ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Βελτιωμένα **Fréchet-Hoeffding** φράγματα και τιμολόγηση παραγώγων χωρίς μοντέλο

Διπλωματική Εργασία
Επιμέλεια: Μιχαήλ Νταούτης
Α.Μ: ge14077
Επιβλέπων Καθηγητής: Αντώνης Παπαπαντολέων

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:

Αντώνης Παπαπαντολέων
Γιώργος Στάμου
Δημήτρης Φουσκάκης

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Η εργασία αυτή βασίζεται στη θεωρία αντιστάθμισης χρηματοοικονομικών παραγώγων χωρίς μοντέλο και συγκεκριμένα σε μεγάλο βαθμό στις δημοσιεύσεις [15] [19] των T. Lux, A. Papapantoleon και S. Eckstein, M. Kupper. Με λίγα λόγια, σε ένα πιθανοτικό πλάισιο, μας ενδιαφέρει ο υπολογισμός της αναμενόμενης τιμής μιας $f(\mathbf{S})$, όπου $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση και $\mathbf{S} = (S_1, ..., S_d)$ ένα διάνυσμα τυχαίων μεταβλητών. Η f μπορεί να εκφράζει την συνάρτηση αποπληρωμής ενός παραγώγου και το τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{S}$ τις τιμές κάποιων μετοχών που συναλλάσσονται στο χρηματιστήριο. Σε αυτή την περίπτωση, η αναμενόμενη τιμή της f θα εκφράζει την τιμή του παραγώγου σε κάποιο προγενέστερο χρόνο. Βάση αυτής της τιμής θα μπορούμε να πουλήσουμε ή να αγοράσουμε το συγκεκριμένο παράγωγο. Επειδή μελετάμε ένα τυχαίο διάνυσμα που αποτελείται από πολλές τυχαίες μεταβλητές δεν μπορούμε να γνωρίζουμε την από κοινού κατανομή του διανύσματος γνωρίζοντας μόνο τις περιθώριες κατανομές των S_i για όλα τα $i = 1, ..., d$, καθώς στην πολυδιάστατη περίπτωση υπάρχει και το ενδεχόμενο εξάρτησης αυτών των μεταβλητών μεταξύ τους. Εάν δεν υποθέσουμε κάποιο μοντέλο για το $\mathbf{S}$, δηλαδή αν δεν θεωρήσουμε ότι το $\mathbf{S}$ ακολουθεί κάποια συγκεκριμένη κατανομή πιθανότητας, αυτό που μπορούμε να κάνουμε είναι να βρούμε φράγματα για αυτή τη μέση τιμή που θέλουμε να υπολογίσουμε χρησιμοποιώντας τις περιθώριες κατανομές του $\mathbf{S}$ και επιπλέον πληροφορία για τη δομή εξάρτησης αυτών των τυχαίων μεταβλητών. Στόχος μας είναι να κατασκευάσουμε όσο το δυνατόν στενότερα φράγματα για αυτή την αναμενόμενη τιμή, με βάση πληροφορίες που μπορούμε να αντλήσουμε από την αγορά. Η λύση αυτού του προβλήματος θα βασίζεται τόσο σε κλασικές αναλυτικές μεθόδους όσο και σε αριθμητικές μεθόδους με τη χρήση νευρωνικών δικτύων.

Όσον αφορά τη δομή της εργασίας, στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζονται βασικές έννοιες και αποτελέσματα της Θεωρίας Πιθανοτήτων και των Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών που θα χρησιμοποιηθούν στην συνέχεια σε όλη την υπόλοιπη εργασία.

Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται εκτενής αναφορά στις copulas. Οι copulas αποτελούν ισχυρά μαθηματικά εργαλεία με τα οποία μπορούμε να μοντελοποιήσουμε την εξάρτηση τυχαίων μεταβλητών.

Στη συνέχεια, στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζουνται τα βελτιωμένα Fréchet-Hoeffding φράγματα. Αυτά είναι φράγματα για copulas και ισοδύναμα για από κοινού συναρτήσεις κατανομής που χρησιμοποιούν επιπλέον πληροφορία από την αγορά. Μέσω αυτών των φραγμάτων θα μπορέσουμε να περάσουμε σε φράγματα για την αναμενόμενη τιμή της $f(\mathbf{S})$, για κατάλληλες συναρτήσεις f. Ακόμα, παρουσιάζουμε μια εφαρμογή στον υπολογισμό βελτιωμένων φραγμάτων για την τιμή ενός πολυδιάστατου παραγώγου και συγκρίνουμε τα αποτελέσματα μας με τα κλασικά φράγματα της βιβλιογραφίας.

Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζεται μια μεθοδολογία για τη λύση προβλημάτων βέλτιστης μεταφοράς με τη χρήση νευρωνικών δικτύων. Γίνεται εκτενής παρουσίαση της θεωρίας καθώς και του τρόπου που γίνεται η υλοποίηση αριθμητικά. Τέλος, εφαρμόζουμε τη θεωρία σε δύο παραδείγματα και υπολογίζουμε φράγματα για την τιμή ενός πολυδιάστατου παραγώγου. Σε αυτή την περίπτωση, συγκρίνονται τα φράγματα που προκύπτουν από τα νευρωνικά δίκτυα με τα βελτιωμένα φράγματα του κεφαλαίου τρία καθώς και με τα κλασικά φράγματα.

Ευχαριστίες

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά το κο Αντώνη Παπαπαντολέων για τη πολύτιμη καθοδήγηση του στην εκπόνηση αυτής της διπλωματικής εργασίας, καθώς και για τις γνώσεις και τις συμβουλές που μου έδωσε σε όλη τη διάρκεια των φοιτητικών μου χρόνων.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαιτέρως τα μέλη της εξεταστικής επιτροπής, τον κο Γιώργο Στάμου και τον κο Δημήτρη Φουσκάκη που ασχολήθηκαν με τη διπλωματική μου εργασία.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω ολόψυχα τους γονείς μου και την αδελφή μου για τη στήριξη που μου προσέφεραν και συνεχίζουν να μου προσφέρουν σε κάθε βήμα της ζωής μου.

1 Βασικές έννοιες

1.1 Βασικές έννοιες από τη Θεωρία Πιθανοτήτων

Ορισμός 1.1 *Έστω Ω ένα μη κενό σύνολο. Μια κλάση $\mathcal{F}$ υποσυνόλων του Ω ονομάζεται **σ-άλγεβρα** αν ικανοποιεί τα παρακάτω*

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. *αν* $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$
3. *αν* $A_n \in \mathcal{F}\ \forall\ n \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

Ορισμός 1.2 ***Διύλιση (Filtration)*** *ονομάζεται κάθε αύξουσα οικογένεια $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ υπο-σ-αλγεβρών της $\mathcal{F}$, δηλαδή $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F},\ \forall\ t \in \mathbb{T}$ και $\forall\ t_1, t_2 \in \mathbb{T}$ με $t_1 \leq t_2 \implies \mathcal{F}_{t_1} \subseteq \mathcal{F}_{t_2}$, όπου $\mathbb{T}$ ένα ολικά διατεταγμένο σύνολο. Συνήθως $\mathbb{T} = \{0, ..., T \in \mathbb{N}\}$ ή $\mathbb{T} = [0, +\infty)$.*

Ορισμός 1.3 *Έστω $\mathcal{A}$ μια κλάση υποσυνόλων του Ω. Τότε η $\sigma(\mathcal{A})$, **η σ-άλγεβρα που παράγεται από το** $\mathcal{A}$, είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα στο Ω που περιέχει την κλάση $\mathcal{A}$ ως υποκλάση.*

Ορισμός 1.4 *Έστω Ω ένας τοπολογικός χώρος. **Borel** σ-άλγεβρα στο Ω, $\mathcal{B}(\Omega)$, είναι η σ-άλγεβρα που παράγεται από την οικογένεια των ανοικτών υποσυνόλων του Ω.*
Συμβολισμός: $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}^n$.

Ορισμός 1.5 *Έστω Ω ένα μη κενό σύνολο και $\mathcal{F}$ μια σ-άλγεβρα υποσυνόλων του Ω. Η μη αρνητική συνολοσυνάρτηση $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ καλείται **μέτρο πιθανότητας** αν*

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
3. *και αν για κάθε ακολουθία $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ξένων ανα δύο συνόλων της $\mathcal{F}$ ισχύει*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Η τριάδα $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ καλείται **χώρος πιθανότητας**.

Σημείωση: Αν η συνολοσυνάρτηση $\mathbb{P}$ δεν ικανοποιεί τη σχέση 2. του παραπάνω ορισμού, τότε ονομάζεται απλά μέτρο και η τριάδα $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ καλείται **χώρος μέτρου**.

Ορισμός 1.6 *Έστω $(\Omega, \mathcal{F})$ μετρήσιμος χώρος στον οποίο ορίζονται τα μέτρα μ, ν. Αν για κάθε $A \in \mathcal{F}$ ισχύει $\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$, τότε λέμε ότι το μέτρο ν είναι **απολύτως συνεχές** ως προς το μέτρο μ και το συμβολίζουμε με $\nu \ll \mu$. Ακόμα, αν για κάθε $A \in \mathcal{F}$ ισχύει $\mu(A) = 0 \iff \nu(A) = 0$, τότε λέμε ότι το μέτρο ν είναι **ισοδύναμο** με το μέτρο μ και το συμβολίζουμε με $\nu \sim \mu$.*

Ορισμός 1.7 *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ χώρος πιθανότητας. Η συνάρτηση $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ καλείται **τυχαία μεταβλητή (τ.μ)** αν $X^{-1}(A) \in \mathcal{F},\ \forall\ A \in \mathcal{B}^n$, εναλλακτικά η X καλείται και $\mathcal{F}$-**μετρήσιμη**.*

Παρατήρηση: Η μικρότερη σ-άλγεβρα ως προς την οποία η $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ είναι μετρήσιμη συμβολίζεται με $\sigma(X)$ και αποδεικνύεται ότι $\sigma(X) = \{X^{-1}(B), B \in \mathcal{B}^n\}$.

Πρόταση 1.1 *Η συνάρτηση $X : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι $\mathcal{F}$-μετρήσιμη αν και μόνο αν $\{X \leq t\} \in \mathcal{F},\ \forall\ t \in \mathbb{R}$.*

Ορισμός 1.8 *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ χώρος πιθανότητας και $X : \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή. Το μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}^X : \mathcal{B} \to [0,1]$ με $\mathbb{P}^X(A) = \mathbb{P}(X \in A)$, $\forall\ A \in \mathcal{F}$ ονομάζεται* ***κατανομή*** *της X.*

Ορισμός 1.9 *Δύο τυχαίες μεταβλητές $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ λέγονται* ***ισόνομες*** *αν έχουν την ίδια κατανομή. Δηλαδή, αν $\mathbb{P}^X(A) = \mathbb{P}^Y(A)$, $\forall\ A \in \mathcal{B}$.*

Πρόταση 1.2 *Έστω χώρος πιθανότητας $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu)$. Ορίζουμε τη* ***συνάρτηση κατανομής πιθανότητας*** *που σχετίζεται με το μέτρο πιθανότητας μ, $F_\mu : \mathbb{R} \to [0,1]$, ως εξής*

$$F_\mu(x) = \int_{-\infty}^{x} d\mu \equiv \mu((-\infty, x])$$

Η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας έχει τις παρακάτω ιδιότητες

1. *F_μ δεξιά συνεχής*

2. *F_μ αύξουσα*

3. *$\lim_{x\to-\infty} F_\mu(x) = 0$ και $\lim_{x\to\infty} F_\mu(x) = 1$*

Ακόμα, ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή δοθείσης συνάρτησης κατανομής πιθανότητας $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ που είναι δεξιά συνεχής, αύξουσα, με $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ και $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ υπάρχει μοναδικό μέτρο πιθανότητας μ τέτοιο ώστε $\mu((-\infty, x]) = F(x)$.

Ορισμός 1.10 (Γενικευμένη Αντίστροφος Συνάρτηση)
Έστω απεικόνιση $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Θα συμβολίζουμε με $T \nearrow$ όταν η T είναι αύξουσα, δηλαδή αν $T(x) \leq T(y)$ για όλα τα $x < y$ και $T \uparrow$ όταν η T είναι γνησίως αύξουσα, δηλαδή αν $T(x) < T(y)$ για όλα τα $x < y$. Με $\operatorname{ran} T = \{T(x) : x \in \mathbb{R}\}$ συμβολίζουμε το εύρος της T ή ισοδύναμα το σύνολο τιμών της T.

Για μια αύξουσα συνάρτηση $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $T(-\infty) := \lim_{x\downarrow-\infty} T(x)$ και $T(\infty) := \lim_{x\uparrow\infty} T(x)$, η ***γενικευμένη αντίστροφος*** *της T, $T^{\leftarrow} : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}} := [-\infty, \infty]$, ορίζεται ως*

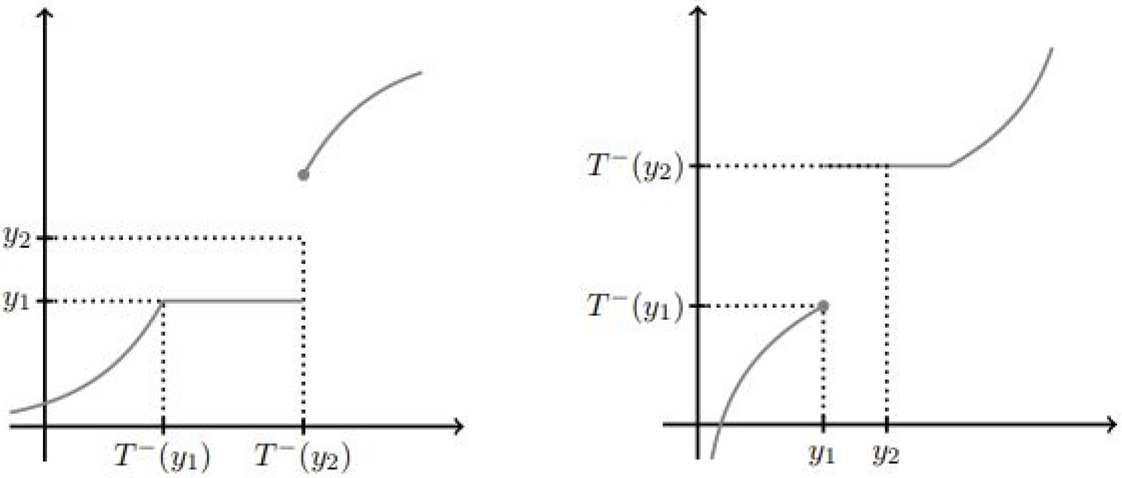
$$T^{\leftarrow}(y) = \inf\{x \in \mathbb{R} : T(x) \geq y\},\ y \in \mathbb{R}$$

όπου χρησιμοποιούμε τη σύμβαση $\inf \emptyset = \infty$. Αν η $T : \mathbb{R} \to [0,1]$ είναι συνάρτηση κατανομής πιθανότητας, η $T^{\leftarrow} : [0,1] \to \overline{\mathbb{R}}$ ονομάζεται και ***ποσοστιαία (quantile) συνάρτηση*** *της T.*

Σχόλιο 1.1

1. *Αν η T είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, τότε η $T^{\leftarrow}$ ταυτίζεται με την T^{-1}, την συνήθη αντίστροφη της T στο $\operatorname{ran} T$.*

2. *Στο σχήμα 1.1 απεικονίζονται μια αύξουσα συνάρτηση T και η αντίστοιχη γενικευμένη αντίστροφος $T^{\leftarrow}$. Τονίζουμε ότι όταν η T είναι σταθερή η $T^{\leftarrow}$ κάνει άλμα και όταν η T κάνει άλμα η $T^{\leftarrow}$ είναι σταθερή.*



Σχήμα 1.1: Μια αύξουσα συνάρτηση T (αριστερά) και η αντίστοιχη γενικευμένη αντίστροφος $T^{\leftarrow}$ (δεξία) [4].

Πρόταση 1.3 *Έστω $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ αύξουσα και $x, y \in \mathbb{R}$. Τότε,*

1. $T^{\leftarrow}(y) = -\infty$ *αν και μονο αν* $T(x) \geq y$, *για όλα τα* $x \in \mathbb{R}$. *Όμοια,* $T^{\leftarrow}(y) = \infty$ *αν και μονο αν* $T(x) < y$, *για όλα τα* $x \in \mathbb{R}$.
2. $T^{\leftarrow} \nearrow$. *Αν* $T^{\leftarrow}(y) \in (-\infty, \infty)$, *η* $T^{\leftarrow}$ *είναι αριστερά συνεχής στο* y *και δέχεται όριο από δεξιά στο* y.
3. $T^{\leftarrow}(T(x)) \leq x$. *Αν* $T \uparrow$, *τότε* $T^{\leftarrow}(T(x)) = x$.
4. *Έστω* T *δεξιά συνεχής. Αν* $T^{\leftarrow}(y) < \infty$ *τότε* $T\left(T^{\leftarrow}(y)\right) \geq y$. *Ακόμα, αν* $y \in \operatorname{ran} T \cup \{\inf \operatorname{ran} T, \sup \operatorname{ran} T\}$ *έχουμε* $T\left(T^{\leftarrow}(y)\right) = y$. *Τέλος, αν* $y < \inf \operatorname{ran} T$ *τότε* $T\left(T^{\leftarrow}(y)\right) > y$ *και αν* $y > \sup \operatorname{ran} T$ *τότε* $T\left(T^{\leftarrow}(y)\right) < y$.
5. *Αν* $T(x) \geq y$ *τότε* $x \geq T^{\leftarrow}(y)$. *Το αντίστροφο ισχύει αν η* T *είναι δεξιά συνεχής. Ακόμα, αν* $T(x) < y$ *τότε* $x \leq T^{\leftarrow}(y)$.
6. $(T^{\leftarrow}(y-), T^{\leftarrow}(y+)) \subseteq \{x \in \mathbb{R} : T(x) = y\} \subseteq [T^{\leftarrow}(y-), T^{\leftarrow}(y+)]$, *όπου* $T^{\leftarrow}(y-) = \lim_{z \uparrow y} T^{\leftarrow}(z)$ *και* $T^{\leftarrow}(y+) = \lim_{z \downarrow y} T^{\leftarrow}(z)$.
7. T *συνεχής αν και μόνο αν* $T^{\leftarrow} \uparrow$ *στο* $[\inf \operatorname{ran} T, \sup \operatorname{ran} T]$. $T \uparrow$ *αν και μόνο αν* $T^{\leftarrow}$ *είναι συνεχής στο* $\operatorname{ran} T$.
8. *Αν* T_1, T_2 *είναι δεξιά συνεχείς απεικονίσεις με τις ίδιες ιδιότητες με την* T, *τότε* $(T_1 \circ T_2)^{\leftarrow} = T_2^{\leftarrow} \circ T_1^{\leftarrow}$

Η **απόδειξη** της παραπάνω Πρότασης βρίσκεται στο [4].

Θεώρημα 1.1 (Μονότονης Σύγκλισης)
Αν f_n *αύξουσα ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων τέτοια ώστε* $f_n \uparrow f$, *τότε*

$$\int f_n \, d\mu \uparrow \int f \, d\mu.$$

Θεώρημα 1.2 (Λήμμα Fatou)
Αν f_n ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων, τότε

$$\int \liminf f_n \, d\mu \leq \liminf \int f_n \, d\mu.$$

Θεώρημα 1.3 (Κυριαρχημένης Σύγκλισης)
Αν $(f_n : \Omega \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων τέτοια ώστε $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ σχεδόν παντού, δηλαδή $\mu\left(\{f_n \not\to f\}\right) = 0$, και αν $|f_n(x)| \leq g(x)$ σχεδόν παντού στο Ω, όπου $g : \Omega \to [0, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση με $\int g \, d\mu < \infty$. Τότε $\int |f| \, d\mu < \infty$ και $\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| \, d\mu = 0$ και άρα

$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

Θεώρημα 1.4 (Φραγμένης Σύγκλισης)
Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ χώρος πεπερασμένου μέτρου ($\mu(\Omega) < \infty$) και $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ σχεδόν παντού και $|f_n| \leq M$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$ όπου $M < \infty$ σταθερά. Τότε $\int |f| \, d\mu < \infty$ και $\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| \, d\mu = 0$ και άρα

$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

Ορισμός 1.11 *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ χώρος πιθανότητας και $X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}} := [-\infty, \infty]$ τυχαία μεταβλητή, τότε*

1. *συμβολίζουμε το ολοκλήρωμα της X ως προς το μέτρο $\mathbb{P}$ με*

   $$\mathbb{E}(X) := \int X \, d\mathbb{P}$$

   *και το ονομάζουμε **μέση ή αναμενόμενη τιμή** της X,*

2. *αν επιπλέον η $X \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ορίζουμε ως*

   $$\mathrm{Var}(X) := \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)$$

   *τη **διασπορά** της X,*

3. *αν $X, Y \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ και ορίζεται η $\mathbb{E}(XY)$, τότε ονομάζουμε **συνδιασπορά** των X, Y την ποσότητα*

   $$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))].$$

Ορισμός 1.12 (Ο χώρος $\mathcal{L}^p$)
*Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ χώρος πιθανότητας, $X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ τυχαία μεταβλητή και $p \geq 1$, ορίζουμε ως p-**νόρμα** της X την*

$$\|X\|_p := \left(\mathbb{E}\left(X^p\right)\right)^{1/p}.$$

Τότε

$$X \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \Leftrightarrow \|X\|_p < \infty.$$

Όταν είναι δεδομένο ποιός είναι ο χώρος πιθανότητας στον οποίο βρίσκεται η τυχαία μας μεταβλητή, για συντομία γράφουμε $\mathcal{L}^p$ αντί για $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Θεώρημα 1.5 *Αν X, Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές στον $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, τότε $XY \in \mathcal{L}^1$ και*

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Αν επιπλέον οι $X, Y \in \mathcal{L}^2$, τότε $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$ και $\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$.

Θεώρημα 1.6 (Σύγκλιση Τυχαίων Μεταβλητών)
Έστω $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}, X$ *πραγματικές τυχαίες μεταβλητές στον* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

1. $X_n \to X$ ***σχεδόν βεβαίως (σ.β)***, *αν*
$$\mathbb{P}\Big(\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\Big) = 1$$
2. $X_n \to X$ ***κατα πιθανότητα***, *αν για καθε* $\varepsilon > 0$
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\right) = 0$$
3. $X_n \xrightarrow{d} X$ ***κατα κατανομή***, *αν*
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(X_n \leq x\right) = \mathbb{P}(X \leq x)$$
για κάθε x *στο οποίο η συνάρτηση κατανομής* $F(x) = \mathbb{P}\left(X \leq x\right)$ *είναι συνεχής.*
4. $X_n \to X$ ***στον*** $\mathcal{L}^{\mathrm{p}}$ *για* $1 \leq p < \infty$, *αν*
$$\lim_{n\to\infty} \left\|X_n - X\right\|_p = 0.$$

Μια πολύ σημαντική θεωρία στη στοχαστική διάταξη, δηλαδή στη διάταξη τυχαίων διανυσμάτων, είναι η **orthant διάταξη**.

Ορισμός 1.13 *Για δύο τυχαία διανύσματα* $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_d)$ *και* $\mathbf{Y} = (Y_1, ..., Y_d)$ *με συναρτήσεις κατανομής πιθανότητας* $F_{\mathbf{X}}, F_{\mathbf{Y}}$ *αντίστοιχα, λέμε ότι η* $\mathbf{Y}$ *κυριαρχεί την* $\mathbf{X}$ *στη* ***κάτω orthant διάταξη*** *αν ισχύει*
$$F_{\mathbf{X}}\left(x_1, \ldots, x_d\right) \leq F_{\mathbf{Y}}\left(x_1, \ldots, x_d\right), \quad \text{για όλα τα } (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d.$$
Παρόμοια, η $\mathbf{Y}$ *κυριαρχεί την* $\mathbf{X}$ *στη* ***πάνω orthant διάταξη*** *αν ισχύει*
$$F_{-\mathbf{X}}\left(x_1, \ldots, x_d\right) \leq F_{-\mathbf{Y}}\left(x_1, \ldots, x_d\right), \quad \text{για όλα τα } (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d.$$
Όπου $F_{-\mathbf{X}}$ *η κατανομή του* $(-X_1, ..., -X_d)$ *και* $F_{-\mathbf{Y}}$ *η κατανομή του* $(-Y_1, ..., -Y_d)$.

Θεώρημα 1.7 (Ισχυρός Νόμος των Μεγάλων Αριθμών)
Έστω $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *ανεξάρτητες, ισόνομες, πραγματικές τυχαίες μεταβλητές στον* $\mathcal{L}^2$.
Αν $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ *και* $\mu = \mathbb{E}\left(X_1\right)$, *τότε*
$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu \text{ σ.β.}$$

Θεώρημα 1.8 (Κεντρικό Οριακό Θεώρημα)
Έστω $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *ανεξάρτητες, ισόνομες, πραγματικές τυχαίες μεταβλητές στον* $\mathcal{L}^2$.
Αν $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, $\mu = \mathbb{E}\left(X_1\right)$ *και* $\sigma^2 = \mathrm{Var}\left(X_1\right) < \infty$, *τότε*
$$\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow[n\to\infty]{d} Z, \text{ όπου } Z \sim N(0,1).$$

Θεώρημα 1.9 (Radon-Nikodym)
Έστω $\mathbb{P}, \mathbb{Q}$ *δύο μέτρα πιθανότητας στον χώρο* $(\Omega, \mathcal{F})$.
Αν $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ *τότε υπάρχει μια τυχαία μεταβλητή* $X \geq 0, X \in \mathcal{L}^1$ *τέτοια ώστε*
$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{1}_A\right] = \mathbb{Q}(A) = \int_A X \mathrm{d}\mathbb{P} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[X \mathbb{1}_A\right], \quad \forall A \in \mathcal{F}$$
Η τ.μ X *ονομάζεται* ***πυκνότητα*** *και συμβολίζεται με* $\frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}}{\mathrm{d}\mathbb{P}}$. *Είναι* $\mathbb{P}$-*σ.β μοναδική.*

Ορισμός 1.14 *Η στοχαστική διαδικασία* $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ *ονομάζεται* ***προσαρμοσμένη*** *ως προς τη διήθηση* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *αν η τ.μ* X_t *είναι* $\mathcal{F}_t$*-μετρήσιμη για κάθε* $t \geq 0$.

Ορισμός 1.15 *Η* $\mathbb{F} := (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$*-προσαρμοσμένη στοχαστική διαδικασία* $M = \{M_t\}_{t\geq 0}$ *ονομάζεται* ***martingale*** *αν*

1. $\mathbb{E}\left(|M_t|\right) < \infty,\ \forall\ t \geq 0$ *και*

2. $\mathbb{E}\left(M_t|\mathcal{F}_s\right) = M_s,\ \forall\ s \leq t.$

Ορισμός 1.16 *Στον παραπάνω ορισμό, αν αντικαταστήσουμε τη σχέση 2. με τη σχέση* $\mathbb{E}\left(M_t|\mathcal{F}_s\right) \geq M_s,\ \forall\ s \leq t$, *τότε η στοχαστική διαδικασία ονομάζεται* ***submartingale***, *ενώ αν αντικαταστήσουμε τη σχέση 2. με τη σχέση* $\mathbb{E}\left(M_t|\mathcal{F}_s\right) \leq M_s,\ \forall\ s \leq t$, *τότε η στοχαστική διαδικασία ονομάζεται* ***supermartingale***.

Ορισμός 1.17 (Μέτρο martingale)
Ένα μέτρο πιθανότητας $\mathbb{Q}$ *στον* $(\Omega, \mathcal{F})$ *ονομάζεται* ***μέτρο martingale*** *ή* ***μέτρο ουδέτερου ρίσκου*** *για το μοντέλο μίας περιόδου εάν*

1. $S_1 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{Q})$ *και*

2. $S_0 = \mathbb{E}\left[\frac{S_1}{1+r}\right]$

Παρατήρηση: Εάν το $\mathbb{Q}$ είναι ένα μέτρο martingale και επίσης ισχύει ότι $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$, τότε το $\mathbb{Q}$ ονομάζεται ισοδύναμο μέτρο martingale.

Ορισμός 1.18 (Κίνηση Brown)
Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} := \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ *χώρος πιθανότητας. Η πραγματική στοχαστική διαδικασία* $\{W_t\}_{t\geq 0}$ *ονομάζεται* ***κίνηση Brown*** *αν ικανοποιεί τα εξής*

1. *Η ανέλιξη* $\{W_t\}_{t\geq 0}$ *έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις, δηλαδή για κάθε* $n \geq 1$ *και χρονική διαμέριση* $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ *οι τυχαίες μεταβλητές*

$$W_{t_1} - W_0, W_{t_2} - W_{t_1}, ..., W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$$

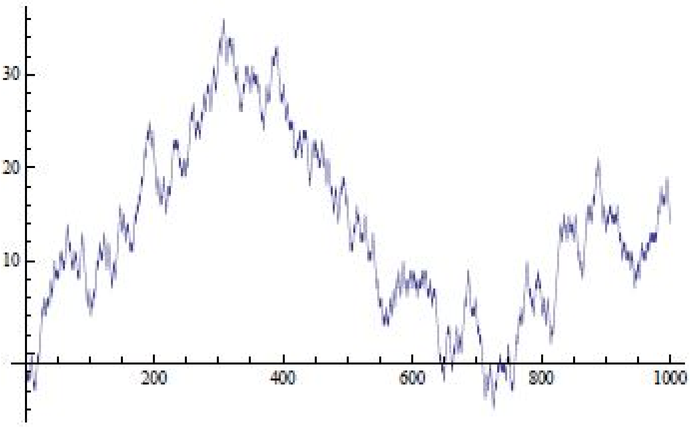
   είναι ανεξάρτητες.

2. *Η ανέλιξη* $\{W_t\}_{t\geq 0}$ *έχει κανονικά κατανεμημένες προσαυξήσεις, δηλαδή για κάθε* $0 \leq s < t$

$$W_t - W_s \sim N(0, t-s).$$

3. *Με πιθανότητα 1, η συνάρτηση* $t \mapsto W_t$ *είναι συνεχής.*

Αν για την κίνηση Brown ισχύει $W_0 = 0$, *τότε ονομάζεται* ***τυπική κίνηση Brown***.



Σχήμα 1.2: Το γράφημα μίας πραγματοποίησης της κίνησης Brown [3].

Θεώρημα 1.10 (Ο τύπος Itô-Doeblin)

(Μορφή 1.)

Έστω $f \in C^2(\mathbb{R})$ *και* X *συνεχές martingale. Τότε με πιθανότητα 1,*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)\ dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\ d\langle X\rangle_s$$

για κάθε $t > 0$.

(Μορφή 2.)

Έστω $f \in C^{1,2}([0,\infty);\mathbb{R})$ *και* X *συνεχές martingale. Τότε με πιθανότητα 1,*

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s)\ ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s)\ dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s)\ d\langle X\rangle_s$$

για κάθε $t > 0$.

Ορισμός 1.19 *Έστω συνάρτηση* $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *και* $a, b \in \mathbb{R}$ *με* $a \leq b$, *ορίζουμε τον* ***τελεστή πεπερασμενών διαφορών*** *της* f *ως εξής*

$$\Delta^i_{a,b}\, f(x_1, ..., x_d) = f(x_1, ..., x_{i-1}, b, x_{i+1}, ..., x_d) - f(x_1, ..., x_{i-1}, a, x_{i+1}, ..., x_d).$$

1.2 Βασικές έννοιες Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών

Ορισμός 1.20 *Μια* ***μετοχή*** *είναι ένα έγγραφο που διασφαλίζει στον κάτοχο της μερίδιο ιδιοκτησίας σε μια επιχείρηση. Αν συμβολίσουμε με* S_t *την τιμή μίας μετοχής στον χρόνο* t, *τότε η υπόθεση που κάνουμε είναι ότι η* $(S_t)_{t\geq 0}$ *είναι μια στοχαστική ανέλιξη, δηλαδή κάθε* S_t *είναι μία τυχαία μεταβλητή. Αυτό αντικατοπτρίζει την αδυναμία μας να ξέρουμε την τιμή* S_t *πριν το χρόνο* t.

Ορισμός 1.21 *Η ύπαρξη* ***arbitrage*** *σε μια οικονομία σημαίνει ότι υπάρχει τρόπος να αποκομίσει κάποιος κέρδος ντετερμινιστικά χωρίς καθόλου ρίσκο.*

Παράδειγμα 1.1 (Arbitrage)
Μια επιχείρηση πουλάει χρυσό με κόστος 30 ευρώ το γραμμάριο, ενώ μια άλλη αγοράζει με 31 ευρώ το γραμμάριο. Μπορούμε να αγοράσουμε από την πρώτη και να πουλήσουμε στη δεύτερη μια μεγάλη ποσότητα χρυσού και να έχουμε κέρδος χωρίς ρίσκο. Επειδή αυτό θα το έκανε ο καθένας που θα το αντιλαμβανόταν, τέτοια ευκαιρία θα εξαφανιζόταν αμέσως.

Θεώρημα 1.11 (1ο Θεμελιώδες Θεώρημα Αποτίμησης Χρεογράφων)
Μια χρηματοοικονομική αγορά είναι ελεύθερη από arbitrage, αν και μόνο αν υπάρχει τουλάχιστον ένα ισοδύναμο μέτρο martingale $\mathbb{Q}$.

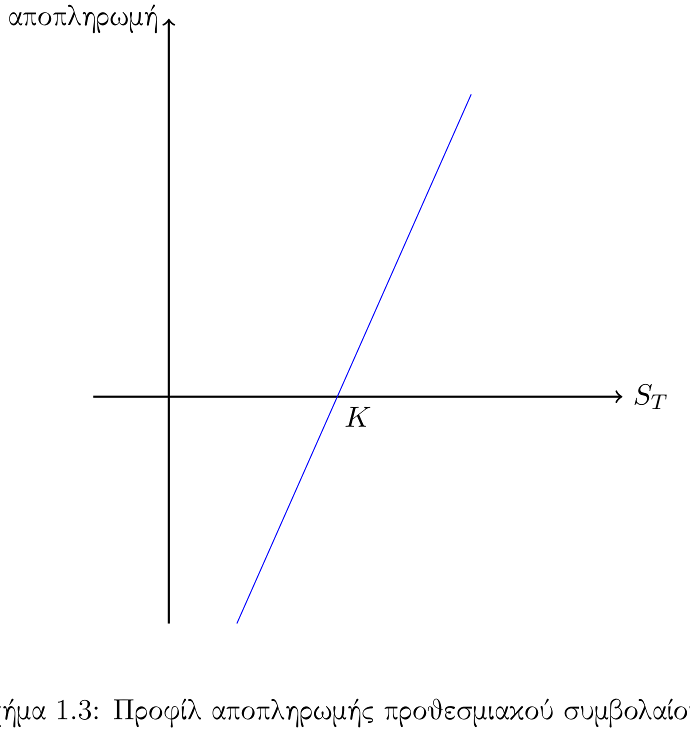
Ορισμός 1.22 ***Παράγωγο*** *ονομάζουμε ένα χρηματοοικονομικό προϊόν του οποίου η αξία παράγεται (εξαρτάται) από άλλα βασικότερα συνήθως αγαθά (underlying), όπως για παράδειγμα οι μετοχές ή/και ο χρυσός.*

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε κάποια βασικά παράγωγα.

Ορισμός 1.23 *Ένα* ***προθεσμιακό συμβόλαιο (forward contract)*** *είναι ένα συμβόλαιο που υπογράφεται σε κάποιο χρόνο t, από το οποίο προκύπτει η υποχρέωση να αγοραστεί ή να πουληθεί*

- *ένα βασικό αγαθό S με τιμή S_t (underlying)*
- *σε κάποιο συγκεκριμένο μελλοντικό χρόνο $T > t$ (χρόνος ωρίμανσης, maturity)*
- *σε κάποια τιμή άσκησης (strike) K που καθορίζεται στο χρόνο t*

Συνάρτηση αποπληρωμής (από τη σκοπιά του αγοραστή, long) $= S_T - K$.
Τιμή του συμβολαίου στο χρόνο $t := F_t$



Σχήμα 1.3: Προφίλ αποπληρωμής προθεσμιακού συμβολαίου.

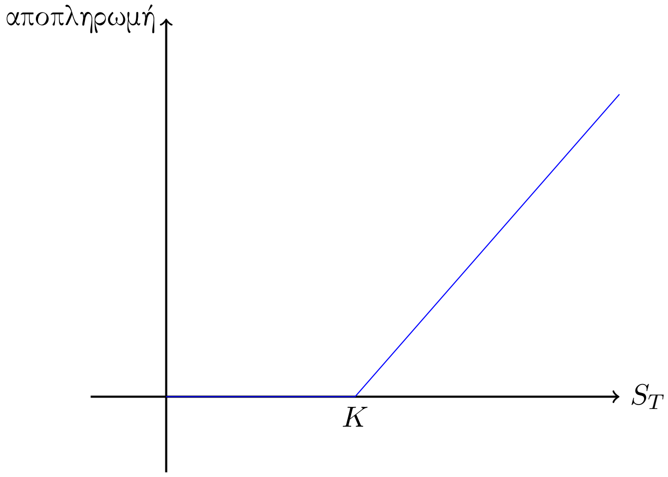
Ορισμός 1.24 *Ένα* ***Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς (european call option)*** *είναι ένα συμβόλαιο που υπογράφεται σε κάποιο χρόνο t, από το οποίο προκύπτει το δικαίωμα να αγοραστεί*

- *ένα βασικό αγαθό S με τιμή S_t (underlying)*

- *σε κάποιο συγκεκριμένο μελλοντικό χρόνο $T > t$ (χρόνος ωρίμανσης, maturity)*

- *σε κάποια τιμή άσκησης (strike) K που καθορίζεται στο χρόνο t*

Συνάρτηση αποπληρωμής (από τη σκοπιά του αγοραστή, long) $= (S_T - K)^+ := \max\{S_T - K, 0\}$.
Τιμή του συμβολαίου στο χρόνο $t := C_t$



Σχήμα 1.4: Προφίλ αποπληρωμής ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς.

