



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ ΗΛΕΚΤΡΟΟΠΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

**Δυναμική και Τροχιακό Φάσμα Σωματιδίων σε Τοροειδείς
Διατάξεις Ελεγχόμενης Θερμοπυρηνικής Σύντηξης**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
ΤΟΥ
ΙΩΑΝΝΗ ΑΝΤΩΝΕΝΑ

Επιβλέπων: Ιωάννης Κομίνης
Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Μάρτης 2019



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ ΗΛΕΚΤΡΟΠΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ
ΥΛΙΚΩΝ

Δυναμική και Τροχιακό Φάσμα Σωματιδίων σε Τοροειδείς Διατάξεις Ελεγχόμενης Θερμοπυρηνικής Σύντηξης

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΟΥ

ΙΩΑΝΝΗ ΑΝΤΩΝΕΝΑ

Επιβλέπων: Ιωάννης Κομίνης
Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από τριμελή εξεταστική επιτροπή την 20^η Μαρτίου 2019.

.....

Ιωάννης Κομίνης

Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π

.....

Κυριάκος Χιτζανίδης

Καθηγητής Ε.Μ.Π

.....

Ηλίας Γλύτσος

Καθηγητής Ε.Μ.Π

Αθήνα, Μάρτης 2019

.....
Ιωάννης Θ. Αντώνενας

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Copyright © Ιωάννης Αντώνενας, 2019
Με επιφύλαξη κάθε δικαιώματος. All rights reserved

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Περίληψη

Η εργασία αυτή πραγματεύεται τον αναλυτικό υπολογισμό των συχνοτήτων της κίνησης συναρτήσει της ενέργειας για το σύστημα ενός σωματιδίου σε ένα αξονοσυμμετρικό μαγνητικό πεδίο ισορροπίας με την προσέγγιση του large aspect ratio σε τοροειδή γεωμετρία. Για να γίνει αυτό θεωρούμε ότι η κίνηση του σωματιδίου ταυτίζεται με την κίνηση του guiding center, θεωρούμε δηλαδή ότι έχουμε την προσέγγιση της κίνησης του guiding center. Η Hamiltonian του παραπάνω συστήματος είναι ολοκληρώσιμη, για αυτό θεωρητικά είναι δυνατός ο μετασχηματισμός της σε δράσεις γωνίες και κατ' επέκταση ο υπολογισμός της συχνότητας συναρτήσει της ενέργειας, ωστόσο πρακτικά είναι πολύπλοκος. Για αυτό την προσεγγίζουμε με δύο διαφορετικές Hamiltonians για τις οποίες υπολογίζουμε την συχνότητα της κίνησης που περιγράφουν σε μικρό εύρος τροχιάς. Αυτό το κάνουμε με την κανονική θεωρία διαταραχών γράφοντας τις Hamiltonians του μικρού εύρους τροχιάς σαν άθροισμα των Hamiltonians σε μηδενικό εύρος τροχιάς συν έναν μικρό ορό διαταραχής που δηλώνει το μικρό εύρος τροχιάς. Έτσι τελικά προσεγγίζουμε αναλυτικά την συχνότητα συναρτήσει ενέργειας και επομένως και της θέσης και της ορμής για το αρχικό μας ολοκληρώσιμο σύστημα. Μελλοντικά μπορούμε την γενικότερη περίπτωση που το σύστημα μας είναι μη αξονοσυμμετρικό και επόμενος μη ολοκληρώσιμο δηλαδή χαοτικό να την θεωρήσουμε σαν διαταραχή του προηγούμενου ολοκληρώσιμου αξονοσυμμετρικού συστήματος. Έτσι γνωρίζοντας την συχνότητα συναρτήσει της θέσης και της ορμής για το μη διαταραγμένο - ολοκληρώσιμο σύστημα μπορούμε να βρούμε τα σημεία του φασικού χώρου που θα έχουμε συντονισμό, δηλαδή τα σημεία του φασικού χώρου που θα εμφανιστεί έντονα η διαταραχή και το χάος λόγω του μη αξονοσυμμετρικού μαγνητικού πεδίου ισορροπίας

Λέξεις-κλειδιά: <<αξονοσυμμετρικό μαγνητικό πεδίο, large aspect ratio, Hamiltonian, κανονικός μετασχηματισμός, μηδενικό εύρος τροχιάς, μικρό εύρος τροχιάς, μετασχηματισμός σε δράσεις – γωνίες, φασικός χώρος, κανονική θεωρία διαταραχών, συχνότητα κίνησης>>

Abstract

This thesis discusses the analytical calculation of the frequency of the motion versus energy for the particle system in an axisymmetric magnetic field equilibrium with the large aspect ratio approach on toroidal geometry. To do this, we assume that the particle's motion is identical to the motion of the guiding center. The Hamiltonian of this system is integrable. Therefore, the action – angle transformation is theoretically possible as well as the calculation of dependence of the orbital frequency on the particle energy. However, in practice this calculation is complicated, so, we consider two different Hamiltonians for which we calculate the frequency of the motion they describe, taking into account the finite width of the orbit. We are using the canonical perturbation theory, writing the Hamiltonians of the finite orbit width as a sum of the Hamiltonians of zero orbit width plus a finite perturbation term corresponding to the finite orbit width. So finally we calculate analytically the frequency of the motion versus energy and therefore versus the canonical coordinates (q,p) for our original integrable system. In the future we can consider the more general case, in which our system is non axisymmetric and therefore non integrable and chaotic, as a perturbation of the previous integrable axisymmetric system. So, knowledge of the dependence of the orbital frequency on the canonical coordinates for the unperturbed, integrable system allows for pinpointing the phase space points on which resonant interactions will take place, that is the phase space points on which the effects of the non-axisymmetric perturbations are particularly significant leading to chaotic particle motion as well as energy and momentum transfer.

Keywords:<<axisymmetric magnetic field equilibrium, large aspect ratio, Hamiltonian, canonical transformation, zero orbit width, finite orbit width, action – angle transformation, phase space, canonical perturbation theory, frequency of the motion>>

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1 Εισαγωγή	11
1.1 Τι είναι η θερμοπυρηνική Σύντηξη.....	11
1.2 Τι είναι πλάσμα.....	13
1.3 Μαγνητική συγκράτηση πλάσματος	13
1.4 Ιστορική εξέλιξη	14
1.5 Μαγνητοϋδροδυναμική Ισορροπία.....	17
1.6 Καμπυλόγραμμα Σύστημα Συντεταγμένων	19
Κεφάλαιο 2 Μαγνητικό πεδίο ισορροπίας.....	26
2.1 Αναπαράσταση μαγνητικού πεδίου σε τοροειδή γεωμετρία	26
2.2 Μαγνητοϋδροδυναμική ισορροπία και γενική αναπαράσταση του μαγνητικού πεδίου ισορροπίας.....	30
2.3 Αξονοσυμμετρικό μαγνητικό πεδίο ισορροπίας.....	32
2.4 Υπολογισμός του αξονοσυμμετρικού μαγνητικού πεδίου με την προσέγγιση large aspect ratio	40
Κεφάλαιο 3 Guiding Center Motion.....	48
3.1 Υπολογισμός της Lagrangian που περιγράφει την κίνηση του guiding center σε ένα ηλεκτρομαγνητικό πεδίο.....	48
3.2 Υπολογισμός των εξισώσεων κίνησης του guiding center για αξονοσυμμετρικό μαγνητικό πεδίο σε τοροειδή γεωμετρία.....	57

Κεφάλαιο 4 Κίνηση του Guiding Center σε αξονοσυμμετρικό μαγνητικό πεδίο ισορροπίας με την προσέγγιση του Large Aspect Ratio.....	61
Κεφάλαιο 5 Μετασηματισμός σε δράσεις-γωνίες.....	75
5.1 Υπολογισμός της δράσης (\mathbf{J}) από την περίοδο (T).....	75
5.1α Hamiltonian \bar{H}_B	75
5.1β Για την Hamiltonian \bar{H}_A	87
5.2 Υπολογισμός της δράσης (\mathbf{J}) από τον ορισμό της.....	88
5.3 Αποτελέσματα για τις μηδενικού εύρους τροχιάς (zow) Hamiltonians \bar{H}_A και \bar{H}_B	94
Κεφάλαιο 6 Εφαρμογή της κανονικής θεωρίας διαταραχών	103
6.1 Υπολογισμός της συχνότητας τάξης ένα για τις Hamiltonians \bar{H}_A και \bar{H}_B	103
6.1α Για την Hamiltonian \bar{H}_B	103
6.1β Για την Hamiltonian \bar{H}_A	107
6.2 Αποτελέσματα για τις μικρού εύρους τροχιάς (fow) Hamiltonians \bar{H}_A και \bar{H}_B	111
Κεφάλαιο 7 Σύνοψη, Συμπεράσματα και Επεκτάσεις.....	116
Βιβλιογραφία.....	119

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Τι είναι η θερμοπυρηνική Σύντηξη

Η θερμοπυρηνική σύντηξη είναι η διαδικασία κατά την οποία παράγεται μια μορφή πυρηνικής ενέργειας. Η κύρια εφαρμογή της είναι η παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας μέσω της ενέργειας σε μορφή θερμότητας που παράγεται από τις αντιδράσεις της θερμοπυρηνικής σύντηξης. Οι πυρηνικές διαδικασίες που συμβαίνουν κατά την σύντηξη είναι αντίθετες από τις πυρηνικές διαδικασίες που συμβαίνουν κατά την πυρηνική σχάση. Συγκεκριμένα ενώ η σχάση είναι η διάσπαση των βαριών πυρήνων των ατόμων, όπως για παράδειγμα το U^{235} η σύντηξη είναι η συγχώνευση (σύντηξη) ελαφρών πυρήνων των χημικών στοιχείων όπως του υδρογόνου και των ισότοπων του δευτερίου (D) και του τριτίου (T). Η σύντηξη υδρογόνου (H) είναι η πυρηνική αντίδραση από την οποία παράγεται η ενέργεια του ήλιου.

Υπάρχουν τρία βασικά πλεονεκτήματα της ενέργειας που παράγεται μέσω θερμοπυρηνικής σύντηξης. Αυτά είναι, τα αποθέματα καυσίμων, οι περιβαλλοντικές επιπτώσεις της ενέργειας αυτής και η ασφάλεια της. Όσον αφορά το πρώτο πλεονέκτημα σαν καύσιμο για την σύντηξη χρησιμοποιούνται ή το καθαρό δευτέριο σε αντιδράσεις δευτερίου-δευτερίου (D-D) ή ένα ίσο μείγμα δευτερίου και τριτίου σε αντιδράσεις δευτερίου-τριτίου (D-T). Από αυτά το δευτέριο υπάρχει άφθονο στο θαλασσινό νερό, υπάρχει ένα άτομο δευτερίου ανά 6700 άτομα υδρογόνου και μπορεί να εξαχθεί με πολύ χαμηλό κόστος. Για να καταλάβουμε τι σημαίνει αυτό, αν όλο το δευτέριο των ωκεανών χρησιμοποιούταν για την θερμοπυρηνική σύντηξη η ενέργεια που θα παραγόταν από αυτό θα μπορούσε να τροφοδοτήσει τις ενεργειακές ανάγκες του πλανήτη, με τους σημερινούς ρυθμούς κατανάλωσης ενέργειας, για 2 δισεκατομμύρια χρόνια. Ωστόσο η αντίδραση δευτερίου - τριτίου (D-T) παράγει περισσότερη ενέργεια από την αντίδραση δευτερίου-δευτερίου (D-D), δηλαδή από την αντίδραση που χρησιμοποιεί μόνο δευτέριο. Επίσης βασικό πλεονέκτημα της αντίδρασης δευτερίου – τριτίου είναι ότι πραγματοποιείται με γρηγορότερο ρυθμό καθιστώντας ευκολότερη την κατασκευή ενός αντιδραστήρα δευτερίου-τριτίου. Το τρίτιο είναι ραδιενεργό ισότοπο που δεν υπάρχει στην φύση και έχει χρόνο ημίσειας ζωής τα 12 έτη. Το τρίτιο παράγεται από το ισότοπο Li^6 . Οι γεωλογικές εκτιμήσεις δείχνουν

ότι το Li^6 που υπάρχει στην γη επαρκεί για να καλύψει τις ενεργειακές ανάγκες με σύντηξη για 20000 χρόνια. Πιθανώς πριν την εξάντληση του Li^6 η επιστήμη και η τεχνολογία θα έχουν αναπτυχθεί σε τέτοιο βαθμό ώστε να μπορεί η ανθρωπότητα τότε να φτιάξει αντιδραστήρες δευτερίου- δευτερίου.

Όσον αφορά τις περιβαλλοντικές επιπτώσεις οι αντιδράσεις σύντηξης δεν παράγουν βλαβερά απόβλητα, όπως για παράδειγμα το CO_2 . Το τελικό προϊόν σε μια αντίδραση σύντηξης είναι πυρήνες ήλιου. Εκτός όμως από το ήλιο από την αντίδραση σύντηξης προκύπτουν και νετρόνια υψηλής ενέργειας τα οποία προκαλούν την παραγωγή ραδιενεργών υλικών, όταν αλληλοεπιδρούν με υλικά του αντιδραστήρα, τα οποία ωστόσο έχουν σύντομο χρόνο ημίσειας ζωής άρα μπορούν να αποθηκευτούν μέχρι να μην είναι πια ραδιενεργά.

Το τρίτο μεγάλο πλεονέκτημα της θερμοπυρηνικής σύντηξης είναι η ασφάλεια. Κατά την αντίδραση της πυρηνικής σχάσης συμβαίνει αλυσιδωτή αντίδραση η οποία παράγει μεγάλα ποσά ενέργειας και πρέπει να ελεγχθεί από τον πυρηνικό αντιδραστήρα . Δηλαδή υπάρχει ο κίνδυνος η πυρηνική σχάση να ξεφύγει από τα όρια του αντιδραστήρα με καταστροφικές συνέπειες. Στην πυρηνική σύντηξη δεν υπάρχει αλυσιδωτή αντίδραση με αποτέλεσμα αυτή να είναι εγγενώς ευσταθής. Η αντίδραση σύντηξης πρέπει συνεχώς να τροφοδοτείται με μια μικρή μάζα καυσίμου ώστε να λειτουργήσει, πράγμα που σημαίνει ότι η ενέργεια αυτή μπορεί να ελεγχθεί αφού αν διακοπεί η παροχή καυσίμου σταματάει η αντίδραση σύντηξης.

Τα μειονεκτήματα της θερμοπυρηνικής σύντηξης είναι πρώτον ότι η επιστήμη της σύντηξης είναι πολύ περίπλοκη αφού για παράδειγμα το καύσιμο που χρησιμοποιείται πρέπει να θερμανθεί σε θερμοκρασίες μεγαλύτερες από τις θερμοκρασίες στο κέντρο του ήλιου ώστε να ιονιστεί και να γίνει πλάσμα. Όταν δημιουργηθεί το πλάσμα πρέπει να βρεθεί μια μέθοδος για την συγκράτηση του η οποία γίνεται κυρίως με μαγνητικά πεδία, ωστόσο ένας λάθος σχεδιασμός αρκεί ώστε να χαθεί το πλάσμα και να σταματήσουν οι αντιδράσεις σύντηξης χωρίς να έχουμε πάρει αρκετή ενέργεια.

Δεύτερον υπάρχουν μηχανικά προβλήματα που πρέπει να λυθούν όπως το να αναπτυχθούν βελτιωμένα υλικά που είναι ανθεκτικά στα νετρόνια υψηλής ενέργειας και στις υψηλές θερμοκρασίες, να αναπτυχθούν υπεραγωγάτοι μαγνήτες για την δημιουργία του μαγνητικού πεδίου που συγκρατεί το πλάσμα καθώς και να αναπτυχθούν νέες τεχνολογίες για την θέρμανση του καυσίμου ώστε να δημιουργηθεί πλάσμα.

Συνοπτικά τα πλεονεκτήματα της θερμοπυρηνικής σύντηξης είναι πολύ σημαντικότερα από τα μειονεκτήματα της. Τα επιστημονικά και τεχνολογικά ζητήματα που πρέπει να αντιμετωπιστούν είναι δύσκολα ωστόσο υπάρχει ραγδαία πρόοδος και πολλά ζητήματα θα εξεταστούν στο νέο διεθνές πρόγραμμα που είναι γνωστό ως International Thermonuclear Experiment Reactor (ITER). (Freidberg, 2007)

1.2 Τι είναι πλάσμα

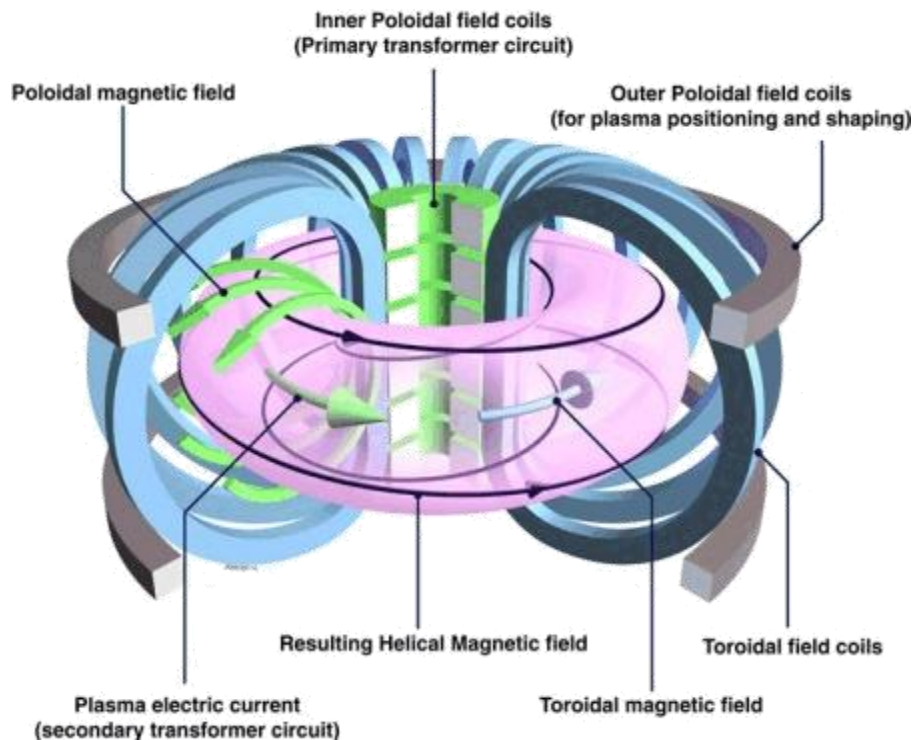
Όπως είπαμε πάρα πάνω ένα από τα προβλήματα που πρέπει να αντιμετωπίσουμε ώστε να πετύχουμε αντιδράσεις θερμοπυρηνικής σύντηξης είναι η θέρμανση της ύλης σε θερμοκρασίες στις οποίες οι κινητικές ενέργειες των σωματιδίων μπορούν να υπερνικήσουν το φράγμα δυναμικού της απωστικής δύναμης μεταξύ των πυρήνων. Στις θερμοκρασίες αυτές, η ύλη έχει τη μορφή πλάσματος. Το πλάσμα είναι ένα πλήρως ιονισμένο αέριο με μικρή πυκνότητα η συμπεριφορά του οποίου καθορίζεται από ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία. Είναι πολύ καλός αγωγός του ηλεκτρικού ρεύματος. Αυτό είναι περίεργο αφού η πυκνότητα των ηλεκτρονίων στο πλάσμα είναι οκτώ τάξεις μεγέθους μικρότερη από την πυκνότητα των ηλεκτρονίων στον χαλκό, ωστόσο η αγωγιμότητα του πλάσματος είναι 40 φορές μεγαλύτερη από την αγωγιμότητα του χαλκού. Αυτό γιατί οι υψηλές θερμοκρασίες και οι μικρές πυκνότητες που υπάρχουν στο πλάσμα περιορίζουν τις συγκρούσεις Coulomb μεταξύ ηλεκτρονίων και ιόντων στο πλάσμα με αποτέλεσμα την μικρότερη αντίσταση στην ροή του ρεύματος.

1.3 Μαγνητική συγκράτηση πλάσματος

Η σύντηξη μέσω μαγνητικής συγκράτησης (μαγνητική σύντηξη) χρησιμοποιεί ισχυρά μαγνητικά πεδία για να συγκρατήσει το πλάσμα μέσα σε ένα «δοχείο κενού» ώστε το πλάσμα να μην έρχεται σε επαφή με τα τοιχώματα του αντιδραστήρα και έτσι να μην έχουμε απώλειες θερμότητας προς το εξωτερικό του αντιδραστήρα ώστε να διατηρείται η θερμοκρασία του πλάσματος σε πολύ υψηλές τιμές. Δηλαδή η μαγνητική συγκράτηση είναι αναγκαία ώστε να έχουμε πλάσμα σε περιορισμένο χώρο. Σε μια πρώτη προσέγγιση, τα ιόντα και τα ηλεκτρόνια που συγκροτούν το πλάσμα δεν μπορούν να διασχίσουν εγκάρσια τις μαγνητικές γραμμές αλλά κινούνται κατά μήκος αυτών. Το μαγνητικό πεδίο που δημιουργείται από εξωτερικά πηνία μεγάλων ρευμάτων είναι τοροειδές έτσι τα σωματίδια του πλάσματος παραμένουν μακριά από τον θάλαμο καύσης διατηρώντας έτσι την υψηλή θερμοκρασία του πλάσματος. Σε ένα πραγματικό τοροειδές μαγνητικό σύστημα έχουμε απώλειες ενέργειας μέσω διάφορων διαδικασιών όπως η ακτινοβολία.

Όπως είπαμε πριν το τοροειδές μαγνητικό πεδίο που φτιάχνεται με εξωτερικά πηνία, τα οποία διαρρέονται από πολοειδές ρεύμα υψηλής έντασης, εξαναγκάζει τα ηλεκτρόνια και τα ιόντα να κινηθούν κατά μήκος των μαγνητικών γραμμών, δηλαδή να κάνουν τοροειδή κίνηση. Επομένως, λόγω αυτής της κίνησης των φορτίων, δημιουργείται ένα μικρό τοροειδές ρεύμα το οποίο έχει σαν αποτέλεσμα την εμφάνιση ενός μικρού πολοειδούς μαγνητικού πεδίου. Το πολοειδές αυτό μαγνητικό πεδίο συμβάλει και αυτό στην μαγνητική συγκράτηση του πλάσματος. Για να πετύχουμε αντιδράσεις σύντηξης το πλάσμα πρέπει να έχει πολύ μεγάλη θερμοκρασία. Το ρεύμα που δημιουργείται όπως είπαμε πάρα πάνω συμβάλει στην θέρμανση του πλάσματος. Ωστόσο καθώς η θερμοκρασία του πλάσματος αυξάνεται η ωμική του αντίσταση μειώνεται επομένως ο

ρυθμός αύξησης της θερμοκρασίας του λόγω του ρεύματος που το διαρρέει θα μειώνεται. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα το πλάσμα να μην έχει την απαραίτητη υψηλή θερμοκρασία για την επίτευξη ικανού αριθμού αντιδράσεων σύντηξης. Προκειμένου να αυξηθεί η θερμοκρασία του πλάσματος περισσότερο απαιτείται περαιτέρω θέρμανση η οποία προέρχεται από εξωτερικές πηγές. Ένας τρόπος είναι η υψίσυχη θέρμανση που χρησιμοποιεί μεγάλης ισχύος ηλεκτρομαγνητικά κύματα διάφορων συχνοτήτων τα οποία μεταδίδουν στο πλάσμα την ενέργεια τους μέσω της απορρόφησης συντονισμού. Δέσμες ουδέτερων σωματιδίων εγχύονται στο πλάσμα, το διαπερνούν και μέσω των συγκρούσεων με τα σωματίδια του πλάσματος μεταδίδουν σε αυτό την ενέργειά τους. (Ερευνα Για Την Ελεγχόμενη Σύντηξη, 2007)

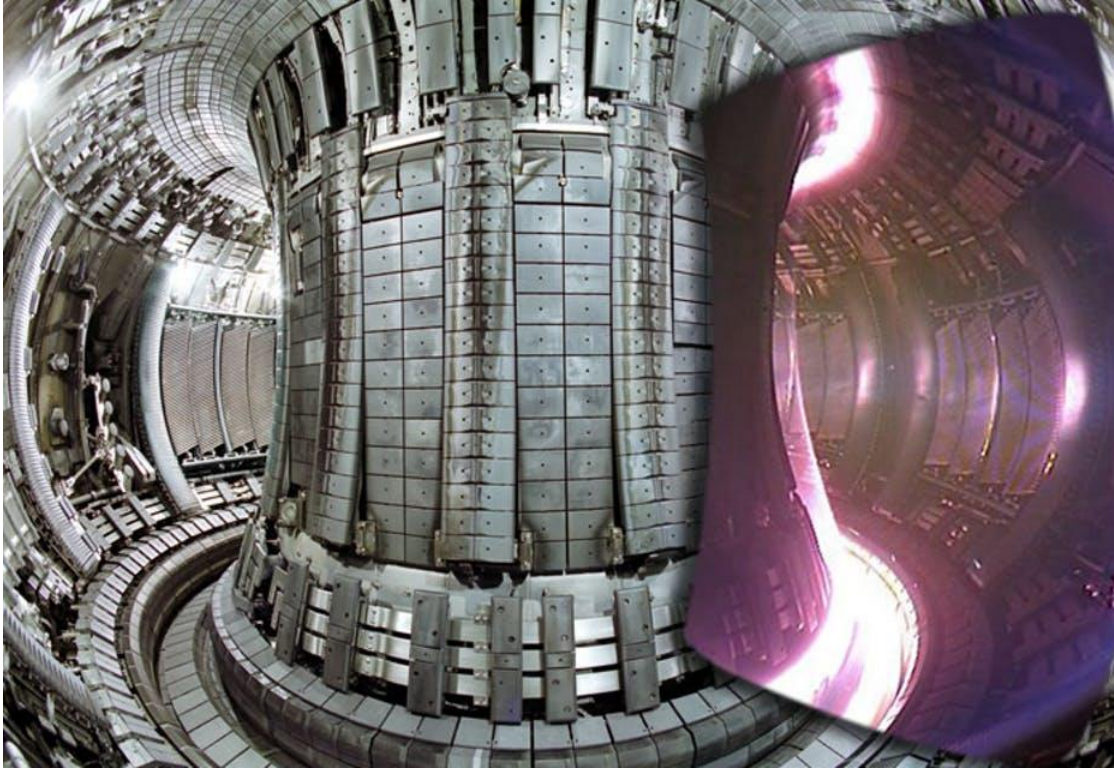


Εικόνα 1: Τα πηνία και τα μαγνητικά πεδία που συγκρατούν το πλάσμα σε τοροειδή γεωμετρία.

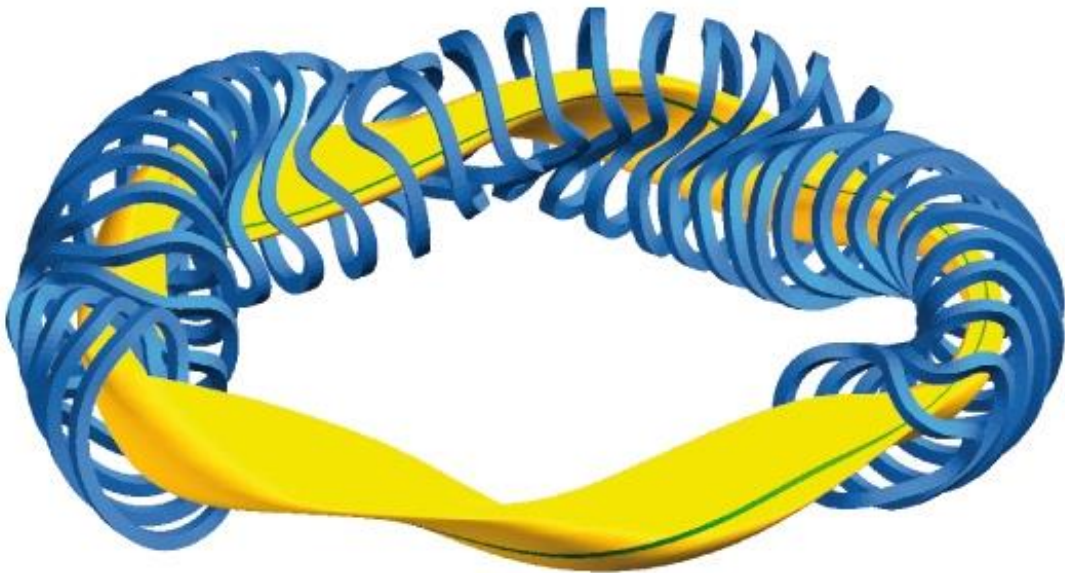
1.4 Ιστορική εξέλιξη

Η διαδικασία για την μαγνητική συγκράτηση που περιγράψαμε πάρα πάνω εφαρμόζεται στις μηχανές ΤΟΚΑΜΑΚ. Το 1968 στην Σοβιετική Ένωση Ρώσοι επιστήμονες σχεδίασαν μηχανές ΤΟΚΑΜΑΚ και πέτυχαν για πρώτη φορά πολύ μεγάλες αποδώσεις. Στην πρόσφατη ιστορία οι

μηχανές TOKAMAK είναι αυτές που έχουν σημειώσει σημαντικά αποτελέσματα στην παραγωγή ενέργειας μέσω θερμοπυρηνικής σύντηξης. Παραδείγματα τέτοιων μηχανών είναι το TORE SUPRA στην Γαλλία και το JET (Joint European Torus) στο Ηνωμένο Βασίλειο, οι οποίες κατάφεραν να πετύχουν μεγάλες αποδώσεις. Εκτός από τις TOKAMAK υπάρχουν και οι μηχανές stellarator οι οποίες για την μαγνητική συγκράτηση του πλάσματος χρησιμοποιούν εξωτερικά πηνία περίπλοκου σχήματος δημιουργώντας ένα περίπλοκο μαγνητικό πεδίο και δεν στηρίζονται στο πολοειδές μαγνητικό πεδίο που επάγεται στο πλάσμα, για την συγκράτηση του, όπως οι μηχανές TOKAMAK. Οι μηχανές stellarator σχεδιάστηκαν για πρώτη φορά στο πανεπιστήμιο Princeton το 1951. Στις αρχές της δεκαετίας του 1960 φάνηκε ότι οι μηχανές stellarator παρουσίαζαν διάφορα προβλήματα και δεν μπορούσαν να πετύχουν καλές αποδώσεις και έτσι κυριάρχησαν οι μηχανές TOKAMAK. Στην πορεία αποδείχθηκε ότι και οι μηχανές TOKAMAK παρουσίαζαν αντίστοιχα προβλήματα και αυτό από την δεκαετία του 90 και μετά οδήγησε σε νέο ενδιαφέρον για τις stellarator και από τότε εφαρμόζονται νέοι μέθοδοι κατασκευής που έχουν βελτιώσει τις αποδώσεις τους. Παραδείγματα stellarator είναι το Wendelstein 7-X στην Γερμανία και το Helical Symmetric Experiment (HSX) στις ΗΠΑ. Η παρούσα έρευνα επικεντρώνεται στην επίλυση προβλημάτων που αναμένονται κατά την λειτουργία του TOKAMAK ITER, δηλαδή στον έλεγχο των διαταραχών, στην διάβρωση των τοιχωμάτων, στην απώλεια σωματιδίων άλφα λόγω μαγνητοϋδροδυναμικής αστάθειας και σε άλλα προβλήματα που μπορούν να προκύψουν και να δυσκολέψουν την επίτευξη υψηλών επιπέδων ισχύος. (Wikipedia, n.d.) (White R. B., The theory of toroidally confined plasmas)



Εικόνα 2: Αντιδραστήρας TOKAMAK



Εικόνα 3: Σχέδιο αντιδραστήρα stellarator

1.5 Μαγνητοϋδροδυναμική Ισορροπία

Για να πετύχουμε μαγνητική συγκράτηση του πλάσματος πρέπει να μελετήσουμε διάφορα συστήματα τοροειδούς τοπολογίας μαγνητικού πεδίου όπως για παράδειγμα το TOKAMAK και το stellarator. Η μελέτη αυτή γίνεται με την μαγνητοϋδροδυναμική ανάλυση του πλάσματος, αφού το πλάσμα μπορεί να αντιμετωπιστεί σαν ρευστό και ταυτόχρονα σαν σύνολο φορτισμένων σωματιδίων που κινούνται σε ένα ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Με βάση αυτό για το πλάσμα θα πρέπει να ισχύουν οι ακόλουθες εξισώσεις

Οι εξισώσεις του Maxwell:

$$\nabla \times \vec{B} = \vec{j}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Η εξίσωση συνέχειας:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

Η εξίσωση που μας δίνει την δύναμη Lorentz ανά μονάδα όγκου:

$$\vec{f} = (nq)\vec{E} + (nq)\vec{v} \times \vec{B}$$

Η εξίσωση διατήρησης μάζας :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\vec{v}) = 0$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις προκύπτει η εξίσωση κίνησης για τα σωματίδια του πλάσματος η οποία θα είναι :

$$m n \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p + \vec{j} \times \vec{B}$$

όπου στις πάρα πάνω εξισώσεις \vec{E} και \vec{B} είναι το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο αντίστοιχα, ρ είναι η χωρική πυκνότητα φορτίου, \vec{j} η χωρική πυκνότητα ρεύματος, n ο αριθμός σωματιδίων ανά μονάδα όγκου, \vec{v} η ταχύτητα των σωματιδίων και p η κινητική πίεση του πλάσματος η οποία οφείλεται στο γεγονός ότι το αντιμετωπίζουμε σαν ρευστό.

