ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ

ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ:

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑΣ ΣΤΗΝ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΚΕΔΑΣΗ ΑΚΟΥΣΤΙΚΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ

Ανδρέας Τάταρης

Επιβλέπων:
Γκιντίδης Δρόσος
Καθηγητής Ε.Μ.Π

Αθήνα, Φεβρουάριος 2019

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κύριο Γκιντίδη για τα γνώσεις που μου έδωσε, τη βοήθεια και τις συμβουλές που μου προσέφερε όποτε χρειάστηκα και τους δικούς μου ανθρώπους για τη στήριξη που μου παρέχουν.

Περιεχόμενα

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία έχει στόχο την μελέτη του ευθέος προβλήματος σκέδασης ακουστικών κυμάτων και την μελέτη της μοναδικότητας του αντίστροφου προβλήματος.

Στο πρώτο κεφάλαιο μελετάμε τις βασικές ιδιότητες των λύσεων της εξίσωσης *Helmholtz* χρησιμοποιώντας τους ολοκληρωτικούς τύπους *Green*, σφαιρικές αρμονικές συναρτήσεις και σφαιρικές συναρτήσεις *Bessel*.

Στο δεύτερο κεφάλαιο διατυπώνουμε το ευθύ πρόβλημα σκέδασης σε μορφή προβλήματος συνοριακών τιμών και με τη χρήση δυναμικών απλού και διπλού στρώματος δείχνουμε την καλή τοποθέτηση του προβλήματος.

Τέλος στο τρίτο κεφάλαιο μελετάμε τη μοναδικότητα του αντίστροφου προβλήματος. Συγκεκριμένα μελετάμε υπό ποιες προϋποθέσεις μπορούμε να καθορίσουμε μοναδικά το σχήμα του σκεδαστή αν ικανοποιούνται συνοριακές συνθήκες τύπου Dirichlet στο σύνορό του.

Abstract

The purpose of this dissertation is the study of the direct acoustic obstacle scattering problem and the study of the uniqueness of the inverse problem.

In the first chapter we study the basic properties of solutions to the Helmholtz equation using Green's integral theorems, spherical harmonics and spherical Bessel functions.

In the second chapter we formulate the direct scattering problem as a boundary value problem and using single and double layer potentials we show that the problem is well posed.

In the third chapter we study the uniqueness of the inverse problem. Particularly, we show uniqueness of the shape of the scatterer if it is under Dirichlet boundary conditions.

Κεφάλαιο 1

Η Διαφορική Εξίσωση Helmholtz

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε την σκέδαση ακουστικών κυμάτων από εμπόδια που περιέχονται μέσα σε ένα ομογενές μέσο στον χώρο. Η διαδικασία σκέδασης που μελετάμε συνίσταται σε ένα εισερχόμενο κύμα και μια αλληλεπίδραση με το εμπόδιο που έχει ως αποτέλεσμα ένα εξερχόμενο κύμα. Η σκέδαση αυτή περιγράφεται από την διαφορική εξίσωση $Helmholtz$

$$\Delta u + k^2 u = 0 \ , \ k > 0.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε μαθηματικά εργαλεία όπως τους ολοκληρωτικούς τύπους $Green$, σφαιρικές αρμονικές συναρτήσεις και συναρτήσεις $Bessel$ ώστε να μελετήσουμε τις ιδιότητες των λύσεων της διαφορικής εξίσωσης $Helmholtz$.

1.1 Τύποι και Θεωρήματα Green

Σε αυτή την ενότητα περιγράφουμε με ολοκληρωτικό τρόπο λύσεις της εξίσωσης $Helmholtz$ και δείχνουμε πως μπορεί μια λύση αυτής της εξίσωσης να περιγραφεί ασυμπτωτικά. Για να αποδείξουμε ορισμένες βασικές ιδιότητες των λύσεων της εξίσωσης $Helmholtz$,

θα χρειαστούμε την Θεμελιώδη λύση Φ της εξίσωσης

$$\Phi(x,y) = \frac{1}{4\pi}\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}, \quad x \neq y.$$

Παρατηρούμε ότι για σταθερό y, η συνάρτηση

$$f : \mathbb{R}^3 \setminus \{y\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

τέτοια ώστε $f(\cdot) = \Phi(\cdot, y)$ αποτελεί λύση της εξίσωσης $Helmholtz$.

Ορισμός 1.1.1 *Ένας τόπος $D \subset \mathbb{R}^3$, δηλαδή σύνολο το οποίο είναι ανοικτό και συνεκτικό θα λέγεται κλάσης C^k, $k \in \mathbb{N}$, αν $\forall z$ σημείο του ∂D, υπάρχει περιοχή V_z τέτοια ώστε*
i)$V_z \cap \overline{D}$ απεικονίζεται 1-1 και επί στο σύνολο
$\{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < 1, x_3 \geq 0\}$
ii) η απεικονιση που ορίζεται στο i) και η αντίστροφή της ειναι C^k
iii) το σύνολο $V_z \cap \partial D$ απεικονίζεται 1-1 και επί στον δίσκο
$\{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < 1, x_3 = 0\}$

Θεώρημα 1.1.1 *Έστω $D \subset \mathbb{R}^3$, κλάσης C^1 και η το μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο διάνυσμα του ∂D και έστω $u \in C^1(\overline{D})$, $v \in C^2(\overline{D})$. Τότε*

$$\int_D (u\Delta v + gradu \cdot gradv)dx = \int_{\partial D} u\frac{\partial v}{\partial \eta}ds \tag{1.1.1}$$

και αν ακόμα υποθέσουμε ότι $u \in C^2(\overline{D})$, $v \in C^2(\overline{D})$, τότε

$$\int_D (u\Delta v - v\Delta u)dx = \int_{\partial D} \left(u\frac{\partial v}{\partial \eta} - v\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) ds \tag{1.1.2}$$

Παρατήρηση 1.1.1 *Στον παραπάνω τύπο (1.1.2), αν οι u, v είναι λύσεις της $Helmholtz$ μπορούμε αντι του τελεστή Laplace Δ ισοδύναμα να χρησιμοποιήσουμε τον τελεστή $(\Delta + k^2)$.*

Έχοντας τα παραπάνω εργαλεία είμαστε έτοιμοι να αποδείξουμε βασικά αποτελέσματα για τις λύσεις της εξίσωσης $Helmholtz$.

Θεώρημα 1.1.2 *Έστω $D \subset \mathbb{R}^3$ φραγμένος τόπος κλάσης C^2 και η το εξωτερικό κάθετο διάνυσμα του ∂D. Έστω ακόμα ότι $u \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$ συνάρτηση τέτοια ώστε το όριο*

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x) = \lim_{h \to 0_+} \eta(x) \cdot gradu(x - h\eta(x)), \quad x \in \partial D$$

να υπάρχει ομοιόμορφα $\forall x \in \partial D$, τότε έχουμε τον τύπο Green

$$u(x) = \int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial u}{\partial \eta}(y)\Phi(x,y) - u(y)\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \eta(y)} \right\} ds(y) -$$

$$\int_D \left\{ \Delta u(y) + k^2 u(y) \right\} \Phi(x,y) dy, \quad x \in D.$$

Επίσης το χωρικό ολοκλήρωμα θεωρείται ως μη κανονικό λόγω της ιδιομορφίας της Φ για την περίπτωση $x = y$. Ειδικότερα αν η u λύνει την εξίσωση $Helmholtz$ στο D, τότε

$$u(x) = \int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial u}{\partial \eta}(y)\Phi(x,y) - u(y)\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \eta(y)} \right\} ds(y), \quad x \in D \tag{1.1.3}$$

Απόδειξη. Έστω $u \in C^2(\overline{D})$. Έστω επίσης τυχαίο σημείο $x \in D$. Θεωρούμε την σφαίρα $S(x,\rho) = \left\{ y \in \mathbb{R}^3 : |x - y| = \rho \right\}$ με ρ κατάλληλα μικρό και το σύνολο

$$D_\rho = \left\{ y \in D : |y - x| > \rho \right\}.$$

Εφαρμόζουμε τον τύπο $Green$ για το σύνολο D_ρ και έχουμε

$$\int_{\partial D \cup S(x,\rho)} \left\{ \frac{\partial u}{\partial \eta}(y)\Phi(x,y) - u(y)\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \eta} \right\} ds(y)$$

$$= \int\limits_{D_\rho} \left\{ \Delta u(y) + k^2 u(y) \right\} \Phi(x,y) dy \quad (1)$$

Τώρα για $y \in S(x,\rho)$ έχουμε

$$\Phi(x,y) = \frac{e^{ik\rho}}{4\pi\rho}$$

και

$$grad_y \Phi = \left(\frac{1}{\rho} - ik \right) \frac{e^{ik\rho}}{4\pi\rho}.$$

Στην σφάιρα έχουμε

$$\int\limits_{S(x,\rho)} \left(\frac{\partial u(y)}{\partial \eta} \Phi(x,y) - \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \eta(y)} u(y) \right) ds(y).$$

Θεωρώντας τις παραπάνω σχέσεις έχουμε για τον δεύτερο όρο του αθροίσματος

$$= \int\limits_{S(x,\rho)} u(y(\theta,\phi)) \left(\frac{1}{\rho} - ik \right) \frac{e^{ik\rho}}{4\pi\rho} \rho^2 sin\theta d\theta d\phi$$

$$= \left(\frac{1}{\rho} - ik \right) \frac{e^{ik\rho}}{4\pi\rho} \int\limits_{S(x,\rho)} u(y(\theta,\phi)) \rho^2 sin\theta d\theta d\phi$$

$$= \left(\frac{1}{\rho} - ik \right) \frac{e^{ik\rho}}{4\pi\rho} u(y') 4\pi\rho^2 = u(y')(1 - ik\rho) e^{ik\rho},$$

από το θεώρημα μέσης τιμής και $y' \in S(x,\rho)$.

Τότε έχουμε

$$\rho \to 0 \quad \Rightarrow u(y')(1 - ik\rho) e^{ik\rho} \longrightarrow u(x),$$

αφού $|x - y'| = \rho$ και μπορούμε να επιλέξουμε μια ακολουθία $(y'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ τέτοια ώστε $|x - y'_n| \longrightarrow 0, \quad n \longrightarrow \infty \iff y'_n \longrightarrow x.$

Για το πρώτο μέρος του αθροίσματος, δηλαδή το ολοκλήρωμα

$$\int\limits_{S(x,\rho)} \frac{\partial u(y)}{\partial \eta}\Phi(x,y)ds(y),$$

έχουμε

$$\left|\int\limits_{S(x,\rho)} \frac{\partial u(y)}{\partial \eta}\Phi(x,y)ds(y)\right| = \left|\int\limits_{S(x,\rho)} \frac{e^{ik\rho}}{4\pi\rho}\frac{\partial u(y(\theta,\phi))}{\partial \eta(\theta.\phi)}\rho^2 sin\theta d\theta d\phi\right|$$

$$= \left|\rho\frac{e^{ik\rho}}{4\pi}\int\limits_{S(x,\rho)} \frac{\partial u(y(\theta,\phi))}{\partial \eta(\theta,\phi)}sin\theta d\theta d\phi\right|$$

$$\leq \frac{\rho}{4\pi}\left|\int\limits_{S(x,\rho)} \frac{\partial u(y(\theta,\phi))}{\partial \eta(\theta,\phi)}sin\theta d\theta d\phi\right|$$

και έστω $\rho_1 > \rho$ σταθερό. Αν θέσουμε

$$a(\rho) = \left|\int\limits_{S(x,\rho)} \frac{\partial u(y(\theta,\phi))}{\partial \eta(\theta,\phi)}sin\theta d\theta d\phi\right|,$$

τότε το σύνολο $A = \big\{a(\rho) : \rho \in [0,\rho_1]\big\}$ είναι φραγμένο (αφού η u είναι συνεχώς παραγογίσιμη στις σφαίρες) και αν $m = supA$ τότε

$$0 \leq \left|\int\limits_{S(x,\rho)} \left(\frac{\partial u(y)}{\partial \eta}\Phi(x,y)\right)ds(y)\right| \leq m\frac{\rho}{4\pi} \longrightarrow 0, \quad \rho \longrightarrow 0$$

Τέλος απο την σ-αθροιστικότητα του πρώτου μέλους της ισότητας του (1) παιρνοντας το οριο

$$\lim_{\rho\to 0}\int\limits_{S(x,\rho)} \left(\frac{\partial u(y)}{\partial \eta}\Phi(x,y) - \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \eta(y)}u(y)\right)ds(y) = -u(x)$$

προκύπτει το αποτέλεσμα. $\square$

Παρατήρηση 1.1.2 *Στην περίπτωση όπου η* $u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$ *έχει κάθετη παράγωγο στο* ∂D *με την έννοια του ότι το όριο συγκλίνει ομοιόμορφα* $\forall x \in \partial D$*, τότε θεωρούμε παράλληλες επιφάνειες για να αποδείξουμε το προηγούμενο αποτέλεσμα.*

Θεώρημα 1.1.3 *Έστω* D *τόπος και έστω* $u \in C^2(D)$ *λύση της Helmholtz. Τότε η* u *είναι αναλυτική συνάρτηση.*

Απόδειξη *Έστω* $x \in D$ *και έστω* ρ *κατάλληλο ώστε* $\overline{B}(x, \rho) \subset D$*. Τότε απο το Θεώρημα 1.1.2, αν περιοριστούμε στην κλειστή μπάλα η* u *έχει την προηγούμενη ολοκληρωτική μορφή. Ακόμα επειδή η θεμελιώδης λύση της Helmholtz είναι αναλυτική για* $x \neq y$ *έχουμε ότι η* u *είναι αναλυτική στην κλειστή μπάλα και τελικά σε όλο το* D*.* $\square$

Παρατήρηση 1.1.3 *Από το παραπάνω Θεώρημα, λόγω αναλυτικότητας προκύπτει ότι αν η* u *είναι λύση της Helmholtz στο* D *και υπάρχει ανοικτο υποσύνολο* U *του* D *ώστε η* u *να μηδενίζεται στο* $U \Rightarrow u = 0 \quad \forall x \in D$*.*

Στη συνέχεια θα δείξουμε ένα χρήσιμο αποτέλεσμα που προέρχεται από τη θεωρία των Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων.

Θεώρημα 1.1.4 *(Holmgren) Έστω* $D \subset \mathbb{R}^3$*, φραγμένος τόπος, κλάσης* C^2 *και έστω* $u \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$ *λύση της Helmholtz στο* D *τέτοια ώστε* $u|_\Gamma = \frac{\partial u}{\partial \eta}|_\Gamma = 0, \quad$ *όπου* $\Gamma \subset \partial D$ *είναι ανοικτό στη σχετική τοπολογία του* ∂D*. Τότε* $u(x) = 0, \forall x \in D$*.*

Απόδειξη *Από προηγούμενο θεώρημα αφού η* u *είναι λύση της Helmholtz στο* D *έχουμε*

$$u(x) = \int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial u}{\partial \eta}(y)\Phi(x,y) - u(y)\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \eta(y)} \right\} ds(y), \quad x \in D.$$

Μπορούμε να θεωρήσουμε την επεκτεταμένη συνάρτηση $u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{C}$ *με τύπο*

$$u(x) = \int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial u}{\partial \eta}(y)\Phi(x,y) - u(y)\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \eta(y)} \right\} ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^3 \backslash \partial D.$$

Από τους ολοκληρωτικούς τύπους Green και επειδή η u λύνει την εξίσωση Helmholtz στο D έχουμε για τυχαίο $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$:

$$u(x) = \int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial u}{\partial \eta}(y)\Phi(x,y) - u(y)\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \eta(y)} \right\} ds(y)$$

$$= \int_{D} \left\{ (\Delta + k^2)u(y)\Phi(x,y) - (\Delta + k^2)\Phi(x,y)u(y) \right\} dy$$

$$= -\int_{D} (\Delta + k^2)\Phi(x,y)u(y)dy$$

$$= -\int_{D} \delta_x(y)u(y)dy = 0,$$

αφού στην ολοκλήρωση $y \in D$ *και το* $x \notin D \Rightarrow \int_D \delta_x(y)dy = 0$. *Τότε λαμβάνοντας υπόψιν ότι* $u|_\Gamma = \frac{\partial u}{\partial \eta}|_\Gamma = 0$ *έχουμε*

$$u(x) = 0, \quad \forall x \in (\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}) \cup \Gamma.$$

Έστω τώρα $U \subset \mathbb{R}^3$ *ανοικτό ώστε* $U \cap D \neq \emptyset$ *ανοικτό στο* $\mathbb{R}^3$ *και* $U \cap \Gamma \neq \emptyset$ *(άρα και* $U \cap \Gamma$ *,ανοικτό στην σχετική τοπολογία του* ∂D*). Τότε επειδή το* $V = U \cap (\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D})$ *είναι ανοικτό στο* $\mathbb{R}^3$ *με* $u|_V = 0$ *και από την Παρατήρηση 1.1.3, έχουμε ότι* $u|_U = 0$. *Παρόμοια, επειδή* $U \cap D$ *ανοικτο στο* $\mathbb{R}^3$ *με* $u|_{U\cap D} = 0$ *έχουμε τελικά ότι* $u|_D = 0$. $\square$

Ορισμός 1.1.2 *(Συνθήκη Ακτινοβολίας)*
Έστω $u : U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{C}$ *τέτοια ώστε να υπάρχουν* $x \in \mathbb{R}^3, r > 0$ *ώστε* $U \supset \mathbb{R}^3 \setminus B(x,r)$. *Έστω ακόμα η* u *να είναι κλασική λύση της εξίσωσης Helmholtz στο U. Λέμε ότι η* u *ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβιλίας αν*

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku\right) = 0 \tag{1.1.4}$$

όπου $r = |x|$ *και το όριο ισχύει ομοιόμορφα* $\forall$ *διεύθυνση* $\hat{x} = x/|x|$.

Θεώρημα 1.1.5 *Έστω* $D \subset \mathbb{R}^3$ *να είναι το ανοικτό συμπλήρωμα ενός μη φραγμένου* C^2 *τόπου και έστω η το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο στο* ∂D. *Έστω ακόμα ότι* $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ *ακτινοβόλός λύση της εξίσωσης Helmholtz στο* $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$ *η οποία λαμβάνει κάθετη παράγωγο στο* ∂D *με την έννοια ότι το όριο*

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x) = \lim_{h\to 0_+} \eta(x) \cdot gradu(x - h\eta(x)), \quad x \in \partial D$$

υπάρχει ομοιόμορφα στο ∂D. *Τότε έχουμε τον τύπο Green*

$$u(x) = \int_{\partial D} \left\{ u(y)\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \eta(y)} - \frac{\partial u}{\partial \eta}(y)\Phi(x,y) \right\} ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}. \tag{1.1.5}$$

Απόδειξη. *Έστω* u *όπως στη περιγραφή του θεωρήματος. Πρώτα πρέπει να δείξουμε ότι*

$$\int_{S_r} |u|^2 ds = O(1), \quad r \longrightarrow \infty$$

όπου $S_r = S(0,r)$ *και υπενθυμίζουμε ότι*

$$f(x) = O(g(x)), \quad |x| \longrightarrow \infty \iff$$

$$\exists M > 0 \text{ ώστε } \forall x : |x| < M \Rightarrow |f(x)| \leq M|g(x)|.$$

Επειδή έχουμε υποθέσει ότι η λύση μας ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον ασθενέστερο τύπο από αυτόν του ορισμού

$$\lim_{r\to\infty} \int_{S_r} \left| \frac{\partial u}{\partial r} - iku \right|^2 ds = 0 \quad (a)$$

και

$$\int_{S_r} \left\{ \left| \frac{\partial u}{\partial \eta} \right|^2 + k^2|u|^2 + 2kIm\left(u\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}\right) \right\} ds$$

$$= \int_{S_r} \left| \frac{\partial u}{\partial r} - iku \right|^2 ds \longrightarrow 0, \quad r \longrightarrow \infty \quad (*),$$

όπου η το μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο της σφαίρας S_r.
Έστω $r > 0$ κατάλληλο ώστε

$$D_r = \left\{ y \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D} : |y| < r \right\}.$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο Green στο D_r, για τις $u, \bar{u}$ έχουμε

$$\int_{\partial D_r} u\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} ds = \int_{D_r} \{u\Delta\bar{u} + gradu \cdot grad\bar{u}\} dy$$

$$= \int_{S_r} u\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} ds + \int_{\partial D} u\frac{\partial \bar{u}}{\partial(-\eta)} ds = -k^2 \int_{D_r} |u|^2 dy + \int_{D_r} |gradu|^2 dy$$

$$= \int_{S_r} u\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} ds = \int_{\partial D} u\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} ds - k^2 \int_{D_r} |u|^2 dy + \int_{D_r} |gradu|^2 dy$$

$$\Rightarrow Re\left(\int_{S_r} u\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} ds \right) + iIm\left(\int_{S_r} u\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} ds \right)$$

$$= Re(\int\limits_{\partial D} u\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}ds) - k^2 \int\limits_{D_r} |u|^2 dy + \int\limits_{D_r} |gradu|^2 dy + iIm(\int\limits_{\partial D} u\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}ds)$$

$$\Rightarrow Im\left(\int\limits_{S_r} u\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}ds\right) = Im\left(\int\limits_{\partial D} u\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}ds\right) \quad (**)$$

Από τις $(*), (**) \Rightarrow$

$$\lim_{r\to\infty}\left\{\int\limits_{S_r}\left|\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|^2 + k^2|u|^2\right\}ds = -2kIm\left(\int\limits_{\partial D} u\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}ds\right) \quad (b)$$

Επειδή

$$Im\left(\int\limits_{\partial D} u\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}ds\right) < \infty \quad \text{και} \quad k^2|u|^2, \left|\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|^2 \geq 0,$$

θα πρέπει

$$\lim_{r\to\infty}\int\limits_{S_r}\left|\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|^2 < \infty$$

και

$$\lim_{r\to\infty}\int\limits_{S_r} k^2|u|^2 ds < \infty$$

από όπου προκύπτει και το (a).

Έστω $x \notin \overline{D}$, $y \in S_r$. *Τότε αναπτύσσοντας σε σειρά Taylor έχουμε*

$$|x-y| = |y| - \hat{y}x + O\left(\frac{1}{|y|}\right), |y| \longrightarrow \infty$$

$$\Phi(x,y) = \frac{e^{ik|x|}}{|x|}\left\{e^{-ik\hat{x}y} + O\left(\frac{1}{|x|}\right)\right\}$$

και

$$\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \eta(y)} = \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r}, \quad r = |y|.$$

Έτσι έχουμε

$$\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \eta(y)} - ik\Phi(x,y) = O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad r = |y| \longrightarrow \infty \quad (c),$$

ομοιόμορφα $\forall y \in S_r$. *Από την ανισότητα Cauchy − Swartz και τα* $(a), (c)$, *έχουμε*

$$I_1 = \int\limits_{S_r} u(y) \left\{ \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \eta(y)} - ik\Phi(x,y) \right\} ds(y) \longrightarrow 0, \quad |r| \longrightarrow \infty.$$

Πράγματι αφού

$$\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \eta(y)} - ik\Phi(x,y) = O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad r = |y| \longrightarrow \infty$$

τότε για r_0 *αρκετά μεγάλο* $\exists M_1 > 0$ *ώστε*

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} - ik\Phi \right| \leq M_1 \left(\frac{1}{r^2}\right), \quad \forall r \geq r_0.$$

Επίσης

$$\int\limits_{S_r} |u|^2 ds = O(1), \quad r \longrightarrow \infty \Rightarrow$$

για $r_2 > 0$ *κατάλληλα μεγάλο* $\exists M_2 > 0$:

$$\int\limits_{S_r} |u|^2 ds \leq M_2, \forall r \geq r_2.$$

Άρα

$$|I_1|^2 = \left| \int\limits_{S_r} u(y) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} - ik\Phi \right) ds(y) \right|^2$$

$$\leq \left(\int\limits_{S_r} |u|^2 ds \right)^{1/2} \left(\int\limits_{S_r} \left\{ \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \eta(y)} - ik\Phi(x,y) \right\}^2 ds(y) \right)^{1/2}$$

$$\leq (M_2^2)^{1/2} [M_1^2 \left(\frac{1}{r^2} \right)^2 4\pi r^2]^{1/2}$$

$$= M_2 M_1 2\sqrt{\pi/r}, \quad \forall r \geq max\{r_1, r_2\}$$

$$I_1 \longrightarrow 0, \quad r \longrightarrow \infty.$$

Επίσης το ολοκλήρωμα

$$I_2 = \int\limits_{S_r} \Phi(x,y) \left\{ \frac{\partial u(y)}{\partial \eta(y)} - iku(y) \right\} ds(y) \longrightarrow 0, \quad r \longrightarrow \infty$$

αφού $\Phi(x,y) = O(\frac{1}{r}), \quad y \in S_r, \quad r \longrightarrow \infty$ *και αφού έχουμε υποθέσει ότι η* u *είναι λύση που ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας. Έτσι τελικά*

$$\int\limits_{S_r} \left\{ u(y) \frac{\partial \Phi(x,y)}{\eta(y)} - \Phi(x,y) \frac{\partial u(y)}{\eta(y)} \right\} ds(y)$$

$$= I_1 - I_2 \longrightarrow 0, \quad r \longrightarrow \infty$$

Η απόδειξη τελειώνει κάνοντας χρήση του Θεωρήματος 1.1.2 για το σύνολο D_r *και στέλνοντας το* r *στο άπειρο.* □

Ορισμός 1.1.3 *Μια συνάρτηση που ικανοποιεί την εξίσωση Helmholtz για κάθε σημείο του* $\mathbb{R}^3$ *λέγεται ακέραια.*

Πρόταση 1.1.1 *Έστω* u *ακέραια λύση της Helmholtz που ικανοποιεί την συνθήκη ακτινοβολίας. Τότε* $u(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$.