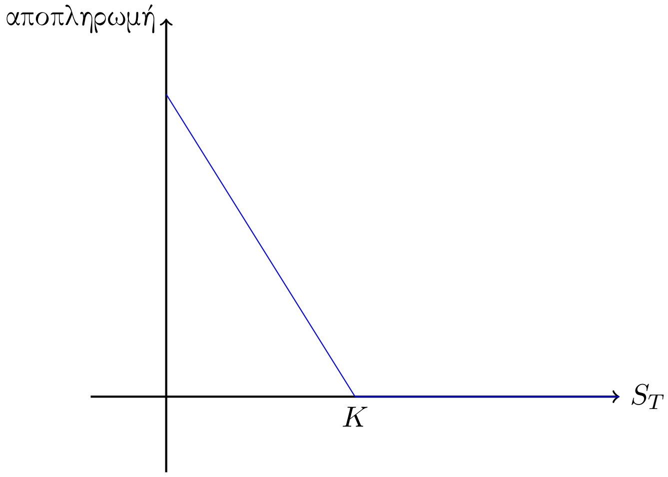
Ορισμός 1.25 *Ένα **Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης (european put option)** είναι ένα συμβόλαιο που υπογράφεται σε κάποιο χρόνο t, από το οποίο προκύπτει το δικαίωμα να πωληθεί*

- *ένα βασικό αγαθό S με τιμή S_t (underlying)*

- *σε κάποιο συγκεκριμένο μελλοντικό χρόνο $T > t$ (χρόνος ωρίμανσης, maturity)*

- *σε κάποια τιμή άσκησης (strike) K που καθορίζεται στο χρόνο t*

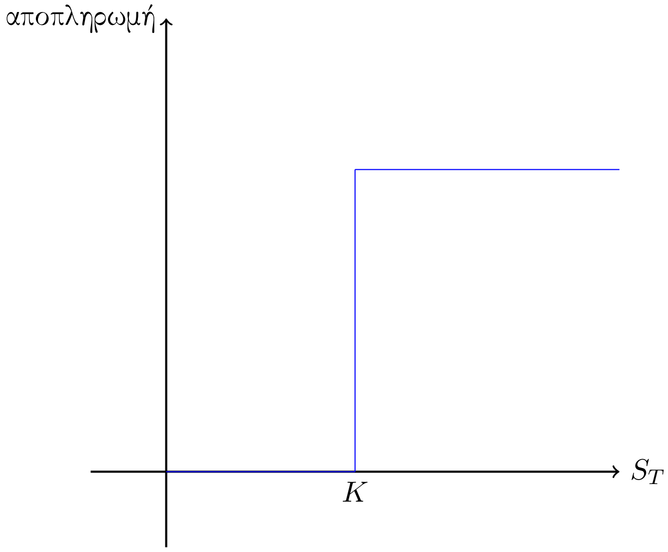
Συνάρτηση αποπληρωμής (από τη σκοπιά του αγοραστή, long) $= (K - S_T)^+ := \max\{K - S_T, 0\}$.
Τιμή του συμβολαίου στο χρόνο $t := P_t$



Σχήμα 1.5: Προφίλ αποπληρωμής ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης.

Στη συνέχεια δίνουμε τον ορισμό ενός **binary δικαιώματος**. Τα binary δικαιώματα εξαρτώνται ουσιαστικά από ένα αποτέλεσμα της μορφής ναι ή όχι, εξού και το όνομά τους binary (δυαδικός).

Ορισμός 1.26 *Ένα **binary δικαίωμα** είναι ένα παράγωγο που δίνει στον αγοραστή του μία χρηματική μονάδα στην περίπτωση που συμβεί ένα συγκεκριμένο γεγονός και τίποτα σε κάθε άλλη περίπτωση. Για παράδειγμα, αν πιστεύουμε ότι η τιμή μίας μετοχής S_t θα είναι μεγαλύτερη από K στο μελλοντικό χρόνο T αγοράζουμε (long) στο χρόνο t το binary δικαίωμα με συνάρτηση αποπληρωμής $\mathbb{1}_{S_T>K}$. Την τιμή του συμβολαίου στο χρόνο t θα τη συμβολίζουμε με $Bi(t,T)$.*



Σχήμα 1.6: Προφίλ αποπληρωμής binary δικαιώματος.

1.3 Μοντέλο Black-Scholes

Θεωρούμε μια χρηματοοικονομική αγορά με δύο προϊόντα. Το ένα είναι η δυνατότητα κατάθεσης σε μια τράπεζα ή ισοδύναμα αγορά ομολόγων της τράπεζας (θεωρούμε αυτό το προϊόν χωρίς ρίσκο) και το άλλο είναι μετοχές μιας εταιρίας. Συμβολίζουμε την τιμή του ομολόγου με B_t και την τιμή της μετοχής με S_t την χρονική στιγμή t.

Υποθέτουμε ότι οι τιμές αυτές εξελίσσονται ως εξής

$$\begin{cases} dB_t &= rB_t\ dt,\ B_0 = 1 \\ \dfrac{dS_t}{S_t} &= \mu\ dt + \sigma\ dW_t \end{cases}$$

όπου $\mu \in \mathbb{R},\ r, \sigma > 0$ σταθερές. Ακόμα, υποθέτουμε ότι

- Δεν υπάρχει κόστος συναλλαγής
- Δεν υπάρχει διαφορά στις τιμές ζήτησης και προσφοράς (bid-ask spread)
- Δεν υπάρχει ασυμμετρία στα επιτόκια
- Δεν υπάρχουν περιορισμοί στις ανοικτές πωλήσεις (short selling constraints)
- Δεν υπάρχει πιστωτικός κίνδυνος αντισυμβαλλόμενου (counterparty credit risk)

Για την τιμή του ομολόγου μπορούμε να γράψουμε αμέσως $B_t = e^{rt}$, για κάθε $t \geq 0$. Δηλαδή το αρχικό μας ποσό $B_0 = 1$ ανατοκίζεται με συνεχή και σταθερό ρυθμό ανατοκισμού r. Όσον αφορά την τιμή της μετοχής, η σχετική αλλαγή της σε ένα μικρό χρονικό διάστημα $[t, t+dt]$ προέρχεται από μια ντετερμινιστική αύξηση κατα $\mu\ dt$ στην οποία προστίθεται μια τυχαία μεταβολή την οποία δεν ξέρουμε ακόμα τη χρονική στιγμή t, όμως ξέρουμε ότι έχει κατανομή $N\left(0, \sigma^2\ dt\right)$. Εφαρμόζοντας τον τύπο Itô-Doeblin (1.10) για τη $\log\left(S_t\right)$ παίρνουμε τελικά τη λεγόμενη γεωμετρική κίνηση Brown

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \sigma^2/2\right) t + \sigma W_t\right)$$

Παρατηρούμε από τη μορφή της λύσης ότι η S_t είναι θετική για όλους τους χρόνους. Πράγμα λογικό αφού μια μετοχή το πολύ να μηδενιστεί, πότε όμως δεν μπορεί να πάρει αρνητική τιμή.

Αν θεωρήσουμε, τώρα, ένα Ευρωπαϊκό παράγωγο με τιμή εξάσκησης K (strike) και χρόνο ωρίμανσης (maturity) T, τότε η τιμή του τη χρονική στιγμή T θα συμβολίζεται με $D_K(T, T; S_T)$. Για παράδειγμα, αν είχαμε Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς θα ήταν $D_K(T, T; S_T) = (S_T - K)^+$. Στόχος μας είναι να φτιάξουμε ένα χαρτοφυλάκιο αντιστάθμισης που τη χρονική στιγμή T η αξία του $V\left(t, S_t\right)$ να ισούται με την αποπληρωμή του δικαιώματος, δηλαδή $V\left(T, S_T\right) = D_K(T, T; S_T)$. Από την αρχή του No-Arbitrage θα ισχύει ότι το χαρτοφυλάκιο και το παράγωγο θα έχουν την ίδια τιμή για κάθε προγενέστερο χρόνο, δηλαδή $V(t, S_t) = D_K(t, T; S_t),\ \forall\ t \leq T$.

Έστω a_t, b_t ο αριθμός των μετοχών και των ομολόγων αντίστοιχα τη χρονική στιγμή t που έχουμε στο χαρτοφυλάκιο μας. Τότε η αξία του χαρτοφυλακίου καθε χρονική στιγμή θα ισούται με

$$V\left(t, S_t\right) = a_t S_t + b_t B_t$$

Επειδή το συμβόλαιο είναι Ευρωπαϊκού τύπου δεν υπάρχει ροή ρευστού μέχρι τη χρονική στιγμή T και άρα το χαρτοφυλάκιο μας πρέπει να είναι αυτοχρηματοδοτούμενο με την έννοια ότι κάθε χρονική στιγμή η αλλαγή στην αξία του χαρτοφυλακίου πρέπει να ισούται με το κέρδος ή τη ζημία που οφείλεται σε αλλαγή της S_t και του B_t. Δηλαδή, έχουμε την επιπλέον συνθήκη αυτοχρηματοδότησης

$$dV\left(t, S_t\right) = a_t dS_t + b_t dB_t$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις του μοντέλου στη συνθήκη αυτοχρηματοδότησης παίρνουμε ότι

$$dV\left(t, S_t\right) = \left\{a_t \mu S_t + b_t r B_t\right\} dt + a_t \sigma S_t dW_t$$

Στο σημείο αυτό θα υποθέσουμε ότι η $V(t, S_t)$ είναι της μορφής $V(t, S_t) = f(t, S_t)$ για κατάλληλα ομαλή, λεία συνάρτηση f. Εφαρμόζοντας τον τύπο Itô-Doeblin (1.10) για την $f(t, S_t)$ και αντικαθιστώντας τις εξισώσεις του μοντέλου έχουμε

$$dV(t, S_t) = \left\{ f_t(t, S_t) + \frac{1}{2} f_{xx}(t, S_t) \sigma^2 S_t^2 + f_x(t, S_t) \mu S_t \right\} dt + f_x(t, S_t) \sigma S_t dW_t$$

Εξισώνοντας, τώρα, τους συντελεστές και λύνοντας το σύστημα έχουμε

$$\begin{cases} a_t & = f_x(t, S_t) \\ b_t & = \dfrac{1}{rB_t} \left\{ f_t(t, S_t) + \dfrac{1}{2} f_{xx}(t, S_t) \sigma^2 S_t^2 \right\} \end{cases}$$

Αν αντικαταστήσουμε στη σχέση $f(t, S_t) = a_t S_t + b_t B_t$ ($= V(t, S_t) = D_K(t, T; S_t)$) τις παραπάνω σχέσεις και όπου S_t θέσουμε x παίρνουμε τη διάσημη **Black-Scholes Μ.Δ.Ε**

$$f_t(t, x) = -\frac{1}{2} \sigma^2 x^2 f_{xx}(t, x) - r x f_x(t, x) + r f(t, x)$$

με συνοριακή συνθήκη $f(T, x) = D_K(T, T; x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Πρόταση 1.4
Η τιμή ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς με τιμή άσκησης K για τη μετοχή S ισούται με $C_K(t, T; S_t)$, όπου $x > 0$ και $t \in [0, T)$

$$C(t, T; x) := x\ \Phi(d_1(x, t)) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2(x, t))$$

με Φ τη συνάρτηση κατανομή της $N(0, 1)$ και

$$d_1(x, t) := \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left\{ \log \frac{x}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t) \right\}$$
$$d_2(x, t) := \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left\{ \log \frac{x}{K} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t) \right\} = d_1(x, t) - \sigma\sqrt{(T - t)}.$$

2 Copulas

Μπορούμε να δούμε μια από κοινού συνάρτηση κατανομής πιθανότητας, ενός διανύσματος τυχαίων μεταβλητών, ως μια συνάρτηση που περιέχει πληροφορίες για κάθε μονοδιάστατη περιθώρια κατανομή πιθανότητας καθώς και πληροφορίες για τη δομή εξάρτηση αυτών των τυχαίων μεταβλητών μεταξύ τους. Ακριβώς αυτή την εξάρτηση προσπαθεί να μοντελοποιήσει μια copula.

Ορισμός 2.1 *Μια d-διάστατη* ***copula*** *είναι μια από κοινού συνάρτηση κατανομής πιθανότητας στο* $[0,1]^d$ *με τυπικές ομοιόμορφες περιθώριες κατανομές πιθανότητας.*

Τη συμβολίζουμε $C(\boldsymbol{u}) = C(u_1, u_2, ..., u_d)$.

Συνεπώς, η C είναι μια απεικόνιση της μορφής $C : [0,1]^d \rightarrow [0,1]$, δηλαδή μια απεικόνιση από τον μοναδιαίο υπερκύβο στο μοναδιαίο διάστημα. Εναλλακτικά, μια απεικόνιση $C : [0,1]^d \rightarrow [0,1]$ ονομάζεται copula αν και μόνο αν ικανοποιεί τις παρακάτω τρείς ιδιότητες:

(1) η C είναι **γειωμένη**, δηλαδή $C(u_1, ..., u_d) = 0$ για τουλάχιστον ένα $u_j = 0$ με $j \in 1, ..., d$.

(2) η C έχει **τυπικές ομοιόμορφες περιθώριες κατανομές**, δηλαδή

$$C(1, ..., 1, u_j, 1, ...1) = u_j \ \forall \ j \in 1, ..., d$$

με $u_j \in [0,1]$.

(3) η C είναι **d-αύξουσα**, δηλαδή $\forall \ \boldsymbol{a} = (a_1, ..., a_d),\ \boldsymbol{b} = (b_1, ..., b_d) \in [0,1]^d$ με $a_i \leq b_i$ $\forall$ $i \in 1, ..., d$ να ισχύει

$$\Delta_{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]}C = \sum_{i \in \{0,1\}^d} (-1)^{\sum_{j=1}^d i_j} C(a_1^{i_1} b_1^{1-i_1}, ..., a_d^{i_d} b_d^{1-i_d}) \geq 0$$

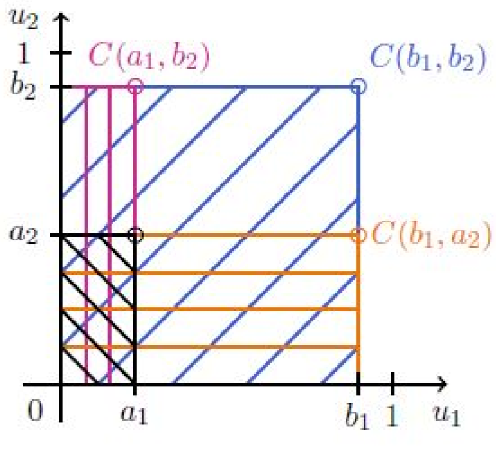
Ορισμός 2.2 *Μια συνάρτηση* $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ *ονομάζεται* ***d-αύξουσα*** *αν για κάθε ορθογώνιο υποσύνολο* $H = (a_1, b_1] \times \cdots \times (a_d, b_d] \subset \mathbb{R}^d$ *ισχύει ότι*

$$V_f(H) = \Delta^d_{a_d,b_d} \circ \cdots \circ \Delta^1_{a_1,b_1} f \geq 0$$

Καλούμε $V_f(H)$ *τον* ***f−όγκο του*** H.

Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζεται η συνθήκη (3) στις δύο διαστάσεις

$$\Delta_{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]}C = C(b_1, b_2) - C(b_1, a_2) - C(a_1, b_2) + C(a_1, a_2)$$
$$= \mathbb{P}(\boldsymbol{U} \in (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]) \overset{!}{\geq} 0$$



Σχήμα 2.1: Συνθήκη για 2-αύξουσα copula [8].

Γενικεύοντας, ορίζουμε την quasi-copula

Ορισμός 2.3 *Μια συνάρτηση $Q : [0,1]^d \to [0,1]$ ονομάζεται* ***d-quasi copula*** *αν ισχύουν οι εξής ιδιότητες:*

(1) η Q ικανοποιεί $\forall\, i \in \{1,...,d\}$ τις ***συνοριακές συνθήκες****, δηλαδή*

$$Q(u_1,...,u_i = 0,...,u_d) = 0 \;\; \text{και} \;\; Q(1,...,1,u_i,1,...,1) = u_i$$

(2) η Q είναι ***αύξουσα ως προς κάθε συντεταγμένη της****.*

(3) η Q είναι ***Lipschitz συνεχής****, δηλαδή $\forall\, \boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in [0,1]^d$*

$$|Q(u_1,...,u_d) - Q(v_1,...,v_d)| \leq \sum_{i=1}^{d} |u_i - v_i|$$

Συμβολίζουμε το σύνολο όλων των d-quasi copulas ως $\mathcal{Q}^d$ και το σύνολο όλων των d-copulas ως $\mathcal{C}^d$. Προφανώς $\mathcal{C}^d \subset \mathcal{Q}^d$

Πρόταση 2.1 *Έστω G μια συνάρτηση κατανομής πιθανότητας και έστω $G^{\leftarrow}$ η γενικευμένη αντίστροφη της, δηλαδή $G^{\leftarrow}(y) = \inf\{x \in \mathbb{R} : G(x) \geq y\}$.*

(1) ***Quantile Μετασχηματισμός***
Αν η τυχαία μεταβλητή $U \sim U(0,1)$ έχει τυπική ομοιόμορφη κατανομή , τότε η τυχαία μεταβλητή $X = G^{\leftarrow}(U) \sim G$.

(2) ***Μετασχηματισμός Πιθανότητας***
Αν η τυχαία μεταβλητή Y έχει συνάρτηση κατανομής πιθανότητας G, όπου G συνεχής μονοδιάστατη συνάρτηση κατανομής πιθανότητας, τότε $G(Y) \sim U(0,1)$.

Απόδειξη.

(1) Χρησιμοποιώντας το (5.) της Πρότασης 1.3 έχουμε

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathbb{P}(X \leq x) \\ &= \mathbb{P}(G^{\leftarrow}(U) \leq x) \\ &= \mathbb{P}(U \leq G(x)) \\ &= G(x), \;\; x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(2) Χρησιμοποιώντας τα (3.), (4.) και (7.) της Πρότασης 1.3 έχουμε

$$\begin{aligned} F_{G(Y)}(u) &= \mathbb{P}(G(Y) \leq u) \\ &= \mathbb{P}(Y \leq G^{\leftarrow}(u)) \\ &= G(G^{\leftarrow}(u)) \\ &= u, \;\; u \in [0,1] \end{aligned}$$

$\square$

O Quantile Μετασχηματισμός είναι πολύ σημαντικός στη στοχαστική προσομοίωση αφού μας επιτρέπει να παράξουμε τυχαίο δείγμα από οποιαδήποτε κατανομή με γνωστή γενικευμένη αντίστροφο, έχοντας τυχαίο δείγμα από τυπικές ομοιόμορφες τυχαίες μεταβλητές.

2.1 Θεώρημα Sklar

Η σημαντικότητα των copulas στη μελέτη πολυδιάστατων κατανομών πιθανότητας παρουσιάζεται στο παρακάτω κομψό θεώρημα, που δείχνει αρχικά ότι όλες οι πολυδιάστατες κατανομές αντιστοιχούν σε copulas και δεύτερον ότι οι copulas μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε συνδυασμό με μονοδιάστατες περιθώριες για κατασκευή πολυδιάστατων κατανομών πιθανότητας.

Θεώρημα 2.1 (Sklar 1959)
Έστω F μια από κοινού συνάρτηση κατανομής πιθανότητας με περιθώριες κατανομές $F_1, ..., F_d$. Τότε υπάρχει copula $C : [0,1]^d \to [0,1]$ έτσι ώστε για κάθε $x_1, ..., x_d$ στο $\overline{\mathbb{R}} := [-\infty, \infty]$ να ισχύει

$$F(x_1, \ldots, x_d) = C(F_1(x_1), \ldots, F_d(x_d)) \tag{2.1}$$

Αν οι περιθώριες είναι συνεχείς, τότε η C είναι μοναδική. Αλλιώς, η C είναι μοναδικά ορισμένη στο $\prod_{j=1}^{d} \operatorname{ran} F_j$, όπου $\operatorname{ran} F_j = \{F_j(x) : x \in \mathbb{R}\}$ το πεδίο τιμών των F_j. Η C δίνεται από τον τύπο

$$C(u_1, \ldots, u_d) = F\left(F_1^{\leftarrow}(u_1), \ldots, F_d^{\leftarrow}(u_d)\right), \ \boldsymbol{u} \in \prod_{j=1}^{d} \operatorname{ran} F_j \tag{2.2}$$

Αντίστροφα, αν η C είναι copula και $F_1, ..., F_d$ μονοδιάστατες περιθώριες κατανομές, τότε η από κοινού συνάρτηση κατανομής πιθανότητας F με περιθώριες κατανομές $F_1, ..., F_d$ ορίζεται όπως προηγουμένως από την (2.1)

$$F(x_1, \ldots, x_d) = C(F_1(x_1), \ldots, F_d(x_d)).$$

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε την ύπαρξη και μοναδικότητα της copula στη περίπτωση που οι περιθώριες $F_1, ..., F_d$ είναι συνεχείς και το αντίστροφο στη γενική μορφή. Για πλήρη απόδειξη ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στα Schweizer και Sklar (1983) [9] ή Nelsen (1999, σελ. 18) [10].

Έστω $\mathbf{X} \sim F$, ορίζουμε $U_j = F_j(X_j),\ j \in \{1, ..., d\}$. Από τον Μετασχηματισμό Πιθανότητας έχουμε ότι $U_j \sim U(0,1),\ j \in \{1, ..., d\}$. Άρα η από κοινού συνάρτηση κατανομής πιθανότητας C του $\mathbf{U} = (U_1, ..., U_d)$ είναι copula. Εφόσον η $F_j,\ j \in \{1, ..., d\}$ είναι γνησίως αύξουσα, έχουμε ότι

$$X_j = F_j^{\leftarrow}(F_j(X_j)) = F_j^{\leftarrow}(U_j),\ j \in \{1, ..., d\}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} F(x_1, ..., x_d) &= \mathbb{P}(X_j \le x_j \ \forall j) \\ &= \mathbb{P}\left(F_j^{\leftarrow}(U_j) \le x_j \ \forall j\right) \\ &= \mathbb{P}(U_j \le F_j(x_j) \ \forall j) \\ &= C(F_1(x_1), \ldots, F_d(x_d)) \end{aligned}$$

, $x \in \overline{\mathbb{R}}^d$

Από τη Πρόταση 1.3 έχουμε ότι $F_j\left(F_j^{\leftarrow}(u_j)\right) = u_j$ για όλα τα $u_j \in \operatorname{ran} F_j$ άρα

$$\begin{aligned} C(u_1, \ldots, u_d) &= C(F_1(F_1^{\leftarrow}(u_1)), \ldots, F_d(F_d^{\leftarrow}(u_d))) \\ &= F(F_1^{\leftarrow}(u_1), \ldots, F_d^{\leftarrow}(u_d)) \end{aligned}$$

, $\boldsymbol{u} \in \prod_{j=1}^{d} \operatorname{ran} F_j$

Για το αντίστροφο, για $\mathbf{U} \sim C$ ορίζουμε $\boldsymbol{X} = (F_1^{\leftarrow}(U_1), \ldots, F_d^{\leftarrow}(U_d))$. Τότε

$$
\begin{aligned}
F(x_1, ...x_d) &= \mathbb{P}(\boldsymbol{X} \leq \boldsymbol{x}) \\
&= \mathbb{P}\left(F_j^{\leftarrow}(U_j) \leq x_j \ \forall j\right) \\
&= \mathbb{P}\left(U_j \leq F_j(x_j) \ \forall j\right) \\
&= C\left(F_1(x_1), \ldots, F_d(x_d)\right)
\end{aligned}
$$

, $\boldsymbol{x} \in \overline{\mathbb{R}}^d$

Αρα, η F είναι από κοινού συνάρτηση κατανομής πιθανότητας με περιθώριες $F_1, ..., F_d$, που προέκυψε με Quantile Μετασχηματισμό.

□

Πρόταση 2.2 (Copula της F)
Αν το τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{X}$ έχει από κοινού συνάρτηση κατανομής πιθανότητας F με συνεχείς περιθώριες κατανομές $F_1, ..., F_d$, τότε το $\mathbf{X}$ έχει copula τη C αν και μόνο αν $(F_1(X_1), \ldots, F_d(X_d))^\top \sim C$.

Απόδειξη. Για το ευθύ, γνωρίζουμε αρχικά από το Μετασχηματισμό Πιθανότητας 2.1 ότι $F_j(X_j) \sim U(0,1),\ j \in \{1, ..., d\}$. Επίσης, από το (5.) της Πρότασης 1.3 και εφόσον η $\mathbf{X}$ είναι συνεχής, έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(F_1(X_1) \leq u_1, \ldots, F_d(X_d) \leq u_d\right) &= \mathbb{P}\left(F_1(X_1) < u_1, \ldots, F_d(X_d) < u_d\right) \\
&= \mathbb{P}\left(X_1 < F_1^{\leftarrow}(u_1), \ldots, X_d < F_d^{\leftarrow}(u_d)\right) \\
&= \mathbb{P}\left(X_1 \leq F_1^{\leftarrow}(u_1), \ldots, X_d \leq F_d^{\leftarrow}(u_d)\right) \\
&= F\left(F_1^{\leftarrow}(u_1), \ldots, F_d^{\leftarrow}(u_d)\right) \\
&= C(\boldsymbol{u}) \quad , \ \mathbf{u} \in [0,1]^d
\end{aligned}
$$

Η τελευταία ισότητα προκύπτει από το Θεώρημα του Sklar 2.1.

Για το αντίστροφο, γνωρίζουμε ότι οι F_j είναι γνησίως αύξουσες στα $\operatorname{ran} X_j$ για όλα τα $j \in \{1, 2, ..., d\}$. Από τα (3.) και (5.) της Πρότασης 1.3, έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(\boldsymbol{X} \leq \boldsymbol{x}) &= \mathbb{P}\left(F_1^{\leftarrow}(F_1(X_1)) \leq x_1, \ldots, F_d^{\leftarrow}(F_d(X_d) \leq x_d\right) \\
&= \mathbb{P}\left(F_1(X_1) \leq F_1(x_1), \ldots, F_d(X_d) \leq F_d(x_d)\right)
\end{aligned}
$$

που εξ' ορισμού ισούται με την $C(F_1(x_1), ..., F_d(x_d))$. Από το Θεώρημα του Sklar 2.1 η $\mathbf{X}$ έχει copula τη C.

□

Διακριτές κατανομές: Η έννοια της copula είναι λιγότερο φυσική στην περίπτωση των πολυδιάστατων διακριτών κατανομών. Αυτό συμβαίνει, διότι παραπάνω από μία copula μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να συνδυάσει τις περιθώριες και να σχηματίσει την από κοινού συνάρτηση κατανομής πιθανότητας, όπως υποδεικνύει και το επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 2.1 (Δισδιάστατη κατανομή Bernoulli)
Έστω το διάνυσμα (X_1, X_2) ακολουθεί τη δισδιάστατη κατανομή Bernoulli με $\mathbb{P}(X_1 = k, X_2 = l) = 1/4,\ k, l \in \{0,1\} \implies \mathbb{P}(X_j = k) = 1/2,\ k \in \{0,1\},\ \operatorname{ran} F_j = \{0, 1/2, 1\},\ j \in \{1,2\}$. Οποιαδήποτε copula με $C(1/2, 1/2) = 1/4$ ικανοποιεί το Θεώρημα του Sklar. Παραδείγματος χάριν, $C(u_1, u_2) = u_1 u_2$ ή $C(u_1, u_2) = \min\{u_1, u_2, (u_1^2 + u_2^2)/2\}$.

2.2 Αρχή της μη μεταβλητότητας (Invariance principle)

Μια πολύ χρήσιμη ιδιότητα των copulas κατανομών είναι ότι παραμένουν αναλλοίωτες κάτω από μετασχηματισμούς από γνησίως αύξουσες συναρτήσεις στις περιθώριες τυχαίες μεταβλητές. Σε συνδυασμό με το Θεώρημα του Sklar οι copulas αντιπροσωπεύουν με φυσικό τρόπο την εξάρτηση μίας από κοινού κατανομής στην περίπτωση των συνεχών περιθώριων κατανομών. Δηλαδή, θα μπορέσουμε να δείξουμε στην περίπτωση που $F_j \uparrow,\ j \in 1, ..., d$ ότι τα διανύσματα $(X_1, ..., X_d)$ και $(F_1(X_1), ..., F_d(X_d))$ έχουν την ίδια copula.

Πρόταση 2.3 (Αρχή της μη μεταβλητότητας)
Έστω $(X_1, ..., X_d)$ ένα τυχαίο διάνυσμα με συνεχείς περιθώριες κατανομές και copula C. Έστω ακόμα $T_1, ..., T_d$ γνησίως αύξουσες συναρτήσεις, τότε το διάνυσμα $(T_1(X_1), ..., T_d(X_d))$ έχει και αυτό ως copula τη C.

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι οι T_j είναι δεξιά συνεχείς για $j \in \{1, ..., d\}$. Εφόσον $T_j \uparrow$ και F_j συνεχείς έχουμε ότι οι τ.μ. $T_j(X_j)$ έχουν συνεχείς κατανομές και άρα έχουμε

$$\begin{aligned} F_{T_j(X_j)}(x) &= \mathbb{P}\left(T_j\left(X_j\right) \leq x\right) \\ &= \mathbb{P}\left(T_j\left(X_j\right) < x\right) \\ &= \mathbb{P}\left(X_j < T_j^{\leftarrow}(x)\right) \\ &= \mathbb{P}\left(X_j \leq T_j^{\leftarrow}(x)\right) \\ &= F_j(T_j^{\leftarrow}(x)) \end{aligned}$$

, $x \in \mathbb{R}$.

Αυτό συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(F_{T_j(X_j)}\left(T_j\left(X_j\right)\right) \leq u_j \ \forall j\right) &= \mathbb{P}\left(F_j\left(T_j^{\leftarrow}\left(T_j\left(X_j\right)\right)\right) \leq u_j \ \forall j\right) \\ &= \mathbb{P}(F_j(X_j) \leq u_j \ \forall j) \\ &= C(\mathbf{u}) \end{aligned}$$

, $\mathbf{u} \in [0,1]^d$

□

2.3 Fréchet-Hoeffding Φράγματα

Ένα πολύ σημαντικό Θεώρημα στη θεωρία των copulas είναι τα Fréchet-Hoeffding φράγματα, που μας δίνουν φράγματα για copulas και ισοδύναμα για από κοινού συναρτήσεις κατανομής πιθανότητας.

Θεώρημα 2.2 (Fréchet-Hoeffding Φράγματα)
Για κάθε copula $C(\boldsymbol{u}) = C(u_1, u_2, ..., u_d)$ έχουμε τα φράγματα:

$$\max\left\{\sum_{j=1}^{d} u_j - d + 1, 0\right\} \leq C(\boldsymbol{u}) \leq \min_{1 \leq j \leq d}\{u_j\},\ \mathbf{u} \in [0,1]^d$$

Ορίζουμε $W(\mathbf{u}) = \max\left\{\sum_{j=1}^{d} u_j - d + 1, 0\right\}$ και $M(\mathbf{u}) = \min_{1 \leq j \leq d}\{u_j\}$.
Για $d \geq 2$ η $M(\mathbf{u})$ είναι copula, ενω μόνο για $d = 2$ η $W(\mathbf{u})$ είναι copula.

Απόδειξη. Για τη δεύτερη ανισότητα έχουμε ότι αφού η C είναι d-αύξουσα και γειωμένη, συνεπάγεται ότι $C \nearrow$ σε κάθε γνώρισμα της, οπότε $C(\mathbf{u}) \leq C(1,...,1,u_j,1,...,1) = u_j$ για κάθε j. Άρα

$$C(\mathbf{u}) \leq \min_{1\leq j\leq d}\{u_j\} = M(\mathbf{u})$$

Για την πρώτη ανισότητα γνωρίζουμε αρχικά ότι $C(\mathbf{u}) \geq 0, \ \forall\ \mathbf{u} \in [0,1]^d$ εξ' ορισμού. Στη συνέχεια έχουμε

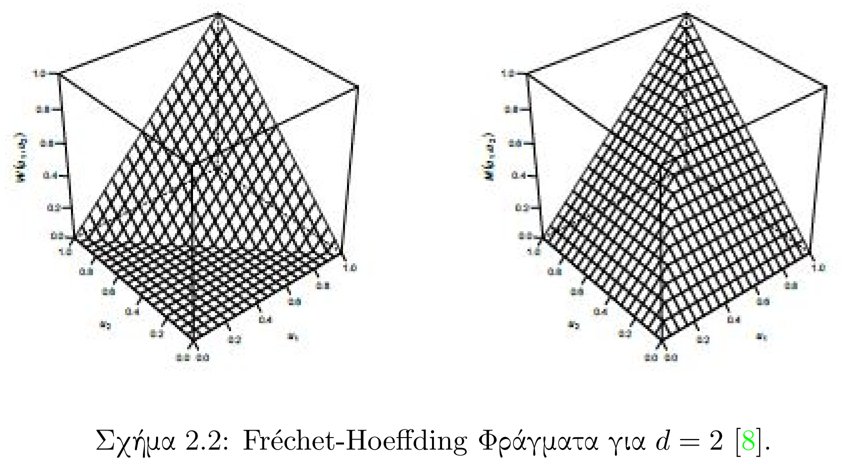
$$\begin{aligned}
C(\mathbf{u}) &= \mathbb{P}(U_1 \leq u_1, ..., U_d \leq u_d) \\
&= 1 - \mathbb{P}(U_1 > u_1, ..., U_d > u_d) \\
&\geq 1 - \sum_{i=1}^{d} \mathbb{P}(U_i > u_i) \\
&= 1 - \sum_{i=1}^{d} (1 - \mathbb{P}(U_i \leq u_i)) \\
&= 1 - \sum_{i=1}^{d} (1 - u_i) \\
&= 1 - d + \sum_{i=1}^{d} u_i
\end{aligned}$$

Τελικά, $C(\mathbf{u}) \geq W(\mathbf{u})$.

□

Εύκολα αποδεικνύεται ότι για $U \sim U(0,1)$ ισχύει $(U,...,U) \sim M$ και $(U, 1-U) \sim W$

Παρακάτω απεικονίζονται οι γραφικές παραστάσεις των W, M στις δύο διαστάσεις, δηλαδή απεικονίζονται οι σ.κ.π των διανυσμάτων $(U, 1-U)$ και (U, U) αντίστοιχα.



Σχήμα 2.2: Fréchet-Hoeffding Φράγματα για $d = 2$ [8].

Τα Fréchet-Hoeffding Φράγματα αντιστοιχούν σε πλήρη εξάρτηση, αρνητική για W σε δύο διαστάσεις (countermonotonicity copula) και θετική για M (comonotonicity copula).

Ένα άλλο παράδειγμα σημαντικής copula είναι η ανεξάρτητη copula με $C(\mathbf{u}) = \prod_{j=1}^{d} u_j$. Από το Θεώρημα του Sklar $F(\mathbf{x}) = C(F_1(x_1), ..., F_d(x_d)) = \prod_{j=1}^{d} F_j(x_j)$, δηλαδή σε αυτή την περίπτωση

$X_1, ..., X_d$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.

Παρόλο που γράφουμε τα Fréchet-Hoeffding Φράγματα για copulas, μπορούμε να τα γράψουμε αντίστοιχα για από κοινού συναρτήσεις κατανομής πιθανότητας, δηλαδή για μια από κοινού σ.κ.π F με περιθώριες κατανομές $F_1, ..., F_d$ ισχύει

$$\max \left\{ \sum_{j=1}^{d} F_j(x_j) - d + 1, 0 \right\} \leq F(\boldsymbol{x}) \leq \min_{1 \leq j \leq d} \{F_j(x_j)\}.$$

2.4 Copulas Επιβίωσης

Μια εκδοχή του Θεωρήματος 2.1 εφαρμόζεται, επίσης, σε πολυδιάστατες συναρτήσεις επιβίωσης κατανομών πιθανότητας. Έστω $\mathbf{X}$ ένα τυχαίο διάνυσμα με πολυδιάστατη συνάρτηση επιβίωσης $\bar{F}$, περιθώριες κατανομές $F_1, ..., F_d$ και περιθώριες κατανομές επιβίωσης $\bar{F}_1, ..., \bar{F}_d$ με $\bar{F}_i = \mathbb{P}(X_i > x_i) = 1 - \mathbb{P}(X_i \leq x_i) = 1 - F_i$, τότε ισχύει:

$$\bar{F}(x_1, ..., x_d) = \widehat{C}(\bar{F}_1(x_1), ..., \bar{F}_d(x_d)) \tag{2.3}$$

Όπου η copula $\widehat{C}$ ονομάζεται survival copula ή copula επιβίωσης. Στην περίπτωση που οι περιθώριες κατανομές $F_1, ..., F_d$ είναι συνεχείς, εύκολα καταλήγουμε στο εξής

$$\begin{aligned}
\bar{F}(x_1, ..., x_d) &= \mathbb{P}(X_1 > x_1, ..., X_d > x_d) \\
&= \mathbb{P}(1 - F(X_1) \leq \bar{F}(x_1), ..., 1 - F(X_d) \leq \bar{F}(x_d))
\end{aligned}$$

Οπότε η εξίσωση (2.3) προκύπτει γράφοντας τη $\widehat{C}$ για τη συνάρτηση κατανομής πιθανότητας του τυχαίου διάνυσματος $1 - \mathbf{U}$ όπου $\mathbf{U} = (F_1(X_1), ..., F_d(X_d))$. Γενικά ο όρος survival copula μίας copula C θα αναφέρεται στη σ.κ.π του τυχαίου διάνυσματος $1 - \mathbf{U}$ όταν το τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{U}$ έχει σ.κ.π C.

Επίσης, μπορούμε να εκφράσουμε τη survival copula σε σχέση με την αντίστοιχη copula με τον παρακάτω τύπο:

$$\widehat{C}(\boldsymbol{u}) = \sum_{J \subseteq \{1, ..., d\}} (-1)^{|J|} C\left((1 - u_1)^{I_J(1)}, \ldots, (1 - u_d)^{I_J(d)}\right) \tag{2.4}$$

Για $d = 2$ έχουμε $\widehat{C}(u_1, u_2) = 1 - (1 - u_1) - (1 - u_2) + C(1 - u_1, 1 - u_2) = -1 + u_1 + u_2 + C(1 - u_1, 1 - u_2)$ Το παραπάνω αποτέλεσμα προκύπτει ως εξής:

$$\begin{aligned}
\widehat{C}(u_1, u_2) &= \mathbb{P}(1 - U_1 \leq u_1, 1 - U_2 \leq u_2) \overset{\text{συνέχεια}}{=} \mathbb{P}(U_1 > 1 - u_1, U_2 > 1 - u_2) \\
&= \mathbb{P}(U_1 > 1 - u_1) - \mathbb{P}(U_1 > 1 - u_1, U_2 \leq 1 - u_2) \\
&= 1 - \mathbb{P}(U_1 \leq 1 - u_1) - \mathbb{P}(U_2 \leq 1 - u_2) + \mathbb{P}(U_1 \leq 1 - u_1, U_2 \leq 1 - u_2) \\
&= 1 - (1 - u_1) - (1 - u_2) + C(1 - u_1, 1 - u_2).
\end{aligned}$$

Τέλος, εάν ισχύει $\widehat{C} = C$, λέμε ότι η C είναι ακτινικά συμμετρική.

Έστω, τώρα, Q μια d-quasi-copula. Ορίζουμε την **συνάρτηση επιβίωσης** της ως

$$\widehat{Q}(u_1, \ldots, u_d) := V_Q((u_1, 1] \times \cdots \times (u_d, 1]), \quad \mathbf{u} \in \mathbb{I}^d$$

Για $d = 3$ ισχύει

$$
\begin{aligned}
\widehat{Q}\left(u_1, u_2, u_3\right)= & 1-Q\left(u_1, 1,1,\right)-Q\left(1, u_2, 1\right)-Q\left(1,1, u_3\right) \\
& +Q\left(u_1, u_2, 1\right)+Q\left(u_1, 1, u_3\right)+Q\left(1, u_2, u_3\right)-Q\left(u_1, u_2, u_3\right)
\end{aligned}
$$

Σε αντίθεση με τις copulas, αν Q μια d-quasi-copula τότε η $\mathbb{I}^d \ni \mathbf{u} \mapsto \widehat{Q}(1-\mathbf{u})$ δεν είναι quasi-copula εν γένει.

