ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
Τομέας Μαθηματικών

Ασθενείς Λύσεις και Λύσεις Μέτρου σε Μη Γραμμικές Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

Διπλωματική Εργασία

Επιβλέπων: Αντώνιος Χαραλαμπόπουλος

Στέφανος Ε. Γεωργιάδης

omnium rerum principia parva sunt ..

Περίληψη

Η παρούσα εργασία έχει ως στόχο τη μελέτη ζητημάτων ύπαρξης και (όπου είναι εφικτό) μοναδικότητας ασθενών λύσεων μη γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων. Παράλληλα, παρουσιάζονται και παράπλευρα αποτελέσματα που βρήκαμε ενδιαφέροντα. Εκτός από την παράθεση σημαντικών αποτελεσμάτων, δίνεται ιδιαίτερη σημασία στην αποδεικτική διαδικασία αυτών, μέσα από το πρίσμα της (μη γραμμικής) συναρτησιακής ανάλυσης. Πιο αναλυτικά, η εργασία αποτελείται από τέσσερα μέρη:

(i) Το πρώτο μέρος είναι αφιερωμένο στα ελλειπτικά προβλήματα. Ύστερα από μια σύντομη αναφορά στα γραμμικά προβλήματα (για λόγους πληρότητας και εξοικίωσης με το συμβολισμό), εισάγουμε μία πρώτη μορφή μη γραμμικότητας: τις μεταβολικές ανισότητες. Συνεχίζουμε με τη μελέτη μη γραμμικών εξισώσεων και κλείνουμε το πρώτο μέρος με ορισμένα ζητήματα ομαλότητας και μοναδικότητας.

(ii) Στο δεύτερο μέρος ασχολούμαστε με παραβολικά προβλήματα. Κινούμενοι στα ίδια πλαίσια με τα ελλειπτικά προβλήματα, αρχίζουμε με τη μελέτη των γραμμικών προβλημάτων, εν συνεχεία καταπιανόμαστε με μη γραμμικά προβλήματα και στο τέλος παρουσιάζουμε ορισμένα πολύ ενδιαφέροντα αποτελέσματα ασυμπτωτικής συμπεριφοράς των λύσεων.

(iii) Για λόγους πληρότητας θέλαμε να παρουσιάσουμε και κάποια υπερβολικά προβλήματα και έτσι, στο τρίτο μέρος, βρίσκουμε την ευκαιρία να μιλήσουμε και για λύσεις μέτρου. Ωστόσο, το κατάλληλο πλαίσιο περιγραφής αυτών είναι τα μέτρα Young, για το λόγο αυτό αφιερώνουμε ένα κεφάλαιο στη μελέτη αυτών.

(iv) Κλείνουμε την εργασία με ενα σύντομο παράρτημα στο τέταρτο μέρος, στο οποίο βρίσκουμε την ευκαιρία να πούμε λίγα παραπάνω λόγια για τα εργαλεία που χρησιμοποιούμε στο κυρίως μέρος.

Abstract

The main goal of this dissertation is the study of existence and uniqueness issues of weak solutions in nonlinear partial differential equations. Moreover, we present some collateral results that we found interesting. Apart from presenting the results, we wanted to pay attention to their proofs, writing them down carefully and rigorously, using methods of (nonlinear) functional analysis. More precisely, the dissertation has four parts:

(i) The first part is dedicated to elliptic problems. Starting with the basics of linear theory, we introduce a first type of nonlinear problem: variational inequalities. We, then, deal with nonlinear equations and attack some questions of regularity and uniqueness.

(ii) In the second part, we study parabolic problems. Again, as in part one, we introduce linear and nonlinear theory and we present some really interesting results on the asymptotic behaviour of the solutions.

(iii) Part three contains some modern notions of nonlinear partial differential equations: measure-valued solutions. What is more, we introduce the proper framework for such solutions, which is the concept of Young measures.

(iv) The dissertation ends with a short appendix in part four, in which we have the chance to say a few things about the functional analysis tools that we have used in the rest of the text.

Πρόλογος

Μέχρι τη δεκαετία του 1920, οι λύσεις των διαφορικών εξισώσεων νοούνταν με την κλασική έννοια, ήταν δηλαδή C^k συναρτήσεις, όπου k η τάξη του διαφορικού τελεστή της εξίσωσης. Ωστόσο, πολλοί μαθηματικοί είχαν ήδη αρχίσει να καταπιάνονται με νέες, για την εποχή, οντότητες, που άκουγαν στο όνομα *γενικευμένες συναρτήσεις* και τις οποίες, σήμερα, αποκαλούμε *κατανομές*.

Τα επόμενα χρόνια, πολλοί μαθηματικοί όπως οι Salomon Bochner και Kurt Friedrichs δοκίμασαν να αναζητήσουν κατανομές ως λύσεις μερικών διαφορικών εξισώσεων. Η σημαντικότερη συνεισφορά σε αυτή την προσπάθεια, ήταν ο ορισμός των χώρων Sobolev από τον Sergei Sobolev το 1935. Οι χώροι Sobolev αποτέλεσαν (και αποτελούν) ένα συστηματικό μηχανισμό αντιμετώπισης προβλημάτων διαφορικών εξισώσεων, διότι μας επιτρέπουν να ορίσουμε τη λύση μας με την έννοια των κατανομών. Το γεγονός αυτό, αποτέλεσε σημείο καμπής για τη μελέτη των διαφορικών εξισώσεων, διότι αυτού του είδους οι λύσεις, που ονομάζονται *ασθενείς λύσεις*, μπορούν να είναι αρκετά πιο «ανώμαλες» από τις αντίστοιχες κλασικές λύσεις και κατά συνέπεια δίνουν τη δυνατότητα περιγραφής προβλημάτων τα οποία, μέχρι τότε, ήταν απροσπέλαστα, λόγω των προβλημάτων ομαλότητας.

Σήμερα, η έννοια των ασθενών λύσεων καθίσταται θεμελιώδης στις διαφορικές εξισώσεις, αλλά και γενικότερα στα μαθηματικά. Κλάδοι όπως η συναρτησιακή ανάλυση, η μαθηματική φυσική (κινητική θεωρία, μηχανική συνεχούς, ρευστομηχανική κλπ.) και η αριθμητική ανάλυση έχουν αναπτυχθεί ιδιαίτερα, λόγω της μεγάλης συνεισφοράς και του ενδιαφέροντος των ασθενών λύσεων.

Ωστόσο, το 1985, ο Ronald DiPerna ενώ δούλευε πάνω σε μη γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις, συνειδητοποίησε ότι η έννοια των ασθενών λύσεων δεν ήταν αρκετή για να περιγράψει τις λύσεις ορισμένων (μη γραμμικών) νόμων διατήρησης, μιας και οι παθογένειες των λύσεων ήταν πολύ ισχυρές. Για να αντιμετωπίσει αυτό το πρόβλημα, όρισε μία νέα κλάση λύσεων, τις *λύσεις μέτρου*, μέσω των οποίων οποιαδήποτε μορφή παθογένειας της λύσης, επί παραδείγματι ασυνέχεια, προκύπτει φυσιολογικά μέσα από το φορμαλισμό του προβλήματος, δεδομένου ότι οι λύσεις, πλέον, μπορούν να περιγραφούν από μέτρα.

Οι λύσεις μέτρου παίζουν σημαντικό ρόλο στις μη γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις και ιδιαίτερα στους νόμους διατήρησης. Οι τεχνικές που χρησιμοποιούνται είναι αρκετά προχωρημένες, χωρίς όμως αυτό να σημαίνει ότι οι εφαρμογές είναι περιορισμένες. Ιδιαίτερα σε κλάδους της μηχανικής, όπως η θεωρία ελαστικότητας και η ρευστομηχανική, οι λύσεις μέτρου είναι πολύ σημαντικές και χρήσιμες, ενώ ποικίλες είναι και οι εφαρμογές στην αριθμητική ανάλυση, για τη προσέγγιση ανώμαλων λύσεων.

Ευχαριστίες

Σε αυτό το σημείο αισθάνομαι την ανάγκη να πω ένα μεγάλο ευχαριστώ στα άτομα που με συντροφεύουν όλα αυτά τα χρόνια και με έχουν βοηθήσει (ο καθένας με το δικό του τρόπο) να φτάσω μέχρι εδώ: τον αδερφό μου, τους γονείς μου και τους φίλους μου. Ακόμα, την αμέριστη ευγνωμοσύνη μου έχει ο επιβλέπων καθηγητής μου, κύριος Αντώνης Χαραλαμπόπουλος, για το εξαιρετικό κλίμα συνεργασίας κατά τη διάρκεια της εκπόνησης της εργασίας, για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε και για τις ατελείωτες συζητήσεις και ευχάριστες στιγμές που μου χάρισε. Ιδιαίτερες ευχαριστίες θέλω να απευθύνω και στην κυρία Κυριακή Κυριάκη και τους κυρίους Δρόσο Γκιντίδη, Μιχάλη Λουλάκη και Αντώνη Παπαπαντολέοντα για την καθοδήγηση και τη στήριξή τους όλα αυτά τα χρόνια, για τις πολύτιμες συμβουλές τους και την ηθική τους συμπαράσταση. Σας ευχαριστώ όλους και εύχομαι οι δρόμοι μας να συναντηθούν ξανά στο μέλλον!

Στέφανος
27 Ιουνίου 2019

Η έργασία αυτή είναι αφιερωμένη στον Elio και τον Oliver ..

Περιεχόμενα

Μέρος I

Ελλειπτικά προβλήματα

Κεφάλαιο 1

Γραμμικά Ελλειπτικά Προβλήματα

1.1 Ένα κινητήριο παράδειγμα

Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ανοικτό, με σύνορο $\partial\Omega$. Για δεδομένη συνάρτηση f, θα θέλαμε να λύσουμε την εξίσωση Poisson, με συνοριακές συνθήκες τύπου Dirichlet:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{στο } \Omega \\ u = 0 & \text{στο } \Gamma \equiv \partial\Omega \end{cases} \tag{1.1}$$

Αν υποθέσουμε ότι η $f \in C(\Omega)$, τότε κάθε συνάρτηση $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ που ικανοποιεί την (1.1) καλείται *κλασική ή ισχυρή λύση* του (1.1).

Έστω, λοιπόν, u μία κλασική λύση του (1.1) και $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, το σύνολο των δοκιμαστικών συναρτήσεων στο Ω. Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση του προβλήματος (1.1) με v και ολοκληρώνοντας στο Ω, λαμβάνουμε:

$$\int_\Omega -\Delta u v dx = \int_\Omega f v dx$$

το οποίο δίνει με τη σειρά του:

$$-\int_\Omega \operatorname{div}(v\nabla u) dx + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_\Omega f v dx$$

Κάνοντας χρήση του Θεωρήματος της Απόκλισης (του Gauss), το πρώτο ολοκλήρωμα εξαφανίζεται και άρα:

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_\Omega f v dx \quad \forall\ v \in \mathcal{D}(\Omega) \tag{1.2}$$

Άρα, αντί να αναζητήσουμε τη λύση του (1.1) αρκεί να αναζητήσουμε μία συνάρτηση u που ικανοποιεί την (1.2) και μηδενίζεται στο σύνορο. Ας παρατηρήσουμε ότι σύμφωνα με το αριστερό μέλος της (1.2), η λύση u έχει νόημα κάτω από ασθενέστερες υποθέσεις και δε χρειάζεται να είναι $C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, όπως λέγαμε νωρίτερα. Ένας βολικός χώρος στον οποίο μπορούμε να αναζητήσουμε τη λύση μας είναι ο χώρος Sobolev $H^1(\Omega)$ και μιας και ζητούμε να μηδενίζεται στο σύνορο, ο χώρος $H_0^1(\Omega)$. Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τους χώρους Sobolev παραπέμπουμε στο Παράρτημα. Επίσης, μιας και ο χώρος $\mathcal{D}(\Omega)$ είναι πυκνός στον $H_0^1(\Omega)$, θα ισχύει:

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_\Omega f v dx \quad \forall\ v \in H_0^1(\Omega)$$

Τότε, το πρόβλημα (1.1) μετασχηματίζεται στο κάτωθι:

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_\Omega f v dx \quad \forall\ v \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{1.3}$$

Το πρόβλημα (1.3) καλείται *ασθενής ή μεταβολική διατύπωση* του (1.1) και η u *ασθενής λύση* του (1.1).

Έχοντας ξεκινήσει από το (1.1) και καταλήξει στο (1.3), συμπεραίνουμε ότι κάθε κλασική λύση είναι και ασθενής! Από την άλλη, αν το (1.3) έχει μοναδική λύση, τότε αυτή θα είναι και η λύση του (1.1).

Θεώρημα 1.1. *Έστω Ω ανοικτό και φραγμένο προς μία κατεύθυνση υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Ας είναι ακόμα, $f \in H^{-1}(\Omega)$. Τότε υπάρχει μοναδική λύση στο πρόβλημα*

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = \langle f, v\rangle \quad \forall\ v \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{1.4}$$

όπου $\langle \cdot, \cdot \rangle$ συμβολίζει το duality bracket μεταξύ των $H^{-1}(\Omega)$ και $H_0^1(\Omega)$.

Η απόδειξη του Θεωρήματος παραλείπεται, μιας και στην επόμενη παράγραφο θα αποδειχθεί σε γενικότερη μορφή.

1.2 Το Θεώρημα Lax-Milgram

Ορμώμενοι από το παράδειγμα της παραγράφου 1.1, θα θέλαμε να είμαστε σε θέση να αντιμετωπίσουμε προβλήματα της μορφής (1.4), που όμως το αριστερό μέλος της εξίσωσης να μην είναι απαραίτητα ένα εσωτερικό γινόμενο, αλλά ένα γενικότερο διγραμμικό συναρτησιακό. Τέτοια προβλήματα είναι ιδιαίτερα ενδιαφέροντα από άποψη εφαρμογών (ρευστομηχανική, ελαστικότητα κλπ.), ώστε να αξίζει να τα μελετήσει κανείς.

Θεώρημα 1.2. *(Lax-Milgram): Έστω H χώρος Hilbert και $\mathcal{A}(u,v) : H \times H \to \mathbb{R}$ ένα διγραμμικό συναρτησιακό στον H, έτσι ώστε να είναι συνεχές, δηλαδή να υπάρχει σταθερά C τέτοια ώστε*

$$|\mathcal{A}(u,v)| \leq C\|u\|_H\|v\|_H \quad \forall\ u, v \in H \tag{1.5}$$

και πιεστικό, δηλαδή για κάποιο $\alpha > 0$

$$\mathcal{A}(u,u) \geq \alpha\|u\|_H^2 \quad \forall\ u \in H. \tag{1.6}$$

Τότε, για $f \in H^*$, το δυϊκό του H, υπάρχει μοναδική λύση στο πρόβλημα

$$\mathcal{A}(u,v) = \langle f, v\rangle \quad \forall\ v \in H. \tag{1.7}$$

Αν επιπλέον το $\mathcal{A}$ είναι συμμετρικό, δηλαδή

$$\mathcal{A}(u,v) = \mathcal{A}(v,u) \quad \forall\ u, v \in H \tag{1.8}$$

τότε υπάρχει μοναδικό $u \in H$ που ελαχιστοποιεί το συναρτησιακό

$$\mathcal{J}(v) = \frac{1}{2}\mathcal{A}(v,v) - \langle f, v\rangle \tag{1.9}$$

στο χώρο H.

Αποδειξη. Δεδομένου ότι η απεικόνιση $v \mapsto \mathcal{A}(u,v)$ είναι ένα συνεχές, γραμμικό συναρτησιακό στον H, από το Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz υπάρχει μοναδικό $Tu \in H$, ώστε

$$\mathcal{A}(u,v) = (Tu, v) \quad \forall\, v \in H$$

και η απεικόνιση $u \mapsto Tu$ είναι γραμμική. Έστω, τώρα, $v \in (TH)^{\perp}$, τότε $0 = (Tv, v) = \mathcal{A}(v,v) \overset{(1.6)}{\geq} \alpha \|v\|_H^2 \geq 0$ και άρα $v = 0$. Ακόμα, αφού $f \in H^*$, από το Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz θα υπάρχει μοναδικό $\tilde{f} \in H$, ώστε $\langle f, v\rangle = (\tilde{f}, v) \ \ \forall\, v \in H$. Όμως ο TH είναι πυκνός στον H και άρα υπάρχει ακολουθία $u_n \in H$, έτσι ώστε

$$Tu_n \to \tilde{f} \text{ στον } H. \tag{1.10}$$

και άρα θα υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε $\|Tu_n\|_H \leq c$, επομένως

$$\alpha \|u_n\|_H^2 \overset{(1.6)}{\leq} \mathcal{A}(u_n, u_n) = (Tu_n, u_n) \leq c\|u_n\|_H$$

Αυτό συνεπάγεται ότι η u_n είναι φραγμένη στον H, και τότε από το Θεώρημα Bolzano-Weierstraß μπορούμε να βρούμε μια υπακολουθία, που για απλότητα θα τη συμβολίζουμε κι αυτή με u_n, που θα συγκλίνει ασθενώς στον H, δηλαδή $u_n \rightharpoonup u \in H$. Λόγω της (1.10) για κάθε $v \in H$

$$\lim_{n\to\infty} (Tu_n, v) = (\tilde{f}, v) = \langle f, v\rangle \tag{1.11}$$

Από την άλλη,

$$\lim_{n\to\infty} (Tu_n, v) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{A}(u_n, v) = \mathcal{A}(u,v) \tag{1.12}$$

διότι το $\mathcal{A}(\cdot, v)$ είναι συνεχές στον H. Συνδυάζοντας τις (1.11) και (1.12) προκύπτει ότι η $u \in H$ είναι λύση της

$$\mathcal{A}(u,v) = \langle f, v\rangle \quad \forall\, v \in H \tag{1.13}$$

και κάπως έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη της ύπαρξης.

Για τη μοναδικότητα, θεωρούμε $\tilde{u}$ μια άλλη λύση της (1.13). Τότε, θα ισχύει

$$\mathcal{A}(u,v) = \mathcal{A}(\tilde{u}, v) \quad \forall\, v \in H. \tag{1.14}$$

Επιλέγοντας $v = u - \tilde{u}$ και κάνοντας χρήση της (1.6) λαμβάνουμε

$$\alpha \|u - \tilde{u}\|^2 \leq \mathcal{A}(u - \tilde{u}, u - \tilde{u}) \overset{(1.14)}{=} 0$$

και άρα $u \equiv \tilde{u}$, που σημαίνει ότι η (1.13) έχει μοναδική λύση.

Τέλος, αν υποθέσουμε ότι το $\mathcal{A}$ είναι συμμετρικό και u η μοναδική λύση της (1.13), τότε για $v \in H$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}(u+v) &= \frac{1}{2}\mathcal{A}(u+v, u+v) - \langle f, u+v\rangle \\
&= \frac{1}{2}\mathcal{A}(u,u) + \mathcal{A}(u,v) + \frac{1}{2}\mathcal{A}(v,v) - \langle f, u\rangle - \langle f, v\rangle \\
&= \mathcal{J}(u) + \frac{1}{2}\mathcal{A}(v,v)
\end{aligned}$$

Θέτοντας όπου v το $v - u$ παίρνουμε

$$\mathcal{J}(v) = \mathcal{J}(u) + \frac{1}{2}\mathcal{A}(v-u, v-u) \geq \mathcal{J}(u) + \frac{\alpha}{2}\|v-u\|_H^2 \geq \mathcal{J}(u) \quad \forall\, v \in H$$

και άρα $\mathcal{J}(u) = \min_{v\in H} \mathcal{J}(v)$. Αν, τώρα, θεωρήσουμε ότι υπάρχει $\hat{u} \neq u$ που ελαχιστοποιεί το $\mathcal{J}$, τότε, για $v = \hat{u} \in H$, η τελευταία σχέση δίνει:

$$\mathcal{J}(\hat{u}) \geq \mathcal{J}(u) + \frac{\alpha}{2}\|\hat{u} - u\|_H^2 > \mathcal{J}(u)$$

που είναι άτοπο, μιας και $\mathcal{J}(\hat{u}) = \min_{v\in H} \mathcal{J}(v) = \mathcal{J}(u)$. □

1.3 Εφαρμογές του Θεωρήματος Lax-Milgram

Έστω Ω ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι $a_{ij}(x)$, $\forall\, i,j \in \{1,2,\dots,n\}$ και $a(x)$ είναι $L^\infty(\Omega)$ συναρτήσεις, τέτοιες ώστε να υπάρχει $\alpha > 0$, με

$$a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2 \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n, \text{ σχεδόν για κάθε } x \in \Omega \tag{1.15}$$

και

$$a(x) \geq \beta > 0 \ \text{ σχεδόν για κάθε } x \in \Omega \tag{1.16}$$

Παρατήρηση 1.1. *Ας παρατηρήσουμε ότι στη σχέση (1.15) έχουμε χρησιμοποιήσει τη σύμβαση άθροισης του Einstein, δηλαδή όπου υπάρχει διπλός δείκτης εννοείται άθροιση ως προς αυτόν και παραλείπουμε το σύμβολο της άθροισης. Εφεξής, θα χρησιμοποιούμε σιωπηρά αυτή τη σύμβαση.*

Τότε, μπορούμε να δείξουμε το ακόλουθο Θεώρημα:

Θεώρημα 1.3. *Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, με σύνορο Γ. Αν υποθέσουμε ότι ισχύουν οι (1.15) και (1.16), τότε για $f \in H^{-1}(\Omega)$, θα υπάρχει μοναδική λύση u στο πρόβλημα (Dirichlet):*

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega \left\{ a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial v}{\partial x_i} + a(x)uv \right\} dx = \langle f, v\rangle \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{1.17}$$

Απόδειξη. Θα κάνουμε χρήση του Θεωρήματος Lax-Milgram. Θέτουμε

$$\mathcal{A}(u,v) = \int_\Omega \left\{ a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial v}{\partial x_i} + a(x)uv \right\} dx \tag{1.18}$$

Προφανώς, το $\mathcal{A}$ είναι διγραμμικό συναρτησιακό στον $H_0^1(\Omega)$. Αφού $a_{ij}, a \in L^\infty(\Omega)$, θα υπάρχει $A > 0$, ώστε

$$|a_{ij}(x)|, |a(x)| \leq A \ \text{ σχεδόν για κάθε } x \in \Omega. \tag{1.19}$$

Ακόμα, για κάθε $i = 1,2,\dots,n$ είναι

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2} = |\nabla u| \tag{1.20}$$

Παρατήρηση 1.2. *Ας κρατήσουμε την (1.20) στο πίσω μέρος του μυαλού μας, καθώς θα χρειαστεί σε αρκετά σημεία, κατά τη διάρκεια της μελέτης των ελλειπτικών προβλημάτων.*

Τότε:

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{A}(u,v)| &\leq \int_\Omega \left\{ |a_{ij}(x)| \left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right| \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| + |a||u||v| \right\} dx \\
&\overset{(1.19)}{\leq} n^2 A \int_\Omega \left\{ \left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right| \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| + |u||v| \right\} dx \\
&\overset{(1.20)}{\leq} n^2 A \int_\Omega \{ |\nabla u||\nabla v| + |u||v| \} dx \\
&= n^2 A \ (u,v)_{H_0^1(\Omega)} \\
&\leq n^2 A \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}
\end{aligned}
$$

που σημαίνει ότι το $\mathcal{A}$ είναι συνεχές. Ας σημειώσουμε ότι η τελευταία ανισότητα προκύπτει κάνοντας χρήση της ανισότητας Cauchy-Schwarz, ενώ ο όρος n^2 οφείλεται στο (σιωπηρό) διπλό άθροισμα ως προς i και j. Τέλος, το $\mathcal{A}$ είναι πιεστικό. Πράγματι,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}(u,u) &= \int_\Omega \left\{ a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x) u^2 \right\} dx \\
&\overset{(1.15)}{\geq} \int_\Omega \left\{ \alpha |\nabla u|^2 + a(x) u^2 \right\} dx \\
&\overset{(1.16)}{\geq} \int_\Omega \left\{ \alpha |\nabla u|^2 + \beta u^2 \right\} dx \\
&\geq \min\{\alpha, \beta\} \int_\Omega \left\{ |\nabla u|^2 + u^2 \right\} dx \\
&= \min\{\alpha, \beta\} \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}
\end{aligned}
$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω, ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Lax-Milgram και άρα το πρόβλημα (1.17) έχει μοναδική λύση. □

Παρατήρηση 1.3. *Το πρόβλημα (1.17) είναι η μεταβολική διατύπωση του*

$$
\begin{cases}
-\dfrac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \dfrac{\partial u}{\partial x_j} \right) + a(x) u = f & \text{στο } \Omega \\
u = 0 & \text{στο σύνορο } \Gamma
\end{cases}
\tag{1.21}
$$

επομένως δείξαμε ότι η ως άνω u θα είναι η μοναδική ασθενής λύση του εν λόγω προβλήματος. Επίσης, στην περίπτωση που το a_{ij} είναι συμμετρικό, δηλαδή $a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \ \ \forall\, i,j = 1,2,\ldots,n$ και σχεδόν για κάθε $x \in \Omega$, και το $\mathcal{A}$ είναι συμμετρικό, άρα το u είναι το μοναδικό στοιχείο του $H_0^1(\Omega)$ που ελαχιστοποιεί το συναρτησιακό

$$
\mathcal{J}(v) = \frac{1}{2} \int_\Omega \left\{ a_{ij}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} + a(x) v^2 \right\} dx - \langle f, v \rangle
$$

Στη συνέχεια, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η διγραμμική μορφή (1.18) του προβλήματος (1.17) είναι ορισμένη στον $H^1(\Omega)$, αντί του $H_0^1(\Omega)$. Τότε, οδηγούμαστε στο ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 1.4. *Έστω Ω ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, με σύνορο Γ. Αν υποθέσουμε ότι ισχύουν οι (1.15) και (1.16), τότε αν $f \in L^2(\Omega)$, το πρόβλημα*

$$
\begin{cases}
u \in H^1(\Omega) \\
\displaystyle\int_\Omega \left\{ a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} + a(x) u v \right\} dx = \int_\Omega f v dx \quad \forall\ v \in H^1(\Omega)
\end{cases}
\tag{1.22}
$$

έχει μοναδική λύση.

Απόδειξη. Έστω η διγραμμική μορφή (1.18). Στην απόδειξη του Θεωρήματος 1.3 δείξαμε ότι είναι συνεχής και πιεστική στον $H_0^1(\Omega)$. Με τον ίδιο τρόπο, αποδεικνύει κανείς ότι είναι συνεχής και πιεστική στον $H^1(\Omega)$, δεδομένου ότι οι νόρμες των δύο χώρων είναι ίδιες. Πρέπει, μόνο, να δείξουμε ότι το δεξί μέλος της εξίσωσης του προβλήματος (1.22) είναι γραμμικό και συνεχές στον $H^1(\Omega)$ ως προς v. Η γραμμικότητα είναι προφανής, ενώ για τη συνέχεια έχουμε:

$$\left|\int_\Omega fv dx\right| = |(f,v)_{L^2(\Omega)}| \le \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \le \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}$$

διότι

$$\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_\Omega v^2 dx \le \int_\Omega \{v^2 + |\nabla v|^2\} dx = \|v\|_{H^1(\Omega)}^2$$

και άρα $\|v\|_{L^2(\Omega)} \le \|v\|_{H^1(\Omega)}$. Επομένως, εφαρμόζοντας το Lax-Milgram για $H = H^1(\Omega)$ λαμβάνουμε ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης του (1.22) και η απόδειξη ολοκληρώνεται. □

Παρατήρηση 1.4. *Αν στην (1.22) πάρουμε το $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, θα ισχύει*

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + a(x)u = f \tag{1.23}$$

με την έννοια των κατανομών.

Αν και η u του (1.22) ικανοποιεί την ίδια εξίσωση με τη u του (1.17), αναφερόμαστε σε διαφορετικές συναρτήσεις! Κι αυτό, διότι όπως ακριβώς στο πρόβλημα (1.17) υπάρχει κρυμμένη μέσα στο φορμαλισμό η συνοριακή συνθήκη του ισχυρού προβλήματος (1.21), έτσι και στην (1.22) ενυπάρχει μια συνοριακή συνθήκη κρυμμένη κι αυτή με τη σειρά της στο φορμαλισμό του προβλήματος. Έτσι, αν υποθέσουμε ότι οι u, v και τα a_{ij} είναι αρκετά ομαλά, ώστε οι παρακάτω υπολογισμοί να μη στερούνται νοήματος, παρατηρούμε ότι

$$a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}v\right) - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)v$$

Τότε

$$\int_\Omega \left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}v\right) + \left[-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + a(x)u\right]v\right\}dx = \int_\Omega fv dx$$

Από την (1.23) συνεπάγεται ότι

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}v\right)dx = 0$$

και αν επικαλεστούμε το Θεώρημα της Απόκλισης, προκύπτει

$$\int_\Gamma a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\nu_i v d\sigma(x) = 0 \tag{1.24}$$

με $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα, με κατεύθυνση το εξωτερικό του Γ. Αν επιπλέον τα δεδομένα επιλεγούν κατάλληλα ομαλά, ώστε $a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\nu_i \in L^2(\Gamma)$, τότε η (1.24) δίνει

$$a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\nu_i = 0 \quad d\sigma - \text{σχεδόν παντού στο } \Gamma \tag{1.25}$$

Αντιστρόφως, αν $u \in H^1(\Omega)$ είναι κατάλληλα ομαλή λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\right) + a(x)u = f & \text{στο } \Omega \\ a_{ij}(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\nu_i = 0 & \text{στο } \Gamma \end{cases} \tag{1.26}$$

είναι εμφανές ότι η (1.22) είναι η ασθενής διατύπωσή του. Το πρόβλημα (1.26) είναι μια αρκετά γενική περίπτωση γραμμικού ελλειπτικού προβλήματος με συνοριακές τύπου Neumann. Τωόντι, στην ειδική περίπτωση που επιλέξουμε $(a_{ij}) = \mathbb{I}_n$ (το μοναδιαίο $n \times n$ πίνακα) και $a = 1$, προκύπτει το πρόβλημα

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{στο } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{στο } \Gamma \end{cases} \tag{1.27}$$

όπου $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ η κάθετη παράγωγος του u.

Τέλος, ας αναφέρουμε εν τάχει ότι μπορούμε να αντιμετωπίσουμε και μη ομογενή προβλήματα κάνοντας μια αλλαγή μεταβλητής. Ας θεωρήσουμε το πρόβλημα

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\right) + a(x)u = f & \text{στο } \Omega \\ u = g & \text{στο } \Gamma \end{cases} \tag{1.28}$$

κάτω από τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος 1.3, με $f \in H^{-1}(\Omega)$ και $g \in H^1(\Omega)$. Θέτοντας $u - g = w$, το πρόβλημα μετασχηματίζεται στο

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\dfrac{\partial w}{\partial x_j}\right) + a(x)w = f + ga(x) + \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\dfrac{\partial g}{\partial x_j}\right) & \text{στο } \Omega \\ w = 0 & \text{στο } \Gamma \end{cases} \tag{1.29}$$

Προφανώς το δεξί μέλος της εξίσωσης του (1.29) ανήκει στον $H^{-1}(\Omega)$ και άρα από το Θεώρημα 1.3 υπάρχει μοναδική ασθενής λύση w του προβλήματος (1.29), ενώ η $u = w + g$ είναι η μοναδική ασθενής λύση του (1.28). Θα κλείσουμε το κεφάλαιο με μία παρατήρηση που θα μας χρειαστεί ξανά αρκετά αργότερα, στα μη γραμμικά παραβολικά προβλήματα:

Παρατήρηση 1.5. *Είναι εύκολο να δει κανείς, ότι αν u κατάλληλα ομαλή λύση του προβλήματος*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{στο } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{στο } \Gamma \end{cases} \tag{1.30}$$

και $f \in L^1(\Omega)$, τότε πρέπει να ισχύει

$$\int_\Omega f dx = 0 \tag{1.31}$$

γιατί

$$\int_\Omega f dx = \int_\Omega -\Delta u dx = -\int_\Gamma \nabla u \cdot \nu d\sigma(x) = -\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma(x) = 0$$

ενώ κάθε συνάρτηση της μορφής $u - c$, $c \in \mathbb{R}$ είναι επίσης λύση του προβλήματος.

Κεφάλαιο 2

Ελλειπτικές Μεταβολικές Ανισότητες

Στο κεφάλαιο αυτό, εισάγουμε ένα πρώτο είδος μη γραμμικών προβλημάτων: τις μεταβολικές ανισότητες. Τα προβλήματα αυτά αποτελούνται από ανισότητες που εμπεριέχουν κάποιο συναρτησιακό και πρέπει να επιλυθούν, συνήθως, σε κάποιο κυρτό σύνολο. Η θεωρία των μεταβολικών ανισοτήτων είναι ιδιαίτερα νέα! Το πρώτο πρόβλημα διατυπώθηκε το 1959 και επιλύθηκε τέσσερα χρόνια αργότερα και έκτοτε οι μεταβολικές ανισότητες έχουν βρει εφαρμογή σε κλάδους όπως η μαθηματική φυσική, η βελτιστοποίηση, τα χρηματοοικονομικά και η θεωρία παιγνίων.

2.1 Το Θεώρημα Stampacchia

Το ακόλουθο Θεώρημα αποτελεί γενίκευση του Θεωρήματος Lax-Milgram και του Θεωρήματος Προβολής σε ένα κλειστό και κυρτό σύνολο, σε ένα χώρο Hilbert.

Θεώρημα 2.1. *(Stampacchia): Έστω $K \neq \emptyset$ κλειστό και κυρτό σύνολο, σε ένα χώρο Hilbert H. Υποθέτουμε, ακόμα, ότι $\mathcal{A} = \mathcal{A}(u, v)$ είναι ενα συνεχές και πιεστικό διγραμμικό συναρτησιακό στον H, δηλαδή ισχύουν οι (1.5) και (1.6). Τότε, για $f \in H^*$, το δυϊκό του H, υπάρχει μοναδική λύση u στο πρόβλημα*

$$\begin{cases} u \in K \\ \mathcal{A}(u, v-u) \geq \langle f, v-u \rangle \quad \forall\ v \in K \end{cases} \tag{2.1}$$

Επιπλέον, στην περίπτωση που το $\mathcal{A}$ είναι συμμετρικό, το u είναι το μοναδικό στοιχείο του K που ελαχιστοποιεί το συναρτησιακό

$$\mathcal{J}(v) = \frac{1}{2}\mathcal{A}(v, v) - \langle f, v \rangle.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε $\mathcal{A}_s$ και $\mathcal{A}_a$ το συμμετρικό και αντισυμμετρικό μέρος του $\mathcal{A}$, αντίστοιχα, που ορίζονται ως εξής:

$$\mathcal{A}_s = \frac{\mathcal{A}(u, v) + \mathcal{A}(v, u)}{2}, \quad \mathcal{A}_a = \frac{\mathcal{A}(u, v) - \mathcal{A}(v, u)}{2}$$

Από τις (1.5) και (1.6) προκύπτουν τα ακόλουθα:

$$|\mathcal{A}_s(u, v)| \leq \frac{1}{2}\left\{|\mathcal{A}(u, v)| + |\mathcal{A}(v, u)|\right\} \leq c\|u\|_H \|v\|_H$$

$$\mathcal{A}_s(u,u) = \mathcal{A}(u,u) \geq \alpha \|u\|_H^2$$

Τότε, το $\mathcal{A}_s$ είναι ένα βαθμωτό γινόμενο στον H και άρα από το Θεώρημα αναπαράστασης του Riesz υπάρχει μοναδική $\tilde{f} \in H$ ώστε

$$\mathcal{A}_s(\tilde{f}, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall\ v \in H$$

και τότε, από το Θεώρημα Προβολής σε κλειστό και κυρτό υποσύνολο ενός χώρου Hilbert, υπάρχει μοναδικό $u \in K$ που θα ελαχιστοποιεί την απόσταση μεταξύ της $\tilde{f}$ και του K. Αυτό σημαίνει ότι η u είναι η μοναδική λύση του:

$$\begin{cases} u \in K \\ \mathcal{A}_s(u, v-u) \geq \mathcal{A}_s(\tilde{f}, v-u) = \langle f, v-u \rangle \quad \forall\ v \in K \end{cases} \tag{2.2}$$

Για $t \in \mathbb{R}$, ορίζουμε

$$\mathcal{A}_t(u,v) = \mathcal{A}_s(u,v) + t\mathcal{A}_a(u,v)$$

και το σύνολο

$$T = \{t \in \mathbb{R} \mid \forall\ f \in H^* \text{ το πρόβλημα } P_t \text{ έχει μοναδική λύση}\}$$

όπου το πρόβλημα (P_t) είναι το

$$\begin{cases} u \in K \\ \mathcal{A}_t(u, v-u) \geq \langle f, v-u \rangle \quad \forall\ v \in K \end{cases}$$

Λόγω της (2.2), το T είναι μη κενό, διότι περιέχει τουλάχιστον το $t = 0$. Αν υποθέσουμε ότι $t_0 \in T$, τότε ισχυριζόμαστε ότι $[t_0 - \frac{\alpha}{2C}, t_0 + \frac{\alpha}{2C}] \subset T$, όπου α, C οι σταθερές των (1.5) και (1.6). Πράγματι, αν $t_0 \in T$, για $f \in H^*$ και $w \in H$, υπάρχει $u = F(w)$ μοναδική λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} u \in K \\ \mathcal{A}_{t_0}(u, v-u) \geq \langle f, v-u \rangle + (t_0 - t)\mathcal{A}_a(w, v-u) \quad \forall\ v \in K \end{cases} \tag{2.3}$$

δεδομένου ότι η απεικόνιση $v \mapsto \langle f, v \rangle + (t_0 - t)\mathcal{A}_a(w, v)$ είναι στοιχείο του H^*. Στη συνέχεια, ισχυριζόμαστε ότι για $t_0 - t$ αρκετά μικρό, η απεικόνιση $w \mapsto F(w)$ είναι συστολή στον H. Τωόντι, ας είναι $w_1, w_2 \in H$ και u_1, u_2 οι λύσεις του προβλήματος (2.3) για $w = w_1$ και $w = w_2$ αντίστοιχα. Είναι $u_1, u_2 \in K$ και

$$\mathcal{A}_{t_0}(u_1, v-u_1) \geq \langle f, v-u_1 \rangle + (t_0 - t)\mathcal{A}_a(w_1, v-u_1) \quad \forall\ v \in K$$

$$\mathcal{A}_{t_0}(u_2, v-u_2) \geq \langle f, v-u_2 \rangle + (t_0 - t)\mathcal{A}_a(w_2, v-u_2) \quad \forall\ v \in K$$

Επιλέγοντας $v = u_2$ στην πρώτη και $v = u_1$ στη δεύτερη και προσθέτοντας, λαμβάνουμε ύστερα από λίγες πράξεις

$$\mathcal{A}_{t_0}(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \leq (t_0 - t)\mathcal{A}_a(w_1 - w_2, u_1 - u_2) \tag{2.4}$$

Λόγω του γεγονότος ότι $\mathcal{A}_a(v,v) = 0$ προκύπτει ότι

$$\mathcal{A}_{t_0}(v,v) = \mathcal{A}_s(v,v) = \mathcal{A}(v,v) \quad \forall\ v \in H$$

Οπότε, από τη (2.4) σε συνδυασμό με τις (1.5) και (1.6), εξάγουμε τη σχέση

$$\alpha\|u_1 - u_2\|_H^2 \leq |t_0 - t|C\|w_1 - w_2\|_H\|u_1 - u_2\|_H$$

και άρα

$$\|u_1 - u_2\|_H = \|F(w_1) - F(w_2)\|_H \leq |t_0 - t|\frac{C}{\alpha}\|w_1 - w_2\|_H \leq \frac{1}{2}\|w_1 - w_2\|_H$$

για $t \in [t_0 - \frac{\alpha}{2C}, t_0 + \frac{\alpha}{2C}]$, που σημαίνει ότι η F είναι πράγματι συστολή. Αν επικαλεστούμε το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Banach, λαμβάνουμε ότι όταν $t \in [t_0 - \frac{\alpha}{2C}, t_0 + \frac{\alpha}{2C}]$, η F θα έχει ένα σταθερό σημείο και άρα $u = F(w) = w$, συνεπώς από (2.3) η u είναι λύση του (P_t).

Ας δείξουμε, τώρα, τη μοναδικότητα της λύσης. Έστω u' μια άλλη λύση του (P_t), τότε $u, u' \in K$ και

$$\mathcal{A}_t(u, v - u) \geq \langle f, v - u\rangle \quad \forall\, v \in K$$
$$\mathcal{A}_t(u', v - u') \geq \langle f, v - u'\rangle \quad \forall\, v \in K$$

Επιλέγοντας στην πρώτη ανισότητα $v = u'$ και $v = u$ στη δεύτερη και κατόπιν προσθέτοντας κατά μέλη, προκύπτει:

$$\alpha\|u - u'\|_H^2 \leq \mathcal{A}(u - u', u - u') = \mathcal{A}_t(u - u', u - u') \leq 0$$

συνεπώς $u' = u$ και άρα η λύση είναι μοναδική. Από τα παραπάνω, συμπεραίνουμε ότι $T = \mathbb{R}$ και άρα το (P_t) έχει μοναδική λύση $\forall\, t \in \mathbb{R}$. Επιλέγοντας $t = 1$ παίρνουμε το (2.1), το οποίο θα έχει μοναδική λύση.

Όταν επιπλέον το $\mathcal{A}$ είναι συμμετρικό, το αντισυμμετρικό μέρος εξαφανίζεται, οπότε $\mathcal{A} = \mathcal{A}_s$ και για $v \in K$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}(v) = \mathcal{J}(u + v - u) &= \frac{1}{2}\mathcal{A}(u + v - u, u + v - u) - \langle f, u + v - u\rangle \\
&= \mathcal{J}(u) + \mathcal{A}(u, v - u) + \frac{1}{2}\mathcal{A}(v - u, v - u) - \langle f, v - u\rangle \\
&\geq \mathcal{J}(u) + \frac{1}{2}\mathcal{A}(v - u, v - u) \\
&\geq \mathcal{J}(u) + \frac{1}{2}\alpha\|v - u\|_H^2 \\
&\geq \mathcal{J}(u)
\end{aligned}$$

οπότε το u ελαχιστοποιεί το $\mathcal{J}$ στον K. Αν, τώρα, θεωρήσουμε ότι υπάρχει $\hat{u} \neq u$ που ελαχιστοποιεί το $\mathcal{J}$, τότε, για $v = \hat{u} \in K$, η τελευταία σχέση δίνει:

$$\mathcal{J}(\hat{u}) \geq \mathcal{J}(u) + \frac{\alpha}{2}\|\hat{u} - u\|_H^2 > \mathcal{J}(u)$$

που είναι άτοπο, μιας και $\mathcal{J}(\hat{u}) = \min_{v \in H} \mathcal{J}(v) = \mathcal{J}(u)$. $\square$

Παρατήρηση 2.1. *Στην περίπτωση που ο K είναι διανυσματικός χώρος για κάθε $v \in K$, το $u \pm v \in K$ και άρα αν επιλέξουμε για v το $u + v$ τη μία φορά και το $u - v$ την άλλη, παίρνουμε*

$$\mathcal{A}(u, v) \geq \langle f, v\rangle, \text{ και } \mathcal{A}(u, -v) \geq \langle f, -v\rangle \quad \forall\, v \in K$$

επομένως η $u \in K$ είναι λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} u \in K \\ \mathcal{A}(u,v) = \langle f, v \rangle \quad \forall\, v \in K \end{cases}$$

που είναι το Θεώρημα Lax-Milgram.

Ενίοτε είναι βολικό να χρησιμοποιούμε μια ισοδύναμη μορφή του (4.2), ιδιαίτερα όταν ασχολούμαστε με μη γραμμικούς τελεστές:

Θεώρημα 2.2. *(Minty): Το πρόβλημα (2.1) είναι ισοδύναμο με το*

$$\begin{cases} u \in K \\ \mathcal{A}(v, v-u) \geq \langle f, v-u \rangle \quad \forall\, v \in K \end{cases} \tag{2.5}$$

Απόδειξη. (2.1) $\Rightarrow$ (2.5) : Έστω u λύση του (2.1). Τότε

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(v, u-v) &= \mathcal{A}(u, v-u) + \mathcal{A}(v-u, v-u) \\ &\geq \mathcal{A}(u, v-u) + \alpha \|v-u\|_H^2 \\ &\geq \mathcal{A}(u, v-u) \\ &\geq \langle f, v-u \rangle \ \ \forall\, v \in K \end{aligned}$$

(2.5) $\Rightarrow$ (2.1) Έστω u λύση του (2.5). Επιλέγοντας στο (2.5) $v = u + t(v-u) \in K \ \forall\, t \in (0,1)$ οδηγούμαστε στο

$$\mathcal{A}(u + t(v-u), t(v-u)) \geq t\langle f, v-u \rangle \quad \forall\, v \in K$$

Διαιρώντας με t παίρνουμε

$$\mathcal{A}(u + t(v-u), (v-u)) \geq \langle f, v-u \rangle \quad \forall\, v \in K$$

και αφήνοντας το $t \to 0^+$ προκύπτει

$$\mathcal{A}(u, v-u) \geq \langle f, v-u \rangle \quad \forall\, v \in K \quad \square$$

2.2 To Obstacle Problem

Μία πολύ ενδιαφέρουσα εφαρμογή των μεταβολικών ανισοτήτων είναι το Obstacle Problem, ένα από τα πιο ενδιαφέροντα προβλήματα ελεύθερου συνόρου (free boundary problems). Ας θεωρήσουμε μια ελαστική μεμβράνη στερεωμένη πάνω σε ένα σώμα, η επιφάνεια του οποίου συμβολίζεται με Ω. Θέλουμε να βρούμε μια συνάρτηση u που θα περιγράφει την παραμόρφωση της μεμβράνης όταν αυτή έχει ισορροπήσει πάνω στο σώμα. Είναι εύκολο να σκεφτεί κανείς, ότι η θέση ισορροπίας u θα ελαχιστοποιεί τη συνολική ελαστική ενέργεια του συστήματος

$$E(v) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v|^2 dx \tag{2.6}$$

Αν φ είναι μια συνάρτηση ορισμένη στο Ω που περιγράφει το σώμα, τότε προφανώς δε θα είναι όλες οι παραμορφώσεις u αποδεκτές, παρά μόνο εκείνες για τις οποίες θα ισχύει

$$u \geq \varphi \quad \text{στο } \Omega$$

Ορίζουμε $K := \{v : \Omega \to \mathbb{R} \mid v \geq \varphi$ στο $\Omega,\ v = 0$ στο σύνορο $\Gamma\}$ και τότε το πρόβλημά μας είναι το ακόλουθο:

$$\begin{cases} u \in K \\ E(u) \leq E(v) \quad \forall\, v \in K \end{cases} \tag{2.7}$$

ενώ αν θέλουμε να το διατυπώσουμε με τη γλώσσα που χρησιμοποιούμε μέχρι τώρα, θα λέγαμε:

Έστω Ω ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με σύνορο Γ και $\varphi \in H^1(\Omega)$. Το K γράφεται

$$K = \{v \in H_0^1(\Omega) \mid v(x) \geq \varphi(x) \text{ σχεδόν για κάθε } x \in \Omega\} \tag{2.8}$$

Θεώρημα 2.3. *(Obstacle Problem) Υποθέτουμε ότι το Ω είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, φραγμένο προς μία κατεύθυνση. Αν $\varphi \in H^1(\Omega)$ και $\varphi^+ = \max\{\varphi, 0\} \in H_0^1(\Omega)$, τότε το πρόβλημα*

$$\begin{cases} u \in K \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(v - u)dx \geq 0 \quad \forall\, v \in K \end{cases} \tag{2.9}$$

έχει μοναδική λύση, η οποία είναι το μοναδικό στοιχείο του K που ελαχιστοποιεί το συναρτησιακό (2.6).

