

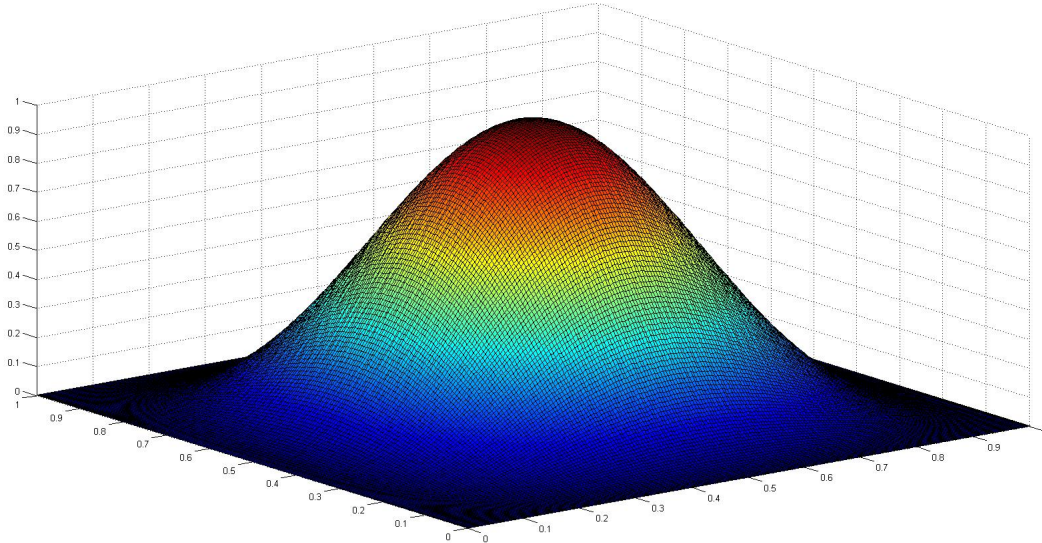


ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ανάλυση σφάλματος της μεθόδου πεπερασμένων  
στοιχείων για την εξίσωση Poisson με μη γραμμικές  
Robin συνοριακές συνθήκες

Σκούρας Ιωάννης-Αλέξανδρος



Επιβλέπων  
Γεωργούλης Εμμανουήλ



## Τριμελής Εξεταστική Επιτροπή

Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.  
Γεωργούλης Εμμανουήλ

Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.  
Χρυσάφινος Κωνσταντίνος

Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.  
Κοκκίνης Βασίλειος



# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Εισαγωγικά στοιχεία και το πρόβλημα</b>	<b>3</b>
1.1	Το Πρόβλημα	3
1.2	Εισαγωγή στους χώρους Sobolev	3
1.3	Εισαγωγή στις αριθμητικές μεθόδους σε ελλειπτικές ΜΔΕ	10
<b>2</b>	<b>Η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων (ΜΠΣ) για την εξίσωση Poisson</b>	<b>21</b>
2.1	Ανάλυση Σφάλματος της ΜΠΣ για την εξίσωση Poisson με Robin ΣΣ	21
2.2	Ανάλυση Σφάλματος της ΜΠΣ για την εξίσωση Poisson με μη-γραμμικές Robin ΣΣ	24
<b>3</b>	<b>Αριθμητικά παραδείγματα</b>	<b>33</b>



# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγικά στοιχεία και το πρόβλημα

### 1.1 Το Πρόβλημα

Σε αυτήν την εργασία θα ασχοληθούμε με την εξίσωση Poisson με μη γραμμικές Robin συνοριακές συνθήκες. Η εξίσωση Poisson είναι μια ελλειπτική μερική διαφορική εξίσωση με πλήθος εφαρμογών στην Θεωρητική Φυσική, καθώς και στην Μηχανική. Για παράδειγμα, μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει ένα τέτοιο μοντέλο για να περιγράψει το δυναμικό πεδίο που προκύπτει από μια ηλεκτρική φόρτιση και στη συνέχεια να υπολογίσει το αντίστοιχο ηλεκτροστατικό πεδίο. Ένα ακόμα παράδειγμα εφαρμογής αυτού του προβλήματος είναι η μοντελοποίηση της μεταφοράς θερμότητας στην κατάσταση που έχει σταματήσει να εξελίσσεται το φαινόμενο και η συνάρτηση  $u$  σε ένα σημείο  $\mathbf{x} \in \Omega$  δεν μεταβάλλεται με τον χρόνο. Ο όρος  $\mu|u|^{p-2}u$  στο σύνορο ελέγχει τη θερμική ακτινοβολία. Πιο αναλυτικά, το πρόβλημα με το οποίο θα ασχοληθούμε είναι το εξής

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & \text{στο } \Omega \\ \nabla u \mathbf{n} + \mu|u|^{p-2}u &= 0 & \text{στο } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Σκοπός της εργασίας είναι να εκτιμήσει το σφάλμα στην μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων αυτής της εξίσωσης σε ένα χωρίο  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  με Lipschitz σύνορο. Το ενδιαφέρον του προβλήματος είναι η δυσκολία να χρησιμοποιηθούν τα ήδη υπάρχοντα εργαλεία για την ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης, καθώς και την εκτίμηση σφάλματος (Θεώρημα Lax-Milgram, Λήμμα του  $C^0$ ), όπως γίνεται στις περιπτώσεις με γραμμικές συνοριακές συνθήκες (Dirichlet, Neumann, Robin). Η δυσκολία αυτή προκύπτει από τη μη γραμμικότητα των συνοριακών συνθηκών, δηλαδή τον όρο  $\mu|u|^{p-2}u$ , ο οποίος δεν επιτρέπει στην απεικόνιση που προκύπτει στην ασθενή μορφή του προβλήματος να είναι νόρμα. Δηλαδή, η απεικόνιση  $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx + \int_{\partial\Omega} \mu|u|^{p-2}uv \, ds$  για κάθε  $v \in H^1(\Omega)$  παύει να είναι γραμμική για την πρώτη μεταβλητή κι έτσι όλα τα εργαλεία που προϋποθέτουν νόρμα δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν. Η γενική ιδέα είναι να δουλευτεί εκ νέου το πρόβλημα με μεθόδους παρόμοιες με αυτές των γραμμικών προβλημάτων, αλλά προσαρμοσμένες στη συγκεκριμένη περίπτωση.