Απόδειξη. *Έστω $D \subset \mathbb{R}^3$ φραγμένος τόπος κλάσης C^2. Τότε λόγω των προηγούμενων θεωρημάτων έχουμε ότι*

$$u(x) = \int\limits_{\partial D} \left\{ \frac{\partial u}{\partial \eta}(y)\Phi(x,y) - u(y)\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \eta} \right\} ds(y), \quad x \in D$$

$$u(x) = -\int\limits_{\partial D} \left\{ \frac{\partial u}{\partial \eta}(y)\Phi(x,y) - u(y)\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \eta} \right\} ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^3 \backslash \overline{D}.$$

Έστω $x \notin \overline{D}$. Τότε από τον τύπο Green

$$u(x) = -\int\limits_{\partial D} \left\{ \frac{\partial u}{\partial \eta}(y)\Phi(x,y) - u(y)\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \eta} \right\} ds(y)$$

$$-\int\limits_{D} \left\{ (\Delta + k^2)u(y)\Phi(x,y) - (\Delta + k^2)\Phi(x,y)u(y) \right\} dy.$$

Όμως η u λύνει την Helholtz στο D άρα

$$u(x) = \int\limits_{D} (\Delta + k^2)\Phi(x,y)u(y) \Big\} dy = \int\limits_{D} \delta_x(y)u(y)dy = 0,$$

αφού $x \notin D$ και $y \in D$.

Επίσης έστω $x \in D$ και $r > 0$ κατάλληλο ώστε $D \subset B(0,r)$. Τότε $D_r = B_r \setminus \overline{D}$. Από τον τύπο Green στο D_r έχουμε

$$\int\limits_{S_r} \left\{ \frac{\partial u}{\partial \eta}(y)\Phi(x,y) - u(y)\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \eta(y)} \right\} ds(y)$$

$$+\int\limits_{\partial D} \left\{ \frac{\partial u}{\partial (-\eta)}(y)\Phi(x,y) - u(y)\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial (-\eta)(y)} \right\} ds(y)$$

$$= \int\limits_{D_r} \big\{(\Delta + k^2)u(y)\Phi(x,y) - (\Delta + k^2)\Phi(x,y)u(y)\big\}dy$$

$$= -\int\limits_{D_r} (\Delta + k^2)\Phi(x,y)u(y)\big\}dy = -\int\limits_{D_r} \delta_x(y)u(y)dy = 0$$

αφού $x \in D, y \notin D$. *Άρα*

$$\int\limits_{S_r} \left\{\frac{\partial u}{\partial \eta}(y)\Phi(x,y) - u(y)\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \eta(y)}\right\} ds(y)$$

$$+\int\limits_{\partial D} \left\{\frac{\partial u}{\partial(-\eta)}(y)\Phi(x,y) - u(y)\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial(-\eta)(y)}\right\} ds(y) = 0.$$

Τότε έχουμε ισοδύναμα ότι

$$\int\limits_{S_r} \left\{\frac{\partial u}{\partial \eta}(y)\Phi(x,y) - u(y)\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \eta(y)}\right\} ds(y)$$

$$= \int\limits_{\partial D} \left\{\frac{\partial u}{\partial \eta}(y)\Phi(x,y) - u(y)\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \eta(y)}\right\} ds(y) = u(x).$$

Κάνοντας χρήση του τελευταίου ορίου της απόδειξης του Θεωρήματος 1.1.5 (εφόσον έχουμε υποθέσει ότι η λύση μας ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας) και στέλνοντας το r *στο άπειρο προκύπτει ότι* $u(x) = 0, x \in D$.

Μέχρι στιγμής έχουμε ότι $u(x) = 0, x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial D$. *Έστω* $z \in \partial D$ *και έστω* V_z *μια ανοικτη περιοχή του* z. *Τότε το σύνολο* $V = V_z \cap D$ *είναι ανοικτό και από τα προηγούμενα ισχύει ότι* $u|_V = 0$, *αφού* $V \subset D$. *Από την Παρατήρηση 1.1.3 λόγω αναλυτικότητας έχουμε* $u|_{V_z} = 0 \Rightarrow u|_{\partial D \cap V_z} = 0$. *Άρα* $u(z) = 0, \forall z \in \partial D$ *και δείξαμε τελικά ότι* $u(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}^3$. $\square$

Παρατήρηση 1.1.4 *Θα μπορούσαμε διαφορετικά για λιγότερους υπολογισμούς να δείχναμε* $u|_D = 0$ *ή* $u|_{\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}} = 0$ *και να χρησιμοποιούσαμε την Παρατήρηση 1.1.3 ώστε να περνούσαμε στο συμπληρωματικό μέρος του συνόλου.*

Θεώρημα 1.1.6 *Κάθε λύση της εξίσωσης Helmholtz που ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολιας έχει την ασυμπτοτική συμπεριφορά ενός σφαιρικού κύματος*

$$u(x) = \frac{e^{ik|x|}}{|x|}\left\{u_\infty(\hat{x}) + O\left(\frac{1}{|x|}\right)\right\}, \quad |x| \longrightarrow \infty \tag{1.1.6}$$

ομοιόμορφα $\forall \hat{x}$. *Η συνάρτηση* $u_\infty : S(0,1) \longrightarrow \mathbb{C}$ *ονομάζεται μακρινό πεδίο της* u. *Υπό τις προυποθέσεις του Θεωρήματος 1.1.5 έχουμε*

$$u_\infty(\hat{x}) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\partial D} u(y)\frac{\partial e^{-ik\hat{x}y}}{\partial \eta(y)} - \frac{\partial u(y)}{\partial \eta(y)} e^{-ik\hat{x}y} ds(y), \quad \hat{x} \in S(0,1).$$

Απόδειξη. *Έχουμε*

$$|x-y| = |x| - \hat{x}y + O\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \longrightarrow \infty$$

$$\Phi(x,y) = \frac{1}{4\pi}\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} = \frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}\left\{e^{-ik\hat{x}y} + O\left(\frac{1}{|x|}\right)\right\}, \quad |x| \longrightarrow \infty$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta(y)}\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} = \frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}\left\{\frac{\partial e^{-ik\hat{x}y}}{\partial \eta(y)} + O\left(\frac{1}{|x|}\right)\right\}, \quad |x| \longrightarrow \infty$$

ομοιόμορφα $\forall y \in \partial D$.

Τότε για $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$ *έχουμε*

$$u(x) = \int\limits_{\partial D}\left\{u(y)\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \eta}(y)\Phi(x,y)\right\} ds(y) \Rightarrow$$

$$u(x) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\partial D}\left(u(y)\frac{e^{ik|x|}}{|x|}\left\{\frac{\partial e^{-ik\hat{x}y}}{\partial\eta(y)} + O\left(\frac{1}{|x|}\right)\right\}\right.$$

$$\left. -\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{e^{ik|x|}}{|x|}\left\{e^{-ik\hat{x}^y} + O\left(\frac{1}{|x|}\right)\right\}\right)ds(y)$$

$$= \frac{e^{ik|x|}}{|x|}\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\partial D}\left(u(y)\frac{\partial e^{-ik\hat{x}y}}{\partial\eta(y)} - \frac{\partial u(y)}{\partial\eta(y)}e^{-ik\hat{x}y}\right)ds(y)$$

$$+\frac{e^{ik|x|}}{|x|}\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\partial D}\left(u(y)O\left(\frac{1}{|x|}\right) - \frac{\partial u}{\partial\eta}O\left(\frac{1}{|x|}\right)ds(y)\right)$$

$$= \frac{e^{ik|x|}}{|x|}\left\{u_\infty(\hat{x}) + \frac{1}{4\pi}O\left(\frac{1}{|x|}\right)\int\limits_{\partial D}\left(u(y) - \frac{\partial u(y)}{\partial\eta}\right)ds(y)\right\}$$

$$u(x) = \frac{e^{ik|x|}}{|x|}\left\{u_\infty(\hat{x}) + O\left(\frac{1}{|x|}\right)\right\}, \quad |x| \longrightarrow \infty$$

αφού οι $u, \frac{\partial u}{\partial\eta}$ *είναι συνεχείς στο* ∂D *και το* ∂D *είναι φραγμένο σύνολο.* $\square$

Παρατήρηση 1.1.5 *Από το παραπάνω θεώρημα παρατηρούμε ότι για λύσεις της Helmholtz που ικανοποιούν τη συνθήκη ακτινοβολίας ισχύει*

$$u(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \longrightarrow \infty$$

ομοιόμορφα $\forall$ *διέυθυνση* $\hat{x} = x/|x|$

1.2 Σφαιρικές Αρμονικές Συναρτήσεις

Σε αυτή την ενότητα ασχολούμαστε με τις βασικές ιδιότητες των σφαιρικών αρμονικών συναρτήσεων και δείχνουμε πως μέσω αυτών μπορούμε να περιγράψουμε τετραγωνικά ολοκληρώσιμες συναρτήσεις ορισμένες πάνω στη μοναδιαία σφαίρα του χώρου. Υπενθυμίζουμε ότι μια συνάρτηση ονομάζεται αρμονική αν ικανοποιεί την εξίσωση Laplace.

Ορισμός 1.2.1 *Έστω ένα πολυώνυμο τάξης n το οποίο ικανοποιεί την εξίσωση Laplace. Ο περιορισμός του στην μοναδιαία σφαίρα ονομάζεται σφαιρική αρμονική τάξης n.*

Θεώρημα 1.2.1 *Υπάρχουν ακριβώς 2n+1 γραμμικώς ανεξάρτητες σφαιρικές αρμονικές συναρτήσεις τάξεως n.*

Παρατήρηση 1.2.1 *Αν μεταβούμε σε πολικές συντεταγμενες (r,ϑ,φ), τότε τα ομογενή πολυώνυμα τάξης n είναι της μορφής*

$$H_n(r,\theta,\phi) = r^n Y_n(\theta,\phi)$$

Η διαφορική εξίσωση Laplace σε πολικές συντεταγμένες

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}\right]$$

Για να είναι η H_n αρμονική θα πρέπει να ικανοποιείται η παραπάνω σχέση ⇒

$$\Delta H_n = 0 \iff$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial H_n}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial H_n}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{sin^2\theta}\frac{\partial^2 H_n}{\partial\phi^2}\right] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial Y_n}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y_n}{\partial\phi^2} + n(n+1)Y_n = 0$$

Έστω $n, n' \in \mathbb{N}, n \neq n'$. *Αφού* $H_n, \overline{H_{n'}}$ *αρμονικές. Τότε από τον τύπο Green έχουμε*

$$0 = \int\limits_{S(0,1)} \left\{ \bar{H}_n \frac{\partial H_n}{\partial \eta} - H_n \frac{\partial \bar{H}_n}{\partial \eta} \right\} ds = (n - n') \int\limits_{S(0,1)} Y_n \bar{Y}_n ds$$

από όπου προκύπτει η σχέση ορθογωνιότητας

$$\int\limits_{S(0,1)} Y_n \bar{Y}_n ds, \quad n \neq n'.$$

Θα κατασκευάσουμε σφαιρικές αρμονικές που εξαρτόνται μόνο από την πολική γωνία θ. *Έστω* $x, y \in Rt : r = |x| < |y| = 1$, θ *η γωνία μεταξύ τους και* $t = cos\theta$. *Έστω η συνάρτηση*

$$\frac{1}{|x-y|} = \frac{1}{\sqrt{|x|^2 - 2 < x, y > + |y|^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2tr + r^2}}$$

όπου για σταθερό y, $\quad \Delta_x \frac{1}{|x-y|} = 0$.

Έστω t *σταθερό τέτοιο ώστε* $-1 \leq t \leq 1$. *Επειδή η* $\frac{1}{\sqrt{1-2tr+r^2}}$ *είναι αναλυτική ως προς* r *έχουμε ότι*

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2tr + r^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) r^n$$

όπου τα $(P_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ *είναι τα* ***πολυώνυμα Legendre****. Μπορούμε να δείξουμε ότι*

$$|P_n(t)| \leq 1, t \in [-1, 1], \forall n \in \mathbb{N}_0$$

και τον αναδρομικό τύπο

$$(n+1)P_{n+1}(t) - (2n+1)tP_n(t) + nP_{n-1}(t) = 0, \quad n \in \mathbb{N}, t \in [-1, 1]$$

από όπου έχουμε ότι $P_0(t) = 1, P_1(t) = t, \quad t \in [-1, 1]$.

Ακόμα μπορούμε να δείξουμε ότι η σειρά συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα για $t = cos\theta \in [-1, 1]$ *και* $r \in [0, 1)$. *Το ίδιο και για τις σειρές* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial(P_n(t)r^n)}{\partial r}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial(P_n(t=cos\theta)r^n)}{\partial \theta}$, *έχουμε απόλυτη και ομοιόμορφη σύγκλιση επίσης για* $t = cos\theta \in [-1, 1]$ *και* $r \in [0, 1)$.

Παρατήρηση 1.2.2 *Ο παραπάνω αναδρομικός τύπος υποδηλώνει ότι το* P_n *είναι πολυώνυμο* n *βαθμού και είναι περιττή συνάρτηση αν το* n *είναι περιττός αριθμός (αντίστοιχα άρτια αν το* n *άρτιος).*

Για σταθερό y, *παραγωγίζουμε όρο προς όρο την σειρά* $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)r^n$ *και έχουμε*

$$\frac{1}{|x-y|} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)r^n \Rightarrow$$

(αφού $\Delta_x \frac{1}{|x-y|} = 0$*)*

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 P_n(cos\theta)\frac{\partial r^n}{\partial r}\right) + \frac{r^n}{r^2}\left[\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(sin\theta\frac{\partial P_n(cos\theta)}{\partial \theta}\right) + 0\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)\frac{r^n}{r^2}P_n(cos\theta)) + \frac{1}{sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(sin\theta\frac{dP_n(cos\theta)}{d\theta}\right).$$

Εξισώνοντας δυνάμεις ως προς r *,προκύπτει ότι τα πολυώνυμα Legendre ικανοποιούν τη διαφορική εξίσωση Legendre*

$$(1-t)^2 P_n''(t) - 2tP_n'(t) + n(n+1)P_n(t) = 0, n \in \mathbb{N}_0, t \in [-1, 1], \tag{1.2.1}$$

και το πολυώνυμο $r^n P_n(cos\theta)$ *είναι αρμονικό, άρα το* $P_n(cos\theta)$ *αποτελεί σφαιρικό αρμονικό πολυώνυμο τάξης* n. *Όπως αναφέραμε*

πριν έχουμε τη σχέση ορθογωνιότητας

$$\int_{-1}^{1} P_n(t)P_m(t)dt = 0, \quad n \neq m.$$

Έστω $r \in [0,1)$. *Επειδή η σειρά* $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)r^n$ *συγκλίνει ομοιόμορφα για* $t \in [-1,1]$ *έχουμε*

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{1-2tr+r}dt = \int_{-1}^{1} \sum_{n=0}^{\infty} (P_n(t))^2 dt r^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-1}^{1} (P_n(t))^2 dt r^{2n}$$

ακόμα έχουμε

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{1-2tr+r}dt = \frac{1}{r} ln \frac{1+r}{1-r} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} r^{2n}$$

και εξισώνοντας τα παραπάνω στη σφαίρα $S(0,1)$ *(r=1) έχουμε τελικά*

$$\int_{-1}^{1} P_n(t)P_m(t)dt = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm}, \quad n,m \in \mathbb{N}.$$

Παρατήρηση 1.2.3 *Βλέπουμε ότι*

$$span\{P_0, P_1, ...P_n\} = span\{1, t...t^n\}, n \in \mathbb{N}_0,$$

άρα

$$\overline{span\{P_n : n \in \mathbb{N}_0\}} = L^2[-1,1].$$

Κατόπιν θα μελετήσουμε σφαιρικές αρμονικές συναρτήσεις της μορφής

$$Y_n^m(\theta, \phi) = f(cos\theta)e^{im\phi}.$$

Από την εξίσωση Laplace (θεωρώντας και το r)

$$0 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 n r^{n-1} Y_n^m) + \frac{r^n}{r^2}\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial Y_n^m}{\partial\theta}\right) + \frac{r^n}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y_n^m}{\partial\phi^2}$$

$$= \frac{1}{r^2}(n+1)nr^n Y_n^m + \frac{r^n}{r^2}\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial Y_n^m}{\partial\theta}\right) + \frac{r^n}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y_n^m}{\partial\phi^2}$$

(r=1)

$$= \frac{e^{im\phi}}{sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}[(sin^2\theta)f'(cos(\theta))]$$

$$+\frac{1}{sin^2\theta}f(cos\theta)(-m^2)e^{-im\phi} + n(n+1)f(cos\theta)$$

$$= -\frac{1}{sin\theta}2sin\theta cos\theta f'(cos\theta) - \frac{sin^2\theta(-sin\theta)}{sin\theta}f''(cos\theta)$$

$$+\frac{1}{sin^2\theta}f(cos\theta)(-m^2) + n(n+1)f(cos\theta) \Rightarrow$$

$(t = cos\theta)$ *προκύπτει η συσχετισμένη διαφορικη εξίσωση Legendre*

$$(1-t^2)f''(t) - 2tf'(t) + \left\{n(n+1) - \frac{m^2}{1-t^2}\right\}f(t) = 0$$

Παίρνοντας την δ.ε. Legendre (a) m-φορές, έχουμε ότι η $g = P_n^{(m)}$ *ικανοποιεί τη δ.ε.* $(1-t^2)g''(t) - 2t(m+2)g'(t) + \{(n-m)(n+m+1)\}g(t) = 0$ *και τότε οι συναρτήσεις*

$$P_n^m = (1-t^2)^{m/2}\frac{d^m P_n(t)}{dt^m}, \quad m = 0, 1, ..., n$$

είναι λύσεις της συσχετισμένης διαφορικης εξίσωσης Legendre. Τελικά αποδεικνύεται ότι οι συναρτήσεις

$$r^n Y_n^m(\theta, \phi) = r^n P_n^m(cos\theta)e^{im\phi}$$

είναι ομογενή πολυώνυμα τάξης n.

Θα προχωρήσουμε στην διατύπωση και απόδειξη ενός θεωρήματος που μας φανερώνει την σημασία που έχουν οι σφαιρικές αρμονικές συναρτήσεις στην περιγραφή L^2 συναρτήσεων πάνω στην μοναδιαία σφαίρα. Πρώτα όμως θα υπενθυμίσουμε ένα εργαλείο που προέρχεται απο την Θεωρία μετρικών χώρων.

Θεώρημα 1.2.2 *(Dini) Έστω (X,ρ) συμπαγής μετρικός χώρος και $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αύξουσα ακολουθία πραγματικών συνεχών συναρτήσων στο X (δηλ. $f_1(x) \leq f_2(x) \leq ...\forall x \in X$ αντ. για φθίνουσα) που συγκλίνει σημειακά στην συνεχή συνάρτηση $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Τότε η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στο X.*

Θεώρημα 1.2.3 *Οι σφαρικές αρμονικές συναρτήσεις*

$$\left\{Y_n^m(\cdot,\cdot) : m = -n...n, n \in \mathbb{N}_0\right\} : [0,\pi]X[0,2\pi) \longrightarrow \mathbb{C}$$

με τύπο

$$Y_n^m(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}\frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}}P_n^{|m|}(cos\theta)e^{im\phi},$$

$$\theta \in [0,\pi], \phi \in [0,2\pi)$$

αποτελούν μια ορθοκανονική βάση στον $L^2[S(0,1)]$.

Απόδειξη. *Από τη σχέση ορθογωνιότητας για τις σφαιρικές αρμονικές συναρτήσεις πάνω στη μοναδιαία σφαίρα έχουμε τελικά ότι*

$$< Y_n^m, Y_a^b >_{L^2[S(0,1)]} = \int\limits_{S(0,1)} Y_n^m \bar{Y}_a^b ds = 0, \text{αν } n \neq a, m \neq b$$

δηλαδή έχουμε ορθογωνιότητα. Σχετικά με τον καθορισμό της σταθεράς κανονικοποίησης. Για $m > 0$ $A_n^m = \int\limits_0^\pi [P_n^m(cos\theta)]sin\theta d\theta$ και από m-ολοκληρώσεις κατά μέρη έχουμε

$$A_n^m := \int_{-1}^{1} P_n(t) \frac{d^m}{dt^m} g_n^m(t) dt,$$

όπου

$$g_n^m(t) = (t^2 - 1)^m \frac{d^m P_n(t)}{dt^m}, t \in [-1, 1]$$

και έτσι η συνάρτηση

$$\frac{d^m}{dt^m} g_n^m(t) = \frac{(n+m)!}{(n-m)!} a_n t^n + ...$$

είναι πολυώνυμο n-βαθμού. Τέλος λόγω της σχέσης ορθογωνιότητας των πολυωνύμων Legendre προκύπτει ότι

$$\frac{(n-m)!}{(n-m)!} A_n^m = \int_{-1}^{1} a_n t^n P_n(t) dt = \int_{-1}^{1} [P_n(t)]^2 dt = \frac{2}{2n+1}$$

και έτσι δείξαμε την ορθοκανονικότητα.

Έστω m σταθερό. Οι αντίστοιχες $P_n^m, n = m, m+1, ...$ είναι ορθογώνιες και πλήρεις στον $L^2[-1, 1]$ αφού

$$span\{P_m^m, P_{m+1}^m, ...P_{m+n}^m\} = (1 - t^2)^{m/2} span\{1, .t^n\}. \quad (*)$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι αν

$$Y = span\{Y_n^m : m = -n...n \quad , n \in \mathbb{N}_0\}$$

τότε

$$\overline{Y}^{||\cdot||_{L^2}} = L^2[S(0, 1)].$$

Έστω $g \in C(S(0, 1))$ και έστω $\theta \in [0, 2\pi]$. Επειδή

$$\overline{span\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\phi} : m \in \mathbb{Z}\right\}} = L^2[0, 2\pi]$$

με το εσωτερικό γινόμενο $< f, g >= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$, *τότε απο την ταυτότητα Parseval*

$$2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} |g_m(\theta)|^2 = \int\limits_0^{2\pi} |g(\theta, \phi)|^2 d\phi$$

με όρους Fourier $g_m(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} g(\theta, \phi) e^{-im\phi} d\phi, m \in \mathbb{Z}$. *Έστω* m *ακέραιος, η* $g_m(\cdot)$ *είναι συνεχής. Για σταθερό* φ, *επειδή το ολοκλήρωμα*

$$\int\limits_0^{2\pi} \cdot \quad e^{-im\phi} d\phi =< \cdot, e^{im\cdot} >$$

είναι συνεχές γραμμικό συναρτησιακό (Riesz) και $g(\cdot, \phi)$ *συνεχής, η* $g_m(\cdot)$ *είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Μπορούμε να θεωρήσουμε την ακολουθία μερικών αθροισμάτων*

$$\left(\sum_{m=-n}^{n} |g_m(\theta)|^2 \right)_{n \in \mathbb{N}} : [0, \pi] \longrightarrow [0, +\infty)$$

Τότε επειδή είναι αύξουσα και ο μετρικός χώρος $([0, \pi], \rho_{||})$ *είναι συμπαγής, τότε η συνάρτηση ως προς* ϑ $\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} |g_m(\theta)|^2$ *συγκλίνει ομοιόμορφα στο [0,π] ως προς* ϑ. *Έστω* $\epsilon > 0$. *Από Dini* $\exists M > 0 :$ *(ομοιόμορφη σύγκλιση)*

$$\int\limits_0^{2\pi} |g(\theta, \phi) - \sum_{m=-M}^{M} g_m(\theta) e^{im\phi}|^2 d\phi$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} |g(\theta, \phi)|^2 d\phi - 2\pi \sum_{m=-M}^{M} |g_m(\theta)|^2 < \frac{\epsilon}{\pi} \quad , \forall \theta \in [0, \pi].$$

Ακόμα μπορούμε να βρούμε $N \in \mathbb{N}$ *και* $(\alpha_n)_{n=|m|}^{N} \subset \mathbb{C}$:

$$\int_0^{\pi} |g_m(\theta) - \sum_{n=|m|}^{N} a_n^m P_n^{|m|}(cos\theta)|^2 sin\theta d\theta < \frac{\epsilon}{8\pi(2M+1)^2},$$

$$m = -M, ...M,$$

λόγω της σχέσης$(*)$*(πυκνότητα της γραμμικής θήκης των συναρτήσεων Legendre στον* $L^2[-1,1]$*).Ψάχνουμε* $m', n'(m)$. *Έχουμε*

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} |g(\theta,\phi) - \sum_{m=-M}^{M}\sum_{n=|m|}^{N} a_n^m P_n^{|m|}(cos\theta)e^{im\phi}|^2 sin\theta d\phi d\theta < \epsilon.$$

