ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Η ΣΥΜΒΟΛΗ ΤΗΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ:

Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΟΥ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΤΩΝ ΑΡΡΗΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Μάριος Τζεβελέκης

Α.Μ. 09104276

Τριμελής Εξεταστική Επιτροπή

Παυλοπούλου Κάλλια

Στεφανέας Πέτρος

Χριστιανίδης Ιωάννης

Αθήνα, Φεβρουάριος 2019

NATIONAL TECHNICAL UNVERSITY OF ATHENS

SCHOOL OF APPLIED MATHEMATICAL AND PHYSICAL SCIENCES

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

THE CONTRIBUTION OF HISTORY OF MATHEMATICS TO THE TEACHING OF MATHEMATICS:

THE CASE OF THE PYTHAGOREAN THEOREM AND THE IRRATIONAL NUMBERS

Marios Tzevelekis

Athens, February 2019

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο :

Η Πυθαγόρεια Σχολή

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο :

Αποδείξεις του Πυθαγόρειου Θεωρήματος και Εφαρμογές του

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο :

Ο ρόλος της ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο:

Η έρευνά μας

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο:

Συμπεράσματα

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙΙ

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα την επιβλέπουσα καθηγήτρια της διπλωματικής μου εργασίας, Παυλοπούλου Κάλλια, η οποία με την καθοδήγησή της, τις συμβουλές της, τη θετική της ενέργεια και την κατανόησή της με βοήθησε να φέρω εις πέρας αυτή την εργασία, καθώς επίσης και τους καθηγητές Στεφανέα Πέτρο και Χριστιανίδη Ιωάννη για την πολύτιμη βοήθειά τους.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω την (πρώην) συμφοιτήτρια, συνάδελφο και φίλη μου Μπουκουβάλα Ελένη για την στήριξη στα χρόνια της φοίτησής μου και τους γονείς της για την βοήθεια τους στην εύρεση των συνεντευξιαζόμενων που απαιτούσε η έρευνα μου. Επίσης την συνάδελφο μου Σκληβάγκου Αφροδίτη για την βοήθειά της στην διεκπεραίωση αυτής της εργασίας.

Η παρούσα εργασία είναι αφιερωμένη στους γονείς μου και την κοπέλα μου για την υποστήριξή τους όλα αυτά τα χρόνια.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα διπλωματική εργασία με τίτλο «Η συμβολή της Ιστορίας των Μαθηματικών στη Διδασκαλία των Μαθηματικών: η περίπτωση του Πυθαγορείου Θεωρήματος» έχει στόχο να διερευνήσει τον τρόπο με τον οποίο οι εκπαιδευτικοί της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης χρησιμοποιούν τα εφόδια που μας προσφέρει η Ιστορία των Μαθηματικών σχετικά με το Πυθαγόρειο Θεώρημα και τους άρρητους αριθμούς.

Για το λόγο αυτό ξεκινήσαμε από μια ιστορική αναδρομή στα Πυθαγόρεια Μαθηματικά με σκοπό να αντιληφθούμε καλύτερα τον τρόπο με τον οποίο έφτασαν οι Πυθαγόρειοι στα αποτελέσματα που τους αποδίδονται και τα οποία είναι γνωστά έως και σήμερα. Την ανάλυση αυτή την παρουσιάζουμε στο πρώτο κεφάλαιο της εργασίας μας.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζουμε διάφορες αποδείξεις του Πυθαγορείου Θεωρήματος που έχουν γίνει στο πέρασμα των αιώνων καθώς και ορισμένες εφαρμογές του στα Μαθηματικά και τη Φυσική, με απώτερο στόχο να δούμε αν κάποιες από αυτές θα μπορούσαν να ενσωματωθούν στην εκπαιδευτική διαδικασία.

Στο τρίτο κεφάλαιο αναλύουμε μέσα από προγενέστερες έρευνες το ρόλο της ιστορίας των μαθηματικών στην εκπαιδευτική διαδικασία, τους λόγους αλλά και τους τρόπους χρησιμοποίησής της στη διδασκαλία τους.

Στο τέταρτο και τελευταίο κεφάλαιο παρουσιάζεται η έρευνά μας η οποία πραγματοποιήθηκε με τη μέθοδο των συνεντεύξεων εκπαιδευτικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και τα αποτελέσματα αυτής.

Τέλος, στο πέμπτο κεφάλαιο, παραθέτουμε τα γενικά αποτελέσματα της μελέτης μας.

ABSTRACT

This diploma thesis entitled " THE CONTRIBUTION OF HISTORY OF MATHEMATICS TO THE TEACHING OF MATHEMATICS:
THE CASE OF THE PYTHAGOREAN THEOREM AND
THE IRRATIONAL NUMBERS " aims to explore the way in which secondary school teachers use the resources provided by the History of Mathematics on the Pythagorean Theorem and the irrational numbers.

For this reason, we started from a historical review of Pythagorean Mathematics in order to better understand how the Pythagoreans arrived in the results attributed to them, which are known to this day. We present this analysis in the first chapter of our work.

In the second chapter we present various proofs of the Pythagorean Theorem that have been done over the centuries as well as some of its applications in Mathematics and Physics, with the ultimate goal of seeing if some of them could be incorporated into the educational process.

In the third chapter we analyze through previous research the role of the history of mathematics in the educational process, the reasons and the ways of using it in their teaching.

The fourth and final chapter presents our research, which was conducted using the method of interviewing secondary school teachers and its results.

Finally, in the fifth chapter, we present the general results of our study.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

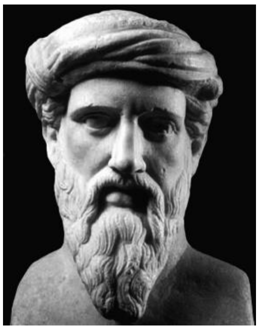
Τα μαθηματικά, όπως και η φιλοσοφία αλλά και άλλες επιστήμες έχουν την δύναμη να αλλάξουν κάθε δεδομένο στη ζωή όσων ασχολούνται ενεργά μαζί τους. Τόσο ο ατελείωτος και αξιοθαύμαστος κόσμος των αριθμών όσο και το απέραντο σύμπαν των φιλοσοφικών ιδεών μπορούν να «εγκλωβίζουν» αυτούς που βουτάνε στα βαθιά τους νερά. Ένα από τα χαρακτηριστικότερα παραδείγματα είναι αυτό του Πυθαγόρα, του ανθρώπου που συνδύασε αυτές τις δύο επιστήμες και άφησε πίσω του ένα μοναδικό έργο, αλλά και ένα μύθο γύρω από τη προσωπικότητα του.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο

Η Πυθαγόρεια Σχολή

Είναι κοινό χαρακτηριστικό ότι η αρχαία ελληνική φιλοσοφία είναι η αρχή των πάντων πάνω στην οποία στηρίζεται ολόκληρο το πνεύμα της Δύσης των νεότερων χρόνων. Πολλοί είναι οι Έλληνες φιλόσοφοι της κλασικής εποχής οι οποίοι μέχρι και σήμερα έχουν γίνει αντικείμενο θαυμασμού και συστηματικής μελέτης από τους νεότερους Ευρωπαϊκούς λαούς. Φυσικά, δεν μπορούμε να παραβλέψουμε και την προσφορά των Ανατολικών χωρών (Κίνα, Ινδία, Ιαπωνία) στον τομέα της φιλοσοφίας η οποία ήταν αξιοσημείωτη. Βέβαια, έχοντας άμεση σχέση με την θρησκεία, ο φιλοσοφικός στοχασμός των λαών αυτών διέφερε σε σχέση με την διάφανη καθαρότητα της αρχαίας Ελληνικής σκέψης. Στη συνέχεια η σκέψη αυτή έγινε σταθμός όλης της νεότερης ευρωπαϊκής παιδείας και η Ελληνική φιλοσοφία μητέρα ολόκληρης της Ευρωπαϊκής φιλοσοφίας.

Ένας από τους θεμελιωτές της Ελληνικής φιλοσοφίας είναι ο Πυθαγόρας ο Σάμιος. Πηγές αναφέρουν πως το όνομα Πυθαγόρας του το έδωσαν οι γονείς του προς τιμήν της Πυθίας η οποία προφήτευσε την γέννηση του. Το μεγάλο δώρο που έκανε στους ανθρώπους είναι η λέξη «φιλόσοφος», δημιούργημα ελληνικό το οποίο παρέμεινε ανά τους αιώνες και στους περισσότερους λαούς ως λέξη Ελληνική και αμετάφραστη. Ο Πυθαγόρας, γιός του Μνήσαρχου, γεννήθηκε στη Σάμο το 570 π.Χ. Σύμφωνα με διάφορες πηγές, η Θεμιστόκλεια, ιέρεια στον ναό του Απόλλωνα, φαίνεται να εμφύσησε στον Πυθαγόρα την αγάπη για τα Μαθηματικά και του μετέφερε τα μυστικά των αριθμών όταν αυτός επισκέφτηκε τους Δελφούς. Για πολλά χρόνια περιπλανήθηκε σε χώρες κυρίως της Ανατολής και λέγεται πως έμενε για ένα μεγάλο χρονικό διάστημα στην Αίγυπτο και την Ινδία όπου μελέτησε τα τεκταινόμενα στον επιστημονικό τομέα. Πιο αναλυτικά, κατά την παραμονή του στην Αίγυπτο έμαθε την γλώσσα των ιερέων, μελέτησε τις βίβλους των αδύτων, διδάχτηκε την αιγυπτιακή φιλοσοφία, τα μαθηματικά, την αστρονομία και την ιατρική. Μετά την κατάληψη της Αιγύπτου από τους Βαβυλώνιους ο Πυθαγόρας κατέληξε στη Βαβυλώνα ως αιχμάλωτος και μαθητής των Μάγων (μέλη μιας ιερατικής τάξης). Από τη Βαβυλώνα κατέληξε στην Ινδία όπου μαθήτευσε στους Βραχμάνες σοφούς. Λέγεται μάλιστα πως ο Πυθαγόρας πέρασε και από την Αφρική όπου διδάχτηκε και εκεί από σοφούς της εποχής. Έπειτα επιστρέφοντας στην Σάμο, λόγω της τυραννίας του Πολυκράτη, μεταναστεύει στο ελληνικό λιμάνι του Κρότωνα, στη νότια Ιταλία. Η άφιξη του Πυθαγόρα στην κάτω Ιταλία χρονολογείται στο 520 π.Χ. Εκεί γνωρίζει την Θεανώ, η οποία έγινε η πρώτη του μαθήτρια και στη συνέχεια σύζυγος του. Ο Πυθαγόρας εκεί ιδρύει την περίφημη Πυθαγόρεια σχολή. Ο σκοπός του ήταν να μορφώσει το λαό του Κρότωνα και να αποτελέσει την αφορμή να αλλάξει ο τρόπος ζωής των εύπορων πολιτών με στόχο την νηφαλιότητα, κάτι το οποίο πέτυχε όπως προδίδει η φήμη του ως «αρχιτέκτονα της χρυσής εποχής» στον Κρότωνα. Η μόρφωση για τον Πυθαγόρα ήταν εξαιρετικής σημασίας, καθώς θεωρούσε ότι διαρκεί για μία ζωή και ότι ήταν ικανή να καλλιεργεί την αιώνια φήμη. Η Πυθαγόρεια σχολή αποτελούσε μία ακαδημία για τη μελέτη κυρίως της φιλοσοφίας και των μαθηματικών αν και επεκτάθηκε και σε άλλους τομείς, όπως η μουσική και η αστρονομία. Επιπλέον, αποτελούνταν από μία ομάδα ανθρώπων, οι οποίοι είχαν δεχθεί κάποιες αρχές, λάμβαναν συλλογικές αποφάσεις και χαρακτηριστικό τους γνώρισμα που τους διακατείχε ήταν η μυστικοπάθεια κάτω από την οποία δρούσαν. Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι η Θεανώ δίδαξε στη Πυθαγόρεια σχολή. Η φοίτηση στη σχολή δεν ήταν μόνο προνόμιο των ανδρών και ενδεικτικό είναι το γεγονός ότι αποφοίτησαν από αυτή 18 γυναίκες κατά τη διάρκεια της λειτουργίας της. Μετά το θάνατο του Πυθαγόρα, η διεύθυνση της σχολής πέρασε στα χέρια της Θεανούς. Ο Πυθαγόρας με τη Θεανώ απέκτησαν τρεις κόρες, την Δαμώ, την Αργινώτη και τη Μυία. Οι τρεις τους υπήρξαν αξιόλογες μαθηματικοί της εποχής τους και δίδαξαν όλες τους στη σχολή του πατέρα τους.



Η Πυθαγόρεια Σχολή και η φιλοσοφία της

Η Πυθαγόρεια σχολή απαρτιζόταν κατά κύριο λόγο από τρία διαφορετικά στάδια. Αρχικά, για να εισέλθει κάποιος υποψήφιος στη σχολή θα έπρεπε να επιτύχει σε διάφορες δοκιμασίες έως ότου γίνει δεκτός από τη σχολή, αυτό ήταν το πρώτο στάδιο. Στη συνέχεια εφόσον εισερχόταν κάποιος υποψήφιος υπήρχε το δεύτερο στάδιο της ακρόασης των διδασκαλιών δίχως όμως το δικαίωμα της οπτικής παρακολούθησης αλλά μόνο της ακουστικής οι οποίοι ήταν γνωστοί ως ακροατές ή ακουσματικοί, αυτός ήταν ο 'εξωτερικός κύκλος'. Το τελευταίο στάδιο ήταν ο 'εσωτερικός κύκλος', όπου έφταναν μόνο οι εκλεκτοί, οι οποίοι όχι μόνο μπορούσαν να παρακολουθήσουν την διδασκαλία αλλά είχαν και το δικαίωμα της άμεσης επικοινωνίας με τον Πυθαγόρα, οι γνωστοί έως σήμερα Μαθηματικοί ή Μαθητευόμενοι. Στόχος της σχολής δεν ήταν μόνο η ατομική εκμάθηση και αυτοβελτίωση του καθενός αλλά κυρίως η έρευνα και αναζήτηση της αλήθειας σε διάφορους τομείς και επιστήμες.

Σύμφωνα με το βιβλίο του Πλάτωνα «Πολιτεία», η διδασκαλία της Πυθαγόρειας σχολής περιλάμβανε το λεγόμενο quadrivium το οποίο αναφέρεται στην Αριθμητική, την Γεωμετρία, την Αστρονομία και την Αρμονία (Μουσική). Η έννοια της λέξης αυτής έγκειται στο ότι κάθε μορφωμένο άτομο είναι αναγκαίο να διακατέχει αυτές τις γνώσεις. Η φιλοσοφία της διδασκαλίας της Πυθαγόρειας σχολής αποσκοπούσε σε δύο πράγματα. Πρώτον, στο να κατανοήσει ο άνθρωπος τους νόμους της φύσης και δεύτερον στο να αναπτύξει και να βελτιώσει τις ικανότητές του.

Για την Πυθαγόρεια σχολή οι αριθμοί και οι μαθηματικές σχέσεις είναι η ουσία και η αρχή των πάντων. Κάθε νόμος που διέπει τον φυσικό αλλά και πραγματικό μας κόσμο αντικατοπτρίζεται με αριθμούς. Η αρμονία από την πλευρά της είναι αυτή η οποία αποκαθιστά την ισορροπία ανάμεσα σε αυτούς τους δύο κόσμους, δηλαδή αυτή που συγκροτεί έναν ενιαίο κόσμο. Η αρμονία έγκειται από αριθμούς και μαθηματικές σχέσεις και αυτός που καταφέρνει να την κατανοήσει γίνεται ο ίδιος αθάνατος. Ακόμη, στην Πυθαγόρεια σχολή εξέφραζαν τους ακέραιους αριθμούς ως την αιτία των διάφορων ποιοτήτων της ύλης και του ίδιου του ανθρώπου καθώς πίστευαν πως οι αριθμοί ρυθμίζουν το σύμπαν και ποσοτικά και ποιοτικά. Ο «κόσμος» των Πυθαγορείων είναι ένας κόσμος εν τάξει, κοσμεί το ίδιο το σύμπαν, αποτελούμενος από τα στοιχεία, τα οποία περιλαμβάνονται στον ''Πίνακα των Αντιθέτων'' του Αριστοτέλη στο έργο του 'Μετά τα Φυσικά' [1]:

Πέρας – Άπειρον

Περιττόν – Άρτιον

Ένα – Πλήθος

Δεξιόν – Αριστερόν

Άρρεν – Θήλυ

Ηρεμούν – Κινούμενον

Ευθύ – Καμπύλο

Φως – Σκότος

Αγαθόν – Κακόν

Τετράγωνο – Ετερομήκες

Είχαν χωρίσει τη μελέτη του Αριθμού σε τέσσερις κλάδους, οι οποίοι μπορούν να αναλυθούν παρακάτω [1]:

Αριθμητική = ο ίδιος ο Αριθμός

Γεωμετρία = ο Αριθμός στο χώρο

Μουσική ή Αρμονία = ο Αριθμός στο χρόνο

Αστρονομία = ο Αριθμός στο χώρο και στο χρόνο

Σήμερα, όλη την επιστήμη και γενικότερα όλο τον φυσικό κόσμο, θα λέγαμε ότι έχουμε την δυνατότητα να τον περιγράψουμε με την μορφή μαθηματικών εξισώσεων και ό,τι θεωρούμε ως μια απλά φυσική ιδιότητα, να την αντικαταστήσουμε από αριθμούς.

Τέλος, τη δομή της διδασκαλίας της Πυθαγόρειας σχολής θα μπορούσαμε να την διαχωρίσουμε στις εξής ενότητες τις οποίες θα μελετήσουμε παρακάτω αναλυτικότερα:

1. Αριθμολογία
2. Πυθαγόρεια Αριθμητική
3. Επιστήμη της Μουσικής
4. Αστρονομία
5. Πυθαγόρεια Μαθηματικά
6. Κατηγοριοποίηση Αριθμών
7. Άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου

1. Αριθμολογία

Πολλοί λαοί προσπάθησαν να ερμηνεύσουν τους αριθμούς ως προς τη φύση τους και τη σημασία τους, όπως οι Βαβυλώνιοι και άλλοι λαοί της ανατολής, αλλά ξεχωρίζει αυτή των Πυθαγορείων οι οποίοι τους ερμήνευσαν ως σύμβολα και όχι σαν απλή μορφή αρίθμησης και τρόπο υπολογισμού. Ο μυστικισμός και ο αριθμητικός μυστικισμός συνδέονται μεταξύ τους, όπως η μαγεία συνδέεται με την αριθμομαγεία. Κάθε μάγος χρησιμοποιεί τη μαγική δύναμη των λέξεων και των αριθμών και κάθε προληπτικός άνθρωπος ξέρει ιερούς αριθμούς, τυχερούς αριθμούς κλπ. Τα θέματα αυτά έπαιζαν από παλιά σημαντικό ρόλο για τους Βαβυλωνίους και τους Μάγους, όπως επίσης για τους Πυθαγορείους [4]. Συγκεκριμένα, για τους Πυθαγόρειους η μονάδα, συμβολίζει την ψυχή, το πνεύμα καθώς και την ουσία, διότι αυτή δεν αλλάζει, μένει αμετάβλητη στον χρόνο. Η δυάδα συμβολίζει το άπειρο, τη φύση και το θηλυκό. Η τριάδα συμβολίζει το σύμπαν, το «όλον» όπου πάντα υπάρχει αρχή, μέση και τέλος αλλά και το αρσενικό. Η τετράδα παριστάνει την αίσθηση της δικαιοσύνης, ενώ η πεντάδα την υγεία αλλά και το «γάμο» μεταξύ δυάδας και τριάδας. Στην εξάδα έβλεπαν την την πανάκεια και στην επτάδα έδωσαν τη σημασία του πεπρωμένου και της τύχης. Η οκτάδα παρίστανε το σύμβολο της μητρότητας και η εννιάδα τον ορίζοντα (διότι περιορίζει τις σειρές των μονάδων προτού επιστρέψουν στη δεκάδα), η οποία αντιπροσωπεύει την τελειότητα, το αέναο, το θείο[1]. Βέβαια, είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι όλες αυτές οι εικασίες και οι συμβολισμοί των Πυθαγορείων περί σημασιολογίας των αριθμών, ανήκουν στην αριθμολογία και όχι στα μαθηματικά.

2. Πυθαγόρεια Αριθμητική

Οι Πυθαγόρειοι στην προσπάθειά τους να εξερευνήσουν ακόμη περισσότερο τους αριθμούς προσπάθησαν να δώσουν έμφαση στην λειτουργία της όρασης. Αυτό το κατάφεραν αναπαριστώντας τους αριθμούς με ψηφίδες δίνοντας την εικόνα γεωμετρικών σχημάτων. Με τα σχήματα ήταν πιο εύκολο να εξηγήσουν την σχέση μεταξύ των αριθμών. Έτσι, μπόρεσαν και δημιούργησαν την αφαίρεση σύμφωνα με την οποία έχεις την δυνατότητα να διακρίνεις μία ή περισσότερες κοινές ιδιότητες πάνω σε διαφορετικά πράγματα και να σχηματίζεις μια πιο ολοκληρωμένη εικόνα γι’ αυτά. Με αυτόν τον τρόπο μπόρεσαν να εξελίξουν την ικανότητα της μετάβασης από το ειδικό στο γενικό και γενικότερα την επιστήμη των μαθηματικών.

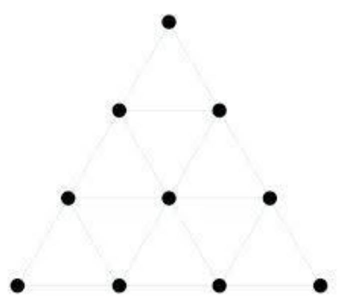
Αρχή όλων αυτών των αριθμών είναι η μονάδα. Από αυτή ξεκινούν όλα και χάρη σε αυτήν δημιουργήθηκε και η αρχή του ορίου και του άπειρου. Σύμφωνα με τον Αριστοτέλη αν προσθέσουμε την μονάδα σε έναν άρτιο αριθμό τότε θα έχουμε σαν αποτέλεσμα έναν περιττό και σε αντίθετη περίπτωση, αν προσθέσουμε την μονάδα σε έναν περιττό τότε θα έχουμε έναν άρτιο. Αυτό συμβαίνει ακριβώς επειδή εμπεριέχονται και οι δύο μορφές στην μονάδα. Επιπλέον, όλα προέρχονται από αυτόν τον αριθμό, ενώ αυτός προέρχεται από το τίποτα.

Από τις αναφορές του Αριστοτέλη, οι Πυθαγόρειοι συνδυάζουν τον άρτιο αριθμό με το άπειρο και τον περιττό με το πεπερασμένο διότι ο άρτιος μπορεί να διαιρεθεί επ' άπειρον ενώ ο περιττός έχει αρχή μέση και τέλος. Χαρακτηριστικό παράδειγμα της άποψης αυτής, έτσι ώστε να γίνουν πιο κατανοητά τα παραπάνω είναι αυτό του Heidel στις εικόνες που ακολουθούν:

Στο παράδειγμα αυτό, αν επιλέξουμε δύο αριθμούς όπου ο ένας άρτιος και ο άλλος περιττός θα παρατηρήσουμε ότι ο άρτιος διαιρείται ακριβώς ενώ ο περιττός όχι.

Μία ακόμη παρατήρηση των Πυθαγορείων είναι ότι ο πρώτος άρτιος αριθμός είναι το δύο (2) ενώ ο πρώτος περιττός είναι το τρία (3) όπως και ότι ο αριθμός τέσσερα (4) είναι ο πρώτος τετράγωνος αριθμός διότι αν τον αναπαραστήσουμε με ψηφίδες θα σχηματιστεί ένα τετράγωνο.

Τέλος, ένα από αυτά που χαρακτήριζε τους Πυθαγορείους και το οποίο ήταν σύμβολο για τη σχολή τους ήταν η τετράκτυς. Αναλυτικότερα, αν προσθέσουμε τους προαναφερόμενους αριθμούς (1+2+3+4=10) το αποτέλεσμα θα είναι ο αριθμός δέκα (10) ο οποίος θεωρείται ιερός αριθμός καθώς αντικατοπτρίζει την τελειότητα. Αν λοιπόν αναπαραστήσουμε τον αριθμό δέκα σε ψηφίδες και τις διατάξουμε σε ένα ισόπλευρο τρίγωνο, τότε θα παρατηρήσουμε ότι σε κάθε πλευρά του τριγώνου υπάρχουν τέσσερις (4) ψηφίδες.



Για τους Πυθαγορείους η τετρακύς θεωρείτο η πηγή της δημιουργίας και συμπεριλαμβανόταν και στον όρκο που έπαιρναν τα μέλη της σχολής: «Μα τον Πυθαγόρα, που παρέδωσε στην γενεά μας την τετρακτύν, που περιέχει την ρίζα της αέναης φύσης, δεν θα προδώσω».

3. <u>Επιστήμη της Μουσικής</u>

Μία από τις σημαντικότερες θεωρίες της Μουσικής ήταν του Πυθαγόρα ο οποίος έθεσε και τις βάσεις της επιστήμης αυτής. Κατασκευάζοντας μόνος του ένα έγχορδο μουσικό όργανο, το "μονόχορδον" παρατήρησε ότι οι μαθηματικές αποστάσεις των διαστημάτων μιας χορδής καθόριζε την ταχύτητα ταλάντωσης της και κατ' επέκταση τον ήχο που παράγεται. Επίσης παρατήρησε πως οι λόγοι των ήχων που παρήγαγαν αρμονικό αποτέλεσμα είχαν τη μορφή αριθμητικών σχέσεων 2/1, 3/2, 4/3, επομένως κατά τους Πυθαγορείους η αρμονία της μουσικής κρύβεται μεταξύ των αριθμών 1,2,3,4. Με τον τρόπο αυτό οι Πυθαγόρειοι μπορούσαν και υπολόγιζαν τα διαστήματα βασιζόμενοι σε αριθμητικές πράξεις και όχι στην εμπειρία. Κατόπιν, στον υπολογισμό των διαστημάτων αυτών βασίστηκε και η τεχνική κουρδίσματος των μουσικών οργάνων.

Μία από τις θεωρίες του Πυθαγόρα ήταν και η "μουσική των σφαιρών". Ότι δηλαδή τα ουράνια σώματα στο σύμπαν, παράγουν ήχους μέσω της περιστροφής τους οι οποίοι αν και δεν μπορούν να γίνουν αντιληπτοί από τον άνθρωπο λόγω της συνεχής κίνησής τους, επηρεάζουν την φύση της ζωής.

Επιπλέον, ανάλογα με την απόσταση των ουράνιων σωμάτων από τη γη και την ταχύτητα περιστροφής τους μεταβάλλεται και το σύνολο των ήχων που παράγουν.

4. <u>Αστρονομία</u>

Μία θεωρία του Πυθαγόρα ήταν πως το σύμπαν έχει αρμονία και δομή γι' αυτό και ήταν ο πρώτος που το ονόμασε "κόσμος" από τη λέξη κόσμημα. Ο Πυθαγόρας πίστευε επίσης ότι το σύμπαν προήλθε από το χάος και έτσι υπέθεσε ότι το σχήμα του θα είναι σφαιρικό λόγω της μορφής που απέκτησε μετά από αυτό και λόγω του μέτρου και της αρμονίας που το διακατέχει.

Παρόλα αυτά, δεν σταμάτησε μόνο στη μελέτη της μουσικής και της αρμονίας αλλά συνέχισε να εξερευνεί και τον κόσμο της αστρονομίας. Κάποιοι αναφέρουν πως ήταν ο πρώτος που υποστήριξε πως η γη είναι στρόγγυλη και ότι περιστρέφεται γύρω από τον ήλιο. Στη συνέχεια οι Πυθαγόρειοι μελετώντας την θεωρία αυτή, υποστήριξαν επίσης πως δεν περιστρέφεται μόνο η γη γύρω από τον ήλιο αλλά και άλλα ουράνια σώματα όπως η σελήνη, ο Κρόνος, ο Ερμής, η Αφροδίτη και άλλοι γνωστοί πλανήτες. Έχοντας όμως ως σύμβολο της Πυθαγόρειας σχολής τους τον ιερό αριθμό δέκα (10) θεώρησαν ότι τα ουράνια σώματα που περιστρέφονται γύρω από τον Ήλιο θα πρέπει να είναι δέκα και για τον λόγο αυτό παραδέχτηκαν ότι υπάρχει ακόμη ένα ουράνιο σώμα η "Αντίχθων". Λόγω της μη ορατότητάς του όμως από τη γη, το απέδωσαν στο ότι κατά την περιστροφή του βρισκόταν πάντοτε απέναντι από τη γη οπότε πάντοτε υπήρχε ο Ήλιος μεταξύ τους.

5. Πυθαγόρεια Μαθηματικά

Υπάρχει μία γενική συναίνεση μεταξύ των ιστορικών των μαθηματικών ότι τα θέματα της αριθμητικής των Πυθαγορείων ήταν τα εξής[12]:

1.Η μελέτη των άρτιων και περιττών αριθμών

2.Η μελέτη των παραστατικών αριθμών

3.Η μελέτη των Πυθαγόρειων τριάδων

4.Η θεωρία διαιρετότητας (αποτελέσματα για πρώτους, τέλειους, υπερτελείς, ελλιπείς και φίλιους αριθμούς)

5.Η θεωρία αναλογιών και μεσοτήτων

6.Η ανακάλυψη της ασυμμετρίας

Η συναίνεση αυτή έχει τη βάση της σε πληροφορίες που αντλούμε από τα έργα των νεοπυθαγόρειων συγγραφέων Νικομάχου, Θέωνα του Σμυρναίου και Ιάμβλιχου, καθώς και από τα σχόλια του Πρόκλου στο πρώτο βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη.

Οι Πυθαγόρειοι θεωρούσαν τα μαθηματικά απαραίτητο βήμα προς την αποκάλυψη των απλών φαινομένων και της αξίας των πραγμάτων. Οι αριθμοί 1 έως 10 είχαν ιδιαίτερη σημασία γι’ αυτούς καθώς μέσω αυτών κατάφεραν και ανακάλυψαν σπουδαία πράγματα.

Σύμφωνα με τον Πυθαγόρα ο αριθμός ένα αποτελεί ένα γεωμετρικό σημείο, ως η μονάδα που κατέχει μία θέση. Αν συνδέσουμε δύο σημεία θα δημιουργήσουμε μία γραμμή. Αν προσθέσουμε ακόμη ένα σημείο και το συνδέσουμε με τα άλλα δύο θα σχηματίζαμε ένα τρίγωνο το οποίο θα ήταν επίπεδο. Προσθέτοντας ένα τέταρτο σημείο θα είχαμε ως αποτέλεσμα την πυραμίδα, την πρώτη στερεά μορφή. Βλέπουμε λοιπόν, το πώς συνδέονται τα αριθμητικά μεγέθη με τα γεωμετρικά σχήματα και το πώς από την μονάδα δημιουργήθηκαν οι διαστάσεις.

Παρατηρούμε επίσης, ότι εξισώνοντας αριθμητικά μεγέθη με σημεία και δημιουργώντας έτσι γεωμετρικά σχήματα, τα αποτελέσματα που έχουμε όχι μόνο αποτελούνται από αριθμούς αλλά προκύπτουν και από αυτούς. Αυτή είναι και η προσέγγιση της Πυθαγόρειας ιδέας περί αριθμών.

Επιστρέφοντας στους άρτιους και περιττούς αριθμούς, αξίζει να αναφέρουμε και μια θεμελιώδη πρόταση του Πυθαγόρα σχετικά με τον διαχωρισμό τους. Ο W.R. Knorr ήταν αυτός που με ένα απλό παράδειγμα του μπορούμε να κατανοήσουμε πιο εύκολα τη σκέψη αυτή. Τοποθετώντας τις ψηφίδες σε μια ευθεία γραμμή, άρτιοι είναι εκείνοι που μπορούν να διαχωριστούν σε δύο ίσα μέρη και στη μέση δεν θα περισσεύει καμία ψηφίδα. Αντιθέτως, περιττοί είναι εκείνοι που διαχωρίζοντάς τους σε δύο ίσα μέρη θα υπάρχει μία ψηφίδα στο μέσο τους. Χάρη σε αυτή τη θεωρία οι Πυθαγόρειοι κατάφεραν και έβγαλαν πολλά συμπεράσματα.

ΆΡΤΙΟΣ

ΠΕΡΙΤΤΟΣ

Οι Πυθαγόρειοι ορισμοί όσων αφορά τους άρτιους και τους περιττούς αριθμούς είναι οι εξής:

Άρτιος αριθμός

Ονομάζουμε αυτόν τον οποίο μπορούμε να τον διασπάσουμε σε δύο ίσα μέρη ή και σε δύο άνισα μέρη, εκτός από την περίπτωση του αριθμού 2 όπου διασπάται μόνο σε δύο ίσα μέρη.

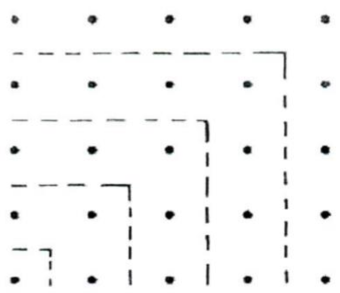
Περιττός αριθμός

Ονομάζουμε αυτόν τον οποίο μπορούμε να τον διασπάσουμε μόνο σε δύο άνισα μέρη από τα οποία το ένα θα είναι άρτιο και το άλλο περιττό καθώς επίσης θα διαφέρει από το άρτιο κατά μία μονάδα.

Ένα από τα προβλήματα που αντιμετώπιζαν οι Πυθαγόρειοι ήταν αυτό του απείρου. Συνδέοντας όσα αναφέρθηκαν παραπάνω για τον διαχωρισμό των άρτιων και των περιττών αριθμών θα δούμε πώς μπορούν να εξυπηρετήσουν στο πρόβλημα αυτό. Είναι γνωστό πλέον ότι οι Πυθαγόρειοι συνδέουν το άρτιο με το άπειρο και το περιττό με το πεπερασμένο. Στην προσπάθεια τους να διαιρέσουν τους αριθμούς με το δύο (2) επανειλημμένα παρατήρησαν ότι η διαδικασία αυτή ήταν ατελείωτη καθώς το υπόλοιπο της διαίρεσης άλλοτε ήταν 0 και άλλοτε 1. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η φράση που αναφέρει ότι όλοι οι αριθμοί είναι είτε άρτιοι είτε περιττοί δεν ισχύει. Οι Πυθαγόρειοι βλέποντας αυτό το εμπόδιο μπροστά τους συνέχισαν να μελετούν ώσπου κατάφεραν να δώσουν λύση στο πρόβλημα του απείρου με το γνώμονα. Ο γνώμονας είναι μία ράβδος η οποία εξυπηρετούσε στο να μπορούν να δουν την ώρα της ημέρας. Την τοποθετούσαν κατακόρυφα και έβλεπαν σε ποιο σημείο βρίσκεται το μήκος της σκιάς της. Στη συνέχεια τον χρησιμοποιούσαν κυρίως για την χάραξη γωνιών. Με τον τρόπο αυτό και λόγω του σχήματός του έφτασε να σημαίνει το σχήμα που θα έχουμε αν από ένα τετράγωνο αφαιρέσουμε από τη μια γωνία ένα μικρότερο ή αν προσθέσουμε ένα μεγαλύτερο αυξάνοντας έτσι το μέγεθος του τετραγώνου χωρίς να αλλάξουμε το σχήμα του.

Χρησιμοποιώντας λοιπόν το εργαλείο αυτό, τον γνώμονα, οι Πυθαγόρειοι κατάφεραν να περιορίσουν την έννοια του απείρου. Αυτό όμως συνδέεται με ένα σχήμα το οποίο αντιπροσωπεύει το περιττό και όπως έχουμε ήδη αναφέρει, το περιττό γι' αυτούς ήταν το πεπερασμένο. Στην προκειμένη περίπτωση ήταν περιττό καθώς όσες φορές πρόσθεταν περιττούς αριθμούς στις πλευρές επάλληλων γνωμόνων συνεχώς σχηματιζόταν τετράγωνο. Γνωρίζοντας πως ο λόγος των πλευρών ενός τετραγώνου είναι πάντα ίσος με ένα (1) παρακάτω ακολουθεί το εξής παράδειγμα:

Υποθέτουμε ότι έχουμε τον γνώμονα α=9 και ξεκινάμε πάντα από τη μονάδα (1) την οποία αντικαθιστούμε με μία ψηφίδα. Τοποθετούμε στη συνέχεια τον γνώμονα μπροστά από την ψηφίδα ο οποίος καλύπτει δύο πλευρές γύρω της. Συνεχίζουμε τοποθετώντας τρεις ψηφίδες αυτή τη φορά (μία σε κάθε πλευρά και μία στην κορυφή) και βάζοντας έναν νέο γνώμονα έτσι ώστε οι ψηφίδες που καλύπτουν τις πλευρές του να είναι πέντε. Ακολουθούμε την ίδια διαδικασία ώσπου το σύνολο των ψηφίδων γύρω από τον τελικό γνώμονα να είναι 9 (α=9).

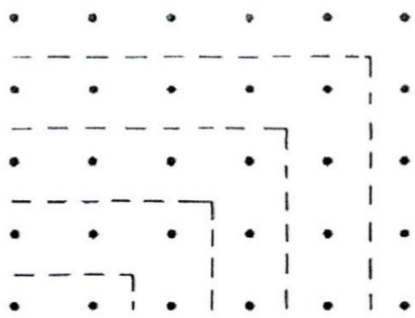


Μέσα από αυτή τη διαδικασία προκύπτει η σχέση:

1+3+5+7+…+ (2ν-1) =$ν^2$, όπου (2ν-1) είναι ο γνώμονας και όπου ν είναι η πλευρά του τετραγώνου.

Παρατηρούμε με αυτό τον τρόπο ότι το σχήμα του τετραγώνου παραμένει σταθερό όπως και οι αναλογίες του μήκους και του ύψους του.

Μετέπειτα, πραγματοποιούμε ακριβώς την ίδια διαδικασία μόνο που αυτή τη φορά οι συνεχόμενοι αριθμοί θα είναι άρτιοι και θα ξεκινήσουμε από την δυάδα (2).



Παρατηρούμε ότι σε αυτή τη περίπτωση το σχήμα δεν παραμένει σταθερό και το μήκος αλλά και το ύψος συνεχώς μεταβάλλονται. Συμπεραίνουμε ότι τελικά δεν υπάρχει άρτιος αριθμός Ν όπου μετά από αυτόν να σταθεροποιείται ο λόγος των πλευρών του σχήματος αυτού. Ο λόγος των πλευρών υπολογίζεται ως ο λόγος του αριθμού των ψηφίδων κάθε πλευράς χωρίς να υπολογιστεί η ψηφίδα που βρίσκεται στην κορυφή του αντίστοιχου γνώμονα.

$\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$

Οπότε έχουμε:

- 2+4=2*3=6
- 2+4+6=3*4=12
- 2+4+6+8=4*5=20
- 2+4+6+8+10=5*6=30

Με τη μέθοδο αυτή προκύπτει η σχέση:

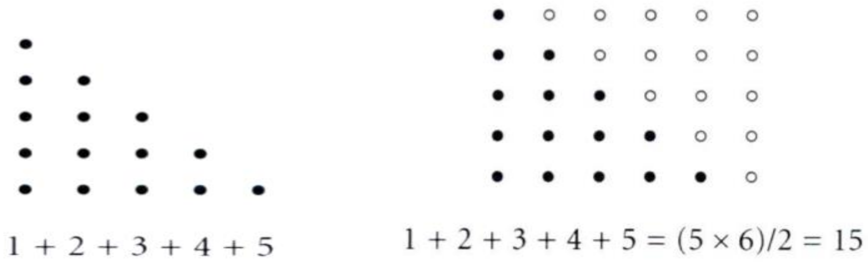
$$2+4+6+\ldots+2(ν-1) = ν(ν-1)$$

όπου 2(ν-1) είναι ο γνώμονας και όπου ν(ν-1) είναι οι πλευρές του ορθογώνιου σχήματος.

Άθροισμα διαδοχικών αριθμών

Ένας τρόπος υπολογισμού αθροίσματος διαδοχικών αριθμών είναι με την Πυθαγόρεια Μέθοδο. Έστω ότι έχουμε τους αριθμούς (1+2+3+4+5). Αντικαθιστώντας τους αριθμούς αυτούς με ψηφίδες δημιουργούμε το παρακάτω σχήμα (κάτω αριστερά). Στη συνέχεια συμπληρώνουμε δίπλα από κάθε ψηφίδα τόσες, μέχρι να σχηματιστεί ένα ορθογώνιο. Όπως βλέπουμε, το ορθογώνιο που σχηματίστηκε έχει μήκος 6 ψηφίδες και πλάτος 5 ψηφίδες. Επομένως θα έχει εμβαδόν 5*6=30 και το μισό του θα είναι 15, το οποίο αντιστοιχεί και στο αρχικό σχήμα δηλαδή στον συνολικό αριθμό των ψηφίδων.

Η σχέση που



προκύπτει είναι: $1+2+3+\ldots+\nu = \dfrac{\nu(\nu+1)}{2}$

6. <u>Κατηγοριοποίηση Αριθμών</u>

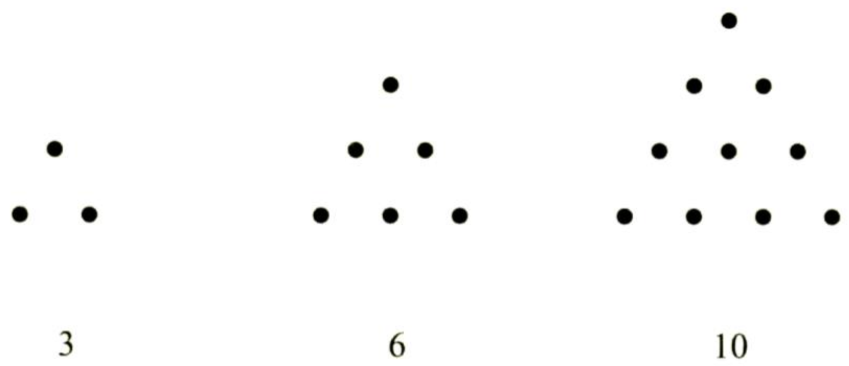
Μία από τις μελέτες των Πυθαγορείων ήταν η κατηγοριοποίηση των αριθμών. Στο βιβλίο του Νικόμαχου του Γερασηνού ‘Αριθμητική Εισαγωγή’ γίνεται λόγος για τρίγωνους, τετράγωνους, ορθογώνιους, και πολύγωνους αριθμούς, για γνώμονες και πολυεδρικούς αριθμούς, για λόγους αριθμών, για πρώτους αριθμούς, για γεωμετρικές προόδους. Ο Νικόμαχος αν και Νεοπυθαγόρειος έδινε την εντύπωση ότι βρισκόταν πολύ πλησιέστερα στον αρχικό αριθμητικό μυστικισμό του Πυθαγόρα και της σχολής του, δίνοντας πληθώρα παραδειγμάτων αλλά όχι αποδείξεων[4].

Αυτό το κατάφερε μέσω της παρακάτω σχέσης, με την οποία μπόρεσε να αναπαραστήσει τους φυσικούς αριθμούς σε τριγωνική μορφή:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + \nu = \tfrac{1}{2} \bullet \nu(\nu+1)$$

Βλέπουμε ότι:

- $1+2 = \dfrac{2\times 3}{2} = 3$
- $1+2+3 = \dfrac{3\times 4}{2} = 6$
- $1+2+3+4 = \dfrac{4\times 5}{2} = 10$



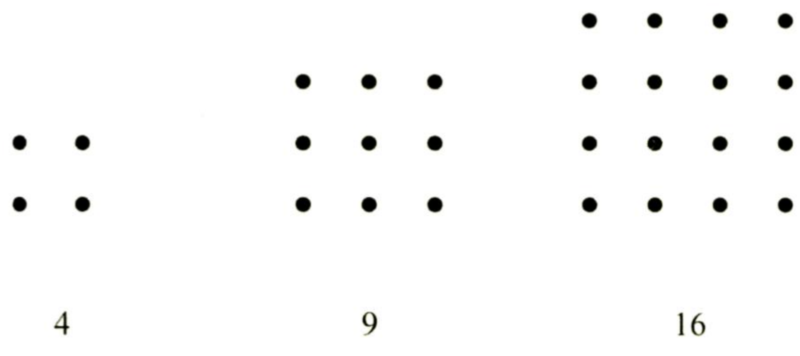
Οι αριθμοί αυτοί ονομάστηκαν ***τριγωνικοί*** και παρατηρούμε ότι είναι ίσοι με το άθροισμα συγκεκριμένων διαδοχικών ακέραιων αριθμών με πρώτο τη μονάδα (1).

Με ανάλογο τρόπο παρατήρησαν ότι αν αθροίσουμε διαδοχικούς περιττούς αριθμούς ξεκινώντας πάντα από τη μονάδα (1), μπορούμε να αναπαραστήσουμε ένα τετράγωνο και γι' αυτό το λόγο τους ονόμασαν ***τετραγωνικούς***. Αυτό προκύπτει από τη σχέση:

$$1+3+5+7+...+(2\nu-1)=\nu^2$$

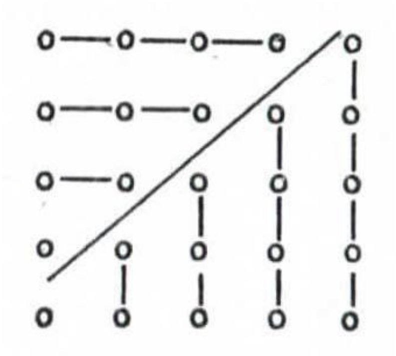
Βλέπουμε ότι:

- $1+3=2^2=4$
- $1+3+5=3^2=9$
- $1+3+5+7=4^2=16$



Παρατηρούμε ότι κάθε τετραγωνικός αριθμός (ν^2) προκύπτει από το άθροισμα δύο διαδοχικών τριγωνικών αριθμών.

- $3+6=9=3^2$
- $6+10=16=4^2$
- $10+15=25=5^2$



Σε αντίθετη περίπτωση, αν προσθέσουμε διαδοχικούς ***άρτιους*** αριθμούς σχηματίζεται ένα ορθογώνιο το οποίο προκύπτει από τη σχέση:

$$2 + 4 + 6 + \ldots + 2\nu = \nu(\nu+1)$$

Βλέπουμε ότι:

- $2+4=2\times3=6$
- $2+4+6=3\times4=12$
- $2+4+6+8=4\times5=20$

Για το λόγο αυτό τους ονόμασαν ***ορθογώνιους***.

Εδώ παρατηρούμε, ότι κάθε ορθογώνιος αριθμός $\nu\times(\nu+1)$ προκύπτει από το άθροισμα δύο ίσων τριγωνικών αριθμών.

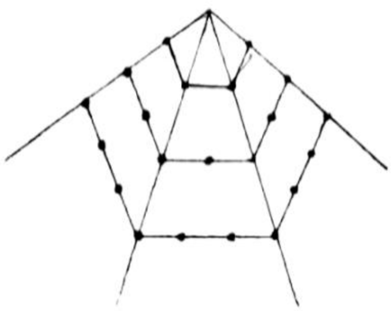
- $3+3=6=2\times3$
- $6+6=12=3\times4$
- $10+10=20=4\times5$
- $15+15=30=5\times6$

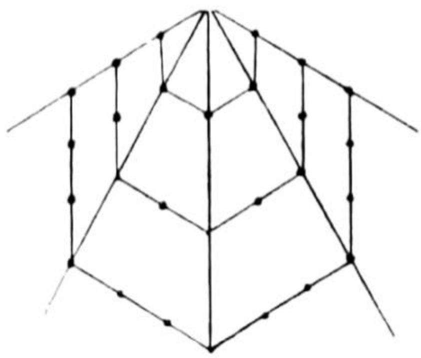
Στη συνέχεια ακολούθησαν οι ***πολυγωνικοί*** αριθμοί και συγκεκριμένα οι ***πενταγωνικοί*** και οι ***εξαγωνικοί***. Οι πενταγωνικοί αριθμοί προκύπτουν από μια διαδοχική ακολουθία με σταθερή διαφορά τρία (3) ενώ στους εξαγωνικούς αριθμούς η διαφορά αυτή είναι τέσσερα (4).

$$1 + 4 + 7 + \ldots + (3\nu-2) = 1/2 \bullet \nu(3\nu-1)$$

<u>Παράδειγμα πενταγωνικών και εξαγωνικών αριθμών</u>:

- Πενταγωνικοί Αριθμοί: 5, 12, 22
- Εξαγωνικοί Αριθμοί: 6, 15, 28





Οι Πυθαγόρειοι εκτός αυτών κατηγοριοποίησαν τους αριθμούς και σε άλλες ομάδες όπως τους:

- ✓ Φίλιους
- ✓ Τέλειους
- ✓ Ισοϋπόλοιπους
- ✓ Ελλιπείς
- ✓ Υπερτελείς

<u>Φίλιοι Αριθμοί</u>

Δύο αριθμοί θεωρούνται φίλιοι, αν ο καθένας ισούται με το άθροισμα όσων διαιρούν τον άλλο εκτός από τον ίδιο αριθμό. Οι πιο διάσημοι φίλιοι του Πυθαγόρα είναι οι 220 και 284.
Οι διαιρέτες του 220 είναι: 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110
Οι διαιρέτες του 284 είναι: 1, 2, 4, 71, 142

Αναλυτικότερα: (1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110=284)

Και (1+2+4+71+142=220)

Το άθροισμα των διαιρετών του 220 μας δίνει 284 και το άθροισμα των διαιρετών του 284 ισούται με το 220.

Όταν ρωτήθηκε κάποτε ο Πυθαγόρας « τι εστί φίλος », απάντησε « έτερος εγώ » και ανέφερε τους φίλους αριθμούς 220 και 284[4].

Τέλειοι Αριθμοί

Οι Πυθαγόρειοι θεωρούσαν πολύ σημαντικό να ισούται ένας αριθμός με το άθροισμα των γνήσιων διαιρετών του. Ο Νικόμαχος δίνει ένα γενικό κανόνα που αποδεικνύεται στα Στοιχεία του Ευκλείδη (IX 36) . Αν το άθροισμα

$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n = p$$

είναι πρώτος αριθμός, τότε ο αριθμός $(2^n) \cdot p$ είναι τέλειος. Για παράδειγμα,

ο 1 + 2 + 4 = 7 είναι πρώτος, άρα ο 4•7=28 είναι τέλειος αριθμός[4].

Ένας αριθμός θεωρείται τέλειος όταν ισούται με το άθροισμα των διαιρετών του εκτός από τον ίδιο. Ο μικρότερος τέλειος αριθμός είναι ο 6 του οποίου οι διαιρέτες είναι το 1, 2, 3 και το άθροισμα αυτών ισούται με 6 → (1+2+3=6).

Άλλοι τέλειοι αριθμοί είναι το 28 και το 496.

- 28=1+2+4+7+14
- 496=1+2+4+8+16+31+62+124+284

Ισοϋπόλοιποι Αριθμοί

Δύο αριθμοί θεωρούνται ισοϋπόλοιποι ως προς κάποιον άλλο αριθμό (ν), όταν διαιρεθούν με τον αριθμό (ν) και έχουν ως αποτέλεσμα το ίδιο υπόλοιπο. Για παράδειγμα ο αριθμός 9 θεωρείται ισοϋπόλοιπος του 5 ως προς το 4 διότι αν διαιρεθούν με το 4 εμφανίζουν και οι δύο υπόλοιπο 1.

Ελλιπείς Αριθμοί

Ένας αριθμός θεωρείται ελλιπής όταν το άθροισμα των παραγόντων του (εκτός του ίδιου του αριθμού) είναι μικρότερο του αριθμού αυτού. Ένας ελλιπής αριθμός είναι το 14.

Οι διαιρέτες του 14 είναι: 1, 2, 7, 14

Άρα προκύπτει ότι: 1+2+7=10<14

Υπερτελείς Αριθμοί

Ένας αριθμός θεωρείται υπερτελής όταν το άθροισμα των παραγόντων του (εκτός του ίδιου του αριθμού) είναι μεγαλύτερο του αριθμού αυτού. Ένας υπερτελής αριθμός είναι το 12.

Οι διαιρέτες του 12 είναι: 1, 2, 3, 4, 6, 12

Άρα προκύπτει ότι: 1+2+3+4+6=16>12.

7. Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου

Ο Ευτόκιος ο Ασκαλωνίτης, αρχαίος Έλληνας μαθηματικός, αναφέρει ότι «οι αρχαίοι θεωρούσαν τις δύο ορθές γωνίες ενός τριγώνου σε τρία ξεχωριστά είδη τριγώνου. Αρχικά στο ισόπλευρο στη συνέχεια στο ισοσκελές και τέλος στο σκαληνό. Αργότερα αποδείχθηκε τελικά ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου ισούται με δύο ορθές γωνίες». Αυτό αποδεικνύεται με τον παρακάτω τρόπο: Έστω ότι έχουμε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Αν σχηματίσουμε μία διαγώνιο που να το χωρίζει στη μέση, τότε θα δημιουργηθούν δυο ίσα τρίγωνα. Ξέρουμε όμως ότι το άθροισμα των γωνιών ενός ορθογωνίου είναι τέσσερις ορθές, άρα το άθροισμα των γωνιών ενός ορθογωνίου τριγώνου θα ισούται με δύο ορθές γωνίες. Στην περίπτωση του σκαληνού τριγώνου θα φέρναμε από το ύψος του μια γραμμή χωρίζοντάς το έτσι σε δύο ορθογώνια τρίγωνα, όπου το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου θα ισούταν με δύο ορθές.

Οι ιστορικές υποθέσεις για την καταγωγή των αριθμητικών βιβλίων [12]

Για τα θεωρήματα των βιβλίων vii- ix των Στοιχείων του Ευκλείδη αναφορικά με τους μαθηματικούς και τις σχολές που τα παρήγαγαν.

Ο T .L. Heath συμφωνεί με μία παλαιότερη άποψη του P. Tannery και θεωρεί ότι το σύνολο των αριθμητικών βιβλίων αποδίδεται στους Πυθαγορείους της πρώιμης εποχής. Με αυτή τη θέση κατέληξε κρίνοντας :

Α) το βασικό ρόλο του αριθμού στη φιλοσοφία των Πυθαγορείων.

Β) το εδάφιο 32a6-c1 από τον Τίμαιο του Πλάτωνα (όπου ο Πλάτωνας εκφράζεται με τρόπο παρόμοιο με των Πυθαγορείων), το οποίο ενδέχεται να περιέχει νύξεις για τα θεωρήματα viii 11-12.

Γ) το θεώρημα viii 7, το οποίο περιέχεται στην κατατομή κανόνος, συνοδεύεται με μία απόδειξη παραπλήσια προς την απόδειξη την οποία ο Βοήθιος αποδίδει στον Πυθαγόρειο Αρχύτα, στο έργο του De institutione musica (Περί μουσικής παιδείας).

Η θέση του H. G. Zeuthen αναφορικά με την καταγωγή των αριθμητικών βιβλίων είναι διαφορετική. Σύμφωνα μ’αυτόν πολλά από τα θεωρήματα των βιβλίων vii και viii έχουν ως σκοπό τη δημιουργία αυστηρών αριθμητικών αποδείξεων των συνθηκών, οι οποίες ως αναγκαίες και ικανές εξασφαλίζουν τη ρητότητα των n-οστών των ακεραίων. Αυτό το θέμα μελετάται στο δέκατο βιβλίο των στοιχείων που αποδίδεται στον Θεαίτητο. Επίσης ο Zeuthen πιστεύει όυι μεγάλο κομμάτι των βιβλίων vii και viii αποδίδεται και αυτό στον Θεαίτητο, άρα είναι μεταγενέστερα από την εποχή που προτείνουν ο Heath και ο Tannery.

Ο B. L. Van der Waerden κατανέμει τα θεωρήματα των βιβλίων vii-ix σε τρεις ομάδες και αποδέχεται αρκετά πρώιμες χρονολογήσεις:

Α) χρησιμοποιεί μια άποψη του O. Becker και θεωρεί ότι τα θεωρήματα ix 21-34 και ix 36 ανάγονται στις μελέτες για τους άρτιους και περιττούς αριθμούς των πρώτων Πυθαγορείων.

Β) αποδίδει το βιβλίο vii στους Πυθαγορείους της προ Αρχύτα εποχής.

Γ) αποδίδει το βιβλίο viii στον ίδιο τον Αρχύτα.

Ο W. R. Knorr πιο πρόσφατα έχει υποστηρίξει ότι το βιβλίο vii αποδίδεται στον Θεαίτητο, ενώ αναφορικά με τα βιβλία viii και ix συμφωνεί με τον van der Waerden.

Τέλος ο ιστορικός B. Vitrac θεωρεί την οργάνωση του vii πολύ προσεγμένη, διαφωνεί με τις πρώιμες χρονολογήσεις του βιβλίου και εκτιμά ότι η συγγραφή του αποτελεί μια προσπάθεια θεμελίωσης της ατιθμητικής, κάτι το οποίο σημαίνει ότι το έργο ανήκει σε μεταγενέστερη περίοδο. Ίδια είναι η θέση του και για τα άλλα δύο βιβλία.

Πώς επηρρέασαν τα αιγυπτιακά και βαβυλωνιακά μαθηματικά, τα ελληνικά μαθηματικά [12]

Είναι βέβαιο ότι οι Έλληνες διδάχτηκαν από τους Αιγυπτίους τον πολλαπλασιασμό τους και τον λογισμό με κλασματικές μονάδες, τα οποία ανέπτυξαν παραπέρα, όπως αποδεικνύεται από τον πάπυρο Akhmim της ελληνιστικής περιόδου. Τα μαθηματικά όμως δεν ταυτίζονται με τους υπολογισμούς.

Οι Έλληνες μπορεί, επίσης, να προσοικειώθηκαν από τους Αιγυπτίους τους κανόνες υπολογισμού εμβαδών και όγκων. Τα μαθηματικά, όμως, δεν συνίσταντο, κατά τους Έλληνες σε τέτοιους κανόνες. Απλώς αυτοί τους οδήγησαν στο να θέσουν το ερώτημα: πώς μπορεί να το αποδείξει κανείς αυτό;

Τα χαρακτηριστικά των Αιγύπτιων μαθηματικών είναι, αφ’ενός οι περίπλοκοι υπολογισμοί με κλάσματα, που δεν μπορούν να αποτελέσουν τη βάση της ανώτερης άλγεβρας και, αφ’ετέρου, ο χειρισμός της γεωμετρίας ως εφαρμοσμένης αριθμητικής.

Από την άλλη πλευρά, τα βαβυλωνιακά μαθηματικά θα μπορούσαν να αποτελέσουν, και πράγματι αποτέλεσαν, τη βάση των ελληνικών μαθηματικών. Ο Ηρόδοτος αναφέρει στο έργο του ‘Ιστορίαι’ ότι η γεωμετρία, που σημαίνει μέτρηση της γης, εφευρέθηκε από τους Αιγύπτιους για να καλύψει πρακτικά προβλήματα της εποχής αλλά το ηλιακό ρολόι, το γνώμονα και τα δώδεκα μέρη της ημέρας τα έμαθαν οι Έλληνες από τους Βαβυλώνιους.

Οι Βαβυλώνιοι προσπαθούσαν να ανάγουν την επίλυση κάθε αλγεβρικής εξίσωσης σε κανονικές μορφές , τις οποίες ήταν σε θέση να επιλύουν με ευχέρεια. Αυτές ήταν οι εξισώσεις με έναν άγνωστο είτε πρώτου είτε δευτέρου, ακόμη και τρίτου βαθμού, συστήματα εξισώσεων με δύο αγνώστους α’ και β’ βαθμού, γνώριζαν τις ταυτότητες, όπως ανάπτυγμα τετραγώνου και διαφορά τετραγώνων, καθώς και το άθροισμα αριθμητικών προόδων αλλά και τον τρόπο εύρεσης Πυθαγόρειων τριάδων.

Όσον αφορά τη γεωμετρία των Βαβυλωνίων, αυτή περιλάμβανε τη γνώση του Πυθαγόρειου θεωρήματος, εμβαδά τριγώνου και τραπεζίου, εμβαδόν και περίμετρο κύκλου (με κακή προσέγγιση), όγκους πρίσματος και κυλίνδρου, όπως και όγκους κόλουρου κώνου και πυραμίδας με τετράγωνη βάση (λανθασμένος όμως). Ο τρόπος του σκέπτεσθαι βέβαια των Βαβυλωνίων ήταν πρωτίστως αλγεβρικός. Σε όλα τα κείμενα που έχουν βρεθεί και έχουν μελετηθεί εώς τώρα, τα προβλήματα που περιέχουν είναι υπολογιστικά, δεν είναι ούτε κατασκευαστικά ούτε αποδεικτικά, είναι απλώς προβλήματα με λύσεις και όχι εξηγήσεις.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^o

Αποδείξεις του Πυθαγόρειου Θεωρήματος και Εφαρμογές του

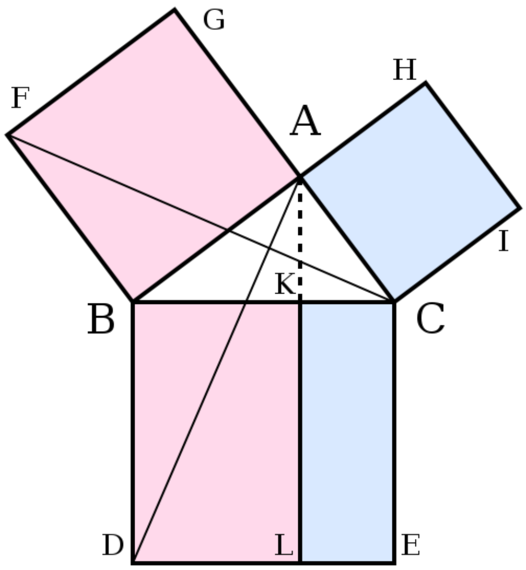
Σκοπός του παρόντος κεφαλαίου είναι η αναλυτική μελέτη του Πυθαγορείου Θεωρήματος. Αυτή θα γίνει μέσω της επεξήγησης ορισμένων αποδείξεων του Πυθαγορείου Θεωρήματος, της προσκόμισης παραδειγμάτων κυρίως από τον κλάδο της φυσικής και της αναφοράς αρκετών εφαρμογών του θεωρήματος αυτού, πολύ χρήσιμων στην επιστήμη των μαθηματικών και όχι μόνο. Στο τέλος του κεφαλαίου θα γίνει μια σύνδεση των άρρητων αριθμών και της τετραγωνικής ρίζας πραγματικού αριθμού με το Πυθαγόρειο Θεώρημα και θα αναλυθούν το καθένα ξεχωριστά.

Α. Αποδείξεις Πυθαγόρειου Θεωρήματος

Στην Πρόταση 47, από το βιβλίο Ι των Στοιχείων του Ευκλείδη, ο Πρόκλος αποδίδει το θεώρημα αυτό στον Πυθαγόρα, όπως το ίδιο κάνει και ο Πλούταρχος, ο οποίος συσχετίζει τη θυσία του ταύρου με την επίλυση του προβλήματος της κατασκευής σχήματος εμβαδού ίσου προς άλλο δοθέν και όμοιου προς τρίτο. Η όλη ιστορία πάντως είναι απίθανη, γιατί ο Πυθαγόρας ήταν απολύτως αντίθετος με τη θανάτωση και τη θυσία ζώων, ιδιαιτέρως δε του ταύρου. Έχει υποστηριχθεί ότι το θεώρημα δε θα μπορούσε να είναι γνωστό την εποχή του Πυθαγόρα, δηλαδή κατά τα πρώτα στάδια ανάπτυξης της γεωμετρίας. Η αντίρρηση αυτή, όμως, σήμερα έχει εξασθενίσει, αφού το συναντούμε να εφαρμόζεται σε σφηνοειδή κείμενα, 1200 χρόνια νωρίτερα. Είναι πολύ πιθανό να περιήλθε σε γνώση του Πυθαγόρα στη Βαβυλώνα. Από τον 4^0 π.Χ. αιώνα, την εποχή δηλαδή που αναπτύχθηκε το Πυθαγόρειο Θεώρημα μέχρι και σήμερα έχουν εφευρεθεί περισσότερες από 370 αποδείξεις οι οποίες το περιγράφουν. Δεν έχει αναφερθεί ποτέ κάποιο θεώρημα με τόσες πολλές εφαρμογές στην ιστορία των μαθηματικών. Επιπλέον, στις αποδείξεις του Πυθαγορείου Θεωρήματος ακούγονται ονόματα μεγάλων επιστημόνων, διαφορετικών εθνικοτήτων ανά τους αιώνες, όπως ο Ευκλείδης, ο Πρόκλος, ο Garfield, ο Da Vinci, ο Einstein κ.α. που όλοι έχουν προσθέσει από τη δική τους οπτική γωνία την μαθηματική επεξήγηση του θεωρήματος αυτού. Στη συνέχεια παρατίθενται οι πιο διαδεδομένες από τις αποδείξεις του Πυθαγορείου θεωρήματος.

Απόδειξη του Ευκλείδη

Η πρώτη και πιο γνωστή απόδειξη είναι αυτή του πρωτεργάτη της γεωμετρίας, Ευκλείδη. Ο διάσημος Έλληνας μαθηματικός έδειξε ότι τα τετράγωνα ABGH και AHIC του παρακάτω σχήματος έχουν το ίδιο εμβαδόν με τα ορθογώνια BKLD και KCEL αντίστοιχα και εξαιτίας αυτής της ισεμβαδικότητας απέδειξε το πυθαγόρειο θεώρημα.

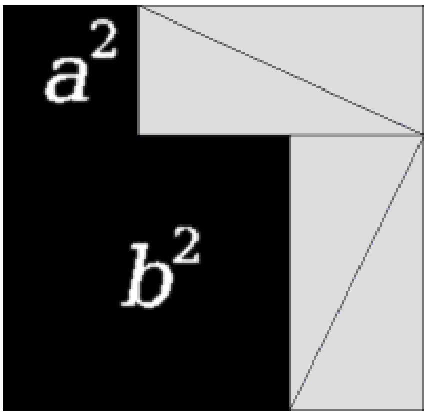


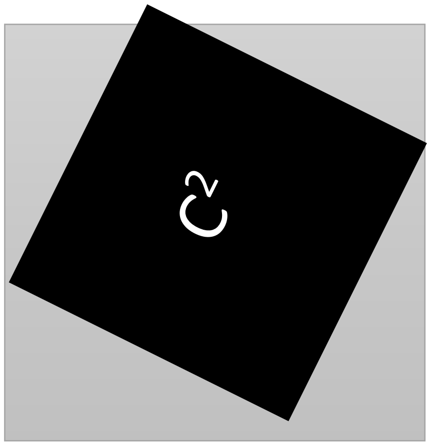
- Υποθέτουμε το ορθογώνιο τρίγωνο ABC του σχήματος με $\widehat{BAC}$ =90^0.
- Σε κάθε πλευρά του ορθογωνίου τριγώνου ζωγραφίζεται και από ένα τετράγωνο. (Το τετράγωνο ορίζεται ως το παραλληλόγραμμο με τέσσερις ίσες πλευρές). Επομένως δημιουργούνται τρία τετράγωνα και είναι τα εξής: ABFG, ACIH, BCED.
- Μία κάθετη στην DE η οποία περνάει από το A και χωρίζει το BCDE σε δύο ορθογώνια παραλληλόγραμμα.
- Ενώνω τα σημεία CF και AD και σχηματίζονται τα τρίγωνα BCF και ABD.
- Γνωρίζουμε ότι τα σημεία C, A και G ανήκουν στην ίδια ευθεία γιατί οι γωνίες $\widehat{CAB}$ και $\widehat{BAG}$ είναι ορθογώνιες, όπως και τα B, A, H για τον ίδιο λόγο.
- Οι γωνίες $\widehat{FBC}$ και $\widehat{ABD}$ είναι ίσες γιατί γνωρίζουμε ότι $\widehat{CBD}$ =90^0 και $\widehat{FBA}$ =90^0.

- Επομένως επειδή AB=BF και BD=BC τα τρίγωνα ABD και FBC είναι όμοια.
- Αφού η ευθεία που περνάει από τα σημεία A, K, και L είναι παράλληλη στην BD, το εμβαδόν του τριγώνου ABD είναι ίσο με το μισό του εμβαδού του τετραγώνου BDLK αφού έχουν κοινή βάση την BD και ίδιο ύψος BK.
- Ομοίως το τετράγωνο BAGF έχει διπλάσιο εμβαδόν από το τρίγωνο FBC.
- Άρα το εμβαδόν του ορθογωνίου BDLK είναι ίσο με το εμβαδόν του τετραγώνου ABFG, δηλαδή $BDLK=AB^2$.
- Ομοίως $KCEL=AC^2$.
- Επομένως έχουμε: $AB^2 + AC^2 = BD \times BK + KL \times KC$.
- Όμως $BD = KL$: $AB^2 + AC^2 = BD \times BK + BD \times KC = BD(BK + KC) = BD \times BC$.
- Και επειδή το BCED είναι τετράγωνο $BD = BC$. Άρα $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

Αυτήν η απόδειξη δεν υπάρχει στην ύλη του σχολείου και ο λόγος είναι ότι οι τύποι των εμβαδόν των γεωμετρικών σχημάτων διδάσκονται μετά τη γνώση του Πυθαγορείου Θεωρήματος. Παρόλα αυτά, θα μπορούσε η διδαχή να γίνει μέσω της ισεμβαδικότητας μιας και οι σχέσεις για τα εμβαδά είναι γνωστές από τις μικρές τάξεις του δημοτικού. Δηλαδή, τα παιδιά γνωρίζουν ότι AB=BK*KC.

<u>Απόδειξη του Πρόκλου (ή αλλιώς με ανακατανομή)</u>

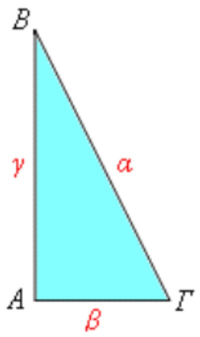


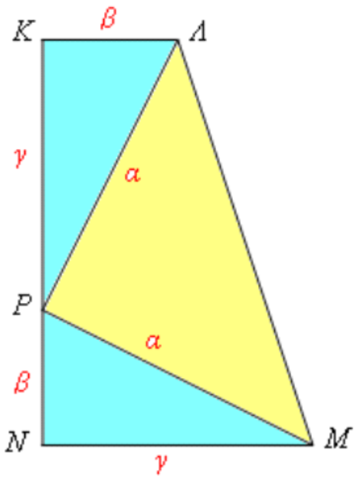


Έστω ένα τετράγωνο με σταθερό εμβαδόν και πλευρά a + b. Στο τετράγωνο αυτό υπάρχουν τέσσερα όμοια τρίγωνα διατεταγμένα με δύο διαφορετικούς τρόπους. Στην πρώτη περίπτωση, τα τρίγωνα σχηματίζουν δύο ορθογώνια παραλληλόγραμμα αφήνοντας ακάλυπτα δύο τετράγωνα, το πρώτο με πλευρά a (και εμβαδόν a^2) και το δεύτερο με πλευρά b (και εμβαδόν b^2). Στην δεύτερη περίπτωση τα δύο τρίγωνα από αυτά μετακινούνται έτσι ώστε δύο από τις πλευρές τους να ταυτίζονται με τις πλευρές του εξωτερικού τετραγώνου. Σε αυτή τη περίπτωση μένει εκτεθειμένο ένα τετράγωνο στο κέντρο με πλευρά c (και εμβαδόν c^2). Επομένως, βλέπουμε ότι $a^2 + b^2 = c^2$.

Απόδειξη του James Abram Garfield

Ο 20ος Αμερικανός πρόεδρος (1831-1881) ξεκλείδωσε το μαθηματικό του ταλέντο για τα μαθηματικά, όταν ανακάλυψε μια απόδειξη του Πυθαγορείου Θεωρήματος με τη βοήθεια ενός τραπεζίου. Η δουλειά του χαρακτηρίστηκε από μετέπειτα μαθηματικούς αρκετά έξυπνη. Η απόδειξη αυτή στηρίζεται στο παρακάτω σχήμα και έχει ως βάση της το εμβαδόν του τραπεζίου.





Την πρώτη φορά το εμβαδόν του τραπεζίου βρίσκεται από τον τύπο του τραπεζίου (Βάση Μεγάλη + Βάση Μικρή)*Ύψος/2. Επομένως,

(ΚΛΜΝ) = $(\gamma+\beta)*(\beta+\gamma)/2$ (1)

Την δεύτερη φορά, υπολόγισε το εμβαδόν του τραπεζίου ως άθροισμα των τριών τριγώνων που το αποτελούν. Δηλαδή (Βάση*Ύψος)/2. Άρα,

(ΚΛΜΝ) = $\beta*\gamma/2 + \beta*\gamma/2 + \alpha^2/2$ (2)

Επειδή η σχέση (1) είναι ίση με τη σχέση (2) προκύπτει:

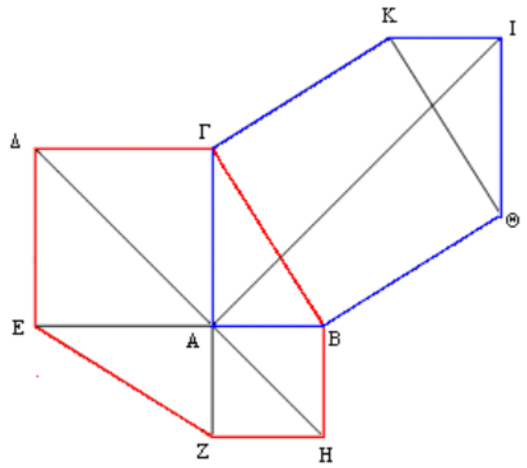
$(\gamma+\beta)*(\beta+\gamma)/2 = \beta*\gamma/2 + \beta*\gamma/2 + \alpha^2/2$

$=> \beta^2+\gamma^2+2\beta\gamma = 2\beta\gamma + \alpha^2$

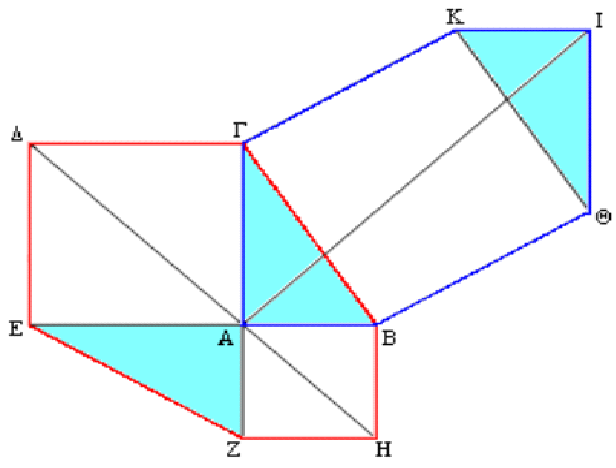
$=> \alpha^2=\beta^2+\gamma^2$

Απόδειξη του Leonardo Da Vinci

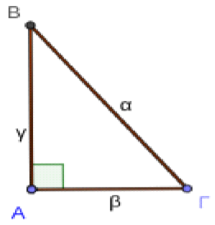
Ο Leonardo Da Vinci, ίσως ο πιο ταλαντούχος άνθρωπος που έχει περάσει ποτέ από τον πλανήτη γη, έκανε τη δική του έρευνα πάνω στη γεωμετρία. Όντας και καλός αστροφυσικός, διαπίστωσε ότι το φεγγάρι αντανακλά το φως του ήλιου και ότι κατά τη διάρκεια μιας ολικής σεληνιακής έκληψης, το ανακλώμενο φως της γης φτάνει στο φεγγάρι και ταξιδεύει ξανά πίσω στη γη. Στην προσπάθεια του, λοιπόν να αποτυπώσει σε μαθηματικές σχέσεις αυτό το φυσικό φαινόμενο, κατέληξε σε άλλη μια απόδειξη του Πυθαγορείου Θεωρήματος. Η απόδειξη αυτή βασίζεται στο ακόλουθο σχήμα.



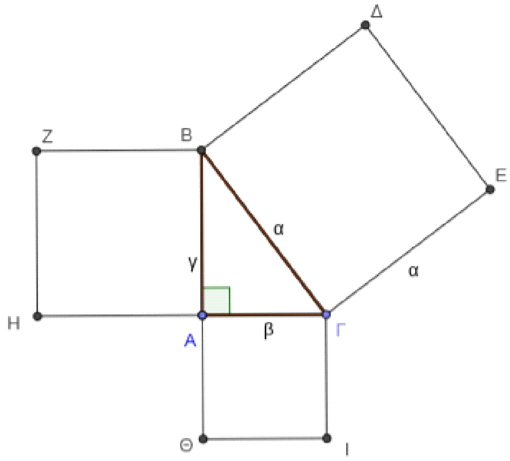
Τα δύο εξάπλευρα (το κόκκινο και το μπλε) του παραπάνω σχήματος έχουν ίδιο εμβαδόν. Επομένως αν αφαιρέσουμε τα τρίγωνα ΑΕΖ, ΑΒΓ (κοινό) και ΘΙΚ, δηλαδή τα επισκιασμένα στο επόμενο σχήμα, έχουμε την απόδειξη του Πυθαγόρειου Θεωρήματος.



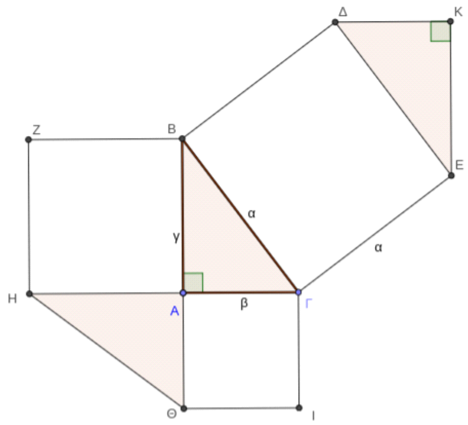
Πιο αναλυτικά, η προηγούμενη θεώρηση ξεκινάει με ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ που φαίνεται στη συνέχεια.



