ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΩΝ

ΒΥΖΑΝΙΑΡΗΣ ΕΜΜΑΝΟΥΗΛ

Αθήνα
ΙΟΥΛΙΟΣ 2019

Περιεχόμενα

0.1 Εισαγωγή

Σκοπός της διπλωματικής εργασίας αυτής αποτελεί η εισαγωγή στις μεθόδους προσεγγίσεων. Σε όλη την εργασία το βιβλίο το οποίο μελετήθηκε και χρησιμοποιήθηκε για τα στοιχεία της θεωρίας είναι το βιβλίο του M.J.D. POWELL Approximation theory and methods. Προκειμένου να γίνει αυτό θα γίνει μια εισαγωγή σε στοιχεία της συναρτησιακής ανάλυσης, όπως η νόρμα διανύσματος και τελεστή καθώς θα χρειαστεί και η μετρική ενός χώρου. Θα χρειαστούμε αρκετά στοιχεία αριθμητικής ανάλυσης τα οποία θα παρουσιάσουμε αναλυτικά στα πρώτα κεφάλαια. Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε τη μεθόδο προσεγγίσεων της πολυωνιμικής παρεμβολής με την μέθοδο Lagrange. Άλλη βασική μέθοδος την οποία θα εξετάσουμε είναι των διηρημένων διαφορών μέσω της μεθόδου Newton. Εν συνεχεία θα παρουσιάσουμε τον τελεστή Berstein ο οποίος είναι πολύ χρήσιμος στην εργασία μας. Άλλο ένα βασικό κομμάτι το οποίο θα μελετήσουμε είναι αυτό της minimax προσέγγισης και η συνθήκη Haar. Θα μελετήσουμε τα παρεμβολικά σημεία Chebyshev καθώς και τις εφαρμογές που έχουν στις minimax προσεγγίσεις. Θα γίνει μια αναφορά στον αλγόριθμο εναλλαγής αλλα δεν θα τον μελετήσουμε εις βάθος.Τέλος, θα μελετηθεί το κομμάτι των ελαχίστων τετραγωνικών προσεγγίσεων. Ένα απλό παράδειγμα ενός προσεγιστικού προβλήματος είναι ο σχεδιασμός μίας ευθείας γραμμής προκειμένου να περιέχει μία καμπύλη γραμμή, η οποία αποτελεί την γραφική παράσταση μίας συνάρτησης. Για το συγκεκριμένο πρόβλημα υπάρχουν πολλές διαφορετικές προσεγγιστικές λύσεις, όμως μία αποτελεί την βέλτιστη, η οποία βέλτιστη προσέγγιση μας δίνει πληθώρα πλεονεκτημάτων τα οποία θα μελετήσουμε στα επόμενα κεφάλαια. Ουσιαστικά σε αυτό το παράδειγμα παρατηρούμε ότι έχουμε τρία δεδομένα, μία συνάρτηση ή κάποια δεδομένα ενός συνόλου τα οποία πρέπει να προσεγγισθούν, τα οποία τα καλούμε f. Ένα σύνολο, έστω $\mathbb{A}$, το οποίο είναι το σύνολο των προσεγγίσεων και τέλος μία προσέγγιση από το σύνολο $\mathbb{A}$,η οποία συνήθως στην εργασία θα είναι ένα πολυώνυμο. Λίγο εως πολύ αυτά τα τρία στοιχεία θα χρησιμοποιήσουμε στην έκταση της εργασίας, τα οποία θα αλλάζουν ανάλογα με την μορφολογία του προβλήματος το οποίο θα εξετάζουμε. Ένα άλλο παράδειγμα το οποίο έχει αυτή τη μορφή είναι η επιλογή εξαρτημάτων σε ηλεκτρονικά κυκλώματα. Η συνάρτηση f είναι η απαιτούμενη ανταπόκριση του κυκλώματος και το σύνολο $\mathbb{A}$ είναι η πληθώρα των εξαρτημάτων τα οποία δίνουν την απαραίτητη ανταπόκριση. Τέλος, ένα αλλό παράδειγμα είναι η λύση μίας διαφορίσιμης εξίσωσης από μία συνάρτηση μίας συγκεκριμένης απλής μορφής η οποία εξαρτάται από ρυθμιζόμενες παραμέτρους, όπου η προσέγγιση είναι ένα εσωτερικό γινόμενο το οποίο παραγωγίζεται απο το υπόλοιπο το οποίο προκύπτει όταν η προσέγγιστική συνάρτηση αντικαθιστάται στην διαφορίσιμη εξίσωση.

Επιβλέπων καθηγητής:ΧΡΥΣΑΦΙΝΟΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ
Τριμελής επιτροπή:ΧΡΥΣΑΦΙΝΟΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ, ΚΟΚΚΙΝΗΣ ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ, ΚΟΛΕΤΣΟΣ ΙΩΑΝΝΗΣ

Κεφάλαιο 1

Το προσεγγιστικό πρόβλημα και η ύπαρξη βέλτιστων προσεγγίσεων

1.1 Προσεγγίσεις σε μετρικούς χώρους

Οι μετρικοί χώροι αποτελούν ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο για την θεωρία τον προσεγγίσεων, επομένως θα δώσουμε τον ορισμό της μετρικής καθώς και τις ιδιότητες της προκειμένου να γίνει χρήση τους.

Ορισμός 1.1. ***Μετρικός χώρος*** *είναι ένα ζεύγος ($\mathbb{B}$,d), όπου $\mathbb{B}$ είναι ένα μη κενό σύνολο και d:$\mathbb{B}\times$ $\mathbb{B}\longrightarrow$ $\mathbb{R}$ μία απεικόνιση που ικανοποιεί τις ιδιότητες:*

(i)d(x,y)$\geq$ 0 για κάθε x,y$\in$ $\mathbb{X}$ και d(x,y)= 0 αν και μόνο αν x=y

(ii)d(x,y)=d(y,x) για κάθε x,y$\in$ $\mathbb{B}$, x$\neq$y (Συμμετρική ιδιότητα)

(iii)d(x,z)$\leq$d(x,y)+d(y,z) για κάθε x,y,z$\in$ $\mathbb{B}$ (Αποτελεί την τριγωνική ανισότητα)

Επανερχόμενοι στα προβλήματα προσεγγίσεων έχουμε έναν μετρικό χώρο ο οποίος περιέχει το σύνολο $\mathbb{A}$ και τις συναρτήσεις f. Είναι προφανές να πούμε πως ένα σημείο $a_0 \in \mathbb{A}$ αποτελεί καλύτερη προσέγγιση απο ένα σημείο $a \in \mathbb{A}$ όταν ισχύει η σχέση:

$$d(a_0, f) < d(a, f) \tag{1.1}$$

Θα ορίσουμε τώρα το βέλτιστο σημείο προσέγγισης ως ένα σημείο $a^* \in \mathbb{A}$ όταν για κάθε $a \in \mathbb{A}$ ισχύει η παρακατώ σχέση:

$$d(a^*, f) \leq d(a, f) \tag{1.2}$$

Θα μας χρειάστει ο ορισμός του ορίου σε μία μετρική και είναι χρήσιμο να τον δώσουμε: Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος και $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ μία ακολουθία. Αν $x_0 \in X$ τότε λέμε ότι η ακολουθία $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει στο x_0 όταν $d(x_n, x_0) \overset{\infty}{\longrightarrow} 0$. Γράφουμε τότε $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} x_0$ ή $x_n \longrightarrow x_0$ όταν δεν υπάρχει σύγχυση ποια είναι η μετρική d. Συνεπώς $x_n \overset{d}{\to} x_0$ αν και μόνο αν $\lim_{n\longrightarrow\infty} d(x_n, x_0) = 0$ αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in N$ ώστε $d(x_n, x_0) < \epsilon$, για κάθε $n \geq n_0$

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε το παρακάτω θεώρημα το οποίο μας δίνει την ύπαρξη βέλτιστης προσέγγισης όταν το σύνολο $\mathbb{A}$ είναι συμπαγές.

Θεώρημα 1.1. *(Theorem 1.1 από βιβλίο M.J.D.POWELL Approximation theory and methods) Αν $\mathbb{A}$ συμπαγές σύνολο στο μετρικό χώρο $\mathbb{B}$, τότε για κάθε $f \in \mathbb{B}$ υπάρχει ένα στοιχείο $a^* \in \mathbb{A}$ τέτοιο ώστε να ικανοποιεί την σχέση :*

$$d(a^*, f) \leq d(a, f), \forall a \in \mathbb{A} \tag{1.3}$$

Απόδειξη. Ορίζουμε d^* την ποσότητα:

$$d^* = \inf_{a \in A} d(a, f) \tag{1.4}$$

Αν υπάρχει $a^* \in \mathbb{A}$ τέτοιο ώστε το όριο στην απόσταση να έχει επιτευχθεί τότε δεν έχουμε κάτι να αποδείξουμε. Αλλιώς υπάρχει μια ακολουθία σημείων $\{a_i : i = 1, 2, ..\}$ στο $\mathbb{A}$ η οποία μας δίνει το όριο:

$$\lim_{i \to \infty} d(a_i, f) = d^* \tag{1.5}$$

Από συμπάγεια έχουμε ότι η ακολουθία έχει τουλάχιστον ένα σημείο στο $\mathbb{A}$ στο οποίο συγκλίνει,το οποίο θα ονομάζουμε a^+. Από τη σχέση (1.5) καθώς και από τον προσδιορισμό του σημειού a^+, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει ένας ακέραιος k_0 τέτοιος ώστε να ισχύουν οι παρακάτω ανισότητες για κάθε $k \geq k_0$:

$$d(a_k, f) < d^* + \frac{1}{2}\epsilon \tag{1.6}$$

και

$$d(a_k, a^+) < \frac{1}{2}\epsilon, \forall k \geq k_0 \tag{1.7}$$

Συνεπώς, χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα της μετρικής d παίρνουμε την εξής σχέση:

$$d(a^+, f) \leq d(a^+, a_k) + d(a_k, f) < d^* + \epsilon \tag{1.8}$$

Επομένως λόγω του ότι το ε ειναι πολύ μικρό, η μετρική $d(a^+, f)$ δεν είναι μεγαλύτερη της d^*. Επομένως το σημείο a^+ αποτελεί την βέλτιστη προσέγγιση. □

1.2 Προσεγγίσεις σε χώρους με νόρμα

Σε όλη την εργασία θα κάνουμε χρήση των γραμμικών χώρων (ή διανυσματικών), επομένως είναι καλό να δοθεί ο προσδιορισμός τους.

Ορισμός 1.2. *Πραγματικός διανυσματικός χώρος(ή γραμμικός χώρος) ονομάζεται μία τριάδα (V,+,·) όπου V είναι ένα σύνολο, $+ : V \times V \longrightarrow V$ μία εσωτερική πράξη(πρόσθεση) και $\cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$ μία εξωτερική πράξη(βαθμωτό γινόμενο) που ικανοποιούν τις ακόλουθες ιδιότητες:*

(i) $(x + y) + z = x + (y + z)$,*για κάθε* $x, y, z \in V$
(ii) $x + y = y + x$,*για κάθε* $x, y, z \in V$
(iii) Υπάρχει ένα στοιχείο $0 \in V$ *ώστε* $x + 0 = 0 + x = x$ *για κάθε* $x \in V$
(iv) Για κάθε $x \in V$ *υπάρχει* $-x \in V$ *ώστε* $x + (-x) = (-x) + x = 0$
(v) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ *για κάθε* $x, y \in V, \lambda \in \mathbb{R}$
(vi) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ *για κάθε* $x \in V$ *και* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
(vii) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ *για κάθε* $x \in V$ *και* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
(viii) $1x = x$ *για κάθε* $x \in V$

Οι μετρικοί χώροι μας παρέχουν ένα χρήσιμο εργαλείο για την θεωρία προσεγγίσεων, αλλά η χρήση χώρων με νόρμα αποτελεί ένα ισχυρότερο εργαλείο για την δουλεία μας. Επομένως ο $\mathbb{A}$ και η f βρίσκονται μέσα σε ένα χώρο με νόρμα $\mathbb{B}$.

Ορισμός 1.3. *Έστω* $\mathbb{B}$ *διανυσματικός χώρος. Μια απεικόνιση* $\|\cdot\| : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{R}$ *λέγεται νόρμα αν ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:*

(i)$\|x\| \geq 0$,*για κάθε* $x \in \mathbb{B}$

(ii)$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$, *για κάθε* $x \in \mathbb{B}$

(iii)$\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$, *για κάθε* $x \in \mathbb{B}$ *και για κάθε* $\lambda \in \mathbb{R}$

(iv)$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, *για κάθε* $x, y \in \mathbb{B}$

Αφού προσδιορίσαμε λοιπόν την νόρμα και τους γραμμικούς χώρους, επανερχόμαστε πίσω στο προβλήματα προσεγγίσεων. Πολύ χρήσιμο είναι το γεγονός ότι η συνάρτηση

$$d(x, y) = \|x - y\| \tag{1.9}$$

αποτελεί μια ιδανική συνάρτηση απόστασης μέσα στο χώρο. Γι αυτό το λόγο από εδώ και πέρα στα προβλήματα προσεγγίσεων θα χρησιμοποιούμε την (1.9) τις περισσότερες φορές. Βοηθάει πολύ στην απόδειξη της ύπαρξης βέλτιστης προσέγγισης όταν ο $\mathbb{A}$ είναι ένας γραμμικός χώρος.

Θεώρημα 1.2. *(Theorem 1.2 από βιβλίο M.J.D.POWELL Approximation theory and methods)Αν* $\mathbb{A}$ *ένας πεπερασμένος γραμμικός χώρος σε ένα γραμμικό χώρο με νόρμα* $\mathbb{B}$ $(\mathbb{B}, \|\cdot\|)$, *τότε για κάθε* $f \in \mathbb{B}$, *υπάρχει ένα στοιχείο του* $\mathbb{A}$ *το οποίο αποτελεί την βέλτιστη προσέγγιση*

Απόδειξη. Έστω $\mathbb{A}_0$ υποσύνολο του $\mathbb{A}$, το οποίο περιέχει τα στοιχεία του $\mathbb{A}$ τα οποία ικανοποιούν τη σχέση:

$$\|a\| \leq 2\|f\| \tag{1.10}$$

Το σύνολο $\mathbb{A}_0$ είναι συμπαγές καθώς είναι μη κενό κλειστό και φραγμένο υποσύνολο ενός πεπερασμένής διάστασης χώρου $\mathbb{A}$. Δεν είναι κενό καθώς για παράδειγμα το 0 εμπεριέχεται μέσα στο σύνολο. Επομένως χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 1.1., γνωρίζουμε ότι υπάρχει βέλτιστη προσέγγιση,a_0^*. Επομένως:

$$\begin{aligned} d(a,f) &\geq d(a_0^*,f) \Leftrightarrow \\ \|a-f\| &\geq \|a_0^*-f\|, \forall a \in \mathbb{A}_0 \end{aligned} \tag{1.11}$$

Τώρα αν το α δεν ανήκει στο $\mathbb{A}_0$ αλλά ανήκει στο $\mathbb{A}$,η (1.10) δεν ισχυεί και έχουμε:

$$\begin{aligned} \|a-f\| &> \|a\|-\|f\| \\ &> \|f\| = \|0-f\| \end{aligned}$$

Επομένως και σε αυτή τη περίπτωση υπάρχει ένα στοιχείο 0 που είναι βέλτιστη προσέγγιση. Επομένως ισχύει ότι είτε το a_0^* είτε το 0 αποτελούν την βέλτιστη προσέγγιση.

Επομένως η (1.11) ικανοποιείται για όλα τα α $\in \mathbb{A}$. □

1.3 Οι νόρμες L_p

Πριν γίνει αναφορά στις νόρμες, θα γίνει ιδιαίτερη αναφορά στους χώρους Hilbert καθώς και στο εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων.

Ορισμός 1.4. *Έστω $\mathbb{X}$ ένας διανυσματικός χώρος.Εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{X}$ είναι μια συνάρτηση:*

$\langle \cdot\,,\cdot \rangle : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}$
με τις ιδιότητες:

(i)$\langle x,x \rangle \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{X}$

(ii)Αν $\langle x,x \rangle = 0$ τότε $x = 0$

(iii)$\langle x,y \rangle = \langle x,y \rangle$, για κάθε $x,y \in \mathbb{X}$

(iv)$\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x,z \rangle + \mu \langle y,z \rangle$, για κάθε $x,y,z \in \mathbb{X}$ και $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$

Οι χώροι Hilbert αποτελούν μια ιδιαίτερη κλάση χώρων Banach. Χώρος Banach καλείται ένας χώρος με νόρμα $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$,όταν είναι πλήρης ως προς τη μετρική που ορίζει η νόρμα. Δηλαδή, αν κάθε ακολουθία Cauchy στον $\mathbb{X}$ συγλίνει σε ένα στοιχείο του. Επανερχόμενοι στον ορισμό των χώρων Hilbert, ένας χώρος Banach λέγεται χώρος Hilbert, αν η νόρμα του ορίζεται από ένα εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{X}$, δηλαδή υπάρχει εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{X}$, ώστε:
$\|x\| = \sqrt{\langle x,x \rangle}$.

Επομένως, ο χώρος Hilbert είναι ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο, ο οποίος είναι πλήρης ως προς τη μετρική που ορίζει το εσωτερικό γινόμενο.
Στα περισσότερα προβλήματα προσεγγίσεων που συναντάμε η f και το $\mathbb{A}$ είναι στο χώρο $\mathscr{C}[a,b]$, ο οποίος αποτελεί το χώρο των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων, οι

οποίες προσδιορίζονται στο διάστημα $[a, b]$. Κάποιες φορές συναντάμε προβλήματα στα οποία η f και το $\mathbb{A}$ βρίσκονται στον χώρο των διανυσμάτων με m-συνιστώσες. Και στις δύο περιπτώσεις οι χώροι είναι γραμμικοί και μπορούμε να επιλέξουμε τις νόρμες. Θα μελετήσουμε τώρα τις πιο χρήσιμες νόρμες για την επίλυση προβλημάτων. Θα ξεκινήσουμε με την περίπτωση οπού το p είναι πεπερασμένο και η L_p βρίσκεται στον χώρο $\mathscr{C}[a, b]$.

$$\|f\|_p = [\int_b^a |f(x)|^p dx]^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p \leq \infty \tag{1.12}$$

Τώρα εξετάζουμε την περίπτωση όπου η l_p βρίσκεται στον χώρο $\mathbb{R}^m$,$y \in \mathbb{R}^m$.

$$\|y\|_p = [\sum_{i=1}^{m} |y_i|^p]^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p \leq \infty \tag{1.13}$$

όπου $\{y_i : i = 1, 2, ..., m\}$ είναι στοιχεία της y. Εν συνεχεία θα δούμε τις ∞-νόρμες αντίστοιχα όταν θα βρίσκονται στον $\mathscr{C}[a, b]$

$$\|f\|_\infty = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| \tag{1.14}$$

και στον $\mathbb{R}^m$

$$\|y\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} |y_i| \tag{1.15}$$

Η 2-νόρμα ή καλύτερα η βεβαρημένη 2-νόρμα με μορφή:

$$\|f\|_2 = [\int_b^a w(x)|f(x)|^2 dx]^{\frac{1}{2}} \tag{1.16}$$

όπου $w(x)$ είναι μια θετική συνάρτηση, βοηθάει πολύ στην μελέτη των χώρων Hlibert που αναφέραμε στην αρχή της ενότητας. Η εφαρμογή της 2-νόρμας είναι αποτελεσματικότερη σε δεδομένα όπου τα σφάλματα έχουν κανονική κατανομή. Όταν ο $\mathbb{A}$ είναι ένας γραμμικός χώρος ο υπολογισμός της βέλτιστης προσέγγισης απο την 2-νόρμα υποβαθμίζει το σύστημα των εξισώσεων σε απλή επίλυση γραμμικών εξισώσεων, κάτι το οποίο επιτρέπει την παραγωγή αποτελεσματικών αλγορίθμων. Τώρα ένας πρακτικός λόγος για να χρησιμοποιήσουμε την ∞-νόρμα είναι, όταν οι υπολογισμοί μας σε μια πολύπλοκη μαθηματική συνάρτηση, έστω f, προσδιορίζονται απο έναν παράγοντα, έστω p, τότε πρέπει να διαβεβαιώσουμε ότι η μέγιστη τιμή του σφάλματος $\{|f(x) - p(x)| : a \leq x \leq b\}$, είναι μικρότερη από μια δεδομένη ποσότητα, η οποία αποτελεί την ακρίβεια της προσέγγισης. Με άλλα λόγια, έχουμε την νόρμα $\|f - p\|_\infty$. Θα παρουσιάσουμε το επόμενο θεώρημα για να γίνει πιο σαφές το παραπάνω.

Θεώρημα 1.3. *(Theorem 1.3 από βιβλίο M.J.D.POWELL Approximation theory and methods) Για κάθε e στο* $\mathscr{C}[a, b]$ *ισχύουν οι παρακάτω ανισότητες*

$$\|e\|_1 \leq (b - a)^{\frac{1}{2}} \|e\|_2 \leq (b - a) \|e\|_\infty \tag{1.17}$$

Απόδειξη. Θα γίνει χρήση της ανισότητας Cauchy-Schwarz:

$$\|e\|_1 = \int_a^b |e(x)||1|dx \leq [\int_a^b |e(x)|^2 dx]^{\frac{1}{2}} [\int_a^b dx]^{\frac{1}{2}} = (b-a)^{\frac{1}{2}} \|e\|_\infty \Rightarrow$$

$$\|e\|_1 \leq (b-a)^{\frac{1}{2}} \|e\|_2 \tag{1.18}$$

και εδώ αποδείξαμε το πρώτο κομμάτι των ανισοτήτων. Τώρα θα δούμε το δεύτερο κομμάτι:

$$\|e\|_2 = [\int_a^b |e(x)|^2]^{\frac{1}{2}} dx \leq [\int_a^b \|e\|_\infty^2 dx]^{\frac{1}{2}} = (b-a)^{\frac{1}{2}} \|e\|_\infty \Rightarrow$$

$$\|e\|_2 \leq (b-a)^{\frac{1}{2}} \|e\|_\infty \tag{1.19}$$

□

Η ποσότητα e, του προηγούμενου θεωρήματος αποτελεί το σφάλμα προσέγγισης και είναι ίσο με $\{f(x) - p(x)\}$. Θα δούμε τώρα ένα παράδειγμα για την σταθερή συνάρτηση $f = \{f(x) = 1 : 0 \leq x \leq 1\}$ και $\{p = x^\lambda : 0 \leq x \leq 1\}$,όπου λ>0.
Επομένως, $e(x) = \{|f(x) - p(x)| = |1 - x^\lambda| : 0 \leq x \leq 1\}$ και έχουμε:

$$\begin{aligned}
\|e\|_1 &= \int_0^1 |f(x) - p(x)| \\
&= \int_0^1 |1 - x^\lambda dx| = \left[x - \frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1}\right]_0^1 \\
&= 1 - \frac{1}{\lambda+1} + 0 - 0 = \frac{\lambda+1-1}{\lambda+1} = \frac{\lambda}{\lambda+1} \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\|e\|_1 = \frac{\lambda}{\lambda+1} \tag{1.20}$$

Για την νόρμα-2 έχουμε:

$$\begin{aligned}
\|e\|_2 &= \left[\int_0^1 |f(x) - p(x)|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\int_0^1 |1 - x^\lambda|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \left[\int_0^1 (1 + x^{2\lambda} - 2x\lambda) dx\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \left[\left[x + \frac{1}{2\lambda+1} x^{2\lambda+1} - \frac{2}{\lambda+1} x^{\lambda+1}\right]_0^1\right]^{\frac{1}{2}} = \left[1 + \frac{1}{2\lambda+1} - \frac{2}{\lambda+1} - 0 - 0 + 0\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \left[\frac{(2\lambda+1)(\lambda+1) + \lambda + 1 - 2(2\lambda+1)}{(2\lambda+1)(\lambda+1)}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{2\lambda^2 + 2\lambda + \lambda + 1 + \lambda + 1 - 4\lambda - 2}{(2\lambda+1)(\lambda+1)}\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \left[\frac{2\lambda^2}{(2\lambda+1)(\lambda+1)}\right]^{\frac{1}{2}} \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\|e\|_2 = \left[\frac{2\lambda^2}{(2\lambda+1)(\lambda+1)}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{1.21}$$

Τέλος θα δούμε την ∞-νόρμα

$$\|e\|_\infty = \|f - p\|_\infty = \max_{0\leq x\leq 1}|f(x) - p(x)| = \max_{0\leq x\leq 1}|1 - x^\lambda| = 1 \Rightarrow$$
$$\|e\|_\infty = 1 \tag{1.22}$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι όταν το λ γίνει πολύ μικρό, τότε οι $\|e\|_1$ και η $\|e\|_2$ τείνουν στο 0, εν αντιθέση η $\|e\|_\infty$ παραμένει 1. Συνεπώς δεν είναι πάντα εφικτό να ελαχιστοποιήσουμε την άπειρη νόρμα ενός σφάλματος με το να μικρύνουμε την 1 ή την 2 νόρμα. Προκειμένου να φτίαξουμε αλγόριθμους που να μας δίνουν προσεγγίσεις με μικρό σφάλμα στην 1,2,∞-νόρμα, πρέπει να είμαστε βεβαίοι ότι ο αλγόριθμος είναι κατάλληλος για την ∞-νόρμα.Η ∞ κάποιες φορές καλείται minimax νόρμα και η 2-νόρμα καλείται Ευκλείδια νόρμα.

Τέλος θα δώσουμε δύο πολύ χρησίμες ανισότητες οι οποίες θα μας φανούν ιδιαίτερα χρήσιμες σε αρκετές εφαρμογές. Αυτές είναι οι ανισότητες Hölder και Minkowski και θα δούμε και τις αποδείξεις τους. Μία πολύ χρήσιμη ανίσωση η οποία θα μας χρειαστεί για τις δύο παρακάτω αποδείξεις είναι αυτή της ανισότητας Young και την παρουσίαζουμε πριν τις άλλες δύο ανισώσεις.

Ορισμός 1.5. *(**Ανίσωση Young**) Αν $p > 1$ και $q > 1$ είναι συζυγείς εκθέτες, δηλαδή $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ τότε:*

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}, \forall x, y \leq 0$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $x^p = y^q$

Τώρα παρουσιάζουμε την ανισότητα Hölder

Ορισμός 1.6. *(**Ανίσωση Hölder**) Αν $n \in N$ και $x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n \in \mathbb{R}$. Έστω $p > 1, q > 1$ συζυγής εκθέτες. Τότε:*

$$|\sum_{i=1}^n x_i y_i| \leq (\sum_{i=1}^n |x_i|)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^n |y_i|)^{\frac{1}{q}}$$

Απόδειξη. Αφού $|\sum_{i=1}^n x_i y_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|\ |y_i|$ αρκεί να δείξουμε ότι $\sum_{i=1}^n |x_i|\ |y_i| \leq (\sum_{i=1}^n |x_i|)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^n |y_i|)^{\frac{1}{q}}$. Θέτουμε $A = (\sum_{i=1}^n |x_i|)^{\frac{1}{p}}$ και $B = (\sum_{i=1}^n |y_i|)^{\frac{1}{q}}$. Αν είτε A=0 είτε B=0 η ανιστότητα ισχύει τετριμένα αφού είτε $x_i = 0\ \forall i \in \mathbb{N}$ είτε $y_i = 0\ , \forall\ i \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $A > 0$ και $B > 0$. Πρέπει να δείξουμε ότι:

$$|\sum_{i=1}^n x_i y_i| \leq AB$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα Young για τους αριθμούς:$\frac{x_i}{A}, \frac{y_i}{B}, i = 0, 1, ..., n$ παίρνουμε ότι:

$$|\frac{x_i}{A}|\ |\frac{y_i}{B}| \leq \frac{1}{p}|\frac{x_i}{A}|^p\ \frac{1}{q}|\frac{y_i}{B}|^q, \forall i = 1, ..., n$$

Αθροίζοντας κατά μέλη έχουμε:

$$\sum_{i=1}^n \frac{|x_i|\ |y_i|}{AB} \leq \frac{1}{p}\frac{1}{A^p}\sum_{i=1}^n |x_i|^p + \frac{1}{q}\frac{1}{B^q}\sum_{i=1}^n |y_i|^q$$

Όμως, εξ ορισμού $A^p = \sum_{i=1}^n |x_i|^p$ και $B^q = \sum_{i=1}^n |y_i|^q$. Συνεπώς το δεξί μέλος γίνεται, $\frac{1}{p}\frac{1}{A^p}A^p + \frac{1}{q}\frac{1}{B^q}B^q$. Συνεπώς:

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \frac{1}{AB} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq AB$$

δηλαδή ισχύει η ανισότητα Hölder □

Τέλος παρουσιάζουμε την ανισότητα Minkowski.

Ορισμός 1.7. ***(Ανίσωση Minkowski)*** *Αν* $p \geq 1$ *και* $n \in \mathbb{N}$ *και* $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n \in \mathbb{R}$ *τότε ισχύει η ανισότητα:*

$$(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i=1}^n |y_i|^p)^{\frac{1}{p}}$$

Απόδειξη. Για $p = 1$ η ανισότητα Minkowski είναι η γνωστή τριγωνική ανισότητα για πραγματικούς αριθμούς αφού:$|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i| \forall i = 1, ..., n \Rightarrow (\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i=1}^n |y_i|^p)^{\frac{1}{p}}$.
Στην περίπτωση που $p > 1$ θεωρούμε το συζυγή εκθέτη $q > 1$ του p. Δηλαδή:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} \Rightarrow q = \frac{p}{p-1}$$

Συνεπώς κάνοντας χρήση τριγωνικής ανισότητας έχουμε:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p &= \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \ |x_i + y_i|^{p-1} \leq \sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|)^p \ |x_i + y_i|^{p-1} \\
&= \sum_{i=1}^n (|x_i| \ |x_i + y_i|^{p-1} + |y_i| \ |x_i + y_i|^{p-1})^p \Rightarrow \\
\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p &\leq \sum_{i=1}^n |x_i| \ |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i| \ |x_i + y_i|^{p-1}
\end{aligned}$$

Εφαρμόζουμε την ανισότητα Hölder για τους εκθέτες p, q δύο φορές και έχουμε:

$$\sum_{i=1}^n |x_i| \ |x_i + y_i|^{p-1} \leq (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} ((\sum_{i=1}^n (|x_i + y_i|^{p-1}))^q)^{\frac{1}{q}}$$

και

$$\sum_{i=1}^n |y_i| \ |x_i + y_i|^{p-1} \leq (\sum_{i=1}^n |y_i|^p)^{\frac{1}{p}} ((\sum_{i=1}^n (|x_i + y_i|^{p-1}))^q)^{\frac{1}{q}}$$

Επομένως έχουμε:

$$\sum_{i=1}^n |x_i| \ |x_i + y_i|^{p-1} \leq (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^n (|x_i + y_i|^{(p-1)q})^{\frac{1}{q}}$$

και

$$\sum_{i=1}^{n} |y_i|\ |x_i + y_i|^{p-1} \leq (\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^{n} (|x_i + y_i|^{(p-1)q})^{\frac{1}{q}}$$

Όμως p, q είναι συζυγής εκθέτες, επομένως $pq = p + q \Rightarrow (p-1)q = p$. Επομένως:

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \leq (\sum_{i=1}^{n} |x_i|)^p (\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p)^{\frac{1}{q}} + (\sum_{i=1}^{n} |y_i|)^p (\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p)^{\frac{1}{q}}$$

όπου $\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| = \Gamma$. Διαιρόντας και τα δύο μέλη με Γ και αφού $\Gamma^p = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p$ συνεπάγεται ότι:

$$(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p)^{\frac{1}{p}}$$

□

Όμοια ακριβώς αποτελέσματα έχουμε όταν βρισκόμαστε στο χώρο των ολοκληρωσίμων συναρτήσεων και ισχύουν με τον ίδιο τρόπο οι ανισότητες.

