



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
Τομέας Φυσικής
Πτυχιακή Διπλωματική Εργασία

Σύμμορφη Συμμετρία στην Κοσμολογία

Κομνηνός-Τζων Πλάους
09114016

Επιβλέπων: Καθ. Αλέξανδρος Κεχαγιάς

Αθήνα
Ιούνιος 2019

Ευχαριστώ βαθύτατα τους εξής:

Τον επιβλέποντα, κ. Αλέξανδρο Κεχαγιά, για τη βοήθεια που μου προσέφερε κατά τη διάρκεια του έτους τόσο για την επιλογή του θέματος, όσο και για τη διεκπεραίωση της εργασίας. Ευχαριστώ επίσης για τις εποικοδομητικές συζητήσεις, που με βοήθησαν να προσανατολίσω την έρευνα και δουλειά μου, και για την πληθώρα ακαδημαϊκών εργασιών που χρησίμευσαν στη συγγραφή αυτής της εργασίας.

Το διδακτορικό ερευνητή, Γιώργο Τρίγγα, για τη σημαντική υποστήριξη του στα πρώτα στάδια της διπλωματικής, ειδικά σε θέματα βασικής κοσμολογίας.

Το διδακτορικό ερευνητή, Βίκτωρα Γάκη, για τα σεμινάρια διαφορικής γεωμετρίας και την υπομονή που έδειξε, εξηγώντας μου τις έννοιές της. Ευχαριστώ και όλη την οργανωτική ομάδα του MPGRAV.

Τους φίλους μου, που ανέχτηκαν ατελείωτες (και ελπίζω όχι ολότελα βαρετές...) κουβέντες πάνω στους συσχετιστές n σημείων και τη σύμμορφη συμμετρία.

Την οικογένειά μου, που όχι μόνο ανέχτηκαν τις προαναφερθείσες κουβέντες, αλλά και δεν παραπονέθηκαν ποτέ, όσο εγώ 'έκλεβα' τους υπολογιστές για να κάνω πράξεις, να διαβάσω εργασίες και, σημαντικότερο, να γράψω το παρόν κείμενο.

You all rock, guys!

Τριμελής εξεταστική επιτροπή:

Α. Κεχαγιάς

Ν. Ήργες

Γ. Κουτσούμπας

Καθηγητής (ΣΕΜΦΕ)

Αν. Καθηγητής (ΣΕΜΦΕ)

Καθηγητής (ΣΕΜΦΕ)

Περίληψη

Ο σκοπός της Εργασίας αυτής είναι διπλός: πρώτον, να παρουσιαστεί το βασικό υπόβαθρο της κοσμολογικής θεωρίας διαταραχών και η σύνδεσή της με τη δυναμική του πληθωριστικού Σύμπαντος. Δεύτερον, είναι η αξιοποίηση της σύμμορφης συμμετρίας στην περιγραφή συσχετιστών 2 και 3 σημείων πεδίων του αρχέγονου Σύμπαντος, και ο υπολογισμός του συσχετιστή 3 σημείων του ταυυστή τάσης-ενέργειας με δεδομένες ελάχιστες συνθήκες.

Στο πρώτο κεφάλαιο, παρουσιάζεται ένα βασικό μαθηματικό υπόβαθρο καλύπτοντας τις θεμελιώδεις αναγκαίες έννοιες: στο δεύτερο, παρουσιάζονται η κοσμολογική θεωρία διαταραχών, και βασικά στοιχεία στατιστικής πεδίων. Στο επόμενο κεφάλαιο, αναπτύσσεται ο φορμαλισμός υπολογισμού συσχετιστών N σημείων με χρήση της σύμμορφης συμμετρίας, σε ψευδο-μετρικό χώρο όπου βρίσκεται ενσωματωμένη η διαφορική πολλαπλότητα του Σύμπαντος. Έπειτα, στο Κεφάλαιο 5 υπολογίζεται ο συσχετιστής 3 σημείων του ταυυστή τάσης-ενέργειας, πράξη ακολουθούμενη από το συμπέρασμα πως ο υπολογισμός αυτός, αν και μακροσκελής, είναι υπολογιστικά απλός, και οδηγεί σε μικρό αριθμό ελεύθερων παραμέτρων.

Abstract

This project aims to do two things: firstly, to present the basic elements of cosmological perturbation theory while connecting it to the dynamics of the inflationary Universe; secondly, to exploit conformal symmetry in describing 2- and 3-point correlators of fields in the primeval Universe, and to calculate the 3-point correlator of the stress-energy tensor given minimal conditions *a priori*. In the first section, we present a mathematical framework which covers the fundamental concepts to be discussed; in the second, we present both cosmological perturbation theory and elementary statistics of fields. Afterwards, we develop the formal structure needed to calculate N -point correlators by using conformal symmetry. This will be done in a pseudo-metric space in which the Universe's differential manifold is embedded. Following that, we calculate the 3-point correlator of the stress energy tensor in Section 5, rounding our calculation off by noting that the calculation, lengthy though it may be, is both computationally simple and leads to a small number of free parameters.

Περιεχόμενα

Περίληψη	1
1 Εισαγωγή	5
2 Μαθηματικό υπόβαθρο	7
2.1 Στοιχεία διαφορικής γεωμετρίας	7
2.2 Τανυστές	14
2.2.1 Σύνδεση με Διαφορική Γεωμετρία	14
2.2.2 Ο μετρικός τανυστής	17
2.2.3 Σύνδεση: Πεδία με αθέραιο spin s	18
2.3 Παράλληλη μεταφορά και η συναλλοίωτη παράγωγος	20
2.3.1 Η ομοπαράλληλη σύνδεση	20
2.3.2 Η συναλλοίωτη παράγωγος	21
2.3.3 Παράλληλη μεταφορά	22
2.4 Θεμελιώδη μεγέθη της Γενικής Σχετικότητας	25
2.5 Σύμμορφη συμμετρία	29
2.5.1 Βασικά χαρακτηριστικά - Ισομετρίες	29
2.5.2 Συμπεράσματα: γεννήτορες της σύμμορφης άλγεβρας . . .	33
2.5.3 Ο χώρος ενσωμάτωσης	33
3 Κοσμολογία - βασικές αρχές και πρότυπα	36
3.1 Προκαταρκτικές παρατηρήσεις	36
3.1.1 Θεμελιώδεις παραδοχές	36
3.1.2 Η γεωμετρία του Σύμπαντος	37
3.2 Πληθωρισμός	44
3.2.1 Προβλήματα της κοσμολογίας FRW	44
3.2.2 Ο μηχανισμός του πληθωρισμού	46
3.2.3 Απλό σενάριο: πληθωρισμός αργής κύλισης	46
3.3 Στοιχεία θεωρίας διαταραχών	50
3.3.1 Σχόλιο: Συμπεριφορά των διαταραχών στον πληθωρισμό . .	54
3.4 Στοιχεία στατιστικής στην Κοσμολογία	56
3.4.1 Συσχετιστές	56
3.4.2 Παρατηρησιακά μεγέθη	59
3.4.3 Μη-Γκαουσιανότητα σε μοντέλα πολλαπλών πεδίων: Σύμ- μορφη συμμετρία	61

4	Σύμμορφα συμμετρικοί συσχετιστές	63
4.1	Περιορισμοί	63
4.1.1	Περιορισμοί στον $\mathbb{R}^{1,d-1}$	64
4.1.2	Περιορισμοί στο χώρο ενσωμάτωσης $\mathbb{R}^{2,d}$	66
4.1.3	Τανυστές στο χώρο ενσωμάτωσης	68
4.1.4	Μερικοί ακόμα συσχετιστές	71
4.2	Ο φορμαλισμός δίχως δείκτες	73
4.2.1	Βασικό υπόβαθρο	73
4.2.2	Φορμαλισμός στον $\mathbb{R}^{2,d}$	77
4.3	Κανόνες και ‘τουβλάκια’	79
4.3.1	Ένας απλός κανόνας: Συσχετιστής σπιν-2-σπιν-2	80
4.3.2	‘Τουβλάκια’: εύρεση του πολυωνύμου στον $\mathbb{R}^{2,d}$	85
4.3.3	Μείωση παραμέτρων	88
4.3.4	Συσχετιστές διατηρούμενων πεδίων	89
4.4	Συμπέρασμα του φορμαλισμού	91
5	Υπολογισμός του $\langle t^{\alpha_1\alpha_2}(x_1)t^{\beta_1\beta_2}(x_2)t^{\gamma_1\gamma_2}(x_3) \rangle$	92
5.1	Η γενική δομή	93
5.2	Εξαγωγή του τανυστή $g^{\alpha_1\alpha_2;\beta_1\beta_2;\gamma_1\gamma_2}(x_{12}, x_{13}, x_{23})$	95
5.2.1	Ο a_1 -όρος	95
5.2.2	Ο a_2 -όρος	95
5.2.3	Ο a_3 -όρος	97
5.2.4	Ο a_4 -όρος	98
5.2.5	Ο a_5 -όρος	99
5.3	Μείωση παραμέτρων του συσχετιστή	100
6	Συμπέρασμα	102
	Αναφορές	103
	Α’ Παράρτημα Α: Πράξεις	107
A.1	Δράση του τελεστή Thomas στις δομές	107
A.1.1	Βασικές σχέσεις	107
A.1.2	$\mathcal{D}_{Z_1;M}(a_1\text{-όρος})$	108
A.1.3	$\mathcal{D}_{Z_1;M}(a_2\text{-όρος})$	108
A.1.4	$\mathcal{D}_{Z_1;M}(a_3\text{-όρος})$	109
A.1.5	$\mathcal{D}_{Z_1;M}(a_4\text{-όρος})$	111
A.1.6	$\mathcal{D}_{Z_1;M}(a_5\text{-όρος})$	111

A'.2	Υπολογισμός των P_1 -παραγώγων	113
A'.2.1	Βασικές σχέσεις	113
A'.2.2	$\partial_{P_1}^M(G_1(P_i))$	116
A'.2.3	$(\partial_{P_1} \cdot \mathcal{D}_{Z_1})(a_1\text{-όρος})$	117
A'.2.4	$(\partial_{P_1} \cdot \mathcal{D}_{Z_1})(a_2\text{-όρος})$	118
A'.2.5	$(\partial_{P_1} \cdot \mathcal{D}_{Z_1})(a_3\text{-όρος})$	119
A'.2.6	$(\partial_{P_1} \cdot \mathcal{D}_{Z_1})(a_4\text{-όρος})$	120
A'.2.7	$(\partial_{P_1} \cdot \mathcal{D}_{Z_1})(a_5\text{-όρος})$	120
B' Παράρτημα B: Σημείωση για το μετασχηματισμό Fourier		
	του μηδενικού κώνου	121

1 Εισαγωγή

Πληθώρα σεναρίων για την εξέλιξη του πρώιμου Σύμπαντος προϋποθέτουν την ύπαρξη συγκεκριμένων πεδίων (fields), των οποίων η χρονική εξέλιξη σε μια πολύ πρώιμη περίοδο, του λεγόμενου πληθωρισμού (inflation), είναι καθοριστικής σημασίας για την εξέλιξη του Σύμπαντος. Καθώς αυτά τα πεδία διαταράσσονται, προκύπτουν στο πρώιμο Σύμπαν ανομοιογένειες, που μέσω του πληθωρισμού καταλήγουν να παράγουν περιοχές μεγαλύτερης ή μικρότερης πυκνότητας ύλης-ενέργειας από τον περιβάλλοντα χώρο τους. Από το τέλος του πληθωρισμού και έπειτα, οι περιοχές αυτές, που δεν είναι τίποτε άλλο από διαταραχές της πυκνότητας ύλης-ενέργειας οι ίδιες, εξελίσσονται με συνέπεια την παραγωγή της δομής της παρατηρήσιμης ύλης σήμερα, σε μεγάλες κλίμακες: η δομή μεγάλης κλίμακας (large scale structure) του Σύμπαντος είναι άμεση συνέπεια αυτής της αρχικής διαταραχής.

Παρατηρησιακά, το πιο σημαντικό κατάλοιπο του αρχέγονου Σύμπαντος (τουλάχιστον μέχρι μιας ηλικίας $\mathcal{O}(10^5)$ ετών) είναι το Κοσμικό Υπόβαθρο Μικροκυμάτων (Cosmic Microwave Background – CMB). Είναι εφικτή η μελέτη του φάσματος των ανισοτροπιών του (CMB anisotropy spectrum) καθώς και του «δι-φάσματος» (bispectrum) του [13, 25]. Πρόσφατα, παρόμοια μελέτη του φάσματος και του «δι-φάσματος» έχει σχεδόν καταστεί εφικτή και για αρχέγονα βαρυτικά κύματα (primordial gravitational waves), μέσω πειραμάτων όπως το Advanced LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory, Παρατηρητήριο Βαρυτικών Κυμάτων με Συμβολόμετρο Laser) και το προβλεπόμενο LISA (Laser Interferometer Space Antenna, Διαστημικός Δέκτης-Συμβολόμετρο Laser) [18, 27].

Η μελέτη αυτών των φασμάτων είναι κεντρικής σημασίας, γιατί συνδέει άμεσα τα φάσματα αυτά με τα πεδία στην εποχή του πληθωρισμού, μέσω ποσοτήτων που ονομάζονται συσχετιστές (correlators) των πεδίων εκείνων (για παράδειγμα βλ. τις ενότητες 2.7.1 και 2.7.2 στην [31], ενότητα 3.2 του [6]). Αυτή η σύνδεση καθιστά τους συσχετιστές το αντικείμενο πρωταρχικής σημασίας για τη μελέτη του πρώιμου Σύμπαντος, καθώς μοντέλα που κάνουν υποθέσεις για τα πεδία που συνέβαλαν μη-τετριμμένα στη δυναμική του Σύμπαντος την εποχή του πληθωρισμού κάνουν καλώς ορισμένες προβλέψεις για τη μορφή του φάσματος και «δι-φάσματος», και μπορούν να συγκριθούν με όλο και πιο ακριβή δεδομένα από την ακτινοβολία υποβάθρου.

Η εξαγωγή κάποιου κλειστού τύπου για τους συσχετιστές αυτούς, ανάλογα με το τι τάξης συσχετιστή υπολογίζουμε και ποια πεδία μετέχουν σε αυτόν, είναι εν

γίνει δύσκολη. Ισχυρό εργαλείο για τέτοιου είδους υπολογισμούς έχει αποδειχθεί πως είναι η χρήση σύμμορφων θεωριών πεδίου (conformal field theories – CFT), που με λίγες παραδοχές επιβάλλει ισχυρές συνθήκες στη μορφή που μπορούν να πάρουν αυτοί οι συσχετιστές. Η σύμμορφη συμμετρία χρησιμοποιήθηκε πρώτα από τον H. Bateman, π.χ. στη μελέτη των εξισώσεων Maxwell στο "The mathematical analysis of electrical and optical wave-motion on the basis of Maxwell's equations" (1915), και επεκτάθηκε στην περίπτωση της εξίσωσης κύματος ενός σπιν-α σωματιδίου από τον Dirac [12], όπου εξισώσεις αναλλοίωτες υπό μετασχηματισμούς Lorentz (της ειδικής σχετικότητας) σε χωροχρόνο 4 διαστάσεων μπορούν να γραφούν πιο συνοπτικά σε έναν χώρο $4 + 2 = 6$ διαστάσεων. Στην περίπτωση της γενικής σχετικότητας (της οποίας η θεωρία πεδίου περιγράφεται από σπιν-2 πεδία), οι σύμμορφες θεωρίες πεδίου προσφέρουν ακόμα ένα πλεονέκτημα: τη λεγόμενη αντιστοιχία AdS-CFT (AdS-CFT correspondence), που φέρνει κάποια CFT σε αντιστοιχία με έναν χώρο AdS (Anti-De Sitter), ο οποίος περιγράφει το διαστελλόμενο Σύμπαν (βλέπε π.χ. [24]). Έτσι, η περιγραφή των συσχετιστών των πεδίων του αρχέγονου Σύμπαντος μέσω σύμμορφης θεωρίας πεδίου έχει και καλά θεμελιωμένο μαθηματικό υπόβαθρο, όσο και ισχυρό φυσικό επιχείρημα για να την υποστηρίξει.

Κλείνοντας, με τη σύμμορφη συμμετρία μπορούμε να βγάλουμε ισχυρά συμπεράσματα για τη φυσική του αρχέγονου Σύμπαντος, που δημιουργεί άμεσα ελέγξιμες προβλέψεις. Χρησιμοποιώντας έναν ελάχιστο αριθμό υποθέσεων πέραν των τυπικών για την κοσμολογία παραδοχών, θα καταλήξουμε σε ενδιαφέροντα αποτελέσματα σχετικά με τη στατιστική που ακολουθούν αυτά τα πεδία.

2 Μαθηματικό υπόβαθρο

2.1 Στοιχεία διαφορικής γεωμετρίας

(Σημείωση: Οι ακόλουθοι ορισμοί ακολουθούν το βιβλίο του C.J.Isham, [19]- θα αναφερόμαστε σε σημεία εκείνου του συγγράμματος)

Ορισμός 1: Έστω ένα σύνολο σημείων $\mathcal{Q} = \{p\}$ εφοδιασμένο με μία συλλογή συνόλων \mathcal{O} , που έχει τις εξής ιδιότητες:

- 1) $\emptyset \in \mathcal{O}, \mathcal{Q} \in \mathcal{O}$
 - 2) $A \cup V \in \mathcal{O}, V \in \mathcal{O} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{O}$
 - 3) $A \cup U_a$ οικογένεια συνόλων με $U_a \in \mathcal{O} \forall a \in A, A$ τυχαίο, τότε $\bigcup_{a \in A} U_a \in \mathcal{O}$
- (2.1.1)

Τότε το \mathcal{O} ονομάζεται **τοπολογία** στο σύνολο \mathcal{Q} , και το ζεύγος $\mathcal{M} = (\mathcal{Q}, \mathcal{O})$ ονομάζεται **τοπολογική δομή** (topological structure), ή **τοπολογικός χώρος** (topological space) (βλ. Θεώρημα 1.3, Σημ.4)

Ορισμός 2: Μια απεικόνιση $d : \mathcal{Q} \times \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ που έχει τις εξής ιδιότητες:

- 1) $d(x, y) = d(y, x) \forall x, y \in \mathcal{Q}$
 - 2) $d(x, y) \geq 0, \mu\epsilon d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
 - 3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z) \forall x, y, z \in \mathcal{Q}$
- (2.1.2)

ονομάζεται **μετρική συνάρτηση** (metric function) στο χώρο \mathcal{Q} (Ορισμός 1.1). Η δομή $(\mathcal{Q}, \mathcal{O}, d)$ ονομάζεται **μετρικός χώρος** (metric space)

Ορισμός 3: Έστω μια "1-1" και "επί" απεικόνιση $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$, με \mathcal{M}, \mathcal{N} τοπολογικούς χώρους. Έστω επίσης πως υπάρχει η αντίστροφη απεικόνιση $f^{-1} : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$. Εάν τόσο η f όσο και η f^{-1} είναι συνεχείς, τότε αποκαλείται **ομοιομορφισμός** (homeomorphism), και οι τοπολογικοί χώροι \mathcal{M}, \mathcal{N} ονομάζονται **ομοιομορφικοί** (homeomorphic). Γράφουμε $\mathcal{M} \simeq \mathcal{N}$. (Ορισμός 1.18)

Ορισμός 4: α): Έστω ένας τοπολογικός χώρος \mathcal{M} . Εάν δεν μπορεί να γραφτεί ως η ένωση δύο ξένων μεταξύ τους τοπολογικών χώρων $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \emptyset$, ο \mathcal{M} λέγεται **συνεκτικός** (connected).

β): Έστω U ένα ανοικτό υποσύνολο του \mathcal{M} και $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^m, m \in \mathbb{N}^*$ ομοιομορφισμός του U σε κάποιο ανοικτό υποσύνολο του \mathbb{R}^m (εννοείται m πεπερασμένο). Το ζεύγος (U, ϕ) τότε ονομάζεται **χάρτης συντεταγμένων διάστασης m** (m -dimensional coordinate chart) στον \mathcal{M} .

γ): Έστω οι δύο χάρτες συντεταγμένων διάστασης m $(U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2)$ με $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Τότε ο χάρτης $\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \mathbb{R}^m \supset \phi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \phi_2(U_1 \cap U_2) \subset \mathbb{R}^m$ ονομάζεται η **συνάρτηση επικάλυψης** (overlap function) μεταξύ των δύο χαρτών.

δ): Έστω η οικογένεια των χαρτών διάστασης m $\mathcal{A} = (U_i, \phi_i), i \in I$ ούτως ώστε:

$$1) \bigcup_{i \in I} U_i = \mathcal{M} \quad (2.1.3)$$

$$2) \forall i, j \in I, \phi_j \circ \phi_i^{-1} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$$

(δηλαδή κάθε συνάρτηση επικάλυψης είναι απείρως παραγωγίσιμη στον \mathbb{R}^m)
 Τότε η οικογένεια $\mathcal{A} = (U_i, \phi_i)$ ονομάζεται **άτλαντας διάστασης m** (m -dimensional atlas) στον \mathcal{M} .

Εάν ο άτλας \mathcal{A} δεν περιέχεται σε κανέναν άλλον άτλαντα του \mathcal{M} , δηλ. $\nexists \mathcal{A}' : \mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$, ο \mathcal{A} λέγεται **πλήρης** (complete). Τότε η οικογένεια (U_i, ϕ_i) λέγεται **διαφορική δομή** (differential structure) στον \mathcal{M} , διάστασης m . Ο \mathcal{M} τότε ονομάζεται **διαφορίσιμη πολλαπλότητα** (differentiable manifold), ή απλώς **m -πολλαπλότητα** (m -manifold).

ε): Έστω το σημείο $p \in U \subset \mathcal{M}$, με \mathcal{M} κάποιο τοπολογικό χώρο, και έστω ο χάρτης (U, ϕ) του \mathcal{M} . Τότε αν το σημείο $\mathbb{R}^m \ni \phi(p)$ έχει συντεταγμένες στον \mathbb{R}^m $(\phi^1(p), \dots, \phi^m(p))$, ορίζουμε τις **συναρτήσεις συντεταγμένων** (coordinate functions) $\phi^\mu(p) : U \rightarrow \mathbb{R}, \mu = 1, \dots, m$ με τη βοήθεια των λεγόμενων **συναρτήσεων προβολής** (projection functions) $u^\mu : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, u^\mu(x) := x^\mu$, ως

$$\phi^\mu(p) := u^\mu(\phi(p)) \quad (2.1.4)$$

(Ορισμός 2.1 του [19] - βλ. Σχήμα 1)

Ορισμός 5:α): Μία απεικόνιση $\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{M}$ που είναι και \mathcal{C}^∞ λέγεται **καμπύλη** (curve) πάνω στον \mathcal{M} .

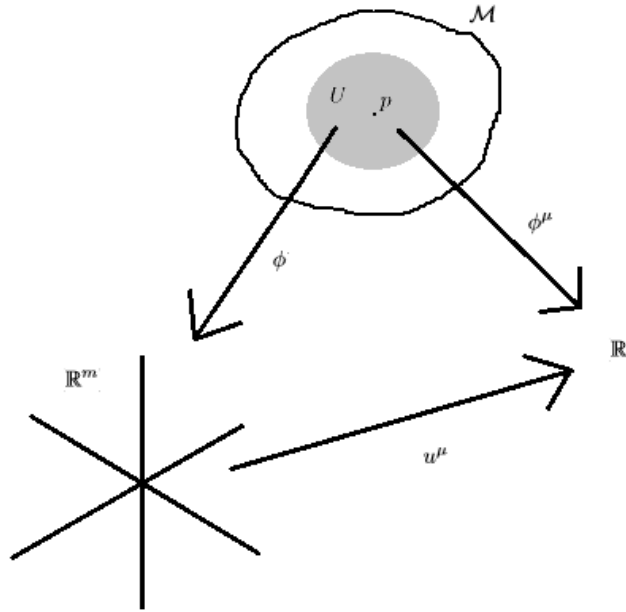
β): Έστω δύο καμπύλες $\sigma_1(t), \sigma_2(t)$. Εάν:

$$1) \sigma_1(0) = \sigma_2(0) = p \in \mathcal{M} \text{ και}$$

$$2) \left. \frac{d\sigma_1}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d\sigma_2}{dt} \right|_{t=0} \quad (2.1.5)$$

οι δύο καμπύλες λέγονται **εφαπτόμενες στο p** (tangent at p). Σημειώνουμε πως οι καμπύλες εφαπτόνται μεταξύ τους όσο και στον \mathcal{M} .

γ): Το σύνολο όλων των καμπυλών εφαπτόμενων μεταξύ τους και στον \mathcal{M} στο p ονομάζεται **εφαπτόμενο διάνυσμα** (tangent vector) στο p . Το σύνολο $T_p \mathcal{M}$ όλων των εφαπτόμενων στο p διανυσμάτων ονομάζεται **εφαπτόμενος χώρος**



Σχήμα 1: Συναρτήσεις συντεταγμένων για κάποιο άτλαντα \mathcal{A}

(tangent space) του \mathcal{M} στο p . Το σύνολο

$$T\mathcal{M} := \bigcup_{p \in \mathcal{M}} T_p \mathcal{M} \quad (2.1.6)$$

ονομάζεται **εφαπτόμενη δέσμη** (tangent bundle) του \mathcal{M} (βλ. Ορισμό 2.4).

Ορισμός 6: Έστω η απεικόνιση $v : \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε, $\forall \kappa, \lambda \in \mathbb{R}, f, g, \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$:

$$\begin{aligned} 1) v(\kappa f + \lambda g) &= \kappa v(f) + \lambda v(g) \\ 2) v(fg) &= f(p)(v(g)) + (v(f))g(p) \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

Τότε η v ονομάζεται **παραγωγή** (differentiation) στο $p \in \mathcal{M}$.

Το σύνολο όλων των παραγωγίσεων στο p συμβολίζεται με $\mathcal{D}_p \mathcal{M}$. (Ορισμός 2.6).

Σε αυτό το σημείο, αποδεικνύουμε ένα πολύ σημαντικό θεώρημα:

Θεώρημα 1: Αν ορίσουμε ένα σύνολο παραγωγίσεων

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)_p f := \frac{\partial}{\partial u^\mu} f \circ \phi^{-1} \Big|_{\phi(p)} \quad (2.1.8)$$

με $\mu = 1, \dots, \dim(\mathcal{M}) = m$ και (U, ϕ) κάποιο χάρτη συντεταγμένων του \mathcal{M} που περιέχει το $p \in \mathcal{M}$, τότε το σύνολο αυτό είναι βάση του $\mathcal{D}_p\mathcal{M}$.

(Σημείωση: Στο εξής, θα χρησιμοποιούμε τη σύμβαση Einstein: $\sum_{\mu} a^{\mu} b_{\mu} \equiv a^{\mu} b_{\mu}$. Το μ θα ονομάζεται βουβός δείκτης, dummy index)

Απόδειξη: Έστω ο χάρτης (U, x) και το σύνολο $e_{\mu} := \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \Big|_p$ όπως ορίστηκε. Δείχνουμε γραμμική ανεξαρτησία:

$$c^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \Big|_p = 0 \Rightarrow c^{\mu} = 0 \forall \mu$$

. Η $x : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ανήκει σε χάρτη, άρα είναι ομοιομορφισμός μεταξύ του $(\mathcal{M}, \mathbb{R}^m)$, άρα είναι συνεχής. Το ίδιο θα είναι και οι συνιστώσες της x^{μ} . Οπότε αν $x \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathcal{M}) \Rightarrow x^{\mu} \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathcal{M})$.

$$e_{\mu}(x^{\nu}) = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \Big|_p (x^{\nu}) \quad (2.1.9)$$

Έστω $x = x_{\parallel} + x_{\perp}$, $x_{\parallel} = (0, \dots, x^{\nu}, \dots, 0)$. Τότε $x_{\perp} = (x^1, \dots, 0, \dots, x^m)$.

$$\text{Δηλαδή } x \circ x_{\parallel}^{-1} \Big|_{x_{\parallel}(p)} = u^{\nu}, x \circ x_{\perp}^{-1} \Big|_{x_{\perp}(p)} = u^{\rho}, \rho \neq \nu. \quad (2.1.10)$$

Παρατηρούμε πως $x \circ (x_{\parallel}^{-1} \Big|_{x_{\parallel}(p)} + x_{\perp}^{-1} \Big|_{x_{\perp}(p)}) = u^{\rho} = x \circ x^{-1} \Big|_{x(p)}$, $\rho = 1, \dots, m$. (2.1.11)

Οπότε

$$\begin{aligned} e_{\mu}(x^{\nu}) &= \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \Big|_p (x^{\nu}) = \frac{\partial}{\partial u^{\mu}} (x \circ x^{-1}) \Big|_{x(p)} = \\ &= \frac{\partial}{\partial u^{\mu}} (x \circ (x_{\parallel}^{-1} \Big|_{x_{\parallel}(p)} + x_{\perp}^{-1} \Big|_{x_{\perp}(p)})) = \frac{\partial}{\partial u^{\mu}} (u^{\nu} + 0) \end{aligned}$$

Αλλά οι u^{μ} είναι συναρτήσεις του \mathbb{R}^m , οπότε ισχύει

$$\frac{\partial}{\partial u^{\mu}} u^{\nu} = \delta_{\mu}^{\nu}, \delta_{\mu}^{\nu} = \begin{cases} 1, \mu = \nu \\ 0, \mu \neq \nu \end{cases}. \quad (2.1.12)$$

Έτσι, $c^{\mu} e_{\mu} = 0 \Rightarrow (c^{\mu} e_{\mu}) x^{\nu} = 0 \Rightarrow c^{\mu} (e_{\mu} x^{\nu}) = 0 \Rightarrow c^{\mu} \delta_{\mu}^{\nu} = 0 \Rightarrow c^{\nu} = 0 \forall \nu$.

Πρέπει να δείξουμε και πληρότητα, δηλαδή πως $\forall X \in \mathcal{D}_p\mathcal{M} \quad X = c^{\mu} e_{\mu}$.

Έστω $\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{M}$ μια $\mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$ καμπύλη με $\sigma(0) = p$. Έστω επίσης μια $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathcal{M})$.

$$\text{Me}(y')(T \in \mathbb{R}) := \frac{dy(t)}{dt} \Big|_{t=T} : \quad (2.1.13)$$

$$\begin{aligned}
X \in D_p \mathcal{M} &\Rightarrow \exists \sigma, f : X(f) = (f \circ \sigma)'(0) = \frac{\partial}{\partial x^\mu} f(x(p)) ((x^{-1} \circ \sigma)^\mu)'(0) = \\
&= (e_\mu(f)) ((x^{-1} \circ \sigma)^\mu)'(0) = ((x^{-1} \circ \sigma)^\mu(0) e_\mu)(f) = (c^\mu e_\mu)(f) \Rightarrow \\
&\Rightarrow c^\mu = ((x^{-1} \circ \sigma)^\mu)'(0) \quad \forall X \in \mathcal{D}_p \mathcal{M}, \text{ ο.έ.δ.}
\end{aligned}$$

Σε αυτό το σημείο, έχουμε θεμελιώσει μαθηματικές δομές με δείκτες 'πάνω' και δείκτες 'κάτω', και τις έχουμε συνδέσει με άλλες καλώς ορισμένες δομές (τις διαφορίσιμες πολλαπλότητες) για τις οποίες δε χρειάζεται να έχουμε κάποια πληροφορία πέραν της μετρικής συνάρτησής τους και κάποιου χάρτη συντεταγμένων (πάντα στη γειτονιά κάποιου σημείου). Επίσης, έχουμε βρει βάσεις τόσο για τους 'πάνω' δείκτες (είναι οι ίδιες οι συντεταγμένες του σημείου, δοσμένες από το χάρτη ϕ στον $\mathbb{R}^{\dim(\mathcal{M})}$), όσο και για τους 'κάτω' (μερικές παράγωγοι ως προς τις συντεταγμένες αυτές). Μας μένουν λίγα ακόμη στοιχεία, αλλά εξόχως σημαντικά, από τη Διαφορική Γεωμετρία.

Ορισμός 7: α): Έστω η απεικόνιση $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$, \mathcal{M}, \mathcal{N} τοπολογικοί χώροι που έχουν την ίδια δομή. Αν

$$\forall x, y \in \mathcal{M} \quad f(xy) = f(x)f(y) \quad (2.1.14)$$

η f λέγεται **ομομορφισμός** (homomorphism). Λέμε επίσης πως η f διατηρεί τη δομή των \mathcal{M}, \mathcal{N} .

β): Αν υπάρχει ένας ομομορφισμός $g : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ τέτοιος ώστε

$$\begin{aligned}
1) \quad (g \circ f)(x) &= x, \quad \forall x \in \mathcal{M} \\
2) \quad (f \circ g)(y) &= y, \quad \forall y \in \mathcal{N}
\end{aligned} \quad (2.1.15)$$

τότε οι f, g καλούνται **ισομορφισμοί** (isomorphisms), και οι \mathcal{M}, \mathcal{N} ονομάζονται **ισομορφικοί**. Γράφουμε $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$.

Σημειώνουμε πως ο Ορισμός 3) περί ομοιομορφισμού είναι ισχυρότερος από τον Ορισμό 7β) περί ισομορφισμού δύο τοπολογικών χώρων. Δηλαδή, αν $\mathcal{M} \simeq \mathcal{N} \Rightarrow \mathcal{M} \cong \mathcal{N}$. Αυτό δεν ισχύει εν γένει: αλλά για τοπολογικούς χώρους είναι ασφαλές συμπέρασμα.

Θεώρημα 2: $T_p \mathcal{M} \cong \mathcal{D}_p \mathcal{M}$ (βλ. Θεώρημα 2.2).

Απόδειξη: Έστω η απεικόνιση $\iota : T_p \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{D}_p \mathcal{M}$

$$\iota(v)(f) := \left. \frac{df(\sigma(t))}{dt} \right|_{t=0} \quad (2.1.16)$$

με $\sigma(t=0)$ να εφάπτεται στον \mathcal{M} στο p . Εδώ, v είναι το εφαπτόμενο διάνυσμα στον \mathcal{M} που παράγεται από τη $\sigma(t)$.

Το ότι η ι είναι γραμμική είναι προφανές από τη γραμμικότητα του διαφορικού τελεστή στον \mathbb{R} .

Δείχνουμε πως η ι είναι '1-1': έστω πως υπάρχουν στο p δύο εφαπτόμενα διανύσματα, v_1 και $v_2 \in T_p\mathcal{M}$ που παράγονται από τις καμπύλες σ_1 και σ_2 .

$$\iota(v_1)(x^\mu) = \iota(v_2)(x^\mu) \Rightarrow \left. \frac{dx^\mu(\sigma_1(t))}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{dx^\mu(\sigma_2(t))}{dt} \right|_{t=0}$$

Οπότε οι σ_1, σ_2 εφάπτονται και μεταξύ τους: άρα, έχουν το ίδιο εφαπτόμενο διάνυσμα: $v_1 = v_2$.

Δείχνουμε πως η ι είναι 'επί': Έστω μια $v \in \mathcal{D}_p\mathcal{M}$ και μια καμπύλη $\sigma_v : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{M}$ τέτοια ώστε:

$$\begin{aligned} 1) : \sigma_v(0) &= p \\ 2) : v(x^\mu) &= \left. \frac{d}{dt}(x^\mu \circ \sigma_v(t)) \right|_{t=0} \end{aligned} \quad (2.1.17)$$

Τότε για $f \in C^\infty(\mathcal{M})$, $v \in \mathcal{D}_p\mathcal{M}$ (χρησιμοποιώντας συντεταγμένες x):

$$\begin{aligned} v(f) &= v^\mu e_\mu f = v(x^\mu) e_\mu f \\ &= v(x^\mu) \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)_p f = \left(x^\mu \circ \left. \frac{d\sigma_v(t)}{dt} \right|_{t=0} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)_p f \\ &= \left(\left. \frac{du^\mu(\phi \circ \sigma_v)}{dt} \right|_{t=0} \right) \left(\frac{\partial}{\partial u^\mu} \right)_{\phi(p)} (f \circ \phi^{-1}) \\ &= \left. \frac{d}{dt} (f \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \sigma_v) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \sigma_v) \\ &= \iota(v)(f). \end{aligned}$$

Άρα η ι είναι 'επί'. Συνάρτηση '1-1' και 'επί' είναι αντιστρέψιμη, άρα υπάρχει και η $\iota^{-1} : \mathcal{D}_p\mathcal{M} \rightarrow T_p\mathcal{M}$. Οπότε $T_p\mathcal{M} \cong \mathcal{D}_p\mathcal{M}$, ο.έ.δ.

Με αυτά τα εργαλεία είμαστε έτοιμοι να συνδέσουμε τις δομές με δείκτη 'πάνω' με διανύσματα, και αυτές με δείκτη 'κάτω' με φόρμες. Στο επόμενο τμήμα θα ορίσουμε αναλυτικά αυτές τις έννοιες, και θα καταλήξουμε στην έννοια του **τανυστή**.

Εισάγουμε και μια καινούρια έννοια που θα μας είναι χρήσιμη:

Ορισμός 8: Έστω \mathcal{M}, \mathcal{N} δύο (ψευδο-)μετρικοί χώροι εφοδιασμένοι με μετρικές συναρτήσεις $d_{\mathcal{M}}, d_{\mathcal{N}}$. Αν υπάρχει μια αντιστρέψιμη απεικόνιση $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ τέτοια

ώστε

$$\forall a, b \in \mathcal{M} : d_{\mathcal{N}}(\phi(a), \phi(b)) = d_{\mathcal{M}}(a, b)$$

(δηλαδή οι αποστάσεις διατηρούνται μεταξύ των \mathcal{M} και \mathcal{N}), η ϕ ονομάζεται **ισομετρία μεταξύ των \mathcal{M}, \mathcal{N}** (isometry between \mathcal{M}, \mathcal{N}).

2.2 Τανυστές

2.2.1 Σύνδεση με Διαφορική Γεωμετρία

Ορισμός 9: Έστω μία διαφορίσιμη, C^∞ -πολλαπλότητα \mathcal{M} . Το αντικείμενο X που πληροί τα παρακάτω:

$$\begin{aligned} \forall f \in C^\infty(\mathcal{M}), p \in \mathcal{M}, \eta \text{ απεικόνιση } Xf : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} : \\ (Xf)(p) := X_p(f) \in C^\infty(\mathbb{R}) \\ X_p \in T_p\mathcal{M} \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

ονομάζεται **διανυσματικό πεδίο στην \mathcal{M}** (vector field on \mathcal{M}) (βλ. Ορισμό 3.1).

Λαμβάνοντας έναν χάρτη (\mathcal{M}, ϕ) (ή, χωρίς βλάβη της γενικότητας, χάρτη (U, ϕ) με U οποιοδήποτε ανοικτό υποσύνολο του \mathcal{M}), το διανυσματικό πεδίο έχει **στοιχεία** (components) (βλ. Σημ. 8 του Ορισμού 3.1)

$$X^\mu := Xx^\mu, X = X^\mu e_\mu = X^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)_p. \quad (2.2.2)$$

(θυμόμαστε το Θεώρημα 2), πως οι $T_p\mathcal{M}$ και $\mathcal{D}_p\mathcal{M}$ είναι ισομορφικοί)

Αν είχαμε κάποιον άλλο χάρτη \mathcal{M}, ϕ' (ή πάλι χάρτη (U', ϕ') με $U \cap U' \neq \emptyset$),

$$X = X^\mu e_\mu = X'^\nu e'_\nu \Leftrightarrow X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = X'^\nu \frac{\partial}{\partial x'^\nu} \quad (2.2.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \quad (2.2.4)$$

Αντικαθιστώντας την 2.2.4 στην 2.2.3, έχουμε:

$$X^\mu \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x'^\nu} = X'^\nu \frac{\partial}{\partial x'^\nu} \quad (2.2.5)$$

Καταλήγουμε έτσι στον κανόνα μετασχηματισμού των στοιχείων ενός διανυσματικού πεδίου, όταν αλλάζουμε χάρτες από $(U, \phi) \mapsto (U', \phi')$:

$$\boxed{X'^\nu = X^\mu \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}} \quad (2.2.6)$$

Ορισμός 10(α): Έστω $k : T_p\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ μια πραγματική, γραμμική απεικόνιση. Η k ονομάζεται **συνεφαπτόμενο διάνυσμα** (cotangent vector) του \mathcal{M} στο p . Όταν δρα πάνω σε κάποιο $v \in T_p\mathcal{M}$, $k(v) \equiv \langle k, v \rangle$.

β): Το σύνολο $T_p^* \mathcal{M}$ όλων των συνεφαπτόμενων διανυσμάτων στο p λέγεται **συνεφαπτόμενος χώρος** (cotangent space) του \mathcal{M} στο p .

γ): Το σύνολο $T^* \mathcal{M} := \bigcup_{p \in \mathcal{M}} T_p^* \mathcal{M}$ όλων των συνεφαπτόμενων χώρων λέγεται **συνεφαπτόμενη δέσμη** (cotangent bundle) του \mathcal{M} .

Ορισμός 11: Έστω X ένα διανυσματικό πεδίο στη C^∞ -διαφορίσιμη πολλαπλότητα \mathcal{M} . Το αντικείμενο ω που πληροί τα παρακάτω:

$$\begin{aligned} \forall p \in \mathcal{M}, X \text{ διανυσματικό πεδίο :} \\ \langle \omega, X \rangle(p) := \langle \omega_p, X_p \rangle \in C^\infty(\mathbb{R}) \\ \omega_p \in T_p^* \mathcal{M} \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

ονομάζεται **1-φόρμα** (one-form) στην \mathcal{M} . (βλ. Ορισμό 3.8)

Ακριβώς όπως βρήκαμε πως για τον $\mathcal{D}_p \mathcal{M}$ (και άρα για τον $T_p \mathcal{M} \cong \mathcal{D}_p \mathcal{M}$) βρήκαμε μια βάση $e_\mu := \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)_p$ (βλέπε Θεώρημα 1), ορίζουμε μια σειρά αντικειμένων $\tilde{e}^\mu := (dx^\mu)_p$ τέτοια ώστε

$$\langle \tilde{e}^\mu, e_\nu \rangle = \delta_\nu^\mu \quad (2.2.8)$$

Εντελώς ανάλογα με την 2.2.2, έχουμε

$$k_\mu := \left\langle k, \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)_p \right\rangle, \quad k = k_\mu \tilde{e}^\mu = k_\mu (dx^\mu)_p \quad (2.2.9)$$

Και η δράση μιας 1-φόρμας k πάνω σε ένα τυχαίο διανυσματικό πεδίο X που μοιράζεται τον ίδιο χάρτη (\mathcal{M}, ϕ) είναι απλώς

$$\langle k, X \rangle = k_\mu X^\mu \quad (2.2.10)$$

Χρησιμοποιώντας πάλι δύο χάρτες $(U, \phi), (U', \phi'), U \cap U' \neq \emptyset$

$$k = k_\mu \tilde{e}^\mu = k'_\nu \tilde{e}'^\nu \Leftrightarrow k_\mu dx^\mu = k'_\nu dx'^\nu \quad (2.2.11)$$

$$dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} dx'^\nu \quad (2.2.12)$$

Αντικαθιστώντας την 2.2.12 στην 2.2.11, έχουμε:

$$k_\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} dx'^\nu = k'_\nu dx'^\nu \quad (2.2.13)$$

Και συνεπώς εξάγουμε τον κανόνα μετασχηματισμού των στοιχείων μιας 1-φόρμας, όταν αλλάζουμε χάρτες από $(U, \phi) \mapsto (U', \phi')$:

$$\boxed{k'_\nu = k_\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}} \quad (2.2.14)$$

Παρατηρούμε πως η 2.2.9 μοιάζει σχεδόν όμοια με την 2.2.2, αλλά με το $\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \mapsto \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}$. Αυτή η διαφορά είναι και η ουσιαστική, που διαχωρίζει τα διανυσματικά πεδία από τις φόρμες 'με μια ματιά': ο κανόνας μετασχηματισμού της μίας είναι ο αντίστροφος του κανόνα της άλλης! Χρήζει μνείας αυτή η παρατήρηση.

Εισάγοντας τον πίνακα μετασχηματισμού συντεταγμένων

$$A'_\mu := \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}, \text{ έχουμε:}$$

$$\begin{cases} A^{-1}A = \mathbb{I} \\ \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\rho} = \delta^\mu_\rho \end{cases} \iff (A^{-1})^\mu_\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} \quad (2.2.15)$$

$$2.2.6 \Leftrightarrow X'^\nu = X^\mu A'_\mu$$

$$2.2.14 \Leftrightarrow k'_\nu = k_\mu (A^{-1})^\mu_\nu$$

Και έτσι έχουμε καταλήξει (σχεδόν..!) στον ορισμό του τανυστή.

Ορισμός 12: Τανυστής είδους (r, q) (tensor of type (r, q)) με $r, q \in \mathbb{N}$ ονομάζεται η απεικόνιση

$$R : \underbrace{(T_p^* \mathcal{M} \times \dots \times T_p^* \mathcal{M})}_{r \text{ φορές}} \times \underbrace{(T_p \mathcal{M} \times \dots \times T_p \mathcal{M})}_{q \text{ φορές}} \rightarrow \mathbb{R},$$

όπου με \times υποδηλώνεται το σύνηθες Καρτεσιανό γινόμενο (βλ. Ορισμό 3.12, Σημ. 2 του [19])

Τότε ο R έχει στοιχεία

$$R_{b_1, \dots, b_q}^{a_1, \dots, a_r}(x) := \underbrace{(X_1 x^{a_1}) \dots (X_r x^{a_r})}_{r \text{ φορές}} \underbrace{\left\langle k_1, \left(\frac{\partial}{\partial x^{b_1}} \right)_p \right\rangle \dots \left\langle k_q, \left(\frac{\partial}{\partial x^{b_q}} \right)_p \right\rangle}_{q \text{ φορές}} \quad (2.2.16)$$

με $X_j x^\mu \in T_p \mathcal{M} \forall j = 1, \dots, r$ και $k_j \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)_p \in T_p^* \mathcal{M} \forall j = 1, \dots, q$.

Τότε (βλ. 2.2.2, 2.2.9)

$$R = R_{b_1, \dots, b_q}^{a_1, \dots, a_r} \underbrace{e_{a_1}(\dots) e_{a_r}}_{r \text{ φορές}} \underbrace{\tilde{e}^{b_1}(\dots) \tilde{e}^{b_q}}_{q \text{ φορές}} \quad (2.2.17)$$

Επίσης, από την Εξ.2.2.15:

$$\boxed{R'_{\beta_1, \dots, \beta_q}^{\alpha_1, \dots, \alpha_r}(x') = \underbrace{A_{a_1}^{\alpha_1} \dots A_{a_r}^{\alpha_r}}_{r \text{ φορές}} \underbrace{(A^{-1})_{\beta_1}^{b_1} \dots (A^{-1})_{\beta_q}^{b_q}}_{q \text{ φορές}} R_{b_1, \dots, b_q}^{a_1, \dots, a_r}(x)}. \quad (2.2.18)$$

Οι ‘πάνω’ δείκτες του $R_{b_1, \dots, b_q}^{a_1, \dots, a_r}$ ονομάζονται **ανταλλοιώτοι** (contravariant): οι ‘κάτω’ **συναλλοιώτοι** (covariant).

2.2.2 Ο μετρικός τανυστής

Παρατηρούμε πως

$$\begin{aligned} & \langle (\lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2), (\varpi_1 X_1 + \varpi_2 X_2) \rangle \\ &= \langle ((\lambda_1 k_{1,\mu} + \lambda_2 k_{2,\mu}) \tilde{e}^\mu), ((\varpi_1 X_1^\nu + \varpi_2 X_2^\nu) e_\nu) \rangle \\ &= \langle \lambda_1 k_{1,\mu} \tilde{e}^\mu + \lambda_2 k_{2,\mu} \tilde{e}^\mu, \varpi_1 X_1^\nu e_\nu + \varpi_2 X_2^\nu e_\nu \rangle \\ &= \lambda_1 \varpi_1 \langle k_1, X_1 \rangle + \lambda_1 \varpi_2 \langle k_1, X_2 \rangle + \lambda_2 \varpi_1 \langle k_2, X_1 \rangle + \lambda_2 \varpi_2 \langle k_2, X_2 \rangle. \end{aligned} \quad (2.2.19)$$

Η δράση μιας 1-φόρμας πάνω σε ένα διανυσματικό πεδίο είναι **διγραμμική** (bilinear). Επίσης, απεικονίζει $T^*M \times TM \rightarrow \mathbb{R}$. Αυτό μας κάνει να υποψιαζόμαστε πως η δράση αυτή πρέπει να συνδέεται με το εσωτερικό γινόμενο: αν μπορούσαμε να βρούμε μια απεικόνιση $\eta : TM \rightarrow T^*M$ ούτως ώστε να καταστήσουμε ένα διανυσματικό πεδίο $X^\mu \mapsto k_\nu = \eta_{\nu\mu} X^\mu$, θα μπορούσαμε να ορίσουμε το εσωτερικό γινόμενο. Πέραν της διγραμμικότητας, το εσωτερικό γινόμενο πρέπει να είναι και αντιμεταθετικό ($a \cdot b = b \cdot a \forall a, b$). Έτσι, καταλήγουμε στον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 13: Μετρικός τανυστής (metric tensor) $g_{\mu\nu}$ ονομάζεται εκείνος ο (0,2)-είδους τανυστής τέτοιος ώστε, αν $X, Y \in TM$ διανυσματικά πεδία,

$$X \cdot Y = X^\mu g_{\mu\nu} Y^\nu = X_\nu Y^\nu = X^\mu Y_\mu = Y \cdot X \quad (2.2.20)$$

Άμεση συνέπεια της 2.2.20 είναι πως $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ ($X \cdot Y = Y \cdot X$). Ο μετρικός τανυστής είναι **συμμετρικός στην εναλλαγή των δεικτών του**.

Ο μετρικός τανυστής μετατρέπει διανυσματικά πεδία, που είναι ανταλλοίωτοι τανυστές είδους (1,0), σε 1-φόρμες, δηλαδή συναλλοίωτους τανυστές είδους (0,1). Με άλλα λόγια, *κατεβάζει το δείκτη* του ανταλλοίωτου τανυστή από 'πάνω' προς τα 'κάτω'. Εντελώς ανάλογα, ορίζεται ο **αντίστροφος μετρικός τανυστής** $(g^{-1})^{\mu\nu}$ (ή απλώς $g^{\mu\nu}$, που είναι τανυστής είδους (2,0) (ανεβάζει δείκτες) και για τον οποίο ισχύει:

$$g_{\mu\rho}g^{\rho\nu} = g^{\rho\nu}g_{\mu\rho} = \delta_{\mu}^{\nu}. \quad (2.2.21)$$

Η απαίτηση 2) του Ορισμού 2) είναι, φυσικά, ισοδύναμη με την απαίτηση η $g_{\mu\nu}$ να είναι θετικά ημιορισμένη (positive semidefinite), καθώς $X \cdot X = d(X, X)$. Σε πρώτη προσέγγιση, αυτό φαίνεται να είναι πρόβλημα για τη σχετικότητα: στην ειδική σχετικότητα, παραδείγματος χάρη, υπάρχουν διανύσματα με αρνητική νόρμα! ($d(X, X) < 0$) Φυσικό είναι, διότι ο μετρικός τανυστής του χώρου Minkowski $\mathbb{M}^{3,1}$ είναι

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1),$$

οπότε έχει μία ιδιοτιμή $\lambda_- = -1$, και άρα δεν είναι θετικά ημιορισμένος. Το μαθηματικό μας υπόβαθρο ισχύει ακόμα, όμως, και εάν η πολλαπλότητα \mathcal{M} είναι Λορεντζιανή:

Ορισμός 14: Ένας τοπολογικός χώρος \mathcal{M} εφοδιασμένος με μετρική συνάρτηση d' που ικανοποιεί τις συνθήκες 1) και 3) του Ορισμού 2), αλλά όχι τη συνθήκη 2) (συνθήκη μη-αρνητικής νόρμας), ονομάζεται **Λορεντζιανός** (Lorentzian). Λέγεται επίσης (και πιο 'σωστά') **ψευδο-μετρικός** (pseudo-metric).

Τέλος, σημειώνουμε μια σχέση που ισχύει για το μετρικό τανυστή: για συντεταγμένες x^μ, x'^ν που προκύπτουν από δύο διαφορετικούς χάρτες $(U, \phi), (U', \phi')$ με $U \cap U' \neq \emptyset$, ισχύει

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} g_{\lambda\sigma} \quad (2.2.22)$$

2.2.3 Σύνδεση: Πεδία με ακέραιο spin s

Είναι αρκετά εύκολο να δούμε πως ένα διάνυσμα συντεταγμένων x^μ μετασχηματίζεται ως ένα διανυσματικό πεδίο υπό αλλαγή συντεταγμένων (βλ. Εξ. 2.2.6). Στην περίπτωση όπου η πολλαπλότητά μας είναι Λορεντζιανή, η αλλαγή αυτή α-

ντιστοιχεί σε τυπικούς μετασχηματισμούς Lorentz:

$$A_\mu^\nu = \begin{bmatrix} \cosh(\theta) & -\sinh(\theta) & 0 & 0 \\ -\sinh(\theta) & \cosh(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2.23)$$

$$\cosh(\theta) = \gamma, \sinh(\theta) = \beta\gamma, \gamma := \frac{1}{(1 - \beta^2)^{1/2}}, \beta := \frac{v}{c}$$

$$\cosh^2(\theta) - \sinh^2(\theta) = \gamma^2(1 - \beta^2) = \frac{1 - \beta^2}{1 - \beta^2} = 1$$

Τότε π.χ. στο Κομμάτι 3.2 του [17] δίδεται ένας τρόπος να αποσυντεθεί ένα διανυσματικό πεδίο a^μ , με χρήση ενός πίνακα $\mathcal{A} \in SL(2, \mathbb{C})$ (που έχει δηλαδή μιγαδικά στοιχεία και είναι ορίζουσας +1), σε ένα τμήμα που συμπεριφέρεται ως spin-0 κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz, και ένα που συμπεριφέρεται ως spin-1:

$$U(\Lambda)\mathcal{A}_n U^{-1}(\Lambda) = \mathcal{A}_{\Lambda n}(D^{s=0}(\Lambda, n) \oplus D^{s=1}(\Lambda, n))$$

(όπου Λ ο μετασχηματισμός και $U(\Lambda)$ η αναπαράστασή του στον $SL(2, \mathbb{C})$, n το όνομα του διανύσματος, $\mathcal{A} \in SL(2, \mathbb{C})$ ο πίνακας που παράγεται από τις συνιστώσες του n , $D^{s=l}$ η spin-1 αναπαράσταση στην ομάδα Lorentz $SO(1, 3)$).