Απόδειξη. Αρκεί να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Stampacchia στο χώρο $H_0^1(\Omega)$, με $f = 0$, $\mathcal{A}(u, v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx$ και K όπως στη (2.8). Το $\mathcal{A}$ είναι συνεχές και πιεστικό. Πράγματι,

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}(u, v)| &= \left| \int_\Omega \nabla u \nabla v dx \right| \\ &\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \\ &= (\|u\|_{L^2(\Omega)}, \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}) \cdot (\|v\|_{L^2(\Omega)}, \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}) \\ &\leq \sqrt{\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}} \cdot \sqrt{\|v\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}} \\ &= \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \end{aligned}$$

και

$$\mathcal{A}(u, u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx = \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \geq \alpha \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}$$

διότι οι δύο νόρμες είναι ισοδύναμες. Μένει μόνο να επαληθεύσουμε ότι το K είναι κλειστό, κυρτό και μη κενό: Το μη κενό προκύπτει από την υπόθεση ότι $\varphi^+ \in H_0^1(\Omega)$ και αφού $\varphi^+ \geq \varphi$, συνεπάγεται ότι $\varphi^+ \in K$. Έστω τώρα $v, w \in K$. Ισχύει ότι $v, w \in H_0^1(\Omega)$, οπότε για $\lambda \in [0, 1]$ ο κυρτός συνδυασμός των $\lambda v + (1 - \lambda)w \in H_0^1(\Omega)$ και $\lambda v + (1 - \lambda)w \geq \lambda\varphi + (1 - \lambda)\varphi = \varphi$, επομένως $\lambda v + (1 - \lambda)w \in K$ και άρα το K είναι κυρτό. Τέλος, για να δείξουμε ότι είναι κλειστό θεωρούμε ακολουθία $\varphi_n \in K$ τέτοια ώστε

$$\varphi_n \to \varphi_\infty \ \text{ στον } H_0^1(\Omega) \tag{2.10}$$

Αν δείξουμε ότι $\varphi_\infty \in K$ τελειώσαμε. Λόγω της (2.10) προκύπτει ότι

$$\varphi_n \to \varphi_\infty \ \text{ στον } L^2(\Omega)$$

και άρα θα υπάρχει υπακολουθία φ_{n_k} που θα συγκλίνει κι εκείνη στην φ_∞ σχεδόν παντού στο Ω, ή αλλιώς

$$\varphi_{n_k}(x) \to \varphi_\infty(x) \quad \forall\ x \in \Omega \setminus U \tag{2.11}$$

όπου το U είναι σύνολο μέτρου Lebesgue μηδέν. Δεδομένου ότι $\varphi_{n_k} \in K$ έχουμε επιπλέον

$$\varphi_{n_k}(x) \geq \varphi(x) \quad \forall\ x \in \Omega \setminus U_k \tag{2.12}$$

όπου τα U_k είναι επίσης σύνολα μέτρου Lebesgue μηδέν. Συνδυάζοντας τις (2.11) και (2.12) προκύπτει ότι

$$\varphi_\infty(x) \geq \varphi(x) \quad \forall\ x \in \Omega \setminus \bigcup_k U_k \cup U$$

το οποίο μεταφράζεται ως

$$\varphi_\infty(x) \geq \varphi(x) \quad \text{σχεδόν παντού στο } \Omega$$

άρα $\varphi_\infty \in K$, επομένως το K είναι κλειστό και τελικά οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Stampacchia ικανοποιούνται και έτσι εξασφαλίζουμε μοναδική λύση στο πρόβλημα (2.9), η οποία θα είναι και το μοναδικό στοιχείο του K που ελαχιστοποιεί το συναρτησιακό

$$\mathcal{J}(v) = \frac{1}{2}\mathcal{A}(v,v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx \equiv E(v). \quad \square$$

Θα παρουσιάσουμε, τώρα, ένα γενικότερο αποτέλεσμα του Θεωρήματος 2.3:

Θεώρημα 2.4. *Έστω A, B δύο μετρήσιμα υποσύνολα του Ω και φ, ψ μετρήσιμες συναρτήσεις στα A, B αντίστοιχα. Ορίζουμε*

$$\begin{aligned} K = K(\varphi,\psi) = \{v \in H_0^1(\Omega) \mid\ & v(x) \geq \varphi(x) \text{ σχεδόν για κάθε } x \in A \\ & v(x) \leq \psi(x) \text{ σχεδόν για κάθε } x \in B\} \end{aligned}$$

Ας είναι, ακόμα $a_{ij}, a \in L^\infty(\Omega)$ που ικανοποιούν τις (1.15) και (1.16). Τότε, αν $K \neq \emptyset$ και $f \in H^{-1}(\Omega)$ υπάρχει μοναδική λύση u στο

$$\begin{cases} u \in K \\ \displaystyle\int_\Omega a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial (v-u)}{\partial x_i} + a(x)u(v-u)dx \geq \langle f, v-u\rangle \quad \forall\ v \in K \end{cases} \tag{2.13}$$

Η απόδειξη προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα Stampacchia, εφόσον ικανοποιηθούν οι προϋποθέσεις του, όπως κάναμε και στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.3.

Κλείνουμε το κεφάλαιο με ένα πολύ ενδιαφέρον αποτέλεσμα, γνωστό ως Ασθενή Αρχή του Μεγίστου, που μας επιτρέπει να συγκρίνουμε δύο λύσεις μεταξύ τους.

Θεώρημα 2.5. *Ας υποθέσουμε ότι βρισκόμαστε κάτω από τις υποθέσεις του Θεωρήματος 2.4 και u_k, $k = 1, 2$ λύσεις των αντίστοιχων προβλημάτων*

$$\begin{cases} u_k \in K(\varphi_k, \psi_k) \\ \displaystyle\int_\Omega a_{ij}(x)\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\frac{\partial (v-u_k)}{\partial x_i} + a(x)u_k(v-u_k)dx \geq \langle f_k, v-u_k\rangle \quad \forall\ v \in K(\varphi_k,\psi_k) \end{cases} \tag{2.14}$$

Τότε, υποθέτοντας ότι τα σύνολα $K(\varphi_k, \psi_k)$ είναι μη κενά, αν

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) \geq \varphi_2(x) \quad & \text{σχεδόν παντού στο } A \\ \psi_1(x) \geq \psi_2(x) \quad & \text{σχεδόν παντού στο } B \end{aligned} \tag{2.15}$$

και

$$f_1 \geq f_2 \quad \text{στον } H^{-1}(\Omega) \tag{2.16}$$

τότε

$$u_1(x) \geq u_2(x) \quad \text{σχεδόν παντού στο } \Omega$$

Παρατήρηση 2.2. *Η (2.16) σημαίνει ότι* $\langle f_1 - f_2, v\rangle \geq 0 \ \forall\ v \in H_0^1(\Omega)$*, με* $v(x) \geq 0$ *σχεδόν παντού στο* Ω*.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$(u_1 - u_2)^- = 0$$

Από το Θεώρημα 2.5 για $\mathcal{A}$ όπως ορίστηκε στην (1.17), θα ισχύει

$$\mathcal{A}(u_1, v - u_1) \geq \langle f_1, v - u_1\rangle \quad \forall\ v \in K(\varphi_1, \psi_1) \tag{2.17}$$

$$\mathcal{A}(u_2, v - u_2) \geq \langle f_2, v - u_2\rangle \quad \forall\ v \in K(\varphi_2, \psi_2) \tag{2.18}$$

Ισχυριζόμαστε ότι

$$u_1 + (u_1 - u_2)^- \in K(\varphi_1, \psi_1) \tag{2.19}$$

και

$$u_2 - (u_1 - u_2)^- \in K(\varphi_2, \psi_2) \tag{2.20}$$

Πράγματι, σύμφωνα με γνωστό Θεώρημα (παραπέμπουμε στο Θεώρημα 2.8 του [4]) οι δύο συναρτήσεις ανήκουν στον $H_0^1(\Omega)$ και ισχύουν

$$u_1 + (u_1 - u_2)^- \geq u_1 \geq \varphi_1$$

$$u_2 - (u_1 - u_2)^- = \min\{u_1, u_2\} \geq \min\{\varphi_1, \varphi_2\} = \varphi_2$$

σχεδόν παντού στο A και

$$u_1 + (u_1 - u_2)^- = \max\{u_1, u_2\} \leq \max\{\psi_1, \psi_2\} = \psi_1$$

σχεδόν παντού στο B, κι έτσι αποδείξαμε τις (2.19) και (2.20). Αντικαθιστώντας $u_1 + (u_1 - u_2)^-$ στη (2.17) και $u_2 - (u_1 - u_2)^-$ στη (2.18), παίρνουμε

$$\mathcal{A}(u_1, (u_1 - u_2)^-) \geq \langle f_1, (u_1 - u_2)^-\rangle \tag{2.21}$$

και

$$\mathcal{A}(u_2, -(u_1 - u_2)^-) \geq \langle f_2, -(u_1 - u_2)^-\rangle \tag{2.22}$$

και προσθέτοντας τις (2.21) και (2.22)

$$\mathcal{A}(u_1 - u_2, -(u_1 - u_2)^-) \leq \langle f_2 - f_1, (u_1 - u_2)^-\rangle \leq 0$$

και άρα

$$\mathcal{A}((u_1 - u_2)^-, (u_1 - u_2)^-) \leq 0$$

συνεπώς από (1.6) προκύπτει $(u_1 - u_2)^- = 0$, οπότε $u_1 = u_2$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Παρατήρηση 2.3. *Αναλόγως το* K *που επιλέγουμε (μεριμνώντας πάντα να είναι κυρτό), αλλάζει η φυσική του προβλήματος. Επί παραδείγματι, αν το* K *είναι το ακόλουθο*

$$K = \{v \in H_0^1(\Omega) \mid |\nabla v(x)| \leq 1 \text{ σχεδόν παντού στο } \Omega\} \tag{2.23}$$

τότε το πρόβλημα ονομάζεται πρόβλημα ελαστοπλαστικής στρέψης. Επιπλέον, το K *μπορεί να περιέχει και μη τοπικούς όρους, όπως π.χ.*

$$K = \left\{v \in H_0^1(\Omega) \;\middle|\; \int_\Omega j(v(x))dx \leq \alpha\right\} \tag{2.24}$$

όπου j *κυρτή συνάρτηση, ώστε το* K *να είναι κυρτό.*

Κεφάλαιο 3

Μη Γραμμικά Ελλειπτικά Προβλήματα

Στο παρόν κεφάλαιο, θα επικεντρωθούμε σε μη γραμμικές εξισώσεις. Μολονότι δεν υπάρχει κάποια γενική μέθοδος επίλυσης μη γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων, η τεχνική που χρησιμοποιείται ως επί το πλείστων βασίζεται σε θεωρήματα σταθερού σημείου. Για να γίνει αυτό, σε πρώτο στάδιο θα πρέπει να επιλυθεί το πρόβλημα σε ένα συναρτησιακό χώρο πεπερασμένης διάστασης και κατόπιν, να πάρουμε το όριο στο άπειρο. Αφού παρουσιάσουμε, λοιπόν, δύο μεθόδους επίλυσης μη γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων ελλειπτικού τύπου, θα μελετήσουμε μια ευρύτερη - από αυτά που μελετήθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο - κλάση προβλημάτων μεταβολικών ανισοτήτων.

3.1 Η Μέθοδος της Συμπάγειας

Ας θεωρήσουμε, λοιπόν, το πρόβλημα εύρεσης λύσεως u στο

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a(x,u)\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right) = f \quad \text{στο } \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{3.1}$$

όπου το Ω είναι ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και $f \in H^{-1}(\Omega)$.

Παρατήρηση 3.1. *Υπενθυμίζουμε ότι χρησιμοποιούμε τη σύμβαση Einstein, επομένως στην εξίσωση του (3.1) εννοείται άθροισμα ως προς $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.*

Για το a ζητούμε να είναι μια συνάρτηση Carathéodory, δηλαδή να ισχύουν

$$u \mapsto a(x,u) \text{ συνεχής, σχεδόν παντού στο } \Omega \tag{3.2}$$

$$x \mapsto a(x,u) \text{ μετρήσιμη, } \forall\, u \in \mathbb{R} \tag{3.3}$$

Υποθέτουμε ακόμα, ότι υπάρχουν σταθερές m, M τέτοιες ώστε

$$0 < m \le a(x,u) \le M \text{ σχεδόν παντού στο } \Omega \text{ και } \forall\, x \in \mathbb{R} \tag{3.4}$$

Τότε μπορούμε να δείξουμε το ακόλουθο Θεώρημα:

Θεώρημα 3.1. *Κάτω από τις ως άνω υποθέσεις, το πρόβλημα (3.1) έχει ασθενή λύση.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τη μεταβολική διατύπωση του (3.1)

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega a(x,u)\nabla u\cdot\nabla v dx = \langle f, v\rangle \quad \forall\ v\in H_0^1(\Omega) \\ u\in H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{3.5}$$

Έστω $\mathcal{V}_h,\ h\in\mathbb{R}$ οικογένεια πεπερασμένης διάστασης υποχώρων του $H_0^1(\Omega)$, έτσι ώστε

$$\forall\ v\in H_0^1(\Omega),\ \exists\ v_h\in\mathcal{V}_h \text{ ώστε } \lim_{h\to 0} v_h = v \text{ στον } H_0^1(\Omega) \tag{3.6}$$

Το πρώτο βήμα είναι να βρούμε μία προσέγγιση της λύση u. Για το λόγο αυτό, θεωρούμε το προσεγγιστικό πρόβλημα του (3.5)

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega a(x,u_h)\nabla u_h\cdot\nabla v dx = \langle f, v\rangle \quad \forall\ v\in \mathcal{V}_h \\ u_h\in \mathcal{V}_h \end{cases}$$

στο οποίο θα αναφερόμαστε ως (3.5_h). Ας παρατηρήσουμε ότι λόγω της μη γραμμικότητας του a, το συναρτησιακό

$$\mathcal{A}(u,v) = \int_\Omega a(x,u)\nabla u\cdot\nabla v dx$$

δεν είναι διγραμμικό, και άρα *δεν* μπορούμε να επικαλεστούμε το Θεώρημα Lax-Milgram. Αν όμως θέσουμε

$$\mathcal{A}(u,v) = \int_\Omega a(x,w)\nabla u\cdot\nabla v dx$$

τότε αίρεται η μη γραμμικότητα του a και ως εκ τούτου το νέο $\mathcal{A}$ είναι διγραμμικό! Ακόμα, είναι συνεχές, διότι

$$|\mathcal{A}(u,v)| = \left|\int_\Omega a(x,w)\nabla u\cdot\nabla v dx\right| \le \int_\Omega M|\nabla u\cdot\nabla v| dx \le M\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$$

και πιεστικό, αφού

$$\mathcal{A}(u,u) = \int_\Omega a(x,w)|\nabla u|^2 dx \ge m\int_\Omega |\nabla u|^2 dx = m\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

Σημειώνουμε ότι δεδομένου ότι ο $\mathcal{V}_h$ είναι χώρος πεπερασμένης διάστασης, όλες οι νόρμες είναι ισοδύναμες και άρα χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να επιλέξουμε $\|u\|_{\mathcal{V}_h} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$. Τότε, εφαρμόζοντας το Θεώρημα Lax-Milgram στο χώρο $\mathcal{V}_h$, προκύπτει ότι το πρόβλημα

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega a(x,w)\nabla u\cdot\nabla v dx = \langle f, v\rangle \quad \forall\ v\in \mathcal{V}_h \\ u\in \mathcal{V}_h \end{cases} \tag{3.7}$$

έχει μοναδική λύση $u = T(w)$.

Αν στο (3.7) επιλέξουμε $v = u\in\mathcal{V}_h$, τότε λαμβάνουμε

$$m\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \le \int_\Omega a(x,w)|\nabla u|^2 dx = \langle f,u\rangle \le \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

οπότε
$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq \left\| \frac{f}{m} \right\|_{H^{-1}(\Omega)} \tag{3.8}$$
Αυτό όμως σημαίνει, ότι αν επιλέξουμε $w \in \mathcal{B}_{\mathcal{V}_h}\left(0, \left\|\frac{f}{m}\right\|_{H^{-1}(\Omega)}\right)$ (την μπάλα κέντρου 0 και ακτίνας $\left\|\frac{f}{m}\right\|_{H^{-1}(\Omega)}$ του $\mathcal{V}_h$), το $u = T(w)$ θα ανήκει κι αυτό στην ίδια μπάλα και άρα από το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Brouwer, αν εξασφαλίσουμε τη συνέχειά της, η απεικόνιση T θα έχει ένα σταθερό σημείο στο $\mathcal{V}_h$. Ας θεωρήσουμε, λοιπόν, ακολουθία $w_n \in \mathcal{V}_h$ έτσι ώστε
$$w_n \to w \text{ στον } \mathcal{V}_h \text{ - οπότε και στον } H_0^1(\Omega) \tag{3.9}$$
και $u_n = T(w_n)$ τη λύση του (3.7). Λόγω της (3.8) η u_n είναι φραγμένη, επομένως μπορούμε να εκμαιεύσουμε μία υπακολουθία $u_{n_k} \in \mathcal{V}_h$ ώστε
$$u_{n_k} \to u \in \mathcal{V}_h \tag{3.10}$$
ενώ μπορούμε να υποθέσουμε ότι κατά μήκος μιας υπακολουθίας w_{n_k} της w_n
$$w_{n_k} \to w \text{ σχεδόν παντού στο } \Omega$$
Λόγω της (3.7) είναι
$$\int_\Omega a(x, w_{n_k})\nabla u_{n_k} \cdot \nabla v dx = \langle f, v\rangle \quad \forall\ v \in \mathcal{V}_h \tag{3.11}$$
και μιας και η a είναι συνεχής ως προς το δεύτερο όρισμά της, μπορούμε να πάρουμε το όριο στην (3.11) και τότε
$$\int_\Omega a(x, w)\nabla u \cdot \nabla v dx = \langle f, v\rangle \quad \forall\ v \in \mathcal{V}_h$$
δηλαδή $u = T(w)$. Από την (3.10) όποια υπακολουθία κι αν επιλέξουμε θα συγκλίνει στη u, επομένως $u_n \to u$. Τότε $T(w_n) = u_n \to u = T(w)$, που σημαίνει ότι η T είναι συνεχής.

Από τα παραπάνω, εξασφαλίζουμε την ύπαρξη λύσης του (3.5_h), δηλαδή την ύπαρξη προσεγγιστικής λύσης του (3.5). Τέλος, θα θέλαμε να δείξουμε ότι καθώς παίρνουμε το όριο της u_h, θα πάρουμε τη λύση της (3.5). Για το σκοπό αυτό, έστω $v \in H_0^1(\Omega)$ και $v_h \in \mathcal{V}_h$ ώστε
$$\lim_{h\to 0} v_h = v$$
Σύμφωνα με την (3.8) η u_h θα είναι φραγμένη στον $H_0^1(\Omega)$ και χρησιμοποιώντας τη συμπάγεια της ενσφήνωσης $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει $u \in H_0^1(\Omega)$ ώστε
$$u_h \rightharpoonup u \text{ στον } H_0^1(\Omega), \quad u_h \to u \text{ στον } L^2(\Omega), \quad u_h \to u \text{ σχεδόν παντού στον } \Omega$$
Τότε
$$a(x, u_h)\nabla v_h \to a(x, u)\nabla v \quad \text{ στον } L^2(\Omega)$$
και άρα αν πάρουμε το όριο της εξίσωσης
$$\int_\Omega a(x, u_h)\nabla u_h \cdot \nabla v_h dx = \langle f, v_h\rangle$$
λαμβάνουμε
$$\int_\Omega a(x, u)\nabla u \cdot \nabla v dx = \langle f, v\rangle \quad \forall\ v \in H_0^1(\Omega)$$
συνεπώς η u είναι λύση της (3.5). $\square$

3.2 Η Μέθοδος της Μονοτονίας

Προτού αναφέρουμε το κυρίως θεώρημα της παραγράφου, ας καταπιαστούμε εν τάχει με τη θεωρία συστημάτων μη γραμμικών εξισώσεων. Έστω το μη γραμμικό σύστημα εξισώσεων

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j = b_i, \quad i = 1, \dots, n$$

Θεωρούμε τις συνεχείς συναρτήσεις

$$\xi \mapsto A_i(\xi)$$

από τον $\mathbb{R}^n$ στον $\mathbb{R}$. Ακόμα, ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν σταθερές C και α ώστε

$$|A_i(\xi) - A_i(\xi')| \leq C|\xi - \xi'| \quad \forall\, i = 1, \dots, n,\ \forall\, \xi, \xi' \in \mathbb{R}^n \tag{3.12}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(A_i(\xi) - A_i(\xi'))(\xi_i - \xi_i') \geq \alpha|\xi - \xi'|^2 \quad \forall\, \xi, \xi' \in \mathbb{R}^n \tag{3.13}$$

Παρατήρηση 3.2. *Έστω X ένας τοπολογικός διανυσματικός χώρος και X^* ο δυϊκός αυτού. Ένας τελεστής $T : X \to X^*$ καλείται μονότονος αν $(Tu - Tv, u - v) \geq 0,\ \forall\, u, v \in X$. Εν προκειμένω, η συνθήκη (3.13) εξασφαλίζει ότι οι συναρτήσεις A_i θα είναι μονότονες, εξ' ου και η ονομασία της μεθόδου που θα παρουσιάσουμε στην τρέχουσα παράγραφο.*

Θεώρημα 3.2. *Κάτω από τις παραπάνω προϋποθέσεις, το σύστημα*

$$A_i(\xi) = b_i \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{3.14}$$

δέχεται μοναδική λύση για κάθε $b \in \mathbb{R}^n$.

Απόδειξη. Η αναζήτηση λύσης του συστήματος (3.14) είναι ισοδύναμη με την εύρεση ενός $\xi \in \mathbb{R}^n$ ώστε

$$\xi_i - \varepsilon A_i(\xi) + \varepsilon b_i = \xi_i \quad \forall\, i \in \{1, \dots, n\}$$

Έτσι, για δεδομένο ξ_0 θεωρούμε την επαναληπτική διαδικασία

$$\xi_i^{p+1} = \xi_i^p - \varepsilon A_i(\xi^p) + \varepsilon b_i \quad \forall\, i = 1, \dots, n, \quad p > 0$$

Τότε θα είναι

$$\xi_i^{p+1} - \xi_i^p = \xi_i^p - \xi_i^{p-1} - \varepsilon[A_i(\xi^p) - A_i(\xi^{p-1})] \quad \forall\, i = 1, \dots, n$$

Παίρνοντας την ευκλείδεια νόρμα στο τετράγωνο και κάνοντας χρήση των (3.12) και (3.13) λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}|\xi^{p+1} - \xi^p|^2 &\leq |\xi^p - \xi^{p-1}|^2 - 2\varepsilon\sum_{i=1}^{n}(A_i(\xi^p) - A_i(\xi^{p-1}))(\xi^p - \xi^{p-1}) + \varepsilon^2 C'|\xi^p - \xi^{p-1}|^2 \\ &\leq (1 - 2\varepsilon\alpha + \varepsilon^2 C')|\xi^p - \xi^{p-1}|^2\end{aligned}$$

για κάποια σταθερά C'. Αν επιλέξουμε το ε με τέτοιο τρόπο ώστε $1 - 2\varepsilon\alpha + \varepsilon^2 C' < 1$, καθώς $p \to \infty$ εξασφαλίζουμε τη σύγκλιση της μεθόδου και κάπως έτσι το ξ^p θα συγκλίνει στη λύση του (3.14). Για τη μοναδικότητα της λύσης, θεωρούμε $\xi, \tilde{\xi}$ δύο λύσεις του (3.14). Τότε $A_i(\xi) = b_i = A_i(\tilde{\xi}),\ \forall\ i$ και άρα από την (3.13) προκύπτει

$$0 \geq \alpha|\xi - \tilde{\xi}|^2$$

οπότε $\xi = \tilde{\xi}$ και η λύση είναι μοναδική. $\square$

Θα θέλαμε, τώρα, να διερευνήσουμε το πρόβλημα

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(A_i(\nabla u)\right) = f & \text{στο } \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{3.15}$$

για $f \in H^{-1}(\Omega)$. Εφεξής, θα θεωρούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $A_i(0) = 0$, διότι μπορούμε πάντα να αντικαταστήσουμε το A_i από το $A_i - A_i(0)$. Θα αναζητήσουμε ασθενή λύση του προβλήματος (3.15), δηλαδή u που να ικανοποιεί το

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega A_i(\nabla u)\frac{\partial v}{\partial x_i}dx = \langle f, v\rangle \quad \forall\ v \in H_0^1(\Omega) \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{3.16}$$

Θεώρημα 3.3. *Κάτω από τις συνθήκες του Θεωρήματος 3.2, το πρόβλημα (3.16) έχει μοναδική λύση.*

Απόδειξη. Ας θεωρήσουμε το προσεγγιστικό πρόβλημα του (3.16), το οποίο θα ονομάσουμε (3.16_h), στο χώρο $\mathcal{V}_h$

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega A_i(\nabla u_h)\frac{\partial v}{\partial x_i}dx = \langle f, v\rangle \quad \forall\ v \in \mathcal{V}_h \\ u_h \in \mathcal{V}_h \end{cases}$$

Υπενθυμίζουμε ότι ο $\mathcal{V}_h$ είναι υπόχωρος του $H_0^1(\Omega)$, πεπερασμένης διάστασης και τέτοιος ώστε να ισχύει η (3.6). Όπως κάναμε και στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.1, θα βρούμε λύση στο προσεγγιστικό πρόβλημα (3.16_h) και κατόπιν, για $h \to 0$ θα λάβουμε τη λύση του (3.16). Για το λόγο αυτό, θεωρούμε $\{w_1, w_2, \ldots, w_N\}$ βάση του $\mathcal{V}_h$ και τότε η λύση του (3.16_h) θα μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της βάσης, δηλαδή

$$u_h = \sum_{m=1}^{N} \xi_m w_m$$

Αντικαθιστούμε στην (3.16_h) και διαλέγουμε $u = w_j$, οπότε παίρνουμε

$$\int_\Omega A_i\left(\nabla\left(\sum_{m=1}^{N}\xi_m w_m\right)\right)\frac{\partial w_j}{\partial x_i}dx = \langle f, w_j\rangle \quad \forall\ j = 1, 2, \ldots, N \tag{3.17}$$

Ας θέσουμε

$$\mathcal{B}_j(\xi) = \int_\Omega A_i\left(\nabla\left(\sum_{m=1}^{N}\xi_m w_m\right)\right)\frac{\partial w_j}{\partial x_i}dx \quad \text{και} \quad b_j = \langle f, w_j\rangle$$

τότε, το πρόβλημά μας γίνεται

$$\mathcal{B}_j(\xi) = b_j \quad \forall\ j = 1, 2, \ldots, N \tag{3.18}$$

και θα εξασφαλίσουμε τη λύση του κάνοντας χρήση του Θεωρήματος 3.2. Πράγματι, λόγω της συνέχειας των A_i ως προς ξ, είναι προφανής και η συνέχεια των $\mathcal{B}_j$ ως προς ξ. Στη συνέχεια, θέλουμε να δείξουμε ότι οι $\mathcal{B}_j$ είναι Lipschitz συνεχείς:

$$\begin{aligned}
|\mathcal{B}_j(\xi) - \mathcal{B}j(\xi')| &= \left| \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left[A_i \left(\nabla \left(\sum_{m=1}^{N} \xi_m w_m \right) \right) - A_i \left(\nabla \left(\sum_{m=1}^{N} \xi'_m w_m \right) \right) \right] \frac{\partial w_j}{\partial x_i} dx \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left| A_i \left(\nabla \left(\sum_{m=1}^{N} \xi_m w_m \right) \right) - A_i \left(\nabla \left(\sum_{m=1}^{N} \xi'_m w_m \right) \right) \right| \left| \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right| dx \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega C \left| \nabla \left(\sum_{m=1}^{N} \xi_m w_m \right) - \nabla \left(\sum_{m=1}^{N} \xi'_m w_m \right) \right| \left| \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right| dx \\
&= C \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left| \sum_{m=1}^{N} (\xi_m - \xi'_m) \nabla w_m \right| \left| \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right| dx \\
&= C \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega |(\xi - \xi') \cdot \nabla w| \left| \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right| dx \\
&= C|\xi - \xi'| \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega |\nabla w| \left| \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right| dx \\
&\overset{(1.20)}{\leq} C|\xi - \xi'| \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega |\nabla w|^2 dx \\
&= nC \|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega)} |\xi - \xi'| \\
&= \tilde{c}|\xi - \xi'|
\end{aligned}$$

όπου $w = (w_1, \ldots, w_N)$ και $\tilde{c} := nC\|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega)} < +\infty$, διότι $w \in H^1_0(\Omega)$ και άρα η ασθενής παράγωγος είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη. Τέλος, μένει να δείξουμε ότι ισχύει και η (3.13) για τις $\mathcal{B}_j$:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} (\mathcal{B}_j(\xi) - \mathcal{B}_j(\xi'))(\xi_j - \xi'_j) &= \int_\Omega \left[A_i \left(\nabla \left(\sum_{m=1}^{N} \xi_m w_m \right) \right) - A_i \left(\nabla \left(\sum_{m=1}^{N} \xi'_m w_m \right) \right) \right] \\
&\quad \times \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^{N} \xi_j w_j \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^{N} \xi'_j w_j \right) \right) dx \\
&\geq \alpha \int_\Omega \left| \nabla \left(\sum_{m=1}^{N} \xi_m w_m \right) - \nabla \left(\sum_{m=1}^{N} \xi_m w_m \right) \right|^2 dx \\
&= \alpha |\xi - \xi'|^2 \int_\Omega |\nabla w|^2 dx \\
&= \beta |\xi - \xi'|^2
\end{aligned}$$

Τωόντι, λοιπόν, ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος 3.2 και άρα θα υπάρχει μοναδικό $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N$ λύση του (3.18), επομένως το u_h γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της βάσης $\{w_1, \ldots, w_N\}$ και έτσι εξασφαλίζεται η ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης του (3.16_h).

Για την ύπαρξη λύσης του (3.16), επιλέγουμε $v = u_h$ στο (3.16_h) και από την (3.13), σε συνδυασμό με το γεγονός ότι $A_i(0) = 0$, προκύπτει ότι

$$\alpha\|\nabla u_h\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \int_\Omega A_i(\nabla u_h)\frac{\partial u_h}{\partial x_i}dx = \langle f, u_h\rangle \leq \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}\|\nabla u_h\|_{L^2(\Omega)}$$

οπότε η u_h είναι φραγμένη στον $H^1_0(\Omega)$. Τότε, κατά μήκος μιας υπακολουθίας, θα υπάρχει $u \in H^1_0(\Omega)$ ώστε

$$u_h \rightharpoonup u \quad \text{στον } H^1_0(\Omega) \tag{3.19}$$

Αν, τώρα, $v_h \in \mathcal{V}_h$ είναι ακολουθία τέτοια, ώστε

$$v_h \to v \quad \text{στον } H^1_0(\Omega) \tag{3.20}$$

από το προσεγγιστικό πρόβλημα θα έχουμε

$$\int_\Omega A_i(\nabla u_h)\frac{\partial v_h}{\partial x_i}dx = \langle f, v_h\rangle \tag{3.21}$$

Δύστυχώς, όμως, βρισκόμαστε στη δυσάρεστο θέση να μην μπορούμε να πάρουμε το όριο, καθώς $h \to 0$, του αριστερού μέλους (καθώς δεν ξέρουμε αν οι A_i είναι συνεχείς ως προς την ασθενή τοπολογία), για το λόγο αυτό, θα πρέπει να ακολουθήσουμε διαφορετική στρατηγική: Αντικαθιστώντας το v_h με $v_h - u_h$, η (3.21) γίνεται

$$\int_\Omega A_i(\nabla u_h)\frac{\partial(v_h - u_h)}{\partial x_i}dx = \langle f, v_h - u_h\rangle$$

το οποίο μπορούμε να γράψουμε ως

$$\int_\Omega [A_i(\nabla u_h) - A_i(\nabla v_h)]\frac{\partial(v_h - u_h)}{\partial x_i}dx + \int_\Omega A_i(\nabla v_h)\frac{\partial(v_h - u_h)}{\partial x_i}dx = \langle f, v_h - u_h\rangle$$

και από την (3.13)

$$-\alpha|\nabla(u_h - v_h)|^2 + \int_\Omega A_i(\nabla v_h)\frac{\partial(v_h - u_h)}{\partial x_i}dx \geq \langle f, v_h - u_h\rangle$$

και άρα

$$\int_\Omega A_i(\nabla v_h)\frac{\partial(v_h - u_h)}{\partial x_i}dx \geq \langle f, v_h - u_h\rangle \tag{3.22}$$

Τώρα, όμως, μπορούμε να πάρουμε όριο στην (3.22) και λαμβάνουμε

$$\int_\Omega A_i(\nabla v)\frac{\partial(v - u)}{\partial x_i}dx \geq \langle f, v - u\rangle \quad \forall\ v \in H^1_0(\Omega) \tag{3.23}$$

Τότε, για $w \in H^1_0(\Omega)$ και $t > 0$ θέτουμε $v = u + tw$, οπότε η (3.23) δίνει

$$\int_\Omega A_i(\nabla u + t\nabla w)\frac{\partial w}{\partial x_i}dx \geq \langle f, w\rangle \quad \forall\ w \in H^1_0(\Omega) \tag{3.24}$$

Αν αφήσουμε το $t \downarrow 0$, θα πάρουμε

$$\int_\Omega A_i(\nabla u)\frac{\partial w}{\partial x_i}dx \geq \langle f, w\rangle \quad \forall\ w \in H_0^1(\Omega) \tag{3.25}$$

ενώ αν αντικαταστήσουμε στην (3.25) στη θέση του w το $-w$ λαμβάνουμε την αντίθετη φορά και άρα

$$\int_\Omega A_i(\nabla u)\frac{\partial w}{\partial x_i}dx = \langle f, w\rangle \quad \forall\ w \in H_0^1(\Omega)$$

επομένως η u είναι λύση του (3.16).

Για τη μοναδικότητα, έστω u_1, u_2 ασθενείς λύσεις του (3.16). Αφαιρώντας κατά μέλη τις δύο εξισώσεις για u_1 και u_2, θα πάρουμε

$$\int_\Omega [A_i(\nabla u_1) - A_i(\nabla u_2)]\frac{\partial v}{\partial x_i} = 0 \quad \forall\ v \in H_0^1(\Omega)$$

Διαλέγοντας $v = u_1 - u_2$ και έχοντας κατά νου την (3.13) είναι

$$\alpha \int_\Omega |\nabla u_1 - \nabla u_2|^2 dx \leq \int_\Omega [A_i(\nabla u_1) - A_i(\nabla u_2)]\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_i} - \frac{\partial u_2}{\partial x_i}\right)dx = 0$$

και άρα $u_1 = u_2$ μιας και $u_1, u_2 \in H_0^1(\Omega)$. $\square$

3.3 Γενίκευση των Μεταβολικών Ανισοτήτων

Έστω H χώρος Hilbert, τον οποίο εφοδιάζουμε με το εσωτερικό γινόμενο $(\cdot,\cdot)$ και $\|\cdot\|_H$ η νόρμα που παράγεται από το εσωτερικό γινόμενο στον H. Θεωρούμε ότι $\mathcal{A}(u, v)$ είναι διγραμμική μορφή στον H, συνεχής (1.5) και πιεστική (1.6). Ακόμα, έστω $K \neq \emptyset$ κλειστό και κυρτό υποσύνολο του H και $J : K \to [0, +\infty]$ κυρτό συναρτησιακό και τέτοιο ώστε να είναι

$$\text{κάτω ημισυνεχές ως προς την ασθενή τοπολογία} \tag{3.26}$$

και να

$$\exists\ v_0 \in K \text{ τέτοιο ώστε } J[v_0] \neq +\infty \tag{3.27}$$

Τότε, για $f \in H^*$ θεωρούμε το πρόβλημα εύρεσης λύσεως u ώστε

$$\begin{cases} \mathcal{A}(u, v-u) + \{J[v] - J[u]\} \geq \langle f, v-u\rangle \quad \forall\ v \in K \\ u \in K \end{cases} \tag{3.28}$$

Θεώρημα 3.4. *Κάτω από τις παραπάνω προϋποθέσεις, το πρόβλημα (3.28) επιδέχεται μοναδική λύση.*

Απόδειξη. Θα μιμηθούμε την απόδειξη του Θεωρήματος 2.1, της οποίας και διατηρούμε το συμβολισμό. Αρχικά, θεωρούμε ότι το $\mathcal{A}$ είναι συμμετρικό, δηλαδή

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_s$$

και θέτουμε

$$\mathcal{I}(v) = \frac{1}{2}\mathcal{A}(v, v) - \langle f, v\rangle + J[v]$$

Ισχυριζόμαστε ότι για κάθε $f \in H^*$ υπάρχει μοναδικό $u \in K$ που ελαχιστοποιεί το $\mathcal{I}$, το οποίο είναι και η λύση του (3.28).

Πράγματι, ας θεωρήσουμε u_n ελαχιστοποιούσα ακολουθία του $\mathcal{I}$ στο K, δηλαδή ακολουθία $u_n \in K$ ώστε

$$\mathcal{I}(u_n) \to \inf_{v\in K} \mathcal{I}(v) \tag{3.29}$$

Λόγω πιεστικότητας του $\mathcal{A}$ και της (3.27), για n αρκετά μεγάλο έχουμε

$$\frac{\alpha}{2}\|u_n\|_H^2 - \|f\|_{H^*}\|u_n\|_H \leq \mathcal{I}(u_n) \leq \mathcal{I}(v_0) + 1$$

και άρα

$$\|u_n\|_H \leq C$$

με το C να είναι ανεξάρτητο από το n. Τότε, μπορούμε να βρούμε υπακολουθία της u_n, την οποία για απλότητα θα συμβολίζουμε επίσης με u_n, ώστε

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{στον } H$$

Δεδομένου ότι $u_n \in K$ και το K είναι κλειστό και κυρτό συνεπάγεται ότι $u \in K$. Τότε, λόγω της κάτω ημισυνέχειας των J και $\mathcal{A}$ προκύπτει ότι

$$\inf_{v\in K} \mathcal{I}(v) = \liminf_{n\to\infty} \mathcal{I}(u_n) \geq \frac{1}{2}\mathcal{A}(u,u) - \langle f, u\rangle + J[u] = \mathcal{I}(u)$$

δηλαδή η u ελαχιστοποιεί το $\mathcal{I}$ στο K. Τότε, για κάθε $t \in (0,1)$

$$\mathcal{I}(u) \leq \mathcal{I}(u + t(v-u)) \quad \forall\, v \in K$$

οπότε

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\mathcal{A}(u,u) - \langle f,u\rangle + J[u] \leq{}& \frac{1}{2}\mathcal{A}(u,u) + t\mathcal{A}(u, v-u) + \frac{t^2}{2}\mathcal{A}(v-u, v-u)\\ &- \langle f, u + t(v-u)\rangle + J[u + t(v-u)]\end{aligned} \tag{3.30}$$

και χρησιμοποιώντας την κυρτότητα του J

$$t\langle f, v-u\rangle + J[u] \leq t\mathcal{A}(u,v-u) + \frac{t^2}{2}\mathcal{A}(v-u,v-u) + tJ[v] + (1-t)J[u]$$

Συνεπώς, διαιρώντας με t λαμβάνουμε

$$\langle f, v-u\rangle \leq \mathcal{A}(u,v-u) + \frac{t}{2}\mathcal{A}(v-u,v-u) + (J[v] - J[u]) \quad \forall\, v \in K$$

και αφήνοντας το $t \downarrow 0$, προκύπτει ότι η u είναι λύση του (3.28).

Αντίστροφα, αν η u είναι λύση του (3.28), τότε για κάθε $v \in K$ είναι

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\mathcal{A}(u,u) - \langle f,u\rangle + J[u] &\leq \frac{1}{2}\mathcal{A}(u,u) + \mathcal{A}(u,v-u) - \langle f, v\rangle + J[v]\\ &\overset{(1.6)}{\leq} \frac{1}{2}\mathcal{A}(u,u) + \mathcal{A}(u,v-u) + \frac{1}{2}\mathcal{A}(v-u,v-u) - \langle f,v\rangle + J[v]\end{aligned}$$

ας παρατηρήσουμε, όμως, ότι αυτή είναι η (3.30) για $t = 1$, επομένως

$$\mathcal{I}(u) \leq \mathcal{I}(v) \quad \forall\, v \in K \tag{3.31}$$

Αυτό σημαίνει ότι τα προβλήματα (3.28) και (3.31) είναι ισοδύναμα. Ας είναι τώρα, u_1, u_2 λύσεις του (3.28), δηλαδή

$$\mathcal{A}(u_1, v-u_1) + \{J[v] - J[u_1]\} \geq \langle f, v-u_1\rangle \quad \forall\, v \in K$$

$$\mathcal{A}(u_2, v-u_2) + \{J[v] - J[u_2]\} \geq \langle f, v-u_2\rangle \quad \forall\, v \in K$$

Αν επιλέξουμε $v = u_2$ στην πρώτη σχέση και $v = u_1$ στη δεύτερη και προσθέσουμε κατά μέλη, οδηγούμαστε στο

$$\mathcal{A}(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \leq 0$$

το οποίο λόγω της (1.6) συνεπάγεται $u_1 = u_2$.

Ήρθε η ώρα να άρουμε την υπόθεση της συμμετρικότητας του $\mathcal{A}$. Όπως ακριβώς στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.1, θεωρούμε το σύνολο

$$T = \{t \in \mathbb{R} \mid \forall\, f \in H^* \text{ το πρόβλημα } P_t \text{ έχει μοναδική λύση}\}$$

όπου (P_t) είναι το πρόβλημα

$$\begin{cases} u \in K \\ \mathcal{A}_t(u, v-u) + \{J[v] - J[u]\} \geq \langle f, v-u\rangle \quad \forall\, v \in K \end{cases}$$

Δείχνουμε ότι $0 \in T$ και ότι για κάθε $t_0 \in T$, $f \in H^*$, $w \in H$ υπάρχει μοναδικό $u = F(w) \in K$ που είναι λύση της μεταβολικής ανισότητας

$$\mathcal{A}_{t_0}(u, v-u) + \{J[v] - J[u]\} \geq \langle f, v-u\rangle + (t_0 - t)\mathcal{A}_a(w, v-u) \quad \forall\, v \in K$$

Ακόμα, δείχνουμε ότι ισχύει η (2.4) και ότι η F έχει σταθερό σημείο για κάθε $t \in \left[t_0 - \frac{\alpha}{2C}, t_0 + \frac{\alpha}{2C}\right]$. Αυτό σημαίνει ότι $T = \mathbb{R}$ και για $t = 1$, το (P_1) είναι το πρόβλημα που θέλαμε να λύσουμε. □

Παρατήρηση 3.3. *Όπως είδαμε και στην απόδειξη παραπάνω, στην περίπτωση που το $\mathcal{A}$ είναι συμμετρικό, το u είναι το μοναδικό στοιχείο του K που ελαχιστοποιεί το συναρτησιακό*

$$\mathcal{I}(v) = \frac{1}{2}\mathcal{A}(v,v) + J[v] - \langle f, v\rangle$$

Παρατήρηση 3.4. *Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση που $K = H$ και το J είναι παραγωγίσιμο. Τότε, αν στην (3.28) επιλέξουμε $v = u + tw$, με $t > 0$, παίρνουμε*

$$\mathcal{A}(u, tw) + \{J[u+tw] - J[u]\} \geq \langle f, tw\rangle \quad \forall\, w \in H$$

Διαιρώντας με t και αφήνοντάς το να τείνει στο 0, βρίσκουμε

$$\mathcal{A}(u, w) + \langle J'(u), w\rangle \geq \langle f, w\rangle \quad \forall\, w \in H$$

Αν, τώρα, αντί για w πάρουμε το $-w$, λαμβάνουμε την αντίστροφη ανισότητα και άρα

$$\mathcal{A}(u, w) + \langle J'(u), w\rangle = \langle f, w\rangle \quad \forall\, w \in H$$

Ας θεωρήσουμε τη διγραμμική μορφή $\mathcal{A}$ του (1.18) και ότι βρισκόμαστε κάτω από τις υποθέσεις του Θεωρήματος 1.3. Ας είναι $\beta(x,u)$ μια συνάρτηση Carathéodory ορισμένη στο $\Omega \times \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$\exists\, C > 0 \text{ ώστε } |\beta(x,u) - \beta(x,v)| \leq C|u-v| \quad \forall\, u, v \in \mathbb{R}, \text{ σχεδόν για κάθε } x \in \Omega \tag{3.32}$$

$$\beta(x,0) = 0 \tag{3.33}$$

και η $u \mapsto \beta(x,u)$ είναι μονότονη, με την έννοια ότι

$$(\beta(x,u) - \beta(x,v))(u-v) \geq 0 \quad \forall\, u, v \in \mathbb{R}, \text{ σχεδόν για κάθε } x \in \Omega \tag{3.34}$$

Τότε, έχουμε το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 3.5. *Κάτω από τις υποθέσεις (1.15), (1.16) και (3.32)-(3.34) υπάρχει μοναδική ασθενής λύση του προβλήματος*

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\right) + a(x)u + \beta(x,u) = f \quad \text{στο } \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{3.35}$$

Απόδειξη. Ας παρατηρήσουμε για αρχή ότι από τις (3.32) και (3.33) συνεπάγεται ότι

$$|\beta(x,u)| = |\beta(x,u) - \beta(x,0)| \leq C|u| \tag{3.36}$$

και άρα στην (3.35) $\beta(x,u) \in L^2(\Omega)$. Τότε, για το $\mathcal{A}$ της (1.18), η εξίσωση του (3.35) γίνεται

$$\mathcal{A}(u,v) + \int_\Omega \beta(x,u) v\, dx = \langle f, v\rangle \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{3.37}$$

Ας δείξουμε πρώτα τη μοναδικότητα που είναι πιο εύκολη: υποθέτουμε ότι u_1, u_2 είναι λύσεις της (3.37). Αφαιρώντας, προκύπτει

$$\mathcal{A}(u_1 - u_2, v) + \int_\Omega [\beta(x,u_1) - \beta(x,u_2)] v\, dx = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

ενώ αν επιλέξουμε $v = u_1 - u_2$, από την (3.34) παίρνουμε

$$\mathcal{A}(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \leq 0$$

και άρα $u_1 = u_2$ από την πιεστικότητα του $\mathcal{A}$.

Ας δείξουμε, τώρα, την ύπαρξη λύσης: Θέτουμε

$$j(x,u) = \int_0^u \beta(x,s)\, ds \tag{3.38}$$

Από τις (3.33) και (3.34) ισχύει ότι

$$j(x,u) \geq 0 \text{ σχεδόν παντού στο } \Omega, \ \forall\, u \in \mathbb{R}$$

Ισχυριζόμαστε ότι η j είναι συνάρτηση Carathéodory. Τωόντι, αν γράψουμε το ολοκλήρωμα ως άθροισμα Riemann

$$j(x,u) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \beta\left(x, \frac{ku}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}$$

τότε το $j(\cdot, u)$ είναι το όριο αθροίσματος μετρήσιμων συναρτήσεων και άρα η απεικόνιση $x \mapsto j(x,u)$ είναι μετρήσιμη. Επίσης, η απεικόνιση $u \mapsto j(x,u)$ είναι προφανώς συνεχής σχεδόν παντού στο Ω, αφού και η $u \mapsto \beta(x,u)$ είναι συνεχής σχεδόν παντού στο Ω. Επιπλέον, λόγω της μονοτονίας του β και της (3.36)

$$0 \leq j(x,u) \leq |\beta(x,u)||u| \leq C|u|^2$$

Τότε, μπορούμε να ορίσουμε το συναρτησιακό

$$J[u] = \int_\Omega j(x, u(x))dx \geq 0 \tag{3.39}$$

το οποίο είναι κυρτό, διότι το $j(x, \cdot)$ είναι επίσης κυρτό, λόγω της μονοτονίας του β. Ακόμα, όταν $u_n \rightharpoonup u$ στον $H_0^1(\Omega)$ μπορούμε να εξάγουμε μια υπακολουθία u_n, ώστε

$$\lim_{n\to\infty} J[u_n] = \liminf_{n\to\infty} J[u_n]$$

και

$$u_n \to u \quad \text{σχεδόν παντού στο } \Omega$$

Από το Λήμμα του Fatou

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} J[u_n] &= \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega j(x, u_n(x))dx \\
&\geq \int_\Omega \liminf_{n\to\infty} j(x, u_n(x))dx \\
&= \int_\Omega j(x, u(x))dx \\
&= J[u]
\end{aligned}$$

δηλαδή το J είναι ασθενώς κάτω ημισυνεχές στον $H_0^1(\Omega)$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.4 υπάρχει u που να είναι η μοναδική λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} \mathcal{A}(u, v-u) + \{J[v] - J[u]\} \geq \langle f, v-u \rangle & \forall\ v \in H_0^1(\Omega) \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

Παίρνοντας $v = u + tw$, με $w \in H_0^1(\Omega)$ λαμβάνουμε

$$\mathcal{A}(u, tw) + \int_\Omega \int_{u(x)}^{u(x)+tw(x)} \beta(x,s)dsdx \geq \langle f, tw \rangle \quad \forall\ w \in H_0^1(\Omega)$$

και από το Θεώρημα Μέσης τιμής, υπάρχει $\theta(x) \in (0,1)$ ώστε

$$\mathcal{A}(u, tw) + \int_\Omega \beta(x, u(x) + \theta(x)tw(x))tw(x)dx \geq \langle f, tw \rangle \quad \forall\ w \in H_0^1(\Omega)$$

Διαιρώντας με t και αφήνοντάς το να τείνει στο 0, βρίσκουμε

$$\mathcal{A}(u, w) + \int_\Omega \beta(x, u(x))w(x)dx \geq \langle f, w \rangle \quad \forall\ w \in H_0^1(\Omega)$$

ενώ παίρνοντας όπου w το $-w$ προκύπτει η αντίστροφη ανισότητα και άρα η u είναι λύση της (3.37). Έτσι, το πρόβλημα (3.35) έχει μοναδική λύση και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Κεφάλαιο 4

Θεωρία Ομαλότητας Ελλειπτικών Προβλημάτων

Στο κεφάλαιο αυτό, θα μελετήσουμε την ομαλότητα των λύσεων των μεταβολικών ανισοτήτων που μελετήσαμε στα δύο προηγούμενα κεφάλαια. Θα προσπαθήσουμε, δηλαδή, να δείξουμε ότι αν και οι λύσεις μας είναι ορισμένες σε γενικούς χώρους Hilbert, οι οποίοι δεν εγγυώνται πάντα κάποιου είδους ομαλότητα, στην πραγματικότητα κάτω από κατάλληλες προϋποθέσεις μπορούν να είναι συνεχείς. Στην προσπάθεια αυτή, θα προκύψουν κι άλλα ενδιαφέροντα αποτελέσματα, όπως για παράδειγμα αποτελέσματα σύγκλισης, μονοτονίας, ακόμα και εκτίμησης νορμών.