1.4 Παραδείγματα

Τέλος, θα παρουσιάσουμε κάποια παραδείγματα προκειμένου να γίνουν κατανοήτα όσα μελετήσαμε στο παρών κεφάλαιο.

Παράδειγμα 1:Έστω $\mathbb{A}_0$ ένα συμπαγές σύνολο και $\mathbb{A}_1$ ένας πεπερασμένης διάστασης γραμμικός χώρος, οι οποίοι βρίσκονται μέσα σε ένα γραμμικό χώρο με νόρμα $\mathbb{B}$. Αποδείξτε οτι υπάρχει $a_0^* \in \mathbb{A}_0$ και $a_1^* \in \mathbb{A}_1$ έτσι ώστε να ισχύει η σχέση:

$$\|a_0^* - a_1^*\| \leq \|a_0 - a_1\|, \quad a_0 \in \mathbb{A}_0, \quad a_1 \in \mathbb{A}_1 \tag{1.23}$$

Λύση

Από το Θεώρημα 1.1 υπάρχει $a_0^* \in \mathbb{A}_0$,για κάθε $a_0 \in \mathbb{A}_0$ τέτοιο ώστε:

$$\|a_0^* - a_1\| \leq \|a_0 - a_1\|, a_1 \in \mathbb{B} \tag{1.24}$$

Τώρα απο το Θεώρημα 1.2 υπάρχει a_1^*, για κάθε $a_1 \in \mathbb{A}_1$, τέτοιο ώστε:

$$\|a_1^* - a_0\| \leq \|a_1 - a_0\|, a_0 \in \mathbb{B} \tag{1.25}$$

Παίρνουμε το αριστερό μέλος της ανίσωσης της οποίας θέλουμε να αποδείξουμε και κάνοντας χρήση της τριγωνικής ανισότητας καθώς και της μετρικής του χώρου(σε αυτή την περίπτωση είναι η νόρμα) έχουμε:

$$\begin{aligned} \|a_0^* - a_1^*\| &= \|a_0^* - a_1^* - a_1 + a_1 - a_0 + a_0\| \\ &\leq \|a_0^* - a_0\| + \|a_1 - a_1^*\| + \|a_0 - a_1\| \\ &= 0 + 0 + \|a_0 - a_1\| = \|a_0 - a_1\| \end{aligned}$$

Επομένως αποδείξαμε ότι

$$\|a_0^* - a_1^*\| \leq \|a_0 - a_1\|$$

για $a_1 \in \mathbb{A}_1$ και $a_0 \in \mathbb{A}_0$

Παράδειγμα 2:Να αποδειχθεί οτι η σχέση (1.13) ικανοποιεί τα αξιώματα τις νόρμας στις τρεις περιπτώσεις όπου $p = 1, 2, 4$ στο $\mathscr{C}\,[a, b]$

Λύση

Για την απόδειξη του παραδείγματος θα γίνει χρήση της ανισότητας Minkowski. Ξεκινάμε με την πρώτη περίπτωση όπου το $p = 1$ και $f, g \in \mathscr{C}\,[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, δύο συνεχείς συναρτήσεις, τότε:

$$\|f\|_1 = (\int_a^b |f(x)|dx)^1 = \int_a^b |f(x)|dx$$

Τώρα, θα δείξουμε οτι ικανοποιεί τα αξιώματα της νόρμας:

$$\begin{aligned}(i) \quad \|f+g\|_1 &= \int_a^b |f(x)+g(x)|dx \leq \int_a^b |f(x)|dx + \int_a^b |g(x)|dx \\ &= \|f(x)\|_1 + \|g(x)\|_1\end{aligned}$$

Τώρα για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in \mathscr{C}\,[a, b]$:

$$\begin{aligned}(ii) \quad \|\lambda f\|_1 &= (\int_a^b |\lambda f(x)|^1 dx)^1 = \int_a^b |\lambda||f(x)|dx = |\lambda| \int_a^b |f(x)|dx \\ &= |\lambda| \; \|f(x)\|_1\end{aligned}$$

$$(iii) \quad \|f\|_1 = 0 \Leftrightarrow \int_a^b |f(x)|dx = 0 \Leftrightarrow f = 0$$

Για $p = 2$ έχουμε:

$$\|f\|_2 = (\int_a^b |f(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned}(i) \quad \|f+g\|_2 &= (\int_a^b |f(x)+g(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}} \leq (\int_a^b |f(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}} + (\int_a^b |g(x)|^2) dx)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|f\|_2 + \|g\|_2\end{aligned}$$

Τώρα για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in \mathscr{C}\,[a, b]$:

$$\begin{aligned}(ii) \quad \|\lambda \; f|_2 &= (\int_a^b |\lambda f(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}} = (\int_a^b |\lambda|^2 \; |f(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}} = (|\lambda|^2)^{\frac{1}{2}} (\int_a^b |f(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}} \\ &= |\lambda| (\int_a^b |f(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}} = |\lambda| \; \|f\|_2\end{aligned}$$

$$(iii) \|f\|_2 = 0 \Leftrightarrow (\int_a^b |f(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}} = 0 \Leftrightarrow |f(x)|^2 = 0 \Leftrightarrow f = 0$$

Τέλος για $p = 4$:

$$\|f\|_4 = (\int_a^b |f(x)^4|)^{\frac{1}{4}}$$

$$\begin{aligned}(i)\quad \|f+g\|_4 &= (\int_a^b |f(x)+g(x)|^4 dx)^{\frac{1}{4}} \leq (\int_a^b |f(x)|^4 dx)^{\frac{1}{4}} + (\int_a^b |g(x)|^4)dx)^{\frac{1}{4}} \\ &= \|f\|_4 + \|g\|_4\end{aligned}$$

Τώρα για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in \mathscr{C}\,[a,b]$:

$$\begin{aligned}(ii)\quad \|\lambda\, f\|_4 =&(\int_a^b |\lambda f(x)|^4 dx)^{\frac{1}{4}} = (\int_a^b |\lambda|^4\ |f(x)|^4 dx)^{\frac{1}{4}} = (|\lambda|^4)^{\frac{1}{4}}(\int_a^b |f(x)|^4 dx)^{\frac{1}{4}} \\ =&|\lambda|(\int_a^b |f(x)|^4 dx)^{\frac{1}{4}} = |\lambda|\ \|f\|_4\end{aligned}$$

$$(iii)\quad \|f\|_4 = 0 \Leftrightarrow (\int_a^b |f(x)|^4 dx)^{\frac{1}{4}} = 0 \Leftrightarrow |f(x)|^4 = 0 \Leftrightarrow f = 0$$

Επομένως, τα αξιώματα της νόρμας αποδεικνύονται και για τις τρείς περιπτώσεις.

Παράδειγμα 3:Έστω $\|f\|_1$ και $\|f\|_2$ οι νόρμες 1 και 2 αντίστοιχα μιας συνάρτησης $f \in \mathscr{C}\,[a,b]$. Να κατασκευαστεί παράδειγμα προκειμένου το κλάσμα $\frac{\|f\|_2}{\|f\|_1}$ να αυξάνει αυθαίρετα.

Λύση

Ένα παράδειγμα το οποίο μας δείχνει οτι το κλάσμα αυτό αυξάνει αυθαίρετα είναι αν χρησιμοποιήσουμε την συνάρτηση $f(x) = x^\lambda$, $0 \leq x \leq 1$ και λ μια θετική παράμετρος. Υπολογίζουμε αρχικά κάθε νόρμα ξεχωριστά και έχουμε:

$$\begin{aligned}\|f\|_2 &= \left[\int_0^1 (x^\lambda)^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\left[\frac{1}{2\lambda+1}x^{2\lambda+1}\right]_0^1\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\lambda+1}(1^{2\lambda+1}-0)} = \sqrt{\frac{1}{2\lambda+1}}\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\|f\|_1 &= \int_0^1 (x^\lambda) dx \\ &= \frac{1}{\lambda+1}\left[x^{\lambda+1}\right]_0^1 = \frac{1}{\lambda+1}\end{aligned}$$

Επομένως αν πάρουμε τώρα το πηλίκο των δύο νορμών έχουμε:

$$\frac{\|f\|_2}{\|f\|_1} = \frac{\lambda+1}{\sqrt{2\lambda+1}}$$

Παρατηρούμε όμως οτι το πηλίκο αυτό αυξάνεται όσο αυξάνεται και το λ και μάλιστα όταν το λ τείνει στο ∞ τότε και το πηλίκο αυτό τείνει στο ∞.

Κεφάλαιο 2

Η μοναδικότητα της βέλτιστης προσέγγισης

2.1 Συνθήκες κυρτότητας

Στο προηγούμενο κεφάλαιο, μελετήσαμε τις βέλτιστες προσεγγίσεις με την βοήθεια της συνάρτησης απόστασης $d(x, y) = \|x - y\|$ σε ένα γραμμικό χώρο με νόρμα. Η συγκεκριμένη μελέτη μας δίνει ένα καλό αποτέλεσμα, αλλά με την χρήση άλλων μαθηματικών εργαλείων μπορούμε να πάρουμε καλύτερα αποτελέσματα. Σ' αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε την μοναδικότητα εξαρτώμενη απο την κυρτότητα μιας συνάρτησης αποστάσεως και την κυρτότητα του συνόλου $\mathbb{A}$. Αρχικά θα δώσουμε τον ορισμό της κυρτότητας ενός συνόλου σε έναν γραμμικό χώρο.

Ορισμός 2.1. *Το σύνολο $\mathbb{L}$ ενός γραμμικού χώρου είναι κυρτό, αν για κάθε $s_0, s_1 \in \mathbb{L}$ ισχύει:*

$$\{\theta s_0 + (1 - \theta)s_1 : 0 \leq \theta \leq 1\} \in \mathbb{L}$$

Ακόμη, ένα σύνολο $\mathbb{L}$ είναι αυστηρά κυρτό, αν για κάθε $s_0, s_1 \in \mathbb{L}$ ισχύει ότι τα σημεία:

$$\{\theta s_0 + (1 - \theta)s_1 : 0 < \theta < 1\}$$

είναι εσωτερικά σημεία του διαστήματος $\mathbb{L}$
Η γεωμετρική ερμηνεία στις προσεγγίσεις είναι οι μπάλες $N(f, r)$ και ανάλογα με την διακύμανση της ακτίνας έχουμε και την βέλτιστη προσέγγιση στην μπάλα με την μικρότερη ακτίνα. Στο θεώρημα το οποίο θα παρουσιάσουμε τώρα θα δείξουμε ότι οι μπάλες είναι κυρτά σύνολα

Θεώρημα 2.1. *(Theorem 2.1 από βιβλίο M.J.D.POWELL Approximation theory and methods) Έστω $\mathbb{B}$ ένας γραμμικός χώρος με νόρμα $(\mathbb{B}, \|\cdot\|)$. Τότε για κάθε $f \in \mathbb{B}$ και $r > 0$ η μπάλα:*

$$N(f, r) = \{x : \|x - f\| \ \leq r, \ x \in \mathbb{B}\} \tag{2.1}$$

είναι κυρτή

Απόδειξη. Έστω $x_0, x_1 \in N(f, r)$. Τότε για κάθε ϑ: $0 \leq\vartheta\leq 1$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \|\theta x_0 - (1-\theta)x_1 - f\| &\leq \|\theta x_0 - \theta f\| + \|(1-\theta)x_1 - (1-\theta)f\| \\ &= |\theta|\ \|x_0 - f\| + |1-\theta|\ \|x_1 - f\| \\ &\leq r\{|\theta| + |1-\theta|\} = r\{\theta + 1 - \theta\} = r \end{aligned}$$

αφού $0 \leq \theta \leq 1$, οι ποσότητες στα δύο απόλυτα είναι θετικές ποσότητες. Συνεπώς:

$$\|\theta x_0 - (1-\theta)x_1 - f\| \leq r,\ 0 \leq \theta \leq 1 \tag{2.2}$$

□

Θα δούμε ακόμη ένα θεώρημα, πού βασικό για τις βέλτιστες προσεγγίσεις:

Θεώρημα 2.2. *(Theorem 2.2 από βιβλίο M.J.D.POWELL Approximation theory and methods) Έστω $\mathbb{A}$, ένα κυρτό σύνολο σε ένα γραμμικό χώρο με νόρμα $\mathbb{B}$ και θέτω f ως κάθε στοιχείο του $\mathbb{B}$ τέτοιο ώστε να υπάρχει η βέλτιστη προσέγγιση απο το $\mathbb{A}$ στην f. Τότε το σύνολο των βέλτιστων προσεγγίσεων είναι κυρτό.*

Απόδειξη. Έστω h^* το σφάλμα της βέλτιστης προσέγγισης:

$$h^* = \min_{\alpha\in\mathbb{A}} \|a - f\| \tag{2.3}$$

Το σύνολο των βέλτιστων προσεγγίσεων είναι η τομή του $\mathbb{A}$ και της μπάλας $N(f, h^*)$. Το ορίζουμε ως $\mathbb{H} = \mathbb{A} \cap N(f, h^*)$. Όμως το σύνολο $\mathbb{H}$ είναι κυρτό, αφού εξ ορισμού το σύνολο $\mathbb{A}$ είναι κυρτό και η μπάλα $N(f, h^*)$ είναι κυρτή, καθώς γνωρίζουμε οτι η ένωση δύο κυρτών συνόλων αποτελεί κυρτό σύνολο. □

Ακόμη, σε ένα γραμμικό χώρο με νόρμα, η νόρμα είναι αυστηρά κυρτή, αν και μόνο αν η μοναδιαία μπάλα $N(0, 1)$ είναι αυστηρά κυρτή.

2.2 Συνθήκες για την μοναδικότητα της βέλτιστης προσέγγισης

Από το προηγούμενο κεφάλαιο, γνωρίζουμε οτι μια μπάλα με κέντρο το f, μπορεί να μεγαλώνει μεχρί να ακουμπήσει το σύνολο $\mathbb{A}$ των προσεγγιστικών συναρτήσεων και τότε η ακτίνα παίρνει την τιμή

$$h^* = \min_{\alpha\in\mathbb{A}} \|a - f\|, f \notin \mathbb{A}.$$

Παρουσιάζουμε δύο σημαντικά θεώρήματα ύπαρξης μοναδικής βέλτιστης προσέγγισης.

Θεώρημα 2.3. *(Theorem 2.3 από βιβλίο M.J.D.POWELL Approximation theory and methods) Έστω $\mathbb{A}$ ένα συμπαγές και αυστηρά κυρτό σύνολο σε ένα γραμμικό χώρο με νόρμα $(\mathbb{B}, \|\cdot\|)$. Τότε για κάθε $f \in \mathbb{B}$ υπάρχει μια βέλτιστη προσέγγιση απο το $\mathbb{A}$ στην f.*

Απόδειξη. Από το θεώρημα 1.1 υπάρχει μια βέλτιστη προσέγγιση. Θέτω:

$$h^* = \min_{a \in \mathbb{A}} \|a - f\|$$

ως το σφάλμα της βέλτιστης προσέγγισης. Έστω s_0, s_1 δύο διαφορετικές βέλτιστες προσεγγίσεις απο το $\mathbb{A}$ στην f. Από την τριγωνική ανισότητα για τις νόρμες έχω:

$$\|\frac{1}{2}(s_0 + s_1) - f\| \leq \frac{1}{2}\|s_0 - f\| + \frac{1}{2}\|s_1 - f\| \tag{2.4}$$

Επειδή το $\mathbb{A}$ είναι κυρτό, έχουμε οτι ο παράγοντας $\frac{1}{2}(s_0 + s_1)$, αποτελεί μια βέλτιστη προσέγγιση και ικανοποιεί την σχέση:

$$\|\frac{1}{2}(s_0 + s_1) - f\| = h^* \tag{2.5}$$

Έστω λ ο μέγιστος αριθμός του διαστήματος $0 \leq \lambda \leq 1$ τέτοιος ώστε το σημείο:

$$s = \frac{1}{2}(s_0 + s_1) + \lambda \left[f - \frac{1}{2}(s_0 + s_1) \right] \tag{2.6}$$

να βρίσκεται στο σύνολο $\mathbb{A}$ Ακόμη:

$$\begin{aligned} \|s - f\| &= \|\frac{1}{2}(s_0 + s_1) + \lambda f - \frac{1}{2}\lambda(s_0 + s_1) - f\| \\ &= \|\frac{1}{2}(s_0 + s_1)(1 - \lambda) + f(\lambda - 1)\| \\ &= \|\frac{1}{2}(s_0 + s_1) - f\| \, |1 - \lambda| \end{aligned}$$

και κάνοντας χρήση της (2.5) έχουμε:

$$\|s - f\| = h^*(1 - \lambda) > 0$$

Η ποσότητα h^* είναι θετική, γιατί σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση $s_0 = f = s_1$ και το λ είναι θετικό επειδή η αυστηρή κυρτότητα του $\mathbb{A}$ μας δίνει ότι το σημείο $\frac{1}{2}(s_0 + s_1)$ είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{A}$. Από την τελευταία σχέση βλέπουμε οτι $\|s - f\|$ είναι μικρότερο του h^* καθώς $(1-\lambda)h^* < h^*$. Άτοπο, επομένως τα σημεία s_0, s_1 ταυτίζονται και έχουμε μια μοναδική βέλτιστη προσέγγιση. □

Θεώρημα 2.4. *(Theorem 2.4 από βιβλίο M.J.D.POWELL Approximation theory and methods) Έστω $\mathbb{A}$ ένα κυρτό σύνολο σε ένα γραμμικό χώρο με νόρμα $\mathbb{B}$, του οποίου η νόρμα είναι αυστηρά κυρτή. Τότε για όλα τα $f \in \mathbb{B}$ υπάρχει το πολύ μία βέλτιστη προσέγγιση απο το $\mathbb{A}$ στην f*

Απόδειξη. Έστω s_0, s_1,όπου$(s_0 \neq s_1)$ δύο διαφορετικές βέλτιστες προσεγγίσεις. Από την αυστηρή κυρτότητα της νόρμας, το σύνολο $N(f, h^*)$ είναι αυστηρά κυρτό και το σημείο $\frac{1}{2}(s_0 + s_1)$ είναι εσωτερικό του $N(f, h^*)$. Επομένως:

$$\|\frac{1}{2}(s_0 + s_1) - f\| < h^* \tag{2.7}$$

Άτοπο, καθώς το $\frac{1}{2}(s_0 + s_1)$ βρίσκεται στο εσωτερικό του συνόλου $\mathbb{A}$ □

Το θεώρημα 2.4 είναι χρησιμότερο απο το θεώρημα 2.3 καθώς τα σύνολα προσεγγίσεων είναι πεπερασμένοι γραμμικοί χώροι. Παρακάτω θα δούμε οτι η 2-νόρμα ($\|\cdot\|_2$) είναι αυστηρά κυρτή στον $\mathscr{C}[a, b]$ και αντίστοιχα στον $\mathbb{R}^m$, αλλά η ένα και η άπειρη νόρμα δεν είναι. Θα το γενικεύσουμε και θα δούμε οτι όλες οι p-νόρμες είναι αυστηρά κυρτές για p: $1 < p < \infty$

2.3 Η συνέχεια των βέλτιστων προσεγγιστικών τελεστών

Όταν υπάρχει μια μοναδική βέλτιστη προσέγγιση απο το $\mathbb{A}$ για όλες τις $f \in \mathbb{B}$,μπορούμε να θεωρήσουμε τη βέλτιστη προσέγγιση ως συνάρτηση της f. Συνεπώς υπάρχει τελεστής βέλτιστης προσέγγισης, $X : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{A}$, ο οποίος πρέπει να είναι μία προβολή. Θα δείξουμε παρακάτω οτι ο X είναι συνεχής.

Θεώρημα 2.5. *(Theorem 2.5 από βιβλίο M.J.D.POWELL Approximation theory and methods) Έστω $\mathbb{A}$ ένα συμπαγές σύνολο σ'ένα μετρικό χώρο με νόρμα $\mathbb{B}$ τέτοιο ώστε για κάθε $f \in \mathbb{B}$, να υπάρχει μια βέλτιστη προσέγγιση στο $\mathbb{A}$, έστω $X(f)$. Τότε ο τελεστής X, ο οποίος προσδιορίζεται απο την συνθήκη βέλτιστης προσέγγισης είναι συνεχής.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε οτι δεν ισχύει το θεώρημα, θα υπάρχει μία ακολουθία σημείων $\{f_i : i = 1, 2, ..\}$ στο $\mathbb{B}$, η οποία συγκλίνει σ'ένα όριο, έστω f, τέτοιο ώστε η ακολουθία $\{X(f_i) : i = 1, 2, ..\} \in \mathbb{A}$ να μην συγκλίνει στο $X(f)$. Όμως, από την συμπάγεια η $\{X(f_i)_i = 1, 2...\}$έχει ένα σημείο σύγκλισης, έστω $a^* \in A$. Αν δείξουμε ότι a^* είναι και αυτό βέλτιστη προσέγγιση της f θα καταλήξουμε σε άτοπο. Προσδιορίζουμε την απόσταστη $d(a^*, f)$ και εφαρμόζοντας δύο φορές την τριγωνική ανισότητα έχουμε:

$$d(a^*, f) \leq d(a^*, X(f_i)) + d(X(f_i), f_i) + d(f_i, f) \tag{2.8}$$

Όμως:

$$\begin{aligned} &d(X(f_i), f_i) \leq d(X(f), f_i) \leq d(X(f), f) + d(f, f_i) \Rightarrow \\ &d(X(f_i), f_i) \leq d(X(f), f) + d(f, f_i) \end{aligned} \tag{2.9}$$

Επομένως η (2.8) από την παραπάνω σχέση γίνεται:

$$d(a^*, f) \leq d(a^*, X(f_i)) + d(f, f_i) + d(f, f_i) + d(X(f), f)$$

Τώρα για κάθε ε,υπάρχει ένα i τέτοιο ώστε να ισχύουν:

$$d(X(f_i), a^*) = d(a^*, X(f_i)) \leq \frac{1}{3}\epsilon \tag{2.10}$$

και

$$d(f_i, f) \leq \frac{1}{3}\epsilon \tag{2.11}$$

Επομένως απο τις δύο παραπάνω (2.10) και (2.11) έχουμε

$$d(a^*, f) \leq \frac{1}{3}\epsilon + \frac{1}{3}\epsilon + \frac{1}{3}\epsilon + d(X(f), f) = d(X(f), f) + \epsilon \tag{2.12}$$

Εφόσον το ϵ μπορεί να γίνει πολύ μικρό, το a^* αποτελεί την βέλτιστη προσέγγιση από το $\mathbb{A}$ στην f. Άτοπο.

□

2.4 Οι 1,2 νόρμες και η ∞-νόρμα

Η μέθοδος η οποία χρησιμοποιούμε για να αποδείξουμε οτι η 2-νόρμα είναι αυστηρά κυρτή στο $\mathscr{C}[a,b]$ και στον $\mathbb{R}^n$, είναι η χρήση εσωτερικών γινομένων. Το εσωτερικό γινόμενο για $y,z \in \mathbb{R}^n$ έχει την τιμή:

$$\langle y,z\rangle = \sum_{i=1}^{n} y_i z_i \tag{2.13}$$

και στον $\mathscr{C}[a,b]$ για τις ποσότητες f,g είναι:

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx \tag{2.14}$$

Είναι χρήσιμο να γνωρίζουμε οτι $\langle f,f\rangle$ είναι ίσο με $\|f\|_2^2$
Ακόμα:

$$\|f+g\|_2^2 = \|f\|_2^2 + 2\langle f,g\rangle + \|g\|_2^2 \tag{2.15}$$

Η παραπάνω εξίσωση ισχύει και για $f,g \in \mathscr{C}[a,b]$ και $f,g \in \mathbb{R}^n$. Ακόμα ισχύει και για τους χώρους Hilbert, τους οποίους παρουσιάσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Σημειώνουμε ακόμα οτι το εσωτερικό γινόμενο $\langle f,g\rangle$ είναι γραμμικό στην f,g.
Παρουσιάζουμε τώρα ένα θεώρημα για να δείξουμε την αυστηρή κυρτότητα των χώρων $\mathbb{R}^n$ και $\mathscr{C}[a,b]$

Θεώρημα 2.6. *(Theorem 2.7 από βιβλίο M.J.D.POWELL Approximation theory and methods) Η 2-νόρμα ενός γραμμικού χώρου με νόρμα $(\mathbb{B},\|\cdot\|)$είναι αυστηρά κυρτή όταν ο $\mathbb{B}$ είναι ο $\mathscr{C}[a,b]$ ή ο $\mathbb{R}^n$.*

Απόδειξη. Έστω f,g δύο ξεχωριστά σημεία του $\mathbb{B}$ $(f \neq g)$ τέτοια ώστε $\|f\|_2^2$=$\|g\|_2^2$=1
Θα δείξουμε οτι:

$$\|\theta f + (1-\theta)g\|_2 < 1 \tag{2.16}$$

ικανοποιείται για όλα τα $0<\theta<1$. Επομένως έχουμε:

$$\begin{aligned}&\|\theta f + (1-\theta)g\|_2^2 + \theta(1-\theta)\|f-g\|_2^2\\ =&|\theta^2|\ \|f\|_2^2 + 2\theta(1-\theta)\langle f,g\rangle + |(1-\theta)^2|\ \|g\|_2^2 + \theta(1-\theta)(\|f\|_2^2 + 2\langle f,g\rangle + \|g\|_2^2\end{aligned}$$

Όμως $\|f\|_2^2 = \|g\|_2^2 = 1$, επομένως:

$$\theta^2 1 + 2\theta(1-\theta)\langle f,g\rangle + (1-\theta)^2 1 + \theta(1-\theta) - 2\theta(1-\theta)\langle f,g\rangle + (1-\theta)$$

$$\begin{aligned}&= \theta^2 + (1-\theta)^2 + \theta(1-\theta) + (1-\theta)\theta\\ &= \theta^2 + 1 - 2\theta + \theta^2 + \theta - \theta^2 + \theta - \theta = 1\end{aligned}$$

το οποίο ισχύει για όλες τις τιμές του θ. Επομένως, ισχύει το ζητούμενο

□

Παρατηρούμε οτι η 1, ∞-νόρμα δεν είναι αυστηρά κυρτές στο $\mathscr{C}[a,b]$ και στον $\mathbb{R}^n$. Τώρα θέλουμε να δούμε αν οι βέλτιστες προσεγγίσεις από γραμμικούς υπόχωρους είναι πάντα μοναδικές. Αν δείξω οτι οι νόρμες δεν είναι αυστηρά κυρτές τότε απο το

θεώρημα 2.6 δεν μπορεί να μου δώσει απάντηση αν ισχύει ή όχι η μοναδικότητα. Αντιθέτως αν δείξω οτι η νόρμα ενός γραμμικού υπόχωρου δεν είναι μοναδική τότε απο το θεώρημα 2.6 η νόρμα δεν είναι αυστηρά κυρτή.
Θα εξετάσουμε τώρα ορισμένα παραδείγματα. Σε κάθε παράδειγμα το οποίο θα εξετάσουμε υπάρχει ένας γραμμικός υπόχωρος $\mathbb{A}$ και ένα σημείο f τέτοιο ώστει η βέλτιστη προσέγγιση απο το $\mathbb{A}$ στην f δεν είναι μοναδική, όπου $\mathbb{A}$ και f περιέχονται είτε στον $\mathscr{C}[a,b]$ ή στον $\mathbb{R}^n$ και η προσέγγιση εκτιμάται είτε από την 1-νόρμα είτε την άπειρη.
Όταν θα χρησιμοποιούμε την 1-νόρμα στο $\mathscr{C}[-1,1]$, τότε η f είναι σταθερή και ίση με τη μονάδα και θέτουμε τον $\mathbb{A}$ ως ένα μονοδιάστατο γραμμικό χώρο ο οποίος περιέχει όλες τις συναρτήσεις της μορφής:

$$a(x) = \lambda x,\ -1 \leq x \leq 1 \tag{2.17}$$

Εξετάζουμε την

$$\min_{a\in\mathbb{A}} \int_{-1}^{1} |f(x) - a(x)|dx$$

και έχουμε:

$$\min_{a\in\mathbb{A}} \int_{-1}^{1} |1 - \lambda x|dx = \min_{a\in\mathbb{A}} \left[x - \lambda\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = \min_{a\in\mathbb{A}}(1 - \frac{\lambda}{2} + 1 + \frac{\lambda}{2}) = 2 \Rightarrow$$

$$\min_{a\in\mathbb{A}} \int_{-1}^{1} |f(x) - a(x)|dx = 2 \tag{2.18}$$

Η ελάχιστη τιμή λαμβάνεται για $-1 \leq \lambda \leq 1$. Επομένως η βέλτιστη προσέγγιση δεν είναι μοναδική.
Τώρα θα επεκτείνουμε το παράδειγμα για την 1-νόρμα στον $\mathbb{R}^n (n \geq 2)$ χωρίζοντας το διάστημα $[-1,1]$ στα σημεία $-1 = x_1 < x_2 < ... < x_n = 1$ όπου είναι χωρισμένα ομοιόμορφα :

$$x_{i+1} - x_i = \frac{2}{(n-1)}, i = 1, 2, .., n-1 \tag{2.19}$$

Εκτιμόυμε τώρα την f, την οποία είχαμε πριν $(f(x) = 1)$ σε αυτά τα σημεία για να πάρουμε ένα διάνυσμα $f \in \mathbb{R}^n$. Ακόμη παίρνουμε το διάνυσμα $a \in \mathbb{A} \subset \mathbb{R}^n$ του οποίου τα στοιχεία έχουν τις τιμές:

$$a_i = \lambda x_i,\ i = 1, 2, ..., n \tag{2.20}$$

όπου το λ είναι παράμετρος. Επομένως έχουμε την:

$$\min_{a\in\mathbb{A}} \sum_{i=1}^{n} |f_i - a_i| = \min_{a\in\mathbb{A}} \sum_{i=1}^{n} |1 - a_i| \Rightarrow$$

Επομένως:

$$\min_{a\in\mathbb{A}} \sum_{i=1}^{n} |f_i - a_i| = n \tag{2.21}$$

η ελάχιστη τιμή παίρνετε για $-1 \leq \lambda \leq 1$. Επομένως η προσέγγιση δεν είναι πάλι μοναδική. Τώρα θα εξετάσουμε την ∞-νόρμα στο $\mathscr{C}[-1,1]$. Θέτουμε την f πάλι σταθερή και ίση με την μονάδα, αλλά θέτουμε το $\mathbb{A}$ ως τον μονοδιάστατο γραμμικό χώρο, ο οποίος περιέχει τις συναρτήσεις:

$$a(x) = \lambda(1 + x),\ 1- \leq x \leq 1 \tag{2.22}$$

και βλέπουμε οτι:

$$\min_{a \in \mathbb{A}} \|f - a\|_\infty = 1 \tag{2.23}$$

και βλέπουμε οτι η (2.23) αποτελεί βέλτιστη προσέγγιση για αν και μόνο αν έχουμε:

$$0 \leq \lambda \leq 1 \tag{2.24}$$

Συνεπώς δεν έχουμε πάλι μοναδικότητα. Επεκτείνουμε τώρα το παράδειγμα στο $\mathbb{R}^n$ και παίρνουμε το διάνυσμα $f \in \mathbb{R}^n$ σταθερό και ίσο με την μονάδα και το διάνυσμα $a \in \mathbb{A}$ με στοιχεία:

$$a_i = \lambda(1 + x_i) \tag{2.25}$$

όπου για τα x_i ισχύει η σχέση (2.20).Βλέπουμε όμοια πάλι οτι το a_i αποτελεί βέλτιστη προσέγγιση για $0 \leq \lambda \leq 1$ και επομένως πάλι η βέλτιστη προσέγγιση δεν είναι μοναδική.

