ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ - ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΩΝ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΤΟΥ ΦΟΙΤΗΤΗ

ΛΕΚΕΑ Β. ΠΑΡΑΣΚΕΥΑ

ΜΕ ΘΕΜΑ

ΕΝΑΣ ΣΤΑΤΙΚΟΣ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΓΙΑ ΑΝΑΘΕΣΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ ΣΕ ΠΕΡΙΤΤΟΥΣ ΔΑΚΤΥΛΙΟΥΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΟΝΤΕΣ

Φ. ΑΦΡΑΤΗ

Μ. ΑΝΑΓΝΩΣΤΟΥ

Ι. ΜΗΛΗΣ

ΑΘΗΝΑ ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 1999

Contents

1 Εισαγωγή **2**

1.1 Το πρόβλημα της ανάθεσης συχνοτήτων 2

1.2 Μαθηματική αντιστοιχία του προβλήματος 4

1.3 Ανάθεση σε δακτύλιο με περιττό αριθμό κελιών 5

2 Περιγραφή του αλγόριθμου **6**

2.1 Διάνυσμα ζήτησης και εξομάλυνσή του 6

2.2 Ανάθεση συχνοτήτων στο εξομαλυμένο διάνυσμα ζήτησης . . . 8

3 Η επιστροφή των συχνοτήτων και ο αλγόριθμος Re-Assign **8**

3.1 Οι μεγιστικές αλυσίδες 9

3.2 Η επιστροφή των συχνοτήτων 10

3.2.1 Απόδειξη του Re-Assign 11

3.3 Ο τελικός αλγόριθμος. Συμπέρασμα 16

4 Παράρτημα: Πίνακες **17**

Βιβλιογραφία **21**

1 Εισαγωγή

Όταν σε μια χώρα εγκαθίσταται ένα σύστημα κινητής τηλεφωνίας, κάθε ένα από τα ψηφιακά κέντρα που αναλαμβάνουν να ρυθμίσουν τις συνομιλίες, έχει υπ' ευθύνη του μια γεωγραφική περιοχή της χώρας. Αυτή η περιοχή συνήθως χωρίζεται σε υποπεριοχές, οι οποίες καλούνται κελιά (cellular telephone system-σύστημα κυψελοειδούς τηλεφωνίας). Σε κάθε κελί απαιτείται η ανάθεση ορισμένου αριθμού συχνοτήτων οι οποίες δίνουν τη δυνατότητα στους χρήστες να συνομιλούν. Όταν ήδη χρησιμοποιείται μια συχνότητα για συνομιλία σε ένα συγκεκριμένο κελί, είναι δυνατόν η ίδια συχνότητα να χρησιμοποιηθεί και σε κάποιο διαφορετικό κελί και μάλιστα όσο πιο απομακρυσμένα είναι αυτά τα δύο κελιά τόσο το καλύτερο για την ιδια τη συνομιλία (αποφυγή παρεμβολών και απόρρητο συνομιλίας). Στη χειρότερη περίπτωση μια συχνότητα f αν έχει χρησιμοποιηθεί σε ένα κελί κ τότε, αφού δεν επιτρέπεται να εμφανιστεί στα γειτονικά του, είναι δυνατό να ανατεθεί στα αμέσως επόμενα. Η πιο πάνω περιγραφή μπορεί να απεικονιστεί στα μαθηματικά με την έννοια του γράφου. Οι κόμβοι ενός τέτοιου γράφου είναι τα κελιά και μια ακμή μεταξύ δύο κόμβων σημαίνει ότι τα δύο συγκεκριμένα κελιά δεν επιτρέπεται να χρησιμοποιούν τις ίδιες συχνότητες. Έτσι η ανάθεση συχνοτήτων σ' ένα σύνολο κελιών ισοδυναμεί με το χρωματισμό του αντίστοιχου γράφου με τόσα δαφορετικά χρώματα όσες και οι συχνότητες προς ανάθεση. Όπως όμως είναι γνωστό, το πρόβλημα του χρωματισμού ενός γενικού γράφου είναι NP-πλήρες, το οποίο σημαίνει οτι και το πρόβλημα της ανάθεσης συχνοτήτων είναι NP-πλήρες. Σε αυτή την εργασία μελετούμε μια πολύ συγκεκριμένη κατηγορία γράφων, τους δακτυλίους, και εξετάζουμε εάν μπορούμε σε γραμμική πολυπλοκότητα να κάνουμε μια τέτοια ανάθεση συχνοτήτων.

1.1 Το πρόβλημα της ανάθεσης συχνοτήτων

Τα συστήματα κινητής τηλεφωνίας εκμεταλεύονται το γεγονός οτι μια συχνότητα μπορεί να χρησιμοποιηθεί ταυτόχρονα από πολλούς χρήστες. Αρκεί βέβαια αυτοί να βρίσκονται αρκετά μακριά, έτσι ώστε η συνομιλία του ενός να μην παρεμβαίνει στη συνομιλία του άλλου. Η ελάχιστη απόσταση στην οποία θεωρούμε ότι δεν έχουμε παρεμβολή ονομάζεται συνθήκη ή περιορισμός επαναχρησιμοποίησης της συχνότητας. Οι αναθέσεις των συχνοτήτων που κάνουμε στα κελιά πρέπει να είναι τέτοιες ώστε να μην παραβιάζεται η συνθήκη αυτή.

Ένα απλό παράδειγμα είναι το εξής: Υποθέτουμε ότι έχουμε μια περίπτωση

3 κελιών τα οποία μοιράζονται 2 συχνότητες. Υποθέτουμε ακόμη ότι τα 3 αυτά κελιά είναι τοποθετημένα στη σειρά ώστε, αν 2 γειτονικά κελιά χρησιμοποιούν την ίδια συχνότητα τότε να παραβιάζεται η συνθήκη επαναχρησιμοποίησης. Εάν τώρα το δεξιό κελί χρησιμοποιεί τη συχνότητα 1 και το αριστερό κελί τη συχνότητα 2, τότε προφανώς δεν μπορούμε να ικανοποιήσουμε καμία κλήση με τις συχνότητες 1 και 2 στο μεσαίο κελί. Είναι έτσι προτιμότερο, αν και το αριστερό και το δεξί κελί χρησιμοποιούν τη συχνότητα 1 (αφού αυτό επιτρέπεται), και το κελί 2 να χρησιμοποιήσει τη συχνότητα 2. Μπορούμε λοιπόν να αφαιρέσουμε από το δεξί κελί τη συχνότητα 2, να την αναθέσουμε στο μεσαίο και να βάλουμε στο δεξί κελί τη συχνότητα 1. Με αυτό τον τρόπο μετονομάσαμε τη συχνότητα του δεξιού κελιού από 2 σε 1 και εξοικονομήσαμε έτσι μια συχνότητα. Το πιο πάνω παράδειγμα είναι ένα χαρακτηριστικό στιγμιότυπο του προβλήματος ανάθεσης συχνοτήτων, που όπως είπαμε είναι NP-πλήρες. Δηλαδή σε πιο μεγάλες και ρεαλιστικές περιπτώσεις (με πιο πολλά κελιά και συχνότητες) το πρόβλημα γίνεται εξαιρετικά πολύπλοκο.

