ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Υποθέσεις Μεγάλων Πληθαρίθμων και εφαρμογές

Βερνάρδος Σαλταμανίκας

Επιβλέπων καθηγητής :

Αλέξανδρος Αρβανιτάκης

ΑΘΗΝΑ 2019

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ ολόθερμα τον επιβλέποντα καθηγητή μου Αλέξανδρο Αρβανιτάκη, τόσο για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε όσο και για την καθοδήγησή του σε επιστημονικό και προσωπικό επίπεδο. Από τη στιγμή που πάτησα το πόδι μου στο Πολυτεχνείο ήταν από τους πρώτους ανθρώπους για τον οποίο ένιωσα μεγάλη εκτίμηση, και είναι ωραίο που ολοκληρώνω αυτόν τον κύκλο σπουδών μαζί του. Ευχαριστώ τους καθηγητές για την παρουσία τους στην τριμελή επιτροπή. Ευχαριστώ την οικογένειά μου για την πολύτιμη στήριξη που μου παρείχαν, ο καθένας με τον τρόπο του. Ευχαριστώ όλους μου τους φίλους που μου στάθηκαν και με βοήθησαν σε αυτό το εγχείρημα, και ιδιαίτερα τον “αδερφό” μου Γιώργο Ελευθερίου, ο οποίος είναι 15 χρόνια στο πλευρό μου σε θέματα ακαδημαϊκά και μη. Ευχαριστώ επίσης τον καθηγητή Αριστείδη Μπαλτά για την καίρια γνωμοδότησή του στο τελευταίο επιχείρημα της εργασίας. Η διδασκαλία του και η στάση του αποτελεί για μένα διαρκή πηγή έμπνευσης.

Τέλος, θέλω να ευχαριστήσω από καρδιάς τον φίλο και μέντορα Κώστα Τσαπρούνη για τη συνεχή υποστήριξη και την υπομονή που έδειξε στο πρόσωπό μου. Το πάθος του για τα μαθηματικά και ο τρόπος που κατορθώνει να δομεί τις σκέψεις του είναι για μένα αξιοθαύμαστα. Η βοήθειά του ήταν καθοριστική για την περάτωση αυτής της εργασίας.

Η εργασία αυτή είναι αφιερωμένη στη μνήμη του εξαιρετικού καθηγητή και ανθρώπου Αριστείδη Αραγεώργη. Ήταν ένας άνθρωπος που άφηνε πάντα κάτι το θετικό στο πέρασμά του.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Η παρούσα εργασία αναφέρεται στις έννοιες υπερπεπερασμένων πληθικοτήτων και στις ιδιότητές τους, έτσι όπως αναπτύσσονται από τις υποθέσεις μεγάλων πληθαρίθμων της συνολοθεωρίας και τη δυνατότητα εφαρμογής τους στα υπόλοιπα μαθηματικά πεδία. Το έδαφος στο οποίο δομήθηκαν αυτές οι υποθέσεις οφείλεται στον Georg Cantor, ιδρυτή της σύγχρονης θεωρίας συνόλων, και στην έρευνά του πάνω στη δημιουργία μιας συνεκτικής θεωρίας του ολοκληρωμένου απείρου και της εξερεύνησης των ορίσιμων συνόλων των πραγματικών αριθμών. Όπως προδίδει η λέξη: οι υποθέσεις μεγάλων πληθαρίθμων δεν αποτελούν αξιώματα της κλασικής συνολοθεωρίας, αλλά την επεκτείνουν προσθέτοντας νέες ισχυρές ιδιότητες για κάποια άπειρα σύνολα. Αυτό ακριβώς υπονοεί και η λέξη μεγάλοι. Το «μεγάλος» πληθάριθμος δεν είναι χαρακτηρισμός μεγέθους-πληθικότητας. Είναι χαρακτηρισμός πολύ ισχυρών ιδιοτήτων (κλειστότητας) που αυτοί οι πληθάριθμοι ικανοποιούν. Σε κάθε περίπτωση, αν υπάρχουν, είναι κάποιοι από τους πληθαρίθμους του σύμπαντος της συνολοθεωρίας.

Οι υποθέσεις μεγάλων πληθαρίθμων δημιουργήθηκαν σε διαφορετικά στάδια της ανάπτυξης της συνολοθεωρίας και πολλές φορές με διαφορετικά (μαθηματικά) κίνητρα. Σχηματίζουν, παρόλα αυτά, μια γραμμική ιεραρχία διαβαθμισμένη ως προς την αποδεικτική ισχύ, που περιγράφει την ίδια τους τη μετάβαση από μικρότερους πληθάριθμους και φτάνει μέχρι την ασυνεπή επέκταση τέτοιων εννοιών.

Στην αρχή αυτής της εργασίας βρίσκονται πληροφορίες για την πορεία προς την ανακάλυψή τους, με σημείο εκκίνησης τη δουλειά του Cantor στις αρχές του 1870. Ο Cantor μελετώντας τις τριγωνομετρικές σειρές ανακάλυψε ότι, για να φτάσει σε αποτέλεσμα, έπρεπε να αντιμετωπίσει άπειρα σύνολα ως ολοκληρωμένες οντότητες και να κάνει πολύπλοκες πράξεις με αυτά. Δουλεύοντας με αυτόν τον τρόπο, ο νεαρός τότε Cantor κατέληξε να εισάγει βασικές έννοιες στη μελέτη των πραγματικών αλλά και στη δημιουργία των υπερπεπερασμένων αριθμών (διατακτικοί και πληθικοί). Η θεωρία συνόλων θεωρείται ότι γεννήθηκε τον Δεκέμβρη του 1873, τη μέρα που απέδειξε πως το σύνολο των πραγματικών είναι υπεραριθμήσιμο. Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει 1-1 και επί απεικόνιση μεταξύ του συνόλου των φυσικών και του συνόλου των πραγματικών. Τις επόμενες δεκαετίες, η μελέτη του πάνω στους πρωτοεμφανιζόμενους διατακτικούς και πληθικούς αριθμούς έκανε τη θεωρία να αρχίσει να ανθίζει. Ονόμασε τον πληθάριθμο των πραγματικών c (από το συνεχές) και ήταν πεπεισμένος ότι ήταν ο αμέσως επόμενος πληθάριθμος από τον $\aleph_0$, όπου $\aleph_0$ ο πληθάριθμος των φυσικών. Η πρόταση ότι $\mathsf{C}= \aleph_1$ έμεινε γνωστή ως η Υπόθεση του Συνεχούς (CH). Παρά τις πολυετείς έντονες προσπάθειές του, ο Cantor δεν κατάφερε να ξεκαθαρίσει το θέμα, εν μέρει επειδή δεν μπορούσε να ορίσει μια καλή διάταξη στους πραγματικούς.

Στην πορεία ανάπτυξης αυτών των ιδεών, ο Cantor εξερευνούσε ένα πεδίο με το οποίο δεν είχε ασχοληθεί κανείς πριν από αυτόν. Δεν υπήρχαν μαθηματικά εργαλεία στα οποία μπορούσε να βασιστεί. Σχετικά γρήγορα έγινε φανερό πως αλόγιστη χρήση των νέων εννοιών οδηγούσε σε αντιφάσεις. Με το παράδοξο του Russell να αποτελεί τον διασημότερο εκπρόσωπο των αντιφάσεων αυτών, πυροδοτήθηκε η «κρίση» των μαθηματικών στις αρχές 20^{ου} αιώνα. Η ανάγκη για αξιωματική θεμελίωση της θεωρίας συνόλων και των μαθηματικών εν γένει ήταν πια επιτακτική. Στα χρόνια που ακολούθησαν πάρα πολλοί διάσημοι μαθηματικοί ασχολήθηκαν με αυτό το εγχείρημα.

Ο Ernst Zermelo ήταν από τους πρώτους που αποδέχθηκαν την πρόκληση, παρουσιάζοντας την πρώτη αξιωματικοποίηση της θεωρίας. Από ένα από τα αξιώματα που εισήγαγε, γνωστό ως Αξίωμα της Επιλογής (AC), συνεπάγεται μάλιστα ότι κάθε σύνολο μπορεί να διαταχθεί καλώς, πρόταση αναγκαία για την επίλυση της υπόθεσης του συνεχούς στη διατύπωση του Cantor. Ο Thoralf Skolem πρότεινε να βασιστεί η αξιωματική πια θεωρία στην πρωτοβάθμια λογική. Μία κίνηση που έμελλε να εφοδιάσει τη θεωρία συνόλων με νέες τεχνικές και να την επενδύσει με πιο αυστηρά και γερά θεμέλια. Το εγχείρημα της λογικής θεμελίωσης της αριθμητικής είχε ξεκινήσει από τον Gottlob Frege, ανοίγοντας το δρόμο για μια ολόκληρη σχολή φιλοσοφικής σκέψης, την αναλυτική παράδοση, αρχιτέκτονας της οποίας είναι ο Bertrand Russell.

Απέμενε στον David Hilbert να καθιερώσει τη λογική ως κλάδο των μαθηματικών και να φέρει στην επιφάνεια κρίσιμα ερωτήματα περί *συνέπειας* και πληρότητας των μαθηματικών θεωριών. Στο νέο πρόγραμμα του Hilbert, τα μαθηματικά και η λογική επρόκειτο να αναπτυχθούν από κοινού σε μια καθαρώς τυπική συμβολική γλώσσα. Η τολμηρή ιδέα του Hilbert ήταν ένα εντελώς νέο είδος μαθηματικών που ονόμασε μεταμαθηματικά. Η επιθυμητή απόδειξη συνέπειας θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί στο πλαίσιο των μεταμαθηματικών. Στην προσπάθεια αυτή συνέβαλε και ο John von Neumann. Ο von Neumann εισήγαγε παράλληλα τους διατακτικούς ως μεταβατικά σύνολα καλώς διατεταγμένα από το $\in$, αποκαθιστώντας τους υπερπεπερασμένους αριθμούς του Cantor ως σύνολα. Με την προσθήκη του Αξιώματος της Αντικατάστασης από τον Abraham Fraenkel, αλλά και της Θεμελίωσης, ο Zermelo μπόρεσε να παρουσιάσει το τυπικό σύμπαν των συνόλων V ως μία σωρευτική ιεραρχία θεμελιωμένη πάνω στους διατακτικούς του von Neumann.

Ο Kurt Godel με το Θεώρημα της Πληρότητας ξεκαθάρισε τη συσχέτιση μεταξύ σημασιολογικής και συντακτικής σκοπιάς της πρωτοβάθμιας λογικής, εξασφαλίζοντάς της την ιδιότητα της *συμπάγειας*. Αν και, με το Θεώρημα της μη Πληρότητας που ακολούθησε κατάφερε ένα καίριο χτύπημα στην προσδοκία του Hilbert για την απόδειξη της συνέπειας μέσα στην ίδια τη θεωρία, εμπλούτισε τη θεωρία συνόλων με νέες μοντελο-θεωρητικές τεχνικές. Η κατασκευή του σύμπαντος L από τον Godel συνέθετε όλα τα μέχρι τότε δεδομένα, κατασκευάζοντας ένα «ζερμελιανό» σύμπαν συνόλων, χτισμένο πάνω στους διατακτικούς του von Neumann και βασισμένο στη λογική ορισιμότητα. Παράλληλα ο Alfred Tarski έδωσε τον σχηματικό ορισμό της αλήθειας σε συνολοθεωρητικούς όρους.

Τόσο εμπλουτισμένη με αξιώματα, τεχνικές και αποτελέσματα, η αξιωματική πια θεωρία συνόλων είχε βρει τη θεμελίωση που αναζητούσε. Το αξιωματικό σύστημα που τελικά διαμορφώθηκε και επικράτησε ονομάζεται Zermelo-Fraenkel θεωρία συνόλων με το

Αξίωμα της Επιλογής (AC), συμβολίζεται με ZFC και είναι μία θεωρία της πρωτοβάθμιας κατηγορηματικής λογικής.

Αν αυτή ήταν μια συνοπτική περιγραφή της εξέλιξης της θεωρίας συνόλων από τον Cantor στον Godel, δύο από τους κυρίαρχους κλάδους της θεωρίας προέρχονται απευθείας από την έρευνα του Cantor. Οι προσπάθειές του να λύσει την Υπόθεση του Συνεχούς, ερευνώντας τα ορίσιμα σύνολα των πραγματικών και τους υπερπεπερασμένους αριθμούς, οδήγησαν στη δημιουργία της περιγραφικής θεωρίας συνόλων και στους μεγάλους πληθάριθμους.

Η περιγραφική θεωρία συνόλων είναι η μελέτη των ορίσιμων (definable) υποσυνόλων του συνεχούς, η ανάλυση της πολυπλοκότητάς τους και η κατηγοριοποίησή τους. Ο Cantor προσέγγισε τη λύση της Υπόθεσης του Συνεχούς μέσα από τα τέλεια σύνολα (perfect sets) και κατάφερε να αποδείξει ότι όλα τα κλειστά υποσύνολα των πραγματικών έχουν την ιδιότητα του τέλειου συνόλου (perfect set property). Κύριο μέλημα της περιγραφικής θεωρίας συνόλων ήταν να προσεγγίσει τα υποσύνολα των πραγματικών μέσω της ορισιμότητας, όπως ο Cantor, και να ελέγξει την έκταση των ιδιοτήτων κανονικότητας (regularity properties) που αυτά έχουν, δύο εκ των οποίων είναι του τέλειου συνόλου και της Lebesgue μετρησιμότητας.

Οι τρείς Γάλλοι, Henri Lebesgue, Rene-Luis Baire και Emile Borel, ήταν αυτοί που γύρω στο 1900 ανέπτυξαν αρχικά τη θεωρία. Ο Lebesgue εφοδίασε τη θεωρία με την πρώτη ιεραρχία των Borel συνόλων και κατάφερε, χρησιμοποιώντας τη διαγώνια μέθοδο του Cantor, να αποδείξει ότι αυτή η ιεραρχία δεν εξαντλεί τα υποσύνολα των πραγματικών. Στη συνέχεια ο Mikhail Suslin, υπό την παρότρυνση του καθηγητή του, Nikolai Luzin, κατέληξε σε ένα θεμελιώδες αποτέλεσμα: την έννοια των αναλυτικών συνόλων. Τα αναλυτικά σύνολα αποτέλεσαν το πρώτο επίπεδο της μετέπειτα προβολικής ιεραρχίας συνόλων των πραγματικών που οικοδομήθηκε από τον Luzin και τον Waclaw Sierpinski.

Ήταν, όμως, ξεκάθαρο από την αρχή πως τα πράγματα με τη θεωρία των προβολικών συνόλων δεν θα ήταν εύκολα. Ήδη από το δεύτερο επίπεδο της ιεραρχίας δεν φαινόταν να υπάρχει τρόπος να επεκταθούν σε αυτά τα σύνολα οι ιδιότητες κανονικότητας που τα Borel σύνολα ικανοποιούν. Μάλιστα, από το 1930, τα πρώτα σχετικά αποτελέσματα ανεξαρτησίας από τον Godel (μέσω των κατασκευάσιμων συνόλων στο L) ήταν γεγονός. Παρόλο το εύρος των μεθόδων της λογικής και της θεωρίας αναδρομής που αναπτύχθηκαν, ήταν αδύνατο να αντιμετωπισθούν οι δυσκολίες της προβολικής θεωρίας συνόλων. Ο λόγος ήταν πως προσέκρουαν στους περιορισμούς της ίδιας της Zermelo-Fraenkel θεωρίας συνόλων. Χρειάστηκαν σαράντα χρόνια ως ότου ο Robert Solovay να καταφέρει να παράγει σημαντικά αποτελέσματα και μόνον υπό ισχυρές συνολοθεωρητικές υποθέσεις. Ο Solovay απέδειξε πως η ύπαρξη ορισμένων μεγάλων πληθαρίθμων είναι ικανή να εξασφαλίσει την Lebesgue μετρησιμότητα και την ιδιότητα του Baire σε σύνολα του δεύτερου επιπέδου της προβολικής ιεραρχίας. Στην πορεία της εξέλιξης της περιγραφικής θεωρίας συνόλων, ο Solovay μαζί με τον Donald Martin και άλλους σπουδαίους μαθηματικούς, όπως ο Ιωάννης Μοσχοβάκης, ο Kenneth Kunen και ο Αλέξανδρος Κεχρής, εμπλούτισαν τη θεωρία με νέα αποτελέσματα εισάγοντας και υποθέσεις προσδιοριστότητας (determinacy). Έδειξαν επίσης πως τις υποθέσεις αυτές μπορούσαν να τις συνάγουν απευθείας από την ύπαρξη μεγάλων πληθαρίθμων. Συνδύασαν δηλαδή την περιγραφική θεωρία συνόλων με τον άλλο μεγάλο κλάδο της συνολοθεωρίας που ξεκινά από τις μελέτες του Cantor.

Ο άλλος κλάδος της συνολοθεωρίας που ξεκίνησε από τον Cantor, η μαθηματική εξερεύνηση του υπερπεπερασμένου, άρχισε να αναπτύσσεται ήδη από το 1908 στη δουλειά του Felix Hausdorff. Ο Hausdorff ήταν εκείνος που εισήγαγε το πρώτο παράδειγμα της έννοιας του μεγάλου πληθαρίθμου, θεωρώντας τους ασθενώς απρόσιτους πληθάριθμους (weakly inaccessible). Θα δούμε (κεφάλαιο 2) τις βασικές ιδιότητες των weakly inaccessible πληθαρίθμων και τις αντίστοιχες των ισχυρώς απρόσιτων (strongly inaccessible) που αναπτύχθηκαν από την ενσωμάτωση της έννοιας της κλειστότητας κάτω από εκθετοποίηση από τους Tarski-Sierpinski και Zermelo.

Θα δούμε ακολούθως χαρακτηριστικά μεγάλων πληθαρίθμων όπως η συμπάγεια, μελετώντας τους ασθενώς συμπαγείς (weakly compact) που όρισε αρχικά ο Tarski το 1962. Η ανάπτυξη των weakly compact έδωσε και την απάντηση σε ένα ερώτημα που αφορούσε μία ακόμα ισχυρότερη υπόθεση πληθαρίθμων, τους μετρήσιμους (measurables), και παρέμεινε άλυτο για δεκαετίες: «Είναι ο μικρότερος inaccessible πληθάριθμος measurable;».

Οι measurable πληθάριθμοι είχαν αναπτυχθεί από τη δεκαετία του 1930 σε έρευνες που έκανε ο Stanislaw Ulam πάνω στο μέτρο Lebesgue. Οι measurables έχουν, όπως αποδείχθηκε, μία ειδοποιό διαφορά σε σχέση με τους προαναφερθέντες. Ενώ οι inaccessible και weakly compact μαζί με άλλους από την ιεραρχία των «μικρών» μεγάλων πληθαρίθμων είναι συμβατοί με την υπόθεση V=L (όπου V το σύμπαν όλων των συνόλων κατά von Neumann και L το κατασκευάσιμο σύμπαν του Godel), οι measurables δεν «υπάρχουν» στο L. Οι measurable συνεπώς, δεν είναι συμβατοί με το V=L. Αποτελούν υπό κάποια έννοια τους πρώτους στην ιεραρχία των «μεγάλων»-μεγάλων πληθαρίθμων.

Παρόλο που οι ιδιότητες των measurable μελετήθηκαν εκτενώς (βασικές από αυτές αναφέρονται στο κεφάλαιο 2), η προσπάθεια αναζήτησης ισχυρότερων υποθέσεων δεν σταμάτησε. Με τη χρήση του μαθηματικού εργαλείου των *στοιχειωδών εμφυτεύσεων* (elementary embeddings) η ιεραρχία των μεγάλων πληθαρίθμων εμπλουτιζόταν με όλο και ισχυρότερα αξιώματα. Ήταν άγνωστο μέχρι σε ποιο σημείο θα μπορούσαν να κατασκευαστούν όλο και ισχυρότερες υποθέσεις μεγάλων πληθαρίθμων χωρίς να παράγουν αντιφάσεις. Τελικά ο William Reinhardt πρότεινε ένα αξίωμα απόλυτης κλειστότητας, την απόλυτη ανακλαστική ιδιότητα μέσω της στοιχειώδους εμφύτευσης $j: V \to V$. Ο Kunen λίγο αργότερα απέδειξε πως μια τέτοια δεν υπάρχει (οδηγεί σε αντίφαση υπό το AC). Το αποτέλεσμα αυτό έθεσε και ένα «άνω φράγμα» στο πόσο ισχυρές υποθέσεις μεγάλων πληθαρίθμων μπορούν να προταθούν με αυτόν τον τρόπο, για αυτό και του προσδόθηκε η ονομασία φράγμα ασυνέπειας του Kunen (Kunen's inconsistency).

Με τη σημαντική συμβολή και των Hugh Woodin, Saharon Shelah, Donald Martin, John Steel και Menachem Magidor, οι μεγάλοι πληθάριθμοι αποτελούν πια, από τη δεκαετία του 1980, ένα πολύ πλούσιο πεδίο για τη μελέτη της ισχύος συνέπειας μιας ανεξάρτητης πρότασης αλλά και της θεμελίωσης των μαθηματικών γενικότερα.

Τις εξελίξεις αυτές θα ήταν φυσικά δύσκολο να φανταστεί ο Cantor όταν επιχειρούσε να λύσει την υπόθεση του συνεχούς. Με τις γνώσεις που έχουμε σήμερα, ξέρουμε ότι ο Cantor δεν είχε καμία ελπίδα να καταλήξει σε κάποιο αποτέλεσμα. Οι θεμελιώδεις αποδείξεις του Godel το 1938 και του Paul Cohen το 1963, αποκάλυψαν ότι για να αποσαφηνιστεί η υπόθεση του συνεχούς δεν επαρκούν τα αξιώματα της ZFC, πόσω μάλλον τα μαθηματικά εργαλεία που ο Cantor είχε στη διάθεσή του. Μάλιστα, ακόμα και σήμερα παραμένει ανοιχτό το κατά ποιόν τρόπο μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι νέες πιο ισχυρές μέθοδοι προς ένα ικανοποιητικό αποτέλεσμα.

Η μέθοδος «εξαναγκασμού» ή «επιβολής» (forcing) που εισήγαγε ο Cohen για να αποδείξει την ανεξαρτησία της υπόθεσης του συνεχούς, αποτέλεσε σπουδαία καινοτομία. Η χρήση της οδήγησε με τη σειρά της σε πληθώρα αποτελεσμάτων ανεξαρτησίας σε διάφορους κλάδους των μαθηματικών.