2.5 Παραδείγματα

Παράδειγμα 1:Να αποδειχθεί οτι η νόρμα:

$$\|f\|_4 = \left[\int_a^b |f(x)|^4 dx\right]^{\frac{1}{4}},\ f \in \mathscr{C}\,[a, b]$$

είναι αυστηρά κυρτή

Λύση

Για την απόδειξη του παραδείγματος θα γίνει χρήση της ανισότητας Minkowski την οποία έχουμε ορίσει στο πρώτο κεφάλαιο.Θεωρώ δύο στοιχεία f, g του χώρου $\mathscr{C}\,[a, b]$ τα οποία έχουν νόρμα $\|f\|_4 = \|g\|_4 = 1$ και παίρνω ένα $\lambda : 0 < \lambda < 1$ και έχουμε:

$$\begin{aligned}
\|\lambda f + (1-\lambda)g\|_4 &< \|\lambda f\|_4 + \|(1-\lambda)g\|_4 \\
&= (|\lambda|^4)^{\frac{1}{4}}\ \|f\|_4 + (|1-\lambda|^4)^{\frac{1}{4}}\ \|g\|_4 \\
&= \lambda\|f\|_4 + (1-\lambda)\|g\|_4 \Rightarrow \\
\|\lambda f + (1-\lambda)g\|_4 &< |\lambda|\ \|f\|_4 + |1-\lambda|\ \|g\|_4
\end{aligned}$$

Όμως η νόρμα της f και της g είναι ίση με την μονάδα και $0 < \lambda < 1$,επομένως:

$$\|\lambda f + (1-\lambda)g\|_4 < 1\lambda + 1(1-\lambda) = 1$$

Επομένως η νόρμα-4 είναι αυστηρά κυρτή στον χώρο $\mathscr{C}\,[a, b]$

Κεφάλαιο 3

Προσεγγιστικοί τελεστές και κάποιες προσεγγιστικές συναρτήσεις

3.1 Προσεγγιστικοί τελεστές

Συνεχίζουμε να θεωρούμε το $\mathbb{A}$ ως ένα σύνολο προσεγγιστικών συναρτήσεων σε ένα χώρο με νόρμα $(\mathbb{B}, \|\cdot\|)$. Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε πως αν για κάθε $f \in \mathbb{B}$ υπάρχει μοναδική βέλτιστη προσέγγιση απο το $\mathbb{A}$ στην f, την οποία καλούμε $X(f)$, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε τον X ως ένα τελεστή $X : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{A}$. Τον τελεστή X, θα τον ορίσουμε ως ένα τελεστή προσέγγισης, αν αποτελεί οποιαδήποτε απεικόνιση απο τον $\mathbb{B}$ στον $\mathbb{A}$. Σημειώνουμε οτι ο τελεστής X, προσδιορίζεται ως προβολή αν ικανοποιείται η εξίσωση:

$$X\left[X(f)\right] = X(f), f \in \mathbb{B} \tag{3.1}$$

Συνεπώς, επαρκής συνθήκη για να είναι ο X προβολή είναι:

$$X(\alpha) = \alpha, \ \alpha \in \mathbb{A} \tag{3.2}$$

Οι περισσότερες προσεγγιστικές μέθοδοι τις οποίες θα μελετήσουμε ικανοποιούν την εξίσωση (3.2), εκτός μιας σημαντικής εξαίρεσης, αυτής των τελεστών Bernstein, τους οποίους θα μελετήσουμε στο κεφάλαιο 6. Τώρα, όσον αφορά τους τελεστές $X(f)$, μπορούμε να τους συμβολίζουμε και ως Xf. Θα ορίσουμε πότε ένας τελεστής είναι γραμμικός, καθώς η γραμμικότητα θα χρησιμοποιηθεί στην μελέτη μας.

Ορισμός 3.1. *Έστω $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ διανυσματικοί χώροι. Μια απεικόνιση $X : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{A}$ λέγεται γραμμικός τελεστής αν διατηρεί τις πράξεις. Δηλαδή:*

$$(i) \ \ X(f+g) = X(f) + X(g), \ \forall f, g \in \mathbb{B} \tag{3.3}$$

$$(ii) \ \ X(\lambda f) = \lambda X(f), \ \forall f \in \mathbb{B}, \lambda \in \mathbb{R} \tag{3.4}$$

Συνήθως όταν ο X είναι ένας γραμμικός τελεστής και όταν ο $\mathbb{A}$, είναι ένας πεπερασμένος γραμμικός χώρος ο υπολογισμός του $X(f)$ ανάγεται στη λύση ενός γραμμικού

συστήματος εξισώσεων. Όμως παρατηρούμε οτι αν ο τελεστής $X(f)$ είναι η βέλτιστη προσέγγιση χρησιμοποιώντας την 1-νόρμα είναι δύσκολο να αποτελεί έναν γραμμικό τελεστή.
Πολύ συχνά χρησιμοποιούμε την νόρμα του τελεστή προσέγγισης X. Η νόρμα του τελεστή συμβολίζεται ως $\|X\|$ και αποτελεί τον μικρότερο πραγματικό αριθμό για τον οποίο ισχύει η ανισότητα:

$$\|X(f)\| \leq \|X\| \ \|f\|, \ \forall f \in \mathbb{B} \tag{3.5}$$

Ο συμβολισμός $\|X\|_p$ σημαίνει οτι η νόρμα του τελεστή παράγεται απο την νόρμα $\|f\|_p$.
Θα παρουσιάσουμε ένα παράδειγμα ενός τελεστή προσέγγισης.
Έστω $\mathbb{B} = \mathscr{C}[0,1]$ και έστω $\mathbb{A}$ ο γραμμικός χώρος των πραγματικών πολυωνύμων βαθμού το πολύ ένα, $\mathscr{P}_1$. Θεωρώ το πολυώνυμο p, το οποίο ικανοποιεί τις εξής συνθήκες:

$$\begin{Bmatrix} p(0) = f(0) \\ p(1) = f(1) \end{Bmatrix} \tag{3.6}$$

και $f \in \mathbb{B} = \mathscr{C}[0,1]$.
Έχουμε, $p = X(f)$,όπου $X : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{A}$,ορίζεται ως ένας γραμμικός τελεστής προβολής.
Προκειμένου να προσδιορίσουμε την νόρμα για τον τελεστή X, επιλέγουμε μια εκ των γνωστών νορμών του χώρου $\mathscr{C}[0,1]$. Αρχικά επιλέγουμε την 2-νόρμα, δηλαδή:

$$\|f\|_2 = \left[\int_a^b |f(x)|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}, f \in \mathscr{C}[0,1] \tag{3.7}$$

Υπολογίζουμε τη νόρμα 2 του τελεστή και έχουμε:

$$\begin{aligned} &\|X(f)\|_2 = (\int_0^1 |f(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}} \leq \int_0^1 1 dx = 1 \Rightarrow \\ &\|X(f)\|_2 \leq 1 \end{aligned}$$

Όμως ο τελεστής X, δεν είναι φραγμένος καθώς υπάρχει η δυνατότητα η $\|X\|_2$ να γίνει 1 όταν η νόρμα $\|f\|_2$ γίνει πολύ μικρή. Επομένως θα κάνω χρήση της άπειρης νόρμας.

$$\|f\|_\infty = \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|, f \in \mathscr{C}[0,1] \tag{3.8}$$

Επομένως με τη χρήση της άπειρης νόρμας έχουμε:

$$\begin{aligned} \|X(f)\|_\infty &= \|p\|_\infty \\ &= \max_{p \in \mathscr{P}_1} [|p(0)|, |p(1)|] \\ &= \max_{f \in \mathscr{C}[0,1]} [|f(0)|, |f(1)|] \\ &\leq \|f\|_\infty \end{aligned} \tag{3.9}$$

Συνεπώς, η $\|X\|$ είναι το πολύ ίση με την μονάδα.Ακόμη η συνάρτηση $\{f(x) = 1 : 0 \leq x \leq 1\}$ μας δίνει οτι η νόρμα του τελεστή X είναι $\|X\| = 1$. Επομένως έχουμε $\|X\| = 1$

3.2 Σταθερές Lebesgue

Στην ενότητα αυτή θα γίνει παρουσίαση των σταθερών Lebesque. Τη νόρμα ενός τελεστή προσέγγισης μπορούμε να την καλούμε και ως σταθερά Lebesque του τελεστή. Συγκεκριμένα η ονομασία αυτή δίδεται όταν το σφάλμα του τελεστή προσέγγισης παίρνει την τιμή του ελάχιστου σφάλματος το οποίο μπορεί να επιτευχθεί. Παρουσιάζουμε το παρακάτω θεώρημα για να γίνει περισσότερο κατανοητή η έννοια των σταθερών Lebesque.

Θεώρημα 3.1. *(Theorem 3.1 από βιβλίο M.J.D. POWELL Approximation theory and methods) Έστω $\mathbb{A}$, ένας πεπερασμένος γραμμικός υπόχωρος ενός γραμμικού χώρου με νόρμα $(\mathbb{B}, \|\cdot\|)$ και έστω X ένας γραμμικός τελεστής, $X : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{A}$, ο οποίος ικανοποιεί την συνθήκη προβολής $X(\alpha) = \alpha, \alpha \in \mathbb{A}$. Για κάθε $f \in \mathbb{B}$, ορίζουμε d^* την ελάχιστη απόσταση ως:*

$$d^* = \min_{\alpha \in \mathbb{A}} \|f - \alpha\| \tag{3.10}$$

από την f σε ένα στοιχείο του $\mathbb{A}$. Τότε το σφάλμα του τελεστή $X(f)$ ικανοποιεί την ανισότητα:

$$\|f - X(f)\| \leq (1 + \|X\|)d^* \tag{3.11}$$

Απόδειξη. Έστω α^* η βέλτιστη προσέγγιση απο τον $\mathbb{A}$ στην f. Το α^* είναι ορθός ορισμένο ως βέλτιστη προσέγγιση λόγω του θεωρήματος 1.2. Η συνθήκη προβολής $(X(\alpha) = \alpha)$ για τον τελεστή καθώς και η γραμμικότητα του μας δίνουν την παρακάτω εξίσωση:

$$f - X(f) = (f - \alpha^*) - X(f - \alpha^*) \tag{3.12}$$

Κάνοντας χρήση της τριγωνικής ανισότητας για τις νόρμες και χρησιμοποιώντας τους ορισμούς της νόρμας του τελεστή $\|X\|$ και της βέλτιστης προσέγγισης α^*, έχουμε:

$$\begin{aligned}
\|f - X(f)\| &\leq \|f - \alpha^*\| + \|X(f - \alpha^*)\| \\
&= \|f - \alpha^*\| + \|X\| \; \|f - \alpha^*\| \\
&\leq [1 + \|X\|] \; \|f - \alpha^*\| = [1 + \|X\|] \, d^* \Rightarrow \\
\|f - X(f)\| &\leq [1 + \|X\|] \, d^* \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

□

Εφαρμόζουμε το παραπάνω θεώρημα στο παράδειγμα της παραγράφου (3.1) και έτσι έχουμε τώρα, $X(f) = p$ και $\begin{Bmatrix} p(0) = f(0) \\ p(1) = f(1) \end{Bmatrix}$ όπου $p \in \mathscr{P}_1$ και $f \in \mathscr{C}\,[0,1]$ και έχουμε απο το θεώρημα:

$$\|f - X(f)\|_\infty \leq [1 + \|X\|] \, d^*$$

όπου

$$d^* = \min_{p \in \mathscr{P}_1} \|f - p\|_\infty$$

Όμως έχουμε δείξει οτι $\|X\| = 1$,επομένως:

$$\|f - X(f)\|_\infty \leq 2 \min_{p \in \mathscr{P}_1} \|f - p\|_\infty \tag{3.14}$$

Θα δούμε τώρα ένα άλλο παράδειγμα, όπου $f(x) = x^2$, $0 \leq x \leq 1$ και θέτουμε $X(f) = p(x) = x$, $0 \leq x \leq 1$ και ισχύουν οι συνθήκες (3.6) κάτι που είναι εύκολο να δούμε καθώς$f(0) = 0^2 = 0 = p(0)$ και $f(1) = 1^2 = 1 = p(1)$.
Η νόρμα $\|f - X(f)\| = \|x^2 - x\|$ παρουσιάζει ακρότατο στην τιμή $\frac{1}{2}$και ίσο με $\frac{1}{4}$. Έστω $\{p^*(x)x - \frac{1}{8} : 0 \leq x \leq 1\}$ η συνάρτηση προσέγγισης η οποία ελαχιστοποιεί την άπειρη νόρμα του σφάλματος, δηλαδή $\min_{p \in \mathscr{P}_1} \|f - p\|_\infty$,τότε το δεξί μέλος της σχέσης (3.14) μας δίνει ότι $2\|f - p^*\| = 2\|x^2 - x + \frac{1}{8}\|$ και για $x = \frac{1}{2}$ έχουμε:

$$2\|f - p^*\| = 2\|\frac{1}{2}^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\| = \frac{1}{4}$$

Επομένως καταλήγουμε οτι η ανισότητα της σχέσης (3.11) μπορεί να χρησιμοποιηθεί και ως ισότητα.
Μια χρήσιμη εφαρμογή του θεωρήματος 3.1 είναι η περίπτωση στην οποία χρειαζόμαστε μια πολυωνυμική προσέγγιση, έστω p,σε μια συνάρτηση $f \in \mathscr{C}[a, b]$ η οποία ικανοποιεί την συνθήκη:

$$\|f - p\|_\infty \leq \epsilon \tag{3.15}$$

όπου ϵ είναι ένας θετικός αριθμός. Ο βαθμός του πολυωνύμου δεν προσδιορίζεται αλλά δεν πρέπει να είναι μεγαλύτερος απο οτι χρειάζεται. Έστω $\mathbb{A} = \mathscr{P}_n$ και X ένας γραμμικός τελεστής $X : \mathscr{C}[a, b] \longrightarrow \mathscr{P}_n$, ο οποίος ικανοποιεί την συνθήκη $X(p) = p, p \in \mathscr{P}_n$. Αν $X(f)$ υπολογιστεί και αν βρεθεί σε ενα σημείο του διαστήματος $[a, b]$ το σφάλμα της συνάρτησης $[f - X(f)]$ είναι μεγαλύτερο απο το $[1 + \|X\|_\infty]_\epsilon$, τότε επάγεται απο το θεώρημα 3.1. οτι ο βαθμός του πολυωνύμου p πρέπει να ξεπερνάει το n. Συνεπώς είναι πιθανό ορισμένες φορές να εξάγουμε χρήσιμες πληροφορίες για τις βέλτιστες προσεγγίσεις απο απλούς αλγόριθμους. Επομένως οταν σκεφτούμε πρακτικούς αλγόριθμους οι οποίοι είναι γραμμικές προβολές, δίνουμε ιδιαίτερη προσοχή στην νόρμα του τελεστή προσέγγισης.

3.3 Πολυωνυμικές προσεγγίσεις σε διαφορίσιμες συναρτήσεις

Κάποιες φορές ο βαθμός του πολυωνύμου μπορεί να είναι πολύ μεγάλος κάνοντας το δύσχρηστο για τις προσεγγίσεις στη πράξη. Όμως υπάρχουν άλλοι λόγοι για την χρήση των πολυωνύμων. Ένας εξ αυτών είναι οτι τα πολυώνυμα βοηθούν πολύ στην κατανόηση των ιδιοτήτων των βέλτιστων προσεγίσεων στις 1,2,∞-νόρμες, οι οποίες βοηθούν πολύ στον υπολογισμό των αριθμητικών υπολογισμών. Περισσότερο όμως η θεωρητική δουλειά του θέματος παρέχει αρκετές τεχνικές ανάλυσης οι οποίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε νέες εφαρμογές. Παρακάτω θα παρουσιάσουμε μια τέτοια τεχνική. Το αποτέλεσμα το οποίο παρέχεται δείχνει οτι η επάρκεια της πολυωνυμικής προσέγγισης εξαρτάται απο τις ιδιότητες διαφορισημότητας της συνάρτησης την οποία εξετάζουμε. Χρησιμοποιούμε την παραδοχή οτι η βέλτιστη προσέγγιση με την χρήση της άπειρης νόρμας απο τον χώρο των πολυωνύμων $\mathscr{P}_n$ σε κάθε συνάρτηση
$f \in \mathscr{C}[a, b]$ είναι μοναδική. Έστω X_n ο τελεστής βέλτιστης προσέγγισης και $d_n^*(f)$ είναι το ελάχιστο μέγιστο σφάλμα, το οποίο δίδεται απο την εξής σχέση:

$$d_n^*(f) = \|f - X_n(f)\|_\infty, f \in \mathscr{C}[a, b] \tag{3.16}$$

όπου X_n βέλτιστη προσέγγιση συναρτήσεων $f \in \mathscr{C}[a,b]$ από πολυώνυμα βαθμού n. Από το 16ο κεφάλαιο του βιβλίου M.J.D. POWELL-Approximation theory and methods έχουμε ότι υπάρχει μια σταθερά c τέτοια ώστε αν f συνεχής διαφορίσημη συνάρτηση στο $[a,b]$ τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$ ισχύει η ανίσωση:

$$d_n^*(f) \le (\frac{c}{n})\|f'\|_\infty \tag{3.17}$$

Έστω $\mathbb{C}^\kappa[a,b]$ ο γραμμικός χώρος των πραγματικών συναρτήσεων στο $[a,b]$ οι οποίες έχουν συνεχή k-παράγωγο.Παρουσιάζουμε το επόμενο θεώρημα που μας δίνει τα αποτελέσματα στο γραμμικό χώρο αυτό.

Θεώρημα 3.2. *(Theorem 3.2 από βιβλίο M.J.D. POWELL Approximation theory and methods) Η συνθήκη $d_n^*(f) \le (\frac{c}{n})\|f'\|_\infty$ μας δίνει οτι αν η συνάρτηση f ανήκει στο $\mathscr{C}^k[a,b]$ και αν $n \ge k$, τότε η απόσταση d_n^* ικανοποιεί την εξής σχέση:*

$$d_n^*(f) \le \frac{(n-k)!}{n!}c^k\|f^{(k)}\|_\infty \tag{3.18}$$

Απόδειξη. Για την απόδειξη του θεωρήματος θα χρησιμοποιηθεί η επαγωγική μέθοδος. Απο υπόθεση του θεωρήματος βλέπουμε οτι για $k=1$ ισχύει. Έστω οτι ισχύει για $(k-1)$δηλαδή ότι $d_n^*(f) \le \frac{(n-(k-1))!}{n!}c^{k-1}\|f^{(k)}\|_\infty$. Θα εφαρμόσουμε την παραπάνω για την f'. Παρατηρούμε ότι $f' \in \mathscr{C}^{k-1}[a,b]$ και επομένως από επαγωγή έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} d_{n-1}^*(f') &\le \frac{((n-1)-(k-1))!c^{k-1}}{(n-1)!}\|f^{(k)}\|_\infty \\ &= \frac{(n-k)!c^{k-1}}{(n-1)!}\|f^{(k)}\|_\infty \Rightarrow \\ d_{n-1}^*(f') &\le \frac{(n-k)!c^{k-1}}{(n-1)!}\|f^{(k)}\|_\infty \end{aligned} \tag{3.19}$$

Έστω τώρα q ένα αόριστο ολοκλήρωμα των βέλτιστων προσεγγίσεων απο το $\mathscr{P}_{n-1}$ στην f',όπου $q = \int X_{n-1}(f')$ και $q' = X_{n-1}(f')$. Ακόμα ισχύει ότι $f-q \in \mathscr{C}^1[a,b]$.Απο την συνθήκη (3.17) ισχύει η εξής ανίσωση:

$$\begin{aligned} d_n^*(f-q) &\le (\frac{c}{n})\|f'-q'\|_\infty \\ &\le \frac{c}{n}\frac{(n-k)!}{(n-1)!}c^{k-1}\|f^{(k)}\|_\infty \\ &= (\frac{c}{n})d_{n-1}^*(f') \end{aligned} \tag{3.20}$$

όπου η (3.20) εξαρτάται απο το q. Το αποτέλεσμα το οποίο χρησιμοποιούμε και είναι όμοιο με την σχέση (3.12), δηλαδή το q παίζει το ρόλο του a^*, είναι η εξίσωση:

$$\min_{p\in\mathscr{P}_n}\|f-p\|_\infty = \min_{p\in\mathscr{P}_n}\|f-q-p\|_\infty \tag{3.21}$$

η οποία ισχύει καθώς το q ανήκει στο γραμμικό χώρο $\mathscr{P}_n$. Η παραπάνω ταυτότητα είναι η εξίσωση:

$$d_n^*(f) = d_n^*(f-q) \tag{3.22}$$

Επομένως η απόδειξη του θεωρήματος προκύπτει απο τις σχέσεις (3.19), (3.20), (3.22). □

Οι σχέσεις $d_n^*(f) \leq (\frac{c}{n})\|f'\|_\infty$ και $d_n^*(f) \leq \frac{(n-k)!}{n!}c^k\|f^{(k)}\|_\infty$ είναι χρήσιμες, καθώς όταν η f είναι συνεχής διαφορίσιμη συνάρτηση στο $\mathscr{C}\,[a,b]$ μας δίνει τα φράγματα στις τιμές σύγκλισης της ακολουθίας $\{X_n(f) : n = 0,1,2,...\}$ στην f,όπου ο τελεστής X_n αποτελεί τον βέλτιστο minimax τελεστή.
Θα εξετάσουμε τώρα ένα παράδειγμα δίνοντας τις τιμές της $d_n^*(f)$ για τη συνάρτηση:

$$f(x) = |x|^\kappa, -1 \leq x \leq 1$$

Παρατηρούμε οτι όσο αυξάνει το n και τείνοντας στο άπειρο το σφάλμα $\|f - X_n(f)\|$ συγκλίνει στο $(\frac{1}{n})^\kappa$ Παρουσιάζουμε στον παρακάτω πίνακα ορισμένες τιμές της $d_n^*(f)$ για $\kappa = 1$ και $\kappa = 3$:

n	$\kappa = 1$	$\kappa = 3$
2	0.12500	0.07407
4	0.06762	0.00888
8	0.03469	0.00114
16	0.01747	0.00014

Παρατηρούμε οτι αν χρειαζόμαστε μια πολύ ακριβής προσέγγιση σε μια συνάρτηση f, τότε η χρήση ενός απλού πολυωνύμου ως προσεγγιστική συνάρτηση δεν είναι πολύ χρήσιμη, εκτός αν η συνάρτηση έχει παραγώγους μεγάλου βαθμού. Ακόμα και όταν η f παραγωγίζεται άπειρες φορές τότε μπορεί η πολυωνυμική προσέγγιση να μην είναι κατάλληλη. Ένας λόγος αποτελεί το γεγονός οτι τα πολυώνυμα τα οποία παραμένουν φραγμένα καθώς το $x \longrightarrow \infty$ είναι τα σταθερά πολυώνυμα. Αν η συνάρτηση προσεγγιστεί απο ένα πολυώνυμο, η τιμή της προσέγγισης δίδεται σε μια φραγμένη τιμή, όπου η μεταβλητή x παίρνει τιμές εκτός το διαστήματος προσέγγισης $[a,b]$. Επομένως καλό είναι να στραφούμε σε άλλης μορφής συναρτήσεις. Καλύτερα αποτελέσματα έχουμε αν χρησιμοποιήσουμε ρητές συναρτήσεις αντι των πολυωνύμων. Στις ρητές προσγγίσεις το σύνολο $\mathbb{A}$ εξαρτάται απο δύο μη αρνητικούς ακεραίους m,n,όπου:

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \leq x \leq \beta \tag{3.23}$$

όπου $p \in \mathscr{P}_m$ και $\mathscr{P}_n$. Συνεπώς ο $\mathbb{A}$ δεν αποτελεί γραμμικό χώρο και ο αλγόριθμος για την εύρεση ρητής προσέγγισης δεν κάνει την χρήση γραμμικών τελεστών.

3.4 Παραδείγματα

Παράδειγμα 1:Για κάθε θετικό ακέραιο k,έστω οι αριθμοί $\{c(k,n) : n \geq k$ ικανοποιούν την ανίσωση:

$$d_n^* \leq c(k,n)\|f^{(k)}\|_\infty, f \in \mathscr{C}^k\,[a,b]$$

Να αποδειχθεί ότι,αν $n \geq 2k$ τότε ισχύει η ανίσωση:

$$d_n^* \leq c(k,n)c(k,n-k)\|f^{(2k)}\|_\infty, f \in \mathscr{C}^{2k}\,[a,b]$$

Λύση

Αρχικά έχουμε ότι:

$$c(k,n) = \frac{(n-k)!}{n!}c^k$$

το οποίο είναι άμεσο από την σχέση (3.18).
Θα δείξουμε ότι $\frac{(n-2k)!}{n!}c^2k = c(k,n)c(k,n-k)$.Κάνοντας τώρα το ανάπτυγμα έχουμε:

$$c(k,n)c(k,n-k) = \frac{(n-k)!}{n!}c^k\frac{(n-k-k)!}{(n-k)!}c^k = \frac{(n-2k)!}{n!}c^{2k}$$

Επομένως για $2k$ η ζητούμενη σχέση ισχύει καθώς:

$$d_n^*(f) \leq c(2k,n)\|f^{(2k)}\|_\infty = c(k,n)c(k,n-k)\|f^{(2k)}\|_\infty$$

Τώρα για να δείξουμε ότι ισχύει επαγωγικά για όλα τα $n \geq 2k$, θα δείξουμε ότι $n \geq 2k+1$, επομένως:

$$c(2k+1,n) = \frac{(n-2k-1)!}{n!}c^{2k+1}$$

Ακόμα έχουμε:

$$c(k,n)c(k+1,n-k) = \frac{(n-k)!}{n!}c^k\frac{(n-k-1-k)!}{(n-k)!}c^{k+1} = \frac{(n-2k-1)!}{n!}c^{2k+1}$$

Επομένως αντίστοιχα θα ισχύει και ότι:

$$d_n^*(f) \leq c(2k+1,n)\|f^{(2k+1)}\|_\infty = c(k,n)c(k+1,n-k)\|f^{(2k+1)}\|_\infty$$

Άρα η ζητούμενη σχέση ισχύει και για $2k+1$.Επομένως ισχύει για όλα τα $n \geq 2k$.

Κεφάλαιο 4

Πολυωνυμική παρεμβολή

4.1 Η μέθοδος παρεμβολής Lagrange

Αν επιχειρήσουμε να προσεγγίσουμε τη συνάρτηση $f \in \mathscr{C}[a,b]$ από ένα πολυώνυμο :

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i, a \leq x \leq b \tag{4.1}$$

υπάρχει το πρόβλημα καθορισμού των συντελεστών $\{c_i : i = 0, 1, .., n\}$. Η πιο άμεση μέθοδος είναι να υπολογίσουμε την τιμή της f σε $(n+1)$-ξεχωριστά σημεία $\{x_i : i = 0, 1, ..., n\}$ του διαστήματος $[a,b]$ που ικανοποιούν την εξίσωση:

$$p(x_i) = f(x_i), i = 01, 2, ..., n \tag{4.2}$$

Θα παρουσιάσουμε το παρακάτω θεώρημα για να δείξουμε την μοναδικότητα του πολυωνύμου $p \in \mathscr{P}_n$.

Θεώρημα 4.1. *(Theorem 4.1 από βιβλίο M.J.D. POWELL Approximation theory and methods) Έστω $\{x_i : i = 0, 1, 2, ..., n\}$ ένα σύνολο από $(n+1)$ ξεχωριστά σημεία στο διάστημα $[a,b]$ και έστω $f \in \mathscr{C}[a,b]$. Τότε υπάρχει ακριβώς ένα πολυώνυμο $p \in \mathscr{P}_n$ το οποίο ικανοποιεί την εξίσωση (4.1)*

Απόδειξη. Για $k = 0, 1, ..., n$ έστω l_k η συνάρτηση:

$$l_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}, a \leq x \leq b \tag{4.3}$$

Παρατηρούμε οτι $l_k \in \mathscr{P}_n$ και ισχύει:

$$l_k(x_i) = \delta_{ki}, i = 0, 1, ..., n \tag{4.4}$$

όπου:

$$\delta_{ki} = \begin{cases} 1, k = i \\ 0, k \neq i \end{cases} \tag{4.5}$$

Επομένως, η συνάρτηση:

$$p = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) l_k \tag{4.6}$$

ανήκει στο διάστημα $\mathscr{P}_n$ και ικανοποιεί τη συνθήκη παρεμβολής (4.2). Τώρα θα ελέγξουμε την μοναδικότητα.
Έστω οτι η (4.1) ισχύει για δύο πολυώνυμα $p, q \in \mathscr{P}_n$. Τότε $(p - q) \in \mathscr{P}_n$ και αυτό το πολυώνυμο έχει ρίζες τα σημεία $\{x_i : i = 0, 1, 2, ..., n\}$. Όμως ένα πολυώνυμο βαθμού το πολύ n το οποίο έχει $(n + 1)$-διακριτές ρίζες είναι το μηδενικό πολυώνυμο. Επομένως $p - q = 0 \Rightarrow p = q$. □

Η αριθμητική τιμή του πολυωνύμου p μπορεί να υπολογισθεί αφού πρώτα υπολογίσουμε την τιμή της l_k απο τη σχέση (4.3) και την αντικαταστήσουμε στην παρακάτω εξίσωση:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) l_k(x) \tag{4.7}$$

Αυτή η μέθοδος καλείται μέθοδος παρεμβολής Lagrange. Λόγω της συνθήκης μοναδικότητας, η οποία αποδείχτηκε στο θεώρημα(4.1), μπορούμε να θεωρούμε την παρεμβολική διαδικασία ως ένα γραμμικό τελεστή απο το $\mathscr{C}[a, b]$ στο $\mathscr{P}_n$, ο οποίος εξαρτάται από την επιλογή των σημείων $\{x_i : i = 0, 1, 2, ..., n\}$. Επειδή η l_k είναι ανεξάρτητη της συνάρτησης f η (4.6) μας δίνει οτι ο τελεστής είναι γραμμικός.
Όταν οι τιμές της $\{f(x_i) : i = 0, 1, ..., n\}$ δεν μπορούν να βρεθούν ακριβώς, είναι σημαντικό να γνωρίζουμε τη συνεισφορά που έχουν τα σφάλματα στα πολυώνυμα p. Η εξίσωση (4.6) μας δίνει οτι αν αντικαταστήσουμε την πραγματική τιμή της συνάρτησης $f(x_\kappa)$ από την προσέγγιση $\{f(x_\kappa) + \epsilon_\kappa\}$ βλέπουμε οτι η αλλαγή στο πολυώνυμο p είναι η έκφραση $\sum \epsilon_\kappa l_k$. Η παρεμβολική διαδικασία αποτελεί έναν τελεστή προβολής. Συγκεκριμένα για $0 \leq i \leq n$ έχουμε:

$$f(x) = x^i, a \leq x \leq b \tag{4.8}$$

και κάνοντας χρήση της (4.7) έχουμε:

$$\sum_{k=0}^{n} x_k^i l_k(x) = x^i, a \leq x \leq b \tag{4.9}$$

Τώρα για $i = 0$ παίρνουμε την εξίσωση:

$$\sum_{k=0}^{n} l_k(x) = 1, a \leq x \leq b \tag{4.10}$$

το οποίο είναι χρήσιμο για τον έλεγχο των $\{l_k(x) : k = 0, 1, 2, ..., n\}$ όταν κάνουμε χρήση της μεθόδου *Lagrange*. Ακόμη αν αντικαταστήσουμε την (4.3) στην (4.9) έχουμε:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x_k}{\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} (x_k - x_j)}, i = 0, 1, 2, ...n \tag{4.11}$$

4.2 Το σφάλμα της πολυωνυμικής παρεμβολής

Χρησιμοποιούμε το συμβολισμό e για το σφάλμα και έχει την τιμή:

$$e(x) = f(x) - p(x), a \leq x \leq b \tag{4.12}$$

όπου $p \in \mathscr{P}_n$ και ικανοποιεί την (4.2). Είναι προφανές οτι αν προσθέσουμε ένα στοιχείο του $\mathscr{P}_n$ στη συνάρτηση f τότε το ίδιο στοιχείο προστίθεται στο πολυώνυμο p και έτσι το σφάλμα e παραμένει αμετάβλητο.