Όμως για $m' = M, n' = N$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} |g(\theta,\phi) - \sum_{m=-M}^{M}\sum_{n=|m|}^{N} a_n^m P_n^{|m|}(cos\theta)e^{im\phi}|^2 sin\theta d\phi d\theta < \epsilon$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} |g(\theta,\phi) - \sum_{m=-M}^{M} g_m(\theta)e^{im\phi} + \sum_{m=-M}^{M} g_m(\theta)e^{im\phi}$$

$$+ \sum_{m=-M}^{M}\sum_{n=|m|}^{N} a_n^m P_n^{|m|}(cos\theta)e^{im\phi}|^2 sin\theta d\phi d\theta$$

$$\leq \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} |g(\theta,\phi) - \sum_{m=-M}^{M} g_m(\theta)e^{im\phi}|^2 sin\theta d\phi d\theta +$$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} | \sum_{m=-M}^{M} g_m(\theta)e^{im\phi} + \sum_{m=-M}^{M}\sum_{n=|m|}^{N} a_n^m P_n^{|m|}(cos\theta)e^{im\phi}|^2 sin\theta d\phi d\theta$$

$$\leq 2\frac{\epsilon}{4\pi}+\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}|\sum_{m=-M}^{M}(e^{im\phi}\{g_m(\theta)+\sum_{n=|m|}^{N}a_n^m P_n^{|m|}(cos\theta)\})|^2 sin\theta d\phi d\theta$$

$$\leq 2\frac{\epsilon}{4\pi}+\sum_{m=-M}^{M}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}|e^{im\phi}(g_m(\theta)+\sum_{n=|m|}^{N}a_n^m P_n^{|m|}(cos\theta)e^{im\phi})|^2 sin\theta d\phi d\theta$$

$$(Fubini)=\frac{\epsilon}{2\pi}+\sum_{m=-M}^{M}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}|g_m(\theta)+\sum_{n=|m|}^{N}a_n^m P_n^{|m|}(cos\theta)|^2 sin\theta d\theta d\phi$$

$$\leq \frac{\epsilon}{2\pi}+\sum_{m=-M}^{M}\int_0^{2\pi}\frac{\epsilon}{8\pi(2M+1)^2}d\phi$$

$$=\frac{\epsilon}{2\pi}+2\pi\frac{\epsilon}{8\pi(2M+1)^2}(2M+1)$$

$$=\epsilon\left(\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{4(2M+1)}\right)<\epsilon$$

$$\Rightarrow ||g(\cdot,\cdot)-\sum_{m=-M}^{M}\sum_{n=|m|}^{N}a_n^m P_n^{|m|}(cos\cdot)e^{im\cdot}||_{L^2[S(0,1)]}<\epsilon$$

$$\Rightarrow \overline{Y}^{L^2}=C[S(0,1)]$$

Επειδή

$$Y\subset Y\subset L^2\Rightarrow \overline{Y}\subset\overline{Y}\subset\overline{L^2}\Rightarrow$$

$$C\subset\overline{Y}\subset L^2\Rightarrow\overline{C}\subset\overline{\overline{Y}}\subset\overline{L^2}\Rightarrow L^2\subset\overline{Y}\subset L^2$$

$$\Rightarrow\overline{Y}=L^2[S(0,1)]$$

□

Θεώρημα 1.2.4 *Έστω* $\{Y_n^m : m = -n, ..n\}$ *τυχαίο σύστημα 2n+1 ορθοκανονικών σφαιρικών αρμονικών συναρτησεων. Τότε για κάθε* $x, y \in S(0,1)$*:*

$$\sum_{m=-n}^{n} Y_n^m(x)\overline{Y_n^m(y)} = \frac{2n+1}{4\pi} P_n(cos\theta), \quad \theta = \gamma\omega\nu\acute{\iota}\alpha(x,y) \tag{1.2.2}$$

Απόδειξη. *Ορίζουμε* $Y(x,y) = \sum_{m=-n}^{n} Y_n^m(x)\overline{Y_n^m(y)}$ *και θα δείξουμε ότι η* Y *εξαρτάται από τη γωνία* ϑ*. Επειδή κάθε ορθογώνιος πίνακας, δηλαδή* $Q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : QQ^* = I_3$*, εκφράζει μία στροφή στον χώρο, μετατρέπει ομογενή αρμονικά πολυώνυμα τάξης* n *ξανά σε αρμονικά ομογενή πολυώνυμα τάξης* n*. Τότε μπορούμε να γράψουμε*

$$Y_n^m(Qx) = \sum_{k=-n}^{n} a_{mk}\overline{Y_n^m(x)}, \quad (a_{mk})_{k\in\{-n,..n\}} \subset \mathbb{C}, \quad m = -n, ...n.$$

Αφού ο Q *εκφράζει μια στροφή στο χώρο έχουμε* $Q[S(0,1)] = S(0,1)$ *και τότε*

$$\int_{S(0,1)} Y_n^m(Qx)\overline{Y_n^m(Qx)}ds = \int_{S(0,1)} Y_n^m(z)\overline{Y_n^m(z)}ds = \delta_{nm}$$

αφού $Q : S(0,1) \longrightarrow S(0,1)$ *είναι* C^1*μετασχηματισμός* $(Q(x_1,x_2,x_3)^T = ... = (ax_1 + bx_2 + cx_3, \cdots, \cdots) \Rightarrow \frac{\partial Q(x_1,x_2,x_3)^T}{\partial x_i}$*συνεχής) και η ορίζουσα* $\frac{\partial Qx}{\partial x} = det(Q) = 1$ *(ορθογώνιος). Τελικά αποδεικνύεται ότι και ο πίνακας* $A = (a_{ij})_{(i,j)\in\{-n,...n\}X\{-n,...n\}}$ *είναι ορθογώνιος και τότε*

$$Y(Qx, Qy) = \sum_{m=-n}^{n} \{ \sum_{k=-n}^{n} a_{mk}Y_n^k(x) \sum_{l=-n}^{n} \overline{a_{ml}Y_n^l(y)}\}$$

$$=< A(Y_n^k(x))_{k=1,..n}, A(Y_n^k(y))_{k=1,..n} >$$
$$=< A^*AY_n^k(x))_{k=1,..n}, Y_n^k(y))_{k=1,..n} >$$
$$=< Y_n^k(x))_{k=1,..n}, Y_n^k(y))_{k=1,..n} >= \sum_{m=-n}^{n} Y_n^m(x)\overline{Y_n^m(y)} = Y(x,y)$$
$$\Rightarrow Y(Qx, Qy) = Y(x,y)$$

άρα τελικά αφού σε στροφές δεν αλλάζει η τιμή του $Y(\cdot,\cdot)$, το μόνο που μπορεί να επηρεάσει την τιμή του είναι η γωνία μεταξυ x και y άρα

$$Y(x,y) = h(cos\theta)$$

και επειδή μπορούμε να θεωρήσουμε το y σταθερο, η $\Upsilon(\cdot, y)$ είναι σφαιρική αρμονική. Τελικά θεωρώντας πολικές συντεταγμένες και ως πολικό άξονα την ευθεία $\{\lambda y : \lambda \in \mathbb{R}\}$ προκύπτει $h = a_nP_n$ για κάποιο μιγαδικό a_n και $\sum_{m=-n}^{n} Y_n^m(x)\overline{Y_n^m(y)} = a_nP_n(cos\theta)$. Για $x = y$ και επειδή $P_n(1) = 1$, έχουμε

$$a_n = \sum_{m=-n}^{n} |Y_n^m(x)|^2 \Rightarrow a_n \int_{S(0,1)} ds(x) = \sum_{m=-n}^{n} \int_{S(0,1)} |Y_n^m(x)|^2 ds(x)$$

$$\Rightarrow a_n 4\pi = \sum_{m=-n}^{n} 1 = 2n+1 \Rightarrow a_n = \frac{2n+1}{4\pi}$$

□

1.3 Σφαιρικές Συναρτήσεις Bessel

Σε αυτή την ενότητα αναζητούμε λύσεις της διαφορικής εξίσωσης Helmholtz της μορφής $u(x) = f(k|x|)Y_n(\frac{x}{|x|})$ *(όχι σε συκγκεκριμένα χωρία) όπου η* $Y_n(\cdot)$ *είναι σφαιρική αρμονική συνάρτηση. Από την λαπλασιανή σε σφαιρικές συντεταγμένες*

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}\right]$$

προκύπτει ότι η u λύνει την Helmholtz αν η f ικανοποιεί τη σφαιρικη διαφορική εξίσωση Bessel

$$t^2 f''(t) + 2tf'(t) + [t^2 - n(n+1)]f(t) = 0 \tag{1.3.1}$$

Ορισμός 1.3.1 *Έστω ακολουθία πραγματικών συναρτήσεων* $(j_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *με τύπο*

$$j_n(t) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p t^{n+2p}}{2^p \cdot p! \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2n+2p+1)}$$

Η j_n *ονομάζεται* ***σφαιρική συνάρτηση Bessel****.*

Ορισμός 1.3.2 *Έστω ακολουθία πραγματικών συναρτήσεων* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *με τύπο*

$$y_n(t) = -\frac{(2n)!}{2^n n!}\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p t^{2p-n-1}}{2^p \cdot p! \cdot (-2n+1)\cdot(-2n+3)\cdots(-2n+2p-1)}$$

Η y_n *ονομάζεται* ***σφαιρική συνάρτηση Neumann****.*

Πρόταση 1.3.1 *Οι συναρτήσεις Neumann και Bessel λύνουν τη δ.ε. Bessel.*

Ορισμός 1.3.3 *Οι συναρτήσεις*

$$h_n^{(1)} = j_n + iy_n$$

$$h_n^{(2)} = j_n - iy_n$$

ονομάζονται συναρτήσεις Hankel πρώτου και δεύτερου είδους αντίστοιχα.

Πρόταση 1.3.2 *Οι συναρτήσεις Bessel είναι αναλυτικές στο* $\mathbb{R}$*, ενώ οι συναρτήσεις Hankel και Neumann είναι αναλυτικές στο* $(0, \infty)$*.*

Πρόταση 1.3.3 *Η ορίζουσα Wronski των* j_n, y_n*,* W *δίνεται από τον τύπο*

$$W(t) = j_n(t)y_n'(t) - j_n'(t)y_n'(t) = \frac{1}{t^2}.$$

Από τους πιο πάνω ορισμούς των συναρτήσεων προκύπτουν οι ασυμπτωτικοί τύποι

$$j_n(t) = \frac{t^n}{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right\}, \quad n \longrightarrow \infty$$

ομοιόμορφα σε συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}$ *και*

$$h_n^{(1)}(t) = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{it^{n+1}} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right\}, \quad n \longrightarrow \infty$$

ομοιόμορφα για συμπαγή υποσύνολα του $(0, \infty)$ *και επίσης*

$$h_n^{(1)}(t) = O\left\{ \left(\frac{2n}{et}\right)^n \right\}, \quad n \longrightarrow \infty$$

ομοιόμορφα για συμπαγή υποσύνολα του $(0, \infty)$*. Θέτοντας* $n = 0$ *στους ορισμούς των σειρών έχουμε ότι*

$$j_0(t) = \frac{sint}{t}, \quad y_0(t) = \frac{-cost}{t} \quad \text{και} \quad h_0^{(1,2)}(t) = \frac{e^{\pm it}}{\pm it}$$

Επίσης τελικά μπορούμε να βρούμε ότι

$$h_n^{(1)}(t) = (-i)^n \frac{e^{it}}{it} \left\{ 1 + \sum_{p=1}^{n} \frac{a_{pm}}{t^p} \right\}$$

και

$$h_n^{(2)}(t) = i^n \frac{e^{-it}}{-it} \left\{ 1 + \sum_{p=1}^{n} \frac{\overline{a_{pm}}}{t^p} \right\}$$

από όπου προκύπτουν οι ασυμπτοτικές σχέσεις

$$h_n^{(1,2)}(t) = \frac{1}{t} e^{\pm i(t - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{2})} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{t}\right) \right\}, \quad t \longrightarrow \infty$$

και

$$h_n^{(1,2)'}(t) = \frac{1}{t} e^{\pm i(t - \frac{n\pi}{2})} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{t}\right) \right\}, \quad t \longrightarrow \infty$$

Παρατήρηση 1.3.1 *Από τις προηγούμενες ασυμπτωτικές σχέσεις ως προς t, παιρνοντας το πραγματικό και το φανταστικό μέρος προκύπτουν οι ασυμπτωτικές συμπεριφορές για τις συναρτήσεις Bessel και Neumann αντίστοιχα.*

Θεώρημα 1.3.1 *Έστω Y_n σφαιρική αρμονική συνάρτηση τάξης n ,τότε η συνάρτηση u_n με τύπο $u_n(x) = j_n(k|x|)Y_n(\frac{x}{|x|})$ είναι ακέραια λύση της Helmholtz. Η συνάρτηση v_n με τύπο $v_n(x) = h_n^{(1)}(k|x|)Y_n(\frac{x}{|x|})$ είναι λύση της εξίσωσης Helmholtz που ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας, στο σύνολο $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.*

Απόδειξη. *Αρχικά παρατηρούμε ότι η u_n έχει τύπο της μορφής $f(k|x|)Y_n(\frac{x}{|x|})$, όπου $f = j_n$ και λύνει όπως προαναφέραμε την δ.ε. Bessel, άρα η u_n είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης Helmholtz τουλάχιστον στο $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Αρκεί να δείξουμε ότι είναι λύση και στο 0. Σε αυτή την περίπτωση ααρκει να γράψουμε $x = r\hat{x}, r = |x|, \hat{x} = x/|x|$ και $u_n(x) = j_n(kr)Y_n(\hat{x})$. Τότε για x=0 και για ένα τυχαίο $\hat{y} \in S(0,1)$ έχουμε $0_{\mathbb{R}^3} = 0\hat{y}$ και τότε $j_n(k0)Y_n(\hat{y}) = 0$.*

Έτσι ικανοποιείται η δ.ε. Helmholtz και στην αρχή των αξόνων, άρα η u_n είναι ακέραια λύση.

Όσον αφορά την v_n, επειδή η $h_n^{(1)}$ δεν είναι αναλυτική στο 0, τότε ούτε και η v_n είναι αναλυτική στο $0_{\mathbb{R}^3}$. Αυτό προκύπτει απο το Θεώρημα 1.1.3. Άρα η v_n είναι λύση στο $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Από τις προηγούμενες ασυμπτοτικές συμπεριφορές των συναρτήσεων Hankel ως προς t η v_n ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας και προκύπτει το ζητούμενο. □

Θεώρημα 1.3.2 *Έστω $\{Y_n^m : m = -n \cdots n, n \in \mathbb{N}_0\}$ ένα σύστημα ορθοκανονικών σφαιρικών αρμονικών συναρτήσεων. Τότε αν $|x| > |y|$ έχουμε*

$$\Phi(x,y) = \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}$$

$$= ik \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \sum_{m=-n}^{n} h_n^{(1)}(k|x|) Y_n^m\left(\frac{x}{|x|}\right) j_n(k|y|) \overline{Y_n^m\left(\frac{y}{|y|}\right)}$$

Η παραπάνω σειρά και οι σειρές των παραγώγων των όρων ως προς $|x|$ και ως προς $|y|$ συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα σε συμπαγή υποσύνολα του συνόλου $|x| > |y|$.

Πριν την απόδειξη αξίζει να κάνουμε μια παρατήρηση. Έστω $y \in \mathbb{R}^3$.Τότε θέτουμε $f(\cdot) = \Phi(\cdot, y)$ και θεωρούμε ότι το σύνολο $|x| > |y|$ είναι το $\{x \in \mathbb{R}^3 : |x| > |y|\}$. Αντίστοιχα αν θέσουμε $g(\cdot) = \Phi(x, \cdot)$ για καποιο $x \in \mathbb{R}^3$ τότε είναι το $\{y \in \mathbb{R}^3 : |x| > |y|\}$.

Απόδειξη. *Έστω $x, y \in \mathbb{R}^3$,$\hat{x} = \frac{x}{|x|}$, $\hat{y} = \frac{y}{|y|}$, $r > 0$ με $|x| > r$. Από την ταυτότητα Green έχουμε*

$$\int_{S(0,r)} \left\{ u_n^m(z) \frac{\partial \Phi(x,z)}{\partial \eta(z)} - \frac{\partial u_n^m(z)}{\partial \eta(z)} \Phi(x,z) \right\} ds(z) = 0, \quad |x| > r \ (*)$$

Πράγματι

$$\int\limits_{S(0,r)} \left\{ u_n^m(z) \frac{\partial \Phi(x,z)}{\partial \eta(z)} - \frac{\partial u_n^m(z)}{\partial \eta(z)} \Phi(x,z) \right\} ds(z)$$

$$= \int\limits_{B(0,r)} u_n^m(y)(\Delta + k^2)\Phi(x,y)dy$$

$$- \int\limits_{B(0,r)} \Phi(x,y)(\Delta + k^2)u_n^m(y)dy = \int\limits_{B(0,r)} u_n^m(y)(\Delta + k^2)\Phi(x,y)dy$$

(αφού η u_n^m ακέραια λύση)

$$= \int\limits_{B(0,r)} u_n^m(y)\delta_x(y)dy = 0, \quad x \notin B(0,r)$$

Επίσης

$$\int\limits_{S(0,r)} \left\{ v_n^m(z) \frac{\partial \Phi(x,z)}{\partial \eta(z)} - \frac{\partial v_n^m(z)}{\partial \eta(z)} \Phi(x,z) \right\} ds(z) = v_n^m(x),$$

$$|x| > r \quad (**).$$

Το παραπάνω έπεται από την εξωτερική ολοκληρωτική αναπαράσταση ακτινοβόλων λύσεων. (Αφού η v_n^m λύνει τη Helmholtz στο $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ μπορούμε να θεωρήσουμε ότι είναι λύση στο εξωτερικό της κλειστής μπάλας B[0,r]=$\overline{B(0,r)}$ και να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 1.1.5)

Έστω $z \in S(0,r)$. Τότε

$$u_n^m(z) = j_n(kr)Y_n^m(\hat{z})$$

και

$$\frac{\partial u_n^m}{\partial \eta}(z) = \frac{\partial u_n^m(r\hat{z})}{\partial r} = kj_n'(kr)Y_n^m(\hat{z}).$$

Ακόμα

$$v_n^m(z) = h_n^{(1)}(kr)Y_n^m(\hat{z}),$$
$$\frac{\partial v_n^m}{\partial \eta}(z) = kh_n^{(1)\prime}(kr)Y_n^m(\hat{z}).$$

Έστω το ίδιο x *,με* $|x| > r$ *. Από* $(*) \Rightarrow$

$$\int\limits_{S(0,r)} u_n^m(z)\frac{\partial \Phi(x,z)}{\partial \eta(z)}ds(z) = \int\limits_{S(0,r)} \frac{\partial u_n^m(z)}{\partial \eta(z)}\Phi(x,z)ds(z)$$

$$\Rightarrow j_n(kr)\int\limits_{S(0,r)} Y_n^m(\hat{x})\frac{\partial \Phi(x,z)}{\partial \eta(z)}ds(z)$$

$$= kj_n'(kr)\int\limits_{S(0,r)} Y_n^m(\hat{z})\Phi(x,z)ds(z) \quad (a)$$

Ακόμα έχουμε

$$v_n^m(x) = h_n^{(1)}(k|x|)Y_n^m(\hat{x})$$

$$= h_n^{(1)}(kr)\int\limits_{S(0,r)} Y_n^m(\hat{z})\frac{\partial \Phi(x,z)}{\partial \eta(z)}ds(z)$$

$$-kh_n^{(1)\prime}(kr)\int\limits_{S(0,r)} Y_n^m(\hat{z})\Phi(x,z)ds(z)$$

$$\Rightarrow j_n(kr)h_n^{(1)}(k|x|)Y_n^m(\hat{x})$$

$$= j_n(kr)h_n^{(1)}(kr)\int\limits_{S(0,r)} Y_n^m(\hat{z})\frac{\partial \Phi(x,z)}{\partial \eta(z)}ds(z)$$

$$-kj_n(kr)h_n^{(1)\prime}(kr)\int\limits_{S(0,r)} Y_n^m(\hat{z})\Phi(x,z)ds(z)$$

(και με τη βοήθεια της σχέσης (a))

$$= h_n^{(1)}(kr)kj_n'(kr) \int\limits_{S(0,r)} Y_n^m(\hat{z})\Phi(x,z)ds(z)$$

$$-kj_n(kr)h_n^{(1)\prime}(kr) \int\limits_{S(0,r)} Y_n^m(\hat{z})\Phi(x,z)ds(z)$$

$$= k\big\{h_n^{(1)}(kr)j_n'(kr) - j_n(kr)h_n^{(1)\prime}(kr)\big\} \int\limits_{S(0,r)} Y_n^m(\hat{z})\Phi(x,z)ds(z).$$

Επειδή

$$(j_n + iy_n)j_n' - (j_n' + iy_n')j_n = j_nj_n' + iy_nj_n' - j_nj_n - iy_n'j_n$$

$$= i(y_nj_n' - y_n'j_n) = i\frac{-1}{k^2r^2} = \frac{1}{ik^2r^2}$$

(ορίζουσα Wronksi), έχουμε

$$\frac{1}{ikr^2} \int\limits_{S(0,r)} Y_n^m(\hat{z})\Phi(x,z)ds(z) = j_n(kr)h_n^{(1)}(k|x|)Y_n^m(\hat{x}), \quad |x| > r.$$

Μεταφέρουμε την ολοκλήρωση στην μοναδιαία σφαίρα. Τότε το μέτρο θα γίνει $ds(\hat{z}) = \frac{1}{r^2}ds(z)$ *και θα έχουμε*

$$\int\limits_{S(0,1)} Y_n^m(\hat{z})\Phi(x,r\hat{z})ds(\hat{z}) = ikj_n(kr)h_n^{(1)}(k|x|)Y_n^m(\hat{x}), \quad |x| > r.$$

Έστω ξανά το ίδιο $x \in \mathbb{R}^3 : |x| > r$. *Από Θεώρημα 1.2.3 (ισοδύναμα θεωρώντας τα συζυγή πολυώνυμα)*

$$\Phi(x,\cdot) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0}\sum_{m=-n}^{n} < \Phi(x,\cdot), \overline{Y_n^m(\cdot)} > \overline{Y_n^m(\cdot)} \quad (L^2 - \text{ισότητα})$$

$$\Rightarrow \Phi(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0}\sum_{m=-n}^{n}\int_{S(0,1)} \Phi(x,r\hat{z})Y_n^m(\hat{z})ds(\hat{z})\overline{Y_n^m(\hat{y})}$$

$$\text{σ.π. για } y \in S(0,r).$$

(για να μην υπάρχει σύγχυση αναφέρουμε ότι απλά μεταβάλλοντας τα ορισματα στην παραπάνω γραμμη κατάλληλα, περνάμε από την $S(0,r)$ στην $S(0,1)$, π.χ. θέτοντας $y = r\hat{y}$, εξάλλου το r είναι προς το παρόν σταθερό)

Θέλουμε να δείξουμε ότι το παραπάνω όριο, δηλαδή η σειρά, συγκλίνει ομοιόμορφα σ.π. στην $S(0,r)$. Έστω $y \in S(0,r)\setminus Z$, όπου το Z έχει μέτρο 0 και έστω η ακολουθία με τύπο

$$\left(\sum_{m=-n}^{n} |j_n(kr)h_n^{(1)}(k|x|)Y_n^m(\hat{x})\overline{Y_n^m(\hat{y})}|\right)_{n\in\mathbb{N}_0} \subset \mathbb{R}, \quad \hat{y} = y/|y|$$

Έστω $n \in \mathbb{N}_0, y \in S(0,r)\setminus Z$, έχουμε

$$\sum_{m=-n}^{n} |j_n(kr)h_n^{(1)}(k|x|)Y_n^m(\hat{x})\overline{Y_n^m(\hat{y})}|$$

$$= |j_n(kr)h_n^{(1)}(k|x|)| \sum_{m=-n}^{n} |Y_n^m(\hat{x})\overline{Y_n^m(\hat{y})}|$$

(Θεώρημα 1.2.4)

$$= |j_n(kr)h_n^{(1)}(k|x|)| \cdot |P_n(cos\theta)|\frac{2n+1}{4\pi}$$

$$\leq \frac{2n+1}{4\pi}|j_n(kr)h_n^{(1)}(k|x|)| \quad (b)$$

αφού $|P_n(t)| \leq 1, t \in [-1,1]$, ϑ=γωνία(x,y).