Είναι πλέον γνωστό πως παρά την ενοποιητική και εκφραστική ισχύ της θεωρίας συνόλων, πολλά μαθηματικά προβλήματα είναι ανεξάρτητα των αξιωμάτων της ZFC. Αυτή η αδυναμία της ZFC στην επίλυση πολλών σημαντικών προβλημάτων τροφοδότησε και την ανάπτυξη των υποθέσεων μεγάλων πληθαρίθμων. Η εκπλήρωση της επιθυμίας για μια ενισχυμένη θεωρία με λιγότερα μη αποφασίσιμα προβλήματα μπορεί να επιτευχθεί με την αξιωματική χρήση των υποθέσεων μεγάλων πληθαρίθμων.

Μία ίσως από τις μεγαλύτερες επιτυχίες των μεγάλων πληθαρίθμων έχει να κάνει με την προσδιοριστότητα των παιγνίων (determinacy of games). Θα δούμε πώς ο Martin (κεφάλαιο 3) έδειξε ότι η ύπαρξη measurable πληθαρίθμου συνεπάγεται την determinacy των αναλυτικών συνόλων και άρα τις regularity properties αυτών. Όπως αναφέρθηκε παραπάνω οι υποθέσεις determinacy συνέβαλλαν στη στοιχειοθέτηση μιας σχετικά πλήρους θεωρίας των προβολικών συνόλων. Η σύνδεσή τους, ωστόσο, με τους μεγάλους πληθάριθμους έδωσε την κατάλληλη ερμηνεία σε ερωτήματα συνέπειας (consistency).

Γύρω στο 1990 ο Woodin , εκμεταλλευόμενος και τα δεδομένα της πρωτοποριακής δουλειάς που γινόταν κατά τη διάρκεια της προηγούμενης δεκαετίας από τον ίδιο και τους συναδέλφους του, απέδειξε το εξής: Η ύπαρξη άπειρων Woodin πληθαρίθμων είναι ισοσυνεπής με την προσδιοριστότητα όλων των παιχνιδιών (Axiom of Determinacy/AD). Με άλλα λόγια η θεωρία ZF+AD είναι ισοσυνεπής με τη θεωρία ZFC + «υπάρχουν άπειροι Woodin πληθάριθμοι». Αυτό το ενοποιητικό συμπέρασμα αποτέλεσε θρίαμβο για τις μοντέρνες μεθόδους της θεωρίας συνόλων και επιβεβαίωσε τη συσχέτιση τους με τους μεγάλους πληθαρίθμους.

Η διαρκής πρόοδος στη μελέτη των μεγάλων πληθαρίθμων και στην παραγωγή νέων αποτελεσμάτων τους καθιστά ένα πεδίο σε πλήρη εξέλιξη. Γεγονός που αφήνει υποσχέσεις για τον ερχομό νέων ανακαλύψεων.

Κεφάλαιο 1. Βασικές Έννοιες

1.1 Σύνολα

Αφετηρία της σύγχρονης συνολοθεωρίας ήταν οι πρωτοποριακές έρευνες του Cantor. Στα τέλη του 19^{ου} αιώνα ο Cantor ερεύνησε τις τριγωνομετρικές σειρές. Θέλοντας να διερευνήσει κάτω από ποιές συνθήκες δύο διαφορετικές σειρές αυτού του τύπου συγκλίνουν στο ίδιο όριο, τόλμησε να αντιμετωπίσει τα άπειρα σύνολα σαν ολοκληρωμένες οντότητες. Έπρεπε, επιπλέον, να κάνει πολύπλοκες πράξεις με αυτά. Το γεγονός αυτό τον οδήγησε να αναπτύξει την θεωρία συνόλων ως έναν αυτόνομο κλάδο.

Ορισμός του συνόλου κατά Cantor

«Σύνολο είναι μια οποιαδήποτε συνάθροιση σε ολότητα οριστικών και διακεκριμένων στοιχείων της διαίσθησης ή του στοχασμού μας.»

Ο ορισμός αυτός , αν και ασαφής, συνεπάγεται ότι κάθε σύνολο έχει στοιχεία ($x \in A$ ή $x \notin A$) και ότι καθορίζεται από αυτά. Οι συνήθεις μέθοδοι σχηματισμού ενός συνόλου ήταν δύο: η καταγραφή όλων των στοιχείων του π.χ. A={Αλέκος, Κώστας} ή μέσω «ιδιότητας» Φ που όλα τα στοιχεία του ικανοποιούν {x : Φ(χ)} π.χ. A={x: « ο x είναι άρτιος»}. Όμως, κατά αυτόν τον τρόπο, μπορούμε να ορίσουμε συλλογές συνόλων που οδηγούν σε αντίφαση.

Το παράδοξο του Russel (~1901)

Έστω Φ(x) η ιδιότητα «x∉x». Θέτουμε V={x : Φ(x)}={x: x∉x} και τότε αυτή η συλλογή ανήκει στον εαυτό της αν και μόνο αν δεν ανήκει στον εαυτό της, κάτι το οποίο είναι άτοπο.

Το παράδοξο των Richard- Berry

Θεωρούμε το σύνολο των προτάσεων της Ελληνικής που έχουν το πολύ 200 γράμματα και οι οποίες ορίζουν μονοσήμαντα έναν φυσικό αριθμό. Έστω η πρόταση: «ο x είναι ο ελάχιστος φυσικός αριθμός που δεν ορίζεται από καμία τέτοια πρόταση της Ελληνικής». Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί η προηγούμενη πρόταση περιέχει λιγότερα από 200 γράμματα.

Άρα, η αλόγιστη περιγραφή συνόλων μέσω κάποιας «ιδιότητάς» αφήνει το περιθώριο να εμφανιστούν παράδοξα. Η ανάδυση παραδόξων έκανε επιτακτική την ανάγκη για αυστηρή αξιωματική θεμελίωση της συνολοθεωρίας. Το αξιωματικό σύστημα που επικράτησε συμβολίζεται με ZFC. Η ZFC είναι μία θεωρία της πρωτοβάθμιας κατηγορηματικής λογικής. Η γλώσσα της ZFC θεωρίας είναι: η σχέση ισότητας «=» και η σχέση του ανήκειν «∈».

1.2 Τα αξιώματα της ZFC

Τα αξιώματα της ZFC μπορούν να ιδωθούν σαν «διαισθητικές αλήθειες» για την έννοια του συνόλου ή σαν κατασκευαστικοί κανόνες για την παραγωγή νέων συνόλων από ήδη υπάρχοντα.

Α1. Το αξίωμα της έκτασης (Axiom of Extensionality)

Αν τα σύνολα Α,Β έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία τότε είναι ίσα.

$$(\forall A, B)((\forall \mathrm{x})(\mathrm{x} \in A \leftrightarrow \mathrm{x} \in B) \rightarrow A = B)$$

Η έκταση είναι μια μη τετριμμένη αρχή. Δηλώνει ότι κάθε σύνολο καθορίζεται πλήρως από τα στοιχεία του.

Α2. Το αξίωμα του κενού (Axiom of Emptyset)

Υπάρχει ένα σύνολο το οποίο δεν έχει κανένα στοιχείο .

$$(\exists A)(\forall \mathrm{x})(\mathrm{x} \notin A)$$

Από έκταση το σύνολο αυτό είναι μοναδικό, συμβολίζεται: ∅ και το ονομάζουμε κενό σύνολο.

Α3. Το αξίωμα του ζεύγους (Axiom of Pairing)

Για κάθε σύνολα Α,Β υπάρχει ένα σύνολο του οποίου τα στοιχεία είναι ακριβώς τα Α και Β.

$$(\forall A, B)(\exists z)(\forall x)(x \in z \leftrightarrow (x = A \ \lor x = B))$$

Από έκταση το σύνολο αυτό είναι μοναδικό και συμβολίζεται με {Α,Β}. Ονομάζεται και μη διατεταγμένο ζεύγος.

Α4. Το αξίωμα της ένωσης (Axiom of Union)

Για κάθε σύνολο Α υπάρχει ένα σύνολο το οποίο αποτελείται ακριβώς από τα στοιχεία των στοιχείων του Α.

$(\forall A)(\exists z)(\forall x)(x \in z \leftrightarrow (\exists w)(w \in A \wedge x \in w))$

Από έκταση αυτό είναι μοναδικό και συμβολίζεται με $\cup A$.

Α5. Το Αξιωματικό Σχήμα του Διαχωρισμού (Axiom Scheme of Separation)

Έστω δεδομένος τύπος Φ(x) στην γλώσσα της συνολοθεωρίας. Για κάθε σύνολο Α υπάρχει ένα σύνολο στο οποίο ανήκουν ακριβώς τα στοιχεία εκείνα του Α που ικανοποιούν τον τύπο Φ.

Δεδομένου Φ(x): $(\forall A)(\exists z)(\forall x)(x \in z \leftrightarrow (x \in A \wedge \Phi(x)))$

Το σύνολο αυτό είναι μοναδικό από έκταση και γράφεται ως $\{ x \in A : \Phi(\chi)\}$.

Παρατήρηση: Με την εισαγωγή του Αξιώματος του Διαχωρισμού και επειδή αναφερόμαστε κατά αυτόν τον τρόπο σε ήδη υπάρχοντα σύνολα, αποτρέπεται η εμφάνιση παραδόξων τύπου Russell. Πράγματι: Δεδομένου συνόλου Α αν ορίσουμε το $V_A=\{x \in A : x \notin x\}$ έχουμε ότι το $V_A \notin A$ και άρα $V_A \notin V_A$. Γεγονός το οποίο δεν οδηγεί σε κανένα παράδοξο. Δηλαδή, έπεται ότι κανένα σύνολο δεν περιέχει τα πάντα ή σε μια πιο θεαματική διατύπωση κατά τον Paul Halmos: «Δεν υπάρχει το σύμπαν».

Α6. Το αξίωμα του δυναμοσυνόλου (Axiom of Powerset)

Για κάθε σύνολο Α υπάρχει ένα σύνολο στο οποίο ανήκουν ακριβώς όλα τα υποσύνολα του Α.

$$(\forall A)(\exists z)(\forall x)(x \in z \leftrightarrow (\forall y)(y \in x \rightarrow y \in A))$$

Αυτό το σύνολο είναι μοναδικό από έκταση και συμβολίζεται με $P(A)=\{x : x \subseteq A\}$.

Σημείωση: Ο συμβολισμός x^+ υποδηλώνει τον επόμενο του x και ισούται με $x^+ = x \cup \{x\}$.

Ορισμός: Ένα σύνολο Α λέγεται επαγωγικό αν ισχύει: $\emptyset \in A \quad \wedge$ $(\forall x)(x \in A \rightarrow x^+ \in A)$

Α7. Το αξίωμα του απείρου (Axiom of Infinity)

Υπάρχει ένα επαγωγικό σύνολο.

$$(\exists A)(\emptyset \in A \wedge (\forall x)(x \in A \rightarrow x^+ \in A))$$

Παρατήρηση: Η ύπαρξη του συνόλου όλων των φυσικών αριθμών δεν είναι δεδομένη. Ενώ μπορούμε να ορίσουμε κάθε φυσικό αριθμό ως εξής: $0=\emptyset$, $1=\{\emptyset\}$, $2=\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$ κ.ο.κ. την ύπαρξη του συνόλου των φυσικών $\mathbb{N}=\omega$ την υποθέτουμε με την χρήση του αξιώματος του απείρου.

Ορισμός: Ορίζουμε το σύνολο των φυσικών αριθμών ως το ελάχιστο επαγωγικό σύνολο και το συμβολίζουμε με **ω**.

Α8. Το αξιωματικό Σχήμα της Αντικατάστασης (Axiom Scheme of Replacement)

Έστω δεδομένος τύπος Φ(x,y) ο οποίος περιγράφει συναρτησιακό κανόνα. Για κάθε σύνολο Α υπάρχει ένα σύνολο στο οποίο ανήκουν ακριβώς οι εικόνες των στοιχείων του Α μέσω του Φ. Δηλαδή δεδομένου τέτοιου «συναρτησιακού» τύπου Φ(x,y):

$$(\forall A)(\forall\, x \in A \exists! y\, \Phi(x,y)) \rightarrow (\exists z)(\forall y)(y \in z \leftrightarrow (\exists x)(x \in A \wedge \Phi(x,y)).$$

Το επόμενο αξίωμα είναι ίσως το διασημότερο αξίωμα της ZFC. Πριν την διατύπωση του χρειάζεται ο ακόλουθος ορισμός.

Ορισμός: Έστω σύνολο Α. Μια συνάρτηση $f: P(A)\setminus\{\emptyset\} \rightarrow A$ λέγεται **συνάρτηση επιλογής** αν για κάθε $X \subseteq A$ με $X \neq \emptyset$ ισχύει $f(X) \in X$.

Α9. Το Αξίωμα της Επιλογής (Axiom of Choice).

Κάθε σύνολο έχει μια συνάρτηση επιλογής.

Παρατήρηση: Το Αξίωμα της Επιλογής είναι διάσημο μεταξύ άλλων και για τις πολλές ισοδύναμες μορφές του:

- Αν $(A_i)_{i\in I}$ είναι μη κενή οικογένεια μη κενών συνόλων τότε το γενικευμένο καρτεσιανό της γινόμενο $\prod_{i\in \mathrm{I}} A_i$ είναι μη κενό.
- Το **λήμμα του Zorn** αν $< A \leq >$ μερική διάταξη τέτοια ώστε κάθε αλυσίδα της έχει ένα άνω φράγμα στο Α, τότε υπάρχει *μεγιστικό* στοιχείο στο Α.
- Η **Αρχή της Καλής Διάταξης:** Κάθε σύνολο μπορεί να διαταχθεί καλώς.
- Συγκρισιμότητα πληθαρίθμων: για κάθε Α,Β ισχύει $A \preccurlyeq B$ ή $A \succcurlyeq B$.
- Κάθε διανυσματικός χώρος έχει (Hamel) βάση.
- Το γινόμενο συμπαγών τοπολογικών χώρων είναι συμπαγής χώρος (θεώρημα Tikhonov).

Τέλος, το Αξίωμα της Επιλογής παράγει και κάποια «ανεπιθύμητα» αποτελέσματα όπως: Το θεώρημα Vitali ότι υπάρχει δηλαδή μη Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο των πραγματικών και κάποια «αντιδιαισθητικά παράδοξα» όπως το παράδοξο του Hausdorff ή το παράδοξο των Banach-Tarski.

Α10. Το Αξίωμα της Θεμελίωσης (Axiom of Foundation)

Κάθε μη κενό σύνολο έχει ένα ∈-ελαχιστικό στοιχείο.

$$(\forall A)\ (A\neq\emptyset \rightarrow (\exists x)\ (x\in A \ \wedge\ x\cap A = \emptyset))$$

Το αξίωμα της θεμελίωσης δεν επηρεάζει με κάποιον τρόπο τα υπόλοιπα μαθηματικά. Είναι καίριο για την ίδια την θεωρία συνόλων. Κάνει το σύμπαν των συνόλων συγκεκριμένο και διαχειρίσιμο, κατασκευασμένο «από τα κάτω» ξεκινώντας από το κενό.

Δεδομένων των αξιωμάτων της ZFC μπορούμε να απεικονίσουμε στην συνολοθεωρία σχεδόν όλα τα (γνωστά) μαθηματικά αντικείμενα. Από μαθηματική σκοπιά σχεδόν τα πάντα μπορούν να περιγραφούν ως σύνολα, και έπειτα οτιδήποτε μπορεί να αποδειχθεί (σε οποιονδήποτε μαθηματικό πεδίο) για αυτά αποδεικνύεται και στη συνολοθεωρία. Η ZFC είναι επομένως μια πλούσια θεωρία (απείρων) συνόλων που προσφέρει στα μαθηματικά μια σταθερή και ενοποιητική βάση. Την «δομική ραχοκοκαλιά» της αποτελούν οι διατακτικοί και οι πληθικοί αριθμοί.

1.3 Ισοπληθικότητα απείρων συνόλων

Μία από τις βασικές έννοιες που εισήγαγε ο Cantor είναι η έννοια της ισοπληθικότητας.

Ορισμός: Δύο σύνολα A,B λέγονται **ισοπληθικά** εάν υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση (αντιστοιχία) της μορφής:

$$f\colon A \mapsto_{\varepsilon\pi\acute{\iota}}^{1-1} B$$

Όταν δύο σύνολα A,B είναι ισοπληθικά, σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, θα γράφουμε $A \sim B$.

Με βάση αυτό τον ορισμό μπορούμε να ελέγξουμε πότε δύο σύνολα έχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων (πληθάριθμο) ακόμα και όταν αυτά είναι άπειρα. Ο Leibniz, που δεν είχε κανένα πρόβλημα με την ύπαρξη ολοκληρωμένων απείρων, παρατήρησε ότι: αν υπάρχουν άπειροι πληθάριθμοι, η ύπαρξη αυτής της αντιστοίχισης θα μας ανάγκαζε να πούμε ότι ο πληθάριθμος των φυσικών είναι ο ίδιος με τον πληθάριθμο των άρτιων. Τίθεται λοιπόν το δίλημμα: είτε δεν είχε νόημα να μιλάμε για πληθάριμους άπειρων συνόλων (και για άπειρα σύνολα εν γένει), είτε θα έπρεπε να δεχτούμε ότι υπάρχουν κάποια άπειρα σύνολα που είναι ισοπληθικά με γνήσια υποσύνολά τους. Όμως ενώ ο Leibniz διάλεξε την πρώτη λύση στο ζήτημα, ο Cantor διάλεξε την δεύτερη.

Σύγκριση Πληθικότητας

Ορισμός: Έστω σύνολα A,B. Το A **έχει το πολύ τόσα στοιχεία όσα** το B αν και μόνο αν υπάρχει ένα προς ένα συνάρτηση $f\colon A \to B$. Γράφουμε $A \preccurlyeq B$.

Η σχέση ≼ είναι αυτοπαθής και μεταβατική. Το επόμενο θεώρημα την καθιστά και αντισυμμετρική (modulo ~).

Θεώρημα Cantor Shroder Bernstein (CSB): Αν A≼B και B≼A τότε A~B.

Απόδειξη: Το θεώρημα μπορεί να εκφραστεί ισοδύναμα ως: Αν υπάρχουν $f: A \to^{1-1} B$ $και$ $g: B \to^{1-1} A$ $τότε$ $υπάρχει$ $h: A \to_{επί}^{1-1} B$.

Έστω λοιπόν A,B≠∅ και $f: A \to^{1-1} B$ $και$ $g: B \to^{1-1} A$.

Θέλουμε να κατασκευάσουμε μια $h: A \to_{επί}^{1-1} B$. Παρατηρούμε ότι αρκεί να βρούμε ένα T⊆A ώστε T=A\g[B\f[T]]. Τότε, επειδή οι f,g είναι 1-1, η συνάρτηση h: A→B που ορίζεται ως εξής:

h(x)= f(x) αν x∈T

h(x)=$g^{-1}(x)$ αν x∈ A\T

είναι 1-1 και επί.

Για να βρούμε το T θα χρησιμοποιήσουμε το λήμμα σταθερού σημείου του Tarski.

Λήμμα: Έστω F: P(A)→P(A) έτσι ώστε ∀ X,Y ∈P(A) αν X⊆Y συνεπάγεται ότι $F(X)$⊆F(Y). Τότε υπάρχει κάποιο T∈P(A) τέτοιο ώστε F(T)=T.

Απόδειξη: Ορίζουμε F:P(A)→P(A) με F(X)=A\g[B\f[X]] και παρατηρούμε ότι η F ικανοποιεί την μονοτονία:

X⊆Y → f[X]⊆f[Y] → B\ f[Y]⊆B\f[X]

→ g[B\ f[Y]]⊆g[B\f[X]]

→ A\ g[B\f[X]]⊆A\ g[B\ f[Y]]

→ $F(X)$⊆F(Y)

Άρα από το λήμμα του Tarski υπάρχει T∈P(A) τέτοιο ώστε T= F(T) δηλαδή T=A\g[B\f[T]]. Συνεπώς υπάρχει μία $h: A \to_{επί}^{1-1} B$ και άρα A~B. ∴

Ο Cantor ερεύνησε πότε ήταν δυνατό να κατασκευασθούν ένα προς ένα και επί αντιστοιχίες μεταξύ δύο διαφορετικών άπειρων συνόλων. Κατάφερε γρήγορα να αποδείξει πως, αντίθετα με τα υπόλοιπα άπειρα σύνολα των αριθμών ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$), δεν υπάρχει ένα προς ένα αντιστοιχία από τους πραγματικούς στους φυσικούς. Άρα τα άπειρα σύνολα εμφανίζονται σε τουλάχιστον δύο διαφορετικά μεγέθη. Προχωρώντας ακόμα παραπέρα ο Cantor απέδειξε το εξής:

Θεώρημα Cantor: Κανένα σύνολο δεν είναι ισοπληθικό με το δυναμοσύνολό του.

$$A \prec P(A)$$

Απόδειξη: Το ότι για ένα σύνολο Α υπάρχει συνάρτηση 1-1 από το Α προς το δυναμοσύνολό του είναι προφανές. Συνεπώς $A \preccurlyeq P(A)$. Θα ελέγξουμε αν ισχύει το $A \sim P(A)$. Για να ισχύει αυτό θα πρέπει να υπάρχει μια $f\colon A \to P(A)$ που να είναι επί. Έστω ότι υπάρχει μια τέτοια f.

Θέτω $D=\{ x \in A : x \notin f(x)\}$. Το αξίωμα του διαχωρισμού μας εξασφαλίζει ότι αυτό το σύνολο είναι υπαρκτό. Το D είναι εξ ορισμού του υποσύνολο του Α, άρα $D \in P(A)$ και συνεπώς, αφού υποθέτουμε ότι η f είναι επί, υπάρχει ένα $\alpha \in A$ έτσι ώστε $f(\alpha)=D$.Όμως τότε ισχύουν οι εξής αντιφατικές ισοδυναμίες: $\alpha \in D \leftrightarrow \alpha \notin f(\alpha) \leftrightarrow \alpha \notin D$ και άρα δεν μπορεί να υπάρχει $f\colon A \to P(A)$ που να είναι επί και συνεπώς $A \prec P(A)$. ∴

Επειδή το $P(A)$ είναι πάντα ισοπληθικό με το 2^A (όπου 2^Aείναι το σύνολο των συναρτήσεων από το Α στο $2=\{0,1\}$) το θεώρημα του Cantor συνεπάγεται ότι $A \prec 2^A$ για κάθε σύνολο Α.