Θεώρημα 4.2. *(Theorem 4.2 από βιβλίο M.J.D. POWELL Approximation theory and methods) Για κάθε σύνολο ξεχωριστών παρεμβολικών σημείων $\{x_i : i = 0, 1, ..., n$ στο διάστημα $[a, b]$ και για κάθε $f \in \mathscr{C}^{n+1}[a, b]$ και έστω ένα πολυώνυμο $p \in \mathscr{P}_n$ το οποίο ικανοποιεί την $f(x_i) = p(x_i)$. Τότε για κάθε $x \in [a, b]$, το σφάλμα $e(x) = f(x) - p(x)$ έχει την τιμή:*

$$e(x) = \frac{1}{(n+1)!} \prod_{j=0}^{n} (x - x_j) f^{(n+1)}(\xi), \xi \in (a, b) \tag{4.13}$$

το οποίο ξ εξαρτάται από τη μεταβλητή x

Απόδειξη. Για την απόδειξη του θεωρήματος θα γίνει η χρήση του θεωρήματος Rolle. Το θεώρημα *Rolle* μας λέει οτι αν μία συνεχής και παραγωγίσιμη συνάρτηση είναι μηδέν σε 2 σημεία του διαστήματος, τότε η παράγωγός της είναι μηδέν σε ένα ενδιάμεσο σημείο. Χρησιμοποιώντας αυτό το αποτέλεσμα επαγωγικά, συμπαιρένουμε ότι, αν μία συνάρτηση $g \in \mathscr{C}^{(n+1)}[a, b]$ είναι μηδέν σε $(n + 2)$ ξεχωριστά σημεία του $[a, b]$ τότε η $(n + 1)$-παράγωγος έχει ένα τουλάχιστον μηδενικό στο $[a, b]$. Θα βασιστούμε στον παραπάνω ισχυρισμό για την απόδειξη του θεωρήματος. Αν $x \in \{x_i : i = 0, 1, 2..., n\}$ τότε η εξίσωση (4.13) ισχυεί καθώς και οι δύο πλευρές της συνάρτησης είναι ίσες με το μηδέν. Διαφορετικά ορίζουμε τη g ως :

$$g(t) = f(t) - p(t) - e(x) \prod_{i=0}^{n} \frac{(t - x_i)}{(x - x_i)}, a \leq t \leq b \tag{4.14}$$

και είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι η μεταβλητή t, είναι η μεταβλητή για την οποία το x παίρνει fixed τιμές.Βλέπουμε οτι η $g \in \mathscr{C}^{(n+1)}[a, b]$ και οτι η $g(t) = 0$ για $t = x$ και για t να αποτελεί σημείο του συνόλου $\{x_i : i = 0, 1, 2, ..., n\}$.Επομένως υπάρχει ένα σημείο ξ στο διάστημα (a, b) για το οποίο:

$$g^{(n+1)}(\xi) = 0 \tag{4.15}$$

Αντικαθιστώντας την (4.14) στην (4.15) και αναδιατάσσοντας τους όρους, αποδεικύεται το θεώρημα. □

Ένας εύκολος τρόπος για να θυμόμαστε αυτό το αποτέλεσμα είναι θέτοντας την f ως εξής:

$$f(x) = x^{n+1}, a \leq x \leq b \tag{4.16}$$

Σε αυτή την περίπτωση το σφάλμα είναι το πολυώνυμο:

$$e(x) = x^{n+1} - p(x), a \leq x \leq b \tag{4.17}$$

και επειδή το σφάλμα είναι ίσο με το μηδέν στα παρεμβολικά σημεία $\{x_i : i = 0, 1, 2, ..., n\}$ το $e(x)$ πρέπει να είναι ένα πολλαπλάσιο του:

$$\prod_{j=0}^{n}(x - x_j) \tag{4.18}$$

Ο πολλαπλασιαστικός παράγοντας είναι ο όρος $f^{(n+1)}(\xi)$ επί μία σταθερά, η οποία έχει την τιμή $\frac{1}{(n+1)!}$, έτσι ώστε ο συντελεστής του x^{n+1} στο $e(x)$ να είναι ίσος με την μονάδα, όπως απαιτεί η $e(x) = x^{n+1} - p(x)$

Παρουσιάζονται μερικές εφαρμογές του θεωρήματος(4.2). Αν ένα φράγμα της $\|f^{(n+1)}\|_\infty$ είναι γνωστό, τότε η (4.13) δίνει ένα φράγμα στο σφάλμα της πολυωνυμικής παρεμβολής. Παρόμοια μία εκτίμηση του όρου $f^{(n+1)}(\xi)$ παρέχει μία εκτίμηση του παρεμβολικού σφάλματος. Τέλος, είναι χρήσιμο κάποιες φορές όταν επιθυμούμε να συγκρίνουμε παρεμβολικά πολυώνυμα με άλλους γραμμικούς προσεγγιστικούς τελεστές οι οποίοι είναι ακριβείς για $f \in \mathscr{P}_n$. Αν το σφάλμα του τελεστή εκφράζεται με όρους $f^{(n+1)}$, τότε η εξίσωση (4.13) βοηθάει να επιλέξουμε ποια προσεγγιστική μέθοδος είναι πιο ακριβής. Θα ασχοληθούμε τώρα με τα παρεμβολικά σημεία $\{x_i : i = 0, 1, 2, ..., n\}$. Θα χρησιμοποιήσουμε ένα παράδειγμα προκειμένου να εξάγουμε συμπεράσματα. Το παράδειγμα αύτο είναι το παράδειγμα του Runge. Έστω:

$$f(x) = \frac{1}{(1 + x^2)}, -5 \leq x \leq 5 \tag{4.19}$$

Θα κάνουμε χρήση πολυωνύμων μεγάλου βαθμού για να επιτύχουμε μεγάλη αρκίβεια. Το παράδειγμα αυτό θα μας βοηθήσει να δούμε τις δυσκολίες που προκύπτουν στην πολυωνυμική παρεμβολή. Βρίσκουμε οτι τα παρεμβολικά σημεία $\{x_i : i = 0, 1, 2, ..., n\}$ είναι σημαντικά όταν το n είναι πολύ μεγάλο. Αν x_i δίνονται από την εξίσωση:

$$x_i = -5 + \frac{10i}{n}, i = 0, 1, 2, ..., n \tag{4.20}$$

τότε το μέγεθος του σφάλματος $e(x) = f(x) - p(x)$ για τις τιμές κοντά στις ακραίες τιμές του διαστήματος $[-5, 5]$ παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον. Έστω $x_{n-\frac{1}{2}}$ το μεσαίο σημείο του διαστήματος, τα οποία δίδονται από την εξίσωση:

$$x_{n-\frac{1}{2}} = 5 - \frac{5}{n} \tag{4.21}$$

Θα παρουσιάσουμε παρακάτω τον πίνακα για τις τιμές του $x_{n-\frac{1}{2}}$ για το πολυώνυμο p την συνάρτηση f και το σφάλμα e για τις τιμές $n = 2, 4, 6..., 20$.

n	$f(x_{n-\frac{1}{2}})$	$p(x_{n-\frac{1}{2}})$	$e(x_{n-\frac{1}{2}})$
2	0.137931	0.759615	−0.621684
4	0.066390	−0356826	0.423216
6	0.054463	0.607879	−0.553416
8	0.049651	−0.831017	0.880668
10	0.047059	1.578721	−1.531662
12	0.045440	−2.755000	2.800440
14	0.044334	5.332743	−5.288409
16	0.043530	−10.173867	10.217397
18	0.042920	20.123671	−20.080751
20	0.042440	−39.952449	39.994889

Οι τιμές του πολυωνύμου $p(x_{n-\frac{1}{2}})$ βρέθηκαν κάνοντας χρήση της σχέσης (4.7). Βλέπουμε από τον πίνακα οτι το σφάλμα διπλασιάζεται καθώς μεγαλώνει το n κατά 2. Συνεπώς είναι μάταιο να προσπαθούμε να βελτίωσουμε την ακρίβεια αυξάνοντας την τιμή του n. Θα εξετάσουμε το παράδειγμα παίρνοντας τα παρεμβολικά σημεία στο διάστημα $0 \leq x \leq 5$. Θα εισάγουμε στο πίνακα και το στοιχείο $prod(x) = \prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$. Επομένως έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

x	$f(x)$	$p(x)$	$e(x)$	$prod(x)$
0.25	0.941176	0.942490	-0.001314	2.05×10^6
0.75	0.640000	0.636755	0.003245	-2.48×10^6
1.25	0.390244	0.395093	-0.004849	3.64×10^6
1.75	0.246154	0.238446	0.007708	-6.56×10^6
2.25	0.164948	0.179763	-0.014814	1.46×10^7
2.75	0.116788	0.080660	0.036128	-4.12×10^7
3.25	0.086486	0.202423	-0.115936	1.51×10^8
3.75	0.066390	-0.447052	0.513442	-7.56×10^8
4.25	0.052459	3.454958	-3.402499	5.59×10^9
4.75	0.042440	-39.952449	39.994889	-7.27×10^10

Βλέπουμε οτι η αύξηση του $e(x)$ συνεπάγεται και αύξηση του $prod(x)$. Ο ρυθμός μεταβολής του κλάσματος $\frac{e(x)}{prod(x)}$ είναι σχεδόν σταθερός.

4.3 Προσεγγίσεις τμηματικών πολυωνύμων

Πριν δούμε τις προσεγγίσεις τμηματικών πολυωνύμων θα κάνουμε μια εισαγωγή και θα παρουσιάσουμε τη μέθοδο της γραμμικής παρεμβολής. Στηρίζεται στην εξής λογική. Αν στο διάστημα $[a, b]$ υπάρχει μια ρίζα της συνάρτησης $f(z)$, τότε φέρνω την ευθεία που διέρχεται απο τα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$ με εξίσωση:

$$y(x) = f(x_1) + \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}(x - x_1)$$

Παρατηρούμε ότι $y(x_1) = f(x_1)$ και $y(x_2) = f(x_2)$. Ένα παράδειγμα τμηματικού πολυωνύμου προσέγγισης το οποίο συμβαίνει συχνά, είναι η γραμμική παρεμβολή, την οποία είδαμε στην αρχή της παραγράφου. Από την $f(x_i) = y_i, i = 1, 2, ..., m$, όπου $x_1 = a$ και $x_m = b$ η συνάρτηση s προσδιορίζεται για κάθε στοιχείο $\{[x_i, x_{i+1}]\}$ από την εξίσωση:

$$s(x) = \frac{(x_{i+1} - x_i)f(x_i) + (x - x_i)f(x_{i+1})}{x_{i+1} - x_i}, x_i \leq x \leq x_{i+1}$$

Συνεπώς συνθέτεται μία ακολουθία από τμηματικές ευθείες γραμμές οι οποίες συνδέονται έτσι ώστε η s να είναι συνεχής.
Κατασκευάζουμε εδώ τις λεγόμενες κυβικές συναρτήσεις παρεμβολής splines, οι οποίες είναι κατά τμήματα πολυώνυμα τρίτου βαθμού.Οι συναρτήσεις αυτές έχουν το πλεονέκτημα να δίνουν σχετικά μικρό σφάλμα παρεμβολής, προσεγγίζοντας καλά και την παράγωγο της συνάρτησης f που παρεμβάλλεται. Οι splines χρησιμοποιούνται

στη θεωρία προσέγγισης συναρτήσεων,στην αριθμητική επίλυση συνήθων και μερικών διαφορικών εξισώσεων καθώς και ολοκληρωτικών εξισώσεων. Υπάρχουν και splines μεγαλύτερου βαθμού,αλλά στις εφαρμογές χρησιμοποιούνται κατά κανόνα οι κυβικές splines επειδή συνδυάζουν καλό σφάλμα παρεμβολής με απλές υπολογιστικές διαδικασίες. Παρουσιάζουμε τώρα τον ορισμό των κυβικών splines
Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα $[a,b]$ και $x_0,...,x_n$ $n+1$ ισαπέχοντα σημεία με $x_i < x_{i+1}$,$x_0 = a, x_n = b$. Συμβολίζουμε με $\mathbb{S}_3$ το σύνολο των συναρτήσεων s που ικανοποιούν τα εξής:
(i) $s \in \mathscr{P}_3$ σε κάθε διάστημα $[x_i, x_{i+1}]$
(ii) $s \in \mathscr{C}^2\,[a,b]$
Μία συνάρτηση $s \in \mathbb{S}_3$ καλείται κυβική spline. Μία spline $s \in \mathbb{S}_3$ καλείται spline παρεμβολής της f στα σημεία x_i αν ικανοποιεί επιπλέον τις σχέσεις:
(iii) $s(x_i) = f(x_i)$,$i = 0,1,...,n$
Θα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω μία από τις ακόλουθες πρόσθετες συνθήκες
(iv) $s''(a) = d_0, s''(b) = d_n$,$d_0, d_n$ δοθέντα ή
(v) $s'(a) = c_0, s'(b) = c_n, c_0, c_n$ δοθέντα
Θα παρουσιάσουμε τώρα την κατασκευή μίας συνάρτησης spline παρεμβολής. Ζητούμε τώρα μία συνάρτηση spline παρεμβολής, για τη συνάρτηση f, που ικανοποιεί και τις συνθήκες (iv). Θέτουμε $h = \frac{(b-a)}{n}$ και έχουμε:

$$s''(x_i) = d_i, i = 0,1...,n \tag{4.22}$$

Επειδή $s \in \mathscr{P}_3$ στο διάστημα $[x_i, x_{i+1}]$,έχουμε $s'' \in \mathscr{P}_1$ στο διάστημα $[x_i, x_{i+1}]$άρα:

$$s''(x) = d_i \frac{x_{i+1} - x}{h} + d_{i-1} \frac{x - x_i}{h}, x \in [x_i, x_{i+1}]$$

Ολοκληρώνοντας δύο φορές την s'' βρίσκουμε κάνοντας χρήση της (iii) την:

$$s(x) = \frac{d_i(x_{i+1} - x_i)^3}{6h} + \frac{d_{i+1}(x - x_i)^3}{6h} + (\frac{f_{i+1}}{h} - \frac{d_{i+1}h}{6})(x - x_i) + (\frac{f_i}{h} - \frac{hd_i}{6})(x_{i+1} - x) \tag{4.23}$$

για $x \in [x_i, x_{i+1}]$,όπου θέτουμε $f_i = f(x_i)$. Από την ιδιότητα (ii),η s' πρέπει να είναι συνεχής στο διάστημα $[a,b]$, άρα πρέπει να ισχύει $s'(x_i^+) = s(x_i), i = 1,...,n-1$ ή κάνοντας χρήση της σχέσης (4.23):

$$\begin{aligned} &-\frac{d_i h}{2} + \frac{f_{i+1}}{h} - \frac{d_{i+1}h}{6} + \frac{hd_i}{6} - \frac{f_i}{h} \\ &= \frac{d_i h}{2} + \frac{f_i}{h} - \frac{d_i h}{6} + \frac{hd_{i-1}}{6} - \frac{f_{i-1}}{h} \end{aligned}$$

και τελικά καταλήγουμε στην :

$$F_i = d_{i+1} + 4d_i + d_{i-1} = \frac{6}{h^2}(f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}), i = 1,...,n-1 \tag{4.24}$$

Οι εξισώσεις αυτές αποτελούν ένα γραμμικό σύστημα $n-1$ εξισώσεων με $n+1$ αγνώστους $d_0,...,d_n$. Γνωρίζοντας τα d_0, d_n, τα $d_1,...,d_{n-1}$ υπολογίζονται λύνοντας το τριδιαγώνιο σύστημα (4.24). Τα παραπάνω συνοψίζονται στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 4.3. *(Θεώρημα 1 από βιβλίο Α.ΜΠΑΚΟΠΟΥΛΟΣ,Ι.ΧΡΥΣΟΒΕΡΓΗΣ ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ Με Βιβλιοθήκη Προγραμμάτων και*

Δισκέτα) Υπάρχει μία μοναδική συνάρτηση spline s που παρεμβάλλει μία δεδομένη συνάρτηση f στα $n+1$ ισαπέχοντα σημεία $x_0, ..., x_n$ και που ικανοποιεί τις συνθήκες (iv).Η s δίνεται από τις σχέσεις (4.23) και (4.24).

Θα παρουσιάσουμε τώρα δύο πολύ χρήσιμα λήμματα.

Λήμμα 4.1. *(Λήμμα 1 από βιβλίο Α.ΜΠΑΚΟΠΟΥΛΟΣ,Ι.ΧΡΥΣΟΒΕΡΓΗΣ ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ Με Βιβλιοθήκη Προγραμμάτων και Δισκέτα) Έστω $f \in \mathscr{C}^2[a,b]$. Αν η spline s ικανοποιεί τις (iii) και (iv), με $d_0 = d_n$, τότε, για οποιαδήποτε συνάρτηση g που παρεμβάλλει την f στα σημεία $x_0, ..., x_n$, ισχύει:*

$$\int_a^b (g'')^2 dx = \int_a^b (g'' - s'')^2 dx + \int_a^b (s'')^2 dx \tag{4.25}$$

Απόδειξη. Έχουμε:

$$\int_a^b (g'')^2 dx = \int_a^b (g'' - s'')^2 dx + 2\int_a^b (g'' - s'')^2 s'' dx + \int_a^b (s'')^2 dx$$

Ολοκληρώνοντας κατά μέρη έχουμε:

$$\begin{aligned}\int_a^b (g'' - s'')s'' dx &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (g'' - s'')s'' dx \\ &= \left[\sum_{i=0}^{n-1} (g' - s')s''\right]_{X_i}^{X_{i+1}} - \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (g' - s')s''' dx\end{aligned}$$

Επειδή οι g', s', s'' είναι συνεχείς έχουμε:

$$\left[\sum_{i=0}^{n-1} (g' - s')s''\right]_{X_i}^{X_{i+1}} = [g'(b) - s'(b)]\, s''(b) - [g'(a) - s'(a)]\, s''(a) = 0$$

Το δεύτερο άθροισμα είναι μηδέν διότι η s''' είναι σταθερή, αφού $s \in \mathscr{P}_3$ στο κάθε διάστημα $[x_i, x_{i+1}]$ και

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} (g' - s') dx = g_{i+1} - s_{i+1}(g_{i-1}) = 0$$

αφού η g και η s παρεμβάλλουν την f. Συνεπώς:

$$\int_a^b (g'')^2 dx = \int_a^b (g'' - s'')^2 dx + \int_a^b (s'')^2 dx \geq \int_a^b (s'')^2 dx$$

□

Το Λήμμα 4.1 δείχνει ότι, από τις συναρτήσεις που παρεμβάλλουν την f, η spline s που ικανοποιεί τις συνθήκες $s''(a) = s''(b) = 0$ έχει την ελάχιστη δύο νόρμα.

Λήμμα 4.2. *(Λήμμα 2 από βιβλίο Α.ΜΠΑΚΟΠΟΥΛΟΣ,Ι.ΧΡΥΣΟΒΕΡΓΗΣ ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ Με Βιβλιοθήκη Προγραμμάτων και Δισκέτα) Αν* $g \in \mathscr{C}^1[a,b]$ *και* $g(c)=0$ *για κάποιο* $c \in [a,b]$ *τότε:*

$$\|g\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |g(x)| \leq \sqrt{b-a}\|g'\|$$

Απόδειξη. Επειδή $g(c)=0$ έχουμε ότι

$$g(x) = \int_c^x g'(t)dt$$

Από την ανισότητα Cauchy-Schwartz έχουμε

$$\begin{aligned} |g(x)| &\leq \int_c^x |g'(t)|dt \leq |\int_c^x (g')^2 dt \cdot \int_c^x dt|^{\frac{1}{2}} \\ &\leq (\int_a^b (g')^2 dx \cdot |b-a|)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

□

Τέλος παρουσιάζουμε ένα αριθμητικό παράδειγμα για τον υπολογισμό μιας συνάρτησης spline. Θα υπολογίσουμε την s για τη συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x+1}$ στα σημεία $x_0=0$, $x_1=1, x_2=2, x_3=3$,με $s''(0)=s''(3)=0$.
Θα λύσουμε το τριδιαγώνιο σύστημα (4.24) με $d_0=d_3=0$ και έχουμε:

$$\begin{aligned} d_3+4d_2+d_1 &= \frac{6}{h^2}(f_3-2f_2+f_1) = \frac{1}{2} \\ d_2+4d_1+d_0 &= \frac{6}{h^2}(f_2-2f_1+f_0) = 2 \end{aligned}$$

Η επίλυση του παραπάνω συστήματος μας δίνει $d_1=\frac{1}{2}, d_2=0$. Επομένως η spline παρεμβολής της f, κάνοντας χρήση της (4.23), είναι:

$$s(x) = \begin{cases} \frac{1}{12}x^3 + \frac{5}{12}x + (1-x), x \in [0,1] \\ \frac{1}{12}(2-x)^3 + \frac{1}{3}(x-1) + \frac{5}{12}(2-x), x \in [1,2] \\ \frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{3}(3-x), x \in [2,3] \end{cases}$$

4.4 Τα σημεία παρεμβολής Chebyshev

Τα παρεμβολικά σημεία τα οποία μας δίνουν τις μεγάλες τιμές ονομάζονται Chebyshev και βρίσκονται κάνοντας χρήση των πολυωνύμων Chebyshev. Στο διάστημα $-1 \leq x \leq 1$ τα πολυώνυμα Chebyshev συμβολίζονται με T_n και έχουν τιμή:

$$T_n(\cos\theta) = \cos n\theta \tag{4.26}$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι ισοδύναμη με την :

$$T_n(x) = \cos(n\cos^{-1}x), -1 \leq x \leq 1 \tag{4.27}$$

Άλλος τρόπος γραφής προκύπτει κάνοντας χρήση της:

$$\cos\left[(n \pm 1)\theta\right] = \cos n\theta \cos\theta \mp \sin n\theta \sin\theta \tag{4.28}$$

Θα παρουσιάσουμε ορισμένεως από τις τιμές των πολυωνύμων Chebyshev. Έχουμε:
Για $n = 0, T_0(x) = \cos 0\theta = 1$
Για $n = 1, T_1(x) = \cos 1\theta = \cos\theta$
Τώρα για $n = n - 1$ έχουμε $T_{n-1}(x) = \cos(n-1)\theta = \cos n\theta \cos\theta + \sin n\theta \sin\theta$
Για $n = n + 1$ έχουμε $T_{n+1}(x) = \cos(n-1)\theta = \cos n\theta \cos\theta - \sin n\theta \sin\theta$
Επομένως κάνοντας χρήση τους παραπάνω όρους παίρνουμε την επαναληπτική σχέση:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), -1 \leq x \leq 1, n \geq 1 \tag{4.29}$$

Τα πολυώνυμα Chebyshev, έχουν πολλές εφαρμογές στην προσεγγιστική θεωρία και είναι πολύ χρήσιμα καθώς οι μέγιστες τιμές της $T_n(x) = \cos(n\theta), x = \cos\theta$ είναι ίσες με τη μονάδα. Απαιτούμε το $prod(x)$ να είναι ένα πολλαπλάσιο του T_{n+1}, θέτωντας τα παραμβολικά σημεία $\{x_i : i = 0, 1, ..., n\}$ ως τις ρίζες του T_{n+1}, δίνοντας τα σημεία:

$$x_i = \cos\left[\frac{[2(n-i)+1]\,\pi}{2(n+1)}\right], i = 0, 1, ..., n \tag{4.30}$$

Προκειμένου να υιοθετήσουμε αυτές τις τιμές σε ένα γενικό διάστημα $[a, b]$,εισάγουμε δύο παραμέτρους $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε:

$$x_i = \lambda + \mu \cos\left[\frac{[2(n-i)+1]\,\pi}{2(n+1)}\right], i = 0, 1, ..., n \tag{4.31}$$

να είναι τα παρεμβολικά σημεία Chebyshev. Εκ κατασκευής, έχουν την ιδιότητα, το μέγεθος των μεγίστων των πολυωνύμων $\prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$ να είναι ίσα μεταξύ τους, κάτι το οποίο βοηθάει στο να ελαττωθεί η μέγιστη τιμή του σφάλματος (4.13), όπου το x_0 είναι κοντά στο α και το x_n κοντά στο β. Θέλουμε να επιλέξουμε παρεμβολικά σημεία τα οποία κάνουν την σχέση:

$$\max_{a \leq x \leq b} |prod(x)| \tag{4.32}$$

μικρή. Αυτή η έκφραση ελαχιστοποιείται για όλα τα σύνολα $\{x_i : i = 0, 1, 2..., n\}$,αν λ, μ έχουν τις τιμές:

$$\begin{Bmatrix} \lambda = \frac{1}{2}(a+b) \\ \mu = \frac{1}{2}(b-a) \end{Bmatrix} \tag{4.33}$$

για την εξίσωση (4.32). Προκειμένου να δείξουμε οτι η χρήση των παρεμβολικών σημείων Chebyshev βελτιώνουν την ακρίβεια που εμφανίζεται στον δεύτερο πίνακα, θέτουμε τα x_i να έχουν την τιμή (4.31), όπου $n = 20$ και λ, μ είναι τέτοια ώστε $x_0 = -5$ και $x_{20} = 5$. Η μέθοδος Lagrange εφαρμόζεται στο παράδειγμα του Runge και στον παρακάτω πίνακα εμφανίζονται τα αποτελέσματα:

x	$f(x)$	$p(x)$	$e(x)$
0.344698	0.876886	0.887135	−0.010249
1.115724	0.445466	0.429963	0.015503
1.831827	0.229590	0.242708	−0.013119
2.507010	0.137266	0.126532	0.010734
3.126190	0.092824	0.101876	−0.009052
3.675537	0.068920	0.061018	0.007902
4.142778	0.055058	0.062173	−0.007115
4.517476	0.046712	0.040130	0.006582
4.791261	0.041743	0.047981	−0.006238
4.958018	0.039090	0.033045	0.006045

Βλέπουμε οτι η μέγιστη τιμή του $e(x)$ είναι μικρότερη από οτι στον δεύτερο πίνακα και οι τιμές στο μέσο του διαστήματος αυξάνονται. Ακόμη χρησιμοποιώντας τα σημεία Chebyshev για τον πρώτο πίνακα και χρησιμοποιώντας τις ίδιες παραμέτρους με πριν σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα:

n	x	$f(x)$	$p(x)$	$e(x)$
2	2.024604	0.196116	0.842345	−0.646229
4	1.393399	0.339765	0.761908	−0.442143
6	1.097876	0.453447	0.727637	−0.274191
8	0.912455	0.545680	0.721700	−0.176020
10	0.781995	0.620534	0.732455	−0.111921
12	0.684167	0.681159	0.751878	−0.070718
14	1.526988	0.300148	0.252887	0.047260
16	1.356570	0.352078	0.319037	0.033040
18	1.221054	0.401449	0.378684	0.022765
20	1.110623	0.447731	0.432224	0.015507

Παρατηρούμε συγκρίνοντας τους πίνακες, οτι η χρήση των σημείων παρεμβολής Chebyshev είναι καλύτερη από αυτή των ομοιόμορφα κατανεμημένων σημείων του διαστήματος.

4.5 Η νόρμα του τελεστή παρεμβολής Lagrange

Θα κάνουμε χρήση της άπειρης νόρμας για τα στοιχεία του διαστήματος $\mathscr{C}[a,b]$ και έστω το σύνολο των παρεμβολικών σημείων $\{x_i : i = 0,1,2,...,n\}$ και για κάθε $f \in \mathscr{C}[a,b]$, θέτουμε ως $X(f)$ ένα στοιχείο του $\mathscr{P}_n$ το οποίο έχει την ιδιότητα $f(x_i) = p(x_i)$. Η τιμή $\|X\|$ προσδιορίζεται στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 4.4. *(Theorem 4.3 από βιβλίο M.J.D. POWELL Approximation theory and methods) Η νόρμα του τελεστή Lagrange έχει την τιμή:*

$$\|X\| = \max_{a\leq x\leq b} \sum_{k=0}^{n} |l_k(x)| \tag{4.34}$$

όπου οι συναρτήσεις $\{l_k : k = 0,1,2,...,n\}$ προσδιορίζονται από την σχέση (4.3)

Απόδειξη. Έχουμε από την σχέση (4.6):

$$\begin{aligned}\|X\| &= \sup_{\|f\|\leq 1} \|X(f)\| \\ &= \sup_{\|f\|\leq 1} \max_{a\leq x\leq b} |\sum_{k=0}^{n} f(x_k) l_k(x)| \\ &= \max_{a\leq x\leq b} \sup_{\|f\|\leq 1} |\sum_{k=0}^{n} f(x_k) l_k(x)| \\ &= \max_{a\leq x\leq b} |\sum_{k=0}^{n} l_k(x)| \qquad (4.35)\end{aligned}$$

□

Θα δοθεί τώρα ο πίνακας για τις τιμές του τελεστή X της νόρμας, για $n = 2, 4, ..., 20$ για τα σημεία παρεμβολής:

$$x_i = -5 + \frac{10i}{n}, i = 0, 1, 2, ..., 20$$

καθώς και για τα:

$$x_i = \lambda + \mu \cos\left[\frac{[2(n-i)+1]\,\pi}{2(n+1)}\right], i = 0, 1, ..., n$$

n	*Equally spaced points*	*Chebyshev points*
2	1.25	1.25
4	2.21	1.57
6	4.55	1.78
8	10.95	1.94
10	29.90	2.07
12	89.32	2.17
14	283.21	2.27
16	934.53	2.34
18	371.37	2.42
20	10986.71	2.48

Παρατηρούμε οτι αν τα σημεία παρεμβολής είναι ανεξάρτητα του f και το n μεγάλο τότε είναι ασφαλέστερο να χρησιμοποιούμε τα σημεία Chebyshev αντί για τα ομοιόμορφα κατανεμημένα σημεία.