Άρα, μπορούμε να αποδεχτούμε πως ένα spin-1 πεδίο αναπαρίσταται σε μία Λορεντζιανή πολλαπλότητα ως διάνυσμα (τεχνικά, διανυσματικό πεδίο) a^μ , δηλαδή ως τανυστής είδους (1,0). Από τις σχέσεις 2.2.18, 2.2.20 προκύπτει πως ένα spin-1 πεδίο αναπαρίσταται (κατ'άρχη με ανταλλοίωτους δείκτες) ως τανυστής T^{a_1, \dots, a_s} είδους (s,0), και έπειτα μπορεί να κατεβούν δείκτες ούτως ώστε να αναπαρασταθεί (σε ανάμικτη μορφή) ως τανυστής $T_{b_1, \dots, b_q}^{a_1, \dots, a_r}$ είδους (r,q) με μόνη συνθήκη $r+q = s$. Δηλαδή, ένα spin-2 πεδίο αναπαρίσταται ως τανυστής (2,0)-είδους T^{ab} .

2.3 Παράλληλη μεταφορά και η συναλλοίωτη παράγωγος

(Σημείωση: Εδώ θα ακολουθήσουμε το σύγγραμμα του Weinberg, [36]: θα αναφερόμαστε εκεί)

2.3.1 Η ομοπαράλληλη σύνδεση

Ορισμός 15: Έστω συντεταγμένες x^μ που προκύπτουν από κάποιο χάρτη (U, ϕ) μιας διαφορίσιμης πολλαπλότητας \mathcal{M} , και x'^α που προκύπτουν από τον (U', ϕ') (ως συνήθως, $U \cap U' \neq \emptyset$). Η ποσότητα

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda := \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \quad (2.3.1)$$

ονομάζεται **ομοπαράλληλη σύνδεση** (affine connection) στην \mathcal{M} . Αλλιώς, η ποσότητα αυτή ονομάζεται **σύμβολο Christoffel 2^{ου} είδους** (Christoffel symbol of the second kind). Ισχύει $\Gamma_{\nu\mu}^\lambda = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda$.

Θυμούμενοι την Εξ. 2.2.22,

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} &= \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\rho \partial x^\mu} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} + \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 x'^\beta}{\partial x^\rho \partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} \\ &\stackrel{(2.3.1)}{=} \left(\Gamma_{\rho\mu}^\alpha \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} + \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \Gamma_{\rho\nu}^\beta \right) \eta_{\alpha\beta} \\ &= \left(\Gamma_{\rho\mu}^\sigma \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\rho\nu}^\sigma \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\sigma} \right) \eta_{\alpha\beta} \\ &= \Gamma_{\rho\mu}^\sigma \eta_{\sigma\nu} + \Gamma_{\rho\nu}^\sigma \eta_{\sigma\mu} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\partial \eta_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial \eta_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \eta_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} \\ &= \Gamma_{\lambda\mu}^\sigma \eta_{\sigma\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma \eta_{\sigma\mu} + \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma \eta_{\sigma\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \eta_{\sigma\lambda} - \Gamma_{\nu\mu}^\sigma \eta_{\sigma\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma \eta_{\sigma\mu} \\ &= 2(\Gamma_{\lambda\mu}^\sigma \eta_{\sigma\nu}) + (\Gamma_{\lambda\nu}^\sigma - \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma) \eta_{\sigma\mu} + (\Gamma_{\mu\nu}^\sigma - \Gamma_{\nu\mu}^\sigma) \eta_{\sigma\lambda} = 2\Gamma_{\lambda\mu}^\sigma \eta_{\sigma\nu}. \end{aligned}$$

$$\text{Έτσι, } \Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} \eta^{\rho\lambda} \left(\frac{\partial \eta_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial \eta_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \eta_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \right) \quad (2.3.2)$$

(βλ. Κεφ. 3.2, 3.3 του [36])

Παρατηρούμε πως, αν εφαρμόσουμε αλλαγή συντεταγμένων στον $\Gamma_{\mu\nu}^\rho(x)$ προς νέες συντεταγμένες y^μ ,

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho'}(y) = \frac{\partial y'^\rho}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial y^\mu \partial y^\nu}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial y^\rho}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial}{\partial y^\mu} \left(\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\lambda}{\partial y^\nu} \right) \\
&= \frac{\partial y^\rho}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\alpha} \left(\frac{\partial x^\tau}{\partial y^\mu} \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\tau \partial x^\lambda} \frac{\partial x^\lambda}{\partial y^\nu} + \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\lambda} \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial y^\mu \partial y^\nu} \right) \\
&= \underbrace{\frac{\partial y^\rho}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\tau}{\partial y^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\alpha} \Gamma_{\tau\nu}^\alpha}_{\Gamma_{\mu\nu,1}^{\rho}} + \underbrace{\frac{\partial y^\rho}{\partial x^\lambda} \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial y^\mu \partial y^\nu}}_{\Gamma_{\mu\nu,2}^{\rho}} \\
&= A_\sigma^\rho (A^{-1})_\mu^\tau (A^{-1})_\alpha^\nu \Gamma_{\tau\nu}^\alpha + \frac{\partial y^\rho}{\partial x^\lambda} \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial y^\mu \partial y^\nu}
\end{aligned}$$

Το $\Gamma_{\mu\nu,1}^{\rho}$ μετασχηματίζεται σωστά ως ταυνοστής είδους (1,2), μα η ύπαρξη του μη τετριμμένου όρου $\Gamma_{\mu\nu,2}^{\rho}$ θα πει πως η ομοπαράλληλη σύνδεση παραβιάζει τον κανόνα μετασχηματισμού 2.2.18. Οπότε δεν είναι ταυνοστής!

Στη σχετικότητα (δηλαδή μια Λορεντζιανή πολλαπλότητα με καμπυλότητα), υπάρχει για κάθε σημείο $p \in \mathbb{M}^{1,3}$ (με $\mathbb{M}^{1,3}$ υποδηλώνουμε τον 4-διάστατο χωροχρόνο που υπό μετασχηματισμούς Lorentz ανήκει στην ομάδα $SO(1,3)$) υπάρχει ένα σύστημα αναφοράς ξ^ρ τέτοιο ώστε οι πρώτες παράγωγοι του μετρικού ταυνοστή να εξαφανίζονται: $\Gamma_{\mu\nu}^\rho(\xi) = 0$. Αυτό δε θα πει πως η ομοπαράλληλη σύνδεση εξαφανίζεται για κάθε σύστημα συντεταγμένων στη γειτονιά του p ! Με άλλα λόγια, για κάθε σημείο του χωροχρόνου, ορίζεται ένα **τοπικό αδρανειακό σύστημα αναφοράς** (local inertial reference frame): είναι αδρανειακό, διότι σε αυτό το σύστημα δύο σημεία $u^\mu, u^\mu + du^\mu$ που απέχουν απειροελάχιστα μεταξύ τους δε 'νιώθουν' την απόστασή τους (εκφρασμένη στο σύστημα συντεταγμένων ξ) να αλλάζει, αν σε αυτό το σύστημα είναι ακίνητα.

2.3.2 Η συναλλοίωτη παράγωγος

Ας λάβουμε ένα ανταλλοίωτο διάνυσμα $Y^\mu(x)$, ας το μετασχηματίσουμε σε νέες συντεταγμένες $Y'^\mu(x')$ και ας παραγωγίσουμε το αποτέλεσμα ως προς x'^λ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Y'^\mu(x')}{\partial x'^\lambda} &= \frac{\partial}{\partial x'^\lambda} \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} Y^\nu(x) \right) \\
&= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial Y^\nu(x)}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\sigma \partial x^\nu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\lambda} Y^\nu(x). \\
&= A_\nu^\mu (A^{-1})_\lambda^\sigma \frac{\partial Y^\nu}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\sigma \partial x^\nu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\lambda} Y^\nu.
\end{aligned}$$

Και πάλι, η δομή αυτή δε μετασχηματίζεται σωστά. Η δομή που μεταχρηματίζεται ως ταυιστής είναι η

$$\begin{aligned} & \frac{\partial Y'^{\mu}(x')}{\partial x'^{\lambda}} - \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\sigma} \partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\lambda}} Y^{\nu}(x), \\ \Rightarrow \left(\frac{\partial Y'^{\mu}(x')}{\partial x'^{\lambda}} + \Gamma'_{\lambda\nu} Y'^{\nu}(x') \right) &= A^{\mu}_{\nu} (A^{-1})^{\sigma}_{\lambda} \left(\frac{\partial Y^{\nu}(x)}{\partial x^{\sigma}} + \Gamma^{\rho}_{\sigma\rho} Y^{\rho}(x) \right) \\ &\Leftrightarrow \nabla'_{\lambda} Y'^{\mu}(x') = A^{\mu}_{\nu} (A^{-1})^{\sigma}_{\lambda} \nabla_{\sigma} Y^{\nu}(x). \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

Παρομοίως, για 1-φόρμα $\omega_{\mu}(x)$,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \omega'_{\mu}(x')}{\partial x'^{\lambda}} - \Gamma'_{\lambda\mu} \omega'_{\nu}(x') \right) &= (A^{-1})^{\nu}_{\mu} (A^{-1})^{\sigma}_{\lambda} \left(\frac{\partial \omega_{\nu}(x)}{\partial x^{\sigma}} - \Gamma^{\rho}_{\sigma\nu} \omega_{\rho}(x) \right) \\ &\Leftrightarrow \nabla'_{\lambda} \omega'_{\mu}(x') = (A^{-1})^{\nu}_{\mu} (A^{-1})^{\sigma}_{\lambda} \nabla_{\sigma} \omega_{\nu}(x). \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Ορισμός 16: Ο τελεστής ∇_{ρ} που μετασχηματίζει διανυσματικά πεδία και 1-φόρμες όπως οι 2.3.3, 2.3.4 ονομάζεται **συναλλοίωτη παράγωγος** (covariant derivative).

2.3.3 Παράλληλη μεταφορά

Και αν θέλουμε να δράσουμε πάνω σε ταυιστές τύπου $T(t)$, που παραμετρίζονται από μια καμπύλη $\sigma(t)$; Πρέπει να συνεχίσουν να υπακούουν τη σχέση 2.2.18. Έτσι, έχουμε π.χ. για ένα διανυσματικό πεδίο B^{μ} :

$$\begin{aligned} B'^{\mu}(x') &= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} B^{\nu}(x) \\ \Rightarrow \frac{dB'^{\mu}(x'(t))}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} B^{\nu}(x(t)) \right) \\ \Leftrightarrow \frac{dB'^{\mu}(x'(t))}{dt} &= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{dB^{\nu}(x(t))}{dt} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \right) B^{\nu}(x) \\ \frac{dB'^{\mu}(x'(t))}{dt} &= A^{\mu}_{\nu} \frac{dB^{\nu}(x(t))}{dt} + \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\nu}} \frac{dx^{\rho}}{dt} B^{\nu}(x) \\ &= A^{\mu}_{\nu} \frac{dB^{\nu}(x(t))}{dt} + \Gamma^{\mu}_{\rho\nu} \frac{dx^{\rho}}{dt} B^{\nu}(x) \\ \Leftrightarrow \frac{dB'^{\mu}(x'(t))}{dt} + \Gamma'^{\mu}_{\lambda\xi} \frac{dx'^{\xi}}{dt} B'^{\lambda}(x'(t)) &= A^{\mu}_{\nu} \left(\frac{dB^{\nu}(x(t))}{dt} + \Gamma^{\nu}_{\rho\sigma} \frac{dx^{\sigma}}{dt} B^{\rho}(x(t)) \right) \\ &\Leftrightarrow \frac{DB'^{\mu}(x'(t))}{Dt} = A^{\mu}_{\nu} \frac{DB^{\nu}(x(t))}{Dt}. \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

Παρομοίως, για 1-φόρμες $w_\mu(x)$:

$$\begin{aligned} \frac{dw'_\mu(x'(t))}{dt} - \Gamma_{\xi\mu}^{\lambda} \frac{dx'^{\xi}}{dt} w'_\lambda(x'(t)) &= (A^{-1})^\nu_\mu \left(\frac{dw_\nu(x(t))}{dt} - \Gamma_{\nu\sigma}^\rho \frac{dx^\sigma}{dt} w_\rho(x(t)) \right) \\ \Leftrightarrow \frac{Dw'_\mu(x'(t))}{Dt} &= (A^{-1})^\nu_\mu \frac{Dw_\nu(x(t))}{Dt}. \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

Ορισμός 17: Ο τελεστής $\frac{D}{Dt}$ που μετασχηματίζει διανυσματικά πεδία και 1-φόρμες όπως οι 2.3.6, 2.3.7 λέγεται **συναλλοιώτη παράγωγος κατά μήκος της καμπύλης $\sigma(t)$** (covariant derivative along the curve $\sigma(t)$) (βλ. Κεφ. 4.9 του [36]).

Έστω, τώρα, ένα σημείο $\sigma(t) \in \mathcal{M}$ της πολλαπλότητας, με συντεταγμένες $x^\mu(\sigma(t)) \equiv x^\mu(t) \in \mathbb{R}^{\dim(\mathcal{M})}$. Σε αυτό το σημείο υπάρχει ένα τοπικό αδρανειακό σύστημα αναφοράς, έστω $\xi(t)$. Αν λαμβάναμε λ.χ. ένα διανυσματικό πεδίο $B^\mu(x(t))$ και το εκφράζαμε σε εκείνες τις συντεταγμένες, η ομοπαράλληλη σύνδεση θα εξαφανιζόταν και θα είχαμε

$$\frac{DB_\xi^\mu(\xi(t))}{Dt} = \frac{dB_\xi^\mu(\xi(t))}{dt} = A_\nu^\mu \frac{DB_x^\nu(x(t))}{Dt} \forall x(t)$$

$$\text{Όμως } \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial \xi^\nu(t)} \frac{d\xi^\nu(t)}{dt}, \text{ και άρα}$$

$$\frac{dB_\xi^\mu(\xi(t))}{dt} = \frac{\partial B_\xi^\mu(\xi(t))}{\partial \xi^\nu(t)} \frac{d\xi^\nu(t)}{dt} = 0$$

(το σύστημα $\xi(t)$ είναι αδρανειακό). Άρα

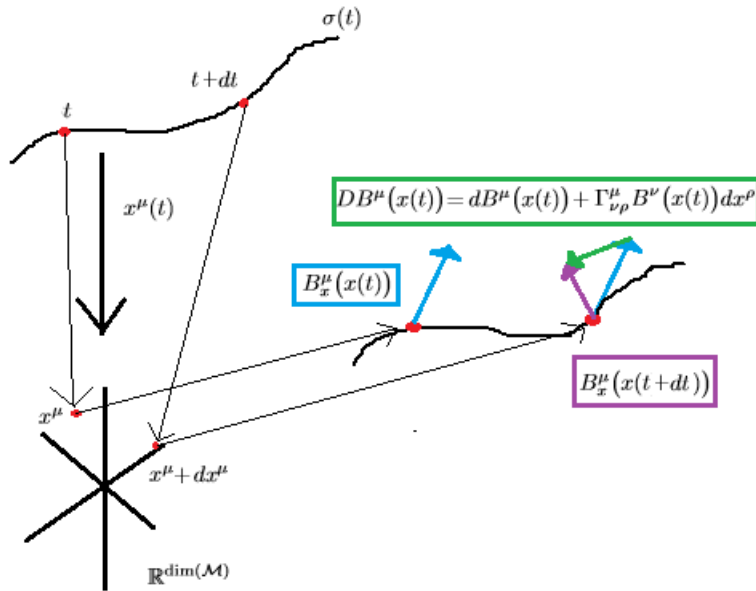
$$\frac{DB_x^\mu(x(t))}{Dt} = 0 \forall x(t).$$

Συνεπώς, καταλήγουμε στην ακόλουθη διαφορική εξίσωση 1^{ης} τάξης για το B^μ :

$$\frac{dB^\mu(x(t))}{dt} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\rho(t)}{dt} B^\nu(x(t)) = 0 = \frac{DB^\mu(x(t))}{Dt}. \quad (2.3.8)$$

Ορισμός 18: Ένα διανυσματικό πεδίο που ικανοποιεί την 2.3.8 λέγεται πως **μεταφέρεται παράλληλα στην $\sigma(t)$** (is transported parallel to itself along $\sigma(t)$) (βλ. Σχήμα 2).

Με αυτούς τους ορισμούς, μπορούμε να προχωρήσουμε σε πιο ‘φυσικά’ μεγέθη:



Σχήμα 2: Παράλληλη μεταφορά. Το B^μ μεταφέρεται παράλληλα στη $\sigma(t)$ όταν $B^\mu(x(t)) = B^\mu(x(t+dt))$: ισοδύναμα, $DB^\mu(x(t)) = 0$.

η Γενική Σχετικότητα (και, προφανώς, η Κοσμολογία) δεν είναι παρά η δυναμική σωμάτων σε μια Λορεντζιανή πολλαπλότητα! Όπως θα δούμε στη συνέχεια, βασικές έννοιες της Κοσμολογίας με τις οποίες θα ασχοληθούμε στηρίζονται εξόλοκληρου σε αντικείμενα που εξάγονται κατευθείαν από ό,τι έχουμε δει εδώ.

2.4 Θεμελιώδη μεγέθη της Γενικής Σχετικότητας

Ορισμός 19: Τανυστής καμπυλότητας Riemann (Riemann curvature tensor) ονομάζεται εκείνος ο τανυστής που, σε κάθε σύστημα συντεταγμένων και σημείο μιας διαφορίσιμης πολλαπλότητας \mathcal{M} :

$$R^\mu_{\nu\beta\alpha} := \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \Gamma^\mu_{\nu\beta} - \frac{\partial}{\partial x^\beta} \Gamma^\mu_{\nu\alpha} + \Gamma^\mu_{\alpha\rho} \Gamma^\rho_{\nu\beta} - \Gamma^\mu_{\beta\rho} \Gamma^\rho_{\nu\alpha} \quad (2.4.1)$$

Ο τανυστής αυτός πράγματι μετασχηματίζεται ως τανυστής: Απόδειξη:

$$\begin{aligned} R'^\mu_{\nu\beta\alpha}(x') &= \frac{\partial}{\partial x'^\alpha} \Gamma'^\mu_{\nu\beta}(x') - \frac{\partial}{\partial x'^\beta} \Gamma'^\mu_{\nu\alpha}(x') + \Gamma'^\mu_{\alpha\rho}(x') \Gamma'^\rho_{\nu\beta}(x') - \Gamma'^\mu_{\beta\rho}(x') \Gamma'^\rho_{\nu\alpha}(x') \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\alpha} \left((A^{-1})^\mu_\sigma (A^{-1})^\rho_\beta A^\sigma_\delta \Gamma^\delta_{\rho\nu}(x) + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x'^\nu \partial x'^\beta} \right) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\beta} \left((A^{-1})^\mu_\sigma (A^{-1})^\rho_\alpha A^\sigma_\delta \Gamma^\delta_{\rho\nu}(x) + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x'^\nu \partial x'^\alpha} \right) \\ &+ \left((A^{-1})^\mu_\sigma (A^{-1})^\tau_\alpha A^\sigma_\delta \Gamma^\delta_{\tau\rho}(x) + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x'^\alpha \partial x'^\rho} \right) \left((A^{-1})^\rho_\zeta (A^{-1})^\varpi_\nu A^\zeta_\xi \Gamma^\xi_{\varpi\beta}(x) + \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\xi} \frac{\partial^2 x^\xi}{\partial x'^\beta \partial x'^\nu} \right) \\ &- \left((A^{-1})^\mu_\sigma (A^{-1})^\tau_\beta A^\sigma_\delta \Gamma^\delta_{\tau\rho}(x) + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x'^\beta \partial x'^\rho} \right) \left((A^{-1})^\rho_\zeta (A^{-1})^\varpi_\nu A^\zeta_\xi \Gamma^\xi_{\varpi\alpha}(x) + \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\xi} \frac{\partial^2 x^\xi}{\partial x'^\alpha \partial x'^\nu} \right) \end{aligned}$$

Οι πρώτοι δύο όροι δίνουν

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x^\gamma} \left((A^{-1})^\mu_\sigma A^\sigma_\delta \left((A^{-1})^\gamma_\alpha (A^{-1})^\rho_\beta - (A^{-1})^\gamma_\beta (A^{-1})^\rho_\alpha \right) \Gamma^\delta_{\rho\nu}(x) \right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \left(A^\mu_\lambda \left((A^{-1})^\gamma_\alpha \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x'^\nu \partial x'^\beta} - (A^{-1})^\gamma_\beta \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x'^\nu \partial x'^\alpha} \right) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \left((A^{-1})^\mu_\sigma A^\sigma_\delta \left((A^{-1})^\gamma_\alpha (A^{-1})^\rho_\beta - (A^{-1})^\gamma_\beta (A^{-1})^\rho_\alpha \right) \Gamma^\delta_{\rho\nu}(x) \right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \left(A^\mu_\lambda \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left((A^{-1})^\gamma_\alpha A^\lambda_\beta - (A^{-1})^\gamma_\beta A^\lambda_\alpha \right) \right) \\ &= \left((A^{-1})^\gamma_\alpha (A^{-1})^\rho_\beta (A^{-1})^\mu_\sigma A^\sigma_\delta \right) \left(\frac{\partial}{\partial x^\gamma} \Gamma^\delta_{\rho\nu} \right) - \left((A^{-1})^\gamma_\beta (A^{-1})^\rho_\alpha (A^{-1})^\mu_\sigma A^\sigma_\delta \right) \left(\frac{\partial}{\partial x^\gamma} \Gamma^\delta_{\rho\nu} \right) \\ &= \underbrace{(A^{-1})^\gamma_\alpha (A^{-1})^\rho_\beta (A^{-1})^\mu_\sigma A^\sigma_\delta \left(\frac{\partial}{\partial x^\gamma} \Gamma^\delta_{\rho\nu} - \frac{\partial}{\partial x^\rho} \Gamma^\delta_{\gamma\nu} \right)}_{\text{'καλός'}} \\ &\quad + \underbrace{\left(A^\mu_\lambda A^\lambda_\beta (A^{-1})^\gamma_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\gamma} - A^\mu_\gamma A^\gamma_\beta (A^{-1})^\lambda_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \right)}_{\text{τετριμμένο}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \end{aligned}$$

Ο τετριμμένος όρος φυσικά δίνει 0 καθώς είναι αφαίρεση έκφρασης από τον εαυτό της (δεν έχει σημασία αν ονομάζουμε τους βωβούς δείκτες γ ή $\lambda!$), και άρα απομένει ο ‘καλός’ όρος, που μετασχηματίζεται ως ταυυστής.

Οι επόμενοι 2 όροι δίνουν:

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\left((A^{-1})^\mu_\alpha (A^{-1})^\tau_\alpha A^\sigma_\delta (A^{-1})^\rho_\zeta (A^{-1})^\varpi_\nu A^\xi_\zeta \Gamma_{\tau\rho}^\delta(x) \Gamma_{\varpi\beta}^\zeta(x) \right) - (\alpha \leftrightarrow \beta)}_{\text{‘1ος με 1ο’}} \\
& + \underbrace{\left(A^\mu_\lambda \frac{\partial}{\partial x'^\alpha} (A^{-1})^\lambda_\rho \right) \left((A^{-1})^\rho_\zeta (A^{-1})^\varpi_\nu A^\xi_\zeta \Gamma_{\varpi\beta}^\zeta(x) \right) - (\alpha \leftrightarrow \beta)}_{\text{‘2ος με 1ο’}} \\
& + \underbrace{\left((A^{-1})^\mu_\sigma (A^{-1})^\tau_\alpha A^\sigma_\delta \Gamma_{\tau\rho}^\delta(x) \right) \left(A^\rho_\xi \frac{\partial}{\partial x'^\beta} (A^{-1})^\xi_\nu \right) - (\alpha \leftrightarrow \beta)}_{\text{‘1ος με 2ο’}} \\
& + \underbrace{\left(A^\mu_\lambda \frac{\partial}{\partial x'^\alpha} (A^{-1})^\lambda_\rho \right) \left(A^\rho_\xi \frac{\partial}{\partial x'^\beta} (A^{-1})^\xi_\nu \right) - (\alpha \leftrightarrow \beta)}_{\text{‘2ος με 2ο’}}
\end{aligned}$$

Για τους ίδιους λόγους με πάνω, ο όρος ‘2ος με 2ο’ εξαφανίζεται.

Ο ‘1ος με 1ο’ εύκολα φαίνεται πως έχει τη σωστή δομή

$$\left((A^{-1})^\mu_\sigma (A^{-1})^\tau_\alpha A^\sigma_\delta \Gamma_{\tau\rho}^\delta(x) \right) \left((A^{-1})^\rho_\zeta (A^{-1})^\varpi_\nu A^\xi_\zeta \Gamma_{\varpi\beta}^\zeta(x) \right) - (\alpha \leftrightarrow \beta).$$

Στον ‘2ο με 1ο’ ενδιάμεσο όρο, οι δείκτες $\rho, \lambda, \zeta, \varpi, \xi$ είναι βουβοί. Ομοίως στον άλλο ενδιάμεσο όρο, οι δείκτες $\rho, \sigma, \tau, \delta, \xi$ είναι βουβοί. Οπότε οι μόνοι δείκτες και στους δύο όρους που μας ενδιαφέρουν είναι οι α, β, μ, ν . Έτσι, το άθροισμα των δύο αυτών όρων είναι πλήρως συμμετρικό στην εναλλαγή $\alpha \leftrightarrow \beta$ όπως και οι υπόλοιποι τετριμμένοι όροι, και άρα οι δύο αυτοί όροι επίσης εξαφανίζονται.

Έτσι, μένουμε με

$$\begin{aligned}
R'^\mu_{\nu\beta\alpha}(x') &= \frac{\partial}{\partial x'^\alpha} \Gamma'^\mu_{\nu\beta}(x') - \frac{\partial}{\partial x'^\beta} \Gamma'^\mu_{\nu\alpha}(x') + \Gamma'^\mu_{\alpha\rho}(x') \Gamma'^\rho_{\nu\beta}(x') - \Gamma'^\mu_{\beta\rho}(x') \Gamma'^\rho_{\nu\alpha}(x') \\
&= (A^{-1})^\gamma_\alpha (A^{-1})^\rho_\beta (A^{-1})^\mu_\sigma A^\sigma_\delta \left(\frac{\partial}{\partial x'^\gamma} \Gamma_{\rho\nu}^\delta - \frac{\partial}{\partial x'^\rho} \Gamma_{\gamma\nu}^\delta \right) + \\
& \left[\left((A^{-1})^\mu_\sigma (A^{-1})^\tau_\alpha A^\sigma_\delta \Gamma_{\tau\rho}^\delta(x) \right) \left((A^{-1})^\rho_\zeta (A^{-1})^\varpi_\nu A^\xi_\zeta \Gamma_{\varpi\beta}^\zeta(x) \right) - (\alpha \leftrightarrow \beta) \right] \\
&= (A^{-1})^\tau_\nu (A^{-1})^\gamma_\beta (A^{-1})^\delta_\alpha A^\mu_\xi R^\xi_{\tau\gamma\delta}(x), \text{ ο.έ.δ.}
\end{aligned} \tag{2.4.2}$$

Πέραν του τανυστή Riemann, δύο μεγέθη που σχετίζονται με την καμπυλότητα μιας πολλαπλότητας είναι ο **τανυστής Ricci** (βλ. π.χ. Κεφ.3, [22]):

$$R_{\mu\nu} := R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu}$$

και το **βαθμωτό μέγεθος Ricci** (Ricci scalar):

$$R := R^{\mu}_{\mu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}.$$

Ορισμός 20: **Στοιχείο μήκους** (line element) ds^2 ονομάζεται εκείνος ο κανόνας που απεικονίζει τα στοιχεία $dx^{\mu} \in T^*\mathcal{M}$ σε έναν πραγματικό αριθμό. Ο αριθμός αυτός λέγεται **μέτρο** (magnitude) ενός διανύσματος με συντεταγμένες dx^{μ} , και είναι αναλλοίωτος υπό μετασχηματισμούς συντεταγμένων

$$\mathbb{R} \ni ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}. \quad (2.4.3)$$

Παρομοίως ορίζεται το (αναλλοίωτο υπό μετασχηματισμούς συντεταγμένων) **στοιχείο όγκου**

$$d\Omega = \sqrt{-\det(g)} \prod_{\mu_i} dx^{\mu_i}, i = 1, \dots, \dim(\mathcal{M}). \quad (2.4.4)$$

Απόδειξη: Στοιχείο μήκους: Αν πάμε $x^{\mu} \mapsto x'^{\mu} = A^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$:

$$\begin{aligned} ds'^2 &= g'_{\mu\nu}(x') dx'^{\mu} dx'^{\nu} = (A^{-1})^{\lambda}_{\mu} (A^{-1})^{\sigma}_{\nu} g_{\lambda\sigma}(x) A^{\mu}_{\rho} dx^{\rho} A^{\nu}_{\tau} dx^{\tau} \\ &= \delta^{\lambda}_{\rho} \delta^{\sigma}_{\tau} g_{\lambda\sigma}(x) dx^{\rho} dx^{\tau} = g_{\rho\tau}(x) dx^{\rho} dx^{\tau} = ds^2. \end{aligned}$$

Στοιχείο όγκου:

$$\begin{aligned} d\Omega' &= \sqrt{-\det(g'(x'))} \prod_{\mu_i} dx'^{\mu_i} = \sqrt{-\det(A^{-1}A^{-1}g(x))} \prod_{\mu_i} A^{\mu_i}_{\nu_i} dx^{\nu_i} \\ &= \sqrt{-\det(g(x))} (\det A)^{-1} \det A \prod_{\nu_i} dx^{\nu_i} = \sqrt{-\det(g(x))} \prod_{\nu_i} dx^{\nu_i} = d\Omega, \text{ ο.έ.δ.} \end{aligned}$$

Ορισμός 21: Ο συμμετρικός τανυστής $T_{\mu\nu}$, $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ που έχει τις εξής ιδιότητες:

α): $T_{00} = \rho$, ρ η πυκνότητα ενέργειας σε στοιχείο όγκου $d\Omega$ σε τοπικό σύστημα ηρεμίας,

β): T_{0i} οι πυκνότητες (3-)ορμής σε τοπικό σύστημα ηρεμίας στη διεύθυνση i ,

γ): T_{ij} οι τάσεις πάνω στο i -επίπεδο κατά την j -διεύθυνση, δηλαδή ένα στοιχείο επιφάνειας dS_i υφίσταται δύναμη κατά την j -διεύθυνση $F_j = T_{ij}dS_i$,

δ): $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$ (εξισώσεις Euler),

ονομάζεται **τανυστής τάσης-ενέργειας** (stress-energy tensor). Σε απλά κοσμολογικά μοντέλα, το Σύμπαν περιγράφεται ως ένα τέλει ρευστό με πυκνότητα ενέργειας ρ και πίεση P , όπως θα δούμε στη συνέχεια. Τότε, για σημείο που κινείται με (4-)ταχύτητα u^μ ,

$$T_{\mu\nu} = \left(\frac{P}{c^2} + \rho\right)u_\mu u_\nu + P g_{\mu\nu} \quad (2.4.5)$$

2.5 Σύμμορφη συμμετρία

2.5.1 Βασικά χαρακτηριστικά - Ισομετρίες

Έστω ένας απειροστός μετασχηματισμός συντεταγμένων $x^\mu \mapsto x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu(x)$, με x^μ συντεταγμένες σημείου $p \in \mathcal{M}$, \mathcal{M} διαφορίσιμη πολλαπλότητα. Μεταβάλλοντας το μετρικό τανυστή,

$$\begin{aligned} \Delta g_{\mu\nu}(x') &= \Delta \left(\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} g_{\lambda\sigma}(x) \right) = \Delta \left(\left(\delta_\mu^\lambda + \frac{\partial \epsilon^\lambda(x)}{\partial x^\mu} \right) \left(\delta_\nu^\sigma + \frac{\partial \epsilon^\sigma(x)}{\partial x^\nu} \right) g_{\lambda\sigma}(x) \right) \\ &= \Delta \left(\left(\delta_\mu^\lambda \delta_\nu^\sigma + \delta_\mu^\lambda \frac{\partial \epsilon^\sigma(x)}{\partial x^\nu} + \delta_\nu^\sigma \frac{\partial \epsilon^\lambda(x)}{\partial x^\mu} + \underbrace{\frac{\partial \epsilon^\lambda(x)}{\partial x^\mu} \frac{\partial \epsilon^\sigma(x)}{\partial x^\nu}}_{\mathcal{O}(\epsilon^2)} \right) g_{\lambda\sigma}(x) \right) \\ \Rightarrow \Delta g_{\mu\nu}(x') &= \Delta \left(g_{\mu\nu}(x) + \frac{\partial \epsilon^\sigma(x)}{\partial x^\nu} g_{\mu\sigma}(x) + \frac{\partial \epsilon^\lambda(x)}{\partial x^\mu} g_{\lambda\nu}(x) \right) \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

Αν στις x^μ το σύστημα συντεταγμένων είναι τοπικό αδρανειακό σύστημα αναφοράς, $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu}$ και η (2.5.1) γράφεται

$$\Delta g_{\mu\nu}(x') = \Delta \left(\frac{\partial \epsilon_\mu(x)}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \epsilon_\nu(x)}{\partial x^\mu} \right) = \Delta (\partial_\nu \epsilon_\mu + \partial_\mu \epsilon_\nu), \quad (2.5.2)$$

Οι $\epsilon_\mu(x)$ είναι απειροστοί μετασχηματισμοί: έτσι,

$$\Delta \left(\frac{\partial \epsilon_\mu(x)}{\partial x^\nu} \right) = \frac{\partial \epsilon_\mu(\hat{x})}{\partial \hat{x}^\nu} \Big|_{\hat{x}=x+\Delta x} - \frac{\partial \epsilon_\mu(\hat{x})}{\partial \hat{x}^\nu} \Big|_{\hat{x}=x} \simeq \frac{\partial \epsilon_\mu(\hat{x})}{\partial \hat{x}^\nu} \Big|_{\hat{x}=x} \frac{\partial \Delta x^\rho}{\partial x^\rho},$$

και η (2.5.2) γράφεται

$$\Delta g_{\mu\nu}(x') = (\partial_\nu \epsilon_\mu + \partial_\mu \epsilon_\nu) \frac{\partial \Delta x^\rho}{\partial x^\rho} \quad (2.5.3)$$

Ορισμός 22: Μετασχηματισμοί που υπακούουν στην εξίσωση

$$g_{\mu\nu}(x) = (1 + \Omega(x)) \eta_{\mu\nu} \stackrel{\text{απειροστοί μετασχηματισμοί}}{\Leftrightarrow} \Delta g_{\mu\nu}(x') = \Omega(x) \eta_{\mu\nu}, \quad \Omega(x) := \partial_\rho \Delta x^\rho \quad (2.5.4)$$

ονομάζονται **σύμμορφοι** (conformal transformations). Με άλλα λόγια, όταν δρουν πάνω στο μετρικό τανυστή, απλώς τον πολλαπλασιάζουν επί μία βαθμωτή συνάρτηση $\Omega(x)$ [16] (ομοίως γίνεται και στην Ευκλείδεια περίπτωση, όπου ο μετρικός τανυστής $\eta_{\mu\nu} \mapsto \delta_{\mu\nu}$ [30]).

Σημειώνουμε πως, στην περίπτωση του χώρου Minkowski $\mathcal{M}^d \equiv \mathbb{R}^{1,d-1}$ με μετρικό τανυστή $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, \delta_{mn})$, $\mu, \nu = 0, \dots, d-1$, $m, n = 1, \dots, d-1$, οι

ισομετρίες του χώρου (μεταχηματισμοί Lorentz Λ_ν^μ) ανήκουν στην ομάδα των ειδικών ορθογωνίων πινάκων διάστασης d $SO(1, d-1)$ που διατηρούν αναλλοίωτο το στοιχείο μήκους $ds_{\mathbb{M}^d}^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$. Στην περίπτωση του Ευκλείδειου χώρου \mathbb{R}^d με μετρικό ταυυστή $\delta_{\mu\nu}$, οι ισομετρίες ανήκουν επίσης στην ομάδα των ειδικών ορθογωνίων πινάκων διάστασης d , αλλά διατηρούν αναλλοίωτο το στοιχείο μήκους $ds_{\mathbb{R}^d}^2 = dx_\nu dx^\nu$ και η ομάδα των ισομετριών γράφεται $SO(d)$. Οι αντίστοιχες άλγεβρες $so(1, d-1)$ και $so(d)$ δεν είναι ισομορφικές (βλ. π.χ. το Κεφ. 8.7 στο [39]): παρά ταύτα, η ανάλυση που θα κάνουμε πιο κάτω είναι το ίδιο έγκυρη τόσο για τον \mathbb{M}^d όσο και για τον \mathbb{R}^d , με την προσοχή μας να επίσταται σε ένα λεπτό σημείο: για να μεταβούμε από τον Ευκλείδειο χώρο \mathbb{R}^d στον \mathbb{M}^d αρκεί να κάνουμε μία **περιστροφή Wick** (Wick rotation) $x^0 \mapsto ix^0$.

Η 2.5.4 γράφεται με τη βοήθεια της 2.5.2, 2.5.3

$$\partial_\nu \epsilon_\mu + \partial_\mu \epsilon_\nu = \Omega(x) \eta_{\mu\nu}. \quad (2.5.5)$$

και λέγεται **σύμμορφη εξίσωση Killing** (conformal Killing equation). Άρα,

$$\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu = \Omega(x) \begin{bmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5.6)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\partial_0 \epsilon_0 = -\Omega(x) \\ 2\partial_i \epsilon_i = +\Omega(x), i = 1, \dots, d-1 \\ \partial_\mu \epsilon_\nu = 0, \mu \neq \nu \end{cases}$$

Κατευθείαν η 2.5.6 μας λέει πως $\epsilon_\mu(x) = \epsilon_\mu(x_\mu, (\alpha \cdot x)^j, (x \cdot x)^{2k})$, $j, k \in \mathbb{N}$: οι συνιστώσες δε συμπλέκονται μεταξύ τους.

Μια εύκολη περίπτωση είναι η $\Omega(x) = 0$: τότε

$$\partial_\mu \epsilon^\mu = 0,$$

που δέχεται δύο κλάσεις λύσεων.

$$i) : \epsilon_1^\mu(x) = a^\mu \in \mathbb{M}^d \text{ (0-τάξης ως προς } x^\mu)$$

$$ii) : \epsilon_2^\mu(x) = \Lambda_\sigma^\mu x^\sigma \text{ (1-τάξης ως προς } x^\mu) \Rightarrow \partial_\nu (\Lambda_\mu^\sigma x_\sigma) + \partial_\mu (\Lambda_\nu^\sigma x_\sigma) = 0$$

$$\Lambda_\mu^\sigma \in \mathbb{M}^{d \times d \times \sigma, \mu} \Rightarrow \Lambda_\mu^\sigma \partial_\nu x_\sigma + \Lambda_\nu^\sigma \partial_\mu x_\sigma = 0$$

$$\partial_\mu \Lambda_\sigma^\mu x^\sigma = \Lambda_\sigma^\mu \partial_\mu x^\sigma = 0$$

Άρα $\Lambda_\sigma^\mu = J_\sigma^\mu$, οι πίνακες στροφής στον \mathbb{M}^d , και $\epsilon_2^\mu(x) = J_\nu^\mu x^\nu$

Πράγματι, υπάρχουν $\frac{d(d-1)}{2}$ ανεξάρτητοι τέτοιοι πίνακες, που ικανοποιεί την απαίτηση να υπάρχουν $d^2 - \frac{d(d+1)}{2}$ εν γένει μη-μηδενικά στοιχεία σε κάθε πίνακα: d^2 επειδή οι πίνακες είναι διάστασης d , με $\frac{d(d+1)}{2}$ συνθήκες που επιβάλλει η συνθήκη $\partial_\mu \Lambda_\sigma^\mu x^\sigma = 0$:

Αν, σε κάθε τέτοιο πίνακα Λ_i , βάλουμε όλα τα πιθανά μη-μηδενικά στοιχεία εκτός από ένα ίσα με μηδέν, παράγουμε τότε ένα σύνολο από $\frac{d(d-1)}{2}$ ανεξάρτητους πίνακες! Οι J_σ^μ τότε φυσικά παράγονται από τους αντισυμμετρικούς γραμμικούς συνδυασμούς $J_i = \frac{1}{2}(A_i - A_i^\dagger)$, εάν A_i έχει μη-διαγώνιο στοιχείο, και $J_i = \sum_j \alpha_{ij} A_j$ για διαγώνιους A_j , ούτως ώστε να παραμένουν γραμμικώς ανεξάρτητοι και άιχνοι. Οι λύσεις του συστήματος ομογενών διαφορικών εξισώσεων 2.5.6 μας δίνουν, λοιπόν, τα διανύσματα Killing της ομάδας *Poincaré* του $SO(1, d-1)$ ($\frac{d(d-1)}{2}$ περιστροφές και d μετατοπίσεις = $\frac{d(d+1)}{2}$ συνολικά διανύσματα, ως όφειλε). Φυσικά, θα είχαμε εντελώς ανάλογη περίπτωση εάν ο μετρικός τανυστής μας ήταν $\delta_{\mu\nu}$, και θα λαμβάναμε τα διανύσματα Killing του $SO(d)$.

Προχωρώντας στη μη ομογενή λύση, έχουμε την εξής πληροφορία: το σύστημά μας είναι 1ης τάξης. Επίσης, $\Omega(x) = \partial_\rho \Delta x^\rho$, και για απειροστούς μετασχηματισμούς σε πρώτη προσέγγιση (αποφεύγοντας όρους $\mathcal{O}(\Delta x^2)$) είναι το πολύ βαθμού 1 ως προς x . Ομοίως, το $\partial_\nu \epsilon^\mu(x)$ πρέπει να είναι βαθμού το πολύ 1, άρα το $\epsilon^\mu(x)$ να είναι βαθμού το πολύ 2. Μα $\epsilon^\mu(x) = \epsilon^\mu(x^\mu, (\alpha \cdot x)^j, (x \cdot x)^{2k}) = \epsilon^\mu(x^\mu, \alpha \cdot x, (\alpha \cdot x)^2, x^2)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \epsilon^\mu(x) = b_1 x^\mu + b_2^\mu \alpha \cdot x + b_3^\mu (\alpha \cdot x)^2 + b_4^\mu x^2 + b_5 (\alpha \cdot x) x^\mu \\ \Omega(x) = \omega_1 + \omega_2 (\beta \cdot x) \end{cases}$$

Πάλι, λοιπόν, βρίσκουμε δύο κλάσεις λύσεων:

$$iii) : \Omega(x) = 2\lambda \in \mathcal{R}^* :$$

$$\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu = 2\lambda \eta_{\mu\nu}$$

$$\partial_\nu \epsilon_\mu = b_1 \eta_{\mu\nu} + b_{2,\mu} \alpha_\nu + 2b_{3,\mu} \alpha_\nu (\alpha \cdot x) + 2b_{4,\mu} x_\nu + b_5 ((\alpha \cdot x) \eta_{\mu\nu} + \alpha_\nu x_\mu)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \begin{cases} b_5 = 0b_4^\mu = 0 \\ b_3^\mu = 0 \\ 2b_1\eta_{\mu\nu} + b_{2,\mu}\alpha_\nu + b_{2,\nu}\alpha_\mu = 2\lambda\eta_{\mu\nu} \end{cases} \\ & \begin{cases} b_1 + b_{2,\mu}\alpha_\mu = \lambda \\ b_{2,\nu}\alpha_\mu + b_{2,\mu}\alpha_\nu = 0, \mu \neq \nu \end{cases} \end{aligned}$$

Καθώς τα b_2^μ, α^μ ορίζονται το πολύ πάνω στο σώμα των μιγαδικών, η τρίτη συνθήκη συνεπάγεται $b_2^\mu = 0$, οπότε $b_1 = \lambda \Rightarrow \epsilon_3^\mu(x) = \lambda x^\mu$.

Τέλος, η τελευταία κλάση λύσεων:

$$iv) : \Omega(x) = 2\beta \cdot x :$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & 2b_1\eta_{\mu\nu} + b_{2,\mu}\alpha_\nu + b_{2,\nu}\alpha_\mu + 2b_{3,\mu}\alpha_\nu(\alpha \cdot x) + 2b_{3,\nu}\alpha_\mu(\alpha \cdot x) + \\ & + 2b_{4,\mu}x_\nu + 2b_{4,\nu}x_\mu + 2b_5(\alpha \cdot x)\eta_{\mu\nu} + b_5\alpha_\nu x_\mu + b_5\alpha_\mu x_\nu = 2(\beta \cdot x)\eta_{\mu\nu} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_5\alpha_\mu + 2b_{4,\mu} = 0 \\ b_5(\alpha \cdot x)\eta_{\mu\nu} = (\beta \cdot x)\eta_{\mu\nu} \\ b_{3,\mu}\alpha_\nu + b_{3,\nu}\alpha_\mu = 0 \Rightarrow b_3^\mu = 0 \\ b_1 = 0 \\ b_{2,\mu}\alpha_\nu + b_{2,\nu}\alpha_\mu = 0 \Rightarrow b_2^\mu = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_5\alpha^\mu = \beta^\mu \\ b_4^\mu = -\frac{1}{2}\beta^\mu \end{cases}$$

$$\Rightarrow \epsilon_4^\mu = -\frac{1}{2}x^2\beta^\mu + (\beta \cdot x)x^\mu$$

Οπότε η ειδική λύση της 2.5.5 με $\Omega(x) = \omega_1 \cdot (2\lambda) + \omega_2(\beta \cdot x)$ είναι η $\epsilon_{\text{ειδ}}^\mu = \omega_1\epsilon_3^\mu + \omega_2\epsilon_4^\mu$, ενώ η πλήρης λύση της 2.5.5 είναι η

$$\boxed{\epsilon^\mu(x) = C_0\epsilon_0^\mu(x) + \omega_1\epsilon_3^\mu(x) + \omega_2\epsilon_4^\mu(x), \Omega(x) = \omega_1 \cdot (2\lambda) + \omega_2(\beta \cdot x)} \quad (2.5.7)$$

Οι δύο κλάσεις λύσεων της ομογενούς εξίσωσης γράφονται ως μία λύση $\epsilon_0^\mu(x) = \tilde{\Lambda}_\nu^\mu x^\nu$, με $\tilde{\Lambda}_\nu^\mu$ τους πίνακες που ανήκουν στην ομάδα *Poincaré*, όπως σημειώσαμε παραπάνω. Έτσι αναχτούμε μόνο μία απροσδιόριστη σταθερά στη λύση της 2.5.5, ως έπρεπε.

2.5.2 Συμπεράσματα: γεννήτορες της σύμμορφης άλγεβρας

Με τον τυπικό τρόπο παραγωγής γεννητόρων από διανύσματα Killing λαμβάνουμε τότε τους γεννήτορες των σύμμορφων μετασχηματισμών:

$$\begin{aligned}
\epsilon_1^\mu &\mapsto P_\mu = i\partial_\mu \rightarrow \text{μετατοπίσεις,} \\
\epsilon_2^\mu &\mapsto J_{\mu\nu} = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) \rightarrow \text{περιστροφές,} \\
\epsilon_3^\mu &\mapsto D = ix^\mu\partial_\mu \rightarrow \text{διαστολές (dilations),} \\
\epsilon_4^\mu &\mapsto K_\mu = i(2x_\mu(x^\nu\partial_\nu) - x^2\partial_\mu) \rightarrow \text{ειδικοί σύμμορφοι μετασχηματισμοί.}
\end{aligned}
\tag{2.5.8}$$

Και έτσι λοιπόν υπολογίζονται οι μεταθέτες των γεννητόρων,

$$\begin{aligned}
[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] &= -i(\eta_{\mu\rho}J_{\nu\sigma} + \eta_{\nu\sigma}J_{\mu\rho} - \eta_{\mu\sigma}J_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho}J_{\mu\sigma}) \\
[J_{\mu\nu}, P_\rho] &= -i(\eta_{\mu\rho}P_\nu - \eta_{\nu\rho}P_\mu) \\
[D, P_\mu] &= -iP_\mu \\
[D, K_\mu] &= iK_\mu \\
[P_\mu, K_\nu] &= 2i(\eta_{\mu\nu}D - J_{\mu\nu})
\end{aligned}
\tag{2.5.9}$$

Παρατηρούμε πως έχουμε $\frac{d(d+1)}{2} + 1 + d = \frac{(d+1)(d+2)}{2}$ γεννήτορες. Αυτό φυσικά δεν είναι τυχαίο: όπως είπαμε και στον Πρόλογο, μια σύμμορφη θεωρία πεδίου CFT_d σε d διαστάσεις συσχετίζεται με έναν χώρο anti-de Sitter AdS_{d+1} σε $d+1$ διαστάσεις [24].

Επίσης, ισχύει (βλ. [30], [37] λ.χ.) πως η άλγεβρα που υπολογίσαμε στην 2.5.9 είναι ισομορφική με την άλγεβρα $so(1+1, d-1+1) = so(2, d)$ χώρου Minkowski $\mathbb{R}^{2,d}$.

2.5.3 Ο χώρος ενσωμάτωσης

Ο χώρος Minkowski που έχει την $so(2, d)$ άλγεβρα ονομάζεται **χώρος ενσωμάτωσης** (embedding space). Μιλούμε για *ενσωμάτωση* (πιο συγκεκριμένα ισομετρική ενσωμάτωση), γιατί ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες:

$$\begin{aligned}
1) \exists f : \mathbb{R}^{1,d-1} &\rightarrow \mathbb{R}^{2,d} : f \in C^\infty, \mathbb{R}^{1,d-1} \ni \mathcal{M} \simeq f(\mathcal{M}) \in \mathbb{R}^{2,d} \\
2) \forall a^\mu, b^\nu &\in \mathbb{R}^{1,d-1} \exists A^M, B^N \in \mathbb{R}^{2,d} : \eta_{\mu\nu}a^\mu b^\nu = \eta_{MN}A^M B^N \\
\eta_{MN} &= \text{diag}(-1, +1, \dots, +1, -1).
\end{aligned}
\tag{2.5.10}$$

Συγκεκριμένα, η απεικόνιση προς το χώρο ενσωμάτωσης πηγαίνει όλα τα σημεία στον κώνο $\eta_{MN}A^M B^N = 0$, μια επιφάνεια διάστασης $d + 1$. Ο χώρος είναι προβολικός: $\lambda A^M \equiv A^M$. Θέτοντας τις νέες συντεταγμένες $A^+ = A^{d+1} + A^{d+2}$, $A^- = -A^{d+1} + A^{d+2}$ [30], η νέα μετρική γράφεται

$$\eta'_{M'N'} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.5.11)$$

Επαληθεύοντας γρήγορα την ισοδυναμία τους με το στοιχείο μήκους:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \eta_{MN}dX^M dX^N = -(dX^0)^2 + \sum_{i=1}^D (dX^i)^2 - (dX^{D+1})^2 \\ &= \eta_{\mu\nu}dX^\mu dX^\nu + (dX^D)^2 - (dX^{D+1})^2 \\ &= \eta_{\mu\nu}dX^\mu dX^\nu + (dX^D + dX^{D+1})(dX^D - dX^{D+1}) \\ &= \eta_{\mu\nu}dX^\mu dX^\nu - dX^+ dX^- \\ &= \eta_{\mu\nu}dX^\mu dX^\nu - \frac{1}{2}(dX^+ dX^- + dX^- dX^+) = \eta'_{M'N'} dX^{M'} dX^{N'}, \text{ ο.έ.δ.} \end{aligned}$$

Η αντιστρέψιμη απεικόνιση $f : \mathbb{R}^{1,d-1} \rightarrow \mathbb{R}^{2,d}$ είναι η

$$\mathbb{R}^{1,d-1} \ni x^\mu \mapsto \frac{X^\mu}{X^+} \in \mathbb{R}^{2,d}$$

Θεώρημα 3: Τα στοιχεία της σύμμορφης άλγεβρας στον \mathbb{R}^d , (2.5.8), αντιστοιχούν στα στοιχεία της $so(2, d)$ άλγεβρας, με

$$\begin{aligned} I_{\mu\nu} &= 4J_{\mu\nu}, \\ I_{\mu+} &= 2P_\mu, \\ I_{\mu-} &= 2K_\mu, \\ I_{+-} &= 2D. \end{aligned} \quad (2.5.12)$$

Απόδειξη: Οι σχέσεις (2.5.9) γράφονται

$$\begin{aligned}
[I_{\mu\nu}, I_{\rho\sigma}] &= -i(\eta_{\mu\rho}I_{\nu\sigma} + \eta_{\nu\sigma}I_{\mu\rho} - \eta_{\mu\sigma}I_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho}I_{\mu\sigma}) \\
&= -4i(\eta_{\mu\rho}J_{\nu\sigma} + \eta_{\nu\sigma}J_{\mu\rho} - \eta_{\mu\sigma}J_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho}J_{\mu\sigma}) \\
&\stackrel{\lambda X \mapsto X}{=} -i(\eta_{\mu\rho}J_{\nu\sigma} + \eta_{\nu\sigma}J_{\mu\rho} - \eta_{\mu\sigma}J_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho}J_{\mu\sigma}) \\
[I_{\mu\nu}, I_{\rho+}] &= -i(\eta_{\mu\rho}I_{\nu+} + \cancel{\eta_{\nu+}I_{\mu\rho}} - \eta_{\nu\rho}I_{\mu+} - \cancel{\eta_{\mu+}I_{\nu\rho}}) \stackrel{0}{=} \\
&= -i(\eta_{\mu\rho}P_\nu - \eta_{\nu\rho}P_\mu) \\
[I_{\mu\nu}, I_{+-}] &= -i(\cancel{\eta_{\mu+}I_{\nu-}} + \cancel{(\dots)}) \stackrel{0}{=} 0 \tag{2.5.13} \\
[I_{+-}, I_{\rho+}] &= -i(\eta_{-+}I_{+\rho} + \cancel{(\dots)}) \stackrel{0}{=} -i\left(-\frac{1}{2}\right)(-I_{\rho+}) = -iP_\rho \\
[I_{+-}, I_{\rho-}] &= -i(-\eta_{+-}I_{-\rho} + \cancel{(\dots)}) \stackrel{0}{=} i\left(-\frac{1}{2}\right)(-I_{\rho-}) = iP_\rho \\
[I_{\mu+}, I_{\nu-}] &= -i(-\eta_{\mu\nu}I_{+-} - \eta_{+-}I_{\mu\nu} + \cancel{(\dots)}) \stackrel{0}{=} i(2\eta_{\mu\nu}D - \frac{1}{2}I_{\mu\nu}) \\
&= 2i(\eta_{\mu\nu}D - J_{\mu\nu}), \text{ ο.έ.δ.}
\end{aligned}$$

Αποδείξαμε λοιπόν πως οι γεννήτορες της σύμμορφης άλγεβρας στον $\mathbb{R}^{1,d-1}$ ορίζουν την άλγεβρα Lorentz των περιστροφών στον $\mathbb{R}^{2,d}$, $so(2, d)$. Αυτό είναι εξαιρετικά χρήσιμο, διότι μας εξασφαλίζει το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 1: Αν $X^M \in \mathbb{R}^{2,d} \in \mathbb{K} = \{X^M \in \mathbb{R}^{2,d} : \eta_{MN}X^MX^N = 0\}$, τότε $X^A = \Lambda_M^A X^M \in \mathbb{K}$. Η υπερ-επιφάνεια \mathbb{K} ονομάζεται **μηδενικός κώνος** (null cone).