Αυτό το αποτέλεσμα, όχι μόνο καθιέρωσε την έννοια του εν ενεργεία απείρου συνόλου στα μαθηματικά αλλά αποδείκνυε την ύπαρξη πολλών διαφορετικών τέτοιων οντοτήτων. Ο Cantor συμβόλισε τον πληθάριθμο των πραγματικών με c και έδειξε ότι είναι ίσος με αυτόν του δυναμοσύνολου των φυσικών: $c = |2^\omega|$. Κύριο μέλημά του ήταν να αποδείξει ότι ο πληθάριθμος των πραγματικών είναι ο αμέσως μεγαλύτερος πληθάριθμος από εκείνον των φυσικών. Η πρόταση αυτή έμεινε γνωστή ως η Υπόθεση του Συνεχούς και, όπως ειπώθηκε στο εισαγωγικό κεφάλαιο, έπαιξε σπουδαίο ρόλο στην εξέλιξη της θεωρίας συνόλων και στην διερεύνηση των άπειρων πληθάριθμων.

Μέχρι στιγμής δεν έχουμε ορίσει την έννοια του πληθαρίθμου. Το πρόβλημα ανάθεσης πληθαρίθμου είναι να αντιστοιχίσουμε σε κάθε σύνολο A έναν αριθμό που να αποτελεί το «μέτρο της πληθικότητας του». Αυτό είναι ένα δύσκολο πρόβλημα που τελικά απαντήθηκε με την χρήση της έννοιας των διατακτικών αριθμών.

1.4 Διατακτικοί Αριθμοί (Ordinal Numbers)

Οι διατακτικοί αριθμοί συνιστούν την εκπροσώπευση με ομοιόμορφο τρόπο όλων των *καλών διατάξεων*. Ένας διατακτικός αριθμός είναι εξ ορισμού ένα είδος καλώς διατεταγμένου συνόλου. Ένα (ολικώς) διατεταγμένο σύνολο λέγεται *καλώς* διατεταγμένο αν κάθε μη κενό υποσύνολο του έχει ελάχιστο στοιχείο. Οι καλές διατάξεις μας ενδιαφέρουν γιατί αποτελούν πρότυπα πάνω στα οποία μπορούμε να γενικεύσουμε την επαγωγή και την αναδρομή.

Ορισμός: Μία διμελής σχέση R σε κάποιο σύνολο A είναι:

1. Αυτοπαθής, αν xRx, για κάθε $x \in A$
2. Αντισυμμετρική, αν $(xRy \wedge yRx) \rightarrow x=y$ για κάθε $x,y \in A$
3. Μεταβατική, αν $(xRy \wedge yRz) \rightarrow xRz$ για κάθε $x,y,z \in A$

Η διμελής σχέση R στο A λέγεται **μερική διάταξη** αν είναι αυτοπαθής, αντισυμμετρική και μεταβατική. Αν επιπλέον ισχύει για κάθε $x,y \in A$ ότι $xRy \vee yRx$ τότε λέγεται **ολική (ή γραμμική)** διάταξη.

Ορισμός: Ένα ολικά διατεταγμένος σύνολο $(A,\leq)$ είναι καλή διάταξη ή καλά διατεταγμένο συνολό εάν κάθε μη κενό υποσύνολό του ($B\subseteq A$ & $B\neq\emptyset$) έχει ελάχιστο στοιχείο ως προς την διάταξη, δηλαδή: $(\exists b\in B)(\forall x)\ (x\in B\rightarrow b\leq x)$.

Οι διατακτικοί αριθμοί είναι ακριβώς αυτά τα σύνολα που ικανοποιούν τον ορισμό της καλής διάταξης για την σχέση του ανήκειν ($\in$). Ένα σύνολο A είναι διατακτικός αριθμός αν είναι μεταβατικό και η διάταξη $(A, \in)$ είναι αυστηρή (γνήσια) καλή διάταξη. Μεταβατικό λέγεται ένα σύνολο αν κάθε στοιχείο του είναι και υποσύνολό του: $\forall x(x\in A \rightarrow x\subseteq A)$. Αναλυτικότερα:

Ορισμός: Ένα σύνολο α λέγεται διατακτικός αν για κάθε x,y,z ∈ α ισχύουν:

Δ1 $x\notin x$ (∈ αντιανακλαστική)

Δ2 $(x \in y \wedge y \in z) \rightarrow x \in z$ (∈ μεταβατική)

Δ3 Ακριβώς ένα από τα $x\in y$, $x = y$, $y \in x$ ισχύει (∈ γραμμική)

Δ4 Αν B υποσύνολο του α μη κενό τότε υπάρχει $b\in B$ ώστε $(\forall x)(x\in B\rightarrow x\notin b)$ ή ισοδύναμα $\exists b\in B, b\cap B=\emptyset$ (∈ καλή διατάξη)

Δ5 $(x \in y \wedge y \in \alpha) \rightarrow x \in \alpha$ (α μεταβατικό)

Συνήθως γράφουμε α∈ΟΝ αντί για «ο α είναι διατακτικός», όπου ΟΝ είναι η συλλογή όλων των διατακτικών αριθμών. Η συλλογή αυτή είναι μία γνήσια κλάση.

- Το κενό είναι ο ελάχιστος διατακτικός.
- Για κάθε α∈ΟΝ ο $\alpha^+ = \alpha \cup \{\alpha\}$ είναι ο αμέσως **επόμενος** διατακτικός του α.
- Ένας α ∈ ΟΝ λέγεται **οριακός** αν είναι διαφορετικός του κενού και δεν είναι επόμενος κανενός διατακτικού. Κάθε α∈ΟΝ με $\alpha\neq\emptyset$ είναι είτε επόμενος είτε οριακός διατακτικός.
- Για κάθε α∈ΟΝ ισχύει $\alpha \notin \alpha$.
- Για κάθε α∈ΟΝ και $x\in\alpha$ το σύνολο $\alpha_x = \{ y : y\in A \wedge y<x \}$ λέγεται **αρχικό τμήμα** του α. Προφανώς $\alpha_x \in \alpha$.

Ο ω είναι ο διατακτικός που αντιπροσωπεύει το σύνολο των φυσικών. Είναι ο ελάχιστος οριακός και ο πρώτος άπειρος διατακτικός. Με την χρήση του αξιώματος της αντικατάστασης συνεχίζουμε την «απαρίθμηση», δηλαδή την κατασκευή ολοένα και «μακρύτερων» υπερπεπερασμένων διατακτικών πέραν του ω. Οι δύο βασικές διαισθητικές «πράξεις» στο σχηματισμό νέων διατακτικών είναι οι «πράξη» του επομένου και το να θεωρούμε το sup «όσων έχουμε ήδη πάρει» όταν προσεγγίζουμε οριακό. Με αυτές τις δύο «πράξεις» ο Cantor έλεγε ότι μπορούμε να σπάσουμε κάθε φραγμό και να οδηγηθούμε σε μία απολύτως άπειρη ιεραρχία διατακτικών.

Το αξίωμα της αντικατάστασης είναι που εξασφαλίζει την ύπαρξη τέτοιων συνόλων, με την χρήση του οποίου αποδεικνύεται και το παρακάτω θεώρημα:

Το θεώρημα της απαρίθμησης: Κάθε καλά διατεταγμένο σύνολο (A,<) είναι ισομορφικό (όμοιο) με μοναδικό διατακτικό αριθμό.

Απόδειξη: Η μοναδικότητα προκύπτει από το γεγονός ότι δύο καλές διατάξεις που είναι ισομορφικές με μια τρίτη είναι και μεταξύ τους ισομορφικές. Πράγματι αν υπήρχαν δυο διατακτικοί α,β ισόμορφοι με κάποιο (A,<) καλά διατεταγμένο θα κατέληγε ο ένας από τους δύο να είναι ισόμορφός με κάποιο αρχικό του τμήμα. Το οποίο θα σήμαινε ότι ανήκει στον εαυτό του, που είναι άτοπο. Γενικά για τους διατακτικούς η ομοιότητα είναι το ίδιο με την ισότητα.

Για την ύπαρξη αρκεί να δούμε ότι για κάθε καλά διατεταγμένο σύνολο (A,<) ισχύει:

Έστω B⊆A, μη κενό με B={x∈A : A_x ένα αρχικό τμήμα του A που είναι ισόμορφο με κάποιο διατακτικό}.
Ας ονομάσουμε α(x) τον μοναδικό διατακτικό που είναι ισομορφικός με το A_x . Το B έχει την ιδιότητα: ((x∈A)∧(∃y(y>x)∧(y∈B)))→x∈B.
Το B, εξαιτίας της ανωτέρω ιδιότητας, είτε είναι γνήσιο αρχικό τμήμα του A είτε A=B.
Το αξίωμα της αντικατάστασης συνεπάγεται ότι υπάρχει ένα σύνολο που αποτελείται ακριβώς από τους διατακτικούς αριθμούς που είναι όμοιοι με τα γνήσια αρχικά τμήματα A_x του A. Το σύνολο αυτό έστω γ={α(x): x∈B} είναι και αυτό διατακτικός και είναι ισομορφικός με το (B,<). Τελικά θα πρέπει A=B γιατί διαφορετικά αν B=A_x για κάποιο x ∈ A τότε το A_x *θα* ήταν ισομορφικό με το γ και άρα x∈B δηλαδή x∈A_x το οποίο είναι άτοπο (x ∉ A_x). ∴

Με βάση αυτό το θεώρημα μπορούμε να έχουμε ως πόρισμα την συγκρισιμότητα των καλών διατάξεων.

Ένα σύνολο μπορεί να διαταχθεί καλώς και μάλιστα με περισσότερους από έναν τρόπους τις πιο πολλές φορές. Η αντιστοίχιση του συνόλου με έναν διατακτικό μας δίνει την δυνατότητα να συγκρίνουμε τις διατάξεις. Αυτό όμως δεν σημαίνει ότι δύο διαφορετικές διατάξεις έχουν διαφορετικό πλήθος στοιχείων.

1.5 Πληθικοί Αριθμοί

Μέχρι στιγμής, ο πρώτος άπειρος και πλέον υπαρκτός πληθάριθμος στον οποίο έχουμε αναφερθεί είναι ο διατακτικός αριθμός ω. Ως πληθάριθμος συμβολίζεται με $\aleph_0$ και είναι ο πληθάριθμος όλων των αριθμήσιμων συνόλων. Θεωρώντας όλες τις «πιθανές» καλές διατάξεις υποσυνόλων του ω προκύπτει η συλλογή όλων των «το πολύ» αριθμήσιμων διατακτικών. Η συλλογή αυτή είναι διατακτικός, συμβολίζεται με ω_1 και δεν είναι αριθμήσιμη. Δεδομένου ότι η ακολουθία των διατακτικών συνεχίζεται στο διηνεκές, μπορούμε να δώσουμε τον ορισμό του πληθαρίθμου ως εξής: **πληθάριθμος** *λέγεται ένας διατακτικός α τέτοιος ώστε ο α δεν είναι ισοπληθικός με κανέναν β διατακτικό με β$< \alpha$.* Το θεώρημα που ακολουθεί μας εξασφαλίζει την ύπαρξη άπειρων διατακτικών διαφορετικών πληθικοτήτων αλλά και η απόδειξη του μας δίνει με συστηματικό τρόπο (δεδομένου ενός διατακτικού Α) τον ελάχιστο διατακτικό Β (Β>Α) που δεν είναι ισοπληθικός με κανένα μικρότερό του.

Θεώρημα Hartogs: Για κάθε σύνολο Α υπάρχει ένας β ∈ON που δεν εμφυτεύεται στο Α δηλαδή δεν υπάρχει συνάρτηση f : β$\longrightarrow A$ ένα προς ένα.

Απόδειξη: Θεωρούμε Β={<X,R>: X⊆A και R καλή διάταξη πάνω στο X}.

Το Β υπάρχει, προκύπτει με την χρήση του αξιώματος του διαχωρισμού (R ⊆ AxA).

Επίσης Β≠∅ γιατί π.χ. το <∅,∅>∈Β.

Με χρήση του αξιώματος της αντικατάστασης μπορούμε να δημιουργήσουμε το σύνολο Γ={$\gamma_{X,R}$: <X,R> ∈ B} όπου $\gamma_{X,R}$ ∈ ON είναι ο μοναδικός διατακτικός τέτοιος ώστε <X,R> ≈ < $\gamma_{X,R}$,∈> (ισομορφισμός διάταξης).

Δείχνουμε ότι (∀γ)(γ∈Γ ↔ ∃f: γ$\to^{1-1}$A)

Αν γ∈Γ δηλαδή γ=$\gamma_{X,R}$ για κάποιο <X,R> ∈ B τότε έχουμε γ~X⊆A και άρα ∃f: γ$\to^{1-1}$A.

Αντίστροφα αν για κάποιο γ $\exists$f: γ$\to^{1-1}$A τότε γ $\sim$ X=range(f) $\subseteq$A και συνεπώς υπάρχει g:γ$\to^{1-1}_{\varepsilon\pi\iota}$X (όπου g=f).

Ορίζω την R στο X ως εξής:

$\forall$a,b $\in$ X : aRb $\leftrightarrow$ $g^{-1}(a) \in g^{-1}(b)$.Τότε το <γ,$\in$> είναι ισομορφικό μέσω της g με το <X,R>. Άρα γ=$\gamma_{X,R}$ δηλαδή γ$\in$Γ.

Συνοψίζοντας Γ={$\gamma_{X,R}$: <X,R> $\in$ B}={γ$\in$ ON: $\exists$f: γ$\to^{1-1}$A}

Το Γ είναι μεταβατικό επομένως Γ $\in$ ON και είναι ο διατακτικός που αποδεικνύει το θεώρημα γιατί αν $\exists$f: Γ$\to^{1-1}$A θα είχαμε Γ$\in$Γ που είναι άτοπο. ∴

Παρατήρηση: Η απόδειξη του θεωρήματος μας δίνει με συστηματικό τρόπο τον ελάχιστο διατακτικό Γ $\in$ ON που δεν εμφυτεύεται στο A.

Πόρισμα: Υπάρχει υπεραριθμήσιμος διατακτικός.

Απόδειξη: Εφαρμόζοντας το θεώρημα Hartogs για A=ω προκύπτει ο ελάχιστος διατακτικός που δεν εμφυτεύεται στον A: $\omega_1 = \{\alpha \in ON \ \wedge\ \exists$f: γ $\to^{1-1} \omega\}$. Δηλαδή το ω_1 είναι το σύνολο που έχει ως στοιχεία όλα τα πιθανά πρότυπα καλών διατάξεων πάνω σε κάθε υποσύνολο του ω. ∴

Ορισμός Πληθάριθμου(Cardinal Number): Έστω A καλά διατάξιμο σύνολο. Θέτουμε |A|= $\min\{\gamma \in ON\colon \gamma\sim A\}$ το οποίο ονομάζουμε (von Neumann) <u>πληθάριθμο</u> του A.

Αν κ είναι πληθάριθμος, ο ελάχιστος πληθάριθμος μεγαλύτερος (>) του κ λέγεται **επόμενος πληθάριθμος** του κ και συμβολίζεται με κ^+. Πληθάριθμος, δηλαδή, είναι ένας διατακτικός κ που δεν είναι ισοπληθικός με κανένα α<κ ($\alpha \in ON$) . Ένας τέτοιος κ λέγεται και **αρχικός διατακτικός.**

Παρατήρηση: Αν ο κ είναι άπειρος πληθάριθμος τότε ο κ είναι οριακός διατακτικός

Με βάση τον ορισμό σε κάθε καλά διατάξιμο σύνολο μπορεί να ανατεθεί ένας πληθάριθμος. Ορίζουμε αναδρομικά την ιεραρχία των πληθαρίθμων $\aleph_\alpha = \omega_\alpha$ $ως\ εξής$:

$\aleph_0 = \omega$,

$\aleph_{\alpha+1} = (\aleph_\alpha)^+$ για κάθε $\alpha \in ON$

και αν λ οριακός τότε $\aleph_\lambda = \sup\{\aleph_\alpha : \alpha < \lambda\}$.

Υπό το αξίωμα της επιλογής (AC) κάθε σύνολο μπορεί να διαταχθεί καλώς, συνεπώς κάθε άπειρο σύνολο είναι ισοπληθικό με μοναδικό $\aleph_\alpha$.

1.6 Το σύμπαν των συνόλων

Στη ZFC, μπορεί κάποιος να δείξει ότι το σύμπαν όλων των συνόλων V αποτελεί μια σωρευτική ιεραρχία. Το αξίωμα της θεμελίωσης είναι εκείνο το οποίο μας εξασφαλίζει ότι το V διαστρωματώνεται με αυτό τον τρόπο. Η von Neumann διαστρωμάτωση του σύμπαντος V των καλώς θεμελιωμένων συνόλων ορίζεται με αναδρομή στην κλάση ON των διατακτικών. Κάθε σύνολο ανήκει σε κάποιο V_α , όπου α κάποιος διατακτικός, και το V_α ορίζεται ως εξής:

- $V_0 = \emptyset$
- $V_{\alpha+1} = P(V_\alpha)$, το δυναμοσύνολο του V_α για $\alpha \in ON$ (επόμενος διατακτικός)
- $V_{\lambda} = \cup_{\alpha<\lambda} V_a$ αν ο λ$\in ON$ είναι οριακός διατακτικός

Τέλος θέτουμε V=$\cup_{a\in ON} V_a$ την κλάση όλων των συνόλων.

Για κάθε διατακτικό α,β $\in ON$ αν α≤β τότε συνεπάγεται ότι $V_a \subseteq V_\beta$. Μπορεί εύκολα να δείξει κανείς, χρησιμοποιώντας την υπερπεπερασμένη επαγωγή πάνω στους διατακτικούς α, ότι όλα τα V_a είναι μεταβατικά σύνολα.

Αντίστοιχα, για την κλάση L των κατασκευάσιμων συνόλων του Godel, για κάθε α $\in ON$ θεωρούμε «μόνο» τα υποσύνολα του τρέχοντος L_a που είναι ορίσιμα (στο L_a) από κάποιο πρωτοβάθμιο τύπο ίσως με παραμέτρους. Τα V,L είναι «αρχετυπικά μοντέλα» της ZFC.

1.7 Προς την Περιγραφική Θεωρία Συνόλων

Επιστρέφοντας στις μελέτες του Cantor και με βάση τα παραπάνω, η Υπόθεση του Συνεχούς μπορεί να γραφτεί πια ως $c = \aleph_1$. Μια ισοδύναμη (υπό το AC) έκφρασή της και πιο κοντά στην διατύπωση του Cantor είναι:

«Όλα τα άπειρα υποσύνολα των πραγματικών αριθμών είτε είναι αριθμήσίμα είτε έχουν την πληθικότητα του $\mathbb{R}$».

Στην προσπάθειά του να λύσει την Υπόθεση του Συνεχούς, ο Cantor μελέτησε τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ και συγκεκριμένα εισήγαγε την έννοια του συνόλου όλων των *οριακών σημείων* ενός υποσυνόλου του $\mathbb{R}$ (derived set). Γενικά derived set ενός υποσυνόλου S ενός *τοπολογικού χώρου* καλείται το σύνολο των οριακών σημείων του P και συμβολίζεται με P'. Η έννοια αυτή οδηγεί στην έννοια του *τέλειου συνόλου* (perfect set).

Ορισμός: Ένα υποσύνολο ενός τοπολογικού χώρου ονομάζεται <u>τέλειο</u> σύνολο αν είναι *κλειστό* και δεν έχει κανένα *μεμονωμένο σημείο.*

Επίσης, σχετικά με την πληθικότητα των υποσυνόλων του $\mathbb{R}$, τα παρακάτω ήταν ήδη γνωστά από την εποχή του Cantor.

Θεώρημα: Κάθε μη κενό <u>ανοιχτό</u> υποσύνολο των πραγματικών έχει την πληθικότητα του συνεχούς ($2^{\aleph_0}$).

Θεώρημα: Κάθε μη κενό τέλειο σύνολο έχει την πληθικότητα του συνεχούς ($2^{\aleph_0}$).

Ακολουθώντας αυτές τις ιδέες ο Cantor απέδειξε ένα θεώρημα το οποίο απαντούσε καταφατικά στην Υπόθεση του Συνεχούς (CH) για όλα τα κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Στην συνέχεια ο Ivar Otto Bendixson γενίκευσε αυτό το αποτέλεσμα δείχνοντας πως ισχύει για όλα τα κλειστά υποσύνολα *Πολωνικών Χώρων.*

Θεώρημα Cantor- Bendixson: Αν το A είναι ένα κλειστό υποσύνολο ενός Πολωνικού Χώρου τότε:

$$A = P \cup S$$

Όπου το P είναι τέλειο σύνολο , το S είναι το πολύ αριθμήσιμο και P∩S=∅. Επιπλέον αυτή η διαμέριση του A σε δύο ξένα σύνολα, ένα τέλειο και ένα το πολύ αριθμήσιμο, είναι μοναδική.

Αυτές οι μελέτες μπορούν να θεωρηθούν ως πρόδρομος μιας εκτεταμένης έρευνας πάνω στο ω, το ℝ και τα υποσύνολα τους. Ο κλάδος που αναπτύχθηκε ονομάζεται *Περιγραφική Θεωρία Συνόλων* και είναι ακριβώς εκείνος ο κλάδος των μαθηματικών που μελετά τις δομικές ιδιότητες των ορίσιμων συνόλων των πραγματικών. Η Περιγραφική Θεωρία Συνόλων οφείλει τα πρώτα της βήματα στην μελέτη των ορίσιμων υποσυνόλων των πραγματικών από τον Cantor. Πράγματι, ο Borel ακολουθώντας την σημαντική συνεισφορά του Cantor στην θεωρία ολοκλήρωσης εισήγαγε τα σύνολα που τελικά ονομάστηκαν Borel.

Ορισμός: Ένα υποσύνολο των πραγματικών B⊆ ℝ λέγεται **Borel** αν ανήκει σε κάθε υποσύνολο του δυναμοσυνόλου των πραγματικών S $\subseteq P(\mathbb{R})$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:

a) Όλα τα ανοικτά και όλα τα κλειστά σύνολα ανήκουν στο S.
b) Αν $B_n \in S\ για\ κάθε\ n \in \mathbb{N}, τότε\ \cup_{n=0}^{\infty} B_n\ και\ \cap_{n=0}^{\infty} B_n$ ανήκουν στο S.