4.6 Παραδείγματα

Παράδειγμα 1:Έστω p το κυβικό πολυώνυμο το οποίο παρεμβάλλεται στις τιμές μίας συνάρτησης f,$f(0)$,$f(1)$,$f(2)$ και $f(3)$.Να εκφραστεί η τιμή $p(6)$ με τους παραπάνω όρους και να βρεθεί η τιμή της,$p(6)$, για τη συνάρτηση $\{f(x) = (x-3)^3 : 0 \leq x \leq 6\}$.

Λύση

Για την εύρεση της σχέσης θα κάνουμε χρήση της (4.3) για τις τιμές $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$.Επομένως έχουμε:

$$\begin{aligned}
l_0 &= \frac{(x-1)}{(0-1)}\frac{(x-2)}{(0-2)}\frac{(x-3)}{(0-3)} = -\frac{x^3-6x^2+11x-6}{6}\\
l_1 &= \frac{(x-0)}{(1-0)}\frac{(x-2)}{(1-2)}\frac{(x-3)}{(1-3)} = \frac{x^3-5x^2+6x}{4}\\
l_2 &= \frac{(x-0)}{(2-0)}\frac{(x-1)}{(2-1)}\frac{(x-3)}{(2-3)} = -\frac{x^3-4x^2+3x}{2}\\
l_3 &= \frac{(x-0)}{(3-0)}\frac{(x-1)}{(3-1)}\frac{(x-2)}{(3-2)} = \frac{x^3-3x^2+3x}{6}
\end{aligned}$$

και κάνοντας χρήση της μεθόδου Lagrange για $x = 6$ παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
p(6) &= -\frac{216-216+66-6}{6}f(0) + \frac{216-180+36}{4}f(1)\\
&- \frac{216-144+18}{2}f(2) + \frac{216-108+18}{6}f(3)\\
&= -10f(0) + 18f(1) - 45f(2) + 21f(3)
\end{aligned}$$

Για τη συνάρτηση f έχουμε ότι $f(0) = (0-3)^3 = -27$,$f(1) = (1-3)^3 = -8$,$f(2) = (2-3)^3 = -1$ και $f(3) = (3-3)^3 = 0$,επομένως :

$$p(6) = -27(-10) - 8(-18) - 1(-45) + 0(21) = 171$$

Παράδειγμα 2:Έστω $f \in \mathscr{C}^{2k}[0,1]$ και έστω p ένα πολυώνυμο βαθμού $(2n-1)$ το οποίο ικανοποιεί τις συνθήκες:

$$\begin{Bmatrix} p^{(k)}(0) = f^{(k)}(0) \\ p^{(k)}(1) = f^{(k)}(1) \end{Bmatrix}$$

Να αποδειχθεί ότι,για κάθε $x \in [0,1]$,υπάρχει ξ τέτοιο ώστε το σφάλμα της πολυώνυμικής προσέγγισης να έχει την τιμή:

$$f(x) - p(x) = \frac{x^n(x-1)^n}{(2n)!}f^{(2n)}(\xi)$$

Λύση

Από τα δεδομένα του παραδείγματος έχουμε ότι ισχύει η σχέση (4.2).Ακόμα η συνάρτηση f είναι $2n-1$ φορές παραγωγίσιμη.Επομένως υπάρχει $\xi \in [0,1]$ και κάνοντας χρήση το θεώρημα 4.2 έχουμε ότι η τιμή του σφάλματος για $n = 2n - 1$ είναι :

$$\begin{aligned}
e(x) = f(x) - p(x) &= \frac{1}{(2n-1+1)!} \prod_{j=0}^{n} (x - x_j) f^{(2n-1+1)}(\xi) \\
&= \frac{1}{(2n)!}(x-0)(x-0)...(x-0)(x-1)...(x-1) f^{(2n)}(\xi) \\
&= \frac{x^n (x-1)^n}{(2n)!} f^{(2n)}(\xi)
\end{aligned}$$

Παράδειγμα 3:Να δειχθεί οτι τα σημεία παρεμβολής Chebyshev αν χρησιμοποιηθούν αντί των $\{x_i = \frac{(2i-n)}{n} : i = 0, 1, ..., n\}$ τότε η μέγιστη απόσταση μεταξύ δύο σημείων πολλαπλασιάζεται από ένα παράγοντα μικρότερο του $\frac{1}{2}\pi$.Ακόμα να δείξετε για τα σημεία *Chebyshev* ότι ισχύει $\frac{x_0}{x_n} \geq \frac{(n+1)}{\pi}$.

Λύση

Αρχικά έχουμε ότι η μεγαλύτερη απόσταση των ισομοιρασμένων σημείων είναι $x_n - x_0 = \frac{2n-n}{n} - \frac{(-n)}{n} = 1 - (-1) = 2$.Όσον αφορά τα σημεία Chebyshev έχουμε:

$$\begin{aligned}
x_n - x_0 &= \cos\frac{[2(n-n)+1]\,\pi}{2(n+1)} - \cos\frac{[2(n-0)+1]\,\pi}{2(n+1)} \\
&= \cos\frac{\pi}{2(n+1)} - \cos\frac{2n\pi+\pi}{2(n+1)} = -2\sin\frac{2n\pi+2\pi}{4(n+1)}\sin\frac{-2n\pi}{2(n+1)} \\
&= -2\sin\frac{-2n\pi}{2n+2} = 2\sin\frac{2n\pi}{2n+2}
\end{aligned}$$

Όμως $\sin\frac{2n\pi}{2n+2} \leq 1 < \frac{\pi}{2}$.Επομένως το πρώτο σκέλος αποδείχθηκε.Όσον αφορά το κλάσμα έχουμε:

$$\begin{aligned}
\frac{x_0}{x_n} &= \frac{\cos\frac{2n\pi+\pi}{2n+2}}{\cos\frac{\pi}{2n+2}} \\
&\geq \frac{(2n\pi+\pi)(2n+2)}{\pi(2n+2)} = \frac{(2n+1)\pi}{\pi} = 2n+1 \\
&\geq \frac{(n+1)}{\pi}
\end{aligned}$$

Παράδειγμα 4:Έστω s η κυβική *spline* συνάρτηση:

$$s(x) = x^3 - 4(x-1)^3 + 6(x-2)^3 - 4(x-3)^3 + 4(x-4)^3, 0 \leq x \leq 100$$

Να δειχθεί ότι η συνάρτηση είναι ταυτοτικά μηδέν αν $x \geq 4$ και ότι ο παράγοντας ακύρωσης $s(100)$ βρίσκεται από την εξίσωση της s.

Λύση

Θα γίνει χρήση της μεθόδου επαγωγής.Αρχικά για $x = 4$ έχουμε:

$$s(4) = 4^3 - 4(4-1)^3 + 6(4-2)^3 - 4(4-3)^3 + 4(4-4)^3 = 64 - 108 + 48 - 4 = 0$$

Επομένως για $x = 4$ ισχύει.Θα δείξουμε τώρα ότι ισχύει για οποιοδήποτ ακέραιο μεγαλύτερο του 4,έστω $n + 4$:

$$\begin{aligned} s(n+4) &= (n+4)^3 - 4(n+4-1)^3 + 6(n+4-2)^3 - 4(n+4-3)^3 + (n+4-4)^3 \\ &= n^3 + 64 + 12n(n+4) - 4\left[n^3 + 27 + 9n(n+3)\right] + 6\left[n^3 + 8 + 6n(n+2)\right] \\ &- 4\left[n^3 + 1 + 3n(n+1\right] + n^3 \\ &= n^3 + 64 + 12n^2 + 48n - 4n^3 - 108 - 36n^2 - 108n + 6n^3 + 48 + 36n^2 \\ &+ 72n - 4n^3 - 4 - 12n^2 - 12n + n^3 = 0 \end{aligned}$$

Ακόμη για την εύρεση του παράγοντα ακύρωσης κάνουμε χρήση της εξίσωσης και βρίσκουμε για $s = 100$:

$$\begin{aligned} s(100) &= 100^3 - 4(100-1)^3 + 6(100-2)^3 - 4(100-3)^3 + (100-4)^3 \\ &= 1000000 - 3881196 + 5647152 - 3650692 + 884736 = 0 \end{aligned}$$

Επομένως είτε με πράξεις ή κάνοντας χρήση της συνθήκης που αποδείξαμε $s(100) = 0$.

Κεφάλαιο 5

Διηρημένες διαφορές

5.1 Βασικές ιδιότητες διηρημένων διαφορών

Έστω $\{x_i : i = 0, 1, 2, ..., n\}$ κάθε ένα από τα $n + 1$ σημεία του $[a, b]$ και έστω $f \in \mathscr{C}[a, b]$. Ο συντελεστής του x^n στο πολυώνυμο $p \in \mathscr{P}_n$ που ικανοποιεί την συνθήκη:

$$p(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, ..., n \tag{5.1}$$

αποτελεί μία διηρημένη διαφορά τάξης n με συμβολισμό $f[x_0, x_1, ..., x_n]$. Σημειώνουμε οτι η τάξη της διηρημένης διαφοράς είναι κατά μία μικρότερη από το πλήθος των συντελεστών της έκφρασης $f[..., ..., ...]$. Συνεπώς η διηρημένη διαφορά τάξης μηδέν έχει την τιμή $f[x_0]$. Όταν έχουμε $n \geq 1$ τότε:

$$f[x_0, x_1, ..., x_n] = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n}(x_k - x_j)} \tag{5.2}$$

Παρατηρούμε οτι η διηρημένη διαφορά είναι γραμμική στη συνάρτηση με τιμές $\{f(x_i) : i = 0, 1, ..., n\}$ αλλά η σχέση (5.2) δεν είναι ο καλύτερος τρόπος υπολογισμού της. Παρουσιάζονται ορισμένοι τρόποι χρήσης των διηρημένων διαφορών για να φανεί η σπουδαιότητά τους. Οι διηρημένες διαφορές παρέχουν μία καλή μέθοδο πολυωνυμικής παρεμβολής. Χρησιμοποιούνται για να δημιουργήσουν μια ικανοποιητική βάση ενός χωρίου απο spline $\mathscr{L}(k, \xi_0, \xi_1, ..., \xi_n)$. Ακόμη είναι χρήσιμες καθώς μπορούμε να τις δούμε ως την τιμή της n-παραγώγου της συνάρτησης f διαιρούμενης από $n!$. Παρουσιάζουμε το παρακάτω θεώρημα για να αιτολογήσουμε τον ισχυρισμό τον οποίο κάναμε.

Θεώρημα 5.1. *(Theorem 5.1 από βιβλίο M.J.D.POWELL Approximation theory and methods) Έστω $f \in \mathscr{C}^n[a, b]$ και έστω $\{x_i : i = 0, 1, ...n\}$ ένα σύνολο από σημεία στο $[a, b]$. Τότε υπάρχει ένα ξ στο μικρότερο διάστημα το οποίο περιέχεται στα σημεία $\{x_i : i = 0, 1, ...n\}$ για το οποίο ικανοποιείται η:*

$$f[x_0, x_1, ..., x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \tag{5.3}$$

Απόδειξη. Έστω $e = f(x) - p(x), a \leq x \leq b$ το σφάλμα, όπου $p \in \mathscr{P}_n$,όπου το p προσδιορίζεται από την (5.1). Το σφάλμα e ανήκει στο διάστημα $\mathscr{C}^n[a, b]$ και $e(x) = 0$

όταν $x \in \{x_i : i = 0, 1, ...n\}$. Άρα εφαρμόζοντας το Θεώρημα Rolle επαγωγικά, βρίσκουμε οτι $e^{(n)}(\xi) = 0$, όπου ξ ανήκει στο διάστημα που ορίσαμε στο θεώρημα. Συνεπώς:

$$p^{(n)}(\xi) = f^{(n)}(\xi) \tag{5.4}$$

Επομένως η σχέση (5.3) ισχύει από τον ορισμό των διηρημένων διαφορών. □

Υποθέτουμε οτι η συνάρτηση $f \in \mathscr{C}^n [a, b]$ δίνεται στο σύνολο σημείων $\{x_i : i = 0, 1, ...m\}$ όπου $m >> n$ και όπου τα x_i έχουν την εξής μορφή:

$$a \leq x_0 \leq x_1 \leq .... < x_m \leq b \tag{5.5}$$

Τότε η ακολουθία $\{f [x_j, x_{j+1}, ..., x_{j+n}] , j = 0, 1, ..., m - n\}$ μπορεί να υπολογισθεί από την :

$$f [x_j, x_{j+1}, ..., x_{j+k+1}] = \frac{f [x_j, x_{j+1}, ..., x_{j+k+1}] - f [x_j, x_{j+1}, ..., x_{j+k+1}]}{(x_{j+k+1} - x_j)}$$

Μια απλή εφαρμογή του παραπάνω τύπου για τα σημεία x_0, x_1, x_2 είναι η εξής:

$$\begin{aligned} f [x_0, x_1] &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \\ f [x_0, x_1, x_2] &= \frac{f [x_1, x_2] - f [x_0, x_1]}{x_2 - x_0} \\ &= \frac{\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} - \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{x_2 - x_0} \end{aligned}$$

Από το θεώρημα 5.1 βλέπουμε οτι οι όροι της ακολουθίας είναι οι τιμές της $\{\frac{f^{(n)}(x)}{n!}, a \leq x \leq b\}$ για κάθε διάστημα $\{[x_j, x_{j+n}] : j = 0, 1, ..., m - n\}$. Συνεπώς αν τα σημεία $\{x_i : i = 0, 1, ...m\}$ είναι κοντά, περιμένουμε οτι η ακολουθία των διηρημένων διαφορών μεταβάλλεται αργά. Σε αυτή την περίπτωση ο παρονομαστής της (5.2) είναι μικρός.

5.2 Η μέθοδος παρεμβολής Newton

Υποθέτουμε οτι έχουμε να υπολογίσουμε τη συνάρτηση $f(x)$ σε ένα μεγάλο αριθμό δεδομένων $\{f(x_i) : i = 0, 1, ..., m\}$. Η χρήση ενός πολυωνύμου βαθμού m δεν είναι πολύ βολική για όλα τα δεδομένα, αντιθέτως μπορούμε να δοκιμάσουμε τη χρήση πολυωνυμικής παρεμβολής σε ένα υποσύνολο της δοσμένης συνάρτησης και στην περίπτωση αυτή θα πρέπει να δούμε ποια δεδομένα θα χρησιμοποιήσουμε. Μια καλή προσέγγιση μπορεί να επιτευχθεί αν $p \in \mathscr{P}_n$ το οποίο παρεμβάλει τις τιμές της συνάρτησης $\{f(x_i) : i = 0, 1, ..., m\}$ και αν $n < m$ τα θεωρήματα (4.2) και (5.1) μας δίνουν τη τιμή για το σφάλμα:

$$f(x) - p_n(x) = \{\prod_{j=0}^{n}(x - x_j)\}f [x_0, x_1, ..., x_{n+1}] \tag{5.6}$$

Επειδή θέλουμε τα δεδομένα τα οποία είναι κοντά στο x είναι βολικό να χρησιμοποιήσουμε τα σημεία για τα οποία οι διαφορές $\{|x-x_i| : i = 0, 1, ..., n\}$ αυξάνουν μονότονα.

Η διαδικασία για την επιλογή του n είναι ο προσδιορισμός του σφάλματος (5.6).Πρέπει να αναζητηθεί η τιμή του n, η οποία έχει την τάση να ελαχιστοποιεί το σφάλμα. Με αυτό τον τρόπο, αρχικά η ακρίβεια της παρεμβολικής μεθόδου βελτιώνεται, όμως καθώς προσθέτουμε δεδομένα τα οποία είναι μακριά από την τιμή του x δεν παίρνουμε κάποια πληροφορία για τη συνάρτηση. Ακόμα και αν γνωρίζουμε την τιμή του n υπάρχουν πλεονεκτήματα υπολογισμού των πολυωνύμων $\{p_k : k = 0, 1, ..., n\}$,όπου $p_k \in \mathscr{P}_k$, τα οποία ικανοποιούν την εξίσωση:

$$p_k(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, ..., k \tag{5.7}$$

Θεώρημα 5.2. *(Theorem 5.2 από βιβλίο M.J.D.POWELL Approximation theory and methods) Έστω $p_k \in \mathscr{P}_k$ ένα πολυώνυμο το οποίο προσδιορίζεται απο την (5.7).Τότε:*

$$p_{k+1}(x) = p_k + \{\prod_{j=0}^{k}(x - x_j)\}f[x_0, x_1, ..., x_{k+1}], a \leq x \leq b \tag{5.8}$$

είναι το πολυώνυμο στο $\mathscr{P}_{k+1}$ το οποίο ικανοποιεί την

$$p_{k+1}(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, ..., k + 1 \tag{5.9}$$

Απόδειξη. Έστω p_{k+1} ένα πολώνυμο που έχει την ιδιότητα (5.8) και έστω $q \in \mathscr{P}_{k+1}$ το οποίο παρεμβάλεται στις τιμές της $\{f(x_i) : i = 0, 1, ..., k+1\}$. Οι (5.7),(5.8) δίνουν:

$$q(x_i) - p_{k+1}(x_i) = 0, i = 0, 1, ..., k \tag{5.10}$$

Συνεπώς από τον ορισμό των διηρημένων διαφορών προσδιορίζεται οτι $\{q(x)-p_{k+1}(x) : a \leq x \leq b\} \in \mathscr{P}_k$. Συνεπώς η (5.10) θα είναι ταυτοτικά μηδέν. □

Εφαρμόζοντας το θεώρημα επαγωγικά παίρνουμε:

$$\begin{aligned} p_n(x) &= f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] \\ &+ ... + \{\prod_{j=0}^{n-1}(x - x_j)\}f[x_0, x_1, ..., x_n], a \leq x \leq b \end{aligned} \tag{5.11}$$

όπου $p \in \mathscr{P}_n$ το οποίο ικανοποιεί την παρεμβολική συνθήκη (5.1). Αυτή η μορφή παρεμβολικού πολυωνύμου καλείται μέθοδος παρεμβολής $Newton$.

5.3 Η επαναληπτική σχέση για τις διηρημένες διαφορές

Ο πιο συνηθισμένος τρόπος υπολογισμού των διηρημένων διαφορών με τη μέθοδο $Newton$ (5.11) απαιτεί την παρουσίαση όλων των τιμών με την μορφή πίνακα:

$$\begin{array}{llll} f[x_0] & & & \\ & f[x_0, x_1] & & \\ f[x_1] & & f[x_0, x_1, x_2] & \\ & f[x_1, x_2] & & f[x_0, x_1, ..., x_n] \\ f[x_2] & & f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] & \\ & f[x_{n-1}, x_n] & & \\ f[x_n] & & & \end{array} \tag{5.12}$$

Η πρώτη στήλη αποτελείται απο τις δοσμένες τιμές της $\{f(x_i) : i = 0, 1, ..., n\}$ και οι υπόλοιπες στήλες υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τη σχέση που θα δούμε στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 5.3. *(Theorem 5.3 από βιβλίο M.J.D.POWELL Approximation theory and methods) Η διηρημένη διαφορά $f[x_j, x_{j+1}, ..., x_{j+k+1}]$ τάξης $k+1$ σχετίζεται με την διηρημένη διαφορά $f[x_j, x_{j+1}, ..., x_{j+k}]$ και $f[x_j, x_{j+1}, ..., x_{j+k+1}]$ τάξης k απο την εξίσωση:*

$$f[x_j, x_{j+1}, ..., x_{j+k+1}] = \frac{f[x_j, x_{j+1}, ..., x_{j+k+1}] - f[x_j, x_{j+1}, ..., x_{j+k}]}{(x_{j+k+1} - x_j)} \tag{5.13}$$

Απόδειξη. Έστω $p_k \in \mathscr{P}_k$, το οποίο παρεμβάλεται στις τιμές της $\{f(x_i) : i = j + 1, j + 2, ..., j + k + 1\}$. Τότε είναι προφανές οτι η :

$$p_{k+1}(x) = \frac{(x - x_j)q_k(x) + (x_{j+k+1} - x_k)p_k(x)}{(x_{j+k+1} - x_j)}, a \leq x \leq b \tag{5.14}$$

ανήκει στο $\mathscr{P}_{k+1}$ και ικανοποιεί την:

$$p_{k+1}(x_i) = f(x_i), i = j, j + 1, ..., J + k + 1 \tag{5.15}$$

Συνεπώς η διηρημένη διαφορά $f[x_j, x_{j+1}, ..., x_{j+k+1}]$ είναι ο συντελεστής του x^{k+1} στη σχέση (5.14). Επειδή $f[x_j, x_{j+1}, ..., x_{j+k}]$ είναι ο συντελεστής του x^k στο p_k και επειδή $f[x_j, x_{j+1}, ..., x_{j+k+1}]$ είναι ο συντελεστής του x^k στο πολυώνυμο q_k είναι επακόλουθο οτι η (5.13) ικανοποιείται. □

Το πλήθος των υπολογιστικών διαδικασιών που χρειάζονται για την υλοποίηση των διηρημένων διαφορών της μεθόδου Newton είναι τάξης n^2. Ακολουθεί ένα παράδειγμα για να εφαρμόσουμε όσα αναφέραμε στη θεωρία στη πράξη. Θα δοθούν δύο πίνακες με τις τιμές για 6 και 5 δεκαδικά ψηφία αντίστοιχα προκειμένου να δούμε την αλλαγή στην ακρίβεια των υπολογισμών. Έστω $f(x) = 10e^{-3x}, 0 \leq x \leq 2$ και το σύνολο των σημείων $\{1.60, 1.63, 1.70, 1.76, 1.80\}$, παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα μας στους δύο παρακάτω πίνακες για 6 και 5 δεκαδικά ψηφία αντίστοιχα.

x_i	$f(x_i)$	$order1$	$order2$	$order3$	$order4$
1.60	0.082297				
		−0.236100			
1.63	0.075214		0.325710		
		−0.203529		−0.297900	
1.70	0.060967		0.278046		0.203735
		−0.167383		−0.257153	
1.76	0.050294		0.234330		
		−0.143950			
1.80	0.045166				

και για 5 δεκαδικά ψηφία

x_i	$f(x_i)$	$order1$	$order2$	$order3$	$order4$
1.60	0.082230				
		−0.23633			
1.63	0.07521		0.32900		
		−0.20343		−0.32887	
1.70	0.06097		0.27638		0.50080
		−0.16750		−0.22871	
1.76	0.05092		0.23750		
		−0.14375			
1.80	0.04517				

5.4 Παρεμβολή Hermite

Το γενικό πρόβλημα παρεμβολής Hermite είναι ο υπολογισμός του $p \in \mathscr{P}_n$ το οποίο ικανοποιεί τη συνθήκη:

$$p^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i), j = 0, 1, ..., l_i, \ i = 0, 1, ..., m \tag{5.16}$$

όπου οι συντελεστές του p είναι ίσοι με τον αριθμό των δεδομένων (n) και το n υπολογίζεται από:

$$n + 1 = \sum_{i=0}^{m}(l_i + 1) \tag{5.17}$$

Θεώρημα 5.4. *(Theorem 5.4 από βιβλίο M.J.D.POWELL Approximation theory and methods) Έστω $\{x_i : i = 0, 1, ..., m\}$ ένα σύνολο από σημεία του $a \le x \le b$ και έστω οι πραγματικοί αριθμοί $\{f^j(x_i) : j = 0, 1, 2..., l_i, \ i = 0, 1, ..., m\}$. Τότε υπάρχει ένα $p \in \mathscr{P}_n$ το οποίο ικανοποιεί την (5.16), όπου η τιμή του n δίνεται απο την (5.17).*

Απόδειξη. Παραμετροποιούμε την προσεγγιστική συνάρτηση επιλέγοντας μια βάση του γραμμικού χώρου και κάθε στοιχείο του $\mathscr{P}_n$ εκφράζεται από την :

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i, a \le x \le b \tag{5.18}$$

Επειδή το πλήθος των συνθηκών του p είναι ίσες με τις παραμέτρους, οι συντελεστές $\{c_i : i = 0, 1, ..., n\}$ ικανοποιούν ένα τετραγωνικό γραμμικό σύστημα. Είναι προφανές οτι πρέπει να δείξουμε οτι ο πίνακας δεν είναι μοναδιαίος. Μία ισοδύναμη συνθήκη είναι η εξής, αν θέσουμε το δεξιό μέλος της εξίσωσης ίσο με το μηδέν, τότε η εξίσωση ικανοποιείται αν όλοι οι συντελεστές είναι μηδέν. Συνεπώς αρκεί να δείξουμε οτι αν όλες οι τιμές είναι μηδέν τότε το p είναι ταυτοτικά μηδέν. Έχουμε οτι όταν οι τιμές είναι μηδέν τότε το p είναι ένα πολλαπλάσιο του:

$$\prod_{i=0}^{m}(x - x_i)^{l_{i+1}}, a \le x \le b \tag{5.19}$$

Επειδή το πολυώνυμο p εμπεριέχει τον παράγοντα x^{n+1} ο πολλαπλασσιαστικός παράγοντας πρέπει να είναι ίσος με το μηδέν. Συνεπώς το πολυώνυμο p είναι ταυτοτικά μηδέν. □

Σημειώνουμε οτι το θεώρημα (4.1) είναι επακόλουθο του θεωρήματος(5.4). Ακόμη η απόδειξη του θεωρήματος (5.4) εξαρτάται απο την εξής συνθήκη, αν η παράγωγος $f^{(k)}(x_i)$ βρίσκεται στα δεδομένα του προβλήματος τότε είναι γνωστές και οι $\{f^{(j)}(x_i) : j = 0, 1, ..., k-1\}$. Η μέθοδος των διηρημένων διαφορών για τον υπολογισμό του p χρησιμοποιεί αυτή τη συνθήκη. Για να περιγράψουμε αυτή τη μέθοδο, αλλάζουμε το συμβολισμό των σημείων ως εξής, αντικαθηστούμε το σύνολο $\{x_i : i = 0, 1, ..., m\}$ με το σύνολο
$\{x_0, ..., x_0, x_1, ..., x_1, ..., x_m, ..., x_m\}$, όπου για $i = 0, 1, ..., m$ οι αριθμοί x_i προκύπτουν $(l_i + 1)$ φορές. Ξαναααριθμούμε τους όρους στο σύνολο και το νέο σύνολο έχει στοιχεία τα $\{x_i : i = 0, 1, ..., n\}$. Συνεπώς οι επαναλαμβανόμενοι όροι στο νέο σύνολο δείχνουν ποιες παράγωγοι είναι γνωστές και έχουμε επιστρέψει στην περίπτωση όπου έχουμε $(n+1)$ σημεία. Τώρα εφαρμόζουμε την μέθοδο Newton στα δεδομένα μας. Η μόνη δυσκολία που προκύπτει είναι η εύρεση των διηρημένων διαφορών, λόγω του ότι η σχέση υπολογισμού τους (5.11) δίνει απροσδιοριστία αν $x_{j+k+1} = x_j$. Όμως το θεώρημα (5.1) μας παρέχει την λύση για το πρόβλημα αυτό καθώς αν $x_{j+k+1} = x_j$ τότε έχουμε:

$$f\left[x_j, x_{j+1}, ..., x_{J+k+1}\right] = \frac{f^{(k+1)}(x_j)}{(k+1)!} \tag{5.20}$$

που είναι πολύ βολική. Επομένως όλες οι τιμές των διηρημένων διαφορών μπορούν να υπολογισθούν κάνοντας χρήση των δύο αυτών εξισώσεων.
Επιστρέφουμε στο παράδειγμα το οποίο εξετάσαμε προηγουμένως και αναζητούμε με την μέθοδο *Newton* το πολυώνυμο, το οποίο είναι τετάρτου βαθμού. Κάνουμε χρήση της σχέσης $p(x_i) = f(x_i)$ και παίρνουμε τις εξής τιμές:

$$\left\{\begin{matrix} p(1.6) = 0.082297 \\ p'(1.6) = -0.246892 \\ p(1.7) = 0.060967 \\ p(1.8) = 0.045166 \\ p'(1.8) = 0.135497 \end{matrix}\right\} \tag{5.21}$$

Στο παρακάτω πίνακα φαίνονται οι τιμές για τις διηρημένες διαφορές:

x_i	$f(x_i)$	$order1$	$order2$	$order3$	$order4$
1.60	0.082297				
		−0.246892			
1.60	0.082297		0.335920		
		−0.213300		−0.297350	
1.70	0.060967		0.276450		0.203735
		−0.158010		−0.256600	
1.80	0.045166		0.225130		
		−0.135497			
1.80	0.045166				

Συνεπώς καταλήγουμε στο πολυώνυμο:

$$\begin{aligned} p(x) &= 0.082297 - 0.246892(x-1.6) + 0.335920(x-1.6)^2 \\ &\quad - 0.297350(x-1.6)^2(x-1.7) + 0.203750(x-1.6)^2(x-1.7)(x-1.8) \end{aligned}$$

5.5 Παραδείγματα

Παράδειγμα 1:Να υπολογισθούν οι διηρημένες διαφορές για τις τιμές της συνάρτησης $f(-2) = 3.28$,$f(-1) = 17.36$,$f(2) = 14.96$,$f(3) = 19.28$ και $f(4) = 36.16$.Να δειχθεί οτι με τη χρήση της μεθόδου $Newton$ η τιμή $f(4)$ είναι ίδια.Εν συνεχεία να αποδειχθεί οτι η $p'(x_0)$ δίνεται από την εξίσωση:

$$p'(x_0) = f[x_0, x_1] + (x_0 - x_1)f[x_0, x_1, x_2] + ... + \prod_{j=1}^{n-1}(x_0 - x_j)f[x_0, x_1, ...x_n]$$

και στη συνέχεια να βρεθεί η εκτίμηση για το πολυώνυμο $p'(2)$.