Ορισμός 2.4 *Μια συνάρτηση $\widehat{Q}: \mathbb{I}^d \rightarrow \mathbb{I}$ είναι* ***d-quasi συνάρτηση επιβίωσης*** *αν η απεικόνιση*

$$
\mathbb{I}^d \ni \mathbf{u} \mapsto \widehat{Q}(1-\mathbf{u})
$$

είναι d-quasi-copula.

Συμβολίζουμε το σύνολο των d-quasi συναρτήσεων επιβίωσης με $\widehat{\mathcal{Q}}^d$.

2.5 Πυκνότητες και δεσμευμένες κατανομές Copulas

Αν μια copula έχει πυκνότητα, δηλαδή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, τότε ισχύει το εξής:

$$
c(\mathbf{u})=\frac{\partial^d C\left(u_1, \ldots, u_d\right)}{\partial u_1 \cdots \partial u_d}
$$

Από το Θεώρημα του Sklar 2.1, αν η F_j έχει πυκνότητα $f_j,\ j \in\{1, \ldots, d\}$ και η C πυκνότητα c, έχουμε ότι η πυκνότητα f της F ικανοποιεί την εξίσωση

$$
f(x)=c\left(F_1\left(x_1\right), \ldots, F_d\left(x_d\right)\right) \prod_{j=1}^d f_j\left(x_j\right) \tag{2.5}
$$

Από την εξίσωση (2.5) συνεπάγεται ότι

$$
c(\boldsymbol{u})=\frac{f\left(F_1^{-1}\left(u_1\right), \ldots, F_d^{-1}\left(u_d\right)\right)}{f_1\left(F_1^{-1}\left(u_1\right)\right) \cdots \cdot f_d\left(F_d^{-1}\left(u_d\right)\right)}
$$

Θεωρώντας ότι ισχύει $F_i^{\leftarrow}=F_i^{-1}$.

Επίσης, εύκολα μπορούμε να υπολογίσουμε την δεσμευμένη κατανομή μιας copula. Για παράδειγμα, στις δύο διαστάσεις ισχύει

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(U_2 \leq u_2 \mid U_1=u_1\right) & =\lim _{\delta \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}\left(U_2 \leq u_2, U_1 \in\left(u_1-\delta, u_1+\delta\right]\right)}{\mathbb{P}\left(U_1 \in\left(u_1-\delta, u_1+\delta\right]\right)} \\
& =\lim _{\delta \rightarrow 0} \frac{C\left(u_1+\delta, u_2\right)-C\left(u_1-\delta, u_2\right)}{2 \delta} \\
& =\frac{\partial}{\partial u_1} C\left(u_1, u_2\right)
\end{aligned}
$$

Που σημαίνει ότι μπορούμε να υπολογίσουμε τη δεσμευμένη συνάρτηση κατανομής πιθανότητας από την ίδια τη copula.

3 Βελτιωμένα Fréchet-Hoeffding Φράγματα

Τα τελευταία χρόνια, η αβεβαιότητα μοντέλου και η ποσοτικοποίηση της αβεβαιότητας έχουν γίνει ακόμα πιο σημαντικά ζητήματα σε πολλές περιοχές των εφαρμοσμένων μαθηματικών. Εκεί που παλαιότερα όλη η προσπάθεια των ερευνητών συγκεντρωνόταν στον υπολογισμό ποσοτήτων από συγκεκριμένα μοντέλα, σήμερα οι ερευνητές αντιμετωπίζουν τη πρόκληση της προσέγγισης ποσοτήτων από μη πλήρως ορισμένα μοντέλα. Συγκεκριμένα, σε ένα πιθανοτικό πλαίσιο, ένα μοντέλο αναφέρεται στο νόμο μίας τυχαίας μεταβλητής. Σε πολλές εφαρμογές, το ρίσκο μοντελοποιείται από πραγματικές τυχαίες μεταβλητές $X_1, ..., X_d$ σε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$. Παραδείγματος χάριν, μπορούμε να μοντελοποιήσουμε με $X_1, ..., X_d$ τις τιμές χρηματοικονομικών αγαθών σε ένα μελλοντικό χρόνο ή το μέγεθος μελλοντικών αξιώσεων από έναν ασφαλιστικό φορέα. Σε αυτές τις περιπτώσεις, το $\mathbf{X} := (X_1, ..., X_d)$ είναι ένα $\mathbb{R}^d$-διάστατο τυχαίο διάνυσμα με από κοινού κατανομή $F(x_1, ..., x_d) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, ..., X_d \leq x_d)$. Η αβεβαιότητα μοντέλου εκφράζεται σε αβεβαιότητα της πιθανότητας $\mathbb{P}$. Δηλαδή, αντί να σταθεροποιήσουμε ένα συγκεκριμένο μέτρο, θεωρούμε ένα σύνολο από μέτρα πιθανότητας $\mathcal{P}$ σε ένα μετρήσιμο χώρο $(\Omega, \mathcal{B})$ και κάθε $\mathbb{P} \in \mathcal{P}$ αντιστοιχεί σε μία διαφορετική κατανομή του $\mathbf{X}$. Άρα, μπορούμε να εκφράσουμε την αβεβαιότητα μοντέλου ισοδύναμα με μια κλάση συναρτήσεων κατανομών πιθανότητας $\mathcal{F}$ για ένα τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{X}$. Το αντίστοιχο ρίσκο του μοντέλου ποσοτικοποιείται από την αναμενόμενη τιμή της $\phi(\mathbf{X})$ για μια συνάρτηση $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Συγκεκριμένα, αφού διαφορετικά μοντέλα για το διάνυσμα $\mathbf{X}$ μπορεί να οδηγήσουν σε διαφορετικές τιμές της μέσης τιμής $\mathbb{E}_F(\phi(\mathbf{X}))$, όπου $\mathbb{E}_F$ η αναμενόμενη τιμή ως προς την κατανομή $F \in \mathcal{F}$, το ρίσκο του μοντέλου ποσοτικοποιείται από την ελάχιστη και μέγιστη τιμή της $\mathbb{E}_F(\phi(\mathbf{X}))$, με την F να ανήκει στην κλάση $\mathcal{F}$ των αποδεκτών κατανομών. Η επιλογή των αποδεκτών κατανομών είναι τέτοια ώστε να συμβαδίζει με τις υποθέσεις του μοντέλου που να θεωρούνται ακριβείς ή επαρκώς αξιόπιστες. Η διαφορά μεταξύ της μέγιστης και της ελάχιστης τιμής αυτής της μέσης τιμής υποδηλώνει το μέγεθος του ρίσκου του μοντέλου. Δηλαδή, όσο μεγαλύτερη αυτή η διαφορά τόσο περισσότερο ρίσκο έχει το μοντέλο.

Ένα κλασικό παράδειγμα της παραπάνω προσέγγισης στην τιμολόγηση παραγώγων είναι οι τιμές υπό- και υπέρ-αντιστάθμισης ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς σε ένα υποκείμενο αγαθό. Αυτές οι τιμές αντιστοιχούν στο $\inf_{F \in \mathcal{F}} \mathbb{E}_F\left[(X-K)^+\right]$ και στο $\sup_{F \in \mathcal{F}} \mathbb{E}_F\left[(X-K)^+\right]$, όπου $\mathcal{F}$ είναι σύνολο όλων των κατανομών της τυχαίας μεταβλητής X έτσι ώστε $\mathbb{E}_F[X] = c \in \mathbb{R}$. Εδώ, η συνθήκη $\mathbb{E}_F[X] = c$ απορρέει από την αρχή του no-arbitrage και άρα μπορεί να θεωρηθεί ως ένας αξιόπιστος περιορισμός για τα μοντέλα του X. Συνεπώς, προκύπτει ότι η αναμενόμενη τιμή του $(X-K)^+$ φράσσεται από τα θεμελιώδη no-arbitrage φράγματα

$$(c-K)^+ \leq \mathbb{E}_F\left[(X-K)^+\right] \leq c, \text{ για όλες τις } F \in \mathcal{F}$$

και σε πολλές περιπτώσεις τα φράγματα επιτυγχάνονται. Αυτό υποδηλώνει ότι η τιμή του δικαιώματος αγοράς με αποπληρωμή $(X-K)^+$ βρίσκεται στο διάστημα $[(c-K)^+, c]$ όπου καμία υπόθεση για το μοντέλο της X δεν έχει γίνει, εκτός του ότι είναι ελεύθερο από arbitrage.

Σε μια πιο γενική ματιά, η ποσοτικοποίηση της αβεβαιότητας του μοντέλου εμπλέκει την βελτιστοποίηση πάνω σε ένα σύνολο κατανομών, πιθανώς με περιορισμούς, που είναι μια λεπτή διαδικασία εν γένει. Η πολυπλοκότητα του προβήματος εξαρτάται από τις ιδιότητες της ϕ, την κλάση των αποδεκτών κατανομών καθώς και από τη διάσταση d. Στη βιβλιογραφία υπάρχει μια σαφής διαχωριστική γραμμή ανάμεσα στη περίπτωση της μίας διάστασης και των πολλών διαστάσεων. Αυτό συμβαίνει καθώς στη μία διάσταση η αβεβαιότητα οφείλεται σε μία μονοδιάστατη τυχαία μεταβλητή, ενώ στην περίπτωση των πολλών διαστάσεων ($d > 1$) η αβεβαιότητα οφείλεται σε κάθε μία από τις d τυχαίες μεταβλητές του μοντέλου καθώς και από την μεταξύ τους εξάρτηση. Η δομή της εξάρτησης τους μπορεί να μοντελοποιηθεί ανεξάρτητα από τα μονοδιάστατα στοιχεία του μοντέλου με τη χρήση της copula. Συνεπώς, η περισσότερη βιβλιογραφία επικεντρώνεται είτε στη μονοδιάστατη περίπτωση είτε στην αβεβαιότητα της δομής εξάρτησης (copula) πολλών τυχαίων μεταβλητών με γνωστές περιθώριες κατανομές. Το τελευταίο πλάισιο είναι γνωστό στη βιβλιογραφία ως **αβεβαιότητα εξάρτησης**. Σε αυτή την ενότητα θα κατασκευάσουμε βελτιώμενα Fréchet-Hoeffding φράγματα σε αντιδιαστολή με τα κλασικά του κεφαλαίου 2 για copulas, λαμβάνοντας υπόψη επιπλέον διαθέσιμη πληροφορία από την αγορά. Αυτά θα μας βοηθήσουν στη συνέχεια στην τιμολόγηση χωρίς μοντέλο πολυδιάστατων παραγώγων.

Θεώρημα 3.1 *Έστω $S \subset \mathbb{I}^d$ ένα συμπαγές σύνολο και Q^* μια $d-quasi-copula$. Θεωρούμε το σύνολο*

$$\mathcal{Q}^{S,Q^*} := \left\{ Q \in \mathcal{Q}^d : Q(\mathbf{x}) = Q^*(\mathbf{x}) \text{ , για όλα τα } \mathbf{x} \in S \right\}$$

Τότε, για όλα τα $Q \in \mathcal{Q}^{S,Q^*}$, ισχύει οτι

$$\begin{aligned} \underline{Q}^{S,Q^*}(\mathbf{u}) \leq Q(\mathbf{u}) \leq \overline{Q}^{S,Q^*}(\mathbf{u}) \quad &, \text{ για όλα τα } \mathbf{u} \in \mathbb{I}^{\mathrm{d}} \\ \underline{Q}^{S,Q^*}(\mathbf{u}) = Q(\mathbf{u}) = \overline{Q}^{S,Q^*}(\mathbf{u}) \quad &, \text{ για όλα τα } \mathbf{u} \in \mathcal{S} \end{aligned} \tag{3.1}$$

όπου τα φράγματα $\underline{Q}^{S,Q^*}$ και $\overline{Q}^{S,Q^*}$ δίνονται από

$$\begin{aligned} \underline{Q}^{S,Q^*}(\mathbf{u}) &= \max\left(0, \sum_{i=1}^{d} u_i - d + 1, \max_{\mathbf{x}\in\mathcal{S}}\left\{Q^*(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{d}(x_i - u_i)^+\right\}\right) \\ \overline{Q}^{S,Q^*}(\mathbf{u}) &= \min\left(u_1, \ldots, u_d, \min_{\mathbf{x}\in\mathcal{S}}\left\{Q^*(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{d}(u_i - x_i)^+\right\}\right) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Ακόμα, τα φράγματα $\underline{Q}^{S,Q^*}$ και $\overline{Q}^{S,Q^*}$ είναι quasi-copulas και άρα είναι sharp.

Ορισμός 3.1 *Ένα άνω φράγμα $\mathcal{U}$ ονομάζεται **sharp** για μία συγκεκριμένη κλάση $\mathcal{C}$, αν ανήκει σε αυτή τη κλάση, δηλαδή $\mathcal{U} \in \mathcal{C}$. Επίσης, λέγεται **κατα σημείο sharp** για την $\mathcal{C}$ αν $\sup_{F\in C} F(x) = \mathcal{U}(x)$ για όλα τα $x \in \mathrm{dom}(F)$.*

Απόδειξη. Θα ξεκινήσουμε θεωρώντας ότι το σύνολο S είναι μονοσύνολο, δηλαδή $S = \{\mathbf{x}\}$ για $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^d$ και θα αποδείξουμε ότι το θεώρημα ισχύει για $\mathcal{Q}^{\{x\},Q^*}$. Έστω, λοιπόν, ένα αυθαίρετο $Q \in \mathcal{Q}^{\{x\},Q^*}$ και $(u_1, ..., u_d), (u_1, ..., u_{i-1}, x_i, u_{i+1}, ..., u_d) \in \mathbb{I}^d$ τότε από την ιδιότητα Lipschitz της Q και από το γεγονός ότι η Q είναι αύξουσα σε κάθε συντεταγμένη έχουμε ότι

$$-\left(u_i - x_i\right)^+ \leq Q\left(u_1, \ldots, u_{i-1}, x_i, u_{i+1}, \ldots, u_d\right) - Q\left(u_1, \ldots, u_d\right) \leq \left(x_i - u_i\right)^+$$

Χρησιμοποιώντας τηλεσκοπικό άθροισμα έχουμε

$$\begin{aligned} Q\left(x_1, \ldots, x_d\right) - Q\left(u_1, \ldots, u_d\right) =& Q\left(x_1, \ldots, x_d\right) - Q\left(u_1, x_2, \ldots, x_d\right) + Q\left(u_1, x_2, \ldots, x_d\right) \\ &- Q\left(u_1, u_2, x_3, \ldots, x_d\right) + \cdots + Q\left(u_1, \ldots, u_{d-1}, x_d\right) - Q\left(u_1, \ldots, u_d\right) \end{aligned}$$

και άρα

$$-\sum_{i=1}^{d}\left(u_i - x_i\right)^+ \leq Q\left(x_1, \ldots, x_d\right) - Q\left(u_1, \ldots, u_d\right) \leq \sum_{i=1}^{d}\left(x_i - u_i\right)^+$$

που είναι ισοδύναμο με το εξής

$$Q\left(x_1, \ldots, x_d\right) - \sum_{i=1}^{d}\left(x_i - u_i\right)^+ \leq Q\left(u_1, \ldots, u_d\right) \leq Q\left(x_1, \ldots, x_d\right) + \sum_{i=1}^{d}\left(u_i - x_i\right)^+$$

Ακόμα, έχουμε ότι $Q(x_1, ..., x_d) = Q^*(x_1, ..., x_d)$ από το οποίο συνεπάγεται ότι

$$Q^*\left(x_1, \ldots, x_d\right) - \sum_{i=1}^{d}\left(x_i - u_i\right)^+ \leq Q\left(u_1, \ldots, u_d\right) \leq Q^*\left(x_1, \ldots, x_d\right) + \sum_{i=1}^{d}\left(u_i - x_i\right)^+$$

Ενσωματώνοντας τα κλασικά Fréchet-Hoeffding φράγματα έχουμε

$$
\begin{aligned}
\max\left\{0, \sum_{i=1}^{d} u_i - d + 1, Q^*\left(x_1, \ldots, x_d\right) - \sum_{i=1}^{d}\left(x_i - u_i\right)^+\right\} &\leq Q(u_1, ..., u_d) \\
\leq \min\left\{u_1, \ldots, u_d, Q^*\left(x_1, \ldots, x_d\right) + \sum_{i=1}^{d}\left(u_i - x_i\right)^+\right\}&
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

άρα οι ανισότητες στη (3.1) ισχύουν για $S = \{\mathbf{x}\}$. Ακόμα, εφόσον

$$W_d(\mathbf{x}) \leq Q^*(\mathbf{x}) \leq M_d(\mathbf{x})$$

ισχύει ότι

$$
\begin{aligned}
\underline{Q}^{[\mathbf{x}\},Q^*}(\mathbf{x}) &= \max\left\{0, \sum_{i=1}^{d} x_i - d + 1, Q^*\left(x_1, \ldots, x_d\right)\right\} = Q^*(\mathbf{x}) \\
\overline{Q}^{\{\mathbf{x}\},Q^*}(\mathbf{x}) &= \min\left\{x_1, \ldots, x_d, Q^*\left(x_1, \ldots, x_d\right)\right\} = Q^*(\mathbf{x})
\end{aligned}
$$

και άρα οι ισότητες στη σχέση (3.1) ισχύουν για $S = \{\mathbf{x}\}$ Έστω, τώρα, ότι το S δεν είναι μονοσύνολο αλλα ένα συμπαγές σύνολο και $Q \in \mathcal{Q}^{S,Q^*}$. Γνωρίζουμε από τα προηγούμενα ότι $Q(\mathbf{u}) \geq \underline{Q}^{\{\mathbf{x}\},Q^*}(\mathbf{u})$ για όλα τα $\mathbf{x} \in S$, άρα

$$Q(\mathbf{u}) \geq \max_{\mathbf{x}\in\mathcal{S}}\left\{\underline{Q}^{\{\mathbf{x}\},Q^*}(\mathbf{u})\right\} = \underline{Q}^{S,Q^*}(\mathbf{u}) \tag{3.4}$$

Παρόμοια παίρνουμε για το άνω φράγμα ότι

$$Q(\mathbf{u}) \leq \min_{\mathbf{x}\in\mathcal{S}}\left\{\overline{Q}^{\{\mathbf{x}\},Q^*}(\mathbf{u})\right\} = \overline{Q}^{S,Q^*}(\mathbf{u}) \tag{3.5}$$

και άρα οι ανισότητες στην (3.1) ισχύουν. Ακόμα, αν $\mathbf{u} \in S$ τότε $Q(\mathbf{u}) = Q^*(\mathbf{u})$ για όλα τα $Q \in \mathcal{Q}^{S,Q^*}$. Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα Lipschitz των quasi-copulas έχουμε

$$\max_{\mathbf{x}\in S}\left\{Q^*(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{d}\left(x_i - u_i\right)^+\right\} = Q^*(\mathbf{u}) \text{ και } \min_{\mathbf{x}\in\mathcal{S}}\left\{Q^*(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{d}\left(u_i - x_i\right)^+\right\} = Q^*(\mathbf{u})$$

χρησιμοποιώντας ξανά ότι η Q^* ικανοποιεί τα Fréchet-Hoeffding φράγματα εχουμε

$$\underline{Q}^{S,Q^*}(\mathbf{u}) = Q(\mathbf{u}) = \overline{Q}^{S,Q^*}(\mathbf{u}).$$

Τέλος, μένει να δείξουμε ότι και τα δύο φράγματα είναι d-quasi-copulas

- Για να δείξουμε ότι ισχύει η πρώτη συνθήκη, ας θεωρήσουμε αρχικά την περίπτωση $S = \{\mathbf{x}\}$. Έστω $(u_1, ..., u_d) \in \mathbb{I}^d$ με $u_i = 0$ για ένα $i \in \{1, ..., d\}$. Τότε το $\overline{Q}^{S,Q^*}(\mathbf{u})$ είναι προφανώς 0 και $\underline{Q}^{S,Q^*}(\mathbf{u}) = \max\left(0, Q^*(\mathbf{x}) - x_i - \sum_{j\neq i}\left(x_j - u_j\right)^+\right) = 0$ γιατί $Q^*(\mathbf{x}) \leq M_d(\mathbf{x})$, δηλαδή $Q^*(\mathbf{x}) - x_i - \sum_{j\neq i}\left(x_j - u_j\right)^+ \leq 0$, για όλα τα $\mathbf{x} \in S$. Ακόμα, για $(u_1, ..., u_d) \in \mathbb{I}^d$ με $u_i = 1$, για όλα τα $i \in \{1, ..., d\} \setminus \{j\}$, το άνω φράγμα ισούται με

  $$\overline{Q}^{S,Q^*}(\mathbf{u}) = \min\left\{u_j, Q^*(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{d}\left(u_i - x_i\right)^+\right\}$$

  και αφού

$$
\begin{aligned}
Q^*(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{d} (u_i - x_i)^+ &= Q^*(\mathbf{x}) + \sum_{i \in \{1,\ldots,d\} \setminus \{j\}} (1 - x_i) + (u_j - x_j)^+ \\
&= Q^*(\mathbf{x}) + d - 1 - \sum_{i \in \{1,\ldots,d\} \setminus \{j\}} x_i + (u_j - x_j)^+ \\
&\geq W_d(\mathbf{x}) + d - 1 - \sum_{i \in \{1,\ldots,d\} \setminus \{j\}} x_i + (u_j - x_j)^+ \\
&\geq x_j + (u_j - x_j)^+ \geq u_j
\end{aligned}
$$

συνεπάγεται ότι $Q^*(\mathbf{u}) = u_j$, εφόσον $\overline{Q}^{S,Q^*}(\mathbf{u}) = u_j$. Όμοια, το κάτω φράγμα είναι ίσο με $\underline{Q}^{S,Q^*}(\mathbf{u}) = \max\left(0, u_j, Q^*(\mathbf{x}) - (x_j - u_j)^+\right)$ που ισούται με u_j επειδή $Q^*(\mathbf{x}) - (x_j - u_j)^+ \leq M_d(\mathbf{x}) - (x_j - u_j)^+ \leq u_j$. Οι συνοριακές συνθήκες ισχύουν ανάλογα και στην περίπτωση που το S περιέχει παραπάνω από ένα στοιχεία, λόγω της συνέχειας των συναρτήσων μεγίστου και ελαχίστου και των σχέσεων (3.4) (3.5).

- Και τα δύο φράγματα είναι προφανώς αύξουσες συναρτήσεις σε κάθε μεταβλητή, άρα η δεύτερη σχέση στον ορισμό ισχύει.
- Τέλος, παίρνοντας το κατα σημείο ελάχιστο και μέγιστο Lipschitz συναρτήσεων διατηρείται η ιδιότητα Lipschitz, άρα και τα δύο φράγματα ικανοποιούν την τρίτη ιδιότητα του ορισμού.

□

Σχόλιο 3.1 *Τα φράγματα στο Θεώρημα 3.1 ισχύουν ανάλογα και για copulas, δηλαδή για*

$$
C \in \left\{ C \in \mathcal{C}^d : C(\mathbf{x}) = Q^*(\mathbf{x}) \text{ , για όλα τα } \mathbf{x} \in \mathcal{S} \right\} =: \mathcal{C}^{S,Q^*}
$$

όπου τα Q^* και S είναι όπως παραπάνω. Τότε

$$
\underline{Q}^{S,Q^*}(\mathbf{u}) \leq C(\mathbf{u}) \leq \overline{Q}^{S,Q^*}(\mathbf{u}) \text{ , για όλα τα } \mathbf{u} \in \mathbb{I}^d
$$

♦

Στο παρακάτω Πόρισμα λαμβάνουμε ανάλογα φράγματα για quasi συναρτήσεις επιβίωσης, με δοσμένες τιμές σε ένα υποσύνολο του πεδίου ορισμού τους.

Πόρισμα 3.1 *Έστω $S \subset \mathbb{I}^d$ ένα συμπαγές σύνολο και $\widehat{Q}^* \in \widehat{\mathcal{Q}}^d$ μια quasi συνάρτηση επιβίωσης. Θεωρούμε το σύνολο*

$$
\widehat{\mathcal{Q}}^{S,\widehat{Q}^*} := \left\{ Q \in \widehat{\mathcal{Q}}^d : \widehat{Q}(\mathbf{x}) = \widehat{Q}^*(\mathbf{x}) \text{ , για όλα τα } \mathbf{x} \in S \right\}
$$

Τότε, για όλα τα $\widehat{Q} \in \widehat{\mathcal{Q}}^{S,\widehat{Q}^*}$, ισχύει ότι

$$
\begin{aligned}
\underline{\widehat{Q}}^{S,\widehat{Q}^*}(\mathbf{u}) \leq \widehat{Q}(\mathbf{u}) \leq \widehat{\overline{Q}}^{S,\widehat{Q}^*}(\mathbf{u}) &\quad \text{, για όλα τα } \mathbf{u} \in \mathbb{I}^{\mathrm{d}} \\
\underline{\widehat{Q}}^{S,\widehat{Q}^*}(\mathbf{u}) = \widehat{Q}(\mathbf{u}) = \widehat{\overline{Q}}^{S,\widehat{Q}^*}(\mathbf{u}) &\quad \text{, για όλα τα } \mathbf{u} \in \mathcal{S}
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

όπου τα φράγματα δίνονται από

$$
\underline{\widehat{Q}}^{S,\widehat{Q^*}} := \underline{Q}^{\widehat{S},\widehat{Q^*}(1-\cdot)}(1 - \mathbf{u}) \text{ και } \overline{\widehat{Q^*}}^{S,\widehat{Q^*}} := \overline{Q}^{\widehat{S},\widehat{Q^*}(1-\cdot)}(1 - \mathbf{u})
$$

με $\hat{S} = \{(1 - x_1, \ldots, 1 - x_d) : (x_1, \ldots, x_d) \in S\}$.

Απόδειξη. Έστω $\widehat{Q} \in \widehat{\mathcal{Q}}^{S,\widehat{Q^*}}$. Εφόσον η $\widehat{Q}(1-\cdot)$ είναι quasi-copula που ταυτίζεται με την $\widehat{Q^*}(1-\cdot)$ στο σύνολο $\widehat{S}$ λαμβάνουμε με εφαρμογή του Θεωρήματος 3.1 ότι

$$\underline{Q}^{\widehat{S},\widehat{Q^*}(1-\cdot)}(\mathbf{u}) \leq \widehat{Q}(1-\mathbf{u}) \leq \overline{Q}^{\widehat{S},\widehat{Q^*}(1-\cdot)}(\mathbf{u}) \text{ , για όλα τα } \mathbf{u} \in \mathbb{I}^d$$

με μετασχηματισμό των μεταβλητών έχουμε

$$\underline{Q}^{\widehat{S},\widehat{Q^*}(1-\cdot)}(1-\mathbf{u}) \leq \widehat{Q}(\mathbf{u}) \leq \overline{Q}^{\widehat{S},\widehat{Q^*}(1-\cdot)}(1-\mathbf{u})$$

□

3.1 Βελτιωμένα Fréchet-Hoeffding φράγματα με πληροφορίες για χαμηλότερης διάστασης περιθώριες της quasi-copula

Στο επόμενο Θεώρημα βρίσκουμε βελτιωμένα Fréchet-Hoeffding φράγματα δεδομένου ότι γνωρίζουμε πληροφορίες για χαμηλότερης διάστασης περιθώριες της quasi-copula. Αυτό το πλάισιο αντιστοιχεί στη περίπτωση που κάποιος ενδιαφέρεται για ένα πολυδιάστατο τυχαίο διάνυσμα, όμως έχει διαθέσιμες πληροφορίες, για την δομή εξάρτησης, για χαμηλότερης διάστασης τυχαίο διάνυσμα. Για παράδειγμα, στα Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά κάποιος μπορεί να ενδιαφέρεται για ένα δικαίωμα πάνω σε πολλά αγαθά, παρόλα αυτά έχει πληροφορίες για τη δομή εξάρτησης από την αγορά μόνο για τα ζεύγη αυτών των αγαθών.

Ας εισάγουμε μια βολική γραφή για χαμηλότερης διάστασης περιθώριες μιας quasi-copula. Θεωρούμε το υποσύνολο $I = \{i_1, \ldots, i_n\} \subset \{1, \ldots, d\}$ και ορίζουμε την **προβολή** ενός διανύσματος $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$ σε ένα χώρο χαμηλότερης διάστασης $\mathbb{R}^n$ με $\mathbf{u}_I := (u_{i_1}, \ldots, u_{i_n}) \in \mathbb{R}^n$. Ακόμα, ορίζουμε το **lift** ενός διανύσματος $\mathbf{u}_I \in \mathbb{R}^n$ σε έναν υψηλότερης διάστασης χώρο $\mathbb{R}^d$ με $\mathbf{u}'_I =: \mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$ όπου $v_i = u_i$, αν $i \in I$ και $v_i = 1$, αν $i \notin I$. Τώρα, μπορούμε να ορίσουμε την I-περιθώρια της d-quasi-copula Q ως

$$Q_I : \mathbb{I}^n \to \mathbb{I} \text{ με } \mathbf{u}_I \mapsto Q\left(\mathbf{u}'_I\right).$$

Σχόλιο 3.2 *Έστω $\mathbf{u} \in \mathbb{I}^d$ και $I \subset \{1, \ldots, d\}$. Τότε, αν προβάλλουμε αρχικά το $\mathbf{u}$ και στη συνέχεια το κάνουμε lift, παίρνουμε ότι $\mathbf{u} \leq \mathbf{u}'_I$. Άρα, από τη δεύτερη συνθήκη στον ορισμό της quasi-copula έχουμε ότι*

$$Q(\mathbf{u}) \leq Q_I(\mathbf{u}_I) = Q\left(\mathbf{u}'_I\right).$$

♦

Θεώρημα 3.2 *Έστω $I_1, ..., I_k$ υποσύνολα του $\{1, ..., d\}$ με $|I_j| \geq 2$, για $j \in \{1, ..., k\}$ και $|I_i \cap I_j| \leq 1$, για $i, j \in \{1, \ldots, k\}$, $i \neq j$. Έστω $\underline{Q}_j, \overline{Q}_j$ $|I_j|$-quasi-copula με $\underline{Q}_j \leq \overline{Q}_j$, για $j = 1, ..., k$ και σύνολο*

$$\mathcal{Q}^I = \left\{Q \in \mathcal{Q}^d : \underline{Q}_j \leq Q_{I_j} \leq \overline{Q}_j,\ j = 1, \ldots, k\right\}$$

Όπου Q_{I_j} οι I_j περιθώριες της Q. Τότε το $\mathcal{Q}^I$ είναι μη κενό και ισχύουν τα ακόλουθα φράγματα

$$\begin{aligned}
\underline{Q}^I(\mathbf{u}) &:= \min\left\{Q(\mathbf{u}) : Q \in \mathcal{Q}^I\right\} \\
&= \max\left(\max_{j\in\{1,\ldots,k\}}\left\{\underline{Q}_j\left(\mathbf{u}_{I_j}\right) + \sum_{l\in\{1,\ldots,d\}\setminus I_j}(u_l - 1)\right\}, W_d(\mathbf{u})\right) \\
\overline{Q}^I(\mathbf{u}) &:= \max\left\{Q(\mathbf{u}) : Q \in \mathcal{Q}^I\right\} = \min\left(\min_{j\in\{1,\ldots,k\}}\left\{\overline{Q}_j\left(\mathbf{u}_{I_j}\right)\right\}, M_d(\mathbf{u})\right)
\end{aligned}$$

Ακόμα, $\underline{Q}^I, \overline{Q}^I \in \mathcal{Q}^I$, άρα τα φράγματα είνα sharp.

Απόδειξη. Έστω $Q \in \mathcal{Q}^I$ και $\mathbf{u} \in \mathbb{I}^d$. Θα δείξουμε αρχικά ότι ισχύει το άνω φράγμα $\overline{Q}^I$. Από το Σχόλιο 3.2 προκύπτει κατευθείαν ότι

$$Q(\mathbf{u}) \leq Q\left(\mathbf{u}'_{I_j}\right) = Q_{I_j}\left(\mathbf{u}_{I_j}\right) \leq \overline{Q}_j\left(\mathbf{u}_{I_j}\right) \quad \text{, για όλα τα } j = 1, \ldots, k.$$

Άρα, $Q(\mathbf{u}) \leq \min_{j \in \{1,\ldots,k\}} \left\{\overline{Q}_j\left(\mathbf{u}_{I_j}\right)\right\}$. Ενσωματώνοντας τα κλασικά Fréchet-Hoeffding φράγματα παίρνουμε το $\overline{Q}^I$. Ακόμα, η πρώτη και η δεύτερη συνθήκη του ορισμού των quasi-copula ικανοποιούνται αυτομάτως καθώς οι $\overline{Q}_j$ είναι quasi-copulas , για $j = 1, ..., k$, ενώ η $\overline{Q}^I$ είναι σύνθεση Lipschitz συναρτήσεων και άρα Lipschitz συνάρτηση η ίδια. Συνεπώς, και η τρίτη συνθήκη του ορισμού των quasi-copula ικανοποιείται. Άρα, η $\overline{Q}^I$ είναι πράγματι quasi-copula.

Όσο για το κάτω φράγμα, χρησιμοποιώντας την προβολή, το lift και την ιδιότητα Lipschitz των quasi-copulas έχουμε

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{u}) &\geq Q\left(\mathbf{u}'_{I_j}\right) + \sum_{l \in \{1,\ldots,d\} \setminus I_j} (u_l - 1) = Q_{I_j}\left(\mathbf{u}_{I_j}\right) + \sum_{l \in \{1,\ldots,d\} \setminus I_j} (u_l - 1) \\ &\geq \underline{Q}_j\left(\mathbf{u}_{I_j}\right) + \sum_{l \in \{1,\ldots,d\} \setminus I_j} (u_l - 1) \quad \text{, για όλα τα } j = 1, \ldots, k \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$Q(\mathbf{u}) \geq \max_{j \in \{1,\ldots,k\}} \left\{ Q_j\left(\mathbf{u}_{I_j}\right) + \sum_{l \in \{1,\ldots,d\} \setminus I_j} (u_l - 1) \right\} \tag{3.7}$$

και εαν ενσωματώσουμε το κάτω Fréchet-Hoeffding φράγμα λαμβάνουμε το $\underline{Q}^I$.

Για να διαπιστώσουμε ότι η $\underline{Q}^I$ είναι quasi-copula, αρχικά θεωρούμε ένα $\mathbf{u} \in \mathbb{I}^d$ με $u_i = 0$, για ένα τουλάχιστον $i \in \{1, ..., d\}$. Τότε $W_d(\mathbf{u}) = 0$,

$$\underline{Q}_j\left(\mathbf{u}_{I_j}\right) + \sum_{l \in \{1,\ldots,d\} \setminus I_j} (u_l - 1) \leq \underline{Q}_j\left(\mathbf{u}_{I_j}\right) - 1 \leq 0 \quad \text{, για } i \in \{1, \ldots, d\} \setminus I_j$$

και

$$\underline{Q}_j\left(\mathbf{u}_{I_j}\right) + \sum_{l \in \{1,\ldots,d\} \setminus I_j} (u_l - 1) = \sum_{l \in \{1,\ldots,d\} \setminus I_j} (u_l - 1) \leq 0 \quad \text{, αν } i \in I_j$$

, για όλα τα $j = 1, ..., k$. Άρα, $\underline{Q}^I(\mathbf{u}) = 0$. Ακόμα, για $\mathbf{u} \in \mathbb{I}^d$ με $\mathbf{u} = \mathbf{u}'_{(i)}$ ισχύει ότι $W_d(\mathbf{u}) = u_i$ και

$$\underline{Q}_j\left(\mathbf{u}_{I_j}\right) + \sum_{l \in \{1,\ldots,d \setminus I_j} (u_l - 1) - 1 + (u_i - 1) = u_i \quad \text{, για } i \in \{1, ..., d\} \setminus I_j,$$

ενώ προφανώς $\underline{Q}_i\left(\mathbf{u}_{I_j}\right) = u_i$ αν $i \in I_j$, για όλα τα $j = 1, \ldots, d$. Άρα $\underline{Q}^I(\mathbf{u}) = u_i$, δηλαδή δείξαμε ότι η $\underline{Q}^I$ ικανοποιεί την πρώτη συνθήκη του ορισμού των quasi-copulas. Η δεύτερη συνθήκη προκύπτει άμεσα. Τέλος, για την τρίτη συνθήκη αρκεί να παρατηρήσουμε ότι η $\underline{Q}^I$ είναι σύνθεση συναρτήσεων Lipschitz και άρα είναι η ίδια Lipschitz. Άρα, τελικά το κάτω φράγμα είναι quasi-copula.

Τέλος, γνωρίζοντας ότι οι $\underline{Q}^I, \overline{Q}^I$ είναι quasi-copulas μένει να δείξουμε ότι και τα δύο φράγματα ανήκουν στο $\mathcal{Q}^I$, δηλαδή, πρέπει να δείξουμε ότι $\underline{Q}_j \leq \left(\underline{Q}^i\right)_{I_j}, \left(\overline{Q}^i\right)_{I_j} \leq \overline{Q}_j$, για όλα τα $j = 1, .., k$. Για το άνω φράγμα ισχύει εξ' ορισμού ότι $\left(\overline{Q}^I\right)_{I_j} \leq \overline{Q}_j$, για $j = 1, \ldots, k$. Επίσης, εφόσον

$|I_i \cap I_j| \leq 1$ ισχύει ότι $\left(\overline{Q}^I\right)_{I_j} = \overline{Q}_j$. Άρα, $\underline{Q}_j \leq \left(\overline{Q}^I\right)_{I_j} \leq \overline{Q}_j$, για $j = 1, \ldots, k$ και $\overline{Q}^I \in \mathcal{Q}^I$. Χρησιμοποιώντας το ίδιο επιχείρημα έχουμε για το κάτω φράγμα ότι $\left(\underline{Q}^I\right)_{I_i} = \underline{Q}_j$, για $j = 1, \ldots, k$, άρα $\underline{Q}_j \leq \left(\underline{Q}^I\right)_{I_j} \leq \overline{Q}_j$, για $j = 1, \ldots, k$ και τελικά $\underline{Q}_j \leq \left(\underline{Q}^i\right)_{I_j}$. Επομένως, ισχύει ότι $\left(\overline{Q}^i\right)_{I_j} \leq \overline{Q}_j$.