Υπάρχουν διάφορες προσεγγίσεις στο πρόβλημα και διάφοροι αλγόριθμοι που κάνουν τις αναθέσεις.'Οταν οι αλγόριθμοι αυτοί εξαρτώνται από τη γεωμετρία του προβλήματος, δηλαδή από τον τρόπο με τον οποίο χωρίζονται τα κελιά που δεν μπορούν να χρησιμοποιήσουν τις ίδιες συχνότητες, τότε διακρίνονται σε τρείς κατηγορίες [1]. Στατικοί ή Προκαθορισμένοι αλγόριθμοι (**F**ixed **C**hannel **A**ssignment), Δυναμικοί αλγόριθμοι (**D**ynamic **C**hannel **A**ssignment) και Υβριδικοί αλγόριθμοι (**H**ybrid **C**hannel **A**ssignment).

Η πρώτη κατηγορία αποτελεί την πιο απλή προσέγγιση του προβλήματος. 'Ενας FCA αλγόριθμος αναθέτει μόνιμα (χωρίς μετονομασίες) τις συχνότητες στα κελιά, έτσι ώστε να μην παραβιάζεται η συνθήκη επαναχρησιμοποίησης. Αναγκαία προϋπόθεση για ένα τέτοιο αλγόριθμο είναι να γνωρίζει τη ζήτηση κάθε κελιού σε συχνότητες, η οποία θα πρέπει να παραμένει σταθερή με την πάροδο του χρόνου. Η δεύτερη κατηγορία συνήθως χρησιμοποιείται όταν εμφανίζονται μεταβολές στις διάφορες ζητήσεις των κελιών, όπως για παράδειγμα ζήτηση για μια νέα κλήση (new call) ή μετακίνηση μιας συνομιλίας από ένα κελί στο διπλανό του (hand over). 'Ενας DCA αλγόριθμος προσπαθεί χρησιμοποιώντας διάφορες τεχνικές (π.χ. μετονομασία συχνοτήτων) να διατηρεί το όλο σύστημα σε μια βέλτιστη κατάσταση είτε χρησιμοποιώντας τις υπάρχουσες συχνότητες (οι οποίες τώρα δεν αναθέτονται μόνιμα στα κελιά) είτε εισάγωντας καινούργιες. Η τρίτη κατηγορία συνδυάζει τις δύο προηγούμενες τεχνικές.

Υπάρχουν προτερήματα και ελαττώματα σ'αυτούς τους αλγόριθμους. Για παράδειγμα ένας FCA αλγόριθμος είναι πολύ απλός αλλά δεν αποδίδει καλά σε περιπτώσεις μικρής μεταβαλλόμενης ζήτησης [2]. Αντίθετα ένας DCA αλγόριθμος είναι πιο αποτελεσματικός σε μικρές μεταβαλλόμενες ζητήσεις αλλά και πιο πολύπλοκος από ένα FCA αλγόριθμο [3].

Στην εργασία αυτή ασχολούμαστε με έναν FCA αλγόριθμο για μια πολύ συγκεκριμένη διάταξη κελιών, τους περιττούς δακτυλίους.

1.2 Μαθηματική αντιστοιχία του προβλήματος

Έστω γράφος $G(V, E)$ με ακμές d_i ($\upsilon_i \in V$), όπου $V = \{\upsilon_1, \upsilon_2, ..., \upsilon_M\}$. Όπως έχουμε πει, μια ακμή μεταξύ δύο κόμβων (κελιών), φανερώνει οτι τα κελιά αυτά είναι γειτονικά και δε μπορούν να χρησιμοποιούν τις ίδιες συχνότητες. Έστω ότι μας δίνονται $F = \{f_1, f_2, ..., f_N\}$ συχνότητες, είναι δυνατόν σε κάθε κελί υ_i να αναθέσουμε d_i[1] συχνότητες $(i = 1, 2, ..., M)$;

Ψάχνουμε δηλαδή μια ανάθεση $\sigma : V \mapsto \wp(F)$ έτσι ώστε $\mid \sigma(\upsilon_i) \mid \geq d_i$ ή αλλιώς ψάχνουμε τον ελάχιστο αριθμό N ώστε όντως να υπάρχει μια τέτοια ανάθεση ($\wp(F)$ συμβολίζει το δυναμοσύνολο του συνόλου F).

Όπως τώρα γνωρίζουμε από τη θεωρία των γράφων, ο χρωματικός αριθμός $\chi(G)$ ενός γράφου $G(V, E)$ είναι ο μικρότερος αριθμός χρωμάτων που απαιτείται, έτσι ώστε σε κάθε κόμβο (κελί) του γράφου να ανατεθεί ένα χρώμα (συχνότητα), χωρίς όμως οι κόμβοι που συνδέονται με μια ακμή να παίρνουν το ίδιο χρώμα. Αντίστοιχα, ο αριθμός κλίκας $\omega(G)$ του G είναι το μεγαλύτερο υποσύνολο των κόμβων έτσι ώστε οποιοδήποτε ζεύγος κόμβων αυτού του υποσυνόλου να είναι συνδεδεμένο με μια ακμή [4]. Γνωρίζουμε επίσης οτι για κάθε γράφο G

$$\chi(G) \geq \omega(G) \tag{1}$$

Στην περίπτωση που $d_1 = d_2 = ... = d_M = 1$ τότε από τον ορισμό του χρωματικού αριθμού

$$N = \chi(G) \tag{2}$$

άρα από (1),(2) έχουμε ότι

$$N \geq \omega(G) \tag{3}$$

Αν λοιπόν $\{\upsilon_{\varkappa_1}, ..., \upsilon_{\varkappa_L}\}$ μια κλίκα του G, η (3) μας δίνει ότι

$$N \geq d_{\varkappa_1} + ... + d_{\varkappa_L} \tag{4}$$

[1] d_i είναι η απαίτηση σε συχνότητες (demand) του κελιού υ_i.