Λύση

Ξεκινάμε με τον υπολογισμό των διηρημένων διαφορών για τα σημεία $x_0 = -2, x_1 = -1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4$ και έχουμε:

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(-2) - f(-1)}{-2+1} = \frac{3.28 - 17.36}{-1} = 14.08$$

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} \\ &= \frac{-0.8 - 14.08}{4} = -3.7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1, x_2, x_3] &= \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0} \\ &= \frac{\frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1} - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0} \\ &= \frac{4.32 + 0.8}{3+1} = 1.28 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] &= \frac{f[x_1, x_2, x_3, x_4] - f[x_0, x_1, x_2, x_3]}{x_4 - x_0} \\ &= \frac{\frac{f[x_2,x_3,x_4]-f[x_1,x_2,x_3]}{x_4-x_1} - f[x_0, x_1, x_2, x_3]}{x_4 - x_0} \\ &= \frac{1-1}{4+2} = 0 \end{aligned}$$

Επομένως κάνοντας χρήση της μεθόδου Newton για $x = 4$ έχουμε:

$$\begin{aligned} f(4) = f(-2) &+ (4+2)(f[x_0, x_1] + (4+2)(4+1)f[x_0, x_1, x_2] \\ &+ (4+2)(4+1)(4-2)f[x_0, x_1, x_2, x_3] \\ &+ (4+2)(4+1)(4-2)(4-4)f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] \\ &= 3.28 + (4+2)14.08 - 3.72(4+2)(4+1) + (4+2)(4+1)(4-2) \\ &= 3.28 + 84.48 - 116.6 + 60 = 36.16 \end{aligned}$$

Επομένως κάνοντας χρήση της μεθόδου $Newton$ έχουμε την ίδία τιμή για την $f(4)$. Εν συνεχεία έχουμε ότι:

$$p'(x) = f[x_0, x_1] + (2x - x_1 - x_0)f[x_0, x_1, x_2] + .. + \prod_{j=1}^{n-1}(x - x_j)f[x_0, x_1, ...x_n]$$

και για $x = x_0$:

$$p'(x_0) = f[x_0, x_1] + (x_0 - x_1)f[x_0, x_1, x_2] + .. + \prod_{j=1}^{n-1}(x_0 - x_j)f[x_0, x_1, ...x_n]$$

Επομένως για $x_0 = -2$ έχουμε:

$$\begin{aligned} p'(-2) &= f[-2, -1] + (-2 + 1)f[-2, -1, 2] \\ &+ (-2 - 2)f[-2, -1, 2, 3] + (-2 - 4)f[-2, -1, 2, 3, 4] \\ &= 14.08 + 3.73 - 4 = 13.8 \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2:Αν τα σημεία $\{x_i : i = 0, 1, ..., n\}$ έχουν τις τιμές $\{x_i = x_0 + ih : i = 0, 1, ..., n\}$,όπου h μία σταθερά,τότε από την (5.2) έχουμε ότι οι διηρημένες διαφορές έχουν τις τιμές:

$$h^{-n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{1}{k!(n-k)!}f(x_k)$$

Λύση

Κάνοντας χρήση της (5.2) και χρησιμοποιώντας τα σημεία τα οποία δίνονται στην εκφώνηση του παραδείγματος έχουμε:

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1, ..., x_n] &= \sum_{k=0}^{n}\frac{f(x_k)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)...(x_k - x_n)} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{f(x_k)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)...(x_k - x_{k-1})(-1)^{k-n}[(x_{k+1} - x_k)...(x_n - x_k)]} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{f(x_k)(-1)^{n-k}}{(x_0 + kh - x_0)(x_0 + kh - x_0 - h)...(x_0 + nh - x_0 - kh)} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{f(x_k)(-1)^{n-k}}{h^n[k(k-1)...(n-k)...1]} \\ &= h^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{f(x_k)(-1)^{n-k}}{k(k-1)(k-2)...1(n-k)(n-(k-1))...1} \\ &= h^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{f(x_k)(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} \end{aligned}$$

Κεφάλαιο 6

Η ομοιόμορφη σύγλιση των πολυωνυμικών προσεγγίσεων

6.1 Το θεώρημα Weierstrass και οι μονότονοι τελεστές

Στο κεφάλαιο 4 είδαμε την προσέγγιση της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{1+x^2}, -5 \leq x \leq 5$ από πολυώνυμα διαφορετικών βαθμών. Κάθε πολυώνυμο υπολογίσθηκε με την μέθοδο Lagrange και είδαμε οτι αυξάνοντας το βαθμό των πολυωνύμων κάνει την ακρίβεια χειρότερη για τα σημεία παρεμβολής που έχουν μεταξύ τους ίσες αποστάσεις. Αντί όμως να χρησιμοποιούμε την μέθοδο Lagrange για τον προσδιορισμό κάθε πολυωνύμου μπορούμε να δούμε άλλες μεθόδους. Μπορούμε να παράγουμε μια ακολουθία πολυωνυμικών προσεγγίσεων σε κάθε $f \in \mathscr{C}[a,b]$ ώστε να επιτυγχάνεται η σύγκλιση. Το θεώρημα το οποίο ακολουθεί είναι γνωστό ως το θεώρημα Weierstrass.

Θεώρημα 6.1. *(Theorem 6.1 από βιβλίο M.J.D.POWELL Approximation theory and methods) Για κάθε $f \in \mathscr{C}[a,b]$ και για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει ένα αλγεβρικό πολυώνυμο της μορφής:*

$$p(x) = c_0 + c_1 x + ... + c_n x^n, a \leq x \leq b \tag{6.1}$$

τέτοιο ώστε να ικανοποιείται η ανίσωση:

$$\|f - p\|_\infty \leq \epsilon \tag{6.2}$$

Στις δύο επόμενως παραγράφους θα ασχοληθούμε με την απόδειξη του θεωρήματος η οποία θα βασιστεί στις ιδιότητες μονότονων τελεστών.
Ο τελεστής $L : \mathscr{C}[a,b] \longrightarrow \mathscr{C}[a,b]$ είναι μονότονος αν ικανοποιεί την εξής συνθήκη:
Έστω f, g δύο συναρτήσεις στο $\mathscr{C}[a,b]$ για τις οποίες ισχύει:

$$f(x) \geq g(x), \forall x \in [a,b] \tag{6.3}$$

Τότε και για τις Lf, Lg πρέπει να ισχύει:

$$(Lf)(x) \geq (Lg)(x) \tag{6.4}$$

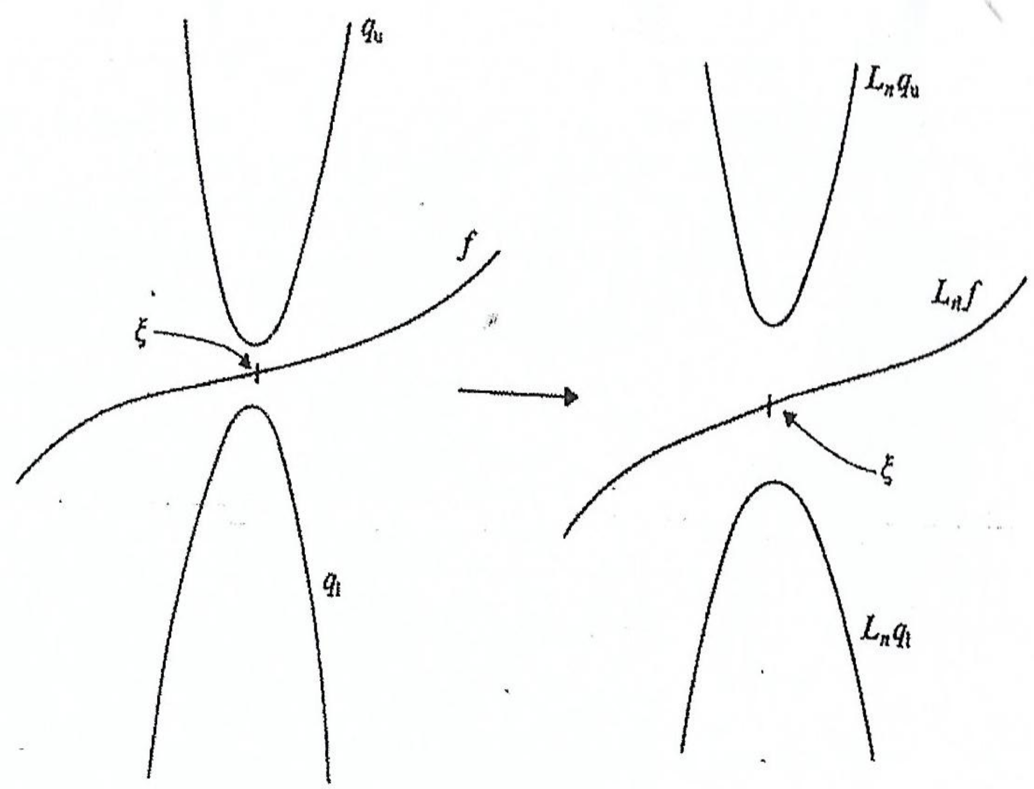
Για όλες τις μη αρνητικές συναρτήσεις $f \in \mathscr{C}[a,b]$ όλοι οι τελεστές Lf πρέπει επίσης να είναι μη αρνητικοί. Οι μονότονοι τελεστές είναι χρήσιμοι καθώς δίνοντας μία άπειρη ακολουθία γραμμικών μονότονων τελεστών $\{L_i : i = 0, 1, ...\}$, μπορούμε να δούμε που συγκίνει και που όχι η ακολουθία στην f.

Θεώρημα 6.2. *(Theorem 6.2 από βιβλίο M.J.D.POWELL Approximation theory and methods) Έστω $\{L_i : i = 0, 1, ...\}$ μία ακολουθία γραμμικών μονότονων τελεστών, $L_i : \mathscr{C}[a,b] \longrightarrow \mathscr{C}[a,b]$.Τότε αν η ακολουθία $\{L_i f : i = 0, 1, ...\}$ συγκλίνει στην f για τις συναρτήσεις:*

$$f(x) = x^k, a \leq x \leq b,\ k = 0, 1, 2 \tag{6.5}$$

τότε η $\{L_i f : i = 0, 1, ...\}$ συγκλίνει στην f για κάθε $f \in \mathscr{C}[a,b]$.

Απόδειξη. Η απόδειξη θα βασιστεί στις εξής γραφικές παραστάσεις:



Από συμπάγεια έχουμε ότι η f είναι άνω και κάτω φραγμένη και μάλιστα με πεπερασμένα φράγματα στο διάστημα $[a, b]$. Ισχύει δηλαδή ότι:

$$\min_{x\in[a,b]} |f(x)| \leq |f(x)| \leq \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

Έστω $\xi \in [a, b]$ και έστω q_u μία τετραγωνική συνάρτηση η οποία είναι όλη πάνω από την f και έστω q_l μία τετραγωνική συνάρτηση η οποία είναι όλη κάτω από την f. Είναι έτσι κατασκευασμένες έτσι ώστε η διαφορά $q_u(\xi) - q_l(\xi)$ να είναι μικρή. Ο τελεστής L_n εφαρμόζεται στις q_u, f, q_l. Από την υπόθεση η ακολουθία $\{L_i f : i = 0, 1, ...\}$ συγκλίνει στην f όταν η f είναι μία τετραγωνική συνάρτηση και βλέπουμε οτι $L_n q_u, L_n q_l$ είναι πολύ κοντά στις q_u, q_l επιλέγοντας πολύ μεγάλο n. Ακόμη η μονοτονία του L_n διαβεβαιώνει οτι η $L_n f$ είναι κάτω φραγμένη από την $l_n q_l$ και άνω φραγμένη από την $L_n q_u$. Συνεπώς

$(L_n f)(\xi)$ πρέπει να είναι πολύ κοντά στο $f(\xi)$. Άρα:

$$\lim_{n\to\infty}(L_n f)(\xi) = f(\xi) \tag{6.6}$$

Θα δείξουμε ότι:

$$\lim_{n\to\infty}\|f - L_n f\|_\infty = 0 \tag{6.7}$$

Έστω $f \in \mathscr{C}\,[a,b]$ και έστω $\epsilon > 0$, επιλέγουμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν:

$$|x_1 - x_2| < \delta \tag{6.8}$$

τότε

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \epsilon \tag{6.9}$$

Εν συνεχεία έστω $\xi \in [a,b]$ και σημειώνουμε οτι δ ανεξάρτητο του ξ. Τότε οι q_l, q_u δίνονται:

$$\begin{Bmatrix} q_u(x) = f(\xi) + \epsilon + 2\|f\|_\infty \frac{(x-\xi)^2}{\delta^2} \\ q_l(x) = f(\xi) - \epsilon - 2\|f\|_\infty \frac{(x-\xi)^2}{\delta^2} \end{Bmatrix} \tag{6.10}$$

Από την (6.9) $q_u(x) \geq f(x)$ όταν $|x - \xi| \leq \delta$. Εποπλέον η ανισότητα ισχύει και για $|x - \xi| > \delta$ λόγω της νόρμας της f. Όμοια $q_l(x) \leq f(x)$. Επομένως λόγω της μονοτονίας:

$$(L_n q_l)(x) \leq (L_n f)(x) \leq (L_n q_u)(x) \tag{6.11}$$

για όλα τα $n \geq 0$. Όμως για να επιβεβαιώσουμε οτι n είναι αρκετά μεγάλο, εκφράζουμε τα q_u, q_l ως γραμμικούς συνδυασμούς πολυωνύμων p_0, p_1, p_2 τα οποία προσδιορίζονται από την

$$p_k(x) = x^k \tag{6.12}$$

και έτσι η (6.10) δίνει:

$$\begin{Bmatrix} q_u = c_0(\xi)p_0 + c_1(\xi)p_1 + c_2(\xi)p_2 \\ q_l = c_3(\xi)p_0 + c_4(\xi)p_1 + c_5(\xi)p_2 \end{Bmatrix} \tag{6.13}$$

και υπάρχει M το οποίο εξαρτάται απο τα δ, ϵ και f αλλά οχι το ξ τέτοιο ώστε:

$$|c_i(\xi)| \leq M \tag{6.14}$$

Από υπόθεση έστω N ένας ακέραιος:

$$\|p_k - L_n p_k\|_\infty \leq \frac{\epsilon}{M}, k = 0, 1, 2 \tag{6.15}$$

η οποία ισχύει για κάθε $n \geq N$.Ακόμη το N είναι ανεξάρτητο του ξ. Η (6.15) είναι χρήσιμη καθώς συνδυάζοντας την με τις (6.12), (6.13) και χρησιμοποιώντας τη γραμμικότητα των L_n και την τριγωνική ανισότητα των νορμών έχουμε την:

$$\begin{Bmatrix} \|q_u - L_n q_u\|_\infty \leq 3\epsilon \\ \|q_l - L_n q_l\|_\infty \leq 3\epsilon \end{Bmatrix} \tag{6.16}$$

Έπειτα από τις (6.11), (6.10) και (6.16) έχουμε οτι:

$$\begin{aligned} (L_n f)(\xi) &\leq (L_n q_u)(\xi) \leq \|q_u - L_n q_u\|_\infty \leq q_u(\xi) + 3\epsilon \\ &= f(\xi) + \epsilon + 2\|f\|_\infty \frac{(\xi-\xi)^2}{\delta^2} = f(\xi) + 4\epsilon \end{aligned} \tag{6.17}$$

Όμοια αν πάρουμε την q_l:

$$\begin{aligned}(L_nf)(\xi) \leq (L_nq_l)(\xi) \leq \|q_l - L_nq_l\|_\infty \leq q_l(\xi) - 3\epsilon \\ = f(\xi) - \epsilon - 2\|f\|_\infty \frac{(\xi-\xi)^2}{\delta^2} = f(\xi) - 4\epsilon \end{aligned} \tag{6.18}$$

Επομένως :

$$|f(\xi) - (L_nf)(\xi)| \leq 4\epsilon, n \geq N \tag{6.19}$$

και επειδή N και ϵ είναι ανεξάρτητα του ξ έχουμε:

$$\|f - L_nf\|_\infty \leq 4\epsilon, n \geq N \tag{6.20}$$

□

6.2 Ο τελεστής Bernstein

Θα δούμε σε αυτή τη παράγραφο τον τελεστή Bernstein, ο οποίος ορίζεται ως $B_n : \mathscr{C}[a,b] \longrightarrow \mathscr{P}_n$ και προσδιορίζεται για όλες τις θετικές τιμές του ακεραίου n. Στην περίπτωση όπου $[a,b]$ είναι το διάστημα $[0,1]$ προσδιορίζεται από την εξίσωση:

$$(B_nf)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k(1-x)^{n-k} f(\frac{k}{n}), 0 \leq x \leq 1 \tag{6.21}$$

Καθ όλη τη διάρκεια της παραγράφου εργαζόμαστε στο διάστημα $[0,1]$. Η προσέγγιση Bernstein είναι όμοια με την προσέγγιση Lagrange με δύο τρόπους. Πρώτον και οι δύο τελεστές είναι γραμμικοί και δεύτερον και στις δύο περιπτώσεις η πολυωνυμική προσέγγιση η οποία επιλέγεται από την $\mathscr{P}_n$ εξαρτάται από την τιμή της f στα $n+1$ ξεχωριστά σημεία του διαστήματος. Όμως αντίθετα με την μέθοδο Lagrange η προσέγγιση B_nf μπορεί να μην είναι ίση με την f, όταν $f \in \mathscr{P}_n$.Για παράδειγμα έστω $f \in \mathscr{P}_n$ και έστω παίρνει την τιμή 1 για $x = \frac{k}{n}$ και την τιμή 0 για $\{x = \frac{j}{n} : j = 0,1,...,n : j \neq k\}$.Τότε:

$$(B_nf)(x) = x^k(1-x)^{n-k} \tag{6.22}$$

το οποίο είναι θετικό για $x = \frac{j}{n} : j = 0,1,...,n-1\}$

Θεώρημα 6.3. *(Theorem 6.3 από βιβλίο M.J.D.POWELL Approximation theory and methods) Για όλες τις $f \in \mathscr{C}[0,1]$ η ακολουθία $\{B_nf : n = 0,1,...\}$ συγκλίνει στην f, όπου B_n προσδιορίζεται από την (6.21)*

Απόδειξη. Η (6.1) δίνει οτι ο B_n είναι γραμμικός τελεστής. Ακόμα αν $f(x) \geq 0$ για $0 \leq x \leq 1$, τότε $(B_nf)(x)$ είναι θετικός για $0 \leq x \leq 1$. Συνεπώς B_n είναι και γραμμικός και μονότονος. Από το θεώρημα 6.2 έχουμε οτι το όριο:

$$\lim_{n\to\infty} \|B_nf - f\|_\infty = 0 \tag{6.23}$$

το οποίο ισχύει όταν η f είναι τετραγωνική. Συνεπώς για $j = 0,1,2$ λαμβάνουμε υπόψιν το σφάλμα προσεγγίσεως Bernstein για τη συνάρτηση:

$$f(x) = x^j, j = 0,1,2 \tag{6.24}$$

Για $j = 0$ έχουμε οτι για όλα τα n, $B_n f$ είναι ίσος με την f από το διωνυμικό θεώρημα. Όταν $j = 1$ έχουμε:

$$\begin{aligned}(B_n f)(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} \frac{k}{n} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= x \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} x^k (1-x)^{n-1-k} \end{aligned} \tag{6.25}$$

Συνεπώς ο $B_n f$ ισούται πάλι με την f από το διωνυμικό θεώρημα. Ακόμα :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} (1-x)^{n-k} (\frac{k}{n})^2 = \frac{n-1}{n} x^2 + \frac{1}{n} x \tag{6.26}$$

Για $j = 2$ η (6.24) δίνει :

$$\|B_n f - f\|_\infty = \max_{0 \le x \le 1} |\frac{n-1}{n} x^2 - \frac{1}{n} x - x^2| = \frac{1}{4n} \tag{6.27}$$

όπου το $\frac{1}{4n} \to 0$.Επομένως η (6.23) ικανοποιείται. □

Επομένως, από το παραπάνω θεώρημα και για κάθε $f \in \mathscr{C}\,[0,1]$ και για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει n:

$$\|f - B_n f\|_\infty \le \epsilon \tag{6.28}$$

Συνεπώς η (6.2) ικανοποιείται για $p = B_n f$,το οποίο αποδυκνύει το θεώρημα Weierstrass για το διάστημα $[0, 1]$. Στη γενική περίπτωση, όταν το διάστημα είναι το $[a, b]$, δεν υπάρχει δυσκολία αν το δούμε γεωμετρικά. Έστω $f \in \mathscr{C}\,[a, b]$, την οποία θέλουμε να προσεγγίσουμε με ακρίβεια ϵ. Επαναπροσδιορίζουμε τις μονάδες του άξονα των x με μία γραμμική μεταβολή, έτσι ώστε το διάστημα που μας ενδιαφέρει να είναι το $[0, 1]$ και αφήνουμε την γραφική παράσταση της f ως έχει. Εφαρμόζουμε τον τελεστή *Bernstein* στη γραφική παράσταση της συνάρτησης με την νέα μεταβλητή και επιλέγουμε το n τόσο μεγάλο ώστε να έχουμε ακρίβεια προσέγγισης ίση με ϵ. Εν συνεχεία σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της προσέγγισης και πρέπει να μην υπάρχει σφάλμα στον άξονα y τέτοιο ώστε να ξεπερνάει το ϵ. Τώρα υπάρχουν δύο νέες καμπύλες. Τις αφήνουμε ως έχει και επανερχόμαστε στο αρχικό διάστημα του άξονα x. Συνεπώς βρίσκουμε μία προσέγγιστική συνάρτηση η οποία ολοκληρώνει την απόδειξη του θεωρήματος (6.1).
O τελεστής *Bernstein* χρησιμοποιείται σπάνια στην πράξη καθώς ο ρυθμός σύγκλισης $B_n f$ είναι πολύ αργός. Για παράδειγμα η (6.26) μας δείχνει πως αν θέλουμε να προσεγγίσουμε την $f(x) = x^2$ στο $[0, 1]$ με ακρίβεια τεσσάρων δεκαδικών ψηφίων χρειαζόμαστε $n = 2500$.

6.3 Οι παράγωγοι των προσεγγίσεων Bernstein

O τελεστής Bernstein έχει άλλη μία ιδιότητα. Αν $f \in \mathscr{C}^k\,[0,1]$ το οποίο σημαίνει οτι η f έχει συνεχής k-παράγωγο τότε όχι μόνο ο τελεστής $B_n f$ συγκλίνει στη f αλλά και οι παραγώγοι του συγκλίνουν στην f.

Θεώρημα 6.4. *(Theorem 6.4 από βιβλίο M.J.D.POWELL Approximation theory and methods) Έστω f μία συνεχής παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathscr{C}[0,1]$. Τότε ισχύει:*

$$\lim_{n\to\infty} \|f' - (B_n f)'\|_\infty = 0 \tag{6.29}$$

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα(6.3) στην f' βλέπουμε οτι η ακολουθία $\{(B_n(f') : n = 1,2,3,...\}$ συγκλίνει στο f'. Είναι αρκετό να δείξουμε οτι το όριο:

$$\lim_{n\to\infty} \|B_n(f') - (B_{n+1}f)'\|_\infty = 0 \tag{6.30}$$

Βρίσκουμε τις τιμές του $(B_{n+1}f)'$ παραγωγίζοντας την (6.21):

$$\begin{aligned}
(B_{n+1})'(x) =& \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(1+n)!}{(k-1)!(n+1-k)!} x^{k-1}(1-x)^{n+1-k} f(\frac{k}{n+1}) \\
&- \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} \frac{k}{n+1} \\
=& \sum_{k=0}^{n} \frac{(1+n)!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} \{f(\frac{k+1}{n+1}) - f(\frac{k}{n+1})\} \\
=& \sum_{k=0}^{n} \frac{(n)!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} f\left[\frac{k}{n+1}, \frac{k+1}{n+1}\right] \\
=& \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} f'(\xi_k)
\end{aligned} \tag{6.31}$$

όπου για το ξ_k ισχύει:

$$\frac{k}{n+1} \le \xi_k \le \frac{k+1}{n+1}, k = 0,1,2...,n \tag{6.32}$$

Από την (6.21) και κάνοντας χρήση της $[B_n(f') - (B_{n+1}f)']$ στο σημείο x είναι φραγμένο :

$$\begin{aligned}
&|\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} \left[f'(\frac{k}{n}) - f'(\xi_k)\right]| \\
&\le \max_{k=0,1,\dots,n} |\left[f'(\frac{k}{n}) - f'(\xi_k)\right]| \le \omega(\frac{1}{n+1})
\end{aligned} \tag{6.33}$$

Η τελευταία ανίσωση δίνεται από το γεγονός οτι $\frac{k}{n}$, όπως ξ_k, είναι μέσα στο διάστημα $\left[\frac{k}{n+1}, \frac{k+1}{n+1}\right]$.
Επειδή η (6.33) είναι ανεξάρτητη του x έχουμε οτι:

$$\|B_n(f') - (B_{n+1}f)'\| \le \omega(\frac{1}{n+1}) \tag{6.34}$$

□

Τέλος η μέθοδος Bernstein είναι καλή για να μας παρέχει πολυωνυμικές προσεγγίσεις οι οποίες διατηρούν τις ποιοτηκές ιδιότητες των συναρτήσεων τις οποίες προσεγγίζουμε. Είναι χρήσιμοι για την επίτευξη διαφορίσιμων προσεγγίσεων σε μη διαφορίσιμες συναρτήσεις.

6.4 Παραδείγματα

Παράδειγμα 1:Έστω $p = B_6 f$,όπου $B_n f$ είναι η προσέγγιση Bernstein σε μία συνάρτηση $f \in \mathscr{C}[0,1]$.Να εκφραστούν οι τιμές $\{p(\frac{j}{6}) : j = 0,1,...,6\}$ ως γραμμικός συνδυασμός των αριθμών $\{f(\frac{j}{6}) : j = 0,1,...,6\}$.Συνεπώς να δειχθεί ότι p είναι το πολυώνυμο στον $\mathscr{P}_6$ το οποίο ικανοποιεί τις συνθήκες $p(\frac{1}{2}) = 1$ και $\{p(\frac{j}{6}) = 0 : j = 0,1,...,6\}$,τότε η f παίρνει τις τιμές $f(0) = f(1) = 0$,$f(\frac{1}{6}) = f(\frac{5}{6}) = \frac{20}{3}$,$f(\frac{1}{3}) = f(\frac{2}{3}) = -\frac{308}{15}$ και $f(\frac{1}{2})$=30

Λύση

Αρχικά βρίσκουμε το πολυώνυμο από την (6.21) για $n = 6$ και επομένως έχουμε:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{6} \frac{6!}{k!(6-k)!} x^k (1-x)^{6-k} f(\frac{k}{6})$$

Τώρα υπολογίζουμε το p για τις τιμές $0,1,2,...,6$ και έχουμε:

$$\begin{aligned}
p(\frac{j}{6}) &= (1-x)^6 f(\frac{j}{6}) + 6x(1-x)^5 f(\frac{j}{6}) + 15x^2(1-x)^4 f(\frac{j}{6}) \\
&+ 20x^3(1-x)^3 f(\frac{j}{6}) + 15x^4(1-x)^2 f(\frac{j}{6}) \\
&+ 6x^5(1-x) f(\frac{j}{6}) + x^6 f(\frac{j}{6})
\end{aligned}$$

Επομένως:

$$p(\frac{0}{6}) = f(\frac{0}{6}) + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow f(\frac{0}{6}) = 0$$

$$\begin{aligned} p(\frac{1}{6}) = &(1-\frac{1}{6})^6 f(\frac{1}{6}) + 6\frac{1}{6}(1-\frac{1}{6})^5 f(\frac{1}{6}) + 15(\frac{1}{6})^2(1-\frac{1}{6})^4 f(\frac{1}{6}) = \\ &+ 20(\frac{1}{6})^3(1-\frac{1}{6})^3 f(\frac{1}{6}) + 15(\frac{1}{6})^4(1-\frac{1}{6})^2 f(\frac{1}{6}) \\ &+ 6(\frac{1}{6})^5(1-\frac{1}{6}) f(\frac{1}{6}) + (\frac{1}{6})^6 f(\frac{1}{6}) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(\frac{2}{6}) = &(1-\frac{2}{6})^6 f(\frac{2}{6}) + 6\frac{2}{6}(1-\frac{2}{6})^5 f(\frac{2}{6}) + 15(\frac{2}{6})^2(1-\frac{2}{6})^4 f(\frac{2}{6}) \\ &+ 20(\frac{2}{6})^3(1-\frac{2}{6})^3 f(\frac{2}{6}) + 15(\frac{2}{6})^4(1-\frac{2}{6})^2 f(\frac{2}{6}) \\ &+ 6(\frac{2}{6})^5(1-\frac{2}{6}) f(\frac{2}{6}) + (\frac{2}{6})^6 f(\frac{2}{6}) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(\frac{3}{6}) = &(1-\frac{3}{6})^6 f(\frac{3}{6}) + 6\frac{3}{6}(1-\frac{3}{6})^5 f(\frac{3}{6}) + 15(\frac{3}{6})^2(1-\frac{3}{6})^4 f(\frac{3}{6}) \\ &+ 20(\frac{3}{6})^3(1-\frac{3}{6})^3 f(\frac{3}{6}) + 15(\frac{3}{6})^4(1-\frac{3}{6})^2 f(\frac{3}{6}) \\ &+ 6(\frac{3}{6})^5(1-\frac{3}{6}) f(\frac{3}{6}) + (\frac{3}{6})^6 f(\frac{3}{6}) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(\frac{4}{6}) = &(1-\frac{4}{6})^6 f(\frac{4}{6}) + 6\frac{4}{6}(1-\frac{4}{6})^5 f(\frac{4}{6}) + 15(\frac{4}{6})^2(1-\frac{4}{6})^4 f(\frac{4}{6}) \\ &+ 20(\frac{1}{6})^3(1-\frac{1}{6})^3 f(\frac{1}{6}) + 15(\frac{1}{6})^4(1-\frac{1}{6})^2 f(\frac{1}{6}) \\ &+ 6(\frac{4}{6})^5(1-\frac{4}{6}) f(\frac{4}{6}) + (\frac{4}{6})^6 f(\frac{4}{6}) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(\frac{5}{6}) = &(1-\frac{5}{6})^6 f(\frac{5}{6}) + 6\frac{5}{6}(1-\frac{5}{6})^5 f(\frac{5}{6}) + 15(\frac{5}{6})^2(1-\frac{5}{6})^4 f(\frac{5}{6}) \\ &+ 20(\frac{5}{6})^3(1-\frac{5}{6})^3 f(\frac{5}{6}) + 15(\frac{5}{6})^4(1-\frac{5}{6})^2 f(\frac{5}{6}) \\ &+ 6(\frac{5}{6})^5(1-\frac{5}{6}) f(\frac{5}{6}) + (\frac{5}{6})^6 f(\frac{5}{6}) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(\frac{6}{6}) = &(1-\frac{6}{6})^6 f(\frac{6}{6}) + 6\frac{6}{6}(1-\frac{6}{6})^5 f(\frac{6}{6}) + 15(\frac{6}{6})^2(1-\frac{6}{6})^4 f(\frac{6}{6}) \\ &+ 20(\frac{6}{6})^3(1-\frac{6}{6})^3 f(\frac{6}{6}) + 15(\frac{6}{6})^4(1-\frac{6}{6})^2 f(\frac{6}{6}) \\ &+ 6(\frac{6}{6})^5(1-\frac{6}{6}) f(\frac{6}{6}) + (\frac{6}{6})^6 f(\frac{6}{6}) = 0 \end{aligned}$$

Επομένως λύνοντας το παραπάνω σύστημα καταλήγουμε στις επιθυμητές τιμές για τα $\{f(\frac{j}{6}) : j = 0, 1, ..., 6\}$.