□

Τα φράγματα στο Θεώρημα 3.2 ισχύουν ανάλογα για copulas. Δηλαδή, για υποσύνολα $I_1, ...I_k$ και quasi-copulas $\underline{Q}_j, \overline{Q}_j$ όπως στο Θεώρημα 3.2, αν ορίσουμε

$$\mathcal{C}^I := \left\{C \in \mathcal{C}^d : \underline{Q}_j \leq C_{I_j} \leq \overline{Q}_j,\ j = 1, \ldots, k\right\}$$

ισχύει ότι

$$\underline{Q}^I \leq C \leq \overline{Q}^I \quad , \text{για όλες τις } C \in \mathcal{C}^I.$$

Τέλος, το παρακάτω Πόρισμα είναι μια εκδοχή του Θεωρήματος 3.2 για quasi συναρτήσεις επιβίωσης. Η απόδειξη είναι ανάλογη με αυτή του Θεωρήματος 3.2 και για αυτό παραλείπεται.

Πόρισμα 3.2 *Έστω $I_1, ..., I_k$ υποσύνολα του $\{1, ..., d\}$ με $|I_j| \geq 2$, για $j \in \{1, ..., k\}$ και $|I_i \cap I_j| \leq 1$, για $i, j \in \{1, \ldots, k\}$, $i \neq j$. Έστω, $\widehat{\underline{Q}}_j, \widehat{\overline{Q}}_j$ $|I_j|$-quasi συναρτήσεις επιβίωσης με $\widehat{\underline{Q}}_j \leq \widehat{\overline{Q}}_j$, για $j = 1, ..., k$ και σύνολο*

$$\widehat{\mathcal{Q}}^I = \left\{\widehat{Q} \in \widehat{\mathcal{Q}}^d : \widehat{\underline{Q}}_j \leq \widehat{Q}_{I_j} \leq \widehat{\overline{Q}}_j,\ j = 1, \ldots, k\right\},$$

όπου οι I_j-περιθώριες των quasi-survival συναρτήσεων $\widehat{Q}$ ορίζονται

$$\mathbb{I}^d \in \mathbf{u} \mapsto \widehat{Q}_{I_j}(u_1, \ldots, u_d) := \widehat{Q}\left(u'_1, \ldots, u'_d\right)$$

με $u'_i = u_i$, όταν $i \in I_j$ και $u'_i = 0$ αν $i \in \{1, \ldots, d\} \setminus I_j$. Τότε, ισχύει για όλες τις $\widehat{Q} \in \widehat{Q}^I$

$$\widehat{\overline{Q}}^I(\mathbf{u}) \leq \widehat{Q}(\mathbf{u}) \leq \widehat{\underline{Q}}^I(\mathbf{u}) \quad , \text{για όλα τα } u \in \mathbb{I}^d$$

όπου

$$\widehat{\overline{Q}}^I(\mathbf{u}) := \overline{Q}^I(\mathbf{1} - \mathbf{u}) \text{ και } \widehat{\underline{Q}}^I(\mathbf{u}) := \underline{Q}^I(1 - \mathbf{u})$$

με $\underline{Q}^I$ και $\overline{Q}^I$, όπως στο Θεώρημα 3.2, για τις quasi-copulas $\widehat{\overline{Q}}_j(1 - \cdot)$ και $\widehat{\underline{Q}}_j(1 - \cdot)$ αντίστοιχα, για I_j με $j \in 1, ..., k$.

3.2 Είναι τα βελτιωμένα Fréchet-Hoeffding φράγματα copulas ;

Μία ενδιαφέρουσα ερώτηση που προκύπτει τώρα είναι κάτω από ποιές συνθήκες είναι τα βελτιωμένα Fréchet-Hoeffding φράγματα copulas και όχι απλώς quasi-copulas. Τέτοιες συνθήκες θα μας επέτρεπαν, για παράδειγμα, να μετατρέψουμε τα φράγματα των copulas σε φράγματα αναμενόμενης τιμής για τυχαίες μεταβλητές.
Ο Tankov [13] έδειξε στις δύο διαστάσεις ότι τα $\underline{Q}^{S,Q^*}$ και $\overline{Q}^{S,Q^*}$ είναι copulas κάτω από περιορισμούς για το σύνολο S. Συγκεκριμένα, αν το S είναι αύξων (συχνά στη βιβλιογραφία αναφέρεται ως comonotone), δηλαδή, για $(u_1, u_2), (v_1, v_2) \in S$ τότε $u_1 \leq v_1$ και $u_2 \leq v_2$ ή $u_1 \geq v_1$ και $u_2 \geq v_2$,

τότε το κάτω φράγμα $\underline{Q}^{S,Q^*}$ είναι copula. Αντίστροφα, αν το S είναι φθίνων (συχνά στη βιβλιογραφία αναφέρεται ως countermonotone), δηλαδη, για $(u_1, u_2), (v_1, v_2) \in S$ τότε $u_1 \le v_1$ και $u_2 \ge v_2$ ή $u_1 \ge v_1$ και $u_2 \le v_2$, τότε το άνω φράγμα $\overline{Q}^{S,Q^*}$ είναι copula. Οι Bernard, Jiang και Vanduffel [14] χαλάρωσαν αυτούς τους περιορισμούς και έδωσαν ελάχιστες συνθήκες για το S έτσι ώστε τα φράγματα να είναι copulas.
Η κατάσταση, βέβαια, είναι πιο περίπλοκη για περισσότερες από δύο διαστάσεις. Από τη μία πλευρά, η ιδιότητα ενός φθίνων συνόλου δεν είναι ξεκάθαρη. Από την άλλη πλευρά, το παρακάτω αντιπαράδειγμα δείχνει ότι η ιδιότητα το S να είναι αύξων σύνολο δεν είναι αρκετή έτσι ώστε η $\underline{Q}^{S,Q^*}$ να είναι copula.

Παράδειγμα 3.1 *Έστω $S = \left\{(u, u, u) : u \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{5}, 1\right]\right\} \subset \mathbb{I}^3$ και η Q^* να είναι η ανεξάρτητη copula, δηλαδή $Q^*(u_1, u_2, u_3) = u_1 u_2 u_3$, για $(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{I}^3$. Τότε το S είναι προφανώς αύξων σύνολο, παρόλα αυτά η $\underline{Q}^{S,Q^*}$ δεν είναι copula. Για να μην είναι copula, αρκεί να δείξουμε ότι ο $\underline{Q}^{S,Q^*}$-όγκος για κάποιο υποσύνολο του $\mathbb{I}^3$ είναι αρνητικός. Πράγματι, για $\left(\frac{56}{100}, \frac{9}{5}\right]^3 \subset \mathbb{I}^3$ λαμβάνουμε το εξής*

$$\begin{aligned}
V_{\underline{Q}^{S,Q^*}}\left(\left(\frac{56}{100}, \frac{3}{5}\right]^3\right) &= \left(\frac{3}{5}\right)^3 - 3\left[\left(\frac{3}{5}\right)^3 - \left(\frac{3}{5} - \frac{56}{100}\right)\right] \\
&\quad + 3\left[\left(\frac{3}{5}\right)^3 - 2\left(\frac{3}{5} - \frac{56}{100}\right)\right] - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = -0.029 < 0
\end{aligned}$$

♦

Στη τετριμένη περίπτωση που $S = \mathbb{I}^d$ και Q^*-copula, τότε και τα δύο φράγματα του Θεωρήματος 3.1 είναι copulas για $d > 2$ αφού ισούται με την Q^*. Ακόμα, το άνω φράγμα είναι copula για $d > 2$ αν συμπίπτει με το κλασικό άνω Fréchet-Hoeffding φράγμα. Τέλος, αποδεικνύεται ότι μόνο σε αυτές τις τετριμένες περιπτώσεις είναι τα φράγματα copulas για $d > 2$ [16].

3.3 Στοχαστική Κυριαρχία για quasi-copulas

Σκοπός του παρόντος κεφαλαίου είναι να συνδέσει την πάνω και κάτω orthant διάταξη στο σύνολο των quasi-copulas με την αναμενόμενη τιμή τυχαίων μεταβλητών. Έστω $\mathbf{S} = (S_1, ...S_d)$ ένα τυχαίο διάνυσμα του $\mathbb{R}_+^d$ με από κοινού κατανομή πιθανότητας F και περιθώριες κατανομές πιθανότητας $F_1, ...F_d$. Από το Θεώρημα του Sklar, υπάρχει μια d-copula C τέτοια ώστε $F(x_1, \ldots, x_d) = C(F_1(x_1), \ldots, F_d(x_d))$, για όλα τα $(x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}_+^d$. Θεωρούμε μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}_+^d \to \mathbb{R}$, μας ενδιαφέρει η $\mathbb{E}[f(\mathbf{S})]$, και συγκεκριμένα οι ιδιότητες μονοτονίας αυτής της αναμενόμενης τιμης σε σχέση με την πάνω και κάτω orthant διάταξη στο σύνολο των quasi-copulas. Δεδομένου ότι μας δίνονται οι περιθώριες κατανομές, η αναμενόμενη τιμή γίνεται συνάρτηση της copula C και ο τελεστής της αναμενόμενης τιμές ορίζεται από

$$\begin{aligned} \pi_f(C) := \mathbb{E}[f(\mathbf{S})] &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x_1, \ldots, x_d) \ \mathrm{d}C(F_1(x_1), \ldots, F_d(x_d)) \\ &= \int_{\mathbb{I}^d} f\left(F_1^{-1}(u_1,), \ldots, F_d^{-1}(u_d)\right) \ \mathrm{d}C(u_1, \ldots, u_d) \end{aligned} \tag{3.8}$$

Ο παραπάνω ορισμός, όμως, δεν ισχύει όταν η C είναι απλώς quasi-copula, αφού το ολοκήρωμα στην (3.8), και συγκεκεκριμένα ο όρος dC, δεν είναι πλέον καλώς ορισμένος. Αυτό συμβαίνει καθώς μία quasi-copula C δεν αντιστοιχεί απαραίτητα σε (προσημασμένο) μέτρο dC για να ολοκληρώσουμε. Συνεπώς, θα χρησιμοποιήσουμε μια πολυδιάστατη ολοκήρωση κατα παράγοντες που μας δίνει μια εναλλακτική αναπαράσταση του $\pi_f(C)$ κατάλληλη για quasi-copulas.

Αρχικά, θα δώσουμε κάποιους βοηθητικούς ορισμούς.

Ορισμός 3.2 *Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}_+^d \to \mathbb{R}$ λέγεται* ***Δ-antitonic*** *αν για κάθε υποσύνολο $\{i_1, ..., i_n\} \subseteq \{1, ..., d\}$ με $n \geq 2$ και κάθε υπερκύβο $\times_{j=1}^n [a_j, b_j] \subset \mathbb{R}_+^n$ με $a_j < b_j$, για $j = 1, \ldots, n$ να ισχύει*

$$(-1)^n \Delta_{a_1,b_1}^{i_1} \circ \cdots \circ \Delta_{a_n,b_n}^{i_n} f(\mathbf{x}) \geq 0 \quad , \text{για όλα τα } \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^d.$$

Ανάλογα, η f λέγεται ***Δ-monotonic*** *αν για κάθε υποσύνολο $\{i_1, ..., i_n\} \subseteq \{1, ..., d\}$ με $n \geq 2$ και κάθε υπερκύβο $\times_{j=1}^n [a_j, b_j] \subset \mathbb{R}_+^n$ με $a_j < b_j$, για $j = 1, \ldots, n$ να ισχύει*

$$\Delta_{a_1,b_1}^{i_1} \circ \cdots \circ \Delta_{a_n,b_n}^{i_n} f(\mathbf{x}) \geq 0 \quad , \text{για όλα τα } \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^d.$$

Σχόλιο 3.3 *Αν η f είναι Δ-monotonic τότε είναι και d-αύξουσα.*

♦

Από το Θεώρημα 3.3.15 των Müller και Stoyan [17] έχουμε για copulas $\underline{C}, \overline{C} \in \mathcal{C}^d$ με $\underline{C} \preceq_{LO} \overline{C}$ ότι $\pi_f(\underline{C}) \leq \pi_f(\overline{C})$ για όλες τις φραγμένες Δ-antitonic συναρτήσεις f. Ακόμα, εάν $\underline{C}, \overline{C} \in \mathcal{C}^d$ με $\underline{C} \preceq_{UO} \overline{C}$ έχουμε ότι $\pi_f(\underline{C}) \leq \pi_f(\overline{C})$ για όλες τις φραγμένες Δ-monotonic συναρτήσεις f.

Για να καταλήξουμε σε παρόμοια αποτελέσματα στην περίπτωση που οι $\underline{C}, \overline{C}$ είναι quasi-copulas, ας θυμηθούμε ,αρχικά, ότι μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}_+^d \to \mathbb{R}$ ονομάζεται **επαγώμενη μέτρου** αν ο όγκος της V_f επάγει ένα μέτρο στη Borel σ-άλγεβρα του $\mathbb{R}_+^d$. Αποδεικνύεται ότι κάθε δεξιά-συνεχής Δ-monotonic ή Δ-antitonic συνάρτηση $f : \mathbb{R}_+^d \to \mathbb{R}$ επάγει ένα προσημασμένο μέτρο στη Borel σ-άλγεβρα του $\mathbb{R}_+^d$, το οποίο συμβολίζουμε με μ_f. Συγκεκριμένα, ισχύει

$$\mu_f((a_1, b_1] \times \cdots \times (a_d, b_d]) = V_f((a_1, b_1] \times \cdots \times (a_d, b_d]) \tag{3.9}$$

για κάθε υπερκύβο $(a_1, b_1] \times \cdots \times (a_d, b_d] \subset \mathbb{R}_+^d$.

Στη συνέχεια, ορίζουμε για ένα υποσύνολο $I = \{i_1, \dots, i_n\} \subset \{1, \dots, d\}$ την I-περιθώρια της συνάρτησης f με

$$f_I : \mathbb{R}_+^n \ni (x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) \mapsto f(x_1, \dots, x_d) \ , \text{με } x_k = 0 \text{ για όλα τα } k \notin I$$

και το αντίστοιχο I-περιθώριο μέτρο με

$$\mu_{f_I}\left((a_{i_1}, b_{i_1}] \times \cdots \times (a_{i_n}, b_{i_n}]\right) = V_{f_I}\left((a_{i_1}, b_{i_1}] \times \cdots \times (a_{i_n}, b_{i_n}]\right)$$

Σημειώνουμε ότι για $I = \{1, ..., d\}$ ισχύει $\mu_{f_I} = \mu_f$, ενώ αν $I \subset \{1, \dots, d\}$ το μ_{f_I} μπορούμε να το δούμε σαν περιθώριο μέτρο του μ_f. Τώρα, ορίζουμε αναδρομικά

$$\begin{aligned}
\text{για } |I| = 1: \quad \varphi_f^I(C) &:= \int_{\mathbb{R}_+} f_{\{i_1\}}(x_{i_1}) \ \mathrm{d}F_{i_1}(x_{i_1}) \\
\text{για } |I| = 2: \quad \varphi_f^I(C) &:= -f(0,0) + \varphi_f^{\{i_1\}}(C) + \varphi_f^{\{i_2\}}(C) \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}_+^2} \widehat{C_I}\left(F_{i_1}(x_{i_1}), F_{i_2}(x_{i_2})\right) \ \mathrm{d}\mu_{f_I}(x_{i_1}, x_{i_2})
\end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}
\text{για } |I| = n > 2: \quad \varphi_f^I(C) &:= \int_{\mathbb{R}_+^{|I|}} \widehat{C_I}\left(F_{i_1}(x_{i_1}), \dots, F_{i_n}(x_{i_n})\right) \ \mathrm{d}\mu_{f_I}(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) \\
&\quad + \sum_{J \subset I, J \neq \emptyset} (-1)^{n+1-|J|} \varphi_f^J(C)
\end{aligned}$$

όπου με $\widehat{C_I}$ συμβολίζουμε τη συνάρτηση επιβίωσης της I-περιθώριας της C. Η παρακάτω Πρόταση μας δείχνει ότι η $\varphi_f^{\{1,\dots,d\}}$ είναι μια εναλλακτική αναπαράσταση της απεικόνισης π_f, δηλαδή $\pi_f(C) = \varphi_f^{\{1,\dots,d\}}(C)$ για όλες τις copulas C.

Πρόταση 3.1 *Έστω $f : \mathbb{R}_+^d \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση επαγώμενη μέτρου και C μια d-copula. Τότε*

$$\pi_f(C) = \varphi_f^{\{1,\dots,d\}}(C)$$

Απόδειξη. Αρχικά υποθέτουμε ότι $f(x_1, \dots, x_d) = V_f\left((0, x_1] \times \cdots \times (0, x_d]\right)$, για όλα τα $(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}_+^d$.

Εφαρμόζοντας το Θεωρήμα Fubini λαμβάνουμε απευθείας ότι

$$\begin{aligned}
\pi_f(C) &= \int_{\mathbb{R}_+^d} f(x_1, \dots, x_d) \ \mathrm{d}C\left(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)\right) \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^d} V_f\left((0, x_1] \times \cdots \times (0, x_d]\right) \ \mathrm{d}C\left(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)\right) \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^d} \mu_f\left((0, x_1] \times \cdots \times (0, x_d]\right) \ \mathrm{d}C\left(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)\right) \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^d} \left(\int_{\mathbb{R}_+^d} \mathbb{1}_{x_1' < x_1} \cdots \mathbb{1}_{x_d' < x_d} \ \mathrm{d}\mu_f\left(x_1', \dots, x_d'\right) \right) \ \mathrm{d}C\left(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)\right) \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^d} \left(\int_{\mathbb{R}_+^d} \mathbb{1}_{x_1' > x_1} \cdots \mathbb{1}_{x_d' > x_d} \ \mathrm{d}C\left(F_1(x_1'), \dots, F_d(x_d')\right) \right) \ \mathrm{d}\mu_f(x_1, \dots, x_d)
\end{aligned}$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+^d} \widehat{C}\left(F_1\left(x_1\right), \ldots, F_d\left(x_d\right)\right) \,\mathrm{d}\mu_f\left(x_1, \ldots, x_d\right) \tag{3.11}$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από τη (2.3). Στη συνέχεια, εγκαταλείπουμε την υπόθεση ότι $f\left(x_1, \ldots, x_d\right) = V_f\left(\left(0, x_1\right] \times \cdots \times \left(0, x_d\right]\right)$ και αποδεικνύουμε με επαγωγή ότι η σχέση ισχύει γενικότερα σε διάσταση d. Από την Πρόταση 2 του [13] γνωρίζουμε ότι η σχέση ισχύει για $d = 2$. Τώρα, υποθέτουμε ότι ισχύει για $d = n - 1$ και άρα για $d = n$ έχουμε ότι

$$f\left(x_1, \ldots, x_n\right) = V_f\left(\left(0, x_1\right] \times \cdots \times \left(0, x_n\right]\right) - \left[V_f\left(\left(0, x_1\right] \times \cdots \times \left(0, x_n\right]\right) - f\left(x_1, \ldots, x_n\right)\right]$$

Παρατηρούμε ότι το $V_f\left(\left(0, x_1\right] \times \cdots \times \left(0, x_n\right]\right) - f\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ είναι άθροισμα συναρτήσεων που καθεμία έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}_+^k$ με $k \leq n - 1$. Τότε,

$$\begin{aligned}
\pi_f(C) &= \int f\left(x_1, \ldots, x_n\right) \,\mathrm{d}C\left(F_1\left(x_1\right), \ldots, F_n\left(x_n\right)\right) \\
&= \int V_f\left(\left(0, x_1\right] \times \cdots \times \left(0, x_n\right]\right) \,\mathrm{d}C\left(F_1\left(x_1\right), \ldots, F_n\left(x_n\right)\right) \\
&\quad - \int \left[V_f\left(\left(0, x_1\right] \times \cdots \times \left(0, x_n\right]\right) - f\left(x_1, \ldots, x_n\right)\right] \,\mathrm{d}\,C\left(F_1\left(x_1\right), \ldots, F_n\left(x_n\right)\right) \\
&= \int \widehat{C}\left(F_1\left(x_1\right), \ldots, F_n\left(x_n\right)\right) \,\mathrm{d}\mu_f\left(x_1, \ldots, x_n\right) \\
&\quad + \int \left[-V_f\left(\left(0, x_1\right] \times \cdots \times \left(0, x_n\right]\right) + f\left(x_1, \ldots, x_n\right)\right] \,\mathrm{d}C\left(F_1\left(x_1\right), \ldots, F_n\left(x_n\right)\right) \\
&= \int \widehat{C}\left(F_1\left(x_1\right), \ldots, F_n\left(x_n\right)\right) \,\mathrm{d}\mu_f\left(x_1, \ldots, x_n\right) + \sum_{\substack{J \subset \{1, \ldots, n\} \\ J \neq \emptyset}} (-1)^{n+1-|J|} \varphi_f^J(C)
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την εξίσωση (3.11) στο $\int V_f\left(\left(0, x_1\right] \times \cdots \times \left(0, x_n\right]\right) \,\mathrm{d}C\left(F_1\left(x_1\right), \ldots, F_n\left(x_n\right)\right)$ για να πάρουμε την τρίτη ισότητα, και επίσης χρησιμοποιήσαμε την επαγωγική υπόθεση στην τελευταία ισότητα καθώς για κάθε $J \subset \{1, \ldots, n\}$ το πεδίο ορισμού της f_J είναι το $\mathbb{R}^{|J|}$ με $|J| \leq n - 1$. $\square$

Η Πρόταση 3.1 μας επιτρέπει να επεκτείνουμε τον τελεστή αναμενόμενης τιμής π_f σε quasi-copulas και να ορίσουμε χρήσιμες ιδιότητες μονοτονίας για αυτή τη γενικευμένη απεικόνιση.

Ορισμός 3.3 *Έστω $f : \mathbb{R}_+^d \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση επαγώμενη μέτρου. Τότε η* ***quasi-αναμενόμενη τιμή*** *για μια quasi-copula $Q \in \mathcal{Q}^d$ ορίζεται ως*

$$\pi_f(Q) := \int_{\mathbb{R}_+^d} \widehat{Q}\left(F_1\left(x_1\right), \ldots, F_d\left(x_d\right)\right) \,\mathrm{d}\mu_f\left(x_1, \ldots, x_d\right) + \sum_{\substack{J \subset \{1, \ldots, d\} \\ J \neq \emptyset}} (-1)^{d+1-|J|} \varphi_f^J(Q)$$

Θεώρημα 3.3 *Έστω quasi-copulas $\underline{Q}, \overline{Q} \in \mathcal{Q}^d$, τότε ισχύει*

(i) $\underline{Q} \preceq_{LO} \overline{Q} \implies \pi_f(\underline{Q}) \leq \pi_f(\overline{Q})$ *, για όλες τις Δ-antitonic $f : \mathbb{R}_+^d \to \mathbb{R}$ έτσι ώστε το ολοκλήρωμα να υπάρχει.*

(ii) $\underline{Q} \preceq_{UO} \overline{Q} \implies \pi_f(\underline{Q}) \leq \pi_f(\overline{Q})$ *, για όλες τις Δ-monotonic $f : \mathbb{R}_+^d \to \mathbb{R}$ έτσι ώστε το ολοκλήρωμα να υπάρχει.*

Ακόμα, αν οι $F_1, \ldots, F_d$ είναι συνεχείς τότε ισχύει και το αντίστροφο.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε το Θεώρημα στη περίπτωση που ισχύει η υπόθεση ότι $f(x_1,\ldots,x_d) = V_f((0,x_1]\times\cdots\times(0,x_d])$. Η γενική περίπτωση μπορεί να προκύψει με επαγωγή όπως στην απόδειξη της Πρότασης 3.1.

Έστω συνάρτηση f Δ-antitonic και $\underline{Q} \preceq_{LO} \overline{Q}$, τότε έχουμε

$$
\begin{aligned}
\pi_f(\underline{Q}) &= \int_{\mathbb{R}_+^d} \widehat{\underline{Q}}\left(F_1(x_1),\ldots,F_d(x_d)\right)\, \mathrm{d}\mu_f(x_1,\ldots,x_d) \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^d} V_{\underline{Q}}\left((F_1(x_1),1]\times\cdots\times(F_d(x_d),1]\right)\, \mathrm{d}\mu_f(x_1,\ldots,x_d) \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^d} \left\{\underline{Q}(1,\ldots,1) - \underline{Q}(F_1(x_1),1,\ldots,1) - \cdots - \underline{Q}(1,\ldots,1,F_d(x_d))\right. \\
&\quad + \underline{Q}(F_1(x_1),F_2(x_2),1,\ldots,1) + \cdots + \underline{Q}(1,\ldots,1,F_{d-1}(x_{d-1}),F_d(x_d)) \\
&\quad \left. - \cdots + (-1)^d \underline{Q}(F_1(x_1),\ldots,F_d(x_d))\right\} \mathrm{d}\mu_f(x_1,\ldots,x_d) \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^d} \left\{\underline{Q}(1,\ldots,1) + \underline{Q}(F_1(x_1),1,\ldots,1) + \cdots + \underline{Q}(1,\ldots,1,F_d(x_d))\right. \\
&\quad + \underline{Q}(F_1(x_1),F_2(x_2),1,\ldots,1) + \cdots + \underline{Q}(1,\ldots,1,F_{d-1}(x_{d-1}),F_d(x_d)) \\
&\quad \left. + \cdots + \underline{Q}(F_1(x_1),\ldots,F_d(x_d))\right\} \mathrm{d}\left|\mu_f\right|(x_1,\ldots,x_d)
\end{aligned}
$$

όπου για την τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι η f είναι Δ-antitonic και άρα το μ_f έχει εναλλασσόμενα πρόσημα. Πάρομοια αναπαράσταση ισχύει και για τη $\pi_f(\overline{Q})$, συνεπώς

$$
\begin{aligned}
\pi_f(\overline{Q}) - \pi_f(\underline{Q}) = \int_{\mathbb{R}^d} \Big\{ &\left[\overline{Q}(F_1(x_1),1,\ldots,1) - \underline{Q}(F_1(x_1),1,\ldots,1)\right] + \cdots \\
&+ \left[\overline{Q}(1,\ldots,1,F_d(x_d) - \underline{Q}(1,\ldots,1,F_d(x_d))\right] \\
&+ \left[\overline{Q}(F_1(x_1),F_2(x_2),1,\ldots,1) - \underline{Q}(F_1(x_1),F_2(x_2),1,\ldots,1)\right] + \cdots \\
&+ \left[\overline{Q}(1,\ldots,1,F_{d-1}(x_{d-1}),F_d(x_d)) - \underline{Q}(1,\ldots,1,F_{d-1}(x_{d-1}),F_d(x_d))\right] + \cdots \\
&+ \left[\overline{Q}(F_1(x_1),\ldots,F_d(x_d)) - \underline{Q}(F_1(x_1),\ldots,F_d(x_d))\right\} \mathrm{d}\left|\mu_f\right|(x_1,\ldots,x_d) \geq 0
\end{aligned}
$$

εφόσον $\underline{Q} \preceq_{LO} \overline{Q}$ και άρα ο ισχυρισμός (i) αποδείχθηκε.

Όσον αφορά το (ii), παίρνουμε απευθείας ότι

$$
\begin{aligned}
&\pi_f(\overline{Q}) - \pi_f(\underline{Q}) \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^d} \left\{\hat{\overline{Q}}(F_1(x_1),\ldots,F_d(x_d)) - \widehat{\underline{Q}}(F_1(x_1),\ldots,F_d(x_d))\right\} \mathrm{d}\mu_f(x_1,\ldots,x_d) \geq 0
\end{aligned}
$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι η f είναι Δ-monotonic, άρα το μ_f είναι θετικό μέτρο, και επίσης ότι ισχύει $\underline{Q} \preceq_{UO} \overline{Q}$.

Για το αντίστροφο, υποθέτουμε ότι οι $F_1,...,F_d$ είναι συνεχείς. Αν ισχύει $\pi_f(\underline{Q}) \leq \pi_f(\overline{Q})$ για όλες τις Δ-antitonic συναρτήσεις f θα ισχύει και για συναρτήσεις της μορφής $f(x_1,...,x_d) = \mathbb{1}_{x_1\leq u_1,...,x_d\leq u_d}$ για οποιοδήποτε $(u_1,...,u_d) \in (0,\infty]^d$. Για τέτοια f και οποιαδήποτε quasi-copula Q ισχύει ότι

$$\pi_f(Q) = Q\left(F_1(u_1),\ldots,F_d(u_d)\right)$$

Άρα

$$\pi_f(\underline{Q}) \leq \pi_f(\overline{Q}) \quad \Rightarrow \quad \underline{Q}\left(F_1(u_1),\ldots,F_d(u_d)\right) \leq \overline{Q}\left(F_1(u_1),\ldots,F_d(u_d)\right)$$

ενώ από το γεγονός ότι ισχύει $\pi_f(\underline{Q}) \leq \pi_f(\overline{Q})$ για οποιοδήποτε $(u_1, ..., u_d)$ και επειδή οι περιθώριες είναι συνεχείς προκύπτει η (i).

Η σχέση (ii) προκύπτει από ανάλογο ισχυρισμό. Παρατηρούμε ότι αφου ισχύει $\pi_f(\underline{Q}) \leq \pi_f(\overline{Q})$ για όλες τις Δ-monotonic συναρτήσεις f θα ισχύει και για συναρτήσεις της μορφής $f(x_1, \ldots, x_d) = 1_{x_1 \geq u_1, \ldots, x_d \geq u_d}$, για οποιοδήποτε $(u_1, ..., u_d) \in (0, \infty]^d$. Για οποιαδήποτε τέτοια f και οποιαδήποτε quasi-copula Q, ισχύει ότι $\pi_f(Q) = \widehat{Q}(F_1(u_1), \ldots, F_d(u_d))$ και άρα προκύπτει η σχέση (ii).

□

Σχόλιο 3.4 *Στο Θεώρημα 3.3 αν υποθέσουμε ότι η $-f$ είναι Δ-antitonic, αντίστοιχα Δ-monotonic οι ανισότητες στο δεξί μέλος των (i), (ii) αντιστρέφονται, δηλαδή έχουμε*

$$\underline{Q} \preceq_{LO} \overline{Q} \Longrightarrow \pi_f(\underline{Q}) \geq \pi_f(\overline{Q}) \text{ και } \underline{Q} \preceq_{UO} \overline{Q} \Longrightarrow \pi_f(\underline{Q}) \geq \pi_f(\overline{Q})$$

♦

Τέλος, δίνουμε μια συνθήκη ολοκληρωσιμότητας για την απεικόνιση $\pi_f(\cdot)$ βασιζόμενοι στις περιθώριες κατανομές $F_1, ..., F_d$ και στις ιδιότητες της συνάρτησης f. Συγκεκριμένα, το αν θα είναι η $\pi_f(C)$ πεπερασμένη δεν εξαρτάται από το αν η C είναι copula ή quasi-copula.

Πρόταση 3.2 *Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R}_+^d \to \mathbb{R}$ δεξιά συνεχής, Δ-antitonic ή Δ-monotonic τέτοια ώστε*

$$\sum_{J \subset \{1,\ldots,d\}} \sum_{i=1}^{d} \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^{|J|}} |f_J(x, \ldots, x)| \, \mathrm{d}F_i(x) \right\} < \infty \tag{3.12}$$

Τότε η απεικόνιση $\pi_f(\cdot)$ είναι καλά ορισμένη και συνεχής ως προς την κατα σημείο σύγκλιση των quasi-copulas.

Απόδειξη. Αρχικά, θα δείξουμε με επαγωγή στη διάσταση d ότι για $C \in \mathcal{C}^d$ η αναμενόμενη τιμή

$$\int_{\mathbb{R}_+^d} f(x_1, \ldots, x_d) \, \mathrm{d}C(F_1(x_1), \ldots, F_d(x_d))$$

είναι πεπερασμένη. Σύμφωνα με την Πρόταση 2 στο [13] γνωρίζουμε ότι ισχύει το ζητούμενο για $d = 2$. Υποθέτουμε, τώρα, ότι ισχύει για $d = n - 1$. Τότε για $d = n$ έχουμε

$$\begin{aligned}
|f(x_1, \ldots, x_n)| &= |V_f((0, x_1] \times \cdots \times (0, x_n]) - (V_f((0, x_1] \times \cdots \times (0, x_n]) - f(x_1, \ldots, x_n)| \\
&\leq |V_f((0, x_1] \times \cdots \times (0, x_n])| + |V_f((0, x_1] \times \cdots \times (0, x_n]) - f(x_1, \ldots, x_n)| \\
&\leq |V_f((0, x_1]^n)| + \cdots + |V_f((0, x_n]^n)| + |V_f((0, x_1] \times \cdots \times (0, x_n]) - f(x_1, \ldots, x_n)| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{J \subset \{1,\ldots,n\}} |f_J(x_i, \ldots, x_i)| + |V_f((0, x_1] \times \cdots \times (0, x_n]) - f(x_1, \ldots, x_n)| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{J \subset \{1,\ldots,n\}} |f_J(x_i, \ldots, x_i)| + \text{ σταθερά } \cdot \sum_{J \subset \{1,\ldots,n\}} |f_J(x_1, \ldots, x_n)|
\end{aligned} \tag{3.13}$$

όπου η δεύτερη ανισότητα προκύπτει από τον ορισμό του V_f και επειδή $\times_{i=1}^{n} (0, x_i] \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (0, x_i]^n$.

Παρατηρούμε, τώρα, ότι για $J \subset \{1, \ldots, n\}$ η f είναι συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}_+^{|J|}$ με $|J| < n$, άρα από την επαγωγική υπόθεση και την (3.12) λαμβάνουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}_+^{|J|}} |f_J(x_1, \ldots, x_n)| \; \mathrm{d}C_J(F_1(x_1), \ldots, F_n(x_n)) < \infty$$

για κάθε $J \subset \{1, \ldots, n\}$, με $|J| \leq n-1$. Έχουμε

$$b := \text{σταθερά} \cdot \sum_{J \subset \{1,\ldots,n\}} \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^{|J|}} |f_J(x_1, \ldots, x_n)| \, \mathrm{d}C_J(F_1(x_1), \ldots, F_n(x_n)) \right\} < \infty.$$

Τέλος, από τις (3.12) και (3.13), έχουμε ότι

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}_+^n} |f(x_1, \ldots, x_n)| \, \mathrm{d}C(F_1(x_1), \ldots, F_n(x_n)) \\ &\qquad \leq \sum_{J \subset \{1,\ldots,n\}} \sum_{i=1}^{n} \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^{|J|}} |f_J(x, \ldots, x)| \, \mathrm{d}F_i(x) \right\} + b < \infty \end{aligned}$$

Άρα ο ισχυρισμός είναι αληθής για $\mathcal{C}^d \ni C \mapsto \pi_f(C)$. Τώρα, θα ασχοληθούμε με quasi-copulas. Έχουμε για Q quasi-copula και f Δ-antitonic, από το Θεώρημα 3.3 και τις ιδιότητες του κλασικού άνω Fréchet-Hoeffding φράγματος ότι $0 \leq \pi_f(Q) \leq \pi_f(M_d) < \infty$. Το ότι ισχύει $\pi_f(M_d) < \infty$ προκύπτει από το γεγονός ότι $M_d \in \mathcal{C}^d$. Με τον ίδιο τρόπο, καθώς όλες οι quasi-copulas φράσονται από πάνω από το κλασικό άνω Fréchet-Hoeffding φράγμα M_d και τα ολοκληρώματα ως προς M_d υπάρχουν, από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης λαμβάνουμε ότι η π_f είναι συνεχής ως προς την κατα σημείο σύγκλιση των quasi-copulas. Το καλώς ορισμένο του π_f για συνάρτηση f Δ-monotonic προκύπτει ανάλογα.

□

3.4 Εφαρμογή στην αποτίμηση παραγώγου

Μια άμεση εφαρμογή των προηγούμενων αποτελεσμάτων είναι ο υπολογισμός φραγμάτων για τις τιμές πολυδιάστατων δικαιωμάτων, δεδομένου ότι οι περιθώριες κατανομές των στοιχείων είναι γνωστές ενώ η δομή εξάρτησης τους είναι μερικώς γνωστή. Αυτό το πλαίσιο αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως **μερική αβεβαιότητα εξάρτησης** και τα φράγματα που προκύπτουν αναφέρονται ως φράγματα χωρίς μοντέλο για τιμές δικαιώματων.

Θα θεωρήσουμε δικαιώματα Ευρωπαϊκού τύπου των οποίων η αποπληρωμή εξαρτάται από ένα θετικό τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{S} = (S_1, ..., S_d)$. Τα στοιχεία του $\mathbf{S}$ αναπαριστούν την αξία των μετοχών του δικαιώματος στην ωρίμανση. Στην περίπτωση που η αγορά είναι ελεύθερη από arbitrage, το Θεμελιώδες Θεώρημα Αποτίμησης Χρεογράφων μας διασφαλίζει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα **ισοδύναμο μέτρο martingale** $\mathbb{Q}$. Τότε η τιμή ενός δικαιώματος στο $\mathbf{S}$ ισούται με την αποτοκισμένη αναμενόμενη τιμή της αποπληρωμής του κάτω από ένα ισοδύναμο μέτρο martingale. Υποθέτουμε ότι όλη η πληροφορία για την ουδέτερου ρίσκου κατανομή του $\mathbf{S}$ ή των στοιχείων του, προέρχεται από τιμές συναλλασσόμενων παραγώγων πάνω σε αυτές τις μετοχές. Επίσης, υποθέτουμε ότι Ευρωπαϊκά δικαιώματα αγοράς για μεμονωμένες μετοχές με συνάρτησεις αποπληρωμής $(S_i - K)^+$, για $i = 1, \ldots, d$ και για όλες τις τιμές άσκησης $K > 0$ συναλλάσσονται στην αγορά. Αν υποθέσουμε μηδενικό επιτόκιο, οι τιμές αυτών των δικαιωμάτων δίνονται από τον τύπο $\Pi_K^i = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[(S_i - K)^+\right]$. Χρησιμοποιώντας αυτές τις τιμές μπορούμε να ανακατασκευάσουμε πλήρως τις περιθώριες κατανομές ουδέτερου ρίσκου F_i των S_i όπως παρουσιάζεται στην εργασία των Breeden και Litzenberger [18]. Μια σκιαγράφηση της μεθόδου είναι η εξής

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial K}\Pi_K^i &= \frac{\partial}{\partial K}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[(S_i - K)^+\right] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{\partial}{\partial K}(S_i - K)^+\right] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[-1 \quad \mathbb{1}_{\{S_i > K\}}\right] \\
&= -\mathbb{Q}\left[S_i > K\right] \\
&= -\left(1 - \mathbb{Q}\left[S_i \leq K\right]\right) \\
&= F_i(K) - 1
\end{aligned}$$

♦

Έστω $f : \mathbb{R}_+^d \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση αποπληρωμής Ευρωπαϊκού τύπου στο $\mathbf{S}$. Δεδομένου των περιθώριων κατανομών ουδέτερου ρίσκου $F_1, ..., F_d$ των $S_1, ..., S_d$ αντίστοιχα, η τιμή του $f(\mathbf{S})$ γίνεται συνάρτηση της copula C του $\mathbf{S}$ και δίνεται από τον τελεστή αναμενόμενης τιμής όπως ορίστηκε στην (3.8), δηλαδή

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[f\left(S_1, \ldots, S_d\right)\right] = \pi_f(C)$$

Αν υποθέσουμε ότι η μόνη διαθέσιμη πληροφορία που έχουμε για την κατανομή ουδέτερου ρίσκου του $\mathbf{S}$ είναι οι περιθώριες κατανομές, το σύνολο όλων των τιμών ελεύθερων από arbitrage του $f(\mathbf{S})$ είναι το $\Pi := \left\{\pi_f(C) : C \in \mathcal{C}^d\right\}$. Ακόμα, αν έχουμε επιπρόσθετη πληροφορία για την copula C, μπορούμε να μικρύνουμε το σύνολο όλων των τιμών ελεύθερων από arbitrage του $f(\mathbf{S})$ παίρνοντας περιορισμούς για την copula. Έστω, δηλαδή, $\mathcal{C}^*$ ένα οποιοδήποτε περιορισμένο σύνολο από copulas σαν αυτά που μελετήσαμε στην ενότητα με τα βελτιωμένα Fréchet-Hoeffding φράγματα και έστω $\Pi^* := \{\pi_f(C) : C \in \mathcal{C}^*\}$ το σύνολο όλων των τιμών ελεύθερων από arbitrage του $f(\mathbf{S})$ συμβατό με αυτούς τους περιορισμούς. Εφόσον $\mathcal{C}^* \subset \mathcal{C}$ έχουμε απευθείας ότι $\Pi^* \subset \Pi$.