Απόδειξη: Σύμφωνα με το Θεώρημα 3 $\Lambda_M^A \in so(2, d)$ και άρα αφήνει αναλλοίωτο το $s^2 = \eta_{MN}X^MX^N$, άρα

$$\eta_{AB}X^AX^B = \eta_{AB}(\Lambda_M^AX^M)(\Lambda_N^BX^N) = \eta_{MN}X^MX^N.$$

Σε αυτό το σημείο έχουμε ολοκληρώσει τη συζήτησή μας για το μαθηματικό υπόβαθρο της Εργασίας αυτής. Στο επόμενο κομμάτι, θα ανακεφαλαιώσουμε κάποια βασικά στοιχεία της Κοσμολογίας, και θα εξηγήσουμε γιατί η σύμμορφη συμμετρία έχει ενδιαφέρον σε κοσμολογικές εφαρμογές.

3 Κοσμολογία - βασικές αρχές και πρότυπα

3.1 Προκαταρκτικές παρατηρήσεις

3.1.1 Θεμελιώδεις παραδοχές

Παρατηρώντας την κατανομή της ύλης στο Σύμπαν σε μικρές κλίμακες της τάξης των μερικών ετών φωτός, το Σύμπαν φαίνεται να έχει πολύπλοκη δομή: άστρα και αστρικά σμήνη, γαλαξίες, σμήνη γαλαξιών... Παρά ταύτα, όσο μεγαλύτερη γίνει η κλίμακα των παρατηρήσεών μας, τόσο πιο ομογενές φαίνεται να είναι το Σύμπαν! Πράγματι, για κλίμακες από $\cong 100 Mpc$ ($1Pc \simeq 3.26$ έτη φωτός) έως $3000 Mpc$ το Σύμπαν είναι εξαιρετικά ομογενές. Μελέτη της ακτινοβολίας υποβάθρου (της μικροκυματικής ακτινοβολίας που είναι παρούσα σε όλη την ουράνια σφαίρα, ακόμα και με πλήρη απουσία πηγών) δείχνει πως σε κλίμακες $3000 Mpc$ (το μέγεθος του παρατηρήσιμου Σύμπαντος) η ακτινοβολία αντιστοιχεί, με μικρές σχετικές ανομοιογένειες της τάξης του 10^{-5} , σε ακτινοβολία μέλανος σώματος θερμοκρασίας $2.725 K$ [29]. Αυτό είναι ισχυρή υποστήριξη της *Κοσμολογικής Αρχής*:

Ορισμός 23: Η *Κοσμολογική Αρχή* (cosmological principle) υποθέτει πως, σε αρκετά μεγάλες κλίμακες, το Σύμπαν είναι *ομογενές και ισότροπο*. Δηλαδή, δεν υπάρχουν 'προτιμητέα' σημεία του χωροχρόνου, ή 'προτιμητέες' διευθύνσεις, στα οποία η κατανομή ύλης διαφέρει σημαντικά από άλλα σημεία ή διευθύνσεις.

Επίσης θεμελιώδης παραδοχή είναι πως *το Σύμπαν διαστέλλεται, με την ταχύτητα διαστολής να εξαρτάται γραμμικά από την (3-)απόσταση r μεταξύ παρατηρητή και αντικειμένου*. Αυτό είναι γνωστό ως ο νόμος του Hubble (Hubble's law), ονομασμένος για τον Edwin Hubble που τον ανακάλυψε παρατηρώντας γαλαξίες το 1929 (αν και ο Georges Lemaître είχε ήδη ανακαλύψει το νόμο και δώσει μια πρώτη εκτίμηση της σταθεράς δύο χρόνια πρωτότερα, και ο Knut Lundmark σχεδόν τον ανακάλυψε το 1925, δίνοντας μια ασθενέστερα τετραγωνική σχέση [35]):

$$v = H_0 r \quad (3.1.1)$$

v η ταχύτητα με την οποία απομακρύνονται από μας αντικείμενα σε μεγάλες κλίμακες, r η απόστασή τους στον 3-χώρο, $H_0 \simeq 70 km s^{-1} Mpc^{-1}$ η σταθερά Hubble *σήμερα*. Όπως θα δούμε, η 'σταθερά' Hubble εξελίσσεται στο χρόνο.

3.1.2 Η γεωμετρία του Σύμπαντος

Από τη Γενική Σχετικότητα, ο ταυοστής ύλης-ενέργειας συνδέεται με την καμπυλότητα Riemann ως εξής [22]:

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}}, \quad (3.1.2)$$

c η ταχύτητα του φωτός στο κενό, G η παγκόσμια σταθερά της βαρύτητας (διαστάσεις $[M^{-1}][L^3][T^{-2}]$ - σε φυσικό σύστημα συντεταγμένων, $[L] = [T] = [M^{-1}]$ και $[G] = [L^2]$)

Σε αυτήν την εξίσωση, δε συμπεριλαμβάνεται η κοσμολογική σταθερά.

Η 3.1.2 είναι συναλλοίωτη:

$$\nabla_{\mu} \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu} \right) = 0 \quad (3.1.3)$$

Απόδειξη:

$$\text{Πράγματι, } 3.1.3, 2.3.3 \Rightarrow \partial_{\mu} \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu} \right) + \Gamma_{\mu\rho}^{\nu} \left(R^{\mu\rho} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\rho} \right) = 0$$

Η εξίσωση αυτή είναι αληθής σε κάθε σύστημα συντεταγμένων σε κάθε σημείο του χωροχρόνου, άρα και σε τοπικό αδρανειακό σύστημα $\Rightarrow \Gamma_{\mu\rho}^{\nu} = 0, g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \partial_{\mu} \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu} \right) &= \partial_{\mu} R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\partial_{\mu} R)\eta^{\mu\nu} = 0 \\ &\Rightarrow \partial_{\mu} R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial^{\nu} R^{\lambda}_{\lambda} = 0 \quad (*) \\ \text{Μα } \partial_{\kappa} R^{\mu}_{\nu\alpha\beta} &= \partial_{\kappa}\partial_{\beta}\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha} - \partial_{\kappa}\partial_{\alpha}\Gamma^{\mu}_{\nu\beta} \Rightarrow \\ \partial_{\alpha} R^{\mu}_{\nu\beta\gamma} + \partial_{\beta} R^{\mu}_{\nu\gamma\alpha} + \partial_{\gamma} R^{\mu}_{\nu\alpha\beta} &= 0 \quad (3.1.4) \\ \Leftrightarrow \partial^{\alpha} R_{\mu}^{\nu\beta\gamma} + \partial^{\beta} R_{\mu}^{\nu\gamma\alpha} + \partial^{\gamma} R_{\mu}^{\nu\alpha\beta} &= 0 \end{aligned}$$

(η 3.1.4 ονομάζεται 2η ταυτότητα Bianchi) Τότε από την 3.1.4 λαμβάνουμε για $\beta \mapsto \mu$

$$\begin{aligned} \partial^{\alpha} R_{\nu\gamma} + \partial^{\mu} R_{\mu}^{\nu\gamma\alpha} + \partial^{\gamma} R_{\mu}^{\nu\alpha\mu} &= \partial^{\alpha} R_{\nu\gamma} + \partial^{\mu} R_{\mu}^{\nu\gamma\alpha} - \partial^{\gamma} R^{\nu\alpha} = 0 \\ \Leftrightarrow \partial^{\alpha} R^{\nu\gamma} + \partial^{\mu} R_{\mu}^{\nu\gamma\alpha} &= \partial^{\gamma} R^{\nu\alpha} \\ \Leftrightarrow \partial_{\sigma} R^{\nu\gamma} + \partial^{\mu} R_{\mu}^{\nu\gamma}_{\sigma} &= \partial^{\gamma} R^{\nu}_{\sigma} \end{aligned}$$

Για $\nu \mapsto \sigma$

$$\begin{aligned}
& \partial_\sigma R^{\sigma\gamma} + \partial^\mu R_{\mu\sigma}{}^{\sigma\gamma} = \partial^\gamma R^\sigma{}_\sigma = \partial_\sigma R^{\sigma\gamma} + \eta_{\sigma\nu} \partial^\mu R_\mu{}^{\sigma\gamma\nu} \quad (**) \\
\Rightarrow \partial_\gamma R^\sigma{}_\sigma &= \partial^\sigma R_{\sigma\gamma} + \eta^{\sigma\nu} \partial_\mu R_{\sigma\gamma\nu}^\mu = \partial^\sigma R_{\sigma\gamma} + \eta^{\sigma\nu} (\partial_\mu \partial_\nu \Gamma_{\sigma\gamma}^\mu - \partial_\mu \partial_\gamma \Gamma_{\sigma\nu}^\mu). \\
& \partial^\sigma R_{\sigma\gamma} - \eta^{\sigma\nu} (\partial_\mu \partial_\nu \Gamma_{\sigma\gamma}^\mu - \partial_\mu \partial_\gamma \Gamma_{\sigma\nu}^\mu) \\
&= \partial^\sigma (\partial_\gamma \Gamma_{\sigma\mu}^\mu - \partial_\mu \Gamma_{\sigma\gamma}^\mu + \Gamma_{\gamma\rho}^\mu \Gamma_{\sigma\mu}^\rho - \Gamma_{\mu\rho}^\mu \Gamma_{\sigma\gamma}^\rho) - \eta^{\sigma\nu} (\partial_\mu \partial_\nu \Gamma_{\sigma\gamma}^\mu - \partial_\mu \partial_\gamma \Gamma_{\sigma\nu}^\mu) \\
&= \eta^{\sigma\nu} (\partial_\nu \partial_\gamma \Gamma_{\sigma\mu}^\mu - \partial_\nu \partial_\mu \Gamma_{\sigma\gamma}^\mu + \partial_\nu \Gamma_{\gamma\rho}^\mu \Gamma_{\sigma\mu}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\mu \Gamma_{\sigma\gamma}^\rho - \partial_\mu \partial_\nu \Gamma_{\sigma\gamma}^\mu + \partial_\mu \partial_\gamma \Gamma_{\sigma\nu}^\mu) \\
&= \eta^{\sigma\nu} ((\partial_\gamma \partial_\mu \Gamma_{\sigma\nu}^\mu - \partial_\nu \partial_\mu \Gamma_{\sigma\gamma}^\mu) + (\partial_\gamma \partial_\nu \Gamma_{\sigma\mu}^\mu - \partial_\mu \partial_\nu \Gamma_{\sigma\gamma}^\mu) + \partial_\nu (\Gamma_{\gamma\rho}^\mu \Gamma_{\sigma\mu}^\rho - \Gamma_{\mu\rho}^\mu \Gamma_{\sigma\gamma}^\rho))
\end{aligned}$$

Και οι τρεις παρενθέσεις μέσα στην τελευταία γραμμή είναι 0, καθώς όλοι οι όροι τύπου $\partial_\gamma \partial_\mu \Gamma_{\sigma\nu}^\mu$ είναι συμμετρικοί στην εναλλαγή των (συναλλοίωτων!) $\nu \leftrightarrow \gamma, \mu \leftrightarrow \gamma, \mu \leftrightarrow \gamma$ αντίστοιχα. Έτσι,

$$\begin{aligned}
& \partial^\sigma R_{\sigma\gamma} = \eta^{\sigma\nu} \partial^\mu R_{\mu\sigma}{}^{\sigma\gamma\nu}, \\
\Rightarrow (**) &\Leftrightarrow \partial^\gamma R^\sigma{}_\sigma = 2\partial_\sigma R^{\sigma\gamma} \\
\Rightarrow (*) &\Leftrightarrow \partial_\mu R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial^\nu R^\lambda{}_\lambda = \partial_\mu R^{\mu\nu} - 2\frac{1}{2} \partial_\lambda R^{\lambda\nu} = 0, \text{ ο.έ.δ.}
\end{aligned}$$

Όμως, η 3.1.2 μπορεί να λάβει στο αριστερό μέλος και έναν ακόμα όρο $\Lambda g_{\mu\nu}$, $\Lambda \in \mathbb{R}$. Η ποσότητα αυτή είναι προφανώς συναλλοίωτη, και η σταθερά Λ αναφέρεται ως η **κοσμολογική σταθερά** (cosmological constant). Η πλήρης εξίσωση

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (3.1.5)$$

περιγράφει το Σύμπαν όπως το ξέρουμε, με τον τανυστή ύλης - ενέργειας να αντιστοιχεί σε αυτόν ενός τέλειου ρευστού πίεσης P και πυκνότητας ρ :

$$T_{\mu\nu} = \text{diag}(\rho, P, P, P)$$

Ο μετρικός τανυστής που αντιστοιχεί σε αυτό το $T_{\mu\nu}$ είναι εκφρασμένος σε (3-)σφαιρικές συντεταγμένες (t, r, θ, ϕ) και λέγεται **μετρικός τανυστής Friedmann-Robertson-Lemaître-Walker** (FLRW metric tensor, FRW metric):

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}\left(-1, \frac{a^2(t)}{1 - kr^2}, a^2(t)r^2, a^2(t)\sin^2\theta\right) \quad (3.1.6)$$

Κομβικής σημασίας είναι η ποσότητα $a(t)$, βαθμωτή συνάρτηση (παράγοντας κλίμακας - scale factor) που πολλαπλασιάζει τις συντεταγμένες. Ορίζοντας τον ιδιοχρόνο ως

$$d\tau = a^{-1}(t)dt \Rightarrow \tau = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')},$$

$$3.1.6 \Rightarrow g_{\mu\nu} = a^2(\tau) \text{diag} \left(-1, (1 - kr^2)^{-1}, r^2, r^2 \sin^2 \theta \right) \quad (3.1.7)$$

Η παράμετρος k είναι μια σταθερά, που αντιστοιχίζει τη μετρική FRW με μία από τις ακόλουθες περιπτώσεις:

$$\begin{cases} k = 0 \Rightarrow \text{Επίπεδο Σύμπαν} \\ k = -1 \Rightarrow \text{Ανοικτό (επιταχυνόμενα διαστελλόμενο) Σύμπαν} \\ k = +1 \Rightarrow \text{Κλειστό Σύμπαν} \end{cases}$$

Και επιλέγουμε $a(t_0) = a_0 = 1$ την τιμή του παράγοντα κλίμακας σήμερα. Αν με $\dot{a} := \frac{da}{dt} \equiv a^{-1} \frac{da}{d\tau}$, από τη μετρική FRW προκύπτει

$$R^i_{0j0} = -\frac{\ddot{a}}{a} \delta_j^i, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad \Gamma^i_{0j} = \frac{\dot{a}}{a} \delta_j^i$$

$$R^0_{i0j} = \frac{\ddot{a}}{a} g_{ij}, \quad \Gamma^0_{ij} = \frac{\dot{a}}{a} g_{ij}$$

$$R_{00} = -3 \frac{\ddot{a}}{a}$$

$$R_{ij} = \left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2 \frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2 \frac{k}{a^2} \right) g_{ij}, \quad \Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2a^4} g^{il} (\partial_j g_{lk} + \partial_k g_{jl} - \partial_l g_{kj})$$

$$R = \frac{6}{a^2} (\ddot{a}a + \dot{a}^2 + k)$$

Τα υπόλοιπα στοιχεία είναι μηδέν, ή υπολογίζονται εύκολα μέσω των συμμετριών των $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}, R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$.

Οι εξισώσεις Einstein στο σύμπαν FRW τότε ανάγονται στις εξισώσεις Friedmann :

$$3.1.5, \mu = \nu = 0 \Rightarrow \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} = \frac{8\pi G\rho + \Lambda}{3} \quad (3.1.8)$$

$$3.1.5(\cdot g^{\mu\nu}) \Rightarrow \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3P) + \frac{\Lambda}{3}$$

Επίσης ορίζουμε μια εξαιρετικά χρήσιμη ποσότητα, τη **μετατόπιση προς το ερυθρό** (redshift) z :

$$1 + z := \frac{\lambda_{obs}}{\lambda_{true}},$$

με λ_{true} το μήκος κύματος ακτινοβολίας που εκπέμπεται από πηγή, και λ_{obs} το παρατηρούμενο μήκος κύματος. Από το φαινόμενο Doppler αναμένουμε πηγές ακτινοβολίας που απομακρύνονται από μας να έχουν μετατόπιση προς το ερυθρό που, από το νόμο Hubble, είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση της απόστασής τους από εμάς. Μετά από λίγους υπολογισμούς η σχέση (κοσμικού) χρόνου - μετατόπισης προς το ερυθρό δίνεται [8]

$$t(z) = \frac{2H_0^{-1}}{1 + (1+z)^2} \stackrel{H_0 \simeq 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}}{\simeq} \frac{28}{1 + (1+z)^2} \cdot 10^9 \text{ έτη}. \quad (3.1.9)$$

Η συνάρτηση αυτή είναι περίπου συνεπής ($t_{z=0} \simeq 14 \cdot 10^9$ έτη) με τη μέτρηση της ηλικίας του Σύμπαντος από τη συνεργασία Planck, $t_0 = (13.799 \pm 0.021) \cdot 10^9$ έτη, με επίπεδο εμπιστοσύνης 68% [1]: υπάρχει ασυμφωνία μεταξύ των κύριων δύο τρόπων μέτρησης της ακριβούς τιμή της σταθεράς H_0 .

Φυσικά, για σωματίδιο που κινείται πάνω σε καμπύλη $\gamma(\sigma)$ με 4-ταχύτητα u^μ , μπορούμε να γράψουμε τη δράση

$$S \propto \int_0^1 \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma}} d\sigma = \int_0^1 \mathcal{L}(\sigma, x, \tilde{u}) d\sigma,$$

οπότε οι εξισώσεις Euler-Lagrange γράφουν

$$\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{u}^\mu} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = \frac{1}{2\mathcal{L}} \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\mu} \tilde{u}^\rho \tilde{u}^\nu$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{u}^\mu} = \frac{1}{2\mathcal{L}} g_{\rho\nu} \left(\frac{\partial \tilde{u}^\rho}{\partial \tilde{u}^\mu} \tilde{u}^\nu + (\nu \leftrightarrow \rho) \right) = \frac{1}{\mathcal{L}} g_{\mu\nu} \tilde{u}^\nu$$

Αναγκάζομαστε να γράψουμε τη γενική παραμετροποίηση $\gamma(\sigma)$, αντί για $\gamma(\tau)$, γιατί εν γένει δύο διαφορετικές καμπύλες γ_1, γ_2 δεν είναι ιδιόχρονες: $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$ αλλά $\tau_1 \neq \tau_2$. Παρατηρούμε όμως πως

$$\left(\frac{d\tau}{d\sigma} \right)^2 = g_{\mu\nu} \tilde{u}^\mu \tilde{u}^\nu = \mathcal{L}^2 \Rightarrow \mathcal{L} d\sigma = d\tau$$

Αλλάζοντας λοιπόν μεταβλητές $\sigma \mapsto \tau$,

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{d\tau} (g_{\mu\nu} u^\nu) - \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\rho\nu}) u^\rho u^\nu = 0 \\
& \Rightarrow \frac{dg_{\mu\nu}}{d\tau} u^\nu + g_{\mu\nu} \frac{du^\nu}{d\tau} - \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\nu\rho}) u^\nu u^\rho = 0 \\
& \Rightarrow (\partial_\rho g_{\mu\nu}) u^\rho u^\nu + g_{\mu\nu} \frac{du^\nu}{d\tau} - \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\nu\rho}) u^\nu u^\rho = 0 \\
& \Rightarrow g_{\mu\nu} \frac{du^\nu}{d\tau} + \frac{1}{2} ((\partial_\rho g_{\mu\nu}) u^\rho u^\nu + (\partial_\nu g_{\mu\rho}) u^\rho u^\nu) - \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\nu\rho}) u^\nu u^\rho \\
& \Rightarrow \frac{du^\lambda}{d\tau} + \frac{1}{2} g^{\lambda\mu} ((\partial_\rho g_{\mu\nu}) + (\partial_\nu g_{\mu\rho}) - (\partial_\mu g_{\nu\rho})) u^\nu u^\rho = 0 \\
& \stackrel{2.3.2}{\Rightarrow} \frac{du^\lambda}{d\tau} + \Gamma_{\nu\rho}^\lambda u^\nu u^\rho = (\partial_\rho u^\lambda) u^\rho + \Gamma_{\nu\rho}^\lambda u^\nu u^\rho \stackrel{2.3.3}{\Rightarrow} \\
& \qquad \qquad \qquad u^\rho \nabla_\rho u^\lambda = 0 \tag{3.1.10}
\end{aligned}$$

Αυτή η εξίσωση ονομάζεται **γεωδαιτική εξίσωση** (geodesic equation). Φυσικά ισχύει το ίδιο και για βαθμωτά πολλαπλάσια της 4-ταχύτητας, ιδίως την 4-ορμή p^μ .

Σύμφωνα με την Κοσμολογική Αρχή, ο χώρος είναι ομογενής, οπότε μετατοπίσεις σωματιδίου στο κενό χώρο (τις 1,2,3-συντεταγμένες!) πρέπει να διατηρούν την ορμή: $\partial_i p^\mu = 0$. Τότε

$$\begin{aligned}
0 &= p^\nu \nabla_\nu p^\mu = (\partial_0 p^\mu) p^0 + \Gamma_{\nu\rho}^\mu p^\nu p^\rho = (\partial_0 p^\mu) p^0 + 2\Gamma_{0\nu}^\mu p^0 p^\nu + \Gamma_{ij}^\mu p^i p^j \\
& \stackrel{\mu \rightarrow 0}{\Rightarrow} (\partial_0 p^0) p^0 + \cancel{2\Gamma_{0\nu}^0 p^0 p^\nu} + \Gamma_{ij}^0 p^i p^j = (\partial_0 p^0) p^0 - \frac{\dot{a}}{a} g_{ij} p^i p^j \\
& \Leftrightarrow \frac{1}{2} \partial_0 ((p^0)^2) = \frac{\dot{a}}{a} \vec{p} \cdot \vec{p} \\
& \text{Όμως } (p^0)^2 - (\vec{p})^2 = m^2 \in \mathbb{R} \Rightarrow p^0 dp^0 = \tilde{p} d\tilde{p} \text{ 3-ορμή.} \\
& \Rightarrow \frac{1}{2} \partial_0 ((\vec{p} \cdot \vec{p})) = \tilde{p} \partial_0 \tilde{p} = \frac{\dot{a}}{a} \vec{p} \cdot \vec{p} = (\partial_0 a) (\vec{p})^2 \\
& \Rightarrow \frac{\dot{\tilde{p}}}{\tilde{p}} = -\frac{\dot{a}}{a} \Rightarrow \tilde{p} \propto a^{-1}, p^0 \propto a^{-1}
\end{aligned}$$

Καθώς το φαινόμενο Doppler δεν αλλάζει την περίοδο (στον ιδιοχρόνο) ενός κύματος, μεταξύ εκπομπής και παρατήρησης ισχύει

$$a^{-1}(t_{true})\lambda_{true} = a^{-1}(t_{obs})\lambda_{obs} \Leftrightarrow 1 + z = \frac{\lambda_{obs}}{\lambda_{true}} = \frac{a(t_{obs})}{a(t_{true})} \quad (3.1.11)$$

Και φυσικά αν $t_{obs} = t_0$, $a(t_{obs}) = 1$ και

$$1 + z = \frac{1}{a(t_{true})} \quad (3.1.12)$$

Τέλος, η σταθερά (για δεδομένο χρόνο) του Hubble, που συνδέει την ταχύτητα απομάκρυνσης μακρινών αντικειμένων από μας με την απόστασή τους από τη Γη, είναι συνάρτηση του χρόνου:

$$H(t) := \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \quad (3.1.13)$$

Οι εξισώσεις Friedmann τότε γράφονται

$$\begin{aligned} H^2 &= \frac{8\pi G}{3} \left(\rho - \frac{\Lambda}{8\pi G} \right) - \frac{k}{a^2} \\ \dot{H} + H^2 &= \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left[\left(\rho - \frac{\Lambda}{8\pi G} \right) + 3 \left(P + \frac{\Lambda}{8\pi G} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

Πώς καταλαβαίνουμε, όμως, σε τι Σύμπαν ζούμε; Ποια είναι η καμπυλότητά του; Υπάρχει κοσμολογική σταθερά (που αντιστοιχεί σε τάση για επιταχυνόμενη διαστολή του Σύμπαντος);

Η αρχική ένδειξη ήρθε το 1998 [28]: παρατηρώντας υπερκαινοφανείς τύπου Ia, υψηλού $z > 0.15$: η ακτινοβολία από τα γεγονότα αυτά είχε μικρότερη ένταση από ό,τι αναμενόταν σε κλειστό Σύμπαν χωρίς κοσμολογική σταθερά. Απεναντίας, τα αποτελέσματα έδειχναν προς επιταχυνόμενα διαστελλόμενο Σύμπαν, δηλαδή $\Lambda > 0, k = -1$

Περαιτέρω παρατηρήσεις υπερκαινοφανών σε πολύ υψηλό $z > 1$ υποστηρίζουν την επιταχυνόμενη διαστολή του σύμπαντος, ενώ μετρήσεις από διάφορες μεθοδολογίες όπως βαρυτική εστίαση (gravitational lensing) και σμήνη γαλαξιών δείχνουν πως η συνολική πυκνότητα τυπικής ύλης (που έλκεται, δηλαδή, βαρυτικά) είναι περίπου (βλ. [4])

$$\Omega_M \simeq 0.27 (\Omega_M := \frac{\rho_M}{\rho_{crit}} = \frac{8\pi G \rho}{3H_0^2})$$

Παρόλα αυτά, το Σύμπαν δεν είναι σίγουρο ακόμη αν είναι όντως ανοικτό. Τα δεδομένα φαίνεται να υποστηρίζουν ένα ανοικτό Σύμπαν ($k = -1$), ναι, αλλά με πολύ

μικρή παράμετρο Ω_k (ορισμένη όπως η Ω_M : $\Omega_k = 1 - (\Omega_M + \Omega_R + \Omega_\Lambda)$). Όταν συνδυάζει κανείς τα αποτελέσματα από BAO, η Ω_k μπορεί να λάβει και θετικές και αρνητικές (και προφανώς τη μηδενική) τιμές, αντιστοιχώντας σε $k = +1, -1, 0$ - βλ. 7.3 στο [2], και [21], π.χ.

Αυτά τα προβλήματα είναι φυσικά ενδιαφέροντα να αναλυθούν, αλλά αυτό είναι εκτός του σκοπού αυτής της Εργασίας. Θα παρουσιάσουμε κάποια ακόμα προβλήματα της FRW κοσμολογίας, που θα μας εισαγάγουν στην έννοια του **πληθωρισμού** (inflation).

3.2 Πληθωρισμός

3.2.1 Προβλήματα της κοσμολογίας FRW

Η κύρια πρόβλεψη της κοσμολογίας στο πρότυπο FRW (που είναι γνωστή και ως Big Bang cosmology) είναι πως, κάποια στιγμή στο παρελθόν ($13.8 \cdot 10^9$ έτη), το Σύμπαν ξεκίνησε να διαστέλλεται ταχύτατα, από μια αρχική μοναδικότητα (singularity), την οποία λαμβάνουμε ως την αρχή του ιδιοχρόνου $t_i = 0$. Αυτή είναι η πρόβλεψη της (θερμής) Μεγάλης Έκρηξης (Big Bang), και εξηγεί με μεγάλη επιτυχία την ποσότητα των στοιχείων στο Σύμπαν (μέσω της χρονικής εξέλιξης του Σύμπαντος εξηγείται η πυρηνοσύνθεση σε διάφορες ενέργειες - θερμοκρασίες - του Σύμπαντος). Παρά ταύτα, υπάρχουν κάποιες παρατηρήσεις που το απλοποιημένο αυτό μοντέλο δεν μπορεί να εξηγήσει (βλ. [29], [22]).

Ορισμός 24: Ο ορίζοντας σωματιδίων (particle horizon) είναι η μέγιστη απόσταση στην οποία ένας παρατηρητής μπορεί να λάβει σήμα από κάποια πηγή στον $t_i = 0$: ισοδύναμα, είναι το διάστημα $\chi(t)$ που ένα φωτόνιο που εκπέμπεται στη Μεγάλη Έκρηξη ταξιδεύει μέχρι κάποια χρονική στιγμή t :

$$\begin{aligned}\chi(t) &:= \tau(t) - \tau(t_i) = \int_{t_i}^t \frac{1}{a(t')} dt' = \int_{a(t_i)}^{a(t)} \frac{1}{a' \dot{a}'} da' \\ &= \int_{a(t_i)}^{a(t)} \frac{1}{(a')^2 H} da' = \int_{\ln a(t_i)}^{\ln a(t)} \frac{1}{a' H} d(\ln(a'))\end{aligned}\quad (3.2.1)$$

Ορισμός 25: Το μέγεθος $(aH)^{-1}$ ονομάζεται **ακτίνα Hubble**, και εκφράζει τη μέγιστη απόσταση από την οποία σήμα που εκπέμπεται κάποια χρονική στιγμή θα φτάσει κάποτε έναν παρατηρητή.

Το πρόβλημα είναι, πως στην κοσμολογία FRW ο ορίζοντας σωματιδίων είναι πεπερασμένος:

$$\chi(t) \propto (aH)^{-1}$$

Όσο το Σύμπαν είχε πολύ υψηλή ενέργεια, η ύλη στο Σύμπαν βρισκόταν σε μορφή πλάσματος: όταν το Σύμπαν έγινε αρκετά κρύο, και τα πρώτα άτομα σχηματίστηκαν, η μέση ελεύθερη διαδρομή ενός φωτονίου έγινε της τάξης του μεγέθους του Σύμπαντος (καθώς πλέον η μεγάλη πλειονότητα της ύλης έγινε μακροσκοπικά ηλεκτρικά ουδέτερη). Για αυτό και η ακτινοβολία υποβάθρου είναι τόσο σημαντική: αποτελείται από φωτόνια τα οποία εκπέμφθηκαν τη στιγμή t_* που η ύλη του Σύμπαντος έγινε ηλεκτρικά ουδέτερη. Αυτή η στιγμή αναφέρεται και ως **επανασύνδεση** (recombination), και ενίοτε και ως **εποχή τελευταίας σκέδασης** (epoch of last scattering).

Αλλά προτρέχουμε. Πριν την επανασύνδεση, έγινε άλλη μία θεμελιώδης μετάβαση. Όσο η ενέργεια του Σύμπαντος ήταν αρκετά υψηλή, η δυναμική του Σύμπαντος κυριαρχούνταν από τα στοιχεία που ταξίδευαν με ταχύτητες σχεδόν όση η ταχύτητα του φωτός: $\rho = 3P$. Λύνοντας τις εξισώσεις Friedmann, προκύπτει $a(t) \propto t^{\frac{2}{3(1+w)}}$, $w := \frac{P}{\rho} \Rightarrow a(t) \propto t^{\frac{1}{2}}$. Όμως, όταν η ενέργεια του Σύμπαντος έπεσε αρκετά χαμηλά, η δυναμική του Σύμπαντος άρχισε να καθορίζεται από την κίνηση ύλης μη-σχετικιστικής ταχύτητας: $P = 0 = w \Rightarrow a(t) \propto t^{\frac{2}{3}}$.

Η ακτίνα Hubble, την εποχή της επανασύνδεσης, ήταν πολύ μεγαλύτερη από τον ορίζοντα σωματιδίων, αλλά αυξανόταν πιο αργά από όσο ο ορίζοντας: σήμερα, ο ορίζοντας σωματιδίων είναι μεγαλύτερος από την ακτίνα Hubble, και το παρατηρήσιμο Σύμπαν είναι μικρότερο από τον ορίζοντα σωματιδίων. Την εποχή της επανασύνδεσης, όμως, υπήρχαν περίπου 10^6 περιοχές, η μία εκτός του ορίζοντα σωματιδίων της άλλης. Με άλλα λόγια, οι περιοχές αυτές ήταν αιτιατά ασύνδετες (causally disconnected): σημεία μίας από τις 10^6 περιοχές του χώρου δε θα μπορούσαν να έχουν επικοινωνήσει μέχρι τότε με σημεία μιας άλλης. Θα μπορούσαν, λοιπόν, να υπάρχουν έως 10^6 περιοχές στην ακτινοβολία υποβάθρου, η καθεμία με τη δικιά της θερμοκρασία, χωρίς να παραβιάζεται η αιτιότητα. Και όμως, όλο το Σύμπαν τότε είχε την ίδια θερμοκρασία, με εξαιρετικά μικρές ανομοιογένειες της τάξης του $10^{-3}\%$!! Γιατί, τη στιγμή που δεν υπάρχει αιτιακή σύνδεση μεταξύ αυτών των περιοχών, ήταν το Σύμπαν τόσο ομογενές; Αυτό το πρόβλημα λέγεται **πρόβλημα ομοιογένειας του ορίζοντα** (horizon problem).

Υπάρχει επίσης και ένα άλλο, μεγάλο, πρόβλημα. Ξέρουμε πως η παράμετρος $|(\Omega_M + \Omega_R + \Omega_\Lambda) - 1| = \mathcal{O}(1)$ σήμερα [2], και πως είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση του χρόνου. Στην εποχή της επανασύνδεσης, για να έχουμε $|\Omega - 1| = \mathcal{O}(1)$ σήμερα, πρέπει να ισχύει $|\Omega - 1| = \mathcal{O}(10^{-16})$ (και, αν θεωρήσουμε πως η δυναμική του Σύμπαντος ισχύει μέχρι τη στιγμή που το Σύμπαν έχει ενέργεια 10^{19}eV , τότε $|\Omega - 1| = \mathcal{O}(10^{-64})$)!!! Έχουμε ένα πρόβλημα: γιατί το Σύμπαν ξεκίνησε τόσο κοντά σε τέλεια επίπεδο;; Αυτό είναι το **πρόβλημα της επιπεδότητας** (flatness problem).

Αυτά τα προβλήματα λύνονται, με κομψό τρόπο, από την εισαγωγή στο μοντέλο μιας εποχής πριν την τυπική κοσμολογία, που ονομάζεται **πληθωρισμός** (inflation).

3.2.2 Ο μηχανισμός του πληθωρισμού

Ο πληθωρισμός ουσιαστικά συνοψίζεται στην έκφραση

$$\ddot{a} = -\frac{d((aH)^{-1})}{dt} > 0 \Leftrightarrow (\rho + 3P) < 0. \quad (3.2.2)$$

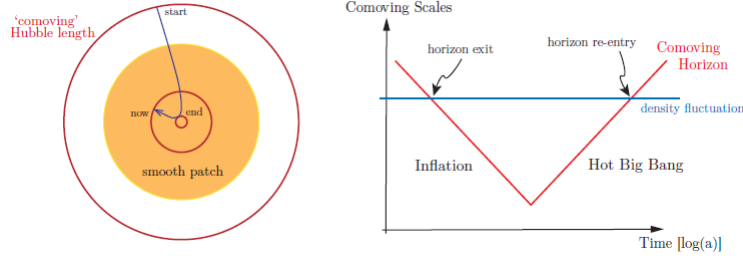
Φυσικά, αυτή η έκφραση ερμηνεύεται ως εξής: Στο πρώτο μέλος, βλέπουμε πως ο παράγοντας κλίμακας στρέφει τα κοίλα προς τα άνω με το χρόνο (αντίθετα με τη μετέπειτα εξέλιξη του Σύμπαντος, που τα στρέφει προς τα κάτω). Ισοδύναμα, η ακτίνα Hubble *μικραίνει, αντί να μεγαλώνει!* Ουσιαστικά, για αύξοντα t στην εποχή του πληθωρισμού, μια περιοχή του χώρου που αρχικά ήταν σε αιτιακή σύνδεση πλέον χωρίζεται σε μικρότερες περιοχές που δεν είναι πλέον σε αιτιακή σύνδεση, καθώς η ακτίνα Hubble μικραίνει (βλ. Σχήμα 3). Ταυτόχρονα, το μέγεθος της περιοχής συνέχεια μεγαλώνει (καθώς $\dot{a} > 0$ πάντα). Έτσι, μια περιοχή που στην εποχή της επανασύνδεσης είναι απλά πολύ μεγάλη για να βρίσκονται όλα τα σημεία της σε αιτιακή σύνδεση μπορεί, στην έναρξη της εποχής του πληθωρισμού, να έχει όλα τα σημεία της συνδεδεμένα. Δηλαδή, ομογενής περιοχή θα παραμείνει ομογενής! Αυτός ο μηχανισμός λύνει, λοιπόν, το πρόβλημα του ορίζοντα.

Επίσης, στην εποχή του πληθωρισμού, το μέγεθος $|\Omega - 1| \rightarrow 0$. Εάν στην αρχή του πληθωρισμού ισχύει $(aH)^{-1} \gg (a_0H_0)^{-1} = H_0^{-1}$, συμβαίνει το εξής: Καθώς το κομμάτι του Σύμπαντος που αντιστοιχεί στο παρατηρήσιμο Σύμπαν σήμερα είναι πολύ μικρότερο, στην αρχή του πληθωρισμού, από τις φυσικές διαστάσεις του Σύμπαντος, τότε σε όλο το σήμερα παρατηρήσιμο Σύμπαν $|\Omega - 1| \rightarrow 0$. Για πληθωρισμό που διαρκεί αρκετά, μπορούμε να δώσουμε όποια τιμή, όσο κοντά στο 0 θέλουμε, στην καμπυλότητα του Σύμπαντος όταν ο πληθωρισμός τελειώσει. Έτσι, αποφεύγεται το πρόβλημα αρχικών τιμών που είναι το πρόβλημα της επιπεδότητας του Σύμπαντος.

Στο δεύτερο μέλος της 3.2.2, βλέπουμε πως αναγκαία συνθήκη για τον πληθωρισμό είναι να παραβιαστεί η συνθήκη $1 + 3w = \rho^{-1}(\rho + 3P) > 0$. Ο μόνος τρόπος για να γίνει αυτό, δεδομένου πως $\rho > 0$, είναι να έχουμε κάποια *αρνητική πίεση*: προφανώς, η ύλη-ενέργεια που αλληλεπιδρά με τρόπους που ξέρουμε δεν μπορεί να ικανοποιήσει αυτή τη συνθήκη. Έτσι, συμπεραίνουμε πως για να επιτευχθεί πληθωρισμός, πρέπει να εισαγάγουμε κάποιο (ή κάποια) καινούριο πεδίο.

3.2.3 Απλό σενάριο: πληθωρισμός αργής κύλισης

(Σημείωση: Τα παρακάτω εξηγούνται σε μεγαλύτερη λεπτομέρεια στο σύγγραμμα του Lyth, [22], στα Κεφ. 13, 18)



Σχήμα 3: Επίλυση του προβλήματος ομοιογένειας του ορίζοντα. Στα αριστερά, η εξέλιξη της ακτίνας Hubble (κόκκινοι κύκλοι) από την αρχή του πληθωρισμού (start) έως το τέλος του (end) και σήμερα (now). Διαφάνεται πώς στο πληθωριστικό Σύμπαν η ακτίνα Hubble μικραίνει. Η πορτοκαλί περιοχή είναι εκείνη που αντιστοιχεί στην ακτίνα Hubble $(aH)^{-1}(t_*)$ όπου k -ρυθμοί των διαταραχών που ανιχνεύουμε στην ακτινοβολία υποβάθρου έχουν μήκος κύματος μεγαλύτερο από τον ορίζοντα γεγονότων, και άρα σταματούν να εξελίσσονται χρονικά. Στα δεξιά, το διάγραμμα που δείχνει πότε δεδομένος k -ρυθμός (μπλε) γίνεται μεγαλύτερου μήκους κύματος από τον ορίζοντα γεγονότων (κόκκινο) στο πληθωριστικό Σύμπαν (horizon exit). Κάποια στιγμή μετά το πέρας του πληθωρισμού, ‘ξαναμπαίνει’ στο διαστελλόμενο ορίζοντα γεγονότων (horizon re-entry). Από [5].

Το πιο απλό σενάριο είναι να υπάρχει ένα μόνο ομογενές στο χώρο, βαθμωτό πεδίο, που ευθύνεται για τον πληθωρισμό, και που κινείται με έναν βαθμό ελευθερίας υπό δυναμικό $V(\phi)$. Το πεδίο ονομάζεται **inflaton**. Τότε αυτό έχει Λαγκρανζιανή

$$\mathcal{L}(t, \phi, \dot{\phi}) = -\frac{1}{2}(\partial^\mu \phi)(\partial_\mu \phi) - V(\phi) \quad (3.2.3)$$

σε επίπεδο χωρόχρονο του πεδίου (field space).

Ξεκινώντας από τη δράση Einstein-Hilbert (Einstein-Hilbert action) που αντιστοιχεί σε $T_{\mu\nu} = 0$ (ένα κενό)

$$S_{vac} = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{1}{2} M_{pl}^2 R,$$

$M_{pl} = \sqrt{\frac{\hbar c}{8\pi G}} \simeq 2.435 \cdot 10^{18} GeV$ η ανηγμένη μάζα Planck, και μεταβάλλοντας τη δράση ως προς τη μετρική (χρησιμοποιώντας βέβαια την αρχή στάσιμης δράσης $\delta S = 0$) λαμβάνουμε τις εξισώσεις κίνησης για ελεύθερο σωματίδιο στο κενό: είναι οι εξισώσεις Einstein.

Βάζοντας και μια Λαγκρανζιανή ενός πεδίου, όπως δώσαμε στην 3.2.3, λαμβάνουμε

τις εξισώσεις Einstein 3.1.2 με ταυιστή τάσης-ενέργειας

$$T_{\mu\nu} = -2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta^{\mu\nu}} + \eta_{\mu\nu} \mathcal{L}.$$

Πράγματι, $\frac{\partial}{\partial \eta^{\mu\nu}} \left(\int d^4x \sqrt{-g} \frac{1}{2} M_{pl}^2 R \right) = \int d^4x \frac{1}{2} M_{pl}^2 \left(R \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial \eta^{\mu\nu}} + \sqrt{-g} \frac{\partial R}{\partial \eta^{\mu\nu}} \right) = 0$

$$\Rightarrow R \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial \eta^{\mu\nu}} + \sqrt{-g} \frac{\partial R}{\partial \eta^{\mu\nu}} = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \frac{\partial g}{\partial \eta^{\mu\nu}} + \sqrt{-g} \frac{\partial R^\rho{}_\rho}{\partial \eta^{\mu\nu}} = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + R_{\mu\nu} = 0.$$

Ο παραπάνω όρος \mathcal{L} στο όρισμα της δράσης $S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} M_{pl}^2 R + \mathcal{L} \right)$ δίνει τις παρόμοιες εξισώσεις

$$\frac{\partial}{\partial \eta^{\mu\nu}} \left[\int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} M_{pl}^2 R + \mathcal{L} \right) \right] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \eta^{\mu\nu}} (R \sqrt{-g}) + 2M_{pl}^{-2} \frac{\partial}{\partial \eta^{\mu\nu}} (\mathcal{L} \sqrt{-g}) = 0$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = -2M_{pl}^{-2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta^{\mu\nu}} - \frac{1}{2} \mathcal{L} \eta_{\mu\nu} \right) = M_{pl}^{-2} \left(-2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta^{\mu\nu}} + \mathcal{L} \eta_{\mu\nu} \right) = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

(όπου προφανώς δουλέψαμε σε φυσικό σύστημα μονάδων): πάλι οι εξισώσεις Einstein. Αντικαθιστώντας τη μετρική FRW, έχουμε

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - a^2(t) \partial_i \partial^i \phi + 3H \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\phi} + 3H \dot{\phi} + V'(\phi) = 0, \quad (3.2.4)$$

$$T_{\mu\nu} = (\partial_\mu \phi)(\partial_\nu \phi) - \eta_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} (\partial_\rho \phi)(\partial^\rho \phi) + V(\phi) \right)$$

$$\text{Τότε } \rho = T_{00} = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad P = T_{ii} = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi)$$

$$\text{Πράγματι, } (\partial_0 \phi)(\partial_0 \phi) - \eta_{00} \left(\frac{1}{2} (\partial_\rho \phi)(\partial^\rho \phi) + V(\phi) \right) =$$

$$\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} \left(-\dot{\phi}^2 + \nabla^2 \phi \right) + V(\phi) = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi)$$

Ομοίως και για P . Οπότε, για κατάλληλη επιλογή δυναμικού $V(\phi)$ και αρκετά μικρές χρονικές μεταβολές του inflaton, μπορούμε να παραγάγουμε την αρνητική πίεση που χρειάζεται για τον πληθωρισμό.

Ξαναγράφοντας την 1η εξ. Friedmann 3.1.8 για $k \simeq 0$ (και $\rho \mapsto \rho - \frac{\Lambda}{8\pi G}$),

$$H^2 = (3M_{pl}^2)^{-1}\rho \Leftrightarrow \rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) = 3M_{pl}^2 H^2 \quad (3.2.5)$$

$$\text{Θέτοντας } \left| \frac{d(H^{-1})}{dt} \right| = \frac{|\dot{H}|}{H^2} \ll 1,$$

ο κινητικός όρος του inflaton υπερνικάται από το δυναμικό όρο και έχουμε την 3.2.5 να ξαναγράφεται

$$V(\phi) \simeq 3M_{pl}^2 H^2 \quad (3.2.6)$$

$$\Rightarrow 6M_{pl}^2 H \dot{H} = \dot{V}(\phi) \stackrel{\frac{\partial}{\partial \phi}(3.2.5), (3.2.4)}{\Leftrightarrow} -3H\dot{\phi} = V'(\phi)$$

Συγκρίνοντας αυτό με την παράγωγο της 3.2.5, έχουμε πως $|\ddot{\phi}| \ll 3H|\dot{\phi}|$. Άρα, στη διάρκεια του πληθωρισμού, η τιμή του ϕ αλλάζει λίγο. Γι'αυτό και ονομάζουμε το μοντέλο 'μοντέλο αργής κύλισης': είναι σαν το ϕ να 'κυλά αργά' πάνω στην καμπύλη δυναμικού $V(\phi)$. Με το πέρας του πληθωρισμού, το inflaton διασπάται. Θα δούμε στη συνέχεια πώς η συζήτηση για τα πεδία του πληθωρισμού μπορεί να χρησιμεύσει, για τον υπολογισμό των διαταραχών της πυκνότητας σε βαθμωτούς και ταυυστικούς τρόπους.

3.3 Στοιχεία θεωρίας διαταραχών

Εν γένει, χειριζόμαστε το ενδεχόμενο η μετρική του χωροχρόνου να μην είναι η μετρική FRW ως εξής: Αν με $\bar{g}_{\mu\nu}$ συμβολίσουμε τη ‘μετρική υποβάθρου’ (background metric), που είναι φυσικά η μετρική FRW, τότε υποθέτουμε πως η πλήρης μετρική $g_{\mu\nu}$ είναι διαταραχή της $g_{\mu\nu}$:

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + (\delta g)_{\mu\nu}$$

(Σε όρους διαφορικής γεωμετρίας, το να διαταράζουμε το χώρο FRW είναι σαν να κάνουμε τα εξής βήματα: Πρώτον, ενσωματώνουμε τη διαφορίσιμη 4-διάστατη πολλαπλότητα \mathcal{M}_0 του αδιατάρακτου χώρου σε μια 5-διάστατη διαφορίσιμη πολλαπλότητα \mathcal{N} . Δεύτερον, κατασκευάζουμε μια οικογένεια διαφορίσιμων πολλαπλοτήτων \mathcal{M}_ε μίας παραμέτρου ε , και για κάθε ε καθορίζουμε μια σημειακή απεικόνιση (point map) $\phi_\varepsilon : \mathcal{M}_0 \rightarrow \mathcal{M}_\varepsilon$ που να διατηρεί τουλάχιστον ένα σημείο, $\forall \varepsilon \exists p \in \mathcal{M}_0 : \phi_\varepsilon(p) = p$. Βλέπε [33])

Το στοιχείο μήκους στο χώρο FRW είναι

$$ds^2 = \bar{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad \bar{g}_{\mu\nu} = a^2 \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$$

$$\Rightarrow ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = a^2 \left(- (1 + 2A)(dx^0)^2 + 2B_i dx^0 dx^i + (\delta_{ij} + h_{ij}) dx^i dx^j \right) \quad (3.3.1)$$

h_{ij} συμμετρικός.

Οι $4 \times 4 = 16$ βαθμοί ελευθερίας περιορίζονται από τη συμμετρία του $(\delta g)_{\mu\nu}$ σε $\frac{4(4+1)}{2} = 10$. Μπορούμε να ‘καταναείμουμε’ τους βαθμούς ελευθερίας ‘βολικά’ στις δομές A, B_i, h_{ij} με την **αποσύνθεση SVT** (SVT decomposition):

$$\begin{aligned} B_i &= \partial_i B + \hat{B}_i, \quad \nabla^i \hat{B}_i = 0 \\ h_{ij} &= (1 - 2\Psi)\delta_{ij} + \frac{1}{2}(\partial_i \partial_j + \partial_j \partial_i) E + \frac{1}{2}(\partial_i \hat{E}_j + \partial_j \hat{E}_i) + \hat{\mathcal{E}}_{ij}, \\ \nabla^i \hat{E}_j &= 0 \quad \forall i, j = 1, 2, 3 \\ \partial^i \hat{\mathcal{E}}_{ij} &= 0, \quad \forall j = 1, 2, 3, \quad \hat{\mathcal{E}}^i_i = 0 \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

Τώρα έχουμε 4 βαθμωτές συναρτήσεις A, B, Ψ, E , 2 3-διανύσματα \hat{B}_i, \hat{E}_i και 1 συμμετρικό 3-τανυστή είδους (0,2) $\hat{\mathcal{E}}_{ij}$. Για τις βαθμωτές συναρτήσεις έχουμε προφανώς 4 βαθμούς ελευθερίας.

Για κάθε 3-διάνυσμα έχουμε 3 βαθμούς ελευθερίας, μείον 1 από τη συνθήκη να μηδενίζεται η συναλλοίωτη παράγωγός του. Άρα μας μένουν 4 βαθμοί ελευθερίας

στα διανύσματα.

Για το συμμετρικό 3-τανυστή είδους (0,2) έχουμε αρχικά $\frac{3(3+1)}{2} = 6$ βαθμούς ελευθερίας. Όμως η συναλλοίωτη παράγωγος του τανυστή μηδενίζεται για κάθε ελεύθερο δείκτη του, φέρνοντας τους βαθμούς ελευθερίας κάτω σε 3. Επιβάλλοντας και ο τανυστής να είναι άιχνος, φεύγει άλλος 1, αφήνοντας 2 βαθμούς ελευθερίας εν τέλει.