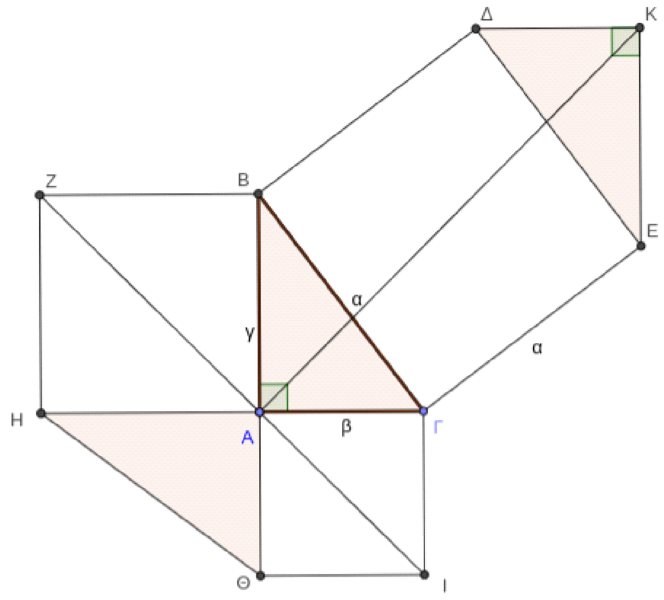
Έπειτα κατασκευάζονται τετράγωνα που εφάπτονται στο τρίγωνο με πλευρά ίση με την κάθε πλευρά του τριγώνου, βλέποντας το παρακάτω σχήμα.



Στη συνέχεια κατασκευάζονται δύο τρίγωνα, τα ΑΗΘ και ΕΔΚ, ίσα με το αρχικό ΑΒΓ. Από την στιγμή που τα καινούργια τρίγωνα που κατασκευάστηκαν είναι ίσα έχουν και το ίδιο εμβαδόν.



Επιπρόσθετα, δημιουργούνται δύο ευθύγραμμα τμήματα. Ένα που θα ενώνει τις κορυφές Ι με Ζ και ένα που θα ενώνει τις κορυφές Κ και Α.



Από το παραπάνω σχήμα, είναι ξεκάθαρο πως τα τετράπλευρα ΖΗΘΙ, ΖΒΓΙ, ΑΒΔΚ και ΑΓΕΚ είναι ισεμβαδικά. Αυτό φαίνεται αν παρατηρηθεί πως στο κάτω εξάγωνο, στο ΗΖΒΓΙΘ το ευθύγραμμο τμήμα ΖΙ "κόβει" τα τρίγωνα στη μέση και άρα τα ΗΖΙΘ και ΖΒΓΙ αποτελούνται από τα δύο μισά τετράγωνα και από δύο ίδια τρίγωνα. Ή πιο γενικά, τα τέσσερα τετράπλευρα ΖΙΘΗ, ΖΒΓΙ, ΑΒΔΚ, ΚΕΓΑ είναι ίσα γιατί και τα τέσσερα αποτελούνται από τουλάχιστον τρεις ίδιες πλευρές (μια με μέγεθος α, μια ίση με β και μια ίση με γ) και ίσες γωνίες. Άρα τα τέσσερα αυτά τετράπλευρα έχουν και το ίδιο εμβαδόν. Επαγωγικά και τα δύο εξάπλευρα είναι ισεμβαδικά μεταξύ τους.

Στην παρούσα φάση, αν αφαιρεθούν τα τρίγωνα ΑΘΗ, ΑΒΓ και ΕΚΔ, δηλαδή αφαιρέθηκαν από δυο τρίγωνα από το κάθε εξάπλευρο. Το ΑΒΓ είναι κοινό και τα ΑΘΗ και ΕΚΔ είναι ίσα, άρα αφαιρέθηκαν ίσες ποσότητες και από τα δύο.

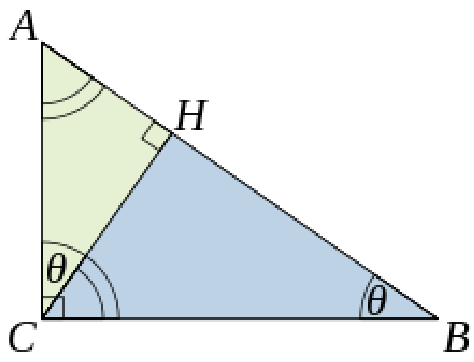
Επομένως προκύπτει ότι το εμβαδόν των περιοχών που "περίσσεψαν" θα είναι ίσες ή

(ΒΔΕΖ) = (ΖΑΘΗ) + (ΑΓΙΘ)

ή ακόμα καλύτερα

$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$

Απόδειξη με ομοιότητα Τριγώνων



Έστω το τρίγωνο ABC του παραπάνω σχήματος. Από το σημείο C φέρνω την κάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα AB. Τα τρίγωνα ABC και ACH είναι όμοια γιατί είναι και τα δύο ορθογώνια και έχουν μια κοινή γωνία, την A.

Προκύπτει, δηλαδή, ότι $ACH = HBC = \theta$. Ομοίως, το τρίγωνο CHB είναι για τους ίδιους λόγους όμοιο με το τρίγωνο ABC. Τώρα, βάση του ορισμού των όμοιων τριγώνων, ο λόγος δύο οποιονδήποτε αντίστοιχων πλευρών δύο όμοιων τριγώνων είναι σταθερός. Έτσι έχουμε ότι:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{BH}{BC}$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AH}{AC}$$

$BC^2 = AB \times BH$ (1) $\quad AC^2 = AB \times AH$ (2)

Προσθέτοντας τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει:

$BC^2 + AC^2 = AB \times BH + AB \times AH$

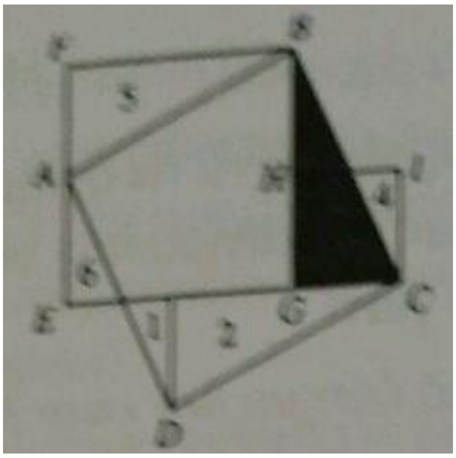
$BC^2 + AC^2 = AB\ (BH + AH)$

$BC^2 + AC^2 = AB \times AB$

$BC^2 + AC^2 = AB^2$.

Η Κινέζικη απόδειξη

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον για την διδασκαλία των μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση παρουσιάζουν οι κινέζικες αποδείξεις του Πυθαγορείου Θεωρήματος οι οποίες παρατίθενται στη συνέχεια. Στην Κινέζικη μαθηματική κουλτούρα το γνωστό στον δυτικό πολιτισμό Πυθαγόρειο Θεώρημα ονομάζεται Gou – Gu. Η αποδεικτική μέθοδος που χρησιμοποιείται στηρίζεται στην κατάτμηση γεωμετρικών σχημάτων σε επιμέρους σχήματα και στη συνέχεια στην ανασύνθεση τους σε διαφορετικά σχήματα, σε μια λογική αντίστοιχη αυτής, στην οποία βασίζεται το παιχνίδι tangram. Το παρακάτω σχήμα απεικονίζει μια από τις αποδείξεις της κινέζικης σχολής.

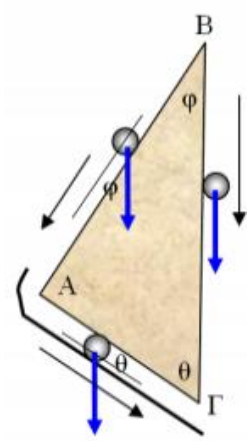


Στο ορθογώνιο τρίγωνο BGC σχηματίζουμε το τετράγωνο ABCD με πλευρά την υποτείνουσα BC και εμβαδόν c^2. Μετακινούμε τα τρίγωνα 1, 2 και 3 στις θέσεις 4, 5 και 6 αντίστοιχα. Έτσι το αρχικό τετράγωνο ABCD μετασχηματίζεται (α) στο τετράγωνο EFBG με πλευρά την κάθετη πλευρά του ορθογωνίου τριγώνου BG με εμβαδόν b^2 και (β) στο τετράγωνο GHIC με πλευρά την κάθετη πλευρά του ορθογωνίου τριγώνου GC και εμβαδόν a^2. Άρα, $a^2 + b^2 = c^2$.

Β. Εφαρμογές του Πυθαγορείου Θεωρήματος στον κλάδο της φυσικής

Κίνηση σφαίρας υπό την επίδραση βαρυτικών δυνάμεων

Μία σφαίρα αφήνεται ελεύθερη από ένα σημείο Β και μπορεί να ακολουθήσει δύο πιθανές διαδρομές, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



Στην πρώτη περίπτωση θα ακολουθήσει τη γραμμή της υποτείνουσας (διαδρομή ΒΓ) και στη δεύτερη περίπτωση θα ακολουθήσει πρώτα τη διαδρομή ΒΑ και στη συνέχεια με την βοήθεια κάποιας σωλήνωσης θα μεταφερθεί από το σημείο Α στο σημείο Γ. Στη συγκεκριμένη περίπτωση θα πρέπει να σημειωθεί ότι το βαρυτικό πεδίο (η δύναμη που θα ασκηθεί στη σφαίρα) εξαρτάται μόνο από τη θέση των δύο σημείων και όχι από τη διαδρομή την οποία η σφαίρα θα ακολουθήσει. Είναι δηλαδή, όπως ονομάζεται στη φυσική, συντηρητικό. Αυτό στην περίπτωσή μας σημαίνει ότι το έργο το οποίο δαπανάται και στις δύο περιπτώσεις θα είναι ίσο. Επομένως έχουμε:

$W_{AB} = W_{BA\Gamma}$ =>

$Mg\,(B\Gamma) = Mg\,(BA)\,\text{συνφ} + Mg\,(A\Gamma)\,\text{συνθ}$ =>

$(B\Gamma) = (AB)\,\dfrac{(AB)}{(B\Gamma)} + (A\Gamma)\,\dfrac{(A\Gamma)}{(B\Gamma)}$ =>

$a^2 = \beta^2 + \gamma^2$

Επειδή, $\text{συνφ} = \dfrac{(AB)}{(B\Gamma)}$ και $\text{συνθ} = \dfrac{(A\Gamma)}{(B\Gamma)}$ από τον ορισμό των συνημιτόνων.

Υπολογισμός του εμβαδού ενός ορθογωνίου τριγώνου με διαστατική ανάλυση

Ένα διαστατικό μέγεθος είναι το "έχον διαστάσεις" μέγεθος. Σχεδόν όλα τα προβλήματα του τομέα της φυσικής απαρτίζονται με μεγέθη που έχουν διαστάσεις ή αλλιώς μονάδες μέτρησης. Η λύση ενός τέτοιου προβλήματος δεν αφορά μόνο το σωστό αριθμητικό αποτέλεσμα αλλά και τις σωστές μονάδες. Αντίστροφα, μια εύκολη εξαγωγή ενός φυσικού τύπου μπορεί να γίνει από τις διαστάσεις. Για παράδειγμα, όταν γνωρίζουμε ότι η ταχύτητα μετριέται σε χιλιόμετρα/ώρα είναι εύκολο να αναγνωρίσουμε ότι ταχύτητα = $\dfrac{\textit{απόσταση}}{\textit{χρόνος}}$,

ή αλλιώς $\upsilon = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$.

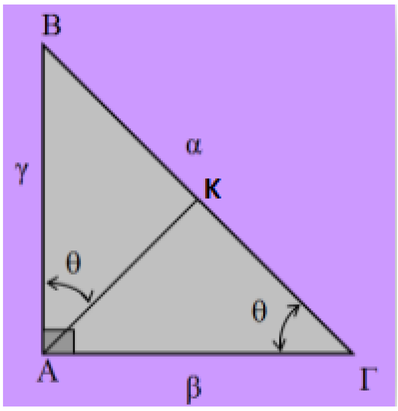
Με ανάλογο τρόπο μπορεί να εξαχθεί και το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Έστω ότι σκοπός είναι να υπολογιστεί το εμβαδόν s ενός ορθογωνίου τριγώνου ως συνάρτηση της υποτείνουσας α και μιας οξείας γωνίας θ.

$$S = f(\alpha, \theta)$$

Είναι γνωστό ότι η υποτείνουσα έχει διαστάσεις μήκους, η γωνία δεν έχει διαστάσεις και το εμβαδόν έχει διαστάσεις μήκους στο τετράγωνο. Επομένως:

$$S = f(\alpha, \theta) = \alpha^2 \times g(\theta) \quad (1)$$

Όπου g η συνάρτηση που υπολογίζει τη γωνία θ και προφανώς είναι αδιάστατη.



Όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα, το τρίγωνο ΑΒΓ μετατρέπεται σε τρία τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΒΚ και ΑΚΓ φέρνοντας το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα στην ΒΓ το οποίο περνάει από το Α.

Εφαρμόζοντας τη σχέση (1) για τα άλλα δύο όμοια τρίγωνα προκύπτει:

$$S = f(\beta, \theta) = \beta^2\, h(\theta)$$

$$S = f(\gamma, \theta) = \gamma^2\, \rho(\theta)$$

Λόγω ομοιότητας οι $g(\theta)$, $h(\theta)$ και $\rho(\theta)$ θα ταυτίζονται. Άρα:

$$\left.\begin{array}{l} S_1 = \alpha^2 g(\theta) \\ S_2 = \beta^2 g(\theta) \\ S_3 = \gamma^2 g(\theta) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Από το σχήμα προκύπτει ότι $s_1 = s_2 + s_3$. Άρα $a^2 g(\theta) = \beta^2 g(\theta) + \gamma^2 g(\theta) \Rightarrow \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$

Γ. Η συμβολή του Πυθαγορείου Θεωρήματος και εφαρμογές στον κλάδο των Μαθηματικών

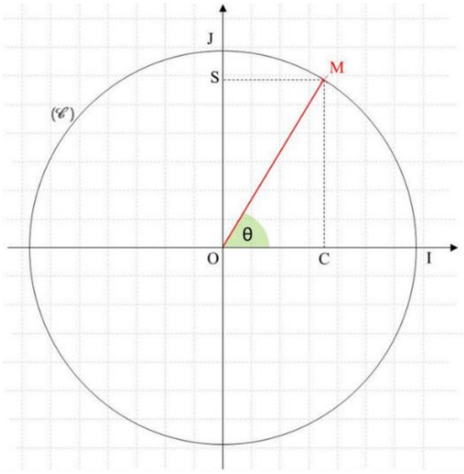
Η συμβολή του Πυθαγορείου Θεωρήματος στον κόσμο της φυσικής, των μαθηματικών, της μηχανικής αλλά και της επιστήμης γενικότερα είναι σίγουρα μεγαλύτερη από αυτό που ο Πυθαγόρας και οι μαθητές του φαντάζονταν. Γι' αυτούς ήταν μια γεωμετρική συσχέτιση των εμβαδών. Σήμερα, έχει ξεπεράσει το φάσμα ενός απλού ορθογωνίου τριγώνου και έχει αποτελέσει τη βάση σε πολλά τμήματα της γεωμετρίας, της τριγωνομετρίας, της άλγεβρας. Στο Πυθαγόρειο Θεώρημα στηρίχθηκε η θεωρία των διανυσμάτων, των διαφορικών εξισώσεων και των μιγαδικών αριθμών. Επεκτάσεις του, χρησιμοποιούνται πλέον όχι μόνο σε δύο αλλά σε πολύ περισσότερες διαστάσεις, σε πραγματικούς αλλά και σε φανταστικούς αριθμούς.

Τριγωνομετρία

Δύο από τις πιο βασικές χρήσεις του Πυθαγορείου Θεωρήματος είναι η τριγωνομετρική ταυτότητα $\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1$, πάνω στην οποία είναι βασισμένη όλη η τριγωνομετρία και η έννοια του μέτρου (ή της απόστασης).

$$\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1$$

Έστω ένας κύκλος με κέντρο το Ο(0,0) και ακτίνα ρ=1 (γνωστός ως μοναδιαίος ή τριγωνομετρικός κύκλος), όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Ένα τυχαίο σημείο Μ πάνω στον κύκλο σχηματίζει γωνία θ μεταξύ του ευθύγραμμου τμήματος ΟΜ και του x'x. Οι συντεταγμένες του σημείου Μ τότε θα είναι (συνθ, ημθ). Δηλαδή η απόσταση OC θα ισούται με συνθ και η OS θα ισούται με ημθ. Τότε, το τμήμα ΟΜ από το Πυθαγόρειο Θεώρημα θα ισούται με:

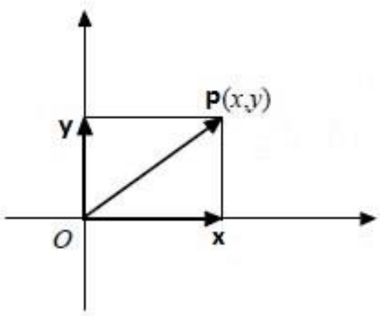
$OM = \sqrt{OC^2 + OS^2}$ και επειδή γνωρίζουμε ότι ΟΜ=1 επειδή το Μ ανήκει σε κύκλο με ακτίνα 1, έχουμε:

$\sqrt{OC^2 + OS^2} = 1 \quad \rightarrow \quad \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1 \quad \rightarrow$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

Μέτρο διανύσματος

Διάνυσμα ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που έχει κατεύθυνση, δηλαδή διεύθυνση και φορά. Ένα διάνυσμα $\vec{p}$ ορίζεται από δύο συντεταγμένες (x,y) που οριοθετούν το τέλος του ευθύγραμμου τμήματος, με αρχή πάντα την αρχή των αξόνων όπως φαίνεται στο σχήμα



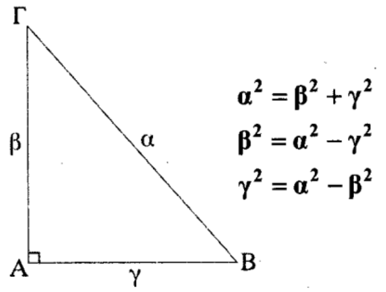
Το μέτρο του διανύσματος αυτού συμβολίζεται με $|\vec{p}|$ και εκφράζει το μήκος του προσανατολισμένου αυτού ευθύγραμμου τμήματος. Βάση του Πυθαγορείου Θεωρήματος αποδεικνύεται εύκολα ότι:

$$|\vec{p}|^2 = x^2 + y^2 \quad \text{δηλαδή} \quad |\vec{p}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

και είναι πάντα θετικός αριθμός. Όμοια με το μέτρο ενός διανύσματος ορίζεται το μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού, το μέτρο της δύναμης, της ταχύτητας, της επιτάχυνσης, του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου, της έντασης των ανέμων και πολλών άλλων φαινομένων στα μαθηματικά και τη φυσική.

<u>Εύρεση τρίτης πλευράς</u>

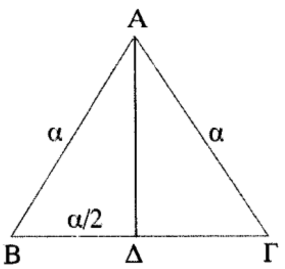
Με το Πυθαγόρειο Θεώρημα αν σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο μας δίνονται οι δύο πλευρές βρίσκουμε την τρίτη πλευρά.



<u>Εφαρμογή 1η</u>

Σε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρά α να υπολογιστεί το ύψος ΑΔ=υ και το εμβαδόν του.

Λύση



Το ύψος ΑΔ είναι και διάμεσος άρα: ΒΔ=ΔΓ= $\frac{ΒΓ}{2} = \frac{\alpha}{2}$.

Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΑΔ και έχουμε: $ΑΔ^2 = ΑΒ^2 - ΒΔ^2$ ή $\upsilon^2 = \alpha^2 - \left(\frac{\alpha^2}{2}\right)$

ή $\upsilon^2 = \frac{3\alpha^2}{2}$ ή $\upsilon = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$.

- ✓ Με το αντίστροφο του Πυθαγορείου Θεωρήματος διαπιστώνουμε αν ένα τρίγωνο είναι ορθογώνιο δηλαδή:

  Αν $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ τότε $\hat{A} = 90^o$.

Εφαρμογή 2η

Σε τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε α=10εκ., β=6εκ., γ=8εκ. Δείξτε ότι είναι ορθογώνιο.

Λύση:

Έχουμε: $\beta^2+\gamma^2=6^2+8^2=36+64=100=10^2=\alpha^2$.

Άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^o$.

- ✓ Με τη βοήθεια του Πυθαγορείου Θεωρήματος διαπιστώνουμε αν μια γωνία τριγώνου είναι οξεία ή αμβλεία. Σε τρίγωνο ΑΒΓ.

  Αν $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$ τότε $\hat{A} < 90^o$

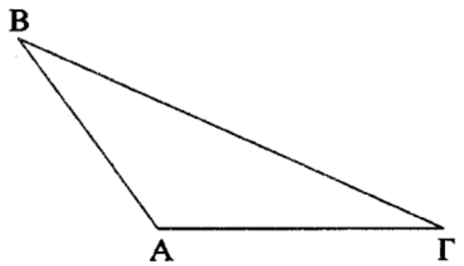
  Αν $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$ τότε $\hat{A} > 90^o$.

Εφαρμογή 3η

Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι α=5εκ., β=4εκ., γ=2εκ. δείξτε ότι είναι αμβλυγώνιο.

Λύση:

Έχουμε: $\alpha^2=5^2=25$ (Η α είναι η μεγαλύτερη πλευρά) και $\beta^2+\gamma^2 = 4^2+2^2 = 16+4=20$ άρα $\alpha^2>\beta^2+\gamma^2$ οπότε $\hat{A} > 90^o$ δηλαδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο.



Πυθαγόρειες Τριάδες

Είναι γνωστό ότι αν στην ισότητα του Πυθαγορείου Θεωρήματος $\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2$ (όπου τα β και γ είναι τα μήκη των καθέτων πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου και α το μήκος της υποτείνουσάς του) και κάνουμε αντικατάσταση με τους ακέραιους 3, 4, 5 τότε θα επαληθευτεί. Οι συνδυασμοί όμως των ακέραιων αριθμών που επαληθεύουν την ισότητα αυτή δεν είναι μόνο οι αριθμοί 3, 4, 5. Για παράδειγμα και οι ακέραιοι 7, 24, 25 την επαληθεύουν. Το γεγονός αυτό προβλημάτισε τους Πυθαγόρειους μέχρι τη στιγμή που ανακάλυψαν τύπους οι οποίοι μας δίνουν τριάδες θετικών ακέραιων αριθμών που αντιστοιχούν στα μήκη των πλευρών ορθογωνίου τριγώνου και οι οποίες ονομάστηκαν με τη σειρά τους *Πυθαγόρειες Τριάδες*. Ο Πρόκλος αποδίδει στον ίδιο του Πυθαγόρα την εύρεση των Πυθαγόρειων Τριάδων της μορφής (Ν, $(N^2-1)/2\,,(N^2+1)/2$), όπου Ν περιττός μεγαλύτερος του 1. Ο Πρόκλος επίσης αποδίδει στον Πλάτωνα την εύρεση των Πυθαγόρειων τριάδων της μορφής $\left(N,\left(\frac{N}{2}\right)^2-1,\left(\frac{N}{2}\right)^2+1\right)$, όπου Ν άρτιος μεγαλύτερος του 2. Από μία άλλη πηγή πάντως, ο δεύτερος τύπος αποδίδεται στον Πυθαγόρειο Αρχύτα. Οι ιστορικοί των μαθηματικών έχουν αποδείξει ότι οι παραπάνω τύποι είναι δυνατόν να εξαχθούν και να αιτιολογηθούν με βάση τη θεωρία των παραστατικών αριθμών[12]. Παρακάτω αποδεικνύονται κάποιες από τις ιδιότητες των πυθαγόρειων τριάδων.

Υποθέτουμε ότι οι ακέραιοι β, γ και α δημιουργούν μια Πυθαγόρεια τριάδα. Τότε θα έχουμε:

$$\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2 \quad (1)$$

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 = 1$$

Αν θέσουμε $\dfrac{\beta}{\alpha} = \chi$ και $\dfrac{y}{\alpha} = y$, τότε $x^2+y^2=1$ (2) με χ και y ως πηλίκα ακέραιων.

Ψάχνουμε λοιπόν τα ζεύγη ρητών αριθμών (x,y) που επαληθεύουν τη (2). Επειδή όμως αυτή είναι η εξίσωση του τριγωνομετρικού κύκλου θα αναζητήσουμε σημεία του κύκλου με ρητές συντεταγμένες. Αν ένα σημείο Κ(x,y) ανήκει στον τριγωνομετρικό κύκλο τότε:

x=συνθ και y=ημθ.

Γνωρίζουμε όμως ότι:

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1-\varepsilon\varphi^2\frac{\theta}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{\theta}{2}} \qquad \text{και} \qquad \eta\mu\theta = \frac{2\varepsilon\varphi\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1+\varepsilon\varphi^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

(Άλγεβρα Β' Λυκείου, σελ.35)

Αν θέσουμε εφ(θ/2)= t , τότε $x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ και $y=\frac{2t}{1+t^2}$ οπότε η (2) θα έχει τη μορφή:

$$\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2+\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2=1 \text{ ή } (1-t^2)^2+(2t)^2=(1+t^2)^2 .$$

Αν $t=\frac{\mu}{\nu}$, μ, ν ακέραιοι αριθμοί τότε:

$$\left(1-\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2\right)^2+\left(2\left(\frac{\mu}{\nu}\right)\right)^2=\left(1+\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2\right)^2$$

και μετά την εκτέλεση των πράξεων θα έχουμε:

$$(\mu^2-\nu^2)^2+(2\mu\nu)^2=(\mu^2+\nu^2) \quad (3)$$

Όπου οι ακέραιοι μ, ν επιλέγονται τυχαία.

Παρακάτω ακολουθεί ένας πίνακας με Πυθαγόρειες τριάδες οι οποίες προκύπτουν από μικρές τιμές του μ και ν.

μ	**ν**	**β**	**γ**	**α**
		μ^2-ν^2	**2μν**	**μ^2+ν^2**
2	1	3	4	5
3	2	5	12	13
4	1	15	8	17
4	3	7	24	25
5	2	21	20	29
5	4	9	40	41
6	1	35	12	37
6	5	11	60	61
7	2	45	28	53
7	4	33	56	65
7	6	13	84	85

Μια εφαρμογή του τύπου που μόλις αναφέραμε είναι η παρακάτω:

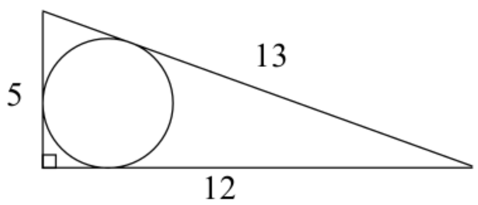
- ✓ Αν οι πλευρές ενός τριγώνου σχηματίζουν Πυθαγόρεια τριάδα, τότε η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου είναι ακέραιος αριθμός.

Μπορούμε εύκολα να το κατανοήσουμε από τους τύπους του εμβαδού τριγώνου που έχουμε:

$$\frac{1}{2}\beta\gamma = \frac{1}{2}\rho(\alpha+\beta+\gamma) \qquad \rho = \frac{\beta\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}$$

$$\rho = \frac{(\mu^2-\nu^2)(2\mu\nu)}{\mu^2+\nu^2+2\mu\nu+\mu^2-\nu^2} = \nu(\mu-\nu),$$

Για παράδειγμα, στο ορθογώνιο τρίγωνο με πλευρές 5, 12 και 13 η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου είναι ίση με ρ=2



ρ=2

<u>*Κανόνες της Πυθαγόρειας τριάδας*</u>

- ✓ Αν $\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2$, τότε και $(\lambda\beta)^2 + (\lambda\gamma)^2 = (\lambda\alpha)^2$, που σημαίνει ότι από μία Πυθαγόρεια τριάδα μπορούμε να δημιουργήσουμε άπειρες. Οι Πυθαγόρειες τριάδες (β, γ, α) με (β, γ, α) =1 τις ονομάζουμε ***Αρχικές Πυθαγόρειες Τριάδες*** και ισχύουν τα παρακάτω:

- ✓ Σε μια αρχική Πυθαγόρεια τριάδα (β, γ, α) ο ένας από τους β και γ είναι άρτιος και ο άλλος είναι περιττός.

  Αν β = 2κ+1 και γ = 2λ+1, τότε από την $\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2$ έχουμε $4(\kappa^2+\kappa+\lambda^2+\lambda)+2 = \alpha^2$, δηλαδή ο α^2 είναι άρτιος, άρα και ο α θα είναι άρτιος. Αν υποθέσουμε ότι α = 2ρ, τότε θα έχουμε:

$$4(\kappa2+\kappa+\lambda^2+\lambda)+2 = 4\rho^2.$$

  Παρατηρούμε ότι ο αριθμός 4 διαιρεί το πρώτο μέλος της τελευταίας ισότητας που είναι άτοπο.

- ✓ Αν σε μια αρχική Πυθαγόρεια τριάδα (β, γ, α) ο ακέραιος β ή ο ακέραιος γ είναι άρτιος, τότε είναι πολλαπλάσιο του 4.

Αν β = 2κ, γ=2λ+1 και α=2ρ+1, τότε από την $β^2=α^2-γ^2$ έχουμε $(2κ)^2=(2ρ+1)^2-(2λ+1)^2$ και μετά την εκτέλεση των πράξεων θα έχουμε:

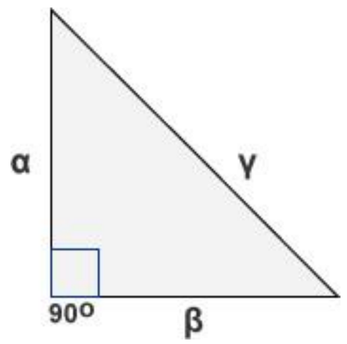
$$κ^2=ρ(ρ+1)-λ(λ+1).$$

Όμως τα γινόμενα ρ(ρ+1) και λ(λ+1) είναι άρτιοι, οπότε και η διαφορά τους $κ^2$ είναι άρτιος που σημαίνει ότι και ο κ είναι άρτιος, δηλαδή κ=2t.

Τότε όμως έχουμε: β = 2*2t =4t.

Η έννοια των άρρητων αριθμών

Ρητός (αυτός που λέγεται) ορίζεται ένας αριθμός που έχει την ικανότητα να γραφτεί ως κλάσμα. Άρρητος είναι ο μη ρητός αριθμός (αυτός που δε λέγεται), δηλαδή αυτός που έχει άπειρα ψηφία, τα οποία δεν επαναλαμβάνονται. Οι άρρητοι αριθμοί πρωτοεμφανίστηκαν στην εποχή του Πυθαγόρα. Το πρόβλημα της ασυμμετρίας της διαγωνίου ενός τετραγώνου με πλευρά τη μονάδα αποδείχτηκε με τη βοήθεια της πυθαγόρειας θεωρίας του άρτιου και του περιττού με χρήση της απεριόριστα επαναλαμβανόμενης ανθυφαίρεσης, ο Θεόδωρος ο Κυρηναίος, που εμφανίζεται ως γέροντας στο διάλογο ‘Θεαίτητος’ του Πλάτωνος, απέδειξε την ασυμμετρία των πλευρών των τετραγώνων με εμβαδά 3, 5, … , 17[4]. Τι θα προκύψει στην περίπτωση που εφαρμοστεί το Πυθαγόρειο Θεώρημα σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές α = β = 1;



Για να βρεθεί η υποτείνουσα πλευρά γ, εφαρμόζεται το Πυθαγόρειο Θεώρημα

$$α^2 + β^2 = γ^2 \quad => \quad 1^2 + 1^2 = γ^2 \quad => \quad γ^2 = 2 \quad => \quad γ = \sqrt{2}$$

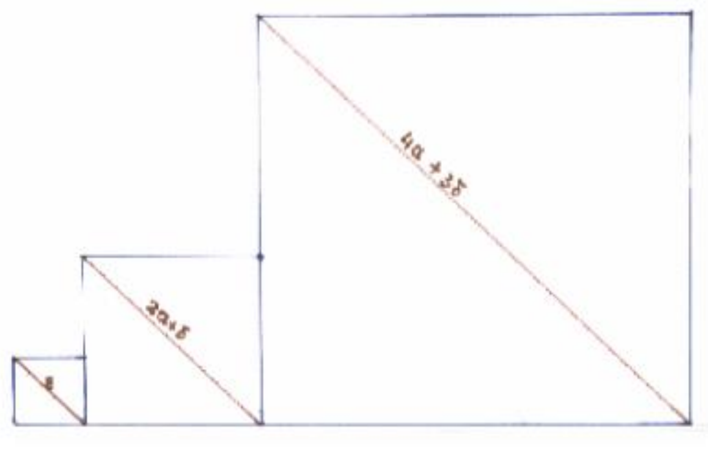
Το $\sqrt{2}$ είναι ένας άρρητος αριθμός. Στην αρχαία Ελλάδα εφαρμόστηκαν δύο μέθοδοι υπολογισμού των άρρητων αριθμών. Ο πρώτος ήταν με όμοια τετράγωνα και ο δεύτερος ονομάζεται μέθοδος του Ήρωνα. Και οι δύο αυτοί τρόποι υπολογίζουν το $\sqrt{2}$ με μια αριθμητική ακολουθία, η οποία εφαρμόζεται όσες φορές χρειαστεί μέχρι να επέλθει η σύγκλιση. Οι δύο αυτές μέθοδοι θα αναλυθούν στη συνέχεια.

Ένας επίσης πολύ σπουδαίος άρρητος αριθμός ακούει στο όνομα **π** και ισούται στο περίπου με 3,141592… Ο αριθμός αυτός ανακαλύφθηκε στην προσπάθεια υπολογισμού της περιμέτρου του κύκλου, πρώτα από τον Αντιφόντα, από τον Ραμνούντα τον 5^0 π.Χ. αιώνα, στη συνέχεια από τον Βρύσονα, από τον Θεμίστιο και ολοκληρώθηκε από τον Αρχιμήδη περίπου το 280 π.Χ. Η καλύτερη προσέγγιση, αυτή του Αρχιμήδη, υπολογίστηκε όταν στον κύκλο υπήρχε ένα περιγεγραμμένο και ένα εγγεγραμμένο πολύγωνο με 96 πλευρές το καθένα ταυτόχρονα. Ο αριθμός προσδιορίστηκε κάπου μεταξύ $\frac{3}{7} < \pi < \frac{30}{71}$.

Το **π** θεωρήθηκε σημαντικό γιατί απέδειξε τον τρόπο υπολογισμού της περιμέτρου, του εμβαδού του κύκλου και αργότερα τον όγκο της σφαίρας, σε σχέση με την ακτίνα του. Άλλα παραδείγματα άρρητων αριθμών είναι οι ακέραιοι οι οποίοι μπορούν να γραφτούν στη μορφή $m^{1/n}$ εκτός και αν ο m είναι n-οστή δύναμη ενός ακέραιου αριθμού, ο αριθμός e (με τεράστια σημασία στα μαθηματικά και κυρίως στις οικονομικές επιστήμες), όλες οι δυνάμεις του **π** (π^n) και πολλοί άλλοι.

Υπολογισμός του $\sqrt{2}$ με όμοια τετράγωνα (Θέων Σμυρναίος)

Έστω τετράγωνο με πλευρά α. Η διαγώνιος ενός τέτοιου τετραγώνου θα είναι δ = $\alpha\sqrt{2}$. (1)



Σχεδιάζουμε ένα όμοιο τετράγωνο με πλευρά ίση με την παλιά συν τη διαγώνιο, δηλαδή α + δ. Επειδή τα τετράγωνα είναι όμοια, με τον κανόνα της ομοιότητας παίρνουμε:

$$\frac{\delta}{\alpha} = \frac{\delta_{\nu\acute{\varepsilon}\alpha}}{\delta+\alpha} \rightarrow \delta_{\nu\acute{\varepsilon}\alpha} = \frac{\delta(\delta+\alpha)}{\alpha} = \frac{\delta^2+\alpha\delta}{\alpha} = \frac{\delta^2}{\alpha}+\delta$$

Και από (1) → $\delta_{\nu\acute{\varepsilon}\alpha} = \frac{(\alpha\sqrt{2})^2}{\alpha}+\delta$ = 2α+δ

Ομοίως σχηματίζουμε το επόμενο τετράγωνο με πλευρά 3α+2δ και διαγώνιο 4α+3δ. Εφαρμόζοντας την ίδια λογική πολλές φορές έχουμε για τις πλευρές και τις διαγώνιους:

ΠΛΕΥΡΕΣ	ΔΙΑΓΩΝΙΟΙ
$\alpha_2=\alpha+\delta$	$\delta_2=2\alpha+\delta$
$\alpha_3=3\alpha+2\delta$	$\delta_3=4\alpha+3\delta$
$\alpha_4=7\alpha+5\delta$	$\delta_4=10\alpha+7\delta$
$\alpha_5=17\alpha+12\delta$	$\delta_5=24\alpha+17\delta$
$\alpha_6=41\alpha+29\delta$	$\delta_6=58\alpha+41\delta$
$\alpha_7=99\alpha+70\delta$	$\delta_7=140\alpha+99\delta$
$\alpha_8=239\alpha+169\delta$	$\delta_8=338\alpha+239\delta$
$\alpha_9=577\alpha+408\delta$	$\delta_9=816\alpha+577\delta$
$\alpha_{10}=1393\alpha+985\delta$	$\delta_{10}=1970\alpha+1393\delta$

και γενικά $\alpha_{\nu+1}=\kappa\alpha+\lambda\delta$ και $\delta_{\nu+1}=\pi\alpha+\rho\delta$, όπου κ = ρ.

Παίρνοντας τους λόγους $\frac{\kappa}{\lambda}$ και $\frac{\pi}{\rho}$ βλέπουμε ότι $\frac{\kappa}{\lambda}$ = $\frac{1393}{985}$ = 1,414213 ~ $\sqrt{2}$

$\frac{\pi}{\rho}=\frac{1970}{1393}$ = 1,414213 ~ $\sqrt{2}$.

Η Μέθοδος του Ήρωνα

Η μέθοδος αυτή υπακούει στον τύπο του Ήρωνα και περιγράφεται από του ίδιο στο έργο του ‘Μετρικά’, που δεν είναι τίποτα άλλο από μια μαθηματική ακολουθία. Ο τύπος είναι $\alpha_{\nu+1}=\frac{1}{2}(\alpha_\nu+\frac{A}{\alpha_\nu})$, όπου Α είναι ο αριθμός του οποίου θέλουμε να υπολογίσουμε τη ρίζα και ως πρώτη προσέγγιση του α_ν, δηλαδή ο α, είναι ο θετικός αριθμός που το τετράγωνό του πλησιάζει περισσότερο το Α. Έστω ότι ζητείται να υπολογιστεί το $\sqrt{2}$. Ως α, θα χρησιμοποιηθεί ο αριθμός 1. Η ακολουθία έχει ως εξής:

$\alpha_1=1$

$α_2 = \frac{1}{2}(1+\frac{2}{1}) = 1,5$

$α_3 = \frac{1}{2}(1,5+\frac{2}{1,5}) = 1,41666$

$α_4 = \frac{1}{2}(1,41666+\frac{2}{1,41666}) = 1,41421$

$α_5 = \frac{1}{2}(1,41421+\frac{2}{1,41421}) = 1,41421$

Επειδή ο $α_4 = α_5$ λέμε ότι έχει επιτευχθεί σύγκλιση και έχουμε βρει τον αριθμό που ψάχνουμε και όντως ισχύει $\sqrt{2}$= 1,41421.

Η έννοια της τετραγωνικής ρίζας πραγματικού αριθμού

Η έννοια της τετραγωνικής ρίζας πρωτοεμφανίστηκε και αυτή στην εποχή του Πυθαγορείου Θεωρήματος για να περιγράψει το πρόβλημα που προέκυπτε από την εξίσωση του Πυθαγόρα. Ο Πρόκλος αποδίδει την ανακάλυψη της ασυμμετρίας στον ίδιο τον Πυθαγόρα. Ένα σχόλιο όμως στο $10^{ο}$ βιβλίο των στοιχείων του Ευκλείδη που αποδίδεται στον έγκυρο σχολιαστή Πάππο του Αλεξανδρέα αναφέρει απλώς ότι η ασυμμετρία μελετήθηκε για πρώτη φορά από τους Πυθαγόρειους. Σήμερα οι ιστορικοί των μαθηματικών θεωρούν τη μαρτυρία του Πάππου πιο αξιόπιστη από τη μαρτυρία του Πρόκλου. Θεωρούν ότι η ασυμμετρία ανακαλύφθηκε στη σχολή των Πυθαγορείων, δεν την αποδίδουν όμως προσωπικά στον ίδιο του ιδρυτή της σχολής[12]. Η τετραγωνική ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού m είναι ο μη αρνητικός αριθμός n, ο οποίος εάν υψωθεί στο τετράγωνο προκύπτει ο m, δηλαδή:

$$\sqrt{m} = n \rightarrow m = n^2$$

Οι αριθμοί που προκύπτουν όταν κάποιος ακέραιος αριθμός υψωθεί στο τετράγωνο, οι αριθμοί δηλαδή που έχουν ρίζα ονομάζονται τετραγωνικοί και είναι οι ακόλουθοι:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, … n

Στην κλασική γεωμετρία η τετραγωνική ρίζα ορίζει την πλευρά ενός τετραγώνου, εάν το εμβαδόν του είναι γνωστό

$$E = α^2 \rightarrow α = \sqrt{E}$$

Στην απλή περίπτωση που ο Ε είναι τετραγωνικός αριθμός, ίσως η έννοια της ρίζας να είναι περιττή. Υπάρχουν πολύ μεγαλύτερες πιθανότητες ο Ε να μην είναι τετραγωνικός και επομένως ο $\sqrt{E}$ να είναι άρρητος, όπως φάνηκε από την προηγούμενη παράγραφο. Δημιουργείται λοιπόν η ανάγκη απεικόνισης ενός τέτοιου αριθμού με άπειρα ψηφία , ώστε να μεγιστοποιηθεί η ακρίβεια. Επιπλέον, όποια εξίσωση περιέχει την ύψωση ενός αριθμού στο τετράγωνο, άμεσα δημιουργεί μία άλλη εξίσωση που περιλαμβάνει την τετραγωνική ρίζα ενός αριθμού. Αυτό συμβαίνει στην περίπτωση του εμβαδού του τετραγώνου, στο εμβαδόν του κύκλου ($E = \pi\rho^2$) αλλά και στον κλάδο της φυσικής, όπως στην εξίσωση της επιτάχυνσης σε σχέση με την απόσταση.

Η απόσταση που έχει διανύσει ένα σώμα που εκτελεί μια ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση βρίσκεται από τον τύπο:

$$x = \frac{1}{2}at^2,$$

χ: απόσταση

α: επιτάχυνση

t: χρόνος

Για να βρεθεί όμως ο χρόνος στον οποίο ένα σώμα που κινείται με επιτάχυνση **α** έχει διανύσει απόσταση χ, βρίσκεται από τη σχέση:

$$t = \sqrt{\frac{2x}{a}}$$

Αμέσως γίνεται αντιληπτό ότι η σημασία της ρίζας στον μαθηματικό και φυσικό κόσμο έχει ιδιαίτερη σημασία. Η τετραγωνική ρίζα πραγματικού αριθμού έχει εφαρμογές σε πολλούς κλάδους, κυρίως στα οικονομικά, στη μηχανική, στη φυσική, στη χημεία, στα μαθηματικά και στην επιστήμη των υπολογιστών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

Ο ρόλος της ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία

Στο σημείο αυτό της παρούσας εργασίας καλούμαστε να απαντήσουμε στο ρόλο που μπορεί να διαδραματίσει η ιστορία των Μαθηματικών στη διδακτική πρακτική καθώς και τους λόγους για τους οποίους κρίνεται αναγκαία η χρήση της. Στο κεφάλαιο αυτό θα γίνει ανάλυση των υπέρ και των κατά της αξιοποίησης της ιστορίας αλλά και με ποιους τρόπους μπορούμε να την προσεγγίσουμε.

Ο ρόλος της ιστορίας των Μαθηματικών

Σύμφωνα με την θεωρία του Πλάτωνα, ένας καλός φιλόσοφος θα πρέπει να γνωρίζει καλά μαθηματικά και αντίστροφο. Δεν είναι τυχαίο άλλωστε, ότι όλοι αυτοί οι μεγάλοι φιλόσοφοι διδάχθηκαν τόσες πολλές επιστήμες. Μέσα σε αυτές και τα μαθηματικά. Δεν είναι λίγοι αυτοί που υποστήριξαν ότι τα μαθηματικά ως επιστήμη είναι δυσνόητη από πολλούς μαθητές και αυτό οφείλεται στη έλλειψη ιστορικού πλαισίου από την διδακτική πρακτική. Ένας από αυτούς είναι ο καθηγητής πανεπιστημίου Paris VIII Guedji ο οποίος στο βιβλίο του «Το θεώρημα του παπαγάλου» παραθέτει την σάτιρά του ως εξής: "*Όπως όλοι οι μαθητές στον κόσμο, έτσι και ο Ιωνάθαν είχε συναντηθεί με το Θαλή αρκετές φορές. Κάθε φορά όμως, ο καθηγητής του μιλούσε για το θεώρημα, ποτέ για τον άνθρωπο. Άλλωστε, στο μάθημα των Μαθηματικών δεν συζητούσαν ποτέ για τους ανθρώπους. Πού και πού κάποιο όνομα έβγαινε στην επιφάνεια: Θαλής, Πυθαγόρας, Pascal, Descartes ήταν όμως ένα σκέτο όνομα. Σαν όνομα τυριού ή σταθμού του μετρό. Δεν μιλούσαν ποτέ για το πότε ή το πού συνέβη κάτι. Οι μαθηματικοί τύποι και οι αποδείξεις απλώς προσγειώνονταν στον πίνακα. Σαν να μην τους είχε ποτέ κανείς δημιουργήσει, σαν να ήταν εκεί πάντα, όπως τα βουνά και τα ποτάμια. Αλλά και τα βουνά έχουν κάποια ιστορία, κάποια αρχή.*"(Guedji 1998, σελ.35).

Για τον λόγο αυτό θα πρέπει να αναθεωρηθεί ο τρόπος διδασκαλίας που γίνεται μέχρι σήμερα και να αρχίσει να δίνεται ιδιαίτερη έμφαση και στην ιστορία των μαθηματικών. Θα πρέπει ο μαθητής να καταλάβει ότι τίποτα από όσα έχουν ανακαλυφθεί δεν υπήρξε έτοιμο εξαρχής. Θα πρέπει επίσης να αναγνωρίσει τα μαθηματικά ως μία ανθρώπινη και συνεχή δραστηριότητα ανακάλυψης. Ο καθηγητής θα πρέπει να εξηγήσει στον μαθητή το πώς φτάσαμε σε αυτά που ξέρουμε σήμερα, από την σκοπιά που τα έζησαν και οι ίδιοι οι μαθηματικοί στις εκάστοτε πολιτικές και κοινωνικές συνθήκες. Με αυτόν τον τρόπο, στόχος της διδασκαλίας θα είναι ο μαθητής να καλύψει το αίσθημα της άρνησης και της απαξίωσης που νιώθει απέναντι σε αυτή την επιστήμη που λέγεται μαθηματικά.

Σημαντική σε αυτό το σημείο είναι και η διατύπωση του Jacques Barzun ο οποίος στο βιβλίο του "Teacher in America" αναφέρει: «*Έχω την εντύπωση –σχεδόν τη βεβαιότητα- ότι η άλγεβρα έχει γίνει απωθητική εξαιτίας της απροθυμίας ή της ανικανότητας των δασκάλων να εξηγήσουν τα γιατί. Δεν υπάρχει ιστορικό πλαίσιο στη διδασκαλία, έτσι δίνεται η αίσθηση ότι όλο το σύστημα έχει πέσει έτοιμο από τον ουρανό και για να χρησιμοποιηθεί μόνο από γεννημένους ταχυδακτυλουργούς*». (Barzun 1954, σελ.82).

Πότε παρουσιάστηκε η ανάγκη για τη διδασκαλία της ιστορίας των μαθηματικών; Ο ρόλος του Fauvel

Η αξία της ένταξης της ιστορίας των μαθηματικών στη διδακτική διαδικασία δεν είναι μια ιδέα των τελευταίων ετών. Η ιδέα αυτή διατυπώθηκε για πρώτη φορά γύρω στο 1960 στο πλαίσιο διαφόρων συζητήσεων που είχαν πραγματοποιηθεί σχετικά με την εξ ολοκλήρου μεταρρύθμιση της μαθηματικής εκπαίδευσης στα διάφορα διεθνή και εθνικά συλλογικά όργανα (όπως για παράδειγμα τη Διεθνή Επιτροπή Μαθηματικής Εκπαίδευσης – ICMI, το Εθνικό Συμβούλιο Εκπαιδευτικών Μαθηματικών των ΗΠΑ – NCTM και η Μαθηματική Ένωση Αμερικής των ΗΠΑ) κατά τη διεξαγωγή διαφόρων συνεδρίων ($6^{ο}$ Διεθνές Συνέδριο για τη Μαθηματική Εκπαίδευση του Διεθνούς Συμβουλίου Μαθηματικής Εκπαίδευσης – ICMI, στη Σεβίλλη της Ισπανίας το 1996 ή τα συνέδρια της Βρετανικής ή της Ιταλικής – SISM Εταιρείας για την Ιστορία των Μαθηματικών). Το εν λόγω θέμα απασχολεί μέχρι και σήμερα την επιστημονική κοινότητα και ενδεικτικό είναι το γεγονός ότι αποτέλεσε την αφορμή για το $1^{ο}$ Διήμερο Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών με θέμα «Η ιστορία των μαθηματικών ως μέσο διδασκαλίας των μαθηματικών στο Δημοτικό σχολείο και στο Γυμνάσιο» που πραγματοποιήθηκε στις 8 και 9 Απριλίου του 2002 στο Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης. Στη συγκεκριμένη εκδήλωση συμμετείχαν 240 εκπαιδευτικοί της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, 48 της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, 8 σχολικοί σύμβουλοι, φοιτητές και φοιτήτριες. Αξίζει να τονιστεί πως η σπουδαιότητα της ιστορίας των μαθηματικών δεν είναι μόνο αντικείμενο συνεδρίων. Αναφορές σχετικά με αυτήν γίνονται σε βιβλία καθώς και σε επιστημονικά περιοδικά κάθε εκπαιδευτικής βαθμίδας.

Στο σημείο αυτό και πριν ξεκινήσουμε την επιχειρηματολογία σχετικά με την σημαντικότητα της αξιοποίησης της ιστορίας των μαθηματικών στην εκπαίδευση θα ήταν μεγάλη παράλειψη να μην αναφερθούμε στον Fauvel (1991). Ο Fauvel διαδραμάτισε σημαντικό ρόλο καθώς με 15 μόνο επιχειρήματα κατόρθωσε να αναδείξει την σημασία που έχει η διδασκαλία της ιστορίας στη διδασκαλία των μαθηματικών. Για το λόγο αυτό θα αναφερθούν στη συνέχεια εν συντομία ενώ κάποια από αυτά θα παρουσιαστούν εκτενέστερα στο επόμενο κεφάλαιο της παρούσας εργασίας.

Τα επιχειρήματα του Fauvel είναι τα ακόλουθα:

- Συμβολή στον πολλαπλασιασμό των κινήτρων για μάθηση.
- Ανάδειξη του ανθρώπινου χαρακτήρα της μαθηματικής δραστηριότητας.
- Η ιστορική εξέλιξη υποδεικνύει μια διάταξη της ύλης των μαθηματικών στο αναλυτικό πρόγραμμα.
- Η γνώση της ιστορίας της ανάπτυξης των εννοιών συμβάλλει στην κατανόηση τους.
- Τροποποίηση των αντιλήψεων των παιδιών για τα μαθηματικά.
- Ανάδειξη της αξίας των νεότερων τεχνικών μέσα από τη σύγκρισή τους με παλιότερες τεχνικές.
- Συμβολή στην ανάπτυξη πολύ-πολιτισμικών προσεγγίσεων στα μαθηματικά.
- Παροχή ευκαιριών και δυνατοτήτων διερευνητικών δραστηριοτήτων.
- Συμβολή στην κατανόηση νοητικών εμποδίων στην κατανόηση αλγεβρικών εννοιών.
- Ενθάρρυνση των παιδιών μέσα από τη συνειδητοποίηση του γεγονότος ότι και άλλοι άνθρωποι στο παρελθόν είχαν προβλήματα με τα μαθηματικά.
- Ενίσχυση των παιδιών που μαθαίνουν πιο γρήγορα να προχωρήσουν σε παραπέρα διερευνήσεις προβλημάτων.
- Συμβολή στην κατανόηση του ρόλου των μαθηματικών στην κοινωνία.
- Κάνει τα μαθηματικά πιο ελκυστικά ή τουλάχιστον λιγότερο απωθητικά για τα παιδιά.
- Η ιστορική διερεύνηση προκαλεί το ενδιαφέρον και εξάπτει τη φαντασία των παιδιών.
- Τέλος, παρέχει ευκαιρίες διαθεματικής προσέγγισης των μαθηματικών.

Λόγοι χρησιμοποίησης της ιστορίας

Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, ο ρόλος της ιστορίας στην εκπαιδευτική διδασκαλία μπορεί να αποδειχθεί καθοριστικής σημασίας. Οι λόγοι για τους οποίους μπορεί να ισχύσει αυτό, κατηγοριοποιούνται ως εξής:

- Ως εργαλείο
- Ως στόχος

Στην πρώτη κατηγορία, οι μαθητές εκπαιδεύονται στα μαθηματικά μέσω της ενσωμάτωσης της ιστορίας στην διδασκαλία. Με αυτό τον τρόπο οι μαθητές, όχι μόνο έρχονται πιο κοντά στα μαθηματικά αλλά πλέον αντιλαμβάνονται πως όλα αυτά τα οποία μαθαίνουν και τα οποία ήταν δυσνόητα και ξένα προς αυτούς, χρειάστηκαν χρόνια μελέτης και έρευνας για να φτάσουν στη σημερινή τους μορφή. Επιπλέον, η ιστορία μπορεί να θεωρηθεί και ως παράγοντας κινητοποίησης προς τους μαθητές κρατώντας ενεργό το ενδιαφέρον τους και χρησιμοποιώντας την διδασκαλία ως εργαλείο έτσι ώστε να ακολουθήσουν τα ίδια βήματα που έχουν ακολουθήσει και τα μαθηματικά ανά τους αιώνες.

Το συμπέρασμα και η ουσία όσων αναφέρθηκαν είναι ότι τα μαθηματικά δεν είναι μόνο η εφαρμογή τύπων και εξισώσεων έτσι ώστε να επιλυθεί το πρόβλημα αλλά και όλες οι ενδιάμεσες διαδικασίες που οδήγησαν σε αυτό. Η σύνδεση δηλαδή γνώσεων και ιδεών, υφιστάμενων αλλά ίσως και νέων, διευρύνοντας και επεκτείνοντας τις ήδη υπάρχουσες. Διαδικασίες οι οποίες βάζουν το διδασκόμενο σε προβληματισμό, κάνοντάς τον έτσι να αποκτήσει εμπειρίες μαθηματικής σκέψης και δημιουργίας. Συνοψίζοντας όλα τα παραπάνω, θα μπορούσε να πει κάποιος πως η ιστορία των μαθηματικών όχι μόνο μπορεί να συμβάλει στην εκπαιδευτική διαδικασία αλλά είναι ικανή να παίξει καταλυτικό ρόλο, καθώς μπορεί να την εμπλουτίσει και να την βελτιώσει ακόμη περισσότερο από πολλές πλευρές οι οποίες περιγράφονται παρακάτω.

Στην δεύτερη κατηγορία, η ιστορία χρησιμοποιείται ως στόχος. Το ερώτημα που τίθεται όμως είναι, ποιος θα μπορούσε να είναι αυτός. Η απάντηση στην ερώτηση αυτή είναι να δοθεί έμφαση προς τους μαθητές, ότι τα μαθηματικά δεν είναι κάτι το εξωπραγματικό. Υπάρχουν και εξελίσσονται στον χώρο και στον χρόνο συνεχώς. Είναι σημαντικό επίσης να αναφερθεί, πως τα μαθηματικά έχουν επηρεαστεί από πολλούς πολιτισμούς και καθένας από αυτούς έχει λάβει ενεργή δράση στην εξέλιξή τους. (Tzanakis & Thomaidis 2000).
Αναλυτικότερα, οι βασικότεροι λόγοι που σχετίζονται με τα υπέρ της χρησιμοποίησης της ιστορίας είναι οι παρακάτω:

Τρόποι βελτίωσης της εκπαιδευτικής διαδικασίας

i)Διερεύνηση μαθησιακών δυσκολιών

Η εκπαίδευση είναι από μόνη της μια συνεχής διαδικασία κατά την οποία ο μαθητής μέσω συγκεκριμένων μεθόδων αποκτά γνώσεις, αναπτύσσει ικανότητες, δεξιότητες και διαμορφώνει αξίες. Πολλές φορές η διαδικασία αυτή απαιτεί από τον μαθητή να πραγματοποιήσει άλλοτε μικρά και σταθερά βήματα και άλλοτε μεγάλα. Απαιτεί να κατανοήσει έννοιες οι οποίες έρχονται ως φυσικό επακόλουθο των όσων διδάσκεται και πολλές φορές να κάνει την υπέρβαση.

Ωστόσο, οι μέθοδοι εκπαίδευσης και η αντιμετώπιση διαφόρων εννοιών και προβλημάτων που αντιμετωπίζουν οι μαθητές και που πρέπει να υπερβούν δεν διαφέρουν και πολύ με την εξέλιξη των μαθηματικών. Έτσι, ένας εκπαιδευτικός ο οποίος είναι γνώστης της ιστορίας των μαθηματικών και του τρόπου που προέκυψαν καινοτόμες και ριζικές αλλαγές μπορεί να διαχειριστεί καλύτερα τις όποιες δυσκολίες συναντούν οι μαθητές στο θέμα της κατανόησης εννοιών και προβλημάτων.

ii)Κατανόηση μαθηματικών εννοιών μέσω της εξέλιξής τους

Πολλοί εκπαιδευτικοί θεωρούν πως για να διδάξει κανείς «καλά» αρκεί να ακολουθήσει μια συγκεκριμένη σειρά (ορισμός – θεώρημα – απόδειξη) και με αυτό τον τρόπο ο μαθητής θα είναι σε θέση να τα κατανοήσει. Δυστυχώς όμως δεν συμβαίνει συχνά κάτι τέτοιο. Τις περισσότερες φορές, ο μαθητής κυριεύεται από το αίσθημα της απογοήτευσης και της ανικανότητας να αντιληφθεί μαθηματικές έννοιες που του φαίνονται δυσνόητες με σκοπό να επέρχεται η αποτυχία στις σπουδές του. Αυτό το οποίο λείπει από την εκπαιδευτική διδασκαλία είναι το ιστορικό πλαίσιο. Ο μαθητής δεν μαθαίνει ποτέ το πώς εξελίχθηκαν τα μαθηματικά και το πόσες αποτυχίες χρειάστηκαν για να φτάσουν στη μορφή που τα ξέρουμε σήμερα. Για τον λόγο αυτό, με την ένταξη της ιστορίας των μαθηματικών, ο μαθητής ενθαρρύνεται να δοκιμάσει, να προβληματιστεί ακόμη και να αποτύχει ανακαλύπτοντας νέα, κρυφά μονοπάτια, δεξιότητες αλλά και αδυναμίες που έχει ο ίδιος.

iii)Εκπαίδευση δημιουργίας ερωτημάτων και μαθηματικών προβληματισμών

Η διδασκαλία των μαθηματικών πραγματοποιείται με τέτοιο τρόπο που ο μαθητής καθ' όλη την διάρκεια των σπουδών του μαθαίνει να αντιμετωπίζει τα προβλήματα με συγκεκριμένο τρόπο. Συνήθως αυτό που εκπαιδεύεται είναι είτε να επιλύνει προβλήματα μέσω κάποιας ακολουθίας πράξεων είτε να αποδεικνύει πως κάτι ισχύει. Αυτό που απουσιάζει όμως από όλες σχεδόν τις βαθμίδες εκπαίδευσης είναι προβλήματα του τύπου «αποδείξτε πως κάτι δεν ισχύει». Η ιστορία εδώ, μπορεί να φανεί ένα πολύ αξιόπιστο εργαλείο καθώς μέσω αυτής μπορούμε να θέσουμε διερευνητικής φύσης προβλήματα αλλά και προβλήματα τα οποία δεν έχουν επιλυθεί έως και σήμερα, διότι έτσι ο μαθητής κατανοεί ότι τα μαθηματικά δεν παύουν να εξελίσσονται, του δημιουργείται μια διέγερση στο να ανακαλύψει περισσότερα, να αναπτύξει τις δεξιότητες του στη μαθηματική σκέψη αλλά ακόμη και να αγαπήσει τα μαθηματικά.

1)Προβολή της ανθρώπινης πλευράς των μαθηματικών

i)Τα μαθηματικά ως μια ανθρώπινη δραστηριότητα

Τα μαθηματικά είναι μια θεμελιώδης επιστήμη η οποία είναι άμεσα συνδεδεμένη σχεδόν με όλες τις θετικές επιστήμες. Μία ανακάλυψη ή μια επίλυση κάποιου προβλήματος που απασχολούσε για καιρό –ίσως και χρόνια- τους επιστήμονες, μπορεί να επιφέρει ραγδαίες εξελίξεις σε πολλούς τομείς αλλά ακόμη και στην ίδια την κοινωνία λόγω της επιρροής από αυτήν. Είναι γνωστό ότι οι ανάγκες εξέλιξης μιας κοινωνίας ξεκινούν και τελειώνουν σε αυτή. Συνεπώς, τα μαθηματικά διαμορφώνονται σύμφωνα με τις απαιτήσεις και της ανάγκες της εποχής.

Έτσι, με την εισαγωγή της ιστορίας στα σχολικά εγχειρίδια, επιτρέπεται στον μαθητή να μελετήσει την εξέλιξη των μαθηματικών, το πώς επηρεάστηκαν από διάφορους πολιτισμούς με βάση τις διάφορες κοινωνικές και πολιτικές συνθήκες που υπήρχαν, να πληροφορηθεί για την αλληλεπίδραση που είχαν οι μαθηματικοί με την ίδια την κοινωνία, καθώς και να γίνει μέρος του τρόπου σκέψης όλων αυτών των επιστημόνων._Επομένως, μέσω της ιστορίας ο μαθητής είναι ικανός να αντιληφθεί πως όλα αυτά που προαναφέρθηκαν έχουν επηρεάσει την εξέλιξη των μαθηματικών και πως τα μαθηματικά σχετίζονται άμεσα με τον άνθρωπο και τις κοινωνικές του ανάγκες.

ii)Η αξία της βιογραφίας των μαθηματικών

Από την αρχαιότητα έως και σήμερα, για να φτάσει ο άνθρωπος στο σημείο που βρίσκεται, χρειάστηκε να περάσει από πολλές δοκιμασίες και πολλές αποτυχίες. Δεν είναι άλλωστε τυχαία η φράση που είναι γνωστή σε πολλούς και η οποία αναφέρει, ότι αν δεν αποτύχεις στη ζωή σου, τότε σίγουρα δεν θα πετύχεις. Μέσα από την μελέτη λοιπόν μιας βιογραφίας και των εφευρέσεων-ανακαλύψεων ενός μεγάλου επιστήμονα μπορούμε να εντοπίσουμε σημαντικά στοιχεία όπως τις ανησυχίες που είχε αλλά και τους προβληματισμούς του οι οποίοι τον οδήγησαν στο να ασχοληθεί με τον συγκεκριμένο κλάδο και να φτάσει στο επιθυμητό σημείο. Επιπλέον, μπορούμε να διακρίνουμε τις δυσκολίες που αντιμετώπισε και να συνειδητοποιήσουμε ότι τα μαθηματικά είναι μια επιστήμη, η οποία εξελίσσεται συνεχώς από τον άνθρωπο. Ο μαθητής, μελετώντας βιογραφίες μεγάλων μαθηματικών μπορεί να συλλογιστεί και μόνος του την ομορφιά αυτή και να ωθήσει τον εαυτό του να ασχοληθεί ακόμη περισσότερο με τα μαθηματικά, διερευνώντας τις γνώσεις του, έννοιες που τον δυσκολεύουν και το σημαντικότερο, να μάθει να μην τα παρατάει με την πρώτη δυσκολία αλλά να συνεχίζει να προσπαθεί ώσπου να πετύχει τον στόχο του.

2)Εκδήλωση ενδιαφέροντος για μάθηση

Η εισαγωγή της ιστορίας των μαθηματικών μπορεί να κεντρίσει το ενδιαφέρον των μαθητών. Μελετώντας την εξέλιξή τους, εντοπίζοντας τα ίδια προβλήματα που κάποτε αντιμετώπιζαν και οι ίδιοι οι μαθηματικοί, ερευνώντας έννοιες και μεθόδους επίλυσης αποδείξεων αρχίζουν και βλέπουν τα μαθηματικά από διαφορετική οπτική. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι τα βλέπουν πιο φιλικά και οικεία και ως ένα παζλ όπου θα πρέπει να ενώσουν τα κομμάτια του για να δουν ξεκάθαρα την συνολική εικόνα. Με αυτόν τον τρόπο επιτυγχάνεται το να έχει κίνητρο ο μαθητής, να εξερευνά με όρεξη και πιο αποτελεσματικά τον κόσμο των μαθηματικών κατανοώντας, πως για να φτάσουν στα σύγχρονα μαθηματικά υπήρξαν λάθη, αποτυχίες, αβεβαιότητες και αδιέξοδα, όπου όλα αυτά όμως οδήγησαν στον δρόμο της εξέλιξης και της επιτυχίας.

3)Διευκόλυνση της δουλειάς του εκπαιδευτή

Κατά την εκπαιδευτική διαδικασία πολλοί είναι οι μαθητές οι οποίοι αντιμετωπίζουν δυσκολίες κατανόησης σε έννοιες και προβλήματα με τα οποία είχαν έρθει αντιμέτωποι και οι μαθηματικοί στο παρελθόν. Οι διδάσκοντες, με την ιστορία ως εργαλείο στα χέρια τους μπορούν να ανατρέξουν στα αντίστοιχα προβλήματα και στις αντίστοιχες δυσκολίες και να προσφέρουν στους μαθητές λύσεις και μεθόδους αντιμετώπισης που τα σχολικά βιβλία δεν εμπεριέχουν. Βέβαια για να πραγματοποιηθεί κάτι τέτοιο, απαιτεί χρόνο και σκληρή δουλειά από τους εκπαιδευτικούς καθώς θα πρέπει να είναι ενήμεροι και γνώστες της ιστορίας των μαθηματικών. Γνωρίζοντας την ιστορία, οι εκπαιδευτικοί μπορούν να επιδράσουν θετικά στον τρόπο σκέψης των μαθητών και να τους αυξήσει το ενδιαφέρον για μάθηση.

Συνοψίζοντας, τα υπέρ της αξιοποίησης της ιστορίας των μαθηματικών διατυπώνονται πλήρως μέσα από την άποψη του David Lingard όπως ακριβώς δημοσιεύθηκε στο British Society for the History of Mathematics Newsletter (No. 31, Άνοιξη 1996) ως εξής: *«Πιστεύουμε ότι, κάποια γνώση και κατανόηση της ιστορίας των μαθηματικών, όπως επίσης* *και κάποια ενασχόληση μ' αυτήν, είναι σημαντικά στοιχεία της εκπαίδευσης όλων των εκπαιδευτικών που διδάσκουν μαθηματικά, γιατί τους βοηθούν: i) να αποκτήσουν ένα βαθύτερο νόημα των μαθηματικών, ii) να κάνουν πιο ανθρώπινα τα μαθηματικά κατά τη διδασκαλία τους, iii) να τονίζουν τη συνέχεια στην ανάπτυξη των μαθηματικών και iv)να κατανοούν την πολύ-πολιτισμική κληρονομιά και την πολιτιστική συνάφεια των μαθηματικών».*

Οι δυσκολίες κατά την αξιοποίησης της ιστορίας

Η ενσωμάτωση της ιστορίας των μαθηματικών στην διδασκαλία δεν φέρει μόνο ευεργετικά στοιχεία αλλά και δυσκολίες και εμπόδια. Τα επιχειρήματα κατά της ενσωμάτωσης αυτής βασίζονται σε δύο κατηγορίες. Η πρώτη σχετίζεται με τη φιλοσοφική δυσκολία ενώ η δεύτερη με την πρακτική. (Tzanakis & Arcavi, 2000, σελ.202).
Μέσα από μια σύντομη ανασκόπηση της βιβλιογραφίας τους παρουσιάζονται κάποια από αυτά:

Φιλοσοφικές πηγές δυσκολίας

1. Η ιστορία είναι κουραστική για πολλούς μαθητές, οπότε επακόλουθο είναι να έχουν την ίδια στάση και απέναντι στην ιστορία των μαθηματικών.
2. Λόγω της μη διευρυμένης εκπαίδευσης στην ιστορία των μαθηματικών, οι διδασκόμενοι είναι πιθανό να μην είναι σε θέση να κατανοήσουν πλήρως τις συνθήκες και τα γεγονότα του παρελθόντος και των όσων συνέβησαν.
3. Είναι προτιμότερο να διδάσκεται πρώτα το μαθηματικό αντικείμενο και στη συνέχεια το ιστορικό του μέρος. Άλλωστε η ιστορία δεν είναι μαθηματικά.
4. Η ιστορία των μαθηματικών μπορεί να δημιουργήσει ένα χάος στον μαθητή αντί να τον βοηθήσει στην κατανόηση τους. (Fowler in Ransom, 1991, 15, Fauvel, 1991,4).
5. Ο σκοπός στα μαθηματικά είναι να έχει την ευχέρεια ο μαθητής να αντιμετωπίζει και να λύνει δύσκολα προβλήματα, οπότε δεν υπάρχει λόγος να επιστρέφουμε στο παρελθόν. (Le Goff, 1996, 13).
6. Η ιστορία μπορεί να προκαλέσει εθνικιστικές και τοπικιστικές συμπεριφορές και αντιδράσεις.

Πρακτικές πηγές δυσκολίας

7. Μία από τις σημαντικότερες πηγές δυσκολίας είναι η *έλλειψη χρόνου*. Τα μαθηματικά απαιτούν και σκληρή δουλειά αλλά και χρόνο ο οποίος δεν είναι επαρκής για την

εκμάθηση τους μέσα στις σχολικές αίθουσες, πόσο μάλλον όταν γίνεται μια προσπάθεια ένταξης της ιστορίας των μαθηματικών. (Buhler, 1990, 43).

8. Υπάρχει γενικότερα *έλλειψη πηγών* για τη χρήση και την κάλυψη εκπαιδευτικών αναγκών.
9. Με την μελέτη της ιστορίας των μαθηματικών ο μαθητής *δεν αξιολογείται* σε αυτό το αντικείμενο με αποτέλεσμα να μην αφιερώνει τον κατάλληλο χρόνο σε αυτή και να υπάρχει έτσι έλλειψη προσοχής κατά την διάρκεια παρακολούθησης.
10. Η διδασκαλία της ιστορίας απαιτεί όχι μόνο ιστορικές αλλά και διεπιστημονικές γνώσεις τις οποίες δεν έχουν οι εκπαιδευτές. Η έλλειψη ιστορικής τεχνογνωσίας και εμπειρίας σε αυτόν τον τρόπο διδασκαλίας, δημιουργεί στον μαθητή αμφιβολίες για την αξιοπιστία των γνώσεων που εισπράττει.

Τρόποι αξιοποίησης της Ιστορίας

Οι λόγοι της ενσωμάτωσης της ιστορίας και τα πλεονεκτήματα αυτής της εφαρμογής στην εκπαιδευτική διαδικασία δεν αρκούν από μόνα τους για να το πετύχουμε. Χρειάζεται να διερευνηθούν και οι τρόποι με τους οποίους μπορεί να αξιοποιηθεί στη πρακτική διδασκαλία. Παρακάτω εξετάζονται οι τρόποι με τους οποίους μπορεί να γίνει αυτό εφικτό.

Με την ιστορία των μαθηματικών και την αξιοποίηση διάφορων ιστορικών πηγών της τα μαθηματικά μπορούν να γίνουν πιο κατανοητά και να ενταχθούν στη διδασκαλία με πιο φυσικό τρόπο, προσεγγίζοντας έτσι τους μαθητές και βοηθώντας τους να εξελιχθούν περισσότερο. Κατά την διδασκαλία, ο εκπαιδευτής μπορεί να χρησιμοποιήσει ιστορικά στοιχεία ως υλικό από πρωτότυπες πηγές και να τα παρουσιάσει στους μαθητές παροτρύνοντάς τους έτσι, να εκτιμήσουν τα μαθηματικά και να τα δούνε ως μια ανθρώπινη δραστηριότητα και όχι ως κάτι ξένο. Ένας άλλος τρόπος αξιοποίησης είναι η ένταξη της ιστορίας στη διδασκαλία με τέτοιο τρόπο, που θα έχει δευτερεύοντα ρόλο. Θα πρέπει δηλαδή ο εκπαιδευτής να χρησιμοποιεί μια τέτοια στρατηγική, όπου ο μαθητής δεν θα έχει ως στόχο να γίνει γνώστης της ιστορίας αλλά μέσω αυτής να ακολουθήσει τα σωστά μονοπάτια επικεντρώνοντας στη βελτίωσή του. Επιπλέον, ο καθηγητής μπορεί να οργανώσει και να αναθέσει στους μαθητές ομαδικές εργασίες και δραστηριότητες με σκοπό να γίνει το μάθημα πιο ενδιαφέρον. Οι μαθητές θα έχουν την δυνατότητα έτσι να αναπτύξουν πολλές δεξιότητες όπως της ομαδικότητας, της επικοινωνίας και της συνεργασίας με άλλα άτομα, γνωρίζοντας ταυτόχρονα και κάποιες που ίσως δεν ήξεραν ότι έχουν. Ακόμη, με αυτή την εκπαιδευτική στρατηγική και χρησιμοποιώντας ιστορικό υλικό που θα τους δοθεί, θα επιτρέψει στους μαθητές να αποκτήσουν εμπειρία στην αναζήτηση πληροφοριών και μεθόδων επίλυσης προβλημάτων είτε μέσω του διαδικτύου είτε από διάφορες άλλες πηγές. Η έρευνα είναι από μόνη της ένα ατελείωτο ταξίδι αναζήτησης πληροφοριών, επεξεργασίας δεδομένων και προβληματισμών και γι' αυτό ο μαθητής θα πρέπει να αποτελέσει μέρος αυτού με στόχο να είναι σε θέση να αναλογιστεί ότι η δημιουργία των μαθηματικών ιδεών αποτελεί μέρος μιας ανθρώπινης και συνεχούς δραστηριότητας.

Τέλος, η κατηγοριοποίηση των τρόπων με τους οποίους πρέπει να χρησιμοποιείται η ιστορία των μαθηματικών έχει ως εξής:

- Θα πρέπει να δίνονται στους μαθητές άμεσα, ιστορικά στοιχεία τα οποία θα χρησιμεύουν ως πληροφορίες και όχι ως διδακτέα ύλη.
- Με την παροχή ιστορικών στοιχείων στην αίθουσα, οι μαθητές θα πρέπει να αφεθούν, και με τις δυνατότητες που έχει ο καθένας να εξερευνήσουν μόνοι τους τα μαθηματικά.
- Οι μαθητές, έχοντας ως εργαλείο την ιστορία, στόχος τους θα είναι να αποκομίσουν πιο σύνθετες γνώσεις και να μπορούν να λύσουν μεγαλύτερης δυσκολίας προβλήματα.

Όλα αυτά που αναφέρθηκαν μέχρι στιγμής σχετικά με το πώς πρέπει να χρησιμοποιείται η ιστορία είναι αναπόσπαστο μέρος της μελέτης αυτής αλλά θα πρέπει να αναφέρουμε και το τι συμβαίνει μετά την ένταξη της ιστορίας στην διδασκαλία.

Αποδεχόμενοι την ιστορία των μαθηματικών στην εκπαιδευτική διαδικασία ως ιστορική πληροφορία, μπορούμε να τη προσεγγίσουμε με τρεις διαφορετικούς τρόπους:

1. Θεματική (Katz & Michalowicz, 2004)
2. Διαφωτιστική
3. Ιστορικοκεντρική

<u>Θεματική</u>

Η πληροφορία αυτή αποτελείται από ιστορικό υλικό (ιστορικά προβλήματα) το οποίο δεν περιλαμβάνεται στη διδακτέα ύλη και η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί ακόμη και στη δημιουργία ιστορικών εργαλείων ή άλλων ερευνητικών διαδικασιών.

<u>Διαφωτιστική</u>

Χρησιμοποιείται ως συμπληρωματική πληροφορία που συνήθως περιέχει ημερομηνίες, πηγές, βιογραφίες και μπορεί να αποτελεί την εισαγωγή ή τον επίλογο ενός κεφαλαίου εμπεριέχοντας ιστορικά στοιχεία τα οποία είναι άμεσα συνδεδεμένα με την ενότητα που διδάσκονται οι μαθητές.

Ιστορικοκεντρική

Χρησιμοποιείται έμμεσα στην εκπαιδευτική διαδικασία που συνήθως περιλαμβάνεται στο πρόγραμμα σπουδών και διδάσκεται σύμφωνα με την ιστορική εξέλιξη. (Φυσικοί αριθμοί – ρητοί κτλ.)

Συνοψίζοντας, θα λέγαμε ότι η χρήση της ιστορίας στα σχολικά βιβλία μπορεί να αξιοποιηθεί σε μεγάλο βαθμό ανάλογα με την παρότρυνση του καθηγητή, το εκπαιδευτικό του υπόβαθρο, με διάφορα μέσα και ανάλογα με το περιεχόμενο της διδασκαλίας. Βέβαια, όλα αυτά αποτελούν στόχο των ελληνικών σχολικών βιβλίων σε συνδυασμό με το να προσελκύσουν το ενδιαφέρον των μαθητών για απόκτηση νέων γνώσεων και εμπειριών στα μαθηματικά.

Η ιστορία των μαθηματικών στα σχολικά βιβλία του Γυμνασίου

Στα βιβλία του εκπαιδευτικού του Γυμνασίου υπάρχουν αναφορές σε σχέση με την αλληλεπίδραση που πρέπει να έχει με τους μαθητές και την παροχή ουσιαστικών γνώσεων με σκοπό την δημιουργία τρόπου σκέψης. Χαρακτηριστικά, με βάση νέα Α.Π.Σ. αναφέρεται «η ενεργητική προσέγγιση της γνώσης έχει ως στόχο να βοηθήσει τους μαθητές να σκέφτονται … και τελικά να μαθαίνουν το "πώς να μαθαίνουν". Απαιτεί κυρίως τη δραστηριοποίηση του μαθητή..» (Π.Ι.,2002, τ.Α',σελ.16).