Το Θεώρημα 3.3 αναφέρει ότι αν η f είναι Δ-antitonic, τότε η $\pi_f(C)$ είναι αύξουσα ως προς C ως προς τη κάτω orthant διάταξη. Αντίστροφα, αν η f είναι Δ-monotonic, τότε η $\pi_f(C)$ είναι αύξουσα ως προς C ως προς τη πάνω orthant διάταξη. Στην παρακάτω Πρόταση αξιοποιούμε αυτό το γεγονός για να υπολογίσουμε φράγματα για τα σύνολα Π και Π^*. Αρχικά, ορίζουμε τον δυϊκό τελεστή $\widehat{\pi}$ του π στο σύνολο των συναρτήσεων επιβίωσης ως $\widehat{\pi}(\widehat{C}) := \pi(C)$.

Πρόταση 3.3 *Έστω συνάρτηση f Δ-antitonic και έστω $\underline{Q}^*, \overline{Q}^* \in \mathcal{Q}^d$ τα κάτω και άνω φράγματα για το περιορισμένο σύνολο των copulas $\mathcal{C}^*$ αντίστοιχα, με βάση την κάτω orthant διάταξη. Τότε*

$$\pi_f\left(W_d\right) \leq \pi_f\left(\underline{Q}^*\right) \leq \inf \Pi^* \leq \pi_f(C) \leq \sup \Pi^* \leq \pi_f\left(\overline{Q}^*\right) \leq \pi_f\left(M_d\right) = \sup \Pi$$

για όλες τις $C \in \mathcal{C}^*$, στην περίπτωση που τα αντίστοιχα ολοκληρώματα υπάρχουν, ενώ $\inf \Pi = \pi_f\left(W_d\right)$ αν $d = 2$. Σε αυτό το πλαίσιο, αν η $-f$ είναι Δ-antitonic όλες οι παραπάνω ανισότητες αντιστρέφονται.

Ακόμα, αν η f είναι Δ-monotonic, $\mathcal{C}^*$ το περιορισμένο σύνολο των copulas και $\underline{Q}^*, \overline{Q}^* \in \mathcal{Q}^d$ τα κάτω και άνω φράγματα του $\mathcal{C}^*$ αντίστοιχα, με βάση την πάνω orthant διάταξη, τότε

$$\widehat{\pi}_f\left(W_d(\mathbf{1}-\cdot)\right) \leq \widehat{\pi}_f\left(\widehat{\underline{Q}}^*\right) \leq \inf \Pi^* \leq \pi_f(C) \leq \sup \Pi^* \leq \widehat{\pi}_f\left(\widehat{\overline{Q}}^*\right) \leq \widehat{\pi}_f\left(M_d(1-\cdot)\right) = \sup \Pi$$

για όλες τις $C \in \mathcal{C}^*$, στην περίπτωση που τα αντίστοιχα ολοκληρώματα υπάρχουν, ενώ $\inf \Pi = \widehat{\pi}_f\left(W_d(1-\cdot)\right)$ αν $d = 2$. Σε αυτό το πλαίσιο, αν η $-f$ είναι Δ-monotonic όλες οι παραπάνω ανισότητες αντιστρέφονται.

Απόδειξη. Έστω $C \in \mathcal{C}^*$, τότε ισχύει ότι

$$W_d \preceq_{LO} \underline{Q}^* \preceq_{LO} C \preceq_{LO} \overline{Q}^* \preceq_{LO} M_d$$

και το αποτέλεσμα προκύπτει κατευθείαν από το Θεώρημα 3.3 (i) για μια Δ-antitonic συνάρτηση f. Σημειώνουμε ότι $\sup \Pi = \pi_f\left(M_d\right)$, αφού το κλασικό άνω Fréchet-Hoeffding φράγμα είναι copula. Ο δεύτερος ισχυρισμός προκύπτει ανάλογα από τις ιδιότητες των βελτιωμένων Fréchet-Hoeffding φραγμάτων για συναρτήσεις επιβίωσης και το (ii) του Θεωρήματος 3.3. Οι ισχυρισμοί για $-f$ Δ-antitonic ή Δ-monotonic προκύπτουν χρησιμοποιώντας τα ίδια επιχειρήματα μαζί με το Σχόλιο 3.4.

□

Ας θυμηθούμε από την Πρόταση 3.1 ότι ο υπολογισμός της π_f ανάγεται στον υπολογισμό ενός ολοκληρώματος ως προς το μέτρο μ_f που επάγεται από την f. Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει κάποια παραδείγματα συναρτήσεων αποπληρωμής f επαγόμενων μέτρου καθώς και τα αντίστοιχα ολοκληρώματα ως προς το μέτρο μ_f. Είναι σημαντικό να τονίσουμε εδώ ότι τα πολυδιάστατα ολοκληρώματα ως προς copulas μετατρέπονται σε μονοδιάστατα ολοκληρώματα ως προς το επαγόμενο μέτρο, κάνοντας τον υπολογισμό των τιμών των δικαιωμάτων πολύ γρήγορο και αποδοτικό.

Αποπληρωμή $f(x_1,...,x_d)$	Δ-tonicity	$\int g\left(x_{i1},\ldots,x_{in}\right) \mathrm{d}\mu_f$
Digital put on maximum $\mathbb{1} \max\{x_1,\ldots,x_d\} \leq K$	f antitonic	$\begin{cases} g(K,\ldots,K), & \lvert I\rvert \text{ άρτιος} \\ -g(K,\ldots,K), & \lvert I\rvert \text{ περιττός} \end{cases}$
Digital call on minimum $\mathbb{1} \min\{x_1,\ldots,x_d\} \geq K$	f monotonic	$\begin{cases} g(K,\ldots,K), & I=\{1,...,d\} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$
Call on minimum $(\min\{x_1,\ldots,x_d\}-K)^+$	f monotonic	$\begin{cases} \int_K^\infty g(x,\ldots,x)\,\mathrm{d}x, & I=\{1,...,d\} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$
Put on minimum $(K-\min\{x_1,\ldots,x_d\})^+$	$-f$ monotonic	$\begin{cases} \int_0^K g(x,\ldots,x)\,\mathrm{d}x, & I=\{1,...,d\} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$
Call on maximum $(\max\{x_1,\ldots,x_d\}-K)^+$	$-f$ antitonic	$\begin{cases} -\int_K^\infty g(x,\ldots,x)\,\mathrm{d}x, & \lvert I\rvert \text{ άρτιος} \\ \int_K^\infty g(x,\ldots,x)\,\mathrm{d}x, & \lvert I\rvert \text{ περιττός} \end{cases}$
Put on maximum $(K-\max\{x_1,\ldots,x_d\})^+$	f antitonic	$\begin{cases} \int_0^K g(x,\ldots,x)\,\mathrm{d}x, & \lvert I\rvert \text{ άρτιος} \\ -\int_0^K g(x,\ldots,x)\,\mathrm{d}x, & \lvert I\rvert \text{ περιττός} \end{cases}$

Πίνακας 1: Παραδείγματα συναρτήσεων αποπληρωμής για πολυδιάστατα δικαιώματα και τα αντίστοιχα ολοκληρώματα ως προς το μέτρο μ_f.

Σχόλιο 3.5 (Παραγωγίσιμες αποπληρωμές)
Εάν η συνάρτηση αποπληρωμής είναι παραγωγίσιμη, δηλαδή οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης f υπάρχουν. Τότε, λαμβάνουμε την παρακάτω αναπαράσταση για το ολοκληρωμα ως προς το μέτρο μ_f

$$\int_{\mathbb{R}_+^d} g\left(x_1,\ldots,x_d\right)\ \mathrm{d}\mu_f\left(x_1,\ldots,x_d\right) = \int_{\mathbb{R}_+^d} g\left(x_1,\ldots,x_d\right) \frac{\partial^d f\left(x_1,\ldots,x_d\right)}{\partial x_1\cdots\partial x_d}\ \mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_d$$

Ο παραπάνω τύπος ισχύει καθώς από τον ορισμό του όγκου V_f έχουμε ότι

$$V_f(H) = \int_H \frac{\partial^d f\left(x_1,\ldots,x_d\right)}{\partial x_1\cdots\partial x_d}\ \mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_d$$

για κάθε ορθογώνιο H στον $\mathbb{R}_+^d$.

$\blacklozenge$

Σχόλιο 3.6 (Basket και spread δικαιώματα)
Τα basket δικαιώματα σε δύο διαστάσεις είναι Δ-monotonic, σε μεγαλύτερες διαστάσεις, δηλαδή $f : \mathbb{R}_+^d \ni (x_1, \ldots, x_d) \mapsto \left(\sum_{i=1}^d \alpha_i x_i - K\right)^+$ *, για* $\alpha_i, \ldots, \alpha_d \in \mathbb{R}_+$*, δεν είναι ούτε Δ-monotonic ούτε Δ-antitonic εν γένει. Παρόλα αυτά, από την μονοτονία των δισδιάστατων basket δικαιωμάτων προκύπτει ότι η αναμενόμενη τιμή τους είναι μονότονη ως προς την κάτω και πάνω orthant διάταξη για το σύνολο των 2-copulas. Συγκεκριμένα, αν* $f : \mathbb{R}_+^2 \ni (x_1, x_2) \mapsto (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 - K)^+$ *τότε η* f *είναι Δ-monotonic για* $\alpha_1\alpha_2 > 0$*, άρα η* $\pi_f(C)$ *είναι αύξουσα ως προς την πάνω orthant διάταξη στο* $\mathcal{C}^2$*. Ανάλογα, αν η* f *είναι spread δικαίωμα, δηλαδή* $\alpha_1\alpha_2 < 0$*, τότε η* $-\pi_f(C)$ *είναι αύξουσα ως προς τη κάτω orthant διάταξη στο* $\mathcal{C}^2$*. Συνεπώς, τιμές των δισδιάστατων basket δικαιωμάτων μπορούν να χρησιμοποιηθούν σαν επιπρόσθετη πληροφορία στα βελτιωμένα Fréchet–Hoeffding φράγματα για μεγαλύτερες διαστάσεις.*

$\blacklozenge$

Μια πολύ ενδιαφέρουσα ερώτηση είναι κάτω από ποιές προϋποθέσεις είναι τα φράγματα της Πρότασης 3.3 sharp, δηλαδή

$$\inf \Pi^* = \pi_f\left(\underline{Q}^*\right) \quad \text{και} \quad \sup \Pi^* = \pi_f\left(\overline{Q}^*\right) \tag{3.14}$$

και όμοια τα $\pi_f\left(\widehat{\underline{Q}}^*\right)$ και $\pi_f\left(\widehat{\overline{Q}}^*\right)$. Στην ενότητα βελτιωμένα Fréchet-Hoeffding φράγματα είδαμε ότι αυτά τα βελτιωμένα φράγματα δεν είναι copulas εν γένει και άρα δεν είναι sharp. Παρόλα αυτά, εισάγοντας ισχυρές συνθήκες για τη συνάρτηση f, μπορούμε να καταλήξουμε στις σχέσεις (3.14) όταν τα $\underline{Q}^*$ και $\overline{Q}^*$ είναι βελτιωμένα Fréchet-Hoeffding φράγματα. Αρχικά, θα ορίσουμε το εξής

Ορισμός 3.4 *Έστω* $G_1, ..., G_d$ *μονοδιάστατες συναρτήσεις κατανομής πιθανότητας, συνεχείς στο* $\overline{\mathbb{R}}$ *και* $G_i(-\infty) = 0$ *και* $G_i(\infty) = 1$ *, για* $i = 1, \ldots, d$*. Τότε το* $T^d := \left\{(G_1(x), \ldots, G_d(x)) : x \in \overline{\mathbb{R}}\right\} \subset \mathbb{I}^d$ *είναι ένα* ***αύξων d-track*** *στο* $\mathbb{I}^d$*.*

Το παρακάτω αποτέλεσμα καθιστά sharp τα φράγματα για τιμές δικαιωμάτων, όμως κάτω από συνθήκες πολύ ισχυρές για πρακτικές εφαρμογές.

Πρόταση 3.4 *Έστω συνάρτηση* $f : \mathbb{R}_+^d \to \mathbb{R}$ *δεξιά συνεχής, Δ-monotonic που ικανοποιεί ότι*

$$f(x_1, \ldots, x_d) = V_f([0, x_1] \times \cdots \times [0, x_d])$$

Υποθέτουμε ότι

$$\mathcal{B} := \{(F_1(x_1), \ldots, F_d(x_d)) : \mathbf{x} \in \operatorname{supp} \mu_f\} \subset T^d$$

για κάποιο d-track T^d*. Ακόμα, θεωρούμε τα άνω και κάτω φράγματα* $\widehat{\underline{Q}}^{\mathcal{S},C^*}, \widehat{\overline{Q}}^{\mathcal{S},C^*}$*. Τότε αν* $\mathcal{S} \subset T^d$ *ισχύει ότι*

$$\inf\left\{\pi_f(C) : C \in \widehat{\mathcal{C}}^{\mathcal{S},C^*}\right\} = \widehat{\pi}\left(\widehat{\underline{Q}}^{\mathcal{S},C^*}\right) \text{ και } \sup\left\{\pi_f(C) : C \in \widehat{\mathcal{C}}^{\mathcal{S},C^*}\right\} = \widehat{\pi}\left(\widehat{\overline{Q}}^{\mathcal{S},C^*}\right)$$

Απόδειξη. Εφόσον οι $\mathbf{u} \mapsto \widehat{\underline{Q}}^{S,C^*}(1 - \mathbf{u})$ και $\mathbf{u} \mapsto \widehat{\overline{Q}}^{S,C^*}(\mathbf{1} - \mathbf{u})$ είναι quasi-copulas και $\mathcal{B}$ υποσύνολο του d-track T^d. Από τις ιδιότητες των quasi-copulas, έχουμε ότι υπάρχουν copulas επιβίωσης $\widehat{\underline{C}}^{\mathcal{S},C^*}$ και $\widehat{\overline{C}}^{\mathcal{S},C^*}$ που συμπίπτουν με τις $\widehat{\underline{Q}}^{S,C^*}, \widehat{\overline{Q}}^{S,C^*}$ αντίστοιχα στο T^d. Τότε ισχύει για το κάτω φράγμα

$$
\begin{aligned}
\widehat{\pi}\left(\underline{\widehat{Q}}^{S,C^*}\right) &= \int_{\mathbb{R}^d} \underline{\widehat{Q}}^{S,C^*}\left(F_1\left(x_1\right),\ldots,F_d\left(x_d\right)\right) \, \mathrm{d}\mu_f\left(x_1,\ldots,x_d\right) \\
&= \int_{\mathcal{B}} \widehat{Q}^{S,C^*}\left(u_1,\ldots,u_d\right) \, \mathrm{d}\mu_f\left(F_1^{-1}\left(u_1\right),\ldots,F_d^{-1}\left(u_d\right)\right) \\
&= \int_{\mathcal{B}} \underline{\widehat{C}}^{S,C^*}\left(u_1,\ldots,u_d\right) \, \mathrm{d}\mu_f\left(F_1^{-1}\left(u_1\right),\ldots,F_d^{-1}\left(u_d\right)\right) = \widehat{\pi}_f\left(\underline{\widehat{C}}^{S,C^*}\right)
\end{aligned}
$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $f\left(x_1,\ldots,x_d\right) = V_f\left([0,x_1]\times\cdots\times[0,x_d]\right)$ για την πρώτη ισότητα και ότι $\operatorname{supp}\mu_f = \mathcal{B}$ για τη δεύτερη. Η τρίτη ισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι οι $\underline{\widehat{Q}}^{S,Q^*}$ και $\underline{\widehat{C}}^{S,Q^*}$ είναι ίσες στο T^d και άρα στο $\mathcal{B}$.

Επιπρόσθετα, επειδή η copula $\underline{\widehat{C}}^{S,C^*}$ ταυτίζεται με την $\underline{\widehat{Q}}^{S,C^*}$ στο T^d και $\underline{\widehat{Q}}^{S,C^*}(\mathrm{x}) = \widehat{C^*}(\mathbf{x})$ για $\mathbf{x}\in\mathcal{S}\subset T^d$, προκύπτει ότι $\underline{\widehat{C}}^{S,C^*}\in\widehat{\mathcal{C}}^{S,C^*}$. Άρα από τη Δ-monotonicity της f λαμβάνουμε ότι $\widehat{\pi}_f\left(\underline{\widehat{C}}^{S,C^*}\right) = \inf\left\{\pi_f(C) : C\in\widehat{\mathcal{C}}^{S,C^*}\right\}$. Η απόδειξη για το άνω φράγμα προκύπτει ανάλογα.

□

Τέλος, είμαστε έτοιμοι να εφαρμόσουμε τα προηγούμενα αποτελέσματα και να υπολογίσουμε φράγματα για τιμές πολυδιάστατων παραγώγων, έχοντας επιπρόσθετη πληροφορία για τη δομή εξάρτησης του τυχαίου διανύσματος $\mathbf{S}$.

Παράδειγμα 3.2 *Θεωρούμε ότι παρατηρούνται στην αγορά τιμές digital δικαιωμάτων της μορφής* $\mathbb{1}_{\min\{S_1,S_2,S_3\}}\geq K_i$ *στο* $\mathbf{S}=(S_1,S_2,S_3)$ *για μόνο δύο τιμές εξάσκησης* $K_1,K_2\in\mathbb{R}_+$. *Οι τιμές τους θα συμβολίζονται με* Π_1,Π_2 *και θα χρησιμοποιηθούν σαν επιπρόσθετη πληροφορία για την copula επιβίωσης* $\widehat{C}$ *του* $\mathbf{S}$ *ως εξής*

$$
\Pi_i = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbb{1}_{\min\{S_1,S_2,S_3\}}\geq K_i] = \mathbb{Q}\left(S_1\geq K_i, S_2\geq K_i, S_3\geq K_i\right) = \widehat{C}\left(F_1\left(K_i\right),F_2\left(K_i\right),F_3\left(K_i\right)\right)
$$

για $i=1,2$. *Αυτή είναι μία πληροφορία δύο σημείων, άρα* $\mathcal{S}=\left\{\left(F_1\left(K_i\right),F_2\left(K_i\right),F_3\left(K_i\right)\right): i=1,2\right\}\subset\mathbb{I}^3$. *Συνεπώς, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα της ενότητας για τα βελτιωμένα Fréchet-Hoeffding φράγματα για να υπολογίσουμε τα άνω και κάτω φράγματα* $\underline{\widehat{Q}}^{\mathcal{S},\Pi},\overline{\widehat{Q}}^{\mathcal{S},\Pi}$ *στο σύνολο των copulas* $\widehat{C}^{\mathcal{S},\Pi}=\left\{C\in\mathcal{C}^3:\widehat{C}(\mathbf{x})=\Pi_i,\mathbf{x}\in\mathcal{S}\right\}$ *που είναι συμβατό με την επιπρόσθετη πληροφορία. Δηλαδή έχουμε*

$$
\begin{aligned}
\overline{\widehat{Q}}^{\mathcal{S},\Pi}(\mathbf{u}) &= \min\left(1-u_1,1-u_2,1-u_3,\min_{i=1,2}\left\{\Pi_i+\sum_{l=1}^{3}\left(\overline{F}_l\left(K_i\right)-u_l\right)^+\right\}\right) \\
\underline{\widehat{Q}}^{\mathcal{S},\Pi}(\mathbf{u}) &= \max\left(0,\sum_{i=1}^{3}\left(1-u_i\right)-2,\max_{i=1,2}\left\{\Pi_i-\sum_{l=1}^{3}\left(u_l-\overline{F}_l\left(K_i\right)\right)^+\right\}\right)
\end{aligned}
$$

Χρησιμοποιώντας αυτά τα φράγματα, μπορούμε να εφαρμόσουμε την Πρόταση 3.3 και να υπολογίσουμε βελτιωμένα φράγματα στο σύνολο των ελεύθερων από arbitrage τιμών για ένα δικαίωμα αγοράς της μορφής Call option on the minimum, με συνάρτηση αποπληρωμής $f(\mathbf{S}) = \left(\min\left\{S_1,S_2,S_3\right\}-K\right)^+$. *Το σύνολο τιμών της* $f(\mathbf{S})$ *που χρησιμοποιεί την επιπρόσθετη πληροφορία των digital δικαιωμάτων το συμβολίζουμε με* $\Pi^*=\left\{\widehat{\pi}_f(\widehat{C}):C\in\widehat{\mathcal{C}}^{\mathcal{S},\Pi}\right\}$. *Αφού, η* f *είναι* Δ*-monotonic ισχύει ότι*

$$
\widehat{\pi}_f\left(\underline{\widehat{Q}}^{\mathcal{S},\Pi}\right)\leq\pi\leq\widehat{\pi}_f\left(\overline{\widehat{Q}}^{\mathcal{S},\Pi}\right) \quad \text{για όλα τα } \pi\in\Pi^*
$$

Ο υπολογισμός της $\widehat{\pi}_f(Q)$ καταλήγει από τον Πίνακα 1 στο

$$\widehat{\pi}_f(Q) = \int_K^\infty Q\left(F_1(x), F_2(x), F_3(x)\right) \mathrm{d}x$$

, που είναι ένα ολοκήρωμα σε ένα υποσύνολο του 3-track

$$\left\{(F_1(x), F_2(x), F_3(x)) : x \in \overline{\mathbb{R}}_+\right\} \supset \left\{(F_1(x), F_2(x), F_3(x)) : x \in [K, \infty)\right\} \supset \mathcal{S}.$$

Από την Πρόταση 3.4 λαμβάνουμε ότι τα φράγματα της τιμής του δικαιώματος $\widehat{\pi}_f\left(\underline{\widehat{Q}}^{\mathcal{S},\Pi}\right)$ και $\widehat{\pi}_f\left(\overline{\widehat{Q}}^{\mathcal{S},\Pi}\right)$ είναι sharp, δηλαδή

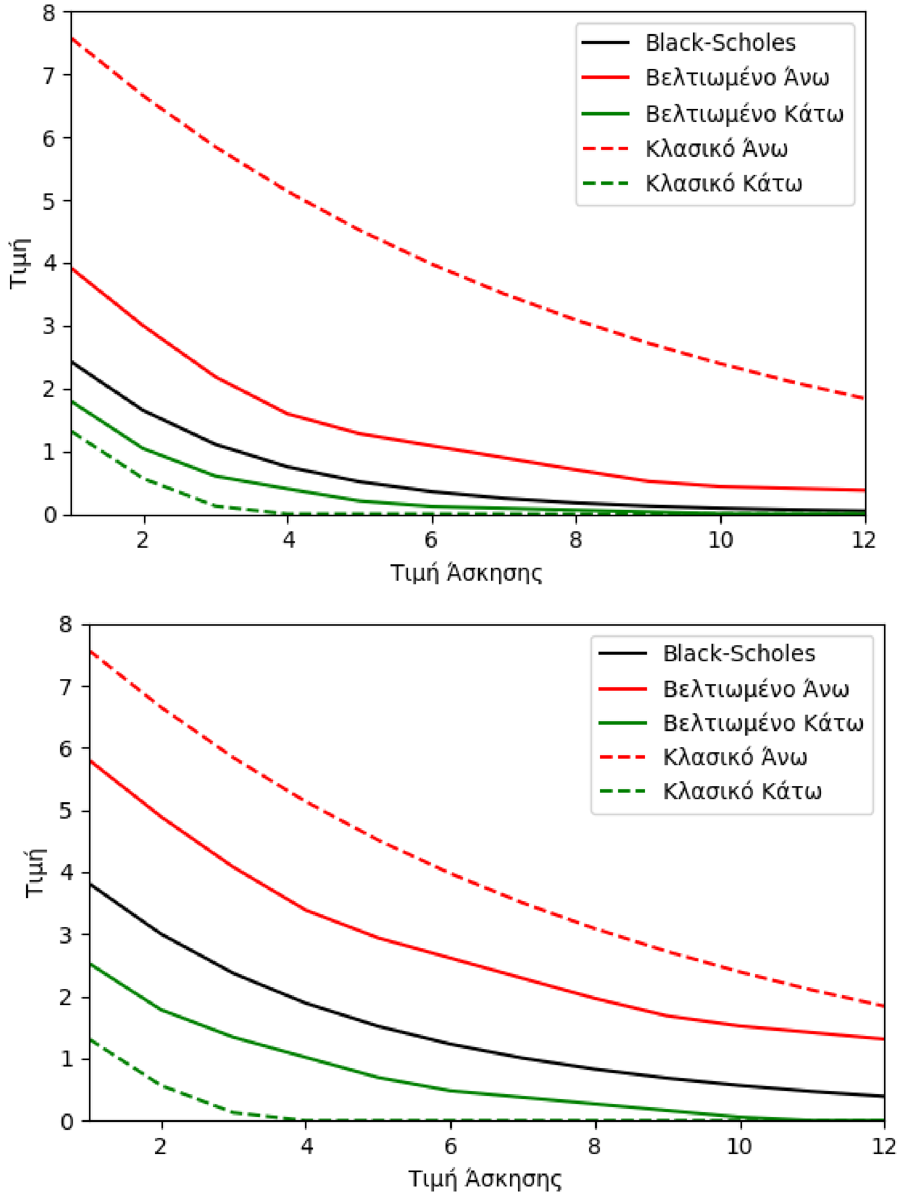
$$\widehat{\pi}_f\left(\underline{\widehat{Q}}^{\mathcal{S},\Pi}\right) = \inf\left\{\pi : \pi \in \Pi^*\right\} \ \textit{και}\ \widehat{\pi}_f\left(\overline{\widehat{Q}}^{\mathcal{S},\Pi}\right) = \sup\left\{\pi : \pi \in \Pi^*\right\}.$$

Για χάριν του παραδείγματος υποθέτουμε ότι οι μονοδιάστατες περιθώριες κατανομές του $\mathbf{S}$ *είναι log-normal, ενώ για να δημιουρήσουμε τιμές digital δικαιωμάτων χρησιμοποιούμε το πολυδιάστατο μοντέλο Black-Scholes. Άρα το τυχαίο διάνυσμα $\mathcal{S} = (S_1, S_2, S_3)$ ακολουθεί log-normal κατανομή με $S_i = s_i \exp\left(-\frac{1}{2} + X_i\right)$, όπου $(X_1, X_2, X_3) \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma)$ με*

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{1,2} & \rho_{1,3} \\ \rho_{2,1} & 1 & \rho_{2,3} \\ \rho_{3,1} & \rho_{3,2} & 1 \end{pmatrix}$$

όπου $\rho_{i,j}$ η συσχέτιση των τυχαίων μεταβλητών X_i, X_j. Να τονίσουμε ότι αυτό το μοντέλο χρησιμοποιείται για να δημιουργήσουμε τις τιμές των digital δικαιωμάτων και ότι δεν εισέρχεται στα φράγματα με κανένα άλλο τρόπο.

Στο διάγραμμα 3.1 απεικονίζονται τα φράγματα στις τιμές του Call on the minimum του $\mathbf{S}$ *συναρτήσει της τιμής άσκησης K που προέκυψαν από τα βελτιωμένα Fréchet-Hoeffding φράγματα. Ακόμα, απεικονίζονται τα φράγματα προέκυψαν από τα κλασικά Fréchet-Hoeffding φράγματα καθώς και η τιμή από το πολυδιάστατο μοντέλο Black-Scholes για αναφορά. Θεωρούμε δύο σενάρια για τις συσχετίσεις, στο πάνω διάγραμμα έχουμε $\rho_{i,j} = 0$ και στο κάτω $\rho_{i,j} = 0.5$, ενώ και στις δύο περιπτώσεις θεωρήσαμε $s_i = S_0 = 10$. Παρατηρούμε ότι η επιπρόσθετη πληροφορία που χρησιμοποιήσαμε οδηγεί σε σημαντική βελτίωση των νέων φραγμάτων σε σχέση με τα κλασικά Fréchet-Hoeffding φράγματα, έχοντας χρησιμοποιήσει μόνο πληροφορία δύο τιμών digital δικαιωμάτων.*



Σχήμα 3.1: Φράγματα στις τιμές του δικαιώματος Call on the minimum συναρτήσει της τιμής άσκησης.

♦

4 Υπολογισμός των Fréchet-Hoeffding φραγμάτων με Νευρωνικά Δίκτυα

Σκοπός του παρόντος κεφαλαίου είναι ο υπολογισμός των Fréchet-Hoeffding φραγμάτων με τη χρήση νευρωνικών δικτύων. Για το σκοπό αυτό θα χρησιμοποιήσουμε τη μεθοδολογία που αναπτύχθηκε από τους Eckstein και Kupper [19] για τη λύση του προβλήματος βέλτιστης μεταφοράς με μέθοδο ποινικοποίησης (penalization) και νευρωνικών δικτύων. Αρχικά, θα παρουσιάσουμε τη μέθοδο στη γενικότερη μορφή της και στη συνέχεια με τη βοήθεια των Fréchet-Hoeffding φράγματων θα υπολογίσουμε φράγματα για τιμές πολυδιάστατων δικαιωμάτων στο πλαίσιο της μερικής αβεβαιότητας εξάρτησης.

Η μέθοδος ποινικοποίησης που θα παρουσιαστεί μας επιτρέπει να υπολογίσουμε μια μεγάλη γκάμα προβλημάτων βελτιστοποίησης της μορφής

$$\phi(f) = \sup_{v \in \mathcal{Q}} \int f \; d\nu$$

με τη χρήση νευρωνικών δικτύων. Η πιο διαδεδομένη μελέτη αυτής της μορφής συναρτησιακών πραγματοποιείται στη θεωρία βέλτιστης μεταφοράς. Το παραπάνω συναρτησιακό μπορεί να εκφράζει το άνω φράγμα μιας ελεύθερης από arbitrage τιμής για ένα δικαίωμα με συνάρτηση αποπληρωμής f. Για την επίλυση αυτού του προβλήματος θα χρησιμοποιήσουμε την δυϊκή αναπαράσταση του, που στη θεωρία βέλτιστης μεταφοράς αναφέρεται ως **Kantorovich duality**. Παράλληλα, στα Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά το συναντά κανείς ως **δυϊκότητα υπεραντιστάθμισης**

$$\phi(f) = \inf_{\substack{h \in \mathcal{H}: \\ h \geq f}} \int h \; d\mu_0$$

για κάποιο μέτρο $\mu_0 \in \mathcal{Q}$. Ο χώρος $\mathcal{H}$ περιέχει τις συνεχείς και φραγμένες συναρτήσεις $h : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, από τον χώρο κατάστασης στους πραγματικούς. Κάτω απο κατάλληλες συνθήκες αποδεικνύεται ότι η τιμή του πρωτεύοντος προβλήματος $\phi(f) = \sup_{v \in \mathcal{Q}} \int f \; d\nu$ συμπίπτει με το δυϊκό $\phi(f) = \inf_{h \in \mathcal{H}: h \geq f} \int h \; d\mu_0$ [20].

Παρακάτω παρουσιάζουμε μια περίληψη της μεθόδου.

Σκοπός μας είναι να λύσουμε τη $\phi(f)$ αριθμητικά. Για αυτό θα χρησιμοποήσουμε τη δυϊκή αναπαράσταση του $\phi(f)$ και θα αντικαταστήσουμε το σύνολο $\mathcal{H}$ με ένα πεπερασμένης διάστασης υποσύνολο του, το $\mathcal{H}^m$. Συνεπώς, το πρόβλημα μετατρέπεται στη μορφή

$$\phi^m(f) = \inf_{\substack{h \in \mathcal{H}^m: \\ h \geq f}} \int h \; d\mu_0$$

Θεωρητικά θα χρησιμοποιήσουμε ακολουθίες υποσυνόλων του $\mathcal{H}$, δηλαδή $(\mathcal{H}^m)_{m \in \mathbb{N}}$ με $\mathcal{H}^1 \subseteq \mathcal{H}^2 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{H}$ έτσι ώστε το $\mathcal{H}^\infty := \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{H}^m$ να είναι πυκνό στο $\mathcal{H}$. Συγκεκριμένα, το $\mathcal{H}^m$ θα αποτελεί ένα νευρωνικό δίκτυο με σταθερή δομή και άγνωστες παραμέτρους. Το m θα εκφράζει τον αριθμό των νευρώνων σε κάθε στρώμα του νευρωνικού δικτύου. Στη συνέχεια, για να μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε μεθόδους απότομης καθόδου κλίσης (gradient descent methods) για την ενημέρωση των παραμέτρων του νευρωνικού δικτύου $\mathcal{H}^m$, είναι αναγκαία η ποινικοποίηση του ανισοτικού περιορισμού $h \geq f$. Για το σκοπό αυτό, εισάγουμε ένα μέτρο πιθανότητας θ στο χώρο καταστάσεων $\mathcal{X}$. Διαισθητικά, αυτό το μέτρο θα χρησιμοποιηθεί για να παράξουμε σημεία στα οποία θα ελέγξουμε τον ανισοτικό περιορισμό $h \geq f$. Έπειτα, εισάγουμε μια παραγωγίσιμη, αύξουσα και κυρτή συνάρτηση ποινικοποίησης $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ και λαμβάνουμε το παρακάτω ποινικοποιημένο πρόβλημα

$$\phi^m_{\theta,\beta}(f) = \inf_{h \in \mathcal{H}^m} \left\{ \int h \; d\mu_0 + \int \beta(f - h) \; d\theta \right\}$$

Για τη θεωρητική μελέτη εισάγουμε ακόμα την εξης αναπαράσταση

$$\phi_{\theta,\beta}(f) = \inf_{h \in \mathcal{H}} \left\{ \int h \, d\mu_0 + \int \beta(f-h) \, d\theta \right\}$$

Θεωρητικά, θα θεωρήσουμε ακολουθίες συναρτήσεων ποινικοποίησης $(\beta_\gamma)_{\gamma>0}$ παραμετρικοποιημένες από ένα παράγοντα ποινικοποίησης γ. Θα χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό $\phi_{\theta,\gamma}(f) := \phi_{\theta,\beta_\gamma}(f)$ για το θεωρητικό πρόβλημα και $\phi^m_{\theta,\gamma}(f) := \phi^m_{\theta,\beta_\gamma}(f)$ για το πρόβλημα που θα λύσουμε αριθμητικά . Τονίζουμε ότι όσο μεγαλύτερος ο παράγοντας ποινικοποίησης γ τόσο πιο αυστηρά επιβάλλεται ο ανισοτικός περιορισμός $h \geq f$. Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζονται τα προβλήματα που μελετάμε καθώς και οι σχέσεις τους.

$$\begin{tikzcd}
\begin{array}{c}\phi(f) \\ \text{(αρχικό πρόβλημα)}\end{array} & & \begin{array}{c}\phi_{\theta,\gamma}(f) \\ \text{(ποινικοποιημένη εκδοχή του } \phi(f)\text{)}\end{array} \arrow[ll, "\text{Θεώρημα 4.1}", "\gamma \to \infty"'] \\
\begin{array}{c}\phi^m(f) \\ \text{(πεπερασμένη εκδοχή του } \phi(f)\text{)}\end{array} \arrow[u, "m \to \infty", "\text{Πρόταση 4.1, Λήμμα 4.1}"'] & & \begin{array}{c}\phi^m_{\theta,\gamma}(f) \\ \text{(αριθμητικό πρόβλημα)}\end{array} \arrow[ll, "\text{Πρόταση 4.3}", "\gamma \to \infty"'] \arrow[u, "m \to \infty", "\text{Σχόλιο 4.3}"'] \arrow[uull, "\min\{m,\gamma\} \to \infty", "\text{Πρόταση 4.2, Σχόλιο 4.3}"']
\end{tikzcd}$$

Σχήμα 4.1: Τα προβήματα και οι σχέσεις τους

Το τελικό βήμα αφορά τον αριθμητικό υπολογισμό του $\phi^m_{\theta,\gamma}(f)$ βρίσκοντας τις βέλτιστες παραμέτρους του νευρωνικού δικτύου $\mathcal{H}^m$. Η υλοποίηση του νευρωνικού δικτύου γίνεται με Tensorflow [23], ενώ για μέθοδο απότομης καθόδου κλίσης χρησιμοποιείται ο αλγόριθμος Adam [24]. Η βέλτιστη αριθμητική λύση συμβολίζεται με $\hat{\phi}^m_{\theta,\gamma}(f)$.

4.1 Δυϊκότητα υπεραντιστάθμισης

Έστω $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ το σύνολο των Borel μέτρων πιθανότητας ενός πολωνικού χώρου $\mathcal{X}$ και $C_b(\mathcal{X})$ ο γραμμικός χώρος των συνεχών και φραγμένων συναρτήσεων $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$. Έστω, ακόμα, το συναρτησιακό υπεραντιστάθμισης

$$\phi(f) := \inf \left\{ \int h \, d\mu_0 : h \geq f \text{ για κάποια } h \in \mathcal{H} \right\} \tag{4.1}$$

για συνάρτηση $f \in C_b(\mathcal{X})$, όπου $\mu_0 \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ ένα μέτρο πιθανότητας και $\mathcal{H} \subseteq C_b(\mathcal{X})$. Σε όλη την ενότητα θεωρούμε ότι ο $\mathcal{H}$ είναι ένας γραμμικός χώρος που περιέχει τις σταθερές, δηλαδή τις σταθερές συναρτήσεις.

