



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
Δ.Π.Μ.Σ. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΤΥΠΟΠΟΙΗΣΗ ΣΕ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΕΣ ΑΙΧΜΗΣ ΚΑΙ ΣΤΑ
ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ

Ανάλυση ευαισθησίας διαγραμμάτων ελέγχου
τύπου Shewhart, CUSUM και EWMA από
δείγματα που ακολουθούν τη Διωνυμική
κατανομή και την κατανομή Bernoulli

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΠΑΠΑΔΟΠΟΥΛΟΥ ΑΛΚΗΣΤΙΣ

A.M.: 09316031

Επιβλέπων: Κουκουβίνος Χρήστος
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Φεβρουάριος 2019



NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
SCHOOL OF APPLIED MATHEMATICAL AND PHYSICAL SCIENCES
MASTER: MATHEMATICAL MODELING IN CONTEMPORARY TECHNOLOGIES
AND ECONOMICS

**Sensitivity analysis of Shewhart, CUSUM and
EWMA Control Charts from the samples
following the Binomial and Bernoulli distributions**

MASTER THESIS

PAPADOPOULOU ALKISTIS

I.D.: 09316031

Supervisor : X. Koukouvinos Christos
Professor of NTUA

Athens, February 2019

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή της παρούσης Διπλωματικής κ. Χρήστο Κουκουβίνο, Καθηγητή Ε.Μ.Π., για την ευκαιρία που μου παρείχε να δοκιμάσω τις δυνατότητες μου στο συγκεκριμένο επιστημονικό πεδίο. Η απόλυτη εμπιστοσύνη με την οποία με περιέβαλε και η καθοδήγηση του, αποτέλεσαν τους πυλώνες στους οποίους εδράστηκε η προσπάθειά μου.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον υποψήφιο διδάκτορα κ. Βασίλειο Αλεβιζάκο για τις ατέλειωτες συζητήσεις μας επί του συγκεκριμένου γνωστικού αντικειμένου, τη μεταβίβαση προς εμένα της δικής του εμπειρίας, καθώς και τη συνεχή και ανιδιοτελή στήριξη που μου παρείχε.

Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω την υποψήφια διδάκτορα κα. Αγγελική Λάππα για το χρόνο που αφιέρωσε στη διόρθωση της παρούσης Διπλωματικής Εργασίας.

Αυτονόητα ευχαριστώ τον πρόεδρο του Δ.Π.Μ.Σ. Μαθηματική Προτυποποίηση σε Τεχνολογίες Αιχμής και στα Χρηματοοικονομικά κ. Νικόλαο Σταυρακάκη, Καθηγητή Ε.Μ.Π., για την τιμή που μου έκανε να με επιλέξει στο αναφερόμενο Δ.Π.Μ.Σ., καθώς και την ενθάρρυνσή του σε όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου για το καθημερινό και ουσιαστικό υποστηρικτικό της πλαίσιο που μου προσέφερε.

Περίληψη

Αναπόσπαστο μέρος του Στατιστικού Ελέγχου Ποιότητας, αποτελούν τα Διαγράμματα Ελέγχου, που επιτρέπουν την παρακολούθηση και τον έλεγχο των διεργασιών στη ροή του χρόνου. Με τα εν λόγω διαγράμματα δύναται να διαπιστωθεί κατά πόσο μια διεργασία βρίσκεται εντός ή εκτός στατιστικού ελέγχου, όσον αφορά την παρακολούθηση συγκεκριμένου χαρακτηριστικού-διάστασης ποιότητας. Επειδή, στην πλειονότητα των περιπτώσεων, το μέτρο έκφρασης της διάστασης ποιότητας αποτελεί ο αριθμός των μη συμμορφωμένων προς τις επιθυμητές προδιαγραφές παρατηρήσεων, η μορφή των τελευταίων παρατηρήσεων εκφράζεται με στατιστικές κατανομές. Στην παρούσα εργασία παρουσιάζονται Διαγράμματα Ελέγχου Shewhart, CUSUM και EWMA και γίνεται συγκριτική ανάλυση της ευαισθησίας αυτών, όσον αφορά την ικανότητα τους στον εντοπισμό της εκτός ελέγχου λειτουργίας, όταν η μορφή των μη συμμορφωμένων με τις επιθυμητές προδιαγραφές παρατηρήσεων, ακολουθεί τις κατανομές Διωνυμική και Bernoulli.

Στο 1^ο Κεφάλαιο εισάγονται οι έννοιες της ποιότητας και των διαστάσεων αυτής. Οριοθετείται η έννοια της μεταβλητότητας της παραγωγικής διαδικασίας και αναλύεται ο Στατιστικός Έλεγχος αυτής, μέσω των Διαγραμμάτων Ελέγχου. Στο 2^ο Κεφάλαιο παρουσιάζονται τα Διαγράμματα Ελέγχου Ιδιοτήτων τύπου Shewhart, για δείγματα που ακολουθούν την Διωνυμική κατανομή και την κατανομή Bernoulli. Συγκεκριμένα, μελετάται η απόδοση των εν λόγω διαγραμμάτων στην ανίχνευση μίας εκτός ελέγχου κατάστασης. Στο 3^ο Κεφάλαιο αναλύονται τα Συσσωρευμένα Αθροιστικά Διαγράμματα Ελέγχου (CUSUM και FIR CUSUM) για τις προαναφερθείσες κατανομές. Συγκρίνεται η ευαισθησία της ανίχνευσης της εκτός ελέγχου κατάστασης μεταξύ των ως άνω διαγραμμάτων, καθώς και με τα αντίστοιχα διαγράμματα τύπου Shewhart. Στο 4^ο Κεφάλαιο παρουσιάζονται συγκεκριμένα Διαγράμματα Ελέγχου με Κινητούς Μέσους και Εκθετικά Βάρη (EWMA και FIR EWMA) για δείγματα που ακολουθούν τις ήδη προαναφερθείσες κατανομές. Συγκρίνεται η ευαισθησία της ανίχνευσης της εκτός ελέγχου κατάστασης μεταξύ των προαναφερθέντων διαγραμμάτων, καθώς και με τα αντίστοιχα διαγράμματα τύπου Shewhart, CUSUM και FIR CUSUM. Στο 5^ο Κεφάλαιο παρουσιάζονται δύο εφαρμογές των Διαγραμμάτων Shewhart, CUSUM και EWMA για δεδομένα που ακολουθούν τη Διωνυμική κατανομή. Στο 6^ο Κεφάλαιο ανακεφαλαιώνονται και παρουσιάζονται συγκριτικά τα συμπεράσματα της ανάλυσης ευαισθησίας εκάστου κεφαλαίου.

Λέξεις Κλειδιά

Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας, Διαγράμματα Ελέγχου, κατανομή Διωνυμική, κατανομή Bernoulli, Shewhart, CUSUM, FIR CUSUM, EWMA, FIR EWMA, ανάλυση ευαισθησίας, Μέσο Μήκος Ροής

Abstract

Integral part of the Statistical Quality Control consists the Control Charts that allow the process monitoring and control of processes during time. With these Charts one can check whether a process is in statistical control regarding a particular quality characteristic. Since in the majority of cases, the measure of quality characteristic is the number of observations that do not conform with the desired specifications, statistical distributions are employed for the analysis. In this study, Shewhart, CUSUM and EWMA control charts are presented. Subsequently a sensitivity analysis is carried out to determine their ability to detect an out of control shift when the pattern of observations that do not conform with the set specs, follow the binomial and Bernoulli observations.

In Chapter 1 the meaning of quality and its dimensions are defined. The variability of the production process is analysed together with the statistical control through the Control Charts. Chapter 2 introduces the Shewhart type Control Charts for samples that follow the binomial and Bernoulli distributions. The sensitivity to detect an out of control process by the Control Charts is evaluated. For the aforementioned distributions the Cumulative Sum Control Charts (CUSUM and FIR CUSUM) are analysed in Chapter 3. The sensitivity to detect the out of control process is evaluated for these charts and the Shewhart type Control Charts. Chapter 4 presents Control Charts with Exponentially Weighted Moving Average (EWMA and FIR EWMA) for samples that follow the above distributions. The sensitivity to detect the out of control process is evaluated for these charts and also for charts type Shewhar, CUSUM and FIR CUSUM. Chapter 5 presents two applications of Shewhart, CUSUM and EWMA charts for data that follow the binomial distribution. In Chapter 6 a comparative analysis of the conclusions for the sensitivity analyses of the chapters is presented.

Keywords

Statistical Quality Control, Control Charts, Binomial distribution, Bernoulli distribution, Shewhart, CUSUM, FIR CUSUM, EWMA, FIR EWMA, sensitivity, Average Run Length

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες	1
Περίληψη	3
Abstract	5
Περιεχόμενα	9
Συντμήσεις-Αρκτικόλεξα	11
Κατάλογος Πινάκων	14
Κατάλογος Σχημάτων	16
1 Εισαγωγικές Έννοιες	17
1.1 Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας Προϊόντων και Υπηρεσιών	17
1.2 Η ποιότητα και οι διαστάσεις της	18
1.3 Συνιστώσες του Στατιστικού Ελέγχου Ποιότητας	20
1.4 Μεταβλητότητα και Στατιστικός Έλεγχος Παραγωγικής Διεργασίας	22
1.5 Διαγράμματα Ελέγχου	24
1.6 Όρια Ελέγχου	27
1.7 Φάσεις I και II	28
1.8 Μέσο Μήκος Ροής ή Διαδρομής	29
2 Διαγράμματα Ελέγχου Ιδιοτήτων τύπου Shewhart	33
2.1 Εισαγωγή	33
2.2 Διαγράμματα Ελέγχου p και np	34
2.3 Διαγράμματα Ελέγχου Q	40
2.4 Διαγράμματα Ελέγχου με μετασχηματισμό $arcsin$	44
2.5 Διαγράμματα Ελέγχου Ryan και Schwertman	47
2.6 Διάγραμμα Ελέγχου p με έναν όρο διόρθωσης Cornish-Fisher	50
2.7 Διάγραμμα Ελέγχου p με δύο όρους διόρθωσης Cornish-Fisher	53
2.8 Διαγράμματα Ελέγχου ISRT	56

3	Συσσωρευμένα Αθροιστικά Διαγράμματα Ελέγχου	59
3.1	Εισαγωγή	59
3.2	Διάγραμμα CUSUM	60
3.3	Διάγραμμα Tabular CUSUM	61
3.4	Διαγράμματα Ελέγχου Τύπου CUSUM για δεδομένα που ακολουθούν τη Διωνυμική κατανομή	62
3.5	Υπολογισμός Μέσου Μήκους Ροής <i>ARL</i> του διαγράμματος Binomial CUSUM	65
3.6	Διαγράμματα Ελέγχου Τύπου FIR CUSUM για δεδομένα που ακολουθούν τη Διωνυμική κατανομή	66
3.7	Διαγράμματα Ελέγχου Τύπου CUSUM για δεδομένα που ακολουθούν τη κατανομή Bernoulli	69
3.8	Υπολογισμός Μέσου Μήκους Ροής <i>ARL</i> του διαγράμματος Bernoulli CUSUM	72
3.9	Διαγράμματα Ελέγχου Τύπου FIR CUSUM για δεδομένα που ακολουθούν τη κατανομή Bernoulli	73
4	Διαγράμματα Ελέγχου με Κινητούς Μέσους και Εκθετικά Βάρη	77
4.1	Εισαγωγή	77
4.2	Διαγράμματα Ελέγχου Τύπου EWMA	77
4.3	Διαγράμματα Ελέγχου Τύπου EWMA για δεδομένα που ακολουθούν τη Διωνυμική κατανομή	80
4.4	Υπολογισμός Μέσου Μήκους Ροής <i>ARL</i> του διαγράμματος Binomial EWMA	82
4.5	Διαγράμματα Ελέγχου Τύπου EWMA για δεδομένα που ακολουθούν την κατανομή Bernoulli	85
4.6	Υπολογισμός Μέσου Μήκους Ροής <i>ARL</i> του διαγράμματος Bernoulli EWMA	87
4.7	Διαγράμματα Ελέγχου Τύπου FIR EWMA για δεδομένα που ακολουθούν τις κατανομές Διωνυμική και Bernoulli	89
5	Εφαρμογές των Διαγραμμάτων Shewhart, CUSUM και EWMA με πρωτογενή πειραματικά δεδομένα που ακολουθούν τη Διωνυμική κατανομή	93
5.1	Εισαγωγή	93
5.2	1 ^η Εφαρμογή	94
5.2.1	Διαγράμματα τύπου Shewhart	94
5.2.2	Διάγραμμα CUSUM	101
5.2.3	Διάγραμμα EWMA	104
5.3	2 ^η Εφαρμογή	111
5.3.1	Διαγράμματα τύπου Shewhart	111
5.3.2	Διάγραμμα CUSUM	117
5.3.3	Διάγραμμα EWMA	121

6	Συμπεράσματα - Προτάσεις για Έρευνα	129
6.1	Συμπεράσματα	129
6.2	Προτάσεις για Έρευνα	132
	Βιβλιογραφία	133

Συντμήσεις-Αρκτικόλεξα

AEQL	Average Extra Quadratic Loss
ANIS	Average Number of Items Sampled
ARARL	Average Ratio of ARL
ARL	Average Time to Signal
CF	Cornish Fisher
CL	Center Line
CUSUM	Cumulative Sum (Control Charts)
EWMA	Exponentially Weighted Moving Average (Control Charts)
FIR	Fast Initial Response
HS	Head Start
LCL	Lower Control Limit
LSL	Lower Specification Limits
LTA	Lower Tail Area
MDRL	Median Run Length
OCAP	Out of Control Action Plan
PCI	Performance Comparison Index
RL	Run Length
SDRL	Standard Deviation of the Run Length
SPC	Statistical Process Control
SPRT	Sequential Probability Ratio Test
TAD	Total Absolute Difference
UCL	Upper Control Limit
USL	Upper Specification Limits
UTA	Upper Tail Area

Κατάλογος Πινάκων

1.1	Οι διαστάσεις της ποιότητας	19
1.2	Όρια μοντέλου $L\sigma$	27
2.1	Όρια του p διαγράμματος ελέγχου	36
2.2	Όρια του np διαγράμματος ελέγχου	36
2.3	Ενδεικτικές τιμές ελαχίστου δείγματος για το p διάγραμμα	37
2.4	Όρια του p διαγράμματος ελέγχου με μεταβλητό μέγεθος δείγματος	38
2.5	Όρια του Q διαγράμματος ελέγχου	41
2.6	Ενδεικτικές τιμές ελαχίστου δείγματος για το διάγραμμα p	42
2.7	Πίνακας ενδεικτικών τιμών Q διαγράμματος ελέγχου	43
2.8	Όρια ελέγχου \arcsin διαγράμματος	45
2.9	Ενδεικτικές τιμές ελαχίστου δείγματος για το διάγραμμα \arcsin	46
2.10	Πίνακας ενδεικτικών τιμών ορίων ελέγχου	47
2.11	Όρια ελέγχου για το np διάγραμμα των Ryan και Schwertman (1997)	48
2.12	Ενδεικτικές τιμές ελαχίστου δείγματος του διαγράμματος Ryan	49
2.13	Πίνακας ενδεικτικών τιμών ορίων ελέγχου	49
2.14	Όρια ελέγχου για το p διάγραμμα με έναν όρο διόρθωσης C-F	51
2.15	Όρια ελέγχου για το np διάγραμμα με έναν όρο διόρθωσης C-F	51
2.16	Ενδεικτικές τιμές ελαχίστου δείγματος με C-F όρο διόρθωσης	52
2.17	Όρια ελέγχου για το p διάγραμμα με δύο όρους διόρθωσης C-F	53
2.18	Ενδεικτικές τιμές ελαχίστου δείγματος με C-F δύο όρους διόρθωσης	55
2.19	Όρια ελέγχου για το $ISRT_p$ διάγραμμα	57
2.20	Όρια ελέγχου για το $ISRT_{np}$ διάγραμμα	57
2.21	Ενδεικτικές τιμές ελαχίστου δείγματος του διαγράμματος ISRT	58
3.1	Ενδεικτικές τιμές του $ANIS$ για το διάγραμμα Upper Sided Binomial CUSUM	68
3.2	Ενδεικτικές τιμές του $ANIS$ για το διάγραμμα Lower Sided Binomial CUSUM	68
3.3	Ενδεικτικές τιμές του $ANIS$ για το διάγραμμα Upper Sided Bernoulli CUSUM	74
3.4	Ενδεικτικές τιμές του $ANIS$ για το διάγραμμα Lower Side Bernoulli CUSUM	75
4.1	Όρια ελέγχου για το EWMA διάγραμμα	79
4.2	Όρια ελέγχου για το Binomial EWMA διάγραμμα	81
4.3	Εξομαλυμένα όρια ελέγχου για το Binomial EWMA διάγραμμα	81

4.4	Πίνακας ενδεικτικών τιμών <i>ANIS</i> του Upper Sided Binomial EWMA για $n = 101$	84
4.5	Πίνακας ενδεικτικών τιμών <i>ANIS</i> του Upper Sided Binomial EWMA για $n = 759$	85
4.6	Όρια ελέγχου για το Bernoulli EWMA διάγραμμα	86
4.7	Εξομαλυμένα όρια ελέγχου για το Bernoulli EWMA διάγραμμα	87
4.8	Πίνακας ενδεικτικών τιμών <i>ANIS</i> του διαγράμματος Upper Sided Bernoulli EWMA	88
4.9	Όρια ελέγχου για το διάγραμμα FIR Binomial EWMA	89
4.10	Όρια ελέγχου για το διάγραμμα FIR Bernoulli EWMA	90
4.11	Συγκριτικός Πίνακας ενδεικτικών τιμών <i>ANIS</i> του Upper Sided Binomial EWMA για $n = 101$ και $w = 0.002$ που υπολογίζονται με τις μεθόδους EWMA, FIR EWMA και 50% HS EWMA	91
4.12	Συγκριτικός Πίνακας ενδεικτικών τιμών <i>ANIS</i> του Upper Sided FIR Binomial EWMA για $n = 759$ και $w = 0.02$ που υπολογίζονται με τις μεθόδους EWMA, FIR EWMA και 50% HS EWMA	91
4.13	Συγκριτικός Πίνακας ενδεικτικών τιμών <i>ANIS</i> του Upper Sided FIR Bernoulli EWMA για $n = 1$ και $w = 0.0001$ που υπολογίζονται με τις μεθόδους EWMA, FIR EWMA και 50% HS EWMA	92
5.1	Πίνακας τιμών της εφαρμογής 1	94
5.2	Επιλογή των παραμέτρων w και U_{BN_w} για $ARL_0 \approx 304.2244$	105
5.3	Επιλογή των παραμέτρων w και U_{BN_w} για $ARL_0 \approx 304.2244$	108
5.4	Πίνακας τιμών της εφαρμογής 2	111
5.5	Επιλογή των παραμέτρων w και U_{BN_w} για $ARL_0 \approx 356.6279$	121
5.6	Επιλογή των παραμέτρων w και U_{BN_w} για $ARL_0 \approx 356.6279$	124

Κατάλογος Σχημάτων

1.1	Διαδικασία Παραγωγής	21
1.2	Διάγραμμα Ελέγχου τύπου Shewhart	25
1.3	Προειδοποιητικά όρια ελέγχου και ζώνες A, B και C σε ένα διάγραμμα ελέγχου	26
2.1	Ενδεικτικά διαγράμματα του <i>ARL</i> σε σχέση με τις <i>p</i> τιμές	40
2.2	Ενδεικτικά διαγράμματα του <i>ARL</i> σε σχέση με τις <i>p</i> τιμές	46
2.3	Ενδεικτικά διαγράμματα του <i>ARL</i> σε σχέση με τις <i>p</i> τιμές	52
2.4	Ενδεικτικά διαγράμματα του <i>ARL</i> σε σχέση με τις <i>p</i> τιμές	55
2.5	Ενδεικτικά διαγράμματα του <i>ARL</i> σε σχέση με τις <i>p</i> τιμές	58
3.1	Ενδεικτικές τιμές των <i>k</i> και <i>r</i> για $p_0 = 0.00001$ και $n = 100$	64
3.2	Ενδεικτικές τιμές των <i>k</i> και <i>r</i> για $p_0 = 0.00002$ και $n = 100$	64
3.3	Ενδεικτικές τιμές των <i>k</i> και <i>r</i> για $p_0 = 0.00003$ και $n = 100$	64
3.4	Ενδεικτικά διαγράμματα του <i>ANIS</i> σε σχέση με την τιμή του <i>p</i>	66
3.5	Ενδεικτικά διαγράμματα του <i>ANIS</i> σε σχέση με την τιμή του <i>h</i>	67
3.6	Ενδεικτικά διαγράμματα του <i>ANIS</i> σε σχέση με την τιμή του <i>h</i>	67
3.7	Ενδεικτικές τιμές των <i>k</i> και <i>r</i> για $p_0 = 0.00001$	71
3.8	Ενδεικτικές τιμές των <i>k</i> και <i>r</i> για $p_0 = 0.00002$	71
3.9	Ενδεικτικές τιμές των <i>k</i> και <i>r</i> για $p_0 = 0.00003$	71
3.10	Ενδεικτικά διαγράμματα του <i>ANIS</i> σε σχέση με την τιμή του <i>p</i>	73
3.11	Ενδεικτικά διαγράμματα του <i>ANIS</i> σε σχέση με την τιμή του <i>h</i>	74
4.1	Ενδεικτικά διαγράμματα του <i>ANIS</i> σε σχέση με την τιμή του <i>p</i>	83
4.2	Ενδεικτικές τιμές <i>ANIS</i> του διαγράμματος Shewhart	83
5.1	Φάση I του διαγράμματος <i>p</i>	95
5.2	Φάση II του διαγράμματος <i>p</i>	96
5.3	Φάση I και Φάση II του διαγράμματος <i>Q</i>	97
5.4	Φάση I και Φάση II του διαγράμματος <i>aresin</i>	98
5.5	Φάση I και Φάση II του διαγράμματος <i>Ryan</i>	98
5.6	Φάση I και Φάση II με έναν όρο διόρθωσης C-F	99
5.7	Φάση I και Φάση II με δύο όρους διόρθωσης C-F	100
5.8	Φάση I και Φάση II του διαγράμματος <i>ISRT</i>	100

5.9	Διάγραμμα Upper Sided CUSUM	102
5.10	Διάγραμμα Lower Sided CUSUM	102
5.11	Διάγραμμα Upper Sided FIR CUSUM	103
5.12	Διάγραμμα Lower Sided FIR CUSUM	104
5.13	Διάγραμμα EWMA για $w = 0.01$	106
5.14	Διάγραμμα EWMA για $w = 0.1$	107
5.15	Διάγραμμα EWMA για $w = 0.3$	107
5.16	Διάγραμμα FIR EWMA για $w = 0.01$	109
5.17	Διάγραμμα FIR EWMA για $w = 0.1$	110
5.18	Διάγραμμα FIR EWMA για $w = 0.3$	110
5.19	Φάση I του διαγράμματος p	112
5.20	Φάση II του διαγράμματος p	113
5.21	Φάση I και Φάση II του διαγράμματος Q	114
5.22	Φάση I και Φάση II του διαγράμματος \arcsin	114
5.23	Φάση I και Φάση II του διαγράμματος Ryan	115
5.24	Φάση I και Φάση II με έναν όρο διόρθωσης C-F	116
5.25	Φάση I και Φάση II με δύο όρους διόρθωσης C-F	116
5.26	Φάση I και Φάση II του διαγράμματος ISRT	117
5.27	Διάγραμμα Upper Sided CUSUM	118
5.28	Διάγραμμα Lower Sided CUSUM	119
5.29	Διάγραμμα Upper Sided FIR CUSUM	120
5.30	Διάγραμμα Lower Sided FIR CUSUM	120
5.31	Διάγραμμα EWMA για $w = 0.01$	122
5.32	Διάγραμμα EWMA για $w = 0.1$	123
5.33	Διάγραμμα EWMA για $w = 0.3$	124
5.34	Διάγραμμα FIR EWMA για $w = 0.01$	125
5.35	Διάγραμμα FIR EWMA για $w = 0.1$	126
5.36	Διάγραμμα FIR EWMA για $w = 0.3$	126

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγικές Έννοιες

1.1 Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας Προϊόντων και Υπηρεσιών

Οι συνεχείς διαφοροποιήσεις των καταναλωτικών προτιμήσεων, η άμβλυση της ασύμμετρης πληροφόρησης των καταναλωτών δια της εξελισσόμενης επικοινωνιακής επανάστασης, η επίδραση της τεχνολογικής προόδου στην παραγωγική διαδικασία των προϊόντων και των υπηρεσιών, η ανάδυση σύγχρονων μορφών αγοράς καθώς και η διεθνοποίηση, απελευθέρωση και «απορρύθμιση» -από τα μονοπωλιακά και τα στενά κρατικά παραγωγικά πρότυπα- των αγορών, η γεωγραφική διαφοροποίηση των παραγωγικών δομών – ιδιαίτερα με την ανάπτυξη της βιομηχανικής παραγωγής και της προσφοράς υπηρεσιών διαδικτυακά από χώρες εκτός της Ευρώπης και της Βορείου Αμερικής-, οριοθετούν το πλαίσιο του τρέχοντος ανταγωνιστικού περιβάλλοντος, το οποίο θέτει σχεδόν αξιωματικά την αναγκαιότητα τόσο της επιτάχυνσης της δυναμικής των διαδικασιών βελτίωσης ποιότητας των προσφερόμενων προϊόντων και υπηρεσιών, όσο και του περιορισμού του κοστολογίου παραγωγής.

Το ως άνω ανταγωνιστικό περιβάλλον επιβάλλει την αναζήτηση επιχειρησιακών τακτικών προκειμένου να επιτευχθεί η βέλτιστη δυνατή ποιότητα των παραγόμενων προϊόντων ή υπηρεσιών με το ελάχιστο δυνατό κόστος. Αναζητείται πλέον, πέραν των παραδοσιακών διοικητικών πρακτικών, σύγχρονη ολιστική επιχειρησιακή φιλοσοφία και στρατηγική που οδηγεί στη συνολική βελτίωση της ποιότητας εκτέλεσης των διεργασιών που σχετίζονται με την κατά περίπτωση παραγωγή προϊόντων ή παροχή υπηρεσιών. Η υπ' όψιν στρατηγική ονομάζεται **Διοίκηση Ολικής Ποιότητας (Total Quality Management)** και περιλαμβάνει το σύνολο των ενεργειών που αναλαμβάνουν και υλοποιούν οι συνιστώσες ενός οργανισμού / επιχείρησης, με στόχο τη συνεχή και συστηματική βελτίωση της ποιότητας των παρεχόμενων αγαθών και υπηρεσιών, με πολλαπλούς στόχους, ήτοι την αποκόμιση ωφελειών τόσο για τον αναφερόμενο οργανισμό/επιχείρηση, όσο και για τους εργαζόμενους, τους συνεργάτες και ευρύτερα για την

κοινωνία (Στειάκης Κωφίδης (2017), Αντζουλάκος (2009)). Η σύγχρονη αντίληψη θέλει την ποιότητα να αφορά **κάθε διεργασία**, όχι μόνο την παραγωγική και κάθε άτομο, όχι μόνο τους απασχολούμενους στο Τμήμα Ελέγχου Ποιότητας. Αυτή η ολιστική αντίληψη «νομιμοποιεί» το χαρακτηρισμό **Διοίκηση Ολικής Ποιότητας, συνώνυμη της έκφρασης ποιότητα σε όλο το εύρος του οργανισμού** (*company-wide quality*) (Γεωργακή και λοιποί, 2010). **Η συνεχής βελτίωση ποιότητας αποτελεί πλέον το κύριο ανταγωνιστικό πλεονέκτημα των επιχειρήσεων και οργανισμών** (Στειάκης και Κωφίδης, 2017).

Οργανικό μέρος της Διοίκησης Ολικής Ποιότητας αποτελεί ο Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας (*Statistical Quality Control*), ο οποίος αποτελεί την παλαιότερη και γνωστότερη μέθοδο ελέγχου παραγωγικών διεργασιών για τη βελτίωση της ποιότητας των παραγόμενων προϊόντων και υπηρεσιών. Κύριο στόχο του συγκεκριμένου ελέγχου αποτελεί η έγκαιρη αποκάλυψη των μη συμμορφωμένων με τις προδιαγραφές παραγόμενων προϊόντων και υπηρεσιών, η οποία σηματοδοτεί με τη σειρά της τη λήψη διορθωτικών ενεργειών για των εντοπισμό και εξάλειψη των αιτιών που είναι υπεύθυνες για τις αποκλίσεις από τις προδιαγραφές, συμβάλλοντας έτσι στη διατήρηση της ποιότητας των προϊόντων (Αντζουλάκος, 2009).

Ο Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας ξεκίνησε να χρησιμοποιείται από την Bell Telephone Laboratories το 1920 στις Η.Π.Α.. Γνώρισε ιδιαίτερη ανάπτυξη κατά τον Β΄ Παγκόσμιο πόλεμο στην ίδια χώρα. Από τα πρώτα βήματα αναπτύχθηκαν σχεδόν ταυτόχρονα δύο μεγάλες περιοχές του στατιστικού ελέγχου: **ο έλεγχος ποιότητας αποδοχής** (*acceptance sampling*) και **ο έλεγχος παραγωγικής διαδικασίας** (*process control*). Μετά το 1980 δίνεται νέα ώθηση στο στατιστικό έλεγχο ποιότητας με την ανάπτυξη της τρίτης μεγάλης περιοχής του στατιστικού ποιοτικού ελέγχου, της **σχεδίασης προϊόντων και παραγωγικών διαδικασιών** (*design of experiments*) που προφανώς επικεντρώνεται στη βελτίωση της ποιότητας κατά την προαναφερθείσα φάση (Κονταξάκη, 2015).

Τέλος σημειώνονται δύο επίσημοι ορισμοί της ποιότητας (Γεωργακή και λοιποί, 2010): Ο Αμερικανικός Οργανισμός Ποιότητας (*ASQ*) ως ποιότητα (2002) ορίζει την ικανότητα του προϊόντος ή της υπηρεσίας να ικανοποιεί ανάγκες που δηλώνονται ή και εννοούνται, ενώ ο Παγκόσμιος Οργανισμός Τυποποίησης (*ISO*) ως ποιότητα (1986) θεωρεί το σύνολο των στοιχείων και χαρακτηριστικών προϊόντος που σχετίζονται με την ικανότητα του να ικανοποιεί ανάγκες που δηλώνονται ή και εννοούνται.

1.2 Η ποιότητα και οι διαστάσεις της

Ο όρος «ποιότητα» στο λεξιλόγιο της καθημερινότητας διακρίνεται για τον ασαφή εννοιολογικό του προσδιορισμό. Συνακόλουθα, για την επιστημονική χρήση του συγκεκριμένου

όρου απαιτείται οι σχετικοί με τον όρο «ποιότητα» λεκτικοί χαρακτηρισμοί να επιτρέψουν την απόδοση συγκεκριμένου νοήματος, το οποίο εν τέλει να οδηγήσει σε βαθμονόμηση χαρακτηριστικών, που με τη σειρά τους θα επιτρέψουν τη λήψη απόφασης περί της αποδοχής ή μη ως αποδεκτού (ήτοι εντός ή εκτός προδιαγραφών) συγκεκριμένου συνόλου προϊόντων ή υπηρεσιών. Εν τέλει, για την επιστημονική προσέγγιση του όρου της ποιότητας καθορίζεται σύνολο μετρήσιμων χαρακτηριστικών, για τα οποία μπορεί να οριστεί ένα πρότυπο ή ένα σύνολο προδιαγραφών, χαρακτηριστικά που συνιστούν τις διαστάσεις ποιότητας (Στειάκης και Κωφίδης, 2017).

Η επικρατούσα λοιπόν άποψη συνδέεται με την επιθυμητή τιμή μετρήσιμων χαρακτηριστικών - διαστάσεων ποιότητας που αναμένεται να αποδοθούν σε ένα προϊόν ή μία υπηρεσία. Οι διαστάσεις ποιότητας με τις οποίες ο καταναλωτής αξιολογεί τα προϊόντα ή τις υπηρεσίες, καθορίζουν την τελική ποιότητα ενός προϊόντος και σχετίζονται με την ποιότητα σχεδιασμού και τη διαδικασία παραγωγής του προϊόντος. Οι βασικές διαστάσεις της ποιότητας δίνονται στον Πίνακα που ακολουθεί (Αντζουλάκος, 2009).

Πίνακας 1.1: Οι διαστάσεις της ποιότητας

Απόδοση	Το προϊόν εκτελεί τη λειτουργία για την οποία προορίζεται κάνει τη “δουλειά” καλύτερα από άλλα ομοειδή προϊόντα
Αξιοπιστία	Το προϊόν χρειάζεται συχνή επισκευή
Διάρκεια	Η διάρκεια ζωής του προϊόντος είναι μεγάλη
Επισκευή	Πόσο γρήγορη και οικονομική είναι η επισκευή του προϊόντος στην περίπτωση που εμφανιστεί βλάβη
Αισθητική	Πόσο ικανοποιητικό είναι το προϊόν από άποψη εμφάνισης (χρώμα, Σχήμα, περιτύλιγμα, κτλ.)
Δυνατότητες	Ποιες είναι οι επιπρόσθετες δυνατότητες του προϊόντος
Φήμη Επιχείρησης	Ποια είναι η φήμη της εταιρείας, καλή ή κακή
Συμμόρφωση με τις Προδιαγραφές	Το προϊόν κατασκευάστηκε σύμφωνα με τις τεθείσες από τον σχεδιαστή του προδιαγραφές

Με αναφορά στον ως άνω Πίνακα 1.1, ως ποιότητα ορίζουμε την προσαρμογή ενός προϊόντος ή μίας υπηρεσίας στις απαιτήσεις του καταναλωτή. Συνεπώς, ποιότητα σημαίνει **καταλληλότητα προς χρήση**. Παρατηρείται ότι, ο τρόπος με τον οποίο έχει οριστεί η ποιότητα, σχετίζεται περισσότερο με την έννοια της συμμόρφωσης των παραγόμενων προϊόντων στις τεθείσες προδιαγραφές (προσαρμογή ποιότητας) και λιγότερο με την έννοια της ποιότητας του σχεδιασμού τους (σχεδιασμός ποιότητας).

Ένας επιπλέον ορισμός (Αντζουλάκος, 2009), χαρακτηρίζει την **ποιότητα** ως αντιστρόφως ανάλογη της μεταβλητότητας των χαρακτηριστικών του προϊόντος όπως διαμορφώνονται από

την παραγωγική διαδικασία. Δηλαδή, όταν η διασπορά ενός σημαντικού χαρακτηριστικού που σχετίζεται με τη διάσταση της ποιότητας του προϊόντος μειώνεται, τότε αυξάνεται η ποιότητά του. Συνεπώς, όταν αναμένεται ένα προϊόν να ικανοποιεί συνεχώς τις ανάγκες των καταναλωτών, τότε θα πρέπει να παράγεται κάτω από σταθερές συνθήκες, που θα περιλαμβάνουν ελάχιστη μεταβλητότητα γύρω από τα χαρακτηριστικά ποιότητας του.

Η ως άνω παρατήρηση εισάγει την ανάγκη και για χαρακτηρισμό ποιότητας που δεν σχετίζεται άμεσα με βάση τα χαρακτηριστικά του αναφερόμενου προϊόντος ή υπηρεσίας. Αν επιχειρηθεί λοιπόν να ορισθεί η ποιότητα με βάση την λειτουργία της παραγωγικής διαδικασίας της κατασκευής του προϊόντος ή της σύνθεσης της παρεχόμενης υπηρεσίας, ως ποιότητα ορίζεται η συμμόρφωση του παραγόμενου προϊόντος ή υπηρεσίας στις συγκεκριμένες προδιαγραφές που απαιτείται να τηρούνται κατά την κατασκευή του προϊόντος ή τη σύνθεση της υπηρεσίας. Οποιαδήποτε παρέκκλιση από αυτές τις προδιαγραφές καθιστά το προϊόν μη ποιοτικό. Ο ορισμός με βάση την παραγωγική λειτουργία, ήτοι με το σύνολο της σύνθετης ακολουθίας προσεκτικά σχεδιασμένων επιμέρους διεργασιών, εστιάζεται στο γεγονός ότι οι συνθήκες οι οποίες δημιουργούν το περιβάλλον εξέλιξης των υπ' όψιν διεργασιών -προκειμένου να επιτευχθεί η επιθυμητή ποιότητα-, είναι αδύνατον να παραμείνουν αναλλοίωτες για μεγάλα χρονικά διαστήματα. Αναλυτικότερα, οι ενδογενείς και εξωγενείς της παραγωγικής λειτουργίας παράμετροι όπως ο μηχανολογικός εξοπλισμός, τα χρησιμοποιούμενα υλικά, η παροχή ενέργειας και γενικότερα το σύνολο των υπό χρήση εισροών, το οικονομοτεχνικό περιβάλλον και κυρίως οι ανθρώπινες παρεμβάσεις υπόκεινται με μεταβλητότητα, η οποία αιτιωδώς προκαλεί μεταβλητότητα συνθηκών στην παραγωγική διαδικασία, συνακόλουθα μεταβλητότητα των χαρακτηριστικών που αποδίδουν την ποιότητα προϊόντος (Στειάκης και Κωφίδης, 2017).

Πέρα από τους προαναφερθέντες ορισμούς ποιότητας, που σχετίζονται είτε με τα χαρακτηριστικά του αναφερόμενου προϊόντος ή υπηρεσίας, είτε με τη λειτουργία της παραγωγικής διαδικασίας της κατασκευής του προϊόντος ή της σύνθεσης της παρεχόμενης υπηρεσίας, η ποιότητα ορίζεται και με βάση τη χρήση του προϊόντος ή της υπηρεσίας από τον καταναλωτή. Κατά τη συγκεκριμένη οπτική, ποιότητα ορίζεται το σύνολο των ιδιοτήτων που εξασφαλίζουν ότι το παραγόμενο προϊόν ανταποκρίνεται στις προσδοκίες των καταναλωτών και ικανοποιεί εκφρασμένες ή συγκεκριμένες ανάγκες τους (Στειάκης και Κωφίδης, 2017).

1.3 Συνιστώσες του Στατιστικού Ελέγχου Ποιότητας

Ο Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας -συνυφασμένος με την Διοίκηση Ολικής Ποιότητας- χαρακτηρίζεται ως ένα σύνολο μεθόδων στατιστικής ανάλυσης δεδομένων. Για την αποτελεσματικότερη χρήση του απαιτείται η οργανική ενσωμάτωσή του σε ένα πλαίσιο λειτουργίας και διοίκησης της επιχείρησης, που έχει στόχο τη βελτίωση της ποιότητας σε όλα τα επίπεδα της επιχείρησης. Το σύνολο αυτό (των μεθόδων στατιστικής ανάλυσης) χωρίζεται σε τρία

υποσύνολα, όπου το καθένα περιέχει στατιστικές μεθόδους ελέγχου, προσανατολισμένες σε διαφορετικές φάσεις της παραγωγικής διαδικασίας. Τα υπόψιν υποσύνολα επιγραμματικά είναι τα ακόλουθα (Αντζουλάκος, 2009):

1. Σχεδιασμός και Ανάλυση Πειραμάτων (*Design of Experiments*)
2. Στατιστικός Έλεγχος Διεργασιών (*Statistical Process Control*)
3. Δειγματοληψία Αποδοχής (*Acceptance Sampling*)

Αναλυτικότερα όσον αφορά τα προεκτεθέντα:

1. Ο Σχεδιασμός και η Ανάλυση Πειραμάτων περιέχει στατιστικές τεχνικές, οι οποίες βοηθούν στην αποκάλυψη της επίδρασης που έχουν οι παράγοντες που επηρεάζουν τις ποιοτικές παραμέτρους του τελικού προϊόντος. Επομένως διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στη βέλτιστη σχεδίαση της παραγωγικής διεργασίας. Οι Φάσεις της διαδικασίας παραγωγής περιγράφονται στο Σχήμα 1.1 (Αντζουλάκος, 2009).



Σχήμα 1.1: Διαδικασία Παραγωγής

Τα στάδια από την παραλαβή των πρώτων υλών έως την παραγωγή και συσκευασία του τελικού προϊόντος μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελούν μια διεργασία. Όμως, διεργασία μπορεί να θεωρηθεί και κάθε επιμέρους στάδιο της ευρύτερης παραγωγικής διαδικασίας. Η επιλογή της κλίμακας της διεργασίας πραγματοποιείται ανάλογα με το μέγεθος, το είδος και τη βαρύτητα εκάστης των διεργασιών.

2. Ο Στατιστικός Έλεγχος Διεργασιών περιέχει στατιστικά εργαλεία που είναι απαραίτητα για τον έλεγχο της παραγωγικής διαδικασίας κατά τη διάρκεια παραγωγής των προϊόντων. Χρησιμοποιείται για την επίβλεψη της σταθερότητας της υπό μελέτη διεργασίας και τη βελτίωση της ικανότητάς αυτής (*capability*), μέσω της μείωσης της μεταβλητότητάς της. Τα κυριότερα

εργαλεία που χρησιμοποιούνται για την έγκαιρη διαπίστωση των ελαττωματικών προϊόντων, είναι:

- Το ιστόγραμμα ή το Διάγραμμα Μίσχου-Φύλλων (*Histogram or Stem and Leaf Plot*)
- Το Φύλλο Ελέγχου (*Check Sheet*)
- Το Διάγραμμα Pareto (*Pareto Chart*)
- Το Διάγραμμα Αιτίας-Αποτελέσματος (*Cause and Effect Diagram*)
- Το Διάγραμμα Συγκέντρωσης Ελαττωμάτων (*Defect concentration diagram*)
- Το Διάγραμμα Διασποράς ή Διασκόρπισης (*Scatter Plot*)
- Το Διάγραμμα ελέγχου (*Control chart*)

3. Τέλος, η Δειγματοληψία Αποδοχής περιέχει στατιστικές τεχνικές (δειγματοληπτικές) δια της χρήσης των οποίων αποφασίζεται αν μία συγκεκριμένη παρτίδα προϊόντων θα γίνει δεκτή ή θα απορριφθεί.

1.4 Μεταβλητότητα και Στατιστικός Έλεγχος Παραγωγικής Διεργασίας

Κάθε παραγωγική διαδικασία ανεξάρτητα από το πόσο καλά συντηρείται και είναι σχεδιασμένη, συνοδεύεται πάντα από μία **φυσική μεταβλητότητα** (*natural variability* ή “*background noise*”). Η φυσική μεταβλητότητα είναι το άθροισμα πολλών μικρών αιτιών, οι οποίες διαφοροποιούν ελάχιστα τα παραγόμενα προϊόντα μεταξύ τους. Οι αιτίες αυτές είναι γνωστές ως **κοινές ή συνήθεις ή τυχαίες αιτίες μεταβλητότητας** (*common or chance causes of variation*). Μία διεργασία λειτουργεί **εντός του στατιστικού ελέγχου** (*in statistical control process*) ή βρίσκει ή διατηρείται σε **ευσταθή κατάσταση** (*stable state*), όταν επηρεάζεται αποπληχτικά και μόνον από τη φυσική μεταβλητότητα. Οι αιτίες που διαφοροποιούν ελάχιστα τα παραγόμενα προϊόντα μεταξύ τους, θεωρούνται αναπόσπαστο μέρος της διεργασίας (Montgomery (2013), Αντζουλάκος (2009), Κουκουβίνος (2017)).

Σε μια διεργασία μπορεί να εμφανίζονται και άλλες μορφές μεταβλητότητας (πλην της φυσικής) που αφορούν τη συστηματική μεταβολή στο επίπεδο μερικών παραγόντων που καθορίζουν την ποιότητα του προϊόντος. Αυτές οι μορφές μεταβλητότητας οφείλονται κυρίως σε κακή ρύθμιση των μηχανημάτων, σε λανθασμένο χειρισμό των μηχανημάτων ή σε κακή ποιότητα/ελαττωματική πρώτη ύλη. Η συγκεκριμένη μεταβλητότητα εμφανίζεται συνήθως ως σημαντική και καλείται **ειδική μεταβλητότητα**. Οι αιτίες που την προκαλούν ονομάζονται

ειδικές ή προσδιορισμένες αιτίες μεταβλητότητας (*special or assignable causes of variation*). Οι συγκεκριμένες αιτίες δύναται να οδηγήσουν τη διεργασία στην παραγωγή μη αποδεκτών προϊόντων. Στην τελευταία περίπτωση η διεργασία λειτουργεί **εκτός στατιστικού ελέγχου** (*out of statistical control process*) ή σε **ασταθή κατάσταση** (*unstable state*).

Άμεσα συνδεδεμένη έννοια με την παραγωγή ενός προϊόντος είναι τα **όρια προδιαγραφών** (*specification limits*) των **ποιοτικών χαρακτηριστικών** (*quality characteristics*) του προϊόντος, τα οποία καθορίζονται στη φάση σχεδιασμού του. Τα ποιοτικά χαρακτηριστικά αξιολογούνται σύμφωνα με τις προδιαγραφές που έχει θέσει εκ των προτέρων ο παραγωγός. Η μέγιστη επιτρεπόμενη τιμή για το ποιοτικό αυτό χαρακτηριστικό ονομάζεται άνω όριο προδιαγραφών (*upper specification limit, USL*) και η μικρότερη επιτρεπόμενη τιμή ονομάζεται κάτω όριο προδιαγραφών (*lower specification limit, LSL*). Η επιθυμητή τιμή καλείται **τιμή στόχος** (*nominal or target value*) και συνήθως είναι το μέσο του διαστήματος [*LSL, USL*]. Σε συνθήκες φυσικής μεταβλητότητας, η πλειονότητα των τιμών του ποιοτικού χαρακτηριστικού βρίσκεται εντός των προαναφερθέντων ορίων, ενώ δεν ισχύει το ίδιο σε συνθήκες ειδικής μεταβλητότητας.

Η εμφάνιση ειδικής μεταβλητότητας μπορεί να επιφέρει αλλαγή στην κατανομή των τιμών του ποιοτικού χαρακτηριστικού, είτε μεταβάλλοντας/μετατοπίζοντας (*shift*) μόνο το μέσο της κατανομής, είτε μεταβάλλοντας μόνο τη διακύμανση της κατανομής, είτε μεταβάλλοντας το μέσο και τη διακύμανση της κατανομής ταυτόχρονα. Σε περίπτωση που μετατοπισθεί είτε ο μέσος είτε η διακύμανση, τότε τα προϊόντα που προκύπτουν θεωρούνται **μη συμμορφωμένα** (*nonconforming products*). Είναι δηλαδή, προϊόντα τα οποία τουλάχιστον ένα ποιοτικό χαρακτηριστικό έχει τιμή εκτός των ορίων προδιαγραφών και συνεπώς, προϊόντα τα οποία δεν πληρούν μία ή περισσότερες από τις ήδη τεθείσες προδιαγραφές. Τα προϊόντα τα οποία έχουν ένα ή περισσότερα ελαττώματα, τα οποία είναι αρκετά σοβαρά ώστε να επηρεάζουν σημαντικά την ασφαλή ή αποτελεσματική χρήση του προϊόντος καλούνται **ελαττωματικά** (*defective*). Δύναται όμως, ανάλογα με τον αριθμό και τη σοβαρότητα των ελαττωμάτων που παρουσιάζει ένα προϊόν, να μπορεί να θεωρηθεί τελικά ως συμμορφωμένο ή μη ελαττωματικό και να προωθηθεί προς πώληση στην αγορά.

Στον Στατιστικό Έλεγχο Διεργασιών ως κύριο αντικείμενο θεωρείται η έγκαιρη ανίχνευση μετατοπίσεων που προκαλούνται λόγω της εμφάνισης ειδικών αιτιών μεταβλητότητας. Με αυτόν τον τρόπο είναι εφικτή η διερεύνηση της εξέλιξης διεργασίας και η λήψη διορθωτικών μέτρων. Για την ανίχνευση -πάντοτε σε πραγματικό χρόνο- της εμφάνισης ειδικών αιτιών μεταβλητότητας σε μια διεργασία (*on-line process-monitoring*) χρησιμοποιούνται τα **διαγράμματα ελέγχου** (*control charts*).

Προκειμένου να καταστεί αποτελεσματικός ο Στατιστικός Έλεγχος Διεργασιών θα πρέπει να συνοδεύεται από την πρόνοια σχεδιασμού ενός **εκτός ελέγχου προγράμματος δράσης** (*out of control action plan, OCAP*), το οποίο θα δύναται να ενεργοποιείται κάθε φορά που

το διάγραμμα ελέγχου παρέχει ενδείξεις εμφάνισης ειδικών αιτιών μεταβλητότητας στη διεργασία. Το συγκεκριμένο πρόγραμμα περιγράφει την ακολουθία των ενεργειών που οφείλεται να εφαρμοστούν με σκοπό την εξάλειψη των ειδικών αιτιών μεταβλητότητας. Ο σχεδιασμός του υπόφιν προγράμματος απαιτεί τη συνεργασία ατόμων από διάφορα τμήματα της επιχείρησης.