Για να πετύχουμε μαγνητική συγκράτηση του πλάσματος θα πρέπει να έχουμε μαγνητοϋδροδυναμική ισορροπία που σημαίνει ότι στην μόνιμη κατάσταση, δηλαδή όταν στις πάρα πάνω εξισώσεις θα ισχύει $\partial/\partial t = 0$, η συνολική κινητική πίεση που ασκείται στο πλάσμα, δηλαδή η πίεση που οφείλεται στην σωματιδιακή του φύση και η πίεση που οφείλεται στις ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις που του ασκούνται, θα πρέπει να προκαλεί ισορροπία δυνάμεων στο πλάσμα. Αυτό σημαίνει ότι η πάρα πάνω εξίσωση κίνησης θα γίνει:

$$\nabla p = \vec{j} \times \vec{B}$$

Η εξίσωση αυτή δηλώνει ότι το σύστημα του πλάσματος και του μαγνητικού πεδίου, που εφαρμόζουμε για την συγκράτηση του, βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας. Επίσης επειδή η εξίσωση αυτή είναι γραμμική ως προς την πίεση και τετραγωνική ως προς το μαγνητικό πεδίο, αφού $\nabla \times \vec{B} = \vec{j}$, ο λόγος $\beta = 2p/B^2$, το βήτα του πλάσματος, είναι αυτό που χαρακτηρίζει ο μαγνητικό πεδίο που συγκρατεί το πλάσμα σε σχέση με την κινητική πίεση. (White R. B., The theory of toroidally confined plasmas)

Στο επόμενο κεφάλαιο θα προσδιορίσουμε ένα μαγνητικό σύστημα, δηλαδή ένα μαγνητικό πεδίο με το οποίο θα επιτυγχάνεται μαγνητοϋδροδυναμική ισορροπία θεωρώντας δεδομένες τις εξισώσεις της μαγνητοϋδροδυναμικής που αναφέραμε πάρα πάνω. Λόγω της φύσης του μαγνητικού πεδίου η απλούστερη τοπολογία στην οποία μπορούμε να μελετήσουμε χωρίς να εξέρχονται οι μαγνητικές γραμμές από έναν δεδομένο όγκο, δηλαδή για να έχουμε κλειστές μαγνητικές γραμμές, είναι η τοροειδής. Επίσης επειδή οι τροχιές των σωματιδίων του πλάσματος ακολουθούν τις μαγνητικές γραμμές αυτή είναι η απλούστερη τοπολογία που μπορεί να δώσει πλήρη περιορισμό του πλάσματος. Για τον λόγω αυτόν στην συνέχεια θα δουλέψουμε σε τοροειδείς συντεταγμένες.

1.6 Καμπυλόγραμμα Σύστημα Συντεταγμένων

Έστω ότι $\vec{r} = (x, y, z)$ το διάνυσμα θέσης ενός σημείου στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων και $\psi = \psi(x, y, z)$, $\theta = \theta(x, y, z)$, $\zeta = \zeta(x, y, z)$ είναι οι εξισώσεις που μας πάνε στο γενικότερο καμπυλόγραμμα σύστημα συντεταγμένων και $x = x(\psi, \theta, \zeta)$, $y = y(\psi, \theta, \zeta)$, $z = z(\psi, \theta, \zeta)$ είναι οι αντίστροφες εξισώσεις που μας πάνε πίσω στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Τότε μπορούμε να ορίσουμε μια καινούρια βάση διανυσμάτων του τρισδιάστατου χώρου οι οποία μπορεί να έχει τις ακόλουθες δύο μορφές. (White R. B., The theory of torodially confined plasmas) (Glowinski, et al.)

Συναλλοίωτη (Covariant) μορφή:

$$\begin{aligned} \vec{e}_\psi &= \left. \frac{\partial \vec{r}}{\partial \psi} \right|_{\theta, \zeta = \text{constant}} \Rightarrow \hat{\psi} = \frac{\left. \frac{\partial \vec{r}}{\partial \psi} \right|_{\theta, \zeta = \text{constant}}}{\left| \left. \frac{\partial \vec{r}}{\partial \psi} \right|_{\theta, \zeta = \text{constant}} \right|} \\ \vec{e}_\theta &= \left. \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right|_{\psi, \zeta = \text{constant}} \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{\left. \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right|_{\psi, \zeta = \text{constant}}}{\left| \left. \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right|_{\psi, \zeta = \text{constant}} \right|} \\ \vec{e}_\zeta &= \left. \frac{\partial \vec{r}}{\partial \zeta} \right|_{\theta, \psi = \text{constant}} \Rightarrow \hat{\zeta} = \frac{\left. \frac{\partial \vec{r}}{\partial \zeta} \right|_{\theta, \psi = \text{constant}}}{\left| \left. \frac{\partial \vec{r}}{\partial \zeta} \right|_{\theta, \psi = \text{constant}} \right|} \end{aligned} \tag{1.1}$$

Ανταλλοίωτη (Contravariant) μορφή:

$$\begin{aligned} \vec{e}^\psi &= \nabla \psi \\ \vec{e}^\theta &= \nabla \theta \end{aligned} \tag{1.2}$$

$$\vec{e}^\zeta = \nabla \zeta$$

$$\text{όπου } \nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z}.$$

Η ιακωβιανή ορίζουσα του πάρα πάνω μετασχηματισμού συντεταγμένων θα είναι:

$$\det(J) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \psi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \psi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \psi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix}$$

(1.3)

$$= \frac{\partial x}{\partial \psi} \left(\frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial y}{\partial \psi} \left(\frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial z}{\partial \psi} \left(\frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial y}{\partial \zeta} - \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial y}{\partial \theta} \right)$$

$$= \left(\frac{\partial x}{\partial \psi} \hat{x} + \frac{\partial y}{\partial \psi} \hat{y} + \frac{\partial z}{\partial \psi} \hat{z} \right) \left(\left(\frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \theta} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \theta} \right) \hat{y} \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial y}{\partial \zeta} - \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial y}{\partial \theta} \right) \hat{z} \right)$$

$$= \vec{e}_\psi \cdot (\vec{e}_\theta \times \vec{e}_\zeta)$$

Όμως

$$J \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} & \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} & \frac{\partial \theta}{\partial z} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{bmatrix} = I \Rightarrow \det(J^{-1}) = \frac{1}{\det(J)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} & \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} & \frac{\partial \theta}{\partial z} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{vmatrix}$$

και όμοια με πριν προκύπτει ότι:

$$\frac{1}{\det(J)} = \nabla \psi \cdot (\nabla \theta \times \nabla \zeta) \quad (1.4)$$

Στην συνέχεια θα συμβολίζουμε το $\det(J)$ με J .

Επίσης παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned} \vec{e}_\psi \cdot \vec{e}^\psi \Big|_{\theta, \zeta = \text{constant}} &= \left(\frac{\partial x}{\partial \psi} \hat{x} + \frac{\partial y}{\partial \psi} \hat{y} + \frac{\partial z}{\partial \psi} \hat{z} \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \hat{z} \right) \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \Big|_{\theta, \zeta = \text{constant}} = \frac{\partial \psi}{\partial \psi} \Big|_{\theta, \zeta = \text{constant}} = 1 \end{aligned} \quad (1.5)$$

και

$$\begin{aligned} \vec{e}_\psi \times \vec{e}^\psi \Big|_{\theta, \zeta = \text{constant}} &= \left(\frac{\partial y}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \hat{x} \\ &\quad - \left(\frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \hat{z} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Όμως $y = y(\psi, \theta, \zeta)$ και για $\theta, \zeta = constant$ θα είναι $y = y(\psi(x, y, z))$ άρα

$$\frac{\partial y}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial y}{\partial z} = 0$$

γιατί οι μεταβλητές x, y, z είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Το ίδιο ισχύει και για τα υπόλοιπα γινόμενα της (1.6). Άρα από την (1.6) προκύπτει:

$$\vec{e}_\psi \times \vec{e}^\psi \Big|_{\theta, \zeta = constant} = 0 \Rightarrow \vec{e}_\psi \parallel \vec{e}^\psi \quad (1.7)$$

Από (1.6),(1.7) έχουμε ότι:

$$|\vec{e}_\psi| = \frac{1}{|\vec{e}^\psi|} \quad (1.8)$$

Όπως είπαμε στην αρχή:

$$r = r(x, y, z) = r(x(\psi, \theta, \zeta), y(\psi, \theta, \zeta), z(\psi, \theta, \zeta)) \Rightarrow d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \psi} d\psi + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \zeta} d\zeta$$

άρα από τις (1.1)

$$d\vec{r} = \vec{e}_\psi d\psi + \vec{e}_\theta d\theta + \vec{e}_\zeta d\zeta = \vec{d}r_\psi + \vec{d}r_\theta + \vec{d}r_\zeta.$$

Στην συνέχεια θα εξετάσουμε το εμβαδό ενός στοιχειώδους τμήματος της επιφάνειας $\zeta = constant \Rightarrow d\zeta = 0 \Rightarrow \vec{d}r_\zeta = 0$. Τότε τα δύο στοιχειώδη διανύσματα αυτής της επιφάνειας θα είναι το $\vec{d}r_\psi$ και το $\vec{d}r_\theta$ αφού $\vec{d}r \Big|_{\zeta = constant} = \vec{d}r_\psi + \vec{d}r_\theta$. Άρα το στοιχειώδες εμβαδόν της επιφάνειας θα είναι

$$dS_{\zeta} = \vec{dr}_{\psi} \times \vec{dr}_{\theta} = \vec{e}_{\psi} \times \vec{e}_{\theta} d\psi d\theta \quad (1.9)$$

Όμως

$$\overline{\nabla \zeta} \cdot J d\psi d\theta \stackrel{(1.3)}{=} \overline{\nabla \zeta} \cdot \vec{e}_{\psi} \cdot (\vec{e}_{\theta} \times \vec{e}_{\zeta}) d\psi d\theta = \overline{\nabla \zeta} \cdot \vec{e}_{\zeta} \cdot (\vec{e}_{\psi} \times \vec{e}_{\theta}) d\psi d\theta \stackrel{(1.5)}{=} (\vec{e}_{\psi} \times \vec{e}_{\theta}) d\psi d\theta \stackrel{(1.9)}{=} dS_{\zeta}$$

Όμοια για τις επιφάνειες $\psi = constant$ και $\theta = constant$. Άρα θα έχουμε:

$$d\vec{S}_{\zeta} = \overline{\nabla \zeta} \cdot J d\psi d\theta$$

$$d\vec{S}_{\theta} = \overline{\nabla \theta} \cdot J d\psi d\zeta \quad (1.10)$$

$$d\vec{S}_{\psi} = \overline{\nabla \psi} \cdot J d\theta d\zeta$$

Τέλος θα υπολογίσουμε τις εκφράσεις των βασικών διαφορικών τελεστών στο τοροειδές καμπυλόγραμμα σύστημα συντεταγμένων. Έστω $F = F(x, y, z)$ μια βαθμωτή συνάρτηση του \vec{r} τότε :

$$\begin{aligned} \nabla F &= \frac{\partial F}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial F}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial F}{\partial z} \hat{z} = \left(\frac{\partial F}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) \hat{x} \\ &+ \left(\frac{\partial F}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial F}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) \hat{z} \\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial F}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial F}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial z} \hat{z} \right) + \left(\frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \hat{z} \right) \\ &+ \left(\frac{\partial F}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial F}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial F}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \hat{z} \right) = \left(\nabla \psi \frac{\partial}{\partial \psi} + \nabla \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \nabla \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) F \end{aligned} \quad (1.11)$$

Όπου το $\left(\nabla \psi \frac{\partial}{\partial \psi} + \nabla \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \nabla \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \right)$ είναι τελεστής που εφαρμόζεται πάνω στην F .

Άρα από την (1.11) θα έχουμε ότι αν $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ τότε:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = (\nabla \psi \frac{\partial}{\partial \psi}) \times \vec{F} + (\nabla \theta \frac{\partial}{\partial \theta}) \times \vec{F} + (\nabla \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta}) \times \vec{F}$$

όμως

$$\begin{aligned} (\nabla \psi \frac{\partial}{\partial \psi}) \times \vec{F} &= (\nabla \psi \frac{\partial}{\partial \psi}) \times (F_\psi \nabla \psi + F_\theta \nabla \theta + F_\zeta \nabla \zeta) \\ &= \nabla \psi \times \frac{\partial(F_\psi \nabla \psi)}{\partial \psi} + \nabla \psi \times \frac{\partial(F_\theta \nabla \theta)}{\partial \theta} + \nabla \psi \times \frac{\partial(F_\zeta \nabla \zeta)}{\partial \zeta} \end{aligned}$$

Και

$$\nabla \psi \times \frac{\partial(F_\psi \nabla \psi)}{\partial \psi} = \overline{\nabla \psi} \times \overline{\nabla \psi} \frac{\partial F_\psi}{\partial \psi} + \overline{\nabla \psi} \times \frac{\partial(\overline{\nabla \psi})}{\partial \psi} F_\psi$$

όμως

$$\overline{\nabla \psi} \times \overline{\nabla \psi} = 0$$

Και

$$\frac{\partial(\overline{\nabla \psi})}{\partial \psi} = \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \hat{z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \psi} \right) \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \psi} \right) \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \psi} \right) \hat{z} \stackrel{\frac{\partial \psi}{\partial \psi} = 1}{=} 0$$

άρα

$$\nabla \psi \times \frac{\partial(F_\psi \nabla \psi)}{\partial \psi} = 0.$$

Όμοια

$$\nabla \psi \times \frac{\partial(F_\theta \nabla \theta)}{\partial \theta} = \overline{\nabla \psi} \times \overline{\nabla \theta} \frac{\partial F_\theta}{\partial \psi} \quad \text{και} \quad \nabla \psi \times \frac{\partial(F_\zeta \nabla \zeta)}{\partial \zeta} = \overline{\nabla \psi} \times \overline{\nabla \zeta} \frac{\partial F_\zeta}{\partial \psi}$$

Άρα

$$(\nabla \psi \frac{\partial}{\partial \psi}) \times \vec{F} = \vec{\nabla} \psi \times \vec{\nabla} \theta \frac{\partial F_\theta}{\partial \psi} + \vec{\nabla} \psi \times \vec{\nabla} \zeta \frac{\partial F_\zeta}{\partial \psi}.$$

Όμοια

$$(\nabla \theta \frac{\partial}{\partial \theta}) \times \vec{F} = \vec{\nabla} \theta \times \vec{\nabla} \psi \frac{\partial F_\psi}{\partial \theta} + \vec{\nabla} \theta \times \vec{\nabla} \zeta \frac{\partial F_\zeta}{\partial \theta}$$

και

$$(\nabla \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta}) \times \vec{F} = \vec{\nabla} \zeta \times \vec{\nabla} \psi \frac{\partial F_\psi}{\partial \zeta} + \vec{\nabla} \zeta \times \vec{\nabla} \theta \frac{\partial F_\theta}{\partial \zeta}$$

Από τα páρα páνω προκύπτει ότι:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{\nabla} \theta \times \vec{\nabla} \zeta \left(\frac{\partial F_\zeta}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial \zeta} \right)$$

(1.12)

$$+ \vec{\nabla} \psi \times \vec{\nabla} \zeta \left(\frac{\partial F_\zeta}{\partial \psi} - \frac{\partial F_\psi}{\partial \zeta} \right) + \vec{\nabla} \psi \times \vec{\nabla} \theta \left(\frac{\partial F_\theta}{\partial \psi} - \frac{\partial F_\psi}{\partial \theta} \right)$$

Κεφάλαιο 2

Μαγνητικό πεδίο ισορροπίας

2.1 Αναπαράσταση μαγνητικού πεδίου σε τοροειδή γεωμετρία

Υπάρχουν πολλοί διαφορετικοί τρόποι να αναπαραστήσουμε ένα μαγνητικό πεδίο. Σε αυτό το σημείο θα δώσουμε μια αναπαράσταση του μαγνητικού πεδίου που είναι χρήσιμη γιατί πρώτον μας δείχνει τον Hamiltonian χαρακτήρα των τροχιών που ακολουθούν οι μαγνητικές γραμμές και δεύτερον είναι η πιο βολική αναπαράσταση για να μελετήσουμε την μαγνητοϋδροδυναμική ισορροπία καθώς και την κίνηση των σωματιδίων του πλάσματος στο μαγνητικό πεδίο. (White R. B., The theory of toroidally confined plasmas) (Glowinski, et al.)

Θεωρούμε ότι $\vec{B}(\vec{r}(\psi, \theta, \zeta))$ είναι το μαγνητικό πεδίο στον χώρο. Τότε την μεταβλητή ψ την ορίζουμε ποσοτικά σαν την ροή που διέρχεται από μια επιφάνεια με $\zeta = \text{constant}$ και για κάθε θ , δηλαδή όσο αυξάνεται η επιφάνεια σε εμβαδόν, δηλαδή αυξάνεται το ψ , τόσο αυξάνεται η ροή. Έτσι

$$2\pi\psi = \iint \vec{B} d\vec{S}_\zeta \stackrel{(1.10)}{=} \iint \vec{B} \nabla \zeta \cdot J d\psi d\theta \quad (2.1)$$

Όμοια ορίζουμε την μεταβλητή ψ_p σαν την ροή που διέρχεται από μια επιφάνεια με $\theta = \text{constant}$ και για κάθε ζ . Δηλαδή:

$$2\pi\psi_p = \iint \vec{B} d\vec{S}_\theta \stackrel{(1.10)}{=} \iint \vec{B} \nabla \theta \cdot J d\psi d\zeta \quad (2.2)$$

Από τις εξισώσεις Maxwell έχουμε ότι $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{F}$ με $F = F(\psi, \theta, \zeta) = f_\psi \nabla \psi + f_\theta \nabla \theta + f_\zeta \nabla \zeta$ μια διανυσματική συνάρτηση στο γενικό καμπυλόγραμμα σύστημα συντεταγμένων εκφρασμένη στην contravariant μορφή της. Έστω επίσης $f_\theta = \partial G / \partial \theta$ και $f_\zeta = \partial G / \partial \zeta$ όπου $G = G(\psi, \theta, \zeta)$ μια βαθμωτή συνάρτηση. Τότε

$$\frac{\partial f_\theta}{\partial \zeta} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\partial G}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial G}{\partial \zeta} = \frac{\partial f_\zeta}{\partial \theta}$$

Επίσης από (1.11)

$$\nabla G = \frac{\partial G}{\partial \psi} \nabla \psi + \frac{\partial G}{\partial \theta} \nabla \theta + \frac{\partial G}{\partial \zeta} \nabla \zeta.$$

Από τις πάρα πάνω σχέσεις προκύπτει ότι $F = \nabla G - (f_\psi - \partial G / \partial \psi) \nabla \psi$ θέτοντας $V = f_\psi - \partial G / \partial \psi$ έχουμε $F = \nabla G - V \nabla \psi$. Άρα από τα πάρα πάνω $\vec{B} = \nabla \times (\nabla G) - \nabla \times (V \cdot \nabla \psi)$ και χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $\nabla \times (f \cdot g) = f \cdot (\nabla \times g) + (\nabla f) \times g$ και επειδή $\nabla \times (\nabla G) = 0$ παίρνουμε:

$$\vec{B} = \nabla \psi \times \nabla V \quad (2.3)$$

Έστω ότι η V είναι της μορφής $V = \theta - \zeta / q(\psi) + \lambda(\psi, \theta, \zeta)$

όπου

$$q(\psi) = \frac{d\psi}{d\psi_p} \quad (2.4)$$

τότε

$$\nabla V = \left(\frac{\zeta}{q^2(\psi)} \frac{dq}{d\psi} + \frac{\partial \lambda}{\partial \psi} \right) \nabla \psi + \left(1 + \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} \right) \nabla \theta + \left(-\frac{1}{q(\psi)} + \frac{\partial \lambda}{\partial \zeta} \right) \nabla \zeta$$

Άρα από την (2.3) θα πάρουμε ότι

$$\vec{B} = (1 + \frac{\partial \lambda}{\partial \theta}) \nabla \psi \times \nabla \theta + (\frac{\partial \lambda}{\partial \zeta} - \frac{1}{q(\psi)}) \nabla \zeta \times \nabla \psi \quad (2.5)$$

Χρησιμοποιώντας τις (2.1) και (2.5) θα έχουμε:

$$2\pi\psi = \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} \int_{\psi} ((1 + \frac{\partial \lambda}{\partial \theta}) \nabla \psi \times \nabla \theta + (\frac{\partial \lambda}{\partial \zeta} - \frac{1}{q(\psi)}) \nabla \zeta \times \nabla \psi) \nabla \zeta J d\psi d\theta$$

όμως $\nabla \zeta \cdot (\nabla \zeta \times \nabla \psi) = 0$ και $\nabla \zeta \cdot (\nabla \psi \times \nabla \theta) J \stackrel{(1.4)}{=} J / J = 1$. Άρα

$$\begin{aligned} 2\pi\psi &= \int_{\psi} \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} 1 + \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} d\theta d\psi = \int_{\psi} 2\pi + \lambda(\theta_0 + 2\pi) - \lambda(\theta_0) d\psi = \\ &2\pi\psi + \int_{\psi} \lambda(\psi, \theta_0 + 2\pi, \zeta) - \lambda(\psi, \theta_0, \zeta) d\psi \end{aligned}$$

το οποίο για να ισχύει για κάθε ψ θα πρέπει $\lambda(\psi, \theta_0 + 2\pi, \zeta) = \lambda(\psi, \theta_0, \zeta)$ δηλαδή το $\lambda(\psi, \theta, \zeta)$ να είναι περιοδική συνάρτηση του θ .

Χρησιμοποιώντας τις (2.1) και (2.5) θα έχουμε:

$$2\pi\psi_p = \int_{\zeta_0}^{\zeta_0+2\pi} \int_{\psi} ((1 + \frac{\partial \lambda}{\partial \theta}) \nabla \psi \times \nabla \theta + (\frac{\partial \lambda}{\partial \zeta} - \frac{1}{q(\psi)}) \nabla \zeta \times \nabla \psi) \nabla \theta J d\psi d\zeta$$

όμοια με πριν

$$2\pi\psi_p = \int_{\psi} \int_{\zeta_0}^{\zeta_0+2\pi} (\frac{1}{q(\psi)} - \frac{\partial \lambda}{\partial \zeta}) d\zeta d\psi = \int_{\psi} \frac{2\pi}{q(\psi)} - \lambda(\psi, \theta, \zeta_0 + 2\pi) + \lambda(\psi, \theta, \zeta_0) d\psi$$

όμως από (2.4) $d\psi / q(\psi) = d\psi_p$ άρα

$$2\pi\psi_p = 2\pi \int_{\psi} d\psi_p + \int_{\psi} -\lambda(\psi, \theta, \zeta_0 + 2\pi) + \lambda(\psi, \theta, \zeta_0) d\psi =$$

$$2\pi\psi_p + \int_{\psi} -\lambda(\psi, \theta, \zeta_0 + 2\pi) + \lambda(\psi, \theta, \zeta_0) d\psi$$

το οποίο για να ισχύει για κάθε ψ θα πρέπει $\lambda(\psi, \theta, \zeta_0 + 2\pi) = \lambda(\psi, \theta, \zeta_0)$ δηλαδή το $\lambda(\psi, \theta, \zeta)$ να είναι περιοδική συνάρτηση του ζ .

Όπως δείξαμε πριν το $\lambda(\psi, \theta, \zeta)$ είναι περιοδική συνάρτηση του ζ και του θ άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\lambda(\psi, \theta, \zeta) = 0$. Τότε από την (2.5) παίρνουμε ότι

$$\vec{B} = \nabla\psi \times \nabla\theta + \nabla\zeta \times \nabla\psi / q(\psi)$$

όμως

$$\vec{e}_\psi \cdot \nabla\psi_p \stackrel{(1.1)}{=} \frac{\partial\psi_p}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial\psi} + \frac{\partial\psi_p}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial\psi} + \frac{\partial\psi_p}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial\psi} = \frac{\partial\psi_p}{\partial\psi} \stackrel{(2.4)}{=} \frac{d\psi_p}{d\psi} = \frac{1}{q(\psi)}$$

$$\Rightarrow \nabla\psi \cdot \vec{e}_\psi \cdot \nabla\psi_p = \frac{\nabla\psi}{q(\psi)}$$

άρα από (1.5) παίρνουμε ότι $\nabla\psi_p = \nabla\psi / q(\psi)$, άρα

$$\vec{B} = \nabla\psi \times \nabla\theta + \nabla\zeta \times \nabla\psi_p \tag{2.6'}$$

Αυτή είναι η μορφή του μαγνητικού πεδίου που προκύπτει από την γενικότερη μορφή του, που δίνεται από την (2.5), θεωρώντας $\lambda = 0$ δηλαδή straight field line coordinates. Χρησιμοποιώντας την κατάλληλη διανυσματική ταυτότητα προκύπτει ότι $\vec{B} = \nabla \times (\psi \nabla\theta - \psi_p \nabla\zeta)$ και επειδή $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ θα έχουμε:

$$\vec{A} = \psi \nabla \theta - \psi_p \nabla \zeta \quad (2.6)$$

2.2 Μαγνητοϋδροδυναμική ισορροπία και γενική αναπαράσταση του μαγνητικού πεδίου ισορροπίας

Έστω \vec{B} το μαγνητικό πεδίο στον χώρο. Χωρίς την παρουσία ηλεκτρικού πεδίου η μαγνητική δύναμη που ασκείται σε έναν διαφορικό όγκο dV θα είναι $dF_m = dq \cdot \vec{u} \times \vec{B}$. Διαιρώντας με dV η μαγνητική δύναμη ανά μονάδα όγκου θα είναι $f_m = dF_m / dV = dq / dV \cdot \vec{u} \times \vec{B} = \rho \cdot \vec{u} \times \vec{B}$. Όμως $\rho \cdot \vec{u} = \vec{j}$ όπου \vec{j} η πυκνότητα ρεύματος. Έστω p η πίεση που ασκείται στον όγκο αυτόν, τότε $p = dF_p / dS$ όπου S η επιφάνεια που περικλείει τον όγκο. Τότε η δύναμη που οφείλεται στην πίεση θα είναι

$$F_p = \int p dS .$$

Για να έχουμε όμως ισορροπία δυνάμεων στον όγκο θα πρέπει

$$F_m = F_p \Rightarrow \int f_m dV = \int p dS$$

Από το θεώρημα Gauss

$$\int f_m dV = \int \nabla p dV \Rightarrow f_m = \nabla p .$$

Άρα

$$\nabla p = \vec{j} \times \vec{B} \quad (2.7)$$

Επιλέγω $p = p(\psi)$. Τότε η (2.7) και η (1.11) συνεπάγονται ότι $\vec{j} \times \vec{B} = \partial p / \partial \psi \nabla \psi$, από την τελευταία σχέση φαίνεται ότι \vec{j} είναι κάθετο στο $\nabla \psi$ και \vec{B} είναι κάθετο στο $\nabla \psi$, άρα μπορώ να θέσω

$$\vec{j} = \nabla \psi \times \nabla w \quad (2.8)$$

αφού είναι κάθετο στο $\nabla \psi$ (αφού $\nabla \psi \cdot (\nabla \psi \times \nabla w) = 0$).

Έστω $w = w(\psi, \theta, \zeta) = \bar{I}'(\psi)\theta + \bar{g}'(\psi)\zeta + \alpha(\psi, \theta, \zeta)$. Όπου το $\alpha(\psi, \theta, \zeta)$ είναι μια αυθαίρετη συνάρτηση των ψ, θ, ζ , επομένως και το W και το \vec{j} , που είναι συνάρτηση του W , θα είναι αυθαίρετες συναρτήσεις των ψ, θ, ζ . Από τον ορισμό του W θα έχουμε

$$\nabla w = \left(\frac{\partial \bar{I}'(\psi)}{\partial \psi} \theta + \frac{\partial \bar{g}'(\psi)}{\partial \psi} \zeta + \frac{\partial \alpha}{\partial \psi} \right) \nabla \psi + (\bar{I}'(\psi) + \alpha'_\theta) \nabla \theta + (\bar{g}'(\psi) + \alpha'_\zeta) \nabla \zeta$$

Όπου ο τόνος δηλώνει παραγώγιση ως προς την αντίστοιχη μεταβλητή. Άρα από την (2.8) προκύπτει ότι:

$$\vec{j} = (\bar{I}'(\psi) + \alpha'_\theta) \nabla \psi \times \nabla \theta + (\bar{g}'(\psi) + \alpha'_\zeta) \nabla \psi \times \nabla \zeta \quad (2.9)$$

Όμοια με την ανάλυση που έγινε πάρα πάνω για το \mathcal{L} και επιλέγοντας, όμοια με τα ψ και ψ_p

$$2\pi \bar{I} = \iint \vec{j} dS_\zeta, \quad 2\pi \bar{g} = \iint \vec{j} dS_\theta$$

τότε και από την (2.9) προκύπτει ότι το $\alpha(\psi, \theta, \zeta)$ είναι περιοδική συνάρτηση των θ και ζ . Για να προκύπτει το πάρα πάνω ορίζουμε:

$$\begin{aligned} I(\psi, \theta, \zeta) &= \bar{I}(\psi) + \sigma'_\theta \\ g(\psi, \theta, \zeta) &= \bar{g}(\psi) + \sigma'_\zeta \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\delta(\psi, \theta, \zeta) = \sigma'_\psi - \alpha(\psi, \theta, \zeta)$$

Όπου το $\sigma(\psi, \theta, \zeta)$ θα πρέπει να είναι περιοδική συνάρτηση των θ, ζ ώστε να ισχύουν τα πάρα πάνω και ταυτόχρονα να ισχύει $\langle I(\psi, \theta, \zeta) \rangle_{\theta, \zeta} = \bar{I}(\psi)$ και $\langle g(\psi, \theta, \zeta) \rangle_{\theta, \zeta} = \bar{g}(\psi)$

Το \vec{j} και το \vec{B} συνδέονται σε την εξίσωση του Maxwell $\nabla \times \vec{B} = \vec{j}$, άρα το μαγνητικό πεδίο πρέπει να είναι τέτοιο ώστε να ικανοποιείται αυτή η εξίσωση. Έτσι υποθέτω ότι $\vec{B} = g\nabla\zeta + I\nabla\theta + \delta\nabla\psi$, τότε από (1.12) έχουμε μετά από τις πράξεις $\nabla \times \vec{B} = (\bar{I}'(\psi) + \alpha'_\theta)\nabla\psi \times \nabla\theta + (\bar{g}'(\psi) + \alpha'_\zeta)\nabla\psi \times \nabla\zeta \stackrel{(2.9)}{=} \vec{j}$. Άρα με αυτό το μαγνητικό πεδίο βρήκαμε μια λύση της εξίσωσης Maxwell άρα και από το θεώρημα της μοναδικότητας η λύση για την εξίσωση Maxwell για το ρεύμα που δίνεται από την (2.9) θα είναι:

$$\vec{B} = g\nabla\zeta + I\nabla\theta + \delta\nabla\psi \quad (2.11)$$

2.3 Αξονοσυμμετρικό μαγνητικό πεδίο ισορροπίας

Για το αξονοσυμμετρικό μαγνητικό πεδίο ισορροπίας (axisymmetric equilibrium) υποθέτουμε στους πάρα πάνω ορισμούς $\lambda = 0$ (straight field line coordinates) και ότι όλες οι συναρτήσεις που χρησιμοποιήθηκαν πάρα πάνω για τον ορισμό του μαγνητικού πεδίου είναι ανεξάρτητες του ζ ($\partial/\partial\zeta = 0$) (White & Chance, Hamiltonian guiding center drift orbit calculation for plasmas of arbitrary cross section, 1984).

Έτσι από την (2.6) έχουμε ότι $\vec{B} = \nabla\psi \times \nabla\theta + \nabla\zeta \times \nabla\psi_p$, άρα

$$\frac{\vec{B}\nabla\zeta}{B\nabla\theta} = \frac{\nabla\zeta \cdot (\nabla\psi \times \nabla\theta)}{\nabla\theta \cdot (\nabla\zeta \times \nabla\psi_p)} \stackrel{\nabla\psi_p = \frac{\nabla\psi}{q(\psi)}}{=} \frac{\nabla\theta \cdot (\nabla\zeta \times \nabla\psi)}{\nabla\theta \cdot (\nabla\zeta \times \nabla\psi)} = q(\psi) \quad (2.12)$$

Πολλαπλασιάζοντας στην (2.12) τον αριθμητή και τον παρονομαστή με τον αριθμό $\vec{B} \cdot d\vec{r}$ όπου $d\vec{r} = dx \cdot \hat{x} + dy \cdot \hat{y} + dz \cdot \hat{z}$ θα έχουμε:

$$\frac{\vec{B} \cdot d\vec{r} \cdot \vec{B} \nabla \zeta}{\vec{B} \cdot d\vec{r} \cdot \vec{B} \nabla \theta} = \frac{|\vec{B}|^2 \cdot d\vec{r} \nabla \zeta}{|\vec{B}|^2 \cdot d\vec{r} \nabla \theta} = \frac{d\vec{r} \cdot \nabla \zeta}{d\vec{r} \cdot \nabla \theta} = q(\psi)$$

Όμως

$$d\vec{r} \cdot \nabla \zeta = \frac{\partial \zeta}{\partial x} dx + \frac{\partial \zeta}{\partial y} dy + \frac{\partial \zeta}{\partial z} dz = d\zeta$$

και $d\vec{r} \cdot \nabla \theta = d\theta$, άρα από την προηγούμενη εξίσωση θα πάρουμε :

$$\frac{d\zeta}{d\theta} = q(\psi) \quad (2.12')$$

Επίσης από τις (2.10) βλέπουμε ότι

$$\frac{\partial I}{\partial \zeta} = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \zeta \partial \theta}, \quad \frac{\partial g}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \zeta \partial \theta}$$

άρα $\partial I / \partial \zeta = \partial g / \partial \theta$ όμως επειδή έχουμε υποθέσει ανεξαρτησία από το ζ θα έχουμε $0 = \partial I / \partial \zeta = \partial g / \partial \theta$ άρα το g θα είναι ανεξάρτητο και από το θ , δηλαδή θα είναι $g = g(\psi)$. Επίσης για το συγκεκριμένο equilibrium επιλέγω $\sigma = \alpha = 0 \Rightarrow \delta = 0$ και $I = I(\psi)$. Άρα για το axisymmetric equilibrium οι (2.10) θα γίνουν:

$$I = I(\psi) = \bar{I}(\psi)$$

$$g = g(\psi) = \bar{g}(\psi) \quad (2.13)$$

$$\delta = 0$$

Στην συνέχεια θεωρούμε κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων (X, Z, ϕ) όπου:

$$\begin{aligned}
x &= X \cos(\phi) & X &= \sqrt{x^2 + y^2} \\
y &= X \sin(\phi) \Rightarrow & \phi &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\
z &= Z & Z &= z
\end{aligned} \tag{2.13'}$$

Από τις (1.1) φαίνεται ότι

$$\hat{\phi} = \frac{\left. \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} \right|_{X,Z=\text{constant}}}{\left| \left. \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} \right|_{X,Z=\text{constant}} \right|} = \frac{(-X \sin(\phi), X \cos(\phi), 0)}{\sqrt{X^2 \sin^2(\phi) + X^2 \cos^2(\phi)}} = \frac{(-y, x, 0)}{X}$$

και από τις (1.2)

$$\nabla \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right) = \frac{(-y, x, 0)}{X^2}.$$

Από αυτές τις δύο σχέσεις φαίνεται ότι :

$$\nabla \phi = \frac{\hat{\phi}}{X} \tag{2.14}$$

Στην συνέχεια υποθέτουμε τοροειδή συμμετρία, δηλαδή υποθέτουμε ότι το $\nabla \phi$ είναι κάθετο στα $\nabla \psi$ και $\nabla \theta$. Επίσης το ζ και το ϕ συνδέονται με την σχέση

$$\zeta = \phi - \nu(\psi, \theta) \tag{2.15}$$

όπου $v(\psi, \theta)$ είναι μια άγνωστη συνάρτηση που εξαρτάται από το equilibrium και μας δείχνει την γενικότητα της γωνίας ζ σε σχέση με την τοροειδή γωνία ϕ που ορίσαμε πάρα πάνω. (MengLi, N.Breizman, & LinjinZheng, 2016). Από την (2.15) έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\nabla\zeta &= \left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}, \frac{\partial\zeta}{\partial y}, \frac{\partial\zeta}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial\psi} \frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial\theta} \frac{\partial\theta}{\partial x}, \right. \\ &\left. \frac{\partial\phi}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial\psi} \frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial\theta} \frac{\partial\theta}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial\psi} \frac{\partial\psi}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial\theta} \frac{\partial\theta}{\partial z}\right) \Rightarrow \\ \nabla\zeta &= \nabla\phi - \frac{\partial v}{\partial\psi} \nabla\psi - \frac{\partial v}{\partial\theta} \nabla\theta\end{aligned}\tag{2.16}$$

Έστω J' η ιακωβιανή ορίζουσα του συστήματος (ψ, θ, ϕ) , δηλαδή όμοια με την (1.3) $J' = \vec{e}_\psi \cdot (\vec{e}_\theta \times \vec{e}_\phi)$ και όμοια με την (1.4) $1/J' = \nabla\psi \cdot (\nabla\theta \times \nabla\phi)$. Από (1.4) και (2.16) έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{J} &= (\nabla\phi - \frac{\partial v}{\partial\psi} \nabla\psi - \frac{\partial v}{\partial\theta} \nabla\theta) \cdot (\nabla\psi \times \nabla\theta) \stackrel{\nabla\psi \cdot (\nabla\psi \times \nabla\theta)=0, \nabla\theta \cdot (\nabla\psi \times \nabla\theta)=0}{=} \\ &= \nabla\phi \cdot (\nabla\psi \times \nabla\theta) = \nabla\psi \cdot (\nabla\theta \times \nabla\phi) \\ &= \frac{1}{J'} \Rightarrow J = J' = \vec{e}_\psi \cdot (\vec{e}_\theta \times \vec{e}_\phi)\end{aligned}\tag{2.16'}$$

Από την (2.6') βλέπουμε ότι $\vec{B} \cdot \nabla\psi = 0$ άρα και από την (2.16) θα έχουμε ότι:

$$\vec{B} \cdot \nabla\zeta = \vec{B} \cdot \nabla\phi - \frac{\partial v}{\partial\theta} \vec{B} \cdot \nabla\theta\tag{2.17}$$

Από την (2.11) και από την τοροειδή συμμετρία ($\nabla\phi \cdot \nabla\psi = \nabla\phi \cdot \nabla\theta = 0$) παίρνουμε ότι

$$\vec{B} \cdot \nabla\phi = g \nabla\zeta \cdot \nabla\phi \stackrel{(2.16)}{=} g (\nabla\phi - \frac{\partial v}{\partial\psi} \nabla\psi - \frac{\partial v}{\partial\theta} \nabla\theta) \cdot \nabla\phi = g |\nabla\phi|^2 \stackrel{(2.14)}{=} \frac{g}{X^2}\tag{2.18}$$

Από (2.6') και την εξίσωση $\nabla \psi_p = \nabla \psi / q$ παίρνουμε ότι:

$$\vec{B} \cdot \nabla \theta = \frac{\nabla \psi \cdot (\nabla \theta \times \nabla \zeta)^{(1.4)}}{q} = \frac{1}{J \cdot q} \quad (2.19)$$

Από (2.12),(2.17),(2.18),(2.19) παίρνουμε ότι:

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{gqJ}{X^2} - q \quad (2.20)$$

Από την (2.20) φαίνεται ότι από την δεδομένη μορφή του equilibrium, η οποία περιγράφεται από τις συναρτήσεις g , q , που είναι εξισώσεις που περιγράφουν το μαγνητικό πεδίο, και τις συντεταγμένες του μαγνητικού πεδίου όπως φαίνεται από την πάρα πάνω ανάλυση, μπορούμε να υπολογίσουμε την συνάρτηση v που συνδέει την γενική συντεταγμένη ζ του μαγνητικού πεδίου με την τοροειδή γωνία ϕ . Επίσης η (2.20) πρέπει να ικανοποιείται ώστε οι εξισώσεις (2.6') και (2.11) να είναι ισοδύναμες.