Από τις ασυμπτωτικές σχέσεις για τις συναρτήσεις Hankel είδους 1 και τις συναρτήσεις Neumann ως προς n έχουμε

$$j_n(k|y|) = \frac{(k|y|)^n}{1\cdot 3\cdots(2n+1)}\left\{1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right\}, \quad n \longrightarrow \infty$$

$$j_n(k|y|) = \frac{(k|y|)^n}{1\cdot 3\cdots(2n+1)} + \frac{(k|y|)^n}{1\cdot 3\cdots(2n+1)} O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \longrightarrow \infty.$$

Αν θέσουμε

$$f_n = \frac{(k|y|)^n}{1\cdot 3\cdots(2n+1)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,$$

$$g_n = \frac{(k|y|)^n}{1\cdot 3\cdots(2n+1)} O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \longrightarrow \infty$$

τότε

$$f_n = O\left(\frac{(k|y|)^n}{1\cdot 3\cdots(2n+1)}\right), \quad n \longrightarrow \infty$$

και για το g_n ,$\exists M > 0, n_1 \in \mathbb{N}_0$*:*

$$|g_n| \leq \frac{k^n|y|^n}{1\cdot 3\cdots(2n+1)} \frac{M}{n} \leq \frac{Mk^n|y|^n}{1\cdot 3\cdots(2n+1)}, \quad \forall n \geq n_1$$

$$\Rightarrow g_n = O\left(\frac{(k|y|)^n}{1\cdot 3\cdots(2n+1)}\right), \quad n \longrightarrow \infty$$

$$\Rightarrow j_n(k|y|) = O\left(\frac{(k|y|)^n}{1\cdot 3\cdots(2n+1)}\right), \quad n \longrightarrow \infty \quad (1)$$

Παρόμοια για την $h_n^{(1)}$ *έχουμε*

$$h_n^{(1)}(k|x|) = \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{i(k|x|)^{n+1}} + \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{i(k|x|)^{n+1}} O\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$n \longrightarrow \infty$$

$$\Rightarrow$$

$$h_n^{(1)}(k|x|) = O\left(\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{(k|x|)^{n+1}}\right) + \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{i(k|x|)^{n+1}} O\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$n \longrightarrow \infty.$$

Αν

$$\tilde{g_n} = \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{i(k|x|)^{n+1}} O\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow \exists \tilde{M}, n_2 \in \mathbb{N}_0 :$$

$$|\tilde{g_n}| \leq \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{(k|x|)^{n+1}}\frac{\tilde{M}}{n}, \forall n \geq n_2 \Rightarrow$$

$$|\tilde{g_n}| \leq \frac{\tilde{M}1\cdot 3\cdots(2n-1)}{(k|x|)^{n+1}}, \forall n \geq n_2 \Rightarrow$$

$$\tilde{g_n} = O\left(\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{(k|x|)^{n+1}}\right), \quad n \longrightarrow \infty$$

τελικά καταλήγουμε στη σχέση

$$h_n^{(1)}(k|x|) = O(\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{(k|x|)^{n+1}}), \quad n \longrightarrow \infty \quad (2)$$

Από τις σχέσεις $(1),(2)$ *έχουμε ότι υπάρχουν* $M_1, M_2 > 0 \quad n_1, n_2 \in \mathbb{N}_0$*:*

$$|h_n^{(1)}(k|x|)| \leq M_1\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{(k|x|)^{n+1}}, \forall n \geq n_1$$

$$|j_n(k|y|)| \leq M_2\frac{(k|y|)^n}{1\cdot 3\cdots(2n+1)}, \forall n \geq n_2$$

Θέτουμε $n_0 = max\{n_1, n_2\}$*. Αν πάμε στη σχέση* (b) *και αντικαταστήσουμε τις δύο παραπάνω ανισότητες εχουμε*

$$\sum_{m=-n}^{n} |j_n(kr)h_n^{(1)}(k|x|)Y_n^m(\hat{x})\overline{Y_n^m(\hat{y})}|$$

$$\leq \frac{2n+1}{4\pi}M_1M_2\frac{|y|^n}{k|x|^{n+1}}\frac{1}{2n(2n+1)}, \quad \forall n \geq n_0$$

$$\Rightarrow \sum_{m=-n}^{n} |j_n(kr)h_n^{(1)}(k|x|)Y_n^m(\hat{x})\overline{Y_n^m(\hat{y})}| \leq \frac{M_1M_2|y|^n}{|x|4k\pi|x|^n}, \quad \forall n \geq n_0$$

$$\Rightarrow \sum_{m=-n}^{n} |j_n(kr)h_n^{(1)}(k|x|)Y_n^m(\hat{x})\overline{Y_n^m(\hat{y})}| \leq t_n,$$

$$\text{όπου } t_n = O\left(\frac{|y|^n}{|x|^n}\right), n \longrightarrow \infty.$$

Αν λάβουμε υπόψιν τα παραπάνω μπορούμε, να ορίσουμε την ακολουθία συναρτήσεων $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0} : D \longrightarrow \mathbb{C}$, *όπου*

$$D = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| > |y| = r\},$$

x *όπως πριν με τύπο*

$$f_n(x) = \sum_{m=-n}^{n} j_n(kr)h_n^{(1)}(k|x|)Y_n^m\left(\frac{x}{|x|}\right)\overline{Y_n^m\left(\frac{y}{|y|}\right)}, x \in D, n \in \mathbb{N}_0.$$

Τότε για ένα τυχαίο x *στο* D *έχουμε*

$$|f_n(x)| = \left|\sum_{m=-n}^{n} j_n(kr)h_n^{(1)}(k|x|)Y_n^m\left(\frac{x}{|x|}\right)\overline{Y_n^m\left(\frac{y}{|y|}\right)}\right|$$

$$\leq \sum_{m=-n}^{n} \left|j_n(kr)h_n^{(1)}(k|x|)Y_n^m\left(\frac{x}{|x|}\right)\overline{Y_n^m\left(\frac{y}{|y|}\right)}\right|$$

$$\Rightarrow \sum_{m=-n}^{n} \left|j_n(kr)h_n^{(1)}(k|x|)Y_n^m(\frac{x}{|x|})\overline{Y_n^m(\frac{y}{|y|})}\right| \leq M\frac{|y|^n}{|x|^n},$$

για κατάλληλα M ,$n^*, \forall n \geq n^*$.

Επειδή η ακολουθία $(\frac{|y|^n}{|x|^n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ *είναι αθροίσιμη δηλαδή* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{|y|^n}{|x|^n} < \infty$, $(|x| > |y|)$, *τότε και η* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}_0} |f_n(x)|$ *συγλίνει σημειακά για όλα τα* x *στο* D *στην οριακή συνάρτηση* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}_0} |f_n(\cdot)|$. *Αν όμως περιοριστούμε σε ένα οποιοδήποτε συμπαγές υποσύνολο* K *του* D, *επειδή η ακολουθία συναρτήσεων*

$$\left(\sum_{n=0}^{k} f_n\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$$

είναι αύξουσα, τότε από το θεώρημα του Dini έχουμε ομοιόμορφη σύγκλιση. Έστω τώρα $\epsilon > 0$, ψάχνουμε $m \in \mathbb{N}$:

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) - \sum_{n=0}^{m} f_n(x) \right| < \epsilon, \forall x \in K.$$

Επειδή όμως η $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}_0} |f_n(\cdot)|$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο K, υπάρχει n_0 ώστε για το δοθέν ϵ,

$$\left| \sum_{n\in\mathbb{N}_0} |f_n(x)| - \sum_{n=0}^{n_0} |f_n(x)| \right| = \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |f_n(x)| < \epsilon, \forall x \in K.$$

Τότε για $m = n_0$

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) - \sum_{n=0}^{m} f_n(x) \right| = \left| \sum_{n=n_0+1}^{\infty} f_n(x) \right| \leq \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |f_n(x)| < \epsilon,$$

$$\forall x \in K.$$

Τότε η $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}_0} f_n$ συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα σε συμπαγή υποσύνολα του D, άρα η σείρα

$$\Phi(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \sum_{m=-n}^{n} \int_{S(0,1)} \Phi(x, r\hat{z}) Y_n^m(\hat{z}) ds(\hat{z}) \overline{Y_n^m(\hat{y})} \Phi(x,y)$$

$$= ik \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \sum_{m=-n}^{n} h_n^{(1)}(k|x|) Y_n^m\left(\frac{x}{|x|}\right) j_n(k|y|) \overline{Y_n^m\left(\frac{y}{|y|}\right)}$$

συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα σε συμπαγή υποσύνολα του συνολου D.

Αρκεί να δείξουμε ότι η ακολουθία

$$\left(ik \sum_{n=0}^{\kappa} \sum_{m=-n}^{n} \frac{\partial [h_n^{(1)}(k|x|) Y_n^m(\frac{x}{|x|}) j_n(k|y|) \overline{Y_n^m(\frac{y}{|y|})}]}{\partial |x|} \right)_{\kappa\in\mathbb{N}_0}$$

συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα σε συμπαγή υποσύνολα του D. Αυτό γίνεται με παρόμοιο τρόπο με πριν (το ίδιο και για την παράγωγο ως προς $|y|$). $\square$

Πρόταση 1.3.4 *(Funk – Hecke) Έστω Y_n σφαιρική αρμονική συνάρτηση τάξης n. Έστω ακόμα $\hat{x} \in S(0,1)$ και $r > 0$. Τότε ισχύει ο τύπος*

$$\int\limits_{S(0,1)} e^{-ikr\hat{x}\cdot\hat{z}} Y_n(\hat{z}) ds(\hat{z}) = \frac{4\pi}{i^n} j_n(kr) Y_n(\hat{x}). \tag{1.3.2}$$

Απόδειξη. *Στην προηγούμενη απόδειξη βρήκαμε ότι*

$$\int\limits_{S(0,1)} Y_n(\hat{z})\Phi(x, r\hat{z}) ds(\hat{z}) = ikj_n(kr)h_n^{(1)}(k|x|)Y_n(\hat{x}), \quad |x| > r.$$

Επίσης στην απόδειξη του θεωρήματος 1.1.6 μπορούμε να βρούμε τον τύπο

$$\Phi(x, r\hat{z}) = \frac{1}{4\pi}\frac{e^{ik|x-r\hat{z}|}}{|x - r\hat{z}|} = \frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}\left\{e^{-ik\hat{x}r\hat{z}} + O\left(\frac{1}{|x|}\right)\right\}, |x| \longrightarrow \infty$$

και από την ασυμπτωτική συμπεριφορά των συναρτήσεων Hankel

$$h_n^{(1)}(k|x|) = \frac{1}{k|x|}e^{i(k|x| - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{2})}\left\{1 + O\left(\frac{1}{|x|}\right)\right\}, \quad |x| \longrightarrow \infty \iff$$

$$\begin{aligned} h_n^{(1)}(k|x|) &= \frac{e^{ik|x|}}{|x|}\frac{1}{ke^{i(n\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})}} + \frac{e^{ik|x|}}{|x|}\frac{1}{ke^{i(n\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})}}O\left(\frac{1}{|x|}\right) \\ &= \frac{e^{ik|x|}}{|x|}C + O\left(\frac{1}{|x|^2}\right), |x| \longrightarrow \infty \end{aligned}$$

Έστω x κατάλληλα μεγάλο, ώστε να ισχύουν οι παραπάνω ασυμπτωτικοί τύποι. Έστω δηλαδή $M > 0$: $|x| > M > r$. Τότε

$$\int\limits_{S(0,1)} Y_n(\hat{z})\frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}\left\{e^{-ik\hat{x}r\hat{z}} + O\left(\frac{1}{|x|}\right)\right\} ds(\hat{z})$$

$$= ikj_n(kr)\left[\frac{e^{ik|x|}}{|x|}C + O\left(\frac{1}{|x|^2}\right)\right]Y_n(\hat{x})$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\int\limits_{S(0,1)} Y_n(\hat{z})\frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}e^{-ik\hat{x}r\hat{z}}ds(\hat{z}) + \int\limits_{S(0,1)} Y_n(\hat{z})\frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}O\left(\frac{1}{|x|}\right)ds(\hat{z})$$

$$= ikj_n(kr)C\frac{e^{ik|x|}}{|x|}Y_n(\hat{x}) + ikj_n(kr)O\left(\frac{1}{|x|^2}\right)Y_n(\hat{x})$$

$$= ikj_n(kr)C\frac{e^{ik|x|}}{|x|}Y_n(\hat{x}) + O\left(\frac{1}{|x|^2}\right)$$

Επειδή

$$\int\limits_{S(0,1)} Y_n(\hat{z})\frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}O\left(\frac{1}{|x|}\right)ds(\hat{z}) = \int\limits_{S(0,1)} Y_n(\hat{z})O\left(\frac{1}{|x|^2}\right)ds(\hat{z}) = O\left(\frac{1}{|x|^2}\right)$$

τελικά

$$\int\limits_{S(0,1)} Y_n(\hat{z})\frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}e^{-ik\hat{x}r\hat{z}}ds(\hat{z}) + O\left(\frac{1}{|x|^2}\right)$$

$$= ikj_n(kr)C\frac{e^{ik|x|}}{|x|}Y_n^m(\hat{x}) + O\left(\frac{1}{|x|^2}\right), |x| \longrightarrow \infty$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{S(0,1)} Y_n(\hat{z})e^{-ik\hat{x}r\hat{z}}ds(\hat{z}) + \frac{|x|}{e^{ik|x|}}O\left(\frac{1}{|x|^2}\right)$$

$$= ikj_n(kr)CY_n^m(\hat{x}) + \frac{|x|}{e^{ik|x|}}O\left(\frac{1}{|x|^2}\right), |x| \longrightarrow \infty$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{S(0,1)} Y_n(\hat{z})e^{-ik\hat{x}r\hat{z}}ds(\hat{z}) + O\left(\frac{1}{|x|}\right)$$

$$= ikj_n(kr)CY_n(\hat{x}) + O\left(\frac{1}{|x|}\right), |x| \longrightarrow \infty$$

Στέλνοντας το $|x|$ *στο άπειρο*

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{S(0,1)} Y_n(\hat{z})e^{-ik\hat{x}r\hat{z}}ds(\hat{z}) = ikj_n(kr)CY_n^m(\hat{x}) \tag{1.3.3}$$

όπου $C=\frac{1}{ke^{i(n\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})}} = \frac{1}{k}\frac{1}{cos[(n+1)\frac{\pi}{2}]+isin[(n+1)\frac{\pi}{2})]}$. *Επαγωγικά μπορούμε να δείξουμε ότι* $cos[(n+1)\frac{\pi}{2}] + isin[(n+1)\frac{\pi}{2})] = i^{n+1}$, *άρα* $C = \frac{1}{i^{n+1}k}$ *και προκύπτει έτσι ο τύπος* $Funk - Hecke$. □

Πρόταση 1.3.5 *(Jacobi − Anger) Έστω* $x \in \mathbb{R}^3$. *Τότε*

$$e^{ikx\cdot d} = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} i^n(2n+1)j_n(k|x|)P_n(cos\theta)$$

όπου $d \in S(0,1)$, ϑ*=γωνία*(x,d) *και η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη για συμπαγή υποσύνολα του* $\mathbb{R}^3$

Απόδειξη. *Έστω* $x \in \mathbb{R}^3, d \in S(0,1)$. *Έχουμε*

$$e^{ikx\cdot d} = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} < e^{ikx(\cdot)}, Y_n(\cdot) > Y_n(d), \text{ στη μοναδιαία σφάιρα}$$

και επειδή μπορούμε να δείξουμε ότι η σύγκλιση ως προς n *για τις παραπανω συναρτήσεις είναι ομοιόμορφη, τότε η σχέση ισχύει για όλα τα στοιχεία της σφαίρας. Όμως*

$$< e^{ikx(\cdot)}, Y_n(\cdot) >= \int\limits_{S(0,1)} e^{ikx\hat{z}}\overline{Y_n(\hat{z})}ds(\hat{z}) = \int\limits_{S(0,1)} \overline{e^{-ikx\hat{z}}Y_n(\hat{z})}ds(\hat{z})$$

$$(Funk - Hecke) \quad = \frac{4\pi}{(-i)^n}j_n(k|x|)\overline{Y_n(\hat{x})} \Rightarrow$$

$$e^{ikxd} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4\pi}{(-i)^n}j_n(k|x|)\overline{Y_n(\hat{x})}Y_n(d)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4\pi}{(-i)^n} j_n(k|x|) \frac{2n+1}{4\pi} P_n(cos\theta)$$

όπου θ=γωνία(x,d). Επειδή $(i)^n(-i)^n = [(i)(-i)]^n = (-i^2)^n = 1^n = 1$, *τελικά προκύπτει ότι*

$$e^{ikx\cdot d} = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} i^n(2n+1)j_n(k|x|)P_n(cos\theta) \text{ σημειακά για } x \in \mathbb{R}^3.$$

Όμως αν περιοριστούμε σε ένα συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$ *ακολουθώντας ακριβώς την ίδια τεχνική με αυτή που χρησιμοποιήσαμε στην απόδειξη του θεωρήματος 1.3.2, τελικά η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα για συμπαγή υποσύνολα του* $\mathbb{R}^3$. □

1.4 Το Μακρινό Πεδίο

Σε αυτή την ενότητα δείχνουμε μερικές ακόμα ιδιότητες των λύσεων της εξίσωσης Helmholtz, χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα των προηγούμενων ενοτήτων. Επίσης περιγράφουμε πως καθορίζεται μια λύση της εξίσωσης Helmholtz από το μακρινό της πεδίο.

Θεώρημα 1.4.1 *(Λήμμα Rellich) Έστω $D \subset \mathbb{R}^3$ φραγμένος τόπος ,ώστε $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$ μή φραγμένο και έστω $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D})$ λύση της Helmholtz τέτοια ώστε*

$$\lim_{r\to\infty} \int\limits_{S(0,r)} |u(x)|^2 ds(x) = 0 \tag{1.4.1}$$

Τότε $u(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$.

Απόδειξη. *Έστω $x \notin \overline{D}$. Από Θεώρημα 1.2.3*

$$u(x) = u(|x|\hat{x}) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \sum_{m=-n}^{n} a_n^m(|x|) Y_n(\hat{x})$$

όπου $a_n^m(|x|) = \int\limits_{S(0,1)} u(|x|\hat{x})\overline{Y_n^m(\hat{x})} ds(\hat{x})$.Από την ταυτότητα Parseval $(r = |x|)$

$$\int\limits_{S(0,r)} |u(x)|^2 ds(x) = r^2 \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \sum_{m=-n}^{n} |a_n^m(r)|^2. \quad (r^2 ds(\hat{x}) = ds(x))$$

επειδή

$$0 \le \sum_{n=0}^{k} \sum_{m=-n}^{n} r^2 |a_n^m(r)|^2 \le \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \sum_{m=-n}^{n} |a_n^m(r)|^2, \forall k \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow$$

$$0 \leq \lim_{r\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \sum_{m=-n}^{n} r^2 |a_n^m(r)|^2 \leq \sum_{n=0}^{k} \sum_{m=-n}^{n} \lim_{r\to\infty} r^2 |a_n^m(r)|^2$$

$$\leq \lim_{r\to\infty} \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \sum_{m=-n}^{n} |a_n^m(r)|^2 = \lim_{r\to\infty} \int_{S(0,r)} |u(x)|^2 ds(x) = 0, \forall k \in \mathbb{N}_0$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{n=0}^{k} \sum_{m=-n}^{n} \lim_{r\to\infty} r^2 |a_n^m(r)|^2 = 0, \forall k \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow$$

$$\lim_{r\to\infty} r^2 |a_n^m(r)|^2 = 0, \forall n \in \mathbb{N}_0, \forall m = -n...n \quad (*)$$

Αφού $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D})$ *μπορούμε να παραγωγήσουμε και να ολοκληρώσουμε κατά μερη, χρησιμοποιώντας την σφαιρική εξίσωση Laplace και το γεγονός ότι* $(\Delta + k^2)u = 0$. *Μπορούμε τελικά να βρούμε ότι οι συναρτήσεις* $(a_n^m(\cdot))_{n\in\mathbb{N}_0, m=-n...n}$ *λύνουν τη σφαιρική δ.ε Bessel*

$$\frac{d^2 a_n^m}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{da_n^m}{dr} + \left[k^2 - \frac{n(n+1)}{r^2}\right] a_n^m = 0$$

και τότε τελικά $a_n^m(r) = c_n^m h_n^{(1)}(kr) + d_n^m h_n^{(2)}(kr)$, *όπου* c_n^m, d_n^m *σταθερές,* $n \in \mathbb{N}_0, m = -n...n$.

Έστω $r > 0$, *τότε*

$$r^2 |a_n^m(r)| = r^2 c_n^m h_n^{(1)}(kr) + r^2 d_n^m h_n^{(2)}(kr) =$$

$$r^2 \left\{ |c_n^m|^2 |h_n^{(1)}(kr)|^2 + |d_n^m|^2 |h_n^{(2)}(kr)|^2 + 2Re(c_n^m h_n^{(1)}(kr) \overline{d_n^m h_n^{(2)}(kr)}) \right\}$$

$$(**)$$

Επειδή

$$h_n^{(1)}(kr) = \frac{e^{ikr}}{kr} C + O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad r \longrightarrow \infty$$

$$\text{και } h_n^{(2)}(kr) = \frac{e^{-ikr}}{kr} M + O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad r \longrightarrow \infty$$

$$\Rightarrow (h_n^{(1,2)}(kr))^2 = O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad r \longrightarrow \infty$$

και έχουμε ασυμπτωτικά ότι

$$(**) = r^2\left[|c_n^m|^2 O\left(\frac{1}{r^2}\right) + |d_n^m|^2 O\left(\frac{1}{r^2}\right) + 2Re\left(c_n^m \overline{d_n^m} O\left(\frac{1}{r^2}\right)\right)\right]$$

$$= \left[|c_n^m|^2 O(1) + |d_n^m|^2 O(1) + 2r^2 O\left(\frac{1}{r^2}\right) Re(c_n^m \overline{d_n^m})\right]$$

$$= [|c_n^m|^2 + |d_n^m|^2 + 2Re(c_n^m \overline{d_n^m})]O(1) = |c_n^m + d_n^m|^2 O(1)$$

και από την $(*)$ *για* $r \longrightarrow \infty$ *έχουμε*

$$|c_n^m + d_n^m| = 0, \forall n \in \mathbb{N}_0, m = -n...n$$

Αν $c_n^m = -d_n^m \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}_0, m = -n...n,$ *τότε*

$$a_n^m = c_n^m[h_n^{(1)} - \overline{h_n^{(1)}}] = 2c_n^m[iy_n]$$

και από την ασυμπτωτική συμπεριφορά

$$y_n(kr) = \frac{sin(kr)}{r} C\left[1 + O\left(\frac{1}{r}\right)\right], \quad r \longrightarrow \infty,$$

άρα $|y_n(kr)|^2 = O(\frac{1}{r^2}), r \longrightarrow \infty$ *και έτσι ασυμπττωτικά* $r^2|a_n^m(r)| = 2(c_n^m)^2 O(1) \Rightarrow$ *στέλνοντας το* r *στο άπειρο* $c_n^m = 0$ *για όλα τα* n *και* m *, όμως τότε* $c_n^m = d_n^m = 0, \forall n \in \mathbb{N}_0, m = -n...n.$ *Άρα για τα* y *όπου* $|y| \geq |x| = r$ *ισχύει* $u(y) = 0$ *και λόγω αναλυτικότητας έχουμε* $u(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}.$ □

Θεώρημα 1.4.2 *Έστω* $D \subset \mathbb{R}^3$ *φραγμένος τόπος, ώστε* $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$ *μή φραγμένο και έστω* $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ *λύση της Helmholtz* $(k > 0)$ *που ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας, η οποία λαμβάνει κάθετη παράγωγο στο σύνορο με την έννοια ότι το όριο*

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x) = \lim_{h \to 0_+} \eta(x) \cdot gradu(x - h\eta(x)) \quad x \in \partial D$$

υπάρχει ομοιόμορφα $\forall x \in \partial D$ *και ακόμα ισχύει*

$$Im\Big(\int\limits_{\partial D} u\frac{\partial \overline{u}}{\partial \eta}ds\Big) \geq 0$$

τότε $u(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$.

Απόδειξη. *Από την απόδειξη του Θεώρηματος 1.1.5 έχουμε ότι*

$$\lim_{r\to\infty}\int\limits_{S_r}\left|\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|^2 + k^2|u|^2 ds = -2kIm\Big(\int\limits_{\partial D} u\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}ds\Big).$$

Επειδή

$$-2kIm\Big(\int\limits_{\partial D} u\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}ds\Big) \leq 0 \Rightarrow 0 \leq \lim_{r\to\infty}\int\limits_{S_r}\left|\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|^2 + k^2|u|^2 ds \leq 0$$

και επειδή και τα δύο είναι θετικές ποσότητες έχουμε τελικά ότι $\int\limits_{S_r} k^2|u|^2 ds = 0$ *και σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα προκύπτει το ζητούμενο.* □

Θεώρημα 1.4.3 *Έστω* $D \subset \mathbb{R}^3$ *φραγμένος τόπος, ώστε* $\mathbb{R}^3\setminus\overline{D}$ *μή φραγμένο και έστω* $u \in C^2(\mathbb{R}^3\setminus\overline{D})$ *λύση της Helmholtz που ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας, για την οποία το μακρινό της πεδίο* (u_∞) *μηδενίζεται ταυτοτικά. Τότε* $u = 0$ *στο* $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$.