Και έτσι ανακτήσαμε σωστά τις 10 ανεξάρτητες παραμέτρους της διαταραχής της μετρικής: φυσικά, $10_{\text{μετρική}} = 4_{\text{βαθμωτά}} + 4_{\text{διανύσματα}} + 2_{\text{τανυστής}}$. Για αυτό και η αποσύνθεση αυτή λέγεται SVT, δηλαδή Scalar-Vector-Tensor: Βαθμωτό-Διανυσματικό-Τανυστικό.

Αυτό που κάνει την αποσύνθεση SVT ελκυστική, είναι το εξής θεώρημα:

Θεώρημα 4: Όταν εφαρμόσουμε μετασχηματισμό Fourier στη διαταραγμένη μετρική, οι βαθμωτές συναρτήσεις εξελίσσονται ανεξάρτητα από τα διανύσματα, που εξελίσσονται ανεξάρτητα από τον τανυστή (βλ. [5]).

Απόδειξη: Ας λάβουμε την εξέλιξη στο χώρο Fourier N διαταραχών $Q_I, I = 1, \dots, N$, από αρχικό χρόνο t_1 μέχρι τελικό χρόνο t_2 .

$$\delta Q_I(t_2, \vec{k}) = \sum_{J=1}^N \int d^3 \vec{q} T_{IJ}(t_2, t_1, \vec{k}, \vec{q}) \delta Q_J(t_1, \vec{q})$$

με T_{IJ} κατάλληλο πίνακα που εξάγεται από τις εξισώσεις Einstein. Εν γένει ο πίνακας αυτός μπορεί να περιέχει όρους μικτούς ως προς \vec{k}, \vec{q} .

Εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό μετατόπισης στις (3-)συντεταγμένες $x^j \mapsto x^j + \Delta x^j$. Τότε στο χώρο Fourier

$$\begin{aligned} Q_I(t, \vec{k}) &:= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^3 \int d^3 x e^{-ix^j k_j} \tilde{Q}_I(t, \vec{x}) \\ &\mapsto \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^3 \int d^3 x e^{-i(x^j + \Delta x^j) k_j} \tilde{Q}_I(t, \vec{x}) = e^{-i\Delta \vec{x} \cdot \vec{k}} Q_I(t, \vec{x}) \\ &\Rightarrow \delta Q_I(t, \vec{k}) \mapsto e^{-i\Delta \vec{x} \cdot \vec{k}} \delta Q_I(t, \vec{k}) = \delta Q'_I(t, \vec{k}) \\ &\Rightarrow \delta Q'_I(t_2, \vec{k}) = \sum_{J=1}^N \int d^3 \vec{q} e^{-i\Delta \vec{x} \cdot \vec{k}} T_{IJ}(t_2, t_1, \vec{k}, \vec{q}) \delta Q_J(t_1, \vec{q}) = \\ &= \sum_{J=1}^N \int d^3 \vec{q} e^{-i\Delta \vec{x} \cdot \vec{k}} T_{IJ}(t_2, t_1, \vec{k}, \vec{q}) e^{i\Delta \vec{x} \cdot \vec{q}} \delta Q'_J(t_1, \vec{q}) \end{aligned}$$

$$= \sum_{J=1}^N \int d^3 \vec{q} T'_{IJ} \delta Q'_J(t_1, \vec{q}),$$

$$T'_{IJ}(t_2, t_1, \vec{k}, \vec{q}) = e^{i\Delta \vec{x} \cdot (\vec{q} - \vec{k})} T_{IJ}(t_2, t_1, \vec{k}, \vec{q}).$$

Μα ο χώρος είναι ισότροπος, και άρα η διαταραχή (και η εξέλιξή της) είναι αναλλοίωτη υπό μετασχηματισμό μετατόπισης $x^j \mapsto x^j + \Delta x^j$. Άρα

$$\delta Q'_I(t_2, \vec{k}) = \delta Q_I(t_2, \vec{k})$$

$$\Rightarrow \sum_{J=1}^N \int d^3 \vec{q} (T'_{IJ} - T_{IJ})(t_2, t_1, \vec{k}, \vec{q}) \delta Q_J(t_1, \vec{q}) = 0 \forall I$$

$$\Rightarrow T'_{IJ} = T_{IJ} e^{i\Delta \vec{x} \cdot (\vec{q} - \vec{k})} = T_{IJ} \forall I, J \Rightarrow T_{IJ} \equiv 0 \text{ ή } \vec{k} \equiv \vec{q}$$

Άρα μη-μηδενικές διαταραχές που δεν έχουν ίδιο κυματαριθμό δεν επηρεάζουν την εξέλιξη των υπολοίπων κυματαριθμών στο χρόνο, δηλαδή ξεχωριστοί κυματαριθμοί είναι ανεξάρτητοι, ο.έ.δ.

Ορισμός 26: Διαταραχή συγκεκριμένου κυματαριθμού \vec{k} λέγεται \vec{k} -**ρυθμός** (\vec{k} -mode).

Προς το παρόν, έχουμε εξηγήσει τη διαταραχή της μετρικής: όμως, το πραγματικό ενδιαφέρον έγκειται στη διαταραχή των ρ, P .

Θυμούμενοι πως $T_{\mu\nu} = (\rho + P)u_\mu u_\nu + P\eta_{\mu\nu}$, οπότε $T^\mu_\nu = (\rho + P)u^\mu u_\nu - P\delta^\mu_\nu$, ο τανυστής ύλης-ενέργειας διαταράσσεται [5]:

$$\delta \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) = 8\pi G \delta T_{\mu\nu} \quad (3.3.3)$$

$$\Rightarrow \delta T^\mu_\nu = \delta \left((\rho + P)u^\mu u_\nu - P\delta^\mu_\nu \right)$$

$$u_\nu = a(-1, u_i) \mapsto a(-1 - A, u_i), \quad u^\mu = a(1, u^i) \mapsto a(1 + A, u^i - B^i)$$

$$\Rightarrow \delta T^\mu_\nu = a \begin{bmatrix} -\delta\rho & -(\bar{\rho} + \bar{P})(u^i - B^i) \\ (\bar{\rho} + \bar{P})u_i & \bar{P}\mathbb{I}_3 \end{bmatrix}$$

Όπου φυσικά $u_\mu := \partial_\tau x_\mu$ και $u_\mu u^\mu = -1$.

Εν γένει όμως, οι διαταραχές αυτές (μετρικής, πίεσης και πυκνότητας) δεν είναι αναλλοίωτες υπό μετασχηματισμό βαθμίδας. Με λ.χ. το μετασχηματισμό βαθμίδας $t \mapsto t + \alpha$,

$$A \mapsto A - \dot{\alpha}, \quad B \mapsto B + \alpha, \quad E \mapsto E, \quad \Psi \mapsto \Psi + \alpha H$$

$$\delta\rho \mapsto \delta\rho - \dot{\rho}\alpha, \quad \delta P \mapsto \delta P - \dot{P}\alpha.$$

Ορίζοντας και την πυκνότητα 3-ορμής $\delta q^i := (\bar{P} + \bar{\rho})u^i$, που κατά τον τρόπο που παραθέσαμε παραπάνω σπάει σε ένα βαθμωτό και ένα διανυσματικό κομμάτι $\delta q + \delta \hat{q}_i$, $\nabla^i \delta \hat{q}_i = 0$, έχουμε

$$\delta q \mapsto \delta q + (\bar{\rho} + \bar{P})\alpha$$

Και τότε παράγουμε την ποσότητα

$$\delta \rho_m := \delta \rho - 3H\delta q \mapsto \delta \rho + 3H\delta q + \alpha(3H(\bar{\rho} + \bar{P}) - \dot{\bar{\rho}})$$

$$\stackrel{\dot{\rho} = -3H(\rho+P)}{\Rightarrow} \delta \rho_m \mapsto \delta \rho_m + \alpha(3H(\bar{\rho} + \bar{P}) - 3H(\bar{\rho} + \bar{P})) = \delta \rho_m.$$

Η ποσότητα αυτή ονομάζεται **αναλλοίωτη συμμετακινούμενη διαταραχή πυκνότητας** (gauge-invariant comoving density perturbation), που μόλις δείξαμε ότι είναι αναλλοίωτη υπό μετασχηματισμό βαθμίδας του χρόνου.

(Σημειώνουμε πως υπάρχει και άλλος μετασχηματισμός βαθμίδας που επιτρέπεται, ο χωρικός μετασχηματισμός $x^i \mapsto x^i + \delta^{ij}\nabla_j \beta$: τότε $B \mapsto B - \dot{\beta}$, $E \mapsto E - \beta$. Οι ποσότητες

$$\Phi_B := A - a \frac{d}{dt}(\dot{E} - B), \Psi_B := \Psi + a(\dot{E} - B)$$

είναι τότε αναλλοίωτες υπό το μετασχηματισμό, και λέγονται δυναμικά Bardeen) Επίσης, μπορούμε να παραγάγουμε την ποσότητα

$$\delta P_{en} := \delta P - \frac{\dot{P}}{\bar{\rho}}\delta \rho \mapsto \delta P_{en} + \alpha\left(-\dot{P} + \frac{\dot{P}}{\bar{\rho}}\dot{\bar{\rho}}\right) = \delta P_{en},$$

που ονομάζεται **εντροπική διαταραχή πίεσης** (entropic pressure perturbation, ή isocurvature pressure perturbation), και τη συμπληρωματική της ως προς δP , $\delta P_{ad} := \delta P - \delta P_{en}$ **αδιαβατική διαταραχή πίεσης** (adiabatic pressure perturbation)

Ο λόγος για τον οποίο χρησιμοποιούμε την ορολογία της Θερμοδυναμικής είναι ο εξής. Καθώς το inflaton διαταράσσεται και αυτό, $\phi = \bar{\phi} + \delta\phi$, $\delta\phi = \dot{\bar{\phi}}\delta t(t, \vec{x})$ (σε διαφορετικά σημεία του χωροχρόνου διαταράσσεται διαφορετικά!), με δt να είναι ο χρόνος που απαιτείται για να παραχθεί η διαταραχή του inflaton, με το πέρας του πληθωρισμού και τη διάσπαση του inflaton η διαταραχή του ‘γέννησε’ τις διαταραχές στην πυκνότητα και την πίεση στο χώρο. Διαταραχές των διαφόρων ειδών σωματιδίων, στο απλό μοντέλο που λαμβάνουμε μόνο το inflaton υπόψιν,

προκλήθηκαν όλες από τη διαταραχή του ίδιου πεδίου, και έτσι πρέπει να ισχύει [15]

$$\delta t = \frac{\delta \rho_s}{\dot{\rho}_s}, \quad s = R, M \quad (3.3.4)$$

(δηλαδή για σχετικιστικά και μη-σχετικιστικά σωματίδια). Ισοδύναμα, οι αναλογίες των αριθμών των σωματιδίων παραμένουν σταθερές, που είναι η αδιαβατική συνθήκη. Πάντα, για δεδομένο χρονικό μετασχηματισμό βαθμίδας, μπορούμε από τον ορισμό της αναλλοίωτης εντροπικής διαταραχής πίεσης να βρούμε την αδιαβατική διαταραχή.

Τέλος, μια αναλλοίωτη ποσότητα που δίνει τη συμμετακινούμενη διαταραχή της καμπυλότητας είναι η

$$\mathcal{R} := A - \frac{H}{\bar{\rho} + \bar{P}} \delta q \mapsto \mathcal{R} + \alpha \left(H - \frac{H}{\bar{\rho} + \bar{P}} (\bar{\rho} + \bar{P}) \right) = \mathcal{R}$$

Άλλη ποσότητα, επίσης αναλλοίωτη, που δίνει τη διαταραχή της καμπυλότητας σε υπερεπιφάνειες σταθερής πυκνότητας είναι η

$$\zeta := - \left(\Psi + \frac{H}{\bar{\rho}} \delta \rho \right).$$

Αποδεικνύεται [5] πως οι δύο αυτές ποσότητες συσχετίζονται ως εξής:

$$-\zeta = \mathcal{R} + \frac{k^2}{(aH)^2} \frac{2\bar{\rho}}{3(\bar{\rho} + \bar{P})} \Psi_B \quad (3.3.5)$$

3.3.1 Σχόλιο: Συμπεριφορά των διαταραχών στον πληθωρισμό

Στην εποχή του πληθωρισμού μιλάμε για διαταραχές των πεδίων που βρίσκονται στη Λαγκρανζιανή του, δηλαδή το inflaton και, ενδεχομένως, άλλα πεδία. Αυτές, μαζί με τη διαταραχή της μετρικής, είναι που παράγουν τις διαταραχές των παρατηρήσιμων μεγεθών, και τους ρυθμούς που τους αντιστοιχούν. Στο πληθωριστικό Σύμπαν, όπως έχουμε δει, η ακτίνα Hubble $(aH)^{-1}$ μικραίνει με το χρόνο.

Έχοντας εφαρμόσει την αποσύνθεση SVT στη διαταραχή της μετρικής, και δουλεύοντας με τις διαταραγμένες εξ. Einstein 3.3.3, λαμβάνουμε τις εξής εξισώσεις χρονικής εξέλιξης για τις διαταραχές [5]:

$$\text{Καμπυλότητα: } \dot{\mathcal{R}} = - \frac{H}{\bar{\rho} + \bar{P}} \delta P_{en} + k^2 (aH)^{-2} (\dots) \quad (3.3.6)$$

$$\text{Διανύσματα: } \begin{cases} \delta\dot{q}_i + 3H\delta q_i = 0 \\ k^2(\dot{\hat{E}}_i + B_i) = 16\pi G\delta q_i \end{cases} \quad (3.3.7)$$

$$\text{Τανυστής: } \ddot{\hat{E}}_{ij} + 3H\dot{\hat{E}}_{ij} + \frac{k^2}{a^2}\hat{E}_{ij} = 0 \quad (3.3.8)$$

Η διανυσματική εξίσωση για το δq_i , παρότι δεν είναι αυστηρά αναλλοίωτη υπό μετασχηματισμό βαθμίδας, δείχνει πως με την πάροδο του χρόνου $\delta q_i \rightarrow 0$, και άρα η αναλλοίωτη 2η γραμμή της 3.3.7 $\rightarrow 0$: οι διανυσματικές διαταραχές είναι αμελητέες.

Επίσης φθίνουσα στο χρόνο λύση δίνει η τανυστική εξίσωση 3.3.8, $\hat{E}_{ij} \propto e^{-3Ht}$. Βαρυτικά κύματα, λοιπόν, που παράχθηκαν την εποχή του πληθωρισμού δεν παρατηρούνται σήμερα, αλλά ενδέχεται να έχουν αφήσει παρατηρήσιμα ίχνη στους ‘διαγωνίους τρόπους’ (B-modes) της πόλωσης του CMB.

Το πραγματικά ενδιαφέρον μέγεθος είναι η καμπυλότητα. Στο απλοποιημένο κοσμολογικό σενάριο όπου μόνο το inflaton υπάρχει, η εντροπική διαταραχή της πίεσης $\delta P_{en} = 0$, καθώς το inflaton πληροί την αδιαβατική συνθήκη. Η εξ. 3.3.6 απλοποιείται στην

$$\dot{\mathcal{R}} = \mathcal{O}(k^2(aH)^{-2})$$

Και άρα, διαφορετικοί ρυθμοί της \mathcal{R} εξελίσσονται διαφορετικά στο χρόνο. Προφανές; Μπορεί, αλλά κρύβει την ακόλουθη πληροφορία, που καθιστά την \mathcal{R} το κύριο παρατηρήσιμο (στην εποχή της επανασύνδεσης) μέγεθος:

Καθώς ο κυματαριθμός k ενός k -ρυθμού παραμένει σταθερός και η ακτίνα Hubble πρώτα μικραίνει (την εποχή του πληθωρισμού) και έπειτα μεγαλώνει (μετά το πέρας του πληθωρισμού), εν γένει υπάρχουν δύο χρονικές στιγμές t_* όπου $k = aH$. Αυτές τις στιγμές τις ονομάζουμε **διαβάσεις του ορίζοντα** (horizon crossings). Φυσικά, ρυθμοί με μεγαλύτερο μήκος κύματος ($\lambda \propto k^{-1}$) θα ‘βγουν’ από τον ορίζοντα νωρίτερα, και θα ξαναεισέλθουν αργότερα από αυτούς με μικρότερο μήκος κύματος. Μα φυσικά για $k \ll aH$, $k^2(aH)^{-2} \simeq 0$, οπότε η εξ. 3.3.6 γίνεται απλώς $\dot{\mathcal{R}} = 0$. Δηλαδή, όσο είναι ‘εκτός’ του ορίζοντα ένας ρυθμός της \mathcal{R} , συμπεριφέρεται ως σταθερά. Επίσης, από την 3.3.5 ισχύει $\zeta = \mathcal{R}$, καθιστώντας την πληροφορία που παίρνουμε από ρυθμούς της μίας ισοδύναμη με αυτήν από αντίστοιχους ρυθμούς της άλλης. Άρα, επειδή η \mathcal{R} θα αφήσει στο CMB το αποτύπωμά του, μπορούμε μέσω αυτού του ρυθμού (και κάθε κατάλληλου ρυθμού, και ενδεχομένως και μέσω των B-modes για την τανυστική διαταραχή \hat{E}_{ij}) να μετρήσουμε τις διαταραχές στο πληθωριστικό Σύμπαν.

3.4 Στοιχεία στατιστικής στην Κοσμολογία

3.4.1 Συσχετιστές

Ορισμός 27: Το μέγεθος $\xi_{\alpha_1, \dots, \alpha_{n_1}; \beta_1, \dots, \beta_{n_2}}(x_{21})$ που εκφράζει τη μέση τιμή μιας συλλογής (ensemble average) δύο πεδίων $\mathcal{O}_{\alpha_1, \dots, \alpha_{n_1}}(x_1)$, $\mathcal{O}'_{\beta_1, \dots, \beta_{n_2}}(x_2 = x_1 + x_{21})$ σε δύο διαφορετικά σημεία,

$$\xi_{\alpha_1, \dots, \alpha_{n_1}; \beta_1, \dots, \beta_{n_2}}(x_{21}) := \langle \mathcal{O}_{\alpha_1, \dots, \alpha_{n_1}}(x_1), \mathcal{O}'_{\beta_1, \dots, \beta_{n_2}}(x_2) \rangle \quad (3.4.1)$$

ονομάζεται **συσχετιστής 2 σημείων** (2-point correlator) των

$$\mathcal{O}_{\alpha_1, \dots, \alpha_{n_1}}(x_1), \mathcal{O}'_{\beta_1, \dots, \beta_{n_2}}(x_2).$$

Με ακριβώς ανάλογο τρόπο ορίζονται και συσχετιστές περισσότερων σημείων. Στο χώρο ορμών, η 3.4.1 γράφεται

$$\begin{aligned} & \langle \mathcal{O}_{\alpha_1, \dots, \alpha_{n_1}}(k_1), \mathcal{O}'_{\beta_1, \dots, \beta_{n_2}}(k_2) \rangle \\ &= \iint \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^{3 \cdot 2} d^3 x_1 d^3 x_2 e^{-ik_1 \cdot x_1} e^{-ik_2 \cdot x_2} \langle \mathcal{O}_{\alpha_1, \dots, \alpha_{n_1}}(x_1), \mathcal{O}'_{\beta_1, \dots, \beta_{n_2}}(x_2) \rangle \\ &= \iint \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^{3 \cdot 2} d^3 x_1 d^3 x_{21} e^{-i((k_1+k_2) \cdot x_1 + k_2 \cdot x_{21})} \xi_{\alpha_1, \dots, \alpha_{n_1}; \beta_1, \dots, \beta_{n_2}}(x_{21}) \\ &= \delta^{(3)}(k_1 + k_2) \int \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^3 d^3 x_{21} e^{-ik_2 \cdot x_{21}} \xi_{\alpha_1, \dots, \alpha_{n_1}; \beta_1, \dots, \beta_{n_2}}(x_{21}) \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

$$\Rightarrow \langle \mathcal{O}(k_1) \mathcal{O}(k_2) \rangle := (2\pi)^3 \delta^{(3)}(k_1 + k_2) \mathcal{P}_{\mathcal{O}}(k_2) \quad (3.4.3)$$

Το μέγεθος $\mathcal{P}_{\mathcal{O}}(k)$ ονομάζεται **φάσμα ισχύος του \mathcal{O}** (power spectrum of \mathcal{O}). Μπορεί να παρατηρηθεί απευθείας από το CMB (σε περίπτωση που $\mathcal{O} = \mathcal{R}$, $\mathcal{O}_{\alpha_1 \alpha_2} = T_{\alpha_1 \alpha_2}$: βαθμωτές και τανυστικές διαταραχές αναλλοίωτες υπό μετασχηματισμό βαθμίδας), και αποτελεί τη σύνδεση μεταξύ θεωρίας και πειράματος. Εντελώς παρομοίως με την 3.4.2 ορίζονται και τα αντίστοιχα μεγέθη

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}(k_1) \mathcal{O}(k_2) \mathcal{O}(k_3) \rangle &:= (2\pi)^3 \delta^{(3)}(k_1 + k_2 + k_3) \mathcal{B}_{\mathcal{O}}(k_1, k_2, k_3) \\ \langle \mathcal{O}(k_1) \mathcal{O}(k_2) \mathcal{O}(k_3) \mathcal{O}(k_4) \rangle &:= (2\pi)^3 \delta^{(3)}(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \mathcal{T}_{\mathcal{O}}(k_1, k_2, k_3, k_4) \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

Όπου τα μεγέθη $\mathcal{B}_{\mathcal{O}}$, $\mathcal{T}_{\mathcal{O}}$ ονομάζονται **δι-φάσμα και τρι-φάσμα του \mathcal{O}** (bispectrum and trispectrum of \mathcal{O}) αντίστοιχα.

Τα πεδία των οποίων η Λαγκρανζιανή καθορίζει τις εξισώσεις κίνησης στον πληθωρισμό, φυσικά, υπακούουν σε κάποια στατιστική κατανομή. Η απλούστερη κατανομή που μπορούμε να απαιτήσουμε να υπακούουν είναι μια Γκαουσιανή κατανομή,

$$\mathcal{O}(x^\rho) \propto \sqrt{\frac{1}{(2\pi)^4 \det\{\Sigma\}}} \exp\left\{\left(-\frac{1}{2}(x^\rho - \mu^\rho)(\Sigma^{-1})^\sigma_\rho(x_\sigma - \mu_\sigma)\right)\right\} \quad (3.4.5)$$

οπότε και οι συσχετιστές απλοποιούνται, πάρα πολύ. Αυτό, από το ακόλουθο Θεώρημα:

Θεώρημα 5 (Wick): Έστω Γκαουσιανό πεδίο με κέντρο στην αρχή των αξόνων $\mathcal{O}(x^\rho)$ (ισοδύναμα, στην εξ. 3.4.5 $\mu^\rho \equiv 0$). Τότε ισχύουν τα ακόλουθα για τους συσχετιστές n σημείων:

$$i) : \langle \mathcal{O}(k_1) \dots \mathcal{O}(k_n) \rangle = 0, n = 2m + 1, m \in \mathbb{N}$$

$$ii) : \langle \mathcal{O}(k_1) \dots \mathcal{O}(k_n) \rangle = \sum_{i_1 \neq j_1} \prod_{l=1}^m \langle \mathcal{O}(k_{i_l}) \mathcal{O}(k_{j_l}) \rangle, n = 2m, m \in \mathbb{N}.$$

Απόδειξη: Θα χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό του [38] της συστολής (contraction): $\mathcal{T}(UV) := U \cdot V - : UV : \equiv \overline{UV} - : UV :, U, V$ τελεστές δημιουργίας ή καταστροφής, $\mathcal{T}(UV)$ το χρονικά διατεταγμένο γινόμενο τους (δηλαδή, όπως θα εμφανίζονταν σε ένα διάγραμμα Feynman, από αριστερά προς τα δεξιά):

$\mathcal{T}(UV..) = \sigma_{UV..} XY..$, $\sigma_{UV..}$ το πρόσημο της μετάθεσης των στοιχείων της έκφρασης $UV..$ ούτως ώστε να διαταχθούν χρονικά, $X, Y..$ οι ίδιοι τελεστές χρονικά διατεταγμένοι, και

$: UV... :$ η διάταξη των τελεστών με όλους τους τελεστές δημιουργίας αριστερά και όλους τους τελεστές καταστροφής δεξιά.

Το μέγεθος $\langle \mathcal{O}(k_1) \dots \mathcal{O}(k_n) \rangle$ δεν είναι παρά το

$$\begin{aligned} & \langle 0 | \mathcal{T}(\mathcal{O}(k_1) \dots \mathcal{O}(k_n)) | 0 \rangle \\ & = \langle 0 | \overline{\mathcal{O}(k_1) \dots \mathcal{O}(k_n)} | 0 \rangle - \langle 0 | : \mathcal{O}(k_1) \dots \mathcal{O}(k_n) : | 0 \rangle, n = 2m \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

$|0\rangle$ η βασική κατάσταση του πεδίου \mathcal{O} .

$$\langle 0 | : \mathcal{O}(k_1) \dots \mathcal{O}(k_n) : | 0 \rangle = 0,$$

καθώς είτε το \mathcal{O} θα δρα ως τελεστής καταστροφής και $\mathcal{O}|0\rangle = 0$ είτε θα δρα ως τελεστής δημιουργίας και τότε το \mathcal{O}^\dagger δρα ως τελεστής καταστροφής: $\langle 0 | \mathcal{O} =$

$$(\mathcal{O}^\dagger |0\rangle)^\dagger = 0.$$

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 1 του [38], αν $n = 2m$ όλοι οι τελεστές \mathcal{O} αντικαθίστανται από τους αριθμούς

$$\prod_{l=1}^m \overline{\mathcal{O}_{k_{i_l}} \mathcal{O}_{k_{j_l}}},$$

όπου φυσικά πρέπει να αθροίσουμε πάνω σε όλους τους δυνατούς τρόπους ομαδοποίησης των k_{i_l}, k_{j_l} , $i_l \neq j_l \forall l \in [1, m]$.

Άρα καταλήγουμε στην ii) :

$$\begin{aligned} & \langle 0 | \mathcal{T}(\mathcal{O}(k_1) \dots \mathcal{O}(k_{2m})) | 0 \rangle \\ &= \sum_{i_l \neq j_l} \prod_{l=1}^{\frac{n}{2}} \langle 0 | \overline{\mathcal{O}(k_{i_l}) \mathcal{O}(k_{j_l})} | 0 \rangle \\ &= \sum_{i_l \neq j_l} \prod_{l=1}^m \langle 0 | \overline{\mathcal{O}(k_{i_l}) \mathcal{O}(k_{j_l})} | 0 \rangle \\ &= \sum_{i_l \neq j_l} \prod_{l=1}^m \langle \mathcal{O}(k_{i_l}) \mathcal{O}(k_{j_l}) \rangle. \end{aligned}$$

Εάν όμως $n = 2m + 1$, θα παραμείνει από το $\langle 0 | \mathcal{T}(\mathcal{O}(k_1) \dots \mathcal{O}(k_n)) : | 0 \rangle$ ένας όρος \mathcal{O} μέσα στο ανάπτυγμα της 3.4.6,

$$\begin{aligned} & \langle 0 | \mathcal{T}(\mathcal{O}(k_1) \dots \mathcal{O}(k_n)) | 0 \rangle \\ &= \sum_p \langle 0 | \mathcal{O}(k_p) \prod_{l \neq p} \overline{\mathcal{O}(k_l)} | 0 \rangle - \langle 0 | : \prod_l \mathcal{O}(k_l) : | 0 \rangle \quad (3.4.7) \\ &= 0, \text{ ο.έ.δ.} \end{aligned}$$

Δίνουμε έμφαση στο αποτέλεσμα του Θεωρήματος 5, γιατί είναι θεμελιακό. Γκαουσιανά πεδία εξαφανίζουν τους συσχετιστές 3,5,... σημείων με τους εαυτούς τους, και κάθε συσχετιστής τάξης 4,6,... είναι άθροισμα όλων των διάφορων τρόπων 'ζεύξης' των διαφόρων σημείων σε συσχετιστές 2 σημείων. Όλη η πληροφορία που μπορούμε να αντλήσουμε από Γκαουσιανά πεδία βρίσκεται λοιπόν στους συσχετιστές 2 σημείων.

Ανατρέχοντας στον ορισμό του διφάσματος, εξ. 3.4.4, το διφάσμα ενός Γκαουσιανού πεδίου πρέπει να μηδενίζεται.

3.4.2 Παρατηρησιακά μεγέθη

(Σημείωση: Πιο λεπτομερής περιγραφή μπορεί να βρεθεί στα Κεφ. 9,22-24 του [5], 12 του [29]) Αν ορίσουμε τη διασπορά

$$\Delta_s^2(k) \equiv \Delta_{\mathcal{R}}^2(k) := \frac{k^3}{(2\pi)^2} \mathcal{B}_{\mathcal{R}}(k),$$

τότε ακολουθεί ένα άλλο μέγεθος, που ονομάζεται **βαθμωτή φασματική κλίση** (scalar spectral tilt):

$$n_s - 1 := \frac{d}{d(\ln k)} [\ln (\Delta_s^2(k))]$$

Ομοίως ορίζεται η τανυστική φασματική κλίση $n_t - 1 := \frac{d}{d(\ln k)} [\ln (\Delta_t^2(k))]$, με μία διαφορά: η διασπορά $\Delta_t^2(k) \equiv \Delta_{\mathcal{E}^\times}^2(k) + \Delta_{\mathcal{E}^+}^2(k) = 2\Delta_{\mathcal{E}}^2(k)$, αντιστοιχώντας στις δύο πολώσεις (\times και $+$) των βαρυτικών κυμάτων.

Έτσι το Θεώρημα 5) σημαίνει πως Γκαουσιανά πεδία δίνουν φασματική κλίση $n - 1 = 0$. Συνέπεια αυτού είναι πως, για απλά μοντέλα με ένα πεδίο στον πληθωρισμό, αναμένουμε μικρή απόκλιση της φασματικής κλίσης από το 0. Πιο διεξοδικά, αυτό απέδειξαν οι Creminelli και Zaldarriaga για τη ζ στο [11]:

$$\langle \zeta(k_1)\zeta(k_2)\zeta(k_3) \rangle \propto (n_s - 1) + \mathcal{O}\left(\frac{k_1}{k_3}\right)^2$$

Αν έχουμε σημαντική διαφορά, αυτό θα είναι ισχυρή ένδειξη πως στην εποχή του πληθωρισμού οι διαταραχές παράγονται από πολλαπλά πεδία. Η ‘μη-Γκαουσιανότητα’ (non-Gaussianity) παραμετρίζεται από την τοπική βαθμωτή παράμετρο f_{NL}^{loc} :

$$\mathcal{R}(x) := \mathcal{R}_g(x) + \frac{3}{5} f_{NL}^{loc} [\mathcal{R}_g^2(x) - \langle \mathcal{R}_g^2(x) \rangle], \quad (3.4.8)$$

\mathcal{R}_g το Γκαουσιανό κομμάτι του πεδίου (εδώ η συμμετακινούμενη διαταραχή καμπυλότητας, αλλά ισχύει το ίδιο και για άλλα πεδία ο ορισμός). Από τις 3.4.8, 3.4.4 έχουμε:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{R}(k_1)\mathcal{R}(k_2)\mathcal{R}(k_3) \rangle &:= (2\pi)^3 \delta^{(3)}(k_1 + k_2 + k_3) \mathcal{B}_{\mathcal{R}}(k_1, k_2, k_3) \\ \Rightarrow \langle \prod_{j=1}^3 (\mathcal{R}_g(k_j) + \frac{3}{5} f_{NL}^{loc} [\mathcal{R}_g^2 - \langle \mathcal{R}_g^2 \rangle])(k_j) \rangle &= (2\pi)^3 \delta^{(3)}(k_1 + k_2 + k_3) \mathcal{B}_{\mathcal{R}}(k_1 + k_2 + k_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \Rightarrow \langle \prod_{j=1}^3 \mathcal{R}_g(k_j) \rangle + \frac{3}{5} f_{NL}^{loc} \sum_{l=1}^3 \left(\langle [\mathcal{R}_g^2(k_l) - \langle \mathcal{R}_g^2(k_l) \rangle] \prod_{l \neq j=1}^3 \mathcal{R}_g(k_j) \rangle \right) + \mathcal{O}((f_{NL}^{loc})^2) \\
& = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(k_1 + k_2 + k_3) \mathcal{B}_{\mathcal{R}}(k_1 + k_2 + k_3) \\
& \simeq \frac{3}{5} f_{NL}^{loc} \sum_{l=1}^3 \left(\langle \mathcal{R}_g^2(k_l) \prod_{l \neq j=1}^3 \mathcal{R}_g(k_j) \rangle - \langle \mathcal{R}_g^2(k_l) \rangle \langle \prod_{l \neq j=1}^3 \mathcal{R}_g(k_j) \rangle \right) \\
& \stackrel{\text{Θεώρημα 5ii}}{=} \frac{3}{5} f_{NL}^{loc} \sum_{l=1}^3 \left(\left[\langle \mathcal{R}_g(k_l) \mathcal{R}_g(k_{j_2}) \rangle \langle \mathcal{R}_g(k_l) \mathcal{R}_g(k_{j_1}) \rangle + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \langle \mathcal{R}_g(k_l) \mathcal{R}_g(k_{j_1}) \rangle \langle \mathcal{R}_g(k_l) \mathcal{R}_g(k_{j_2}) \rangle + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \langle \mathcal{R}_g(k_l) \mathcal{R}_g(k_l) \rangle \langle \mathcal{R}_g(k_{j_1}) \mathcal{R}_g(k_{j_2}) \rangle \right] - \langle \mathcal{R}_g^2(k_l) \rangle \langle \mathcal{R}_g(k_{j_1}) \mathcal{R}_g(k_{j_2}) \rangle \right) \\
& = 2 \frac{3}{5} f_{NL}^{loc} \sum_{l=1}^3 \langle \mathcal{R}_g(k_l) \mathcal{R}_g(k_{j_1}) \rangle \langle \mathcal{R}_g(k_l) \mathcal{R}_g(k_{j_2}) \rangle \\
& \stackrel{3.4.3}{=} \frac{6}{5} f_{NL}^{loc} \sum_{l=1}^3 (2\pi)^3 \delta^{(3)}(k_l + k_{j_1}) \mathcal{P}_{\mathcal{R}_g}(k_{j_1}) (2\pi)^3 \delta^{(3)}(k_l + k_{j_2}) \mathcal{P}_{\mathcal{R}_g}(k_{j_2}) \\
& \Rightarrow \mathcal{B}_{\mathcal{R}}(k_1, k_2, k_3) = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(k_1 + k_2 + k_3) \times \\
& \quad \times \frac{6}{5} f_{NL}^{loc} (\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k_1) \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k_2) + \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k_1) \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k_3) + \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k_2) \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k_3))
\end{aligned}$$

Οπότε αποδείξαμε πως η μη-Γκαουσιανότητα του αρχέγονου Σύμπαντος φαίνεται κατευθείαν στο τριφάσμα.

Φυσικά, φαίνεται πως ο μόνος περιορισμός στη διατεταγμένη τριάδα (k_1, k_2, k_3) είναι η διατήρηση της ορμής, $k_1 + k_2 + k_3 = 0$. Παραμένουν δύο βαθμοί ελευθερίας, οι οποίοι κωδικοποιούνται στους λόγους x_2, x_3 των μέτρων των ορμών! Η διατήρηση της ορμής είναι διανυσματική: περνώντας στα μέτρα, ισχύει φυσικά η τριγωνική ανισότητα $|k_1| = |k_2 + k_3| \leq |k_2| + |k_3| \Rightarrow 1 \leq x_2 + x_3$. Επίσης, απαιτώντας χωρίς βλάβη της γενικότητας $x_2 < x_3$, στο (x_2, x_3) -επίπεδο κάθε σημείο μέσα στο τρίγωνο που ορίζεται από τα σημεία $(0, 0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(0, 1)$ είναι επιτρεπτό. Όπως είδαμε, όμως, διαφορετικοί λόγοι ορμών (διαφορετικά σημεία στο τρίγωνο) δίνουν διαφορετικές προβλέψεις για τη μη-Γκαουσιανότητα.

Ορισμός 28: Κάθε λύση που αντιστοιχεί σε διαφορετικό σημείο του τριγώνου αναφέρεται ως διαφορετικό **σχήμα της μη-Γκαουσιανότητας** (shape of non-Gaussianity).

3.4.3 Μη-Γκαουσιανότητα σε μοντέλα πολλαπλών πεδίων: Σύμμορφη συμμετρία

Ο χωροχρόνος του πληθωριστικού Σύμπαντος είναι ισόμορφος τοπικά με ένα χώρο dS_5 (de Sitter), με ομάδα συμμετρίας την $SO(1, 4)$ (εφόσον φαίνεται να έχει θετική κοσμολογική σταθερά, άρα και σε κενό Σύμπαν οι λύσεις των εξισώσεων Einstein είναι χώρος σταθερής καμπυλότητας με $k = +1$, και ο χώρος de Sitter dS_5 διαφέρει από τον αντίστοιχο Anti-de Sitter AdS_5 μόνο όσον αφορά την καμπυλότητά του: και οι δύο έχουν την ίδια ομάδα συμμετρίας. Εφόσον ο χωροχρόνος υπακούει σε σύμμορφη συμμετρία 4 διαστάσεων και ισχύει η συσχέτιση AdS_{d+1}/CFT_d - βλ. ενότητα 2.5.2, και [24] -, δικαιολογείται ο συσχετισμός που παρουσιάσαμε. Φυσικά, υπάρχουν και σημαντικές διαφορές μεταξύ των συσχετισμών AdS_{d+1}/CFT_d και dS_{d+1}/CFT_d , αλλά ο βασικός συλλογισμός πως υπάρχει συσχέτιση στέκει [34]).

Το ενδεχόμενο να υπάρχουν πολλά πεδία (τανυστές είδους $(0, s)$, s το spin), σημαίνει φυσικά πως παράγουν και αυτά διαταραχές, οι οποίες θα φαίνονται εν γένει στους συσχετιστές 2, 3, και 4 σημείων των μετρήσιμων ποσοτήτων από το CMB. Ρυθμοί με κυματριθμούς $k \ll (aH)^{-1}$ υπακούουν μια σχέση κλιμάκωσης (scaling) στον ιδιοχρόνο, όπου η εξάρτησή τους από τον ιδιοχρόνο τ είναι $\tau^{-\Delta}$.

Ορισμός 29: Το αδιάστατο μέγεθος Δ ονομάζεται **σύμμορφο βάρος** (conformal weight) του πεδίου.

Επίσης, λόγω των ισομετριών του χώρου dS_5 , πεδία που έχουν spin s οφείλουν να πληρούν το λεγόμενο **φράγμα Higuchi** (Higuchi bound) [20]

$$m^2 > s(s-1)H^2 \quad (3.4.9)$$

Η σχέση κλιμάκωσης στον ιδιοχρόνο επιβάλλει

$$\frac{m^2}{H^2} = -\Delta(\Delta-3) + (s-2)(s+1),$$

που χρησιμοποιώντας την 3.4.9 γράφεται

$$\begin{aligned} m^2 &= -\Delta(\Delta-3)H^2 + (s-2)(s+1)H^2 > s(s-1)H^2 \\ \Rightarrow \Delta(\Delta-3) &< -s(s-1) + (s-2)(s+1) = s^2 - s - 2 - s^2 + s = -2 \\ \Rightarrow \Delta^2 - 3\Delta + 2 &< 0 \Leftrightarrow (\Delta-2)(\Delta-1) < 0 \Leftrightarrow \Delta \in (1, 2) \end{aligned}$$

Άρα, πεδία μη-μηδενικού σπιν με μάζα παράγουν διαταραχές που φθίνουν με τον ι-διοχρόνο, με τυπική Λαγκρανζιανή. Όμως, αν τροποποιηθεί κατάλληλα η Λαγκρανζιανή και τροποποιηθεί ο κινητικός όρος ούτως ώστε να δέχεται ως παράμετρο την τιμή του inflaton, τότε είναι δυνατό να παραχθούν διαταραχές, διανυσματικές και τανυστικές (και υψηλότερου σπιν), που συμπεριφέρονται ως σταθερές όσο βρίσκονται έξω από τον ορίζοντα σωματιδίων. Έτσι, παραδείγματος χάρη, μπορεί στους συσχετιστές 4 σημείων των πολώσεων του CMB να υπάρχει απόκλιση από,τι αναμένεται για συνεισφορά μόνο από το βαρυτόνιο (graviton), που θα είναι ένδειξη για την ύπαρξη άλλων σπιν-2 πεδίων [20].

Όμως υπάρχει και ένας άλλος τρόπος να συναχθεί η παρουσία παραπάνω πεδίων στο πληθωριστικό Σύμπαν, με χρήση της σύμμορφης συμμετρίας. Παραδείγματος χάρη, αποδεικνύεται στο [10] πως, αν στο συσχετιστή 3 σημείων των βαθμωτών διαταραχών εμφανιστούν όροι που δεν υπακούουν σε σύμμορφη συμμετρία δεν μπορούν να παράγονται από βαθμωτό πεδίο ασύζευκτο με το inflaton [10]. Έτσι, παίρνουμε παραπάνω πληροφορία για τη σύζευξη όποιων παραπάνω βαθμωτών πεδίων με το inflaton, που δεν καταφέραμε να λάβουμε με τα προηγούμενα επιχειρήματα.

Σε αυτό το σημείο, παρουσιάσαμε το βασικό κοσμολογικό υπόβαθρο για αυτήν την Εργασία. Εξηγήσαμε πώς η σύμμορφη συμμετρία εισέρχεται ως χρήσιμο εργαλείο για προβλέψεις των παρατηρήσιμων ποσοτήτων από το CMB μέσω των συσχετιστών 2, 3, και 4 σημείων. Στην επόμενη ενότητα, αφότου παρουσιάσουμε συνοπτικά τους βασικούς περιορισμούς στους συσχετιστές 2 και 3 σημείων που επιβάλλει η σύμμορφη συμμετρία, θα ακολουθήσουμε την [9], αναπτύσσοντας το φορμαλισμό υπολογισμού συμμόρφως συμμετρικών συσχετιστών για τυχαία πεδία σπιν s . Όπως θα δούμε, ο φορμαλισμός αυτός στηρίζεται στην έννοια της ενσωμάτωσης του χώρου Minkowski d διαστάσεων σε χώρο Minkowski $d + 2$ διαστάσεων.

4 Σύμμορφα συμμετρικοί συσχετιστές

4.1 Περιορισμοί

Δείξαμε πως η άλγεβρα της σύμμορφης συμμετρίας σε d διαστάσεις είναι ισόμορφη με την άλγεβρα της ομάδας Lorentz σε $d + 2$ διαστάσεις (βλ. Θεώρημα 3), με μετρική η_{MN} που δίνεται από την εξ. 2.5.11. Επιβάλλοντας λοιπόν τις συμμετρίες Lorentz σε $d + 2$ διαστάσεις, λαμβάνουμε κατευθείαν ισχυρούς περιορισμούς στους συσχετιστές 2 και 3 σημείων.

Ως παράδειγμα, θα δουλέψουμε για την περίπτωση συσχετιστών 2 σημείων για τα εξής παραδείγματα: δύο σπιν-0 πεδία, σπιν-0 με σπιν-1 πεδίο, και δύο σπιν-1 πεδία. Στην περίπτωση των 3 σημείων, θα κάνουμε την περίπτωση σπιν-0-σπιν-0-σπιν-0. Ακριβώς ανάλογα με αυτά τα παραδείγματα θα ισχύουν περιορισμοί για γενικά σπιν- s_1 -σπιν- s_2 -σπιν- s_3 πεδία με $s_{1,2,3} \in \mathbb{N}$.

Κατασκευάζουμε την απεικόνιση $\xi : \mathbb{R}^{1,d-1} \rightarrow \mathbb{R}^{2,d}$ τέτοια ώστε

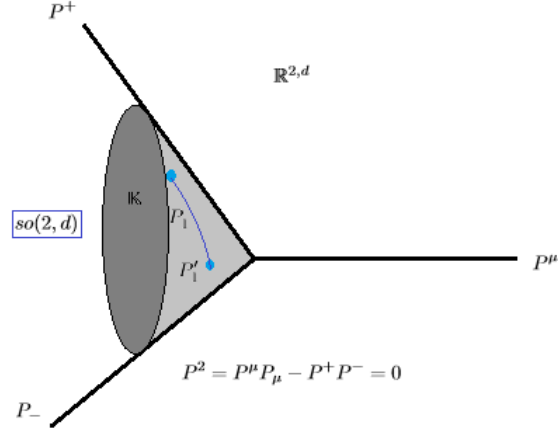
$$\begin{aligned} x^\mu &\mapsto P^M = (P^\mu, P^+, P^-) \equiv \lambda \underbrace{(x^\mu, 1, x^2)}_{P_x^M}, \lambda \in \mathbb{R} \\ P^2 &= \eta_{MN} P^M P^N = 0 \\ o_{\alpha_1, \dots, \alpha_s}(x) &\mapsto \mathcal{O}_{A_1, \dots, A_s}(P) \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

Όπου $o_{\alpha_1, \dots, \alpha_s}(x)$ είναι ένα σπιν- s πεδίο στο χώρο Minkowski d διαστάσεων και $\mathcal{O}_{A_1, \dots, A_s}(P)$ σπιν- s πεδίο στον $\mathbb{R}^{2,d}$. Ο τανυστής P_x^M ονομάζεται **τομή Poincaré** (Poincaré section).

$$\text{Πράγματι } P^2 = \lambda^2 \eta_{MN} (x^\mu, 1, x^2) (x^\nu, 1, x^2) = \lambda^2 \left(x^2 - \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x^2 \right) = 0$$

Ο χώρος ενσωμάτωσης είναι **προβολικός χώρος** (projective space): $P \leftarrow \lambda P \forall \lambda \in \mathbb{R}$. Έτσι, χωρίς βλάβη της γενικότητας θέτουμε $\lambda = 1$. Βλ. Σχήμα 4.

Πρώτα, όμως, οι περιορισμοί στους συσχετιστές από τη σύμμορφη συμμετρία στον $\mathbb{R}^{1,d-1}$:



Σχήμα 4: Ο μηδενικός κώνος. Όπως φαίνεται από το ανάπτυγμα του P^2 , είναι κώνος με γενέτειρα τον άξονα των P^+ (ή P^- : με κατάλληλη περιστροφή I_{+-} ο ένας απεικονίζεται στον άλλο). Είναι ξεκάθαρο πως ο μηδενικός κώνος είναι αναλλοίωτος σε $so(2, d)$ μετασχηματισμούς (θυμίζουμε το Λήμμα 1)

4.1.1 Περιορισμοί στον $\mathbb{R}^{1, d-1}$

Θυμίζουμε τους γεννήτορες της CFT_d άλγεβρας, 2.5.8

$$\begin{aligned}
 P_\mu &= i\partial_\mu \rightarrow \text{μετατοπίσεις,} \\
 J_{\mu\nu} &= i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) \rightarrow \text{περιστροφές,} \\
 D &= ix^\mu\partial_\mu \rightarrow \text{διαστολές,} \\
 K_\mu &= i(2x_\mu(x^\nu\partial_\nu) - x^2\partial_\mu) \rightarrow \text{ΕΣΜ.}
 \end{aligned}
 \tag{4.1.2}$$

Έστω τρία πεδία $o_i(x_i)$, σύμμορφων βαρών Δ_i .

Ορισμός 30: Εάν κάποιο πεδίο $o(x)$, σύμμορφου βάρους Δ , καταστρέφεται από τη δράση του K_μ πάνω του,

$$[K_\mu, o(0)] = 0$$

το πεδίο λέγεται **πρωτεύον** (primary). Κάθε άλλο πεδίο ονομάζεται **απόγονος** (descendant) και παράγεται από τη δράση του P_μ πάνω στο πρωτεύον o , ή σε απόγονο:

$$[P_\mu, o(0)] \rightarrow \text{απόγονοι.}$$

Έστω πως τα $o_i(x_i)$ είναι πρωτεύοντα.

Τότε γράφοντας το συσχετιστή 2 σημείων $F(x_i, x_j) = \langle o_i(x_i)o_j(x_j) \rangle$, πρέπει να

ισχύει

$$F(x_i^\mu, x_j^\nu) \Big|_{x^\mu \mapsto x^\mu + k^\mu} = F(x_i^\mu, x_j^\nu) \quad (4.1.3)$$

$$F(x_i^\mu, x_j^\nu) \Big|_{x^\mu \mapsto \Lambda_\mu^\nu x^\mu} = F(x_i^\mu, x_j^\nu) \quad (4.1.4)$$

$$F(x_i^\mu, x_j^\nu) \Big|_{x^\mu \mapsto \lambda x^\mu} = F(x_i^\mu, x_j^\nu) \quad (4.1.5)$$

$$F(x_i^\mu, x_j^\nu) \Big|_{x^\mu \mapsto x^\mu - 2(\alpha \cdot x)x^\mu + x^2 \alpha^\mu} = F(x_i^\mu, x_j^\nu) \quad (4.1.6)$$

Οι σχέσεις 4.1.3 και 4.1.4 τότε σημαίνουν πως $F(x_i, x_j) = F(|x_{ij}|)$, $x_{ij} := x_i - x_j$, καθώς το $|x_{ij}|$ είναι η μοναδική ποσότητα που παραμένει αναλλοίωτη υπό αυτούς τους μετασχηματισμούς.

Επίσης, αν $x^\mu \mapsto x^\mu + \delta x^\mu$, έχουμε:

$$\begin{aligned} & \langle (o_i(x_i) + (\partial_{x_i^\mu} o_i(x_i)) \delta x^\mu + \mathcal{O}((\delta x)^2)) (o_j(x_j) + (\partial_{x_j^\nu} o_j(x_j)) \delta x^\nu + \mathcal{O}((\delta x)^2)) \rangle \\ & \simeq \langle o_i(x_i) o_j(x_j) \rangle + \delta x \langle (\partial_{x_i^\mu} o_i(x_i)) o_j(x_j) + o_i(x_i) (\partial_{x_j^\nu} o_j(x_j)) \rangle \\ & = \langle o_i(x_i) o_j(x_j) \rangle \\ & \Rightarrow \langle \delta o_i(x_i) o_j(x_j) \rangle + \langle o_i(x_i) \delta o_j(x_j) \rangle = 0 \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

Όμως ποια είναι αυτή η ποσότητα

$$\delta o_i(x_i) \equiv \partial_{x_i^\mu} o_i(x_i) \delta x^\mu?$$

Είναι αυτό που ο Polyakov [26] αποκαλεί απειροστά μικρή ισοτροπική διαστολή. Αναφέρεται εκεί πως αν $x \mapsto (1 + \varepsilon)x \equiv x + \varepsilon \delta x$, $o(x) \mapsto o(x) - \varepsilon \Delta \cdot o(x) \equiv o(x) + \varepsilon \delta o(x)$. Τότε

$$o(x) \mapsto o'(x') = \left[\det \left(\frac{\partial x'}{\partial x} \right) \right]^{\frac{\Delta}{d}} o(x) = o(x) + \varepsilon \delta o(x),$$

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} = 1 + \varepsilon \frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\rho} = 1 + \varepsilon k^\mu, \quad x^\mu \mapsto x^\mu + \varepsilon k^\mu$$

$$\Rightarrow \delta o(x) = -\Delta |k|^\Delta o(x), \quad x^\mu \mapsto \varepsilon k^\mu$$

$$\stackrel{4.1.7}{\Rightarrow} \langle o_i(x_i) o_j(x_j) \rangle \times (|k|^{\Delta_i} \Delta_i - |k|^{\Delta_j} \Delta_j) = 0 \forall \varepsilon, k^\mu$$

$$\boxed{\Rightarrow \Delta_i = \Delta_j}.$$

Ο συσχετιστής 2 σημείων πεδίων διαφορετικών σύμμορφων βαρών μηδενίζεται.

$$\text{Τέλος, από την 4.1.5 } \lambda^{-2\Delta} F(|x_{ij}|) = F(\lambda|x_{ij}|), \Delta_i = \Delta_j = \Delta$$

$$F(|x_{ij}|) \equiv \langle o_i(x_i) o_j(x_j) \rangle = \delta_{\Delta_i, \Delta_j} \frac{\text{const.}}{|x_{ij}|^{\Delta_i + \Delta_j}} \quad (4.1.8)$$

Με παρόμοιο τρόπο, δρώντας πάνω στο συσχετιστή 3 σημείων $G(x_1, x_2, x_3)$ των $o_i(x_i)$ και εφαρμόζοντας τις συνθήκες 4.1.3 έως 4.1.6 έχουμε [26]:

$$4.1.3, 4.1.4 \Rightarrow G(x_1, x_2, x_3) = G(|x_{12}|, |x_{13}|, |x_{23}|)$$

$$4.1.5 \Rightarrow G(|x_{12}|, |x_{13}|, |x_{23}|) = \frac{C}{|x_{12}|^a |x_{13}|^b |x_{23}|^c} \quad (4.1.9)$$

$$4.1.6 \Rightarrow a = \Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3, b = \Delta_1 + \Delta_3 - \Delta_2, c = \Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_1$$

Η σταθερά C δεν καθορίζεται, αλλά η συναρτησιακή μορφή του συσχετιστή 3 σημείων είναι πλήρως καθορισμένη.

Αυτό δε συμβαίνει και στο συσχετιστή 4 σημείων, όπου απλώς προκύπτει πως είναι συνάρτηση των λόγων $\frac{|x_{13}x_{24}|}{|x_{12}x_{34}|}, \frac{|x_{14}x_{23}|}{|x_{12}x_{34}|}$.