όπου $d_{\varkappa_i}$ $(1 \leq i \leq L)$ η απαίτηση σε συχνότητες του κελιού (κόμβου) i. Παρατηρούμε επίσης ότι αν τα κελιά υ_i και υ_{i+1} είναι γειτονικά τότε λόγω της (4) θα είναι

$$N \geq d_i + d_{i+1} \ \forall i \tag{5}$$

1.3 Ανάθεση σε δακτύλιο με περιττό αριθμό κελιών

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα παραπάνω αποτελέσματα σε γράφους που έχουν τη μορφή δακτυλίου (ring graphs). Η απλή περίπτωση είναι όταν ο αριθμός των κελιών του δακτυλίου είναι άρτιος, τότε προφανώς η μεγαλύτερη κλίκα είναι μεγέθους ω(G)=2, άρα λόγω της (5) θα ισχύει ότι

$$N = \max_{(\upsilon_i,\upsilon_j)\in E}\{d_i + d_j\} \tag{6}$$

ο ελάχιστος N.

Λίγο πιο σύνθετη είναι η περίπτωση του δακτυλίου με περιττό αριθμό κελιών.'Εστω λοιπόν δακτύλιος με 2K+1 κελιά, και η απαίτηση κάθε κελιού για συχνότητες δίνεται από το διάνυσμα $(d_0,d_1,...,d_{2K})$. Προφανώς κάθε μια από τις N συχνότητες που έχουμε στη διάθεσή μας μπορεί να εμφανιστεί μόνο σε K κελιά. Άρα θα ισχύει οτι

$$N \times K \geq \sum_{i=0}^{2K} d_i \tag{7}$$

δηλαδή

$$N \geq \left\lceil \frac{\sum_{i=0}^{2K} d_i}{K} \right\rceil \tag{8}$$

Όμως λόγω της (6)

$$N \geq \max_i(d_i + d_{i+1}) \tag{9}$$

Άρα αν θέσουμε

$$C = \left\lceil \frac{\sum_{i=0}^{2K} d_i}{K} \right\rceil \ , \ \varphi = \max_i(d_i + d_{i+1}) \tag{10}$$

τότε οι (8),(9),(10) συνεπάγονται οτι

$$N \geq max\{\varphi, C\} \tag{11}$$

θα είναι το ελάχιστο N.

Θα αποδείξουμε στη συνέχεια ότι υπάρχει μια βέλτιστη ανάθεση συχνοτήτων σε δακτύλιο με περιττό αριθμό κελιών, που χρησιμοποιεί ακριβώς $\max\{\varphi, C\}$ συχνότητες.

2 Περιγραφή του αλγόριθμου

Έστω δακτύλιος με περιττό αριθμό κελιών $2K+1$. Ας υποθέσουμε ότι κάθε ένα από τα κελιά του δακτυλίου ζητάει μια συχνότητα.Τότε αν χρησιμοποιήσουμε μόνο δύο συχνότητες, τις f_1 και f_2, θα αναθέσουμε στα κελιά 0,2,4,...,2K-2 την f_1 και στα 1,3,5,...,2K-1 την f_2. Όμως στο κελί 2K δεν μπορούμε να αναθέσουμε την f_2, αφού είναι ήδη στο 2K-1 που είναι διπλανό του. Δεν μπορούμε όμως ούτε την f_1, αφού αυτή βρίσκεται στο κελί 0, που συνορεύει με το 2K. Το κελί 2K, στο οποίο δεν έχει ανατεθεί καμία συχνότητα το, ονομάζουμε τρύπα (hole), και προφανώς αυτήν μπορούμε να την τοποθετήσουμε σε οποιοδήποτε κελί. Μια τέτοια ανάθεση ονομάζεται εναλλακτικό δαχτυλίδι (alternate ring) [5] και είναι ένα από τα βασικά εργαλεία που θα χρησιμοποιήσουμε στην προσπάθειά μας να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα.

2.1 Διάνυσμα ζήτησης και εξομάλυνσή του

Έστω δακτύλιος με περιττό αριθμό κελιών 2K+1 και έστω ότι κάθε κελί χρειάζεται d_i συχνότητες (i=0,...,2K). Τότε το διάνυσμα ζήτησης έχει τη μορφή $(d_0, ..., d_{2K})$. Εμείς γνωρίζουμε από την (11) ότι χρειαζόμαστε τουλάχιστον

$$N \geq max\{\varphi, C\}$$

συχνότητες ή, αλλιώς, τουλάχιστον

$$R = \lceil 0.5N \rceil \tag{12}$$

ενναλακτικά δακτυλίδια, διότι κάθε δαχτυλίδι χρησιμοποιεί δύο συχνότητες. Επειδή όμως υπάρχει περίπτωση σε ορισμένα κελιά η ζήτηση να υπερβαίνει το R (ο FCA αλγόριθμος που περιγράφουμε δουλεύει σε περίπου ομοιόμορφες κατανομές και για $N \geq C$), θα πρέπει να εξομαλύνουμε το διάνυσμα ζήτησης, έτσι ώστε

$$\forall i, d_i \leq \lfloor N/2 \rfloor \tag{13}$$

Τη δουλειά αυτή την κάνει ο αλγόριθμος New Distribution.

New Distribution

---

for all i=0,...,2K do $q_i = 0$
for $i = 0$ to 2K do
  if $d_i > R$ **then**
   $d'_i = R$
   $q_i = d_i - R$
  else $d'_i = d_i$
end for
for $i = 0$ to 2K do
  if $q_i > 0$ **then**
   $d'_{a(i)} = d'_{a(i)} + q_i$
    if $d'_{a(i)} > R$ **then**
     $d'_{b(i)} = d'_{b(i)} + (d'_{a(i)} - R)$
     $d'_{a(i)} = d'_{a(i)} - (d'_{a(i)} - R)$
    end if
  end if
end for

Ο πιο πάνω αλγόριθμος κάνει τα εξής: Αν κάποιο d_i ξεπερνά το $\lceil 0.5N \rceil$ τότε αφαιρεί το πλεόνασμα και το προσθέτει στο γείτονα με τη μεγαλύτερη ζήτηση. Κατά σύμβαση ο γείτονας του κελιού i με τη μεγαλύτερη ζήτηση δίνεται από το δείκτη $\alpha(i) = i - 1$ και αυτός με τη μικρότερη ζήτηση από τον $b(i) = i + 1$ αν $d_{i-1} \geq d_{i+1}$ ή ανάποδα, αν $d_{i-1} < d_{i+1}$ (όλες οι πράξεις με τους δείκτες γίνονται mod$(2K + 1)$). Εάν τώρα το πλεόνασμα του d_i που προστίθεται στον $d_{a(i)}$ κάνει τον $d_{a(i)}$ να ξεπερνά το R τότε ό,τι περισσεύει δίνεται στον $d_{b(i)}$, και αυτό προφανώς είναι πάντα δυνατό να γίνει.