Απόδειξη. *Από το Θεώρημα 1.1.6 έχουμε*

$$u(x) = \frac{e^{ik|x|}}{|x|}\Big\{u_\infty(\hat{x}) + O\Big(\frac{1}{|x|}\Big)\Big\}, |x| \longrightarrow \infty$$

$$\Rightarrow u(x) = \frac{e^{ik|x|}}{|x|}O\Big(\frac{1}{|x|}\Big) = O\Big(\frac{1}{|x|^2}\Big), |x| \longrightarrow \infty$$

$$\Rightarrow (\text{ασυμπτωτικά }) \int\limits_{S(0,r)} |u(x)|^2 ds(x) = \int\limits_{S(0,r)} \left|O\Big(\frac{1}{|x|^2}\Big)\right|^2 ds(x)$$

άρα αν $x \in S(0,r)$ *τότε* $|x| = r$ *και*

$$\int\limits_{S(0,r)} |u(x)|^2 ds(x) = O\left(\frac{1}{r^4}\right) \int\limits_{S(0,r)} ds(x) = O\left(\frac{1}{r^2}\right), r \longrightarrow \infty.$$

Στέλνοντας το r *στο άπειρο συνεπάγεται ότι*

$$\lim_{r\to\infty} \int\limits_{S(0,r)} |u(x)|^2 ds(x) = 0$$

και από το λήμμα Rellich (1.13) προκύπτει το ζητούμενο. □

Μπορούμε να θεωρήσουμε την γραμμική απεικόνιση A *που απεικονίζει λύσεις της εξίσωσης Helmholtz που ικανοποιούν τη συνθήκη ακτινοβολίας στα μακρινά τους πεδία. Συμβολικά* $Au = u_\infty$. *Από το Θεώρημα 1.1.3 μπορούμε να συμπεράνουμε το παρακάτω.*

Λήμμα 1.4.1 *Η απεικόνιση* A *είναι 1-1 .*

Απόδειξη. *Έστω* $u \in ker(A)$. *Τότε* $Au = u_\infty = 0$, $\Rightarrow$*(Θεώρημα 1.4.1)* $u = 0 \Rightarrow ker(A) \subseteq \{0\}$. □

Θεώρημα 1.4.4 *Έστω* $R > 0$ *καί έστω* u *λύση της Helmholtz ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας στο εξωτερικό της σφαίρας* $\{x \in \mathbb{R}^3 : |x| > R\}$. *Τότε η* u *μπορεί να γραφεί ως*

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} a_n^m h_n^{(1)}(k|x|) Y_n^m\left(\frac{x}{|x|}\right)$$

και η σύγκλιση είναι απόλυτη και ομοιόμορφη για συμπαγή υποσύνολα του εξωτερικού της σφαίρας. Αντίστροφα, αν η σειρά συγκλίνει με την $L^2[S(0,R)]$ *έννοια (με την ανίστοιχη νόρμα) τότε συγκλίνει και απόλυτα και ομοιόμορφα σε συμπαγή υποσύνολα του εξωτερικού της σφαίρας και τέλος παριστάνει λύση της Helmholtz που ικανοποιεί την συνθήκη ακτινοβολίας στο εξωτερικό της σφαίρας.*

Απόδειξη. *Έστω* $R > 0, u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B(0,R)})$ *λύση της εξίσωσης Helmholtz που ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας στο ίδιο σύνολο. Έστω* $r > R$. *Η* u *είναι επίσης λύση που ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας και για τα* $x \notin B[0.r] = \overline{B(0,r)}$. *Τότε, όπως δείξαμε στο Θεώρημα 1.1.5*

$$u(x) = \int\limits_{S(0,r)} \left\{ u(y) \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \eta(y)} - \frac{\partial u}{\partial \eta}(y) \Phi(x,y) \right\} ds(y),$$

$$x \in \mathbb{R}^3 \setminus B[0,r]$$

Έστω $x \in \mathbb{R}^3 \setminus B[0,r]$. *Από το Θεώρημα 1.3.2, έχουμε*

$$\Phi(x,y) = \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}$$

$$= ik \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \sum_{m=-n}^{n} h_n^{(1)}(k|x|) Y_n^m\left(\frac{x}{|x|}\right) j_n(k|y|) \overline{Y_n^m\left(\frac{y}{|y|}\right)}$$

ομοιόμορφα για $y \in S(0,R)$ *και ακόμα*

$$\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \eta(y)} = \frac{\partial \Phi(x,|y|,\hat{y})}{\partial |y|}$$

$$= ik \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \sum_{m=-n}^{n} h_n^{(1)}(k|x|) Y_n^m(\hat{x}) k j_n'(k|y|) \overline{Y_n^m(\hat{y})}$$

ομοιόμορφα για $y \in S(0,r)$. *Για* $y \in S(0,r)$ *ομοιόμορφα έχουμε ότι*

$$u(y) ik \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \sum_{m=-n}^{n} h_n^{(1)}(k|x|) Y_n^m(\hat{x}) k j_n'(k|y|) \overline{Y_n^m(\hat{y})} -$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(y) ik \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \sum_{m=-n}^{n} h_n^{(1)}(k|x|) Y_n^m(\hat{x}) j_n(k|y|) \overline{Y_n^m(\hat{y})}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \{u(y) ik^2 j_n'(k|y|) \overline{Y_n^m(\hat{y})}$$

$$-ik \frac{\partial u(y)}{\partial \eta(y)} j_n(k|y|) \overline{Y_n^m(\hat{y})} \} h_n^{(1)}(k|x|) Y_n^m(\hat{x})$$

και η παραπάνω σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα για $y \in S(0,r)$ *, αφού ισχύει το ίδιο και τους δύο όρους της προηγούμενης διαφοράς. Τότε χρησιμοποιώντας και το αμέσως προηγούμενο αποτέλεσμα, από το θεώρημα ομοιόμορφης σύγκλισης έχουμε*

$$u(x) = \int_{S(0,r)} u(y) ik \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \sum_{m=-n}^{n} h_n^{(1)}(k|x|) Y_n^m(\hat{x}) k j_n'(k|y|) \overline{Y_n^m(\hat{y})}$$

$$-\frac{\partial u}{\partial \eta}(y) ik \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \sum_{m=-n}^{n} h_n^{(1)}(k|x|) Y_n^m(\hat{x}) j_n(k|y|) \overline{Y_n^m(\hat{y})} ds(y)$$

$$= \int_{S(0,r)} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \{u(y) ik^2 j_n'(k|y|) \overline{Y_n^m(\hat{y})}$$

$$-ik \frac{\partial u(y)}{\partial \eta(y)} j_n(k|y|) \overline{Y_n^m(\hat{y})} \} h_n^{(1)}(k|x|) Y_n^m(\hat{x}) ds(y)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \int_{S(0,r)} \{u(y) ik^2 j_n'(k|y|) \overline{Y_n^m(\hat{y})}$$

$$-ik \frac{\partial u(y)}{\partial \eta(y)} j_n(k|y|) \overline{Y_n^m(\hat{y})} \} ds(y) h_n^{(1)}(k|x|) Y_n^m(\hat{x})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} a_n^m h_n^{(1)}(k|x|) Y_n^m(\hat{x})$$

όπου κάθε όρος a_n^m *ισούται με το αντίστοιχο ολοκλήρωμα.*

Άρα $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} a_n^m h_n^{(1)}(k|x|) Y_n^m(\hat{x})$ *σημειακά για κάθε* $x \in \mathbb{R}^3 \setminus B[0,r]$*. Επειδή η* u *είναι τουλάχιστον συνεχής στο*

$\mathbb{R}^3 \setminus B[0,r]$ *και η ακολουθία συναρτήσεων*

$$\left(\sum_{n=0}^{\kappa}\sum_{m=-n}^{n} a_n^m h_n^{(1)}(k|x|)Y_n^m(\hat{x})\right)_{\kappa\in\mathbb{N}_0},$$

είναι και αυτή συνεχής στο $\mathbb{R}^3 \setminus B[0,r]$*, από το θεώρημα του Dini, η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα σε συμπαγή υποσύνολα του* $\mathbb{R}^3 \setminus B[0,r]$*. Με παρόμοιες τεχνικές, από τις ασυμπτωτικές συμπεριφορές των Hankel και Bessel μπορούμε να δείξουμε ότι η σειρά*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} |a_n^m h_n^{(1)}(k|x|)Y_n^m(\hat{x})|$$

συγκλίνει απόλυτα (σημειακά αρχικά) και ομοιόμορφα σε συμπαγή υποσύνολα του εξωτερικού της μπάλας (Dini).

Αντίστροφα, λόγω της $L^2[S(0,r)]$ *σύγκλισης, από την ταυτότητα Parseval*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} |a_n^m|^2 |h_n^{(1)}(kR)|^2 < \infty.$$

Από την ανισότητα Cauchy − Swartz, την ασυμπτωτική συμπεριφορά των συναρτήσεων Hankel και το Θεώρημα 1.2.4, για $R < R_1 \leq |x| \leq R_2$ *και* $N \in \mathbb{N}$

$$\left[\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=-n}^{n} |a_n^m h_n^{(1)}(k|x|)Y_n^m(\hat{x})|\right]^2$$

$$\leq \sum_{n=0}^{N}\left|\frac{h_n^{(1)}(k|x|)}{h_n^{(1)}(kR)}\right|^2 \sum_{m=-n}^{n} |Y_n^m(\hat{x})|^2 \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=-n}^{n} |a_n^m h_n^{(1)}(kR)|^2$$

$$\leq C\sum_{n=0}^{N}(2n+1)\left(\frac{R}{|x|}\right)^{2n}$$

όπου η σταθερα C *εξαρτάται από τα* R, R_1, R_2*. Έτσι εξασφαλίζουμε την απόλυτη και ομοιόμορφη σύγκλιση της σειράς σε συμπαγή*

υποσύνολα του $\{x \in \mathbb{R}^3 : |x| > R\}$. *Τέλος, χρησιμοποιώντας την Πρόταση 1.3.3, το Θεώρημα 1.2.4 και την ορθογωνιότητα των σφαιρικών αρμονικών συναρτήσων, μπορούμε να δείξουμε ότι η σειρά αντιπροσοπεύει λύση της εξίσωσης Helmholtz που ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας.* □

Θεώρημα 1.4.5 *Έστω u λύση της εξίσωσης Helmholtz που ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας, με ανάπτυγμα όπως στο προηγούμενο θεώρημα. Τότε το μακρινό πεδίο της δίνεται από την σειρά*

$$u_\infty = \frac{1}{k}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{i^{n+1}}\sum_{m=-n}^{n} a_n^m Y_n^m,$$

όπου η σερά συγκλίνει ομοιόμορφα στην $S(0,1)$. *Επίσης για τους όρους* $(a_n^m)_{n\in\mathbb{N}_0 m=-n\ldots n}$ *ισχύει*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{2n}{ker})^{2n}\sum_{m=-n}^{n}|a_n^m|^2 < \infty, \forall r > R$$

Απόδειξη. *Από το Θεώρημα 1.1.6 παρατηρούμε ότι το* u_∞ *είναι αναλυτική συνάρτηση.*

Έτσι $u_\infty \in L^2(S(0,1)) \Rightarrow u_\infty = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{m=-n}^{n} b_n^m Y_n^m$ *σ.π. στην* $S(0,1)$, *όπου* $b_n^m =< u_\infty, Y_n^m >_{L^2(S(0,1))} = \int\limits_{S(0,1)} u_\infty(r\hat{x})\overline{Y_n^m(\hat{x})}ds(\hat{x})$.

Από την άλλη μεριά, για τις σταθερές a_n^m *ισχύει από το προηγούμενο θεώρημα*

$a_n^m h_n^{(1)}(kr) = \int\limits_{S(0,1)} u(r\hat{x})\overline{Y_n^m(\hat{x})}ds(\hat{x}) =< u, Y_n^m >_{L^2(S(0,1))}$, *και από την ασυμπτωτική συμπεριφορά των Hankel συναρτήσων*

$$b_n^m = \int\limits_{S(0,1)} \lim_{r\to\infty} re^{-ikr}u(r\hat{x})\overline{Y_n^m(\hat{x})}ds(\hat{x})$$

$$= \lim_{r\to\infty} re^{-ikr} \int\limits_{S(0,1)} u(r\hat{x})\overline{Y_n^m(\hat{x})}ds(\hat{x}) = \frac{a_n^m}{ki^{n+1}}.$$

Η δεύτερη συνθήκη του θεωρήματος προκύπτει από από τον τύπο Parseval της u του προηγούμενου θεωρήματος

$$r^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} |a_n^m|^2 |h^{n(1)}(kr)|^2 = \int\limits_{(S(0,r))} |u(x)|^2 ds(x),$$

και την ασυμπτωτική συμπεριφορά των συναρτήσων Hankel ως προς το n. Τέλος από την ανισότητα Cauchy − Swartz μπορούμε να δείξουμε ότι η σύκλιση της σειράς είναι ομοιόμορφη. □

Θεώρημα 1.4.6 *Έστω οι συντελεστές Fourier* $(b_n^m)_{n\in\mathbb{N}_0}^{m=-n..n}$ *του μακρινού πεδίου* $u_\infty \in L^2(S(0,1))$, *ως προς την ανάπτυξη σε σφαιρικές αρμονικές συναρτήσεις. Τότε για* $R > 0$ *ισχύει*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{2n}{ker})^{2n} \sum_{m=-n}^{n} |b_n^m|^2 < \infty.$$

Επίσης η απεικόνιση u με τύπο

$$u(x) = k \sum_{n=0}^{\infty} i^{n+1} \sum_{m=-n}^{n} b_n^m h_n^{(1)}(k|x|) Y_n^m(\hat{x}), |x| > R$$

αποτελεί μια ακτινοβόλο λύση της εξίσωσης Helmholtz με μακρινό πεδίο το u_∞.

Απόδειξη. *Μπορούμε να δείξουμε ότι η σειρά*

$$u(x) = k \sum_{n=0}^{\infty} i^{n+1} \sum_{m=-n}^{n} b_n^m h_n^{(1)}(kR) Y_n^m(\hat{x})$$

συγκλίνει σ.π. στην S(0,R) ως προς την L^2 *νόρμα, χρησιμοποιώντας τον ασυμπτωτικό τύπο*

$$h_n^{(1)}(t) = O\left\{\left(\frac{2n}{et}\right)^n\right\}, n \longrightarrow \infty$$

και την υπόθεση του Θεωρήματος. Από το Θεώρημα 1.4.4, η u είναι λύση της εξίσωσης Helmholtz που ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας και από το Θεώρημα 1.4.5, το μακρινό πεδίο ταυτίζεται με την απεικόνιση u_∞. $\square$

Κεφάλαιο 2

Ευθύ Πρόβλημα Σκέδασης

Σε αυτό το κεφάλαιο ορίζουμε τα δυναμικά απλού και διπλού στρώματος και δείχνουμε τις βασικές ιδιότητες τους. Ακόμα θα χρησιμοποιήσουμε τους τελεστές που ορίζουν τα δυναμικά έτσι ώστε να δείξουμε την καλή τοποθέτηση του ευθέος προβλήματος σκέδασης.

2.1 Δυναμικά Απλού και Διπλού Στρώματος

Σε αυτή την ενότητα περιγράφουμε τις βασικές ιδιότητες των δυναμικών απλού και διπλού στρώματος και τις βασικές ιδιότητες των τελεστών που ορίζουν τα δυναμικά. Θεωρούμε ένα μη φραγμένο χωρίο ομαλότητας C^2 όπου με D συμβολίζουμε το ανοικτό φραγμένο συμπλήρωμά του.

Ορισμός 2.1.1 *Έστω ϕ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε οι συναρτήσεις*

$$u(x) = \int_{\partial D} \phi(y)\Phi(x,y)ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial D$$

$$v(x) = \int_{\partial D} \phi(y)\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \eta(y)}ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial D$$

ονομάζονται δυναμικό απλού και διπλού στρώματος αντίστοιχα ή αλλιώς απλό και διπλό δυναμικό.

Πρόταση 2.1.1 *Οι συναρτήσεις u, v αποτελούν ακτινοβόλους λύσεις της εξίσωσης Helmholtz στο $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$ και λύσεις στο D.*

Απόδειξη. *Είναι εύκολο να δούμε ότι οι u, v είναι λύσεις της εξίσωσης Helmholtz, λόγω της εναλαγής παραγώγισης και ολοκλήρωσης (ο τελεστής $(\Delta+k^2)_x$ περνάει μέσα στο ολοκλήρωμα διότι δρα στην Θεμελιώδη λύση, η οποία είναι αναλυτική συνάρτηση). Το γεγονός ότι τα δυναμικά αποτελούν λύσεις που ικανοποιούν την συνθήκη ακτινοβολίας οφείλεται πάλι στην ασυμπτωτική συμπεριφορά της Θεμελιώδους λύσης.* □

Θεώρημα 2.1.1 *Έστω ∂D κλάσης C^2 και ϕ συνεχής, τότε το δυναμικό απλού στρώματος u με πυκνότητα $\phi \in C(\mathbb{R}^3)$, είναι συνεχές στο $\mathbb{R}^3$ και υπάρχει $C > 0$ που εξαρτάται από το ∂D ώστε $||u||_{\infty,\mathbb{R}^3} \leq C||\phi||_{\infty,\partial D}$. Έτσι η u επεκτείνεται συνεχώς στο σύνορο με τύπο*

$$u(x) = \int_{\partial D} \phi(y)\Phi(x,y)ds(y), \quad x \in \partial D. \tag{2.1.1}$$

Για την κάθετη παράγωγο στο σύνορο ισχύει

$$\frac{\partial u_\pm}{\partial \eta}(x) = \int_{\partial D} \phi(y)\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \eta(y)}ds(y) \mp \frac{1}{2}\phi(x), \quad x \in \partial D, \tag{2.1.2}$$

όπου $\frac{\partial u_\pm}{\partial \eta}(x) = \lim_{h\to 0_+} \eta(x) gradu(x \pm h\eta(x))$.

Το διπλό δυναμικό μπορεί να έχει συνεχή επέκταση από το D στο $\overline{D}$ και από το $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$ στο $\mathbb{R}^3 \setminus D$, με οριακές τιμές

$$v_\pm(x) = \int_{\partial D} \phi(y)\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \eta(y)}ds(y) \pm \frac{1}{2}\phi(x), \quad x \in \partial D, \tag{2.1.3}$$

όπου $v_+(x) := \lim_{h\to 0_+} v(x+h\eta(x)) = \lim_{y\to x, y\in\mathbb{R}^3\setminus\overline{D}} v(y),$

$$v_-(x) := \lim_{h\to 0_+} v(x-h\eta(x)) = \lim_{y\to x, y\in D} v(y).$$

Ακόμα για $C>0$ *που εξαρτάται από το* ∂D

$$||v||_{\infty,\overline{D}} \le C||\phi||_{\infty,\partial D}, \quad ||v||_{\infty,\mathbb{R}^3\setminus D} \le C||\phi||_{\infty,\partial D}$$

και

$$\lim_{h\to 0_+}\left(\frac{\partial v}{\partial\eta}(x+h\eta(x)) - \frac{\partial v}{\partial\eta}(x-h\eta(x))\right) = 0, \quad \text{ομοιόμορφα στο } \partial D. \tag{2.1.4}$$

Ορισμός 2.1.2 *Μία συνάρτηση* $\phi : G\subset\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *ή* $\mathbb{C}$ *ονομάζεται Hölder συνεχής με εκθέτη* $a\in(0,1]$, *αν* $\exists C>0$:

$$|\phi(x)-\phi(y)| \le C|x-y|^a, \quad \forall x,y\in G.$$

Ορισμός 2.1.3 *Έστω* $G\subset\mathbb{R}^3$. *Ο χώρος των φραγμέων και Hölder συνεχών συναρτήσεων συμβολίζεται με* $C^{0,a}(G)$, *ονομάζεται χώρος Hölder .*

Θεώρημα 2.1.2 *Ο χώρος* $(C^{0,a}(G), ||\cdot||_a)$, *όπου*

$$|\phi|_a = ||\phi||_{a,G} = \sup_{x\in G}|\phi(x)| + \sup_{x,y\in G, x\neq y}\frac{|\phi(x)-\phi(y)|}{|x-y|^a},$$

είναι χώρος Banach.

Ορισμός 2.1.4 $C^{1,a}(G) := \{\phi\in C^1(G) : grad\phi\in C^{0,a}(G)\}$

Θεώρημα 2.1.3 *Αν εφοδιάσουμε τον χώρο* $C^{1,a}(G)$ *με τη νόρμα*

$$||\phi||_{1,a} = ||\phi||_{1,a,G} = ||\phi||_\infty + ||grad\phi||_{0,a} =$$

$$\sup_{x\in G}|\phi(x)| + \sup_{x\in G}|grad\phi(x)| + \sup_{x,y\in G, x\neq y}\frac{|grad\phi(x)-grad\phi(y)|}{|x-y|^a},$$

τότε γίνεται χώρος Banach.

Παρατήρηση 2.1.1 *Αν η ϕ έχει τιμές στο $\mathbb{R}^k$, τότε αντικαθιστούμε την $|\cdot|$ με την κατάλληλη ευκλείδια νόρμα $||\cdot||$. Επίσης αν το $G = \partial D$ ενός συνόλου D, τότε το grad αντικαθίσταται με το Grad (απόκλιση σε τοπικές καμπυλόγραμμες συντεταγμένες).*

Θα θυμίσουμε μερικά αποτελέσματα από την πραγματική ανάλυση που θα μας φανούν χρήσιμα.

Ορισμός 2.1.5 *Έστω (X,ρ), (Υ, d) μετρικοί χώροι, F μια οικογένεια συναρτήσεων από τον (X,ρ) στον (Υ,d) και $x_0 \in X$. Η οικογένεια F καλείται ισοσυνεχής στο x_0 αν $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in X$ με $\rho(x, x_0) < \delta$ και $\forall f \in F$ να ισχύει $d(f(x), f(x_0) < \epsilon$.*

Αν η F είναι ισοσυνεχής για κάθε σημείο του X, τότε η F καλείται ισοσυνεχής οικογένεια συναρτήσεων στο X.

Θεώρημα 2.1.4 *(Arzela – Ascoli) Έστω $G \subset \mathbb{R}^k$ συμπαγές. Τότε*

$K \subset (C(G), ||\cdot||_\infty)$ σχετικά συμπαγές $\iff$ K φραγμένο και ισοσυνεχές σύνολο.

Θεώρημα 2.1.5 *Έστω $0 < a < b \leq 1, G$ συμπαγές. Τότε οι τελεστές εμφύτευσης*

$$I^b : C^{0,b}(G) \longrightarrow C(G)$$
$$I^{a,b} : C^{0,b}(G) \longrightarrow C^{0,a}(G)$$

είναι συμπαγείς.

Απόδειξη. *Πρώτα δείχνουμε για τον $I^b : C^{0,b}(G) \longrightarrow C(G)$.Έστω $K \subset C^{0,b}(G)$ φραγμένο με την νόρμα $||\cdot||_b$. Θα δείξουμε ότι είναι σχετικά συμπαγές με την νόρμα $||\cdot||_\infty$.*

Αφού το $K \subset C^{0,b}(G)$ είναι $||\cdot||_b$-φραγμένο $\Rightarrow \exists C > 0 : ||\phi||_b \leq C, \forall \phi \in K$. Τότε

$$||\phi||_{b,G} = \sup_{x \in G} |\phi(x)| + \sup_{x,y \in G, x \neq y} \frac{|\phi(x) - \phi(y)|}{|x - y|^b} \leq C$$

$$\Rightarrow \sup_{x\in G} |\phi(x)| \leq C, \forall \phi \in K(*) \text{ και}$$

$$\sup_{x,y\in G, x\neq y} \frac{|\phi(x)-\phi(y)|}{|x-y|^b} \leq C, \forall \phi \in K(**)$$

Η σχέση $(*) \Rightarrow |\phi(x)| \leq C, \forall x \in G, \forall \phi \in K$, *όμως αυτό σημαίνει ότι*

$$\sup_{x\in G} |\phi(x)| = ||\phi||_\infty \leq C, \forall \phi \in K$$

$$\Rightarrow diam_{||\cdot||_\infty}(K) \leq C$$

$\Rightarrow$ *το* K *είναι* $||\cdot||_\infty-$*φραγμένο. Θα δείξουμε ότι είναι και ισοσυνεχές.*

Έστω τότε $\epsilon > 0, x, y \in G, \phi \in K$. *Αν θέσουμε* $\delta = (\frac{\epsilon}{C})^{\frac{1}{b}}$. *Τότε αν* $||x-y|| \leq \delta$, *από τη σχέση* $(**)$ *έχουμε*

$$|\phi(x)-\phi(y)| \leq C||x-y||^b < C\frac{\epsilon}{C} = \epsilon.$$

Άρα $\forall \phi \in K, \forall x.y \in G$, *αν* $||x-y|| < \delta \Rightarrow |\phi(x)-\phi(y)| \leq \epsilon$. *Έτσι το* K *είναι ισοσυνεχές και φραγμένο άρα απο το Θεώρημα 2.1.4 το* K *είναι σχετικά συμπαγές υποσύνολο του* $(C(G), ||\cdot||_\infty)$. *Άρα η πρώτη εμφύτευση είναι συμπαγής.*

Έστω ακόμα $\phi, \psi \in K \Rightarrow$

$$|[\phi(x)-\psi(x)]-[\phi(y)-\psi(y)]|^{\frac{a}{b}} \cdot |[\phi(x)-\psi(x)]-[\phi(y)-\psi(y)]|^{1-\frac{a}{b}}$$

$$\leq (2C)^{\frac{a}{b}}||x-y||^a(2||\phi-\psi||_\infty)^{1-\frac{a}{b}}$$

$$\Rightarrow ||\phi-\psi||_a \leq (2C)^{\frac{a}{b}}2^{1-\frac{a}{b}}||\phi-\psi||_\infty, \forall \phi, \psi \in K.$$

Άρα αν επιλέξουμε μια ακολουθία του $K, ||\cdot||_\infty-$ *συγκλίνουσα τότε είναι και* $||\cdot||_a-$ *συγκλίνουσα.*

Άρα η απεικόνιση $I : C(G) \longrightarrow C^{0,a}(G)$, *είναι συνεχής (φραγμένος) και επιπλέον επειδή* $I^{a,b} = I^b(I) : C^{0,b}(G) \longrightarrow C^(0,a)$ *είναι*

συμπαγής ως σύνθεση φραγμένου με συμπαγή τελεστή. $\square$

Θεώρημα 2.1.6 *Έστω ∂D κλάσης C^2, $0 < a < 1$. Τότε το δυναμικό απλού στρώματος u με πυκνότητα $\phi \in C(\partial D)$, είναι ομοιόμορφα Hölder συνεχές στο $\mathbb{R}^3$ και υπάρχει σταθερά C_a : $||u||_{a,\mathbb{R}^3} \leq C_a||\phi||_{\infty,\partial D}$.*

Αν ακόμα $\phi \in C^{0,a}(\partial D)$, τότε οι πρώτες παράγωγοι μπορούν να επεκταθούν με Hölder συνεχή τρόπο ομοιόμορφα από το D στο $\overline{D}$ και από το $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$ στο $\mathbb{R}^3 \setminus D$, με οριακές τιμές στο σύνορο

$$gradu_{\pm}(x) = \int\limits_{\partial D} \phi(y) grad_x \Phi(x,y) ds(y) \mp \frac{1}{2}\phi(x)\eta(x), \quad x \in \partial D \tag{2.1.5}$$

όπου όπως σε προηγούμενο θεώρημα

$$gradu_{\pm} = \lim_{h \to 0_+} gradu(x \pm h\eta(x)).$$

Οι πρώτες παράγωγοι μπορούν να επεκταθούν με Hölder συνεχή τρόπο ομοιόμορφα από το D στο $\overline{D}$ και από το $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$ στο $\mathbb{R}^3 \setminus D$ ώστε $||gradu||_{a,\overline{D}} \leq C_a||\phi||_{a,\partial D}$, $||gradu||_{a,\mathbb{R}^3\setminus D} \leq C_a||\phi||_{a,\partial D}$.

