαδή, το σταθερό πολυώνυμο). ■

*Απόδειξη:* Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή. Προφανώς εάν έχουμε  $P$ , μη ομογενές πολυώνυμο βαθμού ένα, τότε ο ισχυρισμός του θεωρήματος ισχύει:

$$\Delta_{h_1} P(x) = \Delta_{h_1} P_1(x) + \Delta_{h_1} P_0(x) = \dots = p_1 h_1 + 0, \quad \forall x \in X$$

Έστω ότι για  $k$  (γενικό), η διαφορά  $k$ -τάξης του μη ομογενούς πολυωνύμου  $P$ , βαθμού  $k$ , ισούται με σταθερά. Θα δείξουμε ότι η  $(k+1)$ -τάξης διαφορά του πολυωνύμου  $P$ , βαθμού  $k+1$  είναι σταθερά.

Το πολυώνυμο  $P$ , γράφεται:

$$P(x) = P_{k+1}(x) + R, \quad \forall x \in X,$$

όπου  $P_{k+1}$  είναι ομογενές πολυώνυμο βαθμού  $k+1$  και  $R$  μη ομογενές βαθμού  $k$ .

Η  $k$  τάξης διαφορά του  $P$ , γράφεται:

$$\begin{aligned} \Delta_{h_{k+1}h_k \dots h_1}^{(k+1)} P(x) &= \Delta_{h_{k+1}h_k \dots h_1}^{(k+1)} P_{k+1}(x) + \Delta_{h_{k+1}h_k \dots h_1}^{(k+1)} R(x) = \\ &= \Delta_{h_{k+1}} \Delta_{h_k \dots h_1}^{(k)} P_{k+1}(x) + \Delta_{h_{k+1}} \Delta_{h_k \dots h_1}^{(k)} R(x). \end{aligned}$$

Λόγω της αντιμεταθετικότητας της σύνθεσης τελεστών διαφοράς, μπορούμε να γράψουμε:

$$\Delta_{h_{k+1}h_k \dots h_1}^{(k+1)} P(x) = \Delta_{h_k \dots h_1}^{(k)} \Delta_{h_{k+1}} P_{k+1} + \Delta_{h_k \dots h_1}^{(k)} \Delta_{h_{k+1}} R(x).$$

Έχουμε ότι:

$$\Delta_{h_{k+1}} P_{k+1} = G_k^{[1]}, \quad \text{όπου } G_k^{[1]}, \text{ ομογενές πολυώνυμο βαθμού } k.$$

Από το Θεώρημα 2 έχουμε ότι η πρώτη διαφορά ενός μη ομογενούς πολυωνύμου βαθμού  $k$  είναι πολυώνυμο βαθμού  $k-1$ . Άρα έχουμε ότι:

$$\Delta_{h_{k+1}} R(x) = G_{k-1}^{[2]}, \quad \text{όπου } G_{k-1}^{[2]}, \text{ μη ομογενές πολυώνυμο βαθμού } k-1.$$

Η διαφορά  $k+1$  τάξης του μη ομογενούς πολυωνύμου  $P$ , βαθμού  $k+1$ , μπορεί να γραφεί πλέον στη μορφή:

$$\Delta_{h_{k+1}h_k \dots h_1}^{(k+1)} P(x) = \Delta_{h_k \dots h_1}^{(k)} \left( G_k^{[1]}(x) + G_{k-1}^{[2]}(x) \right), \quad \forall x \in X,$$

Όμως το άθροισμα  $G_k^{[1]}(x) + G_{k-1}^{[2]}(x)$ , είναι μη ομογενές πολυώνυμο βαθμού  $k$  και βάση της επαγωγικής υπόθεσης:

$$\Delta_{h_{k+1}h_k \dots h_1}^{(k+1)} P(x) = \Delta_{h_k \dots h_1}^{(k)} \left( G_k^{[1]}(x) + G_{k-1}^{[2]}(x) \right) = c, \quad \forall x \in X,$$

όπου  $c$  σταθερά.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 3 ολοκληρώνεται.

Στην πρόταση που ακολουθεί διατυπώνουμε ένα χρήσιμο αποτέλεσμα αναφορικά με την έκφραση της  $k$  διαδοχικής διαφοράς γενικής απεικόνισης. Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να ευρεθεί στο άρθρο (Thomas, A Polarization Identity for Multilinear Maps, 2014).

**Πρόταση 1:** Η  $k$  – διαδοχική διαφορά της απεικόνισης  $F : X \rightarrow Y$ , μπορεί να εκφραστεί μέσω της σχέσης:

$$\begin{aligned} \left( \Delta_{h_k h_{k-1} \dots h_1}^{(k)} F \right)(x) &= F(x + h_1 + \dots + h_k) + \\ &+ \sum_{\ell=1}^k (-1)^\ell \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_\ell \leq k} F(x + h_{j_1} + \dots + h_{j_\ell}), \quad \forall x, (h_i)_1^k \in X. \quad \blacksquare \quad (8) \end{aligned}$$

Απόδειξη: Έχουμε ότι:

$$\Delta_{h_k h_{k-1} \dots h_1}^{(k)} F = \left( \prod_{j=1}^k (S_{h_j} \cdot - S_0 \cdot) \right) F.$$

Αρχικά για να γίνει σαφής ο συλλογισμός, θα παραθέσουμε ως παράδειγμα την περίπτωση όπου  $k = 3$ . Τότε το παραπάνω γινόμενο, έχει την μορφή:

$$\left( \prod_{j=1}^3 (S_{h_j} \cdot - I \cdot) \right) = S_{h_1} S_{h_2} S_{h_3} \cdot - S_{h_1} S_{h_2} \cdot - S_{h_1} S_{h_3} \cdot - S_{h_2} S_{h_3} \cdot + \\ + S_{h_1} \cdot + S_{h_2} \cdot + S_{h_3} \cdot - I.$$

Δηλαδή έχουμε τα γινόμενα των  $S_{h_j}$  όρων ανά  $k$ , έπειτα ανά  $k-1$ , έως ανά μηδέν να αθροίζονται με εναλλασσόμενο πρόσημο. Κατά αναλογία για γενικό  $k$  και χρησιμοποιώντας την σχέση σύνθεσης μεταφοράς του τελεστή  $S_h$ , θα έχουμε:

$$\left( \prod_{j=1}^k (S_{h_j} \cdot - S_0 \cdot) \right) = S_{h_1+\dots+h_k} \cdot - \left( S_{h_1+\dots+h_{k-1}} \cdot + S_{h_1+\dots+h_{k-2}+h_k} \cdot + \dots + S_{h_2+\dots+h_k} \cdot \right) + \dots \\ \dots + (-1)^k S_0 \cdot \quad (9)$$

Συμβολίζουμε  $H_{\{h_j\}}$ , το άθροισμα των μεταφορών  $h_j, j = 1(1)k$ :

$$H_{\{h_j\}_1^k} := h_1 + h_2 + \dots + h_k.$$

Επίσης θα συμβολίζουμε με  $H_{\{h_j\}_1^k}^{j \neq j_1, \dots, j_\ell}$ ,  $1 \leq \ell \leq k$ , το άθροισμα των  $h_j, j = 1(1)k$  στο οποίο δεν αθροίζονται τα στοιχεία με δείκτη  $j_i, i = 1(1)\ell$ :

$$H_{\{h_j\}_1^k}^{j \neq j_1, \dots, j_\ell} := H_{\{h_j\}_1^k} - (h_{j_1} + h_{j_2} \dots + h_{j_\ell}).$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό, αναφέροντας κάθε φορά στον πάνω δείκτη ποιοι όροι του αθροίσματος αφαιρούνται. Με αυτόν τον συμβολισμό, η σχέση (9) μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\left( \prod_{j=1}^k (S_{h_j} \cdot - S_0 \cdot) \right) = S_{H_{\{h_j\}}} \cdot - \sum_{j_1=1}^k S_{H_{\{h_j\}_1^k}^{j \neq j_1}} \cdot + \sum_{1 \leq j_1 < j_2 \leq k} S_{H_{\{h_j\}_1^k}^{j \neq j_1, j_2}} \cdot - \dots \\ \dots + (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_{k-1} \leq k} S_{H_{\{h_j\}_1^k}^{j \neq j_1, \dots, j_{k-1}}} \cdot + (-1)^k S_{H_{\{h_j\}_1^k}^{j \neq j_1, \dots, j_k}} \cdot \quad (10)$$

Στην παραπάνω σχέση έχουμε διατάξει τους δείκτες των αθροισμάτων καθώς δεν πρέπει να γίνεται η άθροιση για αναδιατάξεις του εκάστοτε συνόλου δεικτών.

Μπορούμε να γράψουμε σε ποιο συνεπτυγμένη μορφή την σχέση (10), ως εξής:

$$\left( \prod_{j=1}^k (S_{h_j} \cdot - S_0 \cdot) \right) = S_{H_{\{h_j\}_1^k}} \cdot + \sum_{\ell=1}^k (-1)^\ell \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_\ell \leq k} S_{H_{\{h_j\}_1^k}^{j \neq j_1, \dots, j_\ell}} \cdot \quad (11)$$

Τέλος, εφαρμόζοντας στον τελεστή  $F$ , έχουμε:

$$\left( \prod_{j=1}^k (S_{h_j} - S_0) \right) F(x) = S_{H_{\{h_j\}_1^k}} F(x) + \sum_{\ell=1}^k (-1)^\ell \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_\ell \leq k} S_{H_{\{h_j\}_1^k}^{j \neq j_1, \dots, j_\ell}} F(x) =$$

$$\begin{aligned}
&= F(x + H_{\{h_j\}_1^k}) + \sum_{\ell=1}^k (-1)^\ell \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_\ell \leq k} F(x + H_{\{h_j\}_1^k}^{j \neq j_1, \dots, j_\ell}) \\
&= F(x + h_1 + \dots + h_k) + \sum_{\ell=1}^k (-1)^\ell \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_\ell \leq k} F(x + h_{j_1} + \dots + h_{j_\ell})
\end{aligned} \tag{12}$$

Η απόδειξη της Πρότασης 1 ολοκληρώνεται.

Στην ανωτέρω πρόταση δώσαμε την γενική μορφή της  $k$  – διαδοχικής διαφοράς ενός τελεστή. Με τον συμβολισμό που εισαγάγαμε στην απόδειξη της πρότασης, είδαμε ότι η σχέση (8) μπορεί να γραφεί στην μορφή:

$$\Delta_{h_k h_{k-1} \dots h_1}^{(k)} F(x) = F(x + H_{\{h_j\}_1^k}) + \sum_{\ell=1}^k (-1)^\ell \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_\ell \leq k} F(x + H_{\{h_j\}_1^k}^{j \neq j_1, \dots, j_\ell}). \tag{13}$$

Αρκετές φορές είναι χρήσιμο για τους χειρισμούς, ο πρώτος όρος του δεξιά μέλους της Εξ. (13) να ενσωματωθεί εντός του αθροίσματος. Για αυτό το λόγω μπορούμε να γράφουμε:

$$\Delta_{h_k h_{k-1} \dots h_1}^{(k)} F(x) = \sum_{\ell=0}^k (-1)^\ell \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_{k-\ell} \leq k} S_{H_{\{h_j\}_1^k}^{j \neq j_1, \dots, j_\ell}} F(x), \tag{14}$$

εννοώντας πως όταν το  $\ell = 0$ :

$$\sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_{k-\ell} \leq k} S_{H_{\{h_j\}_1^k}^{j \neq j_1, \dots, j_\ell}} F(x) = F(x + H_{\{h_j\}_1^k}).$$

### Polarization formula

Έστω το  $k$  – ομογενές πολυώνυμο,  $P : X \rightarrow Y$ , το οποίο παράγεται από την  $k$  – γραμμική μορφή  $p_k$ :

$$P(x) = p_k x^{\{k\}}.$$

Θα αποδείξουμε τώρα ότι είναι επίσης δυνατόν να «ανακτήσουμε» την συμμετρική  $k$  – γραμμική μορφή  $p_k$  μέσω του πολωνύμου  $P(\bullet)$ .

**Θεώρημα 4 [Polarization formula]:** Για το  $k$  – ομογενές πολυώνυμο,  $P : X \rightarrow Y$ , ισχύει η ακόλουθη ταυτότητα:

$$p_k(h_1, \dots, h_k) = \frac{1}{k!} \Delta_{h_k h_{k-1} \dots h_1}^{(k)} P(x), \quad \forall (h_j)_1^k \in X, \quad \forall x \in X. \quad \blacksquare \tag{15}$$

*Απόδειξη:* Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή. Έστω ομογενές πολυώνυμο  $P$ , βαθμού  $k$ . Για  $k = 1$ , χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 1, μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned}
\Delta_h P(x) &= P(x + h) - P(x) = \sum_{j=0}^1 \binom{1}{j} p_1(x^{\{1-j\}}, h^{\{j\}}) - p_1 x = \\
&= p_1 h.
\end{aligned}$$

Συνεπώς για  $k = 1$ , η σχέση:

$$\Delta_{h_k h_{k-1} \dots h_1}^{(k)} P(x) = k! p_k(h_1, \dots, h_k), \text{ ισχύει.}$$

Έστω ότι η ανωτέρω σχέση ισχύει για  $k$  (γενικό). Αν  $P$  είναι ομογενές πολυώνυμο βαθμού  $k+1$ , τότε η  $(k+1)$ -τάξης διαφορά του, με χρήση του Θεωρήματος 1 γράφεται:

$$\begin{aligned} \Delta_{h_{k+1}h_{k-1}\dots h_1}^{(k+1)} P(x) &= \Delta_{h_k h_{k-1} \dots h_1}^{(k)} \Delta_{h_{k+1}} P(x) = \\ &= \Delta_{h_k h_{k-1} \dots h_1}^{(k)} (P(x+h_{k+1}) - P(x)) = \\ &= \Delta_{h_k h_{k-1} \dots h_1}^{(k)} \left( \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} p_{k+1}(x^{\{k+1-j\}}, h_{k+1}^{\{j\}}) - p_{k+1} x^{\{k+1\}} \right) = \\ &\quad \text{[Αποσπούμε τον πρώτο και δεύτερο όρο από το άθροισμα]} \\ &= \Delta_{h_k h_{k-1} \dots h_1}^{(k)} \left( (k+1) p_{k+1}(x^{\{k\}}, h_{k+1}) + \sum_{j=2}^{k+1} \binom{k+1}{j} p_{k+1}(x^{\{k+1-j\}}, h_{k+1}^{\{j\}}) \right). \end{aligned}$$

Στην ανωτέρω σχέση ο όρος:  $p_{k+1}(x^{\{k\}}, h_{k+1})$ , είναι πολυώνυμο βαθμού  $k$ , ενώ το άθροισμα που εμφανίζεται, είναι πολυώνυμο βαθμού  $k-1$  [το επιχείρημα αυτού του συμπεράσματος έχει επεξηγηθεί στην απόδειξη του Θεωρήματος 3].

Κατά συνέπεια, έχουμε ότι:

$$(k+1) \Delta_{h_k h_{k-1} \dots h_1}^{(k)} p_{k+1}(x^{\{k\}}, h^{\{1\}}) = (k+1) k! p_{k+1}(h_1, \dots, h_{k+1}),$$

λόγω της επαγωγικής υπόθεσης και

$$\Delta_{h_k h_{k-1} \dots h_1}^{(k)} \sum_{j=2}^{k+1} \binom{k+1}{j} p_{k+1}(x^{\{k+1-j\}}, h^{\{j\}}) = 0,$$

λόγω του Θεωρήματος 3.

Τελικώς συμπεραίνουμε ότι:

$$\begin{aligned} \Delta_{h_{k+1}h_{k-1}\dots h_1}^{(k+1)} P(x) &= (k+1)k! p_{k+1}(h_1, \dots, h_{k+1}) = \\ &= (k+1)! p_{k+1}(h_1, \dots, h_{k+1}), \quad \forall x, (h_j)_1^k \in X. \end{aligned}$$

Η απόδειξη της Θεωρήματος 4 ολοκληρώνεται.

**Παρατήρηση 1:** Βάση του αποτελέσματος της Πρότασης 2 και της Εξ. (5), η polarization formula μπορεί να γραφεί εναλλακτικά ως:

$$\begin{aligned} k! p_k(h_1, \dots, h_k) &= \Delta_{h_k h_{k-1} \dots h_1}^{(k)} P(x) = \\ &= (-1)^k P(x) + \sum_{\ell=1}^k (-1)^{k-\ell} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_\ell \leq k} P(x + h_{j_1} + \dots + h_{j_\ell}). \end{aligned} \quad (16)$$

Επιπροσθέτως από το θεώρημα 2 και την polarization formula μπορούμε να εξάγουμε τα παρακάτω αποτελέσματα.

**Πρόταση 2 [Μοναδικότητα της αναπαράστασης μη ομογενούς πολυωνύμου]:** Αν  $P$  είναι μη ομογενές πολυώνυμο βαθμού το  $k$ , τότε υπάρχουν  $j$ -ομογενή πολυώνυμα  $(P_j)_1^k$  τέτοια ώστε:

$$P(x) = P_0(x) + \dots + P_k(x),$$

όπου κάθε  $P_j$  προσδιορίζεται κατά μοναδικό τρόπο. ■

*Απόδειξη:* Η απόδειξη της πρότασης θα γίνει με επαγωγή. Το πολυώνυμο μηδενικού βαθμού  $P_0$  που εμφανίζεται σε κάθε μη ομογενές πολυώνυμο είναι σταθερά μοναδική. Υποθέτοντας ότι το ομογενές πολυώνυμο βαθμού  $k - 1$  που εμφανίζεται στο μη ομογενές πολυώνυμο  $P$  είναι μοναδικό, θα δείξουμε ότι το  $k$  ομογενές πολυώνυμο είναι μοναδικό. Αν γνωρίζουμε τον  $P(\bullet)$  μπορούμε να υπολογίσουμε κατά μοναδικό τρόπο την  $k$ -γραμμική απεικόνιση  $p_k$  μέσω της polarization formula. Κατά συνέπεια μπορούμε να προσδιορίσουμε το ομογενές πολυώνυμο  $P_k$ . Τέλος έχουμε ότι το πολυώνυμο  $(P - P_k)$  είναι πολυώνυμο βαθμού  $k - 1$  και μπορούμε να εφαρμόσουμε σε αυτό την επαγωγική υπόθεση. Τότε το ομογενές πολυώνυμο  $P_k$  είναι μοναδικό.

Η απόδειξη της Πρότασης 2 ολοκληρώνεται.

**Πρόταση 3:** Η συμμετρική  $k$ -γραμμική απεικόνιση  $p_k$  που παράγει το ομογενές πολυώνυμο  $P : X \rightarrow Y$  βαθμού  $k$ , είναι μοναδική.

*Απόδειξη:* Από την polarization formula ( Εξ.(9) ) έχουμε:

$$p_k(h_1, \dots, h_k) = \frac{1}{k!} \Delta_{h_k h_{k-1} \dots h_1}^{(k)} P(x), \quad \forall (h_j)_1^k \in X, \quad \forall x \in X$$

Το αριστερά μέλος της ανωτέρω εξίσωσης είναι ανεξάρτητο του  $x \in X$ . Η συμμετρική,  $k$ -γραμμική μορφή  $p_k$  εξαρτάται μόνο από το  $k$ -ομογενές πολυώνυμο  $P$ .

Η απόδειξη της Πρότασης 3 ολοκληρώνεται.

### Γινόμενο Πολυωνύμων σε γραμμικούς χώρους

Θέλουμε να ορίσουμε το γινόμενο δύο πολυωνύμων  $P, G : X \rightarrow Y$  στον χώρο εικόνας  $Y$ . Για να είναι εφικτό αυτό χρειαζόμαστε ο χώρος  $Y$  να έχει δομή γραμμικής αντιμεταθετικής άλγεβρας. Ορίζουμε λοιπόν, στον γραμμικό χώρο  $(Y, \mathbb{K}, +, \bullet)$ , την εσωτερική πράξη:

$$\bullet : Y \times Y \rightarrow Y$$

με ιδιότητες:  $\forall y, y_1, y_2 \in Y, \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}$

$$y_1 \bullet y_2 = y_2 \bullet y_1, \quad (\text{commutative}) \quad (\text{αντιμεταθετική})$$

$$y \bullet (y_1 + y_2) = (y \bullet y_1) + (y \bullet y_2), \quad (\text{distributive}) \quad (\text{επιμεριστική})$$

$$\alpha(y_1 \bullet y_2) = y_1(\alpha \bullet y_2). \quad (\text{associative}) \quad (\text{προσεταιριστική})$$

Με αυτόν τον τρόπο λαμβάνουμε τον χώρο  $(Y, \mathbb{K}, +, \bullet, \bullet)$  ο οποίος αποτελεί γραμμική αντιμεταθετική άλγεβρα (commutative linear algebra).

**Ορισμός 2 [Γινόμενο πολυωνύμων]:** Έστω  $P : X \rightarrow Y, G : X \rightarrow Y$  ομογενή πολυώνυμα. Ορίζουμε γινόμενο των πολυωνύμων  $P, G$  ως:

$$(P \bullet G) : x \mapsto P(x) \bullet G(x), \quad \forall x \in X. \quad \blacksquare$$



**Πρόταση 4 [Βαθμός γινομένου δύο ομογενών πολυωνύμων]:** Το γινόμενο δύο ομογενών πολυωνύμων βαθμού  $k$  και  $r$  αντιστοίχως, αποτελεί ομογενές πολυώνυμο βαθμού  $k + r$ .

*Απόδειξη:* Έστω  $P, G : X \rightarrow Y$   $k$ -ομογενές και  $r$ -ομογενές πολυώνυμο. Θεωρούμε  $p_k$  και  $g_r$  τις πολυγραμμικές μορφές από τις οποίες παράγονται τα πολυώνυμα  $P, G$  αντιστοίχως:

$$P(x) = p_k x^{\{k\}} \text{ και } G(x) = g_r x^{\{r\}}.$$

Βάση του Ορισμού 2 ανωτέρω, ορίζουμε την απεικόνιση  $pg : X^{k+r} \rightarrow Y$  ως:

$$pg(x_1, \dots, x_{k+r}) = p_k(x_1, \dots, x_k) \bullet g_r(x_{k+1}, \dots, x_{k+r}).$$

Έστω ότι  $i \leq k$  και σύνολο σταθερών  $\{c_j\}$ , όπου  $c_j \in X$  για  $j \neq i$ . Τότε:

$$\begin{aligned} pg(c_1, \dots, x_i + ay_i, \dots, c_{k+r}) &= p_k(c_1, \dots, x_i + ay_i, \dots, c_{k+r}) \bullet g_r(x_{k+1}, \dots, x_{k+r}) \\ &= \left( p_k(c_1, \dots, x_i, \dots, c_{k+r}) + ap_k(c_1, \dots, y_i, \dots, c_{k+r}) \right) \bullet g_r(x_{k+1}, \dots, x_{k+r}) \\ &= \left( p_k(c_1, \dots, x_i, \dots, c_{k+r}) \bullet g_r(x_{k+1}, \dots, x_{k+r}) \right) + \\ &\quad + a \left( p_k(c_1, \dots, y_i, \dots, c_{k+r}) \bullet g_r(x_{k+1}, \dots, x_{k+r}) \right) \\ &= pg(c_1, \dots, x_i, \dots, c_{k+r}) + a pg(c_1, \dots, y_i, \dots, c_{k+r}). \end{aligned}$$

Στην περίπτωση όπου  $i > k$ , αναλογικά καταλήγουμε στο ίδιο συμπέρασμα. Τέλος έχουμε ότι  $pg : X^{k+r} \rightarrow Y$  είναι  $(k+r)$ -γραμμική απεικόνιση:

$$pg_{k+r} x^{\{k+r\}} = P(x) \bullet G(x)$$

Άρα υπάρχει ομογενές πολυώνυμο  $PG : X \rightarrow K$ , βαθμού  $(k+r)$ , τέτοιο ώστε:

$$PG(x) = pg_{k+r} x^{\{k+r\}} \equiv P(x) \bullet G(x).$$

Η απόδειξη της πρότασης 4 ολοκληρώνεται.

### 2.3 Συνέχεια πολυγραμμικών μορφών και πολυωνύμων

Με στόχο να μιλήσουμε για την συνέχεια των πολυωνύμων χρειαζόμαστε να εισάγουμε την έννοια της εγγύτητας. Για αυτό οι χώροι ορισμού και εικόνας των πολυωνύμων  $X, Y$  πρέπει να είναι νορμικοί γραμμικοί χώροι. Εφοδιάζουμε τους χώρους με νόρμα και λαμβάνουμε το ζεύγος χώρων:  $(X, \mathbb{K}, +, \cdot, \|\cdot\|_X)$ ,  $(Y, \mathbb{K}, +, \cdot, \|\cdot\|_Y)$ . Για τον χώρο  $Y$  θέλουμε η εσωτερική πράξη του γινομένου να είναι συνεχής:  $\forall y_1, y_2 \in Y$

$$\|y_1 \bullet y_2\| \leq \|y_1\| \|y_2\|.$$

Υπενθυμίζουμε τον γενικό ορισμό της συνέχειας κατά σημείο:

**Ορισμός 1 [Συνέχεια κατά σημείο]:** Μια απεικόνιση  $f : X \rightarrow Y$  είναι συνεχής στο σημείο  $x_0 \in X$  αν:

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0) (x \in X \wedge \|x - x_0\|_X < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\|_Y \leq \varepsilon). \blacksquare$$

Υπενθυμίζουμε το βασικό θεώρημα για συνεχείς γραμμικές απεικονίσεις:

**Θεώρημα:** Έστω η γραμμική απεικόνιση  $f : X \rightarrow Y$ . Οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

α) Η απεικόνιση  $f$  είναι συνεχής παντού στον χώρο  $X$ .

β) Η απεικόνιση  $f$  είναι συνεχής στο  $\theta_X$ .

γ)  $\|f(x)\|$  είναι φραγμένη στη μοναδιαία μπάλα  $\|x\| \leq 1$ . ■

Η απόδειξη του ανωτέρου Θεωρήματος μπορεί να ευρεθεί στο βιβλίο του H. Cartan (Differential Calculus, 1971), βλ. σελ. 13.

Σημειώνουμε ότι η νόρμα της πολυγραμμικής μορφής  $f : X^k \rightarrow Y$ , ορίζεται ως:

$$\|f\| := \sup \{ \|f(x_1, \dots, x_k)\| : \|x_j\| \leq 1, \forall 1 \leq j \leq k \}.$$

#### Συνέχεια πολυγραμμικών μορφών:

Το Θεώρημα 1 που ακολουθεί, αποτελεί την γενίκευση του Θεωρήματος ανωτέρω στην περίπτωση των πολυγραμμικών απεικονίσεων.

**Θεώρημα 1:** Έστω  $k$ -γραμμική απεικόνιση  $f : X^k \rightarrow Y$ . Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

α) Η απεικόνιση  $f$  είναι συνεχής παντού στον χώρο  $X^k$ .

β) Η απεικόνιση  $f$  είναι συνεχής στο  $\theta_{X^k}$ .

γ)  $\|f(x_1, \dots, x_k)\|$  είναι φραγμένη στο καρτεσιανό γινόμενο των μοναδιαίων μπαλών:

$$\|x_1\| < 1, \dots, \|x_k\| < 1. \quad \blacksquare$$

*Απόδειξη:* Η συνεπαγωγή ( $\alpha \Rightarrow \beta$ ) είναι προφανής. Θεωρώντας δεδομένο ότι ισχύει το  $\beta$ , θα αποδείξουμε το  $\gamma$ , δηλαδή την συνεπαγωγή ( $\beta \Rightarrow \gamma$ ). Αν η απεικόνιση  $f$  είναι συνεχής στο σημείο  $\theta_{X^k}$ , τότε η αντίστροφη εικόνα  $f^{-1}$  της μοναδιαίας μπάλας είναι μια γειτονιά του μηδενός στον χώρο  $X^k$ . Λόγω αυτού υπάρχει  $\rho > 0$ , τέτοιο ώστε:

$$\left( \|x_j\| < \rho, \forall j \in 1(1)k \right) \Rightarrow \|f(x_1, \dots, x_k)\| \leq 1$$

Επιλέγοντας  $y_j := \rho x_j$ , έχουμε:

$$\|\rho x_j\| = |\rho| \|x_j\| \leq 1 \Rightarrow \|x_j\| \leq \frac{1}{\rho}.$$

Τότε, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της ομογένειας, λαμβάνουμε:

$$\|f(y_1, \dots, y_k)\| = \left| \prod_{j=1}^k \rho \right| \|f(x_1, \dots, x_k)\| \leq 1,$$

συνεπώς:

$$\left( \|x_j\| < 1, \forall j \in 1(1)k \right) \Rightarrow \|f(x_1, \dots, x_k)\| \leq \rho^{-k},$$

και αποδείξαμε ότι η απεικόνιση  $f$  είναι φραγμένη.

Τώρα θα δείξουμε την συνεπαγωγή ( $\gamma \Rightarrow \alpha$ ). Ισχύοντος  $\gamma$ , έστω  $M > 0$ , τέτοιο ώστε:

$$\left( \|x_j\| < 1, \forall j \in 1(1)k \right) \Rightarrow \|f(x_1, \dots, x_k)\| \leq M.$$

Επιλέγοντας  $y_j = \rho_j^{-1} x_j$  και  $\rho_j = \|x_j\|$ , έχουμε:

$$\left( \|y_j\| = 1, \forall j \in 1(1)k \right) \Rightarrow \|f(x_1, \dots, x_k)\| = \left| \prod_{j=1}^k \rho_j^{-1} \right| \|f(y_1, \dots, y_k)\| \leq M,$$

δηλαδή (λόγω ομογένειας):

$$\|f(y_1, \dots, y_k)\| \leq M \left| \prod_{j=1}^k \rho_j \right| = M \prod_{j=1}^k \|x_j\|.$$

Έστω η διγραμμική απεικόνιση  $g : X^2 \rightarrow Y$ . Παρατηρούμε ότι:

$$g(x_1, x_2) - g(a_1, a_2) = g(x_1 - a_1, x_2) + g(a_1, x_2 - a_2).$$

Βάση της ανωτέρω παρατήρησης μπορούμε να γράψουμε την διαφορά:

$$\Delta := f(x_1, \dots, x_k) - f(a_1, \dots, a_k),$$

με τον εξής τρόπο:

$$\begin{aligned} \Delta = f(x_1 - a_1, x_2, \dots, x_k) + f(a_1, x_2 - a_2, x_3, \dots, x_k) + \dots \\ \dots + f(a_1, \dots, a_{k-1}, x_k - a_k). \end{aligned}$$

Λαμβάνοντας την νόρμα της διαφοράς  $\Delta$  και χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \|f(x_1, \dots, x_k) - f(a_1, \dots, a_k)\| \leq M \|x_1 - a_1\| \|x_2\| \dots \|x_k\| + \dots \\ \dots + M \|a_1\| \dots \|a_{k-1}\| \|x_k - a_k\| \end{aligned} \quad (1)$$

Υποθέτουμε ότι υπάρχει  $\varepsilon > 0$ , τέτοιο ώστε:

$$\|x_j - a_j\| \leq \varepsilon, \quad 1 \leq j \leq k,$$

και έχουμε ότι:  $\|x_j\| \leq \|a_j\| + \varepsilon$ . Τότε υπάρχει  $M_1 > 0$ , τέτοιο ώστε:

$$\left( \|x_j - a_j\| \leq \varepsilon, \quad 1 \leq j \leq k \right) \Rightarrow \|x_j\| \leq M_1, \quad 1 \leq j \leq k.$$

Από την ανωτέρω ανισότητα (1), έχουμε ότι:

$$\|f(x_1, \dots, x_k) - f(a_1, \dots, a_k)\| \leq M M_1^{k-1} \sum_{j=1}^k \|x_j - a_j\| \leq k M M_1^{k-1} \varepsilon.$$

Η σταθερά  $M_1$  μπορεί να επιλεγεί ανεξάρτητα του  $\varepsilon$ , συνεπώς εισάγοντας  $M_1 = (k M)^{-1/(k-1)}$ , λαμβάνουμε:

$$\|f(x_1, \dots, x_k) - f(a_1, \dots, a_k)\| \leq \varepsilon.$$

Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι η  $f(x_1, \dots, x_k)$  τείνει στην  $f(a_1, \dots, a_k)$ , όταν το  $x_j$  τείνει στο  $a_j$ , για κάθε  $j$ ,  $1 \leq j \leq k$ , ταυτόχρονα. Άρα αποδείξαμε ότι η  $k$ -γραμμική απεικόνιση  $f$  είναι συνεχής σε κάθε σημείο  $x \in X^k$ . Συνοψίζοντας, έχουμε:  $\alpha \Rightarrow \beta \Rightarrow \gamma \Rightarrow \alpha$ .

Η απόδειξη του Θεωρήματος 1 ολοκληρώνεται.

## Συνέχεια πολυωνύμων

**Θεώρημα 2:** Έστω μη ομογενές πολυώνυμο  $P : X \rightarrow Y$ , βαθμού  $k$ .

$$Px := P_0 + P_1 x + P_2 x + \dots + P_k x = P_0 + p_1 x + p_2 x^{\{2\}} + \dots + p_k x^{\{k\}},$$

όπου  $p_r : X^r \rightarrow Y$ ,  $r = 1(1)k$ , οι  $r$ -γραμμικές μορφές που παράγουν τα επιμέρους ομογενή πολυώνυμα, τα οποία ορίζουν το μη ομογενές πολυώνυμο  $P$ . Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

α) Το πολυώνυμο  $P$ , είναι συνεχές στο  $\theta_X$ .

β) Το πολυώνυμο  $P$ , είναι συνεχές παντού στον χώρο  $X$ .

γ) Οι  $r$ -γραμμικές μορφές  $p_r(\cdot)$  είναι συνεχείς στον χώρο  $X^r$ . ■

*Απόδειξη:* Με δεδομένο το α θα δείξουμε ότι ισχύει η συνεπαγωγή ( $\alpha \Rightarrow \gamma$ ). Έχουμε αποδείξει στο εδάφιο 2.2, Θεώρημα 4, ότι η σχέση που συνδέει το πολυώνυμο με την πολυγραμμική μορφή από την οποία παράγεται (Polarization formula), μπορεί να γραφεί στην μορφή:

$$p_r(h_1, \dots, h_r) = \frac{1}{r!} \sum_{\ell=0}^r (-1)^\ell \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_\ell \leq r} P(x + h_{j_1} + \dots + h_{j_\ell}), \quad \forall x \in X, \quad \forall h_1, \dots, h_r \in X$$

Μπορούμε, στην ανωτέρω έκφραση, να θέσουμε  $x = \theta$ . Τότε:

$$p_r(h_1, \dots, h_r) = \frac{1}{r!} \sum_{\ell=0}^r (-1)^\ell \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_\ell \leq r} P(h_{j_1} + \dots + h_{j_\ell}), \quad \forall h_1, \dots, h_r \in X \quad (2)$$

Εφόσον υποθέσαμε ότι το πολυώνυμο  $P$  είναι συνεχές στο σημείο  $\theta_X$ , η  $r$ -γραμμική μορφή  $p_r$ , βάση της Εξ. (2), είναι άθροισμα συνεχών συναρτήσεων άρα συνεχής. Από το Θεώρημα 1 γνωρίζουμε ότι αν μια πολυγραμμική μορφή είναι συνεχής στο μηδέν συνεπάγεται η συνέχεια της σε όλο τον χώρο  $X^r$ . Συνεπώς το πολυώνυμο που παράγει είναι συνεχής συνάρτηση σε όλο το χώρο  $X^r$ .

Η συνεπαγωγή ( $\gamma \Rightarrow \beta$ ) έπεται απευθείας από το Θεώρημα 1 καθώς κάθε μη ομογενές πολυώνυμο μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα ομογενών. Το καθένα εξ αυτών των ομογενών πολυωνύμων παράγεται μέσω μιας συμμετρικής πολυγραμμικής μορφής. Εφόσον υποθέτουμε ότι κάθε πολυγραμμική μορφή είναι συνεχής συνάρτηση, το άθροισμά τους είναι και αυτό συνεχής συνάρτηση. Τέλος από το Θεώρημα 1, κατά προφανή τρόπο, ισχύει και η συνεπαγωγή ( $\beta \Rightarrow \alpha$ ).

Η απόδειξη του Θεωρήματος 2 ολοκληρώνεται.

## 2.4 Κριτήριο πολυωνυμικής απεικόνισης

Σε αυτό το σημείο είμαστε έτοιμοι να παρουσιάσουμε ένα κριτήριο με στόχο να μπορούμε να καθορίζουμε την πολυωνυμική φύση ή όχι, μιας γενικής απεικόνισης  $F : X \rightarrow Y$ . Για να μπορέσουμε να το επιτύχουμε, η αλγεβρική δομή των γραμμικών χώρων δεν επαρκεί. Θεωρούμε ότι οι χώροι  $X, Y$  είναι πλήρεις νορμικοί χώροι και η απεικόνιση  $F : X \rightarrow Y$ , είναι συνεχής. Πριν περάσουμε στην διατύπωση του κριτηρίου, υπενθυμίζουμε ένα κλασικό αποτέλεσμα της ανάλυσης σε χώρους Banach το οποίο θα χρησιμοποιήσουμε στην συνέχεια.

**Κριτήριο 1 [Γραμμική απεικόνιση σε χώρο Banach]:** Έστω  $X, Y$  πλήρεις νορμικοί χώροι και η απεικόνιση  $F : X \rightarrow Y$ . Αν η απεικόνιση  $F$  είναι προσθετική και συνεχής, τότε η απεικόνιση  $F$  είναι γραμμική. ■

*Απόδειξη:* Για να έχουμε γραμμική απεικόνιση, πρέπει να αποδείξουμε ότι ισχύει:

$$F(\lambda x) = \lambda F(x), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Αρχικά παρατηρούμε ότι, θέτοντας  $x = 0_X$ , έχουμε:

$$F(0) = F(0 + 0) = 2F(0) \Rightarrow F(0) = 0_Y \quad (1)$$

Βάση του ανωτέρου, έχουμε:

$$F(0) = F(x - x) = F(x) + F(-x) \Rightarrow F(-x) = -F(x) \quad (2)$$

Λόγω της (δεδομένης) προσθετικότητας,  $\forall \rho \in \mathbb{N}$  και  $\forall x \in X$ , έχουμε:

$$F(\rho x) = F((\rho-1)x + x) = F((\rho-1)x) + F(x)$$

Με επανειλημμένη εφαρμογή της ανωτέρω, και χρήση της Εξ. (1), βρίσκουμε

$$\begin{aligned} F(\rho x) &= F((\rho-1)x) + F(x) = \\ &= F((\rho-2)x) + 2F(x) = \dots = F((\rho-\rho)x) + \rho F(x) = \rho F(x) \end{aligned}$$

δηλαδή,

$$(\forall \rho \in \mathbb{N}) (\forall x \in X) \quad F(\rho x) = \rho F(x). \quad (3)$$

Βάση της ανωτέρω σχέσης, και δεδομένου ότι  $x/\rho \in X$ , ισχύει ότι:

$$F(x) = F(\rho(x/\rho)) = \rho F((1/\rho)x),$$

συνεπώς:

$$(\forall \rho \in \mathbb{N}) (\forall x \in X) \quad F((1/\rho)x) = \frac{1}{\rho} F(x). \quad (4)$$

Δεδομένης της Εξ. (2), για τις σχέσεις (3) και (4), έχουμε:

$$F(\rho(-x)) = -\rho F(x) \quad (5)$$

και

$$F((1/\rho)(-x)) = -\frac{1}{\rho} F(x). \quad (6)$$

Βάση των Εξισώσεων (2), (3), (5) και (6), ισχύει ότι:

$$(\forall \rho \in \mathbb{Z}) (\forall x \in X) \quad F(\rho x) = \rho F(x) \quad (7)$$

$$(\forall \rho \in \mathbb{Z}) (\forall x \in X) \quad F((1/\rho)x) = \frac{1}{\rho} F(x) \quad (8)$$

Επιπλέον,  $\forall \rho \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ , δηλαδή,  $\rho = n/m$  όπου  $n < m$  και  $n, m \in \mathbb{Z}$ , χρησιμοποιώντας την Εξ. (7) και (8), έχουμε:

$$F(\rho x) = F(n(x/m)) = \frac{n}{m} F(x).$$

Συνεπώς ισχύει ότι:

$$(\forall \rho \in \mathbb{Q}) (\forall x \in X) \quad F(\rho x) = \rho F(x). \quad (9)$$

Τέλος μένει να δείξουμε ότι:

$$(\forall \alpha \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})) (\forall x \in X) \quad F(\alpha x) = \alpha F(x).$$

Θα χρησιμοποιήσουμε την συνέχεια της απεικόνισης  $F$ . Έστω  $\rho \in \mathbb{Q}$ , τότε  $\forall \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ , τέτοιο ώστε  $\alpha x \in B(\rho x, \delta)$ , ισχύει:

$$\|F(\alpha x) - F(\rho x)\|_Y \leq \varepsilon.$$

Χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα, έχουμε:

$$\begin{aligned} \|F(\alpha x) - \alpha F(x)\|_Y &\leq \|F(\rho x) - \alpha F(x)\|_Y + \|F(\alpha x) - F(\rho x)\|_Y \\ &\leq \|F(x)\|_Y |\alpha - \rho| + \varepsilon \leq \varepsilon (\|F(x)\|_Y + 1). \end{aligned}$$

Συνεπώς, ισχύει ότι:

$$F(\lambda x) = \lambda F(x), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Η απόδειξη του Κριτηρίου 1 ολοκληρώνεται.

**Κριτήριο 2 [Πολυωνυμική απεικόνιση]:** Έστω  $X, Y$  πλήρεις νορμικοί χώροι και η συνεχής απεικόνιση  $F : X \rightarrow Y$ . Η απεικόνιση  $F$  είναι πολυώνυμο βαθμού  $k$  αν και μόνο αν η  $k+1$  διαδοχική διαφορά της ισούται με μηδέν και η  $k$  διαφορά της ισούται με σταθερά διάφορη του μηδενός. ■

*Απόδειξη:* Έστω ότι η  $(k+1)$ -τάξης διαφορά του τελεστή  $F$  ισούται με μηδέν και η  $k$ -τάξης διαφορά της ισούται με σταθερά, έστω  $c \neq 0$ . Η σταθερά αυτή είναι ανεξάρτητη του σημείου  $x \in X$  στο οποίο υπολογίζεται η  $k$ -τάξης διαφορά και εξαρτημένη από την επιλογή των μετατοπίσεων  $h_j$  στις οποίες λαμβάνονται διαδοχικά οι  $k$  αυτές διαφορές. Συνεπώς η σταθερά αυτή, εφόσον οι μετατοπίσεις είναι στοιχεία του χώρου  $X$ , μπορεί να θεωρηθεί ως μια απεικόνιση  $c : X^k \rightarrow Y$ .

Έχουμε τα ακόλουθα δεδομένα:

$$\Delta_{h_k h_{k-1} \dots h_1}^{(k)} F(x) = c(h_1, h_2, \dots, h_k), \quad \forall x \in X, \quad \forall (h_j)_1^k \in X \quad (17)$$

$$\Delta_{h_{k+1} h_k \dots h_1}^{(k+1)} F(x) = 0, \quad \forall x \in X, \quad \forall (h_j)_1^k \in X \quad (18)$$

Το πρώτο βήμα είναι να ελέγξουμε εάν η απεικόνιση  $c : X^k \rightarrow Y$  είναι  $k$ -γραμμική. Τότε μέσω της polarization formula θα μπορούμε να συσχετίσουμε το ομογενές παραγόμενο πολυώνυμο εκ της πολυγραμμικής μορφής με τον τελεστή  $F$ .

Εάν η απεικόνιση  $c : X^k \rightarrow Y$  είναι  $k$ -γραμμική, τότε θα είναι προσθετική και ομογενής βαθμού ένα ως προς την κάθε συνιστώσα της. Εφόσον οι Εξ. (17) και (18) ισχύουν για κάθε  $x \in X$ , μπορούμε να θέσουμε  $x = 0_X$ . Από τον ορισμό των διαφορών  $k$ -τάξης έχουμε ότι:

$$\Delta_{h_k h_{k-1} \dots h_1}^{(k)} F(x) = \Delta_{h_k} \Delta_{h_{k-1}} \dots \Delta_{h_1} F(x) \equiv \Delta_{h_k h_{k-1} \dots h_2}^{(k-1)} (\Delta_{h_1} F(x)),$$

δηλαδή:

$$\begin{aligned}\Delta_{h_k h_{k-1} \dots h_1}^{(k)} F(x) &= \Delta_{h_k h_{k-1} \dots h_2}^{(k-1)} (F(x+h_1) - F(x)) = \\ &= \Delta_{h_k h_{k-1} \dots h_2}^{(k-1)} F(x+h_1) - \Delta_{h_k h_{k-1} \dots h_2}^{(k-1)} F(x)\end{aligned}\quad (19)$$

Αντικαθιστούμε τώρα, στην Εξ (17), έχοντας θέσει  $x = 0_X$ , το  $h_1 \in X$  με  $h_1 + \alpha \in X$ :

$$c(h_1 + \alpha, h_2, \dots, h_k) = \Delta_{h_k h_{k-1} \dots (h_1 + \alpha)}^{(k)} F(0), \quad \forall (h_j)_1^k \in X.$$

Χρησιμοποιώντας την Εξ. (19), η ανωτέρω σχέση γράφεται:

$$c(h_1 + \alpha, h_2, \dots, h_k) = \Delta_{h_k h_{k-1} \dots h_2}^{(k-1)} F(h_1 + \alpha) - \Delta_{h_k h_{k-1} \dots h_2}^{(k-1)} F(0), \quad \forall (h_j)_1^k \in X \quad (20)$$

Σε αυτό το σημείο θα χρησιμοποιήσουμε το δεύτερο δεδομένο μας, δηλαδή την Εξ. (18):

$$\Delta_{h_{k+1} h_k \dots h_1}^{(k+1)} F(0) = 0, \quad \forall (h_j)_1^k \in X$$

Λόγω του ότι η  $k$ -τάξης διαφορά ενός τελεστή δεν εξαρτάται από την σειρά με την οποία εφαρμόζονται οι τελεστές διαφοράς σε αυτόν, έχουμε:

[Αποσπούμε από την  $(k+1)$ -τάξης διαφορά την  $k+1$  διαφορά που λαμβάνεται στο  $h_{k+1}$  και την εφαρμόζουμε πρώτη στον τελεστή  $F$ ]

$$\begin{aligned}\Delta_{h_{k+1} h_k \dots h_1}^{(k+1)} F(0) &= \Delta_{h_{k+1}} \Delta_{h_k \dots h_1}^{(k)} F(0) \equiv \Delta_{h_k \dots h_1}^{(k)} \Delta_{h_{k+1}} F(0) = \\ &= \Delta_{h_k \dots h_1}^{(k)} (F(h_{k+1}) - F(0)) =\end{aligned}$$

[Αποσπούμε από την  $k$ -τάξης διαφορά την πρώτη διαφορά που λαμβάνεται στο  $h_1$  και την εφαρμόζουμε στην ποσότητα  $F(h_{k+1})$ ]

$$\begin{aligned}&= \Delta_{h_k h_{k-1} \dots h_2}^{(k-1)} \Delta_{h_1} F(h_{k+1}) - \Delta_{h_k \dots h_1}^{(k)} F(0) = \\ &= \Delta_{h_k h_{k-1} \dots h_2}^{(k-1)} F(h_{k+1} + h_1) - \Delta_{h_k h_{k-1} \dots h_2}^{(k-1)} F(h_{k+1}) - \Delta_{h_k \dots h_1}^{(k)} F(0).\end{aligned}$$

Η Εξ. (18) μπορεί πλέον να γραφεί στη μορφή:

$$\Delta_{h_k h_{k-1} \dots h_2}^{(k-1)} F(h_{k+1} + h_1) = \Delta_{h_k h_{k-1} \dots h_2}^{(k-1)} F(h_{k+1}) + \Delta_{h_k \dots h_1}^{(k)} F(0), \quad \forall (h_j)_1^k \in X \quad (21)$$

Θέτοντας  $h_{k+1} = \alpha$ , στην Εξ. (21), έχουμε μια έκφραση για την ποσότητα:

$$\Delta_{h_k h_{k-1} \dots h_2}^{(k-1)} F(h_{k+1} + \alpha),$$

και μπορούμε να αντικαταστήσουμε με αυτήν τον πρώτο όρο του δεξιά μέλους της Εξ.(20). Τότε θα πάρουμε:

$$\begin{aligned}c(h_1 + \alpha, h_2, \dots, h_k) &= \Delta_{h_k h_{k-1} \dots h_2}^{(k-1)} F(\alpha) + \Delta_{h_k \dots h_1}^{(k)} F(0) - \Delta_{h_k h_{k-1} \dots h_2}^{(k-1)} F(0), \\ &\quad , \quad \forall (h_j)_1^k \in X.\end{aligned}\quad (22)$$

Εξ ορισμού έχουμε ότι:

$$\Delta_{h_k \dots h_1}^{(k)} F(0) = c(h_1, h_2, \dots, h_k),$$

και

$$\begin{aligned}
\Delta_{h_k h_{k-1} \dots h_2}^{(k-1)} F(\alpha) - \Delta_{h_k h_{k-1} \dots h_2}^{(k-1)} F(0) &= \Delta_{h_k h_{k-1} \dots h_2}^{(k-1)} (F(\alpha) - F(0)) = \\
&= \Delta_{h_k h_{k-1} \dots h_2}^{(k-1)} (\Delta_\alpha F(0)) = \\
&= \Delta_{h_k h_{k-1} \dots h_2}^{(k-1)} F(0) = c(\alpha, h_2, \dots, h_k)
\end{aligned}$$

Συνεπώς, λαμβάνουμε:

$$c(h_1 + \alpha, h_2, \dots, h_k) = c(h_1, h_2, \dots, h_k) + c(\alpha, h_2, \dots, h_k), \quad \forall (h_j)_1^k \in X,$$

Με αυτόν τον τρόπο αποδείξαμε την προσθετικότητα ως προς την πρώτη συνιστώσα. Λόγω του ότι η σύνθεση τελεστών διαφοράς μένει αναλλοίωτη από αναδιατάξεις της σειράς εφαρμογής τους, έπεται απευθείας ότι η απεικόνιση  $c : X^k \rightarrow Y$  είναι συμμετρική και κατ' επέκταση έχοντας δείξει την προσθετικότητα για την πρώτη συνιστώσα, κατά αναλογία ισχύει για όλες.

Το επόμενο βήμα είναι να αποδείξουμε την ομογένεια. Το αποτέλεσμα έπεται με την χρήση του Κριτηρίου 1. Η μερική απεικόνιση  $c_{(j)} : X_j \rightarrow Y$ ,  $1 \leq j \leq k$ :

$$c(d_1, \dots, d_{j-1}, h_j, d_{j+1}, \dots, d_k) = \Delta_{d_{k+1} \dots h_j \dots d_1}^{(k)} F(x), \quad \forall x, h_j \in X,$$

είναι προσθετική και συνεχή λόγω της συνέχειας της απεικόνισης  $F$ . Συνεπώς από το Κριτήριο 1 έπεται ότι είναι γραμμική, πράγμα που σημαίνει αυτομάτως ότι πληροί την ιδιότητα της ομογένειας τάξης ένα. Βάση των ανωτέρω η απεικόνιση  $c$  είναι  $k$ -γραμμική.

Το τελευταίο βήμα της απόδειξης είναι να δείξουμε ότι ο τελεστής  $F$  είναι πολυώνυμο. Η απεικόνιση  $c : X \rightarrow Y$ , ορίζει ένα  $k$ -ομογενές πολυώνυμο, έστω  $P_k : X \rightarrow Y$ :

$$P_k(x) = c_k x^{\{k\}}, \quad \forall x \in X.$$

Από την polarization formula έχουμε ότι:

$$c_k(h_1, \dots, h_k) = \frac{1}{k!} \Delta_{h_k h_{k-1} \dots h_1}^{(k)} P_k(x), \quad \forall x, (h_j)_1^k \in X$$

Από την σχέση (17), μπορούμε να γράψουμε:

$$\Delta_{h_k h_{k-1} \dots h_1}^{(k)} F(x) = \frac{1}{k!} \Delta_{h_k h_{k-1} \dots h_1}^{(k)} P_k(x), \quad \forall x, (h_j)_1^k \in X,$$

δηλαδή:

$$\Delta_{h_k h_{k-1} \dots h_1}^{(k)} \left( F(x) - \frac{1}{k!} P_k(x) \right) = 0, \quad \forall x, (h_j)_1^k \in X. \quad (23)$$

Εφόσον  $c$  είναι συνεχής απεικόνιση το παραγόμενο ομογενές πολυώνυμο  $P$  είναι συνεχές, βλ. εδάφιο 2.3.

Ορίζουμε τώρα την απεικόνιση  $g_1 : X \rightarrow Y$  ως:

$$g_1(x) := F(x) - \frac{1}{k!} P_k(x), \quad \forall x \in X,$$

η οποία είναι συνεχής απεικόνιση ως άθροισμα συνεχών. Η Εξ. (23) γράφεται:

$$\Delta_{h_k h_{k-1} \dots h_1}^{(k)} g_1(x) = 0, \quad \forall x, (h_j)_1^k \in X.$$



Εφόσον η  $k$ -τάξης διαφορά μιας συνεχούς απεικόνισης ισούται με μηδέν, η  $k-1$  διαδοχική διαφορά της ισούται με σταθερά, έστω  $c^{[2]}$ . Η σταθερά αυτή είναι ανεξάρτητη του  $x \in X$  και εξαρτημένη των μετατοπίσεων  $h_j$ ,  $1 \leq j \leq k$ , που λαμβάνονται στις εφαρμογές των διαδοχικών διαφορών. Συνεπώς, έχουμε ότι:

$$\Delta_{h_{k-1} \dots h_1}^{(k-1)} g_1(x) = c^{[2]}(h_1, \dots, h_{k-1}), \quad \forall x, (h_j)_{j=1}^{k-1} \in X.$$

Η απεικόνιση  $c^{[2]} : X^{k-1} \rightarrow Y$ , είναι  $(k-1)$ -γραμμική και παράγει το  $(k-1)$ -ομογενές πολώνυμο, έστω  $P_{k-1} : X \rightarrow Y$ :

$$P_{k-1}(x) = c_{k-1}^{[2]} x^{\{k-1\}}, \quad \forall x \in X.$$

Από την polarization formula, έχουμε ότι:

$$\Delta_{h_{k-1} \dots h_1}^{(k-1)} g_1(x) = c^{[2]}(h_1, \dots, h_{k-1}) = \frac{1}{(k-1)!} \Delta_{h_{k-1} \dots h_1}^{(k-1)} P_{k-1}(x), \quad \forall x, (h_j)_{j=1}^{k-1} \in X$$

Αυτό μας οδηγεί για ακόμη μια φορά στο συμπέρασμα:

$$\Delta_{h_{k-1} \dots h_1}^{(k-1)} g_2(x) := \Delta_{h_{k-1} \dots h_1}^{(k-1)} \left( g(x) - \frac{1}{(k-1)!} P_{k-1}(x) \right) = 0, \quad \forall x, (h_j)_{j=1}^{k-1} \in X.$$

Μετά από  $k-1$  επαναλήψεις της ανωτέρω διαδικασίας θα λάβουμε:

$$\Delta_{h_1} g_{k-1}(x) := \Delta_{h_1} (g_{k-2}(x) - P_1(x)) = 0, \quad \forall x, h_1 \in X. \quad (24)$$

Εύκολα βλέπει κανείς ότι,  $\forall x \in X$ ,  $\forall j \in \mathbb{N}_1^{k-1}$ :

$$g_j(x) = F(x) - \sum_{i=0}^{j-1} \frac{1}{(k-i)!} P_{k-i}(x). \quad (25)$$

Συμπεραίνουμε από την Εξ. (25) ότι:

$$g_{k-1}(x) - P_1(x) = c, \quad \forall x \in X,$$

όπου  $c \in \mathbb{K}$ , σταθερά.

Τελικά, από την Εξ. (24) έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{(k-i)!} P_{k-i}(x) + c = \\ &= \frac{1}{k!} P_k(x) + \frac{1}{(k-1)!} P_{k-1}(x) + \dots + P_1(x) + P_0, \quad \forall x \in X, \end{aligned}$$

όπου  $P_j$ ,  $0 \leq j \leq k$ , είναι  $j$ -ομογενή πολώνυμα. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η  $F$  είναι πολωνυμική απεικόνιση και συγκεκριμένα μη ομογενές πολώνυμο βαθμού  $k$ .

Η απόδειξη του Κριτηρίου 2 ολοκληρώνεται.

## 2.5 Αναπαράσταση πολυγραμμικών μορφών στη μορφή πίνακα σε χώρους Hilbert.

Σε αυτό το εδάφιο παρουσιάζουμε κάποια βασικά αποτελέσματα σχετικά με την αναπαράσταση των πολυγραμμικών μορφών στην μορφή πίνακα. Σε επόμενο εδάφιο θα χρειαστούμε την αναπαράσταση αυτή για την διερεύνηση του ερωτήματος προσέγγισης συνεχών μη γραμμικών τελεστών σε χώρους Hilbert.

Αναφέρουμε ως πηγή το άρθρο (Prenter, Matrix Representation of Polynomial Operators, 1972) καθώς και το βιβλίο (Argyros, Polynomial Operator Equations in Abstract Spaces and Applications, 1998). Στο άρθρο βρίσκονται αποτελέσματα αναφορικά με το ερώτημα της αναπαράστασης πολυγραμμικών μορφών σε μορφή πίνακα (απειροπίνακα) σε διαχωρίσιμους χώρους Hilbert, τα οποία αναφέρουμε και εδώ. Στο ανωτέρω βιβλίο αναπτύσσεται η συζήτηση του θέματος στο πλαίσιο γραμμικών χώρων με νόρμα και με στόχο την χρήση αυτών των αναπαραστάσεων για την απόδειξη θεωρημάτων ύπαρξης πολυωνυμικής προσέγγισης τελεστών σε χώρους Banach, βλ. εδάφιο 4.1. Εδώ θα περάσουμε απευθείας στην περίπτωση των χώρων Hilbert.

Ας θεωρήσουμε έναν διαχωρισμό χώρο Hilbert, έστω  $H$ , πεπερασμένης διάστασης,  $\dim(H) = N$ . Συμβολίζουμε με  $(\cdot, \cdot)_H$ , το εσωτερικό γινόμενο του χώρου  $H$ .