Έστω ότι έχουμε το μαγνητικό πεδίο που δίνεται από την (2.11) και την μορφή του μαγνητικού πεδίου που δίνεται από την (2.6') και ότι ισχύουν οι (2.13), δηλαδή έχουμε axisymmetric equilibrium τότε :

$$\vec{B} = g \nabla \zeta + I \nabla \theta + \delta \nabla \psi \stackrel{(2.16)}{=} g \nabla \phi + (I - g \frac{\partial v}{\partial \theta}) \nabla \theta + (\delta - g \frac{\partial v}{\partial \psi}) \nabla \psi \quad (2.21)$$

Επίσης από τις (1.7) και (1.8) γίνεται φανερό ότι $\vec{e}_\psi = \nabla \psi / |\nabla \psi|^2$ και αντίστροφα $\nabla \psi = \vec{e}_\psi / |\vec{e}_\psi|^2$ το οποίο ισχύει για κάθε συντεταγμένη. Άρα η (2.21) θα γίνει:

$$\vec{B} = g \frac{\vec{e}_\phi}{|\vec{e}_\phi|^2} + (I - g \frac{\partial v}{\partial \theta}) \frac{\vec{e}_\theta}{|\vec{e}_\theta|^2} + (\delta - g \frac{\partial v}{\partial \psi}) \frac{\vec{e}_\psi}{|\vec{e}_\psi|^2} \quad (2.22)$$

Από την (2.22) παρατηρούμε ότι

$$B^\phi = \frac{B_\phi}{|\vec{e}_\phi|^2}, B^\theta = \frac{B_\theta}{|\vec{e}_\theta|^2}, B^\psi = \frac{B_\psi}{|\vec{e}_\psi|^2} \quad (2.23)$$

Όπου

$$B_\phi = g, B_\theta = I - g \frac{\partial v}{\partial \theta}, B_\psi = \delta - g \frac{\partial v}{\partial \psi} \quad (2.24)$$

Επίσης από (2.6') :

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \nabla \psi \times \nabla \theta + \nabla \zeta \times \nabla \psi_p \stackrel{(1.5)}{=} \\ &= (\vec{e}_\zeta \cdot \nabla \zeta) \cdot \nabla \psi \times \nabla \theta + (\vec{e}_\theta \cdot \nabla \theta) \cdot \nabla \zeta \times \nabla \psi_p \stackrel{(1.4),(2.4)}{=} \frac{\vec{e}_\zeta}{J} + \frac{\vec{e}_\theta}{Jq} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Επίσης από (2.6') και (2.16) έχουμε

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \nabla \psi \times \nabla \theta + \left(\nabla \phi - \frac{\partial v}{\partial \psi} \nabla \psi - \frac{\partial v}{\partial \theta} \nabla \theta \right) \times \nabla \psi_p \stackrel{\nabla \psi \times \nabla \psi_p}{=} \\ &= \nabla \psi \times \nabla \theta \left(1 + \frac{1}{q} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{q} \nabla \phi \times \nabla \psi \\ &\stackrel{(1.5)}{=} \vec{e}_\phi \cdot \nabla \phi \cdot (\nabla \psi \times \nabla \theta) \left(1 + \frac{1}{q} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \vec{e}_\theta \cdot \nabla \theta \cdot \left(\frac{1}{q} \nabla \phi \times \nabla \psi \right) \stackrel{(1.4)}{=} \\ &= \vec{e}_\phi \frac{1}{J} \left(1 + \frac{1}{q} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \frac{\vec{e}_\theta}{J} \end{aligned} \quad (2.25')$$

Όπως είδαμε και πάρα πάνω επιλέγοντας η πίεση p να είναι $p = p(\psi)$ η συνθήκη ισορροπίας (2.7) γίνεται

$$\vec{j} \times \vec{B} = \frac{\partial p}{\partial \psi} \nabla \psi \stackrel{q = \frac{d\psi}{d\psi_p}}{=} \frac{\partial p}{\partial \psi_p} \cdot \nabla \psi_p$$

Γράφοντας τα \vec{B} και \vec{j} στην covariant μορφή τους παίρνουμε

$$\begin{aligned} & (j^\psi \vec{e}_\psi + j^\theta \vec{e}_\theta + j^\phi \vec{e}_\phi) \times (B^\psi \vec{e}_\psi + B^\theta \vec{e}_\theta + B^\phi \vec{e}_\phi) \\ &= (j^\phi B^\psi \vec{e}_\phi \times \vec{e}_\psi + j^\phi B^\theta \vec{e}_\phi \times \vec{e}_\theta + j^\psi B^\phi \vec{e}_\psi \times \vec{e}_\phi + j^\psi B^\theta \vec{e}_\psi \times \vec{e}_\theta + j^\theta B^\phi \vec{e}_\theta \times \vec{e}_\phi + j^\theta B^\psi \vec{e}_\theta \times \vec{e}_\psi) \\ &= \frac{\partial p}{\partial \psi} \nabla \psi \end{aligned}$$

πολλαπλασιάζοντας εσωτερικά με \vec{e}_ψ και τα δύο μέλη της εξίσωσης και από την (1.5) θα πάρουμε $j_\phi B^\theta \vec{e}_\psi (\vec{e}_\phi \times \vec{e}_\theta) + j_\theta B^\phi \vec{e}_\psi (\vec{e}_\theta \times \vec{e}_\phi) \stackrel{(1.3)}{=} J(j^\theta B^\phi - j^\phi B^\theta)$ άρα:

$$J(j^\theta B^\phi - j^\phi B^\theta) = \frac{\partial p}{\partial \psi} \quad (2.26)$$

Από τις πρώτες εξισώσεις των (2.23) και (2.24) και από την (2.14) από όπου φαίνεται ότι $|\vec{e}_\phi|^2 = X^2$ παίρνουμε ότι

$$B^\phi = g / X^2 \quad (2.27)$$

Επίσης από την (2.25) έχουμε ότι

$$B^\theta = 1 / Jq \quad (2.28)$$

Επίσης $\nabla \times \vec{B} = \vec{j}$ πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με $\nabla \phi$ και επειδή $\vec{j} \cdot \nabla \phi = (j^\psi \vec{e}_\psi + j^\theta \vec{e}_\theta + j^\phi \vec{e}_\phi) \cdot \nabla \phi \stackrel{(1.5)}{=} j^\phi$, γιατί λόγω τοροειδούς συμμετρίας το $\nabla \phi$ είναι κάθετο στο \vec{e}_ψ και $\nabla \phi$ είναι κάθετο στο \vec{e}_θ , θα έχουμε

$$\begin{aligned}
j^\phi &= \nabla\phi \cdot (\nabla \times \vec{B}) = \nabla \cdot (\vec{B} \times \nabla\phi) \stackrel{(2.6')}{=} \nabla \cdot ((\nabla\psi \times \nabla\theta) \times \nabla\phi + (\nabla\zeta \times \nabla\psi_p) \times \nabla\phi = \\
& \stackrel{\nabla\psi \perp \nabla\psi, \nabla \Rightarrow \theta(\nabla\psi \times \nabla\theta) \times \nabla\phi = 0}{=} \nabla \cdot (\nabla\zeta \times \nabla\psi_p) \times \nabla\phi)
\end{aligned}$$

από όπου με χρήση της κατάλληλης ταυτότητας παίρνουμε

$$\begin{aligned}
j^\phi &= \nabla \cdot ((\nabla\zeta \cdot \nabla\phi) \nabla\psi_p - (\nabla\phi \cdot \frac{\nabla\psi}{q})) \stackrel{\nabla\phi \perp \nabla\psi}{=} \\
& \nabla \cdot ((\nabla\zeta \cdot \nabla\phi) \nabla\psi_p) \stackrel{(2.16), \nabla\phi \perp \nabla\theta, \nabla\psi}{=} \nabla \cdot (\frac{\nabla\psi_p}{X^2})
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Όμοια αλλά αυτήν την φορά χρησιμοποιώντας το μαγνητικό πεδίο που δίνεται από την (2.11) και την υπόθεση ότι $\delta = 0$ που έχουμε κάνει για το axisymmetric equilibrium παίρνουμε

$$j^\theta = -g' / J \tag{2.32}$$

με $g' = \partial g / \partial \psi$. Στην συνέχεια αντικαθιστώντας στην (2.26) τις (2.27),(2.28),(2.31),(2.32) και από την σχέση $q = \nabla\psi / \nabla\psi_p$ παίρνουμε:

$$\nabla \cdot (\frac{\nabla\psi}{qX^2}) + q(\psi) \frac{\partial p(\psi)}{\partial \psi} + \frac{\partial g(\psi)}{\partial \psi} \frac{q(\psi)g(\psi)}{X^2} = 0 \tag{2.33}$$

Η (2.33) είναι η εξίσωση Grad-Shafranov η οποία προκύπτει από την συνθήκη ισορροπίας (2.7) για axisymmetric equilibrium άρα οι εξισώσεις που περιγράφουν το μαγνητικό πεδίο, δηλαδή οι g, p, q , και το σύστημα συντεταγμένων του μαγνητικού πεδίου (ψ, θ, ϕ) που θα επιλέξουμε πρέπει να την ικανοποιούν ώστε να έχουμε ισορροπία.

2.4 Υπολογισμός του αξονοσυμμετρικού μαγνητικού πεδίου με την προσέγγιση large aspect ratio

Υποθέτουμε ότι έχουμε το axisymmetric equilibrium που αναλύσαμε στο κεφάλαιο (2.2). Τότε από τις (2.22), (2.23) και (2.24) έχουμε:

$$B^\phi = \frac{g}{X^2}, \quad B^\theta = \frac{I - g \frac{\partial v}{\partial \theta}}{|e_\theta|^2}, \quad B^\psi = \frac{\delta - g \frac{\partial v}{\partial \psi}}{|e_\psi|^2} \quad (2.34)$$

Και από την (2.25') έχουμε ότι:

$$B^\phi = \frac{1}{J} \left(1 + \frac{1}{q} \frac{\partial v}{\partial \theta}\right), \quad B^\theta = \frac{1}{Jq}, \quad B^\psi = 0 \quad (2.35)$$

Στην ανάλυση που κάναμε για το axisymmetric equilibrium χρησιμοποιήσαμε τις μορφές του μαγνητικού πεδίου που δίνονται από τις (2.11) και (2.6'). Όπως φαίνεται από την ανάλυση που κάναμε για την (2.21) και την (2.25') για να ισχύουν ταυτόχρονα οι (2.11) και (2.6') θα πρέπει να ισχύουν ταυτόχρονα οι (2.34) και (2.35), δηλαδή

$$B^\phi = \frac{g}{X^2} = \frac{1}{J} \left(1 + \frac{1}{q} \frac{\partial v}{\partial \theta}\right) \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{gqJ}{X^2} - q$$

δηλαδή η (2.20), που έχουμε δείξει και στο κεφάλαιο (2.2) ότι πρέπει να ικανοποιείται.

$$B^\theta = \frac{I - g \frac{\partial v}{\partial \theta}}{|e_\theta|^2} = \frac{1}{Jq} \quad (2.36)$$

και

$$B^{\psi} = \frac{\delta - g \frac{\partial v}{\partial \psi}}{|e_{\psi}|^2} = 0$$

και επειδη από τις (2.13) $\delta = 0$ θα έχουμε

$$\partial v / \partial \psi = 0 \quad (2.37)$$

Δηλαδή θα πρέπει να ισχύουν ταυτόχρονα οι (2.20),(2.36) και (2.37).

Στην συνέχεια για να ορίσουμε ένα συγκεκριμένο axisymmetric equilibrium πρέπει να καθορίσουμε το σύστημα συντεταγμένων, δηλαδή τις συναρτήσεις (ψ, θ, ϕ) και την συνάρτηση $q = d\psi / d\psi_p$, και το μαγνητικό πεδίο, δηλαδή τις συναρτήσεις p και g που το περιγράφουν. Όπως δείξαμε το κεφάλαιο (2.2) οι συναρτήσεις αυτές πρέπει να ικανοποιούν την (2.33) ώστε να έχουμε ισορροπία, δηλαδή η επιλογή τους δεν είναι εντελώς αυθαίρετη αλλά πρέπει να επιλέξουμε δύο από τις q, p, g και η τρίτη πρέπει να ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση (2.33)(Grad Shafranov). Όπως αποδεικνύεται μια λύση της διαφορικής εξίσωσης (2.33) για τις εξισώσεις του συστήματος συντεταγμένων έχει τη μορφή (Goldstein, Poole, & Safko):

$$X = R + r \cos(\theta) - \Delta(r)$$

$$Z = r \cos(\theta) \quad (2.39)$$

$$\phi = \phi$$

Όπου το $\Delta(r)$ προκύπτει όταν λύσουμε την εξίσωση Grad-Shafranov και είναι μια συνάρτηση της μεταβλητής r που δηλώνει την μετακίνηση του μαγνητικού άξονα στον χώρο και εξαρτάται από την πίεση του πλάσματος.

Υποθέτοντας ότι

$$\psi = \frac{r^2}{2} \quad (2.40)$$

Όπου έχουν αγνοηθεί οι όροι τάξης μεγαλύτερης του $\varepsilon^2 = (r/R)^2$, όπου R είναι η μεγάλη ακτίνα του τόρου και θεωρούμε $R=1$ για κανονικοποίηση και r η μικρή ακτίνα του τόρου.

Επίσης η μια εκ των συναρτήσεων $q(r)$, $g(r)$, $p(r)$ θα πρέπει να είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης (2.33), όπως έχουμε ήδη αναφέρει.

Στην συνέχεια θεωρώντας large aspect ratio, δηλαδή υποθέτουμε ότι $r \ll R$, θα έχουμε προσεγγιστικά $\Delta = 0$ και $g = 1$ (2.38). Άρα για large aspect ratio η λύση της (2.33) θα είναι, βάζοντας $\Delta = 0$ στην (2.39):

$$X = 1 + r \cos(\theta)$$

$$Z = r \cos(\theta) \quad (2.39')$$

$$\phi = \phi$$

Από τις (2.13') και (2.39') μπορούμε να υπολογίσουμε τα $\theta = \theta(x, y, z)$ και $\phi = \phi(x, y, z)$ δηλαδή τις δύο από τις τρεις συναρτήσεις που καθορίζουν το σύστημα συντεταγμένων και το $r = r(x, y, z)$. Για την τρίτη συνάρτηση δηλαδή για την $\psi(x, y, z)$ έχουμε υποθέσει ότι

$$\psi(x, y, z) = \frac{r^2}{2} \Rightarrow \nabla \psi = r \nabla r \quad (2.40')$$

Με βάση αυτά και από τις (1.1), (2.13') και (2.39') έχουμε ότι :

$$\begin{aligned} \vec{e}_\theta &= \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}, \frac{\partial y}{\partial \theta}, \frac{\partial z}{\partial \theta} \right) \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial \theta} + \frac{\partial x}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial \theta} + \frac{\partial x}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}, \right. \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\left. \frac{\partial y}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial \theta} + \frac{\partial y}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial \theta} + \frac{\partial y}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}, \frac{\partial z}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)$$

$$\stackrel{(2.13'),(2.39')}{=} (-r \cos \phi \sin(\theta), -r \sin(\phi) \sin(\theta), r \cos(\theta)) \Rightarrow |\vec{e}_\theta| = r \Rightarrow \vec{e}_\theta = r \hat{\theta}$$

Όμοια παίρνουμε

$$\vec{e}_r = (\cos(\theta) \cos(\phi), \sin(\phi) \cos(\theta), \sin(\theta)) \Rightarrow |\vec{e}_r| = 1 \Rightarrow \vec{e}_r = \hat{r} \quad (2.42)$$

Από τις (2.41) και (2.42) παρατηρούμε ότι $\vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_r = (-r \cos \phi \sin(\theta), -r \sin(\phi) \sin(\theta), r \cos(\theta)) \cdot (\cos(\theta) \cos(\phi), \sin(\phi) \cos(\theta), \sin(\theta)) = 0$ από όπου συνεπάγεται ότι το \vec{e}_θ είναι κάθετο στο \vec{e}_r . Επίσης όπως έχουμε ήδη πει θεωρούμε τοροειδή συμμετρία δηλαδή

$$\nabla \phi \perp \nabla \theta, \nabla \phi \perp \nabla \psi$$

και προφανώς από τις (1.7), (2.40') θα έχουμε

$$\vec{e}_\phi \perp \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi \perp \vec{e}_r$$

Άρα τελικά τα συστήματα συντεταγμένων (r, θ, ϕ) , και λόγω της (2.40'), (ψ, θ, ϕ) , που έχουν προκύψει για axisymmetric equilibrium και large aspect ratio, είναι ορθοκανονικά

Άρα από τις (1.2), (1.7), (1.8) και (2.41), (2.42) παίρνουμε ότι :

$$\overline{\nabla \theta} = \frac{\hat{\theta}}{r} \quad (2.41')$$

$$\overline{\nabla r} = \hat{r} \quad (2.42')$$

Επίσης στην (2.14) έχουμε ήδη δείξει ότι:

$$\vec{\nabla}\phi = \frac{\hat{\phi}}{X} \quad (2.43')$$

Άρα από (1.2),(1.7),(1.8) έχουμε

$$\vec{e}_\phi = X\hat{\phi} \quad (2.43)$$

Από τις (2.16'),(2.41),(2.42),(2.43) και λόγω της ορθογωνιότητας που δείξαμε παίρνουμε:

$$J = X \quad (2.44)$$

Στην συνέχεια για large aspect ratio θα υπολογίσουμε το μαγνητικό πεδίο. Από την πρώτη των (2.34), την δεύτερη και την τρίτη των (2.35),την (2.38) και την (2.44) βλέπουμε ότι

$$B^\phi = \frac{1}{X^2}$$

$$B^\theta = \frac{1}{Xq}$$

$$B^\psi = 0$$

Άρα

$$\vec{B} = \frac{1}{X}\vec{e}_\phi + \frac{1}{Xq}\vec{e}_\theta \quad (2.45)$$

και από τις (2.23) και (2.41),(2.42),(2.43)

$$B_\phi = 1$$

$$B_\theta = \frac{r^2}{Xq}$$

$$B_\psi = 0$$

Άρα

$$\vec{B} = \nabla \phi + \frac{r^2}{Xq} \nabla \theta \quad (2.46)$$

Στην (2.40) υποθέσαμε ότι $\psi = r^2 / 2$ που συνεπάγεται ότι

$$d\psi = r dr \quad (2.47)$$

και σύμφωνα με την ανάλυση που έγινε για την συνάρτηση ψ στο κεφάλαιο (2.1) η εξίσωση $\psi = r^2 / 2$ θα πρέπει να προκύπτει και από την εξίσωση (2.1) για το μαγνητικό πεδίο που δίνεται από την (2.46) ή ισοδύναμα θα πρέπει η $\psi = r^2 / 2$ και το μαγνητικό πεδίο που δίνεται από την (2.46) να ικανοποιούν την εξίσωση (2.1). Αντικαθιστώντας στην (2.1) τις (2.16),(2.44) και (2.47) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} 2\pi\psi &= \int_r \int_0^{2\pi} (\nabla \phi + \frac{r^2}{Xq} \nabla \theta) (\nabla \phi - \frac{\partial v}{\partial \psi} \nabla \psi - \frac{\partial v}{\partial \theta} \nabla \theta) X r d\theta dr \\ &= \int_r \int_0^{2\pi} (|\nabla \phi|^2 X r - \frac{r^2}{Xq} \frac{\partial v}{\partial \theta} |\nabla \theta|^2 X r) d\theta dr \end{aligned}$$

όμως από (2.20),(2.38) και (2.44) $\partial V / \partial \theta = q / X - q$, από (2.43') και (2.41') $|\nabla \phi|^2 = 1 / X^2$ και $|\nabla \theta|^2 = 1 / r^2$. Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις αυτές στο πάρα πάνω ολοκλήρωμα παίρνουμε :

$$2\pi\psi = \int_r \int_0^{2\pi} (\frac{r}{X} - \frac{r}{X} + r) d\theta dr = \int_r \int_0^{2\pi} r d\theta dr \Rightarrow \psi = \frac{r^2}{2}$$

Δηλαδή υποθέτοντας ότι $\psi = r^2 / 2$ καταλήξαμε μέσω της (2.1) ότι όντως $\psi = r^2 / 2$ άρα η υπόθεσή μας ήταν σωστή.

Όμοια, αλλά αυτήν την φορά χρησιμοποιώντας την (2.2) και την $\zeta = \phi - v(\psi, \theta)$ που συνεπάγεται ότι $d\zeta / d\phi = 1$ άρα $d\zeta = d\phi$ παίρνουμε ότι:

$$\psi_p = \int_r \frac{r}{q} dr \quad (2.48)$$

Από την (2.48) παρατηρούμε ότι

$$\frac{d\psi_p}{d\psi} = \frac{d\psi_p}{dr} \frac{dr}{d\psi} \stackrel{(2.47),(2.48)}{=} \frac{r}{q(r)} \frac{1}{r} = \frac{1}{q(r)}$$

όπως δηλαδή πρέπει να ισχύει από την (2.4).

Υποθέτοντας ότι έχουμε axisymmetric equilibrium και large aspect ratio δείξαμε ότι

$$\vec{B} = \nabla\phi + \frac{r^2}{Xq} \nabla\theta \Rightarrow |\vec{B}|^2 = |\nabla\phi|^2 + \frac{r^4}{X^2 q^2} |\nabla\theta|^2 \stackrel{(2.41'),(2.43')}{=} \frac{1}{X^2} + \frac{r^2}{X^2 q^2}$$

όμως επειδή λόγω του large aspect ratio $r \ll 1$ ο δεύτερος όρος της προηγούμενης εξίσωσης θα είναι αμελητέος άρα τον παραλείπουμε. Επομένως θα έχουμε $|\vec{B}|^2 = |\nabla\phi|^2$ δηλαδή $|\vec{B}| = |\nabla\phi|$. Άρα από την (2.43') θα έχουμε ότι $|\vec{B}| = 1/X$, όμως

$$X(1 - r \cos(\theta)) \stackrel{(2.39')}{=} 1 - r^2 \cos^2(\theta) \stackrel{r \ll 1}{=} 1 \Rightarrow \frac{1}{X} = 1 - r \cos(\theta)$$

Επομένως

$$|\vec{B}| = 1 - r \cos(\theta) \quad (2.49)$$

Από την εξίσωση (2.49) παρατηρούμε ότι το μαγνητικό πεδίο είναι κανονικοποιημένο ως προς την τιμή του μέτρου του στον μαγνητικό άξονα.

Η εξίσωση (2.9) μας δίνει την πυκνότητα ρεύματος όταν για το equilibrium έχουμε θέσει μοναδικό περιορισμό ότι η πίεση p θα είναι $p = p(\psi)$, τώρα θεωρώντας ότι έχουμε και axisymmetric equilibrium με την προσέγγιση large aspect ratio θα έχουμε: από την (2.13) $I = I(\psi) = \bar{I}(\psi)$, $g = 1$ και θα ισχύουν οι εξισώσεις (2.41')-(2.43'), άρα η (2.9) θα γίνει:

$$\vec{j} = \frac{X}{r} \frac{\partial I}{\partial r} \nabla \phi \quad (2.50)$$

Επίσης

$$\vec{j} = \nabla \times \vec{B} \stackrel{(2.46),(1.12)}{=} \frac{X}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r^2}{Xq} \nabla \phi \quad (2.51)$$

Εξισώνοντας την (2.50) και την (2.51) βλέπουμε ότι:

$$I = \frac{r^2}{Xq} \stackrel{r \ll 1}{=} 0 \quad (2.52)$$

Επομένως για axisymmetric equilibrium και large aspect ratio το $I(\psi)$ θα είναι σχεδόν μηδέν.

Κεφάλαιο 3

Guiding Center Motion

3.1 Υπολογισμός της Lagrangian που περιγράφει την κίνηση του guiding center σε ένα ηλεκτρομαγνητικό πεδίο

Αποδεικνύεται ότι η lagrangian που περιγράφει την κίνηση ενός σωματιδίου, που η μάζα του είναι κανονικοποιημένη ως προς την μάζα του πρωτονίου και το φορτίο ως προς το φορτίο του ηλεκτρονίου, σε ηλεκτρομαγνητικό πεδίο είναι (White, Spizzo, & Gobbin, Guiding center equations of high accuracy, 2013), (Littlejohn R. G., 1985) (Littlejohn R. G., 1982):

$$L = (\vec{A}(\vec{x}, t) + \vec{u}) \cdot \dot{\vec{x}} - H(\vec{u}, \vec{x}) \quad (3.1)$$

Η εξίσωση (3.1) προκύπτει όταν η μάζα του σωματιδίου είναι κανονικοποιημένη ως προς την μάζα του πρωτονίου και το φορτίο ως προς το φορτίο του ηλεκτρονίου. Επίσης για την προσέγγιση του guiding center, που θα κάνουμε πάρα κάτω, κανονικοποιούμε τον χρόνο ως προς το ω_0^{-1} , όπου ω_0 είναι η συχνότητα της κυκλοτρονικής κίνησης στον μαγνητικό άξονα ($\omega_0 = e \cdot B / m \cdot c$) και όπως είπαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο το μήκος θα είναι κανονικοποιημένο ως προς την μεγάλη ακτίνα του τόρου R και το μαγνητικό πεδίο θα είναι κανονικοποιημένο ως προς το μέτρο του στον μαγνητικό άξονα, επομένως και η ενέργεια θα είναι κανονικοποιημένη ως προς $m\omega_0^2 \cdot R^2$ (Πίνακας 1).

Μέγεθος	Μονάδες
Μάζα	Μάζα πρωτονίου
Φορτίο	Φορτίο ηλεκτρονίου
Μαγνητικό πεδίο	Μέτρο του μαγνητικού πεδίου στον μαγνητικό άξονα
Χρόνος	$\omega_0^{-1}, \omega_0 = e \cdot B / m \cdot c$
Μήκος	Μεγάλη ακτίνα του τόρου R
Ενέργεια	$m\omega_0^2 \cdot B^2$

Πίνακας 1

Στην εξίσωση (3.1) \vec{x} είναι η θέση του σωματιδίου στον χώρο \vec{u} η ταχύτητά του και

$$H(\vec{u}, \vec{x}) = \vec{u}^2 / 2 + \Phi(\vec{x}, t) \quad (3.2)$$

Η (3.2) μας δίνει την Hamiltonian που περιγράφει την κίνηση του σωματιδίου με $\Phi(\vec{x}, t)$ να είναι το ηλεκτροστατικό βαθμωτό δυναμικό, και $A(\vec{x}, t)$ είναι το μαγνητικό διανυσματικό δυναμικό. Από τις εξισώσεις του Maxwell τα δυναμικά συνδέονται με το μαγνητικό και το ηλεκτρικό πεδίο μέσω των εξισώσεων

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \vec{E} = -\nabla\Phi - \partial\vec{A}/\partial t \quad (3.3)$$

Στην ανάλυση που θα κάνουμε υποθέτουμε ότι το $\dot{\vec{x}}$ και το \vec{u} είναι ανεξάρτητες μεταβλητές και στην συνέχεια από τις εξισώσεις κίνησης μπορούμε να δείξουμε ότι συνδέονται με την σχέση $\dot{\vec{x}} = \vec{u}$

Η γενική σχέση που συνδέει την Lagrangian και την Hamiltonian είναι:

$$L = \sum_i p_i \dot{q}_i - H(q, p, t) \quad (3.4)$$

Όπου p η ορμή και q η θέση του σωματιδίου

Από την (3.1) και την (3.3) φαίνεται ότι στην ειδική περίπτωση που έχουμε την κίνηση που περιγράφει η (3.1) θα έχουμε:

$$p = \vec{A} + \vec{u} \quad (3.5)$$

Έστω ότι στον χώρο έχουμε μαγνητικό πεδίο \vec{B} τότε η διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου θα είναι $\hat{b} = \vec{B} / B$, όπου $B = |\vec{B}|$. Έστω \hat{e}_1, \hat{e}_2 δύο μοναδιαία διανύσματα κάθετα στο \hat{b} και κάθετα μεταξύ τους ώστε το σύστημα $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{b})$ να είναι ορθοκανονικό με $\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = \hat{b}$. Τότε ορίζουμε τα διανύσματα του επιπέδου (\hat{e}_1, \hat{e}_2)

$$\hat{a} = \cos(\xi)\hat{e}_1 - \sin(\xi)\hat{e}_2, \hat{c} = -\sin(\xi)\hat{e}_1 - \cos(\xi)\hat{e}_2$$

όπου ξ η γωνία που σχηματίζει το \hat{a} με το \hat{e}_1 , τα οποία προφανώς είναι μοναδιαία. Επίσης με από τον ορισμό των πάρα πάνω διανυσμάτων παρατηρούμε ότι

$$\hat{c} \times \hat{a} = \sin^2(\xi)\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 - \cos^2(\xi)\hat{e}_2 \times \hat{e}_1 = \hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = \hat{b}$$

και όμοια

$$\hat{a} \times \hat{b} = \hat{c}$$

Δηλαδή το σύστημα $(\hat{a}, \hat{c}, \hat{b})$ είναι ορθοκανονικό. Με βάση τον πάρα πάνω ορισμό των διανυσμάτων μπορούμε να αναλύσουμε την ταχύτητα του σωματιδίου σε μια κάθετη και μια παράλληλη συνιστώσα στο \hat{b} , δηλαδή στο μαγνητικό πεδίο και επειδή όπως ορίσαμε το \hat{c} αυτό είναι διάνυσμα του επιπέδου (\hat{e}_1, \hat{e}_2) μπορούμε να πούμε ότι

$$\vec{u} = u_{\parallel}\hat{b} + w\hat{c} \quad (3.6)$$

Όπου $u_{//}$ η παράλληλη συνιστώσα στο μαγνητικό πεδίο και w η κάθετη συνιστώσα στο μαγνητικό πεδίο.

Στην συνέχεια ορίζουμε το particle gyro center ως

$$\vec{x} = \vec{X} + \frac{w}{B} \hat{a} \quad (3.7)$$

Όπου \vec{X} η θέση του guiding center .