### 1.2 Εισαγωγή στους χώρους Sobolev

**Πρόταση 1.1** (Ανισότητα Young). Για κάθε  $a, b, \varepsilon \in \mathbb{R}_+$  ισχύει ότι

$$ab \leq \frac{a^2\varepsilon^2}{2} + \frac{b^2}{2\varepsilon^2}. \quad (1.2.1)$$

**Πρόταση 1.2** (Γενικευμένη ανισότητα Young). Για κάθε  $a, b, \varepsilon \in \mathbb{R}_+$  και για  $p, q \in (1, \infty)$  τ.ω.  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  ισχύει ότι

$$ab \leq \frac{a^p \varepsilon^p}{p} + \frac{b^q}{q \varepsilon^q}. \quad (1.2.2)$$

**Πρόταση 1.3** (Ανισότητα Cauchy-Schwarz). Για κάθε  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  ισχύει ότι

$$|(x, y)| \leq \|x\|_2 \|y\|_2, \quad (1.2.3)$$

όπου  $(\cdot, \cdot)$  είναι το Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο και  $\|\cdot\|_2$  η Ευκλείδεια νόρμα.

**Ορισμός 1.1** (Χώροι Lebesgue). Ο χώρος των συναρτήσεων που είναι Lebesgue ολοκληρώσιμες στο  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  στη δύναμη  $p \in [1, \infty)$  ορίζεται ως

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty, x \in \mathbb{R}^n \right\}$$

και είναι εφοδιασμένος με την νόρμα

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Για  $p = \infty$  έχουμε τον χώρο

$$L^\infty(\Omega) = \{f : |f(x)| < \infty \text{ σχεδόν παντού (σ.π.) στο } \Omega\}$$

με νόρμα

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)| < \infty.$$

**Λήμμα 1.1** (Ανισότητα Hölder). Έστω  $p, q \in [1, \infty]$  τ.ω.  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Αν  $u \in L^p(\Omega)$  και  $v \in L^q(\Omega)$ , τότε  $uv \in L^1(\Omega)$  και ισχύει ότι

$$\|uv\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}. \quad (1.2.4)$$

Για  $p = q = 2$  έχουμε την ανισότητα Cauchy-Schwartz για χώρους Lebesgue

$$\|uv\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}. \quad (1.2.5)$$



**Ορισμός 1.2 (Ο χώρος  $C_0^\infty(\Omega)$ ).** Ο χώρος των απείρως παραγωγίσιμων πραγματικών συναρτήσεων με συμπαγές (κλειστό και φραγμένο στις πεπερασμένες διαστάσεις) φορέα στο  $\Omega$  ορίζεται ως

$$C_0^\infty(\Omega) = \{v : v \in C^\infty(\Omega), \text{supp}(v) \subset \Omega\},$$

όπου

$$\text{supp}(v) = \overline{\{x \in \Omega : v(x) \neq 0\}}.$$

Τα στοιχεία αυτού του χώρου λέγονται συναρτήσεις δοκιμής (*test functions*).

**Ορισμός 1.3 (Σύγκλιση στον  $C_0^\infty(\Omega)$ ).** Η ακολουθία των συναρτήσεων  $\{\phi_n(x)\}_{n=1}^\infty, \phi_n \in C_0^\infty(\Omega), n \in \mathbb{N}$  συγκλίνει σε συνάρτηση δοκιμής αν και μόνο αν

1. υπάρχει  $K \subset \Omega$  συμπαγές, με  $\text{supp}(\phi_n) \subset K$  για κάθε  $n$ ,
2.  $D^\alpha \phi_n(x) \rightarrow 0$  για  $n \rightarrow \infty$  στο  $K$  για όλους τους πολυδείκτες  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d), |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$ .

Γράφουμε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(x) = \phi(x) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} (\phi_n(x) - \phi(x)) = 0.$$

**Ορισμός 1.4.** Έστω  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση, με  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Η  $f$  λέγεται τοπικά ολοκληρώσιμη αν για κάθε  $K \subset \Omega$  συμπαγές

$$\int_K |f| dx < \infty.$$

Το σύνολο των τοπικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων γράφεται

$$L_{loc}^1 = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, |f| \in L^1(K) \text{ για κάθε } K \subset \Omega, K \text{ συμπαγές}\}.$$

**Ορισμός 1.5 (Ασθενής παράγωγος).** Έστω  $f, F \in L_{loc}^1(\Omega)$ .  $(L_{loc}^1(\Omega))'$  : για κάθε συμπαγές υποσύνολο  $K \subset \Omega$  ισχύει ότι

$$\int_K |u(x)| dx < \infty, \quad \forall u \in L^1(\Omega).$$

Αν για όλες τις συναρτήσεις  $g \in C_0^\infty(\Omega)$  ισχύει ότι

$$\int_\Omega F(x)g(x)dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f(x)D^\alpha g(x)dx,$$

τότε η  $F(x)$  λέγεται ασθενής παράγωγος της  $f(x)$  ως προς τον πολυδείκτη  $\alpha$ .

**Ορισμός 1.6 (Κατανομή).** Ένα συνεχές γραμμικό συναρτησιακό ορισμένο στον χώρο  $C_0^\infty(\Omega)$  λέγεται κατανομή. Το σύνολο όλων των κατανομών συμβολίζεται με  $(C_0^\infty(\Omega))'$ . Έστω  $u \in C_0^\infty(\Omega)$  και  $\psi \in (C_0^\infty(\Omega))'$ . Τότε ο ακόλουθος συμβολισμός χρησιμοποιείται για την εφαρμογή της κατανομής στην συνάρτηση

$$\psi(u(x)) = (\psi, u) \in \mathbb{R}.$$

**Σημείωση 1.1** (Για τις κατανομές). Οι κατανομές είναι μια γενίκευση συναρτήσεων. Αντιστοιχίζουν κάθε συνάρτηση από τον  $C_0^\infty(\Omega)$  στους πραγματικούς αριθμούς.

**Σημείωση 1.2** (Για τους χώρους  $L^p(\Omega)$ ). Οι χώροι Lebesgue ορίστηκαν παραπάνω στον Ορισμό (1.1).

- Τα στοιχεία των χώρων  $L^p(\Omega)$  είναι, αυστηρά μιλώντας, ισοδύναμες κλάσεις συναρτήσεων που διαφέρουν μόνο σε ένα σύνολο μηδενικού μέτρου Lebesgue.
- Οι χώροι  $L^p(\Omega)$  είναι χώροι Banach.
- Ο χώρος  $L^2(\Omega)$  είναι χώρος Hilbert με το εσωτερικό γινόμενο

$$(f, g) = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx, \quad \|f\|_{L^2(\Omega)} = (f, f)^{1/2}, \quad f, g \in L^2(\Omega).$$

- Ο δυϊκός ενός χώρου  $X$  είναι ο χώρος όλων των φραγμένων γραμμικών συναρτησιακών που ορίζονται στον  $X$ . Έστω  $\Omega$  ένα χωρίο με επαρκώς ομαλό σύνορο  $\Gamma$  και έστω οι χώροι Lebesgue  $L^p(\Omega), p \in [1, \infty]$ , τότε

$$(L^p(\Omega))' = L^q(\Omega), \quad p, q \in (1, \infty), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$(L^1(\Omega))' = L^\infty(\Omega)$$

$$(L^\infty(\Omega))' \neq L^1(\Omega).$$

Οι χώροι  $L^1(\Omega)$  και  $L^\infty(\Omega)$  δεν είναι ανακλαστικοί, δηλαδή ο δυϊκός του δυϊκού δεν είναι ο αρχικός χώρος.