Παράδειγμα 2:Επεκτείνοντας το θεώρημα 6.4 να δειχθεί οτι αν $f \in \mathscr{C}^2\,[0,1]$,τότε ισχυεί:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \|f'' - (B_n f)''\|_\infty = 0$$

Λύση

Από την απόδειξη του θεωρήματος έχουμε ότι:
$(B_{n+1})'(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(n)!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} f\left[\frac{k}{n+1}, \frac{k+1}{n+1}\right]$.Παραγωγίζοντας την έχουμε:

$$\begin{aligned}
(B_{n+1})''(x) &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(n+1)!}{(k-1)!(n+1-k)!} x^{k-1}(1-x)^{n+1-k} f\left[\frac{k}{n+1}, \frac{k+1}{n+1}\right] \\
&- \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} f\left[\frac{k}{n+1}, \frac{k+1}{n+1}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} \{f(\frac{k+2}{n+1}) - f(\frac{k+1}{n+1})\} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} f\left[\frac{k+1}{n+1}, \frac{k+2}{n+1}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} f''(\xi_k)
\end{aligned}$$

όπου $\frac{k+1}{n+1} \leq \xi_k \leq \frac{k+2}{n+1}$.
Επομένως,έχουμε ότι η $[B_n(f'') - (B_{n+1}f)'']$ φράσσεται από την έκφραση:

$$|\sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} \left[f''(\frac{k}{n}) - f''(\xi_k)\right] | \leq \max_{k=0,1,\ldots,n} |f''(\frac{k}{n}) - f''(\xi_k)| \leq \omega(\frac{1}{n+1})$$

Επομένως καταλήξαμε στο ζητούμενο.

Κεφάλαιο 7

Η θεωρία των minimax προσεγγίσεων

7.1 Εισαγωγή στις minimax προσεγγίσεις και η μείωση του σφάλματος μιας δοκιμαστικής προσέγγισης

Από το πρώτο κεφάλαιο έχουμε ότι η βέλτιστη minimax προσέγγιση απο το σύνολο $\mathbb{A}$ σε μία συνάρτηση $f \in \mathscr{C}[a,b]$ είναι ένα στοιχείο του $\mathbb{A}$ το οποίο ελαχιστοποιεί την έκφραση:

$$\|f-p\|_\infty = \max_{a\le x\le b}|f(x)-p(x)|, p\in\mathbb{A} \tag{7.1}$$

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε τις συνθήκες οι οποίες ικανοποιούνται από την βέλτιστη προσέγγιση, όταν το $\mathbb{A}$ είναι ένας γραμμικός χώρος. Βλέπουμε οτι παίρνει μία συγκεκριμένη απλή μορφή αν ο $\mathbb{A}$ είναι ο $\mathscr{P}_n$ των αλγεβρικών πολυωνύμων βαθμού το πολύ n. Είναι γεγονός οτι αυτή η μορφή επιτυγχάνεται στην περίπτωση όπου ο χώρος $\mathbb{A}$ ικανοποιεί τη συνθήκη Haar, την οποία θα μελετήσουμε στις επόμενες παραγράφους. Η συνθήκη Haar ακόμα παρέχει μία μέθοδο υπολογισμού βέλτιστων προσεγγίσεων την οποία καλούμε αλγόριθμο εναλλαγής. Η θεωρία η οποία αναπτύσεται στην περίπτωση όπου ο $\mathbb{A}$ είναι ένας πεπερασμένος γραμμικός χώρος παρουσιάζεται από την εξής ερώτηση:
Έστω p^* μία προσέγγιση την οποία δοκιμάζουμε από τον χώρο $\mathbb{A}$ στην συνάρτηση f. Μπορούμε να βρούμε μία διαταραχή στο p^* τέτοια ώστε να ελαχιστοποιήσουμε το μέγιστο σφάλμα αυτής της προσέγγισης. Με άλλα λόγια ψάχνουμε ένα $p\in\mathbb{A}$ έτσι ώστε να ικανοποιείται η παρακάτω εξίσωση για τις παραμέτρους θ,όπου θ είναι ένας πραγματικός αριθμός:

$$\|f-(p^*+\theta p)\|_\infty < \|f-p^*\|_\infty \tag{7.2}$$

Θα μελετήσουμε τώρα πόσο μπορεί να μειωθεί το σφάλμα της δοκιμαστικής προσέγγισης p^*. Προσπαθούμε να βελτιώσουμε τη προσέγγιση κάνοντας χρήση της (7.2).Το σύνολο στο οποίο το σφάλμα e^*:

$$e^*(x) = f(x)-p^*(x), a\le x\le b \tag{7.3}$$

παίρνει τις ακραίες τιμές του είναι πολύ σημαντικό για την μελέτη μας και θα το καλέσουμε $\mathscr{L}_M$, όπου $\mathscr{L}_M = \{x_i^* : x_i^* \text{ ακρότατα}\}$.Αυτό το σύνολο έχει την ιδιότητα:

$$|e^*(x)| = \|e^*\|_\infty, x \in \mathscr{L}_M \tag{7.4}$$

Έστω ότι το p^* δεν είναι βέλτιστο. Τότε υπάρχει $(p^* + p\theta)$ το οποίο είναι βέλτιστη προσέγγιση. Συνεπώς η μείωση της (7.2) επιτυγχάνεται και για τα σημεία των ακροτήτων του διαστήματος $\mathscr{L}_M$ και ικανοποιείται η εξής ανίσωση:

$$|e^*(x) - \theta p(x)| < |e^*(x)|, x \in \mathscr{L}_M \tag{7.5}$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε οτι το θ είναι θετικό.Επομένως η (7.5) μας δείχνει οτι αν $x \in \mathscr{L}_M$ τότε το πρόσημο της $e^*(x)$ είναι το ίδιο με το πρόσημο της $p(x)$. Είναι επακόλουθο οτι p^* είναι η βέλτιστη minimax προσέγγιση από το $\mathbb{A}$ στην f,αν δεν υπάρχει $p \in \mathbb{A}$ που να ικανοποιεί την:

$$[f(x) - p^*(x)]\, p(x) > 0, x \in \mathscr{L}_M \tag{7.6}$$

Θα γενικεύσουμε το πρόβλημα ελαχιστοποίησης του $\|f - p\|_\infty$ στο πρόβλημα ελαχιστοποίησης του

$$\max_{x \in \mathscr{L}} |f(x) - p(x)|, p \in \mathbb{A} \tag{7.7}$$

όπου $\mathscr{L}$ είναι ένα κλειστό υποσύνολο του $[a, b]$.

Θεώρημα 7.1. *(Theorem 7.1 από βιβλίο M.J.D.POWELL Approximation theory and methods) Έστω $\mathbb{A}$ ένας γραμμικός υπόχωρος του $\mathscr{C}[a, b]$ και έστω f κάθε συνάρτηση στο $\mathscr{C}[a, b]$. Έστω $\mathscr{L}$ ένα κλειστό υποσύνολο του $[a, b]$ και p^* ένα στοιχείο του $\mathbb{A}$ και $\mathscr{L}_M$ το σύνολο των σημείων του $\mathscr{L}$ στα οποία το σφάλμα $\{|f(x) - p(x)| : x \in \mathscr{L}\}$ παίρνει τη μέγιστη τιμή. Τότε το p^* είναι ένα στοιχείο του $\mathbb{A}$ που ελαχιστοποιεί την (7.7) αν και μόνο αν δεν υπάρχει $p \in \mathbb{A}$ η οποία ικανοποιεί την (7.6).*

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε τη μία φορά του θεωρήματος, καθώς η άλλη αποδείχτηκε παραπάνω. Αν ισχύει η (7.6) ισχυεί τότε για κάποιες τιμές του θ η :

$$\max_{x \in \mathscr{L}} |e^*(x) - \theta p(x)| < \max_{x \in \mathscr{L}} |e^*(x)| \tag{7.8}$$

όπου $e^*(x)$ είναι το σφάλμα που δίνεται από την εξίσωση (7.3). Έστω $\theta > 0$ και όχι πολύ μεγάλο. Για ικανοποιητική τιμή του θ, υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας οτι:

$$|p(x)| \leq 1, a \leq x \leq b \tag{7.9}$$

Πρέπει να δούμε προσεκτικά για ποιες τιμές του x τα $e^*(x)$ και $p(x)$ έχουν αντίθετα πρόσημα. Ορίζουμε το σύνολο $\mathscr{L}_0$ ως το σύνολο που περιέχει τις τιμές του x έτσι ώστε:

$$p^*(x)e(x) \leq 0, x \in \mathscr{L} \tag{7.10}$$

Επειδή το σύνολο είναι κλειστό και τα $\mathscr{L}_0$,$\mathscr{L}_M$ δεν έχουν κοινά σημεία ο αριθμός:

$$d = \max_{x \in \mathscr{L}_0} |e^*(x)| \tag{7.11}$$

ικανοποιεί την ανίσωση:

$$d < \max_{x \in \mathscr{L}} |e^*(x)| \tag{7.12}$$

Αν το $\mathscr{L}_0 = \emptyset$,τότε $d = 0$. Αποδεικνύουμε οτι η (7.8) ικανοποιείται όταν το θ έχει θετική τιμή:

$$\theta = \frac{1}{2} \max_{x \in \mathscr{L}} [|e^*(x)| - d] \tag{7.13}$$

Επειδή $\mathscr{L}$ κλειστό, έστω $\xi \in \mathscr{L}$ το οποίο ικανοποιεί την:

$$|e^*(\xi) - \theta p(\xi)| = \max_{x \in \mathscr{L}} |e^*(x) - \theta p(x)| \tag{7.14}$$

Αν $\xi \in \mathscr{L}_0$ τότε:

$$\begin{aligned} \max_{x \in \mathscr{L}} |e^*(x) - \theta p(x)| &= |e^*(\xi) + \theta p(\xi)| \\ &\leq d + \theta \end{aligned} \tag{7.15}$$

Συνεπώς η (7.8) είναι επακόλουθο των (7.12) (7.13). Εναλλακτικά αν $\xi \notin \mathscr{L}_0$, τα $e^*(\xi), p(\xi)$ δεν είναι ίδια και δίνουν την ανίσωση:

$$|e^*(\xi) - \theta p(\xi)| < \max [|e^*(x)|, |\theta p(\xi)|] \tag{7.16}$$

Πάλι ικανοποιείται η (7.8) □

Βλέπουμε οτι για να δούμε αν μία δοκιμαστική προσέγγιση είναι βέλτιστη, χρειάζεται ο προσδιορισμός των ακραίων τιμών της συνάρτησης του σφάλματος.

7.2 Το θεώρημα χαρακτηρισμού και οι συνθήκες Haar

Αν το σύνολο $\mathbb{A}$ των προσεγγιστικών συναρτήσεων είναι ο χώρος $\mathscr{P}_n$ των πολυωνύμων βαθμού το πολύ n τότε είναι αρκετά εύκολο να δούμε που ισχύει η (7.6). Χρησιμοποιούμε το γεγονός οτι μια συνάρτηση στο $\mathscr{P}_n$ έχει το πολύ n αλλαγές προσήμου. Συνεπώς το σφάλμα $[f(x) - p^*(x)]$ αλλάζει πάνω από n-φορές όταν η τιμή των x βρίσκεται μέσα στο $\mathscr{L}_M$ και το p^* αποτελεί τη βέλτιστη προσέγγιση. Αντίστροφα αν το πλήθος των αλλαγών στα πρόσημα δεν ξεπερνάνε το n τότε, μπορούμε να επιλέξουμε τις μηδενικές τιμές ενός πολυωνύμου στο $\mathscr{P}_n$ ώστε να ισχυεί η (7.6). Αυτό το αποτέλεσμα καλείται θεώρημα χαρακτηρισμού minimax και θα το δούμε παρακάτω. Είναι χρήσιμο να διατυπώσουμε το θεώρημα σε μία μορφή η οποία εφαρμόζεται σε μία κλάση συναρτήσεων οι οποίες περιέχουν πολυώνυμα σε ειδικές περιπτώσεις. Ο συνήθες τρόπος προσδιορισμού αυτής της κλάσης είναι ο προσδιορισμός των πολυωνύμων τα οποία χρησιμοποιούμε στο χαρακτηριστικό θεώρημα. Ακολουθούν δύο συνθήκες:
1)Αν ένα πολυώνυμο του $\mathscr{P}_n$ έχει πάνω από n μηδενικά στοιχεία, τότε το πολυώνυμο αυτό είναι το μηδενικό πολυώνυμο.
2)Έστω $\{\xi_j : j = 0, 1, 2, ..., k\}$ είναι ένα σύνολο σημείων στο ανοικτό διάστημα (a, b) όπου $k \leq n$. Τότε υπάρχει ένα πολυώνυμο του $\mathscr{P}_n$ το οποίο αλλάζει πρόσημο σε αυτά τα σημεία και δεν έχει άλλα μηδενικά. Ακόμη υπάρχει μία συνάρτηση στο $\mathscr{P}_n$ η οποία δεν είναι μηδέν στο $[a, b]$.
Θα δούμε δύο συνθήκες των πολυωνύμων οι οποίες θα μας φανούν ιδιαίτερα χρήσιμες:
3)Αν μία συνάρτηση στο $\mathscr{P}_n$, η οποία δεν είναι η μηδενική,έχει j-μηδενικές τιμές και αν k από αυτές τις μηδενικές τιμές είναι σε σημεία εσωτερικά του διαστήματος $[a, b]$,

όπου η συνάρτηση δεν αλλάζει πρόσημο, τότε ο αριθμός $(j+k)$ δεν είναι μεγαλύτερος του n.
4)Έστω $\{\xi_j : j = 0,1,...,n\}$ ένα σύνολο από σημεία στο $[a,b]$ και έστω $\{\phi_i : i = 0,1,...,n\}$ κάθε βάση του $\mathscr{P}_n$. Τότε ο πίνακας $[n+1]\times[n+1]$ του οποίου τα στοιχεία έχουν τιμές $\{\phi_i(\xi_j) : i = 0,1,...,n \; j = 0,1,...,n\}$ δεν είναι αντιστρέψιμος.
Ένας $(n+1)$-διάστασης γραμμικός υπόχωρος $\mathbb{A}$ του $\mathscr{C}[a,b]$ ικανοποιεί τη συνθήκη Haar αν αυτές οι τέσσερις παραπάνω προτάσεις είναι αληθείς όταν αντί για το $\mathscr{P}_n$ χρησιμοποιούμε τον $\mathbb{A}$. Ισοδύναμα κάθε βάση του $\mathbb{A}$ καλείται Chebyshev σύνολο. Οι προτάσεις 1,2,4 είναι ισοδύναμες και συνεπάγονται τη 2. Ο υπόχωρος $\mathbb{A}$ ικανοποιεί τη συνθήκη Haar αν και μόνο αν για κάθε μη μηδενικό $p \in \mathbb{A}$ το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\{p(x) = 0 : a \le x \le b\}$ είναι μικρότερο από τη διάσταση του $\mathbb{A}$

Θεώρημα 7.2. *(Theorem 7.2 από βιβλίο M.J.D.POWELL Approximation theory and methods) Έστω $\mathbb{A}$ ένας $(n+1)$-διάστασης γραμμικός υπόχωρος του $\mathscr{C}[a,b]$ ο οποίος ικανοποιεί την συνθήκη Haar και έστω f κάθε συνάρτηση στο $\mathscr{C}[a,b]$. Τότε p^* είναι η βέλτιστη minimax προσέγγιση από το $\mathbb{A}$ στην συνάρτηση f, αν υπάρχουν $(n+2)$ σημεία $\{\xi_i^* : i = 0,1,...,n+1\}$:*

$$a \le \xi_0^* < \xi_1^* < ... < \xi_{n+1}^* \le b \tag{7.17}$$

$$|f(\xi_i^*) - p^*(\xi_i^*)| = \|f - p^*\|_\infty, i = 0,1,...,n+1 \tag{7.18}$$

και

$$f(\xi_{i+1}^*) - p^*(\xi_{i+1}^*) = -\left[f(\xi_i^*) - p^*(\xi_i^*)\right], i = 0,1,...,n \tag{7.19}$$

ικανοποιούνται.

Μία σημαντική εφαρμογή του παραπάνω θεωρήματος είναι η απόδειξη της ελάχιστης συνθήκης των πολυωνύμων Chebyshev. Έχουμε οτι τα πολυώνυμα Chebyshev T_n είναι τα πολυώνυμα βαθμού n στο διάστημα $[-1,1]$ για τα οποία ισχύει:

$$T_n(x) = \cos n\theta,\ x = \cos\theta,\ 0 \le \theta \le \pi \tag{7.20}$$

Θεώρημα 7.3. *(Theorem 7.3 από βιβλίο M.J.D.POWELL Approximation theory and methods) Έστω $x \in [-1,1]$ και έστω n κάποιος θετικός ακέραιος αριθμός. Το πολυώνυμο $(\frac{1}{2})^{n-1}T_n$ είναι το στοιχείο του $\mathscr{P}_n$, του οποίου η άπειρη νόρμα είναι ελάχιστη, προκειμένου ο συντελεστής του x^n να είναι ίσος με τη μονάδα.*

Απόδειξη. Ένας τρόπος προσδιορισμού του απαιτούμενου πολυωνύμου είναι ο έλεγχος των τιμών των συντελεστών $\{c_i : i = 0,1,2,...,n-1\}$ οι οποίοι ελαχιστοποιούν την έκφραση:

$$\max_{-1\le x\le 1} |x^n + \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i| \tag{7.21}$$

Βλέπουμε οτι αυτή η προσέγγιση είναι ισοδύναμη με την εύρεση της βέλτιστης προσέγγισης από το $\mathscr{P}_{n-1}$ στη συνάρτηση $\{x^n : -1 \le x \le 1\}$. Από το θεώρημα 7.2 έχουμε οτι το $(\frac{1}{2})^{n-1}T_n$ είναι το πολυώνυμο που χρειαζόμαστε,αν οι συντελεστές του x^n είναι μονάδα και αν υπάρχουν $\{\xi_i : i = 0,1,...,n\}$ στο $[-1,1]$ ώστε να αυξάνουν,έτσι ώστε να ισχύει η η εξίσωση:

$$T_n(\xi_i) = (-1)^{n-i}\|T_n\|_\infty, i = 0,1,...,n \tag{7.22}$$

Η επαναληπτική σχέση $T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), -1 \leq x \leq 1$ μας δίνει οτι ο συντελεστής του x^n είναι μονάδα.Ακόμη από την (7.20) έχουμε οτι η (7.22) ικανοποιείται αν θέσουμε τα $\xi_i = \cos\left[(n-i)\frac{\pi}{n}\right]$. □

Ο κύριος λόγος για να θέσουμε το $\mathscr{L}$ ως ένα κλειστό υποσύνολο του $\mathscr{C}[a,b]$ στο θεώρημα 7.1 είναι γιατί ο αλγόριθμος εναλλαγής χρειάζεται την περίπτωση όταν το $\mathscr{L}$ περιέχει $(n+2)$ σημεία. Στην περιγραφή του αλγορίθμου εναλλαγής είναι συνήθες να καλούμε το σύνολο αυτών των σημείων ως σημεία αναφοράς. Θέτουμε τα $\xi_i : i = 0, 1..., n+1\}$ ως τα σημεία αναφοράς. Υποθέτουμε οτι αυτά τα σημεία είναι :

$$a \leq \xi_0 < \xi_1 < ... < \xi_{n+1} \leq b \tag{7.23}$$

Θεώρημα 7.4. *(Theorem 7.4 από βιβλίο M.J.D.POWELL Approximation theory and methods) Έστω $\mathbb{A}$ ένας $(n+1)$-διάστασης γραμμικός υπόχωρος του $\mathscr{C}[a,b]$ που ικανοποιεί την συνθήκη Haar, έστω $\{\xi_i : i = 0, 1, 2, ..., n+1\}$ σημεία αναφοράς και έστω f κάθε συνάρτηση στο $\mathscr{C}[a,b]$. Τότε p^* είναι μία συνάρτηση στο $\mathbb{A}$ η οποία ελαχιστοποιεί την έκφραση:*

$$\max_{i=0,1,...,n+1} |f(\xi_i) - p(\xi_i)|, p \in \mathbb{A} \tag{7.24}$$

αν και μόνο αν ικανοποιούνται οι εξισώσεις:

$$f(\xi_{i+1}) - p^*(\xi_{i+1}) = -\left[f(\xi_i) - p^*(\xi_i)\right], i = 0, 1, ..., n \tag{7.25}$$

Η απόδειξη βρίσκεται στο βιβλίο M.J.D.POWELL Approximation theory and methods στην παράγραφο (7.3)

7.3 Η μοναδικότητα και το φράγμα στο minimax σφάλμα

Υποθέτουμε οτι η συνθήκη του θεωρήματος 7.2. ισχυεί και p^*, q^* είναι δύο βολικές minimax βέλτιστες προσεγγίσεις και οι συνθήκες (7.17) (7.18) (7.19) ικανοποιούνται. Έστω $r^* = (q^* - p^*)$ και :

$$r^*(\xi_i^*) = \left[f(\xi_i^*) - p^*(\xi_i^*)\right] - \left[f(\xi_i^*) - q^*(\xi_i^*)\right], i = 0, 1, ..., n+1 \tag{7.26}$$

Επειδή $\|f - q^*\|_\infty$ και $\|f - p^*\|_\infty$ είναι ισοδύναμες, από την (7.18) έχουμε είτε $r^*(\xi_i) = 0$ ή το πρόσημο του είναι ίδιο με το πρόσημο του $[f(\xi_i^*) - p^*(\xi_i^*)]$. Συνεπώς η (7.19) παρέχει την πληροφορία για το πρόσημο των όρων της ακολουθίας $\{r(\xi_i^*) : i = 0, ..., n+1\}$. Συνεπάγεται οτι το r^* είναι μηδέν. Συνεπώς η βέλτιστη minimax προσέγγιση είναι μοναδική.

Θεώρημα 7.5. *(Theorem 7.5 από βιβλίο M.J.D.POWELL Approximation theory and methods) Έστω r μία συνάρτηση στο $\mathscr{C}[a,b]$ και έστω $\{\xi_i : i = 0, 1, ..., n+1\}$ μία μεταβλητή τέτοια ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη:*

$$(-1)^i r(\xi_i) \geq 0, i = 0, 1, ..., n+1 \tag{7.27}$$

Τότε η r έχει τουλάχιστον $(n+1)$ μηδενικά στο διάστημα $\mathscr{C}[a,b]$, φροντίζοντας ώστε τα διπλά μηδενικά στοιχεία να προσμετρούνται δύο φορές, όπου διπλό μηδενικό είναι ένα μηδενικό το οποίο είναι αυστηρά μέσα στο $[a,b]$, όπου το r δεν αλλάζει πρόσημο.

Απόδειξη. Έστω Φ και Ψ τα σύνολα:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi = \{i : r(\xi_i) \neq 0, i = 0, 1, ..., n+1\} \\ \Psi = \{j : r(\xi_j) = 0, j = 0, 1, ..., n+1\} \end{array} \right\} \tag{7.28}$$

και έστω $n(\Phi)$ και $n(\Psi)$ το πλήθος των δεικτών σε κάθε σύνολο. Το θεώρημα είναι τετριμένο αν $n(\Phi) = 0, 1$. Διαφορετικά, προσδιορίζουμε το πλήθος των μηδενικών στοιχείων στο $[\xi_k, \xi_l]$, όπου k, l είναι μέσα στο Φ και κανένα άλλο στοιχείο του Φ δεν είναι στο διάστημα $[k, l]$. Η (7.25) μας δίνει οτι οι αριθμοί $r(\xi_k), r(\xi_l)$ έχουν το ίδιο πρόσημο αν $(l-k)$ είναι άρτιο και διαφορετικό αν $(l-k)$ περιττό. Συνεπώς το πλήθος των μηδενικών στοιχείων του r στο $[\xi_k, \xi_l]$ είναι τουλάχιστον ένα περισσότερο από το πλήθος των στοιχείων του συνόλου $\{\xi_j : j = \Psi\}$ που βρίσκεται σε αυτό το διάστημα, προσμετρώντας κάθε διπλό μηδενικό δύο φορές. Επειδή ο αριθμός των ζεύγων, $[\xi_k, \xi_l]$, τα οποία έχουν αυτή την ιδιότητα είναι $[n(\Phi) - 1]$, είναι επακόλουθο οτι το συνολικό πλήθος των μηδενικών στοιχείων του r στο διάστημα $[a, b]$ είναι τουλάχιστον $[n(\Phi) + n(\Psi) - 1]$, το οποίο είναι το ζητούμενο αποτέλεσμα. □

Θεώρημα 7.6. *(Theorem 7.6 από βιβλίο M.J.D.POWELL Approximation theory and methods) Έστω $\mathbb{A}$ ένας γραμμικός υπόχωρος του $\mathscr{C}[a, b]$ ο οποίος ικανοποιεί τη συνθήκη Haar. Τότε για κάθε $f \in \mathscr{C}[a, b]$ υπάρχει μόνο μία βέλτιστη minimax προσέγγιση.*

Απόδειξη. Από την πρώτη παράγραφο και από το θεώρημα 7.5. έχουμε οτι αν p^* και q^* είναι και οι δύο βέλτιστες προσεγγίσεις τότε η $(p^* - q^*)$ έχει τουλάχιστον $(n+1)$ μηδενικά στοιχεία στο $[a, b]$ όπου τα διπλά προσμετρούνται δύο φορές. Από τη πρόταση 3 της προηγούμενης παραγράφου έχουμε οτι p^*, q^* ταυτίζονται □

Το θεώρημα 7.5 είναι χρήσιμο για την εύρεση κάτω φραγμάτων για την ελάχιστη τιμή της (7.1). Υποθέτουμε οτι η επαναληπτική μέθοδος για τον υπολογισμό της δοκιμαστικής βέλτιστης προσέγγισης p^* και οι (7.17), (7.18), (7.19) ικανοποιούνται. Τότε συνήθως έχουμε τα σημεία αναφοράς $\{\xi_i : i = 0, 1, ..., n+1\}$ τέτοια ώστε το πρόσημο του όρου $\{f(\xi_i) - p^*(\xi_i) : i = 0, 1, ..., n+1\}$ να εναλλάσεται.

Θεώρημα 7.7. *Έστω η συνθήκη του θεωρήματος 7.2. ικανοποιείται,έστω p^* κάθε στοιχείο του $\mathbb{A}$ και έστω $\{\xi_i : i = 0, 1, ..., n+1\}$ ένα σημείο αναφοράς, έτσι ώστε να ικανοποιείται η εξίσωση:*

$$sign\left[f(\xi_{i+1}) - p^*(\xi_{i+1})\right] = -sign\left[f(\xi_i) - p^*(\xi_i)\right], i = 0, 1, ..., n \tag{7.29}$$

Τότε ισχύουν οι ανισώσεις:

$$\begin{aligned} \min_{i=0,1,...,n+1} |f(\xi_i) - p^*(\xi_i)| &\leq \min_{p \in \mathbb{A}} \max_{i=0,1,...,n+1} |f(\xi_i) - p^*(\xi_i)| \\ &\leq \min_{p \in \mathbb{A}} \|f - p\|_\infty \\ &\leq \|f - p^*\|_\infty \end{aligned} \tag{7.30}$$

Επιπρόσθετα η πρώτη ανίσωση είναι αυστήρη εκτός αν όλοι οι αριθμοί $\{|f(\xi_i) - p^*(\xi_i)| : i = 0, 1, ..., n+1\}$ είναι ίσοι

Απόδειξη. Η τρίτη ανίσωση της (7.30) ισχυεί επειδή $p^* \in \mathbb{A}$ και η δεύτερη ισχύει επειδή τα σημεία αναφοράς είναι στο υποσύνολο $[a, b]$. Για την πρώτη, υποθέτουμε οτι υπάρχει μία συνάρτηση $q^* \in \mathbb{A}$ η οποία ικανοποιεί την συνθήκη:

$$\min_{i=0,1,...,n+1} |f(\xi_i) - p^*(\xi_i)| \geq \max_{i=0,1,...,n+1} |f(\xi_i) - q^*(\xi_i)| \tag{7.31}$$

Αν q^* είναι ίσο με p^* τότε η (7.31) μας δίνει οτι όλοι οι αριθμοί είναι $\{|f(\xi_i) - p^*(\xi_i)| : i = 0, 1, ..., n+1\}$ ίσοι. Διαφορετικά έστω $p^* \neq q^*$ αλλά ισχυεί η (7.31) και έστω $r^* = (q^* - p^*)$. Επειδή η (7.31) συνεπάγεται οτι οι αριθμοί (7.26) έχουν τις ίδιες ιδιότητες προσήμου όπως πριν,συνεπάγεται από το θεώρημα 7.5. και από τη συνθήκη Haar οτι οι p^*, q^* ταυτίζονται κάτι το οποίο είναι άτοπο. $\square$

Κεφάλαιο 8

Ελάχιστες τετραγωνικές προσεγγίσεις

8.1 Η γενική μορφή ενός ελάχιστου τετραγωνικού υπολογιμού

Έστω $\mathbb{A}$ ένα υποσύνολο προσεγγιστικών συναρτήσεων του $\mathscr{C}\,[a,b]$ και δοθέντος μίας θετικής συνάρτησης $\{w(x) : a \leq x \leq b\}$ την οποία καλούμε σνάρτηση βάρους προσδιορίζουμε το στοιχείο $p^* \in \mathbb{A}$ το οποίο είναι η βέλτιστη ελάχιστη με βάρος τετραγωνική προσέγγιση από το $\mathbb{A}$ στη συνάρτηση f, αν η p^* ελαχιστοποιεί την:

$$\int_a^b w(x)\left[f(x)-p(x)\right]^2 dx, p \in \mathbb{A} \tag{8.1}$$

Συνήθως το $\mathbb{A}$ είναι πεπερασμένης διάστασης. Είναι βολικό να εκφράσουμε τις συνθήκες για τις οποίες επιτυγχάνεται το p^* με εσωτερικό γινόμενο για κάθε $f, g \in \mathscr{C}\,[a,b]$. Θέτουμε:

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b w(x)f(x)g(x)dx \tag{8.2}$$

το οποίο ικανοποιεί όλες τις συνθήκες που ορίστηκαν στην παράγραφο 2.4. Έστω

$$\|f\| = \langle f, f\rangle^{\frac{1}{2}}, f \in \mathscr{C}\,[a,b] \tag{8.3}$$

και προσδιορίζουμε την απόσταση της f από την g ως $\|f-g\|$. Συνεπώς η (8.1) είναι το τετράγωνο της απόστασης:

$$\|f-p\| = (\langle f-p, f-p\rangle)^{\frac{1}{2}}, p \in \mathbb{A} \tag{8.4}$$

Επομένως το p^* αποτελεί την βέλτιστη προσέγγιση. Από το θεώρημα 1.2 έχουμε οτι αν $\mathbb{A}$ είναι πεπερασμένης διάστασης γραμμικός χώρος, τότε μία βέλτιστη προσέγγιση υπάρχει. Ακόμη από την απόδειξη του θεωρήματος 2.4. έχουμε οτι η νόρμα (8.3) είναι αυστηρά κυρτή και από το θεώρημα 2.4., υπάρχει μόνο μία συνάρτηση στο $\mathbb{A}$ που ελαχιστοποιεί την (8.1). Ένα απο τα κύρια πλεονεκτήματα του εσωτερικού γινομένου είναι οτι τα αποτελέσματα τα οποία προκύπτουν έχουν εφαρμογή όχι μόνο σε συνεχής ελάχιστα τετραγωνικά προβλήματα προσεγγίσεων αλλά και σε διακριτά. Διακριτοί υπολογισμοί προκύπτουν, για παράδειγμα όταν χρειάζεται μία προσέγγιση στην f αλλά αντί να υπολογίσουμε την $f(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$,υπολογίζουμε την τιμή της $f(x)$, όπου η διαδικασία υπολογισμού θέλει τυχαίο σφάλμα. Έστω x παίρνει τιμές στο $\{x_j : j = 1, 2..., m\}$ και y_j οι τιμές της $f(x_j)$ και η διακύμανση υπολογισμού είναι ίση με $\frac{1}{w_j}$. Αν $\mathbb{A}_0$ το σύνολο των προσεγγιστικών συναρτήσεων και αν τα τυχαία σφάλματα έχουν κανονική κατανομή, τότε για στατιστικούς λόγους αναζητούμε $p_0^* \in \mathbb{A}_0$ η οποία ελαχιστοποιεί το άθροισμα:

$$\sum_{j=1}^{m} [y_j - p_0(x_j)]^2 \tag{8.5}$$

Συχνά μπορεί να ελαχιστοποιείται η έκφραση ακόμα και όταν η κατανομή των σφαλμάτων δεν είναι κανονική, επειδή οι αριθμητικές μεθόδοι υπολογισμού του p_0^* είναι εύκολο να εφαρμοστούν όταν το $\mathbb{A}_0$ είναι γραμμικός χώρος. Θέλουμε να εισάγουμε εσωτερικά γινόμενα με τέτοιο τρόπο ώστε η (8.5) να είναι ανάλογη της αποστάσεως (8.4). Όμως η:

$$\langle f, g\rangle = \sum_{j=1}^{m} w_j f(x_j) g(x_j) \tag{8.6}$$

δεν είναι αποδεκτή επειδή στην περίπτωση της (8.3) δεν ικανοποιεί τις συνθήκες της νόρμας, λόγω του οτι $\langle f, f\rangle = 0$, για κάποιες συναρτήσεις f, οι οποίες δεν είναι μηδέν. Παίρνουμε τα τα στοιχεία $\{y_j : j = 1, 2..., m\}$ ως ένα διάνυσμα $y \in \mathbb{R}^m$. Για κάθε $p_0 \in \mathbb{A}_0$ θέτουμε $X(p_0)$ ένα διάνυσμα του οποίου τα στοιχεία έχουν τιμές $\{p_0(x_j) : j = 1, 2, ..., m\}$ και θέτουμε $\mathbb{A} = \{X(p_0) : p_0 \in \mathbb{A}_0 \subseteq \mathbb{R}^m\}$. Υπολογίζοντας την $p_0 \in \mathbb{A}_0$ η οποία ελαχιστοποιεί την (8.5) είναι ισοδύναμο με το να πάρουμε το $p^* \in \mathbb{A}$ το οποίο δίνει την ελάχιστη τιμή του:

$$\sum_{j=1}^{m} w_j [y_j - p_j]^2 \tag{8.7}$$

όπου $\{p_j : j = 1, ..., m\}$ στοιχεία του p. Θέτουμε τώρα

$$\langle u, v\rangle = \sum_{j=0}^{m} w_j u_j v_j \tag{8.8}$$

για κάθε διάνυσμα $u, v \in \mathbb{R}^m$ και $\|u\| = \langle u, u\rangle^{\frac{1}{2}}$. Συνεπώς ο υπολογισμός του p^* αποτελεί πρόβλημα βέλτιστης προσέγγισης όπου απαιτείται η ελαχιστοποίηση της:

$$\|y - p\| = \langle y - p, y - p\rangle^{\frac{1}{2}}, p \in \mathbb{A} \tag{8.9}$$

Όταν $\mathbb{A}_0$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{C}[a, b]$ τότε ο $\mathbb{A}$ είναι ένας πεπερασμένης διάστασης γραμμικός χώρος του $\mathbb{R}^m$. Συνεπώς τα θεωρήματα 1.2. και 2.4. εφαρμόζουν ένα μοναδικό στοιχείο του $\mathbb{A}$ το οποίο ελαχιστοποιεί την (8.9). Στην επόμενη παράγραφο θα δούμε την χρησιμότητα του $\mathbb{A}$ όταν είναι ένας πεπερασμένης διάστασης γραμμικός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert.