(Αυτά τα αποτελέσματα ισχύουν για πεδία τυχαίων σπιν)

Οπότε πριν καν προχωρήσουμε στο χώρο ενσωμάτωσης, είδαμε πώς οι συσχετιστές 2 και 3 σημείων καθορίζονται εξόλοκληρου (έως μια σταθερά) από τη σύμμορφη άλγεβρα CFT_d . Μετέπειτα, θα δούμε πώς το ίδιο αποτέλεσμα εξάγεται από την άλγεβρα $so(2, d)$ του $\mathbb{R}^{2, d}$.

4.1.2 Περιορισμοί στο χώρο ενσωμάτωσης $\mathbb{R}^{2, d}$

Θα κάνουμε πρώτα την περίπτωση βαθμωτών πεδίων. Έστω $\phi_1(x_1), \phi_2(x_2) \in \mathbb{R}^{1, d-1}$ βαθμωτά πρωτεύοντα πεδία σύμμορφου βάρους $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$. Τα απεικονίζουμε στον μηδενικό κώνο του $\mathbb{R}^{2, d}$ σύμφωνα με την 4.1.1:

$$\phi_i(x_i) \mapsto \Phi_i(P_i) \Rightarrow \langle \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \rangle \mapsto \langle \Phi_1(P_1) \Phi_2(P_2) \rangle$$

Στον $\mathbb{R}^{2, d}$ ο συσχετιστής $\langle \Phi_1(P_1) \Phi_2(P_2) \rangle$ πρέπει να υπακούει την $so(2, 4)$ άλγεβρα, οπότε κατευθείαν

$$\langle \Phi_1(P_1) \Phi_2(P_2) \rangle = \frac{\text{const.}}{(P_1 \cdot P_2)^\Delta} \quad (4.1.10)$$

καθώς αυτή η μορφή είναι η πιο γενική που παραμένει αναλλοίωτη υπό στροφές και που είναι ομογενής βαθμού $-\Delta$ στα P_1 και P_2 .

Οπότε αρκεί να κατασκευάσουμε μια απεικόνιση $\xi^{-1} : \mathbb{R}^{2,d} \rightarrow \mathbb{R}(1, d-1)$ που να αντιστρέφει την ξ της 4.1.1. Αυτό είναι απλό: αρκεί να χρησιμοποιήσουμε τη μορφή P_x^M που ορίσαμε πιο πάνω. (για απλότητα θα θέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, $\lambda = 1$)

$$\text{Πράγματι, αν } x^\mu \xrightarrow{\xi} P^M \in \mathbb{R}^{1,d-1} \times \mathbb{R}^{1,1} \text{ και } P_x^M := (x^\mu, 1, x^2),$$

τότε προφανώς επιλέγοντας ξ^{-1} την προβολή του P_x^M στον $\mathbb{R}^{1,d-1}$ λαμβάνουμε

$$(\xi^{-1} \circ \xi)(x^\mu) = x^\mu, (\xi \circ \xi^{-1})(P^M) = P^M$$

Επίσης, προφανώς βαθμωτά μεγέθη μπορούν να υπολογιστούν από τη μορφή P_x κατευθείαν.

$$P_1 \cdot P_2 \mapsto (P_{x_1} \cdot P_{x_2}),$$

$$\begin{aligned} P_{x_1} \cdot P_{x_2} &= \eta_{MN}(x_1^\mu, 1, x_1^2)(x_2^\nu, 1, x_2^2) = x_1 \cdot x_2 - \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 \\ &= -\frac{1}{2}((x_1 - x_2)^2) = -\frac{1}{2}x_{12}^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \langle \Phi_1(P_1)\Phi_2(P_2) \rangle = \frac{\text{const.}}{(P_1 \cdot P_2)^\Delta} \mapsto \langle \phi_1(x_1)\phi_2(x_2) \rangle - 2\frac{\text{const.}}{(x_{12}^2)^\Delta} = \frac{\tilde{c}}{x_{12}^{2\Delta}},$$

αποτέλεσμα συνεπές με την 4.1.8. Ορίζουμε εδώ $P_{ij} := -2P_i \cdot P_j \Rightarrow P_{ij} \mapsto x_{ij}^2$.

Πάμε στον συσχετιστή 3 βαθμωτών πεδίων: Έστω τα βαθμωτά πρωτεύοντα $\phi_1(x_1), \phi_2(x_2), \phi_3(x_3)$ σύμμορφων βαρών $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$. Τότε

$$\phi_i(x_i) \mapsto \Phi_i(P_i) \text{ και}$$

$$\langle \Phi_1(P_1)\Phi_2(P_2)\Phi_3(P_3) \rangle = \frac{C}{(P_{12})^{\tau_{12}}(P_{23})^{\tau_{23}}(P_{13})^{\tau_{13}}} \quad (4.1.11)$$

$$\tau_{ij} := \frac{1}{2}(\Delta_i + \Delta_j - \Delta_k), k \neq i, k \neq j$$

Φυσικά αυτό εξασφαλίζει πως ο συσχετιστής είναι ομογενής βαθμού $-\Delta_i \forall P_i$.

$$\text{Πράγματι, } \langle \Phi_1(\lambda_1 P_1)\Phi_2(\lambda_2 P_2)\Phi_3(\lambda_3 P_3) \rangle$$

$$= \lambda_1^{-(\tau_{12}+\tau_{13})} \lambda_2^{-(\tau_{12}+\tau_{23})} \lambda_3^{-(\tau_{13}+\tau_{23})} \langle \Phi_1(P_1)\Phi_2(P_2)\Phi_3(P_3) \rangle$$

$$= \lambda_1^{-\Delta_1} \lambda_2^{-\Delta_2} \lambda_3^{-\Delta_3} \langle \Phi_1(P_1) \Phi_2(P_2) \Phi_3(P_3) \rangle$$

και η 4.1.11 απεικονίζεται κατευθείαν στη μορφή

$$\langle \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \phi_3(x_3) \rangle = \frac{C}{(x_{12}^2)^{\tau_{12}} (x_{23}^2)^{\tau_{23}} (x_{13}^2)^{\tau_{13}}}$$

που είναι συνεπής με την εξ. 4.1.9.

Είδαμε πόσο εύκολα η άλγεβρα του χώρου Minkowski της πολλαπλότητας ενσωμάτωσης αναπαράγει τις συνθήκες που, με αρκετά παραπάνω δουλειά, εξαγάγαμε από τη σύμμορφη άλγεβρα στον $\mathbb{R}^{1,d-1}$. Προχωρούμε σε σπιν-0-σπιν-1, αλλά πριν κάνουμε το βήμα, πρέπει να κάνουμε μία παύση:

4.1.3 Τανυστές στο χώρο ενσωμάτωσης

Ορισμός 31: Ένας τανυστής είδους (r, q) $F_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_r}(P)$ ονομάζεται **εγκάρσιος ως προς P** (transverse with regard to P) αν $P_{\alpha_i} F_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_r}(P) = P^{\beta_j} F_{\beta_1 \dots \beta_j \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_r}(P) = 0 \forall \alpha_i, \beta_j$.

Ορισμός 32: Ένας τανυστής $F_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_r}(P) = P_{\alpha_i} F'_{\beta_1 \dots \beta_q \hat{\alpha}_i}(P)$ ή $= P_{\beta_j} F'_{\beta_1 \dots \beta_q \hat{\beta}_j}(P)$ (όπου με $\hat{\alpha}_i$ εννοούμε πως 'λείπει' ο δείκτης α_i από τον F' : πιο διεξοδικά, ο τανυστής F' είναι είδους $(r-1, q)$, και $F_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_r}(P) = F_U^{\alpha_1 \dots \alpha_r}(P) \otimes F_{D, \beta_1 \dots \beta_q}(P)$, $F_U^{\alpha_1 \dots \alpha_r} = F_L^{\alpha_1 \dots \alpha_{i-1}} \otimes P^{\alpha_i} \otimes F_R^{\alpha_{i+1} \dots \alpha_r}$: αντίστοιχα για το β_j) ονομάζεται (βλ. [30]) **καθαρή βαθμίδα** (pure gauge).

Πρόταση 1: Έστω $f_{\alpha_1, \dots, \alpha_l}(x) \in \mathbb{R}^{1,d-1}$, $F_{A_1 \dots A_l}(P) \in \mathbb{R}^{2,d}$ τανυστές είδους $(0, l)$, με $f_{\alpha_1 \dots \alpha_l}(x) \xrightarrow{\xi} F_{A_1 \dots A_l}$. Τότε

$$f_{\alpha_1 \dots \alpha_l}(x) = \prod_{i=1}^l \otimes \frac{\partial P_{A_i}}{\partial x^{\alpha_i}} F_{A_1 \dots A_l}(P_x) \quad (4.1.12)$$

όπου με $\prod_{i=1}^l \otimes$ συμβολίζουμε το τανυστικό γινόμενο l παραγόντων $G_{A_1} \otimes \dots \otimes G_{A_l}$.

Απόδειξη: Κατάρχην παρατηρούμε πως

$$\frac{\partial P_{A_i}}{\partial x^{\alpha_j}} = \partial_{x^{\alpha_j}}(x^{\alpha_i}, 1, x^2) = (\delta_{\alpha_j}^{\alpha_i}, 0, 2x_{\alpha_j}) \quad (4.1.13)$$

Θα δείξουμε κατάρχην τη σχέση για τανυστή τάξης $(0, 1)$. Έστω $f_{\alpha}(x) \xrightarrow{\xi} F_A(P)$. Με βάση τον κανόνα για την ξ^{-1} , ο $f_{\alpha}(x)$ είναι η προβολή $\mathbb{R}^{2,d} \ni F_A(P)|_{\mathbb{R}^{1,d-1}}$, και όπως έχουμε δει για να γίνει η προβολή αρκεί να γίνει η απεικόνιση $P \mapsto P_x$.

Τότε από την 4.1.13 έχουμε

$$\frac{\partial P_x^A}{\partial x^\alpha} F_A(P_x) = \eta_{AB}(\delta_\alpha^A, 0, 2x_\alpha) F^B(P_x)$$

$$\begin{aligned} & \text{Όμως } F^B(P_x) = F^B(P)|_{\mathbb{R}^{1,d-1}} \\ \Rightarrow \eta_{AB}(\delta_\alpha^A, 0, 2x_\alpha) F^B(P_x) &= F_\alpha(P_x) - \frac{1}{2} 2x_\alpha \overrightarrow{F^+}(P_x) \stackrel{0}{=} f_\alpha(x). \end{aligned} \quad (4.1.14)$$

Προχωρώντας σε l δείκτες, απλώς έχουμε να υπολογίσουμε το γινόμενο

$$\begin{aligned} & \prod_{i=1}^l \otimes \frac{\partial P_x^{A_i}}{\partial x^{\alpha_i}} F_{A_1 \dots A_l}(P_x) \\ &= \prod_{i=1}^l \otimes \eta_{A_i B_i}(\delta_{\alpha_i}^{A_i}, 0, 2x_{\alpha_i}) F^{B_1 \dots B_l}(P_x) \end{aligned} \quad (4.1.15)$$

$$\text{Γράφοντας } F^{B_1 \dots B_l}(P_x) = \prod_{i=1}^l \otimes F_i^{B_i}(P_x),$$

η 4.1.15 γράφεται

$$\begin{aligned} &= \prod_{i=1}^l \otimes \eta_{A_i B_i}(\delta_{\alpha_i}^{A_i}, 0, 2x_{\alpha_i}) F_i^{B_i}(P_x) \\ &\stackrel{4.1.14}{=} \prod_{i=1}^l \otimes f_{\alpha_i}(x) \equiv f_{\alpha_1 \dots \alpha_l}(x), \text{ ο.έ.δ.} \end{aligned}$$

Πρόταση 2: Αν $F_{A_1 \dots A_l} = P_{A_j} F'_{A_1 \dots A_l \hat{A}_j}$ τανυστής-καθαρή βαθμίδα για κάποιο j , $F_{A_1 \dots A_l} \mapsto 0$.

Απόδειξη: Από τη σχέση 4.1.12 έχουμε

$$\begin{aligned} F_{A_1 \dots A_l}(P) &\mapsto \prod_{i=1}^l \otimes \frac{\partial P_x^{A_i}}{\partial x^{\alpha_i}} F_{i; A_i}(P_x) = \prod_{j \neq i=1}^l \otimes \frac{\partial P_x^{A_i}}{\partial x^{\alpha_i}} F_{i; A_i}(P_x) \otimes \left(P_{x; A_j} \frac{\partial P_x^{A_j}}{\partial x^{\alpha_j}} \right) \\ &= \prod_{j \neq i=1}^l \otimes \frac{\partial P_x^{A_i}}{\partial x^{\alpha_i}} F_{i; A_i}(P_x) \otimes \frac{1}{2} \frac{\partial (P_x^2)}{\partial x^{\alpha_j}} \stackrel{0}{=} 0, \text{ ο.έ.δ.} \end{aligned}$$

Λήμμα 2: Έστω $F_{A_1 \dots A_l} \xrightarrow{\xi} f_{\alpha_1 \dots \alpha_l} \xleftarrow{\xi} F'_{A_1 \dots A_l}$. Τότε $F'_{A_1 \dots A_l} = F_{A_1 \dots A_l} + \tilde{F}_{A_1 \dots A_l}$, $\tilde{F}_{A_1 \dots A_l}$ καθαρή βαθμίδα.

Απόδειξη: $\forall P \in \mathbb{R}^{2,d}|_{P^2=0}$ έχουμε

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^l \otimes \frac{\partial P_x^{A_i}}{\partial x^{\alpha_i}} F'_{A_1 \dots A_l}(P_x) &= \prod_{i=1}^l \otimes \frac{\partial P_x^{A_i}}{\partial x^{\alpha_i}} F_{A_1 \dots A_l}(P_x) + 0 \\ &= \prod_{i=1}^l \otimes \frac{\partial P_x^{A_i}}{\partial x^{\alpha_i}} F_{A_1 \dots A_l}(P_x) + \prod_{i=1}^l \otimes \frac{\partial P_x^{A_i}}{\partial x^{\alpha_i}} \tilde{F}_{A_1 \dots A_l}(P_x) \\ &= \prod_{i=1}^l \otimes \frac{\partial P_x^{A_i}}{\partial x^{\alpha_i}} (F + \tilde{F})_{A_1 \dots A_l}(P_x) \end{aligned}$$

$\tilde{F}_{A_1 \dots A_l}$ καθαρή βαθμίδα, ο.έ.δ.

Λήμμα 3: Έστω $F_{A_1 \dots A_l}(P)$ συμμετρικός, εγκάρσιος ως προς P , άίχνος ταυ-
στής. Τότε $F_{A_1 \dots A_l}(P) \mapsto f_{\alpha_1 \dots \alpha_l}(x)$, f συμμετρικός και άίχνος.

Απόδειξη: Η συμμετρία δεικτών είναι προφανής. Αρχεί να δείξουμε πως $\forall i = 1, \dots, l$ $f_{\alpha_i \alpha_1 \dots \alpha_l \hat{\alpha}_j} = 0$.

$$\text{Ισχύει } F_{\alpha_i \alpha_1 \dots \alpha_l \hat{\alpha}_j}^{\alpha_i} = 0, P^{\alpha_i} F_{\alpha_i \alpha_1 \dots \alpha_l} = 0 \forall i, j = 1, \dots, l.$$

$$f_{\alpha_i \alpha_1 \dots \alpha_l \hat{\alpha}_j}^{\alpha_i} = \eta^{\alpha_i \alpha_j} f_{\alpha_i \alpha_j \alpha_1 \dots \alpha_l}$$

$$\stackrel{4.1.12}{=} \eta^{\alpha_i \alpha_j} \prod_{k=1}^l \otimes \frac{\partial P_x^{A_k}}{\partial x^{\alpha_k}} F_{A_i A_j A_1 \dots A_l}$$

$$\text{Όμως } \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial P_x^A}{\partial x^\alpha} \otimes \frac{\partial P_x^B}{\partial x^\beta} = \frac{\partial P_x^A}{\partial x_\beta} \otimes \frac{\partial P_x^B}{\partial x^\beta} = (\eta^{\alpha\beta}, 0, 2x^\beta) \otimes (1, 0, 2x_\beta) \quad (4.1.16)$$

$$\begin{aligned} &\eta^{AB} + P_x^A \otimes \bar{P}^B + \bar{P}^A \otimes P_x^B, \bar{P}^A := (0, 0, 2) \\ &:= \eta^{AB} + (x^\alpha, 1, x^2) \otimes (0, 0, 2) + (0, 0, 2) \otimes (x^\beta, 1, x^2) \\ &= (\eta^{\alpha\beta}, 0, 0) \otimes (1, 0, 0) + (0, 0, -\frac{1}{2}) \otimes (0, 1, 0) + (0, -\frac{1}{2}, 0) \otimes (0, 0, 1) \\ &\quad + (x^\alpha, 1, x^2) \otimes (0, 0, 2) + (0, 0, 2) \otimes (x^\beta, 1, x^2) \\ &\stackrel{\text{προβολικότητα}}{\mapsto} (\eta^{\alpha\beta}, 0, 0) \otimes (1, 0, 0) + (0, 0, -\frac{1}{2}) \otimes (0, 4, 0) + (0, -\frac{1}{2}, 0) \otimes (0, 0, 4) \\ &\quad + (x^\alpha, 1, x^2) \otimes (0, 0, 2) + (0, 0, 2) \otimes (x^\beta, 1, x^2) \end{aligned} \quad (4.1.17)$$

Συγκρίνοντας τις 4.1.16 και 4.1.17, έχουμε πως δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \eta^{\alpha\beta} & 0 & 2x^\alpha \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 2x^\beta & 0 & 4x^2 \end{array} \right]$$

οπότε καταλήγουμε

$$K^{AB} := \eta^{AB} + P_x^A \otimes \bar{P}^B + \bar{P}^A \otimes P_x^B = \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial P_x^A}{\partial x^\alpha} \frac{\partial P_x^B}{\partial x^\beta} \quad (4.1.18)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \eta^{\alpha_i \alpha_j} \prod_{k=1}^l \otimes \frac{\partial P_x^{A_k}}{\partial x^{\alpha_k}} F_{A_i A_j A_1 \dots A_l} &= K^{A_i A_j} \prod_{i,j \neq k=1}^l \otimes \frac{\partial P_x^{A_k}}{\partial x^{\alpha_k}} F_{A_i A_j A_1 \dots A_l} \\ &= \prod_{i,j \neq k=1}^l \otimes \frac{\partial P_x^{A_k}}{\partial x^{\alpha_k}} K^{A_i A_j} F_{A_i A_j A_1 \dots A_l} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Μα } K^{A_i A_j} F_{A_i A_j A_1 \dots A_l} &= \cancel{F_{A_i A_1 \dots A_l \hat{A}_j}^{A_i}} \overset{0}{+} P_x^{A_i} \otimes \bar{P}^{A_j} F_{A_i A_j A_1 \dots A_l} + \bar{P}^{A_i} \otimes P_x^{A_j} F_{A_i A_j A_1 \dots A_l} \\ &\stackrel{\text{Λήμμα 2}}{=} 0, \text{ ο.έ.δ.} \end{aligned}$$

Άμεση συνέπεια αυτού και της 4.1.1 είναι πως *αίχνοι τανυστές στον $\mathbb{R}^{1,d-1}$ απεικονίζονται σε εγκάρσιους αίχνους τανυστές στον $\mathbb{R}^{2,d}$.*

Τώρα που τελειώσαμε με αυτές τις θεμελιώδεις ιδιότητες, προχωρούμε στους συσχετιστές 0-1,1-1,1-1-1.

4.1.4 Μερικοί ακόμα συσχετιστές

Σπιν-0-σπιν-1: Έστω $\phi(x_1), v^\beta(x_2)$ πρωτεύοντα πεδία σπιν-0 και σπιν-1, με $v^\beta(x)$ και αίχνο. Τα σύμμορφα βάρη των πεδίων είναι $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$ και $\phi(x_1) \mapsto \Phi(P_1), v^\beta(x_2) \mapsto V^B(P_2)$

Το πιο γενικό μέγεθος που είναι: αναλλοίωτο υπό μετασχηματισμούς Lorentz της $so(2, d)$, ομογενές βαθμού $-\Delta$ στα P_1, P_2 και είναι εγκάρσιο στο P_2 είναι το

$$G^B(P_1, P_2) = \frac{c}{P_{12}^\Delta} P_2^B.$$

$$P_2^B \mapsto \frac{\partial P_{2,x_2;B}}{\partial x_{2,\beta}} P_{x_2}^B = (1, 0, 2x_2^\beta) \cdot (x_2^\beta, 1, x_2^2) = x_2^\beta - \frac{1}{2} 2x_2^\beta = 0$$

$$\Rightarrow G^B(P_1, P_2) \mapsto g^\beta(x_1, x_2) \equiv \langle \phi(x_1) v^\beta(x_2) \rangle = 0$$

Αυτό ήταν αναμενόμενο, βέβαια, από το Λήμμα 2.

Σπιν-1-σπιν-1: Έστω τα πρωτεύοντα άιχνα διανυσματικά πεδία $v_1^\alpha(x_1) \mapsto V_1^A(P_1), v_2^\beta(x_2) \mapsto V_2^B(P_2)$ σύμμορφου βάρους $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$.

Το πιο γενικό G^{AB} αναλλοίωτο υπό μεταχηματισμούς Lorentz στην $so(2, d)$, ομογενές βαθμού $-\Delta$ στα P_1, P_2 και εγκάρσιο στα $P_{1;A}, P_{2;B}$ είναι το

$$\begin{aligned}
G^{AB}(P_1, P_2) &= \frac{1}{P_{12}^\Delta} \left[c_1 \left(\eta^{AB} - \frac{P_2^A P_1^B}{P_1 \cdot P_2} \right) + c_2 \frac{P_1^A P_2^B}{P_{12}} \right] \mapsto 0 \\
\eta^{AB} &\mapsto \eta^{\alpha\beta} \\
\frac{P_2^A P_1^B}{P_1 \cdot P_2} &\equiv \frac{1}{P_1 \cdot P_2} P_2^A \otimes P_1^B \mapsto \frac{\partial P_{x_1;A}}{\partial x_{1;\alpha}} \frac{\partial P_{x_2;B}}{\partial x_{2;\beta}} \frac{P_{x_2}^A P_{x_1}^B}{-\frac{1}{2} x_{12}^2} \equiv -\frac{2}{x_{12}^2} \left(\frac{\partial P_{x_1;A}}{\partial x_{1;\alpha}} P_{x_2}^A \right) \otimes \left(\frac{\partial P_{x_2;B}}{\partial x_{2;\beta}} P_{x_1}^B \right) \\
&= -\frac{2}{x_{12}^2} [(1, 0, 2x_1^\alpha) \cdot (x_2^\alpha, 1, x_2^2) \otimes (1, 0, 2x_2^\beta) \cdot (x_1^\beta, 1, x_1^2)] \\
&= -\frac{2}{x_{12}^2} [x_{21}^\alpha \otimes x_{12}^\beta] \\
&= \frac{2}{x_{12}^2} x_{12}^\alpha \otimes x_{12}^\beta \equiv \frac{2}{x_{12}^2} x_{12}^\alpha x_{12}^\beta \\
\Rightarrow G^{AB}(P_1, P_2) &\mapsto g^{\alpha\beta} \equiv \langle v_1^\alpha(x_1) v_2^\beta(x_2) \rangle = \eta^{\alpha\beta} + \frac{2}{x_{12}^2} x_{12}^\alpha x_{12}^\beta \quad (4.1.19)
\end{aligned}$$

Στο εξής θα κάνουμε την (καταχρηστική) σύμβαση $x_1^a x_2^b \equiv x_1^a \otimes x_2^b$ κ.ο.κ.

Στη συνέχεια, θα αναπτύξουμε έναν φορμαλισμό που αφαιρεί, σε πρώτη προσέγγιση, την απαίτηση να γράφουμε τους δείκτες Lorentz και είναι πολύ πιο συμπαγής.

4.2 Ο φορμαλισμός δίχως δείκτες

4.2.1 Βασικό υπόβαθρο

Ορισμός 33: Έστω ένα πολυώνυμο $p(\vec{x})$ ορισμένο πάνω στον \mathbb{R}^n ή \mathbb{C}^n , $n \in \mathbb{N}^*$.

Αν ισχύει $\nabla^2 p := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 p(\vec{x})}{\partial x_i^2} = 0$, το p λέγεται **αρμονικό** (harmonic).

Θεώρημα 6: Έστω \mathcal{P}_k το σύνολο όλων των ομογενών πολυωνύμων βαθμού $k \in \mathbb{N}$ στον Ευκλείδιο χώρο \mathbb{R}^n με μιγαδικούς συντελεστές:

$$p(\vec{x} \in \mathbb{R}^n) \in \mathcal{P}_k \Leftrightarrow p(\lambda \vec{x}) = \lambda^k p(\vec{x}), p(x_i) \supset c_{ij} x_i^j, c_{ij} \in \mathbb{C}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, k$$

Αν $p \in \mathcal{P}_k \Rightarrow \exists$ μοναδικά $p_j, j = 1, \dots, k$:

$$p(\vec{x}) = p_0(x) + |\vec{x}|^2 p_1(\vec{x}) + \dots + |\vec{x}|^{2l} p_l(\vec{x}), l = \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor \quad (4.2.1)$$

με τα p_j να είναι αρμονικά και ομογενή βαθμού $k - 2j \forall j = 1, \dots, l$. (βλ. Θεώρημα 2.1 στο [32])

Απόδειξη: Είναι προφανές πως κάθε πολυώνυμο βαθμού $k = 0$ ή 1 είναι αρμονικό.

Οπότε αρκεί να το δείξουμε για $k \geq 2$.

Έστω $\varphi : \mathcal{P}_k \rightarrow \mathcal{P}_{k-2}$ γραμμική απεικόνιση τ.ώ. $\varphi(p) = \nabla^2 p$.

Ξεκινάμε με $k = 2$, και θα προχωρήσουμε επαγωγικά.

Η φ είναι 'επί'. Έστω πως δεν ισχυε. Τότε μπορούμε να βρούμε $0 \neq q(\vec{x}) \in \mathcal{P}_{k-2}$ τ.ω. $q(\vec{x}) \cdot \nabla^2 p(\vec{x}) = 0 \forall p \in \mathcal{P}_k, x \in \mathbb{R}^n$. Έστω $p(\vec{x}) = |\vec{x}|^2 q(\vec{x})$.

$$\begin{aligned} \nabla^2 (|\vec{x}|^2 q(\vec{x})) &= |\vec{x}|^2 (\nabla^2 q(\vec{x})) + (\nabla^2 |\vec{x}|^2) q(\vec{x}) \\ &= |\vec{x}|^2 (\nabla^2 q(\vec{x})) + (\nabla^2 r^2) q(\vec{x}), r^2 := |\vec{x}|^2 \\ &= r^2 (\nabla^2 q(\vec{x})) + \frac{1}{r^{d-1}} (\partial_r (r^{d-1} \partial_r r^2) + \cancel{\mathcal{O}(\partial_{\Omega}^2 r^2)}) q(\vec{x}) \\ &\Rightarrow q(\vec{x}) \cdot \nabla^2 (r^2 q(\vec{x})) = r^2 q(\vec{x}) \cdot \nabla^2 q(\vec{x}) + 2dq(\vec{x}) \cdot q(\vec{x}) \\ &\Rightarrow q^2(\vec{x}) = 0, \text{ άτοπο.} \end{aligned}$$

Άρα η φ είναι '1-1'.

Έστω τώρα $\mathcal{A}_j \subset \mathcal{P}_j, j \geq 2$ το σύνολο όλων των αρμονικών $p \in \mathcal{P}_j : \nabla^2 p = 0$.

Κάθε μη αρμονικό πολυώνυμο $p' \in \mathcal{P}_j$ γράφεται τότε ως $p'(\vec{x}) = r^2 q(\vec{x})$.

Θα δείξουμε πως $\mathcal{P}_2 = \mathcal{A}_2 + \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_j := \{p \in \mathcal{P}_j : p(\vec{x}) = r^2 q(\vec{x}), q \in \mathcal{P}_{j-2}\}$.

$$\text{Έστω } p(\vec{x}) \in \mathcal{P}_2, p'(\vec{x}) \in \mathcal{R}_2 : p(\vec{x}) \cdot r^2 q(\vec{x}) = 0 \forall q(\vec{x}) \in \mathcal{P}_{2-2}$$

$$\Rightarrow \nabla^2(p(\vec{x}) \cdot r^2 q(\vec{x})) = r^2 q(\vec{x}) \nabla^2(p(\vec{x})) + p(\vec{x}) \nabla^2(r^2 q(\vec{x})) + 2(\nabla p(\vec{x})) \cdot (\nabla[r^2 q(\vec{x})]) = 0$$

$$\forall q \in \mathcal{P}^{2-2} \Rightarrow \nabla^2 p(\vec{x}) = 0 \Rightarrow p(\vec{x}) \in \mathcal{A}_2$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}_2 \ni p(\vec{x}) = p_0(\vec{x}) + |\vec{x}|^2 q(\vec{x}), p_0 \in \mathcal{A}_2, \nabla^2 q \equiv 0$$

Έστω τώρα πως για κάποιο $k > 2$, $p(\vec{x}) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} |\vec{x}|^{2j} p_j(\vec{x})$. Για $k+1$ θα δείξουμε τα ίδια.

Η φ είναι '1-1': $p(\vec{x}) = r^2 q(\vec{x}), q \in \mathcal{P}_{k-2}$

$$\Rightarrow q(\vec{x}) \cdot \nabla^2(r^2 q(\vec{x})) = r^2 \nabla^2 \left(\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k-2}{2} \rfloor} r^{2j} q_j(\vec{x}) \right) + 2dq^2(\vec{x}) = 0$$

$$\forall j \nabla^2 q_j = 0 \Rightarrow q^2(\vec{x}) = 0, \text{ άτοπο.}$$

$$\mathcal{P}_{k+1} = \mathcal{A}_{k+1} + \mathcal{R}_{k+1} :$$

$$p(\vec{x}) \in \mathcal{P}_{k+1}, p'(\vec{x}) \in \mathcal{R}_{k+1} : p(\vec{x}) \cdot p'(\vec{x}) = p(\vec{x}) \cdot r^2 q(\vec{x}) = 0 \forall q \in \mathcal{P}_{k-1}$$

$$\Rightarrow \nabla^2(p(\vec{x}) \cdot r^2 q(\vec{x})) = 0 \forall q \in \mathcal{P}_{k-1} \Rightarrow \nabla^2 p(\vec{x}) = 0$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}_{k+1} \ni p(\vec{x}) = p_0(\vec{x}) + |\vec{x}|^2 q(\vec{x}) = p_0(\vec{x}) + |\vec{x}|^2 \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{k-2}{2} \rfloor} |\vec{x}|^{2j} q_j(\vec{x})$$

$$= p_0(\vec{x}) + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} |\vec{x}|^{2j} p_j(\vec{x}), p_{j>0} \equiv q_{j-1} \in \mathcal{A}_{2j-2}$$

Είναι προφανές εκ κατασκευής πως αυτό το σπάσιμο είναι μοναδικό, ο.έ.δ. Η απόδειξη γενικεύεται φυσικά εάν $\vec{x} \in \mathbb{C}^d$.

Έστω συμμετρικός άιχνος τανυστής $f_{\alpha_1 \dots \alpha_l}(x)$. Τότε ορίζουμε το πολυώνυμο

$$f(x; z) := f_{\alpha_1 \dots \alpha_l}(x) \prod_{i=1}^l z^{\alpha_i} \quad (4.2.2)$$

Έστω και ο συμμετρικός, αλλά όχι άιχνος απαραίτητα, τανυστής $\tilde{f}_{\alpha_1 \dots \alpha_l}(x)$. Φυσικά, τότε οι δύο τανυστές θα διαφέρουν μόνο κατά όρους ίχνους,

$$\tilde{f}_{\alpha_1 \dots \alpha_l} = f_{\alpha_1 \dots \alpha_l} + \sum_{i,j} c^{\alpha_i} \delta_{\alpha_i \alpha_j}$$

Ορίζουμε τον προβολέα πάνω σε συμμετρικούς και άιχνους ταυιστές

$$f_{\alpha_1 \dots \alpha_l} = \pi_{\alpha_1 \dots \alpha_l; \beta_1 \dots \beta_l} \tilde{f}^{\beta_1 \dots \beta_l} \quad (4.2.3)$$

$$\pi_{\alpha_1 \dots \alpha_l; \beta_1 \dots \beta_l} = \frac{1}{l!} (\eta_{\alpha_1 \beta_1} \dots \eta_{\alpha_l \beta_l} + \dots + \eta_{\alpha_1 \beta_l} \dots \eta_{\alpha_l \beta_1}) \text{ ίχνη} = \eta_{\alpha_1 (\beta_1 \dots \eta_{\alpha_l \beta_l})} - \text{ίχνη} \quad (4.2.4)$$

$$\text{π.χ } \pi_{\alpha_1 \alpha_2; \beta_1 \beta_2} = \frac{1}{2} (\eta_{\alpha_1 \beta_1} \eta_{\alpha_2 \beta_2} + \eta_{\alpha_1 \beta_2} \eta_{\alpha_2 \beta_1}) - \frac{1}{d} \eta_{\alpha_1 \alpha_2} \eta_{\beta_1 \beta_2}$$

$$\pi_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3; \beta_1 \beta_2 \beta_3} = \frac{1}{3!} ([\eta_{\alpha_1 \beta_2} + \eta_{\alpha_2 \beta_1}] \eta_{\alpha_3 \beta_3} + [\eta_{\alpha_1 \beta_3} + \eta_{\alpha_3 \beta_1}] \eta_{\alpha_2 \beta_2}$$

$$+ [\eta_{\alpha_2 \beta_3} + \eta_{\alpha_3 \beta_2}] \eta_{\alpha_1 \beta_1}) - \frac{1}{d} [\eta_{\alpha_1 \alpha_2} \eta_{\beta_1 \beta_2} \eta_{\alpha_3 \beta_3} + \eta_{\alpha_1 \alpha_3} \eta_{\beta_1 \beta_3} \eta_{\alpha_2 \beta_2} + \eta_{\alpha_2 \alpha_3} \eta_{\beta_2 \beta_3} \eta_{\alpha_1 \beta_1}]$$

$$\Rightarrow f(x; z) = f_{\alpha_1 \dots \alpha_l} z^{\alpha_1} \dots z^{\alpha_l} = z^{\alpha_1} \dots z^{\alpha_l} \pi_{\alpha_1 \dots \alpha_l; \beta_1 \dots \beta_l} \tilde{f}^{\beta_1 \dots \beta_l}$$

$$\Rightarrow f(x; z) = \tilde{f}(x; z) + \mathcal{O}(z^2) \Rightarrow f(x; z)|_{z^2=0} = \tilde{f}(x; z)|_{z^2=0}$$

Το Θεώρημα 6 μας εξασφαλίζει πως το πολυώνυμο $f(x; z)|_{z^2=0}$ είναι μοναδικό. Έτσι, στο φορμαλισμό που αναπτύσσουμε, υπάρχει ένας εύκολος τρόπος να λάβουμε πληροφορία για συμμετρικούς και άιχνους ταυιστές, από πολύ πιο γενικούς συμμετρικούς ταυιστές, ‘ξεφορτώνοντας’ απλώς τους όρους ανάλογους με z^2 .

Ορίζουμε τώρα έναν τελεστή, καίριας σημασίας. Είναι γνωστός ως ο **τελεστής Thomas** (Thomas operator) [30]:

$$\mathcal{D}_\alpha := \left(\frac{d}{2} - 1 + z \cdot \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{\partial}{\partial z^\alpha} - \frac{1}{2} z^\alpha \frac{\partial^2}{\partial z \cdot \partial z} \quad (4.2.5)$$

Επίσης ορίζουμε το **σύμβολο Pochhammer**

$$(a)_l := \frac{\Gamma(a+l)}{\Gamma(a)} \quad a, l \in \mathbb{N} \quad \frac{(a+l)!}{a!} \quad (4.2.6)$$

Πρόταση 3: Έστω $p(z)$ ομογενές πολυώνυμο βαθμού k : $p(\lambda z) = \lambda^k p(z) \forall \lambda \in \mathbb{R}$. Τότε

$$z \cdot \frac{\partial p(z)}{\partial z} = kp(z).$$

Απόδειξη: Έχουμε

$$p(k) \text{ ομογενές} \Rightarrow p(z) = c_k z^k \Rightarrow \frac{\partial p(z)}{\partial z} = kc_k z^{k-1} \Rightarrow z \cdot \frac{\partial p(z)}{\partial z} = kc_k z^k = kp(z),$$

ο.έ.δ.

Με αυτά αποδεικνύουμε την εξής ταυτότητα:

$$\frac{1}{l! \left(\frac{d}{2} - 1\right)_l} \mathcal{D}_{\alpha_1} \dots \mathcal{D}_{\alpha_l} z_{\beta_1} \dots z_{\beta_l} = \pi_{\alpha_1 \dots \alpha_l; \beta_1 \dots \beta_l}, \quad l \geq 2. \quad (4.2.7)$$

Απόδειξη: Κατάρχη, για $l = 2$:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\alpha_1} \mathcal{D}_{\alpha_2} z_{\beta_1} z_{\beta_2} &\stackrel{4.2.5}{=} \mathcal{D}_{\alpha_1} \left[\left(\frac{d}{2} - 1 + z \cdot \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{\partial}{\partial z^{\alpha_2}} (z_{\beta_1} z_{\beta_2}) - \frac{1}{2} z_{\alpha_2} \frac{\partial^2}{\partial z \cdot \partial z} (z_{\beta_1} z_{\beta_2}) \right] \\ &\stackrel{h := \frac{d}{2}}{=} \mathcal{D}_{\alpha_1} \left[\left(h - 1 + z \cdot \frac{\partial}{\partial z} \right) (\eta_{\alpha_2 \beta_1} z_{\beta_2} + z_{\beta_1} \eta_{\alpha_2 \beta_2}) - \frac{1}{2} z_{\alpha_2} \frac{\partial}{\partial z_{\mu}} (\eta_{\mu \beta_1} z_{\beta_2} + z_{\beta_1} \eta_{\mu \beta_2}) \right] \\ &\stackrel{\text{Πρόταση 3}}{=} \mathcal{D}_{\alpha_1} \left[(h - 1 + 1) (\eta_{\alpha_2 \beta_1} z_{\beta_2} + z_{\beta_1} \eta_{\alpha_2 \beta_2}) - \frac{1}{2} z_{\alpha_2} (\eta_{\mu \beta_1} \delta_{\beta_2}^{\mu} + \delta_{\beta_1}^{\mu} \eta_{\mu \beta_2}) \right] \\ &= \mathcal{D}_{\alpha_1} \left[h (\eta_{\alpha_2 \beta_1} z_{\beta_2} + z_{\beta_1} \eta_{\alpha_2 \beta_2}) - z_{\alpha_2} \eta_{\beta_1 \beta_2} \right] \\ &\stackrel{\text{D γραμμικός}}{=} h \left[\mathcal{D}_{\alpha_1} (\eta_{\alpha_2 \beta_1} z_{\beta_2}) + \mathcal{D}_{\alpha_1} (z_{\beta_1} \eta_{\alpha_2 \beta_2}) \right] - \mathcal{D}_{\alpha_1} (z_{\alpha_2} \eta_{\beta_1 \beta_2}) \\ &= h \left[(h - 1) \eta_{\alpha_2 \beta_1} \eta_{\alpha_1 \beta_2} + (h - 1) \eta_{\alpha_1 \beta_1} \eta_{\alpha_2 \beta_2} \right] - (h - 1) \eta_{\alpha_1 \alpha_2} \eta_{\beta_1 \beta_2} \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

$$\text{Παρατηρούμε } (h - 1)_2 = \frac{\Gamma(h + 1)}{\Gamma(h - 1)} = \frac{h(h - 1)\Gamma(h - 1)}{\Gamma(h - 1)} = h(h - 1). \quad (4.2.9)$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{1}{2!(h - 1)_2} \mathcal{D}_{\alpha_1} \mathcal{D}_{\alpha_2} z_{\beta_1} z_{\beta_2} = \\ &= \frac{1}{2} (\eta_{\alpha_2 \beta_1} \eta_{\alpha_1 \beta_2} + \eta_{\alpha_1 \beta_1} \eta_{\alpha_2 \beta_2}) - \frac{1}{d} \eta_{\alpha_1 \alpha_2} \eta_{\beta_1 \beta_2} \stackrel{4.2.4}{=} \pi_{\alpha_1 \alpha_2; \beta_1 \beta_2} \end{aligned}$$

Με απευθείας πράξεις επαληθεύεται και η ταυτότητα για $l > 2$.

Είναι ξεκάθαρο πως εάν $g(z) = \mathcal{O}(z^2) \Rightarrow \mathcal{D}_{\alpha} g(z) = \mathcal{O}(z^2) + \mathcal{O}(z_{\alpha})$

$$\begin{aligned} \text{Πράγματι, } &\left(h - 1 + z \cdot \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{\partial(z^2)}{\partial z^{\alpha}} - \frac{1}{2} z_{\alpha} \frac{\partial^2(z^2)}{\partial z \cdot \partial z} \\ &= \left(h - 1 + z \cdot \frac{\partial}{\partial z} \right) (2z_{\alpha}) - \frac{1}{2} z_{\alpha} \frac{\partial}{\partial z_{\mu}} (2z_{\mu}) \\ &\Rightarrow \alpha z^2 \mapsto (d - 1) z_{\alpha} \end{aligned}$$

ενώ όροι υψηλότερης τάξης απεικονίζονται προς $\mathcal{O}(z^2)$.

Έτσι, αν $\tilde{f}(x; z) = f(x; z) + \mathcal{O}(z^2)$, που όπως έχουμε δει αντιστοιχούν σε συμμετρικό και συμμετρικό-άιχνο τανυστή αντίστοιχα, τότε $\mathcal{D}_{\alpha} \tilde{f}(x; z) = \mathcal{D}_{\alpha} f(x; z) +$

$\mathcal{O}(z_\alpha, z^2)$. Σύμφωνα με την εξ. 4.2.2, όμως, αυτοί οι όροι δίνουν όρους δ_{a_i} , όταν ανακτήσουμε τον $f_{\alpha_1 \dots \alpha_l}(x)$ από το $f(x; z)$. Έτσι, χωρίς βλάβη της γενικότητας, αγνοούμε τους όρους αυτούς και έχουμε

$$\boxed{g(z) = \mathcal{O}(z^2) \Rightarrow \mathcal{D}_\alpha g(z) = \mathcal{O}(z^2)}$$

Δηλαδή, για να πάμε από συμμετρικό σε συμμετρικό-αίχνο ταυυστή, δε χρειαζόμαστε παραπάνω κανόνα: ο απλός κανόνας 'ξεφορτώματος' των όρων $\mathcal{O}(z^2)$ αρκεί για τη δράση τελεστών Thomas πάνω τους.

Πρόταση 4: Αν $f_{\alpha_1 \dots \alpha_l}(x) \mapsto f(x; z) = f_{\alpha_1 \dots \alpha_l} z^{\alpha_1 \dots z^{\alpha_l}}$. Τότε

$$f_{\alpha_1 \dots \alpha_l} = \frac{1}{l!(h-1)_l} \left(\prod_{i=1}^l \mathcal{D}_{\alpha_i} \right) f(x; z), \quad h := \frac{d}{2} \quad (4.2.10)$$

Απόδειξη: Από την 4.2.7

$$\begin{aligned} f_{\alpha_1 \dots \alpha_l}(x) &= \pi_{\alpha_1 \dots \alpha_l; \beta_1 \dots \beta_l} f^{\beta_1 \dots \beta_l}(x) \\ &\stackrel{4.2.7}{=} \frac{1}{l!(h-1)_l} \left(\prod_{i=1}^l \mathcal{D}_{\alpha_i} \right) \left[\left(\prod_{j=1}^l z_{\beta_j} \right) f^{\beta_1 \dots \beta_l}(x) \right] \\ &\stackrel{4.2.2}{=} \frac{1}{l!(h-1)_l} \mathcal{D}_{\alpha_1} \dots \mathcal{D}_{\alpha_l} f(x; z), \quad \text{ο.έ.δ.} \end{aligned}$$

4.2.2 Φορμαλισμός στον $\mathbb{R}^{2,d}$

Εντελώς ανάλογα με την περίπτωση του $\mathbb{R}^{1,d-1}$, κατασκευάζουμε για τον ταυυστή $\mathbb{R}^{2,d} \ni F_{A_1 \dots A_l}(P) \mapsto f_{\alpha_1 \dots \alpha_l}(x) \in \mathbb{R}^{1,d-1}$ το πολυώνυμο

$$F(P; Z) := F_{A_1 \dots A_l} Z^{A_1} \dots Z^{A_l} \quad (4.2.11)$$

όπου ανάλογα με την απεικόνιση $P_x^A = (x^\alpha, 1, x^2)$ έχουμε

$$\begin{aligned} z^\mu &\mapsto Z^M, \quad Z_x^M = (z^\mu, 0, 2x \cdot z) \\ &\Rightarrow \begin{cases} Z_x \cdot P_x = x \cdot z - \frac{1}{2} 2x \cdot z = 0 \\ Z_x^2 = z^2 \end{cases} \end{aligned}$$

Φυσικά αν $F_{A_1 \dots A_l}$ εγκάρσιος ως προς P , $P \cdot Z = 0$: αν είναι αίχνος, όπως είδαμε αρκεί να θέσουμε $Z^2 = 0$. Δηλαδή στο χώρο ενσωμάτωσης ο απλός κανόνας

ανάκτησης πληροφορίας για εγκάρσιους άιχνους τανυστές είναι να ‘ξεφορτωθούμε’ τους όρους $\mathcal{O}(P \cdot Z, Z^2)$.

Ο τελεστής Thomas ορίζεται με ακριβώς τον ίδιο τρόπο όπως στη σχέση 4.2.5:

$$D_A := \left(\frac{d}{2} - 1 + Z \cdot \frac{\partial}{\partial Z} \right) \frac{\partial}{\partial Z^A} - \frac{1}{2} Z_A \frac{\partial^2}{\partial Z \cdot \partial Z} \quad (4.2.12)$$

Ομοίως κατασκευάζεται ο προβολέας πάνω σε συμμετρικούς, εγκάρσιους και άιχνους τανυστές, ανάλογα με τη συνθήκη 4.2.3:

$$\tilde{F}_{A_1 \dots A_l}(P) = F_{A_1 \dots A_l} \Rightarrow F_{A_1 \dots A_l} = \Pi_{A_1 \dots A_l; B_1 \dots B_l} \tilde{F}^{B_1 \dots B_l} \quad (4.2.13)$$

$$\Pi_{A_1 \dots A_l; B_1 \dots B_l} = \frac{1}{l!} (W_{A_1(B_1} \dots W_{A_l B_l)}) - \text{ίχνη} \quad (4.2.14)$$

$$\text{όπου } \eta_{\alpha_i \beta_j} \mapsto W_{A_i B_j} := \eta_{A_i B_j} - \frac{P_{A_i} \bar{P}_{B_j} + \bar{P}_{A_i} P_{B_j}}{P \cdot \bar{P}}$$

προκειμένου ο προβολέας $\Pi_{A_1 \dots A_l; B_1 \dots B_l}$ να είναι εγκάρσιος ως προς κάθε P_{A_i}, P_{B_j} . Παρατηρούμε πως $W_{A_i B_j} = \eta_{A_i B_j} + \mathcal{O}(\text{καθ.βαθμ.})$, οπότε η διαφορά προβάλλεται στο 0 όταν γυρίσουμε στον $\mathbb{R}^{1, d-1}$.

Ανάλογα με την εξ. 4.2.10 ισχύει

$$F_{A_1 \dots A_l}(P) = \left(\prod_{i=1}^l \mathcal{D}_{A_i} \right) F(P; Z) \quad (4.2.15)$$

Εξάκθαρα $W_{A_i B_j}$ εγκάρσιοι ως προς $P_{A_i, B_j} \forall i, j$. Επίσης $W_{A_i A_j}$ εγκάρσιοι ως προς $P_{A_i}, P_{A_j} \forall i, j$.

$$\begin{aligned} \text{Πράγματι, } P^{A_i} W_{A_i A_j} &= P^{A_i} \left(\eta_{A_i A_j} - \frac{P_{A_i} \bar{P}_{A_j} + \bar{P}_{A_i} P_{A_j}}{P \cdot \bar{P}} \right) \\ &= \cancel{P_{A_j}} - \frac{P \cdot \bar{P}}{P \cdot \bar{P}} \cancel{P_{A_j}} - \frac{P^2 \bar{P}_{A_j}}{P \cdot \bar{P}} \stackrel{P^2=0}{=} 0. \end{aligned}$$

Εφόσον βρισκόμαστε στο μηδενικό κώνο, η συνθήκη εγκαρσιότητας πληροίται. Όμως εν γένει ένας τέτοιος τανυστής δεν είναι εγκάρσιος στο P_{A_i} σε όλον τον $\mathbb{R}^{2, d}$: μόνο στο μηδενικό κώνο $P^2 = 0$.

Ορισμός 34: Τανυστές που είναι εγκάρσιοι στο P_{A_i} και εκτός του μηδενικού κώνου (ισοδύναμα, που δεν εμφανίζουν όρους $\mathcal{O}(P^2)$ στη συστολή τους με P^{A_i}) ονομάζονται **ταυτοτικά εγκάρσιοι ως προς P** (identically transverse with regard to P).

4.3 Κανόνες και ‘τουβλάκια’

Πρόταση 5: Έστω ένας άιχνος ταυσοτής $F_{A_1 \dots A_l}(P) \mapsto F(P; Z) = F_{A_1 \dots A_l} Z^{A_1} \dots Z^{A_l}$. Τότε

$$F(P; Z) \text{ ταυτοτικά εγκάρσιος ως προς } P \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{το } F(P; Z) \text{ περιέχει τα } Z^A \text{ μόνο μέσω των } C^{AB} := Z^A P^B - P^A Z^B.$$

Απόδειξη - ευθύ: Ο $F(P; Z)$ είναι ταυτοτικά εγκάρσιος ως προς $P^{A_i} \forall i$
 \Rightarrow ο $\frac{\partial F(P; Z)}{\partial Z}$ είναι ταυτοτικά εγκάρσιος ως προς P^{A_i}

$$\Rightarrow P \cdot \frac{\partial F(P; Z)}{\partial Z} = P^A \frac{\partial F(P; Z)}{\partial Z^A} = 0$$

$$\Rightarrow P^A \frac{\partial}{\partial Z^A} (F_{A_1 \dots A_l} Z^{A_1} \dots Z^{A_l}) = 0$$

$$\Rightarrow \forall i, j, P^{A_i} F_{A_i A_j A_1 \dots A_l} Z^{A_j} Z^{A_1} \dots Z^{A_l} + P^{A_j} F_{A_i A_j A_1 \dots A_l} Z^{A_i} Z^{A_1} \dots Z^{A_l} = 0$$

$$\Rightarrow P^{A_i} F_{A_i A_j A_1 \dots A_l} Z^{A_j} + P^{A_j} F_{A_i A_j A_1 \dots A_l} Z^{A_i} = 0 \forall i, j = 1, \dots, l$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F^{A_i A_j A_1 \dots A_l} Z_{A_i} Z_{A_j} = f(C_{A_i A_j}) \otimes D_{A_1 \dots A_l \hat{A}_i \hat{A}_j} (*) \\ P^{A_i} C_{A_i A_j} Z^{A_j} + P^{A_j} C_{A_i A_j} Z^{A_i} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow C_{A_i A_j} + C_{A_j A_i} = 0 \forall i, j.$$

Επίσης ο $C_{A_i A_j} = C_{A_i A_j}(P_{A_i}, P_{A_j}; Z_{A_i}, Z_{A_j})$ πρέπει να είναι βαθμού 1 ως προς Z_{A_i}, Z_{A_j} (λόγω του περιορισμού $Z^2 = 0$) και βαθμού 1 ως προς P_{A_i}, P_{A_j} . Γιατί το δεύτερο συμπέρασμα? Καθώς είναι εγκάρσιος ως προς P_{A_i}, P_{A_j} σε όλον το χώρο ενσωμάτωσης, είναι και εγκάρσιος στο μηδενικό κώνο $P^2 = 0$.

$$\Rightarrow C_{A_i A_j} = c_1 Z_{A_i} P_{A_j} + c_2 P_{A_i} Z_{A_j} + c_3 Z_{A_i} Z_{A_j} + c_4 P_{A_i} P_{A_j}$$

$$\begin{matrix} C_{A_i A_j} + C_{A_j A_i} = 0 \\ \Rightarrow \end{matrix} \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_3 = c_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow C_{A_i A_j} = Z_{A_i} P_{A_j} - P_{A_i} Z_{A_j} (**),$$

που σε συνδυασμό με την (*) αποδεικνύει το ευθύ κομμάτι της Πρότασης.