Για να ισχύει η δυϊκη αναπαράσταση του συναρτησιακού $\phi(f)$, υποθέτουμε ότι το ϕ είναι συνεχές απο πάνω, δηλαδή $\phi(f_n) \downarrow 0$ για κάθε ακολουθία (f_n) στο $C_b(\mathcal{X})$ τέτοια ώστε $f^n \downarrow 0$. Τότε από το μη γραμμικό Θεώρημα των Daniell-Stone [5] λαμβάνουμε την παρακάτω αναπαράσταση για το $\phi(f)$

$$\phi(f) = \max_{\mu \in \mathcal{Q}} \int f \, d\mu \tag{4.2}$$

για όλες τις $f \in C_b(\mathcal{X})$ και με $Q = \left\{ \mu \in \mathcal{P}(\mathcal{X}) : \int h \, d\mu = \int h \, d\mu_0 \text{ για όλες τις } h \in \mathcal{H} \right\}$. Ακόμα, ισχύει ότι $\mu_0 \in \mathcal{Q}$. Τα προβλήματα (4.1) και (4.2) λέμε ότι είναι δυϊκά και συγκεκριμένα αναφερόμαστε στο (4.2) ως πρωτεύων και στο (4.1) ως δυϊκό πρόβλημα. Το παρακάτω παράδειγμα αναφέρεται στο παραπάνω πλαίσιο και συγκεκριμένα στο πολυδιάστατο πρόβλημα βέλτιστης μεταφοράς.

Παράδειγμα 4.1 (Πολυδιάστατο πρόβλημα βέλτιστης μεταφοράς)
Έστω $\mathcal{X} = \mathbb{R}^d$ και $\Pi(\mu_1, ..., \mu_d)$ το σύνολο όλων των μέτρων $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ με πρώτη περιθώρια μ_1,..., d-οστή περιθώρια μ_d. Αν θεωρήσουμε ότι $\mathcal{Q} \neq \emptyset$, προκύπτει εύκολα ότι το συναρτησιακό υπεραντιστάθμισης που αντιστοιχεί στο παρακάτω πρόβλημα είναι συνεχές απο πάνω.

$$\begin{aligned} &Q = \Pi(\mu_1, ..., \mu_d) \\ &\mathcal{H} = \{ h \in C_b\left(\mathbb{R}^d\right) : h(x_1, \ldots, x_d) = h_1(x_1) + \ldots + h_d(x_d) \text{ για όλα τα } (x_1, ..., x_d) \in \mathbb{R}^d \\ &\qquad \text{και κάποια } h_i \in C_b(\mathbb{R}) \} \end{aligned}$$

4.2 Ποινικοποίηση του συναρτησιακού υπεραντιστάθμισης

Θα ποινικοποιήσουμε το συναρτησιακό υπεραντιστάθμισης ϕ θεωρόντας την παρακάτω συνέλιξη

$$\begin{aligned} \phi_{\theta,\gamma}(f) &:= \inf_{h \in C_b(\mathcal{X})} \{ \phi(h) + \psi_{\theta,\gamma}(f - h) \} \\ &= \inf_{h \in \mathcal{H}} \left\{ \int h \, d\mu_0 + \int \beta_\gamma(f - h) \, d\theta \right\} \end{aligned} \tag{4.3}$$

όπου $\psi_{\theta,\gamma}(f) := \int \beta_\gamma(f) \, d\theta$ για ένα μέτρο $\theta \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$. Ακόμα, η $\beta_\gamma(x) := \frac{1}{\gamma}\beta(\gamma x)$ είναι μια συνάρτηση ποινικοποίησης που παραμετρικοποιείται με έναν παράγοντα ποινικοποίησης γ. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση ποινικοποίησης $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ είναι παραγωγίσιμη, αύξουσα και κυρτή συνάρτηση τέτοια ώστε $\lim_{x \to +\infty} \beta(x)/x = +\infty$. Η κυρτή συζυγής της συνάρτηση

$$\beta^*_\gamma(y) := \sup_{x \in \mathbb{R}} \{ xy - \beta_\gamma(x) \} \qquad \text{, για όλα τα } y \in \mathbb{R}_+$$

ικανοποιεί $\beta^*_\gamma(y) = \beta^*(y)/\gamma$. Δύο παραδείγματα τέτοιων συναρτήσεων είναι τα εξής

(α) η εκθετική συνάρτηση ποινικοποίησης: $\beta(x) = \exp(x - 1)$, με συζυγή $\beta^*(y) = y \log(y)$

(β) η L^p συνάρτηση ποινικοποίησης: $\beta(x) = \frac{1}{p}(\max\{0, x\})^p$, με συζυγή $\beta^*(y) = \frac{1}{q}y^q$, όπου $q = \frac{p}{p-1}$ για κάποιο $p > 1$

Στο παρακάτω Θεώρημα αποδεικνύεται η δυϊκή αναπαράσταστη του ποινικοποιημένου συναρτησιακού $\phi_{\theta,\gamma}$ και η σύγκλισή του στο ϕ.

Θεώρημα 4.1 *Έστω συνάρτηση $f \in C_b(\mathcal{X})$ και έστω ότι υπάρχει μέτρο $\pi \in \mathcal{Q}$ τέτοιο ώστε $\pi \ll \theta$ και $\int \beta^* \left(\frac{d\pi}{d\theta}\right) \, d\theta < \infty$. Τότε*

$$\phi_{\theta,\gamma}(f) = \max_{\mu \in \mathcal{Q}} \left\{ \int f \, d\mu - \frac{1}{\gamma} \int \beta^* \left(\frac{d\mu}{d\theta} \right) \, d\theta \right\} \tag{4.4}$$

Ακόμα,

$$\phi_{\theta,\gamma}(f) - \frac{\beta(0)}{\gamma} \leq \phi(f) \leq \phi_{\theta,\gamma}(f) + \frac{1}{\gamma} \int \beta^* \left(\frac{d\mu_\varepsilon}{d\theta} \right) \, d\theta + \varepsilon \tag{4.5}$$

όπου $\mu_\varepsilon \in Q$ ένα ε-βέλτιστο μέτρο για το πρόβλημα (4.2), τέτοιο ώστε $\mu_\varepsilon \ll \theta$ και $\int \beta_\gamma^* \left(\frac{d\mu_\varepsilon}{d\theta}\right) \, d\theta < \infty$.
Αν η $\hat{h} \in \mathcal{H}$ είναι η ελάχιστη συνάρτηση για το πρόβλημα (4.3), τότε το $\hat{\mu} \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ ορίζεται ως

$$\frac{d\hat{\mu}}{d\theta} := \beta_\gamma'(f - \hat{h}) \tag{4.6}$$

και είναι μέγιστο για το πρόβλημα (4.4).

Απόδειξη. Αρχικά, δείχνουμε τη σχέση (4.4) αποδεικνύοντας ότι το $\phi_{\theta,\gamma}$ είναι πραγματικό συναρτησιακό και συνεχές απο πάνω στο $C_b(\mathcal{X})$. Όπως στο Παράρτημα [5], έχουμε ότι

$$\phi^*(\mu) = \sup_{h \in \mathcal{H}} \left(\int h \, d\mu - \int h \, d\mu_0 \right) \text{ για όλα τα μέτρα } \mu \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$$

με

$$\mu \in \mathcal{Q} \text{ αν και μόνο αν } \int h \, d\mu = \int h \, d\mu_0 \text{ για όλα τα } h \in \mathcal{H} \tag{4.7}$$

Γνωρίζουμε ότι $\beta_\gamma^*(y) = \frac{1}{\gamma}\beta^*(y) \implies \beta^*(y) = \gamma\beta_\gamma^*(y) = \gamma \sup_{x\in\mathbb{R}}\{xy - \beta_\gamma(x)\} \geq \gamma(xy - \beta_\gamma(x)) \implies \beta_\gamma(x) \geq xy - \frac{1}{\gamma}\beta^*(y)$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ και $y \in \mathbb{R}_+$. Άρα ισχύει το εξής

$$\begin{aligned}
\psi_{\theta,\gamma}(f-h) = \int \beta_\gamma(f-h) \, d\theta \geq \int (f-h) \, d\pi - \frac{1}{\gamma}\int \beta^* \left(\frac{d\pi}{d\theta}\right) \, d\theta \implies \\
\int h \, d\pi + \int \beta_\gamma(f-h) \, d\theta \geq \int f \, d\pi - \frac{1}{\gamma}\int \beta^* \left(\frac{d\pi}{d\theta}\right) \, d\theta \implies \\
\phi_{\theta,\gamma}(f) = \inf_{h\in\mathcal{H}}\{\int h \, d\pi + \int \beta_\gamma(f-h) \, d\theta\} \geq \int f \, d\pi - \frac{1}{\gamma}\int \beta^* \left(\frac{d\pi}{d\theta}\right) \, d\theta > -\infty
\end{aligned}$$

για όλες τις $f \in C_b(\mathcal{X})$. Αυτό σημαίνει ότι η $\phi_{\theta,\gamma}(f)$ παίρνει πραγματικές τιμές στο $C_b(\mathcal{X})$. Τώρα, έστω $\left(f^k\right)$ μια ακολουθία συναρτήσεων του $C_b(\mathcal{X})$ τέτοια ώστε να ισχύει $f^k \downarrow f$. Για κάθε $h \in \mathcal{H}$, από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης ισχύει ότι

$$\int \beta_\gamma(f^k - h) \, d\theta \to \int \beta_\gamma(f-h) \, d\theta$$

και άρα $\phi_{\theta,\gamma}\left(f^k\right) \downarrow \phi_{\theta,\gamma}(f)$. Συνεπώς, από το μη γραμμικό Θεώρημα των Daniell-Stone [5] λαμβάνουμε ότι

$$\phi_{\theta,\gamma}(f) = \max_{\mu\in\mathcal{P}(\mathcal{X})} \left\{ \int f \, d\mu - \phi_{\theta,\gamma}^*(\mu) \right\} \quad \text{, για όλες τις } f \in C_b(\mathcal{X})$$

όπου η κυρτή συζυγής δίνεται από

$$\phi^*_{\theta,\gamma}(\mu) = \phi^*(\mu) + \psi^*_{\theta,\gamma}(\mu) = \begin{cases} \frac{1}{\gamma}\int \beta^*\left(\frac{d\mu}{d\theta}\right)\, d\theta & \text{, αν } \mu \in \mathcal{Q} \text{ και } \mu \ll \theta \\ \infty & \text{, διαφορετικά.} \end{cases}$$

Πράγματι, η κυρτή συζυγής της συνέλιξης $\inf_{f\in C_b(\mathcal{X})}\{\phi(f) + \psi_{\theta,\gamma}(\cdot - f)\}$ δίνεται σαν άθροισμα των κυρτών συζυγών ϕ^* και $\psi^*_{\theta,\gamma}$. Από τη σχέση (4.7) έχουμε ότι $\phi^*(\mu) = 0$, αν $\mu \in \mathcal{Q}$ και $\phi^*(\mu) = +\infty$, διαφορετικά. Ακόμα,

$$\psi^*_{\theta,\gamma}(\mu) = \sup_{f\in C_b(\mathcal{X})}\left\{\int f\, d\mu - \int \beta_\gamma(f)\, d\theta\right\} = \sup_{f\in C_b(\mathcal{X})}\left\{\int f\frac{d\mu}{d\theta} - \beta_\gamma(f)\, d\theta\right\} = \int \beta^*_\gamma\left(\frac{d\mu}{d\theta}\right)\, d\theta,$$

αν $\mu \ll \theta$ και $\psi^*_{\theta,\gamma}(\mu) = +\infty$, διαφορετικά.

Για την απόδειξη της δεύτερης σχέσης (4.5) έχουμε

$$\phi_{\theta,\gamma}(f) = \inf_{h\in\mathcal{H}}\left\{\int h\, d\mu_0 + \int \beta_\gamma(f-h)\, d\theta\right\} \le \inf_{\substack{h\in\mathcal{H}\\ h\ge f}} \int h\, d\mu_0 + \beta_\gamma(0) = \phi(f) + \frac{\beta(0)}{\gamma}$$

για τη μία φορά της ανισότητας. Από την άλλη πλευρά, για κάθε ε-βέλτιστο μέτρο $\mu_\varepsilon \in \mathcal{Q}$ της (4.2) τέτοιο ώστε $\mu_\varepsilon \ll \theta$ έχουμε

$$\phi(f) \le \int f\, d\mu_\varepsilon + \varepsilon \le \int f\, d\mu_\varepsilon - \phi^*_{\theta,\gamma}(\mu_\varepsilon) + \phi^*_{\theta,\gamma}(\mu_\varepsilon) + \varepsilon \le \phi_{\theta,\gamma}(f) + \frac{1}{\gamma}\int \beta^*\left(\frac{d\mu_\varepsilon}{d\theta}\right)\, d\theta + \varepsilon$$

με τη σύμβαση $-\infty + \infty = +\infty$.

Τέλος, έστω $\hat{h} \in \mathcal{H}$ η ελάχιστη συνάρτηση για το προβλήμα (4.3), δηλαδή $\phi_{\mu,\gamma}(f) = \int \hat{h} d\mu_0 + \int \beta_\gamma(f-\hat{h})\, d\theta$. Ορίζουμε $h_\lambda := \hat{h} + \lambda h$ για μια $h \in \mathcal{H}$, η συνθήκη πρώτης τάξης

$$\left.\frac{d}{d\lambda}\right|_{\lambda=0}\left(\int h_\lambda\, d\mu_0 + \int \beta_\gamma(f-h_\lambda)\, d\theta\right) = 0$$

συνεπάγεται ότι

$$\int h\, d\mu_0 - \int \beta'_\gamma(f-\hat{h})h\, d\theta = 0$$

Άρα το μέτρο πιθανότητας $\hat{\mu}$ με την Radon-Nikodym παράγωγο $\frac{d\hat{\mu}}{d\theta} := \beta'_\gamma(f-\hat{h})$ ικανοποιεί το εξής

$$\int h\, d\mu_0 = \int h\, d\hat{\mu} \text{ , για όλες τις } h \in \mathcal{H}$$

δηλαδή από την (4.7) ισχύει $\hat{\mu} \in \mathcal{Q}$. Αν ολοκληρώσουμε την ταυτότητα $\beta_\gamma(x) = x\beta'_\gamma(x) - \beta^*_\gamma\left(\beta'_\gamma(x)\right)$ για $x = f - \hat{h}$ ως προς θ, έχουμε

$$\int \beta_\gamma(f-\hat{h})\, d\theta = \int f - \hat{h}\, d\hat{\mu} - \int \beta^*_\gamma\left(\frac{d\hat{\mu}}{d\theta}\right)\, d\theta$$

και

$$\phi_{\theta,\gamma}(f) = \int \hat{h}\, d\mu_0 + \int \beta_\gamma(f-\hat{h})\, d\theta = \int f\, d\hat{\mu} - \int \beta^*_\gamma\left(\frac{d\hat{\mu}}{d\theta}\right)\, d\theta.$$

Άρα το $\hat{\mu} \in \mathcal{Q}$ μεγιστοποιεί τη (4.4).

□

4.3 Προσέγγιση του συναρτησιακού υπεραντιστάθμισης

Θεωρούμε την ακολουθία $\mathcal{H}^1 \subseteq \mathcal{H}^2 \subseteq \cdots$ υποσυνόλων του $\mathcal{H}$ και θέτουμε $\mathcal{H}^\infty := \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \mathcal{H}^m$. Για κάθε $m \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, ορίζουμε την προσέγγιση του συναρτησιακού υπεραντιστάθμισης ως

$$\phi^m(f) := \inf\left\{\int h\, d\mu_0 : h \geq f \text{ , για κάποια } h \in \mathcal{H}^m\right\} \tag{4.8}$$

Για τη προσέγγιση του $\phi(f)$ από το $\phi^m(f)$ χρειαζόμαστε την παρακάτω συνθήκη

Συνθήκη (D): Για κάθε $\varepsilon > 0$ και $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ ισχύει

(α) Για κάθε $h \in \mathcal{H}$ υπάρχει $h' \in \mathcal{H}^\infty$ τέτοια ώστε $\int |h - h'|\ d\mu \leq \varepsilon$,

(β) υπάρχει $h'' \in \mathcal{H}^\infty$ τέτοια ώστε $\mathbb{1}_{K^c} \leq h''$ και $\int h''\ d\mu \leq \varepsilon$ για κάποιο συμπαγές υποσύνολο K του $\mathcal{X}$.

Η παραπάνω συνθήκη θα ερμηνευτεί και στην παρακάτω ενότητα, στο πλαίσιο των νευρωνικών δικτύων χωρίς κυκλικές συνάψεις. Στην παρούσα φάση, χρησιμοποιείται στην επόμενη Πρόταση για την σύγκλιση της προσέγγισης του συναρτησιακού υπεραντιστάθμισης στο συναρτησιακό υπεραντιστάθμισης.

Πρόταση 4.1 *Αν θεωρήσουμε ότι ο $\mathcal{H}^\infty$ είναι ο γραμμικός χώρος που περιέχει τις σταθερές, κάτω από τη Συνθήκη (D) έχουμε ότι*

$$\lim_{m\to\infty} \phi^m(f) = \phi^\infty(f) = \phi(f)$$

για όλες τις $f \in C_b(\mathcal{X})$.

Απόδειξη. Έστω μια $f \in C_b(\mathcal{X})$. Από τον ορισμό του $\mathcal{H}^\infty$ ισχύει ότι

$$\lim_{m\to\infty} \phi^m(f) = \phi^\infty(f) \geq \phi(f).$$

Ακόμα, για κάθε $\varepsilon > 0$ η Συνθήκη (D) μας διασφαλίζει την ύπαρξη μίας συνάρτησης $h \in \mathcal{H}^\infty$ και ενός συμπαγούς $K \subseteq \mathcal{X}$ τέτοια ώστε $\mathbb{1}_{K^c} \leq h$ και $\int h\ d\mu_0 \leq \varepsilon$. Άρα

$$\phi^\infty(\mathbb{1}_{K^c}) \leq \int h\ d\mu_0 \leq \varepsilon$$

και από το Θεώρημα Ομοιόμορφης Σύγκλισης του Dini προκύπτει ότι η ϕ^∞ είναι συνεχής απο πάνω στο $C_b(\mathcal{X})$. Από την Πρόταση 5.1 ισχύει ότι

$$\phi^\infty(f) = \max_{\mu\in\mathcal{P}(\mathcal{X})}\left\{\int f\ d\mu - \phi^{\infty *}(\mu)\right\}.$$

Όπως στην (5.2) η κυρτή συζυγής δίνεται από τον τύπο

$$\phi^{\infty *}(\mu) = \sup_{h\in\mathcal{H}^\infty}\left(\int h\ d\mu - \int h\ d\mu_0\right) \leq \sup_{h\in\mathcal{H}}\left(\int h\ d\mu - \int h\ d\mu_0\right) = \phi^*(\mu)$$

Μένει να δείξουμε ότι για $h \in \mathcal{H}$ και $\mu \in \mathcal{P}(X)$ με $\int h\ d\mu - \int h\ d\mu_0 > 0$ υπάρχει $h' \in \mathcal{H}^\infty$ τέτοια ώστε $\int h'\ d\mu - \int h'\ d\mu_0 > 0$. Αυτό προκύπτει απευθείας από το (α) της Συνθήκης (D) για μέτρο πιθανότητας $\frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\mu_0$. Πράγματι, υπάρχει ακολουθία (h^n) στο $\mathcal{H}^\infty$ τέτοια ώστε $h^n \to h$ στον $L^1(\mu)$ και στον $L^1(\mu_0)$ με $\int h^n\ d\mu - \int h^n\ d\mu_0 > 0$, για αρκετά μεγάλο n.

□

Τώρα θα ορίσουμε την προσέγγιση του ποινικοποιημένου προβλήματος και θα αποδείξουμε την σύγκλιση του στο συναστησιακό υπεραντιστάθμισης.

Για δεδομένο μέτρο θ και παραμετρικοποιημένη συνάρτηση ποινής β_γ, όπως προηγουμένως, ορίζουμε την προσέγγιση του ποινικοποιημένου προβλήματος ως

$$\phi^m_{\theta,\gamma}(f) = \inf_{h\in\mathcal{H}^m} \left\{ \int h \; d\mu_0 + \int \beta_\gamma(f-h) \; d\theta \right\} \tag{4.9}$$

για όλες τις $f \in C_b(\mathcal{X})$. Συνδυάζοντας τα αποτελέσματα του Θεωρήματος 4.1, δηλαδή $\phi_{\theta,\gamma}(f) \to \phi(f)$, για $\gamma \to \infty$, και της Πρότασης 4.1, δηλαδή $\phi^m(f) \to \phi(f)$, για $m \to \infty$ λαμβάνουμε το παρακάτω αποτέλεσμα.

Πρόταση 4.2 *Έστω ότι το $\mathcal{H}^\infty$ ικανοποιεί τη Συνθήκη (D) και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένα ε-βέλτιστο μέτρο μ_ε της (4.4) τέτοιο ώστε $\mu_\varepsilon \ll \theta$ και $\int \beta^* \left(\frac{d\mu_\varepsilon}{d\theta}\right) \; d\theta < +\infty$. Τότε για κάθε $f \in C_b(\mathcal{X})$ ισχύει ότι $\phi^m_{\theta,\gamma}(f) \to \phi(f)$, όταν $\min\{m,\gamma\} \to \infty$.*

Σχόλιο 4.1 *Γενικά η ύπαρξη ε-βέλτιστων μέτρων μ_ε εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από την επιλογή του μέτρου θ, όπως στην περίπτωση του Παραδείγματος 4.2.*

♦

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$\phi^m(f) + \beta_\gamma(0) \geq \inf_{\substack{h\in\mathcal{H}^m: \\ h\geq f}} \left\{ \int h \; d\mu_0 + \int \beta_\gamma(f-h) \; d\theta \right\} \geq \phi^m_{\theta,\gamma}(f) \geq \phi_{\theta,\gamma}(f)$$

όπου στην πρώτη ανισότητα χρησιμοποιείται το γεγονός ότι η β_γ είναι αύξουσα, στη δεύτερη απλά βγαίνει ο περιορισμός $h \geq f$ και η τρίτη προκύπτει επειδή $\mathcal{H}^m \subseteq \mathcal{H}$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Από τη Συνθήκη (D) και το Θεώρημα 4.1 υπάρχουν $m_0 \in \mathbb{N}$ και $\gamma_0 > 0$ τέτοια ώστε

$$\phi^m(f) \leq \phi(f) + \varepsilon \quad \text{και} \quad \phi(f) \leq \phi_{\theta,\gamma}(f) + \varepsilon$$

για όλα τα $m \geq m_0$ και $\gamma \geq \gamma_0$. Άρα προκύπτει ότι

$$\phi(f) + \varepsilon + \frac{\beta(0)}{\gamma} \geq \phi^m(f) + \beta_\gamma(0) \geq \phi^m_{\theta,\gamma}(f) \geq \phi_{\theta,\gamma}(f) \geq \phi(f) - \varepsilon$$

για όλα τα $m \geq m_0$ και $\gamma \geq \gamma_0$. Συνεπώς, $\phi^m_{\theta,\gamma}(f) \to \phi(f)$, όταν $\min\{m,\gamma\} \to \infty$.

□

4.4 Μοντελοποίηση πεπερασμένης διάστασης υποχώρων με νευρωνικά δίκτυα

Σε αυτή την ενότητα θα μιλήσουμε για νευρωνικά δίκτυα και συγκεκριμένα για την προσέγγιση των χώρων συναρτήσεων που μας ενδιαφέρουν στα προβλήματα που μελετάμε, με τη χρήση νευρωνικών δικτύων. Ένας εναλλακτικός τρόπος προσέγγισης αυτών των συναρτήσεων θα μπορούσε να γίνει με γραμμικό συνδυασμό συναρτήσεων βάσης, όπως για παράδειγμα συναρτήσεις στέγης ή πολυώνυμα. Παρόλα αυτά, τα νευρωνικά δίκτυα απαρτίζονται από στρώματα απλών συναρτήσεων και η μη γραμμικότητα εισάγεται με κατάλληλες συναρτησεις ενεργοποίησης. Με αυτό το τρόπο, γίνεται πιο αποδοτική η προσέγγιση μεγάλης κλάσης συναρτήσεων με σχετικά λίγες παραμέτρους. Πριν προχωρήσουμε στα αποτελέσματα θα εισάγουμε τον παρακάτω συμβολισμό.

4.4.1 Συμβολισμός

Τα νευρωνικά δίκτυα που θα χρησιμοποιήσουμε είναι πλήρως συνδεδεμένα νευρωνικά δίκτυα χωρίς κυκλικές συνάψεις. Αυτά είναι απεικονίσεις της μορφής

$$\mathbb{R}^d \ni x \mapsto A_l \circ \underbrace{\varphi \circ A_{l-1}}_{(l-1) \text{ στρώμα}} \circ \ldots \circ \underbrace{\varphi \circ A_0}_{1^o \text{ στρώμα}} (x)$$

όπου A_i affine (γραμμικοί με σταθερά) μετασχηματισμοί και $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια μη γραμμική συνάρτηση ενεργοποίησης που εφαρμόζεται κατα στοιχείο, δηλαδή

$$\varphi\left((x_1, \ldots, x_n)\right) = \left(\varphi\left(x_1\right), \ldots, \varphi\left(x_n\right)\right) \text{ , για } (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Σχετικά με τις διαστάσεις, υπάρχει η διάσταση εισόδου, έστω $d \in \mathbb{N}$ και η κρυφή διάσταση των ενδιάμεσων στρωμάτων του νευρωνικού δικτύου, έστω $m \in \mathbb{N}$. Αυτό σημαίνει ότι το A_0 απεικονίζεται από το $\mathbb{R}^d$ στο $\mathbb{R}^m$ και τα $A_1, \ldots, A_{l-1}$ από τον $\mathbb{R}^m$ στον $\mathbb{R}^m$. Τέλος, το A_l απεικονίζεται από τον $\mathbb{R}^m$ στον $\mathbb{R}$, δηλαδή έχουμε διάσταση εξόδου 1. Κάθε affine μετασχηματισμός A_j μπορεί να αναπαρασταθεί ως

$$A_j(x) = M_j x + b_j$$

για κάποιο πίνακα βαρών M_j και κάποιο διάνυσμα μεροληψίας b_j (το λεγόμενο bias). Όλοι αυτοί οι πίνακες και τα διανύσματα αποτελούν τις παραμέτρους του νευρωνικού δικτύου και μπορούν να θεωρηθούν σαν στοιχείο του $\mathbb{R}^D$, για κάποιο $D \in \mathbb{N}$. Θα θεωρήσουμε νευρωνικά δίκτυα με σταθερή δομή, δηλαδή σταθερό αριθμό στρωμάτων και σταθερή διάσταση, αλλά με άγνωστες παραμέτρους. Θα συμβολίζουμε με $\Xi \subset \mathbb{R}^D$ το σύνολο όλων των δυνατών παραμέτρων για ένα νευρωνικό δίκτυο με σταθερή δομή (το D εν γένει εξαρτάται από τη δομή του δικτύου) και με $N_{l,d,m}(\xi) = A_l \circ \varphi \circ A_{l-1} \circ \ldots \circ \varphi \circ A_0$ ένα συγκεκριμένο νευρωνικό δίκτυο με l στρώματα, διάσταση εισόδου d, κρυφή διάσταση m και παραμέτρους $\xi \in \Xi$. Συμβολίζουμε το σύνολο όλων αυτών των δικτύων $N_{l,d,m}(\xi)$ για $\xi \in \Xi$ με $\mathfrak{N}_{l,d,m}(\Xi)$. Στο υπόλοιπο αυτής της ενότητας, θα δουλέψουμε με νευρωνικά δίκτυα με σταθερό αριθμό στρωμάτων, σταθερή διάσταση εισόδου αλλα μεταβλητό αριθμό νευρώνων στα κρυφά στρώματα του νευρωνικού δικτύου. Για διαφορετικούς αριθμούς νευρώνων στην κρυφή διάσταση m, θα συμβολίζουμε με Ξ_m το αντίστοιχο σύνολο παραμέτρων. Ορίζουμε

$$\mathfrak{N}_{l,d} := \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \mathfrak{N}_{l,d,m}\left(\Xi_m\right)$$

Θέλουμε αυτός ο ορισμός να είναι ανεξάρτητος από την επιλογή συνόλου παραμέτρων, για αυτό το λόγο κάνουμε την υπόθεση ότι τα σύνολα $\mathfrak{N}_{l,d,m}\left(\Xi_m\right)$ αυξάνουν στο m. Μία αυστηρότερη διατύπωση είναι η εξής

Ισχυρισμός 4.1 *Για οποιαδήποτε $l, d \in \mathbb{N}$ και ακολουθία συνόλων παραμέτρων $\Xi_1, \Xi_2, \ldots$, όπου Ξ_m υποσύνολο του $\mathbb{R}^{D_m}$ για κάποιο $D_m \in \mathbb{N}$, θα θεωρούμε ότι $[-m, m]^{D_m} \subseteq \Xi_m$ και $\mathfrak{N}_{l,d,m}\left(\Xi_m\right) \subset \mathfrak{N}_{l,d,m+1}\left(\Xi_{m+1}\right)$ για όλα τα $m \in \mathbb{N}$.*

Ο μόνος λόγος που δεν θέτουμε $\Xi_m \equiv \mathbb{R}^{D_m}$ είναι γιατί στην Πρόταση 4.3 κάνουμε την υπόθεση για συμπαγείς παραμετρικούς χώρους. Ακόμα, υποθέτουμε

Ισχυρισμός 4.2 *Η συνάρτηση ενεργοποίησης φ είναι συνεχής, αύξουσα και ικανοποιεί τα όρια*

$$\lim_{x\to-\infty}\varphi(x)=0 \text{ και } \lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=1$$

4.4.2 Μοντελοποίηση του $\mathcal{H}^m$ με νευρωνικά δίκτυα

Αρχικά, θα θεωρήσουμε ότι ο $\mathcal{H}$ είναι της μορφής

$$\mathcal{H}=\left\{\sum_{j=1}^{J} e_j h_j \circ \pi_j + a : h_j \in C_b\left(\mathbb{R}^{d_j}\right), a\in\mathbb{R}\right\}$$

όπου $e_j \in C_b(\mathcal{X})$ και $\pi_j : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^{d_j}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις, για όλα τα $j = 1, \dots, J$. Αυτή η μορφή του $\mathcal{H}$ συμπεριλαμβάνει πολλά διαφορετικά προβλήματα, ενδεικτικά στο Παράδειγμα 4.1 έχουμε ότι $\mathcal{H} = \left\{\sum_{j=1}^{d} h_j \circ \mathrm{pr}_k : h_j \in C_b(\mathbb{R})\right\}$, όπου η $\mathrm{pr}_j(x) := x_j$ είναι η προβολή στην j-οστή συντεταγμένη.

Θα προσεγγίζουμε τον $\mathcal{H}$ με τον

$$\mathcal{H}^\infty=\left\{\sum_{j=1}^{J} e_j h_j \circ \pi_j + a : h_j \in \mathfrak{N}_{l,d}, a\in\mathbb{R}\right\}$$

και τους υποχώρους του με

$$\mathcal{H}^m=\left\{\sum_{j=1}^{J} e_j h_j \circ \pi_j + a : h_j \in \mathfrak{N}_{l_j,d_j,m}\left(\Xi_{j,m}\right), a\in\mathbb{R}\right\}.$$

Σε αυτό το πλαίσιο το πρόβλημα $\phi^m_{\theta,\gamma}(f)$ μετατρέπεται στο εξής

$$\begin{aligned}
\phi^m_{\theta,\gamma}(f) &= \inf_{h\in\mathcal{H}^m}\left\{\int h\, d\mu_0 + \int \beta_\gamma(f-h)\, d\theta\right\} \\
&= \inf_{a\in\mathbb{R}} \inf_{h_j\in\mathfrak{M}_{j,d_j,m}(\Xi_j,m)} \left\{\int \sum_{j=1}^{J} e_j h_j\circ\pi_j\, d\mu_0 + a + \int \beta_\gamma\left(f - \sum_{j=1}^{J} e_j h_j\circ\pi_j - a\right)\, d\theta\right\} \\
&= \inf_{a\in\mathbb{R}} \inf_{\xi_j\in\Xi_{j,m}} \left\{\int \sum_{j=1}^{J} e_j N_{l_j,d_j,m}\left(\xi_j\right)\circ\pi_j\, d\mu_0 + a + \int \beta_\gamma\left(f - \sum_{j=1}^{J} e_j N_{l_j,d_j,m}\left(\xi_j\right)\circ\pi_j - a\right)\, d\theta\right\}
\end{aligned}$$

για όλες τις $f \in C_b(\mathcal{X})$. Η λύση του προβλήματος $\phi^m_{\theta,\gamma}(f)$ στην παραπάνω αναπαράσταση πεπερασμένης διάστασης αντιστοιχεί στη εύρεση των βέλτιστων παραμέτρων ενός νευρωνικού δικύου. Συνεπώς εντάσσεται στην κατηγορία των προβλημάτων μηχανικής μάθησης. Δεδομένου ότι οι παράμετροι του δικτύου δεν επιδέχονται κάποιο περιορισμό, το πρόβλημα μπορεί να λυθεί ευκόλα με κλασσικές μεθόδους στοχαστικής καθόδου κλίσης.
Κάτω από τις υποθέσεις (4.1) και (4.2) το παρακάτω Λήμμα καθορίζει καταστάσεις στις οποίες ικανοποιείται η Συνθήκη (D) στα πλάισια νευρωνικών δικτύων.

Λήμμα 4.1

(a) Το $\mathcal{H}^\infty$ ικανοποιεί το πρώτο μέρος της Συνθήκης (D).

(β) *Αν $\mathcal{X} = \mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d_1} \times \ldots \times \mathbb{R}^{d_{J_0}}$ και $\pi_j = \mathrm{pr}_j,\ e_j = 1$ για $j = 1, \ldots, J_0 \leq J$, όπου pr_j είναι η προβολή απο το $\mathbb{R}^d$ στη j-οστή συντεταγμένη $\mathbb{R}^{d_j}$, τότε το $\mathcal{H}^\infty$ ικανοποιεί το δεύτερο μέρος της Συνθήκης (D). Ακόμα, το δεύτερο μέρος της Συνθήκης (D) ικανοποιείται αυτόματα εαν το $\mathcal{X}$ είναι συμπαγές.*

Διαισθητικά, το δεύτερο μέρος της Συνθήκης (D) ικανοποιείται όταν ο χώρος $\mathcal{H}^\infty$ είναι αρκετά πλούσιος.

Απόδειξη.

(α) Από τον Hornik [7] το σύνολο $\mathfrak{N}_{l_j,\mathrm{d}_j}$ είναι πυκνό στο $C_b\left(\mathbb{R}^{d_j}\right)$ ως προς τον $L^1(\nu)$, για κάθε $\nu \in \mathcal{P}\left(\mathbb{R}^{d_j}\right)$ και για όλα τα $j = 1, \ldots, J$. Από την τριγωνική ανισότητα και επειδή τα e_j είναι φραγμένα προκτύπτει το πρώτο μέρος της Συνθήκης (D).

(β) Αν $\mathcal{X}$ συμπαγές τότε το δεύτερο μέρος της Συνθήκης (D) ικανοποιείται αυτόματα. Έστω, λοιπόν, $\mathcal{X} = \mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d_1} \times \ldots \times \mathbb{R}^{d_{J_0}}$ και $\pi_j = \mathrm{pr}_j,\ e_j = 1$ για $j = 1, \ldots, J_0 \leq J$, όπου pr_j είναι η προβολή από το $\mathbb{R}^d$ στη j-οστή συντεταγμένη $\mathbb{R}^{d_j}$.

Έστω $\varepsilon > 0$ και $\nu \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$. Για σταθερό j, συμβολίζουμε $\nu^{(j)} := \nu \circ \mathrm{pr}_j^{-1}$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $h_j'' \in \mathfrak{N}_{l_j,d_j}$ τέτοια ώστε $\mathbb{1}_{K_j^c} \leq h_j''$ και $\int_{\mathbb{R}^{d_j}} h_j''\, d\nu^{(j)} \leq 2\varepsilon$ για κάποιο συμπαγές υποσύνολο K_j του $\mathbb{R}^{d_j}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $l_j = 1$. Αυτό μπορούμε να το κάνουμε πάντα, καθώς η συνάρτηση h_j'' θα έχει πεδίο ορισμού συμπαγές σύνολο και άρα για πολλαπλά στρώματα πέρα του πρώτου θα έχουμε προσέγγιση της ταυτοτικής συνάρτησης στη supremum νόρμα. Πιο αυστηρά, η συνάρτηση h_j'' όπως θα δίνεται από ένα στρώμα, θα είναι η είσοδος στο πρώτο στοιχείο στα υπόλοιπα στώματα και τα υπόλοιπα στρώματα θα προσεγγίζουν τη συνεχής συνάρτηση $[-z, z]^m \ni x \mapsto x_1$ στη supremum νόρμα. Ο προηγούμενος ισχυρισμός προκύπτει από το [7].

Έστω $K_j = [-c, +c]^{d_j}$ τέτοιο ώστε $\nu^{(j)}\left(K_j^c\right) \leq \varepsilon / (4d_j)$. Από υπόθεση για το ϕ, για κάθε $i \in \{1, \ldots, d_j\}$ υπάρχουν $\underline{a}_i, \underline{b}_i, \overline{a}_i, \overline{b}_i \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\varphi\left(\underline{a}_i x_i + \underline{b}_i\right) + \varphi\left(\overline{a}_i x_i + \overline{b}_i\right) \begin{cases} \leq \varepsilon / (2d_j) & , \text{για } x_i \in [-c, c] \\ \geq 1 - \varepsilon & , \text{για } x_i \notin [-c-1, c+1] \end{cases}$$

Τότε η

$$h_j'' := \sum_{i=1}^{d_j} \varphi\left(\underline{a}_i x_i + \underline{b}_i\right) + \varphi\left(\overline{a}_i x_i + \overline{b}_i\right) + \varepsilon \ \in \mathfrak{N}_{1,d_j,2d_j} \subset \mathfrak{N}_{1,d_j}$$

ικανοποιεί $\mathbb{1}_{\tilde{K}_j^c} \leq h_j''$ για το συμπαγές $\tilde{K}_j := [-c-1, c+1]^{d_j}$. Ακόμα,

$$\int_{\mathbb{R}^{d_j}} h_j''\, d\nu^{(j)} \leq \int_{\mathbb{R}^{d_j}} \frac{\varepsilon}{2} \mathbb{1}_{K_j} + 2d \mathbb{1}_{K_j^c}\, d\nu^{(j)} + \varepsilon \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2d\ \nu^{(j)}\left(K_j^c\right) + \varepsilon \leq 2\varepsilon$$

Τώρα, ορίζουμε $h'' := \sum_{j=1}^{d} h_j'' \circ \mathrm{pr}_j \in \mathcal{H}^\infty$ και $K := \prod_{j=1}^{J_0} \tilde{K}_j \subset \mathcal{X}$ που είναι συμπαγές. Συνεπώς, απευθείας λαμβάνουμε ότι

$$\mathbb{1}_{K^c} \leq h'' \text{ και } \int h'' d\nu \leq 2J_0\varepsilon.$$

□

Σχόλιο 4.2 *Αργότερα, στο αριθμητικό παράδειγμα θα δουλέψουμε με την συνάρτηση ενεργοποίησης ReLU (rectified linear unit), δηλαδή την* $\varphi(x) = \max\{0, x\}$. *Παρόλο που αυτή δεν ικανοποιεί τη συνθήκη* $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 1$ *στον Ισχυρισμό 4.2 μπορούμε να παραβλέψουμε αυτό το γεγονός. Βασικά, ο λόγος που απαιτούμε να ισχύουν οι δύο ισχυρισμοί είναι για εξασφαλίσουμε την ύπαρξη νευρωνικών δικτύων με επιθυμητές ιδιότητες. Δεδομένου του Ισχυρισμού 4.2 χρειαζόμαστε μόνο δύο στρώματα (l=1) για να λάβουμε τα επιθυμητά αποτελέσματα. Στο αριθμητικό παράδειγμα, όμως, θα χρησιμοποιήσουμε περισσότερα στρώματα. Μπορούμε, λοιπόν, να ομαδοποιήσουμε τα πολλά στρώματα σε δύο, με διαφορετικές συναρτήσεις ενεργοποίησης, ως εξής*

$$A_l \circ \underbrace{\varphi \circ A_{l-1} \circ \ldots \circ A_1 \circ \varphi}_{\overline{\varphi}} \circ A_0$$

Όταν, δηλαδή, η $\overline{\varphi}$ *είναι απεικόνιση της μορφής* $(x_1, \ldots, x_m) \mapsto (\overline{\varphi}(x_1), \ldots, \overline{\varphi}(x_m))$, *ένα νευρωνικό δίκτυο με (l+1) στρώματα και συνάρτηση ενεργοποίησης* φ *είναι ισοδύναμο με ένα νευρωνικό δίκτυο με δύο στρώματα και συνάρτηση ενεργοποίησης* $\overline{\varphi}$. *Για παράδειγμα, για* $\varphi(x) = \max\{0, x\}$ *εύκολα βλέπουμε ότι* $\overline{\varphi}(x) = \min\{1, \max\{0, x\}\}$, *άρα ικανοποιείται και ο Ισχυρισμός 4.2.*

♦

4.5 Σύγκλιση της προσέγγισης με νευρωνικά δίκτυα στο πραγματικό πρόβλημα

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε τη σύγκλιση της προσέγγισης με νευρωνικά δίκτυα $\phi^m_{\theta,\gamma}(f)$ στο πραγματικό πρόβλημα $\phi(f)$.