Ένας τελεστής  $\mathcal{F} : H \rightarrow H$  λαμβάνει αναπαράσταση ως προς την ορθοκανονική βάση  $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$ , του χώρου  $H$ , σε μορφή πίνακα  $(M_{i,j})$ , εάν:  $\forall x \in H$

$$y = \mathcal{F}[x],$$

έχοντας ότι:

$$y_i = \sum_{j=1}^{\infty} M_{i,j} \phi_j, \quad i = 1, 2, \dots,$$

όπου  $M_{i,j} := (\mathcal{F}[\phi_j], \phi_i)_H, \quad j = 1, 2, \dots$ .

Ακόμα γνωρίζουμε ότι κάθε γραμμικός τελεστής σε χώρους πεπερασμένης διάστασης είναι συνεχής και επιδέχεται αναπαράσταση σε μορφή πίνακα. Στην περίπτωση πολυγραμμικών απεικονίσεων ανάμεσα σε χώρους πεπερασμένης διάστασης είναι απλό να αποδειχθεί ότι κάθε πολυγραμμική μορφή είναι συνεχής και επιδέχεται αναπαράσταση σε μορφή πίνακα καθώς επίσης ότι κάθε πίνακας αποτελεί αναπαράσταση μιας πολυγραμμικής μορφής. Το αποτέλεσμα αυτό διατυπώνεται στην συνέχεια στο Θεώρημα 3. Η αναπαράσταση πολυγραμμικών απεικονίσεων, σε χώρους άπειρης διάστασης, στην μορφή απειροπίνακα τίθεται εξίσου. Επιλέγουμε να παρουσιάσουμε πρώτα τα αποτελέσματα σε χώρους άπειρης διάστασης.

**Θεώρημα 1 [Prenter 1972]:** Έστω  $H$ , διαχωρίσιμος χώρος Hilbert με πλήρη ορθοκανονική βάση  $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ . Τότε, ισχύει ότι κάθε **συνεχής**  $K$  – γραμμική απεικόνιση  $p : H^K \rightarrow H$  <sup>(2)</sup>, λαμβάνει **μοναδική** αναπαράσταση σε μορφή απειροπίνακα ως προς την ορθοκανονική βάση  $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ :

$$m_{j, i_1, i_2, \dots, i_K} := (p_K x_{1, i_1} x_{1, i_2} \dots x_{1, i_K}, \phi_j)_H. \quad \blacksquare$$

(2) Υπενθυμίζουμε ότι  $H^K = \underbrace{H \times H \times \dots \times H}_{K \text{ - times}}$ .

Απόδειξη: Έχουμε ότι  $x_k \in H$ ,  $k = 1(1)K$ , συνεπώς  $(x_1, x_2, \dots, x_K) \in H^K$ . Γράφουμε:

$$p_K(x_1, x_2, \dots, x_K) = y, \quad y \in H. \quad (1)$$

Για τις συνιστώσες των στοιχείων, χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό:

$$x_k = (\chi_{k,1}, \chi_{k,2}, \dots, \chi_{k,N}, \dots) \text{ και } y = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N, \dots).$$

Χρησιμοποιώντας την βάση του χώρου, αναπαριστούμε τα στοιχεία  $x_k$  και  $y$  ως:

$$x_k := \sum_{i_k=1}^{\infty} \chi_{k,i_k} \phi_{i_k}, \quad y = \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j \phi_j$$

Περιοριζόμαστε στα πρώτα  $N$  στοιχεία της βάσης  $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$  και συμβολίζουμε:

$$x_k^{[N]} := \sum_{i_k=1}^N \chi_{k,i_k} \phi_{i_k}, \quad y^{[N]} = \sum_{j=1}^N \psi_j \phi_j.$$

Η Εξ. (1) μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$p_K \left( \sum_{i_1=1}^N \chi_{1,i_1} \phi_{i_1}, \sum_{i_2=1}^N \chi_{2,i_2} \phi_{i_2}, \dots, \sum_{i_K=1}^N \chi_{K,i_K} \phi_{i_K} \right) = \sum_{j=1}^N \psi_j \phi_j \quad (2)$$

Συμβολίζουμε  $p_K(x_1^{[N]}, x_2^{[N]}, \dots, x_K^{[N]}) = p_K x_1^{[N]} x_2^{[N]} \dots x_K^{[N]}$  και λόγω της ανά συνιστώσα γραμμικότητας και ομογένειας της πολυγραμμικής μορφής  $p_K$ , ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} p_K \sum_{i_1=1}^N \chi_{1,i_1} \phi_{i_1} \sum_{i_2=1}^N \chi_{2,i_2} \phi_{i_2} \dots \sum_{i_K=1}^N \chi_{K,i_K} \phi_{i_K} &= \\ &= \sum_{i_1=1}^N \sum_{i_2=1}^N \dots \sum_{i_K=1}^N \chi_{1,i_1} \chi_{2,i_2} \dots \chi_{K,i_K} p_K \phi_{i_1} \phi_{i_2} \dots \phi_{i_K} \end{aligned}$$

Τότε η Εξ. (2), γράφεται:

$$\sum_{i_1=1}^N \sum_{i_2=1}^N \dots \sum_{i_K=1}^N \chi_{1,i_1} \chi_{2,i_2} \dots \chi_{K,i_K} p_K \phi_{i_1} \phi_{i_2} \dots \phi_{i_K} = \sum_{j=1}^N \psi_j \phi_j. \quad (3)$$

Πολλαπλασιάζουμε εσωτερικά και τα δύο μέλη της Εξ. (3) με το διάνυσμα  $\phi_{j^*}$ ,  $j^* \in \mathbb{N}_1^N$ :

$$\sum_{i_1=1}^N \sum_{i_2=1}^N \dots \sum_{i_K=1}^N \chi_{1,i_1} \chi_{2,i_2} \dots \chi_{K,i_K} p_K \phi_{i_1} \phi_{i_2} \dots \phi_{i_K} \cdot \phi_{j^*} = \sum_{j=1}^N \psi_j \phi_j \cdot \phi_{j^*},$$

και λαμβάνουμε την σχέση:

$$\sum_{i_1=1}^N \sum_{i_2=1}^N \dots \sum_{i_K=1}^N (p_K \phi_{i_1} \phi_{i_2} \dots \phi_{i_K}, \phi_{j^*}) \chi_{1,i_1} \chi_{2,i_2} \dots \chi_{K,i_K} = \psi_{j^*}.$$

Συμπεραίνουμε ότι:

$$\psi_j = (p_K x_1^{[N]} x_2^{[N]} \dots x_K^{[N]}, \phi_j)_H, \quad j \in \mathbb{N}_1^N, \quad (4)$$

όπου

$$(p_K x_1^{[N]} x_2^{[N]} \dots x_K^{[N]}, \phi_j)_H = \sum_{i_1=1}^N \sum_{i_2=1}^N \dots \sum_{i_K=1}^N (p_K \phi_{i_1} \phi_{i_2} \dots \phi_{i_K}, \phi_j)_H \chi_{1,i_1} \chi_{2,i_2} \dots \chi_{K,i_K}. \quad (5)$$

Συμβολίζουμε με:

$$\sum_{i_1, i_2, \dots, i_K=1}^N \cdot = \sum_{i_1=1}^N \sum_{i_2=1}^N \dots \sum_{i_K=1}^N \cdot,$$

και θέτουμε:

$$m_{j, i_1, i_2, \dots, i_K} = (p_K \phi_{i_1} \phi_{i_2} \dots \phi_{i_K}, \phi_j)_H.$$

Με τον ανωτέρω συμβολισμό, μπορούμε να γράψουμε την Εξ. (4) χρησιμοποιώντας την Εξ. (5) στην μορφή:

$$\psi_j = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_K=1}^N m_{j, i_1, i_2, \dots, i_K} \chi_{1, i_1} \chi_{2, i_2} \dots \chi_{K, i_K}, \quad j \in \mathbb{N}_1^N \quad (6)$$

Τέλος, εφόσον η πολυγραμμική μορφή  $p_K$  είναι συνεχής, έχουμε ότι:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} p_K x_1^{[N]} x_2^{[N]} \dots x_K^{[N]} = p_K \lim_{N \rightarrow \infty} x_1^{[N]} x_2^{[N]} \dots x_K^{[N]} = p_K x_1 x_2 \dots x_K \quad (7)$$

και

$$(p_K x_1 x_2 \dots x_K, \phi_j)_H = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_K=1}^N m_{j, i_1, i_2, \dots, i_K} \chi_{1, i_1} \chi_{2, i_2} \dots \chi_{K, i_K}. \quad (8)$$

Τότε η σειρά του δεξιά μέλους της Εξ. (8) συγκλίνει για κάθε πλειάδα  $K$  στοιχείων,  $(x_1, x_2, \dots, x_K) \in H^K$  και κατά συνέπεια ο τελεστής  $p_K[\cdot]$  μπορεί να αναπαρασταθεί ως προς την βάση  $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty$ :

$$p_K(x_1, x_2, \dots, x_K) = \sum_{j=1}^\infty d_j \phi_j,$$

$$d_j = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_K=1}^\infty m_{j, i_1, i_2, \dots, i_K} \chi_{1, i_1} \chi_{2, i_2} \dots \chi_{K, i_K}.$$

Καλούμε αναπαράσταση του τελεστή  $p_K[\cdot]$  σε μορφή πίνακα, το σύνολο:

$$\left\{ m_{j, i_1, i_2, \dots, i_K} = (p_K \phi_{i_1} \phi_{i_2} \dots \phi_{i_K}, \phi_j)_H, \quad j, i_1, i_2, \dots, i_K = 1, 2, \dots \right\},$$

η οποία είναι μοναδική ως προς την βάση  $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty$ , καθώς οι ποσότητες  $(p_K \phi_{i_1} \phi_{i_2} \dots \phi_{i_K}, \phi_j)_H$  είναι μοναδικές.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 1 ολοκληρώνεται.

Το Θεώρημα 1, μας λέει ότι κάθε συνεχής πολυγραμμική μορφή επιδέχεται αναπαράσταση σε μορφή απειροπίνακα. Ένα ακόμα ερώτημα είναι το αν κάθε απειροπίνακας  $(m_{j, i_1, i_2, \dots, i_K})$  αναπαριστά μια συνεχή,  $K$ -γραμμική απεικόνιση από τον χώρο  $H^K$  στον  $H$ . Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα είναι αρνητική. Παρόλα αυτά αποδεικνύεται ότι κάθε τελεστής από τον χώρο  $H^K$  στον  $H$ , ο οποίος αναπαρίσταται σε μορφή πίνακα, είναι μια συνεχής,  $K$ -γραμμική απεικόνιση. Η απόδειξη αυτής της πρότασης βρίσκεται στο άρθρο (Prenter, 1972).

**Θεώρημα 2 [Prenter, 1972]:** Έστω  $H$ , διαχωρίσιμος χώρος Hilbert με πλήρη ορθοκανονική βάση  $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty$ . Κάθε τελεστής  $\mathcal{F} : H^K \rightarrow H$ , ο οποίος λαμβάνει αναπαράσταση σε μορφή πίνακα  $(m_{j,i_1,i_2,\dots,i_K})$ , είναι μια συνεχής,  $K$  – γραμμική απεικόνιση. ■

Στην περίπτωση χώρων πεπερασμένης διάστασης, σε πλήρη αναλογία με τις γραμμικές απεικονίσεις, διατυπώνεται το ακόλουθο θεώρημα για τις πολυγραμμικές μορφές.

**Θεώρημα 3:** Σε κάθε πεπερασμένης διάστασης χώρο Hilbert με ορθοκανονική βάση  $\{\phi_n\}_{n=1}^N$ , ισχύει ότι:

α) Κάθε  $K$  – γραμμική μορφή είναι συνεχής.

β) Κάθε  $K$  – γραμμικός τελεστής  $p_K$ , έχει μοναδική αναπαράσταση σε μορφή πίνακα ως προς την ορθοκανονική βάση  $\{\phi_n\}_{n=1}^N$ :

$$m_{n,i_1,i_2,\dots,i_K} = (p_K \phi_{i_1} \phi_{i_2} \dots \phi_{i_K}, \phi_n)_H.$$

γ) Κάθε πίνακας  $(m_{j,i_1,\dots,i_K})$  είναι αναπαράσταση ενός  $k$  – γραμμικού τελεστή. ■

## 2.6 Πολυώνυμα Volterra

Έχοντας πλέον μιλήσει εκτενώς για την γενική θεώρηση των πολυωνύμων σε γραμμικούς χώρους, σε αυτήν την παράγραφο θα ορίσουμε ειδικότερα ένα από τα βασικά αντικείμενα μελέτης μας, δηλαδή τα πολυώνυμα Volterra. Με στόχο να μιλήσουμε σε επόμενο κεφάλαιο για προσεγγιστικές αναπαραστάσεις (μη γραμμικών) συνεχών τελεστών μέσω πολυωνύμων Volterra και ειδικότερα τελεστών οι οποίοι προκύπτουν στη μελέτη προβλημάτων στα πλαίσια της θεωρίας συστημάτων. Συγκεντρώνουμε εδώ τους βασικούς ορισμούς και τις διαφορετικές μορφές των πολυωνύμων Volterra σε συνάρτηση με όσα έχουν ειπωθεί στο Κεφάλαιο 1 για τις αναλυτικές και φυσικές ιδιότητες των θεωρούμενων συστημάτων.

Θεωρούμε έναν τελεστή  $\mathcal{F}$ , ο οποίος απεικονίζει οποιασδήποτε συνάρτηση  $x(\bullet)$ , ορισμένη σε διάστημα  $\mathcal{T} := [t_0, T]$  και η οποία ανήκει στο πεδίο ορισμού  $\mathcal{D}(\mathcal{F})$ , του τελεστή  $\mathcal{F}$ , στη συνάρτηση  $\mathcal{F}[x(\bullet)](\bullet)$  η οποία θεωρείται ότι ορίζεται στο ίδιο διάστημα  $\mathcal{T}$ <sup>(3)</sup>. Μπορούμε να γράψουμε για αυτήν την απεικόνιση, χωρίς να εξειδικεύσουμε τους χώρους ορισμού και εικόνας:

$$\mathcal{F} : \mathcal{D}(\mathcal{F}) \supseteq X(\mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}) \ni x \rightarrow \mathcal{F}[x](\bullet) \in Y(\mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R})$$

Μια ειδική περίπτωση συνεχούς τελεστή της ανωτέρω μορφής, είναι ο ακόλουθος.

<sup>(3)</sup> Γενικώς, μπορούμε να θεωρήσουμε τελεστές των οποίων η εικόνα είναι εντελώς διαφορετικός χώρος συναρτήσεων από αυτόν του πεδίου ορισμού τους. Δηλαδή, επί παραδείγματι, μπορούμε να ορίσουμε έναν τελεστή ο οποίος λαμβάνει συνεχή στοιχεία από φραγμένο διάστημα και αποδίδει μερικώς συνεχή σε διαφορετικό διάστημα (το οποίο δεν είναι απαραίτητο να αποτελεί απλή μετατόπιση του πεδίου ορισμού των συναρτήσεων ορισμάτων, ούτε να περιέχεται σε αυτό). Ο λόγος που επιλέγουμε να εξειδικεύσουμε σε τελεστές των οποίων τα ορίσματα και οι εικόνες έχουν κοινό πεδίο ορισμού είναι το ότι θέλουμε να αποδώσουμε το αναλυτικό μέρος του παρόντος σε εφαρμογές της μαθηματικής θεωρίας φυσικών συστημάτων και κατά συνέπεια η διέγερση και η απόκριση ενός συστήματος είναι εύλογο να ορίζονται στο ίδιο (χρονικό) διάστημα.

**Ορισμός 1 [Πολυώνυμο Volterra]:** Κάθε τελεστής της μορφής:

$$\begin{aligned} p_n[x(\cdot|_{t_0}^T)](t) = & K_0(t) + \int_{t_0}^T K_1(t, \tau) x(\tau) d\tau + \\ & + \int_{t_0}^T \int_{t_0}^T K_2(t, \tau_1, \tau_2) x(\tau_1) x(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \dots + \\ & + \int_{t_0}^T \dots \int_{t_0}^T K_n(t, \tau_1, \dots, \tau_n) x(\tau_1) \dots x(\tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n, \end{aligned} \quad (1)$$

καλείται πολυωνυμικός τελεστής Volterra  $n$ -βαθμού ή, απλούστερα, πολυώνυμο Volterra  $n$ -βαθμού.

Προφανώς το πολυώνυμο  $p_n$  αποτελεί ένα μη ομογενές πολυώνυμο:

$$p_n[x(\cdot)](t) = P_0 + P_1[x(\cdot)](t) + P_2[x(\cdot)](t) + \dots + P_n[x(\cdot)](t),$$

με  $P_0$  σταθερό πολυώνυμο και τα ομογενή πολυώνυμα  $P_j$ ,  $1 \leq j \leq n$ , να είναι τις μορφής:

$$P_j[x(\cdot)](t) = \int_{t_0}^T \dots \int_{t_0}^T K_j(t, \tau_1, \dots, \tau_j) x(\tau_1) \dots x(\tau_j) d\tau_1 \dots d\tau_j.$$

Παραπέμπουμε στο Παράδειγμα 1 του εδαφίου 2.1, υπενθυμίζοντας την παραγωγή των ανωτέρω ομογενών πολυωνύμων μέσω  $j$ -γραμμικών μορφών  $p_j : X^j \rightarrow Y$ .

**Ορισμός 2 [Συναρτησιακό πολυώνυμο Volterra]:** Ένα συναρτησιακό του οποίου τα ορίσματα είναι συναρτήσεις οριζόμενες στο διάστημα  $\mathcal{T}$  και εκφράζεται στην μορφή:

$$\begin{aligned} p_n[x(\cdot)] = & c + \int_{t_0}^T K_1(\tau) x(\tau) d\tau + \\ & + \int_{t_0}^T \int_{t_0}^T K_2(\tau_1, \tau_2) x(\tau_1) x(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \dots + \\ & + \int_{t_0}^T \dots \int_{t_0}^T K_n(\tau_1, \dots, \tau_n) x(\tau_1) \dots x(\tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n. \end{aligned} \quad (2)$$

καλείτε συναρτησιακό πολυώνυμο Volterra  $n$ -τάξεως.

Στη βάση των ανωτέρω, εάν εισάγουμε μια παράμετρο  $s$  η οποία λαμβάνει τιμές στο διάστημα  $\mathcal{T}$ , μπορούμε να θεωρήσουμε τις ακόλουθες εκφράσεις:  $\forall s \in \mathcal{T}$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}[x(\cdot); s] = & K_0(s) + \int_{t_0}^T K_1(\tau; s) x(\tau) d\tau + \dots \\ & \dots + \int_{t_0}^T \dots \int_{t_0}^T K_n(\tau_1, \dots, \tau_n; s) x(\tau_1) \dots x(\tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n. \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}[x(\cdot|_{t_0}^s); s] \equiv & K_0(s) + \int_{t_0}^s K_1(\tau; s) x(\tau) d\tau + \dots \\ & \dots + \int_{t_0}^s \dots \int_{t_0}^s K_n(\tau_1, \dots, \tau_n; s) x(\tau_1) \dots x(\tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n. \end{aligned} \quad (4)$$

Και οι δύο αυτές εκφράσεις αποτελούν συναρτησιακά με παράμετρο  $s$ . Ακριβέστερα, κάθε μια ορίζει μια οικογένεια συναρτησιακών, ένα για κάθε δυνατή τιμή της παραμέτρου. Στην Εξ. (4) σημειώνουμε ότι, η παράμετρος  $s$  περιορίζει τις τιμές της συνάρτησης  $x(\cdot)$  από τις οποίες εξαρτάται το συναρτησιακό, σε αυτές που λαμβάνονται στο διάστημα  $[t_0, s] \subseteq \mathcal{T}$ .

Το συναρτησιακό της Εξ. (4) είναι απεικόνιση της μορφής (function-functional):

$$\mathcal{V} : \left( \underbrace{\mathcal{T} \times X([t_0, s] \rightarrow \mathbb{R})}_{s \in \mathcal{T}} \right) \rightarrow \mathbb{R}$$

Το συναρτησιακά των Εξ. (3) και (4) μπορούν να θεωρούνται συναρτησιακά πολυώνυμα Volterra  $n$ -τάξεως, με την διαφορά ότι υπάρχει εξάρτηση από την παράμετρο  $s$ . Θα συμβολίζουμε κατά αναλογία:

$$p_n[x(\cdot); s] \equiv \mathcal{V}[x(\cdot); s],$$

και

$$p_n[x(\cdot|_{t_0}^s); s] \equiv \mathcal{V}[x(\cdot|_{t_0}^s); s].$$

Σε αυτό το σημείο οφείλουμε να πούμε ότι στην πραγματικότητα δεν εισαγάγαμε κάποια καινούρια έννοια στην περίπτωση του συναρτησιακού  $\mathcal{V}[x(\cdot); s]$  ανωτέρω, καθώς το ίδιο ακριβώς μαθηματικό αντικείμενο προκύπτει από την Εξ. (1) του τελεστή  $\mathcal{F}$ , θεωρώντας fixed  $\hat{t} \in \mathcal{T}$ :

$$(\forall x \in X) (\forall s \in \mathcal{T}) : [p_n[x(\cdot); s] \equiv p_n[x(\cdot)](\hat{t}), \hat{t} = s].$$

Στην περίπτωση όμως της Εξ. (4) και της σύνδεσης της με την μορφή της απεικόνισης:

$$\mathcal{V} : \left( \underbrace{\mathcal{T} \times X([t_0, s] \rightarrow \mathbb{R})}_{s \in \mathcal{T}} \right) \rightarrow \mathbb{R},$$

εισάγουμε την επιπρόσθετη εξάρτηση του συναρτησιακού από την παράμετρο  $s$ , μέσω του περιορισμού του πεδίου ορισμού της συνάρτησης όρισμα και αυτή η θεώρηση διαδραματίζει κεντρικό ρόλο στην μελέτη αιτιοκρατικών τελεστών.

### Συμβολισμός των πολυωνύμων Volterra

Προκειμένου να δώσουμε μια συμπυκνωμένη και βολική -αλλά εξ ίσου σαφή- γραφή των πολυωνύμων Volterra, εισάγουμε τις ακόλουθες συντομογραφίες:

$$(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) = \boldsymbol{\tau}^{(n)},$$

$$K_n(t, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) = K_n(t, \boldsymbol{\tau}^{(n)}),$$

$$x(\tau_1)x(\tau_2)\dots x(\tau_n) = \mathbf{x}(\boldsymbol{\tau}^{(n)}),$$

$$d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_n = d\boldsymbol{\tau}^{(n)}$$

και τέλος, το  $n$ -πλό ολοκλήρωμα:

$$\underbrace{\int_{t_0}^T \int_{t_0}^T \dots \int_{t_0}^T}_{n \text{ διαδοχικές ολοκληρώσεις}} \quad \text{το συμβολίζουμε συνοπτικά ως} \quad \int_{[t_0, T]^{(n)}}.$$

Χρησιμοποιώντας τώρα τις ανωτέρω συντομογραφίες, μπορούμε να γράφουμε συνοπτικά τα πολυώνυμα Volterra γενικής τάξεως  $N$  στην μορφή:

$$p_N[x(\cdot)](t) = K_0(t) + \sum_{n=1}^N \int_{[t_0, T]^{(n)}} K_n(t, \boldsymbol{\tau}^{(n)}) \mathbf{x}(\boldsymbol{\tau}^{(n)}) d\boldsymbol{\tau}^{(n)}$$

$$p_N[x(\cdot)](t) = K_0(t) + \sum_{n=1}^N \int_{[t_0, T]^{(n)}} K_n(t, \boldsymbol{\tau}^{(n)}) \prod_{k=1}^n x(\tau_k) d\boldsymbol{\tau}^{(n)}$$

ή

$$p_N[x(\cdot)](t) = K_0(t) + \sum_{n=1}^N H_n[x(\cdot^{(n)})](t),$$

$$\text{όπου } H_n[x(\cdot^{(n)})](t) = \int_{[t_0, T]^{(n)}} K_n(t, \tau^{(n)}) x(\tau^{(n)}) d\tau^{(n)}.$$

Στην περίπτωση των συναρτησιακών ο συμβολισμός μεταφέρεται, προσαρμόζοντας κατάλληλα τα ορίσματα.

### Μορφή των πολυωνύμων Volterra στη γενική Θεωρία Συστημάτων

Στο σημείο όπου τα πολυώνυμα Volterra χρησιμοποιούνται στην αναπαράσταση τελεστών οι οποίοι προκύπτουν στα πλαίσια τις θεωρίας συστημάτων, δηλαδή ως προσεγγιστική αναπαράσταση ενός τελεστή που περιγράφει την σχέση διέγερσης-απόκρισης ενός μη γραμμικού συστήματος, οφείλουν να πληρούν το σύνολο των ιδιοτήτων αυτού του τελεστή. Με άλλα λόγια, όταν για παράδειγμα μελετούμε ένα μη γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα με μνήμη ο τελεστής του συστήματος είναι ένας μη γραμμικός χρονικά αμετάβλητος και αιτιοκρατικός τελεστής. Κατά αυτόν τον τρόπο είναι προφανές ότι τα πολυώνυμα Volterra που θα χρησιμοποιηθούν για την προσεγγιστική του αναπαράσταση πρέπει να πληρούν τις ίδιες απαιτήσεις. Στη συνέχεια παραθέτουμε την μορφή των πολυωνύμων Volterra σε αυτές τις περιπτώσεις.

**Ορισμός 3 [Αιτιοκρατικό πολυώνυμο Volterra με μνήμη]:** Θα καλούμε αιτιοκρατικό πολυώνυμο Volterra  $N$  – τάξης (Causal Volterra operator polynomial) την έκφραση:

$$p_N[x(\cdot)](t) = K_0(t) + \sum_{n=1}^N \int_{[t_0, t]^{(n)}} K_n(t, \tau^{(n)}) \prod_{k=1}^n x(\tau_k) d\tau^{(n)}. \quad \blacksquare \quad (5)$$

Αναφορικά με τον ανωτέρω Ορισμό 3, σχολιάζουμε το εξής. Στο εδάφιο 1.2 αναφερθήκαμε στην δυϊκότητα ανάμεσα σε τελεστές και συναρτησιακά στο πεδίο της γενικής θεωρίας συστημάτων. Αυτή η σχέση εδράζεται στην απαίτηση της αιτιότητας ως θεμελιώδη συνθήκη με την οποία οι μαθηματικές αναπαραστάσεις των συστημάτων πρέπει να είναι σε συμφωνία. Έτσι λοιπόν σε κάθε χρόνο (fixed)  $t \in \mathcal{T}$ , η απόκριση του συστήματος οφείλει να είναι συνάρτηση της διέγερσης σε όλες τις παρελθοντικές χρονικές στιγμές, δηλαδή να εξαρτάται από τις τιμές που λαμβάνει η συνάρτηση διέγερσης πάνω στο διάστημα  $[t_0, t]$ , βλ. Εξ.(4) ανωτέρω.

Θεωρώντας τώρα τον πολυωνυμικό τελεστή Volterra που εισαγάγαμε στην Εξ. (1), εύκολα βλέπουμε ότι σταθεροποιώντας το συναρτησιακό όρισμα  $x$ , για κάθε χρόνο  $t \in \mathcal{T}$ , η τιμή του συναρτησιακού που ορίζεται εξαρτάται από το σύνολο των τιμών της συνάρτησης  $x$ , δηλαδή της διέγερσης, στο διάστημα  $[t_0, T]$ . Για αυτόν τον λόγο, κατάλληλος τρόπος εισαγωγής της αιτιότητας είναι η θεώρηση του τελεστή  $p_n[x(\cdot|_{t_s}^t)](t)$ , όπου η παράμετρος  $t_s$  ενδέχεται να εξαρτάται από την μεταβλητή  $t$  και ελέγχει το διάστημα του πεδίου ορισμού της διεγέρσεως από της οποίας τις τιμές σε αυτό υπάρχει εξάρτηση της απόκρισης στον χρόνο  $t$ .

Όταν  $t_s = t_0$  έχουμε εξάρτηση από όλο το παρελθόν της διέγερσης (σύστημα με μνήμη) ενώ όταν  $t_s = t - \Delta$ ,  $\Delta > 0$ , από ένα τμήμα αυτής (σύστημα με πεπερασμένη μνήμη). Δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.



**Ορισμός 4 [Αιτιοκρατικό πολυώνυμο Volterra με πεπερασμένη μνήμη]:** Θα καλούμε αιτιοκρατικό πολυώνυμο Volterra  $N$  – τάξης με μνήμη  $\Delta > 0$ , την έκφραση:

$$p_n[x(\cdot)](t) = K_0(t) + \sum_{n=1}^N \int_{[t-\Delta, t]^{(n)}} K_n(t, \boldsymbol{\tau}^{(n)}) \prod_{k=1}^n x(\tau_k) d\boldsymbol{\tau}^{(n)}, t \in \mathcal{T}. \blacksquare$$

Τέλος μια ακόμα φυσική ιδιότητα ορισμένων συστημάτων είναι αυτή της χρονικής ανεξαρτησίας. Αυτή εντάσσεται στις εκφράσεις των πολυωνυμικών τελεστών Volterra ως ακολούθως:

**Ορισμός 5 [Χρονικά αμετάβλητο πολυώνυμο Volterra]:** Θα καλούμε χρονικά αμετάβλητο πολυώνυμο Volterra  $N$  – τάξης την έκφραση:

$$p_N[x(\cdot)](t) = K_0(t) + \sum_{n=1}^N \int_{[t_0, T]^{(n)}} K_n(t - \boldsymbol{\tau}^{(n)}) \prod_{k=1}^n x(\tau_k) d\boldsymbol{\tau}^{(n)}. \blacksquare$$

Βάση των ανωτέρω ορίζουμε το αιτιοκρατικό και χρονικά αμετάβλητο πολυώνυμο Volterra ως:

**Ορισμός 6 [Causal and Time invariant Volterra operator Polynomial]:** Θα καλούμε χρονικά αιτιοκρατικό και χρονικά αμετάβλητο πολυώνυμο Volterra  $N$  – τάξης την έκφραση:

$$p_N[x(\cdot)](t) = K_0(t) + \sum_{n=1}^N \int_{[t_0, t]^{(n)}} K_n(t - \boldsymbol{\tau}^{(n)}) \prod_{k=1}^n x(\tau_k) d\boldsymbol{\tau}^{(n)}.$$

εάν οι συναρτήσεις  $K_n(\cdot)$  είναι τέτοιες ώστε:

$$(\forall t \in \mathcal{T}) \left( \text{όταν } \tau_j > t - t_0, 1 \leq j \leq N \right) : \left[ K_n(t - \tau_1, \dots, t - \tau_n) = 0, 1 \leq n \leq N \right]$$

## **Βιβλιογραφία Κεφαλαίου II**

Argyros, I. K. (1998) *Polynomial operator equations in abstract spaces and applications*. CRC Press.

Cartan, H. (1971) *Differential calculus*. Hermann.

Ma, T.-W. (1995) *Classical analysis on normed spaces*. World Scientific.

Prenter, P. M. (1972) 'Matrix representations of polynomial operators', *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*. Springer-Verlag, 21(1–2), pp. 103–118. doi: 10.1007/BF02844236.

Thomas, E. G. F. (2014) 'A polarization identity for multilinear maps', *Indagationes Mathematicae*. doi: 10.1016/j.indag.2013.11.003.



### 3 Το Θεώρημα Stone-Weierstrass και εφαρμογές

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα παρουσιάσουμε το θεώρημα Stone-Weierstrass και εφαρμογές αυτού στην προσέγγιση συναρτησιακών απεικονίσεων. Ξεκινάμε στο εδάφιο 3.1 διατυπώνοντας το θεώρημα προσέγγισης Weierstrass το οποίο αποτελεί βασικό αποτέλεσμα στην θεωρία προσέγγισης συνεχών συναρτήσεων και του οποίου το θεώρημα Stone-Weierstrass αποτελεί μια εκτενή γενίκευση. Αυτή η γενίκευση μας επιτρέπει να μιλήσουμε για την προσεγγιστική αναπαράσταση συνεχών απεικονίσεων σε γενικότερους χώρους. Τέλος στο εδάφιο 3.2 εφαρμόζουμε το θεώρημα Stone-Weierstrass αποδεικνύουμε την ύπαρξη προσεγγιστικών αναπαραστάσεων συνεχών συναρτησιακών από στοιχεία της άλγεβρας των συναρτησιακών πολυωνύμων Volterra, τα οποία εισαγάγαμε στο εδάφιο 2.6.

#### 3.1 Το θεώρημα Stone-Weierstrass

Οι συνεχείς συναρτήσεις αποτελούν ένα από τα βασικά αντικείμενα μελέτης των μαθηματικών. Η αναλυτική περιγραφή τους και ο υπολογισμός τους για τις ανάγκες των εφαρμογών, τις περισσότερες φορές, αποτελεί ένα δύσκολο πρόβλημα. Η χρήση απλούστερων αντικειμένων εκ του συνόλου, δηλαδή απλούστερων συνεχών συναρτήσεων, με στόχο την έκφραση τους μέσω αυτών, είναι ο τρόπος αντιμετώπισης αυτού του προβλήματος. Το θεώρημα προσέγγισης Weierstrass αποτελεί το πρώτο αποτέλεσμα στην κατεύθυνση αυτή.

**Θεώρημα 1 [Weierstrass Approximation Theorem]:** Έστω  $I \subseteq \mathbb{R}$ , κλειστό και φραγμένο (δηλ. συμπαγές) και  $C(I \rightarrow \mathbb{R})$  το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων επί του  $I$ . Θεωρούμε  $\mathcal{P}(I \rightarrow \mathbb{R})$  το σύνολο των πραγματικών πολυωνύμων. Τότε για κάθε συνάρτηση  $f \in C(I \rightarrow \mathbb{R})$ , υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων  $(p_n)_1^\infty \in \mathcal{P}(I \rightarrow \mathbb{R})$ , η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα στην συνάρτηση  $f$ , στο διάστημα  $I$ ,  $p_n \xrightarrow{u} f$ . ■

Με άλλα λόγια το Θεώρημα 1 μας λέει ότι το σύνολο των πραγματικών πολυωνύμων  $\mathcal{P}(I \rightarrow \mathbb{R})$  είναι πυκνό υποσύνολο των συνεχών συναρτήσεων  $C(I \rightarrow \mathbb{R})$ , με την τοπολογία της supremum νόρμας, δηλαδή:

$$(\forall f \in C(I \rightarrow \mathbb{R})) (\forall \varepsilon > 0) (\exists p_\varepsilon \in \mathcal{P}(I \rightarrow \mathbb{R})) : [\|f - p_\varepsilon\|_\infty < \varepsilon]$$

Μπορούμε λοιπόν να διατυπώσουμε πολυωνυμικές προσεγγιστικές αναπαραστάσεις των συνεχών συναρτήσεων. Όσο αφορά το κομμάτι του υπολογισμού, γνωρίζοντας διακριτές τιμές της άγνωστης συνάρτησης μπορούμε να κατασκευάσουμε μεθόδους πολυωνυμικής παρεμβολής οι οποίες ανάγουν το πρόβλημα υπολογισμού στον προσδιορισμό των πολυωνυμικών συντελεστών.

Ο Karl Wilhelm Theodor Weierstrass έδωσε την πρώτη απόδειξη αυτού του αποτελέσματος στο άρθρο (Weierstrass, 1885). Το βασικό αυτό αποτέλεσμα, έχει λάβει πληθώρα διαφορετικών μεθοδολογικά αποδείξεων. Δύο τρόποι απόδειξης που συναντάμε συνήθως σε βιβλία ανάλυσης είναι οι ακόλουθοι.

Στην πρώτη απόδειξη λαμβάνονται τα πολυώνυμα Bernstein και αποδεικνύεται η ομοιόμορφη σύγκλιση αυτών, στο διάστημα  $[0,1]$ , στην συνάρτηση  $f$ . Στην δεύτερη απόδειξη, θεωρώντας μια οικογένεια πολυωνυμικών συναρτήσεων  $Q_n$ , με κατάλληλα χαρακτηριστικά δείχνουμε την ομοιόμορφη σύγκλιση στο διάστημα  $[0,1]$ , της συνέλιξης  $p_n(x) = \int_{-1}^1 f(x+t)Q_n(t) dt$  στην συνάρτηση  $f$ . Η πρώτη απόδειξη μπορεί να ευρεθεί στο βιβλίο (Hunter and Nachtergaele, 2001) και η δεύτερη στα βιβλία (Rudin, 1976) και (Zorich, Cooke and Paniagua T., 2004). Εδώ αναπτύσσουμε στην την δεύτερη απόδειξη.

**Απόδειξη Θεωρήματος 1:** Χωρίς βλάβη της γενικότητας, για την απόδειξη του θεωρήματος μπορούμε να περιοριστούμε στο διάστημα  $I := [-1, 1]$ . Εφόσον η συνάρτηση ορίζεται σε συμπαγές σύνολο είναι φραγμένη και ομοιόμορφα συνεχής σε αυτό. Επεκτείνουμε την συνάρτηση  $f$  σε όλο το  $\mathbb{R}$  θέτοντας  $f(x) = 0$ ,  $\forall x \in (\mathbb{R} - [-1, 1])$ . Τότε η συνάρτηση  $f$  είναι ομοιόμορφα συνεχής σε όλο το  $\mathbb{R}$ . Θέλουμε να δείξουμε ότι  $f * Q_n \rightarrow f$  ομοιόμορφα στο διάστημα  $I$  με κάθε συνάρτηση  $Q_n$  να είναι πολυωνυμική.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις πολυωνυμικές συναρτήσεις  $Q_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ , που δίνονται από την ακόλουθη σχέση:  $\forall n \in \mathbb{N}$

$$Q_n(x) := \begin{cases} c_n (1 - x^2)^n, & |x| \leq 1 \\ 0, & \text{e.e} \end{cases}.$$

Καθώς το  $n$  αυξάνει, η συνάρτηση  $Q_n$  συγκεντρώνεται γύρω από το μηδέν, εννοώντας ότι όλες οι θετικές τιμές που λαμβάνει, προέρχονται ως εικόνα μιας όλο και μικρότερης περιοχής του πεδίου ορισμού της με κέντρο το μηδέν.

Αμέσως μετά επιλέγουμε την σταθερά  $c_n$  έτσι ώστε το ολοκλήρωμα της συνάρτησης  $Q_n$  να κανονικοποιήται, δηλαδή να ισχύει ότι:

$$\int_{-1}^1 Q_n(x) dx = 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Η προφανής επιλογή είναι:  $c_n := 1 / \int_{-1}^1 (1 - x^2)^n$ .

Θα δείξουμε τώρα ότι:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[-1,1]} Q_n(x) dx = 1.$$

Για κάθε  $\delta \in [0,1]$ , ισχύει ότι:

$$0 \leq \int_{\delta}^1 (1 - x^2)^n dx \leq \int_{\delta}^1 (1 - \delta^2)^n dx = (1 - \delta^2)^n (1 - \delta^2),$$

και όταν  $n \rightarrow \infty$ , λαμβάνουμε  $(1 - \delta^2)^n (1 - \delta^2) \rightarrow 0$ .

Παράλληλα:

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx = 2 \int_0^1 (1-x^2)^n dx > 2 \int_0^1 (1-x)^n dx = 2/(n+1).$$

Συνεπώς από την επιλογή του  $c_n$  και τα ανωτέρω, έχουμε ότι:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[-1,1]-B(0,\delta)} Q_n(x) dx = 0, \quad (1)$$

και

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[-1,1]} Q_n(x) dx = 1. \quad (2)$$

Μέχρι αυτό το σημείο, έχουμε ορίσει μια ακολουθία θετικών πολυωνυμικών συναρτήσεων η οποία συγκεντρώνεται στο μηδέν και κάθε μία εξ αυτών των συναρτήσεων ολοκληρώνεται στην μονάδα.

Ορίζουμε την συνέλιξη (αναφερόμαστε σε αυτή και ως Landau πολυώνυμα):

$$P(x) := [f * Q_n](x) = \int_{-1}^1 f(t) Q_n(x-t) dt, \quad \forall x \in I.$$

Η συνάρτηση  $P$  είναι πολυώνυμο βαθμού  $2n$  ως προς την μεταβλητή  $x$ :

$$\begin{aligned} P_{2n}(x) &= \int_{-1}^1 f(t) Q_n(x-t) dt = \int_{-1}^1 f(t) c_n (1-(x-t)^2)^n dt = \\ &= \int_{-1}^1 f(t) \sum_{k=0}^{2n} w_k(t) x^k dt = \sum_{k=0}^{2n} \int_{-1}^1 f(t) w_k(t) dt x^k. \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε την διαφορά:

$$\begin{aligned} |P(x) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} f(x) Q_n(x-t) dt - f(x) \right| \\ &\quad \text{[χρησιμοποιούμε την συμμετρία της συνέλιξης]} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} (f(x-t) - f(x)) Q_n(t) dt \leq \\ &\leq \left( \int_{\mathbb{R}-B(0,\delta)} + \int_{B(0,\delta)} \right) |f(x) - f(x-t)| |Q_n(t)| dt. \end{aligned} \quad (3)$$

Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι φραγμένη:

$$f(x) \leq M, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{όπου } M := \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$$

και ομοιόμορφα συνεχής, δηλαδή:

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x, y \in E : |x - y| < \delta) : [|f(x) - f(y)| < \varepsilon].$$

Κατά συνέπεια από την σχέση (3) έχουμε ότι:

$$|P(x) - f(x)| < \varepsilon \int_{B(0,\delta)} |Q_n(t)| dt + 2M \int_{\mathbb{R}-B(0,\delta)} |Q_n(t)| dt. \quad (4)$$

Τέλος λαμβάνοντας, στην σχέση (4) το όριο όταν  $n \rightarrow \infty$ , και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (1) και (2), έχουμε:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |P(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Η απόδειξη του Θεωρήματος 1 ολοκληρώνεται.

Σε αυτό το σημείο αναφέρουμε ως πηγή το άρθρο (Pinkus, 2000), στο οποίο γίνεται μια εκτενής συζήτηση για την συμβολή του Weierstrass μέσω του ανωτέρω Θεωρήματος στην θεωρία προσέγγισης και το αντίκτυπο αυτής. Εκεί ευρίσκονται έξι αποδείξεις του θεωρήματος επιπροσθέτως της απόδειξης του ίδιου του Weierstrass καθώς και ενδιαφέροντα ιστορικά στοιχεία.

Η πρώτη γενίκευση του ανωτέρου Θεωρήματος 1, έγινε από τον Maurice Fréchet στο άρθρο του (Fréchet, 1910). Το Θεώρημα 1 αναφέρεται ρητά σε συνεχή απεικονίσεις με πεδίο ορισμού κλειστά και φραγμένα διαστήματα του  $\mathbb{R}$ , συνεπώς δεν μπορεί να εφαρμοστεί για συναρτησιακές απεικονίσεις. Ο Maurice Fréchet αποδεικνύει ένα θεώρημα πολυωνυμικής προσέγγισης συνεχών συναρτησιακών απεικονίσεων θεωρώντας ως πεδίο ορισμού αυτών, τον χώρο των συνεχών συναρτήσεων  $C((a,b) \rightarrow \mathbb{R})$ , βλ. εδάφιο 1.4.

Το θεώρημα προσέγγισης Weierstrass γενικεύθηκε σε μεγάλο βαθμό από τον Marshall Henry Stone στο άρθρο (Stone, 1948). Η γενίκευση επιτυγχάνεται στο σημείο όπου το πεδίο ορισμού των συνεχών απεικονίσεων των οποίων εξετάζεται η ύπαρξη προσέγγισης, επεκτείνεται από ένα συμπαγές υποσύνολο της πραγματικής ευθείας, σε ένα συμπαγές υποσύνολο ενός γενικού μετρικού χώρου, έστω  $X$ . Τότε κάθε συνεχής συνάρτηση  $f \in C(X \rightarrow \mathbb{R})$ , μπορεί να αναπαρασταθεί προσεγγιστικά από τα στοιχεία (υπο)χώρου  $A \subseteq C(X \rightarrow \mathbb{R})$ , ο οποίος πληροί συγκεκριμένες υποθέσεις δομής και ιδιοτήτων.

Στον τρόπο παρουσίασης του Θεωρήματος Stone-Weierstrass ακολουθούμε το βιβλίο (Ma, 1995).

**Θεώρημα 2 [Stone-Weierstrass Approximation Theorem (vector algebra form)]:** Έστω  $X$  συμπαγής μετρικός χώρος και  $C(X \rightarrow \mathbb{R})$  το σύνολο των συνεχών, πραγματικών συναρτήσεων επί του  $X$ , εφοδιασμένο με την συνήθη supremum νόρμα. Ακόμα θεωρούμε  $\mathcal{A}$  γραμμικό υπόχωρο του  $C(X \rightarrow \mathbb{R})$  ο οποίος επιπροσθέτως αποτελεί άλγεβρα συναρτήσεων<sup>(1)</sup>, με την συνήθη πράξη γινομένου<sup>(2)</sup>, περιέχει την σταθερή συνάρτηση  $f(x) = 1$  και διαχωρίζει σημεία στον χώρο  $X$ <sup>(3)</sup>. Τότε το σύνολο  $\mathcal{A}$  είναι πυκνός υπόχωρος του  $C(X \rightarrow \mathbb{R})$ , δηλαδή:

$$(\forall f \in C(X \rightarrow \mathbb{R})) (\forall \varepsilon > 0) (\exists p_\varepsilon \in \mathcal{A}) : [\|f - p_\varepsilon\| < \varepsilon]. \quad \blacksquare$$

Πριν προχωρήσουμε στις λεπτομέρειες της απόδειξης του Θεωρήματος 2 σχολιάζουμε το εξής. Μπορούμε να αποδείξουμε σε πρώτη φάση το ακόλουθο θεώρημα.

<sup>(1)</sup> **Ορισμός[Άλγεβρα συναρτήσεων]:** Μία οικογένεια πραγματικών συναρτήσεων ονομάζεται άλγεβρα συναρτήσεων, αν και μόνον αν είναι κλειστή ως προς τους γραμμικούς συνδυασμούς και κατά σημείο γινόμενα των στοιχείων της.

<sup>(2)</sup> Δηλαδή:  $(\forall f, g \in A) (\forall x \in X) \Rightarrow [(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)]$

<sup>(3)</sup> **Ορισμός:** Έστω  $X$  μετρικός χώρος και η άλγεβρα συναρτήσεων  $\mathcal{A}(X \rightarrow \mathbb{R})$ . Λέμε ότι η άλγεβρα  $\mathcal{A}$  διαχωρίζει το σημεία στον χώρο  $X$  αν  $\forall x_1, x_2 \in X$ , όπου  $x_1 \neq x_2$ , υπάρχει  $f \in \mathcal{A}$ , τέτοιο ώστε:  $f(x_1) \neq f(x_2)$ .

**Θεώρημα 3 [Stone-Weierstrass Approximation Theorem (vector-ordered-lattice form)]:**

Έστω  $X$ , ένας συμπαγής μετρικός χώρος και  $C(X \rightarrow \mathbb{R})$  το σύνολο των συνεχών, πραγματικών συναρτήσεων επί του  $X$ , εφοδιασμένο με την συνήθη supremum νόρμα <sup>(4)</sup>. Ακόμα θεωρούμε  $E$  γραμμικό υπόχωρο του  $C(X \rightarrow \mathbb{R})$  ο οποίος επιπροσθέτως αποτελεί έναν vector-ordered-lattice<sup>(5)</sup> χώρο, με την συνήθη μερική διάταξη <sup>(6)</sup>, περιέχει την σταθερή συνάρτηση  $f(x) = 1$  και διαχωρίζει τα σημεία στον χώρο  $X$ . Τότε,  $E$  είναι πυκνός υπόχωρος του  $C(X \rightarrow \mathbb{R})$ , δηλαδή:

$$(\forall f \in C(X \rightarrow \mathbb{R})) (\forall \varepsilon > 0) (\exists p_\varepsilon \in E) : [\|f - p_\varepsilon\|_\infty < \varepsilon]. \blacksquare$$

Εύκολα βλέπουμε ότι στο Θεώρημα 3 διατυπώσαμε το Θεώρημα 2 με την διαφορά του ότι αντί της υπόθεσης ενός χώρου  $\mathcal{A} \subseteq C(X \rightarrow \mathbb{R})$  ο οποίος αποτελεί άλγεβρα, θέσαμε την υπόθεση ενός χώρου  $E \subseteq C(X \rightarrow \mathbb{R})$  ο οποίος έχει δομή vector-ordered-lattice. Τότε, αφού αποδείξουμε το Θεώρημα 3, δείχνοντας ότι μια άλγεβρα συναρτήσεων που περιέχει την σταθερή συνάρτηση  $f(x) = 1$  και διαχωρίζει σημεία στον χώρο  $X$ , έχει την δομή vector-ordered-lattice χώρου, μπορούμε να ανάγουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 2 στην απόδειξη του Θεωρήματος 3. Αυτό λοιπόν το ενδιαμέσο αποτέλεσμα μπορεί να τοποθετηθεί ως μια δεύτερη διατύπωση (μορφή) του Θεωρήματος Stone-Weierstrass είτε ακόμα και ως βοηθητικό λήμμα.

Στην περίπτωση που επιλέγεται το πρώτο, όπως εδώ, πρέπει να είναι σαφές ότι όταν επικαλούμαστε το Θεώρημα Stone-Weierstrass αναφερόμαστε στο Θεώρημα 2. Η διατύπωση του Θεωρήματος από τον ίδιον τον Marshall Henry Stone είναι αυτή του Θεωρήματος 2. Το ζητούμενο των προβλημάτων προσέγγισης, αφού εξασφαλιστεί η ύπαρξη αυτής, είναι η εύρεση του κατάλληλων συνόλου προσεγγιστικών στοιχείων. Αυτό καθίσταται ευκολότερο όταν πρέπει να ελεγχθεί ότι ένα σύνολο συναρτήσεων αποτελεί άλγεβρα πόσο μάλλον το ότι είναι εύκολο να κατασκευαστεί ένα σύνολο συναρτήσεων ως άλγεβρα.

Το Θεώρημα Stone-Weierstrass είναι ιδιαίτερος σημαντικό καθώς επιτρέπει την διερεύνηση του προβλήματος προσέγγισης γενικότερων αντικειμένων από αυτά των συνήθων συναρτήσεων όπως παραδείγματος χάρη συναρτησιακών καθώς επίσης υπό ειδικές συνθήκες ακόμα και τελεστών, βλ. εδάφιο 4.3.

**Απόδειξη Θεωρήματος 3:** Θεωρούμε δοθείσα συνάρτηση  $f \in C(X \rightarrow \mathbb{R})$  και  $\varepsilon > 0$ . Εφόσον το σύνολο  $E$  διαχωρίζει σημεία στον χώρο  $X$ , θεωρούμε  $a, b \in X$ ,  $a \neq b$  και τότε υπάρχει συνάρτηση  $g_{a|b} \in E$ , έτσι ώστε:

$$g_{a|b}(a) \neq g_{a|b}(b).$$

<sup>(4)</sup> Για κάθε  $f \in C(X \rightarrow \mathbb{R})$  η νόρμα  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$ , είναι καλώς ορισμένη και πεπερασμένη καθώς  $X$  είναι συμπαγές.

<sup>(5)</sup> **Ορισμός [Vector Ordered Lattice]:** Ένας μερικός διατεταγμένος γραμμικός χώρος  $E$ , στον οποίο για κάθε ζεύγος στοιχείων  $x, y \in E$ , οι ποσότητες  $x \wedge y := \inf \{x, y\}$ ,  $x \vee y := \sup \{x, y\}$  υπάρχουν, καλείται Vector-ordered-lattice.

Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να βρει εκτενή ανάπτυξη στο θέμα των lattice δομών στο κλασικό βιβλίο του G. Birkhoff (Lattice Theory, 1967).

<sup>(6)</sup> Δηλαδή:  $[f \leq g] \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} [(\forall x \in X) f(x) \leq g(x)]$



Ορίζουμε την συνάρτηση:

$$h_{a|b}(x) = f(a) + \frac{(f(b) - f(a))(g_{a|b}(x) - g_{a|b}(a))}{g_{a|b}(b) - g_{a|b}(a)}, \quad x \in X.$$

Προφανώς ισχύει ότι  $h_{a|b}(a) = f(a)$  και  $h_{a|b}(b) = f(b)$ . Βλέπουμε ότι η συνάρτηση  $h_{a|b}$  ανήκει στον χώρο  $E$  εφόσον όλες οι σταθερές συναρτήσεις ανήκουν στον χώρο από υπόθεση. Τώρα ορίζουμε το σύνολο  $V_b := \{x \in X : h_{a|b}(x) < f(x) + \varepsilon\}$ . Το σύνολο  $V_b$  είναι ανοικτό καθώς αποτελεί την αντίστροφη εικόνα συνεχούς συνάρτησης από ανοικτό, επίσης περιέχει το σημείο  $b$ .

Χρησιμοποιώντας την συμπάγεια του συνόλου  $X$ , υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο του χώρου  $X$ , έστω  $X_{s_1} \subseteq X$ , έτσι ώστε:

$$X = \bigcup_{b_i \in X_{s_1}} V_{b_i}.$$

Ορίζουμε τώρα την συνάρτηση  $y_a$  να είναι το supremum (join) των συναρτήσεων  $h_{a|b_i}(\bullet)$ , για τα σημεία  $b_i \in X_{s_1}$ :

$$p_a = \wedge \{h_{a|b}(\bullet) : b \in X_{s_1}\}.$$

Εφόσον το σύνολο  $E$  είναι vector lattice η συνάρτηση  $y_a$  ανήκει σε αυτό.

Προφανώς για την συνάρτηση  $y_a$ , έχουμε ότι:

$$y_a(x) < f(x) + \varepsilon, \quad \forall x \in X \text{ και } y_a(a) = f(a).$$

Τέλος ορίζουμε το σύνολο  $W_a := \{x \in X : p_a(x) > f(x) - \varepsilon\}$ . Το σύνολο  $W_a$  είναι και αυτό ανοικτό και επίσης περιέχει το σημείο  $a$ .

Χρησιμοποιώντας ξανά την συμπάγεια του χώρου  $X$ , υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο  $X_{s_2} \subseteq X$ , έτσι ώστε:

$$X = \bigcup_{a_i \in X_{s_2}} W_{a_i}.$$

Ορίζουμε τώρα την συνάρτηση  $y$  να είναι το infimum (meet) των συναρτήσεων  $y_{a_i}(\bullet)$  για τα σημεία  $a_i \in X_{s_2}$ :

$$y = \vee \{y_{a_i}(\bullet) : a_i \in X_{s_2}\}.$$

Προφανώς η συνάρτηση  $y$  ανήκει στο σύνολο  $E$  και έχουμε βάση της κατασκευής μας ότι:

$$f(x) - \varepsilon < y(x) < f(x) + \varepsilon, \quad \forall x \in X.$$

Συμπεραίνουμε ότι  $|f(x) - y(x)| < \varepsilon$  και λαμβάνοντας το supremum καταλήγουμε:

$$\|f - y\|_\infty < \varepsilon.$$

Η απόδειξη του Θεωρήματος 1 ολοκληρώνεται.

Πριν περάσουμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 2 χρειαζόμαστε δύο βοηθητικά λήμματα και το Θεώρημα Dini.

**Λήμμα 1:** Η κλειστότητα της άλγεβρας συναρτήσεων  $\mathcal{A} \subseteq C(X \rightarrow \mathbb{R})$ , του Θεωρήματος 2, είναι άλγεβρα.

*Απόδειξη:* Συμβολίζουμε  $\bar{\mathcal{A}}$  την κλειστότητα της άλγεβρας  $\mathcal{A}$ . Θεωρούμε συναρτήσεις  $f, g \in \bar{\mathcal{A}}$  και ακολουθίες  $f_n, g_n \in \mathcal{A}$ , τέτοιες ώστε  $f_n \rightarrow f$ ,  $g_n \rightarrow g$ . Εφόσον ο χώρος  $X$  είναι συμπαγής, όλες οι θεωρούμενες συναρτήσεις είναι φραγμένες. Κατά συνέπεια ισχύει ότι:  $\forall c \in \mathbb{R}$

$$(\alpha) f_n + g_n \rightarrow f + g, (\beta) f_n \cdot g_n \rightarrow f \cdot g, (\gamma) c f_n \rightarrow c f.$$

Συνεπώς το σύνολο  $\bar{\mathcal{A}}$  είναι κλειστό ως προς τους γραμμικούς συνδυασμούς και γινόμενα και αποτελεί άλγεβρα συναρτήσεων.

Η απόδειξη του Λήμματος 1 ολοκληρώνεται.

**Θεώρημα 3 [Dini's Theorem]:** Έστω μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων  $(f_n(\cdot))_1^\infty \in C(X \rightarrow \mathbb{R})$  όπου  $X$  συμπαγές υποσύνολο μετρικού χώρου. Εάν η ακολουθία αυτή είναι φθίνουσα και συγκλίνει κατά σημείο σε μια συνεχή συνάρτηση  $f(\cdot)$ , τότε η ακολουθία συγκλίνει ομοιόμορφα στην συνάρτηση  $f(\cdot)$  πάνω στο σύνολο  $X$ .

*Απόδειξη:* Θέτουμε  $g_n = f_n - f$ . Εφόσον η ακολουθία  $(f_n)$  είναι φθίνουσα και συγκλίνει κατά σημείο στην συνάρτηση  $f$ , η ακολουθία  $g_n$  είναι και αυτή φθίνουσα και συγκλίνει κατά σημείο στην μηδενική συνάρτηση. Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι η ακολουθία  $g_n$  συγκλίνει ομοιόμορφα στην μηδενική συνάρτηση.

Έστω δεδομένο  $\varepsilon > 0$ . Θεωρούμε το σύνολο  $G_n = \{x \in X : g_n(x) \geq \varepsilon\}$  για  $n = 1, 2, \dots$ . Εφόσον η συνάρτηση  $g_n$  είναι συνεχής, το σύνολο  $G_n$  είναι κλειστό ως εικόνα συνεχούς συνάρτησης ( $g_n^{-1}$ ) από κλειστό σύνολο  $([\varepsilon, +\infty))$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ . Το σύνολο  $G_n$  ως κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς συνόλου  $X$ , είναι συμπαγές. Τέλος, εφόσον έχουμε ότι  $g_{n+1} \leq g_n$  συνεπάγεται ότι  $G_{n+1} \subseteq G_n$ .