Αντίστροφο: Ο $F_{A_i A_j A_1 \dots A_l} Z^{A_1} \dots Z^{A_l} Z^{A_i} Z^{A_j}$ περιέχει τα Z^{A_i}, Z^{A_j} μόνο μέσω του $C^{A_i A_j} = Z^{A_i} P^{A_j} - P^{A_i} Z^{A_j} \forall i, j = 1, \dots, l$

$$\Rightarrow F^{A_i A_j A_1 \dots A_l} Z_{A_i} Z_{A_j} = f(C_{A_i A_j}) \otimes D_{A_1 \dots A_l \hat{A}_i \hat{A}_j}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow P^{A_i} F_{A_i A_j A_1 \dots A_l} Z^{A_j} + P_{A_j} F_{A_i A_j A_1 \dots A_l} Z_{A_i} = 0 \forall i, j \\
&\Rightarrow P^{A_i} F_{A_i A_j A_1 \dots A_l} Z^{A_j} Z^{A_1} \dots Z^{A_l} + P_{A_j} F_{A_i A_j A_1 \dots A_l} Z_{A_i} Z^{A_1} \dots Z^{A_l} = 0 \forall i, j \\
&\Rightarrow P^A \frac{\partial F_{A_1 \dots A_l} Z^{A_1} \dots Z^{A_l}}{\partial Z^A} = P \cdot \frac{\partial F(P; Z)}{\partial Z} = 0 \\
&\Rightarrow F(P; Z) \text{ ταυτοτικά εγκάρσιος ως προς } P, \text{ ο.έ.δ.}
\end{aligned}$$

4.3.1 Ένας απλός κανόνας: Συσχετιστής σπιν-2-σπιν-2

Θα υπολογίσουμε τον $\langle t_1^{\alpha_1 \alpha_2}(x_1) t_2^{\beta_1 \beta_2}(x_2) \rangle = g(x_1, x_2)$, για πεδία πλέον γνωστών περιορισμών:

Έστω t_1, t_2 συμμετρικοί και άιχνοι ταυστές με

$$t_1^{\alpha_1 \alpha_2}(x_1) \mapsto T_1^{A_1 A_2}(P_1)$$

$$t_2^{\beta_1 \beta_2}(x_2) \mapsto T_2^{B_1 B_2}(P_2)$$

και T_1, T_2 εγκάρσιοι ως προς P_1, P_2 . Έστω πως έχουν σύμμορφο βάρος $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$.

Ο πιο γενικός συμμετρικός εγκάρσιος άιχνος ταυστής αναλλοίωτος στις στροφές της $so(2, d)$ είναι ο

$$\begin{aligned}
&\langle T_1^{A_1 A_2}(P_1) T_2^{B_1 B_2}(P_2) \rangle \equiv G^{A_1 A_2; B_1 B_2}(P_1, P_2) \\
&= \frac{c}{P_1^\Delta} \left[\frac{1}{2} \left(\widetilde{W}^{A_1 B_1} \widetilde{W}^{A_2 B_2} + \widetilde{W}^{A_1 B_2} \widetilde{W}^{A_2 B_1} \right) - \frac{1}{d} W^{A_1 A_2} W^{B_1 B_2} \right], \\
&W^{A_i B_j} := \eta^{A_i B_j} - \frac{P_1^{A_i} P_2^{B_j} + P_2^{A_i} P_1^{B_j}}{P_1 \cdot P_2}, \\
&\widetilde{W}^{A_i B_j} := \eta^{A_i B_j} - \frac{P_2^{A_i} P_1^{B_j}}{P_1 \cdot P_2} = W^{A_i B_j} + \frac{P_1^{A_i} P_2^{B_j}}{P_1 \cdot P_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{Παρατηρούμε πως } Z_{1;A_i} Z_{2;B_j} \widetilde{W}^{A_i B_j} = Z_{1;A_1} Z_{2;B_j} \left(\eta^{A_i B_j} - \frac{P_2^{A_i} P_1^{B_j}}{P_1 \cdot P_2} \right) \\
&= Z_1 \cdot Z_2 - \frac{(P_2 \cdot Z_1)(P_1 \cdot Z_2)}{P_1 \cdot P_2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{ενώ } Z_{1;A_1} Z_{1;A_2} W^{A_1 A_2} = Z_{1;A_1} Z_{1;A_2} \left(\eta^{A_1 A_2} - \frac{P_1^{A_1} P_2^{A_2} + P_2^{A_1} P_1^{A_2}}{P_1 \cdot P_2} \right) \\
&= Z_1^2 - \frac{(P_1 \cdot Z_1)(P_2 \cdot Z_1) + (P_2 \cdot Z_1)(P_1 \cdot Z_1)}{P_1 \cdot P_2} = \mathcal{O}(Z_1^2, P_1 \cdot Z_1)
\end{aligned}$$

Ομοίως, $Z_{2;B_1}Z_{2;B_2}W^{B_1B_2} = \mathcal{O}(Z_2^2, P_2 \cdot Z_2)$.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow G(P_1, P_2; Z_1; Z_2) = \\ &= \frac{c}{P_{12}^\Delta} \frac{1}{2} 2 \left[\left(Z_1 \cdot Z_2 - \frac{(P_2 \cdot Z_1)(P_2 \cdot Z_1)}{P_1 \cdot P_2} \right) \left(Z_1 \cdot Z_2 - \frac{(P_2 \cdot Z_1)(P_2 \cdot Z_1)}{P_1 \cdot P_2} \right) \right] + \mathcal{O}(Z^2, P \cdot Z) \\ &\quad \stackrel{g^{\alpha_1\alpha_2;\beta_1\beta_2} \text{ άιχνος}}{\mapsto} \frac{\tilde{c}}{P_{12}^{\Delta+2}} \left((Z_1 \cdot Z_2)(P_1 \cdot P_2) - (P_2 \cdot Z_1)(P_1 \cdot Z_2) \right)^2 \end{aligned}$$

Αντί να προσπαθήσουμε να γυρίσουμε στον $\mathbb{R}^{1,d-1}$ μέσω της αντίστροφης απεικόνισης ξ^{-1} τον $G^{A_1A_2;B_1B_2}(P_1, P_2) \xrightarrow{\xi^{-1}} g^{\alpha_1\alpha_2;\beta_1\beta_2}(x_1, x_2)$, θα γυρίσουμε πίσω το πολυώνυμο $G(P_1, P_2; Z_1, Z_2)$.

Ο αλάνθαστος, αν και υπολογιστικά περίπλοκος, τρόπος να γίνει αυτό είναι βέβαια μέσω της Εξ. 4.2.15. Υπάρχει όμως ευκολότερος τρόπος που δεν εμπλέκει τον τελεστή Thomas.

$$G(P_1, P_2; Z_1, Z_2) := G_{A_1 \dots A_l; B_1 \dots B_l}(P_1, P_2) Z_1^{A_1} \dots Z_1^{A_l} Z_2^{B_1} \dots Z_2^{B_l}$$

$$\Rightarrow G(P_1, P_2; Z_1, Z_2) Z_{1;A_1} \dots Z_{1;A_l} Z_{2;B_1} \dots Z_{2;B_l} = G_{A_1 \dots A_l; B_1 \dots B_l}(P_1, P_2) Z_1^{2l} Z_2^{2l},$$

Αυτή η παραγοντοποίηση είναι μοναδική. Αν καταφέρουμε να βρούμε έναν ταυστή $G_{A_1 \dots A_l; B_1 \dots B_l}$ που παράγει το σωστό πολυώνυμο, έχουμε λύσει μοναδικά το πρόβλημα εύρεσης (έως όρους καθαρής βαθμίδας) του συσχετιστή. Ομοίως και αν αυτό γίνει στον αρχικό χώρο $\mathbb{R}^{1,d-1}$.

Καθώς είναι πολύ ευκολότερο το πολυώνυμο $G(P_1, P_2; Z_1, Z_2) \xrightarrow{\xi^{-1}} g(x_1, x_2; z_1, z_2)$ σύμφωνα με τους κανόνες στην ενότητα 4.2.2, γυρνάμε το πολυώνυμο πίσω:

$$\begin{aligned} Z_i \cdot Z_j &\mapsto (z_i^\mu, 0, 2x_i \cdot z_i) \cdot (z_j^\nu, 0, 2x_j \cdot z_j) = z_i \cdot z_j \\ P_i \cdot P_j &\mapsto (x_i^\mu, 1, x_i^2) \cdot (x_j^\nu, 1, x_j^2) = -\frac{1}{2} x_{ij}^2 \\ P_i \cdot Z_j &\mapsto (x_i^\mu, 1, x_i^2) \cdot (z_j^\nu, 0, 2x_j \cdot z_j) = x_{ij} \cdot z_j \\ P_j \cdot Z_i &\mapsto x_{ji} \cdot z_i = -x_{ij} \cdot z_i \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

$$\Rightarrow G(P_1, P_2; Z_1, Z_2) \mapsto \frac{\tilde{c}}{(x_{12}^2)^{\Delta+2}} \left((x_{12} \cdot z_1)(x_{12} \cdot z_2) - \frac{1}{2} x_{12}^2 (z_1 \cdot z_2) \right)^2 = g(x_{12}; z_1, z_2) \tag{4.3.2}$$

$$= \frac{\tilde{c}}{(x_{12}^2)^{\Delta+2}} \left((x_{12} \cdot z_1)^2 (x_{12} \cdot z_2)^2 + \frac{1}{4} x_{12}^4 (z_1 \cdot z_2)^2 - x_{12}^2 (z_1 \cdot z_2) (x_{12} \cdot z_1) (x_{12} \cdot z_2) \right)$$

Τι θα μπορούσε να δώσει αυτό το πολυώνυμο, άραγε? Εισάγουμε έναν δεύτερο απλό κανόνα: θα κατασκευάσουμε μια ακολουθία από ταυστές, ο καθένας εκ των

οποίων παράγει τον προηγούμενό του, και παράγεται από τον επόμενό του (συνεσταλμένος με το κατάλληλο ζεύγος $z_{i;\alpha_{i,1}}z_{i;\alpha_{i,2}}$). Εξ'άλλου, εφόσον η κάθε κατασκευή είναι μοναδική (στον $\mathbb{R}^{1,d-1}$ οι όροι καθαρής βαθμίδας του $\mathbb{R}^{2,d}$ εξαφανίζονται), ο κανόνας είναι αληθής. Για χαμηλά σπιν, $s = 1, 2$, λειτουργεί καλά.

Ορισμός 35: Το **συμμετρικό ταυυστικό γινόμενο σπιν-2** δύο μεγεθών a, b ορίζεται ως:

$$(a \otimes b)^{\mu\nu} := \frac{1}{2}(a^\mu b^\nu + b^\mu a^\nu)$$

Επεκτείνοντας σε ταυυστές ιδίου είδους (r, q) $\mathcal{O}_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_r}, \mathcal{O}'_{b_1 \dots b_q}{}^{a_1 \dots a_r}$:

$$(\mathcal{O}_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_r} \otimes \mathcal{O}'_{b_1 \dots b_q}{}^{a_1 \dots a_r})^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\mathcal{O}_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_r \mu} \mathcal{O}'_{b_1 \dots b_q}{}^{a_1 \dots a_r \nu} + \mathcal{O}'_{b_1 \dots b_q}{}^{a_1 \dots a_r \mu} \mathcal{O}_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_r \nu}) \quad (4.3.3)$$

Όταν θα συναντήσουμε όρους όπως

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4}(\eta^{\alpha_1 \beta_1} \eta^{\alpha_2 \beta_2} + \eta^{\alpha_2 \beta_1} \eta^{\alpha_1 \beta_2} + \eta^{\alpha_2 \beta_1} \eta^{\alpha_1 \beta_2} + \eta^{\alpha_2 \beta_2} \eta^{\alpha_1 \beta_1}) \\ &= \frac{1}{4}((\eta^{\alpha_1 \beta_1} + \eta^{\alpha_1 \beta_2}) \times ((\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2))) \\ &= \frac{1}{4}((\eta^{\alpha_1 \beta_1} + (\beta_1 \leftrightarrow \beta_2)) \times ((\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2))), \end{aligned}$$

θα το γράφουμε ως

$$(\otimes (\otimes \eta^{\Delta \square})_{\beta_1 \beta_2})^{\alpha_1 \alpha_2}.$$

Το τρίγωνο συμβολίζει θέση που υποδέχεται δείκτη α_i , και το τετράγωνο θέση που υποδέχεται δείκτη β_i .

(Σημειώνουμε πως η επέκταση σε υψηλότερα σπιν είναι προφανής. Μιμούμενοι τα παραπάνω, για σπιν- l γράφεται)

$$\left(\prod_{i=1}^l \otimes a_i\right)^{\mu_1 \dots \mu_l} := \frac{1}{l!} \sum_{i,j} (a_i^{\mu_i} a_j^{\mu_j})$$

$$g(x_{12}; z_1, z_2) = g_1(x_{12}) \left((x_{12} \cdot z_1)(x_{12} \cdot z_2) - \frac{1}{2} x_{12}^2 (z_1 \cdot z_2) \right)^2,$$

$$g_1(x_{12}) \equiv \frac{\tilde{c}}{(x_{12}^2)^{\Delta+2}}$$

$$1) \ g(x_{12}; z_1, z_2) \rightarrow g^{\beta_1 \beta_2}(x_{12}; z_1) :$$

$$g^{\beta_1 \beta_2}(x_{12}; z_1) = g_1(x_{12}) \left((x_{12} \cdot z_1)^2 \left[\frac{1}{2} (x_{12}^{\beta_1} x_{12}^{\beta_2} + x_{12}^{\beta_1} x_{12}^{\beta_2}) \right] + \frac{1}{4} x_{12}^4 \left[\frac{1}{2} (z_1^{\beta_1} z_1^{\beta_2} + z_1^{\beta_1} z_1^{\beta_2}) \right] \right)$$

$$\begin{aligned}
& -x_{12}^2(x_{12} \cdot z_1) \left[\frac{1}{2} (x_{12}^{\beta_1} z_1^{\beta_2} + z_1^{\beta_1} x_{12}^{\beta_2}) \right] \\
\stackrel{4.3.3}{=} g^{\beta_1 \beta_2}(x_{12}; z_1) &= g_1(x_{12}) \left((x_{12} \cdot z_1)^2 (x_{12} \bar{\otimes} x_{12})^{\beta_1 \beta_2} + \frac{1}{4} x_{12}^4 (z_1 \bar{\otimes} z_1)^{\beta_1 \beta_2} \right. \\
& \quad \left. - x_{12}^2 (x_{12} \cdot z_1) (x_{12} \bar{\otimes} z_1)^{\beta_1 \beta_2} \right) \\
2) g^{\beta_1 \beta_2}(x_{12}; z_1) &\rightarrow g^{\alpha_1 \alpha_2; \beta_1 \beta_2}(x_{12}) : \\
g^{\alpha_1 \alpha_2; \beta_1 \beta_2}(x_{12}) &= g_1(x_{12}) \left((x_{12} \bar{\otimes} x_{12})^{\alpha_1 \alpha_2} (x_{12} \bar{\otimes} x_{12})^{\beta_1 \beta_2} + \frac{1}{4} x_{12}^4 (\bar{\otimes} (\bar{\otimes} \eta^{\Delta \square})^{\beta_1 \beta_2})^{\alpha_1 \alpha_2} \right. \\
& \quad \left. - x_{12}^2 (x_{12} \bar{\otimes} (x_{12} \bar{\otimes} \eta^{\Delta \square})^{\beta_1 \beta_2})^{\alpha_1 \alpha_2} \right)
\end{aligned}$$

Αρκεί να δείξουμε πως ο ταυιστής αυτός παράγει σωστά το πολυώνυμο $g(x_{12}; z_1, z_2)$.
Θα αντιστρέψουμε την πορεία που ακολουθήσαμε:

$$\begin{aligned}
g^{\alpha_1 \alpha_2; \beta_1 \beta_2} z_{1; \alpha_1} z_{1; \alpha_2} &= g_1(x_{12}) \left((x_{12} \bar{\otimes} x_{12})^{\alpha_1 \alpha_2} (x_{12} \bar{\otimes} x_{12})^{\beta_1 \beta_2} \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{4} x_{12}^4 (\bar{\otimes} (\bar{\otimes} \eta^{\Delta \square})^{\beta_1 \beta_2})^{\alpha_1 \alpha_2} - x_{12}^2 (x_{12} \bar{\otimes} (x_{12} \bar{\otimes} \eta^{\Delta \square})^{\beta_1 \beta_2})^{\alpha_1 \alpha_2} \right) \times z_{1; \alpha_1} z_{1; \alpha_2}
\end{aligned}$$

Αντιστρέφοντας το Βήμα 2 όρο προς όρο,

$$\begin{aligned}
& (x_{12} \bar{\otimes} x_{12})^{\alpha_1 \alpha_2} (x_{12} \bar{\otimes} x_{12})^{\beta_1 \beta_2} \times z_{1; \alpha_1} z_{1; \alpha_2} = \\
& \stackrel{4.3.3}{=} \frac{1}{2} [x_{12}^{\alpha_1} x_{12}^{\alpha_2} + x_{12}^{\alpha_1} x_{12}^{\alpha_2}] (x_{12} \bar{\otimes} x_{12})^{\beta_1 \beta_2} \times z_{1; \alpha_1} z_{1; \alpha_2} \\
& = (x_{12} \cdot z_1)^2 (x_{12} \bar{\otimes} x_{12})^{\beta_1 \beta_2} . (*) \\
& (x_{12} \bar{\otimes} (x_{12} \bar{\otimes} \eta^{\Delta \square})^{\beta_1 \beta_2})^{\alpha_1 \alpha_2} \times z_{1; \alpha_1} z_{1; \alpha_2} = \\
& = \frac{1}{2} (x_{12}^{\alpha_1} (x_{12} \bar{\otimes} \eta^{\alpha_2 \square})^{\beta_1 \beta_2} + (x_{12} \bar{\otimes} \eta^{\alpha_1 \square})^{\beta_1 \beta_2} x_{12}^{\alpha_2}) \times z_{1; \alpha_1} z_{1; \alpha_2} \\
& = (x_{12} \cdot z_1) \frac{1}{2} ((x_{12} \bar{\otimes} \eta^{\alpha_2 \square})^{\beta_1 \beta_2} z_{1; \alpha_2} + (\alpha_2 \leftrightarrow \alpha_1)) (!) \\
& (x_{12} \bar{\otimes} \eta^{\alpha_2 \square})^{\beta_1 \beta_2} z_{1; \alpha_2} \stackrel{4.3.3}{=} \frac{1}{2} (x_{12}^{\beta_1} \eta^{\alpha_2 \beta_2} + \eta^{\alpha_2 \beta_1} x_{12}^{\beta_2}) z_{1; \alpha_2} \\
& = \frac{1}{2} (x_{12}^{\beta_1} z_1^{\beta_2} + z_1^{\beta_1} x_{12}^{\beta_2}) \stackrel{4.3.3}{=} (x_{12} \bar{\otimes} z_1)^{\beta_1 \beta_2} \\
& \Rightarrow (!) = (x_{12} \cdot z_1) (x_{12} \bar{\otimes} z_1)^{\beta_1 \beta_2} . (**) \\
& (\bar{\otimes} (\bar{\otimes} \eta^{\Delta \square})^{\beta_1 \beta_2})^{\alpha_1 \alpha_2} \times z_{1; \alpha_1} z_{1; \alpha_2} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \left((\eta^{\alpha_1 \beta_1} + (\beta_1 \leftrightarrow \beta_2)) \times (\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2) \right) \times z_{1; \alpha_1} z_{1; \alpha_2} \\
&= \frac{1}{2} \left((\eta^{\alpha_1 \beta_1} \eta^{\alpha_2 \beta_2} + (\beta_1 \leftrightarrow \beta_2)) \right) \times z_{1; \alpha_1} z_{1; \alpha_2} \\
&= \frac{1}{2} (z_1^{\beta_1} z_1^{\beta_2} + (\beta_1 \leftrightarrow \beta_2)) = (z_1 \overline{\otimes} z_1)^{\beta_1 \beta_2}. (***) \\
&\stackrel{(*), (**), (***)}{\Rightarrow} g^{\beta_1 \beta_2}(x_{12}; z_1) = g^{\alpha_1 \alpha_2; \beta_1 \beta_2}(x_{12}) z_{1; \alpha_1} z_{1; \alpha_2}.
\end{aligned}$$

Τώρα πάμε να αντιστρέψουμε το Βήμα 1 όρο προς όρο.

$$\begin{aligned}
&(x_{12} \overline{\otimes} x_{12})^{\beta_1 \beta_2} \times z_{2; \beta_1} z_{2; \beta_2} = \\
&\stackrel{4.3.3}{=} \frac{1}{2} (x_{12}^{\beta_1} x_{12}^{\beta_2} + (\beta_1 \leftrightarrow \beta_2)) z_{2; \beta_1} z_{2; \beta_2} = (x_{12} \cdot z_2)^2. (*) \\
&(x_{12} \overline{\otimes} z_1)^{\beta_1 \beta_2} \times z_{2; \beta_1} z_{2; \beta_2} = \\
&= \frac{1}{2} (x_{12}^{\beta_1} z_1^{\beta_2} + (\beta_1 \leftrightarrow \beta_2)) z_{2; \beta_1} z_{2; \beta_2} = (z_1 \cdot z_2)(x_{12} \cdot z_2). (***) \\
&(z_1 \overline{\otimes} z_1)^{\beta_1 \beta_2} \times z_{2; \beta_1} z_{2; \beta_2} = \\
&= \frac{1}{2} (z_1^{\beta_1} z_1^{\beta_2} + (\beta_1 \leftrightarrow \beta_2)) z_{2; \beta_1} z_{2; \beta_2} = (z_1 \cdot z_2)^2. (***) \\
&\stackrel{(*), (**), (***)}{\Rightarrow} g(x_{12}; z_1, z_2) = g^{\beta_1 \beta_2} z_{2; \beta_1} z_{2; \beta_2}, \text{ ο.έ.δ.}
\end{aligned}$$

Εκ κατασκευής ο ταυυστής αυτός είναι άιχνος. Έτσι, καταλήγουμε στην κλειστή μορφή

$$\begin{aligned}
&\langle t^{\alpha_1 \alpha_2}(x_1) t^{\beta_1 \beta_2}(x_2) \rangle = \\
&= \frac{\tilde{c}}{(x_{12}^2)^{\Delta+2}} \left((x_{12} \overline{\otimes} x_{12})^{\alpha_1 \alpha_2} (x_{12} \overline{\otimes} x_{12})^{\beta_1 \beta_2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} x_{12}^4 (\overline{\otimes} (\overline{\otimes} \eta^{\Delta \square})^{\beta_1 \beta_2})^{\alpha_1 \alpha_2} - x_{12}^2 (x_{12} \overline{\otimes} (x_{12} \overline{\otimes} \eta^{\Delta \square})^{\beta_1 \beta_2})^{\alpha_1 \alpha_2} \right) \quad (4.3.4)
\end{aligned}$$

Υπολογίσαμε, με σειρά εύκολων υπολογιστικά βημάτων (δεν πρέπει να αποθαρρύνουν τον αναγνώστη τα αναπτύγματα, καθώς οι συστολές είναι πραγματικά τετριμμένες), έναν σημαντικότερο συσχετιστή 2 σημείων.

Ένας γνωστός συμμετρικός άιχνος ταυυστής τάξης 2 είναι, φυσικά, ο ταυυστής ύλης-ενέργειας. Τότε, επειδή είναι συναλλοίωτος $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$, αντιστοιχίζεται σε σύμμορφο βάρος

$$\Delta = (d-2) + 2 = d$$

[23], [9]. Ο συσχετιστής τότε από τη σχέση 4.3.4 δίνει, από τη σχέση 3.4.3 το φάσμα ισχύος του τανυστή αυτού. Η σύμμορφη συμμετρία προβλέπει συγκεκριμένη δηλαδή μορφή για το φάσμα ισχύος: αν διαφέρει, ο συσχετιστής δεν είναι σύμμορφα συμμετρικός.

Έχουμε τον απλό κανόνα για εξαγωγή του τανυστή από πολυώνυμο στον $\mathbb{R}^{1,d-1}$: έχουμε τον απλό κανόνα για απεικόνιση του πολυωνύμου του $\mathbb{R}^{2,d}$ σε αυτό του $\mathbb{R}^{1,d}$. Το μόνο βήμα που φαίνεται ακόμα δύσκολο είναι η εξαγωγή του πολυωνύμου στον $\mathbb{R}^{2,d}$. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, και αυτό το βήμα απλοποιείται πάρα πολύ, από βασικά επιχειρήματα ομογένειας του πολυωνύμου.

4.3.2 ‘Τουβλάκια’: εύρεση του πολυωνύμου στον $\mathbb{R}^{2,d}$

(Σημείωση: τα $H_{ij}, V_{i;jk}$ που θα συναντήσουμε ορίζονται στο [9])

Παρατηρούμε στο συσχετιστή $G^{A_1 A_2; B_1 B_2}$ τη δομή $(Z_1 \cdot Z_2)(P_1 \cdot P_2) - (P_2 \cdot Z_1)(P_1 \cdot Z_2)$. Μήπως θα μπορούσαμε να έχουμε φανταστεί κατευθείαν αυτή τη δομή;

Από την Πρόταση 5 ξέρουμε πως ταυτοτικά εγχάρσιοι τανυστές περιέχουν μόνο τους $C^{AB} := Z^A P^B - P^A Z^B$, που είναι βαθμού 1 ως προς Z^A, Z^B και P^A, P^B . Είναι λοιπόν φυσικό να περιμένουμε το παραγόμενο πολυώνυμο $G(P; Z)$, ομογενές βαθμού Δ ως προς P , να έχει συστολές αυτού του πολυωνύμου σε βαθμό που όταν πολλαπλασιαστεί με το $G_1(P)$ (τον πολλαπλασιαστικό παράγοντα ανεξάρτητο του Z) να δώσει τη σωστή ομογένεια.

Οι γενικές συνθήκες που απαιτούμε από ένα πολυώνυμο παραγόμενο στο συσχετιστή 2 σημείων σπιν- l πρωτεύοντων πεδίων $G(P_1, P_2; Z_1, Z_2)$ από τανυστή $G^{A_1 \dots A_l; B_1 \dots B_l}(P_1, P_2)$ είναι:

$$\begin{aligned}
&\rightarrow \text{ομογένεια, } P : G(\lambda_1 P_1, \lambda_2 P_2; Z_1, Z_2) = \lambda_1^{-\Delta} \lambda_2^{-\Delta} G(P_1, P_2; Z_1, Z_2) \\
&\rightarrow \text{ομογένεια, } Z : G(P_1, P_2; \kappa_1 Z_1, \kappa_2 Z_2) = \kappa_1^l \kappa_2^l G(P_1, P_2; Z_1, Z_2) \\
&\rightarrow \text{εγκαρσιότητα, } P : G(P_1, P_2; Z_1 + c_1 P_1, Z_2 + c_2 P_2) = G(P_1, P_2; Z_1, Z_2) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow P_i \cdot \frac{\partial}{\partial Z_i} G(P_1, P_2; Z_1, Z_2) = 0, \quad i = 1, 2
\end{aligned} \tag{4.3.5}$$

Και ποιες είναι οι συστολές των C_1, C_2 ? Έχουμε

$$\begin{aligned}
C_i^2 &\equiv C_{i;AB} C_i^{AB} = (Z_{i;A} P_{i;B} - P_{i;A} Z_{i;B})(Z_i^A P_i^B - P_i^A Z_i^B) = \mathcal{O}(P_i \cdot Z_i, Z_i^2) \\
C_i \cdot C_j &= (Z_{i;A} P_{i;B} - P_{i;A} Z_{i;B})(Z_j^A P_j^B - P_j^A Z_j^B) \\
&= 2[(Z_i \cdot Z_j)(P_i \cdot P_j) - (P_j \cdot Z_i)(P_i \cdot Z_j)] := -\frac{H_{ij}}{2}
\end{aligned} \tag{4.3.6}$$

Πρόταση 6: Κάθε παράσταση με περισσότερα από ένα C_i , όπως $(C_1 C_2 C_1)^{AB}$, πρέπει να είναι κάποια βαθμωτή συνάρτηση επί C_i^{AB} .

$$\begin{aligned}
& \text{Πράγματι, } \eta_{AB} C_i^{AB} = \eta_{AB} (Z_i^A P_i^B - P_i^A Z_i^B) = 0 \\
& \Rightarrow (C_i C_j C_i)^{AB} = C_i^{AM} C_{j;MN} C_i^{NB} = (\eta_{MP} C_i^{AP}) C_{j;MN} (\eta_{N\Theta} C_i^{B\Theta}). \\
& C_i^{AM} C_{j;MN} = (Z_i^A P_i^M - P_i^A Z_i^M) (Z_{j;M} P_{j;N} - P_{j;M} Z_{j;N}) \\
& = (P_i \cdot Z_j) Z_i^A P_{j;N} + (P_j \cdot Z_i) P_i^A Z_{j;N} - (Z_i \cdot Z_j) P_i^A P_{j;N} - (P_i \cdot P_j) Z_i^A Z_{j;N} \\
& \Rightarrow (C_i^{AM} C_{j;MN}) C_i^{NB} = (P_i \cdot Z_j) [(P_j \cdot Z_i) Z_i^A P_i^B - (P_i \cdot P_j) Z_i^A Z_i^B] \\
& \quad + (P_j \cdot Z_i) [(Z_i \cdot Z_j) P_i^A P_i^B - (P_i \cdot Z_j) P_i^A Z_i^B] \\
& \quad - (Z_i \cdot Z_j) [(P_j \cdot Z_i) P_i^A P_i^B - (P_i \cdot P_j) P_i^A Z_i^B] \\
& \quad - (P_i \cdot P_j) [(Z_i \cdot Z_j) Z_i^A P_i^B - (P_i \cdot Z_j) Z_i^A Z_i^B] \\
& = \frac{1}{4} [-4((P_i \cdot P_j)(Z_i \cdot Z_j) - (P_j \cdot Z_i)(P_i \cdot Z_j))] (Z_i^A P_i^B - P_i^A Z_i^B) \\
& \stackrel{4.3.6}{=} \frac{1}{4} H_{ij} C_i^{AB}, \text{ ο.έ.δ.}
\end{aligned}$$

Προφανώς κάθε ανώτερη δύναμη των C_i, C_j είτε θα συστέλλεται προς βαθμωτή συνάρτηση $\propto H_{ij}$ είτε θα διατηρεί ελεύθερους δείκτες με συντελεστή $\propto H_{ij}$, ως απόρροια της Πρότασης 6.

Λήμμα 4: Κάθε συσχετιστής 2 σημείων στο χώρο ενσωμάτωσης $\mathbb{R}^{2,d}$ που πληροί τις συνθήκες ομογένειας-εγκαρσιότητας 4.3.5 παράγει πολυώνυμο $G(P_1, P_2; Z_1, Z_2)$ που γράφεται ως

$$G(P_1, P_2; Z_1, Z_2) = \frac{c}{P_{12}^{\Delta+l}} H_{12}^l \quad (4.3.7)$$

Η απόδειξη είναι προφανής.

Βρήκαμε το ‘τουβλάκι’ που χρησιμοποιείται στους συσχετιστές 2 σημείων. Τώρα, θα κάνουμε το ίδιο για συσχετιστές 3 σημείων.

Λαμβάνοντας τον απλό συσχετιστή σπιν-0-σπιν-0-σπιν- l

$G^{\Gamma_1 \dots \Gamma_l}(P_1, P_2, P_3) \equiv \langle \Phi_1(P_1) \Phi_2(P_2) \mathcal{O}^{\Gamma_1 \dots \Gamma_l}(P_3) \rangle$, με \mathcal{O} συμμετρικό εγκάρσιο άιχνο,

$$G(P_1, P_2, P_3; Z_3) = G^{\Gamma_1 \dots \Gamma_l}(P_1, P_2, P_3) Z_{3;\Gamma_1} \dots Z_{3;\Gamma_l}.$$

Το πιο γενικό συμμετρικό και ταυτοτικά εγκάρσιο πολυώνυμο αναλλοίωτο στις στροφές της $so(2, 4)$ είναι τότε το

$$G(P_1, P_2, P_3; Z_3) = C \frac{\left((P_2 \cdot P_3)(P_1 \cdot Z_3) - (P_1 \cdot P_3)(P_2 \cdot Z_3) \right)^l}{(P_{12})^{\frac{\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3 + l}{2}} (P_{23})^{\frac{\Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_1 + l}{2}} (P_{13})^{\frac{\Delta_3 + \Delta_1 - \Delta_2 + l}{2}}}$$

$$\begin{aligned} \text{Ορίζουμε } V_{i;jk} &:= \frac{P_j^A C_{i;AB} P_k^B}{P_j \cdot P_k}, i \neq j \neq k & (4.3.8) \\ &= \frac{P_j^A (Z_{i;A} P_{i;B} - P_{i;A} Z_{i;B}) P_k^B}{P_j \cdot P_k} \\ &= -2 \frac{(P_i \cdot P_k)(P_j \cdot Z_i) - (P_i \cdot P_j)(P_k \cdot Z_i)}{P_{jk}} \end{aligned}$$

Αν τα (i, j, k) είναι κυκλική μετάθεση των $(1, 2, 3)$ θα γράφουμε $V_i \equiv V_{i;jk}$.

$$\Rightarrow G(P_1, P_2, P_3; Z_3) = \tilde{C} \frac{V_3^l}{(P_{12})^{\frac{\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3}{2}} (P_{23})^{\frac{\Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_1}{2}} (P_{13})^{\frac{\Delta_3 + \Delta_1 - \Delta_2}{2}}}$$

Προφανώς, ενώ $H_{ij} = H_{ji}$, $V_{i;jk} = -V_{i;kj}$. Τότε κάνουμε την εξής παρατήρηση: η ομάδα μεταθέσεων 3 στοιχείων S_3 έχει $3! = 6$ στοιχεία, 3 που ανήκουν στην υποομάδα άρτιων μεταθέσεων A_3 με $\frac{3(3-1)}{2}$ στοιχεία. Φυσικά, η A_3 περιέχει μόνο κυκλικές μεταθέσεις, ενώ κάθε περιττή μετάθεση στην S_3 μπορεί να γραφεί ως η σύνθεση $(ij) = (jk)(ijk)$, που δεν είναι παρά η σύνθεση εναλλαγής των δεικτών j, k με μια κυκλική μετάθεση. Οπότε υπάρχει βάση 3 συμμετρικών και 3 αντισυμμετρικών δομών

$$\begin{cases} \text{συμμετρικοί: } H_{12}, H_{13}, H_{23} \\ \text{αντισυμμετρικοί: } V_1 \equiv V_{1;23}, V_2 \equiv V_{2;31}, V_3 \equiv V_{3;12} \end{cases} \quad (4.3.9)$$

Πρόταση 7: Έστω ένα ταυτοτικά εγκάρσιο ως προς $P_i, i = 1, 2, 3$ πολυώνυμο $Q(P_i; Z_i)$ που πληροί τις συνθήκες 4.3.5. Τότε

$$Q(P_i; Z_i) = Q(V_i, H_{ij}) = \prod_{i=1}^3 \sum_{i < j=1}^3 c_{m_i n_{ij}} V_i^{m_i} H_{ij}^{n_{ij}} \quad (4.3.10)$$

$$m_i + \sum_{i < j=1}^3 n_{ij} = l_i \forall i = 1, 2, 3.$$

Απόδειξη: Έστω κατάρχην πως το Q περιέχει μόνο όρους $(P_j \cdot Z_i), i \neq j$ (οι όροι $\mathcal{O}(Z_i^2, P_i \cdot Z_i)$ αγνοούνται καθώς Q ταυτοτικά εγκάρσιο). Κατεύθειαν ισχύει

$$V_i \equiv V_{i;jk} := (P_j \cdot Z_i) \frac{P_k}{P_j \cdot P_k} \Rightarrow Q = \sum_m a_m V_m.$$

Εν γένει, κάποιο πολυώνυμο $Q(P_i; Z_i)$ θα εξαρτάται από τα Z_i μέσω των παραγόντων $(P_j \cdot Z_i)$ και $(Z_i \cdot Z_j)$.

$$\text{Όμως } H_{ij} = -4[(P_i \cdot P_j)(Z_i \cdot Z_j) - (P_j \cdot Z_i)(P_i \cdot Z_j)]$$

$$\Rightarrow (Z_i \cdot Z_j) = -\frac{H_{ij}}{4(P_i \cdot P_j)} + \mathcal{O}((P_j \cdot Z_i), (P_i \cdot Z_j)) = \frac{H_{ij}}{4(P_i \cdot P_j)} + \mathcal{O}(V_i, V_k)$$

Η απαίτηση το $Q(P_i; Z_i)$ να είναι ομογενές βαθμού l_i στα Z_i επιβάλλει τη μορφή της εξ. 4.3.10, ο.έ.δ.

Έχουμε βρει, λοιπόν, τη βάση των πιθανών δομών που συμμετέχουν σε οποιονδήποτε συσχετιστή 3 σημείων που είναι σύμμορφα συμμετρικός στον $\mathbb{R}^{1,d-1}$, δηλαδή Lorentz αναλλοίωτος στον $\mathbb{R}^{2,d}$. Γνωρίζουμε τη συναρτησιακή μορφή του πολυωνύμου, και έχουμε τρόπο να εξαγάγουμε τον ταυιστή από το πολυώνυμο. Όπως θα δούμε, με την απαίτηση τα πεδία να είναι άιχνα (και άρα ο συσχετιστής να είναι άιχνος), εισάγουμε και συνθήκες για τους συντελεστές των δομών, μειώνοντας κατά πολύ τις ελεύθερες παραμέτρους που πρέπει να αποδεχτούμε.

4.3.3 Μείωση παραμέτρων

Όπως έχουμε δει, το πολυώνυμο $F(P; Z) := F^{A_1 \dots A_l}(P) Z_{A_1} \dots Z_{A_l}$ πρέπει να είναι ταυτοτικά εγκάρσιο. Σύμφωνα με τη σχέση 4.2.15, μπορούμε να γράψουμε

$$F_{A_i}(P; Z) = \mathcal{D}_{A_i} F(P; Z) \quad (4.3.11)$$

Η συνθήκη ταυτοτικής εγκαρσιότητας

$$\frac{\partial}{\partial P} F(P; Z) = 0 \Leftrightarrow F(P; Z + \kappa P) = 0 \forall \kappa \in \mathbb{R}$$

ισχύει και για το $F_{A_i}(P; Z) \forall i$, γραμμένη ως

$$\frac{\partial}{\partial P_{A_i}} F_{A_i}(P; Z) = \frac{\partial}{\partial P_{A_i}} (\mathcal{D}_{A_i} F(P; Z)) \equiv (\partial \cdot \mathcal{D}) F(P; Z) = 0 \forall i = 1, \dots, l. \quad (4.3.12)$$

4.3.4 Συσχετιστές διατηρούμενων πεδίων

Όπως ξέρουμε από την QFT , ένα σπιν- l πεδίο σύμμορφου βάρους Δ πρέπει να πληροί τη **συνθήκη μοναδιαιότητας** (unitarity bound) [23]

$$\Delta \geq d + l - 2, \quad l \geq 1 \quad (4.3.13)$$

με την ισότητα να ισχύει για πεδία που είναι συναλλοίωτα.

Κάνουμε τώρα τις εξής παρατηρήσεις:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{1,d-1} \ni f^{\alpha_1 \dots \alpha_l}(x) &\Rightarrow (\partial \cdot f)^{\alpha_1 \dots \alpha_l \hat{\alpha}_i} \equiv \frac{\partial}{\partial x^{\alpha_i}} f^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_l} \quad \forall i = 1, \dots, l \\ &\stackrel{4.1.12}{=} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha_i}} \left(\prod_{j=1}^l \frac{\partial P_{A_j}}{\partial x_{\alpha_j}} F^{A_i A_1 \dots A_l}(P) \right). \quad (4.3.14) \\ \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha_i}} \frac{\partial P_{A_j}}{\partial x_{\alpha_j}} &= \partial_{x^{\alpha_i}}(1, 0, 2x^{\alpha_j}) = \bar{P}_{A_j} \delta_{\alpha_i}^{\alpha_j} \\ \frac{\partial P_{A_i}}{\partial x_{\alpha_i}} \frac{\partial F^{A_i A_1 \dots A_l}}{\partial x^{\alpha_i}} &= \frac{\partial P_{A_i}}{\partial x_{\alpha_i}} \frac{\partial P_B}{\partial x^{\alpha_i}} \frac{\partial F^{A_i A_1 \dots A_l}}{\partial P_B} \stackrel{4.1.18}{=} K_{A_i B} \frac{\partial F^{A_i A_1 \dots A_l}}{\partial P_B} \end{aligned} \right. \\ &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x^{\alpha_i}} \prod_{j=1}^l \frac{\partial P_{A_j}}{\partial x_{\alpha_j}} F^{A_i A_1 \dots A_l} = \\ &= \sum_{k=1}^l \prod_{k \neq j=1}^l \frac{\partial P_{A_j}}{\partial x_{\alpha_j}} \bar{P}_{A_k} \delta_{\alpha_i}^{\alpha_k} F^{A_i A_1 \dots A_l} + \prod_{j=1}^l \frac{\partial P_{A_j}}{\partial x_{\alpha_j}} K_{A_i B} \frac{\partial F^{A_i A_1 \dots A_l}}{\partial P_B} \\ &= \bar{P}_{A_i} \prod_{i \neq j=1}^l \frac{\partial P_{A_j}}{\partial x_{\alpha_j}} F^{A_i A_1 \dots A_l} + K_{A_i B} \prod_{j=1}^l \frac{\partial P_{A_j}}{\partial x_{\alpha_j}} \frac{\partial F^{A_i A_1 \dots A_l}(P)}{\partial P_B} \quad (*) \\ K_{A_i B} \frac{\partial F^{A_i A_1 \dots A_l}}{\partial P_B} &= \frac{\partial F^{A_i A_1 \dots A_l}}{\partial P_{A_i}} + \left(P_{A_i} \bar{P} \cdot \frac{\partial F^{A_i A_1 \dots A_l}}{\partial P} + \bar{P}_{A_i} P \cdot \frac{\partial F^{A_i A_1 \dots A_l}}{\partial P} \right) \\ &\Rightarrow (*) = \prod_{i \neq j=1}^l \frac{\partial P_{A_j}}{\partial x_{\alpha_j}} \left[\bar{P}_{A_i} F^{A_i A_1 \dots A_l} + \frac{\partial P_{A_i}}{\partial x_{\alpha_i}} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(\frac{\partial F^{A_i A_1 \dots A_l}}{\partial P_{A_i}} + (P_{A_i} \bar{P} + \bar{P}_{A_i} P) \cdot \frac{\partial F^{A_i A_1 \dots A_l}}{\partial P} \right) \right] \end{aligned}$$

Κάνοντας τις συστολές και παρατηρώντας $P \cdot \bar{P} = -(l+d-2)$, $F^{A_i A_1 \dots A_l}$ ομογενές βαθμού $-\Delta$ σε κάθε P

$$\prod_{i \neq j=1}^l \frac{\partial P_{A_j}}{\partial x_{\alpha_j}} \underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial P^{A_i}} - \frac{1}{P \cdot \bar{P}} \left(\bar{P} \cdot \frac{\partial}{\partial P} \right) P_{A_i} - (l+d-2-\Delta) \frac{1}{P \cdot \bar{P}} \bar{P}_{A_i} \right]}_{:=R^{A_1 \dots A_l \hat{A}_i}(P)} F^{A_i A_1 \dots A_l}$$

Ο $R^{A_1 \dots A_l \hat{A}_i}$ είναι συμμετρικός, άιχνος και εγκάρσιος, εκ κατασκευής. Πρέπει, όμως, να είναι και αναλλοίωτος υπό μετασχηματισμούς Lorentz. Οι πρώτοι δύο όροι είναι αναλλοίωτοι: ο πρώτος προφανώς, και όντως για το δεύτερο όλοι οι όροι $P_{A_i} F^{A_i A_1 \dots A_l} \mathcal{O}(P^2)$, που στο μηδενικό κώνο εξαφανίζονται (ως προφανής συνέπεια της Πρότασης 5: ο $F^{A_1 \dots A_l}$ είναι βαθμού τουλάχιστον 1 σε κάθε P_{A_i}). Άρα και αυτός ο όρος είναι αναλλοίωτος.

Ο τρίτος όρος, ανάλογος προς \bar{P}_{A_i} , δεν είναι απαραίτητα αναλλοίωτος, όμως! Για να εξασφαλιστεί η καλή συμπεριφορά του $R^{A_1 \dots A_l \hat{A}_i}$ πρέπει να μηδενιστεί εκ ταυτότητας: $\Delta = l + d - 2$, που από τις σχέσεις 4.3.13, 4.3.14 θα πει πως το $(\partial \cdot f)^{\alpha_1 \dots \alpha_l \hat{\alpha}_i}$ είναι συναλλοίωτο.

4.4 Συμπέρασμα του φορμαλισμού

Πρόταση 8: Έστω κάποιο πρωτεύον πεδίο $o^{\alpha_1 \dots \alpha_l}(x) \in \mathbb{R}^{1,d-1}$ σύμμορφου βάρους Δ και σπιν $l \in \mathbb{N}^*$, συμμετρικό και άιχνο. Τότε ισχύει το ακόλουθο:

$$\begin{aligned} \langle o^{\alpha_1,1 \dots \alpha_{1,l}}(x_1) \dots o^{\alpha_{n,1} \dots \alpha_{n,l}}(x_n) \rangle &\equiv f^{\alpha_1,1 \dots \alpha_{1,l}; \dots; \alpha_{n,1} \dots \alpha_{n,l}}(x_1 \dots x_l) \text{ σύμμορφος} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\partial \cdot f)^{\alpha_1,1 \dots \alpha_{n,l} \hat{\alpha}_{j,i}} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, l, j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

Ισοδύναμα, *σύμμορφα συμμετρικοί συσχετιστές μη-συναλλοίωτων πεδίων με τον εαυτό τους είναι τετριμμένοι, και οι συσχετιστές συναλλοίωτων πεδίων είναι σύμμορφοι.*

Η απόδειξη δίνεται στην προηγούμενη υποενότητα.

Αυτή είναι και όλη η δύναμη, όλο το ενδιαφέρον, της σύμμορφης συμμετρίας στην Κοσμολογία. Τα πεδία που μας ενδιαφέρουν γιατί συνεισφέρουν στις διαταραχές του πρώιμου Σύμπαντος είναι η μετρική και όποια πεδία συνεισφέρουν στην πληθωριστική Λαγκρανζιανή. Εφόσον συζεύγγονται με τη βαρύτητα, είναι συναλλοίωτα.

Οι διαταραχές που παράγονται αποσυντίθενται με τον τρόπο SVT σε βαθμωτούς και τανυστικούς ρυθμούς (και διανυσματικούς που από την 3.3.7 φθίνουν γρήγορα και είναι αμελητέοι), που φυσικά τότε είναι συναλλοίωτα πεδία. Έτσι, ο φορμαλισμός που αναπτύξαμε είναι ο κατάλληλος για την περιγραφή κοσμολογικά ενδιαφέροντων πεδίων, και μας επιτρέπει να κάνουμε σχετικά εύκολα προβλέψεις για το φάσμα ισχύος, το διφάσμα και το τριφάσμα των πεδίων αυτών. Δηλαδή, είναι ένα εξαιρετικό εργαλείο για την έρευνα της μη-Γκαουσιανότητας των πεδίων του πληθωριστικού Σύμπαντος.

Στο επόμενο κεφάλαιο, θα εφαρμόσουμε το φορμαλισμό μας για έναν τανυστή σπιν-2, υπολογίζοντας το συσχετιστή 3 σημείων του πεδίου με τον εαυτό του.

5 Υπολογισμός του $\langle t^{\alpha_1\alpha_2}(x_1)t^{\beta_1\beta_2}(x_2)t^{\gamma_1\gamma_2}(x_3) \rangle$

Έστω το συμμετρικό, πρωτεύον, άιχνο και σπιν-2 πεδίο $t^{\alpha\beta}(x) \in \mathbb{R}^{1,d-1}$. Το σύμμορφο βάρος του πεδίου τότε δίνεται από τη σχέση 4.3.13 με την ισότητα: $\Delta = d + 2 - 2 = d$.

Έχουν ήδη γίνει ανεξάρτητοι υπολογισμοί του συσχετιστή τριών σημείων στο χώρο ορμών ($t^{\alpha\beta}(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{t}^{\alpha\beta}(k)$), π.χ. στα [3], [7]: αυτό είναι, βέβαια, γιατί ο ταυιστής ύλης-ενέργειας είναι σπιν-2 πεδίο και έτσι ο συσχετιστής αυτός δίνει σημαντική πληροφορία για τη μη-Γκαουσιανότητα (μέγεθος και σχήμα) του αρχέγονου Σύμπαντος.

Εμείς θα υπολογίσουμε το συσχετιστή αυτό στο χώρο των θέσεων, σύμφωνα με όσα αναπτύξαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο ακολουθώντας το [9]: είναι κατάρχήν δυνατό να μετασχηματιστεί το αποτέλεσμά μας στο χώρο των ορμών με ένα μετασχηματισμό Fourier, που όμως δε θα πραγματοποιήσουμε εδώ. Ο αναγνώστης προτρέπεται να ανατρέξει στο Παράρτημα Β, όπου εξηγείται γιατί δε γίνεται να ευρεθεί 'εύκολος' μετασχηματισμός Fourier του μηδενικού κώνου $P^2 = 0$ πρώτα, ώστε να δουλέψουμε κατευθείαν στο χώρο των ορμών.

5.1 Η γενική δομή

Σύμφωνα με όσα έχουμε δει, θα ξεκινήσουμε θεωρώντας το ταυτοτικά εγκάρσιο πολυώνυμο στο χώρο ενσωμάτωσης $\mathbb{R}^{2,d}$

$$G(P_i; Z_i) = G(H_{ij}, V_i)$$

που είναι ομογενές βαθμού $-d$ σε κάθε P_i και βαθμού d σε κάθε Z_i . Από τις τυπικές σχέψεις (G εγκάρσιο ταυτοτικά, αναλλοίωτο υπό $so(2, d)$ μετασχηματισμούς, και ομογενές) έχουμε κατευθείαν

$$G(P_i; Z_i) = G_1(P_i)G_2(P_i; Z_i) \quad (5.1.1)$$

$$G_1(P_1, P_2, P_3) := \frac{C}{(P_{12})^{\tau_{12}}(P_{23})^{\tau_{23}}(P_{13})^{\tau_{13}}}, \quad (5.1.2)$$

$$\tau_{ij} := \frac{1}{2}((\Delta_i + l) + (\Delta_j + l) - (\Delta_{k \neq i,j} + l)) = \frac{d+2}{2},$$

$$G_2(P_i; Z_i) = G_2(H_{ij}, V_j)$$

$$\Xi\acute{\epsilon}\kappa\acute{\alpha}\theta\alpha\rho\alpha \ G_1(\lambda_1 P_1, \lambda_2 P_2, \lambda_3 P_3) = (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^{-(d+2)} G_1(P_1, P_2, P_3)$$

οπότε το G_2 πρέπει να είναι ομογενές βαθμού 2 στα P_i . Επίσης προφανώς είναι ομογενές βαθμού 2 σε κάθε Z_i .

Οι πιθανές δομές που μπορούν να εισέλθουν στο G_2 απαριθμούνται παρακάτω:

V_i -blocks	H_{ij} -blocks	Δομές
(2,2,2)	(0,0,0)	V_1^2, V_2^2, V_3^2
(2,1,1)...	(0,1,1)...	$V_1^2 V_2 V_3 H_{23}, V_1 V_2^2 V_3 H_{13}, V_1 V_2 V_3^2 H_{12}$
(2,0,0)...	(0,2,2)...	$V_1^2 H_{23}^2, V_2^2 H_{13}^2, V_3^2 H_{12}^2$
(1,1,0)...	(1,1,2)...	$V_1 V_2 H_{13} H_{23}, V_1 V_3 H_{12} H_{23}, V_2 V_3 H_{12} H_{13}$
(0,0,0)	(2,2,2)	$H_{12} H_{13} H_{23}$

όπου οι ... υποδεικνύουν κυκλική μετάθεση των στοιχείων της διατεταγμένης τριάδας βαθμών ομογένειας που οφείλεται από τα V_i (1η στήλη) και από τα H_{ij} (2η στήλη). Είναι ξεκάθαρο πως, λόγω της πλήρους συμμετρίας $(\alpha_i, \beta_i) \in S_3$, S_3 η ομάδα των μεταθέσεων 3 στοιχείων, οι όροι κάθε γραμμής πρέπει να έχουν τους

ίδιους συντελεστές στο πολυώνυμο G_2 . Έχουμε λοιπόν τη γενική μορφή

$$\begin{aligned}
G_2(P_i; Z_i) &= \\
&= a_1 V_1^2 V_2^2 V_3^2 + \\
&+ a_2 V_1 V_2 V_3 (V_1 H_{23} + V_2 H_{13} + V_3 H_{12}) + \\
&+ a_3 (V_1 V_2 H_{13} H_{23} + V_1 V_3 H_{12} H_{23} + V_2 V_3 H_{12} H_{13}) + \\
&+ a_4 (V_1^2 H_{23}^2 + V_2^2 H_{13}^2 + V_3^2 H_{12}^2) + \\
&+ a_5 H_{12} H_{13} H_{23}
\end{aligned} \tag{5.1.3}$$

Πρώτα, θα εφαρμόσουμε τον απλό κανόνα εξαγωγής του ταυιστή για κάθε έναν από τους 5 όρους. Έπειτα, με την εφαρμογή της 4.3.12 στο G , θα βρούμε τις συνθήκες που μειώνουν τις 5 ελεύθερες παραμέτρους a_i .