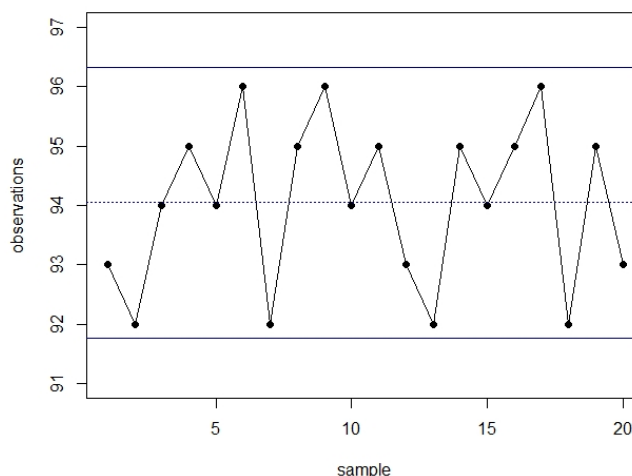
Τα διαγράμματα ελέγχου τα διακρίνουμε σε δύο βασικές κατηγορίες ανάλογα με το είδος της μεταβλητής του ποιοτικού χαρακτηριστικού προϊόντος που παρακολουθείται:

- Διαγράμματα ελέγχου μεταβλητών (*control charts for variables*), τα οποία χρησιμοποιούνται όταν τα χαρακτηριστικά που ενδιαφέρουν είναι συνεχή και μετρήσιμα (π.χ. διαστάσεις, θερμοκρασία, βάρος κτλ.).
- Διαγράμματα ελέγχου χαρακτηριστικών ή ιδιοτήτων (*control charts for attributes*), τα οποία χρησιμοποιούνται όταν τα δεδομένα είναι διακριτά και μη μετρήσιμα (π.χ. αποδεκτό/απορριπτέο, ελαττώματα, ατυχήματα κτλ.).

1.5 Διαγράμματα Ελέγχου

Στις παραγωγικές διεργασίες μας ενδιαφέρει η παρακολούθηση της συμπεριφοράς ενός οριζόμενου χαρακτηριστικού ποιότητας X , από μια κρίσιμη ποσότητα των παραγόμενων προϊόντων. Για την παρακολούθηση των μετρήσεων του κατά τα ως άνω χαρακτηριστικού ποιότητας X , επιλέγονται τυχαία δείγματα προϊόντων της παραγωγής, σε διαφορετικές χρονικές στιγμές, έστω X_1, X_2, X_3, \dots . Χρησιμοποιώντας αυτά τα τυχαία δείγματα, υπολογίζεται το στατιστικό W ενός δείγματος που μετρά κάποιο ποιοτικό χαρακτηριστικό ενδιαφέροντος. Το W είναι δηλαδή, η τιμή μιας κατάλληλης στατιστικής συνάρτησης της τυχαίας μεταβλητής X . Η W είναι συνήθως μια αμερόληπτη εκτιμήτρια της μέσης τιμής ή της διασποράς.

Το 1924 ο W. A. Shewhart εισήγαγε τα ομώνυμα διαγράμματα ελέγχου (τύπου Shewhart). Ένα χαρακτηριστικό διάγραμμα τέτοιου τύπου αποτυπώνεται στο Σχήμα 1.2. Σε αυτό το διάγραμμα φαίνονται οι εξαγόμενες τιμές του στατιστικού W και απεικονίζονται σε συνάρτηση με τον αριθμό δείγματος ή τον χρόνο. Εκτός από αυτές τις τιμές, που ενώνονται με γραμμή, έχουν σχεδιαστεί και τρεις οριζόντιες γραμμές. Η **κεντρική γραμμή** ή μέσο επίπεδο της διεργασίας (*center line, CL*) παριστάνει συνήθως τη μέση τιμή (*mean value*) του στατιστικού W . Η τιμή αυτή προκύπτει από τη συνήθη λειτουργία μίας εντός ελέγχου διεργασίας ή είναι η τιμή στόχος του προϊόντος. Οι δύο ακραίες οριζόντιες γραμμές που εμφανίζονται στο διάγραμμα, καλούνται **άνω και κάτω όρια ελέγχου** αντίστοιχα (*upper and lower control limits, UCL - LCL*) και ο ρόλος τους είναι προφανής, οριοθετώντας την περιοχή λειτουργίας εντός του στατιστικού ελέγχου (Montgomery, 2013).



Σχήμα 1.2: Διάγραμμα Ελέγχου τύπου Shewhart

Όσο λοιπόν οι τιμές του W εμφανίζονται εντός των ορίων ελέγχου με τυχαίο τρόπο, συμπεραίνεται ότι η διεργασία παραμένει εντός στατιστικού ελέγχου. Σε περίπτωση που κάποιο σημείο βρεθεί εκτός των ορίων ελέγχου, τότε υπάρχει ένδειξη ότι η διεργασία βρίσκεται εκτός στατιστικού ελέγχου, οπότε αντιμετωπίζεται **κατάσταση συναγερμού** (*alarm*). Τότε η παραγωγή πρέπει να σταματήσει, ώστε να γίνουν οι απαραίτητες ενέργειες για την αναζήτηση των ειδικών αιτιών που προκάλεσαν τη μεταβλητότητα. Στη συνέχεια αν κριθεί απαραίτητο δύναται να αναληφθούν διορθωτικές ενέργειες. Τα ως άνω απεικονίζονται στο Σχήμα 1.2 που σχεδιάσαμε προς τούτο με προσομοίωση δεδομένων.

Είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι ακόμα και στην περίπτωση που όλα τα σημεία βρίσκονται εντός των ορίων ελέγχου αλλά συμπεριφέρονται με ένα **συστηματικό ή μη τυχαίο τρόπο**, αυτό αποτελεί ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου. Αναγνωρίζεται δηλαδή, πρότυπο που ακολουθούν οι τιμές του ποιοτικού χαρακτηριστικού που παρακολουθείται, πρότυπο διαφορετικό του τυχαίου περιπάτου. Οι βασικότερες μορφές προτύπων (*patterns*) μη τυχαίου τρόπου συμπεριφοράς μίας χρονοσειράς σημείων είναι τα:

- πρότυπα κύκλων (*cycles*)
- τα μιστά πρότυπα (*mixtures*)
- τα πρότυπα αλλαγών (*shifts in the process level*)
- τα πρότυπα τάσεων (*trends*)
- τα πρότυπα έλλειψης μεταβλητότητας (*stratification*)

Αναλυτικότερα:

Στα κυκλικά ή περιοδικά πρότυπα εμφανίζεται μια περιοδικότητα στη διάταξη των σημείων, με αποτέλεσμα να σχηματίζονται επαναλαμβανόμενοι κύκλοι.

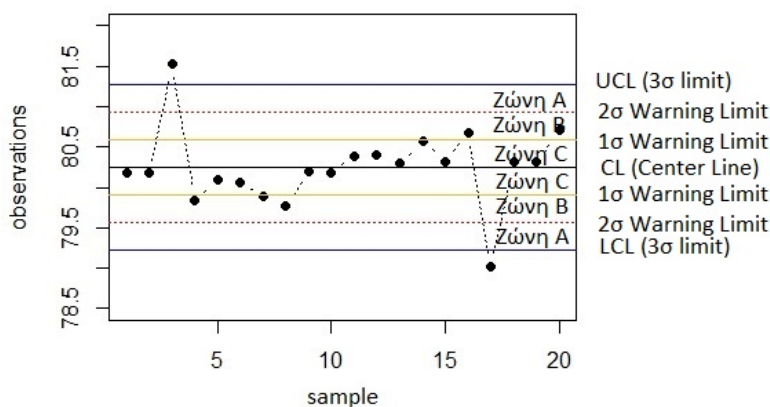
Τα μικτά πρότυπα συνήθως προκύπτουν από δύο διαφορετικές κατανομές του χαρακτηριστικού που μελετάται, μεταξύ των οποίων παλινδρομεί η διεργασία.

Τα πρότυπα αλμάτων οφείλονται συνήθως σε παράγοντες όπως νέες μέθοδοι παραγωγής, νέες μηχανές, διαδοχική επεξεργασία παρτίδων πρώτων υλών διαφορετικής ποιότητας.

Τα πρότυπα τάσεων οφείλονται συνήθως σε παράγοντες όπως η σταδιακή φθορά εργαλείων και η κόπωση των εργαζομένων.

Στα πρότυπα έλλειψης μεταβλητότητας, τα σημεία του διαγράμματος κινούνται γύρω από την κεντρική γραμμή, χωρίς να υπάρχει κάποια αξιοσημείωτη μεταβλητότητα. Αυτό κυρίως οφείλεται σε λανθασμένη σχεδίαση των ορίων ελέγχου.

Για να αποκτήσει μεγαλύτερη ευαισθησία ένα διάγραμμα ελέγχου, ως προς την ικανότητά του να ανιχνεύει πιο γρήγορα τις εκτός ελέγχου διεργασίες επιπλέον των ορίων ελέγχου, σχεδιάζονται και **προειδοποιητικά όρια** (*warning limits*).



Σχήμα 1.3: Προειδοποιητικά όρια ελέγχου και ζώνες A, B και C σε ένα διάγραμμα ελέγχου

Τα προειδοποιητικά όρια σχεδιάζονται εντός του διαστήματος των ορίων ελέγχου, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.3, το οποίο παρήγαμε με προσομοίωση προκειμένου να παρέχουμε την προαναφερθείσα εικόνα. Για την σχεδίαση των προειδοποιητικών ορίων ελέγχου χρησιμοποιήθηκε το μοντέλο των ορίων 3σ .

Τα προειδοποιητικά όρια χρησιμοποιούνται μαζί με ορισμένους “κανόνες”, που περιγράφουν την εμφάνιση ειδικών μοτίβων σε ένα διάγραμμα ελέγχου. Στην περίπτωση που εμφανιστεί το πρότυπο που περιγράφει ο συγκεκριμένος κανόνας, θεωρείται ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου, χωρίς απαραίτητα κάποιο σημείο αυτής να κινείται εκτός των ορίων ελέγχου. Οι πρώτοι

τέσσερις κανόνες είναι γνωστοί ως Western Electric Rules. Οι σημαντικότεροι κανόνες που χρησιμοποιούνται για την ευαισθητοποίηση ενός διαγράμματος ελέγχου είναι οι ακόλουθοι (Montgomery, 2013):

1. Ένα ή περισσότερα σημεία εκτός των ορίων ελέγχου.
2. Δύο από τρία συνεχόμενα σημεία σε μία από τις Ζώνες A (σε μια από τις δύο περιοχές).
3. Τέσσερα από πέντε συνεχόμενα σημεία πέραν της Ζώνης C (σε μια από τις δύο περιοχές).
4. Οκτώ συνεχόμενα σημεία στην ίδια μεριά (επάνω ή κάτω) της κεντρικής γραμμής.
5. Έξι συνεχόμενα σημεία σε αύξουσα ή φθίνουσα διάταξη.
6. Δεκαπέντε συνεχόμενα σημεία στην ολική Ζώνη C.
7. Δεκατέσσερα συνεχόμενα σημεία σε εναλλασσόμενη μορφή “πάνω-κάτω”.
8. Οκτώ συνεχόμενα σημεία εκτός της ολικής Ζώνης C.
9. Οποιαδήποτε ασυνήθιστη ή μη τυχαία ακολουθία σημείων.
10. Ένα ή περισσότερα σημεία κοντά στα προειδοποιητικά όρια ή τα όρια ελέγχου.

1.6 Όρια Ελέγχου

Στον Πίνακα 1.2 φαίνεται το **μοντέλο ορίων σίγμα** (sigma limits model). Το μοντέλο αυτό είναι ένα γενικό μοντέλο για τα όρια ελέγχου ενός διαγράμματος τύπου Shewhart.

Πίνακας 1.2: Όρια μοντέλου $L\sigma$

Όρια μοντέλου L-σίγμα
$UCL = \mu_W + L\sigma_W$
$CL = \mu_W$
$LCL = \mu_W - L\sigma_W$

Το μ_W και το σ_W συμβολίζουν την μέση τιμή και την τυπική απόκλιση αντίστοιχα, της στατιστικής συνάρτησης -εχτιμήτριας- W που απεικονίζεται στο διάγραμμα ελέγχου. Από τα προαναφερόμενα, η συνάρτηση W εκτιμά την τιμή του χαρακτηριστικού της κρίσιμης ποσότητας προϊόντος που ζητείται να παρακολουθηθεί. Ο αριθμός L δηλώνει την απόσταση των ορίων

ελέγχου από την κεντρική γραμμή (CL) σε μονάδες τυπικής απόκλισης. Στην περίπτωση λοιπόν, που τεθεί $L = 3$, σχεδιάζονται τα **όρια ελέγχου των τρία σίγμα** (*three sigma control limits*). Αντίστοιχα για $L = 2$ σχεδιάζονται όρια ελέγχου των 2σ . Ενώ για $L = 1$ κατασκευάζονται τα όρια ελέγχου 1σ (Αντζουλάκος (2009), Κουκουβίνος (2017)).

Για μεγάλες τιμές του L , η απόσταση των ορίων ελέγχου από την κεντρική γραμμή μεγαλώνει και έτσι μειώνεται ο κίνδυνος (ρίσκο, πιθανότητα) να βρεθεί ένα σημείο του διαγράμματος εκτός των ορίων ελέγχου. Σε αναλογία με την ορολογία που χρησιμοποιείται στους ελέγχους στατιστικών υποθέσεων, θεωρείται ότι μειώνεται η πιθανότητα του **σφάλματος τύπου I** (ή ρίσκο α), αλλά ταυτόχρονα αυξάνεται η πιθανότητα του **σφάλματος τύπου II** (ή ρίσκο β). Για μικρές τιμές του L εξάγονται τα αντίθετα αποτελέσματα. Σφάλμα τύπου I είναι η πιθανότητα μία διεργασία να θεωρηθεί εκτός ελέγχου, ενώ είναι εντός στατιστικού ελέγχου. Ενώ το σφάλμα τύπου II είναι η πιθανότητα μία διεργασία να θεωρηθεί εντός ελέγχου ενώ είναι εκτός στατιστικού ελέγχου.

Εισάγουμε ως παράδειγμα -το οποίο διατρέχει εφεξής την παρούσα μεταπτυχιακή εργασία- ότι, για 3σ όρια ελέγχου και με αναφορά στον Πίνακα 1.2 και κανονική κατανομή της στατιστικής συνάρτησης W , όταν η διεργασία είναι εντός ελέγχου, η πιθανότητα να πάρει η W τιμή εκτός των ορίων ελέγχου είναι ίση με $\alpha = 0.0027$. Το γεγονός αυτό σημαίνει ότι ένας εσφαλμένος συναγερμός συμβαίνει 27 φορές ανά 10,000 σημεία του διαγράμματος ελέγχου. Επίσης, για εντός ελέγχου διεργασίες, η πιθανότητα να βρεθεί ένα σημείο κάτω (πάνω) από το LCL (UCL) είναι ίση με $\frac{\alpha}{2} = 0.00135$.

1.7 Φάσεις I και II

Για τον έλεγχο μιας παραγωγικής διεργασίας με τη χρήση διαγραμμάτων ελέγχου, χρησιμοποιούμε δύο φάσεις (*phases*). Οι φάσεις αυτές είναι η Φάση I και η Φάση II.

Στη **Φάση I** (*Phase I*) συλλέγονται δεδομένα της διεργασίας που αναλύονται ταυτόχρονα. Καθορίζεται αν η διεργασία ήταν εντός ή εκτός ελέγχου κατά τη χρονική περίοδο συλλογής των δεδομένων. Η Φάση I χρησιμεύει στον διαχειριστή της διεργασίας ώστε να μεριμνήσει προκειμένου η υπόψιν διεργασία να κινηθεί εντός στατιστικού ελέγχου. Όταν αυτή είναι εντός ελέγχου, τα διαγράμματα που προκύπτουν είναι κατάλληλα για την παρακολούθηση της μελλοντικής συμπεριφοράς της διεργασίας (Φάση II). Τότε λέμε ότι η χρήση των διαγραμμάτων είναι αναδρομική (*retrospective*). Γενικά πολύ περισσότερες αναλύσεις, δράσεις και σχέψεις εξελίσσονται κατά την διάρκεια αυτής της φάσης, πλην της απλής διαγραμματοποίησης κάποιων δεδομένων. Με αυτή τη μεθοδολογία, ο μελετητής της διεργασίας είναι σε θέση να τη διερευνήσει σε βάθος, διότι είναι ευκολότερο να αποφασίσει εάν η διεργασία κινείται εντός ή εκτός στατιστικού ελέγχου κατά τη χρονική περίοδο που συλλέχθηκαν τα δεδομένα (Αντζουλάκος

(2009), Κουκουβίνος (2017)).

Στη **Φάση II** (*Phase II*) τα διαγράμματα ελέγχου χρησιμοποιούνται προκειμένου να ελέγχεται συνεχώς αν η διαδικασία παραμένει εντός ελέγχου. Στη φάση αυτή ο μελετητής έχει τη δυνατότητα να παρακολουθεί συνεχώς την παραγωγική διεργασία. Συνεπώς, είναι σε θέση να ανιχνεύει εγκαίρως οποιαδήποτε πιθανή αλλαγή στο μέσο επίπεδο των χαρακτηριστικών που καθορίζουν την ποιότητα του παραγόμενου προϊόντος. Δηλαδή σε κάθε χρονική περίοδο στην οποία λαμβάνεται ένα δείγμα από την διεργασία, δίνεται άμεσα απάντηση στο αν παραμένει η διεργασία εντός ή εκτός ελέγχου. Στη συγκεκριμένη φάση αδιαφορεί ο διαχειριστής για τον τρόπο με τον οποίο το μέσο επίπεδο της διεργασίας είχε εκτιμηθεί ή αν αυτό ήταν εκ των προτέρων γνωστό (Αντζουλάκος (2009), Κουκουβίνος (2017)).

1.8 Μέσο Μήκος Ροής ή Διαδρομής

Η έννοια, που είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με τα διαγράμματα ελέγχου, είναι το **μέσο μήκος ροής ή μέσο μήκος διαδρομής** του διαγράμματος (*Average Run Length-ARL*) και ορίζεται από την σχέση 1.1. Το *ARL* δηλώνει τον αναμενόμενο αριθμό των σημείων που οφείλεται να σχεδιαστούν σε ένα διάγραμμα ελέγχου έως ότου να εμφανιστεί ένα σημείο εκτός των ορίων αυτού και ορίζεται ως (Montgomery (2013), Weiss (2018)):

$$ARL = \frac{1}{p} \quad (1.1)$$

Όπου p είναι η πιθανότητα να βρεθεί ένα σημείο του διαγράμματος εκτός των ορίων ελέγχου. Έστω ότι χρησιμοποιούνται τα 3σ όρια ελέγχου, για δεδομένα που ακολουθούν την κανονική κατανομή. Όταν η διεργασία βρίσκεται υπό έλεγχο με την υπό μελέτη στατιστική συνάρτηση W , θεωρείται ότι το **εντός ελέγχου μήκος ροής** ARL_0 (in control average run length) δίνεται από την σχέση:

$$ARL_0 = \frac{1}{\alpha}. \quad (1.2)$$

Λαμβανομένου υπόψιν του παραδείγματος του υποκεφαλαίου 1.4 που προαναφέραμε, η προηγούμενη σχέση για $\alpha = 0.0027$ παρέχει:

$$ARL_0 = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{0.0027} = 370.$$

Ήτοι, όταν η διαδικασία βρίσκεται υπό έλεγχο, σε κάθε 370 δείγματα, ένα σημείο αναμένεται να βρίσκεται εκτός ορίων ελέγχου. Όπως αναφέρει ο Montgomery (2013), στην πράξη είναι

επιθυμητό να λαμβάνεται μεγάλο ARL_0 , γιατί σε μια εντός ελέγχου διαδικασία αναζητείται μεγάλος αριθμός δειγμάτων μέχρι την εσφαλμένη ένδειξη ότι η διαδικασία είναι εκτός ελέγχου, δηλαδή μέχρις ότου να εμφανιστεί κάποιο σημείο εκτός ορίων.

Όταν η διεργασία είναι εκτός των ορίων ελέγχου, λόγω της μετατόπισης του μέσου ή της διασποράς, το **εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής είναι** ARL_1 (*out of control average run length*), είναι ίσο με:

$$ARL_1 = \frac{1}{1 - \beta}, \quad (1.3)$$

όπου β συμβολίζεται η πιθανότητα να βρεθεί ένα σημείο του διαγράμματος εντός των ορίων ελέγχου. Συνεπώς, η πιθανότητα να βρεθεί εκτός των ορίων ελέγχου είναι $1 - \beta$.

Το ARL_1 συμβολίζει τον αναμενόμενο αριθμό δειγμάτων που πρέπει να ληφθούν για να εντοπιστεί η μετατόπιση από το μέσο επίπεδο της διεργασίας. Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, συμπεραίνεται ότι το ARL_1 πρέπει να είναι όσο το δυνατόν μικρότερο.

Ως επί το πλείστον, το μέσο μήκος ροής ARL χρησιμοποιείται ως μέτρο της σύγκρισης των διαγραμμάτων ελέγχου όσον αφορά την αποδοτικότητα τους. Εντούτοις, αυτό έχει δεχθεί έντονη αμφισβήτηση διότι, το ARL που παρατηρείται στην πράξη διαφέρει συνήθως αρκετά από το θεωρητικό ARL λόγω της ασυμμετρίας που εμφανίζει η κατανομή του μήκους ροής, με αποτέλεσμα η μέση τιμή του να μην μπορεί να θεωρηθεί ως αντιπροσωπευτικό μέτρο κεντρικής τάσης της κατανομής, ιδιαίτερα για μικρές τιμές του p (Barnard (1959), Bissell (1969)). Για αυτόν τον λόγο, πέραν του ARL έχουν κατασκευαστεί και άλλα μέτρα σύγκρισης.

Μία τυπική μέθοδος σύγκρισης διαγραμμάτων ελέγχου βασίζεται στον υπολογισμό των αντίστοιχων μέσων μηκών ροών τους ARL . Θεωρούμε δύο διεργασίες, τις A και B. Σε περίπτωση που ισχύει $ARL_0(A) > ARL_0(B)$ και $ARL_1(A) < ARL_1(B)$, τότε θεωρείται ότι η διεργασία A είναι καλύτερη σε σχέση με τη B.

Ένα άλλο μέτρο σύγκρισης είναι ο έλεγχος της απόδοσης μέσω του **μέσου χρόνου σήματος** (*Average Time to Signal - ATS*). Συγκρίνεται η απόδοση της διεργασίας σύμφωνα με τα δείγματα που επιλέγονται ανά καθορισμένα χρονικά διαστήματα h ωρών. Όταν ο χρόνος μεταξύ των επιθεωρημένων μονάδων είναι σταθερός, τότε είναι προφανές ότι το ARL δύναται να μετατραπεί σε μονάδες χρόνου:

$$ATS = ARL * h. \quad (1.4)$$

Ως συμπληρωματικός δείκτης της αποτελεσματικότητας εισάγεται η **τυπική απόκλιση** του μήκους ροής της διεργασίας (*Standard Deviation of Run Length*) ή αλλιώς $SDRL$. Η τυπική απόκλιση υπολογίζεται βάση του παρακάτω τύπου.

$$SDRL = \sqrt{Var(RL)}. \quad (1.5)$$

Ένας επιπλέον δείκτης αποτελεσματικότητας θεωρείται η **διάμεσος** του μήκους ροής (*Median Run Length*). Συμβολίζεται με *MDRL* και είναι ο διάμεσος αριθμός δειγματικών σημείων που πρέπει να σχεδιαστούν στο διάγραμμα, πριν εμφανιστεί ένα εκτός ελέγχου σήμα.

$$MDRL = median(RL). \quad (1.6)$$

Συνολικό μέτρο απόδοσης του διαγράμματος ελέγχου πάνω σε όλες τις μετατοπίσεις της τυπικής απόκλισης της διεργασίας είναι και η **μέση τετραγωνική επιπλέον απώλεια** (*Average Extra Quadratic Loss*). Το *AEQL* ορίζεται ως ο σταθμισμένος μέσος *ARL* πάνω σε ένα εύρος μετατοπίσεων $\delta_{min} < \delta < \delta_{max}$ στην τυπική απόκλιση της διεργασίας. Οι ποσότητες δ_{min} και δ_{max} είναι τα άνω και κάτω όρια των μετατοπίσεων, αντίστοιχα. Με αυτόν τον τρόπο, η *AEQL* μετράει την συνολική αποτελεσματικότητα του διαγράμματος ελέγχου σε ένα εύρος μετατοπίσεων (παρά σε ένα συγκεκριμένο εύρος σημείων μετατόπισης) και υπολογίζεται με τον παρακάτω τρόπο.

$$AEQL = \frac{1}{\delta_{max} - \delta_{min}} \int_{\delta_{min}}^{\delta_{max}} \delta^2 ARL(\delta) d\delta, \quad (1.7)$$

όπου *ARL*(δ) είναι η τιμή *ARL* ενός συγκεκριμένου διαγράμματος στην μετατόπιση δ . Όσο πιο μικρή είναι η τιμή *AEQL* του διαγράμματος ελέγχου, τόσο καλύτερη είναι η συνολική στατιστική απόδοση του διαγράμματος (Reynolds and Stoumbos, 2006).

Η συνολική απόδοση ενός διαγράμματος ελέγχου σε ένα ευρύ φάσμα μετατοπίσεων από δ_{min} έως δ_{max} μπορεί να μετρηθεί από μία ολοκληρωτική εξίσωση που καλείται **μέσος λόγος του *ARL*** (*Average Ratio of ARL*) και συμβολίζεται με *ARARL* (Wu et al. (2008)). Η εξίσωση αυτή φαίνεται στη σχέση 1.8.

$$ARARL = \frac{1}{\delta_{max} - \delta_{min}} \int_{\delta_{min}}^{\delta_{max}} \frac{ARL(\delta)}{ARL(\delta)_{benchmark}} d\delta, \quad (1.8)$$

όπου δ_{min} και δ_{max} είναι οι ελάχιστες και οι μέγιστες μετατοπίσεις, αντίστοιχα, στην τυπική απόκλιση της διεργασίας και *ARL*(δ) και *ARL*(δ)_{benchmark} είναι οι τιμές *ARL* ενός συγκεκριμένου διαγράμματος ελέγχου και ενός διαγράμματος σημείου αναφοράς (*benchmark control chart*) στην μετατόπιση δ , αντίστοιχα. Το διάγραμμα ελέγχου αναφοράς είναι εκείνο με το μικρότερο εκτός ελέγχου *ARL*.

Τέλος, το ποσοστό της *AEQL* ενός συγκεκριμένου διαγράμματος ελέγχου προς την *AEQL* ενός διαγράμματος σημείου αναφοράς, ορίζεται από τον **δείκτη σύγκρισης απόδοσης**

(*Performance Comparison Index*) ή αλλιώς *PCI* (Ou et al., 2012). Η σχέση που συνδέει το *PCI* και το *AEQL* φαίνεται παρακάτω.

$$ARARL = \frac{AEQL}{AEQL_{benchmark}}. \quad (1.9)$$

Ένα διάγραμμα ελέγχου με ελάχιστο *ARARL* δίνει μικρότερες τιμές *AEQL* και *PCI* και είναι πιο αποτελεσματικό στην ανίχνευση αλλαγών στην διεργασία.

Κεφάλαιο 2

Διαγράμματα Ελέγχου Ιδιοτήτων τύπου Shewhart

2.1 Εισαγωγή

Τα **διαγράμματα ελέγχου ιδιοτήτων** (*attribute control charts*) χρησιμοποιούνται όταν τα δεδομένα δεν αφορούν μετρήσιμες μονάδες, αλλά ποσότητες με δύο πιθανά αποτελέσματα, ναι ή όχι. Σε περιπτώσεις που αφορούν την κατάσταση προϊόντων, χρησιμοποιείται η ταξινόμηση μη ελαττωματικό/συμμορφωμένο ή ελαττωματικό/μη συμμορφωμένο.

Το προϊόν χαρακτηρίζεται **ελαττωματικό**, εάν τουλάχιστον ένα ποιοτικό χαρακτηριστικό του εμφανίζει τιμή η οποία βρίσκεται εκτός των ορίων προδιαγραφών. Έτσι, λέμε ότι το προϊόν παρουσιάζει τουλάχιστον ένα ελάττωμα ή ατέλεια (*defect or nonconformity*). Ο αριθμός των ελαττωματικών προϊόντων μίας παραγωγικής διεργασίας, όπως και ο αριθμός των ελαττωμάτων ενός προϊόντος, είναι ποιοτικά χαρακτηριστικά που περιγράφονται με διακριτές τυχαίες μεταβλητές και ονομάζονται **ιδιότητες** (*attributes*).

Τα διαγράμματα ελέγχου ιδιοτήτων τύπου Shewhart χρησιμοποιούν σε κάθε σημείο που η πληροφορία αναχτάται μόνο από το συγκεκριμένο δείγμα στο οποίο ανήκει το σημείο και αγνοούν πληροφορίες που αφορούν ολόκληρη την ακολουθία των δεδομένων. Το συγκεκριμένο γεγονός, τα καθιστά μη αποτελεσματικά στον εντοπισμό μικρών αλλαγών στη διαδικασία.

Στο παρόν κεφάλαιο θα παρουσιαστούν βασικά είδη διαγραμμάτων ελέγχου για ιδιότητες τύπου Shewhart (Montgomery, 2013). Τα πιο διαδεδομένα είναι τα ***p*** και ***np*** διαγράμματα. Τα διαγράμματα αυτά αναφέρονται αντίστοιχα στο ποσοστό και τον αριθμό των ελαττωματικών προϊόντων μίας παραγωγικής διεργασίας. Προκαταρκτικά σημειώνεται ότι, όπως παρατηρείται στην πράξη, τα δύο αυτά διαγράμματα είναι ισοδύναμα (Montgomery, 2013). Συνεπώς, αρκεί να σχεδιαστεί ένα από τα δύο διαγράμματα. Τα σημαντικότερα θα παρατεθούν στις παρακάτω ενότητες. Προκαταρκτικά σημειώνεται ότι, οι Πίνακες και τα Σχήματα που ακολουθούν, κατασκευάστηκαν προσομοιώνοντας δεδομένα στη γλώσσα προγραμματισμού R.

2.2 Διαγράμματα Ελέγχου p και np

Στην παρούσα ενότητα θα αναπτυχθεί η σχεδίαση διαγράμματος ελέγχου για το ποσοστό και τον αριθμό των ελαττωματικών προϊόντων. Με τον όρο ποσοστό των ελαττωματικών προϊόντων ορίζεται το ηλίχο του του αριθμού των ελαττωματικών προϊόντων δια του συνολικού αριθμού των παραγόμενων προϊόντων. Η βασική υπόθεση που εισάγεται συνίσταται στο ότι το ποσοστό των ελαττωματικών προϊόντων που εξάγει μια παραγωγική διεργασία είναι γνωστό και ίσο με p (Montgomery, 2013).

Από την παραγωγή επιλέγονται ανεξάρτητα τυχαία δείγματα μεγέθους n προϊόντων το καθένα. Συμβολίζουμε την τυχαία μεταβλητή X_{ij} , $i \geq 1$, $1 \leq j \leq n$, η οποία δέχεται τιμές 0 ή 1 ανάλογα με το αν το j προϊόν του i δείγματος είναι ελαττωματικό ή όχι. Για την τυχαία μεταβλητή X_{ij} έχουμε ότι $X_{ij} \sim B(1, p)$, ενώ για την τυχαία μεταβλητή $X_i = X_{i1} + X_{i2} + \dots + X_{in}$ που δηλώνει τον αριθμό των ελαττωματικών προϊόντων στο i δείγμα ισχύει $X_i \sim B(n, p)$.

Έστω ο αριθμός X των ελαττωματικών προϊόντων ακολουθεί κατανομή Bernoulli με πιθανότητα p , δηλαδή $X_i \sim B(n, p)$. Είναι γνωστό ότι:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \dots, n, \quad (2.1)$$

με $\mu_x = np$ και $\sigma_x^2 = np(1-p)$.

Αντίστοιχα για την τυχαία μεταβλητή

$$W_i = p_i = \frac{X_i}{n}, \quad (2.2)$$

η οποία δηλώνει το ποσοστό των ελαττωματικών προϊόντων στο i δείγμα, προκύπτει

$$\mu_{W_i} = E(W_i) = \frac{1}{n} E(X_i) = \frac{1}{n} np = p, \quad (2.3)$$

και

$$\sigma_{W_i}^2 = Var(W_i) = \frac{1}{n^2} E(X_i) = \frac{1}{n^2} np(1-p) = \frac{p(1-p)}{n}, \quad i \geq 1. \quad (2.4)$$

Επομένως δύναται να αναπτυχθεί ένα διάγραμμα ελέγχου για την παρακολούθηση του ποσοστού των ελαττωματικών προϊόντων που εξάγεται από τη διεργασία, δια μέσου της απεικόνισης της στατιστικής συνάρτησης W_i . Τα όρια και η κεντρική γραμμή του διαγράμματος ελέγχου,

το οποίο ονομάζεται p διάγραμμα ελέγχου, προκύπτουν με εφαρμογή των γνωστών σχέσεων

$$\begin{aligned} UCL &= \mu_{W_i} + L\sigma_{W_i} \\ CL &= \mu_{W_i} \\ LCL &= \mu_{W_i} - L\sigma_{W_i}. \end{aligned}$$

Συνεπώς τα 3σ όρια ελέγχου για τη Φάση II του p διαγράμματος είναι:

$$\begin{aligned} UCL &= p + 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \\ CL &= p \\ LCL &= p - 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}. \end{aligned}$$

Για την κατασκευή ενός p διαγράμματος ελέγχου Φάσης I, υποτίθεται ότι διατίθενται m ανεξάρτητα προκαταρκτικά δείγματα μεγέθους n το καθένα. Έστω ότι τα δείγματα είναι $X_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$, $1 \leq i \leq m$. Θέτοντας έχουμε:

$$p_i = \frac{X_i}{n} = \frac{X_{i1} + X_{i2} + \dots + X_{in}}{n}, \quad 1 \leq i \leq m \quad (2.5)$$

$$\bar{p} = \frac{p_1 + p_2 + \dots + p_m}{m} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_m}{mn} = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{ij}}{mn}. \quad (2.6)$$

Συνεπώς, η μέση τιμή του \bar{p} θα είναι:

$$\begin{aligned} E(\bar{p}) &= \frac{1}{mn} E\left(\sum_{j=1}^m X_i\right) \\ &= \frac{1}{mn} \sum_{j=1}^m E(X_i) \\ &= \frac{1}{mn} (mn)p \\ &= p. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Εξάγεται ότι $E(\bar{p}) = p$, αφού ισχύει $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{ij} \sim B(nm, p)$.

Παρατηρείται ότι, χρησιμοποιείται η ποσότητα \bar{p} ως η εκτίμηση του p , δηλαδή $p = \hat{p}$. Συνεπώς τα 3σ όρια ελέγχου για τη Φάση I του p διαγράμματος ελέγχου είναι:

$$\begin{aligned} UCL &= \bar{p} + 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} \\ CL &= \bar{p} \\ LCL &= \bar{p} - 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}. \end{aligned}$$

Συνοψίζοντας, τα όρια του p διαγράμματος είναι:

Πίνακας 2.1: Όρια του p διαγράμματος ελέγχου

3σ Όρια ελέγχου: Φάση I	3σ Όρια ελέγχου: Φάση II
$UCL = \bar{p} + 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$	$UCL = p + 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$
$CL = \bar{p}$	$CL = p$
$LCL = \bar{p} - 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$	$LCL = p - 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$

Αντίστοιχα, τα όρια για το np διάγραμμα ελέγχου, με $\mu_x = np$ και $\sigma_x^2 = np(1-p)$, είναι:

Πίνακας 2.2: Όρια του np διαγράμματος ελέγχου

3σ Όρια ελέγχου: Φάση I	3σ Όρια ελέγχου: Φάση II
$UCL = n\bar{p} + 3\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})}$	$UCL = np + 3\sqrt{np(1-p)}$
$CL = n\bar{p}$	$CL = np$
$LCL = n\bar{p} - 3\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})}$	$LCL = np - 3\sqrt{np(1-p)}$

Εάν το LCL στα παραπάνω όρια ελέγχου προκύψει αρνητικό, τότε τίθεται τιμή ίση με μηδέν. Ακόμα, θα πρέπει να σημειωθεί ότι στην πράξη αρκεί να σχεδιαστεί ένα από τα διαγράμματα ελέγχου p και np αφού είναι "ισοδύναμα".

Παρατηρείται, όταν το p είναι μικρό, ότι το κάτω όριο ελέγχου συνήθως είναι αρνητικό. Συνεπώς, το απαραίτητο μέγεθος του δείγματος που πρέπει να ληφθεί προκύπτει από τη σχέση

$$LCL > 0,$$

ή ισοδύναμα

$$n > \frac{(1-p)L^2}{p}. \quad (2.8)$$

Στον Πίνακα 2.3 παρατίθενται ενδεικτικές τιμές του ελαχίστου δείγματος ανάλογα με τις p τιμές.

Πίνακας 2.3: Ενδεικτικές τιμές ελαχίστου δείγματος για το p διάγραμμα

p	0.1	0.05	0.02	0.01	0.005	0.001
sample	81	171	441	891	1791	8991

Στην πράξη εμφανίζονται περιπτώσεις όπου τα δείγματα δεν έχουν το ίδιο μέγεθος. Για παράδειγμα, μπορεί το μέγεθος του δείγματος που χρησιμοποιείται να είναι ίσο με την παραγωγή μιας ημέρας και είναι αρκετά πιθανό το μέγεθος της παραγωγής να μην είναι το ίδιο κάθε ημέρα. Επίσης, η διοίκηση μπορεί να θεωρήσει ότι το μέγεθος του δείγματος που εξετάζεται είναι πολύ μεγάλο και να θελήσει να το μειώσει για οικονομικούς λόγους. Ακόμη, όταν η επιθεώρηση των προϊόντων δεν είναι δαπανηρή, μπορεί η διοίκηση να αυξήσει το μέγεθος του δείγματος.

Είναι εφικτό να κατασκευαστεί ένα p διάγραμμα ελέγχου Φάσης I έχοντας ως δεδομένα m ανεξάρτητα προκαταρκτικά δείγματα μεγέθους n_i το καθένα, έστω τα $X_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in_i})$, $1 \leq i \leq m$. Για την τυχαία μεταβλητή $X_i = X_{i1} + X_{i2} + \dots + X_{in_i}$ που δηλώνει τον αριθμό των ελαττωματικών προϊόντων στο i δείγμα ισχύει $X_i \sim B(n_i, p)$. Για την τυχαία μεταβλητή

$$W_i = p_i = \frac{X_i}{n_i}, \quad (2.9)$$

η οποία δηλώνει το ποσοστό των ελαττωματικών προϊόντων στο i δείγμα. Ισχύει ότι

$$\mu_{W_i} = E(W_i) = \frac{1}{n_i} E(X_i) = \frac{1}{n_i} n_i p = p \quad (2.10)$$

και

$$s_{W_i}^2 = Var(W_i) = \frac{1}{n_i^2} E(X_i) = \frac{1}{n_i^2} n_i p (1-p) = \frac{p(1-p)}{n_i}, \quad i \geq 1. \quad (2.11)$$

Για την κατασκευή ενός p διαγράμματος ελέγχου Φάσης I, εισάγεται η υπόθεση ότι υφίστανται ως δεδομένα m ανεξάρτητα προκαταρκτικά δείγματα μεγέθους n_i . Τότε ισχύει:

$$\bar{p} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_m}{n_1 + n_2 + \dots + n_m} = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{ij}}{n_1 + n_2 + \dots + n_m}. \quad (2.12)$$

Συνεπώς, η μέση τιμή του \bar{p} θα είναι:

$$\begin{aligned} E(\bar{p}) &= \frac{1}{n_1 + n_2 + \dots + n_m} E\left(\sum_{j=1}^m X_j\right) \\ &= \frac{1}{n_1 + n_2 + \dots + n_m} \sum_{j=1}^m E(X_j) \\ &= \frac{1}{n_1 + n_2 + \dots + n_m} (n_1 + n_2 + \dots + n_m)p \\ &= p. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Συνάγεται ότι $E(\bar{p}) = p$, αφού ισχύει $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{ij} \sim B(n_1 + n_2 + \dots + n_m, p)$. Η ποσότητα \bar{p} είναι η εκτίμηση του p , δηλαδή $p = \hat{p}$.

Συνεπώς τα 3σ όρια ελέγχου για τη Φάση I του p διαγράμματος με μεταβλητό μέγεθος δείγματος είναι:

Πίνακας 2.4: Όρια του p διαγράμματος ελέγχου με μεταβλητό μέγεθος δείγματος

3σ Όρια ελέγχου Φάση I	
UCL	$= \bar{p} + 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n_i}}$
CL	$= \bar{p}$
LCL	$= \bar{p} - 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n_i}}$

Αντίστοιχα, σε περίπτωση που το LCL στα παραπάνω όρια ελέγχου προκύψει αρνητικό, τότε τίθεται γι' αυτό τιμή ίση με μηδέν.

Στην περίπτωση όπου υφίσταται μεταβλητό μέγεθος δείγματος, είναι εφικτό να πραγματοποιηθούν δύο προσεγγίσεις προκειμένου να μην εμφανίζονται μεταβλητά όρια ελέγχου. Η πρώτη είναι να υπολογισθεί η μέση τιμή δείγματος $n = \frac{\sum_{i=1}^m n_i}{m}$ και να τεθεί η συγκεκριμένη τιμή, έστω n_i , στα ως άνω όρια. Η δεύτερη είναι να τυποποιηθούν οι τιμές που απεικονίζονται στο διάγραμμα μέσω της σχέσης $Z_i = \frac{\hat{p}_i - p}{\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n_i}}}$ (Montgomery, 2013). Η δεύτερη προσέγγιση αναλύεται στο αμέσως επόμενο υποκεφάλαιο 2.3.

Όπως έχει ήδη σημειωθεί, το σφάλμα τύπου I είναι η ύπαρξη κινδύνου να μη γίνει αποδεκτή

μια παρτίδα υψηλής ποιότητας και το σφάλμα τύπου II να γίνει αποδεκτή μια παρτίδα χαμηλής ποιότητας. Το σφάλμα τύπου I σε ένα p διάγραμμα ελέγχου υπολογίζεται από τη σχέση:

$$ARL_0 = \frac{1}{\alpha}, \quad (2.14)$$

όπου το α μπορεί να βρεθεί από τη σχέση:

$$\begin{aligned} \alpha &= P \left[\frac{X}{n} \notin [LCL, UCL] | X \sim B(n, p) \right] \\ &= P [X \notin [nLCL, nUCL] | X \sim B(n, p)] \\ &= 1 - P [nLCL \leq X \leq nUCL | X \sim B(n, p)]. \\ &= 1 - [F_X(nUCL) - F_X(nLCL-)] \end{aligned} \quad (2.15)$$

Αντίστοιχα, το σφάλμα τύπου II ενός p διαγράμματος ελέγχου υπολογίζεται από τη σχέση:

$$ARL_0 = \frac{1}{1 - \beta}, \quad (2.16)$$

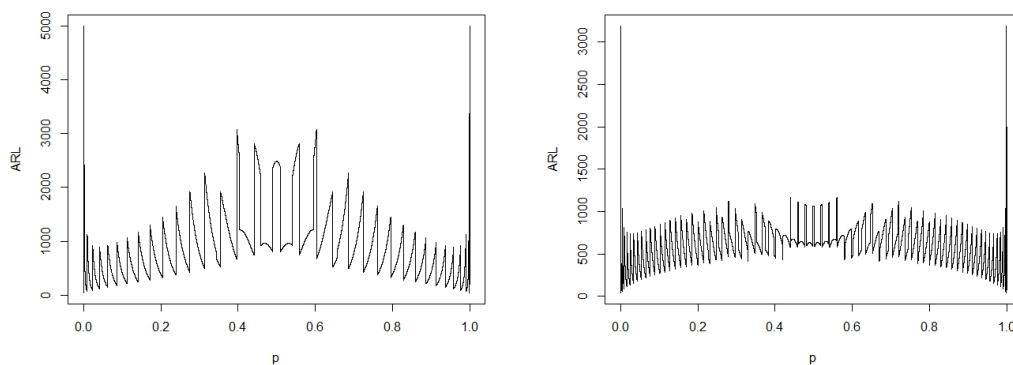
όπου το β μπορεί να βρεθεί από τη σχέση:

$$\begin{aligned} \beta &= P \left[\frac{X}{n} \in [LCL, UCL] | X \sim B(n, p^*) \right] \\ &= P [X \in [nLCL, nUCL] | X \sim B(n, p^*)] \\ &= P [nLCL \leq X \leq nUCL | X \sim B(n, p^*)]. \\ &= [F_X(nUCL) - F_X(nLCL-)] \end{aligned} \quad (2.17)$$

όπου $X \sim B(n, p^*)$ και $F_X(\cdot)$ η συνάρτηση κατανομής της X και p^* είναι η τιμή του ποσοστού των ελαττωματικών προϊόντων σε μια εκτός ελέγχου διεργασία. Σε περίπτωση που το LCL προκύψει αρνητικό τότε τίθεται $F_X(nLCL-) = 0$.

Τα διαγράμματα του Σχήματος 2.1, δείχνουν το εύρος τιμών του ARL ανάλογα με την εξέλιξη τιμών του p . Στο πρώτο διάγραμμα έχουμε θέσει $n = 20$ και στο δεύτερο $n = 50$ (Wang, 2009).

Όσον αφορά λοιπόν το εύρος τιμών του ARL σε σχέση με την εξέλιξη τιμών του p , συνάγεται ότι με την αύξηση του δείγματος παρουσιάζεται μικρότερη διακύμανση της τιμής του ARL . Συνεπώς, για να αποκαλυφθεί η κατάσταση εκτός ορίων λειτουργίας της διεργασίας, απαιτείται



Σχήμα 2.1: Ενδεικτικά διαγράμματα του ARL σε σχέση με τις p τιμές

μεγαλύτερο δείγμα. Συνεχόμενα, η ευαισθησία της μεθόδου αυξάνεται με την αύξηση του δείγματος.

2.3 Διαγράμματα Ελέγχου Q

Στην παρούσα παράγραφο αναπτύσσεται η κατασκευή του Q διαγράμματος ελέγχου με γνωστή ή άγνωστη την p τιμή. Το συγκεκριμένο διάγραμμα προτάθηκε από τον Charles P. Quesenberry (1991). Κατασκευάζεται τυποποιώντας (*standardized*) το p διάγραμμα ελέγχου, το οποίο περιλαμβάνει τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν τη Διωνυμική κατανομή. Με αυτόν τον τρόπο, δύναται να ελεγχθούν καλύτερα οι μεταβολές του μέσου και της διακύμανσης. Η διαδικασία της τυποποίησης πραγματοποιείται με τη χρήση ενός απλού γραμμικού μετασχηματισμού, στην περίπτωση που η τιμή p είναι γνωστή. Συνεπώς, μπορεί να κατασκευαστεί χωρίς την προγενέστερη γνώση των τιμών των παραμέτρων. Στην περίπτωση που η τιμή p είναι γνωστή, έχει προταθεί από τον Nelson (1989), η αντικατάσταση του διαγράμματος p από το διάγραμμα Q . Η συγκεκριμένη πρόταση είχε ήδη γίνει γνωστή από πολλά βιβλία, συμπεριλαμβανομένων των Duncan (1974) και Montgomery (2013). Το συγκεκριμένο διάγραμμα συνήθως χρησιμοποιείται για τιμές που το p είναι μικρό ($p = 0.01, 0.05, 0.10, \dots$).

Η τυποποίηση είναι γραμμικός μετασχηματισμός και η ακρίβεια της τυποποιημένης κανονικής κατανομής να εκτιμά τις πιθανότητες είναι συσχετισμένη με διαγράμματα που είναι βασισμένα μόνο στην πολύ καλή γνώση της “κανονικής προσέγγισης” της Διωνυμικής κατανομής. Επειδή, η Διωνυμική κατανομή είναι ασύμμετρη (*skewed*), η κανονική κατανομή, λόγω συμμετρικότητας, δεν μπορεί να δώσει ακριβή προσέγγιση κατά τη διάρκεια διεξαγωγής των πειραμάτων (*trials*). Για να επιτευχθεί καλύτερη προσέγγιση μέσω της κανονικής κατανομής, στην περίπτωση που η τιμή p είναι άγνωστη, είναι αναγκαίος ένας μη γραμμικός μετασχηματισμός. Το συγκεκριμένο διάγραμμα κατασκευάζεται κανονικοποιώντας το p διάγραμμα ελέγχου. Συ-

νεπώς, αναμένεται να έχει ίδια απόδοση με τα διαγράμματα p και np .