Το διπλό δυναμικό με πυκνότητα $\phi \in C^{0,a}(\partial D)$ μπορεί να επεκταθεί με ομοιόμορφα Hölder συνεχή τρόπο από το D στο $\overline{D}$ και από το $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$ στο $\mathbb{R}^3 \setminus D$ και υπάρχει σταθερά C_a που εξαρτάται από το σύνορο και το a τέτοια ώστε $||v||_{a,\mathbb{R}^3} \leq C_a||\phi||_{a,\partial D}$.

Οι πρώτες παράγωγοι του διπλού δυναμικού με πυκνότητα $\phi \in C^{1,a}(\partial D)$ μπορούν να επεκταθούν με ομοιόμορφο Hölder συνεχή τρόπο από το D στο $\overline{D}$ και από το $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$ στο $\mathbb{R}^3 \setminus D$ ώστε $||gradv||_{a,\overline{D}} \leq C_a||\phi||_{1,a,\partial D}$, $||gradv||_{a,\mathbb{R}^3\setminus D} \leq C_a||\phi||_{1,a,\partial D}$.

Για μεγαλύτερη ευκολία στους υπολογισμους μας μπορούμε να εκφράσουμε τις ιδιότητες των απλών και διπλών δυναμικών, μέσω των τελεστών απλού και διπλού στρώματος, S, K αντίστοιχα.

$$(S\phi)(x) = 2\int\limits_{\partial D} \Phi(x,y)\phi(y)ds(y), \quad x \in \partial D$$

$$(K\phi)(x) = 2\int\limits_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \eta(y)}\phi(y)ds(y), \quad x \in \partial D$$

και οι τελεστές κάθετων παραγώγων K', T :

$$(K'\phi)(x) = 2\int\limits_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \eta(x)}\phi(y)ds(y), \quad x \in \partial D$$

$$(T\phi)(x) = 2\frac{\partial}{\partial \eta(x)}\int\limits_{\partial D} \Phi(x,y)\phi(y)ds(y), \quad x \in \partial D$$

Θεώρημα 2.1.7 *Έστω* ∂D *κλάσης* C^2. *Τότε οι τελεστές*

$$S, K, K' : C(\partial D) \longrightarrow C^{0,a}(\partial D)$$

$$S, K : C^{0,a}(\partial D) \longrightarrow C^{1,a}(\partial D)$$

$$T : C^{1,a}(\partial D) \longrightarrow C^{0,a}(\partial D)$$

είναι φραγμένοι.

Από εδω και κάτω με το σύμβολο $\hookrightarrow$ *εννούμε γραμμικό υπόχωρο.*

Πρόταση 2.1.2 *Έστω* ∂D *κλάσης* C^2. *Θεωρώντας τη διγραμμική μορφή*

$< \phi, \psi >= \int\limits_{\partial D} \phi\psi ds$, *ο* S *είναι αυτοσυζυγής και οι* K, K' *συζυγείς, όπου*

$$S, K, K' : C(\partial D) \longrightarrow C^{0,a}(\partial D).$$

Απόδειξη. *Έστω* $\phi, \psi \in C(\partial D)$. *Έχουμε*

$$< K\phi, \psi >= 2\int\limits_{x\in\partial D}\int\limits_{y\in\partial D} \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \eta(y)}\phi(y)ds(y)\psi(x)ds(x)$$

$$= 2 \int\limits_{x\in\partial D} \int\limits_{y\in\partial D} \frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial\eta(y)}\phi(y)\psi(x)ds(y)ds(x).$$

Επειδή ∂D *φραγμένο,*

$$\psi \in C(\partial D), K\phi \in C^{0,a}(\partial D) \hookrightarrow C(\partial D)$$

$$\Rightarrow < K\phi, \psi >= \int\limits_{\partial D} K\phi(x)\psi(x)ds(x)$$

$$\leq \sup_{x\in\partial D} |K\phi(x)| \sup_{x\in\partial D} |\psi(x)| m(\partial D) < \infty$$

$$\Rightarrow (K\phi)\psi \in L^1(\partial D \times \partial D; \mathbb{C})$$

άρα από το θεώρημα Fubini μπορούμε να εναλλάξουμε τη σειρά ολοκλήρωσης

$$< K\phi, \psi >= 2 \int\limits_{y\in\partial D} \int\limits_{x\in\partial D} \frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial\eta(y)}\phi(y)\psi(x)ds(x)ds(y)$$

$$= 2 \int\limits_{y\in\partial D} \int\limits_{x\in\partial D} \frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial\eta(y)}\psi(x)ds(x)\phi(y)ds(y) = 2 \int\limits_{x\in\partial D} K'\psi(y)\phi(y)ds(y)$$

$$= \int\limits_{x\in\partial D} \phi(y)K'\psi(y)ds(y) =< \phi, K'\psi > .$$

Με ανάλογο τρόπο κάνοντας χρήση του Θεωρήματος Fubini, μπορούμε να δείξουμε

$$< S\phi, \psi >= 2 \int\limits_{x\in\partial D} \int\limits_{y\in\partial D} \Phi(x,y)\phi(y)ds(y)\psi(x)ds(x)$$

$$= 2 \int\limits_{y\in\partial D} \int\limits_{x\in\partial D} \Phi(x,y)\phi(y)\psi(x)ds(x)ds(y)$$

$$= 2 \int\limits_{y\in\partial D} \phi(y) \int\limits_{x\in\partial D} \Phi(x,y)\psi(x)ds(x)ds(y)$$

$$= \int\limits_{\partial D} \phi(y)S\psi(y)ds(y) =< \phi, S\psi > .$$

□

Πρόταση 2.1.3 *Έστω ∂D κλάσης C^2.Θεωρώντας τη διγραμμική μορφή*
$< \phi, \psi >= \int\limits_{\partial D} \phi\psi ds$, *ο T είναι αυτοσυζυγής, όπου*

$$T : C^{1,a}(\partial D) \longrightarrow C^{0,a}(\partial D)$$

Απόδειξη. *Έστω $\phi, \psi \in C^{1,a}(\partial D)$. Θεωρούμε τα u, v ως τα διπλά δυναμικά που αντιστοιχούν στις πυκνότητες ϕ, ψ. Τότε*

$$\int\limits_{\partial D} T\phi(x)\psi(x)ds(x) = 2\int\limits_{\partial D} \frac{\partial u(x)}{\partial \eta(x)}\psi(x)ds(x).$$

Από το Θεώρημα 2.1.1 αφού $C^{1,a}(\partial D) \hookrightarrow C(\partial D)$ έχουμε

$$v_{\pm}(x) = \int\limits_{\partial D} \psi(y)\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \eta(y)}ds(y) \pm \frac{1}{2}\psi(x), \quad x \in \partial D,$$

$$v_+ - v_- = \psi, \quad x \in \partial D,$$

άρα έχουμε

$$2\int\limits_{\partial D} \frac{\partial u(x)}{\partial \eta(x)}\psi(x)ds(x) = 2\int\limits_{\partial D} \frac{\partial u(x)}{\partial \eta(x)}[v_+(x) - v_-(x)]ds(x).$$

Από τον τύπο Green στο D

$$\int\limits_{\partial D} \frac{\partial u(x)}{\partial \eta(x)} v_-(x) - \frac{\partial v(x)}{\partial \eta(x)} u_-(x) ds(x) = \int\limits_D (\Delta u) v dx - \int\limits_D (\Delta v) u dx = 0.$$

Παρατηρούμε σε αυτό το σημείο ότι χρησιμοποιήσαμε το συμβολισμο u_-, v_- διότι οι οριακές τιμές των δυναμικών προσεγγίζονται από "μέσα", δηλαδή από το D. Ακόμα σημειωνουμε ότι το διπλό δυναμικό έχει συνεχή παράγωγο ($\lim\limits_{h \to 0_+} (\frac{\partial v}{\partial \eta}(x + h\eta(x)) - \frac{\partial v}{\partial \eta}(x - h\eta(x))) = 0, \quad$ ομοιόμορφα $\forall x \in \partial D$).

Ακόμα θεωρούμε $r_0 > 0$ κατάλληλα μεγαλο, ώστε $D \subset B(0, r_0)$. Τότε από τύπο Green:

$$\int\limits_{\partial D} \frac{\partial u(x)}{\partial(-\eta(x))} v_+(x) - \frac{\partial v(x)}{\partial(-\eta(x))} u_+(x) ds(x) +$$

$$+ \int\limits_{S(0,r_0)} \frac{\partial u(x)}{\partial \eta(x)} v(x) - \frac{\partial v(x)}{\partial \eta(x)} u(x) ds(x)$$

$$= \int\limits_{B(0,r_0)\setminus D} (\Delta u) v dx - \int\limits_{B(0,r_0)\setminus \overline{D}} (\Delta v) u dx = 0.$$

(Στο σύνολο $B(0, r_0) \setminus \overline{D}$ το μοναδιαίο κάθετο του εσωτερικού συνόρου έχει πρόσημο πλην. Πράγματι, αν στην περιίπτωση του D το μοναδιαίο κάθετο είναι η, τότε στην περίπτωση $B(0, r_0) \setminus \overline{D}$ το διάνυσμα είναι -η ώστε να "δείχνει" προς τα έξω, με αντίθετη φορά από την περίπτωση του D.)

Επειδή οι u, v ικανοποιούν τη συνθήκη ακτινοβολίας, από Θεώρημα 1.1.6:

$$|u|, |v| = O\left(\frac{1}{r_0}\right)$$

$$|\partial_\eta u|, |\partial_\eta v| = O\left(\frac{1}{r_0^2}\right)$$

$$\Rightarrow \int\limits_{S(0,r_0)} \frac{\partial u(x)}{\partial \eta(x)} v(x) - \frac{\partial v(x)}{\partial \eta(x)} u(x) ds(x) = O\left(\frac{1}{r_0}\right) \longrightarrow_{r_0 \longrightarrow \infty} 0$$

Άρα

$$0 = \int\limits_{\partial D} \frac{\partial u(x)}{\partial(-\eta(x))} v_+(x) - \frac{\partial v(x)}{\partial(-\eta(x))} u_+(x) ds(x) \Rightarrow$$

$$0 = \int\limits_{\partial D} \frac{\partial u(x)}{\partial \eta(x))} v_+(x) - \frac{\partial v(x)}{\partial \eta(x)} u_+(x) ds(x)$$

Και έτσι έχουμε

$$\int\limits_{\partial D} \frac{\partial u(x)}{\partial \eta(x)} v_+(x) - \frac{\partial v(x)}{\partial \eta(x)} u_+(x) ds(x)$$

$$= \int\limits_{\partial D} \frac{\partial u(x)}{\partial \eta(x)} v_-(x) - \frac{\partial v(x)}{\partial \eta(x)} u_-(x) ds(x)$$

$$\Rightarrow \int\limits_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \eta}(v_+ - v_-) ds = \int\limits_{\partial D} \frac{\partial v}{\partial \eta}(u_+ - u_-) ds = \int\limits_{\partial D} \phi T \psi ds$$

□

Πρόταση 2.1.4 *Με τις ίδιες προϋποθέσεις με πριν, ισχύει*

$$ST = K^2 - I$$

$$TS = K'^2 - I$$

Απόδειξη. *Έστω το απλό δυναμικό w με πυκνότητα $\phi \in C(\partial D)$. Έστω ακόμα το διπλό δυναμικό v με πυκνότητα $\psi \in C^{1,a}(\partial D)$. Τότε*

$$\int\limits_{\partial D} S\phi T\psi ds = 4 \int\limits_{\partial D} w \frac{\partial v}{\partial \eta} ds.$$

Από θεώρημα Green

$$\int_{\partial D} w\frac{\partial v}{\partial \eta}ds - \int_{\partial D} v_-\frac{\partial w_-}{\partial \eta}ds = \int_D (\Delta v)wdx - \int_D (\Delta w)vdx = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\partial D} w\frac{\partial v}{\partial \eta}ds = \int_{\partial D} v_-\frac{\partial w_-}{\partial \eta}ds$$

(Σημειωση: στο ∂D το v έχει συνεχή κάθετη παράγωγο, και το w είναι συνεχές. Το v λαμβάνει οριακή τιμή v_- στο ∂D όπως το $\partial_\eta w$.) Έτσι συνδέοντας αυτά που βρήκαμε

$$\int_{\partial D} S\phi T\psi ds = 4\int_{\partial D} w\frac{\partial v}{\partial \eta}ds = 4\int_{\partial D} v_-\frac{\partial w_-}{\partial \eta}ds$$

$$= \int_{\partial D} (K-I)\psi(K'+I)\phi ds$$

$$\Rightarrow \int_{\partial D} \phi ST\psi ds = \int_{\partial D} \phi(K^2-I)\psi ds,$$

αφού οι K, K' συζυγείς και ο S αυτοσυζυγής, άρα $ST = K^2 - I$. Τέλος η δεύτερη σχέση του θεωρήματος αποδεικνύεται με παρόμοιο τρόπο. □

Έπειτα θα προχωρήσουμε στη διατύπωση και απόδειξη ενός κλασσικού θεωρήματος της συναρτησιακής ανάλυσης, το οποίο θα μας βοηθήσει στη συνέχεια.

Θεώρημα 2.1.8 *(Lax) Έστω $(X, ||\cdot||_X)$, $(Y, ||\cdot||_Y)$ χώροι με νόρμα, εφοδιασμένοι με βαθμωτό γινόμενο $(\cdot,\cdot)$. Έστω ακόμα ότι υπάρχει σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε*

$$|(\phi,\psi)| \leq C||\phi||_X||\psi||_X, \quad \forall \phi,\psi \in X.$$

Ακόμα έστω $U \hookrightarrow X$ *και* $A : U \longrightarrow Y, \quad B : Y \longrightarrow X$ *γραμμικοί και φραγμένοι ώστε*

$$(A\phi, \psi)_X = (\phi, B\psi)_Y, \forall \phi \in U, \psi \in Y.$$

Τότε ο $A : U \longrightarrow Y$ *είναι φραγμένος ως προς τις νόρμες που επάγουν τα βαθμωτά γινόμενα.*

Απόδειξη. *Συμβολίζουμε τη νόρμα που επάγει το βαθμωτό γινόμενο ως* $|| \cdot ||_s$. *Ορίζουμε τον γραμμικό τελεστή*

$$M := BA : U \longrightarrow X : ||M|| \leq ||A|| \cdot ||B||.$$

Επειδή

$$(A\phi, \psi) = (\phi, B\psi), \forall \phi \in U, \psi \in Y \Rightarrow A^* = B, \quad B^* = A$$

$$\text{και } M^* = (BA)^* = A^*B^* = BA = M$$

άρα ο M *είναι αυτοσυζυγής. Από την ανισότητα* $Cauchy-Swartz$ *και επειδή* $M = M^*$ *έχουμε*

$$||M^n\phi||_s^2 = (M^n\phi, M^n\phi) = (\phi, M^{2n}\phi) \leq ||M^{2n}\phi||_s,$$

$$\forall \phi \in U : ||\phi||_s \leq 1, n \in \mathbb{N}.$$

Με αναγωγή μπορούμε να δείξουμε ότι

$$||M\phi||_s \leq ||M^{2n}\phi||_s^{2^{-n}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall \phi \in U : ||\phi||_s \leq 1 (*).$$

Ακόμα έχουμε

$$|(\phi, \psi)| \leq C||\phi||_X||\psi||_X, \quad \forall \phi, \psi \in X \Rightarrow ||\phi||_s \leq \sqrt{C}||\phi||_X,$$

$$\forall \phi \in X$$

Συνδιάζοντας την προηγούμενη σχέση με την $(*)$ *έχουμε*

$$||M\phi||_s \leq ||M^{2n}\phi||_s^{2^{-n}} \leq \{\sqrt{C}||M^{2^n}\phi||_X\}^{2^{-n}}$$

$$\leq \{\sqrt{C}||\phi||_X||M||^{2^n}\}^{2^{-n}} = \{\sqrt{C}||\phi||_X\}^{2^{-n}}||M||,$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \phi \in U : ||\phi||_s \leq 1.$$

Στέλνοντας το n στο άπειρο έχουμε

$$||M\phi||_s \leq ||M||, \quad \forall \phi \in U : ||\phi||_s \leq 1.$$

Άρα

$$||A\phi||_s^2 = (A\phi, A\phi) = (\phi, M\phi) \leq ||M\phi||_s \leq ||M||,$$
$$\forall \phi \in U : ||\phi||_s \leq 1.$$

□

Με τη βοήθεια του προηγούμενου αποτελέσματος θα επεκτείνουμε τις ιδιότητες των τελεστών S, K, K', T σε πιο γενικούς χώρους.

Θεώρημα 2.1.9 *Έστω ∂D κλάσσης C^2 και έστω ο χώρος $H^1(\partial D)$. Τότε ο τελεστής*

$$S : L^2(\partial D) \longrightarrow H^1(\partial D), \quad \text{είναι φραγμένος.}$$

Αν επιπλέον ∂D έχει ομαλότητα κλάσσης $C^{2,a}$, τότε οι τελεστές

$$K, K' : L^2(\partial D) \longrightarrow H^1(\partial D),$$
$$T : H^1(\partial D) \longrightarrow L^2(\partial D),$$

είναι φραγμένοι.

Απόδειξη. *Θα αποδείξουμε την περίπτωση του S καθώς η απόδειξη και για τους υπόλοιπους έχει παρόμοιο ύφος. Έστω $X = C^{0,a}(\partial D)$, $Y = C^{1,a}(\partial D)$, εφοδιασμένοι με τις αντίστοιχες νόρμες. Εφοδιαζουμε τον X με το γινόμενο $(\cdot,\cdot)_{L^2(\partial D)}$ και τον Y με το γινόμενο $(\cdot,\cdot)_{H^1(\partial D)}$*

$$(\phi, \psi)_{H^1(\partial D)} = \int_{\partial D} \{\phi\overline{\psi} + Grad\phi \cdot Grad\overline{\psi}\} ds$$

όπου $Grad, Div$ *είναι η βαθμίδα και απόκλιση στις καμπυλόγραμμες συντεταγμένες.Ακόμα αφού ο* S *είναι αυτοσυζυγής ως προς τη διαγραμμική μορφή* $\int\limits_{\partial D} \phi\psi ds$, *από από το θεώρημα της απόκλισης του Gauss έχουμε*

$$\int\limits_{\partial D} GradS\phi \cdot Grad\psi ds$$

$$= -\int\limits_{\partial D} S\phi(DivGrad\psi)ds = -\int\limits_{\partial D} \phi S(DivGrad\psi)ds,$$

$$\forall \phi \in C^{0,a}(\partial D), \psi \in C^2(\partial D) \quad (1)$$

και επειδή $grad_x\Phi(x,y) = -grad_y\Phi(x,y)$*:*

$$\int\limits_{\partial D} \Phi(x,y)DivGrad\psi(y)ds(y) = div\int\limits_{\partial D} \Phi(x,y)Grad\psi(y)ds(y),$$

$$x \notin \partial D$$

Από τις σχέσεις των θεωρημάτων 2.1.1 και 2.1.6 για $\psi \in C^2(\partial D)$ *έχουμε*

$$S(DivGrad\psi) = \tilde{S}(Grad\psi) : (2)$$

$$\tilde{S} : C^{0,a} \longrightarrow C^{0,a}(\partial D)$$

με τύπο

$$(\tilde{S}a)(x) = 2div\int\limits_{\partial D} \Phi(x,y)a(y)ds(y),$$

για Hölder συνεχή πεδία a, *εφαπτόμενα στο* ∂D.

Τότε από $(1), (2)$*:*

$$\int\limits_{\partial D} GradS\phi \cdot Grad\psi = -\int\limits_{\partial D} \phi\tilde{S}(Grad\psi)ds, \quad x \in \partial D,$$

$$\forall \phi \in C^{0,a}(\partial D), \forall \psi \in C^2(\partial D) \quad (3)$$

Παρατηρούμε ότι για σταθερό ϕ, και οι δύο πλευρές της σχέσης (3) αποτελούν ένα γραμμικό συναρτησιακό ορισμένο στο χώρο $C^{1,a}(\partial D)$ και η σχέση (3) αληθεύει για $\psi \in C^{1,a}(\partial D)$.

Από το γεγονός ότι ο S είναι αυτοσυζυγής ως προς τη διαγραμμική μορφή $\int\limits_{\partial D} \phi\psi ds$ και την σχέση (3) έχουμε ότι οι τελεστές

$$S : C^{0,a}(\partial D) \longrightarrow C^{1,a}(\partial D)$$

$$S^* : C^{1,a}(\partial D) \longrightarrow C^{0,a}(\partial D)$$

είναι συζυγείς $(S\phi, \psi)_{H^1(\partial D)} = (\phi, S^*\psi)_{L^2(\partial D)}, \forall \phi \in C^{0,a}(\partial D), \psi \in C^{1,a}(\partial D)$, όπου ο S^* έχει τύπο

$$S^*\psi = \overline{S\overline{\psi}} - \overline{\tilde{S}Grad\overline{\psi}}, \quad \psi \in C^{1,a}(\partial D).$$

Πράγματι

$$(S\phi, \psi)_{H^1(\partial D)} = \int\limits_{\partial D} S\phi\overline{\psi} + GradS\phi \cdot Grad\overline{S\psi} ds$$

$$= \int\limits_{\partial D} \phi S\overline{\psi} - \phi \cdot \tilde{S}(Grad\overline{\psi}) ds = \int\limits_{\partial D} \phi\overline{(\overline{S\overline{\psi}} - \overline{\tilde{S}Grad\overline{\psi}})} ds$$

$$= \int\limits_{\partial D} \phi\overline{S^*\psi} ds = (\phi, S^*\psi)_{L^2(\partial D)}, \quad \forall \phi \in C^{0,a}(\partial D), \psi \in C^{1,a}(\partial D)$$

Από το Θεώρημα 2.1.9 οι S, S^* φραγμένοι με τις Hölder νόρμες και από το θεώρημα Lax υπαρχει σταθερά $C > 0$ $||S\phi||_{H^1(\partial D)} \leq C||\phi||_{L^2(\partial D)}, \quad \forall \phi \in C^{0,a}(\partial D)$. Η απόδειξη ότι ο S είναι φραγμένος ολοκληρώνεται παρατηρώντας ότι ο $\overline{C^{0,a}(\partial D)}^{||\cdot||_{L^2}} = L^2(\partial D)$ και κάνοντας επέκταση φραγμένου τελεστη από πυκνό υπόχωρο. $\square$

Πρόταση 2.1.5 *Έστω ∂D κλάσσης C^2. Τότε ο τελεστής*

$$S : H^{-1/2}(\partial D) \longrightarrow H^{1/2}(\partial D)$$

είναι φραγμένος.

Αν ακόμα το ∂D έχει ομαλότητα τάξης $C^{2,a}$, τότε οι τελεστές

$$K, K' : H^{-1/2}(\partial D) \longrightarrow H^{1/2}(\partial D)$$

$$T : H^{1/2}(\partial D) \longrightarrow H^{-1/2}(\partial D)$$

είναι φραγμένοι

Απόδειξη. *Η απόδειξη της πρότασης βασίζεται στις ιδιότητες παρεμβολής των χώρων Soboleν και στις ιδιότητες των δυικών γινομένων.* □

Πριν προχωρήσουμε στην επόμενη πρόταση θα θυμήσουμε ένα αποτέλεσμα από την θεωρία των χώρων Soboleν.