Αντικαθιστώντας στην (3.1) την (3.6) και την (3.7) παίρνουμε

$$L = (\vec{A}(\vec{x}, t) + u_{//} \hat{b} + w \hat{c}) \cdot (\dot{\vec{X}} + \frac{d}{dt} (\frac{w \hat{a}}{B})) - H \quad (3.8)$$

Αναπτύσσοντας κατά Taylor το $\vec{A}(\vec{x}, t)$ γύρω από το \vec{X} παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{x}, t) &= \vec{A}(\vec{X}, t) + (\vec{x} - \vec{X}) \left. \frac{\partial \vec{A}}{\partial \vec{x}} \right|_{\vec{x}=\vec{X}} \\ &= \vec{A}(\vec{X}, t) + (\vec{x}_1 - \vec{X}_1) \left. \frac{\partial \vec{A}}{\partial \vec{x}_1} \right|_{\vec{x}_1=\vec{X}_1} + (\vec{x}_2 - \vec{X}_2) \left. \frac{\partial \vec{A}}{\partial \vec{x}_2} \right|_{\vec{x}_2=\vec{X}_2} + (\vec{x}_3 - \vec{X}_3) \left. \frac{\partial \vec{A}}{\partial \vec{x}_3} \right|_{\vec{x}_3=\vec{X}_3} \\ &\stackrel{(3.7)}{=} \vec{A}(\vec{X}, t) + \frac{w}{B} (\hat{a} \cdot \nabla) \vec{A}(\vec{X}, t) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Όπου το $(\hat{a} \cdot \nabla)$ είναι τελεστής που εφαρμόζεται πάνω στο $\vec{A}(\vec{X}, t)$. Οι όροι μεγαλύτερης τάξης που είναι ανάλογοι του w^2 παραλείπονται γιατί υποθέτουμε ότι $w \ll 1$, αφού $w \ll \xi$. (White R. B., The theory of toroidally confined plasmas)

Αντικαθιστώντας στην (3.8) την (3.9) παίρνουμε:

$$L = (\vec{A} + u_{//}\hat{b} + w\hat{c}) \cdot \dot{\vec{X}} + u_{//}\hat{b} \cdot \frac{d}{dt} \frac{w\hat{a}}{B} + w\hat{c} \cdot \frac{d}{dt} \frac{w\hat{a}}{B} + \left(\frac{w\hat{a}}{B} \cdot \nabla\right) \vec{A} \cdot \frac{d}{dt} \frac{w\hat{a}}{B} + \vec{A} \cdot \frac{d}{dt} \frac{w\hat{a}}{B} + \left(\frac{w\hat{a}}{B} \cdot \nabla\right) \vec{A} \cdot \dot{\vec{X}} - H \quad (3.10)$$

Από την θεωρία αποδεικνύεται ότι αν προσθέσω ένα τέλειο διαφορικό σε μια lagrangian δεν αλλάζουν οι εξισώσεις κίνησης. Άρα στην (3.10) μπορώ να προσθέσω ένα τέλειο διαφορικό χωρίς να αλλάξουν οι εξισώσεις κίνησης. Έστω $S = -(wB)\hat{a} \cdot \vec{A}(\vec{X}, t)$ τότε

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{\dot{w}}{B} \hat{a} \vec{A} - \frac{w}{B} \dot{\hat{a}} \vec{A} - \frac{w}{B} \hat{a} \frac{d\vec{A}}{dt}$$

Όμως

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial X_1} \frac{\partial X_1}{\partial t} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial X_2} \frac{\partial X_2}{\partial t} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial X_3} \frac{\partial X_3}{\partial t} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = (\dot{\vec{X}} \cdot \nabla) \vec{A} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (3.11)$$

όπου

$$\dot{\vec{X}} \cdot \nabla = \frac{\partial X_1}{\partial t} \frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{\partial X_2}{\partial t} \frac{\partial}{\partial X_2} + \frac{\partial X_3}{\partial t} \frac{\partial}{\partial X_3}$$

είναι τελεστής που εφαρμόζεται πάνω στο \vec{A} .

Επίσης από τον ορισμό των \hat{a} και \hat{b} βλέπουμε ότι

$$\dot{\hat{a}} = -\dot{\xi} \sin(\xi) \hat{e}_1 - \dot{\xi} \cos(\xi) \hat{e}_2 = \dot{\xi} \hat{c} \quad (3.12)$$

Αντικαθιστώντας στο dS/dt την (3.11) και την (3.12) και στην συνέχεια προσθέτοντας το dS/dt στην (1.10) και υπολογίζοντας τις παραγώγους d/dt που υπάρχουν στην (3.10) παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
L = & (\vec{A} + u_{\parallel} \hat{b} + w \hat{c}) \cdot \dot{\vec{X}} + \cancel{u_{\parallel} \hat{b} \frac{\dot{w}}{B} \hat{a}} + \cancel{u_{\parallel} \hat{b} \frac{w}{B} \xi \hat{c}} + \cancel{w \hat{c} \frac{\dot{w}}{B} \hat{a}} + w \hat{c} \frac{w}{B} \xi \hat{c} \\
& + \frac{w \dot{w}}{B^2} (\hat{a} \cdot \nabla) \vec{A} \cdot \hat{a} + \frac{w^2}{B^2} \xi (\hat{a} \cdot \nabla) \vec{A} \cdot \hat{c} + \cancel{\frac{\dot{w}}{B} \hat{a} \vec{A}} + \cancel{\frac{w}{B} \xi \vec{A}} + (\frac{w \hat{a}}{B} \cdot \nabla) \vec{A} \cdot \dot{\vec{X}} \\
& - \cancel{\frac{\dot{w}}{B} \hat{a} \vec{A}} - \cancel{\frac{w}{B} \xi \vec{A}} - \frac{w}{B} \hat{a} \cdot (\dot{\vec{X}} \cdot \nabla) \vec{A} - \frac{w}{B} \hat{a} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - H
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Επειδή όπως έχουμε δείξει το σύστημα συντεταγμένων $(\hat{a}, \hat{c}, \hat{b})$ είναι ορθοκανονικό τα εσωτερικά γινόμενα μεταξύ των μοναδιαίων διανυσμάτων αυτού του συστήματος συντεταγμένων θα είναι μηδέν. Άρα ο δεύτερος, ο τρίτος και ο τέταρτος όρος της (3.13) θα είναι μηδέν. Άρα

$$\begin{aligned}
L = & (\vec{A} + u_{\parallel} \hat{b} + w \hat{c}) \cdot \dot{\vec{X}} + \frac{w^2}{B} \xi + \frac{w^2}{B^2} \xi (\hat{a} \cdot \nabla) \vec{A} \cdot \hat{c} + \frac{w \dot{w}}{B^2} (\hat{a} \cdot \nabla) \vec{A} \cdot \hat{a} - \frac{w}{B} \hat{a} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\
& - H + (\frac{w \hat{a}}{B} \cdot \nabla) \vec{A} \cdot \dot{\vec{X}} - \frac{w}{B} \hat{a} \cdot (\dot{\vec{X}} \cdot \nabla) \vec{A}
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Διαλέγοντας ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = (\hat{c}, \hat{a}, \hat{b})$ και χρησιμοποιώντας την σχέση $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ για αυτό το τοπικό σύστημα συντεταγμένων και ότι $\hat{b} = \vec{B} / |\vec{B}|$ παρατηρούμε μετά από τις πράξεις ότι:

$$(\hat{a} \cdot \nabla) \vec{A} \cdot \hat{c} - (\hat{c} \cdot \nabla) \vec{A} \cdot \hat{a} = -B \tag{3.15}$$

Στην συνέχεια προσθέτουμε στην Lagrangian που δίνεται από την (3.14) ένα ακόμα τέλειο διαφορικό dS / dt με $S = -(w^2 / 2B^2) (\hat{a} \cdot \nabla) \vec{A} \cdot \hat{a}$, άρα

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} & \stackrel{(3.17)}{=} -\frac{w \dot{w}}{B^2} (\hat{a} \cdot \nabla) \vec{A} \cdot \hat{a} - \frac{w^2}{2B^2} (\hat{a} \cdot \nabla) \frac{d\vec{A}}{dt} \cdot \hat{a} - \frac{w^2}{2B^2} \xi (\hat{c} \cdot \nabla) \vec{A} \cdot \hat{a} \\
& - \frac{w^2}{2B^2} \xi (\hat{a} \cdot \nabla) \vec{A} \cdot \hat{c}
\end{aligned}$$

όμως επειδή όπως έχουμε υποθέσει το W είναι πολύ μικρότερο σε σχέση με το $\dot{\xi}$ ο δεύτερος όρος της πάρα πάνω εξίσωσης μπορεί να θεωρηθεί αμελητέος σε σχέση με τους υπόλοιπους και έτσι τον παραλείπουμε ,άρα

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{w\dot{w}}{B^2}(\hat{a} \cdot \nabla)\bar{A} \cdot \hat{a} - \frac{w^2}{2B^2}\dot{\xi}(\hat{c} \cdot \nabla)\bar{A} \cdot \hat{a} - \frac{w^2}{2B^2}\dot{\xi}(\hat{a} \cdot \nabla)\bar{A} \cdot \hat{c} \quad (3.16)$$

Χρησιμοποιώντας και την (3.15) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} L &= (\bar{A} + u_{//}\hat{b} + w\hat{c}) \cdot \dot{\bar{X}} + \frac{w^2}{B}\dot{\xi} + \cancel{\frac{w^2}{2B^2}\dot{\xi}(\hat{a} \cdot \nabla)\bar{A} \cdot \hat{c}} + \frac{w^2}{2B^2}\dot{\xi}(\hat{a} \cdot \nabla)\bar{A} \cdot \hat{c} \\ &+ \cancel{\frac{w\dot{w}}{B^2}(\hat{a} \cdot \nabla)\bar{A} \cdot \hat{a}} - \frac{w}{B}\hat{a} \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} - H + \left(\frac{w\hat{a}}{B} \cdot \nabla\right)\bar{A} \cdot \dot{\bar{X}} - \frac{w}{B}\hat{a} \cdot (\dot{\bar{X}} \cdot \nabla)\bar{A} \\ &\cancel{-\frac{w\dot{w}}{B^2}(\hat{a} \cdot \nabla)\bar{A} \cdot \hat{a}} - \frac{w^2}{2B^2}\dot{\xi}(\hat{c} \cdot \nabla)\bar{A} \cdot \hat{a} - \cancel{\frac{w^2}{2B^2}\dot{\xi}(\hat{a} \cdot \nabla)\bar{A} \cdot \hat{c}} \stackrel{(3.15)}{=} \quad (3.18) \\ &(\bar{A} + u_{//}\hat{b} + w\hat{c}) \cdot \dot{\bar{X}} + \frac{w^2}{B}\dot{\xi} - \frac{w^2}{2B^2}\dot{\xi} \cancel{B} - \frac{w}{B}\hat{a} \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} - H + \left(\frac{w\hat{a}}{B} \cdot \nabla\right)\bar{A} \cdot \dot{\bar{X}} \\ &- \frac{w}{B}\hat{a} \cdot (\dot{\bar{X}} \cdot \nabla)\bar{A} = (\bar{A} + u_{//}\hat{b} + w\hat{c}) \cdot \dot{\bar{X}} + \frac{w^2}{2B}\dot{\xi} - \frac{w}{B}\hat{a} \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} - H + \left(\frac{w\hat{a}}{B} \cdot \nabla\right)\bar{A} \cdot \dot{\bar{X}} \\ &\quad - \frac{w}{B}\hat{a} \cdot (\dot{\bar{X}} \cdot \nabla)\bar{A} \end{aligned}$$

Σημείωση:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}((\hat{a}\nabla)\vec{A}) &= \frac{d}{dt}\left(\left(\hat{a}\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{a}\hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{a}\hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)\vec{A}\right) = \frac{d}{dt}\left(\hat{a}\hat{x}\frac{\partial\vec{A}}{\partial x} + \hat{a}\hat{y}\frac{\partial\vec{A}}{\partial y} + \hat{a}\hat{z}\frac{\partial\vec{A}}{\partial z}\right) \\
 &= \frac{d\hat{a}}{dt}\left(\hat{x}\frac{\partial\vec{A}}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial\vec{A}}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial\vec{A}}{\partial z}\right) + \hat{a}\left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x}\frac{d\vec{A}}{dt} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y}\frac{d\vec{A}}{dt} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\frac{d\vec{A}}{dt}\right) = \left(\frac{d\hat{a}}{dt}\cdot\nabla\right)\vec{A} \\
 &\quad + (\hat{a}\cdot\nabla)\frac{d\vec{A}}{dt}
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Υποθέτουμε ότι η μεταβολή του \vec{A} με τον χρόνο είναι πολύ αργή σε σχέση με την μεταβολή του ξ με τον χρόνο δηλαδή το $\partial\vec{A}/\partial t$ είναι πολύ μικρότερο από το $\dot{\xi}$, ακόμη το w είναι πολύ μικρότερο από το $\dot{\xi}$ άρα ο όρος που έχει το $w\cdot\partial\vec{A}/\partial t$ θα είναι αμελητέος σε σχέση με το $\dot{\xi}$ επομένως τον παραλείπουμε από την lagrangian. Επίσης υποθέτουμε ότι η μεταβολή του \vec{X} με τον χρόνο είναι πολύ αργή σε σχέση με την μεταβολή του ξ με τον χρόνο, δηλαδή το $\dot{\vec{X}}$ είναι πολύ μικρότερο από το $\dot{\xi}$, ακόμη το w είναι πολύ μικρότερο από το $\dot{\xi}$ άρα οι όροι που έχουν το $w\dot{\vec{X}}$ θα είναι αμελητέοι σε σχέση με το $\dot{\xi}$ επομένως τους παραλείπουμε από την lagrangian. Άρα η (3.18) θα γίνει:

$$L = (\vec{A} + u_{//}\hat{b})\cdot\dot{\vec{X}} + \frac{w^2}{2B}\dot{\xi} - H \tag{3.19}$$

Από την (3.2) έχουμε ότι $H(\vec{u}, \vec{x}) = \vec{u}^2/2 + \Phi(\vec{x}, t)$. Αναπτύσσοντας το $\Phi(\vec{x}, t)$ κατά Taylor γύρω από το \vec{X} θα έχουμε όμοια με την (3.9) $\Phi(\vec{x}, t) = \Phi(\vec{X}, t) + \frac{w}{B}\hat{a}\cdot\nabla\Phi(\vec{x}, t)|_{\vec{x}=\vec{X}}$, όμως επειδή έχουμε υποθέσει ότι έχουμε μόνο μαγνητικό πεδίο και όχι ηλεκτρικό, δηλαδή $\vec{E} = 0$, και ότι $\partial\vec{A}/\partial t = 0$ από την δεύτερη των (3.3) θα έχουμε ότι $\nabla\Phi(\vec{x}, t) = 0$ άρα και από την (3.6) θα έχουμε ότι

$$H = \frac{u_{//}^2 + w^2}{2} + \Phi(\vec{X}, t) = \frac{u_{//}^2}{2} + \frac{w^2}{2B}B + \Phi(\vec{X}, t)$$

Θέτοντας $\mu = w^2 / 2B$ θα έχουμε :

$$H = H(\vec{X}, u_{//}, \mu, t) = \frac{u_{//}^2}{2} + \mu B(\vec{X}) + \Phi(\vec{X}, t) \quad (3.20)$$

Όπου $B = B(\vec{X})$ επειδή $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ και όπως δείξαμε στην (3.9) το $\vec{A} = \vec{A}(\vec{x}, t)$ μπορεί να γραφτεί σαν $\vec{A} = \vec{A}(\vec{X}, t)$, όμως $\partial \vec{A} / \partial t = 0$ άρα $\vec{A} = \vec{A}(\vec{X})$

Γενικά η εξίσωση Euler-Lagrange είναι η :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} - \frac{\partial L}{\partial q_a} = 0$$

όπου q_a η γενικευμένη θέση του σωματιδίου και \dot{q}_a η ταχύτητα που αντιστοιχεί σε αυτήν την θέση. Στην συγκεκριμένη κίνηση που μελετάμε για $q_a = \xi$ θα έχουμε

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} - \frac{\partial L}{\partial \xi} = 0$$

όμως από την (3.19) φαίνεται ότι $\partial L / \partial \xi = 0$, άρα από την (3.19) παίρνουμε ότι

$$\frac{d}{dt} \frac{w^2}{2B} = 0$$

επομένως το $\mu = w^2 / 2B$ θα είναι σταθερά της κίνησης.

Επίσης από την (3.19) $\mu = \partial L / \partial \dot{\xi}$ δηλαδή το μ είναι η γενικευμένη ορμή που αντιστοιχεί στην γενικευμένη θέση ξ .

Έστω $\rho_{||} = u_{||} / B$ τότε $u_{||} \hat{b} = u_{||} \vec{B} / B = \rho_{||} \vec{B}$ και από τον ορισμό του μ η (3.19) θα γίνει:

$$L = (\vec{A} + \rho_{||} \vec{B}) \cdot \dot{\vec{X}} + \mu \dot{\xi} - H \quad (3.21)$$

Η εξίσωση (3.21) μας δίνει την Lagrangian που περιγράφει την κίνηση του guiding center σε ένα ηλεκτρομαγνητικό πεδίο.

3.2 Υπολογισμός των εξισώσεων κίνησης του guiding center για αξονοσυμμετρικό μαγνητικό πεδίο σε τοροειδή γεωμετρία

Στην εξίσωση (3.19) δεν εμφανίζεται η θέση του σωματιδίου \vec{x} αλλά μόνο η θέση και η ταχύτητα του guiding center \vec{X} , που είναι συνάρτηση του \vec{x} από την (3.7). Άρα στην συνέχεια θα μελετήσουμε την κίνηση του guiding center υποθέτοντας ότι στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων το guiding center έχει συντεταγμένες

$$\vec{X} = (x, y, z) \Rightarrow \dot{\vec{X}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \vec{u} \quad (3.22)$$

Επίσης θα δουλέψουμε για axisymmetric equilibrium δηλαδή θα ισχύουν όλες οι σχέσεις των κεφαλαίων 2.1 2.2 και 2.3. Έτσι αντικαθιστώντας στην (3.21) την (2.6), την (2.11) και την (3.22) παίρνουμε

$$\begin{aligned} L &= (\psi \nabla \theta - \psi_p \nabla \zeta + \rho_{||} g \nabla \zeta + \rho_{||} I \nabla \theta + \rho_{||} \delta \nabla \psi) \cdot \vec{u} + \mu \dot{\xi} - H \\ &= (\rho_{||} \delta \nabla \psi + (\psi + \rho_{||} I) \nabla \theta + (\rho_{||} g - \psi_p) \nabla \zeta) \cdot \vec{u} + \mu \dot{\xi} - H \end{aligned}$$

όμως

$$\nabla \psi \cdot \vec{u} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t} \right) = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{d\psi}{dt}$$

Όμοια $\nabla\theta \cdot \vec{u} = \dot{\theta}$ και $\nabla\zeta \cdot \vec{u} = \dot{\zeta}$.

Άρα $L = \rho_{||} \delta\dot{\psi} + (\psi + \rho_{||} I) \dot{\theta} + (\rho_{||} g - \psi_p) \dot{\zeta} + \mu \dot{\xi} - H$. Και από (2.4) θα έχουμε ότι:

$$L = (\psi + \rho_{||} I) \dot{\theta} + (\rho_{||} g - \psi_p) \dot{\zeta} + \rho_{||} q \delta\dot{\psi}_p + \mu \dot{\xi} - H \quad (3.23)$$

(White & Boozer, Rapid guiding center calculations, 1995)

Στην συνέχεια από την τρίτη των (2.13) βλέπουμε ότι $\delta = 0$ άρα η (3.23) θα γίνει

$$L = (\psi + \rho_{||} I) \dot{\theta} + (\rho_{||} g - \psi_p) \dot{\zeta} + \mu \dot{\xi} - H \quad (3.24)$$

(White, Gorelenkov, Duarte, & Berk, 2018), (White R. B., Canonical Hamiltonian guiding center variables, 1989), (Kominis, Ram, & Hizanidis, 2008)

Θέτοντας

$$P_{\theta} = \psi + \rho_{||} I,$$

$$P_{\zeta} = \rho_{||} g - \psi_p,$$

$$P_{\xi} = \mu$$

η (3.24) γράφεται :

$$L = P_{\theta} \dot{\theta} + P_{\zeta} \dot{\zeta} + \mu \dot{\xi} - H \quad (3.25)$$

Από την (3.25) παρατηρούμε ότι

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = P_{\theta}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\zeta}} = P_{\zeta}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} = \mu$$

άρα τα P_θ, P_ζ, μ είναι οι κανονικές ορμές που αντιστοιχούν στις θέσεις θ, ζ, ξ .

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση (3.25) γράφεται στην γενική μορφή $L = \sum_i p_i \dot{q}_i - H(q, p, t)$ όπου η lagrangian είναι συνάρτηση των (q, \dot{q}, t) , άρα

$$H(q, p, t) = -L(q, \dot{q}, t) + \sum_i p_i \dot{q}_i \quad (3.26)$$

Από την (3.26) παίρνουμε ότι:

$$\frac{\partial H}{\partial p_j} = -\frac{\partial L}{\partial p_j} + \frac{\partial \sum_i p_i \dot{q}_i}{\partial p_j} = 0 + \dot{q}_j$$

άρα

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \quad (3.27)$$

Επίσης από τον ορισμό $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$ και από την εξίσωση Euler- Lagrange $(d/dt)(\partial L / \partial \dot{q}_a) - \partial L / \partial q_a = 0$ βλέπουμε ότι $\dot{p}_i = \partial L / \partial q_i$, από την (3.26) $\partial H / \partial q_i = -\partial L / \partial q_i$. Άρα από τις δύο τελευταίες εξισώσεις παίρνουμε ότι

$$\dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (3.28)$$

Έτσι από την (3.25), την (3.27) και την (3.28) καταλήγουμε στις εξισώσεις κίνησης του συγκεκριμένου συστήματος που μελετάμε :

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial P_\theta} \quad \dot{P}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta}$$

$$\dot{\zeta} = \frac{\partial H}{\partial P_{\zeta}} \quad \dot{P}_{\zeta} = -\frac{\partial H}{\partial \zeta} \quad (3.29)$$

$$\dot{\xi} = \frac{\partial H}{\partial \mu} \quad \dot{\mu} = -\frac{\partial H}{\partial \xi}$$

Από την (3.20) και την τελευταία των (3.29) βλέπουμε ότι $\dot{\mu} = -\partial H / \partial \xi = 0$, δηλαδή το μ είναι σταθερά της κίνησης όπως έχουμε ήδη δείξει. Επίσης από την (3.20) $\dot{\xi} = B(\vec{X})$ από όπου φαίνεται ότι το $\dot{\xi}$ είναι σταθερό.

Κεφάλαιο 4

Κίνηση του Guiding Center σε αξονοσυμμετρικό μαγνητικό πεδίο ισορροπίας με την προσέγγιση του Large Aspect Ratio

Υποθέτουμε ότι έχουμε axisymmetric equilibrium και large aspect ratio ($r \ll R$) επομένως θα ισχύουν οι εξισώσεις του κεφαλαίου 2 που περιγράφουν το μαγνητικό πεδίο και το σύστημα συντεταγμένων, τα οποία θα χρησιμοποιήσουμε στην συνέχεια. Το μέτρο του μαγνητικού πεδίου δηλαδή θα δίνεται από την εξίσωση (2.29). Επίσης όπως έχουμε ήδη υποθέσει η μεταβολή του $\vec{A}(\vec{X}, t)$ στον χρόνο θα είναι πολύ μικρή σε σχέση με την μεταβολή του ξ στον χρόνο επομένως θεωρήσαμε ότι το $\partial \vec{A} / \partial t$ είναι αμελητέο, όμοια μπορούμε να θεωρήσουμε ότι και το $\partial \Phi / \partial t$ θα είναι αμελητέο σε σχέση με το $\dot{\xi}$, δηλαδή ότι $\partial \Phi / \partial t = 0$. Επομένως θεωρούμε ότι το ηλεκτρικό δυναμικό $\Phi(\vec{x}, t)$ δεν εξαρτάται από τον χρόνο. Επίσης στο προηγούμενο κεφάλαιο δείξαμε ότι $\nabla \Phi(\vec{x}, t) = 0$. Από αυτά προκύπτει ότι το Φ είναι σταθερό, έτσι μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\Phi(\vec{x}, t) = 0$. Επομένως η Hamiltonian του συστήματος που δίνεται από την (3.20) θα γίνει $H(\vec{X}, u_{||}, \mu, t) = u_{||}^2 / 2 + \mu B(\vec{X})$ και αντικαθιστώντας σε αυτήν το μέτρο του μαγνητικού πεδίου που δίνεται από την (2.49) βάζοντας όπου $u_{||} = \rho_{||} B$, θα πάρουμε την Hamiltonian που περιγράφει την κίνηση του guiding center στο συγκεκριμένο equilibrium που μελετάμε η οποία θα είναι:

$$H = \frac{\rho_{||}^2 B^2}{2} + \mu B = \left(\frac{\rho_{||}^2}{2} (1 - r \cos \theta) + \mu \right) (1 - r \cos \theta) \quad (4.1)$$

Παρατηρήσεις:

Το μέτρο του μαγνητικού πεδίου που δίνεται από την (2.49) είναι εκφρασμένο στο σύστημα συντεταγμένων (ψ, θ, ϕ) όμως η Lagrangian που η που χρησιμοποιούμε αναφέρεται στο σύστημα (ψ, θ, ζ) , ωστόσο όπως φαίνεται από την ανάλυση που έχουμε κάνει στο κεφάλαιο 1 για το στοιχειώδες μήκος $d\vec{r}$, το μέτρο ενός διανύσματος θα είναι το ίδιο και στα δύο συστήματα συντεταγμένων. Επομένως στην Hamiltonian που δίνεται από την (3.20) και αναφέρεται, όπως

και η Lagrangian, στο σύστημα (ψ, θ, ζ) μπορούμε να αντικαταστήσουμε το μέτρο του μαγνητικού πεδίου που είναι εκφρασμένο στο σύστημα (ψ, θ, ϕ) .

Αντικαθιστώντας στην (4.1) τις παραμέτρους $\rho_{||}$ και μ όπως τις έχουμε ορίσει στο προηγούμενο κεφάλαιο βλέπουμε ότι η Hamiltonian θα γίνει :

$$H = \frac{u_{||}^2}{2} + \frac{w^2}{2}$$

Όπου τα $u_{||}$ και w είναι, όπως τα έχουμε ορίσει στο προηγούμενο κεφάλαιο είναι ταχύτητες, άρα η Hamiltonian βλέπουμε ότι έχει μορφή κινητικής ενέργειας. Άρα η Hamiltonian του συστήματος που μελετάμε είναι η ενέργεια του συστήματος επομένως είναι σταθερή επομένως είναι σταθερά της κίνησης.

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε ότι $P_\theta = \psi + \rho_{||} I$, άρα χρησιμοποιώντας την (2.52) παίρνουμε ότι:

$$P_\theta = \psi \tag{4.2}$$

και $\psi = r^2 / 2$ άρα:

$$r = \sqrt{2P_\theta} \tag{4.2'}$$

Επίσης $P_\zeta = \rho_{||} g - \psi_p$ και $\psi_p = \psi_p(\psi)$ άρα από την (4.2) θα έχουμε ότι:

$$P_\zeta = \rho_{||} g - \psi_p(P_\theta) \tag{4.3}$$

Όμως για το equilibrium που χρησιμοποιούμε θα είναι όπως έχουμε δείξει στο κεφάλαιο 2 $g = 1$ άρα από την (4.3) θα έχουμε ότι :

$$\rho_{||} = P_\zeta + \psi_p(P_\theta) \tag{4.4}$$

Επίσης από την (2.12) έχουμε ότι $d\zeta = q(\psi) \cdot d\theta$ άρα ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη και επειδή το q δεν εξαρτάται ούτε από το θ ούτε από το ζ θα πάρουμε ότι :

$$\theta = q^{-1}(\psi)\zeta = q^{-1}(P_\theta)\zeta \quad (4.5)$$

Αντικαθιστώντας στην (4.1) την (4.2') και την (4.4) θα πάρουμε:

$$H = \frac{(P_\zeta + \psi_p(P_\theta))^2}{2} (1 - \sqrt{2P_\theta} \cos(\theta))^2 + \mu(1 - \sqrt{2P_\theta} \cos(\theta)) \quad (4.6)$$

Από την (4.2') φαίνεται ότι το P_θ είναι τάξης r και επειδή $r \ll 1$ θεωρώντας ότι στον πρώτο όρο της (4.6) το $(1 - \sqrt{2P_\theta} \cos(\theta))^2 \simeq 1$ θα πάρουμε μια πρώτη προσέγγιση της H που δίνεται από την (4.6) η οποία θα είναι (Brizard, Jacobi zeta function and action-angle coordinates for the pendulum, 2012):

$$H_A = \frac{(P_\zeta + \psi_p(P_\theta))^2}{2} + \mu(1 - \sqrt{2P_\theta} \cos(\theta)) \quad (4.7)$$

όμως η προσέγγιση $(1 - \sqrt{2P_\theta} \cos(\theta))^2 \simeq 1$ δεν είναι καλή γιατί κάνοντας το ανάπτυγμα $(1 - \sqrt{2P_\theta} \cos(\theta))^2$ θα έχουμε $(1 - \sqrt{2P_\theta} \cos(\theta))^2 = 1 + 2P_\theta \cos(\theta) - 2\sqrt{2P_\theta} \cos(\theta)$, από όπου μόνο ο όρος $2P_\theta \cos(\theta)$ είναι τάξης r^2 άρα μπορεί να παραληφθεί. Επομένως μια καλύτερη προσέγγιση είναι $(1 - \sqrt{2P_\theta} \cos(\theta))^2 = 1 - 2\sqrt{2P_\theta} \cos(\theta)$ με βάση την οποία θα πάρουμε μια καλύτερη από την H_A προσέγγιση της H την :

$$H_B = \frac{(P_\zeta + \psi_p(P_\theta))^2}{2} + \mu(1 - \sqrt{2P_\theta} \cos(\theta)) - (P_\zeta + \psi_p(P_\theta))^2 \sqrt{2P_\theta} \cos(\theta) \quad (4.8)$$

Από τις εξισώσεις (4.7) και (4.8) παρατηρούμε ότι η προσέγγιση H_A είναι μια Hamiltonian που μοιάζει με την Hamiltonian του εκκρεμούς επομένως μπορούμε να την επεξεργαστούμε πιο εύκολα από την προσέγγιση H_B και να υπολογίσουμε πιο εύκολα τον μετασχηματισμό σε δράσεις γωνίες από την προσέγγιση H_B , η οποία δεν μοιάζει όσο η H_A με την Hamiltonian του εκκρεμούς αλλά είναι πιο ακριβής προσέγγιση της H που δίνεται από την (4.6) άρα από

την επεξεργασία της H_B θα πάρουμε πιο ακριβή αποτελέσματα. Στην συνέχεια θα εξετάσουμε αρχικά την προσέγγιση H_B .

Αντικαθιστώντας στην (4.8) την (4.5) παίρνουμε:

$$H_B = \frac{(P_\zeta + \psi_p(P_\theta))^2}{2} \quad (4.8')$$

$$+ \mu \left(1 - \sqrt{2P_\theta} \cos(q^{-1}(P_\theta)\zeta) \right) - (P_\zeta + \psi_p(P_\theta))^2 \sqrt{2P_\theta} \cos(q^{-1}(P_\theta)\zeta)$$

Από την οποία παρατηρούμε ότι $H_B = H_B(\theta, \zeta, \xi, P_\theta, P_\zeta, \mu)$, όπου τα (θ, ζ, ξ) είναι οι κανονικές θέσεις στις οποίες αντιστοιχούν οι κανονικές ορμές (P_θ, P_ζ, μ) , όπως δείξαμε από την εξίσωση (3.25), τα οποία ικανοποιούν τις εξισώσεις κίνησης (3.29) για την προσέγγιση $H = H_B$.

Προσέγγιση μηδενικού εύρους τροχιάς (zero orbit width, ZOW)

Στην προσέγγιση zero orbit width θεωρούμε ότι η κανονική ορμή P_θ είναι σταθερή με τιμή $P_\theta = P_{\theta_0}$, έτσι από την (4.2') η μεταβλητή r θα είναι σταθερή, επομένως η τροχιά του σωματιδίου που προκύπτει για ζ σταθερό θα είναι μηδενικού πάχους (zero width) επίσης από την εξίσωση (4.5) βλέπουμε ότι η θέση θ που αντιστοιχεί στην κανονική ορμή P_θ θα είναι $\theta = q^{-1}(P_{\theta_0})\zeta$. Αυτή η προσέγγιση όμως δεν είναι καλή αφού στην πραγματικότητα η τροχιά δεν είναι μηδενικού πάχους (zero width), δηλαδή η ακτινική μεταβλητή r δεν είναι σταθερή επομένως το P_θ δεν είναι P_{θ_0} . Για τον λόγο αυτόν, για να κάνουμε μια καλύτερη προσέγγιση θα θεωρήσουμε ότι το P_θ είναι $P_\theta = P_{\theta_0} + \overline{P_\theta}$ με $P_\theta \ll P_{\theta_0}$. Θεωρούμε δηλαδή ότι η τροχιά έχει ένα μικρό πάχος πού στην κανονική ορμή αντιστοιχεί στην πρόσθεση του μικρού όρου $\overline{P_\theta}$. Αυτή είναι η προσέγγιση finite orbit width.

Προσέγγιση μικρού εύρους τροχιάς (finite orbit width, FOW)

Όπως είδαμε πάρα πάνω στην finite orbit width προσέγγιση θεωρούμε ότι $P_\theta = P_{\theta_0} + \overline{P_\theta}$ με $\overline{P_\theta} \ll P_{\theta_0}$. Με βάση αυτήν την θεώρηση η θέση θ που αντιστοιχεί στην κανονική ορμή P_θ θα

πρέπει να μεταβληθεί, επομένως θεωρούμε ότι στην γενικότερη περίπτωση θα γίνει, με βάση την (4.5), $\theta = q^{-1}(P_\theta)\bar{\zeta} + \bar{\theta}$.