Το σύνολο όλων των Borel συμβολίζεται με $\boldsymbol{\mathcal{B}}$, όπου $\boldsymbol{\mathcal{B}} = \cap\{S \subseteq$ P(ℝ)$: το\ S\ έχει\ τις\ ιδιότητες\ (a) και\ (b)\}$.

Στις αρχές του 20ου αιώνα, τα Borel υποσύνολα των πραγματικών αποτέλεσαν ένα από τα κυριότερα αντικείμενα έρευνας των μαθηματικών. Ένα βασικό ζήτημα υπήρξε η διερεύνηση της έκτασης των *ιδιοτήτων κανονικότητας* (regularity properties) στα σύνολα αυτά. Οι regularity properties είναι ενδεικτικές ιδιότητες των καλώς διαχειρίσιμων (well behaved) συνόλων πραγματικών αριθμών, εκ των οποίων η Lebesgue μετρησιμότητα, η ιδιότητα του Baire (Baire property) και η ιδιότητα του τέλειου συνόλου (perfect set property) είναι οι πιο διακεκριμένες. Το γεγονός ότι τα σύνολα Borel είναι Lebesgue μετρήσιμα και έχουν την ιδιότητα του Baire είναι συνυφασμένο με τον ορισμό τέτοιων εννοιών. Σχετικά όμως με την ιδιότητα του τέλειου συνόλου λίγα πράγματα μπορούσαν να αποδειχθούν πέρα από το θεώρημα Cantor- Bendixson. Ο Luzin προέτρεψε τον Pavel Aleksandrov να εστιάσει την προσοχή του στο ζήτημα της πληθικότητας των συνόλων Borel, το όποιο αφορούσε ουσιαστικά την ικανοποίηση ή όχι της ιδιότητας του τέλειου συνόλου.

Με τη συμβολή του Aleksandrov το ζήτημα ξεκαθαρίστηκε καταφατικά. Ο Aleksandrov κατάφερε να αποδείξει πως όλα τα σύνολα Borel έχουν την perfect set property. Ενώ όμως το παραπάνω ζήτημα αποσαφηνιζόταν οριστικά, τα πράγματα για την Περιγραφική Θεωρία Συνόλων μόλις είχαν αρχίσει να αναπτύσσονται. Σύντομα ένας άλλος μαθητής του Luzin, ο Suslin, απέδειξε πως οι προβολές των Borel δεν είναι κατ' ανάγκη σύνολα Borel, αποτελούν μάλιστα ένα γνήσιο υπερσύνολό τους. Την καινούρια αυτή έννοια την ονόμασε *αναλυτικό σύνολο.*

Ορισμός: Το πεδίο τιμών μίας συνεχούς συνάρτησης με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Borel σε έναν *Πολωνικό Χώρο* λέγεται **αναλυτικό σύνολο**.

Παρατήρηση: Η Περιγραφική Θεωρία Συνόλων αφορά κατά κύριο λόγο τη διερεύνηση του $\mathbb{R}$ και των υποσυνόλων του. Όπως αναφέρουν σπουδαίοι ερευνητές του κλάδου (Ι.Μοσχοβάκης,K.Kunen) θα μπορούσε κάλλιστα να της δοθεί το όνομα Θεωρία Ορισιμότητας για το Συνεχές. Παρόλο που το αντικείμενο της θεωρίας είναι οι πραγματικοί αριθμοί το πλαίσιο στο όποιο διατυπώνονται και επιχειρείται να επιλυθούν τα σχετικά ζητήματα είναι το ευρύτερο πεδίο των (τέλειων) Πολωνικών Χώρων.

Ορισμός: Ένας τοπολογικός χώρος ονομάζεται **Πολωνικός** αν είναι *πλήρης, διαχωρίσιμος μετρικός* χώρος. Αν επιπλέον δεν έχει κανένα *μεμονωμένο* σημείο τότε ονομάζεται και *τέλειος.*

Η προτίμηση της γενικότερης έννοιας των τέλειων Πολωνικών Χώρων αντί της ενασχόλησης απευθείας με τους πραγματικούς οφείλεται κυρίως σε δύο λόγους. Ο ένας είναι ότι η ανάπτυξη της θεωρίας με αυτόν τον τρόπο προσδίδει μεγαλύτερο εύρος εφαρμογών και ο άλλος είναι ότι απαιτείται συχνά η χρήση πολυπλοκότερων χώρων για να αποδειχθούν ιδιότητες σχετικές με το $\mathbb{R}$. Φυσικά το $\mathbb{R}$ *είναι* ένας τέλειος Πολωνικός Χώρος. Δύο άλλα χαρακτηριστικά παραδείγματα τέτοιων χώρων είναι ο *Χώρος Baire* και ο *Χώρος Cantor* οι οποίοι έχουν αναδειχθεί ως πολύ χρήσιμα εργαλεία στην εξέλιξη της Περιγραφικής Θεωρία Συνόλων.

Ο Χώρος Baire

Ο Χώρος Baire είναι το σύνολο όλων των άπειρων ακολουθιών από φυσικούς αριθμούς: $\mathcal{N} = \omega^{\omega}$. Αποτελεί, δηλαδή, το σύνολο όλων των συναρτήσεων $f\colon \omega \to \omega$ εφοδιασμένος με την τοπολογία γινόμενο, η οποία είναι η φυσικά παραγόμενη τοπολογία των ω αντιγράφων του ω, όπου σε κάθε αντίγραφο του ω έχει δοθεί η διακριτή τοπολογία. Η τοπολογία στον $\mathcal{N}$ παράγεται από την μετρική $d(f,g) = \frac{1}{2^{n+1}}$ όπου n είναι ο ελάχιστος φυσικός τέτοιος ώστε f(n)≠g(n), αλλιώς αν f=g τότε $d(f,g) = 0$. Ο $\mathcal{N}$ είναι πλήρης με αυτήν την μετρική και το σύνολο των τελικά σταθερών ακολουθιών είναι αριθμήσιμο και πυκνό στον $\mathcal{N}$, οπότε ο $\mathcal{N}$ είναι ένας τέλειος Πολωνικός Χώρος. Οι συναρτήσεις από το ω στο ω αντιστοιχούν σε πραγματικούς αριθμούς, για αυτό και ονομάζονται πραγματικοί (reals). Αυτό συμβαίνει γιατί ο Χώρος Baire είναι σχεδόν-ομοιομορφικός με το $\mathbb{R}$, πιο συγκεκριμένα είναι ομοιομορφικός με τους άρρητους.

Ο Χώρος Cantor

Ο Χώρος Cantor είναι το σύνολο όλων των άπειρων δυαδικών ακολουθιών: $\mathcal{C} = 2^{\omega}$. Είναι δηλαδή, το σύνολο όλων των συναρτήσεων f:ω→2 εφοδιασμένος με την τοπολογία γινόμενο, η αυτή φορά είναι η φυσικά παραγόμενη τοπολογία των ω αντιγράφων του 2, όπου σε κάθε αντίγραφο του 2 έχει δοθεί η διακριτή τοπολογία. Ο Χώρος Cantor είναι ένας *συμπαγής* υπόχωρος του Χώρου Baire και συνεπώς είναι κι αυτός ένας τέλειος Πολωνικός Χώρος. Μπορεί να αναπαρασταθεί από το πλήρες δυαδικό δέντρο. Ο Χώρος Cantor είναι ομοιμορφικός με το κλασικό σύνολο του Cantor, το σύνολο δηλαδή που δημιουργείται αν από το κλειστό διάστημα [0,1] του συνεχούς αφαιρούμε διαδοχικά τα ανοιχτά μεσαία ένα-τρίτα τμήματα. Εξαιτίας αυτού του ομοιομορφισμού ο $\mathcal{C}$ καλείται πόλλες φορές και σύνολο του Cantor.

Κλείνοντας αυτή την κάπως μεγάλη παρένθεση σχετικά με το μαθηματικό υπόβαθρο που χρησιμοποιεί η σύγχρονη Περιγραφική Θεωρία Συνόλων επιστρέφουμε στην έρευνα του Suslin και τα αναλυτικά σύνολα. Αξίζει να αναφερθεί πως η μοναδική δημοσίευση που έκανε έπαιξε σημαντικό ρόλο στην αντίληψη μεταγενέστερων εννοιών περί ιεραρχίας. Ο Suslin, έχοντας ήδη εντοπίσει αναλυτικά σύνολα που δεν είναι Borel, έδειξε επιπλέον (υπό το AC) πότε ένα αναλυτικό σύνολο είναι Borel.

Θεώρημα (Suslin,1917)**:** Ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι Borel αν και μόνο αν το A και το συμπλήρωμά του είναι και τα δύο αναλυτικά.

Με το παραπάνω θεώρημα ο Suslin έδειξε ότι τα σύνολα Borel μπορούν να προσδιοριστούν εξίσου καλά τόσο με απλούς όρους «από τα πάνω» όσο και με την ανάλυση της ιεραρχίας «από τα κάτω» . Οι καρποί της εργασίας του Suslin αποτέλεσαν μεγάλο επίτευγμα της Περιγραφικής Θεωρίας Συνόλων και η έρευνα στα αναλυτικά σύνολα συνεχίστηκε από κοινού από τον Luzin και τον Sierpinski. Αποτέλεσμα αυτής της συνεργασίας ήταν και η *κατασκευή των προβολικών συνόλων* δηλαδή των συνόλων που παράγονται από τα Borel με την επαναλαμβανόμενη εφαρμογή της προβολής και του συμπληρώματος.

Ορισμός: Η προβολική ιεραρχία για το $\mathbb{R}$ είναι:

Για $A \in \mathbb{R}$,

$$A \in \boldsymbol{\Sigma}_0^1 \ \ ανν\ το\ \ A\ είναι\ ανοιχτό\ σύνολο$$

και αναδρομικά για $n \in \mathbb{N}$,

$$A \in \ \mathbf{\Pi}_n^1\ ανν\ \ \mathbb{R} \setminus A \ \in\ \boldsymbol{\Sigma}_n^1 \text{ και}$$

$$A \in \mathbf{\Sigma}_{n+1}^1\ ανν \text{ το A είναι } συνεχής\ εικόνα \text{ του B, όπου B κάποιο } \mathbf{\Pi}_n^1 \text{ υποσύνολο του } \mathbb{R}$$

Επίσης ορίζεται ως $\boldsymbol{\Delta}_n^1$ η τομή $\boldsymbol{\Sigma}_n^1 \cap \mathbf{\Pi}_n^1$.

Σύμφωνα με τον ορισμό τα $\mathbf{\Sigma}_1^1$ είναι τα αναλυτικά σύνολα και το θεώρημα του Suslin μας λέει ότι τα $\boldsymbol{\Delta}_1^1$ είναι ακριβώς η συλλογή των συνόλων Borel. Ο Luzin και ο Sierpinski έδειξαν. ότι η προβολική ιεραρχία είναι μια γνήσια ιεραρχία και άρχισαν να αποδεικνύουν τις βασικές της ιδιότητες. Η διερεύνηση του $\mathbb{R}$ και οι ιδιότητες κανονικότητας των συνόλων του μπορούσαν πια να μελετηθούν στην στερεή δομή της προβολικής ιεραρχίας. Όμως, η έρευνα των προβολικών συνόλων έμελε να συναντήσει πολλά εμπόδια σχετικά γρήγορα. Ο Luzin παρατήρησε πως ήταν πολύ δύσκολο να αποδειχθούν έννοιες όπως η Lebesgue μετρησιμότητα για τα $\boldsymbol{\Sigma}_2^1$ σύνολα ή η ιδιότητα του τέλειου συνόλου για τα $\mathbf{\Pi}_1^1$. Επίσης κατέληξε στο συμπέρασμα πως αν και η οικογένεια των προβολικών συνόλων έχει την πληθικότητα του συνεχούς, θα παρέμενε άγνωστο αν κάτι τέτοιο μπορούσε να ισχύει για όλα τα υπεραριθμήσιμα μέλη της. Αυτή η πεποίθηση, όπως θα δούμε αποδείχθηκε προφητική.

Ο Godel έδειξε πως υπό την συνθήκη ότι V=L υπάρχουν σχετικά απλά σύνολα τα οποία δεν ικανοποιούν τις ιδιότητες κανονικότητας. Η εξέλιξη της Περιγραφικής Θεωρίας Συνόλων θα έμπαινε σε ένα τέλμα. Ο λόγος ήταν ότι η παραγωγή νέων αποτελεσμάτων περιοριζόταν από τις δυνατότητες που παρείχαν τα αξιώματα της ZFC. Οι περιορισμοί αυτοί έγιναν ευρέως αποδεκτοί με την απόδειξη της ανεξαρτησίας της Υπόθεσης του Συνεχούς(CH).

1.8 Η ανεξαρτησία της Υπόθεσης του Συνεχούς

Όπως γνωρίζουμε σήμερα η CH δεν γίνεται να αποδειχτεί από τα αξιώματα της ZFC. Ο Godel το 1938 απέδειξε κάτι που αρχικά τροφοδότησε, ίσως, τις ελπίδες για καταφατική επικύρωση της CH. Απέδειξε ότι η άρνηση της Υπόθεσης του Συνεχούς είναι αδύνατο να αποδειχθεί από την ZFC.

Θεώρημα(Godel 1938)**:** Η CH είναι σχετικά συνεπής με την ZFC.

Ο Godel έδειξε ότι αν υπάρχει ένα $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ μοντέλο της ZFC τότε η CH είναι συμβατή με το $L^{\boldsymbol{\mathcal{M}}} \subseteq \mathcal{M}$. Πιο συγκεκριμένα έδειξε ότι $L^{\boldsymbol{\mathcal{M}}} \vDash$GCH δηλαδή ότι $L^{\boldsymbol{\mathcal{M}}} \vDash (\forall\alpha)(2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1})$. Όπου με GCH συμβολίζεται η Γενικευμένη Υπόθεση του Συνεχούς. Αυτό συνεπάγεται ότι αν η ZFC είναι συνεπής δεν μπορεί να αποδείξει την άρνηση της Υπόθεσης του Συνεχούς (ZFC $\nvdash \neg CH$). Με αυτό το αποτέλεσμα απέμενε μόνο να αποδειχθεί ότι η CH ισχύει. Παρόλα αυτά, όλες οι προσπάθειες που έγιναν τα επόμενα χρόνια προς αυτή την κατεύθυνση ήταν αποτυχημένες, Το πρόβλημα επέμενε να παραμένει άλυτο. Τελικά το 1963 ο Paul Cohen έδειξε ότι ούτε η ίδια η CH μπορεί να αποδειχθεί από την ZFC.

Θεώρημα(Cohen 1963): Η $\neg CH$ είναι σχετικά συνεπής με τα αξιώματα της ZFC.

Ο Cohen έδειξε ότι αν υπάρχει ένα $\mathcal{M}$ μοντέλο της ZFC τότε υπάρχει ένα άλλο μοντέλο $\mathcal{N} \supsetneq \mathcal{M}$ τέτοιο ώστε $\mathcal{N} \vDash$ ZFC $+ \neg$ CH. Για να φτάσει σε αυτό το αποτέλεσμα ο Cohen εισήγαγε μια καινοτόμα και θεμελιωδώς νέα μέθοδο, την μέθοδο του forcing. Το τελικό συμπέρασμα πάντως ήταν ότι η Υπόθεση του Συνεχούς είναι ανεξάρτητη από τα αξιώματα της ZFC. Η ανεξαρτησία της CH αποτέλεσε ένα από τα πιο σπουδαία επιτεύγματα των μαθηματικών του 20ου αιώνα. Επίσης η μέθοδος του forcing καθεαυτή συνιστά μια έννοια ανάλογης σημασίας και στα χρόνια που ακολούθησαν μελετήθηκε εκτενώς προσφέροντας πληθώρα αποτελεσμάτων ανεξαρτησίας.

Η προσπάθεια επίλυσης της CH λοιπόν, άνοιξε το δρόμο για την μελέτη των ορίσιμων συνόλων του $\mathbb{R}$ και την ανάπτυξη της Περιγραφικής Θεωρίας Συνόλων και τελικά η απόδειξη της ανεξαρτησίας της τροφοδότησε την ανάγκη εισαγωγής νέων αξιωμάτων στην ZFC. Αξιώματα με τα οποία αν ενισχυθεί η ZFC μας παρέχουν την δυνατότητα να αποφασίσουμε για όσο το δυνατόν περισσότερες από τις ανεξάρτητες προτάσεις της θεωρίας. Μία ισχυρή υποψηφιότητα για τα αξιώματα αυτά είναι οι Μεγάλοι Πληθάριθμοι. Παρόλο που δεν επιλύουν την CH, τα Αξιώματα Μεγάλων Πληθαρίθμων μας παρέχουν σημαντικά αποτελέσματα σχετικά με προτάσεις ανεξάρτητες της ZFC.

Κεφάλαιο 2. Μεγάλοι πληθάριθμοι

2.1 Απρόσιτοι πληθάριθμοι

Η μελέτη των μεγάλων πληθαρίθμων ξεκίνησε στις αρχές του 20[ου] αιώνα όταν ο Hausdorff εισήγαγε την έννοια των *απρόσιτων πληθαρίθμων.* Ενώ ο Cantor είχε αφιερώσει τις προσπάθειές του στην μελέτη των διατακτικών τύπων των ρητών και των πραγματικών, και φυσικά, στην Υπόθεση του Συνεχούς, ο Hausdorff επέκτεινε την μαθηματική έρευνα σε υψηλότερα υπερπεπερασμένα επίπεδα. Πριν περάσουμε όμως στην διατύπωση της σύλληψης που έκανε ο Hausdorff το 1908 χρειάζεται ο ορισμός μίας έννοιας που αφορά όλους τους πληθικούς αριθμούς, την έννοια της *ομοτελικότητας (cofinality).*

Γενικά αν έχουμε έναν διατακτικό α ($\alpha \in ON$) και μία συνάρτηση f: γ→α όπου γ κάποιος διατακτικός ($\gamma \in ON$), η συνάρτηση f λέγεται **μη φραγμένη στο α** αν για κάθε ξ<α, υπάρχει β<γ τέτοιο ώστε f(β)>ξ.

Ορισμός: Αν ο $\alpha \in ON$ είναι οριακός, τότε η **ομοτελικότητα του α**, που γράφεται cof(α), είναι ο ελάχιστος $\gamma \in ON$ τέτοιος ώστε υπάρχει μη φραγμένη f: γ→α.

Για παράδειγμα: cof(ω)=ω, cof(ω+ω)=ω, cof(ω_1)= ω_1, cof(ω_ω)=ω

Με βάση λοιπόν τον παραπάνω ορισμό οι πληθάριθμοι (ως οριακοί διατακτικοί) διακρίνονται σε αυτούς που έχουν ομοτελικότητα ίση με τον εαυτό τους, δηλαδή cof(κ)=κ και εκείνους που έχουν ομοτελικότητα μικρότερη του εαυτού τους, δηλαδή cof(κ)<κ. Οι πρώτοι ονομάζονται ***κανονικοί*** (*regulars*) ενώ οι δεύτεροι ***ιδιάζοντες*** (*singulars*). Ο πρώτος άπειρος πληθάριθμος ο ω ($\aleph_0$) είναι κανονικός. Για να συναντήσουμε τον πρώτο ιδιάζοντα πληθάριθμο πρέπει να προχωρήσουμε μέχρι τον $\aleph_\omega$.Μια βασική ιδιότητα των επόμενων πληθαρίθμων (συνέπεια AC) είναι η εξής:

Πρόταση: Κάθε επόμενος πληθάριθμος είναι κανονικός. Δηλαδή αν α∈ΟΝ τότε cof($\aleph_{\alpha+1}$)= $\aleph_{\alpha+1}$.

Πέραν του ω, οι επόμενοι οριακοί πληθάριθμοι που εμφανίζονται είναι ιδιάζοντες(π.χ. $\aleph_\omega$, $\aleph_{\omega+\omega}$, $\aleph_{\omega_1}$, $\aleph_{\omega_2}$κ.τλ.). Ο Hausdorff υπέθεσε την ύπαρξη πληθαρίθμων πέραν του ω που αν και οριακοί είναι κανονικοί.

Ορισμός: Ένας πληθάριθμος κ>ω λέγεται **ασθενώς απρόσιτος** (**weakly inaccessible**) αν είναι κανονικός και οριακός.

Οι weakly inaccessible, αν υπάρχουν, θα πρέπει να είναι σταθερά σημεία της ℵ-απαρίθμησης, δηλαδή $\aleph_\kappa$=κ. Αυτό γιατί αν ο $\aleph_\kappa$ είναι οριακός πληθάριθμος, δηλαδή ο κ οριακός διατακτικός, τότε cof($\aleph_\kappa$)=cof(κ)≤κ και συνεπώς για να είναι ο $\aleph_\kappa$ κανονικός θα πρέπει $\aleph_\kappa$=κ και cof($\aleph_\kappa$)=κ (αφού $\aleph_\kappa$ ≥κ). Αυτό βέβαια δεν αποτελεί «πρόβλημα» καθώς η ZFC αποδεικνύει την ύπαρξη οσοδήποτε μεγάλων σταθερών σημείων της ℵ-απαρίθμησης.

Ορισμός: Μια συνάρτηση g:ON→ON λέγεται *normal* αν

- Είναι γνησίως αύξουσα, δηλαδή α<β → g(α)<g(β) και
- Η g είναι συνεχής στους οριακούς διατακτικούς δηλαδή αν λ οριακός διατακτικός, τότε g(λ)=$sup_{\alpha<\lambda}$ g(α).

Σημείωση: Στους διατακτικούς οι έννοιες του ορίου (lim), της γενικευμένης ένωσης (∪) και του supremum (sup) ταυτίζονται.

Πρόταση: Αν μια συνάρτηση g: ON→ON είναι normal, τότε g(α)≥α για κάθε α∈ON.

Απόδειξη: Έστω ξ ο ελάχιστος διατακτικός για τον οποίο ισχύει ξ>g(ξ), υποχρεωτικά θα είναι ξ≠∅, τότε επειδή g(ξ)∈ON και g(ξ)<ξ θα ισχύει g(g(ξ))≥ g(ξ) (επειδή ξ ο ελάχιστος τέτοιος ώστε g(ξ)<ξ) το οποίο είναι άτοπο γιατί η g είναι γνησίως αύξουσα. Άρα g(α)≥α για κάθε α∈ON. ∴

Θεώρημα: Αν μία συνάρτηση g:ON→ON είναι normal τότε για κάθε α∈ON υπάρχει β∈ON με β>α τέτοιο ώστε g(β)=β. (Δηλαδή η g έχει «οσοδήποτε ψηλά» σταθερά σημεία.)