Πρώτα, οι κανόνες μετάβασης από τον $\mathbb{R}^{2,d}$ στον $\mathbb{R}^{1,d-1}$:

Έχουμε, σύμφωνα με τους κανόνες 4.3.1,

$$\begin{aligned}
V_i &:= \frac{P_j \cdot C_i \cdot P_k}{P_j \cdot P_k} = \frac{(P_i \cdot P_k)(P_j \cdot Z_i) - (P_i \cdot P_j)(P_k \cdot Z_i)}{P_j \cdot P_k} \\
&\stackrel{4.3.1}{\mapsto} v_i = \frac{x_{ik}^2(x_{ji} \cdot z_i) - x_{ij}^2(x_{ki} \cdot z_i)}{x_{jk}^2} \\
&= \frac{x_{ij}^2(x_{ik} \cdot z_i) - x_{ik}^2(x_{ij} \cdot z_i)}{x_{jk}^2}
\end{aligned}$$

$$H_{ij} := -4(C_i \cdot C_j) = 4((P_j \cdot Z_i)(P_i \cdot Z_j) - (P_i \cdot P_j)(Z_i \cdot Z_j))$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{4.3.1}{\mapsto} h_{ij} = 4((x_{ji} \cdot z_i)(x_{ij} \cdot z_j) - \left(-\frac{1}{2}x_{ij}^2(z_i \cdot z_j)\right)) \\
&= 2(x_{ij}^2(z_i \cdot z_j) - 2(x_{ij} \cdot z_i)(x_{ij} \cdot z_j))
\end{aligned}$$

5.2 Εξαγωγή του τανυστή $g^{\alpha_1\alpha_2;\beta_1\beta_2;\gamma_1\gamma_2}(x_{12}, x_{13}, x_{23})$

(Σημείωση: Σε κάθε υποενότητα θα παραβλέπουμε να γράφουμε την ελεύθερη παράμετρο a_i , αναφερόμενοι απλώς στον 'α_i-όρος')

5.2.1 Ο α₁-όρος

$$v_i^2 = \frac{x_{ij}^4(x_{ik} \cdot z_i)^2 + x_{ik}^4(x_{ij} \cdot z_i)^2 - 2x_{ij}^2x_{ik}^2(x_{ij} \cdot z_i)(x_{ik} \cdot z_i)}{x_{jk}^4}$$

$$1) : g(x_i; z_i) = v_1^2v_2^2v_3^2$$

$$2) : g(x_{12}, x_{13}, x_{23}; z_1, z_2, z_3) \rightarrow g^{\gamma_1\gamma_2}(x_{12}, x_{13}, x_{23}; z_1, z_2)$$

$$= v_1^2v_2^2 \left(\frac{x_{13}^4}{x_{12}^4} (x_{23} \bar{\otimes} x_{23})^{\gamma_1\gamma_2} + \frac{x_{23}^4}{x_{12}^4} (x_{13} \bar{\otimes} x_{13})^{\gamma_1\gamma_2} - 2 \frac{x_{13}^2x_{23}^2}{x_{12}^4} (x_{13} \bar{\otimes} x_{23})^{\gamma_1\gamma_2} \right)$$

$$= \frac{v_1^2v_2^2}{x_{12}^4} \left(\{x_{13}^2\}x_{23} - \{x_{23}^2\}x_{13} \right)^{\bar{\otimes} 2; \gamma_1\gamma_2},$$

όπου $(a)^{\bar{\otimes} 2; \mu\nu} \equiv (a \bar{\otimes} a)^{\mu\nu}$, $(\{\lambda\}a \bar{\otimes} \{\mu\}b)^{\mu\nu} \equiv \lambda\mu(a \bar{\otimes} b)^{\mu\nu} \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$3) : g^{\gamma_1\gamma_2}(x_{12}, x_{13}, x_{23}; z_1, z_2) \rightarrow g^{\beta_1\beta_2; \gamma_1\gamma_2}(x_{12}, x_{13}, x_{23}; z_1)$$

$$= \frac{v_1^2}{x_{12}^4x_{13}^4} \left(\{x_{23}^2\}x_{12} + \{x_{12}^2\}x_{23} \right)^{\bar{\otimes} 2; \beta_1\beta_2} \left(\{x_{13}^2\}x_{23} - \{x_{23}^2\}x_{13} \right)^{\bar{\otimes} 2; \gamma_1\gamma_2}$$

$$4) : g^{\beta_1\beta_2}(x_{12}, x_{13}, x_{23}; z_1) \rightarrow g^{\alpha_1\alpha_2; \beta_1\beta_2; \gamma_1\gamma_2}(x_{12}, x_{13}, x_{23})$$

$$= \frac{1}{x_{12}^4x_{13}^4x_{23}^4} \left(-\{x_{12}^2\}x_{13} + \{x_{13}^2\}x_{12} \right)^{\bar{\otimes} 2; \alpha_1\alpha_2} \times$$

$$\times \left(\{x_{23}^2\}x_{12} + \{x_{12}^2\}x_{23} \right)^{\bar{\otimes} 2; \beta_1\beta_2} \left(\{x_{13}^2\}x_{23} - \{x_{23}^2\}x_{13} \right)^{\bar{\otimes} 2; \gamma_1\gamma_2}$$

5.2.2 Ο α₂-όρος

$$h_{ij}v_k = 2[x_{ij}^2(z_i \cdot z_j) - 2(x_{ij} \cdot z_i)(x_{ij} \cdot z_j)] \left(\frac{x_{ki}^2(x_{kj} \cdot z_k) - x_{kj}^2(x_{ki} \cdot z_k)}{x_{ij}^2} \right)$$

$$= \frac{2}{x_{ij}^2} [x_{ij}^2(z_i \cdot z_j)(x_{ik}^2(x_{jk} \cdot z_k) - x_{kj}^2(x_{ki} \cdot z_k)) + 2(x_{ij} \cdot z_i)(x_{ij} \cdot z_j)(x_{jk}^2(x_{ki} \cdot z_k) - x_{ik}^2(x_{kj} \cdot z_k))]$$

$$v_3h_{12} = 2 \underbrace{\left[x_{23}^2 \left((x_{13} \cdot z_3)(z_1 \cdot z_2) - \frac{2}{x_{12}^2} (x_{12} \cdot z_1)(x_{12} \cdot z_2)(x_{23} \cdot z_3) \right) \right]}_{b_{312}} + \underbrace{(1 \leftrightarrow 2)}_{b_{321}}$$

$$v_1v_2v_3 = \left(\frac{x_{12}^2(x_{13} \cdot z_1) - x_{13}^2(x_{12} \cdot z_2)}{x_{23}^2} \right) \left(\frac{-x_{23}^2(x_{12} \cdot z_2) - x_{12}^2(x_{23} \cdot z_2)}{x_{13}^2} \right) \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\frac{-x_{13}^2(x_{23} \cdot z_3) + x_{23}^2(x_{13} \cdot z_3)}{x_{12}^2} \right) \\
& = \left((x_{13} \cdot z_1)(x_{12} \cdot z_2)(x_{23} \cdot z_3) - \frac{x_{13}^2}{x_{12}^2}(x_{12} \cdot z_1)(x_{12} \cdot z_2)(x_{23} \cdot z_3) \right. \\
& \left. + \frac{x_{12}^2}{x_{23}^2}(x_{13} \cdot z_1)(x_{23} \cdot z_2)(x_{23} \cdot z_3) - \frac{x_{13}^2}{x_{23}^2}(x_{12} \cdot z_1)(x_{23} \cdot z_2)(x_{23} \cdot z_3) \right) + \underbrace{(1 \leftrightarrow 2)}_{B_{321}} \\
& \equiv B_{312} + B_{321} \\
& \Rightarrow v_1 v_2 v_3 [v_3 h_{12} + \text{κυκλ.}] = [B_{312} + B_{321}] [(b_{312} + b_{321}) + \text{κυκλ.}]
\end{aligned}$$

(όπου πρέπει να δοθεί σημασία στα πρόσημα, και άρα πρέπει να ξαναγίνουν οι πράξεις για τα γινόμενα $v_2 h_{13}, v_1 h_{23}$).

Οι διαφορές μεταξύ όρων λ.χ. $B_{312}b_{312}, B_{312}b_{321}, B_{321}b_{123} \dots$ είναι τότε απλώς θέμα προσήμων και συντελεστών, και όχι ουσιαστικές για τα βήματα που θα ακολουθήσουμε: αρκεί να γίνουν οι κατάλληλες αντικαταστάσεις μετά. Θα κάνουμε το βήμα για το $B_{312}b_{312}$.

$$\begin{aligned}
B_{312}b_{312} = & \\
& 2x_{23}^2(z_1 \cdot z_2)(x_{13} \cdot z_1)(x_{12} \cdot z_2)(x_{13} \cdot z_3)(x_{23} \cdot z_3) \\
& - \frac{4x_{23}^2}{x_{13}^2}(x_{12} \cdot z_1)(x_{13} \cdot z_1)(x_{12} \cdot z_2)^2(x_{13} \cdot z_3)(x_{23} \cdot z_3) \\
& - 2 \frac{x_{13}^2 x_{23}^2}{x_{12}^2}(z_1 \cdot z_2)(x_{12} \cdot z_1)(x_{12} \cdot z_2)(x_{13} \cdot z_3)^2 \\
& + \frac{4x_{13}^2 x_{23}^2}{x_{12}^2}(x_{12} \cdot z_1)^2(x_{13} \cdot z_2)^2(x_{13} \cdot z_3)(x_{23} \cdot z_3) \\
& + 2x_{12}^2(z_1 \cdot z_2)(x_{13} \cdot z_1)(x_{23} \cdot z_2)(x_{13} \cdot z_3)(x_{23} \cdot z_3) \\
& - 4(x_{12} \cdot z_1)(x_{13} \cdot z_1)(x_{12} \cdot z_2)(x_{23} \cdot z_2)(x_{13} \cdot z_3)(x_{23} \cdot z_3) \\
& - 2x_{23}^2(z_1 \cdot z_2)(x_{12} \cdot z_1)(x_{23} \cdot z_2)(x_{13} \cdot z_3)(x_{23} \cdot z_3) \\
& + 4 \frac{x_{13}^2}{x_{12}^2}(x_{12} \cdot z_1)^2(x_{12} \cdot z_2)(x_{23} \cdot z_2)(x_{13} \cdot z_3)(x_{23} \cdot z_3)
\end{aligned}$$

Με τον απλό κανόνα μας έχουμε ήδη δει πως να αντιμετωπίσουμε όρους $\mathcal{O}(x_{pq} \cdot z_r)$, οπότε δε θα κάνουμε το έξτρα βήμα. Οι καινούριοι όροι (σε σχέση με τον a_1 -όρο) $\mathcal{O}(z_i \cdot z_j)$ αντιμετωπίζονται ως εξής:

$$1) : g(x_{ij}; z_1, z_2, z_3) = 2x_{23}^2(z_1 \cdot z_2)(x_{13} \cdot z_1)(x_{12} \cdot z_2)(x_{13} \cdot z_3)(x_{23} \cdot z_3)$$

$$\begin{aligned}
2) & : g(x_{ij}; z_1, z_2, z_3) \rightarrow g^{\gamma_1 \gamma_2}(x_{ij}; z_1, z_2) \\
& = 2x_{23}^2(z_1 \cdot z_2)(x_{13} \cdot z_1)(x_{12} \cdot z_2)(x_{13} \bar{\otimes} x_{23})^{\gamma_1 \gamma_2} \\
3) & : g^{\gamma_1 \gamma_2}(x_{ij}; z_1, z_2) \rightarrow g^{\beta_1 \beta_2; \gamma_1 \gamma_2}(x_{ij}; z_1) \\
& = 2x_{23}^2(x_{13} \cdot z_1)(x_{12} \bar{\otimes} z_1)^{\beta_1 \beta_2} (x_{13} \bar{\otimes} x_{23})^{\gamma_1 \gamma_2} \\
4) & : g^{\beta_1 \beta_2; \gamma_1 \gamma_2}(x_{ij}; z_1) \rightarrow g^{\alpha_1 \alpha_2; \beta_1 \beta_2; \gamma_1 \gamma_2}(x_{ij}) \\
& = 2x_{23}^2 \left(x_{13} \bar{\otimes} (x_{12} \bar{\otimes} \eta^{\Delta \square})^{\beta_1 \beta_2} \right)^{\alpha_1 \alpha_2} (x_{13} \bar{\otimes} x_{23})^{\gamma_1 \gamma_2}
\end{aligned}$$

$\Delta \mapsto \alpha, \square \mapsto \beta$ (βλ. Ενότητα 4.3.1)

Ομοίως αν αναλύσουμε κάποιον όρο $\propto (z_1 \cdot z_3)(x_{p_1 q_1} \cdot z_1)(x_{r_1 s_1} \cdot z_2)(x_{r_2 s_2} \cdot z_2)(x_{p_2 q_2} \cdot z_3)$ με τα βήματα του κανόνα θα καταλήξουμε σε μια μορφή

$$\propto \left(x_{p_1 q_1} \bar{\otimes} (x_{p_2 q_2} \bar{\otimes} \eta^{\Delta \diamond})^{\gamma_1 \gamma_2} \right)^{\alpha_1 \alpha_2} (x_{r_1 s_1} \bar{\otimes} x_{r_2 s_2})^{\beta_1 \beta_2}, \Delta \mapsto \alpha, \diamond \mapsto \gamma$$

Η περίπτωση $\propto (z_2 \cdot z_3)(x_{r_1 s_1} \cdot z_1)(x_{r_2 s_1} \cdot z_1)(x_{p_2 q_2} \cdot z_3)$ είναι τότε προφανώς

$$\propto (x_{r_1 s_1} \bar{\otimes} x_{r_2 s_2})^{\alpha_1 \alpha_2} \left(x_{p_1 q_1} \bar{\otimes} (x_{p_2 q_2} \bar{\otimes} \eta^{\square \diamond})^{\gamma_1 \gamma_2} \right)^{\beta_1 \beta_2}, \square \mapsto \beta, \diamond \mapsto \gamma$$

5.2.3 Ο a_3 -όρος

$$\begin{aligned}
h_{ij} h_{ik} & = 4[x_{ij}^2(z_i \cdot z_j) - 2(x_{ij} \cdot z_i)(x_{ij} \cdot z_j)][x_{ik}^2(z_i \cdot z_k) - 2(x_{ik} \cdot z_i)(x_{ik} \cdot z_k)] \\
& = 4[x_{ij}^2 x_{ik}^2 (z_i \cdot z_j)(z_i \cdot z_k) + 4(x_{ij} \cdot z_i)(x_{ik} \cdot z_i)(x_{ij} \cdot z_j)(x_{ik} \cdot z_k) \\
& \quad - 2x_{ij}^2 (z_i \cdot z_j)(x_{ik} \cdot z_i)(x_{ik} \cdot z_k) - 2x_{ik}^2 (z_i \cdot z_k)(x_{ij} \cdot z_i)(x_{ij} \cdot z_j)] \\
\Rightarrow c_{1213} & = h_{12} h_{13} = 4[x_{12}^2 x_{13}^2 (z_1 \cdot z_2)(z_1 \cdot z_3) + 4(x_{12} \cdot z_1)(x_{13} \cdot z_1)(x_{12} \cdot z_2)(x_{13} \cdot z_3) \\
& \quad - 2x_{12}^2 (z_1 \cdot z_2)(x_{13} \cdot z_1)(x_{13} \cdot z_3) - 2x_{13}^2 (z_1 \cdot z_3)(x_{12} \cdot z_1)(x_{12} \cdot z_2)] \\
v_j v_k & = \left(\frac{x_{jk}^2 (x_{ji} \cdot z_j) - x_{ij}^2 (x_{jk} \cdot z_j)}{x_{ik}^2} \right) \left(\frac{x_{ik}^2 (x_{kj} \cdot z_k) - x_{jk}^2 (x_{ki} \cdot z_k)}{x_{ij}^2} \right) \\
& = \frac{1}{x_{ij}^2 x_{ik}^2} [x_{ik}^2 x_{jk}^2 (x_{ji} \cdot z_j)(x_{kj} \cdot z_k) + x_{ij}^2 x_{jk}^2 (x_{jk} \cdot z_j)(x_{ki} \cdot z_k) \\
& \quad - x_{ij}^2 x_{ik}^2 (x_{jk} \cdot z_j)(x_{kj} \cdot z_k) - x_{jk}^4 (x_{ji} \cdot z_j)(x_{ki} \cdot z_k)] \\
\Rightarrow C_{23} & = v_2 v_3 = (x_{23} \cdot z_2)(x_{23} \cdot z_3) + \frac{x_{23}^2}{x_{12}^2} (x_{12} \cdot z_2)(x_{23} \cdot z_3)
\end{aligned}$$

$$-\frac{x_{23}^2}{x_{13}^2}(x_{23} \cdot z_2)(x_{13} \cdot z_3) - \frac{x_{23}^4}{x_{12}^2 x_{13}^2}(x_{12} \cdot z_2)(x_{13} \cdot z_3)$$

$$\Rightarrow v_2 v_3 h_{12} h_{13} + \text{κυκλ.} = C_{23} c_{1213} + \text{κυκλ.}$$

$$C_{23} c_{1213} = 4 \left[x_{13}^2 x_{23}^2 (z_1 \cdot z_2)(z_1 \cdot z_3)(x_{23} \cdot z_2)(x_{13} \cdot z_3) + x_{12}^2 x_{13}^2 (z_1 \cdot z_2)(z_1 \cdot z_3)(x_{23} \cdot z_2)(x_{13} \cdot z_3) \right. \\ \left. - x_{12}^2 x_{23}^2 (z_1 \cdot z_2)(z_1 \cdot z_3)(x_{23} \cdot z_2)(x_{23} \cdot z_3) - x_{23}^4 (z_1 \cdot z_2)(z_1 \cdot z_3)(x_{12} \cdot z_2)(x_{13} \cdot z_3) \right] + \mathcal{O}(z_i \cdot z_{j \neq i}, x_{pq} \cdot z_i)$$

Οι όροι $\mathcal{O}(z_i \cdot z_{j \neq i}, x_{pq} \cdot z_i)$ (που περιέχουν μόνο 1 ή 0 γινόμενο $(z_i \cdot z_j)$ στο ανάπτυγμα τους) έχουν ήδη μελετηθεί και τους αγνοούμε.

Οι καινούριοι όροι είναι τα ‘διπλά’ γινόμενα $\mathcal{O}((z_i \cdot z_j)(z_i \cdot z_k))$.

$$1) : g(x_{ij}; z_1, z_2, z_3) = (z_1 \cdot z_2)(z_1 \cdot z_3)(x_{pq} \cdot z_2)(x_{rs} \cdot z_3)$$

$$2) : g(x_{ij}; z_1, z_2, z_3) \rightarrow g^{\gamma_1 \gamma_2}(x_{ij}; z_1, z_2)$$

$$= (z_1 \cdot z_2)(x_{pq} \cdot z_2)(x_{rs} \overline{\otimes} z_1)^{\gamma_1 \gamma_2}$$

$$3) : g^{\gamma_1 \gamma_2}(x_{ij}; z_1, z_2) \rightarrow g^{\beta_1 \beta_2; \gamma_1 \gamma_2}(x_{ij}; z_1)$$

$$= (x_{pq} \overline{\otimes} z_1)^{\beta_1 \beta_2} (x_{rs} \overline{\otimes} z_1)^{\gamma_1 \gamma_2}$$

$$4) : g^{\beta_1 \beta_2; \gamma_1 \gamma_2}(x_{ij}; z_1) \rightarrow g^{\alpha_1 \alpha_2; \beta_1 \beta_2; \gamma_1 \gamma_2}(x_{ij})$$

$$= \left((x_{pq} \overline{\otimes} \eta^{\Delta \square})^{\beta_1 \beta_2} \overline{\otimes} (x_{rs} \overline{\otimes} \eta^{\Delta \diamond})^{\gamma_1 \gamma_2} \right)^{\alpha_1 \alpha_2}$$

5.2.4 Ο a_4 -όρος

$$v_3 h_{12} = b_{312} + b_{321} \Rightarrow v_3^2 h_{12}^2 = b_{312}^2 + 2b_{312} b_{321} + b_{321}^2$$

$$v_3^2 h_{12}^2 + \text{κυκλ.} = (b_{312} + b_{321})^2 + \text{κυκλ.}$$

$$b_{312} = 2x_{23}^2 \left[(z_1 \cdot z_2)(x_{13} \cdot z_3) - \frac{2}{x_{12}^2}(x_{12} \cdot z_1)(x_{12} \cdot z_2)(x_{23} \cdot z_3) \right] \Rightarrow b_{312}^2 =$$

$$4x_{13}^2 \left[(z_1 \cdot z_2)^2 (x_{13} \cdot z_3)^2 + \frac{4}{x_{12}^4} (x_{12} \cdot z_1)^2 (x_{12} \cdot z_2)^2 (x_{23} \cdot z_3)^2 - \frac{4}{x_{12}^2} (z_1 \cdot z_2)(x_{12} \cdot z_1)(x_{12} \cdot z_2)(x_{23} \cdot z_3)^2 \right]$$

Έχουμε καινούριους όρους $\mathcal{O}((z_i \cdot z_j)^2)$.

$$1) : g(x_{ij}; z_1, z_2, z_3) = (z_1 \cdot z_2)^2 (x_{13} \cdot z_3)^2$$

$$2) : g(x_{ij}; z_1, z_2, z_3) \rightarrow g^{\gamma_1 \gamma_2}(x_{ij}; z_1, z_2)$$

$$= (z_1 \cdot z_2)^2 (x_{ij})^{\overline{\otimes} 2; \gamma_1 \gamma_2}$$

$$\begin{aligned}
3) : g^{\gamma_1 \gamma_2}(x_{ij}; z_1, z_2) &\rightarrow g^{\beta_1 \beta_2; \gamma_1 \gamma_2}(x_{ij}; z_1) \\
&= (z_1)^{\overline{\otimes} 2; \beta_1 \beta_2}(x_{ij})^{\overline{\otimes} 2; \gamma_1 \gamma_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4) : g^{\beta_1 \beta_2; \gamma_1 \gamma_2}(x_{ij}; z_1) &\rightarrow g^{\alpha_1 \alpha_2; \beta_1 \beta_2; \gamma_1 \gamma_2}(x_{ij}) \\
&= \left(\overline{\otimes} \left(\overline{\otimes} \eta^{\Delta \square} \right)^{\beta_1 \beta_2} \right)^{\alpha_1 \alpha_2}(x_{ij})^{\overline{\otimes} 2; \gamma_1 \gamma_2}
\end{aligned}$$

5.2.5 Ο a_5 -όρος

$$\begin{aligned}
h_{12}h_{13}h_{23} &= 8[x_{12}^2(z_1 \cdot z_2) - 2(x_{12} \cdot z_1)(x_{12} \cdot z_2)][x_{13}^2(z_1 \cdot z_3) - 2(x_{13} \cdot z_1)(x_{13} \cdot z_3)] \times \\
&\quad \times [x_{23}^2(z_2 \cdot z_3) - 2(x_{23} \cdot z_2)(x_{23} \cdot z_3)] \\
&= 8x_{12}^2 x_{13}^2 x_{23}^2 (z_1 \cdot z_2)(z_1 \cdot z_3)(z_2 \cdot z_3) + \mathcal{O}((z_i \cdot z_j)^2, (z_i \cdot z_j), (x_{pq} \cdot z_i))
\end{aligned}$$

Ο καινούριος όρος είναι $\propto (z_1 \cdot z_2)(z_1 \cdot z_3)(z_2 \cdot z_3)$.

$$1) : g(x_{ij}; z_1, z_2, z_3) = (z_1 \cdot z_2)(z_1 \cdot z_3)(z_2 \cdot z_3)$$

$$\begin{aligned}
2) : g(x_{ij}; z_1, z_2, z_3) &\rightarrow g^{\gamma_1 \gamma_2}(x_{ij}; z_1, z_2) \\
&= (z_1 \cdot z_2)(z_1 \overline{\otimes} z_2)^{\gamma_1 \gamma_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3) : g^{\gamma_1 \gamma_2}(x_{ij}; z_1, z_2) &\rightarrow g^{\beta_1 \beta_2; \gamma_1 \gamma_2}(x_{ij}; z_1) \\
&= \left(z_1 \overline{\otimes} (z_1 \overline{\otimes} \eta^{\square \diamond})^{\gamma_1 \gamma_2} \right)^{\beta_1 \beta_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4) : g^{\beta_1 \beta_2; \gamma_1 \gamma_2}(x_{ij}; z_1) &\rightarrow g^{\alpha_1 \alpha_2; \beta_1 \beta_2; \gamma_1 \gamma_2}(x_{ij}) \\
&= \left(\left(\eta^{\Delta \square} \overline{\otimes} (\eta^{\Delta \diamond} \overline{\otimes} \eta^{\square \diamond})^{\gamma_1 \gamma_2} \right)^{\beta_1 \beta_2} \right)^{\alpha_1 \alpha_2}
\end{aligned}$$

5.3 Μείωση παραμέτρων του συσχετιστή

Σύμφωνα με τα όσα είπαμε στην ενότητα 4.3.3, θα βρούμε τις σχέσεις μεταξύ των συντελεστών των a_i -όρων, καθώς πρέπει να ικανοποιείται η σχέση 4.3.12

$$\begin{aligned}
 & (\partial_{P_1} \cdot \mathcal{D}_{Z_1})G(P_i; Z_i) = 0 \\
 & \stackrel{5.1.1}{\Rightarrow} (\partial_{P_1} \cdot \mathcal{D}_{Z_1})G_1(P_i)G_2(P_i; Z_i) = \\
 & = \frac{\partial}{\partial P_{1;M}} \left(\cancel{(\mathcal{D}_{Z_1;M}G_1(P_i))} \overset{0}{G_2(P_i; Z_i)} + G_1(Z_i)(\mathcal{D}_{Z_1;M})G_2(P_i; Z_i) \right) = 0 \\
 & \Rightarrow \boxed{(\partial_{P_1}^M G_1(P_i))\mathcal{D}_{Z_1;M}G_2(P_i; Z_i) + G_1(P_i)[(\partial_{P_1} \cdot \mathcal{D}_{Z_1})G_2(P_i; Z_i)] = 0} \\
 & \tag{5.3.1}
 \end{aligned}$$

Οι αναλυτικές πράξεις βρίσκονται στο Παράρτημα Α. Αυτό που παρατηρούμε, αναπτύσσοντας τους δύο όρους, είναι πως προκύπτουν σχέσεις για κάθε πιθανό συνδυασμό των δομών $V_1, V_2, V_3, H_{12}, H_{13}, H_{23}$ (όπου κάθε ξεχωριστός όρος έχει τη σωστή ομογένεια (1,2,2): έτσι, δεν προκύπτουν συνδυασμοί όπως $V_1 H_{12}$, ενώ όροι ανάλογοι προς λ.χ. $H_{13} H_{23}$ πολλαπλασιάζονται με συντελεστή βαθμού 2 ως προς Z_2). Έχουμε αγνοήσει τους όρους $\mathcal{O}(P_i \cdot Z_i, Z_i^2)$.

Πράγματι, $G(P_i; Z_i)$ ταυτοτικά εγκάρσιο $\forall P_k \Leftrightarrow P_{k;N} \frac{\partial G(P_i; Z_i)}{\partial P_{k;N}} = 0 \forall k = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{D}_{Z_i;M} := \left(h - 1 + Z_i \cdot \frac{\partial}{\partial Z_i} \right) \frac{\partial}{\partial Z_i^M} - \frac{1}{2} Z_{i;M} \frac{\partial^2}{\partial Z_i \cdot \partial Z_i} \\
 & \Rightarrow \left[\frac{\partial}{\partial P_{j;N}}, \mathcal{D}_{Z_i;M} \right] = 0 \forall i, j = 1, 2, 3, M, N = 0, \dots, d+1 \\
 & \Rightarrow P_{k;N} \frac{\partial_{P_i}^M \mathcal{D}_{Z_i;M} G}{\partial P_{k;N}} = P_{k;N} \frac{\partial (\mathcal{D}_{Z_i;M} \partial_{P_i}^M G)}{\partial P_{k;N}} = \mathcal{D}_{Z_i;M} P_{k;N} \frac{\partial (\partial_{P_i}^M G)}{\partial P_{k;N}} \\
 & = \mathcal{D}_{Z_i;M} P_{k;N} \frac{\partial^2 G}{\partial P_{k;N} \partial P_{i;M}} \stackrel{G \in \mathcal{C}^2}{=} \mathcal{D}_{Z_i;M} P_{k;N} \frac{\partial^2 G}{\partial P_{i;M} \partial P_{k;N}} \\
 & = \mathcal{D}_{Z_i;M} P_{k;N} \frac{\partial}{\partial P_{i;M}} \left(\frac{\partial G}{\partial P_{k;N}} \right) \stackrel{k \neq i}{=} \mathcal{D}_{Z_i;M} \frac{\partial}{\partial P_{i;M}} \left(P_{k;N} \cancel{\frac{\partial G}{\partial P_{k;N}}} \right) \overset{0}{=} 0
 \end{aligned}$$

Οπότε το $(\partial_{P_1} \cdot \mathcal{D}_{Z_1})G$ είναι και αυτό ταυτοτικά εγκάρσιο, και άρα μπορούμε να αγνοήσουμε τους όρους $\mathcal{O}(P_i \cdot Z_i, Z_i^2)$.

Αθροίζοντας τις δομές που προκύπτουν από τους δύο όρους $(\partial_{P_1} G_1(P_i)) \cdot (\mathcal{D}_{Z_1} G_2(P_i; Z_i))$, $G_1(P_i) (\partial_{P_1} \cdot \mathcal{D}_{Z_1} G_2(P_i; Z_i))$, αγνοώντας τους όρους $\mathcal{O}(P_i \cdot Z_i, Z_i^2)$ και γράφοντας μόνο τις μη-

τετριμμένες σχέσεις που προκύπτουν (οι συντελεστές όλων των δομών $\prod H_{ij}^{n_{ij}} V_i^{m_i}$, $m_i + \sum_j n_{ij} < 2$ για κάποιο $(i \neq 1, j)$ μηδενίζονται) έχουμε:

$$b_1 \left(V_2 V_3 [V_2 H_{13} - V_3 H_{12}] \right) + b_2 \left(H_{23} [V_2 H_{13} - V_3 H_{12}] \right) = 0 \quad (5.3.2)$$

με τους συντελεστές να προκύπτουν ανεξάρτητοι των P_i, Z_i (αναμενόμενο: όλοι οι όροι που δεν είναι τετριμμένοι πρέπει να είναι πλήρως συμμετρικοί στην εναλλαγή των δεικτών $2 \leftrightarrow 3$, δηλαδή *αντισυμμετρικοί* στην εναλλαγή $V_2 \leftrightarrow V_3 \equiv V_{2;31} \leftrightarrow V_{3;12} = -V_{3;21}$) και να γράφονται

$$\begin{aligned} b_1 &= -2a_1 + 4a_2 + \left(\frac{d^2}{2} + d - 4 \right) a_3 - d(d+2)a_4 \\ b_2 &= -a_2 + \left(\frac{d}{2} + 1 \right) a_3 - 2da_4 + \left(\frac{d^2}{2} - 2 \right) a_5 \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

Φυσικά τότε πρέπει να θέσουμε κάθε τέτοιο συντελεστή ίσο με 0, και προκύπτει το ομογενές σύστημα

$$\begin{cases} -2a_1 + 4a_2 + \left(\frac{d^2}{2} + d - 4 \right) a_3 - d(d+2)a_4 = 0 \\ b_2 = -a_2 + \left(\frac{d}{2} + 1 \right) a_3 - 2da_4 + \left(\frac{d^2}{2} - 2 \right) a_5 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 4 & \frac{d^2}{2} + d - 4 & -d(d+2) & 0 \\ 0 & -1 & \frac{d}{2} + 1 & -2d & \frac{d^2}{2} - 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.3.4)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{(a_3 - 2a_4 + 4a_5)d^2 + 6(a_3 - 20a_4)d - 16a_5}{4} \\ a_2 = \frac{a_5 d^2 + (a_3 - 4a_4)d + (2a_3 - 4a_5)}{2} \end{cases}$$

επιλέγοντας ως βάση τους τελευταίους 3 όρους. Έτσι π.χ. για $d = 4$ (η περίπτωση του χωρόχρονου Minkowski $\mathbb{R}^{1,3}$) η 5.3.4 δίδει

$$\begin{cases} a_1 = \frac{40a_3 - 512a_4 + 48a_5}{4} = 10a_3 - 128a_4 + 12a_5 \\ a_2 = \frac{6a_3 - 16a_4 + 12a_5}{2} = 3a_3 - 8a_4 + 6a_5 \end{cases}$$

Έτσι, από τις 5 αρχικές δομές καταλήγουμε σε 3.

Με αυτή την παρατήρηση, έχουμε κλείσει το κύριο μέρος της Εργασίας αυτής.

6 Συμπέρασμα

Στις προηγούμενες σελίδες, αποδείξαμε πόσο χρήσιμη είναι η σύμμορφη συμμετρία για τον εύκολο υπολογισμό συσχετιστών 2 και 3 σημείων πεδίων με σπιν.

Στην περίπτωση του συσχετιστή 3 σημείων ενός σπιν-2 πεδίου, ανακτήθηκαν 5 γενικές δομές που με σχετική ευκολία αποδίδουν όρους στον τελικό τανυστή, μέσω του ορισμού του συμμετρικού τανυστικού γινομένου. Αυτό που εν γένει είναι ένας δύσκολος υπολογισμός απλοποιείται πάρα πολύ από τη συμμετρία μετάθεσης δεικτών $(1, 2, 3) : (\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) \equiv (\mu_{i;1}, \mu_{i;2}, \mu_{i;3})$ του $\langle T^{\alpha_1 \alpha_2}(x_1) T^{\beta_1 \beta_2}(x_2) T^{\gamma_1 \gamma_2}(x_3) \rangle$. Έτσι, με απλούς συλλογισμούς περί της ομογένειας των επιτρεπτών όρων στο πολυώνυμο $\langle T^{\alpha_1 \alpha_2}(x_1) T^{\beta_1 \beta_2}(x_2) T^{\gamma_1 \gamma_2}(x_3) \rangle \times z_{1;\alpha_1} z_{1;\alpha_2} z_{2;\beta_1} z_{2;\beta_2} z_{3;\gamma_1} z_{3;\gamma_2}$ (πιο σωστά, στο χώρο ενσωμάτωσης $\mathbb{R}^{2,d}$) καταφέραμε να ανακτήσουμε τον πιο γενικό επιτρεπτό συσχετιστή, με ελάχιστες παραπάνω απαιτήσεις: τη συμμετρία μετάθεσης δεικτών, και το ότι το $T^{\mu\nu}$ είναι συναλλοίωτο, πρωτεύον, και άϊχνο.

Μάλιστα, ιδιαίτερη σημασία πρέπει να δοθεί στην Πρόταση 8 της ενότητας 4.4: οι συσχετιστές συναλλοίωτων πεδίων είναι σύμμορφοι.

Όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 3, η γνώση του συσχετιστή 3 σημείων (είτε στο χώρο ορμών κατευθείαν είτε στο χώρο θέσεων από όπου μπορεί να μετασχηματιστεί μέσω Fourier στο χώρο ορμών) είναι κρίσιμης σημασίας για να μπορεί να προβλεφθεί το διφάσμα των διαταραχών πυκνότητας και πίεσης από την ακτινοβολία υποβάθρου. Επίσης, είδαμε πως αυτά συνδέονται κατευθείαν με τα ανιχνευόμενα διφάσματα βαθμωτών και τανυστικών ρυθμών, ως αποτέλεσμα της αποσύνθεσης SVT.

Έτσι, η σύμμορφη συμμετρία ενδείκνυται ως το πλέον εύχρηστο εργαλείο για τη διερεύνηση της μη-Γκαουσιανότητας των πεδίων του αρχέγονου Σύμπαντος. Κλείνοντας, λοιπόν, η σύμμορφη συμμετρία είναι κομβικής χρησιμότητας στην κοσμολογική έρευνα.

References

- [1] P. A. R. Ade et al. «Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters». In: *Astron. Astrophys.* 594 (2016), A13. DOI: 10.1051/0004-6361/201525830. arXiv: 1502.01589 [astro-ph.CO].
- [2] N. Aghanim et al. «Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters». In: (2018). arXiv: 1807.06209 [astro-ph.CO].
- [3] D. Anninos et al. «Cosmological Shapes of Higher-Spin Gravity». In: *JCAP* 2019.04 (2020), p. 045. DOI: 10.1088/1475-7516/2019/04/045. arXiv: 1902.01251 [hep-th].
- [4] Pierre Astier and Reynald Pain. «Observational Evidence of the Accelerated Expansion of the Universe». In: *Comptes Rendus Physique* 13 (2012), pp. 521–538. DOI: 10.1016/j.crhy.2012.04.009. arXiv: 1204.5493 [astro-ph.CO].
- [5] Daniel Baumann. «Inflation». In: *Physics of the large and the small, TASI 09, proceedings of the Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics, Boulder, Colorado, USA, 1-26 June 2009*. 2011, pp. 523–686. DOI: 10.1142/9789814327183_0010. arXiv: 0907.5424 [hep-th].
- [6] F. Bernardeau et al. «Large scale structure of the universe and cosmological perturbation theory». In: *Phys. Rept.* 367 (2002), pp. 1–248. DOI: 10.1016/S0370-1573(02)00135-7. arXiv: astro-ph/0112551 [astro-ph].
- [7] Adam Bzowski, Paul McFadden, and Kostas Skenderis. «Implications of conformal invariance in momentum space». In: *JHEP* 03 (2014), p. 111. DOI: 10.1007/JHEP03(2014)111. arXiv: 1304.7760 [hep-th].
- [8] Moshe Carmeli, John G. Hartnett, and Firmin J. Oliveira. «The Cosmic time in terms of the redshift». In: *Found. Phys. Lett.* 19 (2006), pp. 277–283. DOI: 10.1007/s10702-006-0518-3. arXiv: gr-qc/0506079 [gr-qc].
- [9] Miguel S. Costa et al. «Spinning Conformal Correlators». In: *JHEP* 11 (2011), p. 071. DOI: 10.1007/JHEP11(2011)071. arXiv: 1107.3554 [hep-th].
- [10] Paolo Creminelli. «Conformal invariance of scalar perturbations in inflation». In: *Phys. Rev. D* 85 (2012), p. 041302. DOI: 10.1103/PhysRevD.85.041302. arXiv: 1108.0874 [hep-th].

- [11] Paolo Creminelli and Matias Zaldarriaga. «Single field consistency relation for the 3-point function». In: *JCAP* 0410 (2004), p. 006. DOI: 10.1088/1475-7516/2004/10/006. arXiv: astro-ph/0407059 [astro-ph].
- [12] Paul A. M. Dirac. «Wave equations in conformal space». In: *Annals Math.* 37 (1936), pp. 429–442. DOI: 10.2307/1968455.
- [13] Alejandro Gangui and Jerome Martin. «Cosmic microwave background bispectrum and slow roll inflation». In: *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 313 (2000), p. 323. DOI: 10.1046/j.1365-8711.2000.03210.x. arXiv: astro-ph/9908009 [astro-ph].
- [14] I M Gelfand et al. *Generalized functions, Vol.I: Properties and Operations*. AMS Chelsea Publishing. Trans. from the Russian, Moscow, 1958. New York, NY: Academic Press, 1964. URL: <https://cds.cern.ch/record/105396>.
- [15] Christopher Gordon. «Adiabatic and entropy perturbations in cosmology». PhD thesis. Portsmouth U., 2001. arXiv: astro-ph/0112523 [astro-ph].
- [16] L. C. T. Guillen. «Remarks on the conformal transformations». In: (2004). arXiv: hep-th/0408077 [hep-th].
- [17] Lawrence P. Horwitz and Meir Zeilig-Hess. «Induced representations of tensors and spinors of any rank in the Stueckelberg-Horwitz-Piron theory». In: *J. Math. Phys.* 56.9 (2015), p. 092301. DOI: 10.1063/1.4928923. arXiv: 1502.05429 [quant-ph].
- [18] Keisuke Inomata and Tomohiro Nakama. «Gravitational waves induced by scalar perturbations as probes of the small-scale primordial spectrum». In: *Phys. Rev. D* 99.4 (2019), p. 043511. DOI: 10.1103/PhysRevD.99.043511. arXiv: 1812.00674 [astro-ph.CO].
- [19] Chris J. Isham. «Modern differential geometry for physicists». In: *World Sci. Lect. Notes Phys.* 32 (1989), pp. 1–182.
- [20] Alex Kehagias and Antonio Riotto. «On the Inflationary Perturbations of Massive Higher-Spin Fields». In: *JCAP* 1707.07 (2017), p. 046. DOI: 10.1088/1475-7516/2017/07/046. arXiv: 1705.05834 [hep-th].
- [21] En-Kun Li, Minghui Du, and Lixin Xu. «General Cosmography Model with Spatial Curvature». In: (2019). arXiv: 1903.11433 [astro-ph.CO].

- [22] David H. Lyth and Andrew R. Liddle. *The primordial density perturbation: Cosmology, inflation and the origin of structure*. 2009. URL: <http://www.cambridge.org/uk/catalogue/catalogue.asp?isbn=9780521828499>.
- [23] G. Mack. «All unitary ray representations of the conformal group $SU(2,2)$ with positive energy». In: *Commun. Math. Phys.* 55 (1977), p. 1. DOI: 10.1007/BF01613145.
- [24] Juan Martin Maldacena. «The Large N limit of superconformal field theories and supergravity». In: *Int. J. Theor. Phys.* 38 (1999). [Adv. Theor. Math. Phys.2,231(1998)], pp. 1113–1133. DOI: 10.1023/A:1026654312961, 10.4310/ATMP.1998.v2.n2.a1. arXiv: hep-th/9711200 [hep-th].
- [25] Cyril Pitrou, Jean-Philippe Uzan, and Francis Bernardeau. «The cosmic microwave background bispectrum from the non-linear evolution of the cosmological perturbations». In: *JCAP* 1007 (2010), p. 003. DOI: 10.1088/1475-7516/2010/07/003. arXiv: 1003.0481 [astro-ph.CO].
- [26] A. M. Polyakov. «Conformal Symmetry of Critical Fluctuations (Originally published in Russian Volume 12, Number 11)». In: *ZhETF Pisma Redaktsiiu* 12 (1970), p. 538.
- [27] Angelo Ricciardone. «Primordial Gravitational Waves with LISA». In: *Journal of Physics: Conference Series* 840 (May 2017), p. 012030. DOI: 10.1088/1742-6596/840/1/012030. URL: <https://doi.org/10.1088/2F1742-6596%2F840%2F1%2F012030>.
- [28] Adam G. Riess et al. «Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant». In: *Astron. J.* 116 (1998), pp. 1009–1038. DOI: 10.1086/300499. arXiv: astro-ph/9805201 [astro-ph].
- [29] Antonio Riotto. «Inflation and the theory of cosmological perturbations». In: *ICTP Lect. Notes Ser.* 14 (2003), pp. 317–413. arXiv: hep-ph/0210162 [hep-ph].
- [30] Slava Rychkov. *EPFL Lectures on Conformal Field Theory in $D \geq 3$ Dimensions*. SpringerBriefs in Physics. 2016. ISBN: 9783319436258. DOI: 10.1007/978-3-319-43626-5. arXiv: 1601.05000 [hep-th].
- [31] Holger Alois Schlagenhauser. «Two and three-point clustering statistics». LMU Munich thesis. 2012. URL: <https://edoc.ub.uni-muenchen.de/15137/>.

- [32] Elias M. Stein and Guido Weiss. *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces (PMS-32)*. Princeton University Press, 1971. ISBN: 9780691080789. URL: <http://www.jstor.org/stable/j.ctt1bpm9w6>.
- [33] J M Stewart. «Perturbations of Friedmann-Robertson-Walker cosmological models». In: *Classical and Quantum Gravity* 7.7 (July 1990), pp. 1169–1180. DOI: 10.1088/0264-9381/7/7/013. URL: <https://doi.org/10.1088/0264-9381/7/7/013>.
- [34] Andrew Strominger. «The dS / CFT correspondence». In: *JHEP* 10 (2001), p. 034. DOI: 10.1088/1126-6708/2001/10/034. arXiv: hep-th/0106113 [hep-th].
- [35] Michael J. Way. «Dismantling Hubble’s Legacy?» In: *ASP Conf. Ser.* 471 (2013), p. 97. arXiv: 1301.7294 [physics.hist-ph].
- [36] Steven Weinberg. *Gravitation and Cosmology*. New York: John Wiley and Sons, 1972. ISBN: 9780471925675. URL: <http://www-spires.fnal.gov/spires/find/books/www?cl=QC6.W431>.
- [37] Steven Weinberg. «Six-dimensional Methods for Four-dimensional Conformal Field Theories». In: *Phys. Rev. D* 82 (2010), p. 045031. DOI: 10.1103/PhysRevD.82.045031. arXiv: 1006.3480 [hep-th].
- [38] G. C. Wick. «The Evaluation of the Collision Matrix». In: *Phys. Rev.* 80 (2 Oct. 1950), pp. 268–272. DOI: 10.1103/PhysRev.80.268. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.80.268>.
- [39] Ι. Δ. Βέργαδος. *Θεωρία Ομάδων, Μέρος Β: Συνεχείς Ομάδες και Άλγεβρες Lie- Εφαρμογές*. Ζωγράφου: Εκδόσεις Συμεών, 1991.

A' Παράρτημα A: Πράξεις

A'.1 Δράση του τελεστή Thomas στις δομές

A'.1.1 Βασικές σχέσεις

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_1}{\partial Z_1^N} &= \frac{\partial}{\partial Z_1^N} \left(\frac{P_2 \cdot C_1 \cdot P_3}{P_2 \cdot P_3} \right) = \frac{(P_1 \cdot P_3)P_{2;N} - (P_1 \cdot P_2)P_{3;N}}{P_2 \cdot P_3} \\ \Rightarrow \frac{\partial V_1}{\partial Z_1} \cdot \frac{\partial V_1}{\partial Z_1} &= -2 \frac{(P_1 \cdot P_2)(P_1 \cdot P_3)}{(P_2 \cdot P_3)} \end{aligned} \quad (\text{A'.1.1})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_{1j}}{\partial Z_1^N} &= -4 \frac{\partial}{\partial Z_1^N} ((P_j \cdot Z_1)(P_1 \cdot Z_j) - (P_1 \cdot P_j)(Z_1 \cdot Z_j)) \\ &= 4((P_1 \cdot P_j)Z_{j;N} - (P_1 \cdot Z_j)P_{j;N}) \\ \Rightarrow \left(\frac{\partial H_{1j}}{\partial Z_i} \right)^2 &= \mathcal{O}(P_j \cdot Z_j, Z_j^2) \end{aligned} \quad (\text{A'.1.2})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_1}{\partial Z_1} \cdot \frac{\partial H_{1j}}{\partial Z_1} &\stackrel{\text{A.1.1, A.1.2}}{=} 4 \left(\frac{(P_1 \cdot P_3)P_{2;N} - (P_1 \cdot P_2)P_{3;N}}{P_2 \cdot P_3} \right) ((P_1 \cdot P_j)Z_j^N - (P_1 \cdot Z_j)P_j^N) \\ &= 4 \left[\frac{(P_1 \cdot P_3)(P_1 \cdot P_j)(P_2 \cdot Z_j) + (P_1 \cdot P_2)(P_j \cdot P_3)(P_1 \cdot Z_j)}{(P_2 \cdot P_3)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(P_1 \cdot P_2)(P_1 \cdot P_j)(P_3 \cdot Z_j) + (P_1 \cdot P_3)(P_2 \cdot P_j)(P_1 \cdot Z_j)}{(P_2 \cdot P_3)} \right] \\ \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial V_1}{\partial Z_1} \frac{\partial H_{12}}{\partial Z_1} &= 4 \left[\frac{(P_1 \cdot P_2)(P_2 \cdot P_3)(P_1 \cdot Z_2) - (P_1 \cdot P_2)^2(P_3 \cdot Z_2)}{(P_2 \cdot P_3)} \right] + \mathcal{O}(P_2 \cdot Z_2) \\ \frac{\partial V_1}{\partial Z_1} \frac{\partial H_{13}}{\partial Z_1} &= 4 \left[\frac{(P_1 \cdot P_3)^2(P_2 \cdot Z_3) - (P_1 \cdot P_3)(P_2 \cdot P_3)(P_1 \cdot Z_3)}{(P_2 \cdot P_3)} \right] + \mathcal{O}(P_3 \cdot Z_3) \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A'.1.3})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_{12}}{\partial Z_1} \cdot \frac{\partial H_{13}}{\partial Z_1} &= \\ &\stackrel{\text{A.1.2}}{=} 16((P_1 \cdot P_2)Z_2^N - (P_1 \cdot Z_2)P_2^N)((P_1 \cdot P_3)Z_{3;N} - (P_1 \cdot Z_3)P_{3;N}) \\ &= 16 \left[((P_1 \cdot P_2)(P_1 \cdot P_3)(Z_2 \cdot Z_3) + (P_2 \cdot P_3)(P_1 \cdot Z_2)(P_1 \cdot Z_3)) \right. \\ &\quad \left. - ((P_1 \cdot P_2)(P_3 \cdot Z_2)(P_1 \cdot Z_3) + (P_1 \cdot P_3)(P_1 \cdot Z_2)(P_2 \cdot Z_3)) \right] \end{aligned} \quad (\text{A'.1.4})$$

A'.1.2 $\mathcal{D}_{Z_1;M}(a_1\text{-}\acute{\alpha}\rho\sigma\varsigma)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial Z_1^N} (V_1^2 V_2^2 V_3^2) &= 2V_1 V_2^2 V_3^2 \frac{\partial V_1}{\partial Z_1^N} \\ &\stackrel{A.1.1}{=} 2V_1 V_2^2 V_3^2 \frac{(P_1 \cdot P_3)P_{2;N} - (P_1 \cdot P_2)P_{3;N}}{(P_2 \cdot P_3)} \end{aligned} \quad (A'.1.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial Z_1 \cdot \partial Z_1} (V_1^2 V_2^2 V_3^2) &= \frac{\partial}{\partial Z_{1;N}} \left(\frac{\partial}{\partial Z_1^N} (V_1^2 V_2^2 V_3^2) \right) \\ &= 2V_2^2 V_3^2 \frac{\partial}{\partial Z_{1;N}} \left(V_1 \times \frac{\partial V_1}{\partial Z_1^N} \right) = 2V_2^2 V_3^2 \frac{\partial V_1}{\partial Z_{1;N}} \frac{\partial V_1}{\partial Z_1^N} \\ &\stackrel{A.1.1, P_i^2=0}{=} -4V_2^2 V_3^2 \frac{(P_1 \cdot P_2)(P_1 \cdot P_3)}{(P_2 \cdot P_3)} \end{aligned} \quad (A'.1.6)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{Z_1;M} (V_1^2 V_2^2 V_3^2) &= \left(\left[h - 1 + Z_1 \cdot \frac{\partial}{\partial Z_1} \right] \frac{\partial}{\partial Z_1^M} - \frac{1}{2} Z_{1;M} \frac{\partial^2}{\partial Z_1 \cdot \partial Z_1} \right) (V_1^2 V_2^2 V_3^2) \\ &= 2V_2^2 V_3^2 \left(hV_1 \frac{\partial V_1}{\partial Z_1^M} - \frac{1}{2} Z_{1;M} \frac{\partial V_1}{\partial Z_1} \cdot \frac{\partial V_1}{\partial Z_1} \right) \\ &\stackrel{A.1.5, A.1.6}{=} V_2^2 V_3^2 \left(dV_1 \frac{(P_1 \cdot P_3)P_{2;M} - (P_1 \cdot P_2)P_{3;M}}{(P_2 \cdot P_3)} - 2Z_{1;M} \frac{(P_1 \cdot P_2)(P_1 \cdot P_3)}{(P_2 \cdot P_3)} \right) \end{aligned} \quad (A'.1.7)$$