Θεώρημα 2.1.10 *Έστω $D \subset \mathbb{R}^3$ απλα-συνεκτικο, ανοικτο και φραγμένο με σύνορο ∂D κλάσσης C^2. Τότε υπάρχει $C > 0$:*

$$||u||_{H^{1/2}(\partial D)} \leq C||u||_{H^1(D)}, \quad \forall u \in H^1(D).$$

Και τώρα μπορούμε να αποδείξουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα

Πρόταση 2.1.6 *Έστω ∂D κλάσης $C^{2,a}$. Τότε οι τελεστές που ορίζουν τα απλα και διπλά δυναμικά έστω*

$$u : H^{-1/2}(\partial D) \longrightarrow H^1(D), H^1_{loc}(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D})$$

$$v : H^{1/2}(\partial D) \longrightarrow H^1(D), H^1_{loc}(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D})$$

είναι φραγμένοι.

(Με την έννοια ότι $u(\phi)(x) = \int\limits_{y \in \partial D} \Phi(x,y)\phi(y)ds(y), x \in D$)

Απόδειξη. *Έστω* $\phi \in C^{0,a}(\partial D)$,

$$u(x) := \int\limits_{y\in\partial D} \Phi(x,y)\phi(y)ds(y), x \in D.$$

Από το θεώρημα Green στα $u, \overline{u}$*:*

$$\int\limits_{D} (|gradu|^2 - k^2|u|^2)dx = \int\limits_{\partial D} \overline{u}\frac{\partial u_-}{\partial \eta}ds = \int\limits_{\partial D} \frac{\overline{S\phi}}{2}\frac{(K'\phi+\phi)}{2}ds$$

Αφού με επέκταση από το D *στο* $\overline{D}$ *η βαθμίδα του απλού δυναμικού με πυκνότητα* $\phi \in C^{0,a}(\partial D)$ *έχει τύπο*

$$gradu_-(x) = \int\limits_{\partial D} \phi(y)grad_x\Phi(x,y)ds(y) + \frac{1}{2}\phi(x)\eta(x), \quad x \in \partial D$$

Η πρώτη σχέση δίνει

$$||gradu||^2_{L^2(D)} - k^2||u||^2_{L^2(D)} = \frac{1}{4}\int\limits_{\partial D} \overline{S\phi}(K'\phi+\phi)ds(Cauchy-Swartz)$$

$$\leq \frac{1}{4}||S\phi||_{L^2(\partial D)}\cdot||\phi+K'\phi||_{L^2(\partial D)} \leq \frac{1}{4}||S\phi||_{H^{1/2}(\partial D)}\cdot||\phi+K'\phi||_{H^{1/2}(\partial D)}$$

$$(||\cdot||_{H^{1/2}} \leq ||\cdot||_{L^2})$$

$$\leq c_1||\phi||_{H^{-1/2}(\partial D)}(||\phi||_{H^{1/2}(\partial D)} + c_2||\phi||_{H^{-1/2}(\partial D)})$$

$$(S, K' \varphi\rho\alpha\gamma\mu\acute{\varepsilon}\nu o\iota \ \sigma\tau o\upsilon\varsigma \ \alpha\nu\tau\acute{\iota}\sigma\tau o\iota\chi o\upsilon\varsigma \ \chi\acute{\omega}\rho o\upsilon\varsigma)$$

$$\leq c_1||\phi||_{H^{-1/2}(\partial D)}(c_3||\phi||_{H^{-1/2}(\partial D)} + c_2||\phi||_{H^{-1/2}(\partial D)})$$

$$(I : H^{-1/2} \longrightarrow H^{1/2} \varphi\rho\alpha\gamma\mu\acute{\varepsilon}\nu o\varsigma)$$

$$\leq C||\phi||^2_{H^{-1/2}(\partial D)}.(*)$$

Τώρα

$$(u,u)_{L^2(D)} = \int\limits_D u\overline{u}dx$$

$$= \int\limits_D \int\limits_{\partial D} \Phi(x,y)\phi(y)ds(y) \overline{\int\limits_{\partial D} \Phi(x,z)\phi(y)ds(z)dx}$$

$$= \int\limits_D \int\limits_{\partial D} \int\limits_{\partial D} \Phi(x,y)\phi(y)\overline{\Phi(x,z)\phi(y)}ds(z)ds(y)dx$$

$$= \int\limits_{\partial D} \phi(y) \int\limits_D \int\limits_{\partial D} \Phi(x,y)\overline{\Phi(x,z)\phi(y)}ds(z)dxds(y) \quad (Fubini)$$

$$= \int\limits_{\partial D} \phi(y) \int\limits_D \Phi(x,y)\overline{u(x)}dxds(y)$$

$$= (\phi, \overline{Vu})_{L^2(\partial D)},$$

όπου $Vu(y) := \int\limits_D \Phi(x,y)u(x)dx$

Επειδή

$$V : L^2(D) \longrightarrow H^2(G)$$

είναι φραγμένος και επειδή $||\cdot||_{H^1(D)} \leq ||\cdot||_{H^2(D)}$ *έχουμε*

$$||\overline{Vu}||_{H^1(D)} \leq ||\overline{Vu}||_{H^2(D)} \leq a||u||_{L^2(\partial D)}$$

για κάποιο $a > 0$.

Από τη σχέση που αποδείξαμε πριν και από το Θεώρημα 2.1.10 τελικά προκύπτει ότι

$$||u||^2_{L^2(\partial D)} = (\phi, \overline{Vu})_{L^2(\partial D)} \leq c_0||\phi||_{H^{-1/2}(\partial D)}||u||_{L^2(D)},$$

όπου c_0 *κατάλληλη σταθερά, συνεπώς*

$$||u||_{L^2(\partial D)} \leq c_0||\phi||_{H^{-1/2}(\partial D)}$$

$$||u||^2_{L^2(\partial D)} \leq c_0^2 ||\phi||^2_{H^{-1/2}(\partial D)}$$

Επιστρέφουμε στην σχέση $(*)$. *Θα χρησιμοποιήσουμε και την προηγούμενη σχέση και τότε*

$$||gradu||^2_{L^2(D)} - k^2||u||^2_{L^2(D)} \leq C||\phi||^2_{H^{-1/2}(\partial D)}$$

$$\Rightarrow ||gradu||^2_{L^2(D)} \leq k^2||u||^2_{L^2(D)} + C||\phi||^2_{H^{-1/2}(\partial D)}$$

$$\Rightarrow ||gradu||^2_{L^2(D)} \leq (C + k^2 c_0^2)||\phi||^2_{H^{-1/2}(\partial D)}$$

Συνδιάζοντας όλα τα παραπάνω τελικά

$$||u||^2_{H^2(D)} \leq (C + (k^2+1)c_0^2)||\phi||^2_{H^{-1/2}(\partial D)}$$

Άρα ο $S : C^{0,a}(\partial D) \longrightarrow H^1(\partial D)$ *είναι φραγμένος.*

Επειδή $\overline{C^{0,a}(\partial D)}^{||\cdot||_{H^{-1/2}(\partial D)}} = H^{-1/2}(\partial D)$ *ο τελεστής του απλού διναμικου* $u : H^{-1/2}(\partial D) \longrightarrow H^1(D)$ *είναι φραγμένος. Οι υπόλοιπες περιπτώσεις της πρότασης προκύπτουν ακολουθώντας παρόμοια βήματα.* $\square$

2.2 Σκέδαση από Μαλακό Σκεδαστή

Σε αυτή την ενότητα περιγράφουμε το ευθύ πρόβλημα σκέδασης σαν ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών και δείχνουμε την καλή τοποθέτησή του. Έστω $D \subset \mathbb{R}^3$ το ανοικτό φραγμένο συμπλήρωμα ενός μή φραγμένου χωρίου κλάσης C^2. Έστω μια γνωστή συνάρτηση u^i που αποτελεί λύση της εξίσωσης Helmholtz σε όλο το $\mathbb{R}^3$ (προσπίπτον πεδίο). Ζητάμε να βρούμε μια λύση $u = u^i + u^s$ της εξίσωσης Helmholtz στο σύνολο $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$, για την οποία ισχύει ότι $u|_{\partial D} = 0$ και ότι η συνάρτηση u^s είναι λύση που ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας.

Το προηγούμενο πρόβλημα μπορούμε να το συνταξουμε ισοδύναμα ως εξής

Εξωτερικό Πρόβλημα Dirichlet *Έστω $f \in C(\partial D)$. Ζητάμε τη συνάρτηση $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus D)$:*

$(\Delta + k^2)u = 0, \qquad \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$

$u = f, \qquad \partial D$

$\lim_{r\to\infty} r(\frac{\partial u}{\partial r} - iku) = 0, \quad r = |x|$ *, ομοιόμορφα για κάθε διεύθυνση.*

Θεώρημα 2.2.1 *Το **Εξωτερικό Πρόβλημα Dirichlet** έχει το πολύ μια λύση.*

Πρόταση 2.2.1 *Έστω $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus D)$:*

$$(\Delta + k^2)u = 0, \quad \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$$

$$u = 0, \quad \partial D.$$

Έστω $R > 0$ κατάλληλα ώστε να ορίσουμε το σύνολο

$$D_R := \{y \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D} : ||y|| < R\}.$$

Τότε

$$gradu \in L^2(D_R)$$

και

$$\int\limits_{D_R} |gradu|^2 dx - k^2 \int\limits_{D_R} |u|^2 dx = \int\limits_{S(0,R)} u \frac{\partial \overline{u}}{\partial \eta} ds.$$

Απόδειξη. *Έστω αρχικά ότι* $u : \mathbb{R}^3 \setminus D \longrightarrow \mathbb{R}, \quad u|_{\partial D} = 0,$ *λύση της εξίσωσης Hemholtz στο* $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$. *Έστω μια συνάρτηση* $\psi \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ *τέτοια ώστε*

$$\psi(t) = 0, \quad [-1, 1]$$

$$\psi(t) = t, \quad (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$$

$$\psi(-t) = -\psi(t), \quad t \in \mathbb{R} \quad \textit{(περιττή)}$$

$$\psi'(t) \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \textit{(αύξουσα)}$$

Ορίζουμε την ακολουθία συναρτήσεων $(u_n := \frac{\psi(nu)}{n})_{n \in \mathbb{N}}$

Τότε $lim_n ||u_n - u||_\infty = 0$. *Πράγματι Έστω* $x \in D_R, \quad n \in \mathbb{N}$. *Έτσι έχουμε τρεις περιπτώσεις*

$$|u(x) - \frac{\psi(nu(x))}{n})| = |u(x)|, \quad |nu(x)| \leq 1 \iff x \in u^{-1}\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$$

ή

$$|u(x) - \frac{\psi(nu(x))}{n})| = 0, \quad |nu(x)| \geq 2$$

$$\iff x \in u^{-1}\left[-\infty, -\frac{2}{n}\right] \cup u^{-1}\left[\frac{2}{n}, \infty\right]$$

ή

$$|u(x) - \frac{\psi(nu(x))}{n})| \leq |u(x)|, \quad 1 < |nu(x)| < 2$$

$$\iff x \in u^{-1}\left(-\frac{2}{n}, -\frac{1}{n}\right) \cup u^{-1}\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)$$

(Για την τελευτάια περίπτωση έχουμε αυτή την ανισότητα διότι αφού η ψ *είναι αύξουσα τότε* $0 \leq \frac{\psi(nu(x))}{n} \leq u(x)$ *)*

$$\Rightarrow |u(x) - u_n(x)| \leq |u(x)|\chi_{u^{-1}[-\frac{2}{n},\frac{2}{n}]}, \quad x \in D_R$$

$$\Rightarrow lim_n|u(x) - u_n(x)| \leq |u(x)|lim_n\chi_{u^{-1}[-\frac{2}{n},\frac{2}{n}]}, \quad x \in D_R$$

ομοιόμορφα σ.π.

Τότε από το ανισοτικό κριτίριο ομοιόμορφης σύγκλισης

$||u-u_n||_\infty \longrightarrow 0, \quad n \longrightarrow \infty \Rightarrow u_n \longrightarrow u$ *ομοιόμορφα σ.π. στο* D_R.

Επειδή $u|_{\partial D} = 0 \Rightarrow u_n|_{\partial D} \longrightarrow u|_{\partial D} = 0$ *ομοιόμορφα στο* ∂D *σ.π.*
Έστω $n \in \mathbb{N}$. *Απο τον πρώτο τύπο Green τελικά προκύπτει ότι*

$$\int\limits_{D_R} gradu_n \cdot gradu\ dx = k^2 \int\limits_{D_R} u_n u dx + \int\limits_{S(0,R)} u_n \frac{\partial u}{\partial \eta} ds.$$

Ακόμα επειδή $gradu_n = (\partial_x u_n, \partial_y u_n, \partial_z u_n)$
και επειδή $\frac{\partial u_n}{\partial x} = \frac{n}{n}\frac{d\psi}{du}\frac{\partial u}{\partial x} = \psi'\partial_x u$ *έχουμε*

$$gradu_n = \psi' nu(x) gradu(x)$$

$$\Rightarrow 0 \leq gradu_n(x) gradu(x) = \psi'(nu(x))|gradu(x)|^2$$

$$\Rightarrow gradu_n(x) gradu(x) \longrightarrow |gradu(x)|^2, \ (1)$$

$$\forall x \in D_R \setminus \{x \in D_R : u(x) = 0, gradu(x) \neq 0\}$$

Όμως $\mu(\{x \in D_R : u(x) = 0, gradu(x) \neq 0\}) = 0$ *και τότε συνδιάζοντας όλα τα παραπάνω*

$$\int\limits_{D_R} \liminf(gradu_n \cdot gradu)\ dx$$

$$\leq \liminf \int\limits_{D_R} (gradu_n \cdot gradu)\ dx \quad (2)$$

Από (1), *αφού το όριο υπάρχει,*

$$\liminf gradu_n gradu = \limsup gradu_n gradu =$$

$$\lim gradu_n gradu = |gradu|^2 \ \sigma.\pi.\sigma\tau o\ D_R$$

$$(2) \Rightarrow \int\limits_{D_r} |gradu|^2 dx \leq$$

$$\liminf \int\limits_{D_R} gradu_n gradudx \leq \lim \int\limits_{D_R} gradu_n gradudx$$

$$= k^2 \int\limits_{D_R} |u|^2 dx + \int\limits_{S_R} u \frac{\partial u}{\partial \eta} ds < \infty.$$

$$\Rightarrow gradu \in L^2(D_R).$$

Εαν η u έχει μιγαδικές τιμές, δηλαδή

$$u = v + iw$$

όπου v, w *έχουν πραγματικές τιμές, τότε* $gradw, gradv \in L^2(D_R)$. *Ακόμα έχουμε* $gradv_n + igradw_n = \psi'(nv)gradv + i\psi(nw)gradw$.

Τέλος η απόδειξη ολοκληρώνεται επειδη

$$|(gradu_n + i\ gradw_n)grad\overline{u}| \leq 2||\psi'||_\infty \{|gradu|^2 + |gradw|^2\},$$

και από το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης μπορούμε να περάσουμε το όριο μέσα στο ολοκλήρωμα

$$\int\limits_{D_R} \{(gradv_n + igradw_n)grad\overline{u} + (v_n + iw_n)\Delta\overline{u}\} = \int\limits_{S(0,R)} (v_n + iw_n)\frac{\partial \overline{u}}{\partial \eta} ds$$

$$\Rightarrow \int\limits_{D_R} |gradu|^2 dx - k^2 \int\limits_{D_R} |u|^2 dx = \int\limits_{S(0,R)} u\frac{\partial \overline{u}}{\partial \eta} ds.$$

□

Θα προσπαθήσουμε να βρούμε ιδιότητες ύπαρξης του ***Εξωτερικού Προβλήματος Dirichlet*** *χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ολοκληρωτικών εξισώσεων που προκύπτουν ουσιαστικά από τη συνθήκη στο σύνορο.*

Έστω $a \neq 0, \phi \in C(\partial D)$. *Επιλέγουμε ως λύση της εξίσωσης Helmholtz την συνάρτηση*

$$g(x) = \int\limits_{\partial D} \left[\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \eta(y)} - ia\Phi(x,y)\right]\phi(y)ds, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial D$$

Πρόταση 2.2.2 *Η συνάρτηση* g *που ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας λύνει το πρόβλημα*

$$\begin{aligned} (\Delta + k^2)g(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D} \\ g = f, \quad \partial D, \end{aligned} \tag{1}$$

αν η συνάρτηση πυκνότητας u *ικανοποιεί την ολοκληρωτική εξίσωση*

$$\phi + K\phi - iaS\phi = 2f, \quad \partial D. \tag{2.2.1}$$

Απόδειξη. *Αν συμβολίσουμε u, v το απλό και διπλό δυναμικό με πυκνότητα ϕ αντίστοιχα, τότε είναι εύκολο να παρατηρήσουμε ότι*

$$g = v + iau, \quad \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}.$$

Αν επεκτείνουμε αυτή τη σχέση στο σύνορο, τότε από Θεώρημα 2.1.1

$$v_+(x) = \frac{1}{2}K\phi(x) + \frac{1}{2}\phi(x) = \int\limits_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \eta(y)}\phi(y)ds + \frac{1}{2}\phi(x), \quad x \in \partial D.$$

Το απλό δυναμικό έχει συνεχή επέκταση

$$u(x) = \frac{1}{2}S\phi(x), \quad x \in \partial D.$$

Άρα

$$g|_{\partial D} = f = \frac{1}{2}K\phi + \frac{1}{2}\phi - i\eta\frac{1}{2}S\phi, \quad \partial D$$

$$\Rightarrow \phi + K\phi - iaS\phi = 2f, \quad \partial D.$$

□

Πρόταση 2.2.3 *Ο τελεστής $I + K - iaS : C(\partial D) \longrightarrow C(\partial D)$ είναι 1-1 και επί. Επίσης ο αντίστροφός του υπάρχει και είναι φραγμένος.*

Απόδειξη. *Θα δείξουμε ότι αν $\phi \in Ker(I + K - iaS) \Rightarrow \phi \in \{0_{C(\partial D)}\}$. Έστω $\phi \in C(\partial D) : \phi + K\phi - iaS\phi = 0, \partial D$. Έστω $x \in \partial D$, τότε*

$$K\phi(x) + \phi(x) - iaS\phi(x) = 2(v_+(x) - iau(x)) = 2g_+(x),$$

με την έννοια της επέκτασης της λύσης στο σύνορο από τη μη φραγμένη συνιστώσα. Και τότε

$$g_+(x) = 0, \quad \forall x \in \partial D.$$

Όμως από το Θεώρημα 2.2.1, αν θεωρήσουμε την $g(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$, *τότε αυτή είναι η λύση του προβλήματος λόγω μοναδικότητας. Τώρα επειδή*

$$2(g_+ - g_-) = \phi + K\phi - iaS\phi - (-\phi + K\phi - iaS\phi) = 2\phi$$

$$\Rightarrow -g_- = \phi, \quad \partial D$$

και

$$\frac{\partial g_+}{\partial \eta} - \frac{\partial g_-}{\partial \eta} = \frac{\partial v_+}{\partial \eta} - ia\frac{\partial u_+}{\partial \eta} - \frac{\partial v_-}{\partial \eta} + ia\frac{\partial u_-}{\partial \eta}$$

$$= -ia\frac{\partial u_+}{\partial \eta} + ia\frac{\partial u_-}{\partial \eta}$$

αφού $\lim\limits_{h \to 0_+} (\frac{\partial v}{\partial \eta}(x + h\eta(x)) - \frac{\partial v}{\partial \eta}(x - h\eta(x))) = 0$, *ομοιόμορφα* $\forall x \in \partial D$.

$$= -ia(\frac{1}{2}K'\phi - \frac{1}{2}\phi) + ia(\frac{1}{2}K'\phi + \frac{1}{2}\phi) = ia\phi$$

$$(\text{ αφού } g_+ = 0) \Rightarrow -\frac{\partial g_-}{\partial \eta} = i\eta\phi, \quad \partial D$$

Τέλος από το θεώρημα Green

$$ia\int\limits_{\partial D} |\phi|^2 ds = \int\limits_{\partial D} \overline{g}_- \frac{\partial g_-}{\partial \eta} ds = \int\limits_{D} \{|gradg|^2 - k^2|g|^2\} dx.$$

Πέρνοντας το φανταστικό μέρος της τελευταίας ισότητας

$$\Rightarrow \phi = 0.$$

Άρα ο τελεστής είναι 1-1. Από τη θεωρία Riesz − Fredholm η απεικόνιση είναι επί. Έτσι ο τελεστής

$$(I + K - iaS)^{-1} : C(\partial D) \longrightarrow C(\partial D)$$

είναι φραγμένος. □

Παρατήρηση 2.2.1 *Η ολοκληρωτική εξίσωση* (2.2.1) *έχει μοναδική λύση και αυτή η λύση(λόγω της αντιστρεψιμότητας και της συνέχειας του τελεστή) εξαρτάται με συνεχή τρόπο από την f ως προς τη $||\cdot||_{C(\partial D)} = ||\cdot||_\infty$.*

Παρατήρηση 2.2.2 *Από το Θεώρημα 2.1.1 έχουμε ότι* $||v||_{\infty,\mathbb{R}^3\setminus D} \leq C_0||\phi||_{\infty,\partial D}$ *και* $||u||_{\infty,\mathbb{R}^3} \leq C_1||\phi||_{\infty,\partial D} \Rightarrow$

$$||g||_{\infty,\mathbb{R}^3\setminus D} \leq \tilde{C}||\phi||_{\infty,\partial D}$$

όπου έχουμε επιλέξει κατάλληλα τις σταθερές. Επειδή ακόμα από την παρατήρηση έχουμε

$$||\phi||_{\infty,\partial D} = ||(I + K - iaS)^{-1}2f||_{\infty,\partial D} \leq C_2||f||_{\infty,\partial D}$$

και συνδιάζοντας αυτές τις δύο ανισότητες, έχουμε ότι η λύση g του (1) *εξαρτάται με συνεχή τρόπο από την συνοριακή συνάρτηση ώς προς τη νόρμα άπειρο.*

Τώρα για την απεικόνιση

$$I + K - iaS : C^{1,a}(\partial D) \longrightarrow C^{1,a}(\partial D)$$

Συνδιάζοντας τα Θεωρήματα 2.1.5 και 2.1.7, τελικά οι

$$S, K : C^{1,a}(\partial D) \longrightarrow C^{1,a}(\partial D)$$

είναι συμπαγείς και με παρόμοια επιχειρήματα με πριν καταλήγουμε στο ακόλουθο.

Παρατήρηση 2.2.3 *Ο τελεστής*

$$I + K - iaS : C^{1,a}(\partial D) \longrightarrow C^{1,a}(\partial D)$$

είναι αντιστρέψιμος και ο

$$(I + K - iaS)^{-1} : C^{1,a}(\partial D) \longrightarrow C^{1,a}(\partial D)$$

είναι φραγμένος.

Άρα για τη λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης έχουμε

$$(I + K - iaS)\phi = 2f, \quad \partial D$$

$$\Rightarrow \phi = (I + K - iaS)^{-1}2f, \quad \partial D$$

$$\exists c_1 > 0 : ||\phi||_{C^{1,a}(\partial D)} \leq c_1||f||_{C^{1,a}(\partial D)}$$

Συνδιάζοντας τις σχέσεις του Θεωρήματος 2.1.6 για τα δυναμικά, τελικά με ανάλογα επιχειρήματα με την προηγούμενη περίπτωση, η λύση μας $g \in C^{1,a}(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ εξαρτάται με συνέχή τρόπο από τη συνοριακή συνάρτηση f ως προς την $|| \cdot ||_{1,a,\partial D}$.

Η κάθετη παράγωγος $\frac{\partial g}{\partial \eta}$ ανήκει στο χώρο $C^{0,a}(\partial D)$ αν η συνοριακή συνάρτηση f ανήκει στο χώρο $C^{0,a}(\partial D)$ και δίνεται από τη σχέση

$$\frac{\partial g}{\partial \eta} = \mathcal{A}f,$$

$$\mathcal{A} = (iaI - iaK + T)(I + K - iaS)^{-1} : C^{1,a}(\partial D) \longrightarrow C^{0,a}(\partial D),$$

όπου ο τελεστής $\mathcal{A} : C^{1,a}(\partial D) \longrightarrow C^{0,a}(\partial D)$ είναι φραγμένος και ονομάζεται ***απεικόνιση Dirichlet σε Neumann****. Αυτό σημαίνει πρακτικά ότι αν ισχύει*

$$(I + K - iaS)\phi = 2f, \quad \partial D$$

$$\Rightarrow \phi = (I + K - iaS)^{-1}2f, \quad \partial D \ (Riesz - Fredholm)$$

$$\Rightarrow (iaI - iaK' + T)\phi = (iaI - iaK' + T)(I + K - iaS)^{-1} 2f, \quad \partial D$$

$$\Rightarrow iaI\phi - iaK'\phi + T\phi = 2\mathcal{A}f, \quad \partial D$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$2\frac{\partial}{\partial\eta(x)}\int\limits_{\partial D}\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial\eta(y)}\phi(y)ds(y) - ia2\int\limits_{\partial D}\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial\eta(x)}\phi(y)ds(y) + ia\phi(x) =$$

$$2\mathcal{A}f(x),$$

$$x \in \partial D$$

$$\Longleftrightarrow \; 2\frac{\partial v(x)}{\partial\eta(x)} - 2ia\frac{\partial u_+(x)}{\partial\eta(x)} = 2\mathcal{A}f(x), \quad \partial D$$

$$\Longleftrightarrow \; \frac{\partial g}{\partial\eta} = \mathcal{A}f, \quad \partial D.$$

Αντιστοιχα με το εξωτερικό πρόβλημα Dirichlet, μπορούμε να συντάξουμε το ***Εξωτερικό Πρόβλημα Neumann****, που περιγάφει τη σκέδαση από σκληρούς σκεδαστές.*

Έστω $g \in C(\partial D)$, ψάχνουμε μια συνάρτηση

$$u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus D) :$$

$$(\Delta + k^2)u = 0, \quad \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$$

$$\frac{\partial u}{\partial\eta} = g, \partial D$$

$$\lim_{r\to\infty} r(\frac{\partial u}{\partial r} - iku) = 0, \quad r = |x|,$$

ομοιόμορφα για κάθε διεύθυνση.