Απόδειξη: Έστω g:ON→ON normal και α∈ON. Θεωρούμε τις «πεπερασμένες επαναλήψεις» της g στο α:

$$g^0(\alpha) = \alpha, g^1(\alpha) = g(a), g^2(\alpha) = g(g(a)), \text{κ.ο.κ.}$$

Με χρήση του θεωρήματος της Αναδρομής σχηματίζουμε το $g^n(\alpha) = g(g(g_{n-\varphi o\rho\acute{\varepsilon}\varsigma} \dots (\alpha)) \dots)$.

Θέτουμε β= $\sup\{g^n(\alpha)$: n∈ω}. Τότε, επειδή η g είναι συνεχής: $g(\beta) = sup_{\gamma<\beta} g(\gamma) = \sup\{g(g^n(\alpha))$: n∈ω} = $\sup\{g^{n+1}(\alpha)$: n∈ω}=β και β>α. ∴

Η συνάρτηση f:ON→ON με $f(\alpha)=\aleph_\alpha$ είναι γνησίως φθίνουσα γιατί για κάθε α, β ∈ ON ισχύει: $\alpha < \beta \rightarrow \aleph_\alpha < \aleph_\beta$ και είναι επίσης συνεχής εξ ορισμού αφού αν λ οριακός διατακτικός τότε $f(\lambda)=\aleph_\lambda = \sup\{\aleph_\alpha : \alpha < \lambda\} = sup_{\alpha<\lambda} f(\alpha)$. Συνεπώς η f είναι normal και άρα έχει (οσοδήποτε ψηλά) σταθερά σημεία. Από αυτό συμπεραίνουμε ότι η ύπαρξη των weakly inaccessible εξαρτάται μόνο από το αν κάποιος από τους $\aleph_\kappa = \kappa$ έχει ομοτελικότητα cof(κ)=κ (είναι δηλαδή κανονικός).

Τα παραπάνω ισχύουν και για την έννοια των *strongly inaccessible* που εισήγαγαν οι Zermelo (1930) και Sierpinski-Tarski(1930) επεκτείνοντας ακόμα περισσότερο την κατανόησή μας για το συνολοθεωρητικό σύμπαν με την χρήση της ιδιότητας του *strong limit*.

Ορισμός: Ο πληθάριθμος κ λέγεται **strong limit** αν για κάθε λ ∈ ON αν λ<κ τότε 2^λ<κ.

Ένας strong limit πληθάριθμος είναι, δηλαδή, «κλειστός κάτω από εκθετοποίηση».

Παρατήρηση: Ένας strong limit πληθάριθμος είναι προφανώς οριακός.

Ορισμός: Ένας πληθάριθμος κ λέγεται **(strongly) inaccessible** αν είναι weakly inaccessible και strong limit, δηλαδή ο κ είναι κανονικός και ισχύει ότι αν λ<κ τότε $2^\lambda < \kappa$.

Οι inaccessible πληθάριθμοι γενικεύουν τις ιδιότητες του ω σε μεγαλύτερες πληθικότητες. Πέραν του ότι ισχυρίζονται την ύπαρξη κανονικών και οριακών πληθικοτήτων όπως ο ω, επεκτείνουν και τις ιδιότητες του αρχικού τμήματος του σύμπαντος V_ω σε μεγαλύτερα V_κ (κ>ω). Το V_ω ικανοποιεί όλα τα αξιώματα της ZFC έκτος από το αξίωμα του απείρου. Γενικά για κάθε V_α ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα (ZFC): Για κάθε διατακτικό α>0 τα αξιώματα Α1(της έκτασης), Α2 (του κενού), Α5 (του διαχωρισμού), Α4 (της ένωσης), Α10 (της θεμελίωσης), ικανοποιούνται στο V_α, αν επιπλέον ο α είναι οριακός διατακτικός τότε ικανοποιούνται και τα αξιώματα Α3(του ζεύγους), Α6 (του δυναμοσυνόλου) και Α9 (της επιλογής) στο V_α, και αν ο α>ω τότε ικανοποιείται και το αξίωμα Α7 (του απείρου). (Για παράδειγμα: το $V_{\omega+\omega}$ είναι μοντέλο της ZC = ZFC χωρίς το αξίωμα της αντικατάστασης.)

Το V_ω είναι το μοναδικό, εκ των V_α, σύνολο της ZFC που ικανοποιεί το Α8 (αξίωμα της αντικατάστασης). Με άλλα λόγια είναι μοντέλο της ZFC χωρίς το αξίωμα του απείρου : $V_\omega \models$ ZFC\Inf (+¬Inf). Η επόμενη πρόταση μας λέει ότι οι inaccessible επεκτείνουν αυτή την ικανότητα του V_ω και σε σύνολα που έχουν ως στοιχεία άπειρες οντότητες (σύνολα).

Πρόταση: Αν κ inaccessible τότε $V_\kappa \models$ ZFC.

Απόδειξη: Όλα τα αξιώματα της ZFC εκτός από το αξίωμα της αντικατάστασης ισχύουν ήδη για κάθε V_α όπου ο α είναι οριακός. Αρκεί να δείξουμε ότι το V_κ ικανοποιεί το αξίωμα της αντικατάστασης. Έστω F ένας συναρτησιακός κανόνας στο V_κ του οποίου το πεδίο ορισμού είναι κάποιο στοιχείο του V_κ έστω x ($F{:}x \to V_\kappa$). Συνεπώς η F έχει πληθικότητα το πολύ |x| και άρα μικρότερη από κ, και αφού ο κ είναι regular, η F δεν μπορεί να είναι ομοτελική (cofinal) στο V_κ. Δηλαδή η F είναι φραγμένη στο κ και άρα περιέχεται σε κάποιο V_α με α<κ. Τότε όμως $F \in V_{\alpha+1}$. Άρα $F[x] \in V_\kappa$. ∴

Από το γεγονός ότι το V_κ για κ inaccessible είναι μοντέλο της ZFC έπεται ότι η ύπαρξη inaccessible πληθάριθμων δεν μπορεί να αποδειχθεί από τα αξιώματα της ZFC, αν αυτή είναι συνεπής. Αυτό συμβαίνει γιατί αν η ZFC μπορούσε να αποδείξει την ύπαρξη inaccessible πληθάριθμων, σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση θα μπορούσε να αποδείξει και την συνέπεια της. Κάτι το οποίο είναι άτοπο με βάση το δεύτερο θεώρημα μη πληρότητας του Godel.

Το αξίωμα της αντικατάστασης, το ισχυρότερο εργαλείο που έχουμε για να πηγαίνουμε σε ολοένα και μεγαλύτερους πληθάριθμους, δεν είναι αρκετά ισχυρό για να μας παρέχει inaccessible (απρόσιτους) πληθάριθμους. Είναι κατά μία έννοια τόσο ισχυρό, ώστε να μας παρέχει μόνο προσιτούς πληθαρίθμους. Προσιτός είναι ένας πληθάριθμος κ με την έννοια ότι μπορούμε να τον προσεγγίσουμε από τα κάτω είτε αθροίζοντας μικρότερο πλήθος από μικρότερους πληθαρίθμους όταν ο πληθάριθμος είναι ιδιάζων, είτε μέσω της συνάρτησης του επομένου $\aleph_{\alpha+1}$ ή της $2^{\aleph_\alpha}$ όταν ο πληθάριθμος δεν είναι strong limit (στην δεύτερη περίπτωση ίσως μόνο για να πάρουμε κάτι μεγαλύτερο από τον $\aleph_\alpha$). Με αυτή την έννοια οι inaccessible χαρακτηρίζονται από την ονομασία τους και σίγουρα ο ω είναι κατά αυτό τον τρόπο απρόσιτος.

2.2 Ασθενώς συμπαγείς πληθάριθμοι

Στις αρχές της δεκαετίας του 1960 ο Tarski συνέδεσε την έννοια των μεγάλων πληθαρίθμων με την ιδιότητα της συμπάγειας έτσι όπως αυτή εμφανίζεται σε μία οποιαδήποτε πρωτοβάθμια κατηγορηματική γλώσσα. Ο Tarski εισήγαγε την σημασιολογία υπερπεπερασμένων κατηγορηματικών γλωσσών $L_{\lambda,\mu}$, όπου λ,μ άπειροι πληθάριθμοι, και πάνω σε αυτές μελέτησε αντίστοιχα το ζήτημα του κατά πόσο αυτές έχουν την ιδιότητα της συμπάγειας.

Μία γλώσσα $L_{\lambda,\mu}$ απαρτίζεται, όπως συνήθως στην πρωτοβάθμια κατηγορηματική λογική, από τα εξής: κάποια σύμβολα κατηγορημάτων, συναρτήσεων και σταθερών που αποτελούν τα μη λογικά σύμβολα της γλώσσας. Αυτά τα σύμβολα μαζί με τις μεταβλητές πλήθους max{λ,μ} και τις παρενθέσεις, τους λογικούς συνδέσμους και τους ποσοδείκτες σχηματίζουν τους όρους και τους ατομικούς τύπους της γλώσσας. Στις $L_{\lambda,\mu}$ γλώσσες οι συνήθεις κανόνες παραγωγής τύπων επεκτείνονται με την έννοια ότι μπορούν να υποστηρίξουν συζεύξεις $\wedge_{\xi<\alpha}$ και διαζεύξεις $\vee_{\xi<\alpha}$ από α το πλήθους τύπους για κάθε α<λ και αντίστοιχα καθολικούς $\forall_{\xi<\beta}$ και υπαρξιακούς $\exists_{\xi<\beta}$ ποσοδείκτες σε β το πλήθος μεταβλητές για κάθε β<μ Η ερμηνεία μιας τέτοιας γλώσσας, όπως και στην πρωτοβάθμια κατηγορηματική λογική, είναι μια αντίστοιχη δομή η οποία απαρτίζεται από το μη κενό σύμπαν (σύνολο) στο οποίο ερμηνεύουμε τα σύμβολα της γλώσσας. Τέλος σχέσεις ικανοποιησιμότητας γενικεύονται για να ενσωματώσουν τους υπερπεπερασμένους συνδέσμους και ποσοδείκτες. . Στο νέο γενικό αυτό πλαίσιο, μια $L_{\omega,\omega}$ γλώσσα είναι μια κλασική γλωσσά του πρωτοβάθμιου Κατηγορηματικού Λογισμού.

Ο Tarski γενίκευσε την ιδιότητα της συμπάγειας της $L_{\omega,\omega}$ ως εξής: Μία συλλογή από $L_{\lambda,\mu}$ προτάσεις είναι **ικανοποιήσιμη** αν και μόνο αν είναι έχει ένα μοντέλο (υπό την αντίστοιχη ερμηνεία της υπερπεπερασμένης διάζευξης, σύζευξης και ποσόδειξης) και είναι **ν-ικανοποιήσιμη** αν και μόνο αν κάθε υποσύνολό της με πληθικότητα μικρότερη από ν είναι ικανοποιήσιμο, για κάποιον πληθάριθμο ν. Πάνω σε αυτή την έννοια της (υπερπεπερασμένης) συμπάγειας δημιουργήθηκαν οι weakly compact πληθάριθμοι.

Ορισμός: Για κ>ω, ο κ λέγεται **weakly compact** (ασθενώς συμπαγής) αν και μόνο αν, για κάθε συλλογή Σ από $L_{\kappa,\kappa}$ προτάσεις που έχουν το πολύ κ μη-λογικά σύμβολα, αν η Σ είναι κ-ικανοποιήσιμη τότε η Σ είναι ικανοποιήσιμη.

Η ονομασία τους προφανώς προκύπτει από την δυνατότητα εφαρμογής της έννοιας της συμπάγειας σε πληθικότητες μεγαλύτερες του ω και ο παραπάνω ορισμός τους συνεπάγεται την ύπαρξη inaccessible πληθάριθμων. Ο αρχικός ορισμός που έδωσε ο Tarski περιείχε και μια αυστηρότερη συνθήκη: το σύνολο των προτάσεων Σ της γλώσσας $L_{\kappa,\kappa}$ να έχει πληθικότητα το πολύ κ (|Σ|≤κ). Ο ορισμός αυτός δεν εξασφαλίζει την ύπαρξη inaccessible σε αντίθεση με τον ανωτέρω ορισμό που τελικά καθιερώθηκε. Η συνεπαγωγή τον inaccessible από τους weakly compact, εκτός του ότι αποδεικνύεται, προκύπτει άμεσα από ισοδύναμους ορισμούς τους.

Οι weakly compact έχουν πληθώρα εναλλακτικών ορισμών. Ακολουθούν οι δύο πιο διαδεδομένοι οι οποίοι παρουσιάζουν δύο ακόμα ιδιότητες πέρα από την συμπάγεια τις οποίες οι weakly compact επεκτείνουν. Ο πρώτος επεκτείνει μια ιδιότητα του ω, την ιδιότητα του δέντρου, και ο δεύτερος γενικεύει το (άπειρο) θεώρημα Ramsey, δηλαδή πάλι επεκτείνει μια ιδιότητα του ω.

Λήμμα του Konig: κάθε δέντρο ύψους ω του οποίου τα επίπεδα είναι όλα πεπερασμένα έχει ένα κλαδί μήκους ω (ιδιότητα του Δέντρου για κ=ω).

Ορισμός: Ο πληθάριθμος κ>ω λέγεται **weakly compact** αν είναι inaccessible και κάθε δέντρο ύψους κ του οποίου όλα τα επίπεδα είναι μεγέθους <κ έχει ένα κλαδί μήκους κ (έχει δηλαδή την «ιδιότητα του Δέντρου»).

Ορισμός: Ένας πληθάριθμος κ>ω είναι **weakly compact** αν και μόνο αν για κάθε πλήρες γράφημα G μεγέθους κ και κάθε δυαδικό χρωματισμό των πλευρών του G υπάρχει πλήρες μονοχρωματικό υπογράφημα μεγέθους κ.

Ο παραπάνω χαρακτηρισμός γράφεται συνήθως με τον συμβολισμό του βέλους: κ→$(\kappa)^2_2$ που σημαίνει ότι για κάθε f: $[\kappa]^2$→{0,1} υπάρχει ένα H⊆κ με πληθικότητα |H|=κ τέτοιο ώστε η f είναι σταθερή στο $[H]^2$. Γενικά ο **συμβολισμός του βέλους** « κ → $(\lambda)^\nu_\mu$ », όπου κ,λ,ν,μ μη μηδενικοί πληθάριθμοι, σημαίνει ότι ισχύει το ακόλουθο: για κάθε f: $[\kappa]^\nu$→ μ, υπάρχει H⊆κ με πληθικότητα |H|=λ τέτοιο ώστε η f είναι σταθερή στο $[H]^\nu$. Ένα τέτοιο H για το οποίο η η f είναι σταθερή στο $[H]^\nu$ (ανεξαρτήτως της πληθικότητάς του) λέγεται **homogeneous** για την f.

Σημείωση: Για κάθε σύνολο A και κάθε πληθάριθμο ν ≤ |A|, θέτουμε $[A]^\nu$ = { X⊆A : |X|=ν }.

Κατά αυτήν την έννοια η ύπαρξη weakly compact έπεται ότι ικανοποιείται το άπειρο θεώρημα Ramsey και για πληθικότητες μεγαλύτερες του ω:

Άπειρο θεώρημα Ramsey:Για κάθε μη μηδενικούς μ,ν ∈ ω ισχύει ότι ω→$(\omega)^\mu_\nu$.

Η ανακάλυψη των weakly compact από τον Tarski συνέβαλε και στην απόδειξη του πρώτου αποτελέσματος σχετικά με το μέγεθος των measurable πληθάριθμων, μιας έννοιας πληθαρίθμων που είχε εισαχθεί 30 χρόνια νωρίτερα από τον Ulam.

2.3 Μετρήσιμοι πληθάριθμοι

Η μετρησιμότητα θεωρείται η πιο διακεκριμένη από όλες τις υποθέσεις μεγάλων πληθαρίθμων. Αναπτύχθηκε αρχικά στην Πολωνία τη δεκαετία του ΄30 όπου σπουδαίοι μαθηματικοί όπως ο Kuratowski και ο Tarski συνέβαλλαν δραστικά στη θεωρία συνόλων. Σε αυτό το περιβάλλον ήταν που η εργασία του Stefan Banach και του νεαρού τότε Stanislaw Ulam πάνω στο πρόβλημα του αφηρημένου μέτρου αποδείχθηκε θεμελιώδης.

Καταρχήν η σύγχρονη θεωρία μέτρου έχει τις ρίζες της στη διπλωματική εργασία του Lebesgue, όπου και τέθηκε για πρώτη φορά το «πρόβλημα του Μέτρου». Ο Lebesgue εκεί αναζητά αν υπάρχει μία συνάρτηση m τέτοια ώστε να συνδέει σε κάθε φραγμένο σύνολο X έναν μη αρνητικό πραγματικό αριθμό m(X) έτσι ώστε:

a) η συνάρτηση m δεν είναι ταυτοτικά μηδέν (δηλαδή μη τετριμένη)
b) η m είναι ανεξάρτητη μετατόπισης (translation invariant) δηλαδή να ισχύει: m(X)= m(Y) όποτε υπάρχει r τέτοιο ώστε Y=$\{x + r | x \in X\}$ και
c) η m είναι αριθμήσιμα προσθετική που σημαίνει ότι αν $\{X_n | n \in \omega\}$ είναι μια συλλογή ξένων ανά δύο συνόλων που η ένωσή της είναι ένα φραγμένο σύνολο πραγματικών αριθμών τότε: $\mathrm{m}(\cup_{\mathrm{n}} \mathrm{X}_{\mathrm{n}}) = \Sigma_n \mathrm{m}(\mathrm{X}_{\mathrm{n}})$.

Το μέτρο Lebesgue αναπτύχθηκε ως μια απάντηση σε αυτό ακριβώς το πρόβλημα. Ο Giuseppe Vitali έδειξε όμως το 1905 ότι ένα τέτοιο (μη τετριμμένο, translation invariant και αριθμήσιμα προσθετικό) μέτρο δεν υπάρχει για όλα τα σύνολα πραγματικών αριθμών. Κατάφερε να κατασκευάσει ένα μη- Lebesgue μετρήσιμο σύνολο από μια καλή διάταξη των πραγματικών, χρησιμοποίησε δηλαδή ουσιωδώς το AC. Αυτή ήταν και η πρώτη χρήση του AC αποκλειστικά για την κατασκευή ενός συνόλου πραγματικών αριθμών από τότε που εισήχθη από τον Zermelo. Το γεγονός αυτό έκανε τον Lebesgue να το εκλάβει αρχικά ως κάτι που αποτελούσε μάλλον πρόβλημα για το ίδιο το AC παρά για την δυνατότητα απάντησης στο«πρόβλημα του Μέτρου» .

Με το αποτέλεσμα του Vitali γεννήθηκαν σημαντικά ερωτήματα. Αν αφαιρέσουμε την απαίτηση το μέτρο να είναι translation invariant, υπάρχει τότε μη τετριμμένο και αριθμήσιμα προσθετικό μετρό σε όλα τα υποσύνολα των πραγματικών αριθμών; Υπάρχει ένα τέτοιο μέτρο για όλα τα υποσύνολα κάποιου γενικού συνόλου A; Σε αυτά τα ερωτήματα έχουν τις ρίζες τους οι *μετρήσιμοι* πληθάριθμοι (measurable).

Με δεδομένο το αντιπαράδειγμα του Vitali, ο Banach πρότεινε να αντικατασταθεί η ιδιότητα (b) από την m({x})=0 για κάθε x, θέτοντας έτσι μία ελαχιστική αναγκαία συνθήκη για να αποφευχθούν τετριμμένες λύσεις και γενικεύοντας έτσι το «πρόβλημα του Μέτρου». Ο Banach παρατήρησε ότι μία λύση m καθορίζεται από τις τιμές της στο P([0,1]) και συνειδητοποίησε ότι αυτή η συνθήκη που εισήγαγε έθετε το πρόβλημα σε γενικότερο πλαίσιο έτσι ώστε το [0,1] μπορούσε να αντικατασταθεί από ένα οποιοδήποτε σύνολο S. Σε αυτή τη περίπτωση αν το m δεν είναι ταυτοτικά 0 στο P(S) τότε m(S)>0, και συνεπώς μπορούμε κανονικοποιώντας να υποθέσουμε ότι m(S)=1. Το «πρόβλημα του Μέτρου» όπως το διατύπωσε τελικά ο Banach το 1930 είναι η ύπαρξη ενός μη κενού συνόλου S και μίας συνάρτησης m: P(S)→[0,1], η οποία θα καλείται *μέτρο* πάνω στο S, τέτοια ώστε:

1. m(S)=1,
2. m({x})=0 για κάθε $x \in S$, και
3. για ξένα ανά δύο $\{X_n : n \in \omega\} \subseteq P(S)$, ισχύει $m(\cup_n X_n) = \sum_n m(X_n)$.

Ορισμός: Ένα μέτρο m πάνω σε ένα σύνολο S λέγεται **λ-προσθετικό** αν και μόνο αν για κάθε γ<λ και για κάθε $\{X_\alpha : \alpha<\gamma\} \subseteq P(S)$ ξένα ανά δύο ισχύει: $m(\cup_\alpha X_\alpha) = \sum_\alpha m(X_\alpha)$.

Ο Banach είδε πως η λύση του προβλήματος του εξαρτάται μόνο από την πληθικότητα του συνόλου S και όρισε τους *real-valued measurable* ως εξής:

Ορισμός: Για $\kappa > \omega$, ο κ είναι **real-valued measurable** αν και μόνο αν υπάρχει ένα κ-προσθετικό μέτρο στο κ.

Στη συνέχεια ο Ulam απέδειξε θεμελιώδη αποτελέσματα σχετικά με το πρόβλημα του μέτρου. Έθεσε μια σημαντική διάκριση για ένα μέτρο m πάνω στο κ:

- $A \subseteq \kappa$ είναι **ένα άτομο (atom)** για το m αν και μόνο αν m(A)>0 και για κάθε $B \subseteq A$ m(B)= m(A) ή m(B)=0, και
- το m είναι **atomless** αν και μόνο αν δεν υπάρχουν τέτοια άτομα στο m.