A'.1.3 $\mathcal{D}_{Z_1;M}(a_2\text{-}\acute{\alpha}\rho\sigma\varsigma)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial Z_1^N} (V_1^2 V_2 V_3 H_{23} + V_1 V_2^2 V_3 H_{13} + V_1 V_2 V_3^2 H_{12}) \\ &= V_2 V_3 \left((H_{12} + H_{13} + 2V_1 H_{23}) \frac{\partial V_1}{\partial Z_1^N} + V_1 \left[\frac{\partial H_{12}}{\partial Z_1^N} + \frac{\partial H_{13}}{\partial Z_1^N} \right] \right) \\ &\stackrel{A.1.1, A.1.2}{=} V_2 V_3 \left((H_{12} + H_{13} + 2V_1 H_{23}) \frac{(P_1 \cdot P_3)P_{2;N} - (P_1 \cdot P_2)P_{3;N}}{P_2 \cdot P_3} \right. \\ &\quad \left. + 4V_1 ((P_1 \cdot P_2)Z_{2;N} - (P_1 \cdot Z_2)P_{2;N} + (P_1 \cdot P_3)Z_{3;N} - (P_1 \cdot Z_3)P_{3;N}) \right) \end{aligned} \quad (A'.1.8)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2}{\partial Z_1 \cdot \partial Z_1} (V_1^2 V_2 V_3 H_{23} + V_1 V_2^2 V_3 H_{13} + V_1 V_2 V_3^2 H_{12}) \\
&= V_2 V_3 \left(\left[\frac{\partial H_{12}}{\partial Z_1} + \frac{\partial H_{13}}{\partial Z_1} + 2H_{23} \frac{\partial V_1}{\partial Z_1} \right] \cdot \frac{\partial V_1}{\partial Z_1} + \frac{\partial V_1}{\partial Z_1} \cdot \left[\frac{\partial H_{12}}{\partial Z_1} + \frac{\partial H_{13}}{\partial Z_1} \right] \right) \\
&= 2V_2 V_3 \left(\frac{\partial V_1}{\partial Z_1} + \frac{\partial H_{12}}{\partial Z_1} + \frac{\partial H_{13}}{\partial Z_1} \right) \cdot \frac{\partial V_1}{\partial Z_1} \\
&\stackrel{A.1.1, A.1.3}{=} 2V_2 V_3 \left(-2 \frac{(P_1 \cdot P_2)(P_1 \cdot P_3)}{(P_2 \cdot P_3)} + 4 \left[\frac{(P_1 \cdot P_2)(P_2 \cdot P_3)(P_1 \cdot Z_2) - (P_1 \cdot P_2)^2(P_3 \cdot Z_2)}{(P_2 \cdot P_3)} \right] \right. \\
&\quad \left. + 4 \left[\frac{(P_1 \cdot P_3)^2(P_2 \cdot Z_3) - (P_1 \cdot P_3)(P_2 \cdot P_3)(P_1 \cdot Z_3)}{(P_2 \cdot P_3)} \right] \right) + \mathcal{O}(P_2 \cdot Z_2, P_3 \cdot Z_3) \\
&\hspace{15em} (A'.1.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mathcal{D}_{Z_1;M} (V_1^2 V_2 V_3 H_{23} + V_1 V_2^2 V_3 H_{13} + V_1 V_2 V_3^2 H_{12}) \\
&= \left(\left[h - 1 + Z_1 \cdot \frac{\partial}{\partial Z_1} \right] \frac{\partial}{\partial Z_1^M} - \frac{1}{2} Z_{1;M} \frac{\partial^2}{\partial Z_1 \cdot \partial Z_1} \right) (V_1^2 V_2 V_3 H_{23} \\
&\quad + V_1 V_2^2 V_3 H_{13} + V_1 V_2 V_3^2 H_{12}) \\
&= h \frac{\partial}{\partial Z_1^M} (V_1^2 V_2 V_3 H_{23} + V_1 V_2^2 V_3 H_{13} + V_1 V_2 V_3^2 H_{12}) \\
&\quad - \frac{1}{2} Z_{1;M} \frac{\partial^2}{\partial Z_1 \cdot \partial Z_1} (V_1^2 V_2 V_3 H_{23} + V_1 V_2^2 V_3 H_{13} + V_1 V_2 V_3^2 H_{12}) \\
&\stackrel{A.1.8, A.1.9}{=} V_2 V_3 \left(h \left[(H_{12} + H_{13} + 2V_1 H_{23}) \frac{(P_1 \cdot P_3)P_{2;M} - (P_1 \cdot P_2)P_{3;M}}{P_2 \cdot P_3} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 4V_1 \left((P_1 \cdot P_2)Z_{2;M} - (P_1 \cdot Z_2)P_{2;M} + (P_1 \cdot P_3)Z_{3;M} - (P_1 \cdot Z_3)P_{3;M} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. - Z_{1;M} \left[-2 \frac{(P_1 \cdot P_2)(P_1 \cdot P_3)}{(P_2 \cdot P_3)} + 4 \frac{(P_1 \cdot P_2)(P_2 \cdot P_3)(P_1 \cdot Z_2) - (P_1 \cdot P_2)^2(P_3 \cdot Z_2)}{(P_2 \cdot P_3)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 4 \frac{(P_1 \cdot P_3)^2(P_2 \cdot Z_3) - (P_1 \cdot P_3)(P_2 \cdot P_3)(P_1 \cdot Z_3)}{(P_2 \cdot P_3)} \right] \right) + \mathcal{O}(P_j \cdot Z_j) \\
&\hspace{15em} (A'.1.10)
\end{aligned}$$

A'.1.4 $\mathcal{D}_{Z_1;M}(a_3\text{-}\acute{\alpha}\rho\sigma)$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial Z_1^N} (V_1 H_{23}(V_2 H_{13} + V_3 H_{12}) + V_2 V_3 H_{12} H_{13}) \\
&= H_{23} \frac{\partial V_1}{\partial Z_1^N} (V_2 H_{13} + V_3 H_{12}) + V_1 H_{23} \left(V_2 \frac{\partial H_{13}}{\partial Z_1^N} + V_3 \frac{\partial H_{12}}{\partial Z_1^N} \right) \\
&\quad + V_2 V_3 \left(\frac{\partial H_{12}}{\partial Z_1^N} H_{13} + H_{12} \frac{\partial H_{13}}{\partial Z_1^N} \right) \\
&\hspace{15em} (A'.1.11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial Z_1 \cdot \partial Z_1} (V_1 H_{23} (V_2 H_{13} + V_3 H_{12}) + V_2 V_3 H_{12} H_{13}) = \\ & 2H_{23} \frac{\partial V_1}{\partial Z_1} \cdot \left(V_2 \frac{\partial H_{13}}{\partial Z_1} + V_3 \frac{\partial H_{12}}{\partial Z_1} \right) + 2V_2 V_3 \frac{\partial H_{12}}{\partial Z_1} \cdot \frac{\partial H_{13}}{\partial Z_1} \end{aligned} \quad (\text{A'.1.12})$$

$$\begin{aligned} & \mathcal{D}_{Z_1;M} (V_1 H_{23} (V_2 H_{13} + V_3 H_{12}) + V_2 V_3 H_{12} H_{13}) = \\ & = \left(\left[h - 1 + Z_1 \cdot \frac{\partial}{\partial Z_1} \right] \frac{\partial}{\partial Z_1^M} - \frac{1}{2} Z_{1;M} \frac{\partial^2}{\partial Z_1 \cdot \partial Z_1} \right) \times \\ & \times (V_1 H_{23} (V_2 H_{13} + V_3 H_{12}) + V_2 V_3 H_{12} H_{13}) \\ & = h \left(H_{23} \frac{\partial V_1}{\partial Z_1^M} [V_2 H_{13} + V_3 H_{12}] \right. \\ & + V_1 H_{23} \left[V_2 \frac{\partial H_{13}}{\partial Z_1^M} + V_3 \frac{\partial H_{12}}{\partial Z_1^M} \right] \\ & + V_2 V_3 \left[\frac{\partial H_{12}}{\partial Z_1^M} H_{13} + H_{12} \frac{\partial H_{13}}{\partial Z_1^M} \right] \Big) \\ & - Z_{1;M} \left(H_{23} \frac{\partial V_1}{\partial Z_1} \cdot \left[V_2 \frac{\partial H_{13}}{\partial Z_1} + V_3 \frac{\partial H_{12}}{\partial Z_1} \right] + V_2 V_3 \frac{\partial H_{12}}{\partial Z_1} \cdot \frac{\partial H_{13}}{\partial Z_1} \right) \\ & \stackrel{\text{A.1.1}-\text{A.1.4}}{=} h \left(H_{23} [V_2 H_{13} + V_3 H_{12}] \frac{(P_1 \cdot P_3) P_{2;M} - (P_1 \cdot P_2) P_{3;M}}{(P_2 \cdot P_3)} \right. \\ & + 4V_1 H_{23} \left[V_2 ((P_1 \cdot P_3) Z_{3;M} - (P_1 \cdot Z_3) P_{3;M}) + V_3 ((P_1 \cdot P_2) Z_{2;M} - (P_1 \cdot Z_2) P_{2;M}) \right] \\ & + 4V_2 V_3 \left[H_{13} ((P_1 \cdot P_2) Z_{2;M} - (P_1 \cdot Z_2) P_{2;M}) \right. \\ & \left. + H_{12} ((P_1 \cdot P_3) Z_{3;M} - (P_1 \cdot Z_3) P_{3;M}) \right] \Big) \\ & - Z_{1;M} \left(4H_{23} \left[V_2 \left[\frac{(P_1 \cdot P_3)^2 (P_2 \cdot Z_3) - (P_1 \cdot P_3) (P_2 \cdot P_3) (P_1 \cdot Z_3)}{(P_2 \cdot P_3)} \right] \right. \right. \\ & \left. + V_3 \left[\frac{(P_1 \cdot P_2) (P_2 \cdot P_3) (P_1 \cdot Z_2) - (P_1 \cdot P_2)^2 (P_3 \cdot Z_2)}{(P_2 \cdot P_3)} \right] \right] \\ & + 16V_2 V_3 \left[((P_1 \cdot P_2) (P_1 \cdot P_3) (Z_2 \cdot Z_3) + (P_2 \cdot P_3) (P_1 \cdot Z_2) (P_1 \cdot Z_3)) \right. \\ & \left. - ((P_1 \cdot P_2) (P_3 \cdot Z_2) (P_1 \cdot Z_3) + (P_1 \cdot P_3) (P_1 \cdot Z_2) (P_2 \cdot Z_3)) \right] \Big) \\ & + \mathcal{O}(P_j \cdot Z_j) \end{aligned} \quad (\text{A'.1.13})$$

A'.1.5 $\mathcal{D}_{Z_1;M}(a_4\text{-}\acute{\alpha}\rho\sigma\varsigma)$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial Z_1^N} (V_1^2 H_{23}^2 + V_2^2 H_{13}^2 + V_3^2 H_{12}^2) = \\ & = 2 \left(H_{23}^2 V_1 \frac{\partial V_1}{\partial Z_1^N} + V_2^2 H_{13} \frac{\partial H_{13}}{\partial Z_1^N} + V_3^2 H_{12} \frac{\partial H_{12}}{\partial Z_1^N} \right) \end{aligned} \quad (\text{A'.1.14})$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial Z_1 \cdot \partial Z_1} (V_1^2 H_{23}^2 + V_2^2 H_{13}^2 + V_3^2 H_{12}^2) = \\ & = 2 \left(H_{23}^2 \frac{\partial V_1}{\partial Z_1} \cdot \frac{\partial V_1}{\partial Z_1} + V_2^2 \frac{\partial H_{13}}{\partial Z_1} \cdot \frac{\partial H_{13}}{\partial Z_1} + V_3^2 \frac{\partial H_{12}}{\partial Z_1} \cdot \frac{\partial H_{12}}{\partial Z_1} \right) \end{aligned} \quad (\text{A'.1.15})$$

$$\begin{aligned} & \mathcal{D}_M (H_{23}^2 V_1^2 + V_2^2 H_{13}^2 + V_3^2 H_{12}^2) = \\ & = \left(\left[h - 1 + Z_1 \cdot \frac{\partial}{\partial Z_1} \right] \frac{\partial}{\partial Z_1^M} - \frac{1}{2} Z_{1;M} \frac{\partial^2}{\partial Z_1 \cdot \partial Z_1} \right) (H_{23}^2 V_1^2 + V_2^2 H_{13}^2 + V_3^2 H_{12}^2) \\ & \stackrel{\text{A.1.1}-\text{A.1.4}}{=} d \left(H_{23}^2 V_1 \frac{(P_1 \cdot P_3) P_{2;M} - (P_1 \cdot P_2) P_{3;M}}{P_2 \cdot P_3} \right. \\ & \left. + 4V_2^2 H_{13} ((P_1 \cdot P_3) Z_{3;M} - (P_1 \cdot Z_3) P_{3;M}) + 4V_3^2 ((P_1 \cdot P_2) Z_{2;M} - (P_1 \cdot Z_2) P_{2;M}) \right) \\ & - Z_{1;M} \left(-2H_{23}^2 \frac{(P_1 \cdot P_2)(P_1 \cdot P_3)}{(P_2 \cdot P_3)} \right) + \mathcal{O}(P_j \cdot Z_j, Z_j^2) \end{aligned} \quad (\text{A'.1.16})$$

A'.1.6 $\mathcal{D}_{Z_1;M}(a_5\text{-}\acute{\alpha}\rho\sigma\varsigma)$

$$\frac{\partial}{\partial Z_1^N} (H_{12} H_{13} H_{23}) = H_{23} \left(\frac{\partial H_{12}}{\partial Z_1^N} H_{13} + H_{12} \frac{\partial H_{13}}{\partial Z_1^N} \right) \quad (\text{A'.1.17})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial Z_1 \cdot \partial Z_1} (H_{12} H_{13} H_{23}) = 2H_{23} \frac{\partial H_{12}}{\partial Z_1} \cdot \frac{\partial H_{13}}{\partial Z_1} \quad (\text{A'.1.18})$$

$$\begin{aligned}
& \mathcal{D}_{Z_1;M}(H_{12}H_{13}H_{23}) = \\
& = \left(\left[h - 1 + Z_1 \cdot \frac{\partial}{\partial Z_1} \right] \frac{\partial}{\partial Z_1^M} - \frac{1}{2} Z_{1;M} \frac{\partial^2}{\partial Z_1 \cdot \partial Z_1} \right) (H_{12}H_{13}H_{23}) \\
& \stackrel{A.1.2, A.1.4}{=} 2dH_{23} \left(H_{13} \left((P_1 \cdot P_2) Z_{2;M} - (P_1 \cdot Z_2) P_{2;M} \right) \right. \\
& + H_{12} \left((P_1 \cdot P_3) Z_{3;M} - (P_1 \cdot Z_3) P_{3;M} \right) \\
& - 16H_{23} Z_{1;M} \left((P_1 \cdot P_2)(P_1 \cdot P_3)(Z_2 \cdot Z_3) + (P_2 \cdot P_3)(P_1 \cdot Z_2)(P_1 \cdot Z_3) \right) \\
& \left. - ((P_1 \cdot P_2)(P_3 \cdot Z_2)(P_1 \cdot Z_3) + (P_1 \cdot P_3)(P_1 \cdot Z_2)(P_2 \cdot Z_3)) \right)
\end{aligned} \tag{A'.1.19}$$

A'.2 Υπολογισμός των P_1 -παραγώγων

A'.2.1 Βασικές σχέσεις

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_i}{\partial P_{1;M}} &= \frac{\partial}{\partial P_{1;M}} \left(\frac{P_j \cdot C_i \cdot P_k}{P_j \cdot P_k} \right) \\ &= \begin{cases} \frac{(P_2 \cdot Z_1)P_3^M - (P_3 \cdot Z_1)P_2^M}{P_2 \cdot P_3}, & i = 1 \\ \frac{(P_3 \cdot Z_2)P_2^M - (P_3 \cdot P_2)Z_2^M}{P_1 \cdot P_3} - \frac{P_3^M}{P_1 \cdot P_3} V_2, & i = 2 \\ \frac{(P_2 \cdot P_3)Z_3^M - (P_2 \cdot Z_3)P_3^M}{P_1 \cdot P_2} - \frac{P_2^M}{P_1 \cdot P_2} V_3, & i = 3 \end{cases} \end{aligned} \quad (A'.2.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V_1}{\partial P_{1;M} \partial Z_1^N} &= \frac{\partial}{\partial P_{1;M}} \left(\frac{\partial V_1}{\partial Z_1^N} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial P_{1;M}} \left(\frac{(P_1 \cdot P_3)P_{2;N} - (P_1 \cdot P_2)P_{3;N}}{(P_2 \cdot P_3)} \right) = \frac{P_3^M P_{2;N} - P_2^M P_{3;N}}{(P_2 \cdot P_3)} \quad (A'.2.2) \\ &\Rightarrow (\partial_{P_1} \cdot \partial_{Z_1}) V_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_1}{\partial P_1} \cdot \frac{\partial V_1}{\partial Z_1} &= \\ &= \frac{(P_2 \cdot Z_1)P_3^M - (P_3 \cdot Z_1)P_2^M}{P_2 \cdot P_3} \frac{(P_1 \cdot P_3)P_{2;M} - (P_1 \cdot P_2)P_{3;M}}{P_2 \cdot P_3} \quad (A'.2.3) \\ &= \frac{(P_1 \cdot P_3)(P_2 \cdot Z_1) + (P_1 \cdot P_2)(P_3 \cdot Z_1)}{(P_2 \cdot P_3)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_{1;M} \frac{\partial^2 V_1}{\partial P_{1;M} \partial Z_1^N} \frac{\partial V_1}{\partial Z_{1;N}} &= \\ &= Z_{1;M} \frac{P_3^M P_{2;N} - P_2^M P_{3;N}}{P_2 \cdot P_3} \frac{(P_1 \cdot P_3)P_2^N - (P_1 \cdot P_2)P_3^N}{P_2 \cdot P_3} \quad (A'.2.4) \\ &= -Z_{1;M} \frac{(P_1 \cdot P_2)P_3^M - (P_1 \cdot P_3)P_2^M}{P_2 \cdot P_3} \\ &= \frac{(P_1 \cdot P_3)(P_2 \cdot Z_1) - (P_1 \cdot P_2)(P_3 \cdot Z_1)}{P_2 \cdot P_3} = V_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial V_2}{\partial P_1} \cdot \frac{\partial V_1}{\partial Z_1} = \\
& \left(\frac{(P_3 \cdot Z_2)P_2^M - (P_3 \cdot P_2)Z_2^M}{P_1 \cdot P_3} - \frac{P_3^M}{P_1 \cdot P_3} V_2 \right) \frac{(P_1 \cdot P_3)P_{2;M} - (P_1 \cdot P_2)P_{3;M}}{P_2 \cdot P_3} \\
& = \frac{(P_1 \cdot P_2)(P_3 \cdot Z_2) - (P_1 \cdot P_2)(P_3 \cdot Z_2)}{(P_1 \cdot P_3)} - V_2 + \mathcal{O}(P_2 \cdot Z_2) \\
& = -V_2 + \mathcal{O}(P_2 \cdot Z_2)
\end{aligned} \tag{A'.2.5}$$

$$Z_1 \cdot \frac{\partial V_2}{\partial P_1} = \frac{(P_2 \cdot Z_1)(P_3 \cdot Z_2) - (P_3 \cdot P_2)(Z_1 \cdot Z_2)}{P_1 \cdot P_3} - \frac{P_3 \cdot Z_1}{P_1 \cdot P_3} V_2 \tag{A'.2.6}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial V_3}{\partial P_1} \cdot \frac{\partial V_1}{\partial Z_1} = \\
& \left(\frac{(P_2 \cdot P_3)Z_3^M - (P_2 \cdot Z_3)P_3^M}{P_1 \cdot P_2} - \frac{P_2^M}{P_1 \cdot P_2} V_3 \right) \frac{(P_1 \cdot P_3)P_{2;M} - (P_1 \cdot P_2)P_{3;M}}{P_2 \cdot P_3} \\
& = \frac{(P_2 \cdot P_3)(P_2 \cdot Z_3) - (P_2 \cdot P_3)(P_2 \cdot Z_3)}{(P_1 \cdot P_2)} + V_3 + \mathcal{O}(P_3 \cdot Z_3) \\
& = V_3 + \mathcal{O}(P_3 \cdot Z_3)
\end{aligned} \tag{A'.2.7}$$

$$Z_1 \cdot \frac{\partial V_3}{\partial P_1} = \frac{(P_2 \cdot P_3)(Z_1 \cdot Z_3) - (P_3 \cdot Z_1)(P_2 \cdot Z_3)}{P_1 \cdot P_2} - \frac{P_2 \cdot Z_1}{P_1 \cdot P_2} V_3 \tag{A'.2.8}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial H_{1j}}{\partial P_{1;M}} = \frac{\partial}{\partial P_{1;M}} (-4)((P_j \cdot Z_1)(P_1 \cdot Z_j) - (P_1 \cdot P_j)(Z_1 \cdot Z_j)) = \\
& = 4((Z_1 \cdot Z_j)P_j^M - (P_j \cdot Z_1)Z_j^M)
\end{aligned} \tag{A'.2.9}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 H_{1j}}{\partial P_{1;M} \partial Z_1^N} &= \frac{\partial}{\partial P_{1;M}} \left(\frac{\partial H_{1j}}{\partial Z_1^N} \right) = 4 \frac{\partial}{\partial P_{1;M}} ((P_1 \cdot P_j) Z_{j;N} - (P_1 \cdot Z_j) P_{j;N}) \\
&= 4(P_j^M Z_{j;N} - Z_j^M P_{j;N}) \\
&\Rightarrow (\partial_{P_1} \cdot \partial_{Z_1}) H_{1j} = 0
\end{aligned} \tag{A'.2.10}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_1}{\partial Z_1} \cdot \frac{\partial H_{1j}}{\partial P_1} &= 4 \frac{(P_1 \cdot P_3) P_{2;N} - (P_1 \cdot P_2) P_{3;N}}{P_2 \cdot P_3} ((Z_1 \cdot Z_j) P_j^N - (P_j \cdot Z_1) Z_j^N) \\
&= \begin{cases} 4(P_1 \cdot P_2) \frac{(P_2 \cdot Z_1)(P_3 \cdot Z_2) - (P_2 \cdot P_3)(Z_1 \cdot Z_2)}{P_2 \cdot P_3} + \mathcal{O}(P_2 \cdot Z_2), j = 2 \\ 4(P_1 \cdot P_3) \frac{(P_2 \cdot P_3)(Z_1 \cdot Z_3) - (P_3 \cdot Z_1)(P_2 \cdot Z_3)}{P_2 \cdot P_3} + \mathcal{O}(P_3 \cdot Z_3), j = 3 \end{cases}
\end{aligned} \tag{A'.2.11}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_1}{\partial P_1} \cdot \frac{\partial H_{1j}}{\partial Z_1} &= 4 \frac{(P_2 \cdot Z_1) P_3^N - (P_3 \cdot Z_1) P_2^N}{P_2 \cdot P_3} ((P_1 \cdot P_j) Z_{j;N} - (P_1 \cdot Z_j) P_{j;N}) \\
&= \begin{cases} 4(P_2 \cdot Z_1) \frac{(P_1 \cdot P_2)(P_3 \cdot Z_2) - (P_2 \cdot P_3)(P_1 \cdot Z_2)}{P_2 \cdot P_3} + \mathcal{O}(P_2 \cdot Z_2), j = 2 \\ 4(P_3 \cdot Z_1) \frac{(P_2 \cdot P_3)(P_1 \cdot Z_3) - (P_1 \cdot P_3)(P_2 \cdot Z_3)}{P_2 \cdot P_3} + \mathcal{O}(P_3 \cdot Z_3), j = 3 \end{cases}
\end{aligned} \tag{A'.2.12}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_2}{\partial P_1} \cdot \frac{\partial H_{1j}}{\partial Z_1} &= 4 \left(\frac{(P_3 \cdot Z_2) P_2^M - (P_3 \cdot P_2) Z_2^M}{P_1 \cdot P_3} - \frac{P_3^M}{P_1 \cdot P_3} \right) ((P_1 \cdot P_j) Z_{j;M} - (P_1 \cdot Z_j) P_{j;M}) \\
&= \begin{cases} 4 \frac{(P_2 \cdot P_3)(P_1 \cdot Z_2) - (P_1 \cdot P_2)(P_3 \cdot Z_2)}{P_1 \cdot P_3} + \mathcal{O}(Z_2^2, P_2 \cdot Z_2), j = 2 \\ -H_{23} + \mathcal{O}(P_3 \cdot Z_3), j = 3 \end{cases}
\end{aligned} \tag{A'.2.13}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_3}{\partial P_1} \cdot \frac{\partial H_{1j}}{\partial Z_1} &= 4 \left(\frac{(P_2 \cdot P_3) Z_3^M - (P_2 \cdot Z_3) P_3^M}{P_1 \cdot P_2} - \frac{P_2^M}{P_1 \cdot P_2} \right) ((P_1 \cdot P_j) Z_{j;M} - (P_1 \cdot Z_j) P_{j;M}) \\
&= \begin{cases} H_{23} + \mathcal{O}(P_2 \cdot Z_2), j = 2 \\ 4 \frac{(P_1 \cdot P_3)(P_2 \cdot Z_3) - (P_2 \cdot P_3)(P_1 \cdot Z_3)}{P_1 \cdot P_2} + \mathcal{O}(Z_3^2, P_3 \cdot Z_3), j = 3 \end{cases}
\end{aligned} \tag{A'.2.14}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H_{12}}{\partial P_1} \cdot \frac{\partial H_{13}}{\partial Z_1} &= 16((Z_1 \cdot Z_2)P_2^M - (P_2 \cdot Z_1)Z_2^M) \cdot ((P_1 \cdot P_3)Z_{3;M} - (P_1 \cdot Z_3)P_{3;M}) \\
&= 16\left((P_1 \cdot P_3)(P_2 \cdot Z_3)(Z_1 \cdot Z_2) + (P_2 \cdot Z_1)(P_3 \cdot Z_2)(P_1 \cdot Z_3) \right. \\
&\quad \left. - [(P_2 \cdot P_3)(Z_1 \cdot Z_2)(P_1 \cdot Z_3) + (P_1 \cdot P_3)(P_2 \cdot Z_1)(Z_2 \cdot Z_3)]\right)
\end{aligned} \tag{A'.2.15}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H_{12}}{\partial Z_1} \cdot \frac{\partial H_{13}}{\partial P_1} &= 16((P_1 \cdot P_2)Z_{2;M} - (P_1 \cdot Z_2)P_{2;M}) \cdot ((Z_1 \cdot Z_3)P_3^M - (P_3 \cdot Z_1)Z_3^M) \\
&= \text{A.2.15}|_{(2 \leftrightarrow 3)}
\end{aligned} \tag{A'.2.16}$$

A'.2.2 $\partial_{P_1}^M(G_1(P_i))$

$$\begin{aligned}
\partial_{P_1}^M G_1(P_i) &= \frac{\partial}{\partial P_{1;M}} \left(\frac{C}{(P_{12}P_{23}P_{13})^{\frac{\Delta+2}{2}}} \right) \\
&= -\frac{(\Delta+2)}{2} \frac{G_1(P_i)}{(P_{12}P_{23}P_{13})} \frac{\partial}{\partial P_{1;M}} (P_{12}P_{23}P_{13}) \\
&\stackrel{P_{ij} = -2P_i \cdot P_j}{=} -\frac{(\Delta+2)}{2} \frac{G_1(P_i)}{(P_{12}P_{23}P_{13})} (-2)P_{23}(P_{13}P_2^M + P_{12}P_3^M) \\
\Rightarrow \partial_{P_1}^M G_1(P_i) &= -\frac{d+2}{2} \frac{G_1(P_i)}{(P_1 \cdot P_2)(P_1 \cdot P_3)} ((P_1 \cdot P_3)P_2^M + (P_1 \cdot P_2)P_3^M) \tag{A'.2.17}
\end{aligned}$$

A'.2.3 $(\partial_{P_1} \cdot \mathcal{D}_{Z_1})(a_1\text{-όρος})$

$$\begin{aligned}
& (\partial_{P_1} \cdot \mathcal{D}_{Z_1})(V_1^2 V_2^2 V_3^2) \stackrel{A.1.7}{=} \frac{\partial}{\partial P_{1;M}} \left(V_2^2 V_3^2 \left[dV_1 \frac{\partial V_1}{\partial Z_1^M} - Z_{1;M} \frac{\partial V_1}{\partial Z_1} \cdot \frac{\partial V_1}{\partial Z_1} \right] \right) \\
&= V_2^2 V_3^2 \left(d \frac{\partial V_1}{\partial P_1} \cdot \frac{\partial V_1}{\partial Z_1} - 2Z_{1;M} \frac{\partial V_1}{\partial Z_1} \cdot \frac{\partial^2 V_1}{\partial P_{1;M} \partial Z_1} \right) \\
&+ 2V_2 V_3 \left(\frac{\partial V_2}{\partial P_{1;M}} V_3 \left[dV_1 \frac{\partial V_1}{\partial Z_1^M} - Z_{1;M} \frac{\partial V_1}{\partial Z_1} \cdot \frac{\partial V_1}{\partial Z_1} \right] \right. \\
&+ \left. V_2 \frac{\partial V_3}{\partial P_{1;M}} \left[dV_1 \frac{\partial V_1}{\partial Z_1^M} - Z_{1;M} \frac{\partial V_1}{\partial Z_1} \cdot \frac{\partial V_1}{\partial Z_1} \right] \right) \\
&= V_2^2 V_3^2 \left(d \frac{\partial V_1}{\partial P_1} \cdot \frac{\partial V_1}{\partial Z_1} - 2Z_{1;M} \frac{\partial V_1}{\partial Z_1} \cdot \frac{\partial^2 V_1}{\partial P_{1;M} \partial Z_1} \right) \\
&+ 2V_2 V_3^2 \left(dV_1 \frac{\partial V_2}{\partial P_1} \cdot \frac{\partial V_1}{\partial Z_1} - Z_1 \cdot \frac{\partial V_2}{\partial P_1} \left[\frac{\partial V_1}{\partial Z_1} \right]^2 \right) \\
&+ 2V_2^2 V_3 \left(dV_1 \frac{\partial V_3}{\partial P_1} \cdot \frac{\partial V_1}{\partial Z_1} - Z_1 \cdot \frac{\partial V_3}{\partial P_1} \left[\frac{\partial V_1}{\partial Z_1} \right]^2 \right) \\
&= V_2^2 V_3^2 \left(d \frac{(P_1 \cdot P_3)(P_2 \cdot Z_1) + (P_1 \cdot P_2)(P_3 \cdot Z_1)}{(P_2 \cdot P_3)} - 2V_1 \right) \\
&+ 2V_2 V_3^2 \left(-dV_1 V_2 + 2 \frac{(P_1 \cdot P_2)(P_1 \cdot P_3)}{(P_2 \cdot P_3)} \times \right. \\
&\times \left. \left[\frac{(P_2 \cdot Z_1)(P_3 \cdot Z_2) - (P_3 \cdot P_2)(Z_1 \cdot Z_2)}{P_1 \cdot P_3} - \frac{P_3 \cdot Z_1}{P_1 \cdot P_3} V_2 \right] \right) \\
&+ 2V_2^2 V_3 \left(dV_1 V_3 + 2 \frac{(P_1 \cdot P_2)(P_1 \cdot P_3)}{(P_2 \cdot P_3)} \times \right. \\
&\times \left. \left[\frac{(P_2 \cdot P_3)(Z_1 \cdot Z_3) - (P_3 \cdot Z_1)(P_2 \cdot Z_3)}{P_1 \cdot P_2} - \frac{P_2 \cdot Z_1}{P_1 \cdot P_2} V_3 \right] \right)
\end{aligned} \tag{A'.2.18}$$

A'.2.4 $(\partial_{P_1} \cdot \mathcal{D}_{Z_1})(a_2\text{-όρος})$

$$\begin{aligned}
& (\partial_{P_1} \cdot \mathcal{D}_{Z_1})(V_1^2 V_2 V_3 H_{23} + V_1 V_2^2 V_3 H_{13} + V_1 V_2 V_3^2 H_{12}) = \\
& \frac{\partial}{\partial P_1} \cdot \left(h \left[2V_1 \frac{\partial V_1}{\partial Z_1} V_2 V_3 H_{23} + V_2^2 V_3 \left[\frac{\partial V_1}{\partial Z_1} H_{13} + V_1 \frac{\partial H_{13}}{\partial Z_1} \right] + V_2 V_3^2 \left[\frac{\partial V_1}{\partial Z_1} H_{12} + V_1 \frac{\partial H_{12}}{\partial Z_1} \right] \right] \right. \\
& \left. - Z_1 \left[\left[\frac{\partial V_1}{\partial Z_1} \right]^2 V_2 V_3 H_{23} + \frac{\partial V_1}{\partial Z_1} \cdot \frac{\partial H_{13}}{\partial Z_1} V_2^2 V_3 + \frac{\partial V_1}{\partial Z_1} \cdot \frac{\partial H_{12}}{\partial Z_1} V_2 V_3^2 \right] \right) \\
& = h \left(2V_2 V_3 H_{23} \frac{\partial V_1}{\partial P_1} \cdot \frac{\partial V_1}{\partial Z_1} + 2V_1 V_3 H_{23} \frac{\partial V_1}{\partial Z_1} \cdot \frac{\partial V_2}{\partial P_1} + 2V_1 V_2 H_{23} \frac{\partial V_1}{\partial Z_1} \cdot \frac{\partial V_3}{\partial P_1} \right. \\
& + V_2^2 V_3 \left[\frac{\partial V_1}{\partial Z_1} \cdot \frac{\partial H_{13}}{\partial P_1} + \frac{\partial V_1}{\partial P_1} \cdot \frac{\partial H_{13}}{\partial Z_1} \right] + 2V_2 V_3 \frac{\partial V_2}{\partial P_1} \cdot \left[\frac{\partial V_1}{\partial Z_1} H_{13} + V_1 \frac{\partial H_{13}}{\partial P_1} \right] \\
& + V_2^2 \frac{\partial V_3}{\partial P_1} \cdot \left[\frac{\partial V_1}{\partial Z_1} H_{13} + V_1 \frac{\partial H_{13}}{\partial Z_1} \right] \\
& + V_2 V_3^2 \left[\frac{\partial V_1}{\partial Z_1} \cdot \frac{\partial H_{12}}{\partial P_1} + \frac{\partial V_1}{\partial P_1} \cdot \frac{\partial H_{12}}{\partial Z_1} \right] + V_3^2 \frac{\partial V_2}{\partial P_1} \cdot \left[\frac{\partial V_1}{\partial Z_1} H_{12} + V_1 \frac{\partial H_{12}}{\partial Z_1} \right] \\
& \left. + 2V_2 V_3 \frac{\partial V_3}{\partial P_1} \cdot \left[\frac{\partial V_1}{\partial Z_1} H_{12} + V_1 \frac{\partial H_{12}}{\partial Z_1} \right] \right) \\
& - Z_{1;M} \left(2V_2 V_3 H_{23} \frac{\partial V_1}{\partial Z_1} \frac{\partial^2 V_1}{\partial P_{1;M} \partial Z_1} + V_3 H_{23} \left[\frac{\partial V_1}{\partial Z_1} \right]^2 \frac{\partial V_2}{\partial P_{1;M}} + V_2 H_{23} \left[\frac{\partial V_1}{\partial Z_1} \right]^2 \frac{\partial V_3}{\partial P_{1;M}} \right. \\
& + V_2^2 V_3 \left[\frac{\partial^2 V_1}{\partial P_{1;M} \partial Z_1} \cdot \frac{\partial H_{13}}{\partial Z_1} + \frac{\partial V_1}{\partial Z_1} \cdot \frac{\partial^2 H_{13}}{\partial P_{1;M} \partial Z_1} \right] \\
& + 2V_2 V_3 \frac{\partial V_2}{\partial P_{1;M}} \frac{\partial V_1}{\partial Z_1} \cdot \frac{\partial H_{13}}{\partial Z_1} + V_2^3 \frac{\partial V_3}{\partial P_{1;M}} \frac{\partial V_1}{\partial Z_1} \cdot \frac{\partial H_{13}}{\partial Z_1} \\
& + V_2 V_3^2 \left[\frac{\partial^2 V_1}{\partial P_{1;M} \partial Z_1} \cdot \frac{\partial H_{12}}{\partial Z_1} + \frac{\partial V_1}{\partial Z_1} \cdot \frac{\partial^2 H_{12}}{\partial P_{1;M} \partial Z_1} \right] \\
& \left. + V_3^2 \frac{\partial V_2}{\partial P_{1;M}} \frac{\partial V_1}{\partial Z_1} \cdot \frac{\partial H_{12}}{\partial Z_1} + 2V_2 V_3 \frac{\partial V_3}{\partial P_{1;M}} \frac{\partial V_1}{\partial Z_1} \cdot \frac{\partial H_{12}}{\partial Z_1} \right)
\end{aligned} \tag{A'.2.19}$$

Αντικαθιστώντας τα γινόμενα από την ενότητα A.2.1, λαμβάνουμε τον κλειστό τύπο για τις δομές.

A'.2.5 $(\partial_{P_1} \cdot \mathcal{D}_{Z_1})(a_3\text{-όρος})$

$$\begin{aligned}
& (\partial_{P_1} \cdot \mathcal{D}_{Z_1})(V_1V_2H_{13}H_{23} + V_1V_3H_{12}H_{23} + V_2V_3H_{12}H_{13}) = \\
& = \frac{\partial}{\partial P_1} \cdot \left(h \left[\frac{\partial V_1}{\partial Z_1} H_{23} [V_2H_{13} + V_3H_{12}] + V_1H_{23} \left[V_2 \frac{\partial H_{13}}{\partial Z_1} + V_3 \frac{\partial H_{12}}{\partial Z_1} \right] \right. \right. \\
& + V_2V_3 \left[\frac{\partial H_{12}}{\partial Z_1} H_{13} + H_{12} \frac{\partial H_{13}}{\partial Z_1} \right] \\
& \left. \left. - Z_1 \left[H_{23} \frac{\partial V_1}{\partial Z_1} \cdot [V_2 \frac{\partial H_{13}}{\partial Z_1} + V_3 \frac{\partial H_{12}}{\partial Z_1}] + V_2V_3 \frac{\partial H_{12}}{\partial Z_1} \cdot \frac{\partial H_{13}}{\partial Z_1} \right] \right) \right) \\
& = h \left(\frac{\partial V_1}{\partial Z_1} \cdot \frac{\partial H_{23}}{\partial P_1} [V_2H_{13} + V_3H_{12}] \right. \\
& + H_{23} \frac{\partial V_1}{\partial Z_1} \cdot \left[\frac{\partial V_2}{\partial P_1} H_{13} + V_2 \frac{\partial H_{13}}{\partial P_1} + \frac{\partial V_3}{\partial P_1} H_{12} + V_3 \frac{\partial H_{12}}{\partial P_1} \right] \\
& + \left[\frac{\partial V_1}{\partial P_1} H_{23} + V_1 \frac{\partial H_{23}}{\partial P_1} \right] \cdot \left[V_2 \frac{\partial H_{13}}{\partial Z_1} + V_3 \frac{\partial H_{12}}{\partial Z_1} \right] \\
& + V_1H_{23} \left[\frac{\partial V_2}{\partial P_1} \cdot \frac{\partial H_{13}}{\partial Z_1} + \frac{\partial V_3}{\partial P_1} \cdot \frac{\partial H_{12}}{\partial Z_1} \right] \\
& + \left[\frac{\partial V_2}{\partial P_1} V_3 + V_2 \frac{\partial V_3}{\partial P_1} \right] \cdot \left[\frac{\partial H_{12}}{\partial Z_1} H_{13} + H_{12} \frac{\partial H_{13}}{\partial Z_1} \right] \\
& + V_2V_3 \left[\frac{\partial H_{12}}{\partial Z_1} \cdot \frac{\partial H_{13}}{\partial P_1} + \frac{\partial H_{12}}{\partial P_1} \cdot \frac{\partial H_{13}}{\partial Z_1} \right] \left. \right) \\
& - Z_{1;M} \left(\left[\frac{\partial H_{23}}{\partial P_{1;M}} \frac{\partial V_1}{\partial Z_1} + H_{23} \frac{\partial^2 V_1}{\partial P_{1;M} \partial Z_1} \right] \cdot \left[V_2 \frac{\partial H_{13}}{\partial Z_1} + V_3 \frac{\partial H_{12}}{\partial Z_1} \right] \right. \\
& + H_{23} \frac{\partial V_1}{\partial Z_1} \cdot \left[\frac{\partial V_2}{\partial P_{1;M}} \frac{\partial H_{13}}{\partial Z_1} + V_2 \frac{\partial^2 H_{13}}{\partial P_{1;M} \partial Z_1} + \frac{\partial V_3}{\partial P_{1;M}} \frac{\partial H_{12}}{\partial Z_1} + V_3 \frac{\partial^2 H_{12}}{\partial P_{1;M} \partial Z_1} \right] \\
& \left. + \left[\frac{\partial V_2}{\partial P_{1;M}} V_3 + V_2 \frac{\partial V_3}{\partial P_{1;M}} \right] \frac{\partial H_{12}}{\partial Z_1} \cdot \frac{\partial H_{13}}{\partial Z_1} + V_2V_3 \left[\frac{\partial^2 H_{12}}{\partial P_{1;M} \partial Z_1} \cdot \frac{\partial H_{13}}{\partial Z_1} + \frac{\partial H_{12}}{\partial Z_1} \cdot \frac{\partial^2 H_{13}}{\partial P_{1;M} \partial Z_1} \right] \right) \\
& \hspace{15em} (\text{A'.2.20})
\end{aligned}$$

A'.2.6 $(\partial_{P_1} \cdot \mathcal{D}_{Z_1})(a_4\text{-}\acute{\alpha}\rho\sigma\varsigma)$

$$\begin{aligned}
& (\partial_{P_1} \cdot \mathcal{D}_{Z_1})(V_1^2 H_{23}^2 + V_2^2 H_{13}^2 + V_3^2 H_{12}^2) = \\
& = \frac{\partial}{\partial P_1} \cdot \left(d \left[H_{23}^2 V_1 \frac{\partial V_1}{\partial Z_1} + V_2^2 H_{13} \frac{\partial H_{13}}{\partial Z_1} + V_3^2 H_{12} \frac{\partial H_{12}}{\partial Z_1} \right] \right. \\
& \quad \left. - Z_1 \left[H_{23}^2 \left[\frac{\partial V_1}{\partial Z_1} \right]^2 + V_2^2 \left[\frac{\partial H_{13}}{\partial Z_1} \right]^2 + V_3^2 \left[\frac{\partial H_{12}}{\partial Z_1} \right]^2 \right] \right) \\
& = d \left(2H_{23} V_1 \frac{\partial H_{23}}{\partial P_1} \cdot \frac{\partial V_1}{\partial Z_1} + H_{23}^2 \frac{\partial V_1}{\partial P_1} \cdot \frac{\partial V_1}{\partial Z_1} \right. \\
& \quad + 2V_2 H_{13} \frac{\partial V_2}{\partial P_1} \cdot \frac{\partial H_{13}}{\partial Z_1} + V_2^2 \frac{\partial H_{13}}{\partial P_1} \cdot \frac{\partial H_{13}}{\partial Z_1} \\
& \quad \left. + 2V_3 H_{12} \frac{\partial V_3}{\partial P_1} \cdot \frac{\partial H_{12}}{\partial Z_1} + V_3^2 \frac{\partial H_{12}}{\partial P_1} \cdot \frac{\partial H_{12}}{\partial Z_1} \right) \\
& \quad - 2Z_{1;M} \left(H_{23} \frac{\partial H_{23}}{\partial P_{1;M}} \left[\frac{\partial V_1}{\partial Z_1} \right]^2 + H_{23}^2 \frac{\partial V_1}{\partial Z_1} \cdot \frac{\partial^2 V_1}{\partial P_{1;M} \partial Z_1} \right. \\
& \quad + V_2 \frac{\partial V_2}{\partial P_{1;M}} \left[\frac{\partial H_{13}}{\partial Z_1} \right]^2 + V_2^2 \frac{\partial H_{13}}{\partial Z_1} \cdot \frac{\partial^2 H_{13}}{\partial P_{1;M} \partial Z_1} \\
& \quad \left. + V_3 \frac{\partial V_3}{\partial P_{1;M}} \left[\frac{\partial H_{12}}{\partial Z_1} \right]^2 + V_3^2 \frac{\partial H_{12}}{\partial Z_1} \cdot \frac{\partial^2 H_{12}}{\partial P_{1;M} \partial Z_1} \right)
\end{aligned} \tag{A'.2.21}$$

A'.2.7 $(\partial_{P_1} \cdot \mathcal{D}_{Z_1})(a_5\text{-}\acute{\alpha}\rho\sigma\varsigma)$

$$\begin{aligned}
& (\partial_{P_1} \cdot \mathcal{D}_{Z_1})(H_{12} H_{13} H_{23}) = \\
& = \frac{\partial}{\partial P_1} \cdot \left(h H_{23} \left[\frac{\partial H_{12}}{\partial Z_1} H_{13} + H_{12} \frac{\partial H_{13}}{\partial Z_1} \right] - Z_1 H_{23} \frac{\partial H_{12}}{\partial Z_1} \cdot \frac{\partial H_{13}}{\partial Z_1} \right) \\
& = h \left(\frac{\partial H_{23}}{\partial P_1} \cdot \left[\frac{\partial H_{12}}{\partial Z_1} H_{13} + H_{12} \frac{\partial H_{13}}{\partial Z_1} \right] \right. \\
& \quad \left. + H_{23} \left[\frac{\partial H_{12}}{\partial Z_1} \cdot \frac{\partial H_{13}}{\partial P_1} + \frac{\partial H_{12}}{\partial P_1} \frac{\partial H_{13}}{\partial Z_1} \right] \right) \\
& \quad - Z_{1;M} \left(\frac{\partial H_{23}}{\partial P_{1;M}} \frac{\partial H_{12}}{\partial Z_1} \cdot \frac{\partial H_{13}}{\partial Z_1} + H_{23} \frac{\partial^2 H_{12}}{\partial P_{1;M} \partial Z_1} \cdot \frac{\partial H_{13}}{\partial Z_1} + H_{23} \frac{\partial H_{12}}{\partial Z_1} \cdot \frac{\partial^2 H_{13}}{\partial P_{1;M} \partial Z_1} \right)
\end{aligned} \tag{A'.2.22}$$

B' Παράρτημα B: Σημείωση για το μετασχηματισμό Fourier του μηδενικού κώνου

Γιατί να μη δουλέψουμε κατευθείαν στο χώρο των ορμών; Άλλωστε, παρότι ο τανυστής του Κεφαλαίου 5 μπορεί να μετασχηματιστεί από το χώρο των θέσεων σε αυτόν των ορμών, ο μετασχηματισμός Fourier των όρων που προκύπτουν είναι υπολογιστικά μακρόσκελος (αν και απλός, σχετικά: ξεκάθαρα διατηρεί την τανυστική μορφή του συμμετρικού τανυστικού γινομένου). Έτσι, υπάρχει λόγος να αναζητήσουμε έναν τέτοιο μετασχηματισμό.

Θα αποδείξουμε πως δεν υπάρχει τέτοιος μετασχηματισμός.

Κατάρχήν, έστω $f(P_i) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}(\hat{P}_i)$, f κάποια C^2 συνάρτηση των P_i , $P_i^M \xrightarrow{\mathcal{F}} Q_i^M$.

Ορίζουμε το μετασχηματισμό Fourier ως

$$\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n, \mathcal{F}[\mathbb{R}^n \ni f(x \in \mathbb{R}^{p,q})] := \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \iint_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q} dV \cdot e^{ik \cdot x} f(x) := \hat{f}(k) \quad (\text{B'.0.1})$$

Τότε ισχύει

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[1] &= (2\pi)^{\frac{p+q}{2}} \delta^{(p+q)}(k) = (2\pi)^{\frac{p+q}{2}} \prod_{\mu=1}^{p+q} \delta(k^\mu) \\ \mathcal{F}[x^\alpha] &= -i(2\pi)^{\frac{p+q}{2}} \delta^{(p+q-1)}(k) (\delta(k^\alpha))' \\ \mathcal{F}[x^2] &= -(2\pi)^{\frac{p+q}{2}} \delta^{(p+q-1)}(k) \left(\sum_{\mu=1}^p [-(\delta(k^\mu))''] + \sum_{\nu=1}^q [(\delta(k^\nu))''] \right) \end{aligned}$$

όπου $\delta(k)$ είναι το συναρτησιακό δέλτα του Dirac:

$$\iint_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q} dV \cdot \delta(k) f(k) = f(0) \quad \forall f \in C^\infty(\mathbb{R}^{p,q}).$$

όπου βέβαια η f είναι **συμπαγώς ορισμένη** (compactly supported): μηδενίζεται για κάθε k που βρίσκεται πιο 'έξω' από μια συγκεκριμένη γειτονιά της αρχής των αξόνων, 0.

Τότε η παράγωγος του δέλτα δίνεται $\forall n \in \mathbb{N}^*$ [14]

$$\iint_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q} dV \cdot (\delta(k))^{(n')} f(k) \stackrel{f \text{ συμπαγώς ορισμένη}}{=} (-1)^n \iint_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q} dV \cdot \delta(k) f^{(n')}(k) \equiv f^{(n')}(0)$$

Ο μετασχηματισμός Fourier των παραπάνω, λοιπόν, λαμβάνει το νόημα μιας **παράγωγου κατανομών** (distributional derivative).

Συνεπώς, αν $P_x^M := (x^\mu, 1, x^2)$, $Q_k^M \equiv \mathcal{F}[P_x^M]$,

$$= (2\pi)^{\frac{d}{2}} \delta^{(d-1)}(k) \left(-i\delta(k^\mu)', \delta(k), -\left[\sum_{\nu=1}^d \delta(k^\nu)'' - \delta(k^0)'' \right] \right)$$

όπου $\eta_{00} = -1$ στον $\mathbb{R}^{1,d-1}$. Προκειμένου να ισχύει ο φορμαλισμός που αναπτύξαμε στο Κεφάλαιο 4 στο χώρο των ορμών, πρέπει να βρούμε ένα μετασχηματισμό που να απεικονίζει $f(P) \xrightarrow{\mathcal{F}} Q$, $Q^M \equiv (Q^\mu, Q^+, Q^-) : Q^\mu Q_\mu - Q^+ Q^- = Q^2 = 0$. Επίσης πρέπει να ισχύει $f^M(P) \equiv (f^\mu(P), f^+, f^-) : f^2(P) = 0$, $P^2 = 0$. Από αυτές τις συνθήκες, γρήγορα συμπεραίνουμε πως πρέπει να ισχύει

$$\boxed{f^M(P) = cP^M, c \in \mathbb{R}}$$

Όμως ο μηδενικός κώνος είναι προβολικός, και άρα μπορούμε να θέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας $c = 1$. Τότε

$$\begin{aligned} Q^M &= (2\pi)^{\frac{d}{2}} \delta^{(d-1)}(k) \left(\underbrace{-i\delta(k^\mu)'}_{Q^\mu}, \underbrace{\delta(k)}_{Q^+}, \underbrace{-\left[\sum_{\nu=1}^{d-1} \delta(k^\nu)'' - \delta(k^0)'' \right]}_{Q^-} \right) \\ &\Rightarrow Q^2 = (\delta(k)')^2 + \delta(k) \left[\sum_{\nu=1}^{d-1} \delta(k^\nu)'' - \delta(k^0)'' \right] \\ &\iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1}} dV \cdot Q^2 \phi(k) = \\ &= \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1}} dV \cdot \left((\delta(k)')^2 + \delta(k) \left[\sum_{\nu=1}^{d-1} \delta(k^\nu)'' - \delta(k^0)'' \right] \right) \phi(k) \\ &= \iint_{\mathbb{R}^d} dV \cdot \left(\left[\delta(k) \phi'(k) \right]^2 + \delta(k) \cdot \left[\sum_{\nu=1}^{d-1} \delta(k^\nu) \phi''(k) - \delta(k^0) \phi''(k) \right] \right) \end{aligned}$$

Προς επεξήγηση, με ' συμβολίζουμε την ολική παράγωγο ως προς k , δηλαδή το άθροισμα $\sum_{\mu=1}^{p+q} \frac{\partial \phi(k)}{\partial k^\mu}$.

Επίσης $\iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1}} dV \cdot \delta(k^\mu) \phi(k) \equiv \phi(k^\mu = 0)$. $\delta(k) \cdot \delta(k) \phi''(k) \equiv \sum_{\rho=1}^{p+q} \frac{\partial^2 \phi(k)}{\partial k^\rho \partial k^\rho} \Big|_{k^\rho=0}$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial \phi(k)}{\partial k^\mu} \Big|_{k^\mu=0} \right)^2 + \sum_{\rho=1}^{d-1} \frac{\partial^2 \phi(k)}{\partial k^\rho \partial k^\rho} \Big|_{k^\rho=0} - \frac{\partial^2 \phi(k)}{\partial k^0 \partial k^0} \Big|_{k^0=0} = 0, \forall \phi$$

Φυσικά, όπως εξηγήσαμε στο Κεφάλαιο 2.5, ο φορμαλισμός είναι το ίδιο έγκυρος σε χώρο Minkowski όσο και σε Ευκλείδιο χώρο: συνεπώς, εάν ο μηδενικός κώνος μετασχηματίζεται μέσω Fourier σε μηδενικό κώνο σε χώρο ενσωμάτωσης χώρου Minkowski, $\mathbb{R}^{2,d}$ θα κάνει το ίδιο και σε χώρο ενσωμάτωσης Ευκλείδιου χώρου $\mathbb{R}^{1,d+1}$ (δηλαδή τόσο για $\mathbb{R}^{1,d-1} \ni x \mapsto P_x \in \mathbb{R}^{2,d}$ όσο και για $\mathbb{R}^d \ni x \mapsto P_x \in \mathbb{R}^{1,d+1}$ πρέπει να ισχύει η ταυτότητα). Χωρίς βλάβη της γενικότητας λοιπόν θα δουλέψουμε σε Ευκλείδιο χώρο.

Επιλέγοντας, παραδείγματος χάρη, την C^∞ συμπαγώς ορισμένη $\phi(k) = k^{-2}$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(k)}{\partial k^\alpha} &= -\frac{2}{k^4} k_\alpha, \quad \frac{\partial^2 \phi(k)}{\partial k^\beta \partial k^\alpha} = \frac{\partial}{\partial k^\beta} \left(-\frac{2}{k^4} k_\alpha \right) = \frac{8}{k^6} k_\beta k_\alpha - \frac{2}{k^4} \delta_{\beta\alpha} \\ \Rightarrow \left(-\frac{2}{k^4} k_\mu \right)^2 \Big|_{k^\mu=0} &+ \sum_{\rho=1}^{d-1} \left(\frac{8}{k^6} k_\rho k_\rho - \frac{2}{k^4} \right) \Big|_{k^\rho=0} - \left(\frac{8}{k^4} k_0 k_0 - \frac{2}{k^4} \right) \Big|_{k^0=0} = 0 \\ &\Rightarrow (d-2) \frac{2}{k^4} = 0, \text{ άτοπο για } d \neq 2 \end{aligned}$$

(και αν $d = 2$ αρκεί να πάρουμε μια $\varphi(k) = k^{-(2+\varepsilon>0)}$) Άρα, εφόσον υπάρχει μια καλώς συμπεριφερόμενη συνάρτηση δοκιμής που παραβιάζει τη συνθήκη $\iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1}} dV \cdot Q_k^2[\phi(k)] \neq 0$, καταλήγουμε πως

$$\boxed{Q^2 \neq 0}$$

Αυτός ήταν και ο πιο γενικός μετασχηματισμός που μπορούσαμε να κάνουμε, τηρώντας τις από πάνω συνθήκες. Εφόσον λοιπόν ο μηδενικός κώνος του χώρου θέσεων δε μετασχηματίζεται σε κάτι αντίστοιχο του χώρου ορμών, δε γίνεται *a priori* να δουλέψουμε με το φορμαλισμό στο χώρο των ορμών.