Θεωρούμε τώρα δεδομένο  $x_0 \in X$ . Γνωρίζουμε ότι  $g_n(x_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , άρα για επαρκώς μεγάλο  $n = n_*$  συμπεραίνουμε ότι  $x_0 \notin G_{n_*}$ , συνεπώς  $x_0 \notin \bigcap_{n=1}^\infty G_n$  και έπεται ότι  $\forall n \geq n_*$  ισχύει ότι  $0 \leq g_n(x_0) \leq \varepsilon$ . Εφόσον  $\forall x \in X$  ισχύει το ανωτέρω επιχείρημα, τελικά συμπεραίνουμε ότι  $\bigcap_{n=1}^\infty G_n = \emptyset$ , δηλαδή:

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0) [ |g_n(x)| := |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in X ].$$

Η απόδειξη του θεωρήματος ολοκληρώνεται.

**Λήμμα 2:** Υπάρχει ακολουθία πολωνύμων  $(p_n)$  έτσι ώστε  $0 \leq p_n \leq t^{1/2}$ ,  $p_n \xrightarrow{u} t^{1/2}$ , στο διάστημα  $[0,1]$ .

*Απόδειξη:* Ορίζουμε στο διάστημα  $[0,1]$  την ακολουθία με αναδρομικό τύπο:

$$p_{n+1}(t) = p_n + \frac{1}{2}(t - p_n^2(t)) \text{ και } p_0(t) = 0.$$

Χρησιμοποιούμε επαγωγή<sup>(7)</sup> και δείχνουμε ότι η ακολουθία  $(p_n)$  είναι φραγμένη στο διάστημα  $[0,1]$ , με άνω φράγμα την μονάδα. Λαμβάνοντας την διαφορά:

$$p_{n+1} - p_n = \dots = (p_n(t) - p_{n-1}(t)) \left( 1 - \frac{p_n(t) - p_{n-1}(t)}{2} \right),$$

συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία είναι αύξουσα,  $p_{n+1} \geq p_n$ . Εφόσον η ακολουθία είναι φραγμένη και μονότονη συγκλίνει, δηλαδή:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (p_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} (p_n).$$

Από τον αναδρομικό τύπο λαμβάνουμε ότι  $p_n \xrightarrow{u} t^{1/2}$ . Τέλος έχουμε ότι η ακολουθία  $d_n := p_n - t^{1/2}$ , είναι φθίνουσα και από τα ανωτέρω  $p_n$  συγκλίνει κατά σημείο στην συνάρτηση  $t^{1/2}$ , στο διάστημα  $[0,1]$ . Συνεπώς με εφαρμογή του Θεωρήματος Dini ανωτέρω, η ακολουθία  $p_n$  συγκλίνει ομοιόμορφα,  $p_n \xrightarrow{u} t^{1/2}$ .

Η απόδειξη του Λήμματος 2 ολοκληρώνεται.

Τέλος η απόδειξη του Θεωρήματος 2 χρησιμοποιεί το ακόλουθο αποτέλεσμα.

**Θεώρημα:** Ένας γραμμικός διατεταγμένος χώρος (ordered vector space) έχει δομή lattice (vector-ordered-lattice) αν και μόνον αν είναι κλειστός ως προς τις απόλυτες τιμές.

Η απόδειξη του ανωτέρω θεωρήματος μπορεί να ευρεθεί στο βιβλίο (Groenewegen and Rooij, 2016, σελ. 43).

**Απόδειξη Θεωρήματος 2:** Θα αποδείξουμε ότι η κλειστότητα  $\bar{\mathcal{A}}$  της άλγεβρας συναρτήσεων  $\mathcal{A} \subseteq C(X \rightarrow \mathbb{R})$  είναι vector-ordered-lattice χώρος.

Θεωρούμε συνάρτηση  $f \in \bar{\mathcal{A}}$ . Η συνάρτηση  $|f|$  είναι συνεχής συνάρτηση,  $|f| \in C(X \rightarrow \mathbb{R})$ . Εφόσον ο χώρος  $X$  είναι συμπαγής από την υπόθεση, η συνάρτηση  $|f|$  είναι φραγμένη, δηλαδή υπάρχει  $c \in \mathbb{R}$ , έτσι ώστε  $|f(x)| \leq c$  για κάθε  $x \in X$ .

Χρησιμοποιούμε την ακολουθία πολωνύμων  $(p_n)$  του Λήμματος 2 ανωτέρω. Τότε έχουμε ότι  $p_n(f^2/c^2) \xrightarrow{u} (f^2/c^2)^{1/2} = |f|/c$ , δηλαδή  $|f|/c$  αποτελεί σημείο της ομοιόμορφης

<sup>(7)</sup> Χρησιμοποιούμε την ακόλουθη μορφή της επαγωγής:

Βασικό βήμα:  $\Pi(0)$  ισχύει.

Επαγωγική υπόθεση:  $\Pi(0), \Pi(1), \dots, \Pi(N)$  ισχύουν.

Επαγωγικό βήμα:  $\Pi(N+1)$  ισχύει.

Τότε  $\Pi(n)$  ισχύει για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ .

κλειστότητας του συνόλου  $\bar{\mathcal{A}}$ . Από το Λήμμα 1, γνωρίζουμε ότι το σύνολο  $\bar{\mathcal{A}}$  είναι κλειστό, δηλαδή  $|f|/c \in \bar{\mathcal{A}}$  και κατά συνέπεια  $|f| \in \bar{\mathcal{A}}$ .

Αποδείξαμε λοιπόν ότι το σύνολο  $\bar{\mathcal{A}}$  είναι vector-ordered-lattice χώρος. Τέλος γνωρίζουμε ότι  $\mathcal{A} \subseteq \bar{\mathcal{A}}$ , συνεπώς το σύνολο  $\bar{\mathcal{A}}$  περιέχει την σταθερή συνάρτηση  $f(x) = 1$  και διαχωρίζει τα σημεία στον χώρο  $X$ . Βάση του Θεωρήματος 3 καταλήγουμε στο ότι το σύνολο  $\bar{\mathcal{A}}$  είναι πυκνό στο χώρο  $C(X \rightarrow \mathbb{R})$  και κατ' επέκταση και το σύνολο  $\mathcal{A}$ .

Η απόδειξη του Θεωρήματος 2 ολοκληρώνεται.

Κλείνοντας αυτό το εδάφιο σημειώνουμε ότι όπως και με το αρχικό αποτέλεσμα, αυτό του θεωρήματος προσέγγισης Weierstrass, και εδώ με την πάροδο των χρόνων έχει δημιουργηθεί πληθώρα διαφορετικών αποδείξεων Θεωρήματος 2. Δύο μεθοδολογικά διαφορετικές προσεγγίσεις βρίσκονται στα άρθρα (Brosowski and Deutsch, 1981) και (Branges, 1959).

### 3.2 Προσεγγιστική αναπαράσταση συνεχών (μη-γραμμικών) συναρτησιακών

#### Προσέγγιση με χρήση πολυωνύμων Volterra στον χώρο των συνεχών συναρτησιακών $\mathcal{C}(C([a, b]) \rightarrow \mathbb{R})$

Μια άμεση εφαρμογή του θεωρήματος Stone-Weierstrass, βλ. εδάφιο 3.1, Θεώρημα 2, μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας τα συναρτησιακά πολυώνυμα Volterra.

**Θεώρημα 1:** Έστω  $\mathcal{T} := [t_0, T]$ ,  $C(\mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R})$  ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων επί του  $\mathcal{T}$ , και  $X = X(\mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R})$  ένα συμπαγές υποσύνολο του χώρου  $C(\mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R})$ . Θεωρούμε τώρα το σύνολο των συνεχών συναρτησιακών, ορισμένων στον συμπαγή (υπό)χώρο  $X$ , το οποίο συμβολίζουμε με  $\mathcal{C}(X \rightarrow \mathbb{R})$  <sup>(8)</sup>. Έστω  $\mathcal{F} \in \mathcal{C}(X \rightarrow \mathbb{R})$ . Τότε ισχύει το ακόλουθο:

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n = n(\varepsilon)) (\exists \text{ πολυώνυμο Volterra } p_n) : \|\mathcal{F} - p_n\|_\infty < \varepsilon \text{ } ^{(9)},$$

δηλαδή, για δεδομένο  $\mathcal{F} \in \mathcal{C}(X \rightarrow \mathbb{R})$ , υπάρχει συναρτησιακό πολυώνυμο Volterra το οποίο προσεγγίζει το  $\mathcal{F}$  με ακρίβεια  $\varepsilon > 0$  (για οποιοδήποτε  $\varepsilon > 0$ ). ■

Με άλλα λόγια, το σύνολο των συναρτησιακών πολυωνύμων Volterra  $\mathcal{P}_V(X \rightarrow \mathbb{R})$  είναι πυκνό στο σύνολο  $\mathcal{C}(X \rightarrow \mathbb{R})$ .

Τα στοιχεία του συνόλου  $\mathcal{P}_V(X \rightarrow \mathbb{R})$  είναι της μορφής:

$$p_N[x(\cdot)] = c_0 + \sum_{n=1}^N \int_{[t_0, T]^{(n)}} K_n(\boldsymbol{\tau}^{(n)}) \prod_{k=1}^n x(\tau_k) d\boldsymbol{\tau}^{(n)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

<sup>(8)</sup> Η χρήση του γράμματος  $\mathcal{C}$  έναντι του  $C$ , έχει ως στόχο την έμφαση του ότι βρισκόμαστε στην περίπτωση όπου δηλώνουμε ένα σύνολο συνεχών απεικονίσεων από ένα σύνολο του οποίου τα στοιχεία αποτελούν και αυτά συνεχείς απεικονίσεις. Έχουμε ότι  $X := C(\mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R})$  και θα μπορούσαμε να γράψουμε ισοδύναμα της εκφράσεως  $\mathcal{C}(X \rightarrow \mathbb{R})$ :

$$C(C(\mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}) \equiv C(X \rightarrow \mathbb{R}) \quad [ \equiv \mathcal{C}(X \rightarrow \mathbb{R}) ]$$

<sup>(9)</sup> Η νόρμα  $\|\cdot\|_\infty$ , συναρτησιακού  $\mathcal{F} \in \mathcal{C}(X \rightarrow \mathbb{R})$  ορίζεται να είναι η ποσότητα:

$$\|\mathcal{F}\|_\infty = \max \{ |\mathcal{F}[x]|, x \in X \}.$$

όπου οι συναρτήσεις  $K_n$  είναι στοιχεία του χώρου  $C(\mathcal{T}^n \rightarrow \mathbb{R})$  <sup>(10)</sup>.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 1 επιτυγχάνεται άμεσα με εφαρμογή του θεωρήματος Stone-Weierstrass για άλγεβρες πάνω σε γραμμικούς χώρους. Θα δείξουμε ως λήμματα, πρώτον ότι το σύνολο των πολυωνύμων Volterra  $\mathcal{P}_V(X \rightarrow \mathbb{R})$  είναι γραμμικός χώρος, δεύτερον ότι είναι άλγεβρα με γινόμενο τον συνήθη πολλαπλασιασμό και τρίτον, ότι η άλγεβρα αυτή διαχωρίζει τα σημεία στον  $X$ .

**Λήμμα 1:** Ο χώρος  $\mathcal{P}_V(X \rightarrow \mathbb{R})$ , είναι κλειστός ως προς την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό με σταθερά (δηλαδή γραμμικός).

*Απόδειξη:* Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι:  $\forall p_N[\cdot], p_M[\cdot] \in \mathcal{P}_V(X \rightarrow \mathbb{R})$

$$(p_N + p_M)[\cdot] \in \mathcal{P}_V(X \rightarrow \mathbb{R}).$$

Έστω  $N < M$ , έχουμε:

$$\begin{aligned} p_N^1[x(\cdot)] + p_M^2[x(\cdot)] &= c_{1,0} + \sum_{n=1}^N \int_{[t_0, T]^{(n)}} K_{1,n}(\boldsymbol{\tau}^{(n)}) \prod_{k=1}^n x(\tau_k) d\boldsymbol{\tau}^{(n)} + \\ &+ c_{2,0} + \sum_{m=0}^M \int_{[t_0, T]^{(m)}} K_{2,m}(\boldsymbol{\tau}^{(m)}) \prod_{k=1}^m x(\tau_k) d\boldsymbol{\tau}^{(m)} = \\ &= c_{1,0} + c_{2,0} + \sum_{n=1}^N \int_{[t_0, T]^{(n)}} (K_{1,n}(\boldsymbol{\tau}^{(n)}) + K_{2,n}(\boldsymbol{\tau}^{(n)})) \prod_{k=1}^n x(\tau_k) d\boldsymbol{\tau}^{(n)} + \\ &+ \sum_{m=N+1}^M \int_{[t_0, T]^{(m)}} K_{2,m}(\boldsymbol{\tau}^{(m)}) \prod_{k=1}^m x(\tau_k) d\boldsymbol{\tau}^{(m)}. \end{aligned}$$

Κατά συνέπεια, οι συναρτήσεις  $K_n^*(\cdot) = K_{1,n}(\cdot) + K_{2,n}(\cdot) \in C(\mathcal{T}^n \rightarrow \mathbb{R})$ , και ορίζουν το πολυώνυμο Volterra:

$$p_M^*[\cdot] = (p_N^1 + p_M^2)[\cdot].$$

Ακόμα ισχύει ότι:  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha p_N[\cdot] \in \mathcal{P}_V(X \rightarrow \mathbb{R})$$

καθώς έχουμε ότι:

$$\alpha p_N[x(\cdot)] = \sum_{n=0}^N \int_{[t_0, t]^{(n)}} \alpha K_n(\boldsymbol{\tau}^{(n)}) \prod_{k=1}^n x(\tau_k) d\boldsymbol{\tau}^{(n)}.$$

Κατά συνέπεια, οι συναρτήσεις  $K_n^*(\cdot) = \alpha K_{1,n}(\cdot) \in C(\mathcal{T}^n \rightarrow \mathbb{R})$ , και ορίζουν το πολυώνυμο Volterra:

$$p_N^*[\cdot] = \alpha p_N[\cdot].$$

---

<sup>(10)</sup> Υπενθυμίζουμε ότι με  $\mathcal{T}^n$  συμβολίζουμε το καρτεσιανό γινόμενο  $\underbrace{T \times T \times \dots \times T}_{n \text{ - φορές}}$ .

**Λήμμα 2:** Το σύνολο  $\mathcal{P}_V(X \rightarrow \mathbb{R})$  είναι άλγεβρα (algebra over a vector space).

*Απόδειξη:* Εφ' όσον τα πολώνυμα Volterra λαμβάνουν πραγματικές τιμές, ορίζουμε το μεταξύ τους γινόμενο μέσω του συνήθους γινομένου " $\bullet$ ", δηλαδή:  $\forall p_N^1[\bullet], p_M^2[\bullet] \in \mathcal{P}_V(X \rightarrow \mathbb{R})$

$$(p_N^1 \bullet p_M^2)[x(\cdot)] = p_N^1[x(\cdot)] \cdot p_M^2[x(\cdot)].$$

Έχουμε ότι  $(p_N^1 \bullet p_M^2)[\bullet] \in \mathcal{P}_V(X \rightarrow \mathbb{R})$ , καθώς:

$$\begin{aligned} (p_N^1 \bullet p_M^2)[x(\cdot)] &= \left( c_{1,0} + \sum_{n=1}^N \int_{[t_0, T]^{(n)}} K_{1,n}(\tau^{(n)}) \prod_{k=1}^n x(\tau_k) d\tau^{(n)} \right) \cdot \\ &\quad \cdot \left( c_{2,0} + \sum_{m=1}^M \int_{[t_0, T]^{(m)}} K_{2,m}(\tau^{(m)}) \prod_{k=1}^m x(\tau_k) d\tau^{(m)} \right) = \\ &= c_{1,0} c_{2,0} + \sum_{n=1}^N \int_{[t_0, T]^{(n)}} c_{2,0} K_{1,n}(\tau^{(n)}) \prod_{k=1}^n x(\tau_k) d\tau^{(n)} + \\ &\quad + \sum_{m=1}^M \int_{[t_0, T]^{(m)}} c_{1,0} K_{2,m}(\tau^{(m)}) \prod_{k=1}^m x(\tau_k) d\tau^{(m)} + \\ &\quad + \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \int_{[t_0, T]^{(n+m)}} K_{1,n}(\tau^{(n)}) K_{2,m}(\sigma^{(m)}) \prod_{k_1=1}^n x(\tau_{k_1}) \prod_{k_2=1}^m x(\sigma_{k_2}) d\tau^{(n)} d\sigma^{(m)}. \end{aligned}$$

Για κάθε  $n \in \mathbb{N}_1^N, m \in \mathbb{N}_1^M$ , υπάρχει συνάρτηση  $K_j^* \in C(X^j \rightarrow \mathbb{R})$ ,  $j = n + m$ , τέτοια ώστε  $K_j^*(\cdot) = K_{1,n}(\cdot) K_{2,m}(\cdot)$ . Παρατηρούμε ότι ο μέγιστος αριθμός διαδοχικών ολοκληρώσεων που προκύπτει στην ανωτέρω σχέση είναι  $N + M$ . Βάση αυτών και του Λήμματος (1) ανωτέρω, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει πολώνυμο Volterra βαθμού  $N + M$ , τέτοιο ώστε:

$$p_{N+M}[\bullet] = (p_N^1 \bullet p_M^2)[\bullet].$$

Τέλος να σημειώσουμε ότι για το γινόμενο που ορίσαμε, κατά προφανή τρόπο ισχύει ότι:

$$\forall p_N, p_M, p_R, \forall a, b \in \mathbb{R}$$

$$p_N \bullet (p_M + p_R) = (p_M + p_R) \bullet p_N = p_M \bullet p_N + p_R \bullet p_N \quad (\text{distributivity})$$

$$(a p_N) \bullet (b p_M) = ab (p_N \bullet p_M).$$

Δείξαμε ότι το σύνολο των συναρτησιακών πολωνύμων Volterra  $\mathcal{P}_V(X \rightarrow \mathbb{R})$ , είναι άλγεβρα πάνω στο χώρο  $X$ .

**Λήμμα 3:** Η άλγεβρα  $\mathcal{P}_V(X \rightarrow \mathbb{R})$ , διαχωρίζει σημεία στον χώρο  $X$ , δηλαδή:

$$\left( \forall x_1(\cdot), x_2(\cdot) \in X, x_1(\cdot) \neq x_2(\cdot) \right) \left( \exists p_n \in \mathcal{P}_V(X \rightarrow \mathbb{R}) \right) : \left[ p_n[x_1(\cdot)] \neq p_n[x_2(\cdot)] \right]$$

*Απόδειξη:* Αρκεί να αποδείξουμε ότι  $\forall x_1(\cdot), x_2(\cdot) \in X$  με  $x_1(\cdot) \neq x_2(\cdot)$ , υπάρχει συνάρτηση  $K_1(\cdot)$ , τέτοια ώστε:

$$p_1[x_1(\cdot)] - p_1[x_2(\cdot)] = \int_{t_0}^t K_1(\tau) (x_1(\tau) - x_2(\tau)) d\tau \neq 0.$$

Πράγματι, λαμβάνοντας  $K_1(\tau) = x_1(\tau) - x_2(\tau)$  έχουμε το ζητούμενο:

$$p_1[x_1(\cdot)] - p_1[x_2(\cdot)] = \int_{t_0}^T (x_1(\tau) - x_2(\tau))^2 d\tau \neq 0.$$

Εφοδιασμένοι με τα Λήμματα 1, 2 και 3, περνάμε στην άμεση απόδειξη του Θεωρήματος 1.

**Απόδειξη Θεωρήματος 1:** Καταλήγουμε, με την βοήθεια των Λημμάτων 1, 2 και 3, στο συμπέρασμα ότι ο χώρος των συναρτησιακών πολυωνύμων Volterra,  $\mathcal{P}_V(X \rightarrow \mathbb{R})$ , είναι άλγεβρα συναρτήσεων, περιέχει το στοιχείο  $p_0[x(\cdot)] = 1$  (το οποίο είναι πολώνυμο βαθμού 0), και διαχωρίζει σημεία στον χώρο  $X$ . Σύμφωνα με τα ανωτέρω, το σύνολο  $\mathcal{P}_V(X \rightarrow \mathbb{R})$  πληροί όλες τις υποθέσεις του θεωρήματος Stone-Weierstrass, συνεπώς:

$$(\forall \mathcal{F} \in \mathcal{C}(X \rightarrow \mathbb{R})) (\forall \varepsilon > 0) (\exists p_{n(\varepsilon)}[\cdot] \in \mathcal{P}^N(X \rightarrow \mathbb{R})) : [\|\mathcal{F} - p_{n(\varepsilon)}\|_\infty < \varepsilon].$$

Η απόδειξη του Θεωρήματος 1 ολοκληρώνεται.

Το αποτέλεσμα αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να αναπαραστήσουμε προσεγγιστικά κάθε συνεχές (μη-γραμμικό) συναρτησιακό  $\mathcal{F} \in \mathcal{C}(X \rightarrow \mathbb{R})$ :

$$\mathcal{F}[x(\cdot)] \approx c_0 + \sum_{n=1}^N \int_{[t_0, T]^{(n)}} K_n(\tau^{(n)}) \prod_{k=1}^n x(\tau_k) d\tau^{(n)}, \quad \forall x(\cdot) \in X.$$

### Σχόλια για το πεδίο ορισμού των συναρτησιακών του Θεωρήματος 1

Στην ανωτέρω εφαρμογή του θεωρήματος Stone Weierstrass αφήσαμε τον χώρο  $X$  να είναι ένα συμπαγές υποσύνολο των συνεχών συναρτήσεων  $C(\mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R})$ . Η συμπαγεία ενός υποσυνόλου των συνεχών συναρτήσεων πάνω σε συμπαγές σύνολο -το σύνολο  $\mathcal{T}$  είναι συμπαγές- μπορεί να ελεγχθεί πάντοτε με την χρήση του θεωρήματος Ascoli-Arzelà<sup>(11)</sup>, βλ. (Hunter and Nachtergaele, 2001).

Ως ένα παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τον (υπο)χώρο  $X \subseteq C(\mathcal{T})$ , να είναι το σύνολο των Lipschitz συνεχών συναρτήσεων με κοινή σταθερά Lipschitz  $M > 0$ , δηλαδή:

$$L_M := \left\{ x(\cdot) \in C_{Lip}(\mathcal{T}) : L_{(x)} \leq M \right\},$$

όπου  $L_{(x)}$  η σταθερά Lipschitz της συνάρτησης  $x$ . Εύκολα επαληθεύετε ότι το σύνολο  $L_M$  είναι ισοσυνεχές και κλειστό, παρόλα αυτά όμως, δεν είναι φραγμένο. Κάθε σταθερή συνάρτηση ανήκει στο σύνολο  $L_M$  και η νόρμα της μπορεί να είναι οσοδήποτε μεγάλη.

Το θεώρημα Ascoli-Arzelà υπαγορεύει ότι κάθε φραγμένο υποσύνολο του χώρου  $L_M$  είναι (προ)συμπαγές (pre-compact), δηλαδή η κλειστότητα του είναι συμπαγές.

<sup>(11)</sup> **Θεώρημα [Ascoli-Arzelà]:** Έστω  $S$  συμπαγές και  $X \subseteq C(S \rightarrow \mathbb{R})$ . Αν το σύνολο  $X$  είναι κλειστό, ομοιόμορφα φραγμένο και ισοσυνεχές, τότε είναι συμπαγές.

Μια εκ των επιλογών φραγμένου υποσυνόλου είναι  $B_{L_M} \subseteq L_M$ :

$$B_{L_M} := \left\{ x(\cdot) \in C_{Lip}(T) : L_{(x)} \leq M, x(t_0) = 0 \right\},$$

το οποίο αποτελεί ομοιόμορφα φραγμένο υποσύνολο του  $L_M$  και κλειστό, κατ' επέκταση συμπαγές.

Ακόμα θα μπορούσαμε να επιλέξουμε, στη θέση του συνόλου  $X$ , ένα συμπαγές υποσύνολο του χώρου  $L^2((t_0, T) \rightarrow \mathbb{R})$ . Στην περίπτωση αυτή οι απαιτήσεις του θεωρήματος Ascoli-Arzelà διαμορφώνονται ως εξής:

- Το σύνολο  $X$  να είναι ομοιόμορφα φραγμένο, δηλαδή:

$$(\exists c > 0) (\forall x \in X) \quad \|x(\cdot)\|_{L^2} = \left( \int_{t_0}^T |x(\tau)|^2 d\tau \right)^{1/2} < c.$$

- Οι συναρτήσεις του συνόλου  $X$  να είναι ομοιόμορφα ισοσυνεχείς στο διάστημα  $(t_0, T)$ , δηλαδή:

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta = \delta(\varepsilon)) (\forall h \in \mathbb{R} : |h| < \delta) : \\ : \left[ \int_{t_0}^T |x(\tau + h) - x(\tau)|^2 d\tau < \varepsilon, \forall x \in X \right].$$

Υπο αυτές τις συνθήκες η ανωτέρω εφαρμογή μεταφέρεται σε συναρτησιακά οριζόμενα σε ένα συμπαγές υποσύνολο του χώρου  $L^2(T \rightarrow \mathbb{R})$ .

**Προσέγγιση και αναπαράσταση με συναρτησιακά πολυώνυμα στους χώρους των συνεχών συναρτησιακών  $\mathcal{C}(L_p((a, b)) \rightarrow \mathbb{R})$**

Το θεώρημα του Maurice Fréchet, βλ. εδάφιο 1.4, απαντά θετικά στο ερώτημα προσέγγισης συνεχών συναρτησιακών,  $\mathcal{F}[\cdot] \in \mathcal{C}(C((a, b) \rightarrow \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R})$  καθώς επίσης δίδει και μια αναπαράσταση αυτής της προσέγγισης στην μορφή:

$$\mathcal{F}[x(\cdot)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ h_n^{(0)} + \int_a^b h_n^{(1)}(\tau_1) x(\tau_1) d\tau_1 + \int_a^b \int_a^b h_n^{(2)}(\tau_1, \tau_2) x(\tau_1) x(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \dots \right. \\ \left. \dots + \int_a^b \dots \int_a^b h_n^{(r_n)}(\tau_1, \dots, \tau_{r_n}) x(\tau_1) \dots x(\tau_{r_n}) d\tau_1 \dots d\tau_{r_n} \right].$$

Στο άρθρο (Ahmed, 1976) διερευνάται το ερώτημα του αν μπορούμε να έχουμε προσέγγιση και αναπαράσταση στην ανωτέρω μορφή για συνεχή συναρτησιακά ορισμένα στους χώρους Banach  $L_p(I \rightarrow \mathbb{R})$ , όπου  $I := [a, b]$ . Παραθέτουμε το κεντρικό αποτέλεσμα.

**Θεώρημα 2:** Έστω  $X$  κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του χώρου  $L_p(I \rightarrow \mathbb{R})$ , ( $1 \leq p < \infty$ ) και η την άλγεβρα  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}(X \rightarrow \mathbb{R})$ , των συναρτησιακών πολυωνύμων  $P_n \in \mathcal{A}$ :

$$P_N[x(\cdot)] = \sum_{n=0}^N \int_{I^{(n)}} K_n(\tau^{(n)}) \prod_{k=1}^n x(\tau_k) d\tau^{(n)},$$



όπου  $K_n \in L_q(I^n \rightarrow \mathbb{R})$ ,  $q = p/(p-1)$ . Συμβολίζουμε με  $(\mathcal{C}(X \rightarrow \mathbb{R}), \tau_\rho)$  τον τοπικά κυρτό τοπολογικό διανυσματικό χώρο (Locally Convex Topological Vector Space), με μετρική:

$$d(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{\sup_{x \in X^{(j)}} |\mathcal{F}_1(x) - \mathcal{F}_2(x)|}{1 + \sup_{x \in X^{(j)}} |\mathcal{F}_1(x) - \mathcal{F}_2(x)|},$$

όπου  $X^{(j)}$  συμπαγή υποσύνολα, πεπερασμένη διάστασης του χώρου  $X$ . Τέλος θεωρούμε συναρτησιακό  $\mathcal{F} \in (\mathcal{C}(X \rightarrow \mathbb{R}), \tau_\rho)$ . Τότε,  $\forall \varepsilon > 0$ , υπάρχει  $n_0 \in \mathbb{R}$  και πολυώνυμα  $P_n \in \mathcal{A}$ , τέτοια ώστε:  $\forall n \geq n_0$

$$d(\mathcal{F}, P_n) < \varepsilon.$$

Η ακολουθία  $(P_n)_0^\infty$  συγκλίνει ομοιόμορφα στο συναρτησιακό  $\mathcal{F}$  σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του χώρου  $X$ . ■

Θα δώσουμε μια γενική περιγραφή των ιδεών στις οποίες βασίζεται η απόδειξη του Θεωρήματος 2. Ξεκινάμε από το ότι οι χώροι  $L_p$ ,  $\forall p \in [1, \infty)$ , διαθέτουν μονότονη Schauder βάση. Τότε σχηματίζεται μια ακολουθία συμπαγών υποσυνόλων, πεπερασμένης διάστασης του χώρου  $X$ ,  $(X^{(N)})_1^\infty$ , της οποίας η αριθμήσιμη ένωση είναι πυκνό υποσύνολο του χώρου  $X$ .

Στη συνέχεια ορίζουμε μια οικογένεια ημινορμών  $Q := \{q_N\}$ :

$$q_N = \sup_{x \in X^{(N)}} |\mathcal{F}[x(\cdot)]|,$$

με την οποία ο χώρος  $\mathcal{C}(X \rightarrow \mathbb{R})$ , γίνεται χώρος ημινόρμας. Ο χώρος  $\mathcal{C}(X \rightarrow \mathbb{R})$  εφοδιαζόμενος με την τοπολογία  $\tau_Q$ , που επάγεται από την οικογένεια  $Q$ ,  $(\mathcal{C}(X \rightarrow \mathbb{R}), \tau_Q)$ , καθίσταται κυρτός τοπολογικός διανυσματικός χώρος.

Τέλος αποδεικνύεται ότι κάθε συνεχές, φραγμένο, ομογενές συναρτησιακό  $\mathcal{F} : L_p(I) \rightarrow \mathbb{R}$ , βαθμού  $n$ , αναπαρίσταται στην μορφή:

$$\mathcal{F}[x(\cdot)] = \int_a^b \dots \int_a^b h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) x(\tau_1) \dots x(\tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n,$$

όπου  $h_n \in L_q(I^n \rightarrow \mathbb{R})$ . Αυτό μπορεί να αποδειχθεί με εφαρμογή του θεωρήματος αναπαράστασης του Riesz για συνεχή γραμμικά συναρτησιακά στους χώρους  $L_p$ , για την πολυγραμμική μορφή:

$$p_n(x_1(\cdot), \dots, x_n(\cdot)) = \int_a^b \dots \int_a^b h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) x_1(\tau_1) \dots x_n(\tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n.$$

Ορίζουμε τότε το μη ομογενές πολυωνμικό συναρτησιακό  $P_M : L_p(X \rightarrow \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ , βαθμού  $M$ , ως:

$$P_M[x(\cdot)] = \sum_{m=1}^M \mathcal{F}_m[x(\cdot)],$$

όπου  $\mathcal{F}_m$  συνεχή και ομογενή συναρτησιακά ως ανωτέρω.

Τέλος, για κάθε  $N \in \mathbb{N}$ ,  $X^{(N)} \subseteq X$  είναι συμπαγές και στον κυρτό τοπολογικό διανυσματικός χώρο  $(\mathcal{C}(X^{(N)} \rightarrow \mathbb{R}), \tau_\rho)$  η άλγεβρα  $\mathcal{A}$  περιέχει την σταθερή συνάρτηση και διαχωρίζει τα σημεία σε κάθε  $X^{(N)}$  (αποδεικνύεται κατά αναλογία με το Λήμμα 3 ανωτέρω). Τότε με εφαρμογή του Θεωρήματος Stone-Weierstrass, βλ. εδάφιο 3.1, Θεώρημα 2, έχουμε ότι:

$$(\forall \mathcal{F} \in C(X \rightarrow \mathbb{R})) (\forall \varepsilon > 0) (\exists P_s \in \mathcal{A}, s = s(N, \varepsilon)) : [q_N(\mathcal{F} - P_s) < \varepsilon/2].$$

Τότε για κάθε  $N \in \mathbb{N}$  το πολυώνυμο  $P_s$ ,  $s = s(N, \varepsilon_N)$  μπορεί να επιλεγεί με τρόπο τέτοιο ώστε να μην διαφοροποιούνται σε αυτό όροι του προηγούμενου πολυωνύμου  $P_s$ ,  $s = s(N-1, \varepsilon_{N-1})$ . Καθώς το  $N$  αυξάνει η διάσταση του χώρου  $X^{(N)}$  αυξάνει και κατά συνέπεια το προσεγγιστικό πολυώνυμο του Θεωρήματος Weierstrass διαφοροποιείται, δηλαδή αποκτά περισσότερους όρους καθώς η άλγεβρα  $\mathcal{A}$  από την οποία προέρχεται διευρύνεται.

Επιλέγουμε  $K \in \mathbb{N}$  επαρκώς μεγάλο ούτως ώστε να ισχύει ότι  $2^{-K} < \varepsilon/2$  και  $n_0 = \max\{s(N, \varepsilon) : 1 \leq N \leq K\}$ . Μπορούμε τότε να δείξουμε ότι  $d(\mathcal{F}, P_{n_0}) < \varepsilon$ .

Συμπεραίνουμε ότι  $\mathcal{F} \in C(X \rightarrow \mathbb{R})$  μπορούμε να βρούμε ακολουθία πολυωνύμων  $(P_n)_0^\infty \in \mathcal{A}$ , τέτοια ώστε:

$$d(\mathcal{F}, P_n) < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0,$$

και επιπροσθέτως  $P_n \xrightarrow{u} \mathcal{F}$  σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του χώρου  $X$ .



### Βιβλιογραφία Κεφαλαίου ΙΙΙ

- Ahmed, N. U. (1976) 'An approximation theorem for continuous functions on  $L_p(1 \leq p < \infty)$  spaces including representation', *Information and Control*. Academic Press, 30(2), pp. 143–150. doi: 10.1016/S0019-9958(76)90317-X.
- Branges, L. De (1959) 'The Stone-Weierstrass Theorem', *Proceedings of the American Mathematical Society*. American Mathematical Society, 10(5), p. 822. doi: 10.2307/2033481.
- Brosowski, B. and Deutsch, F. (1981) 'An Elementary Proof of the Stone-Weierstrass Theorem', *Proceedings of the American Mathematical Society*. American Mathematical Society, 81(1), p. 89. doi: 10.2307/2043993.
- Fréchet, M. (1910) 'Sur les fonctionnelles continues', *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, 27, pp. 193–216. doi: 10.24033/asens.619.
- Groenewegen, G. L. M. and Rooij, A. C. M. (2016) *Spaces of continuous functions*. Springer.
- Hunter, J. K. and Nachtergaele, B. (2001) *Applied Analysis*. WORLD SCIENTIFIC. doi: 10.1142/4319.
- Ma, Tsoy-Wo. (1995) *Classical analysis on normed spaces*. World Scientific.
- Pinkus, A. (2000) 'Weierstrass and Approximation Theory', *Journal of Approximation Theory*. doi: 10.1006/jath.2000.3508.
- Rudin, W. (1976) *Principles of mathematical analysis*. McGraw-Hill
- Stone, M. H. (1948) 'The Generalized Weierstrass Approximation Theorem', *Mathematics Magazine*. Taylor & Francis, Ltd. Mathematical Association of America, 21(4), p. 167. doi: 10.2307/3029750.
- Weierstrass, K. (1885) 'Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen.
- Zorich V. A. Cooke R. and Paniagua T. (2004) *Mathematical analysis II*. Springer.



## 4 Προσέγγιση / αναπαράσταση συνεχών (μη-γραμμικών) τελεστών μέσω πολυωνύμων

Το ερώτημα της προσεγγιστικής αναπαράστασης συνεχών (μη γραμμικών) τελεστών  $\mathcal{F} \in \mathcal{C}(E \rightarrow Y)$  ( $E, Y$  χώροι συναρτήσεων) είναι σημαντικό. Το θεώρημα Stone-Weierstrass κινείται ακριβώς σε αυτήν την κατεύθυνση, όμως περιορίζεται στην ειδική περίπτωση όπου ο χώρος εικόνας των απεικονίσεων είναι η πραγματική ευθεία, δηλαδή μπορεί να εφαρμοστεί για τελεστές  $\mathcal{F} \in \mathcal{C}(E \rightarrow \mathbb{R})$  (συναρτησιακά).

### 4.1 Προσεγγιστική αναπαράσταση συνεχών (μη-γραμμικών) τελεστών σε χώρους Hilbert

Στην συνέχεια παρουσιάζουμε ένα αποτέλεσμα ύπαρξης προσεγγιστικής αναπαράστασης γενικών συνεχών (μη γραμμικών) τελεστών σε χώρους Hilbert. Συγκεκριμένα επιτυγχάνεται μια επέκταση του θεωρήματος Stone-Weierstrass για τελεστές  $\mathcal{F} \in \mathcal{C}(E \rightarrow Y)$ , με  $E = Y = H$ , όπου  $H$  ένας πραγματικός, διαχωρίσιμος χώρος Hilbert. Το αποτέλεσμα αυτό ανήκει στην P. M. Prenter και μπορεί να ευρεθεί στο άρθρο (Prenter, 1970).

#### Επέκταση του Θεωρήματος Stone-Weierstrass σε πραγματικούς, διαχωρίσιμους χώρους Hilbert

Ξεκινάμε παρουσιάζοντας ένα Θεώρημα ύπαρξης πολυωνυμικής προσεγγιστικής αναπαράστασης μη γραμμικών συνεχών τελεστών σε χώρους Hilbert πεπερασμένης διάστασης. Έπειτα επεκτείνουμε το αποτέλεσμα αυτό σε χώρους άπειρης διάστασης.

**Θεώρημα 1 [Prenter, 1970]:** Έστω  $H$  πραγματικός χώρος Hilbert πεπερασμένης διάστασης,  $\dim(H) = N$ , και  $\mathcal{C}(H \rightarrow H)$  το σύνολο των συνεχών τελεστών στον  $H$ , εφοδιασμένο με την τοπολογία της supremum νόρμας<sup>(1)</sup>. Ακόμα θεωρούμε  $X \subseteq H$ , συμπαγές (εν προκειμένω, κλειστό και φραγμένο). Τότε το σύνολο  $\mathcal{P}(X \rightarrow H)$ , των πολυωνυμικών τελεστών από τον  $X$  στον  $H$ , είναι πυκνό στο  $\mathcal{C}(X \rightarrow H)$ , δηλαδή:

$$(\forall \mathcal{F} \in \mathcal{C}(X \rightarrow H)) (\forall \varepsilon > 0) (\exists P_\varepsilon \in \mathcal{P}(X \rightarrow H)) : [\|\mathcal{F} - P_\varepsilon\|_{X, \infty} < \varepsilon]. \blacksquare$$

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 1 θα χρειαστούν οι έννοιες του πολυωνύμου και αναπαράστασης σε μορφή πίνακα των πολυγραμμικών απεικονίσεων.

---

<sup>(1)</sup>  $\|\mathcal{F}\|_{X, \infty} = \max \{ \|\mathcal{F}[x]\|_H, x \in X \}$

Υπενθυμίζουμε ότι στο εδάφιο 2.1 εισαγάγαμε το γενικό μη ομογενές πολυώνυμο  $k$ -βαθμού,  $P : X \rightarrow Y$ , με τους χώρους  $X, Y$  να είναι απλώς γραμμικοί χώροι, ως:

$$Px = P_0 + P_1 x + P_2 x^2 + \dots + P_k x^k,$$

όπου  $P_k$ ,  $k$ -ομογενή πολυώνυμα. Κάθε  $k$ -ομογενές πολυώνυμο παράγεται από μια  $k$ -γραμμική απεικόνιση,  $p : X^k \rightarrow Y$ , ως ακολούθως:

$$P_k x = p_k x^{\{k\}} \equiv p_k(x^1, x^2, \dots, x^k) \Big|_{x^1, x^2, \dots, x^k = x}.$$

Τέλος, στο εδάφιο 2.5 εισαγάγαμε την αναπαράσταση σε μορφή πίνακα των πολυγραμμικών μορφών. Το Θεώρημα 3 του εδαφίου 2.5 θα χρησιμοποιηθεί στην απόδειξη του Θεωρήματος 1 στη συνέχεια.

**Απόδειξη Θεωρήματος 1:** Κάθε στοιχείο  $x \in X$  εκφράζεται μέσω της βάσης του χώρου  $(\phi_n)_{n=1}^N$  ως:

$$x = \sum_{j=1}^N (x, \phi_j)_H \phi_j = \sum_{j=1}^N x_j \phi_j,$$

όπου  $(\cdot, \cdot)_H$ , το εσωτερικό γινόμενο του χώρου  $H$ . Θεωρούμε τελεστή  $\mathcal{F} \in \mathcal{C}(X \rightarrow H)$  και αναπτύσσουμε το  $\mathcal{F}[x] \in H$  στην βάση  $(\phi_n)_{n=1}^N$ :

$$\mathcal{F}[x] = \sum_{j=1}^N f_j(x_1, \dots, x_N) \phi_j, \quad (1)$$

όπου  $f_j : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνεχείς συναρτήσεις.

Με άμεση εφαρμογή του Θεωρήματος Stone-Weierstrass, τα πραγματικά πολυώνυμα  $N$  μεταβλητών είναι πυκνό υποσύνολο των συνεχών συναρτήσεων πάνω σε συμπαγή υποσύνολα του  $\mathbb{R}^N$ .

Εφόσον ο χώρος  $H$  είναι πεπερασμένης διάστασης, είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον χώρο  $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_2) = \ell^2(N)$ . Συμβολίζουμε αυτήν την ισομετρία με  $\mathcal{I}_H : H \rightarrow \ell^2(N)$ . Εφόσον το σύνολο  $X$  είναι συμπαγές υποσύνολο του χώρου  $H$ , το σύνολο  $X_{\ell^2} := \mathcal{I}_H[X]$  είναι συμπαγές υποσύνολο του χώρου  $\ell^2(N)$ , ως συνεχής εικόνα συμπαγούς, βλ. (W. Rudin, Principles of Mathematical Analysis, 1975).

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Stone-Weierstrass για τις συναρτήσεις  $f_j \in C(X_{\ell^2} \rightarrow \mathbb{R})$ , έχουμε:

$$\left( \forall f_j \in C(X_{\ell^2} \rightarrow \mathbb{R}) \right) \left( \forall \varepsilon > 0 \right) \left( \exists p_{j,\varepsilon} \in \mathcal{P}(X_{\ell^2} \rightarrow \mathbb{R}) \right) : \left[ \|f_j - p_{j,\varepsilon}\|_\infty < \frac{\varepsilon}{N^{1/2}} \right]$$

Η νόρμα  $\|\cdot\|_\infty$ , εκφράζεται ως:

$$\|f_j - p_{j,\varepsilon}\|_\infty = \sup_{x \in X_{\ell^2}} |f_j(x) - p_{j,\varepsilon}(x)|.$$

Θεωρούμε τώρα τον συνεχή τελεστή  $P \in \mathcal{C}(X \rightarrow H)$ , τέτοιο ώστε:

$$P[x] = \sum_{j=1}^N p_j(x_1, \dots, x_N) \phi_j,$$

όπου  $p_j$  τα προσεγγιστικά, πραγματικά πολυώνυμα των συναρτήσεων  $f_j$  οι οποίες συνθέτουν τον τελεστή  $\mathcal{F}[\bullet]$  μέσω της Εξ. (1), δηλαδή  $p_j \equiv p_{j,\varepsilon}$ .

Θα συμβολίζουμε το πραγματικό πολυώνυμο  $N$  μεταβλητών  $p_j$ , βαθμού  $D_j$  ως  $p_{j,D_j}$ . Τότε η έκφραση του έχει την ακόλουθη μορφή:

$$p_{j,D_j}(x_1, \dots, x_N) = c_j + \sum_{d=1}^{D_j} \sum_{n_1, n_2, \dots, n_d=1}^N m_{j,n_1, n_2, \dots, n_d} x_{n_d} \dots x_{n_1} \quad (2).$$

Από το συμπέρασμα (γ) του Θεωρήματος 3 του εδαφίου 2.5, γνωρίζουμε ότι κάθε πίνακας  $(m_{j,n_1, \dots, n_K})$  είναι αναπαράσταση ενός  $K$ -γραμμικού τελεστή  $P_K[\bullet]$ , ( $K$ -ομογενές πολυώνυμο), συνεπώς μπορούμε να γράψουμε:

$$p_{j,D_j}(x_1, \dots, x_N) \phi_j = P_{j,0} + P_{j,1}[x] + \dots + P_{j,D_j}[x].$$

Καταλήγουμε στο συμπέρασμα:

$$P[x] := \sum_{j=1}^N p_{j,D_j}(x_1, \dots, x_N) \phi_j = \sum_{j=1}^N \sum_{d=1}^{D_j} P_{j,d}[x].$$

Επειδή το άθροισμα  $K$ -ομογενών πολυώνυμων είναι και αυτό  $K$ -ομογενές πολυώνυμο, βλ. εδάφιο 2.2, από την ανωτέρω σχέση έχουμε:

$$P[x] = P_0 + P_1[x] + \dots + P_M[x], \quad \text{όπου} \quad M := \max_{1 \leq j \leq N} (D_j).$$

Τελικώς λαμβάνουμε ότι:

$$\begin{aligned} \|F[x] - P[x]\|_H &= \|f(x) - p(x)\|_{\ell^2(N)} = \\ &= \left( \sum_{j=1}^N |f_j(x_1, \dots, x_N) - p_j(x_1, \dots, x_N)|^2 \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \left( \sum_{j=1}^N \|f_j - p_j\|_\infty^2 \right)^{1/2} < \left( N \frac{\varepsilon^2}{N} \right)^{1/2} = \varepsilon, \end{aligned} \quad (2)$$

και από τον ορισμό της νόρμας και την σχέση (2), συμπεραίνουμε:

$$\|\mathcal{F} - P\|_{X, \infty} = \max_{x \in X} \|F[x] - P_\varepsilon[x]\|_H < \varepsilon.$$

Η απόδειξη του Θεωρήματος 1 ολοκληρώνεται.

Στη συνέχεια θα επεκτείνουμε το Θεώρημα 1 σε χώρους άπειρης διάστασης, βασιζόμενοι στην υπόθεση της συμπάγιας του χώρου  $X$ .

(<sup>2</sup>) Αν επί παραδείγματι ένα εξ αυτών είναι πολυώνυμο είναι βαθμού δύο ( $D_j = 2$ ), τότε:

$$p_{j,2}(x_1, \dots, x_N) = c_j + \sum_{n_1=1}^N m_{j,n_1} x_{n_1} + \sum_{n_1, n_2=1}^N m_{j,n_1, n_2} x_{n_2} x_{n_1}.$$



**Θεώρημα 2 [Prenter, 1970]:** Έστω  $H$  πραγματικός, διαχωρίσιμος <sup>(3)</sup> χώρος Hilbert και  $X \subseteq H$  συμπαγές υποσύνολο αυτού. Έστω επίσης  $\mathcal{C}(X \rightarrow H)$  το σύνολο των συνεχών τελεστών από τον  $X$  στον χώρο  $H$  εφοδιασμένο με την τοπολογία της supremum νόρμας.

Τότε το σύνολο των πολυωνυμικών τελεστών  $\mathcal{P}(X \rightarrow H)$ , από τον  $X$  στον  $H$ , είναι πυκνό στο  $\mathcal{C}(X \rightarrow H)$ . Δηλαδή,

$$(\forall \mathcal{F} \in \mathcal{C}(X \rightarrow H)) (\forall \varepsilon > 0) (\exists P_\varepsilon \in \mathcal{P}(X \rightarrow H)) : [\|\mathcal{F} - P_\varepsilon\|_{X, \infty} < \varepsilon] \quad \blacksquare$$

Η απόδειξη του Θεωρήματος 2, θα επιτευχθεί στην συνέχεια, μέσω της απόδειξης τριών αποτελεσμάτων σε μορφή λημμάτων.

Έστω  $H$  πραγματικός, διαχωρίσιμος χώρος Hilbert και  $(\phi_j)_{j=1}^\infty$  πλήρες ορθοκανονικό σύστημα. Μελετούμε συνεχείς απεικονίσεις  $\mathcal{F} : H \rightarrow H$ . Θεωρούμε τον τελεστή προβολής  $Pr_N : H \rightarrow H^{(N)}$  <sup>(4)</sup>,  $H^{(N)} = \text{span}(\phi_1, \dots, \phi_N)$ , έτσι ώστε:

$$Pr_N[x] = \sum_{j=1}^N (x, \phi_j)_H \phi_j, \quad \forall x \in H.$$

Ορίζουμε την απεικόνιση  $\mathcal{F}^{Pr_N} \in \mathcal{C}(H \rightarrow H^{(N)})$ , ως:

$$\mathcal{F}^{Pr_N}[x] := Pr_N[\mathcal{F}[Pr_N[x]]]. \quad (3)$$

Προχωράμε στο πρώτο Λήμμα.

**Λήμμα 1:** Έστω  $H$  πραγματικός, διαχωρίσιμος χώρος Hilbert και  $X \subseteq H$ , συμπαγές. Ακόμα θεωρούμε  $\mathcal{P}(H \rightarrow H)$  το σύνολο των πολυωνύμων στον χώρο  $H$ . Θεωρούμε την απεικόνιση  $\mathcal{F}^{Pr_N} \in \mathcal{C}(X \rightarrow H^{(N)})$ , η οποία ορίζεται ανωτέρω, Εξ. (3). Τότε, υπάρχει πολυωνυμικός τελεστής  $P$ , πεπερασμένης διάστασης (of finite rank)<sup>(5)</sup>, ο οποίος προσεγγίζει τον τελεστή  $\mathcal{F}^{Pr_N}$ , με την έννοια:

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists P \in \mathcal{P}(H \rightarrow H^{(N)})) : [\|\mathcal{F}^{Pr_N} - P\|_{X, \infty} < \varepsilon]. \quad \blacksquare$$

*Απόδειξη:* Έχουμε ότι  $X^{(N)} = Pr_N[X]$  και  $X^{(N)} \subseteq H^{(N)}$  συμπαγές υποσύνολο εφόσον το σύνολο  $X$  είναι συμπαγές. Συμβολίζουμε με:

$$\mathcal{F}_{|X^{(N)}}^{Pr_N} : X^{(N)} \rightarrow H^{(N)},$$

τον περιορισμό του τελεστή  $\mathcal{F}^{Pr_N}[\bullet]$  στον χώρο  $X^{(N)}$ .

<sup>(3)</sup> Ως διαχωρίσιμος χώρος ορίζεται κάθε τοπολογικός χώρος ο οποίος έχει αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο.

<sup>(4)</sup> Ο τελεστής προβολής  $Pr_N : H \rightarrow H^{(N)}$  είναι γραμμικός και συνεχής τελεστής με της ακόλουθες ιδιότητες:

α) Ταυτοδύναμος:  $Pr_N^2[\bullet] = Pr_N[\bullet]$ .

β) Είναι ο ταυτοτικός τελεστής του χώρου  $H^{(N)}$ , δηλαδή  $Pr_N[x] = x, \quad \forall x \in H^{(N)}$ .

<sup>(5)</sup> **Ορισμός [Finite rank operator]:** Έστω  $X, Y$  πλήρεις νορμικοί χώροι (Banach),  $S \subseteq X$  μη κενό και  $\mathcal{F} : S \rightarrow Y$  συνεχής τελεστής. Λέμε ότι ο τελεστής  $\mathcal{F}$  είναι τελεστής πεπερασμένης διάστασης (a finite rank operator ή of finite rank) αν και μόνον αν η εικόνα του τελεστή  $\mathcal{F}[S] \subseteq Y$  είναι υπόχωρος πεπερασμένης διάστασης.

Με άμεση εφαρμογή του Θεωρήματος 2, έχουμε ότι:

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \tilde{P} \in \mathcal{P}(X^{(N)} \rightarrow H^{(N)})) : \left[ \|\mathcal{F}_{X^{(N)}}^{Pr_N} - \tilde{P}\|_{X^{(N)}, \infty} < \varepsilon \right]$$

Επεκτείνουμε το πολυώνυμο  $\tilde{P}[\bullet]$  στον χώρο  $H$ :

$$P[x] := \tilde{P}[\tilde{x}] = \tilde{P}[Pr_N[x]], \quad x \in H.$$

Προφανώς, ο τελεστής  $P[\bullet]$  είναι πεπερασμένου βαθμού (διότι έχει range  $H^{(N)}$ ). Βάσει των ανωτέρω έχουμε:  $\forall x \in X$

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}^{Pr_N}[x] - P[x]\|_H &= \|Pr_N[\mathcal{F}[Pr_N[x]]] - \tilde{P}[Pr_N[x]]\|_H = \\ &= \|Pr_N[\mathcal{F}[Pr_N^2[x]]] - \tilde{P}[\tilde{x}]\|_H = \\ &\quad [\text{Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα του τελεστή προβολής } Pr_N^2 = Pr_N] \\ &= \|Pr_N[\mathcal{F}[Pr_N[\tilde{x}]]] - \tilde{P}[\tilde{x}]\|_H = \\ &= \|\mathcal{F}^{Pr_N}[Pr_N[\tilde{x}]] - \tilde{P}[\tilde{x}]\|_H < \varepsilon. \end{aligned}$$

Η απόδειξη του Λήμματος 1 ολοκληρώνεται.

**Λήμμα 2:** Έστω  $X \subseteq H$  συμπαγές, και  $\mathcal{F}[\bullet] \in \mathcal{C}(H \rightarrow H)$  συνεχής τελεστής. Τότε, η ακολουθία  $(\mathcal{F}[Pr_n[x]])_{n=1}^{\infty}$  συγκλίνει στο  $\mathcal{F}[x]$ , ομοιόμορφα ως προς  $x \in X$ .

*Απόδειξη:* Θα δείξουμε ότι η ακολουθία  $(\mathcal{F}[Pr_n[x]])_{n=1}^{\infty}$  συγκλίνει ομοιόμορφα στο  $\mathcal{F}[x] \in H$ , για κάθε  $x \in X$ . Εφόσον ο τελεστής  $\mathcal{F}[\bullet]$  είναι συνεχής έχουμε ότι:

$$(\forall \bar{x} \in X) (\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta_{\bar{x}} = \delta_{\bar{x}}(\varepsilon)) : \left[ x \in B(\bar{x}, \delta_{\bar{x}}) \right] \Rightarrow \left[ \|\mathcal{F}[\bar{x}] - \mathcal{F}[x]\|_H < \frac{\varepsilon}{2} \right],$$

όπου  $B(\bar{x}, \delta_{\bar{x}}) = \{x \in X : \|\bar{x} - x\|_H < \delta_{\bar{x}}\}$ .

Η οικογένεια ανοιχτών συνόλων  $\{B(\bar{x}, \delta_{\bar{x}}/2) : \bar{x} \in X\}$  καλύπτει τον χώρο  $X$  και όντας συμπαγής, υπάρχει πεπερασμένο υποκάλυμμα της οικογένειας αυτής, τέτοιο ώστε:

$$X = \bigcup_{i=1}^I B(x_i, \delta_{x_i}/2).$$

Επιλέγουμε  $\delta = \min_{1 \leq i \leq I} (\delta_{x_i}/2)$ . Τότε  $\forall x \in X$ , τέτοιο ώστε  $x \in B(\bar{x}, \delta)$ , υπάρχει  $x_i \in X$  για το οποίο ισχύει  $\|\bar{x} - x_i\|_H < \delta_{x_i}/2$ . Θεωρούμε τώρα  $x \in X$  και  $y \in H$ , τέτοια ώστε

$$\|x - y\|_H < \delta.$$

Βάσει των ανωτέρω υπάρχει  $x_i \in X$ , έτσι ώστε  $\|x - x_i\|_H < \delta_{x_i}/2$ . Τότε όμως, λαμβάνουμε ότι:

$$\|y - x\|_H \leq \|y - x\|_H + \|x - x_i\|_H < \delta + (\delta_{x_i}/2) < \delta_{x_i},$$

και κατά συνέπεια, λόγω της συνέχειας του τελεστή  $\mathcal{F}$ , έχουμε ότι:

$$\| \mathcal{F}[\bar{x}] - \mathcal{F}[x] \|_H \leq \| \mathcal{F}[\bar{x}] - \mathcal{F}[x_i] \|_H + \| \mathcal{F}[x_i] - \mathcal{F}[x] \|_H < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Θεωρούμε τώρα την ακολουθία  $d_n(x) = \| x - Pr_n[x] \|$ . Ισχύει ότι η ακολουθία  $(d_n(x))_{n=1}^\infty$  συγκλίνει ομοιόμορφα (ως προς  $x \in X$ ) στο μηδέν, καθώς πληροί τις υποθέσεις του θεωρήματος Dini<sup>(6)</sup>.

Λόγω της ομοιόμορφης σύγκλισης (στο μηδέν) της ακολουθίας  $d_n(\cdot)$  ανωτέρω, υπάρχει  $n_0 \in \mathbb{N}$ , τέτοιο ώστε:

$$(\forall n \geq n_0) (\forall x \in X) : [ \| x - Pr_n[x] \|_H < \delta ].$$

Τότε σε συνδυασμό με τα ανωτέρω, συμπεραίνουμε ότι:

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) : [ \forall n \geq n_0 \Rightarrow \| F[x] - F[Pr_n[x]] \|_H < \varepsilon, \forall x \in X ]$$

Συνεπώς αποδείξαμε την ομοιόμορφη σύγκλιση της ακολουθίας  $(\mathcal{F}[Pr_n[x]])_1^\infty$  στο  $\mathcal{F}[x]$ , ως προς  $x \in X$ .

Η απόδειξη του Λήμματος 2 ολοκληρώνεται.