Θεωρώντας ότι ένα κ-προσθετικό μέτρο m στο κ έχει ένα άτομο $A \subseteq \kappa$ έδειξε ότι μια συνάρτηση μ ορισμένη στο P(κ) ως: $\mu(X) = \frac{m(X \cap A)}{m(A)}$ είναι ένα κ-προσθετικό μέτρο μ στο κ με εύρος τιμών το {0,1}. Επίσης έδειξε ότι αυτή η ιδιότητα μπορεί να εκφραστεί μέσω της ορολογίας των υπερφίλτρων.

Ορισμός: Έστω $S \neq \emptyset$. Ένα σύνολο $U \subseteq P(S)$ λέγεται **υπερφίλτρο** στο S αν:

1. $S \in U$ και $\emptyset \notin U$.
2. Αν $A, B \in U$, τότε $A \cap B \in U$.
3. Αν $A \in U$ και $A \subseteq B \subseteq S$, τότε $B \in U$.
4. Για κάθε $A \subseteq S$, είτε $A \in U$ ή $S \setminus A \in U$.

Ορισμός: Ένα υπερφίλτρο U στο S λέγεται **κύριο (τετριμμένο)** αν υπάρχει $\alpha \in S$ τέτοιο ώστε $U = \{X \subseteq S : \alpha \in X\}$.

Ορισμός: Ένα υπερφίλτρο U στο S λέγεται **κ-πλήρες** (για κάποιον κανονικό κ) αν για κάθε $A = \{A_i : i < \lambda\} \subseteq U$ με $\lambda < \kappa$ έχουμε ότι $\cap A \in U$.

Ένα τέτοιο δίτιμο μέτρο μ πάνω στον κ μπορεί να εκφραστεί μέσω ενός μη τετριμμένου, κ-πλήρους υπερφίλτρου U_μ στο κ ως εξής:

$$U_\mu = \{X \subseteq \kappa : \mu(X) = 1\}.$$

Αφού το μ είναι δίτιμο και κ-προσθετικό ελέγχεται εύκολα ότι το U_μ είναι μη τετριμμένο, κ-πλήρες υπερφίλτρο. Αυτό μας οδηγεί στον ορισμό τον *measurable* πληθάριθμων.

Ορισμός: Ένας πληθάριθμος $\kappa > \omega$ λέγεται **measurable** αν και μόνο αν υπάρχει ένα μη τετριμμένο κ-πλήρες υπερφίλτρο στο κ.

Ένας measurable πληθάριθμος συγκεντρώνει όλες τις ιδιότητες των inaccessible και weakly compact.

Θεώρημα (Ulam): Έαν ο κ είναι measurable τότε ο κ είναι inaccessible.

Απόδειξη: Έστω U ένα μη τετριμμένο κ-πλήρες υπερφίλτρο στο κ. Αρχικά θα δείξουμε ότι ο κ είναι κανονικός. Πράγματι αν ο κ είναι ιδιάζων τότε υπάρχει λ<κ τέτοιο ώστε cof(κ)=λ δηλαδή υπάρχει ένα σύνολο πληθαρίθμων $\{\kappa_\alpha : \alpha<\lambda\}$ που είναι ομοτελικό στο κ και $\cup_{\alpha<\lambda} \kappa_\alpha = \kappa$ και άρα $\cup_{\alpha<\lambda} \kappa_\alpha \in U$ (1).

[**Λήμμα**: Έστω U ένα μη τετριμμένο κ-πλήρες υπερφίλτρο στο κ. Τότε αν $A \subseteq \kappa$ με $|A|<\kappa$, συνεπάγεται ότι $A \notin U$.
Απόδειξη λήμματος: Έχουμε ότι αφού $|A|<\kappa$ τότε $A= \{x_\alpha : \alpha<\lambda\} = \cup_{\alpha<\lambda}\{x_\alpha\}$ όπου λ<κ και επειδή U μη τετριμμένο $\{x_\alpha\}\notin U$. Επίσης επειδή U υπερφίλτρο $\{x_\alpha\}^c\in U$ δηλαδή $\kappa\setminus\{x_\alpha\}\in U$. Τώρα επειδή U κ-πλήρες $\cap_{\alpha<\lambda} \kappa\setminus\{x_\alpha\} \in U$ δηλαδή $\kappa\setminus A\in U$ και επειδή πάλι το U είναι υπερφίλτρο συνεπάγεται ότι $(\kappa\setminus A)^c \notin U$ δηλαδή $A \notin U$. ∴]

Αν $A=\cup_{\alpha<\lambda} \kappa_\alpha$ με λ<κ ανήκει στο U, επειδή το U είναι κ-πλήρες υπάρχει κάποιο α τέτοιο ώστε $\kappa_\alpha\in U$. Αυτό γιατί αν υποθέσουμε προς άτοπο ότι $\kappa_\alpha\notin U$, για κάθε α<λ , τότε επειδή το U είναι υπερφίλτρο θα ίσχυε ότι $\kappa_\alpha^c\in U$ για κάθε α<λ και συνεπώς επειδή το U είναι κ-πλήρες $\cap_{\alpha<\lambda} \kappa_\alpha^c\in U \Leftrightarrow (\cup_{\alpha<\lambda} \kappa_\alpha)^c \in U$ το οποίο είναι άτοπο γιατί το U είναι υπερφίλτρο και υποθέσαμε ότι $A=\cup_{\alpha<\lambda} \kappa_\alpha \in U$.
Επειδή όμως $|\kappa_\alpha|<\kappa$ από το λήμμα έχουμε ότι $\kappa_\alpha\notin U$ και συνεπώς $\cup_{\alpha<\lambda} \kappa_\alpha\notin U$ (2).
Από (1),(2) καταλήγουμε σε άτοπο και συνεπώς ο κ είναι κανονικός πληθάριθμος.
Ο κ είναι επίσης strong limit. Πράγματι αν υποθέσουμε προς άτοπο ότι δεν είναι, δηλαδή ότι υπάρχει λ <κ τέτοιο ώστε $\kappa\leq 2^\lambda$ αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $f: \kappa\to 2^\lambda$ που είναι 1-1. Οπότε για κάθε α<λ ισχύει $\kappa=\{\xi<\kappa : f(\xi)(\alpha)=0\}\cup\{\xi<\kappa: f(\xi)(\alpha)=1\}$.
Το ένα από τα δύο ανωτέρω σύνολα που η ένωσή τους ισούται με κ ανήκει υποχρεωτικά στο U(επειδή U υπερφίλτρο). Έστω X_α αυτό το σύνολο($X_\alpha \in U$).
Επειδή το U είναι κ-πλήρες $X= \cap_{\alpha<\lambda} X_\alpha \in U$ και άρα για κάθε $\xi\in X$ $f(\xi)(\alpha)=i_\alpha$ για κάθε $\alpha < \lambda$ (όπου i_α ισούται με 0 ή 1 ανάλογα ποιο X_α ανήκει στο U).

Επειδή όμως η f: $\kappa \to 2^\lambda$ είναι 1-1 το $\xi \in X$ είναι μοναδικό δηλαδή το X είναι αναγκαστικά μονοσύνολο. Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί το U είναι μη τετριμμένο.
Συνεπώς ο κ είναι κανονικός και strong limit δηλαδή inaccessible. $\therefore$

Ορισμός: Ένα υπερφίλτρο U στο $\kappa > \omega$ λέγεται *normal* αν είναι μη τετριμμένο, κ-πλήρες και για κάθε συνάρτηση f: $\kappa \to \kappa$:

$$\{\xi \in \kappa : f(\xi) < \xi\} \in U \Leftrightarrow \text{υπάρχει ένα } \lambda_0 < \kappa \text{ τέτοιο ώστε}$$
$$\{\xi \in \kappa : f(\xi) = \lambda_0\} \in U$$

Επειδή κάθε measurable πληθάριθμος έχει ένα *normal* υπερφίλτρο (για περισσότερες λεπτομέρειες βλ. Μοσχοβάκης 2009) το παρακάτω θεώρημα έχει ως συνέπεια το γεγονός ότι ένας measurable είναι και weakly compact.

Θεώρημα (Rowbottom): Αν κ measurable και U είναι ένα normal υπερφίλτρο στο κ τότε για κάθε f: $[\kappa]^{<\omega} \to \lambda$ με $\lambda < \kappa$ υπάρχει ένα σύνολο στο U που είναι ομογενές (*homogeneous)* για την f.
Απόδειξη: Για κάθε $n \in \omega$ αν υπάρχουν σύνολα $X_n \in U$ homogeneous για την $f \restriction [\kappa]^n$, τότε επειδή το U είναι κ-πλήρες θα ισχύει ότι $\bigcap_{n \in \omega} X_n \in U$ το οποίο και είναι το homogeneous για την f που «ψάχνουμε» .
Αρκεί άρα να δείξουμε ότι για κάθε $n \geq 1$ και για κάθε F: $[\kappa]^n \to \lambda$ με $\lambda < \kappa$ υπάρχει ένα σύνολο που να ανήκει στο φίλτρο και να είναι homogeneous για την F. Κάνουμε επαγωγή.
Στην περίπτωση που $n=1$ είναι σαφές ότι το ζητούμενο ισχύει εξαιτίας της κ-πληρότητας του U.
Προχωρώντας επαγωγικά υποθέτουμε ότι ισχύει για $n \geq 1$
και έστω F: $[\kappa]^{n+1} \to \lambda$, όπου $\lambda < \kappa$.
Για κάθε σταθεροποιημένο $\xi < \kappa$, ορίζουμε μια διαμέριση (partition) του $[\kappa]^n$, μέσω της:

$$F_\xi : [\kappa]^n \to \lambda \text{ η οποία ορίζεται}$$

από τις σχέσεις:

$$F_\xi(A) = F(\{\xi\} \cup A) \quad \text{αν } \xi \notin A,$$
$$F_\xi(A) = 0 \qquad\qquad \text{αν } \xi \in A$$

και από την επαγωγική υπόθεση επιλέγουμε ένα I_ξ στο U που να είναι homogeneous για την F_ξ. Κατόπιν θέτουμε:

$$G(\xi) = F_\xi(A) \text{ για κάθε } A \in [I_\xi]^n$$

Επειδή G: $\kappa \rightarrow \lambda$ από την κ-πληρότητα του U συνεπάγεται ότι υπάρχει ένα σύνολο $J \subseteq \kappa$ στο U και ένας διατακτικός $\lambda_0 < \lambda$ τέτοιος ώστε:

$$\xi \in J \Rightarrow G(\xi) = \lambda_0$$

Στη συνέχεια θέτουμε: $I'_\xi = J \cap I_\xi$ και επειδή το U είναι normal μπορούμε να ορίσουμε το I να είναι η διαγώνια τομή (diagonial intersection) των I'_ξ :

$$\lambda \in I \Leftrightarrow \lambda \in J \ \wedge \ (\forall \xi < \lambda)\ (\lambda \in I_\xi)$$

Τώρα δεδομένου ενός $A \in [\,I\,]^{n+1}$, έστω ξ το ελάχιστο μέλος του και έστω $B = A \backslash \{\xi\}$. Τότε θα είναι $B \subseteq I_\xi$ γιατί αν $\lambda \in B$ τότε $\lambda \in I$ και επειδή $\xi < \lambda$ συνεπάγεται ότι $\lambda \in I_\xi$. Επομένως:

$$\begin{aligned} F(A) &= F_\xi(B) && \text{από τον ορισμό της } F_\xi \\ &= G(\xi) && \text{εφόσον } A \subseteq I_\xi \\ &= \lambda_0 && \text{αφού } \xi \in J \end{aligned}$$

Συνεπώς η F είναι σταθερή για όλα τα $A \in [\,I\,]^{n+1}$.
Άρα το I είναι homogeneous για την F. ∴

Πόρισμα: Αν κ measurable ⇒ κ weakly compact.
Αυτό φαίνεται άμεσα από το Θεώρημα του Rowbottom για $\lambda=2$.

Η εισαγωγή των weakly compact και το γεγονός ότι ένας measurable συγκεντρώνει τις ιδιότητες τους έδωσε λύση στο πρόβλημα αν ο ελάχιστος inaccessible πληθάριθμος μπορεί να είναι measurable. Επειδή ένας weakly compact έχει πάντα από κάτω του έναν inaccessible το ερώτημα απαντήθηκε αρνητικά. Αποτέλεσε παρόλα αυτά ένα άλυτο πρόβλημα για 30 χρόνια, για κάτι που με την εισαγωγή νέων σύγχρονων τεχνικών θεωρείται μάλλον αυτονόητο. Στην πραγματικότητα υπάρχουν άπειροι inaccessible κάτω από τον ελάχιστο measurable. Αυτό προκύπτει και από την «ανακλαστική φύση» που έχουν οι μεγάλοι πληθάριθμοι. Η επόμενη πρόταση καταδεικνύει ακριβώς αυτό:

Πρόταση: Έστω κ measurable. Τότε υπάρχει υπερφίλτρο U στο κ τέτοιο ώστε: $\{\alpha < \kappa : \text{«ο } \alpha \text{ είναι inaccessible»}\} \in U$.

Υπάρχουν αποτελέσματα που χρησιμοποιούν measurable πληθάριθμους και είναι ενδεικτικά για τις ανακλαστικές ιδιότητες που εμφανίζουν οι μεγάλοι πληθάριθμοι.

Ορισμός: Ο πληθάριθμος κ λέγεται **ανακλαστικός** για μία ιδιότητα Φ αν για κάθε δομή Α δεδομένου ότι Φ(Α) ισχύει έπεται ότι υπάρχει υποδομή Β⊆Α με |Β|<κ και Φ(Β) ισχύει.

Το θέμα είναι ότι ανάλογα την «πολυπλοκότητα» ως προς την τυπική εκφρασιμότητα της ιδιότητας Φ μπορούμε να βρούμε το αντίστοιχο αξίωμα μεγάλου πληθαρίθμου που να είναι ανακλαστικός για την Φ. Φυσικά αυτή η ιδιότητα Φ δεν υποχρεούται να προέρχεται από το πεδίο της συνολοθεωρίας. Η ανακλαστική φύση των μεγάλων πληθαρίθμων έχει εφαρμογή σε ιδιότητες από πεδία όπως οι Άλγεβρα, η Τοπολογία, η Θεωρία Γραφημάτων κ.α.

Τέλος, όπως αναφέρθηκε στην εισαγωγή, η σύνδεση των μεγάλων πληθαρίθμων με την προσδιοριστότητα των παιγνίων (determinacy of games) έδωσε την κατάλληλη ερμηνεία σε θέματα ως προς την ισχύ συνέπειας (consistency strength) της εξασφάλισης των regularity properties των προβολικών συνόλων του $\mathbb{R}$. Το θεώρημα του Martin: *αν υπάρχει measurable πληθάριθμος τότε τα παιχνίδια στα αναλυτικά υποσύνολα του* $\mathbb{R}$ *είναι προσδιοριστά* **[Det($\boldsymbol{\Sigma}_1^1$)]**, άνοιξε το δρόμο ως προς τη δυνατότητα να έχουμε ολοένα και «περισσότερη» determinacy από τους μεγάλους πληθαρίθμους.

Κεφάλαιο 3. Άπειρα Παιχνίδια

Οι έννοιες των άπειρων παιχνιδιών (infinite games), της νικηφόρας στρατηγικής (winning strategy) και της προσδιοριστότητας (determinacy) έχουν τις ρίζες τους στην ανάλυση υπαρκτών (εμπειρικών) παιχνιδιών. Με τη σύνδεσή τους, όμως, με τις ιδιότητες κανονικότητας (regularity properties) των υποσυνόλων των πραγματικών αριθμών και μετέπειτα με τα αξιώματα μεγάλων πληθαρίθμων καθιερώθηκαν ως κυρίαρχο αντικείμενο μελέτης της (περιγραφικής) θεωρίας συνόλων.

3.1 Άπειρο παιχνίδι τέλειας πληροφορίας

Έστω X ένα μη κενό σύνολο. Για A ⊆ ${}^{\omega}X$, το $G_X(A)$ συμβολίζει το εξής ''άπειρο παιχνίδι τέλειας πληροφορίας'' δύο παικτών ως εξής:

Υπάρχουν δύο παίκτες ο *I* και ο *II.* Ο *I* αρχικά διαλέγει ένα x(0)∈X, στη συνέχεια ο *II* διαλέγει ένα x(1)∈X, μετά ο *I* διαλέγει ένα x(2)∈X, μετά ο *II* διαλέγει ένα x(3)∈X και ούτω καθεξής:

I :	x(0)		x(2)		…
II:		x(1)		x(3)	…

Κάθε επιλογή είναι μια *κίνηση* στο παιχνίδι και ο κάθε παίκτης γνωρίζει όλες τις προηγούμενες κινήσεις (τέλεια πληροφορία) πριν κάνει την επόμενη κίνησή του. Το αποτέλεσμα όλων των κινήσεων θα είναι ένα x ∈ ${}^{\omega}X$, ένα τέτοιο x λέγεται και **παρτίδα** (play) του παιχνιδιού, ενώ κάθε αρχικό τμήμα του x λέγεται μία **μερική παρτίδα** (partial play). Ο *I* κερδίζει το παιχνίδι αν το x ∈ A, αλλιώς κερδίζει ο *II.* Το A είναι το **σύνολο επιτυχίας** (payoff set) του παιχνιδιού $G_X(A)$.

Μία **στρατηγική** για τον *I* είναι μία συνάρτηση σ: $\bigcup_{n\in\omega} {}^{2n}X \to X$ που του λέει τι κίνηση να κάνει δεδομένων των προηγούμενων κινήσεων, και άρα μια (μερική) παρτίδα σύμφωνα με την σ είναι μία (μερική) παρτίδα της μορφής :

I : σ(∅)   σ(<σ(∅), y(0)>)   σ(<σ(∅), y(0), σ(<σ(∅), y(0)>), y(1)>)

II: y(0)   y(1)   …

Όπου τα y ∈ $^{\omega}$X αποτελούν τις κινήσεις του II και η παρτίδα περιγράφεται από τον συμβολισμό : σ⁎y.

Η σ λέγεται ***νικηφόρα στρατηγική*** για τον I αν και μόνο αν {σ⁎y : y ∈ $^{\omega}$X} ⊆ A , δηλαδή όλες οι παρτίδες που παίζονται σύμφωνα με την σ καταλήγουν σε ένα αποτέλεσμα που ανήκει πάντα στο A, ανεξαρτήτως από το τι κινήσεις θα κάνει ο II. Ανάλογα, μια **στρατηγική** για τον II είναι μία συνάρτηση τ:$\bigcup_{n\in\omega}$ $^{2n+1}$X→X και άρα μια (μερική) παρτίδα σύμφωνα με την τ είναι μία (μερική) παρτίδα της μορφής :

I : z(0)   z(1)   …

II: τ(<z(0)>)   τ(<z(0), τ(<z(0)>), z(1)>)

για κάποιο z ∈ $^{\omega}$X και η παρτίδα συμβολίζεται ως : z⁎τ .

Η τ είναι μία **νικηφόρα στρατηγική** για τον II αν και μόνο αν {z⁎τ : z ∈ $^{\omega}$X} ∩ A=∅ .

Επειδή για κάθε στρατηγική σ του I η συνάρτηση που στέλνει το y ∈ $^{\omega}$X στο σ⁎y∈$^{\omega}$X είναι 1-1, ο I δεν μπορεί να έχει μία νικηφόρα στρατηγική αν |A|<|X|$^{\omega}$. Τα αντίστοιχα σχόλια ισχύουν για τον II και το |$^{\omega}$X\A|.

Για x ∈ $^{\omega}$X μπορούμε να ορίσουμε τις κινήσεις των δύο παικτών x_I, x_{II} ∈ $^{\omega}$X ως:

$$x_I(i)=x(2i) \text{ και}$$

$$x_{II}(i)=x(2i+1).$$

Αν σ είναι μία στρατηγική για τον I όπως ορίστηκε προηγουμένως και y ∈ $^{\omega}$X τότε $(σ⁎y)_{II}$ =y, και αν τ είναι μία στρατηγική για τον II και z ∈ $^{\omega}$X τότε $(z⁎τ)_I$ =z.

Τελικά, ένα παιχνίδι $G_X(A)$ λέγεται **προσδιοριστό** *(determined)* αν και μόνο αν ο ένας από τους δύο παίκτες έχει νικηφόρα στρατηγική (η περίπτωση να έχουν και οι δύο νικηφόρα στρατηγική είναι προφανώς αδύνατη). Ένα σύνολο επιτυχίας Α λέγεται **προσδιοριστό** αν το αντίστοιχο παιχνίδι είναι προσδιοριστό και επειδή για λόγους συντομίας παίρνουμε την ειδική (αλλά βασική) περίπτωση X=ω και $A\subseteq{}^{\omega}\omega$: το Α λέγεται **προσδιοριστό** αν και μόνο αν το $G_{\omega}(A)$ είναι προσδιοριστό. Μπορούμε, δηλαδή, να θεωρήσουμε το Α ως ένα υποσύνολο του χώρου Baire.

3.2 Προσδιοριστότητα και σύνολα πραγματικών αριθμών

Η προσδιοριστότητα των παιγνίων συνδυάστηκε με επιτυχία σε σχέση με τις ιδιότητες κανονικότητας των συνόλων των πραγματικών αριθμών. Υπάρχουν διάφορα παιχνίδια που το καθένα από αυτά είναι άμεσα συνδεδεμένο με ιδιότητα κανονικότητας π.χ. την **ιδιότητα του Baire**, την **ιδιότητα του τέλειου συνόλου** και την **Lebesgue μετρησιμότητα** αντίστοιχα.

Ο Banach και ο μαθητής του Stanislaw Mazur παρουσίασαν το 1935 ένα παιχνίδι που το αν είναι προσδιοριστό ή όχι σχετίζεται άμεσα με την ιδιότητα του Baire. Το παιχνίδι ορίζεται ως εξής :

Για $A\subseteq{}^{\omega}\omega$ το παιχνίδι συμβολίζεται $G_{\omega}^{**}(A)$ και λειτουργεί σύμφωνα με την προηγούμενη ορολογία με την διαφορά ότι οι παίκτες αντί να διαλέγουν στοιχεία του ω διαλέγουν στοιχεία του ${}^{<\omega}\omega \setminus \{\emptyset\}$:

I :	s_0		s_2		...	
II:		s_1		s_3		...

Το αποτέλεσμα x του παιχνιδιού είναι η *παράθεση (concatenation)* των κινήσεων $s_0 \frown s_1 \frown s_2 \frown s_3 \ldots$ και ο I κερδίζει αν το $x \in A$ αλλιώς κερδίζει ο II.