'Ενα παράδειγμα είναι το εξής: 'Εστω κυκλικός δακτύλιος με $2K+1 = 13$ κελιά και

$$(d_0, ..., d_{12}) = (20, 10, 24, 15, 24, 13, 27, 12, 28, 11, 24, 10, 20)$$

το διάνυσμα ζήτησης. Παρατηρούμε ότι $R = 20$. Το νέο εξομαλυμένο διάνυσμα που υπολογίζει ο New Distribution είναι το:

$$(20, 10, 20, 20, 20, 20, 20, 20, 20, 19, 20, 10, 20).$$

2.2 Ανάθεση συχνοτήτων στο εξομαλυμένο διάνυσμα ζήτησης

Το εξομαλυμένο διάνυσμα ζήτησης έχει $d'_i \leq R$, σε όλα του τα κελιά i, οπότε προφανώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε R δαχτυλίδια για να κάνουμε την ανάθεση συχνοτήτων. Την ανάθεση αυτή την κάνει ο αλγόριθμος Simple.

Simple

Use $R = \lceil 0.5N \rceil$ alternate rings
(in the beginning all ring are assumed unmarked)
for cell $i = 0$ to 2K **do**
  if there are at least $R - d_i$ unmarked alternate rings **then**
  choose $max\{0, R - d_i\}$ unmarked alternate rings,
  move their holes to cell i and mark those rings.
  else move the holes of all the unmarked alternate rings to cell i
  end if
end for

Ο πιο πάνω αλγόριθμος παίρνει σαν είσοδο το εξομαλυμένο διάνυσμα ζήτησης και χρησιμοποιεί N συχνότητες και $\lceil \frac{N}{2} \rceil$ δαχτυλίδια για να κάνει την ανάθεση.

Στον πίνακα 1 του παραρτήματος φαίνεται ένα παράδειγμα εφαρμογής του αλγορίθμου Simple. Η πρώτη σειρά του πίνακα περιέχει το διάνυσμα ζήτησης και οι υπόλοιπες την ανάθεση συχνοτήτων που γίνεται από τον Simple.

3 Η επιστροφή των συχνοτήτων και ο αλγόριθμος Re-Assign

Μετά την εφαρμογή του Simple έχουμε επιτύχει την ανάθεση συχνοτήτων, σύμφωνα με το εξομαλυμένο διάνυσμα ζήτησης, χρησιμοποιώντας R δαχτυλίδια.΄Ομως δεν είναι αυτός ο τελικός μας σκοπός. Ο τελικός μας σκοπός είναι να χρησιμοποιήσουμε R δαχτυλίδια και να πετύχουμε την ανάθεση συχνοτήτων στο αρχικό διάνυσμα ζήτησης. ΄Οπως όμως μπορούμε να δούμε, δεν απέχουμε και πολύ από αυτό το στόχο, αν σκεφτούμε ότι μπορούμε με κατάλληλες μετατοπίσεις συχνοτήτων να επιστρέψουμε στα κελιά, τα οποία είχαν δανείσει συχνότητες στους γείτονές τους, το δάνειο, (και φυσικά να αφαιρέσουμε το δάνειο από τους γείτονες), και έτσι κάθε κελί να έχει τουλάχιστον τόσες συχνότητες όσες επιτάσσει το αρχικό διάνυσμα ζήτησης.

3.1 Οι μεγιστικές αλυσίδες

Ας υποθέσουμε ότι ένα κελί i απαιτεί $d_i > R$ συχνότητες. Σύμφωνα με το New Distribution η επιπλέον ποσότητα $d_i - R$ αφαιρέθηκε από το κελί i και προστέθηκε στους γείτονές του. Άρα το πρώτο μας μέλημα θα είναι να επιστρέψουμε αυτές τις $d_i - R$ συχνότητες στο κελί i αφαιρώντας τες από τους γείτονές του.Ένα δεύτερο μέλημά μας θα είναι να εξασφαλίσουμε ότι με αυτές τις μετακινήσεις συχνοτήτων δεν παραβιάζεται η συνθήκη επαναχρησιμοποίησης, και επιπλέον όλα τα κελιά έχουν τουλάχιστον τόσες συχνότητες όσες και η ζήτησή τους.

Σημείωση: Δεν μας πειράζει ένα κελί να πάρει συχνότητες παραπάνω από τη ζήτησή του, διότι στο τέλος μπορούμε να του τις αφαιρέσουμε χωρίς πρόβλημα.

Για να γνωρίζουμε πιο κελί έχει δώσει και πιο κελί έχει πάρει συχνότητες, μετά την εφαρμογή του New Distribution, εισάγουμε ένα δείκτη $I(i)$ ο οποίος παίρνει την τιμή 0 αν το κελί i ούτε δανείστηκε ούτε έδωσε συχνότητες. Είναι μικρότερος του 0 ($I(i) < 0$), αν το κελί i έδωσε $\mid I(i) \mid$ συχνότητες, και είναι μεγαλύτερος του 0 ($I(i) > 0$) αν το κελί i πήρε$\mid I(i) \mid$ συχνότητες. Με τη βοήθεια του πιο πάνω δείκτη μπορούμε να ορίσουμε την έννοια της μεγιστικής αλυσίδας. Μια μεγιστική αλυσίδα σε μια γραμμική διάταξη κελιών $(0, ..., 2K)$ είναι το τμήμα εκείνο της διάταξης $(i,...,j)$ $(0 \leq i, j \leq 2K, i > j)$ για το οποίο

$$I(i-1) = 0, I(j+1) = 0 \text{ και } \forall k \in [i,j], I(k) \neq 0.$$

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι σε μια γραμμική διάταξη κελιών είναι πιθανόν να υπάρχουν περισσότερες από μία μεγιστικές αλυσίδες. Απεναντίας, αν δεν υπάρχει καμία τότε προφανώς το διάνυσμα ζήτησης είναι από μόνο του εξομαλυμένο. Είναι επίσης δυνατό μια μεγιστική αλυσίδα να αποτελείται από 2 μόνο γειτονικά κελιά i,$i+1$.

Στον πίνακα 2 του παραρτήματος βλέπουμε ένα παράδειγμα μεγιστικής αλυσίδας. Η πρώτη γραμμή του πίνακα είναι ο αύξοντας αριθμός των κελιών, η δεύτερη περιέχει τη ζήτηση κάθε κελιού (αρχικό διάνυσμα ζήτησης), και η τρίτη περιέχει τη ζήτηση κάθε κελιού μετά την εφαρμογή του New Distribution (εξομαλυμένο διάνυσμα ζήτησης). Εδώ η μεγιστική αλυσίδα είναι η αλληλουχία των κελιών(2,3,...,10).

Πράγματι: $I(1) = 0$,$I(11) = 0$ και $I(2) = -4 \neq 0$, $I(4) = +5 \neq 0$,$I(4) = -5 \neq 0$,$I(5) = +7 \neq 0$, $I(6) = -7 \neq 0$,$I(7) = +8 \neq 0$,$I(8) = -8 \neq 0$, $I(9) = +8 \neq 0$,$I(10) = -4 \neq 0$.