**Ορισμός 1.7 (Χώροι Sobolev).** Έστω  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  και  $p \in [1, \infty]$ , τότε ο χώρος Sobolev  $W_p^k(\Omega)$  ορίζεται ως

$$W_p^k(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ με } |\alpha| \leq k\},$$

εφοδιασμένος με την νόρμα

$$\|u\|_{W_p^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}. \quad (1.2.6)$$

**Σημείωση 1.3** (Για τους χώρους Sobolev). Θα καταγράψουμε μερικές βασικές ιδιότητες των χώρων Sobolev.

- Ο Ορισμός 1.7 έχει την εξής ερμηνεία. Από την  $u \in L^p(\Omega), p \in [1, \infty)$  προκύπτει ότι  $u \in L_{loc}^1$ , με τέτοιο τρόπο ώστε η  $u(x)$  να ορίζει μια κατανομή. Τότε όλες οι παράγωγοι  $D^\alpha u$  υπάρχουν με την έννοια των κατανομών. Η πρόταση  $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$  σημαίνει ότι η κατανομή  $D^\alpha u \in (C_0^\infty)'$  μπορεί να αναπαραστεί από μια συνάρτηση του  $L^p(\Omega)$ .

- Μπορούμε να προσθέσουμε στοιχεία του χώρου  $W_p^k(\Omega)$  καθώς και να τα πολλαπλασιάσουμε με έναν πραγματικό αριθμό. Το αποτέλεσμα είναι και πάλι στοιχείο του  $W_p^k(\Omega)$ . Επομένως ο χώρος  $W_p^k(\Omega)$  είναι ένας διανυσματικός χώρος με νόρμα την (1.2.6).
- Ισχύει ότι  $D^\alpha u = u(x) \Leftrightarrow \alpha = (0, \dots, 0)$  και  $W_p^0(\Omega) = L^p(\Omega)$ .
- Οι χώροι  $W_p^k(\Omega)$  είναι χώροι Banach.
- Οι χώροι Sobolev για  $p \in [1, \infty)$  έχουν μια αριθμήσιμη βάση  $\{\phi_n(x)\}_{n=1}^\infty$  (βάση Schauder), δηλαδή κάθε στοιχείο  $u(x)$  μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \phi_n(x), \quad u_n \in \mathbb{R}, \quad n = 1, \dots, \infty.$$

- Οι χώροι Sobolev είναι ομοιόμορφα κυρτοί για  $p \in (1, \infty)$ .
- Οι χώροι Sobolev είναι ανακλαστικοί για  $p \in (1, \infty)$ .
- Μπορεί να δείξει κανείς ότι ο  $C^\infty(\Omega)$  είναι πυκνός στον  $W_p^k(\Omega)$ . Με αυτήν την ιδιότητα μπορούμε να δούμε τους χώρους  $W_p^k(\Omega)$  ως την πλήρωση των συναρτήσεων του  $C^\infty(\Omega)$  ως προς την νόρμα (1.2.6). Αν έχουμε χωρίο με αρκετά ομαλό σύνορο τότε μπορεί κανείς να δείξει ότι ο  $C^\infty(\bar{\Omega})$  είναι πυκνός στον  $W_p^k(\Omega)$ .
- Ο χώρος Sobolev  $H^k(\Omega) = W_2^k(\Omega)$  είναι χώρος Hilbert με εσωτερικό γινόμενο

$$(u, v)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx$$

και νόρμα  $\|u\|_{H^k(\Omega)} = (u, u)_{H^k(\Omega)}^{1/2}$ .

**Ορισμός 1.8 (Συνέχεια Hölder).** Μια συνάρτηση  $u(x)$  λέγεται Hölder συνεχής αν

$$\|u\|_{C^{k,a}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{C(\bar{\Omega})} + \sum_{|\alpha|=k} [D^\alpha u]_{C^{0,a}(\bar{\Omega})}$$

με

$$[D^\alpha u]_{C^{0,a}(\bar{\Omega})} = \sup_{x,y \in \Omega} \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} \right\}$$

να είναι πεπερασμένο.

**Ορισμός 1.9 (Σύνορο κλάσης  $C^{k,a}$ ).** Ένα φραγμένο χωρίο  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  και το σύνορό του  $\Gamma$  είναι τάξης  $C^{k,a}$ ,  $0 \leq a \leq 1$  αν για κάθε  $x_0 \in \Gamma$  υπάρχει μια μπάλα  $B(x_0, r)$  με  $r > 0$  και μια 1-1 απεικόνιση  $\psi : B(x_0, r) \rightarrow D \subset \mathbb{R}^n$  τ.ω.

1.  $\psi(B(x_0, r) \cap \Omega) \subset \mathbb{R}_+^n$ ,
2.  $\psi(B(x_0, r) \cap \Gamma) \subset \partial \mathbb{R}_+^n$ ,
3.  $\psi \in C^{k,a}(B(x_0, r))$ ,  $\psi^{-1} \in C^{k,a}(D)$  είναι Hölder συνεχείς.

Αυτό σημαίνει ότι το σύνορο  $\Gamma$  είναι τοπικά το γράφημα μιας συνάρτησης με  $d - 1$  ορίσματα.

**Σημείωση 1.4** (Lipschitz σύνορο). Θα υποθέτουμε από εδώ και πέρα ότι το σύνορο του  $\Omega$  θα είναι κλάσης  $C^{0,1}$ . Αυτό σημαίνει ότι η απεικόνιση είναι Lipschitz συνεχής. Έτσι το σύνορο λέγεται Lipschitz καθώς και το χωρίο  $\Omega$ . Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό ενός συνόρου Lipschitz είναι ότι το εξωτερικό μοναδιαίο διάνυσμα ορίζεται σχεδόν παντού στο σύνορο και είναι παντού συνεχές.

**Ορισμός 1.10.** Έστω  $v$  μη μηδενικό διάνυσμα και έστω ότι για κάθε  $x \neq 0$  θέτουμε  $L(x, v)$  την γωνία μεταξύ των δύο διανυσμάτων. Για δεδομένα  $v, \rho > 0$  και  $\kappa, 0 < \kappa \leq \pi$  το σύνολο

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n : x = 0 \text{ ή } 0 < |x| \leq \rho, L(x, v) \leq \kappa/2\}$$

λέγεται πεπερασμένος κώνος ύψους  $\rho$ , κατεύθυνσης  $v$  και γωνία ανοίγματος  $\kappa$  με κορυφή το κέντρο  $O$ .