4.1 Μερικά γενικά αποτελέσματα

Έστω H χώρος Hilbert εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο $(\cdot,\cdot)$ και $\|\cdot\|_H$ η νόρμα που παράγεται από το εν λόγω εσωτερικό γινόμενο. Έστω, ακόμα, $\mathcal{A}(u,v)$ μια διγραμμική μορφή στον H που υποθέτουμε ότι είναι συνεχής και πιεστική, δηλαδή ισχύουν οι (1.5) και (1.6) αντίστοιχα. Ας είναι, τέλος, $J : H \to [0,+\infty]$ κυρτό συναρτησιακό (όχι παντού $+\infty$) και τέτοιο ώστε να είναι

$$\text{κάτω ημισυνεχές ως προς την ασθενή τοπολογία} \tag{4.1}$$

και

$$\exists\ v_0 \in H \text{ ώστε } J[v_0] = 0 \tag{4.2}$$

Θεωρούμε $\varepsilon \geq 0$ και $f \in H^*$. Τότε μας ενδιαφέρει το πρόβλημα εύρεσης λύσης u_ε ώστε

$$\begin{cases} \mathcal{A}(u_\varepsilon, v-u_\varepsilon) + \varepsilon\{J[v] - J[u_\varepsilon]\} \geq \langle f, v-u_\varepsilon\rangle \quad \forall\ v \in H \\ u_\varepsilon \in H \end{cases} \tag{4.3}$$

Επίσης, για $\mu \geq 0$ θέτουμε

$$K_\mu = \{v \in H \mid J[v] \leq \mu\} \tag{4.4}$$

και θεωρούμε u τη λύση του πόβλήματος

$$\begin{cases} \mathcal{A}(u, v-u) \geq \langle f, v-u\rangle \quad \forall\ v \in K_\mu \\ u \in K_\mu \end{cases} \tag{4.5}$$

Θεώρημα 4.1. *Υπάρχει μοναδική λύση u_ε του (4.3) και μοναδική λύση u του (4.5).*

Απόδειξη. Η ύπαρξη και μοναδικότητα της u_ε είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 3.4. Για το (6.5) αρκεί να δείξουμε ότι το K_μ είναι μη κενό, κλειστό και κυρτό. Πράγματι, $v_0 \in K_\mu$ και άρα $K_\mu \neq \emptyset$. Αν, τώρα, επιλέξουμε $v_1, v_2 \in K_\mu$ και $t \in (0,1)$, τότε προφανώς $tv_1 + (1-t)v_2 \in H$ και λόγω της κυρτότητας του J θα ισχύει $J[tv_1 + (1-t)v_2] \leq tJ[v_1] + (1-t)J[v_2] \leq t\mu + (1-t)\mu = \mu$, οπότε $tv_1 + (1-t)v_2 \in K_\mu$ και άρα το K_μ είναι κυρτό. Τέλος, λόγω της (4.1) το K_μ είναι ασθενώς κλειστό και δεδομένου ότι είναι και κυρτό, θα είναι κλειστό και ως προς την ισχυρή τοπολογία του H. Τώρα, μπορούμε να επικαλεστούμε το Θεώρημα 2.1, από το οποίο προκύπτει ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης του (4.5). □

Θεώρημα 4.2. *Έστω u_ε λύση του (4.3). Τότε, η απεικόνιση*

$$\varepsilon \mapsto u_\varepsilon \tag{4.6}$$

είναι συνεχής, όταν ο H είναι εφοδιασμένος με την ισχυρή του τοπολογία.

Απόδειξη. Για $v = v_0$, η (4.3) δίνει

$$\mathcal{A}(u_\varepsilon, u_\varepsilon) + \varepsilon J[u_\varepsilon] \leq \langle f, u_\varepsilon \rangle + \mathcal{A}(u_\varepsilon, v_0) - \langle f, v_0 \rangle \tag{4.7}$$

Δεδομένου ότι $\varepsilon, J \geq 0$ και από τις (1.5), (1.6) έχουμε

$$\alpha \|u_\varepsilon\|_H^2 \leq \|f\|_{H^*} \|u_\varepsilon\|_H + C\|v_0\|_H \|u_\varepsilon\|_H + \|f\|_{H^*} \|v_0\|_H$$

το οποίο οδηγεί στη σχέση

$$\|u_\varepsilon\|_H \leq C' \tag{4.8}$$

με το C' να είναι ανεξάρτητο του ε. Τότε, η (4.7) δίνει

$$0 \leq J[u_\varepsilon] \leq \frac{C_0}{\varepsilon} \tag{4.9}$$

Έστω, τώρα, $\varepsilon, \varepsilon' \geq 0$ ώστε $\varepsilon \to \varepsilon'$. Για έκαστο εξ αυτών θα ισχύει η (4.3), δηλαδή

$$\mathcal{A}(u_\varepsilon, v - u_\varepsilon) + \varepsilon\{J[v] - J[u_\varepsilon]\} \geq \langle f, v - u_\varepsilon \rangle \quad \forall\, v \in H \tag{4.10}$$

$$\mathcal{A}(u_{\varepsilon'}, v - u_{\varepsilon'}) + \varepsilon'\{J[v] - J[u_{\varepsilon'}]\} \geq \langle f, v - u_{\varepsilon'} \rangle \quad \forall\, v \in H \tag{4.11}$$

Αν στην (4.10) επιλέξουμε $v = u_{\varepsilon'}$ και στην (4.11) $v = u_\varepsilon$ και κατόπιν προσθέσουμε κατά μέλη, θα λάβουμε

$$\mathcal{A}(u_\varepsilon - u_{\varepsilon'}, u_{\varepsilon'} - u_\varepsilon) + (\varepsilon - \varepsilon')\{J[u_{\varepsilon'}] - J[u_\varepsilon]\} \geq 0$$

και άρα

$$\alpha \|u_\varepsilon - u_{\varepsilon'}\|_H^2 \leq \mathcal{A}(u_\varepsilon - u_{\varepsilon'}, u_\varepsilon - u_{\varepsilon'}) \leq (\varepsilon - \varepsilon')\{J[u_{\varepsilon'}] - J[u_\varepsilon]\} \tag{4.12}$$

Όταν $\varepsilon' > 0$. λόγω της (4.9) οι ποσότητες $J[u_\varepsilon]$ και $J[u_{\varepsilon'}]$ παραμένουν φραγμένες καθώς $\varepsilon \to \varepsilon'$ και άρα παίρνοντας το όριο στην (4.12) βρίσκουμε

$$u_\varepsilon \to u_{\varepsilon'} \ \text{ στον } H$$

που σημαίνει ότι η απεικόνιση (4.6) είναι συνεχής. Όταν $\varepsilon' = 0$, η (4.3) γίνεται

$$\mathcal{A}(u_0, v - u_0) \geq \langle f, v - u_0 \rangle \quad \forall\, v \in H \tag{4.13}$$

Ας παρατηρήσουμε ότι από την (4.8) η u_ε παραμένει φραγμένη ανεξάρτητα από το πού τείνει το ε και άρα θα υπάρχει υπακολουθία u_ε, τέτοια ώστω καθώς $\varepsilon \to 0$ να υπάρχει $\bar{u}_0 \in H$ με

$$u_\varepsilon \rightharpoonup \bar{u}_0 \ \text{ στον } H$$

Τώρα, από την (4.3) προκύπτει

$$\mathcal{A}(u_\varepsilon, u_\varepsilon) \leq \mathcal{A}(u_\varepsilon, v) - \langle f, v - u_\varepsilon \rangle + \varepsilon J[v] \quad \forall\, v \in H \tag{4.14}$$

και παίρνοντας το $\liminf$ σε αμφότερα τα μέλη

$$\mathcal{A}(\bar{u}_0, \bar{u}_0) \leq \liminf_{\varepsilon \to 0} \mathcal{A}(u_\varepsilon, u_\varepsilon) \leq \mathcal{A}(\bar{u}_0, v) - \langle f, v - \bar{u}_0 \rangle$$

δηλαδή σύμφωνα με την (4.13) $\bar{u}_0 = u_0$. Λόγω της μοναδικότητας του ορίου, όμως, $u_\varepsilon \rightharpoonup u_0$ καθώς $\varepsilon \to 0$. Για να δείξουμε ισχυρή σύγκλιση, αρκεί να πάρουμε το $\limsup$ της (4.14), που δίνει

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \mathcal{A}(u_\varepsilon, u_\varepsilon) \leq \mathcal{A}(u_0, v) - \langle f, v - u_0 \rangle \quad \forall\, v \in H$$

και για $v = u_0$

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \mathcal{A}(u_\varepsilon, u_\varepsilon) \leq \mathcal{A}(u_0, u_0)$$

το οποίο σε συνδυασμό με το

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} \mathcal{A}(u_\varepsilon, u_\varepsilon) \geq \mathcal{A}(u_0, u_0)$$

δίνει ότι

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{A}(u_\varepsilon, u_\varepsilon) = \mathcal{A}(u_0, u_0)$$

από το οποίο προκύπτει η ισχυρή σύγκλιση της u_ε καθώς $\varepsilon \to 0$. □

Παρατήρηση 4.1. *Για $\varepsilon = 0$, η (4.3) είναι απλώς η*

$$\mathcal{A}(u_0, v - u_0) \geq \langle f, v - u_0 \rangle \quad \forall\, v \in H$$

και αν επιλέξουμε $v = u_0 \pm v$ βρίσκουμε ότι η u_0 είναι λύση του

$$\begin{cases} \mathcal{A}(u_0, v) = \langle f, v \rangle & \forall\, v \in H \\ u_0 \in H \end{cases} \tag{4.15}$$

Θεώρημα 4.3. *Η απεικόνιση $\varepsilon \mapsto J[u_\varepsilon]$ είναι φθίνουσα και συνεχής. Επιπλέον, υπάρχει σταθερά C_0 ανεξάρτητη του ε ώστε*

$$0 \leq J[u_\varepsilon] \leq \frac{C_0}{\varepsilon} \tag{4.16}$$

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι $\varepsilon > \varepsilon'$. Από την (4.12) έχουμε

$$(\varepsilon - \varepsilon')\{J[u_{\varepsilon'}] - J[u_\varepsilon]\} \geq 0$$

οπότε $J[u_{\varepsilon'}] \geq J[u_\varepsilon]$, που σημαίνει ότι η απεικόνιση $\varepsilon \mapsto J[u_\varepsilon]$ είναι φθίνουσα. Αν, τώρα, στην (4.3) διαλέξουμε $v = u_{\varepsilon'}$ θα πάρουμε

$$\begin{aligned} \varepsilon J[u_\varepsilon] &\leq \langle f, u_\varepsilon - u_{\varepsilon'} \rangle + \varepsilon J[u_{\varepsilon'}] + \mathcal{A}(u_\varepsilon, u_{\varepsilon'} - u_\varepsilon) \\ &\leq \|f\|_{H^*} \|u_\varepsilon - u_{\varepsilon'}\|_H + \varepsilon J[u_{\varepsilon'}] + C\|u_\varepsilon\|_H \|u_{\varepsilon'} - u_\varepsilon\|_H \end{aligned} \tag{4.17}$$

Από την (4.8) γνωρίζουμε ότι η $\|u_\varepsilon\|_H$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη, επομένως αφήνοντας το $\varepsilon \to \varepsilon'$, από το Θεώρημα 4.2, η (4.17) δίνει

$$\limsup_{\varepsilon \to \varepsilon'} \varepsilon J[u_\varepsilon] \leq \varepsilon' J[u_{\varepsilon'}] \tag{4.18}$$

και λόγω της κάτω ημισυνέχειας του J ως προς την ασθενή τοπολογία

$$\liminf_{\varepsilon \to \varepsilon'} \varepsilon J[u_\varepsilon] \geq \varepsilon' J[u_{\varepsilon'}] \tag{4.19}$$

Συνδυάζοντας τις (4.18) και (4.19) λαμβάνουμε

$$\lim_{\varepsilon \to \varepsilon'} \varepsilon J[u_\varepsilon] = \varepsilon' J[u_{\varepsilon'}]$$

και άρα, όταν $\varepsilon' > 0$

$$\lim_{\varepsilon \to \varepsilon'} J[u_\varepsilon] = J[u_{\varepsilon'}]$$

από όπου προκύπτει η συνέχεια της απεικόνισης $\varepsilon \mapsto J[u_\varepsilon]$. Στην περίπτωση που $\varepsilon' = 0$, λόγω της μονοτονίας της $\varepsilon \mapsto J[u_\varepsilon]$, έχουμε

$$J[u_\varepsilon] \leq J[u_0]$$

και παίρνοντας το $\limsup$

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} J[u_\varepsilon] \leq J[u_0]$$

Όπως προηγουμένως, συνδυάζουμε την κάτω ημισυνένεια του J, που μας δίνει την αντίστροφη ανισότητα και άρα την ισότητα, συνεπώς κατοχυρώνουμε τη συνέχεια και στο 0. Τέλος, η (4.16) είναι η (4.9) που έχει αποδειχθεί στην προηγούμενη απόδειξη. □

Τώρα είμαστε σε θέση να συνδυάσουμε τα δύο αρχικά προβλήματα (4.3) και (4.5), με το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 4.4. *Έστω $\mu > 0$ και u λύση του (4.5). Τότε, υπάρχει $\varepsilon = \varepsilon_\mu$, ώστε*

$$u = u_{\varepsilon_\mu} \tag{4.20}$$

Απόδειξη. Έστω u_0 η λύση του (4.3) για $\varepsilon = 0$. Από την Παρατήρηση 4.1, η u_0 είναι λύση του (4.15). Ας υποθέσουμε ότι $J[v_0] \leq \mu$. Τότε $v_0 \in K_\mu$ και από την (4.15), η u_0 ικανοποιεί τη σχέση

$$\mathcal{A}(u_0, v - u_0) = \langle f, v - u_0 \rangle \quad \forall\, v \in K_\mu$$

και άρα η u_0 είναι λύση του (4.5) σε αυτή την περίπτωση και $\varepsilon_\mu = 0$. Υποθέτουμε, τώρα, ότι

$$J[u_0] > \mu > 0 \tag{4.21}$$

Από το Θεώρημα 4.3, η απεικόνιση $\varepsilon \mapsto J[u_\varepsilon]$ είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ και φθίνουσα. Επιπλέον, λόγω της (4.16)

$$\lim_{\varepsilon \to \infty} J[u_\varepsilon] = 0 \tag{4.22}$$

Από την άλλη, από τη συνέχεια της $\varepsilon \mapsto J[u_\varepsilon]$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} J[u_\varepsilon] = J[u_0] > \mu$$

οπότε για ε αρκετά μικρό, έχουμε

$$J[u_\varepsilon] > \mu > 0 \tag{4.23}$$

Αν συνδυάσουμε τις (4.22), (4.23) και τη συνέχεια της $\varepsilon \mapsto J[u_\varepsilon]$, από το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών θα υπάρχει $\varepsilon = \varepsilon_\mu$ ώστε

$$J[u_\varepsilon] = \mu \tag{4.24}$$

Για το εν λόγω ε το πρόβλημα (4.3) δίνει

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(u_\varepsilon, v - u_\varepsilon) &\geq \langle f, v - u_\varepsilon \rangle + \varepsilon\{J[u_\varepsilon] - J[v]\} \\ &= \langle f, v - u_\varepsilon \rangle + \varepsilon\{\mu - J[v]\} \\ &\geq \langle f, v - u_\varepsilon \rangle \quad \forall\, v \in K_\mu \end{aligned} \tag{4.25}$$

Όμως, λόγω της (4.24) $u_\varepsilon \in K_\mu$ και άρα είναι λύση του (4.5). □

Παρατήρηση 4.2. *Αν στις υποθέσεις μας προσθέσουμε και τη διαφορισιμότητα του J, τότε στην (4.3) αν αντικαταστήσουμε το v με $u_\varepsilon + t(v - u_\varepsilon)$, $t > 0$ προκύπτει*

$$t\mathcal{A}(u_\varepsilon, v - u_\varepsilon) + \varepsilon\{J[u_\varepsilon + t(v - u_\varepsilon)] - J[u_\varepsilon]\} \geq t\langle f, v - u_\varepsilon \rangle$$

Διαιρώντας με t και αφήνοντάς το να τείνει στο 0, θα πάρουμε

$$\mathcal{A}(u_\varepsilon, v - u_\varepsilon) + \varepsilon\langle J'[u_\varepsilon], v - u_\varepsilon \rangle \geq \langle f, v - u_\varepsilon \rangle \quad \forall\, v \in H$$

Τέλος, αντικαθιστώντας όπου v το $u_\varepsilon \pm v$ λαμβάνουμε

$$\mathcal{A}(u_\varepsilon, v) + \varepsilon\langle J'[u_\varepsilon], v \rangle = \langle f, v \rangle \quad \forall\, v \in H \tag{4.26}$$

Στην περίπτωση που το $\mathcal{A}$ είναι συμμετρικό, η λύση του (4.5) ελαχιστοποιεί το συναρτησιακό

$$\mathcal{J}(v) = \frac{1}{2}\mathcal{A}(v, v) - \langle f, v \rangle$$

Κλείνουμε την παράγραφο με ένα θεώρημα που μας δίνει την ασυμπτωτική συμπεριφορά της u_ε, καθώς $\varepsilon \to +\infty$:

Θεώρημα 4.5. *Έστω u_∞ η λύση της μεταβολικής ανισότητας*

$$\begin{cases} \mathcal{A}(u_\infty, v - u_\infty) \geq \langle f, v - u_\infty \rangle \quad \forall\, v \in K_0 \\ u_\infty \in K_0 = \{v \in H \mid J(v) = 0\} \end{cases} \tag{4.27}$$

Τότε, θα ισχύει ότι

$$u_\varepsilon \to u_\infty \ \text{ στον } H \tag{4.28}$$

καθώς $\varepsilon \to +\infty$.

Απόδειξη. Από την (4.8) γνωρίζουμε ότι η u_ε είναι ομοιόμορφα φραγμένη, ανεξαρτήτως του ε και άρα για μια υπακολουθία που συνεχίζουμε να συμβολίζουμε με u_ε, θα υπάρχει $u_\infty \in H$ ώστε

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u_\infty \ \text{ στον } H \tag{4.29}$$

Από την (4.9) και την κάτω ημισυνέχεια του J έχουμε

$$0 = \lim_{\varepsilon \to +\infty} J[u_\varepsilon] \geq J[u_\infty] \geq 0$$

άρα $u_\infty \in K_0$. Επίσης, λόγω της (4.3), για κάθε $v \in K_0$

$$\mathcal{A}(u_\varepsilon, v - u_\varepsilon) \geq \langle f, v - u_\varepsilon \rangle + \varepsilon J[u_\varepsilon] \geq \langle f, v - u_\varepsilon \rangle \tag{4.30}$$

το οποίο συνεπάγεται

$$\mathcal{A}(u_\varepsilon, v) - \langle f, v - u_\varepsilon \rangle \geq \mathcal{A}(u_\varepsilon, u_\varepsilon) \quad \forall\, v \in K_0 \tag{4.31}$$

Παίρνοντας το $\liminf$ καθώς $\varepsilon \to \infty$ και χρησιμοποιώντας την κάτω ημισυνέχεια του $\mathcal{A}$ βρίσκουμε

$$\mathcal{A}(u_\infty, v - u_\infty) \geq \langle f, v - u_\infty \rangle \geq \liminf_{\varepsilon \to +\infty} \mathcal{A}(u_\varepsilon, u_\varepsilon) \geq \mathcal{A}(u_\infty, u_\infty) \geq 0$$

Με άλλα λόγια, η u_∞ ικανοποιεί το πρόβλημα

$$\begin{cases} \mathcal{A}(u_\infty, v - u_\infty) \geq \langle f, v - u_\infty \rangle & \forall\, v \in K_0 \\ u_\infty \in K_0 \end{cases}$$

οπότε η u_∞ είναι η μοναδική λύση του (4.27). Λόγω της μοναδικότητας του ορίου, ολόκληρη η ακολουθία u_ε θα ικανοποιεί την (4.29).

Θέλουμε, τώρα, να δείξουμε ότι η σύγκλιση είναι ισχυρή. Πράγματι, αν στην (4.31) επιλέξουμε $v = u_\infty$ θα πάρουμε

$$\mathcal{A}(u_\varepsilon, u_\varepsilon) \leq \mathcal{A}(u_\varepsilon, u_\infty) - \langle f, u_\infty - u_\varepsilon \rangle$$

Παίρνοντας το $\limsup$ καθώς $\varepsilon \to +\infty$ λαμβάνουμε

$$\limsup_{\varepsilon \to +\infty} \mathcal{A}(u_\varepsilon, u_\varepsilon) \leq \mathcal{A}(u_\infty, u_\infty)$$

και μιας και το $\mathcal{A}$ είναι κάτω ημισυνεχές

$$\liminf_{\varepsilon \to +\infty} \mathcal{A}(u_\varepsilon, u_\varepsilon) \geq \mathcal{A}(u_\infty, u_\infty)$$

οπότε

$$\lim_{\varepsilon \to +\infty} \mathcal{A}(u_\varepsilon, u_\varepsilon) = \mathcal{A}(u_\infty, u_\infty)$$

Είναι εύκολο τώρα να δείξουμε ότι

$$\lim_{\varepsilon \to +\infty} \mathcal{A}(u_\varepsilon - u_\infty, u_\varepsilon - u_\infty) = 0$$

και άρα από την πιεστικότητα του $\mathcal{A}$ προκύπτει η ισχυρή σύγκλιση. □

Παρατήρηση 4.3. *Τα αποτελέσματα αυτής της παραγράφου μπορούν να επεκταθούν και στην περίπτωση που η διγραμμική μορφή $\mathcal{A}(u, v)$ αντικαθίσταται από τη δράση $\langle Au, v \rangle$, όπου ο A είναι ένας μη γραμμικός τελεστής από τον H στο δυϊκό του.*

4.2 Μεταβολικές ανισότητες δευτέρου βαθμού

Σε αυτή την παράγραφο, θα εφαρμόσουμε τα αποτελέσματα της προηγούμενης παραγράφου σε μεταβολικές ανισότητες δευτέρου βαθμού. Υποθέτουμε, λοιπόν, ότι το Ω είναι ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, με σύνορο Γ. Έστω a, a_{ij} συναρτήσεις στο Ω τέτοιες ώστε

$$a, a_{ij} \in L^\infty(\Omega) \quad i, j = 1, 2, \ldots, n \tag{4.32}$$

$$a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2 \quad \text{σχεδόν παντού στο } \Omega, \ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n \tag{4.33}$$

$$a \geq 0 \quad \text{σχεδόν παντού στο } \Omega \tag{4.34}$$

όπου α θετική σταθερά. Για $u, v \in H^1(\Omega)$ θέτουμε

$$\mathcal{A}(u,v) = \int_\Omega \left\{ a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} + auv \right\} dx \tag{4.35}$$

Θα περιορίσουμε τη μελέτη μας στο χώρο $H_0^1(\Omega)$. Συμβολίζουμε με A τον τελεστή

$$A = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i} \right) - a \tag{4.36}$$

ώστε

$$\mathcal{A}(u,v) = \langle -Au, v \rangle \quad \forall\, u, v \in H_0^1(\Omega) \tag{4.37}$$

όπου με $\langle \cdot, \cdot \rangle$ συμβολίζουμε το duality bracket μεταξύ του $H^{-1}(\Omega)$ και του $H_0^1(\Omega)$. Υποθέτουμε, ότι ο A και το Ω είναι αρκετά ομαλά, ώστε αν u είναι η ασθενής λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} -Au = f \quad \text{στο } \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{4.38}$$

τότε για κάθε $f \in L^p(\Omega)$, $p \geq 2$ να έχουμε ότι $u \in W^{2,p}(\Omega)$ και την εκτίμηση

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^p(\Omega)} \tag{4.39}$$

Έστω β ένα μεγιστικό μονότονο γράφημα του $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ώστε

$$0 \in \beta(0) \tag{4.40}$$

και j θετική και κυρτή συνάρτηση τέτοια ώστε

$$j(0) = 0, \qquad \partial j = \beta \tag{4.41}$$

Ορίζουμε $J[u]$ στον $H_0^1(\Omega)$ ως εξής:

$$J[u] = \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega j(u)dx, & \text{αν } j(u) \in L^1(\Omega) \\ +\infty, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \tag{4.42}$$

Για $\mu > 0$, θετουμε

$$K_\mu = \{ v \in H_0^1(\Omega) \mid J[v] \leq \mu \} \tag{4.43}$$

και έχουμε το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 4.6. *Έστω $f \in H^{-1}(\Omega)$. Τότε, η μεταβολική ανισότητα*

$$\begin{cases} \langle -Au, v-u\rangle \geq \langle f, v-u\rangle \ \ \forall\ v \in K_\mu \\ u \in K_\mu \end{cases} \tag{4.44}$$

έχει μοναδική λύση. Επιπλέον, αν υποθέσουμε ότι ισχύουν οι (4.38) και (4.39) και $f \in L^p(\Omega)$, $p \geq 2$, τότε $u \in W^{2,p}(\Omega)$ και

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^p(\Omega)} \tag{4.45}$$

Απόδειξη. Ας αποδείξουμε για αρχή ότι το J είναι κάτω ημισυνεχές για την ασθενή τοπολογία του $H_0^1(\Omega)$. Για το σκοπό αυτό, θεωρούμε ακολουθία $u_n \in H_0^1(\Omega)$ ώστε

$$u_n \rightharpoonup u \ \ \text{στον } H_0^1(\Omega) \tag{4.46}$$

Εξάγοντας, αν χρειαστεί, μια υπακολουθία υποθέτουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} J[u_n] = \liminf_{n\to\infty} J[u_n] \tag{4.47}$$

Τότε, από αυτή την υπακολουθία μπορούμε να εξάγουμε μια υπακολουθία που συμβολίζουμε με u_n, ώστε

$$u_n \to u \quad \text{στον } L^2(\Omega) \tag{4.48}$$

$$u_n \to u \quad \text{σχεδόν παντού στον } \Omega \tag{4.49}$$

Εφαρμόζοντα το Λήμμα του Fatou (αφού το j είναι συνεχές) παίρνουμε

$$J[u] = \int_\Omega j(u)dx = \int_\Omega \liminf_{n\to\infty} j(u_n)dx \leq \liminf_{n\to\infty} J[u_n] \tag{4.50}$$

Αφού, τώρα, το J είναι κάτω ημισυνεχές μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 4.1 με $\mathcal{A}(u,v)$ όπως ορίστηκε στο (4.35) και $H = H_0^1(\Omega)$. Έτσι δείχνουμε ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης του (4.3). Το σύνολο K_μ είναι μη κενό, δεδομένου ότι $J[0] = 0$ από (4.40) και (4.41) και άρα $0 \in K_\mu$, οπότε με τη βοήθεια της (4.37) βρίσκουμε μοναδική λύση του (4.44).

Το υπόλοιπο μέρος της απόδειξης θα είναι πιο πολύ περιγραφικό και δε θα σταθούμε πολύ σε αυτό, διότι χρειάζεται μερικά εργαλεία από τη θεωρία μεγιστικών μονότονων τελεστών που δεν έχουμε αναφέρει μιας και δεν εμπίπτουν στην περιοχή μελέτης μας, ωστόσο το αναφέρουμε για λόγους πληρότητας. Για $\varepsilon \geq 0$ και $f \in L^2(\Omega)$ θεωρούμε τη λύση u_ε του προβλήματος

$$\begin{cases} -Au_\varepsilon + \varepsilon\beta(u_\varepsilon) \ni f \\ u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{4.51}$$

Όταν γράφουμε το (4.51) εννοούμε ότι αναζητούμε ζεύγος $(u,g) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, ώστε

$$-Au_\varepsilon + \varepsilon g = f \quad \text{στο } \Omega \tag{4.52}$$

με την ασθενή έννοια, και

$$g(x) \in \beta(x, u(x)) \quad \text{σχεδόν παντού στο } \Omega$$

Αν πολλαπλασιάσουμε την (4.52) με $v - u_\varepsilon$, για $v \in H_0^1(\Omega)$ και ολοκληρώνοντας στο Ω λαμβάνουμε

$$\langle -Au_\varepsilon, v - u_\varepsilon \rangle + \varepsilon \int_\Omega \beta(u_\varepsilon)(v - u_\varepsilon)dx \geq (f, v - u_\varepsilon) \tag{4.53}$$

όπου στο δεξί μέλος με $(\cdot,\cdot)$ συμβολίζουμε το εσωτερικό γινόμενο στον $L^2(\Omega)$. Αφού $\beta = \partial j$ έχουμε

$$\int_\Omega j(v)dx - \int_\Omega j(u_\varepsilon)dx \geq \int_\Omega \beta(u_\varepsilon)(v - u_\varepsilon)dx$$

και σε συνδυασμό με την (4.53) δίνει

$$\begin{cases} \langle -Au_\varepsilon, v - u_\varepsilon \rangle + \varepsilon\{J[v] - J[u_\varepsilon]\} \geq (f, v - u_\varepsilon) \quad \forall\ v \in H_0^1(\Omega) \\ u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{4.54}$$

Αυτό σημαίνει ότι η u_ε είναι λύση του (4.54). Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 4.4 για κάποιο $\varepsilon = \varepsilon_\mu$, παίρνουμε $u = u_\varepsilon$ και σύμφωνα με γνωστό αποτέλεσμα ομαλότητας[1], για $f \in L^p(\Omega)$ έχουμε $u = u_\varepsilon \in W^{2,p}(\Omega)$ και την εκτίμηση (4.45). $\square$

[1] H. Brézis, Nouveaux théorèmes de régularité pour les problèmes unilatéraux.

Κεφάλαιο 5

Ζητήματα Μοναδικότητας

Θα αφιερώσουμε αυτό το κεφάλαιο στη μελέτη της μοναδικότητας λύσεως. Στην πρώτη παράγραφο, θα παρουσιάσουμε ένα βασικό αποτέλεσμα μοναδικότητας για τοπικά, μη γραμμικά προβλήματα. Ωστόσο, στα μη γραμμικά προβλήματα είναι πολύ εύκολο να χαθεί η μοναδικότητα της λύσης και αυτό ακριβώς το φαινόμενο θα εξετάσουμε στη δεύτερη παράγραφο.

5.1 Ένα Αποτέλεσμα Μοναδικότητας

Έστω Ω ένα λείο και ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, με σύνορο Γ, το οποίο χωρίζεται σε δύο μέρη: το Γ_0 και το Γ_1. Θέτουμε

$$\mathcal{V} = \{v \in H_0^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ στο } \Gamma_0\} \tag{5.1}$$

Τότε, για $f \in \mathcal{V}^*$, θεωρούμε u την ασθενή λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial x_i}(A_i(x, u, \nabla u)) = f, \quad \text{στο } \Omega \\ u \in \mathcal{V} \end{cases} \tag{5.2}$$

Με άλλα λόγια, η u είναι λύση στο

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega A_i(x, u, \nabla u)\frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \langle f, v\rangle, \quad \forall\ v \in \mathcal{V} \\ u \in \mathcal{V} \end{cases} \tag{5.3}$$

Όπως έχουμε στο Κεφάλαιο 1, αν υποθέσουμε ότι τα αρχικά δεδομένα μας είναι αρκετά ομαλά, τότε η u είναι λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial x_i}(A_i(x, u, \nabla u)) = f, \quad \text{στο } \Omega \\ u = 0 \ \text{ στο } \Gamma_0 \\ A_i(x, u, \nabla u)\nu_i = 0 \ \text{ στο } \Gamma_1 \end{cases} \tag{5.4}$$

όπου $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο σύνορο Γ. Υποθέτουμε ότι $|\Gamma_0| \neq 0$, ώστε να βρισκόμαστε σε μια απλή περίπτωση. Όσον αφορά το διανυσματικό πεδίο $A = (A_1, \ldots, A_n)$, έχουμε τα ακόλουθα: υπάρχει σταθερά $\alpha > 0$ ώστε

$$\begin{gathered}(A_i(x, u, \xi) - A_i(x, u, \xi'))(\xi_i - \xi_i') \geq \alpha|\xi - \xi'|^2 \\ \forall u \in \mathbb{R},\ \forall\ \xi, \xi' \in \mathbb{R}^n,\ \text{σχεδόν παντού στο } \Omega\end{gathered} \tag{5.5}$$

Ακόμα, υπάρχουν αύξουσα συνάρτηση ω, συνάρτηση $c(x) \in L^2(\Omega)$, $c(x) \geq 0$ και σταθερά C ώστε

$$\begin{gathered} |A_i(x,u,\xi) - A_i(x,v,\xi)| \leq (c(x) + C|\xi|)\omega(|u-v|) \\ \forall\ i = 1,\dots,n,\ \forall\ \xi \in \mathbb{R}^n,\ \forall\ u,v \in \mathbb{R},\ \text{σχεδόν παντού στο } \Omega \end{gathered} \tag{5.6}$$

με

$$\int_0^\infty \frac{ds}{\omega(s)} = +\infty \tag{5.7}$$

Στην (5.6) μπορούμε πάντοτε να επιλέξουμε το ω έτσι, ώστε $\omega > 0$ στο $(0,+\infty)$ και το $\frac{1}{\omega}$ να παραμένει φραγμένο σε κάθε διάστημα της μορφής $[\varepsilon,+\infty)$, $\varepsilon > 0$. Τότε, μπορούμε να δείξουμε:

Θεώρημα 5.1. *Υποθέτουμε ότι ισχύουν οι (5.5)-(5.7) και $f_1, f_2 \in \mathcal{V}^*$. Αν u_1, u_2 οι λύσεις του προβλήματος (5.2) για $f = f_1$ και $f = f_2$ αντίστοιχα, τότε αν*

$$f_1 \leq f_2 \tag{5.8}$$

με την έννοια του $\mathcal{V}^*$, έχουμε

$$u_1 \leq u_2 \tag{5.9}$$

και το πρόβλημα (5.2) έχει το πολύ μία λύση.

Παρατήρηση 5.1. *Όταν λέμε ότι ισχύει η (5.8) με την έννοια του $\mathcal{V}^*$, εννούμε ότι*

$$\langle f_1, v\rangle \leq \langle f_2, v\rangle \quad \forall\ v \in \mathcal{V},\ v \geq 0 \tag{5.10}$$

Παρατήρηση 5.2. *Στην περίπτωση που τα A_i είναι Lipschitz ως προς u, με τη σταθερά Lipschitz να εξαρτάται από τα x και ξ, μπορούμε να επιλέξουμε*

$$\omega(t) = t \tag{5.11}$$

ώστε να ισχύει η (5.7).

Απόδειξη. Αφαιρώντας τις εξισώσεις (5.3) για τα ζεύγη (f_1, u_1) και (f_2, u_2) λαμβάνουμε

$$\int_\Omega [A_i(x,u_1,\nabla u_1) - A_i(x,u_2,\nabla u_2)]\frac{\partial v}{\partial x_i}dx \leq 0 \quad \forall\ v \in \mathcal{V} \ \ v \geq 0 \tag{5.12}$$

Ας θέσουμε

$$F_\varepsilon(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_\varepsilon^x \frac{ds}{\omega^2(s)} & \text{για } x \geq \varepsilon \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} \tag{5.13}$$

Πράγματι, έχει νόημα κάτι τέτοιο, αν $\omega > 0$ στο $(0,+\infty)$, ενώ αν υποθέσουμε ότι το $\frac{1}{\omega^2}$ είναι φραγμένο σε κάθε διάστημα $[\varepsilon,+\infty)$, η F_ε είναι προφανώς Lipschitz, με

$$F'_\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega^2(x)} & \text{για } x \geq \varepsilon \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} \tag{5.14}$$

και η συνάρτηση $F_\varepsilon(u_1 - u_2)$ είναι στοιχείο του $\mathcal{V}$. Πηγαίνοντας πίσω στην (5.12) και αντικαθιστώντας $v = F_\varepsilon(u_1 - u_2)$ παίρνουμε

$$\int_\Omega [A_i(x,u_1,\nabla u_1) - A_i(x,u_2,\nabla u_2)]\frac{\partial}{\partial x_i}F_\varepsilon(u_1-u_2)dx \leq 0$$

και το γράφουμε ως

$$\int_\Omega [A_i(x,u_1,\nabla u_1) - A_i(x,u_1,\nabla u_2)]\frac{\partial}{\partial x_i}F_\varepsilon(u_1-u_2)dx$$
$$\leq \int_\Omega [A_i(x,u_2,\nabla u_2) - A_i(x,u_1,\nabla u_2)]\frac{\partial}{\partial x_i}F_\varepsilon(u_1-u_2)dx$$

Όμως από τις (5.5), (5.6) και (5.14)

$$\int_\Omega [A_i(x,u_1,\nabla u_1) - A_i(x,u_1,\nabla u_2)]\frac{\partial}{\partial x_i}F_\varepsilon(u_1-u_2)dx$$
$$\overset{(5.14)}{=} \int_{\{u_1-u_2\geq\varepsilon\}} \frac{1}{\omega^2(u_1-u_2)}[A_i(x,u_2,\nabla u_2) - A_i(x,u_1,\nabla u_2)]\frac{\partial}{\partial x_i}(u_1-u_2)dx$$
$$\overset{(5.5)}{\geq} \alpha\int_{\{u_1-u_2\geq\varepsilon\}} \frac{|\nabla(u_1-u_2)|^2}{\omega^2(u_1-u_2)}dx$$

και

$$\int_\Omega [A_i(x,u_2,\nabla u_2) - A_i(x,u_1,\nabla u_2)]\frac{\partial}{\partial x_i}F_\varepsilon(u_1-u_2)dx$$
$$\leq \int_{\{u_1-u_2\geq\varepsilon\}} \frac{\omega(|u_1-u_2|)}{\omega^2(u_1-u_2)}|\nabla(u_1-u_2)|(c(x)+C|\nabla u_2|)dx$$
$$= \int_{\{u_1-u_2\geq\varepsilon\}} \frac{|\nabla(u_1-u_2)|}{\omega(u_1-u_2)}(c(x)+C|\nabla u_2|)dx$$

και εφαρμόζοντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz παίρνουμε

$$\leq \left[\int_{\{u_1-u_2\geq\varepsilon\}} \frac{|\nabla(u_1-u_2)|^2}{\omega^2(u_1-u_2)}dx\right]^{1/2}\left[\int_{\{u_1-u_2\geq\varepsilon\}}(c(x)+C|\nabla u_2|)^2dx\right]^{1/2}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, τελικά, έχουμε

$$\alpha^2\int_{\{u_1-u_2\geq\varepsilon\}} \frac{|\nabla(u_1-u_2)|^2}{\omega^2(u_1-u_2)}dx \leq \int_{\{u_1-u_2\geq\varepsilon\}}(c(x)+C|\nabla u_2|)^2dx \tag{5.15}$$

με το δεξί μέλος να είναι πεπερασμένο, μιας και οι $c(x)$ και $|\nabla u_2|$ είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Τότε, θέτουμε

$$G_\varepsilon(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_\varepsilon^x \frac{ds}{\omega(s)} & \text{για } x\geq\varepsilon \\ 0 & \text{διαφορετικά}\end{cases}$$

και άρα η (5.15) μεταφράζεται ως

$$\int_\Omega |\nabla G_\varepsilon(u_1-u_2)|^2dx \leq C'$$

όπου C' σταθερά ανεξάρτητη του ε. Από την ανισότητα Poincaré - πράγματι μπορούμε να τη χρησιμοποιήσουμε, μιας και $\mathcal{V}\subset H_0^1(\Omega)$ - έχουμε

$$\int_\Omega G_\varepsilon^2(u_1-u_2)dx \leq C''$$

και λόγω της (5.7), αν πάρουμε $\varepsilon \to 0$, θα προκύψει άτοπο αν $u_1 - u_2 > 0$ σε σύνολο θετικού μέτρου και έτσι αποδεικνύεται η (5.9).

Αν, τώρα, θεωρήσουμε u_1, u_2 λύσεις του (5.2), είναι σαν να διαθέτουμε δύο προβλήματα με $f_1 = f_2$. Αυτό σημαίνει ότι $f_1 \le f_2$ και $f_2 \le f_1$ και άρα λόγω της (5.9) έχουμε $u_1 \le u_2$ και $u_2 \le u_1$, οπότε $u_1 = u_2$ και έτσι το πρόβλημα (5.2), αν διαθέτει λύση, αυτή θα είναι μοναδική. $\square$

Παρατήρηση 5.3. *Όπως είδαμε και στην απόδειξη παραπάνω, το Θεώρημα 5.1, είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρον και χρήσιμο, καθώς μπορεί να μας δώσει αφενός μια σχέση μεταξύ των λύσεων παρόμοιων προβλημάτων με διαφορετικά αρχικά δεδομένα και αφετέρου να μας εγγυηθεί τη μοναδικότητα μη γραμμικών τοπικών προβλημάτων.*

5.2 Μη-μοναδικότητα

Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε ότι αν η εξάρτηση ως προς u είναι αρκετά ομαλή, τοπικά προβλήματα της μορφής

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a(x,u)\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right) = f & \text{στο } \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

έχουν μοναδική λύση. Αυτή η εξάρτηση του $a(x,u)$ από το u μπορεί να γραφεί $a(x,u(x))$ και εξαρτάται μόνο από την τιμή του u στο σημείο x, είναι δηλαδή τοπική. Στην περίπτωση που επιτρέψουμε εξάρτηση από γειτονικά σημεία, η μοναδικότητα της λύσης μπορεί να χαθεί αμέσως. Στην πραγματικότητα, η μοναδικότητα μπορεί να χαθεί ακόμα κι αν το a είναι λείο.

Ας θεωρήσουμε, επί παραδείγματι, ότι η u είναι ασθενής λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} -a\left(\displaystyle\int_\Omega u dx\right)\Delta u + u = f, & \text{στο } \Omega \\ -\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = g, & \text{στο } \Gamma \end{cases} \tag{5.16}$$

Αν υποθέσουμε ότι η g είναι τέτοια ώστε

$$\int_\Gamma g(x) d\sigma(x) \neq 0$$

η επίλυση του (5.16), όπως και των περισσότερων παρόμοιων μη τοπικών προβλημάτων, ανάγεται στην επίλυση μιας μη γραμμικής αλγεβρικής εξίσωσης. Πράγματι, ολοκληρώνοντας την παραπάνω εξίσωση στο Ω παίρνουμε

$$-a\left(\int_\Omega u dx\right)\int_\Omega \Delta u dx + \int_\Omega u dx = \int_\Omega f dx$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Green

$$\int_\Omega \Delta u dx = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma(x) = -\int_\Gamma g d\sigma(x) \neq 0 \tag{5.17}$$

Αν το ως άνω ολοκλήρωμα ήταν ίσο με 0, δε θα είχε νόημα η περαιτέρω μελέτη του προβλήματος μιας και, τελικά, δε θα υπήρχε εξάρτηση από μη τοπικό όρο. Αυτός είναι ο λόγος ποι κάναμε την παραπάνω υπόθεση. Έχουμε, λοιπόν

$$-a\left(\int_\Omega u dx\right)\int_\Omega g d\sigma(x) + \int_\Omega u dx = \int_\Omega f dx$$

που σημαίνει ότι η ποσότητα

$$\mu = \int_\Omega u dx$$

είναι λύση της εξίσωσης

$$a(\mu)\int_\Gamma g d\sigma(x) + \mu = \int_\Omega f dx$$

Για την ακρίβεια, ισχύει το ακόλουθο Θεώρημα:

Θεώρημα 5.2. *Το πρόβλημα (5.16) έχει τόσες λύσεις, όσες και η αλγεβρική εξίσωση*

$$a(\mu)\int_\Gamma g d\sigma(x) + \mu = \int_\Omega f dx \tag{5.18}$$

για $\mu \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη. Με την παραπάνω διαδικασία δείξαμε ότι αν η (5.16) έχει λύση, τότε η ποσότητα

$$\mu = \int_\Omega u dx$$

είναι λύση της (5.18). Αντίστροφα, αν η μ είναι λύση της (5.18), τότε υπάρχει μοναδική ασθενής λύση u του προβλήματος

$$\begin{cases} -a(\mu)\Delta u + u = f, & \text{στο } \Omega \\ -\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = g, & \text{στο } \Gamma \end{cases}$$

Ολοκληρώνοντας την πρώτη εξίσωση στο Ω και χρησιμοποιώντας τον τύπο του Green (5.17), προκύπτει ότι

$$a(\mu)\int_\Gamma g d\sigma(x) + \int_\Omega u dx = \int_\Omega f dx = a(\mu)\int_\Gamma g d\sigma(x) + \mu$$

και άρα

$$\mu = \int_\Omega u dx$$

και η u είναι λύση του (5.16). $\square$

Τώρα, είμαστε σε θέση να απαντήσουμε στο ερώτημα της μοναδικότητας. Η (5.18) γράφεται

$$a(\mu) = \left(\int_\Gamma g d\sigma(x)\right)^{-1}\left(-\mu + \int_\Omega f dx\right)$$

και οι λύσεις αυτής προκύπτουν ως σημεία τομής του γραφήματος της a και της ευθείας

$$\mu \mapsto \left(\int_\Gamma g d\sigma(x)\right)^{-1}\left(-\mu + \int_\Omega f dx\right)$$

Επιλέγοντας κατάλληλα το a, η (5.18) μπορεί να έχει όσες λύσεις θέλουμε: μία και μοναδική, τριάντα οκτώ, καμία, ακόμα και υπεραριθμήσιμα άπειρες.

Μέρος II

Παραβολικά προβλήματα

Κεφάλαιο 6

Γραμμικά Παραβολικά Προβλήματα

6.1 Ένα εισαγωγικό παράδειγμα

Έστω το χωρίο $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, με σύνορο Γ. Θεωρούμε την εξίσωση θερμότητας:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{στο } \Omega \times (0, T) \\ u(x,t) = 0 & \text{στο } \Gamma \times (0, T) \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{στο } \Omega \end{cases} \tag{6.1}$$

Βάσει όσων έχουμε πει στα προηγούμενα κεφάλαια, η δεύτερη συνθήκη του (6.1) μπορεί να ερμηνευτεί ως

$$u(\cdot, t) \in H_0^1(\Omega) \tag{6.2}$$

Αν πολλαπλασιάσουμε την πρώτη εξίσωση του (6.1) με $v \in H_0^1(\Omega)$ και ολοκληρώσουμε στο Ω λαμβάνουμε:

$$\int_\Omega u_t v dx + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_\Omega f v dx \quad \forall\ v \in H_0^1(\Omega)$$

Αν εισάγουμε το συμβολισμό

$$(u, v) = \int_\Omega u v dx \ \text{ και } \ [u, v] = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx$$

η παραπάνω ισότητα γίνεται

$$\frac{d}{dt}(u, v) + [u, v] = (f, v) \quad \forall\ v \in H_0^1(\Omega) \tag{6.3}$$

Θα θέλαμε να προχωρήσουμε όπως και με τα ελλειπτικά προβλήματα. Ας παρατηρήσουμε όμως, ότι σε αντίθεση με τα προηγούμενα κεφάλαια, η λύση μας θέλουμε να εξαρτάται *και* από το χρόνο! Αυτό σημαίνει ότι πλέον, οι χώροι Lebesgue και Sobolev δεν αρκούν - μιας και δεν υπάρχει έννοια χρόνου στο φορμαλισμό - και άρα θα πρέπει να εισάγουμε μία γενίκευση αυτών: τους χώρους Bochner. Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με αυτούς τους χώρους παραπέμπουμε στο Παράρτημα.

6.2 Επίλυση παραβολικών προβλημάτων

Θεωρούμε V και H χώρους Hilbert, τέτοιους ώστε

$$V, H \text{ διαχωρίσιμοι} \tag{6.4}$$

$$V \hookrightarrow H \hookrightarrow V^*, \quad V \text{ πυκνός στον } H \tag{6.5}$$

Όταν γράφουμε $V \hookrightarrow H$ εννοούμε ότι η κανονική ενσφήνωση του V στον H είναι συνεχής. Συμβολίζουμε με $[\cdot,\cdot]$ και $\|\cdot\|_V$ το εσωτερικό γινόμενο και τη νόρμα στον V, ενώ με $(\cdot,\cdot)$ και $\|\cdot\|_H$ το εσωτερικό γινόμενο και τη νόρμα στον H. Τότε, για $t \in (0,T)$ θεωρούμε $\mathcal{A}(t;u,v)$ διγραμμική μορφή στον V με τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$\forall\ u, v \in V, \text{ η απεικόνιση } t \mapsto \mathcal{A}(t;u,v) \text{ είναι μετρήσιμη} \tag{6.6}$$

υπάρχει σταθερά $M > 0$ ώστε

$$|\mathcal{A}(t;u,v)| \le M\|u\|_V\|v\|_V \quad \forall\ u, v \in V, \text{ σχεδόν για κάθε } t \in (0,T) \tag{6.7}$$

και υπάρχουν σταθερές $\alpha,\ \lambda$ ώστε

$$\mathcal{A}(t;u,u) + \lambda\|u\|_H^2 \ge \alpha\|u\|_V^2 \quad \forall\ u \in V, \text{ σχεδόν για κάθε } t \in (0,T) \tag{6.8}$$

Τότε, για

$$u_0 \in H \text{ και } f \in L^2(0,T;V^*) \tag{6.9}$$

θα θέλαμε να βρούμε u λύση του προβλήματος:

$$u \in L^2(0,T;V) \text{ και } u_t \in L^2(0,T;V^*) \tag{6.10}$$

$$u(0) = u_0 \tag{6.11}$$

$$\frac{d}{dt}(u,v) + \mathcal{A}(\cdot;u,v) = \langle f, v\rangle \quad \text{στον } \mathcal{D}^*(0,T), \quad \forall\ v \in V \tag{6.12}$$

Δεδομένου ότι $\frac{d}{dt}(u,v) = \langle u_t, v\rangle$, η (6.12) γράφεται

$$u_t + \mathcal{A}(t;u,\cdot) = f \quad \text{στον } L^2(0,T;V^*) \tag{6.13}$$

και μπορούμε να αποδείξουμε:

Θεώρημα 6.1. *Υποθέτοντας ότι ισχύουν οι (6.4) - (6.8), το πρόβλημα (6.10) - (6.12) έχει μοναδική λύση.*

Απόδειξη. Για αρχή, μπορούμε να υποθέσουμε ότι στην (6.8) χωρίς βλάβη της γενικότητας $\lambda = 0$. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι γνωρίζουμε πως σε αυτή την περίπτωση υπάρχει μια λύση. Τότε, μπορούμε να βρούμε w λύση του

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(w,v) + \mathcal{A}(t;w,v) + \lambda(w,v) = \langle e^{-\lambda t} f, v\rangle \quad \forall\ v \in V \\ w(0) = u_0 \end{cases} \tag{6.14}$$

και πολλαπλασιάζοντας στην πρώτη εξίσωση του (6.14) με $e^{\lambda t}$ και τα δύο μέλη, παίρνουμε στον $\mathcal{D}^*(0,T)$

$$\frac{d}{dt}(e^{\lambda t}w, v) + \mathcal{A}(t; e^{\lambda t}w, v) = \langle f, v\rangle \quad \forall\ v \in V$$

δηλαδή η $u = e^{\lambda t}w$ είναι η λύση που αναζητούμε.