Για την κατασκευή ενός διαγράμματος τύπου Shewhart απαιτείται να ορισθεί το άνω όριο ελέγχου (UCL), η κεντρική γραμμή (CL) και το κάτω όριο ελέγχου (LCL). Έστω ότι X είναι ο αριθμός των μη συμμορφωμένων προϊόντων στο δείγμα. Τότε οι πιθανότητες $P(X < LCL) = a_L$ και $P(X > UCL) = a_U$ είναι τα όρια των πιθανοτήτων. Λόγω της κανονικοποίησης (*normalization*), η οποία πραγματοποιείται στο p διάγραμμα ελέγχου, καθίσταται εφικτή η κατασκευή του Q διαγράμματος ελέγχου, θέτοντας:

$$u_i = B(x_i; n_i, p) \quad (2.18)$$

$$Q_i = \Phi^{-1}(u_i), \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.19)$$

όπου $B(x; n, p) = \sum_{x'=0}^{\lfloor x \rfloor} (b(x'; n, p))$, με $0 < x < n$. Οι τιμές Q_1, Q_2, \dots είναι οι τιμές οι οποίες χρησιμοποιούνται για την κατασκευή του Q διαγράμματος ελέγχου. Συνεπώς, τα όρια ελέγχου για του Q-διαγράμματος διαμορφώνονται ως εξής:

Πίνακας 2.5: Όρια του Q διαγράμματος ελέγχου

3σ Όρια ελέγχου Q διαγράμματος
$UCL = 3$
$CL = 0$
$LCL = -3$

Γενικεύοντας, ένα διάγραμμα με όρια ελέγχου πιθανοτήτων (a_L, a_U) μπορεί να κατασκευαστεί κάνοντας χρήση των $LCL = -z_{a_L}, CL = 0$ και $UCL = z_{a_U}$. Επιπλέον παρατηρείται ότι η πιθανότητα να βρεθεί ένα σημείο κάτω από όριο LCL είναι

$$(1 - p)^n. \quad (2.20)$$

Συνεπώς, για την εύρεση του ελάχιστου δείγματος που απαιτείται, είναι αναγκαία η εφαρμογή της σχέσης 2.8. Επιπλέον έχει τεθεί το όριο πιθανοτήτων να είναι a_L . Επιλύοντας τη σχέση 2.20 ως προς n , εξάγεται το εξής αποτέλεσμα:

$$n = \frac{\log(a_L)}{\log(1 - p)}. \quad (2.21)$$

Συνεπώς, το απαραίτητο μέγεθος του δείγματος που πρέπει να ληφθεί προκύπτει για το διάγραμμα Q είναι:

$$n = \frac{\log(0.00135)}{\log(1-p)}, \quad (2.22)$$

με $P(X = -3|X \sim N(0,1)) = 0.00135$. Στον Πίνακα 2.6 παρατίθενται ενδεικτικές τιμές του ελαχίστου δείγματος ανάλογα με τις p τιμές.

Πίνακας 2.6: Ενδεικτικές τιμές ελαχίστου δείγματος για το διάγραμμα p

p	0.1	0.05	0.02	0.01	0.005	0.001
sample	63	129	328	658	1319	6605

Σε περίπτωση που η τιμή p είναι άγνωστη, απαιτείται να χρησιμοποιηθεί ένας μη γραμμικός μετασχηματισμός. Θεωρούνται πάλι οι τιμές x_i και n_i για $i = 1, 2, 3, \dots$ όπου x_i είναι η τιμή των μη συμμορφωμένων προϊόντων στο n_i δείγμα. Ισχύει ότι:

$$N_i = \sum_{j=1}^i n_j \quad (2.23)$$

$$t_i = \sum_{j=1}^i x_j. \quad (2.24)$$

Υπολογίζεται το στατιστικό Q από τις παρακάτω σχέσεις.

$$u_i = H(x_i; t_i, n_i, N_{i-1}) \quad (2.25)$$

$$Q'_i = \Phi^{-1}(u_i), \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.26)$$

Παρατηρείται ότι ο παραπάνω μετασχηματισμός είναι ίδιος με τον μετασχηματισμό όταν η τιμή p είναι γνωστή, με τη διαφορά ότι γίνεται χρήση της υπεργεωμετρικής κατανομής. Η υπεργεωμετρική κατανομή χρησιμοποιείται ως η ομοιόμορφη αμερόληπτη ελάχιστη διακύμανση (*Uniform Minimum Variance Unbiased*) ή αλλιώς *UMVU*, υπολογίζοντας την κατανομή της συνάρτησης $B(x; n, p)$, η οποία περιγράφεται ως $\tilde{B}(x)$. Η συνάρτηση $\tilde{B}(x)$ είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της $B(x; n, p)$ με την μικρότερη διακύμανση σε κάθε σημείο x . Επιπλέον, συγκλίνει

στην τιμή της $B(x; n, p)$ ομοιόμορφα όταν το n αυξάνεται. Οι ιδιότητες αυτές μελετήθηκαν από τους Lehmann το 1983 και O'Reilly & Quesenberry το 1972.

Στη συνέχεια παρατίθεται ο Πίνακας 2.7 (Quesenberry, 1991). Περιλαμβάνει ενδεικτικές τιμές της μεταβλητής x και τις αντίστοιχες τιμές της Διωνυμικής κατανομής πριν και μετά την τυποποίηση. Οι τιμές που εξάγονται για $n = 63$, $p = 0.1$ και $x = 0, 1, \dots, 19$ είναι οι εξής:

Πίνακας 2.7: Πίνακας ενδεικτικών τιμών Q διαγράμματος ελέγχου

x	$b(x; 63, 0.1)$	$B(x; 63, 0.1)$	Q
0	0.0013100210	0.001310021	-3.0091220
1	0.0091701440	0.010480160	-2.3086980
2	0.0315860500	0.042066210	-1.7271960
3	0.0713610800	0.113427300	-1.2085010
4	0.1189351000	0.232362400	-0.7310889
5	0.1559372000	0.388299600	-0.2837537
6	0.1674881000	0.555787700	0.14029780
7	0.1515368000	0.707324500	0.54558530
8	0.1178620000	0.825186400	0.93531280
9	0.0800297300	0.905216200	1.31185900
10	0.0480178400	0.953234000	1.67705400
11	0.0257065200	0.978940500	2.03234300
12	0.0123772100	0.991317800	2.37889800
13	0.0053951960	0.996713000	2.71768200
14	0.0021409510	0.998853900	3.04950400
15	0.0007770858	0.999631000	3.37505000
16	0.0002590286	0.999890000	3.69491000
17	0.0000795708	0.999969600	4.00959700
18	0.0000225942	0.999992200	4.31955800
19	0.0000059458	0.999998100	4.62519400

Συμπεραίνεται ότι, τα διαγράμματα Q μπορούν να γίνουν σε πραγματικό χρόνο ξεκινώντας είτε με την πρώτη Διωνυμική παρατήρηση, όταν η τιμή p είναι γνωστή, ή τη δεύτερη παρατήρηση, όταν το p είναι άγνωστο. Συνεπώς, το συγκεκριμένο διάγραμμα είναι ιδιαίτερα χρήσιμο για “μικρές διαδρομές” (*short runs*) ή διαδικασίες εκκίνησης όταν το p δεν είναι γνωστό. Επιπλέον, δεν απαιτείται τα δείγματα να έχουν σταθερό μέγεθος. Δεδομένου ότι τα γραφήματα αυτά σχεδιάζονται σε τυποποιημένη κανονική κλίμακα, η εκπαίδευση του προσωπικού για τη χρήση τους είναι απλουστευμένη και μπορεί να επιτρέψει εξοικονόμηση πόρων.

Είναι δυνατή η καταγραφή πολλών διαφορετικών διωνυμικών μεταβλητών στο ίδιο γράφημα.

Πιθανά όμως, το συγκεκριμένο γεγονός μπορεί να θεωρεί ως μη επιθυμητό, εξαιτίας της πιθανότητας ανακατεύθυνσης και σύγχυσης που μπορεί να προκληθεί. Όμως, με αυτόν τον τρόπο, παρέχεται μεγαλύτερη ευελιξία στα προγράμματα διαχείρισης διαγραμμάτων. Συνεπώς, επαφίεται στο χρήστη να πραγματοποιήσει τη σχετική επιλογή. Σχεδιάζοντας τα δεδομένα για διαφορετικούς τύπους μη συμμορφωμένων προϊόντων που υπολογίζονται στις ίδιες μονάδες παραγωγής, στο ίδιο διάγραμμα παρέχεται ένας γρηγορότερος τρόπος ανίχνευσης των προβλημάτων του συστήματος παραγωγής.

Επιπλέον, οι δοκιμές για εύρεση μοτίβων σημείων (*point patterns*) προκειμένου να ανιχνευτούν ειδικές αιτίες μεταβλητότητας, μπορούν να εφαρμοστούν στα συγκεκριμένα διαγράμματα. Όταν η κανονική προσέγγιση είναι επαρκής, δύναται να χρησιμοποιηθούν δοκιμές όπως αυτές του Nelson το 1984. Τέλος, η εφαρμογή αυτών των μεθόδων δεν είναι ιδιαίτερα δαπανηρή, καθώς απαιτείται μικρή υπολογιστική ισχύς. Οι αλγόριθμοι για τις διωνυμικές και υπεργεωμετρικές κατανομές υφίστανται σε οποιαδήποτε γλώσσα προγραμματισμού και είναι διαθέσιμες στα περισσότερα στατιστικά πακέτα, καθώς και οι συναρτήσεις της αντιστρόφως κανονικής κατανομής.

2.4 Διαγράμματα Ελέγχου με μετασχηματισμό *arcsin*

Τα διαγράμματα *arcsin*, χρησιμοποιούνται για την σταθεροποίηση της διασποράς, για την κανονικοποίηση των σφαλμάτων (*normalize the errors, better normal approximation*), καθώς και για την αφαίρεση των αλληλεπιδράσεων των δεδομένων. Στην παρούσα παράγραφο, περιγράφεται *arcsin* μετασχηματισμός με στόχο τη σταθεροποίηση της διασποράς (Freeman and Tukey, 1950, Ryan, 2011).

Ένας ευρέως διαδεδομένος μετασχηματισμός είναι ο *arcsine square root transformation*.

$$y_i = \arcsin \sqrt{\frac{X_i}{n_i}}, \quad (2.27)$$

όπου το X είναι ο αριθμός των επιτυχιών στο δείγμα (Hald, 1952). Ο Anscombe το 1948 απέδειξε ότι αντικαθιστώντας το $\frac{X_i}{n_i}$ με το $\frac{X_i+3/8}{n_i+3/4}$ παράγονται καλύτερα αποτελέσματα για την διακύμανση. Συνεπώς, η παραπάνω σχέση εξελίσσεται

$$y_i = \arcsin \sqrt{\frac{X_i + 3/8}{n_i + 3/4}}. \quad (2.28)$$

Η παραπάνω σχέση έχει ερευνηθεί εκτενέστερα από τους Johnson και Kotz (1969) και οι

Ryan και Schwertman (1997) με τη μορφή

$$y_i = 2\sqrt{n_i} \left[\arcsin \sqrt{\frac{X_i + 3/8}{n_i + 3/4}} - \arcsin \sqrt{\frac{X_i}{n_i}} \right]. \quad (2.29)$$

Επιπλέον, οι τυχαίες μεταβλητές που παράγονται, ακολουθούν την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\arcsin(\sqrt{p})$ και διακύμανση $\frac{1}{4n}$. Η διακύμανση προκύπτει ως εξής

$$\sigma^2 = \text{Var}(\sin^{-1}(\sqrt{p})) \approx \text{Var}(p) \left(\frac{d}{dp} \sin^{-1}(\sqrt{p}) \right)^2 = \frac{p(1-p)}{n} \left(\frac{1}{2\sqrt{p}} \frac{1}{\sqrt{1-p}} \right)^2 = \frac{1}{4n}.$$

Οι Freeman και Tukey το 1950 πρότειναν έναν άλλο μετασχηματισμό, *double arcsine transformation*, ο οποίος οδηγεί στην ίδια κανονική κατανομή.

$$y_i = \frac{1}{2} \left[\arcsin \sqrt{\frac{X_i}{n_i + 1}} + \arcsin \sqrt{\frac{X_i + 1}{n_i + 1}} \right]. \quad (2.30)$$

Αντίστοιχα, η μέση τιμή θα είναι $\arcsin(\sqrt{p})$ και η διακύμανση $\frac{1}{4n+2}$.

Παρατηρείται και οι τρεις μετασχηματισμοί έχουν ελάχιστες διαφορές, συνεπώς εξάγουν το ίδιο αποτέλεσμα όσο αφορά τα όρια ελέγχου. Σε περίπτωση που επιλεγεί να χρησιμοποιηθούν απευθείας οι μετασχηματισμοί, τίθεται ως όριο ελέγχου το διάστημα ± 3 .

Συνεπώς, τα όρια ελέγχου για του \arcsin διαγράμματος διαμορφώνονται ως εξής:

Πίνακας 2.8: Όρια ελέγχου \arcsin διαγράμματος

Όρια ελέγχου \arcsin διαγράμματος
$UCL = \sin^{-1}(\sqrt{p}) + 3\frac{1}{\sqrt{4n}}$
$LCL = \sin^{-1}(\sqrt{p}) - 3\frac{1}{\sqrt{4n}}$

Με αναφορά στο παράδειγμα του υποκεφαλαίου 1.4, τα όρια ελέγχου που παράγονται είναι πάρα πολύ κοντά στο επιθυμητό αποτέλεσμα που είναι το 0.00135. Η διαφορά που έχουν τα όρια ελέγχου των μετασχηματισμών \arcsin με το διάγραμμα p κυμαίνεται γύρω στη μια μονάδα ενώ ταυτόχρονα ο ελάχιστος αριθμός δειγμάτων μειώνεται σχεδόν στο μισό. Σε περίπτωση που η τιμή p είναι άγνωστη, οι ενέργειες που ακολουθούνται είναι αντίστοιχες όπως στο p διάγραμμα ελέγχου. Χρησιμοποιείται δηλαδή η εκτιμήτρια \hat{p} , η οποία μπορεί να υπολογισθεί

από τον τύπο $\bar{p} = \frac{x_1+x_2+\dots+x_i}{n_1+n_2+\dots+n_i}$ για $i = 1, 2, \dots$ και στη συνέχεια η τιμή να αντικατασταθεί σε όλους τους παραπάνω μετασχηματισμούς.

Το απαραίτητο μέγεθος του δείγματος που πρέπει να ληφθεί προκύπτει για τα διάγραμμα που χρησιμοποιούν τον μετασχηματισμό \arcsin , εξάγεται από τη σχέση:

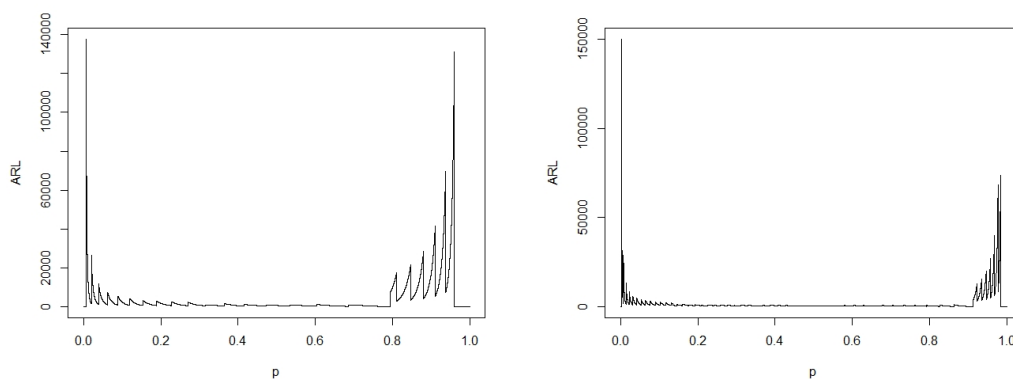
$$n = \frac{9}{4\sin^{-1}(\sqrt{p})^2}. \quad (2.31)$$

Το ως άνω αποτέλεσμα προέκυψε θέτοντας $LCL = 0$. Στον Πίνακα 2.9 παρατίθενται ενδεικτικές τιμές του ελαχίστου δείγματος.

Πίνακας 2.9: Ενδεικτικές τιμές ελαχίστου δείγματος για το διάγραμμα \arcsin

p	0.1	0.05	0.02	0.01	0.005	0.001
sample	43	88	223	448	898	4498

Στο Σχήμα 2.2 παρατίθενται δύο διαγράμματα. Τα διαγράμματα αυτά δείχνουν τον τρόπο που κινείται το ARL ανάλογα με τις διάφορες τιμές του p . Για το πρώτο διάγραμμα έχουμε θέσει $n = 20$ και στο δεύτερο $n = 50$ (Wang, 2009).



Σχήμα 2.2: Ενδεικτικά διαγράμματα του ARL σε σχέση με τις p τιμές

Από τα διαγράμματα (Σχήμα 2.2), που παρουσιάζουν το εύρος τιμών του ARL σε σχέση με την εξέλιξη τιμών του p , συνάγεται ότι η τιμή του ARL αυξάνεται όταν η τιμή του p είναι πολύ μικρή ή πολύ μεγάλη. Σε κάθε άλλη περίπτωση το ARL είναι σημαντικά μικρότερο. Επιπλέον, με την αύξηση του δείγματος παρουσιάζεται μικρότερη διακύμανση της τιμής του ARL για τιμές του p κοντά στο μηδέν και στο ένα. Συνεπώς, στις συγκεκριμένες περιπτώσεις, για να αποκαλυφθεί η κατάσταση εκτός ορίων λειτουργίας της διεργασίας, απαιτείται μεγαλύτερο

δείγμα. Εξάγεται το συμπέρασμα ότι, η ευαισθησία της μεθόδου αυξάνεται όταν η τιμή του p λαμβάνει τιμές από το 0.1 έως το 0.8 για μικρό πλήθος δειγμάτων. Συνακόλουθα, όσο αυξάνεται το δείγμα, τόσο αυξάνεται και η ευαισθησία της μεθόδου για πολύ μικρές ή πολύ μεγάλες τιμές του p .

Ακολουθεί ο Πίνακας 2.10 (Ryan, 2011). Περιλαμβάνει ενδεικτικές τιμές των ορίων ελέγχου των διαγραμμάτων p και \arcsin για διάφορες τιμές των n και p . Όπου UCL και LCL είναι τα όρια ελέγχου για το p διάγραμμα και όπου LCL^a και UCL^a είναι τα όρια ελέγχου του \arcsin διαγράμματος. Παρατηρείται ότι οι τιμές των ορίων ελέγχου είναι πολύ κοντά μεταξύ τους. Παρόλα αυτά η τιμές του διαγράμματος \arcsin είναι ακριβέστερες.

Πίνακας 2.10: Πίνακας ενδεικτικών τιμών ορίων ελέγχου

n	p	LCL^a	LCL	UCL^a	UCL
100	0.12	3.749648	4	23.10024	23
	0.10	2.567841	3	20.43204	20
	0.09	2.016759	2	19.05812	19
200	0.12	11.68989	12	39.16008	39
	0.10	8.819935	9	34.18003	33
	0.09	7.441488	8	31.63348	31
300	0.12	20.58179	21	54.26819	54
	0.10	15.95058	16	47.0494	47
	0.09	13.70430	14	43.37068	43
500	0.12	39.65865	40	83.19134	83
	0.10	31.40561	32	71.59439	71
	0.09	27.36867	28	65.70632	65
1000	0.12	90.61958	91	118.6667	118
	0.10	73.06086	74	129.9391	129
	0.09	64.40829	65	118.6667	118

2.5 Διαγράμματα Ελέγχου Ryan και Schwertman

Οι Schader και Schmid το 1989 απέδειξαν ότι η “κανονικοποίηση” της Διωνυμικής κατανομής δεν έχει αρκετά καλή απόδοση όταν εισάγονται οι “γενικά αποδεκτοί κανόνες” (*Rules of Thumb*), όπως ο κανόνας $np > 5$. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, η ακρίβεια της προσέγγισης φαίνεται να εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από την p τιμή. Ομοίως, η ανεπάρκεια της κανονικής προσέγγισης για τα διαγράμματα p και np αποδείχθηκε και από τον Ryan το 1989.

Στην παραπάνω παραδοχή κατέληξαν διότι, η δεξιά ουρά (*upper tail area*), είναι συνήθως, πολύ μεγάλη, ενώ η αριστερή ουρά (*lower tail area*) είναι πολύ μικρή. Επίσης, σε αρκετές περιπτώσεις, ο συνδυασμός των n και p μπορεί να μη δώσει κάποιο αποτέλεσμα για το κατώτατο όριο LCL , διότι το LCL είναι αρνητικό. Προφανώς, ο αριθμός των μη συμμορφωμένων (*non-conforming*) μονάδων δεν μπορεί να είναι αρνητικός. Επιπλέον, στόχος κάθε ελέγχου ποιότητας είναι η αριστερή ουρά να έχει τιμή κοντά στο 0.00135, δηλαδή το ARL να είναι 370. Λύση στα παραπάνω προβλήματα έδωσαν οι Freeman και Tukey (1950) και ο Quesenberry (1991). Οι δύο αυτές μέθοδοι όμως, έχουν ένα βασικό πρόβλημα. Το πρόβλημα είναι, ότι χρησιμοποιούν μη γραμμικούς μετασχηματισμούς, ενώ τα p και np διαγράμματα είναι βασισμένα σε γραμμικούς μετασχηματισμούς. Το συγκεκριμένο γεγονός δεν διευκολύνει την κατασκευή των διαγραμμάτων, καθώς όλα τα στοιχεία χρειάζονται μετατροπή (Ryan & Schwertman, (1997)).

Για την αντιμετώπιση των παραπάνω προβλημάτων, οι Ryan και Schwertman το 1997 προτείνουν καινούρια όρια ελέγχου βασισμένα σε γραμμικό μετασχηματισμό. Συγκεκριμένα, για δεδομένη p τιμή, αναζητούνται συγκεκριμένες τιμές για το n , ώστε να επιτευχθεί ο στόχος της τιμής 0.00135. Τα όρια ελέγχου ελέγχου φαίνονται στον παρακάτω Πίνακα.

Πίνακας 2.11: Όρια ελέγχου για το np διάγραμμα των Ryan και Schwertman (1997)

Όρια ελέγχου διαγράμματος Ryan
$UCL = 0.6195 + 1.0052np + 2.983\sqrt{np}$
$LCL = 2.9529 + 1.01956np - 3.2729\sqrt{np}$

Παρατηρούμε ότι, χρησιμοποιείται ο όρος \sqrt{np} και όχι ο όρος $\sqrt{np(1-p)}$, διότι συνήθως το $(1-p)$ λαμβάνει την τιμή 1 για μικρά p , οπότε ο συγκεκριμένος όρος μπορεί να παραληφθεί. Όπως και στα προηγούμενα διαγράμματα, σε περίπτωση που η p τιμή είναι άγνωστη, χρησιμοποιείται η εκτιμήτρια \hat{p} . Το απαραίτητο μέγεθος του δείγματος που πρέπει να ληφθεί είναι:

$$n = \frac{5(2345278481 + 32729\sqrt{3326901215})}{5197512968p}. \quad (2.32)$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα προέκυψε θέτοντας $LCL = 0$. Στον Πίνακα 2.9 παρατίθενται ενδεικτικές τιμές του ελαχίστου δείγματος ανάλογα με τις p τιμές.

Εφόσον οι ιδιότητες και η απόδοση των διαγραμμάτων εξαρτώνται από το υπόλοιπο του α

Πίνακας 2.12: Ενδεικτικές τιμές ελαχίστου δείγματος του διαγράμματος Ryan

p	0.1	0.05	0.02	0.01	0.005	0.001
sample	41	82	204	408	815	4073

θροίσματος των ουρών, είναι φυσικό να υπάρχει ενδιαφέρον για το υπόλοιπο, παρά για το άθροισμα των ουρών. Σύμφωνα με τα παραπάνω, ως λογικός στόχος εμφανίζεται η ελαχιστοποίηση (*minimize*) της σχέσης

$$TAD = \left| \frac{1}{LTA} - \frac{1}{0.00135} \right| + \left| \frac{1}{UTA} - \frac{1}{0.00135} \right| \quad (2.33)$$

με την τιμή της αριστερή ουράς να συμβολίζεται ως LTA και της δεξιά ουράς ως UTA . Συνεπώς, το ARL για κάθε ουρά ορίζεται ως $ARL_L = \frac{1}{LTA}$ και $ARL_U = \frac{1}{UTA}$.

Τα όρια ελέγχου που προτείνουν οι Ryan και Schwertman (1997) μπορούν να παράγουν αποτελέσματα με πολύ μεγάλη ακρίβεια για $p < 0.03$, πιο συγκεκριμένα για $0.01 < p < 0.03$. Επιπλέον, παρατηρείται ότι το ARL_U και το ARL_L μπορεί να παράγουν εντελώς διαφορετικά αποτελέσματα σε σχέση με το ARL , αναλόγως με το LCL το οποίο επιλέγουμε. Αυτό συμβαίνει διότι η Διωνυμική κατανομή είναι διακριτή και όχι συνεχής. Το ίδιο ισχύει και για την Poisson κατανομή.

Πίνακας 2.13: Πίνακας ενδεικτικών τιμών ορίων ελέγχου

p	n	LCL	UCL	LTA	UTA	ARL_L	ARL_U	TAD
0.005	1324	2	14	0.001311472	0.001349452	762.5022	741.0416	22.06233
0.01	664	2	14	0.001264064	0.001347137	791.0989	742.3152	51.93264
	1267	5	23	0.001310182	0.001343666	763.2529	744.2328	26.00416
0.02	533	4	21	0.001493863	0.001370820	669.4056	729.4903	82.58554
	708	6	26	0.001486165	0.001360914	672.8729	734.8003	73.80823
0.03	357	4	21	0.001379715	0.001365683	724.7874	732.2345	24.45961
	474	6	26	0.001366023	0.001359742	732.0521	735.4336	13.99568
	923	14	44	0.001349078	0.001287205	741.2470	776.8769	36.64241
0.04	218	3	18	0.001376363	0.001345274	726.5526	743.3427	16.79011
	620	12	40	0.001347944	0.001414138	741.8708	707.1445	34.72631
	893	20	54	0.001377334	0.001312953	726.0402	761.6417	35.60152
0.05	175	3	18	0.001290265	0.001311290	775.0343	762.6081	56.16093
	345	7	30	0.001429158	0.001345858	699.7127	743.0207	43.30796
	606	16	47	0.001344311	0.001363056	743.8753	733.6455	10.22977

Για παράδειγμα, έστω ότι λαμβάνονται ως δεδομένα οι τιμές $n = 140$ και $p = 0.05$. Για $LCL = 1$ το αποτέλεσμα είναι $ARL_L = 1314.3$ και για $LCL = 2$ εξάγεται $ARL_L = 157.1$. Συνεπώς, καμία από τις δύο τιμές δεν είναι κοντά στο επιθυμητό $ARL = 740.7$ για τον παραπάνω συνδυασμό. Το συγκεκριμένο πρόβλημα προκύπτει, λόγω του διαφορετικού μεγέθους των ουρών. Η επίλυση του συγκεκριμένου προβλήματος επιτυγχάνεται χρησιμοποιώντας συγκεκριμένους συνδυασμούς των n και p . Ο Πίνακας 2.13 ο οποίος περιλαμβάνει ενδεικτικούς συνδυασμούς ώστε να επιτευχθεί η τιμή στόχος 0.00135. Όπου *TAD* (*Total Absolute Difference*) εννοείται τη σχέση 2.33 (Ryan, 1997).

2.6 Διάγραμμα Ελέγχου p με έναν όρο διόρθωσης Cornish-Fisher

Πολλά διαγράμματα ελέγχου ιδιοτήτων χρησιμοποιούν την κανονική κατανομή για να προσδιορίσουν τα όρια ελέγχου. Για συγκεκριμένα δείγματα αλλά και τιμές παραμέτρων αυτές οι προσεγγίσεις απέχουν πολύ από το να είναι επαρκής. Σημαντικές βελτιώσεις, όπως ο όρος διόρθωσης των Cornish και Fisher, μπορούν να πραγματοποιηθούν για την βελτίωση της ακρίβειας των ορίων ελέγχου. Με τη χρήση του όρου διόρθωσης, τα όρια ελέγχου γίνονται πιο στενά και με αυτόν τον τρόπο έχουμε μεγαλύτερη ακρίβεια στο σφάλμα τύπου I. Τέτοιου είδους τροποποιήσεις είναι προτιμότερες από την διαδικασία κανονικοποίησης των διαγραμμάτων ελέγχου, λόγω της μη συμμετρικότητας της Διωνυμικής κατανομής (*skewed*).

Ο πρώτος όρος διόρθωσης Cornish και Fisher χρησιμοποιείται από τους Winderbottom (1993) και Chen (1998), για την διόρθωση της αμεροληψίας και της μη συμμετρικότητας. Στην περίπτωση των p διαγραμμάτων, η τυχαία μεταβλητή είναι αμερόληπτη. Έστω ότι Y είναι μια ασυμπτωτική τυχαία μεταβλητή η οποία είναι αμερόληπτη για μία παράμετρο θ . Έχει διακύμανση $\mu_2 = \sigma^2$ και μ_3 είναι η τρίτη ροπή της παραμέτρου θ . Βάσει των παραπάνω η Y κατανομή ορίζεται ως

$$Y = \theta + z_a \sigma + \mu_3 \frac{z_a^2 - 1}{6\sigma^2}. \quad (2.34)$$

Στην περίπτωση των p και np διαγραμμάτων ισχύει ότι, η X είναι μια Διωνυμική τυχαία μεταβλητή, με μέγεθος δείγματος n και παράμετρο p . Τότε εξάγεται $Y = \frac{X}{n}$ με $\theta = p$, $\sigma^2 = \frac{p(1-p)}{n}$ και $\mu_3 = \frac{p(1-p)(1-2p)}{n^2}$. Επομένως, από την εξίσωση 2.34 συνάγεται:

$$Y_a = p + z_a \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} + \frac{(z_a^2 - 1)(1 - 2p)}{6n}, \quad (2.35)$$

$$X_a = np + z_a \sqrt{np(1-p)} + \frac{(z_a^2 - 1)(1-2p)}{6}. \quad (2.36)$$

Θέτοντας $z_a = \pm 3$, εξάγονται τα 3σ όρια ελέγχου για το p και np διάγραμμα με τον C-F (Cornish Fisher) όρος διόρθωσης.

Πίνακας 2.14: Όρια ελέγχου για το p διάγραμμα με έναν όρο διόρθωσης C-F

Όρια ελέγχου p διαγράμματος με έναν όρο διόρθωσης C-F
$UCL = p + 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} + 4\frac{(1-2p)}{3n}$
$LCL = p - 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} + 4\frac{(1-2p)}{3n}$

Πίνακας 2.15: Όρια ελέγχου για το np διάγραμμα με έναν όρο διόρθωσης C-F

3σ Όρια ελέγχου np διαγράμματος με έναν όρο διόρθωσης C-F
$UCL = np + 3\sqrt{np(1-p)} + 4\frac{(1-2p)}{3}$
$LCL = np - 3\sqrt{np(1-p)} + 4\frac{(1-2p)}{3}$

Θέτοντας $z_a = \pm 2$ λαμβάνονται τα 2σ όρια ελέγχου με την τρίτη ροπή ίση με $\frac{1-2p}{2n}$. Αντίστοιχα, αν $z_a = 0$, θα αλλάξει ο μέσος σε μια τιμή η οποία είναι πολύ κοντά στην τιμή της διαμέσου. Για τα p διαγράμματα, η διάμεσος είναι $p - \frac{1-2p}{6n}$. Σε περίπτωση που δεν είναι γνωστή η τιμή p , αντικαθίσταται με την τιμή \hat{p} .

Εάν υφίστανται διαφορετικά μεγέθη δειγμάτων, χρησιμοποιούνται δύο τρόποι για τον υπολογισμό των ορίων ελέγχου. Ο πρώτος τρόπος είναι θέτοντας ως \hat{n} τον δειγματικό μέσο όλων των n , δηλαδή $\hat{n} = \frac{\sum_i n_i}{k}$. Ο παραπάνω υπολογισμός προτείνεται σε περίπτωση που η διαφορά στα δείγματα είναι άνω του 25% σε σχέση με το \hat{n} . Παρόλα αυτά, σε πολλά διαγράμματα χρησιμοποιείται ο ακριβής αριθμός των δειγμάτων για την κάθε παρτίδα ξεχωριστά, γεγονός το οποίο δυσκολεύει τον χρήστη όταν υπάρχει μεγάλη αύξηση των παρτίδων. Ο τρόπος για να ξεπεραστεί το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι η παραγωγή ψευδοδειγμάτων n_i^* (*pseudo sample sizes*). Για τα p διαγράμματα, ο τρόπος για να επιτευχθεί αυτό είναι ο εξής:

$$z\sqrt{\frac{p(1-p)}{n_i^*}} + \frac{(z^2 - 1)(1-2p)}{6n_i} = z\sqrt{\frac{p(1-p)}{n_i^*}}. \quad (2.37)$$

Από την εξίσωση 2.37, συνάγεται ότι $n_i^* = \frac{n_i}{\lambda_i^2}$, με $\lambda_i = 1 + \frac{(z^2-1)(1-2p)}{6z\sqrt{p(1-p)}}$.

Όπως και στα p διαγράμματα ελέγχου, έτσι κι εδώ, το κάτω όριο ελέγχου πρέπει να είναι μη αρνητικό. Υπό αυτή την προϋπόθεση, προκύπτει ότι:

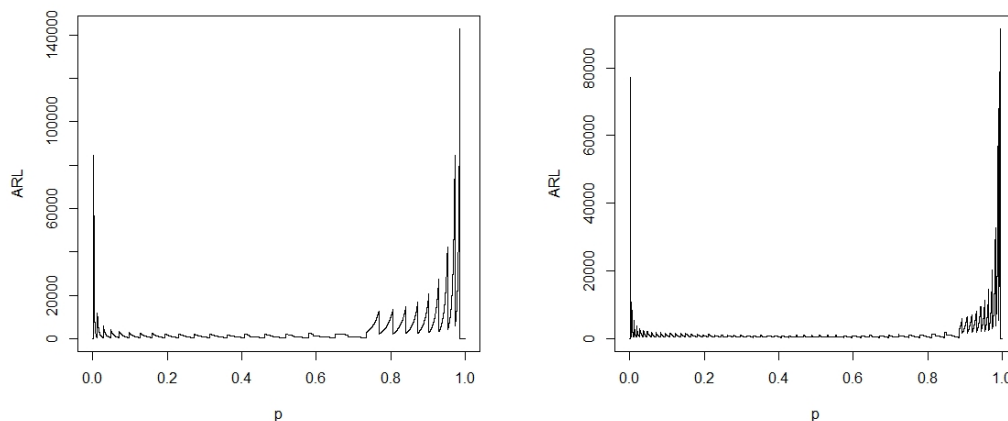
$$n = \frac{-11p^2 + 3\sqrt{3(-5p^4 - 6p^3 + 11p^2)} + 19p}{6p^2}. \quad (2.38)$$

Το συγκεκριμένο αποτέλεσμα προέκυψε θέτοντας $LCL = 0$. Στον Πίνακα 2.16 παρατίθενται ενδεικτικές τιμές του ελαχίστου δείγματος ανάλογα με τις p τιμές.

Πίνακας 2.16: Ενδεικτικές τιμές ελαχίστου δείγματος με C-F όρο διόρθωσης

p	0.1	0.05	0.02	0.01	0.005	0.001
sample	58	119	300	602	1206	6037

Τέλος, στο Σχήμα 2.3 παρατίθενται δύο διαγράμματα. Τα διαγράμματα αυτά δείχνουν τον τρόπο που κινείται το ARL ανάλογα με τις διάφορες τιμές του p . Για το πρώτο διάγραμμα έχουμε θέσει $n = 20$ και στο δεύτερο $n = 50$.



Σχήμα 2.3: Ενδεικτικά διαγράμματα του ARL σε σχέση με τις p τιμές

Από τα διαγράμματα (Σχήμα 2.3) που παρουσιάζουν το εύρος τιμών του ARL σε σχέση με την εξέλιξη τιμών του p , συνάγεται ότι η τιμή του ARL αυξάνεται όταν η τιμή του p είναι πολύ μικρή ή πολύ μεγάλη. Σε κάθε άλλη περίπτωση, το ARL είναι σημαντικά μικρότερο. Επιπλέον, με την αύξηση του δείγματος παρουσιάζεται μικρότερη διακύμανση της τιμής του ARL . Συνεπώς, για

να αποκαλυφθεί η κατάσταση εκτός ορίων λειτουργίας της διεργασίας, απαιτείται μεγαλύτερο δείγμα όταν η τιμή του p είναι κοντά στις τιμές μηδέν ή ένα. Συνακόλουθα, η ευαισθησία της μεθόδου αυξάνεται με την αύξηση του δείγματος για τις προαναφερθείσες τιμές που λαμβάνει το p .

2.7 Διάγραμμα Ελέγχου p με δύο όρους διόρθωσης Cornish-Fisher

Σε συνέχεια της προηγούμενης ενότητας, οι Joeques και Barbosa το 2013 εισήγαγαν τον δεύτερο όρο διόρθωσης. Το συγκεκριμένο διάγραμμα είναι γνωστό ως Cornish-Fisher quantile correction. Από την σχέση Y_a εξάγεται το διάγραμμα με τον έναν όρο διόρθωσης, ενώ η σχέση Y_b δείχνει πως τροποποιείται το διάγραμμα προσθέτοντας και τον επόμενο όρο (Joeques and Barbosa, 2002 & 2013).

$$Y_a = p + z_a \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} + \frac{(z_a^2 - 1)(1 - 2p)}{6n}, \quad (2.39)$$

$$Y_b = Y_a + \frac{(z_a^3 - 3z_a)}{24n^2} \frac{[1 - 6p(1-p)]}{\sqrt{p(1-p)/n}} - \frac{(2z_a^3 - 5z_a)}{36n^2} \frac{(1 - 2p)^2}{\sqrt{p(1-p)/n}}. \quad (2.40)$$

Θέτοντας $z_a = \pm 3$, θα πάρουμε τα 3σ όρια ελέγχου για το p και np διάγραμμα με τον C-F όρος διόρθωσης.

Πίνακας 2.17: Όρια ελέγχου για το p διάγραμμα με δύο όρους διόρθωσης C-F

3σ Όρια ελέγχου p διαγράμματος με δύο όρους διόρθωσης C-F
$UCL = p + 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} + 4\frac{(1-2p)}{3n} - \frac{p(1-p)+2}{6n^2[p(1-p)/n]^{1/2}}$
$LCL = p - 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} + 4\frac{(1-2p)}{3n} - \frac{p(1-p)+2}{6n^2[p(1-p)/n]^{1/2}}$

Τα p διαγράμματα με 3σ όρια ελέγχου, για να έχουν καλή προσέγγιση πρέπει να ισχύει $np(1-p) > 5$ και $0.1 < p < 0.9$. Λόγω του παραπάνω κανόνα, τα διαγράμματα αυτά έχουν πολύ σοβαρά προβλήματα στον κλάδο των επιχειρήσεων, διότι έχουν σοβαρές ελλείψεις στο να αντιλαμβάνονται γρήγορα τα μη συμμορφωμένα προϊόντα, ειδικά για μικρές τιμές των p . Με την προσθήκη ενός μόνο όρου διόρθωσης παρέχεται, όπως αναφέρεται στην προηγούμενη ενότητα, πολύ καλύτερη προσέγγιση για μικρές τιμές των p για πολύ μικρότερο πλήθος δειγμάτων,

πιο συγκεκριμένα όταν $np(1-p) > 0.25$. Με την χρήση του δεύτερου όρου διόρθωσης παρατηρείται ότι πλέον ο κανόνας τροποποιείται σε $np(1-p) > 0.08$. Συνεπώς, για τιμές $np(1-p)$ από 5 και πάνω μπορούν να χρησιμοποιηθούν τα p διαγράμματα. Για τιμές $np(1-p)$ από το 0.025 και καθίσταται εφικτό να χρησιμοποιηθούν και τα δυο διαγράμματα με τους όρους Cornish και Fisher. Για τιμές $np(1-p)$ άνω του 0.08 είναι προτιμότερο η χρήση του διαγράμματος που παρουσιάστηκε σε αυτήν την ενότητα, ενώ για τιμές κάτω του 0.08 είναι καλύτερο να αναζητηθεί κάποιο άλλο διάγραμμα.

Οι δύο συντελεστές Cornish και Fisher προκύπτουν από τη γεννήτρια συνάρτηση της Διωνυμικής κατανομής $\mu'_h = E(X^h) = M^{(h)}(0)$, όπου

$$M_x = \sum_{k=0}^n e^{tk} p_k = (pe^t + 1 - p)^n.$$

με $p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$. Πιο συγκεκριμένα, οι τέσσερις πρώτες σχέσεις που λαμβάνονται είναι οι παρακάτω.

$$\mu'_1 = E(X) = np$$

$$\mu'_2 = E(X^2) = n^2 p^2 + np(1-p)$$

$$\mu'_3 = E(X^3) = n^3 p^3 + 3n^2 p^2 (1-p) + np(1-p)(1-2p)$$

$$\mu'_4 = E(X^4) = np(1-p)[1-6p(1-p)] + 6n^2 p^2 (1-p)[(1-2p) + np] + n^2 p^2 (1-p^2 + n^2 p^2).$$

Εάν ληφθεί υπόψη τη σχέση

$$\mu_h = E(X - \mu)^h = \sum_{r=0}^h \binom{h}{r} \mu'_r (-\mu)^{h-r},$$

εξάγονται τα παρακάτω αποτελέσματα:

$$\mu = \mu'_1 = E(X) = np$$

$$\mu_2 = \mu'_2 - \mu_1'^2 = V(X) = np(1-p)$$

$$\mu_3 = \mu'_3 - 3\mu'_1 \mu'_2 + 2\mu_1'^3 = np(1-p)(1-2p)$$

$$\mu_4 = \mu'_4 - 4\mu'_1 \mu'_3 + 6\mu_2' \mu_1'^2 - 3\mu_1'^4 = np(1-p)[1-6p(1-p)] + 3n^2 p^2 (1-p)^2.$$

Από την αθροιστική γεννήτρια συνάρτηση και την προηγούμενη σχέση, λαμβάνουμε:

$$K_1 = \mu^* = \frac{\mu}{\sigma}$$

$$K_2 = \mu_2^* = \frac{\mu_2}{\sigma^2}$$

$$K_3 = \mu_3^* = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

$$K_4 = \mu_4^* - 3\mu_2^{*2} = \frac{\mu_4}{\sigma_4} - 3\left(\frac{\mu_2}{\sigma_2}\right)^2,$$

όπου $\sigma = \sqrt{\mu_2}$.

Συνεπώς, λύνοντας ως προς Y_a προκύπτει το διάγραμμα με τον πρώτο όρο διόρθωσης:

$$\frac{Y_a - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \cong z_a + \frac{z_a^2 - 1}{6} K_3. \quad (2.41)$$

Λύνοντας ως προς Y_b προκύπτει το διάγραμμα με τον δεύτερο όρο διόρθωσης:

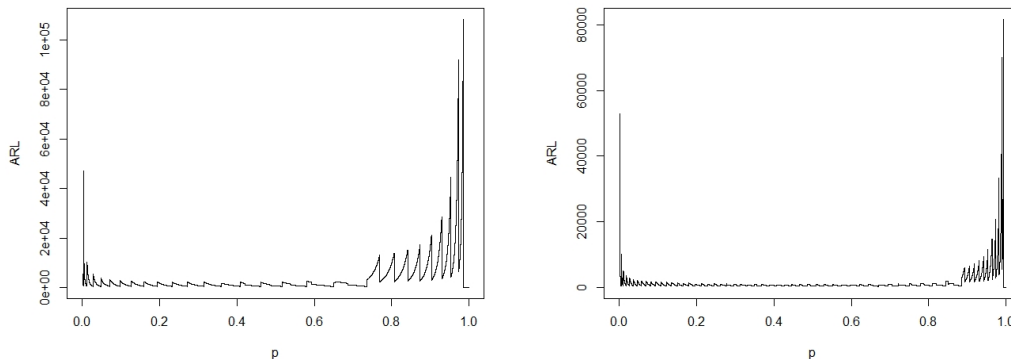
$$\frac{Y_b - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \cong z_a + \frac{z_a^2 - 1}{6} K_3 + \frac{z_a^3 - 3z_a}{24} K_4 - \frac{2z_a^3 - 5z_a}{36} K_3^2. \quad (2.42)$$

Το ελάχιστο πλήθος παρατηρήσεων προέκυψε θέτοντας $LCL = 0$ και λύνοντας ως προς n . Στον Πίνακα 2.18 παρατίθενται ενδεικτικές τιμές του ελαχίστου δείγματος ανάλογα με τις p τιμές.

Πίνακας 2.18: Ενδεικτικές τιμές ελαχίστου δείγματος με C-F δύο όρους διόρθωσης

p	0.1	0.05	0.02	0.01	0.005	0.001
sample	61	125	316	635	1271	6368

Τέλος, στο Σχήμα 2.4 παρατίθενται δύο διαγράμματα. Τα διαγράμματα αυτά δείχνουν τον τρόπο που κινείται το ARL ανάλογα με τις διάφορες τιμές του p . Για το πρώτο διάγραμμα έχουμε θέσει $n = 20$ και στο δεύτερο $n = 50$.



Σχήμα 2.4: Ενδεικτικά διαγράμματα του ARL σε σχέση με τις p τιμές

Από τα διαγράμματα (Σχήμα 2.4), που παρουσιάζουν το εύρος τιμών του ARL σε σχέση με την εξέλιξη τιμών του p , συνάγεται ότι η τιμή του ARL αυξάνεται όταν η τιμή του p είναι πολύ μικρή ή πολύ μεγάλη. Σε κάθε άλλη περίπτωση το ARL είναι σημαντικά μικρότερο. Επιπλέον, με την αύξηση του δείγματος παρουσιάζεται μικρότερη διακύμανση της τιμής του ARL . Συνεπώς, για να αποκαλυφθεί η κατάσταση εκτός ορίων λειτουργίας της διεργασίας, απαιτείται μεγαλύτερο δείγμα όταν η τιμή του p είναι κοντά στις τιμές μηδέν ή ένα. Συνακόλουθα, η ευαισθησία της μεθόδου αυξάνεται με την αύξηση του δείγματος για τις προαναφερθείσες τιμές που λαμβάνει το p .

2.8 Διαγράμματα Ελέγχου ISRT

Έστω ότι X είναι μια τυχαία Διωνυμική μεταβλητή με παραμέτρους n και p . Είναι γνωστό ότι $\hat{p} = \frac{X}{n}$. Εάν το p είναι μικρό τότε το διάγραμμα p δεν είναι κατάλληλο, λόγω της ασυμμετρίας της κατανομής. Στην παρούσα ενότητα πραγματοποιείται η παρουσίαση του ISRT διαγράμματος, από τους Tsai, Lin και Wu (2006), το οποίο βασίζεται στην ιδέα του square root transformation.

Υποθέτουμε ότι $g(\hat{p}) = \sqrt{\hat{p}}$. Χρησιμοποιώντας τις σειρές Taylor για τη συνάρτηση g θα καταλήξουμε στη σχέση

$$g(\hat{p}) \cong g(p) + g'(p)(\hat{p} - p) + \frac{g''(p)}{2}(\hat{p} - p)^2, \quad (2.43)$$

ή αλλιώς

$$\sqrt{n} \left[g(\hat{p}) - g(p) - \frac{g''(p)}{2}(\hat{p} - p)^2 \right] \cong g'(p)\sqrt{n}(\hat{p} - p). \quad (2.44)$$

Και τα δύο μέλη της σχέσης 2.44 ακολουθούν την κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διακύμανση $[g'(p)]^2 p(1-p)$. Έστω, $e = |\hat{p} - p|$ είναι το απόλυτο σφάλμα (absolute error) και $\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ είναι η τυπική απόκλιση του αναλογικού δείγματος. Μπορεί να δειχθεί ότι

$$Z = \frac{g(\hat{p}) - g(p)}{|g(\hat{p})|\sigma_{\hat{p}}} - \frac{g''(p)e^2}{2|g(\hat{p})|\sigma_{\hat{p}}}. \quad (2.45)$$

Εάν ληφθούν τα 3σ όρια, από την 2.45 αποδεικνύεται ότι

$$\begin{aligned}
0.0027 &= P(Z < -3 \quad \text{ή} \quad Z > 3) \\
&\cong P\left(g(\hat{g}) < g(p) - 3|g'(p)|\sigma_{\hat{p}} + \frac{g''(p)}{2}e^2 \quad \text{ή} \quad g(\hat{g}) > g(p) + 3|g'(p)|\sigma_{\hat{p}} + \frac{g''(p)}{2}e^2\right).
\end{aligned}
\tag{2.46}$$

Συνεπώς, τα 3σ όρια ελέγχου για το ISRT διάγραμμα, προκύπτουν από τις σχέσεις

$$UCL = g(p) + 3|g'(p)|\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} + \frac{g''(p)}{2}e^2 \tag{2.47}$$

$$CL = g(p) = \sqrt{p} \tag{2.48}$$

$$LCL = g(p) - 3|g'(p)|\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} + \frac{g''(p)}{2}e^2. \tag{2.49}$$

Λόγω της ασυμμετρίας που χαρακτηρίζει την κανονική κατανομή όταν το p είναι πολύ μικρό, δεν είναι αρκετό να κατασκευασθούν τα όρια με ίδιες ουρές. Μετά από αριθμητικές μελέτες που πραγματοποιήθηκαν, παρατηρήθηκε ότι όταν $p < 0.1$, το απόλυτο σφάλμα για το LCL_p τείνει να είναι $3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ και για το UCL_p , αντίστοιχα, είναι $2\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$. Βάσει αυτών των παρατηρήσεων, προκύπτουν τα κάτωθι όρια ελέγχου:

Πίνακας 2.19: Όρια ελέγχου για το $ISRT_p$ διάγραμμα

Όρια ελέγχου για το $ISRT_p$ διάγραμμα
$UCL_p = \sqrt{p} + \frac{3}{2}\sqrt{\frac{1-p}{n}} - \frac{1}{2}\frac{1-p}{n\sqrt{p}}$
$LCL_p = \sqrt{p} - \frac{3}{2}\sqrt{\frac{1-p}{n}} - \frac{9}{8}\frac{1-p}{n\sqrt{p}}$

Πίνακας 2.20: Όρια ελέγχου για το $ISRT_{np}$ διάγραμμα

Όρια ελέγχου για το $ISRT_{np}$ διάγραμμα
$UCL_{np} = \sqrt{np} + \frac{3}{2}\sqrt{1-p} - \frac{1}{2}\frac{1-p}{\sqrt{np}}$
$LCL_{np} = \sqrt{np} - \frac{3}{2}\sqrt{1-p} - \frac{9}{8}\frac{1-p}{\sqrt{np}}$

Το πλεονέκτημα των διαγραμμάτων ISRT είναι ότι η πιθανότητα να βρεθεί μη συμμορφωμένο προϊόν, είναι πολύ κοντά στο 0.00135, ανεξάρτητα από το αν είναι γνωστό το p ή όχι, σε μικρότερο δείγμα σε σχέση με όλα τα προηγούμενα διαγράμματα. Σε περίπτωση που η τιμή

p δεν είναι γνωστή, χρησιμοποιείται η εκτίμησή της, όπως στα προηγούμενα διαγράμματα. Ο ελάχιστος αριθμός δειγμάτων που απαιτείται, προκύπτει από την παρακάτω σχέση.