**Ορισμός 1.11** (Ιδιότητα κώνου). Ένα χωρίο  $\Omega$  ικανοποιεί την ιδιότητα κώνου αν υπάρχει ένας πεπερασμένος κώνος  $C$  τέτοιος ώστε κάθε  $x \in \Omega$  να είναι η κορυφή ενός κώνου  $C_x$  μέσα στο  $\Omega$  και αυτός ο κώνος  $C_x$  να είναι ίσος με τον  $C$ .

**Θεώρημα 1.1** (Θεώρημα Ενσφήνωσης Χώρων Sobolev). Έστω χωρίο  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  και για  $1 \leq k \leq n$  έστω  $\Omega_k$  είναι η τομή του  $\Omega$  με ένα επίπεδο διάστασης  $k$  στον  $\mathbb{R}^n$ . (Αν  $k = n$  τότε  $\Omega_k = \Omega$ ) Έστω  $j \geq 0$  και  $m \geq 1$  ακέραιοι και έστω  $1 \leq p < \infty$ .

**ΜΕΡΟΣ 1ο.** Έστω ότι το  $\Omega$  ικανοποιεί την ιδιότητα του κώνου.

**Περίπτωση Α.** Αν  $mp > n$  ή  $m = n$  και  $p = 1$ , τότε,

$$W_p^{j+m}(\Omega) \rightarrow C_B^j(\Omega). \quad (1.2.7)$$

Επιπλέον, αν  $1 \leq k \leq n$

$$W_p^{j+m}(\Omega) \rightarrow W_q^m(\Omega_k) \quad p \leq q \leq \infty \quad (1.2.8)$$

και γενικότερα

$$W_p^m(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega) \quad p \leq q \leq \infty.$$

**Περίπτωση Β.** Αν  $1 \leq k \leq n$  και  $mp = n$  τότε,

$$W_p^{j+m}(\Omega) \rightarrow W_q^m(\Omega_k) \quad p \leq q < \infty \quad (1.2.9)$$

και γενικότερα

$$W_p^m(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega) \quad p \leq q < \infty.$$

**Περίπτωση Γ.** Αν  $mp < n$  και  $n - mp < k \leq n$  ή  $p = 1$  και  $n - m \leq k \leq n$ , τότε,

$$W_p^{j+m}(\Omega) \rightarrow W_q^m(\Omega_k) \quad p \leq q \leq p^* = kp/(n - mp) \quad (1.2.10)$$

και γενικότερα

$$W_p^m(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega) \quad p \leq q \leq p^* = np/(n - mp).$$

Οι σταθερές των παραπάνω ενσφηνώσεων εξαρτώνται μόνο από τα  $n, m, p, q, j, k$  και την διάσταση του κώνου  $C$ .

**ΜΕΡΟΣ 2ο.** Έστω ότι το  $\Omega$  είναι Lipschitz. Τότε ο χώρος  $C_B^j(\Omega)$  στην (1.2.7) μπορεί να αντικατασταθεί με τον μικρότερο χώρο  $C^j(\bar{\Omega})$  και η ενσφήνωση μπορεί να γραφτεί ως εξής:

Αν  $mp > n > (m - 1)p$  τότε,

$$W_p^{j+m}(\Omega) \rightarrow C^{j,\lambda}(\bar{\Omega}) \quad \text{για } 0 < \lambda \leq m - (n/p) \quad (1.2.11)$$

και αν  $n = (m - 1)p$  τότε,

$$W_p^{j+m}(\Omega) \rightarrow C^{j,\lambda}(\bar{\Omega}) \quad \text{για } 0 < \lambda < 1. \quad (1.2.12)$$

Επίσης αν  $n = m - 1$  και  $p = 1$  τότε η (1.2.12) ισχύει και για  $\lambda = 1$ .

**Σημείωση 1.5.** Αν το  $\Omega_k$  (ή το  $\Omega$ ) έχουν πεπερασμένο μέτρο, οι σχέσεις (1.2.8)-(1.2.10) ισχύουν και για  $1 \leq p < q$  συμπληρωματικά με τους παραπάνω περιορισμούς.

**Θεώρημα 1.2.** Έστω χωρίο  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  που ικανοποιεί την ιδιότητα του κώνου. Έστω  $\Omega_k$  η τομή του  $\Omega$  με ένα επίπεδο διάστασης  $k$  στον  $\mathbb{R}^n$ . Έστω, επίσης,  $k, m$  θετικοί ακέραιοι και  $p > 1$ . Υποθέτουμε ότι  $mp < n$  και  $n - mp < k \leq n$ . Θεωρούμε επίσης  $\nu$  τον μεγαλύτερο ακέραιο με  $\nu < mp$  και  $n - \nu \leq k$ . Τότε υπάρχει σταθερά  $K$  τ.ω. η ανισότητα

$$\|u\|_{L^{kq_0/n}(\Omega_k)} \leq K \|u\|_{L^{q_0}(\Omega)}^{1-\theta} \|u\|_{W_{p_0}^m(\Omega)}^\theta \quad (1.2.13)$$

να ισχύει για κάθε  $u \in W_{p_0}^m(\Omega)$ , όπου

$$q_0 = p_0^* = \frac{np_0}{n - mp_0} \quad \text{και} \quad \theta = \frac{\nu p_0}{\nu p_0 + (mp_0 - \nu)q_0}.$$

**Σημείωση 1.6.** Για  $k = n - 1$  μπορεί κάποιος να ορίσει ως  $\Omega_k = \partial\Omega$  με κατάλληλη επιλογή του επιπέδου που θα κάνει τομή με το  $\Omega$ .

### 1.3 Εισαγωγή στις αριθμητικές μεθόδους σε ελλειπτικές ΜΔΕ

Έστω ότι έχουμε το εξής πρόβλημα: Βρες  $u \in H^2(\Omega)$  τ.ω. να ικανοποιεί το παρακάτω πρόβλημα συνοριακών συνθηκών (ΠΣΣ)

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & \text{στο } \Omega \\ \nabla u \mathbf{n} + \mu u &= 0 & \text{στο } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

όπου  $f \in L^2(\Omega)$  και  $\Omega$  έχει Lipschitz σύνορο.

Αυτό που θέλουμε να κάνουμε είναι να μετατρέψουμε το πρόβλημα σε μια ισόδυναμη μορφή στην οποία θα 'χαλαρώσουμε' τις απαιτήσεις μας για την λύση  $u$ . Άρα,

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega} \Delta u v \, dx &= \int_{\Omega} f v \, dx \Rightarrow \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} \nabla u \mathbf{n} v \, ds = \int_{\Omega} f v \, dx \\ &\Rightarrow \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx + \int_{\partial\Omega} \mu u v \, ds = \int_{\Omega} f v \, dx \text{ για κάθε } v \in H^1(\Omega), \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

όπου  $v$  είναι συνάρτηση δοκιμής.