Εκτός αυτών και της αξιοποίησης της ιστορίας των μαθηματικών θα πρέπει να δούμε και το πώς αξιοποιούνται τα ιστορικά σημειώματα στα σχολικά εγχειρίδια. Κατόπιν μελέτης στα βιβλία μαθηματικών στις τρεις τάξεις του Γυμνασίου, τα ιστορικά στοιχεία που περιλαμβάνονται σε αυτά είναι συνολικά εξήντα πέντε (65). Στο βιβλίο της Α' Γυμνασίου εντοπίστηκαν τριάντα τρία (33), στης Β' Γυμνασίου 18 και στης Γ' Γυμνασίου δεκατέσσερα (14).

Τα ιστορικά αυτά στοιχεία σχετίζονται είτε με το είδος του κειμένου, είτε με το είδος της εικόνας στα σχολικά βιβλία. Ακόμη, μπορεί να υπάρχουν και πολιτισμικές αναφορές. Το είδος του κειμένου μπορεί να είναι τέτοιο που μέσω αυτού να "περνάει" στους μαθητές μεμονωμένες ιστορικές πληροφορίες, να περιγράφει κατορθώματα και μαθηματικές ανακαλύψεις γνωστών επιστημόνων και να παρουσιάζονται βιογραφικά στοιχεία μεγάλων μαθηματικών. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η αναφορά που γίνεται στο βιβλίο της Β' Γυμνασίου σχετικά με το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου, όπου αναφέρει ότι ο τετραγωνισμός του κύκλου ήταν ένα από τα τρία άλυτα προβλήματα της αρχαιότητας που οδήγησε στην εκτίμηση του περιβόητου αριθμού π.

Όσον αφορά το είδος της εικόνας μιας ιστορικής παρέμβασης, μπορεί να είναι εικόνες προσώπων ή προτομών, αρχαιολογικών μνημείων, διαφόρων εργαλείων που χρησιμοποιούσαν για την επίλυση διάφορων προβλημάτων ή ακόμη και έργων τέχνης της εποχής εκείνης. Τέλος, όπως προαναφέρθηκε, στα ιστορικά στοιχεία μπορεί να περιλαμβάνονται πολιτισμικές αναφορές που σχετίζονται είτε με την Ελλάδα είτε με άλλους πολιτισμούς. Κατόπιν μελέτης όλων αυτών, καταμετρήθηκε ανά είδος και κατηγορία το βιβλίο των μαθηματικών της Β' Γυμνασίου. Στον παρακάτω πίνακα βλέπουμε τη συχνότητα με την οποία εντοπίζονται ιστορικές παρεμβάσεις (%). (Συχνότητα εμφάνισης εικόνας, κειμένου και άλλων ειδών ιστορικών παρεμβάσεων στο βιβλίο μαθηματικών της Β' Γυμνασίου)

ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ	**ΡΟΛΟΣ**	**Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ**
		(%)
Κείμενο	Μαθηματικό επεξηγηματικό	28
Κείμενο	Έκθεση ιστορ. Πληροφορίας	39
Κείμενο	Πρόβλημα	11
Κείμενο	Αναδρομή προσωπικών επιτευγμάτων	16
Κείμενο	Βιογραφικά στοιχεία	16
Εικόνα	Πορτρέτο	11
Εικόνα	Πρόσωπο σε δράση	11
Εικόνα	Αρχαιολογικά μνημεία	22
Εικόνα	Αντικείμενο τέχνης	11
Εικόνα	Σχημ. Αναπαράσταση	27
Διδ. Λειτουργία	Εισαγωγική προετοιμασίας	38
Διδ. Λειτουργία	Εκτίμηση μεγεθών	5,5
Διδ. Λειτουργία	Ανάδειξη μαθηματικής σκέψης	11
Διδ. Λειτουργία	Πληροφοριακή	28
Διδ. Λειτουργία	Χωρίς λειτουργικό ρόλο	-
Πολιτ. Αναφορά	Ελλάδα	50
Πολιτ. Αναφορά	Άλλοι πολιτισμοί	55,5
Ρόλος εικόνας	Διακοσμητικός ρόλος	-
Ρόλος εικόνας	Απεικονιστικός	55,5
Ρόλος εικόνας	Επεξηγηματικός	28
Ρόλος εικόνας	Συμπληρωματικός	17
Ρόλος εικόνας	Σχετίζεται με νόημα	67

Παρατηρώντας τον παραπάνω πίνακα, βλέπουμε ότι στο βιβλίο της Β’ Γυμνασίου δίνεται έμφαση στη χρήση των ιστορικών στοιχείων ως βάση πληροφοριών. Διαπιστώνουμε επίσης την τάση οι εικόνες στο βιβλίο να έχουν κυρίως απεικονιστικό ρόλο και να σχετίζονται με νόημα με το κείμενο. Όσον αφορά τις πολιτισμικές αναφορές, παρατηρούμε ότι υπάρχει μία ίση κατανομή ελληνικών επιτευγμάτων καθώς και άλλων πολιτισμών. Αναφορικά με την διδακτική λειτουργία τα μεγαλύτερα ποσοστά συγκεντρώνονται στο ότι υπάρχουν αναφορές που έχουν κυρίως πληροφοριακό χαρακτήρα και σε αναφορές που δεν έχουν λειτουργικό διδακτικό ρόλο

Αναφορικά, στο βιβλίο της Β' Γυμνασίου οι ιστορικές παρεμβάσεις που υπάρχουν είναι οι εξής:

- Η ηλικία του Διόφαντου
- Το Πυθαγόρειο θεώρημα
- Οι εξισώσεις και οι συμβολισμοί τους ανά τους αιώνες
- Ο μηχανισμός των Αντικυθήρων
- Τα κανονικά πολύγωνα στη φύση, στη τέχνη και στις επιστήμες
- Εκτιμήσεις του π

Σύνδεση της ιστορίας με κατασκευές και δραστηριότητες της γεωμετρίας

Ένας από τους στόχους αυτής της εργασίας είναι να περάσει το μήνυμα, πως η ανάπτυξη των μαθηματικών σαν επιστήμη και ειδικότερα της γεωμετρίας συντελέστηκε εξαιτίας των αναγκών των διαφόρων κοινωνιών ανά τους αιώνες. Οι ανάγκες αυτές δημιούργησαν προβλήματα τα οποία με τη σειρά τους έπρεπε να επιλυθούν. Εφόσον οι μέχρι τότε γνώσεις ήταν περιορισμένες η έρευνα οδήγησε στην δημιουργία νέων εργαλείων και κατ’ επέκταση στην απάντηση πολλών ερωτημάτων. Στην ιστορία των μαθηματικών υπάρχουν τέτοιες κατασκευές - προβλήματα με τις αντίστοιχες δραστηριότητες οι οποίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν κατά τη διδακτική διαδικασία προκειμένου να κατανοήσει ο μαθητής την εξέλιξη των μαθηματικών στον τομέα της γεωμετρίας αλλά και την χρησιμότητα τους στην καθημερινή μας ζωή. Δυο χαρακτηριστικά παραδείγματα αυτών των εργαλείων θα παρουσιαστούν στη συνέχεια.

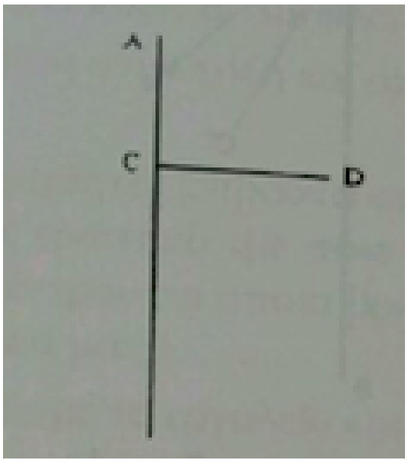
Σύμφωνα με τις πηγές η γεωμετρία παρουσιάζει δυο ιδιαίτερα σημαντικές περιόδους.

- Την πρώτη περίοδο σηματοδοτούν ο Θαλής ο Μιλήσιος και ο Πυθαγόρας όπου διαμορφώνεται πλέον ως επιστήμη με τα Στοιχεία του Ευκλείδη τον 3^{o} π.Χ. αιώνα. Η γεωμετρία αποκτά τόσο σημαντική θέση ως κλάδος των μαθηματικών με αποτέλεσμα οι όροι γεωμέτρης και μαθηματικός να ταυτίζονται.
- Η δεύτερη περίοδος ξεκινάει τον 19^{o} αιώνα με την εμφάνιση της μη ευκλείδειας γεωμετρίας (Bolyai, Riemann, Lobatchevski) με αποτέλεσμα την αποσύνδεση της από τον πλέον αισθητό κόσμο.

Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι τα εργαλεία που θα παρουσιαστούν στη συνέχεια για να αξιοποιηθούν στις δραστηριότητες που θα ακολουθήσουν δεν ανήκουν σε καμιά από αυτές τις δυο περιόδους. Το πρώτο εργαλείο χρονολογείται τον 10^{o} μ.Χ. αιώνα και το δεύτερο τον 16^{o} μ.Χ. αιώνα. Σκοπός αυτών των εργαλείων και των δραστηριοτήτων είναι ο υπολογισμός αποστάσεων χάρη στις ιδιότητες των τριγώνων καθώς και η κατανόηση από τον μαθητή της εφαρμογής των μαθηματικών σε προβλήματα της καθημερινότητας.

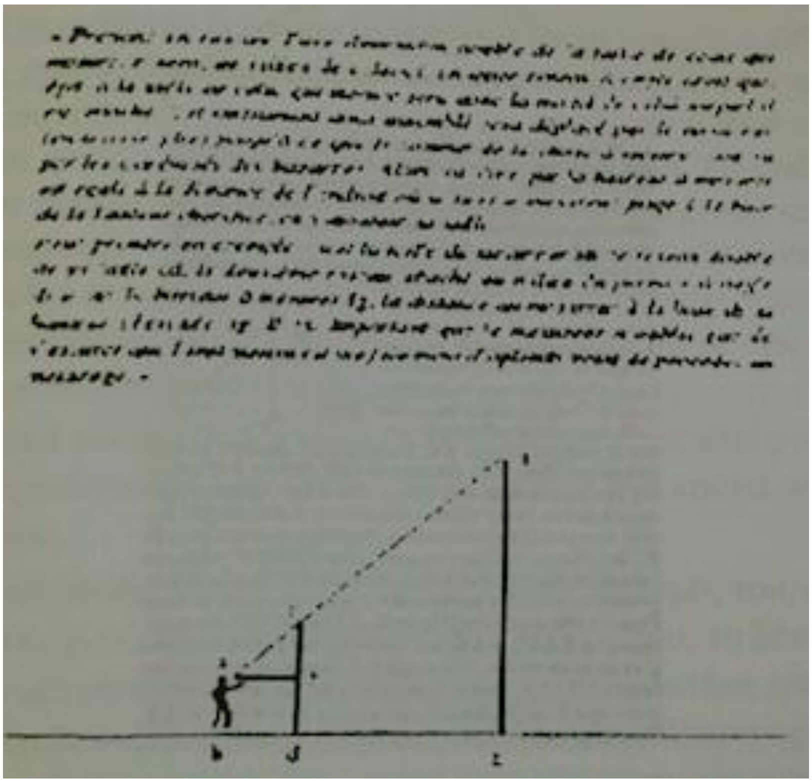
Κατασκευή των εργαλείων

1. Το πρώτο εργαλείο αναφέρεται στην Γεωμετρία του Gerbert d' Aurillac του $10^{ου}$ αιώνα και χρησιμοποιούνταν κυρίως για την μέτρηση υψών. Το πόδι της καθέτου είναι απρόσιτο και το έδαφος εντός κάποιας ακτίνας θεωρείται οριζόντιο. Το συγκεκριμένο εργαλείο αποτελείται από δυο κομμάτια ξύλο, το ένα μήκους 1.5μ. και το άλλο 0.40μ. περίπου. Αυτά τοποθετούνται κάθετα μεταξύ τους έτσι ώστε να σχηματίζεται ένα ισοσκελές και ορθογώνιο τρίγωνο.

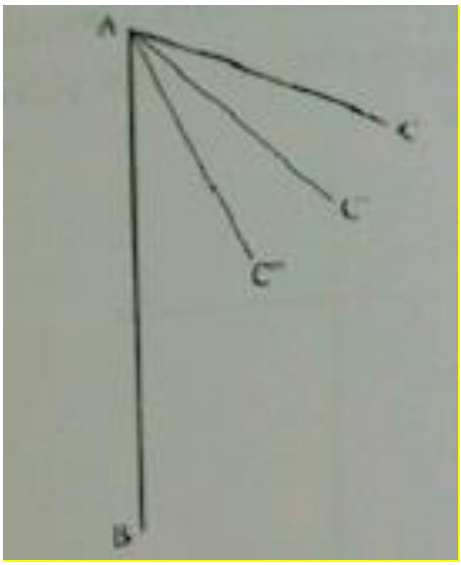


AC=CD

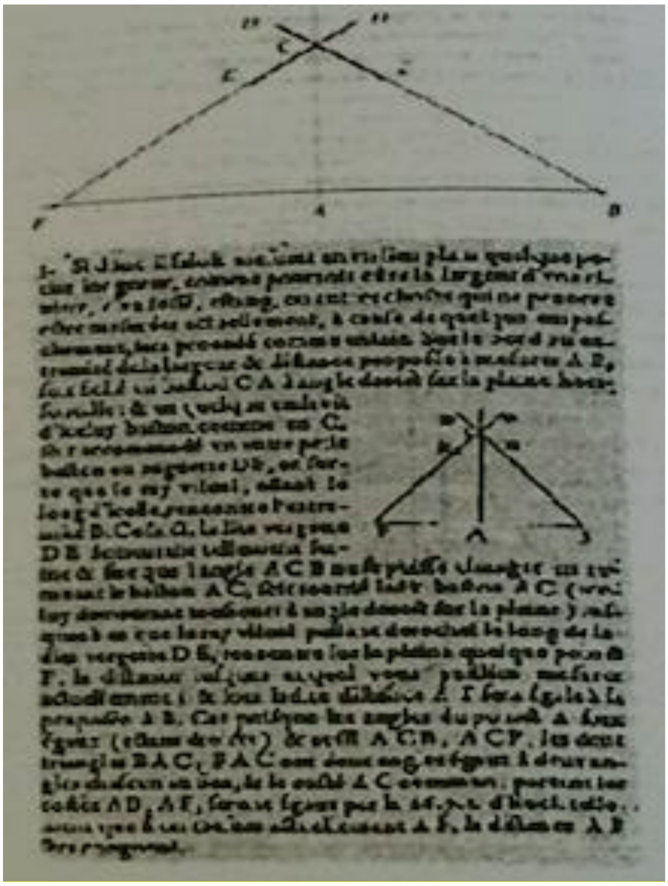
Απόσπασμα από το κείμενο του Gerbert d’Aurillac.



2. Το δεύτερο εργαλείο σημειώνεται από τον Errard (1594) και χρησιμοποιούντα για την μέτρηση μιας απρόσιτης οριζόντιας απόστασης. Αποτελείται από δυο κομμάτια ξύλου τα οποία συνδέονται με τέτοιο τρόπο ώστε να διατηρούν σταθερή μια προεπιλεγμένη γωνία.



Απόσπασμα από το κείμενο του Errard.



Και στα δύο εργαλεία χρησιμοποιούμε ένα νήμα στάθμης (αλφάδι).

<u>Δραστηριότητα 1</u>

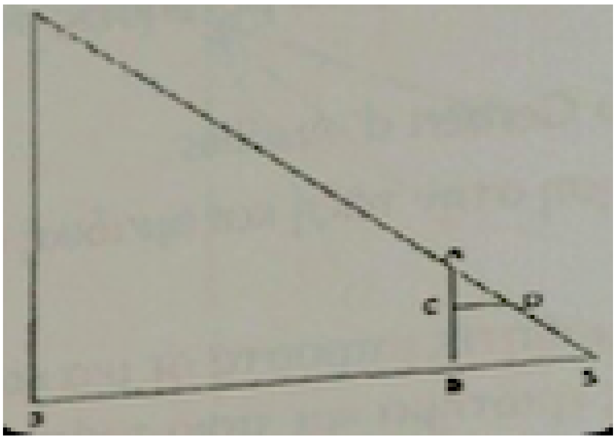
Παιδαγωγικός σκοπός: Εξάσκηση των μαθητών στην πρακτική γεωμετρία με έννοιες καθετότητας και μετρήσεις στο έδαφος (χρήση δεκάμετρου).

Υλικά που θα χρησιμοποιηθούν: Εργαλείο του Gerbert d’ Aurillac.

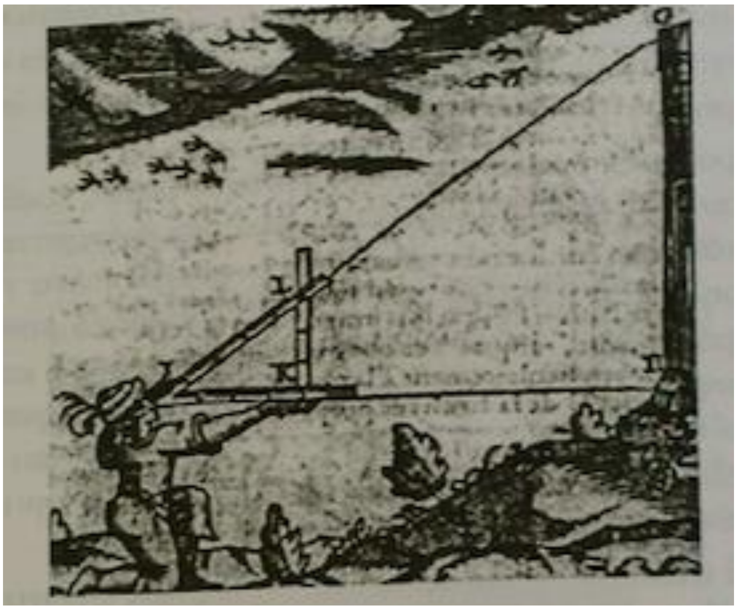
Μέθοδος εργασίας: Συζήτηση του θέματος στην τάξη και εκτέλεση της ομαδικής εργασίας έξω από τη τάξη.

Ξεκινώντας, θέτουμε στους μαθητές το εξής πρόβλημα διατυπώνοντας τους την ακόλουθη ερώτηση «με ποιο τρόπο μπορούμε να μετρήσουμε το ύψος ενός δέντρου το οποίο βρίσκεται μέσα στην αυλή του σχολείου ή στην γειτονιά μας;». Σαν πρώτο βήμα, κατασκευάζουμε με τη βοήθεια των μαθητών το εργαλείο του Gerbert d’ Aurillac και τους αφήνουμε να το επεξεργαστούν και να το μελετήσουν. Στο σημείο αυτό αναφέρουμε ότι το συγκεκριμένο εργαλείο το χρησιμοποιούσαν στην Αρχαιότητα και το Μεσαίωνα για την επίλυση αντίστοιχων προβλημάτων. Έτσι το ερώτημα που προκύπτει είναι «με ποιον τρόπο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το εργαλείο του Gerbert d' Aurillac;»

Φροντίζουμε να έχουμε χωρίσει τους μαθητές σε ομάδες εργασίας που αποτελούνται από 4-5 άτομα και έχοντας στα χέρια τους το εν λόγω εργαλείο, τους ενθαρρύνουμε να εκφράσουν τις σκέψεις και τις ιδέες τους σχετικά με το πως θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί αυτό. Στοχεύουμε στο να διατυπωθεί από τους μαθητές η ιδέα του να στοχεύσουμε ψηλά κρατώντας το ξύλο κατακόρυφα. Έπειτα οι ομάδες των μαθητών τοποθετούν το εργαλείο κατακόρυφα και σημαδεύουν την κορυφή του δέντρου. Κατά τη διάρκεια αυτής της διαδικασίας ο κάθε μαθητής καλείται να διεκπεραιώσει μια ενέργεια, για παράδειγμα ένας μαθητής σημαδεύει, άλλος ελέγχει το αλφάδι, ένας τρίτος σημαδεύει με μια κιμωλία την θέση της καθέτου στο έδαφος κτλ. Έτσι, καταλήγουν σε συμπεράσματα όπως «Αν σταθούμε πιο μακριά, τότε στοχεύουμε πιο ψηλά, ενώ αν σταθούμε πιο κοντά τότε σημαδεύουμε πιο χαμηλά». Μετά από διάφορες δοκιμές σχηματίζεται το ιδανικό τρίγωνο. Οι κορυφές του, δεν είναι παρά οι δύο άκρες του δέντρου και η θέση του εργαλείου. Οι πλευρές του τριγώνου αποτελούνται από το δέντρο, την γραμμή που θα μετρήσουμε στο έδαφος και την οπτική ακτίνα. Με αυτή τη διαδικασία παρουσιάζεται στους μαθητές η γεωμετρική έννοια: πλευρά τριγώνου. Έτσι λοιπόν υπολογίζουμε την απόσταση μεταξύ του δέντρου και του εργαλείου.



Το τρίγωνο ACD που σχηματίζεται είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. Όταν το εργαλείο είναι κατακόρυφο όπως και το προς μέτρηση ύψος είναι ίσο με SS΄ (SB + BS΄= SB + AB, διότι ABS΄είναι ορθογώνιο και ισοσκελές).

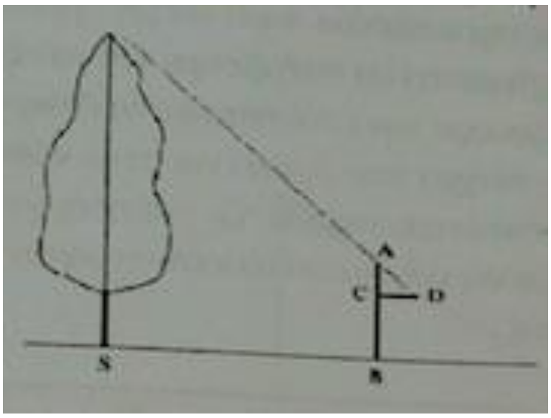


Δραστηριότητα 2

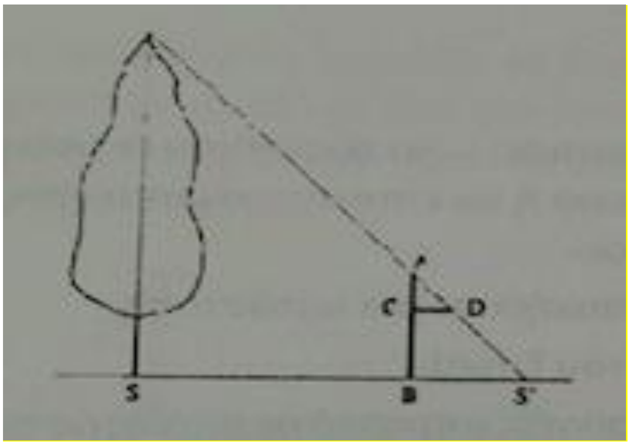
Παιδαγωγικός σκοπός: Να μπορέσουν οι μαθητές να αναπαραστήσουν την κατάσταση που βίωσαν και το σχέδιο να μετασχηματιστεί σε γεωμετρικό σχήμα λαμβάνοντας υπόψιν τις ιδιότητες του.

Υλικά: Φύλλα χαρτιού με τετραγωνάκια.

Ξεκινώντας, ζητάμε από τους μαθητές να σχεδιάσουν την προηγούμενη κατάσταση πειραματισμού και μετρήσεων προκειμένου να υπολογιστεί το ύψος του δέντρου με τα τετραγωνάκια του χαρτιού. Αυτή η διαδικασία δημιουργεί την ανάγκη να χρησιμοποιήσουμε τις γραμμές προκειμένου να «αντικαταστήσουμε» το δέντρο, το εργαλείο και το έδαφος αλλά και να μπορέσουμε να ευθυγραμμίσουμε τα σημεία A και D του εργαλείου με την κορυφή του δέντρου. Το τρίγωνο που σχηματίζεται είναι ισοσκελές και ορθογώνιο. Στη γεωμετρία ισχύει ένας πολύ βασικός κανόνας ο οποίος καλό είναι να τηρείται: «όσο πιο ακριβές είναι το σχήμα μας, τόσο πιο εύκολα θα οδηγηθούμε στα σωστά συμπεράσματα».



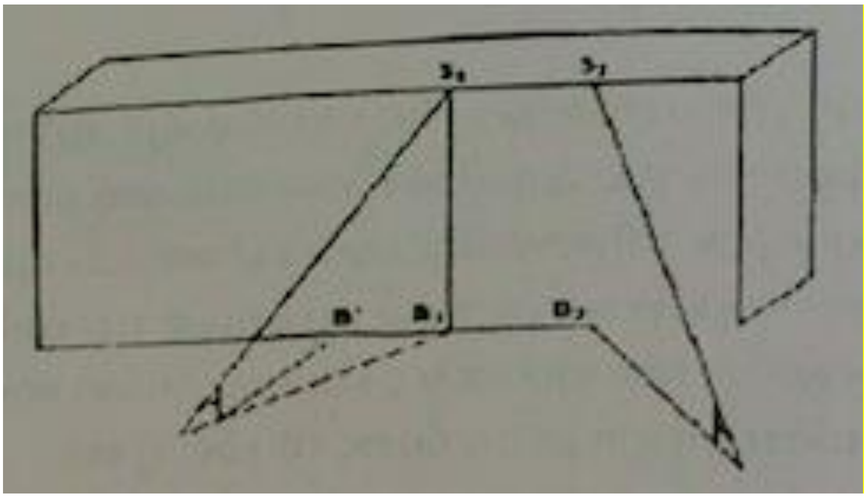
Έχοντας αναπαραστήσει γραφικά το πρόβλημα αντιλαμβανόμαστε ότι η απόσταση μεταξύ του δέντρου και του εργαλείου δεν είναι ίση με το ύψος του δέντρου. Το τρίγωνο που τώρα παρουσιάζει ενδιαφέρον για μελέτη δεν είναι εκείνο που νομίζαμε αρχικά αλλά αυτό που σχηματίζεται αν προεκτείνουμε την οπτική γωνία στο έδαφος. Το τρίγωνο είναι ισοσκελές και ορθογώνιο και έτσι υπολογίζουμε στο έδαφος μια απόσταση ίση με το ύψος του δέντρου.



Δραστηριότητα 3:

Παιδαγωγικός σκοπός: Οι μαθητές τώρα καλούνται να εφαρμόσουν τις γνώσεις τους σε μια κατάσταση λίγο διαφορετική από αυτή της δραστηριότητας 2.

Το ζητούμενο της δραστηριότητας 3 είναι ο υπολογισμός του ύψους του σχολείου. Οι ομάδες των μαθητών δουλεύουν στο συγκεκριμένο πρόβλημα ξεχωριστά η μια από την άλλη και από διαφορετικά σημεία της αυλής του σχολείου. Αφού κάνει κάθε ομάδα τις μετρήσεις της, στη συνέχεια σχεδιάζουμε τη δραστηριότητα και σχολιάζουμε τα διάφορα αποτελέσματα. Ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δοθεί στο γεγονός ότι ενδεχομένως το σημείο που σκοπεύουμε στη σκεπή του σχολείου και το σημείο στο πόδι της καθέτου μπορεί να μη βρίσκονται πάνω στην ίδια κάθετη. Αν συμβεί αυτό, εκεί θα πρέπει να διευκρινίσουμε στους μαθητές την ανάγκη να μετρήσουμε την απόσταση στο έδαφος από το εργαλείο μέχρι το σημείο που βρίσκεται στην κάθετη από τη σκεπή και όχι ως προς το κοντινότερο σημείο. Ο καθηγητής μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές με την υπόδειξη ότι για να εντοπίσουν την κάθετη πλευρά μπορούν να εκμεταλλευτούν κάποια στοιχεία του κτιρίου (πχ. παράθυρα, σωληνώσεις).

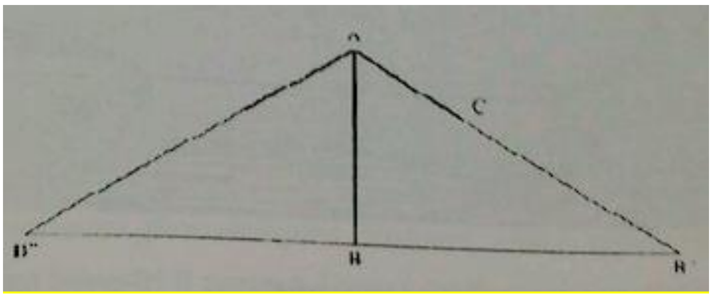


Δραστηριότητα 4:

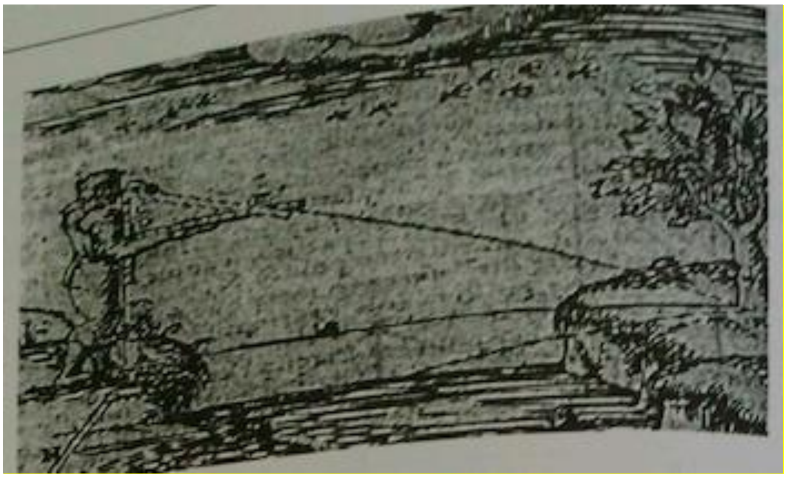
Παιδαγωγικός σκοπός: Η μελέτη του ισοσκελούς τριγώνου από τους μαθητές ή η επαναχρησιμοποίηση των ιδιοτήτων του. Να γεωμετρικοποιήσουν μια κατάσταση – πρόβλημα.

Υλικά: εργαλείο του Errard.

Διατυπώνουμε στους μαθητές το εξής πρόβλημα. «Βρισκόμαστε στις όχθες ενός ποταμού που δεν μπορούμε να διασχίσουμε και θέλουμε να μετρήσουμε το πλάτος του». Τι πρέπει να κάνουμε για να μετρήσουμε το πλάτος; (Το ίδιο πρόβλημα μπορεί να παρουσιαστεί χρησιμοποιώντας το παράδειγμα ενός δρόμου αντί ενός ποταμού). Οι ομάδες των μαθητών έχοντας κατασκευάσει από προηγούμενη δραστηριότητα το εργαλείο του Errard, το μελετούν, το επεξεργάζονται και τους ενθαρρύνουμε να διατυπώσουν τις ιδέες και τις σκέψεις τους. Προσπαθούμε να τους οδηγήσουμε στη σκέψη ότι θα πρέπει να τοποθετήσουν το εργαλείο κατακόρυφα στην όχθη του ποταμού και το δεύτερο μη σταθερό κομμάτι του ξύλου θα πρέπει να στοχεύει στην αντίπερα όχθη. Στη δραστηριότητα αυτή σχηματίζεται ένα ιδεατό ορθογώνιο για το οποίο γνωρίζουμε μια πλευρά (το εργαλείο) και μια γωνία. Αν στρέψουμε το εργαλείο προς την ξηρά στο σημείο που βρισκόμαστε, μετατρέπουμε την απρόσιτη απόσταση σε προσιτή κάνοντας χρήση των ιδιοτήτων του ισοσκελούς τριγώνου.



Στο πρόβλημα μας ο παρατηρητής βρίσκεται στην όχθη του ποταμού. Τοποθετεί το AC με τέτοιο τρόπο ώστε να στοχεύει την αντίπερα όχθη B΄. Περιστρέφουμε ολόκληρο το εργαλείο γύρω από το AB και προσδιορίζουμε το B΄΄πάνω στο έδαφος προς την μεριά μας. Η απρόσιτη απόσταση BB΄ είναι τότε ίση με την προσιτή και μετρήσιμη απόσταση BB΄΄. Το εργαλείο δεν είναι υποχρεωτικό να εκτελεί ένα ημικύκλιο. Η ιδέα αυτή μας επιτρέπει τον σχεδιασμό ισοσκελών τριγώνων και μας δίνει την ευκαιρία να συζητήσουμε τις ιδιότητες αυτών των τριγώνων.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο

Η έρευνά μας

Στόχοι και ερευνητικά ερωτήματα

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε την έρευνά μας η οποία πραγματοποιήθηκε κατά τη διάρκεια του σχολικού έτους 2015-16. Κύριος στόχος της έρευνας ήταν να διερευνήσει τις απόψεις και τις γνώσεις καθηγητών των Μαθηματικών της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης σχετικά με την Ιστορία των Μαθηματικών. Πιο συγκεκριμένα επικεντρωθήκαμε στο Πυθαγόρειο Θεώρημα και την έννοια των άρρητων αριθμών. Με βάση τους στόχους της έρευνας διατυπώνονται τα παρακάτω ερευνητικά ερωτήματα:

- 1. Ποια είναι η επαφή των καθηγητών με την Ιστορία των Μαθηματικών;
- 2. Τι γνωρίζουν οι καθηγητές για τους Πυθαγορείους και ποιες είναι οι απόψεις τους γι'αυτούς, την απόδειξη του Πυθαγόρειου Θεωρήματος και την ανακάλυψη των άρρητων αριθμών;
- 3. Πώς διδάσκεται σήμερα το Πυθαγόρειο θεώρημα και οι άρρητοι; Οι υποδείξεις του Υπουργείου Παιδείας, οι τρόποι διδασκαλίας των εκπαιδευτικών και η αξιοποίηση των νέων τεχνολογιών στη διδασκαλία.
- 4. Ποιες μεθοδολογίες χρησιμοποιούν στη διδασκαλία των δύο αυτών εννοιών;
- 5. Ποιες δυσκολίες αντιμετώπισαν οι καθηγητές στη διδασκαλία του Πυθαγορείου Θεωρήματος και των αρρήτων; ποιες δυσκολίες αντιμετώπισαν οι μαθητές;
- 6. Χρησιμοποιούν την ιστορία των Μαθηματικών στη διδασκαλία των δύο αυτών εννοιών κι αν ναι με ποιο τρόπο;
- 7. Ποια είναι τα αποτελέσματα της χρήσης της ιστορίας των Μαθηματικών; Ποια η χρησιμότητά της στη διδασκαλία;
- 8. Θα μπορούσαν να εφαρμοστούν οι αρχαίες μέθοδοι διδασκαλίας των Μαθηματικών των Πυθαγορείων στη σημερινή διδασκαλία των Μαθηματικών και με ποιο τρόπο;

Σχεδιασμός έρευνας

Οι αναλύσεις που χρησιμοποιούνται στην Στατιστική είναι οι ποιοτικές και οι ποσοτικές. Η ποιοτική έρευνα έχει στόχο να περιγράψει και να αναλύσει κοινωνικά φαινόμενα, καταστάσεις ομάδων απαντώντας στα ερωτήματα «πώς» και «γιατί» (Ιωσηφίδης 2001). Τα βασικότερα πλεονεκτήματα μιας ποιοτικής ανάλυσης είναι ότι διερευνά λεπτομέρειες που δεν μπορούν πολλές φορές να αποτυπωθούν ποσοτικά, ότι αναδεικνύει φαινόμενα που δεν μπορούν εξαρχής να προβλεφθούν και ότι αυξάνει την αντίληψη του ερευνητή σε κοινωνικά ζητήματα, καθώς προσπαθεί να κατανοήσει το φαινόμενο μέσα από υποκειμενικές απόψεις. Σημαντικά μειονεκτήματα των ποιοτικών ερευνών είναι ότι δεν μπορούν να εφαρμοστούν σε μεγάλα δείγματα, ότι δεν μπορεί να γίνει εύκολα η γενίκευση ή η σύγκριση των αποτελεσμάτων που προκύπτουν, ότι ο τρόπος ανάλυσης επηρεάζεται από τις προσωπικές αντιλήψεις του ερευνητή, η παρουσία του οποίου μπορεί να παίξει καθοριστικό ρόλο στην ψυχολογία των συμμετεχόντων επηρεάζοντας πιθανόν τα αποτελέσματα. Ένα πλεονέκτημα των ποσοτικών ερευνών είναι ότι μπορούν να αποθηκεύσουν μεγάλο όγκο πληροφοριών σε σύντομο χρονικό διάστημα τα οποία μετατρέπονται σε δεδομένα και αξιοποιούνται για την εξαγωγή αντικειμενικών συμπερασμάτων που δεν υπόκεινται στην υποκειμενική κρίση του ερευνητή (Louis Cohen & Lawrence Manion & Keith Morrison, 2007). Ακόμη, δίνεται η δυνατότητα συσχέτισης μεταβλητών, ελέγχου υποθέσεων και γενίκευσης των συμπερασμάτων εφόσον το δείγμα είναι σωστά επιλεγμένο (John W.Creswell, 2013) δηλαδή μπορεί να θεωρηθεί αντιπροσωπευτικό του πληθυσμού (Φαρμάκης Ν., 2017). Συνήθως η μελέτη ενός φαινομένου αρχίζει από τις ποιοτικές έρευνες και κατόπιν πραγματοποιούνται ποσοτικές όπου εντοπίζονται συσχετίσεις. Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται στις ποσοτικές και ποιοτικές έρευνες δεν πρέπει να αντιμετωπίζονται ως ρουτίνα από τον ερευνητή αλλά στόχος είναι να σκεφτεί από μόνος του για να απαντήσει στην πολυπλοκότητα των προβλημάτων (Μορέν, 2001, σελ. 39). Η επιλογή της μεθόδου εξαρτάται από το είδος του ερευνητικού προβλήματος και τις επιλογές του ερευνητή. Στην έρευνα χρησιμοποιήθηκε διαδικασία ατομικών ημιδομημένων συνεντεύξεων, οι οποίες αναλύθηκαν ποσοτικά με χρήση Πινάκων και Γραφημάτων αλλά και ποιοτικά με παρουσίαση των αντίστοιχων αποσπασμάτων.

Ηθικά ζητήματα

Τα θέματα ηθικής δεοντολογίας θεωρούνται ιδιαίτερα σημαντικά στην ψυχολογία των συμμετεχόντων και απαραίτητα να ληφθούν υπόψιν από τον ερευνητή όπως ορίζει η Αμερικανική Ψυχολογική Εταιρεία (APA, 2001) αλλά και η Βρετανική (BPS, 2014). Συγκεκριμένα, πριν πραγματοποιηθεί η έρευνα ζητήθηκε έγκριση για το θέμα της ερευνητικής πρότασης από τον ιδρυματικό φορέα και τον επόπτη. Επιπλέον, οι συμμετέχοντες ενημερώθηκαν ότι η συμμετοχή τους είναι ανώνυμη, εθελοντική κι ότι δεν θα χρησιμοποιηθεί κανένα προσωπικό τους στοιχείο και ότι οι απαντήσεις τους θα χρησιμοποιηθούν μόνο για ερευνητικούς σκοπούς. Η συμμετοχή τους στη διαδικασία οριστικοποιήθηκε με τη δική τους συγκατάθεση και εφόσον προηγουμένως είχαν ενημερωθεί για το σκοπό της έρευνας και τον τρόπο με τον οποίο θα διεξαχθεί. Διασαφηνίστηκε το δικαίωμα να αποχωρήσουν όποτε και αν το θελήσουν ενώ ο ερευνητής δεν επηρέασε την συμμετοχή των ερωτηθέντων της έρευνας.

Διαδικασία-Μέθοδος συλλογής δεδομένων

Στις ποιοτικές έρευνες οι συνήθεις τεχνικές για τη συλλογή δεδομένων είναι οι ημιδομημένες συνεντεύξεις και οι ανοιχτού τύπου ερωτήσεις. Για τη συλλογή των δεδομένων της έρευνας έγιναν τρία είδη συνεντεύξεων: α) ατομική δια ζώσης β) χρήση της διαδικτυακής πλατφόρμας skype και γ) τηλεφωνική συνέντευξη. Για το λόγο αυτό συντάξαμε ένα ερωτηματολόγιο πάνω στο οποίο βασίστηκε η συνέντευξη κι έχοντας αυτό ως βασικό άξονα δίναμε στους καθηγητές τη δυνατότητα να επεκταθούν προκειμένου να διερευνηθούν σε βάθος οι αντιλήψεις και οι απόψεις τους. Οι συνεντεύξεις μαγνητοφωνήθηκαν και είχαν διάρκεια 40-90 λεπτά η καθεμία.

Το ερωτηματολόγιο αποτελείται συνολικά από 18 ερωτήσεις οι οποίες αφορούν τέσσερα βασικά μέρη:

Α) τα ατομικά στοιχεία πληθυσμού (επιστημονική και επαγγελματική κατάρτηση)

Β) τη διδασκαλία των μαθηματικών

Γ) την ιστορία των μαθηματικών (και την αλληλεπίδρασή της με τη διδασκαλία)

Δ) την αυθόρμητη αντίδρασή τους στο άκουσμα του Πυθαγορείου Θεωρήματος και του άρρητου αριθμού.

Στο τέλος της συνέντευξης παρουσιάσαμε στους καθηγητές και μια διδακτική πρόταση την οποία είχαμε ετοιμάσει και ήταν βασισμένη σε ιστορικά στοιχεία σε σχέση με το Πυθαγόρειο Θεώρημα και τους άρρητους. Ο στόχος αυτής της παρέμβασης ήταν να προτείνουμε στους εκπαιδευτικούς ιδέες και τρόπους, ώστε να ενισχύσουν τη διδασκαλία των Μαθηματικών και παράλληλα να την εμπλουτίσουν, κεντρίζοντας ταυτόχρονα το ενδιαφέρον των παιδιών. Οι προτάσεις που παρουσιάζονται, μπορούν να χρησιμοποιηθούν μεμονωμένα είτε κατά τη διάρκεια του μαθήματος από τον διδάσκοντα είτε μέσω ομαδικών εργασιών των μαθητών, δίνοντάς τους έτσι ερέθισμα για προσωπική ενασχόληση και μαθηματική αναζήτηση με την ιστορία των Μαθηματικών.

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε το ερωτηματολόγιο, όπως παρουσιάστηκε στους καθηγητές.

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ

ΠΡΟΣΩΠΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Όνομα:

Τηλέφωνο:

Σχολείο:

Ημερομηνία:

1. Πείτε μου λίγα λόγια για εσάς,

- σπουδές

- μεταπτυχιακό

- διδακτική εμπειρία

- που έχετε διδάξει (φροντιστήριο, σχολείο, ιδιαίτερα)

- τάξεις διδασκαλίας

2. Κατά τη διάρκεια των σπουδών σας παρακολουθήσατε το μάθημα της «Ιστορίας των Μαθηματικών»;

- Ναι

- Όχι

Υπάρχουν ιστορικές αναφορές που σας κέντρισαν το ενδιαφέρον;

Μοιράζεστε κάποιες από αυτές με τους μαθητές σας;

Θυμάστε να μου αναφέρετε ποιες συγκεκριμένα και με ποια αφορμή;

3. Τι σας έρχεται στο νου ακούγοντας την έννοια «Πυθαγόρειο Θεώρημα»;

Τι σας έρχεται στο νου ακούγοντας την έννοια «άρρητος αριθμός»;

4. Αν σας έλεγαν να μιλήσετε για τους Πυθαγόρειους, τι θα αναφέρατε πρώτο;

Από πού έχετε αντλήσει αυτές τις πληροφορίες;

Πιστεύετε ότι το Πυθαγόρειο Θεώρημα συνδέεται με τον Πυθαγόρα και τους Πυθαγόρειους, τους Αιγύπτιους, τους Βαβυλώνιους ή με άλλους λαούς;

Πιστεύετε ότι οι άρρητοι αριθμοί ήταν ανακάλυψη των Πυθαγορείων, των Αιγυπτίων, των Βαβυλωνίων ή άλλων λαών ή σχολών;

5. Όταν πρόκειται να διδάξετε το "Πυθαγόρειο Θεώρημα", πώς οργανώνετε τη διδασκαλία σας;

Όταν πρόκειται να διδάξετε τους "άρρητους", πώς οργανώνετε τη διδασκαλία σας;

Πιστεύετε ότι υπάρχει σύνδεση μεταξύ των δύο αυτών εννοιών, ναι ή όχι και γιατί;

Θεωρείτε ότι πρέπει να διδάσκονται με κάποια συγκεκριμένη σειρά, δηλαδή πρώτα το Πυθαγόρειο Θεώρημα και μετά οι άρρητοι ή αντίστροφα;

6. Ξεκαθαρίζετε στη διδασκαλία σας το ευθύ και το αντίστροφο του Θεωρήματος και με ποιο τρόπο;

7. Ποιες θεωρείτε ως προαπαιτούμενες γνώσεις για τα παιδιά που θα διδαχθούν για πρώτη φορά αυτές τις δύο έννοιες;

8. Θεωρείτε πως η ετυμολογική ανάλυση των μαθηματικών εννοιών βοηθάει τους μαθητές;

9. Θεωρείτε ότι η χρήση της ιστορίας των μαθηματικών βοηθάει τους μαθητές να κατανοήσουν ορισμένες μαθηματικές έννοιες;

10. Χρησιμοποιείτε την ιστορία στη διδασκαλία των δύο αυτών εννοιών;

- Ναι

- Όχι

Αν ναι, πώς;

11. Σας έχουν φανεί χρήσιμα τα ιστορικά σημειώματα των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών;

Πιο συγκεκριμένα στο "Πυθαγόρειο Θεώρημα" και στους "άρρητους" εκτιμάτε ότι τα ιστορικά σημειώματα δίνουν κίνητρα στους μαθητές;

Πιστεύετε ότι έχει καλύτερα αποτελέσματα στην κατανόηση των εννοιών;

12. Αξιοποιείτε τις νέες τεχνολογίες στη διδασκαλία σας; (για παράδειγμα χρησιμοποιείτε το φωτόδεντρο στα μικροπειράματα του σχολικού βιβλίου;

Παραπέμπετε τους μαθητές σας σε διαδικτυακές σελίδες με συνδεόμενες οπτικές αναπαραστάσεις του Πυθαγορείου Θεωρήματος ή σε βίντεο με ζωντανή αναπαράσταση των βημάτων της απόδειξης;

Κάνετε χρήση δυναμικών εργαλείων όπως το Geometer's Sketchpad ή το Geogebra;)

13. Ποια θεωρείτε ότι είναι η χρησιμότητα του Πυθαγορείου Θεωρήματος και των άρρητων αριθμών στην καθημερινότητα;

Γνωρίζετε κάποιες εφαρμογές τους;

Τις αναφέρετε στους μαθητές σας;

14. Τι δυσκολίες αντιμετωπίσατε στη διδασκαλία του Π.Θ και των άρρητων;

Τι δυσκολίες αντιμετώπισαν οι μαθητές σας;

Έχετε σκεφτεί ποτέ ότι μπορεί να έχουν βρεθεί σε παρόμοια θέση με τους μαθητές σας οι Πυθαγόρειοι;

15. Αποδείξεις Πυθαγορείου Θεωρήματος

Εκτός της απόδειξης του Π.Θ στο σχολικό βιβλίο στη σελ.127 δείχνετε και άλλες αποδείξεις στους μαθητές σας;

Γνωρίζετε άλλες και από ποιες πηγές;

Αν ναι, τις έχετε δείξει στους μαθητές σας και αν όχι γιατί;

16. Ποιες μεθοδολογίες χρησιμοποιείτε για την προσέγγιση ενός άρρητου αριθμού;

Ποιές μεθοδολογίες χρησιμοποιείται για τον ακριβή προσδιορισμό τους;

17. Πόσο σημαντικές θεωρείτε αυτές τις δύο έννοιες στην εξέλιξη και πορεία των μαθηματικών;

18. Πιστεύετε τελικά ότι είναι χρήσιμη η ιστορία των μαθηματικών στην εκπαιδευτική διαδικασία και γιατί;

Σας ευχαριστώ πολύ!

ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΡΟΤΑΣΗ

Πυθαγόρειο Θεώρημα

Σε αυτό το σημείο θα σας δείξω κάποιες από τις αποδείξεις του Πυθαγορείου Θεωρήματος συμπεριλαμβανομένης αυτής του βιβλίου.
Ποια από αυτές σας φαίνεται διδακτικά πιο χρήσιμη και γιατί;
Από την ιστοσελίδα: **http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml**

A) The fourth approach starts with the same four triangles, except that, this time, they combine to form a square with the side (a + b) and a hole with the side c. We can compute the area of the big square in two ways. Thus, $(a + b)^2 = 4\cdot ab/2 + c^2$, simplifying which we get the needed identity.

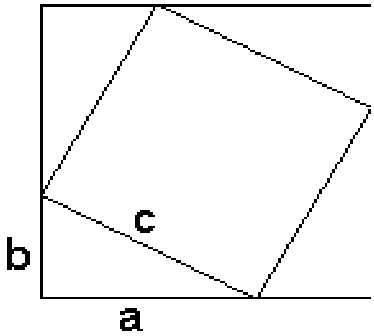
A proof which combines this with **proof #3** is credited to the 12th century Hindu mathematician Bhaskara (Bhaskara II):

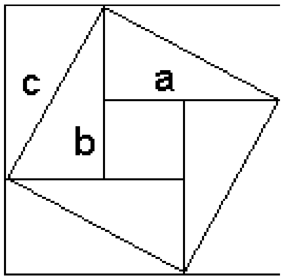
Nelsen (p. 4) gives Bhaskara credit also for **proof #3**. Here we add the two identities

$c^2 = (a - b)^2 + 4 \cdot ab/2$ and

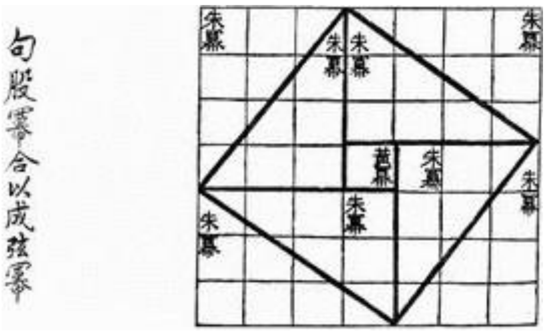
$c^2 = (a + b)^2 - 4 \cdot ab/2$ which gives

$2c^2 = 2a^2 + 2b^2$.





The latter needs only be divided by 2. This is the algebraic proof 36 in **Loomis' collection.** Its variant, specifically applied to the **3-4-5 triangle**, has featured in the Chinese classic Chou Pei Suan Ching dated somewhere between 300 BC and 200 AD and which Loomis refers to as proof 253.

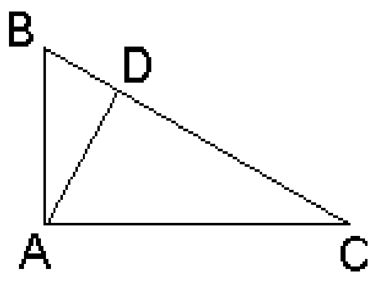


B) We start with the original right triangle, now denoted ABC, and need only one additional construct – the **altitude AD**. The triangles ABC, DBA, and DAC are similar which leads to two ratios:

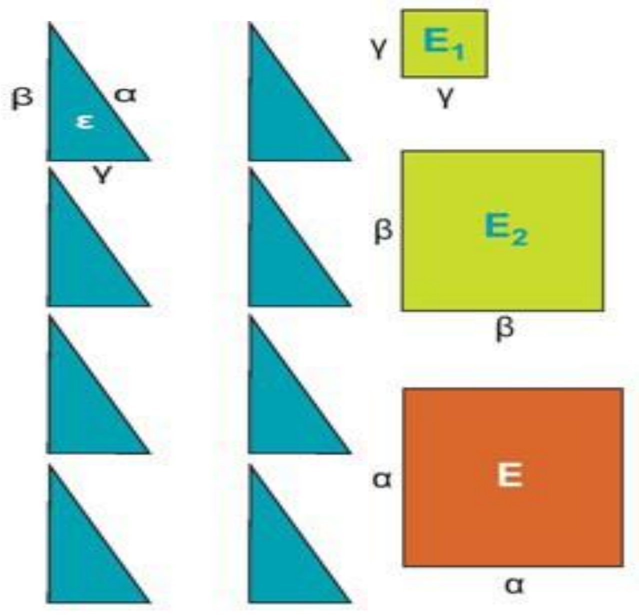
AB/BC = BD/AB and AC/BC = DC/AC. Written another way these become

AB·AB = BD·BC and AC·AC = DC·BC

Summing up we get AB·AB + AC·AC = BD·BC + DC·BC = (BD+DC)·BC = BC·BC.



Γ) Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελ. 127-128



Δίνονται οκτώ ίσα ορθογώνια τρίγωνα με κάθετες πλευρές β, γ και υποτείνουσα α και τρία τετράγωνα με πλευρές α, β, γ αντίστοιχα.

α) Να υπολογίσετε τα εμβαδά ε, Ε, Ε1, Ε2 των διπλανών τριγώνων και τετραγώνων.

β) Να τοποθετήσετε κατάλληλα τα τρίγωνα και τετράγωνα, ώστε να σχηματίσουν δύο νέα τετράγωνα, πλευράς (β + γ).

Λύση

α) Έχουμε ότι:

$E=\alpha^2$, $E1=\gamma^2$, $E2=\beta^2$

β) Αρκεί να τα τοποθετήσουμε όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα. Παρατηρούμε ότι μπορούμε να γράψουμε το εμβαδόν των ίσων τετραγώνων πλευράς $(\beta + \gamma)$ με δύο διαφορετικούς τρόπους:

1ος τρόπος:

$E1 + E2 + 4\varepsilon$ από το πρώτο τετράγωνο που αποτελείται από 4 τρίγωνα και τα δύο τετράγωνα πλευράς β, γ αντίστοιχα.

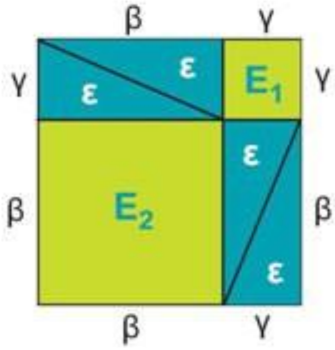
Η σχέση αυτή, που συνδέει τις κάθετες πλευρές με την υποτείνουσα ενός τριγώνου, εκφράζει το **Πυθαγόρειο θεώρημα**, δηλαδή ισχύει:

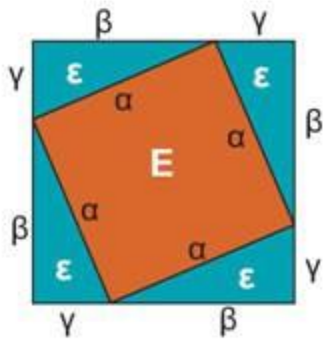
ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το άθροισμα των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας.

2ος τρόπος:

$E + 4\varepsilon$ από το δεύτερο τετράγωνο που αποτελείται πάλι από 4 τρίγωνα και το τετράγωνο πλευράς α.

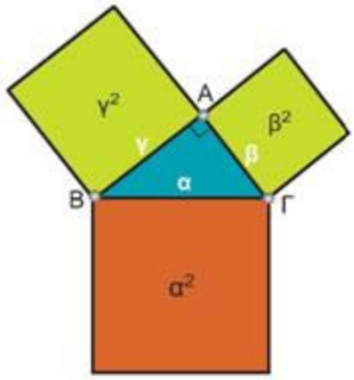




Επομένως, θα ισχύει ότι: $E1 + E2 + 4\varepsilon = E + 4\varepsilon$ ή $E1 + E2 = E$ ή $\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2$

Παρατήρηση:

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α.
Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα ισχύει ότι:
$α^2 = β^2 + γ^2$, δηλαδή το εμβαδόν του μεγάλου πορτοκαλί τετραγώνου είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των δύο πράσινων τετραγώνων.



Δ) Απόδειξη με νερό

https://www.youtube.com/watch?v=CAkMUdeB06o

Ε) http://dide.ker.sch.gr/ekfe/epiloges/6_artra/71_pythagorio.doc

ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΚΗ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΙΟΝΙΩΝ ΝΗΣΩΝ

Διεύθυνση Β/θμιας Εκ/σης Κέρκυρας

Εργαστηριακό Κέντρο Φυσικών Επιστημών Κέρκυρας

Πάνος Μουρούζης *Ημερομηνία δημοσίευσης 8 - 6 - 2014*

Απόδειξη με πειραματική φυσική

Το πυθαγόρειο θεώρημα όπως θα δείξουμε είναι ισοδύναμο με το νόμο του παραλληλογράμμου. Ως γνωστό ο νόμος του παραλληλογράμμου μας λέει ότι η συνισταμένη δύο διανυσμάτων δίνεται κατά μέτρο και κατεύθυνση από τη διαγώνιο του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν τα δύο διανύσματα. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η πειραματική απόδειξη του νόμου αυτού όταν τα διανύσματα είναι δυνάμεις. Παρατηρήστε ότι όταν η γωνία είναι ορθή, το σχηματιζόμενο παραλληλόγραμμο είναι ορθογώνιο, οπότε η συνισταμένη είναι η υποτείνουσα ενός ορθογωνίου τριγώνου. Το πείραμα, όπως φαίνεται και από το σχήμα, μας αποκαλύπτει ότι σε αυτή την περίπτωση ισχύει η σχέση, δηλαδή το Πυθαγόρειο Θεώρημα.

Άρρητοι

Προσεγγιστικές μέθοδοι

Α) Σχολικό βιβλίο σελ. 45-46

$$
\begin{array}{rcl}
1 = 1^2 & < 2 < & 2^2 = 4 \\
1,96 = 1,4^2 & < 2 < & 1,5^2 = 2,25 \\
1,9881 = (1,41)^2 & < 2 < & (1,42)^2 = 2,0164 \\
1,9994 = (1,414)^2 & < 2 < & (1,415)^2 = 2,0022 \\
1,99996 = (1,4142)^2 & < 2 < & (1,4143)^2 = 2,00024 \\
1,9999899 = (1,41421)^2 & < 2 < & (1,41422)^2 = 2,000018
\end{array}
$$

....

Άρα:

$$
\begin{array}{c}
1 < \sqrt{2} < 2 \\
1,4 < \sqrt{2} < 1,5 \\
1,41 < \sqrt{2} < 1,42 \\
1,414 < \sqrt{2} < 1,415 \\
1,4142 < \sqrt{2} < 1,4143 \\
1,41421 < \sqrt{2} < 1,41422
\end{array}
$$

....

Έχουμε:

με **προσέγγιση χιλιοστού**: $\sqrt{2} = 1,414$

με **προσέγγιση δεκάκις χιλιοστού**: $\sqrt{2} = 1,4142$

με **προσέγγιση εκατοντάκις χιλιοστού**: $\sqrt{2} = 1,41421$ κ.ο.κ.

Οι αριθμοί αυτοί λέγονται **ρητές προσεγγίσεις του αριθμού $\sqrt{2}$.**

Β) Μέθοδος των Βαβυλωνίων ή μέθοδος του Ήρωνα

Παναγιώτης Θεοδώρου Αδαμάκος
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

Μέθοδος Αρχύτα

ΗΡΩΝ

Έστω ότι θέλουμε να βρούμε τη $\sqrt{2}$ με προσέγγιση π.χ. 5 δεκαδικών ψηφίων

$$\alpha_{\nu+1}=\frac{1}{2}\left(a_\nu+\frac{A}{a_\nu}\right)$$ το Α= 2 και a_1

είναι ένας θετικός αριθμός, εξυπηρετεί όμως να είναι αυτός που το τετράγωνό του πλησιάζει το Α ,έτσι είναι $\alpha_1=1$

$$\alpha_2=\frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{1}\right)=1.5$$

$$a_3=\frac{1}{2}\left(1{,}5+\frac{2}{1.5}\right)=1.41666$$

$$\alpha_4=\frac{1}{2}\left(1.41666+\frac{2}{1.41666}\right)=1.41421$$

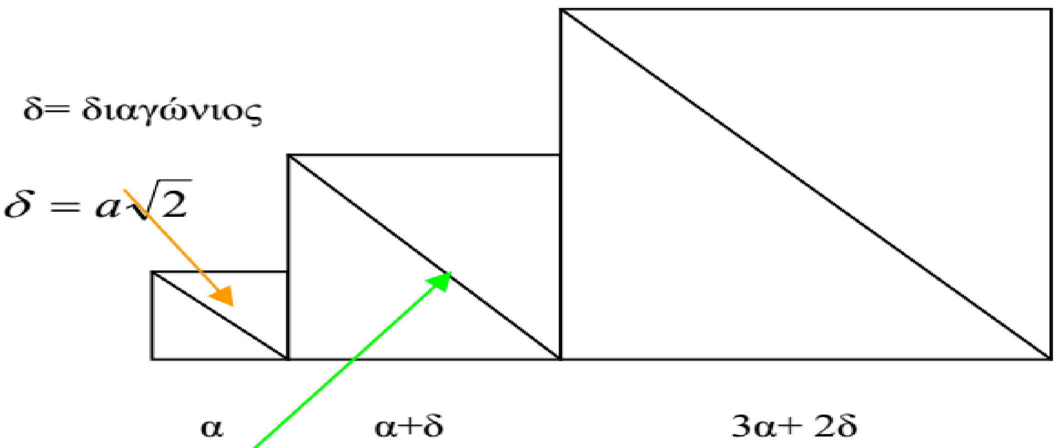
$$a_5=\frac{1}{2}(1.41421+\frac{2}{1.41421})=1{,}41421$$

οπότε επετεύχθη η **σύγκλιση** και

$$\sqrt{2}=1{,}41421$$

Γ)

ΘΕΩΝ



$$\frac{\delta}{\alpha} = \frac{\delta_{\nu\acute{\varepsilon}\alpha}}{\alpha+\delta} \quad (*), \quad \delta_{\nu\acute{\varepsilon}\alpha} = \frac{\delta}{\alpha}(\alpha+\delta) = \sqrt{2}\,(\alpha+\delta)$$
$$= a\sqrt{2} + \delta\sqrt{2} = \delta + \alpha\sqrt{2}\sqrt{2} = 2\alpha + \delta$$

νέα πλευρά=[(παλιά) α+δ]+ [(διαγώνιος) 2α+δ]= 3α+2δ κ.ο.κ., έτσι θα έχουμε:

(*)Τα τετράγωνα είναι όμοια πολύγωνα οπότε οι πλευρές τους είναι ανάλογες

Πλευρικοί	**Διαμετρικοί**
α_2= 1α+ 1δ	δ_2= 2α+ 1δ
α_3= 3α+ 2δ	δ_3= 4α+ 3δ
α_4= 7α+ 5δ	δ_4= 10α+ 7δ
α_5= 17α+ 12δ	δ_5= 24α+ 17δ
α_6= 41α+ 29δ	δ_6= 58α+ 41δ
α_7= 99α+ 70δ	δ_7= 140α+ 99δ
α_8=239α+169δ	δ_8=338α+ 239δ
α_9= 577α+408δ	δ_9=816α+577δ
α_{10}=1393α+985δ	δ_{10}=1970α+1393δ

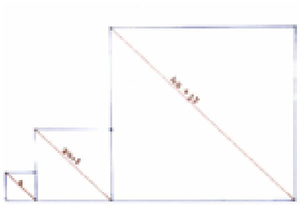
και γενικά $a_{\nu+1} = \kappa\alpha_\nu + \lambda\delta_\nu$ **και**

$$\delta_{\nu+1} = \pi\alpha_\nu + \rho\delta_\nu$$

οι λόγοι $\frac{\kappa}{\lambda}, \frac{\pi}{\rho}$ **τείνουν** στο $\sqrt{2}$

$$\frac{577}{408} = 1.4142156$$

$$\frac{1393}{985} = 1,414213$$



Νέα πλευρά (τετραγώνου)=
Παλαιά + Διαγώνιος
$\alpha_\nu = \alpha_{\nu-1} + \delta_{\nu-1}$

$$\frac{1}{1} \to \frac{3}{2} \to \frac{7}{5} \to \frac{17}{12} \to \frac{41}{29} \to \frac{99}{70} = 1{,}4142057. \to \sqrt{2}$$

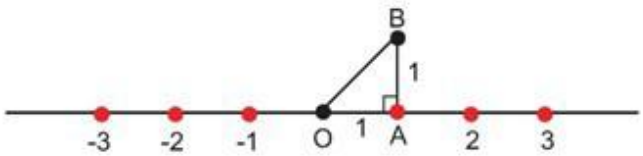
α 1α+1δ , 3α+2δ , 7α+5δ , 17α+12δ , 41α+29δ , και γενικά κα + λδ (όπου ο λόγος κ/λ τείνει στον άρρητο)

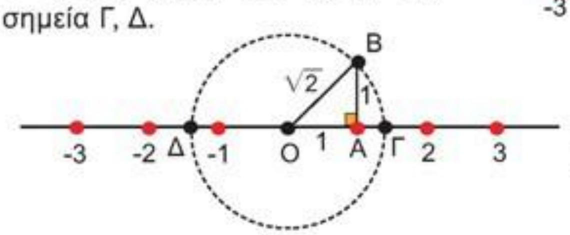
Για να βρούμε την πλευρά του επομένου τετραγώνου ,προσθέτουμε στην παλιά πλευρά τη διαγώνιο, όπου **κ** είναι ο συντελεστής του α (πλευράς) και **λ** είναι ο συντελεστής του δ (διαγωνίου), οπότε οι λόγοι τείνουν στη τετραγωνική ρίζα του αριθμού.

Μέθοδοι εύρεσης τετραγωνικής ρίζας με ακρίβεια

Α) Σχολικό βιβλίο σελ.47-48

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε: $OB^2 = OA^2 + AB^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ ή $OB = \sqrt{2}$. Με κέντρο το Ο και ακτίνα ΟΒ κατασκευάζουμε κύκλο ο οποίος τέμνει τον άξονα στα σημεία Γ, Δ.





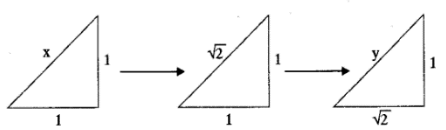
Στο σημείο Γ βρίσκεται ο άρρητος $\sqrt{2}$, ενώ στο Δ βρίσκεται ο άρρητος $-\sqrt{2}$.

B) Μέθοδος σπιράλ

Έχετε ποτέ σκεφτεί πώς ένα σπιράλ σχετίζεται με τις τετραγωνικές ρίζες;

Ας δούμε πώς:

α) Για τη μέθοδο αυτή χρειαζόμαστε το **θεώρημα του Πυθαγόρα.** (Σχ. 1).



Σχ. 1

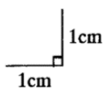
Με το Πυθαγόρειο θεώρημα στα ορθογώνια τρίγωνα (Σχ. 1) μπορούμε να υπολογίσουμε κάθε φορά την υποτείνουσα.

$1^2 + 1^2 = x^2$	$1^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 = y^2$
$1 + 1 = x^2$	$1 + 2 = y^2$
$2 = x^2$	$3 = y^2$
$\sqrt{2} = x$	$\sqrt{3} = y$

β) Για τη μέθοδο αυτή χρειαζόμαστε, ακόμα, ένα τρίγωνο για να φτιάχνουμε ορθές γωνίες, ένα μολύβι με λεπτή μύτη και ένα υποδεκάμετρο για μετρήσεις. Τα πάντα εξαρτώνται από την ακρίβεια που θα έχει το σχήμα μας.

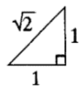
Ας ξεκινήσουμε:

- Σχεδιάζουμε μία ορθή γωνία με πλευρές ακριβώς 1 cm.



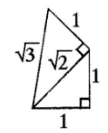
Σχ. 2

- Το μήκος της υποτείνουσας που συμπληρώνει το τρίγωνο (Σχ. 3) είναι ίσο με $\sqrt{2}$.



Σχ. 3

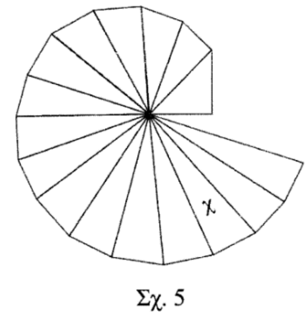
- Χρησιμοποιούμε, τώρα, την υποτείνουσα που μόλις βρήκαμε σαν κάθετη πλευρά και κατασκευάζουμε μια άλλη ορθή γωνία (Σχ. 4) με άλλη κάθετη ακριβώς 1 cm



Σχ. 4

- Το μήκος της υποτείνουσας που συμπληρώνει το δεύτερο ορθογώνιο τρίγωνο (Σχ. 4) είναι ίσο με $\sqrt{3}$.

- Με αυτό τον τρόπο μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα σπιράλ (Σχ. 5).



Σχ. 5

Τα μήκη των «ακτινωτών» τμημάτων είναι: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \ldots$

- Για να βρούμε, επομένως, την τετραγωνική ρίζα του 13, $\sqrt{13}$, δεν έχουμε παρά να μετρήσουμε όσο πιο καλή ακρίβεια μπορούμε την αντίστοιχη «ακτίνα» χ.

Σημείωση:
Η μέθοδος που μόλις παρακολουθήσαμε στηρίζεται στην ακρίβεια της κατασκευής μας. Μας δίδει απαντήσεις με ένα το πολύ δεκαδικό ψηφίο, για αριθμούς από 2 μέχρι και το 17. Για αριθμούς πάνω από 17, το σχήμα γίνεται πολύπλοκο.

Τέλος Διδακτικής πρότασης

Πληθυσμός-Δείγμα

Πληθυσμός της έρευνας θεωρείται το σύνολο των 15 Ελλήνων καθηγητών Μαθηματικών, οι οποίοι δέχτηκαν να απαντήσουν στα ερωτήματα που τους τέθηκαν μέσω της έρευνας. Αναφορικά με το δείγμα (βλέπε Πίνακες και Γραφήματα 1-5) 10 ερωτηθέντες έχουν αποφοιτήσει από το Μαθηματικό των Αθηνών, 2 από το αντίστοιχο της Σάμου ενώ το Μαθηματικό Ιωαννίνων, Πάτρας και το Πανεπιστήμιο Essex είχαν από 1 απόφοιτο. Επιπλέον, σχετικά με το Μεταπτυχιακό των εκπαιδευτικών υπήρχε δυνατότητα πολλαπλής απάντησης. Συγκεκριμένα 7 εκπαιδευτικοί ανέφεραν ότι δεν έχουν ασχοληθεί με μεταπτυχιακές σπουδές, ενώ 3 έχουν ασχοληθεί με Στατιστική και επιχειρησιακή έρευνα, 2 με μαθηματικές σπουδές στην εκπαίδευση, 2 επίσης με Διδακτική των Μαθηματικών, 1 με Μαθηματικά αγοράς και παραγωγής και επίσης 1 με Υπολογιστικά Μαθηματικά και Πληροφορική. Αναφορικά με τα έτη διδασκαλίας 8 εκπαιδευτικοί ανέφεραν ότι διδάσκουν 21-30 χρόνια, 4 από 31-40 χρόνια και 3 ότι διδάσκουν 10-20 χρόνια. Σχετικά με το που έχουν διδάξει οι ερωτώμενοι της έρευνας, υπήρξε δυνατότητα πολλαπλής απάντησης και το σύνολο των εκπαιδευτικών (15) ανέφεραν ότι διδάσκουν σε σχολείο, επιπλέον 10 από αυτούς έχουν ασχοληθεί με την παράδοση ιδιαίτερων μαθημάτων και 9 ότι έχουν εργαστεί και σε φροντιστήριο. Τέλος, όσον αφορά στις τάξεις του γυμνασίου και λυκείου που έχουν διδάξει οι συμμετέχοντες στην έρευνα, τα αποτελέσματα έδειξαν ότι 11 εκπαιδευτικοί έχουν διδάξει σε όλες τις τάξεις γυμνασίου και λυκείου. Οι υπόλοιποι 4 έχουν διδάξει στις περισσότερες τάξεις του Γυμνασίου και του Λυκείου. Αναλυτικά τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον Πίνακα 5.