**Λήμμα 3:** Έστω  $X \subseteq H$ , συμπαγές και συνεχής τελεστής  $\mathcal{F}[\cdot] \in \mathcal{C}(X \rightarrow H)$ . Τότε υπάρχει  $n_0 \in \mathbb{N}$  τέτοιο ώστε:  $\forall n \geq n_0$

$$\| \mathcal{F} - \mathcal{F}^{Pr_n} \|_{X, \infty} < \varepsilon,$$

όπου  $\mathcal{F}^{Pr_n}[\cdot]$ , ο τελεστής που ορίσαμε στην σχέση (3) ανωτέρω. ■

*Απόδειξη:* Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \| \mathcal{F}[x] - \mathcal{F}^{Pr_n}[x] \|_H &= \| \mathcal{F}[x] - Pr_n[ \mathcal{F}[Pr_n[x]] ] \|_H \leq \\ &\leq \| \mathcal{F}[x] - Pr_n[ \mathcal{F}[x] ] \|_H + \| Pr_n[ \mathcal{F}[x] ] - Pr_n[ \mathcal{F}[Pr_n[x]] ] \|_H \leq \\ &\leq \| \mathcal{F}[x] - Pr_n[ \mathcal{F}[x] ] \|_H + \| Pr_n \|_{op} \| [ \mathcal{F}[x] ] - \mathcal{F}[Pr_n[x]] \|_H = \\ &\leq \| \mathcal{F}[x] - Pr_n[ \mathcal{F}[x] ] \|_H + \| \mathcal{F}[x] - [ \mathcal{F}[Pr_n[x]] ] \|_H \end{aligned}$$

Από το Λήμμα (2), έπεται ότι:

$$\| \mathcal{F}[x] - \mathcal{F}^{Pr_n}[x] \|_H \leq \| \mathcal{F}[x] - Pr_n[ \mathcal{F}[x] ] \|_H + \| \mathcal{F}[x] - \mathcal{F}[Pr_n[x]] \|_H < \varepsilon, \quad (4)$$

καθώς αποδείξαμε την ομοιόμορφη σύγκλιση της ακολουθίας  $(\mathcal{F}[Pr_n[x]])_1^\infty$  στο  $\mathcal{F}[x]$ , ως προς  $x \in X$  και επιπλέον κάνοντας χρήση του θεωρήματος Dini δείχνουμε ότι  $(d_n(x))_{n=1}^\infty$ , όπου  $d_n(x) = \| \mathcal{F}[x] - Pr_n[ \mathcal{F}[x] ] \|$  συγκλίνει ομοιόμορφα στο μηδέν.

Συνεπώς υπάρχει  $n_0$  τέτοιο ώστε  $\forall n \geq n_0$ :

$$\| \mathcal{F} - \mathcal{F}^{Pr_n} \|_{X, \infty} = \max_{x \in X} \| \mathcal{F}[x] - Pr_n[ \mathcal{F}[x] ] \|_H < \varepsilon.$$

Η απόδειξη του Λήμματος (3) ολοκληρώνεται.

<sup>(6)</sup> Το Θεώρημα Dini διατυπώνεται και αποδεικνύεται στο εδάφιο 3.1, Θεώρημα 3.

Εφοδιασμένοι με τα Λήμματα (1), (2) και (3) είμαστε σε θέση να αποδείξουμε το Θεώρημα (1):

**Απόδειξη Θεωρήματος (1):** Έχουμε την βασική ανισοτική σχέση:

$$\| \mathcal{F} - P_\varepsilon \|_{X, \infty} \leq \| \mathcal{F} - \mathcal{F}^{Pr_N} \|_{X, \infty} + \| \mathcal{F}^{Pr_N} - P_\varepsilon \|_{X, \infty}.$$

Από το Λήμμα (1) λάβαμε ότι  $\forall \varepsilon > 0$ , υπάρχει πολυωνμικός τελεστής  $P_\varepsilon \in \mathcal{P}(X \rightarrow H)$  (finite rank operator), έτσι ώστε:

$$\max_{x \in X} \| \mathcal{F}^{Pr_N}[x] - P_\varepsilon[x] \|_H < \varepsilon,$$

ενώ στο Λήμμα (3) με την χρήση του Λήμματος (2) δείξαμε ότι:

$$\max_{x \in X} \| \mathcal{F}[x] - \mathcal{F}^{Pr_N}[x] \|_H < \varepsilon.$$

Συνοψίζοντας, συμπεραίνουμε ότι  $\forall \varepsilon > 0$ , μπορούν να επιλεγούν, κατάλληλο  $N \in \mathbb{N}$ ,  $N = N(\varepsilon)$ , και πολυώνυμο  $P_\varepsilon \in \mathcal{P}(X \rightarrow H)$ , τέτοια ώστε:

$$\| \mathcal{F} - P_\varepsilon \|_\infty \leq \| \mathcal{F} - \mathcal{F}^{Pr_N} \|_\infty + \| \mathcal{F}^{Pr_N} - P_\varepsilon \|_\infty < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

Με αυτόν τον τρόπο έχουμε επιτύχει την επέκταση του Θεωρήματος (2) σε άπειρη διάσταση και η απόδειξη του Θεωρήματος (1) ολοκληρώνεται.

**Αναπαράσταση του προσεγγιστικού πολυωνμικού τελεστή, του Θεωρήματος 1, στον συναρτησιακό χώρο  $H := L_2(\mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R})$**

Στο Θεώρημα 1 αποδεικνύεται η ύπαρξη πολυωνμικών, προσεγγιστικών αναπαραστάσεων, συνεχών (μη γραμμικών) τελεστών, πάνω σε συμπαγή υποσύνολα ενός διαχωρίσιμου χώρου Hilbert. Με άλλα λόγια, κάθε τελεστής  $\mathcal{F} \in \mathcal{C}(X \rightarrow H)$ , μπορεί να προσεγγιστεί στον επιθυμητό βαθμό ( $\forall \varepsilon > 0$ ) από έναν πολυωνμικό τελεστή  $P \equiv P_\varepsilon \in \mathcal{P}(X \rightarrow H)$ .

Στην συνέχεια αποδεικνύουμε ότι στην περίπτωση του χώρου  $H := L_2(\mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R})$ , είναι εφικτή η αναπαράσταση του τελεστή  $P[\bullet]$  στην μορφή:

$$P[x(\bullet)](t) = K_0(t) + \sum_{m=1}^M \int_{\mathcal{T}^{(m)}} K(t, \boldsymbol{\tau}^{(n)}) \prod_{k=1}^m x(\tau_k) d\mu^{(m)}.$$

Η απόδειξη αυτού του αποτελέσματος μπορεί να ευρεθεί στο άρθρο (Porter, Clark and DeSantis, Causality Structure and the Weierstrass Theorem, 1975). Πριν την απόδειξη του ανωτέρω πορίσματος χρειαζόμαστε το ακόλουθο βοηθητικό Λήμμα:

**Λήμμα 4 [Porter-Clark-DeSantis, 1975]:** Έστω  $H$  διαχωρίσιμος χώρος Hilbert,  $p_K : H^K \rightarrow H$  συνεχής πολυγραμμική ( $K$ -γραμμική) μορφή of finite rank (δηλ., με χώρο εικόνας πεπερασμένης διάστασης), και  $P : H \rightarrow H^{(n)}$  το  $K$ -ομογενές πολυώνυμο το οποίο παράγει η  $p_K$  (το οποίο θα είναι επίσης of finite rank). Τότε, υπάρχουν πεπερασμένα ορθοκανονικά σύνολα  $(\phi_j)_{j=1}^J \subseteq H$  και  $(\eta_i)_{i=1}^I \subseteq H$ , έτσι ώστε:

$$p_K(x_1, x_2, \dots, x_K) = \sum_{i=1}^I \sum_{j_1, j_2, \dots, j_K=1}^J (x_1, \phi_{j_1})_H (x_2, \phi_{j_2})_H \dots (x_K, \phi_{j_K})_H \times \quad \blacksquare$$

$$\times (p_K(\phi_{j_1}, \phi_{j_2}, \dots, \phi_{j_K}), \eta_i)_H \eta_i.$$

*Απόδειξη:* Έχουμε και  $Pr_J : H \rightarrow H^{(J)}$ ,  $J \in \mathbb{N}$  προβολή. Από τα ανωτέρω Λήμματα 2 και 3, γνωρίζουμε ότι στο πλαίσιο των διαχωρίσιμων χώρων Hilbert, για κάθε τελεστή  $\mathcal{F} \in \mathcal{C}(X \rightarrow H)$ , όπου  $X \subseteq H$  συμπαγές, υπάρχει ακολουθία τελεστών πεπερασμένης διάστασης  $(\mathcal{F}^{Pr_n})_{n=1}^\infty$ , βλ. Εξ. (3) και Λήμμα 3, η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα ως προς  $x \in X$  στον τελεστή  $\mathcal{F}$ . Ακόμα υπάρχει πολυωνυμικός τελεστής  $P \in \mathcal{P}(H \rightarrow H^n)$  πεπερασμένης διάστασης ο οποίος προσεγγίζει τον τελεστή  $\mathcal{F}^{Pr_n}$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  και  $x \in H$ , βλ. Λήμμα 2. Τα δύο αυτά αποτελέσματα οδηγούν στο Θεώρημα 1.

Επίσης στο Λήμμα 2, ορίζουμε:

$$P[x] = \tilde{P}[Pr_J[x]], \quad \forall x \in H$$

όπου  $\tilde{P} : X^{(J)} \rightarrow H^{(J)}$ , ομογενές πολυώνυμο  $K$ -βαθμού. Θεωρούμε τώρα ορθοκανονική βάση  $(\phi_j)_{j=1}^J$  του συνόλου  $Range(Pr_J) := \{y \in H^{(J)} : y = Pr_J[x], x \in H\}$ .

Για την καλύτερη κατανόηση θα εξάγουμε το αποτέλεσμα για την περίπτωση όπου  $K = 2$ , η οποία γενικεύεται άμεσα. Θεωρούμε διγραμμική μορφή  $p_2 : H^2 \rightarrow H$ . Τότε,  $\forall x_1, x_2 \in Range[Pr_J]$ , έχουμε ότι:

$$p_2(x_1, x_2) = p_2\left(\sum_{j=1}^J \chi_{1,j} \phi_j, \sum_{j=1}^J \chi_{2,j} \phi_j\right) = \sum_{j_1, j_2=1}^J \chi_{1,j_1} \chi_{2,j_2} p_2(\phi_{j_1}, \phi_{j_2}).$$

Εκφράζοντας τις συνιστώσες των στοιχείων  $x_1, x_2$  ανωτέρω, μέσω του εσωτερικού γινομένου του χώρου  $H$ , λαμβάνουμε:

$$p_2(x_1, x_2) = \sum_{j_1, j_2=1}^J (x_1, \phi_{j_1})_H (x_2, \phi_{j_2})_H p_2(\phi_{j_1}, \phi_{j_2}) \quad (5)$$

Το σύνολο  $G := \{p_2(\phi_{j_1}, \phi_{j_2}) : j_1, j_2 = 1, 2, \dots, J\}$  είναι πεπερασμένο υποσύνολο του χώρου  $H$  και υπάρχει ορθοκανονική βάση  $(\eta_i)_{i=1}^I$  του συνόλου  $\text{span}(G)$ . Τότε μπορούμε να γράψουμε:

$$p_2(\phi_{j_1}, \phi_{j_2}) = \sum_{i=1}^I (p_2(\phi_{j_1}, \phi_{j_2}), \eta_i)_H \eta_i. \quad (6)$$

Έπεται αυτομάτως το αποτέλεσμα για  $K = 2$ , αντικαθιστώντας στην Εξ.(5) την έκφραση του όρου  $p_2(\phi_{j_1}, \phi_{j_2})$  από την Εξ.(6). Τελικώς έχουμε:

$$p_2(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^I \sum_{j_1, j_2=1}^J (x_1, \phi_{j_1})_H (x_2, \phi_{j_2})_H (p_2(\phi_{j_1}, \phi_{j_2}), \eta_i)_H \eta_i$$

Κατά αναλογία τα ανωτέρω βήματα ισχύουν για γενικό  $K$ , συνεπώς η απόδειξη ολοκληρώνεται.

Εφοδιασμένοι με το Λήμμα (4), περνάμε στο ακόλουθο Πόρισμα (1).

**Πόρισμα 1:** Έστω  $H := L_2(\mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R})$  και  $X \subseteq H$  συμπαγές. Θεωρούμε συνεχή (μη γραμμικό) τελεστή  $\mathcal{F} \in \mathcal{C}(X \rightarrow H)$ . Ακόμα θεωρούμε, σύμφωνα με το Θεώρημα 2, τον προσεγγιστικό πολυωνυμικό τελεστή  $P \in \mathcal{P}(X \rightarrow H)$ , πεπερασμένης τάξης του τελεστή  $\mathcal{F}$ . Τότε ο τελεστής  $P$  λαμβάνει την ακόλουθη αναπαράσταση:

$$P[x(\cdot)](t) = K_0(t) + \sum_{m=1}^M \int_{\mathcal{T}^{(m)}} K(t, \boldsymbol{\tau}^{(n)}) \prod_{k=1}^m x(\tau_k) d\mu(\boldsymbol{\tau}^{(m)}). \quad \blacksquare$$

*Απόδειξη:* Ο πολυωνυμικός τελεστής  $P$  εκφράζεται ως υπέρθεση  $m$ -ομογενών πολυωνύμων τελεστών  $P_m$  για  $m = 0, 1, 2, \dots, M$ , εφόσον ο βαθμός του πολυωνύμου  $P$  είναι  $M$ . Γράφουμε:

$$P[x(\cdot)](t) := \sum_{m=0}^M P_m[x(\cdot)](t) = P_0 + P_1[x(\cdot)](t) + \dots + P_M[x(\cdot)](t), \quad x \in H.$$

Κάθε  $m$ -ομογενής πολυωνυμικός τελεστής  $P_m$ , παράγεται μέσω μιας (συμμετρικής) πολυγραμμικής μορφής  $p_m : H^m \rightarrow H$ . Επικαλούμενοι το Λήμμα (4) ανωτέρω, συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν ορθοκανονικές βάσεις  $(\phi_j)_{j=1}^J$  και  $(\eta_i)_{i=1}^I$  με τις οποίες μπορούν να αναπαρασταθούν οι πολυγραμμικές μορφές  $p_m : H^m \rightarrow H$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots, M$  που παράγουν τα ομογενή πολυώνυμα  $P_m$  και τα οποία συνθέτουν (αθροιστικά) τον τελεστή  $P$ .

Συνεπώς για κάθε  $m$ , έχουμε:

$$p_m(x_1(\cdot), \dots, x_m(\cdot))(t) = \sum_{i=1}^I \sum_{j_1, j_2, \dots, j_m=1}^J (x_1(t), \phi_{j_1}(t))_H \times \dots \times (x_m(t), \phi_{j_m}(t))_H \times \\ \times (p_m(\phi_{j_1}(t), \dots, \phi_{j_m}(t)))(t), \eta_i(t))_H \eta_i(t).$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την έκφραση του εσωτερικού γινομένου του χώρου  $L^2(\mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R})$ :

$$(x_1, x_2)_{L_2} := \int_{\mathcal{T}} x_1(\tau) x_2(\tau) d\mu(\tau).$$

Η ανωτέρω έκφραση της πολυγραμμικής μορφής λαμβάνει την μορφή:

$$p_m(x_1(\cdot), \dots, x_m(\cdot))(t) = \sum_{i=1}^I \sum_{j_1, j_2, \dots, j_m=1}^J \int_{\mathcal{T}} x_1(\tau) \phi_{j_1}(\tau) d\mu(\tau) \times \dots \times \\ \times \int_{\mathcal{T}} x_m(\tau) \phi_{j_m}(\tau) d\mu(\tau) s(i, j_1, \dots, j_m) \eta_i(t),$$

όπου  $s(i, j_1, \dots, j_m) = (p_m(\phi_{j_1}(t), \dots, \phi_{j_m}(t)))(t), \eta_i(t))_H$ , βαθμωτές ποσότητες. Γράφοντας το γινόμενο ολοκληρωμάτων στην ανωτέρω έκφραση, ως πολλαπλό ολοκλήρωμα και περνώντας τα αθροίσματα εντός της ολοκλήρωσης, λαμβάνουμε την έκφραση:

$$p_m(x_1(\cdot), \dots, x_m(\cdot))(t) = \int_{\mathcal{T}^{(m)}} K(t, \boldsymbol{\tau}^{(m)}) x_1(\tau_1) \times \dots \times x_m(\tau_m) d\mu(\boldsymbol{\tau}^{(m)}),$$

όπου:

$$K(t, \boldsymbol{\tau}^{(m)}) := \sum_{i=1}^I \sum_{j_1, j_2, \dots, j_m=1}^J s(i, j_1, \dots, j_m) \phi_{j_1}(\tau_1) \phi_{j_2}(\tau_2) \times \dots \times \phi_{j_m}(\tau_m) \eta_i(t).$$

Το ομογενές πολυώνυμο που παράγει η ανωτέρω πολυγραμμική μορφή είναι:

$$P_m[x(\cdot)](t) = p_m(x_1(\cdot), \dots, x_m(\cdot))(t) \Big|_{x_1=x_2=\dots=x_m=x},$$

άρα έχουμε ότι:

$$P_m[x(\cdot)](t) = \int_{\mathcal{T}^{(m)}} K(t, \boldsymbol{\tau}^{(m)}) \prod_{k=1}^m x(\tau_k) d\mu(\boldsymbol{\tau}^{(m)}).$$

Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το πολυώνυμο  $P$ , λαμβάνει την ακόλουθη αναπαράσταση:

$$P[x(\cdot)](t) := \sum_{m=0}^M P_m = K_0(t) + \sum_{m=1}^M \int_{\mathcal{T}^{(m)}} K(t, \boldsymbol{\tau}^{(m)}) \prod_{k=1}^m x(\tau_k) d\mu(\boldsymbol{\tau}^{(m)}), \quad x \in H.$$

Η απόδειξη του Πορίσματος 1 ολοκληρώνεται.

### 4.3 Προσεγγιστική αναπαράσταση συνεχών (μη-γραμμικών) τελεστών σε χώρους Banach

Στο προηγούμενο εδάφιο παρουσιάσαμε εκτενώς μια επέκταση του θεωρήματος Stone-Weierstrass σε χώρους Hilbert. Εξίσου σημαντικό και ενδιαφέρον ερώτημα είναι η δυνατότητα επέκτασης του θεωρήματος Stone-Weierstrass σε γενικότερους χώρους Banach. Στην κατεύθυνση αυτή, εξίσου έχει υπάρξει έργο και έχουν δοθεί απαντήσεις. Σε αυτό το εδάφιο θα παρουσιάσουμε κάποια από αυτά τα αποτελέσματα στο επίπεδο περιγραφής των ιδεών χωρίς λεπτομερή παρουσίαση των αποδείξεων τους.

Ξεκινούμε, παραθέτοντας τα αποτελέσματα του άρθρου της (Prenter, A Weierstrass Theorem for Normed Linear Spaces, 1969). Πηγή πληροφοριών επί του θέματος καθώς και των αποδείξεων των θεωρημάτων που παρουσιάζουμε στην συνέχεια είναι το βιβλίο (Argyros, 1998).

**Θεώρημα 1 [Prenter, 1969]:** Έστω  $K, Y$  γραμμικοί χώροι με νόρμα και  $X$  συμπαγές υποσύνολο του χώρου  $K$  (δηλαδή Banach χώρος) με την ιδιότητα  $\mathbf{M}^{(1)}$ . Τότε το σύνολο των συνεχών πολυωνυμικών τελεστών από τον χώρο  $K$  στον  $Y$ ,  $\mathcal{P}(K \rightarrow Y)$ , είναι πυκνό στον χώρο των συνεχώς τελεστών  $C(K \rightarrow Y)$ , με την τοπολογία της supremum νόρμας.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 1 μπορεί να ευρεθεί στο βιβλίο (Argyros, 1998, σελ. 346). Το Θεώρημα 1 βασίζεται στην απόδειξη του ακόλουθου θεωρήματος.

**Θεώρημα:** Έστω  $K, Y$  γραμμικοί χώροι με νόρμα, πεπερασμένης διάστασης και  $X$  συμπαγές υποσύνολο του χώρου  $K$ . Τότε το σύνολο των συνεχών πολυωνυμικών τελεστών από τον χώρο  $K$  στον  $Y$ ,  $\mathcal{P}(K \rightarrow Y)$ , είναι πυκνό στον χώρο των συνεχώς τελεστών  $C(K \rightarrow Y)$ .

<sup>(1)</sup> **Ορισμός [Ιδιότητα  $\mathbf{M}$ ]:** Λέμε ότι χώρος  $K$  πληροί την ιδιότητα  $\mathbf{M}$  αν για κάθε (υπο)χώρο πεπερασμένης διάστασης  $Z \subseteq K$  και για κάθε συμπαγή (υπο)χώρο του  $X$ , υπάρχει συνεχής προβολή  $Pr : X \rightarrow Z$ , τέτοια ώστε:

$$\|Pr[x]\|_Z \leq M \|x\|_X, \quad \forall x \in X,$$

όπου  $M > 0$ . ■

Το ανωτέρω αποτέλεσμα στηρίζεται άμεσα στην αναπαράσταση πολυωνυμικών τελεστών σε μορφή πίνακα, βλ. εδάφιο 2.5. Η απόδειξη του μπορεί να ευρεθεί στο βιβλίο (Argyros, 1998, σελ. 345).

**Θεώρημα 2 [Prenter,1969]:** Έστω  $K, Y$  γραμμικοί χώροι με νόρμα και  $X$  συμπαγές υποσύνολο του χώρου  $K$ . Τότε,  $\forall \varepsilon > 0$  και για κάθε απεικόνιση  $\mathcal{F} \in C(X \rightarrow Y)$ , υπάρχει (υπο)χώρος πεπερασμένης διάστασης  $X^{(N)} \subseteq X$ , συνεχής συνάρτηση  $f : X \rightarrow X^{(N)}$  και συνεχής πολυωνυμικός τελεστής  $P : f[X] \rightarrow (Y^{(M)} \subseteq Y)$ <sup>(8)</sup>, τέτοιος ώστε:

$$\|\mathcal{F}[x] - P[f(x)]\| < \varepsilon, \quad \forall x \in X.$$

Το Θεώρημα 2 μας λέει ότι κάθε συνεχής τελεστής,  $\mathcal{F} \in C(X \rightarrow Y)$ , μπορεί να προσεγγιστεί ομοιόμορφα  $\forall \varepsilon > 0$ , από πολυωνυμικό τελεστή πεπερασμένης διάστασης (of finite rank) στον συμπαγή χώρο  $F := \mathcal{F}[X]$ . Σημειώνουμε εδώ την παρατήρηση της συγγραφέως για την χρησιμότητα του αποτελέσματος αυτού καθώς επιτρέπει αριθμητικές εφαρμογές.

Μια ακόμα σημαντική μελέτη στο θέμα, η οποία ακολουθεί μια εντελώς διαφορετική προσέγγιση του ερωτήματος από αυτή της P. M. Prenter, βρίσκεται στο άρθρο (Istrăţescu, 1977). Το κεντρικό αποτέλεσμα αυτού, είναι το ακόλουθο θεώρημα.

**Θεώρημα 3 [Istrăţescu, 1977]:** Έστω  $B$  χώρος Banach και  $X \subseteq B$  συμπαγές υποσύνολο. Ακόμα θεωρούμε το σύνολο των συνεχών πολυωνυμικών τελεστών από τον χώρο  $X$  στον  $B$ ,  $\mathcal{P}(X \rightarrow B)$ . Τότε ο χώρος  $\mathcal{P}(X \rightarrow B)$  είναι πυκνός στον χώρο των συνεχώς τελεστών  $C(X \rightarrow B)$ . ■

Πριν την παρουσίαση της απόδειξης χρειαζόμαστε τον ακόλουθο ορισμό.

**Ορισμός [Partition of Unity]:** Έστω  $K$  μετρικός χώρος και  $A$  κλειστό υποσύνολο του χώρου  $X$ . Θεωρούμε  $\{V_j, j = 1(1)J\}$  ανοιχτό κάλυμμα του χώρου συνόλου  $A$ . Ορίζουμε ως *Partition of Unity* υποκείμενο στην κάλυψη  $\{V_j, j = 1(1)J\}$ , ένα σύνολο συνεχών συναρτήσεων  $\varphi_j : X \rightarrow [0,1]$  με τις ακόλουθες ιδιότητες:

- α)  $0 \leq \varphi_j \leq 1, \quad \forall x \in K,$
- β)  $\sum_{j=1}^J \varphi_j(x) = 1, \quad \forall x \in A,$
- γ)  $\text{supp}(\varphi_j) \subseteq V_j,$
- δ)  $\sum_{j=1}^J \varphi_j(x) \leq 1, \quad \forall x \in K. \quad \blacksquare$

**Θεώρημα:** Έστω  $A$  κλειστό υποσύνολο μετρικού χώρου  $K$ . Τότε για κάθε ανοιχτό κάλυμμα  $\{V_j, j = 1(1)J\}$  του  $A$ , υπάρχει Partition of Unity υποκείμενο στην κάλυψη  $\{V_j\}$ .

*Απόδειξη:* (Ma, 2002, σελ. 26).

---

<sup>(8)</sup>  $f[X] := \{f(x) : x \in X\}$



*Απόδειξη Θεωρήματος 3:* Έστω τελεστής  $\mathcal{F} \in \mathcal{C}(X \rightarrow B)$  και  $\varepsilon > 0$ . Για κάθε  $x \in X$  το σύνολο:

$$V_x := \{s, \|\mathcal{F}[x(\cdot)] - \mathcal{F}[s(\cdot)]\| < \varepsilon\},$$

είναι ανοιχτό σύνολο ως η αντίστροφη εικόνα συνεχούς απεικόνισης από ανοιχτό. Κατά αυτόν τον τρόπο  $\{V_x, x \in X\}$  είναι ανοιχτή κάλυψη του συνόλου  $X$  και εφόσον είναι συμπαγές σύνολο υπάρχει πεπερασμένη κάλυψη,  $V_{x_1}, V_{x_2}, \dots, V_{x_N}$ . Από το ανωτέρω Θεώρημα, υπάρχει Partition of Unity  $\{\varphi_n, n = 1(1)N\}$  υποκείμενο στην πεπερασμένη κάλυψη  $V_{x_1}, V_{x_2}, \dots, V_{x_N}$ . Χρησιμοποιούμε τα συναρτησιακά  $\varphi_j$  και ορίζουμε μέσω αυτών τον τελεστή:

$$\mathcal{F}[x(\cdot)] = \sum_{n=1}^N \mathcal{F}[x_n(\cdot)] \varphi_n[x(\cdot)].$$

Προφανώς ο τελεστής  $\mathcal{F}$  είναι συνεχής. Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}[x(\cdot)] - \mathcal{F}[x(\cdot)]\|_B &= \left\| \left( \sum_{n=1}^N \varphi_n[x(\cdot)] \right) \mathcal{F}[x(\cdot)] - \sum_{n=1}^N \mathcal{F}[x_n(\cdot)] \varphi_n[x(\cdot)] \right\|_B \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^N \varphi_n[x(\cdot)] \|\mathcal{F}[x(\cdot)] - \mathcal{F}[x_n(\cdot)]\|_B \leq \\ &\leq \left( \sum_{n=1}^N \varphi_n[x(\cdot)] \right) \varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

Τέλος από το Θεώρημα Stone-Weierstrass γνωρίζουμε ότι τα συναρτησιακά  $\varphi_n$ , προσεγγίζονται σε οποιονδήποτε βαθμό από στοιχεία του χώρου  $\mathcal{P}(X \rightarrow \mathbb{R})$ , δηλαδή από συναρτησιακά πολυώνυμα.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 3 ολοκληρώνεται.

#### 4.5 Προσεγγιστική αναπαράσταση αιτιοκρατικών και χρονικά αμετάβλητων τελεστών

Μια εκ των συνηθέστερων καταστάσεων προερχόμενη από την μελέτη φυσικών συστημάτων είναι η ανάγκη εύρεσης προσεγγιστικής αναπαράστασης ενός μη γραμμικού, συνεχούς τελεστή ανάμεσα σε δύο χώρους συναρτήσεων (π.χ  $C(\cdot) \rightarrow C(\cdot)$  ή  $L^2(\cdot) \rightarrow C(\cdot)$ ), ο οποίος επιπροσθέτως πληροί την συνθήκη της χρονικής αμεταβλητότητας και αιτιότητας.

##### Επέκταση του Θεωρήματος Stone-Weierstrass για άλγεβρες αιτιοκρατικών και χρονικά αμετάβλητων τελεστών

Σε αυτήν την περίπτωση εκμεταλλευόμενη τις επιπρόσθετες συνθήκες της αιτιοκρατικότητας και χρονικής αμεταβλητότητας μπορεί να διατυπωθεί μια εκδοχή του θεωρήματος Stone-Weierstrass για άλγεβρες τελεστών αυτής της μορφής. Το αποτέλεσμα αυτό ευρίσκεται στο άρθρο (Gallman and Narendra, 1976). Στην συνέχεια παρουσιάζουμε αυτό το ειδικό αποτέλεσμα.

**Θεώρημα 1 [Gallman-Narendra 1976]:** Έστω  $\mathcal{T} := [t_0, T]$  και συμπαγές υποσύνολο  $X \subseteq \{x(\cdot) : x \in C(\mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}), x(t_0) = 0\}$ . Συμβολίζουμε ως  $\mathcal{C}_{\text{CTI}}(X \rightarrow C(\mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}))$  τον χώρο των συνεχών αιτιοκρατικών και χρονικά αμετάβλητων τελεστών από τον χώρο  $X$  στον χώρο  $C(\mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R})$ . Έστω, επίσης, άλγεβρα τελεστών  $\mathcal{A}_{\text{op}} \subseteq \mathcal{C}_{\text{CTI}}(X \rightarrow C(\mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}))$ <sup>(9)</sup>, όπου το γινόμενο ορίζεται με την βοήθεια του συνήθους γινομένου στον χώρο  $C(\mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R})$ , περιέχει την σταθερή συνάρτηση, και διαχωρίζει σημεία στον  $X$ .

Τότε,  $\forall \mathcal{F} \in \mathcal{C}_{\text{CTI}}(X \rightarrow C(\mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}))$ :

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists P \in \mathcal{A}_{\text{op}}) : \left[ \max_{t \in \mathcal{T}} |\mathcal{F}[x(\cdot)](t) - P[x(\cdot)](t)| < \varepsilon, \forall x \in X \right]. \blacksquare$$

*Απόδειξη:* Για κάθε  $\hat{t} \in \mathcal{T}$ , ο τελεστής  $\mathcal{F}$ , ορίζει το συναρτησιακό  $\mathcal{F}_{\hat{t}} : X \rightarrow \mathbb{R}$ , εφόσον ο τελεστής έχει θεωρηθεί αιτιοκρατικός (υπενθυμίζεται ο Ορισμός 1, εδάφιο 1.2) και γράφουμε:

$$\mathcal{F}_{\hat{t}}[x(\cdot)] = \mathcal{F}[x(\cdot)](\hat{t}) \equiv \mathcal{F}[x(\cdot|_{t_0}^{\hat{t}})], \quad x \in X,$$

τονίζοντας με αυτόν τον τρόπο ότι το συναρτησιακό εξαρτάται από όλες τις τιμές της συνάρτησης  $x(\cdot)$  στο διάστημα  $[t_0, \hat{t}]$ . Για κάθε  $\hat{t} \in \mathcal{T}$ , τα στοιχεία του συνόλου  $\mathcal{A}_{\text{op}}$ , ορίζουν και αυτά με την σειρά τους συναρτησιακά, δηλαδή  $\mathcal{A}_{\text{op}}|_{\hat{t}} \subseteq \mathcal{C}_{\text{CTI}}(X \rightarrow \mathbb{R})$ .

Λόγω της υπόθεσης συνέχειας των μελετώμενων τελεστών, μπορούμε να μελετήσουμε την συμπεριφορά αυτών για κάθε συναρτησιακό όρισμα  $x \in X$  στο διάστημα χρονικό διάστημα  $\mathcal{T}$ , μέσω του συναρτησιακού που ορίζουν στον τελικό χρόνο  $\hat{t} = T$ .

Θέτοντας  $\hat{t} = T$ , έχουμε ότι το σύνολο  $\mathcal{A}_{\text{op}}|_T$  ορίζει μια άλγεβρα συναρτησιακών πολυωνύμων με τα χαρακτηριστικά της δομής του συνόλου  $\mathcal{A}_{\text{op}}$ , δηλαδή διαχωρίζει σημεία στον χώρο  $X$  και περιέχει το στοιχείο  $P_0[x(\cdot|_{t_0}^T)] = 1, \forall x \in X$ . Εφόσον ο χώρος  $X$  είναι συμπαγής και το σύνολο  $\mathcal{A}_{\text{op}}|_T$  πληροί τα ανωτέρω, το θεώρημα Stone-Weierstrass υπαγορεύει ότι  $\overline{\mathcal{A}_{\text{op}}|_T} := \mathcal{C}_{\text{CTI}}(X \rightarrow \mathbb{R})$ , δηλαδή:

$$\begin{aligned} & (\forall \mathcal{F}_T \in \mathcal{C}_{\text{CTI}}(X \rightarrow \mathbb{R})) (\forall \varepsilon > 0) (\exists P_T[\cdot] \in \mathcal{A}_{\text{op}}|_T) : \\ & \quad : \left[ \sup_{x \in X} |\mathcal{F}_T[x(\cdot)] - P_T[x(\cdot)]| < \varepsilon \right]. \end{aligned}$$

Ο χώρος  $X$ , πληροί την ιδιότητα συμπερίληψης των μεταφορών (Time-shift inclusion), δηλαδή:

$$(\forall x(\cdot) \in X) (\forall t_1 \in \mathcal{T}) (\exists x_1(\cdot) \in X) : \left[ x_1(t) = \begin{cases} 0 & , t_0 \leq t < t_1 \\ x(t_0 + t - t_1) & , t_1 \leq t \leq T \end{cases} \right]$$

Βάση των ανωτέρω, η προσέγγιση:

<sup>(9)</sup> Χρησιμοποιούμε τον δείκτη CTI ως συντομογραφία της έκφρασης (Causal and Time Invariant). Δηλώνουμε με αυτόν τον τρόπο ότι στο σύνολο περιέχονται αιτιοκρατικοί και χρονικά αμετάβλητοι τελεστές.

$$|\mathcal{F}_T[x(\cdot)] - P_T[x(\cdot)]| < \varepsilon,$$

ισχύει για κάθε συνάρτηση  $x(\cdot) \in X$  συνεπώς και για τις συναρτήσεις  $x_1(\cdot) \in X$ . Έχουμε λοιπόν επίσης, ότι:

$$|\mathcal{F}_T[x_1(\cdot)] - P_T[x_1(\cdot)]| < \varepsilon.$$

Οι τελεστές που θεωρούμε είναι χρονικά αμετάβλητοι (υπενθυμίζεται ο Ορισμός 3, εδάφιο 1.2). Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η τιμή της συνάρτησης  $x(\cdot)$  στον χρόνο  $t_0$  είναι μηδέν,  $x(t_0) = 0$ . Εφόσον η συνάρτηση  $x_1$  αποτελεί μεταφορά των τιμών της συνάρτησης  $x$  πάνω από το διάστημα  $[t_0, t_1]$  στο διάστημα  $[t_1, T]$ , λόγω της χρονικής αμεταβλητότητας, μπορούμε να γράψουμε:

$$|\mathcal{F}_T[x_1(\cdot)] - R_T[x_1(\cdot)]| = |\mathcal{F}_{T-t_1}[x(\cdot)] - P_{T-t_1}[x(\cdot)]| < \varepsilon.$$

Οι τιμές των συναρτησιακών που ορίζουν οι τελεστές  $\mathcal{F}_i, P_i$  στον χρόνο  $T$ , όταν το συναρτησιακό όρισμα τους είναι η συνάρτηση  $x_1(\cdot)$ , θα είναι ίδιες με τις αντίστοιχες τιμές των συναρτησιακών που ορίζουν οι τελεστές  $\mathcal{F}_i, P_i$  στον χρόνο  $T - t_1$  για το συναρτησιακό όρισμα  $x(\cdot)$ , εφόσον οι τελεστές είναι αιτιοκρατικοί και  $x(t_0) = 0$ .

Από αυτό το σημείο έχουμε ότι το ανωτέρω φράγμα ισχύει για κάθε συνάρτηση  $x \in X$  και για όλους τους χρόνους  $t_1 \in \mathcal{T}$ . Εφόσον το  $t_1$ , μπορεί να επιλεγεί αυθαίρετα καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι:

$$\max_{t \in \mathcal{T}} |\mathcal{F}_i[x(\cdot)] - P_i[x(\cdot)]| < \varepsilon, \quad \forall x \in X.$$

Η απόδειξη του Θεωρήματος 1 ολοκληρώνεται.

Σημειώνουμε ότι το θεώρημα μπορεί να εφαρμοστεί εξίσου στην περίπτωση όπου το πεδίο ορισμού των τελεστών είναι ένα συμπαγές υποσύνολο  $X$  του χώρου συναρτήσεων  $L^2(I \rightarrow \mathbb{R})$ . Ο χώρος  $L^2(I \rightarrow \mathbb{R})$ , πληροί την ιδιότητα συμπερίληψης των μεταφορών. Από την απόδειξη του Θεωρήματος 1 ανωτέρω, εύκολα διαπιστώνουμε ότι τα ανωτέρω επιχειρήματα δεν ισχύουν γενικώς στον χώρο των συνεχών συναρτήσεων,  $C(\mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R})$ , καθώς στην περίπτωση όπου  $x(t_0) \neq 0$ , η ιδιότητα συμπερίληψης των μεταφορών δεν πληρείται. Τότε η συνάρτηση  $x_1$  είναι ασυνεχής συνάρτηση.

### Άλγεβρες τελεστών $\mathcal{A}_{\text{op}}$ , κατάλληλες για την εφαρμογή του Θεωρήματος 1

Ένα σημαντικό ερώτημα είναι πώς κατασκευάζονται άλγεβρες τελεστών  $\mathcal{A}_{\text{op}}$ , με τα απαιτούμενα χαρακτηριστικά για την εφαρμογή του Θεωρήματος 1. Οι επιλογές που έχουμε σε αυτήν την περίπτωση είναι περισσότερες από μια. Στην συνέχεια παρουσιάζουμε, με την μορφή παραδειγμάτων, ορισμένες άλγεβρες τελεστών που μπορούν να παίξουν τον ρόλο του  $\mathcal{A}_{\text{op}}$ .

**Παράδειγμα 1 [Άλγεβρα πολυωνυμικών τελεστών Volterra με διαχωρίσιμους πυρήνες (separated kernels)]:**

Θεωρούμε το σύνολο των πολυωνυμικών τελεστών  $\mathcal{P}(X \rightarrow C(\mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}))$  και το σύνολο  $\mathcal{P}_{VL} \subseteq \mathcal{P}(X \rightarrow C(\mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}))$ <sup>(10)</sup> των αιτιοκρατικών και χρονικά αμετάβλητων, πολυωνύμων Volterra, πρώτου βαθμού (γραμμικοί τελεστές). Το σύνολο  $\mathcal{P}_{VL}$  μπορεί να περιγραφεί ως:

$$\mathcal{P}_{VL} := \left\{ p[\bullet](t) = \int_{t_0}^t K(t - \tau) \bullet d\tau : K \in C(\mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}) \right\}.$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι οι τελεστές του συνόλου  $\mathcal{P}_{VL}$  εφαρμοζόμενοι πάνω στις συνεχείς συναρτήσεις του χώρου  $X$ , παράγουν συνεχείς συναρτήσεις στον χώρο  $C(\mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R})$ .

Κάθε στοιχείο του συνόλου  $\mathcal{P}_{VL}$  καθορίζεται πλήρως από την συνάρτηση του ολοκληρωτικού πυρήνα  $K$ . Για αυτό τον λόγο τα στοιχεία του συνόλου  $\mathcal{P}_{VL}$ , θα συμβολίζονται με  $p_{K(\cdot)}$  δηλώνοντας στον κάτω δείκτη την συνάρτηση ολοκληρωτικού πυρήνα. Όταν θέλουμε να εμφανίσουμε και τον βαθμό του πολυωνύμου  $p_{K(\cdot)}$  θα γράφουμε  $p_{\beta, K(\cdot)}$ , όπου  $\beta$  ο βαθμός.

Εφοδιάζουμε το σύνολο  $\mathcal{P}_{VL}$  με τον τελεστή μονάδα  $\mathbf{I}$ , δηλαδή το στοιχείο για το οποίο ισχύει ότι:

$$\forall x \in X, \mathbf{I}[x(\cdot)](t) = \mathbf{1}_{C(\mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R})},$$

όπου  $\forall t \in \mathcal{T}, \mathbf{1}(t) = 1$ .

Ορίζουμε τις πράξεις της πρόσθεσης και του γινομένου μεταξύ στοιχείων του συνόλου  $\mathcal{P}_{VL}$ , και τον πολλαπλασιασμό στοιχείου του  $\mathcal{P}_{VL}$  με βαθμωτές σταθερές, μέσω των αντίστοιχων πράξεων του χώρου  $C(\mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R})$ . Δηλαδή  $\forall x(\cdot) \in X, \forall p_{K(\cdot)}[\bullet], p_{K(\cdot)} \in \mathcal{P}_{VL}$  και  $\forall a \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} (p_{K(\cdot)} + p_{K(\cdot)}): x &\mapsto p_{K(\cdot)}[x] + p_{K(\cdot)}[x], \\ (p_{K(\cdot)} \bullet p_{K(\cdot)}): x &\mapsto p_{K(\cdot)}[x] \bullet p_{K(\cdot)}[x], \\ a p_{K(\cdot)} &: x \mapsto a p_{K(\cdot)}[x]. \end{aligned}$$

Έπειτα θεωρούμε διαδοχικά τα γινόμενα των πολυωνυμικών τελεστών του συνόλου  $\mathcal{P}_{VL}$ . Αρχικά ανά δύο, δηλαδή:

$$p_{2, (K K)(\cdot)} = p_{K(\cdot)} \bullet p_{K(\cdot)}, \quad \forall K, K \in C(\mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}),$$

με αυτόν τον τρόπο παράγονται ομογενή τετραγωνικά πολυώνυμα. Εφαρμόζοντας των πολυωνυμικό τελεστή  $p_{2, (K K)(\cdot)}$  σε συνάρτηση  $x \in X$ , βλέπουμε ότι:

---

<sup>(10)</sup> Χρησιμοποιούμε τον δείκτη  $VL$  ως συντομογραφία της φράσης (Volterra Linear), δηλώνοντας ότι το σύνολο  $\mathcal{P}_{VL}$  περιέχει πολυώνυμα Volterra πρώτου βαθμού, δηλαδή γραμμικούς τελεστές.

$$\begin{aligned} p_{2, (K K)(\cdot)}[x(\cdot)](t) &= \int_{t_0}^t K(t-\tau)x(\tau)d\tau \cdot \int_{t_0}^t K(t-\tau)x(\tau)d\tau = \\ &= \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t K(t-\tau_1)K(t-\tau_2)x(\tau_1)x(\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 = \end{aligned}$$

[ Εφόσον  $K, K \in C(\mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}), \exists K_2 \in C(\mathcal{T}^{(2)} \rightarrow \mathbb{R}) : K_2(\tau_1, \tau_2) = K(\tau_1) \cdot K(\tau_2), \forall \tau_1, \tau_2 \in \mathcal{T}^{(2)}$ ]

$$= \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t K_2(t-\tau_1, t-\tau_2)x(t-\tau_1)x(t-\tau_2)d\tau_1 d\tau_2,$$

ή ακολουθώντας εναλλακτική γραφή:

$$p_{2, (K K)(\cdot)}[x(\cdot)](t) = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t K_2(\tau_1, \tau_2)x(t-\tau_1)x(t-\tau_2)d\tau_1 d\tau_2.$$

Αμέσως μετά λαμβάνουμε τα ανά τρία γινόμενα:

$$p_{3, (K K K)(\cdot)} = p_{K(\cdot)} \cdot p_{K(\cdot)} \cdot p_{K(\cdot)}, \quad \forall K, K, K(\cdot) \in C(\mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}),$$

τότε παράγουμε ομογενή κυβικά πολυώνυμα. Αντιστοίχως παράγεται κάθε βαθμού ομογενές πολυώνυμο Volterra.

**Παρατήρηση:** Όπως διαφαίνεται από την κατασκευή του τετραγωνικού πολυωνύμου την οποία αναπτύξαμε, οι ολοκληρωτικοί πυρήνες των ομογενών πολυωνυμικών τελεστών Volterra, είναι γινόμενα των πυρήνων μιας μεταβλητής των πολυωνύμων πρώτου βαθμού (γραμμικοί τελεστές) εκ των οποίων κατασκευάζεται ο ομογενής πολυωνυμικός τελεστής. Ο πυρήνας  $K_n$  του  $n$ -ομογενούς πολυωνυμικού τελεστή Volterra εκφράζεται ως:

$$K_n(\tau_1, \dots, \tau_n) = K^{(1)}(\tau_1)K^{(2)}(\tau_2)\dots K^{(n)}(\tau_n).$$

Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε πολυώνυμα Volterra με διαχωρίσιμους πυρήνες (Volterra polynomials of separated kernels).

Επεκτείνουμε τώρα το σύνολο  $\mathcal{P}_{VL}$  στα ομογενή πολυώνυμα που κατασκευάζονται ανωτέρω και ονομάζουμε το νέο αυτό σύνολο  $\mathcal{P}_{VHSK}^{(1)}$ .

Τέλος θεωρούμε γραμμικές υπερθέσεις των στοιχείων του συνόλου  $\mathcal{P}_{VH}$ , δηλαδή:  $\forall N \in \mathbb{N}$

$$P = \sum_{n=0}^N a_n p_n,$$

με το άθροισμα να λαμβάνεται για κάθε πλειάδα πολυωνύμων  $(p_1, p_2, \dots, p_N) \in \mathcal{P}_{VH}$  και σταθερών  $(a_0, a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{R}$ , ενώ πάντα έχουμε ότι  $p_0 = I$ . Τότε κατασκευάζονται μη ομογενή πολυώνυμα βαθμού  $N$ .

Επεκτείνουμε το σύνολο  $\mathcal{P}_{VHSK}$  στα μη ομογενή πολυώνυμα που παράγονται ανωτέρω, ως γραμμικές υπερθέσεις ομογενών. Τελικώς, λαμβάνουμε ένα σύνολο κλειστό ως προς της τρεις βασικές πράξεις, δηλαδή μια άλγεβρα πολυωνυμικών τελεστών που περιέχεται στο σύνολο

(<sup>11</sup>) Χρησιμοποιούμε τον δείκτη  $VHSK$  ως συντομογραφία της φράσης (Volterra Homogeneous of Separated kernels), δηλώνοντας ότι το σύνολο  $\mathcal{P}_{VHSK}$  περιέχει ομογενή πολυώνυμα Volterra με διαχωρίσιμους πυρήνες.

$\mathcal{C}_{CTI}(X \rightarrow C(\mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}))$ , την οποία ονομάζουμε **άλγεβρα πολυωνυμικών τελεστών Volterra με διαχωρίσιμους πυρήνες**, και συμβολίσουμε με  $\mathcal{A}_V$ .

Τα στοιχεία της άλγεβρας  $\mathcal{A}_V$  έχουν την μορφή:  $\forall N \in \mathbb{N}$

$$P[x(\cdot)](t) := K_0 + \sum_{n=1}^N \int_{[t_0, t]^{(n)}} K_n(t - \tau_1, \dots, t - \tau_n) \prod_{k=1}^n x(\tau_k) d\boldsymbol{\tau}^{(n)}, \quad x \in X.$$

ή με την εναλλακτική γραφή της χρονικής αμεταβλητότητας:

$$P[x(\cdot)](t) := K_0 + \sum_{n=1}^N \int_{[t_0, t]^{(n)}} K_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \prod_{k=1}^n x(t - \tau_k) d\boldsymbol{\tau}^{(n)}, \quad x \in X.$$

Τώρα θα δείξουμε ότι η άλγεβρα  $\mathcal{A}_V$  διαχωρίζει τα σημεία στον χώρο  $X$ .

**Λήμμα 1 :** Η άλγεβρα  $\mathcal{A}_V$  διαχωρίζει τα σημεία στον χώρο  $X$ . Δηλαδή:

$$\left( \forall x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2 \right) \left( \exists p \in \mathcal{A}_V \right) : \left( p[x_1(\cdot)](t) \neq p[x_2(\cdot)](t) \right). \quad \blacksquare$$

*Απόδειξη:* Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει πυρήνας  $K \in C(\mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R})$  τέτοιος ώστε:

$$\Delta(t) := p_1[x_1(\cdot)](t) - p_1[x_2(\cdot)](t) = \int_{t_0}^t K(\tau) \left( x_1(t - \tau) - x_2(t - \tau) \right) d\tau \neq 0.$$

Για κάθε  $x_1, x_2 \in X$ ,  $x_* = x_1 - x_2 \in C(\mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R})$  και έχουμε ότι:

$$\Delta(t) = \int_{t_0}^t K(\tau) x_*(t - \tau) d\tau.$$

Θα δείξουμε ότι υπάρχει πυρήνας  $K \in C(\mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R})$ , τέτοιος ώστε:

$$\max_{t \in \mathcal{T}} |\Delta(t)| \neq 0$$

Η συνάρτηση  $x_* \in C(\mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R})$  είναι μη μηδενική τουλάχιστον σε πεπερασμένο υποσύνολο του πεδίου ορισμού της, το οποίο εντοπίζεται μετά από κάποιο σημείο, έστω  $t_c$ . Επιλέγουμε:

$$K(\tau) = \begin{cases} x_*(t_c - \tau), & t_0 \leq t \leq t_c \\ 0, & t_c < t \leq T \end{cases}$$

Τότε έχουμε ότι:

$$\Delta(t_c) = \int_{t_0}^{t_c} x_*^2(t_c - \tau) d\tau > 0.$$

Άρα  $\max_{t \in \mathcal{T}} |\Delta(t)| \neq 0$  και η άλγεβρα  $\mathcal{A}_V$  διαχωρίζει τα σημεία στον χώρο  $X$ .

**Παράδειγμα 2 [Άλγεβρα των πολυωνυμικών τελεστών Volterra (non separating kernels)]:**

Σε αυτήν την περίπτωση θεωρούμε το σύνολο  $\mathcal{P}_{VH} \subseteq \mathcal{P}(X \rightarrow C(\mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}))$ , των αιτιοκρατικών και χρονικά αμετάβλητων, ομογενών πολυωνύμων Volterra,  $n$ -βαθμού.

Το σύνολο  $\mathcal{P}_{VH}$  μπορεί να περιγραφεί ως:

$$\mathcal{P}_{VH} := \left\{ p[\bullet](t) = \int_{[t_0, t]^{(n)}} K_n(t - \tau_1, \dots, t - \tau_n) \bullet d\tau^{(n)} : K_n \in C(\mathcal{T}^n \rightarrow \mathbb{R}), n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Εφαρμόζοντας έναν τελεστή του συνόλου  $\mathcal{P}_{VH}$  σε μια συνάρτηση  $x \in X$ , λαμβάνουμε:

$$p[x(\bullet)](t) = \int_{[t_0, t]^{(n)}} K_n(t - \tau_1, \dots, t - \tau_n) x(\tau_1)x(\tau_3)\dots x(\tau_n) d\tau^{(n)},$$

ή γράφουμε με τον συνοπτικότερο συμβολισμό:

$$p[x(\bullet)](t) = \int_{[t_0, t]^{(n)}} K_n(t - \tau^{(n)}) \prod_{k=1}^n x(\tau_k) d\tau^{(n)}$$

Και εδώ, εφοδιάζουμε το σύνολο  $\mathcal{P}_{VH}$  με τον τελεστή μονάδα  $I$ . Επεκτείνουμε της πράξεις στον χώρο  $C(X \rightarrow \mathbb{R})$  και κατά αναλογία με το παράδειγμα (1), λαμβάνουμε διαδοχικά τα γινόμενα των πολυωνυμικών τελεστών του συνόλου  $\mathcal{P}_{VH}$ .

Για τα ανά δύο γινόμενα, θα έχουμε:

$$p_{n_1+n_2, (K_{n_1} K_{n_2})(\bullet)} = p_{K_{n_1}(\bullet)} \bullet p_{K_{n_2}(\bullet)}, \forall K_{n_1}, K_{n_2} \in C(\mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}), \forall n_1, n_2 \in \mathbb{N},$$

με αυτόν τον τρόπο παράγονται ομογενή πολυώνυμα βαθμού  $n_1 + n_2$ , όπου  $n_1, n_2$  οι βαθμοί των πολυωνύμων ανάμεσα στα οποία λαμβάνεται το γινόμενο. Αντιστοίχως λαμβάνουμε τα ανά τρία γινόμενα και ούτω κάθε εξής.

**Παρατήρηση:** Σε αυτήν την θεώρηση ο πυρήνας του  $n$ -ομογενούς πολυωνύμου δεν αναλύεται σε γινόμενο συναρτήσεων μιας μεταβλητής, δηλαδή **δεν είναι διαχωρίσιμος**.

Επεκτείνουμε λοιπόν το σύνολο  $\mathcal{P}_{VH}$  στα στοιχεία που κατασκευάζονται από τα διαδοχικά γινόμενα και ονομάζουμε αυτό το νέο σύνολο ως  $\mathcal{P}_{VHNS}$  <sup>(12)</sup>.

Τέλος θεωρούμε γραμμικές υπερθέσεις των στοιχείων του συνόλου  $\mathcal{P}_{VHNS}$  και επεκτείνουμε το σύνολο στα στοιχεία αυτά. Τότε έχουμε κατασκευάσει την άλγεβρα των πολυωνυμικών τελεστών Volterra την οποία συμβολίζουμε  $\mathcal{A}_{VNS}$ .

Μπορούμε σε πλήρη αναλογία με το Λήμμα 1 ανωτέρω, να δείξουμε και εδώ ότι το σύνολο πολυωνυμικών τελεστών που κατασκευάσαμε διαχωρίζει τα σημεία στον χώρο  $X$ .

Ουσιώδης διαφορά από την άλγεβρα πολυωνυμικών τελεστών Volterra με διαχωρίσιμους πυρήνες είναι ότι ξεκινάμε την κατασκευή μας στην βάση ενός ευρύτερου και πλουσιότερου συνόλου από αυτό των γραμμικών πολυωνυμικών τελεστών Volterra. Παρόλο όπου η θεώρηση των πολυωνυμικών τελεστών με διαχωρίσιμους πυρήνες προσδίδει στους υπολογισμούς που απαιτούνται στις εφαρμογές, απλούστερο χαρακτήρα, είναι λογικό να αναμένει κανείς, ότι οι προσεγγίσεις που κατασκευάζονται με πολυωνυμικούς τελεστές Volterra μη διαχωρίσιμων πυρήνων, θα απαιτούν λήψη μικρότερου αριθμού όρων για να επιτευχθεί του ίδιου βαθμού προσέγγιση.

<sup>(12)</sup> Χρησιμοποιούμε τον δείκτη  $VHNS$  ως συντομογραφία της φράσης (Volterra Homogeneous of Non-Separating Kernels).

### Παράδειγμα 3 [Άλγεβρα τελεστών Zadeh]:

Μια ακόμα σημαντική κατασκευή άλγεβρας  $\mathcal{A}_{op}$  είναι αυτή των Zadeh hierarchy τελεστών. Στο άρθρο του L. A. Zadeh (A contribution to the theory of nonlinear systems, 1953) γίνεται μια προσπάθεια ταξινόμησης των (μη γραμμικών) βαθμωτών συστημάτων σε κλάσεις,  $R_1, R_2, \dots$ , κατά τρόπο τέτοιο, ώστε κάθε μια εξ αυτών να περιέχει το σύνολο των γραμμικών συστημάτων και να περιέχεται πλήρως σε όλες τις επόμενες κλάσεις. Ενδεικτικά, η κλάση  $R_1$  λαμβάνεται να αποτελείται από όλα τα μη γραμμικά συστήματα των οποίων η μαθηματική αναπαράσταση λαμβάνει την μορφή:

$$y(t) = \int_0^{\infty} W[x(t-\tau), \tau] d\tau.$$

Διακρίνουμε ότι η περίπτωση ενός γραμμικού συστήματος καλύπτεται όταν η συνάρτηση  $W$  έχει την μορφή:

$$W[x(t-\tau), \tau] = Z(\tau)x(t-\tau).$$

Κατά αναλογία η κλάση  $R_2$ , ορίζεται ως η συλλογή συστημάτων που λαμβάνει την μαθηματική περιγραφή:

$$y(t) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} W[x(t-\tau_1), x(t-\tau_2), \tau_1, \tau_2] d\tau_1 d\tau_2.$$

Ειδική περίπτωση της ανωτέρω μορφής είναι:

$$y(t) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} W[x(t-\tau_1), \tau_1] \delta(\tau_1 - \tau) d\tau_1 d\tau.$$

Κατά αυτών τον τρόπο η κλάση  $R_1$  περιέχει τα γραμμικά συστήματα και περιέχεται στην  $R_2$ .

Η θεώρηση του L. A. Zadeh συνεχίζει κατά αναλογία στις επόμενες κλάσης.

Ο λόγος για τον οποίο ονομάζουμε την άλγεβρα τελεστών που παρουσιάζουμε στην συνέχεια, άλγεβρα των Zadeh hierarchy τελεστών, είναι γιατί, όπως θα δούμε, η μορφή των τελεστών λαμβάνει την μορφή της ανωτέρω θεώρησης.