Στην συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση finite orbit width, επειδή όπως είπαμε είναι καλύτερη από την προσέγγιση zero orbit width. Όπως είδαμε με αυτήν την προσέγγιση θα έχουμε:

$$P_\theta = P_{\theta_0} + \bar{P}_\theta \tag{4.9}$$

$$\theta = q^{-1}(P_\theta)\bar{\zeta} + \bar{\theta}$$

Οι εξισώσεις (4.9) είναι ένας μετασχηματισμός από το P_θ στο \bar{P}_θ και από το θ στο $\bar{\theta}$. Για να είναι κανονικός ο μετασχηματισμός, θα πρέπει να προκύπτει από μια γεννήτρια συνάρτηση. Έστω ότι η γεννήτρια συνάρτηση είναι η $F_3(\bar{\theta}, \bar{\zeta}, \bar{\xi}, P_\theta, P_\zeta, \mu) = \bar{\theta}(P_{\theta_0} - P_\theta) - \bar{\zeta}(P_\zeta + \psi_p(P_\theta)) - \mu\bar{\xi}$ η οποία είναι της μορφής $F_3 = F_3(Q_i, p_i)$, όπου Q_i είναι οι μετασχηματισμένες νέες θέσεις και p_i είναι οι μη μετασχηματισμένες ορμές. Για να παίρνουμε, όπως είπαμε τις ίδιες εξισώσεις κίνησης και μετά τον μετασχηματισμό θα πρέπει η lagrangian πριν τον μετασχηματισμό με την lagrangian μετά τον μετασχηματισμό να διαφέρουν κατά ένα τέλειο διαφορικό. Δηλαδή:

$$L(q, \dot{q}) = \bar{L}(Q, P) + \frac{dF}{dt}$$

Έστω $F = F_3 + q_i p_i$, όπου το $q_i p_i$ δηλώνει άθροισμα πάνω σε όλα τα i και

$$L = \sum_i p_i \dot{q}_i - H(q, p, t). \text{ Τότε :}$$

$$\cancel{p_i \dot{q}_i} - H(q, p) = P_i \dot{Q}_i - \bar{H}(Q, P) + \frac{\partial F_3}{\partial Q_i} \dot{Q}_i + \frac{\partial F_3}{\partial p_i} \dot{p}_i + \cancel{q_i \dot{p}_i} + q_i \dot{p}_i$$

για να ικανοποιείται αυτή η πάρα πάνω εξίσωση για κάθε p_i, q_i θα πρέπει :

$$P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i}$$

$$q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i} \quad (4.10)$$

$$H(q(Q,P), p(Q,P)) = \bar{H}(Q,P)$$

Εφαρμόζοντας τις (4.10) στο δικό μας σύστημα παίρνουμε:

$$\bar{P}_\theta = \frac{\partial F_3}{\partial \theta} = P_\theta - P_{\theta_0}, \quad \theta = -\frac{\partial F_3}{\partial P_\theta} = \bar{\theta} + \frac{\partial \psi_p(P_\theta)}{\partial P_\theta} \cdot \bar{\zeta} \stackrel{(2.4)}{=} \bar{\theta} + q^{-1}(P_\theta) \cdot \bar{\zeta}$$

$$\bar{P}_\zeta = P_\zeta + \psi_p(P_\theta), \quad \bar{\zeta} = \zeta \quad (4.11)$$

$$\bar{\mu} = \mu, \quad \bar{\xi} = \xi$$

Από την πρώτη των (4.11) φαίνεται ότι η F_3 , όπως την ορίσαμε πάρα πάνω, είναι η γεννήτρια συνάρτηση που μας δίνει τις εξισώσεις (4.9), δηλαδή ο μετασχηματισμός (4.9) παράγεται από μια γεννήτρια συνάρτηση, επομένως είναι κανονικός όπως θέλαμε. Επίσης χρησιμοποιώντας την γεννήτρια συνάρτηση βρήκαμε συνολικά τον μετασχηματισμό από τα $(\theta, \zeta, \xi, P_\theta, P_\zeta, \mu)$ στα $(\bar{\theta}, \bar{\zeta}, \bar{\xi}, \bar{P}_\theta, \bar{P}_\zeta, \bar{\mu})$ ο οποίος, αφού προκύπτει από γεννήτρια συνάρτηση είναι κανονικός, και δίνεται από τις (4.11).

Από την δεύτερη των (4.11) έχουμε ότι $\bar{P}_\zeta = P_\zeta + \psi_p(P_\theta) \stackrel{(4.9)}{=} P_\zeta + \psi_p(P_{\theta_0} + \bar{P}_\theta)$, όμως στην προσέγγιση finite orbit width έχουμε υποθέσει ότι $\bar{P}_\theta \ll P_{\theta_0}$, άρα αναπτύσσοντας κατά Taylor

το $\overline{P_\zeta}(P_\theta)$ γύρω από το $P_\theta = P_{\theta_0}$ και επειδή από την πρώτη των (4.11) $P_\theta - P_{\theta_0} = \overline{P_\theta}$ θα πάρουμε:

$$\overline{P_\zeta}(P_\theta) - \overline{P_\zeta}(P_{\theta_0}) = \left. \frac{d\overline{P_\zeta}}{dP_\theta} \right|_{P_\theta=P_{\theta_0}} \cdot \overline{P_\theta} + \left. \frac{d^2\overline{P_\zeta}}{dP_\theta^2} \right|_{P_\theta=P_{\theta_0}} \cdot \frac{\overline{P_\theta}^2}{2}$$

Όμως επειδή στην προσέγγιση finite orbit width έχουμε υποθέσει ότι $\overline{P_\theta} \ll P_{\theta_0}$ ο όρος δεύτερης τάξης του προηγούμενου αναπτύγματος θα είναι πολύ μικρός σε σχέση με το P_{θ_0} επομένως μπορούμε να τον παραλείψουμε. Επίσης οι κανονικές ορμές P_ζ και P_θ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους επομένως $dP_\zeta / dP_\theta = 0$, άρα θα πάρουμε:

$$\overline{P_\zeta}(P_\theta) = P_\zeta + \psi_p(P_{\theta_0}) + \left(\left. \frac{dP_\zeta}{dP_\theta} + \frac{d\psi_p(P_\theta)}{dP_\theta} \right|_{P_\theta=P_{\theta_0}} \right) \cdot \overline{P_\theta}$$

Και θέτοντας $\overline{P_\zeta}(P_{\theta_0}) = P_\zeta + \psi_p(P_{\theta_0}) = \overline{P_{\zeta_0}}$ θα πάρουμε:

$$\overline{P_\zeta}(P_\theta) = \overline{P_{\zeta_0}} + \psi'_p(P_{\theta_0}) \cdot \overline{P_\theta} \Rightarrow \overline{P_\theta} = \frac{\overline{P_\zeta} - \overline{P_{\zeta_0}}}{\psi'_p(P_{\theta_0})} \quad (4.12)$$

Όπου

$$\psi'_p(P_{\theta_0}) = \left. \frac{\partial \psi_p(P_\theta)}{\partial P_\theta} \right|_{P_{\theta_0}}$$

Επίσης αναπτύσσουμε το $q^{-1}(P_\theta) = q^{-1}(\overline{P_\theta} + P_{\theta_0})$ γύρω από το $\overline{P_\theta} = 0$ και παραλείποντας τους όρους τάξης μεγαλύτερης του $\overline{P_\theta}^2$ παίρνουμε

$$q^{-1}(\bar{P}_\theta + P_{\theta_0}) = q^{-1}(P_{\theta_0}) + \left. \frac{\partial q^{-1}(\bar{P}_\theta)}{\partial \bar{P}_\theta} \right|_{\bar{P}_\theta=0} \cdot \bar{P}_\theta$$

Θέτοντας $q^{-1}(P_{\theta_0}) = \frac{\partial \psi_p}{\partial P_\theta} = \Omega$ και $\left. \frac{\partial q^{-1}(\bar{P}_\theta)}{\partial \bar{P}_\theta} \right|_{\bar{P}_\theta=0} = \frac{\partial^2 \psi_p}{\partial P_\theta^2} = \Omega'$ παίρνουμε

$$q^{-1}(\bar{P}_\theta + P_{\theta_0}) = \Omega + \Omega' \cdot \bar{P}_\theta \quad (4.12')$$

Εφαρμόζοντας τον κανονικό μετασχηματισμό (4.11) στην Hamiltonian H_B που δίνεται από την εξίσωση (4.8) χρησιμοποιώντας την τελευταία των (4.10) θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \bar{H}_B(\bar{\theta}, \bar{\zeta}, \bar{\xi}, \bar{P}_\theta, \bar{P}_\zeta, \bar{\mu}) &= \frac{\bar{P}_\zeta^2}{2} + \mu \left(1 - \sqrt{2(\bar{P}_\theta + P_{\theta_0})} \cos(q^{-1}(\bar{P}_\theta + P_{\theta_0}) \cdot \bar{\zeta} + \bar{\theta}) \right) \\ &\quad - \bar{P}_\zeta^2 \sqrt{2(\bar{P}_\theta + P_{\theta_0})} \cos(q^{-1}(\bar{P}_\theta + P_{\theta_0}) \cdot \bar{\zeta} + \bar{\theta}) \end{aligned} \quad (4.13)$$

Από την πρώτη των (4.11) έχουμε

$$P_\theta = P_{\theta_0} + \bar{P}_\theta$$

Άρα για $\bar{P}_\theta = 0 \Rightarrow P_\theta = P_{\theta_0}$ θα έχουμε zero orbit width. Όπως είπαμε πάρα πάνω για zero orbit width $P_\theta = P_{\theta_0}$ και τότε από την (4.5) θα πάρουμε ότι $\theta = q^{-1}(P_{\theta_0})\bar{\zeta}$. Παρατηρώντας τις εξισώσεις $P_\theta = P_{\theta_0}$ $\theta = q^{-1}(P_{\theta_0})\bar{\zeta}$ και τις πρώτες του κανονικού μετασχηματισμού (4.11) βλέπουμε ότι όταν $\bar{P}_\theta = 0$ είναι σαν να μην έχουμε εφαρμόσει τον μετασχηματισμό (4.11). Επομένως όταν δεν εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό, δηλαδή για $\bar{P}_\theta = 0$, θα έχουμε zero orbit width αφού $P_\theta = P_{\theta_0}$.

Αναπτύσσοντας ως προς Taylor στην (4.13) την ρίζα $\sqrt{2(\bar{P}_\theta + P_{\theta_0})}$ γύρω από το $\bar{P}_\theta = 0$ και παραλείποντας τους όρους τάξης μεγαλύτερης του \bar{P}_θ^2 έχουμε:

$$\sqrt{2(\bar{P}_\theta + P_{\theta_0})} = \sqrt{2P_{\theta_0}} + \frac{1}{\sqrt{2P_{\theta_0}}} \cdot \bar{P}_\theta$$

Επίσης αντικαθιστώντας στην (4.13) όπου $\cos(q^{-1}(\bar{P}_\theta + P_{\theta_0})) = \cos(\Omega \cdot \bar{\zeta} + \Omega' \cdot \bar{P}_\theta + \bar{\theta}) = \cos(\Omega \cdot \bar{\zeta}) \cdot \cos(\Omega' \cdot \bar{P}_\theta + \bar{\theta}) - \sin(\Omega \cdot \bar{\zeta}) \cdot \sin(\Omega' \cdot \bar{P}_\theta + \bar{\theta})$, θα πάρουμε

$$\begin{aligned} \bar{H}_B(\bar{\theta}, \bar{\zeta}, \bar{\xi}, \bar{P}_\theta, \bar{P}_\zeta, \bar{\mu}) &= \left(\frac{\bar{P}_\zeta^2}{2} + \mu \right) - (\bar{P}_\zeta^2 + \mu) \left(\sqrt{2 \cdot P_{\theta_0}} + \frac{1}{\sqrt{2P_{\theta_0}}} \cdot \bar{P}_\theta \right) \cdot \\ &\cdot (\cos(\Omega \cdot \bar{\zeta}) \cdot \cos(\Omega' \cdot \bar{P}_\theta + \bar{\theta}) - \sin(\Omega \cdot \bar{\zeta}) \cdot \sin(\Omega' \cdot \bar{P}_\theta + \bar{\theta})) \end{aligned}$$

Στην πάρα πάνω εξίσωση παρατηρούμε ότι εμφανίζονται οι όροι $\cos(\Omega' \bar{P}_\theta + \bar{\theta})$ και $\sin(\Omega' \bar{P}_\theta + \bar{\theta})$ οι οποίοι δηλώνουν μια μεταβολή στο πλάτος των $\cos(\Omega q)$ και $\sin(\Omega q)$ αντίστοιχα. Ωστόσο η μεταβολή αυτή είναι πολύ αργή αφού όπως έχουμε υποθέσει για την προσέγγιση της κίνησης του guiding center η κάθετη ταχύτητα στο μαγνητικό πεδίο, w , είναι πολύ μικρή. Για την ανάλυσή μας στην συνέχεια θα υποθέσουμε ότι το $\Omega' = 0$ δηλαδή η δεύτερης τάξης μεταβολή της μαγνητικής ροής ψ_p ως προς την μαγνητική ροή ψ είναι μηδέν. Επομένως η προηγούμενη εξίσωση θα γίνει

$$\begin{aligned} \bar{H}_B(\bar{\theta}, \bar{\zeta}, \bar{\xi}, \bar{P}_\theta, \bar{P}_\zeta, \bar{\mu}) &= \\ &= \left(\frac{\bar{P}_\zeta^2}{2} + \mu \right) - (\bar{P}_\zeta^2 + \mu) \sqrt{2 \cdot P_{\theta_0}} \cdot (\cos(\Omega \cdot q) \cdot \cos(\bar{\theta}) - \sin(\Omega \cdot q) \cdot \sin(\bar{\theta})) - \\ &\quad \frac{1}{\sqrt{2P_{\theta_0}}} \cdot (\bar{P}_\zeta^2 + \mu) (\cos(\Omega \cdot \bar{\zeta}) \cdot \cos(\bar{\theta}) - \sin(\Omega \cdot \bar{\zeta}) \cdot \sin(\bar{\theta})) \cdot \bar{P}_\theta \end{aligned}$$

Από τις δύο τελευταίες εξισώσεις παρατηρούμε ότι η $\bar{H}_B(\bar{\theta}, \bar{\zeta}, \bar{\xi}, \bar{P}_\theta, \bar{P}_\zeta, \bar{\mu})$ μπορεί να γραφτεί στην μορφή

$$\bar{H}_B(\bar{\theta}, \bar{\zeta}, \bar{\xi}, \bar{P}_\theta, \bar{P}_\zeta, \bar{\mu}) = \bar{H}_B(\bar{P}_\theta = 0) + \bar{H}_{B1}(\bar{\zeta}, \bar{P}_\zeta) \cdot \bar{P}_\theta \quad (4.15)$$

Όπου

$$\bar{H}_{B1}(\bar{\zeta}, \bar{P}_\zeta) = -\frac{1}{\sqrt{2P_{\theta_0}}} \cdot (\bar{P}_\zeta^2 + \mu) \cdot (\cos(\Omega \cdot \bar{\zeta}) \cdot \cos(\bar{\theta}) - \sin(\Omega \cdot \bar{\zeta}) \cdot \sin(\bar{\theta}))$$

Δηλαδή σαν άθροισμα ενός όρου τάξης μηδέν και ενός όρου τάξης ένα.

Ο όρος τάξης μηδέν είναι :

$$\bar{H}_B(\bar{P}_\theta = 0) = \left(\frac{\bar{P}_\zeta^2}{2} + \mu \right) - (\bar{P}_\zeta^2 + \mu) \sqrt{2 \cdot P_{\theta_0}} \cdot (\cos(\Omega \cdot \bar{\zeta}) \cdot \cos(\bar{\theta}) - \sin(\Omega \cdot \bar{\zeta}) \cdot \sin(\bar{\theta}))$$

Παρατηρούμε ότι στην πάρα πάνω εξίσωση δεν εμφανίζεται η κανονική ορμή \bar{P}_θ που αντιστοιχεί στην θέση $\bar{\theta}$ άρα θα έχουμε $\partial \bar{H}_B(\bar{P}_\theta = 0) / \partial \bar{P}_\theta = \dot{\bar{\theta}} = 0$, επομένως το $\bar{\theta}$ θα είναι σταθερό και για λόγους ευκολίας επιλέγω να είναι $\bar{\theta} = 0$. Άρα η προηγούμενη εξίσωση θα γίνει:

$$\bar{H}_B(\bar{P}_\theta = 0) = \left(\frac{\bar{P}_\zeta^2}{2} + \mu \right) - (\bar{P}_\zeta^2 + \mu) \sqrt{2 \cdot P_{\theta_0}} \cdot \cos(\Omega \cdot \bar{\zeta}) \quad (4.16)$$

Επίσης από τις εξισώσεις του μετασχηματισμού (4.11) βλέπουμε ότι όταν $\bar{P}_\theta = 0$ θα είναι $P_\theta = P_{\theta_0}$ και όπως είπαμε για την $\bar{H}_B(\bar{P}_\theta = 0)$ θα είναι $\bar{\theta} = 0$. Αφού $\bar{\theta} = 0$ και από τις (4.11) θα έχουμε $\zeta = \bar{\zeta}$ και $\theta = \bar{\theta} + q^{-1}(P_\theta) \cdot \bar{\zeta}$ άρα θα πάρουμε $\theta = q^{-1}(P_\theta) \cdot \zeta$, άρα στο $\bar{P}_\theta = 0$ θα είναι $\theta = q^{-1}(P_{\theta_0}) \cdot \zeta$. Άρα για την $\bar{H}_B(\bar{P}_\theta = 0)$ θα έχουμε $P_\theta = P_{\theta_0}$ και $\theta = q^{-1}(P_{\theta_0}) \cdot \zeta$ οι οποίες

είναι οι τιμές των P_θ και θ για την zero orbit width προσέγγιση επομένως η $\bar{H}_B(\bar{P}_\theta = 0)$ είναι η zero orbit width προσέγγιση της $\bar{H}_B(P_\theta)$.

Η (4.12) μας δίνει το \bar{P}_θ συναρτήσει του \bar{P}_ζ άρα αφού αυτές οι δύο κανονικές ορμές δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους αντικαθιστώντας το \bar{P}_θ από την (4.12) στην προηγούμενη εξίσωση αυτή θα είναι συνάρτηση μόνο του \bar{P}_ζ πράγμα που σημαίνει ότι ο βαθμός ελευθερίας του συστήματος που περιγράφεται από την προηγούμενη εξίσωση μειώνεται κατά ένα. Έτσι θα πάρουμε:

$$\begin{aligned} \bar{H}_{B1}(\bar{\zeta}, \bar{P}_\zeta) \cdot \bar{P}_\theta = \\ -\frac{1}{\sqrt{2P_{\theta_0}}} \cdot (\bar{P}_\zeta^2 + \mu) \cdot (\cos(\Omega \cdot \bar{\zeta}) \cdot \cos(\bar{\theta}) - \sin(\Omega \cdot \bar{\zeta}) \cdot \sin(\bar{\theta})) \cdot \frac{\bar{P}_\zeta - \bar{P}_{\zeta_0}}{\psi'_P(P_{\theta_0})} \end{aligned}$$

Όμοια όπως κάναμε για την (4.16) επιλέγουμε $\bar{\theta} = 0$, άρα θα έχουμε

$$\begin{aligned} \bar{H}_{B1}(\bar{\zeta}, \bar{P}_\zeta) \cdot \bar{P}_\theta = \\ -\frac{1}{\sqrt{2P_{\theta_0}}} \cdot (\bar{P}_\zeta^2 + \mu) \cdot \cos(\Omega \cdot \bar{\zeta}) \cdot \frac{\bar{P}_\zeta - \bar{P}_{\zeta_0}}{\psi'_P(P_{\theta_0})} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Στο σημείο αυτό αξίζει να επισημάνουμε πως η $\bar{H}_B(\bar{P}_\theta)$ όπως δίνεται από την εξ. (4.13) είναι ακριβής αφού προκύπτει με τον κανονικό μετασχηματισμό (4.11) χωρίς κάποια προσέγγιση από την αρχική Hamiltonian. Η προσέγγιση του μικρού εύρους της τροχιάς επιβάλλεται μέσω του αναπτύγματος Taylor που εφαρμόσαμε στην ρίζα $\sqrt{2(\bar{P}_\theta + P_{\theta_0})}$ και στο $q^{-1}(P_\theta) = q^{-1}(\bar{P}_\theta + P_{\theta_0})$ της εξίσωσης (4.13), η οποία έχει τη μορφή αθροίσματος της zero orbit width προσέγγισης που προκύπτει όπως έχουμε πει για $\bar{H}_B(\bar{P}_\theta = 0)$, και του όρου διαταραχής λόγω μη μηδενικού (αλλά σχετικά μικρού $\bar{P}_\theta \ll P_{\theta_0}$) εύρους τροχιάς.

θέτοντας όπου $q^{-1}(P_{\theta_0}) = \Omega$, $\bar{P}_{\zeta} = p$, $\bar{\zeta} = q$, και αφού από την (4.2') $\sqrt{2P_{\theta_0}} = r \ll 1$ θα έχουμε από την (4.16):

$$\bar{H}_B(\bar{P}_{\theta} = 0) = \frac{p^2}{2} + \mu \left(1 - \left(1 + \frac{p^2}{\mu} \right) r \cos(\Omega \cdot q) \right) \quad (4.16')$$

Και από την (4.17)

$$\begin{aligned} \bar{H}_{B_1}(q, p) \cdot \bar{P}_{\theta} = \\ -\frac{1}{r} \cdot (p^2 + \mu) \cdot \frac{p - \bar{P}_{\zeta_0}}{\Omega} \cos(\Omega \cdot q) \end{aligned} \quad (4.17')$$

Από την (4.15), την (4.16) και την (4.17) βλέπουμε ότι η Hamiltonian του συστήματος \bar{H}_B που δίνεται από την (4.13) μπορεί να γραφτεί σαν έναν όρο τάξης μηδέν, τον $\bar{H}_B(\bar{P}_{\theta} = 0)$ και έναν όρο τάξης ένα, τον $\bar{H}_{B_1}(\bar{\zeta}, \bar{P}_{\zeta}) \cdot \bar{P}_{\theta}$, ο οποίος είναι τάξης ένα αφού στην (4.15) πολλαπλασιάζεται με το \bar{P}_{θ} για το οποίο έχουμε υποθέσει ότι $\bar{P}_{\theta} \ll P_{\theta_0}$. Επίσης από τις (4.16) και (4.17) βλέπουμε ότι οι όροι της Hamiltonian τάξης μηδέν και τάξης ένα αντίστοιχα εξαρτώνται μόνο από την θέση $\bar{\zeta}$ και την κανονική ορμή που αντιστοιχεί σε αυτήν, δηλαδή την \bar{P}_{ζ} , αφού όπως έχουμε υποθέσει το \bar{P}_{θ_0} είναι σταθερό και το $\mu = \bar{\mu}$ είναι σταθερό όπως έχουμε δείξει.

Γράφοντας την \bar{H}_B με τον τρόπο που δίνεται από την (4.15) στην συνέχεια θα εφαρμόσουμε κανονική θεωρία διαταραχών θεωρώντας όπως είπαμε και πάρα πάνω όρο τάξης μηδέν το $\bar{H}_B(\bar{P}_{\theta} = 0)$ που θα το συμβολίσουμε με \bar{H}_{B_0} και από την (4.16') θα είναι $\bar{H}_{B_0} = \bar{H}_{B_0}(p, q)$ και όρο τάξης ένα το $\bar{H}_{B_1}(\bar{\zeta}, \bar{P}_{\zeta}) \cdot \bar{P}_{\theta}$ που θα το συμβολίσουμε με \bar{H}_{B_1} και από την (4.17') θα είναι

$\bar{H}_{B_1} = \bar{H}_{B_1}(p, q)$. Για να εφαρμόσουμε κανονική θεωρία διαταραχών θα πρέπει πρώτα να κάνουμε μετασχηματισμό σε δράσεις-γωνίες για την Hamiltonian τάξης μηδέν, δηλαδή για την $\bar{H}_{B_0} = \bar{H}_{B_0}(p, q)$. Δηλαδή στο επόμενο κεφάλαιο θα κάνουμε τον μετασχηματισμό $(q, p) \leftrightarrow (w, J)$, όπου w είναι οι γωνίες και J οι δράσεις για την Hamiltonian $\bar{H}_{B_0} = \bar{H}_{B_0}(p, q)$. (Goldstein, Poole, & Safko), (Brizard, Compact formulas for guiding-center orbits in axisymmetric tokamak geometry, 2011)

Την προηγούμενη επεξεργασία που κάναμε για την Hamiltonian H_B θα την κάνουμε ανάλογα και για την Hamiltonian H_A . Έτσι εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό (4.11) στην H_A θα πάρουμε

$$\bar{H}_A = \frac{\bar{P}_\zeta^2}{2} + \mu \left(1 - \sqrt{2(\bar{P}_\theta + P_{\theta_0})} \cos(q^{-1}(\bar{P}_\theta + P_{\theta_0})\bar{\zeta} + \bar{\theta}) \right) \quad (4.18)$$

Όμοια με την \bar{H}_B η \bar{H}_A μπορεί να γραφτεί συναρτήσει της zero orbit width προσέγγισης, δηλαδή μπορεί να γραφτεί στην μορφή

$$\bar{H}_A(\bar{\theta}, \bar{\zeta}, \bar{\xi}, \bar{P}_\theta, \bar{P}_\zeta, \bar{\mu}) = \bar{H}_A(\bar{P}_\theta = 0) + \bar{H}_{A1}(\bar{\zeta}, \bar{P}_\zeta) \cdot \bar{P}_\theta \quad (4.19)$$

Όπου

$$\bar{H}_{A1}(\bar{\zeta}, \bar{P}_\zeta) = -\frac{1}{\sqrt{2P_{\theta_0}}} \cdot \mu \cdot \left(\cos(\Omega \cdot \bar{\zeta}) \cdot \cos(\bar{\theta}) - \sin(\Omega \cdot \bar{\zeta}) \cdot \sin(\bar{\theta}) \right)$$

Και

$$\bar{H}_A(\bar{P}_\theta = 0) = \left(\frac{\bar{P}_\zeta^2}{2} + \mu \right) - \mu \sqrt{2 \cdot P_{\theta_0}} \cdot \left(\cos(\Omega \cdot \bar{\zeta}) \cdot \cos(\bar{\theta}) - \sin(\Omega \cdot \bar{\zeta}) \cdot \sin(\bar{\theta}) \right)$$

Με τα ίδια επιχειρήματα που είπαμε για την \bar{H}_B θεωρούμε ότι $\bar{\theta} = 0$ και χρησιμοποιώντας και τον αντίστοιχο συμβολισμό παίρνουμε

$$\bar{H}_A(\bar{P}_\theta = 0) = \frac{p^2}{2} + \mu - \mu r \cos(\Omega \cdot q) \quad (4.20)$$

Και

$$\bar{H}_{A_1}(q, p) \cdot \bar{P}_\theta = -\frac{1}{r} \cdot \mu \cdot \frac{p - \bar{P}_{\zeta_0}}{\Omega} \cos(\Omega \cdot q) \quad (4.21)$$

Γράφοντας την \bar{H}_A με τον τρόπο που δίνεται από την (4.15) στην συνέχεια θα εφαρμόσουμε κανονική θεωρία διαταραχών θεωρώντας όπως είπαμε και πάρα πάνω όρο τάξης μηδέν το $\bar{H}_A(\bar{P}_\theta = 0)$ που θα το συμβολίσουμε με \bar{H}_{A_0} και από την (4.20) θα είναι $\bar{H}_{A_0} = \bar{H}_{A_0}(p, q)$ και όρο τάξης ένα το $\bar{H}_{A_1}(q, p) \cdot \bar{P}_\theta$ που θα το συμβολίσουμε με \bar{H}_{A_1} και από την (4.21) θα είναι $\bar{H}_{A_1} = \bar{H}_{A_1}(q, p)$.

Για να εφαρμόσουμε κανονική θεωρία διαταραχών θα πρέπει πρώτα να κάνουμε μετασχηματισμό σε δράσεις-γωνίες για την Hamiltonian τάξης μηδέν, δηλαδή για την $\bar{H}_{A_0} = \bar{H}_{A_0}(q, p)$. Εδώ παρατηρούμε ότι η Hamiltonian \bar{H}_{A_0} είναι η Hamiltonian του εκκρεμούς για την οποία γνωρίζουμε τον μετασχηματισμό σε δράσεις-γωνίες και θα τον αξιοποιήσουμε στην συνέχεια σε αντίθεση με την Hamiltonian \bar{H}_{B_0} για την οποία θα υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό αυτόν στο επόμενο κεφάλαιο. (Brizard, Jacobi zeta function and action-angle coordinates for the pendulum, 2012)

Κεφάλαιο 5

Μετασχηματισμός σε δράσεις-γωνίες

5.1 Υπολογισμός της δράσης (J) από την περίοδο (T)

5.1α Hamiltonian \bar{H}_B

Όπως είπαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο θα κάνουμε μετασχηματισμό σε δράσεις γωνίες για την Hamiltonian \bar{H}_B τάξης μηδέν δηλαδή για την :

$$\bar{H}_{B_0} = H_0 = p^2 (1/2 - r \cos(\Omega \cdot q)) + \mu - \mu \cdot r \cos(\Omega \cdot q) \quad (5.1)$$

Όπου το $\mu = \bar{\mu}$ όπως το ορίσαμε στο κεφάλαιο 3 είναι $\mu = w^2 / 2B$ από όπου φαίνεται ότι $\mu > 0$ και, όπως έχουμε ήδη πει, $r \ll 1$. Επίσης από το κεφάλαιο 3 έχουμε δείξει ότι το μ είναι σταθερά της κίνησης πράγμα το οποίο φαίνεται και από την (5.1) αφού $\dot{\bar{\mu}} = \dot{\mu} = \partial H_0 / \partial \bar{\xi} \stackrel{(5.1)}{=} 0$. Επίσης στο κεφάλαιο 4 στην σημείωση 2 δείξαμε ότι η Hamiltonian του συστήματος είναι η ενέργεια του συστήματος, επομένως θα είναι σταθερή. Έτσι υποθέτουμε ότι και η Hamiltonian τάξης μηδέν του συστήματος, δηλαδή η $\bar{H}_{B_0} = H_0$ θα είναι σταθερή και ίση με ε . (Lichtenberg & Lieberman), (Brizard & Duthoit, Canonical transformation for trapped/passing guiding-center orbits in axisymmetric tokamak geometry, 2014)

Επομένως για $H_0 = \varepsilon$ έχουμε:

$$p^2 = \frac{\varepsilon - \mu + \mu \cdot r \cos(\Omega \cdot q)}{1/2 - r \cdot \cos(\Omega \cdot q)} \quad (5.2)$$

$$p = \pm \sqrt{\frac{\varepsilon - \mu + \mu \cdot r \cos(\Omega \cdot q)}{1/2 - r \cdot \cos(\Omega \cdot q)}}$$

Όμως

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= \frac{\partial H_0}{\partial p} = 2p \cdot (1/2 - r \cdot \cos(\Omega \cdot q)) = \pm 2 \sqrt{\frac{\varepsilon - \mu + \mu \cdot r \cos(\Omega \cdot q)}{1/2 - r \cdot \cos(\Omega \cdot q)}} \cdot (1/2 - r \cdot \cos(\Omega \cdot q)) \\ &= \pm 2 \sqrt{(\varepsilon - \mu + \mu \cdot r \cos(\Omega \cdot q)) \cdot (1/2 - r \cdot \cos(\Omega \cdot q))} . \\ \Rightarrow dt &= \pm \frac{dq}{2 \sqrt{(\varepsilon - \mu + \mu \cdot r \cos(\Omega \cdot q)) \cdot (1/2 - r \cdot \cos(\Omega \cdot q))}} . \end{aligned}$$

Θέτοντας $\Omega \cdot q = \varphi$ και $dq = d\varphi / \Omega$, έχουμε

$$\int dt = \pm \frac{1}{2\Omega} \cdot \int \frac{d\varphi}{\sqrt{(\varepsilon - \mu + \mu \cdot r \cos(\varphi)) \cdot (1/2 - r \cdot \cos(\varphi))}} \quad (5.2')$$

Όρια της κίνησης (q)

Από (5.2) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} p^2 > 0 &\Rightarrow (\varepsilon - \mu + \mu \cdot r \cos(\Omega \cdot q)) \cdot (1/2 - r \cdot \cos(\Omega \cdot q)) > 0 \Rightarrow \\ (-\varepsilon + \mu - \mu \cdot r \cos(\Omega \cdot q)) \cdot (1/2 - r \cdot \cos(\Omega \cdot q)) < 0 &\Rightarrow \frac{1 - \varepsilon / \mu}{r} < \cos(\Omega \cdot q) < \frac{1}{2 \cdot r} \end{aligned}$$

Όμως

$$r \ll 1 \Rightarrow \frac{1}{2r} \gg 1$$

Άρα

$$\frac{1-\varepsilon/\mu}{r} < \cos(\Omega \cdot q) < 1$$

Άρα μπορούμε να διακρίνουμε δύο ποιοτικά διαφορετικές περιπτώσεις κίνησης που αντιστοιχούν παγιδευμένα και μη-παγιδευμένα σωματίδια κατά αντιστοιχία με τα δύο είδη κινήσεων ενός εκκρεμούς: αιώρηση (libration) και περιστροφή (rotation).

- Για τιμές των (ε, μ, r) όπου $\frac{1-\varepsilon/\mu}{r} > -1$, το q είναι φραγμένο

$$-\frac{1}{\Omega} \cdot \arccos\left(\frac{1-\varepsilon/\mu}{r}\right) < q < \frac{1}{\Omega} \cdot \arccos\left(\frac{1-\varepsilon/\mu}{r}\right)$$

και τα σωματίδια εκτελούν κίνηση τύπου αιώρησης περιορισμένη στο q (banana orbits) (White R. B., The theory of torodially confined plasmas).

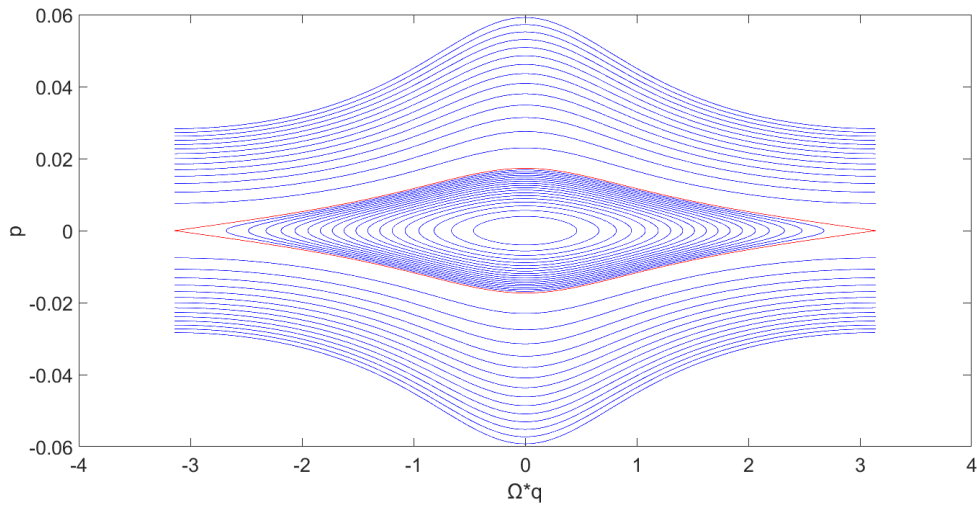
- Για τιμές των (ε, μ, r) όπου $\frac{1-\varepsilon/\mu}{r} \leq -1$, το q δεν είναι φραγμένο

$$-1 \leq \cos(\Omega q) < 1 \Rightarrow$$

$$-\frac{\pi}{\Omega} \leq q < \frac{\pi}{\Omega}$$

και τα σωματίδια εκτελούν κίνηση τύπου περιστροφής.

Στο Σχήμα 1 φαίνεται η ορμή P συνάρτηση της θέσης q όπως προκύπτει από την εξίσωση (5.2). Η κόκκινη καμπύλη είναι η διαχωρίζουσα δηλαδή το $P(q)$ όταν γίνεται η μετάβαση από rotation σε libration type, δηλαδή όταν $(1-\varepsilon/\mu)/r = -1$



Εικόνα 4: Ο φασικός χώρος για την Hamiltonian \bar{H}_{B_0} για διάφορες τιμές της ενέργειας. Με κόκκινο χρώμα φαίνεται η διαχωρίζουσα, δηλαδή η καμπύλη που προκύπτει για την τιμή της ενέργειας για την οποία έχουμε την μετάβαση από την libration type στην rotation type κίνηση. $r=0.4$, $\mu=0.001$.