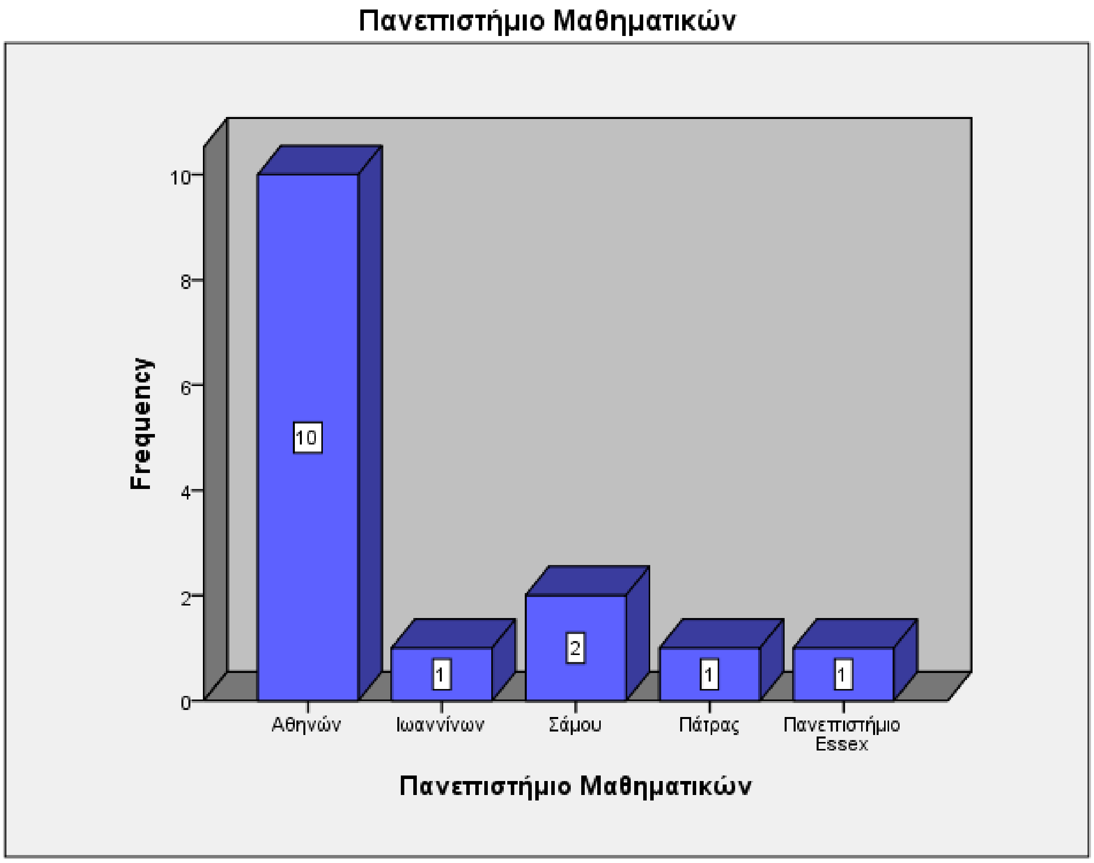
Πίνακας 1. «Πανεπιστήμιο Μαθηματικών»			
Κατηγορίες	**N**	**f%**	**F %**
Αθηνών	10	10/15	10/15
Ιωαννίνων	1	1/15	11/15
Σάμου	2	2/15	13/15
Πάτρας	1	1/15	14/15
Πανεπιστήμιο Essex	1	1/15	15/15
Σύνολο	15	15/15	

N: Συχνότητα

f%: Σχετική συχνότητα

F: Αθροιστική συχνότητα

Γράφημα 1. «Πανεπιστήμιο Μαθηματικών»

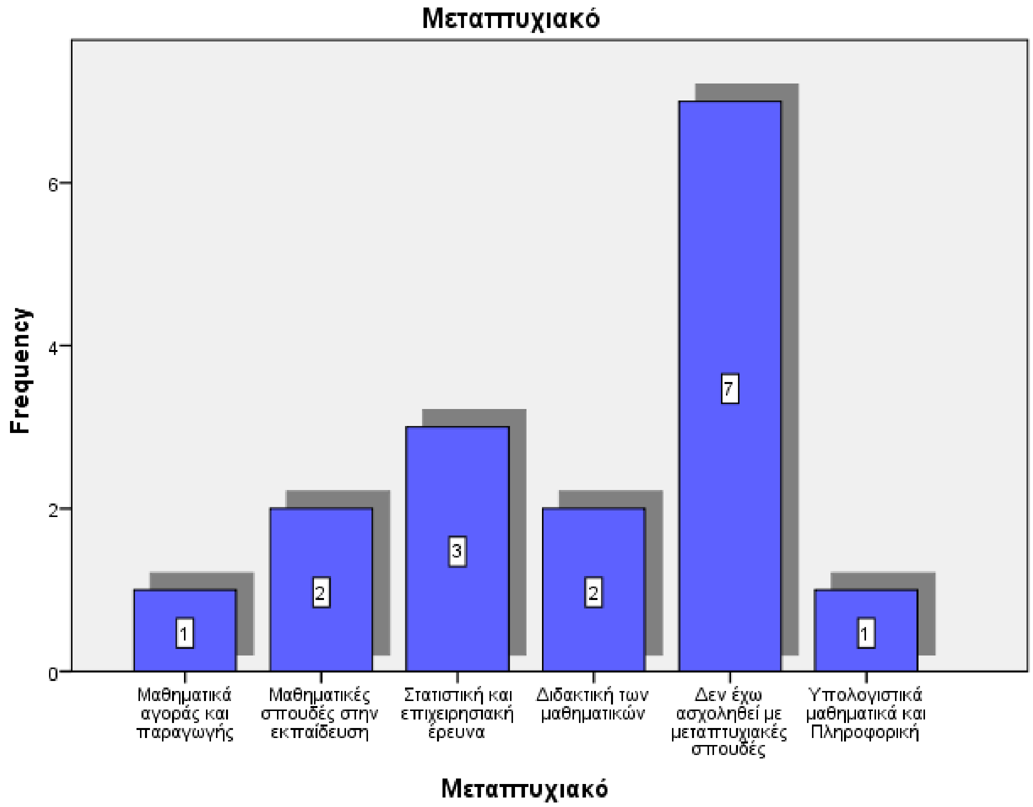


Πίνακας 2. «Μεταπτυχιακό»		
Κατηγορίες	**N**	**f %**
Μαθηματικά αγοράς και παραγωγής	1	1/15
Μαθηματικές σπουδές στην εκπαίδευση	2	2/15
Στατιστική και επιχειρησιακή έρευνα	3	3/15
Διδακτική των μαθηματικών	2	2/15
Δεν έχω ασχοληθεί με μεταπτυχιακές σπουδές	7	7/15
Υπολογιστικά μαθηματικά και Πληροφορική	1	1/15
Σύνολο	15	15/15

N: Συχνότητα

f%: Σχετική συχνότητα

Γράφημα 2. «Μεταπτυχιακό»



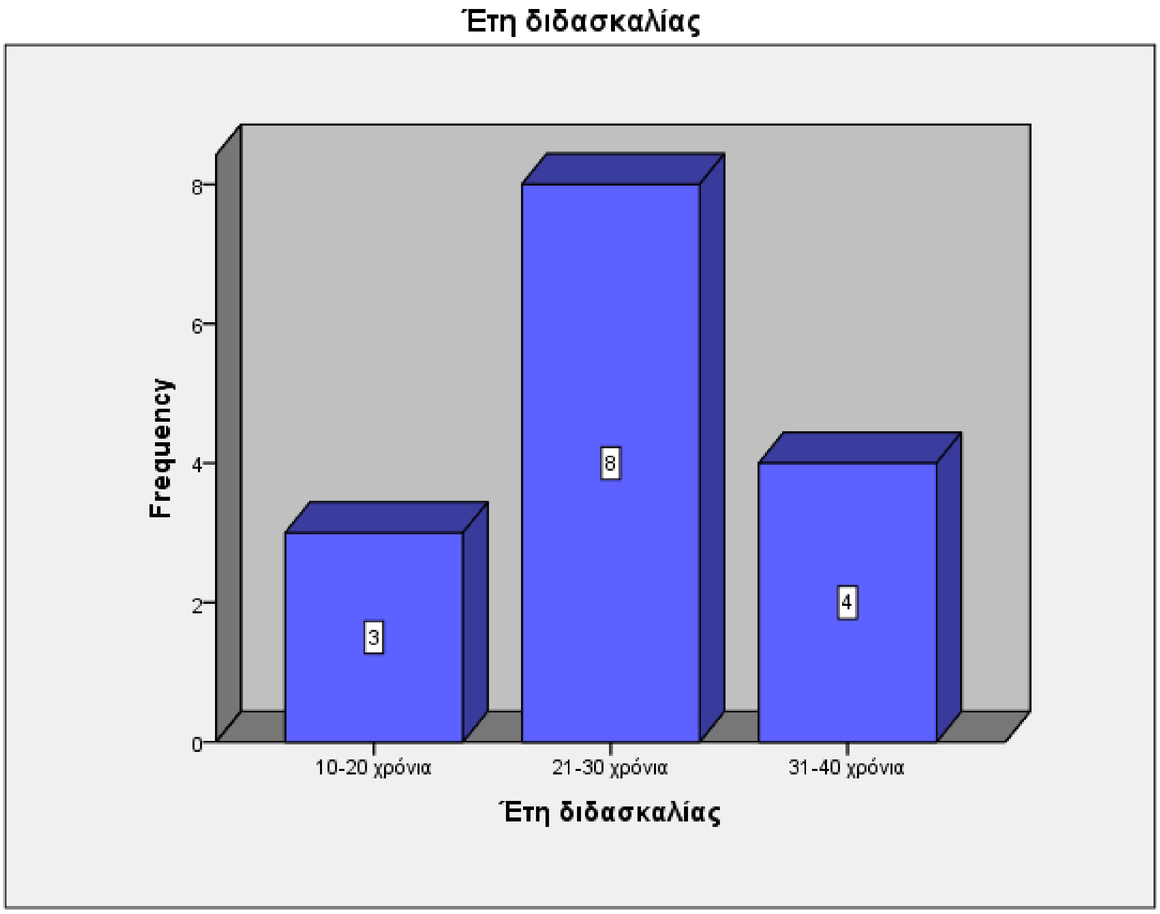
Πίνακας 3. «Έτη διδασκαλίας»			
Κατηγορίες	**N**	**f%**	**F%**
10-20 χρόνια	3	3/15	3/15
21-30 χρόνια	8	8/15	11/15
31-40 χρόνια	4	4/15	15/15
Σύνολο	15	15/15	

N: Συχνότητα

f%: Σχετική συχνότητα

F: Αθροιστική συχνότητα

Γράφημα 3. «Έτη διδασκαλίας»

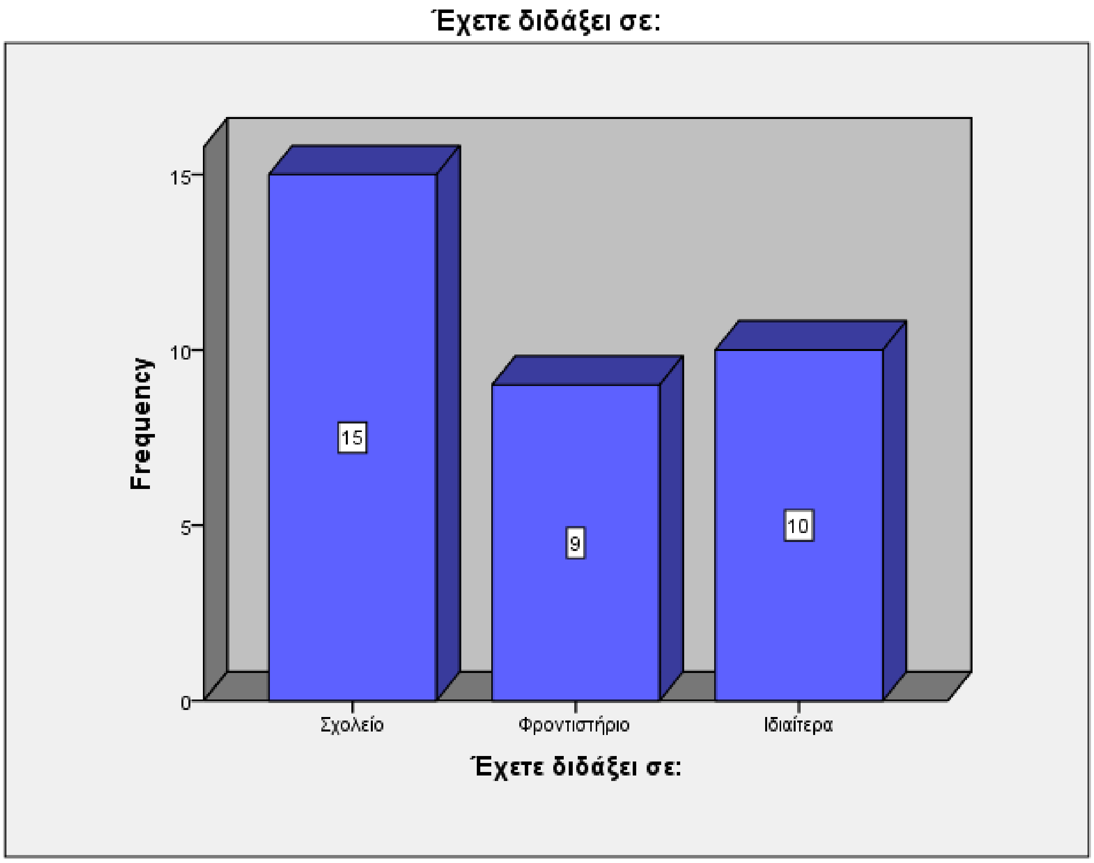


Πίνακας 4. «Έχετε διδάξει σε:»		
Κατηγορίες	**N**	**f%**
Σχολείο	15	15/15
Φροντιστήριο	9	9/15
Ιδιαίτερα	10	10/15
Σύνολο	15	15/15

N: Συχνότητα

f%: Σχετική συχνότητα

Γράφημα 4. «Έχετε διδάξει σε:»



Πίνακας 5. «Σε ποιές τάξεις του γυμνασίου και του λυκείου έχετε διδάξει;»			
Κατηγορίες	**N**	**f %**	**F%**
Ολες τις τάξεις γυμνασίου και λυκείου	11	11/15	11/15
Όλες γυμνασίου-λυκείου εκτός Γ λυκείου	1	1/15	12/15
Σε όλες τις τάξεις του γυμνασίου και την Α' λυκείου	1	1/15	13/15
Όλες γυμνασίου-λυκείου εκτός Α γυμνασίου	1	1/15	14/15
Όλες γυμνασίου-λυκείου εκτός Α, Γ γυμνασίου	1	1/15	15/15
Σύνολο	15	15/15	

N: Συχνότητα

f%: Σχετική συχνότητα

F: Αθροιστική συχνότητα

Γράφημα 5. «Σε ποιές τάξεις του γυμνασίου και του λυκείου έχετε διδάξει;»

Ανάλυση απαντήσεων ανά ερώτημα

Η ανάλυση πραγματοποιήθηκε στο στατιστικό πρόγραμμα IBM SPSS24. Οι ποιοτικές-κατηγορικές μεταβλητές που αφορούν στις απαντήσεις των καθηγητών παρουσιάζονται με τη χρήση συχνοτήτων και ραβδογραμμάτων για την αποτύπωση των απόψεων του δείγματος (Κολυβά-Μαχαίρα Φ. & Μπόρα-Σέντα Ε., 1998). Επιπλέον, στο παράρτημα παρουσιάζονται ορισμένα αντίστοιχα αποσπάσματα των συνεντεύξεων που αιτιολογούν την κωδικοποίηση των απαντήσεων. Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε αναλυτικά τα αποτελέσματα ανά ερώτηση.

Σχετικά με το αν έχουν παρακολουθήσει το μάθημα της «Ιστορίας των Μαθηματικών» παρατηρούμε (από τον Πίνακα 6 και το Γράφημα 6) ότι 9 εκπαιδευτικοί δεν το είχαν παρακολουθήσει γιατί δεν υπήρχε σαν μάθημα, 3 δεν το επέλεξαν αλλά ήταν μάθημα επιλογής και μόνο 3 το είχαν παρακολουθήσει.

Πίνακας 6. «Κατά τη διάρκεια των σπουδών σας παρακολουθήσατε το μάθημα της «Ιστορίας των Μαθηματικών»;»

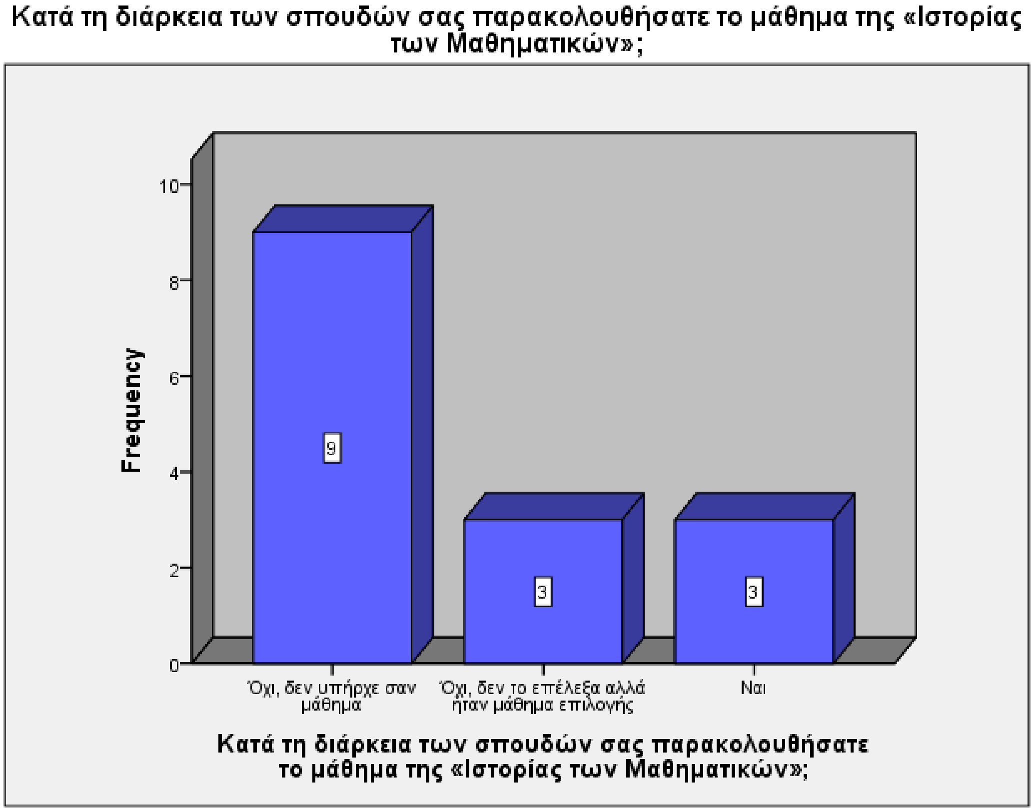
Κατηγορίες	**N**	**f%**	**F%**
Όχι, δεν υπήρχε σαν μάθημα	9	9/15	9/15
Όχι, δεν το επέλεξα αλλά ήταν μάθημα επιλογής	3	3/15	12/15
Ναι	3	3/15	15/15
Σύνολο	15	15/15	

N: Συχνότητα

f%: Σχετική συχνότητα

F: Αθροιστική συχνότητα

Γράφημα 6. «Κατά τη διάρκεια των σπουδών σας παρακολουθήσατε το μάθημα της «Ιστορίας των Μαθηματικών»;»



Σχετικά με το αν υπάρχουν ιστορικές αναφορές, που συνδέονται με τα μαθηματικά, και κέντρισαν το ενδιαφέρον 13 Μαθηματικοί συμφώνησαν ενώ μόλις 2 είχαν αντίθετη άποψη (σύμφωνα με τον Πίνακα 7 και το Γράφημα 7),

Πίνακας 7. «Υπάρχουν ιστορικές αναφορές, που συνδέονται με τα μαθηματικά, και σας κέντρισαν το ενδιαφέρον;»

Κατηγορίες	**N**	**f%**	**F%**
Ναι	13	13/15	13/15
Όχι	2	2/15	15/15
Σύνολο	15	15/15	

N: Συχνότητα

f%: Σχετική συχνότητα

F: Αθροιστική συχνότητα

Γράφημα 7. «Υπάρχουν ιστορικές αναφορές, που συνδέονται με τα μαθηματικά, και σας κέντρισαν το ενδιαφέρον;»

Αναφορικά με το αν μοιράζονται οι εκπαιδευτικοί κάποιες από τις ιστορικές αναφορές, με τους μαθητές τους, 13 εκπαιδευτικοί συμφώνησαν ενώ μόλις 2 απάντησαν αρνητικά (σύμφωνα με τον Πίνακα 8 και το Γράφημα 8).

Πίνακας 8. «Μοιράζεστε κάποιες από αυτές τις ιστορικές αναφορές, με τους μαθητές σας;»

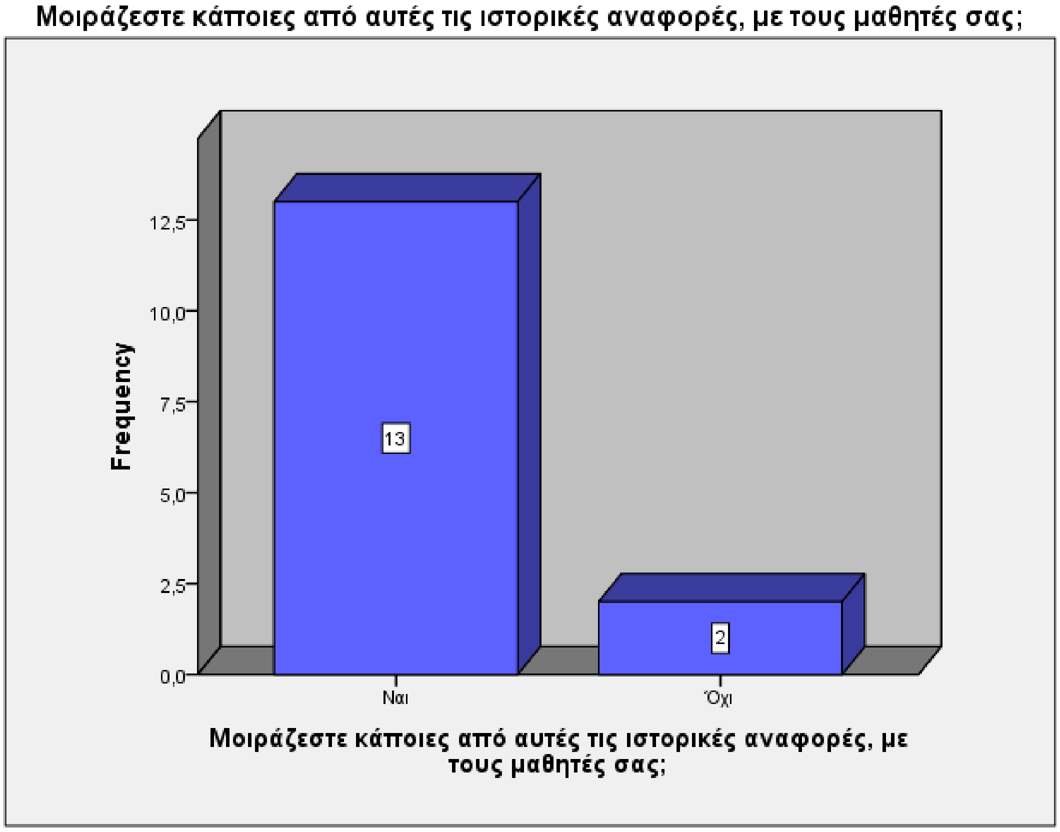
Κατηγορίες	**N**	**f%**	**F%**
Ναι	13	13/15	13/15
Όχι	2	2/15	15/15
Σύνολο	15	15/15	

N: Συχνότητα

f%: Σχετική συχνότητα

F: Αθροιστική συχνότητα

Γράφημα 8. «Μοιράζεστε κάποιες από αυτές τις ιστορικές αναφορές, με τους μαθητές σας;»



Παρακάτω δίνεται απόσπασμα συνέντευξης για απάντηση του Πίνακα 8

- <u>Ναι</u>

«Έχω μοιραστεί αλλά βλέπω ότι δεν τις καταλαβαίνουν», (*Εκπαιδευτικός 13, 01:38-4:09*)

Σχετικά με τις ιστορικές αναφορές οι συμμετέχοντες στην έρευνα είχαν δυνατότητα πολλαπλής απάντησης. Παρατηρούμε (από τον Πίνακα 9) ότι 7 εκπαιδευτικοί αναφέρθηκαν στις ιστορικές αναφορές του βιβλίου, 5 στον Πυθαγόρα και τους Πυθαγορείους, 3 στην έξυπνη πρόσθεση Gauss και 3 επίσης στον Gallois. Κάποιοι από τους εκπαιδευτικούς αναφέρθηκαν στα παράδοξα του Ζήνωνα, κάποιοι στο τρίγωνο του Πασκάλ, άλλοι στον Αρχιμήδη, κάποιοι στις Πυθαγόρειες τριάδες, κάποιοι στην ιστορία του μηδενός και άλλοι στον Riemann. Τέλος, οι επιλογές της μέτρησης της γης από τον Ερατοσθένη, της απόδειξης του ύψους της πυραμίδας από τον Θαλή, της μουσικής του Πυθαγόρα, της ιστορικής αναδρομής των άρρητων και το κενό στην επιστήμη των μαθηματικών κατά τη διάρκεια του μεσαίωνα αναφέρθηκαν από 1 εκπαιδευτικό.

Πίνακας 9. «Θυμάστε να αναφέρετε ποιες συγκεκριμένα ιστορικές αναφορές;»		
Κατηγορίες	**N**	**f%**
Τα παράδοξα του Ζήνωνα	2	2/15
Το τρίγωνο του Πασκάλ	2	2/15
Η μέτρηση της γης από τον Ερατοσθένη	1	2/15
Πυθαγόρας και Πυθαγόρειοι	5	5/15
Η απόδειξη του ύψους της πυραμίδας από τον Θαλή	1	1/15
Έξυπνη πρόσθεση Gauss	3	3/15
Αρχιμήδης	2	2/15
Πυθαγόρειες τριάδες	2	2/15
Η μουσική του Πυθαγόρα	1	1/15
Gallois	3	3/15
Ιστορική αναδρομή των αρρήτων	1	1/15
Ιστορία του 0	2	2/15
Riemann	2	2/15
Ιστορικές αναφορές του βιβλίου	7	7/15
Το κενό στα μαθηματικά κατά τη διάρκεια του μεσαίωνα	1	1/15
Σύνολο	15	15/15

N: Συχνότητα

f%: Σχετική συχνότητα

Παρακάτω παρουσιάζονται αποσπάσματα συνέντευξης που αναφέρονται σε ορισμένες από τις απαντήσεις του Πίνακα 9.

- Έξυπνη πρόσθεση Gauss & Galois

«*Ο Gauss με το άθροισμά του και κυρίως πάνω σε κάποιους όπως ο Galois*», *(Εκπαιδευτικός 13, 01:38-4:09).*

- Riemann

«Όπως ας πούμε και με την ιστορία με τον Riemann που η σπιτονοικοκυρά του έκαψε τις πρώτες 150 σελίδες», (Εκπαιδευτικός 13, 01:38-4:09).

- Πυθαγόρας και Πυθαγόρειοι

«Μετά πιο πολύ με τους Πυθαγόρειους, την δολοπλοκία που υπήρξε για την ρίζα του 2», (Εκπαιδευτικός 13, 06:53-13:15).

- Η απόδειξη του ύψους της πυραμίδας

« *Και το άλλο, το ύψος της πυραμίδας, το τόσο απλοϊκό, που τους βάζω και το κάνουν καμιά φορά στην αυλή, βγαίνουμε έξω για να υπολογίσουμε το ύψος του κτηρίου», (Εκπαιδευτικός 13, 06:53-13:15).*

- <u>Ιστορία του 0</u>

«Αυτό που βλέπω ότι τους εντυπωσιάζει, είναι όπως ας πούμε ότι πολύ αργά ανακαλύφθηκε το μηδέν και οι αρνητικοί αριθμοί, αυτό είναι εκπληκτικό για αυτούς», (Εκπαιδευτικός 13, 06:53-13:15).

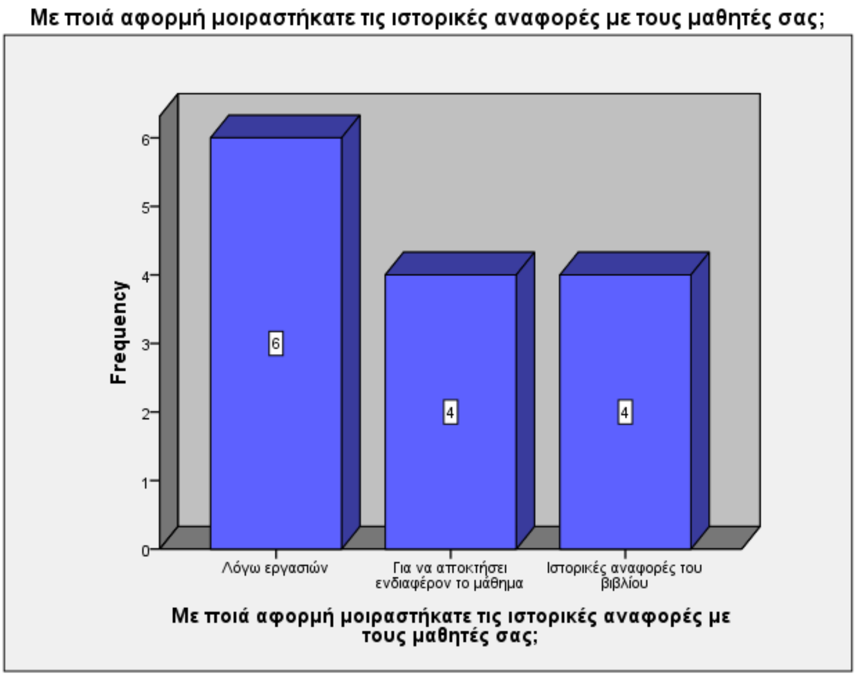
Αναφορικά με το λόγο για τον οποίο μοιράστηκαν οι εκπαιδευτικοί τις ιστορικές αναφορές με τους μαθητές τους, παρατηρούμε (από τον Πίνακα 10 και το Γράφημα 9) ότι 6 εκπαιδευτικοί τις μοιράστηκαν λόγω εργασιών, 4 για να αποκτήσει ενδιαφέρον το μάθημα και 4 επίσης λόγω των ιστορικών αναφορών του βιβλίου.

Πίνακας 10. «Με ποια αφορμή μοιραστήκατε τις ιστορικές αναφορές με τους μαθητές σας;»

Κατηγορίες	**N**	**f%**	**F%**
Λόγω εργασιών	6	6/15	6/15
Για να αποκτήσει ενδιαφέρον το μάθημα	4	4/15	10/15
Ιστορικές αναφορές του βιβλίου	4	4/15	14/15
Σύνολο απαντημένων	14	14/15	14/15
Μη απαντημένα	1	1/15	1/15
Σύνολο	1	15/15	15/15

N: Συχνότητα f%: Σχετική συχνότητα F: Αθροιστική συχνότητα

Γράφημα 9. «Με ποια αφορμή μοιραστήκατε τις ιστορικές αναφορές με τους μαθητές σας;»



Παρακάτω παρουσιάζεται απόσπασμα συνέντευξης για απάντηση του Πίνακα 10.

- <u>Για να αποκτήσει ενδιαφέρον το μάθημα</u>

«*Τέτοιες καταστάσεις απ'ότι έχω δει στους μαθητές, εε.., δηλαδή που έχουν συγκινησιακό μέσα, έχουν παραμυθένιο, έχουν κάτι τέτοιο, αυτές τους εξιτάρουνε συνήθως*», *(Εκπαιδευτικός 13, 06:53-13:15).*

Στην ερώτηση «Τι σας έρχεται στο νου ακούγοντας την έννοια «Πυθαγόρειο Θεώρημα» παρατηρούμε (από τον Πίνακα 11) ότι 8 εκπαιδευτικοί αναφέρθηκαν στο σχήμα του Ευκλείδη, 3 στην γεωμετρική εξίσωση-σχέση του Πυθαγορείου Θεωρήματος, ενώ οι επιλογές έκπληκτοι μαθητές, εμβαδά, η ρίζα του 2 και Tangram αναφέρθηκαν από 1 εκπαιδευτικό.

Πίνακας 11. «Τι σας έρχεται στο νου ακούγοντας την έννοια «Πυθαγόρειο Θεώρημα»;»

Κατηγορίες	**N**	**f%**
Το σχήμα του Ευκλείδη	8	8/15
Οι έκπληκτοι μαθητές	1	1/15
Η γεωμετρική εξίσωση-σχέση του Πυθαγορείου Θεωρήματος	3	3/15
Εμβαδά	1	1/15
Η ρίζα του 2	1	1/15
Tangram	1	1/15
Σύνολο	15	15/15

N: Συχνότητα

f%: Σχετική συχνότητα

Παρακάτω παρουσιάζονται αποσπάσματα συνέντευξης που αναφέρονται σε ορισμένες από τις απαντήσεις του Πίνακα 11.

- <u>Η γεωμετρική εξίσωση-σχέση του Πυθαγορείου Θεωρήματος</u>

«*Κοίταξε, εντάξει πρώτα, μου έρχεται στο νου το αυτονόητο, το αυτονόητο είναι η διδασκαλία του Πυθαγορείου Θεωρήματος, αλλά και αλήθεια παράλληλα με αυτήν την έννοια, μου έρχονται τόσες πολλές αποδείξεις, που έχω δει σε συγγράμματα και sites*», *(Εκπαιδευτικός 10, 11:15-13:08).*

- <u>Tangram</u>

«*Αποδείξεις με τη μορφή εικόνας, δηλαδή με μορφή tangram*», *(Εκπαιδευτικός 10, 11:15-13:08).*

Σχετικά με την ερώτηση «Τι σας έρχεται στο νου ακούγοντας την έννοια «άρρητος αριθμός»;», παρατηρούμε (από Πίνακα 12) ότι 3 εκπαιδευτικοί αναφέρθηκαν στην ρίζα του 2, ενώ οι υπόλοιπες απαντήσεις αναφέρθηκαν από 1 εκπαιδευτικό.

Πίνακας 12. «Τι σας έρχεται στο νου ακούγοντας την έννοια «άρρητος αριθμός»;»

Κατηγορίες	**N**	**f%**	**F%**
Η ρίζα του 2	3	3/15	3/15
Η υποτείνουσα ενός ορθογωνίου τριγώνου	1	1/15	4/15
Το Πυθαγόρειο Θεώρημα	1	1/15	5/15
Κατασκευή πάνω στον άξονα των R	1	1/15	6/15
Η σπείρα των Κυρηναίων	1	1/15	7/15
Ένας αριθμός που δεν υπολογίζεται	1	1/15	8/15
Έκπληκτοι μαθητές	1	1/15	9/15
Μυστικισμός	1	1/15	10/15
Πολλά δεκαδικά ψηφία	1	1/15	11/15
Μη ρητός αριθμός	1	1/15	12/15
Το πραγματικό συνεχές	1	1/15	13/15
Μη τέλειες ρίζες πολλών αριθμών	1	1/15	14/15
Αυτός που δεν μπορεί να ειπωθεί (ετυμολογικά)	1	1/15	15/15
Σύνολο	15	15/15	

N: Συχνότητα f%: Σχετική συχνότητα F: Αθροιστική συχνότητα

Παρακάτω παρουσιάζεται απόσπασμα συνέντευξης για απάντηση του Πίνακα 12.

- <u>Μυστικισμός</u>

«*Μου έρχεται στο μυαλό το ότι οι Πυθαγόρειοι ήθελαν να το κρατήσουν ως επτασφράγιστο μυστικό*», (*Εκπαιδευτικός 10, 11:15-13:08*).

Μοιρασμένες ήταν οι απόψεις σχετικά με την ερώτηση «Αν σας έλεγαν να μιλήσετε για τους Πυθαγορείους, τι θα αναφέρατε πρώτο;». Οι ερωτηθέντες είχαν δυνατότητα πολλαπλής απάντησης και (σύμφωνα με τον Πίνακα 13) και 4 εκπαιδευτικοί αναφέρθηκαν στην Ελιτίστικη σχολή (γνώση για λίγους) ενώ 3 στον μυστικισμό. Οι επιλογές πνευματική αναζήτηση και ανύψωση, γνώση και δεν γνωρίζω επιλέχτηκαν από 2 εκπαιδευτικούς. Τέλος, ο Ίππασος, η κούπα του Πυθαγόρα, η αυτοβελτίωση, η φιλοσοφία, η επιλογή μπροστά από την εποχή τους και η σύνδεση των αριθμών με τη φύση και το θεό αναφέρθηκαν από 1 εκπαιδευτικό.

Πίνακας 13. «Αν σας έλεγαν να μιλήσετε για τους Πυθαγορείους, τι θα αναφέρατε πρώτο;»		
Κατηγορίες	**N**	**f%**
Τον Ίππασο	1	1/15
Ελιτίστικη σχολή (γνώση για λίγους)	4	4/15
Η κούπα του Πυθαγόρα	1	1/15
Πνευματική αναζήτηση και ανύψωση	2	2/15
Αυτοβελτίωση	1	1/15
Φιλοσοφία	1	1/15
Γνώση	2	2/15
Μπροστά από την εποχή τους	1	1/15
Μυστικισμός	3	3/15
Δεν γνωρίζω	2	2/15
Σύνδεση των αριθμών με τη φύση και το Θεό	1	2/15
Σύνολο	15	15/15

N: Συχνότητα

f%: Σχετική συχνότητα

F: Αθροιστική συχνότητα

Παρακάτω παρουσιάζονται αποσπάσματα συνέντευξης που αναφέρονται σε ορισμένες από τις απαντήσεις του Πίνακα 13.

- Ελιτίστικη σχολή (γνώση για λίγους)

«*Αυτό το πράγμα μου έρχεται στο μυαλό, γνώση για λίγους*», «*Για μένα οι Πυθαγόρειοι έχουν να κάνουν με μυστικισμό, αριστοκρατία της γνώσης*», (*Εκπαιδευτικός 3, 06:35-11:26*).

- Ίππασος

«*Βέβαια όσο και να την περιορίσεις, όπως έγινε με τον Ίππασο, για να μην αποκαλύψει παραπέρα την γνώση, τον δολοφόνησαν*», (*Εκπαιδευτικός 3, 06:35-11:26*).

- Πνευματική αναζήτηση και ανύψωση «*Πρέπει να το κάνεις αυτό το πράγμα, πρέπει να αναζητάς, δηλαδή πέρα από αυτό που γράφεις εδώ πέρα, γνώση για λίγους, αναζήτηση, ψάξιμο, πειθαρχία, πειθαρχία του νου*», (*Εκπαιδευτικός 3, 06:35-11:26*).

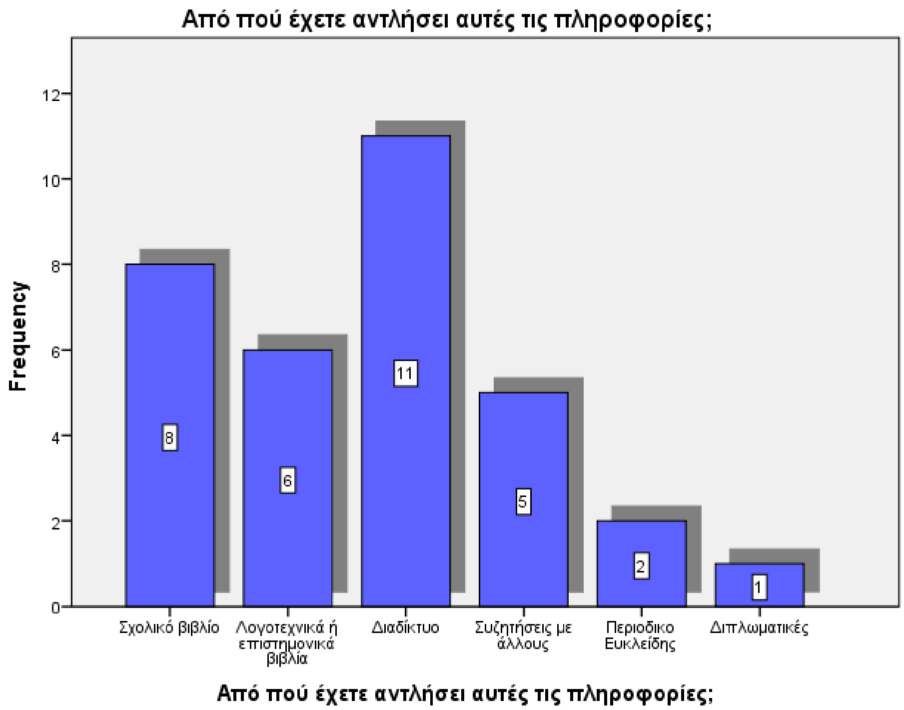
Παρακάτω (στον Πίνακα 14 και στο Γράφημα 10) παρουσιάζονται οι απαντήσεις σχετικά με τις πηγές πληροφοριών των εκπαιδευτικών για τους Πυθαγορείους. Οι εκπαιδευτικοί είχαν την δυνατότητα να δώσουν περισσότερες από μία απαντήσεις και παρατηρούμε ότι κυριότερη πηγή είναι το διαδίκτυο καθώς επιλέχτηκε από 11 εκπαιδευτικούς ενώ 8 αναφέρθηκαν στο σχολικό βιβλίο, 6 στα λογοτεχνικά ή επιστημονικά βιβλία, και 5 στις συζητήσεις με άλλους. Οι πηγές περιοδικό Ευκλείδης και διπλωματικές αναφέρθηκαν από 2 και από 1 εκπαιδευτικό αντίστοιχα.

Πίνακας 14. «Από πού έχετε αντλήσει αυτές τις πληροφορίες;»

Κατηγορίες	**N**	**f%**
Σχολικό βιβλίο	8	8/15
Λογοτεχνικά ή επιστημονικά βιβλία	6	6/15
Διαδίκτυο	11	11/15
Συζητήσεις με άλλους	5	5/15
Περιοδικό Ευκλείδης	2	2/15
Διπλωματικές	1	1/15
Σύνολο	15	15/15

N: Συχνότητα f%: Σχετική συχνότητα F: Αθροιστική συχνότητα

Γράφημα 10. «Από πού έχετε αντλήσει αυτές τις πληροφορίες;»



Σχετικά με την σύνδεση του Πυθαγορείου θεωρήματος με κάποιον λαό, οι ερωτηθέντες έδωσαν πολλαπλές απαντήσεις. Παρατηρούμε (από τον Πίνακα 15) ότι 8 εκπαιδευτικοί σύνδεσαν το Πυθαγόρειο θεώρημα με τους Πυθαγόρειους, 3 με τους

Αιγύπτιους, 3 με όλους τους υποψήφιους λαούς (Πυθαγόρειοι, Αιγύπτιοι, Βαβυλώνιοι, Κινέζοι-ανατολικοί λαοί) και 2 με τους Βαβυλώνιους.

Πίνακας 15. «Πιστεύετε ότι το Πυθαγόρειο Θεώρημα συνδέεται με τον Πυθαγόρα και τους Πυθαγόρειους, τους Αιγύπτιους, τους Βαβυλώνιους ή με άλλους λαούς;»

Κατηγορίες	**N**	**f%**
Πυθαγόρειους	8	8/15
Αιγύπτιους	3	3/15
Βαβυλώνιους	2	2/15
Όλους τους παραπάνω	3	3/15
Σύνολο	15	15/15

N: Συχνότητα f%: Σχετική συχνότητα

Παρακάτω παρουσιάζονται αποσπάσματα συνέντευξης που αναφέρονται σε ορισμένες από τις απαντήσεις του Πίνακα 15.

- Βαβυλώνιους

«*Είναι με τις πλάκες που είχαν βρει τις Βαβυλωνιακές, η ποσότητα των πλακών είναι ενδεικτική, φαίνεται ότι τέλος πάντων ήταν σε ευρεία χρήση αυτό το θεώρημα*», (*Εκπαιδευτικός 13, 20:50-26:28*).

- Πυθαγόρειους

«*Τώρα από εκεί και πέρα οι αποδείξεις αποδίδονται στους Πυθαγόρειους*», (*Εκπαιδευτικός 13, 20:50-26:28*).

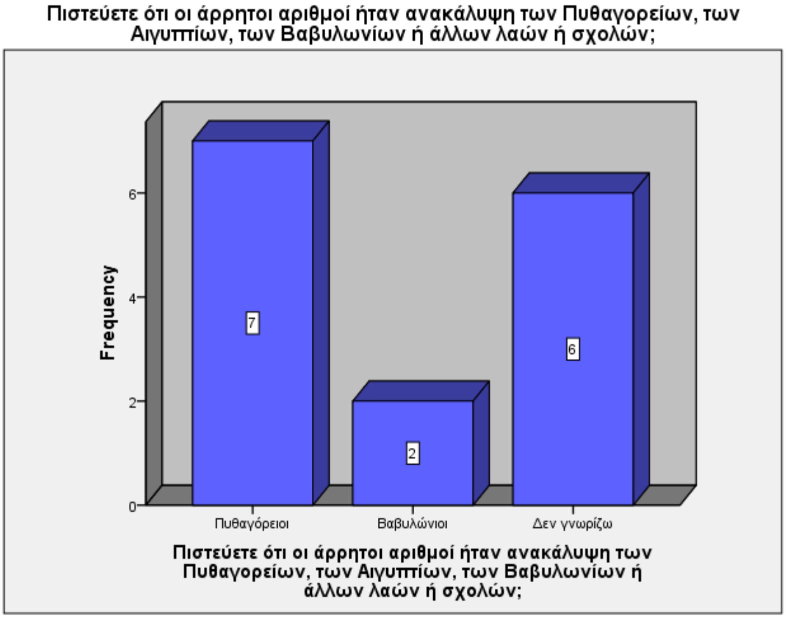
Αναφορικά με την ανακάλυψη των άρρητων αριθμών, παρατηρούμε ότι (σύμφωνα με τον Πίνακα 16 και το Γράφημα 11) 7 εκπαιδευτικοί εξέφρασαν την άποψη ότι τους ανακάλυψαν οι Πυθαγόρειοι, 6 ότι δεν γνώριζαν για την ανακάλυψη ενώ 2 υποστήριξαν τους Βαβυλώνιους.

Πίνακας 16. «Πιστεύετε ότι οι άρρητοι αριθμοί ήταν ανακάλυψη των Πυθαγορείων, των Αιγυπτίων, των Βαβυλωνίων ή άλλων λαών ή σχολών;»

Κατηγορίες	**N**	**f%**	**F%**
Πυθαγόρειοι	7	7/15	7/15
Βαβυλώνιοι	2	2/15	9/15
Δεν γνωρίζω	6	6/15	15/15
Σύνολο	15	15/15	

N: Συχνότητα f%: Σχετική συχνότητα F: Αθροιστική συχνότητα

Γράφημα 11. «Πιστεύετε ότι οι άρρητοι αριθμοί ήταν ανακάλυψη των Πυθαγορείων, των Αιγυπτίων, των Βαβυλωνίων ή άλλων λαών ή σχολών;»



Παρακάτω παρουσιάζεται απόσπασμα συνέντευξης που αναφέρεται σε απάντηση του Πίνακα 16.

<u>Πυθαγόρειοι</u>

«*Ε νομίζω αυτοί πρέπει να ήταν οι Πυθαγόρειοι καθαρά, δεν νομίζω να έγινε κάτι άλλο*», «*Οι άρρητοι οφείλονται στους Πυθαγόρειους, αυτοί κάνανε κοσμοθεωρία βάζοντας την μονάδα σαν αρχή όλων και προσπαθώντας να αποδείξουν ότι όλα δημιουργούνται από την μονάδα, δηλαδή δεν είχε καταγραφεί αυτό το πράγμα αλλιώς, άρα αν δε μπει η μονάδα, μέσα και η μέτρηση με την μονάδα, η σύγκριση στην ουσία, δεν μπορείς να βγάλεις άρρητο, ε η πρώτη αναφορά ήταν στους Πυθαγόρειους*», (*Εκπαιδευτικός 13, 20:50-26:28*).

Σχετικά με την οργάνωση των καθηγητών για την διδασκαλία του Πυθαγορείου Θεωρήματος οι απόψεις ήταν μοιρασμένες (Πίνακας 17). Οι ερωτηθέντες έδωσαν περισσότερες από μία απάντηση και κυριότερη απάντηση ήταν η διατύπωση του θεωρήματος που υποστηρίχτηκε από 11 εκπαιδευτικούς ενώ ακολούθησαν τα σχήματα (τριγώνων, τετραγώνων) και τα εμβαδά που αναφέρθηκαν ξεχωριστά από 10 εκπαιδευτικούς. Στη συνέχεια, 7 εκπαιδευτικοί ανέφεραν την διαδικασία παρατήρησης του φαινομένου από τους ίδιους τους μαθητές, 6 την επανάληψη-υπενθύμιση προηγούμενων γνώσεων, την μαθηματική σχέση-απόδειξη του Πυθαγορείου Θεωρήματος και σύμφωνα με τη σειρά του βιβλίου, 5 τις εφαρμογές στο Geogebra και τέλος 4 ανέφεραν την αναφορά στις ιστορικές συνθήκες της εποχής, τις εφαρμογές του βιβλίου, τα ιστορικά σημειώματα του βιβλίου και τα φύλλα εργασίας.

Πίνακας 17. «Όταν πρόκειται να διδάξετε το «Πυθαγόρειο Θεώρημα», πώς οργανώνετε τη διδασκαλία σας;»

Κατηγορίες	**N**	**f%**
Σχήματα (τριγώνων, τετραγώνων)	10	10/15
Εμβαδά	10	10/15
Ορισμός-διατύπωση του θεωρήματος	11	11/15
Αναφορά στις ιστορικές συνθήκες της εποχής	4	4/15
Επανάληψη-υπενθύμιση προηγούμενων γνώσεων	6	6/15
Εφαρμογές στο Geogebra	5	5/15
Μαθηματική σχέση-απόδειξη του Πυθαγορείου Θεωρήματος	6	6/15
Εφαρμογές του βιβλίου	4	4/15
Ιστορικά σημειώματα του βιβλίου	4	4/15
Σύμφωνα με την σειρά του βιβλίου	6	6/15
Φύλλα εργασίας	4	4/15
Διαδικασίας παρατήρησης του φαινομένου από τους ίδιους τους μαθητές	7	7/15
Σύνολο	15	15/15

N: Συχνότητα

f%: Σχετική συχνότητα

Παρακάτω παρουσιάζεται απόσπασμα συνέντευξης που αναφέρεται σε ορισμένες από τις απαντήσεις του Πίνακα 17.

- Φύλλα εργασίας & Εφαρμογές στο Geogebra & Σχήματα (τριγώνων, τετραγώνων) & Εμβαδά & Μαθηματική σχέση-απόδειξη του Πυθαγορείου Θεωρήματος

«*Την οργανώνω με ένα φύλλο εργασίας και με μία κατάλληλη εφαρμογή από το διαδραστικό, ώστε να θυμηθούμε τις έννοιες ορθογώνιο, τετράγωνο και εμβαδόν, να αρχίσουμε να συνδυάζουμε αυτά τα πράγματα και συγκεκριμένα η λογική είναι να τοποθετήσουμε, να κάνουμε κατάλληλες μετακινήσεις στο διαδραστικό ώστε να βγει η σχέση*», (Εκπαιδευτικός 6*, 11:12-15:30*).

Αναφορικά με την οργάνωση των καθηγητών για την διδασκαλία των άρρητων οι απόψεις ήταν μοιρασμένες (όπως παρουσιάζει ο Πίνακας 18). Οι ερωτηθέντες έδωσαν περισσότερες από μία απάντηση και κυριότερη επιλογή ήταν η μέθοδος διδασκαλίας με τον άξονα των πραγματικών αριθμών που αναφέρθηκε από 9 εκπαιδευτικούς, ακολούθησε η μέθοδος του βιβλίου με 7 επιλογές, έπειτα οι αλγεβρικές προσεγγίσεις και η κατανόηση του ότι οι άρρητοι δεν μπορούν να γραφτούν ως κλάσματα με 6 για την κάθε κατηγορία και ο ορισμός της τετραγωνικής ρίζας με 5. Οι εφαρμογές του Πυθαγορείου Θεωρήματος, η διαδικασία παρατήρησης από τους μαθητές ώστε να εξάγουν συμπεράσματα και τα παραδείγματα ασκήσεων υποστηρίχτηκαν από 4 εκπαιδευτικούς ενώ 3 αναφέρθηκαν στην Σπείρα του Κυρηναίου και στην αναζήτηση φραγμάτων. Τέλος 2 εκπαιδευτικοί εστίασαν στις εφαρμογές στο φωτόδεντρο, ενώ μόλις 1 στα φύλλα εργασίας, στις εφαρμογές στο Geogebra και στα παράδοξα του Ζήνωνα.

Πίνακας 18. «Όταν πρόκειται να διδάξετε τους «άρρητους», πώς οργανώνετε τη διδασκαλία σας;»

Κατηγορίες	**Ν**	**f%**
Άξονας πραγματικών αριθμών (συμπλήρωση του R με γεωμετρική κατασκευή αρρήτων)	9	9/15
Αλγεβρικές προσεγγίσεις	6	6/15
Σπείρα του Κυρηναίου	3	3/15
Αναζήτηση φραγμάτων	3	3/15
Ορισμός της τετραγωνικής ρίζας	5	5/15
Κατανόηση του ότι οι άρρητοι δεν μπορούν να γραφτούν ως κλάσματα	6	6/15
Φύλλα εργασίας	1	1/15
Εφαρμογές του Πυθαγορείου Θεωρήματος	4	4/15
Εφαρμογές στο Geogebra	1	1/15
Σύμφωνα με το βιβλίο	7	7/15
Διαδικασία παρατήρησης από τους μαθητές ώστε να εξάγουν συμπεράσματα	4	4/15
Παραδείγματα ασκήσεων	4	4/15
Παράδοξα του Ζήνωνα	1	1/15
Εφαρμογές στο φωτόδεντρο	2	2/15
Σύνολα	15	15/15

Ν: Συχνότητα

f%: Σχετική συχνότητα

Παρακάτω παρουσιάζονται αποσπάσματα συνέντευξης που αναφέρονται σε ορισμένες από τις απαντήσεις του Πίνακα 18.

- Φύλλα εργασίας & Εφαρμογές του Πυθαγορείου Θεωρήματος

«*Για τους άρρητους εκεί, εκτός από το φύλλο εργασίας, πρέπει να πω κάποια πράγματα για το Πυθαγόρειο Θεώρημα*», (*Εκπαιδευτικός 6, 11:12-15:30*).

- Εφαρμογές του βιβλίου & Αλγεβρικές προσεγγίσεις

«*Με τη μέθοδο του βιβλίου, κάνουν διαδοχικές προσεγγίσεις τα ίδια τα παιδιά*», (*Εκπαιδευτικός 6, 11:12-15:30*).

- Σπείρα του Κυρηναίου

«*Αφού κάνουν γεωμετρική κατασκευή σταθεροποιούνε και μετά τους βάζεις εδώ και τη σπείρα*», (*Εκπαιδευτικός 6, 11:12-15:30*).

Οι ερωτηθέντες στο σύνολο τους εξέφρασαν την άποψη ότι υπάρχει σύνδεση μεταξύ των εννοιών «Πυθαγόρειο Θεώρημα» και «άρρητοι» και ορισμένοι έδωσαν περισσότερους από έναν λόγο στις απαντήσεις τους. Συγκεκριμένα (σύμφωνα με τον Πίνακα 19 και Γράφημα 12), 13 εκπαιδευτικοί εξέφρασαν την άποψη ότι υπάρχει σύνδεση γιατί οι άρρητοι χρειάζονται στην εφαρμογή του Πυθαγορείου Θεωρήματος, 4 επεσήμαναν ως αιτία την ιστορική σύνδεση μεταξύ των εννοιών ενώ μόλις 1 θεώρησε ως αιτία το γεγονός ότι άρρητοι είναι απαραίτητοι για την καλύτερη κατανόηση του Πυθαγορείου Θεωρήματος.

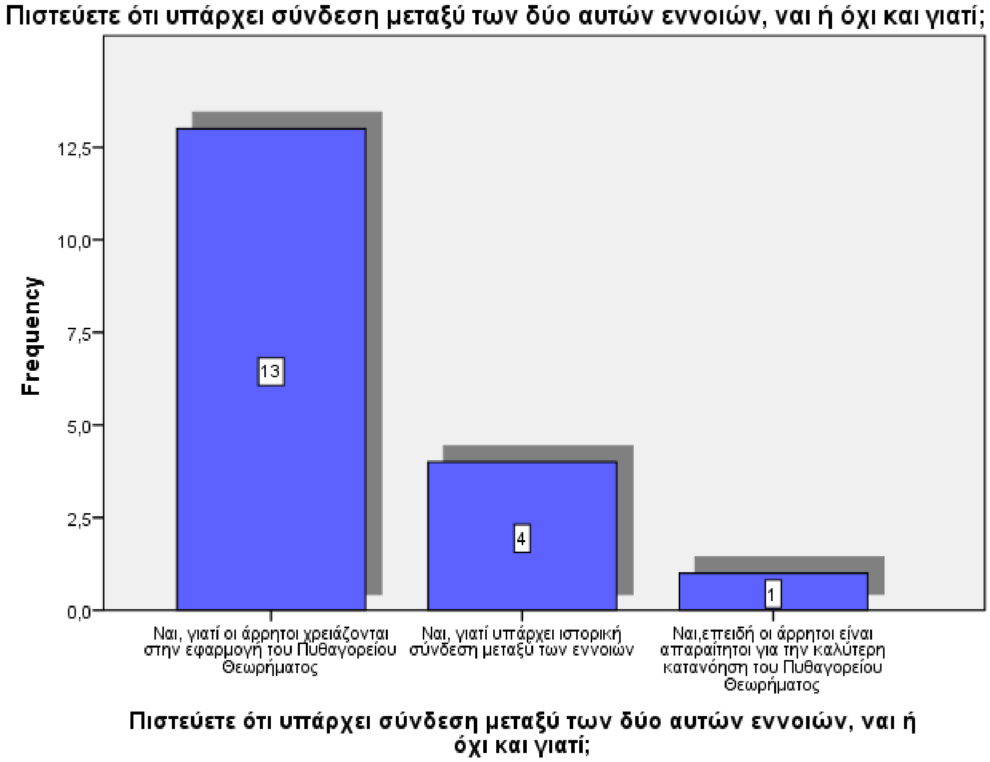
Πίνακας 19. «Πιστεύετε ότι υπάρχει σύνδεση μεταξύ των δύο αυτών εννοιών, ναι ή όχι και γιατί;»

Κατηγορίες	**N**	**f%**
Ναι, γιατί οι άρρητοι χρειάζονται στην εφαρμογή του Πυθαγορείου Θεωρήματος	13	13/15
Ναι, γιατί υπάρχει ιστορική σύνδεση μεταξύ των εννοιών	4	4/15
Ναι, επειδή οι άρρητοι είναι απαραίτητοι για την καλύτερη κατανόηση του Πυθαγορείου Θεωρήματος	1	1/15
Σύνολο	15	15/15

N: Συχνότητα

f%: Σχετική συχνότητα

Γράφημα 12. «Πιστεύετε ότι υπάρχει σύνδεση μεταξύ των δύο αυτών εννοιών, ναι ή όχι και γιατί;»



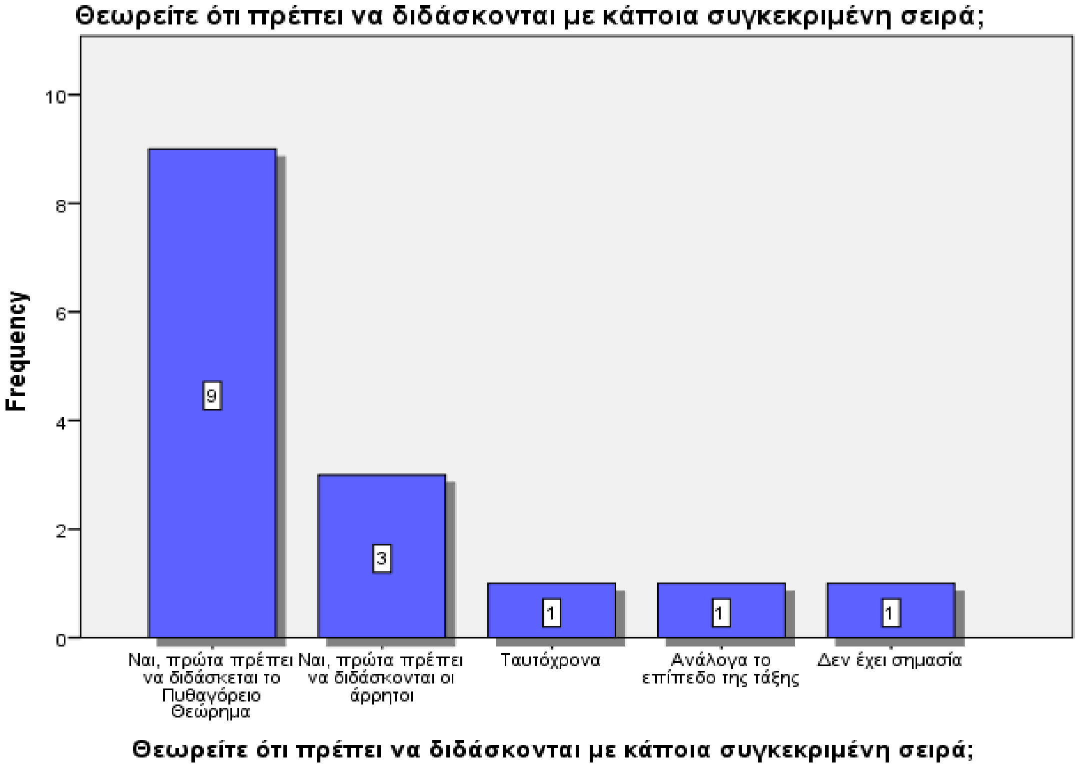
Παρακάτω, (σύμφωνα με τον Πίνακα 20 και το Γράφημα 13), η πλειοψηφία των εκπαιδευτικών και συγκεκριμένα 9 δήλωσαν ότι πρώτα πρέπει να διδάσκεται το Πυθαγόρειο Θεώρημα και έπειτα οι άρρητοι ενώ 3 ανέφεραν ότι πρέπει να διδάσκονται πρώτα οι άρρητοι. Οι περιπτώσεις της ταυτόχρονης διδασκαλίας, ανάλογα το επίπεδο της τάξης και η άποψη ότι δεν έχει σημασία η σειρά διδασκαλίας υποστηρίχτηκαν από 1 εκπαιδευτικό.

Πίνακας 20. «Θεωρείτε ότι πρέπει να διδάσκονται με κάποια συγκεκριμένη σειρά;»

Κατηγορίες	**N**	**f%**	**F%**
Ναι, πρώτα πρέπει να διδάσκεται το Πυθαγόρειο Θεώρημα	9	9/15	9/15
Ναι, πρώτα πρέπει να διδάσκονται οι άρρητοι	3	3/15	12/15
Ταυτόχρονα	1	1/15	13/15
Ανάλογα το επίπεδο της τάξης	1	1/15	14/15
Δεν έχει σημασία	1	1/15	15/15
Σύνολο	15	15/15	

N: Συχνότητα f%: Σχετική συχνότητα F%: Αθροιστική συχνότητα

Γράφημα 13. «Θεωρείτε ότι πρέπει να διδάσκονται με κάποια συγκεκριμένη σειρά;»



Σχετικά με το αν γίνεται ξεκάθαρος ο διαχωρισμός του ευθέως και του αντιστρόφου του Πυθαγορείου Θεωρήματος η καθολική πλειοψηφία συμφώνησε και αρκετοί εκπαιδευτικοί έδωσαν περισσότερες από 1 επιλογές. Συγκεκριμένα, (σύμφωνα με τον Πίνακα 21) 7 εκπαιδευτικοί αναφέρθηκαν στην διατύπωση του ορισμού, 6 στα παραδείγματα και ασκήσεις, 5 στο παράδειγμα των Αρπεδοναπτών, 4 στο φωτόδεντρο-εφαρμογή Geogebra και φύλλο εργασίας, ενώ μόλις 1 εκπαιδευτικός αναφέρθηκε μέσω της διερεύνησης των ιδεών των μαθητών και μέσω του τονισμού των δεδομένων των ασκήσεων.

Πίνακας 21. «Ξεκαθαρίζετε στη διδασκαλία σας το ευθύ και το αντίστροφο του Πυθαγόρειου Θεωρήματος και με ποιόν τρόπο;»

Κατηγορίες	**N**	**f%**
Ναι, μέσω διατύπωσης του ορισμού	7	7/15
Ναι, μέσω παραδειγμάτων και ασκήσεων	6	6/15
Ναι, μέσω φωτόδεντρου, εφαρμογή Geogebra και φύλλου εργασίας	4	4/15
Ναι, μέσω του παραδείγματος των Αρπεδοναπτών	5	5/15
Ναι, μέσω της διερεύνησης των ιδεών των μαθητών	1	1/15
Ναι, μέσω του τονισμού των δεδομένων των ασκήσεων	1	1/15
Σύνολο	15	15/15

N: Συχνότητα f%: Σχετική συχνότητα

Παρακάτω παρουσιάζεται απόσπασμα συνέντευξης που αναφέρεται σε απάντηση του Πίνακα 21.

- <u>Ναι, μέσω παραδειγμάτων και ασκήσεων</u>

«*Το ξεκαθαρίζω και με αριθμητικά παραδείγματα, κάνω και ένα ξεκαθάρισμα γλωσσικό*», (*Εκπαιδευτικός 10,33:24-37:58*).

Παρακάτω στον (Πίνακας 22 και Γράφημα 14) παρουσιάζονται τα αποτελέσματα σχετικά με τις προαπαιτούμενες γνώσεις των παιδιών που πρέπει να έχουν για τη διδασκαλία του Πυθαγορείου Θεωρήματος. Οι εκπαιδευτικοί έδωσαν περισσότερες από μία επιλογές και παρατηρούμε ότι κύριες επιλογές είναι η γνώση των εμβαδών που επισημάνθηκε από 14 εκπαιδευτικούς, τα βασικών γεωμετρικά στοιχεία που υποστηρίχτηκε από 12 και η γνώση των δυνάμεων που αναφέρθηκε από 10 εκπαιδευτικούς. Οι απλές εξισώσεις πρώτου και δευτέρου βαθμού αναφέρθηκαν από 8 εκπαιδευτικούς, οι βασικές πράξεις από 7, οι ρίζες από 4 και οι άρρητοι από 2.

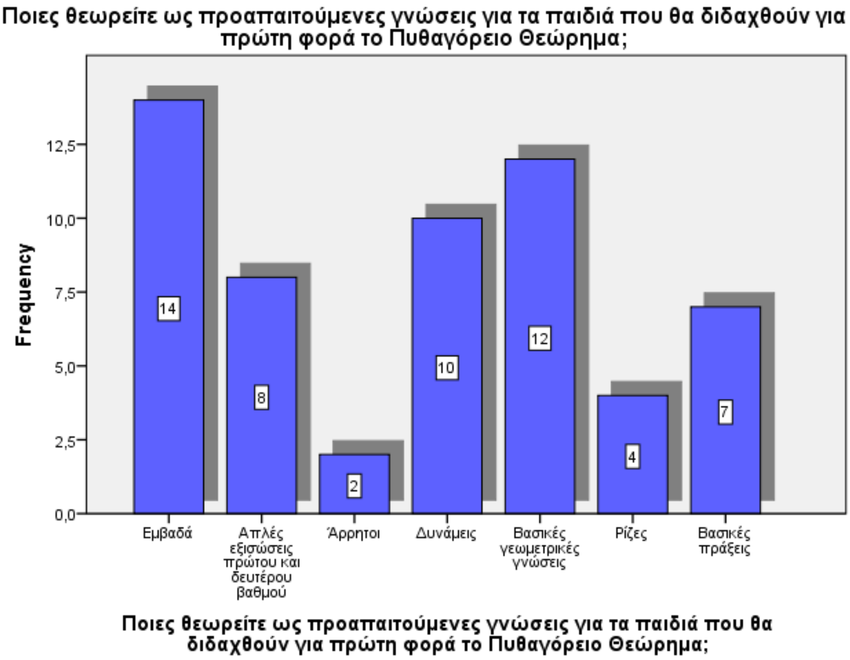
Πίνακας 22. «Ποιες θεωρείτε ως προαπαιτούμενες γνώσεις για τα παιδιά που θα διδαχθούν για πρώτη φορά το Πυθαγόρειο Θεώρημα;»

Κατηγορίες	**N**	**f%**
Εμβαδά	14	14/15
Απλές εξισώσεις πρώτου και δευτέρου βαθμού	8	8/15
Άρρητοι	2	2/15
Δυνάμεις	10	10/15
Βασικές γεωμετρικές γνώσεις	12	12/15
Ρίζες	4	4/15
Βασικές πράξεις	7	7/15
Σύνολο	15	15/15

N: Συχνότητα

f%: Σχετική συχνότητα

Γράφημα 14. «Ποιες θεωρείτε ως προαπαιτούμενες γνώσεις για τα παιδιά που θα διδαχθούν για πρώτη φορά το Πυθαγόρειο Θεώρημα;»



Σχετικά με τις προαπαιτούμενες γνώσεις των παιδιών που πρέπει να έχουν κατά την διδασκαλία των άρρητων αριθμών οι εκπαιδευτικοί έδωσαν πολλαπλές απαντήσεις. Παρατηρούμε (από τον Πίνακα 23) ότι κύριο προαπαιτούμενο θεωρήθηκε η γνώση των δυνάμεων με 10 επιλογές, έπειτα των ριζών με 6, των απλών εξισώσεων πρώτου και δευτέρου βαθμού επίσης με 6 των βασικών πράξεων με 5 και των συνόλων αριθμών επίσης με 5. Ο άξονας των R υποστηρίχτηκε από 4 εκπαιδευτικούς ενώ η σχέση εγκλεισμού αριθμών και διάταξης από 2.

Πίνακας 23. «Ποιες θεωρείτε ως προαπαιτούμενες γνώσεις για τα παιδιά που θα διδαχθούν για πρώτη φορά τους άρρητους αριθμούς;»

Κατηγορίες	**N**	**f%**
Δυνάμεις	10	10/15
Ρίζες	6	6/15
Απλές εξισώσεις πρώτου και δευτέρου βαθμού	6	6/15
Άξονας των R	4	4/15
Βασικές πράξεις	5	5/15
Σύνολα αριθμών	5	5/15
Σχέση εγκλεισμού αριθμών και διάταξη	2	2/15
Σύνολο	15	15/15

N: Συχνότητα f%: Σχετική συχνότητα

Η συντριπτική πλειοψηφία των εκπαιδευτικών, και συγκεκριμένα 13 συμφώνησαν ότι η ετυμολογική ανάλυση των μαθηματικών εννοιών βοηθάει τους μαθητές ενώ μόλις 2 δήλωσαν κάποιες φορές (σύμφωνα με τον Πίνακα 24 και το Γράφημα 15).

Πίνακας 24. «Θεωρείτε πως η ετυμολογική ανάλυση των μαθηματικών εννοιών βοηθάει τους μαθητές;»

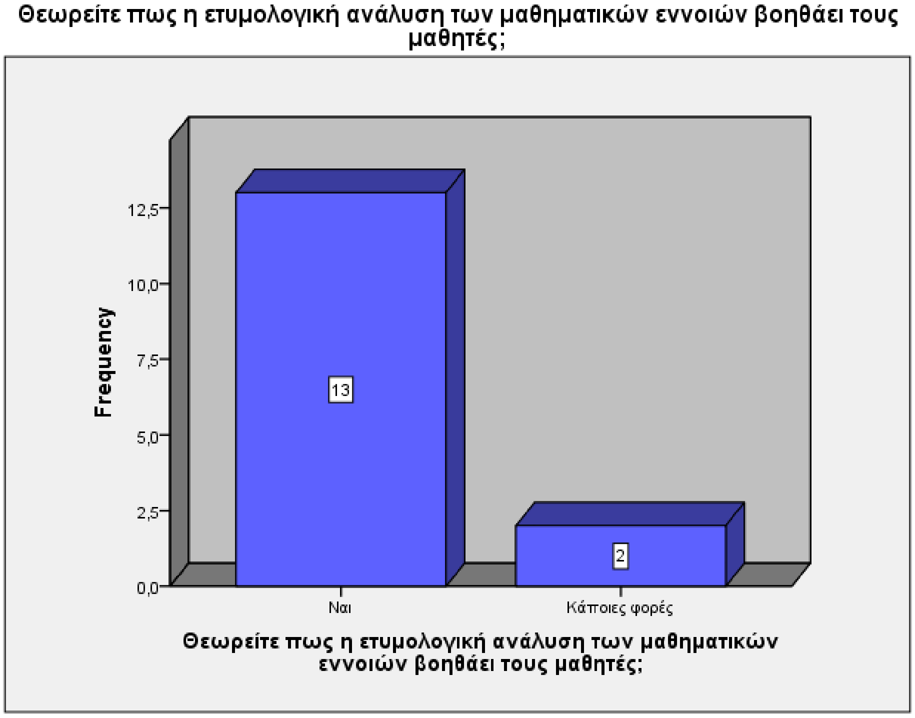
Κατηγορίες	**N**	**f%**	**F%**
Ναι	13	13/15	13/15
Κάποιες φορές	2	2/15	15/15
Σύνολο	15	15/15	

N: Συχνότητα

f%: Σχετική συχνότητα

F%: Αθροιστική συχνότητα

Γράφημα 15. «Θεωρείτε πως η ετυμολογική ανάλυση των μαθηματικών εννοιών βοηθάει τους μαθητές;»



Παρακάτω δίνεται απόσπασμα συνέντευξης για απάντηση του Πίνακα 24.

- **<u>Ναι</u>**

«*Ε πάρα πολύ. Νομίζω ότι πάρα πολύ και μάλιστα όχι μόνο η ετυμολογική ανάλυση, αλλά σε μια μαθηματική έκφραση να σκεφτούν και τις λέξεις κλειδιά που υπάρχουν στην έκφραση*», (*Εκπαιδευτικός 13, 49:45-1:02:07*).

Η συντριπτική πλειοψηφία και συγκεκριμένα 13 εκπαιδευτικοί δήλωσαν ότι χρήση της ιστορίας των μαθηματικών βοηθάει τους μαθητές να κατανοήσουν ορισμένες μαθηματικές έννοιες σε αντίθεση με 2 εκπαιδευτικούς που διαφώνησαν (σύμφωνα με τον Πίνακα 25 και το Γράφημα 16).

Πίνακας 25. «Θεωρείτε ότι η χρήση της ιστορίας των μαθηματικών βοηθάει τους μαθητές να κατανοήσουν ορισμένες μαθηματικές έννοιες;»

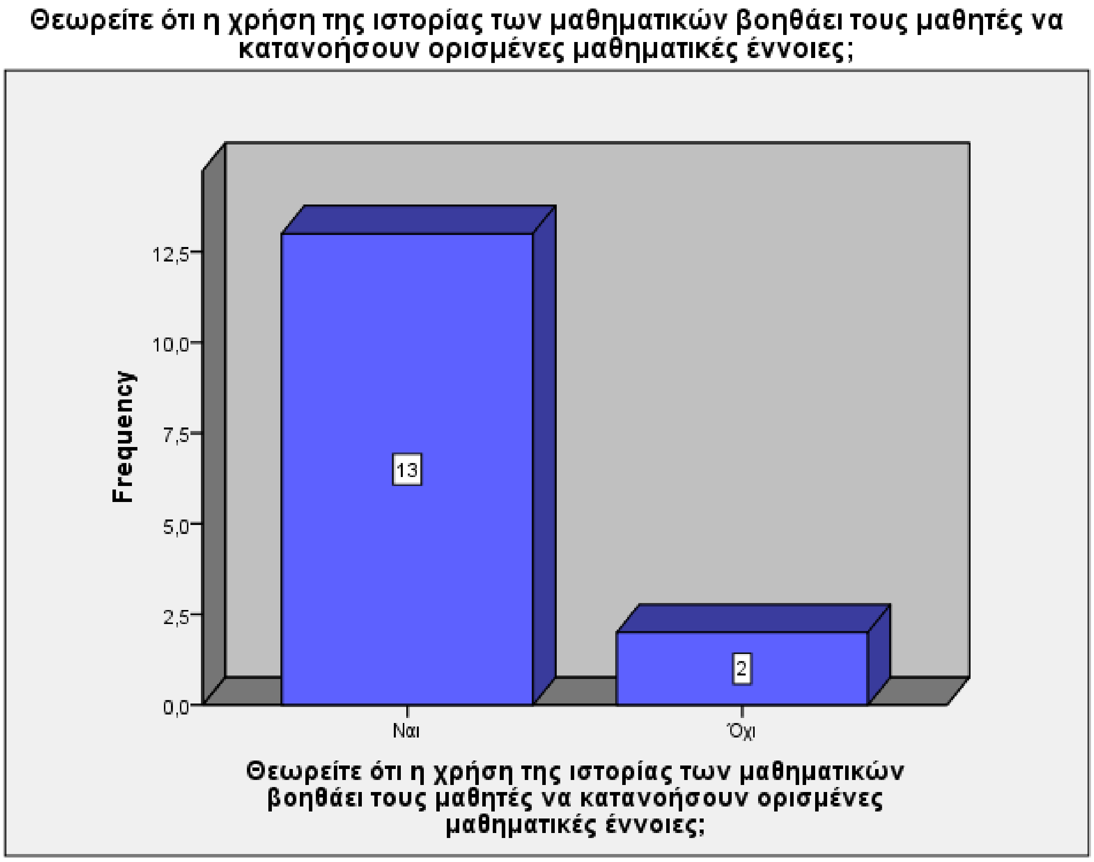
Κατηγορίες	**N**	**f%**	**F%**
Ναι	13	13/15	13/15
Όχι	2	2/15	2/15
Σύνολο	15	15/15	

N: Συχνότητα

f%: Σχετική συχνότητα

F%: Αθροιστική συχνότητα

Γράφημα 16. «Θεωρείτε ότι η χρήση της ιστορίας των μαθηματικών βοηθάει τους μαθητές να κατανοήσουν ορισμένες μαθηματικές έννοιες;»



Επιπλέον, (σύμφωνα με τον Πίνακα 26 και το Γράφημα 17) 12 εκπαιδευτικοί δήλωσαν ότι χρησιμοποιούν την ιστορία στη διδασκαλία του Πυθαγορείου θεωρήματος και των αρρήτων, 2 ότι δεν την χρησιμοποιούν ενώ 1 εκπαιδευτικός δήλωσε ότι την χρησιμοποιεί κάποιες φορές όταν διαθέτει χρόνο.

Πίνακας 26. «Χρησιμοποιείτε την ιστορία στη διδασκαλία των δύο αυτών εννοιών;»

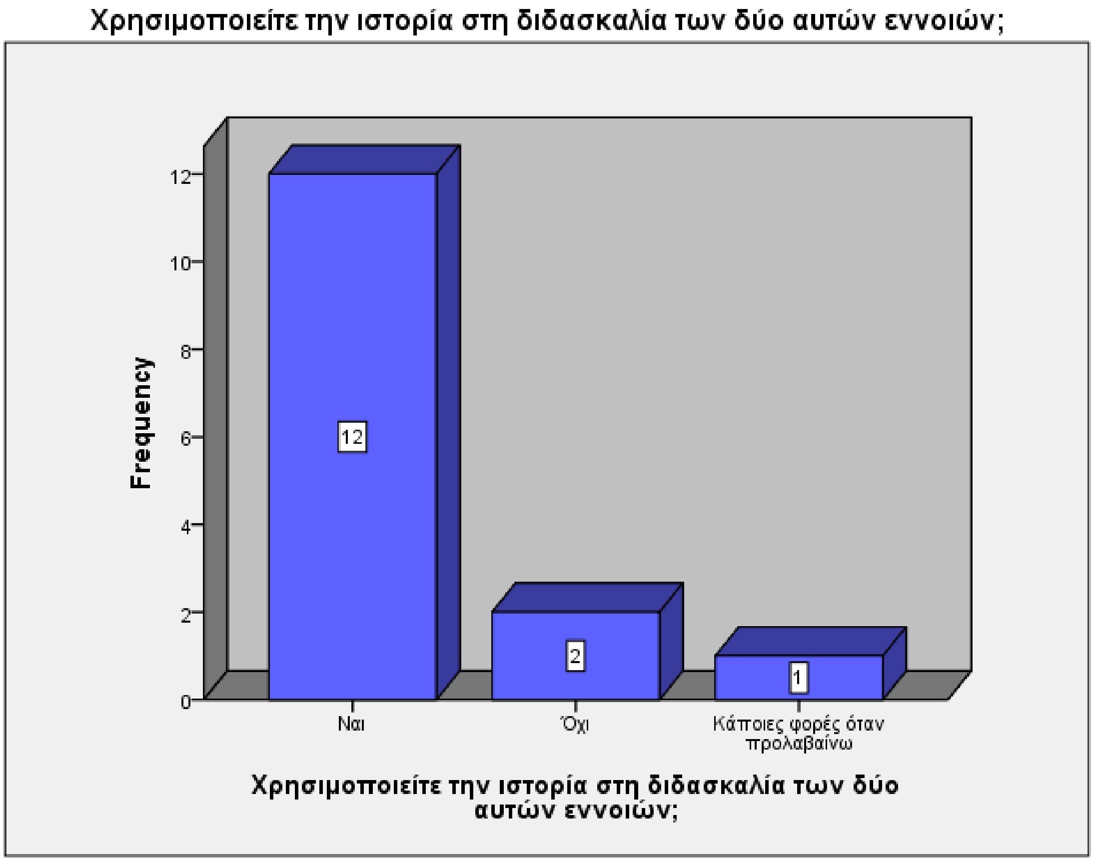
Κατηγορίες	**N**	**f%**	**F%**
Ναι	12	12/15	12/15
Όχι	2	2/15	14/15
Κάποιες φορές όταν προλαβαίνω	1	1/15	15/15
Σύνολο	15	100,0	

N: Συχνότητα

f%: Σχετική συχνότητα

F%: Αθροιστική συχνότητα

Γράφημα 17. «Χρησιμοποιείτε την ιστορία στη διδασκαλία των δύο αυτών εννοιών;»



Αναφορικά με την χρήση της ιστορίας στην διδασκαλία των εννοιών του Πυθαγορείου θεωρήματος και των άρρητων αριθμών οι εκπαιδευτικοί έδωσαν πολλαπλές απαντήσεις. Παρατηρούμε (από τον Πίνακα 27) ότι 11 εκπαιδευτικοί επικεντρώθηκαν στα ιστορικά σημειώματα του βιβλίου, 5 στις εργασίες και στο ψηφιακό σχολείο, 4 σε γενικότερες αναφορές στον Πυθαγόρα ενώ μόλις 1 εκπαιδευτικός αναφέρθηκε στην ιστορία του Ίπασσου.

Πίνακας 27. «Πως χρησιμοποιείτε την ιστορία στη διδασκαλία των δύο αυτών εννοιών;»

Κατηγορίες	N	f%
Ιστορία Ίππασου	1	1/15
Ιστορικά σημειώματα του βιβλίου	11	11/15
Μέσω εργασιών και ψηφιακού σχολείου	5	5/15
Γενικά, μιλάω για τον Πυθαγόρα	4	4/15
Σύνολο	15	15/15

N: Συχνότητα

f%: Σχετική συχνότητα

Παρακάτω δίνεται απόσπασμα συνέντευξης για απάντηση του Πίνακα 27.

- Ιστορικά σημειώματα βιβλίου

«*Ναι, ναι η αλήθεια είναι ότι εμείς οι παλιοί καθηγητές έχουμε βαλτώσει σε ένα τρόπο διδασκαλίας. Τώρα τα τελευταία 2 χρόνια έχω αρχίσει να κάνω προβλήματα για να δουν τα παιδιά την υλοποίηση αλλά και την ιστορία των Μαθηματικών βεβαίως θα την ήθελα πάρα πολύ*», (*Εκπαιδευτικός 7,14:14-14:58*).