Επομένως αν θεωρήσουμε τη διγραμμική απεικόνιση  $\alpha(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx + \int_{\partial\Omega} \mu u v \, ds$  καθώς και  $(\cdot, \cdot) = (\cdot, \cdot)_{L^2(\Omega)}$  το εσωτερικό γινόμενο στον  $L^2(\Omega)$ , το πρόβλημα μετατρέπεται στην ασθενή του μορφή: Βρες  $u \in H^1(\Omega)$  τ.ω. να ικανοποιεί την παρακάτω ολοκληρωτική εξίσωση

$$\alpha(u, v) = (f, v) = f(v) \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (1.3.3)$$

Το παραπάνω πρόβλημα αποτελεί μια περίπτωση ελλειπτικής ΜΔΕ με Robin συνοριακές συνθήκες. Στη συνέχεια θα αναφέρουμε μερικά αποτελέσματα για ελλειπτικά προβλήματα.

**Ορισμός 1.12** (Φραγμένη διγραμμική μορφή, πιεστική διγραμμική μορφή,  $V$ -ελλειπτική διγραμμική μορφή). Έστω  $b(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  μια διγραμμική απεικόνιση στον χώρο Banach  $V$ . Τότε είναι φραγμένη αν,

$$|b(u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall u, v \in V, M > 0, \quad (1.3.4)$$

όπου η σταθερά  $M$  είναι ανεξάρτητη από τα  $u, v$ . Η διγραμμική απεικόνιση είναι πιεστική ή  $V$ -ελλειπτική αν

$$b(u, u) \geq m \|u\|_V^2 \quad \forall u \in V, m > 0, \quad (1.3.5)$$

όπου η σταθερά  $m$  είναι ανεξάρτητη του  $u$ .

**Θεώρημα 1.3 (Γενική ανισότητα Poincare-Friedrichs).** Θα δείξουμε ότι:

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq c\|v\|_\alpha,$$

όπου  $\alpha(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx + \int_{\partial\Omega} \mu uv \, ds$  για  $u \in H^1(\Omega)$  και για κάθε  $v \in H^1(\Omega)$ .

*Απόδειξη.* Έστω  $\Omega = (a, b) \times (c, d)$  και  $u \in C^\infty(\Omega)$  (χρησιμοποιούμε τον  $C^\infty(\Omega)$  αφού είναι πυκνός υπόχωρος του  $H^1(\Omega)$ ), δηλαδή για  $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset C^\infty(\Omega)$  ισχύει ότι  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u \in H^1(\Omega)$ .

Γενικά έχουμε ότι  $u(x, y) = u(a, y) + \int_a^x \frac{\partial u}{\partial \xi}(\xi, y) \, d\xi$  για  $c \leq y \leq d$  από Θεμελιώδες Θεώρημα Απειροστικού Λογισμού.

Επομένως,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u(x, y)|^2 \, dx dy &= \int_a^b \int_c^d |u(a, y) + \int_a^x \frac{\partial u}{\partial \xi}(\xi, y) \, d\xi|^2 \, dx dy \\ &\leq 2 \int_a^b \int_c^d |u(a, y)|^2 \, dx dy + 2 \int_a^b \int_c^d \left| \int_a^x \frac{\partial u}{\partial \xi}(\xi, y) \, d\xi \right|^2 \\ &\leq 2(b-a) \int_c^d |u(a, y)|^2 \, dy + 2 \int_a^b \int_c^d (x-a) \left( \int_a^x \left| \frac{\partial u}{\partial \xi}(\xi, y) \right|^2 \, d\xi \right) \, dx dy \\ &\leq 2(b-a) \int_c^d |u(a, y)|^2 \, dy + 2 \left( \frac{b^2 - a^2}{2} - a(b-a) \right) \int_a^b \int_c^d \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \right|^2 \, dx dy \\ \Rightarrow \int_{\Omega} |u(x, y)|^2 \, dx dy &\leq 2(b-a) \int_c^d |u(a, y)|^2 \, dy + 2 \left( \frac{b^2 - a^2}{2} - a(b-a) \right) \int_a^b \int_c^d \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \right|^2 \, dx dy. \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

Όμοια έχουμε

$$\int_{\Omega} |u(x, y)|^2 \, dx dy \leq 2(d-c) \int_a^b |u(x, c)|^2 \, dx + 2 \left( \frac{d^2 - c^2}{2} - c(d-c) \right) \int_a^b \int_c^d \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right|^2 \, dx dy \quad (1.3.7)$$

$$\int_{\Omega} |u(x, y)|^2 \, dx dy \leq 2(b-a) \int_c^d |u(b, y)|^2 \, dy + 2 \left( \frac{b^2 - a^2}{2} - b(b-a) \right) \int_a^b \int_c^d \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \right|^2 \, dx dy \quad (1.3.8)$$

$$\int_{\Omega} |u(x, y)|^2 \, dx dy \leq 2(d-c) \int_a^b |u(x, d)|^2 \, dx + 2 \left( \frac{d^2 - c^2}{2} - d(d-c) \right) \int_a^b \int_c^d \left| \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right|^2 \, dx dy \quad (1.3.9)$$

Προσθέτοντας τις παραπάνω σχέσεις καταλήγουμε στην ανισότητα

$$\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \leq C \left( \int_{\partial\Omega} |u(s)|^2 ds + \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \right), \quad (1.3.10)$$

όπου  $x \in \mathbb{R}^2$  και  $C = \max \left( \frac{b-a}{2}, \frac{d-c}{2}, \frac{a^2-b^2}{4}, \frac{c^2-d^2}{4} \right)$ .

□

Παρόμοια είναι και η απόδειξη σε γενικό  $\Omega$ . Η γενική ιδέα είναι ότι τοπικά το σύνορο είναι μια συνάρτηση του  $x$ , κι έτσι από το Θεώρημα Απειροστικού Λογισμού θα έχουμε  $u(x, y) = u(a, y) + \int_a^x \frac{\partial u}{\partial \xi}(\xi, y(\xi)) d\xi$ . Η συνέχεια της απόδειξης είναι παρόμοια. Τα επόμενα θεωρήματα είναι πολύ βασικά στην απόδειξη ύπαρξης και μοναδικότητας λύσης σε μια διγραμμική απεικόνιση σε έναν χώρο Hilbert.