Θεωρούμε  $X \subseteq C(\mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R})$ , συμπαγές και το σύνολο πολυωνυμικών τελεστών:

$$\mathcal{Q} := \left\{ Q[\bullet] = \sum_{j=1}^J a_j (\bullet)^j : a_j \in \mathbb{R}, J \in \mathbb{N} \right\}.$$

Επίσης θεωρούμε σύνολο τελεστών  $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{C}(X \rightarrow C(\mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}))$ , το οποίο περιγράφεται ως:

$$\mathcal{K} := \left\{ z[\bullet](t) = \int_{t_0}^t Z(t-\tau) Q[\bullet] d\tau : Z \in C(\mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}), Q \in \mathcal{Q} \right\}$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι εφαρμοζόμενα τα στοιχεία του συνόλου  $\mathcal{K}$  στις συναρτήσεις του χώρου  $X$  παράγονται και εδώ συνεχείς συναρτήσεις. Ένας τελεστής εφαρμοσμένος σε συνάρτηση  $x \in X$  έχει την μορφή:

$$z[x(\bullet)](t) = \int_{t_0}^t Z(t-\tau) Q[x(\tau)] d\tau = \int_{t_0}^t Z(t-\tau) \sum_{j=1}^J a_j x^j(\tau) d\tau,$$



συνεπώς:

$$\begin{aligned} z[x(\cdot)](t) &= \int_{t_0}^t Z(t-\tau) (a_1 x(\tau) + a_2 x^2(\tau) + \dots + a_j x^j(\tau)) d\tau = \\ &= \int_{t_0}^t Z(t-\tau) a_1 x(\tau) d\tau + \dots + \int_{t_0}^t Z(t-\tau) a_j x^j(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Κάνοντας αλλαγή μεταβλητής στα ολοκληρώματα της ανωτέρω έκφρασης, ο τελεστής γράφεται ισοδύναμα:

$$\begin{aligned} z[x(\cdot)](t) &= \int_{t_0}^t Z(\tau) a_1 x(t-\tau) d\tau + \dots + \int_{t_0}^t Z(\tau) a_j x^j(t-\tau) d\tau = \\ &= \int_{t_0}^t Z(\tau) Q[x(t-\tau)] d\tau. \end{aligned}$$

Στην συλλογιστική γραμμή του Παραδείγματος (1), επεκτείνουμε τις τρεις βασικές πράξεις στον χώρο  $C(\mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R})$ . Έπειτα εφοδιάζουμε το σύνολο  $\mathcal{K}$  με τον τελεστή  $I$ ,  $\forall x \in C(\mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R})$ ,  $z_0[x(\cdot)](t) = 1$ , και λαμβάνουμε διαδοχικά τα γινόμενα των στοιχείων του συνόλου. Οι τελεστές του συνόλου  $\mathcal{K}$  προσδιορίζονται πλήρως από της συναρτήσεις  $K, Q$ , για αυτό τον λόγο θα συμβολίζονται με  $g_{z(\cdot), Q(\cdot)}$  και κατά αναλογία με το Λήμμα (1) το σύνολο  $\mathcal{K}$ , διαχωρίζει τα σημεία στον χώρο  $X$ . Αναπτύσσουμε ενδεικτικά την περίπτωση των ανά δύο γινομένων. Έχουμε:

$$z_{2, (z z)(\cdot), (Q Q)(\cdot)} = z_{z(\cdot), Q(\cdot)} \cdot z_{z(\cdot), Q(\cdot)}, \quad \forall Z, Z \in C(\mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}), \quad \forall Q, Q \in Q.$$

$$\begin{aligned} z_{2, (z z)(\cdot), (Q Q)(\cdot)} [x(\tau)](t) &= \int_{t_0}^t Z(t-\tau) Q[x(\tau)] d\tau \cdot \int_{t_0}^t Z(t-\tau) Q[x(\tau)] d\tau \\ &= \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t Z(t-\tau_1) Q[x(\tau_1)] Z(t-\tau_2) Q[x(\tau_2)] d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned}$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι κάθε παραγόμενος τελεστής  $z_2[\bullet]$  μπορεί να γραφεί στην μορφή:

$$z_2[x(\cdot)](t) = \int_0^t \int_0^t W[x(t-\tau_1), x(t-\tau_2), \tau_1, \tau_2] d\tau_1 d\tau_2$$

Επεκτείνουμε λοιπόν το σύνολο  $\mathcal{K}$  στα στοιχεία που κατασκευάζονται από τα διαδοχικά γινόμενα και ονομάζουμε αυτό το νέο σύνολο ως  $\mathcal{K}_p$ . Τέλος λαμβάνουμε γραμμικές υπερθέσεις των στοιχείων του συνόλου  $\mathcal{K}_p$ :  $\forall N \in \mathbb{N}$

$$z[x(\cdot)](t) = \sum_{n=0}^N a_n z_n[x(\cdot)](t), \quad a_n \in \mathbb{R}$$

Επεκτείνουμε το σύνολο στα στοιχεία αυτά και ονομάζουμε το νέο σύνολο  $\mathcal{K}_z$ . Το σύνολο  $\mathcal{K}_z$  αποτελεί την άλγεβρα των Zadeh hierarchy τελεστών και αποτελεί μια ακόμα επιλογή άλγεβρας τελεστών που έχουμε στην διάθεση μας για την εφαρμογή του Θεωρήματος 1.

## Βιβλιογραφία Κεφαλαίου IV

Argyros, I. K. (1998) *Polynomial operator equations in abstract spaces and applications*. CRC Press.

Gallman, P. G. and Narendra, K. S. (1976) ‘Representations of nonlinear systems via the stone-weierstrass theorem’, *Automatica*. Pergamon, 12(6), pp. 619–622. doi: 10.1016/0005-1098(76)90043-1.

Istrăţescu, V. I. (1977) ‘A Weierstrass theorem for real Banach spaces’, *Journal of Approximation Theory*. Academic Press, 19(2), pp. 118–122. doi: 10.1016/0021-9045(77)90033-8.

Ma, Tsoy-Wo. (2002) *Banach–Hilbert Spaces, Vector Measures and Group Representations*. WORLD SCIENTIFIC. doi: 10.1142/4998.

Porter, W. A., Clark, T. M. and DeSantis, R. M. (1975) ‘Causality structure and the Weierstrass theorem’, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. Academic Press, 52(2), pp. 351–363. doi: 10.1016/0022-247X(75)90102-X.

Prenter, P. M. (1970) ‘A Weierstrass theorem for real, separable Hilbert spaces’, *Journal of Approximation Theory*, 3(4), pp. 341–351. doi: 10.1016/0021-9045(70)90039-0.

Prenter, P. M. (1969) ‘A weierstrass theorem for normed linear spaces’, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 75(4), pp. 860–862. doi: 10.1090/S0002-9904-1969-12329-3.



## 5 Επίλυση μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με χρήση συναρτησιακών σειρών Volterra

### 5.1 Τοποθέτηση του προβλήματος

Κάθε μη γραμμική, εξαναγκασμένη διαφορική εξίσωση μπορεί να γραφεί στην μορφή

$$\mathbf{N}[y(\cdot)](t) = x(t), \quad (1)$$

όπου  $y$  η άγνωστη συνάρτηση,  $x$  η συνάρτηση διέγερσης και  $\mathbf{N}[\bullet]$  μη γραμμικός, διαφορικός τελεστής. Ανάμεσα στους διαφορετικούς τύπους εξισώσεων που λαμβάνονται ανάλογα με την μορφή του τελεστή  $\mathbf{N}$ , υπάρχει μια μεγάλη κλάση εξισώσεων οι οποίες προκύπτουν όταν ο τελεστής  $\mathbf{N}$ , αναλύεται ως:

$$\mathbf{N}[y(\cdot)](t) := \mathbf{L}[y(\cdot)](t) + \mathbf{P}[y(\cdot), y'(\cdot), \dots, y^{(N-1)}(\cdot)](t), \quad (2)$$

όπου  $\mathbf{L}$  γραμμικός, διαφορικός τελεστής και  $\mathbf{P}$  πολυωνυμική συνάρτηση  $N$  μεταβλητών. Η μορφή του γραμμικού διαφορικού τελεστής  $\mathbf{L}$  είναι:

$$\mathbf{L}[\bullet](t) := a_N D^N[\bullet](t) + a_{N-1} D^{N-1}[\bullet](t) + \dots + a_1 D^1[\bullet](t) + a_0,$$

συνεπώς, απουσία της συνάρτησης  $\mathbf{P}$ , η δράση του τελεστή  $\mathbf{L}$  στην συνάρτηση  $y$  έχει ως αποτέλεσμα μια συνήθη, γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές.

Σε αυτήν την εργασία θα ασχοληθούμε με τις περιπτώσεις όπου η συνάρτηση  $\mathbf{P}$  είναι η άγνωστη συνάρτηση  $y$  υψωμένη στη δεύτερη και τρίτη δύναμη. Γενικότερα η συνάρτησης  $\mathbf{P}$  αποτελεί γραμμικό συνδυασμό πεπερασμένων όρων δυνάμεων της συνάρτησης  $y(\cdot)$  και των  $N-1$  παραγώγων της, δηλαδή:

$$\mathbf{P}[Y(\cdot)](t) = \sum_a b_a Y^a(t),$$

όπου:

$$Y(\cdot) := (Y_1(\cdot), \dots, Y_N(\cdot)) = (y(\cdot), y'(\cdot), \dots, y^{(N-1)}(\cdot))$$

και  $\mathbf{a} := (a_1, \dots, a_N)$  είναι πολυδείκτης.

Τότε έχουμε:

$$Y^a := \prod_{j=1}^N Y_j^{a_j}, \quad b_a := b_{a_1, \dots, a_N} \in \mathbb{R}.$$

Στην συνέχεια θα παρουσιάσουμε μια μέθοδο επίλυσης διαφορικών εξισώσεων της ανωτέρω μορφής με χρήση της αναπαράστασης σε σειρά Volterra πάνω στην συνάρτηση  $x(\bullet)$ , της άγνωστης συνάρτησης  $y(\bullet)$ . Η μέθοδος αυτή παρουσιάζεται στο άρθρο (Flake, 1963). Στο άρθρο αυτό, ανάγεται η επίλυση της διαφορική εξίσωση του μοντέλου, ενός βαθμωτού και χρονικά αμετάβλητου συστήματος, στον προσδιορισμός των πυρήνων Volterra, στο πεδίο του χρόνου, μέσω της επίλυσης γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων.

### Υποθέσεις για την επίλυση

Εφόσον αναφερόμαστε σε φυσικά συστήματα μπορούμε να θεωρούμε (χωρίς ουσιώδη περιορισμό της γενικότητας) ότι η συνάρτηση-διέγερση είναι συνεχής<sup>(1)</sup> στο χρονικό διάστημα  $\mathcal{T} := [t_0, T]$ , και άρα φραγμένη, δηλαδή,  $x \in C(\mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R})$ .

Τα συστήματα που μελετούμε είναι χρονικά αμετάβλητα και αναπαριστούμε προσεγγιστικά την απόκριση  $y(t)$ , σε χρόνο  $t \in \mathcal{T}$ , μέσω του συναρτησιακού (σειρά Volterra):

$$y(t) = h_0 + \sum_{n=1}^N \int_{[t_0, t]^{(n)}} h_n(\boldsymbol{\tau}^{(n)}) \prod_{k=1}^n x(t - \tau_k) d\boldsymbol{\tau}^{(n)}, \quad t \in \mathcal{T}, \quad (4)$$

όπου  $h_0 \in \mathbb{R}$  και  $h_n \in C(\mathcal{T}^n \rightarrow \mathbb{R})$ ,  $n = 1(1)N$ . Οι συναρτήσεις  $h_n$  μπορούν πάντα να θεωρούνται **συμμετρικές συναρτήσεις**, βλ. εδάφιο 2.1.

Το ερώτημα που προκύπτει είναι το ποια είναι η μορφή των ολοκληρωτικών πυρήνων της σειράς Volterra (Volterra Kernels), καθώς γνωρίζοντας αυτούς, μπορούμε να υπολογίσουμε την συνάρτηση απόκρισης στο χρονικό διάστημα  $\mathcal{T}$ . Σαφώς δεν είναι δυνατόν να υπολογίσουμε άπειρους το πλήθος πυρήνες αλλά μπορούμε να ελπίζουμε σε μια προσέγγιση της συνάρτησης απόκρισης σε ένα τμήμα του χρονικού διαστήματος  $\mathcal{T}$ , με την χρήση μικρού αριθμού όρων στην σειρά Volterra.

### Εξεταζόμενα προβλήματα

Η αναλυτική παρουσίαση της μεθόδου στα πλαίσια αυτής της εργασίας, θα διεξαχθεί διαμέσου παραδειγμάτων. Το πρώτο παράδειγμα αποτελεί ένα σύστημα το οποίο περιγράφεται μέσω μιας διαφορικής εξίσωσης **πρώτης τάξης με τετραγωνική μη γραμμικότητα και μηδενική αρχική τιμή**:

$$(P) \begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} + k_1 y(t) + k_2 y^2(t) = x(t), \\ y(t_0) = 0. \end{cases}$$

Θα προσδιορίσουμε τους πυρήνες της σειράς Volterra τριών όρων και θα παρουσιάσουμε αριθμητικά αποτελέσματα για διάφορα ζεύγη των συντελεστών  $k_1, k_2$ .

<sup>(1)</sup> Η κατά τμήματα συνεχής.

Στην συνέχεια θα περάσουμε στην διερεύνηση της εξίσωσης **πρώτης τάξης με κυβική μη γραμμικότητα και μηδενική αρχική τιμή**:

$$(P') \begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} + k_1 y(t) + k_3 y^3(t) = x(t), \\ y(t_0) = 0. \end{cases}$$

Θα προσδιορίσουμε και εδώ τους πυρήνες της σειράς Volterra τριών όρων και θα παρουσιάσουμε αριθμητικά αποτελέσματα για διάφορα ζεύγη των συντελεστών  $k_1, k_3$ .

Η ύπαρξη του όρου  $h_0$  στην έκφραση της σειράς Volterra, Εξ. (4), συνδέεται με τις αρχικές τιμές του προβλήματος. Αν επί παραδείγματι έχουμε μια πρωτοτάξια διαφορική εξίσωση με μηδενική αρχική τιμή, τότε ο όρος  $h_0$  ισούται με μηδέν. Η ύπαρξη μη μηδενικών αρχικών τιμών, δημιουργεί παθολογίες στην εφαρμογή της μεθόδου, αλλά όπως θα δούμε αίρονται με κατάλληλους χειρισμούς.

Για αυτό το λόγο, στην συνέχεια θα εφαρμόσουμε την μέθοδο στο πρόβλημα (P) με **μη μηδενική αρχική τιμή** και τέλος θα περάσουμε στην εφαρμογή της μεθόδου στο πρόβλημα **δεύτερης τάξης με τετραγωνική μη γραμμικότητα και μη μηδενικές αρχικές τιμές**:

$$(P'') \begin{cases} \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + k_1 y(t) + k_2 y^2(t) = x(t), \\ y(t_0) = y_0, \\ y'(t_0) = y_1. \end{cases}$$

## 5.2 Παράδειγμα I. ΔΕ πρώτης τάξεως με τετραγωνική μη-γραμμικότητα και μηδενική αρχική τιμή

Θα μελετήσουμε τώρα το πρόβλημα (P):

$$(P) \begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} + k_1 y(t) + k_2 y^2(t) = x(t), \\ y(t_0) = 0, \end{cases}$$

όπου  $x \in C(\mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R})$  συνάρτηση διέγερσης και το χρονικό διάστημα  $\mathcal{T} := [t_0, T]$ . Θα χρησιμοποιούμε την σειρά Volterra τριών όρων ως προσεγγιστική αναπαράσταση της λύσης  $y(\bullet)$ . Με τον συμβολισμό που εισαγάγαμε στο Εδάφιο 2.6 για τα πολώνυμα Volterra, η σειρά Volterra γράφεται:

$$y(t) = \sum_{n=1}^3 \int_{[t_0, t]^{(n)}} h_n(\boldsymbol{\tau}^{(n)}) \prod_{k=1}^n x(t - \tau_k) d\boldsymbol{\tau}^{(n)},$$

ή, με τον αναλυτικό συμβολισμό:

$$y(t) = \int_{t_0}^t h_1(\tau)x(t-\tau)d\tau + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t h_2(\tau_1, \tau_2)x(t-\tau_1)x(t-\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3)x(t-\tau_1)x(t-\tau_2)x(t-\tau_3)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3. \quad (1)$$

Το πρώτο βήμα για την εφαρμογή της μεθόδου είναι η έκφραση των όρων της διαφορικής εξίσωσης μέσω της προσεγγιστικής αναπαράστασης ανωτέρω. Αρχίζουμε, λοιπόν, εκφράζοντας την παράγωγο  $y'$  και το γινόμενο  $y^2$  μέσω της σειράς Volterra, Εξ. (1).

### Αναλυτικός υπολογισμός της πρώτης παραγώγου σειράς Volterra

Η παράγωγος στην εξίσωση μας εκφράζεται ως:

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \underbrace{\int_{t_0}^t h_1(\tau)x(t-\tau)d\tau}_{(I_1)} + \\ &+ \frac{d}{dt} \underbrace{\int_{t_0}^t \int_{t_0}^t h_2(\tau_1, \tau_2)x(t-\tau_1)x(t-\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}_{(I_2)} + \\ &+ \frac{d}{dt} \underbrace{\int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3)x(t-\tau_1)x(t-\tau_2)x(t-\tau_3)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3}_{(I_3)}. \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε τις παραγώγους των ολοκληρωμάτων χρησιμοποιώντας τον κανόνα Leibniz<sup>(2)</sup>.

Για τον όρο  $I_1$  έχουμε:

$$\frac{d}{dt} I_1 \equiv \frac{d}{dt} \left( \int_{t_0}^t h_1(t-\tau)x(\tau)d\tau \right) = h_1(0)x(t) + \int_{t_0}^t \frac{\partial h_1(t-\tau)}{\partial t} x(\tau)d\tau. \quad (2)$$

Παρατηρώντας ότι:

$$\frac{\partial h_1(t-\tau)}{\partial t} = -\frac{\partial h_1(t-\tau)}{\partial \tau},$$

εκτελούμε την ακόλουθη αλλαγή μεταβλητής στο ολοκλήρωμα της Εξ. (2):

$$\left( \begin{array}{l} u = t - \tau, du = -d\tau \\ (\tau = 0) \rightarrow (u = t) \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{l} - \int_{t_0}^t \frac{\partial h_1(t-\tau)}{\partial \tau} x(\tau)d\tau = \int_t^{t_0} \frac{\partial h_1(u)}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \tau} x(t-u)du \\ = - \int_t^{t_0} \frac{\partial h_1(u)}{\partial u} x(t-u)du \\ = \int_{t_0}^t \frac{\partial h_1(\tau)}{\partial \tau} x(t-\tau)d\tau \end{array} \right)$$

<sup>(2)</sup> **Θεώρημα 1 [Leibniz's rule]:** Έστω  $\mathcal{T} := [t_0, T]$  και  $a, b \in C^1(I, \mathbb{R})$ , φραγμένες συναρτήσεις. Θεωρούμε

$S := \{ \tau : a(t) < \tau < b(t), t_0 \leq t \leq T \}$  και την συνάρτηση  $f(\bullet, \bullet) \in C^1(S \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R})$ . Τότε ισχύει ότι:

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(t, \tau) d\tau = f(t, b(t)) \frac{db(t)}{dt} - f(t, a(t)) \frac{da(t)}{dt} + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f(t, \tau)}{\partial t} d\tau. \quad \blacksquare$$

Άρα, η παράγωγος του πρώτου όρου της σειράς  $I_1$ , είναι :

$$\frac{d}{dt} I_1 = h_1(0)x(t) + \int_{t_0}^t \frac{\partial h_1(\tau)}{\partial \tau} x(t-\tau) d\tau. \quad (3)$$

Εργαζόμαστε αντίστοιχα για τον υπολογισμό της παραγώγου του δεύτερου όρου  $I_2$  :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I_2 &\equiv \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t \underbrace{\int_{t_0}^t h_2(t-\tau_1, t-\tau_2) x(\tau_1) x(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2}_{g(t, \tau_1, \tau_2)} \\ \frac{d}{dt} I_2 &= g(t, \tau_1, \tau_2) \Big|_{\tau_2=t} + \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\int_{t_0}^t h_2(t-\tau_1, t-\tau_2) x(\tau_1) x(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2}_{g_1(t, \tau_1, \tau_2)} \\ &= g(t, \tau_1, \tau_2) \Big|_{\tau_2=t} + \int_{t_0}^t \left( g_1(t, \tau_1, \tau_2) \Big|_{\tau_1=t} + \int_{t_0}^t \frac{\partial h_2(t-\tau_1, t-\tau_2)}{\partial t} x(\tau_1) x(\tau_2) d\tau_1 \right) d\tau_2 \\ &= g(t, \tau_1, \tau_2) \Big|_{\tau_2=t} + \int_{t_0}^t g_1(t, \tau_1, \tau_2) \Big|_{\tau_1=t} d\tau_2 + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \frac{\partial h_2(t-\tau_1, t-\tau_2)}{\partial t} x(\tau_1) x(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned}$$

Τελικά έχουμε για την παράγωγο του δεύτερου όρου:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I_2 &= \int_{t_0}^t h_2(t-\tau_1, 0) x(\tau_1) x(t) d\tau_1 + \int_{t_0}^t h_2(0, t-\tau_2) x(t) x(\tau_2) d\tau_2 + \\ &\quad + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \frac{\partial h_2(t-\tau_1, t-\tau_2)}{\partial t} x(\tau_1) x(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\ &= x(t) \int_{t_0}^t h_2(t-\tau_1, 0) x(\tau_1) d\tau_1 + x(t) \int_{t_0}^t h_2(0, t-\tau_2) x(\tau_2) d\tau_2 + \\ &\quad + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \frac{\partial h_2(t-\tau_1, t-\tau_2)}{\partial t} x(\tau_1) x(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2. \quad (4) \end{aligned}$$

Παρατηρώντας και εδώ ότι:

$$\frac{\partial h_2(t-\tau_1, t-\tau_2)}{\partial t} = - \left( \frac{\partial}{\partial \tau_1} + \frac{\partial}{\partial \tau_2} \right) h_2(t-\tau_1, t-\tau_2),$$

εκτελούμε την ακόλουθη αλλαγή μεταβλητών στο τελευταίο ολοκλήρωμα του δεξιά μέλους της Εξ. (4):

$$\left( \begin{array}{l} u = t - \tau_1, \quad du = -d\tau_1 \\ u = t - \tau_2, \quad dv = -d\tau_2 \\ (\tau_1 = 0) \rightarrow (u = t) \\ (\tau_2 = 0) \rightarrow (v = t) \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{l} - \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \frac{\partial h_2(t-\tau_1, t-\tau_2)}{\partial \tau} x(\tau_1) x(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = \\ = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \left( \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \tau_1} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \tau_2} \right) h_2(u, v) x(t-u) x(t-v) \left| \frac{\partial(\tau_1, \tau_2)}{\partial(u, v)} \right| du dv \\ = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t - \left( \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \right) h_2(u, v) x(t-u) x(t-v) du dv \\ = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \left( \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \right) h_2(u, v) x(t-u) x(t-v) du dv \end{array} \right)$$



Καταλήγουμε στην έκφραση της παραγώγου του δεύτερου όρου  $I_2$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I_2 = & x(t) \int_{t_0}^t h_2(\tau_1, 0) x(t - \tau_1) d\tau_1 + x(t) \int_{t_0}^t h_2(0, \tau_2) x(t - \tau_2) d\tau_2 \\ & + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \left( \frac{\partial}{\partial \tau_1} + \frac{\partial}{\partial \tau_2} \right) h_2(\tau_1, \tau_2) x(t - \tau_1) x(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Εργαζόμενοι με τον ίδιο τρόπο, βρίσκουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα για την παράγωγο του όρου  $I_3$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (I_3) = & x(t) \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t h_3(\tau_1, \tau_2, 0) x(t - \tau_1) x(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \\ & + x(t) \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t h_3(\tau_1, 0, \tau_3) x(t - \tau_1) x(t - \tau_3) d\tau_1 d\tau_3 + \\ & + x(t) \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t h_3(0, \tau_2, \tau_3) x(t - \tau_2) x(t - \tau_3) d\tau_2 d\tau_3 + \\ & + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \left( \frac{\partial}{\partial \tau_1} + \frac{\partial}{\partial \tau_2} + \frac{\partial}{\partial \tau_3} \right) h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \times \\ & \times x(t - \tau_1) x(t - \tau_2) x(t - \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3. \end{aligned} \quad (6)$$

Για τον συμβολισμό του αθροίσματος των μερικών παραγώγων που εφαρμόζεται στην συνάρτηση πυρήνα  $h_n$ , υιοθετούμε την εξής γραφή:  $\vec{I}_n = (1, \dots, 1)$   
 $n$ -times

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial \tau_1} + \frac{\partial}{\partial \tau_2} + \dots + \frac{\partial}{\partial \tau_n} \right) h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) = \\ = \nabla h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \cdot \vec{I}_n \equiv \nabla_{\tau} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \end{aligned} \quad (7)$$

### Γενική μορφή της πρώτης παραγώγου του $N$ -οστού όρου της σειράς Volterra.

Αν και δεν θα ασχοληθούμε σ' αυτήν την εργασία με σειρές Volterra τάξεως μεγαλύτερης του 3, θα κατασκευάσουμε την γενική έκφραση για τον προσδιορισμό της παραγώγου του  $N$ -οστού όρου της σειράς Volterra.

**Λήμμα 1:** Η παράγωγος ως προς την μεταβλητή του χρόνου  $t$ , του  $N$ -οστού όρου της αναπαράστασης σε σειρά Volterra:

$$I_N = \int_{[t_0, t]^{(N)}} h_n(t - \tau^{(N)}) \prod_{k=1}^N x(\tau_k) d\tau^{(N)},$$

λαμβάνει την μορφή:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (I_N) = & x(t) \sum_{n=1}^N \int_{[t_0, t]^{(N-1)}} h_N(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}, 0, \tau_{n+1}, \dots, \tau_N) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^N (x(t - \tau_k) d\tau_k) + \\ & + \int_{[t_0, t]^{(N)}} \nabla_{\tau} [h_N(\tau_1, \dots, \tau_N)] \prod_{k=1}^N (x(t - \tau_k) d\tau_k). \blacksquare \end{aligned}$$

Απόδειξη: Η απόδειξη απαιτεί κατάλληλο συμβολισμό και έπεται μέσω απλής παρατήρησης. Συμβολίζουμε:

$$g_{N,N-n}(t, \tau_1, \dots, \tau_N) = \int_{[t_0, t]^{(N-n)}} h_N(t - \boldsymbol{\tau}^{(N)}) \prod_{k=1}^N x(\tau_k) \prod_{\ell=1}^{N-n} d\tau_\ell. \quad (\alpha)$$

Τότε έχουμε για  $n = 0$ :

$$I_N := g_{N,N}(t, \tau_1, \dots, \tau_N) = \int_{[t_0, t]^{(N)}} h_N(t - \boldsymbol{\tau}^{(N)}) \prod_{k=1}^N x(\tau_k) \prod_{\ell=1}^N d\tau_\ell,$$

και για  $n = N$ :

$$g_{N,0}(t, \tau_1, \dots, \tau_N) = h_N(t - \boldsymbol{\tau}^{(N)}) \prod_{k=1}^N x(\tau_k),$$

Από τον κανόνα της αλυσιδωτής παραγώγισης, έχουμε ότι:

$$\frac{d}{dt}(I_N) = g_{N,N-1}(t, \tau_1, \dots, \tau_N)|_{\tau_N=t} + \underbrace{\int_{[t_0, t]^{(N)}} \frac{d}{dt}(g_{N,N-1}(t, \tau_1, \dots, \tau_N)) d\tau_N}_{R_1} \quad (\beta)$$

και

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(g_{N,N-1}(t, \tau_1, \dots, \tau_N)) &= g_{N,N-2}(t, \tau_1, \dots, \tau_N)|_{\tau_{N-1}=t} + \\ &+ \int_{[t_0, t]^{(N-1)}} \frac{d}{dt}(g_{N,N-2}(t, \tau_1, \dots, \tau_N)) d\tau_{N-1}. \end{aligned} \quad (\gamma)$$

Συνεπώς, αντικαθιστώντας την Εξ. (γ), στην θέση του όρου  $R_1$  της Εξ. (β), λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} R_1 &= \int_{[t_0, t]} \left( g_{N,N-2}(t, \tau_1, \dots, \tau_N)|_{\tau_{N-1}=t} + \int_{[t_0, t]} \frac{d}{dt} g_{N,N-2}(t, \tau_1, \dots, \tau_N) d\tau_{N-1} \right) d\tau_N \\ &= \int_{[t_0, t]} g_{N,N-2}(t, \tau_1, \dots, \tau_N)|_{\tau_{N-1}=t} d\tau_N + \int_{[t_0, t]} \int_{[t_0, t]} \frac{d}{dt} g_{N,N-2}(t, \tau_1, \dots, \tau_N) d\tau_{N-1} d\tau_N, \end{aligned}$$

και η Εξ. (β) γράφεται:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(I_N) &= \underbrace{g_{N,N-1}(t, \tau_1, \dots, \tau_N)|_{\tau_N=t} + \int_{[t_0, t]} g_{N,N-2}(t, \tau_1, \dots, \tau_N)|_{\tau_{N-1}=t} d\tau_N}_{S_1} + \\ &+ \underbrace{\int_{[t_0, t]} \int_{[t_0, t]} \frac{d}{dt} g_{N,N-2}(t, \tau_1, \dots, \tau_N) d\tau_{N-1} d\tau_N}_{R_2}. \end{aligned} \quad (\delta)$$

<sup>(3)</sup> Παραδείγματος χάρη, για  $N = 3$  και  $n = 1$ , έχουμε:

$$g_{3,2}(t, \tau_1, \dots, \tau_N) = \int_{[t_0, t]^{(2)}} h_N(t - \tau_1, t - \tau_2, t - \tau_3) x(\tau_1) x(\tau_2) x(\tau_3) d\tau_1 d\tau_2.$$

**Παρατήρηση 1:** Στην ανωτέρω Εξ. (δ) παρατηρούμε με την βοήθεια της Εξ. (α), ότι:

$$\begin{aligned} \int_{[t_0, t]} g_{N, N-2}(t, \tau_1, \dots, \tau_N) |_{\tau_{N-1}=t} d\tau_N &= \\ &= \int_{[t_0, t]} \left( \int_{[t_0, t]}^{(N-2)} h_N(t - \boldsymbol{\tau}^{(N)}) \prod_{k=1}^N x(\tau_k) \prod_{\ell=1}^{N-2} d\tau_\ell \right) \Big|_{\tau_{N-1}=t} d\tau_N = \end{aligned}$$

[Συμπεριλαμβάνουμε στην εσωτερική ολοκλήρωση το εξωτερικό ολοκλήρωμα, συνεπώς έχουμε  $N - 1$  ολοκληρώσεις και εφόσον εξαιρείται η μεταβλητή  $\tau_{N-1}$  από την ολοκλήρωση μπορούμε να γράψουμε:]

$$\begin{aligned} &= \left( \int_{[t_0, t]}^{(N-1)} h_N(t - \boldsymbol{\tau}^{(N)}) \prod_{k=1}^N x(\tau_k) \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq N-1}}^N d\tau_\ell \right) \Big|_{\tau_{N-1}=t} = \\ &= \left( x(t) \int_{[t_0, t]}^{(N-1)} h_N(t - \tau_1, \dots, t - \tau_{N-2}, 0, t - \tau_N) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq N-1}}^N x(\tau_k) \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq N-1}}^N d\tau_\ell \right) = \\ &= \left( x(t) \int_{[t_0, t]}^{(N-1)} h_N(t - \tau_1, \dots, t - \tau_{N-2}, 0, t - \tau_N) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq N-1}}^N x(\tau_k) d\tau_k \right). \end{aligned}$$

Αντιστοίχως εργαζόμαστε για τον όρο  $g_{N, N-1}(t, \tau_1, \dots, \tau_N) |_{\tau_N=t}$ , και έχουμε:

$$\begin{aligned} g_{N, N-1}(t, \tau_1, \dots, \tau_N) |_{\tau_N=t} &= \left( \int_{[t_0, t]}^{(N-1)} h_N(t - \boldsymbol{\tau}^{(N)}) \prod_{k=1}^N x(\tau_k) \prod_{\ell=1}^{N-1} d\tau_\ell \right) \Big|_{\tau_N=t} = \\ &= \left( x(t) \int_{[t_0, t]}^{(N-1)} h_N(t - \tau_1, \dots, t - \tau_{N-1}, 0) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq N}}^N x(\tau_k) \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq N}}^N d\tau_\ell \right), \end{aligned}$$

συνεπώς λαμβάνουμε ότι:

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \sum_{j=0}^1 x(t) \int_{[t_0, t]}^{(N-1)} h_N(t - \tau_1, \dots, t - \tau_{N-j-1}, 0, t - \tau_{N-j+1}, \dots, t - \tau_N) \times \\ &\quad \times \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq N-j}}^N x(\tau_k) \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq N-j}}^N d\tau_\ell. \quad (\varepsilon) \end{aligned}$$

Βάση της Παρατήρησης 1 ανωτέρω, η Εξ. (δ) με την βοήθεια της Εξ. (ε), γράφεται:

$$\frac{d}{dt}(I_N) \equiv \Sigma_1 + R_2.$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(I_N) &= \sum_{j=0}^1 x(t) \left( \int_{[t_0, t]^{(N-1)}} h_N(t - \tau_1, \dots, t - \tau_{N-j-1}, 0, t - \tau_{N-j+1}, \dots, t - \tau_N) \times \right. \\ &\quad \left. \times \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq N-j}}^N x(\tau_k) \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq N-j}}^N d\tau_\ell \right) + \underbrace{\int_{[t_0, t]} \int_{[t_0, t]} \frac{d}{dt} g_{N, N-2}(t, \tau_1, \dots, \tau_N) d\tau_{N-1} d\tau_N}_{R_2}. \end{aligned} \quad (\sigma\tau)$$

Αντιστοίχως υπολογίζουμε για την παράγωγο εντός του όρου  $R_2$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} g_{N, N-2}(t, \tau_1, \dots, \tau_N) &= g_{N, N-3}(t, \tau_1, \dots, \tau_N)|_{\tau_{N-1}=t} + \\ &\quad + \int_{[t_0, t]} \frac{d}{dt} g_{N, N-3}(t, \tau_1, \dots, \tau_N) d\tau_{N-2}, \end{aligned}$$

και αντικαθιστούμε στην Εξ. (σ\tau):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(I_N) &= \underbrace{\Sigma_1 + \int_{[t_0, t]^{(2)}} g_{N, N-3}(t, \tau_1, \dots, \tau_N)|_{\tau_{N-2}=t} d\tau_{N-1} d\tau_N}_{\Sigma_2} + \\ &\quad + \underbrace{\int_{[t_0, t]^{(3)}} \frac{d}{dt} g_{N, N-3}(t, \tau_1, \dots, \tau_N) d\tau_{N-2} d\tau_{N-1} d\tau_N}_{R_3} \end{aligned} \quad (\zeta)$$

Παρατηρούμε και εδώ ότι:

$$\begin{aligned} &\int_{[t_0, t]^{(2)}} g_{N, N-3}(t, \tau_1, \dots, \tau_N)|_{\tau_{N-2}=t} d\tau_{N-1} d\tau_N = \\ &= \int_{[t_0, t]^{(2)}} \left( \int_{[t_0, t]^{N-3}} h_N(t - \tau^{(N)}) \prod_{k=1}^N x(\tau_k) \prod_{\ell=1}^{N-3} d\tau_\ell \right) \Big|_{\tau_{N-2}=t} d\tau_N = \\ &= \left( \int_{[t_0, t]^{N-1}} h_N(t - \tau^{(N)}) \prod_{k=1}^N x(\tau_k) \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq N-2}}^N d\tau_\ell \right) \Big|_{\tau_{N-2}=t} = \\ &= \left( x(t) \int_{[t_0, t]^{(N-1)}} h_N(t - \tau_1, \dots, t - \tau_{N-3}, 0, t - \tau_{N-1}, t - \tau_N) \times \right. \\ &\quad \left. \times \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq N-2}}^N x(\tau_k) \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq N-2}}^N d\tau_\ell \right) = \\ &= \left( x(t) \int_{[t_0, t]^{(N-1)}} h_N(t - \tau_1, \dots, t - \tau_{N-3}, 0, t - \tau_{N-1}, t - \tau_N) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq N-2}}^N x(\tau_k) d\tau_k \right). \end{aligned}$$

συνεπώς:

$$\begin{aligned}
\Sigma_1 + \int_{[t_0, t]^{(2)}} g_{N, N-3}(t, \tau_1, \dots, \tau_N) |_{\tau_{N-2}=t} d\tau_{N-1} d\tau_N &= \\
= \sum_{j=0}^2 x(t) \left( \int_{[t_0, t]^{(N-1)}} h_N(t - \tau_1, \dots, t - \tau_{N-j-1}, 0, t - \tau_{N-j+1}, \dots, t - \tau_N) \times \right. & \quad (\eta) \\
&\quad \left. \times \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq N-j}}^N x(\tau_k) \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq N-j}}^N d\tau_\ell \right)
\end{aligned}$$

Με αυτόν τον τρόπο η σχέση για την παράγωγο διαμορφώνεται εκ ' νέου, από τις Εξ. (στ) και (ζ), ως:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(I_N) &\equiv \Sigma_2 + R_3 = \\
= \sum_{j=0}^2 x(t) \left( \int_{[t_0, t]^{(N-1)}} h_N(t - \tau_1, \dots, t - \tau_{N-j-1}, 0, t - \tau_{N-j+1}, \dots, t - \tau_N) \times \right. & \\
&\quad \left. \times \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq N-j}}^N x(\tau_k) \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq N-j}}^N d\tau_\ell \right) + \underbrace{\int_{[t_0, t]} \int_{[t_0, t]} \frac{d}{dt} g_{N, N-2}(t, \tau_1, \dots, \tau_N) d\tau_{N-1} d\tau_N}_{R_2}
\end{aligned}$$

Αυτή η διαδικασία συνεχίζει έως το σημείο όπου η παράγωγος περνά εντός του  $N$ -οστού ολοκληρώματος, δηλαδή μετά από  $N-1$  παραγωγίσεις:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(I_N) &\equiv \Sigma_{N-1} + R_N = \\
= \sum_{j=0}^{N-1} x(t) \left( \int_{[t_0, t]^{(N-1)}} h_N(t - \tau_1, \dots, t - \tau_{N-j-1}, 0, t - \tau_{N-j+1}, \dots, t - \tau_N) \times \right. & \\
&\quad \left. \times \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq N-j}}^N x(\tau_k) \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq N-j}}^N d\tau_\ell \right) + \underbrace{\int_{[t_0, t]^N} \frac{d}{dt} g_{N, 0}(t, \tau_1, \dots, \tau_N) d\tau_1 \dots d\tau_N}_{R_N} & \quad (\theta)
\end{aligned}$$

Τότε έχουμε:

$$\frac{d}{dt} g_{N, 1}(t, \tau_1, \dots, \tau_N) = \int_{[t_0, t]} \frac{dh_N(t - \tau^{(N)})}{dt} \prod_{k=1}^N x(\tau_k) d\tau_1,$$

και εκτελώντας την αλλαγή μεταβλητών  $u_i = t - \tau_i$ ,  $i = 1(1)N$ , στο διαδοχικό ολοκλήρωμα  $R_N$ , λαμβάνουμε με χρήση του συμβολισμού  $\nabla h_N(\tau_1, \dots, \tau_N) \cdot \vec{1}_N \equiv \nabla_\tau h_N(\tau_1, \dots, \tau_N)$ , που ορίσαμε ανωτέρω, σχέση (7):

$$\frac{d}{dt} g_{N,1}(t, \tau_1, \dots, \tau_N) = \int_{[t_0, t]^{(N)}} \nabla_{\tau} [h_n(\tau_1, \dots, \tau_n)] \prod_{k=1}^N (x(t - \tau_k) d\tau_k) \quad (1)$$

Τέλος μεταφέρουμε τα άκρα της άθροισης  $\Sigma_{N-1}$ , του δεξιού μέλους της σχέσης (θ), στο διάστημα 1 έως  $N$ , χρησιμοποιώντας τον βοηθητικό δείκτη  $n = j + 1$ :

$$\Sigma_{N-1} = \sum_{n=1}^N x(t) \left( \int_{[t_0, t]^{(N-1)}} h_n(t - \tau_1, \dots, t - \tau_{n-1}, 0, t - \tau_{n+1}, \dots, t - \tau_N) \times \right. \\ \left. \times \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^N x(\tau_k) \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq n}}^N d\tau_{\ell} \right). \quad (1\alpha)$$

Από την Εξ. (θ) με χρήση των Εξ. (1) και (1α) έχουμε το αποτέλεσμα:

$$\frac{d}{dt} (I_N) = x(t) \sum_{n=1}^N \int_{[t_0, t]^{(N-1)}} h_n(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}, 0, \tau_{n+1}, \dots, \tau_N) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^n (x(t - \tau_k) d\tau_k) + \\ + \int_{[t_0, t]^{(N)}} \nabla_{\tau} [h_n(\tau_1, \dots, \tau_n)] \prod_{k=1}^N (x(t - \tau_k) d\tau_k).$$

Η απόδειξη του Λήμματος 1 ολοκληρώνεται.

Μπορούμε πλέον να χρησιμοποιήσουμε αυτήν την σχέση για να προσδιορίσουμε απευθείας τον όρο της πρώτης παραγώγου του  $N$ -οστού όρου της σειράς Volterra:

$$\int_{[t_0, t]^{(N)}} h_n(t - \tau^{(N)}) \prod_{k=1}^N x(\tau_k) d\tau^{(N)}$$

Σε αυτό το σημείο ανακατασκευάζοντας τον όρο της παραγώγου  $y'$  στην εξίσωση μας, εκφρασμένο μέσω της σειράς Volterra τριών όρων:

$$\frac{dy(t)}{dt} = h_1(0)x(t) + \int_{t_0}^t \frac{\partial h_1(\tau)}{\partial \tau} x(t - \tau) d\tau + x(t) \int_{t_0}^t h_2(\tau, 0) x(t - \tau) d\tau \\ + x(t) \int_{t_0}^t h_2(0, \tau) x(t - \tau) d\tau + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \nabla_{\tau} h_2(\tau_1, \tau_2) x(t - \tau_1) x(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \\ + x(t) \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t h_3(\tau_1, \tau_2, 0) x(t - \tau_1) x(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \\ + x(t) \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t h_3(\tau_1, 0, \tau_3) x(t - \tau_1) x(t - \tau_3) d\tau_1 d\tau_3 + \\ + x(t) \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t h_3(0, \tau_2, \tau_3) x(t - \tau_2) x(t - \tau_3) d\tau_2 d\tau_3 + \\ + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \nabla_{\tau} h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) x(t - \tau_1) x(t - \tau_2) x(t - \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 + \dots \quad (8)$$

### Αναλυτικός υπολογισμός του όρου $y^2(t)$ μέσω της σειράς Volterra

Πρέπει να εκφράσουμε και τον τετραγωνικό όρο  $y^2$ , μέσω της σειράς Volterra, δηλαδή να υπολογίσουμε το γινόμενο:

$$y^2(t) = \left( \underbrace{\int_{t_0}^t h_1(\tau_1) x(t - \tau_1) d\tau_1}_{(1)} + \underbrace{\int_{t_0}^t \int_{t_0}^t h_2(\tau_1, \tau_2) x(t - \tau_1) x(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \dots}_{(2)} \right) \times$$

$$\times \left( \underbrace{\int_{t_0}^t h_1(\sigma_1) x(t - \sigma_1) d\sigma_1}_{(1')} + \underbrace{\int_{t_0}^t \int_{t_0}^t h_2(\sigma_1, \sigma_2) x(t - \sigma_1) x(t - \sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2 + \dots}_{(2')} \right)$$

Θέλουμε να εμφανίσουμε τους όρους έως και τρίτης τάξης. Για αυτό τον λόγο λαμβάνουμε τα γινόμενα ανάμεσα στους όρους (ομογενή πολυώνυμα) όπου το άθροισμα των βαθμών τους ισούται με τρία:

$$y^2(t) = \int_{[t_0, t]^{(2)}} h_1(\tau_1) h_1(\sigma_1) x(t - \tau_1) x(t - \sigma_1) d\tau_1 d\sigma_1 + \quad [(1) \times (1')]$$

$$+ \int_{[t_0, t]^{(3)}} h_1(\tau_1) h_2(\boldsymbol{\sigma}^{(2)}) x(t - \tau_1) \prod_{j=1}^2 x(t - \sigma_j) d\tau_1 d\boldsymbol{\sigma}^{(2)} + \quad [(1) \times (2')]$$

$$+ \int_{[t_0, t]^{(4)}} h_1(\tau_1) h_3(\boldsymbol{\sigma}^{(3)}) x(t - \tau_1) \prod_{j=1}^3 x(t - \sigma_j) d\tau_1 d\boldsymbol{\sigma}^{(3)} + \quad [(1) \times (3')]$$

$$+ \int_{[t_0, t]^{(3)}} h_1(\sigma_1) h_2(\boldsymbol{\tau}^{(2)}) \prod_{j=1}^2 x(t - \tau_j) x(t - \sigma_1) d\boldsymbol{\tau}^{(2)} d\sigma_1 + \quad [(2) \times (1')]$$

$$+ \int_{[t_0, t]^{(4)}} h_2(\boldsymbol{\tau}^{(2)}) h_2(\boldsymbol{\sigma}^{(2)}) \prod_{j=1}^2 x(t - \tau_j) x(t - \sigma_j) d\boldsymbol{\tau}^{(2)} d\boldsymbol{\sigma}^{(2)} + \quad [(2) \times (2')]$$

$$+ \int_{[t_0, t]^{(4)}} h_2(\boldsymbol{\tau}^{(3)}) h_1(\sigma_1) \prod_{j=1}^3 x(t - \tau_j) x(t - \sigma_1) d\boldsymbol{\tau}^{(3)} d\sigma_1 + \dots \quad [(3) \times (1')]$$

Καταλήγουμε στην έκφραση:

$$y^2(t) = \int_{[t_0, t]^2} h_1(\tau_1) h_1(\tau_2) x(t - \tau_1) x(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 +$$

$$+ \int_{[t_0, t]^{(3)}} h_1(\tau_1) h_2(\tau_2, \tau_3) \prod_{j=1}^3 x(t - \tau_j) d\boldsymbol{\tau}^{(3)} +$$

$$+ \int_{[t_0, t]^{(3)}} h_2(\tau_1, \tau_2) h_1(\tau_3) \prod_{j=1}^3 x(t - \tau_j) d\boldsymbol{\tau}^{(3)} +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{[t_0, t]^{(4)}} h_1(\tau_1) h_3(\tau_2, \tau_3, \tau_4) \prod_{j=1}^4 x(t - \tau_j) d\boldsymbol{\tau}^{(4)} + \\
& + \int_{[t_0, t]^{(4)}} h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) h_1(\tau_4) \prod_{j=1}^4 x(t - \tau_j) d\boldsymbol{\tau}^{(4)} + \\
& + \int_{[t_0, t]^{(4)}} h_2(\tau_1, \tau_2) h_2(\tau_3, \tau_4) \prod_{j=1}^4 x(t - \tau_j) d\boldsymbol{\tau}^{(4)} + \dots,
\end{aligned}$$

και κρατούμε τους δεύτερης και τρίτης τάξης:

$$\begin{aligned}
y^2(t) & = \int_{[t_0, t]^2} h_1(\tau_1) h_1(\tau_2) x(t - \tau_1) x(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \\
& + \int_{[t_0, t]^3} h_1(\tau_1) h_2(\tau_2, \tau_3) \prod_{j=1}^3 x(t - \tau_j) d\boldsymbol{\tau}^{(3)} + \\
& + \int_{[t_0, t]^3} h_2(\tau_1, \tau_2) h_1(\tau_3) \prod_{j=1}^3 x(t - \tau_j) d\boldsymbol{\tau}^{(3)}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Πλέον είμαστε σε θέση να γράψουμε την έκφραση της διαφορικής εξίσωσης μέσω της σειράς Volterra τριών όρων.

### 5.3 Προσδιορισμός των πυρήνων Volterra

#### Προσδιορισμός των πυρήνων Volterra για ΔΕ πρώτης τάξεως με τετραγωνική μη-γραμμικότητα και μηδενική αρχική τιμή

Έως αυτό το σημείο έχουμε εκφράσει τους όρους που εμπλέκουν την άγνωστη συνάρτηση της διαφορικής εξίσωσης:

$$\frac{dy(t)}{dt} + k_1 y(t) + k_2 y^2(t) = x(t), \tag{1}$$

μέσω της προσεγγιστικής αναπαράστασης σε σειρά Volterra τριών όρων, Εξ. (1) εδαφίου 5.2. Κατ' αρχάς θα αξιοποιήσουμε τις Εξ. (1), (8) και (9) του εδαφίου 5.2 για να εκφράσουμε (προσεγγιστικά, βεβαίως) το αριστερά μέλος της Εξ. (1) ως σειρά Volterra τρίτης τάξεως πάνω στην συνάρτηση  $x(t)$ . Η έκφραση αυτή (που δεν την γράφουμε για οικονομία χώρου) περιλαμβάνει όρους ομογενείς ως προς  $x(t)$ , βαθμού πρώτου, δεύτερου και τρίτου, τους οποίους συμβολίζουμε με  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$ , αντιστοίχως. Η μορφή αυτών είναι:

$$\Pi_1[x(\cdot)](t) = h_1(0)x(t) + \int_{t_0}^t \frac{dh_1(\tau)}{d\tau} x(t - \tau) d\tau + k_1 \int_{t_0}^t h_1(\tau) x(t - \tau) d\tau,$$



$$\begin{aligned}
\Pi_2[x(\cdot)](t) &= x(t) \int_{t_0}^t h_2(\tau, 0) x(t - \tau) d\tau + x(t) \int_{t_0}^t h_2(0, \tau) x(t - \tau) d\tau + \\
&\quad + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \nabla_{\tau} h_2(\tau_1, \tau_2) x(t - \tau_1) x(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \\
&\quad + k_1 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t h_2(\tau_1, \tau_2) x(t - \tau_1) x(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \\
&\quad + k_2 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t h_1(\tau_1) h_1(\tau_2) x(t - \tau_1) x(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = \\
&= x(t) \int_{t_0}^t \left( h_2(\tau, 0) + h_2(0, \tau) \right) x(t - \tau) d\tau + \\
&\quad + \int_{[t_0, t]^2} \left( \nabla_{\tau} h_2(\tau_1, \tau_2) + k_1 h_2(\tau_1, \tau_2) + k_2 h_1(\tau_1) h_1(\tau_2) \right) \prod_{k=1}^2 x(t - \tau_k) d\boldsymbol{\tau}^{(2)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pi_3[x(\cdot)](t) &= x(t) \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t h_3(\tau_1, \tau_2, 0) x(t - \tau_1) x(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \\
&\quad + x(t) \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t h_3(\tau_1, 0, \tau_3) x(t - \tau_1) x(t - \tau_3) d\tau_1 d\tau_3 + \\
&\quad + x(t) \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t h_3(0, \tau_2, \tau_3) x(t - \tau_2) x(t - \tau_3) d\tau_2 d\tau_3 + \\
&\quad + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \nabla_{\tau} h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) x(t - \tau_1) x(t - \tau_2) x(t - \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 + \\
&\quad + k_1 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) x(t - \tau_1) x(t - \tau_2) x(t - \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 + \\
&\quad + k_2 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t h_1(\tau_1) h_2(\tau_2, \tau_3) x(t - \tau_1) x(t - \tau_2) x(t - \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 + \\
&\quad + k_2 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t h_2(\tau_1, \tau_2) h_1(\tau_3) x(t - \tau_1) x(t - \tau_2) x(t - \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 = \\
&= x(t) \int_{[t_0, t]^2} \left( h_3(\tau_1, \tau_2, 0) + h_3(\tau_1, 0, \tau_2) + h_3(0, \tau_1, \tau_2) \right) \prod_{k=1}^2 x(t - \tau_k) d\boldsymbol{\tau}^{(2)} + \\
&\quad + \int_{[t_0, t]^3} \left( \nabla_{\tau} h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) + k_1 h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) + k_2 (h_1(\tau_1) h_2(\tau_2, \tau_3) + h_2(\tau_1, \tau_2) h_1(\tau_3)) \right) \times \\
&\quad \quad \quad \times \prod_{k=1}^3 x(t - \tau_k) d\boldsymbol{\tau}^{(3)}.
\end{aligned}$$

Κατά αυτόν τον τρόπο η διαφορική εξίσωση (1), παίρνει την μορφή:

$$\Pi_1[x(\cdot)](t) + \Pi_2[x(\cdot)](t) + \Pi_3[x(\cdot)](t) = x(t). \quad (2)$$

Προχωρούμε υποθέτοντας ότι η Εξ. (2) ισχύει ταυτοτικά, για κάθε  $t \in [t_0, T]$  και κάθε  $x(\cdot)$  με πεδίο ορισμού  $[t_0, t]$ . Επί πλέον, λόγω της ομογένειας των όρων  $\Pi_n$ , ισχύει ότι  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$\Pi_n[\lambda x(\cdot)](t) = \lambda^n \Pi_n[x(\cdot)](t).$$

Εισάγοντας τις συναρτήσεις  $\tilde{x}(\cdot) = \lambda x(\cdot)$  στην Εξ. (2), συμπεραίνουμε ότι,  $\forall t \in \mathcal{T}$  και  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ , πρέπει να ισχύει η σχέση:

$$\lambda \Pi_1[x(\cdot)](t) + \lambda^2 \Pi_2[x(\cdot)](t) + \lambda^3 \Pi_3[x(\cdot)](t) = \lambda x(t). \quad (3)$$

Παραγωγίζοντας την Εξ. (3) ως προς  $\lambda$ , έχουμε:

$$\Pi_1[x(\cdot)](t) + 2\lambda \Pi_2[x(\cdot)](t) + 3\lambda^2 \Pi_3[x(\cdot)](t) = x(t). \quad (4)$$

Θέτοντας στην Εξ.(4),  $\lambda = 0$ , έχουμε ότι:

$$\Pi_1[x(\cdot)](t) = x(t),$$

δηλαδή:

$$h_1(0)x(t) + \int_{t_0}^t \frac{\partial h_1(\tau)}{\partial \tau} x(t-\tau) d\tau + k_1 \int_{t_0}^t h_1(\tau) x(t-\tau) d\tau = x(t). \quad (5)$$

Εφόσον η Εξ. (5) ισχύει  $\forall t \in \mathcal{T}$ , θέτοντας  $t = t_0$ , έχουμε:

$$h_1(0)x(t_0) = x(t_0) \implies h_1(0) = 1.$$

Η Εξ.(5), παίρνει πλέον την μορφή:

$$\int_{t_0}^t \frac{\partial h_1(\tau)}{\partial \tau} x(t-\tau) d\tau + k_1 \int_{t_0}^t h_1(\tau) x(t-\tau) d\tau = 0$$

$$\text{ή} \quad \int_{t_0}^t \left( \frac{\partial h_1(\tau)}{\partial \tau} + k_1 h_1(\tau) \right) x(t-\tau) d\tau = 0. \quad (6)$$

Δεδομένου ότι οι συναρτήσεις  $x, h_1$  υποτίθενται συνεχείς, και η Εξ. (6) ισχύει  $\forall x \in C(\mathcal{T})$ , συμπεραίνουμε (με βάση το θεμελιώδες Λήμμα του Λογισμού των Μεταβολών) ότι:

$$\frac{\partial h_1(\tau)}{\partial \tau} + k_1 h_1(\tau) = 0.$$

Προκύπτει, λοιπόν, το ακόλουθο πρόβλημα αρχικών τιμών για τον προσδιορισμό του πυρήνα  $h_1$ :

$$(\Pi_1) \begin{cases} \frac{\partial h_1(\tau)}{\partial \tau} + k_1 h_1(\tau) = 0 \\ h_1(0) = 1 \end{cases}$$

Επιστρέφοντας στην Εξ. (4), κατόπιν των ανωτέρω, βλέπουμε ότι αυτή διαμορφώνεται ως εξής:

$$2\lambda \Pi_2[x(\cdot)](t) + 3\lambda^2 \Pi_3[x(\cdot)](t) = 0. \quad (7)$$

Εργαζόμενοι παρόμοια ως ανωτέρω, συμπεραίνουμε ότι

$$\Pi_2[x(\cdot)](t) = 0 \quad \text{και} \quad \Pi_3[x(\cdot)](t) = 0.$$

Η πρώτη των ανωτέρω γράφεται αναλυτικά στην μορφή:

$$\int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \left( \nabla_{\tau} h_2(\tau_1, \tau_2) + k_1 h_2(\tau_1, \tau_2) + k_2 h_1(\tau_1) h_1(\tau_2) \right) x(t - \tau_1) x(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \\ + x(t) \int_{t_0}^t \left( h_2(\tau, 0) + h_2(0, \tau) \right) x(t - \tau) d\tau = 0 \quad (8)$$

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η ανωτέρω ισότητα υποτίθεται ότι ισχύει ταυτοτικά για κάθε  $t \in [t_0, T]$  και κάθε  $x(\cdot)$  με πεδίο ορισμού  $[t_0, t]$ . Περιοριζόμενοι, κατ' αρχάς σε συνεχείς συναρτήσεις που μηδενίζονται στον άνω όριο του διαστήματος  $[t_0, t]$ , δηλαδή  $x(t) = 0$ , η Εξ. (8) παίρνει την μορφή:

$$\int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \left( \nabla_{\tau} h_2(\tau_1, \tau_2) + k_1 h_2(\tau_1, \tau_2) + k_2 h_1(\tau_1) h_1(\tau_2) \right) x(t - \tau_1) x(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = 0.$$

Λόγω της συνέχειας των συναρτήσεων  $x, h_1, h_2$ , χρησιμοποιώντας το θεμελιώδες Λήμμα του Λογισμού των Μεταβολών για διδιάστατα χωρία, λαμβάνουμε:

$$\nabla_{\tau} h_2(\tau_1, \tau_2) + k_1 h_2(\tau_1, \tau_2) + k_2 h_1(\tau_1) h_1(\tau_2) = 0.$$

Δεδομένης της ανωτέρω εξίσωσης, η Εξ. (8) παίρνει την μορφή

$$x(t) \int_{t_0}^t \left( h_2(\tau, 0) + h_2(0, \tau) \right) x(t - \tau) d\tau = 0.$$

Εφ' όσον και αυτή (υποθέτουμε ότι) ισχύει για κάθε συνάρτηση  $x \in C(T \rightarrow \mathbb{R})$ , τελικώς έχουμε ότι:

$$h_2(\tau, 0) + h_2(0, \tau) = 0.$$

Λαμβάνουμε, με αυτόν τον τρόπο, το ακόλουθο πρόβλημα για τον προσδιορισμό του δεύτερου πυρήνα  $h_2(\tau_1, \tau_2)$ :

$$(\Pi_2) \begin{cases} \nabla_{\tau} h_2(\tau_1, \tau_2) + k_1 h_2(\tau_1, \tau_2) + k_2 h_1(\tau_1) h_1(\tau_2) = 0, \\ h_2(\tau, 0) + h_2(0, \tau) = 0. \end{cases}$$

Ακολουθώντας τους ίδιους συλλογισμούς, από την σχέση  $\Pi_3[x(\cdot)](t) = 0$ , παίρνουμε το ακόλουθο πρόβλημα για τον προσδιορισμό του τρίτου πυρήνα,  $h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ :

$$(\Pi_3) \begin{cases} \nabla_{\tau} h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) + k_1 h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) + k_2 (h_1(\tau_1) h_2(\tau_2, \tau_3) + h_2(\tau_1, \tau_2) h_1(\tau_3)) = 0, \\ h_3(\tau_1, \tau_2, 0) + h_3(\tau_1, 0, \tau_2) + h_3(0, \tau_1, \tau_2) = 0. \end{cases}$$

Τα ανωτέρω αποτελέσματα συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα, όπου φαίνονται τα προβλήματα (εξισώσεις και «αρχικές» συνθήκες) που πρέπει να επιλυθούν για τον προσδιορισμό των ολοκληρωτικών πυρήνων  $h_n(\tau_1, \dots, \tau_n)$ , για  $n = 1, 2, 3$ .