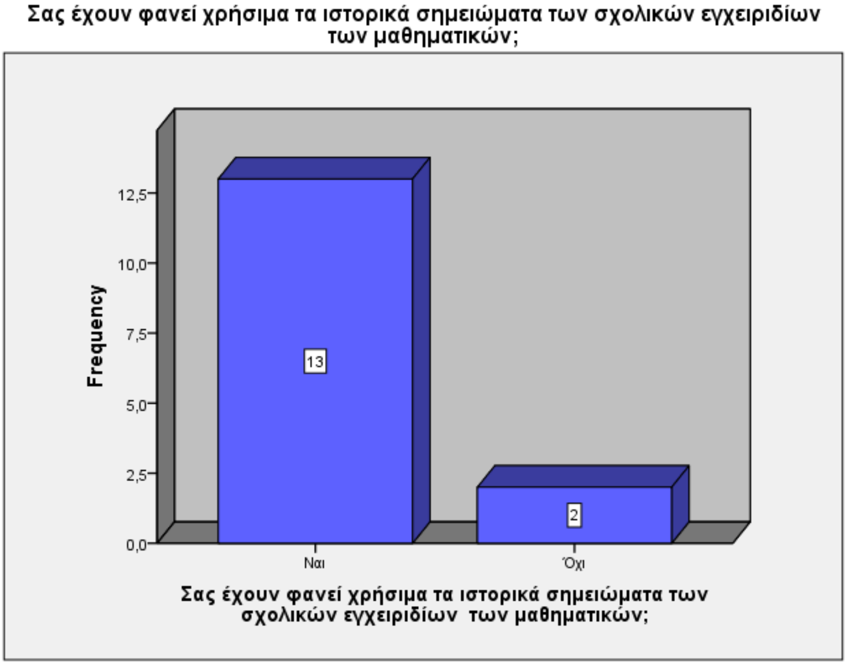
Επιπλέον, (σύμφωνα με τον Πίνακα 28 και το Γράφημα 18), 13 εκπαιδευτικοί συμφώνησαν ότι τους έχουν φανεί χρήσιμα τα ιστορικά σημειώματα των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών σε αντίθεση με 2 που διαφώνησαν με την άποψη αυτή.

Πίνακας 28. «Σας έχουν φανεί χρήσιμα τα ιστορικά σημειώματα των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών;»

Κατηγορίες	N	f%	F%
Ναι	13	13/15	13/15
Όχι	2	2/15	2/15
Σύνολο	15	15/15	

N: Συχνότητα f%: Σχετική συχνότητα F%: Αθροιστική συχνότητα

Γράφημα 18. «Σας έχουν φανεί χρήσιμα τα ιστορικά σημειώματα των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών;»



Παρακάτω δίνεται απόσπασμα συνέντευξης για απάντηση του Πίνακα 28.

- Ναι

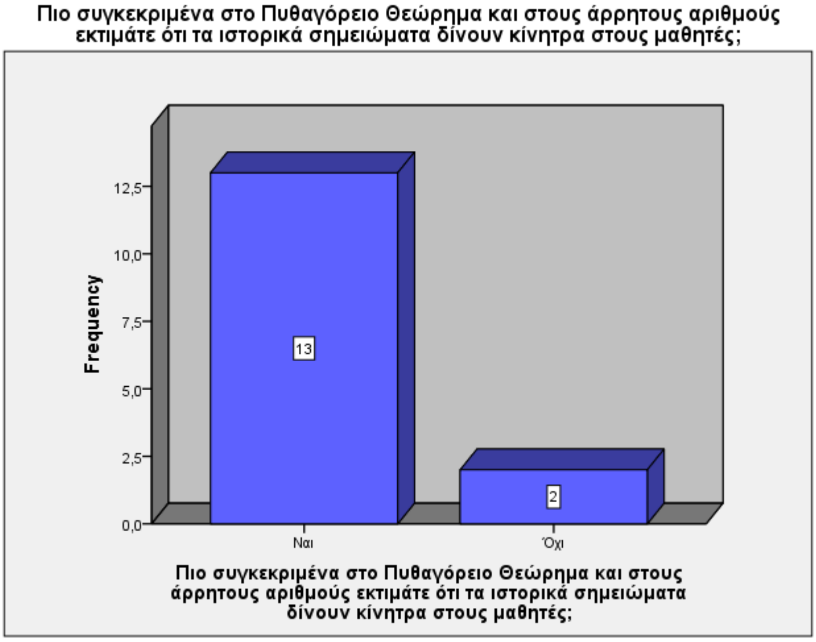
«*Πολύ, πολύ ναι, ναι μου έχουν φανεί χρήσιμα τα ιστορικά γιατί σου δίνουν ένα πάτημα και είναι βασικό να αξιοποιείς το σχολικό σύγγραμμά, δηλαδή εκεί που σε βοηθάει γιατί να μην το αξιοποιείς;. Συμπληρώνεις τα υπόλοιπα που θες εσύ αλλά δε το χρησιμοποιείς αποκλειστικά, αλλά τα σημεία που είναι ωραία, τα σημεία που παρουσιάζουν ενδιαφέρον, τα σημεία που μπορούν να αναφερθούν στα παιδιά όταν θα πάνε στο σπίτι, είναι καλό να τα αξιοποιείς, δεν είναι σελίδες για να τα περνάμε*», (*Εκπαιδευτικός 5,22:12-26:29*).

Η μεγάλη πλειοψηφία των εκπαιδευτικών και συγκεκριμένα 13 συμφώνησαν ότι τα ιστορικά σημειώματα δίνουν κίνητρα στους μαθητές στο Πυθαγόρειο Θεώρημα και στους άρρητους σε αντίθεση με 2 εκπαιδευτικούς που διαφώνησαν με την άποψη αυτή (σύμφωνα με τον Πίνακα 29 και το Γράφημα 19).

Πίνακας 29. «Πιο συγκεκριμένα στο Πυθαγόρειο Θεώρημα και στους άρρητους αριθμούς εκτιμάτε ότι τα ιστορικά σημειώματα δίνουν κίνητρα στους μαθητές;»

Κατηγορίες	**N**	**f%**	**F%**
Ναι	13	13/15	13/15
Όχι	2	2/15	15/15
Σύνολο	15	100,0	

Γράφημα 19. «Πιο συγκεκριμένα στο Πυθαγόρειο Θεώρημα και στους άρρητους αριθμούς εκτιμάτε ότι τα ιστορικά σημειώματα δίνουν κίνητρα στους μαθητές;»



Παρακάτω δίνεται απόσπασμα συνέντευξης για απάντηση του Πίνακα 29.

- Ναι

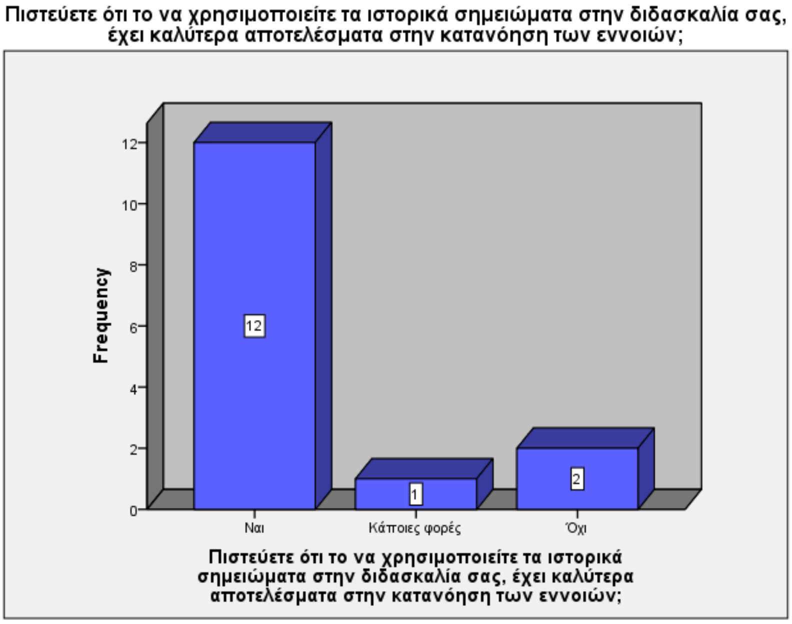
«*Κάτι που κάνεις ποτέ δεν καλύπτει το 100% των μαθητών. Εγώ όμως βλέπω ότι τα παιδιά όταν κάνω αυτό το μάθημα το παρακολουθούν με μεγάλη διάθεση, πολλά στο τέλος του μαθήματος μου λένε κυρία ήταν το πιο ωραίο μάθημα*», (*Εκπαιδευτικός 5 (2), 22:12-26:29*).

Πίνακας 30. «Πιστεύετε ότι το να χρησιμοποιείτε τα ιστορικά σημειώματα στην διδασκαλία σας, έχει καλύτερα αποτελέσματα στην κατανόηση των εννοιών;»

Κατηγορίες	**N**	**f%**	**F%**
Ναι	12	12/15	12/15
Κάποιες φορές	1	1/15	13/15
Όχι	2	2/15	15/15
Σύνολο	15	15/15	

Παρακάτω, (σύμφωνα με τον Πίνακα 30 και το Γράφημα 20), παρατηρούμε ότι η πλειοψηφία των εκπαιδευτικών και συγκεκριμένα 12 συμφώνησαν πως η χρήση των ιστορικών σημειωμάτων στην διδασκαλία έχει καλύτερα αποτελέσματα στην κατανόηση των εννοιών, 1 εκπαιδευτικός δήλωσε κάποιες φορές ενώ μόλις 2 διαφώνησαν.

Γράφημα 20. «Πιστεύετε ότι το να χρησιμοποιείτε τα ιστορικά σημειώματα στην διδασκαλία σας, έχει καλύτερα αποτελέσματα στην κατανόηση των εννοιών;»



Παρακάτω δίνεται απόσπασμα συνέντευξης για απάντηση του Πίνακα 30.

- <u>Ναι</u>

«*Τελικά σε κάποιους το μόνο που θα μείνει είναι αυτό που κάνουν για τις εξετάσεις, δηλαδή να μάθουν την διατύπωση και να προσπαθώ να βρίσκω τη μία πλευρά όταν γνωρίζω τις άλλες δύο. Σε άλλους όμως μένουν και το γεωμετρικό κομμάτι και τα ιστορικά στοιχεία, δηλαδή είναι κάποιοι μαθητές που τους μένουν όλα, και κάποιοι που προχωράνε ένα βήμα παραπάνω*», (*Εκπαιδευτικός 5 (2), 22:12-26:29*).

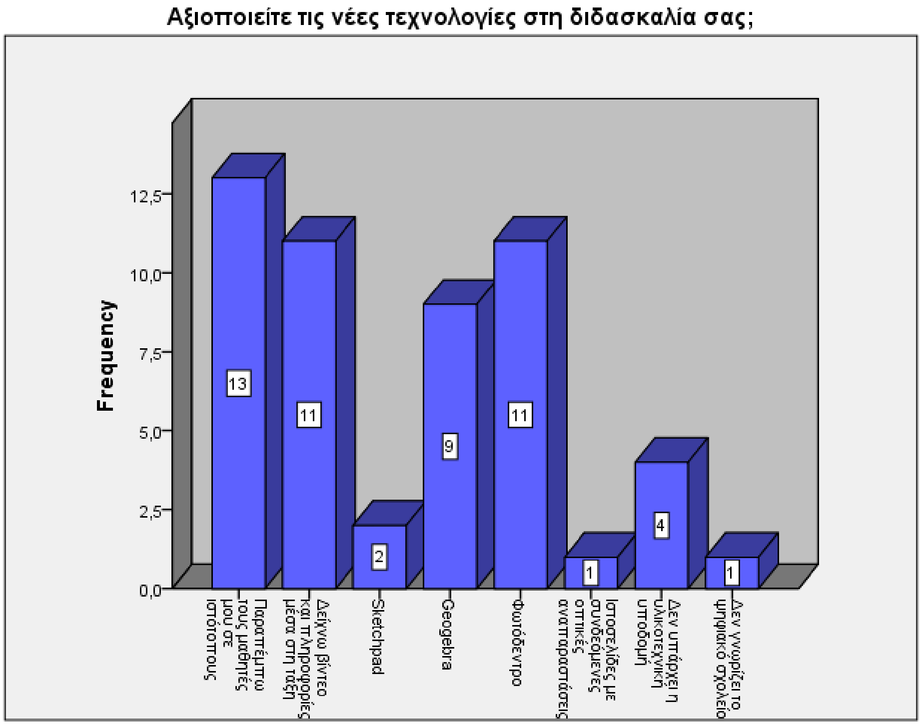
Σχετικά με τις νέες τεχνολογίες που χρησιμοποιούνται στη διδασκαλία οι εκπαιδευτικοί έδωσαν πολλαπλές απαντήσεις. Παρατηρούμε ότι (σύμφωνα με τον Πίνακα 31 και το Γράφημα 21) 12 εκπαιδευτικοί αναφέρθηκαν στην παραπομπή των μαθητών σε ιστοτόπους, 11 σε βίντεο και πληροφορίες μέσα στη τάξη, 11 στο φωτόδεντρο, 9 στη χρήση Geogebra, 4 στο ότι δεν υπάρχει υλικοτεχνική δομή, 2 στη χρήση Sketchpad και τέλος 1 εκπαιδευτικός σε ιστοσελίδες με συνδεόμενες οπτικές αναπαραστάσεις και 1 επίσης δήλωσε ότι δεν γνωρίζει το ψηφιακό σχολείο.

Πίνακας 31. «Αξιοποιείτε τις νέες τεχνολογίες στη διδασκαλία σας;»		
Κατηγορίες	**N**	**f%**
Παραπέμπω τους μαθητές μου σε ιστοτόπους	13	13/15
Δείχνω βίντεο και πληροφορίες μέσα στη τάξη	11	11/15
Sketchpad	2	2/15
Geogebra	9	9/15
Φωτόδεντρο	11	11/15
Ιστοσελίδες με συνδεόμενες οπτικές αναπαραστάσεις	1	1/15
Δεν υπάρχει η υλικοτεχνική υποδομή	4	4/15
Δεν γνωρίζει το ψηφιακό σχολείο	1	1/15
Σύνολο	15	15/15

N: Συχνότητα

f%: Σχετική συχνότητα

Γράφημα 21. «Αξιοποιείτε τις νέες τεχνολογίες στη διδασκαλία σας;»



Παρακάτω (στον Πίνακα 32) παρουσιάζονται οι απαντήσεις των εκπαιδευτικών σχετικά με την χρησιμότητα και τις εφαρμογές του Πυθαγορείου Θεωρήματος στην καθημερινότητα. Οι εκπαιδευτικοί έδωσαν πολλαπλές απαντήσεις. Παρατηρούμε ότι 13 εκπαιδευτικοί αναφέρθηκαν στις κατασκευές, 6 στις μετρήσεις-αποστάσεις, 4 στο αλφάδι και στον έλεγχο ορθότητας γωνίας και 3 στον διαχωρισμό χωραφιών. Επίσης 2 εκπαιδευτικοί αναφέρθηκαν στην Αρχιτεκτονική, στην τοποθέτηση επίπλων, στην σύνδεση γεωμετρίας και άλγεβρας και στην τριγωνομετρία. Τέλος, 1 εκπαιδευτικός αναφέρθηκε στην εμπειρία, στην εξύψωση πνεύματος, στην τοποθέτηση αριθμών στον άξονα των R και στην αστρονομία.

Πίνακας 32. «Ποια θεωρείτε ότι είναι η χρησιμότητα και οι εφαρμογές του Πυθαγορείου Θεωρήματος στην καθημερινότητα;»

Κατηγορίες	**N**	**f%**
Κατασκευές	13	13/15
Μετρήσεις-αποστάσεις	6	6/15
Διαχωρισμός χωραφιών	3	3/15
Εμπειρία	1	1/15
Εξύψωση πνεύματος	1	1/15
Αρχιτεκτονική	2	2/15
Αλφάδι	4	4/15
Τοποθέτηση αριθμών στον άξονα των R	1	1/15
Τοποθέτηση επίπλων	2	2/15
Σύνδεση γεωμετρίας και άλγεβρας	2	2/15
Έλεγχος ορθότητας γωνίας	4	4/15
Αστρονομία	1	1/15
Τριγωνομετρία	2	2/15
Σύνολο	15	15/15

N: Συχνότητα f%: Σχετική συχνότητα

Παρακάτω δίνονται αποσπάσματα συνέντευξης για ορισμένες από τις απαντήσεις του Πίνακα 32.

- <u>Κατασκευές & Αλφάδι</u>

«*Τους λέω ότι ο πατέρας μου έχει ένα κτήμα με ελιές και ότι ήρθε μία μέρα και προσπαθούσε μόνος του να σχεδιάσει μία κάτοψη του χωραφιού, μόνος του προσπαθούσε να το κάνει δεν έφερε πολιτικό μηχανικό. Οπότε ήθελε να ανακαλύψει αν μία γωνία είναι ορθή στο χωράφι , τι θα κάνει θα πάει με το μοιρογνωμόνιο στο χωράφι;*», (*Εκπαιδευτικός 5 (3), 00:36-5:06*).

- <u>Μετρήσεις-Αποστάσεις</u>

«*Και φυσικά εφαρμογές που υπάρχουν στο σχολικό βιβλίο, δηλαδή τα προβλήματα. Αγοράζω μία βιβλιοθήκη, η βιβλιοθήκη όμως δεν συναρμολογείται στον τοίχο, συναρμολογείται στο δάπεδο, οπότε όταν θα πάει να συναρμολογηθεί η βιβλιοθήκη, μπορεί το ύψος να είναι μικρότερο από το ύψος που έχει το ταβάνι, στο δωμάτιο μας όμως υπάρχει περίπτωση να μη χωράει η βιβλιοθήκη*», (*Εκπαιδευτικός 5 (3), 00:36-5:06).*

Σχετικά με την χρησιμότητα και τις εφαρμογές των άρρητων αριθμών στην καθημερινότητα οι εκπαιδευτικοί έδωσαν πολλαπλές απαντήσεις και οι απαντήσεις ήταν αρκετά μοιρασμένες. Παρατηρούμε (σύμφωνα με τον Πίνακα 33) ότι 4 εκπαιδευτικοί αναφέρθηκαν στις κατασκευές, ενώ οι επιλογές προσεγγίσεις, μετρήσεις-αποστάσεις, και καμία χρησιμότητα-εφαρμογή υποστηρίχτηκαν από 3 εκπαιδευτικούς. Επιπλέον, οι επιλογές τοποθέτηση πάνω στον άξονα R, η εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος, η εξοικείωση με τους αριθμούς και δεν γνωρίζω συγκέντρωσαν αναφέρθηκαν από 2 εκπαιδευτικούς, ενώ μόλις 1 ανέφερε ότι υπάρχουν παντού γύρω στη φύση.

Πίνακας 33. «Ποια θεωρείτε ότι είναι η χρησιμότητα και οι εφαρμογές των άρρητων αριθμών στην καθημερινότητα;»

Κατηγορίες	**N**	**f%**
Προσεγγίσεις	3	3/15
Τοποθέτηση πάνω στον άξονα R	2	2/15
Κατασκευές	4	4/15
Εφαρμογή του Πυθαγορείου Θεωρήματος	2	2/15
Υπάρχουν παντού γύρω στη φύση	1	1/15
Μετρήσεις-αποστάσεις	3	3/15
Καμία	3	3/15
Δεν γνωρίζω	2	2/15
Εξοικείωση με τους αριθμούς	2	2/15
Σύνολο	15	15/15

N: Συχνότητα

f%: Σχετική συχνότητα

Παρακάτω παρουσιάζεται απόσπασμα συνέντευξης για απάντηση του Πίνακα 33.

- <u>Τοποθέτηση πάνω στον άξονα R</u>

«*Μετά ας πούμε για να μπορέσεις να βάλεις έναν άρρητο αριθμό στον άξονα των πραγματικών αριθμών, τι κάνεις; Πυθαγόρειο θεώρημα δεν κάνεις;*», *(Εκπαιδευτικός 3, 34:46-36).*

Παρακάτω (στον Πίνακας 34) παρατηρούμε ότι η καθολική πλειοψηφία των εκπαιδευτικών που έδωσε απάντηση, έχει αναφέρει την χρησιμότητα και τις εφαρμογές του Πυθαγορείου Θεωρήματος και των άρρητων αριθμών στους μαθητές τους.

Πίνακας 34. «Αναφέρετε την χρησιμότητα και τις εφαρμογές του Πυθαγορείου Θεωρήματος και των άρρητων αριθμών στους μαθητές σας;»			
Κατηγορίες	**N**	**f%**	**F%**
Ναι	14	14/15	14/15
Μη απαντημένα	1	1/15	15/15
Σύνολο	15	15/15	

N: Συχνότητα f%: Σχετική συχνότητα F%: Αθροιστική συχνότητα

Σχετικά με τις δυσκολίες που αντιμετώπισαν οι εκπαιδευτικοί στην διδασκαλία του Πυθαγόρειου Θεωρήματος δόθηκαν πολλαπλές απαντήσεις. Παρατηρούμε (από τον Πίνακα 35) ότι και οι 9 εκπαιδευτικοί υποστήριξαν ότι δεν είχαν καμία δυσκολία, 2 ότι δεν είχαν καμία εμπειρία στην απαραίτητη πλέον οπτική παρουσίαση και 2 στις μη κατάλληλες υλικοτεχνικές δομές ενώ 1 εκπαιδευτικός αναφέρθηκε στην επανάληψη του τρόπου διδασκαλίας με τον οποίο διδάχθηκε κάποτε ενώ άλλος στις λίγες ώρες διδασκαλίας .

Πίνακας 35. «Τι δυσκολίες αντιμετωπίσατε στην διδασκαλία του Πυθαγόρειου Θεωρήματος;»		
Κατηγορίες	**N**	**f%**
Καμία	9	9/15
Επανάληψη τρόπου διδασκαλίας με τον οποίο διδάχθηκα κάποτε εγώ	1	1/15
Καμία εμπειρία στην απαραίτητη πλέον οπτική παρουσίαση	2	2/15
Μη κατάλληλες υλικοτεχνικές δομές	2	2/15
Λίγες ώρες διδασκαλίας	1	1/15
Σύνολο	15	15/15

N: Συχνότητα

f%: Σχετική συχνότητα

Παρακάτω παρουσιάζονται αποσπάσματα συνέντευξης που αναφέρονται σε ορισμένες από τις απαντήσεις του Πίνακα 35.

- Λίγες ώρες διδασκαλίας

«*Ο χρόνος είναι πολύ λίγος, γιατί ξέρεις πρέπει μέσα σε 40 λεπτά περίπου, πρέπει να εξετάσεις, και ουσιαστικά να παραδώσεις κάτι να αφιερώσεις κατά μέσο όρο 1 λεπτό σε κάθε παιδί*», (*Εκπαιδευτικός 15, 40:26-45:16*).

- Μη κατάλληλες υλικοτεχνικές δομές

«*Θα ήθελα να έχω μία δική μου αίθουσα, στημένα όλα, τα λαπτοπ, τα διαδραστικά*», (*Εκπαιδευτικός 15, 40:26-45:16*).

Σχετικά με τις δυσκολίες που αντιμετώπισαν οι εκπαιδευτικοί στη διδασκαλία των άρρητων αριθμών, δόθηκαν πολλαπλές απαντήσεις. Παρατηρούμε (σύμφωνα με τον Πίνακα 36) ότι 7 εκπαιδευτικοί αναφέρθηκαν σε καμία δυσκολία, 4 στις λίγες ώρες διδασκαλίας και 2 σε μη κατάλληλη υλικοτεχνική δομή και στο ότι η έννοια των αρρήτων δεν είναι εύκολα επεξηγήσιμη. Οι επιλογές δυσκολία στις πράξεις, επανάληψη τρόπου διδασκαλίας με τον οποίο διδάχθηκα κάποτε εγώ και σύγκριση με ρητούς αναφέρθηκαν από 1 εκπαιδευτικό.

Πίνακας 36. «Τι δυσκολίες αντιμετωπίσατε στην διδασκαλία των άρρητων αριθμών;»

Κατηγορίες	**N**	**f%**
Καμία	7	7/15
Δυσκολία στις πράξεις	1	1/15
Επανάληψη τρόπου διδασκαλίας με τον οποίο διδάχθηκα κάποτε εγώ	1	1/15
Σύγκριση με ρητούς	1	1/15
Μη κατάλληλη υλικοτεχνική δομή	2	2/15
Λίγες ώρες διδασκαλίας	4	4/15
Η έννοια των αρρήτων δεν είναι εύκολα επεξηγήσιμη	2	2/15
Σύνολο	15	15/15

N: Συχνότητα

f%: Σχετική συχνότητα

Παρακάτω παρουσιάζονται αποσπάσματα συνέντευξης που αναφέρονται σε ορισμένες από τις απαντήσεις του Πίνακα 36.

- Λίγες ώρες διδασκαλίας

«*Ο χρόνος είναι πολύ λίγος, γιατί ξέρεις πρέπει μέσα σε 40 λεπτά περίπου, πρέπει να εξετάσεις, και ουσιαστικά να παραδώσεις κάτι να αφιερώσεις κατά μέσο όρο 1 λεπτό σε κάθε παιδί*», (*Εκπαιδευτικός 15, 40:26-45:16*).

- Μη κατάλληλες υλικοτεχνικές δομές

«*Θα ήθελα να έχω μία δική μου αίθουσα, στημένα όλα, τα λαπτοπ, τα διαδραστικά*», (*Εκπαιδευτικός 15, 40:26-45:16*).

Παρακάτω (στον Πίνακα 37) παρουσιάζονται τα αποτελέσματα σχετικά με τις δυσκολίες που αντιμετώπισαν οι μαθητές κατά την διδασκαλία του Πυθαγόρειου Θεωρήματος. Οι εκπαιδευτικοί έδωσαν πολλαπλές απαντήσεις. Παρατηρούμε ότι 13 εκπαιδευτικοί ανέφεραν δυσκολίες στη διατύπωση των ορισμών, κυρίως του αντιστρόφου (παπαγαλία), 4 στο ότι οι μαθητές δεν μπορούν να ξεχωρίσουν τις πλευρές του τριγώνου (μικρή, μεγάλη, υποτείνουσα), 3 στην δυσκολία κατανόησης και χρήσης του αντιστρόφου και στο ότι δεν διακρίνουν οι μαθητές το γεωμετρικό και το αλγεβρικό μέρος του θεωρήματος. Επιπλέον 2 εκπαιδευτικοί ανέφεραν την δυσκολία στις πράξεις και την έλλειψη βασικών γεωμετρικών εννοιών ενώ 1 την δυσκολία στους συμβολισμούς, την δυσκολία στην κατανόηση ότι γίνεται μέτρηση μηκών, την δυσκολία στην χρήση της ρίζας και στο ότι οι μαθητές μπερδεύονται με το Π.Θ. και τη συνισταμένη κάθετων δυνάμεων.

Πίνακας 37. «Τι δυσκολίες αντιμετώπισαν οι μαθητές σας στο Πυθαγόρειο Θεώρημα;»

Κατηγορίες	**N**	**f%**
Στη διατύπωση των ορισμών, κυρίως του αντιστρόφου (παπαγαλία)	13	13/15
Δεν διακρίνουν το γεωμετρικό από το αλγεβρικό μέρος του θεωρήματος	3	3/15
Δεν μπορούν να ξεχωρίσουν τις πλευρές του τριγώνου (μικρή,μεγάλη,υποτείνουσα)	4	4/15
Δυσκολία στους συμβολισμούς	1	1/15
Δυσκολία κατανόησης και χρήσης του αντιστρόφου	3	3/15
Δυσκολία στη κατανόηση ότι γίνεται μέτρηση μηκών	1	1/15
Δυσκολία στην χρήση της ρίζας	1	1/15
Δυσκολία στις πράξεις	2	2/15
Έλλειψη βασικών γεωμετρικών εννοιών	2	2/15
Μπερδεύονται με το Π.Θ. και τη συνισταμένη κάθετων δυνάμεων	1	1/15
Σύνολο	15	15/15

N: Συχνότητα

f%: Σχετική συχνότητα

Παρακάτω παρουσιάζεται απόσπασμα συνέντευξης για ορισμένες από τις απαντήσεις του Πίνακα 37.

- <u>Έλλειψη βασικών γεωμετρικών εννοιών</u> & <u>Δεν μπορούν να ξεχωρίσουν τις πλευρές του τριγώνου (μικρή,μεγάλη,υποτείνουσα)</u> & <u>Μπερδεύονται με το Π.Θ. και τη συνισταμένη κάθετων δυνάμεων</u>

«*Δεν ξέρουν να φέρουν μία γραμμούλα, να μετρήσουν μία γωνία, οπότε ξεκινάμε κατασκευαστικά ότι έχουν θέματα, αναγνώριση ονομαστικά τις πλευρές και τις γωνίες, πάρα πολλοί μπερδεύονται και καταλήγουν ότι απλά προσθέτω τις κάθετες πλευρές και βρίσκω την υποτείνουσα στην εφαρμογή του τύπου, στην επίλυση*», (*Εκπαιδευτικός 10, 40:26-45:16*).

- <u>Στη διατύπωση των ορισμών, κυρίως του αντιστρόφου (παπαγαλία) & Δυσκολία κατανόησης και χρήσης του αντιστρόφου</u>

«Στο Πυθαγόρειο, στο αντίστροφο, στην εφαρμογή του δυσκολεύονται, στο πως πρέπει να το διατυπώσουνε, ότι πρέπει να βάλουνε το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς», (*Εκπαιδευτικός 5 (3), 05:20-10:08*).

- <u>Δυσκολία στις πράξεις</u>

«Εντάξει κάποια παιδιά δυσκολεύονται να βρούνε την μία κάθετη όταν γνωρίζουν τις άλλες δύο», (Εκπαιδευτικός 5 (3), 05:20-10:08).

- <u>Δυσκολία στους συμβολισμούς</u>

«Γενικά τα παιδιά δυσκολεύονται πολύ. Δεν τους είναι όλα αυτά προφανή. Ειδικά όταν εμπλέκονται συμβολισμοί, γράμματα», (Εκπαιδευτικός 5 (3), 05:20-10:08).

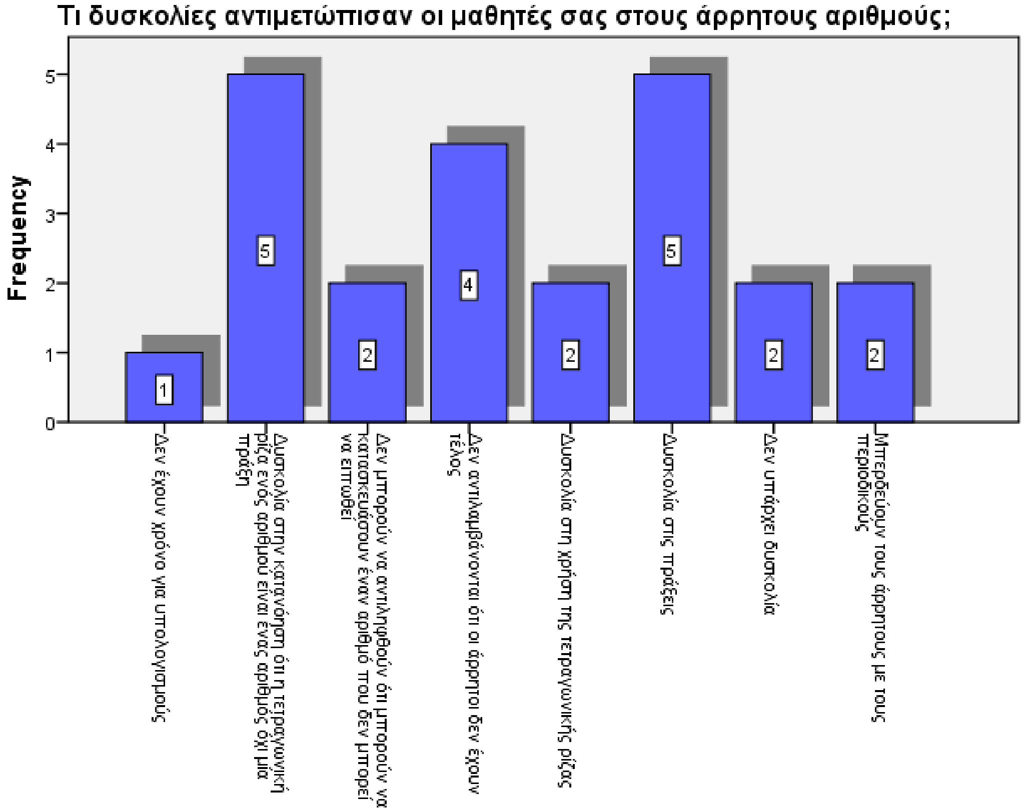
Σχετικά με την δυσκολία που αντιμετώπισαν οι μαθητές στους άρρητους αριθμούς οι εκπαιδευτικοί έδωσαν πολλαπλές απαντήσεις. Παρατηρούμε από τον Πίνακα 38 και το Γράφημα 22) ότι 5 εκπαιδευτικοί αναφέρθηκαν στην δυσκολία στις πράξεις και στην δυσκολία στην κατανόηση ότι η τετραγωνική ρίζα ενός αριθμού είναι ένας αριθμός όχι μία πράξη ενώ 4 στο ότι δεν αντιλαμβάνονται οι μαθητές ότι οι άρρητοι δεν έχουν τέλος. Οι επιλογές μπερδεύουν τους άρρητους με τους περιοδικούς, δεν έχουν χρόνο για υπολογισμούς, δεν μπορούν να αντιληφθούν ότι μπορούν να κατασκευάσουν έναν αριθμό που δεν μπορεί να ειπωθεί, δυσκολία στη χρήση της τετραγωνικής ρίζας και καμία δυσκολία αναφέρθηκαν από 2 εκπαιδευτικούς.

Πίνακας 38. «Τι δυσκολίες αντιμετώπισαν οι μαθητές σας στους άρρητους αριθμούς;»

Κατηγορίες	**N**	**f%**
Δεν έχουν χρόνο για υπολογισμούς	2	2/15
Δυσκολία στην κατανόηση ότι η τετραγωνική ρίζα ενός αριθμού είναι ένας αριθμός όχι μία πράξη	5	5/15
Δεν μπορούν να αντιληφθούν ότι μπορούν να κατασκευάσουν έναν αριθμό που δεν μπορεί να ειπωθεί	2	2/15
Δεν αντιλαμβάνονται ότι οι άρρητοι δεν έχουν τέλος	4	4/15
Δυσκολία στη χρήση της τετραγωνικής ρίζας	2	2/15
Δυσκολία στις πράξεις	5	5/15
Δεν υπάρχει δυσκολία	2	2/15
Μπερδεύουν τους άρρητους με τους περιοδικούς	2	2/15
Σύνολο	15	15/15

N: Συχνότητα f%: Σχετική συχνότητα

Γράφημα 22. «Τι δυσκολίες αντιμετώπισαν οι μαθητές σας στους άρρητους αριθμούς;»



Παρακάτω παρουσιάζονται αποσπάσματα συνέντευξης για ορισμένες από τις απαντήσεις του Πίνακα 38.

- <u>Δυσκολία στις πράξεις</u>

«*Ξέρω να κάνω πρόσθεση; Ξέρω να κάνω διαίρεση; Είναι όλες οι διαιρέσεις τέλειες η υπάρχουν και ατελής;*», (*Εκπαιδευτικός 10, 40:26-45:16*).

- <u>Δεν αντιλαμβάνονται ότι οι άρρητοι δεν έχουν τέλος</u>

«*Θα σου πούνε ότι ανάμεσα στο 1 και στο 2 υπάρχει το 1,5 ή το 1,4, το παιχνίδι παίζει ανάμεσα τους, άρα φαίνεται ας πούμε ότι αγνοούν την έννοια των συνόλων*», (*Εκπαιδευτικός 10, 40:26-45:16*).

- <u>Δυσκολία στην κατανόηση ότι η τετραγωνική ρίζα ενός αριθμού είναι ένας αριθμός όχι μία πράξη</u>

«*Στους άρρητους αντιμετωπίζουν την δυσκολία, εε, δεν καταλαβαίνουν ότι η ρίζα του 7 είναι ένας αριθμός. Νομίζουν ότι είναι μία πράξη και όχι αριθμός, δυσκολεύονται πάρα πολύ σε αυτό*», (*Εκπαιδευτικός 5 (3), 05:20-10:08*).

Παρακάτω, (στον Πίνακα 39 και Γράφημα 23), παρατηρούμε ότι η πλειοψηφία των εκπαιδευτικών και συγκεκριμένα 9 συμφώνησαν ότι οι Πυθαγόρειοι πιθανόν να έχουν βρεθεί σε παρόμοια θέση με τους μαθητές τους, 2 διαφώνησαν με αυτή την άποψη ενώ το 4 θεώρησαν ότι αυτό συνέβη λίγο.

Πίνακας 39. «Έχετε σκεφτεί ποτέ ότι μπορεί να έχουν βρεθεί σε παρόμοια θέση με τους μαθητές σας οι Πυθαγόρειοι;»

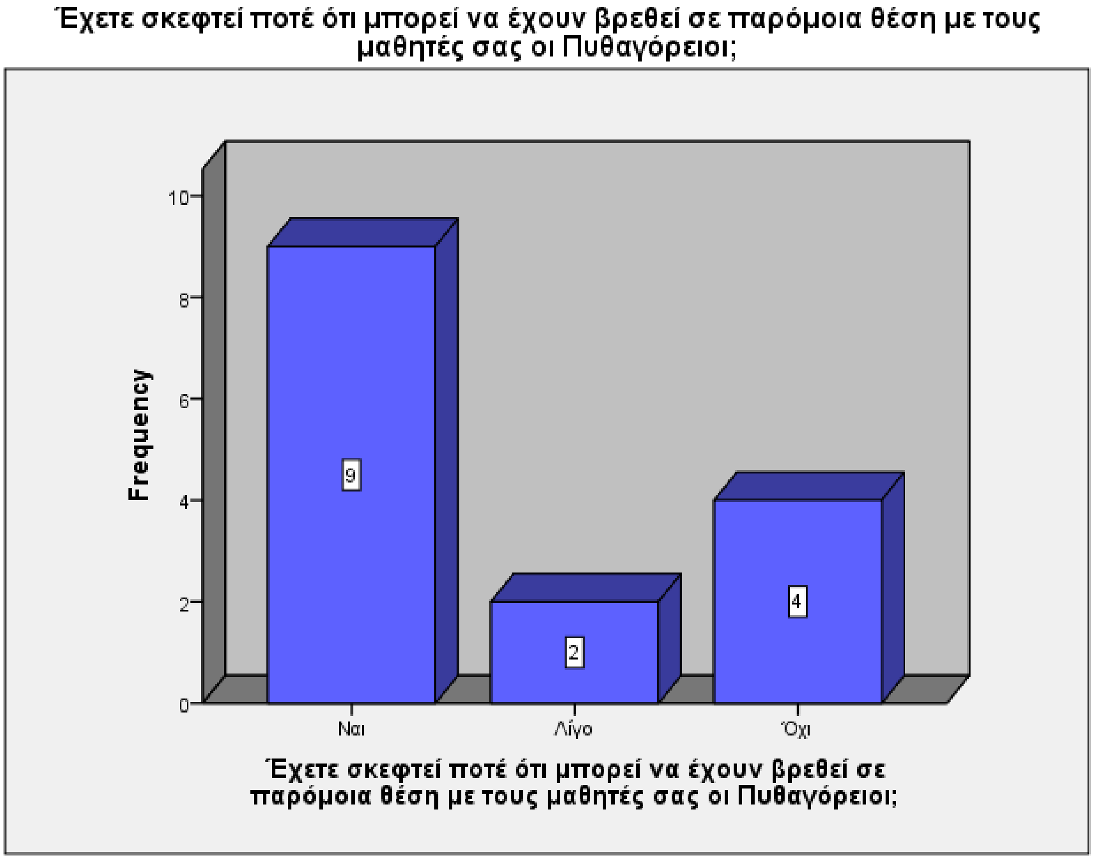
Κατηγορίες	**N**	**f%**	**F%**
Ναι	9	9/15	9/15
Λίγο	2	2/15	11/15
Όχι	4	4/15	15/15
Σύνολο	15	100,0	

N: Συχνότητα

f%: Σχετική συχνότητα

F%: Αθροιστική συχνότητα

Γράφημα 23. «Έχετε σκεφτεί ποτέ ότι μπορεί να έχουν βρεθεί σε παρόμοια θέση με τους μαθητές σας οι Πυθαγόρειοι;»



Η πλειοψηφία των εκπαιδευτικών και συγκεκριμένα 10, (σύμφωνα με τον Πίνακα 40 και το Γράφημα 24) δεν δείχνουν άλλες αποδείξεις στους μαθητές τους εκτός αυτής του σχολικού βιβλίου στη σελίδα 127, ενώ μόλις 5 χρησιμοποιούν και άλλες αποδείξεις.

Πίνακας 40. «Εκτός της απόδειξης του Π.Θ στο σχολικό βιβλίο στη σελ.127 δείχνετε και άλλες αποδείξεις στους μαθητές σας;»

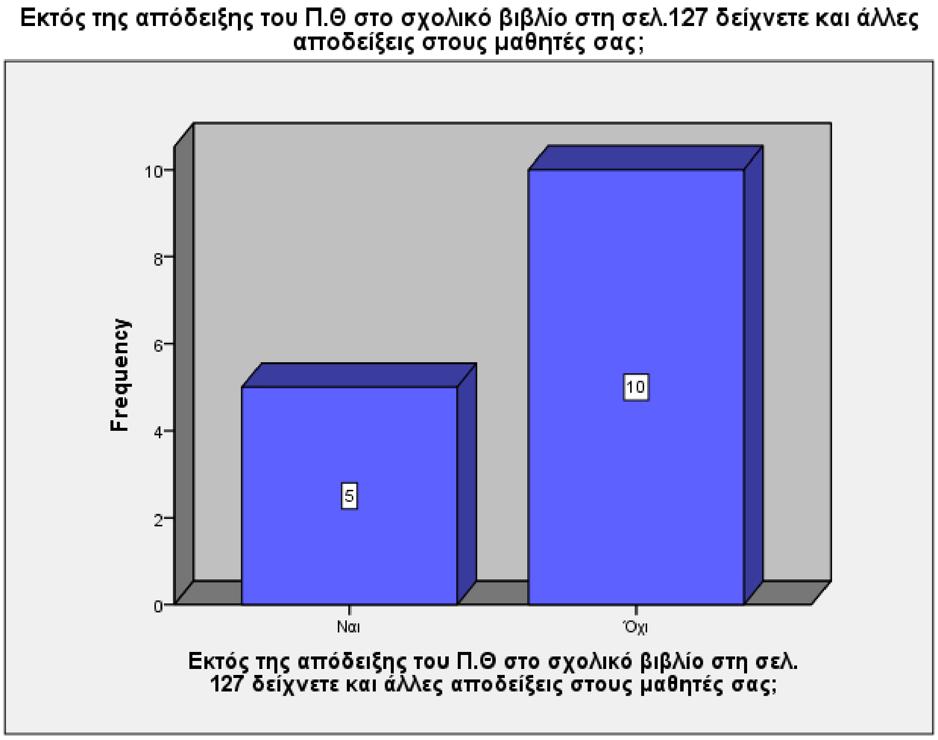
Κατηγορίες	**N**	**f%**	**F%**
Ναι	5	5/15	5/15
Όχι	10	10/15	15/15
Σύνολο	15	15/15	

N: Συχνότητα

f%: Σχετική συχνότητα

F%: Αθροιστική συχνότητα

Γράφημα 24. «Εκτός της απόδειξης του Π.Θ στο σχολικό βιβλίο στη σελ.127 δείχνετε και άλλες αποδείξεις στους μαθητές σας;»



Παρακάτω ένα απόσπασμα της συνέντευξης που αναφέρεται σε απάντηση του Πίνακα 40.

- Όχι

«Όχι στο Γυμνάσιο. Την έννοια της απόδειξης τα παιδιά εννοιολογικά αρχίζουν στα 14 να μπορούν να καταλάβουν», (*Εκπαιδευτικός 6, 31:35-32:30*).

Σχετικά με το αν γνωρίζουν οι εκπαιδευτικοί άλλες αποδείξεις του Πυθαγόρειου Θεωρήματος, οι εκπαιδευτικοί έδωσαν πολλαπλές απαντήσεις. Παρατηρούμε (σύμφωνα με τον Πίνακα 41) ότι 8 εκπαιδευτικοί δήλωσαν ότι γνωρίζουν από το διαδίκτυο, 6 από προσωπική έρευνα σε βιβλία και από σπουδές, 4 από το βιβλίο του Loomis και μόλις 3 δήλωσαν ότι δεν γνωρίζουν.

Πίνακας 41. «Γνωρίζετε άλλες αποδείξεις του Πυθαγόρειου Θεωρήματος;»

Κατηγορίες	**N**	**f%**
Ναι, από τις σπουδές μου	6	6/15
Ναι, από προσωπική έρευνα σε βιβλία	6	6/15
Ναι, από το διαδίκτυο	8	8/15
Ναι, από το βιβλίο του Loomis	4	4/15
Δεν γνωρίζω	3	3/15
Σύνολο	15	15/15

N: Συχνότητα

f%: Σχετική συχνότητα

Η πλειοψηφία των ερωτηθέντων και συγκεκριμένα 10 εξ αυτών δήλωσαν ότι δεν δείχνουν άλλες αποδείξεις του Πυθαγορείου θεωρήματος στους μαθητές σε αντίθεση με τους υπόλοιπους 5 (σύμφωνα με τον Πίνακα 42 και το Γράφημα 25).

Πίνακας 42. «Δείχνετε άλλες αποδείξεις του Πυθαγόρειου Θεωρήματος στους μαθητές σας;»

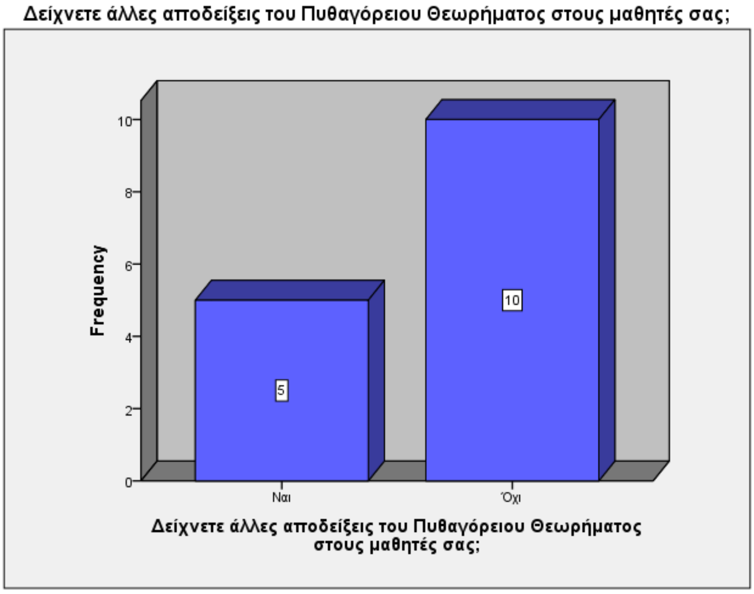
Κατηγορίες	**N**	**f%**	**F%**
Ναι	5	5/15	5/15
Όχι	10	10/15	15/15
Σύνολο	15	15/15	

N: Συχνότητα

f%: Σχετική συχνότητα

F%: Αθροιστική συχνότητα

Γράφημα 25. «Δείχνετε άλλες αποδείξεις του Πυθαγόρειου Θεωρήματος στους μαθητές σας;»



Οι εκπαιδευτικοί που δεν έχουν δείξει άλλες αποδείξεις του Πυθαγόρειου Θεωρήματος στους μαθητές τους έδωσαν πολλαπλές αιτίες. Παρατηρούμε (από τον Πίνακα 43 και το Γράφημα 26) ότι 7 εκπαιδευτικοί επικεντρώθηκαν στο ότι είναι δυσνόητες για τους μαθητές, 4 λόγω έλλειψης χρόνου και 2 για να μη μπερδευτούν οι μαθητές.

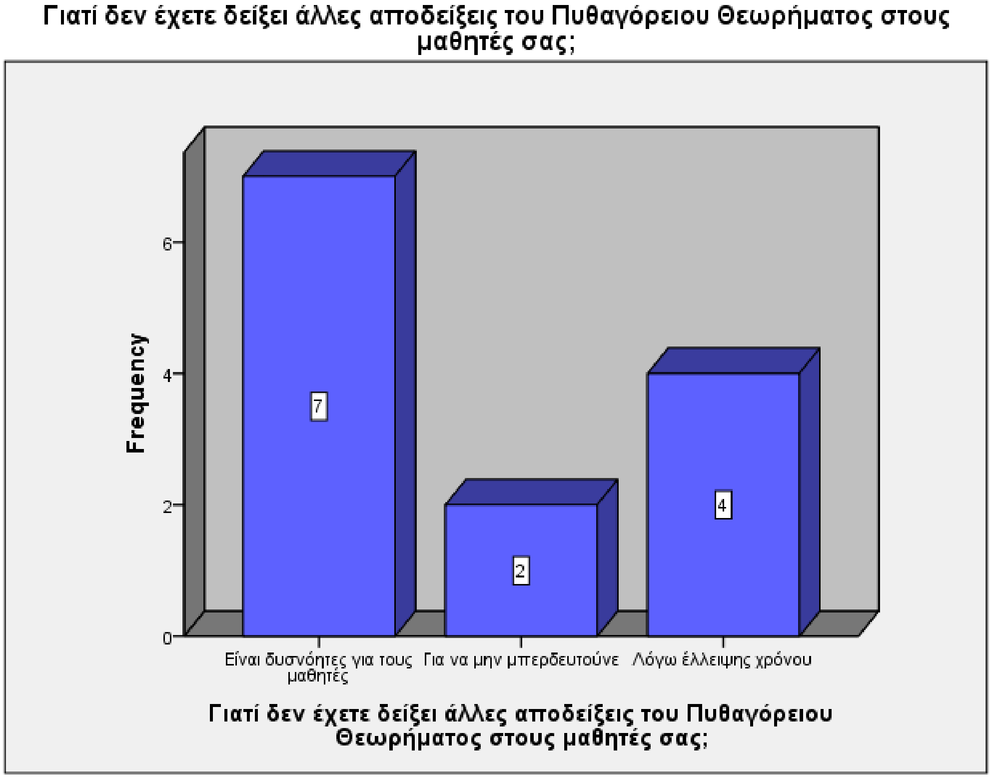
Πίνακας 43. «Γιατί δεν έχετε δείξει άλλες αποδείξεις του Πυθαγόρειου Θεωρήματος στους μαθητές σας;»

Κατηγορίες	**N**	**f%**
Είναι δυσνόητες για τους μαθητές	7	7/10
Για να μην μπερδευτούνε	2	2/10
Λόγω έλλειψης χρόνου	4	4/10
Σύνολο	10	10/10

N: Συχνότητα

f%: Σχετική συχνότητα

Γράφημα 26. «Γιατί δεν έχετε δείξει άλλες αποδείξεις του Πυθαγόρειου Θεωρήματος στους μαθητές σας;»



Σχετικά με τις μεθοδολογίες που χρησιμοποιούνται για την προσέγγιση ενός άρρητου αριθμού, παρατηρούμε ότι το σύνολο των εκπαιδευτικών αναφέρθηκαν σε μεθοδολογίες του βιβλίου και αλγεβρικές προσεγγίσεις και φράγματα (σύμφωνα με τον Πίνακα 44 και το Γράφημα 27).

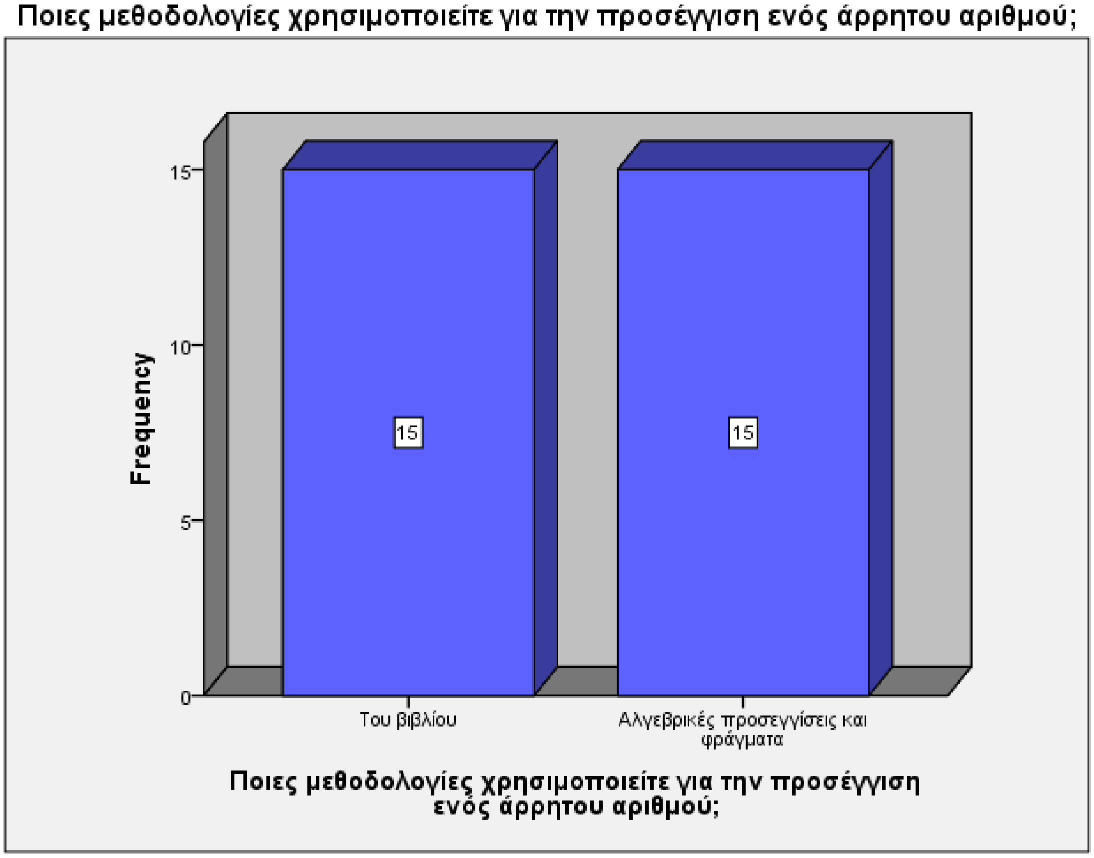
Πίνακας 44. «Ποιες μεθοδολογίες χρησιμοποιείτε για την προσέγγιση ενός άρρητου αριθμού;»

Κατηγορίες	**N**	**f%**
Του βιβλίου	15	15/15
Αλγεβρικές προσεγγίσεις και φράγματα	15	15/15
Σύνολο	15	15/15

N: Συχνότητα

f%: Σχετική συχνότητα

Γράφημα 27. «Ποιες μεθοδολογίες χρησιμοποιείτε για την προσέγγιση ενός άρρητου αριθμού;»



Αναφορικά με τις μεθοδολογίες που χρησιμοποιούνται για τον ακριβή προσδιορισμό ενός άρρητου αριθμού, οι εκπαιδευτικοί έδωσαν πολλαπλές απαντήσεις. Παρατηρούμε ότι το σύνολο των εκπαιδευτικών αναφέρθηκαν σε μεθοδολογίες του βιβλίου και στην μέθοδο του κανόνα και του διαβήτη πάνω στον άξονα των R (σύμφωνα με τον Πίνακα 45 και το Γράφημα 28).

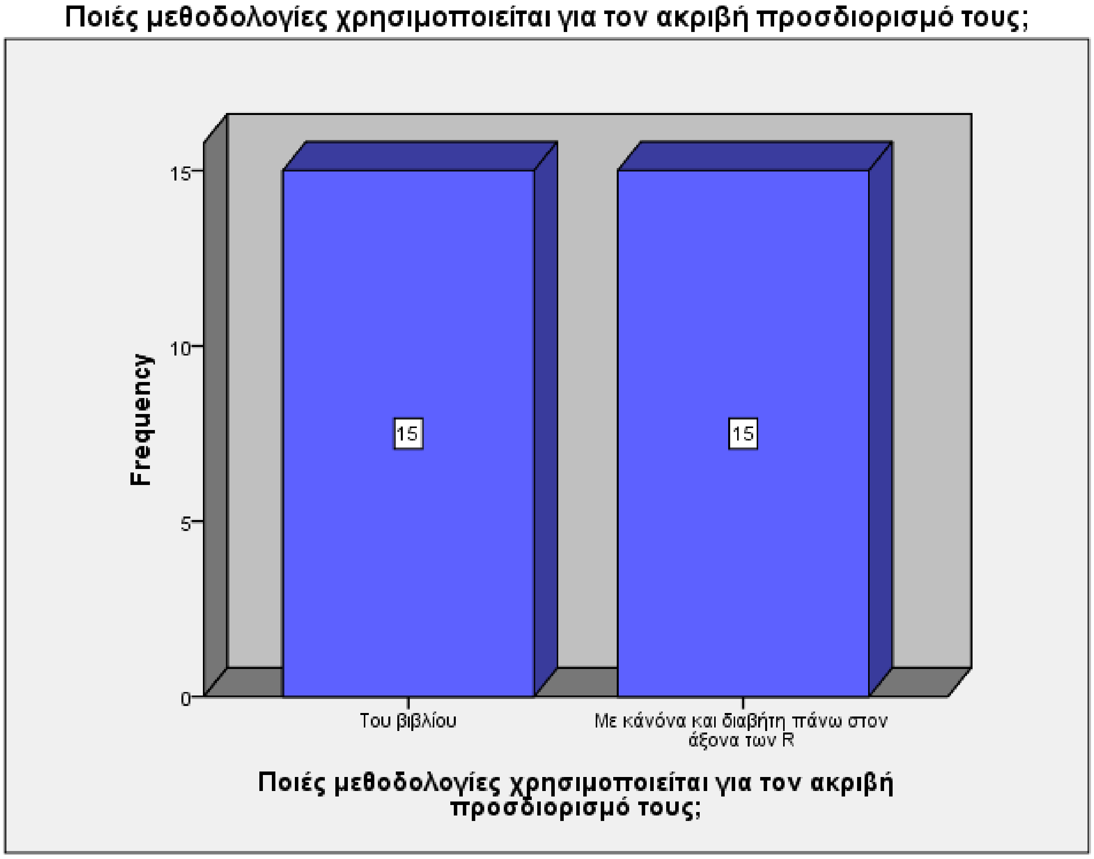
Πίνακας 45. «Ποιες μεθοδολογίες χρησιμοποιείτε για τον ακριβή προσδιορισμό τους;»

Κατηγορίες	**N**	**f%**
Του βιβλίου	15	15/15
Με κανόνα και διαβήτη πάνω στον άξονα των R	15	15/15
Σύνολο	15	15/15

N: Συχνότητα

f%: Σχετική συχνότητα

Γράφημα 28. «Ποιές μεθοδολογίες χρησιμοποιείται για τον ακριβή προσδιορισμό τους;»



Η καθολική πλειοψηφία των εκπαιδευτικών θεώρησε πολύ σημαντικό το Πυθαγόρειο θεώρημα και τους άρρητους αριθμούς στην εξέλιξη και πορεία των μαθηματικών (σύμφωνα με τον Πίνακα 46).

Πίνακας 46. «Πόσο σημαντικά θεωρείτε το Πυθαγόρειο Θεώρημα και τους άρρητους αριθμούς στην εξέλιξη και πορεία των μαθηματικών;»

Κατηγορίες	N	f%
Πολύ	15	15/15
Σύνολο	15	15/15

N: Συχνότητα

f%: Σχετική συχνότητα

Οι εκπαιδευτικοί στο σύνολο τους συμφωνησαν ότι είναι χρήσιμη η ιστορία των μαθηματικών στην εκπαιδευτική διαδικασία και έδωσαν πολλαπλές απαντήσεις. Παρατηρούμε (σύμφωνα με τον Πίνακα 47) ότι σχεδόν το σύνολο των εκπαιδευτικών και συγκεκριμένα 14 εστίασαν στο ότι η ιστορία των μαθηματικών είναι χρήσιμη γιατί κεντρίζει το ενδιαφέρον των μαθητών, 7 γιατί οι μαθητές κατανοούν καλύτερα την εφαρμογή του Πυθαγορείου και των άρρητων και 3 γιατί οι μαθητές καταλαβαίνουν ότι κάθε εφαρμογή χρειάζεται και μία απόδειξη. Οι επιλογές για να αντιληφθούν καλύτερα την φύση που υπάρχει γύρω τους και για να φύγει στους μαθητές ο "φόβος" των μαθηματικών αναφέρθηκαν από 2 εκπαιδευτικούς.

Πίνακας 47. «Πιστεύετε τελικά ότι είναι χρήσιμη η ιστορία των μαθηματικών στην εκπαιδευτική διαδικασία και γιατί;»

Κατηγορίες	**N**	**f%**
Ναι, κεντρίζει το ενδιαφέρον των μαθητών	14	14/15
Ναι, για να κατανοούν οι μαθητές καλύτερα την εφαρμογή των Πυθαγορείου και των άρρητων	7	7/15
Ναι, για να καταλάβουν ότι κάθε εφαρμογή χρειάζεται και μία απόδειξη	3	3/15
Ναι, για να αντιληφθούν καλύτερα την φύση που υπάρχει γύρω τους	2	2/15
Ναι, για να φύγει στους μαθητές ο "φόβος" των μαθηματικών	2	2/15
Σύνολο	15	15/15

N: Συχνότητα

f%: Σχετική συχνότητα

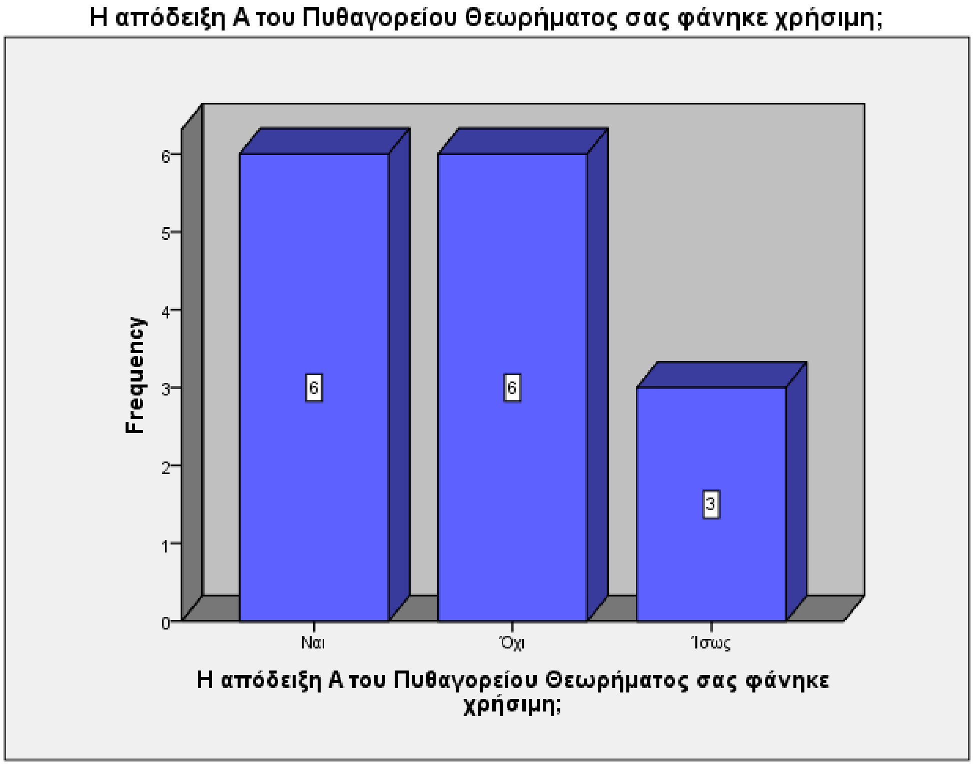
Παρακάτω, στον Πίνακα 48 και στα Γραφήματα 29-31 δίνονται οι απαντήσεις των ερωτηθέντων σχετικά με το κατά πόσο φάνηκαν χρήσιμες οι αποδείξεις του Πυθαγορείου Θεωρήματος που προτάθηκαν στην διδακτική πρόταση. Παρατηρούμε ότι την καθολική αποδοχή των ερωτηθέντων έχουν οι αποδείξεις Γ και Δ (15), ενώ ακολουθεί η απόδειξη με Ε όπου την θεώρησαν χρήσιμη 12 εκπαιδευτικοί σε αντίθεση με 3 που δεν την θεώρησαν. Αναφορικά με την απόδειξη Α, το 6 εκπαιδευτικοί απάντησαν ότι είναι χρήσιμη, 3 ίσως ενώ 6 απάντησαν αρνητικά. Μικρότερα ποσοστά αναγνώρισης της χρησιμότητας της είχε η απόδειξη Β όπου 6 εκπαιδευτικοί απάντησαν θετικά και 9 αρνητικά.

Πίνακας 48. «Χρησιμότητα αποδείξεων Πυθαγόρειο Θεώρημα»						
	Ναι		Όχι		Ίσως	
Απόδειξη	**N**	**f%**	**N**	**f%**	**N**	**f%**
Α	6	6/15	6	6/15	3	3/15
Β	6	6/15	9	9/15	0	0/15
Γ	15	15/15	0	0/15	0	0/15
Δ	15	15/15	0	0/15	0	0/15
Ε	12	12/15	3	3/15	0	0/15

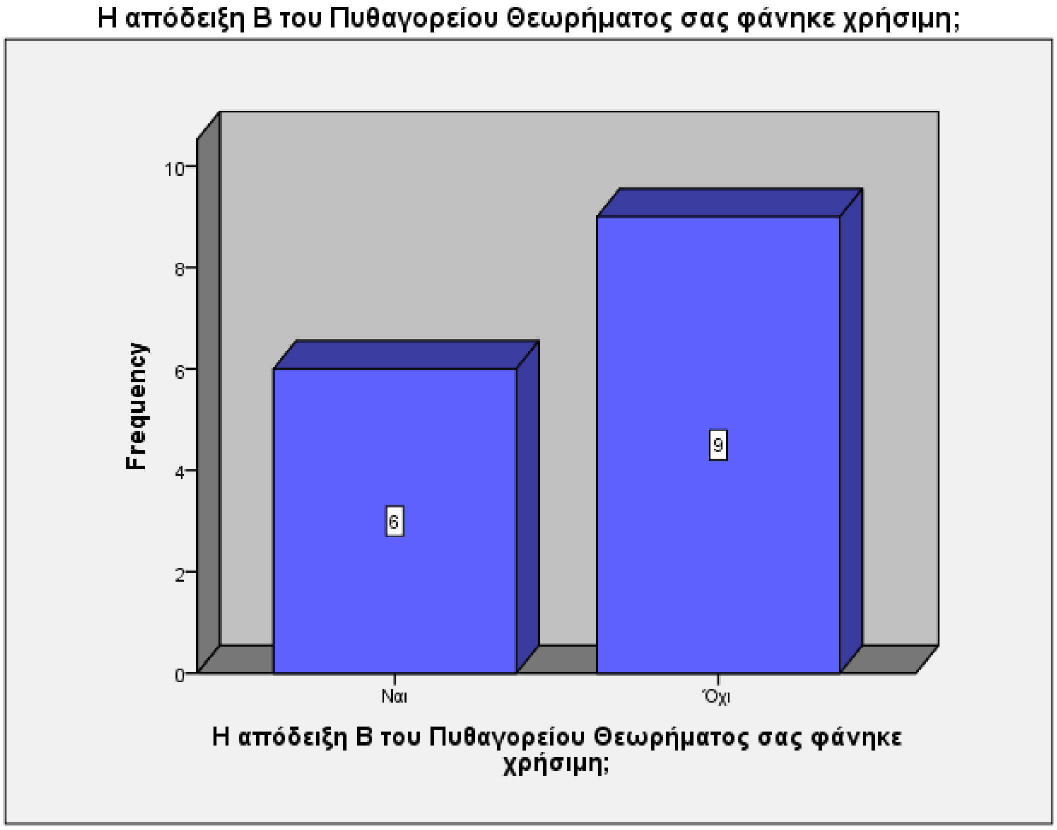
N: Συχνότητα

f%: Σχετική συχνότητα

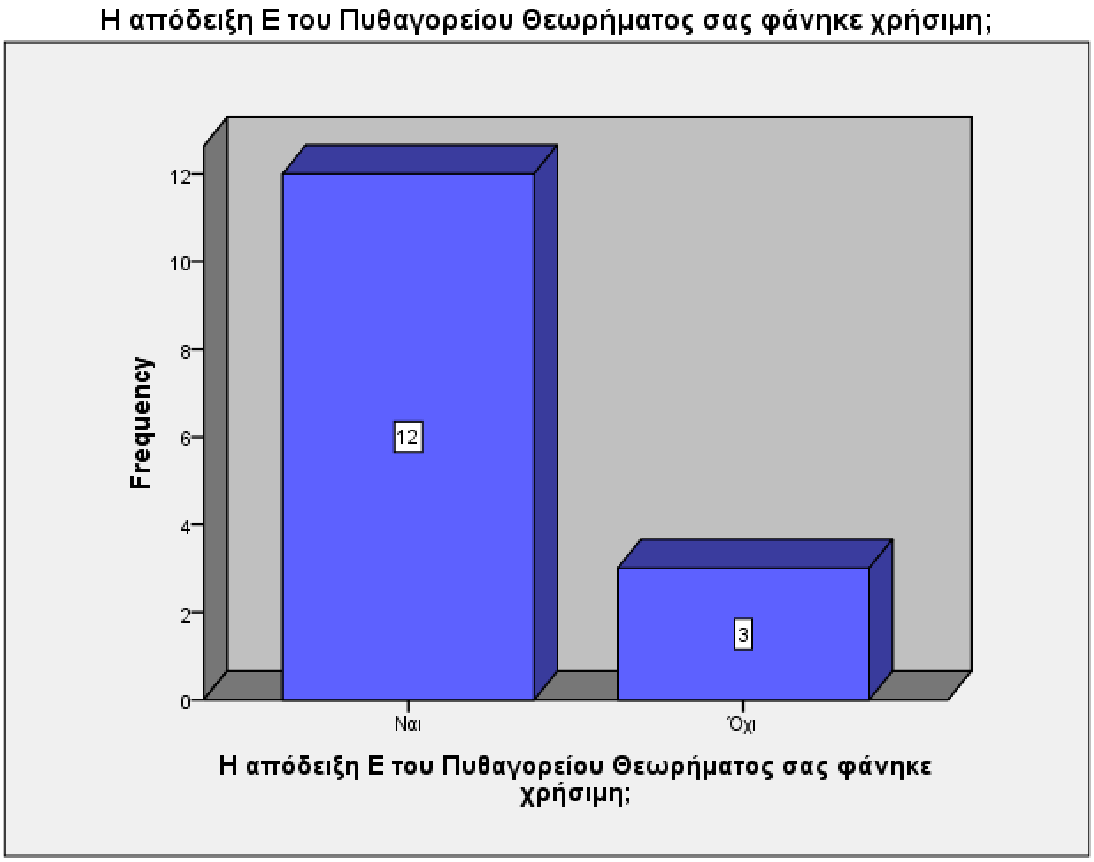
Γράφημα 29. «Χρησιμότητα απόδειξης Α του Πυθαγορείου θεωρήματος»



Γράφημα 30. «Χρησιμότητα απόδειξης Β Πυθαγορείου θεωρήματος»



Γράφημα 31. «Χρησιμότητα απόδειξης Ε του Πυθαγορείου θεωρήματος»



Παρακάτω παρουσιάζονται αποσπάσματα συνέντευξης για απαντήσεις του Πίνακα 48.

- Όχι (Α,Β)

«*Θα του είναι πολύ δύσκολο να μάθει και την ταυτότητα. Δηλαδή το θεωρώ ότι δεν θα έχει κάποια επιτυχία, δηλαδή στην ουσία θεωρώ ότι δεν θα βοηθήσει τον μαθητή, ίσα ίσα θα του δώσει ένα πολύ πιο δύσκολο πράγμα να αντιληφθεί, και εκεί που είναι ακόμη αριθμητικός ο μαθητής, δηλαδή κάνει αριθμητική, τον κάνεις αλγεβρικό, δεν είναι η κατάλληλη εποχή για να γίνει αλγεβρικός*», (*Εκπαιδευτικός 13, 1:23:09-1:38:33*).

- Όχι Β

«*Αυτό το κάνω στη Γ Γυμνασίου,......, στη Γ Γυμνασίου είναι η ομοιότητα κ την συναντάνε ξανά στην Α Λυκείου*», (*Εκπαιδευτικός 4, 32:06-46:11*).

- Ναι (Γ)

«*Ναι, την διδάσκω», (Εκπαιδευτικός 13, 1:23:09-1:38:33), (Εκπαιδευτικός 13, 1:23:09-1:38:33).*

«Ναι εντάξει, τυπικό του βιβλίου», (Εκπαιδευτικός 4, 32:06-46:11).

- Ναι (Δ)

«Το έχω δει ναι. Αυτά είναι αυτά τα πράγματα που τους κινούν το ενδιαφέρον, που πας και τους πείθεις, ότι αυτό που ισχυρίζεσαι έχει λογική», (Εκπαιδευτικός 13 1:23:09-1:38:33).

«Ναι ωραία, αυτό μου αρέσει», (Εκπαιδευτικός 4, 32:06-46:11).

- Όχι (Ε)

«*Αυτό θα το έβαζα εγώ σε πιο προχωρημένη τάξη, στη Β Λυκείου, στο Γυμνάσιο ακόμη δεν ξέρουν τις Δυνάμεις*», *(Εκπαιδευτικός 13, 1:23:09-1:38:33).*

- Ναι (Ε)

«*Ωραία, αυτό είναι πολύ καλό να γίνει,......, θα έπρεπε να συνεργάζονται οι 2 καθηγητές (Μαθηματικά, Φυσική) για αυτό το θέμα*», (*Εκπαιδευτικός 4, 32:06-46:11*).

- Ίσως (Α)

«*Δεν είναι κακό, ..., τα παιδιά της Β Γυμνασίου δεν είναι τόσο εξοικειωμένα μέσα στις μεταβλητές*», (*Εκπαιδευτικός 4, 32:06-46:11*).

Παρακάτω, στον Πίνακα 49 και στα Γραφήματα 32-33 δίνονται οι απαντήσεις των ερωτηθέντων σχετικά με το κατά πόσο φάνηκαν χρήσιμες οι προσεγγιστικές μέθοδοι των άρρητων που προτάθηκαν στην διδακτική πρόταση. Παρατηρούμε ότι η καθολική πλειοψηφία θεώρησε χρήσιμη την Α μέθοδο (15), ενώ η συντριπτική πλειοψηφία και συγκεκριμένα 14 εκπαιδευτικοί θεώρησαν χρήσιμες τις μεθόδους Β και Γ, όπου για την Β μέθοδο μόνο 1 εκπαιδευτικός δήλωσε ότι είναι ίσως χρήσιμη ενώ για την Γ μόνο 1 απάντησε αρνητικά.

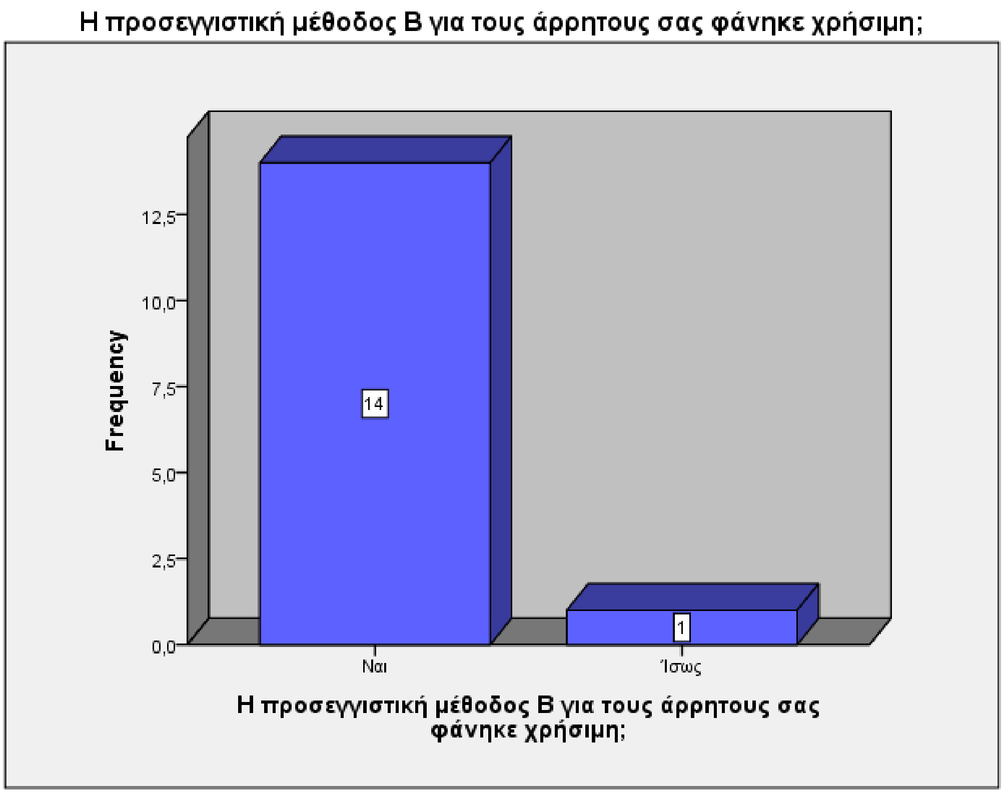
Πίνακας 49. «Χρησιμότητα προσεγγιστικών μεθόδων για άρρητους»

	Ναι		**Όχι**		**Ίσως**	
Μέθοδος	**N**	**f%**	**N**	**f%**	**N**	**f%**
Α	15	15/15	0	0/15	0	0/15
Β	14	14/15	0	0/15	1	1/15
Γ	14	15/15	1	1/15	0	0/15

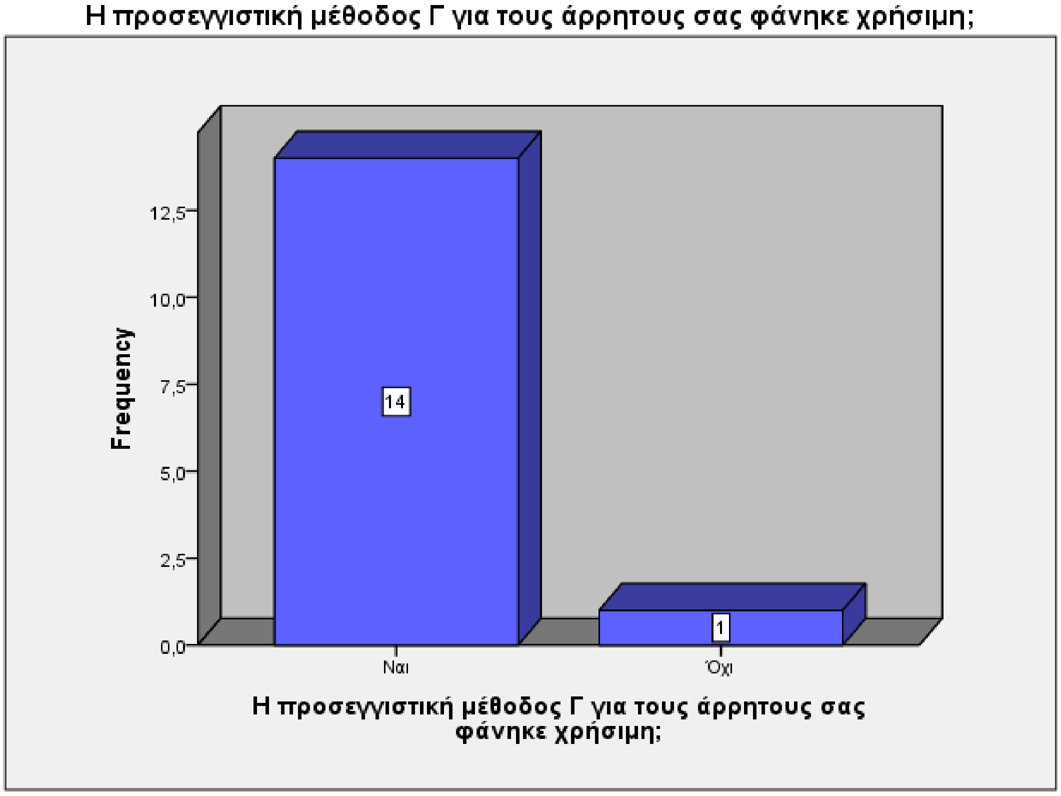
N: Συχνότητα

f%: Σχετική συχνότητα

Γράφημα 32. «Χρησιμότητα προσεγγιστικής μεθόδου Β για άρρητους»



Γράφημα 33. «Χρησιμότητα προσεγγιστικής μεθόδου Γ για άρρητους»



Παρακάτω παρουσιάζονται αποσπάσματα συνέντευξης για ορισμένες από τις απαντήσεις του Πίνακα 49.