Η συνάρτηση

$$c(x) := \int\limits_{\partial D} \left\{ \Phi(x,y)\phi(y) + ia\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \eta(y)}(S_0^2\phi)(y) \right\} ds(y, \quad x \in \mathbb{R}^3 \backslash \overline{D},$$

όπου $\phi \in C(\partial D), a \neq 0$ *και* $S_0\phi = \int\limits_{\partial D} \frac{1}{4\pi|x-y|}\phi(y)ds(y)$. *(Είναι η περίπτωση που ο πυρήνας* Φ *έχει τιμή για το* $k = 0$*) Έτσι εισάγοντας ξανά τους όρους των δυναμικών όπως στην περίπτωση Dirichlet έχουμε*

$$c = u + iav, \quad \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$$

και ισοδύναμα η συνοριακή συνθήκη

$$\frac{\partial c}{\partial \eta} = \frac{\partial u_+}{\partial \eta} - ia\frac{\partial v}{\partial \eta} = g$$

$$\Longleftrightarrow \; -K'\phi + \phi - iaTS_0^2\phi = -2g, \quad \partial D. \tag{2.2.2}$$

Πράγματι αφού

$$c(x) = \int\limits_{\partial D} \left\{ \Phi(x,y)\phi(y) + ia\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \eta(y)}(S_0^2\phi)(y) \right\} ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^3 \backslash \overline{D},$$

$$\frac{\partial c(x)}{\partial \eta(x)} = \int\limits_{\partial D} \left\{ \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \eta(x)}\phi(y) + ia\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \eta(y)}(S_0^2\phi)(y) \right\} ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^3 \backslash \overline{D},$$

$\Rightarrow$ *με επέκταση στο σύνορο τελικά προκύπτει η* (2.2.2)

Άρα θέλουμε η ϕ *να ικανοποιεί την εξίσωση* (2.2.2) *ώστε να είναι λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών.*

Πρόταση 2.2.4 *Οι απεικόνισεις*

$$I - K' - iaTS_0^2 : C(\partial D) \longrightarrow C(\partial D),$$

$$I - K' - iaTS_0^2 : C^{0,a}(\partial D) \longrightarrow C^{0,a}(\partial D),$$

είναι 1-1 επί, η αντίστροφη απεικόνιση υπάρχει και για τους δυο χώρους και είναι φραγμένη.

Απόδειξη. *Θα κάνουμε την απόδειξη για την πρώτη περίπτωση. Έστω* $\phi \in C(\partial D) : \quad (I - K' - iaTS_0^2)\phi = 0, \partial D.$

$$\Longleftrightarrow \frac{\partial c_+}{\partial \eta} = 0, \quad \partial D,$$

αφού μέσω των δυναμικών μπορούμε να πούμε ότι έχουμε επέκταση της παραγώγου της c από το μη φραγμένο χωρίο προς το σύνορο.

Επεδή $\int\limits_{\partial D} c_+ \overline{\frac{\partial c_+}{\partial \eta}} ds = 0 = Im(\int\limits_{\partial D} c_+ \overline{\frac{\partial c_+}{\partial \eta}} ds)$

$$\Rightarrow c = 0, \quad \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D} \quad (\text{από θεώρημα 1.14})$$

$\Rightarrow c_+ = 0, \quad \partial D$, *λόγω συνεχούς επέκτασης στο σύνορο (μπορούμε να το κάνουμε με ακολουθίες).*

Όμως από τις σχέσεις διαπήδησης

$$c_+ = \frac{1}{2}S\phi + \frac{1}{2}iaKS_0^2\phi + \frac{1}{2}iaS_0^2\phi, \quad \partial D$$

και ανάλογα

$$c_- = \frac{1}{2}S\phi + \frac{1}{2}iaKS_0^2\phi - \frac{1}{2}iaS_0^2\phi, \quad \partial D$$

$$\Rightarrow c_+ - c_- = -c_- = iaS_0^2\phi$$

$$\Rightarrow -c_- = iaS_0^2\phi, \quad \partial D.$$

Τότε

$$\frac{\partial c_+}{\partial \eta} - \frac{\partial c_-}{\partial \eta} = -\frac{\partial c_-}{\partial \eta} = \frac{1}{2}K'\phi - \frac{1}{2}\phi - iaTS_0^2\phi - \frac{1}{2}K'\phi - \frac{1}{2}\phi + iaTS_0^2\phi$$

$$= -\phi \Rightarrow -\frac{\partial c_-}{\partial \eta} = -\phi, \quad \partial D.$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Green και συνδιάζοντας όσα δείξαμε πάνω έχουμε

$$ia \int\limits_{\partial D} |S_0\phi|^2 ds = ia \int\limits_{\partial D} S_0\phi\overline{S_0\phi} ds = ia \int\limits_{\partial D} \phi S_0^2 \overline{\phi} ds,$$

(λόγω του τύπου του S_0)

$$= \int\limits_{\partial D} \overline{c}_- \frac{\partial c_-}{\partial \eta} ds = \int\limits_{D} \{|gradc|^2 - k^2|c|^2\} dx.$$

Παίρνοντας το φανταστικό μέρος της πάνω σχέσης προκύπτει ότι

$$S_0\phi = 0, \quad x \in \partial D.$$

Αν θεωρήσουμε την συνάρτηση $w : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{C}$ ώστε

$w(x) = \int\limits_{\partial D} \frac{1}{4\pi|x-y|}\phi(y)ds(y)$, *τότε από την ακριβώς πάνω σχέση προκύπτει ότι $w|_{\partial D} = 0$ και επειδή*

$$w = 0(1/r), r = |x| \longrightarrow \infty$$

$$\Rightarrow \lim_{|x|\to\infty} w(|x|) = 0.$$

Τελικά επειδή παρατηρούμε ότι η w είναι αρμονική, χρησιμοποιώντας την αρχή μεγίστου και ελαχίστου για αρμονικές συναρτήσεις έχουμε ότι

$$w = 0, \quad \mathbb{R}^3.$$

Όμως από τις σχέσεις διαπήδησης έχουμε

$$\frac{\partial w_+}{\partial \eta}(x) = \frac{\partial}{\partial \eta(x)} \int\limits_{\partial D} \phi(y)\Phi_0(x,y)ds(y) - \frac{1}{2}\phi(x), \quad x \in \partial D$$

$$\frac{\partial w_-}{\partial \eta}(x) = \frac{\partial}{\partial \eta(x)} \int\limits_{\partial D} \phi(y)\Phi_0(x,y)ds(y) + \frac{1}{2}\phi(x), \quad x \in \partial D$$

$$\Rightarrow \frac{\partial w_+}{\partial \eta} - \frac{\partial w_-}{\partial \eta} = -\phi, \quad \partial D.$$

Όμως επειδή $w = 0$ στο $\mathbb{R}^3$ και σε συνδιασμό με την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι $\phi = 0,\ \partial D$. Έτσι ο τελεστής είναι 1-1. Από τα θεωρήματα της προηγούμενης ενότητας οι τελεστές

$$K' + iaTS_0^2 : C(\partial D) \longrightarrow C(\partial D)$$

$$K' + iaTS_0^2 : C^{1,a}(\partial D) \longrightarrow C^{1,a}(\partial D)$$

είναι συμπαγεις. Συνεπώς από τη θεωρία $Riesz - Fredholm$ ο τελεστής:

$$(I + K' - iaTS_0^2)^{-1} : C(\partial D) \longrightarrow C(\partial D)$$

υπάρχει και είναι φραγμένος. Και με τον ίδιο τρόπο ισχύει το αποτέλεσμα που δείξαμε και στην δεύτερη περίπτωση. □

Παρατήρηση 2.2.4 *Με την προηγούμενη πρόταση ουσιαστικά δείξαμε τη συνεχή εξάρτηση της λύσης του προβλήματος από την συνοριακή συνάρτηση. Αυτό μπορεί να φανεί ακόμα καλύτερα απαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία όπως στην περίπτωση του μαλακού σκεδαστή.*

Έστω ότι $g \in C^{0,a}(\partial D)$. Τότε

$$\frac{\partial c_+}{\partial \eta} = g, \quad \partial D$$

$$\Longleftrightarrow \phi - K'\phi + iaTS_0^2\phi = -2g, \quad \partial D$$

$$-\frac{1}{2}[I - K' - iaTS_0^2]\phi = g, \quad \partial D$$

$$-\frac{1}{2}\phi = [I - K' - iaTS_0^2]^{-1}g, \quad \partial D, \text{ (προηγούμενη πρόταση)}$$

$$-\frac{1}{2}(S + iaKS_0^2 + iaS_0^2)\phi$$
$$= (S + iaKS_0^2 + iaS_0^2)[I - K' - iaTS_0^2]\phi, \quad \partial D$$
$$\iff c = \mathcal{B}g, \quad \partial D$$

όπου ο

$$\mathcal{B} : (S + iaKS_0^2 + iaS_0^2)[-I + K' + iaTS_0^2] : C^{0,a} \longrightarrow C^{1,a}(\partial D)$$

είναι φραγμένος και είναι προφανές ότι είναι ο αντίστροφος του $\mathcal{A}$.

Ολοκληρώνουμε την παραπάνω ανάλυση συνοψίζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα στο ακόλουθο Θεώρημα.

Θεώρημα 2.2.2 *Η απεικόνιση $\mathcal{A} : C^{1,a}(\partial D) \longrightarrow C^{0,a}(\partial D)$ είναι 1-1 επί φραγμένη και η αντίστροφη απεικόνιση υπάρχει και είναι φραγμένη. Η λύση του εξωτερικού προβλήματος Dirichlet ανήκει στο χώρο $C^{1,a}(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ αν η συνοριακή συνάρτηση ανήκει στο χώρο $C^{1,a}(\partial D)$ και η απεικόνιση της συνοριακής τιμής στη λύση είναι συνέχης από το χώρο $C^{1,a}(\partial D)$ στον $C^{1,a}(\mathbb{R}^3 \setminus D)$.*

Κεφάλαιο 3

Μοναδικότητα του Αντίστροφου Προβλήματος

Στο αντίστροφο πρόβλημα της μοναδικότητας του σκεδαστή, μελετάμε τις προϋποθέσεις που πρέπει να πληρούν τα μακρινά πεδία σκεδασμένων κυμάτων, που προκύπτουν από την σκέδαση γνωστών κυμάτων με το άγνωστο εμπόδιο, έτσι ώστε αυτό το εμπόδιο να μπορεί να καθοριστεί μοναδικά.

Το αντίστροφο πρόβλημα είναι μη καλά τοποθετημένο, αφού ο προσδιορισμός του σκεδασμένου πεδίου από το μακρινό πεδίο δεν έχει καλή τοποθέτηση και ακόμα ο προσδιορισμός του συνόρου του σκεδαστή απο τη γνώση των σημείων μηδενισμού του ολικού πεδίου ανάγεται σε ένα μη γραμμικό πρόβλημα.

Θα ξεκινήσουμε με το θεώρημα μοναδικότητας του Schiffer.

Θεώρημα 3.0.3 *Έστω D_1, D_2 μαλακοί σκεδαστές. Αν τα μακρινά πεδία των δύο σκεδαστών ταυτίζονται για έναν άπειρο αριθμό προσπίπτωντων κυμάτων $(e^{ik(\cdot d_n)})_{n\in\mathbb{N}}$ με ίδιο αριθμό κύματος k και καθορισμένη διεύθυνση $d_n : n \in \mathbb{N}$, συμβολικά δηλαδή $u^1_{\infty,n} = u^2_{\infty,n}, \forall n \in \mathbb{N}$, τότε $D_1 = D_2$.*

Απόδειξη. *Υποθέτουμε προς απαγωγή σε άτοπο ότι $D_1 \neq D_2$. Όπως έχουμε αναφέρει στο κεφάλαιο 1 προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα 1.4.1 ότι το μακρινό πεδίο καθορίζει μοναδικά το σκεδασμενο πεδίο u^s.Από την υπόθεση του θεωρήματος έχουμε*

$$u^1_{\infty,n} = u^2_{\infty,n}, \forall n \in \mathbb{N}$$
$$\Rightarrow u^1_{s,n} = u^2_{s,n}, \forall n \in \mathbb{N}, \text{στο } G$$

όπου το G είναι η μη φραγμένη συνιστώσα του $\mathbb{R}^3 \setminus (D_1 \bigcup D_2)$ και $u_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ στο ∂G, για το ολικό πεδίο.

Θεωρούμε το σύνολο $D^* = (\mathbb{R}^3 \setminus G) \setminus \overline{D}_2$ και έστω $n_0 \in \mathbb{N}$. Τότε το $u_{s,n_0} : D^* \longrightarrow \mathbb{C}$ αποτελεί το σκεδασμένο πεδίο του D_2 και για το αντίστοιχο ολικό πεδίο ισχύει

$$(\Delta + k^2)u_{n_0} = 0, \quad D^*$$

$$u_{n_0} = 0, \quad \partial D^*$$

$$\Rightarrow u_{n_0} \in H^1_0(D^*) \quad (\text{ως κλασσική λύση }).$$

Άρα μπορούμε να κατασκευάσουμε μια ακολουθία $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H^1_0(D^*)$ η οποία μπορούμε να δείξουμε ότι είναι γραμμικώς ανεξάρτητο σύνολο.

Πράγματι αν υποθέσουμε ότι υπάρχουν σταθερές τέτοιες ώστε

$$\sum_{n=1}^{N} c_n u_n = 0, \quad D^* \Rightarrow$$

με επειχειρήματα αναλυτικότητας μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{N} c_n u_n = 0, \quad , \mathbb{R}^3 \setminus B[0,R]$$

όπου έχουμε επιλέξει την ακτίνα R κατάλληλα ώστε
$D_1 \cup D_2 \subset B(0,R)$.

Επειδή $\forall n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι: $u_n = e^{ik(\cdot,d_n)} + u^n_s$ και επειδή $u^n_s(x) = O(\frac{1}{|x|}), |x| \longrightarrow \infty$, τελικά έχουμε ότι

$$\frac{1}{R^2}\sum_{1}^{N} \int\limits_{|x|=R} e^{ikx(d_n-d_m)} ds(x) = O\left(\frac{1}{R}\right), R \longrightarrow \infty, \quad m = 1, ..., N$$

Από τον τύπο Funk − Hecke έχουμε ότι

$$\int\limits_{|x|=R} e^{ikx(d_n-d_m)}ds(x) = \frac{4\pi R sin(kR|d_n-d_m|)}{k|d_n-d_m|}, \quad n \neq m$$

και ασυμπτωτικά έχουμε

$$\frac{1}{R^2}\sum_{1}^{N}\int\limits_{|x|=R} e^{ikx(d_n-d_m)}ds(x) = 4\pi c_m O\left(\frac{1}{R}\right), \quad R \longrightarrow \infty$$

Τέλος στέλνοντας το R στο άπειρο παρατηρούμε ότι οι σταθερές μηδενίζονται.

Άρα το σύνολο $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H_0^1(D^*)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να πούμε ότι

$$\int\limits_{D^*} u_n\overline{u_m}dx = \delta_{nm} : n, m \in \mathbb{N}$$

δηλαδή ότι στον L^2 είναι ορθοκανονικό το σύνολό μας (Gramm−Schmidt) και από το θεώρημα Green

$$\int\limits_{D^*} |grad\ u_n|^2dx = k^2\int\limits_{D^*} |u_n|^2dx = k^2 : n \in \mathbb{N}.$$

Άρα $||u_n||^2_{H_0^1(D^*)} = 1 + k^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Παρατηρώντας ότι

$$||u_n - u_m||^2_{L^2(D^*)} = 2,$$

και επειδή η ταυτοτική απεικόνιση

$$I : H_0^1(D^*) \longrightarrow L^2(D^*)$$

είναι συμπαγής, καταλήγουμε σε άτοπο αφού η εικόνα ενός φραγμένου σύνολου είναι $\sqrt{2}$-διαχωρισμένο σύνολο και τότε $D_1 = D_2$.□

Το επόμενο θεώρημα μοναδικότης είναι έργο των Colton και Sleeman και υποθέτει a-priori γνώση του μεγέθους του αγνώστου αντικειμένου. Με αυτόν τον τρόπο αποδεικνύει μοναδικότητα για ένα πεπερασμένο πλήθος προσπίπτοντων κυμάτων.

Πριν όμως από το Θεώρημα θα αναφέρουμε ένα αποτέλεσμα για τις ιδιοτιμές του τελεστή $-\Delta$ υπό συνοριακές συνθήκες Dirichlet.

Πρόταση 3.0.5 *Οι ιδιοτιμές του τελεστή $(-\Delta)$ υπό σ.σ. Dirichlet στην μπάλα $B(0,R)$ είναι της μορφής*

$$j_n(k|x|)Y_n(\hat{x}),$$

όπου Y_n σφαιρική αρμονική συνάρτηση.

Απόδειξη. *Από το θεώρημα 1.3.1 έχουμε*

$$-\Delta\big[j_n(k|x|)Y_n(\hat{x})\big] = k^2 j_n(k|x|)Y_n(\hat{x})$$

Για τις ιδιοτιμές έχουμε από τη συνοριακή συνθήκη

$$j_n(k|x|)Y_n(\hat{x}) = 0, \quad \forall \in S(0,R)$$

$$\iff j_n(k|R|)Y_n(\hat{x}), \quad \forall \in S(0,R)$$

$$\iff kR = t_{nl}, l \in \mathbb{N}$$

όπου $t_{nl}, l \in \mathbb{N}$ οι ρίζες της σφαιρικής Bessel τάξης n. $\square$

Θεώρημα 3.0.4 *Έστω D_1, D_2 μαλακοί σκεδαστές, $R > 0, D_1 \cup D_2 \subset B(0,R)$. Έστω ακόμα:*

$$N = \sum_{t_{nl}<kR} (2n+1)$$

και έστω ότι το μακρινό πεδίο ταυτίζεται για N+1 προσπίπτοντα κύματα με σταθερό k και καθορισμένες διευθύνσεις. Τότε $D_1 = D_2$.

Απόδειξη. *Έστω $D_1 \neq D_2$.Τότε θεωρούμε όπως στο προηγούμενο θεώρημα το D^* . Η n-οστή ιδιοτιμή για την (-Δ) υπό τις συνοριακές συνθήκες Dirichlet στην μπάλα B(0,R) είναι μικρότερη από την n-οστή ιδιοτομή για την (-Δ) υπό τις συνοριακές συνθήκες Dirichlet στο D^* ,όπου οι ιδιοτιμές έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρα και θεωρώντας και τις πολλαπλότητες. (Για αυτό τον ισχυρισμό παραπέμπουμε στη βιβλιογραφία)*

Δηλαδή αν

$$d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_m = k^2$$

οι ιδιοτιμές για το D^* οι μικρότερες από k^2 και αν

$$b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_m$$

οι m πρώτες ιδιοτιμές για τη μπάλα ,τότε

$$b_m < d_m = k^2$$

Αν Π_{k^2} είναι η πολλαπλότητα της $d_m = k^2$,τότε $\Pi_{k^2} \leq \sum_{b_i < k^2} \Pi_{b_i}$,όπου Π_{b_i} η πολλαπλότητα της ιδιοτιμής b_i.

Όμως οι ιδιοσυναρτήσεις για την B(0,R) είναι οι σφαιρικές συναρτήσεις με τύπο $j_n(k|x|)Y_n(\hat{x})$ με αντίστοιχες ιδιοτιμές b_{nl} να προκύπτουν από τις ρίζες (t_{nl}) των σφαιρικών συναρτήσεων $j_n(\cdot)$, όπου $b_{nl} = \frac{t_{nl}^2}{R^2}$. Όμως η πολαπλότητα $\Pi_{b_{nl}} = 2n+1, \forall n \in \mathbb{N}$. Τότε $b_i < k^2 \iff \frac{t_{nl}^2}{R^2} < k^2 \iff t_{nl}^2 < kR^2 \iff t_{nl} < kR$. Άρα $\Pi_{k^2} \leq \sum_{t_{nl} < kR} (2n+1) = N$. Τώρα από την υπόθεση έχουμε ότι N+1 προσπίπτοντα κύματα με ίδιο k και διαφορετικές καθορισμένες διευθύνσεις δίνουν N+1 σκεδασμένα διαφορετικά πεδία. Δηλαδή χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να πούμε ότι έχουμε N+1 γραμμικές ανεξάρτητες ιδιοσυναρτήσεις για την (-Δ) με αντίστοιχη ιδιοτιμή k^2 στο D^* ,δηλαδή $\Pi_{k^2} = N + 1$. Αυτό όμως είναι άτοπο διότι έχουμε δείξει ότι $\Pi_{k^2} \leq N$,άρα $D_1 = D_2$. □

Το επόμενο Θεώρημα που θα αναφέρουμε είναι έργο του Καθηγητή Γκιντίδη.

Θεώρημα 3.0.5 *Έστω D_1, D_2 μαλακοί σκεδαστές , $R > 0$ ώστε $D_1 \cup D_2 \subset B(0,R)$ με $kR < t_{10}$, για τους οποίους το μακρινό τους πεδίο ταυτίζεται για ένα προσπίπτον κύμα με μια καθορισμένη διεύθυνση και αριθμό κύματος k. Τότε $D_1 = D_2$.*

Σχόλιο για την απόδειξη:

Η απόδειξη του θεωρήματος έχει παρόμοιο χαρακτήρα με του προηγούμενου θεωρήματος και βασίζεται στις ιδιοτητες της πολλαπλότητας των ιδιοτιμών του τελεστή (-Δ) υπό σ.σ Dirichlet και στις ρίζες των σφαιρικών συναρτήσων Bessel από τις οποίες προσδιορίζονται οι ιδιοτιμές της (-Δ) υπό συνοριακές συνθήκες Dirichlet στην μπάλα B[0,R] .

Αυτό το αποτέλεσμα είναι το καλύτερο που έχουμε για τον προσδιορισμό της μοναδικότητας για ένα προσπίπτον κύμα, αφού αυξάνει την ανοχή για το μέγεθος των εμποδίων.

Σε παρόμοιο ύφος και το επόμενο θεώρημα μοναδικότητας.

Θεώρημα 3.0.6 *Ένα κυρτό πολύεδρο με συμπεριφορά μαλακού σκεδαστή προσδιορίζεται μοναδικά από την γνώση του μακρινού πεδίου για ένα προσπίπτον κύμα.*

Απόδειξη.

Έστω $D_1 \neq D_2$ κυρτά πολύεδρα. Έστω ακόμα ότι

$$u_\infty^1 = u_\infty^2.$$

Από το Θεώρημα 1.4.1 τελικά

$$u = u_1 = u_2, \quad \mathbb{R}^3 \setminus (D_1 \cup D_2).$$

$$\Rightarrow u = u_1 = u_2, \quad \mathbb{R}^2 \setminus (D_1 \cup D_2).$$

Επειδή τα σύνολα είναι κυρτά υπάρχει κορυφή z του D_1 και ανοικτη περιοχή V_z:

$$V_z \cap \overline{D_2} = \emptyset$$

Έστω Γ *η πλευρά του* D_1 *που έχει σαν κορυφή το σημείο* z *και έστω* Λ *το επίπεδο που περιέχει την πλευρά αυτή.*

Το πεδίο u_2 *είναι αναλυτικό στο* $V \cap \Lambda$ *αφού αυτό το σύνολο βρίσκεται στον εξωτερικό χώρο του* D_2*. Το* u_2 *είναι το σκεδασμένο πεδίο για το σύνολο* D_2*. Επίσης προκύπτει ότι το* u_1 *είναι αναλυτικό στο σύνολο* $\Lambda \setminus \overline{\Gamma}$ *με παρόμοια επιχειρήματα.*

Λόγω των συνοριακών συνθηκών επειδή το ολικό πεδίο $u|_{V_z \cap \Gamma} = 0$ *από την αναλυτικότητα του* $u_2 \Rightarrow u_{|V \cap \Lambda}$ *και τελικά* $u|_\Lambda = 0$*.*

Αυτό όμως το επιχείρημα καταλήγει σε άτοπο αφού

$$|u^i(x)| = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$$

και επειδή $u^s \longrightarrow 0, |x| \longrightarrow \infty$*.* $\square$

Βιβλιογραφία

[1] Colton, D.L., and Kress, R. 2013. Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory. New York: Springer

[2] Gintides, D. Local Uniqueness for the Inverse Scattering Problem in Acoustics via the Faber–Krahn Inequality. Inverse Problems 21, 1195–1205 (2005).

[3] Colton, D., and Kress, R. Integral Equation Methods in Scattering Theory. Wiley- Interscience Publication, New York 1983.

[4] Leis, R. Initial Boundary Value Problems in Mathematical Physics. John Wiley, New York 1986.

[5] Cakoni, F., and Colton, D. Qualitative Methods in Inverse Scattering Theory. Springer, Berlin 2006.

[6] Σ.Αργυρός, Σημειωσεις Παραδόσεων Πραγματικής Ανάλυσης, Ε.Μ. Πολυτεχνείο, 2011.