Αρχικά, θα μελετήσουμε την περίπτωση της ομοιόμορφης σύγκλισης στα m και γ, δηλαδή συνθήκες για τη σύγκλιση $\phi^m_{\theta,\gamma}(f) \to \phi(f)$ για $\min\{m, \gamma\} \to \infty$. Αυτή η μελέτη γίνεται παρακάτω στο Σχόλιο 4.3, όπου συνδυάζονται τα αποτελέσματα $\phi_{\theta,\gamma}(f) \to \phi(f)$ για $\gamma \to \infty$ και $\phi^m \to \phi(f)$ για $m \to \infty$ από τις προηγούμενες ενότητες.
Από την άλλη πλευρά, μερικές φορές η σύγκλιση $\phi_{\theta,\gamma}(f) \to \phi(f)$ για $\gamma \to \infty$ δεν ικανοποιείται ακόμα και αν κάποιος στη πράξη πάρει μια καλή προσέγγιση. Μία τέτοια περίπτωση δίνεται στο Παράδειγμα 4.2. Ακόμα όμως και αν η ομοιόμορφη σύγκλιση δεν ικανοποιείται, μπορούμε να συνδυάσουμε τα προβλήματα $\phi^m_{\theta,\gamma}(f)$ και $\phi(f)$. Αυτό γίνεται προσεγγίζοντας πρώτα $\phi^m \to \phi(f)$ για $m \to \infty$ και στη συνέχεια $\phi^m_{\theta,\gamma}(f) \to \phi^m(f)$ για $\gamma \to \infty$, όπου το τελευταίο προκύπτει από την Πρόταση 4.3. Εδώ αντί για την ισχυρή υπόθεση που απαιτείται για να ισχύει $\phi_{\theta,\gamma}(f) \to \phi(f)$, η σύγλιση $\phi^m_{\theta,\gamma}(f) \to \phi^m(f)$ μπορεί να δειχθεί θεωρώντας ότι όλες οι παράμετροι του νευρωνικού δικτύου είναι συμπαγείς.

Σχόλιο 4.3 *Κάτω από τις προϋποθέσεις του Λήμματος 4.1, η Πρόταση 4.1 συνεπάγεται ότι* $\phi^m(f) \to \phi(f)$ *για* $m \to \infty$. *Ακόμα, δεδομένης της ύπαρξης* ε*-βελτιστοποιητών για κάθε* $\varepsilon > 0$ *όπως απαιτείται στο Θεώρημα 4.1 έχουμε ότι* $\phi_{\theta,\gamma}(f) \to \phi(f)$ *για* $\gamma \to \infty$. *Δεδομένων και των δύο υποθέσεων, από την Πρόταση 4.2 προκύπτει ότι* $\phi^m_{\theta,\gamma}(f) \to \phi(f)$ *για* $\min\{m, \gamma\} \to \infty$. *Τέλος, η σύγκλιση* $\phi^m_{\theta,\gamma}(f) \to \phi_{\theta,\gamma}(f)$ *για* $m \to \infty$ *προκύπτει αυτόματα απο τα προηγούμενα.*

Παράδειγμα 4.2 *Έστω* $\mathcal{X} = [0,1]^2$, $\mu_1 = \mu_2 = \delta_0$ *(μέτρο Dirac) και* $f(x_1, x_2) = -|x_1 - x_2|$. *Έστω* $\mathcal{Q} = \Pi(\mu_1, \mu_2)$ *το σύνολο όλων των μέτρων του* $\mathcal{X}$ *με πρώτη περιθώρια* μ_1 *και δεύτερη περιθώρια* μ_2, *έτσι ώστε*

$$\phi(f) = \sup_{\mu \in \Pi(\mu_1,\mu_2)} \int f \, d\mu$$

Προφανώς, το μέγιστο είναι $\phi(f) = f(0,0) = 0$ *και* $\mathcal{Q} = \{\mu_1 \otimes \mu_2\}$, *με* $\mu_0 = \mu_1 \otimes \mu_2 = \delta_{(0,0)}$ *(μέτρο γινόμενο).*

Θεωρούμε δύο πιθανά μέτρα αναφοράς $\theta^{(1)} = \mathcal{U}\left([0,1]^2\right)$, $\theta^{(2)} = \mu_1 \otimes \mu_2 = \delta_{(0,0)}$. *Με* $\theta^{(1)}$ *έχουμε την ομοιόμορφη κατανομή στο* $[0,1]^2$ *και* $\theta^{(2)}$ *το μέτρο γινόμενο Dirac. Για το* $\theta^{(2)}$ *είναι προφανής η ύπαρξη ε-βελτιστοποιητών , όπως απαιτείται στο Θεώρημα 4.1, αφού το* $\theta^{(2)}$ *από μόνο του είναι βελτιστοποιητής του* $\phi(f)$. *Συνεπώς, ισχύει* $\phi_{\theta^{(2)},\gamma}(f) \to \phi(f)$ *για* $\gamma \to \infty$.
Στην αντίπερα όχθη, δεν υπάρχει μέτρο $\nu \in \Pi(\mu_1, \mu_2)$ *με* $\nu \ll \theta^{(1)}$ *και άρα* $\phi_{\theta^{(1)},\gamma}(f) = -\infty$. *Παρόλα αυτά, αν πρώτα προσεγγίσουμε το* $\phi(f)$ *με το* $\phi^m(f)$, *το συναρτησιακό γίνεται πιο ομαλό. Διαισθητικά, οι περιθώριοι περιορισμοί χαλαρώνουν. Αυτό γίνεται προφανές όταν μελετάμε τις δυϊκές αναπαραστάσεις*

$$\phi_{\theta^{(1)},\gamma}(f) = \inf_{h_1,h_2 \in C_b([0,1]))} \left\{ h_1(0) + h_2(0) + \int \beta_\gamma\left(f - h_1 - h_2\right)\, d\theta^{(1)} \right\}$$
$$\phi^m_{\theta^{(1)},\gamma}(f) = \inf_{h_1,h_2 \in \mathfrak{N}_{l,1,m}(\Xi_m)} \left\{ h_1(0) + h_2(0) + \int \beta_\gamma\left(f - h_1 - h_2\right)\, d\theta^{(1)} \right\}$$

Εύκολα μπορεί κάποιος να βρεί ακολουθίες συναρτήσεων στο $C_b([0,1])$ *έτσι ώστε στο 0 να πηγαίνουν στο μείον άπειρο, ενώ ο όρος ποινής να μένει φραγμένος. Αυτό από την αλλη είναι αδύνατο με συναρτήσεις στο* $\mathfrak{N}_{l,1,m}(\Xi_m)$, *δεδομένου ότι η συνάρτηση ενεργοποίησης είναι συνεχής και το σύνολο παραμέτρων συμπαγές. Άρα, είναι δυνατή η σύγκλιση* $\phi^m_{\theta^{(1)},\gamma}(f) \to \phi^m(f)$ *για* $\gamma \to \infty$, *που θα είναι αποτέλεσμα της παρακάτω Πρότασης.*

♦

Πρόταση 4.3 *Έστω* $m \in \mathbb{N}$. *Δεδομένου ότι όλα τα σύνολα παραμέτρων* $\Xi_{j,m}$, *για* $j = 1, \ldots, J$ *των νευρωνικών δικτύων που προσεγγίζουν τον* $\mathcal{H}^m$ *είναι συμπαγή και ότι το μέτρο* θ *δίνει θετική μάζα σε κάθε μη κενό ανοικτό σύνολο, ισχύει*

$$\phi^m_{\theta,\gamma}(f) \to \phi^m(f) \text{ , για } \gamma \to \infty$$

Απόδειξη. Για ένα δεδομένο δίκτυο $\mathfrak{N}_{l_j,d_j,m}$, η απεικόνιση $\xi \mapsto N_{l_j,d_j,m}(\xi)$ είναι κατα σημείο συνεχής. Δηλαδή για $\xi_n \to \xi$ έχουμε ότι $N_{l_j,d_j,m}(\xi_n)(x) \to N_{l_j,d_j,m}(\xi)(x)$, για όλα τα $x \in \mathbb{R}^{d_j}$, αφόυ έχουμε θεωρήσει ότι η συνάρτηση ενεργοποίησης φ είναι συνεχής. Ακόμα, αφού θεωρούμε ότι η φ είναι και φραγμένη, οι συναρτήσεις $N_{l_j,d_j,m}(\xi_n)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένες και άρα απο το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης λαμβάνουμε ότι $N_{l_j,d_j,m}(\xi_n) \to N_{l_j,d_j,m}(\xi)$ στον $L^1(\nu)$, για όλα τα $\nu \in \mathcal{P}\left(\mathbb{R}^{d_j}\right)$. Από την τριγωνική ανισότητα, η συνέχεια μεταφέρεται στην απεικόνιση $(\xi_1, \ldots, \xi_J) \mapsto \sum_{j=1}^J e_j N_{l_j,d_j,m}(\xi_j) \circ \pi_j$. Συνεπώς, μπορούμε να γράψουμε

$$\mathcal{H}^m = \{\eta(A) + a : A \in \mathcal{A}^m, a \in \mathbb{R}\}$$

όπου η απεικόνιση $A \mapsto \eta(A)$ είναι συνεχής στον $L^1(\mu_0)$ και στον $L^1(\theta)$, και $\mathcal{A}^m$ συμπαγές.

Για το κύριο κομμάτι της απόδειξης, έχουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\eta(A)+a \in \mathcal{H}^m$ με $\eta(A)+a \geq f$ έτσι ώστε

$$\phi^m(f)+\varepsilon \geq \int \eta(A)+a\, d\mu_0 = \lim_{\gamma\to\infty} \left\{ \int \eta(A)\, d\mu_0 + a + \int \beta_\gamma(f - \eta(A) - a)\, d\theta \right\} \geq \limsup_{\gamma\to\infty} \phi^m_{\theta,\gamma}(f)$$

εφόσον $0 \leq \int \beta_\gamma(f - \eta(A) - a)\, d\theta \leq \beta_\gamma(0) = \frac{1}{\gamma}\beta(0)$.

Από την άλλη πλευρά, έστω (γ_n) μια ακολουθία στον $\mathbb{R}_+$ με $\gamma_n \to \infty$. Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι ισχύει $\phi^m(f) \leq \liminf_{n\to\infty} \phi^m_{\theta,\gamma_n}(f)$. Θεωρούμε ότι $\liminf_{n\to\infty} \phi^m_{\theta,\gamma_n}(f) < \infty$, διαφορετικά δεν έχουμε να αποδείξουμε κάτι. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχουν $A^n \in \mathcal{A}^m$ και $a^n \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\phi^m_{\theta,\gamma_n}(f)+\frac{1}{n} \geq \int \eta\left(A^n\right)\ d\mu_0+a^n+\int \beta_{\gamma_n}\left(f-\eta\left(A^n\right)-a^n\right)\ d\theta \geq \int \eta\left(A^n\right)\ d\mu_0+\int f-\eta\left(A^n\right)+c\, d\theta \tag{4.10}$$

εφόσον $\beta_{\gamma_n}(x) \geq x + c$, για όλα $n \in \mathbb{N}$ και για κάποια σταθερά $c \in \mathbb{R}$. Συγκεκριμένα, το $\liminf_{n\to\infty} \phi^m_{\theta,\gamma_n}(f)$ παίρνει πραγματικές τιμές καθώς η απεικόνιση $A \mapsto \int f - \eta(A) + c\ d\theta$ είναι συνεχής στο συμπαγές $\mathcal{A}^m$. Περνώντας σε υπακολουθίες μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\lim_{n\to\infty} \phi^m_{\theta,\gamma_n}(f) = \liminf_{n\to\infty} \phi^m_{\theta,\gamma_n}(f)$ και $A^n \to A \in \mathcal{A}^m$ τέτοια ώστε $\eta\left(A^n\right) \to \eta(A)$ στον $L^1(\theta)$, $\theta-$σ.β. και επίσης $\int \eta\left(A^n\right)\ d\mu_0 \to \int \eta(A)\ d\mu_0$. Στη συνέχεια, θα δείξουμε με απαγωγή σε άτοπο ότι η ακολουθία (a^n) είναι φραγμένη. Έστω, λοιπόν, ότι δεν είναι φραγμένη, δηλαδή $a^n \to -\infty$. Εφόσον $\lim_{x\to\infty} \beta(x)/x = \infty$ και $f - \eta\left(A^n\right)$ ομοιόμορφα φραγμένη λόγω συμπάγειας του $\mathcal{A}^m$, ισχύει ότι

$$\int \eta\left(A^n\right)\ d\mu_0 + a^n + \beta_{\gamma_n}\left(f-\eta\left(A^n\right)-a^n\right) \to +\infty$$

Ακόμα, από την (4.10) η ακολουθία

$$\left(\int \eta\left(A^n\right)\ d\mu_0 + a^n + \beta_{\gamma_n}\left(f-\eta\left(A^n\right)-a^n\right)\right)^-$$

είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη στον $L^1(\theta)$. Συνεπώς, από το Λήμμα Fatou έχουμε

$$\begin{aligned}
+\infty &= \int \liminf_{n\to\infty} \left\{\int \eta\left(A^n\right)\ d\mu_0 + a^n + \beta_{\gamma_n}\left(f-\eta\left(A^n\right)-a^n\right)\right\}\ d\theta \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \left\{\int \eta\left(A^n\right)\ d\mu_0 + a^n + \int \beta_{\gamma_n}\left(f-\eta\left(A^n\right)-a^n\right)\ d\theta\right\} \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \phi^m_{\theta,\gamma_n}(f) < \infty
\end{aligned}$$

και άρα άτοπο. Ως εκ τούτου, η ακολουθία (a^n) είναι φραγμένη και άρα έχει συγκλίνουσα υπακολουθία $a^n \to a \in \mathbb{R}$. Τέλος, πάλι από το Λήμμα Fatou έχουμε

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} \phi^m_{\theta,\gamma_n}(f) &= \liminf_{n\to\infty} \left\{\int \eta\left(A^n\right)\ d\mu_0 + a^n + \int \beta_{\gamma_n}\left(f-\eta\left(A^n\right)-a^n\right)\ d\theta\right\} \\
&\geq \int \eta(A)\ d\mu_0 + a + \int \beta_\infty(f-\eta(A)-a)\ d\theta \\
&= \int \eta(A) + a\ d\mu_0 \\
&\geq \phi^m(f)
\end{aligned}$$

όπου $\beta_\infty(x) = 0$, αν $x \leq 0$ και $\beta_\infty(x) = \infty$, αν $x > 0$. Η δεύτερη ανισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι $\eta(A) + a \geq f$ θ-σ.β. Η πρώτη ανισότητα προκύπτει δεδομένου ότι $f, \eta(A) \in C_b(\mathcal{X})$ και το θ δίνει θετική μάζα σε κάθε μη κενό ανοικτό σύνολο.

□

4.6 Generative Adversarial Networks (GANs)

Τα Generative Adversarial Networks (GANs) είναι μια κλάση συστημάτων μηχανικής μάθησης και συγκεκριμένα μη επιτηρούμενης μάθησης (unsupervised learning). Δύο νευρωνικά δίκτυα ανταγωνίζονται το ένα το άλλο σε ένα παίγνιο μηδενικού αθροίσματος. Το ένα νευρωνικό δίκτυο, ο γεννήτορας (generator) γεννάει υποψήφιο δείγμα από μία κατανομή και το δεύτερο ο ανταγωνιστής (discriminator) αξιολογεί αν αυτό το δείγμα προέκυψε από το γεννήτορα ή από δεδομένα που έχουμε στη διάθεσή μας. Σκοπός των GANs είναι η δημιουργία δείγματος από ένα μέτρο μ, για το οποίο γνωρίζουμε μόνο την εμπειρική κατανομή του, από τα δεδομένα, $\tilde{\mu}$ ([25],[26]). Συνήθως, χρησιμοποιούνται στην ανάλυση εικόνας και αρα το μ μπορεί να αναφέρεται στην ομοιόμορφη κατανομή πάνω σε ένα μεγάλο σύνολο εικόνων. Το $\tilde{\mu}$ σε αυτή τη περίπτωση είναι η ομοιόμορφη κατανομή πάνω σε ένα μικρό υποσύνολο αυτών των εικόνων. Στόχος μας είναι να πάρουμε ένα ψευδο-δείγμα νέων εικόνων που δεν υπάρχουν στο δοσμένο σύνολο, αλλά μπορεί πραγματικά να είναι δείγμα από το μ.

Αρχικά, παίρνουμε ένα τυχαίο μέτρο πιθανότητας τ. Σκοπός μας είναι να βρούμε μια συνάρτηση G τέτοια ώστε το μ και το push-forward μέτρο $G\#\tau := \tau \circ G^{-1}$ να είναι σχετικά κοντά. Ως εκ τούτου, το ψευδο-δείγμα του μ μπορεί να προκύψει παίρνοντας δείγμα από το τ και εφαρμόζοντας τη G. Για να βρούμε μια τέτοια συνάρτηση G από το σύνολο των συναρτήσεων $\mathcal{G}$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μόνο το $\tilde{\mu}$ αντί του μ. Το να είναι το μέτρο $G\#\tau$ σχετικά κοντά στο $\tilde{\mu}$ το μετράμε με διάφορες αποστάσεις στα GANs. Στα Wasserstein GANs, χρησιμοποιείται η πρώτη Wasserstein απόσταση $W_1(\cdot,\cdot)$ [27] και ο σκοπός είναι ο εξής

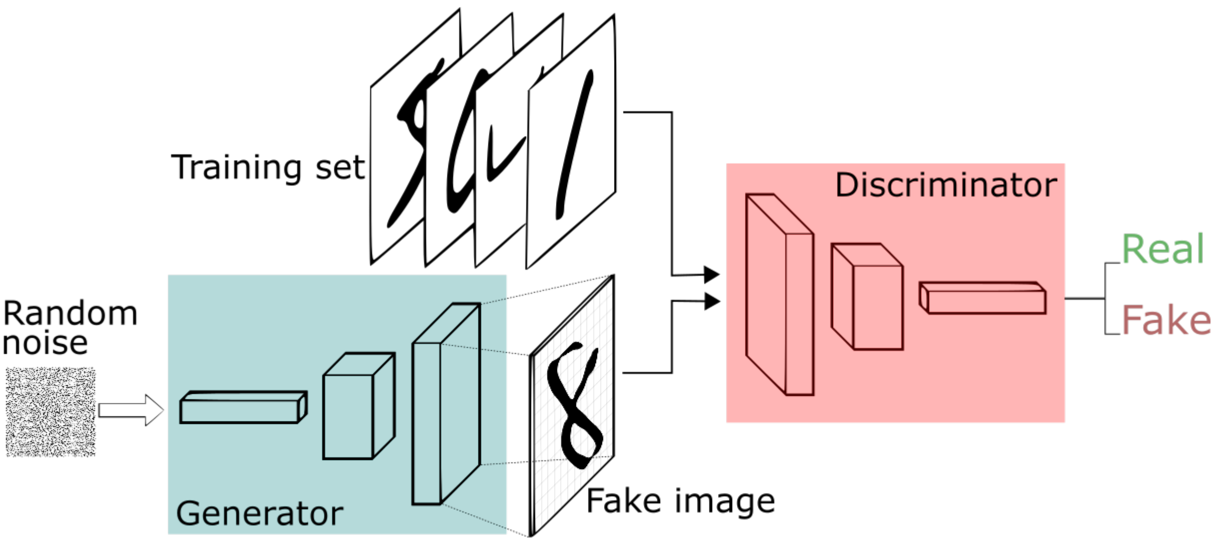
$$\underset{G\in\mathcal{G}}{\arg\min} W_1\left(\tau \circ G^{-1}, \tilde{\mu}\right)$$

Το παραπάνω μπορεί να γενικευτεί και σε άλλες αποστάσεις εκτός απο την πρώτη Wasserstein απόσταση.

Έστω, τώρα, το $\mathcal{G}$ είναι ένα σύνολο συναρτήσεων που απεικονίζονται στο $\mathcal{X}_1$. Ακόμα, έστω $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_1$ και για $G \in \mathcal{G}$ ορίζουμε $\mathcal{Q}_G := \left\{\nu \in \mathcal{P}(X) : \nu_1 = \tau \circ G^{-1}, \nu_2 = \tilde{\mu}\right\}$. Για μια συνάρτηση κόστους c, μπορούμε να εκφράσουμε το πρόβλημα βέλτιστης μεταφοράς που μελετάμε ως εξής

$$\underset{G\in\mathcal{G}}{\arg\min} - \phi_G(-c) = \underset{G\in\mathcal{G}}{\arg\min} \inf_{\nu\in\mathcal{Q}_G} \int c \, d\nu$$

Αν η c είναι μετρική, το παραπάνω αντιστοιχεί στο Wasserstein GAN. Εφόσον είναι δύσκολη η αντικειμενική αξιολόγηση των GANs, παραλείπουμε κάποιο παράδειγμα.



Σχήμα 4.2: Απεικόνιση ενός GAN

4.7 Εφαρμογή στην αποτίμηση παραγώγου

Σκοπός της παρούσας εφαρμογής είναι ο υπολογισμός φραγμάτων για ένα δικαίωμα με τη χρήση νευρωνικού δικτύου [1], καθώς και η σύγκριση αυτών των φραγμάτων με φράγματα που προκύπτουν στο πλαισίο της μερικής αβεβαιότητας εξάρτησης. Συγκεκριμένα, ενδιαφερόμαστε για ένα digital (binary) δικαίωμα σε τρείς μετοχές $\mathbf{S} = (S_1, S_2, S_3)$ με συνάρτηση αποπληρωμής $f(\mathbf{S}) = \mathbb{1}_{\max\{S_1,S_2,S_3\}<\tilde{K}}$, όπου $\tilde{K}$ μια τιμή άσκησης.

Για το πλαίσιο της μερικής αβεβαιότητας εξάρτησης θεωρούμε ότι οι περιθώριες κατανομές των $S_i \sim F_i$ προκύπτουν από τιμές Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων που συναλλάσσονται στην αγορά. Για χάριν ευκολίας τις θεωρούμε log-normal χωρίς να τις παράγουμε από Ευρωπαϊκά δικαιώματα αγοράς με τα επιχειρήματα των Breeden και Litzenberger [18] . Ακόμα, θεωρούμε ότι διαθέτουμε μερική πληροφορία για την δομή της εξάρτησης του διανύσματος $\mathbf{S}$ από τιμές digital δικαιωμάτων που βρίσκονται στην αγορά και είναι της μορφής $\mathbb{1}_{\max\{S_i,S_j\}<K}$, για $(i,j) = (1,2),(1,3),(2,3)$ και τιμές άσκησης $K \in \mathbb{R}_+$. Οι τιμές αυτών των δικαιωμάτων σχετίζονται απευθείας με την copula C του $\mathbf{S}$ αφού

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{1}_{\max\{S_1,S_2\}<K}\right] = \mathbb{Q}\left(S_1 < K, S_2 < K, S_3 < \infty\right) = C\left(F_1(K), F_2(K), 1\right)$$

και ανάλογα για $(i,j) = (1,3),(2,3)$ για κάποιο μέτρο ουδέτερου ρίσκου (martingale) $\mathbb{Q}$. Επίσης, να τονίσουμε ότι κάνουμε την υπόθεση ότι έχουμε μηδενικό επιτόκιο στην αγορά.

Συγκεκριμένα, για την επιπλέον διαθέσιμη πληροφορία θεωρούμε ένα σύνολο από τιμές άσκησης $\mathcal{K} := \{K_1, \dots, K_n\}$ και συμβολίζουμε με $\Pi_K^{(i,j)}$ τις τιμές digital δικαιωμάτων στις μετοχές (S_i, S_j) για τιμή άσκησης K. Αυτές οι τιμές χρησιμοποιούνται σαν πληροφορία για την copula C του $\mathbf{S}$ ως εξής

$$\begin{aligned}
C\left(F_1(K), F_2(K), 1\right) &= \Pi_K^{(1,2)} \\
C\left(F_1(K), 1, F_3(K)\right) &= \Pi_K^{(1,3)} \\
C\left(1, F_2(K), F_3(K)\right) &= \Pi_K^{(2,3)}
\end{aligned}$$

για $K \in \mathcal{K}$. Συνεπώς, γνωρίζουμε τις τιμές της C σε ένα συμπαγές υποσύνολο του πεδίου ορισμού της $\mathbb{I}^3$. Αυτό το σύνολο το συμβολίζουμε ως εξής

$$\mathcal{S} = \bigcup_{K \in \mathcal{K}} \left(F_1(K), F_2(K), 1\right) \cup \left(F_1(K), 1, F_3(K)\right) \cup \left(1, F_2(K), F_3(K)\right).$$

Το σύνολο των copulas που είναι συμβατό με την παραπάνω πληροφορία το συμβολίζουμε με

$$\mathcal{C}^{\mathcal{S},\Pi} = \left\{C \in \mathcal{C}^3 : C(\mathbf{x}) = \Pi_K^{(i,j)} \text{ , για όλα τα } \mathbf{x} \in \mathcal{S}\right\}$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε το Θεώρημα 3.1 για να υπολογίσουμε τα παρακάτω βελτιωμένα Fréchet–Hoeffding φράγματα του συνόλου $\mathcal{C}^{\mathcal{S},\Pi}$ και λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}
\overline{Q}^{\mathcal{S},\Pi}(\mathbf{u}) &= \min\left(u_1, u_2, u_3, \min_{(i,j),K}\left\{\Pi_K^{(i,j)} + \sum_{l=i,j}\left(u_l - F_l(K)\right)^+\right\}\right) \\
\underline{Q}^{\mathcal{S},\Pi}(\mathbf{u}) &= \max\left(0, \sum_{i=1}^3 u_i - 2, \max_{\substack{(i,j),K \\ k \in \{1,2,3\}\setminus\{i,j\}}}\left\{\Pi_K^{(i,j)} - \sum_{l=i,j}\left(F_l(K) - u_l\right)^+ - (1 - u_k)\right\}\right)
\end{aligned}$$

[1] Για την υλοποίηση χρησιμοποιήσαμε τον κώδικα του Stephan Eckstein https://github.com/stephaneckstein.

Τονίζουμε ότι το minimum και maximum στις παραπάνω εξισώσεις το παίρνουμε πάνω στο σύνολο $\mathcal{S}$ χρησιμοποιώντας μια πιο βολική παραμετρικοποίηση. Χρησιμοποιώντας αυτά τα βελτιωμένα φράγματα μπορούμε να εφαρμόσουμε την Πρόταση 3.3 και να υπολογίσουμε φράγματα για τις τιμές του δικαιώματος με συνάρτηση αποπληρωμής $f(\mathbf{S}) = \mathbb{1}_{\max\{S_1,S_2,S_3\}<\tilde{K}}$, δεδομένου ότι

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{1}_{\max\{S_1,S_2,S_3\}<\tilde{K}}\right] = \mathbb{Q}\left(S_1 < \tilde{K}, S_2 < \tilde{K}, S_3 < \tilde{K}\right) = C\left(F_1(\tilde{K}), F_2(\tilde{K}), F_3(\tilde{K})\right)$$

Δηλαδή θα υπολογίσουμε φράγματα για ελεύθερες από arbitrage τιμές των δικαιωμάτων $\{\pi_f(C) : C \in \mathcal{C}^{\mathcal{S},\Pi}\}$ που είναι συμβατές με τη διαθέσιμη πληροφορία από τα digital δικαιώματα των ανα δύο μετοχών.

Για χάριν της εφαρμογής, για να δημιουρήσουμε τιμές των digital δικαιωμάτων στις ανα δύο μετοχές χρησιμοποιούμε το πολυδιάστατο μοντέλο Black-Scholes. Επομένως, το τυχαίο διάνυσμα $\mathcal{S} = (S_1, S_2, S_3)$ ακολουθεί log-normal κατανομή με $S_i = s_i \exp\left(-\frac{1}{2} + X_i\right)$, όπου $(X_1, X_2, X_3) \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma)$ με

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{1,2} & \rho_{1,3} \\ \rho_{1,2} & 1 & \rho_{2,3} \\ \rho_{1,3} & \rho_{2,3} & 1 \end{pmatrix}$$

όπου $\rho_{i,j}$ η συσχέτιση των τυχαίων μεταβλητών X_i, X_j. Να τονίσουμε ότι αυτό το μοντέλο χρησιμοποιείται για να δημιουργήσουμε τις τιμές των digital δικαιωμάτων στις ανα δύο μετοχές και ότι δεν εισέρχεται στα φράγματα με κανένα άλλο τρόπο.

Όσον αφορά τα νευρωνικά δίκτυα, έστω $\mathcal{X} = [0,1]^3, \theta = U\left([0,1]^3\right)$ (ομοιόμορφη κατανομή στο $[0,1]^3$) και $\mathcal{Q} = \{\nu \in \mathcal{P}(\mathcal{X}) : \nu_i = U([0,1])\}$, όπου ν_i η i-οστή περιθώρια του ν. Το μέτρο ν αντιστοιχεί στην από κοινού συνάρτηση κατανομής του τυχαίου διανύσματος των μετοχών $\mathbf{S}$. Ακόμα, από το μετασχηματισμό πιθανότητας της Πρότασης 2.1 ισχύει $\nu_i = F_i(S_i) \sim U([0,1])$, για κάθε $i \in \{1,2,3\}$ όπου F_i η περιθώρια κατανομή του S_i [1]. Για δεδομένη τιμή άσκησης $\tilde{K}$ έχουμε $(F_1(\tilde{K}), F_2(\tilde{K}), F_3(\tilde{K})) \in [0,1]^3$, ορίζουμε τη συνάρτηση $f : [0,1]^3 \to \mathbb{R}_+$ με

$$f(\mathbf{S}) = \begin{cases} 1 & , \text{αν } F_i(S_i) \leq F_i(\tilde{K}) \text{ για όλα τα } i \in \{1,2,3\} \\ 0 & , \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής, αλλα εφόσον το πρόβλημα βέλτιστης μεταφοράς είναι συνεχές από κάτω, η αναπαράσταση

$$\phi(f) = \max_{\nu \in \mathcal{Q}} \int f \, d\nu$$

ισχύει για όλες τις φραγμένες μετρήσιμες συναρτήσεις.

Για τη συνάρτηση f ισχύει το εξής

$$\begin{aligned} \int f \, d\nu &= \int \mathbb{1}_{\{F_1(S_1) \leq F_1(\tilde{K}), F_2(S_2) \leq F_2(\tilde{K}), F_3(S_3) \leq F_3(\tilde{K})\}} \, d\nu \\ &= \mathbb{E}_\nu\left[\mathbb{1}_{\{F_1(S_1) \leq F_1(\tilde{K}), F_2(S_2) \leq F_2(\tilde{K}), F_3(S_3) \leq F_3(\tilde{K})\}}\right] \\ &= \nu\Big(F_1(S_1) \leq F_1(\tilde{K}), F_2(S_2) \leq F_2(\tilde{K}), F_3(S_3) \leq F_3(\tilde{K})\Big) = C\Big(F_1(\tilde{K}), F_2(\tilde{K}), F_3(\tilde{K})\Big) \end{aligned}$$

Άρα, η τιμή του $\phi(f) = \sup_{\nu \in \mathcal{Q}} \int f \, d\nu$ [2] αντιστοιχεί στη μέγιστη τιμή της τριδιάστατης copula στο σημείο $(F_1(\tilde{K}), F_2(\tilde{K}), F_3(\tilde{K}))$ και άρα στη μέγιστη τιμή του digital δικαιώματος με συνάρτηση

[1] Σε αυτή την εφαρμογή τις θεωρούμε γνωστές και συγκεκριμένα log-normal.

[2] Η μεγιστοποίηση ως προς το μέτρο ν (από κοινού συνάρτηση κατανομής πιθανότητας) είναι ισοδύναμη με την μεγιστοποίηση ως προς την copula C από το Θεώρημα του Sklar 2.1.

αποπληρωμής $f(\mathbf{S}) = \mathbb{1}_{\max\{S_1,S_2,S_3\}<\tilde{K}}$. Ακόμα, γνωρίζουμε ότι από τα κλασικά Fréchet–Hoeffding φράγματα αυτό το πρόβλημα έχει αναλυτική λύση η οποία είναι

$$\phi(f) = \min_{i\in\{1,2,3\}} F_i(\tilde{K}).$$

και άρα μπορούμε να αξιολογήσουμε την προσέγγιση μας.

Από την άλλη πλευρά, χρησιμοποιώντας αντίστοιχη μεθοδολογία και με χρήση της δυϊκότητας υπο-αντιστάθμισης αντί της δυϊκότητας υπεραντιστάθμισης, μπορούμε να προσεγγίσουμε την ελάχιστη τιμή της f πάνω σε όλες τις από κοινού συναρτήσεις κατανομής [1] $\inf_{\nu\in\mathcal{Q}} \int f \; d\nu$ και άρα να υπολογίσουμε κάτω φράγματα για την ελεύθερη από arbitrage τιμή του παραπάνω digital δικαιώματος με τη χρήση νευρωνικών δικτύων. Ξανά, η αναλυτική λύση από τα κλασικά Fréchet–Hoeffding φράγματα είναι

$$(\sum_{i=1}^{3} F_i(\tilde{K}) - 3 + 1)^+$$

Για την εφαρμογή του πρώτου σχήματος στο γράφημα 4.3 θεωρήσαμε μετοχές με αρχική τιμή $s_i = S_0 = 20$ και επιλέξαμε τον παρακάτω πίνακα συσχέτισης

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0.3 & -0.9 \\ 0.3 & 1 & 0 \\ -0,9 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Για την υλοποίηση με νευρωνικά δίκτυα επιλέξαμε bach size ίσο με 2048, αριθμό επαναλήψεων ίσο με 10000 και την L^2 ποινικοποίηση με συνάρτηση ποινής $\beta_\gamma(x) = \gamma \max\{0, x\}^2$, με $\gamma = 80$, καθώς ήταν πιο σταθερή από την εκθετική συνάρτηση ποινής $\beta_\gamma(x) = \frac{\exp(\gamma x-1)}{\gamma}$. Για την υλοποίηση στο πλάισιο της μερικής αβεβαιότητας εξάρτησης επιλέξαμε το σύνολο των τιμών άσκησης $\mathcal{K}$

$$\mathcal{K} = \{20, 21, 22, ..., 30\}$$

Για την εφαρμογή του δεύτερου σχήματος στο γράφημα 4.4 θεωρήσαμε μετοχές με αρχική τιμή $s_i = S_0 = 10$ και επιλέξαμε τον παρακάτω πίνακα συσχέτισης

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ -0,5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

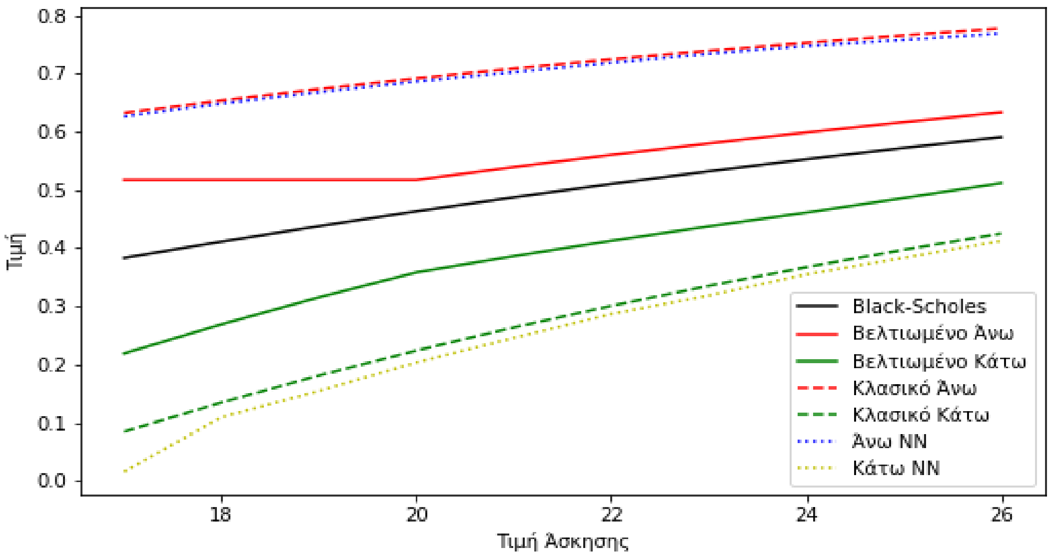
Για την υλοποίηση επιλέξαμε ξανά bach size ίσο με 2048, αριθμό επαναλήψεων ίσο με 10000 και την L^2 ποινικοποίηση με συνάρτηση ποινής $\beta_\gamma(x) = \gamma \max\{0, x\}^2$, με $\gamma = 80$. Για την υλοποίηση στο πλάισιο της μερικής αβεβαιότητας εξάρτησης επιλέξαμε το σύνολο των τιμών άσκησης $\mathcal{K}$

$$\mathcal{K} = \{4, 5, 6, ..., 15\}$$

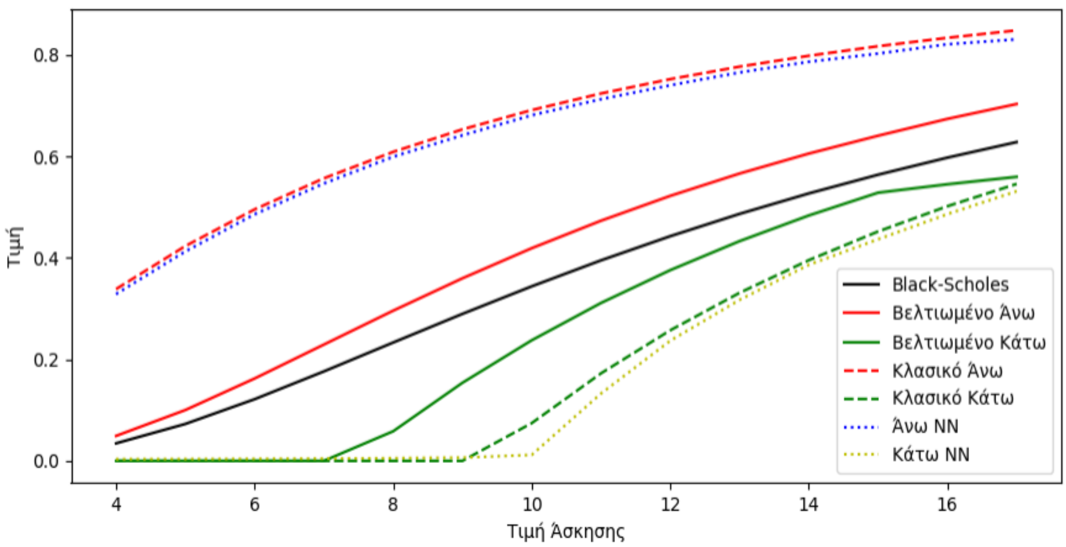
Στα παρακάτω σχήματα απεικονίζονται σαν συνάρτηση των τιμών άσκησης τα βελτιωμένα Fréchet - Hoeffding φράγματα, τα απλά Fréchet–Hoeffding φράγματα καθώς και τα φράγματα που προέκυψαν από τα νευρωνικά δίκτυα για το digital δικαίωμα στις τρείς μετοχές. Επίσης, για αναφορά υπάρχει η τιμή του δικαιώματος από το μοντέλο Black-Scholes.