- Ναι (Α)

«*Ναι, ναι όπως το σχολικό βιβλίο*», (*Εκπαιδευτικός 13, 1:23:09-1:38:33*).

«*Ναι, χρησιμοποιώ τις ανισότητες του βιβλίου*», (*Εκπαιδευτικός 4, 32:06-46:11*).

- Ναι (Β)

«*Δε σου λέω ότι απορρίπτεται, ..., οι πράξεις είναι πολύ χρονοβόρες μέσα στην τάξη, σαν διαδικασία είναι εξαιρετικά καλή, ότι μπορούμε να αντιδράσουμε χωρίς κομπιουτεράκι αυτό είναι πολύ καλό*», (*Εκπαιδευτικός 13, 1:23:09-1:38:33*).

«*Είναι πάρα πολύ ωραίο αυτό, αυτό θα μπορούσα να το κάνω,...., και το κυριότερο να δούνε ότι αυτά δεν είναι κάτι μαγικό, ότι βγαίνει τελικά*», (*Εκπαιδευτικός 4, 32:06-46:11*).

- Ναι (Γ)

«*Με τη λογική τι μπορούν να χρησιμοποιούν τι να επιλέξουνε, όχι ότι αυτά μπορούν να γίνουν όλα,...α, εντάξει με αυτή τη λογική ναι*», (*Εκπαιδευτικός 13, 1:23:09-1:38:33*).

«*Ναι εδώ μπορείς, απλά να κάνεις και μία αναφορά στους λόγους, που το δέχονται με την έννοια της μεγέθυνσης*», (*Εκπαιδευτικός 4, 32:06-46:11*).

Παρακάτω, στον Πίνακα 50 δίνονται οι απαντήσεις των ερωτηθέντων σχετικά με το κατά πόσο φάνηκαν χρήσιμες οι ακριβείς μέθοδοι εύρεσης άρρητων που προτάθηκαν στην διδακτική πρόταση. Παρατηρούμε ότι η καθολική πλειοψηφία θεώρησε χρήσιμες και τις δύο μεθόδους.

Πίνακας 50. «Χρησιμότητα μεθόδων ακριβείας εύρεσης άρρητων»

	Ναι		**Όχι**		**Ίσως**	
Μέθοδος	**N**	**f%**	**N**	**f%**	**N**	**f%**
Α	15	15/15	0	0/15	0	0/15
Β	15	15/15	0	0/15	0	0/15

N: Συχνότητα

f%: Σχετική συχνότητα

Παρακάτω παρουσιάζονται αποσπάσματα συνέντευξης για ορισμένες από τις απαντήσεις του Πίνακα 50.

- Ναι (Α,Β)

«*Με τη λογική τι μπορούν να χρησιμοποιούν τι να επιλέξουνε, όχι ότι αυτά μπορούν να γίνουν όλα,...α, εντάξει με αυτή τη λογική ναι*», (*Εκπαιδευτικός 13, 1:23:09-1:38:33*).

- Ναι (Α)

«*Ναι αυτή την έχει το βιβλίο*», (*Εκπαιδευτικός 4, 32:06-46:11*).

- Ναι (Β)

«*Αυτό, δεν είναι κακό και εμένα μου αρέσει αυτό, αυτό είναι πάρα πολύ καλό*», (*Εκπαιδευτικός 4, 32:06-46:11*).

Συμπεράσματα συνεντεύξεων

1. Όσον αφορά την επαφή των καθηγητών με την Ιστορία των Μαθηματικών έχουμε να πούμε τα εξής:

   i. 3 καθηγητές είχαν παρακολουθήσει την Ιστορία των Μαθηματικών κατά τη διάρκεια των σπουδών τους.

   ii. 13 καθηγητές γνωρίζουν ιστορικές αναφορές τις οποίες τις μοιράζονται με τους μαθητές τους. Μεγάλη ποικιλία ιστορικών αναφορών.

2. Συγκεκριμένα οι απόψεις τους για τους Πυθαγόρειους και της σχέσης τους με το Πυθαγόρειο Θεώρημα και τους άρρητους προκύπτουν τα εξής:

   i. Αν εξαιρέσουμε τους δύο από τους καθηγητές που δεν γνώριζαν καθόλου για τους Πυθαγορείους οι υπόλοιποι έδωσαν διαφορετικές απαντήσεις καλύπτοντας αρκετές πτυχές των όσων έχουν γίνει γνωστά για τους Πυθαγόρειους.

   ii. 8 καθηγητές πιστεύουν ότι το Πυθαγόρειο Θεώρημα συνδέεται καθαρά με τον Πυθαγόρα και τους Πυθαγόρειους, ενώ οι υπόλοιποι το συνδέουν και με τους Αιγύπτιους και τους Βαβυλώνιους.

   iii. 7 από τους καθηγητές πιστεύουν ότι οι άρρητοι είναι ανακάλυψη των Πυθαγορείων, 2 υποστήριξαν ότι είναι ανακάλυψη των Βαβυλωνίων και 6 ότι δεν γνώριζαν.

3. Η διδασκαλία του Πυθαγόρειου θεωρήματος και των αρρήτων σήμερα γίνεται ως εξής:

   i. Οι 7 από τους καθηγητές διδάσκουν και το Πυθαγόρειο Θεώρημα και τους άρρητους σύμφωνα με τη σειρά του βιβλίου και τις υποδείξεις του Υπουργείου Παιδείας.

   ii. 4 από τους καθηγητές κάνουν αναφορά στις ιστορικές συνθήκες της εποχής κατά τη διδασκαλία και του Πυθαγορείου Θεωρήματος και των αρρήτων.

   iii. 7 από τους καθηγητές βάζουν τους μαθητές τους στη διαδικασία της παρατήρησης – ανακάλυψης του Πυθαγόρειου Θεωρήματος μέσω των εμβαδών των σχημάτων και της αλγεβρική σχέσης που προκύπτει. 4 από αυτούς κάνουν το ίδιο και στη διδασκαλία των αρρήτων μέσω προσεγγιστικών μεθόδων και άρρητων υποτεινουσών ορθογωνίων τριγώνων.

iv. 4 από τους καθηγητές χρησιμοποιούν φύλλα εργασίας για το Πυθαγόρειο Θεώρημα και 3 για τους άρρητους.

v. 6 καθηγητές κάνουν επανάληψη προηγούμενων γνώσεων στο Πυθαγόρειο Θεώρημα και επιμένουν στο να κατανοήσουν ότι οι άρρητοι δεν μπορούν να γραφτούν ως κλάσματα.

vi. 5 καθηγητές χρησιμοποιούν το φωτόδεντρο και το Geogebra για το Πυθαγόρειο θεώρημα και 3 τα χρησιμοποιούν στη διδασκαλία των αρρήτων.

vii. 4 από τους καθηγητές δείχνουν εφαρμογές τον Πυθαγόρειου Θεωρήματος στους άρρητους.

viii. Όλοι οι καθηγητές πιστεύουν ότι υπάρχει σύνδεση μεταξύ του Πυθαγόρειου θεωρήματος και των αρρήτων, λόγω της αναγκαιότητας της ύπαρξης του Πυθαγόρειου για την παρουσίαση των αρρήτων.

ix. Οι 9 θεωρούν πως πρώτα πρέπει να διδαχθεί το Πυθαγόρειο θεώρημα και στη συνέχεια οι άρρητοι, 3 υποστηρίζουν το ακριβώς αντίθετο, ενώ οι υπόλοιποι 3 θεωρούν πως πρέπει να διδάσκονται παράλληλα ανάλογα το επίπεδο των μαθητών.

x. Και οι 15 ξεκαθαρίζουν στη διδασκαλία τους το ευθύ και το αντίστροφο του Πυθαγόρειου θεωρήματος. Οι 5 μέσω του παραδείγματος των αρπεδοναπτών και οι 4 με χρήση του Geogebra.

xi. Τέλος, οι 14 αξιοποιούν τις νέες τεχνολογίες μέσω του διαδικτύου, των εικόνων, δείχνοντας videos, εκμεταλευόμενοι το φωτόδεντρο, κάνοντας χρήση του Geogebra και του Sketchpad, καθώς και οπτικές αναπαραστάσεις. Αξίζει να σημειώσουμε πως ένας από τους εκπαιδευτικούς δεν γνώριζε την ύπαρξη του ψηφιακού σχολείου, οπότε κι ενημερώθηκε.

4. Οι μεθοδολογίες που χρησιμοποιούν οι καθηγητές στη διδασκαλία του Πυθαγόρειου Θεωρήματος και των άρρητων είναι οι εξής:

i. Μόνο οι 5 δείχνουν άλλες αποδείξεις του Πυθαγόρειου Θεωρήματος. 3 δεν γνώριζαν καθόλου άλλες αποδείξεις.

ii. Και οι 15 χρησιμοποιούν τη μεθοδολογία του βιβλίου στην προσέγγιση της τετραγωνική ρίζας μη τετράγωνου αριθμού.

iii. Και οι 15 χρησιμοποιούν κανόνα και διαβήτη για τον ακριβή προσδιορισμό του αρρήτου.
iv. Αξίζει να επαναλάβουμε πως από την πλειοψηφία των καθηγητών γίνεται χρήση των νέων τεχνολογιών, όπως το διαδίκτυο και το Geogebra καθώς και των οπτικών αναπαραστάσεων.
v. Τέλος, η ομαδική εργασία, η παρουσίαση αλλά και αναζήτηση από τους μαθητές πληροφοριών, καθώς και οι κατασκευές Πυθαγόρειων δέντρων, σπείρας του Κυρηναίου κι άλλων ενισχύουν την κατανόηση, κεντρίζουν το ενδιαφέρον των παιδιών και δείχνουν ένα άλλο πιο προσιτό πρόσωπο των Μαθηματικών.

5. Οι δυσκολίες που αντιμετώπισαν οι καθηγητές κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας του Πυθαγόρειου Θεωρήματος είναι οι εξής:

i. Καταρχάς οι 9 από τους καθηγητές δεν αντιμετώπισαν καμία δυσκολία οι ίδιοι.
ii. Οι υπόλοιποι καθηγητές ανέφεραν πως οι ώρες διδασκαλίας για το Πυθαγόρειο είναι λίγες, υπάρχει έλλειψη υλικοτεχνικών υποδομών, ένω μερικοί από αυτούς επανέλαβαν του τρόπο διδασκαλίας που είχαν διδαχθεί και οι ίδιοι. Τέλος, αναφέρθηκε η έλλειψη εμπειρίας των παιδιών στην οπτική παρουσίαση.

Από την πλευρά των μαθητών υπάρχουν επίσης δυσκολίες, όπως:

i. 13 από τους καθηγητές ανέφεραν την τάση των μαθητών προς την “παπαγαλία” και του ορισμού του Πυθαγόρειου θεωρήματος καθώς και του αντιστρόφου του.
ii. Δεν διακρίνουν οι μαθητές το αλγεβρικό από το γεωμετρικό κομμάτι του Πυθαγόρειου.
iii. Μεγάλο μέρος των μαθητών αντιμετωπίζει δυσκολίες στις πράξεις, στην επίλυση εξισώσεων, υπάρχει έλλειψη βασικών γεωμετρικών εννοιών, όπως επίσης πολλοί μαθητές παρουσιάζουν αδυναμία στην κατανόηση κι εφαρμογή του αντιστρόφου του θεωρήματος.

Όσον αφορά τις δυσκολίες που αντιμετώπισαν οι καθηγητές στη διδασκαλία των αρρήτων:

i. 7 από τους καθηγητές δεν αντιμετώπισαν καμία δυσκολία.

ii. Όπως και στο Πυθαγόρειο θεώρημα οι υπόλοιποι εκπαιδευτικοί θεωρούν πως είναι λίγες οι ώρες διδασκαλίας και στους άρρητους, υπάρχει έλλειψη υλικοτεχνικής υποδομής και επαναλαμβάνουν τον τρόπο διδασκαλίας που είχαν οι ίδιοι διδαχθεί.
iii. Η εμπειρία τους δείχνει πως τα παιδιά δυσκολεύονται να κατανοήσουν και να διαχωρίσουν τους ρητούς από τους άρρητους.

Από τη μεριά τώρα των μαθητών παρουσιάζονται οι εξής δυσκολίες:

i. Τα παιδιά δυσκολεύονται να κατανοήσουν και συγχέουν συνήθως το σύμβολο της τετραγωνικής ρίζας με νέα πράξη κι όχι με νέο αριθμό.
ii. Όπως και στο Πυθαγόρειο τα παιδιά δυσκολεύονται με τις πράξεις αλλά ταυτόχρονα δεν υπάρχει κι ο χρόνος για υπολογισμούς, ώστε να γίνει κατανοητή η προσέγγιση ενός άρρητου αριθμού.
iii. Δεν μπορούν να συνειδητοποιήσουν πως ο ά-ρρητος αριθμός είναι ένας αριθμός που δεν μπορεί να περιγραφεί με λόγια όπως ο ρητός στη δεκαδική μορφή και τον μπερδεύουν με περιοδικό.

6. Στο ερώτημα αν και κατά πόσο γίνεται χρήση της ιστορίας των Μαθηματικών από τους εκπαιδευτικούς αλλά κι ο τρόπος που γίνεται, αναφέρθηκαν τα εξής:

i. 13 από τους καθηγητές συμφώνησαν στην παράλληλη χρήση της ιστορίας των Μαθηματικών με τη διδασκαλία των δύο αυτών εννοιών που εξετάζουμε.
ii. 12 καθηγητές τη χρησιμοποιούν γενικά στη διδασκαλία τους
iii. Οι 11 χρησιμοποιούν όποτε υπάρχει χρόνος τα ιστορικά σημειώματα του βιβλίου, τα οποία τους φάνηκαν χρήσιμα.
iv. 5 από τους καθηγητές βάζουν τους μαθητές να αναζητήσουν μόνοι τους πληροφορίες από το διαδίκτυο ή κάποια βιβλιογραφία στο πλαίσιο ατομικής ή ομαδικής εργασίας.

7. Τα αποτελέσματα της χρήσης της ιστορίας των Μαθηματικών, στα οποία αναδεικνύεται η χρησιμότητά της, ήταν τα εξής:

i. 14 από τους εκπαιδευτικούς τονίζουν τη χρησιμότητά της καθώς και τις διάφορες εφαρμογές του Πυθαγορείου Θεωρήματος και των αρρήτων στη καθημερινότητά μας.

ii. Οι 13 πιστεύουν πως δίνουν κίνητρα στους μαθητές τα ιστορικά σημειώματα του βιβλίου.

iii. Οι 13 επίσης συμφωνούν πως με παράλληλη χρήση της ιστορίας στη διδασκαλία βλέπουν καλύτερα αποτελέσματα στην κατανόηση των δύο εννοιών.

iv. 14 καθηγητές πιστεύουν πως η ιστορία των Μαθηματικών κεντρίζει το ενδιαφέρον των μαθητών και ξεπερνιέται η “μαθηματικοφοβία”

v. Στο τέλος της συνέντευξης συμφώνησαν όλοι οι εκπαιδευτικοί για τη χρησιμότητα της ιστορίας.

8. Από τις μεθοδολογίες που παρουσιάστηκαν στη διδακτική πρόταση στους καθηγητές μέσω της συνέντευξης προέκυψαν τα εξής συμπεράσματα:

A. Στο πρώτο κομμάτι της διδακτικής πρότασης παρουσιάστηκαν στους καθηγητές διάφορες αποδείξεις του Πυθαγόρειου θεωρήματος. Συγκεκριμένα, του Ινδού Bhaskara, του Κινέζου Chou Pei Suan Ching, με ομοιότητα τριγώνων, του Πυθαγόρα (σχολικό), το πείραμα με το νερό και με πειραματική φυσική. Τα παραπάνω παρουσιάστηκαν με το εξής σκεπτικό: Οι αποδείξεις του Ινδού Bhaskara και του Κινέζου Chou Pei Suan Ching χρησιμοποιούν τις ταυτότητες (α + β)^2 και (α - β)^2 που τις συναντούν οι μαθητές για πρώτη φορά στη γ ‘γυμνασίου. Το πιο συχνό λάθος που παρουσιάζεται στους μαθητές είναι να εξισώνουν τις παραπάνω ταυτότητες με α^2 + β^2 και α^2 – β^2 αντίστοιχα, πολλές φορές συγχέοντάς το με το Πυθαγόρειο. Γι ‘αυτό το λόγο αλλά και επειδή η ανακατανομή των σχημάτων είναι πολύ κοντά σε αυτή του σχολικού προτάθηκε στους καθηγητές το συγκεκριμένο ζεύγος αποδείξεων με σκοπό την αντιμετώπιση του προβλήματος, καθώς και την ενίσχυση της διδασκαλίας του Πυθαγορείου Θεωρήματος. Η απόδειξη με την ομοιότητα τριγώνων προτάθηκε για την απλότητά της. Η απόδειξη του σχολικού βιβλίου για προφανείς λόγους. Το τελευταίο ζευγάρι πειραματικών αποδείξεων παρουσιάστηκαν για να δείξουν τη «φυσικότητα» του Πυθαγόρειου θεωρήματος και τη διαδραστικότητά του με το περιβάλλον. Επιπλέον, μία εκ των πειραματικών αποδείξεων, αυτή της Φυσικής, παρουσιάστηκε επειδή οι «Δυνάμεις» διδάσκονται στη β’ Γυμνασίου καθώς και η συνισταμένη αυτών, επομένως θα ήταν κάτι διαθεματικό και παράλληλα διαδραστικό.

Τα αποτελέσματα είχαν ως εξής:

i. Σε 6 από τους καθηγητές άρεσε η ιδέα του πρώτου ζεύγους των αποδείξεων για τους λόγους που προαναφέρθηκαν. Οι υπόλοιποι διαφώνησαν για τη δυσκολία που θα αντιμετωπίσουν οι μαθητές με την επιπλέον γνώση ταυτοτήτων και την έλλειψη αυτής της αντίληψης λόγω της ηλικίας τους.
ii. Όλοι οι καθηγητές διδάσκουν την απόδειξη μέσω ομοιότητας τριγώνων στη Γ’ Γυμνασίου και στη Β’ Λυκείου, όχι όμως στη Β’ Γυμνασίου.
iii. Όλοι οι καθηγητές δείχνουν την απόδειξη του σχολικού βιβλίου.
iv. Όλοι οι καθηγητές συμφώνησαν να δείξουν, αν δεν την είχαν ήδη δείξει, την πειραματική απόδειξη με το νερό λόγω της απλότητά της, το προφανές αυτής της απόδειξης που κινεί το ενδιαφέρον των μαθητών και πάνω απ‘ όλα τους πείθει, είναι πραγματικά εντυπωσιακή όπως όλοι συμφώνησαν.
v. Οι περισσότεροι καθηγητές, 12 στο σύνολο, συμφώνησαν να δείξουν, αν δεν είχαν επίσης δείξει, την πειραματική απόδειξη μέσω της φυσικής, για τους ίδιους λόγους του πειράματος με το νερό, από την οποία επίσης έμειναν εντυπωσιασμένοι. Οι υπόλοιποι 3 που διαφώνησαν, ήταν και πάλι για την αντίληψη των παιδιών σε αυτή την ηλικία, δεν τα θεωρούν έτοιμα και θα το έδειχναν σε μεγαλύτερα παιδιά στο Λύκειο ίσως που γνωρίζουν καλύτερα τις «Δυνάμεις» στη Φυσική.

Β. Στο δεύτερο κομμάτι της διδακτικής πρότασης παρουσιάστηκαν αρχαίες μεθοδολογίες προσέγγισης ενός άρρητου αριθμού καθώς και μέθοδοι με ακρίβεια. Πιο συγκεκριμένα, στις προσεγγιστικές μεθόδους αρχικά παρουσιάστηκε η μέθοδος του σχολικού βιβλίου με τα φράγματα, έπειτα ακολούθησε η μέθοδος του Αρχύτα ή του Ήρωνα ή των Βαβυλωνίων και τέλος η μέθοδος του Θέωνα με τα τετράγωνα. Η διδακτική πρόταση έκλεισε με τις μεθόδους με ακρίβεια, που δεν την ήταν άλλες από την κατασκευή με κανόνα και διαβήτη του σχολικού βιβλίου και η κατασκευή της σπείρας του Θεόδωρου του Κυρηναίου. Οι μέθοδοι του σχολικού βιβλίου παρουσιάστηκαν για τους προφανείς λόγους. Η μέθοδος Αρχύτα προτάθηκε προς εντυπωσιασμό των μαθητών ιδιαίτερα μετά την ενημέρωση πως η συγκεκριμένη μέθοδος χρησιμοποιείται από τους σύγχρονους υπολογιστές τσέπης, κάνοντάς τους να συνειδητοποιήσουν πως όλα προέρχονται από την ανθρώπινη σκέψη και αυτό που θεωρούμε σήμερα ακατόρθωτο να υπολογίσουμε, στα αρχαία χρόνια ήταν εφικτό, εμείς απλώς το βαφτίσαμε σύγχρονη τεχνολογία. Η μέθοδος του Θέωνα συστάθηκε στο πλαίσιο ομαδικής ή ατομικής εργασίας από τους μαθητές, ώστε να μάθουν μέσα από αυτό την άμεση σχέση που έχουν τα Μαθηματικά με τη Μουσική και των ρητών με τους άρρητους.

Τα αποτελέσματα ήταν τα εξής:

i. Όλοι οι καθηγητές δείχνουν την προσεγγιστική μέθοδο τα σχολικού βιβλίου καθώς και τη μέθοδο με ακρίβεια με τη βοήθεια κανόνα και διαβήτη.

ii. Όλοι οι καθηγητές εκτός από έναν συμφώνησαν να δείξουν στους μαθητές τους τη μέθοδο του Αρχύτα κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας των αρρήτων, καθώς πείστηκαν ότι θα τους εντυπωσίαζε και θα κέρδιζε την προσοχή τους.

iii. Όλοι οι καθηγητές εκτός από έναν συμφώνησαν να αναθέσουν στους μαθητές τους στο πλαίσιο ομαδικής εργασίας την παρουσίαση της μεθόδου του Θέωνα, μάλιστα ορισμένοι πρότειναν και την παρουσία ενός καθηγητή Μουσικής για να είναι ολοκληρωμένη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^{o}

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

Σκοπός της παρούσας μελέτης ήταν να διερευνήσουμε την σπουδαιότητα και την αξία των Πυθαγορείων καθώς και το πώς συνέβαλαν στην εξέλιξη των Μαθηματικών μέσα από σημαντικές μελέτες και ανακαλύψεις. Ξεκινώντας από μια ιστορική αναδρομή στα Πυθαγόρεια Μαθηματικά, είδαμε με ποιον τρόπο έφτασαν στα αποτελέσματα τα οποία είναι γνωστά έως και σήμερα. Με την παρουσίαση της Πυθαγόρειας σχολής αλλά και την δομή της, έγινε μία προσπάθεια προσέγγισης του τρόπου σκέψης των Πυθαγορείων και της φιλοσοφίας τους. Κατόπιν αναλύθηκαν κάποια από τα προβλήματα που αντιμετώπιζαν και που τελικά έδωσαν λύσεις σε αυτά. Παρατηρήσαμε ότι πολλές από τις ανακαλύψεις των Πυθαγορείων, όχι μόνο οδήγησαν σε νέα μονοπάτια στον κλάδο της επιστήμης των Μαθηματικών και άλλων επιστημών αλλά εφαρμόζονται σχεδόν καθημερινά σε πολλούς τομείς. Επιπλέον, γίνεται εκτεταμένη αναφορά στο Πυθαγόρειο Θεώρημα και στα Πυθαγόρεια Μαθηματικά καθώς και στις αποδείξεις τους από διάφορους μεγάλους επιστήμονες της εποχής. Κατά την διάρκεια της μελέτης αυτής συμπεραίνουμε, πως τα Μαθηματικά δεν προέκυψαν από μόνα τους. Για να φτάσουν στη σημερινή τους μορφή υπήρξαν λάθη, αποτυχίες, αβεβαιότητες και αδιέξοδα που όλα αυτά όμως οδήγησαν στο δρόμο της εξέλιξης και της επιτυχίας. Περνώντας στο δεύτερο μισό της εργασίας, είδαμε το πώς συνδέονται όλα αυτά που αναφέρουμε με την διδασκαλία των Μαθηματικών σήμερα. Ιδιαίτερη έμφαση δόθηκε στην ***χρήση της αρχαίας ιστορίας των Μαθηματικών στην εκπαιδευτική διαδικασία*** και το κατά πόσο ωφέλιμη είναι. Καταλήξαμε στο ότι είναι ωφέλιμη και μάλιστα σε πολλά επίπεδα:

Στο επίπεδο της εισαγωγής νέων μαθηματικών εννοιών, της παρουσίασης και καλύτερης κατανόησης της εσωτερικής δομής των μαθηματικών καθώς και της επίδρασης πολλών παραγόντων στη δημιουργία κινήτρων και προκλήσεων των μαθητών απέναντι στα Μαθηματικά. Βέβαια η χρήση της αρχαίας ιστορίας των μαθηματικών δεν επιφέρει θετικά στοιχεία μόνο για τους μαθητές αλλά και για τους διδάσκοντες. Με την ιστορία ως εργαλείο στα χέρια τους, οι εκπαιδευτικοί μπορούν να εντοπίσουν πιο εύκολα τις αδυναμίες των μαθητών τους, τα δυνατά τους σημεία και το πού αντιμετωπίζουν δυσκολίες σε θέματα κατανόησης. Με την προσθήκη της ιστορίας στη διδασκαλία, οι μαθητές καλούνται να γνωρίσουν έναν άλλο κόσμο, τον κόσμο της επιστήμης των μαθηματικών, της εξέλιξής τους ανά τους αιώνες και της αλληλεπίδρασης μεταξύ διάφορων αρχαίων πολιτισμών. Τους ενθαρρύνει να αξιολογήσουν καλύτερα τα Μαθηματικά και να αποκομίσουν νέες γνώσεις. Αξιοσημείωτη είναι και η συνεισφορά της στις συνδέσεις που υπάρχουν μεταξύ των μαθηματικών και άλλων επιστημών. Όλα τα παραπάνω αποτελούν τις βασικές αρχές ένταξης της ιστορίας των μαθηματικών στα σχολικά βιβλία και στην εκπαιδευτική διδασκαλία. Συνοψίζοντας, η ιστορία των μαθηματικών μπορεί να ενσωματωθεί στη διδασκαλία και να αξιοποιηθεί σε μεγάλο βαθμό αρκεί να τηρούνται ορισμένες προϋποθέσεις όπως η σωστή επιλογή των ιστορικών σημειωμάτων και οι απαραίτητες αλλαγές στα σχολικά εγχειρίδια. Έτσι, ο εκπαιδευτικός θα είναι σε θέση να δώσει στους μαθητές τις κατάλληλες γνώσεις και κατευθύνσεις και ο μαθητής από την πλευρά του θα νιώθει τα μαθηματικά περισσότερο οικεία και θα αποκτήσει μεγαλύτερο ενδιαφέρον για αυτά. Η εργασία περιλάμβανε επίσης την μελέτη των ιστορικών σημειωμάτων που χρησιμοποιήθηκαν στα νέα σχολικά βιβλία των μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου τα οποία διδάχθηκαν για πρώτη φορά το 2007-2008. Η μελέτη έδειξε πως τα ιστορικά σημειώματα ήταν 65. Όπως παρατηρήσαμε, κάποια από αυτά είχαν απλώς πληροφοριακό χαρακτήρα ενώ κάποια άλλα δεν είχαν καθόλου λειτουργικό διδακτικό ρόλο. Το γεγονός αυτό δείχνει ότι τα ιστορικά σημειώματα είναι ελλιπή και γράφτηκαν με πρόχειρο τρόπο χωρίς να στοχεύουν στην αξιοποίησή τους κατά την εκπαιδευτική διαδικασία. Μερικά από τα λάθη που εντοπίσθηκαν διορθώθηκαν σε επόμενη έκδοση. Παρόλα αυτά δεν κατάφεραν να κεντρίσουν το ενδιαφέρον του μαθητή με αποτέλεσμα να του είναι δυσνόητα όλα όσα διδάσκεται και να υπάρχει μια αδιαφορία προς το μάθημα. Στην ερώτηση όμως: Μπορεί τελικά να ενσωματωθεί η ιστορία των Μαθηματικών στη διδασκαλία; Η απάντηση είναι θετική εφόσον πληρούνται οι παρακάτω προϋποθέσεις:

- ✓ Απαραίτητες αλλαγές στα σχολικά εγχειρίδια
- ✓ Σωστή επιλογή των ιστορικών σημειωμάτων
- ✓ Να δίνονται οι κατάλληλες γνώσεις και κατευθύνσεις από την πλευρά του εκπαιδευτικού με σκοπό την αξιοποίηση της στο μέγιστο βαθμό.

Μόνο έτσι η ιστορία θα είναι ωφέλιμη και θα αποτελεί σπουδαίο διδακτικό εργαλείο και αναπόσπαστο κομμάτι της διδασκαλίας. Μόνο υπό αυτές τις προϋποθέσεις θα καταφέρει η ιστορία να αυξήσει τα κίνητρα και τη θέληση του μαθητή για μάθηση και τη δημιουργία μιας αίσθησης αγάπης απέναντι στα Μαθηματικά.

Το δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν 15 καθηγητές Μαθηματικών οι οποίοι στην πλειοψηφία τους είχαν αποφοιτήσει από το Μαθηματικό Αθηνών και περίπου οι μισοί είχαν εξειδίκευση Μεταπτυχιακού Διπλώματος. Αναφορικά με τα έτη διδασκαλίας, οι περισσότεροι καθηγητές δήλωσαν ότι έχουν μεγάλη εμπειρία με διδασκαλία από 21 έως 40 έτη στο σχολείο, σε ιδιαίτερα και σε φροντιστήριο, διδάσκοντας σχεδόν όλες τις τάξεις γυμνασίου και λυκείου.

Η πλειοψηφία των καθηγητών δήλωσε ότι κατά τη διάρκεια των σπουδών τους δεν παρακολούθησαν το μάθημα της «Ιστορίας των Μαθηματικών». Παρόλα αυτά, θεώρησαν ότι υπάρχουν ιστορικές αναφορές, που συνδέονται με τα μαθηματικά οι οποίες τους κέντρισαν το ενδιαφέρον, κυρίως αυτές που αναφέρονται στο σχολικό βιβλίο, τις οποίες μοιράζονται με τους μαθητές για εργασίες στα πλαίσια του μαθήματος.

Οι καθηγητές συμφώνησαν ότι η χρήση της ιστορίας των μαθηματικών και η ετυμολογική ανάλυση βοηθάει τους μαθητές να κατανοήσουν ορισμένες μαθηματικές έννοιες. Επίσης η μεγάλη πλειοψηφία δήλωσε ότι χρησιμοποιεί την ιστορία των μαθηματικών στη διδασκαλία του Πυθαγορείου Θεωρήματος και των αρρήτων, κυρίως μέσω των ιστορικών σημειωμάτων του βιβλίου. Γενικότερα οι καθηγητές δήλωσαν ότι η ιστορία των μαθηματικών είναι χρήσιμη στην εκπαιδευτική διαδικασία γιατί κεντρίζει το ενδιαφέρον των μαθητών και τους βοηθάει να κατανοούν καλύτερα την εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος και των αρρήτων.

Κοινή παραδοχή των καθηγητών αποτέλεσε το γεγονός ότι τα ιστορικά σημειώματα των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών είναι χρήσιμα γιατί δίνουν κίνητρα στους μαθητές για την ενασχόληση τους με το Πυθαγόρειο Θεώρημα και τους άρρητους και βοηθάνε στην κατανόηση τους.

Οι καθηγητές Μαθηματικών όταν ακούν την λέξη Πυθαγόρειο Θεώρημα τους έρχεται στο νου το σχήμα του Ευκλείδη ενώ θα ανέφεραν πρώτο την Ελιτιστική σχολή και τον Μυστικισμό και πιστεύουν ότι το Πυθαγόρειο Θεώρημα συνδέεται κυρίως με τους Πυθαγορείους. Όταν πρόκειται να διδάξουν το Πυθαγόρειο Θεώρημα, διατυπώνουν τον ορισμό του θεωρήματος και οργανώνουν την διδασκαλία με σχήματα (τρίγωνα, τετράγωνα) και εμβαδά ενώ ξεκαθαρίζουν το ευθύ και το αντίστροφο μέσω του ορισμού και μέσω παραδειγμάτων και ασκήσεων.

Οι καθηγητές δεν αντιμετώπισαν ιδιαίτερες δυσκολίες στην διδασκαλία του Πυθαγορείου Θεωρήματος ενώ οι μαθητές αντιμετώπισαν δυσκολία στη διατύπωση των ορισμών και κυρίως του αντιστρόφου. Ακόμη, προαπαιτούμενες γνώσεις που πρέπει να έχουν οι μαθητές πριν διδαχτούν το Πυθαγόρειο Θεώρημα είναι τα εμβαδά, οι βασικές γνώσεις γεωμετρίας, οι δυνάμεις, οι απλές εξισώσεις πρώτου και δευτέρου βαθμού και οι βασικές πράξεις. Τέλος, χρησιμότερες αποδείξεις του Πυθαγορείου Θεωρήματος θεωρήθηκαν η απόδειξη του βιβλίου, η πειραματική απόδειξη με το νερό καθώς επίσης και η απόδειξη με πειραματική φυσική.

Οι καθηγητές έχουν σκεφτεί ότι οι μαθητές μπορεί να βρέθηκαν στην ίδια θέση με τους Πυθαγορείους, ωστόσο δεν τους δείχνουν άλλες αποδείξεις του θεωρήματος εκτός από την απόδειξη του σχολικού βιβλίου, γιατί τις θεωρούν δυσνόητες παρόλο που γνωρίζουν εναλλακτικούς τρόπους απόδειξης από το διαδίκτυο, από τις σπουδές τους και από προσωπικές έρευνες σε βιβλία.

Όταν ακούν την λέξη άρρητος οι Μαθηματικοί που συμμετείχαν στην έρευνα απάντησαν ότι τους έρχονται στο νου πληθώρα πραγμάτων με την ρίζα του 2 να είναι η πιο συνήθης απάντηση χωρίς ωστόσο να συναντάται στην πλειοψηφία των περιπτώσεων. Σύμφωνα με τους μισούς περίπου καθηγητές, η ανακάλυψη των αρρήτων αποδίδεται και αυτή στους Πυθαγορείους (όπως και το Πυθαγόρειο Θεώρημα). Επιπλέον, οι καθηγητές Μαθηματικών ανέφεραν ότι δεν συναντούν ιδιαίτερες δυσκολίες στην διδασκαλία των αρρήτων, ενώ οι δυσκολίες των μαθητών εντοπίζονται κυρίως στην δυσκολία των πράξεων και στην κατανόηση ότι η τετραγωνική ρίζα ενός αριθμού είναι ένας αριθμός και όχι μία πράξη. Βασική προαπαιτούμενη γνώση για τους μαθητές αποτελούν οι δυνάμεις για την καλύτερη κατανόηση των αρρήτων. Ακόμη, οι καθηγητές όταν πρόκειται να διδάξουν του άρρητους χρησιμοποιούν τον άξονα των πραγματικών αριθμών, υπό την έννοια της συμπλήρωσης του R με γεωμετρική κατασκευή των αρρήτων καθώς επίσης και σύμφωνα με το βιβλίο. Οι μεθοδολογίες του βιβλίου χρησιμοποιούνται για την προσέγγιση και τον ακριβή προσδιορισμό των αρρήτων, οι αλγεβρικές προσεγγίσεις και τα φράγματα για την προσέγγιση των αρρήτων, ενώ ο κανόνας και ο διαβήτης για τον ακριβή προσδιορισμό τους. Πιο χρήσιμες μέθοδοι για την προσέγγιση των αρρήτων θεωρήθηκαν η μέθοδος του βιβλίου, των Βαβυλωνίων ή του Ήρωνα και του Θέονα ενώ για τον ακριβή προσδιορισμό τους, η μέθοδος του βιβλίου και το σπιράλ.

Οι γνώσεις των καθηγητών γενικότερα για ιστορικά θέματα γύρω από το Πυθαγόρειο Θεώρημα και τους άρρητους προέρχονται από το διαδίκτυο και το σχολικό βιβλίο. Σύμφωνα με τους καθηγητές οι δύο έννοιες συνδέονται, γιατί οι άρρητοι χρειάζονται στην εφαρμογή του Πυθαγορείου Θεωρήματος, ενώ πρώτα πρέπει να διδάσκεται το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Η τεχνολογία χρησιμοποιείται για την διδασκαλία των δύο εννοιών παραπέμποντας τους μαθητές σε ιστοτόπους, παρουσιάζοντας βίντεο μέσα στην τάξη, μέσω του Φωτόδεντρου και του προγράμματος Geogebra. Γενικότερα οι δύο έννοιες έχουν βοηθήσει πολύ στην εξέλιξη των Μαθηματικών, έχουν χρησιμότητα και εφαρμογές στην καθημερινότητα, κυρίως στις κατασκευές, γεγονός που αναφέρεται συχνά από τους καθηγητές.

Συμπερασματικά, στο σύνολό τους οι καθηγητές, που συμμετείχαν στην έρευνα, θεωρούν αναγκαία την ενσωμάτωση της ιστορίας των Μαθηματικών στη σχολική διδασκαλία. Με τον τρόπο αυτό εμπλουτίζεται το μάθημα καθολικά, καθώς καλύπτονται νοητικά κενά και παράλληλα προσελκύεται το ενδιαφέρον των μαθητών για τα Μαθηματικά και την εξέλιξή τους. Η επεμβατική χρήση της ιστορίας των Μαθηματικών ενώνει το χάσμα της ανάγκης που δημιουργήθηκε με τη λύση του εκάστοτε προβλήματος, με βάση τις ανάγκες αλλά και τις συνθήκες της κάθε εποχής, αλλάζοντας ταυτόχρονα το ψυχρό προφίλ των Μαθηματικών και μετατρέποντας τους φόβους των μαθητών σε περιέργεια και προβληματισμό.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνική

1. Changeux, J.P., & Connes, A. (1995). Τα Μαθηματικά και ο Εγκέφαλος. (Α. Κασέτα, Σ. Μάκρα και Σ. Μανουσέλη, μετάφραση). Αθήνα: Εκδόσεις Κάτοπτρο.

2. Cohen, L., & Manion, L. (1997). Μεθοδολογία Εκπαιδευτικής Έρευνας (Χρ. Μητσόπουλου και Μ. Φιλοπούλου, μετάφραση). Αθήνα: Εκδόσεις Μεταίχμιο.

3. Sierpinska, A. (1991). Μερικές ιδέες πάνω στη μεθοδολογία της έρευνας στη Διδακτική των Μαθηματικών που συνδέεται με την έννοια του επιστημολογικού εμποδίου. Τετράδια Διδακτικής των Μαθηματικών, 7, 11-28.

4. Van Der Waerden, B.L. (2000). Η Αφύπνιση της Επιστήμης. (Γ. Χριστιανίδη, μετάφραση). Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης. (Πρωτότυπη έκδοση, 1954).

5. Αργυρόπουλος, Η., Βλάμος, Π., Κατσούλης, Γ., Μαρκάτης, Σ., Σίδερης, Π. (2003). Ευκλείδεια Γεωμετρία, Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου (γ’ έκδοση). Αθήνα: ΟΕΔΒ.

6. Βλάμος, Π., Δρούτσας, Π., Πρέσβης, Γ., & Ρεκούμης, Κ. (2007). Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου (β’ έκδοση). Αθήνα: ΟΕΔΒ.

7. Βοσνιάδου, Σ. (Επιμέλεια έκδοσης). (2000). Η Ψυχολογία των Μαθηματικών. Αθήνα: Εκδόσεις Gutenberg.

8. Βοσνιάδου, Σ. (2005). Οι μεταβαλλόμενες σχέσεις ψυχολογίας και βιολογίας και τα προβλήματα της γνωστικής επιστήμης. Νόησις, 1, 19-

9. Ζαχαριάδης, Θ. (2000). Στόχοι και αποτελέσματα της διδασκαλίας των Μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Πρακτικά Συνεδρίου για τα Μαθηματικά στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Ανάκληση Ιούνιος, 18, 2008, από http://www.math.uoa.gr/me/conf2/conf/sum/zah.html

10. Οικονόμου, Π., & Τζεκάκη, Μ. (1999). Στάσεις, αντιλήψεις και πρακτικές των εκπαιδευτικών για τη διδασκαλία των Μαθηματικών. Ερευνητική διάσταση της Διδακτικής των Μαθηματικών, 4, 37-65.

11. Πρόκλος, Σχόλια Εις Το Πρώτον Βιβλίο Των Ευκλείδου Στοιχείων, TLG Mussaios.

12) Χριστιανίδης , Γιάννης, [2008] ΘΕΜΑΤΑ ΑΠΟ ΣΗΝ ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης

13) ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ, Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων 2010

14) ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ, Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων 2008

15) ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ, Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων 2009

16) ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α΄ ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ, Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων 2009

17) ΜΑΘΗΜΑΣΙΚΑ Β΄ ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΘΕΣ/ΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ , Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων 2008

18) Χασάπης, Δημήτρης [2002]Η ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΩΣ ΜΕΣΟ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΟ ΔΗΜΟΤΙΚΟ ΣΧΟΛΕΙΟ ΚΑΙ ΣΤΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ,1ο Διήμερο Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών Θεσσαλονίκη, 8&9 Μαρτίου 2002

19) Σπυριλιώτη, Ελευθερία-Ελπίδα διπλωματική εργασία ΤΑ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΟΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥΣ ΣΤΗΝ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗ

Ξενόγλωσση

1) Fideler, David, [1987] THE PYTHAGOREAN SOURCEBOOK AND LIBRARY, Phanes Press, Translated by W.K.C.Guthrie

2) Ackermann, E. (1991). From decontextualized to situated knowledge: Revisiting Piaget's water level experiment. In I. Harel & S. Papert (Eds.), Constructionism (σελ. 269-294). Norwood: Ablex Publishing Corporation.

3) Heath, Thomas, [1956], THE THIRTEEN BOOKS OF EUCLID'S ELEMENTS, Dover Publications, New York, Translated from the text of Heiberg

4) Arcavi, A., & Bruckheimer, M. (2000). Didactical uses of primary sources from the history of mathematics. Themes in Education, 1 (1), 55-74.

5) Kahn, Charles, [2001], PYTHAGORAS AND THE PYTHAGOREANS A BRIEF HISTORY, Hackett Publishing Company, Indianapolis/Cambridge 99

6) Knorr, W.Richard [1945], THE EVOLUTION OF THE EUCLIDEAN ELEMENTS", D.Reidel Publishing Company, Volume 15

7) Arcavi, A., & Isoda, M. (2007). Learning to listen: from historical sources to classroom practice. Educational Studies in Mathematics, 66, 111-129.

8) Baker, A., & Gravemeijer, K. (2006). An historical phenomenology of mean and median. Educational Studies in Mathematics, 62, 149-168.

9) Battista, M., & Clements, D. (1995). Geometry and Proof. Mathematics Teacher, 88 (1), 48-54.

10) Blades, M., & Spencer, C. (1994). The Development of children's ability to use spatial representations. In H.W. Reese (Ed.), Advances in child development and behavior .Vol. 25 (pp 157-159). San Diego: Academic Press.

11) Boyer, C.B., & Merzbach, U.C. (1991). A History of Mathematics (2nd Ed.). New York: John Wiley & Sons.

12) Clements, D.H., & Battista, M. (1992). Geometry and Spatial Reasoning. In D.Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning, (pp.109-161). Enschede, Netherlands: NICD.

13) Confrey, J. (1995). A theory of intellectual development. For the Learning of Mathematics, 15 (1), 38-48.

14) Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana, & V. Villani (Eds.), Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century, (pp.37-51). Dordrecht, Nederlands: Kluwer Academic Publisher.

15) Edwards, L.D. (1998). Embodying Mathematics and Science: Microworlds as Representations. Journal of Mathematical Behaviour, 17(1), 53-78.

16) Furinghetti, F. (2007). Teacher education through the history of mathematics. Educational Studies in Mathematics, 66, 131-143.

17) Gardner, H. (1985). The Mind’s New Science. New York: Basic Books.

18) Gardner, H. (1999). Intelligence Reframed. New York: Basic Books.

19) Gillings, R.J. (1982). Mathematics in the Time of the Pharaohs. New York: Dover.

20) Gravemeijer, K., & Doorman, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: a calculus course as an example. Educational Studies in Mathematics, 39, 111-129.

21) Henderson D.W., & Taimina, D. (2005). Experiencing geometry. Euclidean and non-Euclidean with history. New York: Cornell University.

22) Hoffer, A. (1981). Geometry is more than proof. Mathematics Teacher, 74 (1), 11-18.

23) Jahnke, H. N., Arcavi, A., Barbin, E., Bekken, O., Dynnikov, C., Furinghetti, et al. (2000). The use of original sources in the mathematics classroom. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), History in mathematics education – The ICMI Study (pp. 291–328). Boston, MA: Kluwer.

24) Kospentaris, G., & Spyrou, P. (2005). The construction of the concept of similarity – Proportions and the educational experience. Proceedings of 4th Mediterranean Conference in Mathematics Education. Vol. 1 (pp.239-254). Palermo, Italy.

25) Lakoff, G. (1987). Women, Fire and Dangerous things: What categories Reveal about the Mind. Chicago: University of Chicago Press.

26) Maor, E. (1998). Trigonometric delights. New Jersey: Princeton University Press.

27) Maor, E. (2007). The Pythagorean Theorem. New Jersey: Princeton University Press.

28) Nemirovsky, R., Borba, M., & Dimatia, C. (2004). PME Special Issue: Bodily Activity and Imagination in Mathematical Learning. Educational Studies in Mathematics, 57, 303-321. - 156 –

29) Radford, L. (1997). On Psychology, Historical Epistemology, and the teaching of Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics. For the Learning, 17(1), 26- 33.

30) Steinbring, H. (1990). Problems in the Development of Mathematical knowledge in the Classroom. Der Mathematik-Unterricht, 36 (3), 4-28.

31) Thom, J. S., & Pierre S. E. (2002). Problems, perseverance and mathematics residue. Educational Studies in Mathematics, 50, 1-28.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ιωσηφίδης Θ.(2003) «*Εισαγωγή στην ανάλυση δεδομένων ποιοτικής κοινωνικής έρευνας»*, Μυτιλήνη

Κολυβά-Μαχαίρα Φ. & Μπόρα-Σέντα Ε. (1998), «*Στατιστική Θεωρία Εφαρμογές*»

Μορέν Ε. (2001) *«Η Μέθοδος. Η γνώση της γνώσης»,* Αθήνα: Εικοστός πρώτος

Φαρμάκης Ν. (2017) «*Εισαγωγή στη Δειγματοληψία*», Αφοί Κυριακίδη ΕΚΔΟΣΕΙΣ Α.Ε., Θεσσαλονίκη

Louis Cohen & Lawrence Manion & Keith Morrison (2007), *"Research Methods in Education"*.

John W.Creswell (2013),"*Research design*"

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι

Συνεντεύξεις

Στόχος του παρόντος κεφαλαίου είναι να αναδειχθούν τα αποσπάσματα εκείνα των συνεντεύξεων, τα οποία μας έκαναν ιδιαίτερη εντύπωση, είτε θετική είτε αρνητική. Ένας άλλος λόγος που επιλέχθηκαν τα συγκεκριμένα κομμάτια είναι η συνολική διάρκεια των μαγνητοφωνήσεων, η οποία θα καθιστούσε τη διαδικασία της πλήρους απομαγνητοφώνησης δυσανάγνωστη, δυσνόητη και χωρίς νόημα την παρούσα εργασία, αν σκεφτεί κανείς πως κατά μέσο όρο η κάθε συνέντευξη διήρκησε 45΄ και οι συμμετέχοντες ήταν στο σύνολό τους 15.

- **Εκπαιδευτικός 13 (01:38-4:09, 06:53-13:15)**

Ερευνητής: Έχετε μοιραστεί κάποιες από αυτές τις ιστορικές αναφορές με τους μαθητές σας;

Καθηγητής: Έχω μοιραστεί αλλά βλέπω ότι δεν τις καταλαβαίνουν.

Ερευνητής: Ναι..

Καθηγητής: Ιδίως όταν πας α' λυκείου και κάνεις μάθημα που είναι να καταλάβουν την τεκμηρίωση την αξιωματική..

Ερευνητής: Ναι..

Καθηγητής: Συνήθως, τους έβγαζα στις πρώτες σελίδες των στοιχείων μεταφρασμένες από το Σταμάτη..

Ερευνητής: Ναι…

Καθηγητής: Για να τις διαβάσουν, για να δουν ας πούμε ποιους ορισμούς έδινε και πώς ήτανε οι κοινές έννοιες, πώς τις όριζε ο Ευκλείδης, για να καταλάβουν αυτό το πράγμα. Για να αρχίσουμε να συζητάμε πάνω στην αξία της συστηματικοποίησης των αποδείξεων ας πούμε αξιωματικά, αλλά βλέπω ότι είναι δύσκολο να το αντιληφθούν.

Ερευνητής: Μάλιστα…

Καθηγητής: Δηλαδή το επιχείρησα 2-3 φορές και συζητώντας μετά με τους μαθητές βλέπω ότι δεν τους κεντρίζει το ενδιαφέρον.

Ερευνητής: Μμμ...κατάλαβα…

Καθηγητής: Απ' ό,τι βλέπω προσπαθούνε, νομίζουν ότι έχουνε τις γνώσεις και τις δεξιότητες και θέλουν να λύσουν αμέσως προβλήματα, έστω και δύσκολα, νομίζουν ότι μπορούν να αντιμετωπίσουν το θηρίο απευθείας.

Ερευνητής: Κατάλαβα.

Καθηγητής: Είναι ένα λάθος τους και εντάξει είναι…

Ερευνητής: Ιστοριούλες έτσι για εγκυκλοπαιδικούς σκοπούς τους έχετε αναφέρει;

Καθηγητής: Ε, σε πιο μικρές τάξεις αναφέρουμε, αλλά είναι συνήθως στην άλγεβρα, όπως είναι ας πούμε ο Γκάους με το άθροισμα του.

Ερευνητής: Αυτό θέλω να μου πείτε Γκάους...κάτι άλλο;

Καθηγητής: Τον Γκάους και κυρίως πάνω σε κάποιους, ας πούμε, όπως ο Γκαλουά, που μπορούν να τους διεγείρουν το ενδιαφέρον… το πόσο μικρός πέθανε και τι ανακάλυψε… δηλαδή θέλουν... όσες φορές τα έχω δοκιμάσει είδα, ότι ο Γκαλουά τους εξίταρε λίγο, και όταν τους πεις, ότι ξέρεις τα έγραψε και την τελευταία νύχτα της ζωής του όλα, γιατί είχε να μονομαχήσει… Αυτά ενθουσιάζουν τους μαθητές, όπως ας πούμε η ιστορία με τον Ρίμαν, που η σπιτονοικοκυρά του, όπως ακούγεται, του έκαψε τις πρώτες 150 σελίδες.

Ερευνητής: Αυτό δεν το ήξερα...

Καθηγητής: Και δεν μπορούν να βγάλουν ακόμα συμπέρασμα τι έγραφε. Ο Ρίμαν ήταν πολύ μεθοδικός. Κράταγε σημειώσεις, πέθανε χειμώνα, απ' ό,τι διάβασα, απ' ό,τι θυμάμαι τώρα. Και μέχρι να πάνε κάποιοι φίλοι, γνωστοί να δούνε τα κείμενά του, να τα βρούνε, ή τέλος πάντων πότε πήγανε, είχε κάψει η σπιτονοικοκυρά τις πρώτες σελίδες από τις σημειώσεις του γιατί ήθελε να ανάψει τη φωτιά.

Ερευνητής: Τώρα το θυμήθηκα το είχα ακούσει εγώ, δεν το είχα διαβάσει, μου το είχαν πει κάποιοι φίλοι μου, ναι…

Καθηγητής: Ε, επειδή αυτές οι πρώτες σελίδες, επειδή μάλλον προφανώς όπως ξέρουμε εμείς, είχε τους ορισμούς και,…..,των εννοιών που έχει μετά, ενώ έχουν μετά τα κείμενα και αυτά τα οποία παρήγαγε και τα συμπεράσματα δεν μπορούν να κατανοήσουν ακόμα και μέχρι τώρα τι σημαίνουν αυτά τα πράγματα.

Ερευνητής: Μάλιστα.

Καθηγητής: Τέτοιες καταστάσεις απ' ό,τι έχω δει στους μαθητές, δηλαδή που έχουν συγκινησιακό, που έχουν παραμυθένιο τέτοιο... αυτές τους εξιτάρουνε συνήθως.

Ερευνητής: Συμφωνώ και εγώ... καθόλου από αρχαιά Ελλάδα έχετε αναφέρει κάτι;

Καθηγητής: Από αρχαιά Ελλάδα, πιο πολύ αναφορές γίνονται στον Πυθαγόρα και στον Θαλή... αυτές που κάνω εγώ... Βασικά ότι ο Θαλής ήταν ο πρώτος άνθρωπος που έκανε την απόδειξη, που σκέφτηκε πότε να αποδείξει. Και τους φαίνεται έτσι παράξενο, κυρίως άμα τους πεις την απόδειξη με το ισοσκελές τρίγωνο... αυτός είδε τις γωνίες του ότι ήταν ίσες και σκέφτηκε τον καθρεφτισμό τέλος πάντων…τους φαίνονται παράξενα αυτά τα πράγματα... ότι…

Ερευνητής: Ότι δεν είναι δεδομένο ε; αυτονόητο…

Καθηγητής: Ναι... και το άλλο... το ύψος την πυραμίδας… το τόσο απλοϊκό, που τους βάζουμε και το κάνουν καμιά φορά στην αυλή... να βγουν έξω και να υπολογίσουν το ύψος του κτηρίου...

Ερευνητής: Ναι, ναι, ναι... το έχω δει και στο σχολικό βιβλίο αυτό...

Καθηγητής: Ναι... αυτά τους ενθουσιάζουν και μετά πιο πολύ με τους Πυθαγόρειους. τη δολοπλοκία που υπήρχε... και σου λέω πιο πολύ τους ενδιαφέρει, όχι το μαθηματικό κομμάτι…

Ερευνητής: Καταλαβαίνω, ναι...

Καθηγητής: Αλλά το παραμυθένιο που υπάρχει πίσω από αυτό... και πως μέσα από το παραμύθι δημιουργούσαν μαθηματικά.

Ερευνητής: Όταν λέτε δολοπλοκία;

Καθηγητής: Ε τότε που είχανε ανακαλύψει ότι το ρίζα 2 όπως αναφέρει στα βιβλία του ο συνάδελφος... ότι σφαζόντουσαν μεταξύ τους, για να μη διαρρεύσει ότι υπήρχαν και οι άρρητοι...

Ερευνητής: Μάλιστα...

Καθηγητής: Αυτός ο πόλεμος δηλαδή μεταξύ των Πυθαγορείων...

Ερευνητής: Ο μυστικισμός τους δηλαδή, αυτό τους εξιτάρει ας πούμε;

Καθηγητής: Ε ναι.

Ερευνητής: Κατάλαβα.

Καθηγητής: Αυτό βλέπω δηλαδή... δε βλέπουν αυτό κάθε αυτό το μαθηματικό πλαίσιο, αλλά κυρίως βλέπουν ένα παραμύθι που τέλος πάντων δημιουργούνται μεγάλες ιδέες, αλλά ποιες είναι αυτές μέσα...

Ερευνητής: Έχει πολύ ζουμί μέσα ο Πυθαγόρας πάντως για έτσι εντυπωσιακές ιστορίες... Από το ότι μιλάει με τα ζώα, αν όλα αυτά είναι αληθινά... για τη μετενσάρκωση… για το ότι μπορεί να είναι ο θεός Απόλλων...

Καθηγητής: Ναι, ναι… έχει πολλά τέτοια… Ε μετά δε μπορούν να σκεφτούνε τα κοινωνικό-πολιτισμικά που γινόντουσαν τότε, δηλαδή αυτό που τους παραξενεύει, γιατί θεωρούν ότι η ζωή, με τα δικά τους πρότυπα και τις σημερινές συνθήκες... ότι εντάξει και ο Πυθαγόρας είχε μια δουλειά, δούλευε, είχε λεφτά. Άρα, όταν τους πεις ότι υπήρχαν κάποιοι άρχοντες, οι οποίοι τους τροφοδοτούσανε και ήταν από την επιστασία των αρχόντων αυτά... αυτά τους παραξενεύουν, γιατί νομίζουν ότι και καλά είναι όπως ο μπαμπάς και η μαμά που δουλεύουν και παρεμπιπτόντως έκανε και...

Ερευνητής: Όλα αυτά που εμείς διαβάζουμε, ναι...

Καθηγητής: Έκανε τα διάφορα... Το άλλο τώρα επειδή μου έρχονται σιγά σιγά στο μυαλό οι ιστορικές αναφορές... Αυτά που βλέπω ότι τους εντυπωσιάζουν είναι, όπως ας πούμε, ότι πολύ αργά ανακαλυφθήκαν το μηδέν, ας πούμε, και οι αρνητικοί αριθμοί... Αυτό είναι εκπληκτικό για αυτούς... Δηλαδή, όταν τους ανέφερα ότι είμαστε στον 12ο και 13ο αιώνα μ.Χ., για να μιλήσουμε για το μηδέν, ή για να μιλήσουμε, ας πούμε για εξισώσεις, οι οποίες τις θεωρούσαμε αδύνατες

Καθηγητής: Αυτά τα κάνουν κυρίως στο γυμνάσιο για τους αρνητικούς αριθμούς... Τους λένε, «Μη στεναχωριέστε παιδάκια μου, τα ιδιά ήτανε και οι άλλοι...».

Ερευνητής: Έτσι, έτσι, έτσι…

Καθηγητής: Οι οποίοι ήταν σύγχρονοι και αιφνιδιάζονται δηλαδή με αυτό το πράγμα σου λέω. Είναι απλοϊκές σκέψεις που τις πιστεύουν ότι υπήρχαν από πάντα ρε παιδί μου, και ξαφνικά συνειδητοποιούν, ότι το μηδέν δεν υπήρχε από πάντα και έκανε να βρεθεί ας πούμε μ.Χ...

Ερευνητής: Πολύ ενδιαφέρον, καλά κάνετε, μπράβο...

Καθηγητής: Και οι αρνητικοί, ας πούμε, αυτά είναι πράγματα που ξεσηκώνουν τους μαθητές... τους δείχνουν ότι υπήρχανε άλλα στερεότυπα, άλλα πράγματα....

Ερευνητής: Τους βάζατε και στη θέση εκείνων των ανθρώπων με λίγα λόγια...

Καθηγητής: Ναι, αυτό είναι το πιο σημαντικό... να τους βάλεις εκεί πέρα, να αντιληφθούν ότι ακόμα και... αυτό που τους τονίζω όταν λέμε τέτοιες ιστορίες, επειδή λέμε αρκετές μια χρονιά, είναι, ότι βλέπετε, πως η σειρά που τα μαθαίνετε εσείς, δε διαφέρει από την ιστορική σειρά που εμφανιστήκανε.

Ερευνητής: Μάλιστα...

Καθηγητής: Δηλαδή, αυτό που προσπαθώ να τους τονίσω είναι, ότι δεν μπορείς ας πούμε να κάνεις άλματα στη σκέψη, γιατί και ιστορικά χάνει και ό,τι πορεία ήταν αυτή ρε παιδί μου.

Ερευνητής: Κατάλαβα.

- **Εκπαιδευτικός 13 (20:50-26:28)**

Ερευνητής: Πιστεύετε ότι το Πυθαγόρειο θεώρημα συνδέεται με τον Πυθαγόρα και τους Πυθαγορείους, με τους Αιγύπτιους, τους Βαβυλώνιους ή άλλους;

Καθηγητής: Ε δες...τώρα... αυτά που διάβασα πάλι λίγο, αλλά όχι και πάρα πολύ... είναι με τις πλάκες που είχανε βρει...

Ερευνητής: Τις Βαβυλωνιακές...

Καθηγητής: Ναι, στη Μεσοποταμία... Τις Βαβυλωνιακές αυτές.

Ερευνητής: Η άποψή σας ποια είναι;

Καθηγητής: Η ποσότητα των πλακών είναι ενδεικτικό ότι, τέλος πάντων, ήταν σε ευρεία χρήση αυτό το θεώρημα, γιατί και κάποιες αναφορές που είδα, αλλά και μένα στο μυαλό μου περνάει ότι, το να ψήνεις τόσες πλάκες... τόσες χιλιάδες ποσότητα... σημαίνει ότι ήταν μεγάλης χρήσης, ήταν καταναλωτικό προϊόν ας πούμε... το χρησιμοποιούσανε, έσπαγε, το αντικαθιστούσανε, ήτανε δηλαδή σαν την καθημερινότητα, να πας να πάρεις ένα κομπιουτεράκι δηλαδή για να κάνεις.

Ερευνητής: Μάλιστα

Καθηγητής: Άρα το ξέρανε στη χρήση του. Το ξέρανε στη χρήση του. Ε τώρα από εκεί και πέρα οι αποδείξεις, εεε, αποδίδονται στους Πυθαγορείους αλλά αν και μου φαίνεται πολύ δύσκολο ένα θεώρημα, που έχει τόσες τετρακόσιες τόσες αποδείξεις να μην το είχανε ερμηνεύσει δηλαδή έστω και οπτικά και αρχαιότερα πέρα απο τον Πυθαγόρα.

Ερευνητής: Μάλιστα

Καθηγητής: Αλλά νομίζω πια στον Πυθαγόρα ή στην μετέπειτα εποχή είχε γίνει πια στην Ελλάδα η συστηματική καταγραφή των πραγμάτων, και αυτό είναι που έκανε την διαφοροποίηση.

Ερευνητής: Ναι, ναι.. Η συστηματικοποίηση ναι…

Καθηγητής: Ε ναι… ιδίως με το μεγάλο πια ξεπήδημα, το στοιχείο του Ευκλείδη από εκεί και πέρα πια…

Ερευνητής: Εκεί έγινε μεγάλο μάζεμα. Όλα τα... όλα όσα είχανε σκεφτεί μέχρι τότε... εννοείται.

Καθηγητής: Ε ναι, ναι, αυτό έγινε, ήταν μάζεμα... δηλαδή δεν τα ‘βγαλε όλα ο Ευκλείδης… είναι...

Ερευνητής: Αλλά σαν θεώρημα το αποδίδετε στους Πυθαγορείους, έτσι;

Καθηγητής: Ε ναι δεν έχω κάποιους... σαν θεώρημα ναι. Αν το λέμε σαν θεώρημα με την έννοια ότι και το τελευταίο, η εικασία του Φερμά έγινε θεώρημα απ’ τον Γουάιλς, ναι.

Ερευνητής: Ναι, κατάλαβα. Αλλά πρακτικά, οι Βαβυλώνιοι. Εγώ τα σημείωσα και τα δύο. Τώρα, το ίδιο ερώτημα για τους άρρητους αριθμούς. Ποιοι τους ανακαλύψανε πιστεύετε;

Καθηγητής: Ε νομίζω αυτοί πρέπει να’ ταν οι Πυθαγόρειοι καθαρά.

Ερευνητής: Καθαρά οι Πυθαγόρειοι.

Καθηγητής: Δε νομίζω ότι έγινε κάτι άλλο, γιατί και λίγο που διάβασα απ’ τα στοιχεία του Ευκλείδη, εκεί που ορίζανε τους διάφορους αριθμούς... τρίγωνους, τετράγωνους, πεντάγωνους, πολύγωνους και τα λοιπά...

Ερευνητής: Ναι, ναι, ναι.

Καθηγητής: Εκεί, νομίζω πρωτοφάνηκε η διαφοροποίηση της διαγώνιου του τετραγώνου, αν μπορεί ας πούμε να μετρηθεί με το…

Ερευνητής: Με τον κανόνα..

Καθηγητής: Ναι, με τη μονάδα.

Ερευνητής: Ναι.

Καθηγητής: Νομίζω, εκεί αυτοί οι αριθμοί που δημιουργήθηκαν και κάνει σαφή αναφορά μέσα στα στοιχεία του Ευκλείδη και γράφει και ο Σταμάτης τις δικές του... ααα..έτσι πεποιθήσεις… νομίζω ότι εκεί φάνηκε πρώτη φορά αυτό το πράγμα. Δηλαδή, θεωρώ και εγώ ότι το μυαλό του ανθρώπου δε μπορούσε να είχε αντιληφθεί τόσο πολύ τους άρρητους. Δηλαδή ότι υπάρχουν αριθμοί, που δεν μπορούν να μετρηθούν από κάτι. Ε και αυτό το άλλο, το οποίο μπορώ να ισχυριστώ με τους Πυθαγόρειους, ότι οι άρρητοι οφείλονται σε αυτούς, είναι ότι αυτοί κάνανε κοσμοθεωρία, βάζοντας τη μονάδα σαν αρχή όλων και προσπαθώντας να αποδείξουν ότι όλα δημιουργούνται απ᾽ τη μονάδα. Δηλαδή δεν είχε καταγραφεί αυτό το πράγμα αλλιώς. Άρα, αν δεν μπει η μονάδα μέσα και η μέτρηση με μονάδα...

Ερευνητής: Η μέτρηση ναι, ναι..

Καθηγητής: Η σύγκριση στην ουσία δεν μπορείς να βγάλεις άρρητο…

Ερευνητής: Η έννοια του μέτρου ναι κατάλαβα. Εεεε..

Καθηγητής: Η πρώτη αναφορά ήταν στους Πυθαγόρειους... Δεν αναφέρθηκε πουθενά αλλού η έννοια...

Ερευνητής: Με κάτι υπολογισμούς που υπάρχουν σε κάποιες Βαβυλωνιακές πινακίδες, οι οποίες προσεγγίζουνε το ρίζα 2 λέγεται...

Καθηγητής: Ε, ναι αυτά είναι όμως με άλλα συστήματα αρίθμησης...

Ερευνητής: Μάλιστα...

Καθηγητής: Είναι εξηνταδικά και τέτοια πράγματα, άρα δείχνει ότι δε μετράγανε με μονάδα...

Ερευνητής: Ναι...

Καθηγητής: Δηλαδή, με κάτι το οποίο το είχανε σαν μέτρο σύγκρισης. Μετράγανε ίσως με κάποιο άλλο φυσικό φαινόμενο ή κάτι δηλαδή που δεν… Τα άλλα συστήματα αρίθμησης τα οποία δεν είναι... δε στηρίζονται σε μονάδα μέτρησης πρέπει να είναι με φυσικά φαινόμενα που συνδέανε τα… τις παρατηρήσεις τους και προσπαθούσανε να τις εξηγήσουνε μ᾽ αυτόν τον τρόπο. Και άρα, άμα γίνεται μ᾽ αυτόν τον τρόπο... επειδή έχεις Μάριε, τι πιστεύω εγώ, έχεις πολλαπλότητα μονάδων δηλαδή δες τις μοίρες ε…

Ερευνητής: Ναι…

Καθηγητής: Πας στις μοίρες, το σπας σε πρώτα, το σπας σε δεύτερα, άρα, δεν έχεις μία έννοια ενός αριθμού, εε, που να είναι αριθμός, έχεις κάποια αριθμητικά στους μεικτούς αριθμούς.

Ερευνητής: Ναι…

Καθηγητής: Σ’ αυτούς δεν μπορεί να φανεί ηηη, η ασυμμετρότητα, δηλαδή, να φανεί ένα πράγμα, το οποίο μπορεί να έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία, δηλαδή δεν... γιατί και αυτά τα πράγματα που είχανε εξηνταδικά συστήματα δεν τα χωρίζανε μετά σε πολλές υποδιαιρέσεις. Δες τις μοίρες σου λέω ξανά, φτάνανε μέχρι δεύτερα. Δεν είχε πουθενά τρίτα ή τέταρτα ή να παρουσιαστεί ανάγκη να κάνουν...

Ερευνητής: Κάπου αναγκαστικά σταματούσε η αρίθμηση.

Καθηγητής: Σταματάγανε...

Ερευνητής: Κατάλαβα.

Καθηγητής: Άρα λοιπόν, η έννοια της αρρητότητας, όταν κάτι σταματάει αναγκαστικά, δεν μπορεί να φανεί η έννοια της αρρητότητας.

Ερευνητής: Πολύ ωραίο αυτό, πάρα πολύ ωραίο.

- **Εκπαιδευτικός 13 (49:45-1:02:07)**

Ερευνητής: Θεωρείτε πως η ετυμολογική ανάλυση των μαθηματικών εννοιών βοηθάει καθόλου στην κατανόηση;

Καθηγητής: Ε, πάρα πολύ.

Ερευνητής: Πάρα πολύ.

Καθηγητής: Νομίζω ότι πάρα πολύ και μάλιστα όχι μόνο η ετυμολογική ανάλυση, αλλά και σε μία μαθηματική έκφραση να σκεφτούνε και τις λέξεις κλειδιά που υπάρχουνε στην έκφραση.

Ερευνητής: Πολύ ωραία, έτσι. Και να ξέρουνε και τι λένε τα παιδιά. Γιατί λένε, λένε, λένε και παπαγαλίζουν πολλές φορές.

Καθηγητής: Θες να σου φέρω ένα κλασσικό παράδειγμα που κάνουνε και οι δάσκαλοι λάθος...;

Ερευνητής: Ναι…

Καθηγητής: Και το συνεχίζουν οι μαθητές... είναι αυτό με τις εξισώσεις...

Ερευνητής: Ναι…

Καθηγητής: Που ας πούμε ένας δάσκαλος δίνει x+2=3+5 και γράφει =8=8-2=6. Λοιπόν, είναι αυτό το πράγμα… το οποίο το έβλεπα από μαθητές που κάναν τις πράξεις σωστά, καταλάβαιναν τι ήτανε, αλλά κάνανε το λάθος εκεί στη γραφή που κάνατε το 6=8, το 6= καταλαβαίνεις τώρα...

Ερευνητής: Ναι… ναι... και εγώ το έχω συναντήσει και σε πολύ καλό μαθητή μάλιστα.

Καθηγητής: Λοιπόν, αυτό τώρα το είχα ψάξει δύο, τρία χρόνια και έκανα μία δημοσίευση σε ένα συνέδριο που κάνει εκεί το Παιδαγωγικό Αθηνών. Εεεε, διαπίστωσα πάλι ότι ήταν λεκτικό το θέμα, ήταν κυρίως λεκτικό, δεν μπορούσαν από τον ορισμό της εξίσωσης να δούνε ποιες είναι οι σημαντικές λέξεις.

Ερευνητής: Ναι...

Καθηγητής: Δηλαδή, τους έλεγα, άρχισα πια να... όταν το συνειδητοποίησα να δω πώς γίνεται για να κάνω και τις ανακοινώσεις μου... τους είπα τον ορισμό, «Πες τε μου την εξίσωση» και λέγαμε μία ισότητα που έχει άγνωστο. Μία ισότητα που έχει αριθμούς και αγνώστους.

Ερευνητής: Ναι...

Καθηγητής: Οπότε πηγαίναμε βάση ορισμού, τον έγραφα πάνω στον πίνακα, μία γραμμή για να τον βλέπουνε, εεε και έγραφα ας πούμε x+5, x+3=2, 2+3=5, διάφορα...

Ερευνητής: Ναι…

Καθηγητής: Τους έλεγα «Πες τε μου ποια είναι η εξίσωση» και μου προσδιορίσανε και μπορούσανε να αιτιολογήσουνε, ότι το πρώτο δεν είναι ισότητα, το άλλο ήταν ισότητα ας πούμε με άγνωστο, το άλλο ήταν ισότητα με αριθμούς… ε και μετά τους έγραφα… τους λέω «Μόνο αυτές είναι οι σημαντικές λέξεις του ορισμού;» Λέει «Ναι». Οπότε, όταν τους έγραφα ας πούμε x+2 =3+5=8=8-2,= τάδε, τους έλεγα «Εδώ είναι εξίσωση;» «Ναι», μου λέγανε, «Είναι εξίσωση». Τους έλεγα, «Καλά δε βλέπετε μία σημαντική λέξη εκεί;» Δεν εστιάζανε στο μία ισότητα, στο μία.

Ερευνητής: Στο μία ισότητα…

Καθηγητής: Δεν εστιάζανε στη λέξη μία. Και τους έλεγα «Ρε παιδιά, εδώ για δέστε έχει κι άλλη μία κρυφή λέξη μέσα που παίζει σημαντικό ρόλο και θα σας διευκρινίσει αυτό το πράγμα».

Ερευνητής: Πολύ καλή παρατήρηση…

Καθηγητής: Δεν το είχανε δει, δηλαδή δεν το συνειδητοποιούσανε το μία.

Ερευνητής: Ναι, ναι...

Καθηγητής: Άρα λοιπόν είναι, ήτανε.. διαπίστωσα ότι ήτανε ένα πρόβλημα, το οποίο αυτό πρόβλημα ήταν λεκτικό στην… όχι στην ετυμολογία, αλλά στη χρήση, στη σημασιολογία των λέξεων που έχει ένας ορισμός…

Ερευνητής: Έτσι, ναι, ναι...

Καθηγητής: Κάποια λέξη τους περνάει απαρατήρητη και αυτή δημιουργεί τρομακτικά προβλήματα, και όποτε μου το κάνανε λάθος τους έλεγα, «Τι είναι εξίσωση;» και έλεγαν: «Μία κύριε, μία!», και έλεγα εντάξει στο τέλος είχαμε φτάσει πια «Κύριε, κύριε μην το πείτε, το ξέρουμε, μία, μία, πάλι αυτό κάνουμε λάθος, το μία».

Ερευνητής: Πάλι όμως για τις λέξεις όμως ήτανε το… στις λέξεις ήταν το πρόβλημα. Άρα, παίζουν ρόλο...

Καθηγητής: Σημαντικότατο. Σημαντικότατο αυτό με τις λέξεις και πιστεύω ότι με αυτήν την έννοια, την έννοια ας πούμε της επικοινωνίας, εκπαιδευτικού-μαθητή, δεν υπάρχουν λάθος απαντήσεις, για μένα.

Ερευνητής: Χα! Ωραίο, ωραίο...

Καθηγητής: Δεν υπάρχουν λάθος απαντήσεις. Εεε τι γίνεται, ο μαθητής με τον καθηγητή είναι σε επικοινωνία.

Ερευνητής: Ναι.

Καθηγητής: Ο καθηγητής διατυπώνει μία… ένα ερώτημα, που σύμφωνα με τη χρήση των λέξεων που ξέρει περιμένει μία απάντηση…

Ερευνητής: Απ᾽ τη δική του οπτική γωνία…

Καθηγητής: Περιμένει μία απάντηση σύμφωνα με τη χρήση των λέξεων που ξέρει. Άρα λοιπόν, εε, αν η απάντηση δεν είναι η προσδοκώμενη από τον καθηγητή…ε δε σημαίνει ότι ο μαθητής είναι λάθος. Δηλαδή με αυτήν την έννοια, δεν υπάρχουν λάθη απαντήσεων. Αυτά είναι επειδή δεν έχει γίνει η επικοινωνία.

Ερευνητής: Μάλιστα, ναι, ναι, ναι.

Καθηγητής: Δεν έχει γίνει η επικοινωνία, γιατί για να κάνουμε επικοινωνία πρέπει σημασιολογικά τις λέξεις να τις έχουμε σε χρήση, όπως και οι δύο με τον ίδιο τρόπο.

Ερευνητής: Είδα, είδα προχτές ένα άρθρο για έναν καθηγητή που ρωτάει ένα παιδί στο δημοτικό πόσο, πόσο... «Άμα σου δώσω ένα μήλο κι άλλο ένα μήλο κι άλλο ένα μήλο, πόσα μήλα θα έχεις;» και έλεγε «Τέσσερα» το παιδάκι.

Καθηγητής: Ναι...

Ερευνητής: Και στεναχωριότανε ο καθηγητής και λέει κάτσε θα του πω ξέρω ‘γω για τα πορτοκάλια που του αρέσουνε, ή φράουλες, δε θυμάμαι τώρα…

Καθηγητής: Ναι...