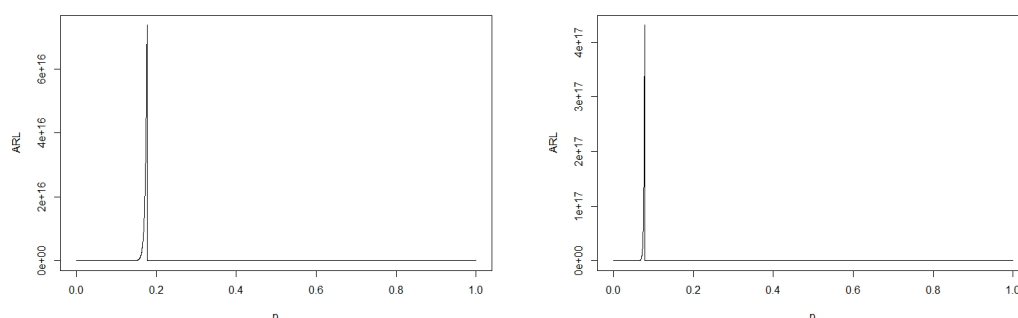
$$n = \frac{9}{8} \left[\frac{\sqrt{3}\sqrt{p^2 - 2p + 1}}{p} + \frac{2}{p} - 2 \right]. \quad (2.50)$$

Το συγκεκριμένο αποτέλεσμα προέκυψε θέτοντας $LCL = 0$. Στον Πίνακα 2.21 παρατίθενται ενδεικτικές τιμές του ελαχίστου δείγματος ανάλογα με τις p τιμές.

Πίνακας 2.21: Ενδεικτικές τιμές ελαχίστου δείγματος του διαγράμματος ISRT

p	0.1	0.05	0.02	0.01	0.005	0.001
sample	38	80	206	416	836	4195

Τέλος, στο Σχήμα 2.5 παρατίθενται δύο διαγράμματα, τα οποία παρουσιάζουν τον τρόπο που κινείται το ARL ανάλογα με τις διάφορες τιμές του p . Για το πρώτο διάγραμμα έχουμε θέσει $n = 20$ και στο δεύτερο $n = 50$.



Σχήμα 2.5: Ενδεικτικά διαγράμματα του ARL σε σχέση με τις p τιμές

Από τα διαγράμματα (Σχήμα 2.5), που παρουσιάζουν το εύρος τιμών του ARL σε σχέση με την εξέλιξη τιμών του p , συνάγεται ότι η τιμή του ARL αυξάνεται σημαντικά, όταν η τιμή του p κινείται στο εύρος $[0,0.2]$. Επιπλέον, με την αύξηση του δείγματος παρουσιάζεται μικρότερη διακύμανση της τιμής του ARL . Συνεπώς, για να αποκαλυφθεί η κατάσταση εκτός ορίων λειτουργίας της διεργασίας, απαιτείται μεγαλύτερο δείγμα, για το συγκεκριμένο εύρος. Συνακόλουθα, η ευαισθησία της μεθόδου αυξάνεται με την αύξηση του δείγματος, για μικρές τιμές του p . Σε κάθε άλλη περίπτωση (εκτός του προαναφερθέντος εύρους), η τιμή του ARL κινείται κοντά στην τιμή ένα, ανεξαρτήτως δείγματος. Συνεπώς, τα συγκεκριμένα διαγράμματα καθίστανται αποδοτικότερα σε σχέση με τα υπόλοιπα διαγράμματα τύπου Shewhart, για μεγάλες p τιμές.

Κεφάλαιο 3

Συσσωρευμένα Αθροιστικά Διαγράμματα Ελέγχου

3.1 Εισαγωγή

Τα συσσωρευμένα αθροιστικά διαγράμματα ελέγχου (*Cumulative Sum Control Charts*) ή αλλιώς CUSUM προτάθηκαν από τον Page το 1954 και είναι πλέον γνωστά ως διαγράμματα CUSUM. Ο Page μελέτησε τον μέσο αριθμό δειγμάτων μέχρι την ένδειξη προβλήματος σε διάγραμμα, στο οποίο λαμβάνονται υπόψη τα στοιχεία όλων των δειγμάτων με την ίδια βαρύτητα.

Το βασικό τους πλεονέκτημα είναι ότι είναι ιδιαίτερα ευαίσθητα στον εντοπισμό μικρών μετατοπίσεων (μικρότερες κι από 1.5σ), γι' αυτό και χρησιμοποιούνται για την ανίχνευση μικρών συστηματικών σφαλμάτων. Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό των διαγραμμάτων CUSUM είναι ότι ενσωματώνουν όλες τις πληροφορίες της ακολουθίας των τιμών του δείγματος, παρέχοντας τα συσσωρευμένα αθροίσματα των αποκλίσεων των τιμών του δείγματος από την τιμή στόχο. Στο παρόν κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε συνοπτικά το διάγραμμα CUSUM για δεδομένα που ακολουθούν τις κατανομές Διωνυμική και Bernoulli.

Τα προηγούμενα διαγράμματα τύπου Shewhart χρησιμοποιούν σε κάθε σημείο τους τις πληροφορίες που αντλούνται μόνο από το συγκεκριμένο δείγμα, στο οποίο ανήκει το σημείο και αγνοούν τις πληροφορίες που αφορούν ολόκληρη την ακολουθία των δεδομένων. Το γεγονός αυτό τα καθιστά μη αποτελεσματικά στον εντοπισμό μικρών αλλαγών στη διαδικασία (Κουκουβίνος, 2017). Προκαταρκτικά σημειώνεται ότι, οι Πίνακες και τα Σχήματα που ακολουθούν, κατασκευάστηκαν προσομοιώνοντας δεδομένα στη γλώσσα προγραμματισμού R.

3.2 Διάγραμμα CUSUM

Τα διαγράμματα ελέγχου CUSUM για τον έλεγχο ποιότητας, βασίζονται στη δημιουργία συσσωρευμένου αθροίσματος. Τα διαγράμματα αυτά χρησιμοποιούνται για να ανιχνεύουν μικρές μετατοπίσεις από την μέση τιμή των δειγμάτων. Το διάγραμμα CUSUM έχει τη δυνατότητα να διακρίνει μικρά σφάλματα που τα διαγράμματα τύπου Shewhart δεν εντοπίζουν εύκολα.

Έστω $X_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$, με $i \geq 1$ ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n , με μέση τιμή μ και διακύμανση σ^2 . Ένας αμερόληπτος εκτιμητής της μέσης τιμής μ του χαρακτηριστικού X είναι ο δειγματικός μέσος

$$\bar{X}_i = \frac{X_{i1} + X_{i2} \dots + X_{in}}{n}, \quad (3.1)$$

ο οποίος ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n})$. Σε ορισμένες περιπτώσεις, το μέγεθος του δείγματος είναι $n = 1$, τότε μιλάμε για διαγράμματα ελέγχου για μεμονωμένες ή ατομικές παρατηρήσεις. Τα CUSUM ενδείκνυνται στις περιπτώσεις μεμονωμένων παρατηρήσεων διότι, κατά την χρήση τους αξιοποιούνται πληροφορίες όχι μόνο από την τελευταία δειγματοληψία (όπως τα διαγράμματα Shewhart), αλλά από όλα τα δείγματα που ελήφθησαν μέχρι την τρέχουσα δειγματοληψία. Τα διαγράμματα CUSUM αποσκοπούν στον ταχύτερο εντοπισμό μικρών μεταβολών της μέσης τιμής μ , της τάξης του 0.5σ - 1.5σ .

Στο διάγραμμα CUSUM υπολογίζονται τα συσσωρευμένα αθροίσματα C_i , με αρχική τιμή $C_0 = 0$, των διαφορών δειγματικών τιμών από την τιμή στόχο μ_0 . Το συσσωρευμένο άθροισμα ορίζεται από τη σχέση (Κουκουβίνος, 2017):

$$C_i = \sum_{j=1}^i (X_j - \mu_0), \quad (3.2)$$

ή πιο απλά

$$C_i = (X_j - \mu_0) + C_{i-1}, \quad 1 \leq i \leq m. \quad (3.3)$$

Όταν η παραγωγική διαδικασία βρίσκεται σε στατιστικό έλεγχο, με μέση τιμή μ_0 το άθροισμα C_i θα κινείται γύρω από το 0. Αν όμως η μέση τιμή αυξηθεί σε $\mu > \mu_0$ ή μειωθεί σε $\mu < \mu_0$, τότε θα αρχίσει να δημιουργείται αντίστοιχα μια ανοδική ή καθοδική τάση στο άθροισμα C_i . Η εμφάνιση μιας τέτοιας τάσης αποτελεί ένδειξη μεταβολής της μέσης τιμής. **Η κλίση της καμπύλης του αθροίσματος πληροφορεί για το μέγεθος της εκτροπής της μέσης τιμής.** Όταν υφίσταται μικρή κλίση της καμπύλης είναι δυνατόν να υποτεθεί ότι

πιθανόν να υπάρχουν συστηματικές μετατοπίσεις, ενώ με μεγαλύτερη κλίση είναι δυνατόν αν υποτεθεί ότι υφίστανται συστηματικές εκτροπές.

3.3 Διάγραμμα Tabular CUSUM

Επιπλέον των διαγραμμάτων CUSUM, έχουν εισαχθεί και τα διαγράμματα Tabular CUSUM. Έστω μια εντός ελέγχου διεργασία, η οποία παράγει προϊόντα στα οποία η τιμή X ενός ποιοτικού χαρακτηριστικού τους που παρακολουθείται, έχει μέση τιμή μ_0 και τυπική απόκλιση σ . Από τη διεργασία λαμβάνονται οι παρατηρήσεις X_i με $i \geq 1$ και ενδιαφέρει η ανίχνευση μετατοπίσεων του μέσου της διεργασίας, της μορφής $\mu_1 = \mu_0 \pm \delta\sigma$ με $\delta > 0$.

Στο συγκεκριμένο διάγραμμα απεικονίζονται οι δύο ακόλουθες στατιστικές συναρτήσεις (Montgomery, 2013):

$$C_i^+ = \max [0, X_i - (\mu_0 + K) + C_{i-1}^+] \quad (3.4)$$

$$C_i^- = \max [0, X_i - (\mu_0 - K) + C_{i-1}^-] . \quad (3.5)$$

με $1 \leq i \leq m$ και αρχικές τιμές $C_0^+ = C_0^- = 0$. Οι τιμές C_0^+ και C_0^- ονομάζονται τιμές εκκίνησης (*head start values*). Η ποσότητα K (≥ 0) ονομάζεται τιμή αναφοράς (*reference value*) και η πιο συνηθισμένη τιμή της δίνεται από τη σχέση

$$K = \frac{\delta\sigma}{2} = \frac{\mu_1 - \mu_0}{2} = k\sigma, \quad k = \frac{\delta}{2}. \quad (3.6)$$

Η ποσότητα C_i^+ μπορεί να θεωρηθεί κατάλληλη για τον έλεγχο της υπόθεσης

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad (3.7)$$

$$H_1^+ : \mu = \mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma, \quad \delta > 0. \quad (3.8)$$

Αντίστοιχα για τη ποσότητα C_i^- θεωρούμε τις υποθέσεις

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad (3.9)$$

$$H_1^- : \mu = \mu_1 = \mu_0 - \delta\sigma, \quad \delta > 0. \quad (3.10)$$

Για το ποια υπόθεση θα γίνει αποδεκτή (ή όχι) σε κάθε βήμα της διαδικασίας, θα εξαρτηθεί από το αν ισχύει $C_i^+ > H$ ή $C_i^- < -H$, όπου H μια θετική σταθερά η οποία δίνεται από τη σχέση

$$H = h\sigma \quad (3.11)$$

και ονομάζεται διάστημα απόφασης (decision interval H). Συνήθως για το h επιλέγονται οι τιμές 4 ή 5. Η επιλογή των τιμών K και H πρέπει να γίνεται με προσοχή, διότι επηρεάζεται σημαντικά η απόδοση του διαγράμματος CUSUM.

3.4 Διαγράμματα Ελέγχου Τύπου CUSUM για δεδομένα που ακολουθούν τη Διωνυμική κατανομή

Έστω η τυχαία μεταβλητή X η οποία περιγράφει τον αριθμό των ελαττωματικών προϊόντων σε μία παραγωγική διεργασία. Έστω ακόμη, $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ οι ανεξάρτητες και ισόνομες παρατηρήσεις, που ακολουθούν την Διωνυμική κατανομή, ενός τυχαίου δείγματος μεγέθους n , με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2 . Η διεργασία είναι εντός ελέγχου όταν $\mu = \mu_0$, όπου μ είναι η τιμή στόχος που προκαθορίζεται από τον κατασκευαστή. Η διεργασία βρίσκεται εκτός ελέγχου όταν $\mu \neq \mu_0$. Αν ο μέσος της διεργασίας μετατοπιστεί στην τιμή $\mu_1 > \mu_0$, τότε θα υπάρξει αύξηση της μέσης τιμής των ελαττωματικών προϊόντων. Συνεπώς, γίνεται εμφανής θετική μετατόπιση του X_i , με αποτέλεσμα η διεργασία να βρεθεί εκτός ελέγχου. Η συγκεκριμένη μετατόπιση μπορεί να οφείλεται σε ανεπιθύμητα αίτια κατά την παραγωγική διαδικασία. Αντίστοιχα, αν ο μέσος της διεργασίας μετατοπιστεί σε τιμή $\mu_1 < \mu_0$, θα υπάρξει μείωση της μέσης τιμής των ελαττωματικών προϊόντων, με αποτέλεσμα, την αρνητική μετατόπιση του X_i . Με τη χρήση των διαγραμμάτων Binomial CUSUM λαμβάνονται ενδείξεις για το αν η διεργασία είναι εκτός ελέγχου, είτε προς τα πάνω είτε προς τα κάτω, σε πρώτο χρόνο, ώστε να προβεί ο διαχειριστής σε διορθωτικές ενέργειες, προκειμένου να επαναφέρει τη διεργασία εντός ελέγχου (Reynolds Stoumbos (1999), Chang and Gan (2001)).

Σε περίπτωση που δε είναι γνωστή την μέση τιμή μ_0 , για τη Φάση I, δύναται να χρησιμοποιηθεί ο δειγματικός μέσος.

$$\hat{\mu}_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad (3.12)$$

όπου για μεγάλες τιμές του n ακολουθεί την κανονική κατανομή $N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.

Σε ένα Binomial CUSUM διάγραμμα υπολογίζονται οι συσσωρευμένες διαφορές μεταξύ των

X_i παρατηρήσεων που ακολουθούν τη Διωνυμική κατανομή και μίας τιμής αναφοράς k . Στο συγκεκριμένο διάγραμμα απεικονίζονται οι δύο ακόλουθες στατιστικές συναρτήσεις (Chang and Gan, 2001):

$$C_i^+ = \max [0, C_{i-1}^+ + X_i - k_S], \quad i = 1, 2, \dots \quad (3.13)$$

$$C_i^- = \min [0, C_{i-1}^- + X_i - k_T], \quad i = 1, 2, \dots \quad (3.14)$$

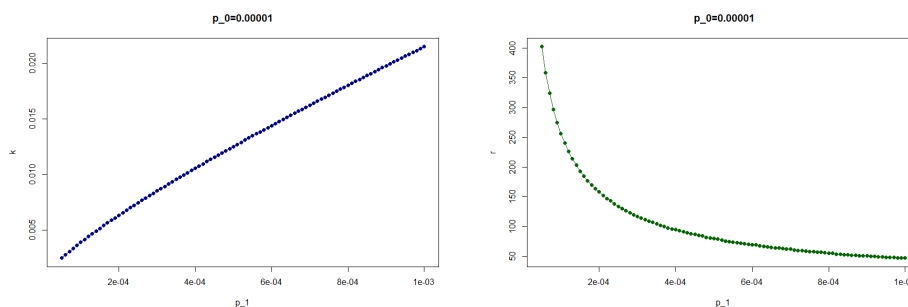
Τίθεται C_i το συσσωρευμένο άθροισμα των διαφορών των προηγούμενων δειγμάτων των ελαττωματικών προϊόντων X_i στο δείγμα i . Οι τιμές C_i^+ είναι οι θετικές αποκλίσεις από τον στόχο οι οποίες συναθροίζονται στο άνω συσσωρευμένο άθροισμα. Το διάγραμμα που εξάγεται με βάση τη σχέση 3.13 ονομάζεται Upper-Sided Binomial CUSUM. Οι τιμές C_i^- είναι οι αρνητικές αποκλίσεις από τον στόχο οι οποίες συναθροίζονται στο κάτω συσσωρευμένο άθροισμα. Αντίστοιχα, το διάγραμμα που εξάγεται με βάση τη σχέση 3.14 ονομάζεται Lower-Sided Binomial CUSUM. Δύναται να θεωρηθεί το $C_0^+ = u$ και το $C_0^- = v$ ότι είναι οι τιμές εκκίνησης, με $0 \leq u < h_S$ και $-h_T \leq v < 0$. Στις περισσότερες περιπτώσεις ορίζεται ως αρχική τιμή των αθροισμάτων $C_0^+ = C_0^- = 0$. Επειδή το συσσωρευμένο άθροισμα δεν μπορεί να είναι αρνητικό, υφίσταται η ένδειξη ότι η διεργασία βρίσκεται εκτός ελέγχου όταν για πρώτη φορά μία συσσωρευμένη διαφορά ισούται ή υπερβαίνει το όριο ελέγχου h . Ως επί το πλείστον, το ενδιαφέρον εστιάζεται στην ανίχνευση των αυξήσεων της μέσης τιμής. Αυτός είναι και ο λόγος που εφαρμόζονται τα διαγράμματα CUSUM και EWMA κυρίως για το άνω συσσωρευμένο άθροισμα.

Παρατηρείται ότι η διεργασία βρίσκεται εκτός ελέγχου, με αναφορά στο Upper-Sided Binomial CUSUM, όταν ισχύει η σχέση $C_i^+ \geq h_S$. Αντίστοιχα, όταν γίνεται αναφορά στο Lower-Sided Binomial CUSUM, η διεργασία βρίσκεται εκτός ελέγχου όταν $C_i^- \leq -h_T$. Το όριο ελέγχου ή διάστημα απόφασης h οφείλεται να επιλέγεται προσεκτικά, καθώς σε συνδυασμό με την τιμή αναφοράς k επηρεάζουν σημαντικά την απόδοση του διαγράμματος, δηλαδή την τιμή του ARL . Οι τιμές αναφοράς k_S και k_T είναι ίσες με nk , όπου k εξαρτάται από τις τιμές των p_0 και p_1 . Η εντός ελέγχου πιθανότητα, ή αλλιώς τιμή στόχος, συμβολίζεται με p_0 και η εκτός ελέγχου πιθανότητα με p_1 .

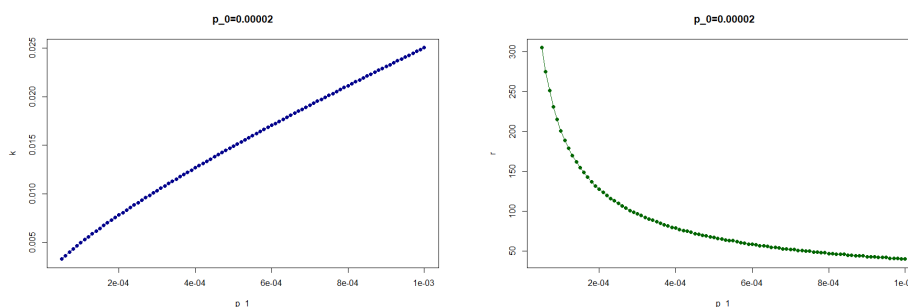
$$k = \frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{r}, \quad (3.15)$$

όπου $r_1 = -\log\left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right)$ και $r_2 = \log\left(\frac{p_1(1-p_0)}{p_0(1-p_1)}\right)$. Η τιμή του r στρογγυλοποιείται στον πλησιέστερο ακέραιο αριθμό. Στην περίπτωση που η τιμή στόχος (δηλαδή το p_0), ήταν ίση με το μηδέν, τότε λαμβάνονται για k και h , οι τιμές $k = 0$ και $h = 0$. Συνεπάγεται ότι, το διάγραμμα Binomial CUSUM, ήδη από την πρώτη μέτρηση, θα έδινε σήμα ότι η διεργασία

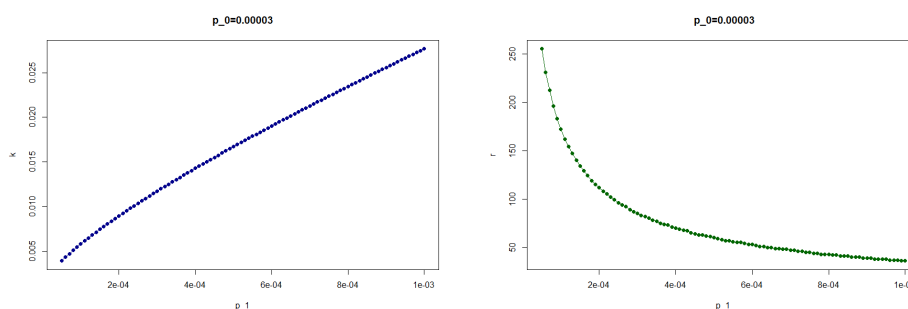
είναι εκτός ελέγχου. Συνεπώς για την κατασκευή των διαγραμμάτων Binomial CUSUM δεν χρησιμοποιείται ποτέ η μηδενική τιμή ως τιμή αναφοράς. Εάν η μέση τιμή $\mu_0 = p_0$ είναι άγνωστη, αντικαθίσταται από την εκτιμημένη μέση τιμή $\hat{\mu}_0$. Το όριο ελέγχου h είναι ένας ακέραιος, πολλαπλασιασμένος με την τιμή αναφοράς k . Στα Σχήμα 3.1, 3.2 και 3.3, απεικονίζεται η τιμή αναφοράς k και η αντίστοιχη τιμή του ακεραίου r για διαφορετικές τιμές του p_0 και $n = 100$.



Σχήμα 3.1: Ενδεικτικές τιμές των k και r για $p_0 = 0.00001$ και $n = 100$



Σχήμα 3.2: Ενδεικτικές τιμές των k και r για $p_0 = 0.00002$ και $n = 100$



Σχήμα 3.3: Ενδεικτικές τιμές των k και r για $p_0 = 0.00003$ και $n = 100$

Από τα ως άνω διαγράμματα συνάγεται ότι η τιμή k αυξάνεται σχεδόν γραμμικά καθώς αυξάνεται η εκτός ελέγχου πιθανότητα. Ενώ το r ελαττώνεται εκθετικά όταν αυξάνεται η εκτός

ελέγχου πιθανότητα.

Τα διαγράμματα *Binomial CUSUM* σχετίζονται με τον έλεγχο *SPRT* (Sequential Probability Ratio Test). Η τιμή αναφοράς k είναι ίδια με αυτήν για τον έλεγχο *SPRT* της αρχικής υπόθεσης ότι η μέση τιμή είναι ίση με $\mu_0 = p_0$, έναντι της εναλλακτικής ότι ισούται με $\mu = p_1$. Παρόλα αυτά, τα διαγράμματα *Binomial CUSUM* διαφέρουν από τον έλεγχο *SPRT*. Δεδομένου ότι η μέση τιμή μ μπορεί να μεταβληθεί οποιαδήποτε στιγμή, το διάγραμμα *Binomial CUSUM* είναι ουσιαστικά μία συλλογή των *SPRT*, όπου η κάθε μία έχει το δικό της σημείο εκκίνησης.

3.5 Υπολογισμός Μέσου Μήκους Ροής *ARL* του διαγράμματος *Binomial CUSUM*

Στο διάγραμμα *Binomial CUSUM* αντί του *ARL* είναι προτιμότερη η χρήση του *ANIS* (Average Number of Items Sampled). Το *ARL* και το *ANIS* συνδέονται σύμφωνα με τη σχέση 3.16, όπως φαίνεται παρακάτω (Chang and Gan, 2001).

$$ANIS = ARL \cdot n. \quad (3.16)$$

Για το Upper-Sided *Binomial CUSUM*, η σχέση 3.16 μετασχηματίζεται στον παρακάτω τύπο.

$$ANIS_S = ARL_S \cdot n. \quad (3.17)$$

Αντίστοιχα, τροποποιείται η σχέση 3.16 για το Lower-Sided *Binomial CUSUM*.

$$ANIS_T = ARL_T \cdot n. \quad (3.18)$$

Για την ανίχνευση των μετατοπίσεων της μέσης τιμής p_0 , είτε προς τα επάνω, είτε προς τα κάτω, χρησιμοποιείται το δίπλευρο διάγραμμα *Binomial CUSUM*. Στην περίπτωση που είναι επιθυμητό να προσδιοριστεί το *ANIS* για το Two-Sided Bernoulli *CUSUM*, χρησιμοποιούνται οι σχέσεις 3.17 και 3.18 με βάση τον παρακάτω τύπο.

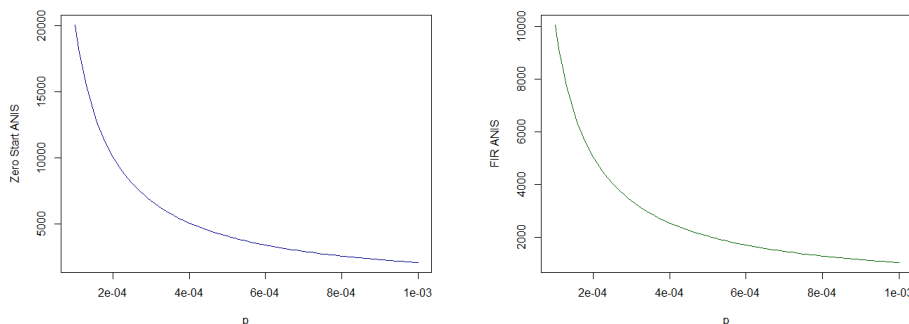
$$ANIS_2 \approx \frac{ANIS_S \cdot ANIS_T}{ANIS_S + ANIS_T}. \quad (3.19)$$

3.6 Διαγράμματα Ελέγχου Τύπου FIR CUSUM για δεδομένα που ακολουθούν τη Διωνυμική κατανομή

Για την αύξηση της ευαισθησίας της παραγωγικής διεργασίας από το ξεκίνημά της, δύναται να χρησιμοποιηθεί η τεχνική FIR (Fast Initial Response). Κάνοντας χρήση της τεχνικής FIR, στην ουσία τίθεται ως αρχική τιμή για τα C_i ένας αριθμός. Τις περισσότερες φορές ο προαναφερόμενος αριθμός είναι $\frac{h}{2}$. Με τον τρόπο αυτό, αυξάνεται το μέσο μήκος ροής ARL για τις διαδικασίες που είναι εκτός ελέγχου (Chang and Gan, 2001).

Στα διαγράμματα του Σχήματος 3.4 παρατηρείται ο τρόπος με τον οποίο λαμβάνει τιμές το $ANIS$ για τα διαγράμματα Two-Sided Binomial CUSUM και FIR CUSUM ανάλογα με τις τιμές του p .

Ο υπολογισμός του ARL γίνεται είτε με τη χρήση μαρκοβιανών αλυσίδων είτε με τη χρήση των ολοκληρωτικών εξισώσεων. Στην προκειμένη περίπτωση γίνεται χρήση της πρώτης μεθόδου, η οποία βασίζεται στην υπόθεση ότι η μετατόπιση του μέσου συμβαίνει στην αρχή της διαδικασίας γι' αυτό και ονομάζεται ARL μηδενικής κατάστασης (zero state) ή αρχικής κατάστασης (initial state). Πέραν αυτού, υπάρχει και το ARL σταθερής κατάστασης (steady state), για το οποίο υποτίθεται ότι η μετατόπιση του μέσου συμβαίνει σε μία κατάσταση, αφότου η διεργασία λειτουργεί.

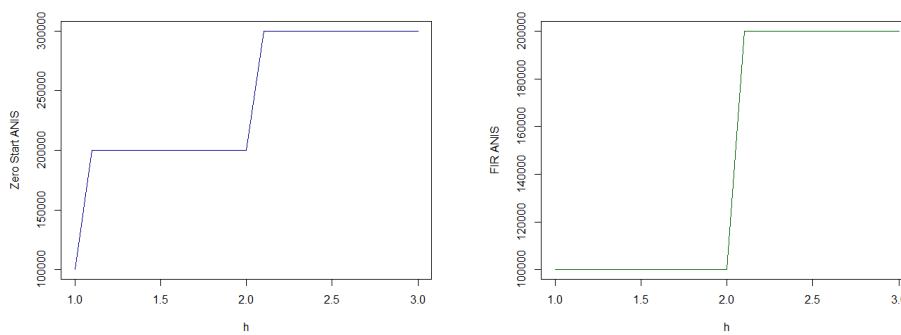


Σχήμα 3.4: Ενδεικτικά διαγράμματα του $ANIS$ σε σχέση με την τιμή του p

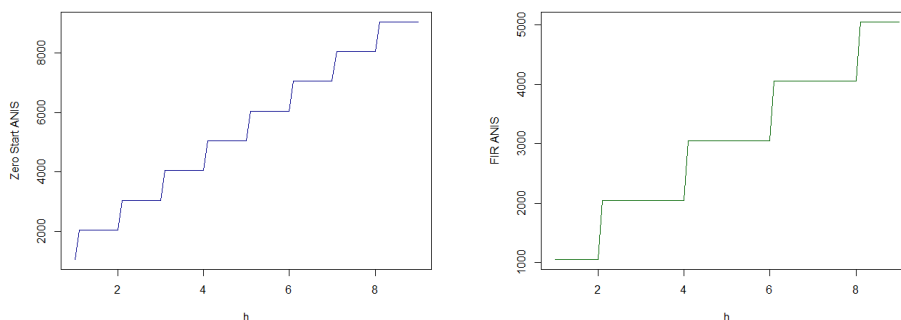
Για λόγους ευκολίας, όταν πραγματοποιείται αναφορά στα διαγράμματα CUSUM, εννοούνται τα διαγράμματα με μηδενική αρχική τιμή (zero state). Ενώ όταν γίνεται αναφορά στα διαγράμματα FIR CUSUM, σε αυτή ορίζεται ως αρχική τιμή το $\frac{h}{2}$. Παρήγαμε τα διαγράμματα CUSUM και FIR CUSUM. Για τον υπολογισμό έχει τεθεί ως ορίσματα το δείγμα να είναι 100, η τιμή αναφοράς να είναι ίση με 0.01 και το h ίσο με 1.2. Από τα διαγράμματα του Σχήματος 3.4 παρατηρούμε ότι, για μικρές τιμές του p , το $ANIS$ του Two-Sided Binomial CUSUM σε σχέση με του FIR Two-Sided Binomial CUSUM είναι σχεδόν το διπλάσιο. Αυτό σημαίνει, ότι διάγραμμα FIR CUSUM ανιχνεύει πολύ πιο γρήγορα τις μετατοπίσεις της μέσης τιμής από το διάγραμμα CUSUM. Η διαφορά όμως, μειώνεται σταδιακά όταν το p αυξάνεται, ώσπου στο

τέλος τείνει να θεωρηθεί αμελητέα.

Στα διαγράμματα των σχημάτων 3.5 και 3.6, παρατηρείται η πορεία του *ANIS* στα διαγράμματα Two-Sided Binomial CUSUM και FIR Two-Sided Binomial CUSUM για διαφορετικές τιμές του h . Τίθενται ως ορίσματα το p ίσο με 0.00001, το δείγμα ίσο με 100 και η τιμή αναφοράς ίση με 0.01. Σε αυτά τα διαγράμματα παρατηρείται διαφορετική τάση του *ANIS* στο καθένα. Το *ANIS* στο διάγραμμα Two-Sided Binomial CUSUM αυξάνεται απότομα όταν το h βρίσκεται σε οποιοδήποτε ακέραιο αριθμό και μένει σταθερό μέχρι τον επόμενο ακέραιο. Το *ANIS* στο διάγραμμα FIR Two-Sided Binomial CUSUM αυξάνεται απότομα όταν το h είναι άρτιος αριθμός και παραμένει σταθερό μέχρι το h να περάσει στον επόμενο άρτιο. Επιπλέον μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι, το *ANIS* του διαγράμματος CUSUM τείνει να διπλασιαστεί σε σχέση με το *ANIS* του FIR CUSUM, καθώς αυξάνεται το h .



Σχήμα 3.5: Ενδεικτικά διαγράμματα του *ANIS* σε σχέση με την τιμή του h



Σχήμα 3.6: Ενδεικτικά διαγράμματα του *ANIS* σε σχέση με την τιμή του h

Στη συνέχεια παρατίθενται οι Πίνακες 3.1 και 3.2, το περιεχόμενο των οποίων είναι αριθμητικά παραδείγματα για τα διαγράμματα Upper-Sided Binomial CUSUM και Lower-Sided Binomial CUSUM, αντίστοιχα (Chang and Gan, 2001).

Πίνακας 3.1: Ενδεικτικές τιμές του *ANIS* για το διάγραμμα Upper Sided Binomial CUSUM

	$n = 101$	$n = 101$	$n = 759$	$n = 759$
	$k = \frac{1}{54}$	$k = \frac{1}{54}$	$k = \frac{4}{29}$	$k = \frac{4}{29}$
	$h = \frac{95}{54}$	$h = \frac{95}{54}$	$h = \frac{47}{29}$	$h = \frac{47}{29}$
p	$u = 0$	$u = \frac{h}{2}$	$u = 0$	$u = \frac{h}{2}$
0.00010	70479.38	64317.56	72859.22	64319.63
0.00015	33402.36	28538.06	34624.14	29080.40
0.00020	20497.75	16527.13	20987.18	16684.49
0.00025	14288.96	11323.02	14738.95	11467.73
0.00030	10884.39	8286.11	11316.16	8575.41
0.00035	8732.22	6574.74	9165.53	6715.17
0.00040	7287.46	5391.29	7682.67	5454.78
0.00045	6133.76	4443.05	6490.96	4700.94
0.00050	5369.56	3882.26	5801.18	4089.87
0.001	2356.59	1604.89	2685.72	1903.95
0.005	446.65	261.88	843.17	777.44
0.1	101.00	101.00	759.00	759.00

Πίνακας 3.2: Ενδεικτικές τιμές του *ANIS* για το διάγραμμα Lower Sided Binomial CUSUM

	$n = 100$	$n = 100$	$n = 992$	$n = 992$
	$k = \frac{1}{130}$	$k = \frac{1}{130}$	$k = \frac{1}{14}$	$k = \frac{1}{14}$
	$h = \frac{163}{130}$	$h = \frac{163}{130}$	$h = \frac{16}{14}$	$h = \frac{16}{14}$
p	$u = 0$	$u = \frac{h}{2}$	$u = 0$	$u = \frac{h}{2}$
0.000100	41257.66	40810.78	45871.07	45360.33
0.000090	37333.25	37011.32	41332.47	41306.68
0.000080	33375.51	33850.88	37693.72	37635.09
0.000070	30918.16	30739.58	34371.51	33969.75
0.000060	27628.26	27655.53	30797.73	30409.96
0.000050	25359.32	25217.58	27700.41	27664.70
0.000040	23030.27	23019.33	25196.20	25087.18
0.000030	21222.98	21081.45	23089.10	23042.37
0.000020	19490.16	19365.34	21173.64	21012.84
0.000010	17926.25	17923.79	19469.99	19416.61
0.000005	17538.25	17179.51	18578.57	18577.86
0.000001	16652.59	16625.36	17012.08	17008.51

Στους παραπάνω Πίνακες γίνεται σύγκριση του *ANIS* των διαγραμμάτων CUSUM με τα διαγράμματα FIR CUSUM. Στα παραδείγματα των πινάκων έχει τεθεί ως δεδομένη τιμή για το p_0 η τιμή 0.0001 για διαφορετικά μεγέθη δειγμάτων. Στον πρώτο Πίνακα παρατηρείται ότι, το *ANIS* του FIR CUSUM είναι μικρότερο σε σχέση με το *ANIS* του CUSUM. Συνεπώς, το FIR CUSUM είναι πιο αποτελεσματικό στην ανίχνευση των μετατοπίσεων της μέσης τιμής. Η διαφορά όμως, τείνει στο μηδέν καθώς αυξάνεται το p . Στον δεύτερο Πίνακα παρατηρείται ότι τα αποτελέσματα για το CUSUM και το FIR CUSUM είναι πάρα πολύ κοντά για όλες τις τιμές του p . Συνεπώς, τα διαγράμματα CUSUM και FIR CUSUM είναι το ίδιο αποτελεσματικά για την ανεύρεση *ANIS*.

3.7 Διαγράμματα Ελέγχου Τύπου CUSUM για δεδομένα που ακολουθούν τη κατανομή Bernoulli

Τα p διαγράμματα βασίζουν τη στατιστική τους ανάλυση στο μέγεθος των δειγμάτων που λαμβάνουν από την παραγωγή, σε συνδυασμό με τον αριθμό των μη συμμορφωμένων παρατηρήσεων του κάθε δείγματος. Τα διαγράμματα Bernoulli CUSUM είναι διαγράμματα μεμονωμένων παρατηρήσεων ($n = 1$) και μπορούν να παράγουν αποτελέσματα ακόμα και κατά τη διάρκεια της γραμμής παραγωγής. Συνακόλουθα, είναι δυνατή η συνεχής εισαγωγή παρατηρήσεων στο μοντέλο και καθίσταται άμεσα εφικτή η αντίληψη του γεγονότος ότι η διεργασία κινείται εντός ή εκτός ελέγχου.

Θεωρείται ότι η τυχαία μεταβλητή X περιγράφει τον αριθμό των ελαττωματικών προϊόντων σε μία παραγωγική διεργασία. Έστω $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ είναι οι ανεξάρτητες και ισόνομες παρατηρήσεις, που ακολουθούν την κατανομή Bernoulli, με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2 . Συνεπώς, για την τιμή p ισχύει ότι είναι σε αντιστοιχία με τη σχέση $P(X_i) = 1$. Σε περίπτωση που δεν είναι γνωστή η μέση τιμή, είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί ο δειγματικός μέσος. Σε ένα διάγραμμα Bernoulli CUSUM υπολογίζονται οι συσσωρευμένες διαφορές μεταξύ των X_i παρατηρήσεων που ακολουθούν τη κατανομή Bernoulli, και μίας τιμής αναφοράς k_B . Τα Bernoulli CUSUM διαγράμματα έχουν τη μορφή (Reynolds and Stoumbos (1999), Chang and Gan (2001)):

$$B_i = \max(0, B_{i-1}) + (X_i - k_B), \quad i = 1, 2, \dots \quad (3.20)$$

Ορίζεται ως B_i το συσσωρευμένο άθροισμα των διαφορών των προηγούμενων δειγμάτων των ελαττωματικών προϊόντων X_i στο δείγμα. Όπως ισχύει στο διάγραμμα Binomial CUSUM, έτσι και στην προκειμένη περίπτωση με την ίδια διαδικασία είναι δυνατόν να εξαχθεί το άνω συσσωρευμένο άθροισμα B_i^+ και το κάτω συσσωρευμένο άθροισμα B_i^- . Τα διαγράμματα αυτά καλούνται Upper-Sided Bernoulli CUSUM και Lower-Sided Bernoulli CUSUM. Τα διαγράμματα αυτά απεικονίζονται στις ακόλουθες συναρτήσεις.

$$B_i^+ = \max(0, B_{i-1}^+) + (X_i - k_{BS}), \quad i = 1, 2, \dots \quad (3.21)$$

$$B_i^- = \min(0, B_{i-1}^-) + (X_i - k_{BT}), \quad i = 1, 2, \dots \quad (3.22)$$

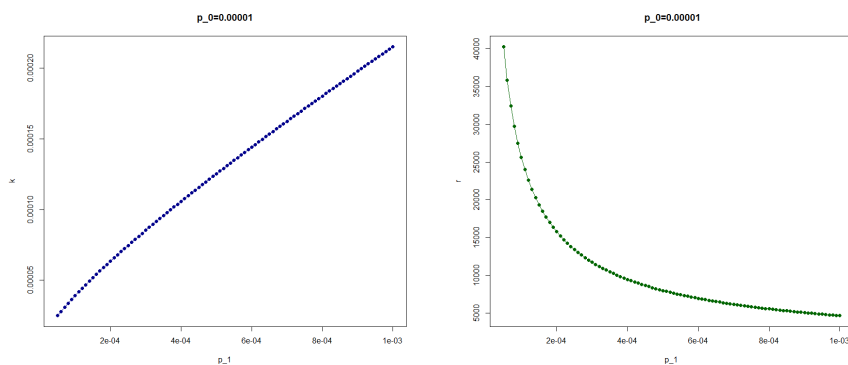
Οι τιμές B_i^+ είναι οι θετικές αποκλίσεις από τον στόχο οι οποίες συναθροίζονται στο άνω συσσωρευμένο άθροισμα. Οι τιμές B_i^- είναι οι αρνητικές αποκλίσεις από τον στόχο οι οποίες συναθροίζονται στο κάτω συσσωρευμένο άθροισμα. Θεωρούνται ως τιμές εκκίνησης $B_0^+ = u_B$ και $B_0^- = v_B$, με $0 \leq u_B < h_{BS}$ και $-h_{BT} \leq v_B < 0$. Στις περισσότερες περιπτώσεις ορίζεται ως αρχική τιμή των αθροισμάτων το μηδέν. Επειδή το συσσωρευμένο άθροισμα δεν μπορεί να είναι αρνητικό, υφίσταται ένδειξη ότι η διεργασία βρίσκεται εκτός ελέγχου όταν για πρώτη φορά μία συσσωρευμένη διαφορά ξεπεράσει ή έρθει ίση με το όριο ελέγχου h .

Η παράμετρος $k_B > 0$ ορίζεται ως η τιμή αναφοράς (reference value) και η αρχική τιμή B_0 είναι ίση με το 0. Το δίπλευρο διάγραμμα εκπέμπει σήμα ότι η μέση τιμή p αυξήθηκε όταν ικανοποιείται η σχέση $B_i \geq h_B$, όπου h_B είναι το όριο ελέγχου. Ενώ για τα μονόπλευρα διαγράμματα ισχύει αντίστοιχα $B_i^+ \geq h_{BS}$ και $B_i^- \leq -h_{BT}$. Το όριο ελέγχου h πρέπει να επιλέγεται προσεκτικά, καθώς σε συνδυασμό με την τιμή αναφοράς k επηρεάζει σημαντικά την απόδοση του διαγράμματος, δηλαδή την τιμή του *ARL*. Οι τιμές αναφοράς k_{BS} και k_{BT} είναι ίσες με k_B , όπου k_B εξαρτάται από τις τιμές των p_0 και p_1 . Η εντός ελέγχου πιθανότητα, ή αλλιώς τιμή στόχος, συμβολίζεται με p_0 και η εκτός ελέγχου πιθανότητα με p_1 . Για να ορισθεί η παράμετρος k_B , πρέπει πρώτα να ορισθεί η p_1 , με $p_1 > p_0$, η οποία αντικατοπτρίζει την εκτός ελέγχου τιμή της p . Για δεδομένες p_0 και p_1 , η παράμετρος k_B ορίζεται:

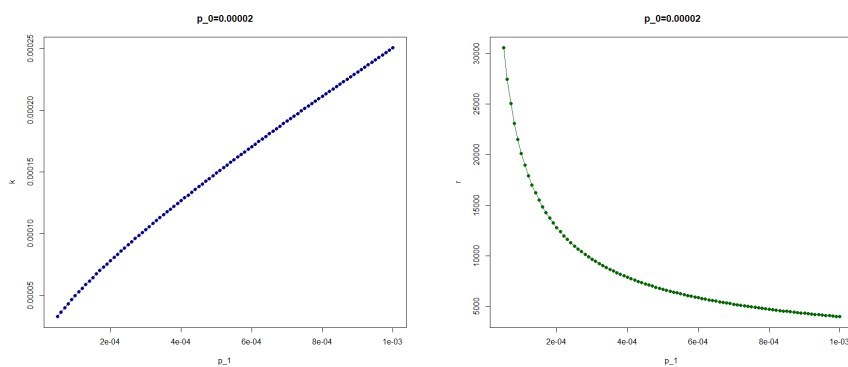
$$k_B = \frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{r}, \quad (3.23)$$

όπου $r_1 = -\log\left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right)$ και $r_2 = \log\left(\frac{p_1(1-p_0)}{p_0(1-p_1)}\right)$. Όπως αναφέρθηκε παραπάνω ισχύει η σχέση $k_B = \frac{1}{r}$, όπου r είναι ένας ακέραιος αριθμός. Για παράδειγμα, αν $p_0 = 0.01$ και $p_1 = 0.025$ τότε εξάγονται ως αποτελέσματα $r_1 = 0.01526747$ και $r_2 = 0.9315582$, άρα $k_B = \frac{r_1}{r_2} = 0.01638918$ ή αλλιώς $k_B \approx \frac{1}{61}$. Η τιμή του r στρογγυλοποιείται στον πλησιέστερο ακέραιο αριθμό. Συνεπάγεται ότι, οι τιμές που θα λάβουν τα B_i είναι ακέραιοι αριθμοί πολλαπλασιασμένοι με το $\frac{1}{61}$. Όπως και στο διάγραμμα Binomial CUSUM, αν η τιμή στόχος τεθεί ίση με μηδέν, τότε θα τεθούν οι τιμές $k = 0$ και $h = 0$. Συνεπώς για την κατασκευή των διαγραμμάτων Bernoulli CUSUM δεν χρησιμοποιείται ποτέ η μηδενική τιμή ως τιμή αναφοράς. Εάν η μέση τιμή είναι άγνωστη, τότε αντικαθίσταται από την εκτιμημένη μέση τιμή.

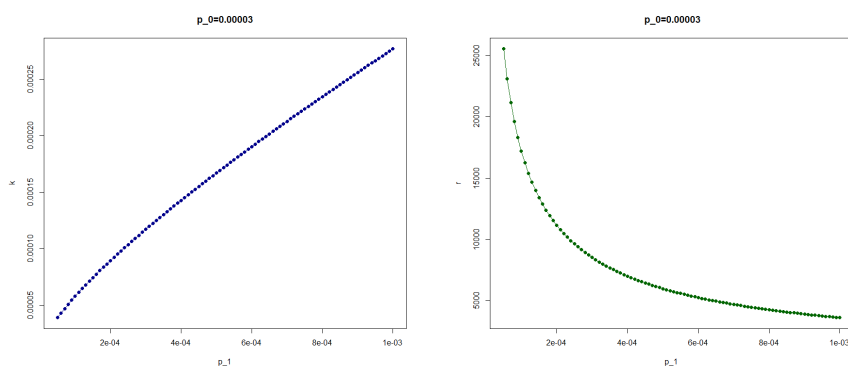
Στα Σχήματα 3.7, 3.8 και 3.9, απεικονίζεται η τιμή του ακεραίου r και η αντίστοιχη τιμής αναφοράς k για διαφορετικές τιμές του p_0 .