Θέλουμε, τώρα, να κατασκευάσουμε μία προσέγγιση της u. Για το σκοπό αυτό, έστω $(w_j)_{j=1}^{\infty}$ βάση του V. Τότε, η ίδια θα είναι βάση και του H, λόγω του ότι ο V είναι πυκνός στον H. Ας παρατηρήσουμε, ότι η διαχωρισιμότητα του V εγγυάται την ύπαρξη της βάσης. Τότε, αφού $u_0 \in H$, υπάρχει ακολουθία $(x_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, ώστε

$$u_0 = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} x_j w_j \quad \text{στον } H \tag{6.15}$$

και ισχυριζόμαστε ότι υπάρχουν συναρτήσεις $(x_j(t))_{j=1}^{n}$ ορισμένες στο $(0,T)$ που είναι λύσεις του γραμμικού διαφορικού συστήματος

$$x_j(0) = x_j \quad \forall\ j = 1,2,\ldots,n \tag{6.16}$$

$$u_n(t) = \sum_{j=1}^{n} x_j(t) w_j \tag{6.17}$$

$$(u_n'(t), w_j) + \mathcal{A}(t; u_n(t), w_j) = \langle f(t), w_j\rangle \quad \forall\ j = 1,2,\ldots,n, \quad \sigma.\pi.\ \text{στο } (0,T) \tag{6.18}$$

Για να δείξουμε την ύπαρξη και μοναδικότητα του $x(t) = (x_j(t))_j$, ας παρατηρήσουμε ότι ο πίνακας με στοιχεία $((w_i, w_j))_{i,j}$ είναι αντιστρέψιμος και άρα η (6.18) μπορεί να γραφεί

$$x'(t) = A(t)x(t) + F(t) \tag{6.19}$$

με τα στοιχεία του A να ανήκουν στον $L^{\infty}(0,T)$ και του F στον $L^2(0,T)$. Τώρα, είναι προφανές ότι το x είναι η μοναδική λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης

$$x(t) = x(0) + \int_0^t \{A(s)x(s) + F(s)\}ds$$

Πολλαπλασιάζουμε κάθε εξίσωση της (6.18) με $x_j(t)$ και αθροίζουμε ως προς j για να πάρουμε

$$(u_n'(t), u_n(t)) + \mathcal{A}(t; u_n(t), u_n(t)) = \langle f(t), u_n(t)\rangle$$

ή αλλιώς

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_n(t)\|_H^2 + \mathcal{A}(t; u_n(t), u_n(t)) = \langle f(t), u_n(t)\rangle \le \|f(t)\|_{V^*}\|u_n(t)\|_V \tag{6.20}$$

Τότε από την (6.8) (που όπως δείξαμε ισχύει για $\lambda = 0$), λαμβάνουμε

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_n(t)\|_H^2 + \alpha\|u_n(t)\|_V^2 \le \|f(t)\|_{V^*}\|u_n(t)\|_V$$

και εφαρμόζοντας την ανισότητα Young

$$ab \le \frac{\alpha}{2}a^2 + \frac{1}{2\alpha}b^2 \quad \forall\ a, b$$

προκύπτει

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_n(t)\|_H^2 + \alpha\|u_n(t)\|_V^2 \le \frac{\alpha}{2}\|u_n(t)\|_V^2 + \frac{1}{2\alpha}\|f(t)\|_{V^*}^2$$

οπότε

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_n(t)\|_H^2 + \frac{\alpha}{2}\|u_n(t)\|_V^2 \le \frac{1}{2\alpha}\|f(t)\|_{V^*}^2$$

Αν ολοκληρώσουμε από 0 έως $t \in [0,T]$ θα πάρουμε

$$\frac{\|u_n(t)\|_H^2}{2} + \frac{\alpha}{2}\int_0^t \|u_n(s)\|_V^2 ds \le \frac{\|u_n(0)\|_H^2}{2} + \frac{1}{2\alpha}\int_0^t \|f(s)\|_{V^*}^2 ds \tag{6.21}$$

Από τις (6.15) και (6.17) έχουμε

$$u_n(0) \to u_0 \quad \text{στον } H$$

συνεπώς

$$\|u(0)\|_H \le C\|u_0\|_H \tag{6.22}$$

Τότε, η (6.21) δίνει

$$\|u_n(t)\|_H^2 + \alpha\int_0^t \|u_n(s)\|_V^2 ds \le C\left(\|u_0\|_H^2 + \int_0^t \|f(s)\|_{V^*}^2 ds\right) \quad \forall\ t \in [0,T] \tag{6.23}$$

και άρα για κάποια άλλη σταθερά C είναι

$$\|u_n\|_{L^\infty(0,T;H)}, \|u_n\|_{L^2(0,T;V)} \le C \tag{6.24}$$

Ήρθε η ώρα να περάσουμε στο όριο. Πριν, όμως, ας παρατηρήσουμε ότι λόγω της (6.7), η απεικόνιση $v \mapsto \mathcal{A}(t;u,v)$ είναι μια γραμμική συνεχής μορφή στον V, για κάθε u και σχεδόν για κάθε t. Τότε, από το Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz, θα υπάρχει ένα στοιχείο του δυϊκού χώρου, ας το ονομάσουμε $A(t)u \in V^*$ ώστε:

$$\mathcal{A}(t;u,v) = \langle A(t)u, v\rangle \quad \forall\ u,v \in V, \text{ σχεδόν για κάθε } t \in (0,T) \tag{6.25}$$

Είναι προφανές, ότι η απεικόνιση $u \mapsto A(t)u$ είναι ένας γραμμικός τελεστής από τον V στον V^*, ενώ λόγω της (6.7), σχεδόν για κάθε τ, θα έχουμε

$$\|A(t)u\|_{V^*} \le M\|u\|_V \quad \forall\ u \in V \tag{6.26}$$

και λόγω της (6.24)

$$\|A(t)u_n\|_{L^2(0,T;V^*)} \le C \tag{6.27}$$

για κάποια άλλη σταθερά C. Από την (6.24) και την (6.27), μπορούμε να βρούμε υπακολουθία της u_n, που για λόγους απλότητας συμβολίζουμε επίσης με u_n, ώστε:

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{στον } L^2(0,T;V) \tag{6.28}$$

$$u_n \overset{*}{\rightharpoonup} \bar{u} \quad \text{στον } L^\infty(0,T;H) \tag{6.29}$$

$$A(t)u_n \rightharpoonup \bar{\bar{u}} \quad \text{στον } L^2(0,T;V^*) \tag{6.30}$$

Ισχυριζόμαστε ότι $\bar{u} = u$ και $\bar{\bar{u}} = A(t)u$. Τωόντι, αν θεωρήσουμε $v \in L^2(0,T;V)$, από το σχήμα (6.5) $v \in L^2(0,T;H)$, μιας και το (6.5) μας εξασφαλίζει την ανισότητα

$$\|v\|_H \le C\|v\|_V \quad \forall\ v \in V \tag{6.31}$$

Άρα, για $v \in L^2(0,T;V)$, από την (6.29)

$$\int_0^T (u_n, v)dt \to \int_0^T (\bar{u}, v)dt \tag{6.32}$$

Τώρα, κρατώντας σταθερό το v, η απεικόνιση

$$u \mapsto \int_0^T (u, v)dt$$

είναι γραμμική στον $L^2(0,T;V)$ και από την (6.28) παίρνουμε

$$\int_0^T (u_n, v)dt \to \int_0^T (u, v)dt \tag{6.33}$$

Συνδυάζοντας τις (6.32) και (6.33) λαμβάνουμε

$$\int_0^T (u - \bar{u}, v)dt = 0 \ \ \forall \ v \in L^2(0,T;V)$$

και από την πυκνότητα του V στον H συμπεραίνουμε ότι $\bar{u} = u$. Εν συνεχεία, για κάθε $v \in L^2(0,T;V)$, η (6.30) δίνει

$$\int_0^T \langle A(t)u_n, v\rangle dt \to \int_0^T \langle \bar{\bar{u}}, v\rangle dt$$

Από την άλλη, $\langle A(t)u_n, v\rangle = \mathcal{A}(t; u_n, v)$ και η απεικόνιση $t \mapsto \mathcal{A}(t; \cdot, v)$ ανήκει στον $L^2(0,T;V^*)$ άρα

$$\int_0^T \langle A(t)u_n, v\rangle dt \to \int_0^T \langle A(t)u, v\rangle dt$$

οπότε με το ίδιο σκεπτικό $\bar{\bar{u}} = A(t)u$. Δηλαδή έχουμε βρει μια ακολουθία u_n τέτοια ώστε:

$$u_n \rightharpoonup u \ \ \text{στον } L^2(0,T;V)$$

$$u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u \ \ \text{στον } L^\infty(0,T;H)$$

$$A(t)u_n \rightharpoonup A(t)u \ \ \text{στον } L^2(0,T;V^*)$$

Μένει να δείξουμε ότι το u είναι λύση του (6.10) - (6.12). Έστω, λοιπόν, $v \in V$. Τότε, μπορούμε να βρούμε ακολουθία $(v_n)_n$, με

$$v_n = \sum_{j=1}^n \alpha_j^n w_j$$

ώστε $v_n \to v$ στον V και άρα και στον H. Τότε, για κάθε $\varphi \in \mathcal{D}(0,T)$

$$\varphi(t)v_n \to \varphi(t)v \ \ \text{στον } L^2(0,T;V)$$

και ως εκ τούτου και στον $L^2(0,T;H)$. Αν, τώρα, πολλαπλασιάσουμε κάθε εξίσωση της (6.18) επί $\varphi(t)\alpha_j^n$, αθροίσουμε ως προς j και κατόπιν ολοκληρώσουμε στο $(0,T)$ εξάγουμε τη σχέση:

$$\int_0^T [-(u_n, \varphi'(t)v_n) + \langle A(t)u_n, \varphi(t)v_n\rangle]dt = \int_0^T \langle f(t), \varphi(t)v_n\rangle dt \tag{6.34}$$

και παίρνοντας το όριο καθώς $n \to \infty$

$$\int_0^T [-(u, \varphi'(t)v) + \mathcal{A}(t; u, \varphi(t)v)]dt = \int_0^T \langle f(t), \varphi(t)v\rangle dt$$

που μπορεί να γραφεί και στη μορφή

$$\int_0^T [-(u, v)\varphi' + \mathcal{A}(t; u, v)\varphi]dt = \int_0^T \langle f(t), v\rangle \varphi dt \tag{6.35}$$

συνεπώς ισχύει η (6.12) και μένει να δείξουμε μόνο τις (6.10) και (6.11). Για την (6.10) έχουμε ήδη ότι $u \in L^2(0, T; V)$. Για να δείξουμε ότι $u_t \in L^2(0, T; V^*)$ χρειάζεται να γράψουμε την (6.35) ως

$$\frac{d}{dt}(u, v) = \langle f(t) - A(t)u, v\rangle \quad \text{στον } \mathcal{D}^*(0, T)$$

για κάθε $v \in V$. Αυτό επίσης σημαίνει ότι

$$-\int_0^T (u, v)\varphi'(t)dt = \int_0^T \langle f(t) - A(t)u, v\rangle \varphi(t)dt \ \ \forall\, v \in V,\ \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(0, T)$$

και άρα

$$u_t = f(t) - A(t)u \in L^2(0, T; V^*) \tag{6.36}$$

Τέλος, για να δείξουμε την (6.11) θεωρούμε μια λεία συνάρτηση φ, ώστε $\varphi(0) \neq 0$ και $\varphi(T) = 0$. Από την (6.36) και το γεγονός ότι $\varphi(t)v \in L^2(0, T; V)\ \forall\, v \in V$ λαμβάνουμε

$$\langle u_t, v\rangle \varphi(t) = \langle f(t) - A(t)u, v\rangle \varphi(t) \quad \text{σχεδόν για κάθε } t \in (0, T)$$

Ολοκληρώνουμε στο $(0, T)$ και τότε

$$\int_0^T (u, v)_t \varphi dt = \int_0^T \langle f(t) - A(t)u, v\rangle \varphi dt$$

και με παραγοντική ολοκλήρωση

$$-(u(0), v)\varphi(0) - \int_0^T (u, v)\varphi' dt = \int_0^T \langle f(t) - A(t)u, v\rangle \varphi dt \tag{6.37}$$

Η (6.34) για την εν λόγω φ δίνει

$$-(u_n(0), v_n)\varphi(0) - \int_0^T (u_n, v_n)\varphi' dt = \int_0^T \langle f(t) - A(t)u_n, v_n\rangle \varphi dt$$

και περνώντας στο όριο έχουμε

$$-(u_0, v)\varphi(0) - \int_0^T (u, v)\varphi' dt = \int_0^T \langle f(t) - A(t)u, v\rangle \varphi dt \tag{6.38}$$

Από τις (6.37) και (6.38)

$$(u_0 - u(0), v) = 0 \ \ \forall\, v \in V$$

και λόγω πυκνότητας του V στον H προκύπτει ότι $u(0) = u_0$.

Τέλος, ας δείξουμε και τη μοναδικότητα της λύσης. Υποθέτουμε ότι u_1, u_2 είναι δύο λύσεις του (6.10) - (6.12), τότε με αφαίρεση κατά μέλη παίρνουμε

$$\frac{d}{dt}(u_1 - u_2, v) + \mathcal{A}(t; u_1 - u_2, v) = 0 \quad \text{στον } \mathcal{D}^*(0,T), \quad \forall\, v \in V$$

ή αλλιώς

$$\frac{d}{dt}(u_1 - u_2) + A(t)(u_1 - u_2) = 0 \quad \text{στον } L^2(0,T;V^*)$$

Πολλαπλασιάζοντας με $u_1 - u_2$ και ολοκληρώνοντας στο $(0,t)$

$$\|(u_1 - u_2)(t)\|_H^2 + \int_0^t \mathcal{A}(s; u_1 - u_1, u_1 - u_2) ds = 0$$

οπότε $u_1 = u_2$, διότι $a \geq 0$. $\square$

Σχετικά με τη σύγκλιση της u_n, μπορούμε να δείξουμε ότι $u_n \to u$ στον $L^2(0,T;V)$ ισχυρά! Για να το δούμε αυτό, αντικαθιστούμε στην (6.23) $t = T$ και τότε βλέπουμε ότι το $u_n(T)$ παραμένει φραγμένο στον H. Μπορούμε, λοιπόν, να εκμαιεύσουμε υπακολουθία u_n και να βρούμε $u_\infty \in H$ ώστε

$$u_n(T) \rightharpoonup u_\infty \quad \text{στον } H$$

και μάλιστα $u_\infty = u(T)$, που προκύπτει με την ίδια διαδικασία που ακολουθήσαμε για να δείξουμε ότι $u(0) = u_0$, επιλέγοντας αυτή τη φορά φ λεία, με $\varphi(0) = 0$ και $\varphi(T) \neq 0$.

Ας θεωρήσουμε την ποσότητα

$$U_n(T) := \frac{1}{2}\|u_n(T) - u(T)\|_H^2 + \int_0^T \mathcal{A}(t; u_n(t) - u(t), u_n(t) - u(t)) dt$$

Τότε

$$U_n(T) = \frac{1}{2}\|u_n(T)\|_H^2 + \int_0^T \mathcal{A}(t; u_n(t), u_n(t)) dt + R_n(T) \tag{6.39}$$

όπου

$$\begin{aligned} R_n(T) = &\frac{1}{2}\|u(T)\|_H^2 - (u_n(T), u(T)) - \int_0^T \mathcal{A}(t; u(t), u(t)) dt \\ &+ \int_0^T \mathcal{A}(t; -u(t), u_n(t) - u(t)) dt + \int_0^T \mathcal{A}(t; u_n(t) - u(t), -u(t)) dt \end{aligned}$$

και λόγω των ασθενών συγκλίσεων $u_n(T) \rightharpoonup u(T)$ και $u_n \rightharpoonup u$ έχουμε:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(T) = -\frac{1}{2}\|u(T)\|_H^2 - \int_0^T \mathcal{A}(t; u(t), u(t)) dt \tag{6.40}$$

Αν, από την άλλη, ολοκληρώσουμε την (6.20) στο $(0,T)$ θα πάρουμε

$$\frac{1}{2}\|u_n(T)\|_H^2 + \int_0^T \mathcal{A}(t; u_n(t), u_n(t)) dt = \frac{1}{2}\|u_n(0)\|_H^2 + \int_0^T \langle f(t), u_n(t)\rangle dt$$

Οπότε, περνώντας στο όριο

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\|u_n(T)\|_H^2 + \int_0^T \mathcal{A}(t; u(t), u(t)) dt = \frac{1}{2}\|u_0\|_H^2 + \int_0^T \langle f(t), u(t)\rangle dt \tag{6.41}$$

Ακόμα, επιλέγοντας στην (6.12) $v = u(t)$ και ολοκληρώνοντας, θα λάβουμε

$$\frac{1}{2}\|u(T)\|_H^2 + \int_0^T \mathcal{A}(t; u(t), u(t))dt = \frac{1}{2}\|u_0\|_H^2 + \int_0^T \langle f(t), u(t)\rangle dt \tag{6.42}$$

Από τις (6.41) και (6.42) παίρνουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n(T)\|_H^2 = \|u(T)\|_H^2 \tag{6.43}$$

Τέλος, συνδυάζοντας τις (6.39), (6.40) και (6.43) προκύπτει ότι

$$\lim_{n\to\infty} U_n(T) = 0$$

και τότε το επιθυμητό αποτέλεσμα ακολουθεί από το γεγονός ότι

$$\alpha \int_0^T \|u_n(t) - u(t)\|_H^2 dt \leq U_n(T)$$

6.3 Εφαρμογές

Έστω Ω ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με σύνορο Γ. Υποθέτουμε ότι $H = L^2(\Omega)$ και ότι ο V είναι κλειστός υπόχωρος του $H^1(\Omega)$, ώστε

$$H_0^1(\Omega) \subset V \subset H^1(\Omega) \tag{6.44}$$

Έστω $a_{ij},\ a_i,\ i,j = 1,2,\ldots,n,\ a_0$ συναρτήσεις του $L^\infty(\Omega \times (0,T))$, ώστε

$$a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2 \quad \text{σχεδόν για κάθε } (x,t) \in \Omega \times (0,T), \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n \tag{6.45}$$

και θέτουμε

$$\mathcal{A}(t; u, v) = \int_\Omega \left[a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i} + a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v + a_0 uv \right] dx \tag{6.46}$$

Η συνέχεια του a προκύπτει εύκολα, όπως έχουμε δείξει πολλάκις στα πρώτα κεφάλαια. Για την πιεστικότητα θα χρησιμοποιήσουμε τις παραπάνω υποθέσεις:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(t; u, u) &= \int_\Omega \left[a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i} + a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} u + a_0 u^2 \right] dx \\ &\geq \alpha \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \|A\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |\nabla u||u| dx - \|a_0\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega u^2 dx\end{aligned}$$

όπου A είναι το διάνυσμα με ορίσματα τα a_i. Εφαρμόζουμε την ανισότητα Young στο μεσαίο όρο και έχουμε:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(t; u, u) \geq \alpha \int_\Omega |\nabla u|^2 dx &- \|A\|_{L^\infty(\Omega)} \frac{\varepsilon}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \\ &- \|A\|_{L^\infty(\Omega)} \frac{1}{2\varepsilon} \int_\Omega u^2 dx - \|a_0\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega u^2 dx\end{aligned}$$

δηλαδή

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(t; u, u) &+ \left(\|A\|_{L^\infty(\Omega)} \frac{1}{2\varepsilon} + \|a_0\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \int_\Omega u^2 dx \\ &\geq \left(\alpha - \|A\|_{L^\infty(\Omega)} \frac{\varepsilon}{2} \right) \int_\Omega |\nabla u|^2 dx\end{aligned}$$

Αν θέσουμε $\lambda := \|A\|_{L^\infty(\Omega)}\frac{1}{2\varepsilon} + \|a_0\|_{L^\infty(\Omega)} + \alpha - \|A\|_{L^\infty(\Omega)}\frac{\varepsilon}{2}$ η τελευταία εξίσωση γράφεται

$$\mathcal{A}(t;u,u) + \lambda \int_\Omega u^2 dx \geq \left(\alpha - \|A\|_{L^\infty(\Omega)}\frac{\varepsilon}{2}\right) \int_\Omega \left[|\nabla u|^2 + u^2\right] dx$$

που είναι η (6.8) με κατάλληλες σταθερές. Αν επιλέξουμε

$$u_0 \in L^2(\Omega) \text{ και } u_t \in L^2(0,T;V^*) \tag{6.47}$$

τότε χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 6.1, έχουμε αποδείξει το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Θεώρημα 6.2. *Κάτω από τις υποθέσεις της παραγράφου, υπάρχει μοναδική λύση u του προβλήματος*

$$\begin{cases} u \in L^2(0,T;V) \quad u_t \in L^2(0,T;V^*) \\ u(0) = u_0 \\ \dfrac{d}{dt}(u,v) + \mathcal{A}(t;u,v) = \langle f, v\rangle \quad \text{στο } \mathcal{D}^*(0,T), \quad \forall\, v \in V \end{cases} \tag{6.48}$$

Ας ερμηνεύσουμε το πρόβλημα (6.48): για να μην προκύψουν προβλήματα ομαλότητας υποθέτουμε για λίγο ότι όλες οι συναρτήσεις του προβλήματος (6.48) είναι λείες. Τότε η τελευταία εξίσωση του (6.48) γράφεται:

$$(u_t, v) + \mathcal{A}(t;u,v) = (f,v) \quad \forall\, t \in (0,T), \ \forall\, v \in V, \ v \text{ λεία}$$

Αν, επί παραδείγματι, πάρουμε $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, θα λάβουμε

$$\int_\Omega u_t v dx + \int_\Omega \left[a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i} + a_i\frac{\partial u}{\partial x_i}v + a_0 uv\right] dx = \int_\Omega fvdx \quad \forall\, t \in (0,T) \tag{6.49}$$

Εφαρμόζοντας ολοκλήρωση κατά μέρη στο δεύτερο ολοκλήρωμα παίρνουμε

$$\int_\Omega \left[u_t - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + a_i\frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0 u\right] vdx = \int_\Omega fvdx \quad \forall\, t \in (0,T)$$

και άρα

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + a_i\frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0 u = f \quad \text{στο } \Omega \times (0,T) \tag{6.50}$$

Επιστρέφοντας πίσω στην (6.49) και παίρνοντας $v \in V$ λεία, αλλά όχι απαραίτητα που να μηδενίζεται στο σύνορο Γ, κάνουμε χρήση του τύπου του Green και λαμβάνουμε

$$\int_\Omega \left[u_t - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + a_i\frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0 u\right] vdx + \int_\Gamma a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\nu_i v d\sigma(x) = \int_\Omega fvdx$$

Τότε από την (6.50)

$$\int_\Gamma a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\nu_i v d\sigma(x) = 0 \quad \forall\, v \in V \ \text{ λεία} \tag{6.51}$$

Υπενθυμίζουμε ότι $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$ είναι το κάθετο, εξωτερικό μοναδιαίο διάνυσμα του συνόρου Γ. Αν, επιπλέον, προσθέσουμε και την αρχική συνθήκη

$$u(x,0) = u_0(x) \tag{6.52}$$

μπορούμε να διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

(i) $V = H_0^1(\Omega)$. Τότε το (6.48) είναι η ασθενής διατύπωση του προβλήματος

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\right) + a_i\dfrac{\partial u}{\partial x_i} + a_0 u = f \quad \text{στο } \Omega \times (0,T) \\ u(x,t) = 0 \quad \text{στο } \Gamma \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{στο } \Omega \end{cases} \tag{6.53}$$

Ειδικά για $a_{ij} = \delta_{ij}$, $\forall\, i,j = 1,2,\ldots,n$ και $a_i = 0$, $\forall\, i = 0,1,\ldots,n$ το πρόβλημα (6.53) είναι η κλασική εξίσωση θερμότητας με συνοριακή συνθήκη τύπου Dirichlet:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \quad \text{στο } \Omega \times (0,T) \\ u(x,t) = 0 \quad \text{στο } \Gamma \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{στο } \Omega \end{cases} \tag{6.54}$$

(ii) $V = H^1(\Omega)$. Σε αυτή την περίπτωση, όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 1, η (6.51) μεταφράζεται ως

$$a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\nu_i = 0 \quad \text{στο } \Gamma$$

και άρα έχουμε λύσει με την ασθενή έννοια το πρόβλημα

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\right) + a_i\dfrac{\partial u}{\partial x_i} + a_0 u = f \quad \text{στο } \Omega \times (0,T) \\ a_{ij}(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\nu_i = 0 \quad \text{στο } \Gamma \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{στο } \Omega \end{cases} \tag{6.55}$$

Αυτό είναι ένα πρόβλημα τύπου Neumann και στην ειδική περίπτωση που $a_{ij} = \delta_{ij}$, $\forall\, i,j = 1,2,\ldots,n$ και $a_i = 0$, $\forall\, i = 0,1,\ldots,n$ το πρόβλημα (6.55) γίνεται:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \quad \text{στο } \Omega \times (0,T) \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{στο } \Gamma \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{στο } \Omega \end{cases} \tag{6.56}$$

(iii) $V = \{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ στο } \Gamma_D\}$, με το Γ_D να είναι ένα τμήμα του Γ και $\Gamma_N = \Gamma \setminus \Gamma_D$. Τότε, βάσει όσων έχουμε πει παραπάνω, το (6.48) είναι η ασθενής διατύπωση του προβλήματος:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\right) + a_i\dfrac{\partial u}{\partial x_i} + a_0 u = f \quad \text{στο } \Omega \times (0,T) \\ u = 0 \quad \text{στο } \Gamma_D \times (0,T) \\ a_{ij}(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\nu_i = 0 \quad \text{στο } \Gamma_N \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{στο } \Omega \end{cases} \tag{6.57}$$

6.4 Ασθενής Αρχή του Μεγίστου

Σε αυτή την παράγραφο θα υποθέσουμε ότι βρισκόμαστε κάτω από τις υποθέσεις του Θεωρήματος 6.2 και ότι το $\mathcal{A}(t;u,v)$ είναι μια διγραμμική μορφή που δίνεται από την (6.46). Έστω, ακόμα

$$u_0^1, u_0^2 \in L^2(\Omega) \quad \text{και} \quad f_1, f_2 \in L^2(0,T;V^*) \tag{6.58}$$

Τότε μπορούμε να δείξουμε το ακόλουθο θεώρημα, που είναι γνωστό ως Ασθενής Αρχή του Μεγίστου:

Θεώρημα 6.3. *Κάτω από τις παραπάνω προϋποθέσεις, αν u_1, u_2 είναι λύσεις του*

$$\begin{cases} u_i \in L^2(0,T;V) \quad (u_i)_t \in L^2(0,T;V^*) \\ u_i(0) = u_0^i \\ \dfrac{d}{dt}(u_i, v) + \mathcal{A}(t;u_i,v) = \langle f_i, v\rangle \quad \text{στο } \mathcal{D}^*(0,T), \quad \forall\ v \in V \end{cases} \tag{6.59}$$

με

$$u_0^1 \leq u_0^2 \quad \text{και} \quad f_1 \leq f_2 \tag{6.60}$$

τότε

$$u_1 \leq u_2 \tag{6.61}$$

Παρατήρηση 6.1. *Η πρώτη ανισότητα της (6.60) είναι απλώς μια ανισότητα που ισχύει σχεδόν παντού στο Ω και η (6.61) σχεδόν παντού στο $\Omega \times (0,T)$. Όσο για τη δεύτερη ανισότητα της (6.60), εννοούμε ότι για κάθε $v \in L^2(0,T;V)$, με $v \geq 0$ σχεδόν παντού στο $\Omega \times (0,T)$ ισχύει ότι*

$$\langle f_1, v\rangle \leq \langle f_2, v\rangle \tag{6.62}$$

Απόδειξη. Αφαιρώντας κατά μέλη τις τελευταίες εξισώσεις των προβλημάτων (6.59) για $i = 1,2$ παίρνουμε:

$$\frac{d}{dt}(u_1 - u_2, v) + \mathcal{A}(t;u_1-u_2,v) = \langle f_1 - f_2, v\rangle \quad \text{στον } \mathcal{D}^*(0,T), \quad \forall\ v \in V$$

Αυτό σημαίνει ότι στον $L^2(0,T,V)$

$$\frac{d}{dt}(u_1 - u_2) + A(t)(u_1 - u_2) = f_1 - f_2 \tag{6.63}$$

Τότε, όπως αναφέραμε και στην απόδειξη της Ασθενούς Αρχής του Μεγίστου για ελλειπτικά προβλήματα (βλ. Θεώρημα 2.5) από γνωστό θεώρημα (Θεώρημα 2.8 στο [4]) συνεπάγεται ότι

$$(u_1 - u_2)^+ \in L^2(0,T;V)$$

και πολλαπλασιάζοντας την (6.63) με αυτόν τον όρο προκύπτει:

$$\langle (u_1-u_2)_t, (u_1-u_2)^+\rangle + \mathcal{A}(t;u_1-u_2,(u_1-u_2)^+) = \langle f_1 - f_2, (u_1-u_2)^+\rangle \quad \text{σ.π. στο } (0,T)$$

Ισχυριζόμαστε, τώρα, ότι

$$\langle (u_1-u_2)_t, (u_1-u_2)^+\rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|(u_1-u_2)^+\|^2_{L^2(\Omega)} \tag{6.64}$$

Προς το παρόν, θα το πάρουμε ως δεδομένο και θα το αποδείξουμε αργότερα. Τότε:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|(u_1-u_2)^+\|^2_{L^2(\Omega)} + \mathcal{A}\left(t;(u_1-u_2)^+,(u_1-u_2)^+\right) = \langle f_1-f_2,(u_1-u_2)^+\rangle$$

και άρα

$$\frac{d}{dt}\|(u_1-u_2)^+\|^2_{L^2(\Omega)} \leq 0$$

οπότε θα ισχύει

$$\|(u_1-u_2)^+\|^2_{L^2(\Omega)}(t) \leq \|(u_1-u_2)^+\|^2_{L^2(\Omega)}(0) = 0 \quad \text{σχεδόν παντού στο (0,T)}$$

Αυτό σημαίνει ότι $(u_1-u_2)^+ = 0$, συνεπώς $u_1 \leq u_2$. □

Ας κλείσουμε το κεφάλαιο αποδεικνύοντας τον ισχυρισμό (6.64):

Λήμμα 6.1. *Έστω $u \in H^1(0,T;V,V^*)$, με $V := \{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ στο } \Gamma_D\}$. Τότε $u^+ \in L^2(0,T;V)$ και επιπλέον, ισχύει*

$$\langle u_t, u^+\rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u^+\|^2_{L^2(\Omega)} \quad \text{στον } \mathcal{D}^*(0,T) \tag{6.65}$$

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι $u \in \mathcal{D}([0,T];V)$. Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$H_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{όταν } x \leq 0 \\ \dfrac{x}{\varepsilon} & \text{όταν } 0 \leq x \leq \varepsilon \\ 1 & \text{όταν } \varepsilon \leq x \end{cases} \tag{6.66}$$

$$F_\varepsilon(x) = \int_{-\infty}^{x} H_\varepsilon(s)ds \tag{6.67}$$

$$G_\varepsilon(x) = \int_{-\infty}^{x} F_\varepsilon(s)ds \tag{6.68}$$

είναι εύκολο να δει κανείς ότι καθώς $\varepsilon \to 0$

$$F_\varepsilon(x) \to x^+ \quad \text{και} \quad G_\varepsilon(x) \to \frac{(x^+)^2}{2} \tag{6.69}$$

ενώ ισχύουν οι σχέσεις

$$0 \leq F_\varepsilon(x) \leq |x| \quad \text{και} \quad 0 \leq G_\varepsilon(x) \leq \frac{x^2}{2} \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \tag{6.70}$$

Για u_t και v λείες, η δράση είναι εσωτερικό γινόμενο, δηλαδή

$$\langle u_t, v\rangle = (u_t, v)$$

επομένως, για κάθε $t \in (0,T)$

$$\langle u_t, F_\varepsilon(u)\rangle = \int_\Omega u_t F_\varepsilon(u)dx = \frac{d}{dt}\int_\Omega G_\varepsilon(u)dx \tag{6.71}$$

και τότε από τις σχέσεις (6.69) και (6.70) για κάθε $t \in (0,T)$ καθώς $\varepsilon \to 0$ έχουμε

$$G_\varepsilon(u) \to \frac{(u^+)^2}{2} \;\text{ και }\; |G_\varepsilon(u)| \leq \frac{u^2}{2} \;\text{ σχεδόν παντού στο } \Omega$$

και

$$\int_\Omega G_\varepsilon(u)dx \to \frac{1}{2}\int_\Omega (u^+)^2 dx$$

Η τελευταία σύγκλιση συμβαίνει και στον $L^1(0,T)$, διότι λόγω της (6.70)

$$\int_\Omega G_\varepsilon(u)dx \leq \frac{1}{2}\int_\Omega u^2 dx \in L^1(0,T)$$

άρα θα συμβαίνει και στον $\mathcal{D}^*(0,T)$. Ακόμα, όταν $\varepsilon \to 0$

$$F_\varepsilon(u) \to u^+ \;\text{ στον } L^2(0,T;V) \tag{6.72}$$

και

$$\langle u_t, F_\varepsilon(u)\rangle \to \langle u_t, u^+\rangle \;\text{ στον } L^1(0,T$$

ενώ αν πάρουμε το όριο στην (6.71) θα πάρουμε

$$\langle u_t, u^+\rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u^+\|^2_{L^2(\Omega)} \;\; \forall\, u \in \mathcal{D}([0,T],V)$$

Ως εκ τούτου, για $u \in \mathcal{D}([0,T],V)$ θα ισχύει

$$\int_0^T \langle u_t, u^+\rangle \varphi dt = -\frac{1}{2}\int_0^T \|u^+\|^2_{L^2(\Omega)}\varphi' dt \;\; \forall\, \varphi \in \mathcal{D}^*(0,T) \tag{6.73}$$

Στη συνέχεια, θεωρούμε $u \in H^1(0,T;V,V^*)$. Λόγω της πυκνότητας του χώρου $\mathcal{D}([a,b];V)$ στον $H^1(a,b;V,V^*)$, υπάρχει ακολουθία $u_n \in \mathcal{D}([0,T];V)$ ώστε

$$u_n \to u \;\text{ στον } H^1(0,T;V,V^*)$$

Τότε, είναι εύκολο να δει κανείς ότι

$$u_n^+ \to u^+ \;\text{ στον } L^2(0,T;V)$$

και για την u_n θα ισχύει

$$\int_0^T \langle (u_n)_t, (u_n)^+\rangle \varphi dt = -\frac{1}{2}\int_0^T \|(u_n)^+\|^2_{L^2(\Omega)}\varphi' dt \;\; \forall\, \varphi \in \mathcal{D}^*(0,T) \tag{6.74}$$

Τέλος, περνώντας στο όριο στην (6.74) προκύπτει η (6.65). $\square$

Κεφάλαιο 7

Μη Γραμμικά Παραβολικά Προβλήματα

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με μη γραμμικά παραβολικά προβλήματα. Πιο συγκεκριμένα, το προηγουμένως διγραμμικό συναρτησιακό $\mathcal{A}$ παύει να έχει αυτή την ιδιότητα και πλέον τα θεωρήματα που αποδείξαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο δεν είναι αρκετά. Ωστόσο, η λογική αντιμετώπισης των μη γραμμικών προβλημάτων παραμένει η ίδια και όπως κάναμε και με τα ελλειπτικά προβλήματα, επικαλούμαστε κάποιο θεώρημα σταθερού σημείου.

7.1 Τοπικά προβλήματα

Ας είναι Ω ένα Lipschitz ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, με σύνορο Γ. Υποθέτουμε ότι Γ_D είναι ένα μετρήσιμο (για το μέτρο $d\sigma(x)$) υποσύνολο του Γ και Γ_N το συμπληρωματικό του, δηλαδή

$$\Gamma_N = \Gamma \setminus \Gamma_D \tag{7.1}$$

Θέτουμε

$$V = \{v \in H^1(\Omega) \mid \gamma(v) = 0 \ \ d\sigma - \text{σχεδόν παντού στο } \Gamma_D\} \tag{7.2}$$

όπου η απεικόνιση $\gamma : u \to u|_\Gamma$ καλείται *ίχνος* της u και είναι ο περιορισμός της u στο σύνορο. Ζητάμε, δηλαδή, κάθε $v \in V$ να μηδενίζεται μόνο σε ένα τμήμα του συνόρου Γ, το Γ_D, και όχι σε ολόκληρο το σύνορο!

Έστω, τώρα, $a(x,t;u)$ και $b(x,t;u)$ συναρτήσεις Carathéodory, δηλαδή τέτοιες ώστε

$$u \mapsto a(x,t;u) \text{ (αντ. } b(x,t;u)) \text{ συνεχής σχεδόν για κάθε } (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \tag{7.3}$$

$$(x,t) \mapsto a(x,t;u) \text{ (αντ. } b(x,t;u)) \text{ μετρήσιμη } \forall\, u \in \mathbb{R} \tag{7.4}$$

Επιπλέον, υποθέτουμε ότι υπάρχουν σταθερές m, M ώστε

$$0 < m \le a(x,t;u) \le M \ \ \text{σχεδόν για κάθε } (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, \ \ \forall\, u \in \mathbb{R} \tag{7.5}$$

$$|b(x,t;u)| \le M \ \ \text{σχεδόν για κάθε } (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, \ \ \forall\, u \in \mathbb{R} \tag{7.6}$$

Θα θέλαμε να αναζητήσουμε ασθενή λύση στο πρόβλημα

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a(x,t;u)\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right) + b(x,t;u)u = f \ \ \text{στο } \Omega \times (0,T) \\ u = 0 \text{ στο } \Gamma_D \times (0,T), \ \ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{στο } \Gamma_N \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x) \ \ \text{στο } \Omega \end{cases} \tag{7.7}$$

με $u_0 \in L^2(\Omega)$ και $f \in L^2(0,T;V^*)$. Έχουμε, λοιπόν, το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 7.1. *Κάτω από τις παραπάνω προϋποθέσεις υπάρχει λύση u στο πρόβλημα*

$$\begin{cases} u \in L^2(0,T;V) \quad u_t \in L^2(0,T;V^*) \\ u(0) = u_0 \\ \dfrac{d}{dt}(u,v) + \mathcal{A}(u,v) = \langle f, v\rangle \quad \text{στον } \mathcal{D}^*(0,T), \ \forall\, v \in V \end{cases} \tag{7.8}$$

όπου με $(\cdot,\cdot)$ συμβολίζουμε το εσωτερικό γινόμενο στον $L^2(\Omega)$ και

$$\mathcal{A}(u,v) = \int_\Omega \left[a(x,t;u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial v}{\partial x_i} + b(x,t;u)u\cdot v\right] dx \tag{7.9}$$

Απόδειξη. Ο ισχυρισμός μας βασίζεται στο Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Schauder. Για το σκοπό αυτό, θεωρούμε $w \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ και $u = T(w)$ τη λύση του

$$\begin{cases} u \in L^2(0,T;V) \quad u_t \in L^2(0,T;V^*) \\ u(0) = u_0 \\ \dfrac{d}{dt}(u,v) + \mathcal{A}_w(u,v) = \langle f, v\rangle \quad \text{στον } \mathcal{D}^*(0,T), \ \forall\, v \in V \end{cases} \tag{7.10}$$

οπου

$$\mathcal{A}_w(u,v) = \int_\Omega \left[a(x,t;w)\frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial v}{\partial x_i} + b(x,t;w)u\cdot v\right] dx \tag{7.11}$$

Από το Θεώρημα 6.2, γνωρίζουμε ότι υπάρχει τέτοιο $u = T(w)$. Αν μπορέσουμε να δείξουμε ότι η απεικόνιση $T : L^2(0,T;L^2(\Omega)) \to L^2(0,T;L^2(\Omega))$ έχει ένα σταθερό σημείο, τότε θα έχουμε τελειώσει.

Πριν προχωρήσουμε, να παρατηρήσουμε ότι αν θεωρήσουμε την (6.36), με $A = A_w$

$$u_t + Au = f \quad \text{στον } L^2(0,T;V^*)$$

και τότε για κάθε $v \in L^2(0,T;V)$

$$\langle u_t, v\rangle + \mathcal{A}_w(u,v) = \langle f, v\rangle \quad \text{σχεδόν παντού στο } (0,T) \tag{7.12}$$

Υποθέτουμε για αρχή ότι

$$0 < m \le b(x,t;u) \le M, \quad \forall\, u \in \mathbb{R}, \ \text{σχεδόν παντού στο } \Omega \times \mathbb{R}_+ \tag{7.13}$$

Τότε για $v = u$ στην (7.12) παίρνουμε

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u,u) + \mathcal{A}_w(u,u) = \langle f, u\rangle \quad \text{σχεδόν παντού στο } (0,T)$$

και από την (7.13) και (7.5) λαμβάνουμε

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u,u) + m\|u\|_V^2 \le \|f\|_{V^*}\|u\|_V \quad \text{σχεδόν παντού στο } (0,T) \tag{7.14}$$

όπου έχουμε θέσει

$$\|u\|_V^2 = \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \int_\Omega \left[|\nabla u|^2 + u^2\right] dx \tag{7.15}$$

$$\|f\|_{V^*} = \sup_{\|v\|_V \leq 1} \langle f, v\rangle \tag{7.16}$$

Αν εφαρμόσουμε στο δεξί μέλος της (7.14) την ανισότητα Young

$$ab \leq \frac{m}{2}b^2 + \frac{1}{2m}a^2$$

θα πάρουμε

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u,u) + m\|u\|_V^2 \leq \frac{m}{2}\|u\|_V^2 + \frac{1}{2m}\|f\|_{V^*}^2$$

δηλαδή

$$\frac{d}{dt}(u,u) + m\|u\|_V^2 \leq \frac{1}{m}\|f\|_{V^*}^2 \quad \text{σχεδόν παντού στο } (0,T) \tag{7.17}$$

Αν ολοκληρώσουμε στο $(0,T)$ θα προκύψει

$$\|u(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 + m\int_0^T \|u\|_V^2 dt \leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{m}\int_0^T \|f\|_{V^*}^2 dt \tag{7.18}$$

και άρα

$$\|u\|_{L^2(0,T;V)}, \|u\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C \tag{7.19}$$

με

$$C^2 = \frac{1}{m}\|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{m^2}\|f\|_{L^2(0,T;V^*)}^2 \tag{7.20}$$

Θέτοντας

$$B = \{v \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) \mid \|v\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C\} \tag{7.21}$$

βλέπουμε εύκολα ότι η απεικόνιση $w \mapsto u = T(w)$ είναι απεικόνιση $T : B \to B$. Τώρα, επιστρέφοντας πίσω στην (7.12), έχουμε

$$\begin{aligned} \|u_t\|_{L^2(0,T;V^*)} &\leq M\|u\|_{L^2(0,T;V)} + \|f\|_{L^2(0,T;V^*)} \\ &\leq MC + \|f\|_{L^2(0,T;V^*)} =: C' \end{aligned} \tag{7.22}$$

Αυτό σημαίνει ότι η u ανήκει σε ένα φραγμένο υποσύνολο του $H^1(0,T;V,V^*)$, ο οποίος είναι σχετικά συμπαγής στον $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, δηλαδή η κλειστότητά του είναι συμπαγής. Μένει να δείξουμε ότι η απεικόνιση T είναι συνεχής στο B. Θεωρούμε, λοιπόν, ακολουθία $w_n \in B$, ώστε

$$w_n \to w \quad \text{στο } B$$

Αν $u_n = T(w_n)$ η λύση του (7.10) για $w = w_n$, λόγω των (7.19) και (7.22) μπορούμε να εξάγουμε υπακολουθία ώστε

$$\begin{aligned} & w_n \to w \quad \text{σχεδόν παντού στο } \Omega \times (0,T) \\ & u_n \to u_\infty \quad \text{στον } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \\ & \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \rightharpoonup \frac{\infty}{\partial x_i} \quad \text{στον } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \\ & (u_n)_t \rightharpoonup (u_\infty)_t \quad \text{στον } L^2(0,T;V^*) \end{aligned} \tag{7.23}$$

όπου $u_\infty \in L^2(0,T;V)$. Από την τρίτη εξίσωση του προβλήματος (7.10) έχουμε

$$\begin{aligned} & \int_0^T -(u_n,v)\varphi'(t)dt + \int_0^T\int_\Omega \varphi(t)a(x,t;w_n)\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx\ dt \\ & + \int_0^T\int_\Omega \varphi(t)b(x,t;w_n)u_n v dx\ dt = \int_0^T \varphi(t)\langle f,v\rangle dt \quad \forall\ v \in V,\ \forall\ \varphi \in \mathcal{D}(0,T) \end{aligned} \tag{7.24}$$

Από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης του Lebesgue έχουμε στον $L^2(0,T;L^2(\Omega))$

$$\varphi(t)a(x,t;w_n)\frac{\partial v}{\partial x_i} \to \varphi(t)a(x,t;w)\frac{\partial v}{\partial x_i}$$

$$\varphi(t)b(x,t;w_n)v \to \varphi(t)b(x,t;w)v$$

και τότε αν πάρουμε το όριο στην (7.24), οδηγούμαστε στην

$$\frac{d}{dt}(u_\infty, v) + \mathcal{A}_w(u_\infty, v) = \langle f, v\rangle \quad \text{στον } \mathcal{D}^*(0,T) \tag{7.25}$$

με

$$u_\infty \in L^2(0,T;V) \ \text{ και } \ (u_\infty)_t \in L^2(0,T;V^*) \tag{7.26}$$

Γνωρίζουμε ότι για κάθε $v \in V$ και σχεδόν για κάθε $t \in (0,T)$ είναι

$$(u_n(t), v) - (u_0, v) = \int_0^t \langle (u_n)_t, v\rangle dt$$

και αν πάρουμε το όριο

$$(u_\infty(t), v) - (u_0, v) = \int_0^t \langle (u_\infty)_t, v\rangle dt = (u_\infty(t), v) - (u_\infty(0), v)$$

οπότε

$$u_\infty(0) = u_0 \tag{7.27}$$

Από όλα τα παραπάνω προκύπτει ότι $u_\infty = T(w)$, μιας και το μόνο πιθανό όριο της u_n είναι το $T(w)$, δηλαδή

$$u_n = T(w_n) \to T(w) \quad \text{στο } L^2(0,T;L^2(\Omega))$$

και έτσι εξασφαλίζουμε τη συνέχεια του T στον $L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Με αυτόν τον τρόπο αποδείξαμε το Θεώρημα 7.1 στην περίπτωση που ισχύει η (7.13). Στη γενικότερη περίπτωση, ας παρατηρήσουμε ότι αν θέσουμε

$$\tilde{u} = e^{-kt}u$$

η u είναι λύση του προβλήματος (7.7) αν και μόνον αν η $\tilde{u}$ ικανοποιεί το

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}(e^{kt}\tilde{u}) - \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a(x,t;e^{kt}\tilde{u})e^{kt}\dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i}\right) + b(x,t;e^{kt}\tilde{u})e^{kt}\tilde{u} = f \quad \text{στο } \Omega\times(0,T) \\ \tilde{u} = 0 \text{ στο } \Gamma_D \times (0,T), \quad \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu} = 0 \quad \text{στο } \Gamma_N\times(0,T) \\ \tilde{u}(0) = u_0 \ \text{ στο } \Omega \end{cases}$$

Η πρώτη εξίσωση μπορεί να γραφεί

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + k\tilde{u} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a(x,t;e^{kt}\tilde{u})\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i}\right) + b(x,t;e^{kt}\tilde{u})\tilde{u} = fe^{-kt}$$

οπότε, αν επιλέξουμε το k αρκετά μεγάλο, λόγω της (7.6) μπορούμε πάντα να υποθέσουμε ότι οι (7.5) και (7.13) ισχύουν και άρα να προχωρήσουμε όπως προηγουμένως. Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη. □

Υποτεθείσθω, τώρα, ότι b είναι μια Lipschitz συνάρτηση, δηλαδή τέτοια ώστε

$$|b(u) - b(v)| \leq B|u - v| \quad \forall\, u, v \in \mathbb{R} \tag{7.28}$$

για κάποια σταθερά B και

$$b(0) = 0 \ \text{ και το } b'(0) \text{ υπάρχει} \tag{7.29}$$

Τότε μπορούμε να ισχυριστούμε ότι:

Θεώρημα 7.2. *Κάτω από τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος 7.1 και αν οι (7.28) και (7.29) ισχύουν, υπάρχει ασθενής λύση στο πρόβλημα*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a(x,t;u)\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right) + b(u) = f \quad \text{στο } \Omega \times (0,T) \\ u = 0 \quad \text{στο } \Gamma_D \times (0,T), \ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ στο } \Gamma_N \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{στο } \Omega \end{cases} \tag{7.30}$$

όπου $u_0 \in L^2(\Omega)$ *και* $f \in L^2(0,T;V^*)$.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι πολύ απλή, καθώς αρκεί να δείξουμε ότι ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος 7.1. Πράγματι, μπορούμε να γράψουμε

$$b(u) = \frac{b(u)}{u} \cdot u$$

και να θέσουμε

$$b(x,t;u) = \begin{cases} \dfrac{b(u)}{u} & \text{για } u \neq 0 \\ b'(0) & \text{για } u = 0 \end{cases}$$

και τότε λόγω των (7.28) και (7.29) η συνάρτηση b είναι κατάλληλη ώστε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 7.1 και έτσι προκύπτει το επιθυμητό αποτέλεσμα. □

Θα θέλαμε, τώρα, να απαντήσουμε στο ερώτημα της μοναδικότητας. Θεωρούμε το πρόβλημα (7.30) - αν και η ανάλυση που θα κάνουμε μπορεί να εφαρμοστεί και σε πιο γενικές περιπτώσεις - και επιπλέον των (7.28) και (7.29), υποθέτουμε ότι η απεικόνιση

$$u \mapsto b(u) \ \text{ είναι μονότονη} \tag{7.31}$$

Σχετικά με το a, εκτός από τις υποθέσεις του Θεωρήματος 7.1, ζητάμε επιπλέον να υπάρχει συνάρτηση ω συνεχής και θετική, ώστε

$$|a(x,t;u) - a(x,t;v)| \leq \omega(|u - v|) \quad \forall\, u, v \in \mathbb{R} \tag{7.32}$$

με

$$\int_0^\infty \frac{ds}{\omega^2(s)} = +\infty \tag{7.33}$$

Θεώρημα 7.3. *Κάτω από τις παραπάνω προϋποθέσεις, το πρόβλημα (7.30) έχει μοναδική λύση.*

Απόδειξη. Έστω $u, \hat{u}$ δύο λύσεις του (7.30). Τότε, με την ασθενή έννοια θα ισχύει

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a(x,t;u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + b(u) = \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a(x,t;\hat{u})\frac{\partial \hat{u}}{\partial x_i}\right) + b(\hat{u})$$

ή αλλιώς

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}(u-\hat{u}) - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a(x,t;u)\frac{\partial}{\partial x_i}(u-\hat{u})\right) + b(u) - b(\hat{u}) \\ &\qquad = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(|a(x,t;\hat{u}) - a(x,t;u)|\frac{\partial \hat{u}}{\partial x_i}\right) \end{aligned} \tag{7.34}$$

Τώρα, υπάρχει $\beta \in \mathbb{R}_+$, ώστε

$$\int_\beta^\infty \frac{ds}{\omega^2(s)} < +\infty \tag{7.35}$$

δηλαδή ο απειρισμός του ολοκληρώματος συμβαίνει κάπου στο $(0, \beta)$. Τότε, για $\varepsilon > 0$, θέτουμε

$$H_\varepsilon(\xi) := \begin{cases} 0, & \text{αν } \xi \leq \varepsilon \\ \dfrac{1}{I_\varepsilon}\displaystyle\int_\varepsilon^\xi \frac{ds}{\omega^2(s)}, & \text{αν } \xi > \varepsilon \end{cases} \tag{7.36}$$

όπου

$$I_\varepsilon = \int_\varepsilon^\infty \frac{ds}{\omega^2(s)} \tag{7.37}$$

Για $\xi > 0$ και $\varepsilon < \xi$, θα έχουμε καθώς $\varepsilon \to 0$

$$H_\varepsilon(\xi) = 1 - \frac{1}{I_\varepsilon}\int_\xi^\infty \frac{ds}{\omega^2(s)} \to 1 \tag{7.38}$$

Επιπλέον, εξ' ορισμού

$$H_\varepsilon(\xi) = 0 \quad \text{για } \xi \leq 0 \tag{7.39}$$

Αναφέραμε νωρίτερα ότι η (7.34) ισχύει με την ασθενή έννοια, οπότε για $H_\varepsilon(u-\hat{u}) \in V$, θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \langle (u-\hat{u})_t, H_\varepsilon(u-\hat{u})\rangle &+ \int_\Omega a(x,t;u)|\nabla(u-\hat{u})|^2 H'_\varepsilon(u-\hat{u})dx \\ &+ \int_\Omega (b(u)-b(\hat{u}))H_\varepsilon(u-\hat{u})dx \\ &= \int_\Omega (a(x,t;\hat{u}) - a(x,t;u))\nabla\hat{u}\cdot\nabla(u-\hat{u})H'_\varepsilon(u-\hat{u})dx \end{aligned}$$

Από τη μονοτονία του b ο τρίτος όρος είναι μη αρνητικός και άρα χρησιμοποιώντας τις (7.5) και (7.32) λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} \langle (u-\hat{u})_t, H_\varepsilon(u-\hat{u})\rangle &+ m\int_\Omega |\nabla(u-\hat{u})|^2 H'_\varepsilon(u-\hat{u})dx \\ &\leq \int_\Omega \omega(u-\hat{u})\nabla\hat{u}\cdot\nabla(u-\hat{u})H'_\varepsilon(u-\hat{u})dx \end{aligned}$$

Ας παρατηρήσουμε, ότι από την (7.39), η ολοκλήρωση ουσιαστικά γίνεται πάνω στο σύνολο $S = \{u - \hat{u} \geq \varepsilon\} = \{x \in \Omega \mid (u - \hat{u})(x) > \varepsilon\}$, οπότε

$$\langle (u-\hat{u})_t, H_\varepsilon(u-\hat{u})\rangle + \frac{m}{I_\varepsilon}\int_S \frac{|\nabla(u-\hat{u})|^2}{\omega^2(u-\hat{u})}dx \leq \frac{1}{I_\varepsilon}\int_S |\nabla\hat{u}|\frac{|\nabla(u-\hat{u})|}{\omega(u-\hat{u})}dx$$

Αν χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα Young

$$ab \leq \frac{m}{2}a^2 + \frac{1}{2m}b^2 \quad \forall\ a,b>0$$

στο δεξί μέλος, θα πάρουμε

$$\langle (u-\hat{u})_t, H_\varepsilon(u-\hat{u})\rangle + \frac{m}{2I_\varepsilon}\int_S \frac{|\nabla(u-\hat{u})|^2}{\omega^2(u-\hat{u})}dx \leq \frac{1}{2mI_\varepsilon}\int_S |\nabla\hat{u}|^2 dx$$

από το οποίο προκύπτει

$$\langle (u-\hat{u})_t, H_\varepsilon(u-\hat{u})\rangle \leq \frac{1}{2mI_\varepsilon}\int_\Omega |\nabla\hat{u}|^2 dx \tag{7.40}$$

Θέτουμε

$$K_\varepsilon(\xi) = \int_0^\xi H_\varepsilon(s)ds$$

και η (7.40) γίνεται

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega K_\varepsilon(u-\hat{u})dx \leq \frac{1}{2mI_\varepsilon}\int_\Omega |\nabla\hat{u}|^2 dx$$

Ολοκληρώνουμε στο $(0,t)$ και τότε για κάθε $t \in \mathbb{R}$

$$\int_\Omega K_\varepsilon(u-\hat{u})dx \leq \frac{1}{2mI_\varepsilon}\int_0^t\int_\Omega |\nabla\hat{u}|^2 dx\ ds \tag{7.41}$$

Από τις (7.37) - (7.39), όταν $\varepsilon \to 0$

$$K_\varepsilon(\xi) \to \xi \vee 0 \ \text{ και } \ I_\varepsilon \to +\infty$$

και άρα παίρνοντας το όριο στην (7.41) προκύπτει

$$\int_\Omega (u-\hat{u})^+ dx \leq 0$$

οπότε

$$\hat{u} = u$$

που σημαίνει ότι η λύση του (7.30) είναι μοναδική. $\square$

7.2 Μη τοπικά προβλήματα

Υποθέτουμε ότι το Ω είναι ένα ανοικτό και Lipschitz υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, με σύνορο Γ. Όπως έχουμε δει και στα ελλειπτικά προβλήματα, η διαφορική εξίσωση μπορεί να εξαρτάται και από μη τοπικούς όρους, επί παραδείγματι από μια έκφραση της μορφής

$$l(u) = \int_S g(x)u(x)dx \tag{7.42}$$

όπου $S \subset \Omega$ και $g \in L^2(\Omega)$.