3.2 Η επιστροφή των συχνοτήτων

Η επιστροφή των συχνοτήτων γίνεται με τον αλγόριθμο Re-Assign

---

Re-Assign

---

for $i = 0$ to 2K do $I(i) = 0$
for $i = 0$ to 2K do $I(i) = d'_i - d_i$
for $i = 0$ to 2K **do**
  if $I(i) \leq 0$ **then** next i
  else
    if $I(i-1) < 0$ **then** choose a set of exactly
     $(\mid I(i-1) \mid - \mid I(i-2) \mid)$ channels from cell i
     that are not assigned to cell $i-2$,
     if they don't exist choose the first
     $(\mid I(i-1) \mid - \mid I(i-2) \mid)$ channels from cell i;
     add those channels to cell $i-2$;
    do $I(i) = I(i) - (\mid I(i-1) \mid - \mid I(i-2) \mid)$
    do $I(i-1) = I(i-1) + (\mid I(i-1) \mid - \mid I(i-2) \mid)$
    else next i.
for $i = 2K$ downto 0 **do**
  if $I(i) \leq 0$ **then** next i
  else
    if $I(i+1) < 0$ **then** choose a set of exactly $I(i)$ channels from
     cell i that are not assigned to cell $i+2$,if they don't exist choose
     the first $I(i)$ channels from cell i;add those channels to cell $i+1$;
     remove those channels from cell i and cell $i+2$
  else next i

Ο πιο πάνω αλγόριθμος παίρνει σαν είσοδο το εξομαλυμένο και το αρχικό διάνυσμα ζήτησης και τον πίνακα της ανάθεσης που έχει γίνει από τον Simple, και σαν έξοδο βγάζει την τελική ανάθεση συχνοτήτων για το αρχικό διάνυσμα ζήτησης. Ο αλγόριθμος διατρέχει το εξομαλυμένο διάνυσμα ζήτησης και προς τις δύο κατευθύνσεις. Στη μια κατεύθυνση (3ο for) επιστρέφονται όσες συχνότητες δάνεισαν τα κελιά $i-1$ στα i, και στο γυρισμό (4ο for) επιστρέφονται όσες συχνότητες δάνεισαν τα κελιά $i+1$ στα i.

Στον πίνακα 4 του παραρτήματος βλέπουμε πώς γίνεται η επιστροφή των συχνοτήτων από τον αλγόριθμο Re-Assign. Στην πρώτη γραμμή του πίνακα είναι το αρχικό διάνυσμα ζήτησης, στη δεύτερη το εξομαλυμένο διάνυσμα ζήτησης και στις υπόλοιπες η επιστροφή των συχνοτήτων (και άρα η τελική ανάθεση από τον Re-Assign).

3.2.1 Απόδειξη του Re-Assign

Η απόδειξη της ορθότητας του Re-Assign γίνεται ως εξής: Παρατηρούμε ότι μετά την εφαρμογή του Simple σε κάθε κελί i υπάρχουν τουλάχιστον d'_i συχνότητες[2]. Επίσης προφανώς μετά την εφαρμογή του Simple για όσα κελιά i ισχύει $I(i) < 0$ θα ισχύει και ότι $d'_i = R$, από την (13). Παρατηρούμε τέλος ότι δεν υπάρχει κανένα κελί i που ταυτόχρονα να δανείζει και να παίρνει συχνότητες. Αυτό ισχύει διότι, αν υποθέσουμε ότι το τυχαίο κελί i δανείζει $\mid \varkappa \mid$ συχνότητες και παίρνει $\mid \lambda \mid$, τότε αυτό σημαίνει ότι η ζήτηση του d_i ξεπερνά το R κατά $\mid \varkappa \mid$ και ταυτόχρονα υπολείπεται του R κατά $\mid \lambda \mid$ πράγμα άτοπο.

Λήμμα 1 Όταν το πρώτο κελί i μιας μεγιστικής αλυσίδας έχει $I(i) > 0$ τότε στο εξομαλυμένο διάνυσμα ζήτησης ισχύει ότι

$$d_i = d'_i - I(i) \tag{14}$$

$$d_{i+1} = d'_{i+1} + I(i) \tag{15}$$

Απόδειξη Το κελί $i-1$ έχει $I(i-1) = 0$ διότι το i είναι το πρώτο κελί της μεγιστικής αλυσίδας. Η (14) είναι προφανής διότι από τον New Distribution

$$d'_i = d_i + I(i) \Rightarrow$$

$$d_i = d'_i - I(i) \tag{16}$$

[2] Υπενθυμίζουμε ότι οι τόνοι στα d αναφέρονται σε ζήτηση (demand) μετά την εξομάλυνση, ενώ απουσία τόνου φανερώνει ζήτηση στο αρχικό διάνυσμα.

Για τη (15) τώρα

$$d'_{i+1} = d_{i+1} + I(i+1) \Rightarrow$$
$$d_{i+1} = d'_{i+1} - I(i+1) \tag{17}$$

(λόγω του New Distribution). Αρκεί να αποδείξουμε οτι

$$I(i+1) = -I(i)$$

ή

$$\mid I(i) \mid = \mid I(i+1) \mid \text{ και } I(i+1) < 0 \tag{18}$$

(αφού γνωρίζουμε από την υπόθεση ότι $I(i) > 0$). Το ότι $I(i+1) < 0$ προφανές (από τις αρχικές παρατηρήσεις και από το γεγονός ότι το i δεν έχει πάρει από το $i-1$ καμμία συχνότητα-όλες τις έχει πάρει από το $i+1$). Άρα θα ισχύει

$$\mid I(i) \mid \leq \mid I(i+1) \mid \tag{19}$$

Η (19) σημαίνει ότι

$$\mid I(i+1) \mid = \mid I(i) \mid + \mid \alpha \mid \tag{20}$$

όπου $\mid \alpha \mid$ είναι οι συχνότητες που δίνει το $i+1$ στο $i+2$. Γνωρίζουμε ότι $d_{i+1} > R$ (αφού το $i+1$ δανείζει συχνότητες), και $d_i < R$ (αφού το i παίρνει συχνότητες). Επίσης

$$d'_{i+1} = R \tag{21}$$

από τις αρχικές παρατηρήσεις της 3.2.1.'Ομως αφού το κελί $i+1$ δανείζει $\mid \alpha \mid$ στο κελί $i+2$, θα πρέπει να ισχύει ότι

$$d'_i = R \tag{22}$$

Επίσης από τις (5),(12), έχουμε

$$d_i + d_{i+1} \leq 2R \Rightarrow \tag{23}$$

Η (23) μαζί με τις (16), (17) δίνει

$$d'_i - I(i) + d'_{i+1} - I(i+1) \leq 2R \tag{24}$$

Η (24) μαζί με τις (21), (22) δίνει

$$R - I(i) + R - I(i+1) \leq 2R \Rightarrow \tag{25}$$

Η (25) λόγω της (20) συνεπάγεται

$$-I(i) + \mid I(i) \mid + \mid \alpha \mid \leq 0$$

$$\mid \alpha \mid \leq 0 \Rightarrow$$

$$\alpha = 0$$

Άρα από την (19) δείξαμε ότι

$$\mid I(i+1) \mid = \mid I(i) \mid \tag{26}$$

Συνεπώς, αφού $I(i+1) < 0$, λόγω της (26), αποδεικνύεται η (18), άρα και η (15), άρα και το λήμμα 1.