**Θεώρημα 1.4 (Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz).** Έστω χώρος Hilbert  $V$  με εσωτερικό γινόμενο  $\alpha : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  και νόρμα  $\|v\|_V = \alpha(v, v)^{1/2}$ . Έστω  $f \in V'$  συνεχές και γραμμικό συναρτησιακό, τότε υπάρχει μοναδικά ορισμένο  $u \in V$  με

$$\alpha(u, v) = f(v) \quad \forall v \in V. \quad (1.3.11)$$

Επιπλέον, η  $u$  είναι η λύση του προβλήματος ελαχιστοποίησης

$$F(v) = \frac{1}{2} \alpha(v, v) - f(v) \rightarrow \min \quad \forall v \in V. \quad (1.3.12)$$

Απόδειξη. Πρώτα θα δείξουμε την ύπαρξη λύσης του προβλήματος. Εφόσον το  $f$  είναι συνεχές έχουμε ότι

$$|f(v)| \leq c \|v\|_V \quad \forall v \in V \Rightarrow |f(v)| \leq \inf_{v \in V} \|v\|_V$$

Αυτό σημαίνει ότι λόγω της (1.3.11) για  $v = u \in V$  έχουμε

$$\|u\|_V^2 = |\alpha(u, u)| = |f(u)| \leq c \|u\|_V \Rightarrow \|u\|_V \leq c \Rightarrow \inf_{v \in V} \|v\|_V \leq c.$$

Επίσης παρατηρούμε το εξής

$$-c \inf_{v \in V} \|v\|_V \leq -f(v) \leq c \inf_{v \in V} \|v\|_V.$$

Παίρνοντας την δεξιά ανισότητα, προσθέτουμε και στα δύο μέλη  $\frac{1}{2} \alpha(v, v)$  και έχουμε



$$\frac{1}{2}\alpha(v, v) - f(v) \geq \frac{1}{2}\alpha(v, v) - c \inf_{v \in V} \|v\|_V \geq -\frac{1}{2}\alpha(v, v) - c \inf_{v \in V} \|v\|_V \geq -\frac{1}{2}c^2$$

και άρα η (1.3.12) γίνεται

$$F(v) \geq \frac{1}{2}\|v\|_V^2 - c\|v\|_V \geq -\frac{1}{2}c^2.$$

Με αυτό δείξαμε ότι η  $F(\cdot)$  είναι κάτω φραγμένη και το

$$d = \inf_{v \in V} F(v)$$

υπάρχει.

Έστω τώρα ακολουθία  $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  με  $F(v_k) \rightarrow d$  για  $k \rightarrow \infty$ . Με τη χρήση του κανόνα του παραλληλογράμμου σε χώρους Hilbert παίρνουμε

$$\|v_k - v_l\|_V^2 + \|v_k + v_l\|_V^2 = 2\|v_k\|_V^2 + 2\|v_l\|_V^2.$$

Χρησιμοποιώντας την γραμμικότητα του  $f(\cdot)$  και ότι  $d \leq F(v)$  για κάθε  $v \in V$  καταλήγουμε στο παρακάτω,

$$\begin{aligned} \|v_k - v_l\|_V^2 &= 2\|v_k\|_V^2 + 2\|v_l\|_V^2 - 4\left\|\frac{v_k + v_l}{2}\right\|_V^2 - 4f(v_k) - 4f(v_l) + 8f\left(\frac{v_k + v_l}{2}\right) \\ &= 4F(v_k) + 4F(v_l) - 8F\left(\frac{v_k + v_l}{2}\right) \leq 4F(v_k) + 4F(v_l) - 8d \rightarrow 0 \end{aligned}$$

για  $k, l \rightarrow \infty$ . Έτσι δείξαμε ότι η  $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  είναι Cauchy. Επειδή ο  $V$  είναι πλήρης χώρος η ακολουθία θα συγκλίνει σε ένα  $u \in V$ . Επειδή η  $F(\cdot)$  είναι συνεχής  $F(u) = d$  και η  $u$  είναι η λύση του προβλήματος.

Τώρα θα δείξουμε ότι κάθε λύση του προβλήματος ελαχιστοποίησης (1.3.12) είναι και λύση του προβλήματος (1.3.11). Έχουμε

$$\begin{aligned} \Phi(\varepsilon) &= F(u + \varepsilon v) = \frac{1}{2}\alpha(u + \varepsilon v, u + \varepsilon v) - f(u + \varepsilon v) \\ &= \frac{1}{2}\alpha(u, u) + \varepsilon\alpha(u, v) + \frac{\varepsilon^2}{2}\alpha(v, v) - f(u) - \varepsilon f(v). \end{aligned}$$

Αν η  $u$  είναι η λύση στο πρόβλημα ελαχιστοποίησης, δηλαδή είναι το ελάχιστο της  $F$ , τότε η συνάρτηση  $\Phi(\varepsilon)$  έχει τοπικό ελάχιστο για  $\varepsilon = 0$ . Συνεπώς

$$0 = \Phi'(0) = \alpha(u, v) - f(v) \quad \forall v \in V.$$

Τέλος, θα αποδείξουμε την μοναδικότητα της λύσης. Προφανώς αν δείξουμε ότι η λύση είναι μοναδική για το πρόβλημα (1.3.11), τότε το να έχει δύο λύσεις το πρόβλημα ελαχιστοποίησης (1.3.12) θα είναι αντιπαραθετικό στην μοναδικότητα της προηγούμενης. Έστω  $u_1, u_2$  δύο λύσεις του προβλήματος (1.3.11). Παίρνοντας την διαφορά των δύο εξισώσεων που προκύπτουν έχουμε

$$\alpha(u_1 - u_2, v) = 0 \quad \forall v \in V.$$

Για  $v = u_1 - u_2 \in V$  έχουμε ότι  $\|u_1 - u_2\|_V = 0 \Rightarrow u_1 = u_2$  και άρα η λύση είναι μοναδική.  $\square$

**Θεώρημα 1.5 (Θεώρημα Lax-Milgram).** Έστω  $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  είναι μια φραγμένη και ελλειπτική διγραμμική απεικόνιση στον χώρο Hilbert  $V$ . Τότε για κάθε φραγμένο συναρτησιακό  $f \in V'$  υπάρχει ακριβώς μια μοναδική λύση  $u \in V$  με

$$b(u, v) = f(v) \quad \forall v \in V. \quad (1.3.13)$$

Απόδειξη. Ορίζουμε γραμμικούς τελεστές  $T, T' : V \mapsto V$  ως

$$\alpha(Tu, v) = b(u, v) \quad \forall v \in V, \quad \alpha(T'u, v) = b(v, u) \quad \forall v \in V. \quad (1.3.14)$$

Εφόσον τα  $b(u, \cdot), b(\cdot, u)$  είναι συνεχή γραμμικά συναρτησιακά στον  $V$ , από το Θεώρημα 1.4 προκύπτει ότι τα στοιχεία  $Tu, T'u$  υπάρχουν και ορίζονται κατά μοναδικό τρόπο. Επειδή οι τελεστές ικανοποιούν την παρακάτω σχέση

$$\alpha(Tu, v) = b(u, v) = \alpha(T'v, u) = \alpha(u, T'v), \quad (1.3.15)$$

οι τελεστές  $T, T'$  λέγονται συζυγείς. Θέτουμε  $v = Tu$  στην (1.3.14) και χρησιμοποιώντας την φραξιμότητα του διγραμμικού  $b(\cdot, \cdot)$  έχουμε

$$\|Tu\|_V^2 = \alpha(Tu, Tu) = b(u, Tu) \leq M\|u\|_V\|Tu\|_V \Rightarrow \|Tu\|_V \leq M\|u\|_V,$$