Ερευνητής: Και του λέει, «Άμα σου δώσω μία φράουλα, κι άλλη μία, κι άλλη μία, πόσες θα έχεις;», λέει «Τρεις», «Ααα ωραία», λέει, «Το πέτυχα»… Λέει για κάτσε να το επιβεβαιώσω τώρα, το κατάλαβε; Και ξαναρωτάει: «Άμα σου δώσω ένα μήλο» και τα λοιπά και τα λοιπά και απαντάει ξανά «τέσσερα». Παραξενεύεται ο καθηγητής και λέει, «Γιατί απαντάς τέσσερα;» και λέει, «Γιατί έχω ένα άλλο στην τσάντα μου».

Καθηγητής: Έχω ένα άλλο στην τσάντα μου, ναι...

Ερευνητής: Και μου έκανε φοβερή εντύπωση αυτό.

Καθηγητής: Αυτό, λοιπόν, βλέπεις ότι είναι θέμα χρήσης των λέξεων, δηλαδή η σημασιολογία, πρόσεξε να δεις και είμαι οπαδός του Βιτγκενστάιν εγώ σε αυτό…

Ερευνητής: Αχά...

Καθηγητής: Δηλαδή, όταν επικοινωνούμε, οι λέξεις έχουν κάποια σημασία, οι φιλόλογοι και γενικά οι γλωσσολόγοι έχουνε δώσει διάφορους ορισμούς στη σημασιολογία, είναι σημασιολογία περιεχομένου που και γι' αυτό να σου πω κάτι που είδα και είναι και η σημασία του Βιτγκενστάϊν... Αυτό που λέει ότι στην ουσία δεν ξέρουμε τη σημασία των λέξεων, αλλά η σημασία τους βγαίνει μέσα από τη χρήση τους. Και δίνει ένα πολύ ωραίο παράδειγμα σε ένα βιβλίο του, που λέγεται «φιλοσοφικές έρευνες». Εεεε... λέει, λοιπόν, εκεί ότι παίρνει μια οικιακή βοηθό ένα σημείωμα να πάει στον μανάβη, που γράφει πέντε κόκκινα μήλα.

Ερευνητής: Ναι…

Καθηγητής: Τον αριθμό 5 δεν τον ξέρει κανείς απ' τους δύο. Εδώ δεν το ξέρουμε και οι μαθηματικοί τι σημασία έχει το 5. Το «κόκκινα» δεν ξέρουμε τη σημασία του, δηλαδή δε μπορούμε να το ορίσουμε σαν...

Ερευνητής: Τι είναι ναι... σαν ορισμός…

Καθηγητής: Να το δω σαν ορισμό, μήκος κύματος και τα λοιπά, δεν υπάρχει. Παρ' όλα αυτά η επικοινωνία γίνεται, γιατί ξέρουμε τι σημασία έχουνε οι λέξεις στη χρήση τους.

Ερευνητής: Σωστό…

Καθηγητής: Οπότε και ο μανάβης θα αντιδράσει σωστά και η οικιακή βοηθός θα πάρει σωστά τη παραγγελία πίσω. Άρα λοιπόν, χωρίς να ξέρουμε στην ουσία τη σημασία των λέξεων, χρησιμοποιούμε σημασιολογικά τις λέξεις, με τέτοιο τρόπο ώστε να επικοινωνούμε. Αυτό ισχυρίζεται λοιπόν ο Βιτγκενστάϊν. Αυτό νομίζω γίνεται στην εκπαίδευση. Εμείς τώρα οι καθηγητές έχουμε μία σημασιολογία στις λέξεις, σύμφωνα με το γνωστικό αντικείμενο ο καθένας που έχει και αντιδρούμε μ' αυτό. Και συζητάμε και όταν συζητάμε μέσα στη τάξη, συζητάμε μ' αυτό το υπόβαθρο, δηλαδή δίνουμε μία σημασία στις λέξεις, έτσι όπως τις ξέρουμε εμείς. Φαντάσου όμως τον ταλαιπωρημένο μαθητή, που στη μία ώρα κάνει ιστορία και ακούει παράγοντες που επηρέασαν και μετά την άλλη ώρα μπαίνει ο μαθηματικός και του λέει παράγοντες του πολλαπλασιασμού... και έχει για την ίδια λέξη... πότε θα προλάβει ο μαθητής, αυτό είναι του περιεχομένου που σου είπα…

Ερευνητής: Και εγώ το έχω σκεφτεί αυτό...

Καθηγητής: Να τον ρωτήσεις τον μαθητή ας πούμε για ένα παράγοντα και εκείνος να σου μιλάει για ποδοσφαίρου ή για την ιστορία, γιατί έκανε πριν ιστορία...

Ερευνητής: Σωστό, σωστό...

Καθηγητής: Άρα, γιατί να λες ότι σου απάντησε λάθος; Δεν απάντησε λάθος, απλώς δεν έγινε επικοινωνία στην ερώτηση που διατυπώθηκε, άρα δεν ολοκληρώθηκε η επικοινωνία… Αυτή είναι... Άρα λοιπόν η γλώσσα, για μένα, είναι κυρίαρχο πράγμα στην εκπαίδευση, είναι το πρώτο πράγμα στην εκπαίδευση, και χωρίς αυτό δεν μπορείς να κάνεις... να λειτουργείς σαν εκπαιδευτικός νομίζω Μάριε…

Ερευνητής: Εεε, πάνω σ' αυτό το ερώτημα… τώρα δεν το είχα... λόγω της συζήτησης μας... Τις λέξεις με τους Πυθαγορείους, δηλαδή, που τις ερμηνεύανε με τα… με τους αριθμούς και τα λοιπά, έχετε διαβάσει κάτι;

Καθηγητής: Ποιες λέξεις εννοείς;

Ερευνητής: Γενικά, όπως δεν υπάρχουν, ότι το 1 είναι το παν, ότι το 2 είναι το θήλυ...

Καθηγητής: Αυτό σου λέω, ότι προσπάθησα να τους δώσω, τότε που σου είπα ότι τους έδινα και φωτοτυπία τα στοιχεία του Ευκλείδη ή οτιδήποτε στο λύκειο, για να δούνε επίσης και τον τρόπο με τον οποίο αναφερόντουσαν στα αντικείμενα δηλαδή, και να δούνε ότι δεν υπήρχε η έννοια της ευθείας, δεν υπήρχε η έννοια του... δηλαδή το πολύγωνο και το τετράγωνο το ονόμαζαν απ' τη διαγώνιο και τέτοια πράγματα δηλαδή... Οι συμβολισμοί οι διάφοροι που δεν υπήρχανε, οι σύγχρονοι συμβολισμοί περιγραφόντουσαν και ήτανε με άλλο όνομα εκεί για να διαπιστώσουν δηλαδή ότι υπήρχε διαφορετικοί ωρολόγια και ονοματολογία σε αυτό το πράγμα... Εεε, τώρα ένα αντίστοιχο είναι αυτό το οποίο μου λες, το οποίο έχω προτείνει να το βάλουμε μέσα σε δημιουργικές εργασίες, αυτό το καινούργιο φασούλι που βγήκε τώρα... Μια δημιουργική εργασία που μπορεί να γίνει, ας πούμε, σε μια τάξη λυκείου, είναι να τους δώσεις ένα κείμενο στα αρχαιά ελληνικά, ή μεταφρασμένο έστω απ' το Σταμάτη, δηλαδή σε τέτοιο επίπεδο που να 'ναι καθαρεύουσα, και να σου πούνε αφού διαβάσουν αυτό το κείμενο, με συγκεκριμένη σελίδα του βιβλίου, να αναγνωρίσουν τους ίδιους όρους...

Ερευνητής: Ααα ωραίο.

Καθηγητής: Δηλαδή αυτό που μου λες «παν», να δούνε… μπορούν να καταλάβουν ότι είναι η μονάδα, δηλαδή ότι αυτό που διάβαζα, με εκείνο το κείμενο σε εκείνη τη γλώσσα, είναι ίδιο με αυτό που διαβάζω στη σύγχρονη γλώσσα τη δικιά μου; Και να καταλάβουνε… προσπάθησα να το κάνω αυτό μία φορά αλλά... ήτανε πολύ δύσκολο στους μαθητές, ήτανε πρωτόγνωρο και δε μπορέσανε να αντιληφθούνε τις έννοιες. Και μετά σκέφτηκα επειδή στις δημιουργικές εργασίες θα έχει δύο 7ώρα, και θα μπορούν να συζητήσουνε ελευθέρα έξω από κάποιο μάθημα και ύλη, θα τους βάλω και κάποια δημιουργική εργασία τέτοια, να τους δώσω ένα κείμενο μίας σελίδας ας πούμε, που να αναφέρεται σε μία σελίδα στο βιβλίο τους.

Ερευνητής: Μου δώσατε τώρα τροφή για σκέψη για αυτό για τη σημασιολογία και λέω οι Πυθαγόρειοι χρησιμοποιούσανε πάρα πολύ προσεκτικά τις λέξεις και την ονοματολογία…

Καθηγητής: Ναι...

Ερευνητής: Και λέω αυτό αν μπορούσαμε να το κάνουμε στις μέρες μας... εεε, θα το θεωρούσα επανάσταση εγώ.

Καθηγητής: Εεε αυτό είναι να το δούνε αυτό το πράγμα... ναι είναι… εγώ θα επιχειρήσω να το βάλω σου λέω φέτος στις δημιουργικές εργασίες αυτό το πράγμα…

Ερευνητής: Γιατί ο άλλος καταλαβαίνει τι είναι τετράγωνος αριθμός, πεντάγωνος αριθμός, δηλαδή υπάρχει εικόνα και σχήμα και όλα...

Καθηγητής: Αυτά είναι εύκολα…

Ερευνητής: Ναι, αυτά είναι τα εύκολα...

Καθηγητής: Άμα πας όμως στο αρτιάκις ζυγός και αυτά, όταν πας δηλαδή σε αυτούς που είναι πολλαπλάσιος, περιττό πολλαπλάσιος ζυγού ή περιττό πολλαπλάσιος περιττού, που όρισε ο Ευκλείδης, εκεί είναι αρκετά δύσκολο να καταλάβεις τι θέλει να πει ο ποιητής... πρέπει δηλαδή να έχεις εντρυφήσει. Οπότε κάποια θα είναι εύκολα, κάποια θα είναι δύσκολα, αλλά δεν το έχω δοκιμάσει ακόμα, σου λέω φέτος θα το δοκιμάσω αυτό…

Ερευνητής: Ωραία, ωραία εύχομαι καλή επιτυχία...

Καθηγητής: Να ‘σαι καλά…

- **Εκπαιδευτικός 13 (1:23:09-1:38:33)**

Καθηγητής: Λοιπόν, αυτή είναι της β' λυκείου αλλά είναι και αυτή που ανέφερε ο Πόλι που δε χρειάζεται συζήτηση. Είναι προφανέστατη γιατί είναι όμοια σχήματα, αλλά βέβαια αυτός το έθεσε σε ένα πιο προχωρημένο στάδιο έτσι.

Ερευνητής: Ναι, εννοείται. Αυτό... για το Β' λέτε έτσι;

Καθηγητής: Ναι.

Ερευνητής: Το Β' λέγεται ότι είναι του Πυθαγόρα η απόδειξη αλλιώς είναι του Πρόκλου. Δε ξέρω τι γνώμη έχετε εσείς...

Καθηγητής: Ναι, δεν έχω κάποια γνώμη πάνω σε αυτό... Δεν έχω...

Ερευνητής: Λοιπόν, τις πρώτες αποδείξεις… το Α', προτείνω αυτές τις αποδείξεις, για ποιο λόγο; Διότι όπως είπατε και εσείς που τους δείχνετε γεωμετρικά την ταυτότητα α και β και όλα στο τετράγωνο, η οποία διδάσκεται στην γ' γυμνασίου, εγώ έχω μια μικρή ένσταση, ότι…, για τους εξής λόγους:

Πρώτον, για να μην μπερδεύουν το α τετράγωνο και β τετράγωνο Πυθαγόρειο θεώρημα με την ταυτότητα, και ξεχνάνε το 2αβ πολλές φορές στην γ΄ γυμνασίου, αν τα διδασκόντουσαν ταυτόχρονα στη β΄, θεωρώ ότι μπορεί να αποφεύγαμε αυτό το λάθος, που είναι πάρα πολύ συχνό φαινόμενο. Εεεε επίσης για το α+β και το α-β, μόνο αυτές τις δύο ταυτότητες θα πρότεινα εγώ να διδάσκονται στη β΄ γυμνασίου, οπότε να μπούνε και όλα τα ιστορικά σημειώματα, Πυθαγόρειες τριάδες, στη β΄ γυμνασίου, δηλαδή να είναι λίγο πιο ολοκληρωμένο το κομμάτι του Πυθαγόρα.

Καθηγητής: Ξέρεις τι γίνεται; Εκεί πέρα όμως είναι η πρώτη επαφή με τους αρνητικούς αριθμούς και τις πράξεις αρνητικών αριθμών, γιατί τους αρνητικούς τους κάνεις στο τέλος της α΄ γυμνασίου, που συνήθως δεν προλαβαίνουν να την κάνουν όλοι και ολοκληρώνεται στη β΄ γυμνασίου η παράδοση. Οπότε εκεί πρωτομαθαίνουνε τις δυνάμεις, οπότε το να μάθει το -2 εις στην δευτέρα και το -2 εις την τρίτη, του είναι πολύ σκληρό να μάθει και την ταυτότητα... δηλαδή, το θεωρώ ότι δε θα έχει κάποια επιτυχία.

Ερευνητής: Καταλαβαίνω.

Καθηγητής: Δηλαδή στην ουσία θεωρώ ότι δε θα βοηθήσει το μαθητή. Ίσα ίσα θα του δώσει ένα πολύ πιο δύσκολο πράγμα να αντιληφθεί. Και εκεί που είναι ακόμα αριθμητικός ο μαθητής, δηλαδή κάνει αριθμητική, τον κάνεις αλγεβρικό και δεν είναι η κατάλληλη εποχή να γίνει αλγεβρικός.

Ερευνητής: Ωραία, ωραία... Τη σέβομαι τη γνώμη σας... Εεε μετά έχω την απόδειξη του βιβλίου στο Γ' τυπικά. Λοιπόν, και πάμε στο Δ'... Εεε μπορείτε να το δείτε αυτό στο youtube, είναι απόδειξη, με διόρθωσε μια καθηγήτρια, καλά έκανε, είναι επιβεβαίωση με το νερό, σαν πείραμα, το έχετε δει λογικά...

Καθηγητής: Το 'χω δει ναι…

Ερευνητής: Πολύ ωραία, αυτό πώς σας φαίνεται, να το δουν οι μαθητές;

Καθηγητής: Αυτά είναι αυτά τα πράγματα που τους κινούν το ενδιαφέρον που σου είπα, πας και τους πείθεις ότι είναι... ότι αυτό που ισχυρίζεσαι έχει λογική ρε παιδί μου, έχει...

Ερευνητής: Μετά, στο Ε' έχω ενός φυσικού.. από την Κέρκυρα, Πάνος Μουρούζης, έχει κάνει μια εργασία εδώ πέρα, η οποία έχει ως επικεφαλίδα, άμα θέλετε να σας την στείλω, «Τελικά το Πυθαγόρειο είναι θεώρημα ή φυσικός νόμος;». Και έτσι με εξίταρε εμένα, το διάβασα όλο, όλη την εργασία, γι' αυτό και το έβαλα μέσα. Λοιπόν, μέσα βάζει θεωρία σχετικότητας, κβαντομηχανική... λοιπόν, την εξίσωση του Σρέντιγκερ, δηλαδή το προχωράει πολύ το θέμα, ότι ακόμα και εκεί χρησιμοποιείται το Πυθαγόρειο. Άρα, μήπως είναι φυσικός νόμος και όχι ένα απλό θεώρημα;

Καθηγητής: Εντάξει, αυτό όμως δεν είναι ένα ερώτημα, το οποίο θα το βάλεις όταν πας να κάνεις εισαγωγή της έννοιας…

Ερευνητής: Όχι, όχι, αυτό το λέω σε σας, σας λέω την εργασία, εγώ θα έδειχνα αυτό το πείραμα με την… με τα Νιούτον...

Καθηγητής: Με τα Νιούτον, ναι το βλέπω...

Ερευνητής: Να είναι προσιτό στους μαθητές να το καταλάβουν, συνάδει και με την ύλη της β' γυμνασίου με τις δυνάμεις. Άρα, να μην τα μπλέξουν, ίσα ίσα να τα ξεμπλέξουν.

Καθηγητής: Ναι, ναι, αυτό να σου πω, δεν είναι άσχημο, να το δεις σαν εφαρμογή όμως του Πυθαγορείου...

Ερευνητής: Σαν εφαρμογή όμως του Πυθαγορείου, ναι...

Καθηγητής: Σαν εφαρμογή όμως του Πυθαγορείου ναι, αλλά αυτό θα το έβαζα εγώ σε πιο προχωρημένη τάξη, β' Λυκείου.

Ερευνητής: Α, μάλιστα.

Καθηγητής: Στο γυμνάσιο ακόμα δε ξέρουν τις δυνάμεις. Δηλαδή είναι το μεγάλο πρόβλημα και με τη Φυσική, ότι οι φυσικοί διδάσκουνε Φυσική με γραφικές παραστάσεις, που οι μαθητές ακόμα δε ξέρουνε γραφικές παραστάσεις και τους μιλάνε για επιτάχυνση, όταν η ευθεία έχει θετική κλίση και τα λοιπά, καταλαβαίνεις τώρα σαν μαθηματικός, όποτε γίνεται ένα αλαλούμ εκεί πέρα...

Ερευνητής: Ισχύει.

Καθηγητής: Εμείς τους έχουμε στη β' γυμνασίου αριθμητικούς ακόμα τους μαθητές και στη Φυσική τους πάνε και τους κάνουνε αλγεβρικούς, και μάλιστα αλγεβρικούς σε συναρτήσεις. Οπότε γίνεται ένα μπέρδεμα και δεν καταλαβαίνουν. Άμα το βάλεις λοιπόν αυτό το πράγμα, δηλαδή τι θα αντιληφθεί ο μαθητής; Αν είναι φυσικός νόμος; Αν δεν ξέρει καλά-καλά τι είναι δύναμη, πώς θα αντιληφθεί τι είναι φυσικός νόμος;

Ερευνητής: Όχι, αυτό δε θα το έθετα το ερώτημα στους μαθητές, εγώ απλώς θα τους έδειχνα σαν επιβεβαίωση που είπατε και εσείς…

Καθηγητής: Αυτό σαν επιβεβαίωση το δείχνεις και με το νερό από πάνω…

Ερευνητής: Ναι, ναι, γι' αυτό εγώ Α,Β,Γ,Ε, τα έχω σαν...

Καθηγητής: Ναι, κάτι απλό στο γυμνάσιο. Δε θα τους επιβεβαιώσεις με κάτι σκληρό.

Ερευνητής: Ναι, γι' αυτό το έβαλα, αυτό το απλό έβαλα, τώρα βέβαια τους έχω πιο πολύπλοκα, θα το συζητήσουμε... Λοιπόν, εσείς μου είπατε λοιπόν με τη μέθοδο του εγκλεισμού το πάτε… έτσι με τις ανισότητες, όπως στο σχολικό βιβλίο... εγώ, λοιπόν, προτείνω τη μέθοδο Αρχύτα ή Ήρωνα ή Βαβυλωνίων. Λοιπόν… διάβασα λοιπόν, ότι αυτή η μέθοδος, έχει ξεκινήσει από τους Βαβυλώνιους... Δεν ξέρω κατά πόσο...

Καθηγητής: Στα συνεχή κλάσματα στην ουσία..

Ερευνητής: Έτσι ακριβώς, ναι. Δεν τον είχανε βέβαια έτσι μοντελοποιήσει οι Βαβυλώνιοι, προφανώς, προφανώς. Πρώτος το μοντελοποίησε ο Αρχύτας και η τελική αυτή έτσι πιο αλγεβρική μορφή είναι του Ήρωνα…

Καθηγητής: Ναι...

Ερευνητής: Εγώ αυτό θα το ανέφερα σε έναν μαθητή, όχι για να το μάθει, αλλά να του πω «Ξέρεις κάτι; Υπολόγισε μου το ρίζα 2, πάτα το στο κομπιουτεράκι». Οκ, έτσι. «Ωραία», θα του πω εγώ τώρα, «Εγώ θα στο βρω με το χέρι» και θα του δείξω αυτό. Δε θα του τραβήξω την προσοχή;

Καθηγητής: Εσύ τι νομίζεις; Άμα το βάλεις αυτό σε τάξη, δε νομίζω ότι θα είναι πολύ γρήγορο. Γιατί εντάξει, το α1 α2 , ας πούμε να το υπολογίσει, μετά έχει 2 προς 1, αυτή τη διαίρεση για να την κάνει ένας μαθητής β' γυμνασίου, που δεν ξέρει να κάνει καλά διαιρέσεις, θα του πάρει πάρα πολύ χρόνο.

Ερευνητής: Ναι, ισχύει αυτό.

Καθηγητής: Εγώ αυτά να σου πω την αλήθεια και στο πρώτο γυμνάσιο που ήμασταν, εεε, είχαμε κάνει με τον άλλον το συνάδελφο τον … , είχαμε πάρει και calculator, είχαμε πάρει 30 calculator και τους δίναμε calculator να κάνουν τις πράξεις αυτές και παρ' όλα αυτά τους έτρωγε χρόνο.

Ερευνητής: Ναι.

Καθηγητής: Δηλαδή για να κάνουνε... Δεν ξέρω αυτά κατά πόσο σε επίπεδο τμήματος να βγούνε σε διδακτική ώρα δύο από αυτά που δείχνεις, γιατί οι πράξεις είναι πολύ χρονοβόρες για τους μαθητές.

Ερευνητής: Εάν δεν έβαζα τους μαθητές, θα τους το έδειχνα εγώ υπό την έννοια...

Καθηγητής: Δεν έχει αυτήν την εμπειρία έτσι...

Ερευνητής: Εγώ θα τους το έδειχνα για ποιο λόγο, για να τους πω κάτι «Ξέρετε, ζούμε στο 2017, έχουμε μοντέρνα τεχνολογία, έτσι; το calculator, αλλά αυτό παιδιά είναι απ' τον 1ο αιώνα μ.Χ., ο αλγόριθμος που χρησιμοποιεί το κομπιουτεράκι σας».

Καθηγητής: Ναι.

Ερευνητής: Δηλαδή, για να τονίσω την σπουδαιότητα των αρχαίων μεθοδολογιών.

Καθηγητής: Σίγουρα ναι. Αυτό, εεε, δεν ξέρω κατά πόσο θα το αντιληφθούνε, δε σου λέω ότι απορρίπτεται, εγώ σου βάζω τον προβληματισμό, πώς το αντιλαμβάνονται, γιατί ακόμα υπάρχουνε και οι τριγωνομετρικοί πίνακες που έχει πίσω στο βιβλίο, εντάξει; Που με τους τριγωνομετρικούς πίνακες πάλι δεν καταλαβαίνουν τη σημασία τους.

Ερευνητής: Ναι.

Καθηγητής: Δηλαδή, ενώ τους δείχνουμε τους τριγωνομετρικούς πίνακες και είναι για πράξεις, πάλι δεν καταλαβαίνουνε. Και κάποια πριν από έξι, εφτά χρόνια τα βιβλία του γυμνασίου, εκτός από τους τριγωνομετρικούς πίνακες είχανε και δυνάμεις και ρίζες. Είχα δει δηλαδή ένα παράρτημα που ήταν κάτι σαν λογαριθμικός πίνακας, που έβρισκες εύκολα τα αποτελέσματα για να μπορούμε να κάνουμε πράξεις. Και πάλι ζοριζόντουσαν πάρα πολύ σε επίπεδο τμήματος, δηλαδή αν δώσεις μια τέτοια εργασία να σου κάνουνε, όπως είναι… το τμήμα ολόκληρο, μιλάμε για ένα τμήμα 24-25 μαθητών.

Ερευνητής: Κατάλαβα, ναι σίγουρα...

Καθηγητής: ...τις πράξεις δεν ξέρω αν θα φτάσουν μέχρι το Α'4. Αυτό μόνο σαν ένσταση, δηλαδή πάντα λογαριάζεις ότι οι πράξεις είναι πολύ χρονοβόρες μέσα σε μία τάξη. Σαν διαδικασία είναι εξαιρετικά καλή να την βλέπουνε, ότι μπορούμε να αντιδράσουμε και χωρίς τα κομπιουτεράκια και χωρίς τον ηλεκτρισμό...

Ερευνητής: Κάπως έτσι, μπράβο, αυτό ακριβώς θα ήθελα να τους δείξω.

Καθηγητής: Αυτό είναι πολύ καλό και μπορεί να γίνεται αλλά δεν μπορεί να γίνει σε μεγάλη έκταση. Δηλαδή, μην μπερδεύεις το μυαλό σου, ότι μπορεί να εφαρμοστεί.

Ερευνητής: Ναι, το αντιλαμβάνομαι αυτό που λέτε πλήρως, πλήρως. Ναι, γιατί το Γ' με τη μέθοδο του Θέωνα εδώ πέρα εντάξει ξεφεύγει το πράγμα, προφανώς αλλά...

Καθηγητής: Εδώ είναι και το ρίζα 2 , αυτό που εμφανίστηκε πια, η αρρητότητα του.

Ερευνητής: Εδώ ξέρετε γιατί θα ήθελα; Θα ήθελα να τους το παρουσιάσω για τον εξής λόγο, ξέρετε κάτι; Κάποτε προσπαθούσαν να το προσεγγίσουν γεωμετρικά το ρίζα 2, λοιπόν... θα τους δείξω εγώ ορισμένες πράξεις, τελικά όμως θα τους πω ότι αυτοί οι λόγοι που προκύπτουνε, τα κλάσματα, άμα δείτε την άλλη σελίδα, οι λόγοι αυτοί προσεγγίζουν το ρίζα 2, και θα τους πήγαινα εκείνη τη στιγμή και θα τους έλεγα για τη μουσική του Πυθαγόρα και ότι... θα τους ανέφερα τον σιδηρουργό, ότι άκουγε τα βαράκια που τα χτυπούσε και έλεγε, «Ωπ διαφορετικές συχνότητες», και πώς συνδύασε τώρα αυτό με τους λόγους και με την προσέγγιση των τετραγώνων εδώ και της διαγώνιου. Δηλαδή ότι τίποτα δεν είναι άσχετο.

Καθηγητής: Αυτά εδώ να λες και πόση διδακτική ώρα θα σου πάρουνε...

Ερευνητής: Ααα, κατάλαβα...

Καθηγητής: Δηλαδή αυτά που μου δείχνεις τώρα, εε, για μένα σαν εκπαιδευτικό που είμαι χρόνια στην εκπαίδευση δε μου λένε τίποτα γιατί δε μου λες πόσο χρόνο θα σου πάρουνε.

Ερευνητής: Μάλιστα...

Καθηγητής: Δεν κάνεις πρόβλεψη και εδώ δείχνει ότι έχεις μία απειρία διδακτική της τάξης, που την έχουμε όλη στην αρχή, νομίζουμε ότι βγαίνουνε γρήγορα, δε βγαίνουνε γρήγορα, καθόλου γρήγορα…

Ερευνητής: Αν αυτό το παρουσίαζα σε power point, να 'ταν έτοιμο, έτσι; δε θα το...

Καθηγητής: Εεε, από τους 25 μαθητές, μπορεί οι 2 να παρακολουθούσανε. Δηλαδή στο τέλος θα κάνες ερωτήσεις και θα έβλεπες ότι δε θα είχανε... δε θα τους είχε μείνει κάτι...

Ερευνητής: Εμένα το μόνο που ήθελα να τους μείνει είναι, ότι συνέδεσε ο Πυθαγόρας τη μουσική με τους λόγους, τίποτε άλλο…

Καθηγητής: Σου λέω απ' αυτά, πόσα θα τους έκανες σε μία ώρα; Γιατί άμα ξεκινήσουμε από τη προσεγγιστική μέθοδο…

Ερευνητής: Σίγουρα όχι σε μία ώρα αυτά…

Καθηγητής: Ναι... σε πόσες;

Ερευνητής: Σε διαφορετικά, δηλαδή, αν, ή κάποιο από αυτά, δηλαδή αυτά εδώ, ας πούμε, είναι μία πρότασή μου στους καθηγητές να επιλέξουνε...

Καθηγητής: Ναι, τι μπορούν να χρησιμοποιούν και να επιλέξουνε…

Ερευνητής: Ναι…

Καθηγητής: Όχι αυτά να γίνουν ώρα...

Ερευνητής: Όχι βέβαια… Ναι, ναι, ως επιλογές…

Καθηγητής: Το ότι, να τι μπορείτε να κάνετε, ε, εντάξει με αυτήν τη λογική ναι...

Ερευνητής: Ναι, ναι…

Καθηγητής: Αυτό το δέχομαι, αλλά ότι ας πούμε μπορείς να κάνεις τη μέθοδο του Αρχύτα και τη μέθοδο αυτού του…

Ερευνητής: του Θέωνα…

Καθηγητής: …του Θέωνα και να σου κάνουνε υπολογισμούς του ρίζα 2 και του ρίζα 5 και του ρίζα 7 σε μία διδακτική ώρα, δε γίνεται με τίποτα, δηλαδή δεν ξέρω πώς το έχεις στο μυαλό σου...

Ερευνητής: Ναι, ναι, μα προφανώς είναι πολύ δύσκολο, ειδικά του Θέωνα, το θεωρώ αδιανόητο για παιδί β' γυμνασίου, εγώ το θεωρώ αδιανόητο και για παιδί β' λυκείου μη σας πω.

Καθηγητής: Και αυτό το Κοχλία που κάνουμε με τη ρίζα 2 (1.36.45) που κάνουμε, δεν ξέρω αν το έχεις παρακάτω...

Ερευνητής: Το 'χω στο επόμενο, μετά την ακριβή μέθοδο με τον κανόνα και διαβήτη...

Καθηγητής: Την κατασκευή ναι...

Ερευνητής: Έχω τη μέθοδο σπιράλ...

Καθηγητής: Έχεις τη μέθοδο του Κοχλία.

Ερευνητής: Δηλαδή να τους δώσω να καταλάβουν ότι «Ξέρεις κάτι; Εκτός απ' το χαρακάκι που το 'χούμε μετρήσει, μπορούμε να φτιάξουμε ένα χάρακα αρρήτων».

Καθηγητής: Αυτή εδώ η μέθοδος, όταν την κάνω, επειδή την κάνουμε αυτήν τη μέθοδο, εε, περίπου ένα τέταρτο μου παίρνει για να κάνω ας πούμε κάποιες... για να φαίνεται ότι κλείνει. Δηλαδή, για να καταλάβεις μέθοδο που έχω χρησιμοποιήσει, σχεδιαστικά επειδή τους βάζεις και κάνουν και τον υπολογισμό της επόμενης και της επόμενης και κάνουμε την κατασκευή, περίπου ένα τέταρτο ώρας. Οπότε να καταλάβεις δηλαδή πόσο χρόνο σου τρώνε μέσα σε μία τάξη 22 με 25 άτομα, θέλεις κάπου εκεί. Οπότε, από αυτά που προτείνεις, το λιγότερο που θα θεωρήσεις εσύ είναι ότι θες ένα δεκάλεπτο-τέταρτο για τον καθένα τους. Απλώς να το δείξεις, όχι να απαιτήσεις να το εμπεδώσει ο μαθητής...

Ερευνητής: Ναι, σίγουρα, ναι, να το δείξω!

Ερευνητής: Όλα αυτά τα προτείνω σαν επίδειξη, έτσι για να τους προσελκύσουμε το ενδιαφέρον, για κανέναν άλλο λόγο δηλαδή.

Καθηγητής: Α, εντάξει, γιατί στην αρχή νόμιζα ότι τα προτείνεις για διδακτικό και λέω…

Ερευνητής: Ναι, διδακτικά, και όταν λέω διδακτική πρόταση και η προσέλκυση διδακτική είναι…

Καθηγητής: Ναι, ναι, σίγουρα…

Ερευνητής: Για να τους κεντρίσουμε το ενδιαφέρον, να τους πούμε κάτι έξω από τα μαθηματικά ας πούμε, δηλαδή…

Καθηγητής: Νόμιζα ότι να το χρησιμοποιούμε διδακτικά, να το εφαρμόζουν οι μαθητές, για να κάνουν τους υπολογισμούς…

Ερευνητής: Όχι, πώς λέγαμε να τους πούμε μια ιστορία για τον τάδε, για τον τάδε, ε θα πω…

Καθηγητής: Ναι, αυτό μπορεί να γίνει...

Ερευνητής: Κάπως έτσι...

- **Εκπαιδευτικός 10 (11:15-13:08)**

Ερευνητής: Με το που ακούτε Πυθαγόρειο θεώρημα, τι σας έρχεται πρώτα στο νου; Μπορεί να είναι και εικόνα μπορεί να είναι οτιδήποτε...

Καθηγητής: Κοίταξε, ε πρώτα μου έρχεται στο νου το αυτονόητο, εντάξει, η διδασκαλία του Πυθαγόρειου θεωρήματος, αλλά η αλήθεια είναι ότι παράλληλα με αυτήν την έννοια μου έρχονται γνώσεις μέσα από τόσες πολλές αποδείξεις που έχω δει σε συγγράμματα , σε sites...

Ερευνητής: Άρα, πρώτα σας έρχεται η σχέση και μετά οι πολλές αποδείξεις που το ακολουθούν.

Καθηγητής: Πολλές Αποδείξεις σε μορφή εικόνας, δηλαδή αυτό το Τάγκραμ στην αποδεικτική διαδικασία του.

Ερευνητής: Οπότε Τάγκραμ και σχέση, έτσι; Την αλγεβρική τη σχέση προφανώς;

Καθηγητής: Ναι, ναι, ναι.

Ερευνητής: Πολύ ωραία, το ίδιο πράγμα. Τι σας έρχεται στον νου, όταν ακούτε την έννοια «άρρητος αριθμός»;

Καθηγητής: Χέχε, είχα κάνει μια κουβεντίτσα λίγο πριν, μια παραπομπή στους Πυθαγόρειους, όταν ανακάλυψαν την έννοια, ότι έξω απ' τους ρητούς υπάρχουν και οι άρρητοι αριθμοί, μου 'ρχεται στο μυαλό ότι ήθελαν να το κρατήσουν ως εφτασφράγιστο μυστικό, να μην το μάθει ο κόσμος γιατί ανέτρεπε πάρα πολλά στη θεωρία τους. Γι' αυτό και ήταν τόσο μυστικιστική...

Ερευνητής: Οπότε με την έννοια αυτή, εσάς σας έρχεται ο μυστικισμός... Το εφτασφράγιστο μυστικό, εγώ αυτό κρατάω...

Καθηγητής: Ακριβώς, ακριβώς, τώρα όλα τα άλλα σε μαθηματικό επίπεδο, νομίζω ότι δε χρειάζεται να το κουβεντιάσουμε γιατί…

Ερευνητής: Όχι, γι' αυτό σας ρωτάω κιόλας, τι σας έρχεται πρώτα στον νου, αυτό εμένα με ενδιαφέρει.

Καθηγητής: Αυτό σου είπα ναι, γι' αυτό το ανέφερα αυτό.

Ερευνητής: Πολύ ωραία…

- **Εκπαιδευτικός 10 (33:24-37:58)**

Ερευνητής: Στη διδασκαλία σας ξεκαθαρίζετε το ευθύ και το αντίστροφο του Πυθαγορείου; Και με ποιον τρόπο;

Καθηγητής: Και βέβαια ξεκαθαρίζω το ευθύ και το αντίστροφο, και το ξεκαθαρίζω και με αριθμητικά παραδείγματα και κάνω και ένα ξεκαθάρισμα γλωσσικό. Και ξέρω ότι κάποια στιγμή, φαντάζομαι θα το συζητήσουμε αυτό το θέμα, περί ορολογίας και περί χρήσης της μαθηματικής γλώσσας...

Ερευνητής: Εννοείται…

Καθηγητής: Έτσι... και τα παιδιά αντιμετωπίζουνε, όχι μόνο σε μικρή ηλικία, αλλά και σε μεγάλη ηλικία ζητήματα του ευθέως και του αντιστρόφου δεν μπορούν να τα ξεχωρίσουνε πάρα πολύ καλά, όπως και δε μπορούν να αποδεικνύουν ποιο είναι το ευθύ και ποιο είναι το αντίστροφο. Θα έλεγα ότι αυτό συμβαίνει αρκετά στην αντιστροφή και γνωρίζουν αριθμητικά παραδείγματα και επίσης κυρίως με παιχνίδι. Για παράδειγμα, έχουμε μία κατασκευή στην οποία είναι ένα λαστιχάκι και τρία καρφάκια, τα καρφάκια αυτά είναι κορυφές ορθογωνίου τριγώνου και στην κατασκευή αυτή η υποτείνουσα ας το πούμε έτσι έχει ένα σταθερό τύπο και οι άλλες έχουν δηλαδή…

- **Εκπαιδευτικός 3 (06:35-11:26)**

Ερευνητής: Αν σας έλεγα να μιλούσατε για τους Πυθαγορείους, τι θα αναφέρατε πρώτα;

Καθηγήτρια: Ααα, τώρα εδώ πέρα, τι να πρωτοαναφέρω; Ειδικά φέτος για τους Πυθαγορείους... Εεεε, αυτό το πράγμα μου έρχεται στο μυαλό: η γνώση για λίγους.

Ερευνητής: Για λίγους...

Καθηγήτρια: Και μάλιστα αυτό το οποίο σκεφτόμουν φέτος και ετοιμάζαμε αυτήν την εργασία με τα παιδιά, ήταν αυτό το θέμα. Σκεφτόμουνα να κλείσουμε, να κάνουμε μια εκδήλωση στην οποία θα μιλούσε ο Τεύκρος ο Μιχαηλίδης, που έχει γράψει τα Πυθαγόρεια εγκλήματα, τα οποία στην ουσία είχαν γίνει για να μην αποκαλυφθεί η γνώση, την οποία δεν ήταν έτοιμη η κοινωνία να τη δεχτεί.

Ερευνητής: Μάλιστα.

Καθηγήτρια: Δηλαδή, για μένα τώρα οι Πυθαγόρειοι, έχει να κάνει με αυτήν τη γνώση για λίγους…

Ερευνητής: Μυστικισμός...

Καθηγήτρια: Μυστικισμός ναι…

Ερευνητής: Όσοι αξίζουν θα πρέπει να…

Καθηγήτρια: Αριστοκρατία της γνώσης, βασικά..

Ερευνητής: Αριστοκρατία της γνώσης, ωραίο…

Καθηγήτρια: Και πολύ πιθανόν να μην είναι έτοιμοι για τη γνώση όλοι οι άνθρωποι... Βέβαια, όσο και να την περιορίσεις…

Ερευνητής: Ουδέν κρυπτόν από τον ήλιο, ε;

Καθηγήτρια: Όπως έγινε και με τον Ίππασο, που προσπάθησαν να τον... για να μην αποκαλύψει παρά πέρα τη γνώση... τον δολοφόνησαν.

Ερευνητής: Έτσι λέγεται…

Καθηγήτρια: Όμως, μετά από 60 χρόνια ήρθε ο Κυρηναίος με τη σπείρα... είναι 60 χρόνια μετά… Οι άρρητοι αποκαλύφθηκαν.

Ερευνητής: Κανονικά και με τον Πλάτωνα στο Νενεθμος; Δε θυμάμαι πως λέγεται το σύγγραμμά..

Καθηγήτρια: Ναι, εμένα λοιπόν όταν ακούω Πυθαγόρειους μου έρχεται αυτός ο μυστικισμός αλλά η γνώση για λίγους, πιθανώς με τη λογική ότι δεν είναι έτοιμοι όλοι να το δεχτούν αυτό. Όμως, εκεί ήθελα εγώ να μιλήσει τότε ο Τεύκρος ο Μιχαηλίδης, ο οποίος δεν μπορούσε να έρθει εντός ωραρίου σχολείου, γιατί είναι και αυτός καθηγητής στο κολλέγιο και είναι πολύ ωραίος στην ομιλία του, πολύ ελεύθερος και θα έκανε πολύ καλό στα παιδιά, είναι γλυκός άνθρωπος και πολύ ακριβής…

Ερευνητής: Είναι και στην ομάδα που σας λέω…

Καθηγήτρια: Α στο Facebook? Εγώ εκεί ήθελα να συζητήσω μαζί του, να τους πει τι πρέπει να κάνουν για να ανήκουν σ’ αυτούς τους λίγους. Να μπορούν να την ανακαλύψουν τη γνώση, να τρυπώσουνε δηλαδή. Εεεε…

Ερευνητής: Και εγώ θέλω να μάθω…

Καθηγήτρια: Δηλαδή, αυτό το θέμα της γνώσης, σου λέω είναι ένα ταξίδι μοναχικό, αλλά ο δάσκαλος θα έρθει να σου μάθει τα βήματα…

Ερευνητής: Και να σου ανοίξει και την πόρτα.

Καθηγήτρια: Ναι να σου πει, «Έτσι μ’ αυτά τα εργαλεία θα δουλέψεις», μετά εσύ θα τα εμπλουτίσεις και όμως θα πας, να είσαι σ’ αυτούς τους λίγους, τους μοναχικούς και λίγους…

Ερευνητής: Έτσι.

Καθηγήτρια: Ε, πρέπει να το κάνεις αυτό το πράγμα, πρέπει να αναζητάς. Δηλαδή, πέρα απ’ αυτό που μου γράφεις εδώ πέρα «γνώση για λίγους», αναζήτηση…

Ερευνητής: Αναζήτηση… Το ταξίδι…

Καθηγήτρια: Ναι, αναζήτηση, ψάξιμο, πειθαρχεία, πειθαρχεία νου. Αυτό δηλαδή που συνέβαινε με τους Πυθαγορείους ότι ήταν κλειστοί, μια κλειστή κοινωνία στην οποία όμως πρόσεχαν τη διατροφή τους, πρόσεχαν την άσκηση, έδειχναν σεβασμό στους άλλους, δέχονταν γυναίκες εκεί μέσα.

Ερευνητής: Οι πρώτοι…

Καθηγήτρια: Ναι η Θεανώ, και η πεθερά του, έβαλε αυτός τη Θεανώ και την κόρη του, έβαλε κόσμο… Λοιπόν, όμως, εντάξει δεν ήταν λαϊκίστικής με τίποτα. Και ο Κύλωνας δηλαδή που ζήτησε, που ήτανε δημοκρατικός και ζήτησε να μπει μέσα στη σχολή, δεν τον βάλανε, πιθανώς αυτός να τους έκαψε κιόλας.

Ερευνητής: Αυτό, λογικά αυτός ήτανε.

- **Εκπαιδευτικός 3 (34:46-36:00)**

Καθηγήτρια: Και να εξηγήσεις στο παιδί ότι τελικά, ό,τι υπάρχει στη φύση και είναι όμορφο είναι άρρητο.

Ερευνητής: Ομορφιά με άρρητους...

Καθηγήτρια: Βέβαια. Γι’ αυτό εκεί πρέπει να συνδυάσεις το άρρητο με την τέχνη. Σ’ αυτό το σημείο δηλαδή, πρέπει να γίνει κουβέντα φιλοσοφική πια. Στην αρρητότητα είναι κάτι που υπάρχει και δε λέγεται. Είναι μαγικό...

Ερευνητής: Ωραίο, ωραίο, είναι μαγικό... Αφού μιλάμε και ανατριχιάζω…

Καθηγήτρια: Ναι, γιατί σ’ αυτό το σημείο είναι που έρχεται η τέχνη. Εεεε και που το συναντήσαμε τώρα αυτό... Δηλαδή, ό,τι είναι όμορφο, είναι άρρητο..

Ερευνητής: Ο λόγος των μυγών του είναι άρρητος...

Καθηγήτρια: Αυτό πρέπει ας πούμε να το καταλάβουνε, ότι, ό,τι είναι όμορφο δεν μπορείς να το περιγράψεις. Μπορείς να το αισθανθείς, να το δεις, να χαρείς, να το γευτείς...

Ερευνητής: Αλλά μπορείς να το κατασκευάσεις βέβαια…

Καθηγήτρια: Ναι.

- **Εκπαιδευτικός 6 (11:12-15:30)**

Ερευνητής: Με λίγα λόγια, όσο επιγραμματικά μπορείτε, όταν πρόκειται να διδάξετε το Πυθαγόρειο θεώρημα, πώς οργανώνετε τη διδασκαλία σας, έτσι βήμα-βήμα;

Καθηγήτρια: Την οργανώνω με ένα φύλλο εργασίας και με μία κατάλληλη εφαρμογή από το διαδραστικό, ώστε αφού θυμηθούμε τις έννοιες «ορθογώνιο, τετράγωνο και εμβαδό» να αρχίζουμε να συνδυάζουμε αυτά τα πράγματα και συγκεκριμένα η λογική είναι να τοποθετήσουμε, να κάνουμε κατάλληλες μετακινήσεις, ώστε να βγει...

Ερευνητής: Με μετακινήσεις…

Καθηγήτρια: Ναι, στο διαδραστικό... Ώστε να βγει μια σχέση εμβαδόν της υποτείνουσας…

Ερευνητής: Για να βγει η σχέση...

Καθηγήτρια: Εμβαδό του τετραγώνου της υποτείνουσας με της κάθετης πλευράς. Εκεί είναι το βάρος...

Ερευνητής: Ωραία, πολύ ωραία, πάρα πολύ ωραία και μεστά. Εεε, όταν πρόκειται να διδάξετε τους άρρητους, το ίδιο πράγμα, πώς οργανώνεται τη διδασκαλία σας;

Καθηγήτρια: Για τους άρρητους, εκεί, εκτός απ' το φύλλο εργασίας, πρέπει αφού μιλήσω, να πω κάποια πράγματα στα παιδιά για το Πυθαγόρειο θεώρημα απαραίτητα.

Ερευνητής: Γενικά, χρησιμοποιείτε και την ιστορία, εγώ το γράφω αυτό… και στα δύο το σημειώνω…

Καθηγήτρια: Απαραίτητα την ιστορία... Να τους πω ότι προσπάθησαν να βρουν κοινό μέτρο, δε μπορούσαν να βρουν ένα κοινό μέτρο ανάμεσα στην πλευρά ενός τετραγώνου και την υποτείνουσα..

Ερευνητής: Τι, τι θα, πω, πω, τους φαντάζομαι τους Πυθαγορείους, που από κει που μετρούσαν με τις ψηφίδες ξαφνικά...

Καθηγήτρια: Έμειναν ξεροί ναι…

Ερευνητής: Δε μπορώ...

Καθηγήτρια: Τα Πυθαγόρεια θεωρήματα του Τεύκρου, το βιβλίο, τα έχεις διαβάσει;

Ερευνητής: Όχι.

Καθηγήτρια: Εκεί προγράφει με μυθιστορηματικό τρόπο, αυτό που λέμε…

Ερευνητής: Έχω και μια ερώτηση, μετά θα δείτε με κοινό μέτρο, συνεχίστε...

Καθηγήτρια: Ναι, και μετά ξεκινάμε τους υπολογισμούς, εδώ τα παιδιά πρέπει να υπολογίσουνε, το φύλλο εργασίας το ‘χω κάτω δεν το έχω φέρει εδώ νομίζω, έχω κάτω... ό,τι απαραίτητο είναι… να το ‘χω...

Ερευνητής: Α, με το τετράγωνο, σιγά σιγά…

Καθηγήτρια: Ναι, ότι ξεκινάμε από εδώ και πρέπει τα παιδιά τα ίδια να υπολογίσουν και να κάνουν προσεγγίσεις, μέχρι που...

Ερευνητής: Άρα, τη μέθοδο που έχει στο βιβλίο έτσι; Με τις ανισώσεις…

Καθηγήτρια: Ναι, κάνουμε διαδοχικές προσεγγίσεις, τα ίδια τα παιδιά…

Ερευνητής: Διαδοχικές προσεγγίσεις, τέλεια... Πολύ ωραία, το χρησιμοποιούνε σχεδόν όλοι οι καθηγητές και νομίζω είναι απ’ τα καλύτερα…

Καθηγήτρια: Δεν υπάρχει εδώ…

Ερευνητής: Είναι το πιο κατανοητό για τους μαθητές..

Καθηγήτρια: Ναι, και να καταλήξουμε κάπου. Μετά αφού καταλήξουμε, αν ακολουθήσουμε την ίδια διαδικασία, μπορούμε να βρούμε προσεγγίσεις…

Ερευνητής: Ναι, ναι, ναι...

Καθηγήτρια: Παρόλο που μοιάζει αδύνατο, όπως θα δείτε είναι αδύνατο...εε, να βρούμε όλα τα δεκαδικά ψηφία, είναι εξαιρετικά εύκολο, εδώ το σπάω ότι, μπορούμε, είναι εξαιρετικά εύκολο να το κατασκευάσουμε.

Ερευνητής: Αυτό δεν είναι τώρα μαγικό; Με έναν κανόνα…

Καθηγήτρια: Μαγικό... Με γεωμετρική...

Ερευνητής: Ακρίβεια, έτσι; Και επινοούμε μεθόδους, το ένα το άλλο, έχει εξελιχτεί τόσο πολύ η τεχνολογία μέσα στο σήμερα και ακόμα άλλον τρόπο ακρίβειας δεν έχουμε βρει!

Καθηγήτρια: Εεε, με κανόνα και διαβήτη, ακριβώς…

Ερευνητής: Είναι αρχαία μέθοδος... Εγώ το επισημαίνω αυτό...

Καθηγήτρια: Και φτάνουμε να το υπολογίσουμε... πρέπει τα παιδιά για να ισορροπήσουνε μετά από τις διαφορετικές προσεγγίσεις, έχουνε χαθεί κάπως. Οπότε αφού κάνεις γεωμετρική κατασκευή, εεε, σταθεροποιούνται...

Ερευνητής: Αααα

Καθηγήτρια: Και μετά τους βάζεις εδώ και τη σπείρα…

Ερευνητής: Ναι, ναι, ναι… Ε και τελείωσε μετά...

Καθηγήτρια: Χρησιμοποιείς τη γεωμετρική κατασκευή, δηλαδή δεν την έχω τυχαία βάλει έτσι…

Ερευνητής: Επέκταση της νέο... ναι, ναι, ναι…

Καθηγήτρια: Αφού κάνουμε την κατασκευή, και κάνουμε μόνο την πρώτη πλευρά…

Ερευνητής: Το κατανοούν πλήρως εκεί…

Καθηγήτρια: Ναι, δηλαδή η κατασκευή δεν είναι τυχαία... Κάνουμε την κατασκευή, κάνουμε και την άλλη κάθετο... και οδηγούνται κατευθείαν, για να έρθουν όλοι οι άρρητοι…

Ερευνητής: Ναι, και το πρώτο τρίγωνο είναι του Ίππασου…

Καθηγήτρια: Ναι, ναι, δηλαδή είναι μελετημένη, δεν είναι τυχαία ότι πάμε εδώ, έτσι;

Ερευνητής: Λογικά, αν τυχόν το είχανε βρει οι Πυθαγόρειοι, εε, μέσω του Ίππασου και τα λοιπά, έτσι ακριβώς το κατασκεύασαν και αυτοί… Δηλαδή, από εδώ ξεκίνησε όλο το δράμα, απ' το ένα-ένα.

Καθηγήτρια: Απ' το ένα-ένα, δηλαδή τα βάζω νομίζω... όσο γίνεται…

- **Εκπαιδευτικός 6 (31:35-32:30)**

Ερευνητής: Ωραία και πάμε στις αποδείξεις του Πυθαγορείου, εκτός από την απόδειξη του σχολικού, χρησιμοποιείτε κάποια άλλη;

Καθηγήτρια: Όχι στο γυμνάσιο…

Ερευνητής: Όχι στο γυμνάσιο… όχι…

Καθηγήτρια: Η απόδειξη, την έννοια της απόδειξης στα παιδιά, εννοιολογικά, αρχίζουν στα 14 να κάνουνε, μπορούν να καταλάβουνε την έννοια της απόδειξης…

Ερευνητής: Τόσο δεν είναι β’;

Καθηγήτρια: Όχι, 14 είναι στην γ’.

Ερευνητής: Α ναι έ;

Καθηγήτρια: Δεν, δηλαδή, δεν έχουν τη δυνατότητα, γιατί αφηρημένες σκέψεις...

Ερευνητής: Αυτό πού το μάθατε;

Καθηγήτρια: Στη ψυχολογία, Πιαζέ, ψυχολογία...

Ερευνητής: Ναι έ;

Καθηγήτρια: Στα 14 αποκτάται...

Ερευνητής: Ωραία πληροφορία...

Καθηγήτρια: Βέβαια…

Ερευνητής: Θα τη σημειώσω…

Καθηγήτρια: Αποκτάται, μπορούν τα παιδιά να καταλάβουν την έννοια της απόδειξης, γι’ αυτό έχουν αφαιρεθεί τα βιβλία που πια είναι παρωχημένα, αλλά ήτανε σύγχρονα, γιατί είχανε τη δραστηριότητα, άλλα είχανε το διαδραστικό, είχανε βάλει πολλά πράγματα...

Ερευνητής: Ναι, ναι.

- **Εκπαιδευτικός 7 (14:14-14:58)**

Ερευνητής: Είπατε ότι δεν τη χρησιμοποιείτε όμως αλλά θα θέλατε να τη χρησιμοποιήσετε..

Καθηγητής: Ναι, ναι, η αλήθεια είναι ότι εμείς Μάριε, οι παλιοί καθηγητές έχουμε βαλτώσει σε ένα τρόπο διδασκαλίας.. Ενώ το συνειδητοποιούμε ότι είναι..

Ερευνητής: Ε είναι ρουτίνα, είναι συνήθεια..

Καθηγητής: Έτσι ακριβώς. Τώρα τα τελευταία δύο χρόνια έχω αρχίσει να κάνω πιο πολύ προβλήματα για να δουν τα παιδιά την υλοποίηση..

Ερευνητής: Καλά κάνετε..

Καθηγητής: Αλλά και την ιστορία των μαθηματικών βεβαίως θα την ήθελα πάρα πολύ..

Ερευνητής: Στο χέρι σας είναι, εγώ μπορώ να σας στείλω διάφορα αρχεία, να ενημερωθείτε. Ευχαρίστως δηλαδή

Καθηγητής: Να μου στείλεις βεβαίως

- **Εκπαιδευτικός 5 (2) (22:12-26:29)**

Ερευνητής: Σας έχουν φανεί χρήσιμα τα ιστορικά σημειώματα;

Καθηγήτρια: Πολύ, πολύ, ναι, ναι, ναι, με έχουν φανεί χρήσιμα γιατί σου δίνουνε ένα πάτημα και είναι βασικό να αξιοποιείς το σχολικό σύγγραμμα, δηλαδή εκεί που σε βοηθάει γιατί να μην το αξιοποιείς; Συμπληρώνεις τα υπόλοιπα που θες εσύ αλλά δεν το χρησιμοποιείς αποκλειστικά. Άλλα τα σημεία που είναι ωραία, τα σημεία που παρουσιάζουν ενδιαφέρον, που μπορούν να αναφερθούν σ’ αυτά τα παιδιά όταν πάνε στο σπίτι, είναι καλό να τα αξιοποιείς. Δεν είναι σελίδες για να τις περνάμε, αυτό τους εξηγώ, ότι αυτές δεν είναι σελίδες για να τις περνάμε. Δηλαδή και όταν δε μας δίνεται ευκαιρία στην τάξη να τα πούμε όλα..

Ερευνητής: Κοιτάξτε μόνοι σας ε;

Καθηγήτρια: Κάντε μια ανάγνωση, κάντε τα μια ανάγνωση, δηλαδή έχει ενδιαφέρον, μπορεί να νομίζει ότι δεν έχει ενδιαφέρον, αλλά έχει ένα ενδιαφέρον. Στο βιβλίο της α’ έχει έτι ένα ωραίο κομμάτι ιστορικό, που αναφέρεται στις μονάδες μέτρησης.

Ερευνητής: Εκεί ξεκινάνε όλα..

Καθηγήτρια: Οπότε, εε, εκεί μερικές φορές για να τα πιέσω κιόλας γιατί τα πρωτάκια δυσκολεύονται να, να, να πειστούν ότι πρέπει να τα διαβάσουν στο σπίτι, το διαβάζουμε στην τάξη. Τους λέω «Διαβάστε το» ή βάζω κάποιο παιδάκι να το διαβάσει μέσα απ’ το βιβλίο, έτσι ώστε να πειστούν λίγο, να δουν ότι αυτό έχει ενδιαφέρον. Δεν είναι απλώς να χρησιμοποιούμε το μέτρο, αλλά και πως καταλήξαμε στο μέτρο, και τι άλλο υπάρχει και τι υπήρχε πριν απ' αυτό και τι χρησιμοποιούσαν οι άνθρωποι.

Ερευνητής: Τέλειο.

Καθηγήτρια: Ε είναι ωραία αυτά..

Ερευνητής: Τέλεια. Άρα, πάλι απαντάτε. Πιο συγκεκριμένα στο Πυθαγόρειο θεώρημα και στους άρρητους εκτιμάτε ότι τα ιστορικά σημειώματα δίνουν κίνητρα στους μαθητές;

Καθηγήτρια: Εεε, σε όλους ποτέ, δεν, δεν, δεν.. Κάτι που κάνεις ποτέ δεν καλύπτει το 100% των μαθητών. Εγώ όμως βλέπω ότι τα παιδιά, όταν κάνω αυτό το μάθημα, εε, το παρακολουθούν με μεγάλη διάθεση. Πολλά στο τέλος του μαθήματος μου λένε «Κυρία ήταν το πιο ωραίο μάθημα». Εεε, βλέπω άλλους μαθητές να λένε στο διπλανό τμήμα «Α, εσείς δεν το έχετε κάνει ακόμα; Εμείς το κάναμε το Πυθαγόρειο και ήταν πολύ ωραίο!» και βλέπω ότι δουλεύει καλά τους αρέσει. Τους αρέσει αυτό που γίνεται, και η παρουσίαση, όλο τους αρέσει. Δουλεύει καλά, γι' αυτό και το κάνω τόσα χρόνια και δεν το έχω αλλάξει.

Ερευνητής: Και έχει καλύτερα αποτελέσματα στην κατανόηση των εννοιών πιστεύετε ή απλά κεντρίζει το ενδιαφέρον;

Καθηγήτρια: Εεε, τελικά σε κάποιους το μόνο που θα μείνει είναι αυτό που κάνουμε στις εξετάσεις, δηλαδή «να μάθω τη διατύπωση και να προσπαθώ να βρίσκω τη μια πλευρά του ορθογωνίου, όταν γνωρίζω τις άλλες δύο». Σε άλλους όμως, μένουν και το γεωμετρικό κομμάτι και τα ιστορικά στοιχεία. Δηλαδή είναι κάποιοι μαθητές που τους μένουν όλα. Και είναι και κάποιοι που προχωράνε ένα βήμα παρά πέρα και τους κεντρίζει τόσο πολύ το ενδιαφέρον.. Είχα ένα μαθητή φέτος, ο οποίος διάβαζε ένα βιβλίο, δεν θυμάμαι τον τίτλο του, που είχε να κάνει με τους Πυθαγορείους..

Ερευνητής: Και διάβαζε και βιβλίο;

Καθηγήτρια: Διάβαζε ένα βιβλίο..

Ερευνητής: Να, να παιδί..

Καθηγήτρια: Και μάλιστα μου έφερε μια απορία γιατί αναφερότανε στο πως, εε, προσεγγίζεται.. το μήκος κύκλου από τα εγγεγραμμένα κανονικά πολύγωνα σε αυτόν.

Και δε μπορούσε να καταλάβει τους τύπους που βγαίνανε. Οπότε του έδειξα πως βγήκε ο τύπος για την πλευρά, του τα ‘γραψα, του τετραγώνου και για το απόστημα και μετά πως πάμε στο οκτάγωνο με το Πυθαγόρειο και μετά πως πάμε στο δεκαεξάγωνο και βγαίνει αυτή η σειρά των τύπων και πως.. πόσο κοντά.. Α! εντωμεταξύ ο κύκλος που είχαμε, ήτανε με ακτίνα ή διάμετρο, για να βγαίνει το μήκος του κύκλου π, πρέπει η ακτίνα να ναι 0,5. Οπότε είχαμε τον κύκλο με ακτίνα 0,5 δηλαδή με διάμετρο 1. Οπότε, όταν σε αυτό τον κύκλο έβρισκες την περίμετρο των εγγεγραμμένων πολυγώνων, που κάθε φορά διπλασιάζουμε τις πλευρές τους, προσεγγίζεις το π. Και ήδη στο δεκαεξάγωνο είμαστε πολύ κοντά στο π.

Ερευνητής: Ναι, ναι, ναι..

Καθηγήτρια: Δηλαδή είχα και τέτοια περίπτωση. Και μάλιστα αυτός έκανε αυτός εργασία στον Πυθαγόρα.

Ερευνητής: Εκπληκτικά πράγματα.

Καθηγήτρια: Πολύ καλά..

Ερευνητής: Μπράβο σας.

Καθηγήτρια: Εντάξει, θα τύχουν και τέτοια παιδιά, όλα θα τύχουν

- **Εκπαιδευτικός 5 (3) (00:36-05:06)**

Ερευνητής: Ποια θεωρείτε ότι είναι η χρησιμότητα του Πυθαγορείου θεωρήματος και των άρρητων στην καθημερινότητα;

Καθηγήτρια: Στην καθημερινότητα;

Ερευνητής: Ναι..

Καθηγήτρια: Λοιπόν, να σου πω ποια ιστορία τους λέω για να..

Ερευνητής: «Κυρία που θα τα χρησιμοποιήσουμε αυτά;»

Καθηγήτρια: Ναι, τους λέω ότι ο πατέρας μου έχει ένα χωράφι, ένα κτήμα με ελιές και ότι ήρθε μια μέρα και ότι προσπαθούσε μόνος του να σχεδιάσει, εεε, μια κάτοψη του χωραφιού. Μόνος του προσπαθούσε να το κάνει, δεν έφερε πολιτικό μηχανικό.

Οπότε ήθελε να ανακαλύψει αν μια γωνία είναι ορθή στο χωράφι. Και του λέω «Τι θα κάνει; Θα πάει με το μοιρογνωμόνιο στο χωράφι;», «Θα πάει με το τρίγωνο; Γίνεται;». Εεε, εντάξει, εκεί βέβαια η γνωστή ερώτηση είναι «Έχετε πατέρα;». Γιατί τα παιδιά μας βλέπουν εμάς ότι σαν να είμαστε ουρανοκατέβατοι, δεν έχουμε ηλικία, δεν έχουμε αυτό, είμαστε πάντα εκεί, δεν ήμασταν παιδιά, δεν ήμασταν μαθητές.

Ερευνητής: Σαν σχολικό βιβλίο.

Καθηγήτρια: Ναι.. Λοιπόν, η ερώτηση είναι «Έχετε πατέρα;» και η απάντηση είναι «Έχεις παππού;», «Ναι, έχω!» ε λέω «Εγώ είμαι περίπου, όσο είναι η μαμά σου στην ηλικία τώρα». Τώρα ειδικά που έχω παιδιά στο γυμνάσιο, είμαι στην ηλικία των μαμάδων τους.. «Ε ωραία, αφού έχεις εσύ παππού, γιατί να μην έχω εγώ πατέρα;». Τους λέω ότι έχω και γιαγιά και εκεί τρελαίνονται πια, ότι υπάρχει κάποιο άτομο που η Κυρία το λέει «γιαγιά», φαντάσου! Τέλοσπάντων, ξεφεύγουμε λοιπόν απ' αυτό και φτάνουμε στο πως θα εξετάσει ο πατέρας μου, εάν μία γωνία στο χωράφι είναι ορθή. Αρχίζουν λοιπόν και λένε «Εντάξει, εύκολο είναι αυτό! Θα πάει να μετρήσεις τις πλευρές αυτής της γωνίας με τη μετροταινία και θα μετρήσει και τη διαγώνια και θα εφαρμόσει το αντίστροφο». Τους λέω όμως ότι δεν έχει τόσο μεγάλη μετροταινία πρώτον, δεύτερον, ακόμα και αν είχε υπάρχουν εμπόδια, υπάρχουνε δέντρα. Καλά για τις πλευρές του χωραφιού, άντε να τις μετρήσει αυτές, έχει και συρματόπλεγμα εντάξει, θα πάει από το ένα παλούκι στο άλλο. Αλλά για τη διαγώνιο, υπάρχουνε ενδιάμεσα δέντρα δεν μπορεί να το τεντώσει.

Ερευνητής: Υπάρχουνε εμπόδια, μάλιστα..

Καθηγήτρια: «Οπότε τι θα κάνουμε;». Τι του 'πα να κάνει; Τους λέω «Στο κομμάτι του αντιστρόφου πάτε καλά, αλλά πως;». Ε λίγο εκεί τους σχεδιάζω ένα σχήμα στον πίνακα, εκεί περίπου το χωράφι, τους βάζω ένα ανθρωπάκι ξέρω 'γω, να δούνε λίγο τις διαστάσεις και λίγο λίγο λίγο λίγο, άλλοι το βρίσκουνε, άλλοι δεν το βρίσκουνε, τους λέω.. του λέω να πάει στη μία από τις πλευρές, που θεωρούμε ότι μπορεί να φτιάχνει την ορθή γωνία και να μετρήσει 3 μέτρα, να βάλει μία πέτρα. Να πάει και στην άλλη να μετρήσεις 4 μέτρα, να βάλει και εκεί μία πέτρα και μετά να μετρήσει την απόσταση που έχουν οι 2 πέτρες μεταξύ τους.

Ερευνητής: Ωραίο, πάρα πολύ ωραίο.

Καθηγήτρια: Πόσο πρέπει να είναι αυτή η απόσταση για να είναι ορθή η γωνία; Περίπου 5. Άμα είναι μεγαλύτερα, τι αμβλεία θα ναι.. τι γωνία θα ναι; Αρχίζουν και λένε «Αμβλεία», «άμα είναι μικρότερη θα ναι..»

Ερευνητής: Ναι, ναι, ναι..

Καθηγήτρια: Αυτό τους αναφέρω για την καθημερινότητα, κυρίως ότι αφορά το αν ελέγχουν αν μία γωνία είναι ορθή.

Ερευνητής: Τέλεια..

Καθηγήτρια: Και φυσικά εφαρμογές που υπάρχουνε στο σχολικό βιβλίο..

Ερευνητής: Όπως;

Καθηγήτρια: Δηλαδή τα προβλήματα. Εεε.. «Αγοράζω μια βιβλιοθήκη. Η βιβλιοθήκη όμως δε συναρμολογείται στον τοίχο, συναρμολογείται στο δάπεδο. Οπότε όταν θα πάει να σηκωθεί η βιβλιοθήκη, μπορεί ενώ το ύψος της είναι μικρότερο από το ύψος που έχει το ταβάνι, το δωμάτιο μας, υπάρχει περίπτωση να μη χωράει η βιβλιοθήκη, γιατί να μην χωράει;» Εκεί δυσκολεύονται να το καταλάβουν, σου λέει άμα χωράει… τι κάνω λοιπόν; Τους στριμώχνω δύο θρανία.

Ερευνητής: Και εγώ τώρα το είδα αυτό.

Καθηγήτρια: Και τους λέω «Ρε παιδιά, η έδρα χωράει ανάμεσα σε αυτά τα θρανία. Μπορώ να τη γυρίσω έτσι την έδρα; Μπορεί να γυρίσει η νταλίκα;» ξέρω γω.. Και βλέπουν ότι πάει να τη γυρίσεις και έχει σφηνώσει, ενώ στο ύψος χωράει, στο μήκος χωράει, οπότε πείθονται ότι υπάρχει ένα τέτοιο πρόβλημα. Οπότε, πως θα ελέγξω εγώ αν η βιβλιοθήκη που θα πάω να αγοράσω.. αν ο πωλητής μου είναι προσεκτικός και καλός θα ξέρει ότι η βιβλιοθήκη συναρμολογείται στο δάπεδο, εεε, θα με ρωτήσει «Τι ύψος έχει το δωμάτιο;» Αν όμως δεν είναι και πάω και την αγοράσω από ένα πολυκατάστημα ξέρω γω που την παίρνεις και πρέπει να τη συναρμολογήσεις και να την σηκώσεις όρθια, εεε, πως θα ξέρω ότι χωράει;

- **Εκπαιδευτικός 5 (3) (05:20-10:08)**

Ερευνητής: Ποιες δυσκολίες αντιμετωπίζουνε, στο Πυθαγόρειο και στους άρρητους;

Καθηγήτρια: Εεε..

Ερευνητής: Αν και τις έχετε πει..

Καθηγήτρια: Ναι, στου άρρητους αντιμετωπίζουνε τη δυσκολία..

Ερευνητής: Πιο επιγραμματικά..

Καθηγήτρια: Δεν καταλαβαίνουν ότι η ρίζα του 7 είναι ένας αριθμός.

Ερευνητής: Αυτό το έχω σημειώσει.

Καθηγήτρια: Νομίζουν ότι είναι πράξη..

Ερευνητής: Πράξη και όχι αριθμός..

Καθηγήτρια:.. και όχι αριθμός.. Δυσκολεύονται πάρα πολύ σε αυτό. Εεε. Στο Πυθαγόρειο, στο αντίστροφο, στην εφαρμογή του δυσκολεύονται στο πως πρέπει να το διατυπώσουνε, ότι πρέπει να βάλουν το τετράγωνο της αντίθετης πλευράς και το άθροισμα των τετραγώνων των δυο άλλων πλευρών για να έχει, να είναι κομψή η…

Ερευνητής: Και με το = που μπορούμε να το εφαρμόζουμε..

Καθηγήτρια: Ναι, ναι.. Εεε, εντάξει κάποια παιδιά δυσκολεύονται στο να βρούνε την κάθετη όταν γνωρίζουν τις άλλες δύο πλευρές, τη μία κάθετη όταν γνωρίζουμε τις άλλες δύο πλευρές… Ότι εκεί πρέπει να κάνουμε αφαίρεση ότι πρέπει πρώτα να βάλουμε το τετράγωνο της υποτείνουσας και να αφαιρέσουμε το τετράγωνο της άλλης πλευράς..

Ερευνητής: Μπερδεύονται δηλαδή λίγο με τη μεγάλη πλευρά..

Καθηγήτρια: Μπερδεύονται λίγο με αυτό.. Όταν τους δείξεις όμως ένα αριθμητικό παράδειγμα, ότι όταν το 5 ισούται με 3+2 και εσύ θες να βρεις το 3, τι θα κάνεις με το 5 και το 2; Δε θα αφαιρέσεις απ’ το 5 το 2; Δηλαδή κάπως έτσι τους το παρουσιάζουμε γιατί τα παιδάκια δυσκολεύονται πολύ, δεν τους φαίνονται όλα αυτά προφανή. Ειδικά όταν μπλέκονται, συμβολισμοί, γράμματα δεν τους είναι προφανή αυτά τα πράγματα, δυσκολεύονται αρκετά. Προσπαθώ να αποφύγω την τυποποίηση αλλά δεν την απορρίπτω. Δηλαδή δε μ’ αρέσει η τυποποίηση αλλά θα την κάνω για να βοηθήσω τα παιδάκια που αδυνατούν να καταλάβουν. Θέλουν το χρόνο τους, δηλαδή θα τους πω ότι όταν βάζεις την υποτείνουσα μόνη της, στις άλλες δύο θα βάλεις +, όταν βάζεις μία απ’ τις κάθετες θα βάλεις - και πρώτη την υποτείνουσα πάντα, την μεγαλύτερη δηλαδή θα το τυποποιήσω και λίγο για τα παιδιά που δυσκολεύονται, που δεν έχουν έτσι την ευελιξία να το κάνουν..

Ερευνητής: Δε διαχωρίζετε τη δυσκολία των μαθητών και τη δυσκολία τη δική σας απέναντι τους.. Είναι ένα το πρόβλημα κάπως, έτσι;

Καθηγήτρια: Ε ναι, εννοείται..

Ερευνητής: Εγώ τα 'χω σε διαφορετικές ερωτήσεις..

Καθηγήτρια: Α..

Ερευνητής: Δηλαδή τι δυσκολίες αντιμετωπίσατε εσείς πριν τους το διδάξετε ή όταν τους το διδάσκατε και τι δυσκολίες αντιμετώπισαν τα παιδιά όταν το ακούσανε; Το 'χω βάλει σε δύο ερωτήσεις..

Καθηγήτρια: Κοίταξε να δεις η διδασκαλία μου για να φτάσω σ' αυτό το σημείο πέρασα από πολλά.. Ο καθηγητής όταν μπαίνει στην τάξη συνήθως ο τρόπος που πάει να διδάξει είναι ο ίδιος με τον τρόπο που διδάχτηκε. Δηλαδή, έχεις αυτές τις παραστάσεις.. Εντάξει, είχα την τύχη να περάσω από ΠΕΚ, τα οποία είναι κάποια επιμορφωτικά σεμινάρια που μας κάνουνε όταν πρωτοδιοριζόμαστε, και έτυχε να έχω έτσι φωτισμένους εισηγητές, οι οποίοι μας είπαν κάποια πράγματα που βάλανε λίγο το σπόρο τους.. δεν είναι διδασκαλία αυτό που θυμόμαστε εμείς που μπαίνει ο καθηγητής στην τάξη και λέει «Παιδιά σήμερα θα σας διδάξω Πυθαγόρειο θεώρημα». Ωραία «Το Πυθαγόρειο θεώρημα διατυπώνεται και λέει αυτό, γράψτε το», εεε «Σ' ένα τρίγωνο θα κάνεις αυτό και αυτό», δηλαδή μόνο το αλγεβρικό. Υπάρχουν κι άλλα πράγματα που μπορείς να κάνεις σε πάρα πολλά. Είχαν βγει και αυτά τα βιβλία φρέσκα και είχαν αντικαταστήσει τα παλαιότερα τα οποία δεν είχανε, έτσι.. ούτε τις ιστορικές αναφορές, δεν είχανε ούτε όλες αυτές τις παραστάσεις των θεωρημάτων και..

Ερευνητής: Είναι πιο προσιτά αυτά τα καινούργια στους μαθητές έτσι, θεωρείτε;

Καθηγήτρια: Ναι, γιατί δίνουν περισσότερο υλικό στον καθηγητή. Έχουν τα μειονεκτήματα τους, όπως όλα τα συγγράμματα, αλλά εγώ τα εκτιμώ ειδικά αυτό είναι ένα καλό βιβλίο, εε, της β' τάξης, έχει έτσι ωραίες, ωραίο υλικό.. Εεεε, θεωρώ ότι πάσχει λίγο στις ασκήσεις, θα 'πρεπε να 'χει περισσότερες ασκήσεις για να μπορείς να κάνεις μια καλύτερη επιλογή. Το βιβλίο της γ' τάξης από την άλλη σε καλύπτει.. στις ασκήσεις σε καλύπτει. Δε χρειάζεται να δώσεις κάτι περισσότερο.

Ερευνητής: Έχει πάρα πολλές..

Καθηγήτρια: Έχει πάρα πολλές και όλα τα επίπεδα, δηλαδή δύσκολα θα δώσεις κάτι παραπάνω και αν δώσεις κάτι απλά θα το δώσεις για να αποκλείσεις λίγο και την αντιγραφή. Δηλαδή τους μαθητές που έχουν κάποιο λυσάρι και γράφουν τις ασκήσεις.

Ερευνητής: Και έχει και τις επαναληπτικές που είναι ακόμα πιο δύσκολες.

Καθηγήτρια: Ναι, έχει υλικό. Ετούτο πάσχει λίγο στις ασκήσεις.. Εεεε, και γι' αυτό το συμπληρώνουμε λιγάκι. Αλλά η διδασκαλία διαμορφώνεται, δηλαδή κάθε χρόνο λες «Εκανα αυτό, πέτυχε, τι δεν πέτυχε, τι θα αλλάξω;». Κάθε χρόνο τα φύλλα εργασίας μου τα αλλάζω, πάντα το περσυνό μου φαίνεται ότι κάπου μειονεκτεί και πάντα το φτιάχνουμε.

Ερευνητής: Έτσι σκέφτομαι εγώ συνέχεια.

- **Εκπαιδευτικός 15 (40:26-45:16)**

Ερευνητής: Και πάμε στις δυσκολίες, το πιο σημαντικό κομμάτι. Θέλω να μου αναφέρεις τις δικές σου δυσκολίες στη διδασκαλία του ΠΘ για αρχή και τις δυσκολίες των μαθητών, αν μπορείς να τα ξεχωρίσεις.

Καθηγήτρια: Λοιπόν ok. Ο χρόνος είναι πολύ λίγος.

Ερευνητής: Ωραία..

Καθηγήτρια: Γιατί ξέρεις, μέσα σε 40 λεπτά περίπου πρέπει να εξετάσεις και ουσιαστικά να παραδώσεις κάτι και να αφιερώσεις κατά μέσο όρο 1 λεπτό σε κάθε παιδί. Σκέψου το λίγο, είναι 20 παιδιά στην τάξη..

Ερευνητής: Έτσι είναι, είναι μία από τις δυσκολίες του καθηγητή..

Καθηγήτρια: Βάζεις κάτι, «Κάντε το», μέχρι να περάσεις ας πούμε σ' αυτά και φυσικά πρέπει να φροντίσεις η τάξη να ναι σε τάξη ας πούμε, όταν βοηθάς κάποιον.

Ερευνητής: Ναι, ναι, ναι..

Καθηγήτρια: Εεε, νομίζω ο χρόνος.. Ok, Θα ήθελα να είχα μία δική μου αίθουσα..

Ερευνητής: Αίθουσα..

Καθηγήτρια: Στημένα όλα, τα laptops, τα διαδραστικά, ένας προβολέας του..

Ερευνητής: Υλικοτεχνική υποδομή γράφω εγώ, τα πάντα όλα..

Καθηγήτρια: Ήθελα να ‘χα τη δική μου αίθουσα ως μαθηματικός.

Ερευνητής: Ναι, ναι, ναι.

Καθηγήτρια: Υπάρχουν και κάποιες σχολές στην Ελλάδα που έχει η κάθε ειδικότητα τα δικά της. Άρα τα ‘χουν όλα στημένα και πολύ εύκολα.

Ερευνητής: Προσβάσιμα.

Καθηγήτρια: Και τα παιδιά είναι μονίμως σε ένα εργαστήριο όποτε μπορείς να τους πεις: «Ανοίξτε αυτό, ανοίξτε εκείνο».