**Πίνακας προβλημάτων για τον προσδιορισμό των πυρήνων  $h_1, h_2, h_3$**

$h_1(0)x(t) = x(t)$	$\rightarrow h_1(0) = 1$	(1)
$\int_{t_0}^t \frac{\partial h_1(\tau)}{\partial \tau} x(t-\tau) d\tau + k_1 \int_{t_0}^t h_1(\tau) x(t-\tau) d\tau = 0$	$\rightarrow h_1'(\tau) + k_1 h_1(\tau) = 0$	(2)
$x(t) \int_{t_0}^t h_2(0, \tau) x(t-\tau) d\tau + x(t) \int_{t_0}^t h_2(\tau, 0) x(t-\tau) d\tau = 0$	$\rightarrow h_2(0, \tau) + h_2(\tau, 0) = 0$	(3)
$\int_{[t_0, t]^{(2)}} \left( \nabla_{\boldsymbol{\tau}} h_2(\tau_1, \tau_2) + k_1 h_2(\tau_1, \tau_2) + k_2 h_1(\tau_1) h_1(\tau_2) \right) \times$ $\times \prod_{k=1}^2 x(t-\tau_k) d\boldsymbol{\tau}^{(2)}$	$\rightarrow \nabla_{\boldsymbol{\tau}} h_2(\tau_1, \tau_2) + k_1 h_2(\tau_1, \tau_2) +$ $+ k_2 h_1(\tau_1) h_1(\tau_2) = 0$	(4)
$x(t) \int_{[t_0, t]^2} \left( h_3(\tau_1, \tau_2, 0) + h_3(\tau_1, 0, \tau_2) + h_3(0, \tau_1, \tau_2) \right) \times$ $\times \prod_{k=1}^2 x(t-\tau_k) d\boldsymbol{\tau}^{(2)}$	$\rightarrow h_3(\tau_1, \tau_2, 0) + h_3(\tau_1, 0, \tau_2) +$ $+ h_3(0, \tau_1, \tau_2) = 0$	(5)
$\int_{[t_0, t]^{(3)}} \left( \nabla_{\boldsymbol{\tau}} h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) + k_1 h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) + \right.$ $\left. + k_2 (h_1(\tau_1) h_2(\tau_2, \tau_3) + h_2(\tau_1, \tau_2) h_1(\tau_3)) \right) \times$ $\times \prod_{k=1}^3 x(t-\tau_k) d\boldsymbol{\tau}^{(3)}$	$\rightarrow \nabla_{\boldsymbol{\tau}} h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) + k_1 h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) +$ $+ 2k_2 h_1(\tau_1) h_2(\tau_1, \tau_2) = 0$	(6)

**Σύνοψη και γενίκευση της διαδικασίας υπολογισμού των πυρήνων Volterra**

Με αυτόν τον τρόπο βλέπουμε ότι για τα συστήματα με συνεχή συνάρτηση διέγερσης, τα οποία μοντελοποιούνται ως μια συνήθης διαφορική εξίσωση της μορφής:

$$\mathbf{N}[y(\bullet)](t) := \mathbf{L}[y(\bullet)](t) + \mathbf{P}[y(\bullet), y'(\bullet), \dots, y^{(N-1)}(\bullet)](t) = x(t),$$

με μηδενική αρχική συνθήκη  $y(t_0) = 0$ , μπορούμε βάση των όσων αναπτύξαμε ανωτέρω να προσδιορίσουμε τους ολοκληρωτικούς πυρήνες της σειράς Volterra αναλυτικά, λύνοντας τα προβλήματα που προκύπτουν από την διαδικασία εξίσωσης των συντελεστών.

Συνοψίζοντας, εκφράζοντας τους όρους της διαφορικής εξίσωσης μέσω της προσεγγιστικής αναπαράστασης της λύσης σε σειρά Volterra:

$$y(t) \approx \sum_{n=1}^N \int_{[t_0, t]^n} h_n(\boldsymbol{\tau}^{(n)}) \prod_{k=1}^n x(t-\tau_k) d\boldsymbol{\tau}^{(n)}.$$

Η εξίσωση μας εκφράζεται ισοδυνάμως στην μορφή:

$$\Pi_1[x(\cdot)](t) + \Pi_2[x(\cdot)](t) + \dots + \Pi_N[x(\cdot)](t) = x(t).$$

όπου  $\Pi_j$ ,  $j = 1(1)N$ , είναι το άθροισμα των  $j$ -ομογενών όρων που προκύπτουν από την έκφραση των όρων της εξίσωσης, μέσω της σειράς Volterra. Ακολουθώντας την διαδικασία όπου περιγράψαμε ανωτέρω, λαμβάνουμε ότι:

$$\Pi_1[x(\cdot)](t) = x(t),$$

$$\Pi_2[x(\cdot)](t) = 0,$$

⋮

$$\Pi_N[x(\cdot)](t) = 0$$

Δηλαδή για να είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης η συνάρτηση  $y$ , εκφρασμένη μέσω της αναπαράστασης μας, αρκεί οι συντελεστές κάθε διαφορετικής ομογενούς έκφρασης της συνάρτησης  $x$  να ισούνται με μηδέν. Γνωρίζοντας το παραπάνω αποτέλεσμα, στην διαδικασία επίλυσης του προβλήματος:

$$\mathbf{P}_{(g)} \begin{cases} \mathbf{L}[y(\cdot)](t) + \mathbf{P}[y(\cdot), y'(\cdot), \dots, y^{(N-1)}(\cdot)](t) = x(t) \\ y(t_0) = 0 \end{cases}$$

μπορούμε να κατασκευάζουμε απευθείας τον ανάλογο του ανωτέρου πίνακα για το πρόβλημα που μελετάται, των εξισώσεων προς επίλυση για τον προσδιορισμό των ολοκληρωτικών πυρήνων  $h_n(\tau_1, \dots, \tau_i)$ , της προσεγγιστικής αναπαράστασης της λύσης μέσω της σειράς Volterra.

#### 5.4. Εύρεση των πυρήνων Volterra της ΔΕ πρώτης τάξεως με τετραγωνική μη γραμμικότητα και μηδενική αρχική συνθήκη

Σε αυτήν την παράγραφο θα επιλύσουμε τα προβλήματα που προκύπτουν για την εύρεση των πυρήνων στην εξίσωση πρώτης τάξης με τετραγωνική μη γραμμικότητα, όπως αυτά προέκυψαν στο προηγούμενο εδάφιο 5.3. Λύνουμε τα προβλήματα:

$$(\Pi_1) \begin{cases} h_1'(\tau) + k_1 h_1(\tau) = 0 \\ h_1(0) = 1 \end{cases}$$

$$(\Pi_2) \begin{cases} \nabla_{\tau} h_2(\tau_1, \tau_2) + k_1 h_2(\tau_1, \tau_2) + k_2 h_1(\tau_1) h_1(\tau_2) = 0 \\ h_2(0, \tau) + h_2(\tau, 0) = 0 \end{cases}$$

$$(\Pi_3) \begin{cases} \nabla_{\tau} h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) + k_1 h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) + k_2 (h_1(\tau_1) h_2(\tau_2, \tau_3) + h_2(\tau_1, \tau_2) h_1(\tau_3)) = 0 \\ h_3(\tau_1, \tau_2, 0) + h_3(\tau_1, 0, \tau_2) + h_3(0, \tau_1, \tau_2) = 0 \end{cases}$$

Η επίλυση του  $(\Pi_1)$  είναι η πιο εύκολη περίπτωση. Έχουμε:

$$\left( h_1(\tau) e^{\int k_1 ds} \right)' = 0 \implies h_1(\tau) = c e^{-\int k_1 ds},$$

και κάνοντας χρήση της αρχικής τιμής:

$$h_1(0) = 1 = ce^0 \implies h_1(\tau) = e^{-k_1\tau}. \quad (1)$$

### Επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων με χρήση πολυδιάστατου μετασχηματισμού Laplace

Στο πρόβλημα  $(\Pi_2)$  έχουμε μια γραμμική, μη ομογενή διαφορική εξίσωση μερικών παραγώγων και παρατηρούμε ότι στο μη ομογενές τμήμα της, περιέχεται η συνάρτηση του ολοκληρωτικού πυρήνα  $h_1$ , όπου μπορεί προηγουμένως να προσδιοριστεί. Αντιστοίχως και στο πρόβλημα  $(\Pi_3)$ , βλέπουμε ότι περιέχονται οι συναρτήσεις των ολοκληρωτικών πυρήνων  $h_1, h_2$ . Σε αυτήν την περίπτωση, η χρήση δισδιάστατου και τρισδιάστατου μετασχηματισμού Laplace αντιστοίχως, διευκολύνει την επίλυση.

Ο μετασχηματισμός Laplace γενικεύεται σε  $N$  διαστάσεις και η μελέτη του αποτελεί ένα σημαντικό πρόβλημα. Στην συνέχεια θα αναφέρουμε τους βασικούς ορισμούς που απαιτούνται για να χρησιμοποιήσουμε αυτό το εργαλείο αλλά δεν θα επεκταθούμε στο θέμα. Παραπέμπουμε τον ενδιαφερόμενο αναγνώστη στο βιβλίο (Brychkov *et al.*, 1992) καθώς και το βιβλίο (Cohen, 2007). Επίσης πηγή για τον δισδιάστατο μετασχηματισμό Laplace αποτελεί το άρθρο (Debnath, 2016).

Προχωράμε στον γενικό ορισμό του  $N$ -διαστατού μετασχηματισμού Laplace.

**Ορισμός 1 [Μετασχηματισμός Laplace σε  $N$  διαστάσεις]:** Ορίζουμε τον ολοκληρωτικό μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης  $f : \mathbb{R}_+^N \rightarrow \mathbb{R}$  ως:

$$F(s_1, s_2, \dots, s_N) = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty f(\tau_1, \dots, \tau_N) e^{-(s_1\tau_1 + \dots + s_N\tau_N)} d\tau_1 \dots d\tau_N,$$

όπου  $s_1, s_2, \dots, s_N \in \mathbb{C}$  και συμβολίζουμε:

$$\mathcal{L}\{f(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N)\} \equiv F(s_1, s_2, \dots, s_N). \quad \blacksquare$$

**Θεώρημα [Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace σε  $N$  διαστάσεις]:** Έστω  $F = F(s_1, \dots, s_N)$  ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης  $f : \mathbb{R}_+^N \rightarrow \mathbb{R}$ . Υπό ορισμένες τεχνικές προϋποθέσεις [βλ. Yu.A. Brychkov *et al.* Multidimensional Integral Transformations, 1992, σελ. 100] ο μετασχηματισμός αντιστρέφεται, και η σχέση αντιστροφής εκφράζεται μέσω του ολοκληρώματος:

$$f(\tau) = \frac{1}{(2\pi i)^N} \int_{a_N - i\infty}^{a_N + i\infty} \dots \int_{a_1 - i\infty}^{a_1 + i\infty} F(s_1, \dots, s_N) e^{s_1\tau_1 + \dots + s_N\tau_N} ds_1 \dots ds_N,$$

όπου η  $j$ -ολοκλήρωση,  $j = 1(1)N$ , υλοποιείται κατά μήκος της γραμμής  $\text{Re}(s_j) = a_j$ , στο μιγαδικό επίπεδο και το  $a_j$  επιλέγεται κατά τρόπο τέτοιο ώστε να είναι μεγαλύτερο από το πραγματικό μέρος όλων των πόλων της συνάρτησης  $F(c_1, \dots, s_j, \dots, c_N)$ .  $\blacksquare$

Εύκολα διαπιστώνεται ότι ο μετασχηματισμός Laplace αποτελεί **γραμμικό τελεστή**. Παρουσιάζουμε τώρα, δύο χρήσιμες ιδιότητες του μονοδιάστατου μετασχηματισμού Laplace των οποίων θα κάνουμε εκτεταμένη χρήση στην συνέχεια.

**Θεώρημα 1 [2<sup>ο</sup> Θεώρημα Μετατόπισης]:** Ισχύει ότι:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = e^{-at} \mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\}. \quad \blacksquare$$

Απόδειξη:

$$F(s-a) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(s-a)t} dt = e^{at} \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = e^{at} \mathcal{L}\{f(t)\},$$

συνεπώς:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at} \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{f(t)\}\} = e^{at} \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}.$$

**Θεώρημα 2 [2<sup>ο</sup> Θεώρημα Μετατόπισης]:** Έστω  $s > a \geq 0$ ,  $s, a \in \mathbb{C}$  και  $c > 0$ . Τότε αν υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace  $\mathcal{L}\{f(t)\}$  της συνάρτησης  $f$ , ισχύει ότι:

$$\mathcal{L}\{H(t-c)f(t-c)\} = e^{-ct} \mathcal{L}\{f(t)\}, \quad s > c,$$

όπου  $H$ , η συνάρτηση Heaviside οριζόμενη ως:

$$H_c(t) := H(t-c) := \begin{cases} 0, & t < c \\ 1, & t \geq c \end{cases}$$

Αντίστροφα ισχύει ότι εάν  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ , τότε:

$$H(t-c)f(t-c) = \mathcal{L}^{-1}\{e^{-ct}F(s)\}. \quad \blacksquare$$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{H(t-c)f(t-c)\} &= \int_0^{\infty} H(t-c)f(t-c)e^{-st} dt = \\ &= \int_c^{\infty} f(t-c)e^{-st} dt = \\ &= \int_c^{\infty} f(u)e^{-s(u+c)} du = e^{-sc} \mathcal{L}\{f(u)\} \end{aligned}$$

Η απόδειξη του αντιστρόφου είναι προφανής.

**Επίλυση του προβλήματος ( $\Pi_2$ ) με χρήση δισδιάστατου μετασχηματισμού Laplace**

Εφαρμόζουμε μετασχηματισμό Laplace στην διαφορική εξίσωση του ( $\Pi_2$ ):

$$\mathcal{L}\{\nabla_{\tau} h_2(\tau_1, \tau_2) + k_1 h_2(\tau_1, \tau_2) + k_2 h_1(\tau_1)h_1(\tau_2)\} = 0.$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της γραμμικότητας του μετασχηματισμού Laplace:

$$\mathcal{L}\{\nabla_{\tau} h_2(\tau_1, \tau_2)\} + k_1 \mathcal{L}\{h_2(\tau_1, \tau_2)\} + k_2 \mathcal{L}\{h_1(\tau_1)\} \mathcal{L}\{h_1(\tau_2)\} = 0. \quad (2)$$

Υπολογίζουμε τον μετασχηματισμό Laplace κάθε όρου της Εξ.(1). Αρχικά για τον όρο  $\nabla_{\tau} h_2(\tau_1, \tau_2)$ , έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\nabla_{\tau} h_2(\tau_1, \tau_2)\} &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left( \frac{\partial}{\partial \tau_1} + \frac{\partial}{\partial \tau_2} \right) h_2(\tau_1, \tau_2) e^{-s_1 \tau_1 - s_2 \tau_2} d\tau_1 d\tau_2 = \\ &= \underbrace{\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\partial h_2(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_1} e^{-s_1 \tau_1 - s_2 \tau_2} d\tau_1 d\tau_2}_{\mathcal{I}_1} + \underbrace{\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\partial h_2(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_2} e^{-s_1 \tau_1 - s_2 \tau_2} d\tau_1 d\tau_2}_{\mathcal{I}_2} \end{aligned}$$

Με την βοήθεια της παραγώγου, γράφουμε τις ολοκληρωτέες συναρτήσεις των ολοκληρωμάτων,  $I_1, I_2$  ως:

$$\frac{\partial h_2(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_j} e^{-s_1 \tau_1 - s_2 \tau_2} = \frac{\partial}{\partial \tau_j} \left( h_2(\tau_1, \tau_2) e^{-s_1 \tau_1 - s_2 \tau_2} \right) - h_2(\tau_1, \tau_2) \frac{\partial e^{-s_1 \tau_1 - s_2 \tau_2}}{\partial \tau_j}.$$

Τα ολοκληρώματα  $I_1, I_2$ , λαμβάνουν την μορφή:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\infty [h_2(\tau_1, \tau_2) e^{-s_1 \tau_1 - s_2 \tau_2}]_{\tau_1=0}^{\tau_1=\infty} d\tau_2 - \int_0^\infty \int_0^\infty h_2(\tau_1, \tau_2) \frac{\partial e^{-s_1 \tau_1 - s_2 \tau_2}}{\partial \tau_1} d\tau_1 d\tau_2 \\ &= \int_0^\infty \lim_{\tau_1 \rightarrow \infty} \left( h_2(\tau_1, \tau_2) e^{-s_1 \tau_1 - s_2 \tau_2} \right) - h_2(0, \tau_2) e^{-s_2 \tau_2} d\tau_2 + \\ &\quad + s_1 \int_0^\infty \int_0^\infty h_2(\tau_1, \tau_2) e^{-s_1 \tau_1 - s_2 \tau_2} d\tau_1 d\tau_2 \\ I_2 &= \int_0^\infty [h_2(\tau_1, \tau_2) e^{-s_1 \tau_1 - s_2 \tau_2}]_{\tau_2=0}^{\tau_2=\infty} d\tau_1 - \int_0^\infty \int_0^\infty h_2(\tau_1, \tau_2) \frac{\partial e^{-s_1 \tau_1 - s_2 \tau_2}}{\partial \tau_2} d\tau_1 d\tau_2 = \\ &= \int_0^\infty \lim_{\tau_2 \rightarrow \infty} \left( h_2(\tau_1, \tau_2) e^{-s_1 \tau_1 - s_2 \tau_2} \right) - h_2(\tau_1, 0) e^{-s_1 \tau_1} d\tau_1 + \\ &\quad + s_2 \int_0^\infty \int_0^\infty h_2(\tau_1, \tau_2) e^{-s_1 \tau_1 - s_2 \tau_2} d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε ότι ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης  $\nabla_\tau h_2(\tau_1, \tau_2)$  είναι:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\nabla_\tau h_2(\tau_1, \tau_2)\} &= (s_1 + s_2) \int_0^\infty \int_0^\infty h_2(\tau_1, \tau_2) e^{-s_1 \tau_1 - s_2 \tau_2} d\tau_1 d\tau_2 - \\ &\quad - \left( \int_0^\infty h_2(\tau, 0) e^{-s_1 \tau} d\tau + \int_0^\infty h_2(0, \tau) e^{-s_2 \tau} d\tau \right) \end{aligned}$$

Χρησιμοποιούμε τώρα την συνοριακή συνθήκη του προβλήματος  $\Pi_2$  και την υπόθεση ότι οι συναρτήσεις  $h_n$  είναι συμμετρικές (σε αντίθετη περίπτωση, μπορούν πάντα να συμμετρικοποιηθούν, βλ. εδάφιο 2.1), έχουμε:

$$h_2(0, \tau) + h_2(\tau, 0) = 0,$$

και

$$h(\tau_1, \tau_2) = h(\tau_2, \tau_1).$$

Συμπεραίνουμε τότε ότι:

$$h_2(\tau_1, \tau_2) = h_2(\tau_2, \tau_1).$$

Λαμβάνουμε λοιπόν από τα ανωτέρω ότι:

$$\int_0^\infty h_2(\tau, 0) e^{-s_1 \tau} d\tau + \int_0^\infty h_2(0, \tau) e^{-s_2 \tau} d\tau = 2\mathcal{L}\{\mathbf{0}\} = 0.$$

Συνεπώς ο μετασχηματισμός του πρώτου όρου της Εξ.(1) είναι:

$$\mathcal{L}\{\nabla h_2(\tau_1, \tau_2)\} = (s_1 + s_2) \mathcal{L}\{h_2(\tau_1, \tau_2)\} \quad (3)$$

Έχοντας επιλύσει το πρόβλημα ( $\Pi_1$ ), έχουμε την αναλυτική έκφραση της συνάρτησης  $h_1$  και μπορούμε να υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Laplace αυτής:



$$\mathcal{L}\{h_1(\tau_1)\} = \int_0^\infty e^{-k_1\tau_1} e^{-s_1\tau_1} d\tau_1 = \int_0^\infty e^{-(s_1+k_1)\tau_1} d\tau_1 = \frac{1}{(s_1+k_1)}. \quad (4)$$

Προφανώς:

$$\mathcal{L}\{h_1(\tau_1)\} = \left(\frac{1}{s_1+k_1}\right), \quad \mathcal{L}\{h_1(\tau_2)\} = \frac{1}{s_2+k_1}.$$

Επιστρέφοντας στην Εξ.(1), και με την βοήθεια των Εξ. (3) και (4), γράφουμε:

$$\begin{aligned} (s_1+s_2)\mathcal{L}\{h_2(\tau_1,\tau_2)\} + k_1\mathcal{L}\{h_2(\tau_1,\tau_2)\} + k_2\left(\frac{1}{s_1+k_1}\right)\left(\frac{1}{s_2+k_1}\right) &= 0 \implies \\ \mathcal{L}\{h_2(\tau_1,\tau_2)\} \equiv F(s_1,s_2) &= -k_2\left(\frac{1}{s_1+s_2+k_1}\right)\left(\frac{1}{s_1+k_1}\right)\left(\frac{1}{s_2+k_1}\right) \end{aligned} \quad (5)$$

Σε αυτό το σημείο, για την εύρεση του δεύτερου πυρήνα, πρέπει να αντιστρέψουμε τον μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης  $h_2$ :

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s_1,s_2)\} = h_2(\tau_1,\tau_2).$$

### Αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace και εξαγωγή του πυρήνα $h_2$

Από τον ορισμό του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} h_2(\tau_1,\tau_2) &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(s_1,s_2) e^{s_1\tau_1} e^{s_2\tau_2} ds_1 ds_2 = \\ &= -k_2 \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \left(\frac{1}{s_1+s_2+k_1}\right) \left(\frac{1}{s_1+k_1}\right) \left(\frac{1}{s_2+k_1}\right) e^{s_1\tau_1} e^{s_2\tau_2} ds_1 ds_2. \end{aligned} \quad (6)$$

Μπορούμε να αντιστρέψουμε πρώτα το εσωτερικό ολοκλήρωμα θεωρώντας την μεταβλητή  $s_2$  ως σταθερά, έχουμε:

$$\begin{aligned} h_2(\tau_1,\tau_2) &= -k_2 \frac{1}{(2\pi i)} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \left(\frac{1}{s_2+k_1}\right) e^{s_2\tau_2} \times \\ &\quad \times \frac{1}{(2\pi i)} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{s_1+k_1}\right) \left(\frac{1}{s_1+s_2+k_1}\right)}_{F(s_1)} e^{s_1\tau_1} ds_1 ds_2. \end{aligned} \quad (7)$$

Έχουμε:

$$f(\tau_1) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s_1)\} = \frac{1}{(2\pi i)} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \left(\frac{1}{s_1-(-k_1)}\right) \left(\frac{1}{s_1-(-s_2-k_1)}\right) e^{s_1\tau_1} ds_1.$$

Συμβουλευόμενοι τους πίνακες αντιστροφής του μετασχηματισμού Laplace από οποιοδήποτε εγχειρίδιο, γνωρίζουμε ότι:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s_1 - a)(s_1 - b)}\right\} = \frac{e^{a\tau} - e^{b\tau}}{a - b}, \quad (8)$$

συνεπώς για την συνάρτηση  $f$ , έχουμε ότι:

$$f(\tau_1) = \frac{e^{-k_1 \tau_1} - e^{-(s_2 + k_1) \tau_1}}{s_2}.$$

Πλέον, η Εξ. (7) διαμορφώνεται ως εξής:

$$\begin{aligned} h_2(\tau_1, \tau_2) &= -k_2 \frac{1}{(2\pi i)} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} f(\tau_1) \left(\frac{1}{s_2 + k_1}\right) e^{s_2 \tau_2} ds_2 = \\ &= -k_2 \frac{1}{(2\pi i)} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \left(\frac{e^{-k_1 \tau_1} - e^{-(s_2 + k_1) \tau_1}}{s_2}\right) \left(\frac{1}{s_2 + k_1}\right) e^{s_2 \tau_2} ds_2, \end{aligned}$$

συνεπώς, πρέπει να υπολογίσουμε:

$$h_2(\tau_1, \tau_2) = \underbrace{-\frac{k_2}{(2\pi i)} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \left(\frac{e^{-k_1 \tau_1}}{s_2(s_2 + k_1)}\right) e^{s_2 \tau_2} ds_2}_{R_1} + \underbrace{\frac{k_2}{(2\pi i)} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \left(\frac{e^{-(s_2 + k_1) \tau_1}}{s_2(s_2 + k_1)}\right) e^{s_2 \tau_2} ds_2}_{R_2}.$$

(9)

Για τον όρο  $R_1$ , έχουμε:

$$\begin{aligned} R_1 &= -\frac{k_2}{(2\pi i)} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(\frac{e^{-k_1 \tau_1}}{s_2(s_2 + k_1)}\right) e^{s_2 \tau_2} ds_2 = \\ &= k_2 e^{-k_1 \tau_1} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1 - e^{-k_1 \tau_2}}{k_1}\right\} ds_2 = \\ &= k_2 e^{-k_1 \tau_1} \left(\frac{1 - e^{-k_1 \tau_2}}{k_1}\right). \end{aligned}$$

Λαμβάνουμε:

$$R_1 = -\frac{k_2}{k_1} e^{-k_1 \tau_1} (1 - e^{-k_1 \tau_2}). \quad (10)$$

Ο όρος  $R_2$  υπολογίζεται εύκολα αναλύοντας σε απλά κλάσματα. Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της μετατόπισης, Θεώρημα 2, βλέπουμε ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την συνάρτηση βήματος Heaviside για την αντιστροφή του:

$$\begin{aligned}
R_2 &= \frac{k_2}{(2\pi i)} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left( \frac{e^{-(s_2+k_1)\tau_1}}{s_2(s_2+k_1)} \right) e^{s_2\tau_2} ds_2 = \\
&= k_2 e^{-k_1\tau_1} \frac{1}{(2\pi i)} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{-s_2\tau_1} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1-e^{-k_1\tau_2}}{k_1} \right\} e^{s_2\tau_2} ds_2 = \\
&= k_2 e^{-k_1\tau_1} H_{\tau_1}(\tau_2) \left( \frac{1-e^{-k_1(\tau_2-\tau_1)}}{k_1} \right).
\end{aligned}$$

Τελικά για τον όρο  $R_2$ , λαμβάνουμε:

$$R_2 = \frac{k_2}{k_1} e^{-k_1\tau_1} H_{\tau_1}(\tau_2) (1 - e^{-k_1\tau_2}) \quad (11)$$

Με αυτό τον τρόπο εξάγουμε την αναλυτική έκφραση του δεύτερου πυρήνα  $h_2(\tau_1, \tau_2)$ . Από την Εξ. (9), γνωρίζουμε ότι:

$$h_2(\tau_1, \tau_2) = R_1 + R_2,$$

και από τις Εξ. (10) και (11), καταλήγουμε στην έκφραση:

$$h_2(\tau_1, \tau_2) = -\frac{k_2}{k_1} e^{-k_1\tau_1} (1 - e^{-k_1\tau_2}) + \frac{k_2}{k_1} e^{-k_1\tau_1} H_{\tau_1}(\tau_2) (1 - e^{-k_1(\tau_2-\tau_1)}). \quad (12)$$

### Επίλυση του προβλήματος ( $\Pi_3$ ) με χρήση μετασχηματισμού Laplace

Υπενθυμίζουμε τις εξισώσεις που προκύπτουν για τον υπολογισμό του τρίτου πυρήνα:

$$(\Pi_3) \begin{cases} \nabla_{\tau} h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) + k_1 h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) + k_2 (h_1(\tau_1)h_2(\tau_2, \tau_3) + h_2(\tau_1, \tau_2)h_1(\tau_3)) = 0 \\ h_3(\tau_1, \tau_2, 0) + h_3(\tau_1, 0, \tau_2) + h_3(0, \tau_1, \tau_2) = 0 \end{cases}$$

Εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμού Laplace στην διαφορική εξίσωση του συστήματος ( $\Pi_3$ ), έχουμε:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\nabla_{\tau} h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3)\} + k_1 \mathcal{L}\{h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3)\} + \\
+ k_2 \left( \mathcal{L}\{h_1(\tau_1)h_2(\tau_2, \tau_3)\} + \mathcal{L}\{h_2(\tau_1, \tau_2)h_1(\tau_3)\} \right) = 0
\end{aligned}$$

Κατά αναλογία με την διαδικασία που ακολουθήσαμε στον δεύτερο πυρήνα, θα έχουμε:

$$\mathcal{L}\{\nabla_{\tau} h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3)\} = (s_1 + s_2 + s_3) \mathcal{L}\{h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3)\},$$

συνεπώς η ανωτέρω σχέση εξίσωση γράφεται:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3)\} = k_2 \left( \frac{1}{s_1 + s_2 + s_3 + k_1} \right) \mathcal{L}\{h_1(\tau_1)\} \mathcal{L}\{h_2(\tau_2, \tau_3)\} + \\
+ k_2 \left( \frac{1}{s_1 + s_2 + s_3 + k_1} \right) \mathcal{L}\{h_2(\tau_1, \tau_2)\} \mathcal{L}\{h_1(\tau_3)\}.
\end{aligned}$$

Γνωρίζουμε όμως, από τις Εξ. (4) και (5), τους μετασχηματισμούς των συναρτήσεων  $h_1, h_2$ . Γράφουμε λοιπόν, τον μετασχηματισμό Laplace του τρίτου πυρήνα:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3)\} = k_2^2 & \left[ \left( \frac{1}{s_1 + k_1} \right) \left( \frac{1}{s_2 + k_1} \right) \left( \frac{1}{s_3 + k_1} \right) \times \right. \\ & \times \left( \frac{1}{s_2 + s_3 + k_1} \right) \left( \frac{1}{s_1 + s_2 + s_3 + k_1} \right) + \\ & + \left( \frac{1}{s_1 + k_1} \right) \left( \frac{1}{s_2 + k_1} \right) \left( \frac{1}{s_3 + k_1} \right) \times \\ & \left. \times \left( \frac{1}{s_1 + s_2 + k_1} \right) \left( \frac{1}{s_1 + s_2 + s_3 + k_1} \right) \right] \end{aligned} \quad (13)$$

Για την εύρεση του τρίτου πυρήνα απαιτείται αντιστροφή του ανωτέρου μετασχηματισμού, δηλαδή οι ακόλουθοι υπολογισμοί:

$$\begin{aligned} h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = -k_2^2 \frac{1}{(2\pi i)^3} & \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \left( \frac{1}{s_1 + k_1} \right) \left( \frac{1}{s_2 + k_1} \right) \left( \frac{1}{s_3 + k_1} \right) \times \\ & \times \left( \frac{1}{s_2 + s_3 + k_1} \right) \left( \frac{1}{s_1 + s_2 + s_3 + k_1} \right) e^{s_1\tau_1 + s_2\tau_2 + s_3\tau_3} ds_1 ds_2 ds_3 + \\ & + k_2^2 \frac{1}{(2\pi i)^3} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \left( \frac{1}{s_1 + k_1} \right) \left( \frac{1}{s_2 + k_1} \right) \left( \frac{1}{s_3 + k_1} \right) \times \\ & \times \left( \frac{1}{s_1 + s_2 + k_1} \right) \left( \frac{1}{s_1 + s_2 + s_3 + k_1} \right) e^{s_1\tau_1 + s_2\tau_2 + s_3\tau_3} ds_1 ds_2 ds_3. \end{aligned} \quad (14)$$

Προς εξοικονόμηση χώρου, θα γράφουμε μόνο στο κάτω άκρο των ολοκληρώσεων της ανωτέρω σχέσης, το αντίστοιχο γράμμα  $a, b, c$ . Θα υπολογίζουμε αναλυτικά εδώ τον πρώτο όρο του δεξιού μέλους την Εξ.(14). Ο δεύτερος υπολογίζεται κατ' αναλογία και θα δώσουμε απευθείας το αποτέλεσμα.

### Αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace και εξαγωγή του πυρήνα $h_3$

Θα αντιστρέψουμε διαδοχικά τις μεταβλητές  $s_1, s_2$  και τέλος  $s_3$ , αναφερόμενοι στον υπολογισμό του τριπλού ολοκληρώματος του πρώτου όρου της ανωτέρω Εξ. (14). Θέτουμε  $y = s_2 + s_3 + k_1$  και έχουμε:

$$\begin{aligned} A := k_2 \frac{1}{(2\pi i)^3} & \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \left( \frac{1}{s_1 + k_1} \right) \left( \frac{1}{s_2 + k_1} \right) \left( \frac{1}{s_3 + k_1} \right) \times \\ & \times \left( \frac{1}{y} \right) \left( \frac{1}{s_1 + y} \right) e^{s_1\tau_1 + s_2\tau_2 + s_3\tau_3} ds_1 ds_2 ds_3 \end{aligned} \quad (15)$$

Κατά την αντιστροφή ως προς την μεταβλητή  $s_1$  χειριζόμαστε την μεταβλητή  $y$  ως σταθερά, εφόσον δεν περιέχει την μεταβλητή  $s_1$ . Υπολογίζουμε:

$$\frac{1}{(2\pi i)} \int_a \left( \frac{1}{s_1 - (-k_1)} \right) \left( \frac{1}{s_1 - (-y)} \right) e^{s_1 \tau_1} ds_1 = \frac{e^{-k_1 \tau_1} - e^{(-y) \tau_1}}{y - k_1}.$$

Έχοντας υλοποιήσει την πρώτη αντιστροφή η Εξ. (15) διαμορφώνεται ως εξής:

$$A = k_2^2 \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_c \int_b \left( \frac{1}{s_2 + k_1} \right) \left( \frac{1}{s_3 + k_1} \right) \times \\ \times \left( \frac{1}{y} \right) \left( \frac{e^{-k_1 \tau_1} - e^{(-y) \tau_1}}{y - k_1} \right) e^{s_2 \tau_2 + s_3 \tau_3} ds_2 ds_3.$$

[Εμφανίζουμε τους όρους που εσωκλείσαμε στην μεταβλητή  $y$ .]

$$= k_2^2 \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_c \int_b \left( \frac{1}{s_2 + k_1} \right) \left( \frac{1}{s_3 + k_1} \right) \times \\ \times \left( \frac{1}{s_2 + s_3 + k_1} \right) \left( \frac{e^{-k_1 \tau_1} - e^{-(s_2 + s_3 + k_1) \tau_1}}{s_2 + s_3} \right) e^{s_2 \tau_2 + s_3 \tau_3} ds_2 ds_3. \quad (16)$$

Η αντιστροφή ως προς την μεταβλητή  $s_2$ , απαιτεί τον υπολογισμό του ολοκληρώματος:

$$\frac{1}{(2\pi i)} \int_b \left( \frac{1}{s_2 + k_1} \right) \left( \frac{1}{s_2 + s_3 + k_1} \right) \left( \frac{e^{-k_1 \tau_1} - e^{-(s_2 + s_3 + k_1) \tau_1}}{s_2 + s_3} \right) e^{s_2 \tau_2} ds_2 = \\ = \frac{1}{(2\pi i)} \int_b \underbrace{\left( \frac{e^{-k_1 \tau_1}}{(s_2 + s_3 + k_1)(s_2 + s_3)(s_2 + k_1)} \right)}_{I_1} e^{s_2 \tau_2} ds_2 - \\ - \frac{1}{(2\pi i)} \int_b \underbrace{\left( \frac{e^{-(s_2 + s_3 + k_1) \tau_1}}{(s_2 + s_3 + k_1)(s_2 + s_3)(s_2 + k_1)} \right)}_{I_2} e^{s_2 \tau_2} ds_2. \quad (15)$$

Ισχύει ότι:

$$\frac{1}{(s_2 + s_3 + k_1)(s_2 + s_3)(s_2 + k_1)} = \\ = \frac{1}{k_1} \left( \frac{1}{s_2 + k_1} \right) \left[ \left( \frac{1}{s_2 + s_3} \right) - \left( \frac{1}{s_2 + s_3 + k_1} \right) \right] = \\ = \frac{1}{k_1} \left( \frac{1}{s_2 + s_3} \right) \left( \frac{1}{s_2 + k_1} \right) - \frac{1}{k_1} \left( \frac{1}{s_2 + k_1} \right) \left( \frac{1}{s_2 + s_3 + k_1} \right).$$

Για τους όρους  $I_1, I_2$ , στην ανωτέρω ταυτότητα (15), υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{k_1} e^{-k_1 \tau_1} \frac{1}{(2\pi i)} \int_b \left( \frac{1}{s_2 + s_3} \right) \left( \frac{1}{s_2 + k_1} \right) - \\
&\quad - \left( \frac{1}{s_2 + k_1} \right) \left( \frac{1}{s_2 + s_3 + k_1} \right) e^{s_2 \tau_2} ds_2 = \\
&= \frac{1}{k_1} e^{-k_1 \tau_1} \frac{1}{(2\pi i)} \int_b \mathcal{L} \left\{ \frac{e^{-s_3 \tau_2} - e^{-k_1 \tau_2}}{k_1 - s_3} \right\} - \\
&\quad - \mathcal{L} \left\{ \frac{e^{-k_1 \tau_2} - e^{-(s_3 + k_1) \tau_2}}{s_3} \right\} e^{s_2 \tau_2} ds_2 = \\
&= \frac{1}{k_1} e^{-k_1 \tau_1} \left( \frac{e^{-s_3 \tau_2} - e^{-k_1 \tau_2}}{k_1 - s_3} \right) - \frac{1}{k_1} e^{-k_1 \tau_1} \left( \frac{e^{-k_1 \tau_2} - e^{-(s_3 + k_1) \tau_2}}{s_3} \right) \\
I_2 &= \frac{1}{k_1} e^{-(s_3 + k_1) \tau_1} \frac{1}{(2\pi i)} \int_b e^{-s_2 \tau_1} \left( \frac{1}{s_2 + s_3} \right) \left( \frac{1}{s_2 + k_1} \right) e^{s_2 \tau_2} ds_2 - \\
&\quad - \int_b e^{-s_2 \tau_1} \left( \frac{1}{s_2 + k_1} \right) \left( \frac{1}{s_2 + s_3 + k_1} \right) e^{s_2 \tau_2} ds_2 = \\
&= \frac{1}{k_1} e^{-(s_3 + k_1) \tau_1} \frac{1}{(2\pi i)} \int_b e^{-s_2 \tau_1} \mathcal{L} \left\{ \frac{e^{-s_3 \tau_2} - e^{-k_1 \tau_2}}{k_1 - s_3} \right\} e^{s_2 \tau_2} ds_2 - \\
&\quad - \frac{1}{k_1} e^{-(s_3 + k_1) \tau_1} \frac{1}{(2\pi i)} \int_b e^{-s_2 \tau_1} \mathcal{L} \left\{ \frac{e^{-k_1 \tau_2} - e^{-(s_3 + k_1) \tau_2}}{s_3} \right\} e^{s_2 \tau_2} ds_2 = \\
&= \frac{1}{k_1} e^{-(s_3 + k_1) \tau_1} H_{\tau_1}(\tau_2) \left( \frac{e^{-s_3(\tau_2 - \tau_1)} - e^{-k_1(\tau_2 - \tau_1)}}{k_1 - s_3} \right) - \\
&\quad - \frac{1}{k_1} e^{-(s_3 + k_1) \tau_1} H_{\tau_1}(\tau_2) \left( \frac{e^{-k_1(\tau_2 - \tau_1)} - e^{-(s_3 + k_1)(\tau_2 - \tau_1)}}{s_3} \right).
\end{aligned}$$

Συνεπώς έχουμε:

$$\begin{aligned}
I_1 - I_2 &= \frac{1}{k_1} e^{-k_1 \tau_1} \left( \frac{e^{-s_3 \tau_2} - e^{-k_1 \tau_2}}{k_1 - s_3} \right) - \frac{1}{k_1} e^{-k_1 \tau_1} \left( \frac{e^{-k_1 \tau_2} - e^{-(s_3 + k_1) \tau_2}}{s_3} \right) - \\
&\quad - \frac{1}{k_1} e^{-(s_3 + k_1) \tau_1} H_{\tau_1}(\tau_2) \left( \frac{e^{-s_3(\tau_2 - \tau_1)} - e^{-k_1(\tau_2 - \tau_1)}}{k_1 - s_3} \right) - \\
&\quad + \frac{1}{k_1} e^{-(s_3 + k_1) \tau_1} H_{\tau_1}(\tau_2) \left( \frac{e^{-k_1(\tau_2 - \tau_1)} - e^{-(s_3 + k_1)(\tau_2 - \tau_1)}}{s_3} \right).
\end{aligned}$$

Ολοκληρώνεται έτσι η αντιστροφή ως προς την μεταβλητή  $s_2$  και επιστρέφοντας στην Εξ.(16), θα εκτελέσουμε την τελευταία αντιστροφή ως προς την μεταβλητή  $s_3$  :

$$\begin{aligned}
A &= k_2^2 \frac{1}{(2\pi i)} \int_c (I_1 - I_2) \left( \frac{1}{s_3 + k_1} \right) e^{s_3 \tau_3} ds_3 = \\
&= -\frac{2k_2^2}{k_1} \left[ \underbrace{\frac{1}{(2\pi i)} \int_c e^{-k_1 \tau_1} \left( \frac{e^{-s_3 \tau_2} - e^{-k_1 \tau_2}}{k_1 - s_3} \right) \left( \frac{1}{s_3 + k_1} \right) e^{s_3 \tau_3} ds_3}_{\Gamma} - \right. \\
&\quad \left. - \underbrace{\frac{1}{(2\pi i)} \int_c e^{-k_1 \tau_1} \left( \frac{e^{-k_1 \tau_2} - e^{-(s_3+k_1)\tau_2}}{s_3} \right) \left( \frac{1}{s_3 + k_1} \right) e^{s_3 \tau_3} ds_3}_{\Delta} - \right. \\
&\quad \left. - \underbrace{\frac{1}{(2\pi i)} \int_c e^{-(s_3+k_1)\tau_1} H_{\tau_1}(\tau_2) \left( \frac{e^{-s_3(\tau_2-\tau_1)} - e^{-k_1(\tau_2-\tau_1)}}{k_1 - s_3} \right) \left( \frac{1}{s_3 + k_1} \right) e^{s_3 \tau_3} ds_3}_{E} + \right. \\
&\quad \left. + \underbrace{\frac{1}{(2\pi i)} \int_c e^{-(s_3+k_1)\tau_1} H_{\tau_1}(\tau_2) \left( \frac{e^{-k_1(\tau_2-\tau_1)} - e^{-(s_3+k_1)(\tau_2-\tau_1)}}{s_3} \right) \left( \frac{1}{s_3 + k_1} \right) e^{s_3 \tau_3} ds_3}_{Z} \right]
\end{aligned}$$

Ο υπολογισμός των όρων  $A, B, \Gamma, \Delta$  ακολουθεί:

$$\begin{aligned}
\Gamma &= e^{-k_1 \tau_1} e^{-k_1 \tau_2} \frac{1}{(2\pi i)} \int_c \mathcal{L} \left\{ \frac{e^{k_1 \tau_3} - e^{-k_1 \tau_3}}{2k_1} \right\} e^{s_3 \tau_3} ds_3 + \\
&\quad + e^{-k_1 \tau_1} \frac{1}{(2\pi i)} \int_c e^{-s_3 \tau_2} \mathcal{L} \left\{ \frac{e^{k_1 \tau_3} - e^{-k_1 \tau_3}}{2k_1} \right\} e^{s_3 \tau_3} ds_3 = \\
&= e^{-k_1(\tau_1+\tau_2)} \left( \frac{e^{k_1 \tau_3} - e^{-k_1 \tau_3}}{2k_1} \right) + e^{-k_1 \tau_1} H_{\tau_2}(\tau_3) \left( \frac{e^{k_1(\tau_3-\tau_2)} - e^{-k_1(\tau_3-\tau_2)}}{2k_1} \right) \\
\Delta &= e^{-k_1 \tau_1} e^{-k_1 \tau_2} \frac{1}{(2\pi i)} \int_c \mathcal{L} \left\{ \frac{1 - e^{-k_1 \tau_3}}{k_1} \right\} e^{s_3 \tau_3} ds_3 - \\
&\quad - e^{-k_1 \tau_1} e^{-k_1 \tau_2} \frac{1}{(2\pi i)} \int_c \left( e^{-s_3 \tau_2} \mathcal{L} \left\{ \frac{1 - e^{-k_1 \tau_3}}{k_1} \right\} \right) e^{s_3 \tau_3} ds_3 = \\
&= e^{-k_1(\tau_1+\tau_2)} \left( \frac{1 - e^{-k_1 \tau_3}}{k_1} \right) - e^{-k_1(\tau_1+\tau_2)} H_{\tau_2}(\tau_3) \left( \frac{1 - e^{-k_1(\tau_3-\tau_2)}}{k_1} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E &= e^{-k_1 \tau_1} H_{\tau_1}(\tau_2) \frac{1}{(2\pi i)} \int_c e^{-\tau_1 s_3} e^{-(\tau_2 - \tau_1) s_3} \mathcal{L} \left\{ \frac{e^{k_1 \tau_3} - e^{-k_1 \tau_3}}{2k_1} \right\} e^{s_3 \tau_3} ds_3 - \\
&- e^{-k_1 \tau_2} H_{\tau_1}(\tau_2) \frac{1}{(2\pi i)} \int_c e^{-\tau_1 s_3} \mathcal{L} \left\{ \frac{e^{k_1 \tau_3} - e^{-k_1 \tau_3}}{2k_1} \right\} e^{s_3 \tau_3} ds_3 = \\
&= e^{-k_1 \tau_1} H_{\tau_1}(\tau_2) H_{\tau_2}(\tau_3) \left( \frac{e^{k_1(\tau_3 - \tau_2)} - e^{-k_1(\tau_3 - \tau_2)}}{2k_1} \right) - \\
&\quad - e^{-k_1 \tau_2} H_{\tau_1}(\tau_2) H_{\tau_1}(\tau_3) \left( \frac{e^{k_1(\tau_3 - \tau_2)} - e^{-k_1(\tau_3 - \tau_2)}}{2k_1} \right) \\
&= \left( \frac{e^{k_1(\tau_3 - \tau_2)} - e^{-k_1(\tau_3 - \tau_2)}}{2k_1} \right) \left( e^{-k_1 \tau_1} H_{\tau_1}(\tau_2) H_{\tau_2}(\tau_3) - e^{-k_1 \tau_2} H_{\tau_1}(\tau_2) H_{\tau_1}(\tau_3) \right) \\
Z &= e^{-k_1 \tau_2} H_{\tau_1}(\tau_2) \frac{1}{(2\pi i)} \int_c e^{-s_3 \tau_1} \mathcal{L} \left\{ \frac{1 - e^{-k_1 \tau_3}}{k_1} \right\} e^{s_3 \tau_3} ds_3 - \\
&\quad - e^{-k_1 \tau_2} H_{\tau_1}(\tau_2) \frac{1}{(2\pi i)} \int_c e^{-s_3 \tau_1} e^{-s_3(\tau_2 - \tau_1)} \mathcal{L} \left\{ \frac{1 - e^{-k_1 \tau_3}}{k_1} \right\} e^{s_3 \tau_3} ds_3 \\
&= e^{-k_1 \tau_2} H_{\tau_1}(\tau_2) H_{\tau_1}(\tau_3) \left( \frac{1 - e^{-k_1(\tau_3 - \tau_2)}}{k_1} \right) - \\
&\quad - e^{-k_1 \tau_2} H_{\tau_1}(\tau_2) H_{\tau_2}(\tau_3) \left( \frac{1 - e^{-k_1(\tau_3 - \tau_2)}}{k_1} \right) = \\
&= \left( \frac{1 - e^{-k_1(\tau_3 - \tau_2)}}{k_1} \right) H_{\tau_1}(\tau_2) e^{-k_1 \tau_2} \left( H_{\tau_1}(\tau_3) - H_{\tau_2}(\tau_3) \right)
\end{aligned}$$

Εφόσον  $A = (k_2^2 / k_1) (\Gamma - \Delta - E + Z)$  , καταλήγουμε στην αναλυτική έκφραση:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{k_2^2}{k_1} \left[ e^{-k_1(\tau_1 + \tau_2)} \left( \frac{e^{k_1 \tau_3} - e^{-k_1 \tau_3}}{2k_1} \right) + e^{-k_1 \tau_1} H_{\tau_2}(\tau_3) \left( \frac{e^{k_1(\tau_3 - \tau_2)} - e^{-k_1(\tau_3 - \tau_2)}}{2k_1} \right) - \right. \\
&- e^{-k_1(\tau_1 + \tau_2)} \left( \frac{1 - e^{-k_1 \tau_3}}{k_1} \right) + e^{-k_1(\tau_1 + \tau_2)} H_{\tau_2}(\tau_3) \left( \frac{1 - e^{-k_1(\tau_3 - \tau_2)}}{k_1} \right) - \\
&- \left. \left( \frac{e^{k_1(\tau_3 - \tau_2)} - e^{-k_1(\tau_3 - \tau_2)}}{2k_1} \right) \left( e^{-k_1 \tau_1} H_{\tau_1}(\tau_2) H_{\tau_2}(\tau_3) - e^{-k_1 \tau_2} H_{\tau_1}(\tau_2) H_{\tau_1}(\tau_3) \right) + \right. \\
&- \left. \left( \frac{1 - e^{-k_1(\tau_3 - \tau_2)}}{k_1} \right) H_{\tau_1}(\tau_2) e^{-k_1 \tau_2} \left( H_{\tau_1}(\tau_3) - H_{\tau_2}(\tau_3) \right) \right].
\end{aligned}$$

(16)



Σε αυτό το σημείο ολοκληρώνεται η αντιστροφή του πρώτου όρου A, της Εξ. (14). Για να λάβουμε την έκφραση του τρίτου πυρήνα  $h_3$ , πρέπει να αντιστραφεί και ο δεύτερος όρος της Εξ. (14):

$$\mathbf{B} := k_2^2 \frac{1}{(2\pi i)^3} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \left( \frac{1}{s_1 + k_1} \right) \left( \frac{1}{s_2 + k_1} \right) \left( \frac{1}{s_3 + k_1} \right) \times \\ \times \left( \frac{1}{s_1 + s_2 + k_1} \right) \left( \frac{1}{s_1 + s_2 + s_3 + k_1} \right) e^{s_1 \tau_1 + s_2 \tau_2 + s_3 \tau_3} ds_1 ds_2 ds_3.$$

Με μεθοδολογικά όμοιο τρόπο με τα ανωτέρω, καταλήγουμε στην αναλυτική έκφραση του δεύτερου όρου της Εξ. (14):

$$\mathbf{B} = \frac{k_2}{k_1^2} \left[ e^{-k_1 \tau_1} (e^{-k_1 \tau_2} - 1)(e^{-k_1 \tau_3} - 1) - \right. \\ \left. - e^{-k_1 \tau_1} (e^{-k_1 (\tau_2 - \tau_1)} - 1)(e^{-k_1 \tau_3} - 1) H_{\tau_1}(\tau_2) \right] - \\ - \frac{k_2}{2k_1^2} \left[ e^{-k_1 (\tau_1 - \tau_2)} (e^{+k_1 \tau_3} + e^{-k_1 \tau_3} - 2) - \right. \\ \left. - e^{-k_1 \tau_1} (e^{+k_1 (\tau_3 - \tau_2)} + e^{-k_1 (\tau_3 - \tau_2)} - 2) H_{\tau_2}(\tau_3) - \right. \\ \left. - e^{-k_1 \tau_2} (e^{+k_1 (\tau_3 - \tau_1)} + e^{-k_1 (\tau_3 - \tau_1)} - 2) H_{\tau_1}(\tau_2) H_{\tau_1}(\tau_3) + \right. \\ \left. + e^{-k_1 \tau_2} (e^{+k_1 (\tau_3 - \tau_2)} + e^{-k_1 (\tau_3 - \tau_2)} - 2) H_{\tau_1}(\tau_2) H_{\tau_2}(\tau_3) \right] \quad (17)$$

Καταλήγουμε λοιπόν από τις Εξ. (16) και (17) στην αναλυτική έκφραση του τρίτου πυρήνα Volterra  $h_3$ , του προβλήματος (P),  $h_3 = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ .

### 5.5. Αριθμητικά αποτελέσματα του Παραδείγματος I

Σε αυτό το εδάφιο θα παρουσιάσουμε αποτελέσματα του αριθμητικού υπολογισμού της προσεγγιστικής λύσης στη μορφή σειράς Volterra τριών όρων, του προβλήματος:

$$(P) \begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} + k_1 y(t) + k_2 y^2(t) = x(t), \\ y(t_0) = 0, \end{cases}$$

για διαφορετικά ζεύγη των σταθερών  $k_1, k_2$ . Επαναλαμβάνουμε εδώ την έκφραση της σειράς Volterra που χρησησιμοποιούμε:

$$y_V(t) \approx \sum_{n=1}^3 y_n(t) \equiv \int_{t_0}^t h_1(\tau_1) x(t - \tau_1) d\tau_1 + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t h_2(\tau_1, \tau_2) x(t - \tau_1) x(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \\ + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) x(t - \tau_1) x(t - \tau_2) x(t - \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \quad (1)$$

Στα εδάφια 5.2 και 5.3, περιγράψαμε την μέθοδο με την οποία χρησιμοποιώντας την ανωτέρω προσεγγιστική αναπαράσταση, η επίλυση ανάγεται στον προσδιορισμό των πυρήνων Volterra  $h_1, h_2, h_3$ , μέσω της επίλυσης γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων. Στο εδάφιο 5.4, επιλύσαμε τα προβλήματα μερικών διαφορικών εξισώσεων που προκύπτουν για το πρόβλημα (P) και λάβαμε τις αναλυτικές εκφράσεις των συναρτήσεων  $h_1, h_2, h_3$ , βλέπε Εξ. (1), (12) και (16) αντιστοίχως.

Ακόμα θα επιλύσουμε το πρόβλημα (P) αριθμητικά χρησιμοποιώντας το υπολογιστικό περιβάλλον του προγράμματος MATLAB και θα κάνουμε συγκρίσεις με τα αποτελέσματα του αριθμητικού υπολογισμού της προσεγγιστικής λύσης σε σειρά Volterra, Εξ.(1).

Για να προχωρήσουμε, οφείλουμε να καθορίσουμε ποια είναι η συνάρτηση διέγερσης  $x$ , του προβλήματος. Στα αποτελέσματα που παρουσιάζουμε εδώ, επιλέγουμε περιοδικές συναρτήσεις της γενικής μορφής:

$$x(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \theta_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \theta_2), \quad t \in [t_0, T]. \quad (2)$$

### **Αριθμητική επίλυση του προβλήματος (P) με την μέθοδο Runge-Kutta**

Επιλύουμε αριθμητικά την διαφορική εξίσωση χρησιμοποιώντας την μέθοδο των Runge και Kutta. Συγκεκριμένα επιλύουμε με την ενσωματωμένη συνάρτηση στο MATLAB, ode23, η οποία υλοποιεί την επίλυση με την μέθοδο των Runge και Kutta. Συγκεκριμένα ο κώδικας λύνει συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, εμπλέκοντας δύο μονοβηματικές μεθόδους Runge-Kutta (αριθμητικά σχήματα), μια δεύτερης και μια τρίτης τάξης, με αυτόματη επιλογή βήματος. Ο ενδιαφερόμενος και μη εξοικειωμένος αναγνώστης μπορεί να αναζητήσει πληροφορίες στο βιβλίο των Γ.Δ Ακρίβης και Β.Α Δουγαλής (Αριθμητικές Μέθοδοι για Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις, 2006)

### **Αναλυτικός υπολογισμός της προσεγγιστικής λύσης σε σειρά Volterra**

Βλέπουμε από την έκφραση της προσεγγιστικής λύσης σε σειρά Volterra, Εξ. (1), ότι για να διεξάγουμε υπολογισμούς, απαιτείται ο υπολογισμός πολλαπλών ολοκληρωμάτων, πράγμα εφικτό αλλά ιδιαίτερα χρονοβόρο.

Η δυνατότητα αναλυτικού υπολογισμού των ολοκληρωμάτων, εξαρτάται τόσο από την μορφή των συναρτήσεων  $h_1, h_2, h_3$  αλλά και από την μορφή της συνάρτησης διέγερσης  $x$ . Όταν αυτές αποτελούν πολυωνυμικές, τριγωνομετρικές, εκθετικές ή ακόμα και γινόμενα ή γραμμικούς συνδυασμούς αυτών, τότε η αναλυτική ολοκλήρωση είναι εφικτή αν και επίπονη. Σε άλλη περίπτωση μπορεί να ακολουθηθεί ο αριθμητικός υπολογισμός των ολοκληρωμάτων.