για κάθε  $v \in V$ . Επομένως, ο τελεστής  $T$  είναι φραγμένος. Εφόσον ο  $T$  είναι και γραμμικός, έπεται ότι είναι και συνεχής. Με τα ίδια επιχειρήματα μπορούμε να πούμε ότι και ο  $T'$  είναι φραγμένος και συνεχής. Ορίζουμε την διγραμμική απεικόνιση

$$d(u, v) := \alpha(T'Tu, v) = \alpha(T'u, T'v) \quad \forall u, v \in V,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την (1.3.15). Η παραπάνω διγραμμική απεικόνιση είναι συμμετρική. Χρησιμοποιώντας την πιεστικότητα της  $b(\cdot, \cdot)$  και την ανισότητα Cauchy-Schwartz έχουμε,

$$m^2\|v\|_V^4 \leq b(v, v)^2 = \alpha(T'v, v)^2 \leq \|v\|_V^2\|T'v\|_V^2 = \|v\|_V^2\alpha(T'v, T'v) = \|v\|_V^2d(v, v).$$

Εφαρμόζοντας την φραξιμότητα της  $\alpha(\cdot, \cdot)$  και του  $T'$  έχουμε,

$$m^2\|v\|_V^2 \leq d(v, v) = \alpha(T'v, T'v) \leq \|T'v\|_V^2 \leq M\|v\|_V^2, \quad (1.3.16)$$

που σημαίνει ότι η  $d(\cdot, \cdot)$  είναι πιστική και φραγμένη και αφού είναι συμμετρική, ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στον  $V$ . Από την (1.3.16) μπορεί κανείς να δείξει ότι η νόρμα που επάγεται από την  $d(v, v)^{1/2}$  είναι ισοδύναμη με την  $\|v\|_V$ . Από το Θεώρημα 1.4 προκύπτει ότι υπάρχει ένα μοναδικό  $w \in V$  τ.ω.

$$d(w, v) = f(v) \quad \forall v \in V.$$

Εισάγοντας  $u = T'w$  στην (1.3.13) παίρνουμε σε συνδυασμό με την (1.3.14) το εξής,

$$b(T'w, v) = \alpha(T'Tw, v) = d(w, v) = f(v) \quad \forall v \in V,$$

που σημαίνει ότι η  $u = T'w$  είναι λύση της (1.3.13). Η μοναδικότητα προκύπτει με τον ίδιο τρόπο όπως στην συμμετρική περίπτωση (Θεώρημα 1.4).  $\square$

**Σημείωση 1.7** (Η ιδέα της μεθόδου Galerkin). Έστω  $V$  χώρος Hilbert και έστω διγραμμική απεικόνιση  $b(\cdot, \cdot)$  η οποία είναι φραγμένη και πιστική, αλλά όχι συμμετρική. Ας θεωρήσουμε, σύμφωνα με το Θεώρημα Lax-Milgram, ότι  $u \in V$  είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης (1.3.13), με  $f \in V'$  φραγμένο συναρτησιακό. Για να προσεγγίσουμε τη λύση αριθμητικά, θεωρούμε ότι ο  $V$  έχει αριθμήσιμη ορθοκανονική βάση (βάση Schauder). Τότε, υπάρχουν υπόχωροι πεπερασμένης διάστασης  $V_1, V_2, \dots \subset V$  με  $\dim V_k = k$  με την εξής ιδιότητα: για κάθε  $u \in V$  και κάθε  $\varepsilon > 0$  υπάρχει  $K \in \mathbb{N}$  και  $u_k \in V_k$  τ.ω.

$$\|u - u_k\|_V \leq \varepsilon \quad \forall k \geq K. \quad (1.3.17)$$

Η μέθοδος Galerkin για την εξίσωση (1.3.13) ορίζεται ως εξής: Βρες  $u_k \in V_k$  τ.ω.

$$b(u_k, v_k) = f(v_k) \quad \forall v_k \in V_k. \quad (1.3.18)$$

**Λήμμα 1.2** (Υπαρξη και μοναδικότητα λύσης της (1.3.18)). Υπάρχει μια μοναδική λύση της (1.3.18).

Απόδειξη. Υπόχωροι πεπερασμένης διάστασης χώρων Hilbert, είναι με τη σειρά τους χώροι Hilbert. Άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Lax-Milgram (θεώρημα 1.5), στην εξίσωση (1.3.18) και καταλήγουμε στην πρόταση του λήμματος.  $\square$

**Σημείωση 1.8.** Η διακριτή λύση  $u_k$  δεν είναι η ορθογώνια προβολή της  $u$  στον  $V_k$  στην περίπτωση μιας πιστικής και φραγμένης διγραμμικής απεικόνισης, η οποία δεν είναι το εσωτερικό γινόμενο του χώρου  $V$ . Άρα το ζητούμενο πλέον είναι αυτό το  $u_k$  να προσεγγίζει όσο το δυνατόν καλύτερα την λύση  $u$  του προβλήματος (1.3.18). Το επόμενο λήμμα αποδεικνύει ακριβώς αυτό.

**Λήμμα 1.3 (Λήμμα του Cèa, εκτίμηση σφάλματος).** Έστω  $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  είναι μια φραγμένη και ελλειπτική διγραμμική απεικόνιση στον χώρο Hilbert  $V$  και  $f \in V'$  είναι ένα φραγμένο συναρτησιακό. Έστω  $u$  η λύση του (1.3.13) και  $u_k$  η λύση του (1.3.18), τότε η εκτίμηση σφάλματος προκύπτει από την εξής ανισότητα

$$\|u - u_k\|_V \leq \frac{M}{m} \inf_{v_k \in V_k} \|u - v_k\|_V, \quad (1.3.19)$$

όπου οι σταθερές  $M, m$  προκύπτουν από τα κριτήρια που πληρούν τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Lax-Milgram.