Υπολογισμός του ολοκληρώματος (Gradshteyn & Ryzhik)

$$I = \pm \int \frac{d\varphi}{2\sqrt{(\varepsilon - \mu + \mu \cdot r \cos(\varphi)) \cdot (1/2 - r \cdot \cos(\varphi))}}.$$

Όπως φαίνεται οι ρίζες του παρονομαστή είναι:

$$\varphi_{1,2} = \pm \arccos\left(\frac{1 - \varepsilon / \mu}{r}\right), \quad \varphi_{3,4} = \pm \arccos\left(\frac{1}{2 \cdot r}\right).$$

Από (Gradshteyn & Ryzhik) 2580, 2. (σελ. 184) και 3152, 1. (σελ. 279): Για $x = \tan(\varphi/2)$ και παραγοντοποιώντας τον παρονομαστή ως προς x έχουμε:

$$A = \frac{\varepsilon - \mu}{2} + (3\mu/2 - \varepsilon)r - \mu r^2$$

$$C = \varepsilon - \mu - 2\mu r^2$$

$$E = \frac{\varepsilon - \mu}{2} - (3\mu/2 - \varepsilon)r - \mu r^2$$

$$I = \int_0^u \frac{dx}{\sqrt{A + Cx^2 + Ex^4}}$$

Όμως

$$a_\rho = \pm \tan\left(\frac{1}{2} \arccos(1/2r)\right) = \pm \sqrt{\frac{2r-1}{2r+1}}$$

$$c_\rho = \pm \tan\left(\frac{1}{2} \cdot \arccos\left(\frac{1-\varepsilon/\mu}{r}\right)\right) = \pm \sqrt{\frac{r-1+\varepsilon/\mu}{r+1-\varepsilon/\mu}}$$

Είναι οι ρίζες του παρονομαστή ως προς x .

Σημείωση: $\tan\left(\frac{1}{2} \cdot \arccos(x)\right) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

- για $\frac{1-\varepsilon/\mu}{r} > -1$ (libration type).

Επειδή $(1-\varepsilon/\mu)/r > -1$ και όπως βλέπουμε από την (5.1) η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει η ενέργεια είναι $\varepsilon_{max} = \mu(1-r)$, δηλαδή $\varepsilon > \mu(1-r)$, παρατηρούμε ότι $a_\rho \in Im$ και $c_\rho \in Re$. Άρα παραγοντοποιώντας τον παρονομαστή θα έχουμε:

$$I = \frac{1}{\sqrt{-E}} \int_0^u \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + a^2) \cdot (c_l^2 - x^2)}}.$$

Όπου $a = Im(a_\rho) = \sqrt{\frac{1-2r}{1+2r}}$ και $c_l = c_\rho$.

Άρα από (Gradshteyn & Ryzhik) έχουμε:

$$I = \frac{1}{\sqrt{-E}} \frac{1}{\sqrt{a^2 + c_l^2}} \cdot F(\gamma, k_l) .$$

Όπου

$$\gamma = \arcsin \frac{u}{c_l} \sqrt{\frac{a^2 + c_l^2}{a^2 + u^2}} \text{ και } F(\gamma, k) = \int_0^\gamma \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\theta)}} .$$

όμως $u = \tan(\varphi / 2)$ και $\varphi = \Omega \cdot q$ άρα

$$\gamma(q) = \arcsin \left(\frac{\tan(\Omega q / 2)}{c_l} \sqrt{\frac{a^2 + c_l^2}{a^2 + \tan^2(\Omega q / 2)}} \right) \quad (5.3)$$

Και

$$k_l = \frac{c_l}{\sqrt{a^2 + c_l^2}} \quad (5.4)$$

άρα

$$I = \frac{k_l}{c_l \sqrt{-E}} \cdot F(\gamma(q), k_l)$$

Άρα

$$\int dt = \frac{k_l}{\Omega \cdot c_l \sqrt{-E}} \cdot F(\gamma(q), k_l) \quad (5.6)$$

Ολοκληρώνοντας από $t=0$ σε κάποια τυχαία χρονική στιγμή t και από $q=0$ σε κάποιο τυχαίο $-q_1 < q < q_1$, με $q_1 = (1/\Omega) \cdot \arccos((1-\varepsilon/\mu)/r)$, υποθέτοντας ότι την στιγμή $t=0$ θα είναι $q=0$, έχουμε:

$$t = \frac{k_l}{c_l \sqrt{-E} \cdot \Omega} \cdot (F(\gamma(q), k_l) - F(\gamma(0), k_l)).$$

όμως $\gamma(0) = 0$ άρα από τον ορισμό της $F(\gamma, k)$ θα είναι $F(\gamma(0), k) = F(0, k) = 0$ άρα

$$t = \frac{k_l}{c_l \sqrt{-E} \cdot \Omega} \cdot F(\gamma(q), k_l) \quad (5.7)$$

Αντιστρέφοντας την (5.7) βρίσκουμε το $q(t)$:

$$\frac{c_l \sqrt{-E} \cdot \Omega}{k_l} \cdot t = F(\gamma(q), k_l)$$

όμως $F^{-1}(L, k) = \text{amp}(L, k)$ άρα

$$\gamma(q) = \text{amp}\left(\frac{c_l \sqrt{-E} \cdot \Omega}{k_l} \cdot t, k_l\right)$$

Από (5.3) και αντιστρέφοντας ως προς q έχουμε:

$$q_l(t) = \pm \frac{2}{\Omega} \arctan \frac{ac_l \sin\left(\text{amp}\left(\frac{c_l \sqrt{-E} \Omega}{k_l} t, k_l\right)\right)}{\sqrt{a^2 + c_l^2 - c_l^2 \sin^2\left(\text{amp}\left(\frac{c_l \sqrt{-E} \Omega}{k_l} t, k_l\right)\right)}}.$$

Το q είναι περιοδική συνάρτηση του χρόνου με περίοδο T και κινείται από την τιμή $-q_1$ έως την τιμή q_1 . Έστω ότι ,όπως υποθέσαμε και πριν, την χρονική στιγμή $t=0$ $q=0$ τότε την χρονική στιγμή $t=T/4$ το q θα έχει διανύσει το $1/4$ του διαστήματος $[-q_1, q_1]$ δηλαδή θα είναι στο $q=q_1$ (αυτό γιατί η συνάρτηση $p(q)$ είναι συμμετρική ως προς τον άξονα q άρα το q θα πηγαίνει από το $-q_1$ στο q_1 και από το q_1 στο $-q_1$ σε ίδιο χρόνο). Άρα ολοκληρώνοντας το αριστερό μέρος της (5.6) από $t=0$ έως $t=T/4$ θα ολοκληρώσουμε το δεξι της μέρος από $q=0$ έως $q=q_1$. Άρα

$$\int_0^{T/4} dt = \frac{k_l}{c_l \sqrt{-E} \cdot \Omega} \cdot (F(\gamma(q_1), k_l))$$

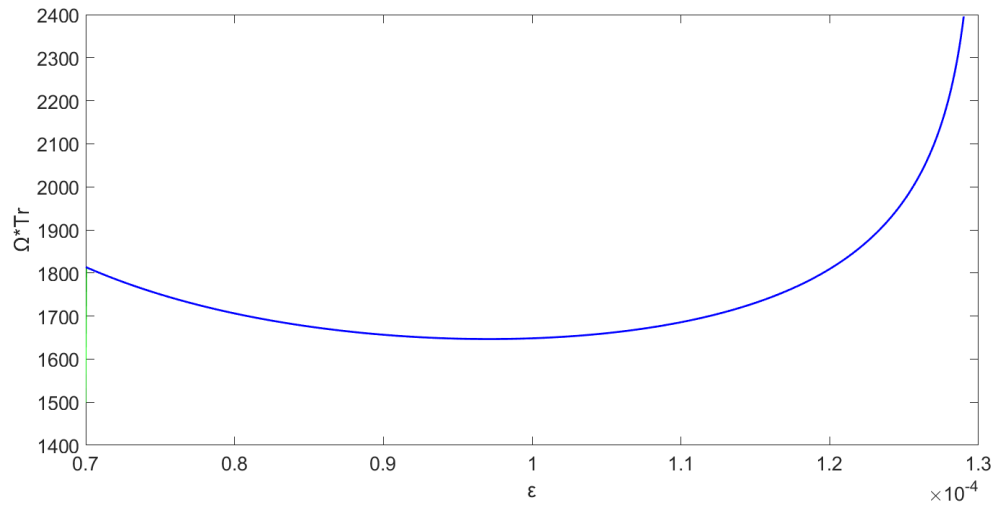
Όμως για $q=q_1$

$$\tan\left(\frac{\Omega}{2} \arccos\left(\frac{1-\varepsilon/\mu}{r}\right)/\Omega\right) = c_l$$

άρα αντικαθιστώντας την πάρα πάνω εξίσωση στην (5.3) θα έχουμε $\gamma(q_1) = \arcsin(1) = \pi/2$
 άρα

$$T_i = 4 \frac{k_l}{c_l \sqrt{-E} \cdot \Omega} \cdot \left(F\left(\frac{\pi}{2}, k_l\right) \right)$$

Στο επόμενο σχήμα (Σχήμα 2) βλέπουμε την γραφική παράσταση της προηγούμενης εξίσωσης , δηλαδή το $T_i(\varepsilon)$ για $r=0.3$ και $\mu=0.0001$.



Εικόνα 5: Η περίοδος της libration τυπε κίνησης συναρτήσει της ενέργειας που περιγράφεται από την μηδενικής τάξης Hamiltonian \bar{H}_{B_0} και δίνεται από την προηγούμενη εξίσωση για $r=0.3$ και $\mu=0.0001$.

Θεωρώ τον μετασχηματισμό σε δράσεις-γωνίες $(p, q) \leftrightarrow (J, w)$ τότε από την θεωρία έχουμε ότι $\dot{w} = \partial H_0 / \partial J = u(J)$. Από την θεωρία (Goldstein, Poole, & Safko) έχουμε ότι η $u(J)$ είναι η συχνότητα του q , άρα $1/u(J) = \partial J / \partial H_0 = T$. Επίσης έχουμε υποθέσει ότι $H_0 = \varepsilon$ άρα

$$\frac{\partial J}{\partial \varepsilon} = T(\varepsilon)$$

Άρα

$$J_l(\varepsilon) = \int T_l(k_l(\varepsilon)) d\varepsilon = \frac{4}{\Omega} \int F\left(\frac{\pi}{2}, k_l(\varepsilon)\right) \cdot \frac{k_l(\varepsilon)}{c_l(\varepsilon)\sqrt{-E(\varepsilon)}} \cdot d\varepsilon \quad (5.8)$$

- για $\frac{1-\varepsilon/\mu}{r} \leq -1$ (rotation type)

Επειδή $(1 - \varepsilon / \mu) / r < -1$ και όπως είπαμε πριν $\varepsilon > \mu(1 - r)$ παρατηρούμε ότι $a_\rho \in Im$ και $c_\rho \in Im$. Άρα παραγοντοποιώντας τον παρονομαστή θα έχουμε:

$$I = \frac{1}{\sqrt{E}} \int_0^u \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + a^2) \cdot (x^2 + c_r^2)}}$$

$$\text{Όπου } a = Im(a_\rho) = \sqrt{\frac{1-2r}{1+2r}} \text{ και } c_r = Im(c_\rho) = \sqrt{\frac{r-1+\varepsilon/\mu}{-r-1+\varepsilon/\mu}}.$$

Άρα από (Gradshteyn & Ryzhik) 3152, 1. (σελ. 279) και επειδή $c_r > a$ έχουμε:

$$I = \frac{1}{\sqrt{E}c_r} \cdot F(\alpha, k_r)$$

Όπου

$$\alpha = \arctan(u / a)$$

όμως $u = \tan(\varphi / 2)$ και $\varphi = \Omega \cdot q$ άρα

$$\alpha = \arctan\left(\frac{\tan(\Omega \cdot q / 2)}{a}\right) \tag{5.9}$$

Και

$$k_r = \frac{\sqrt{c_r^2 - a^2}}{c_r} \tag{5.10}$$

Άρα

$$\int dt = \frac{1}{\Omega c_r \cdot \sqrt{E}} \cdot F(\alpha(q), k_r) \quad (5.11)$$

Ολοκληρώνοντας από $t=0$ σε κάποια τυχαία χρονική στιγμή t και από $q=0$ σε κάποιο τυχαίο $\pi < q < \pi$, υποθέτοντας ότι την στιγμή $t=0$ το είναι $q=0$, έχουμε:

$$t = \frac{1}{\Omega c_r \cdot \sqrt{E}} \cdot (F(\alpha(q), k_r) - F(\alpha(0), k_r))$$

όμως $\alpha(0)=0$ και $F(0, k_r)=0$ άρα

$$t = \frac{1}{\Omega c_r \cdot \sqrt{E}} \cdot F(\alpha(q), k_r) \quad (5.12)$$

Αντιστρέφοντας την (5.12) βρίσκουμε το $q(t)$:

$$\Omega c_r \sqrt{E} t = F(\alpha(q), k_r)$$

όμως $F^{-1}(L, k) = \text{amp}(L, k)$ άρα

$$\alpha(q) = \text{amp}(\Omega c_r \sqrt{E} \cdot t, k_r)$$

Από (5.9)

$$\frac{\tan(\Omega \cdot q / 2)}{a} = \tan(\text{amp}(\Omega c_r \sqrt{E} \cdot t, k_r))$$

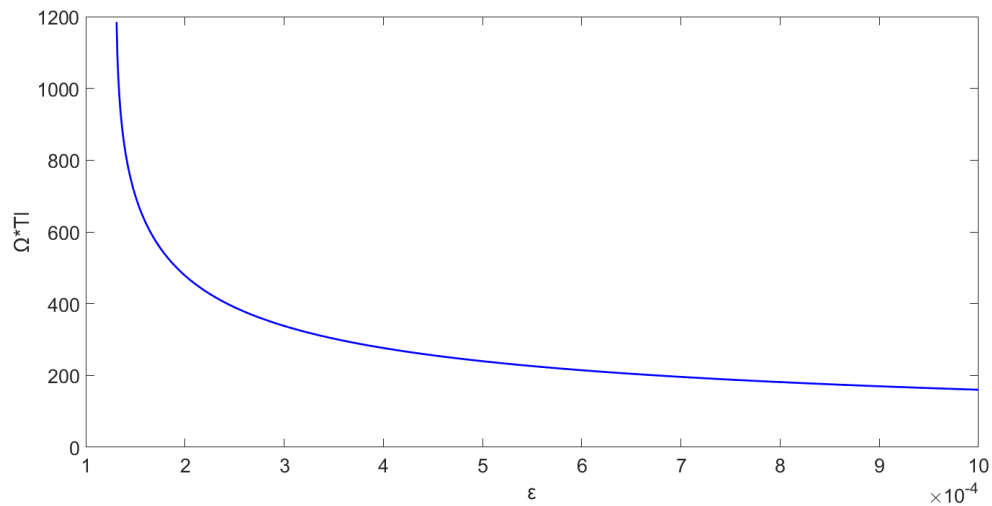
$$\Rightarrow q_r = \frac{2}{\Omega} \cdot \arctan\left(a \cdot \tan(\text{amp}(\Omega c_r \sqrt{E} \cdot t, k_r))\right)$$

Όμοια με το libration type αλλά το q θα κινείται στο $[-\pi/\Omega, \pi/\Omega]$ και η ολοκλήρωση θα γίνει από 0 έως $T/2$, αφού θα ολοκληρώσουμε μόνο στην πάνω τροχιά αφού αυτή είναι κλειστή, άρα για $q = \pi/\Omega$ από (5.9) θα έχουμε $\alpha = \pi/2$ άρα:

$$\int_0^{T/2} dt = \frac{1}{\Omega c_r \cdot \sqrt{E}} \cdot F\left(\frac{\pi}{2}, k_r\right)$$

$$\Rightarrow T_r = 2 \frac{1}{\Omega c_r \cdot \sqrt{E}} \cdot F\left(\frac{\pi}{2}, k_r\right).$$

Στο επόμενο σχήμα (Σχήμα 2) βλέπουμε την γραφική παράσταση της προηγούμενης εξίσωσης, δηλαδή το $T_r(\varepsilon)$ για $r=0.3$ και $\mu=0.0001$.



Εικόνα 6: Η περίοδος της rotation type κίνησης συναρτήσει της ενέργειας που περιγράφεται από την μηδενικής τάξης Hamiltonian \bar{H}_{B_0} και δίνεται από την προηγούμενη εξίσωση για $r=0.3$ και $\mu=0.0001$.

Όμοια με πριν

$$J_r(\varepsilon) = \int T_r(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{4}{\Omega} \int \frac{1}{c_r(\varepsilon)\sqrt{E(\varepsilon)}} F\left(\frac{\pi}{2}, k_r(\varepsilon)\right) d\varepsilon \quad (5.13)$$

5.1β Για την Hamiltonian \bar{H}_A

Όπως είπαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο η Hamiltonian \bar{H}_A σε zero orbit width είναι ίδια με την Hamiltonian του εκκρεμούς και είναι της μορφής

$$\bar{H}_A(\bar{P}_\theta = 0) = \frac{p^2}{2} + \mu - \mu r \cos(\Omega \cdot q) \quad (5.1')$$

Για την τον υπολογισμό της περιόδου της κίνησης που περιγράφει αυτή η Hamiltonian δουλεύουμε όπως και στα προηγούμενα για την \bar{H}_B και χρησιμοποιούμε τον γνωστό μετασχηματισμό σε δράσεις-γωνίες για το εκκρεμές. Έτσι προκύπτει

- για $\frac{1-\varepsilon/\mu}{r} > -1$ (libration type).

$$q_l(t, \varepsilon) = \frac{2}{\Omega} \arcsin \left(\sqrt{\frac{\varepsilon - \mu + \mu r}{2\mu r}} \cdot \text{sn}(\Omega \sqrt{\mu r} \cdot t, k_l) \right)$$

Και

$$T_l(\varepsilon) = \frac{4}{\Omega \sqrt{\mu r}} \cdot K(k_l)$$

Όπου $K(k_l) = F\left(\frac{\pi}{2}, k_l\right)$, όπου $F(\phi, k)$ είναι το ελλειπτικό ολοκλήρωμα δεύτερου είδους και

$\text{sn}(u, k)$ είναι Ιακωβιανή ελλειπτική συνάρτηση. Επίσης $k_l = \sqrt{\varepsilon - \mu + \mu r} / \sqrt{2\mu r}$.

- για $\frac{1-\varepsilon/\mu}{r} \leq -1$ (rotation type)

$$q_r = \frac{2}{\Omega} \arcsin \left(\operatorname{sn} \left(\frac{\Omega \sqrt{\varepsilon - \mu + \mu r}}{\sqrt{2}} \cdot t, k_r \right) \right)$$

Και

$$T_r = \frac{2\sqrt{2}}{\Omega \sqrt{\varepsilon - \mu + \mu r}} \cdot K(k_r)$$

Όπου $k_r = \sqrt{2\mu r} / \sqrt{\varepsilon - \mu + \mu r}$.

5.2 Υπολογισμός της δράσης (J) από τον ορισμό της

Για την Hamiltonian \bar{H}_B

Από την θεωρία έχουμε ότι $J = \oint_q p \cdot dq$ άρα παίρνοντας το $p(q)$ από την (5.2) και επειδή $\cos(\Omega \cdot q) = \cos(-\Omega \cdot q)$, δηλαδή έχουμε συμμετρία και ως προς τον άξονα του q και ως προς τον άξονα του p , θα είναι (Goldstein, Poole, & Safko)

Για libration type

$$\begin{aligned} J &= \int_{-q_1}^{q_1} p dq + \int_{q_1}^{-q_1} -p dq = 2 \int_{-q_1}^{q_1} p dq \\ &= 4 \int_0^{q_1} p dq \end{aligned}$$

$$\text{Με } q_1 = (1/\Omega) \cdot \arccos((1 - \varepsilon/\mu)/r)$$

Για rotation type

$$J = \int_{-q_1}^{q_1} p dq = 2 \int_0^{q_1} p dq$$

$$\text{Με } q_1 = \pi/\Omega$$

Άρα από (5.2), για libration type

$$J = 4 \int_0^{q_1} \sqrt{\frac{\varepsilon - \mu + \mu \cdot r \cos(\Omega \cdot q)}{1/2 - r \cdot \cos(\Omega \cdot q)}} dq \quad (5.14)$$

$$\text{Με } q_1 = (1/\Omega) \cdot \arccos((1 - \varepsilon/\mu)/r)$$

Και για rotation type

$$J = 2 \int_0^{q_1} \sqrt{\frac{\varepsilon - \mu + \mu \cdot r \cos(\Omega \cdot q)}{1/2 - r \cdot \cos(\Omega \cdot q)}} dq$$

$$\text{Με } q_1 = \pi/\Omega$$

Για τον υπολογισμό του $I = \int \sqrt{\frac{a + b \cos(x)}{1 - r \cos(x)}} .$

Χρησιμοποιώντας το Maple το I προκύπτει

$$I = \frac{2(-1 + \cos x)(\cos x + 1)^2 \sqrt{\frac{-(a + b \cos x)(-1 + r \cos x)(a + b \cos x)}{(r-1)(a+b)(-1+r \cos x)(\cos x + 1)^2}}}{k_1(a + b \cos x) \sin^2 x} \quad (5.15)$$

$$\cdot (a-b)F\left(\frac{k_1(-1 + \cos(x))}{\sin(x)}, \frac{1}{k_1} \cdot \sqrt{\frac{r+1}{r-1}}\right)$$

$$+ 2b\Pi\left(\frac{k_1(-1 + \cos(x))}{\sin(x)}, \frac{a+b}{a-b}, \frac{1}{k_1} \cdot \sqrt{\frac{r+1}{r-1}}\right)$$

Όπου $k_1 = \sqrt{\frac{-(a-b)}{a+b}}$ και $\Pi(\varphi, n, k) = \int_0^\varphi \frac{d\alpha}{(1-n \sin^2 \alpha) \sqrt{1-k^2 \sin^2 \alpha}}$.

- για $\frac{1-\varepsilon/\mu}{r} > -1$ (libration type).

Θα υπολογίσουμε το I από το 0 μέχρι την ρίζα του αριθμητή του, δηλαδή μέχρι το $x_1 = \arccos(-a/b)$, με $x_1 > 0$. Άρα

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} I(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1 + \cos x}{\sin^2 x} \cdot f(x) = f(0) \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin x}{2 \sin x \cos x} = f(0) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\cos x}{-2 \sin^2 x + 2 \cos^2 x}$$

$$= -\frac{1}{2} f(0)$$

Επίσης

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1 + \cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin x}{\cos x} = 0.$$

Άρα από (5.10) και επειδή $F(0, k) = 0$ και $\Pi(0, n, k) = 0$ θα είναι $f(0) = 0$. Άρα

$$I(0) = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow \arccos(-a/b)^-} \frac{\sqrt{-(a+b\cos x)^2}}{a+b\cos x} \cdot g(x) = \sqrt{-1} \cdot g(\arccos(-a/b))$$

γιατί αφού το x τείνει στο x_1 από αριστερά το $\cos x$ θα τείνει στο $-a/b$ από τιμές μεγαλύτερες του $-a/b$ άρα το $a+b\cos x$ θα μηδενίζεται από θετικές τιμές. Άρα

$$\begin{aligned} I(x_1) &= \sqrt{-1} \cdot g(x_1) \\ &= -\frac{2}{k_1} \sqrt{-\frac{1}{(r-1)(a+b)}} \left((a-b)F\left(-1, \frac{1}{k_1} \cdot \sqrt{\frac{r+1}{r-1}}\right) + 2b\Pi\left(-1, \frac{a+b}{a-b}, \frac{1}{k_1} \cdot \sqrt{\frac{r+1}{r-1}}\right) \right) \end{aligned} \quad (5.16)$$

■

Για $a = 2(\varepsilon - \mu)$, $b = 2\mu r$, $r = 2r$ και για $\Omega q = x$ από (5.14) έχουμε

$$\begin{aligned} J &= \frac{4}{\Omega} \cdot \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{a+b\cos(x)}{1-r\cos(x)}} = \frac{4}{\Omega} \cdot I(x_1) \Rightarrow \\ J_1(\varepsilon) &= -\frac{4}{\Omega} \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{\varepsilon - \mu - \mu r}} \sqrt{\frac{1}{(2r-1)}} \cdot \\ &\cdot \left((2(\varepsilon - \mu - \mu r))F\left(-\frac{\pi}{2}, \sqrt{\frac{\varepsilon - \mu + \mu r}{\varepsilon - \mu - \mu r}} \sqrt{\frac{2r+1}{2r-1}}\right) \right. \\ &\left. + 4\mu r \Pi\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\varepsilon - \mu + \mu r}{\varepsilon - \mu - \mu r}, \sqrt{\frac{\varepsilon - \mu + \mu r}{\varepsilon - \mu - \mu r}} \sqrt{\frac{2r+1}{2r-1}}\right) \right) \end{aligned} \quad (5.17)$$

- για $\frac{1-\varepsilon/\mu}{r} \leq -1$ (rotation type)

Θα υπολογίσω το I από το 0 μέχρι το $x = \pi/2$. Άρα όμοια με πριν $I(0) = 0$ και για $x = \pi/2$ προκύπτει :

$$I\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{\sqrt{(1-2r)(b-a)}} \cdot$$

$$\left((a-b) \cdot F\left(\arcsin\left(-\sqrt{\frac{b-a}{b+a}}\right), \sqrt{\frac{(a+b)(2r+1)}{(b-a)(2r-1)}}\right) \right.$$

$$\left. + 2b\Pi\left(\arcsin\left(-\sqrt{\frac{b-a}{b+a}}\right), \frac{a+b}{a-b}, \sqrt{\frac{(a+b)(2r+1)}{(b-a)(2r-1)}}\right) \right)$$
(5.18)

Από το Wolfram παίρνουμε μια ισοδύναμη μορφή του I την I' :

$$I' = 4 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \csc(x)(a+b)r \cdot$$

$$\sqrt{\frac{(r-1) \cot^2\left(\frac{x}{2}\right)(a+b \cos(x))(a+b) \csc^2\left(\frac{x}{2}\right)(r \cos(x)-1)}{(r+1)(1-r \cos(x))(r-1) \csc^2\left(\frac{x}{2}\right)(a+b \cos(x))}}$$

$$\left(r(a+b)F\left(\arcsin\left[\sqrt{-\frac{(a+b)(r \cos(x)-1) \csc^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2(b+ar)}}\right], \sqrt{\frac{2(b+ar)}{(a+b)(r+1)}}\right) - \right.$$

$$\left. b(r-1)\Pi\left(\arcsin\left[\sqrt{-\frac{(a+b)(r \cos(x)-1) \csc^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2(b+ar)}}\right], \frac{b+ar}{ar+br}, \sqrt{\frac{2(b+ar)}{(a+b)(r+1)}}\right) \right)$$
(5.19)

Άρα

$$I' \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{2}{2r\sqrt{(a+b)(2r+1)}}.$$

$$\begin{aligned} & (2r(a+b)F \left(\arcsin \left(\sqrt{\frac{a+b}{b+2ar}} \right), \sqrt{\frac{2(b+2ar)}{(a+b)(2r+1)}} \right) - \\ & b(2r-1)\Pi \left(\arcsin \left(\sqrt{\frac{a+b}{b+2ar}} \right), \frac{b+2ar}{2r(a+b)}, \sqrt{\frac{2(b+2ar)}{(a+b)(2r+1)}} \right) \end{aligned} \quad (5.20)$$

Και

$$I' (\pi) = \frac{2}{2r\sqrt{(a+b)(2r+1)}}.$$

$$\begin{aligned} & (2r(a+b)F \left(\arcsin \left(\sqrt{\frac{(a+b)(2r+1)}{2(b+2ar)}} \right), \sqrt{\frac{2(b+2ar)}{(a+b)(2r+1)}} \right) - \\ & b(2r-1)\Pi \left(\arcsin \left(\sqrt{\frac{(a+b)(2r+1)}{2(b+2ar)}} \right), \frac{b+2ar}{2r(a+b)}, \sqrt{\frac{2(b+2ar)}{(a+b)(2r+1)}} \right) \end{aligned} \quad (5.21)$$

Όμως

$$I \left(\frac{\pi}{2} \right) = I' \left(\frac{\pi}{2} \right) - I' (0) \Rightarrow I' (0) = I' \left(\frac{\pi}{2} \right) - I \left(\frac{\pi}{2} \right) \quad (5.22)$$

Αφού έχουμε rotation type δηλαδή τα όρια της κίνησης, όπως δείξαμε πάρα πάνω, είναι $-(\pi/\Omega) \leq q < (\pi/\Omega)$ πρέπει να υπολογίσουμε το I από 0 μέχρι π . Χρησιμοποιώντας την ισοδύναμη για το I έκφραση I' έχουμε ότι το I από 0 μέχρι π θα είναι $I = I'(\pi) - I'(0)$. Από (5.22) παίρνουμε ότι

$$I = I'(\pi) - I' \left(\frac{\pi}{2} \right) + I \left(\frac{\pi}{2} \right) \quad (5.23)$$



Από (5.14) για rotation type έχουμε $q_1 = \pi / \Omega$ και για $a = 2(\varepsilon - \mu)$, $b = 2\mu r$, $r = 2r$ και για $\Omega q = x$ έχουμε:

$$J_r(\varepsilon) = \frac{4}{\Omega} \int_0^\pi \sqrt{\frac{a + b \cos(x)}{1 - r \cos(x)}} = \frac{4}{\Omega} \cdot I(\varepsilon)$$

όπου το $I(\varepsilon)$ δίνεται από την (5.23).

5.3 Αποτελέσματα για τις μηδενικού εύρους τροχιάς (zow) Hamiltonians \bar{H}_A και \bar{H}_B

Για τις τιμές της ενέργειας και του μαγνητικού πεδίου που χρησιμοποιούμε στην πραγματικότητα για να πετύχουμε σύντηξη προκύπτει ότι η ακτίνα Larmor που δίνεται από την έκφραση $\rho_L = w / B$, για μοναδιαία μάζα και μοναδιαίο φορτίο, όπου w είναι η κάθετη ταχύτητα στο μαγνητικό πεδίο, για τα σωματίδια άλφα για παράδειγμα είναι περίπου $\rho_L = 0.03m$. Επίσης η μικρή ακτίνα r μιας διάταξης tokamak είναι της τάξεως $r_0 = 0.5m$. Από αυτά τα δύο μεγέθη φαίνεται ότι $\rho_L < r_0 / 10$, αυτό φαίνεται και θεωρητικά για όλα τα σωματίδια από τις προσεγγίσεις που έχουμε κάνει στο κεφάλαιο 3 για την κίνηση του guiding center αφού όπως έχουμε θεωρήσει $w \ll 1$. Όπως είπαμε στο κεφάλαιο 3 έχουμε $\rho_{||} = u_{||} / B$ και $\mu = w^2 / 2B$. Από την (4.2) έχουμε ότι $P_\theta = \psi$ και έχουμε δείξει ότι $\psi = r^2 / 2$. Η μεταβλητή ψ σε ένα πραγματικό σύστημα, για παράδειγμα σε μια διάταξη tokamak, θα παίρνει τιμές από μηδέν μέχρι την μέγιστη τιμή της το ψ_{wall} , επομένως και για το P_θ θα ισχύει

$$0 < P_\theta < \psi_{wall} \tag{5.24}$$

Επίσης από τις πάρα πάνω σχέσεις παίρνουμε ότι

$$\mu = \frac{B}{2} \rho_L^2$$

Επομένως και

$$\rho_L < \frac{r_0}{10} \Rightarrow \rho_L^2 < \frac{r_0^2}{100} \Rightarrow \mu < \frac{BP_\theta}{100}$$

Και χρησιμοποιώντας την (7.1.1) παίρνουμε

$$0 < \mu < \frac{BP_{\theta,max}}{100} \quad (5.25)$$

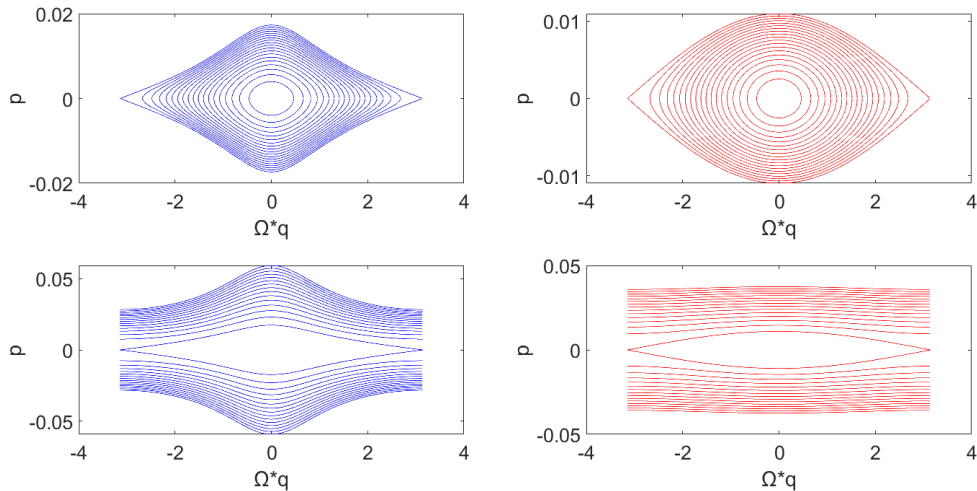
Από την (5.24) και την (5.25) παρατηρούμε ότι αν $r_0 = 0.4m$ και έχουμε και ένα μαγνητικό πεδίο $B = 2T$ τότε το μ θα είναι:

$$0 < \mu < \frac{0.4^2}{2 \cdot 50} \Rightarrow 0 < \mu < 0.0016 \quad (5.26)$$

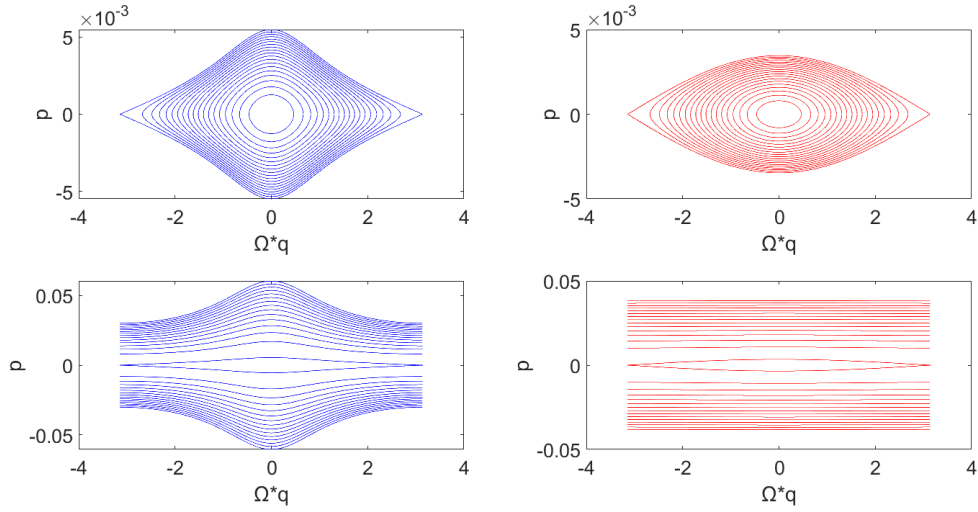
Επίσης από την (4.4) και από την δεύτερη εξίσωση του κανονικού μετασχηματισμού (4.11) βλέπουμε ότι $\rho_{//} = \overline{P_\zeta}$. Επίσης όπως έχουμε συμβολίσει $\overline{P_\zeta} = p$. Επομένως βλέπουμε ότι η κανονική ορμή p και η κανονική ορμή μ στην Hamiltonian (5.1), που όπως έχουμε δείξει είναι σταθερά της κίνησης, είναι τάξης $\rho_{//}$ και ρ_L^2 αντίστοιχα, δηλαδή η ορμή p εξαρτάται από την παράλληλη στο μαγνητικό πεδίο ταχύτητα του σωματιδίου και η μ από το τετράγωνο της κάθετης στο μαγνητικό πεδίο ταχύτητας του σωματιδίου.