Ένα παιχνίδι σαν αυτό ονομάζεται προς τιμή των δημιουργών του Banach-Mazur game.

Οι Banach και Mazur έδειξαν πως αν στο ομώνυμο παιχνίδι τους ο παίκτης II έχει νικηφόρα στρατηγική τότε το σύνολο επιτυχίας Α είναι *ισχνό (meager),* δηλαδή μπορεί να γραφεί ως αριθμήσιμη ένωση πουθενά πυκνών υποσυνόλων του ${}^{\omega}\omega$, αλλιώς αν ο παίκτης I έχει νικηφόρα στρατηγική τότε το Α έχει ισχνό συμπλήρωμα στο ανοικτό $O_{(s)}$ για κάποιο $s \in {}^{<\omega}\omega$. Αυτό το αποτέλεσμα έχει ως πόρισμα ότι με την κατάλληλη μετατροπή μπορούμε να ελέγξουμε το αν ένα σύνολο έχει την ιδιότητα του Baire ανάλογα με το αν το Banach-Mazur game είναι προσδιοριστό:

Για $A \subseteq {}^{\omega}\omega$ θέτουμε $O_{(s)}=\{x \in {}^{\omega}X : s \subseteq x\}$ και

$$O_A = \cup\{ O_{(s)} : s \in {}^{<\omega}\omega \ \wedge O_{(s)} \setminus A \text{ είναι ισχνό}\}$$

Τότε, αν το $G_{\omega}^{**}(A \setminus O_A)$ είναι προδιοριστό, το A έχει την ιδιότητα του Baire.

Το παιχνίδι για την ιδιότητα του τέλειου συνόλου βασίζεται στο X=2 (Χώρος Cantor). Για $A \subseteq {}^{\omega}2$, το $G_2^{*}(A)$ είναι το παιχνίδι που σχηματίζεται ως εξής: ο *I* διαλέγει στοιχεία από το ${}^{<\omega}2$ και ο *II* από το {0,1}:

I :	s_0		s_2		...
II:		k_1		k_3	...

Το αποτέλεσμα x του παιχνιδιού είναι, όπως πριν, η *παράθεση (concatenation)* των κινήσεων $s_0 \frown \langle k_1 \rangle \frown s_2 \frown \langle k_3 \rangle \ldots$ και ο *I* κερδίζει αν το $x \in A$ αλλιώς κερδίζει ο *II*. Στον τοπολογικό χώρο Cantor ${}^{\omega}2$ και με βασικά ανοικτά σύνολα $O_{(s)}=\{x \in {}^{\omega}2 : s \subseteq x\}$ για $s \in {}^{<\omega}2$, ένα τέλειο σύνολο ορίζεται ως συνήθως ως ένα μη κενό, κλειστό και χωρίς μεμονωμένα σημεία σύνολο.

Ο Morton Davis (1964) έδειξε πως σε ένα τέτοιο παιχνίδι $G_2^{*}(A)$ αν ο *II* έχει νικηφόρα στρατηγική το A είναι αριθμήσιμο και αν ο *I* έχει νικηφόρα στρατηγική τότε το A έχει τέλειο υποσύνολο. Αυτό το αποτέλεσμα έχει επίσης ως πόρισμα ότι με την κατάλληλη μετατροπή μπορούμε να ελέγξουμε αν ένα σύνολο έχει την ιδιότητα του τέλειου συνόλου ανάλογα με το αν το παιχνίδι G_2^{*} είναι προσδιοριστό.

Οι πολωνοί μαθηματικοί Jan Mycielski και Stanislaw Swierczkowski(1964) κατασκεύασαν ένα παιχνίδι, το οποίο στην πορεία απλοποιήθηκε από τον Leo Harrington, σχετικό με την Lebesgue μετρησιμότητα. Στο παιχνίδι αυτό, όπως και προηγουμένως, η ιδιότητα ένα σύνολο να είναι **Lebesgue μετρήσιμο** ανάγεται στην ιδιότητα ενός συγκεκριμένου παιχνιδιού να είναι προσδιοριστό (για περισσότερες λεπτομέρειες πάνω στην δημιουργία των παραπάνω παιχνιδιών βλ. A.Kanamori 1994).

Στους μαθηματικούς κύκλους της Πολωνίας το ενδιαφέρον για τα άπειρα παιχνίδια ήταν πολύ έντονο. Η ικανότητα να αποδειχθούν οι ιδιότητες κανονικότητας των συνόλων των πραγματικών μέσω της προσδιοριστότητας του αντίστοιχου παιχνιδιού οδήγησε τους Mycielski και Hugo Steinhaus να προτείνουν, ήδη από το 1962, το ακόλουθο αξίωμα:

(AD) Κάθε σύνολο πραγματικών είναι προσδιοριστό.

Το αξίωμα αυτό έμεινε γνωστό ως **Αξίωμα Προσδιοριστότητας** (Axiom of Determinacy). Με την χρήση του είναι δυνατό να αποδειχθεί το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Θεώρημα: Υποθέτοντας το AD κάθε σύνολο πραγματικών αριθμών είναι Lebesgue μετρήσιμο, έχει την ιδιότητα του Baire και την ιδιότητα του τέλειου συνόλου.

Επειδή, όπως είναι φανερό, το AD έρχεται σε αντίθεση με το αξίωμα της επιλογής, η χρήση του τέθηκε αρχικά στο περιθώριο. Ο σκοπός άλλωστε των εισηγητών του δεν ήταν να αναθεωρήσουν την ZFC αλλά να προτείνουν την εύρεση κάποιας υποκλάσης (εσωτερικό μοντέλο) του συνολοθεωρητικού σύμπαντος για το οποίο ισχύουν οι ιδιότητες κανονικότηας στα σύνολα των πραγματικών. Σχετικά σύντομα όμως, δύο αποτελέσματα των Solovay και David Blackwell αντίστοιχα το ξανάφεραν στο προσκήνιο. Στο πρώτο ο Solovay έδειξε ότι το AD συνεπάγεται ότι ο ω_1 είναι measurable, ένα αποτέλεσμα με απρόσμενες συνέπειες για την θεωρία των μεγάλων πληθαρίθμων. Στο δεύτερο ο Blackwell κατάφερε να δημιουργήσει μια κομψή απόδειξη για ένα γνωστό θεώρημα της κλασσικής Περιγραφικής Θεωρίας συνόλων χρησιμοποιώντας την έννοια της προσδιοριστότητας των παιγνίων. Η απόδειξη αυτή έδωσε επιπλέον ώθηση στην χρήση και στην επέκταση των μεθόδων που βασίζονται στην προσδιοριστότητα. Παρόλα αυτά το μέγεθος της προσδιοριστότητας που μπορεί να αποδειχθεί από την ZFC παρέμενε, προς το παρόν, ανοικτό.

3.3 Προσδιοριστότητα και ZFC

Πριν ακόμα αποδειχθεί η σύνδεση της προσδιοριστότητας με την Lebesgue μετρησιμότητα και την επαγόμενη αντίθεση του AD με το AC, οι David Gale και Frank Stewart είχαν δείξει (1953) ότι υπό το AC υπάρχει ένα σύνολο πραγματικών το οποίο δεν είναι προσδιοριστό. Οπότε ήταν ήδη γνωστό ότι η ZFC είχε σίγουρα κάποιο φράγμα μέχρι το οποίο μπορούσε να παρέχει προσδιοριστότητα σε παιχνίδια που ενέπλεκαν σύνολα πραγματικών αριθμών. Το θέμα ήταν μέχρι σε ποιο σημείο εκτεινόταν η αποδεικτική ισχύς της ZFC σε αυτό το πλαίσιο.

Οι Gale και Stewart μελέτησαν πότε σε ένα παιχνίδι $G_X(A)$ το A είναι ανοιχτό και πότε κλειστό. Για X μη κενό και s ∈ $^{<\omega}$X θεωρούμε το $O_{(s)}$={x ∈ $^{\omega}$X : s⊆x}. Ένα σύνολο επιτυχίας A ⊆ $^{\omega}$X θα λέγεται *ανοιχτό* αν και μόνο αν μπορεί να γραφτεί ως η ένωση από $O_{(s)}$, και θα λέγεται *κλειστό* αν και μόνο αν το $^{\omega}$X\A είναι ανοιχτό. Με την διακριτή τοπολογία στο X, τα παραπάνω αποτελούν τις έννοιες του ανοιχτού και κλειστού στην τοπολογία γινόμενο και είναι συνεπή με την περίπτωση X=ω. Με βάση αυτόν τον ορισμό οι Gale και Stewart κατάφεραν να δείξουν ότι όλα τα ανοιχτά καθώς και όλα τα κλειστά παιχνίδια είναι προσδιοριστά στην ZFC.

Πρόταση (Gale-Stewart 1953): Αν το A ⊆ $^{\omega}$X είναι είτε ανοιχτό είτε κλειστό, τότε το $G_X(A)$ είναι προσδιοριστό.

Έχοντας αυτό το αποτέλεσμα, έθεσαν το ερώτημα κατά πόσον μπορεί να αποδειχθεί ότι όλα τα Borel σύνολα πραγματικών είναι προσδιοριστά. Σύντομα, το 1955, ο Philip Wolfe απέδειξε πως και τα σύνολα της δεύτερης βαθμίδας στην ιεραρχία των Borel (τα $\boldsymbol{\Sigma}_2^0$, δηλαδή οι αριθμήσιμες ενώσεις κλειστών συνόλων) είναι προσδιοριστά. Ύστερα από σχεδόν μία δεκαετία, το 1964, ο Davis έδειξε πως και τα σύνολα της επόμενης βαθμίδας στην ιεραρχία των Borel ($\boldsymbol{\Sigma}_3^0$ δηλαδή οι αριθμήσιμες ενώσεις των συμπληρωμάτων των Σ_2^0) είναι προσδιοριστά. Στη συνέχεια ο Harvey Friedman έδειξε ότι κάθε απόδειξη της Borel προσδιοριστότητας προϋποθέτει την χρήση του αξιώματος της αντικατάστασης με ουσιώδη τρόπο, έτσι ώστε να μπορούμε να επαναλάβουμε το αξίωμα του δυναμοσυνόλου υπερπεπερασμένα το πλήθος πολλές φορές. Η εργασία του Friedman μας δίνει μια διαστρωμάτωση αποτελεσμάτων που εξηγούν πόσες επαναλήψεις του αξιώματος του δυναμοσυνόλου απαιτούνται για την εξασφάλιση της προσδιοριστότητας σε κάθε επίπεδο της Borel ιεραρχίας. Τελικά το 1974 ο Martin, συμπληρώνοντας το έργο του Friedman, απέδειξε πως όλα τα σύνολα Borel είναι προσδιοριστά. Το αποτέλεσμα αυτό απέδειξε και τη μέγιστη δυνατότητα προσδιοριστότητας που απορρέει από την ZFC. Αυτό γιατί ο Martin είχε ήδη δείξει από το 1970 ότι η προσδιοριστότητα του αμέσως επόμενου επιπέδου από τα Borel σύνολα στην προβολική ιεραρχία, των αναλυτικών, προϋποθέτει την ύπαρξη ενός αξιώματος μεγάλου πληθαρίθμου και από την άλλη ο Leo Harrington έδειξε το 1978 ότι ήταν και απαραίτητη.

3.4 Αναλυτική Προσδιοριστότητα

Ο Martin παρουσίασε το 1970 ένα αποτέλεσμα που όπως προαναφέρθηκε κατέδειξε τελικά το όριο από όπου και πέρα η ZFC δεν είναι ικανή να αποδείξει την προσδιοριστότητα ενός συνόλου.

Θεώρημα(Martin): Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας measurable πληθάριθμος. Τότε, όλα τα αναλυτικά παιχνίδια είναι προσδιοριστά.

Η απόδειξη του θεωρήματος θα βασιστεί στην χρήση δύο προγενέστερων θεωρημάτων. Του βασικού θεωρήματος αναπαράστασης των co-analytic συνόλων ($\boldsymbol{\Pi}_1^1$), των συνόλων δηλαδή που είναι συμπληρώματα αναλυτικών, και του θεωρήματος του Rowbottom που παρουσιάσθηκε στην ενότητα 2.3.
Το πρώτο Θεώρημα (Luzin-Sierpiski 1923, Kleene 1955) μας λέει ότι: Για $A \subseteq {}^{\omega}\omega$ το A είναι $\boldsymbol{\Pi}_1^1$ αν και μόνο αν υπάρχει ένα δέντρο T στο ω x ω τέτοιο ώστε για κάθε $x \in {}^{\omega}\omega$,

$$x \in A \leftrightarrow T(x) \text{ είναι καλά θεμελιωμένο (well-founded)},$$

όπου $T(x)=\{u \in \omega^{<\omega} : (x\restriction|u|,u) \in T\}$.

Σημείωση: Ένα δέντρο λέγεται well-founded αν και μονό αν δεν έχει άπειρο κλαδί.

Με αυτό τον τρόπο σε κάθε $\boldsymbol{\Pi}_1^1$ σύνολο A έχουμε ένα αντίστοιχο δέντρο T. Περεταίρω υπάρχει ένας διατακτικός η(x) που «φανερώνει» το γεγονός ότι το T(x) είναι well-founded. Αν και οι Luzin-Sierpiski επικεντρώθηκαν περισσότερο στην πλευρά των καλών διατάξεων ενώ ο Kleene στην πλευρά των διατακτικών, όλοι τους στόχευσαν στην «γραμμικοποιήση» δέντρα. Το πέτυχαν αυτό χρησιμοποιώντας μια διάταξη που ενώ πρωτοεμφανίστηκε στην εργασία των πρώτων έμεινε γνωστή ως διάταξη *Kleene-Brouwer* :
Για s,t ∈ $^{<\omega}$ON,

$s <_{KB} t$ αν και μόνο αν είτε t ⊂ s είτε
για το ελάχιστο i τέτοιο ώστε s(i)≠t(i), s(i)<t(i).

Η διάταξη *Kleene-Brouwer* είναι μία γνήσια ολική διάταξη στο $^{<\omega}\omega$.

Οι Luzin-Sierpiski έδειξαν επίσης ότι αν S ⊆ $^{<\omega}\omega$ είναι δέντρο τότε το S είναι καλά θεμελιωμένο (δηλαδή κάθε κλαδί του είναι πεπερασμένο) αν και μόνο αν είναι καλώς διατεταγμένο από την $<_{KB}$.

Το δεύτερο θεώρημα, του Rowbottom, μας εξασφαλίζει ότι η ύπαρξη ενός measurable πληθάριθμου κ συνεπάγεται ότι για κάθε οικογένεια $\{f_i\}_{i\in\omega}$ συναρτήσεων $f_i : [\kappa]^{<\omega} \to \omega$, υπάρχει ένα X ⊆ κ με πληθικότητα $\aleph_1$ που είναι μονοχρωματικό για όλες τις f_i, δηλαδή κάθε f_i είναι σταθερή στο $[X]^{<\omega}$.

Απόδειξη (θεωρήματος Martin)**:**

Όπως ήδη αναφέραμε, η Kleene-Brouwer διάταξη $<_{KB}$ είναι μια αυστηρή γραμμική διάταξη στο $\omega^{<\omega}$ εφοδιασμένη με την ιδιότητα ότι για κάθε δέντρο S ⊆ $\omega^{<\omega}$, το S είναι καλά θεμελιωμένο αν και μόνο αν είναι καλώς διατεταγμένο από την $<_{KB}$ το οποίο συμβαίνει αν και μόνο αν το (S, $<_{KB}$) εμφυτεύεται στο (ω_1,<).

Σταθεροποιούμε μία απαρίθμηση u_0,u_1,u_2.... στο $\omega^{<\omega}$ έτσι ώστε $|u_n|\leq n$.

Υποθέτουμε τώρα ότι το A είναι ένα αναλυτικό υποσύνολο του χώρου Baire και έστω T ένα δέντρο στο ω x ω τέτοιο ώστε:

$$x \in A \Leftrightarrow \exists y \in \omega^{\omega}\ (x,y) \in [T],$$

όπου [T] είναι τα άπειρα κλαδιά του δέντρου (το σώμα του δέντρου), δηλαδή:

$$x \notin A \Leftrightarrow (T(x), <_{KB}) \text{ εμφυτεύεται στο } (\omega_1, <)$$

όπου $T(x)=\{u \in \omega^{<\omega} : (x\restriction|u|, u) \in T\}$.

Θα δείξουμε ότι το παρακάτω παιχνίδι $G_{\omega}(A)$, στο οποίο οι παίκτες I και II παίζουν διαδοχικά $x(i) \in \omega$, είναι προσδιοριστό.

I :	x(0)		x(2)		…
II:		x(1)		x(3)	…

Σε αυτό το παιχνίδι ο II κερδίζει μία παρτίδα του παιχνιδιού αν $x=(x(0),x(1),x(2)...) \notin A$.

Για να πετύχουμε αυτό θα εισάγουμε ένα άλλο παιχνίδι το $G^{*}_{\omega}(A)$ στο οποίο οι παίκτες I και II παίζουν διαδοχικά $x_I(i)=x(2i) \in \omega$ και $x_{II}(i) = <x(2i+1),\eta(i)> \in \omega x \kappa$.

I :	x(0)		x(2)		…
II:		x(1),η(0)		x(3),η(1)	…

Σε αυτό το παιχνίδι ο I και ο II παίζουν φυσικούς x(i) για σχηματίσουν πάλι έναν πραγματικό αριθμό x, αλλά ό II παίζει επιπλέον διατακτικούς $\eta(i)<\kappa$ ώστε να σχηματίσει μία συνάρτηση $\eta: \omega \rightarrow \kappa$. Ο II κερδίζει μία παρτίδα αν τα επόμενα ισχύουν:

$$\eta(i)=0 \text{ για } u_i \notin T(x) \qquad (1)$$

$$u_i <_{KB} u_j \Leftrightarrow \eta(i)<\eta(j) \text{ για όλα τα } u_i, u_j \in T(x). \qquad (2)$$

Με αυτό τον τρόπο, αν ο II κερδίζει μία παρτίδα στο $G^{*}_{\omega}(A)$ τότε όχι μόνο το T(x) είναι καλά θεμελιωμένο και συνεπώς $x \notin A$ αλλά ο II έχει κατασκευάσει και μια εμφύτευση του $(T(x), <_{KB})$ στο $(\kappa,<)$. Επομένως, αν ο II έχει μια νικηφόρα στρατηγική στο $G^{*}_{\omega}(A)$ τότε έχει και μία νικηφόρα στρατηγική στο $G_{\omega}(A)$: απλώς κρατάει τα η(i) για τον εαυτό του και παίζει μόνο τα x(2i+1).

Στο $G^{*}_{\omega}(A)$, αντίθετα με το $G_{\omega}(A)$, είναι σίγουρο ότι αν ο II χάνει τότε χάνει αναπόφευκτα σε κάποιο πεπερασμένο γύρω του παιχνιιού: θα έχει κάνει κάποια κίνηση (x(2i+1),η(i)) για κάποιο i>0 τέτοια ώστε είτε η(i)≠0 ενώ $u_i \notin T(x)$, είτε η επιλογή η(i) δεν θα διατηρεί την $<_{KB}$ και αυτό μπορεί να φανεί στις κινήσεις και των δύο παικτών μέχρι αυτόν τον γύρο του παιχνιδιού (εφόσον $|u_i| \leq i < 2i+1$). Επομένως το $G^*_\omega(A)$ είναι ένα ανοιχτό παιχνίδι και άρα από την πρόταση Gale –Stewart (3.3) είναι προσδιοριστό.

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι αν ο I έχει μια νικηφόρα στρατηγική σ* στο $G^*_\omega(A)$, το γεγονός ότι ο κ είναι measurable συνεπάγεται ότι ο I έχει και μία νικηφόρα στρατηγική σ στο $G_\omega(A)$.

Ας υποθέσουμε ότι μία τέτοια στρατηγική σ* είναι δοσμένη.

Για κάθε $s \in \omega^{2n}$ ορίζουμε το σύνολο $D_s = \{ u_i : i<n \wedge (s\restriction|u_i|, u_i) \in T\}$. Παρατηρούμε πως ισχύει ότι αν $s \subseteq t$ τότε $D_s \subseteq D_t$. Επίσης, για κάθε $x \in \omega^\omega$ έχουμε ότι :

$$u_i \in T(x) \Leftrightarrow u_i \in \cup_{s\subset x} D_s.$$

Υποθέτουμε τώρα ότι ένα $s \in \omega^{2n}$ με $|D_s|=m$ είναι δοσμένο. Τότε για κάθε $Q \in [\kappa]^m$ υπάρχει μία μοναδική συνάρτηση (ισομορφισμός διάταξης) που απεικονίζει το $i < n$ σε κάποιο $\xi_i^{s,Q} < \kappa$ τέτοια ώστε:

$$\xi_i^{s,Q} = 0 \text{ για } u_i \notin D_s$$
$$\xi_i^{s,Q} \in Q \text{ για } u_i \in D_s$$

και

$$u_i <_{KB} u_j \Leftrightarrow \xi_i^{s,Q} < \xi_j^{s,Q} \text{ για όλα τα } u_i, u_j \in D_s.$$

Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε ένα χρωματισμό $f_s: [\kappa]^m \to \omega$ ως εξής:

$$f_s(Q) = \sigma^* (s_0, s_1, \xi_0^{s,Q}, s_2, s_3, \xi_1^{s,Q}, \ldots.. s_{2n-2}, s_{2n-1}, \xi_{n-1}^{s,Q}).$$

Από το θεώρημα του Rowbottom ξέρουμε ότι μπορούμε να βρούμε ένα υποσύνολο $X \subseteq \kappa$ με πληθικότητα $\aleph_1$ το οποίο να είναι μονοχρωματικό για όλους τους χρωματισμούς των f_s με $s \in \omega^{<\omega}$ ίσου μήκους. Από αυτό συνεπάγεται ότι μπορούμε να ορίσουμε (μονοσήμαντα) μια στρατηγική σ για τον I στο $G_\omega(A)$ ως εξής:

$$\sigma (s_0, s_1, s_2, \ldots.. s_{n-2}, s_{2n-1}) = f_s(Q) = \sigma^* (s_0, s_1, \xi_0^{s,Q}, \ldots.. s_{2n-2}, s_{2n-1}, \xi_{n-1}^{s,Q})$$

για κάθε οποιαδήποτε επιλογή του $Q \in [X]^m$.