8.2 Το θεώρημα χαρακτηρισμού των ελαχίστων τετραγώνων

Θεώρημα 8.1. *(Theorem 11.1 από βιβλίο M.J.D.POWELL Approximation theory and methods) Έστω $\mathbb{A}$ ένας γραμμικός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert $\mathbb{B}$ και έστω f κάθε στοιχείο του $\mathbb{B}$. Το σημείο p^* στο $\mathbb{A}$ είναι η βέλτιστη προσέγγιση αν και μόνο αν το σφάλμα $e^* = f - p^*$ ικανοποιεί τις συνθήκες ορθογωνιότητας:*

$$\langle e^*, p\rangle, p \in \mathbb{A} \tag{8.10}$$

Απόδειξη. Έστω οτι $\langle e^*, p\rangle \neq 0$ για κάποια $p \in \mathbb{A}$. Τότε η τετραγωνική απόσταση από την $(p^* + \lambda p)$ στην f είναι η έκφραση:

$$\|f - p^* - \lambda p\|^2 = \|f - p^*\|^2 - 2\lambda\langle e^*, p\rangle + \lambda^2\|p\|^2, \lambda \in \mathbb{R} \tag{8.11}$$

Η τιμή του λ που ελαχιστοποιεί την (8.11) δεν είναι μηδέν. Συνεπώς το p^* δεν είναι η βέλτιστη προσέγγιση. Αντίστροφα έστω $\langle e^*, p\rangle = 0$ για κάθε $p \in \mathbb{A}$. Έστω q^* κάθε στοιχείο του $\mathbb{A}$. Από τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου έχουμε:

$$\begin{aligned}\|f - q\|^2 - \|f - p^*\|^2 =&\|q^*\|^2 - \|p^*\|^2 - 2\langle f, q^*\rangle + 2\langle f, p^*\rangle \\ =&\|q^* - p^*\|^2 + 2\langle f - p^*, p^* - q^*\rangle\end{aligned} \tag{8.12}$$

Ο τελευταίος όρος είναι μηδέν από υπόθεση. Συνεπώς:

$$\|f - q^*\|^2 = \|f - p^*\|^2 + \|q^* - p^*\| \geq \|f - p^*\| \tag{8.13}$$

η οποία ισχύει για κάθε $q^* \in \mathbb{A}$. Συνεπώς p^* είναι η βέλτιστη προσέγγιση. □

Η (8.13) είναι χρήσιμη και με άλλους δύο τρόπους.Παρέχει έναν εναλλακτικό τρόπο απόδειξης της μοναδικότητας της βέλτιστης προσέγγισης δείχνοντας οτι $\|f - q^*\| \geq \|f - p^*\|$ αν $q^* \neq p^*$. Κατά δεύτερον θέτοντας $q^* = 0$ έχουμε:

$$\|f\|^2 = \|p^*\|^2 + \|f - p^*\|^2 \tag{8.14}$$

8.3 Μέθοδοι υπολογισμού

Προκειμένου να υπολογίσουμε μία βέλτιστη τετραγωνική προσέγγιση από έναν γραμμικό χώρο $\mathbb{A}$, επιλέγουμε ένα σύνολο συναρτήσεων $\{\phi_j : j = 0, 1, ..., n\}$, ο οποίος χωρίζει τον $\mathbb{A}$ σε διαστήματα. Θεωρούμε οτι η p^* αποτελεί την βέλτιστη προσέγγιση. Επομένως χρειαζόμαστε τις τιμές των παραμέτρων $\{c_j^* : j = 0, 1, ..., n\}$ στην έκφραση:

$$p^* = \sum_{j=0}^{n} c_j^*\phi_j \tag{8.15}$$

Υποθέτουμε οτι τα στοιχεία $\{\phi_j : j = 0, 1, ..., n\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, το οποίο είναι ισοδύναμο με το να υποθέσουμε οτι η διάσταση του $\mathbb{A}$ είναι $(n+1)$ προκειμένου το πρόβλημα προσδιορισμού των παραμέτρων να έχει μοναδική λύση.Επειδή κάθε στοιχείο του $\mathbb{A}$ είναι γραμμικός συνδυασμός, από το θεώρημα 8.1 προκύπτει οτι η (8.5) είναι η βέλτιστη προσέγγιση αν και μόνο αν:

$$\langle \phi_i, f - \sum_{j=0}^{n} c_j^* \phi_j \rangle = 0, i = 0, 1, ..., n \tag{8.16}$$

Μπορεί να γραφτεί και ως:

$$\sum_{j=0}^{n} \langle \phi_i, \phi_j \rangle c_j^* = \langle \phi_i, f \rangle, i = 0, 1, ..., n \tag{8.17}$$

Συνεπώς επιτυγχάνουμε ένα τετραγωνικό σύστημα γραμμικών εξισώσεων,στις παραμέτρους,το οποίο καλείται κανονικές εξισώσεις των ελαχίστων τετραγνικών υπολογισμών. Οι κανονικές εξισώσεις μπορούν να παραγωγισθούν εκφράζοντας ένα στοιχείο του $\mathbb{A}$ στη μορφή:

$$p = \sum_{i=1}^{n} c_i \phi_i \tag{8.18}$$

όπου $\{c_i : i = 0, 1, ..., n\}$ είναι ένα σύνολο πραγματικών παραμέτρων. Οι τιμές πρέπει να υπολογισθούν προκειμένου να ελαχιστοποιούν την:

$$\langle f - p, f - p \rangle = \langle f, f \rangle - 2 \sum_{i=0}^{n} c_i \langle \phi_i, f \rangle + \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} c_i c_j \langle \phi_i, \phi_j \rangle \tag{8.19}$$

Συνεπώς για $i = 0, 1, ..., n$ η παράγωγος της έκφρασης πρέπει να είναι μηδέν.Ο πίνακας της (8.17) είναι συμμετρικός. Αν $\{z_i : i = 0, 1, ..., n\}$ είναι ένα σύνολο πραγματικών παραμέτρων έχουμε:

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} z_i z_j \langle \phi_i, \phi_j \rangle = \langle \sum_{i=0}^{n} z_i \phi_i, \sum_{j=0}^{n} z_j \phi_j \rangle \tag{8.20}$$

Το δεξί μέλος της σχέσης είναι το τετράγωνο της $\| \sum z_i \phi_i \|$,το οποίο είναι μηδέν αν και μόνο αν όλες οι παραμέτροι είνα μηδέν. Συνεπώς ο πίνακας της (8.17) είναι θετική ποσότητα. Θα δούμε τώρα μερικές τεχνικές υπολογισμού των κανονικών εξισώσεων.Η τεχνική υπολογιμού των συντελεστών $\{c_j^* : j = 0, 1, ..., n\}$ είναι μία άριστη μέθοδος αλλά κάποιες φορές χάνει σε ακρίβεια. Θα δούμε τώρα ένα παράδειγμα. Θέλουμε να προσεγγίσουμε την f στο $\mathscr{C}[1, 3]$ από μία γραμμική εξίσωση:

$$p^*(x) = c_0^* + c_1^* x, 1 \leq x \leq 3 \tag{8.21}$$

και μας δίνονται οι τιμές της f στα σημεία $\{x_i : i = 1, 2, 3\}$.Έστω $y_1 = 2.0 = f(1.0)$,$y_2 = 2.8 = f(2.0)$και $y_3 = 4.2 = f(3.0)$,όπου η διακύμανση των υπολογισμών είναι $\frac{1}{M}$.Προκειμένου να δείξουμε την απώλεια της ακρίβεια,θα θέσουμε το $M >> 10$.Το σύστημα των κανονικών εξισώσεων είναι:

$$\begin{pmatrix} M+20 & M+50 \\ M+50 & M+130 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0^* \\ c_1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2M+70 \\ 2M+182 \end{pmatrix} \tag{8.22}$$

όπου :

$$\begin{Bmatrix} c_0^* & = \frac{0.96M}{M+2} \\ \\ c_1^* & = \frac{1.04M+2.8}{M+2} \end{Bmatrix} \tag{8.23}$$

Παρατηρούμε οτι δεν υπάρχει ακύρωση του όρου M κάτι το οποίο μας περιορίζει την ελευθερία καθώς οι συντελεστές εξαρτώνται από αυτό. Αν πάρουμε M, έστω 10^5 και γίνουν οι υπολογισμοί βλέπουμε οτι το M υπερισχύει και έτσι οι τιμές y_2, y_3 χάνονται. Συνεπώς δεν είναι εφικτός ακριβής υπολογισμός των c_0^*, c_1^* από αυτή τη διαδικασία. Ένας λόγος απώλειας ακρίβειας είναι οτι η υψηλή ακρίβεια στα στοιχεία του πίνακα της κανονικής εξίσωσης χρειάζεται να μην παρέχουν όμοια ακρίβεια στη λύση $\{c_j^* : 0, 1, ..., n\}$. Όμοια ακρίβεια παρέχεται πάντα αν το σύστημα (8.17) είναι διαγώνιο. Επομένως πολλές επιτυχείς μεθόδοι για την επίλυση ελαχίστων τετραγωνικών προβλημάτων βασίζονται στις συναρτήσεις $\{\phi_j : j = 0, 1, ..., n\}$ έτσι ώστε η συνθήκη:

$$\langle \phi_i, \phi_j \rangle, i \neq j \tag{8.24}$$

να ικανοποιείται, προκειμένου ο πίνακας των κανονικών εξισώσεων να είναι διαγώνιος. Σε αυτή τη περίπτωση λέμε οτι οι συναρτήσεις είναι διαγώνιες. Στο παράδειγμα, το σύνολο $\mathbb{A}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ και τα διανύσματα ϕ είναι τα:

$$\phi_0 = [1, 1, 1]^T, \phi_1 = [1, 2, 3]^T \tag{8.25}$$

Ένας τρόπος να κάνεις τα διανύσματα ορθογώνια είναι η αντικατάσταση του ϕ_1 από το:

$$\overline{\phi_1} = \phi_1 - \alpha\phi_0 \tag{8.26}$$

όπου το α έχει την τιμή $\frac{M+50}{M+20}$. Σε αυτή τη περίπτωση οι συντελεστές της απαιτούμενης ελάχιστης τετραγωνικής προσέγγισης:

$$p^* = \overline{c_0}\phi_0 + \overline{c_1}\phi_1 \tag{8.27}$$

ικανοποιούν τη διαγώνια κανονική εξίσωση:

$$\begin{pmatrix} M+20 & 0 \\ 0 & \frac{50M+10}{M+20} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0^* \\ c_1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2M+70 \\ \frac{52M+140}{M+20} \end{pmatrix} \tag{8.28}$$

όπου

$$\begin{Bmatrix} c_0^* & = \frac{2M+70}{M+20} \\ \\ c_1^* & = \frac{1.04M+2.8}{M+2} \end{Bmatrix} \tag{8.29}$$

και εδώ έχουμε πάλι όμοια συμπεριφορά με πριν, αλλά αν θέσουμε πάλι $M = 10^9$, έχουμε μικρότερη απώλεια ακρίβειας. Θα δούμε τώρα ένα θεώρημα για την μορφή της ελάχιστης τετραγωνικής προσέγγισης όταν οι συναρτήσεις είναι ορθογώνιες.

Θεώρημα 8.2. *(Theorem 11.2 από βιβλίο M.J.D.POWELL Approximation theory and methods) Έστω $\mathbb{A}$ ένας γραμμικός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert $\mathbb{B}$ ο οποίος διαχωρίζεται από τις συναρτήσεις $\{\phi_i : i = 0, 1, ..., n\}$. Αν η συνθήκη (8.24) ικανοποιείται τότε για κάθε $f \in \mathbb{B}$ η βέλτιστη προσέγγιση είναι η:*

$$p^* = \sum_{j=0}^{n} \frac{\langle \phi_j, f \rangle}{\|\phi_j\|^2} \tag{8.30}$$

Απόδειξη. Οι (8.17) και (8.24) μας προσδιορίζουν οτι οι συντελεστές c_i^* έχουν τις τιμές:

$$c_i^* = \frac{\langle \phi_i, f \rangle}{\|\phi_j\|^2}, i = 0, 1, ..., n \tag{8.31}$$

□

Συχνά ο χώρος $\mathbb{A}$ προσδιορίζεται από μία ακολουθία ανεξάρτητων συναρτήσεων $\{\psi_i : i = 0, 1, ..., n\}$. Για παράδειγμα αν $\mathbb{A}$ είναι ο $\mathscr{P}_n$ τότε ψ_i είναι $\{\psi_i(x) = x^i : a \leq x \leq b\}$.Για $i = 0, 1, ..., n$ θέτουμε $\mathbb{A}_i$ το γραμμικό χώρο ο οποίος διαχωρίζεται από τις $\{\psi_j : j = 0, 1, ..., n\}$ προκειμένου να περιγραφεί μία γενική μέθοδος επιλογής μίας ορθογώνιας βάσης. Θέτουμε $\phi_0 = \psi_0$. Για $i \geq 0$ έστω $\overline{\psi_i}$ ένα στοιχείο του $\mathbb{A}_i$ το οποίο δεν ανήκει στο $\mathbb{A}_{i-1}$ και q_i^* μία βέλτιστη προσέγγιση από το $\mathbb{A}_{i-1}$ στο $\overline{\psi_i}$. Προσδιορίζουμε το ϕ_i από την:

$$\phi_i = \overline{\psi_i} - q_i^* \tag{8.32}$$

Λόγω του οτι το θεώρημα 8.1 μας δίνει την ορθογωνιότητα των ϕ_i στο $\mathbb{A}_{i-1}$ ικανοποιείται η :

$$\langle \phi_i, \phi_j \rangle = 0, j < i \tag{8.33}$$

Συνεπώς οι $\{\phi_i : i = 0, 1, ..., n\}$ που προέρχονται από την παραπάνω κατασκευή είναι ορθογώνιες. Αυτή η κατσκευή είναι χρήσιμη αν δίνεται ένα στοιχείο f και μία άπειρη ακολουθία $\{\psi_i : i = 0, 1, ..., n\}$ σε ένα χώρο Hilbert $\mathbb{B}$ και θέλουμε να κάνουμε το σφάλμα $\|f - p\|$ μικρότερο από την δοσμένη ακρίβεια, έστω δ, όπου p είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των πρώτων $(n+1)$ όρων της ακολουθίας, όμως το n δεν είναι γνωστό επειδή αποτελεί τον μικρότερο ακέραιο που επιτρέπεται από την απαιτούμενη ακρίβεια. Το κύριο πλεονέκτημα αυτής της κατασκευής είναι οτι ο χαρακτηρισμός των ορθογωνίων $\{\phi_i : i = 0, 1, ...\}$ δεν εξαρτάται από το n. Συνεπώς οι συντελεστές (8.31) είναι επίσης ανεξάρτητοι του n. Για $i = 0, 1, ...$ προσδιορίζουμε το p_i^* ως:

$$p_i^* = \sum_{j=0}^{i} \frac{\langle \phi_i, f \rangle}{\|\phi_j\|^2} \phi_j \tag{8.34}$$

Από την (8.2) έχουμε οτι αυτή η συνάρτηση είναι η βέλτιστη προσέγγιση στην f από έναν γραμμικό χώρο $\mathbb{A}_i$ ο οποίος χωρίζεται από τις $\{\psi_j : j = 0, 1, ..., i\}$ και απαιτείται το n να είναι ο μικρότερος ακέραιος που ικανοποιεί την:

$$\|f - p_n^*\| \leq \delta \tag{8.35}$$

Δεν χρειάζεται να υπολογίσουμε κάθε προσέγγιση της (8.34), επειδή η (8.14) συνεπάγεται την (8.32) ή ισοδύναμα με την ανίσωση:

$$\|p_n^*\|^2 \geq \|f\|^2 - \delta^2 \tag{8.36}$$

Επομένως έχουμε μόνο να επιλλέξουμε το n τέτοιο ώστε η $\|p_n^*\|$ να είναι μεγάλη.Επειδή οι συνθήκες ορθογωνιότητας και η (8.34) συνεπάγονται την:

$$\|p_n^*\|^2 = \sum_{j=0}^{n} \frac{\langle \phi_j, f \rangle^2}{\|\phi_j\|^2} \tag{8.37}$$

είναι επακόλουθο οτι η απαιτούμενη τιμή του n υπολογίζεται από τους όρους του αθροίσματος $\{\frac{\langle \phi_j, f \rangle^2}{\|\phi_j\|^2} : j = 0, 1...\}$ μέχρι να ικανοποιείται η ανίσωση:

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{\langle \phi_j, f \rangle^2}{\|\phi_j\|^2} \geq \|f\|^2 - \delta^2 \tag{8.38}$$

8.4 Η επαναληπτική σχέση για ορθογώνια πολυώνυμα

Μία σημαντική περίπτωση ελαχίστων τετραγωνικών προσεγγίσεων είναι όταν το σύνολο των προσεγγιστικών συναρτήσεων $\mathbb{A}$ είναι ο γραμμικός χώρος $\mathscr{P}_n$ όλων των πολυωνύμων το πολύ βαθμού n.

Θεώρημα 8.3. *(Theorem 11.3 από βιβλίο M.J.D.POWELL Approximation theory and methods) Έστω ϕ_0 η σταθερή συνάρτηση*

$$\phi_0(x) = 1, a \leq x \leq b \tag{8.39}$$

Για $j \geq 0$, έστω α_j το εσωτερικό γινόμενο:

$$\alpha_j = \frac{\langle \phi_j, x\phi_j \rangle}{\|\phi_j\|^2} \tag{8.40}$$

όπου $x\phi_j$ είναι το πολυώνυμο $\{x\phi_j(x) : a \leq x \leq b\}$. Έστω ϕ_1 η γραμμική συνάρτηση:

$$\phi_1(x) = (x - \alpha_0)\phi_0(x), a \leq x \leq b \tag{8.41}$$

Για $j \neq 0$, έστω β_j το εσωτερικό γινόμενο:

$$\beta_j = \frac{\|\phi_j\|^2}{\|\phi_{j-1}\|^2} \tag{8.42}$$

και έστω ϕ_{j+1} προσδιορίζεται από τους τρείς όρους της επαναληπτικής σχέσης:

$$\phi_{j+1}(x) = (x - \alpha_j)\phi_j(x) - \beta_j\phi_{j-1}(x), a \leq x \leq b \tag{8.43}$$

Τότε για κάθε j η ϕ_j είναι πολυώνυμο βαθμού j με συντελεστή του x^j να είναι μονάδα. Επιπλέον τα πολυώνυμα $\{\phi_j : j = 0, 1, ...\}$ είναι ορθογώνια.

Απόδειξη. Η πρώτη υπόθεση του θεωρήματος αποδυκνύεται άμεσα από τις σχέσεις (8.39), (8.41) και (8.43). Για να δείξουμε οτι την ορθογωνιότητα, δείχνουμε οτι η (8.41), (8.43) είναι ισοδύναμες με την κατασκευή της (8.32),όπου $\overline{\psi_i} = x\phi_{i-1}$.Επειδή συνεχίζουμε επαγωγικά, υποθέτουμε οτι οι $\{\phi_i : i = 0, 1, ..., j\}$ είναι ορθογώνιες. Επομένως με εφαρμογή του θεωρήματος 8.2 στην (8.32) έχουμε:

$$\phi_{j+1}(x) = x\phi_j(x) - \sum_{i=0}^{j} \frac{\langle \phi_i, x\phi_j \rangle}{\|\phi_i\|^2}, a \leq x \leq b \tag{8.44}$$

που είναι ορθογώνιο στην $\{\phi_i : i = 0, 1, ..., j\}$. Ο προσδιορισμός του α_0 δείχνει οτι η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την (8.41) όταν $j = 0$. Συνεπώς, μένει να δείξουμε οτι οι (8.43), (8.44) είναι ίδιες όταν $j \geq 1$. Επομένως κοιτάμε τους όρους κάτω από το άθροισμα της (8.41). Όταν $i = j$, βρίσκουμε τον όρο $\alpha_j\phi_j(x)$, ο οποίος υπάρχει στην (8.43). Όταν $i \leq j - 2$,χρησιμοποιούμε την :

$$\langle \phi_i, x\phi_j \rangle = \langle x\phi_i, \phi_j \rangle = 0 \tag{8.45}$$

η οποία ισχύει επειδή ϕ_j είναι ορθογώνια για κάθε πολυώνυμο στην $\mathscr{P}_{j-1}$. Συνεπώς είναι σωστή η απουσία του $\phi_i(x)$ από την (8.43) για $i \leq j-2$. Οι υπόλοιποι όροι του αθροίσματος εξαρτώνται από την :

$$\begin{aligned} \langle \phi_{j-1}, x\phi_j \rangle &= \langle x\phi_{j-1}, \phi_j \rangle \\ &= \langle \phi_j, \phi_j \rangle + \langle x\phi_{j-1} - \phi_j, \phi_j \rangle \\ &= \|\phi_j\|^2 \end{aligned} \tag{8.46}$$

που ισχύει επειδή $\langle x\phi_{j-1} - \phi_j, \phi_j \rangle \in \mathscr{P}_{j-1}$. Συνεπώς η (8.43) έχει το σωστό πολλαπλάσσιο του ϕ_{j-1} □

Στην πράξη όταν εφαρμόζουμε το θεώρημα, συνήθως υπολογίζουμε τον συντελεστή:

$$c_j^* = \frac{\langle \phi_j, f \rangle}{\|\phi_j\|^2} \tag{8.47}$$

μετα τον υπολογισμό του ϕ_j. Στο τέλος της διαδικασίας παρέχουμε τις τιμες της παραμέτρου $\{c_j^* : j = 0, 1, ..., n\}$,$\{a_j : j = 0, 1, ..., n-1\}$ και $\{\beta_j : j = 0, 1, ..., n-1\}$. Επομένως ο χώρος που περιέχει τα ϕ_{j-1} μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τα ϕ_{j+1} όταν η (8.43) εφαρμόζεται, που είναι πολύ χρήσιμο για διακριτούς υπολογισμούς πολλών δεδομένων. Μετά την εύρεση των πολυωνυμικών προσεγγίσεων, μπορεί να είναι απαραίτητο να υπολογίσουμε τις τιμές, διαφόρων σημείων στο διάστημα $a \leq x \leq b$. Για κάθε x, οι αριθμοί $\{\phi_j(x) : j = 0, 1, ..., n\}$ δίνονται από την ακολουθία των τρίων όρων της επαναληπτικής διαδικασίας και τότε το $p^*(x)$ προσδιορίζεται από την:

$$p^*(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j^* \phi_j(x) \tag{8.48}$$

8.5 Παραδείγματα

Παράδειγμα 1:Έστω η συνάρτηση $\{f(x) = x^2 : 0 \leq x \leq 1\}$ και έστω $\{p^*(x) = c_0^* + c_1^* x : 0 \leq x \leq 1\}$ το γραμμικό πολυώνυμο το οποίο ελαχιστοποεί την:

$$\int_0^1 [f(x) - p(x)]^2 \, dx, p \in \mathscr{P}_1$$

Να υπολογισθούν οι σταθερές c_0^* και c_1^* από τις κανονικές εξισώσεις (8.17) και να δειχθεί ότι ικανοποιείται η εξίσωση (8.14).

Λύση

Συγκρίνοντας τη σχέση 8.17 με το δοσμένο πολυώνυμο παρατηρούμε ότι $\phi_0 = 1$ και $\phi_1 = x$.Επομένως έχουμε τις εξής εξισώσεις:

$$\langle \phi_0, \phi_0 \rangle c_0^* + \langle \phi_0, \phi_1 \rangle c_1^* = \langle \phi_0, f \rangle$$
$$\langle \phi_1, \phi_0 \rangle c_0^* + \langle \phi_1, \phi_1 \rangle c_1^* = \langle \phi_1, f \rangle$$

Υπολογίζουμε τις δύο εξισώσεις και έχουμε:

$$\langle 1,1\rangle c_0^* + \langle 1,x\rangle c_1^* = \langle 1,x^2\rangle$$
$$\langle x,1\rangle c_0^* + \langle x,x\rangle c_1^* = \langle x,x^2\rangle$$

$$\int_0^1 1dxc_0^* + \int_0^1 xdxc_1^* = \int_0^1 x^2dx$$
$$\int_0^1 xdxc_0^* + \int_0^1 x^2dxc_1^* = \int_0^1 x^3dx$$

$$[x]_0^1 c_0^* + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 c_1^* = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1$$
$$\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 c_0^* + \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 c_1^* = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}c_1^* - \frac{1}{3}c_1^* = \frac{1}{6} - \frac{1}{4}$$
$$\Rightarrow c_1^* = 1, c_0^* = -\frac{1}{6}$$

Επομένως $p^*(x) = x - \frac{1}{6}$.Τώρα θα ελέγξουμε αν ιχύει η εξίσωση (8.14):

$$\|f\|^2 = \langle f,f\rangle = \int_0^1 x^4dx = \frac{1}{5}$$

$$\|p^*\|^2 = \langle p^*,p^*\rangle = \int_0^1 (x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{36})dx = \frac{7}{36}$$

$$\|f-p^*\|^2 = \langle f-p^*, f-p^*\rangle = \int_0^1 (x^2 - x - \frac{1}{6})^2dx = \frac{1}{5} - \frac{2}{9} + \frac{1}{36}$$

Επομένως ισχύει η εξίσωση (8.14).

Βιβλιογραφία

[1] M.J.D. POWELL, Approximation theory and methods, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS 1981

[2] Α.ΜΠΑΚΟΠΟΥΛΟΣ, Ι.ΧΡΥΣΟΒΕΡΓΗΣ, ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ Με Βιβλιοθήκη Προγγραμμάτων και Δισκέτα, ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΣΥΜΕΩΝ ΑΘΗΝΑ 1994

[3] Γ.Σ.ΠΑΠΑΓΕΩΡΓΙΟΥ,Χ.Γ.ΤΣΙΤΟΥΡΑΣ,Αριθμητική Ανάλυση με εφαρμογές σε Matlab και Mathematica, Πέμπτη έκδοση, ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΣΥΜΕΩΝ ΑΘΗΝΑ 2008

[4] ΣΠΥΡΟΣ ΑΡΓΥΡΟΣ, Σημειώσεις Παραδώσεων Πραγματικής Ανάλυσης, Τρίτη έκδοση, Μάρτιος 2011

[5] ΣΠΥΡΟΣ ΑΡΓΥΡΟΣ, Σημειώσεις Παραδόσεων Συναρτησιακής Ανάλυσης, Δεύτερη έκδοση, Μάϊος 2004

[6] Σωτήριος Καρανάσιος, ΘΕΩΡΙΑ ΤΕΛΕΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ, Έκδοση Πρώτη, Αθήνα 2009