Παρόλα αυτά ακόμα και όταν ο αναλυτικός υπολογισμός των ολοκληρωμάτων είναι εφικτός, η υλοποίηση αυτών δίνει μια έκφραση της συνάρτησης  $y$  με την οποία, να μεν μπορούν να δοθούν άμεσα τιμές και να διεξαχθούν υπολογισμοί, αλλά αυτή αφορά το πρόβλημα μόνο για την συνάρτηση διέγερσης  $x$  με την οποία υλοποιήθηκαν οι ολοκληρώσεις. Συνεπώς όταν υπάρχει αυτή η δυνατότητα προσδίδει θετικό πρόσημο στη μελέτη ενός συγκεκριμένου προβλήματος αναφορικά με την συνάρτηση διέγερσης αλλά στην περίπτωση όπου επιθυμούμε να διεξάγουμε δοκιμές για διαφορετικές συναρτήσεις διέγερσης, προφανώς η διαδικασία πρέπει να επαναλαμβάνεται για κάθε μια εξ αυτών ξεχωριστά.

Στο σημείο αυτό αναδεικνύεται από μια σκοπιά η χρησιμότητα της μεθόδου επίλυσης που ακολουθούμε, καθώς αν και απαιτούνται οι πολλαπλές ολοκληρώσεις, δίδει μια γενική μορφή της λύσης ως προς την διέγερση  $x$ . Έχοντας τις αναλυτικές εκφράσεις των πυρήνων Volterra,  $h_1, h_2, \dots, h_n$  μπορούμε να εισάγουμε οποιαδήποτε δεκτή συνάρτηση διέγερσης (συνεχή ή τμηματικά συνεχή με τιμή μηδέν στο σημείο  $t_0$ ), και να διεξάγουμε υπολογισμούς.

### **Αριθμητικός υπολογισμός της προσεγγιστικής λύσης σε σειρά Volterra**

Για να υλοποιήσουμε τον αριθμητικό υπολογισμό της προσεγγιστικής λύσης σε σειρά Volterra, Εξ.(1), εκτελούμε τις ολοκληρώσεις αριθμητικά. Η πολλαπλές αριθμητικές ολοκληρώσεις αποτελούν χρονοβόρα διαδικασία και ειδικά όταν οι ολοκληρωτέες συναρτήσεις δεν είναι καλώς συμπεριφερόμενες, με την έννοια του ρυθμού μεταβολής και της λειότητας. Τότε για να έχουμε σύγκλιση του ολοκληρώματος απαιτείται η χρήση προσαρμοστικών αλγορίθμων ολοκλήρωσης (Adaptive Quadrature) οι οποίοι αυξάνουν τον χρόνο περάτωσης ακόμη περισσότερο.

Για την εκτέλεση των ολοκληρώσεων χρησιμοποιούμε τους ενσωματωμένους αλγορίθμους στο περιβάλλον του MATLAB, integral, integral2 και integral3, για την απλή, διπλή και τριπλή ολοκλήρωση στους όρους  $y_1, y_2, y_3$  της Εξ. (1) αντιστοίχως. Αντιμετωπίζουμε το πρόβλημα του χρόνου περάτωσης των αριθμητικών ολοκληρώσεων που αναφέραμε ανωτέρω κυρίως στο τριπλό ολοκλήρωμα για τον υπολογισμό του όρου  $y_3$  στην Εξ. (1). Για αυτό τον λόγο, με σκοπό να υπερβούμε αυτό το εμπόδιο προβαίνουμε στις ακόλουθες ενέργειες.

Πρώτων στο πρόβλημα που μελετούμε από τις Εξ.(1), (12) και (16), του εδαφίου 5.4, οι οποίες αποτελούν τις αναλυτικές εκφράσεις των συναρτήσεων  $h_1, h_2, h_3$ , του προβλήματος (P), βλέπουμε ότι συγκροτούνται από εκθετικές συναρτήσεις. Επιπλέον η συνάρτηση διέγερσης  $x$  που επιλέξαμε είναι τριγωνομετρική συνάρτηση. Συνεπώς μπορούμε να εκτελέσουμε την ολοκλήρωση ως προς την μεταβλητή  $\tau_3$  του όρου  $y_3$  αναλυτικά και να μεταβούμε στον αριθμητικό υπολογισμό ενός διπλού ολοκληρώματος. Σε αυτό το σημείο ο συμβολικός υπολογισμός των ολοκληρωμάτων διευκολύνει κατά πολύ την κατάσταση και ειδικότερα σε περιπτώσεις όπου διεξάγουμε προσέγγιση με μεγαλύτερης τάξης πυρήνες.

Δεύτερον μας δίνεται η δυνατότητα να καθορίσουμε παραμέτρους κατά την κλήση των συναρτήσεων integral2 και integral3 οι οποίες συμβάλουν σημαντικά στην μείωση του χρόνου ολοκλήρωσης. Μπορούμε να μειώσουμε την ανοχή σφάλματος της μεθόδου  $|q - Q|$ , όπου  $q$  ο αριθμητικός υπολογισμός του ολοκληρώματος και  $Q$  η ακριβής τιμή ολοκλήρωσης, η οποία είναι προκαθορισμένη στην τιμή  $10^{-10}$ . Προφανώς, μεγαλώνοντας την ανοχή σφάλματος στην τιμή  $10^{-6}$  ο αλγόριθμος επιταχύνεται καθώς για να επιτευχθεί αυτό το σφάλμα απαιτούνται λιγότερες επαναλήψεις πύκνωσης της διαμέρισης που λαμβάνεται και κατά επέκταση λιγότερες επαναλήψεις του υπολογισμού.

### **Αποτελέσματα αριθμητικών υπολογισμών**

Παρουσιάζουμε εδώ αποτελέσματα του αριθμητικού υπολογισμού της λύσης με χρήση σειράς Volterra του προβλήματος (P). Θεωρούμε ως ποιο αξιόπιστη προσεγγιστική λύση του προβλήματος την λύση όπου λαμβάνουμε με εφαρμογή της μεθόδου Runge-Kutta και για αυτό τον λόγο υπολογίζουμε το σφάλμα προσέγγισης ως προς αυτήν.

Ο συμβολισμός που θα ακολουθήσουμε για τις προσεγγιστικές λύσης είναι ο εξής. Με  $y_{\text{RK}}$  συμβολίζουμε την αριθμητική λύση της μεθόδου Runge-Kutta ενώ με  $y_{\text{V}}$  την λύση που λαμβάνουμε από τον υπολογισμό της σειράς Volterra. Βάση της Εξ. (1) η προσεγγιστική λύση  $y_{\text{V}}$  μπορεί να υπολογιστεί με έναν, δύο ή και τρεις πυρήνες Volterra  $h_n$ . Με  $y_1$  συμβολίζουμε την λύση του γραμμικού προβλήματος δηλαδή την σειρά Volterra ενός όρου. Με  $y_{1,2}$  συμβολίζουμε την προσεγγιστική λύση της σειράς Volterra δύο όρων, δηλαδή  $y_{1,2} = y_1 + y_2$ , βλ. Εξ.(1). Τέλος με  $y_{1,2,3}$  συμβολίζουμε την προσεγγιστική λύση της σειράς Volterra τριών όρων.

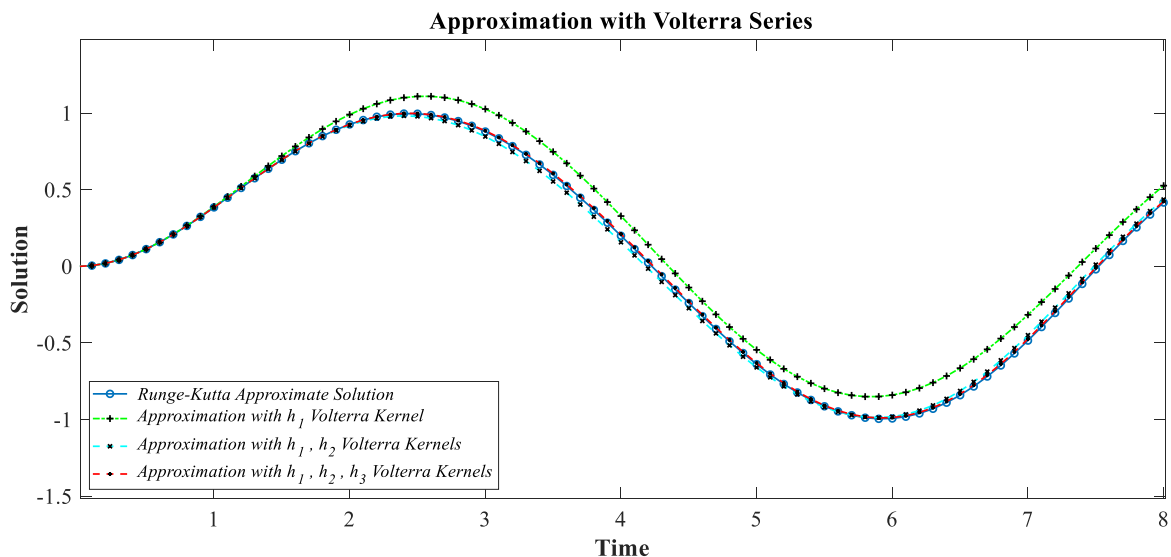
Με τον ανωτέρω συμβολισμό ορίζουμε τα σφάλματα που υπολογίζουμε:

$$\|y_{\text{RK}} - y_{\text{V}}\|_{\infty} = \max(|y_{\text{RK}}(t) - y_{\text{V}}(t)|, t \in [t_0, T]), \quad (3)$$

$$\|y_{\text{RK}} - y_{\text{V}}\|_2 = \left( \sum_{t \in \mathcal{T}} (y_{\text{RK}}(t) - y_{\text{V}}(t))^2 \right)^{1/2}, \quad \mathcal{T} := [t_0, T]. \quad (4)$$

Το σφάλμα που δίδεται από την Εξ. (3) αποτελεί την μέγιστη απόκλιση ανάμεσα στις δύο λύσης, δηλαδή ισούται με την μεγαλύτερη τιμή της διαφοράς που εμφανίζεται ανάμεσα στα αντίστοιχα σημεία των δύο λύσεων. Το σφάλμα που δίδεται από την Εξ. (4), δηλαδή η ευκλείδεια νόρμα του διανύσματος διαφοράς των τιμών των δύο συναρτήσεων, μας δίνει ένα μέτρο για την σύγκλιση σε όλο το διάστημα  $\mathcal{T}$ . Αναφερόμαστε σε αυτό το σφάλμα ως  $\ell_2$ -σφάλμα.

Παραθέτουμε αποτελέσματα για διαφορετικά ζεύγη τιμών των συντελεστών  $k_1, k_2$ , του γραμμικού όρου  $y$  και μη γραμμικού  $y^2$  αντιστοίχως, του προβλήματος (P). Ξεκινάμε επιλέγοντας συνάρτηση διέγερσης  $x(t) = \sin(t)$  και σταθερά  $k_1 = 0.5$ . Ακολουθούν τα αποτελέσματα για διαφορετικές τιμές της σταθεράς  $k_2$  (αναγράφουμε την τιμή στην λεζάντα κάθε γραφήματος).



Σχήμα 1 Αριθμητική λύση του προβλήματος (P) για συντελεστές  $k_1 = 0.5$ ,  $k_2 = 0.15$  (μπλε γραμμή). Αριθμητικός υπολογισμός της προσεγγιστικής λύσης, με σειρά Volterra, Εξ. (1), ενός, δύο και τριών όρων (πράσινη, γαλάζια, κόκκινη γραμμή, αντιστοίχως).

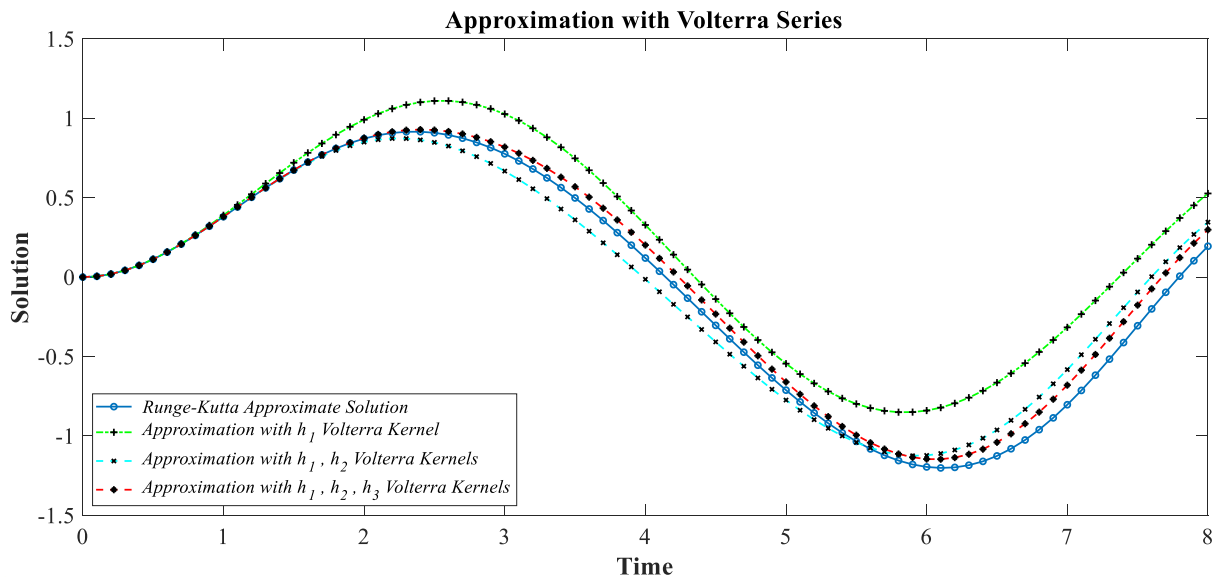
Παρουσιάζουμε τώρα τον πίνακα σφαλμάτων, Εξ. (3) και (4), που αντιστοιχεί στα αποτελέσματα του ανωτέρω Σχήματος 1 .

Πίνακας 1: Απόκλιση της αναπαράστασης σε σειρά Volterra από την αριθμητική λύση της μεθόδου R-K.

Σφάλμα \ $y_V$	$y_1$	$y_{1,2}$	$y_{1,2,3}$
$\ y_{RK} - y_V\ _\infty$	0.177722	0.043899	0.011544
$\ y_{RK} - y_V\ _2$	1.047717	0.223567	0.062951
<b>Συνάρτηση διέγερσης <math>x(t) = \sin(t)</math>. Σταθερές <math>k_1 = 0.5</math>, <math>k_2 = 0.15</math>.</b>			

Βλέπουμε λοιπόν ότι για  $k_2 = 0.15$  έχουμε σύγκλιση στην αριθμητική λύση  $y_{RK}$  καθώς αυξάνεται ο αριθμός των όρων της σειράς Volterra, δηλαδή λαμβάνοντας μεγαλύτερης τάξης πυρήνες Volterra.

Στην συνέχεια αυξάνουμε τον συντελεστή του μη γραμμικού όρου  $y^2$ ,  $k_2 = 0.3$ . Τότε λαμβάνουμε τον ακόλουθο πίνακα σφαλμάτων.



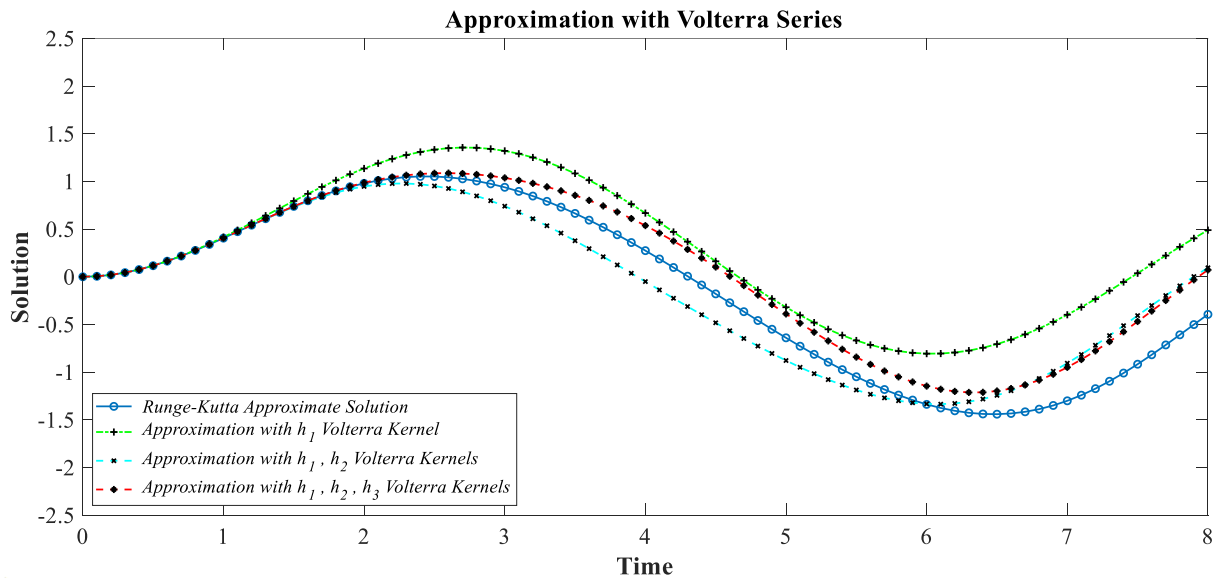
Σχήμα 2: Αριθμητική λύση του προβλήματος (P) για συντελεστές  $k_1 = 0.5$ ,  $k_2 = 0.3$  (μπλε γραμμή). Αριθμητικός υπολογισμός της προσεγγιστικής λύσης, με σειρά Volterra, Εξ. (1), ενός, δύο και τριών όρων (πράσινη, γαλάζια, κόκκινη γραμμή, αντιστοίχως).

Πίνακας 2: Απόκλιση της αναπαράστασης σε σειρά Volterra από την αριθμητική λύση της μεθόδου R-K.

Σφάλμα \ $y_V$	$y_1$	$y_{1,2}$	$y_{1,2,3}$
$\ y_{RK} - y_V\ _\infty$	0.490152	0.226021	0.131739
$\ y_{RK} - y_V\ _2$	2.409283	1.022675	0.598770
<b>Συνάρτηση διέγερσης <math>x(t) = \sin(t)</math>. Σταθερές <math>k_1 = 0.5</math>, <math>k_2 = 0.3</math>.</b>			

Βλέπουμε λοιπόν ότι αυξάνοντας τον συντελεστή  $k_2$  του μη γραμμικού όρου  $y^2$ , το σφάλμα της προσεγγιστικής λύσης μέσω της σειράς Volterra ενός, δύο και τριών όρων αυξάνει μεν αλλά συνεχίζουμε να έχουμε σύγκλιση στη λύση  $y_{RK}$  καθώς προσθέτουμε όρους στην σειρά Volterra.

Τέλος μειώνουμε τον συντελεστή του γραμμικού όρου  $y$  στην τιμή  $k_1 = 0.3$  και διατηρούμε την τιμή της σταθεράς  $k_2 = 0.3$ .



Σχήμα 3: Αριθμητική λύση του προβλήματος (P) για συντελεστές  $k_1 = 0.3$ ,  $k_2 = 0.3$  (μπλε γραμμή). Αριθμητικός υπολογισμός της προσεγγιστικής λύσης, με σειρά Volterra, Εξ. (1), ενός, δύο και τριών όρων (πράσινη, γαλάζια, κόκκινη γραμμή, αντιστοίχως).

Λαμβάνουμε τον ακόλουθο πίνακα σφαλμάτων.

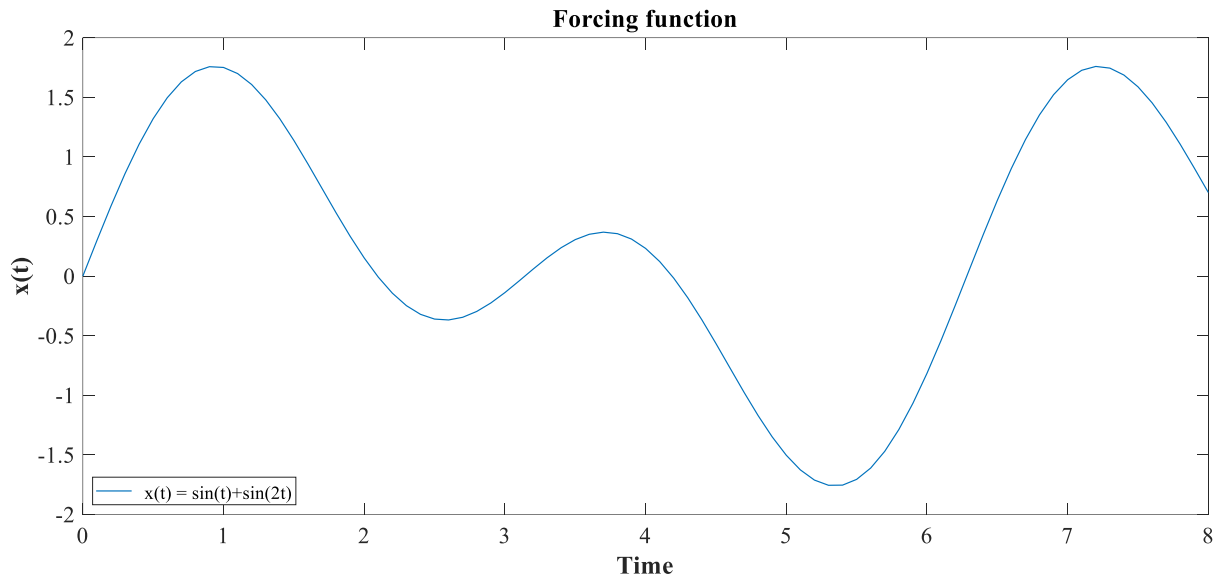
Πίνακας 3 Απόκλιση της αναπαράστασης σε σειρά Volterra από την αριθμητική λύση της μεθόδου R-K.

Σφάλμα \ $y_V$	$y_1$	$y_{1,2}$	$y_{1,2,3}$
$\ y_{RK} - y_V\ _\infty$	0.954294	0.517909	0.469427
$\ y_{RK} - y_V\ _2$	4.459184	2.247282	2.063449
<b>Συνάρτηση διέγερσης <math>x(t) = \sin(t)</math>. Σταθερές <math>k_1 = 0.3</math>, <math>k_2 = 0.3</math>.</b>			

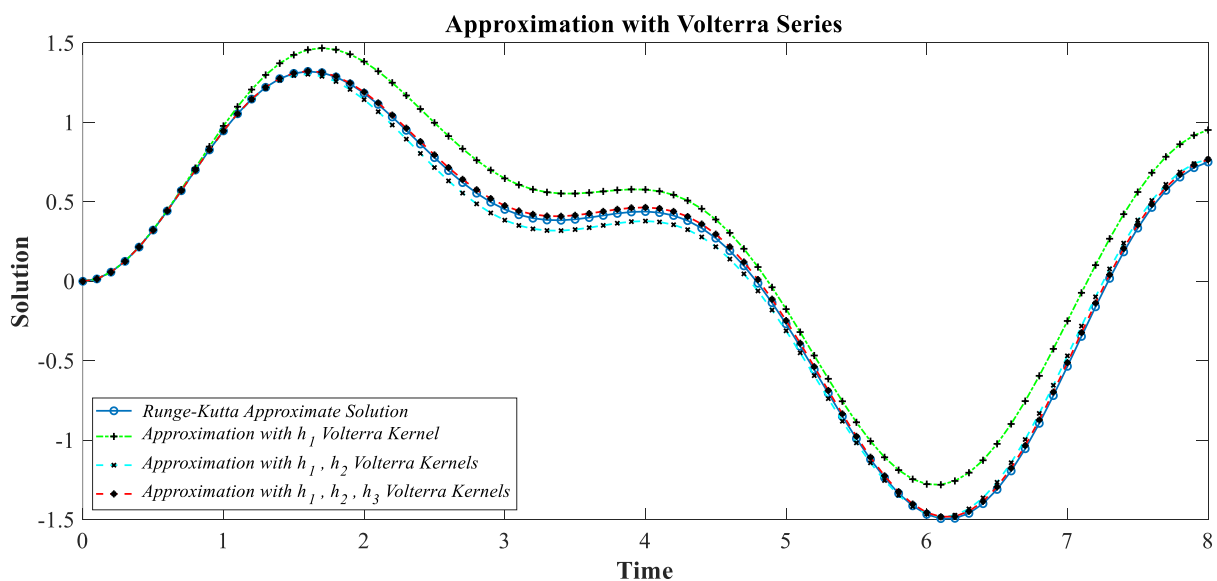
Βλέπουμε ότι τα σφάλματα μεγαλώνουν, έχοντας μειώσει τον συντελεστή  $k_1$ , όπως διακρίνεται και από το Σχήμα 3 εν συγκρίσει με το Σχήμα 2. Τόσο το σφάλμα μέγιστης απόκλισης καθώς και το  $\ell_2$  –σφάλμα μεγαλώνουν σημαντικά όμως παρόλο που δεν έχουμε ικανοποιητική σύγκλιση δεν έχουμε εκφυλισμό της λύσης και συνεχίζουμε να λαμβάνουμε διαδοχικά μικρότερα σφάλματα εντάσσοντας διαδοχικά περισσότερους όρους στην σειρά Volterra.

Στην συνέχεια παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα έχοντας εισάγει ως συνάρτηση διέγερσης του προβλήματος (P) την συνάρτηση  $x(t) = \sin(t) + \sin(2t)$ . Εδώ έχουμε διχρωματική

συνάρτηση διέγερσης η οποία αποτελεί ποιο ενδιαφέρουσα περίπτωση από την απλή ημιτονοειδή μορφή για την μελέτη της μεθόδου που εξετάζουμε εφόσον έχουμε ποιο γρήγορες σε σχέση με την χρονική εξέλιξη εναλλαγές του ρυθμού μεταβολής. Παραθέτουμε το γράφημα της συνάρτησης διέγερσης στο διάστημα  $[0,8]$  όπου εκτελούνται οι υπολογισμοί.



Ξεκινάμε και εδώ την παρουσίαση αποτελεσμάτων για το ζεύγος σταθερών  $k_1 = 0.5$  και  $k_2 = 0.15$ .



Σχήμα 4: Αριθμητική λύση του προβλήματος (P) για συντελεστές  $k_1 = 0.5$ ,  $k_2 = 0.15$  (μπλε γραμμή). Αριθμητικός υπολογισμός της προσεγγιστικής λύσης, με σειρά Volterra, Εξ. (1), ενός, δύο και τριών όρων (πράσινη, γαλάζια, κόκκινη γραμμή, αντιστοίχως).

Πίνακας 4: Απόκλιση της αναπαράστασης σε σειρά Volterra από την αριθμητική λύση της μεθόδου R-K.

Σφάλμα \ $y_V$	$y_1$	$y_{1,2}$	$y_{1,2,3}$
$\ y_{RK} - y_V\ _\infty$	0.299875	0.067850	0.025857
$\ y_{RK} - y_V\ _2$	1.573140	0.404158	0.158277
<b>Συνάρτηση διέγερσης <math>x(t) = \sin(t) + \sin(2t)</math>. Σταθερές <math>k_1 = 0.5, k_2 = 0.15</math>.</b>			

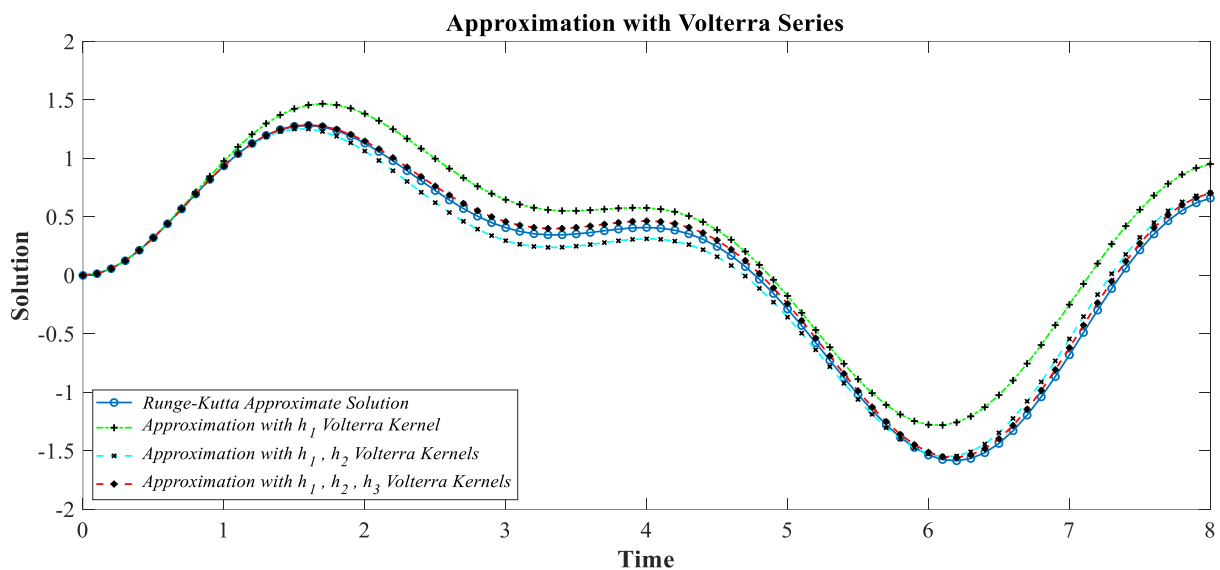
Βλέπουμε και εδώ ότι για μικρή τιμή της σταθεράς  $k_1$  έχουμε σύγκλιση της λύσης  $y_V$  στην λύση  $y_{RK}$  καθώς αυξάνει το πλήθος των όρων της σειράς Volterra.

Αυξάνουμε τον συντελεστή  $k_1 = 0.2$  και έχουμε τον ακόλουθο πίνακα σφαλμάτων.

Πίνακας 5: Απόκλιση της αναπαράστασης σε σειρά Volterra από την αριθμητική λύση της μεθόδου R-K.

Σφάλμα \ $y_V$	$y_1$	$y_{1,2}$	$y_{1,2,3}$
$\ y_{RK} - y_V\ _\infty$	0.443943	0.137486	0.062863
$\ y_{RK} - y_V\ _2$	2.157476	0.718443	0.366190
<b>Συνάρτηση διέγερσης <math>x(t) = \sin(t) + \sin(2t)</math>. Σταθερές <math>k_1 = 0.5, k_2 = 0.2</math>.</b>			

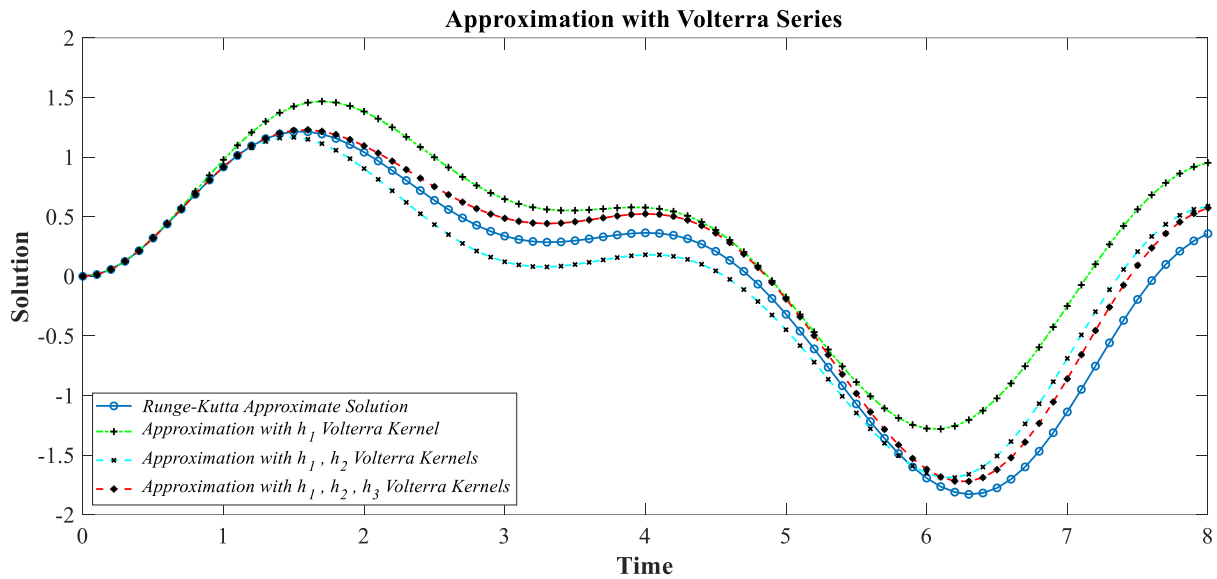
Τα σφάλματα αυξάνουν, παρόλα αυτά παρατηρούμε ότι η προσέγγιση τριών όρων στην σειρά Volterra  $y_{1,2,3}$  έχει ικανοποιητική σύγκλιση καθώς τόσο το μέγιστο σφάλμα απόκλισης είναι τάξης  $10^{-2}$  αλλά και το  $\ell_2$  - σφάλμα σε σχέση με την προσέγγιση δύο όρων  $y_{1,2}$  μειώνεται στο μισό.



Σχήμα 5: Αριθμητική λύση του προβλήματος (P) για συντελεστές  $k_1 = 0.5, k_2 = 0.2$  (μπλε γραμμή). Αριθμητικός υπολογισμός της προσεγγιστικής λύσης, με σειρά Volterra, Εξ. (1), ενός, δύο και τριών όρων (πράσινη, γαλάζια, κόκκινη γραμμή, αντιστοίχως).



Τέλος στην περίπτωση όπου έχουμε  $k_1 = 0.3$  λαμβάνουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα.



Σχήμα 6: Αριθμητική λύση του προβλήματος (P) για συντελεστές  $k_1 = 0.5$ ,  $k_2 = 0.3$  (μπλε γραμμή). Αριθμητικός υπολογισμός της προσεγγιστικής λύσης, με σειρά Volterra, Εξ. (1), ενός, δύο και τριών όρων (πράσινη, γαλάζια, κόκκινη γραμμή, αντιστοίχως).

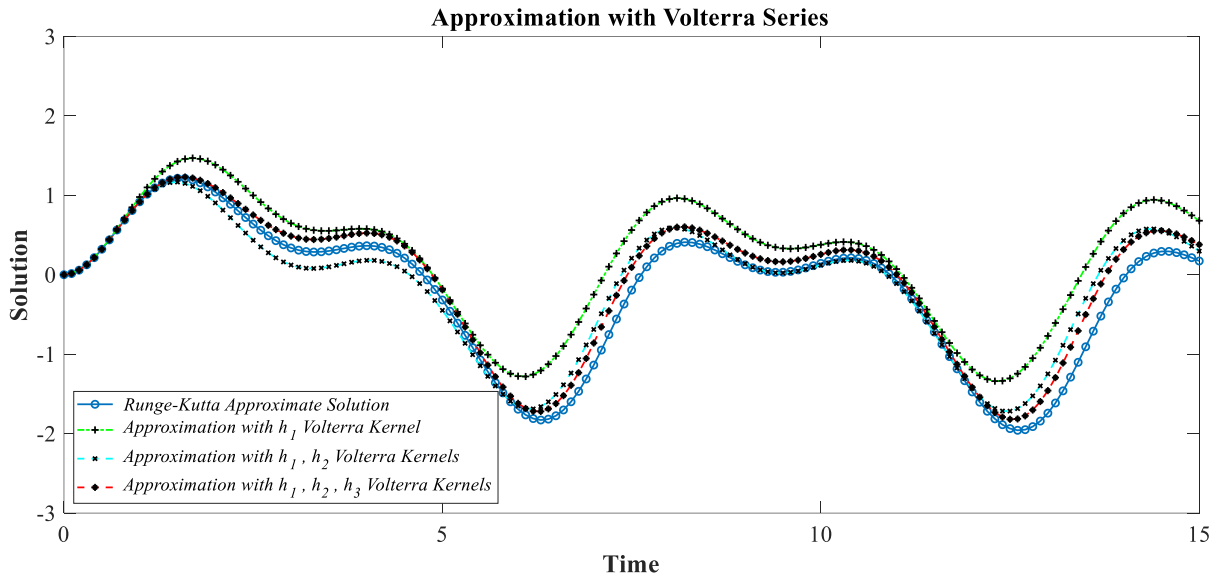
Πίνακας 6: Απόκλιση της αναπαράστασης σε σειρά Volterra από την αριθμητική λύση της μεθόδου R-K.

Σφάλμα \ $y_V$	$y_1$	$y_{1,2}$	$y_{1,2,3}$
$\ y_{RK} - y_V\ _\infty$	0.887425	0.457465	0.299185
$\ y_{RK} - y_V\ _2$	3.812246	1.878282	1.330525
<b>Συνάρτηση διέγερσης <math>x(t) = \sin(t) + \sin(2t)</math>. Σταθερές <math>k_1 = 0.5</math>, <math>k_2 = 0.3</math>.</b>			

Εδώ, τόσο το μέγιστο σφάλμα απόκλισης όσο και το  $L_2$  -σφάλμα μεγαλώνουν σημαντικά σε σχέση με τα αποτελέσματα του Πίνακα 5 και ειδικότερα για την προσέγγιση δύο και τριών όρων σειρών Volterra  $y_{1,2}$  και  $y_{1,2,3}$  αντιστοίχως, βλέπουμε ότι είναι υπερδιπλάσια. Ακόμα παρατηρούμε ότι μείωση του  $L_2$  -σφάλματος ανάμεσα στις προσεγγίσεις  $y_{1,2}$  και  $y_{1,2,3}$  είναι μικρή και αυτό διακρίνεται έντονα και στο Σχήμα 6. Παρόλα αυτά αν υπολογίσουμε την λύση για διπλάσιο χρόνο παρατηρούμε στο ακόλουθο Σχήμα 7 ότι η συμπεριφορά αυτή διατηρείται μεν με μικρή αύξηση των σφαλμάτων δίχως όμως να υπάρχει εκφυλισμός της λύσης.

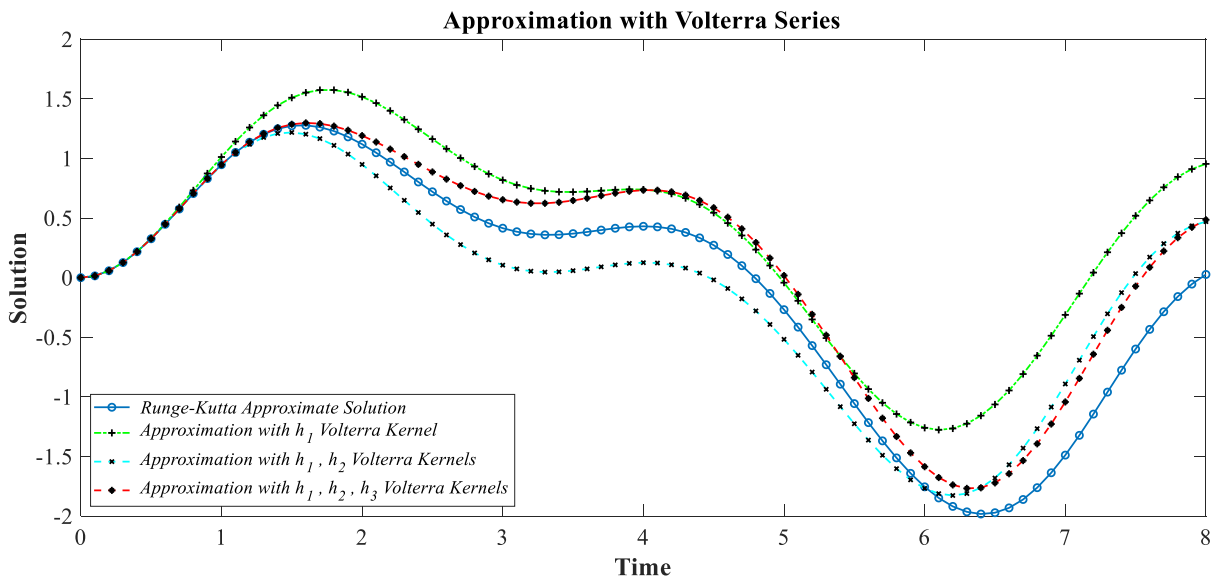
Πίνακας 7: Απόκλιση της αναπαράστασης σε σειρά Volterra από την αριθμητική λύση της μεθόδου R-K.

Σφάλμα \ $y_V$	$y_1$	$y_{1,2}$	$y_{1,2,3}$
$\ y_{RK} - y_V\ _\infty$	1.032796	0.609975	0.408354
$\ y_{RK} - y_V\ _2$	6.044633	2.915838	2.187057
<b>Συνάρτηση διέγερσης <math>x(t) = \sin(t) + \sin(2t)</math>. Σταθερές <math>k_1 = 0.5</math>, <math>k_2 = 0.3</math>.</b>			



Σχήμα 7: Αριθμητική λύση του προβλήματος (P) για συντελεστές  $k_1 = 0.5$ ,  $k_2 = 0.3$  (μπλε γραμμή). Αριθμητικός υπολογισμός της προσεγγιστικής λύσης, με σειρά Volterra, Εξ. (1), ενός, δύο και τριών όρων (πράσινη, γαλάζια, κόκκινη γραμμή, αντιστοίχως).

Τέλος παραθέτουμε αποτελέσματα για διαφορετικές τιμές της σταθεράς  $k_1$  στην περίπτωση όπου η σταθερά  $k_2 = 0.3$ . Για την τιμή  $k_1 = 0.4$ , λαμβάνουμε:

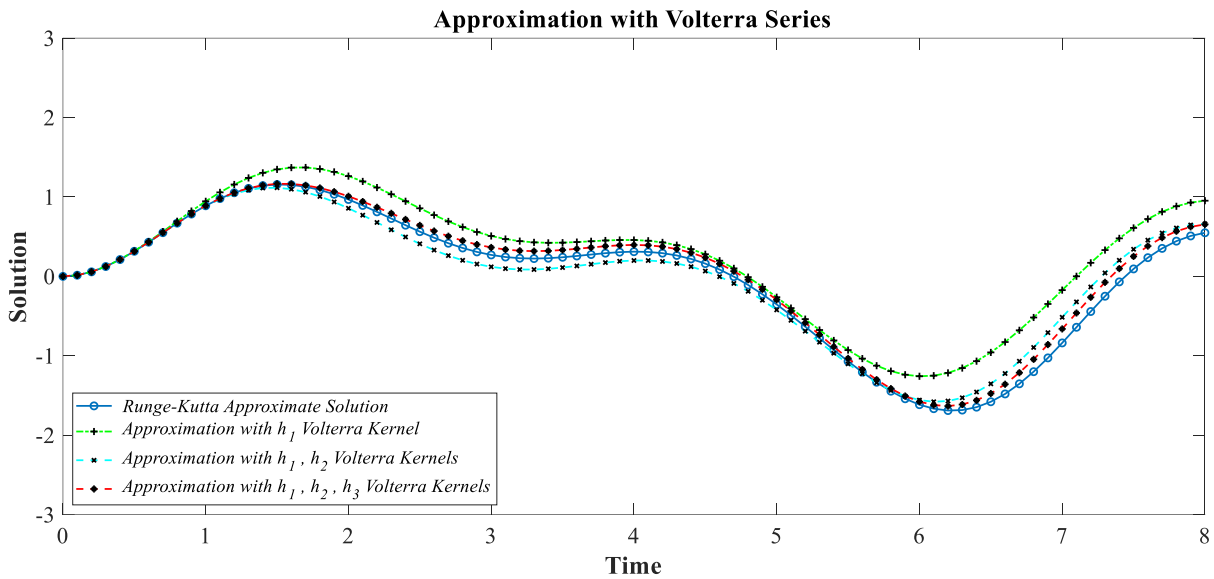


Σχήμα 8: Αριθμητική λύση του προβλήματος (P) για συντελεστές  $k_1 = 0.4$ ,  $k_2 = 0.3$  (μπλε γραμμή). Αριθμητικός υπολογισμός της προσεγγιστικής λύσης, με σειρά Volterra, Εξ. (1), ενός, δύο και τριών όρων (πράσινη, γαλάζια, κόκκινη γραμμή, αντιστοίχως).

Πίνακας 8: Απόκλιση της αναπαράστασης σε σειρά Volterra από την αριθμητική λύση της μεθόδου R-K.

Σφάλμα \ $y_v$	$y_1$	$y_{1,2}$	$y_{1,2,3}$
$\ y_{RK} - y_v\ _\infty$	1.188699	0.656754	0.526910
$\ y_{RK} - y_v\ _2$	5.113379	2.777048	2.436668
<b>Συνάρτηση διέγερσης <math>x(t) = \sin(t) + \sin(2t)</math>. Σταθερές <math>k_1 = 0.4, k_2 = 0.3</math>.</b>			

Για την τιμή  $k_1 = 0.6$ , λαμβάνουμε:



Σχήμα 9 Αριθμητική λύση του προβλήματος (P) για συντελεστές  $k_1 = 0.6, k_2 = 0.3$  (μπλε γραμμή). Αριθμητικός υπολογισμός της προσεγγιστικής λύσης, με σειρά Volterra, Εξ. (1), ενός, δύο και τριών όρων (πράσινη, γαλάζια, κόκκινη γραμμή, αντιστοίχως).

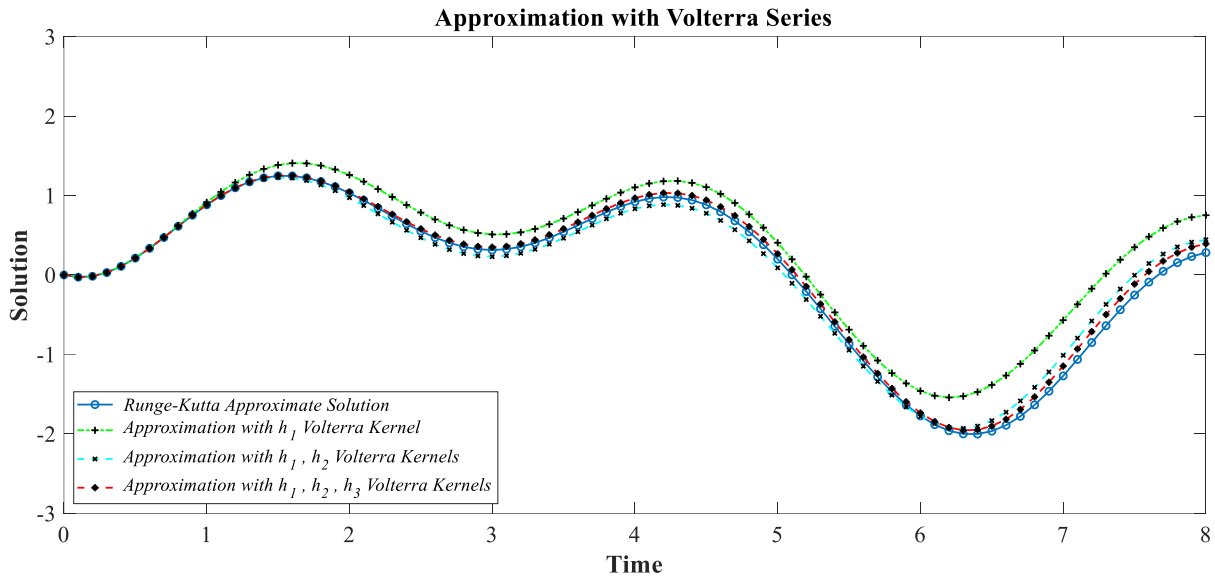
Πίνακας 9: Απόκλιση της αναπαράστασης σε σειρά Volterra από την αριθμητική λύση της μεθόδου R-K.

Σφάλμα \ $y_v$	$y_1$	$y_{1,2}$	$y_{1,2,3}$
$\ y_{RK} - y_v\ _\infty$	0.682421	0.322836	0.179754
$\ y_{RK} - y_v\ _2$	2.908702	1.290308	0.768600
<b>Συνάρτηση διέγερσης <math>x(t) = \sin(t) + \sin(2t)</math>. Σταθερές <math>k_1 = 0.6, k_2 = 0.2</math>.</b>			

Παρατηρούμε ότι μειώνοντας τον συντελεστή του γραμμικού όρου  $y$ ,  $k_1 = 0.4$ , στο χρονικό διάστημα  $[0,8]$  τα σφάλματα σχεδόν διπλασιάζονται Σχήμα 8, Πίνακας 8, ενώ αυξάνοντας τον συντελεστή  $k_1 = 0.6$  τα σφάλματα σχεδόν υποδιπλασιάζονται και έχουμε σύγκλιση, όπως φαίνεται στο Σχήμα 9 και Πίνακα 9.

Ολοκληρώνουμε την παρουσίαση των αποτελεσμάτων για το πρόβλημα (P) παραθέτοντας ενδεικτικά αποτελέσματα για μια ακόμη συνάρτηση διέγερσης, την συνάρτηση:

$$x(t) = (3/2)\sin(2t) + \sin(t-1/2).$$



Σχήμα 10 Αριθμητική λύση του προβλήματος (P) για συντελεστές  $k_1 = 0.5$ ,  $k_2 = 0.2$  (μπλε γραμμή). Αριθμητικός υπολογισμός της προσεγγιστικής λύσης, με σειρά Volterra, Εξ. (1), ενός, δύο και τριών όρων (πράσινη, γαλάζια, κόκκινη γραμμή, αντιστοίχως).

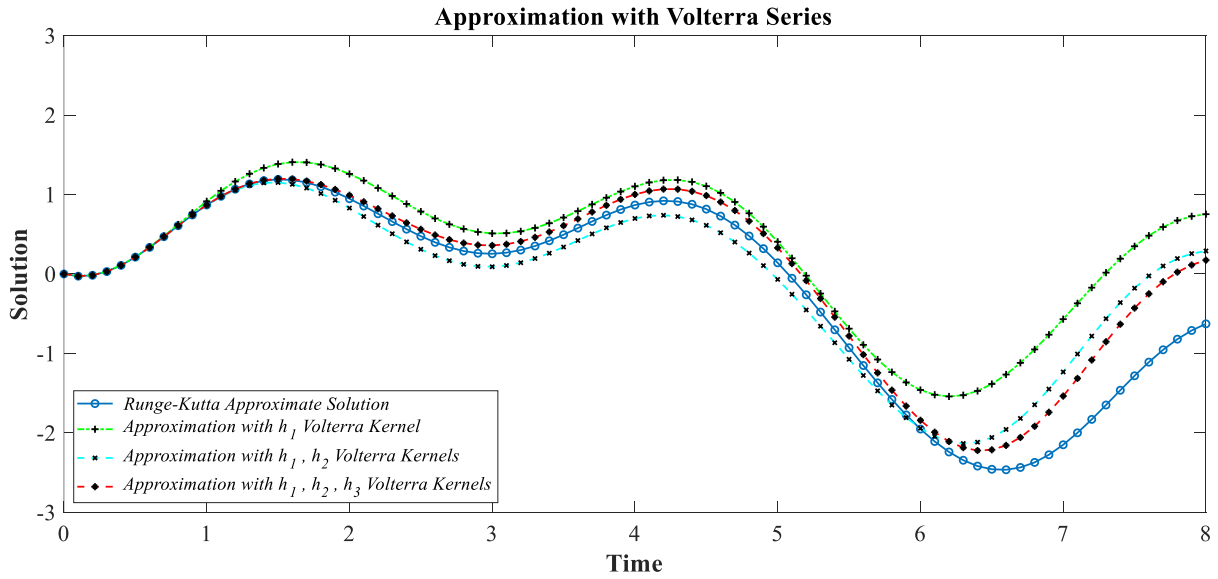
Πίνακας 10 Απόκλιση της αναπαράστασης σε σειρά Volterra από την αριθμητική λύση της μεθόδου R-K.

Σφάλμα \ $y_V$	$y_1$	$y_{1,2}$	$y_{1,2,3}$
$\ y_{RK} - y_V\ _\infty$	0.701066	0.271414	0.140225
$\ y_{RK} - y_V\ _2$	2.981598	1.062666	0.566666
<b>Συνάρτηση διέγερσης <math>x(t) = (3/2)\sin(2t) + \sin(t-1/2)</math>. Σταθερές <math>k_1 = 0.5</math>, <math>k_2 = 0.2</math>.</b>			

Πίνακας 11 Απόκλιση της αναπαράστασης σε σειρά Volterra από την αριθμητική λύση της μεθόδου R-K.

Σφάλμα \ $y_V$	$y_1$	$y_{1,2}$	$y_{1,2,3}$
$\ y_{RK} - y_V\ _\infty$	1.665197	1.102963	0.859472
$\ y_{RK} - y_V\ _2$	6.466298	3.863922	2.925786
<b>Συνάρτηση διέγερσης <math>x(t) = (3/2)\sin(2t) + \sin(t-1/2)</math>. Σταθερές <math>k_1 = 0.5</math>, <math>k_2 = 0.2</math>.</b>			

Το σχήμα που αντιστοιχεί στον Πίνακα 11 ακολουθεί.



Σχήμα 11 Αριθμητική λύση του προβλήματος (P) για συντελεστές  $k_1 = 0.5$ ,  $k_2 = 0.3$  (μπλε γραμμή). Αριθμητικός υπολογισμός της προσεγγιστικής λύσης, με σειρά Volterra, Εξ. (1), ενός, δύο και τριών όρων (πράσινη, γαλάζια, κόκκινη γραμμή, αντιστοίχως).

### 5.6. Παράδειγμα II. ΔΕ πρώτης τάξεως με κυβική μη-γραμμικότητα και μηδενική αρχική τιμή

Έχουμε το πρόβλημα:

$$(P_c) \begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} + k_1 y(t) + k_3 y^3(t) = x(t) \\ y(t_0) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Χρησιμοποιούμε και εδώ την προσεγγιστική αναπαράσταση της λύσης της Εξ. (1), σε σειρά Volterra τριών όρων, Εξ. (1) εδαφίου 5.2. Ο όρος της παραγώγου στην διαφορική εξίσωση εκφρασμένη μέσω της σειράς Volterra δίδει το αποτέλεσμα της Εξ. (8) εδάφιο 5.2.

Έπειτα, υπολογίζουμε το γινόμενο  $y^3$ :

$$y^3(t) = \left( \underbrace{\int_{t_0}^t h_1(\tau_1) x(t - \tau_1) d\tau_1}_{(1)} + \underbrace{\int_{t_0}^t \int_{t_0}^t h_2(\tau_1, \tau_2) x(t - \tau_1) x(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}_{(2)} + \underbrace{\int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) x(t - \tau_1) x(t - \tau_2) x(t - \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3}_{(3)} \right)^3$$

Από τον υπολογισμό του όρου  $y^2$ , ο οποίος πραγματοποιήθηκε στο εδάφιο 5.2, Εξ. (9), εύκολα βλέπουμε ότι ο υπολογισμός του  $y^3$  θα δώσει μόνον έναν όρο τρίτου βαθμού. Όλοι οι υπόλοιποι προκύπτοντες όροι θα είναι ανώτερου βαθμού.

Έτσι λοιπόν, θέλοντας να συμπεριλάβουμε στην προσεγγιστική αναπαράσταση μας μόνον όρους έως και τρίτου βαθμού:

$$y^3(t) = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t h_1(\tau_1)h_1(\tau_2)h_1(\tau_3)x(t-\tau_1)x(t-\tau_2)x(t-\tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3$$

### Εξισώσεις για τον προσδιορισμό των πυρήνων Volterra και επίλυση αυτών

Πλέον, έχοντας συγκεντρώσει τις εκφράσεις των όρων της διαφορικής εξίσωσης μέσω της σειράς Volterra, μπορούμε να περάσουμε απευθείας στην διατύπωση των διαφορικών προβλημάτων για τον προσδιορισμό των ολοκληρωτικών πυρήνων  $h_1, h_2, h_3$ , βλ. εδάφιο 5.3. Τα προβλήματα που προκύπτουν είναι:

$$(\Pi_1) \begin{cases} h_1'(\tau) + k_1 h_1(\tau) = 0 \\ h_1(0) = 1 \end{cases}$$

$$(\Pi_2) \begin{cases} \nabla_{\tau} h_2(\tau_1, \tau_2) + k_1 h_2(\tau_1, \tau_2) = 0 \\ h_2(0, \tau) + h_2(\tau, 0) = 0 \end{cases}$$

$$(\Pi_3) \begin{cases} \nabla_{\tau} h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) + k_1 h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) + k_3 h_1(\tau_1)h_1(\tau_2)h_1(\tau_3) = 0 \\ h_3(\tau_1, \tau_2, 0) + h_3(\tau_1, 0, \tau_2) + h_3(0, \tau_1, \tau_2) = 0 \end{cases}$$

Το προκύπτων πρόβλημα  $(\Pi_1)$ , είναι ίδιο σε σχέση με αυτό στην εξίσωση με τετραγωνική μη γραμμικότητα του εδαφίου 5.2. Έχουμε την έκφραση του πρώτου πυρήνα:

$$h_1(\tau) = e^{-k_1 \tau}.$$

Στο το δεύτερο πρόβλημα  $(\Pi_2)$ , παρατηρούμε ότι ο δεύτερος πυρήνας  $h_2$  είναι η μηδενική συνάρτηση, καθώς εφαρμόζοντας δισδιάστατο μετασχηματισμό Laplace, έχουμε:

$$\mathcal{L}\{\nabla_{\tau} h_2(\tau_1, \tau_2)\} + \mathcal{L}\{k_1 h_2(\tau_1, \tau_2)\} = 0, \quad (3)$$

και στο εδάφιο 5.4, έχουμε υπολογίσει:

$$\mathcal{L}\{\nabla_{\tau} h_2(\tau_1, \tau_2)\} = (s_1 + s_2) \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) e^{-s_1 \tau_1 - s_2 \tau_2} d\tau_1 d\tau_2 - \left( \int_0^{\infty} h_2(\tau, 0) e^{-s_1 \tau} d\tau + \int_0^{\infty} h_2(0, \tau) e^{-s_2 \tau} d\tau \right),$$

πράγμα που σημαίνει ότι, αντικαθιστώντας στην Εξ. (3), χρησιμοποιώντας την συνοριακή συνθήκη του προβλήματος  $(\Pi_2)$ , καθώς και την υπόθεση του ότι η συνάρτηση  $h_2$  είναι συμμετρική, έχουμε:

$$\begin{aligned} (s_1 + s_2) \mathcal{L}\{h_2(\tau_1, \tau_2)\} + k_1 \mathcal{L}\{h_2(\tau_1, \tau_2)\} &= \\ &= \left( \int_0^{\infty} h_2(\tau, 0) e^{-s_1 \tau} d\tau + \int_0^{\infty} h_2(0, \tau) e^{-s_2 \tau} d\tau \right) \equiv 0. \end{aligned}$$

Λαμβάνουμε λοιπόν ότι  $h_2(\tau_1, \tau_2) = 0$ .