Αν $\Gamma_D \subset \Gamma$ θετικού μέτρου $d\sigma$, θέτουμε όπως πριν

$$V = \{v \in H^1(\Omega) \mid \gamma(v) = 0 \text{ στο } \Gamma_D\} \tag{7.43}$$

Τότε, για ένα γραμμικό συναρτησιακό l στον $L^2(\Omega)$ θεωρούμε το πρόβλημα

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a(l(u))\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right) = f \quad \text{στο } \Omega \times (0,T) \\ u(\cdot,t) \in V \quad \text{για } t \in (0,T) \\ \dfrac{\partial}{\partial \nu} u(\cdot,t) = 0 \quad \text{στο } \Gamma \setminus \Gamma_D \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \tag{7.44}$$

Υποθέτουμε ότι το $a : \mathbb{R} \to (0,+\infty)$ είναι συνεχές και ότι υπάρχουν σταθερές m, M, τέτοιες ώστε

$$0 < m \le a(\xi) \le M \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R} \tag{7.45}$$

και θα δείξουμε το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 7.4. *Έστω $f \in L^2(0,T;V^*)$ και $u_0 \in L^2(\Omega)$. Τότε, κάτω από τις παραπάνω υποθέσεις υπάρχει ασθενής λύση του (7.44), δηλαδή u λύση του προβλήματος*

$$\begin{cases} u \in L^2(0,T;V) \cap C([0,T];L^2(\Omega)), \quad u_t \in L^2(0,T;V^*) \\ u(0) = u_0 \\ \dfrac{d}{dt}(u,v) + a\left(l(u)\right)\displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = \langle f, v\rangle \quad \text{στον } \mathcal{D}^*(0,T), \ \forall\, v \in V \end{cases} \tag{7.46}$$

όπου $(\cdot,\cdot)$ το εσωτερικό γινόμενο στον $L^2(\Omega)$.

Απόδειξη. Έστω $w \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Η απεικόνιση $t \mapsto l(w)$ είναι μετρήσιμη και μιας και το a είναι συνεχές και η απεικόνιση $t \mapsto a(l(w))$ θα είναι μετρήσιμη. Από το Θεώρημα 6.2, υπάρχει μοναδικό $u = Tw$ λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} u \in L^2(0,T;V) \cap C([0,T];L^2(\Omega)), \quad u_t \in L^2(0,T;V^*) \\ u(0) = u_0 \\ \dfrac{d}{dt}(u,v) + a\left(l(w)\right)\displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = \langle f, v\rangle \quad \text{στον } \mathcal{D}^*(0,T), \ \forall\, v \in V \end{cases} \tag{7.47}$$

Αν δείξουμε ότι η απεικόνιση $w \mapsto Tw = u$ έχει ένα σταθερό σημείο, τότε αυτό θα είναι η λύση της (7.46). Η τρίτη εξίσωση του (7.47) ερμηνεύεται στον $L^2(0,T;V^*)$ ως

$$\frac{du}{dt} - a(l(w))\Delta u = f \tag{7.48}$$

οπότε

$$\langle u_t, u\rangle - \langle a(l(w))\Delta u, u\rangle = \langle f, u\rangle \quad \text{σχεδόν παντού στο } (0,T)$$

που οδηγεί στο

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + a(l(w))\int_\Omega |\nabla u|^2 dx = \langle f, u\rangle \quad \text{σχεδόν παντού στο } (0,T) \tag{7.49}$$

Επιλέγουμε ως νόρμα του V την

$$\|u\|_V^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$$

και τότε η (7.49) λόγω της (7.45) δίνει

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + m\|u\|_V^2 \le \|f\|_{V^*}\|u\|_V$$

Από την ανισότητα Young

$$ab \le \frac{m}{2}a^2 + \frac{1}{2m}b^2$$

προκύπτει

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{m}{2}\|u\|_V^2 \le \frac{1}{2m}\|f\|^2_{V^*}$$

και ολοκληρώνοντας στο $(0,T)$ παίρνουμε

$$\frac{1}{2}\|u(T)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{m}{2}\int_0^T \|u\|_V^2 ds \le \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2m}\int_0^T \|f\|^2_{V^*} ds \tag{7.50}$$

οπότε

$$\|u\|_{L^2(0,T;V)} \le C \tag{7.51}$$

για κάποια σταθερά $C = C(m, u_0, f)$. Από την άλλη, έχουμε

$$|(-\Delta u, v)| = \left| \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx \right| \le \|u\|_V \|v\|_V$$

και από την (7.48)

$$\|u_t\|_{V^*} \le M\|u\|_V + \|f\|_{V^*}$$

Αν ολοκληρώσουμε στο $(0,T)$ θα πάρουμε

$$\|u_t\|_{L^2(0,T;V^*)} \le C' \tag{7.52}$$

όπου $C' = C'(m, M, u_0, f)$. Από τις (7.51) και (7.52) είναι

$$\|u\|^2_{H^1(0,T;V,V^*)} = \|u\|^2_{L^2(0,T;V)} + \|u\|^2_{L^2(0,T;V^*)} \le C^2 + C'^2 < +\infty \tag{7.53}$$

που σημαίνει ότι $u \in H^1(0,T;V,V^*)$. Σαφώς, για κάποια άλλη σταθερά C ανεξάρτητη του w, έχουμε

$$\|u\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \le C \tag{7.54}$$

επομένως η απεικόνιση T πηγαίνει από τη μπάλα $\mathcal{B}(0,C)$ του $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ στον εαυτό της. Επιπλέον, οι μπάλες του $H^1(0,T;V,V^*)$ είναι σχετικά συμπαγείς στον $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ και από την (7.53), το σύνολο $T(\mathcal{B}(0,C))$ είναι σχετικά συμπαγές στην μπάλα $\mathcal{B}(0,C)$. Μένει, μόνο, να δείξουμε ότι η απεικόνιση T είναι συνεχής από την μπάλα $\mathcal{B}(0,C)$ στον εαυτό της και τότε θα μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Schauder. Για το σκοπό αυτό, θεωρούμε ακολουθία w_n μέσα στην μπάλα $\mathcal{B}(0,C)$, τέτοια ώστε

$$w_n \to w \quad \text{στον } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \tag{7.55}$$

Θέτουμε $u_n = T(w_n)$. Λόγω της (7.55) έχουμε

$$l(w_n) \to l(w) \text{ στον } L^2(0,T) \tag{7.56}$$

ενώ από την (7.53)

$$\|u_n\|_{H^1(0,T;V,V^*)} \le C \tag{7.57}$$

Πολλαπλασιάζουμε την τελευταία εξίσωση του (7.47) με μία δοκιμαστική συνάρτηση $\varphi \in \mathcal{D}(0,T)$ και ολοκληρώνουμε στο $(0,T)$ για να πάρουμε, για κάθε $v \in V$

$$-\int_0^T \int_\Omega u_n v\varphi'(t)dx\, dt + \int_0^T \int_\Omega a(l(w_n))\nabla u_n \cdot \nabla v\varphi(t)dx\, dt = \int_0^T \langle f, v\rangle dt \tag{7.58}$$

Λόγω των (7.56) και (7.57) μπορούμε να βρούμε $u_\infty \in H^1(0,T;V,V^*)$ και υπακολουθία που θα φέρει επίσης δείκτη n, ώστε

$$l(w_n) \to l(w) \text{ σχεδόν παντού στο } (0,T)$$

$$u_n \rightharpoonup u_\infty \text{ στον } H^1(0,T;V,V^*)$$

$$u_n \to u_\infty \text{ στον } L^2(0,T;V)$$

Έχουμε υποθέσει ότι το a είναι συνεχές οπότε

$$a(l(w_n)) \to a(l(w)) \text{ σχεδόν παντού στο } (0,T)$$

και κατά συνέπεια

$$a(l(w_n))\nabla v \to a(l(w))\nabla v \text{ στον } L^2(0,T;L^2(\Omega))$$

Τότε, παίρνοντας το όριο στην (7.58), βλέπουμε ότι η u_∞ ικανοποιεί τα εξής:

$$u_\infty \in L^2(0,T;V) \text{ και } (u_\infty)_t \in L^2(0,T;V^*) \tag{7.59}$$

$$\frac{d}{dt}(u_\infty, v) + a(l(w))\int_\Omega \nabla u_\infty \nabla v dx = \langle f, v\rangle \text{ στον } \mathcal{D}^*(0,T),\ \forall\ v \in V \tag{7.60}$$

Αν ακολουθήσουμε την ίδια διαδικασία με αυτή που ακολουθήσαμε για να δείξουμε την (7.27) στην απόδειξη του Θεωρήματος 7.1, προκύπτει εύκολα

$$u_\infty(0) = u_n(0) = u_0$$

συνεπώς, η u_∞ είναι λύση του προβλήματος (7.47). Τότε, από τη μοναδικότητα της λύσης του (7.47)

$$u_\infty = u$$

και άρα

$$T(w_n) = u_n \to u_\infty = u = T(w)$$

δηλαδή η απεικόνιση T είναι συνεχής και έτσι, από το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Schauder θα υπάρχει σταθερό σημείο, το οποίο θα είναι η λύση του (7.46). □

Όσον αφορά τη μοναδικότητα της λύση, μπορούμε να πούμε τα εξής:

Θεώρημα 7.5. *Αν το a είναι Lipschitz, δηλαδή υπάρχει σταθερά $A > 0$ τέτοια ώστε*

$$|a(\xi) - a(\xi')| \leq A|\xi - \xi| \ \ \forall \ \xi, \xi' \in \mathbb{R} \tag{7.61}$$

τότε, κάτω από τις υποθέσεις του Θεωρήματος 7.4, το πρόβλημα (7.46) έχει μοναδική λύση.

Απόδειξη. Έστω $u, \hat{u}$ λύσεις του (7.46). Τότε στον $L^2(0, T; V^*)$ θα ισχύει

$$u_t - a(l(u))\Delta u = \hat{u}_t - a(l(\hat{u}))\Delta \hat{u}$$

ή αλλιώς

$$(u - \hat{u})_t - a(l(u))\Delta(u - \hat{u}) = (a(l(u)) - a(l(\hat{u}))\Delta \hat{u}$$

Πολλαπλασιάζουμε με $(u - u_t) \in L^2(0, T; V)$ και ολοκληρώνουμε στο Ω, για να πάρουμε:

$$((u - \hat{u})_t, u - \hat{u}) - a(l(u)) \int_\Omega |\nabla(u - \hat{u})|^2 dx = [a(l(u)) - a(l(\hat{u}))] \int_\Omega \nabla \hat{u} \cdot \nabla(u - \hat{u}) dx$$

Τότε από τις (7.45) και (7.61)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u - \hat{u}\|^2_{L^2(\Omega)} + m \int_\Omega |\nabla(u - \hat{u})|^2 dx &\leq A|l(u) - l(\hat{u})| \int_\Omega |\nabla \hat{u}||\nabla(u - \hat{u})| dx \\ &\leq C\|u - \hat{u}\|_{L^2(\Omega)} \|\hat{u}\|_V \|u - \hat{u}\|_V \end{aligned}$$

για κάποια σταθερά C. Αν θέσουμε $C' = C\|\hat{u}\|_V$ παίρνουμε

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u - \hat{u}\|^2_{L^2(\Omega)} + m\|u - \hat{u}\|^2_V \leq C'\|u - \hat{u}\|_{L^2(\Omega)} \|u - \hat{u}\|_V$$

Επικαλούμαστε την ανισότητα Young

$$ab \leq \frac{m}{2C'} a^2 + \frac{C'}{2m} b^2$$

στο δεξί μέλος και λαμβάνουμε

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u - \hat{u}\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{m}{2}\|u - \hat{u}\|^2_V \leq \frac{C'}{2m}\|u - \hat{u}\|_{L^2(\Omega)}$$

οπότε

$$\frac{d}{dt}\|u - \hat{u}\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C^2 \frac{\|\hat{u}\|^2_V}{m} \|u - \hat{u}\|_{L^2(\Omega)} := g(t)\|u - \hat{u}\|_{L^2(\Omega)} \tag{7.62}$$

που συνεπάγεται ότι

$$\frac{d}{dt}\left(\exp\left\{ -\int_0^t g(s) ds \right\} \|u - \hat{u}\|^2_{L^2(\Omega)} \right) \leq 0$$

Αυτό σημαίνει ότι η απεικόνιση

$$t \mapsto \exp\left\{ -\int_0^t g(s) ds \right\} \|u - \hat{u}\|^2_{L^2(\Omega)}$$

είναι φθίνουσα και δεδομένου ότι μηδενίζεται για $t = 0$, σημαίνει ότι θα είναι ίση με το μηδέν για κάθε $t \geq 0$, οπότε $u = \hat{u}$. $\square$

Κεφάλαιο 8

Ασυμπτωτική Ανάλυση

Ο στόχος αυτού του κεφαλαίου είναι να μελετήσουμε τη συμπεριφορά των λύσεων παραβολικών προβλημάτων, καθώς ο χρόνος τείνει στο άπειρο. Πιο συγκεκριμένα, θα ξεκινήσουμε τη μελέτη μας με τη γραμμική περίπτωση, στην οποία είναι εύκολο να προσδιορίσουμε το όριο. Στη συνέχεια θα καταπιαστούμε με τη μη γραμμικότητα, η οποία μπορεί να αντιμετωπιστεί με τη βοήθεια των δυναμικών συστημάτων και τέλος, θα εξετάσουμε πότε οι λύσεις μη γραμμικών προβλημάτων εκρήγνυνται.

8.1 Η γραμμική περίπτωση

Έστω u η ασθενής λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + f \quad \text{στο } \Omega \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,t) = 0 \quad \text{στο } \Gamma \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \tag{8.1}$$

Υποθέτουμε ότι $f = f(x) \in H^{-1}(\Omega)$ και $u_0 \in L^2(\Omega)$. Η σταθερή κατάσταση του προβλήματος προκύπτει αν θέσουμε $u_t = 0$ και τότε το πρόβλημα που παίρνουμε είναι το

$$\begin{cases} -\Delta u = f \quad \text{στο } \Omega \\ \quad u = 0 \quad\ \ \text{στο } \Gamma \end{cases} \tag{8.2}$$

και έχει μοναδική λύση $u = u_\infty$, σύμφωνα με όσα έχουμε πει σε προηγούμενα κεφάλαια. Θα αναφερόμαστε στο (8.2) ως *το πρόβλημα σταθερής κατάστασης του (8.1)*. Τότε, μπορούμε να δείξουμε ότι:

Θεώρημα 8.1. *Αν u, u_∞ είναι οι ασθενείς λύσεις των προβλημάτων (8.1) και (8.2) αντίστοιχα, τότε*

$$\lim_{t\to\infty} \|u(x,t) - u_\infty\|_{L^2(\Omega)} = 0 \tag{8.3}$$

Πιο συγκεκριμένα, υπάρχει θετική σταθερά ν, ώστε

$$\|u(x,t) - u_\infty\|_{L^2(\Omega)} \le e^{-\nu t}\|u_0 - u_\infty\|_{L^2(\Omega)} \tag{8.4}$$

Απόδειξη. Αν αφαιρέσουμε τις πρώτες εξισώσεις των (8.1) και (8.2) κατά μέλη, θα πάρουμε

$$(u - u_\infty)_t - \Delta(u - u_\infty) = 0 \quad \text{στο } \Omega \times \mathbb{R}_+$$

Πολλαπλασιάζουμε με $u - u_\infty$ και ολοκληρώνουμε στο Ω και τότε

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u - u_\infty\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega |\nabla(u - u_\infty)|^2 dx = 0$$

Από την ανισότητα Poincaré

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u - u_\infty\|^2_{L^2(\Omega)} + \nu\|u - u_\infty\|^2_{L^2(\Omega)} \leq 0$$

οπότε

$$\frac{d}{dt}\left(e^{2\nu t}\|u - u_\infty\|^2_{L^2(\Omega)}\right) \leq 0$$

Αυτό σημαίνει ότι η απεικόνιση

$$t \mapsto e^{2\nu t}\|u - u_\infty\|^2_{L^2(\Omega)}$$

είναι φθίνουσα και άρα

$$e^{2\nu t}\|u - u_\infty\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|u_0 - u_\infty\|^2_{L^2(\Omega)}$$

δηλαδή

$$\|u - u_\infty\|_{L^2(\Omega)} \leq e^{-\nu t}\|u_0 - u_\infty\|_{L^2(\Omega)} \quad \square$$

Το πρόβλημα σταθερής κατάστασης μιας παραβολικής εξίσωσης μπορεί να έχει και άπειρες λύσεις και αυτό μπορεί να συμβεί ακόμα και στη γραμμική περίπτωση. Πράγματι, έστω u η λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + f \quad \text{στο } \Omega \times \mathbb{R}_+ \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{στο } \Gamma \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \tag{8.5}$$

με $f, u_0 \in L^2(\Omega)$ όπως προηγουμένως. Τότε, το πρόβλημα σταθερής κατάστασης του (8.5) είναι το

$$\begin{cases} -\Delta u = f \quad \text{στο } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{στο } \Gamma \end{cases} \tag{8.6}$$

και έχει άπειρες λύσεις, όπως έχουμε επισημάνει στην Παρατήρηση 1.5. Αν, λοιπόν, διαλέξουμε μία από αυτές, έστω την u_∞, τότε θα ισχύει

$$\int_\Omega u_\infty(x) dx = 0 \tag{8.7}$$

και κάθε συνάρτηση $u_\infty + c, \quad c \in \mathbb{R}$ θα είναι λύση του (8.6). Έχουμε, λοιπόν, το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 8.2. *Υπάρχει σταθερά ν ώστε*

$$\|u - u_\infty - C_0\|_{L^2(\Omega)} \leq e^{-\nu t}\|u_0 - u_\infty - C_0\|_{L^2(\Omega)} \tag{8.8}$$

όπου η σταθερά C_0 είναι η μέση τιμή της u_0 στο Ω, δηλαδή

$$C_0 = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u_0(x) dx \tag{8.9}$$

Αποδειξη. Αφαιρούμε κατά μέλη τις πρώτες εξισώσεις των (8.5) και (8.6) και παίρνουμε

$$(u - u_\infty)_t - \Delta(u - u_\infty) = 0 \tag{8.10}$$

Ολοκληρώνουμε την (8.10) στο Ω, για να λάβουμε

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega (u - u_\infty)dx = 0$$

και τότε από την (8.7), το ολοκλήρωμα της u πάνω στο Ω διατηρείται ως προς το χρόνο και έχουμε

$$\int_\Omega udx = \int_\Omega u_0 dx = C_0|\Omega| \tag{8.11}$$

Τώρα, η (8.10) μπορεί να γραφεί

$$(u - u_\infty - C_0)_t - \Delta(u - u_\infty - C_0) = 0$$

και πολλαπλασιάζοντας με $u - u_\infty - C_0$ και ολοκληρώνοντας στο Ω, παίρνουμε

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u - u_\infty - C_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega |\nabla(u - u_\infty - C_0)|^2 dx = 0 \tag{8.12}$$

Δεδομένου ότι

$$\int_\Omega (u - u_\infty - C_0)dx = 0$$

από την ανισότητα Poincaré προκύπτει

$$\int_\Omega |\nabla(u - u_\infty - C_0)|^2 dx \geq \nu\|u - u_\infty - C_0\|^2_{L^2(\Omega)}$$

και άρα λόγω της (8.12) έχουμε

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u - u_\infty - C_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \nu\|u - u_\infty - C_0\|^2_{L^2(\Omega)} \leq 0$$

Τότε

$$\frac{d}{dt}\left(e^{2\nu t}\|u - u_\infty - C_0\|^2_{L^2(\Omega)}\right) \leq 0$$

Αυτό σημαίνει ότι η απεικόνιση

$$t \mapsto e^{2\nu t}\|u - u_\infty - C_0\|^2_{L^2(\Omega)}$$

είναι φθίνουσα και άρα

$$e^{2\nu t}\|u - u_\infty - C_0\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|u_0 - u_\infty - C_0\|^2_{L^2(\Omega)}$$

δηλαδή

$$\|u - u_\infty - C_0\|_{L^2(\Omega)} \leq e^{-\nu t}\|u_0 - u_\infty - C_0\|_{L^2(\Omega)} \quad \square$$

8.2 Η μη γραμμική περίπτωση

Υποθέτουμε ότι l είναι ένα γραμμικό συναρτησιακό στον $L^2(\Omega)$ και θεωρούμε u την ασθενή λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a(l(u))\Delta u = f \quad \text{στο } \Omega \times (0,T) \\ u(\cdot,t) \in V \quad \text{στο } (0,T) \\ u(\cdot,0) = u_0 \end{cases} \tag{8.13}$$

Θα θέλαμε να μελετήσουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά της u, καθώς $t \to \infty$. Για απλότητα θα υποθέσουμε ότι η f δεν εξαρτάται από το t και άρα $f \in V^*$. Τότε, το πρόβλημα σταθερής κατάστασης του (8.13) είναι το

$$\begin{cases} -a(l(u))\Delta u = f \quad \text{στο } \Omega \\ u \in V \end{cases} \tag{8.14}$$

Ακόμα, θεωρούμε φ την ασθενή λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} -\Delta \varphi = f \quad \text{στο } \Omega \\ \varphi \in V \end{cases} \tag{8.15}$$

Από το Θεώρημα Lax-Milgram μπορούμε ευθύς να εγγυηθούμε την ύπαρξη και μοναδικότητα της φ, μιας και ο V εφοδιασμένος με τη νόρμα

$$\|u\|_V = \left(\int_\Omega |\nabla u| d^2x \right)^{1/2} \tag{8.16}$$

είναι χώρος Hilbert. Έχουμε. λοιπόν, το ακόλουθο Θεώρημα:

Θεώρημα 8.3. *Έστω $a : \mathbb{R} \to (0,+\infty)$. Το πρόβλημα (8.14) έχει τόσες λύσεις, όσες και η αλγεβρική εξίσωση*

$$a(\mu)\mu = l(\varphi) \tag{8.17}$$

Απόδειξη. Έστω u λύση της (8.14). Μιας και η ποσότητα $a(l(u))$ είναι σταθερά, η πρώτη εξίσωση του (8.14) μπορεί να γραφεί και

$$-\Delta\left(a(l(u))u\right) = f \quad \text{στο } \Omega \tag{8.18}$$

και τότε, από το (8.15) έχουμε ότι

$$a(l(u))u = \varphi$$

Εφαρμόζοντας το l στα δύο μέλη της εξίσωσης παίρνουμε (λόγω της γραμμικότητας αυτού)

$$a(l(u))l(u) = l(\varphi)$$

και άρα το $l(u) \in \mathbb{R}$ είναι λύση του (8.17).

Αντίστροφα, έστω μ λύση του (8.17). Τότε, θα υπάρχει μοναδική ασθενής λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} -a(\mu)\Delta u = f \quad \text{στο } \Omega \\ u \in V \end{cases} \tag{8.19}$$

Από την άλλη, από τη μοναδικότητα της λύσης του (8.15) προκύπτει ότι

$$a(\mu)u = \varphi$$

και αν εφαρμόσουμε το l σε αμφότερα τα μέλη, θα πάρουμε

$$a(\mu)l(u) = l(\varphi) \overset{(8.17)}{=} a(\mu)\mu$$

οπότε, αφού $a > 0$,

$$l(u) = \mu$$

Επιστρέφοντας στο (8.19), βλέπουμε ότι η u είναι λύση του (8.14) και έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη. □

Έστω, τώρα, ότι βρισκόμαστε κάτω από τις υποθέσεις του Θεωρήματος 7.5. Τότε, το (8.13) επιδέχεται μοναδική ασθενή λύση και έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα ευστάθειας:

Λήμμα 8.1. *Έστω $u_0^n \in L^2(\Omega)$ ακολουθία, τέτοια ώστε καθώς $n \to \infty$*

$$u_0^n \rightharpoonup u_0 \ \text{ στον } L^2(\Omega) \tag{8.20}$$

και u, u^n λύσεις του προβλήματος (7.46) με αρχικές συνθήκες u_0^n και u_0 αντίστοιχα. Τότε, για κάθε $t > 0$

$$u^n(t) \rightharpoonup u(t) \ \text{ στον } L^2(\Omega) \tag{8.21}$$

Απόδειξη. Δεδομένου ότι $u_0^n \rightharpoonup u_0$ στον $L^2(\Omega)$, η ακολουθία u_0^n θα είναι φραγμένη στον $L^2(\Omega)$. Τότε, από τις (7.50) - (7.52) έχουμε

$$\|u^n\|_{L^2(0,T;V)} \le C \tag{8.22}$$

$$\|u^n\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \le C \tag{8.23}$$

$$\|u_t^n\|_{L^2(0,T;V^*)} \le C \tag{8.24}$$

και άρα μπορούμε να εξάγουμε υπακολουθία που συμβολίζουμε με u^n, ώστε:

$$\begin{cases} u^n \rightharpoonup u^\infty \ \text{ στον } L^2(0,T;V) \\ u^n \to u^\infty \ \text{ στον } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \\ u^n \overset{*}{\rightharpoonup} u^\infty \ \text{ στον } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \\ u_t^n \rightharpoonup u_t \ \text{ στον } L^2(0,T;V^*) \end{cases} \tag{8.25}$$

Η u^n ούσα ασθενής λύση ικανοποιεί για κάθε $v \in V$ την εξίσωση

$$-\int_0^T \int_\Omega u^n v\varphi'(t)dxdt + \int_0^T \int_\Omega a(l(u^n))(\nabla u^n \cdot \nabla v)\varphi(t)dxdt = \int_0^T \langle f, v\rangle \varphi(t)dt \ \ \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(0,T) \tag{8.26}$$

Είναι, τώρα, προφανές ότι από την (8.25)

$$l(u^n) \to l(u^\infty) \ \text{ στον } L^2(0,T)$$

Από το Θεώρημα του Lebesgue

$$a(l(u^n))\varphi\nabla v \to a(l(u^\infty))\varphi\nabla v \ \text{ στον } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \tag{8.27}$$

και παίρνοντας το όριο στην (8.26) έχουμε ότι για κάθε $v \in V$

$$\frac{d}{dt}(u^\infty, v) + a(l(u^\infty)) \int_\Omega \nabla u^\infty \cdot \nabla v dx = \langle f, v\rangle \text{ στον } \mathcal{D}^*(0,T)$$

Επιπλέον, λόγω της ιδιότητας

$$(u^n(t), v) - (u_0^n, v) = \int_0^t \langle u_t^n, v\rangle dt$$

αν πάρουμε το όριο $n \to \infty$, λαμβάνουμε

$$(u^\infty(t), v) - (u_0, v) = \int_0^t \langle u_t^\infty, v\rangle dt = (u^\infty(t), v) - (u_0^\infty, v)$$

Αυτό σημαίνει ότι $u^\infty(0) = u_0$ και από τη μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος (7.46) έπεται

$$u^\infty = u$$

Τώρα, λόγω της μοναδικότητας του ορίου, ολόκληρη η ακολουθία u^n θα ικανοποιεί την (8.25), με $u^\infty = u$, επομένως

$$u^n \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ στον } L^\infty(0,T; L^2(\Omega))$$

και άρα για κάθε $v \in V$

$$(u^n(t), v) \overset{*}{\rightharpoonup} (u(t), v) \text{ στον } L^\infty(0,T)$$

Για κάθε $t_1, t_2 \in [0,T]$, με $t_2 > t_1$ ισχύει:

$$\begin{aligned}(u^n(t_2), v) - (u^n(t_1), v) &= \int_{t_1}^{t_2} \langle u_t^n, v\rangle dt \\ &\le \int_{t_1}^{t_2} \|u_t^n\|_{V^*}\|v\|_V dt \\ &\le (t_2 - t_1)^{1/2}\|v\|_V \|u_t^n\|_{L^2(0,T;V^*)} \\ &\le C(t_2 - t_1)^{1/2}\end{aligned}$$

που σημαίνει ότι η ακολουθία $(u^n(t), v)$ είναι ισοσυνεχής (equicontinuous) και άρα συμπαγής στον $C([0,T])$, οπότε

$$(u^n(t), v) \to (u(t), v) \text{ στον } C([0,T])$$

για κάθε $v \in V$. Δεδομένης της πυκνότητας του V στον $L^2(\Omega)$ και του γεγονότος ότι η $u^n(t)$ είναι φραγμένη, συνεπάγεται ότι

$$(u^n(t), v) \to (u(t), v) \ \ \forall\, v \in L^2(\Omega),\ \forall\, t \ge 0$$

από την οποία προκύπτει η (8.21). $\square$

Αν, τώρα, υποθέσουμε ότι η l είναι μη αρνητική, με την έννοια

$$\begin{cases} l(v) \ge 0, & \forall\, v \ge 0,\ v \in L^2(\Omega) \\ l \not\equiv 0 \end{cases} \tag{8.28}$$

και για την f υποθέσουμε ότι δεν εξαρτάται από το χρόνο και

$$\begin{cases} f \in V^*, \quad \langle f, v \rangle \geq 0 \ \ \forall\, v \geq 0, \ v \in V \\ f \not\equiv 0 \end{cases} \tag{8.29}$$

τότε από την ασθενή αρχή μεγίστου για το πρόβλημα (8.14) προκύπτει ότι

$$\varphi > 0 \ \ \text{στο } \Omega$$

και άρα

$$l(\varphi) > 0 \tag{8.30}$$

Λόγω της (8.17), αν υποθέσουμε ότι η συνάρτηση a είναι συνεχής και τέτοια ώστε

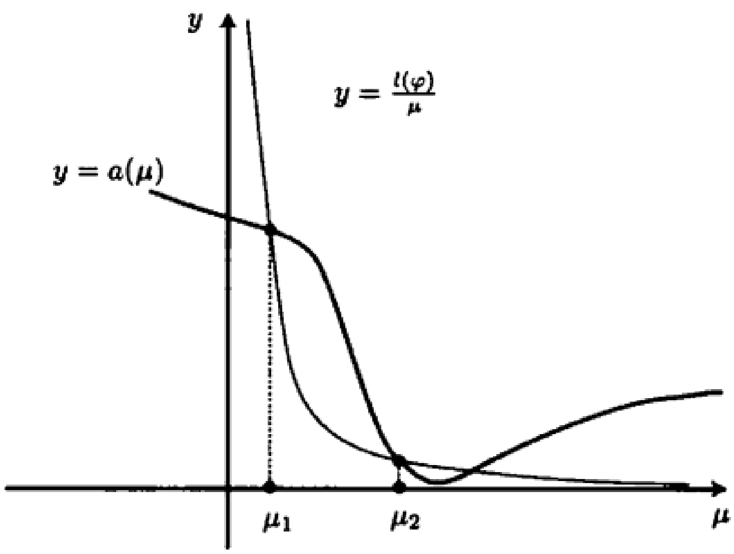
$$0 < m \leq a(\xi) \ \ \forall\, \xi \in \mathbb{R} \tag{8.31}$$

κάθε $\mu \in \mathbb{R}$ που ικανοποιεί την εξίσωση

$$a(\mu) = \frac{l(\varphi)}{\mu}$$

θα είναι λύση του (8.14). Με άλλα λόγια, κάθε σημείο τομής της συνάρτησης a με την υπερβολή $\mu \mapsto \frac{l(\varphi)}{\mu}$ θα είναι λύση του (8.14).

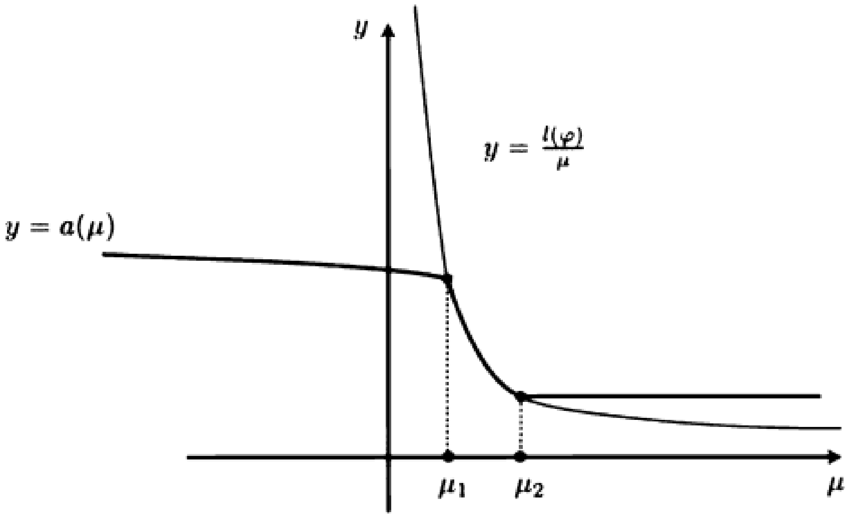
Αν μ_1, μ_2 είναι σημεία τομής του γραφήματος του a με το γράφημα της ως άνω υπερβολής, υποθέτουμε ότι βρισκόμαστε σε μία από τις δύο περιπτώσεις που αναδεικνύονται στα παρακάτω σχήματα (τα οποία υπάρχουν στο Κεφάλαιο 13 του [4]):



Σχήμα 8.1: Περίπτωση $\frac{l(\varphi)}{\mu} < a(\mu) \ \ \forall\, \mu \in [\mu_1, \mu_2]$

Με άλλα λόγια υποθέτουμε ότι:

$$\begin{array}{l} a(\mu_1) \leq a(\mu) \leq a(\mu_2) \ \ \forall\, \mu \in [\mu_1, \mu_2] \\ \frac{l(\varphi)}{\mu} < a(\mu) \ \ \forall\, \mu \in [\mu_1, \mu_2] \ \ \text{Σχήμα 8.1} \\ \frac{l(\varphi)}{\mu} = a(\mu) \ \ \forall\, \mu \in [\mu_1, \mu_2] \ \ \text{Σχήμα 8.2} \end{array} \tag{8.32}$$



Σχήμα 8.2: Περίπτωση $\frac{l(\varphi)}{\mu} = a(\mu)\ \ \forall\ \mu \in [\mu_1, \mu_2]$

Στα μ_1, μ_2 αντιστοιχούν δύο στατικά σημεία:

$$u_1 = \frac{\varphi}{a(\mu_1)} < u_2 = \frac{\varphi}{a(\mu_2)} \tag{8.33}$$

Θέλουμε να αναλύσουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά της λύσης u του προβλήματος (8.13). Θα περιορίσουμε τη μελέτη μας στην περίπτωση που η αρχική συνθήκη u_0 βρίσκεται μεταξύ των δύο στατικών σημείων, δηλαδή

$$u_1 \leq u_0 \leq u_2 \ \text{ σχεδόν παντού στο } \Omega \tag{8.34}$$

Θεώρημα 8.4. *Έστω $a(t) \geq m > 0$ συνεχής συνάρτηση. Αν η w είναι λύση του προβλήματος*

$$\begin{cases} w \in L^2(0,T;V) \cap C([0,T], L^2(\Omega)), \quad w_t \in L^2(0,T;V^*) \\ w(0) \leq 0, \quad w(0) \not\equiv 0 \\ \dfrac{d}{dt}(w,v) + a(t)\displaystyle\int_\Omega \nabla w \cdot \nabla v dx \leq 0 \ \ \forall\ v \in V,\ v \geq 0, \text{ στον } \mathcal{D}^*(0,T) \end{cases} \tag{8.35}$$

τότε θα ισχύει

$$w(x,t) < 0 \ \ \forall\ t > 0, \text{ σχεδόν παντού στο } \Omega \tag{8.36}$$

Απόδειξη. Έστω $\tilde{\Omega}$ ένα λείο υποσύνολο του Ω και v ασθενής λύση του

$$\begin{cases} v_t - \Delta v = 0 \ \text{ στο } \tilde{\Omega} \times (0,T) \\ v(0) = w(0) \\ v(\cdot, t) \in H_0^1(\tilde{\Omega}), \quad t \in (0,T) \end{cases} \tag{8.37}$$

Ας υποθέσουμε ότι το $\tilde{\Omega}$ είναι αρκετά μεγάλο, ώστε το $\int_{\tilde{\Omega}} |w(0)| dx > 0$. Από την ασθενή αρχή του μεγίστου παίρνουμε ότι

$$v(x,t) \leq 0 \ \ \forall\ (x,t) \in \tilde{\Omega} \times [0,T] \tag{8.38}$$

και μιας και $v(0) = w(0) \not\equiv 0$ και $v \in C([0,T], L^2(\Omega))$, η (συνήθης) αρχή του μεγίστου συνεπάγεται

$$v(x,t) < 0 \ \ \forall\ (x,t) \in \tilde{\Omega} \times (0,T] \tag{8.39}$$

Και πάλι από την ασθενή αρχή του μεγίστου θα έχουμε $w \leq 0$. Αν θέσουμε

$$\tilde{v}(\cdot,t) = v\left(\cdot, \int_0^t a(s)ds\right)$$

τότε

$$\tilde{v}_t = v_t a(t) = a(t)\Delta v = a(t)\Delta\tilde{v} \text{ με } \tilde{v}(0) = v(0) = w(0)$$

και $0 < \int_0^t a(s)ds < T$, οπότε η παραπάνω εξίσωση ισχύει στο $\tilde{\Omega} \times (0,T^*)$, όπου T^* τέτοιο ώστε $\int_0^{T^*} a(s)ds = T$. Αν επικαλεστούμε ξανά την ασθενή αρχή του μεγίστου, λαμβάνουμε

$$w \leq \tilde{v} \ \text{ στο } \tilde{\Omega} \times [0,T]$$

το οποίο λόγω της (8.39) είναι αρνητικό για κάθε $t > 0$ (μπορούμε να επιλέξουμε τα T και T^* όσο μεγάλα θέλουμε) και σχεδόν παντού στο Ω, μιας και το $\tilde{\Omega}$ είναι τυχαίο υποσύνολο του Ω, που σημαίνει ότι η (8.36) πράγματι ισχύει. $\square$

Συνεχίζουμε με ένα αποτέλεσμα ευστάθειας, στην περίπτωση που βρισκόμαστε κάτω από τις υποθέσεις που περιγράφονται στα δύο σχήματα παραπάνω:

Θεώρημα 8.5. *Κάτω από τις ως άνω υποθέσεις, συγκεκριμένα αν ισχύουν οι σχέσεις (8.28), (8.29), (8.32) και (8.34), αν u είναι η ασθενής λύση του (8.13), θα ισθύει:*

$$u_1 \leq u(t) = u(\cdot,t) \leq u_2 \ \text{ στο } \Omega\text{, σχεδόν για κάθε } t > 0 \tag{8.40}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι

$$u_1 < u_0 < u_2 \ \text{ σχεδόν παντού στο } \Omega \tag{8.41}$$

Τότε, λόγω της (8.28)

$$\mu_1 = l(u_1) < l(u_0) < l(u_2) = \mu_2 \tag{8.42}$$

Ας συμβολίσουμε με t^* το supremum

$$t^* := \sup\{t > 0 \mid l(u(\cdot,s)) \in [\mu_1,\mu_2] \ \forall\ s \in [0,t]\} \tag{8.43}$$

Προφανώς $t^* > 0$. Ισχυριζόμαστε ότι $t^* = +\infty$. Πράγματι, αν $t^* < +\infty$, τότε

$$l(u(\cdot,t^*)) = \mu_1 \ \text{ ή } \ l(u(\cdot,t^*)) = \mu_2$$

διότι l γραμμικό και $u \in C([0,+\infty); L^2(\Omega))$. Ας υποθέσουμε για παράδειγμα ότι

$$l(u(\cdot,t^*)) = \mu_2 \tag{8.44}$$

(αν $l(u(\cdot,t^*)) = \mu_1$ η απόδειξη είναι ίδια). Τότε, σχεδόν για κάθε t θα ισχύει στον $L^2(0,t^*,V^*)$:

$$u_t - a(l(u))\Delta u = f = -a(\mu_2)\Delta u_2$$

που μπορούμε να το γράψουμε

$$(u-u_2)_t - a(l(u))\Delta(u-u_2) = (a(\mu_2) - a(l(u)))(-\Delta u_2)$$

ή αλλιώς

$$(u-u_2)_t - a(l(u))\Delta(u-u_2) = \frac{a(\mu_2)-a(l(u))}{a(\mu_2)} \cdot f$$

Δεδομένου ότι $l(u) \in [\mu_1, \mu_2]$, από τις (8.29) και (8.32) εξάγουμε τη σχέση

$$(u-u_2)_t - a(l(u))\Delta(u-u_2) \leq 0 \ \text{ σχεδόν για κάθε } t \in (0, t^*)$$

Θέτουμε $w = u - u_2$ και έχουμε

$$w_t - a(l(u))\Delta w \leq 0, \quad w(0) = u_0 - u_2 < 0 \tag{8.45}$$

Από το Θεώρημα 8.4 προκύπτει ότι $w(t^*) < 0$ που, όμως, έρχεται σε αντίθεση με την (8.44). Αυτό σημαίνει ότι $t^* = +\infty$ και από τον τρόπο που ορίσαμε το t^*

$$l(u(t)) \in [\mu_1, \mu_2] \ \ \forall\ t > 0$$

οπότε

$$u_1 < u(t) < u_2 \ \text{ στο } \Omega, \ \forall\ t > 0 \tag{8.46}$$

Αν, πάλι

$$\frac{\varphi}{a(\mu_1)} = u_1 \leq u_0 \leq u_2 = \frac{\varphi}{a(\mu_2)}$$

καθώς το $n \to \infty$ θα ισχύει ότι

$$u_1 < u_0^n = \left(u_1 + \frac{\varphi}{n}\right) \vee u_0 \wedge \left(u_2 - \frac{\varphi}{n}\right) < u_2$$

Επομένως, αν u^n είναι η λύση του (8.13) με αρχική τιμή u_0^n, τότε

$$u^n(t) \in X := \{v \in L^2(\Omega) \mid u_1 \leq v \leq u_2 \ \text{ σχεδόν παντού στο } \Omega\} \tag{8.47}$$

για κάθε t. Ας παρατηρήσουμε ότι το X είναι κυρτό και κλειστό στον $L^2(\Omega)$, οπότε και ασθενώς κλειστό, συνεπώς από την (8.21) παίρνουμε ότι $u(t) \in X, \ \ \forall\ t > 0$ και άρα το ζητούμενο. $\square$

Επιστρέφουμε, τώρα, στον αρχικό στόχο μας, δηλαδή στη μελέτη της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς της λύσης του (8.13). Όπως αναφέρθηκε στην εισαγωγή του κεφαλαίου, όταν μελετάμε μη γραμμικά προβλήματα είναι αναγκαία η χρήση των δυναμικών συστημάτων.

Ορισμός 8.1. *Έστω X πλήρης μετρικός χώρος. Ένα δυναμικό σύστημα στον X είναι μια οικογένεια απεικονίσεων $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, τέτοια ώστε:*

(i) $S(t) : X \to X$ *συνεχής*

(ii) $S(0)x = x \ \ \forall\ x \in X$

(iii) $S(t+s) = S(t) \circ S(s) \ \ \forall\ s, t \geq 0$

(iv) $\forall\ x \in X$ *η απεικόνιση* $t \mapsto S(t)x$ *είναι συνεχής από το* $[0, +\infty)$ *στο* X

Αν ρίξουμε μια ματιά στο χώρο X που ορίστηκε στη σχέση (8.47), τότε είναι εύκολο να δείξουμε ότι ο X είναι κλειστό, φραγμένο και κυρτό υποσύνολο του $L^2(\Omega)$. Τότε, μπορούμε να τον εφοδιάσουμε με την ασθενή τοπολογία, η οποία είναι μετρικοποιήσιμη για κάποια μετρική d, κάτω από την οποία ο X καθίσταται πλήρης και συμπαγής. Για $u_0 \in X$ ορίζουμε τον τελεστή $S(t)$, ο οποίος δρα πάνω στην αρχική συνθήκη του (8.13) και μας επιστρέφει τη λύση $u(t) = u(\cdot, t)$ του (8.13), δηλαδή

$$S(t)u_0 = u(t) \tag{8.48}$$

Όπως θα δούμε στο ακόλουθο θεώρημα, τα δυναμικά συστήματα προκύπτουν πολύ φυσικά και αβίαστα στη μελέτη μας, μιας και η οικογένεια αυτών των τελεστών που ορίσαμε αποτελεί ένα δυναμικό σύστημα.