Λήμμα 2 Όταν σε μια μεγιστική αλυσίδα το πρώτο κελί είναι το $i-1$ και ισχύει ότι $I(i-1) < 0$ τότε **(a):** $I(i) > 0$ και **(b):** μπορούμε να επιλέξουμε $(\mid I(i-1) \mid - \mid I(i-2) \mid)$ συχνότητες από το κελί i και να τις προσθέσουμε στο $i-1$ χωρίς να παύει να ικανοποιείται η ζήτηση του $i-2$ κελιού.

Απόδειξη (a) Προφανώς $I(i) > 0$ αφού $I(i-2) = 0$,$I(i-1) < 0$ και το κάθε κελί δανείζει μόνο στους γείτονές του.

Για το **(b)** τώρα. Αφού το $i-1$ είναι το πρώτο κελί της μεγιστικής αλυσίδας ισχύει ότι

$$I(i-2) = 0 \tag{27}$$

Αν υπάρχουν

$$(\mid I(i-1) \mid - \mid I(i-2) \mid) = \mid I(i-1) \mid$$

συχνότητες στο κελί i που δεν εμφανίζονται στο $i-2$ τότε δεν υπάρχει κανένα πρόβλημα. Έστω τώρα ότι όλες οι συχνότητες που εμφανίζονται στο κελί i, εμφανίζονται και στο κελί $i-2$. Ισχύει ότι:

$$d'_{i-2} = d_{i-2} \leq d_i - 1 \tag{28}$$

έτσι ώστε ο i να είναι ο ισχυρότερος γείτονας του $i-1$ (και άρα κατά τη σύμβαση της 2.1 να παίρνει αυτός τις συχνότητες). Έστω ότι στη χειρότερη περίπτωση:

$$d_{i-2} = d_i - 1 \tag{29}$$

Θα αποδείξουμε ότι αν αφαιρέσουμε $\mid I(i-1) \mid$ συχνότητες το $i-2$, δεν παύει να ικανοποιείται η συνθήκη (29). Έστω ότι στο $i-2$ κελί υπάρχουν R συχνότητες, τότε στο $i-2$ περισσεύουν οι $R - d'_{i-2}$ συχνότητες.

Όμως μπορούμε να δείξουμε ότι

$$| I(i-1) | \leq R - d'_{i-2} \tag{30}$$

Πράγματι

$$d'_i \geq d_i + | I(i-1) | \tag{31}$$

αφού το i κελί μπορεί να έχει πάρει και από το κελί $i+1$ συχνότητες. Πάντοτε όμως ισχύει ότι

$$R \geq d'_i \tag{32}$$

(από New Distribution). Από (28), (31), (32), έχουμε ότι

$$R \geq d'_{i-2} + 1 + | I(i-1) | \tag{33}$$

Άρα από την (33) έχουμε

$$R - d'_{i-2} \geq 1 + | I(i-1) | \Rightarrow$$

$$R - d'_{i-2} \geq | I(i-1) |$$

Δηλαδή ισχύει η (30), άρα και η (29), οπότε το λήμμα αποδείχτηκε.

Πρόταση Ο Αλγόριθμος Re-Assign είναι ορθός

Απόδειξη Στα δύο πρώτα for ο αλγόριθμος υπολογίζει τους δείκτες $I(i)$ για κάθε i. Στο τρίτο for έχουμε τα εξής βήματα: **βήμα1.**'Εστω $I(i) > 0$ και $I(i-1) < 0$ και $i-1$ το πρώτο στοιχείο της μεγιστικής αλυσίδας. Τότε από το λήμμα 2 υπάρχουν στο κελί i

$$(| I(i-1) | - | I(i-2) |)$$

συχνότητες που μπορούμε να τις δανειστούμε χωρίς να πειράξουμε τη ζήτηση του $i-2$ κελιού και να τις προσθέσουμε στο κελί $i-1$. Ο αλγόριθμος στη συνέχεια ελαττώνει το $I(i)$ κατά

$$(| I(i-1) | - | I(i-2) |) = | I(i-1) | \tag{34}$$

(διότι i-1 το πρώτο κελί της μεγιστικής αλυσίδας, άρα ισχύει η (27)), και αυξάνει το $I(i-1)$ κατά

$$(| I(i-1) | - | I(i-2) |)$$

Έπειτα ο αλγόριθμος προχωρεί στο $i+1$. **βήμα2.** Η περίπτωση που $I(i+1) > 0$ δεν εμφανίζεται επειδή $I(i) > 0$ και σε μια μεγιστική αλυσίδα τα πρόσημα των δεικτών $I(i)$ εναλλάσσονται. Έστω $I(i+1) = 0$. Τότε αυτό σημαίνει ότι η μεγιστική αλυσίδα τελειώνει. Η τελευταία περίπτωση είναι $I(i+1) < 0$. Θα ισχύει $I(i+2) > 0$ (αν $I(i+2) = 0$ η αλυσίδα τελειώνει και προφανώς το κελί $i+1$ θα πάρει όσα δάνεισε στο i στην επιστροφή του αλγορίθμου) και ο αλγόριθμος διαλέγει από το κελί $i+2$ ακριβώς $(\mid I(i+1) \mid - \mid I(i) \mid)$ συχνότητες που δεν εμφανίζονται στο κελί i.