Σχήμα 3.7: Ενδεικτικές τιμές των k και r για $p_0 = 0.00001$



Σχήμα 3.8: Ενδεικτικές τιμές των k και r για $p_0 = 0.00002$



Σχήμα 3.9: Ενδεικτικές τιμές των k και r για $p_0 = 0.00003$

Παρατηρούμε ότι η τιμή k αυξάνεται γραμμικά καθώς αυξάνεται η τιμή p . Αντίστροφα αποτελέσματα λαμβάνουμε για τις τιμές r . Δηλαδή, η τιμή r μειώνεται εκθετικά όσο αυξάνεται η τιμή p . Από τα ως άνω διαγράμματα συνάγεται ότι η τιμή k αυξάνεται σχεδόν γραμμικά καθώς αυξάνεται η εκτός ελέγχου πιθανότητα. Ενώ το r ελαττώνεται εκθετικά όταν αυξάνεται η εκτός ελέγχου πιθανότητα.

3.8 Υπολογισμός Μέσου Μήκους Ροής ARL του διαγράμματος Bernoulli CUSUM

Υπενθυμίζεται ότι, το ARL ορίζεται ως ο αναμενόμενος αριθμός δειγμάτων που απαιτείται για δώσει σήμα το διάγραμμα ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου ή ως ο αναμενόμενος αριθμός μεμονωμένων παρατηρήσεων που απαιτείται για να δοθεί το σήμα. Όπως και στο διάγραμμα Binomial CUSUM, έτσι και στο διάγραμμα Bernoulli CUSUM γίνεται χρήση του $ANIS$ σύμφωνα με τη σχέση 3.16. Σημειώνεται ότι στο διάγραμμα Binomial CUSUM το πλήθος είναι ίσο με ένα ($n = 1$). Συνεπώς, οι έννοιες ARL και $ANIS$ στην προκειμένη περίπτωση ταυτίζονται (Chang and Gan, 2001).

$$ANIS_B = ARL_B. \quad (3.24)$$

Αντίστοιχα αποτελέσματα λαμβάνουμε για το Upper-Sided Bernoulli CUSUM και το Lower-Sided Bernoulli CUSUM.

$$ANIS_{BS} = ARL_{BS}. \quad (3.25)$$

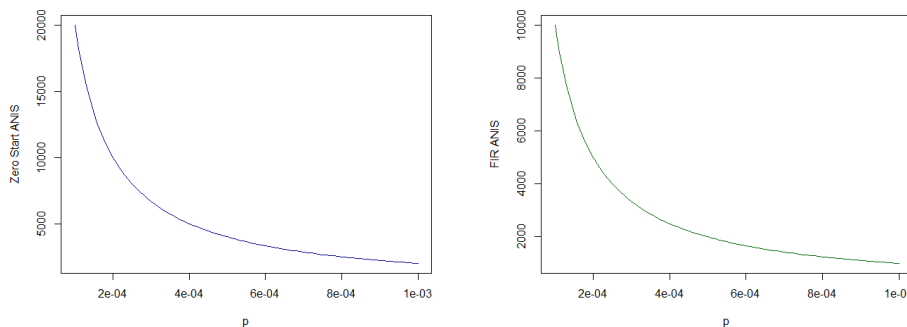
$$ANIS_{BT} = ARL_{BT}. \quad (3.26)$$

Για την ανίχνευση των μετατοπίσεων της μέσης τιμής p_0 , είτε προς τα επάνω, είτε προς τα κάτω, χρησιμοποιείται το δίπλευρο διάγραμμα Bernoulli CUSUM. Σε περίπτωση που είναι επιθυμητό να εξαχθεί το $ANIS$ για το Two-Sided Bernoulli CUSUM, χρησιμοποιούνται οι τύποι 3.25 και 3.26, σύμφωνα με την σχέση 3.27.

$$ANIS_{2B} \approx \frac{ANIS_{BS} \cdot ANIS_{BT}}{ANIS_{BS} + ANIS_{BT}}. \quad (3.27)$$

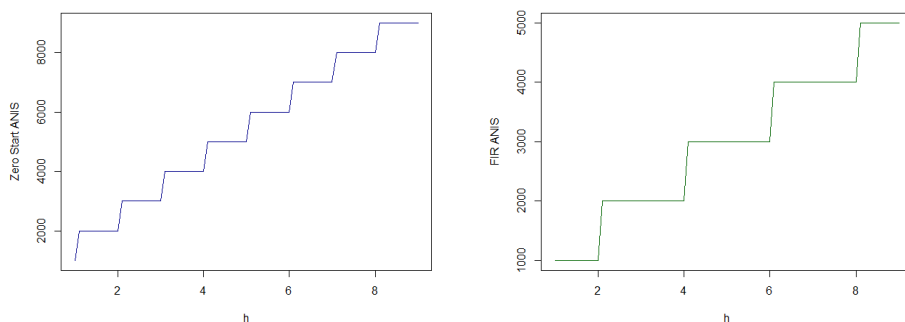
3.9 Διαγράμματα Ελέγχου Τύπου FIR CUSUM για δεδομένα που ακολουθούν τη κατανομή Bernoulli

Για να αυξηθεί η ευαισθησία του διαγράμματος της παραγωγικής διεργασίας, είναι δυνατό να γίνει χρήση της τεχνικής FIR, όπως στο διάγραμμα Binomial CUSUM. Δηλαδή είναι δυνατό να ορισθεί ως αρχική τιμή ένας αριθμός. Συνήθως, ο συγκεκριμένος αριθμός είναι το $\frac{h}{2}$. Στο Σχήμα 3.10 παρατίθενται ενδεικτικά διαγράμματα, που τα παρήγαμε για το Two-Sided Bernoulli CUSUM και FIR Two-Sided Bernoulli CUSUM ανάλογα με τις τιμές που λαμβάνει το p . Για τον υπολογισμό έχουν τεθεί ως ορίσματα το δείγμα ίσο με 1, η τιμή αναφοράς να ίση με 0.01 και το h ίσο με 1.2. Το συμπέρασμα που προκύπτει από την σύγκριση των δύο διαγραμμάτων είναι ανάλογο με αυτό του Binomial CUSUM (Σχήμα 3.4). Δηλαδή, το *ANIS* του Two-Sided Bernoulli CUSUM σε σχέση με του FIR Two-Sided Bernoulli CUSUM είναι σχεδόν το διπλάσιο. Συνακόλουθα, το διάγραμμα FIR CUSUM ανιχνεύει γρηγορότερα τις μετατοπίσεις της μέσης τιμής σε σχέση με το CUSUM. Η διαφορά όμως μειώνεται σταδιακά όταν το p αυξάνεται, ώσπου στο τέλος τείνει να θεωρηθεί αμελητέα (Chang and Gan, 2001).



Σχήμα 3.10: Ενδεικτικά διαγράμματα του *ANIS* σε σχέση με την τιμή του p

Ανάλογη συμπεριφορά του *ANIS* για διαφορετικές τιμές του h , παρατηρούμε και στα διαγράμματα του Σχήματος 3.11 που αναφέρονται στα διαγράμματα Two-Sided Bernoulli CUSUM και FIR Two-Sided Bernoulli CUSUM, σε σχέση με τα αντίστοιχα αποτελέσματα του Σχήματος 3.6 του Binomial CUSUM. Ορίζεται το p ίσο με 0.00001 και η τιμή αναφοράς ίση με 0.01. Το *ANIS* στο διάγραμμα Two-Sided Bernoulli CUSUM αυξάνεται απότομα όταν το h βρίσκεται σε οποιοδήποτε ακέραιο αριθμό και μένει σταθερό μέχρι τον επόμενο ακέραιο. Το *ANIS* στο διάγραμμα FIR Two-Sided Bernoulli CUSUM αυξάνεται απότομα όταν το h είναι άρτιος αριθμός και παραμένει σταθερό μέχρι το h να περάσει στον επόμενο άρτιο. Επιπλέον, παρατηρείται ότι, το *ANIS* του διαγράμματος CUSUM τείνει να διπλασιαστεί σε σχέση με το *ANIS* του FIR CUSUM κατά την αύξηση του h .



Σχήμα 3.11: Ενδεικτικά διαγράμματα του $ANIS$ σε σχέση με την τιμή του h

Στους Πίνακες 3.3 και 3.4 παρατηρούνται αριθμητικά παραδείγματα για τα διαγράμματα Upper Sided Bernoulli CUSUM και Lower Sided Bernoulli CUSUM (Chang and Gan, 2001). Στους Πίνακες γίνεται σύγκριση του $ANIS$ των διαγραμμάτων CUSUM με τα διαγράμματα FIR CUSUM. Τίθεται ως δεδομένο το $p_0 = 0.0001$ με διαφορετικά k και h .

Πίνακας 3.3: Ενδεικτικές τιμές του $ANIS$ για το διάγραμμα Upper Sided Bernoulli CUSUM

	$n = 1$	$n = 1$	$n = 1$	$n = 1$
	$k = \frac{1}{5493}$	$k = \frac{1}{5493}$	$k = \frac{1}{63}$	$k = \frac{1}{63}$
	$h = \frac{9738}{5493}$	$h = \frac{9738}{5493}$	$h = \frac{71}{63}$	$h = \frac{71}{63}$
p	$u = 0$	$u = \frac{h}{2}$	$u = 0$	$u = \frac{h}{2}$
0.00010	21473.55	19470.25	24807.58	24717.39
0.00015	18299.03	15822.53	24617.52	24539.73
0.00020	15037.83	12372.48	24363.86	24316.71
0.00025	12226.70	9678.88	23975.36	23873.56
0.00030	10109.62	7713.04	23595.14	23411.57
0.00035	8355.99	6275.41	23109.51	22846.13
0.00040	7038.69	5188.15	22507.04	22328.13
0.00045	6068.41	4508.97	21941.13	21716.45
0.00050	5296.42	3870.57	21444.95	21004.09
0.001	2288.81	1529.79	14322.04	13885.38
0.005	402.08	208.50	1048.315	943.12
0.1	20.11	10.96	20.80	11.67

Παρατηρείται ότι στον πρώτο Πίνακα το $ANIS$ του FIR CUSUM είναι σχεδόν το μισό σε σχέση με το $ANIS$ του CUSUM για μεγάλες τιμές του p . Συνεπώς, το FIR CUSUM είναι πιο αποτελεσματικό στην ανίχνευση των μετατοπίσεων της μέσης τιμής. Η διαφορά όμως είναι

Πίνακας 3.4: Ενδεικτικές τιμές του ANIS για το διάγραμμα Lower Side Bernoulli CUSUM

	$n = 1$	$n = 1$	$n = 1$	$n = 1$
	$k = \frac{1}{13863}$	$k = \frac{1}{13863}$	$k = \frac{1}{814}$	$k = \frac{1}{814}$
	$h = \frac{16260}{13863}$	$h = \frac{16260}{13863}$	$h = \frac{1052}{814}$	$h = \frac{1052}{814}$
p	$u = 0$	$u = \frac{h}{2}$	$u = 0$	$u = \frac{h}{2}$
0.000100	22515.85	22503.32	1106.44	1106.26
0.000090	22204.91	22179.64	1099.98	1099.35
0.000080	21725.31	21706.09	1097.79	1097.31
0.000070	21397.73	21365.65	1089.19	1088.37
0.000060	20852.26	20821.86	1085.56	1085.18
0.000050	20265.44	20233.67	1078.42	1078.22
0.000040	19653.56	19613.57	1074.45	1073.79
0.000030	18926.32	18917.00	1069.63	1068.41
0.000020	18113.46	18099.73	1063.61	1062.74
0.000010	17234.87	17228.23	1058.32	1057.72
0.000005	16763.24	17268.23	1054.86	1054.39
0.000001	16372.07	16363.45	1053.30	1053.27

πολύ μικρή καθώς μικραίνει το p . Στον δεύτερο Πίνακα παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα για το CUSUM και το FIR CUSUM είναι πάρα πολύ κοντά για όλες τις τιμές του p . Συνεπώς, τα διαγράμματα CUSUM και FIR CUSUM είναι το ίδιο αποτελεσματικά για την ανεύρεση ANIS.

Κεφάλαιο 4

Διαγράμματα Ελέγχου με Κινητούς Μέσους και Εκθετικά Βάρη

4.1 Εισαγωγή

Τα διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart δεν είναι αρκετά ευαίσθητα σε μικρές μεταβολές (*shifts*) του μέσου μίας διεργασίας. Όταν λαμβάνει χώρα μία τέτοια αλλαγή, απαιτούνται κατά μέσο όρο αρκετά σημεία στο διάγραμμα ελέγχου για τον εντοπισμό της. Τούτο οφείλεται στο γεγονός ότι κάθε σημείο του διαγράμματος αντιπροσωπεύει ένα μόνο δείγμα, το πλέον πρόσφατο, αγνοώντας τις τιμές των προηγούμενων δειγμάτων.

Τα διαγράμματα ελέγχου με κινητούς μέσους και εκθετικά βάρη (*Exponentially Weighted Moving Average Control Charts*) παρουσιάστηκαν για πρώτη φορά από τον Roberts το 1959 και μελετήθηκαν με λεπτομέρεια από τους Crowder το 1987 και 1989 και τους Lucas και Saccucci το 1990. Τα διαγράμματα τύπου EWMA δημιουργήθηκαν με σκοπό την παρακολούθηση της μέσης τιμής μίας παραγωγικής διεργασίας. Η χρήση τους είναι προτεινόμενη στην περίπτωση που είναι επιθυμητό να ανιχνεύσουμε μικρές μεταβολές (της τάξης του 0.5σ έως 2σ) του μέσου μίας διεργασίας. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με την εξάρτηση των σημείων στο διάγραμμα και από τις προγενέστερες παρατηρήσεις (Montgomery, 2013). Προκαταρκτικά σημειώνεται ότι, οι Πίνακες και τα Σχήματα που ακολουθούν, κατασκευάστηκαν προσομοιώνοντας δεδομένα στη γλώσσα προγραμματισμού R.

4.2 Διαγράμματα Ελέγχου Τύπου EWMA

Έστω μια εντός ελέγχου διεργασία παραγωγής προϊόντων. Στόχο αποτελεί η παρακολούθηση της τιμής X ενός ποιοτικού χαρακτηριστικού ενδιαφέροντος. Από τη διεργασία λαμβάνονται ανεξάρτητες μεμονωμένες παρατηρήσεις X_i με $i \geq 1$. Το ενδιαφέρον εστιάζεται στην ανίχνευ-

ση μετατοπίσεων του μέσου της διεργασίας της μορφής $\mu_1 = \mu_0 \pm \delta\sigma$. Στα διαγράμματα τύπου EWMA απεικονίζεται η ποσότητα

$$Z_i = \lambda X_i + (1 - \lambda)Z_{i-1}, \quad X_0 = \mu. \quad (4.1)$$

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, με X_i συμβολίζονται οι τιμές των μεμονωμένων παρατηρήσεων, που λαμβάνονται σε ξεχωριστές χρονικές στιγμές. Ο συμβολισμός i αντικαθίσταται με το t και τότε τα όρια ελέγχου ονομάζονται χρονομεταβλητά, αφού υπάρχει εξάρτηση από την τυπική απόκλιση σ_{Z_t} . Η τιμή μ δηλώνει τη μέση τιμή της κατανομής της X_i . Σε αντιστοιχία με τα διαγράμματα τύπου CUSUM, η τιμή της ποσότητας Z_0 ονομάζεται τιμή εκκίνησης ενώ η σταθερά λ , όπου $0 \leq \lambda \leq 1$, καθορίζει το βάρος που δίνουμε στην τιμή του πλέον πρόσφατου δείγματος. Χρησιμοποιώντας την σχέση 4.1 εξάγεται το παρακάτω αποτέλεσμα.

$$\begin{aligned} Z_i &= (1 - \lambda)Z_{i-1} + \lambda X_i \\ &= (1 - \lambda)[(1 - \lambda)Z_{i-2} + \lambda X_i] + \lambda X_i \\ &= (1 - \lambda)^2 Z_{i-2} + \lambda(1 - \lambda)^1 X_{i-1} + \lambda(1 - \lambda)^0 X_i \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \\ &= (1 - \lambda)^i Z_0 + \lambda(1 - \lambda)^{i-1} X_1 + \lambda(1 - \lambda)^{i-2} X_2 + \dots + \lambda(1 - \lambda) X_{i-1} + \lambda(1 - \lambda)^0 X_i \\ &= (1 - \lambda)^i Z_0 + \lambda \sum_{j=1}^i (1 - \lambda)^{i-j} X_j. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Για την κατασκευή ενός διαγράμματος τύπου EWMA, απαιτείται η εξαγωγή της μέσης τιμής μ_{Z_i} και της τυπικής απόκλισης σ_{Z_i} της ποσότητας Z_i , που απεικονίζεται στο διάγραμμα. Για την περίπτωση που οι αρχικές παρατηρήσεις X_i είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, τότε η εντός ελέγχου μέση τιμή μ_0 , μπορεί να εξαχθεί με την παρακάτω διαδικασία:

$$\begin{aligned} \mu_{Z_i} &= E \left((1 - \lambda)^i Z_0 + \lambda \sum_{j=1}^i (1 - \lambda)^{i-j} X_j \right) \\ &= (1 - \lambda)^i \mu_0 + \lambda \mu_0 \sum_{j=1}^i (1 - \lambda)^{i-j} \\ &= (1 - \lambda)^i \mu_0 + \mu_0 \left(1 - (1 - \lambda)^i \right) = \mu_0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Αντίστοιχα η διασπορά μπορεί να εξαχθεί από την σχέση:

$$\begin{aligned}
\sigma_{Z_i}^2 &= Var \left((1 - \lambda)^i Z_0 + \lambda \sum_{j=1}^i (1 - \lambda)^{i-j} X_j \right) \\
&= \lambda^2 \sigma^2 \sum_{j=1}^i \left[(1 - \lambda)^2 \right]^{i-j} \\
&= \sigma^2 \left(\frac{\lambda}{2 - \lambda} \right) \left[1 - (1 - \lambda)^{2i} \right].
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Σύμφωνα με τις σχέσεις 4.3 και 4.4, τα όρια ελέγχου με κεντρική γραμμή μ_0 , μέση τιμή μ_{Z_i} και διασπορά $\sigma_{Z_i}^2$ του διαγράμματος EWMA για την παρακολούθηση της μέσης τιμής μιας παραγωγικής διεργασίας παρέχονται από τους τύπους που περιέχονται στον Πίνακα 4.1.

Πίνακας 4.1: Όρια ελέγχου για το EWMA διάγραμμα

Όρια ελέγχου για το EWMA διάγραμμα
$UCL = \mu_0 + L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda} \left[1 - (1-\lambda)^{2i} \right]}$
$LCL = \mu_0 - L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda} \left[1 - (1-\lambda)^{2i} \right]}$

Για την κατασκευή ενός διαγράμματος τύπου EWMA απαιτείται ο προσδιορισμός των τιμών των παραμέτρων L και λ . Ο προσδιορισμός των παραμέτρων πραγματοποιείται συνήθως με στατιστικά κριτήρια. Η τιμή της παραμέτρου L καθορίζει την απόσταση των ορίων ελέγχου από την κεντρική γραμμή. Το λ είναι το εύρος των ορίων και συνήθως λαμβάνει την τιμή 3. Οι συνηθέστερες τιμές για το λ είναι το $\lambda = 0.05$, $\lambda = 0.10$ και $\lambda = 0.20$.

Για $\lambda=1$ το διάγραμμα ελέγχου EWMA ανάγεται στο αντίστοιχο διάγραμμα ελέγχου τύπου Shewhart. Επίσης παρατηρείται ότι τα όρια ελέγχου του παραπάνω διαγράμματος είναι μεταβλητά ($\lambda \neq 1$). Η ποσότητα $(1 - \lambda)^{2i}$ τείνει στο μηδέν καθώς το i αυξάνεται, οπότε σε σχετικά σύντομο χρονικό διάστημα τα όρια ελέγχου εξομαλύνονται και δίνονται από τις σχέσεις:

$$UCL = \mu_0 + L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda}} \tag{4.5}$$

$$LCL = \mu_0 - L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda}} \tag{4.6}$$

Σημαντικό είναι επίσης να αναφερθεί ότι τα διαγράμματα τύπου EWMA λόγω του ότι απεικονίζονται σε αυτά σημεία που αποτελούν σταθμισμένο μέσο όρο όλων των προηγούμενων παρατηρήσεων, είναι ιδιαίτερα ανθεκτικά στην παραβίαση της υπόθεσης της κανονικότητας

των αρχικών παρατηρήσεων. Έτσι λοιπόν αποτελούν τα πλέον κατάλληλα διαγράμματα για την παρακολούθηση διεργασιών μέσω μεμονωμένων παρατηρήσεων έναντι των αντίστοιχων διαγραμμάτων ελέγχου Shewhart.

4.3 Διαγράμματα Ελέγχου Τύπου EWMA για δεδομένα που ακολουθούν τη Διωνυμική κατανομή

Τα διαγράμματα EWMA με δεδομένα που ακολουθούν την Διωνυμική κατανομή, μελετήθηκαν από τους Gan (1990) και Yeh, Mcgrath, Sembower και Shen (2008). Έστω Y η τιμή υπό μελέτη του ποιοτικού χαρακτηριστικού, που ακολουθεί τη Διωνυμική κατανομή, σε μια εντός ελέγχου διεργασία. Ορίζεται ότι το Y_i , με $i \geq 1$, είναι ο συνολικός αριθμός των μη συμμορφωμένων δειγμάτων στο n -οστό δείγμα. Οι μεταβλητές $Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_n$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν τη Διωνυμική κατανομή, με μέση τιμή μ . Το ενδιαφέρον εστιάζεται στην ανίχνευση των μετατοπίσεων του μέσου της διεργασίας. Στο διάγραμμα EWMA που ακολουθεί τη Διωνυμική κατανομή, απεικονίζεται με την παρακάτω στατιστική συνάρτηση.

$$BN_i = wY_i + (1 - w)BN_{i-1}, \quad (4.7)$$

όπου ο αναδρομικός τύπος που προκύπτει είναι:

$$BN_i = \sum_{j=0}^{i-1} w(1-w)^j Y_{i-j} + (1-w)^i np_0. \quad (4.8)$$

Η παράμετρος w είναι το βάρος και ισχύει ότι $0 \leq w \leq 1$. Η συγκεκριμένη παράμετρος καθορίζει τον βαθμό κατά τον οποίο τα παλαιότερα δεδομένα εισάγονται στον υπολογισμό του στατιστικού της σχέσης 4.7. Ως γενικός κανόνας αναφέρεται η επιλογή μικρών τιμών του w , για την ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων. Όταν το w λαμβάνει μεγάλες τιμές, δηλαδή κοντά στην τιμή 1, τότε η τιμή του στατιστικού επηρεάζεται περισσότερο από τις τελευταίες παρατηρήσεις παρά από όλες τις προηγούμενες.

Ως τιμή εκκίνησης τίθεται η μέση τιμή $BN_0 = np_0$. Όταν η διεργασία είναι εντός ελέγχου, για οποιοδήποτε δεδομένο i , η μέση τιμή και η διασπορά εξάγονται από τις σχέσεις 4.3 και 4.4, ως ακολούθως:

$$E(BN_i) = np_0 \quad (4.9)$$

$$\text{Var}(BN_i) = np_0(1-p_0) \frac{w[1-(1-w)^{2i}]}{2-w}. \quad (4.10)$$

Από τους τύπους 4.7 και 4.8, συμπεραίνεται ότι, μια αύξηση της μορφής $p > p_0$, όπου $p_0 = \mu_0$ και $p = \mu$, πιθανόν να προκαλέσει αύξηση στην τιμή του Y_i και κατα συνέπεια και στην τιμή του BN_i . Συνακόλουθα, τα όρια ελέγχου του διαγράμματος Binomial EWMA είναι βασισμένα στο BN_i , για την έγκαιρη ανίχνευση των μεταβολών της μέσης τιμής. Σύμφωνα με την λογική των διαγραμμάτων Shewhart (μορφή: $\mu_0 \pm \delta\sigma$), τα όρια ελέγχου με $i \geq 1$ και κεντρική γραμμή np_0 ενός διαγράμματος Binomial EWMA για την παρακολούθηση της μέσης τιμής μιας παραγωγικής διεργασίας δίνονται από τους παρακάτω τύπους.

Πίνακας 4.2: Όρια ελέγχου για το Binomial EWMA διάγραμμα

Όρια ελέγχου για το Binomial EWMA διάγραμμα
$UCL = np_0 + U_{BN_w} \sqrt{\frac{np_0(1-p_0)w}{2-w} [1 - (1-w)^{2i}]}$
$LCL = np_0 - U_{BN_w} \sqrt{\frac{np_0(1-p_0)w}{2-w} [1 - (1-w)^{2i}]}$

Τα εξομαλυμένα όρια ελέγχου, δηλαδή όταν $i \rightarrow \infty$ και άρα $1 - (1-w)^{2i} \rightarrow 1$, παρέχονται στον παρακάτω Πίνακα.

Πίνακας 4.3: Εξομαλυμένα όρια ελέγχου για το Binomial EWMA διάγραμμα

Εξομαλυμένα όρια ελέγχου για το Binomial EWMA διάγραμμα
$UCL = np_0 + U_{BN_w} \sqrt{\frac{np_0(1-p_0)w}{2-w}}$
$LCL = np_0 - U_{BN_w} \sqrt{\frac{np_0(1-p_0)w}{2-w}}$

Όπου U_{BN_w} είναι ένας πολλαπλασιαστής, ο οποίος βασίζεται στην επιθυμητή εντός ελέγχου απόδοση και την τιμή του βάρους w . Ο προαναφερόμενος πολλαπλασιαστής τις περισσότερες φορές είναι ο ίδιος τόσο για το UCL όσο και για το LCL . Σε περίπτωση που επιλεγεί να είναι διαφορετικός, τότε προκύπτουν ασύμμετρα διαγράμματα ελέγχου. Είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι το στατιστικό της σχέσης 4.7 δεν μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές, λόγω της κατανομής που ακολουθούν τα δεδομένα. Συνεπώς, όταν το LCL προκύπτει αρνητικό, θα λάβει την τιμή μηδέν. Στη συγκεκριμένη περίπτωση δύναται να θεωρηθούν διαφορετικές τιμές των U_{BN_w} για το άνω και κάτω όριο ελέγχου.

4.4 Υπολογισμός Μέσου Μήκους Ροής *ARL* του διαγράμματος Binomial EWMA

Για τον υπολογισμό του Μέσου Μήκους Ροής δύναται να χρησιμοποιηθούν τρεις διαφορετικοί τρόποι. Ο Crowder το 1987 εισήγαγε τις ολοκληρωτικές εξισώσεις, με την προϋπόθεση ότι οι παρατηρήσεις Y_i είναι ανεξάρτητες ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(\cdot)$. Οι Lucas και Saccucci το 1998, υπολόγισαν το *ARL* με τη χρήση των Μαρκοβιανών αλυσίδων. Πλέον, η πιο διαδεδομένη μέθοδος είναι η χρήση των προσομοιώσεων Monte Carlo. Για τον υπολογισμό του *ARL* σε όλα τα παραδείγματα της παραγράφου αυτής αλλά και των προηγούμενων, έχει χρησιμοποιηθεί η τελευταία μέθοδος. Η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της μεθόδου MC δίνεται από τους τύπους 4.11 και 4.12.

$$ARL = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n RL_i \quad (4.11)$$

$$SDRL = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (RL_i - ARL)^2}. \quad (4.12)$$

όπου RL_i είναι ο αριθμός των παρατηρήσεων πριν βγει η παραγωγική διαδικασία εκτός ελέγχου.

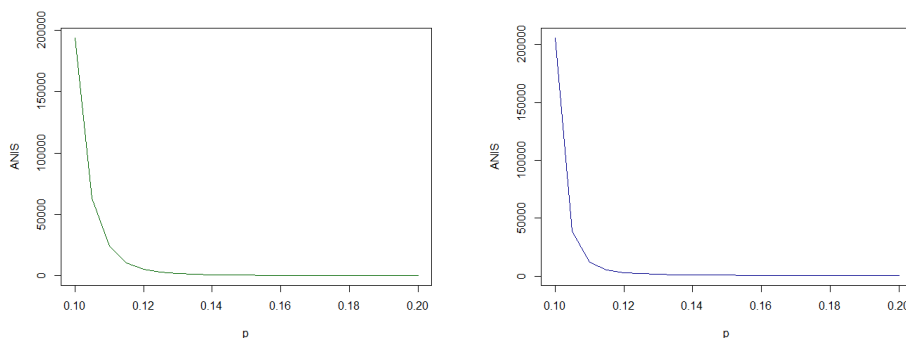
Εφαρμόζοντας τη μέθοδο MC στο διάγραμμα Binomial EWMA για κάθε $i \geq 1$ και υπολογίζοντας το BN_i , το εκτός ελέγχου σήμα λαμβάνεται, για το Upper Sided Binomial EWMA, όταν $BN_i \geq UCL$. Αντίστοιχα, για το Lower Sided Binomial EWMA, το εκτός ελέγχου σήμα λαμβάνεται, όταν $BN_i \leq LCL$. Όπως στο διάγραμμα Binomial CUSUM, έτσι και στο Binomial EWMA, η σύγκριση μεταξύ των διαγραμμάτων για την εύρεση του καταλληλότερου μοντέλου υλοποιείται με το *ANIS*. Η σχέση μεταξύ *ARL* και *ANIS* δίνεται από τον παρακάτω τύπο.

$$ANIS = ARL \cdot n. \quad (4.13)$$

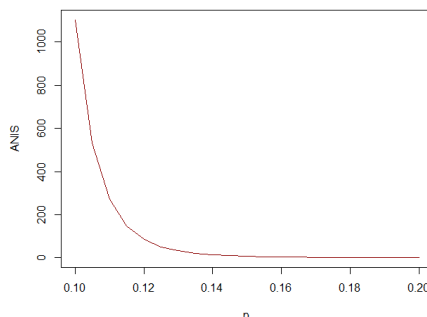
Το διάγραμμα Lower Sided Bernoulli EWMA, όπως και το διάγραμμα Two Sided Bernoulli EWMA, δεν είναι τόσο διαδεδομένο όσο το Upper Sided Bernoulli EWMA, διότι κυρίως ενδιαφέρει να παρατηρηθεί εάν η μέση τιμή μετακινήθηκε προς τα επάνω, αποτέλεσμα που παρέχεται από το τελευταίο διάγραμμα.

Στα διαγράμματα του Σχήματος 4.1, παρατηρούμε τον τρόπο με τον οποίο κινείται το εντός ελέγχου *ANIS* για το Upper Sided Bernoulli EWMA, σε σχέση με το αντίστοιχο διάγραμμα Shewhart (Σχήμα 4.2). Το πρώτο διάγραμμα του Σχήματος 4.1, λαμβάνει ως ορίσματα

$UCL = 22$ και $w = 0.51$. Για το δεύτερο έχει τεθεί $UCL = 18$ και $w = 0.165$. Στο διάγραμμα του Σχήματος 4.2, το οποίο ομοίως παρήγαμε, έχουμε θέσει το $w = 1$, για να πάρει τη μορφή του διαγράμματος Shewhart και το άνω όριο ελέγχου ίσο με 27. Ενώ και στα δύο σχήματα ισχύουν οι προϋποθέσεις, το πλήθος είναι ίσο με 150, το p είναι 0.1 και το κάτω όριο ελέγχου είναι μηδέν (Gan, 1990).



Σχήμα 4.1: Ενδεικτικά διαγράμματα του $ANIS$ σε σχέση με την τιμή του p



Σχήμα 4.2: Ενδεικτικές τιμές $ANIS$ του διαγράμματος Shewhart

Παρατηρείται ότι το διάγραμμα ελέγχου τύπου Shewhart είναι ειδική περίπτωση του διαγράμματος EWMA. Το αποτέλεσμα αυτό συνάγεται αν τεθεί το $w = 1$. Σημειώνεται ότι, δεν είναι εύκολη η επιλογή του άνω ορίου ελέγχου, λόγω της μη συμμετρικότητας της Διωνυμικής κατανομής. Τα χαρακτηριστικά των διαγραμμάτων του Σχήματος 4.1 τα έχουμε επιλέξει έτσι ώστε να δίνουν υψηλότερη πιθανότητα εντός ελέγχου από το διάγραμμα Shewhart. Γίνεται αντιληπτό ότι το διάγραμμα Shewhart είναι καλύτερο από το διάγραμμα EWMA, στην ανίχνευση μεγάλων μετατοπίσεων. Καθώς όμως οι μετατοπίσεις μικραίνουν, το EWMA θεωρείται καλύτερο στον εντοπισμό μη συμμορφωμένων προϊόντων, καθώς εντοπίζει το σήμα εκτός ελέγχου σχεδόν αμέσως.

Για το διάγραμμα Upper Sided Binomial EWMA, εξήχθησαν προσεγγιστικά τιμές για το U_{BN_w} μέσω προσομοιώσεων για συγκεκριμένες τιμές του w . Στη συνέχεια, παρατίθενται οι Πίνακες 4.4 και 4.5, οι οποίοι αντιστοιχούν σε δύο παραδείγματα με διαφορετικά δείγματα το καθένα (Yeh et al., 2008). Το πρώτο δείγμα είναι $n = 101$, ενώ το δεύτερο είναι $n = 759$. Παρατηρούμε ότι, για το πρώτο δείγμα το εύρος των τιμών του w κυμαίνεται από 0.001 έως 0.004. Όμοια, για το δεύτερο δείγμα η τιμή του w κυμαίνεται από 0.01 έως 0.04. Από τους Πίνακες, γίνεται αντιληπτό ότι ο συντελεστής U_{BN_w} αυξάνεται μονοτονικά καθώς μειώνεται το βάρος w .

Πίνακας 4.4: Πίνακας ενδεικτικών τιμών *ANIS* του Upper Sided Binomial EWMA για $n = 101$

	$w = 0.001$	$w = 0.002$	$w = 0.003$	$w = 0.004$
p	$U_{BN_w} = 0.573$	$U_{BN_w} = 0.911$	$U_{BN_w} = 1.147$	$U_{BN_w} = 1.335$
0.00010	69319.62	69951.18	67706.72	67901.01
0.00015	17277.97	19202.05	21218.26	22499.84
0.00020	8301.02	9806.79	10926.67	11709.85
0.00025	5487.53	6357.43	7021.72	7502.62
0.00030	4181.08	4708.16	5162.02	5469.96
0.00035	3382.51	3761.24	4077.97	4301.44
0.00040	2816.34	3083.64	3311.54	3467.67
0.00045	2454.82	2644.34	2827.44	2952.55
0.00050	2177.36	2316.48	2451.80	2561.35
0.001	1046.63	1056.26	1072.64	1089.50
0.005	249.90	249.90	249.90	249.90
0.1	101.00	101.00	101.00	101.00

Στους Πίνακες 4.4 και 4.5 η εντός ελέγχου πιθανότητα είναι $p_0 = 0.0001$ και το p συμβολίζει την εκτός ελέγχου πιθανότητα. Όταν μελετώνται τα διαγράμματα EWMA, ενδείκνυται η χρήση χρονικά μεταβαλλόμενων ορίων ελέγχου παρά εξομαλυμένων, διότι τα χρονικά μεταβαλλόμενα όρια δίνουν πιο ακριβέστερα αποτελέσματα. Συνακόλουθα, στους Πίνακες παρατίθενται μόνο τα αποτελέσματα των πραγματικών ορίων και όχι των εξομαλυμένων. Με αντίστοιχο τρόπο διαχειρίζονται τα διαγράμματα Lower Sided Binomial EWMA.

Τα προσομοιωμένα *ANIS* που φαίνονται στους Πίνακες 4.4 και 4.5 είναι τα αντίστοιχα με τα εντός ελέγχου *ANIS* του Binomial CUSUM (Πίνακας 3.1). Είναι προφανές ότι το διάγραμμα EWMA υπερέρχει του διαγράμματος CUSUM όσο αφορά τα εκτός ελέγχου *ANIS*. Όπως αναμένεται και στα δύο διαγράμματα, το *ANIS* είναι το ίδιο όταν η πιθανότητα p είναι 0.1. Συνεπώς, στην ίδια τη τιμή p τα δύο διαγράμματα ελέγχου έχουν την ίδια απόδοση. Δηλαδή

Πίνακας 4.5: Πίνακας ενδεικτικών τιμών ANIS του Upper Sided Binomial EWMA για $n = 759$

p	$w = 0.01$ $U_{BN_w} = 0.681$	$w = 0.02$ $U_{BN_w} = 1.037$	$w = 0.03$ $U_{BN_w} = 1.284$	$w = 0.04$ $U_{BN_w} = 1.460$
0.00010	70580.32	70422.45	68951.20	68787.03
0.00015	17952.40	20738.23	23191.40	25001.99
0.00020	9167.27	11154.11	12392.50	13736.46
0.00025	6300.61	7457.86	8249.27	9022.84
0.00030	4736.69	5444.38	5966.19	6751.84
0.00035	3853.37	4384.89	4749.14	5202.11
0.00040	3296.71	3620.35	3943.84	4167.24
0.00045	2876.38	3115.09	3350.45	3587.26
0.00050	2551.61	2760.71	2914.48	3207.84
0.001	1443.99	1445.36	1452.57	1520.13
0.005	774.71	775.69	777.59	774.18
0.1	759.00	759.00	759.00	759.00

είναι σε θέση να ανιχνεύσουν ότι η διεργασία έχει κινηθεί, εκτός ελέγχου ήδη από το πρώτη παρατήρηση. Επιπλέον, η απόδοση του διαγράμματος EWMA σε σχέση με το CUSUM βελτιώνεται, καθώς μειώνεται το w . Για παράδειγμα, στην περίπτωση που το p είναι ίσο με 0.0003, το w είναι 0.001 και το n είναι 101, το εκτός ελέγχου ANIS μπορεί να μειωθεί περαιτέρω, κατά περίπου 61% σε σχέση με το αντίστοιχο διάγραμμα CUSUM.

4.5 Διαγράμματα Ελέγχου Τύπου EWMA για δεδομένα που ακολουθούν την κατανομή Bernoulli

Τα διαγράμματα Bernoulli EWMA χαρακτηρίζονται ως διαγράμματα μεμονωμένων παρατηρήσεων, δηλαδή $n = 1$. Αυτό το χαρακτηριστικό τους επιτρέπει να παράγουν αποτελέσματα σε πραγματικό χρόνο, δηλαδή κατά τη διάρκεια της γραμμής παραγωγής. Συνεπώς, εισάγοντας συνεχώς παρατηρήσεις στο μοντέλο, καθίσταται εφικτή η άμεση αντίληψη περί του εάν η διεργασία είναι εντός ή εκτός ελέγχου (Spliid, 2010).

Θεωρείται ότι η τυχαία μεταβλητή Z είναι η τιμή του ποιοτικού χαρακτηριστικού που ζητείται να μελετηθεί, σε μια εντός ελέγχου διεργασία. Το συγκεκριμένο ποιοτικό χαρακτηριστικό έστω ότι ακολουθεί την κατανομή Bernoulli. Έστω επίσης ότι συμβολίζεται με Z_i , για $i \geq 1$, ο συνολικός αριθμός των μη συμμορφωμένων δειγμάτων. Έστω ακόμη $Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_n$ οι

ανεξάρτητες και ισόνομες παρατηρήσεις, που ακολουθούν την κατανομή Bernoulli, με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2 . Στόχος είναι η ανίχνευση των μετατοπίσεων του μέσου της διεργασίας. Στο διάγραμμα Bernoulli EWMA απεικονίζεται παρακάτω η στατιστική συνάρτηση.

$$B_i = wZ_i + (1 - w)B_{i-1}. \quad (4.14)$$

Από την 4.14 προκύπτει ο ακόλουθος αναδρομικός τύπος:

$$B_i = \sum_{j=0}^{i-1} w(1-w)^j Z_{i-j} + (1-w)^i p_0. \quad (4.15)$$

Το βάρος w λαμβάνει τιμές μεταξύ των μηδέν και ένα. Η μέση τιμή ή αλλιώς τιμή εκκίνησης είναι $B_0 = p_0$. Στην πραγματικότητα ισχύουν οι ίδιοι τύποι που αφορούν το διάγραμμα Binomial EWMA, με τη διαφορά ότι το πλήθος του δείγματος ισούται με ένα. Αυτό συμβαίνει διότι η κατανομή Bernoulli είναι μια ειδική περίπτωση της Διωνυμικής κατανομής. Στα επόμενα παρέχονται οι σχέσεις για την μέση τιμή και την διασπορά, όταν η διεργασία είναι εντός ελέγχου, για οποιοδήποτε δοσμένο $i \geq 1$. Για την εύρεση αυτών των μεγεθών χρησιμοποιείται η ίδια μέθοδο που χρησιμοποιήθηκε στις σχέσεις 4.3 και 4.4.

$$E(B_i) = p_0 \quad (4.16)$$

$$\text{Var}(B_i) = p_0(1-p_0) \frac{w[1 - (1-w)^{2i}]}{2-w}. \quad (4.17)$$

Από τις σχέσεις 4.14 και 4.15, καθίσταται δυνατό να εξαχθεί το συμπέρασμα ότι, μια αύξηση της μορφής $\mu > \mu_0$, όπου $\mu = p$ και $\mu_0 = p_0$, προκαλεί αύξηση στην τιμή του Z_i και κατα συνέπεια και στην τιμή του B_i . Σύμφωνα με την λογική των διαγραμμάτων Shewhart, τα όρια ελέγχου με $i \geq 1$ και κεντρική γραμμή p_0 ενός διαγράμματος Bernoulli EWMA για την παρακολούθηση της μέσης τιμής μιας παραγωγικής διεργασίας, δίνονται στους παρακάτω Πίνακες 4.6 και 4.7.

Πίνακας 4.6: Όρια ελέγχου για το Bernoulli EWMA διάγραμμα

Όρια ελέγχου για το Bernoulli EWMA διάγραμμα
$UCL = p_0 + U_{B_w} \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)w}{2-w} [1 - (1-w)^{2i}]}$
$LCL = p_0 - U_{B_w} \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)w}{2-w} [1 - (1-w)^{2i}]}$

Πίνακας 4.7: Εξομαλυμένα όρια ελέγχου για το Bernoulli EWMA διάγραμμα

Εξομαλυμένα όρια ελέγχου για το Bernoulli EWMA διάγραμμα
$UCL = p_0 + U_{B_w} \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)w}{2-w}}$ $LCL = p_0 - U_{B_w} \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)w}{2-w}}$

Το U_{B_w} είναι ο πολλαπλασιαστής στον οποίο βασίζεται η επιθυμητή εντός ελέγχου απόδοση. Όπως και στο Binomial EWMA, ο πολλαπλασιαστής τις περισσότερες φορές είναι ο ίδιος για το UCL και το LCL . Επίσης, όταν το LCL είναι αρνητικό, τότε η τιμή του λαμβάνεται ίση με το μηδέν, συνεπώς δύναται να χρησιμοποιηθούν τα ασύμμετρα διαγράμματα ελέγχου, προκειμένου να εξαχθούν καλύτερα αποτελέσματα.

4.6 Υπολογισμός Μέσου Μήκους Ροής *ARL* του διαγράμματος Bernoulli EWMA

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο Monte Carlo στο διάγραμμα Bernoulli EWMA, για κάθε $i \geq 1$ και υπολογίζοντας το B_i , το εκτός ελέγχου σήμα λαμβάνεται όταν $B_i \geq UCL$ για το διάγραμμα Upper Sided Bernoulli EWMA. Αντίστοιχα, για το Lower Sided Bernoulli EWMA το εκτός ελέγχου σήμα λαμβάνεται όταν $B_i \leq LCL$. Η σύγκριση μεταξύ των διαγραμμάτων για την εύρεση του καταλληλότερου μοντέλου γίνεται με τη χρήση *ANIS*. Ο τύπος για το *ANIS* είναι ο παρακάτω, μελετήθηκαν από τους (Gan, 1990).

$$ANIS = ARL. \quad (4.18)$$

Το διάγραμμα Lower Sided Bernoulli EWMA, όπως και το διάγραμμα Two Sided Bernoulli EWMA, δεν είναι τόσο διαδεδομένα όσο το Upper Sided Bernoulli EWMA, διότι κυρίως ενδιαφέρει να διαπιστωθεί εάν η μέση τιμή μετακινήθηκε προς τα επάνω, ενώ το συγκεκριμένο προφανώς παρακολουθεί τη μετακίνηση προς τα κάτω. Όπως και στο Binomial EWMA, έτσι και στο Bernoulli EWMA για την εύρεση του καταλληλότερου μοντέλου χρησιμοποιείται το *ANIS*, όπως φαίνεται στη σχέση 4.13. Στην προκειμένη περίπτωση το $n = 1$, συνεπώς το *ANIS* μεταπίπτει στο *ARL*.

Για το διάγραμμα Upper Sided Bernoulli EWMA εξήχθησαν προσεγγιστικά τιμές για το U_{B_w} μέσω προσομοιώσεων για συγκεκριμένες τιμές του w . Απαραίτητη προϋπόθεση για την

εύρεση αυτών των τιμών, είναι η ικανοποίηση της σχέσης 4.14. Παρακάτω παρατίθεται ο Πίνακας 4.8, στον οποίο δύναται να παρατηρηθεί πως διαμορφώνονται οι τιμές για το $ANIS$ ανάλογα με το U_{B_w} και το w (Yeh et al., 2008). Από τον Πίνακα, γίνεται αντιληπτό ότι το U_{B_w} αυξάνεται όταν το w μειώνεται.

Πίνακας 4.8: Πίνακας ενδεικτικών τιμών $ANIS$ του διαγράμματος Upper Sided Bernoulli EWMA

	$w = 0.00001$	$w = 0.00002$	$w = 0.0001$	$w = 0.0002$
p	$U_{B_w} = 0.581$	$U_{B_w} = 1.509$	$U_{B_w} = 2.075$	$U_{B_w} = 2.829$
0.00010	13240.19	17314.11	18053.56	21125.97
0.00015	9333.31	13391.62	14152.23	15710.01
0.00020	6815.60	10106.75	11024.77	12143.89
0.00025	5135.82	7819.31	8379.99	9544.08
0.00030	4027.77	5984.31	6519.40	7507.98
0.00035	3396.97	4766.82	5466.89	5963.33
0.00040	2795.96	3844.74	4200.35	4976.84
0.00045	2394.29	3147.21	3465.25	4137.67
0.00050	2133.14	2762.73	3016.08	3549.94
0.001	1014.29	1060.48	1167.54	1317.75
0.005	196.67	200.19	200.07	202.25
0.1	10.00	10.00	10.00	10.00

Ο Πίνακας 4.8 περιλαμβάνει ενδεικτικές τιμές του $ANIS$ με την εντός ελέγχου πιθανότητα ίση $p_0 = 0.0001$ και την εκτός ελέγχου πιθανότητα να συμβολίζεται με p . Χρησιμοποιούνται μόνο τα χρονικά μεταβαλλόμενα όρια, ώστε να εξαχθούν πιο ακριβή αποτελέσματα. Επιπλέον ορίζεται η τιμή εκκίνησης, δηλαδή το B_0 ίσο με τη μέση τιμή p_0 . Παρατηρούμε ότι καθώς αυξάνεται η μετατόπιση της μέσης τιμής, το διάγραμμα Bernoulli EWMA είναι σε θέση ανιχνεύει τα ελλατωματικά προϊόντα σχεδόν αμέσως.

Τα προσομοιωμένα $ANIS$ που φαίνονται στον Πίνακα 4.8 (για $w = 0.0002$ και $U_{B_w} = 2.829$) είναι τα αντίστοιχα με τα εντός ελέγχου $ANIS$ του Bernoulli CUSUM (για $k = \frac{1}{5493}$) όπως φαίνονται στον Πίνακα 3.3. Παρατηρείται ότι, το διάγραμμα EWMA έχει καλύτερη απόδοση σε σχέση με το αντίστοιχο διάγραμμα CUSUM. Επιπλέον, καθώς μειώνεται το w , η απόδοση του διαγράμματος EWMA βελτιώνεται. Για παράδειγμα, στην περίπτωση που το p είναι ίσο με 0.0003 και το w είναι 0.0002, το εκτός ελέγχου $ANIS$ μπορεί να μειωθεί περαιτέρω κατά περίπου 25% σε σχέση με το αντίστοιχο διάγραμμα CUSUM.

4.7 Διαγράμματα Ελέγχου Τύπου FIR EWMA για δεδομένα που ακολουθούν τις κατανομές Διωνυμική και Bernoulli

Για τον γρήγορο εντοπισμό των μη συμμορφωμένων προϊόντων από την πρώτη παρατήρηση των διαγραμμάτων EWMA, όπως και στα διαγράμματα CUSUM, χρησιμοποιείται η τεχνική FIR (*Fast Initial Response*). Οι δύο πιο γνωστές μέθοδοι είναι των Rhoads, Montgomery και Mastrangelo (1996) και του Steiner (1999).