Θεώρημα 8.6. *Η οικογένεια $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ που ορίζεται μέσω της σχέσης (8.48) είναι ένα δυναμικό σύστημα στον X.*

Απόδειξη. Αρκεί να επιβεβαιώσουμε τις ιδιότητες του Ορισμού 8.1. Πράγματι, από το Θεώρημα 8.5 ο $S(t)$ απεικονίζει το X στον εαυτό του και είναι συνεχής σύμφωνα με το Λήμμα 8.1. Επίσης, για κάθε $u_0 \in X$, έχουμε $S(0)u_0 = u_0$ εξ ορισμού. Η (iii) ισχύει λόγω της μοναδικότητας της λύσης για οποιοδήποτε σημείο εκκίνησης και τέλος, η τελευταία απαίτηση ικανοποιείται, δεδομένου ότι $u \in C([0,T], L^2(\Omega))$. □

Πριν συνεχίσουμε, όμως, θα χρειαστεί να αναφέρουμε μερικά απαραίτητα στοιχεία από τη θεωρία δυναμικών συστημάτων. Όταν θέλει κανείς να μελετήσει ασυμπτωτική συμπεριφορά, χρειάζεται την έννοια του $\omega-$οριακού συνόλου:

Ορισμός 8.2. *Έστω $x \in X$. Το σύνολο*

$$\omega(x) = \{y \in X \mid \exists\ t_n \to \infty \text{ ώστε } y = \lim_n S(t_n)x\} \tag{8.49}$$

καλείται $\omega-$οριακό σύνολο του x.

Σχετικά με το εν λόγω σύνολο υπάρχουν οι ακόλουθες ιδιότητες, τις οποίες όμως δε θα αποδείξουμε για να μην ξεφύγουμε από το στόχο μας.

Θεώρημα 8.7. *Αν $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ είναι δυναμικό σύνολο στον (X,d), τότε για κάθε $x \in X$ και $t \geq 0$ ισχύουν:*

$$\omega(S(t)x) = \omega(x) \tag{8.50}$$

$$S(t)\omega(x) \subset \omega(x) \tag{8.51}$$

Επιπλέον, αν το σύνολο $\bigcup_{t\geq 0}\{S(t)x\}$ είναι σχετικά συμπαγές στον X, τότε:

$$S(t)\omega(x) = \omega(x) \neq \emptyset \tag{8.52}$$

$$\text{το } \omega(x) \text{ είναι συμπαγές και συνεκτικό στον } X \tag{8.53}$$

Τέλος, μια αναπόσπαστη έννοια των δυναμικών συστημάτων είναι η συνάρτηση Lyapunov:

Ορισμός 8.3. *Μια συνεχής συνάρτηση $\Phi : X \to \mathbb{R}$ καλείται συνάρτηση Lyapunov του δυναμικού συστήματος $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ αν*

$$\Phi(S(t)x) \leq \Phi(x) \quad \forall\ x \in X,\ \forall\ t \geq 0 \tag{8.54}$$

Επιπλέον, η απεικόνιση

$$t \mapsto \Phi(S(t)x)$$

είναι φθίνουσα για κάθε $x \in X$.

Οι συναρτήσεις Lyapunov έχουν τις εξής ιδιότητες:

Θεώρημα 8.8. *Αν $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ είναι δυναμικό σύστημα στον X, $x \in X$ και το σύνολο $\bigcup_{t\geq 0}\{S(t)x\}$ είναι σχετικά συμπαγές στον X, τότε κάθε συνάρτηση Lyapunov του δυναμικού συστήματος έχει τις παρακάτω ιδιότητες:*

$$\text{υπάρχει } C \text{ ώστε } \lim_{t\to\infty} \Phi(S(t)x) = C \tag{8.55}$$

$$\Phi(y) = C \quad \forall\, y \in \omega(x) \tag{8.56}$$

$$\Phi(S(t)y) = \Phi(y) = C \quad \forall\, y \in \omega(x)\ \forall\, t \geq 0 \tag{8.57}$$

Έχοντας υπόψιν όλα τα παραπάνω, θα θέλαμε να βρούμε μια συνάρτηση Lyapunov για το δυναμικό σύστημα που ορίστηκε από την (8.48). Έστω, λοιπόν, Φ η λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} -\Delta\Phi = l & \text{στο } \Omega \\ \Phi \in V \end{cases} \tag{8.58}$$

Μιας και $l \in L^2(\Omega) \subset V^*$, η (8.58) θα επιδέχεται μοναδική λύση, ενώ λόγω της (8.28)

$$\Phi > 0 \quad \text{στο } \Omega \tag{8.59}$$

Αν επιλέξουμε $v = \Phi$ στην τελευταία εξίσωση του (8.35), έχουμε

$$\frac{d}{dt}(\Phi, u) + a(l(u)) \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\Phi dx = \langle f, \Phi\rangle = \langle -\Delta\varphi, \Phi\rangle$$

και με ολοκλήρωση κατά μέλη παίρνουμε για κάθε $t \in (0, +\infty)$

$$\frac{d}{dt}(\Phi, u) = l(\varphi) - a(l(u))l(u) \tag{8.60}$$

Τότε, αν διαλέξουμε $u_0 \in X$, από το Θεώρημα 8.5 θα πάρουμε

$$\frac{d}{dt}(\Phi, u) \leq 0 \quad \text{στην περίπτωση του Σχήματος 8.1} \tag{8.61}$$

και

$$\frac{d}{dt}(\Phi, u) = 0 \quad \text{στην περίπτωση του Σχήματος 8.2} \tag{8.62}$$

Αυτό σημαίνει ότι η απεικόνιση $u \mapsto (\Phi, u)$ είναι συνάρτηση Lyapunov στον X.

Τώρα είμαστε σε θέση να βρούμε τη συμπεριφορά της u καθώς $t \to \infty$. Έστω ότι βρισκόμαστε κάτω από τις υποθέσεις του Σχήματος 8.1.

Θεώρημα 8.9. *Κάτω από τις υποθέσεις του Σχήματος 8.1, αν δηλαδή ισχύουν οι πρώτες δύο εξισώσεις της (8.32), και $u_0 \in X$, με $u_0 \neq u_2$, τότε καθώς $t \to \infty$ θα έχουμε*

$$u(t) = S(t)u_0 \to u_1 \quad \text{στον } L^2(\Omega) \tag{8.63}$$

Απόδειξη. Έστω $\omega(u_0)$ το ω-οριακό σύνολο του u_0. Από τη σχέση (8.60) και το Θεώρημα 8.5 έχουμε

$$\frac{d}{dt}(\Phi, u) = l(\varphi) - l(u)a(l(u)) \leq 0 \tag{8.64}$$

που σημαίνει ότι το εσωτερικό γινόμενο της (Φ, u) είναι μια συνάρτηση Lyapunov για το πρόβλημά μας. Ακόμα, λόγω της (8.40)

$$(\Phi, u_1) \leq (\Phi, u(t)) \tag{8.65}$$

Από την (8.64) έχουμε ότι η (Φ, u) είναι φθίνουσα, επομένως, από τη σχέση (8.55) του Θεωρήματος 8.8 θα υπάρχει C ώστε

$$\lim_{t\to\infty}(\Phi, u(t)) = C = (\Phi, w) \tag{8.66}$$

με $w \in \omega(u_0)$. Τώρα, για κάθε $w \in \omega(u_0)$, από τις (8.56) και (8.57)

$$\frac{d}{dt}(\Phi, S(t)w) = 0 = l(\varphi) - l(S(t)w)a(l(S(t)w))$$

δηλαδή το $S(t)w$ είναι λύση της (8.17)

και μιας και η απεικόνιση $t \mapsto l(S(t)w)$ είναι συνεχής, συνεπάγεται ότι

$$l(S(t)w) = \mu_1 \;\text{ ή }\; l(S(t)w) = \mu_2 \;\; \forall\, t > 0$$

και άρα

$$l(w) = \mu_1 \;\text{ ή }\; l(w) = \mu_2 \;\; \forall\, w \in \omega(u_0)$$

Αν, λοιπόν, ορίσουμε τα σύνολα

$$\omega_i := \{w \in \omega(u_0) \mid l(w) = \mu_i\}, \quad i = 1, 2$$

τα οποία είναι κλειστά υποσύνολα του X και ξένα μεταξύ τους, θα ισχύει

$$\omega(u_0) = \omega_1 \cup \omega_2$$

και επειδή το $\omega(u_0)$ είναι συμπαγές και συνεκτικό όπως αναφέραμε στο Θεώρημα 8.7, τελικά

$$\omega(u_0) = \omega_1 \;\text{ ή }\; \omega(u_0) = \omega_2$$

οπότε αν η u είναι λύση του προβλήματος (7.46), παίρνουμε

$$l(u(t)) \to \mu_1 \;\text{ ή αντίστοιχα }\; l(u(t)) \to \mu_2$$

Ας θεωρήσουμε, προς στιγμήν ότι το ακόλουθο Λήμμα είναι γνωστό:

Λήμμα 8.2. *Έστω u ασθενής λύση του (8.13). Αν*

$$l(u(t)) \to \mu_i \;\text{ καθώς }\; t \to \infty \tag{8.67}$$

τότε

$$u(t) \to u_i \;\text{ στον }\; L^2(\Omega) \tag{8.68}$$

Έχοντας το Λήμμα κατά νου, αν $l(u(t)) \to \mu_2$, έχουμε $u(t) \to u_2$ και άρα

$$(\Phi, u(t)) = (\Phi, u_2) \;\; \forall\, t > 0$$

διότι βάσει όσων είπαμε παραπάνω, η (Φ, u) είναι φθίνουσα και $\Phi > 0$. Επομένως, $u(t) = u_2, \;\; \forall\, t > 0$ που είναι όμως άτοπο. Αυτό σημαίνει ότι

$$l(u(t)) \to \mu_1$$

και άρα λόγω του Λήμματος 8.2

$$u(t) \to u_1$$

που είναι το ζητούμενο. □

Απόδειξη Λήμματος 8.2. Με αφαίρεση κατά μέλη στο πρόβλημα (8.13) και χρησιμοποιώντας την (8.33), θα πάρουμε σχεδόν για κάθε $t > 0$, στον V^*

$$(u - u_i)_t - a(l(u))\Delta u = -a(\mu_i)\Delta u_i$$

ή αλλιώς

$$(u - u_i)_t - a(l(u))\Delta(u - u_i) = -(a(\mu_i) - a(l(u)))\Delta u_i$$

Παίρνουμε το εσωτερικό γινόμενο της παραπάνω σχέσης με το $u - u_i$ και θέτουμε

$$\varepsilon(t) = |a(\mu_i) - a(l(u))|$$

Τότε, αν θυμηθούμε ότι το a είναι κάτω φραγμένο, λαμβάνουμε

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u - u_i\|^2_{L^2(\Omega)} + m\int_\Omega |\nabla(u - u_i)|^2 dx \le \varepsilon(t)\int_\Omega |\nabla u_i||\nabla(u - u_i)|dx \tag{8.69}$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα Young στο ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους για κάποια σταθερά $\delta > 0$ που θα επιλέξουμε κατάλληλα σε λίγο, θα πάρουμε

$$\int_\Omega |\nabla u_i||\nabla(u - u_i)|dx \le \frac{\delta}{2}\int_\Omega |\nabla(u - u_i)|^2 dx + \frac{1}{2\delta}\int_\Omega |\nabla u_i|^2 dx \tag{8.70}$$

Η συνάρτηση ε που ορίσαμε πιο πάνω είναι συνεχής και φραγμένη, οπότε μπορούμε να διαλέξουμε το δ με τέτοιο τρόπο, ώστε

$$\delta\|\varepsilon\|_\infty = m$$

όπου $\|\varepsilon\|_\infty = \sup_t |\varepsilon(t)|$. Συνδυάζοντας τις (8.69) και (8.70) προκύπτει

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u - u_i\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{m}{2}\int_\Omega |\nabla(u - u_i)|^2 dx \le C\varepsilon(t)$$

και δεδομένου ότι οι νόρμες $\|v\|_{L^2(\Omega)}$ και $\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$ είναι ισοδύναμες στον $L^2(\Omega)$

$$\frac{d}{dt}\|u - u_i\|^2_{L^2(\Omega)} + c\|u - u_i\|^2_{L^2(\Omega)} \le C\varepsilon(t) \tag{8.71}$$

με τη C να είναι ενδεχομένως διαφορετική σταθερά. Θέτουμε

$$y(t) = \|u - u_i\|^2_{L^2(\Omega)}$$

και τότε η (8.71) γράφεται

$$y'(t) + cy(t) \le C\varepsilon(t)$$

Πολλαπλασιάζουμε με τον ολοκληρωτικό παράγοντα e^{ct}, για να πάρουμε

$$(e^{ct}y(t))' \le C\varepsilon(t)e^{ct}$$

και στη συνέχεια ολοκληρώνουμε από t_0 μέχρι t και λύνουμε ως προς $y(t)$, οπότε έχουμε

$$y(t) \leq y(t_0)e^{c(t_0-t)} + C\int_{t_0}^{t} \varepsilon(s)e^{c(s-t)}ds$$

Δοθέντος $\varepsilon_0 > 0$, μπορούμε να επιλέξουμε το t_0 αρκετά μεγάλο, ώστε

$$\varepsilon(s) \leq \frac{c}{C}\frac{\varepsilon_0}{2} \quad \forall\ s \geq t_0$$

οπότε για $t > t_0$

$$\begin{aligned} y(t) &\leq y(t_0)e^{c(t_0-t)} + c\frac{\varepsilon_0}{2}\int_{t_0}^{t} e^{c(s-t)}ds \\ &\leq y(t_0)e^{c(t_0-t)} + \frac{\varepsilon_0}{2}e^{c(s-t)}\Big|_{s=t_0}^{t} \\ &\leq y(t_0)e^{c(t_0-t)} + \frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{\varepsilon_0}{2}e^{c(t_0-t)} \\ &\leq \left(y(t_0) - \frac{\varepsilon_0}{2}\right)e^{c(t_0-t)} + \frac{\varepsilon_0}{2} \end{aligned}$$

Τώρα, μπορούμε να επιλέξουμε το t αρκετά μεγάλο ώστε

$$y(t) \leq \varepsilon_0$$

συνεπώς $\|u - u_i\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon_0$ και άρα κατοχυρώνουμε την επιθυμητή σύγκλιση. □

Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι βρισκόμαστε κάτω από τις υποθέσεις του Σχήματος 8.2. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$ το

$$\frac{\varphi}{a(\mu)} \tag{8.72}$$

είναι στατικό σημείο. Θεωρούμε $u_0 \in X$. Τότε, από το Θεώρημα 8.5, $u(t) \in X, \quad \forall\ t \in (0, +\infty)$ και από τη σχέση (8.62)

$$(\Phi, u(t)) = (\Phi, u_0) \quad \forall\ t \in (0, +\infty) \tag{8.73}$$

Η τελευταία σχέση μάς δίνει μια διαίσθηση για το ποιο μπορεί να είναι το όριο της $u(t)$: το όριο θα δίνεται από την (8.72), με $a(\mu)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{(\Phi, \varphi)}{a(\mu)} = (\Phi, u_0)$$

Δηλαδή, ισχυριζόμαστε ότι το όριο θα είναι το ακόλουθο

$$u_\infty = \frac{(\Phi, u_0)}{(\Phi, \varphi)} \cdot \varphi \tag{8.74}$$

και θέλουμε να το αποδείξουμε. Δεδομένου ότι το $\omega(u_0)$ είναι συμπαγές στον X αν εφοδιαστεί με την ασθενή τοπολογία, μπορούμε να βρούμε $w_0 \in \omega(u_0)$ ώστε

$$a(l(w_0)) = \min_{w \in \omega(u_0)} a(l(w)) \tag{8.75}$$

Αν θέσουμε

$$u^* = \frac{\varphi}{a(l(w_0))} \tag{8.76}$$

έχουμε το ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα 8.3. *Για κάθε $w \in \omega(u_0)$ ισχύει ότι*

$$w \leq u^* \quad \text{στον } \Omega \tag{8.77}$$

Απόδειξη. Έστω $w \in \omega(u_0)$ τέτοιο ώστε $v(t) = S(t)w$. Λόγω της (8.76) έχουμε $-a(l(w_0))\Delta u^* = -\Delta\varphi = f$ και άρα στον $L^2(0,T;V^*)$

$$(v-u^*)_t - a(l(v))\Delta(v-u^*) = -(a(l(w_0)) - a(l(v)))\Delta u^*$$

Όπως έχουμε πράξει και σε προηγούμενες αποδείξεις, πολλαπλασιάζουμε με $(v-u^*)^+$ και παίρνουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|(v-u^*)^+\|^2_{L^2(\Omega)} + a(l(v))\int_\Omega |\nabla(v-u^*)^+|^2 dx \\ &= (a(l(w_0)) - a(l(v)))\langle -\Delta u^*, (v-u^*)^+\rangle \\ &\leq 0\end{aligned}$$

διότι $v \in \omega(u_0)$ και άρα λόγω της (8.75), $a(l(w_0)) - a(l(v)) \leq 0$, ενώ $-\Delta u^* \geq 0$ και $(v-u^*)^+ \geq 0$. Τότε για κάποια σταθερά c:

$$\frac{d}{dt}\|(v-u^*)^+\|^2_{L^2(\Omega)} + c\|(v-u^*)^+\|^2_{L^2(\Omega)} \leq 0$$

και άρα

$$\|(v-u^*)^+\|^2_{L^2(\Omega)} \leq e^{-ct}\|(v(0)-u^*)^+\|^2_{L^2(\Omega)}$$

δηλαδή

$$\begin{aligned}\|(S(t)w-u^*)^+\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq e^{-ct}\|(w-u^*)^+\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\leq e^{-ct}\sup_{w\in\omega(u_0)}\|(w-u^*)^+\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\leq Ke^{-ct}\end{aligned}$$

Λόγω της ιδιότητας (8.52), κάθε $z \in \omega(u_0)$ μπορεί να γραφεί ως $z = S(t)w$, που σημαίνει ότι $(z-u^*)^+ = 0, \ \ \forall\, z \in \omega(u_0)$, που είναι η (8.77). □

Έχοντας αποδείξει το παραπάνω λήμμα, είμαστε έτοιμοι να δείξουμε τη σύγκλιση.

Θεώρημα 8.10. *Αν ισχύει*

$$a(\mu) = \frac{l(\varphi)}{\mu} \quad \forall\, \mu \in [\mu_1, \mu_2] \tag{8.78}$$

τότε για $u_0 \in X$, καθώς $t \to \infty$, έχουμε

$$u(t) \to u_\infty \quad \text{στον } L^2(\Omega) \tag{8.79}$$

με το u_∞ να δίνεται από την (8.74).

Απόδειξη. Για αρχή ισχυριζόμαστε ότι

$$u^* \leq u_\infty \tag{8.80}$$

Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι $u^* > u_\infty$. Έστω $w \in \omega(u_0)$ και $w(t) = S(t)w$. Από τις (8.57) και (8.73) έχουμε:

$$(\Phi, w) = (\Phi, u_0) = (\Phi, u_\infty) < (\Phi, u^*) \tag{8.81}$$

Αν θέσουμε $v = w - u^*$, τότε

$$\begin{aligned}(w - u^*)_t &= w_t = a(l(w))\Delta w + f \\ &= a(l(w))\Delta(w - u^*) + (a(l(w)) - a(l(u^*))\Delta u^*\end{aligned}$$

και μιας και βρισκόμαστε στην περίπτωση του Σχήματος 8.2, έχοντας κατά νου την (8.77)

$$a(l(w)) \geq a(l(u^*))$$

Άρα, η παραπάνω v θα ικανοποιεί την ανισότητα

$$v_t - a(l(w))\Delta v \leq 0 \text{ με } v(0) = w - u^* \leq 0 \text{ και } v(0) \neq 0$$

Τότε, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 8.4 παίρνουμε

$$w(t) - u^* < 0 \ \ \forall\, t > 0 \text{ και για κάθε } w \in \omega(u_0)$$

επομένως

$$l(w) < l(u^*) \ \ \forall\, w \in \omega(u_0)$$

που έρχεται σε αντίθεση με το

$$l(u^*) = \frac{l(\varphi)}{a(l(w_0))} = l(w_0)$$

Αυτό σημαίνει ότι ο ισχυρισμός (8.80) είναι ορθός και μάλιστα, για κάθε $w \in \omega(u_0)$ έχουμε

$$w \leq u^* \leq u_\infty$$

Όμως $(\Phi, w) = (\Phi, u_\infty)$ και συνεπάγεται $w = u_\infty$, για κάθε $w \in \omega(u_0)$, που σημαίνει ότι $\omega(u_0) = \{u_\infty\}$. Συνεπώς $u(t) \rightharpoonup u_\infty$ στον $L^2(\Omega)$ και $a(l(u(t)) \to a(l(u_\infty))$, οπότε το αποτέλεσμα προκύπτει εύκολα από το Λήμμα 8.2. $\square$

8.3 Έκρηξη λύσεως

Τα παραβολικά προβλήματα, όπως ακριβώς και τα προβλήματα συνήθων διαφορικών εξισώσεων, ενδέχεται να έχουν λύσεις που δεν ορίζονται ολικά, δηλαδή για κάθε $t > 0$. Τότε λέμε ότι η λύση *εκρήγνυται* σε πεπερασμένο χρόνο. Η τεχνική διάγνωσης ενός τέτοιου φαινομένου είναι πάντοτε η ίδια: βρίσκουμε μια βαθμωτή ποσότητα που σχετίζεται με τη λύση μας και η οποία δεν μπορεί να οριστεί ολικά, διότι ικανοποιεί μια συνήθη διαφορική εξίσωση της οποίας η λύση εκρύγνειται σε πεπερασμένο χρόνο και τότε είναι σχεδόν άμεσο ότι και η λύση μας θα εκρήγνυται σε πεπερασμένο χρόνο. Για το λόγο αυτό θα μελετήσουμε εν τάχει την περίπτωση έκρηξης λύσεων σε συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Έστω, λοιπόν, η διαφορική εξίσωση

$$\begin{cases} u_t = f(u) \ \ \forall\, t \geq 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{8.82}$$

όπου η απεικόνιση $t \mapsto u(t)$ παίρνει τιμές από το $[0, T)$, $T \in (0, +\infty)$ και τις απεικονίζει στο $\mathbb{R}$. Τότε, έχουμε το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 8.11. *Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και θετική στο $[u_0, +\infty)$, ώστε*

$$t^* = \int_{u_0}^{\infty} \frac{ds}{f(s)} < +\infty \tag{8.83}$$

τότε, θα υπάρχει μοναδική λύση του προβλήματος (8.82) με μέγιστο χρόνο ύπαρξης t^*, δηλαδή η λύση εκρήγνυται στο χρόνο t^*.

Απόδειξη. Μιας και η f είναι θετική, το πρόβλημα (8.82) είναι ισοδύναμο με το

$$\begin{cases} \dfrac{u_t}{f(u)} = 1 \quad \forall\, t \geq 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Αφού ολοκληρώσουμε ως προς το χρόνο, θα πάρουμε

$$\int_{u_0}^{u(t)} \frac{ds}{f(s)} = t \leq t^* = \int_{u_0}^{\infty} \frac{ds}{f(s)}$$

Όμως η απεικόνιση

$$\xi \mapsto \int_{u_0}^{\xi} \frac{ds}{f(s)}$$

είναι αύξουσα και συνεχής, οπότε η παραπάνω εξίσωση επιλύεται μοναδικά για κάθε $t < t^*$ και μάλιστα

$$\lim_{t \to t^*} u(t) = +\infty$$

που είναι το ζητούμενο. □

Ένα κλασικό παράδειγμα είναι το πρόβλημα

$$\begin{cases} u_t = u^2 \quad t > 0 \\ u(0) = u_0 > 0 \end{cases}$$

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε

$$t^* = \int_{u_0}^{\infty} \frac{ds}{s^2} = -\left.\frac{1}{s}\right|_{s=u_0}^{\infty} = \frac{1}{u_0}$$

Πόρισμα 8.1. *Έστω f συνεχής και θετική συνάρτηση στο $[u_0, +\infty)$ ώστε*

$$t^* = \int_{u_0}^{\infty} \frac{ds}{f(s)} < +\infty \tag{8.84}$$

και u συνάρτηση που ικανοποιεί το πρόβλημα

$$\begin{cases} u_t \geq f(u) \quad \text{σχεδόν για κάθε } t \geq 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{8.85}$$

τότε η u ορίζεται το πολύ μέχρι το χρόνο t^*.

Απόδειξη. Από την (8.85) προκύπτει ότι

$$\frac{u_t}{f(u)} \geq 1 \ \text{ σχεδόν για κάθε } t \geq 0$$

και ολοκληρώνοντας ως προς t λαμβάνουμε

$$t^* \geq \int_{u_0}^{u(t)} \frac{ds}{f(s)} \geq t$$

και έτσι ολοληρώνεται η απόδειξη. $\square$

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε δύο τεχνικές που αναδεικνύουν το φαινόμενο έκρηξης λύσεων, αυτή τη φορά όμως σε παραβολικά προβλήματα *μερικών* διαφορικών εξισώσεων. Ξεκινάμε με ένα παράδειγμα:

Έστω u η ασθενής λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(u) \ \text{ στο } \Omega \times (0,T) \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \ \text{ στο } \Gamma \times (0,T) \\ u(\cdot,0) = u_0 \end{cases} \tag{8.86}$$

Αν $f > 0$ από άποψη φυσικής το σύστημα δέχεται θερμότητα και η συνοριακή συνθήκη μας λέει ότι τα άκρα είναι θερμικά μονομένα, επομένως αναμένει κανείς η λύση να εκρήγνυται όταν η θερμότητα του συτήματος είναι επαρκής. Αυτό ακριβώς ισχυρίζεται το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 8.12. *Έστω $u_0 \in L^2(\Omega)$ και θέτουμε*

$$\bar{u}_0 = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u_0(x)dx$$

Αν η f είναι θετική και κυρτή συνάρτηση στο $[\bar{u}_0, +\infty)$ τέτοια ώστε

$$t^* = \int_{\bar{u}_0}^{\infty} \frac{ds}{f(s)} < +\infty$$

τότε το πρόβλημα (8.86) δεν μπορεί να έχει ομαλή λύση μετά το χρόνο t^*.

Απόδειξη. Αν u είναι η ασθενής λύση του (8.86), τότε για κάθε $v \in H^1(\Omega)$

$$\frac{d}{dt}(u,v) + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_\Omega f(u) v dx \ \text{ σχεδόν για κάθε } t \geq 0$$

Για να είναι καλώς ορισμένο το ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος αρκεί $f \in L^2(\Omega)$. Αν επιλέξουμε $v = 1$, παίρνουμε

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u dx = \int_\Omega f(u) dx$$

Διαιρούμε με $|\Omega|$ και θέτουμε

$$\bar{u} = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u dx$$

και κάνοντας χρήση της ανισότητας Jensen λαμβάνουμε

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f(u)dx \geq f\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega udx\right) = f(\bar{u})$$

Ακόμα

$$\bar{u}(0) = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u_0 dx = \bar{u}_0$$

και τότε εφαρμόζοντας το Πόρισμα 8.1 προκύπτει ότι η $\bar{u}$ θα εκρήγνυται σε πεπερασμένο χρόνο και το ίδιο θα ισχύει και για την u. $\square$

Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα στο οποίο έχουμε έκρηξη λύσεως είναι για $f(u) = u^p$, με $p > 1$ και πάνω σε αυτό θα παρουσιάσουμε τις δύο μεθόδους αντιμετώπισης του φαινομένου. Η πρώτη τεχνική ονομάζεται *Τεχνική Kaplan*. Έστω, λοιπόν, το πρόβλημα

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = u^p \ \ \text{στο } \Omega \times (0,T) \ \ , p > 1 \\ u(\cdot,t) \in H_0^1(\Omega) \ \ t \in (0,T) \\ u(\cdot,0) = u_0 \geq 0 \end{cases} \tag{8.87}$$

Από την ασθενή αρχή του μεγίστου έχουμε

$$u \geq 0$$

και θεωρούμε φ την πρώτη ιδιοσυνάρτηση του προβλήματος Dirichlet, δηλαδή

$$\begin{cases} -\Delta\varphi = \lambda_1\varphi \ \ \text{στο } \Omega \\ \varphi \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{8.88}$$

Είναι γνωστό ότι η πρώτη ιδιοσυνάρτηση του τελεστή Δ είναι γνήσια θετική, δηλαδή $\varphi > 0$ και χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$\int_\Omega \varphi dx = 1$$

Θεώρημα 8.13. *Κάτω από τις παραπάνω υποθέσεις και αν*

$$\int_\Omega u_0\varphi dx \ \ \text{είναι αρκετά μεγάλο} \tag{8.89}$$

το πρόβλημα (8.87) δεν μπορεί να έχει ομαλή λύση για όλους τους χρόνους.

Απόδειξη. Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση του (8.87) με φ και ολοκληρώνουμε στο Ω για να πάρουμε

$$\int_\Omega u_t\varphi dx - \int_\Omega \Delta u\varphi dx = \int_\Omega u^p\varphi dx$$

Εφαρμόζοντας παραγοντική ολοκλήρωση στο δεύτερο ολοκλήρωμα και την ανισότητα Jensen στο ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους, έχουμε:

$$\left(\int_\Omega u\varphi dx\right)_t - \int_\Omega u\Delta\varphi dx \geq \left(\int_\Omega u\varphi dx\right)^p$$

Αν θέσουμε

$$v = \int_\Omega u\varphi dx$$

και χρησιμοποιήσουμε την (8.88) θα πάρουμε

$$v_t \geq v^p - \lambda_1 v$$

Αν το v επιλεγεί αρκετά μεγάλο, ώστε η απεικόνιση $v \mapsto v^p - \lambda_1 v$ να είναι θετική, μπορούμε να εφαρμόσουμε το Πόρισμα 8.1 και τότε για (8.89) αρκετά μεγάλο, η $v = v(t)$ εκρήγνυται σε κάποιο χρόνο t^*, επομένως το ίδιο θα ισχύει και για τη λύση μας. □

Στο ίδιο αποτέλεσμα μπορεί κανείς να καταλήξει αν εφαρμόσει την *Ενεργειακή Μέθοδο*:

Θεώρημα 8.14. *Υποθέτουμε ότι η ποσότητα*

$$E(u_0) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega u_0^{p+1} dx < 0 \tag{8.90}$$

Τότε το πρόβλημα (8.87) δεν μπορεί να έχει ομαλή λύση για όλους του χρόνους.

Απόδειξη. Με τον όρο *ομαλή* εννοούμε ότι οι παρακάτω υπολογισμοί έχουν νόημα. Από τη συνοριακή συνθήκη $u(x,t) = 0$ στο $\Gamma \times (0,T)$ προκύπτει ότι $u_t(x,t) = 0$ στο $\Gamma \times (0,T)$. Αν, λοιπόν, πολλαπλασιάσουμε την πρώτη εξίσωση του προβλήματος (8.87) με u_t και ολοκληρώσουμε στο Ω, θα πάρουμε:

$$\int_\Omega u_t^2 dx = \int_\Omega u_t \Delta u dx + \int_\Omega u_t u^p dx$$

και κάνοντας παραγοντική ολοκλήρωση στο δεύτερο ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned}\int_\Omega u_t^2 dx &= -\int_\Omega \nabla u_t \cdot \nabla u dx + \left(\frac{1}{p+1}\int_\Omega u^{p+1} dx\right)_t \\ &= \left(-\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{p+1}\int_\Omega u^{p+1} dx\right)_t\end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι για την ποσότητα

$$E = E(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega u^{p+1} dx$$

που ονομάζεται ενέργεια, ισχύει

$$\frac{dE}{dt} = -\int_\Omega u_t^2 dx \leq 0 \tag{8.91}$$

δηλαδή η ενέργεια είναι φθίνουσα ως προς το χρόνο. Ας σκεφτούμε, τώρα, την ποσότητα

$$v = \frac{1}{2|\Omega|}\int_\Omega u^2 dx$$

για την οποία έχουμε:

$$
\begin{aligned}
v_t &= \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u u_t dx \\
&\overset{(8.87)}{=} \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(\Delta u + u^p) dx \\
&= \frac{1}{|\Omega|}\left(-\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega u^{p+1} dx\right) \\
&= \frac{1}{|\Omega|}\left(-2E - \frac{2}{p+1}\int_\Omega u^{p+1} dx + \int_\Omega u^{p+1} dx\right)
\end{aligned}
$$

Κάτω από την υπόθεση (8.90), δηλαδή αν η αρχική ενέργεια είναι αρνητική και σύμφωνα με το γεγονός ότι η ενέργεια είναι φθίνουσα, προκύπτει ότι $E < 0$, οπότε

$$
v_t \geq \frac{1}{|\Omega|}\left(1 - \frac{2}{p+1}\right)\int_\Omega u^{p+1} dx = \frac{1}{|\Omega|}\left(1 - \frac{2}{p+1}\right)\int_\Omega \left(u^2\right)^{\frac{p+1}{2}} dx
$$

Όμως έχουμε υποθέσει ότι $p > 1$, δηλαδή $\frac{p+1}{2} > 1$ και άρα από την ανισότητα Jensen προκύπτει

$$
\begin{aligned}
v_t &\geq \left(1 - \frac{2}{p+1}\right)\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u^2 dx\right)^{\frac{p+1}{2}} \\
&\geq \left(1 - \frac{2}{p+1}\right) v^{\frac{p+1}{2}}
\end{aligned}
$$

με

$$
v(0) = \frac{1}{2|\Omega|}\int_\Omega u_0^2 dx > 0
$$

συνεπώς, μπορούμε να εφαρμόσουμε το Πόρισμα 8.1, το οποίο συνεπάγεται ότι η v εκρήγνυται σε κάποιο χρόνο t^* και το ίδιο θα ισχύει και για τη λύση u. $\square$

Μέρος III

Υπερβολικά προβλήματα

Κεφάλαιο 9

Μέτρα Young

9.1 Εισαγωγή

Η μελέτη των υπερβολικών προβλημάτων είναι συνήθως μια δύσκολη υπόθεση. Σε αντίθεση με τα παραβολικά προβλήματα, στα οποία η λύση είναι αρκετά ομαλή, στα υπερβολικά προβλήματα, λόγω της κυματικής διάδοσης, ελλοχεύει ο κίνδυνος δημιουργίας κρουστικών κυμάτων, τα οποία έχουν ως αποτέλεσμα η λύση να μην ορίζεται καλά σε ορισμένα σημεία! Σε αυτές τις περιπτώσεις κρίνεται επιτακτική η περιγραφή των λύσεων με τη βοήθεια μέτρων. Στο παρόν κεφάλαιο, θα εισάγουμε τα απαραίτητα εργαλεία αντιμετώπισης αυτού του φαινομένου, το οποίο όμως θα αναδείξουμε στο επόμενο κεφάλαιο. Για να αποκτήσουμε καλύτερη εποπτεία του προβλήματος, θα παρουσιάσουμε για αρχή ένα απλούστερο πρόβλημα με το οποίο όμως δε θα ασχοληθούμε στη συνέχεια, διότι ξεφεύγει από το δικό μας πλαίσιο, μιας και οι λύσεις του ανήκουν σε μια διαφορετική κατηγορία λύσεων, που ονομάζονται entropy solutions.

Ας θεωρήσουμε, λοιπόν, το πρόβλημα Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{f}(u) = 0 & \text{στο } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \\ u(0, \cdot) = u_0 & \text{στον } \mathbb{R}^d \end{cases} \tag{9.1}$$

όπου $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_d)$, $f_j \in C^1(\mathbb{R})$ και $u_0 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ δοθείσα αρχική συνθήκη. Μια πολύ ενδιαφέρουσα μέθοδος εύρεσης λύσεως του ως άνω προβλήματος είναι η vanishing viscosity method. Η ιδέα είναι η ακόλουθη: Για κάθε $\varepsilon > 0$, θα μελετήσουμε την παραβολική διαταραχή του (9.1):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{f}(u^\varepsilon) - \varepsilon \Delta u^\varepsilon = 0 & \text{στο } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \\ u^\varepsilon(0, \cdot) = u_0 & \text{στον } \mathbb{R}^d \end{cases} \tag{9.2}$$

Η (9.2), τώρα, είναι παραβολικού τύπου και μπορεί να επιλυθεί πιο εύκολα. Τότε, έχοντας βρει τη λύση της (9.2) μπορούμε να πάρουμε το όριο αυτής, καθώς $\varepsilon \to 0^+$, για να βρούμε τη λύση του (9.1).

Μπορεί κανείς να αποδείξει ότι αν $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ και $f_j \in C^1(\mathbb{R})$, $j = 1, \ldots, d$, υπάρχει λύση $u^\varepsilon \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$ του (9.2), η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$\|u^\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)} \le c \tag{9.3}$$

Τότε, σύμφωνα με την (9.3), μπορούμε να βρούμε υπακολουθία u^{ε_k}, την οποία θα συμβολίζουμε με u^k, ώστε καθώς το $k \to \infty$, το $\varepsilon_k \to 0^+$ και

$$u^k \overset{*}{\rightharpoonup} u \;\; \text{στον } L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d) \tag{9.4}$$

Η σχέση (9.4) αρκεί ώστε να εξασφαλίσουμε τις συγκλίσεις

$$\frac{\partial u^k}{\partial t} \to \frac{\partial u}{\partial t} \;\; \text{και} \;\; \varepsilon_k \Delta u^k \to 0 \;\; \text{στον } \mathcal{D}^*(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$$

και μένει να μελετήσουμε τη σύγκλιση του δεύτερου (μη γραμμικού) όρου της εξίσωσης, καθώς $\varepsilon_k \to 0^+$.

Λόγω του ότι $f_j \in C^1(\mathbb{R})$, η (9.3) δίνει

$$\|f_j(u^\varepsilon)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)} \leq c \tag{9.5}$$

και άρα κατά μήκος μιας υπακολουθίας

$$f_j(u^k) \overset{*}{\rightharpoonup} \overline{f_j} \;\; \text{στον } L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d) \tag{9.6}$$

Αν δείξουμε ότι

$$\overline{f_j} = f_j(u) \tag{9.7}$$

τότε έχουμε τελειώσει. Δυστυχώς, όμως, λόγω της μη γραμμικότητας της f, η (9.4) δεν επαρκεί για να συμπεράνουμε ότι η (9.7) ισχύει. Πράγματι, έστω $u^n(x) = \sin(nx)$, $x \in [0, 2\pi]$ και $f(y) = y^2$. Θα χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο Λήμμα:

Λήμμα 9.1. *Έστω $v \in L^2(0, 2\pi)$ 2π-περιοδική και $v^n(x) = v(nx)$. Τότε $v^n \rightharpoonup \frac{a_0}{2}$ στον $L^2(0, 2\pi)$, όπου $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} v(x)dx$.*

Απόδειξη. Από το ανάπτυγμα Fourier της v παίρνουμε

$$v^n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^\infty (a_k \cos(nkx) + b_k \sin(nkx))$$

Τότε, για $0 \leq a < b \leq 2\pi$

$$\begin{aligned}\left| \int_a^b \sum_{k=1}^\infty a_k \cos(nkx)dx \right| &= \left| \sum_{k=1}^\infty a_k \int_a^b \cos(nkx)dx \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^\infty a_k \frac{c}{nk} \leq \frac{c}{n} \left(\sum_{k=1}^\infty |a_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}} \to 0\end{aligned}$$

καθώς $n \to \infty$ και το ίδιο συμβαίνει αν αντικαταστήσουμε το $\cos(nkx)$ από το $\sin(nkx)$. Επομένως,

$$\int_0^{2\pi} v^n(x)\chi_{[a,b]}(x)dx \to \int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2}\chi_{[a,b]}(x)dx \tag{9.8}$$

καθώς $n \to \infty$. Αν προσεγγίσουμε την τυχαία $\varphi \in L^2(0, 2\pi)$ από συναρτήσεις βήματος και χρησιμοποιήσουμε την (9.8) παίρνουμε το ζητούμενο. $\square$

Αν εφαρμόσουμε το Λήμμα 9.1 στις u^n και $f \circ u^n$, θα πάρουμε:

$$u^n \rightharpoonup \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin x dx = 0 \ \text{ στον } L^2(0,2\pi)$$

και

$$(u^n)^2 = f(u^n) \rightharpoonup \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \ \text{ στον } L^2(0,2\pi)$$

Ακόμα, στον $L^\infty(0,2\pi)$ για κάποια υπακολουθία έχουμε $u^n \overset{*}{\rightharpoonup} 0$ και $(u^n)^2 \overset{*}{\rightharpoonup} \frac{1}{2}$, οπότε βλέπουμε ότι

$$f(\text{weak-* }\lim_{n\to\infty} u^n) < \text{weak-* }\lim_{n\to\infty} f(u^n) \tag{9.9}$$

Το παραπάνω παράδειγμα επιβεβαιώνει ότι ελλείψει ισχυρούς σύγκλισης, ενδέχεται να προκύψουν προβλήματα λόγω της μη γραμμικότητας της f, ακόμα και στην περίπτωση που η f είναι λεία! Χρειαζόμαστε, λοιπόν, διαφορετική προσέγγιση του προβλήματος και το κατάλληλο περιβάλλον για να περιγράψουμε το όριο $\overline{f_j}$ είναι αυτό των *μέτρων Young*.

9.2 Μέτρα Young

Έστω ο χώρος $C_c(\mathbb{R}^d)$ των συνεχών συναρτήσεων στον $\mathbb{R}^d$ με συμπαγή φορέα. Η κλειστότητα αυτού του χώρου ως προς τη supremum νόρμα είναι ο χώρος $C_0(\mathbb{R}^d)$ των συνεχών συναρτήσεων που μηδενίζονται στο άπειρο. Ο δυϊκός χώρος του $(C_0(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_\infty)$ είναι ο χώρος των μέτρων Radon στον $\mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(\mathbb{R}^d) = \big\{\mu : C_0(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R} \mid \mu \text{ γραμμικό και τέτοιο ώστε} \\ \exists\, c > 0 \text{ τέτοιο ώστε } |\mu(f)| \le c\|f\|_\infty \ \ \forall\, f \in C_0(\mathbb{R}^d)\big\}\end{aligned}$$

Ο χώρος $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ εφοδιασμένος με τη νόρμα

$$\|\mu\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)} := \sup\{|\mu(f)| \ : \ f \in C_0(\mathbb{R}^d),\ \|f\|_\infty \le 1\}$$

είναι χώρος Banach. Αν, τώρα, $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ και $\mu(f) \ge 0$ για κάθε $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$ με $f \ge 0$, λέμε ότι το μ είναι ένα μη αρνητικό μέτρο Radon. Τότε, μπορούμε να ορίσουμε το χώρο των μέτρων πιθανότητας στον $\mathbb{R}^d$ ως

$$\mathcal{P}(\mathbb{R}^d) := \{\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d) \mid \mu \text{ μη αρνητικό, με } \|\mu\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)} = 1\}$$

Παρατήρηση 9.1. *Ο όρος μέτρο Radon είναι καταχρηστικός! Πράγματι, από τον τρόπο που ορίσαμε το χώρο $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, μπορεί κανείς να καταλάβει ότι οι ποσότητες $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ είναι συναρτησιακά και όχι μέτρα. Μολαταύτα ονομάζονται μέτρα, καθώς υπάρχει μία ένα προς ένα αντιστοιχία μεταξύ των στοιχείων του $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ και μιας κλάσης μέτρων Borel $\tilde{\mu}$ στον $\mathbb{R}^d$, με $\tilde{\mu}(\mathbb{R}^d) < +\infty$, έτσι ώστε*

$$\mu(f) = \int_{\mathbb{R}^d} f d\tilde{\mu} \ \ \forall\, f \in C_0(\mathbb{R}^d)$$

Εφεξής, θα χρησιμοποιούμε τον όρο μέτρο και δε θα κάνουμε διάκριση μεταξύ των μ και $\tilde{\mu}$. Επίσης, θα γράφουμε $\langle \mu, f\rangle$ και θα εννοούμε τη δράση του συναρτησιακού μ πάνω στη συνάρτηση f, δηλαδή

$$\langle \mu, f\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f d\mu \ \ \mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d),\ f \in C_0(\mathbb{R}^d)$$

Ήρθε η ώρα να ορίσουμε τα Μέτρα Young και να δείξουμε ότι υπάρχουν, μέσω του ακόλουθου θεωρήματος:

Θεώρημα 9.1. *Έστω $\mathbf{u}^n : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^d$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων, τέτοια ώστε*

$$\|\mathbf{u}^n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^m)^d} \leq c \tag{9.10}$$

Τότε, υπάρχει ασθενώς$-*$ συγκλίνουσα υπακολουθία $\mathbf{u}^{n_k}$ της $\mathbf{u}^n$ και μια οικογένεια μέτρων πιθανότητας $\{\nu_y\}_{y\in\mathbb{R}^m} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, που ονομάζονται μέτρα Young και των οποίων ο φορέας είναι υποσύνολο ενός συμπαγούς υποσυνόλου του $\mathbb{R}^d$. Η οικογένεια αυτή αναπαριστά την $\mathbf{u}^{n_k}$ με την ακόλουθη έννοια:

Για κάθε $\mathbf{g} \in C(\mathbb{R}^d)^p$ έχουμε:

$$\mathbf{g} \circ \mathbf{u}^{n_k} \overset{*}{\rightharpoonup} \overline{\mathbf{g}} \ \text{ στον } L^\infty(\mathbb{R}^m)^p \tag{9.11}$$

και

$$\overline{\mathbf{g}}(y) = \int_{\mathbb{R}^s} \mathbf{g}(\lambda) d\nu_y(\lambda) = \langle \nu_y, \mathbf{g} \rangle \ \text{ σχεδόν για κάθε } y \in \mathbb{R}^m \tag{9.12}$$

Αναβάλουμε την απόδειξη για λίγο, για να παρουσιάσουμε μερικά απαραίτητα αποτελέσματα.

Ορισμός 9.1. *Έστω $Q \subset \mathbb{R}^m$ ανοικτό. Η απεικόνιση $\nu : Q \to \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ λέγεται ασθενώς$-*$ μετρήσιμη, αν για κάθε $F \in L^1(Q; C_0(\mathbb{R}^d))$ η συνάρτηση*

$$x \mapsto \langle \nu_x, F(x, \cdot) \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} F(x, \lambda) d\nu_y(\lambda) \tag{9.13}$$

είναι μετρήσιμη.

Ορίζουμε την ποσότητα

$$\|\nu\|_{L^\infty_\omega(Q;\mathcal{M}(\mathbb{R}^d))} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in Q} \|\nu_x\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)}$$

και το χώρο

$$L^\infty_\omega(Q; \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)) := \{\nu : Q \to \mathcal{M}(\mathbb{R}^d) \mid \nu \text{ ασθενώς}-* \text{ μετρήσιμο, με } \|\nu\|_{L^\infty_\omega(Q;\mathcal{M}(\mathbb{R}^d))} < \infty\}$$

και έχουμε το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 9.2. *Έστω $Q \subset \mathbb{R}^m$ ανοικτό και $\Phi \in \big(L^1(Q; C_0(\mathbb{R}^d))\big)^*$ γραμμικό και φραγμένο συναρτησιακό. Τότε, υπάρχει μοναδικό $\nu \in L^\infty_\omega(Q; \mathcal{M}(\mathbb{R}^d))$ τέτοιο ώστε*

$$\Phi(F) = \int_Q \langle \nu_x, F(x) \rangle dx \ \ \forall\ F \in L^1(Q; C_0(\mathbb{R}^d))$$

και

$$\|\Phi\|_{\left(L^1(Q;C_0(\mathbb{R}^d))\right)^*} = \|\nu\|_{L^\infty_\omega(Q;\mathcal{M}(\mathbb{R}^d))}$$

Απόδειξη. Για συντομία, θα συμβολίζουμε $X = L^1(Q; C_0(\mathbb{R}^d))$ και $Y = L^\infty_\omega(Q; \mathcal{M}(\mathbb{R}^d))$. Ας δούμε για αρχή τη μοναδικότητα. Έστω ότι $\nu^1, \nu^2 \in Y$ αναπαριστούν το $\Phi \in X^*$. Ορίζουμε $\tilde{\nu} = \nu^1 - \nu^2$ και θεωρούμε $R > 0$ και $g \in C_0(\mathbb{R}^d)$. Έστω $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ τέτοια ώστε

$\varphi = 1$ στην μπάλα $\mathcal{B}(0,R)$, $\varphi = 0$ έξω από την μπάλα $\mathcal{B}(0,R+1)$ και $\varphi \leq 1$ στο υπόλοιπο $\mathbb{R}^m$. Τότε, από την ανισότητα

$$\int_Q |\langle \tilde{\nu}_x, g\rangle \varphi(x)| dx \leq \text{meas}\,(\text{supp}(\varphi))\, \|\tilde{\nu}\|_Y \|g\|_{C_0(\mathbb{R}^d)} < +\infty \tag{9.14}$$

(όπου με $|A|$ συμβολίζουμε το μέτρο Lebesgue του συνόλου A) συνεπάγεται ότι η συνάρτηση $x \mapsto \langle \tilde{\nu}_x, g\rangle \varphi(x)$ είναι στοιχείο του $L^1(Q)$ και άρα σύμφωνα με το Θεώρημα για τα σημεία Lebesgue (Lebesgue Differentiation Theorem), σχεδόν για κάθε $x_0 \in \mathcal{B}(0,R) \cap Q$ έχουμε:

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|\mathcal{B}(x_0,r)|} \int_{\mathcal{B}(x_0,r)} \langle \tilde{\nu}_x, g\rangle \varphi(x) dx = \langle \tilde{\nu}_{x_0}, g\rangle \tag{9.15}$$

Ας παρατηρήσουμε ότι το σύνολο των x_0 για τα οποία δεν ικανοποιείται η (9.15) εξαρτάται από τη g και έχει μηδενικό μέτρο Lebesgue. Ακόμα, για r αρκετά μικρό $\mathcal{B}(x_0,r) \subset \mathcal{B}(0,R)$, οπότε $\varphi = 1$ στην μπάλα $\mathcal{B}(x_0,r)$. Αν, τώρα, ορίσουμε

$$F_r(x) = \begin{cases} g(x) & \text{αν } x \in \mathcal{B}(x_0,r) \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

θα έχουμε

$$\int_{\mathcal{B}(x_0,r)} \langle \tilde{\nu}_x, g\rangle \varphi(x) dx = \int_Q \langle \nu_x^1 - \nu_x^2, F_r(x)\rangle dx = \Phi(F_r(x)) - \Phi(F_r(x)) = 0$$

και άρα η (9.15) δίνει

$$\langle \tilde{\nu}_{x_0}, g\rangle = 0 \quad \text{σχεδόν για κάθε } x_0 \in \mathcal{B}(0,R) \cap Q,\ \forall\ g \in C_0(\mathbb{R}^d) \tag{9.16}$$

Γνωρίζουμε, όμως, ότι ο χώρος $C_0(\mathbb{R}^d)$ είναι διαχωρίσιμος. Διαλέγουμε, λοιπόν, S πυκνό και αριθμήσιμο υποσύνολο του $C_0(\mathbb{R}^d)$ και με την παραπάνω διαδικασία δείχνουμε την (9.16) για κάθε $g \in S$ και σχεδόν για κάθε $x_0 \in \mathcal{B}(0,R) \cap Q$. Δεδομένου ότι $\tilde{\nu}_{x_0} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$, ως στοιχείο του δυϊκού του $C_0(\mathbb{R}^d)$ θα καθορίζεται μοναδικά από τις τιμές στο πυκνό υποσύνολο S, συνεπώς $\tilde{\nu}_{x_0} = 0 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ σχεδόν για κάθε $x_0 \in \mathcal{B}(0,R) \cap Q$. Αν στείλουμε το R στο άπειρο, θα πάρουμε $\tilde{\nu}_{x_0} = 0 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ σχεδόν για κάθε $x_0 \in Q$, επομένως $\tilde{\nu} = 0 \in Y$, που αποδεικνύει τη μοναδικότητα.