Αυτό είναι δυνατό να γίνει, διότι η ποσότητα

$$(\mid I(i+1) \mid - \mid I(i) \mid)$$

είναι όσες συχνότητες έδωσε ο $i+1$ στον $i+2$, εκτός από αυτές που έδωσε στον i (τις οποίες θα πάρει στο γυρισμό του αλγορίθμου από τον i). Προφανώς στο $i+2$ υπάρχει αυτός ο αριθμός των συχνοτήτων, αφού τις έχει πάρει από το $i+1$ γείτονά του. Όμως ο i ήδη επέστρεψε στο i-1 τις $\mid I(i-1) \mid$ συχνότητες που είχε δανειστεί (εξίσωση (34)). Παρατηρούμε τώρα πως σε αυτή την περίπτωση ισχύει ότι $d_i' = R$, διότι το κελί i πήρε $\mid I(i-1) \mid$ συχνότητες από το i-1 και έστω $\mid \alpha \mid$ συχνότητες από τις $\mid I(i+1) \mid$, ώστε

$$d_i + \mid I(i-1) \mid + \mid \alpha \mid = R \tag{35}$$

Τις υπόλοιπες $\mid \beta \mid$ συχνότητες από τις $\mid I(i+1) \mid$ τις πήρε ο i+2.

$$d_{i+1} - \mid \alpha \mid - \mid \beta \mid = R \tag{36}$$

Προσθέτωντας κατά μέλη τις (35), (36) έχουμε

$$2R = d_i + d_{i+1} + \mid I(i-1) \mid - \mid \beta \mid \Rightarrow$$

$$R = \frac{d_i + d_{i+2}}{2} + \frac{\mid I(i-1) \mid - \mid \beta \mid}{2} \tag{37}$$

Αλλά από (5), (12) έχουμε

$$R \geq \frac{d_i + d_{i+2}}{2} \tag{38}$$

Τέλος από (35), (36), (37), (38)

$$\mid I(i-1) \mid - \mid \beta \mid \geq 0 \Rightarrow$$

$$| I(i-1) | \geq | \beta | \tag{39}$$

Η (38) μας λέει ότι μπορούμε να σβήσουμε $| \beta |$ συχνότητες από το $i+1$ που δεν υπάρχουν στο i και να τις δώσουμε στο $i+1$. Έπειτα ο αλγόριθμος μειώνει το I(i+2) κατά $(| I(i+1) | - | I(i) |)$, και αυξάνει το $| I(i+1) |$ κατά $(| I(i+1) | - | I(i) |)$. Προφανώς στη συνέχεια όποια άλλη περίπτωση και να συναντήσει σε αυτή την κατεύθυνση θα την αντιμετωπίσει ορθά.

Όταν τελειώσει η πρώτη κατεύθυνση του αλγορίθμου αρχίζει και επιστρέφει. Από την πιο πάνω ανάλυση κάθε μεγιστική αλυσίδα που θα συναντά θα είναι της μορφής $...i \longleftarrow i+1, i+2 \longleftarrow i+3, i+4 \longleftarrow i+5, ...$ (όπου ο συμβολισμός σημαίνει ότι το i δανείστηκε από το $i+1$ κ.ο.κ). Άρα το πρώτο (από δεξιά πρός τα αριστερά για αυτή τη φορά) κελί αυτής της αλυσίδας θα δίνει μόνο στο δεύτερο, το τρίτο μόνο στο τέταρτο κ.ο.κ. Οπότε, αφού ο αλγόριθμος στην πρώτη φορά δεν πειράζει τις συχνότητες της δεύτερης και η δεύτερη προφανώς λειτουργεί ορθά, αποδείχτηκε ο Re-Assign.

3.3 Ο τελικός αλγόριθμος. Συμπέρασμα

Ο τελικός αλγόριθμος που κάνει την ανάθεση σε δακτυλίους με περιττό αριθμό κελιών είναι ο $ChannelAssignment$.

Channel Assignment

---

call $NewDistribution$
call $Simple$
call $Re-Assign$

Ο $ChannelAssignment$ παίρνει σαν είσοδο το αρχικό διάνυσμα ζήτησης και το $R = \lceil 0.5N \rceil = max\{\varphi, C\}$ (σύμφωνα πάντα με την προϋπόθεση της 2.1, ότι δηλαδή $N \geq C$)

Παρατηρούμε τώρα ότι η πολυπλοκότητα του $ChannelAssignment$ είναι γραμμική. Εάν λοιπόν έχουμε δακτύλιο με περιττό αριθμό κελιών $2K+1$ και το κάθε κελί i $(0 \leq i \leq 2K)$ έχει d_i ζήτηση σε συχνότητες, τότε το συμπέρασμα που βγάζουμε από αυτη την εργασία είναι ότι υπάρχει ένας βέλτιστος στατικός αλγόριθμος, γραμμικής πολυπλοκότητας, που αναθέτει N συχνότητες στο δακτύλιο, αν $N \geq \left\lceil \frac{\sum_{i=0}^{2K} d_i}{K} \right\rceil$.

4 Παράρτημα: Πίνακες

Στους πίνακες που ακολουθούν βλέπουμε εκτελέσεις των πιο πάνω αλγορίθμων. Οι Πίνακες 3, 5 είναι δύο παραδείγματα εφαρμογής του Channel Assignment. Η πρώτη σειρά είναι το διάνυσμα ζήτησης ενώ η δεύτερη το εξομαλυμένο διάνυσμα, και οι υπόλοιπες περιέχουν την ανάθεση των συχνοτήτων.Όσες συχνότητες περισσεύουν για το συγκεκριμένο κελί τυπώνονται με έντονο χρώμα.

20	10	20	20	20	20	20	20	20	19	20	10	20
1	-	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
3	-	4	3	4	3	4	3	4	3	4	3	4
5	-	6	5	6	5	6	5	6	5	6	5	6
7	-	8	7	8	7	8	7	8	7	8	7	8
9	-	10	9	10	9	10	9	10	9	10	9	10
11	-	12	11	12	11	12	11	12	11	12	11	12
13	-	14	13	14	13	14	13	14	13	14	13	14
15	-	16	15	16	15	16	15	16	15	16	15	16
17	-	18	17	18	17	18	17	18	17	18	17	18
19	-	20	19	20	19	20	19	20	19	20	19	20
21	22	21	22	21	22	21	22	21	-	22	21	22
23	24	23	24	23	24	23	24	23	24	23	-	24
25	26	25	26	25	26	25	26	25	26	25	-	26
27	28	27	28	27	28	27	28	27	28	27	-	28
29	30	29	30	29	30	29	30	29	30	29	-	30
31	32	31	32	31	32	31	32	31	32	31	-	32
33	34	33	34	33	34	33	34	33	34	33	-	34
35	36	35	36	35	36	35	36	35	36	35	-	36
37	38	37	38	37	38	37	38	37	38	37	-	38
39	40	39	40	39	40	39	40	39	40	39	-	40

Table 1: Παράδειγμα εφαρμογής του Simple

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
20	10	24	15	25	13	27	12	28	11	24	10	20
20	10	20	20	20	20	20	20	20	19	20	10	20