Η μέθοδος που προτάθηκε από τον Steiner το 1999 είναι η πιο εύκολη από τις δύο, και κατέστη η πλέον διαδεδομένη. Η τεχνική FIR είναι ιδιαίτερα σημαντική στα διαγράμματα EWMA, ιδιαίτερα όταν το w είναι πολύ μικρό. Σε αυτήν την περίπτωση τα πραγματικά όρια ελέγχου, κυρίως στις πρώτες επαναλήψεις, τείνουν στην τιμή των εξομαλυμένων ορίων. Συνεπώς, τα διαγράμματα EWMA δεν είναι αρκετά ευαίσθητα στην αρχή της διεργασίας. Ο Steiner χρησιμοποίησε στενότερα όρια ελέγχου προσθέτοντας στα πραγματικά όρια τον συντελεστή FIR_{adj} (Steiner, 1999).

$$FIR_{adj} = 1 - (1 - f)^{1+\alpha(i-1)}, \quad (4.19)$$

όπου f και α είναι σταθερές. Η τιμή του α πρέπει να είναι τέτοια ώστε το FIR να έχει μικρή επιρροή από την 20^η περίπου παρατήρηση και έπειτα, δηλαδή $FIR_{adj} = 0.99$. Ο τύπος για τον προσδιορισμό του α φαίνεται στη σχέση 4.20.

$$\alpha = \frac{\frac{-2}{\log(1-f)} - 1}{19}. \quad (4.20)$$

Σε περίπτωση που τεθεί $f = 0.5$ τότε η τιμή του α είναι ίση με 0.3. Η επιλογή της τιμής αυτής είναι η πλέον κατάλληλη, διότι το αποτέλεσμα μιμείται το FIR CUSUM με αρχική τιμή $\frac{h}{2}$. Βάση της τεχνικής FIR, τα όρια ελέγχου για το Binomial EWMA και Bernoulli EWMA, με το CL να είναι np_0 και p_0 αντίστοιχα, φαίνεται στους παρακάτω Πίνακες 4.9 και 4.13.

Πίνακας 4.9: Όρια ελέγχου για το διάγραμμα FIR Binomial EWMA

Όρια ελέγχου για το FIR Binomial EWMA διάγραμμα
$UCL = np_0 + U_{BN_w} (1 - (1 - f)^{1+\alpha(i-1)}) \sqrt{\frac{np_0(1-p_0)w}{2-w} [1 - (1 - w)^{2i}]}$
$LCL = np_0 - U_{BN_w} (1 - (1 - f)^{1+\alpha(i-1)}) \sqrt{\frac{np_0(1-p_0)w}{2-w} [1 - (1 - w)^{2i}]}$

Πίνακας 4.10: Όρια ελέγχου για το διάγραμμα FIR Bernoulli EWMA

Όρια ελέγχου για το FIR Bernoulli EWMA διάγραμμα
$UCL = p_0 + U_{B_w} (1 - (1 - f)^{1+\alpha(i-1)}) \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)w}{2-w} [1 - (1 - w)^{2i}]}$
$LCL = p_0 - U_{B_w} (1 - (1 - f)^{1+\alpha(i-1)}) \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)w}{2-w} [1 - (1 - w)^{2i}]}$

Οι Rhoads et al. το 1996 πρότειναν μια άλλη διαδικασία, στην οποία ορίζεται η τιμή εκκίνησης, δηλαδή το BN_0 , να έχει διαφορετική τιμή από το np . Με αυτόν τον τρόπο είναι δυνατόν να αυξηθεί η ευαισθησία των διαγραμμάτων από την εκκίνησή τους. Οι τιμές του BN_0 για το Upper Sided Binomial CUSUM και το Lower Sided Binomial CUSUM προέρχονται από τις σχέσεις 4.21 και 4.22 (Rhoads et. al. (1996), Montgomery (2013), Knoth (2005)).

$$BN_0^+ = \frac{np_0 + UCL_1}{2} \quad (4.21)$$

$$BN_0^- = \frac{np_0 + LCL_1}{2}. \quad (4.22)$$

Οι αντίστοιχες σχέσεις για τα διαγράμματα Upper Sided Bernoulli CUSUM και Lower Sided Bernoulli CUSUM είναι:

$$B_0^+ = \frac{p_0 + UCL_1}{2} \quad (4.23)$$

$$B_0^- = \frac{p_0 + LCL_1}{2}. \quad (4.24)$$

Στα διαγράμματα CUSUM, η διαδικασία FIR εκτελείται με την εκκίνηση του διαγράμματος σε μη μηδενική αρχική τιμή. Ομοίως, η τεχνική FIR μπορεί επίσης να εφαρμοστεί σε ένα διάγραμμα EWMA, για να βελτιώσει την απόδοσή του, ξεκινώντας το διάγραμμα όχι από την κεντρική γραμμή, αλλά από κάποια μη μηδενική απόσταση από την κεντρική γραμμή, μεταξύ αυτής και των ορίων ελέγχου.

Όταν αναφερόμαστε στην κλασική μέθοδο EWMA, χρησιμοποιείται ο όρος EWMA. Όταν αναφερόμαστε στην μέθοδο που προτάθηκε από τον Steiner (1999), χρησιμοποιείται ο όρος FIR EWMA και όταν αναφερόμαστε τη μέθοδο που προτάθηκε από τους Rhoads et al. (1996) χρησιμοποιείται ο όρος 50% HS EWMA.

Ακολουθούν οι Πίνακες 4.11, 4.12 και 4.13, τους οποίους παρήγαμε προσομοίωση δεδομένων.

Πίνακας 4.11: Συγκριτικός Πίνακας ενδεικτικών τιμών *ANIS* του Upper Sided Binomial EWMA για $n = 101$ και $w = 0.002$ που υπολογίζονται με τις μεθόδους EWMA, FIR EWMA και 50% HS EWMA

p	EWMA	FIR EWMA	50% HS EWMA
U_{BN_w}	0.911	0.915	0.922
0.00010	69951.18	69957.85	69454.75
0.00015	19202.05	18888.31	18818.49
0.00020	9806.79	9732.40	9720.06
0.00025	6357.43	6331.05	6305.71
0.00030	4708.16	4644.65	4586.14
0.00035	3761.24	3750.56	3670.20
0.00040	3083.64	3043.12	3041.83
0.00045	2644.34	2627.27	2565.33
0.00050	2316.48	2300.34	2223.52
0.001	1056.26	1045.31	1045.05
0.005	249.90	249.04	249.02
0.1	101.00	101.00	101.00

Πίνακας 4.12: Συγκριτικός Πίνακας ενδεικτικών τιμών *ANIS* του Upper Sided FIR Binomial EWMA για $n = 759$ και $w = 0.02$ που υπολογίζονται με τις μεθόδους EWMA, FIR EWMA και 50% HS EWMA

p	EWMA	FIR EWMA	50% HS EWMA
U_{BN_w}	1.037	1.071	1.089
0.00010	70422.45	70396.87	70427.83
0.00015	20738.23	20609.05	20467.02
0.00020	11154.11	10799.96	10585.39
0.00025	7457.86	7160.78	6841.24
0.00030	5444.38	5122.41	5194.52
0.00035	4384.89	4134.42	4024.59
0.00040	3620.35	3487.07	3365.17
0.00045	3115.09	3037.44	2936.26
0.00050	2760.71	2640.86	2636.53
0.001	1445.36	1445.08	1438.83
0.005	775.83	775.15	775.03
0.1	759.00	759.00	759.00

Πίνακας 4.13: Συγκριτικός Πίνακας ενδεικτικών τιμών *ANIS* του Upper Sided FIR Bernoulli EWMA για $n = 1$ και $w = 0.0001$ που υπολογίζονται με τις μεθόδους EWMA, FIR EWMA και 50% HS EWMA

p	EWMA	FIR EWMA	50% HS EWMA
U_{B_w}	2.075	2.076	2.080
0.00010	18053.56	18069.11	18066.80
0.00015	14152.23	14055.71	14003.61
0.00020	11024.77	10706.87	10702.58
0.00025	8379.99	8371.19	8201.15
0.00030	6519.40	6435.59	6400.18
0.00035	5466.89	5337.49	5232.56
0.00040	4200.35	4184.96	4140.53
0.00045	3465.25	3451.62	3450.76
0.00050	3016.08	3015.25	2982.97
0.001	1167.54	1165.34	1149.39
0.005	200.07	198.73	198.10
0.1	10.00	10.00	10.00

Ο Πίνακας 4.11 είναι συγκριτικός Πίνακας ενδεικτικών τιμών *ANIS* του Upper Sided Binomial EWMA για $n = 101$ και $w = 0.002$ που υπολογίζονται με τις μεθόδους EWMA, FIR EWMA και 50% HS EWMA. Ο Πίνακας 4.12 είναι συγκριτικός Πίνακας ενδεικτικών τιμών *ANIS* του Upper Sided FIR Binomial EWMA για $n = 759$ και $w = 0.02$ που υπολογίζονται με τις μεθόδους EWMA, FIR EWMA και 50% HS EWMA. Ο Πίνακας 4.13 είναι συγκριτικός Πίνακας ενδεικτικών τιμών *ANIS* του Upper Sided FIR Bernoulli EWMA για $n = 1$ και $w = 0.0001$ που υπολογίζονται με τις μεθόδους EWMA, FIR EWMA και 50% HS EWMA. Και στους τρεις Πίνακες έχει ορισθεί $p_0 = 0.0001$.

Οι Πίνακες 4.11, 4.12 και 4.13, παρουσιάζουν τη σύγκριση των ενδεικτικών τιμών του *ANIS*, τόσο για τις δύο προαναφερθείσες μεθόδους, όσο και για το κλασικό EWMA. Παρατηρείται ότι η μέθοδος 50% HS EWMA υπερέρχει έναντι των υπολοίπων παρουσιαζόμενων μεθόδων στην εκτίμηση του *ANIS*. Η αναφερθείσα υπεροχή, συνίσταται στο γεγονός ότι η μέθοδος 50% HS EWMA εξάγει μικρότερο *ANIS*. Συνεπώς δύναται να ανιχνευτούν αμεσότερα οι μετατοπίσεις του μέσου εκτός διαγράμματος. Η αναφερόμενη υπεροχή είναι προφανής για πολύ μικρές τιμές του p .

Κεφάλαιο 5

Εφαρμογές των Διαγραμμάτων Shewhart, CUSUM και EWMA με πρωτογενή πειραματικά δεδομένα που ακολουθούν τη Διωνυμική κατανομή

5.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα εφαρμόσουμε διαγράμματα ελέγχου που παρουσιάστηκαν στα κεφάλαια 2, 4 και 5 με πρωτογενή πειραματικά δεδομένα δειγμάτων, που προέρχονται από τις δημοσιεύσεις των:

1. C. P. Quesenberry (1991)
2. F. F. Gan (1990)

Τα δεδομένα ακολουθούν Διωνυμική κατανομή. Τα υπόψιν δεδομένα παρέχονται αντιστοίχως σε εκάστη εφαρμογή που ακολουθεί. Δεν κατέστη δυνατόν να ευρεθούν πρωτογενή πειραματικά δεδομένα από τη βιβλιογραφία που ακολουθούν κατανομή Bernoulli, συνεπώς περιοριζόμαστε στην προσομοίωση δεδομένων για τα διαγράμματα ελέγχου που παρουσιάσαμε για την συγκεκριμένη κατανομή στα κεφάλαια 2,3 και 4. Προκαταρκτικά σημειώνεται ότι, παρήγαμε τα Σχήματα και τους Πίνακες που ακολουθούν σε γλώσσα προγραμματισμού R.

5.2 1^η Εφαρμογή

Στην πρώτη εφαρμογή ως πηγή προέλευσης των δεδομένων χρησιμοποιήθηκαν τα δεδομένα του άρθρου του Charles P. Quesenberry (1991). Έστω ότι είναι ο αριθμός των ελαττωματικών προϊόντων που παράγονται σε μια βιομηχανική μονάδα. Τα δεδομένα αντιγράφονται στον παρακάτω Πίνακα. Είναι δεδομένο το πλήθος της κάθε παρτίδας, το οποίο είναι ίσο με 63.

Πίνακας 5.1: Πίνακας τιμών της εφαρμογής 1

i	x_i	i	x_i	i	x_i	i	x_i	i	x_i	i	x_i
1	10	11	10	21	9	31	8	41	10	51	9
2	4	12	5	22	5	32	8	42	11	52	7
3	3	13	6	23	3	33	11	43	12	53	11
4	6	14	5	24	6	34	13	44	8	54	11
5	8	15	5	25	5	35	6	45	15	55	9
6	5	16	9	26	4	36	5	46	10	56	14
7	5	17	5	27	6	37	9	47	8	57	6
8	6	18	6	28	4	38	12	48	10	58	10
9	8	19	10	29	6	39	13	49	8	59	7
10	10	20	5	30	6	40	11	50	7	60	7

5.2.1 Διαγράμματα τύπου Shewhart

Για να εκτιμηθεί το p διάγραμμα, απαιτείται ο μέσος των μη συμμορφωμένων προϊόντων ανα παρτίδα, δηλαδή η εντός ελέγχου μέση τιμή της διεργασίας (Φάση I), χρησιμοποιούνται οι 30 πρώτες παρατηρήσεις.

$$\bar{p} = \frac{10 + 4 + 3 + \dots + 4 + 6 + 6}{30 \cdot 63} = \frac{185}{1890} = 0.0978836 \approx 0.1. \quad (5.1)$$

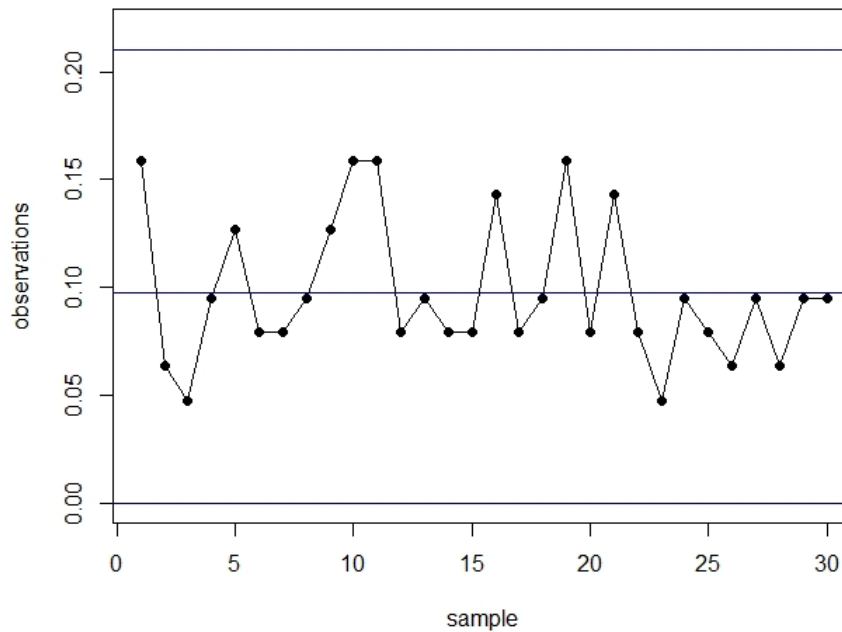
Τα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή του διαγράμματος p είναι:

$$UCL = \bar{p} + 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} = 0.1 + 3\sqrt{\frac{0.1(1-0.1)}{63}} = 0.2133893$$

$$CL = \bar{p} = 0.1$$

$$LCL = \bar{p} - 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} = 0.1 - 3\sqrt{\frac{0.1(1-0.1)}{63}} = -0.01338934.$$

Στο κεφάλαιο 1 έχει αναφερθεί ότι σε περίπτωση που το LCL είναι αρνητικό τότε λαμβάνει την τιμή 0. Στην προκειμένη περίπτωση εξάγεται ότι το $LCL = -0.01338934$, άρα συνεπώς τίθεται $LCL = 0$. Χρησιμοποιώντας τα υπόψιν δεδομένα, παρήγαμε το Σχήμα 5.1, το οποίο αναπαριστά τη Φάση I του διαγράμματος p .



Σχήμα 5.1: Φάση I του διαγράμματος p

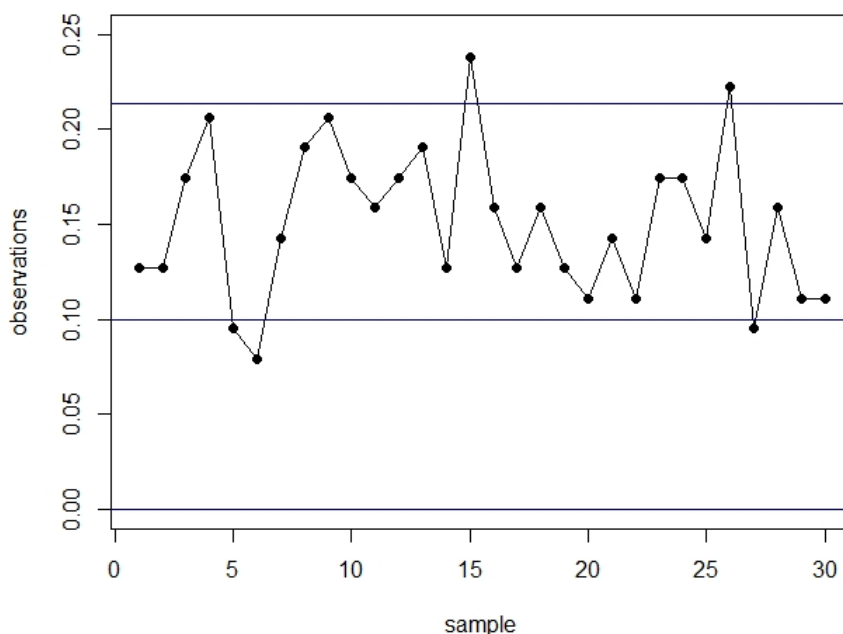
Παρατηρείται ότι κανένα σημείο δεν είναι εκτός των ορίων ελέγχου. Σε περίπτωση που υπήρχαν σημεία εκτός των ορίων ελέγχου, θα έπρεπε να τα αφαιρεθούν και στη συνέχεια να επανυπολογισθεί η τιμή \bar{p} ώστε να κατασκευαστούν τα νέα όρια ελέγχου. Εφόσον όλα τα σημεία είναι εντός ελέγχου, εξάγεται η ικανότητα του διαγράμματος p να ανιχνεύει μετατοπίσεις του μέσου αριθμού ελαττωματικών προϊόντων, υπολογίζοντας το ARL_0 , αφού πρώτα υπολογιστεί η τιμή α , ως ακολούθως.

$$\begin{aligned}
 \alpha &= P \left[\frac{X}{n} \notin [LCL, UCL] \mid X \sim B(n, p) \right] \\
 &= P \left[\frac{X}{63} \notin [0, 0.2133893] \mid X \sim B(63, 0.1) \right] \\
 &= P [X \notin [0, 13.44353] \mid X \sim B(63, 0.1)] \\
 &= 0.003287047
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

$$ARL_0 = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{0.003287047} = 304.2244. \quad (5.3)$$

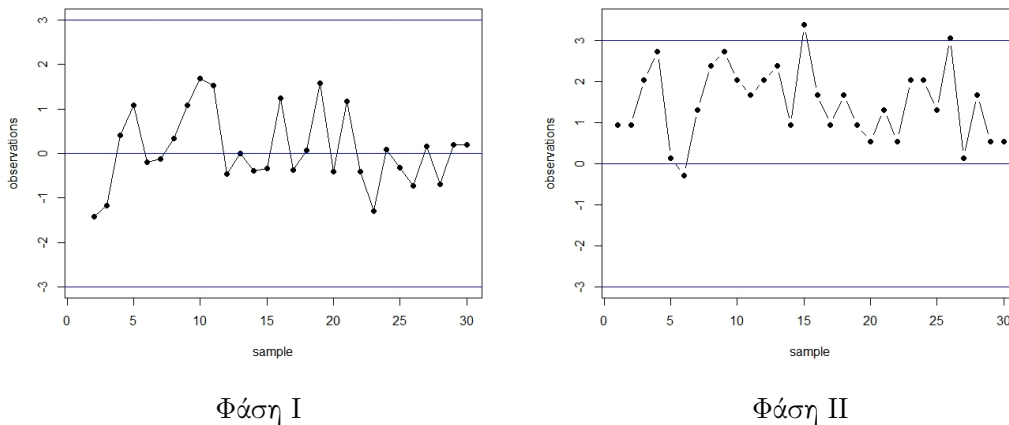
Σύμφωνα με την τιμή του ARL_0 , όταν ο αριθμός των ελαττωματικών προϊόντων είναι υπό στατιστικό έλεγχο, ένα σημείο του διαγράμματος θα βρίσκεται εκτός του άνω ορίου ελέγχου κάθε 304-305 παραγόμενα προϊόντα, επομένως το διάγραμμα p θεωρείται αρκετά ικανοποιητικό.

Στη συνέχεια, σχεδιάζεται το διάγραμμα p της Φάσης II, για τις υπόλοιπες 30 παρτίδες (Σχήμα 5.2). Ως όρια ελέγχου χρησιμοποιούνται τα ίδια όρια με αυτά της Φάση I. Το μέσο ποσοστό ελαττωματικών προϊόντων ανα παρτίδα για τις υπόλοιπες 30 παρτίδες είναι $0.1513228 \approx 0.15$. Παρατηρείται ότι δύο σημεία είναι εκτός των ορίων ελέγχου.



Σχήμα 5.2: Φάση II του διαγράμματος p

Ακολουθώντας τα βήματα που αναφέρθηκαν στην παράγραφο 2.3, σχεδιάζονται τα Q διαγράμματα ελέγχου (Σχήμα 5.3). Για τη Φάση I χρησιμοποιείται ο μετασχηματισμός της υπεργεωμετρικής κατανομής (σχέσεις 2.25 και 2.26) και για τη Φάση II ο μετασχηματισμός που προέρχεται από τις σχέσεις 2.18 και 2.19. Υπενθυμίζεται ότι τα όρια ελέγχου είναι ± 3 αντίστοιχα.



Σχήμα 5.3: Φάση I και Φάση II του διαγράμματος Q

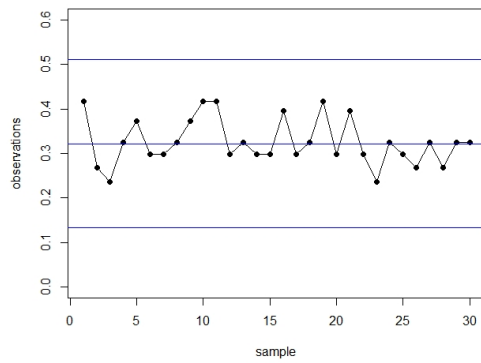
Από τα διαγράμματα του Σχήματος 5.3, παρατηρείται ότι το διάγραμμα Q έχει την ίδια συμπεριφορά σε σχέση με το διάγραμμα p . Πιο συγκεκριμένα, το διάγραμμα που αφορά την Φάση I δεν εμφάνισε κάποιο σημείο εκτός ελέγχου, όπως ακριβώς και το διάγραμμα p . Το διάγραμμα της Φάσης II εμφάνισε ως εκτός ελέγχου τις παρτίδες 15 και 26. Τα σημεία αυτά είναι τα ίδια που φαίνονται ως εκτός ελέγχου και από το διάγραμμα p . Λαμβάνοντας υπόψη τους Πίνακες των ελαχίστων δειγμάτων (Πίνακες 2.3 και 2.6), συνάγεται ότι τα διαγράμματα Q είναι προτιμότερα σε σχέση με τα p , γιατί το ελάχιστο απαιτούμενο δείγμα είναι μικρότερο και συνεπώς η μετατόπιση εκτός διαγράμματος ανιχνεύεται αμεσότερα.

Στη συνέχεια, υλοποιείται το διάγραμμα arcsin βάσει του μετασχηματισμού που πρότειναν οι Johnson και Kotz (1969). Τα όρια ελέγχου που προκύπτουν είναι:

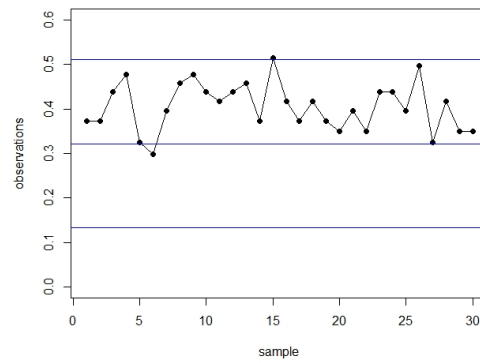
$$UCL = \sin^{-1}(\sqrt{p}) + 3\frac{1}{\sqrt{4n}} = \sin^{-1}(\sqrt{0.1}) + 3\frac{1}{\sqrt{4 \cdot 63}} = 0.5107328 \quad (5.4)$$

$$LCL = \sin^{-1}(\sqrt{p}) - 3\frac{1}{\sqrt{4n}} = \sin^{-1}(\sqrt{0.1}) - 3\frac{1}{\sqrt{4 \cdot 63}} = 0.1327683. \quad (5.5)$$

Από τα διαγράμματα του Σχήματος 5.4, παρατηρείται ότι στη Φάση I κανένα σημείο δεν ξεπερνάει τα όρια ελέγχου. Στο διάγραμμα που φαίνεται η Φάση II παρατηρείται μόνο ένα σημείο να ξεπερνάει τα όρια ελέγχου, σε αντίθεση με τα δύο προηγούμενα διαγράμματα.



Φάση I



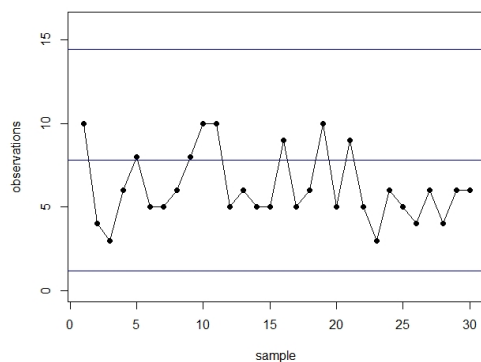
Φάση II

Σχήμα 5.4: Φάση I και Φάση II του διαγράμματος arcsin

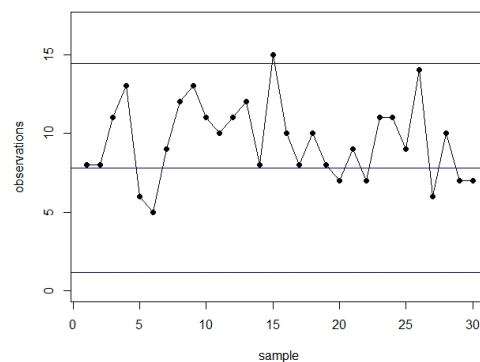
Στα διαγράμματα του Σχήματος 5.5, παρατηρούνται οι Φάσεις I και II του διαγράμματος np που πρότειναν οι Ryan και Schwertman (1997). Τα όρια ελέγχου που προκύπτουν είναι:

$$UCL = 0.6195 + 1.0052np + 2.983\sqrt{np} = 0.6195 + 1.0052 \cdot 63 \cdot 0.1 + 2.983\sqrt{63 \cdot 0.1} = 14.5102 \quad (5.6)$$

$$LCL = 2.9529 + 1.01956np - 3.2729\sqrt{np} = 2.9529 + 1.01956 \cdot 63 \cdot 0.1 - 3.2729\sqrt{63 \cdot 0.1} \approx 0.2231. \quad (5.7)$$



Φάση I



Φάση II

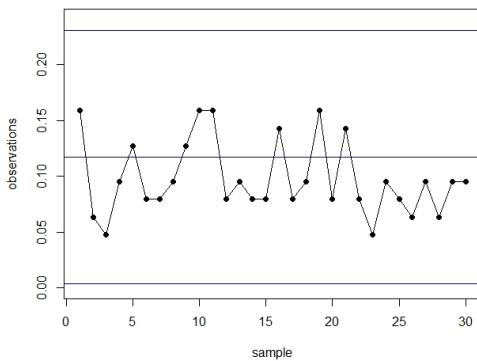
Σχήμα 5.5: Φάση I και Φάση II του διαγράμματος Ryan

Παρατηρείται ότι τα διαγράμματα αυτά έχουν αντίστοιχη συμπεριφορά με τα διαγράμματα που χρησιμοποιούν τους μετασχηματισμούς arcsin. Δηλαδή στη Φάση I δεν υπάρχει κάποιο σημείο εκτός των ορίων, ενώ στη Φάση II μόνο το 15^ο δείγμα ξεπερνά τα όρια ελέγχου.

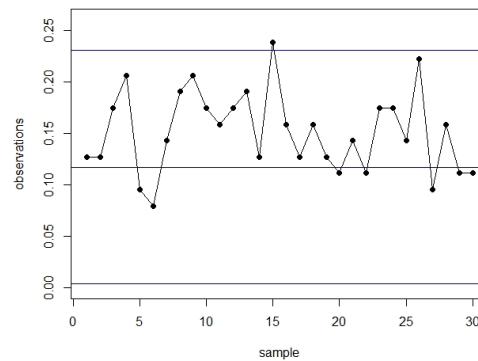
Επιπλέον, στα Σχήματα 5.6 και 5.7, παρατίθενται τα διαγράμματα p με έναν και δύο όρους διόρθωσης Cornish και Fisher των Φάσεων I και II. Τα όρια ελέγχου του διαγράμματος p με έναν όρο διόρθωσης είναι:

$$UCL = p + 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} + 4\frac{(1-2p)}{3n} = 0.1 + 3\sqrt{\frac{0.1(1-0.1)}{63}} + 4\frac{(1-2 \cdot 0.1)}{3 \cdot 63} = 0.2303206 \quad (5.8)$$

$$LCL = p - 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} + 4\frac{(1-2p)}{3n} = 0.1 - 3\sqrt{\frac{0.1(1-0.1)}{63}} + 4\frac{(1-2 \cdot 0.1)}{3 \cdot 63} = 0.003541875. \quad (5.9)$$



Φάση I



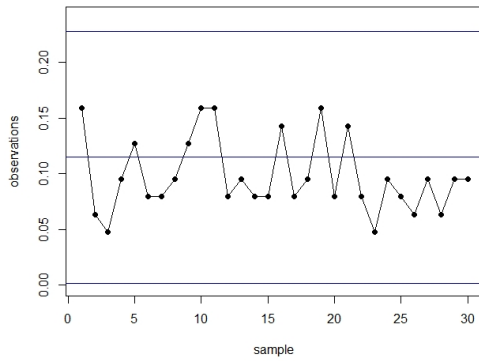
Φάση II

Σχήμα 5.6: Φάση I και Φάση II με έναν όρο διόρθωσης C-F

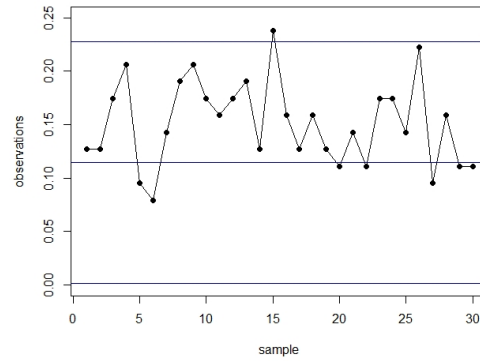
Τα όρια ελέγχου του διαγράμματος p με δύο όρους διόρθωσης C-F είναι:

$$UCL = p + 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} + 4\frac{(1-2p)}{3n} - \frac{p(1-p)+2}{6n^2[p(1-p)/n]^{1/2}} = 0.2279986 \quad (5.10)$$

$$LCL = p - 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} + 4\frac{(1-2p)}{3n} - \frac{p(1-p)+2}{6n^2[p(1-p)/n]^{1/2}} = 0.0012198. \quad (5.11)$$



Φάση I



Φάση II

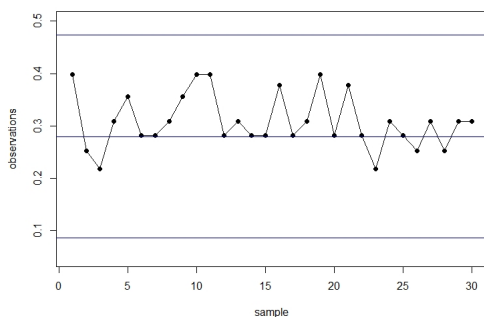
Σχήμα 5.7: Φάση I και Φάση II με δύο όρους διόρθωσης C-F

Στα δύο Σχήματα παρατηρείται ότι στη Φάση I κανένα σημείο δεν είναι εκτός ελέγχου. Ενώ στη Φάση II μόνο ένα σημείο βρίσκεται εκτός ελέγχου.

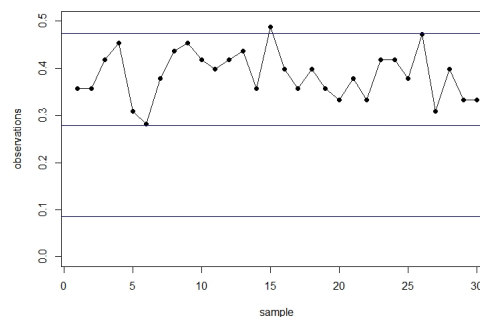
Τέλος, κατασκευάζονται τα διάγραμμα ISRT (Σχήμα 5.8) για τις Φάσεις I και II. Τα όρια ελέγχου που προκύπτουν είναι:

$$UCL_p = \sqrt{p} + \frac{3}{2} \sqrt{\frac{1-p}{n}} - \frac{1}{2} \frac{1-p}{n\sqrt{p}} = 0.4729244 \quad (5.12)$$

$$LCL_p = \sqrt{p} - \frac{3}{2} \sqrt{\frac{1-p}{n}} - \frac{9}{8} \frac{1-p}{n\sqrt{p}} = 0.08612116. \quad (5.13)$$



Φάση I



Φάση II

Σχήμα 5.8: Φάση I και Φάση II του διαγράμματος ISRT

Από τα διαγράμματα ISRT, συνάγεται ότι στη τη Φάση I κανένα σημείο δεν ξεπερνάει τα όρια ελέγχου και στη Φάση II μόνο η 15^η παρατήρηση ξεπερνάει τα όρια.

Από τα παραπάνω διαγράμματα συμπεραίνεται ότι τα διαγράμματα p και Q είναι πιο αποτελεσματικά σε σχέση με τα υπόλοιπα, διότι εντόπισαν δύο σημεία στη Φάση II να κινούνται εκτός ορίων ελέγχου, ενώ τα υπόλοιπα διαγράμματα εντόπισαν μόνο ένα σημείο. Με δεδομένο ότι για το p χρησιμοποιείται υψηλή τιμή, η ευαισθησία των διαγραμμάτων p και Q είναι σαφώς μεγαλύτερη σε σχέση με τα υπόλοιπα διαγράμματα τύπου Shewhart.

5.2.2 Διάγραμμα CUSUM

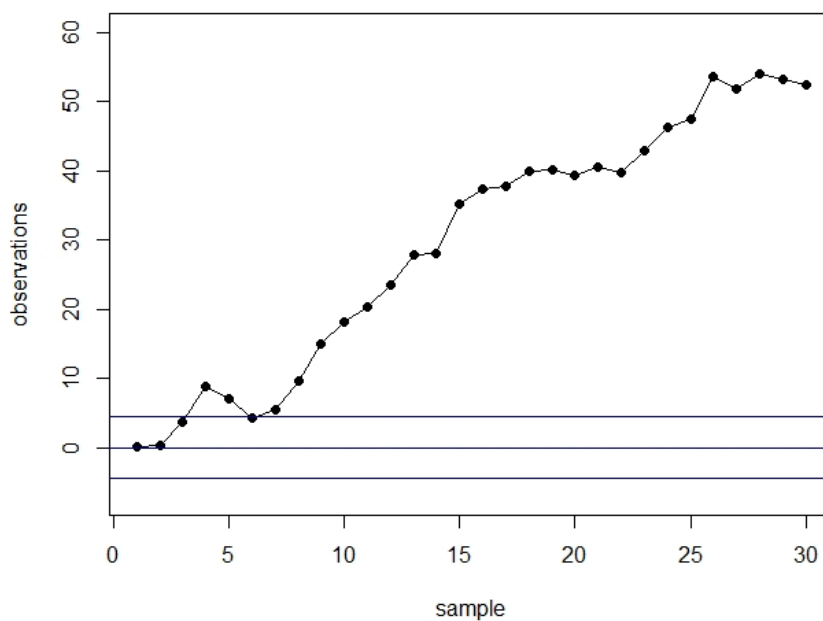
Στη συνέχεια σχεδιάζονται τα διαγράμματα CUSUM και FIR CUSUM για τα προαναφερθέντα δεδομένα. Για την κατασκευή των διαγραμμάτων αυτών είναι απαραίτητη η γνώση των τιμών p των Φάσεων I και II. Έχει ήδη αναφερθεί ότι ο μέσος όρος των μη συμμορφωμένων προϊόντων ανα παρτίδα των 30 πρώτων παρατηρήσεων είναι 0.1. Αντίστοιχα, ο μέσος όρος των μη συμμορφωμένων προϊόντων των υπόλοιπων παρτίδων είναι 0.15. Υπενθυμίζεται ότι το πλήθος των προϊόντων ανα παρτίδα είναι 63. Βάσει των παραπάνω δεδομένων, καθίσταται δυνατό να εξαχθεί η τιμή αναφοράς k (σχέση 3.15).

$$r_1 = -\log\left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right) = -\log\left(\frac{1-0.15}{1-0.1}\right) = 0.05715841 \quad (5.14)$$

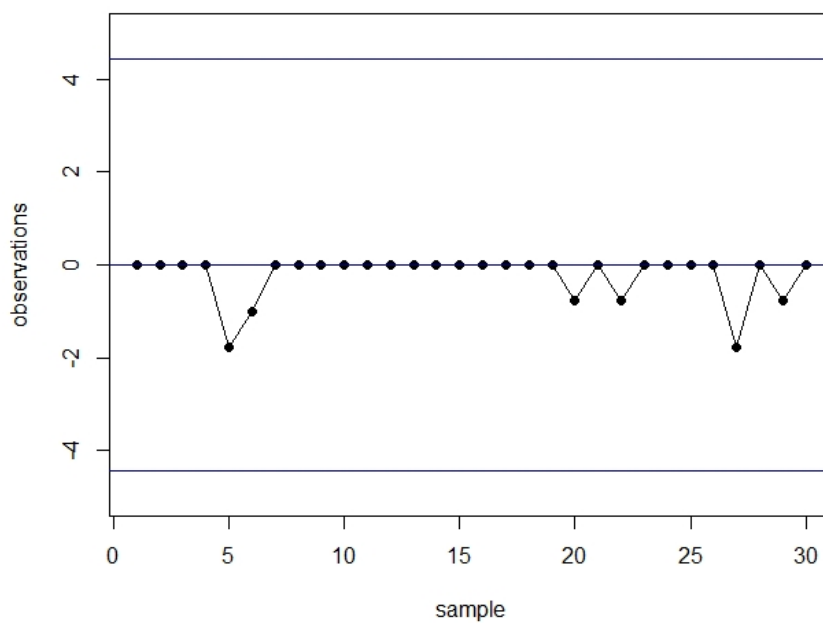
$$r_2 = \log\left(\frac{p_1(1-p_0)}{p_0(1-p_1)}\right) = \log\left(\frac{0.15(1-0.1)}{0.1(1-0.15)}\right) = 0.4626235 \quad (5.15)$$

$$k = \frac{r_1}{r_2} = 0.1235528. \quad (5.16)$$

Βάσει των προσομοιώσεων Monte Carlo που έχουν πραγματοποιηθεί, προκύπτει ότι η καλύτερη τιμή του ορίου ελέγχου ώστε να επιτευχθεί ο στόχος 304.2244 με $k = 0.1235528$ είναι ή $h = 4.44444$, όπου το ARL είναι ίσο με 289.39, ή $h = 4.5556$, όπου το ARL θα είναι 309.96. Επιλέγεται να χρησιμοποιηθεί το μικρότερο όριο ελέγχου, δηλαδή το 4.44444. Τα διαγράμματα CUSUM με τα δεδομένα που χρησιμοποιούνται, αποτυπώνονται στα Σχήματα 5.9 και 5.10.



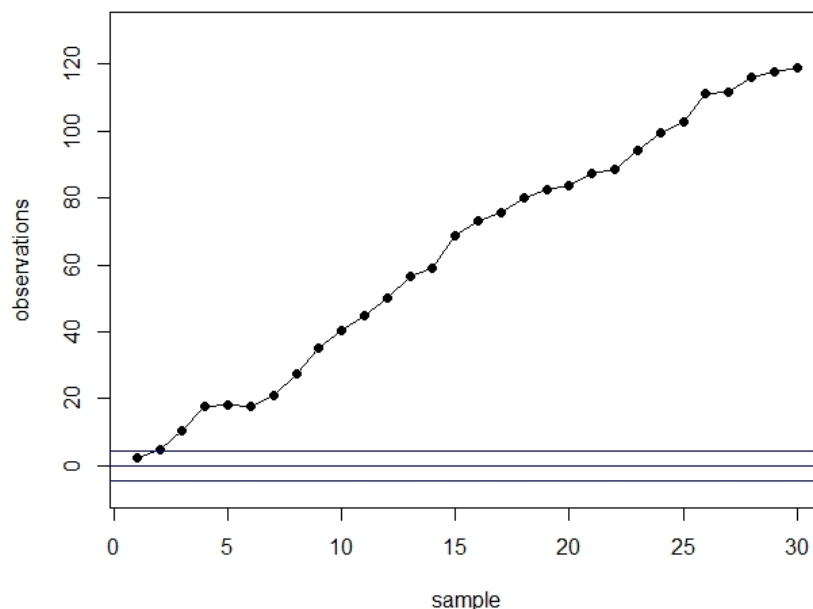
Σχήμα 5.9: Διάγραμμα Upper Sided CUSUM



Σχήμα 5.10: Διάγραμμα Lower Sided CUSUM

Παρατηρείται ότι το διάγραμμα Upper Sided Binomial CUSUM (Σχήμα 5.9) κινήθηκε εκτός των ορίων ελέγχου στην 4^η παρατήρηση, στη συνέχεια επανήλθε εντός ορίων στην 6^η παρατήρηση, στη συνέχεια κινήθηκε και πάλι εκτός των ορίων στη 7^η παρατήρηση και παρέμεινε εκτός μέχρι το τέλος της διεργασίας. Είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι στο διάγραμμα εμφανίζεται μια αυξητική τάση ήδη από την 3^η παρατήρηση. Επιπλέον, το διάγραμμα Lower Sided Binomial CUSUM (Σχήμα 5.10) δεν έχει κινηθεί εκτός ορίων για καμία παρατήρηση. Συνεπώς, υφίσταται ισχυρή ένδειξη ότι ο μέσος έχει μετατοπιστεί προς τα επάνω και η διαδικασία δεν βρίσκεται πλέον υπο στατιστικό έλεγχο. Το διάγραμμα Upper Sided CUSUM "αντιλήφθηκε" άμεσα την εκτός ελέγχου κατάσταση ήδη από την 4^η παρατήρηση. Σε αντίθεση με τα διαγράμματα Shewhart που την "αντιλήφθηκαν" στην 15^η παρατήρηση.

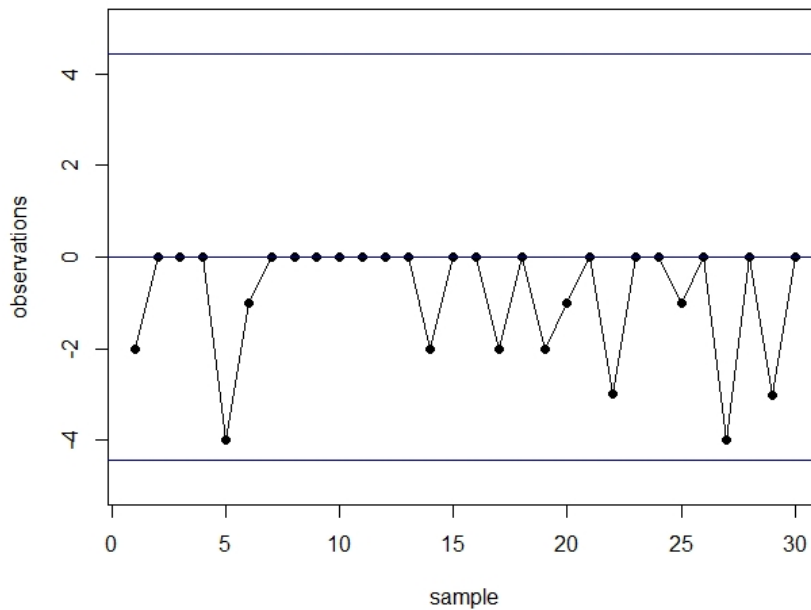
Στη συνέχεια κατασκευάζονται τα αντίστοιχα διαγράμματα FIR CUSUM.



Σχήμα 5.11: Διάγραμμα Upper Sided FIR CUSUM

Παρατηρείται ότι τα διαγράμματα Upper Sided FIR CUSUM (Σχήμα 5.11) και Lower Sided FIR CUSUM (Σχήμα 5.12) είναι πιο αποτελεσματικά στην ανίχνευση της μετατόπισης. Το μεν διάγραμμα Upper Sided FIR CUSUM εξήγαγε ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου ήδη από την 2^η παρατήρηση. Στο δε διάγραμμα Lower Sided FIR CUSUM, παρατηρείται ότι τα "σημεία" είναι πλησιάζουν περισσότερο το κάτω όριο ελέγχου που έχει ορισθεί. Παρά ταύτα, κανένα σημείο δεν κινείται εκτός των ορίων ελέγχου. Σε συνδυασμό με τα διαγράμματα Upper Sided FIR CUSUM και Lower Sided FIR CUSUM, συνάγεται το συμπέρασμα ότι η μετατόπιση του μέσου προς τα επάνω είναι ισχυρότερη από την αντίστοιχη μετατόπιση προς

τα κάτω. Συνακόλουθα, τα διαγράμματα FIR CUSUM αποδεικνύονται προτιμητέα σε σχέση με τα διαγράμματα CUSUM, αφού τα FIR CUSUM διακρίνονται για μεγαλύτερη ευαισθησία στον εντοπισμό των εκτός ελέγχου καταστάσεων, σε σχέση με τα όλα τα προαναφερθέντα διαγράμματα ελέγχου.



Σχήμα 5.12: Διάγραμμα Lower Sided FIR CUSUM

5.2.3 Διάγραμμα EWMA

Στην παρούσα παράγραφο σχεδιάζεται η κατασκευή του διαγράμματος EWMA για τιμές $w = 0.01$, $w = 0.1$ και $w = 0.3$. Με αυτόν τον τρόπο καθίσταται εφικτή η ανίχνευση της μετατόπισης του μέσου. Με τη χρήση προσομοιώσεων, προκύπτει ο παρακάτω Πίνακας, στον οποίο παρουσιάζονται οι τιμές των παραμέτρων w και U_{BN_w} ώστε τα διαγράμματα να έχουν ARL_0 πλησίον του 304.2244, που είναι η τιμή του ARL το οποίο βρήκαμε από το διάγραμμα p για τα δεδομένα που εξετάζουμε (ήτοι τα δεδομένα του Quesenberry, 1991). Επιπλέον, υπολογίζεται το ARL_1 αυτών των διαγραμμάτων για τη ζητούμενη μετατόπιση.

Χρησιμοποιείται ο τύπος $BN_i = wY_i + (1 - w)BN_{i-1}$, για $i = 1, 2, 3, \dots, 30$ (της Φάσης II) και $w = 0.01$. Στη συνέχεια, τίθεται ως Y_i ο αριθμός των μη συμμορφωμένων προϊόντων που υπάρχουν στην i παρτίδα. Με αυτόν τον τρόπο προκύπτουν οι τιμές του στατιστικού BN_i .