Για την ύπαρξη, θα δουλέψουμε όπως πριν με το πυκνό και αριθμήσιμο σύνολο S. Έστω $\Phi \in X^*$. Επιλέγουμε $g \in S$ και $h \in L^1(Q)$ και ορίζουμε $F_{hg} : Q \to C_0(\mathbb{R}^d)$, τέτοια ώστε

$$F_{hg}(x) = h(x)g \quad \text{σχεδόν για κάθε } x \in Q \tag{9.17}$$

Ισχυριζόμαστε ότι $F_{hg} \in X$. Πράγματι, για κάθε $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ η συνάρτηση

$$x \mapsto \langle \mu, F_{hg}(x)\rangle = h(x)\langle \mu, g\rangle$$

είναι μετρήσιμη, που σημαίνει ότι η F_{hg} είναι ασθενώς μετρήσιμη, και άρα λόγω της διαχωρισιμότητας του $C_0(\mathbb{R}^d)$, από το Θεώρημα Μετρησιμότητας του Pettis, η F_{hg} είναι μετρήσιμη. Επιπλέον,

$$\|F_{hg}\|_X = \int_Q \|h(x)g\|_{C_0(\mathbb{R}^d)} dx = \|g\|_{C_0(\mathbb{R}^d)} \int_Q |h(x)| dx < +\infty$$

άρα $F_{hg} \in X$. Τώρα,

$$\begin{aligned} |\Phi(F_{hg})| &\leq \|\Phi\|_{X^*}\|F_{hg}\|_X \\ &= \|\Phi\|_{X^*}\|g\|_{C_0(\mathbb{R}^d)}\|h\|_{L^1(Q)} \\ &\leq c(g)\|h\|_{L^1(Q)} \end{aligned} \tag{9.18}$$

Έτσι, μπορούμε να ορίσουμε την απεικόνιση

$$\psi_g : h \mapsto \Phi(F_{hg})$$

και λόγω της (9.18) να συμπεράνουμε ότι $\psi \in (L^1(Q))^*$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει κάποιο $u_g \in L^\infty(Q)$, ώστε

$$\Phi(F_{hg}) = \psi_g(h) = \int_Q u_g(x)h(x)dx \quad \forall\ h \in L^1(Q) \tag{9.19}$$

Λόγω του γεγονότος ότι $u_g \in L^\infty(Q)$ και ότι το S είναι αριθμήσιμο, θα υπάρχει σύνολο N μηδενικού μέτρου Lebesgue, τέτοιο ώστε για κάθε $x \in Q \setminus N$ και για κάθε $g \in S$, η απεικόνιση

$$g \mapsto u_g(x)$$

να είναι γραμμική και συνεχής στον $C_0(\mathbb{R}^d)$. Τωόντι, χρησιμοποιώντας τις (9.18) και (9.19) έχουμε:

$$\begin{aligned} |u_g(x)| \leq \|u_g\|_{L^\infty(Q)} &= \sup_{\|h\|_{L^1(Q)}\leq 1} \left| \int_Q u_g(x)h(x)dx \right| \\ &= \sup_{\|h\|_{L^1(Q)}\leq 1} |\Phi(F_{hg})| \leq \|\Phi\|_{X^*}\|g\|_{C_0(\mathbb{R}^d)} \end{aligned}$$

Οπότε, για κάθε $x \in Q \setminus N$ υπάρχει κάποιο $\nu_x \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d) = (C_0(\mathbb{R}^d))^*$, ώστε

$$\langle \nu_x, g \rangle = u_g(x) \quad \forall\ g \in S$$

Με αυτό τον τρόπο βρήκαμε την οικογένεια μέτρων $\{\nu_x\}_{x\in Q}$. Επικαλούμενοι την αριθμησιμότητα του S, συμπεραίνουμε ότι

$$\langle \nu_x, g \rangle = u_g(x) \quad \forall\ g \in C_0(\mathbb{R}^d),\ \text{σχεδόν για όλα τα } x \in Q \tag{9.20}$$

που μας δίνει

$$\Phi(F_{hg}) = \int_Q u_g(x)h(x)dx = \int_Q \langle \nu_x, g\rangle h(x)dx = \int_Q \langle \nu_x, F_{hg}(x)\rangle dx \tag{9.21}$$

Αυτή είναι η επιθυμητή αναπαράσταση για συναρτήσεις της μορφής $F_{hg} = hg \in X$, με $h \in L^1(Q)$ και $g \in C_0(\mathbb{R}^d)$. Ωστόσο, πεπερασμένα αθροίσματα της μορφής

$$\sum_{i=1}^m h_i g_i \quad h_i \in L^1(Q),\ g_i \in C_0(\mathbb{R}^d)$$

είναι πυκνά στον X, επομένως η αναπαράσταση (9.21) ισχύει για όλες τις $F \in X$.

Μένει, μόνο, να επιβεβαιώσουμε ότι η απεικόνιση

$$\nu : x \mapsto \nu_x$$

είναι στοιχείο του χώρου Y. Για $F_{hg} \in X$ της μορφής (9.17), η συνάρτηση

$$x \mapsto \langle \nu_x, F_{hg}(x) \rangle = h(x)\langle \nu_x, g \rangle = h(x)u_g(x)$$

είναι μετρήσιμη και το ίδιο ισχύει για γενικότερη $F \in X$, λόγω της πυκνότητας που αναφέραμε παραπάνω. Αυτό σημαίνει ότι η ν είναι ασθενώς$-*$ μετρήσιμη. Ακόμα,

$$\|\nu\|_Y = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in Q} \|\nu_x\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in Q} \sup_{\|g\|_{C_0(\mathbb{R}^d)}\le 1} |\langle \nu_x, g\rangle|$$

με

$$|\langle \nu_x, g\rangle| = |u_g(x)| \le \|\Phi\|_{X^*}\|g\|_{C_0(\mathbb{R}^d)}$$

και άρα

$$\|\nu\|_Y \le \|\Phi\|_{X^*} \tag{9.22}$$

το οποίο συνεπάγεται ότι $\nu \in Y$. Τέλος,

$$\begin{aligned}\|\Phi\|_{X^*} &= \sup_{\|F\|_X\le 1} \int_Q |\langle \nu_x, F(x)\rangle| dx \\ &\le \sup_{\|F\|_X\le 1} \int_Q \|\nu_x\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)} \|F(x)\|_{C_0(\mathbb{R}^d)} dx \\ &\le \|\nu\|_Y\end{aligned}$$

και μαζί με την (9.22) προκύπτει η ισότητα και ολοκληρώνεται η απόδειξη. □

Τώρα, είμαστε έτοιμοι να αποδείξουμε την ύπαρξη των μέτρων Young:

Απόδειξη (Θεωρήματος 9.1). Για αρχή, ας παρατηρήσουμε ότι λόγω του ότι η $\mathbf{g}$ είναι συνεχής και η ακολουθία $\{\mathbf{u}^n\}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη στον $L^\infty(\mathbb{R}^m)^d$, θα υπάρχει ομοιόμορφο φράγμα και για την ακολουθία $\{\mathbf{g} \circ \mathbf{u}^n\}$. Τότε, για κάθε $\mathbf{g} \in C(\mathbb{R}^d)^p$ θα μπορούμε να βρούμε υπακολουθία $\mathbf{u}^{n_k}$ της $\mathbf{u}^n$, έτσι ώστε να ισχύει η (9.11). Ακόμα, η (9.12) είναι ισοδύναμη με την

$$\overline{g}_j(y) = \int_{\mathbb{R}^d} g_j(\lambda) d\nu_y(\lambda) = \langle \nu_y, g_j\rangle \;\; \text{σχεδόν για κάθε } y \in \mathbb{R}^m \;\; j = 1, 2, \dots, p \tag{9.23}$$

άρα μπορούμε να αποδείξουμε την (9.11) κατά συνιστώσα. Θεωρούμε, λοιπόν, χωρίς βλάβη της γενικότητας $p = 1$ και $g \in C(\mathbb{R}^d)$. Από την άλλη, $\|\mathbf{u}^n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^m)^d} \le c$, ομοιόμορφα για κάθε n και άρα μπορούμε να θεωρήσουμε $g \in C_0(\mathbb{R}^d)$ χωρίς βλάβη της γενικότητας.

Ορίζουμε την ακολουθία μέτρων πιθανότητας

$$\nu_y^n := \delta_{\mathbf{u}^n(y)} \;\; \forall\, y \in \mathbb{R}^m$$

όπου δ_a είναι το μέτρο Dirac με κέντρο το σημείο $a \in \mathbb{R}^d$. Τότε, για κάθε $F \in L^1(\mathbb{R}^m; C_0(\mathbb{R}^d))$ έχουμε ότι η συνάρτηση

$$\langle \nu_y^n, F(y)\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} F(y,\lambda) d\nu_y^n(\lambda) = F(y, \mathbf{u}^n(y))$$

είναι μετρήσιμη ως προς y. Επιπλέον, για την απεικόνιση

$$\nu^n : y \mapsto \nu^n_y$$

ισχύει

$$\|\nu\|_{L^\infty_\omega(\mathbb{R}^m;\mathcal{M}(\mathbb{R}^d))} = \operatorname*{ess\,sup}_{y\in\mathbb{R}^m} \|\delta_{\mathbf{u}^n(y)}\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)} = 1$$

επομένως η ακολουθία $\{\nu^n\}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη στον $L^\infty_\omega(\mathbb{R}^m;\mathcal{M}(\mathbb{R}^d))$ και υπάρχωι υπακολουθία (που συμβολίζουμε για συντομία ν^n), ώστε

$$\nu^n \overset{*}{\rightharpoonup} \nu \ \ \text{στον } L^\infty_\omega(\mathbb{R}^m;\mathcal{M}(\mathbb{R}^d))$$

Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $F \in L^1(\mathbb{R}^m; C_0(\mathbb{R}^d))$

$$\int_{\mathbb{R}^m} \langle \nu^n_y, F(y)\rangle dy \to \int_{\mathbb{R}^m} \langle \nu_y, F(y)\rangle dy \ \ \text{καθώς } n\to\infty \tag{9.24}$$

Αν επιλέξουμε $F(y) = \varphi(y)g$, για $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^m)$ και $g \in C_0(\mathbb{R}^d)$, τότε $F \in L^1(\mathbb{R}^m; C_0(\mathbb{R}^d))$ και η (9.24) δίνει

$$\int_{\mathbb{R}^m} \varphi(y) g(\mathbf{u}^n(y)) dy \to \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(y)\langle \nu_y, g\rangle dy \ \ \text{καθώς } n\to\infty \tag{9.25}$$

Όμως, η συνάρτηση $y \mapsto \langle \nu_y, g\rangle$ είναι στοιχείο του χώρου $L^\infty(\mathbb{R}^m)$, για κάθε $g \in C_0(\mathbb{R}^d)$, οπότε η (9.25) συνεπάγεται ότι

$$g\circ \mathbf{u}^n \overset{*}{\rightharpoonup} \langle \nu_{(\cdot)}, g\rangle =: \overline{g} \ \ \text{στον } L^\infty(\mathbb{R}^m)$$

Επίσης, για $g \in C_0(\mathbb{R}^d),\ g \geq 0$ και $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^m),\ \varphi \geq 0$, από την (9.25) έχουμε

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(y) g(\mathbf{u}^n(y)) dy \to \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(y)\langle \nu_y, g\rangle dy \ \ \text{καθώς } n\to\infty \tag{9.26}$$

και συνεπώς $\nu_y \geq 0$ σχεδόν για κάθε $y \in \mathbb{R}^m$.

Λόγω της (9.10), $\langle \nu_y, g\rangle = 0$ για κάθε g, τέτοια ώστε $\mathrm{supp}(g) \cap \overline{\mathcal{B}(0, c+1)} = \emptyset$. Τότε $\mathrm{supp}(\nu_y) \subset \overline{\mathcal{B}(0, c+1)} =: K$, ομοιόμορφα σχεδόν για κάθε $y \in \mathbb{R}^m$.

Τέλος, επιλέγοντας $g_0 = 1$ στην κλειστή μπάλα $\overline{\mathcal{B}(0, c+2)}$, η g_0 είναι συνεχής και έχει συμπαγή φορέα, με $|g_0| \leq 1$, επομένως από την (9.12) λαμβάνουμε

$$\overline{g_0}(y) = 1 = \langle \nu_y, g_0\rangle \ \ \text{σχεδόν για κάθε } y \in \mathbb{R}^m$$

Τώρα, η ποσότητα $\|\nu_y\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)}$ είναι το supremum ποσοτήτων αυτής της μορφής, άρα $\|\nu_y\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)} \geq 1$. Από την άλλη, η ασθενής$-*$ κάτω ημισυνέχεια της νόρμας συνεπάγεται

$$\|\nu_y\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)} \leq \liminf_{n\to\infty} \|\nu^n_y\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)} = 1$$

Με αυτό τον τρόπο, δείξαμε ότι τα ν_y είναι μέτρα πιθανότητας στον $\mathbb{R}^d$ σχεδόν για κάθε $y \in \mathbb{R}^m$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. $\square$

Παρατήρηση 9.2. *Το μέτρο Young ν_y μπορεί διαισθητικά να ερμηνευτεί ως ένα μέτρο που αποδίδει την οριακή κατανομή πιθανότητας των τιμών $\mathbf{u}^n$, στη γειτονιά του y, καθώς $n \to \infty$. Πιο συγκεκριμένα, αν $\mathcal{B}(y,\delta)$ είναι η μπάλα κέντρου y και ακτίνας $\delta > 0$, μπορούμε να ορίσουμε το $\nu_y^{n,\delta}$ ως εξής:*

$$\nu_y^{n,\delta}(A) = \frac{\mathrm{meas}\{x \in \mathcal{B}(y,\delta) \mid \mathbf{u}^n(x) \in A\}}{\mathrm{meas}\,(\mathcal{B}(y,\delta))}$$

δηλαδή το $\nu_y^{n,\delta}$ είναι η κατανομή πιθανότητας των τιμών $\mathbf{u}^n(x)$, για $x \in \mathcal{B}(y,\delta)$. Τότε, αποδεικνύεται ότι

$$\nu_y = \lim_{\delta \to 0} \lim_{n \to \infty} \nu_y^{n,\delta}$$

και η σύγκλιση είναι ασθενής$-*$ με την έννοια των μέτρων.

Πριν κλείσουμε το κεφάλαιο, επιστρέφουμε στο παράδειγμα της σελίδας 94. Μπορεί να δείξει κανείς ότι το μέτρο Young που αντιστοιχεί στην ακολουθία $\{\sin(nx)\}_{n\in\mathbb{N}}$ μπορεί να εκφραστεί αναλυτικά ως εξής:

$$d\nu_y(\lambda) = \frac{1}{\pi}\frac{d\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}\chi_{(-1,1)}(\lambda)$$

Τότε, για κάθε $g \in C(\mathbb{R})$, η (9.12) δίνει

$$g(\sin{(nx)}) \overset{*}{\rightharpoonup} \overline{g} \quad \text{στον } L^\infty(\mathbb{R})$$

όπου η $\overline{g}$ είναι σταθερή ποσότητα και τέτοια ώστε

$$\overline{g} = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{g(\lambda)}{\sqrt{1-\lambda^2}}d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\sin x)dx$$

Κεφάλαιο 10

Λύσεις Μέτρου

10.1 Εισαγωγή

Έστω Q μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$, στο οποίο ορίζουμε ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων $\mathbf{z}^j : Q \to \mathbb{R}^s$, $j = 1, 2, \ldots$. Έστω, ακόμα, $\tau : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Θα θέλαμε να περιγράψουμε τη συμπεριφορά του $\tau(\mathbf{z}^j)$, καθώς $j \to \infty$. Όπως δείξαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, η συμπεριφορά του $\tau(\mathbf{z}^j)$ μπορεί να αναπαρασταθεί από μία συνάρτηση μέτρου $\nu : Q \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^s)$, υπό την προϋπόθεση ότι η ακολουθία $\{\mathbf{z}^j\}_{j=1}^{\infty}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη στον $L^\infty(Q)^s$. Πιο συγκεκριμένα, μιας και το $\tau(\mathbf{z}^j)$ είναι επίσης ομοιόμορφα φραγμένο στον $L^\infty(Q)$, θα υπάρχει υπακολουθία $\mathbf{z}^j$ και συνάρτηση $\overline{\tau} \in L^\infty(Q)$ έτσι ώστε

$$\tau(\mathbf{z}^j) \overset{*}{\rightharpoonup} \overline{\tau} \quad \text{στον } L^\infty(Q) \tag{10.1}$$

και σύμφωνα με το Θεώρημα 9.1

$$\overline{\tau}(y) = \langle \nu_y, \tau \rangle = \int_{\mathbb{R}^s} \tau(\boldsymbol{\lambda}) d\nu_y(\boldsymbol{\lambda}) \tag{10.2}$$

σχεδόν για κάθε $y \in Q$. Επίσης, ο φορέας των μέτρων ν_y είναι ομοιόμορφα συμπαγές. Ας παρατηρήσουμε ότι οι τιμές του $\mathbf{z}^j$ ανήκουν σε κάποιο συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^s$ και άρα μπορούμε να υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $\tau \in C_c(\mathbb{R}^s)$.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα επεκτείνουμε το χαρακτηρισμό (10.2) για μια γενικότερη κλάση συναρτήσεων τ και $\mathbf{z}^j$ και θα αποδείξουμε μια γενικότερη μορφή του Θεωρήματος 9.1. Σαν συνέπεια αυτής της γενίκευσης θα προκύψει το ακόλουθο αποτέλεσμα: αν το Q είναι φραγμένο και οι $\mathbf{z}^j$ είναι ομοιόμορφα φραγμένες στον $L^p(Q)^s$, για κάθε $p \in (1, +\infty)$, τότε θα υπάρχει υπακολουθία που θα συμβολίζουμε με $\mathbf{z}^j$ και συνάρτηση $\nu : Q \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^s)$, τέτοια ώστε για κάθε $\tau \in C(\mathbb{R}^s)$

$$\begin{aligned} \tau(\mathbf{z}^j) &\rightharpoonup \overline{\tau} && \text{στον } L^{\frac{p}{p-1}}(Q) \\ \overline{\tau}(y) &= \langle \nu_y, \tau \rangle && \text{σχεδόν για όλα τα } y \in Q \end{aligned} \tag{10.3}$$

για τ τέτοιο ώστε να ικανοποιεί τη συνθήκη

$$|\tau(\boldsymbol{\xi})| \leq c\ (1 + |\boldsymbol{\xi}|)^{p-1} \quad \text{για κάθε } \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^s \tag{10.4}$$

Οι μη γραμμικότητες που ικανοποιούν την (10.4) προκύπτουν φυσιολογικά σε προβλήματα μηχανικής συνεχούς, γιάυτό και έχουν ιδιαίτερο ενδιαφέρουν. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο vanishing viscosity θα αποδείξουμε ολική ύπαρξη λύσης μέτρου στη βαθμωτή υπερβολική εξίσωση δεύτερης τάξης:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_j} a_j(\nabla u) = f \;\; \text{στο } I \times \Omega \tag{10.5}$$

όπου $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ανοικτό και φραγμένο και $I = (0, T)$ κάποιο διάστημα χρόνου. Η (10.5), όπως θα δούμε αργότερα, θα έχει συνοριακές συνθήκες τύπου Dirichlet και αρχικές συνθήκες για τις u και $\frac{\partial u}{\partial t}$. Από τη σκοπιά της φυσικής, η άγνωστη συνάρτηση $u : Q_T \to \mathbb{R}$ μπορεί να ερμηνευτεί ως το σχήμα μιας μεμβράνης που δονείται. Οι συναρτήσεις $a_i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ θεωρούμε ότι έχουν γραμμική αύξηση, δηλαδή ισχύει η (10.4) για $p = 2$ και ότι αναπαρίστανται από ένα βαθμωτό τετραγωνικό δυναμικό.

10.2 Το Θεμελιώδες Θεώρημα των Μέτρων Young

Σε αυτή την παράγραφο, θα αποδείξουμε μια εκδοχή του Θεμελιώδους Θεωρήματος των μέτρων Young. Το θεώρημα αυτό θα παίξει καθοριστικό ρόλο στην κατασκευή λύσης μέτρου στη συνέχεια.

Πριν παρουσιάσουμε, όμως, το θεώρημα, θα χρειαστεί να πούμε λίγα λόγια για τις συναρτήσεις Young και τους χώρους Orlicz:

Έστω $\varphi : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ μη αρνητική, αύξουσα και δεξιά συνεχής συνάρτηση, τέτοια ώστε $\varphi(0) = 0$ και $\lim_{s\to\infty} \varphi(s) = +\infty$. Τότε, η συνάρτηση

$$\Phi(t) = \int_0^{|t|} \varphi(s) ds$$

λέγεται συνάρτηση Young που αντιστοιχεί στη φ, είναι άρτια, κυρτή, συνεχής και ισχύει

$$\lim_{t\to 0} \frac{\Phi(t)}{t} = 0 \;\; \text{και} \;\; \lim_{t\to\infty} \frac{\Phi(t)}{t} = +\infty$$

Ορίζουμε $\psi(t) := \sup_{\varphi(s)\le t} s$ και θεωρούμε Ψ τη συνάρτηση Young που αντιστοιχεί στην ψ. Οι συναρτήσεις Φ και Ψ ονομάζονται συμπληρωματικές συναρτήσεις Young. Αν, τώρα, οι Φ και Ψ είναι συμπληρωματικές συναρτήσεις Young, τότε όρίζουμε την κλάση Orlicz $\tilde{L}_\Phi(\Omega)$, ως το σύνολο όλων των μετρήσιμων συναρτήσεων $u : \Omega \to \mathbb{R}$, για τις οποίες η ποσότητα

$$d(\Phi; u) = \int_\Omega \Phi(|u(x)|) dx$$

είναι πεπερασμένη. Ακόμα, ο αριθμός

$$\|u\|_{L_\Phi(\Omega)} = \|u\|_\Phi := \sup \left\{ \int_\Omega |u(x)v(x)| dx \;\middle|\; v \in \tilde{L}_\Psi(\Omega), \; \text{με } d(\Psi; v) \le 1 \right\}$$

καλείται νόρμα Orlicz της $u : \Omega \to \mathbb{R}$ και ο χώρος όλων των μετρήσιμων συναρτήσεων για τις οποίες η νόρμα Orlicz είναι πεπερασμένη, λέγεται χώρος Orlicz και συμβολίζεται με $L_\Phi(\Omega)$.

Λέμε ότι η συνάρτηση Young Φ ικανοποιεί τη συνθήκη Δ_2 και γράφουμε $\Phi \in \Delta_2$ αν και μόνο αν υπάρχουν $c > 0$ και $t_0 \ge 0$ έτσι ώστε

$$\Phi(2t) \le c\, \Phi(t)$$

για κάθε $t > t_0$.

Λήμμα 10.1. *Έστω Φ, Ψ συμπληρωματικές συναρτήσεις Young. Τότε, ισχύουν τα ακόλουθα:*

$$\|v\|_\Psi \leq 1 + \int_\Omega \Psi(|v(x)|)dx \quad \forall\, v \in L_\Psi(\Omega)$$

$$\|uv\|_{L^1(Q)} \leq \|u\|_\Phi \|v\|_\Psi \quad \forall\, u \in L_\Phi(\Omega),\ v \in L_\Psi(\Omega)$$

Τέλος, με $C_\Phi(\Omega)$ συμβολίζουμε την κλειστότητα (ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_\Phi$) του συνόλου όλων των φραγμένων και μετρήσιμων συναρτήσεων $u : \Omega \to \mathbb{R}$ με συμπαγή φορέα. Ισχύει ότι ο $C_\Phi(\Omega)$ είναι χώρος Banach εφοδιασμένος με τη νόρμα $\|\cdot\|_\Phi$ και $(C_\Phi(\Omega))^* = L_\Psi(\Omega)$, ενώ $C_\Phi(\Omega) \hookrightarrow L_1(\Omega)$.

Θεώρημα 10.1. *Έστω $Q \subset \mathbb{R}^d$ μετρήσιμο σύνολο και $\mathbf{z}^j : Q \to \mathbb{R}^s$, $j = 1, 2, \ldots$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων. Τότε, υπάρχει υπακολουθία της $\mathbf{z}^j$ που συνεχίζουμε να συμβολίζουμε με $\mathbf{z}^j$ και συνάρτηση μέτρου ν με τις ακόλουθες ιδιότητες:*

1. Η συνάρτηση ν ικανοποιεί τα ακόλουθα:

$$\nu \in L^\infty_\omega(Q; \mathcal{M}(\mathbb{R}^s)) \tag{10.6}$$

$$\|\nu_y\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^s)} \leq 1 \;\; \text{σχεδόν για κάθε } y \in Q \tag{10.7}$$

και για κάθε $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^s)$, καθώς $j \to \infty$:

$$\varphi(\mathbf{z}^j) \overset{*}{\rightharpoonup} \overline{\varphi} \;\; \text{στον } L^\infty(Q), \quad \text{με } \overline{\varphi}(y) = \langle \nu_y, \varphi \rangle \tag{10.8}$$

2. Ακόμα, αν

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{j=1,2,\ldots} \operatorname{meas}\{y \in Q \cap B_R \;:\; |\mathbf{z}^j(y)| \geq k\} = 0 \tag{10.9}$$

για κάθε $R > 0$, όπου $B_R = \{y \in Q \;:\; |y| \leq R\}$, τότε

$$\|\nu_y\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^s)} = 1 \;\; \text{σχεδόν για κάθε } y \in Q \tag{10.10}$$

3. Έστω $\Psi : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνάρτηση Young που ικανοποιεί τη συνθήκη Δ_2. Αν η συνθήκη (10.9) ισχύει και αν για κάποια συνεχή συνάρτηση $\tau : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$ έχουμε

$$\sup_{j=1,2,\ldots} \int_Q \Psi(|\tau(\mathbf{z}^j)|)dy < +\infty \tag{10.11}$$

τότε

$$\tau(\mathbf{z}^j) \overset{*}{\rightharpoonup} \overline{\tau} \;\; \text{στον } L_\Psi(Q), \quad \text{με } \overline{\tau}(y) = \langle \nu_y, \tau \rangle \tag{10.12}$$

Ας κάνουμε μερικές παρατηρήσεις:

Παρατήρηση 10.1. *Αν οι $\mathbf{z}^j$ είναι ομοιόμορφα φραγμένες στον $L^p(Q)^s$, για κάποιο $p \in [1, +\infty)$, τότε ικανοποιείται η συνθήκη (10.9). Πράγματι, αν συμβολίσουμε $A^j_k = \{y \in Q \cap B_R \;:\; |\mathbf{z}^j(y)| \geq k\}$ έχουμε:*

$$\operatorname{meas}(A^j_k)k^p \leq \int_{A^j_k} |\mathbf{z}^j(y)|^p dy \leq \int_Q |\mathbf{z}^j(y)|^p dy \leq c$$

με το c να είναι ανεξάρτητο από αμφότερα τα j, k και άρα

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \operatorname{meas}(A^j_k) \leq \frac{c}{k^p}$$

που μας δίνει τη (10.9).

Πόρισμα 10.1. *Έστω Q ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και $\mathbf{z}^j$ ομοιόμορφα φραγμένη στον $L^p(Q)^s$. Τότε, υπάρχει υπακολουθία $\mathbf{z}^j$ και συνάρτηση μέτρου ν, τέτοια ώστε για κάθε $\tau : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί για κάποιο $q > 0$ τη συνθήκη*

$$|\tau(\boldsymbol{\xi})| \leq c\ (1 + |\boldsymbol{\xi}|)^q \quad \forall\ \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d \tag{10.13}$$

να ισχύει

$$\begin{aligned} \tau(\mathbf{z}^j) &\rightharpoonup \overline{\tau} \ \text{ στον } L^r(Q) \\ \overline{\tau}(y) &= \langle \nu_y, \tau \rangle \end{aligned} \tag{10.14}$$

υπό την προϋπόθεση ότι

$$1 < r \leq \frac{p}{q} \tag{10.15}$$

Απόδειξη. Σύμφωνα με την Παρατήρηση 10.1 η συνθήκη (10.9) ικανοποιείται. Ας επιβεβαιώσουμε την (10.11). Αν επιλέξουμε για συνάρτηση Young την $\Psi(u) = u^r$, έχουμε:

$$\int_Q \Psi(|\tau(\mathbf{z}^j)|)dy = \int_Q |\tau(\mathbf{z}^j)|^r dy \overset{(10.13)}{\leq} c^r \int_Q (1 + |\mathbf{z}^j|)^{qr} dy$$

και το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι φραγμένο αν $qr \leq p$, ενώ το κάτω φράγμα $r > 1$ από την ιδιότητα $\lim_{s\to\infty} \frac{\Psi(s)}{s} = +\infty$. $\square$

Απόδειξη (Θεωρήματος 10.1). Με το $\mathbf{z}^j$ συνδέουμε την απεικόνιση $\nu^j : Q \to \mathcal{M}(\mathbb{R}^s)$ που ορίζεται σχεδόν για όλα τα $y \in Q$ από την

$$\nu_y^j = \delta_{\mathbf{z}^j(y)} \tag{10.16}$$

Τότε

$$\|\nu_y^j\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^s)} = 1 \ \text{ σχεδόν για κάθε } y \in Q \tag{10.17}$$

Δεδομένου ότι ο $C_0(\mathbb{R}^s)$ και άρα και ο $L^1(Q; C_0(\mathbb{R}^s))$ είναι διαχωρίσιμοι, παίρνουμε από το Θεώρημα 9.2 την ύπαρξη υπακολουθίας ν^j και $\nu \in L^\infty_\omega(Q; \mathcal{M}(\mathbb{R}^s))$ ώστε

$$\nu^j \overset{*}{\rightharpoonup} \nu \ \text{ στον } L^\infty_\omega(Q; \mathcal{M}(\mathbb{R}^s)) \tag{10.18}$$

Αν, λοιπόν, πάρουμε δοκιμαστικές συναρτήσεις $h \in L^1(Q; C_0(\mathbb{R}^s))$ της μορφής $h(y, \boldsymbol{\lambda}) = g(y)\varphi(\boldsymbol{\lambda})$, με $g \in L^1(Q)$ και $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^s)$, θα έχουμε

$$\langle \nu_y^j, \varphi \rangle \overset{*}{\rightharpoonup} \langle \nu_y, \varphi \rangle \ \text{ στον } L^\infty(Q) \tag{10.19}$$

για κάθε $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^s)$. Η (10.7) ακολουθεί από την ασθενή$-*$ κάτω ημισυνέχεια της νόρμας και τη (10.17) και έτσι αποδείξαμε το 1.

Αν, τώρα, ισχύει η (10.9), θα δείξουμε ότι το ν είναι σχεδόν παντού μέτρο πιθανότητας. Έτσι, για $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^s$, ορίζουμε:

$$\theta^k(\boldsymbol{\lambda}) = \begin{cases} 1 & |\boldsymbol{\lambda}| \leq k \\ 1 + k - |\boldsymbol{\lambda}| & k \leq |\boldsymbol{\lambda}| \leq k+1 \\ 0 & |\boldsymbol{\lambda}| \geq k+1 \end{cases} \tag{10.20}$$

Αν $E \subset Q$ ένα τυχαίο φραγμένο και μετρήσιμο σύνολο, με $|E|$ το μέτρο Lebesgue του στον $\mathbb{R}^d$, τότε για $k \in \mathbb{N}$ συμβολίζουμε

$$A_k^j = \{y \in E : |\mathbf{z}^j| \geq k\} \tag{10.21}$$

και έχουμε:

$$\begin{aligned} 0 &\le \frac{1}{|E|}\int_E \left(1-\theta^k(\mathbf{z}^j(y))\right) dy \\ &\le \frac{|A_k^j|}{|E|} \le \sup_{j\in\mathbb{N}} \frac{|A_k^j|}{|E|} =: \varepsilon_k \end{aligned} \tag{10.22}$$

όπου $\varepsilon_k \to 0$ καθώς $k \to \infty$ λόγω της (10.9). Επομένως,

$$1-\varepsilon_k \le \frac{1}{|E|}\int_E \theta^k(\mathbf{z}^j(y))dy \tag{10.23}$$

Αφήνοντας το $j \to \infty$ και χρησιμοποιώντας τη (10.19) παίρνουμε:

$$1-\varepsilon_k \le \frac{1}{|E|}\int_E \langle \nu_y, \theta^k\rangle dy \le \frac{1}{|E|}\int_E \|\nu_y\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^s)} dy \overset{(10.7)}{\le} 1 \tag{10.24}$$

που σημαίνει ότι

$$1 = \frac{1}{|E|}\int_E \|\nu_y\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^s)} dy \tag{10.25}$$

και άρα $\|\nu_y\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R}^s)} = 1$ σχεδόν για κάθε $y \in Q$, οπότε αποδείξαμε και το 2.

Μένει μόνο να αποδείξουμε τη (10.12). Έστω $\tau : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση που ικανοποιεί τη συνθήκη (10.11). Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\tau \ge 0$. Τότε, θέτουμε

$$\tau^k(\mathbf{z}) = \tau(\mathbf{z})\theta^k(\mathbf{z}) \tag{10.26}$$

Ακόμα, έστω Φ συνάρτηση Young συμπληρωματική της Ψ. Σύμφωνα με όσα είπαμε πριν το Θεώρημα 10.1, ισχύει $(C_\Phi(\Omega))^* = L_\Psi(\Omega)$. Για να αποδείξουμε τη (10.12), αρκεί να δείξουμε ότι

$$\langle \nu_y, \tau\rangle \in L_\Psi(Q) \tag{10.27}$$

και να επαληθεύσουμε τις ακόλουθες συγκλίσεις, για $g \in C_\Phi(Q)$:

$$\int_Q g(y)\tau^k(\mathbf{z}^j(y))dy \overset{k\to\infty}{\to} \int_Q g(y)\tau(\mathbf{z}^j(y))dy \tag{10.28}$$

$$\int_Q g(y)\tau^k(\mathbf{z}^j(y))dy \overset{j\to\infty}{\to} \int_Q g(y)\langle \nu_y, \tau^k\rangle dy \tag{10.29}$$

$$\int_Q g(y)\langle \nu_y, \tau^k\rangle dy \overset{k\to\infty}{\to} \int_Q g(y)\langle \nu_y, \tau\rangle dy \tag{10.30}$$

όπου η σύγκλιση στη (10.28) είναι ομοιόμορφη ως προς j. Τότε, χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα, βλέπουμε ότι

$$\int_Q g(y)\tau(\mathbf{z}^j(y))dy \overset{j\to\infty}{\to} \int_Q g(y)\langle \nu_y, \tau\rangle dy \quad \forall\, g \in C_\Phi(Q)$$

που είναι ακριβώς η (10.12). Ας δείξουμε, λοιπόν, τις (10.27) - (10.30). Για A_k^j όπως ορίστηκε στην (10.21), έχουμε:

$$\begin{aligned}\int_Q |g(y)||\tau^k(\mathbf{z}^j(y)) - \tau(\mathbf{z}^j(y))|dy &\le \int_{A_k^j} |g(y)|[1-\theta^k(\mathbf{z}^j(y))]\tau(\mathbf{z}^j(y))dy \\ &\le \|g\|_{L_\Phi(A_k^j)}\|\tau(\mathbf{z}^j)\|_{L_\Psi(A_k^j)} \\ &\le \|g\|_{L_\Phi(A_k^j)}\left(1+\int_Q \Psi(|\tau(\mathbf{z}^j)|)dy\right) \\ &\overset{(10.11)}{\le} c\|g\|_{L_\Phi(A_k^j)}\end{aligned} \tag{10.31}$$

όπου η δεύτερη και η τρίτη ανισότητα προκύπτουν από το Λήμμα 10.1. Τώρα, λόγω της (10.9) και της απόλυτης συνέχειας της νόρμας $\|g\|_{L_\Phi(Q)}$, έχουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει k_0 τέτοιο ώστε για κάθε $k > k_0$, το δεξί μέλος της (10.31) και άρα αποδείξαμε τη (10.28).

Από την άλλη, η (10.8) σε συνδυασμό με την ενσφήνωση $C_\Phi(Q) \hookrightarrow L_1(Q)$ συνεπάγεται άμεσα τη (10.29).

Για τη (10.30), ας παρατηρήσουμε ότι $\tau^{k+1} \ge \tau^k \ge 0$. Από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης, καθώς $k \to \infty$, θα έχουμε ότι σχεδόν για κάθε $y \in Q$:

$$\langle \nu_y, \tau^k\rangle = \int_{\mathbb{R}^s} \tau^k d\nu_y \to \int_{\mathbb{R}^s} \tau d\nu_y = \langle \nu_y, \tau\rangle \tag{10.32}$$

Για $g \ge 0$ έχουμε:

$$g(y)\langle \nu_y, \tau^{k+1}\rangle \ge g(y)\langle \nu_y, \tau^k\rangle \ge 0 \tag{10.33}$$

και από τη (10.32)

$$\lim_{k\to\infty} g(y)\langle \nu_y, \tau^k\rangle = g(y)\langle \nu_y, \tau\rangle \;\; \text{σχεδόν για κάθε } y \in Q \tag{10.34}$$

οπότε από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης λαμβάνουμε τη (10.30).

Υπολείπεται η (10.27). Δεδομένου ότι $\tau^k \le \tau^{k+1} \le \tau$, για σταθερό k έχουμε:

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \int_Q \Psi(|\tau^k(\mathbf{z}^j)|)dy \le \sup_{j\in\mathbb{N}} \int_Q \Psi(|\tau(\mathbf{z}^j)|)dy \le c \tag{10.35}$$

ή αλλιώς

$$\|\tau^k(\mathbf{z}^j)\|_{L_\Psi(Q)} = \|\langle \nu^j, \tau^k\rangle\|_{L_\Psi(Q)} \le c \tag{10.36}$$

και το c είναι ανεξάρτητο από τα j, k. Τότε, υπάρχει $a_k \in L_\Psi(Q)$, τέτοιο ώστε, για $j \to \infty$

$$\langle \nu^j, \tau^k\rangle \overset{*}{\rightharpoonup} a_k \;\; \text{στον } L_\Psi(Q) \tag{10.37}$$

και συγκρίνοντας τις (10.29) και (10.37) βλέπουμε ότι $a_k(y) = \langle \nu_y, \tau^k\rangle$, σχεδόν για κάθε $y \in Q$. Επιπλέον, το a_k, λόγω της (10.36) ανήκει σε μια μπάλα του $L_\Psi(Q)$ ανεξαρτήτως του k. Κατά συνέπεια,

$$\|\langle \nu, \tau^k\rangle\|_{L_\Psi(Q)} \le c \tag{10.38}$$

Συνεπώς, υπάρχει $a \in L_\Psi(Q)$ ώστε

$$\int_Q g(y)\langle \nu_y, \tau^k\rangle dy \overset{k\to\infty}{\to} \int_Q g(y)a(y)dy \tag{10.39}$$

για κάθε $g \in C_\Phi(Q)$. Συγκρίνοντας τη (10.39) με τη (10.30) για λείες δοκιμαστικές συναρτήσεις g, λαμβάνουμε

$$a(y) = \langle \nu_y, \tau \rangle \ \text{ σχεδόν για κάθε } y \in Q \tag{10.40}$$

και έτσι, η (10.27) αποδείχθηκε. Με αυτόν τον τρόπο ολοκληρώθηκε η απόδειξη του Θεωρήματος 10.1. □

10.3 Υπερβολικά Προβλήματα Δεύτερης Τάξεως

Στόχος αυτής της παραγράφου είναι να αποδείξουμε ύπαρξη λύσεων μέτρου για το ακόλουθο πρόβλημα:

Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$ φραγμένο χωρίο, με λείο σύνορο $\partial\Omega$ και $T \in (0, +\infty)$. Ορίζουμε $I = (0, T)$ και $Q_T = I \times \Omega$. Δεδομένων συναρτήσεων $f : Q_T \to \mathbb{R}$ και $u_0, u_1 : \Omega \to \mathbb{R}$, αναζητούμε συνάρτηση $u : Q_T \to \mathbb{R}$ που θα λύνει το πρόβλημα

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_j} a_j(\nabla u) = f \quad \text{στο } Q_T \tag{10.41}$$

$$u(0, \cdot) = u_0, \ \ \frac{\partial u}{\partial t}(0, \cdot) = u_1 \quad \text{στο } \Omega \tag{10.42}$$

$$u = 0 \quad \text{στο } I \times \partial\Omega \tag{10.43}$$

υπό την προϋπόθεση ότι υπάρχει συνάρτηση $\theta \in C^2(\mathbb{R}^d)$, που καλείται δυναμικό του $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_d)$ και θετικές σταθερές $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε για κάθε $i, j = 1, \ldots, d$ να ισχύει

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi_i} = a_i \tag{10.44}$$

$$\theta(\mathbf{0}) = \frac{\partial \theta}{\partial \xi_i}(\mathbf{0}) = 0 \tag{10.45}$$

$$\left| \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right| \leq \beta \tag{10.46}$$

και

$$\alpha |\boldsymbol{\eta}|^2 \leq \frac{\partial^2 \theta(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_k \partial \xi_\ell} \eta_k \eta_\ell \tag{10.47}$$

για όλα τα $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^d$.

Μερικοί απλοί υπολογισμοί δείχνουν ότι οι (10.44) - (10.47) συνεπάγονται ότι

$$|a_i(\boldsymbol{\xi})| \leq \beta |\boldsymbol{\xi}| \tag{10.48}$$

$$\frac{\alpha}{2} |\boldsymbol{\xi}|^2 \leq \theta(\boldsymbol{\xi}) \leq \frac{\beta}{2} |\boldsymbol{\xi}|^2 \tag{10.49}$$

$$|a_i(\boldsymbol{\xi}) - a_i(\boldsymbol{\eta})| \leq \beta |\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}| \tag{10.50}$$

για όλα τα $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^d$ και $i = 1, \ldots, d$.

Ας υποθέσουμε προς στιγμήν, ότι u^ε είναι μια προσέγγιση του προβλήματος (10.41) - (10.47), με τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$\text{το } \nabla u^\varepsilon \text{ είναι ομοιόρφα φραγμένο στον } L^2(Q_T)^d \tag{10.51}$$

και
$$\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2} \rightharpoonup \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \ \text{ στον } L^2(I; H^{-1}(\Omega)) \tag{10.52}$$
Λόγω της (10.51) μπορούμε να εφαρμόσουμε το Πόρισμα 10.1, για $p = r = 2$, $q = 1$ και $s = d$ και θα πάρουμε ύπαρξη συνάρτησης μέτρου $\nu : Q_T \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, ώστε για κάθε $i = 1, \ldots, d$
$$a_i(\nabla u^\varepsilon) \rightharpoonup \overline{a_i} \ \text{ στον } L^2(Q_T)$$
με
$$\overline{a_i}(t,x) = \langle \nu_{t,x}, a_i \rangle$$
τουλάχιστον για μια υπακολουθία. Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι κάτω από τις υποθέσεις (10.51) και (10.52) υπάρχει κάποια ελπίδα ότι θα μπορέσουμε να κατοχυρώσουμε κάποιου είδους σύγκλιση λύσεων u^ε κατάλληλου προσεγγιστικού προβλήματος, σε μια λύση μέτρου για το αρχικό πρόβλημα (10.41) - (10.47)!

Τώρα, είμαστε σε θέση να ορίσουμε τι είναι μια λύση μέτρου για το πρόβλημα (10.41) - (10.47):

Ορισμός 10.1. *Έστω*
$$f \in L^2(Q_T), \quad u_0 \in H_0^1(\Omega), \quad u_1 \in L^2(\Omega) \tag{10.53}$$
δοθείσες συναρτήσεις. Ένα ζεύγος (u, ν) τέτοιο ώστε:
$$\begin{cases} u \in L^2(I; H_0^1(\Omega)) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} \in L^2(Q_T) \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} \in L^2(I; H^{-1}(\Omega)) \\ \nu \in L^\infty_\omega(Q_T; \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)) \end{cases} \tag{10.54}$$
καλείται λύση μέτρου του προβλήματος (10.41) - (10.47) αν και μόνο αν
$$u(0) = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0) = u_1 \tag{10.55}$$
και ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:
$$\frac{\partial u}{\partial x_j}(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} \sigma_j d\nu_{t,x}(\boldsymbol{\sigma}) \ \text{ σχεδόν για κάθε } (t,x) \in Q_T \tag{10.56}$$
και
$$\int_0^T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t), \varphi(t) \right) dt + \int_{Q_T} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(t,x) \langle \nu_{t,x}, a_i \rangle dx dt = \int_0^T (f(t), \varphi(t))\, dt \tag{10.57}$$
για κάθε $\varphi \in L^2(I; H_0^1(\Omega))$.

Παρατηρήστε ότι με $(\cdot,\cdot)$ συμβολίζουμε και το εσωτερικό γινόμενο στον $L^2(\Omega)$, αλλά και τη δράση μεταξύ των χώρων $H_0^1(\Omega)$ και $H^{-1}(\Omega)$, για να μη δημιουργηθεί σύγχυση με τη δράση μεταξύ των χώρων $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ και $C_0(\mathbb{R}^d)$ που συμβολίζουμε μέχρι τώρα με $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Όπως είπαμε παραπάνω, για να αποδείξουμε την ύπαρξη λύσης μέτρου, χρειάζεται να βρούμε κατάλληλες προσεγγίσεις u^ε που θα ικανοποιούν τις (10.51) και (10.52). Για το σκοπό αυτό, διαταράσσουμε την εξίσωση (10.41) κατά $-\varepsilon\Delta\frac{\partial u}{\partial t}$ και θα μελετήσουμε το ακόλουθο πρόβλημα:

Για κάθε $\varepsilon > 0$, αναζητούμε $u^\varepsilon : Q_T \to \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε:

$$\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_j} a_j(\nabla u^\varepsilon) - \varepsilon\Delta\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} = f \quad \text{στο } Q_T \tag{10.58}$$

$$u^\varepsilon(0,\cdot) = u_0, \quad \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(0,\cdot) = u_1 \quad \text{στο } \Omega \tag{10.59}$$

$$u^\varepsilon = 0 \quad \text{στο } I \times \partial\Omega \tag{10.60}$$

Ορισμός 10.2. *Έστω f, u_0, u_1 που ικανοποιούν τη (10.53). Μια συνάρτηση u^ε ορισμένη στο Q_T καλείται ασθενής λύση του προβλήματος (10.58) - (10.60), (10.44) - (10.47), αν και μόνο αν*

$$u^\varepsilon \in L^2(I; H_0^1(\Omega)) \tag{10.61}$$

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \in L^2(I; H_0^1(\Omega)) \tag{10.62}$$

$$\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2} \in L^2(I; H^{-1}(\Omega)) \tag{10.63}$$

και η ακόλουθη ισότητα

$$\begin{aligned}\int_0^T \left(\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}(\tau), \varphi(\tau)\right) d\tau + \int_0^T \left(a_i(\nabla u^\varepsilon(\tau)), \frac{\partial \varphi(\tau)}{\partial x_i}\right) d\tau \\ + \varepsilon \int_0^T \left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_i}(\tau), \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\tau)\right) d\tau = \int_0^T (f(\tau), \varphi(\tau))\, d\tau\end{aligned} \tag{10.64}$$

ικανοποιείται για όλες τις $\varphi \in L^2\left(I; H_0^1(\Omega)\right)$.

Θεώρημα 10.2. *Έστω f, u_0, u_1 που ικανοποιούν τη (10.53). Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει μοναδική ασθενής λύση u^ε του προβλήματος (10.58) - (10.60), (10.44) - (10.47). Επιπλέον, η u^ε ικανοποιεί τις παρακάτω ομοιόμορφες εκτιμήσεις:*

$$\|u^\varepsilon\|_{L^\infty(I;H_0^1(\Omega))} \le c \tag{10.65}$$

$$\left\|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}\right\|_{L^\infty(I;L^2(\Omega))} \le c \tag{10.66}$$

$$\varepsilon \int_0^T \left\|\nabla \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau \le c \tag{10.67}$$

$$\left\|\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2}\right\|_{L^2(I;H^{-1}(\Omega))} \le c \tag{10.68}$$

Αναβάλουμε την απόδειξη του θεωρήματος για λίγο αργότερα, για να αποδείξουμε πρώτα την ύπαρξη λύσης μέτρου.