[1] Όπως έχουμε αναφέρει και προηγουμένως κάθε μέτρο πιθανότητας αντιστοιχεί σε μία συνάρτηση κατανομής και αντίστροφα, με τις απαραίτητες φυσικά προϋποθέσεις.

Παρατηρούμε ότι τα βελτιωμένα Fréchet–Hoeffding φράγματα, που συμπεριλαμβάνουν επιπλέον πληροφορία από digital δικαιώματα των ανα δύο μετοχών, προσεγγίζουν περισσότερο την Black-Scholes τιμή του δικαιώματος και αποτελούν σημαντική βελτίωση από τα κλασικά Fréchet–Hoeffding φράγματα. Όσον αφορά τα φράγματα από τα νευρωνικά δίκτυα καταλυτικό παράγοντα διαδραματίζει η επιλογή της τιμής της παραμέτρου ποινής γ, δηλαδή για τιμές $80 < \gamma < 90$ (αυτό διαισθητικά σημαίνει ότι είναι αυστηρή η επιβολή του ανισοτικού περιορισμού) έχουμε προσέγγιση των κλασικών Fréchet–Hoeffding φράγματων, ενώ για μικρές τιμές $\gamma < 80$ (αυτό διαισθητικά σημαίνει ότι δεν είναι αυστηρή η επιβολή του ανισοτικού περιορισμού) δεν έχουμε ευστάθεια, με την έννοια ότι αλλάζοντας λίγο την τιμή του γ λαμβάνουμε διαφορετικό αποτέλεσμα. Στην περίπτωση που έχουμε πολύ μεγάλο $\gamma > 100$ έχουμε προσέγγιση των κλασικών Fréchet–Hoeffding φράγματων, αλλά οχι σε τόσο ικανοποιητικό βαθμό [28].



Σχήμα 4.3: Φράγματα στις τιμές των digital δικαιωμάτων συναρτήση της τιμής άσκησης.



Σχήμα 4.4: Φράγματα στις τιμές των digital δικαιωμάτων συναρτήση της τιμής άσκησης.

♦

4.8 Εφαρμογή στην αποτίμηση παραγώγου με χρήση βελτιωμένων δυϊκοτήτων αντιστάθμισης

Σε αυτό το παράδειγμα θα υπολογίσουμε φράγματα για την τιμή ενός δικαιώματος με τη χρήση νευρωνικού δικτύου και θα τα συγκρίνουμε με φράγματα που προκύπτουν αναλυτικά στο πλαισίο της μερικής αβεβαιότητας εξάρτησης. Συγκεκριμένα, ενδιαφερόμαστε για ένα digital δικαίωμα σε τρείς μετοχές $\mathbf{S} = (S_1, S_2, S_3)$ με συνάρτηση αποπληρωμής $f(\mathbf{S}) = \mathbb{1}_{\max\{S_1,S_2,S_3\}<\tilde{K}}$, όπου $\tilde{K}$ μία τιμή άσκησης.

Στο πλαίσιο της μερικής αβεβαιότητας εξάρτησης θεωρούμε ότι οι περιθώριες κατανομές ουδέτερου ρίσκου F_i των S_i προκύπτουν από τιμές Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων που συναλλάσσονται στην αγορά. Για χάριν ευκολίας, τις θεωρούμε log-normal χωρίς να τις παράγουμε από Ευρωπαϊκά δικαιώματα αγοράς με τα επιχειρήματα των Breeden και Litzenberger. Σε αυτό το παράδειγμα θεωρούμε ότι διαθέτουμε μερική πληροφορία για την δομή της εξάρτησης του διανύσματος $\mathbf{S}$ από τις τιμές $\Pi_1^*, \Pi_2^*, \Pi_3^*$ του δικαιώματος $\mathbb{1}_{\max\{S_1,S_2,S_3\}<K}$ για τιμές άσκησης $K_1 = 5$, $K_2 = 10$, $K_3 = 15$ αντίστοιχα. Αυτό συμβάνει καθώς οι τιμές αυτές σχετίζονται απευθείας με την copula C του $\mathbf{S}$. Παραδείγματος χάριν για $K_2 = 10$ ισχύει

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{1}_{\max\{S_1,S_2,S_3\}<10}\right] = \mathbb{Q}\left(S_1 < 10, S_2 < 10, S_3 < 10\right) = C\left(F_1(10), F_2(10), F_3(10)\right)$$

κάνοντας την υπόθεση ότι έχουμε μηδενικό επιτόκιο στην αγορά.

Συνεπώς, γνωρίζουμε την τιμή της C σε τρία σημεία του πεδίου ορισμού της $\mathbb{I}^3$. Αυτό το σύνολο το συμβολίζουμε ως εξής

$$\mathcal{S} = \left\{\left(F_1(5), F_2(5), F_3(5)\right), \left(F_1(10), F_2(10), F_3(10)\right), \left(F_1(15), F_2(15), F_3(15)\right)\right\}$$

Το σύνολο των copulas που είναι συμβατό με την παραπάνω πληροφορία το συμβολίζουμε με

$$\mathcal{C}^{\mathcal{S}} = \left\{C \in \mathcal{C}^3 : C(\mathbf{x}) = \Pi_i^* \text{ , για } \mathbf{x} \in \mathcal{S}, i \in \{1,2,3\}\right\}$$

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε τα παρακάτω βελτιωμένα Fréchet–Hoeffding φράγματα του συνόλου $\mathcal{C}^{\mathcal{S}}$

$$\overline{Q}^{\mathcal{S}}(\mathbf{u}) = \min\left(u_1, u_2, u_3, \min_{i\in\{1,2,3\}}\left\{\Pi_i^* + \sum_{l=1}^{3}\left(u_l - F_l(K_i)\right)^+\right\}\right)$$

$$\underline{Q}^{\mathcal{S}}(\mathbf{u}) = \max\left(0, \sum_{i=1}^{3} u_i - 2, \max_{i\in\{1,2,3\}}\left\{\Pi_i^* - \sum_{l=1}^{3}\left(F_l(K_i) - u_l\right)^+\right\}\right)$$

Χρησιμοποιώντας αυτά τα βελτιωμένα φράγματα μπορούμε υπολογίσουμε φράγματα για τις τιμές του δικαιώματος με συνάρτηση αποπληρωμής $f(\mathbf{S}) = \mathbb{1}_{\max\{S_1,S_2,S_3\}<\tilde{K}}$, αφού όπως προηγουμένως ισχύει ότι

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{1}_{\max\{S_1,S_2,S_3\}<\tilde{K}}\right] = \mathbb{Q}\left(S_1 < \tilde{K}, S_2 < \tilde{K}, S_3 < \tilde{K}\right) = C\left(F_1(\tilde{K}), F_2(\tilde{K}), F_3(\tilde{K})\right)$$

για ένα ισοδύναμο μέτρο martingale $\mathbb{Q}$.

Για χάριν της εφαρμογής, για να δημιουρήσουμε τις τιμές του digital δικαιώματος για τιμές άσκησης $K_1 = 5$, $K_2 = 10$, $K_3 = 15$ χρησιμοποιούμε το πολυδιάστατο μοντέλο Black-Scholes. Επομένως, το τυχαίο διάνυσμα $\mathcal{S} = (S_1, S_2, S_3)$ ακολουθεί log-normal κατανομή με $S_i = s_i \exp\left(-\frac{1}{2} + X_i\right)$, όπου $(X_1, X_2, X_3) \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma)$ με

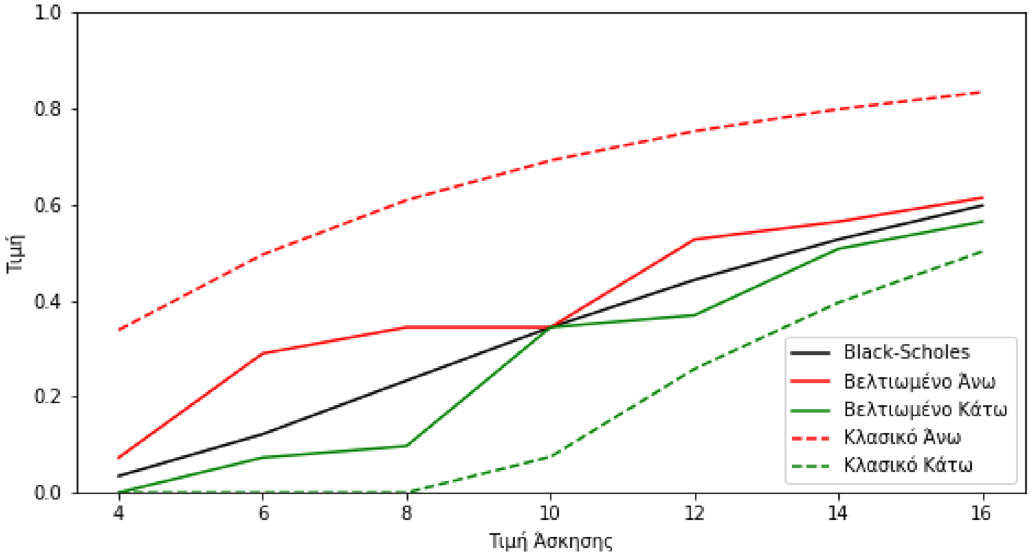
$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{1,2} & \rho_{1,3} \\ \rho_{1,2} & 1 & \rho_{2,3} \\ \rho_{1,3} & \rho_{2,3} & 1 \end{pmatrix}$$

και $\rho_{i,j}$ η συσχέτιση των τυχαίων μεταβλητών X_i, X_j. Να τονίσουμε ότι αυτό το μοντέλο χρησιμοποιείται για να δημιουργήσουμε τις τιμές του digital δικαιώματος για τιμές άσκησης $K_1 = 5$, $K_2 = 10$, $K_3 = 15$ και ότι δεν εισέρχεται στα φράγματα με κανένα άλλο τρόπο.

Πρίν προχωρήσουμε με τα νευρωνικά δίκτυα, θα συγκρίνουμε αυτά τα βελτιωμένα φράγματα με τα κλασικά Fréchet–Hoeffding φράγματα για τιμές άσκησης [4, 6, 8, 10, 12, 14, 16]. Ως εκ τούτου, θεωρήσαμε μετοχές με αρχική τιμή $s_i = S_0 = 10$ και επιλέξαμε τον παρακάτω πίνακα συσχέτισης

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ -0.5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Το παρακάτω γράφημα απεικονίζει τα βελτιωμένα Fréchet–Hoeffding φράγματα, τα κλασικά Fréchet–Hoeffding φράγματα και την τιμή από το μοντέλο Black-Scholes για αναφορά.



Σχήμα 4.5: Φράγματα για την τιμή του δικαιώματος digital on max.

Όσον αφορά τα νευρωνικά δίκτυα, έστω $\mathcal{X} = [0,1]^3, \theta = Uniform\left([0,1]^3\right)$ και $\mathcal{Q} = \{\nu \in \mathcal{P}(\mathcal{X}) : \nu_i = Uniform([0,1])\}$, με ν_i συμβολίζουμε την i-οστή περιθώρια του ν. Το μέτρο ν αντιστοιχεί στην από κοινού συνάρτηση κατανομής του τυχαίου διανύσματος των μετοχών $\mathbf{S}$. Από το μετασχηματισμό πιθανότητας έχουμε ότι $\nu_i = F_i(S_i) \sim Uniform([0,1])$, για κάθε $i \in \{1,2,3\}$, όπου F_i η περιθώρια κατανομή του S_i. Για δεδομένη τιμή άσκησης $\tilde{K}$ έχουμε $(F_1(\tilde{K}), F_2(\tilde{K}), F_3(\tilde{K})) \in [0,1]^3$, ορίζουμε τη συνάρτηση $f : [0,1]^3 \to \mathbb{R}_+$ με

$$f(\mathbf{S}) = \begin{cases} 1 & \text{, αν } F_i(S_i) \leq F_i(\tilde{K}) \text{ για όλα τα } i \in \{1,2,3\}. \\ 0 & \text{, διαφορετικά.} \end{cases}$$

Για τη συνάρτηση f ισχύει το εξής

$$\begin{aligned} \int f \; d\nu &= \int \mathbb{1}_{\{F_1(S_1) \leq F_1(\tilde{K}), F_2(S_2) \leq F_2(\tilde{K}), F_3(S_3) \leq F_3(\tilde{K})\}} \; d\nu \\ &= \mathbb{E}_\nu \Big[\mathbb{1}_{\{F_1(S_1) \leq F_1(\tilde{K}), F_2(S_2) \leq F_2(\tilde{K}), F_3(S_3) \leq F_3(\tilde{K})\}} \Big] \\ &= \nu \Big(F_1(S_1) \leq F_1(\tilde{K}), F_2(S_2) \leq F_2(\tilde{K}), F_3(S_3) \leq F_3(\tilde{K}) \Big) = C \Big(F_1(\tilde{K}), F_2(\tilde{K}), F_3(\tilde{K}) \Big) \end{aligned}$$

Άρα, η τιμή του $\phi(f) = \sup_{\nu \in \mathcal{Q}} \int f \; d\nu$ αντιστοιχεί στη μέγιστη τιμή της τριδιάστατης copula στο σημείο $(F_1(\tilde{K}), F_2(\tilde{K}), F_3(\tilde{K}))$ και άρα στη μέγιστη τιμή του digital δικαιώματος με συνάρτηση αποπληρωμής $f(\mathbf{S}) = \mathbb{1}_{\max\{S_1, S_2, S_3\} < \tilde{K}}$. Ακόμα, γνωρίζουμε ότι από τα κλασικά Fréchet–Hoeffding φράγματα αυτό το πρόβλημα έχει αναλυτική λύση η οποία είναι

$$\phi(f) = \min_{i \in \{1,2,3\}} F_i(\tilde{K}).$$

Σε αυτό το παράδειγμα θα χρησιμοποιήσουμε τη βελτιωμένη δυϊκότητα υπεραντιστάθμισης [16] για να υπολογίσουμε την τιμή του $\phi(f)$, δηλαδή

$$\begin{aligned} \sup_{\nu \in \mathcal{Q}} \int f \; d\nu = \inf \Bigg\{ & \int_{[0,1]} h_1 \; d\nu_1 + \int_{[0,1]} h_2 \; d\nu_2 + \int_{[0,1]} h_3 \; d\nu_3 + \\ & + \alpha_1 \cdot \Pi_1^* + \alpha_2 \cdot \Pi_2^* + \alpha_3 \cdot \Pi_3^* \; \Bigg| \\ & \Bigg| \; h_1 + h_2 + h_3 + \alpha_1 \cdot \mathbb{1}_{\max\{S_1,S_2,S_3\} < K_1} + \\ & + \alpha_2 \cdot \mathbb{1}_{\max\{S_1,S_2,S_3\} < K_2} + \alpha_3 \cdot \mathbb{1}_{\max\{S_1,S_2,S_3\} < K_3} \geq f \Bigg\} \end{aligned}$$

όπου α_1 α_2 α_3 παράμετροι πραγματικοί αριθμοί. Δηλαδή, σε αυτή την περίπτωση λάβαμε υπόψη την πληροφορία για τις τιμές του digital δικαιώματος για τιμές άσκησης $K_1 = 5$, $K_2 = 10$, $K_3 = 15$. Η ποινικοποίηση της παραπάνω δυϊκότητας για χρήση σε νευρωνικό δίκτυο παρουσιάζεται αναλυτικά στο κεφάλαιο 4.

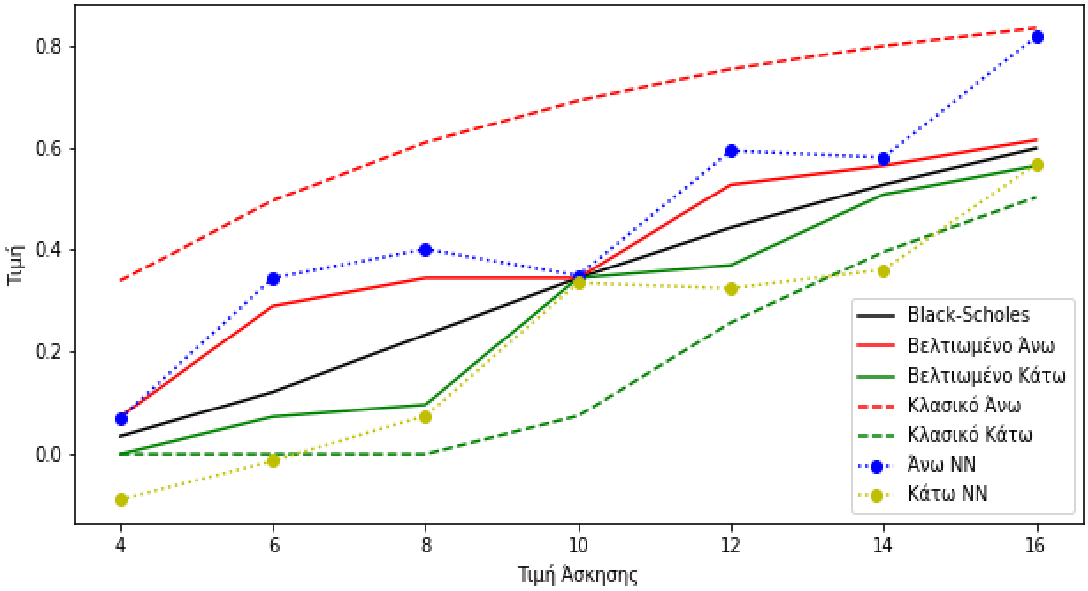
Από την άλλη πλευρά, χρησιμοποιώντας αντίστοιχη μεθοδολογία και με χρήση της βελτιωμένης δυϊκότητας υποαντιστάθμισης αντί της βελτιωμένης δυϊκότητας υπεραντιστάθμισης, μπορούμε να προσεγγίσουμε την ελάχιστη τιμή της f πάνω σε όλες τις από κοινού συναρτήσεις κατανομής $\inf_{\nu \in \mathcal{Q}} \int f \; d\nu$ και άρα να υπολογίσουμε κάτω φράγματα για την ελεύθερη από arbitrage τιμή του παραπάνω digital δικαιώματος με τη χρήση νευρωνικών δικτύων. Ξανά, η αναλυτική λύση από τα κλασικά Fréchet–Hoeffding φράγματα είναι

$$\Big(\sum_{i=1}^{3} F_i(\tilde{K}) - 3 + 1\Big)^+$$

Για το παράδειγμα με τις μετοχές με αρχική τιμή $s_i = S_0 = 10$ και πίνακα συσχέτισης

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ -0.5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

επιλέξαμε bach size ίσο με 2048, αριθμό επαναλήψεων ίσο με 8000 και την L^2 ποινικοποίηση με συνάρτηση ποινής $\beta_\gamma(x) = \gamma \max\{0, x\}^2$, με $\gamma = 80$. Στα παρακάτω γραφήματα λαμβάνουμε τα φράγματα που προκύπτουν από το νευρωνικό δίκτυο, τα βελτιωμένα Fréchet–Hoeffding φράγματα, τα κλασικά Fréchet–Hoeffding φράγματα και την την τιμή από το μοντέλο Black-Scholes για αναφορά.



Σχήμα 4.6: Φράγματα για την τιμή του δικαιώματος digital on max.

Παρατηρούμε όπως και στις προηγούμενες εφαρμογές ότι τα βελτιωμένα Fréchet–Hoeffding φράγματα, που συμπεριλαμβάνουν επιπλέον πληροφορία από την αγορά, προσεγγίζουν περισσότερο την Black-Scholes τιμή του δικαιώματος και αποτελούν σημαντική βελτίωση από τα κλασικά Fréchet–Hoeffding φράγματα. Τέλος, τα φράγματα από τα νευρωνικά δίκτυα που χρησιμοποιούν τις βελτιωμένες δυϊκότητες αποτελούν και αυτά σημαντική βελτίωση από τα φράγματα με τις κλασικές δυϊκότητες καθώς προσεγγίζουν σε ικανοποιητικό βαθμό την Black-Scholes τιμή του δικαιώματος. ♦

5 Παράρτημα

5.1 Μη γραμμικό Θεώρημα των Daniell-Stone

Έστω $\mathcal{X}$ ένας πολωνικός χώρος. Δοσμένης μετρήσιμης συνάρτησης $\kappa : \mathcal{X} \to [1, \infty)$, θα συμβολίζουμε με $C_\kappa(\mathcal{X})$ το διανυσματικό πλέγμα Stone όλων των συνεχών συναρτήσων $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, με $|f|/\kappa$ φραγμένες. Για παράδειγμα, αν η κ είναι φραγμένη ισχύει $C_\kappa(\mathcal{X}) = C_b(\mathcal{X})$ ή αν $\kappa(x) = 1+|x|$ στο $\mathcal{X} = \mathbb{R}^d$, ο χώρος $C_\kappa\left(\mathbb{R}^d\right)$ περιέχει όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ με γραμμική αύξηση. Ακόμα, συμβολίζουμε με $ca_\kappa^+(\mathcal{X})$ το σύνολο όλων των Borel μέτρων μ στο $\mathcal{X}$ με $\int \kappa \, d\mu < \infty$. Η παρακάτω εκδοχή του μη γραμμικού Θεωρήματος των Daniell-Stone προκύπτει από την Πρόταση 1.1 στο [21].

Πρόταση 5.1 *Έστω $\phi : C_\kappa(\mathcal{X}) \to \mathbb{R}$ ένα αύξων* [1]*, κυρτό και συνεχές από πάνω συναρτησιακό, δηλαδή $\phi\left(f^n\right) \downarrow 0$ για κάθε ακολουθία $\left(f^n\right)$ τέτοια ώστε $f^n \downarrow 0$. Τότε, έχει την παρακάτω δυϊκή αναπαράσταση*

$$\phi(f) = \max_{\mu \in \mathrm{ca}_\kappa^+(\mathcal{X})} \left\{ \int f \, d\mu - \phi^*(\mu) \right\} \quad , \text{ για όλες τις } f \in C_\kappa(\mathcal{X}) \tag{5.1}$$

όπου η κυρτή συζυγής $\phi^* : ca_\kappa^+(\mathcal{X}) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ δίνεται από την $\phi^*(\mu) = \sup_{f \in C_\kappa(\mathcal{X})} \left\{ \int f \, d\mu - \phi(f) \right\}$.

Η συνέχεια από πάνω σχετίζεται με την έννοια της στενότητας (tightness), που εισήχθη στο πλάισιο των μέτρων ρίσκου από τους Föllmer και Schied [22].

Σαν εφαρμογή θεωρούμε το συναρτησιακό υπεραντιστάθμισης

$$\phi(f) := \inf\left\{ \int h \, d\mu_0 : h \geq f \text{ , για κάποια } h \in \mathcal{H} \right\}$$

στον $C_\kappa(\mathcal{X})$, με $\mu_0 \in ca_\kappa^+(\mathcal{X})$ ένα μέτρο πιθανότητας και $\mathcal{H} \subseteq C_\kappa(\mathcal{X})$ κυρτός κώνος τέτοιος ώστε $\kappa \in \mathcal{H}$. Απευθείας παρατηρούμε ότι το ϕ είναι ένα πραγματικό, αύξων και κυρτό συναρτησιακό στον $C_\kappa(\mathcal{X})$. Ακόμα, αν είναι συνεχές από πάνω, έχουμε από την Πρόταση 5.1 ότι έχει την δυϊκή αναπαράσταση (5.1). Η κυρτή συζυγής δίνεται από

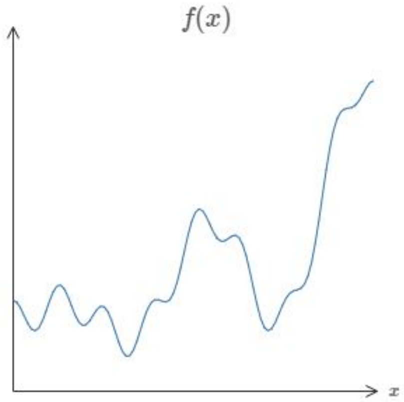
$$\begin{aligned} \phi^*(\mu) &= \sup_{f \in C_\kappa(\mathcal{X})} \left\{ \int f \, d\mu - \inf_{\substack{h \in \mathcal{H}: \\ h \geq f}} \int h \, d\mu_0 \right\} \\ &= \sup_{h \in \mathcal{H}} \sup_{\substack{f \in C_\kappa(\mathcal{X}): \\ h \geq f}} \left\{ \int f \, d\mu - \int h \, d\mu_0 \right\} \\ &= \sup_{h \in \mathcal{H}} \left\{ \int h \, d\mu - \int h \, d\mu_0 \right\} \end{aligned} \tag{5.2}$$

Δεδομένου ότι ο $\mathcal{H}$ είναι ο κυρτός κώνος που περιέχει τις σταθερές, προκύπτει ότι $\phi^*(\mu) = 0$, όταν το $\mu \in ca_\kappa^+(\mathcal{X})$ είναι ένα μέτρο πιθανότητας τέτοιο ώστε $\int h \, d\mu = \int h \, d\mu_0$, για όλες τις $h \in \mathcal{H}$, και $\phi^*(\mu) = +\infty$, διαφορετικά. Στη περίπτωση που $C_\kappa(\mathcal{X}) = C_b(\mathcal{X})$ καταλήγουμε στην (4.2).

[1] Για $f \geq g \implies \phi(f) \geq \phi(g)$

5.2 Θεώρημα Καθολικής Προσέγγισης Νευρωνικών Δικτύων (Universal Approximation Theorem)

Μια από τις πιο εντυπωσιακές χρήσεις ενός νευρωνικού δικτύου είναι η προσέγγιση συνάρτησεων $f(x)$.

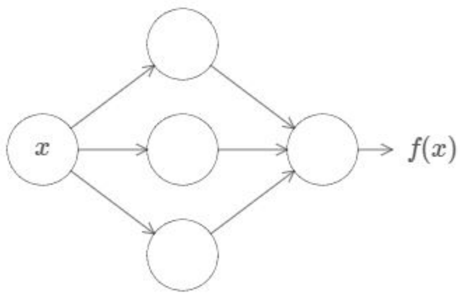


Σχήμα 5.1: Γράφημα της συνάρτησης $f(x) = 0.2 + 0.4x^2 + 0.3x\sin(15x) + 0.05\cos(50x)$ [5].

Θεώρημα 5.1 (Cybenko)
Έστω $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια μη σταθερή, φραγμένη και συνεχής συνάρτηση. Έστω $\mathbb{I}_m$ ο m-διάστατος μοναδιαίος υπερκύβος $[0,1]^d$. Τον χώρο των πραγματικών συνεχών συναρτήσεων στο $\mathbb{I}_m$ τον συμβολίζουμε με $C(\mathbb{I}_m)$. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ και κάθε συνάρτηση $f \in C(\mathbb{I}_m)$, υπάρχουν φυσικός $N \in \mathbb{N}$, πραγματικοί $u_i, b_i \in \mathbb{R}$ και διάνυσμα $w_i \in \mathbb{R}^m$ για $i = 1, ..., N$, έτσι ώστε $F(x) = \sum_{i=1}^{N} u_i \varphi(w_i^T x + b_i)$ να είναι μία προσέγγιση της f, δηλαδή $|F(x) - f(x)| < \varepsilon$ για όλα τα $x \in \mathbb{I}_m$. Με άλλα λόγια, συναρτήσεις της μορφής $F(x)$ είναι πυκνές στο $C(\mathbb{I}_m)$.

Το παραπάνω θεώρημα ισχύει και αν αντικαταστήσουμε το σύνολο $\mathbb{I}_m$ με οποιοδήποτε συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$.

Το θεώρημα παγκόσμιας προσέγγισης αναφέρει ότι ένα νευρωνικό δίκτυο χωρίς κυκλικές συνάψεις, με ένα κρυφό στρώμα που περιέχει πεπερασμένο πλήθος νευρώνων μπορεί να προσεγγίσει συνεχείς συναρτήσεις σε συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ (κάτω απο ασθενείς προϋποθέσεις για τη συνάρτηση ενεργοποίησης) [6]. Δηλαδή, για οποιαδήποτε συνάρτηση $f(x)$ που ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα νευρωνικό δίκτυο, ώστε για οποιοδήποτε x, να δίνει ως έξοδο την προσέγγιση της συνάρτησης $\tilde{f}(x)$ και αυτή η προσέγγιση να είναι οσοδήποτε κοντά επιθυμούμε στην αρχική $f(x)$.

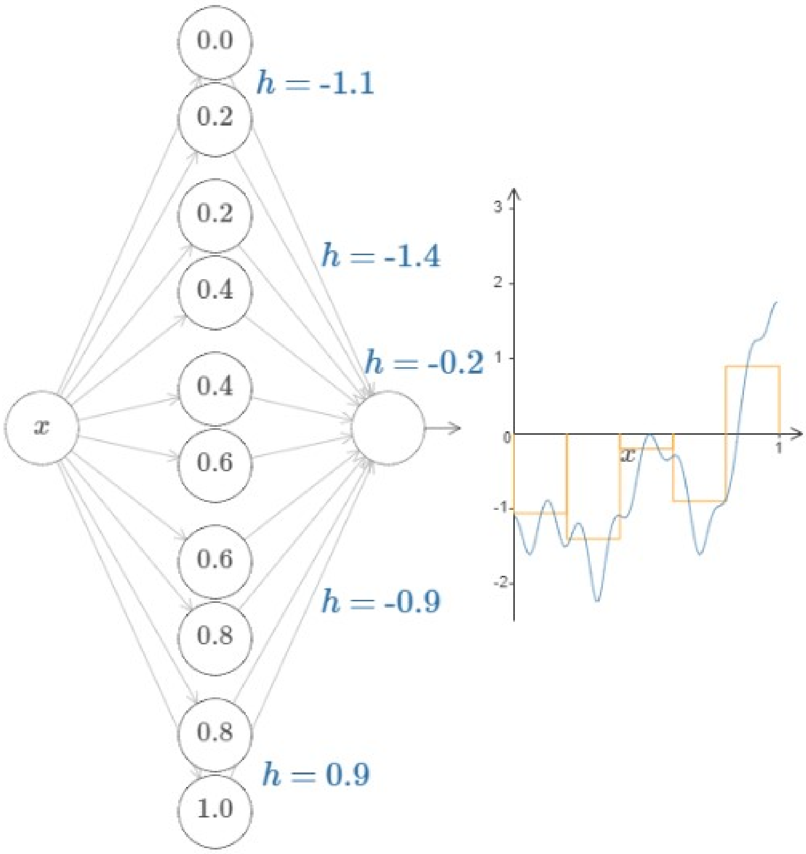


Σχήμα 5.2: Νευρωνικό δίκτυο προσέγγισης [5].

Το παραπάνω αποτέλεσμα ισχύει ακόμα και για διανυσματικές συναρτήσεις $\vec{f}(x_1, x_2, ..., x_m)$.

Ακόμα, αν η συνάρτηση δεν είναι συνεχής μπορούμε πάλι να χρησιμοποιήσουμε ένα νευρωνικό δίκτυο για να την προσεγγίσουμε και σε αυτή τη περίπτωση θα λάβουμε όμως μια συνεχή προσέγγιση της.

Διαισθητικά, επιλέγοντας κατάλληλα τα βάρη (weights) και την μεροληψία (bias) του νευρωνικού δικτύου μπορούμε να λάβουμε ως αποτέλεσμα από κάθε νευρώνα μια βηματική συνάρτηση (step function) και να προσεγγίσουμε τη συνάρτηση που μας ενδιαφέρει με αυτές τις βηματικές συναρτήσεις. Στο παρακάτω γράφημα προσεγγίζουμε τη συνάρτηση $f(x) = 0.2 + 0.4x^2 + 0.3x\sin(15x) + 0.05\cos(50x)$ στο $[0, 1]$.



Σχήμα 5.3: Προσέγγιση της $f(x) = 0.2 + 0.4x^2 + 0.3x\sin(15x) + 0.05\cos(50x)$ [5].

Βιβλιογραφία

[Ελληνική Βιβλιογραφία]

[1] Α. Κουτσιμπέλα, *Θεωρία στοχαστικού χαρτοφυλακίου*, Διπλματική Εργασία, Σ.Ε.Μ.Φ.Ε Ε.Μ.Π.

[2] Α. Παπαπαντολέων, *Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά*, Σημειώσεις μαθήματος, 2018, Σ.Ε.Μ.Φ.Ε Ε.Μ.Π.

[3] Δ. Χελιώτης, *Εισαγωγή στο Στοχαστικό Λογισμό*, Κάλλιπος, 2015.

[Αγγλική Βιβλιογραφία]

[4] P. Embrechts, M. Hofert, *A note on generalized inverses* , Mathematical Methods of Operations Research, 2013, vol. 77, issue 3, 423-432.

[5] M. A. Nielsen, *Neural Networks and Deep Learning*, Determination Press, 2015.

[6] G. Cybenko, *G.Math.Control Signal Systems* (1989). https://doi.org/10.1007/BF02551274.

[7] K. Hornik, *Approximation capabilities of multilayer feedforward networks.* Neural networks, 4(2):251–257, 1991.

[8] A. J. McNeil, R. Frey and P. Embrechts, *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*, Princeton University Press, 2015.

[9] B. Schweizer and A. Sklar, *Probabilistic Metric Spaces.* North Holland, Amsterdam, 1983.

[10] R. B. Nelsen, *An Introduction to Copulas.* Springer-Verlag New York, 1999.

[11] M. Haugh, *IEOR E4602: Quantitative Risk Management, 2016.*

[12] T. Lux, *Model uncertainty, improved Fréchet-Hoeffding bounds and applications in mathematical finance*, PhD thesis, TU Berlin, 2017.

[13] P. Tankov, *Improved Fréchet bounds and model-free pricing of multi-asset options.* J. Appl. Probab., 48:389–403, 2011.

[14] C. Bernard, X. Jiang, and S. Vanduffel, *A note on 'Improved Fréchet bounds and model-free pricing of multi-asset options' by Tankov (2011).* J. Appl. Probab., 49: 866–875, 2012.

[15] T. Lux and A. Papapantoleon, *Improved Fréchet–Hoeffding bounds on d-copulas and applications in model-free finance.* Annals of Applied Probability 27, 3633–3671, 2017.

[16] D. Bartl, M. Kupper, T. Lux, A. Papapantoleon, with an appendix by S. Eckstein, *Marginal and dependence uncertainty: bounds, optimal transport, and sharpness.* Preprint, 2017 arXiv:1709.00641v2.

[17] A. Müller and D. Stoyan, *Comparison Methods for Stochastic Models and Risks.* Wiley, 2002.

[18] D. Breeden and R. Litzenberger, *Prices of state-contingent claims implicit in options prices.* J. Business, 51:621–651, 1978.

[19] S. Eckstein and M. Kupper, *Computation of optimal transport and related hedging problems via penalization and neural networks*, M. Appl Math Optim (2019). https://doi.org/10.1007/s00245-019-09558-1.

[20] P. Cheridito, M. Kupper, and L. Tangpi, *Duality formulas for robust pricing and hedging in discrete time*. SIAM Journal on Financial Mathematics, 8(1):738–765, 2017.

[21] P. Cheridito, M. Kupper, and L. Tangpi, *Representation of increasing convex functionals with countably additive measures*. arXiv preprint arXiv:1502.05763, 2015.

[22] H. Föllmer and A. Schied, *Finance: An Introduction in Discrete Time*. Walter de Gruyter, 2011.

[23] M. Abadi, A. Agarwal, P. Barham, E. Brevdo, Z. Chen, C. Citro, G. S. Corrado, A. Davis, J. Dean, M. Devin, S. Ghemawat, I. Goodfellow, A. Harp, G. Irving, M. Isard, Y. Jia, R. Jozefowicz, L. Kaiser, M. Kudlur, J. Levenberg, D. Mané, R. Monga, S. Moore, D. Murray, C. Olah, M. Schuster, J. Shlens, B. Steiner, I. Sutskever, K. Talwar, P. Tucker, V. Vanhoucke, V. Vasudevan, F. Viégas, O. Vinyals, P. Warden, M. Wattenberg, M. Wicke, Y. Yu, and X. Zheng, *TensorFlow: Large-scale machine learning on heterogeneous systems, 2015. Software available from tensorflow.org.*

[24] D. Kingma and J. Ba, *Adam: A method for stochastic optimization*. arXiv preprint arXiv:1412.6980, 2014.

[25] M. Arjovsky, S. Chintala, and L. Bottou, *Wasserstein GAN*. arXiv preprint arXiv:1701.07875, 2017.

[26] I. Goodfellow, J. Pouget-Abadie, M. Mirza, B. Xu, D. Warde-Farley, S. Ozair, A. Courville, and Y. Bengio, *Generative adversarial nets*. In Advances in neural information processing systems, pages 2672–2680, 2014.

[27] C. Villani, *Optimal Transport: Old and New*, volume 338. Springer Science & Business Media, 2008.

[28] P. H. Labordére, *(Martingale) Optimal transport and anomaly detection with neural networks: a Primal-Dual algorithm*. arXiv:1904.04546v2.