Πίνακας 5.2: Επιλογή των παραμέτρων w και U_{BN_w} για $ARL_0 \approx 304.2244$

w	0.01	0.1	0.3
U_{BN_w}	1.421	2.417	2.738
ARL_0	306.9251	309.5655	304.7247
ARL_1	2.2678	4.0639	4.8369

Για παράδειγμα, όταν το i είναι ίσο με 1, έχουμε:

$$\begin{aligned}
 BN_1 &= wY_1 + (1-w)BN_0 \\
 &= wY_1 + (1-w)np \\
 &= 0.01 \cdot 8 + (1-0.01)6.3 \\
 &= 6.317.
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

Τα αντίστοιχα όρια ελέγχου είναι:

$$\begin{aligned}
 UCL &= np_0 - U_{BN_w} \sqrt{\frac{np_0(1-p_0)w}{2-w} [1 - (1-w)^{2i}]} \\
 &= 63 \cdot 0.1 + 1.421 \sqrt{\frac{63 \cdot 0.1(1-0.1)0.01}{2-0.01} [1 - (1-0.01)^2]} \\
 &= 6.333837
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

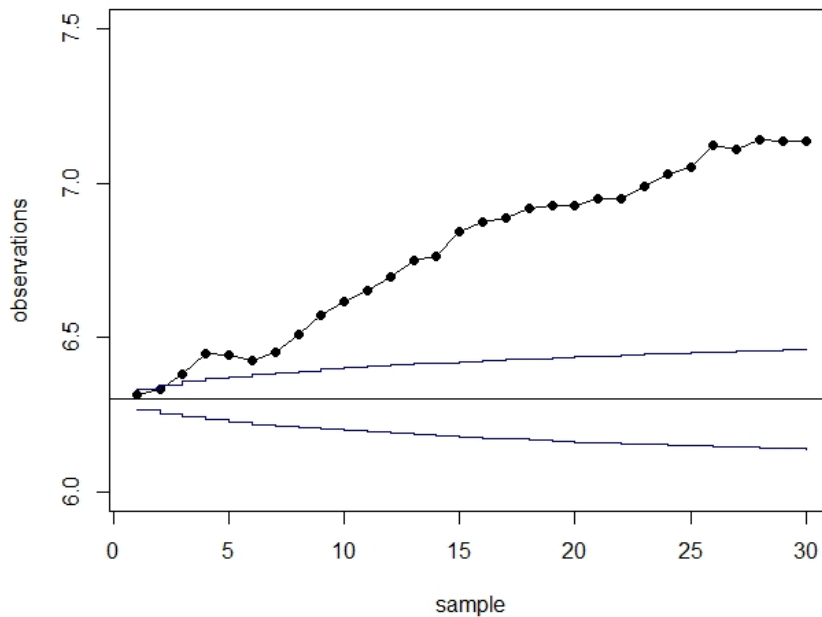
$$\begin{aligned}
 LCL &= np_0 + U_{BN_w} \sqrt{\frac{np_0(1-p_0)w}{2-w} [1 - (1-w)^{2i}]} \\
 &= 63 \cdot 0.1 - 1.421 \sqrt{\frac{63 \cdot 0.1(1-0.1)0.01}{2-0.01} [1 - (1-0.01)^2]} \\
 &= 6.266163.
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

Τα εξομαλυμένα όρια ελέγχου είναι:

$$\begin{aligned}
 UCL &= np_0 + U_{BN_w} \sqrt{\frac{np_0(1-p_0)w}{2-w}} \\
 &= 63 \cdot 0.1 + 1.421 \sqrt{\frac{63 \cdot 0.1(1-0.1)0.01}{2-0.01}} = 6.539861
 \end{aligned} \tag{5.20}$$

$$\begin{aligned}
 LCL &= np_0 - U_{BN_w} \sqrt{\frac{np_0(1-p_0)w}{2-w}} \\
 &= 63 \cdot 0.1 - 1.421 \sqrt{\frac{63 \cdot 0.1(1-0.1)0.01}{2-0.01}} = 6.060139.
 \end{aligned} \tag{5.21}$$

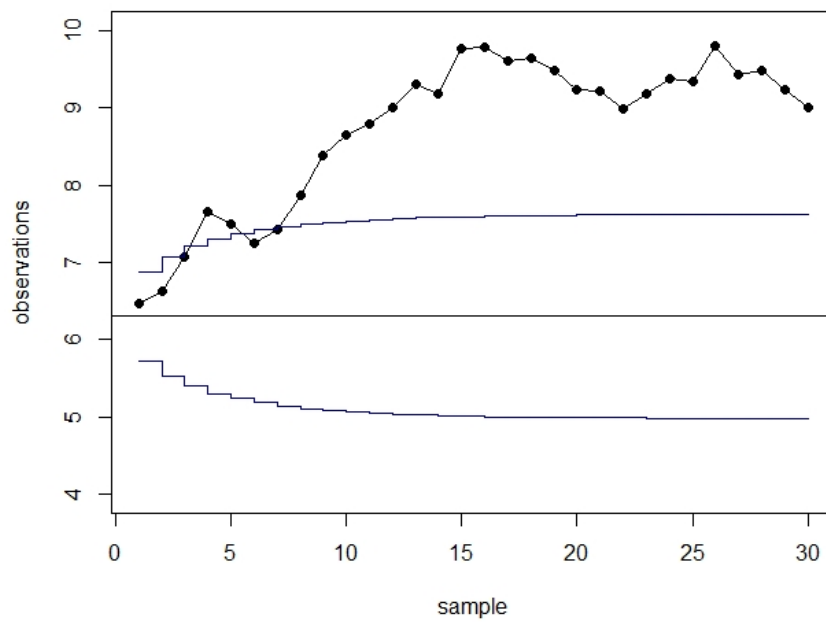
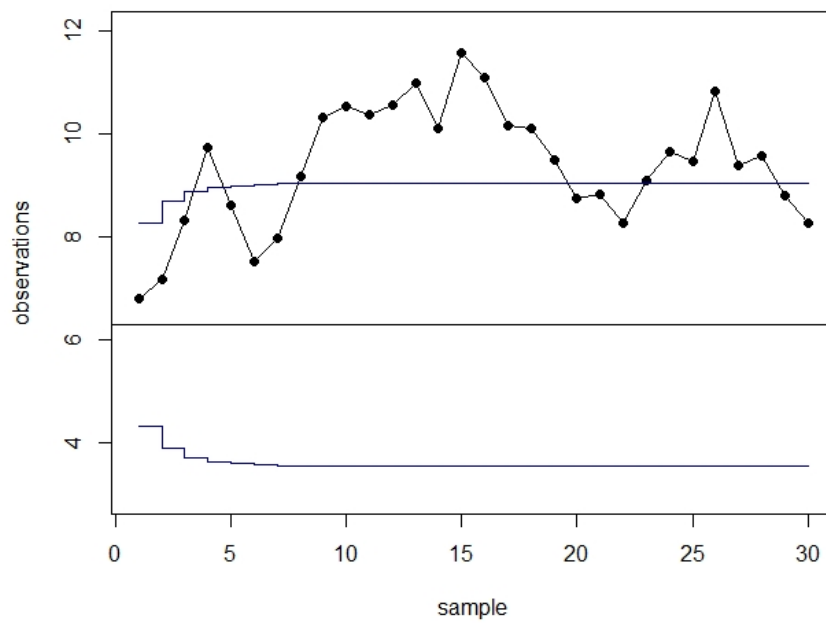
Στο Σχήμα 5.13 απεικονίζεται το διάγραμμα Binomial EWMA με $w = 0.01$.



Σχήμα 5.13: Διάγραμμα EWMA για $w = 0.01$

Από το Σχήμα 5.13 διαπιστώνεται ότι το διάγραμμα EWMA εξάγει ένδειξη ότι η διαδικασία είναι εκτός ελέγχου από την 3^η παρατήρηση. Συνεπώς το διάγραμμα EWMA είναι ικανότερο να ανιχνεύσει την μετατόπιση του μέσου σε σχέση με τα διαγράμματα Shewhart. Υπενθυμίζουμε ότι, τα διαγράμματα Shewhart ανίχνευσαν την μετατόπιση στην 15^η παρατήρηση της Φάσης II, δηλαδή αργότερα από τα διαγράμματα EWMA. Στην περίπτωση που συγκρίνεται το διάγραμμα EWMA με το διάγραμμα CUSUM, γίνεται φανερό ότι, το διάγραμμα EWMA είναι πιο αποτελεσματικό από το αντίστοιχο διάγραμμα CUSUM. Αυτό συμβαίνει διότι κατασκευάσαμε το διάγραμμα CUSUM έτσι ώστε να ανιχνεύει τη συγκεκριμένη μετατόπιση. Το διάγραμμα EWMA ανίχνευσε την ίδια μετατόπιση χωρίς να χρειάζεται να είναι γνωστή η μετατόπιση που προκαλούν οι παρατηρήσεις της Φάσης II.

Με την ίδια διαδικασία κατασκευάζουμε τα διαγράμματα EWMA, για $w = 0.1$ και $w = 0.3$ (Σχήματα 5.14 και 5.15). Παρατηρούμε ότι τα διαγράμματα για $w = 0.1$ (Σχήμα 5.14) και $w = 0.3$ (Σχήμα 5.15) έχουν διαφορετική συμπεριφορά με το διάγραμμα για $w = 0.01$. Στο πρώτο (Σχήμα 5.13) θεωρείται η 3^η παρατήρηση εκτός ελέγχου, ενώ η διαδικασία που περιγράφεται στο Σχήμα 5.14 κινείται εκτός ελέγχου από τη 4^η παρατήρηση, στη συνέχεια επανέρχεται εντός ελέγχου στην 6^η παρατήρηση και από την 8^η παρατήρηση και μετά παραμένει εκτός ελέγχου.

Σχήμα 5.14: Διάγραμμα EWMA για $w = 0.1$ Σχήμα 5.15: Διάγραμμα EWMA για $w = 0.3$

Η διαδικασία που περιγράφεται στο Σχήμα 5.15, κινείται εκτός ελέγχου από τη 4^η παρατήρηση, στη συνέχεια επανέρχεται εντός ελέγχου στην 5^η παρατήρηση, από την 8^η παρατήρηση μέχρι την 19^η παραμένει εκτός ελέγχου, επανέρχεται εντός από την 20^η παρατήρηση μέχρι την 22^η, από την 23^η μέχρι την 28^η παρατήρηση κινείται εκτός της διαδικασίας και τέλος από την 29^η παρατήρηση και μετά παραμένει εντός. Συνεπώς στο Σχήμα 5.15 παρατηρείται ότι η διαδικασία από την 4^η παρατήρηση κινείται εναλλάξ εντός και εκτός ελέγχου. Εξάγεται το συμπέρασμα ότι, όσο μειώνεται το βάρος w , τόσο αυξάνεται η ευαισθησία του διαγράμματος. Βάσει αυτού είναι προτιμότερη η μικρότερη τιμή του βάρους ($w = 0.01$).

Το συγκεκριμένο αποτέλεσμα προκύπτει -και με αναφορά στον Πίνακα 5.2-, εξαιτίας της τιμής του ARL_1 . Συνάγεται δηλαδή ότι, οι θεωρητικές εκτιμήσεις που εξήχθησαν από την προσομοίωση δεδομένων, ώστε τα διαγράμματα να εμφανίζουν $ARL_0 \approx 304.2244$, συμπίπτουν με τις πειραματικές τιμές που εξάγονται από τα δεδομένα του άρθρου που εξετάζουμε, γεγονός που υποδηλώνει την ορθότητα των υπολογισμών μας.

Τέλος, κατασκευάζουμε τα διαγράμματα FIR EWMA για $w = 0.01$, $w = 0.1$ και $w = 0.3$ με τη μέθοδο που πρότειναν οι Rhoads et al. (1996). Έχουμε ήδη αποδείξει ότι οι δύο μέθοδοι FIR είναι ισάξιοι, συνεπώς αρκεί να πραγματοποιήσουμε τους υπολογισμούς για μία από τις δύο μεθόδους. Όπως και στο διάγραμμα EWMA, με τη χρήση προσομοιώσεων, προκύπτει ο παρακάτω Πίνακας, στον οποίο παρουσιάζονται οι τιμές των παραμέτρων w και U_{BN_w} ώστε τα διαγράμματα να έχουν ARL_0 κοντά στο 304.2244.

Πίνακας 5.3: Επιλογή των παραμέτρων w και U_{BN_w} για $ARL_0 \approx 304.2244$

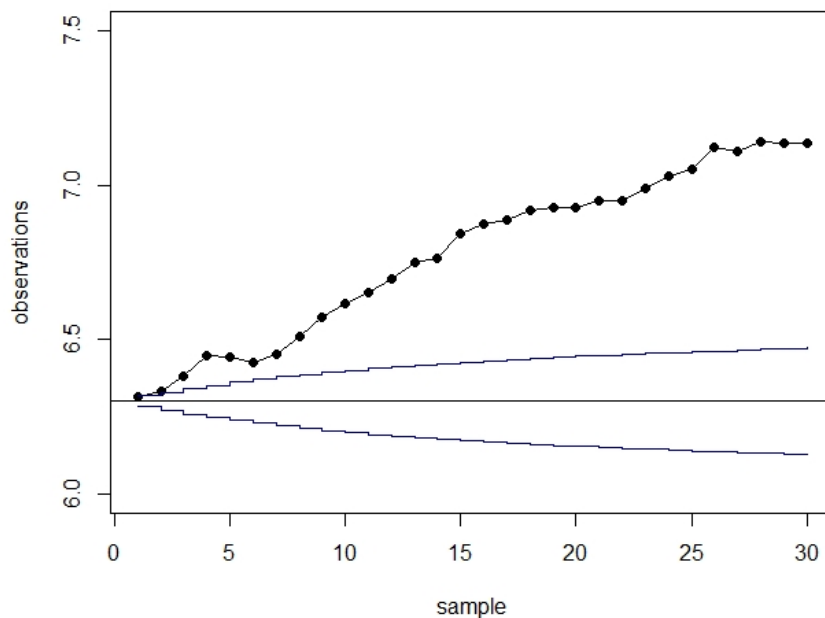
w	0.01	0.1	0.3
U_{BN_w}	1.522	2.489	2.859
ARL_0	303.8929	302.9503	304.5312
ARL_1	1.7869	2.4812	2.6938

Τα όρια ελέγχου που προκύπτουν στην περίπτωση που θέσουμε $f = 0.5$ και $\alpha = 0.3$ για $w = 0.01$ και $U_{BN_w} = 1.522$, είναι τα ακόλουθα.

$$\begin{aligned}
 UCL &= np_0 + U_{BN_w} \left(1 - (1 - f)^{1+\alpha(i-1)}\right) \sqrt{\frac{np_0(1-p_0)w}{2-w} \left[1 - (1-w)^{2i}\right]} \\
 &= 63 \cdot 0.1 + 1.522 \left(1 - (1 - 0.5)^{1+0.3(i-1)}\right) \sqrt{\frac{63 \cdot 0.1(1-p_0)0.01}{2-0.01} \left[1 - (1-0.01)^{2i}\right]} \\
 &= 6.318121
 \end{aligned}
 \tag{5.22}$$

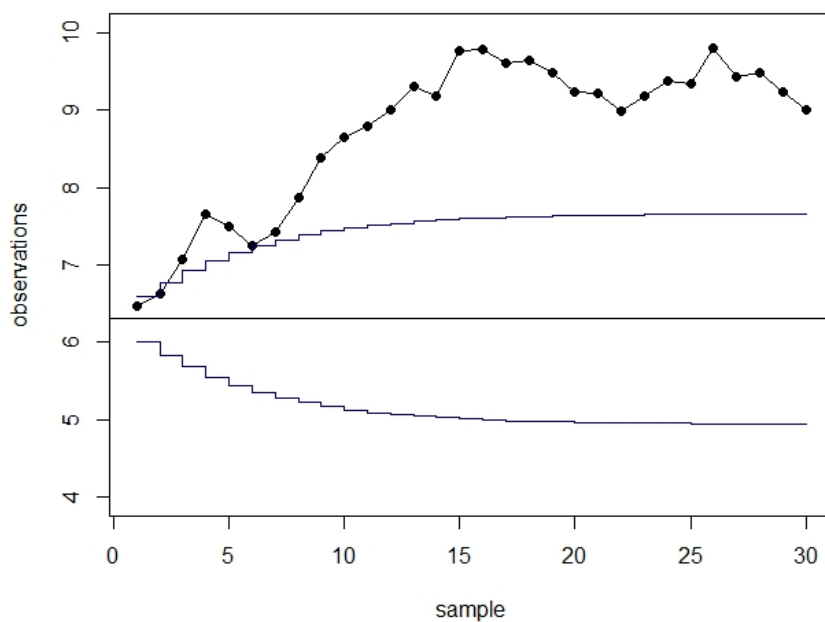
$$\begin{aligned}
LCL &= np_0 - U_{BN_w} \left(1 - (1 - f)^{1+\alpha(i-1)}\right) \sqrt{\frac{np_0(1-p_0)w}{2-w} \left[1 - (1-w)^{2i}\right]} \\
&= 63 \cdot 0.1 - 1.522 \left(1 - (1 - 0.5)^{1+0.3(i-1)}\right) \sqrt{\frac{63 \cdot 0.1(1-p_0)0.01}{2-0.01} \left[1 - (1-0.01)^{2i}\right]} \\
&= 6.281879.
\end{aligned}
\tag{5.23}$$

Τα διαγράμματα EWMA, για $w = 0.01$, $w = 0.1$ και $w = 0.3$ είναι τα εξής.

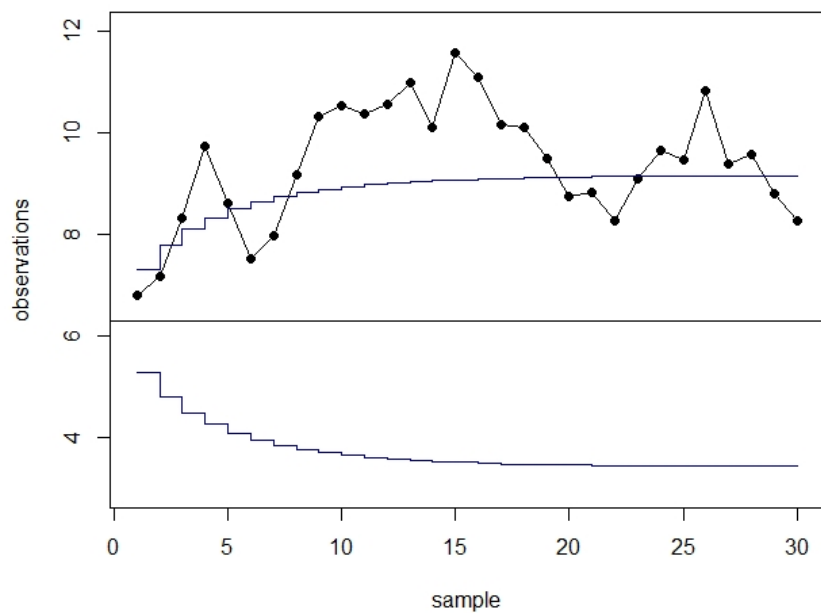


Σχήμα 5.16: Διάγραμμα FIR EWMA για $w = 0.01$

Παρατηρούμε ότι τα διαγράμματα FIR EWMA των σχημάτων 5.16, 5.17 και 5.18 παρουσιάζονται πιο ευαίσθητα σε σχέση με τα αντίστοιχα διαγράμματα EWMA των σχημάτων 5.13, 5.14 και 5.15, όσον αφορά τον εντοπισμό των μετατοπίσεων εκτός ορίων της παραγωγικής διεργασίας. Πιο συγκεκριμένα, στο Σχήμα 5.16 εξάγεται ένδειξη ότι η διαδικασία είναι εκτός ελέγχου από την 2^η παρατήρηση, ενώ στο Σχήμα 5.13 εξάγεται ένδειξη ότι η διαδικασία είναι εκτός ελέγχου από την 3^η παρατήρηση. Συνεπώς τα διαγράμματα EWMA και FIR EWMA είναι ικανότερα να ανιχνεύσουν την μετατόπιση του μέσου σε σχέση με τα διαγράμματα Shewhart, τα οποία ανίχνευαν την μετατόπιση στο 15^ο δείγμα της Φάσης II. Επιπλέον τούτου, συγκρίνοντας τα διαγράμματα EWMA και FIR EWMA με το διάγραμμα CUSUM καθίσταται προφανές ότι, τα πρώτα είναι αποτελεσματικότερα από το αντίστοιχο διάγραμμα CUSUM, το οποίο ανίχνευσε την μετατόπιση στο 4^ο δείγμα.



Σχήμα 5.17: Διάγραμμα FIR EWMA για $w = 0.1$



Σχήμα 5.18: Διάγραμμα FIR EWMA για $w = 0.3$

5.3 2^η Εφαρμογή

Στην δεύτερη εφαρμογή ως πηγή προέλευσης των δεδομένων χρησιμοποιήθηκε του άρθρου που παρουσίασε ο F. F. Gan (1990). Έστω ότι είναι ο αριθμός των ελαττωματικών προϊόντων που παράγονται σε μια βιομηχανική μονάδα. Τα δεδομένα αντιγράφονται στον παρακάτω Πίνακα. Ως δεδομένο δίνεται το πλήθος της κάθε παρτίδας, το οποίο είναι ίσο με 90.

Πίνακας 5.4: Πίνακας τιμών της εφαρμογής 2

i	x_i	i	x_i	i	x_i	i	x_i	i	x_i
1	9	11	3	21	2	31	12	41	13
2	9	12	11	22	11	32	8	42	16
3	8	13	9	23	9	33	9	43	9
4	12	14	13	24	16	34	7	44	3
5	8	15	9	25	13	35	12	45	11
6	7	16	14	26	15	36	13	46	14
7	3	17	12	27	8	37	3	47	14
8	6	18	6	28	3	38	14	48	6
9	7	19	14	29	2	39	11	49	11
10	13	20	9	30	14	40	16		

5.3.1 Διαγράμματα τύπου Shewhart

Για να εκτιμηθεί το p διάγραμμα, απαιτείται ο μέσος των μη συμμορφωμένων προϊόντων ανα παρτίδα, δηλαδή η εντός ελέγχου μέση τιμή της διεργασίας (Φάση I), χρησιμοποιούνται οι 15 πρώτες παρατηρήσεις.

$$\bar{p} = \frac{9 + 9 + 8 + \dots + 3 + 11 + 9}{15 \cdot 90} = \frac{105}{1170} = 0.08974359 \approx 0.09. \quad (5.24)$$

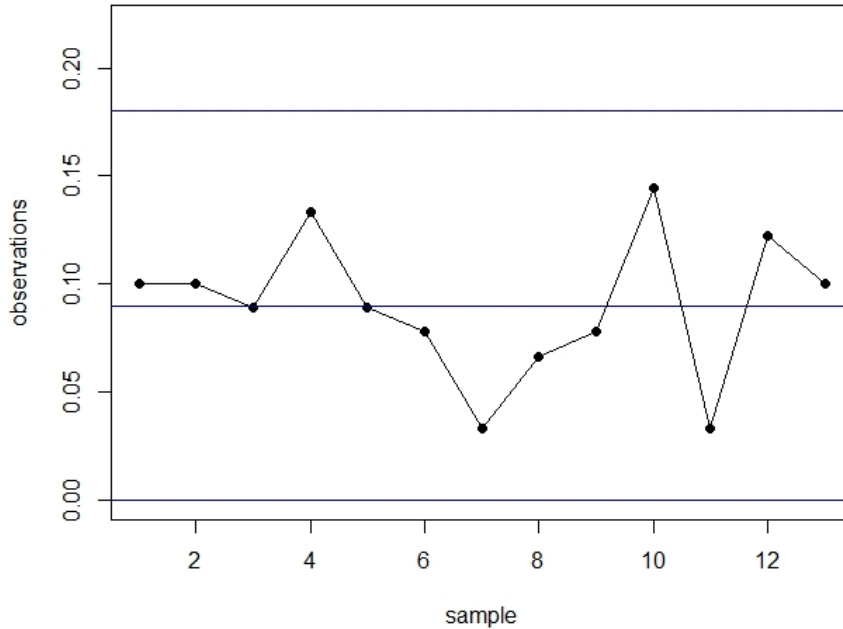
Τα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή του διαγράμματος p είναι:

$$UCL = \bar{p} + 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} = 0.09 + 3\sqrt{\frac{0.09(1-0.09)}{90}} = 0.1804986$$

$$CL = \bar{p} = 0.09$$

$$LCL = \bar{p} - 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} = 0.09 - 3\sqrt{\frac{0.09(1-0.09)}{90}} = -0.0004986188 \Rightarrow LCL = 0.$$

Το διάγραμμα της Φάσης I είναι:



Σχήμα 5.19: Φάση I του διαγράμματος p

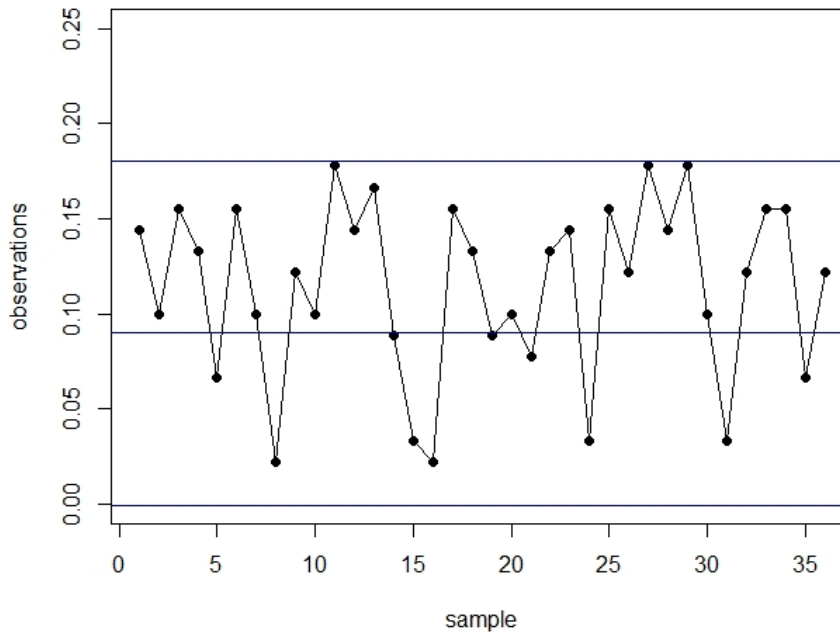
Παρατηρείται ότι κανένα σημείο δεν είναι εκτός των ορίων ελέγχου. Σε περίπτωση που υπήρχαν σημεία εκτός των ορίων ελέγχου, θα έπρεπε να τα αφαιρεθούν και στη συνέχεια να επανυπολογισθεί η τιμή \bar{p} ώστε να κατασκευαστούν τα νέα όρια ελέγχου. Εφόσον όλα τα σημεία είναι εντός ελέγχου, εξάγεται η ικανότητα του διαγράμματος p να ανιχνεύει μετατοπίσεις του μέσου αριθμού ελαττωματικών προϊόντων, υπολογίζοντας το ARL_0 , αφού πρώτα υπολογιστεί η τιμή α , ως ακολούθως.

$$\begin{aligned}
 \alpha &= P \left[\frac{X}{n} \notin [LCL, UCL] \mid X \sim B(n, p) \right] \\
 &= P \left[\frac{X}{90} \notin [0, 0.1804986] \mid X \sim B(90, 0.09) \right] \\
 &= P [X \notin [0, 16.24488] \mid X \sim B(90, 0.09)] \\
 &= 0.002598111
 \end{aligned} \tag{5.25}$$

$$ARL_0 = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{0.002598111} = 356.6279. \tag{5.26}$$

Σύμφωνα με την τιμή του ARL_0 , όταν ο αριθμός των ελαττωματικών προϊόντων είναι υπό

στατιστικό έλεγχο, ένα σημείο του διαγράμματος θα βρισκείται εκτός του άνω ορίου ελέγχου κάθε 356-357 παραγόμενα προϊόντα, επομένως το διάγραμμα p είναι αρκετά ικανοποιητικό.



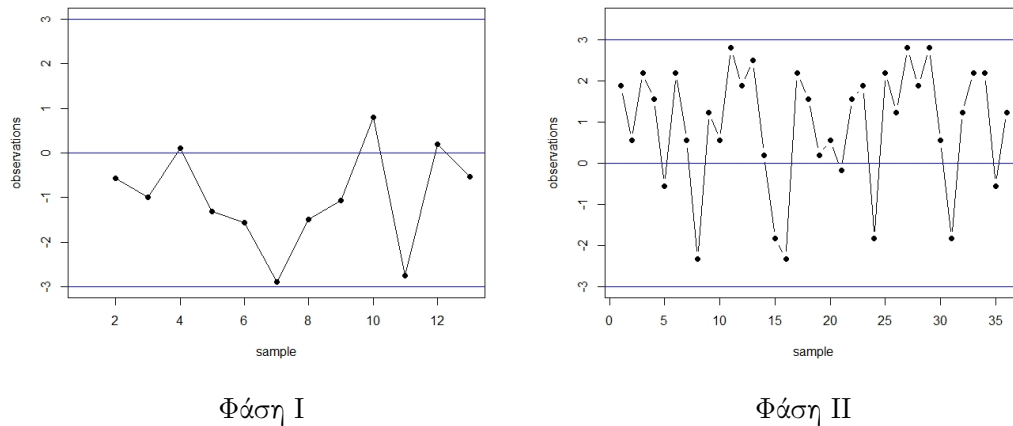
Σχήμα 5.20: Φάση II του διαγράμματος p

Σχεδιάζεται το διάγραμμα p της Φάσης II, για τις υπόλοιπες 34 παρτίδες (Σχήμα 5.20). Ως όρια ελέγχου χρησιμοποιούνται τα ίδια όρια με αυτά της Φάσης I. Το μέσο ποσοστό ελλαττωματικών προϊόντων ανα παρτίδα για τις υπόλοιπες 34 παρτίδες είναι $0.1148148 \approx 0.12$. Από το διάγραμμα του Σχήματος 5.20 παρατηρείται ότι κανένα σημείο δεν κινείται εκτός των ορίων ελέγχου. Παρά ταύτα, τρεις παρατηρήσεις (11, 13, 27 και 29) είναι πολύ κοντά στο άνω όριο ελέγχου.

Ακολουθώντας τα βήματα που αναφέρθηκαν στην παράγραφο 2.3, σχεδιάζεται τα Q διαγράμματα ελέγχου (Σχήμα 5.21). Για την Φάση I χρησιμοποιείται ο μετασχηματισμός της υπεργεωμετρικής κατανομής (σχέσεις 2.25 και 2.26) και για την Φάση II ο μετασχηματισμός που προτείνεται από τις σχέσεις 2.18 και 2.19. Υπενθυμίζουμε ότι τα όρια ελέγχου είναι ± 3 αντίστοιχα.

Από τα διαγράμματα του Σχήματος 5.21, παρατηρείται ότι στα διαγράμματα των Φάσεων I και II δεν εμφανίζεται κάποιο σημείο εκτός ελέγχου. Υπάρχουν όμως σημεία που είναι πολύ κοντά στα όρια ελέγχου. Στη Φάση I οι παρτίδες 7 και 11 είναι πολύ κοντά στο κάτω όριο ελέγχου. Αντίστοιχα, στη Φάση II οι παρτίδες 11, 13, 27 και 29 είναι πολύ κοντά στο πάνω όριο και οι

παρτίδες 8, 16, 24 και 31 είναι πολύ κοντά στο κάτω όριο ελέγχου.

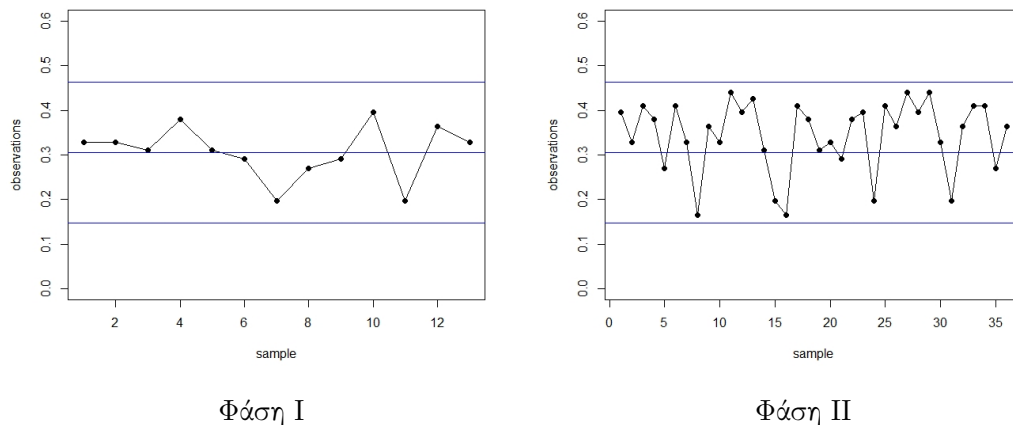


Σχήμα 5.21: Φάση I και Φάση II του διαγράμματος Q

Στη συνέχεια, γίνεται η κατασκευή του διαγράμματος arcsin βάσει του μετασχηματισμού που πρότειναν οι Johnson και Kotz το 1969. Τα όρια ελέγχου που προκύπτουν είναι:

$$UCL = \sin^{-1}(\sqrt{p}) + 3\frac{1}{\sqrt{4n}} = \sin^{-1}(\sqrt{0.09}) + 3\frac{1}{\sqrt{4 \cdot 90}} = 0.4628065 \quad (5.27)$$

$$LCL = \sin^{-1}(\sqrt{p}) - 3\frac{1}{\sqrt{4n}} = \sin^{-1}(\sqrt{0.09}) - 3\frac{1}{\sqrt{4 \cdot 90}} = 0.1465788. \quad (5.28)$$



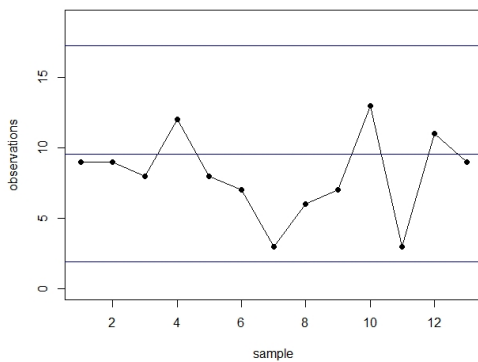
Σχήμα 5.22: Φάση I και Φάση II του διαγράμματος arcsin

Από τα διαγράμματα του Σχήματος 5.22, παρατηρείται ότι στις Φάσεις I και II κανένα σημείο δεν ξεπερνάει τα όρια ελέγχου. Παρόλα αυτά, στη Φάση II τα σημεία που σχεδόν αγγίζουν τα όρια ελέγχου φαίνεται να έχουν πλησιάσει ακόμα περισσότερο τα όρια.

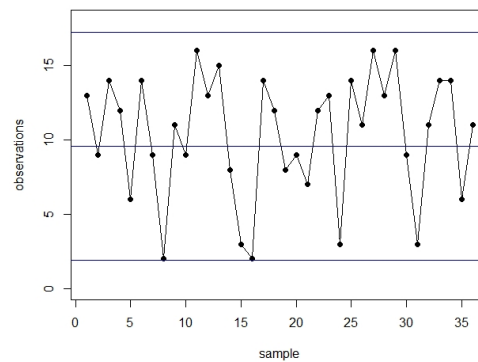
Στα διαγράμματα του Σχήματος 5.23, βλέπουμε τις Φάσεις I και II του διαγράμματος np που πρότειναν οι Ryan και Schwertman. Τα όρια ελέγχου που προκύπτουν είναι:

$$UCL = 0.6195 + 1.0052np + 2.983\sqrt{np} = 0.6195 + 1.0052 \cdot 90 \cdot 0.09 + 2.983\sqrt{90 \cdot 0.09} = 17.25139 \quad (5.29)$$

$$LCL = 2.9529 + 1.01956np - 3.2729\sqrt{np} = 2.9529 + 1.01956 \cdot 90 \cdot 0.09 - 3.2729\sqrt{90 \cdot 0.09} \approx 1.896499. \quad (5.30)$$



Φάση I



Φάση II

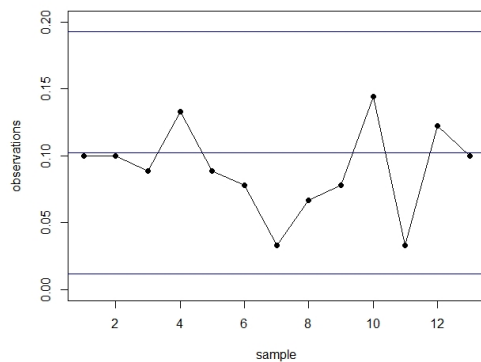
Σχήμα 5.23: Φάση I και Φάση II του διαγράμματος Ryan

Παρατηρείται ότι τα διαγράμματα αυτά έχουν αντίστοιχη συμπεριφορά με τα διαγράμματα που χρησιμοποιούν τους μετασχηματισμούς arcsin.

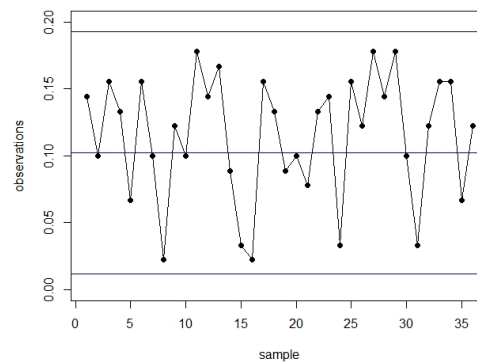
Επιπλέον, στα Σχήματα 5.24 και 5.25, περιέχονται τα διαγράμματα p των Φάσεων I και II, με έναν και δύο όρους διόρθωσης Cornish και Fisher. Τα όρια ελέγχου του διαγράμματος p με έναν όρο διόρθωσης είναι:

$$UCL = p + 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} + 4\frac{(1-2p)}{3n} = 0.09 + 3\sqrt{\frac{0.09(1-0.09)}{90}} + 4\frac{(1-2 \cdot 0.09)}{3 \cdot 90} = 0.1926468 \quad (5.31)$$

$$LCL = p - 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} + 4\frac{(1-2p)}{3n} = 0.09 - 3\sqrt{\frac{0.09(1-0.09)}{90}} + 4\frac{(1-2 \cdot 0.09)}{3 \cdot 90} = 0.01164953. \quad (5.32)$$



Φάση I



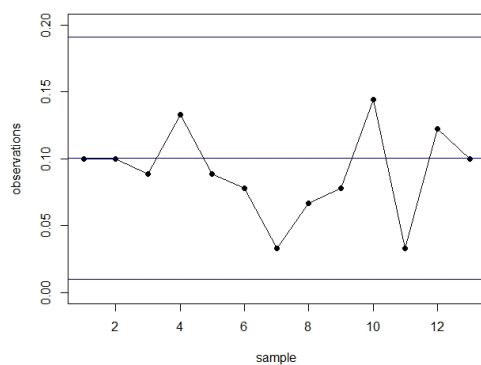
Φάση II

Σχήμα 5.24: Φάση I και Φάση II με έναν όρο διόρθωσης C-F

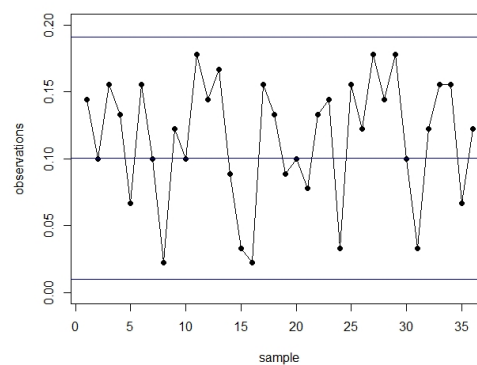
Τα όρια ελέγχου του διαγράμματος p με δύο όρους διόρθωσης C-F είναι:

$$UCL = p + 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} + 4\frac{(1-2p)}{3n} - \frac{p(1-p) + 2}{6n^2[p(1-p)/n]^{1/2}} = 0.1912267 \quad (5.33)$$

$$LCL = p - 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} + 4\frac{(1-2p)}{3n} - \frac{p(1-p) + 2}{6n^2[p(1-p)/n]^{1/2}} = 0.01022948. \quad (5.34)$$



Φάση I



Φάση II

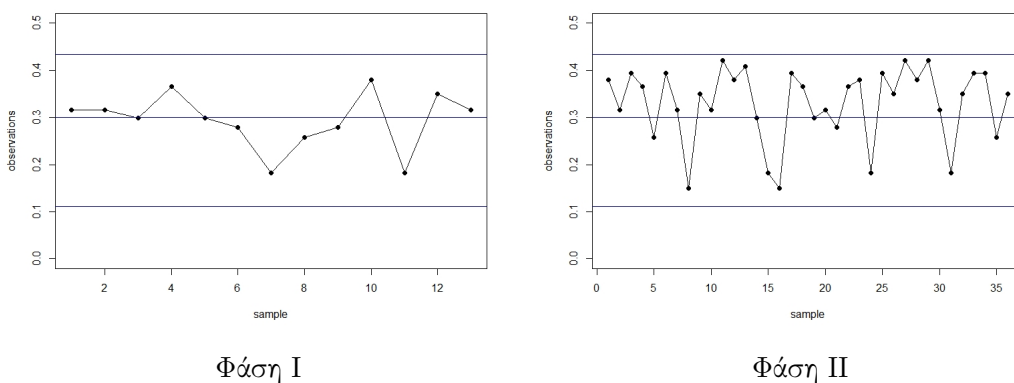
Σχήμα 5.25: Φάση I και Φάση II με δύο όρους διόρθωσης C-F

Στα δύο Σχήματα παρατηρούμε ότι στη Φάση I κανένα σημείο δεν είναι εκτός ελέγχου. Ενώ στη Φάση II μόνο ένα σημείο βρίσκεται εκτός ελέγχου.

Τέλος, κατασκευάζουμε το διάγραμμα ISRT για τις Φάσεις I και II. Τα όρια ελέγχου που προκύπτουν είναι:

$$UCL_p = \sqrt{p} + \frac{3}{2} \sqrt{\frac{1-p}{n}} - \frac{1}{2} \frac{1-p}{n\sqrt{p}} = 0.4339792 \quad (5.35)$$

$$LCL_p = \sqrt{p} - \frac{3}{2} \sqrt{\frac{1-p}{n}} - \frac{1}{8} \frac{1-p}{n\sqrt{p}} = 0.1112523. \quad (5.36)$$



Σχήμα 5.26: Φάση I και Φάση II του διαγράμματος ISRT

Από τα διαγράμματα ISRT συνάγεται ότι στις Φάσεις I και II κανένα σημείο δεν ξεπερνάει τα όρια ελέγχου. Από τα παραπάνω διαγράμματα συμπεραίνεται ότι όλα τα διαγράμματα τύπου Shewhart, είναι ισοδύναμα για τα συγκεκριμένα δεδομένα.

5.3.2 Διάγραμμα CUSUM

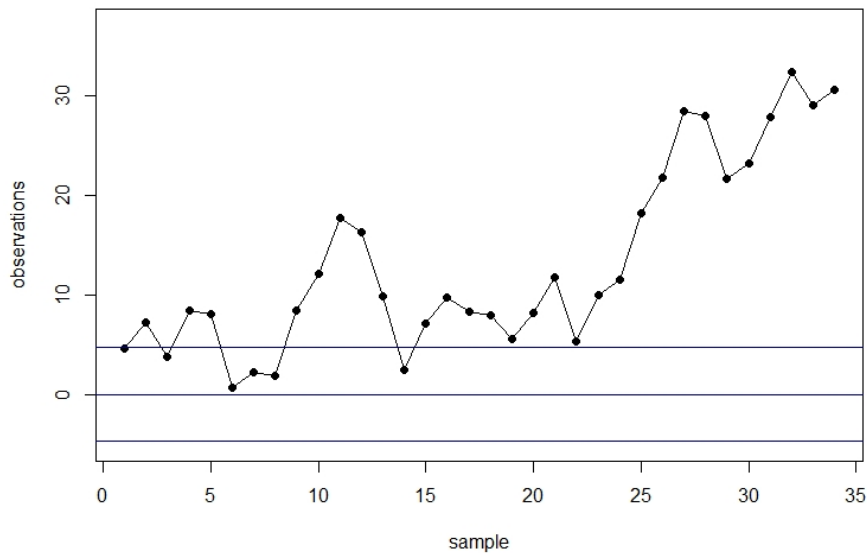
Στη συνέχεια σχεδιάζονται τα διαγράμματα CUSUM και FIR CUSUM για τα προαναφερθέντα δεδομένα. Για την κατασκευή των διαγραμμάτων αυτών είναι απαραίτητη η γνώση των τιμών p των Φάσεων I και II. Έχει ήδη αναφερθεί ότι ο μέσος όρος των μη συμμορφωμένων προϊόντων ανα παρτίδα των 15 πρώτων παρατηρήσεων είναι 0.09. Αντίστοιχα, ο μέσος όρος των μη συμμορφωμένων προϊόντων των υπόλοιπων παρτίδων είναι 0.12. Υπενθυμίζεται ότι το πλήθος των προϊόντων ανα παρτίδα είναι 90. Βάσει των παραπάνω δεδομένων, καθίσταται δυνατό να εξαχθεί η τιμή αναφοράς k (σχέση 3.15).

$$r_1 = -\log\left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right) = -\log\left(\frac{1-0.12}{1-0.09}\right) = 0.03352269 \quad (5.37)$$

$$r_2 = \log \left(\frac{p_1(1-p_0)}{p_0(1-p_1)} \right) = \log \left(\frac{0.12(1-0.09)}{0.09(1-0.12)} \right) = 0.3212048 \quad (5.38)$$

$$k = \frac{r_1}{r_2} = 0.1043655. \quad (5.39)$$

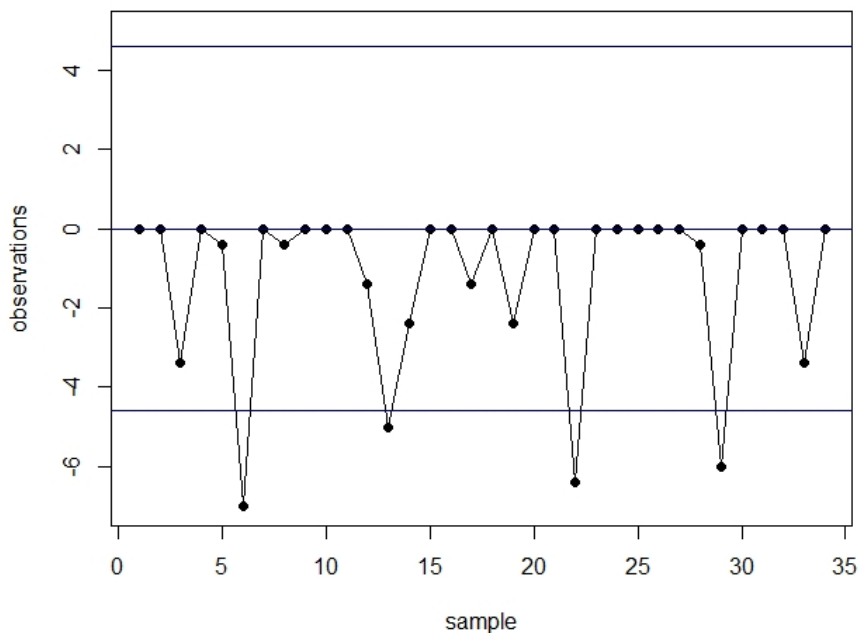
Βάσει των προσομοιώσεων Monte Carlo που έχουμε υλοποιήσει, προκύπτει ότι οι καλύτερες τιμές του ορίου ελέγχου ώστε να επιτευχθεί ο στόχος 356.6279 με $k = 0.1043655$ είναι είτε $h = 4.6$, όπου το ARL είναι ίσο με 342.78, είτε $h = 4.7$, όπου το ARL θα είναι 364.06. Επιλέγεται να χρησιμοποιηθεί το μεγαλύτερο όριο ελέγχου. Τα διαγράμματα CUSUM με τα δεδομένα που χρησιμοποιούνται, αποτυπώνονται στα Σχήματα 5.27 και 5.28.



Σχήμα 5.27: Διάγραμμα Upper Sided CUSUM

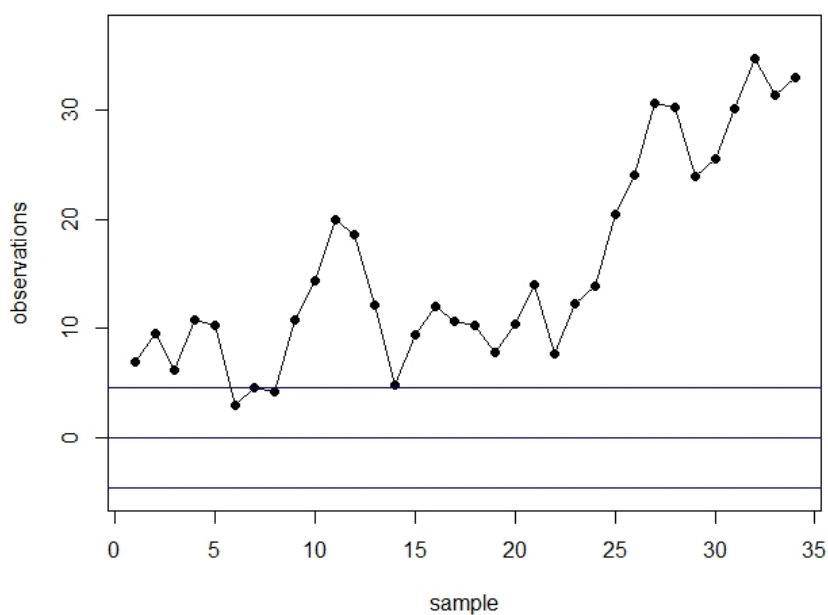
Το διάγραμμα Upper Sided Binomial CUSUM (Σχήμα 5.27) κινήθηκε εκτός των ορίων ελέγχου από την 2^η παρατήρηση, στη συνέχεια επανήλθε εντός ορίων και από την 3^η παρατήρηση και μετά, με εξαίρεση τις παρατηρήσεις 3, 6, 7, 8 και 14, και στη συνέχεια παρέμεινε εκτός ορίων. Είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι στο διάγραμμα εμφανίζεται μια αυξητική τάση ήδη από την 2^η παρατήρηση, στη συνέχεια κινείται εντός και εκτός ορίων μέχρι την 15^η παρατήρηση, όπου παραμένει εκτός ορίων μέχρι το τέλος της διεργασίας. Επιπλέον, το διάγραμμα Lower Sided Binomial CUSUM (Σχήμα 5.28) κινείται εκτός ορίων στις παρατηρήσεις 6, 13, 22 και 29. Παρατηρείται ότι, τα διαγράμματα CUSUM κινούνται εκτός του άνω και του κάτω ορίου αντίστοιχα. Το διάγραμμα CUSUM αντιλήφθηκε άμεσα την εκτός ελέγχου κατάσταση, σε αντίθεση με τα διαγράμματα Shewhart που δεν την αντιλήφθηκαν καθόλου. Από την

ταυτόχρονη μελέτη των δύο διαγραμμάτων CUSUM συνάγεται ότι ο μέσος μετατοπίζεται ισχυρότερα προς τα άνω, συνεπώς η διαδικασία είναι ευκολότερο να τεθεί εκτός στατιστικού ελέγχου στην άνω περιοχή σε σχέση με την κάτω.