Ισχυριζόμαστε εδώ ότι η σ είναι μια νικηφόρα στρατηγική για τον I στο $G_\omega(A)$. Αυτό φαίνεται αν υποθέσουμε προς άτοπο ότι $x \notin A$ είναι το αποτέλεσμα μιας παρτίδας στο $G_\omega(A)$ όπου ο I ακολούθησε την στρατηγική σ. Πράγματι αυτό θα σήμαινε ότι το $(T(x), <_{KB})$ εμφυτεύεται στο $(\omega_1,<)$ και τότε, επειδή το X⊆κ έχει πληθικότητα $\aleph_1$, μπορούμε να βρούμε μια εμφύτευση η: $(T(x), <_{KB}) \to (X,<)$ και να επεκτείνουμε την η σε όλο το $\omega^{<\omega}$ θέτοντας η(t)=0 για $t \notin T(x)$. Γεγονός που για το παιχνίδι $G^*_\omega(A)$

I :	x(0)		x(2)		…	
II:		x(1),$\eta(u_0)$		x(3),$\eta(u_1)$		…

θα σήμαινε ότι ο I παίζει σύμφωνα με την στρατηγική σ* και πάλι χάνει, το οποίο είναι άτοπο. ∴

Κεφάλαιο 4. Επίλογος

Οι μεγάλοι πληθάριθμοι, λοιπόν, είναι άπειροι πληθικοί αριθμοί (κ) εφοδιασμένοι με ιδιαίτερες συνδυαστικές ιδιότητες, από τις οποίες συνεπάγεται ότι είναι, υπό μία έννοια, «πολύ μεγάλοι» και ότι το V_κ αποτελεί μοντέλο για τα αξιώματα της ZFC θεωρίας συνόλων. Επομένως, από το δεύτερο θεώρημα μη-πληρότητας του Godel, η ύπαρξή τους δεν μπορεί να αποδειχθεί στη ZFC. Γενικά οι υποθέσεις μεγάλων πληθαρίθμων είναι γνησίως ισχυρότερες ως προς την ισχύ συνέπειας από τη ZFC. Η χρήση τους μπορεί να λειτουργήσει μόνο ως επέκταση της θεωρίας αν τους υποθέσουμε αξιωματικά.

Οι ισχυρές συνδυαστικές και ανακλαστικές τους ιδιότητες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την κατασκευή μαθηματικών αντικειμένων (τοπολογικοί χώροι, αλγεβρικές δομές, κ.τ.λ.) με ειδικές ιδιότητες, τέτοιες που να μην αποδεικνύονται από τη ZFC. Μπορούν επίσης να χρησιμοποιηθούν για να δείξουν ότι μια πρόταση είναι ανεξάρτητη της ZFC εφόσον συνεπάγεται την ύπαρξη ή και μόνο την συνέπεια της ύπαρξης μίας υπόθεσης μεγάλου πληθαρίθμου. Από την αντίθετη κατεύθυνση τα αξιώματα μεγάλων πληθάριθμων μπορούν να επεκτείνουν τη θεωρία ώστε να μπορεί να αποφασίσει για ζητήματα που αλλιώς θα παρέμεναν «άλυτα».

Το πιο εντυπωσιακό όμως είναι ότι οι μεγάλοι πληθάριθμοι αποφασίζουν με ακρίβεια ζητήματα σχετικά με την ισχύ συνέπειας μιας ανεξάρτητης από την ZFC πρότασης. Πράγματι, είναι δημιουργούν μια ιεραρχία γραμμικά διατεταγμένοι ως προς την ισχύ συνέπεια. Τα αξιώματα αυτά δημιουργούν μια ιεραρχία, μέσω της οποίας μπορούμε να «μετρήσουμε» (συγκρίνοντας) την ισχύ συνέπειας οποιασδήποτε ανεξάρτητης συνολοθεωρητικής πρότασης. Για την ακρίβεια, οι μεγάλοι πληθάριθμοι παρέχουν ένα μέτρο ως προς την αποδεικτική ισχύ των τυπικών συστημάτων πέραν της ZFC.

Χαρακτηριστικός είναι, για παράδειγμα, ο συνδυασμός των αποτελεσμάτων του Solovay (1970) και του Shelah (1984) που έδειξαν ότι οι θεωρίες: ZFC+«υπάρχει inaccessible πληθάριθμος» και

ZF+DC+ «όλα τα υποσύνολα του ℝ είναι Lebesgue μετρήσιμα» είναι ισοσυνεπείς. Επίσης το αποτέλεσμα του Woodin ότι η θεωρία ZF+AD είναι ισοσυνεπής με τη θεωρία ZFC+ «υπάρχουν άπειροι Woodin πληθάριθμοι» έδωσε απάντηση σε ερωτήματα συνέπειας σχετικά με την προσδιοριστότητα, καθώς και τις regularity properties των υποσυνόλων του ℝ που αυτή συνεπάγεται.

Συγκεκριμένα για την προσδιοριστότητα, η σύνδεσή της με τους μεγάλους πληθαρίθμους αποτέλεσε και μεγάλη επιβεβαίωση της αξίας της εξελισσόμενης έρευνας των τελευταίων. Αυτό γιατί, ενώ η ύπαρξη μιας αρκετά ολοκληρωμένης θεωρίας για τα προβολικά σύνολα ήταν θεμελιωμένη πάνω στην προσδιοριστότητα, έμενε ανοιχτό το κατά πόσον μπορεί να αποδειχθούν υποθέσεις προσδιοριστότητας στη ZFC. Το ζήτημα αυτό ξεκαθαρίστηκε με τη χρήση των μεγάλων πληθαρίθμων.

Η συσχέτιση εύρους προσδιοριστότητας και μεγάλων πληθαρίθμων ξεκίνησε με το προαναφερθέν (στο προηγούμενο κεφάλαιο) θεώρημα του Martin. Πράγματι, το θεώρημα δείχνει ότι υπάρχει μια συνθετική σύνδεση μεταξύ των δύο, καθώς η ύπαρξη ενός μεγάλου πληθάριθμου (measurable) συνεπάγεται έναν σημαντικό βαθμό προσδιοριστότητας. Ταυτόχρονα φαίνεται ότι με αυτό τον τρόπο η ύπαρξη μεγάλων πληθαρίθμων μπορεί να λειτουργήσει περιοριστικά ως προς το πόσο «ξέφρενο» είναι το αξίωμα της επιλογής στις κατασκευές του όσον αφορά τη συμπεριφορά των υποσυνόλων του ℝ.

Το AD (όλα τα σύνολα πραγματικών είναι προσδιοριστά) συνεπάγεται την άρνηση του αξιώματος της επιλογής (AC). Συνεπώς, παρά τις ευκολίες που παρέχει στη μελέτη των προβολικών συνόλων έρχεται σε αντίθεση με τις πολλές ευεργετικές συνέπειες του αξιώματος της επιλογής στα μαθηματικά. Μια συμβιβαστική προσέγγιση θα ήταν η αποδοχή του PD (Projective Determinacy). Το PD (όλα τα προβολικά υποσύνολα του ℝ είναι προσδιοριστά) εξασφαλίζει την ισχύ όλων των regularity properties των προβολικών υποσυνόλων του ℝ και είναι συμβατό με το AC. Κατά μια έννοια «στέλνει τα σύνολα τύπου Vitali εκτός της προβολικής ιεραρχίας». Επίσης το PD έπεται άμεσα από αξιώματα μεγάλων πληθαρίθμων (ύπαρξη άπειρων Woodin πληθάριθμων). Το γεγονός αυτό μπορεί να συνδυαστεί με την άλλη κατηγορία υποψήφιων αξιωμάτων ενίσχυσης της συνολοθεωρίας, τα αξιώματα forcing, και συγκεκριμένα το θεώρημα του Todorcevic (1991): το Proper Forcing Axiom (PFA) συνεπάγεται ότι $2^{\aleph_0} = \aleph_2$. Με βάση αυτόν το συνδυασμό μπορούμε να έχουμε μια ισχυρή ενοποιημένη θεωρία (ZFC+PD+PFA), η οποία έχει πολύ λιγότερα ανεξάρτητα προβλήματα και συγχρόνως απαντάει στην Υπόθεση του Συνεχούς. Η ισχύς συνέπειας αυτής της θεωρίας μπορεί φυσικά να μετρηθεί με τη χρήση των αξιωμάτων των μεγάλων πληθαρίθμων (πιο συγκεκριμένα έπεται από την ισχύ συνέπειας ενός supercompact πληθάριθμου).

Τα αξιώματα των μεγάλων πληθαρίθμων, αν και δεν αποτελούν το πιο δημοφιλές θέμα μεταξύ των μαθηματικών, είναι ένα πεδίο σε πλήρη εξέλιξη και είναι ίσως πιο κοντά από οποιοδήποτε άλλο στο να επηρεάσει την ίδια την πορεία της μαθηματικής πρακτικής.

Μία πρόταση σύνδεσης των υποθέσεων μεγάλων πληθαρίθμων με τη φιλοσοφική αρχή της εμμένειας.

Εμμένεια με την έννοια του εν+μένω=μένω εντός. Εμμένεια σημαίνει ότι δεν υπάρχει εξωτερική θέση ως προς τη γλώσσα, τη σκέψη και το σύμπαν από την οποία να μπορείς να αποφαίνεσαι για αυτά. Το αντίθετο της εμμένειας είναι η υπερβατικότητα, με την έννοια του «κάτι έξω» από τον κόσμο-το σύμπαν.

Το επιχείρημα της εμμένειας είναι αρκετά διαδεδομένο, έστω και αν δεν χρησιμοποιείται ρητά ο όρος. Παρόλα αυτά δύο είναι οι κύριοι εκφραστές του επιχειρήματος της εμμένειας με αυτή την έννοια. Ο Baruch Spinoza με το έργο του η *Ηθική* (1665) και ο Ludwig Wingenstein με το έργο του *Tractatus Logico-philosophicus* (1921).

Ο **Spinoza** ταυτίζει τον Θεό με τη Φύση και άρα δεν υπάρχει εξωτερική θέση εκ της οποίας ο Θεός κατασκευάζει τον Κόσμο, τον ελέγχει κ.τ.λ. Είναι με αυτόν τον τρόπο πλήρως αποδεκτή η ισχύς της εμμένειας για τον Spinoza όσον αφορά τον Κόσμο - τη Φύση. Δεν υπάρχει κάτι που να υπερβαίνει τη Φύση. Οποιαδήποτε μεταβολή είναι εντός Φύσης. Οι νομοτέλειες που τη διέπουν είναι εντός φύσης και άρα δεν υπάρχει τίποτα το υπερβατικό που να έχει δημιουργήσει τη Φύση, αφού ο Θεός ταυτίζεται με αυτήν. Συνεπώς είμαστε πάντα εντός Κόσμου- Φύσης.

Ο **Wittgenstein** θεωρεί ότι η λογική οργανώνει εκ των έσω τη σκέψη, τόσο ώστε δεν μπορεί να υπάρξει μη λογική (μη λογικά διατυπωμένη) σκέψη. Σε αντίθεση με αυτό που ισχυρίζεται ο Frege (ότι μία πρόταση είναι καλά διατυπωμένη αν υπακούει στους νόμους της λογικής), ο Wittgenstein θεωρεί ότι κάθε σκέψη είναι καλά διατυπωμένη, απλώς η γλώσσα μεταμφιέζει τη σκέψη, και για αυτό το λόγο χρειάζεται να αναλυθεί. Η εμμένεια εμφανίζεται στο έργο του Wittgenstein ως έξης: η λογική είναι εντός γλώσσας και σκέψης, γεγονός που θεμελιώνει τελικά το συμπέρασμα ότι δεν υπάρχει σημείο εκφοράς για να αποφανθεί κάποιος ως προς όλες τις λογικές δυνατότητες. «Για αυτά που δεν μπορεί να μιλάει κανείς καλύτερα είναι να σωπαίνει» καταλήγει χαρακτηριστικά ο Wittgenstein.

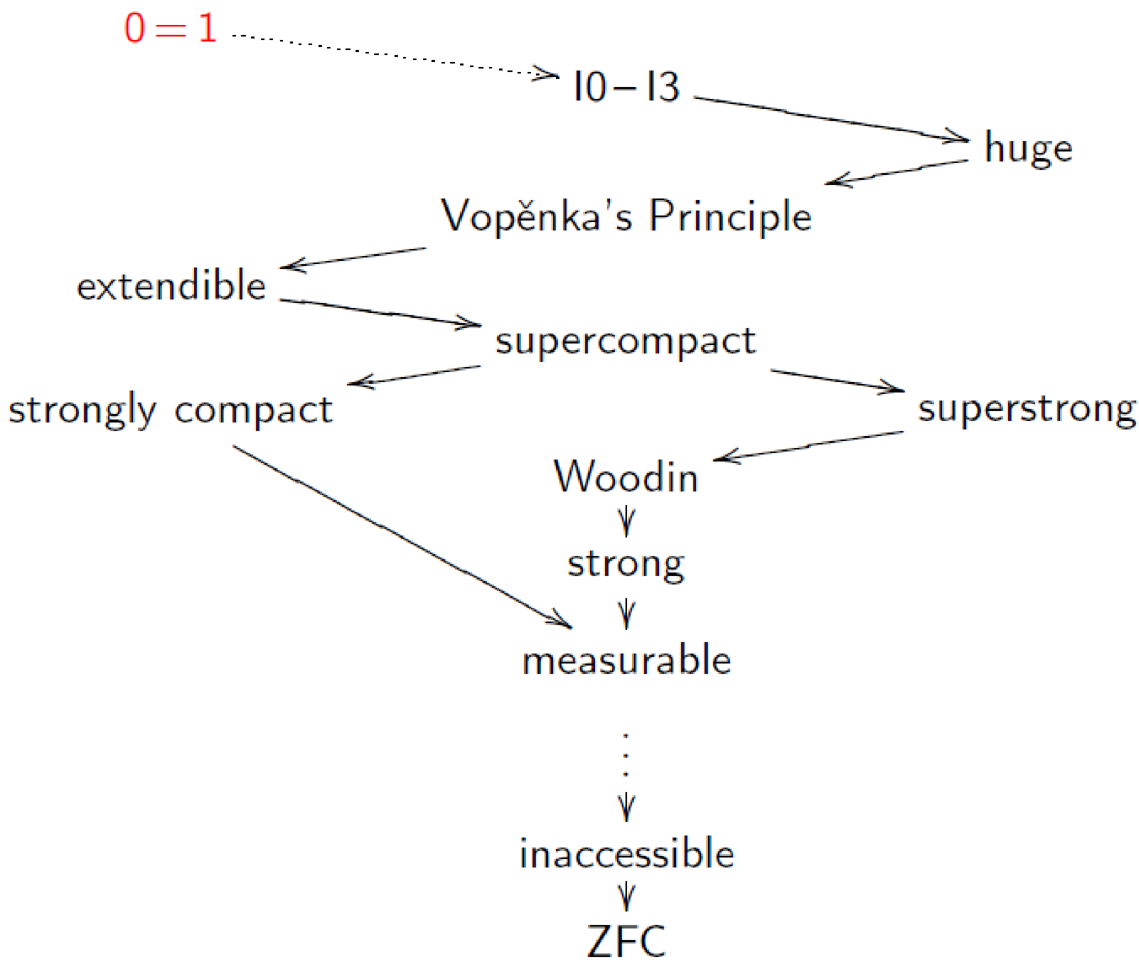
Οι θέσεις αυτές αναφέρονται σε φιλοσοφικές θεωρίες και δεν επηρεάζουν απαραίτητα επιστημονικές θεωρίες που μελετούν κάποιο αντικείμενο του κόσμου. Παρόλα αυτά η φιλοσοφία, στο βαθμό που προσπαθεί να συστηματοποιήσει την μεθοδολογική της προσέγγιση, βασίζεται στα μαθηματικά. Τα μαθηματικά από τη μεριά τους, ακουμπούν από τη μια στη φιλοσοφία για να δώσουν απαντήσεις σχετικά με το οντολογικό καθεστώς τους, και από την άλλη αποτελούν το κατεξοχήν επιστημονικό εργαλείο περιγραφής του Κόσμου. Το φαινόμενο της εμμένειας, λοιπόν, μπορεί να έχει νόημα να διαπιστωθεί σε μια μαθηματική θεωρία όπως η Θεωρία Συνόλων, η οποία αφορά, υπό μία έννοια, την ολότητα του μαθηματικού σύμπαντος.

Το φαινόμενο αυτό είναι σύνηθες στις **τυπικές μαθηματικές θεωρίες** εξαιτίας των θεωρημάτων μη πληρότητας του Gödel. Από τα θεωρήματα μη πληρότητας έπεται ότι κάθε τυπική μαθηματική θεωρία (που έχει αναδρομικό σύνολο αξιωμάτων, περιέχει ένα minimum αριθμητικής, όπως τα αξιώματα Peano, και είναι συνεπής) περιέχει προτάσεις οι οποίες είναι μη αποκρίσιμες εντός της θεωρίας, και δεν μπορεί να αποφανθεί για την ίδια την συνέπειά της. Δεν υπάρχει δηλαδή σημείο εκφοράς στη θεωρία (ως προς την αποδεικτική της ισχύ) από το οποίο να μπορούν να αποφασιστούν ζητήματα σχετικά με την ίδια της τη συνέπεια. Επομένως, φαίνεται σαν κάθε μαθηματική θεωρία να είναι εμμενής, με την έννοια ότι δεν μπορεί να αποφανθεί για όλα τα μαθηματικά ερωτήματα του εκάστοτε σύμπαντός της, και ειδικότερα δεν μπορεί να τεκμηριώσει τη συνέπειά της.

Συγκεκριμένα, και επειδή η **ZFC** αποτελεί θεμέλιο των μαθηματικών, η εμφάνιση του επιχειρήματος της εμμένειας έχει ένα επιπλέον ενδιαφέρον. Αν θέλουμε, τώρα, να μιλήσουμε για κάποιο μοντέλο της ZFC (π.χ. τα αρχετυπικά μοντέλα V, L), παύουμε να βρισκόμαστε εντός της θεωρίας, καθώς αναφερόμαστε σε γνήσιες κλάσεις που δεν αποτελούν σύνολα. Δεν υπάρχει με αυτή την έννοια σημείο εκφοράς εντός της συνολοθεωρίας που να αναφέρεται στην ολότητά της. Όπου εδώ το «εντός» σημαίνει «εντός της γλώσσας (των αποδεικτικών δυνατοτήτων) της συνολοθεωρίας».

Αν τώρα εμπλουτίσουμε την ZFC με **αξιώματα μεγάλων πληθαρίθμων,** τα παραπάνω συνεχίζουν να ισχύουν και η εμμενής φύση της θεωρίας διατηρείται και επεκτείνεται. Επεκτείνεται γιατί η ZFC, εφοδιασμένη με αξιώματα μεγάλων πληθαρίθμων, αντανακλά πια όλα τα μαθηματικά (κάθε μαθηματικό αντικείμενο έχει το συνολοθεωρητικό του αντίστοιχο). Η ίδια, επίσης, η διαδικασία εισαγωγής ισχυρότερων μεγάλων πληθαρίθμων είναι εμμενής, καθώς το φράγμα ασυνέπειας του Kunen εγγυάται ότι δεν είναι δυνατό να έχουμε την εμφύτευση της ίδιας της κλάσης V στον εαυτό της. Αξιοσημείωτο είναι επίσης ότι οι μεγάλοι πληθάριθμοι μπορούν να ιδωθούν από μια σκοπιά ως τα στοιχεία εκείνα που «επεκτείνουν» το σύμπαν της συνολοθεωρίας, θέτοντας εντός του νέες ιδιότητες και αλλάζοντας την έννοια του συνόλου, με αντίστοιχο τρόπο που συμβαίνει με τις στιγμές αλλαγής εννοιολογικού καθεστώτος: τις στιγμές της «ριζικής έκπληξης» κατά τον Wittgenstein, ή τις στιγμές «αλλαγής παραδείγματος» κατά τον Thomas Kuhn (βλ. Δομή των Επιστημονικών Επαναστάσεων 1962), ή της «εισβολής του Πραγματικού» κατά τον Jacques Lacan. Κάθε εισαγωγή ενός αξιώματος μεγάλου πληθαρίθμου οδηγεί στη δημιουργία ενός νέου σημείου εκφοράς, από το οποίο ξαναβλέπεις τη θεωρία υπό αυτό το πρίσμα πια, πλουσιότερα βεβαίως. Το ενδιαφέρον, τώρα, είναι ότι όλα αυτά τα σημεία εκφοράς είναι διατεταγμένα ως προς την ισχύ συνέπειας.

Η Θεωρία Συνόλων (ενισχυμένη και με τα αξιώματα μεγάλων πληθαρίθμων), ούσα μια θεωρία της πρωτοβάθμιας κατηγορηματικής λογικής, και άρα όσο το δυνατόν πιο κοντά στις δυνατότητες της ανθρώπινης αντίληψης, μπορεί να ιδωθεί με αυτό τον τρόπο σαν ένα **μοντέλο** του επιχειρήματός της εμμένειας.



Σχήμα 1. Διάγραμμα μεγάλων πληθαρίθμων (όχι όλων)

Βιβλιογραφία

A. S. Kechris. Classical descriptive set theory, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1995.

K. Kunen. Set theory: an introduction to independence proofs, Elsevier, 1980.

Γ. Ν. Μοσχοβάκης. Σημειώσεις στη συνολοθεωρία, Νεφέλη, 1993.

Γ. Ν. Μοσχοβάκης. Descriptive set theory, American Mathematical Society, 2009

A. Levy. Basic set theory, Springer Verlag, 1979.

K. Hrbacek & T. Jech. Introduction to set theory, Marcel Dekker, 1999.

A. Kanamori. The Higher Infinite. Springer-Verlag, 1994.

F. R. Drake. Set Theory: an introduction to large cardinals, Elsevier, 1974.

K. Tsaprounis. On Mathematical Applications of Large Cardinals, 1st Congress of Greek Mathematicians, 2018.

J. Bagaria. Set theory, Princeton UniversityPress, 2008.

M.Davis. Μηχανές της λογικής, Εκκρεμές, 2007.

A. Baltas. Peeling Potatoes Or Grinding Lenses: Spinoza and Young Wittgenstein Converse on Immanence and Its Logic, University of Pittsburgh Press, 2012.

T. S. Kuhn. The Structure of Scientific Revolutions,University of Chicago Press, 1996

A. Vanier. Λακαν, Κεδρος,2001