Ερευνητής: Και να τους βάζεις και στην ιδέα ότι τα μαθηματικά είναι πείραμα, δεν είναι μόνο η Φυσική. Είναι πολύ ωραίο αυτό, πάρα πολύ ωραίο. Εεε, ωραία, οι δυσκολίες των παιδιών τώρα.

Καθηγήτρια: Ωραία, είναι ας πούμε στην ανακάλυψη των…ναι βλέπεις ας πούμε και ότι τα πολύ πίσω δε ξέρουνε να φέρουνε μία γραμμούλα, να μετρήσουνε μια γωνία για παράδειγμα. Οπότε ξεκινάμε κατασκευαστικά όποια έχουνε θέματα, αναγνώριση ονομαστικά τις πλευρές και τις γωνίες

Ερευνητής: Ναι..

Καθηγήτρια: Και ότι πάρα πολλοί μπερδεύονται και καταλήγουν απλώς πως θέτω τις κάθετες πλευρές τις γωνίες και πως βρίσκω την υποτείνουσα, στην εφαρμογή δηλαδή του τύπου, στην επίλυση εξίσωσης, εε, στη διατύπωση.

Ερευνητής: Στη διατύπωση που μου είπες..

Καθηγήτρια: Στη διατύπωση ναι, ναι, ναι. Γιατί πάνε.. ακολουθούν τελείως μηχανικά, χωρίς να είναι.. να το.. εδώ χρειάζεσαι και το ετυμολογικό, το λέει η λέξη: τετράγωνο, ας πούμε. Εδώ ας πούμε συζητάμε ότι πρέπει να εξηγούμε γιατί το α τετράγωνο είναι α*α, ε γιατί ας πούμε είναι εμβαδό σε ένα τετράγωνο, α*α, να καταλάβουνε γιατί είναι τετράγωνο ή γιατί είναι κύβος κάτι.

Ερευνητής: Πολύ ωραία πάρα πολύ ωραία. Για τους.. αυτό όσον αφορά το ΠΘ, έτσι; Εσύ έβαλες και τους άρρητους μέσα;

Καθηγήτρια: Αυτό που σου είπα, όχι.

Ερευνητής: Ωραία, πάμε στους άρρητους. Δικές σου δυσκολίες.. απ' ότι καταλαβαίνω η αίθουσα και όλα αυτά περιλαμβάνουν και τα δύο για σένα;

Καθηγήτρια: Ναι, ναι φυσικά.

Ερευνητής: Άρα πάμε στα παιδιά τώρα για τους άρρητους, τι δυσκολίες αντιμετωπίζουνε..

Καθηγήτρια: Εεε ωραία. «Ξέρω να κάνω πολλαπλασιασμό; Ξέρω να κάνω διαίρεση; Είναι όλες οι διαιρέσεις τέλειες ή υπάρχουνε και ατελείς;». Λοιπόν, ή α! Να πούμε βέβαια και το σύνολο των αριθμών που θα σου πούνε ότι οι αριθμοί.. υπάρχει ένα θέμα.. μια σύγχυση.. ποιοι είναι πραγματικοί ξέρεις κι όλα αυτά

Ερευνητής: Και οι Πυθαγόρειοι το είχανε, όχι μόνο τα παιδιά.

Καθηγήτρια: ή θα σου πούνε ας πούμε ότι ανάμεσα στο 1 και στο 2 υπάρχει το 1,5 και το 1,4..και ανάμεσα.. το παιχνίδι παίζει στο ανάμεσα τους. ξέρεις αυτό..

Ερευνητής: Ναι, ναι, ναι

Καθηγήτρια: Άρα φαίνεται ας πούμε ότι αγνοούν την έννοια των συνόλων και το ξεκαθάρισμα τι είναι τι. Τι είναι το 1 ας πούμε; Είναι φυσικός μα είναι και πραγματικός, ξέρω γω; Είναι ρητός ή είναι άρρητος;

Ερευνητής: Εντάξει, είναι και πρωτόγνωρα ε; Γιατί τα 'χουν κάνει α' γυμνασίου και στην β' μόλις έχετε ξεκινήσει ας πούμε.

Καθηγήτρια: Ναι θα σου πω ότι στην α' γυμνασίου ας πούμε στο.. επειδή έχουνε βγάλει εκτός ύλης την έννοια των φυσικών αριθμών και τις ιδιότητες και να σου πω ότι το βιβλίο έχει και λάθος διατυπώσεις του τύπου «Πείτε μου ποιοι αριθμοί είναι από το 1 έως το 10;» «Πόσοι αριθμοί είναι;» και τα παιδιά σου λένε ξέρω γω «10 αριθμοί», γιατί είναι λάθος.. γιατί πιστεύουνε ότι οι αριθμοί είναι μόνο οι φυσικοί και αυτό το 'χει κάνει το σχολικό βιβλίο. Δηλαδή ξεκινάει να τα πει πολύ απλά και δεν τα λέει όπως πρέπει να είναι. Πες του ο φυσικός αριθμός! Πες ότι x τετράγωνο=4 έχει δύο λύσεις, δεν έχει μία! Μία έχει επειδή είμαστε στο τριγωνάκι. Άρα πρέπει ας πούμε να τους τα λες σωστά από την αρχή.

Ερευνητής: Και με τη σειρά που πρέπει, ναι αμέ.

- **Εκπαιδευτικός 4 (28:32-30:52)**

Ερευνητής: Με τους άρρητους; Που κολλήσανε τα παιδιά ας πούμε; Τη ρίζα τη δεχτήκανε; Το σύμβολο αυτό το παράξενο;

Καθηγήτρια: Το σύμβολο το δεχτήκανε.. μάλιστα σε ένα.. τώρα δε ξέρω.. σαν ιστορία μας το είχε πει ο σύμβουλος αυτό σε ένα σεμινάριο.. Θα σας το πω πως βγήκε η ρίζα λέει. Λοιπόν, παλιά δεν υπήρχανε τα σύμβολα και όλα γραφόντουσαν με τα λόγια

Ερευνητής: Άρα «ρίζα 2» ας πούμε;

Καθηγήτρια: Ναι, ναι, γραφόντουσαν με τα λόγια, αυτό το είχα ακούσει σε ένα σεμινάριο.. λοιπόν η τετραγωνική ρίζα του 4 είναι 2. Και όταν τυπωνόταν ένα βιβλίο γινόταν ένα πράγμα τέτοιο. Λοιπόν, μετά λέει ο τυπογράφος λέει «Κόψε κάτι» στον συγγραφέα. Α! Εντωμεταξύ ξεκίνησε από τα αγγλικά, από το root εκεί πέρα που είναι το r, το κεφαλαίο.. το r το αρχικό…

Ερευνητής: Ωχ, και οι πραγματικοί;

Καθηγήτρια: Όχι για την τετραγωνική ρίζα τώρα, το σύμβολο.

Ερευνητής: Ναι αλλά και εκεί το r είναι…δε θα ήτανε μπέρδεμα;

Καθηγήτρια: Όχι, όχι το r το μικρό.

Ερευνητής: Α το μικρό, ναι, ναι, ναι.

Καθηγήτρια: Και λέει «Μη βάζεις όλη τη λέξη, κόψε και άσε μόνο το r».

Ερευνητής: Ωχ, τώρα αντιλήφθηκα τι λέτε.

Καθηγήτρια: Ωραία, και μετά αφού έλεγε λοιπόν το r, έφυγε η ρίζα. Του 2, του 4, κόψτο το «του» και βάλε το 4 κάτω απ’ τη ρίζα.

Ερευνητής: Τι είπατε τώρα;

Καθηγήτρια: Ναι αυτό μου το είχε είπε ο Κεΐσογλου συγκεκριμένα.

Ερευνητής: Δηλαδή από το r βγήκε το.. τι είπατε τώρα; ανατρίχιασα τώρα.. δεν το έχω ξανά ακούσει.. ήτανε πολύ..

Καθηγήτρια: Το άκουσα εκεί πέρα , στο σεμινάριο μας ΄φώναζε κάθε.. ο Θεοδόσης είναι ο σύμβουλος μας και είχε τον Κεΐσογλου..

Ερευνητής: Πολύ χρήσιμη πληροφορία..

Καθηγήτρια: Εγώ ήμουνα.. όχι δεν ήτανε τώρα στην Αθήνα, στη β' ήτανε..

Ερευνητής: Σας ευχαριστώ πάρα πολύ για την πληροφορία αυτήν..

Καθηγήτρια: Και μάζεψε, μάζεψε την πρόταση, βγήκε ότι η τετραγωνική ρίζα του 4=, του λέει δε χρειάζεται να γράψεις και το «είναι», το = είναι το πιο απλό, =2 και βγήκε αυτό το πράγμα, αυτό άκουσα.

Ερευνητής: Προφανώς στο εξωτερικό έγινε αυτό έτσι;

Καθηγήτρια: Ναι, ναι, ναι.

Ερευνητής: Σε αγγλικό πανεπιστήμιο; Δε ξέρετε τώρα; Αλλά εντάξει αρκεί ναι.

Καθηγήτρια: Εεε, μας είπε ότι ισχύει αυτό το πράγμα τώρα.. Ναι ότι παλιά ήταν όλα σε λόγια και ότι από την οικονομία του χώρου, κόψαμε λέξεις, σύμβολα και τα λοιπά. Αυτό. Και μάλιστα μας λέει πέστε το στα παιδιά έτσι για να το δεχτούνε ακόμα και αυτό το σύμβολο, από το root..

- **Εκπαιδευτικός 4 (32:06-46:11)**

Ερευνητής: Στις αποδείξεις του Πυθαγορείου τώρα πάμε. Εσείς έχετε δείξει κι άλλες; Είπατε με το νερό, έτσι;

Καθηγήτρια: Ναι με το νερό..

Ερευνητής: Κάτι άλλο; Κάποια άλλη; Ας πούμε του Γκάρφιλντ ή του Νταβίντσι;

Καθηγήτρια: Δεν τις έχω δείξει, εντάξει; Δεν τις έχω δείξει γιατί δε χωράνε τα παιδιά πολλά, εντάξει; Δε ξέρω φέτος επειδή ελάφρωσε η ύλη σας λέω και είναι η πρώτη χρονιά που θα την κάνουμε πιο ελαφριά, μπορεί να έχω πιο πολύ χρόνο να το κάνω, να αφιερώσω δηλαδή και άλλες ώρες γιατί αυτό θέλει μία-δύο ώρες..

Ερευνητής: Ωραία αλλά γνωρίζετε και άλλες αποδείξεις, έτσι; Έχετε δει..

Καθηγήτρια: Ναι, και τους το λέω ότι υπάρχουν τόσες αποδείξεις ξέρω γω..

Ερευνητής: Πλέον είναι πάνω από 1000.

Καθηγήτρια: Ναι, ναι, ναι και τους λέω.. αυτό το λέω εγκυκλοπαιδικά, ότι ξέρετε υπάρχουν τόσες αποδείξεις ας πούμε..

Ερευνητής: Εεε έχετε δει καθόλου το βιβλίου του Loomis που τις έχει μαζεμένες τις πρώτες 500, το ‘60 νομίζω..

Καθηγήτρια: Εντάξει το έχω διαβάσει απλά δεν το έχω δει σαν…

Ερευνητής: Και υπάρχει μια ιστοσελίδα, όταν τελειώσω και εγώ και αυτά θα σας στείλω και υλικό, θα σας στείλω και την ιστοσελίδα που έχει τις 100 πιο ενδιαφέρουσες, αναλυτικά.. έχει και με κινούμενες, έχει απ’ όλα..

Καθηγήτρια: Ωραία ναι, αυτό το θέλω.

Ερευνητής: Και με ιστορικό σημείωμα, από πού και πώς και τι..

Καθηγήτρια: Α, ωραία.

Ερευνητής: Λοιπόν και πάμε στη διδακτική μου πρόταση. Λοιπόν, εδώ ξεκινάμε με τη διδακτική πρόταση. Και να σας πω έχω μία μικρή ένσταση εγώ τώρα με την ύλη της β’ γυμνασίου και θα σας πω και το λόγο. Προτείνω ας πούμε αυτές οι τρεις είναι παρόμοιες, ειδικά αυτές οι δύο είναι ίδιες, ο ένας είναι ο Ινδός Bhaskara, αυτός είναι Κινέζος, αυτός το δείχνει αλγεβρικά, αυτός λέει «Κοίτα», τίποτα άλλο, σ’ αφήνει τη διαίσθηση του μαθηματικού ας πούμε.. βρες το μόνο σου είναι μπροστά σου η απόδειξη. Και εδώ πέρα αυτά τα κινέζικα, αυτό σημαίνει κοίτα. Αυτά εδώ τα ιδεογράμματα είναι ήλιος, σελήνη, είναι αστρονομικά στοιχεία, ok;

Καθηγήτρια: Α, α, μάλιστα.

Ερευνητής: Έτσι ενημερωτικά. Λοιπόν, όπως βλέπετε εδώ πέρα υπάρχουνε οι δύο ταυτότητες, εντάξει; Η δική μου πρόταση είναι η εξής: Επειδή είναι 99% συχνό λάθος των μαθητών στη γ’ γυμνασίου να ξεχνάνε το 2αβ,

Καθηγήτρια: Κλασικά.. Είναι τα λάθη που υπάρχουνε..

Ερευνητής: Έτσι; Λέω εφόσον διδάσκονται το Πυθαγόρειο και έχουν τα τετράγωνα....

Καθηγήτρια: Να μπορεί να μπει αυτό εδώ..

Ερευνητής: Να τους δείξουμε και αυτά τα δύο.. όχι όλες τις ταυτότητες, μόνο αυτές τις δύο που ούτως ή άλλως μία είναι απλά να μπαίνουν..

Καθηγήτρια: Ναι εντάξει με το - , εντάξει δεν έχει σημασία.

Ερευνητής: Εεεε, και να.. μήπως μπορέσουν να τα διαχωρίσουν γιατί θα τα βλέπουν ταυτόχρονα, το ένα είναι απλά τα τετράγωνα, το άλλο είναι τριώνυμο.

Καθηγήτρια: Ναι.

Ερευνητής: Και άμα τους βομβαρδίσεις και με τα δύο, μήπως στην γ’ δεν υπάρχει αυτό το πρόβλημα πλέον γιατί δεν είναι μόνο πρόβλημα της γ’, πάνε και στο λύκειο και το κάνουνε αυτό.

Καθηγήτρια: Ναι εδώ βέβαια, εδώ μήπως είναι too much;

Ερευνητής: Μπορεί δε ξέρω αλλά..

Καθηγήτρια: Για τα παιδάκια της β΄, έτσι;

Ερευνητής: Για τα παιδάκια της β’. Όπως είπατε με τα χαρτονάκια αυτή η απόδειξη είναι του βιβλίου ουσιαστικά απλά εδώ πέρα βάζουν εμβαδά, καταλάβατε;

Καθηγήτρια: Ναι, ναι, ναι.

Ερευνητής: Άμα τους το δείξουμε αυτό και ξεκινήσουμε, θα μου πείτε θα χαθούνε. Θα κάνετε εσείς όπως είπατε το οπτικό, να το χωνέψουνε..

Καθηγήτρια: Ναι, ναι, ναι.

Ερευνητής: Και στο δεύτερο-τρίτο μάθημα «δείτε και αυτό», αφού θα έχουν ανέβει λίγο.

Καθηγήτρια: Είναι ωραίο να το δουν και στα.. με τα εμβαδά και με την ταυτότητα. Το θέμα είναι… δηλαδή σα να τους κάνουμε τη γεωμετρική απόδειξη της ταυτότητας.

Ερευνητής: Αυτό γιατί στη γ’ γυμνασίου υπάρχει άσκηση με την πλευρά α και β, καταλάβατε το τετράγωνο..

Καθηγήτρια: Ναι και εγώ, κανονικά στην γ΄ γυμνασίου μπορούμε να μπούμε στην ταυτότητα αυτήν με τη γεωμετρική της απόδειξη πρώτα.

Ερευνητής: Αυτό προτείνω και εγώ λοιπόν.

Καθηγήτρια: Αλλά αυτό το κάνω στη γ’ γυμνασίου, δηλαδή τους την δείχνω τη γεωμετρική απόδειξη.

Ερευνητής: Το ξέρω αλλά η σκέψη μου είναι μήπως μπορεί να αποφευχθεί αυτό το λάθος με αυτόν τον τρόπο. Αφού λέμε το Πυθαγόρειο, «δείτε και την ταυτότητα, γιατί όλο το μπερδεύετε». Και τα παιδιά το ‘χουν φρέσκο το Πυθαγόρειο, ενώ στη γ’ τα ‘χουν ξεχάσει όλα.

Καθηγήτρια: Ναι, ναι, ναι βέβαια.

Ερευνητής: Γι’ αυτό εγώ το λέω. Τώρα εντάξει.. πείτε μου..

Καθηγήτρια: Εεε δεν είναι κακό..

Ερευνητής: Ok, ευχαριστώ.. Φοβάστε λίγο μην.. με τις παραστάσεις ε; Και αυτά.

Καθηγήτρια: Ναι, ναι αυτό με φοβίζει..

Ερευνητής: Το καταλαβαίνω..

Καθηγήτρια: Γιατί τα παιδιά της β’ γυμνασίου δεν είναι τόσο εξοικειωμένα στις μεταβλητές, δεν έχουν κάνε πολυώνυμα για να μιλάνε με α, β και λοιπά..

Ερευνητής: Άρα είναι ο τρόπος, η ιδέα σας αρέσει..

Καθηγήτρια: Ναι η ιδέα μ’ αρέσει..

Ερευνητής: Θα βρούμε τον τρόπο..

Καθηγήτρια: Έχω όμως μια επιφύλαξη σε αυτό το θέμα, δηλαδή..

Ερευνητής: Επίσης μου άρεσε της β’ λυκείου..

Καθηγήτρια: Της β΄ λυκείου είναι ο νόμος τη..

Ερευνητής: Είναι με τα όμοια τρίγωνα, προβολές και τα λοιπά.. Λοιπόν, βέβαια πάλι η ομοιότητα είναι στη γ’ γυμνασίου..

Καθηγήτρια: Στη γ’ γυμνασίου είναι η ομοιότητα ναι και την ξανασυναντάνε στη β’ λυκείου..

Ερευνητής: Εγώ όμως το προτείνω γιατί αυτή η απόδειξη απ’ ότι έχω διαβάσει λέγεται ότι είναι του Πυθαγόρα, διότι με τις μέχρι τότε γνώσεις θα μπορούσε να ‘χε γίνει γιατί μόνο ο Θαλής υπάρχει πριν, έτσι; όμοια και παραλληλία δεν υπάρχει κάτι άλλο σαν..

Καθηγήτρια: Μετά βάλανε το Θαλή στην γ’, δεν υπήρχε καν..

Ερευνητής: Το ξέρω, το ξέρω, πέρυσι δεν ήτανε, το θυμάμαι και εγώ γιατί το δίδαξα στο φροντιστήριο..

Καθηγήτρια: Ναι, φέτος μπήκε όμως..

Ερευνητής: Και, δε θα τους μιλήσουμε για προβολές, εντάξει too much, αλλά θα μπορούσαμε τους λόγους ίσως να.. γιατί είναι και εύκολα, δεν είναι κάτι φοβερό..

Καθηγήτρια: Αυτό είναι καλό με τους λόγους, στη γ' γυμνασίου δηλαδή..

Ερευνητής: Ναι έχουνε κάνει αναλογίες, ας μη μιλήσουμε για τα όμοια τρίγωνα ας το πάμε με τους λόγους..

Καθηγήτρια: Ναι, ούτως ή άλλως θα τα κάνουν και τα όμοια.

Ερευνητής: Θα τα κάνουν, απλά την επόμενη χρονιά ναι.. Εντάξει εδώ αναγκαστικά, τυπικά έχω βάλει του βιβλίου.. εντάξει, για τους τύπους (γέλια..) εεεε, εδώ είναι το νερό.. οπότε συμφωνείτε..

Καθηγήτρια: Ναι αυτό μ' αρέσει, θα ήθελα και εγώ να το δοκιμάσω..

Ερευνητής: Και έχουμε μια πάρα πολύ ενδιαφέρουσα εργασία ενός φυσικού από την Κέρκυρα, ο Πάνος Μουρούζης, την πέτυχα στο διαδίκτυο, το διάβασα ήταν δεκασέλιδο και ξεκινάει ο τίτλος, είναι ο.. αυτό είναι ένα κομματάκι της εργασίας του. Λοιπόν πήρα το πιο εύκολο κομμάτι, επειδή τα παιδιά διδάσκονται στη β' γυμνασίου τις δυνάμεις, κανόνας παραλληλογράμμου, 3,4,5 να το το Πυθαγόρειο.

Καθηγήτρια: Ναι, αυτό το κάνουνε στη Φυσική στη γ'..

Ερευνητής: Ναι να τα δέσουνε, δηλαδή «Φυσική-Μαθηματικά παιδιά δεν είναι διαφορετικά πράγματα, ορίστε».. μια διασύνδεση..

Καθηγήτρια: Το θέμα είναι ότι, η β'… θα πρέπει να το πεις στη β' αυτό;

Ερευνητής: Ναι αφού στη β' διδάσκονται τις δυνάμεις..

Καθηγήτρια: Α στη β΄ έχουνε αυτήν τη συνισταμένη στη Φυσική;

Ερευνητής: Ναι, ναι, ναι.

Καθηγήτρια: Α δε το θυμάμαι.. Ωραία, ωραία, αυτό είναι πολύ καλό να γίνει..

Ερευνητής: Ωραία, ευχαριστώ..

Καθηγήτρια: Και θα έπρεπε να γίνει.. δηλαδή να συνεργάζονται οι δύο καθηγητές γι' αυτό το θέμα..

Ερευνητής: Τέλεια..

Καθηγήτρια: Είναι πάρα πολύ καλή αυτή η σύνδεση.. το είδα και με τα παιδιά μου αυτό. Και εδώ βοηθιούνται πάρα πολύ το ένα με το άλλο..

Ερευνητής: Ναι, ναι, είναι καλό να διασυνδέονται οι δύο επιστήμες μεταξύ τους για να μην.. εεε.. Επίσης αυτή η εργασία ο τίτλος ήτανε «Τελικά το Πυθαγόρειο θεώρημα είναι απλά ένα θεώρημα ή ένας φυσικός νόμος;», έλεγε ο φυσικός. Και το πήγαινε ότι οτιδήποτε ας πούμε.. σχετικότητα.. τετράγωνα, εξισώσεις Schrödinger, τετράγωνα, τριγωνομετρία, τετράγωνα, Πυθαγόρειο, δηλαδή παντού υπάρχει το Πυθαγόρειο από πίσω και γι’ αυτό και μ’ άρεσε πάρα πολύ..

Καθηγήτρια: Ναι, ναι.. Πάντως είναι ωραίο αυτό..

Ερευνητής: Προφανώς στα παιδάκια δε θα έλεγα τις εξισώσεις, πήρα μόνο αυτό που είναι εντελώς κατάλληλο για την ηλικία και τα λοιπά, αλλά σαν εργασία θα σας στη στείλω, θα σας αρέσει πάρα πολύ..

Καθηγήτρια: Πολύ ωραίο είναι αυτό πάντως με τη σύνδεση..

Ερευνητής: Δείτε το επόμενο.. Πάμε στους άρρητους τώρα, από πίσω είναι η συνέχεια του κανόνα παραλληλογράμμου. Εσείς λοιπόν χρησιμοποιείτε μόνο τις ανισώσεις σαν προσέγγιση;

Καθηγήτρια: Ναι.

Ερευνητής: Του βιβλίου έτσι;

Καθηγήτρια: Ναι..

Ερευνητής: Δεν κάνετε κάτι άλλο προσεγγιστικά;

Καθηγήτρια: Όχι.

Ερευνητής: Ωραία, ωραία. Πάμε στη δική μου πρόταση. Αυτή η μέθοδος είναι η μέθοδος των Βαβυλωνίων, η μέθοδος του Ήρωνα, η μέθοδος Αρχύτα. Χρονικά είναι Βαβυλώνιοι, Αρχύτας, Ήρωνας. 2.500 π.Χ., 4ο αιώνα π.Χ.… 1ο αιώνα μ.Χ. οι Βαβυλώνιοι σε μία Βαβυλωνιακή πινακίδα βρήκανε λοιπόν κάποιοι αρχαιολόγοι ότι με πραξούλες προσέγγιζαν το ρίζα2, αλγοριθμικά χωρίς τύπο όμως.

Καθηγήτρια: Αλγοριθμικά..

Ερευνητής: Βεβαίως. Μιλάμε για σίγουρα 5 δεκαδικά.

Καθηγήτρια: Ε βέβαια ναι.

Ερευνητής: Λοιπόν, ο Αρχύτας το συμμάζεψε, το οργάνωσε, εντάξει; Και ο Ήρωνας το μοντελοποίησε. Αυτό που βλέπετε εδώ είναι ο αλγόριθμος της ρίζας στο κομπιουτεράκι.

Καθηγήτρια: Ααα, μάλιστα..

Ερευνητής: Καταλάβατε τώρα πως θα νιώσουν τα παιδιά όταν τους το πω αυτό. Δηλαδή εγώ έχω φανταστεί ως εξής τη διδασκαλία: «Παιδιά, πάρτε το κομπιουτεράκι σας όπως κάνουμε εδώ, βρείτε μου τις προσεγγίσεις και εγώ θα σας τις βρίσκω με το χέρι». «Μα καλά κύριε πως το κάνετε;»

Καθηγήτρια: Και θα του βάλουμε τον τύπο..

Ερευνητής: Καταλάβατε; Για να τα εντυπωσιάσουμε να τα.. Να λοιπόν δε χρειαζόμαστε ούτε κομπιουτεράκι ούτε.. Απλά ένα μυαλό. Καταλάβατε το σκοπό μου;

Καθηγήτρια: Είναι πάρα πολύ ωραίο αυτό..

Ερευνητής: Σας ευχαριστώ πάρα πολύ.

Καθηγήτρια: Δηλαδή αυτό ναι θα μπορούσα να το κάνω off the record μέσα στην τάξη, με την έννοια ότι για να το δούμε..

Ερευνητής: Ναι έτσι πιστεύω.. μέχρι.. μέχρι.. Ας μην κάνουμε αυτήν την πράξη.. Ως εδώ όμως καλά είναι.. να κάνουμε τρεις επαναλήψεις είμαστε ok.

Καθηγήτρια: Ναι, και το κυριότερο να δούνε ότι τελικά αυτό δεν είναι και κάτι μαγικό, βγαίνει.

Ερευνητής: Βγαίνει, ναι, ναι, ναι. Δε χρειάζεται, δηλαδή δεν το έχουμε ανάγκη τελικά το κομπιουτεράκι ας πούμε. Λίγο μυαλό να υπάρχει και λίγο έτσι φαντασία.

Ερευνητής: Ναι είναι ακολουθία, εντάξει δε θα τους πούμε την έννοια της ακολουθίας.

Καθηγήτρια: Όχι, όχι..

Ερευνητής: Δίνουμε εμείς ένα… στο περίπου, πόσο πιστεύεις ότι είναι; Δίνεις έναν αριθμό και ξεκινάς..

Καθηγήτρια: Ε ναι, ε βέβαια και έτσι ξεκινάμε τώρα..

Ερευνητής: Και λάθος να δώσουμε δηλαδή άμα δώσουμε στο ρίζα5 το 5, δουλεύει, είναι απίστευτο.

Καθηγήτρια: Ωραίο, πολύ ωραία αυτό.

Ερευνητής: Ωραία, χαίρομαι

Καθηγήτρια: Θα ήθελα αυτό, θα μου…

Ερευνητής: Εννοείται, εννοείται θα σας το στείλω, θα μου δώσετε και το email σας μετά. Λοιπόν, μη νομίζετε ότι θα τους δείξω (γέλια...). Θα σας πω ποιος είναι ο σκοπός μου. Αυτή είναι γεωμετρική άλγεβρα που είναι μέθοδος Πυθαγόρεια τελείως γιατί οι Πυθαγόρειοι κάνουν γεωμετρική άλγεβρα, τα κάνανε μαζί. Αυτή η μέθοδος είναι στο κείμενο του Πλάτωνα που συζητάει με τον δούλο τον Μένωνα αν έχετε ακουστά;

Καθηγήτρια: Α, μάλιστα..

Ερευνητής: Που με τη μαιευτική; Ενώ ο δούλος δε γνωρίζει καθόλου μαθηματικά δείχνει αυτό το πράγμα; Με τη βοήθεια του Πλάτωνα; Λοιπόν, εεε, αυτή είναι η προσέγγιση, έτσι; Κάθε διαγώνιος είναι προσέγγιση της ρίζα 2. Εντωμεταξύ, μέσα στο κείμενο εδώ πέρα δεν το έχει αποτυπώσει καλά ο μαθηματικός. Υπάρχει το απειροστικό τετράγωνο, η αρχή-αρχή. Το 1 με πλευρά 1 και διαγώνιο 1, αυτό που δεν υπάρχει. Οπότε μπαίνουμε στην έννοια dx dy απ’ τον 5ο αιώνα π.Χ., δηλαδή

Καθηγήτρια: Ναι βλέπουμε πόσο παλιά είναι..

Ερευνητής: Πόσο παλιά δηλαδή 2.000 χρόνια πριν.. Αφού Νεύτωνας, Euler και αυτοί 1600-1700 ξεκίνησαν τέτοια πράγματα.

Καθηγήτρια: Ναι, ναι, ναι.

Ερευνητής: Λοιπόν, εγώ μπορεί να φτάνω να τους τα παρουσιάσω απλά να τους τα ‘χω έτοιμα. Να τους δείξω εγώ τους λόγους των πλευρικών με τους διαμετρικούς, της διαγώνιου με την πλευρά τέλοσπάντων..

Καθηγήτρια: Α ναι να έχουνε έτοιμα τα.. ναι..

Ερευνητής: Με σκοπό το εξής: Αυτοί είναι οι λόγοι

Καθηγήτρια: Α, μπράβο ναι.

Ερευνητής: Αυτοί οι λόγοι παιδιά είναι οι μουσικές νότες που ξέρουμε, η κλίμακα του Πυθαγόρα. Δηλαδή όλο αυτό θα τους το έδειχνα μόνο και μόνο για να τους πω ότι τα μαθηματικά είναι και μουσική, δεν είναι μόνο…

Καθηγήτρια: Εδώ θέλει να έχεις και την ομοιότητα βέβαια..

Ερευνητής: Ναι, εντάξει.. δε θα τους πω.. Εγώ θα τους πω εδώ τα νουμεράκια, θα τους βάλω τους λόγους και εκεί πέρα θα τους πω και την ιστοριούλα ότι: «Ξέρετε κάτι; Ο Πυθαγόρας πέρασε από ένα σιδηρουργείο και άκουγε το σιδηρουργό ξέρω γω να χτυπάει.. δε ξέρω αν το έχετε ακούσει αυτό..

Καθηγήτρια: Ναι και νομίζω ότι κάπου το έχει γραμμένο κιόλας

Ερευνητής: Εεε διαφορετικού μεγέθους σίδερα, πιο μεγάλα, πιο μικρά και αντιλήφθηκε ότι η συχνότητα παίζει κάποιο ρόλο στον ήχο. Και πήγε λοιπόν να το εφαρμόσει σε μια μονόχορδη λύρα.

Καθηγήτρια: Ναι, ναι, αυτό το έχω διαβάσει..

Ερευνητής: Ολόκληρη.. για να δούμε τη μισή, πως ακούγεται; Για να δούμε τα ¾. Και εκεί πέρα υπάρχει μια φοβερή διασύνδεση, τελικά η μουσική που ακούμε είναι και αυτή μαθηματικά.

Καθηγήτρια: Υπάρχει στην α' γυμνασίου ένα αυτό.. και μία δραστηριότητα με τη μουσική..

Ερευνητής: Με αυτόν το σκοπό εγώ θα 'θελα να τους το πω σαν έξτρα.

Καθηγήτρια: Ναι εδώ μπορείς, απλά έκανες και μία αναφορά δηλαδή στους λόγους με την έννοια που το δέχονται, με την έννοια της μεγέθυνσης λίγο να το φέρεις και να.. γιατί ομοιότητα-ομοιότητα θα πουν στη γ' δε θα πουν στη β'.

Ερευνητής: Ναι, ναι και πάμε στις μεθόδους με ακρίβεια.

Καθηγήτρια: Ναι αυτήν την έχει το βιβλίο.

Ερευνητής: Έτσι και το χαρακάκι των αρρήτων που το λέω εγώ, το σπιράλ, το προτείνω..

Καθηγήτρια: Εδώ είναι.. α

Ερευνητής: Μέχρι τη ρίζα17 αν δεν κάνω λάθος φτάνει, μετά επικαλύπτεται το πρώτο τετράγωνο..

Καθηγήτρια: Αυτό δεν είναι κακό και μένα μ' αρέσει αυτό,,

Ερευνητής: Ναι γιατί τα παιδιά ωραία.. στον ίσιο το χάρακα δεν το βρίσκουνε. Ορίστε! «Φτιάξτε ένα δικό σας χάρακα για να..»

Καθηγήτρια: Αυτό ναι, γιατί στηρίζεται και σε αυτό..

Ερευνητής: Και σα δημιουργική εργασία και..

Καθηγήτρια: Αυτό είναι ωραίο ναι..

Ερευνητής: Τέλεια. Μάλιστα μου 'πε μια καθηγήτρια ένας μαθητής πολύ καλός φυσικά, το συνέχισε αυτό και το πήγε σε 3D, ρίζα 19.. απίστευτο..

Καθηγήτρια: Ωραίο, αυτό είναι πολύ ωραίο..

Ερευνητής: Χαίρομαι.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙ
Πίνακες

Στην πλειοψηφία του ερωτηματολογίου υπήρχε η δυνατότητα πολλαπλής απάντησης από τους καθηγητές. Για το λόγο αυτό και για τη διευκόλυνση του αναγνώστη στο κύριο μέρος επιλέχθηκαν προς παρουσίαση μέσω πινάκων οι περισσότερες απαντήσεις των καθηγητών, που συμμετείχαν στην έρευνα, με κριτήριο τη συμφωνία των καθηγητών στις απαντήσεις. Οι υπόλοιπες απαντήσεις που παραλείψαμε, είναι αυτές που δόθηκαν από έναν ή δύο καθηγητές και παρουσιάζονται ολοκληρωμένες σε αυτό το μέρος της εργασίας.

Πίνακας 9. «Θυμάστε να αναφέρετε ποιες συγκεκριμένα ιστορικές αναφορές;»

Κατηγορίες	**N**	**f%**
Τα παράδοξα του Ζήνωνα	2	2/15
Την ύπαρξη άλλων γεωμετριών	1	1/15
Το τρίγωνο του Πασκάλ	2	2/15
Το παράδειγμα των Αρπεδοναπτών	1	1/15
Η εφαπτομένη οξείας γωνίας του Θαλή	1	1/15
Η μέτρηση της γης από τον Ερατοσθένη	1	2/15
Πυθαγόρας και Πυθαγόρειοι	5	5/15
Η απόδειξη του ύψους της πυραμίδας	1	1/15
Έξυπνη πρόσθεση Gauss	3	3/15
Αρχιμήδης	2	2/15
Πυθαγόρειες τριάδες	2	2/15
Η μουσική του Πυθαγόρα	1	1/15
Gallois	3	3/15
Grigori Perelman	1	1/15
Ιστορική αναδρομή των αρρήτων	1	1/15
Ιστορία του 0	2	2/15
Riemann	2	2/15
Ευκλείδης	1	1/15
Ιστορικές αναφορές του βιβλίου	7	7/15
Όχι	1	1/15
Η κούπα του Πυθαγόρα	1	1/15
Το κενό στα μαθηματικά το μεσαίωνα	1	1/15
Καρτέσιος	1	1/15
Σύνολο	15	15/15

Πίνακες 11. «Τι σας έρχεται στο νου ακούγοντας την έννοια «Πυθαγόρειο Θεώρημα»;»		
Κατηγορίες	**N**	**f%**
Το σχήμα του Ευκλείδη	8	8/15
Οι έκπληκτοι μαθητές	1	1/15
Η γεωμετρική εξίσωση-σχέση του Πυθαγορείου Θεωρήματος	3	3/15
Η γεωμετρία	1	1/15
Ο Πυθαγόρας	1	1/15
Η Σάμος, από όπου κατάγεται ο Πυθαγόρας	1	1/15
Εμβαδά	1	1/15
Η ρίζα του 2	1	1/15
Tangram	1	1/15
Το γενικευμένο της Β' Λυκείου	1	1/15
Σύνολο	15	15/15

Πίνακας 13. «Αν σας έλεγαν να μιλήσετε για τους Πυθαγόρειους, τι θα αναφέρατε πρώτο;»		
Κατηγορίες	**N**	**f%**
Τον Ίπασσο	1	1/15
Ελιτιστική σχολή (γνώση για λίγους)	4	4/15
Πυθαγόρας	1	1/15
Σάμος	1	1/15
Η κούπα του Πυθαγόρα	1	1/15
Πειθαρχία του νου	1	1/15
Πνευματική αναζήτηση και ανύψωση	2	2/15
Αυτοβελτίωση	1	1/15
Φιλοσοφία	1	1/15
Παράδοξα	1	1/15
Μύθοι	1	1/15
Γνώση	2	2/15
Συνεχιστές του Πυθαγόρα	1	1/15
Μπροστά από την εποχή τους	1	1/15
Το πρόβλημα με την τετραγωνική ρίζα του 2	1	1/15
Μυστικισμός	3	3/15
Κατασκευές	1	1/15
Αποδείξεις	1	1/15
Πυθαγόρειο Θεώρημα	1	1/15
Δεν γνωρίζω	2	2/15
Η αυστηρότητα σε συνδυασμό με τον ρομαντισμό	1	1/15
Σύνδεση των αριθμών με τη φύση και το Θεό	1	1/15
Σύνολο	15	15/15

Πίνακας 15. «Πιστεύετε ότι το Πυθαγόρειο Θεώρημα συνδέεται με τον Πυθαγόρα και τους Πυθαγόρειους, τους Αιγύπτιους, τους Βαβυλώνιους ή με άλλους λαούς;»

Κατηγορίες	**N**	**f%**
Πυθαγόρειους	8	8/15
Αιγύπτιους	3	3/15
Βαβυλώνιους	2	2/15
Κινέζους/ ανατολικούς λαούς	1	1/15
Όλους τους παραπάνω	3	3/15
Θαλής	1	1/15
Ευκλείδης	1	1/15
Σύνολο	15	15/15

Πίνακας 17. «Όταν πρόκειται να διδάξετε το «Πυθαγόρειο Θεώρημα», πώς οργανώνετε τη διδασκαλία σας;»

Κατηγορίες	**N**	**f%**
Βίντεο με νερό	3	3/15
Σχήματα (τριγώνων, τετραγώνων)	10	10/15
Εμβαδά	10	10/15
Τύποι	2	2/15
Ορισμός-διατύπωση του θεωρήματος	11	11/15
Γενίκευση του Πυθαγορείου	1	1/15
Αναφορά στις ιστορικές συνθήκες της εποχής	4	4/15
Επανάληψη-υπενθύμιση προηγούμενων γνώσεων	6	6/15
Εφαρμογές στο Geogebra	5	5/15
Μετρήσεις	3	3/15
Εισαγωγή στους αρρήτους	1	1/15
Βασικές παραδοχές του Πυθαγορείου	2	2/15
Έννοια του θεωρήματος γενικά	3	3/15
Άλλες αποδείξεις του Πυθαγορείου Θεωρήματος	3	3/15
Μαθηματική σχέση-απόδειξη του Πυθαγορείου Θεωρήματος	6	6/15
Εφαρμογές του βιβλίου	4	4/15
Εφαρμογές με τριγωνάκια, που φτιάχνει ο δάσκαλος, για καλύτερη κατανόηση των εμβαδών	3	3/15
Ιστορικά σημειώματα του βιβλίου	4	4/15
Σύμφωνα με την σειρά του βιβλίου	6	6/15
Φύλλα εργασίας	4	4/15
Σχέδια πάνω στα πλακάκια της αίθουσας, για καλύτερη κατανόηση του θεωρήματος	1	1/15
Επεξήγηση του συνδυαστικού της γεωμετρίας και της άλγεβρας στο Πυθαγόρειο Θεώρημα	3	3/15
Διαδικασίας παρατήρησης του φαινομένου από τους ίδιους τους μαθητές	7	7/15
Δεν θυμάμαι	1	1/15
Σύνολο	15	15/15

Πίνακας 18. «Όταν πρόκειται να διδάξετε τους «άρρητους», πώς οργανώνετε τη διδασκαλία σας;»

Κατηγορίες	N	f%
Άξονας πραγματικών αριθμών (συμπλήρωση του R με γεωμετρική κατασκευή αρρήτων)	9	9/15
Αλγεβρικές προσεγγίσεις	6	6/15
Σπείρα του Κυρηναίου	3	3/15
Αναζήτηση φραγμάτων	3	3/15
Ορισμός της τετραγωνικής ρίζας	5	5/15
Εφαρμογές του βιβλίου	1	1/15
Κατανόηση του ότι οι άρρητοι δεν μπορούν να γραφτούν ως κλάσματα	6	6/15
Φύλλα εργασίας	1	1/15
Εφαρμογές του Πυθαγορείου Θεωρήματος	4	4/15
Εφαρμογές στο Geogebra	1	1/15
Σύμφωνα με το βιβλίο	7	7/15
Διαδικασία παρατήρησης από τους μαθητές ώστε να εξάγουν συμπεράσματα	4	4/15
Παραδείγματα ασκήσεων	4	4/15
Παράδοξα του Ζήνωνα	1	1/15
Εφαρμογές στο φωτόδεντρο	2	2/15
Επανάληψη δυνάμεων	2	2/15
Σύνολα αριθμών	3	3/15
Σύνολα	15	15/15

Πίνακας 21. «Ξεκαθαρίζετε στη διδασκαλία σας το ευθύ και το αντίστροφο του Πυθαγόρειου Θεωρήματος και με ποιόν τρόπο;»

Κατηγορίες	N	f%
Ναι, μέσω διατύπωσης του ορισμού	7	7/15
Ναι, μέσω σχημάτων	2	2/15
Ναι, μέσω παραδειγμάτων και ασκήσεων	6	6/15
Ναι, μέσω φωτόδεντρου, εφαρμογή Geogebra και φύλλου εργασίας	4	4/15
Ναι, σύμφωνα με το βιβλία	1	1/15
Ναι, μέσω του παραδείγματος των Αρπεδοναπτών	5	5/15
Ναι, μέσω της διερεύνησης των ιδεών των μαθητών	1	1/15
Ναι, μέσω του τονισμού των δεδομένων των ασκήσεων	1	1/15
Σύνολο	15	15/15

Πίνακας 23. «Ποιες θεωρείτε ως προαπαιτούμενες γνώσεις για τα παιδιά που θα διδαχθούν για πρώτη φορά τους άρρητους αριθμούς;»		
Κατηγορίες	**N**	**f%**
Δυνάμεις	10	10/15
Ρίζες	6	6/15
Απλές εξισώσεις πρώτου και δευτέρου βαθμού	6	6/15
Άξονας των R	4	4/15
Δεκαδικούς	1	1/15
Ρητούς	2	2/15
Βασικές πράξεις	5	5/15
Ιδιότητες πράξεων	2	2/15
Εμβαδά	3	3/15
Σύνολα αριθμών	5	5/15
Σχέση εγκλεισμού αριθμών και διάταξη	2	2/15
Σύνολο	15	15/15

Πίνακας 27. «Πως χρησιμοποιείτε την ιστορία στη διδασκαλία των δύο αυτών εννοιών;»		
Κατηγορίες	**N**	**f%**
Ιστορία Ίππασου	1	1/15
Μιλάμε για το ρίζα 2, το οποίο είναι άτοπο	1	1/15
Ιστορικά σημειώματα του βιβλίου	11	11/15
Μέσω εργασιών και ψηφιακού σχολείου	5	5/15
Γενικά, μιλάω για τον Πυθαγόρα	4	4/15
Σύνολο	15	15/15

Πίνακας 32. «Ποια θεωρείτε ότι είναι η χρησιμότητα και οι εφαρμογές του Πυθαγορείου Θεωρήματος στην καθημερινότητα;»		
Κατηγορίες	**N**	**f%**
Κατασκευές	13	13/15
Μετρήσεις-αποστάσεις	6	6/15
Διαχωρισμός χωραφιών	3	3/15
Ίντσες	1	1/15
Εμπειρία	1	1/15
Εξύψωση πνεύματος	1	1/15
Αρχιτεκτονική	2	2/15
Αλφάδι	4	4/15
Τοποθέτηση αριθμών στον άξονα των R	1	1/15

Τοποθέτηση επίπλων	2	2/15
Φυσική	1	1/15
Σύνδεση γεωμετρίας και άλγεβρας	2	2/15
Έλεγχος ορθότητας γωνίας	4	4/15
Αστρονομία	1	1/15
Δεν ξέρω	1	1/15
Τριγωνομετρία	2	2/15
Σύνολο	15	15/15

Πίνακας 33. «Ποια θεωρείτε ότι είναι η χρησιμότητα και οι εφαρμογές των άρρητων αριθμών στην καθημερινότητα;»

Κατηγορίες	**N**	**f%**
Προσεγγίσεις	3	3/15
Τοποθέτηση πάνω στον άξονα R	2	2/15
Κατασκευές	4	4/15
Εφαρμογή του Πυθαγορείου Θεωρήματος	2	2/15
Υπάρχει παντού γύρω στη φύση	1	1/15
Μετρήσεις-αποστάσεις	3	3/15
Αστρονομία	1	1/15
Καμία	3	3/15
Δεν γνωρίζω	2	2/15
Εξοικείωση με τους αριθμούς	2	2/15
Σφάλματα μετρήσεων	1	1/15
Σύνολο	15	15/15

Πίνακας 35. «Τι δυσκολίες αντιμετωπίσατε στην διδασκαλία του Πυθαγόρειου Θεωρήματος;»

Κατηγορίες	**N**	**f%**
Καμία	9	9/15
Επανάληψη τρόπου διδασκαλίας με τον οποίο διδάχθηκα κάποτε εγώ	1	1/15
Καμία εμπειρία στην απαραίτητη πλέον οπτική παρουσίαση	2	2/15
Μη κατάλληλες υλικοτεχνικές δομές	2	2/15
Πρόβλεψη των δυσκολιών που μπορεί να προκύψουν από τους μαθητές	1	1/15
Γεωμετρική ερμηνεία	1	1/15
Λίγες ώρες διδασκαλίας	1	1/15
Σύνολο	15	15/15

Πίνακας 36. «Τι δυσκολίες αντιμετωπίσατε στην διδασκαλία των άρρητων αριθμών;»		
Κατηγορίες	**N**	**f%**
Καμία	7	7/15
Δυσκολία στις πράξεις	1	1/15
Επανάληψη τρόπου διδασκαλίας με τον οποίο διδάχθηκα κάποτε εγώ	1	1/15
Σύγκριση με ρητούς	1	1/15
Δυσκολία οπτικής παρουσίασης λόγω απειρίας	1	1/15
Μη κατάλληλη υλικοτεχνική δομή	2	2/15
Λίγες ώρες διδασκαλίας	4	4/15
Η έννοια των αρρήτων δεν είναι εύκολα επεξηγήσιμη	2	2/15
Σύνολο	15	15/15

Πίνακας 37. «Τι δυσκολίες αντιμετώπισαν οι μαθητές σας στο Πυθαγόρειο Θεώρημα;»		
Κατηγορίες	**N**	**f%**
Καμία	1	1/15
Στη διατύπωση των ορισμών, κυρίως του αντιστρόφου (παπαγαλία)	13	13/15
Δεν διακρίνουν το γεωμετρικό από το αλγεβρικό μέρος του θεωρήματος	3	3/15
Δεν μπορούν να ξεχωρίσουν τις πλευρές του τριγώνου (μικρή,μεγάλη,υποτείνουσα)	4	4/15
Δυσκολία στους συμβολισμούς	1	1/15
Δυσκολία κατανόησης και χρήσης του αντιστρόφου	3	3/15
Δυσκολία στη κατανόηση ότι γίνεται μέτρηση μηκών	1	1/15
Δυσκολία στην χρήση της ρίζας	1	1/15
Δυσκολία στις πράξεις	2	2/15
Έλλειψη βασικών γεωμετρικών εννοιών	2	2/15
Μπερδεύονται με το Π.Θ. και τη συνισταμένη κάθετων δυνάμεων	1	1/15
Σύνολο	15	15/15

Πίνακας 41. «Γνωρίζετε άλλες αποδείξεις του Πυθαγόρειου Θεωρήματος;»		
Κατηγορίες	**N**	**f%**
Ναι, από τις σπουδές μου	6	6/15
Ναι, από προσωπική έρευνα σε βιβλία	6	6/15
Ναι, από το διαδίκτυο	8	8/15
Ναι, από το βιβλίο του Loomis	4	4/15
Ναι, από το σχολικό βιβλίο που διδάσκω	1	1/15
Ναι, από προσωπικές συζητήσεις	1	1/15
Δεν γνωρίζω	3	3/15
Σύνολο	15	15/15

Πίνακας 47. «Πιστεύετε τελικά ότι είναι χρήσιμη η ιστορία των μαθηματικών στην εκπαιδευτική διαδικασία και γιατί;»

Κατηγορίες	**N**	**f%**
Ναι, κεντρίζει το ενδιαφέρον των μαθητών	14	14/15
Ναι, για να κατανοούν οι μαθητές καλύτερα την εφαρμογή των Πυθαγορείου και των άρρητων	7	7/15
Ναι, για να καταλάβουν ότι κάθε εφαρμογή χρειάζεται και μία απόδειξη	3	3/15
Ναι, για να αντιληφθούν καλύτερα την φύση που υπάρχει γύρω τους	2	2/15
Ναι, για να φύγει στους μαθητές ο "φόβος" των μαθηματικών	2	2/15
Ναι, για να ανακαλύψουν οι μαθητές τη χρησιμότητα των εννοιών αυτών στη ζωή	2	2/15
Σύνολο	15	15/15

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙΙ

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε στοιχεία από την Ιστορία των Μαθηματικών σχετικά με το Πυθαγόρειο Θεώρημα και τους άρρητους αριθμούς, καθώς και δραστηριότητες οι οποίες μπορούν να πραγματοποιηθούν μέσα στην τάξη, ως πιθανή πηγή έμπνευσης για τους εκπαιδευτικούς που θα ασχοληθούν με αυτό το κομμάτι της διδακτέας ύλης.

Οι προτάσεις μζ΄, μη΄ και λα΄ (Βιβλίο Ι των στοιχείων του Ευκλείδη)

Από την ιστορία γνωρίζουμε ότι το Πυθαγόρειο Θεώρημα είναι η πρόταση μζ΄ από το πρώτο βιβλίο των *Στοιχείων* του Ευκλείδη και η διατύπωση του είναι η εξής: «Εν τοις ορθογωνίοις τριγώνοις το από της την ορθήν γωνίαν υποτεινούσης πλευράς τετράγωνον ίσον εστί τοις από των την ορθήν γωνίαν περιεχουσών πλευρών τετραγώνοις». Στη νεοελληνική γλώσσα η παραπάνω πρόταση αποδίδεται με τον ακόλουθο τρόπο: «Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο της υποτείνουσας ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δυο κάθετων πλευρών του». Αν μεταφράζαμε πιο αυστηρά το πρωτότυπο κείμενο τότε θα είχαμε την εξής απόδοση του: «Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο με πλευρά την υποτείνουσα είναι ίσο προς τα τετράγωνα που έχουν πλευρές τις δύο καθέτους». Με άλλα λόγια, το εμβαδόν του τετραγώνου με πλευρά την υποτείνουσα είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των τετραγώνων με πλευρές τις κάθετες πλευρές του τριγώνου. Αν και ο Ευκλείδης δεν αναφέρεται άμεσα σε εμβαδά, παρόλα αυτά για την απόδειξη της πρότασης μζ΄ συγκρίνει εμβαδά τριγώνων, τετραγώνων και παραλληλογράμμων.

Η πρόταση μη΄ του ίδιου βιβλίου δεν είναι παρά το αντίστροφο του Πυθαγορείου Θεωρήματος και διατυπώνεται ως εξής: «Αν σε ένα τρίγωνο, το τετράγωνο μιας πλευράς ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των άλλων δυο πλευρών, τότε αυτό είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία που βρίσκεται απέναντι από την πλευρά αυτή». Ο Ευκλείδης αποδεικνύει την παραπάνω πρόταση με τη μέθοδο της εις άτοπον απαγωγής.

Το Πυθαγόρειο Θεώρημα αποδεικνύεται ξανά στο έκτο βιβλίο του Ευκλείδη στη πρόταση λα΄ αλλά με μια πιο γενικευμένη διατύπωση : «Εν τοις ορθογωνίοις τριγώνοις το από της την ορθήν γωνίαν υποτεινούσης πλευράς είδος ίσον εστί τοις από των την ορθήν γωνίαν περιεχουσών πλευρών είδεσι τοις ομοίοις τε και ομοίως αναγραφόμενοις», ή στην νεοελληνική γλώσσα «Στα ορθογώνια τρίγωνα το σχήμα με βάση την υποτείνουσα είναι ίσο με το άθροισμα των ομοειδών με αυτό σχημάτων με βάση τις δύο κάθετες πλευρές». Ο Ευκλείδης αποδεικνύει την παραπάνω πρόταση μέσω της ομοιότητας των τριγώνων.

Λίγα λόγια για την ιστορία του Πυθαγορείου θεωρήματος

Σύμφωνα με την αρχαία ελληνική ιστορία το Πυθαγόρειο Θεώρημα είναι «δημιούργημα» του Πυθαγόρα και χρονολογείται γύρω στο 572-497 π.Χ. Παρά τους διάφορους μύθους της ιστορίας που μας έχουν διασωθεί ακόμη και σήμερα δεν είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε επακριβώς τι απέδειξε ο Πυθαγόρας και με ποιον τρόπο. Σίγουρα όμως γνωρίζουμε ότι οι Πυθαγόρειοι γνώριζαν την μεθοδολογία για τον υπολογισμό των Πυθαγόρειων τριάδων, αν και τα ευρήματα της ιστορίας αποδεικνύουν πως αυτή η μεθοδολογία ήταν γνωστή και σε άλλους πολιτισμούς πριν από την περίοδο που έζησε και έδρασε ο Πυθαγόρας. Όπως είδαμε και σε άλλη ενότητα της παρούσας εργασίας, στην παλαιοβαβυλωνιακή πλάκα BM 85196 εμφανίζεται το πρόβλημα της δοκού που η επίλυση του επιτυγχάνεται με την χρήση της πυθαγόρειας εξίσωσης. Ακόμη, είδαμε πως στην περίφημη πλάκα Plimpton αναγράφονται οι πυθαγόρειες τριάδες. Επίσης, στις ινδικές Σουλβασούτρας (κανόνες των σκοινιών) γίνεται άμεση αναφορά του θεωρήματος στην κατασκευή: «χορδή που τεντώνεται (σταυροειδώς) περί ενός τετραγώνου παράγει διπλάσιο εμβαδόν». Στο ίδιο κείμενο γίνονται αναφορές και σε κάποιες πυθαγόρειες τριάδες (πχ. 12, 35, 37). Ενδεικτικό είναι το γεγονός ότι οι Ινδοί φαίνεται να διεκδικούν την ιδέα του Πυθαγορείου θεωρήματος αν και δεν υπάρχουν ιστορικές αποδείξεις που να τεκμηριώνουν το γεγονός ότι οι Έλληνες το διδάχτηκαν από αυτούς. Ενδεχομένως το συγκεκριμένο θεώρημα αποτέλεσε αντικείμενο μελέτης αυτών των πολιτισμών σε διαφορετικές χρονικές περιόδους. Στο κινέζικο βιβλίο Τσιου – Σουάν – Σου (Εννέα Κεφάλαια για τη Μαθηματική Τέχνη), στο ένατο κεφάλαιο τα προβλήματα 9 και 14 αποτελούν άμεσες εφαρμογές του Πυθαγορείου θεωρήματος ενώ τα προβλήματα σχετικά με τα μήκη ορθογωνίων δίνουν ρητές απαντήσεις. Στο ίδιο βιβλίο εμφανίζεται και η πυθαγόρεια τριάδα 91,60 και 109. Τέλος, μια ειδική περίπτωση του θεωρήματος αναφέρεται και στο κινέζικο βιβλίο Τσου Πέι Σουάνγκ Τσινγκ (Κλασική Αριθμητική του Γνώμονα και των Κυκλικών Ουράνιων Μονοπατιών).

Συνοψίζοντας, η έννοια του άρρητου αριθμού είναι πιθανό να προήλθε από το πυθαγόρειο θεώρημα καθώς σχετικούς υπαινιγμούς φέρεται να έχει κάνει ο Αριστοτέλης. Ωστόσο η «γέννηση» της γεωμετρίας είχε ως σκοπό την παράκαμψη της χρήσης των άρρητων αριθμών από τους Έλληνες, γεγονός που μπορεί να επιτευχθεί αν εργαστούμε με εμβαδά και όχι με μήκη.

<u>Η διδασκαλία του Πυθαγορείου Θεωρήματος στο Δημοτικό και στο Γυμνάσιο</u>

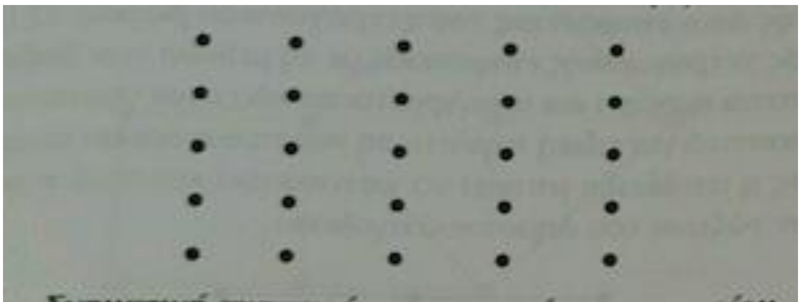
Ο Jerome Brunner το βιβλίο του *Toward a Theory of Instruction (1966)* υποστηρίζει ότι στους μαθητές του Δημοτικού σχολείου θα πρέπει να διδάσκεται το ανάπτυγμα της ταυτότητας $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ με μεθόδους της «γεωμετρικής άλγεβρας». Γιατί θα έπρεπε να διδαχθεί; Πώς μπορεί να γίνει αυτό; Πρέπει ή όχι; Με την κατάλληλη προσέγγιση του θέματος θα μπορούσε να γίνει η σύνδεση της διδακτέας ύλης του Δημοτικού και του Γυμνασίου για τη διδασκαλία του Πυθαγορείου Θεωρήματος χωρίς να παραληφθεί και το ιστορικό κομμάτι της υπόθεσης.

Στόχος του προγράμματος σπουδών θα πρέπει να είναι η σωστή διδασκαλία βασικών μαθηματικών εννοιών στο Δημοτικό καθώς και η δημιουργία μιας καλής υποδομής στους μαθητές ώστε να μπορέσουν να χτίσουν πάνω σε αυτές τις νέες έννοιες που θα διδαχθούν στο Γυμνάσιο. Οι μαθητές θα πρέπει να είναι σε θέση να κατανοήσουν ότι τα μαθηματικά αποτελούν μια αλυσίδα και σε κάθε βαθμίδα της εκπαίδευσης της προσθέτουν επιπλέον κρίκους.

Στο Δημοτικό κατά κύριο λόγο διδάσκεται η έννοια του εμβαδού καθώς και ο υπολογισμός του με τη βοήθεια διαφόρων τύπων. Αν λάβουμε υπόψη μας ότι η διατύπωση του Πυθαγορείου Θεωρήματος κατά τον Ευκλείδη στη πρόταση λα΄ περικλείει την έννοια του εμβαδού τότε σε συνδυασμό με τη διδασκαλία του κατάλληλου ιστορικού πλαισίου θα μπορούσε να ενταχθεί το Πυθαγόρειο Θεώρημα στην διδακτέα ύλη του Δημοτικού. Τέλος, στο Γυμνάσιο θα μπορεί πλέον να ολοκληρωθεί η διδασκαλία του με την εισαγωγή των άρρητων αριθμών.

Δραστηριότητες πάνω στο Πυθαγόρειο Θεώρημα

Όπως είδαμε η διδασκαλία του Πυθαγόρειου Θεωρήματος συνδέεται άμεσα με την έννοια του εμβαδού. Για το λόγο αυτό και πριν προχωρήσουμε στην παρουσίαση των δραστηριοτήτων θα παρουσιάσουμε τον γεωπίνακα. Ο γεωπίνακας είναι μια επίπεδη επιφάνεια που αποτελείται από 25 συνήθως «ραβδάκια». Συνοδεύεται από πολύχρωμα λαστιχάκια με τα οποία μπορεί κανείς να ορίσει ποικίλες περιοχές πάνω του αρκεί να τα τεντώσει κατάλληλα. Η χρησιμότητα του γεωπίνακα έγκειται στο γεγονός ότι μπορεί ο καθηγητής να εξηγήσει στο μαθητή τους περιορισμούς που είχαν οι αρχαίοι για την επίλυση των προβλημάτων τους λόγω της έλλειψης των κατάλληλων εργαλείων. Οι γεωπίνακες του εμπορίου δεν μπορούν να υπολογίσουν εμβαδά μεγαλύτερα του 16. Ωστόσο ο καθηγητής θα μπορούσε στα πλαίσια μιας δραστηριότητας μαζί με τους μαθητές του να κατασκευάσει ένα μεγαλύτερο.



Σχηματική αναπαράσταση γεωπίνακα εμπορίου

Οι δραστηριότητες που θα αναπτυχθούν παρακάτω μπορούν να διδαχθούν σε μαθητές Δημοτικού και Γυμνασίου αξιοποιώντας την ιστορία σχετικά με το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Είναι στην αποκλειστική διάθεση του καθηγητή η περαιτέρω επέκτασή του σε «πολιτισμικές» λεπτομέρειες.

Δραστηριότητα 1: Να οριστεί με το λαστιχάκι περιοχή με εμβαδόν 1 (μοναδιαίο τετράγωνο). Στη συνέχεια να οριστούν περιοχές με εμβαδόν 2,3,4,… Ποια είναι η μεγαλύτερη περιοχή που μπορεί να οριστεί έτσι;

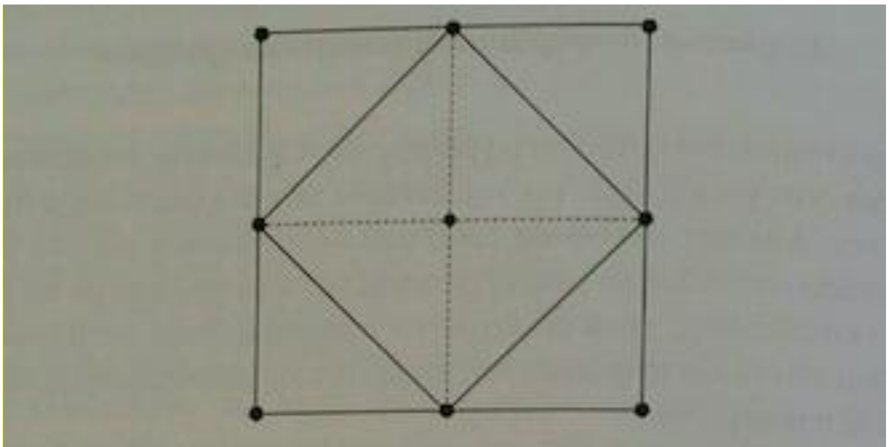
<u>Δραστηριότητα 2:</u> Να οριστούν με το λαστιχάκι τετραγωνικές περιοχές με εμβαδόν 1, 4, 9, 16.

<u>Δραστηριότητα 3:</u> Να οριστεί με το λαστιχάκι τετραγωνική περιοχή με εμβαδόν 2. Κατόπιν με εμβαδόν 8.

<u>Δραστηριότητα 4:</u> Να οριστεί με το λαστιχάκι τετραγωνική περιοχή με εμβαδόν 5(=1+4). Σχημάτισε τετράγωνο με εμβαδόν 10(=9+1) κτλ. Πιο γενικά, αν σου δώσω τετραγωνικές περιοχές εμβαδού Α και Β αντίστοιχα, πώς μπορείς να κατασκευάσεις τετραγωνική περιοχή με εμβαδόν Α+Β;

<u>Δραστηριότητα 4:</u> Μπορείς να ορίσεις με το λαστιχάκι τετραγωνική περιοχή εμβαδού 3 στον γεωπίνακα; Ναι, όχι και γιατί;

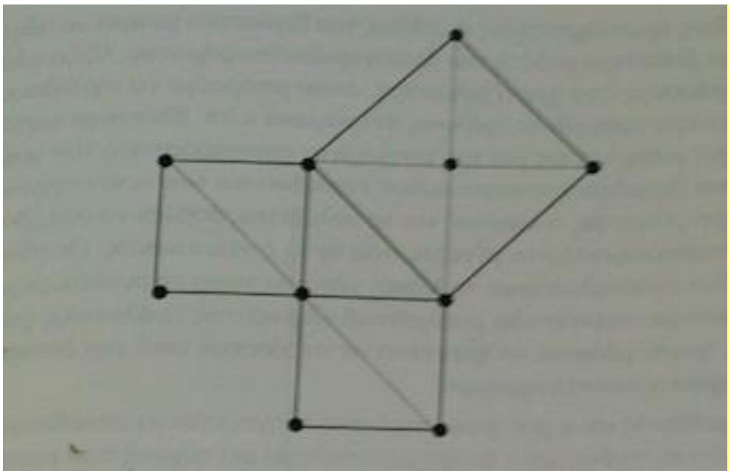
Κατά την ανάπτυξη αυτών των δραστηριοτήτων μπορούν να συζητηθούν διάφορα κομμάτια της ιστορίας των μαθηματικών όπως για παράδειγμα αποσπάσματα από τον Ηρόδοτο ή την ετυμολογία του όρου γεωμετρία. Πιο συγκεκριμένα, κατά την ανάπτυξη της δεύτερης δραστηριότητας, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η λύση που δόθηκε από τους Βαβυλωνίους στο πρόβλημα του διπλασιασμού της άνω επιφάνειας του τετραγωνικού βωμού. Ο (υπο)διπλασιασμός τετραγωνικής επιφάνειας με αυτή τη μέθοδο μπορεί να αναπαρασταθεί και να αιτιολογηθεί εύκολα με τη χρήση του γεωπίνακα. Έτσι, η απόδειξη μιας ειδικής περίπτωσης του Πυθαγορείου Θεωρήματος μπορεί να γίνει εύκολα κατανοητή από παιδιά των τελευταίων τάξεων του Δημοτικού.



Ο ορισμός τετραγώνου με εμβαδόν 2 στον γεωπίνακα

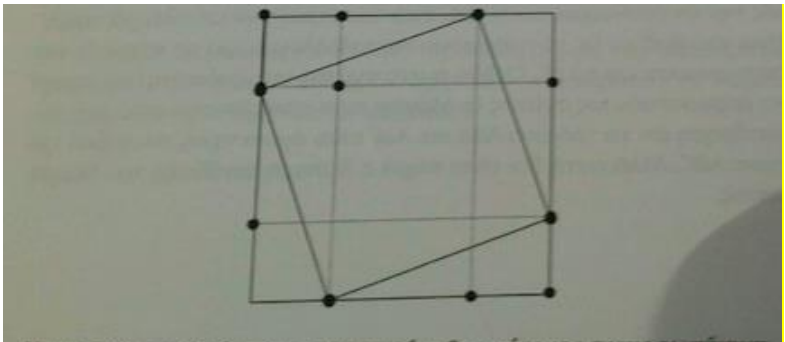
Αν η παραπάνω δραστηριότητα διδαχθεί σε μαθητές Γυμνασίου τότε ο καθηγητής έχει τη δυνατότητα να κάνει μια συζήτηση στους μαθητές του σχετικά με τον Βαβυλωνιακό πολιτισμό καθώς αποτελεί και μέρος της διδακτέας ύλης του μαθήματος της ιστορίας σε αυτές τις τάξεις.

Στο πλαίσιο της ίδιας δραστηριότητας μπορούμε να επεκταθούμε λίγο παραπέρα και να κατασκευάσουμε τετράγωνο με εμβαδόν 2 και με το κλασικό σχήμα της «καρέκλας της νύφης». Πώς; Χρησιμοποιώντας τα λαστιχάκια, ορίζουμε δυο μοναδιαία τετράγωνα όπως στο σχήμα που ακολουθεί και με τα τέσσερα ορθογώνια τρίγωνα από τα οποία αποτελούνται, πάλι, με λαστιχάκια ορίζουμε το τετράγωνο με πλευρά την υποτείνουσα αποδεικνύοντας έτσι τη ζητούμενη ισότητα.



Το τετραγωνικό εμβαδόν 2 μέσω της καρέκλας της νύφης στον γεωπίνακα

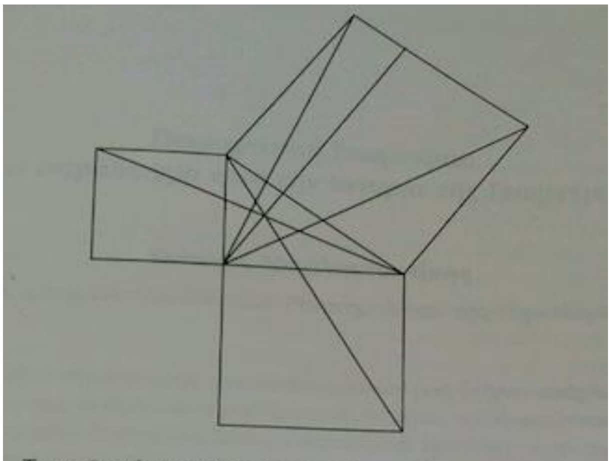
Κατά την ανάπτυξη της τέταρτης δραστηριότητας μπορούμε να ορίσουμε στον γεωπίνακα τετράγωνο με εμβαδόν 10 και να αποδείξουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα για εμβαδά 1, 9 και 10 με τη βοήθεια της κινέζικης μεθόδου που συναντάται στο Τσου-Πέι. Με παρόμοια μέθοδο μπορούμε να ορίσουμε στον γεωπίνακα τετράγωνο με εμβαδόν 5(=1+4). Έτσι, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η κινέζικη προσέγγιση οδηγεί στο βαβυλωνιακό σχήμα όταν επιχειρούμε να ορίσουμε εμβαδόν 2(=1+1).



Η κινεζική απόδειξη του πυθαγορείου θεωρήματος στον γεωπίνακα

Οι παραπάνω δραστηριότητες στις τάξεις του Γυμνασίου μπορούν να οδηγήσουν σε μια πιο λεπτομερή μελέτη του Πυθαγορείου Θεωρήματος. Αν προσθέσουμε στα «εργαλεία» μας το χαρτί μιλιμετρέ, τον κανόνα και το μολύβι τότε μπορούμε να οδηγηθούμε σε ακόμη μεγαλύτερα σχήματα και στην αναπαράσταση τους στο καρτεσιανό επίπεδο εισάγοντας έτσι και τη χρήση των συντεταγμένων. Έχοντας κατά νου πάντα την ιστορική προσέγγιση των μαθηματικών μπορούμε να περάσουμε από την ευκλείδεια στην αναλυτική γεωμετρία.

Οι μαθητές σταδιακά συνειδητοποιούν ότι το Πυθαγόρειο Θεώρημα επεξηγεί μια τεχνική που επιτρέπει τη σύνθεση δυο δοσμένων τετραγωνικών εμβαδών Α και Β στο τετραγωνικό εμβαδόν Α+Β βάση του σχήματος του κινέζικου Τσου Πέι. Το πέρασμα στην πρώτη ευκλείδεια απόδειξη που είναι εμβαδική είναι εύκολο. Ο Ευκλείδης στην απόδειξή του σχηματίζει τετράγωνο εμβαδού Α+Β από δυο δοσμένα τετραγωνικά εμβαδά Α και Β αλλά με διαφορετική μεθοδολογία. Τα εμβαδά των τετραγώνων επί των κάθετων πλευρών μετασχηματίζονται σε εμβαδά δυο ορθογωνίων παραλληλογράμμων από τα οποία σχηματίζεται το τετράγωνο επί της υποτείνουσας. Έτσι, αν ΑΒΓ είναι το ορθογώνιο τρίγωνο, Α η ορθή του γωνία, Δ το ίχνος του ύψους επί την υποτείνουσα, τότε το τετράγωνο με πλευρά την ΑΒ είναι ισεμβαδικό με το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρές την υποτείνουσα και το ΒΔ, ενώ το τετράγωνο με πλευρά την ΑΓ είναι ισεμβαδικό με το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρές την υποτείνουσα και το ΔΓ. Οι δυο αυτές σχέσεις ισεμβαδικότητας μπορούν να εκφραστούν ως σχέσεις αναλογίας που προκύπτουν από το γεγονός ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ είναι όμοια ως προς το αρχικό τρίγωνο ΑΒΓ. Η απόδειξη αυτή αποτελεί την δεύτερη απόδειξη του θεωρήματος.



Το πυθαγόρειο θεώρημα στα Στοιχεία του Ευκλείδη

Συνοψίζοντας, η ένταξη της ιστορίας στη διδασκαλία του Πυθαγορείου Θεωρήματος οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να διδαχθούν τρεις κλασικές αποδείξεις του. Τέλος, αντιμετωπίζουν και τα μεγάλα ερωτήματα της ιστορίας του:

- ποια είναι η σχέση μεταξύ των αποδείξεων αυτών;
- ποια είναι η σχέση της κάθε απόδειξης με τον πολιτισμό που την ανέπτυξε;
- ποιοι ήταν οι άνθρωποι που τις επινόησαν και ποιος ήταν ο σκοπός τους;

Με άλλα λόγια οι μαθητές αρχίζουν να γνωρίζουν τον τρόπο σκέψης των δικών τους προγόνων αλλά και των προγόνων διαφορετικών λαών.

Πηγές στο Διαδίκτυο

Από την παρούσα εργασία, θα ήταν αδύνατο να παραληφθεί η συμβολή του διαδικτύου (internet) καθώς σε αυτό περιέχεται ένα ευρύτατο πλήθος πηγών και διευθύνσεων στις οποίες κανείς εύκολα μπορεί να αναζητήσει πληροφορίες και αναφορές για διάφορα θέματα των μαθηματικών. Το διαδίκτυο λοιπόν αποτελεί ένα πολύτιμο εργαλείο τόσο για αυτούς που ασχολούνται αποκλειστικά με την ιστορία των μαθηματικών ως ξεχωριστό επιστημονικό τομέα όσο και για αυτούς που τη χρησιμοποιούν ως συμπληρωματικό εργαλείο στην διδακτική διαδικασία. Το διαδίκτυο λοιπόν μας προσφέρει:

- Κείμενα και εκθέσεις επιστημονικών μουσείων
- Διδακτικά υλικά καθώς και
- Σχέδια μαθημάτων.

Στη συνέχεια παραθέτουμε ομαδοποιημένους καταλόγους διευθύνσεων σχετικούς με την ιστορία των μαθηματικών καθώς και την αξιοποίηση και εφαρμογή αυτής κατά τη διδακτική διαδικασία. Το παρακάτω υλικό μπορεί να αξιοποιηθεί καταλλήλως από τους εκπαιδευτικούς της πρωτοβάθμιας και της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης προκειμένου να ξεφύγουν από την κλασική και αποστειρωμένη διδασκαλία των μαθηματικών. Ακόμη, οι διευθύνσεις αυτές μπορούν να χρησιμοποιηθούν από τους ιστορικούς των μαθηματικών αλλά και οποιονδήποτε άλλο ερευνητή που αναζητά απαντήσεις σε θέματα μαθηματικής εκπαίδευσης και ιστορίας των μαθηματικών.

1. **Διευθύνσεις που περιέχουν καταλόγους διευθύνσεων**
    - David Joyce’s History of Mathematics Web Resources
    - David Calvis’s History of Mathematics Web Sites
    - Fred Rickey’s of Bowling Green University, USA Home Page
    - Links to Information on Number Systems
    - The Mathematical Museum-History Wing
    - Trinity College, Dublin, History of Mathematics Archive: History of Mathematics Web Directory
2. **Διευθύνσεις εγκυκλοπαιδικού χαρακτήρα για την ιστορία των μαθηματικών**
    - David Joyce’s History of Mathematics Home Page
    - St. Andrews Mactutor History of Mathematics
    - Trinity College, Dublin, History of Mathematics Archive
3. **Διευθύνσεις με ειδικά θέματα από την ιστορία των μαθηματικών**
    - A Common Book of π
    - Calendar: A History
    - Famous Problems in The History of Mathematics
    - Math Words, And Some Other Words, Of Interest
    - The Metric System

4. **Διευθύνσεις που περιέχουν ιστορίες των μαθηματικών κατά γεωγραφική περιοχή**
    - Ancient India's Contribution to Mathematics
    - Arab Civilization – Mathematics and Astronomy
    - Babylonian Mathematics
    - Egyptian Fractions
    - Egyptian Mathematics Problems
    - Mayan Numbers
    - Symbol, Form and Number in Ancient Greece
    - Wonders of Ancient Greek Mathematics
5. **Διευθύνσεις που περιέχουν βιογραφίες μαθηματικών**
    - Carl Friedrich Gauss
    - Hypatia of Alexandria
    - Mathematicians of the African Diaspora
    - Mathematicians of the 17^{th} and 18^{th} Centuries
    - Newtonia
    - Past Notable Women of Mathematics
    - Portraits of Statisticians
    - Richard Westfall's Archive of the Scientific Community in the 16^{th} and 17^{th} Centuries
    - St. Andrew's Archive
    - The Alan Turing Home Page
    - The Eratosthenes Page
    - The Hall of Great Mathematicians
6. **Διευθύνσεις μουσείων με εκθέματα ιστορίας των μαθηματικών**
    - IMSS – The Institute and Museum of the History of Science, Florence: Galileo Room
    - Library of Congress Vatican Exhibit Mathematics Room
    - The Museum of the History of Science, Oxford
7. **Διευθύνσεις με διδακτικό υλικό**
    - A Mathematical Journey Through Time
    - Euclid's Geometry: History and Practice

- History of Mathematics with Original Sources
- Mathematical Connections
- Teaching History of Mathematics
- Teaching with Original Historical Sources in Mathematics
- The Moldy Oldies

8. Διευθύνσεις με βιβλιογραφικό υλικό

- A Bibliography of Collected Works of Mathematicians
- British Society for the History of Mathematics Abstracts
- Textbooks for A History of Mathematics Course
- Texts on the History of Mathematics