Στο κεφάλαιο 4 είδαμε ότι για την κίνηση του guiding center σε αξονοσυμμετρικό μαγνητικό πεδίο ισορροπίας με την προσέγγιση large aspect ratio μπορούμε να πάρουμε δύο διαφορετικές προσεγγίσεις της Hamiltonian (4.1) που περιγράφει την κίνησή του σε αυτό το σύστημα, την H_A που δίνεται από την (4.7) και την H_B που δίνεται από (4.8). Η (4.7) και η (4.8) είναι δύο διαφορετικές προσεγγίσεις της Hamiltonian (4.1), η οποία όπως έχουμε πει είναι η ενέργεια του συστήματος. Άρα εφόσον η (4.7) και η (4.8) πρέπει θεωρητικά να προσεγγίζουν την (4.1) μπορούμε να πούμε ότι και οι δύο παίρνουν τις ίδιες τιμές ενέργειας η οποία πρέπει να προσεγγίζει την (4.1). Επομένως θεωρώντας πως παίρνουν ίδιες τιμές ενέργειας μπορούμε να τις συγκρίνουμε μεταξύ τους. Αρχικά θα κάνουμε την σύγκριση στον φασικό χώρο

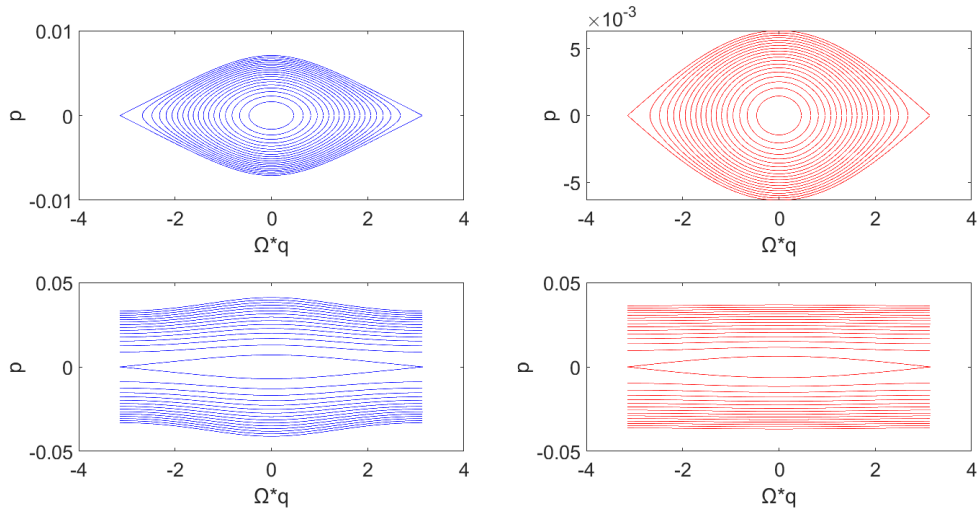
Από την ανάλυση που έχουμε κάνει στο κεφάλαιο (5.1) παρατηρούμε ότι η θέση q κινείται στα ίδια όρια και για τις δυο Hamiltonian. Στο επόμενο σχήμα, φαίνεται η ορμή p συνάρτηση της θέσης q όπως προκύπτει από την εξίσωση (5.2), δηλαδή ο φασικός χώρος για την $\bar{H}_{B_0}(q, p)$ για rotation και libration κίνηση με μπλε χρώμα, και την (5.1'), δηλαδή ο φασικός χώρος για την $\bar{H}_{A_0}(q, p)$ για rotation και libration κίνηση με κόκκινο χρώμα. Στα σχήματα στην δεύτερη σειρά βλέπουμε και την διαχωρίζουσα δηλαδή το $p(q)$ όταν γίνεται η μετάβαση από rotation σε libration type, δηλαδή όταν $(1 - \varepsilon / \mu) / r = -1$. Από το σχήμα παρατηρούμε ότι υπάρχει αρκετή διαφορά στους δύο φασικούς χώρους για τις ίδιες τιμές ενέργειας, η οποία διαφορά όπως είναι λογικό αυξάνεται όταν αυξάνεται το r αυτό σημαίνει ότι θα έχουμε και διαφορά στην περίοδο της κίνησης που περιγράφεται από την $\bar{H}_{A_0}(q, p)$ και την $\bar{H}_{B_0}(q, p)$, όπως θα δούμε στην συνέχεια. Τα πάρα κάτω σχήματα είναι για τους συνδυασμούς των τιμών $r = 0.3, \mu = 0.0001$, $r = 0.1, \mu = 0.00001$, δηλαδή για μια τιμές του μ που είναι μέσα στα όρια που δίνονται από την σχέση (5.25) και για τις δύο τιμές του r .



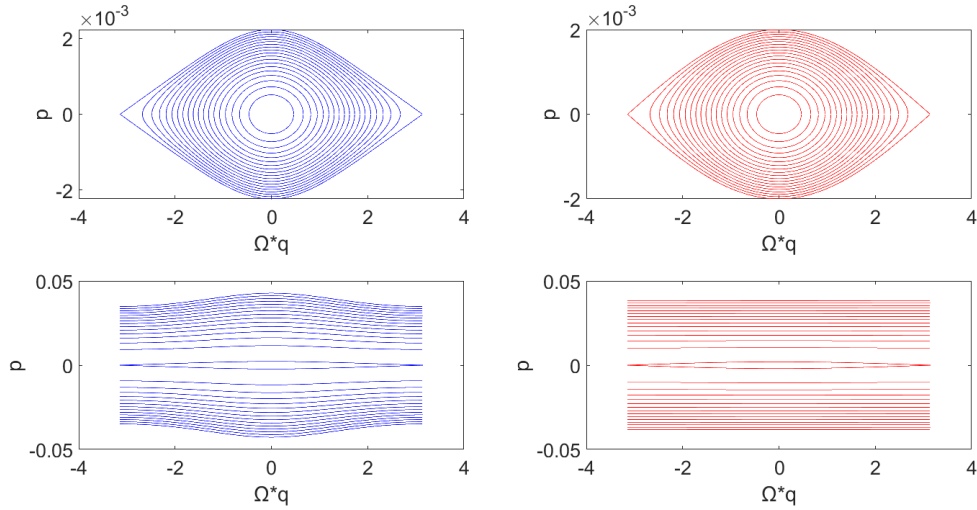
Εικόνα 7: Πάνω οι φασικοί χώροι για την $\bar{H}_{B_0}(q, p)$ αριστερά και για την $\bar{H}_{A_0}(q, p)$ δεξιά, για libration type κίνηση. Κάτω οι φασικοί χώροι για την $\bar{H}_{B_0}(q, p)$ αριστερά και για την $\bar{H}_{A_0}(q, p)$ δεξιά, για rotation type κίνηση. $r=0.3$ και $\mu=0.0001$.



Εικόνα 8: Πάνω οι φασικοί χώροι για την $\bar{H}_{B_0}(q, p)$ αριστερά και για την $\bar{H}_{A_0}(q, p)$ δεξιά, για libration type κίνηση. Κάτω οι φασικοί χώροι για την $\bar{H}_{B_0}(q, p)$ αριστερά και για την $\bar{H}_{A_0}(q, p)$ δεξιά, για rotation type κίνηση. $r=0.3$ και $\mu=0.00001$.

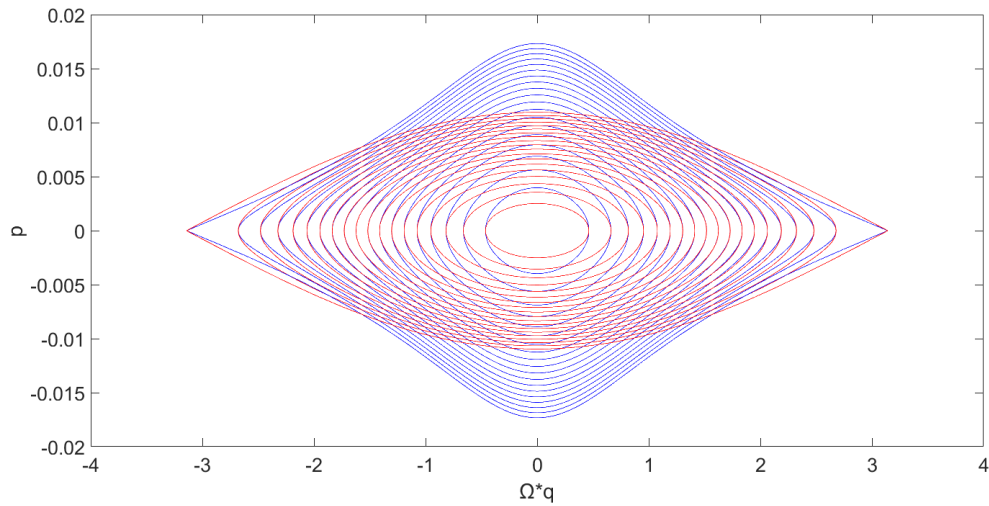


Εικόνα 9: Πάνω οι φασικοί χώροι για την $\bar{H}_{B_0}(q, p)$ αριστερά και για την $\bar{H}_{A_0}(q, p)$ δεξιά, για libration type κίνηση. Κάτω οι φασικοί χώροι για την $\bar{H}_{B_0}(q, p)$ αριστερά και για την $\bar{H}_{A_0}(q, p)$ δεξιά, για rotation type κίνηση. $r=0.1$ και $\mu=0.0001$.



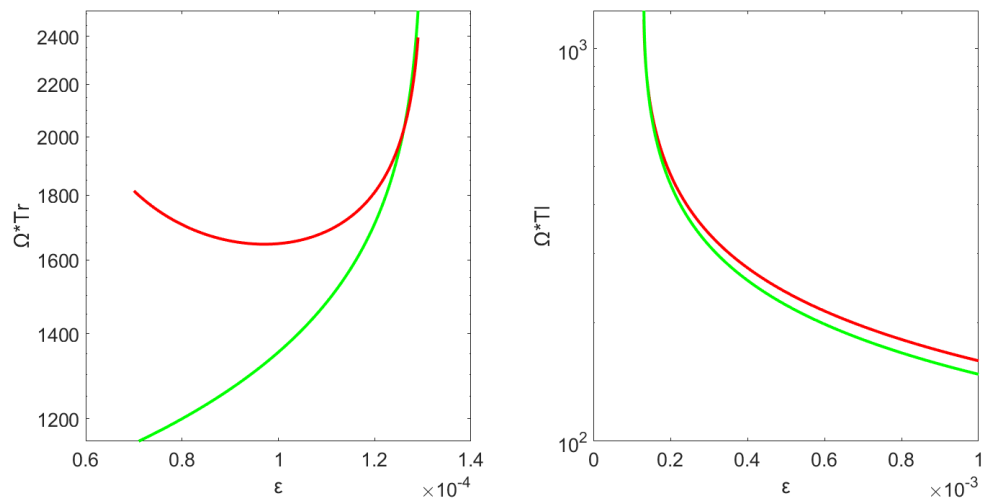
Εικόνα 10: Πάνω οι φασικοί χώροι για την $\bar{H}_{B_0}(q, p)$ αριστερά και για την $\bar{H}_{A_0}(q, p)$ δεξιά, για libration type κίνηση. Κάτω οι φασικοί χώροι για την $\bar{H}_{B_0}(q, p)$ αριστερά και για την $\bar{H}_{A_0}(q, p)$ δεξιά, για rotation type κίνηση. $r=0.1$ και $\mu=0.00001$.

Από τις εξισώσεις (5.1) και (5.1') παρατηρούμε, από τους συντελεστές του $\cos(\Omega q)$, ότι όταν $p^2 \ll \mu$ τότε το $p^2 + \mu$ είναι περίπου ίσο με το μ . Άρα σε αυτήν την περίπτωση μπορούμε να πούμε ότι η $\bar{H}_{A_0}(q, p)$ είναι περίπου ίση με την $\bar{H}_{B_0}(q, p)$, άρα σε αυτήν την περίπτωση θα μπορούσαμε για την ανάλυση μας να χρησιμοποιήσουμε την $\bar{H}_{A_0}(q, p)$ που είναι πιο εύκολο να την επεξεργαστούμε. Ωστόσο όπως φαίνεται και στους πάρα κάτω φασικούς χώρους μόνο για μικρές τιμές του p , δηλαδή στα όρια της libration κίνησης έχουμε μια τοπική ταύτιση ανάμεσα στις δύο καμπύλες. Επομένως δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την $\bar{H}_{A_0}(q, p)$. Αυτό θα φανεί και στην συνέχεια με την διαφορά που υπάρχει στην συχνότητες της κίνησης που προκύπτουν από την $\bar{H}_{A_0}(q, p)$ και την $\bar{H}_{B_0}(q, p)$.

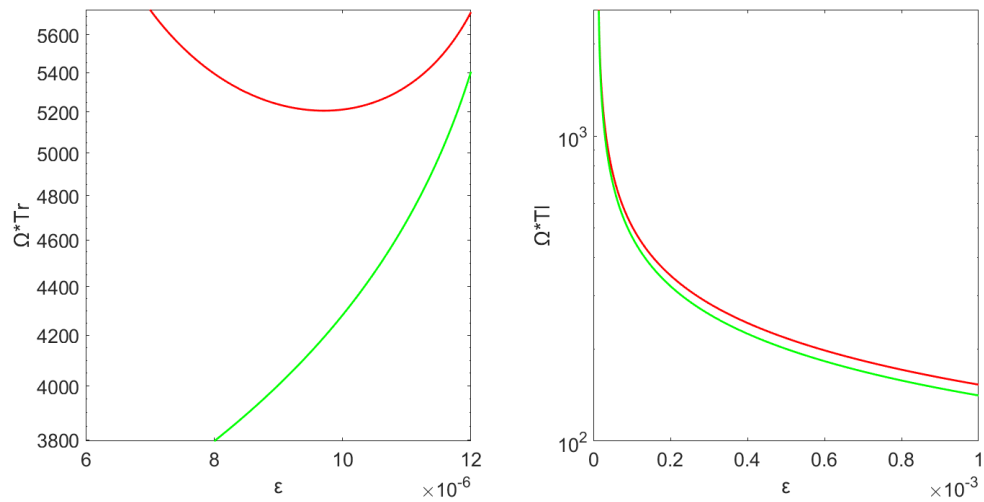


Εικόνα 11: Οι φασικοί χώροι για την $\bar{H}_{A_0}(q, p)$, με κόκκινο χρώμα και για την $\bar{H}_{B_0}(q, p)$ με μπλε χρώμα για την libration type κίνηση, όπου παρατηρούμε ότι για πολύ μικρές τιμές της ορμής (p), δηλαδή στα άκρα οι δύο φασικοί χώροι ταυτίζονται τοπικά. $r=0.3$ και $\mu=0.0001$.

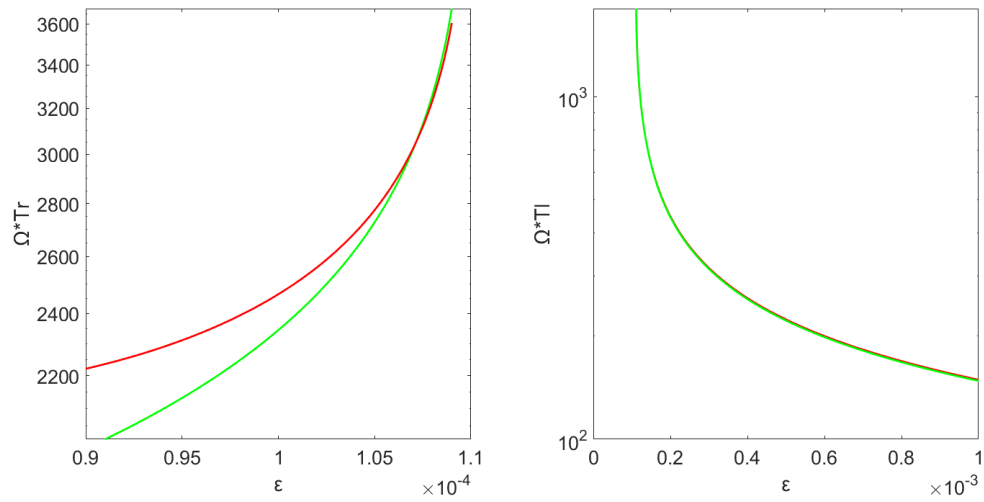
Στην συνέχεια με το mat lab φτιάχνουμε τις γραφικές παραστάσεις της περιόδου της θέσης q συναρτήσει της ενέργειας για την $\bar{H}_{A_0}(q, p)$, με πράσινο χρώμα, για rotation και libration κίνηση και για τις τιμές των r και μ που φτιάξαμε τους πάρα πάνω φασικούς χώρους και τις συγκρίνουμε με τις αναλυτικές καμπύλες που παίρνουμε για την περίοδο συναρτήσει της ενέργειας για την $\bar{H}_{B_0}(q, p)$, με κόκκινο χρώμα, που έχουμε υπολογίσει στο κεφάλαιο 5.



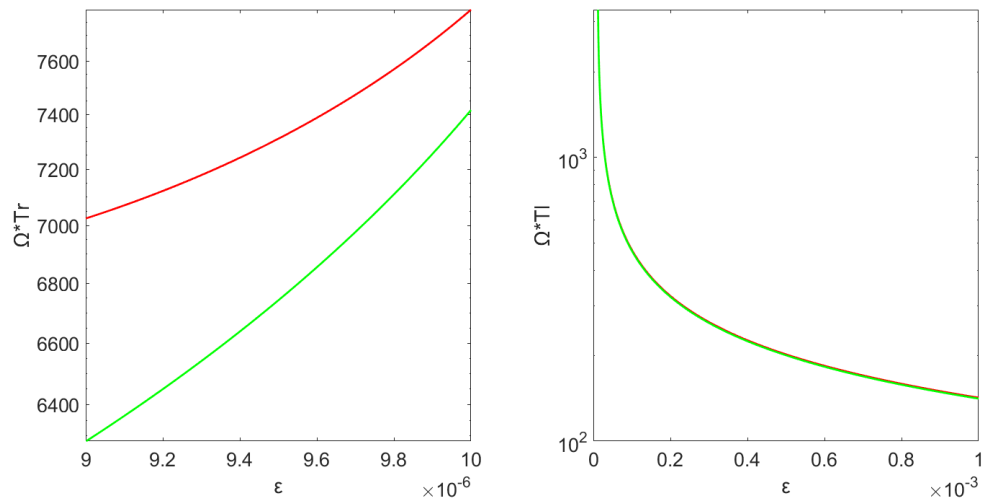
Εικόνα 12: Αριστερά η περίοδος της κίνησης που περιγράφει η Hamiltonian $\bar{H}_{A_0}(q, p)$, με πράσινο χρώμα και η $\bar{H}_{B_0}(q, p)$ με κόκκινο χρώμα για την libration type κίνηση και δεξιά το αντίστοιχο για την rotation type κίνηση. $r=0.3$ και $\mu=0.0001$.



Εικόνα 13: Αριστερά η περίοδος της κίνησης που περιγράφει η Hamiltonian $\bar{H}_{A_0}(q, p)$, με πράσινο χρώμα και η $\bar{H}_{B_0}(q, p)$ με κόκκινο χρώμα για την libration type κίνηση και δεξιά το αντίστοιχο για την rotation type κίνηση. $r=0.3$ και $\mu=0.00001$.



Εικόνα 14: Αριστερά η περίοδος της κίνησης που περιγράφει η Hamiltonian $\bar{H}_{A_0}(q, p)$, με πράσινο χρώμα και η $\bar{H}_{B_0}(q, p)$ με κόκκινο χρώμα για την libration type κίνηση και δεξιά το αντίστοιχο για την rotation type κίνηση. $r=0.1$ και $\mu=0.0001$.



Εικόνα 15: Αριστερά η περίοδος της κίνησης που περιγράφει η Hamiltonian $\bar{H}_{A_0}(q, p)$, με πράσινο χρώμα και η $\bar{H}_{B_0}(q, p)$ με κόκκινο χρώμα για την libration type κίνηση και δεξιά το αντίστοιχο για την rotation type κίνηση. $r=0.1$ και $\mu=0.00001$.

Παρατηρούμε ότι υπάρχει διαφορά για της δύο περιόδους η οποία ,όπως είναι λογικό ,αυξάνεται όταν αυξάνεται το r , αφού όπως έχουμε πει στο κεφάλαιο 4 η $\bar{H}_B(q, p)$ είναι καλύτερη προσέγγιση από την $\bar{H}_A(q, p)$ αφού έχουμε κρατήσει έναν επιπλέον όρο με συντελεστή το r .

Κεφάλαιο 6

Εφαρμογή της κανονικής θεωρίας διαταραχών

6.1 Υπολογισμός της συχνότητας τάξης ένα για τις Hamiltonians \bar{H}_A και \bar{H}_B

Σημείωση: Τις ποσότητες T_r, T_l, J_r, J_l που υπολογίστηκαν πάρα πάνω θα τις συμβολίζουμε στην συνέχεια με $T_{r_0}, T_{l_0}, J_{r_0}, J_{l_0}$ αφού αφορούν την Hamiltonian τάξης μηδέν.

6.1α Για την Hamiltonian \bar{H}_B

Όπως είπαμε στο κεφάλαιο 4 η Hamiltonian του συστήματος που δίνεται από την (4.8) γράφεται από την (4.15) ως:

$$\bar{H}_B(\bar{\theta}, \bar{\zeta}, \bar{\xi}, \bar{P}_\theta, \bar{P}_\zeta, \bar{\mu}) = \bar{H}_B(\bar{P}_\theta = 0) + \bar{H}_{B1}(\bar{\zeta}, \bar{P}_\zeta) \cdot \bar{P}_\theta$$

Στο προηγούμενο κεφάλαιο για την \bar{H}_{B_0} υπολογίσαμε τις δράσεις $J_0(\varepsilon) = J_0(q, p)$ για rotation και libration type. Τώρα για να εφαρμόσουμε την κανονική θεωρία διαταραχών θα πρέπει να υπολογίσουμε και τις γωνίες $w = w(q, p)$ που αντιστοιχούν στις δράσεις J (Goldstein, Poole, & Safko), (Mahajan & Chen, 1985).

Για τις γωνίες έχουμε ότι (Goldstein, Poole, & Safko)

$$\dot{w}_0 = \frac{\partial \bar{H}_{B_0}}{\partial J_0} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial J_0} = u_0 = \frac{1}{T_0} \Rightarrow w_0 = \frac{1}{T_0} \cdot t \Rightarrow t = T_0 \cdot w_0$$

Όμως από το προηγούμενο κεφάλαιο έχουμε υπολογίσει το $\partial J_0 / \partial \varepsilon = T_0(\varepsilon)$ για rotation και libration type, T_{r_0} και T_{l_0} αντίστοιχα. (Goldstein, Poole, & Safko)

Άρα

Για libration type

Από το προηγούμενο κεφάλαιο έχουμε:

$$q_l(t) = \pm \frac{2}{\Omega} \arctan \frac{ac_l \sin \left(\text{amp} \left(\frac{c_l \sqrt{-E\Omega}}{k_l} t, k_l \right) \right)}{\sqrt{a^2 + c_l^2 - c_l^2 \sin^2 \left(\text{amp} \left(\frac{c_l \sqrt{-E\Omega}}{k_l} t, k_l \right) \right)}}$$

Και

$$T_{l_0} = 4 \frac{k_l}{c_l \sqrt{-E} \cdot \Omega} \cdot F \left(\frac{\pi}{2}, k_l \right).$$

Άρα με βάση τα προηγούμενα θέτοντας στην πρώτη σχέση όπου $t = w_{l_0} \cdot T_{l_0}$ και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $\sin(\text{amp}(u, k)) = \text{sn}(u, k)$, $dn^2 u + k^2 \cdot \text{sn}^2 u = 1$, $k_l = c_l / \sqrt{a^2 + c_l^2}$ θα έχουμε:

$$q_l(w_{l_0}, \varepsilon) = \pm \frac{2}{\Omega} \arctan a \cdot k_l \frac{\text{sn}(4w_{l_0} K(k_l))}{\text{dn}(4w_{l_0} K(k_l))} \quad (6.1)$$

Αποδεικνύεται ότι το $q_l(w_{l_0}, \varepsilon(J))$ είναι περιοδική συνάρτηση του w_{l_0} με περίοδο ένα. (Goldstein, Poole, & Safko)

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (6.1) στην (5.1) και κάνοντας τις πράξεις παίρνουμε ότι

$$p_l = \sqrt{dn^2(4w_{l_0}K(k_l))A + B} \quad (6.1')$$

Όπου $A = (2(\varepsilon - \mu + \mu r) - 2a^2(\varepsilon - \mu - \mu r)) / (1 - 2r)$ και $B = 2a^2(\varepsilon - \mu - \mu r) / (1 - 2r)$

Επειδή $\varepsilon = \varepsilon(q, p)$ αντιστρέφοντας την (6.1) μπορούμε να βρούμε το $w_{l_0} = w_{l_0}(q, p)$.

Για rotation type:

Από το προηγούμενο κεφάλαιο έχουμε:

$$q_r = \frac{2}{\Omega} \cdot \arctan\left(a \cdot \tan\left(\text{amp}(\Omega c_r \sqrt{E} \cdot t, k_r)\right)\right)$$

Και

$$T_{r_0} = 2 \frac{1}{\Omega c_r \cdot \sqrt{E}} \cdot F\left(\frac{\pi}{2}, k_r\right)$$

Άρα με βάση τα προηγούμενα θέτοντας στην πρώτη σχέση όπου $t = w_{l_0} \cdot T_{r_0}$ θα έχουμε:

$$q_r = \frac{2}{\Omega} \cdot \arctan \left(a \cdot \frac{\operatorname{sn}(2w_{r_0} K(k_r))}{\operatorname{cn}(2w_{r_0} K(k_r))} \right) \quad (6.2)$$

Αποδεικνύεται ότι το $q_r(w_{r_0}, \varepsilon(J))$ είναι περιοδική συνάρτηση του w_{r_0} με περίοδο ένα.

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (6.1) στην (5.1) και κάνοντας τις πράξεις παίρνουμε ότι

$$p_r = \sqrt{\operatorname{cn}^2(2w_{r_0} K(k_r))A + B} \quad (6.2')$$

Όπου $A = (2(\varepsilon - \mu + \mu r) - 2a^2(\varepsilon - \mu - \mu r)) / (1 - 2r)$ και $B = 2a^2(\varepsilon - \mu - \mu r) / (1 - 2r)$

Επειδή $\varepsilon = \varepsilon(q, p)$ αντιστρέφοντας την (6.2) μπορούμε να βρούμε το $w_{r_0} = w_{r_0}(q, p)$.

Στο προηγούμενο κεφάλαιο υπολογίσαμε την περίοδο T_0 επομένως και την συχνότητα των (p, q) , $\omega_0 = 1/T_0$, για την Hamiltonian \bar{H}_{B_0} που είναι τάξης μηδέν, δηλαδή υπολογίσαμε την συχνότητα τάξης μηδέν. Τώρα θα υπολογίσουμε την συχνότητα τάξης ένα, δηλαδή την συχνότητα που οφείλεται στον όρο τάξης ένα της συνολικής Hamiltonian, δηλαδή στον όρο $\bar{H}_{B_1}(q, p)$.

Από την κανονική θεωρία διαταραχών θα πρέπει να υπολογίσουμε τις ποσότητες $\alpha_0 = \bar{H}_{B_0}(J)$ και $\alpha_1 = \overline{\bar{H}_{B_1}(w_0, J)}$. Το α_0 μπορούμε να το υπολογίσουμε αντιστρέφοντας το $J_0(\varepsilon) = J_0(\bar{H}_{B_0})$ που έχουμε υπολογίσει στο προηγούμενο κεφάλαιο. (Goldstein, Poole, & Safko)

Από την (6.1) και την (6.2) βλέπουμε ότι μπορούμε να υπολογίσουμε το $q = q(w, \varepsilon)$ άρα αντικαθιστώντας στην (5.2) μπορούμε να υπολογίσουμε το $p = p(w, \varepsilon)$. Αντικαθιστώντας αυτές

τις δύο εξισώσεις στην $\bar{H}_{B_1}(q, p)$ που δίνεται από την (4.17') μπορούμε να υπολογίσουμε την $\bar{H}_{B_1}(w, \varepsilon(J))$. Έτσι το α_1 θα είναι:

Για libration type:

$$\alpha_1 = \frac{1}{w'_0} \int_0^{w'_0} \bar{H}_{B_1}(w_{l_0}, \varepsilon) dw_{l_0} \quad (6.3)$$

Όπου w'_0 είναι η περίοδος του q_l με $w'_{l_0} = 1$

Αντικαθιστώντας την (6.1) και την (6.1') στην (4.17') θα πάρουμε

$$\begin{aligned} \bar{H}_{B_1}(w_{l_0}, \varepsilon(J)) = \\ -\frac{1}{\Omega r} \left(\sqrt{dn^2(4w_{l_0} K(k_l))A + B} - \bar{P}_{\zeta_0} \right) \cdot \left(dn^2(4w_{l_0} K(k_l))A + B + \mu \right) \cdot \\ \left(\frac{dn^2(4w_{l_0} K(k_l))(1+a^2) - a^2}{dn^2(4w_{l_0} K(k_l))(1-a^2) + a^2} \right) \end{aligned}$$

Από την έκφραση του $\bar{H}_{B_1}(w_{l_0}, \varepsilon(J))$ που δίνεται από την προηγούμενη εξίσωση βλέπουμε ότι ο υπολογισμός της μέσης τιμής που πρέπει να υπολογίσουμε στην σχέση (6.3) είναι δύσκολος. Για την rotation type κίνηση θα πρέπει να υπολογίσουμε την αντίστοιχη μέση τιμή όπου το ολοκλήρωμα έχει την αντίστοιχη μορφή με την libration κίνηση και επομένως είναι το ίδιο δύσκολο.

6.1β Για την Hamiltonian \bar{H}_A

Όπως είπαμε στο κεφάλαιο 4 η Hamiltonian \bar{H}_A μπορεί να γραφτεί στην μορφή

$$\bar{H}_A(\bar{\theta}, \bar{\zeta}, \bar{\xi}, \bar{P}_\theta, \bar{P}_\zeta, \bar{\mu}) = \bar{H}_A(\bar{P}_\theta = 0) + \bar{H}_{A1}(\bar{\zeta}, \bar{P}_\zeta) \cdot \bar{P}_\theta$$

Για να εφαρμόσουμε κανονική θεωρία διαταραχών για την \bar{H}_A θα κάνουμε την αντίστοιχη ανάλυση που κάναμε στα προηγούμενα για την \bar{H}_B . Έτσι χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις του κεφαλαίου (5.1) που μας δίνουν τα $q_l(t, \varepsilon)$, $T_l(\varepsilon)$ και $q_r(t, \varepsilon)$, $T_r(\varepsilon)$ για την \bar{H}_A θα πάρουμε:

Για libration type

$$q_l(w_{l_0}, \varepsilon) = \frac{2}{\Omega} \arcsin \left(\sqrt{\frac{\varepsilon - \mu + \mu r}{2\mu r}} \cdot \operatorname{sn}(4w_{l_0} K(k_l)) \right) \quad (6.4)$$

Και αντικαθιστώντας στην εξίσωση (5.1') και κάνοντας τις πράξεις θα πάρουμε

$$p_l(w_{l_0}, \varepsilon) = \sqrt{2(\varepsilon - \mu + \mu r)} \cdot \operatorname{cn}(4w_{l_0} K(k_l)) \quad (6.5)$$

Όπου $k_l = \sqrt{\varepsilon - \mu + \mu r} / \sqrt{2\mu r}$

Για rotation type:

$$q_r(w_{r_0}, \varepsilon) = \frac{2}{\Omega} \arcsin \left(\operatorname{sn}(2w_{r_0} K(k_r)) \right) \quad (6.6)$$

Και αντικαθιστώντας στην εξίσωση (5.1') και κάνοντας τις πράξεις θα πάρουμε

$$p_r(w_{r_0}, \varepsilon) = \sqrt{2(\varepsilon - \mu + \mu r)} \cdot \operatorname{dn}(2w_{r_0} K(k_r)) \quad (6.7)$$

Όπου $k_r = \sqrt{2\mu r} / \sqrt{\varepsilon - \mu + \mu r}$.