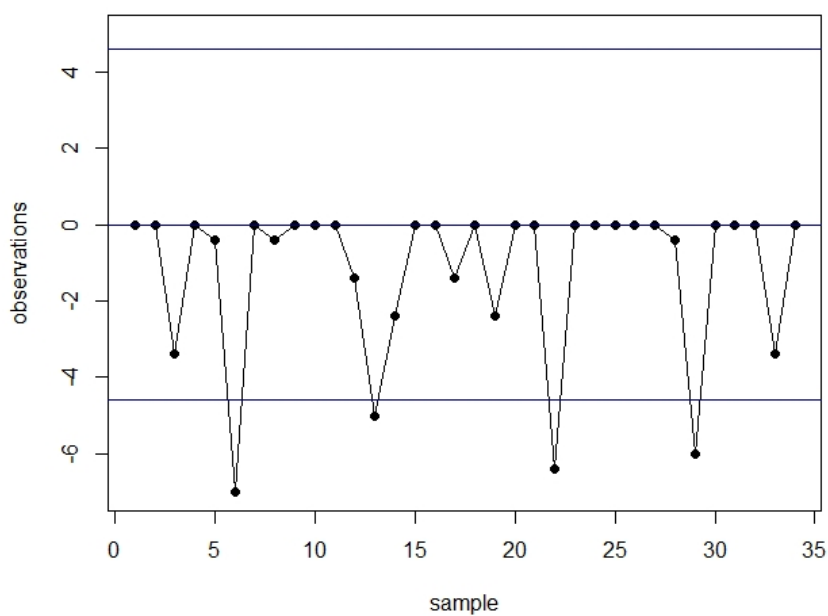


Σχήμα 5.28: Διάγραμμα Lower Sided CUSUM

Στη συνέχεια κατασκευάζονται τα αντίστοιχα διαγράμματα FIR CUSUM. Παρατηρείται ότι τα διαγράμματα Upper Sided FIR CUSUM (Σχήμα 5.29) και Lower Sided FIR CUSUM (Σχήμα 5.30) είναι πιο αποτελεσματικά στην ανίχνευση της μετατόπισης. Το μεν διάγραμμα Upper Sided FIR CUSUM εξήγαγε ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου ήδη από την 1^η παρατήρηση, με εξαίρεση τις παρατηρήσεις 6,7 και 8. Στο δε διάγραμμα Lower Sided FIR CUSUM, παρατηρείται ότι τα δείγματα έχουν την ίδια συμπεριφορά με την αντίστοιχη των δειγμάτων του διαγράμματος Lower Sided CUSUM. Σε συνδυασμό με τα διαγράμματα Upper Sided FIR CUSUM και Lower Sided FIR CUSUM, συνάγεται το συμπέρασμα ότι η μετατόπιση του μέσου προς τα επάνω είναι ισχυρότερη από την αντίστοιχη μετατόπιση προς τα κάτω. Συνακόλουθα, τα διαγράμματα FIR CUSUM αποδεικνύονται προτιμητέα σε σχέση με τα διαγράμματα CUSUM, αφού τα FIR CUSUM διακρίνονται για μεγαλύτερη ευαισθησία στον εντοπισμό των εκτός ελέγχου καταστάσεων, σε σχέση με τα όλα τα προαναφερθέντα διαγράμματα ελέγχου. Τα αποτελέσματα που προφέρθηκαν, είναι πλήρως συμβατά με τη θεωρητική προσέγγιση των υπ' όψιν μοντέλων που σημειώθηκε στο Κεφάλαιο 3.



Σχήμα 5.29: Διάγραμμα Upper Sided FIR CUSUM



Σχήμα 5.30: Διάγραμμα Lower Sided FIR CUSUM

5.3.3 Διάγραμμα EWMA

Στην παρούσα παράγραφο σχεδιάζεται η κατασκευή του διαγράμματος EWMA για τιμές $w = 0.01$, $w = 0.1$ και $w = 0.3$. Με αυτόν τον τρόπο καθίσταται εφικτή η ανίχνευση της μετατόπισης του μέσου. Με τη χρήση προσομοιώσεων, προκύπτει ο παρακάτω Πίνακας, στον οποίο παρουσιάζονται οι τιμές των παραμέτρων w και U_{BN_w} , ώστε τα διαγράμματα να έχουν τιμή ARL_0 στην περιοχή του 356.6279, που είναι η τιμή του ARL την οποία βρήκαμε από το διάγραμμα p για τα δεδομένα που εξετάζουμε (δηλαδή τα δεδομένα του Gan, 1990). Επιπλέον, υπολογίζεται το ARL_1 αυτών των διαγραμμάτων, για τη ζητούμενη μετατόπιση.

Πίνακας 5.5: Επιλογή των παραμέτρων w και U_{BN_w} για $ARL_0 \approx 356.6279$

w	0.01	0.1	0.3
U_{BN_w}	2.001	2.702	2.926
ARL_0	353.3922	357.4028	357.3452
ARL_1	4.911	7.5275	9.5298

Χρησιμοποιείται ο τύπος $BN_i = wY_i + (1 - w)BN_{i-1}$, για $i = 1, 2, 3, \dots, 34$ (της Φάσης II) και $w = 0.01$. Στη συνέχεια, τίθεται ως Y_i ο αριθμός των μη συμμορφωμένων προϊόντων που υπάρχουν στην i παρτίδα. Με αυτόν τον τρόπο προκύπτουν οι τιμές του στατιστικού BN_i . Για παράδειγμα, όταν το $i = 1$, έχουμε:

$$\begin{aligned}
 BN_1 &= wY_1 + (1 - w)BN_0 \\
 &= wY_1 + (1 - w)np \\
 &= 0.01 \cdot 14 + (1 - 0.01)8.1 \\
 &= 8.159.
 \end{aligned} \tag{5.40}$$

Τα αντίστοιχα όρια ελέγχου είναι:

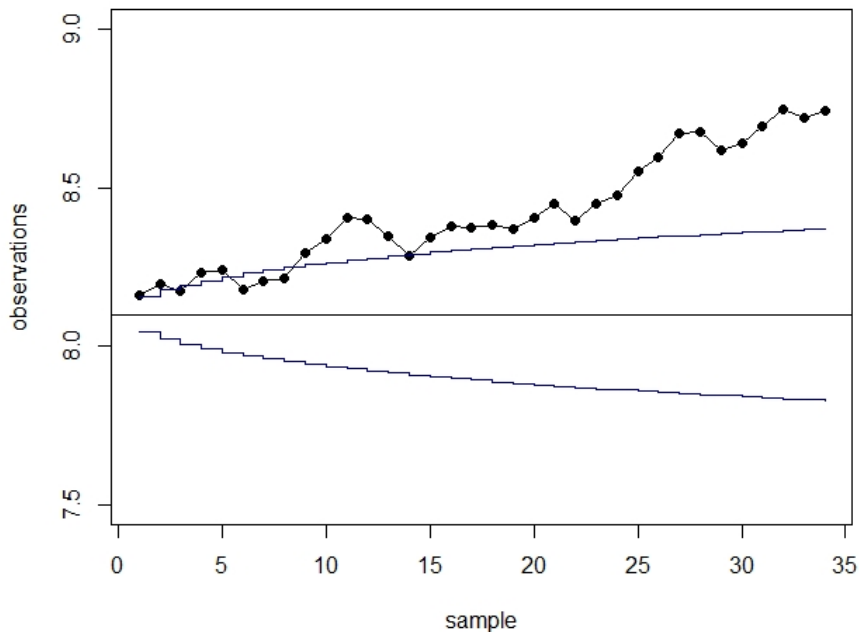
$$\begin{aligned}
 UCL &= np_0 - U_{BN_w} \sqrt{\frac{np_0(1 - p_0)w}{2 - w} [1 - (1 - w)^{2i}]} \\
 &= 90 \cdot 0.09 + 2.001 \sqrt{\frac{90 \cdot 0.09(1 - 0.09)0.01}{2 - 0.01} [1 - (1 - 0.01)^2]} \\
 &= 8.154326
 \end{aligned} \tag{5.41}$$

$$\begin{aligned}
 LCL &= np_0 + U_{BN_w} \sqrt{\frac{np_0(1 - p_0)w}{2 - w} [1 - (1 - w)^{2i}]} \\
 &= 90 \cdot 0.09 - 2.001 \sqrt{\frac{90 \cdot 0.09(1 - 0.09)0.01}{2 - 0.01} [1 - (1 - 0.01)^2]} \\
 &= 8.045674.
 \end{aligned} \tag{5.42}$$

Τα εξομαλυμένα όρια ελέγχου είναι:

$$\begin{aligned}
 UCL &= np_0 + U_{BN_w} \sqrt{\frac{np_0(1-p_0)w}{2-w}} \\
 &= 90 \cdot 0.09 + 2.001 \sqrt{\frac{90 \cdot 0.09(1-0.09)0.01}{2-0.01}} \\
 &= 8.485109
 \end{aligned}
 \tag{5.43}$$

$$\begin{aligned}
 LCL &= np_0 - U_{BN_w} \sqrt{\frac{np_0(1-p_0)w}{2-w}} \\
 &= 90 \cdot 0.09 - 2.001 \sqrt{\frac{90 \cdot 0.09(1-0.09)0.01}{2-0.01}} \\
 &= 7.714891.
 \end{aligned}
 \tag{5.44}$$

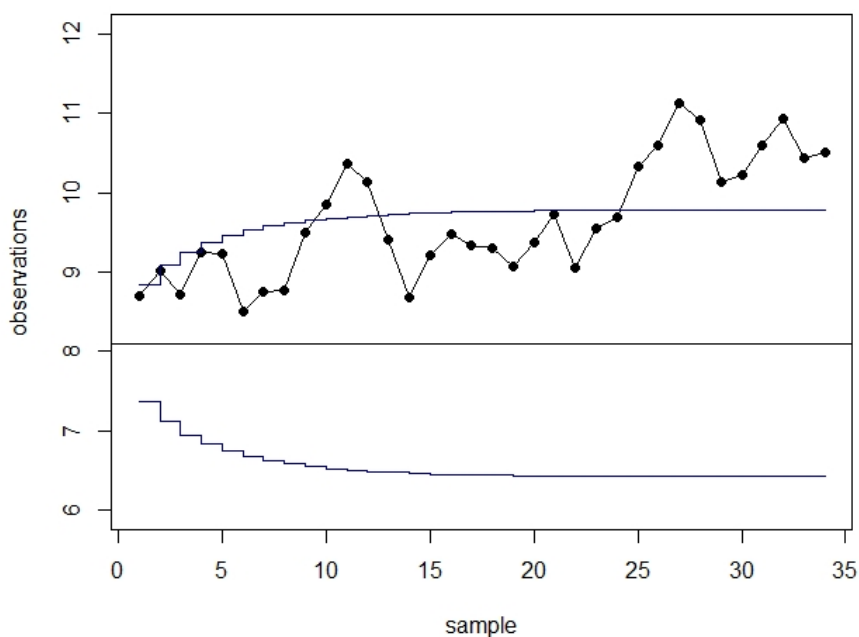


Σχήμα 5.31: Διάγραμμα EWMA για $w = 0.01$

Στο Σχήμα 5.31 απεικονίζεται το διάγραμμα Binomial EWMA, για $w = 0.01$. Από το Σχήμα 5.31 διαπιστώνεται ότι, το διάγραμμα EWMA παρέχει ένδειξη ότι η διαδικασία είναι εκτός ελέγχου από την 1^η παρατήρηση, με εξαίρεση τις παρατηρήσεις 3, 6, 7 και 8. Συνεπώς το διάγραμμα EWMA είναι ικανότερο να ανιχνεύσει την μετατόπιση του μέσου σε σχέση με τα διαγράμματα Shewhart. Υπενθυμίζουμε ότι, τα διαγράμματα Shewhart δεν ανίχνευαν την μετατόπιση για τα δεδομένα της Φάσης II. Στην περίπτωση που συγκρίνεται το διάγραμμα

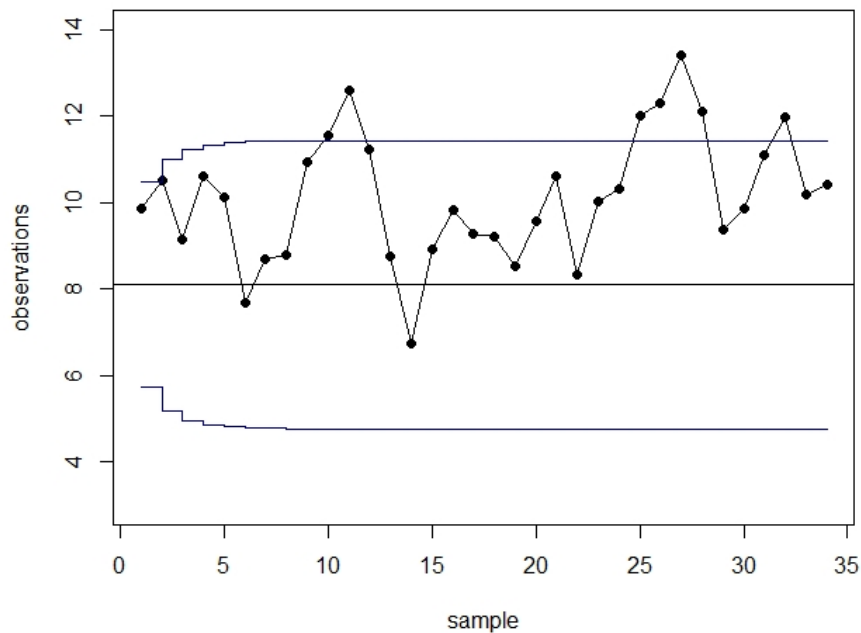
EWMA με το διάγραμμα CUSUM γίνεται φανερό ότι, και τα δύο διαγράμματα εντόπισαν την μετατόπιση από την 1^η παρατήρηση. Η δυσκολία των διαγραμμάτων CUSUM εμπίπτει στο γεγονός ότι ο διαχειριστής αναγκάζεται να μελετήσει συνδυαστικά το Upper Sided CUSUM και το Lower Sided CUSUM, ώστε να εξετάσει εάν η μετατόπιση του μέσου προς τα επάνω είναι ισχυρότερη σε σχέση με την μετατόπιση προς τα κάτω, ενώ το διάγραμμα EWMA εξάγει απευθείας την προκληθείσα μετατόπιση. Συνεπώς, σε περίπτωση που ενδιαφέρει η καταδειχθεί η “συνολική” μετατόπιση του μέσου, χρησιμοποιούνται τα διαγράμματα EWMA. Στην περίπτωση που ενδιαφέρει να εξετασθεί η πάνω και η κάτω μετατόπιση ξεχωριστά, ανατρέχουμε στα διαγράμματα CUSUM.

Με την ίδια διαδικασία κατασκευάζουμε τα διαγράμματα EWMA, για $w = 0.1$ και $w = 0.3$ (Σχήματα 5.32 και 5.33). Παρατηρούμε ότι τα διαγράμματα για $w = 0.1$ (Σχήμα 5.32) και $w = 0.3$ (Σχήμα 5.33) έχουν διαφορετική συμπεριφορά με το διάγραμμα για $w = 0.01$. Στο πρώτο (Σχήμα 5.13) θεωρείται η 1^η παρατήρηση εκτός ελέγχου, ενώ η διαδικασία που περιγράφεται στο διάγραμμα 5.32 κινείται εκτός ελέγχου από τη 10^η παρατήρηση, στη συνέχεια επανέρχεται εντός ελέγχου στην 13^η παρατήρηση και από την 25^η παρατήρηση και μετά παραμένει εκτός ελέγχου.



Σχήμα 5.32: Διάγραμμα EWMA για $w = 0.1$

Η διαδικασία που περιγράφεται στο διάγραμμα 5.33, κινείται εκτός ελέγχου από τη 10^η παρατήρηση, στη συνέχεια επανέρχεται εντός ελέγχου από την 12^η παρατήρηση μέχρι την 24^η,



Σχήμα 5.33: Διάγραμμα EWMA για $w = 0.3$

από την 25^η παρατήρηση μέχρι την 28^η παρατήρηση παραμένει εκτός ελέγχου και επανέρχεται εντός από την 29^η παρατήρηση μέχρι το τέλος με εξαίρεση την 32^η, όπου κινείται και πάλι εκτός των ορίων. Συνεπώς, όσο μειώνεται το βάρος, τόσο αυξάνεται και η ευαισθησία του διαγράμματος. Άρα η καλύτερη τιμή για το βάρος w που μπορούμε να επιλέξουμε είναι ίση με 0.01.

Τέλος, κατασκευάζουμε τα διαγράμματα FIR EWMA για $w = 0.01$, $w = 0.1$ και $w = 0.3$ με τη μέθοδο που πρότειναν οι Rhoads et al. (1996). Έχουμε ήδη δει ότι οι δύο μέθοδοι FIR είναι ισοδύναμοι ως προς την αποτελεσματικότητα, συνεπώς αρκεί να προσεγγίσουμε τη μία από τις δύο μεθόδους. Όπως και στο διάγραμμα EWMA, με τη χρήση προσομοιώσεων προκύπτει ο παρακάτω Πίνακας, στον οποίο παρουσιάζονται οι τιμές των παραμέτρων w και U_{BN_w} ώστε τα διαγράμματα να έχουν τιμή ARL_0 κοντά στην περιοχή του 356.6279.

Πίνακας 5.6: Επιλογή των παραμέτρων w και U_{BN_w} για $ARL_0 \approx 356.6279$

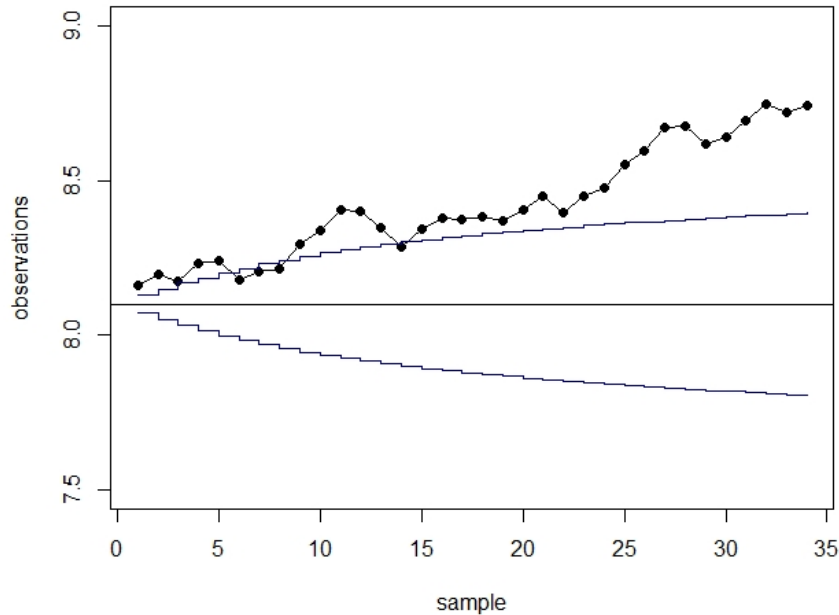
w	0.01	0.1	0.3
U_{BN_w}	2.181	2.817	3.019
ARL_0	353.909	355.2257	353.8139
ARL_1	3.4023	4.3685	5.3621

Τα όρια ελέγχου που προκύπτουν στην περίπτωση που θέσουμε $f = 0.5$ και $\alpha = 0.3$ για $w = 0.01$ και $U_{BN_w} = 1.522$, φαίνονται παρακάτω.

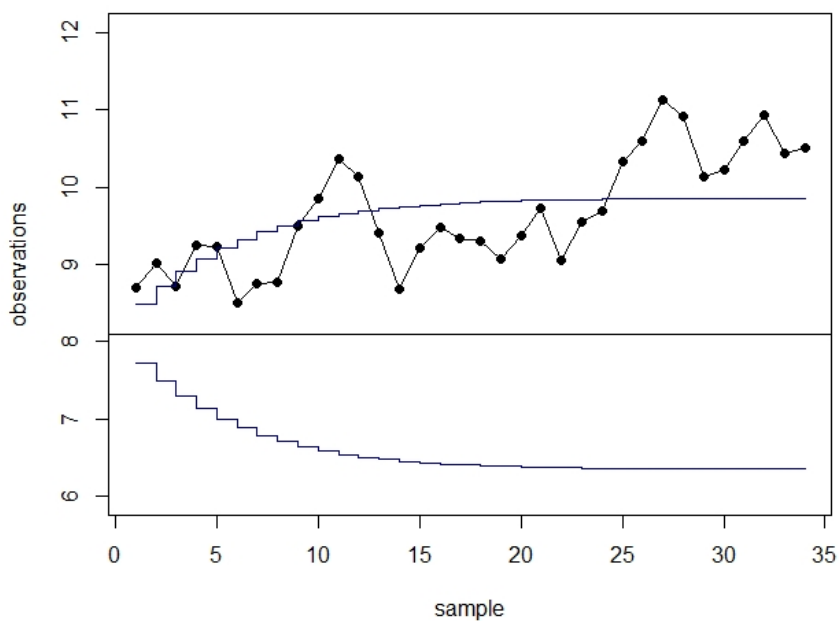
$$\begin{aligned}
 UCL &= np_0 + U_{BN_w} \left(1 - (1 - f)^{1+\alpha(i-1)}\right) \sqrt{\frac{np_0(1-p_0)w}{2-w} \left[1 - (1-w)^{2i}\right]} \\
 &= 90 \cdot 0.1 + 2.181 \left(1 - (1 - 0.5)^{1+0.3(i-1)}\right) \sqrt{\frac{90 \cdot 0.09(1-p_0)0.01}{2-0.01} \left[1 - (1-0.01)^{2i}\right]} \\
 &= 8.129607
 \end{aligned}
 \tag{5.45}$$

$$\begin{aligned}
 LCL &= np_0 - U_{BN_w} \left(1 - (1 - f)^{1+\alpha(i-1)}\right) \sqrt{\frac{np_0(1-p_0)w}{2-w} \left[1 - (1-w)^{2i}\right]} \\
 &= 90 \cdot 0.09 - 2.181 \left(1 - (1 - 0.5)^{1+0.3(i-1)}\right) \sqrt{\frac{90 \cdot 0.09(1-p_0)0.01}{2-0.01} \left[1 - (1-0.01)^{2i}\right]} \\
 &= 8.070393.
 \end{aligned}
 \tag{5.46}$$

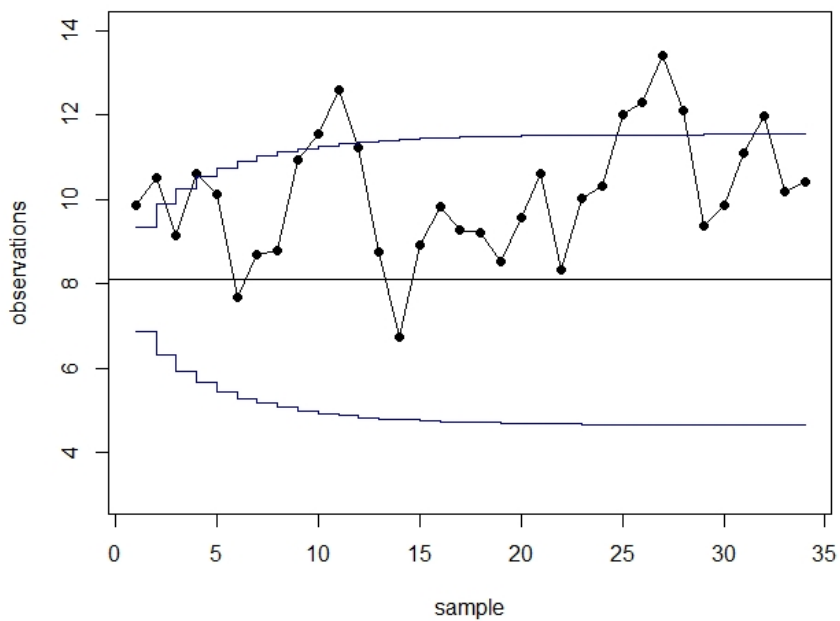
Στη συνέχεια, σχεδιάζονται τα διαγράμματα FIR EWMA για $w = 0.01$, $w = 0.1$ και $w = 0.3$ (Σχήματα 5.34, 5.35 και 5.36).



Σχήμα 5.34: Διάγραμμα FIR EWMA για $w = 0.01$



Σχήμα 5.35: Διάγραμμα FIR EWMA για $w = 0.1$



Σχήμα 5.36: Διάγραμμα FIR EWMA για $w = 0.3$

Παρατηρούμε ότι έχουν παρόμοια συμπεριφορά με τα διαγράμματα EWMA για τους συγκεκριμένους συνδυασμούς w και U_{BN_w} . Η μόνη διαφορά είναι ότι η πρώτη και η δεύτερη παρατήρηση βρίσκεται εκτός ελέγχου σε όλα τα διαγράμματα FIR EWMA. Εξάγεται το συμπέρασμα ότι τα διαγράμματα FIR EWMA, παρουσιάζουν μεγαλύτερη ευαισθησία σε σχέση με τα αντίστοιχα διαγράμματα EWMA όσον αφορά την αποκάλυψη των μετατοπίσεων εκτός ορίων της παραγωγικής διεργασίας.

Παρατηρούμε επίσης, ότι έχουν παρόμοια συμπεριφορά με τα διαγράμματα EWMA για τους συγκεκριμένους συνδυασμούς w και U_{BN_w} . Στο Κεφάλαιο 4, παρατηρήθηκε ότι τα συγκεκριμένα διαγράμματα, είναι αποτελεσματικότερα όταν η τιμή του βάρους είναι μικρή ($w = 0.01$). Το συγκεκριμένο αποτέλεσμα προκύπτει από το ARL_1 . Από το Σχήμα 5.31 διαπιστώνεται ότι το διάγραμμα EWMA εξάγει ένδειξη ότι η διαδικασία είναι εκτός ελέγχου από το 1^ο δείγμα, με εξαίρεση τις παρατηρήσεις 3, 6, 7 και 8. Από τα διαγράμματα FIR EWMA παρατηρείται ότι, τα συγκεκριμένα διαγράμματα είναι πιο ευαίσθητα σε σύγκριση με τα αντίστοιχα διαγράμματα EWMA. Πιο συγκεκριμένα, στο Σχήμα 5.34 εξάγεται ένδειξη ότι η διαδικασία είναι εκτός ελέγχου επίσης από το 1^ο δείγμα, με εξαίρεση τις παρατηρήσεις 6, 7 και 8.

Κατά τα ως άνω συμπεραίνεται ότι, τα διαγράμματα EWMA και FIR EWMA είναι ικανότερα να ανιχνεύουν την μετατόπιση του μέσου σε σχέση με τα διαγράμματα Shewhart, τα οποία δεν ανίχνευαν την μετατόπιση. Επιπλέον, συγκρίνοντας τα διαγράμματα EWMA και FIR EWMA σε σχέση με τα αντίστοιχα διαγράμματα CUSUM και FIR CUSUM, καθίσταται προφανές ότι, τα πρώτα είναι αποτελεσματικότερα από τα διαγράμματα CUSUM, αφού τα πρώτα ανίχνευαν τη μετατόπιση του μέσου στο 3^ο και 2^ο δείγμα, ενώ τα δεύτερα ανίχνευαν την υπ' όψιν μετατόπιση στο 4^ο και 3^ο δείγμα αντίστοιχα. Στην περίπτωση που συγκρίνονται τα διαγράμματα EWMA και FIR EWMA με τα αντίστοιχα διαγράμματα CUSUM, γίνεται φανερό ότι, και τα EWMA εντόπισαν την μετατόπιση από το 1^ο δείγμα και τα CUSUM από το 2^ο δείγμα. Η δυσκολία των διαγραμμάτων CUSUM συνίσταται στο γεγονός ότι ο διαχειριστής αναγκάζεται να μελετήσει συνδυαστικά το Upper Sided CUSUM και το Lower Sided CUSUM, ώστε να διερευνήσει εάν η μετατόπιση του μέσου προς τα επάνω είναι ισχυρότερη σε σχέση με την μετατόπιση προς τα κάτω, ενώ το διάγραμμα EWMA εξάγει απευθείας την παραμικρή μετατόπιση. Συνεπώς, σε περίπτωση που ενδιαφέρει η καταδειχθεί η "συνολική" μετατόπιση του μέσου, χρησιμοποιούνται τα διαγράμματα EWMA. Στην περίπτωση που ενδιαφέρει να εξετασθεί η πάνω και η κάτω μετατόπιση ξεχωριστά, ανατρέχουμε στα διαγράμματα CUSUM.

Κεφάλαιο 6

Συμπεράσματα - Προτάσεις για Έρευνα

6.1 Συμπεράσματα

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζονται συνοπτικά τα συμπεράσματα τα οποία εξήχθησαν από τα κεφάλαια 2, 3, 4 και 5 της παρούσας εργασίας, προκειμένου να διατυπωθούν τα τελικά και συμπεράσματα αυτής.

Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάστηκαν βασικά είδη διαγραμμάτων ελέγχου ιδιοτήτων τύπου Shehart (p , np , Q , \arcsin , Ryan, p με έναν και δύο όρους διόρθωσης Cornish-Fisher και ISRT), για δείγματα που ακολουθούν την Διωνυμική κατανομή και την κατανομή Bernoulli. Υπενθυμίζεται ότι τα υπόψιν διαγράμματα, αναφέρονται στο ποσοστό και τον αριθμό των ελαττωματικών προϊόντων μίας παραγωγικής διεργασίας, αντίστοιχα. Μελετώντας τα ανωτέρω διαγράμματα ελέγχου, διαπιστώθηκε η αδυναμία τους ως προς την ανίχνευση των μικρών μετατοπίσεων του μέσου του εξεταζόμενου δείγματος.

Στο Κεφάλαιο 3 παρουσιάστηκαν τα διαγράμματα ελέγχου CUSUM και FIR CUSUM για δείγματα που ακολουθούν την Διωνυμική κατανομή και την κατανομή Bernoulli. Τα p διαγράμματα βασίζονται στη στατιστική τους ανάλυση στο μέγεθος των δειγμάτων που λαμβάνουν από την παραγωγή, σε συνδυασμό με τον αριθμό των μη συμμορφωμένων παρατηρήσεων του κάθε δείγματος. Τα διαγράμματα Binomial CUSUM και Bernoulli CUSUM μπορούν να παράγουν αποτελέσματα ακόμα και κατά την εξέλιξη παραγωγής. Συνακόλουθα, είναι δυνατή η συνεχής εισαγωγή παρατηρήσεων στο διάγραμμα, και καθίσταται άμεσα εφικτή η αντίληψη του γεγονότος της κίνησης της διεργασίας στην εντός ή εκτός ελέγχου περιοχή. Οι συγχρίσεις των διαγραμμάτων CUSUM μεταξύ τους, ώστε να εξαχθεί το βέλτιστο εξ αυτών πραγματοποιούνται καλύτερα με την χρήση του μέτρου *ANIS* παρά του *ARL*.

Για την αύξηση της ευαισθησίας της παραγωγικής διεργασίας από την εκκίνησή της, δύναται να χρησιμοποιηθεί η τεχνική FIR στο διάγραμμα CUSUM. Για μικρές τιμές του p , το *ANIS* του Two-Sided CUSUM -σε σχέση με του Two-Sided FIR CUSUM- είναι σχεδόν το διπλάσιο. Η διαπίστωση αυτή υποδηλώνει, ότι διάγραμμα FIR CUSUM ανιχνεύει πολύ πιο γρήγορα τις μετατοπίσεις της μέσης τιμής από το διάγραμμα CUSUM. Η συγκεκριμένη διαφορά μεταξύ των προαναφερθέντων διαγραμμάτων, μειώνεται σταδιακά όταν το p αυξάνεται, ώσπου στο τέλος τείνει να θεωρηθεί αμελητέα. Αντίστοιχα αποτελέσματα λαμβάνουμε συγκρίνοντας το Upper Side CUSUM με το Upper Side FIR CUSUM. Συγκρίνοντας τα διαγράμματα Lower Sided CUSUM και Lower Sided FIR CUSUM παρατηρείται ότι τα αποτελέσματα για το CUSUM και το FIR CUSUM είναι πάρα πολύ κοντά για όλες τις τιμές του p . Συνεπώς, τα τελευταία είναι το ίδιο αποτελεσματικά για την ανεύρεση *ANIS*.

Στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάστηκαν τα διαγράμματα ελέγχου EWMA και FIR EWMA δειγμάτων που ακολουθούν την Διωνυμική κατανομή και την κατανομή Bernoulli. Τα διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart δεν είναι αρκετά ευαίσθητα σε μικρές μεταβολές του μέσου μίας διεργασίας. Όταν λαμβάνει χώρα μία τέτοια αλλαγή, απαιτούνται κατά μέσο όρο αρκετά σημεία στο διάγραμμα ελέγχου για τον εντοπισμό της. Τούτο αποδίδεται στο γεγονός ότι, κάθε σημείο του διαγράμματος Shewhart, αντιπροσωπεύει ένα μόνο δείγμα, το πλέον πρόσφατο, αγνοώντας τις τιμές των προηγούμενων δειγμάτων. Συνεπώς, τα υπ' όψιν διαγράμματα δεν είναι αρκετά ευαίσθητα σε μικρές μεταβολές του μέσου μίας διεργασίας. Προκειμένου να αντιμετωπιστεί το συγκεκριμένο πρόβλημα, προτείνεται η χρήση των διαγραμμάτων ελέγχου με κινητούς μέσους και εκθετικά βάρη.

Ομοίως με τα διαγράμματα CUSUM και FIR CUSUM, έτσι και στα EWMA και FIR EWMA, η σύγκριση μεταξύ των διαγραμμάτων για την εύρεση του καταλληλότερου μοντέλου, υλοποιείται με το *ANIS*. Συγκρίνοντας τα διαγράμματα Upper Sided CUSUM και Upper Sided EWMA, καθίσταται προφανές ότι το διάγραμμα EWMA υπερέχει του διαγράμματος CUSUM όσο αφορά τα εκτός ελέγχου *ANIS*. Επιπλέον, η απόδοση του διαγράμματος EWMA σε σχέση με το CUSUM βελτιώνεται, καθώς μειώνεται το βάρος w .

Για τον γρήγορο εντοπισμό των μη συμμορφωμένων προϊόντων από την πρώτη παρατήρηση των διαγραμμάτων EWMA, όπως και στα διαγράμματα CUSUM, χρησιμοποιείται η τεχνική FIR για δεδομένα που ακολουθούν τις κατανομές Διωνυμική και Bernoulli. Οι δύο πιο γνωστές μέθοδοι για την υλοποίηση της συγκεκριμένης τεχνικής είναι η μέθοδος 50% HS EWMA και η μέθοδος FIR EWMA. Κάνοντας σύγκριση των ενδεικτικών τιμών του *ANIS*, τόσο για τις δύο προαναφερθείσες μεθόδους, όσο και για το κλασικό EWMA, παρατηρείται ότι η μέθοδος 50% HS EWMA υπερέχει έναντι των υπολοίπων παρουσιαζόμενων μεθόδων στην εκτίμηση του *ANIS*. Η αναφερθείσα υπεροχή, συνίσταται στο γεγονός ότι η μέθοδος 50% HS EWMA εξάγει μικρότερο *ANIS*. Συνεπώς δύναται να ανιχνευτούν αμεσότερα οι μετατοπίσεις του μέσου εκτός διαγράμματος. Η αναφερόμενη υπεροχή είναι προφανής για πολύ μικρές τιμές του p .

Στο Κεφάλαιο 5 αναλύθηκε η ευαισθησία διαγραμμάτων ελέγχου, που παρήχθησαν από δεδομένα που προέρχονται από τις δημοσιεύσεις των C. P. Quesenberry (1991) και F. F. Gan (1990), τα οποία δεδομένα ακολουθούν την Διωνυμική κατανομή. Στόχος είναι, η σύγκριση των διαγραμμάτων που αναφέρθηκαν στα Κεφάλαια 2, 3 και 4, ώστε μέσα από πειραματικές τιμές να επαληθευτεί η θεωρία που προηγήθηκε. Παρατηρήθηκε ότι τα διαγράμματα τύπου Shewhart είναι τα λιγότερο "αποτελεσματικά" στην εντόπιση των μετατοπίσεων του μέσου. Συγκρίνοντας τα διαγράμματα EWMA και FIR EWMA σε σχέση με τα αντίστοιχα διαγράμματα CUSUM και FIR CUSUM, καθίσταται προφανές ότι, τα πρώτα είναι αποτελεσματικότερα από τα διαγράμματα CUSUM. Η δυσκολία χρήσης των διαγραμμάτων CUSUM συνίσταται στο γεγονός ότι ο διαχειριστής αναγκάζεται να μελετήσει συνδυαστικά το Upper CUSUM και το Lower CUSUM, ώστε να διερευνήσει εάν η μετατόπιση του μέσου προς τα επάνω είναι ισχυρότερη σε σχέση με την μετατόπιση προς τα κάτω, ενώ το διάγραμμα EWMA εξάγει άμεσα την παραμικρή μετατόπιση. Συνεπώς, στην περίπτωση που ενδιαφέρει η καταδειχθεί η "συνολική" μετατόπιση του μέσου, χρησιμοποιούνται τα διαγράμματα EWMA. Στην περίπτωση που ενδιαφέρει να εξετασθεί η πάνω και η κάτω μετατόπιση ξεχωριστά, ανατρέχουμε στα διαγράμματα CUSUM.

Επιγραμματικά συνάγεται ότι, τα διαγράμματα ελέγχου τύπου Shewhart ενδείκνυνται όταν:

- παρουσιάζονται ειδικές αιτίες μεταβλητότητας που υπερβαίνουν τα 2σ όρια ελέγχου.
- δεν έχει σημασία η ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων.

Τα διαγράμματα ελέγχου CUSUM και EWMA ενδείκνυνται όταν:

- είναι σημαντική η γρήγορη ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων ($0.5-2\sigma$).
- είναι σημαντική η ανίχνευση της παρτίδας που ξεκίνησε η μετατόπιση.
- ο μέσος μεταβάλλεται απότομα.

Επιχειρήθηκε η συγκριτική ανάλυση ευαισθησίας των διαγραμμάτων ελέγχου Shewhart, CUSUM και EWMA για δεδομένα που ακολουθούν τη Διωνυμική Κατανομή και την κατανομή Bernoulli, συνάγεται επιγραμματικά και συγκεφαλαιωτικά ότι: Τα διαγράμματα EWMA διακρίνονται για την μεγαλύτερη ευαισθησία τους όσον αφορά την ανίχνευση μικρών μετατοπίσεων του μέσου, σε σχέση με τα λοιπά αναφερθέντα διαγράμματα. Κατά φθίνουσα σειρά ακολουθούν FIR EWMA, EWMA, FIR CUSUM, CUSUM και Shewhart.

6.2 Προτάσεις για Έρευνα

Συνάγεται λοιπόν ότι υφίστανται διαφορές στην ευαισθησία εντοπισμού των μεταβολών μεταξύ των ως άνω διαγραμμάτων ελέγχου. Διαμορφώνεται ερευνητική τάση (ενδεικτικά: E. Henning et al., 2015) που επιχειρεί να συνδυάσει πολλαπλά διαγράμματα ελέγχου, προκειμένου να ανιχνεύονται συστηματικά οι μεταβολές οποιουδήποτε μεγέθους σε πραγματικό χρόνο, αυξάνοντας προφανώς την ευαισθησία των διαγραμμάτων. Με δεδομένο ότι ο πλήρης συνδυασμός των διαγραμμάτων δεν έχει επιτευχθεί ακόμη, προτείνεται η περαιτέρω διερεύνηση του συγκεκριμένου πεδίου.

Βιβλιογραφία

- [1] Β. Αλεβιζάκος. (2018). *Διαγράμματα ελέγχου με κινητούς μέσους και εκθετικά βάρη για δεδομένα που ακολουθούν Poisson και Γεωμετρική Poisson κατανομή και εφαρμογές τους*. Διπλωματική Εργασία, Αθήνα ΕΜΠ.
- [2] Δ. Αντζουλάκος. (2009). *Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας*. Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.
- [3] Δ.Γεωργακή, Κ. Κουρούπη, Σ. Πολίτης, Δ. Ρέκκας. (2010). *Διοίκηση Ολικής Ποιότητας*. Εκδόσεις Ι. Σιδέρης.
- [4] Σ. Κονταξάκη. (2015). *Στατιστικός Ποιοτικός Έλεγχος Επιχειρήσεων*. Πτυχιακή Εργασία, Πάτρα.
- [5] Χ. Κουκουβίνος. (2017). *Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις ΕΜΠ.
- [6] Α. Λάππα. (2016). *Τεχνικές Ελέγχου της Διασποράς Διεργασιών Εντός Γραμμής Παραγωγής*. Διπλωματική Εργασία, Αθήνα ΕΜΠ.
- [7] Εμ. Στειακάκης Ν. Κωφίδης. (2017). *Διοίκηση και Έλεγχος Ποιότητας*. Εκδόσεις Τζιόλα.
- [8] F. J. Anscombe. (1948). The transformation of Poisson, Binomial and Negative Binomial data. *Biometrika*. 35. 246–254.
- [9] D. Bourke & Patrick. (2001). Sample size and the Binomial CUSUM Control Chart: the case of 100% inspection. *Metrika*. 53. 51-70.
- [10] T.C. Chang & F.F. Gan. (2001). Cumulative Sum Charts for High Yield Processes. *Statistica Sinica*. 11. 791-805
- [11] G. Chen. (1998). An Improved p Chart Through Simple Adjustments. *Journal of Quality Technology*, 30:2, 142-151
- [12] S. Crowder. (2017). An introduction to the Bernoulli CUSUM. *Annual Reliability and Maintainability Symposium (RAMS)*, 1-6.
- [13] F. Dexter & J. Ledolter & B. J. Hindman. (2014). Bernoulli Cumulative Sum (CUSUM) Control Charts for Monitoring of Anesthesiologists' Performance in Supervising Anesthesia Residents and Nurse Anesthetists. *Anesthesia and analgesia*. 119. 679-685.

- [14] A. J. Duncan. (1986). *Quality Control and Industrial Statistics*. Richard D. Irwin, Inc., Homewood, IL
- [15] M. F. Freeman & J. W. Tukey. (1950). Transformations Related to the Angular and the Square Root. *Ann. Math. Statist.* 21, no. 4, 607–611.
- [16] F. F. Gan. (1990). Monitoring Observations Generated from a Binomial Distribution Using Modified Exponentially Weighted Moving Average Control Chart. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 37, 45-60
- [17] A. Hald. (1952). *Statistical Theory with Engineering Applications*. New York: JohnWiley.
- [18] E. Henning, A. C. Konrath, C. Alves, O. M. F. C. Walter, R. W. Samohyl. (2015). Performance Of A Combined Shewhart-Cusum Control Chart With Binomial Data For Large Shifts In The Process Mean. *Journal ofEngineering Research and Application*. 5, 235-243.
- [19] S. Joekees & E. P. Barbosa. (2013).An improved attribute control chart for monitoring non-conforming proportion in high quality processes. *Control Engineering Practice*. 21. 407–412.
- [20] NL. Johnson & S. Kotz. (1969).*Discrete Distributions*. Boston: Houghton Mifflin Company.
- [21] S. Knoth. (2005). Fast initial response features for EWMA control charts. *Statistical Papers*, 46: 47
- [22] S. Knoth & W. Schmid. (2015). *Frontiers in Statistical Quality Control 11*. Springer, Switzerland.
- [23] E. L. Lehmann. (1983). *Theory of Point Estimation*. John Wiley and Sons, New York
- [24] J. Lucas & M. S. Saccucci. (1990). Exponentially Weighted Moving Average Control Schemes: properties and enhancements. *Technometrics*. 32. 1-29.
- [25] R. Marion, Jr. Reynolds & G. Stoumbos. (1999). A CUSUM Chart for Monitoring a Proportion When Inspecting Continuously. *Journal of Quality Technology*, 31:1, 87-108.
- [26] D.C. Montgomery. (2013). *Introduction to Statistical Quality Control 7th edition*. John Wiley and Sons, New York.
- [27] L. S. Nelson. (1984). The Shewhart Control Chart - Tests for Special Causes. *Journal of Quality Technology*. 16 pp.237-239.
- [28] L. S. Nelson. (1989). Standardization of Shewhart Control Charts. *Journal of Quality Technology* 21, pp. 287-289.

- [29] E.S. Page. (1954). Continuous Inspection schemes. *Biometrics*. Vol. 41(1), pp. 100-115.
- [30] Y. Ou, Z. Wu, & F. Tsung. (2012). A comparison study on effectiveness and robustness of control charts for monitoring process mean and variance. *Qual. Reliab. Engng. Int.*, 28: 3-17.
- [31] P. Qiu. (2014). *Introduction to Statistical Process Control*. Chapman and Hall/CRC. Boca Raton FL.
- [32] C. P. Quesenberry. (1991). SPC Q Charts for a Binomial Parameter p: Short or Long Runs. *Journal of Quality Technology*, 23:3, 239-246
- [33] C. P. Quesenberry. (1991). SPC Q Charts for Start-Up Processes and Short or Long Runs. *Journal of Quality Technology*, 23:3, 213-224
- [34] F. J. O'Reilly & C. P. Quesenberry. (1972). Uniform Strong Consistency of Rao-Blackwell Distribution Function Estimators. *The Annals of Mathematical Statistics*, 43 pp. 1678-1679.
- [35] M. R. Reynolds, Z. G. Stoumbos. (1999). A CUSUM Chart for Monitoring a Proportion When Inspecting Continuously A CUSUM Chart for Monitoring a Proportion When Inspecting Continuously. *Journal of Quality Technology*, 31, 87-108.
- [36] M. R. Reynolds & Z. G. Stoumbos. (2006) Comparisons of Some Exponentially Weighted Moving Average Control Charts for Monitoring the Process Mean and Variance. *Technometrics*, 48:4, 550-567.
- [37] SW. Roberts. (1959). Control chart tests based on geometric moving averages. *Technometrics* 1959;1:239– 250.
- [38] T. P. Ryan. (2011). *Statistical Methods for Quality Improvement*. John Wiley & Sons 3rd edition.
- [39] T. P. Ryan & N. C. Schwertman. (1997). Optimal Limits for Attributes Control Charts. *Journal of Quality Technology*, 29:1, 86-98.
- [40] R. Sasikumar and S. Bangusha Devi. (2014). Cumulative Sum Charts and Its Healthcare Applications; A Systematic Review. *Sri Lankan Journal of Applied Statistics*. 15-1. 47-56
- [41] M. Schader & F. Schmid. (1989). Two Rules of Thumb for the Approximation of the Binomial Distribution by the Normal Distribution. *The American Statistician* 43, pp. 2324.
- [42] H. Spliid. (2010). An exponentially weighted moving average control chart for Bernoulli data. *Qual. Reliab. Engng. Int.*, 26: 97-113.

- [43] S. H. Steiner & S. H. Steiner. (1999). EWMA Control Charts with Time-Varying Control Limits and Fast Initial Response, *Journal of Quality Technology*, 31:1, 75-86
- [44] P. Taylor, T. R. Rhoads, D. C. Montgomery, C. M. Mastrangelo, and T. R. Rhoads. (1996). A Fast Initial Response Sceme for the Exponentially Weighted Moving Average Control Chart. *Quality Engineering*, 9(2): 317-327.
- [45] P. Taylor, M. Street, L. Wt & S. V. Crowder. (1987). A Simple Method for Studying Run – Length Distributions of Exponentially Weighted Moving Average Charts. *Technometrics*. (August 2013):37–41.
- [46] T. R. Tsai, C. C. Lin & S. J. Wu. (2006). Alternative attribute control charts based on improved square root transformation. *Tamsui Oxford Journal of Mathematical Sciences*. 22(1) 61-72.
- [47] H. Wang. (2009). Comparison of control charts for low defective rate. *Computational Statistics & Data Analysis*. 53. 4210-4220.
- [48] C. H. Weiss. (2018). *An Introduction to Discrete Valued Time Series*. John Wiley & Sons.
- [49] A. Winterbottom.(1993), Simple adjustments to improve control limits on attribute charts. *Qual. Reliab. Engng. Int.*, 9: 105-109.
- [50] Z. Wu, M. Yang, W. Jiang, & M. B. C. Khoo.(2008). Optimization designs of the combined Shewhart-CUSUM control charts. *Computational Statistics & Data Analysis*. 53. 496-506.
- [51] A. B. Yeh, R. N. Mcgrath, M. A. Sembower & Qi Shen. (2008). EWMA control charts for monitoring high-yield processes based on non-transformed observations. *International Journal of Production Research*, 46:20, 5679-5699.
- [52] X. Zhang & W. H. Woodall. (2015). Dynamic probability control limits for risk-adjusted Bernoulli CUSUM charts. *Statist. Med.*, 34: 3336–3348.