Για την εύρεση του τρίτου πυρήνα, εφαρμόζουμε τρισδιάστατο μετασχηματισμό Laplace στην εξίσωση του προβλήματος  $\Pi_3$ , και λαμβάνουμε:

$$\mathcal{L}\{\nabla_{\tau} h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3)\} + k_1 \mathcal{L}\{h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3)\} + k_2 \mathcal{L}\{h_1(\tau_1)\} \mathcal{L}\{h_1(\tau_2)\} \mathcal{L}\{h_1(\tau_3)\} = 0 \quad (4)$$

Έχουμε τους επιμέρους υπολογισμούς:

$$\mathcal{L}\{\nabla_{\tau} h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3)\} = (s_1 + s_2 + s_3) \mathcal{L}\{h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3)\}$$

$$\mathcal{L}\{h_1(\tau)\} = \int_0^{\infty} e^{-k_1 \tau} e^{-s_1 \tau} d\tau = \int_0^{\infty} e^{-(s_1 + k_1) \tau} d\tau = -\frac{1}{(s_1 + k_1)}$$

Η Εξ.(4) γράφεται στην μορφή:

$$(s_1 + s_2 + s_3 + k_1) \mathcal{L}\{h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3)\} = -k_2 \mathcal{L}\{h_1(\tau_1)\} \mathcal{L}\{h_1(\tau_2)\} \mathcal{L}\{h_1(\tau_3)\},$$

και αντικαθιστώντας τον μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης  $h_1$ , λαμβάνου την σχέση προς αντιστροφή για την εύρεση του τρίτου πυρήνα  $h_3$ :

$$\mathcal{L}\{h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3)\} = k_2 \left( \frac{1}{s_1 + k_1} \right) \left( \frac{1}{s_2 + k_1} \right) \left( \frac{1}{s_3 + k_1} \right) \left( \frac{1}{s_1 + s_2 + s_3 + k_1} \right)$$

Η αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace γίνεται διαδοχικά ξεκινώντας από την μεταβλητή  $s_1$ .

Έχουμε να εκτελέσουμε τον υπολογισμό του ακόλουθου ολοκληρώματος:

$$h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = k_2 \frac{1}{(2\pi i)^3} \int_c \int_b \int_a \mathcal{L}\{h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3)\} e^{s_1 \tau_1 + s_2 \tau_2 + s_3 \tau_3} ds_1 ds_2 ds_3. \quad (5)$$

Αντιστρέφουμε ως προς την μεταβλητή  $s_1$  αντιμετωπίζοντας την μεταβλητή  $y = s_3 + s_2$  ως σταθερά:

$$\begin{aligned} A &:= \frac{1}{(2\pi i)} \int_a \left( \frac{1}{s_1 + k_1} \right) \left( \frac{1}{s_1 + y + k_1} \right) e^{s_1 \tau_1} ds_1 = \\ &= \frac{1}{(2\pi i)} \int_a \mathcal{L} \left\{ \frac{e^{-k_1 \tau_1} - e^{-(y+k_1) \tau_1}}{y} \right\} e^{s_1 \tau_1} ds_1 = \frac{e^{-k_1 \tau_1} - e^{-(y+k_1) \tau_1}}{y} \end{aligned}$$

Η Εξ. (5), αντικαθιστώντας σε αυτήν το ολοκλήρωμα A, λαμβάνει την μορφή:

$$\begin{aligned} h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) &= k_2 \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_c \int_b \left( \frac{e^{-k_1 \tau_1} - e^{-(y+k_1) \tau_1}}{y} \right) \times \\ &\quad \times \left( \frac{1}{s_2 + k_1} \right) \left( \frac{1}{s_3 + k_1} \right) e^{s_2 \tau_2 + s_3 \tau_3} ds_2 ds_3 \end{aligned} \quad (6)$$

Στην συνέχεια αντιστρέφουμε ως προς την μεταβλητή  $s_2$ , υπολογίζοντας:

$$\begin{aligned} B &:= \frac{1}{(2\pi i)} \int_b \left( \frac{1}{s_2 + k_1} \right) \left( \frac{e^{-k_1 \tau_1} - e^{-(s_2 + s_3 + k_1) \tau_1}}{s_2 + s_3} \right) e^{s_2 \tau_2} ds_2 = \\ &= \underbrace{e^{-k_1 \tau_1} \frac{1}{(2\pi i)} \int_b \left( \frac{1}{s_2 + k_1} \right) \left( \frac{1}{s_2 + s_3} \right) e^{s_2 \tau_2} ds_2}_{I_1} - \\ &\quad - \underbrace{e^{-(s_3 + k_1) \tau_1} \frac{1}{(2\pi i)} \int_b e^{-s_2 \tau_1} \left( \frac{1}{s_2 + k_1} \right) \left( \frac{1}{s_2 + s_3} \right) e^{s_2 \tau_2} ds_2}_{I_2} \end{aligned}$$

Εκτελούμε τους υπολογισμούς των όρων  $I_1, I_2$ :

$$\begin{aligned} I_1 &= e^{-k_1 \tau_1} \frac{1}{(2\pi i)} \int_{s_2} \mathcal{L} \left\{ \frac{e^{-k_1 \tau_2} - e^{-s_3 \tau_2}}{s_3 - k_1} \right\} e^{s_2 \tau_2} ds_2 = \frac{e^{-k_1 \tau_2} - e^{-s_3 \tau_2}}{s_3 - k_1} \\ I_2 &= e^{-(s_3 + k_1) \tau_1} \frac{1}{(2\pi i)} \int_{s_2} e^{-s_2 \tau_1} \mathcal{L} \left\{ \frac{e^{-k_1 \tau_2} - e^{-s_3 \tau_2}}{s_3 - k_1} \right\} e^{s_2 \tau_2} ds_2 = \\ &= e^{-(s_3 + k_1) \tau_1} H_{\tau_1}(\tau_2) \left( \frac{e^{-k_1(\tau_2 - \tau_1)} - e^{-s_3(\tau_2 - \tau_1)}}{s_3 - k_1} \right). \end{aligned}$$

Λαμβάνουμε τελικώς ότι:

$$I_1 - I_2 = e^{-k_1 \tau_1} \left( \frac{e^{-k_1 \tau_2} - e^{-s_3 \tau_2}}{s_3 - k_1} \right) - e^{-(s_3 + k_1) \tau_1} H_{\tau_1}(\tau_2) \left( \frac{e^{-k_1(\tau_2 - \tau_1)} - e^{-s_3(\tau_2 - \tau_1)}}{s_3 - k_1} \right).$$

Η Εξ. (6), αντικαθιστώντας σε αυτήν το ολοκλήρωμα B, λαμβάνει την μορφή:

$$\begin{aligned} h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) &= \underbrace{\frac{k_2}{(2\pi i)} \int_{s_3} e^{-k_1 \tau_1} \left( \frac{e^{-k_1 \tau_2} - e^{-s_3 \tau_2}}{s_3 - k_1} \right) \left( \frac{1}{s_3 + k_1} \right) e^{s_2 \tau_2 + s_3 \tau_3} ds_3}_{R_1} - \\ &\quad - \underbrace{\frac{k_2}{(2\pi i)} \int_{s_3} e^{-(s_3 + k_1) \tau_1} H_{\tau_1}(\tau_2) \left( \frac{e^{-k_1(\tau_2 - \tau_1)} - e^{-s_3(\tau_2 - \tau_1)}}{s_3 - k_1} \right) \left( \frac{1}{s_3 + k_1} \right) e^{s_2 \tau_2 + s_3 \tau_3} ds_3}_{R_2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Συνεπώς έχουμε να εκτελέσουμε την τρίτη αντιστροφή, ως προς την μεταβλητή  $s_3$  για να έχουμε την έκφραση του τρίτου πυρήνα της σειράς Volterra  $h_3$ . Έχουμε:



$$\begin{aligned}
R_1 &:= \frac{k_2}{(2\pi i)} \int_{s_3} \left( \frac{1}{s_3 - k_1} \right) \left( \frac{e^{-k_1 \tau_2} - e^{-s_3 \tau_2}}{s_3 + k_1} \right) e^{-k_1 \tau_1} e^{s_3 \tau_3} ds_3 = \\
&\frac{k_2}{(2\pi i)} e^{-k_1(\tau_1 + \tau_2)} \int_{s_3} \mathcal{L} \left\{ \frac{e^{k_1 \tau_3} - e^{-k_1 \tau_3}}{2k_1} \right\} e^{s_3 \tau_3} ds_3 - \\
&\quad - \frac{k_2}{(2\pi i)} \int_{s_3} e^{-s_3 \tau_2} \mathcal{L} \left\{ \frac{e^{k_1 \tau_3} - e^{-k_1 \tau_3}}{2k_1} \right\} e^{s_3 \tau_3} ds_3 = \\
&= k_2 e^{-k_1(\tau_1 + \tau_2)} \left( \frac{e^{k_1 \tau_3} - e^{-k_1 \tau_3}}{2k_1} \right) - k_2 e^{-k_1 \tau_1} H_{\tau_1}(\tau_2) \left( \frac{e^{k_1(\tau_3 - \tau_1)} - e^{-k_1(\tau_3 - \tau_1)}}{2k_1} \right). \quad (8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_2 &:= \frac{k_2}{(2\pi i)} \int_{s_3} e^{-(s_3 + k_1)\tau_1} H_{\tau_1}(\tau_2) \left( \frac{e^{-k_1(\tau_2 - \tau_1)} - e^{-s_3(\tau_2 - \tau_1)}}{s_3 - k_1} \right) \left( \frac{1}{s_3 + k_1} \right) e^{s_2 \tau_2 + s_3 \tau_3} ds_3 = \\
&= \frac{k_2}{(2\pi i)} e^{-k_1 \tau_2} H_{\tau_1}(\tau_2) \int_{s_3} e^{-s_3 \tau_1} \mathcal{L} \left\{ \frac{e^{k_1 \tau_3} - e^{-k_1 \tau_3}}{2k_1} \right\} e^{s_2 \tau_2 + s_3 \tau_3} ds_3 - \\
&\quad - \frac{k_2}{(2\pi i)} e^{-k_1 \tau_1} H_{\tau_1}(\tau_2) \int_{s_3} e^{-s_3 \tau_2} \mathcal{L} \left\{ \frac{e^{k_1 \tau_3} - e^{-k_1 \tau_3}}{2k_1} \right\} e^{s_2 \tau_2 + s_3 \tau_3} ds_3 = \\
&= k_2 e^{-k_1 \tau_2} H_{\tau_1}(\tau_2) H_{\tau_1}(\tau_3) \left( \frac{e^{k_1(\tau_3 - \tau_1)} - e^{-k_1(\tau_3 - \tau_1)}}{2k_1} \right) - \\
&\quad - k_2 e^{-k_1 \tau_1} H_{\tau_1}(\tau_2) H_{\tau_2}(\tau_3) \left( \frac{e^{k_1(\tau_3 - \tau_1)} - e^{-k_1(\tau_3 - \tau_1)}}{2k_1} \right). \quad (9)
\end{aligned}$$

Από της Εξ. (8) και(9) καταλήγουμε στην έκφραση του τρίτου πυρήνα  $h_3$ , Εξ. (7).

$$\begin{aligned}
h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) &= R_1 - R_2 = \\
&= k_2 e^{-k_1(\tau_1 + \tau_2)} \left( \frac{e^{k_1 \tau_3} - e^{-k_1 \tau_3}}{2k_1} \right) - k_2 e^{-k_1 \tau_1} H_{\tau_1}(\tau_2) \left( \frac{e^{k_1(\tau_3 - \tau_1)} - e^{-k_1(\tau_3 - \tau_1)}}{2k_1} \right) - \\
&\quad - k_2 e^{-k_1 \tau_2} H_{\tau_1}(\tau_2) H_{\tau_1}(\tau_3) \left( \frac{e^{k_1(\tau_3 - \tau_1)} - e^{-k_1(\tau_3 - \tau_1)}}{2k_1} \right) + \\
&\quad + k_2 e^{-k_1 \tau_1} H_{\tau_1}(\tau_2) H_{\tau_2}(\tau_3) \left( \frac{e^{k_1(\tau_3 - \tau_1)} - e^{-k_1(\tau_3 - \tau_1)}}{2k_1} \right).
\end{aligned}$$

## 5.7 Αριθμητικός υπολογισμός της προσεγγιστικής λύσης σε σειρά Volterra του Παραδείγματος II

Σε αυτό το εδάφιο θα παρουσιάσουμε αποτελέσματα υπολογισμού της προσεγγιστικής λύσης του προβλήματος ( $P_c$ ), Παράδειγμα 2, εδάφιο 5.6 κατά τον ίδιο τρόπο τις παρουσίας των αποτελεσμάτων του προβλήματος ( $P$ ) στο εδάφιο 5.5.

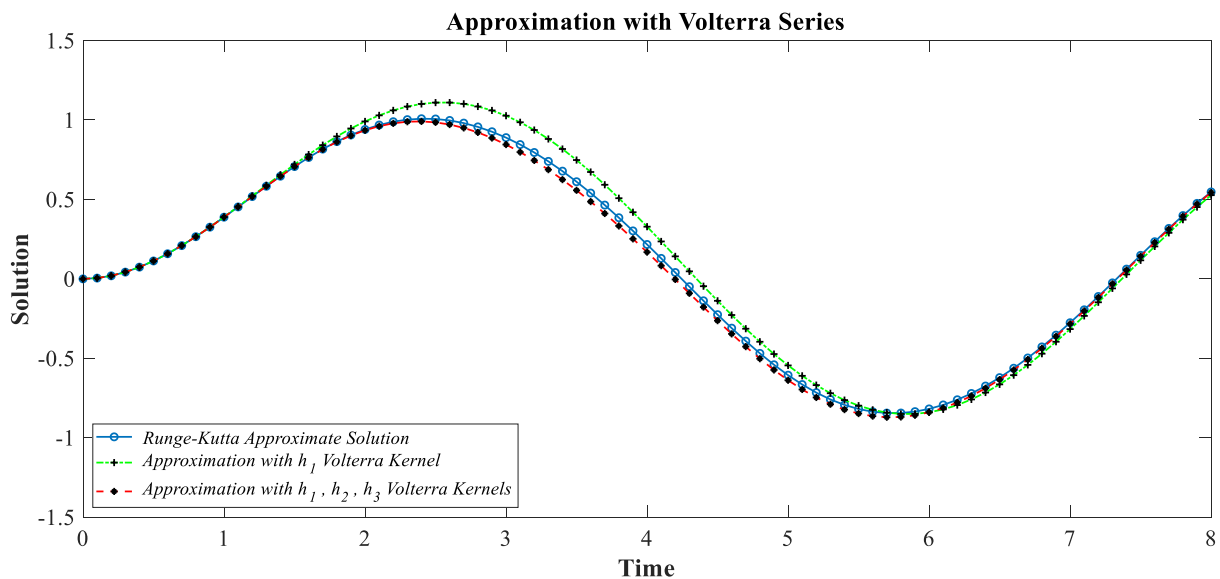
Υπενθυμίζουμε ότι θεωρούμε ως πιο αξιόπιστη προσεγγιστική λύση του προβλήματος ( $P_c$ ), την λύση που λαμβάνουμε με εφαρμογή της μεθόδου R-K και για αυτό τον λόγο υπολογίζουμε σφάλματα ως προς αυτήν. Στην ανάλυση του προβλήματος ( $P_c$ ) για την εφαρμογή της μεθόδου προσδιορισμού των ολοκληρωτικών πυρήνων της αναπαράστασης Volterra στο εδάφιο 5.6, είδαμε ότι ο δεύτερος πυρήνας στην αναπαράσταση της λύσης είναι ταυτοτικά μηδέν και κατά συνέπεια έχουμε τον πρώτο και τρίτο πυρήνα με τους οποίους διεξάγονται υπολογισμοί. Αυτό σημαίνει ότι  $y_{1,2} = 0$ , δηλαδή:

$$y_v(t) \approx \sum_{n=1}^3 y_n(t) \equiv \int_{t_0}^t h_1(\tau_1) x(t - \tau_1) d\tau_1 + 0 + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_n) x(t - \tau_1) x(t - \tau_2) x(t - \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \quad (1)$$

Υπολογίζουμε και εδώ το σφάλμα μέγιστης απόκλισης και το τετραγωνικό σφάλμα των προσεγγίσεων της λύσης μέσω της αναπαράστασης σε σειρά Volterra, Εξ.(3) και (4) εδάφιο 5.5.

Θα παρουσιάσουμε διαδοχικά αποτελέσματα για διαφορετικές συναρτήσεις διέγερσης  $x(t)$  και τιμών των συντελεστών  $k_1$  και  $k_3$  του γραμικού και μη γραμμικού όρου  $y, y^3$  αντιστοίχως.

Ξεκινάμε επιλέγοντας ως συνάρτηση διέγερσης  $x(t) = \sin(t)$  και τιμές των συντελεστών  $k_1 = 0.5$  και  $k_3 = 0.15$ .

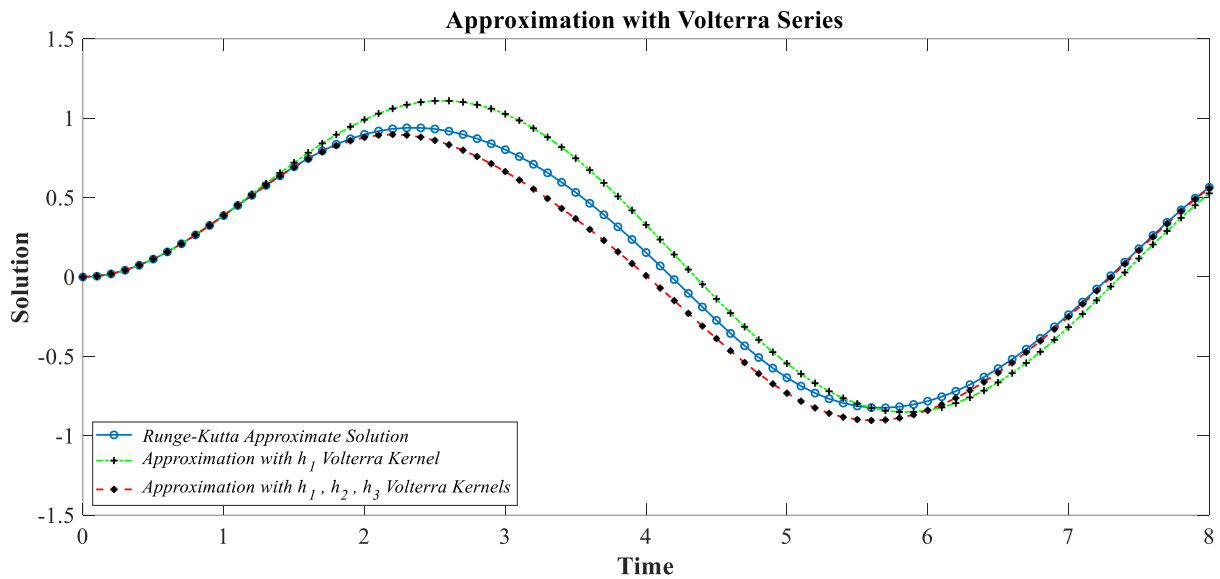


Σχήμα 12: Αριθμητική λύση του προβλήματος ( $P$ ) για συντελεστές  $k_1 = 0.5$ ,  $k_3 = 0.15$  (μπλε γραμμή). Αριθμητικός υπολογισμός της προσεγγιστικής λύσης, με σειρά Volterra, Εξ. (1), ενός και τριών όρων (πράσινη και κόκκινη γραμμή, αντιστοίχως).

Πίνακας 12: Απόκλιση της αναπαράστασης σε σειρά Volterra από την αριθμητική λύση της μεθόδου R-K.

Σφάλμα \ $y_V$	$y_1$	$y_{1,2,3}$
$\ y_{RK} - y_V\ _\infty$	0.141260	0.054001
$\ y_{RK} - y_V\ _2$	0.634560	0.241084
<b>Συνάρτηση διέγερσης <math>x(t) = \sin(t)</math>. Σταθερές <math>k_1 = 0.5</math>, <math>k_3 = 0.15</math>.</b>		

Στην συνέχεια αυξάνουμε τον συντελεστή  $k_2 = 0.3$ .



Σχήμα 13: Αριθμητική λύση του προβλήματος (P) για συντελεστές  $k_1 = 0.5$ ,  $k_3 = 0.3$  (μπλε γραμμή). Αριθμητικός υπολογισμός της προσεγγιστικής λύσης με σειρά Volterra, Εξ. (1), ενός και τριών όρων (πράσινη και κόκκινη γραμμή, αντίστοιχως).

Πίνακας 13: Απόκλιση της αναπαράστασης σε σειρά Volterra από την αριθμητική λύση της μεθόδου R-K.

Σφάλμα \ $y_V$	$y_1$	$y_{1,2,3}$
$\ y_{RK} - y_V\ _\infty$	0.226968	0.165646
$\ y_{RK} - y_V\ _2$	1.040640	0.733206
<b>Συνάρτηση διέγερσης <math>x(t) = \sin(t)</math>. Σταθερές <math>k_1 = 0.5</math>, <math>k_3 = 0.3</math>.</b>		

Παρόλο που εδώ αντιμετωπίζουμε ένα πρόβλημα με κυβικό μη γραμμικό όρο και προφανώς δεν μπορούμε να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα με αυτά του προβλήματος (P), μπορούμε να εξάγουμε συμπεράσματα για τα χαρακτηριστικά της αναπαράστασης της λύσης σε σειρά Volterra.

Οι πυρήνες  $h_n$  που λαμβάνουμε από την εφαρμογή της μεθόδου προσδιορισμού των πυρήνων, βλ. εδάφιο 5.3, στο εκάστοτε πρόβλημα, είναι πλήρως εξαρτημένοι της μορφής της ομογενούς

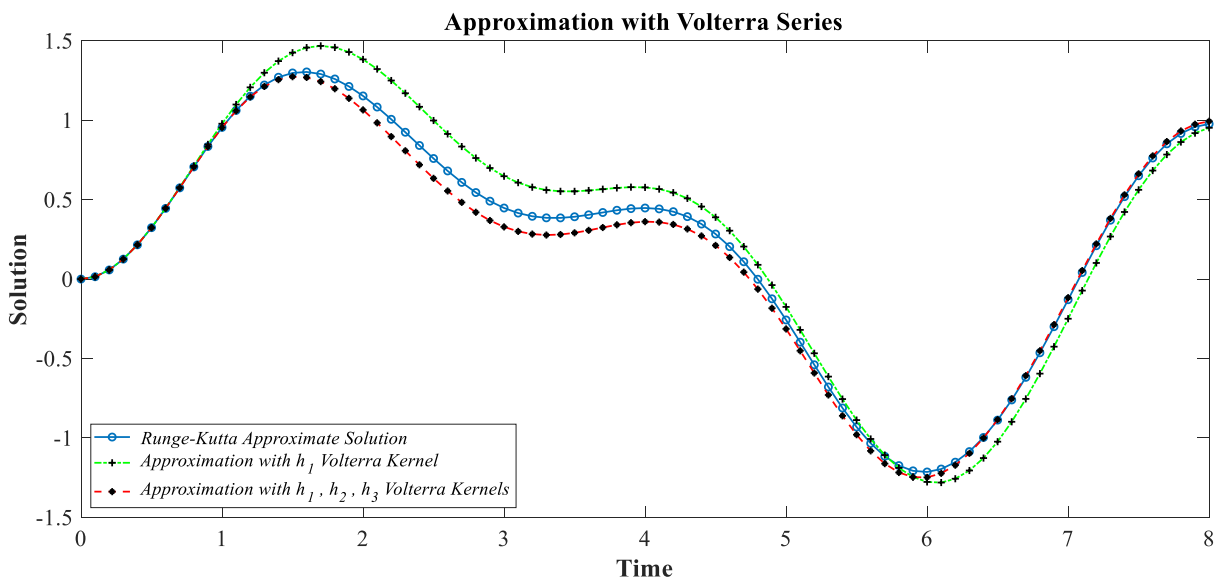
διαφορικής εξίσωσης του προβλήματος. Εφόσον λοιπόν η μη γραμμικότητα εισάγεται εγγενώς στη μορφή των πυρήνων Volterra μπορούμε να συγκρίνουμε τα σφάλματα του τετραγωνικού και κυβικού προβλήματος αναφορικά με την συνεισφορά στη σύγκλιση κάθε όρου της σειράς Volterra.

Βλέπουμε από τα ανωτέρω αποτελέσματα ότι στην περίπτωση μικρού συντελεστή  $k_3 = 0.15$  το τετραγωνικό σφάλμα της προσέγγισης της σειράς Volterra τριών όρων είναι 0.24. Σε σύγκριση με τα αποτελέσματα του εδαφίου 5.5, βλ. Σχήμα 1 και Πίνακα 1, για το πρόβλημα (P) το σφάλμα αυτό είναι μεγάλο. Αντίστοιχη εικόνα έχουμε και στην περίπτωση όπου  $k_2 = 0.3$ .

Παρατηρούμε ότι τα σφάλματα για την προσεγγιστική λύση  $y_{1,2,3}$  στον Πίνακα 1, έχουν την τάξη μεγέθους των σφαλμάτων της προσέγγισης  $y_{1,2}$  του Πίνακα 1, εδάφιο 5.5. Αυτό σε συνδυασμό με το γεγονός του ότι στο πρόβλημα κυβικής μη γραμμικότητας ( $P_c$ ) ο δεύτερος πυρήνας  $h_2$  είναι μηδέν, αναδεικνύει γενικά το ότι η συνεισφορά κάθε νέου όρου στην σειρά Volterra πέραν του γραμμικού όρου αποτελεί διόρθωση του προηγούμενου, και ειδικά για το πρόβλημα ( $P_c$ ), εφόσον ο όρος του τρίτου πυρήνα είναι η πρώτη διόρθωση του γραμμικού όρου, ότι είναι εκ πρώτης όψεως λογικό να αναμένουμε τετραγωνικό σφάλμα της τάξης της προσέγγισης  $y_{1,2,3}$  του προβλήματος ( $P$ ) εισάγοντας στην αναπαράσταση της λύσης  $y_v$ , πυρήνες μεγαλύτερης τάξης. Τέλος επιστρέφοντας στο εδάφιο 5.6 και επιχειρώντας να λάβουμε τον πυρήνα τέταρτης τάξης εύκολα διαπιστώνουμε ότι είναι και αυτός μηδενικός ενώ ο πέμπτος πυρήνας όχι. Αυτό συμβάλει στην κατεύθυνση των ανωτέρω.

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε αποτελέσματα για την συνάρτηση διέγερσης:

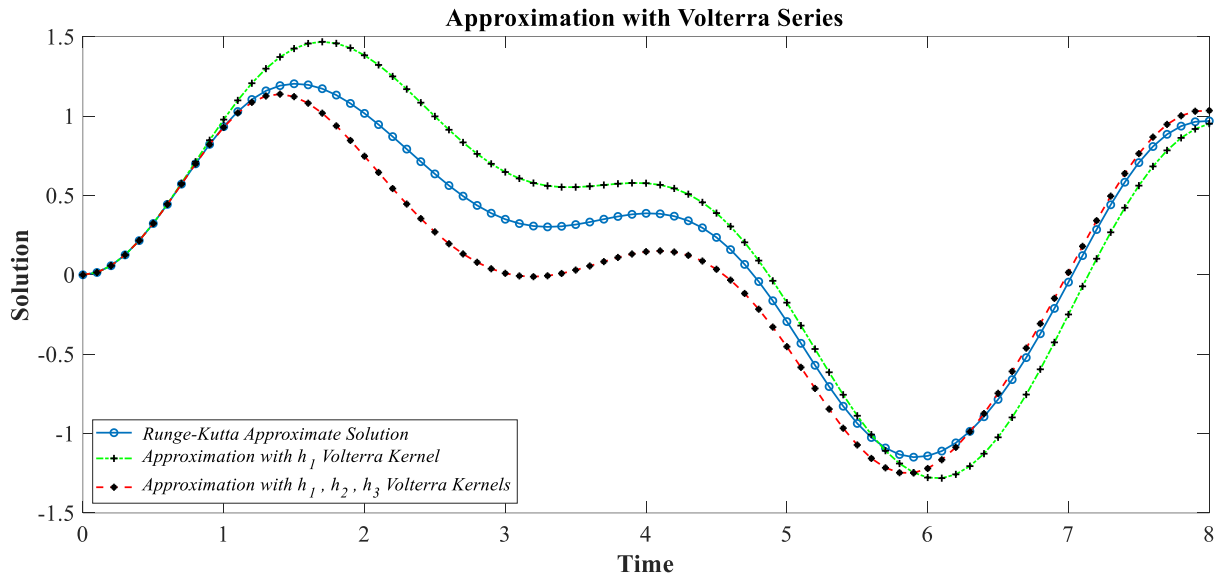
$$x(t) = \sin(t) + \sin(2t).$$



Σχήμα 14 Αριθμητική λύση του προβλήματος (P) για συντελεστές  $k_1 = 0.5$ ,  $k_3 = 0.15$  (μπλε γραμμή). Αριθμητικός υπολογισμός της προσεγγιστικής λύσης, με σειρά Volterra, Εξ. (1), ενός και τριών όρων (πράσινη και κόκκινη γραμμή, αντίστοιχως).

Πίνακας 14: Απόκλιση της αναπαράστασης σε σειρά Volterra από την αριθμητική λύση της μεθόδου R-K.

Σφάλμα \ $y_V$	$y_1$	$y_{1,2,3}$
$\ y_{RK} - y_V\ _\infty$	0.245408	0.126061
$\ y_{RK} - y_V\ _2$	1.170748	0.582912
<b>Συνάρτηση διέγερσης <math>x(t) = \sin(t) + \sin(2t)</math>. Σταθερές <math>k_1 = 0.5, k_3 = 0.15</math>.</b>		



Σχήμα 15 Αριθμητική λύση του προβλήματος (P) για συντελεστές  $k_1 = 0.5, k_3 = 0.3$  (μπλε γραμμή). Αριθμητικός υπολογισμός της προσεγγιστικής λύσης, με σειρά Volterra, Εξ. (1), ενός και τριών όρων (πράσινη και κόκκινη γραμμή, αντίστοιχως).

Πίνακας 15: Απόκλιση της αναπαράστασης σε σειρά Volterra από την αριθμητική λύση της μεθόδου R-K.

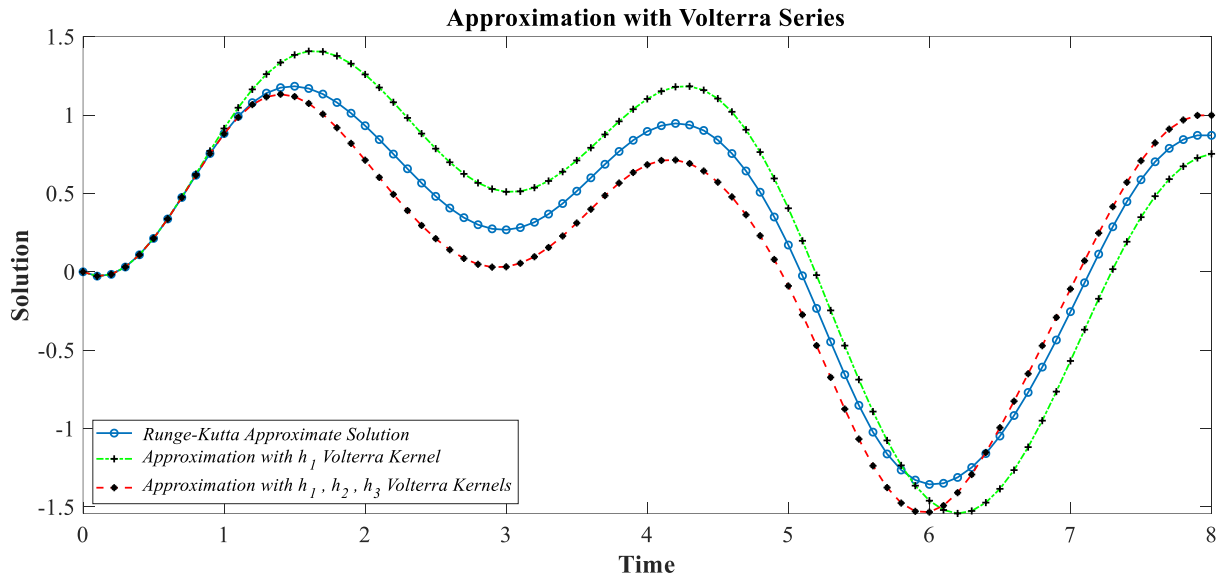
Σφάλμα \ $y_V$	$y_1$	$y_{1,2,3}$
$\ y_{RK} - y_V\ _\infty$	0.379283	0.366803
$\ y_{RK} - y_V\ _2$	1.836124	1.688739
<b>Συνάρτηση διέγερσης <math>x(t) = \sin(t) + \sin(2t)</math>. Σταθερές <math>k_1 = 0.5, k_3 = 0.3</math>.</b>		

Παρατηρούμε και εδώ τα χαρακτηριστικά των όσων αναφέραμε ανωτέρω για τα αποτελέσματα με συνάρτηση διέγερσης την απλή συνημιτονοειδή μορφή. Σημαντικό είναι το ότι παρόλο που τα σφάλματα αυξάνουν σημαντικά στην περίπτωση όπου  $k_3 = 0.3$  βλέπουμε στο ανωτέρω Σχήμα 4 ότι συνεχίζει η προσέγγιση  $y_{1,2,3}$  να ακολουθεί ποιοτικά την λύση  $y_{RK}$  και το τετραγωνικό σφάλμα αυτής δεν υπερβαίνει το σφάλμα της προσέγγισης  $y_1$ .

Κλείνοντας, παρουσιάζουμε και εδώ ενδεικτικά τα αποτελέσματα για συνάρτηση διέγερσης

$$x(t) = (3/2)\sin(2t) + \sin(t-1/2).$$

Για το ζεύγος συντελεστών  $k_1 = 0.5$ ,  $k_3 = 0.15$  λαμβάνουμε:



Σχήμα 16: Αριθμητική λύση του προβλήματος (P) για συντελεστές  $k_1 = 0.5$ ,  $k_3 = 0.15$  (μπλε γραμμή). Αριθμητικός υπολογισμός της προσεγγιστικής λύσης, με σειρά Volterra, Εξ. (1), ενός και τριών όρων (πράσινη και κόκκινη γραμμή, αντίστοιχως).

Πίνακας 16: Απόκλιση της αναπαράστασης σε σειρά Volterra από την αριθμητική λύση της μεθόδου R-K.

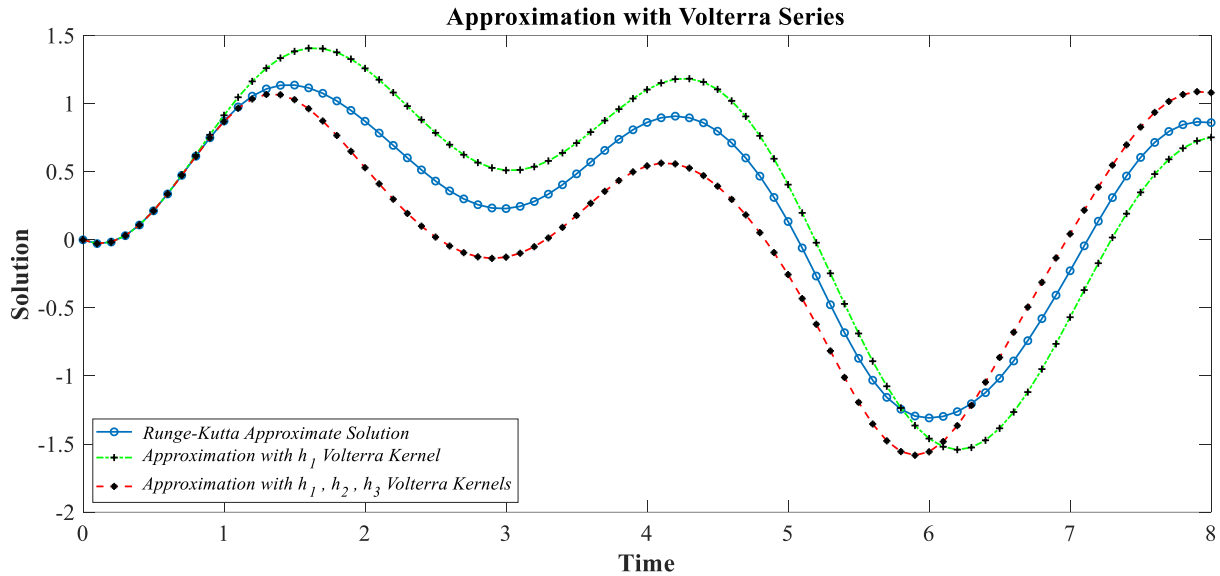
Σφάλμα \ $y_V$	$y_1$	$y_{1,2,3}$
$\ y_{RK} - y_V\ _\infty$	0.348812	0.279443
$\ y_{RK} - y_V\ _2$	2.028745	1.633237
<b>Συνάρτηση διέγερσης <math>x(t) = \sin(t)</math>. Σταθερές <math>k_1 = 0.5</math>, <math>k_3 = 0.15</math>.</b>		

Για το ζεύγος συντελεστών  $k_1 = 0.5$ ,  $k_3 = 0.3$  λαμβάνουμε:

Πίνακας 17: Απόκλιση της αναπαράστασης σε σειρά Volterra από την αριθμητική λύση της μεθόδου R-K.

Σφάλμα \ $y_V$	$y_1$	$y_{1,2,3}$
$\ y_{RK} - y_V\ _\infty$	0.391260	0.418239
$\ y_{RK} - y_V\ _2$	2.321922	2.523743
<b>Συνάρτηση διέγερσης <math>x(t) = \sin(t)</math>. Σταθερές <math>k_1 = 0.5</math>, <math>k_3 = 0.3</math>.</b>		

Το σχήμα ακολουθεί στην επόμενη σελίδα.



Σχήμα 17: Αριθμητική λύση του προβλήματος (P) για συντελεστές  $k_1 = 0.5$ ,  $k_3 = 0.3$  (μπλε γραμμή). Αριθμητικός υπολογισμός της προσεγγιστικής λύσης, με σειρά Volterra, Εξ. (1), ενός και τριών όρων (πράσινη και κόκκινη γραμμή, αντιστοίχως).

### 5.8. Επίλυσης ΔΕ με πολυωνυμική μη γραμμικότητα και μη μηδενικές αρχικές τιμές, με την χρήση σειρών Volterra

Σε αυτό το εδάφιο θα παρουσιάσουμε τον τρόπο με τον οποίο μπορούμε να εφαρμόσουμε την μέθοδο επίλυσης συνήθων μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με χρήση συναρτησιακών σειρών Volterra, όπου παρουσιάσαμε στα εδάφια 5.2 και 5.3, σε προβλήματα με μη μηδενικές αρχικές τιμές. Θα αναπτύξουμε δυο παραδείγματα. Αρχικά επεκτείνουμε την μέθοδο σε πρόβλημα πρώτης τάξης και έπειτα παρουσιάζουμε την διαδικασία για διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης.

#### Παράδειγμα III. ΔΕ πρώτης τάξεως με τετραγωνική μη-γραμμικότητα και μη μηδενική αρχική τιμή

Έστω το διαφορικό πρόβλημα:

$$(P) \begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} + k_1 y(t) + k_2 y^2(t) = x(t), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \quad (1)$$

Επιθυμώντας να λύσουμε το πρόβλημα χρησιμοποιώντας σειρά Volterra:

$$y(t) = \sum_{n=1}^N \int_{[t_0, t]^{(n)}} h_n(\tau^{(n)}) \prod_{k=1}^n x(t - \tau_k) d\tau^{(n)}, \quad (2)$$

βλέπουμε αμέσως ότι η αρχική τιμή του προβλήματος δεν πληρείται από την ανωτέρω προσεγγιστική αναπαράσταση της λύσης. Καλούμαστε λοιπόν να βρούμε έναν τρόπο ούτως ώστε η προσεγγιστική αναπαράσταση της λύσης, Εξ. (2) να πληροί την μη μηδενική αρχική τιμή  $y(t_0) = y_0$ .

Κατασκευάζουμε μια νέα συνάρτηση  $u$ , ως άγνωστη συνάρτηση του προβλήματος, στην οποία “ενσωματώνουμε” την αρχική τιμή του προβλήματος  $(P)$ ,  $y_0$ . Τότε, αντικαθιστώντας την άγνωστη συνάρτηση του προβλήματος  $y$  μέσω της νέας συνάρτησης  $u$ , ανάγουμε την επίλυση του προβλήματος  $(P)$ , στην επίλυση ενός ισοδύναμου συστήματος  $(P')$  το οποίο έχει μηδενική αρχική συνθήκη.

Συγκεκριμένα, θεωρούμε την συνάρτηση:

$$u(t) = y(t) - y_0 \quad (3)$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η συνάρτηση  $u$ , πληροί την διαφορική Εξ.(1) και την αρχική τιμή αυτής. Αντικαθιστούμε στην Εξ.(1) την έκφραση της άγνωστης συνάρτησης μέσω της συνάρτησης  $u$ ,  $y(t) = u(t) + y_0$  Λαμβάνουμε τότε:

$$\frac{d}{dt}(u(t) + y_0) + k_1(u(t) + y_0) + k_2(u(t) + y_0)^2 = x(t).$$

Εκτελούμε τις πράξεις στο αριστερά μέλος της ανωτέρω εξίσωσης και περνάμε στο δεξιά μέλος, τους σταθερούς όρους που προκύπτουν:

$$u'(t) + u(t)(k_1 + 2k_2 y_0) + k_2 u^2(t) = x(t) - y_0(k_1 + k_2 y_0).$$

Θέτουμε:  $r = (k_1 + 2k_2 y_0)$  και  $z(t) = x(t) - y_0(k_1 + k_2 y_0)$ . Η Εξ.(1) λαμβάνει την μορφή:

$$u'(t) + r u(t) + k_2 u^2(t) = z(t). \quad (4)$$

Πλέον έχουμε προς επίλυση το πρόβλημα:

$$(P') \begin{cases} u'(t) + r u(t) + k_2 u^2(t) = z(t), \\ u(t_0) = 0. \end{cases}$$

Στο πρόβλημα  $(P')$ , μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την σειρά την Volterra της μορφής:

$$u(t) = \sum_{n=1}^N \int_{[t_0, t]^{(n)}} h_n(\boldsymbol{\tau}^{(n)}) \prod_{k=1}^n z(t - \tau_k) d\boldsymbol{\tau}^{(n)}, \quad (5)$$

και να προχωρήσουμε στην εφαρμογή της μεθόδου, λαμβάνοντας τις γραμμικές μερικές διαφορικές εξίσωσης για τον προσδιορισμό των πυρήνων Volterra  $h_1, h_2, \dots, h_n$ . Παρατηρούμε με την βοήθεια της Εξ. (3), ότι η σχέση (5), γράφεται ως:

$$y(t) = y_0 + \sum_{n=1}^N \int_{[t_0, t]^{(n)}} h_n(\boldsymbol{\tau}^{(n)}) \prod_{k=1}^n z(t - \tau_k) d\boldsymbol{\tau}^{(n)}.$$

Συμπεραίνουμε βάση των ανωτέρω, ότι στην περίπτωση που αντιμετωπίζουμε μια πρωτοτάξια συνήθη διαφορική εξίσωση με μη μηδενική αρχική τιμή, εισάγοντας συνάρτησης  $u$  ως ανωτέρω, προκύπτει μια τροποποιημένη (pseudo-forcing) συνάρτηση διέγερσης  $z$  και η επίλυση του προβλήματος ανάγεται στην επίλυση ενός νέου προβλήματος με άγνωστη συνάρτηση  $u$  και συνάρτηση διέγερσης  $z$ , με μηδενική αρχική τιμή. Η επίλυση αυτού του προβλήματος, ισοδυναμεί με την επίλυση του αρχικού, με την διαφορά όμως ότι, στο προκύπτων πρόβλημα



μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος επίλυσης με χρήση σειράς Volterra ενώ στο αρχικό όπως είδαμε όχι.

**Παράδειγμα IV. ΔΕ δεύτερης τάξεως με τετραγωνική μη-γραμμικότητα και μη μηδενικές αρχικές συνθήκες**

Περνάμε τώρα σε ένα παράδειγμα διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξεως. Έστω το διαφορικό πρόβλημα:

$$(P_1) \begin{cases} \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + k_1 y(t) + k_2 y^2(t) = x(t), \\ y(t_0) = y_0, \\ y'(t_0) = y_1. \end{cases} \quad (6)$$

Σε αυτό το πρόβλημα μπορούμε αρχικά να ενεργήσουμε κατά αναλογία με το Παράδειγμα III ανωτέρω, δηλαδή να εισάγουμε τις αρχικές τιμές του προβλήματος σε μια νέα συνάρτηση απόκρισης  $u$  και να μετασχηματίσουμε το πρόβλημα. Αυτή η συνάρτηση πρέπει να πληροί και την αρχική τιμή της παραγώγου,  $y_1$ .

Θεωρούμε λοιπόν, την συνάρτηση:

$$u(t) = y(t) - y_0 - t y_1.$$

Αντικαταστήσουμε στην Εξ. (6) ως προς  $y$ ,  $y(t) = u(t) + y_0 + t y_1$ . Λαμβάνουμε:

$$\frac{d^2}{dt^2} (u(t) + y_0 + t y_1) + k_1 (u(t) + y_0 + t y_1) + k_2 (u(t) + y_0 + t y_1)^2 = x(t).$$

Εκτελούμε τις πράξεις στο αριστερά μέλος της ανωτέρω εξίσωσης και περνάμε στο δεξιά μέλος τους όρους όπου είναι ανεξάρτητοι της συνάρτησης  $u$ :

$$\begin{aligned} u''(t) + u(t)(k_1 + 2k_2(y_0 + t y_1)) + k_2 u^2(t) &= \\ &= x(t) - k_1(y_0 + t y_1) - k_2(y_0 + t y_1)^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Θέτουμε:

$$r(t) = k_1 + 2k_2(y_0 + t y_1),$$

και

$$z(t) = x(t) - k_1(y_0 + t y_1) - k_2(y_0 + t y_1)^2,$$

και πλέον μπορούμε να γράψουμε την Εξ. (7), στη μορφή:

$$u''(t) + r(t)u(t) + k_2 u^2(t) = z(t). \quad (8)$$

Κατασκευάζεται έτσι η νέα συνάρτηση διέγερσής  $z$  ενόσω η νέα συνάρτηση απόκρισης  $u$  πληροί την Εξ. (6) και τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος  $(P_1)$ . Παρατηρούμε όμως στην Εξ. (8) ότι ο συντελεστής του γραμμικού όρου  $u$ , είναι συνάρτηση του χρόνου. Δηλαδή το πρόβλημα μας προκύπτει να είναι χρονικά μεταβαλλόμενο (Time-Varying). Συνεπώς δεν

μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε προσεγγιστική αναπαράσταση σε σειρά Volterra της συνάρτησης  $u$  στη μορφή της Εξ. (2), καθώς βασίζεται στην υπόθεση της χρονικής αμεταβλητότητας. Παρόλα αυτά ακολουθώντας διαφορετική αντιμετώπιση μπορούμε να προχωρήσουμε στην επίλυση του προβλήματος  $(P_1)$  με χρήση σειράς Volterra. Θα εισάγουμε διαδοχικά τις αρχικές συνθήκες και θα μετασχηματίσουμε το πρόβλημα  $(P_1)$ , σε δύο στάδια.

Θεωρούμε αρχικά την συνάρτηση:

$$u(t) = y(t) - y_0,$$

η οποία πληροί την Εξ. (1) και την αρχική τιμή της συνάρτησης  $y$ . Αντικαθιστώντας στην Εξ. (6),  $y(t) = u(t) + y_0$ , λαμβάνουμε:

$$\frac{d^2}{dt^2}(u(t) + y_0) + k_1(u(t) + y_0) + k_2(u(t) + y_0)^2 = x(t). \quad (9)$$

Περνώντας τους σταθερούς όρους του δεξιού μέλους της ανωτέρω εξίσωσης στο αριστερό, έχουμε:

$$u''(t) + u(t)(k_1 + 2k_2 y_0) + k_2 u^2(t) = x(t) - y_0(k_1 + k_2 y_0)$$

Θέτουμε:

$$r = (k_1 + 2k_2 y_0), \quad z(t) = x(t) - y_0(k_1 + k_2 y_0),$$

και γράφουμε την Εξ. (8) στην μορφή:

$$u''(t) + r_1 u(t) + k_2 u^2(t) = z(t).$$

Με τον ανωτέρω χειρισμό λαμβάνουμε το χρονικά αμετάβλητο διαφορικό σύστημα:

$$(P'_1) \begin{cases} u''(t) + r_1 u(t) + k_2 u^2(t) = z(t) \\ u(t_0) \equiv y(t_0) - y_0 = 0 \\ u'(t_0) = ? \end{cases}$$

Σε αυτό το νέο πρόβλημα  $(P'_1)$ , δεν έχουμε πληρώσει την αρχική συνθήκη της παραγώγου. Με σκοπό την ισοδυναμία των συστημάτων  $(P_1)$  και  $(P'_1)$  μπορούμε να αναζητήσουμε λύση στο διαφορικό σύστημα:

$$(P''_1) \begin{cases} u''(t) + r_1 u(t) + k_2 u^2(t) = z(t), \\ z(t) = x(t) - y_0(k_1 + k_2 y_0), \\ y(t_0) = y_0, \\ u'(t_0) = y'(t_0) = y_1. \end{cases} \quad (10)$$

Ακολουθώντας το άρθρο (Flake, 1963, σελ. 3) προχωράμε στη ακόλουθη υπόθεση. Έστω ότι υπάρχει συνάρτηση διέγερσης  $f$ , τέτοια ώστε η προσεγγιστική αναπαράσταση σε σειρά Volterra της συνάρτησης  $u$ :

$$u(t) = \sum_{n=1}^N \int_{[t_0, t]^n} h_n(\boldsymbol{\tau}^{(n)}) \prod_{k=1}^n f(t - \tau_k) d\boldsymbol{\tau}^{(n)}, \quad (11)$$

να είναι λύση του διαφορικού συστήματος  $(P'_1)$ .

Για να μπορέσουμε να διερευνήσουμε την σχέση της συνάρτησης  $f$  με την συνάρτηση διέγερσης  $z$  του προβλήματος  $(P'_1)$  ενεργούμε ως εξής. Χρησιμοποιήσουμε την αναπαράσταση της Εξ. (11) για  $N=1$ , εκφράζουμε τους όρους της Εξ. (10) μέσω αυτής, δηλαδή θα λάβουμε τις εκφράσεις των συναρτήσεων  $u'', u, u^2$  μέσω των συναρτήσεων  $h_1, f$ , βλ. εδάφιο 5.2. Τέλος αντικαθιστώντας στην Εξ. (10), θα επιζητήσουμε το ισοζύγιο στην εξίσωση.

Έχουμε για την πρώτη και δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης  $u$ :

$$u'(t) = \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t h_1(\tau) f(t - \tau) d\tau = h_1(0) f(t) + \int_{t_0}^t h_1'(\tau) f(t - \tau) d\tau, \quad (12)$$

και

$$u''(t) = \frac{d}{dt} u'(t) = h_1(0) f'(t) + h_1'(0) f(t) + \int_{t_0}^t h_1''(\tau) f(t - \tau) d\tau. \quad (13)$$

Από τον τετραγωνικό όρο της εξίσωσης δεν προκύπτουν όροι πρώτου βαθμού:

$$\begin{aligned} u^2(t) &= \int_{t_0}^t h_1(\tau) f(t - \tau) d\tau \times \int_{t_0}^t h_1(\sigma_1) f(t - \sigma_1) d\sigma_1 + \dots = \\ &= \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t h_1(\tau_1) h_1(\sigma_1) f(t - \tau_1) f(t - \sigma_1) d\tau_1 d\sigma_1 + \dots \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις στην Εξ. (10) του συστήματος  $(P'_1)$ , λαμβάνουμε:

$$h_1(0) f'(t) + h_1'(0) f(t) + \int_{t_0}^t h_1''(\tau) f(t - \tau) d\tau + r_1 \int_{t_0}^t h_1(\tau) f(t - \tau) d\tau = z(t). \quad (14)$$

**Παρατήρηση 1:** Η Εξ. (12) ισχύει για κάθε συνάρτηση διέγερσης  $z \in C(\mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R})$ , από την υπόθεση, καθώς και για κάθε χρόνο  $t \in \mathcal{T}$ , όπου  $\mathcal{T} := [t_0, T]$ . Για  $t = t_0$ , έχουμε:

$$u'(t_0) = h_1(0) f(t_0), \quad (15)$$

ενώ από την αρχική τιμή της παραγώγου του προβλήματος  $(P'_1)$ , επιβάλαμε να ισχύει:

$$u'(t_0) = y'(t_0) = y_1$$

Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση όπου η αρχική τιμή της παραγώγου δεν είναι μηδέν,  $y_1 \neq 0$ , τότε η ποσότητα  $h_1(0)$  είναι διάφορη του μηδενός υποχρεωτικά. ■

Η Εξ.(14), αποτελεί την διαφορική Εξ. (10) του συστήματος ( $P'$ ), έχοντας αντικαταστήσει στην θέση της άγνωστης συνάρτησης την προσεγγιστική αναπαράσταση, Εξ.(11), κρατώντας μόνον όρους πρώτου βαθμού. Στον χρόνο  $t = t_0$ , από την Εξ. (14), παίρνουμε:

$$h_1(0)f'(t_0) + h_1'(0)f(t_0) = z(t_0) \quad (16)$$

Εδώ διακρίνονται δύο περιπτώσεις. Πρώτον η αρχική τιμή της παραγώγου να είναι μηδενική, δηλαδή  $y_1 = 0$ . Τότε από την Εξ. (16) και την Παρατήρηση (1), λαμβάνουμε ότι:

$$h_1(0)f'(t_0) = z(t_0). \quad (17)$$

Δεύτερον η αρχική τιμή της παραγώγου να μην είναι μηδενική,  $y_1 \neq 0$ . Τότε από την Εξ. (16), έχουμε ότι:

$$h_1(0)f'(t_0) + h_1'(0)\frac{y_1}{h_1(0)} = z(t_0), \quad (18)$$

καθώς από την Εξ. (15) λαμβάνουμε ότι  $f(t_0) = u'(t_0) / h_1(0)$ .

**Παρατήρηση 2:** Αν η συνάρτηση διέγερσης  $f$ , ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση:

$$z(t) = f(t) + \frac{\partial f(t)}{\partial t},$$

τότε στον χρόνο  $t = t_0$ , από την Εξ. (16), έχουμε ότι:

$$h_1(0)f'(t_0) + h_1'(0)f(t_0) = f(t_0) + \frac{\partial f(t_0)}{\partial t}.$$

Σε συνδυασμό με την απαίτηση για την τιμή της παραγώγου, Εξ. (15):

$$u'(t_0) = h_1(0)f'(t_0) = y_1,$$

λαμβάνουμε την διαφορική εξίσωση:

$$h_1(0)f'(t_0) - \frac{\partial f(t_0)}{\partial t} = \frac{y_1}{h_1(0)} - h_1'(0)\frac{y_1}{h_1(0)}. \quad (19)$$

Από την Εξ. (19), έχουμε:

$$h_1(0)f'(t_0)(h_1(0) - 1) = y_1(1 - h_1'(0)),$$

και συνεπάγεται άμεσα ότι  $h_1'(0) = 1$ ,  $h_1(0) = 1$ . ■

Βάση Παρατήρησης (2), εφόσον  $h_1(0) = 1$ , έχουμε ότι η συνάρτηση  $f$  λαμβάνει την αρχική τιμή της παραγώγου της συνάρτησης  $u$  στον χρόνο  $t_0$ , καθώς από την Εξ. (15), προκύπτει ότι:

$$u'(t_0) = f(t_0) = y_1.$$

Με αυτό τον τρόπο η επίλυση του προβλήματος  $(P_1'')$ , ανάγεται στην επίλυση του προβλήματος:

$$(P_1^*) \begin{cases} u''(t) + ru(t) + k_2 u^2(t) = z(t), \\ u(t_0) = y(t_0) - y_0, \\ u'(t_0) = y'(t_0) = y_1, \end{cases}$$

όπου:

$$r = (k_1 + 2k_2 y_0),$$

$$z(t) = x(t) - y_0(k_1 + k_2 y_0),$$

και η νέα συνάρτηση διέγερσης  $z$ , ικανοποιεί το πρόβλημα :

$$(Z) \begin{cases} z(t) = f(t) + \frac{\partial f(t)}{\partial t}, \\ f(t_0) = y_1. \end{cases}$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι μπορούμε να επιλύσουμε το σύστημα  $(P_1'')$ , εφαρμόζοντας την μέθοδο επίλυσης με σειρά Volterra στο σύστημα  $(P_1^*)$ , για την προσεγγιστική αναπαράσταση σε σειρά Volterra της άγνωστης συνάρτησης  $u$  :

$$u(t) = \sum_{n=1}^N \int_{[t_0, t]^n} h(\boldsymbol{\tau}^{(n)}) \prod_{k=1}^n f(t - \tau_k) d\boldsymbol{\tau}^{(n)}.$$

Τέλος, εφόσον  $u(t) = y(t) - y_0$ , παρατηρούμε και εδώ ότι η λύση του προβλήματος  $(P_1)$ , γράφεται:

$$y(t) = y_0 + \sum_{n=1}^N \int_{[t_0, t]^n} h(\boldsymbol{\tau}^{(n)}) \prod_{k=1}^n f(t - \tau_k) d\boldsymbol{\tau}^{(n)}.$$

## **Βιβλιογραφία Κεφαλαίου V**

Brychkov, Y. A. *et al.* (1992) *Multidimensional integral transformations*. Gordon and Breach Science Publishers.

Cohen, A. M. (2007) *Numerical Methods for Laplace Transform Inversion*. Boston, MA: Springer US (Numerical Methods and Algorithms). doi: 10.1007/978-0-387-68855-8.

Debnath, L. (2016) ‘The Double Laplace Transforms and Their Properties with Applications to Functional, Integral and Partial Differential Equations’, *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, 2(2), pp. 223–241. doi: 10.1007/s40819-015-0057-3.

Flake, R. H. (1963) ‘Volterra series representation of nonlinear systems’, *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers, Part II: Applications and Industry*, 81(6), pp. 330–335. doi: 10.1109/TAI.1963.6371765.