Όπως κάναμε πριν για την Hamiltonian \bar{H}_B για να υπολογίσουμε την συχνότητα τάξης ένα ,δηλαδή την συχνότητα που οφείλεται στον όρο τάξης ένα της συνολικής Hamiltonian ,δηλαδή

στον όρο $\bar{H}_{A_1}(q, p)$ θα πρέπει αρχικά να υπολογίσουμε την μέση τιμή $\alpha_1 = \overline{\bar{H}_{A_1}(w_0, J)}$ για rotation και libration type κίνηση. Άρα:

Για libration type

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (6.4) και (6.5) στην εξίσωση (4.21) θα πάρουμε:

$$\begin{aligned} \bar{H}_{A_1}(w_{l_0}, \varepsilon) = & \left(\frac{-\sqrt{2}(\varepsilon - \mu + \mu r)^{\frac{3}{2}}}{\Omega r^2} \right) \cdot cn^3(4w_{l_0} K(k_l)) + \left(\frac{\bar{P}_{\zeta_0}(\varepsilon - \mu + \mu r)}{\Omega r^2} \right) \cdot cn^2(4w_{l_0} K(k_l)) \\ & + \left(\frac{(\varepsilon - \mu)\sqrt{2(\varepsilon - \mu + \mu r)}}{\Omega r^2} \right) \cdot cn(4w_{l_0} K(k_l)) + \frac{\bar{P}_{\zeta_0}(\mu - \varepsilon)}{\Omega r^2} \end{aligned}$$

Όμως

$$\alpha_1 = \int_0^1 \bar{H}_{A_1}(w_{l_0}, \varepsilon) dw_{l_0}$$

Και αντικαθιστώντας την προηγούμενη έκφραση για το $\bar{H}_{A_1}(w_{l_0}, \varepsilon)$ και υπολογίζοντας τα ολοκληρώματα στις δυνάμεις του $cn(4w_{l_0} K(k_l))$ που έχουμε στην έκφραση αυτήν, θα πάρουμε (Gradshteyn & Ryzhik)

$$\alpha_1 = -\frac{\bar{P}_{\zeta_0} \mu r}{\Omega r^2} \quad (6.8)$$

Από την κανονική θεωρία διαταραχών έχουμε ότι (Goldstein, Poole, & Safko)

$$v = \frac{\partial \alpha_0}{\partial J_0} + \varepsilon \frac{\partial \alpha_1}{\partial J_0} + \varepsilon^2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial J_0} + \dots \quad (6.8')$$

Όπου α_0 είναι η Hamiltonian τάξης μηδέν για την οποία έχουμε κάνει τον μετασχηματισμό σε δράσεις-γωνίες, J_0 οι δράσεις, $v = 1/T$ η συχνότητα της κίνησης και το $\varepsilon \ll 1$ δηλώνει την

τάξη της διαταραχής και της συχνότητας που αντιστοιχεί σε αυτήν. Εδώ θα ασχοληθούμε με την πρώτη τάξης διαταραχή. Με βάση αυτά έχουμε

$$\frac{\partial \alpha_0}{\partial J_{l_0}} = \frac{\partial \bar{H}_{A_0}}{\partial J_{l_0}} = \frac{1}{T_{l_0}}$$

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial J_{l_0}} = \frac{\partial \alpha_1}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial J_{l_0}} = \frac{\partial \alpha_1}{\partial \varepsilon} \cdot \frac{1}{T_{l_0}}$$

Όπου το T_{l_0} το υπολογίσαμε στο κεφάλαιο (5.1) και είναι $T_{l_0}(\varepsilon) = (4 / \Omega \sqrt{\mu r}) \cdot K(k_l)$.

Όπως βλέπουμε από την (6.8) $\partial \alpha_1 / \partial \varepsilon = 0$. Επομένως από τις τρεις προηγούμενες εξισώσεις βλέπουμε ότι η συχνότητα της κίνησης που περιλαμβάνει και την συχνότητα που οφείλεται στην διαταραχή τάξης ένα θα είναι

$$v = \frac{\partial \alpha_0}{\partial J_{l_0}} = \frac{1}{T_{l_0}} = \frac{\Omega \sqrt{\mu r}}{4K(k_r)} \quad (6.9)$$

Από την εξίσωση (6.9) παρατηρούμε ότι η διαταραχή πρώτης τάξης που εμφανίζεται στην Hamiltonian \bar{H}_A σύμφωνα με την εξίσωση (4.19) δεν επιβάλλει αλλαγή στην συχνότητα που προκύπτει από τον όρο τάξης μηδέν της libration type κίνησης

Για rotation type

Δουλεύοντας αντίστοιχα για την rotation type κίνηση θα πάρουμε

$$\begin{aligned} \bar{H}_{A_1}(w_{r_0}, \varepsilon) = & \left(-\frac{2\mu\sqrt{2(\varepsilon - \mu + \mu r)}}{\Omega r \cdot k_r^2} \right) \cdot dn^3(2w_{r_0} K(k_r)) + \left(\frac{2\bar{P}_{\zeta_0} \mu}{\Omega r k_r^2} \right) \cdot dn^2(4w_{l_0} K(k_l)) \\ & + \left(-\frac{\mu}{\Omega r} \left(1 - \frac{2}{k_r^2} \right) \sqrt{2(\varepsilon - \mu + \mu r)} \right) \cdot dn(2w_{r_0} K(k_r)) - \left(\frac{2\bar{P}_{\zeta_0} \mu}{\Omega r k_r^2} - \frac{\mu \bar{P}_{\zeta_0}}{\Omega r} \right) \end{aligned}$$

Υπολογίζοντας αντίστοιχα με την libration type κίνηση την μέση τιμή της προηγούμενης έκφρασης στο w_{r_0} θα πάρουμε (Gradshteyn & Ryzhik)

$$\alpha_1 = -\frac{2\bar{P}_{\zeta_0}\mu}{\Omega r} \left(\frac{\varepsilon - \mu + \mu r}{2\mu r} \right) + \frac{\mu\bar{P}_{\zeta_0}}{\Omega r}$$

Επομένως η συχνότητα που προκύπτει από τον όρο μηδενικής και πρώτης τάξης για την rotation κίνηση που προκύπτει από την μορφή (4.19) της Hamiltonian \bar{H}_A θα είναι, από την εξίσωση (6.8')

$$\nu = \frac{\Omega}{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{\varepsilon - \mu + \mu r}}{K(k_r)} - \epsilon^1 \cdot \frac{\bar{P}_{\zeta_0}}{\Omega r^2} \cdot \frac{\Omega}{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{\varepsilon - \mu + \mu r}}{K(k_r)} \quad (6.10)$$

Όπου $k_r = \sqrt{2\mu r} / \sqrt{\varepsilon - \mu + \mu r}$.

6.2 Αποτελέσματα για τις μικρού εύρους τροχιάς (FOW) Hamiltonians \bar{H}_A και \bar{H}_B

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (5.24) και την εξίσωση $\bar{P}_\theta = P_\theta - P_{\theta_0}$ του κανονικού μετασχηματισμού (4.11) παίρνουμε ότι $\bar{P}_\theta < r_{max}^2 / 2 - P_{\theta_0}$. Ακόμη χρησιμοποιώντας την εξίσωση (4.12) παίρνουμε ότι

$$\bar{P}_\zeta < \Omega \cdot \left(\frac{r_{max}^2}{2} - P_{\theta_0} \right) + \bar{P}_{\zeta_0}$$

Επίσης $(\bar{P}_\theta - \bar{P}_{\zeta_0}) / \Omega + P_{\theta_0} = P_\theta = \psi = r^2 / 2 > 0$ άρα

$$\bar{P}_\zeta > -\Omega \cdot P_{\theta_0} + \bar{P}_{\zeta_0}$$

Από αυτές τις εξισώσεις βλέπουμε ότι η κανονική ορμή $\overline{P_\zeta}$, που στην ανάλυση που έχουμε κάνει πάρα πάνω την συμβολίζουμε με p , και είναι η $\rho_{//}$, από την εξίσωση (4.4), μπορεί να κινείται στα όρια

$$\overline{P_{\zeta_0}} - \Omega \cdot P_{\theta_0} < \overline{P_\zeta} < \Omega \cdot \left(\frac{r_{max}^2}{2} - P_{\theta_0} \right) + \overline{P_{\zeta_0}} \quad (6.11)$$

Από την (6.11) παρατηρούμε ότι τα όρια της κανονικής ορμής $\overline{P_\zeta}$ εξαρτώνται από το P_{θ_0} το οποίο περιορίζεται από τον τοίχο, το ψ_{wall} , αλλά εξαρτάται και από το $\overline{P_{\zeta_0}}$ για το οποίο δεν έχουμε κάποιο περιορισμό. Τα P_{θ_0} και $\overline{P_{\zeta_0}}$ είναι απλά σημεία αναφοράς ως προς τα οποία μετράται το εύρος της τροχιάς, $\overline{P_\theta}$, $\overline{P_\zeta}$. Επίσης τα όρια του $\overline{P_\zeta} - \overline{P_{\zeta_0}}$ πρέπει να είναι ακόμα πιο στενά από αυτά που δίνονται από την (7.3.1) αφού $(\overline{P_\zeta} - \overline{P_{\zeta_0}}) / \Omega = \overline{P_\theta}$ και για την ανάλυσή μας έχουμε υποθέσει ότι $\overline{P_\theta} \ll P_{\theta_0}$, δηλαδή η (6.11) μπορεί να γίνει

$$\overline{P_{\zeta_0}} - \Omega \cdot P_{\theta_0} \ll \overline{P_\zeta} \ll \Omega \cdot \left(\frac{r_{max}^2}{2} - P_{\theta_0} \right) + \overline{P_{\zeta_0}} \quad (6.12)$$

Εφαρμόζοντας τον κανονικό μετασχηματισμό (4.11) στην συνολική Hamiltonian που δίνεται από την εξίσωση (4.6) και χρησιμοποιώντας την εξίσωση (4.12') θεωρώντας ότι $\Omega = 1$, $\Omega' = 0$, $r_{max} = 0.4$, και $P_{\theta_0} = 0.06$, που είναι μια τιμή εντός των ορίων που δίνονται από την (5.24), και αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές θα πάρουμε

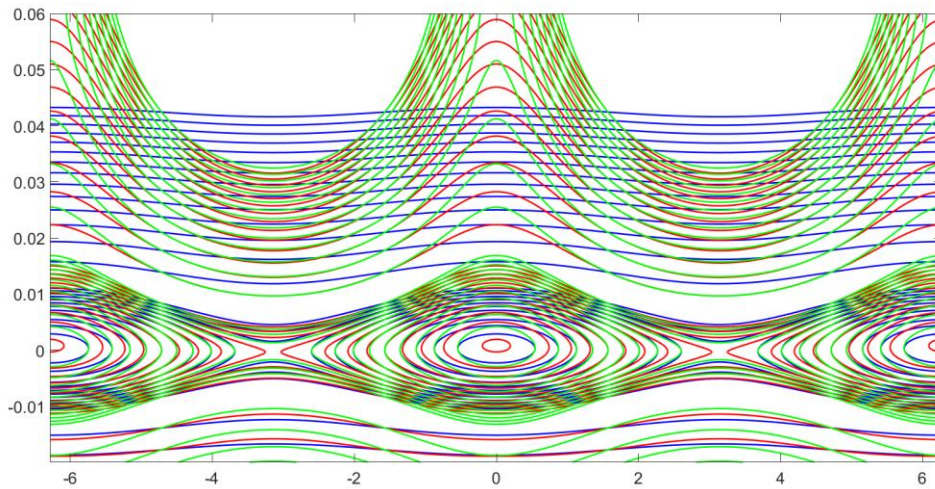
$$\overline{H}(q, p) = \frac{p^2}{2} \left(1 - \sqrt{2(p - \overline{P_{\zeta_0}} + P_{\theta_0}) \cos(q)} \right)^2 + \mu \left(1 - \sqrt{2(p - \overline{P_{\zeta_0}} + P_{\theta_0}) \cos(q)} \right) \quad (6.13)$$

Κάνοντας τις αντίστοιχες αντικαταστάσεις στις εξισώσεις (4.16) και (4.19) που μας δίνουν τις finite orbit width Hamiltonians, οι οποίες πρέπει να προσεγγίζουν την συνολική που δίνεται από την (4.6), θα πάρουμε αντίστοιχα

$$\overline{H}_{B_{fow}} = \frac{p^2}{2} + \mu - (\mu + p^2)r \cos(q) - \frac{1}{r} (p^2 + \mu)(p - \overline{P_{\zeta_0}}) \cos(q) \quad (6.14)$$

$$\bar{H}_{A_{fow}} = \frac{p^2}{2} + \mu - \mu r \cos(q) - \frac{1}{r} \mu (p - \bar{P}_{\zeta_0}) \cos(q) \quad (6.15)$$

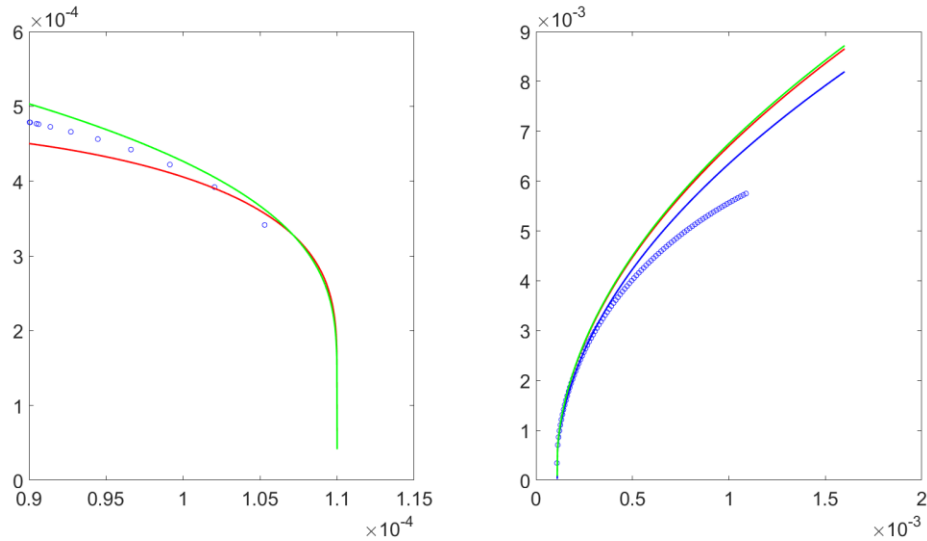
Όπως έχουμε πει η Hamiltonian \bar{H}_B προσεγγίζει καλύτερα την συνολική Hamiltonian από την \bar{H}_A επομένως και η $\bar{H}_{B_{fow}}$ θα προσεγγίζει καλύτερα την συνολική Hamiltonian από την $\bar{H}_{A_{fow}}$. Αυτό φαίνεται και στο επόμενο σχήμα όπου με κόκκινο χρώμα είναι ο φασικός χώρος για την συνολική Hamiltonian που δίνεται από την εξίσωση (6.13), με πράσινο χρώμα ο φασικός χώρος για την $\bar{H}_{B_{fow}}$ που δίνεται από την (6.14) και με μπλε χρώμα ο φασικός χώρος για την $\bar{H}_{A_{fow}}$ που δίνεται από την (6.15), για $\bar{P}_{\zeta_0} = 0.04$. Επίσης από το επόμενο σχήμα βλέπουμε ότι παρόλο που ποσοτικά οι τροχιές που περιγράφουν κάθε μια από τις τρεις Hamiltonians έχουν ποσοτικές διαφορές μεταξύ τους για την ίδια τιμή της ενέργειας, δεν έχουν ποιοτική διαφορά, δηλαδή για την ίδια τιμή της ενέργειας έχουμε το ίδιο είδος τροχιάς (libration type ή rotation type).



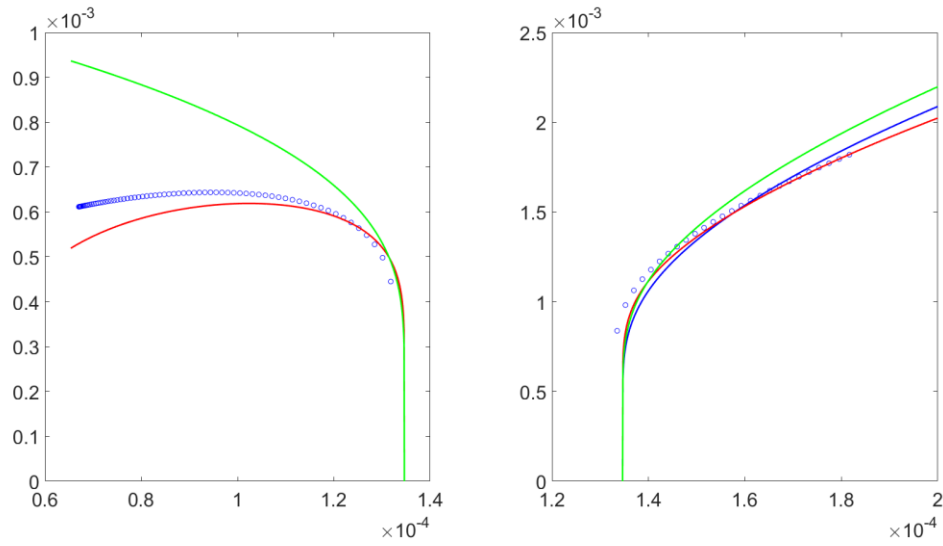
Εικόνα 16: Ο φασικός χώρος για τις Hamiltonians \bar{H} , με κόκκινο χρώμα, $\bar{H}_{B_{fow}}$, με πράσινο χρώμα και $\bar{H}_{A_{fow}}$, με μπλε χρώμα, για $\bar{P}_{\zeta_0} = 0.04$.

Στο κεφάλαιο (6.1) έγινε προσπάθεια με την κανονική θεωρία διαταραχών να υπολογίσουμε τις συχνότητες της κίνησης που περιγράφουν οι Hamiltonians που δίνονται από τις εξισώσεις (4.16) και (4.19), δηλαδή τις συχνότητες κίνησης που περιγράφουν οι Hamiltonians $\bar{H}_{B_{fow}}$ και $\bar{H}_{A_{fow}}$ αντίστοιχα, που δίνονται από τις εξισώσεις (6.14) και (6.15). Αναλυτικά καταφέραμε να υπολογίσουμε την συχνότητα της κίνησης που περιγράφει η Hamiltonian $\bar{H}_{A_{fow}}$ και δίνεται από

τις εξισώσεις (6.9) για την libration type κίνηση και (6.10) για την rotation type κίνηση . Στην συνέχεια άρα θα συγκρίνουμε την συχνότητα αυτήν με την συχνότητα της κίνησης που περιγράφει η αρχική μας Hamiltonian που δίνεται από την εξίσωση (6.13) και την υπολογίζουμε αριθμητικά στο mat lab. Όπως έχουμε πει και πάρα πάνω η Hamiltonian $\bar{H}_{A_{fow}}$ προσεγγίζει την αρχική Hamiltonian \bar{H} επομένως και η συχνότητα που περιγράφει η $\bar{H}_{A_{fow}}$ προσεγγίζει την συχνότητα της κίνησης που περιγράφει η συνολική Hamiltonian \bar{H} . Η σύγκριση αυτή φαίνεται στα επόμενα σχήματα όπου έχουμε με κυκλάκια την συχνότητα της συνολικής Hamiltonian \bar{H} , με μπλε γραμμή την συχνότητα της $\bar{H}_{A_{fow}}$ και με πράσινη και κόκκινη γραμμή τις συχνότητες των $\bar{H}_{A_0}(q, p)$ και $\bar{H}_{B_0}(q, p)$ αντίστοιχα. Οι τιμές των παραμέτρων για τα επόμενα σχήματα είναι: $\Omega = 1$, $\mu = 0.0001$, $r_{max} = 0.4$, $r = \sqrt{2P_{\theta_0}}$, όπου το P_{θ_0} το επιλέγουμε ώστε να ικανοποιείται η εξίσωση (5.24), και το \bar{P}_{ζ_0} πρέπει να το επιλέξουμε τέτοιο ώστε ο συντελεστής του όρου τάξης ένα στην συχνότητα που δίνεται από την εξίσωση (6.10) να είναι πολύ μικρότερος του ένα, δηλαδή $\bar{P}_{\zeta_0} / r^2 \ll 1$ επομένως και $\bar{P}_{\zeta_0} / P_{\theta_0} \ll 1$.



Εικόνα 17: Η συχνότητα συναρτήσει της ενέργειας για την κίνηση που περιγράφουν οι Hamiltonians \bar{H} , με μπλε κυκλάκια, $\bar{H}_{A_{fow}}$, με μπλε γραμμή, \bar{H}_{A_0} , με πράσινη γραμμή, \bar{H}_{B_0} , με κόκκινη γραμμή. Αριστερά είναι η συχνότητα για την libration type κίνηση και δεξιά για την rotation type κίνηση. Στην libration type κίνηση (αριστερή εικόνα) η μπλε γραμμή ταυτίζεται με την πράσινη αφού για αυτό το είδος της κίνησης δεν έχουμε όρο πρώτης τάξης στην συχνότητα, εξίσωση (6.9). $r = 0.1$, $\bar{P}_{\zeta_0} = 6 \cdot 10^{-4}$



Εικόνα 18: Η συχνότητα συναρτήσει της ενέργειας για την κίνηση που περιγράφουν οι Hamiltonians \bar{H} , με μπλε κυκλάκια, $\bar{H}_{A_{fov}}$, με μπλε γραμμή, \bar{H}_{A_0} , με πράσινη γραμμή, \bar{H}_{B_0} , με κόκκινη γραμμή. Αριστερά είναι η συχνότητα για την libration type κίνηση και δεξιά για την rotation type κίνηση. Στην libration type κίνηση (αριστερή εικόνα) η μπλε γραμμή ταυτίζεται με την πράσινη αφού για αυτό το είδος της κίνησης δεν έχουμε όρο πρώτης τάξης στην συχνότητα, εξίσωση (6.9). $r = 0.34$, $\bar{P}_{\zeta_0} = 6 \cdot 10^{-3}$

Κεφάλαιο 7

Σύνοψη, Συμπεράσματα και Επεκτάσεις

Σύνοψη-Συμπεράσματα

Στην αρχή της εργασίας, στο κεφάλαιο 1, δίνουμε την μορφή ενός γενικού καμπυλόγραμμου συστήματος συντεταγμένων, του (ψ, θ, ζ) για την περιγραφή του τοροειδούς μαγνητικού πεδίου. Στο κεφάλαιο 2 δίνουμε την γενική αναπαράσταση ενός μαγνητικού σε δύο μορφές: Η πρώτη μορφή που δίνεται είναι η *ανταλλοιώτη* και ισχύει με την προϋπόθεση να έχουμε ευθείες μαγνητικές γραμμές (straight field line coordinates, $d\zeta / d\theta = q(\psi)$). Η δεύτερη είναι η *συναλλοιώτη* μορφή και ισχύει με την προϋπόθεση ότι η κινητική πίεση του πλάσματος να είναι συνάρτηση μόνο του ψ . Στην συνέχεια δίνουμε το αξονοσυμμετρικό μαγνητικό πεδίο ισορροπίας το οποίο προκύπτει από την προηγούμενη συναλλοιώτη μορφή θεωρώντας ταυτόχρονα ότι έχουμε ανεξαρτησία από την τοροειδή μεταβλητή ζ ($\partial / \partial \zeta = 0$). Ταυτόχρονα θεωρώντας ένα νέο κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων πάνω στον τόρο αντικαθιστούμε την τοροειδή μεταβλητή ζ με την τοροειδή γωνιακή μεταβλητή ϕ και καταλήγουμε στην εξίσωση Grad Shafranov. Υποθέτοντας ταυτόχρονα ότι η μικρή ακτίνα του τόρου είναι πολύ μικρότερη από την μεγάλη του ακτίνα ($r \ll R$) από την λύση της Shafranov παίρνουμε το μαγνητικό και το μέτρο του με την προσέγγιση $r \ll R$ και αυτήν την μορφή χρησιμοποιούμε στην συνέχεια.

Στο κεφάλαιο 3 χρησιμοποιώντας την Lagrangian που δίνει την κίνηση ενός σωματιδίου σε μαγνητικό πεδίο και μελετώντας την κίνηση του guiding center με την προϋπόθεση ότι η κάθετη στο μαγνητικό πεδίο ταχύτητα (w) του σωματιδίου είναι πολύ μικρή σε σχέση με την ταχύτητα της κυκλοτρονικής κίνησης, ώστε η κίνηση του σωματιδίου να προσεγγίζεται από την κίνηση του guiding center, καταλήγουμε στην Hamiltonian που περιγράφει την κίνηση του guiding center σε ένα μαγνητικό πεδίο. Στην συνέχεια θεωρώντας αξονοσυμμετρικό μαγνητικό πεδίο ισορροπίας καταλήγουμε στις εξισώσεις κίνησης του guiding center για αυτό το μαγνητικό πεδίο.

Στο κεφάλαιο 4 λαμβάνοντας υπόψιν και την large aspect ratio προσέγγιση ($r \ll R$) χρησιμοποιούμε το μέτρο του μαγνητικού πεδίου όπως προκύπτει με αυτήν την προσέγγιση. Έτσι η αρχική Hamiltonian θα πάρει νέα μορφή, που είναι η Hamiltonian που περιγράφει την κίνηση του σωματιδίου στο αξονοσυμμετρικό μαγνητικό πεδίο ισορροπίας με την προσέγγιση του large aspect ratio. Στην συνέχεια, με σκοπό να υπολογίσουμε την συχνότητα της κίνησης που περιγράφει αυτή η Hamiltonian χρησιμοποιούμε δύο προσεγγίσεις τις τις οποίες μπορούμε να δουλέψουμε ευκολότερα από αυτήν, την \bar{H}_A και την \bar{H}_B . Μετά σε κάθε μια εφαρμόζουμε έναν κανονικό μετασχηματισμό ώστε κάθε μια να την γράψουμε σε finite orbit width (FOW) προσέγγιση, δηλαδή προσεγγιστικά σαν άθροισμα ενός όρου μηδενικής τάξης, που είναι η zero orbit width (ZOW) προσέγγιση και ενός όρου πρώτης τάξης που στην συνέχεια τον θεωρούμε διαταραχή της zero orbit width προσέγγισης.

Τέλος αφού κάνουμε μετασχηματισμό σε δράσεις-γωνίες για κάθε μια από τις δύο ZOW προσεγγίσεις εφαρμόζουμε κανονική θεωρία διαταραχών για κάθε μια από τις δύο FOW προσεγγίσεις και βγάζουμε αναλυτικό αποτέλεσμα για την συχνότητα της κίνησης που περιγράφει η FOW προσέγγιση της Hamiltonian \bar{H}_A

Από τα αποτελέσματα του κεφαλαίου (6.2) και από την ανάλυση που έχουμε κάνει στα προηγούμενα κεφάλαια βλέπουμε ότι η συνολική Hamiltonian \bar{H} προσεγγίζεται καλύτερα από την Hamiltonian \bar{H}_B σε σχέση με την \bar{H}_A και αυτό φαίνεται ακόμα και όταν στην \bar{H}_B θεωρούμε προσέγγιση ZOW. Στόχος μας όμως είναι να προσεγγίσουμε την \bar{H} με μια Hamiltonian που να έχει τις ίδιες παραμέτρους με την \bar{H} , ώστε να είναι σωστή η προσέγγιση. Αυτό γίνεται με τις Hamiltonians $\bar{H}_{A_{fow}}$ και $\bar{H}_{B_{fow}}$ που έχουν την παράμετρο \bar{P}_{ζ_0} , η οποία αντιστοιχεί στην κανονικοποιημένη (ως προς το μέτρο του μαγνητικού πεδίου) παράλληλη ταχύτητα, σε αντίθεση με τις Hamiltonians τάξης μηδέν. Για τον αναλυτικό υπολογισμό της συχνότητας της κίνησης χρησιμοποιήσαμε την κανονική θεωρία διαταραχών για την $\bar{H}_{A_{fow}}$ και $\bar{H}_{B_{fow}}$ με την πρώτη να οδηγεί σε απλές αναλυτικές εκφράσεις και τη δεύτερη να συνεπάγεται πολύπλοκες μορφές που δεν εξυπηρετούν.

Το πόσο καλά προσεγγίζουμε την συνολική συχνότητα της κίνησης που περιγράφεται από την \bar{H} με την συχνότητα της $\bar{H}_{A_{fow}}$ που έχουμε υπολογίσει αναλυτικά εξαρτάται και από τα σωματίδια στα οποία αναφερόμαστε. Όπως είπαμε στο κεφάλαιο (5.3) σε όλη την ανάλυσή μας αναφερόμαστε σε σωματίδια με μικρή ακτίνα Larmor, δηλαδή πολύ μικρή κάθετη στο μαγνητικό πεδίο ταχύτητα (προσέγγιση του guiding center). Επίσης όταν μιλάμε για σωματίδια κοντά στον μαγνητικό άξονα, δηλαδή για πολύ μικρό r ή για πολύ μικρό P_θ , έχουμε καλύτερη προσέγγιση στην συχνότητα σε σχέση με σωματίδια που κινούνται σε μια μαγνητική επιφάνεια κοντά στον τοίχο.

Την ανάλυσή μας για την κίνηση του guiding center την κάναμε για αξονοσυμμετρικό μαγνητικό πεδίο ισορροπίας με την προσέγγιση large aspect ratio και έτσι καταλήξαμε σε ένα σύστημα με Hamiltonian στην οποία δεν εμφανίζεται η μεταβλητή ζ επομένως, η κανονική ορμή P_ζ είναι σταθερά της κίνησης άρα η Hamiltonian, που είναι η ενέργεια άρα είναι και αυτή σταθερά της

κίνησης, εξαρτάται μόνο από τις μεταβλητές (θ, P_θ) . Επομένως αυτό το σύστημα είναι ολοκληρώσιμο, για αυτό και μπορούμε να υπολογίσουμε έστω και προσεγγιστικά την ορμή συναρτήσει της θέσης και την συχνότητα συναρτήσει της ενέργειας. Το μεγαλύτερο όμως ενδιαφέρον παρουσιάζεται στην περίπτωση που δεν έχουμε αξονοσυμμετρικό μαγνητικό πεδίο ισορροπίας, δηλαδή όταν έχουμε εξάρτηση και από το ζ . Τότε το P_ζ δεν είναι σταθερό και το σύστημα δεν είναι ολοκληρώσιμο και εμφανίζει χαοτική συμπεριφορά. Θεωρώντας ότι η εξάρτηση από το ζ προστίθεται στην Hamiltonian που μελετάμε σαν ένα όρος διαταραχής που εξαρτάται από το ζ , μπορούμε γνωρίζοντας την συχνότητα συναρτήσει της ενέργειας και επομένως και της θέσης και της ορμής (θ, P_θ) της αρχικής μας Hamiltonian να προβλέψουμε τα σημεία στον φασικό χώρο που θα έχουμε συντονισμό με την διαταραχή που εξαρτάται από το ζ . Επομένως μπορούμε να προβλέψουμε τα σημεία του φασικού χώρου που θα συμβεί ο συντονισμός δηλαδή τα σημεία του φασικού χώρου που θα εμφανιστεί εντονότερα η διαταραχή και η χαοτική συμπεριφορά. Αυτή είναι και η αξία που έχει ο υπολογισμός της συχνότητας της κίνησης που προσπαθήσαμε να υπολογίσουμε σε αξονοσυμμετρικό μαγνητικό πεδίο ισορροπίας.

Επεκτάσεις

Σαν μελλοντική δουλειά μπορούμε να δούμε την κίνηση σε αξονοσυμμετρικό μαγνητικό πεδίο ισορροπίας στην περίπτωση που δεν έχουμε την προσέγγιση large aspect ratio αλλά και την περίπτωση που έχουμε μη-αξονοσυμμετρικό μαγνητικό πεδίο ισορροπίας. Επίσης μπορούμε να δούμε την περίπτωση που έχουμε ενεργητικά σωματίδια (fast ions, runaway electrons) των οποίων η κάθετη στο μαγνητικό πεδίο ταχύτητα δεν είναι πολύ μικρή επομένως δεν ισχύει η προσέγγιση της κίνησης του guiding center για την κίνηση του σωματιδίου. Ακόμη ενδιαφέρον έχει η μελέτη της σχετικιστικής κίνησης του guiding center. Επιπλέον θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό σε δράσεις γωνίες για την περιγραφή της κινητικής θεωρίας και της εξέλιξης της συνάρτησης κατανομής των σωματιδίων.

Βιβλιογραφία

- Brizard, A. J. (2011, 02 17). Compact formulas for guiding-center orbits in axisymmetric tokamak geometry. *Physics of plasmas* 18, 022508 (2011).
- Brizard, A. J. (2012, 08 22). Jacobi zeta function and action-angle coordinates for the pendulum. *Commun nonlinear sci numer simulat* 18 (2013) 511–518.
- Brizard, A. J., & Duthoit, F.-X. (2014, 04 10). Canonical transformation for trapped/passing guiding-center orbits in axisymmetric tokamak geometry. Ανάκτηση από <https://arxiv.org/abs/1403.3873v1>
- Freidberg, J. P. (2007). *Plasma physics and fusion energy*. Cambridge university press.
- Glowinski, R., Holt, M., Hut, P., Keller, H. B., Killeen, J., Orszag, S. A., & Rusanov, V. V. (n.d.). *Springer series in computational physics*. Springer-Verlag.
- Goldstein, H., Poole, C., & Safko, J. (n.d.). *Classical mechanics* (Third Edition εκδ.). Addison wesley.
- Gradshteyn, I., & Ryzhik, I. (n.d.). *Table of integrals, series, and products* (Seventh Edition εκδ.). Academic press.
- Kominis, Y., Ram, A. K., & Hizanidis, K. (2008, 12 01). Quasilinear theory of electron transport by radio frequency waves and nonaxisymmetric perturbations in toroidal plasmas. *Physics of plasmas* 15, 122501.
- Lichtenberg, A., & Lieberman, M. (n.d.). *Regular and chaotic dynamics*. Springer-Verlag.
- Littlejohn, R. G. (1982, 06 28). Variational principles of guiding centre motion. *J. Plasma physics* (1983), vol. 29, part 1, pp. 111-125.
- Littlejohn, R. G. (1985, 03 10). Differential forms and canonical variables for drift motion in toroidal geometry. *Phys. fluids* 28 (6).
- Mahajan, S. M., & Chen, C. Y. (1985, 09 04). Plasmas kinetic theory in action-angle variables. *Phys. fluids* 26 (12).
- MengLi, N., Breizman, B., & LinjinZheng. (2016, 09 02). Canonical straight field line magnetic flux coordinates for tokamaks. *Journal of Computational Physics* 326 (2016) 334–341.
- White, R. B. (1989, 12 12). Canonical Hamiltonian guiding center variables. *Phys. fluids B* 2 (4).
- White, R. B. (n.d.). *The theory of toroidally confined plasmas* (Third Edition εκδ.). Imperial College Press.
- White, R. B., & Boozer, A. H. (1995, 04 24). Rapid guiding center calculations. *Plws. plasmas* 2 (8).
- White, R. B., & Chance, M. S. (1984, 06 07). Hamiltonian guiding center drift orbit calculation for plasmas of arbitrary cross section. *Phys. fluids* 27 (10) October 1984.

White, R. B., Gorelenkov, N. N., Duarte, V. N., & Berk, H. L. (2018, 09 18). Resonances between high energy particles and ideal magnetohydrodynamic modes in tokamaks. *Phys. plasmas* 25, 102504 (2018).

White, R. B., Spizzo, G., & Gobbin, M. (2013, 09 27). Guiding center equations of high accuracy. *Plasma phys. control. fusion* 55 (2013) 115002.

Wikipedia. (n.d.). Ανάκτηση από <https://en.wikipedia.org/wiki/Stellarator>.

Ερευνα Για Την Ελεγχόμενη Σύντηξη. (2007, 01 29). Ανάκτηση από https://www.euro-fusion.org/fileadmin/user_upload/Archive/wp-content/uploads/2011/11/fusion_research_greece.pdf.