Θεώρημα 10.3. *Έστω f, u_0, u_1 που ικανοποιούν τη (10.53). Τότε υπάρχει λύση μέτρου στο πρόβλημα (10.41) - (10.47).*

Αποδειξη. Λόγω των εκτιμήσεων (10.65) - (10.68), μπορούμε να βρούμε μια υπακολουθία $\{u^{\varepsilon_k}\} \subset \{u^{\varepsilon}\}$ ώστε:

$$u^{\varepsilon_k} \rightharpoonup u \ \text{ στον } L^2(I; H_0^1(\Omega)) \tag{10.69}$$

$$\frac{\partial u^{\varepsilon_k}}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial u}{\partial t} \ \text{ στον } L^2(Q_T) \tag{10.70}$$

$$\frac{\partial^2 u^{\varepsilon_k}}{\partial t^2} \rightharpoonup \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \ \text{ στον } L^2(I; H^{-1}(\Omega)) \tag{10.71}$$

καθώς $k \to \infty$. Οι u^{ε_k} είναι ασθενείς λύσεις του προβλήματος (10.58) - (10.60), (10.44) - (10.47), δηλαδή ικανοποιούν τη (10.64). Ας διερευνήσουμε τις οριακές διαδικασίες της (10.64):

Λόγω της (10.71)

$$\int_0^T \left(\frac{\partial^2 u^{\varepsilon_k}}{\partial t^2}(\tau), \varphi(\tau) \right) d\tau \to \int_0^T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\tau), \varphi(\tau) \right) d\tau \tag{10.72}$$

και από τη (10.67)

$$\sqrt{\varepsilon_k} \int_0^T \sqrt{\varepsilon_k} \left(\nabla \frac{\partial u^{\varepsilon_k}}{\partial t}, \nabla \varphi \right) d\tau \to 0 \tag{10.73}$$

καθώς $\varepsilon_k \to 0$. Όσον αφορά το όριο του $\int_0^T \left(a_i(\nabla u^{\varepsilon_k}(\tau)), \frac{\partial \varphi(\tau)}{\partial x_i} \right) d\tau$, εφαρμόζουμε το Πόρισμα 10.1. Από τη (10.65) προκύπτει ότι $\|\nabla u^{\varepsilon_k}\|_{L^2(Q_T)} \leq c$ και άρα μπορούμε να επιλέξουμε $\mathbf{z}^j = \nabla u^{\varepsilon_j}$ και για $p = r = 2$, $q = 1$, $s = d$, να βρούμε συνάρτηση μέτρου $\nu \in L^\infty_\omega(Q_T; \mathcal{P}(\mathbb{R}^d))$, τέτοια ώστε για $\tau = a_i$

$$a_i(\nabla u^{\varepsilon_k}) \rightharpoonup \overline{a_i} \ \text{ στον } L^2(Q_T)$$

όπου

$$\overline{a_i}(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} a_i(\boldsymbol{\sigma}) d\nu_{t,x}(\boldsymbol{\sigma}) \ \ i = 1, \dots, d$$

Επομένως,

$$\int_{Q_T} a_i(\nabla u^{\varepsilon_k}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx dt \to \int_{Q_T} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \langle \nu_{t,x}, a_i \rangle dx dt \tag{10.74}$$

Αν επικαλεστούμε τις (10.72) - (10.74), η (10.64) δείχνει ότι το ζεύγος (u, ν) ικανοποιεί τη (10.57) για κάθε $\varphi \in L^2(I; H_0^1(\Omega))$ και μένει να επαληθεύσουμε τη (10.56). Λόγω της (10.65)

$$\int_{Q_T} \nabla u^{\varepsilon_k} \varphi dx dt \overset{k\to\infty}{\to} \int_{Q_T} \nabla u \varphi dx dt \ \ \forall \ \varphi \in \mathcal{D}(Q_T) \tag{10.75}$$

Αν εφαρμόσουν πάλι το Πόρισμα 10.1, για $\tau = \mathrm{Id}$ παίρνουμε

$$\int_{Q_T} \nabla u^{\varepsilon_k} \varphi dx dt \to \int_{Q_T} \varphi \langle \nu_{t,x}, \mathrm{Id} \rangle dx dt \ \ \forall \ \varphi \in \mathcal{D}(Q_T) \tag{10.76}$$

οπότε

$$\int_{Q_T} \varphi(t,x) \langle \nu_{t,x}, \mathrm{Id} \rangle dx dt = \int_{Q_T} \varphi(t,x) \nabla u(t,x) dx dt \ \ \forall \ \varphi \in \mathcal{D}(Q_T)$$

δηλαδή η (10.56) είναι αληθής. □

Αφιερώνουμε το υπόλοιπο κεφάλαιο στην απόδειξη του Θεωρήματος 10.2.

Απόδειξη (Θεωρήματος 10.2). Κατά μήκος της απόδειξης θα παραλείπουμε τον εκθέτη ε για λόγους απλότητας. Ας δείξουμε αρχικά τη μοναδικότητα. Έστω, λοιπόν, v, w δύο ασθενείς λύσεις του προβλήματος (10.58) - (10.60), (10.44) - (10.47). Αν θέσουμε $u = v - w$, τότε για κάθε $t \in (0, T)$ θα έχουμε

$$\begin{aligned}\int_0^t \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\tau), \varphi(\tau)\right) d\tau + \int_0^t \left(a_i(\nabla v(\tau)) - a_i(\nabla w(\tau)), \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\tau)\right) d\tau \\ + \varepsilon \int_0^t \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial t}(\tau), \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\tau)\right) d\tau = 0\end{aligned} \tag{10.77}$$

για κάθε $\varphi \in L^2(0, t; H_0^1(\Omega))$. Επιλέγοντας το $\frac{\partial u}{\partial t}$ ως δοκιμαστική συνάρτηση στην (10.77), λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial u}{\partial t}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial u}{\partial t}(0)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \varepsilon \int_0^t \left\|\nabla \frac{\partial u}{\partial t}(\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)} d\tau \\ = \int_0^t \left(a_i(\nabla w(\tau)) - a_i(\nabla v(\tau)), \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial t}(\tau)\right) d\tau \equiv I_1\end{aligned}$$

και μιας και $\frac{\partial u}{\partial t}(0) = 0$

$$\varepsilon \int_0^t \left\|\nabla \frac{\partial u}{\partial t}(\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)} d\tau \leq |I_1| \tag{10.78}$$

Λόγω της (10.50), το δεξί μέλος της (10.78), με τη βοήθεια των ανισοτήτων Hölder και Young, εκτιμάται ως εξής:

$$|I_1| \leq \frac{\varepsilon}{2}\int_0^t \left\|\nabla \frac{\partial u}{\partial t}(\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)} d\tau + \frac{\beta^2}{2\varepsilon}\int_0^t \|\nabla u(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} d\tau \tag{10.79}$$

που δίνει

$$\int_0^t \left\|\nabla \frac{\partial u}{\partial t}(\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)} d\tau \leq \frac{\beta^2}{\varepsilon^2}\int_0^t \|\nabla u(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} d\tau \tag{10.80}$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση $u(\tau) = \int_0^\tau \frac{\partial u}{\partial t}(s)ds$, μπορούμε να ξαναγράψουμε τη (10.80) ως

$$\int_0^t \left\|\nabla \frac{\partial u}{\partial t}(\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)} d\tau \leq \frac{\beta^2 T}{\varepsilon^2}\int_0^t \left(\int_0^\tau \|\nabla \frac{\partial u}{\partial t}(s)\|^2_{L^2(\Omega)} ds\right) d\tau \tag{10.81}$$

Αν, τώρα, θέσουμε $y(t) = \int_0^t \|\nabla \frac{\partial u}{\partial t}(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} d\tau$, η (10.81) γράφεται

$$y(t) \leq \frac{\beta^2 T}{\varepsilon^2}\int_0^t y(\tau) d\tau$$

Από την ανισότητα Grönwall λαμβάνουμε

$$\int_0^t \|\nabla \frac{\partial u}{\partial t}(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)} d\tau = 0 \quad \forall t \in (0, T]$$

και χρησιμοποιώντας ξανά τη σχέση $u(t) = \int_0^t \frac{\partial u}{\partial t}(s)ds$ παίρνουμε

$$\|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)} = 0 \ \ \forall\ t \in (0, T] \tag{10.82}$$

που συνεπάγεται ότι $v(t) = w(t)$ για όλα τα $t \in [0, T]$, και άρα η ασθενής λύση είναι μοναδική.

Για την ύπαρξη, έστω $\{\omega^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ βάση του $H_0^1(\Omega)$ που απαρτίζεται από ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή Laplace, και λ_k οι αντίστοιχες ιδιοτιμές. Αυτό σημαίνει ότι

$$(\nabla\omega^k, \nabla\varphi) = \lambda_k(\omega^k, \varphi) \;\; \forall\, \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

Αν το $v(t)$ είναι στοιχείο του $H_0^1(\Omega)$, τότε υπάρχουν $\gamma_j(t) \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε

$$v(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j(t)\omega^j$$

Αν συμβολίσουμε

$$v^m(t) = \sum_{j=1}^{m} \gamma_j(t)\omega^j$$

μπορούμε να ορίσουμε την απεικόνιση $\mathbb{P}_m$, τέτοια ώστε

$$\mathbb{P}_m v = v^m$$

Τότε, λόγω των ιδιοτήτων των ω^k, η $\mathbb{P}_m$ είναι μια συνεχής ορθογώνια προβολή στον

$$H_0^1(\Omega) \to \mathrm{span}\{\omega^1, \dots, \omega^m\}$$

αλλά και στον

$$L^2(\Omega) \to \mathrm{span}\{\omega^1, \dots, \omega^m\}$$

Επιπλέον

$$\|\mathbb{P}_m v\|_{H_0^1(\Omega)} \le \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \;\; \text{και} \;\; \|\mathbb{P}_m v\|_{L^2(\Omega)} \le \|v\|_{L^2(\Omega)}$$

Θα θέλαμε να ψάξουμε για συντελεστές $\gamma_j^m : I \to \mathbb{R}$, για τους οποίους η προσέγγιση Galerkin

$$u^m(t, x) = \sum_{j=1}^{m} \gamma_j^m(t)\omega^j(x)$$

επιλύει το σύστημα

$$\left(\frac{\partial^2 u^m}{\partial t^2}, \omega^j\right) + \varepsilon\left(\nabla\frac{\partial u^m}{\partial t}, \nabla\omega^j\right) + \int_\Omega a_i(\nabla u^m)\frac{\partial\omega^j}{\partial x_i}dx = (f, \omega^j) \;\; j = 1, \dots, m \tag{10.83}$$

$$u^m(0, x) = \mathbb{P}_m u_0, \;\; \frac{\partial u^m}{\partial t}(0, x) = \mathbb{P}_m u_1 \tag{10.84}$$

Τότε, το σύστημα (10.83) (που λέγεται σύστημα Galerkin) μπορεί να γραφεί

$$\frac{d^2\gamma_j}{dt^2}(t) + \varepsilon\lambda_j\frac{d\gamma_j}{dt}(t) = (f, \omega^j) + \int_\Omega a_i(\nabla u^m)\frac{\partial\omega^j}{\partial x_i}dx \tag{10.85}$$

$$\gamma_j(0) = (\mathbb{P}_m u_0)_j, \;\; \frac{d\gamma_j}{dt}(0) = (\mathbb{P}_m u_1)_j \tag{10.86}$$

για $j = 1, \ldots, m$. Αν θέσουμε $z_j(t) = \frac{d_j}{dt}(t)$ και $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_m)$, $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ και $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$, η (10.85) μπορεί να γραφεί

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{z}}{dt} + \varepsilon\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{z} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\gamma}, f, \mathbf{a}) \\ \dfrac{d\boldsymbol{\gamma}}{dt} = \mathbf{z} \end{cases} \tag{10.87}$$

Εναλλακτικά, για $\mathbf{y} = (\mathbf{z}, \boldsymbol{\gamma})^{\mathrm{T}}$ και $\mathbf{H} = (\mathbf{F} - \varepsilon\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{z}, \mathbf{z})^{\mathrm{T}}$ έχουμε

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{H}(\mathbf{y}) \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 \end{cases} \tag{10.88}$$

Σύμφωνα με όσα έχουμε πει στα Κεφάλαια 6 και 7 για παραβολικά προβλήματα, το πρόβλημα (10.88) θα έχει λύση. Επομένως, η ολική ύπαρξη λύσης προκύπτει (όπως θα δούμε στη συνέχεια) από τις ακόλουθες a priori εκτιμήσεις:

$$\|u^m\|_{L^\infty(0,t;H_0^1(\Omega))} \leq c \tag{10.89}$$

$$\left\|\frac{\partial u^m}{\partial t}\right\|_{L^\infty(0,tL^2(\Omega))} \leq c \tag{10.90}$$

$$\varepsilon \int_0^t \left\|\nabla \frac{\partial u^m}{\partial t}(\tau)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau \leq c \tag{10.91}$$

$$\left\|\frac{\partial^2 u^m}{\partial t^2}\right\|_{L^2(0,t;H^{-1}(\Omega))} \leq c \tag{10.92}$$

για κάθε $t \in (0, T]$, με τη σταθερά c να είναι ανεξάρτητη από τα m και ε. Ας αποδείξουμε για αρχή τις παραπάνω εκτιμήσεις: Πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση του συστήματος (10.83) που αντιστοιχεί στο δείκτη j με $\frac{d}{dt}\gamma_j^m(t)$ και αθροίζουμε ως προς j, για να πάρουμε

$$\left(\frac{\partial^2 u^m}{\partial t^2}, \frac{\partial u^m}{\partial t}\right) + \varepsilon\left(\nabla\frac{\partial u^m}{\partial t}, \nabla\frac{\partial u^m}{\partial t}\right) + \int_\Omega a_i(\nabla u^m)\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial u^m}{\partial t}dx = \left(f, \frac{\partial u^m}{\partial t}\right) \tag{10.93}$$

Χρησιμοποιώντας τη (10.44) παίρνουμε

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\frac{\partial u^m}{\partial t}\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon\left\|\nabla\frac{\partial u^m}{\partial t}\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{d}{dt}\int_\Omega \theta(\nabla u^m)dx = \left(f, \frac{\partial u^m}{\partial t}\right) \tag{10.94}$$

Αν ολοκληρώσουμε τη (10.94) από 0 έως t, με $t \in (0, T]$ και εφαρμόσουμε την ανισότητα Hölder στο δεξί μέλος λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial u^m}{\partial t}(t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon\int_0^t \left\|\nabla\frac{\partial u^m}{\partial t}(s)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \int_\Omega \theta(\nabla u^m(t))dx \\ &\qquad \leq \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial u^m}{\partial t}(0)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_\Omega \theta(\nabla u^m(0))dx + \int_0^t \|f(\tau)\|_{L^2(\Omega)}\left\|\frac{\partial u^m}{\partial t}(\tau)\right\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τη (10.49), την ανισότητα Young και τις ιδιότητες της απεικόνισης $\mathbb{P}_m$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial u^m}{\partial t}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega)} &+ \varepsilon\int_0^t \left\|\nabla\frac{\partial u^m}{\partial t}(s)\right\|^2_{L^2(\Omega)} ds + \frac{\alpha}{2}\|\nabla u^m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\le \frac{1}{2}c(u_0,u_1,f) + \frac{1}{2}\int_0^t \left\|\frac{\partial u^m}{\partial t}(\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)} d\tau\end{aligned} \tag{10.95}$$

όπου $c(u_0,u_1,f) = \|u_1\|^2_{L^2(\Omega)} + \beta\|\nabla u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \|f(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}d\tau$ και άρα

$$\left\|\frac{\partial u^m}{\partial t}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \le c(u_0,u_1,f) + \int_0^t \left\|\frac{\partial u^m}{\partial t}(\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)} d\tau \tag{10.96}$$

Από την ανισότητα Grönwall παίρνουμε

$$\left\|\frac{\partial u^m}{\partial t}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \le c(u_0,u_1,f,T) \ \ \forall\, t \le T \tag{10.97}$$

που συνεπάγεται τη (10.90). Με τον ίδιο τρόπο, χρησιμοποιώντας τη (10.95) μαζί με τη (10.97) προκύπτουν εύκολα οι (10.89) και η (10.91) και μένει μόνο η (10.92). Για να δείξουμε τη (10.92), αρκεί να επαληθεύσουμε ότι

$$\left|\int_0^t \left(\frac{\partial^2 u^m}{\partial t^2}(\tau), \varphi(\tau)\right) d\tau\right| \le c$$

για όλες τις $\varphi \in L^2(0,t;H^1_0(\Omega))$ με $\|\varphi\|_{L^2(0,t;H^1_0(\Omega))} \le 1$. Μπορούμε, λοιπόν, να γράψουμε το εξής:

$$\begin{aligned}\int_0^t \left(\frac{\partial^2 u^m}{\partial t^2}, \varphi\right) ds &= \int_0^t \left(\mathbb{P}_m\frac{\partial^2 u^m}{\partial t^2}, \varphi\right) ds = \int_0^t \left(\frac{\partial^2 u^m}{\partial t^2}, \mathbb{P}_m\varphi\right) ds \\ &\overset{(10.83)}{=} -\varepsilon\int_0^t \left(\nabla\frac{\partial u^m}{\partial t}, \nabla\mathbb{P}_m\varphi\right) ds + \int_0^t (f,\mathbb{P}_m\varphi) ds \\ &\quad - \int_0^t \left(a_i(\nabla u^m), \mathbb{P}_m\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right) ds\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώνατς, τώρα, τη (10.48), την ανισότητα Hölder και το γεγονός ότι $\|\varphi\|_{L^2(0,t;H^1_0(\Omega))} \le 1$, λαμβάνουμε:

$$\left|\int_0^t \left(\frac{\partial^2 u^m}{\partial t^2}, \varphi\right) ds\right| \le \varepsilon\int_0^t \left\|\nabla\frac{\partial u^m}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega)} ds + \|f\|_{L^2(Q_T)} + c\|u^m\|^2_{L^2(0,t;H^1_0(\Omega))} \tag{10.98}$$

Δεδομένου ότι όλοι οι όροι στο δεξί μέλος είναι φραγμένοι ομοιόμορφα ως προς m και ε από τις (10.89) - (10.91) προκύπτει η (10.92).

Έχοντας κατοχυρώσει τις (10.89) - (10.92), μπορούμε να εκμαιεύσουμε υπακολουθία $\{u^\mu\} \subset \{u^m\}$ ώστε:

$$u^\mu \rightharpoonup u \ \ \text{στον } L^2(I;H^1_0(\Omega)) \tag{10.99}$$

$$\frac{\partial u^\mu}{\partial t} \overset{*}{\rightharpoonup} z_2 \ \ \text{στον } L^\infty(I;L^2(\Omega)) \tag{10.100}$$

$$\frac{\partial u^\mu}{\partial t} \rightharpoonup z_1 \ \ \text{στον } L^2(I;H^1_0(\Omega)) \tag{10.101}$$

$$\frac{\partial^2 u^\mu}{\partial t^2} \rightharpoonup \omega \;\; \text{στον } L^2(I; H^{-1}(\Omega)) \tag{10.102}$$

Δεδομένου ότι ο $C^\infty(\Omega)$ είναι πυκνός στον $L^2(\Omega)$ και στον $H^1(\Omega)$, θα είναι $z_1 = z_2 = z$. Ακόμα, για κάθε $\varphi \in C_c(I; H_0^1(\Omega))$ ισχύει ότι

$$\int_0^t \left(\frac{\partial u^\mu}{\partial t}, \varphi\right) ds = -\int_0^t \left(u^\mu, \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) ds \tag{10.103}$$

Αφήνοντας το $\mu \to \infty$, παίρνουμε

$$\int_0^t (z, \varphi)\, ds = -\int_0^t \left(u^\mu, \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) ds \tag{10.104}$$

και άρα $z = \frac{\partial u}{\partial t}$. Ανάλογα προκύπτει ότι $\omega = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

Θέλουμε, τώρα, να δείξουμε ότι η u είναι ασθενής λύση του προβλήματος (10.58) - (10.60) και (10.44) - (10.47). Από τον ορισμό της ασθενούς σύγκλισης, προκύπτει ότι για $\varphi \in L^2(I; H_0^1(\Omega))$

$$\int_0^t \left(\frac{\partial^2 u^\mu}{\partial t^2}, \varphi\right) ds \to \int_0^t \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \varphi\right) ds \tag{10.105}$$

και

$$\varepsilon \int_0^t \left(\nabla \frac{\partial u^\mu}{\partial t}, \nabla \varphi\right) ds \to \varepsilon \int_0^t \left(\nabla \frac{\partial u}{\partial t}, \nabla \varphi\right) ds \tag{10.106}$$

και θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\int_0^t \left(a_i(\nabla u^\mu), \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) ds \to \int_0^t \left(a_i(\nabla u), \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) ds \tag{10.107}$$

για όλες τις $\varphi \in L^2(I; H_0^1(\Omega))$. Για το σκοπό αυτό, θα αποδείξουμε την ισχυρή σύγκλιση

$$\nabla u^\mu \to \nabla u \;\; \text{στον } L^2(Q_T) \tag{10.108}$$

Για την ακρίβεια, θα δείξουμε ότι

$$\nabla \frac{\partial u^\mu}{\partial t} \to \nabla \frac{\partial u}{\partial t} \;\; \text{στον } L^2(Q_T) \tag{10.109}$$

και τότε, λόγω της ιδιότητας

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|_H^2 - \frac{1}{2}\|u(s)\|_H^2 = \int_s^t \left\langle \frac{du(\tau)}{dt}, u(\tau)\right\rangle_X d\tau \quad \forall\, s, t \in I$$

όπου H χώρος Hilbert και X χώρος Banach, προκύπτει εύκολα η (10.108). Πράγματι, για $H = L^2(\Omega)$ και $s = 0$ έχουμε

$$\|\nabla(u^\mu - u)(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|\nabla(u^\mu - u)(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\int_0^t \left(\nabla\left(\frac{\partial u^\mu}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t}\right), \nabla(u^\mu - u)\right) ds$$

με το δεξί μέλος να τείνει στο 0 λόγω της (10.109).

Έστω, λοιπόν, $\mathbb{L}_m : L^2(I; H^1(\Omega)) \to L^2(I; \mathrm{span}\{\omega^1, \dots, \omega^m\})$ συνεχής προβολή. Τότε, για $\varphi \in L^2(I; H_0^1(\Omega))$

$$\int_0^T \|\mathbb{L}_m \varphi - \varphi\|_{H^1(\Omega)}^2 ds \to 0 \;\; \text{καθώς } m \to \infty \tag{10.110}$$

και από τη (10.83) θα ισχύει η ακόλουθη ισότητα:

$$\begin{aligned}\int_0^t \left(\frac{\partial^2 u^\mu}{\partial t^2}, \mathbb{L}_\mu \varphi\right) ds + \varepsilon \int_0^t \left(\nabla \frac{\partial u^\mu}{\partial t}, \nabla \mathbb{L}_\mu \varphi\right) ds \\ + \int_0^t \left(a_i(\nabla u^\mu), \frac{\partial \mathbb{L}_\mu \varphi}{\partial x_i}\right) ds = \int_0^t (f, \mathbb{L}_\mu \varphi) ds\end{aligned} \tag{10.111}$$

Αν χρησιμοποιήσουμε σαν δοκιμαστική συνάρτηση τη $\varphi = \frac{\partial u^\mu}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t}$ και θεωρήσουμε τον κάθε όρο ξεχωριστά, θα πάρουμε τα εξής:

Για το δεύτερο όρο:

$$\begin{aligned}\varepsilon \int_0^t \left(\nabla \frac{\partial u^\mu}{\partial t}, \nabla \mathbb{L}_\mu \varphi\right) ds &= \varepsilon \int_0^t \left(\nabla \frac{\partial u^\mu}{\partial t}, \nabla \frac{\partial u^\mu}{\partial t} - \nabla \mathbb{L}_\mu \frac{\partial u}{\partial t}\right) ds \\ &= \varepsilon \int_0^t \left(\nabla \frac{\partial u^\mu}{\partial t} - \nabla \frac{\partial u}{\partial t}, \nabla \frac{\partial u^\mu}{\partial t} - \nabla \frac{\partial u}{\partial t}\right) ds \\ &+ \varepsilon \int_0^t \left(\nabla \frac{\partial u}{\partial t}, \nabla \frac{\partial u^\mu}{\partial t} - \nabla \frac{\partial u}{\partial t}\right) ds \\ &+ \varepsilon \int_0^t \left(\nabla \frac{\partial u^\mu}{\partial t}, \nabla \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \mathbb{L}_\mu \frac{\partial u}{\partial t}\right) ds \\ &= \varepsilon \int_0^t \left\| \nabla \left(\frac{\partial u^\mu}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t}\right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \delta_\mu^1 + \delta_\mu^2\end{aligned}$$

Καθώς $\mu \to \infty$, λόγω της (10.101), $\delta_\mu^1 \to 0$ και δεδομένου ότι $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(I; H_0^1(\Omega))$ λόγω των (10.110) και (10.91), $\delta_\mu^2 \to 0$.

Ομοίως, μπορούμε να διαχειριστούμε τον πρώτο όρο ως εξής:

$$\begin{aligned}\int_0^t \left(\frac{\partial^2 u^\mu}{\partial t^2}, \mathbb{L}_\mu \varphi\right) ds &= \int_0^t \left(\frac{\partial^2 u^\mu}{\partial t^2}, \frac{\partial u^\mu}{\partial t} - \mathbb{L}_\mu \frac{\partial u}{\partial t}\right) ds \\ &= \int_0^t \left(\frac{\partial^2 u^\mu}{\partial t^2} - \frac{\partial u^2}{\partial t^2}, \frac{\partial u^\mu}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t}\right) ds \\ &+ \int_0^t \left(\frac{\partial u^2}{\partial t^2}, \frac{\partial u^\mu}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t}\right) ds \\ &+ \int_0^t \left(\frac{\partial^2 u^\mu}{\partial t^2}, \frac{\partial u}{\partial t} - \mathbb{L}_\mu \frac{\partial u}{\partial t}\right) ds \\ &= \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial u^\mu}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial u^\mu}{\partial t}(0) - \frac{\partial u}{\partial t}(0) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &+ \delta_\mu^3 + \delta_\mu^4\end{aligned}$$

με το $\delta_\mu^3 \to 0$ λόγω της (10.101) και $\delta_\mu^4 \to 0$ λόγω των (10.110) και (10.92). Επίσης

$$\delta_\mu^5 = \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial u^\mu}{\partial t}(0) - \frac{\partial u}{\partial t}(0) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \to 0 \;\; \text{καθώς } \mu \to \infty$$

Για τον τρίτο όρο έχουμε:

$$\begin{aligned}\int_0^t \left(a_i(\nabla u^\mu), \frac{\partial \mathbb{L}_\mu \varphi}{\partial x_i}\right) ds &= \int_0^t \left(a_i(\nabla u^\mu), \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u^\mu}{\partial t} - \mathbb{L}_\mu \frac{\partial u}{\partial t}\right)\right) ds \\ &= \int_0^t \left(a_i(\nabla u^\mu) - a_i(\nabla u), \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u^\mu}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t}\right)\right) ds \\ &+ \int_0^t \left(a_i(\nabla u), \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u^\mu}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t}\right)\right) ds \\ &+ \int_0^t \left(a_i(\nabla u^\mu), \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \mathbb{L}_\mu \frac{\partial u}{\partial t}\right)\right) ds \\ &= I_2 + \delta_\mu^6 + \delta_\mu^7\end{aligned}$$

Η συνθήκη (10.48) συνεπάγεται ότι $a_i(\nabla u) \in L^2(Q_T)$ και σε συνδυασμό με τη (10.101) $\delta_\mu^6 \to 0$. Ομοίως $\delta_\mu^7 \to 0$, λόγω των (10.48), (10.89) και (10.110). Ας υπολογίσουμε τον όρο I_2, κάνοντας χρήση της σχέσης (10.50) και των ανισοτήτων Young και Hölder:

$$|I_2| \leq K(\varepsilon) \int_0^t \|\nabla(u^\mu - u)\|^2_{L^2(\Omega)} ds + \frac{\varepsilon}{2} \int_0^t \left\|\nabla\left(\frac{\partial u^\mu}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t}\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)} ds \qquad (10.112)$$

Όμως

$$\nabla(u^\mu - u)(s) = \nabla(u^\mu - u)(0) + \int_0^s \nabla \frac{\partial}{\partial t}(u^\mu - u)(\tau) d\tau$$

οπότε

$$\|\nabla(u^\mu - u)(s)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq 2\|\nabla(u^\mu - u)(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + 2T \int_0^s \left\|\nabla\left(\frac{\partial u^\mu}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t}\right)(\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)} d\tau$$

Αν συμβολίσουμε $\delta_\mu^8 = 2TK(\varepsilon)\|\nabla(u^\mu - u)(0)\|^2_{L^2(\Omega)}$, το οποίο τείνει στο μηδέν για $\mu \to \infty$, από τη (10.112) θα έχουμε:

$$\begin{aligned}|I_2| \leq \delta_\mu^8 &+ 2TK(\varepsilon) \int_0^t \int_0^s \left\|\nabla\left(\frac{\partial u^\mu}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t}\right)(\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)} d\tau ds \\ &+ \frac{\varepsilon}{2} \int_0^t \left\|\nabla\left(\frac{\partial u^\mu}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t}\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)} ds\end{aligned}$$

Τέλος, ο όρος του δεξιού μέλους

$$\delta_\mu^9 = \int_0^t \left(f, \frac{\partial u^\mu}{\partial t} - \mathbb{L}_\mu \frac{\partial u}{\partial t}\right) ds$$

τείνει επίσης στο μηδέν λόγω της (10.110). Θέτουμε $\delta_\mu = \sum_{i=1}^9 \delta_\mu^i$ και τότε η (10.111) συνεπάγεται

$$\frac{\varepsilon}{2} \int_0^t \left\|\nabla\left(\frac{\partial u^\mu}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t}\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)} ds \leq \delta_\mu + c \int_0^t \left(\int_0^\tau \left\|\nabla\left(\frac{\partial u^\mu}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t}\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)} ds\right) d\tau$$

Στέλνοντας το μ στο άπειρο, το δ_μ τείνει στο μηδέν και κατόπιν, από την ανισότητα Grönwall προκύπτει η (10.109). Έτσι, αποδείξαμε τη (10.109) και άρα τη (10.108). Αυτό σημαίνει ότι $\nabla u^\mu \to \nabla u$ σχεδόν παντού στο Q_T και άρα $a_i(\nabla u^\mu) \to a_i(\nabla u)$ σχεδόν παντού στο Q_T, τουλάχιστον κατά μήκος μιας υπακολουθίας. Περαιτέρω, για κάθε μετρήσιμο $H \subset Q_T$

$$\int_H |a_i(\nabla u^\mu)|dxdt \overset{(10.48)}{\leq} \beta \int_H |\nabla u^\mu|dxdt \leq \beta \|\nabla u^\mu\|_{L^2(Q_T)}\sqrt{|H|}$$

το οποίο συνεπάγεται τη συνέχεια του $a_i(\nabla u^\mu)$ ως προς το μέτρο Lebesgue. Τότε, εφαρμόζοντας το Λήμμα Vitali παίρνουμε τη (10.107) για κάθε $\varphi \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$. Επομένως, η u ικανοποιεί τη σχέση (10.64). Επιπλέον, η u είναι το ασθενές όριο των u^μ για τις οποίες ισχύουν οι εκτιμήσεις (10.89) - (10.92), άρα θα ισχύουν οι ίδιες και για τη u. Με αυτό τον τρόπο, οι (10.65) - (10.68) ισχύουν και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. $\square$

Μέρος IV

Παράρτημα

Παράρτημα Α΄

Συναρτησιακή Ανάλυση

Α΄.1 Κατανομές

Ορισμός Α΄.1. *Έστω Ω ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. Ορίζουμε το χώρο των δοκιμαστικών συναρτήσεων*

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{v \in C^\infty(\Omega) \mid v \text{ έχει συμπαγή φορέα}\} \tag{Α΄.1}$$

Ένα στοιχείο αυτού του χώρου είναι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & \text{αν } |x| < 1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

Ορισμός Α΄.2. *Έστω ο πολυδείκτης $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$. Ορίζουμε τη γενικευμένη α-παράγωγο ως εξής:*

$$D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}}{\partial^{\alpha_1}x_1\partial^{\alpha_2}x_2\cdots\partial^{\alpha_n}x_n} \tag{Α΄.2}$$

Ορισμός Α΄.3. *Έστω $\{\varphi_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{D}(\Omega)$. Θα λέμε ότι η φ_i συγκλίνει στη φ στον $\mathcal{D}(\Omega)$ και θα γράφουμε*

$$\varphi_i \to \varphi \;\text{ στον } \mathcal{D}(\Omega) \tag{Α΄.3}$$

αν ο φορέας των φ_i περιέχεται σε ένα συμπαγές υποσύνολο K του Ω και επιπλέον

$$D^\alpha\varphi_i \to D^\alpha\varphi \;\text{ ομοιόμορφα στο } K,\ \forall\, \alpha \in \mathbb{N}^n \tag{Α΄.4}$$

Μπορεί κανείς να δείξει ότι η σύγκλιση (Α΄.3) ορίζει μια τοπολογία στο χώρο $\mathcal{D}(\Omega)$.

Ορισμός Α΄.4. *Μια κατανομή T είναι ένας γραμμικός τελεστής από τον $\mathcal{D}(\Omega)$ στο $\mathbb{R}$, για τον οποίο ισχύει:*

$$\lim_i T(\varphi_i) = T(\varphi) \tag{Α΄.5}$$

για κάθε ακολουθία $\varphi_i \to \varphi$ στον $\mathcal{D}(\Omega)$.

Από τον τελευταίο ορισμό, μπορεί κανείς εύκολα να παρατηρήσει ότι οι κατανομές είναι στοιχεία του δυϊκού χώρου του $\mathcal{D}(\Omega)$. Θα συμβολίζουμε, λοιπόν, το χώρο των κατανομών με $\mathcal{D}^*(\Omega)$.

Ένα ευρέως διαδεδομένο παράδειγμα κατανομής είναι η *κατανομή Dirac*, η οποία ορίζεται ως εξής: Έστω $x_0 \in \Omega$. Ορίζουμε την κατανομή δ_{x_0} τέτοια ώστε

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \varphi(x_0) \ \ \forall \ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \tag{Α′.6}$$

Ο λόγος για τον οποίο χρησιμοποιούμε κατά κόρον τις κατανομές είναι διότι μπορούμε να τις παραγωγίσουμε (τρόπον τινά) όσες φορές θέλουμε. Πράγματι:

Ορισμός Α′.5. *Αν $T \in \mathcal{D}^*(\Omega)$, ορίζουμε την α-παράγωγο της T με τον ακόλουθο τρόπο:*

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle \ \ \forall \ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \tag{Α′.7}$$

Στην περίπτωση που $T \in C^k(\Omega)$, για $k \geq \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$, η γενικευμένη ταυτίζεται με τη συνήθη παράγωγο.

Ορισμός Α′.6. *Έστω T_i ακολουθία κατανομών. Θα λέμε ότι καθώς το $i \to \infty$*

$$T_i \to T \ \ \text{στον } \mathcal{D}^*(\Omega)$$

αν και μόνο αν

$$\lim_{i \to \infty} \langle T_i, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle \ \ \forall \ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \tag{Α′.8}$$

Η παραπάνω σύγκλιση ορίζει κι αυτή με τη σειρά της μια τοπολογία στον $\mathcal{D}^*(\Omega)$.

Α′.2 Βασικά στοιχεία χώρων Banach

Έστω X χώρος Banach εφοδιασμένος με τη νόρμα $\|\cdot\|_X$. Με X^* θα συμβολίζουμε το δυϊκό χώρο του X, δηλαδή το χώρο όλων των γραμμικών και συνεχών συναρτησιακών $\varphi : X \to \mathbb{R}$. Αν $\varphi \in X^*$ και $x \in X$ συμβολίζουμε με $\langle \varphi, x \rangle_X$ τη δράση της φ στο x. Η φυσική νόρμα του X^* ορίζεται ως

$$\|\varphi\|_{X^*} = \sup_{\|x\|_X \leq 1} |\langle \varphi, x \rangle_X|$$

Ας είναι, τώρα, ακολουθία $\{x_n\} \subset X$ και $x \in X$. Μπορούμε να ορίσουμε διάφορους τύπους σύγκλισης:

1. Λέμε ότι η ακολουθία $\{x_n\}$ συγκλίνει (ισχυρά) στο x και γράφουμε

$$x_n \to x \ \ \text{στον } X$$

αν και μόνο αν

$$\|x_n - x\|_X \to 0 \ \ \text{καθώς } n \to \infty$$

2. Λέμε ότι η ακολουθία $\{x_n\}$ συγκλίνει ασθενώς στο x και γράφουμε

$$x_n \rightharpoonup x \ \ \text{στον } X$$

αν και μόνο αν για κάθε $\varphi \in X^*$

$$\langle \varphi, x_n \rangle_X \to \langle \varphi, x \rangle_X \ \ \text{καθώς } n \to \infty$$

3. Έστω Z χώρος Banach, τέτοιος ώστε $Z^* = X$. Λέμε ότι η ακολουθία $\{x_n\}$ συγκλίνει ασθενώς$-*$ στο x και γράφουμε

$$x_n \overset{*}{\rightharpoonup} x \ \ \text{στον } X$$

αν και μόνο αν για κάθε $\xi \in Z$

$$\langle x_n, \xi \rangle_Z \to \langle x, \xi \rangle_Z \ \ \text{καθώς } n \to \infty$$

Θεώρημα Α΄.1. *Έστω X και $Z = X^*$ χώροι Banach. Υποθέτουμε επιπλέον, ότι ο Z είναι διαχωρίσιμος και ότι $\{x_n\} \subset X$ φραγμένη ακολουθία στον X. Τότε, υπάρχει $\{x_{n_k}\}$ υπακολουθία της $\{x_n\}$ και $x \in X$ με*

$$x_{n_k} \overset{*}{\rightharpoonup} x \quad \text{στον } X$$

Θεώρημα Α΄.2. *Έστω $x_n \rightharpoonup x$ ή $x_n \overset{*}{\rightharpoonup} x$ στον X. Τότε, η $\{x_n\}$ είναι φραγμένη στον X και $\|x\|_X \leq \liminf \|x_n\|_X$.*

Ορισμός Α΄.7. *Υποθέτουμε ότι οι X, Y είναι χώροι Banach. Λέμε ότι ο χώρος X είναι συνεχώς ενσφηνωμένος στον Y και γράφουμε $X \hookrightarrow Y$ αν και μόνο αν $X \subset Y$ και υπάρχει $c > 0$ ώστε $\|x\|_Y \leq c\|x\|_X$, για κάθε $x \in X$.*

Ορισμός Α΄.8. *Θα λέμε ότι ο χώρος X είναι συμπαγώς ενσφηνωμένος στον Y και γράφουμε $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$ αν και μόνο αν $X \hookrightarrow Y$ και η ταυτοτική απεικόνιση $I : X \to Y$ είναι συμπαγής, δηλαδή η $\overline{I(B)}$ είναι συμπαγής στον Y, για κάθε φραγμένο υποσύνολο B του X.*

Ένα παράδειγμα συμπαγώς ενσφηνωμένων χώρων παρουσιάζεται στην Παράγραφο 3.1 (στη μέθοδο της συμπάγειας) και είναι η ενσφήνωση $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(\Omega)$.

Α΄.3 Χώροι Lebesque

Ορισμός Α΄.9. *Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ και $1 \leq p \leq \infty$. Συμβολίζουμε με $L^p(\Omega)$ το χώρο των μετρήσιμων συναρτήσεων $v : \Omega \to \mathbb{R}$ για τις οποίες η νόρμα*

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} = \begin{cases} \left(\int_\Omega |v(x)|^p dx \right)^{1/p} & \text{για } 1 \leq p < \infty \\ \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} |v(x)| & \text{για } p = \infty \end{cases} \tag{Α΄.9}$$

είναι πεπερασμένη.

Είναι εύκολο να δει κανείς, ότι οι χώροι $L^p(\Omega)$ είναι διανυσματικοί χώροι με τις πράξεις $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $\forall\, f, g \in L^p(\Omega)$ και $(\lambda f(x)) = \lambda f(x)$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$, $f \in L^p(\Omega)$.

Οι χώροι $L^p(\Omega)$ για $1 \leq p \leq \infty$, εφοδιασμένοι με την εκάστοτε νόρμα (Α΄.9) είναι χώροι Banach, ενώ ο $L^2(\Omega)$ εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο

$$(f, g)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x) g(x) dx$$

είναι χώρος Hilbert και μάλιστα είναι ο μοναδικός χώρος Hilbert μεταξύ των $L^p(\Omega)$.

Ο δυϊκός ενός χώρου $L^p(\Omega)$, για $1 < p < \infty$ είναι ισομετρικά ισομορφικός με τον $L^q(\Omega)$, όπου $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Για $p = 1$, υπό την προϋπόθεση ότι το μέτρο του χώρου είναι σ-πεπερασμένο, ο δυϊκός του $L^1(\Omega)$ είναι ισομετρικά ισομορφικός με τον $L^\infty(\Omega)$. Ο δυϊκός του $L^\infty(\Omega)$ είναι μια ιδιάζουσα και σκοτεινή περίπτωση, στην οποία απλώς θα αναφερθούμε. Αυτό που χρειάζεται να έχουμε κατά νου είναι ότι ο $(L^\infty(\Omega))^*$ *δεν* πρέπει να ταυτίζεται με τον $L^1(\Omega)$! Στην πραγματικότητα, αυτό που ισχύει είναι ότι $(L^\infty(\Omega))^* = \mathrm{ba}(\Omega)$ και είναι γνήσιο υπερσύνολο του $L^1(\Omega)$. Ο χώρος $\mathrm{ba}(\Omega)$ είναι ο χώρος των φραγμένων και πεπερασμένα αθροιστικών προσημασμένων μέτρων. Το προσημασμένο μέτρο είναι μια γενίκευση της έννοιας του μέτρου, στην οποία όμως επιτρέπουμε (το μέτρο) να παίρνει και αρνητικές τιμές.

Α΄.4 Χώροι Sobolev

Ορισμός Α΄.10. *Έστω Ω ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Για $m \in \mathbb{N}$ και $1 \leq p \leq \infty$ ορίζουμε το χώρο Sobolev ως εξής:*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{v \in L^p(\Omega) \mid D^\alpha v \in L^p(\Omega) \ \ \forall\, \alpha,\ |\alpha| \leq m\} \tag{Α΄.10}$$

Αν εφοδιάσουμε το χώρο $W^{m,p}(\Omega)$ με τη νόρμα

$$\|v\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha v\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p} \tag{Α΄.11}$$

προκύπτει ότι είναι χώρος Banach, ενώ στην ειδική περίπτωση που $p = 2$, ο χώρος $W^{m,2}(\Omega)$ συμβολίζεται με $H^m(\Omega)$ και εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)} \tag{Α΄.12}$$

είναι χώρος Hilbert.

Η κλειστότητα του $\mathcal{D}(\Omega)$ στον $W^{m,p}(\Omega)$ συμβολίζεται με $W_0^{m,p}(\Omega)$. Ιδιαίτερα σημαντική είναι η περίπτωση που $p = 2$ και $m = 1$, δηλαδή του χώρου $H_0^1(\Omega)$. Αποδεικνύεται ότι

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ στο σύνορο } \partial\Omega\} \tag{Α΄.13}$$

Θεώρημα Α΄.3. *(Ανισότητα Poincaré) Έστω Ω ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ φραγμένο προς μία κατεύθυνση. Τότε, για $1 \leq p < \infty$ και για κάθε $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ισχύει*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \tag{Α΄.14}$$

για κάποια σταθερά C που εξαρτάται μόνο από το p και το Ω.

Θεώρημα Α΄.4. *Έστω Ω ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ φραγμένο προς μία κατεύθυνση. Για $1 \leq p < \infty$ έχουμε ότι στον $W_0^{1,p}(\Omega)$ οι νόρμες $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ και $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ είναι ισοδύναμες.*

Συμβολίζουμε με $W^{-1,q}(\Omega)$ το δυϊκό χώρο του $W_0^{1,p}(\Omega)$, όπου $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ και στην ειδική περίπτωση που $p = q = 2$ έχουμε $W^{-1,2}(\Omega) = H^{-1}(\Omega) = \left(H_0^1(\Omega)\right)^*$.

Α΄.5 Χώροι Bochner και Διανυσματικές Κατανομές

Έστω X χώρος Banach και $\|\cdot\|_X$ η νόρμα του. Γενικεύουμε την έννοια των χώρων Lebesgue ως εξής:

Ορισμός Α΄.11. *Αν $a, b \in \mathbb{R}$, συμβολίζουμε με $L^p(a, b; X)$, για $1 \leq p < \infty$ το χώρο των συναρτήσεων $f : (a, b) \to X$ που είναι μετρήσιμες και*

$$\int_a^b \|f(t)\|_X^p dt < +\infty \tag{Α΄.15}$$

ενώ για $p = +\infty$, ο $L^\infty(a, b; X)$ είναι ο χώρος των ουσιωδώς φραγμένων συναρτήσεων στο (a, b), δηλαδή των συναρτήσεων για τις οποίες υπάρχει $M > 0$, τέτοιο ώστε

$$\|f(t)\|_X \leq M \ \ \text{σχεδόν για κάθε } t \in (a, b) \tag{Α΄.16}$$

Αν, τώρα, εφοδιάσουμε τον $L^p(a, b; X)$ με τη νόρμα

$$\|f\|_{L^p(a,b;X)} = \begin{cases} \left(\int_a^b \|f(t)\|_X^p dt\right)^{1/p} & \text{για } 1 \le p < \infty \\ \operatorname{ess\,sup}_{t\in(a,b)} \|f(t)\|_X & \text{για } p = \infty \end{cases} \tag{A′.17}$$

καθίσταται χώρος Banach.

Ορισμός Α′.12. *Ας είναι $-\infty \le a < b \le +\infty$. Μία διανυσματική κατανομή στο (a, b) με τιμές στον X είναι μια γραμμική απεικόνιση $T : \mathcal{D}(a, b) \to X$, με $\varphi \mapsto \langle T, \varphi\rangle$ που είναι συνεχής στον $\mathcal{D}(a, b)$, δηλαδή*

$$\lim_{i\to\infty} \langle T, \varphi_i\rangle = \langle T, \varphi\rangle \quad \text{στον } X$$

για κάθε ακολουθία φ_i, για την οποία $\varphi_i \to \varphi$ στον $\mathcal{D}(a, b)$.

Θα συμβολίζουμε με $\mathcal{D}^*(a, b; X)$ το χώρο των κατανομών στον (a, b) με τιμές στον X.

Ορίζουμε την παράγωγο μιας κατανομής με τον ακόλουθο τρόπο: Αν $T \in \mathcal{D}^*(a, b; X)$, τότε για κάθε $k \in \mathbb{N}$

$$\left\langle \frac{d^kT}{dt^k}, \varphi \right\rangle = (-1)^k \left\langle T, \frac{d^k\varphi}{dt^k} \right\rangle \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(a, b) \tag{A′.18}$$

Αν X, Y χώροι Banach τέτοιοι ώστε $X \hookrightarrow Y$, τότε ισχύει

$$\mathcal{D}^*(a, b; X) \hookrightarrow \mathcal{D}^*(a, b; Y)$$

και

$$L^p(a, b; X) \hookrightarrow L^p(a, b; Y) \quad \forall\, 1 \le p \le +\infty$$

Στη συνέχεια, θεωρούμε V, H δύο χώρους Hilbert, για τους οποίους ισχύει

$$V \hookrightarrow H \hookrightarrow V^* \tag{A′.19}$$

όπου V^* ο δυϊκός του χώρου V και ο V είναι πυκνός στον H. Θα συμβολίζουμε με $[\cdot, \cdot]$ και $\|\cdot\|_V$ το εσωτερικό γινόμενο και τη νόρμα στον V και με $(\cdot, \cdot)$ και $\|\cdot\|_H$ το εσωτερικό γινόμενο και τη νόρμα στον H. Η πιο δημοφιλής περίπτωση είναι η ακόλουθη

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$$

Ορίζουμε το χώρο $H^1(a, b; V, V^*) = \{u \in L^2(a, b; V) \mid u_t \in L^2(a, b; V^*)\}$ και τη νόρμα $\|u\|^2_{H^1(a,b;V,V^*)} = \|u\|^2_{L^2(a,b;V)} + \|u_t\|^2_{L^2(a,b;V^*)}$. Κάτω από αυτή τη νόρμα ο $H^1(a, b; V, V^*)$ είναι χώρος Banach και εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο

$$(f, g)_{H^1(a,b;V,V^*)} = (f, g)_{L^2(a,b;V)} + (f_t, g_t)_{L^2(a,b;V^*)}$$

είναι χώρος Hilbert.

Θεώρημα Α′.5. *Ο $\mathcal{D}([a, b]; V)$ είναι πυκνός στον $H^1(a, b; V, V^*)$.*

Θεώρημα Α′.6. *Έστω $u, v \in H^1(a, b; V, V^*)$, $a, b \in \mathbb{R}$. Τότε*

$$\int_a^b \langle u'(t), v(t) + \int_a^b \langle v'(t), u(t)\rangle dt = u(b)v(b) - u(a)v(a)$$

Θεώρημα Α′.7. *Αν $u \in H^1(a, b; V, V^*)$, τότε για κάθε $v \in V$*

$$\frac{d}{dt}\langle u(\cdot), v\rangle = \langle u_t(\cdot), v\rangle \quad \text{στον } \mathcal{D}^*(a, b)$$

Βιβλιογραφία

[1] Robert Adams, John Fournier. Sobolev Spaces. Elsevier Science Publishing Co. Inc., San Diego, United States, 2011.

[2] Haïm Brezis. Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. Springer-Verlag New York Inc., New York, United States, 2010.

[3] Haïm Brezis, Felix Browder. Partial Differential Equations in the 20th Century. Advances in Mathematics 135, 76 - 144, Article No. AI971713, 1998.

[4] Michel Chipot. Elements of Nonlinear Analysis. Birkhäuser Verlag, Basel, Switzerland, 2000.

[5] Lawrence Evans. Partial Differential Equations. American Mathematical Society, Providence, United States, 2010.

[6] Josef Málek, Jindřich Nečas, Mirko Rokyta, Michael Růžička. Weak and Measure-valued Solutions to Evolutionary PDEs. Chapman & Hall, London, United Kingdom, 1996.

[7] Nikolaos Papageorgiou, Patrick Winkert. Applied Nonlinear Functional Analysis, An Introduction. De Gruyter, Berlin, Germany, 2018.