Table 2: Παράδειγμα εφαρμογής του New Distribution

1	8	2	8	1	9	1	1	1	2	3	7	2	8	2	1	1	8	2	8	2	1	1
1	5	5	5	5	5	4	1	1	2	5	5	5	5	2	1	1	5	5	5	5	1	1
-	1	$\cancel{2}$	1	$\cancel{2}$	1	$\cancel{2}$	1	2	1	$\cancel{2}$	1	$\cancel{2}$	1	$\cancel{2}$	1	$\cancel{2}$	1	$\cancel{2}$	1	$\cancel{2}$	1	2
-	3	$\cancel{4}$	3	$\cancel{4}$	3	$\cancel{4}$	**3**	**4**	3	$\cancel{4}$	3	$\cancel{4}$	3	$\cancel{4}$	**3**	$\cancel{4}$	3	$\cancel{4}$	3	$\cancel{4}$	**3**	**4**
-	5	$\cancel{6}$	5	$\cancel{6}$	5	$\cancel{6}$	**5**	**6**	**5**	6	5	$\cancel{6}$	5	$\cancel{6}$	**5**	$\cancel{6}$	5	$\cancel{6}$	5	$\cancel{6}$	**5**	**6**
-	7	8	7	8	7	8	**7**	**8**	**7**	8	7	8	7	8	**7**	8	7	8	7	8	**7**	**8**
9	10	9	10	$\cancel{9}$	10	-	**9**	**10**	**9**	10	9	10	9	10	**9**	**10**	9	10	9	10	**9**	**10**
	2		2		2						2		2				2		2			
	4		4		4						4		4				4		4			
	6		6		6								6				6		6			
					9																	

Table 3: Παράδειγμα εφαρμογής του Channel Assignment

20	10	24	15	25	13	27	12	28	11	24	10	20
20	10	20	20	20	20	20	20	20	19	20	10	20
1	-	2	$\cancel{1}$	2	$\cancel{1}$	2	$\cancel{1}$	2	$\cancel{1}$	2	1	2
3	-	4	$\cancel{3}$	4	$\cancel{3}$	4	$\cancel{3}$	4	$\cancel{3}$	4	3	4
5	-	6	$\cancel{5}$	6	$\cancel{5}$	6	$\cancel{5}$	6	$\cancel{5}$	6	5	6
7	-	8	$\cancel{7}$	8	$\cancel{7}$	8	$\cancel{7}$	8	$\cancel{7}$	8	7	8
9	-	10	9	10	9	10	9	10	9	10	9	10
11	-	12	11	12	11	12	11	12	11	12	11	12
13	-	14	13	14	13	14	13	14	13	14	13	14
15	-	16	15	16	15	16	15	16	15	16	15	16
17	-	18	17	18	17	18	17	18	17	18	17	18
19	-	20	19	20	19	20	19	20	19	20	19	20
21	22	21	22	21	22	21	22	21	-	22	21	22
23	24	23	$2\cancel{4}$	23	$2\cancel{4}$	23	$2\cancel{4}$	23	$2\cancel{4}$	23	-	24
25	26	25	26	25	$2\cancel{6}$	25	$2\cancel{6}$	25	$2\cancel{6}$	25	-	26
27	28	27	28	27	$2\cancel{8}$	27	$2\cancel{8}$	27	$2\cancel{8}$	27	-	28
29	30	29	30	29	30	29	$3\cancel{0}$	29	$3\cancel{0}$	29	-	30
31	32	31	32	31	32	31	32	31	32	31	-	32
33	34	33	34	33	34	33	34	33	34	33	-	34
35	36	35	36	35	36	35	36	35	36	35	-	36
37	38	37	38	37	38	37	38	37	38	37	-	38
39	40	39	40	39	40	39	40	39	40	39	-	40
		1		1		1		1		24		
		3		3		3		3		26		
		5		5		5		5		28		
		7		7		7		7		30		
				24		24		24				
						26		26				
						28		28				
								30				

Table 4: Παράδειγμα εφαρμογής του Re-Assign

10	20	20	10	20	16	25	13	27	12	28	11	24
10	20	20	10	20	20	21	19	21	19	21	14	21
-	1	2	1	2	$\cancel{1}$	2	$\cancel{1}$	2	$\cancel{1}$	2	$\cancel{1}$	2
-	3	4	3	4	$\cancel{3}$	4	$\cancel{3}$	4	$\cancel{3}$	4	$\cancel{3}$	4
-	5	6	5	6	$\cancel{5}$	6	$\cancel{5}$	6	$\cancel{5}$	6	$\cancel{5}$	6
-	7	8	7	8	$\cancel{7}$	8	$\cancel{7}$	8	$\cancel{7}$	8	$\cancel{7}$	8
-	9	10	9	10	9	10	$\cancel{9}$	10	$\cancel{9}$	10	$\cancel{9}$	10
-	11	12	11	12	11	12	$1\cancel{1}$	12	$1\cancel{1}$	12	$1\cancel{1}$	12
-	13	14	13	14	13	14	13	14	$1\cancel{3}$	14	$1\cancel{3}$	14
-	15	16	15	16	15	16	15	16	15	16	15	16
-	17	18	17	18	17	18	17	18	17	18	17	18
-	19	20	19	20	19	20	19	20	19	20	19	20
-	21	22	**21**	22	21	22	21	22	21	22	21	22
23	-	24	**23**	24	24	23	24	23	24	23	24	23
25	26	-	**25**	26	25	26	25	26	25	26	25	26
27	28	27	-	28	27	28	27	28	27	28	27	28
29	30	29	-	30	29	30	29	30	29	30	29	30
31	32	31	-	32	31	32	31	32	31	32	31	32
33	34	33	-	34	33	34	33	34	33	34	33	34
35	36	35	-	36	35	36	35	36	35	36	35	36
37	38	37	-	38	37	38	37	38	37	38	**37**	38
39	40	39	-	40	39	40	**39**	40	**39**	40	**39**	40
41	42	41	-	**42**	**41**	42	**41**	42	**41**	42	**41**	42
						1		1		1		1
						3		3		3		3
						5		5		5		5
						7		7		7		
								9		9		
								11		11		
										13		

Table 5: Παράδειγμα εφαρμογής του Channel Assignment

References

[1] I.Katzela and M.Naghshinh, "Channel Assignment Schemes for Cellular Mobile Telecomunications Systems:A Comprehensive Survey", *IEEE Personal Communications, 1070-9916|96*

[2] S.Jordan and A.Khan, "Optimal Dynamic Allocation in Cellular Systems", submitted for publication, 1993.

[3] J.Vucetic, "A Hardware Implementation of Channel Allocation Algorithm Based on a Space-Bandwidth Model of a Cellular Network", *IEEE Trans. on Vechicular Tech.*, vol. 42, 1993, pp. 444-55.

[4] C.H.Papadimitriou, "Computational Complexity", Addison-Wesley, New York, 1994.

[5] M.E.Anagnostou, F.N.Afrati, S.A.Paschos, "Frequency Assignment to Linear and Circular Topologies", submitted for publication.