Απόδειξη. Αφού η (1.3.13) ισχύει για κάθε  $v \in V$ , τότε θα ισχύει και για  $v_k \in V_k \subset V$ . Άρα έχουμε

$$b(u, v_k) = f(v_k) \quad \forall v_k \in V_k. \quad (1.3.20)$$

Αφαιρώντας την (1.3.18) από την (1.3.20) προκύπτει άμεσα η ορθογωνιότητα Galerkin για την παραπάνω διγραμμική απεικόνιση,

$$b(u - u_k, v_k) = 0 \quad \forall v_k \in V_k. \quad (1.3.21)$$

Από την παραπάνω σχέση και τις σχέσεις (1.3.4) και (1.3.5) έχουμε το εξής

$$\begin{aligned} \|u - u_k\|_V^2 &\leq \frac{1}{m} b(u - u_k, u - u_k) = \\ &= \frac{1}{m} b(u - u_k, u - u_k) + \frac{1}{m} b(u - u_k, u_k - v_k) = \\ &= \frac{1}{m} b(u - u_k, u - v_k) \leq \frac{M}{m} \|u - u_k\|_V \|u - v_k\|_V \end{aligned}$$

από όπου προκύπτει το ζητούμενο. □

**Σημείωση 1.9** (Υλοποίηση της μεθόδου Galerkin ως ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων). Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μια τυχαία βάση  $\{\phi_i\}_{i=1}^k \subset V_k$  για να υπολογίσουμε την  $u_k$ . Αρχικά, η εξίσωση (1.3.18) ικανοποιείται  $\forall v_k \in V_k$  αν και μόνο αν ικανοποιείται για κάθε συνάρτηση  $\phi_i$  της βάσης. Αυτή η πρόταση συνεπάγεται από τη γραμμικότητα της εξίσωσης και στα δύο μέλη ως προς την συνάρτηση δοκιμής  $v$  και από το γεγονός ότι κάθε συνάρτηση  $v_k \in V_k$  μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των συναρτήσεων βάσης.

Έστω  $v_k = \sum_{i=1}^k \beta_i \phi_i$ , τότε από την (1.3.18) προκύπτει

$$b(u_k, v_k) = \sum_{i=1}^k \beta_i b(u_k, \phi_i) = \sum_{i=1}^k \beta_i f(\phi_i) = f(v_k).$$

Αυτή η εξίσωση ικανοποιείται αν ικανοποιούνται οι  $b(u_k, \phi_i) = f(\phi_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ . Από την άλλη μπορούμε να πούμε ότι αν ισχύει η (1.3.18), τότε ισχύει για κάθε συνάρτηση βάσης  $\phi_i$ . Επίσης,  $u_k \in V_k$ , άρα

$$u_k = \sum_{j=1}^k u^j \phi_j$$

με άγνωστες σταθερές  $u^j \in \mathbb{R}$ . Χρησιμοποιώντας ως συναρτήσεις δοκιμής τις συναρτήσεις βάσης έχουμε

$$\sum_{j=1}^k b(u^j \phi_j, \phi_i) = \sum_{j=1}^k u^j b(\phi_j, \phi_i) = f(\phi_i), i = 1, 2, \dots, k.$$

Η εξίσωση πλέον είναι ισοδύναμη με ένα γραμμικό σύστημα εξισώσεων  $\mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{f}$ , όπου

$$\mathbf{B} = (b_{ij})_{i,j=1}^k = b(\phi_j, \phi_i)_{i,j=1}^k.$$

Το δεξί μέλος της εξίσωσης είναι ένα διάνυσμα μήκους  $k$  με  $f_i = f(\phi_i), i = 1, 2, \dots, k$ .

**Σημείωση 1.10.** Στα διαφορικά προβλήματα λογισμού των μεταβολών χρησιμοποιούνται συναρτήσεις χώρων *Sobolev*. Οι λύσεις των προβλημάτων αυτών προσεγγίζονται, μέσω της μεθόδου *Galerkin* για παράδειγμα, σε χώρους πεπερασμένης διάστασης, τους χώρους πεπερασμένων στοιχείων. Η βέλτιστη πιθανή προσέγγιση μιας συνάρτησης *Sobolev* από μια συνάρτηση από έναν χώρο πεπερασμένων στοιχείων είναι ένα κλάσμα στο άνω φράγμα του σφάλματος της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων, όπως στο Λήμμα του Cεα 1.3. Παρακάτω θα δείξουμε μερικά ποιοτικά αποτελέσματα ως προς την προσέγγιση αυτών των λύσεων.

**Λήμμα 1.4.** Έστω  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  φραγμένο χωρίο με *Lipschitz* σύνορο. Έστω  $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  δοσμένο και έστω ότι για όλες τις παραγώγους με πολυδείκτη  $\alpha$ ,  $|\alpha| \leq m$ , δίνεται η τιμή  $a_\alpha \in \mathbb{R}$ . Τότε υπάρχει ένα μοναδικά ορισμένο πολυώνυμο  $p \in P_m(\Omega)$  τ.ω.

$$\int_{\Omega} \partial_\alpha p(x) dx = a_\alpha, \quad |\alpha| \leq m. \quad (1.3.22)$$

**Σημείωση 1.11.** Το παραπάνω λήμμα μας λέει ότι ένα πολυώνυμο ορίζεται μοναδικά εάν είναι γνωστή εκ των προτέρων μια συνθήκη για το ολοκλήρωμα στο  $\Omega$  για κάθε παράγωγο.

**Λήμμα 1.5.** Ορίζουμε ως  $D^k v(x)$ ,  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , την ολική παράγωγο τάξης  $k$  μιας συνάρτησης  $v(x)$  (για  $k = 1$  έχουμε  $\nabla v(x)$ ). Έστω  $\Omega$  κυρτό χωρίο μέσα σε μια μπάλα ακτίνας  $R$ . Έστω  $k, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  με  $k \leq l$  και  $p \in \mathbb{R}$  με  $p \in [1, \infty]$ . Υποθέτουμε ότι το  $v \in W_p^l(\Omega)$  ικανοποιεί την παρακάτω σχέση

$$\int_{\Omega} \partial_\alpha v(x) dx = 0 \quad \forall |\alpha| \leq l - 1,$$

τότε προκύπτει το εξής αποτέλεσμα

$$\|D^k v\|_{L^p(\Omega)} \leq CR^{l-k} \|D^l v\|_{L^p(\Omega)},$$

όπου η σταθερά  $C$  είναι ανεξάρτητη του  $\Omega$  και του  $v(x)$ .

Μια σημαντική εφαρμογή του λήμματος 1.5 είναι η απόδειξη του Λήμματος Bramble-Hilbert.

**Θεώρημα 1.6 (Λήμμα Bramble-Hilbert).** Έστω  $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $m \geq 0$ ,  $p \in [1, \infty]$  και έστω  $F : W_p^{m+1}(\Omega) \mapsto \mathbb{R}$  γραμμικό συνεχές συναρτησιακό. Θεωρούμε ότι οι υποθέσεις των Λημμάτων 1.4 και 1.5 ικανοποιούνται. Έστω, ακόμα, ότι

$$F(p) = 0 \quad \forall p \in P_m(\Omega),$$

τότε υπάρχει σταθερά  $C(\Omega)$ , που είναι ανεξάρτητη από το  $v(x)$  και την  $F$ , τ.ω.

$$|F(v)| \leq C(\Omega) \|D^{m+1}v\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall v \in W_p^{m+1}(\Omega).$$

Απόδειξη. Έστω  $v \in W_p^{m+1}(\Omega)$ . Από το Λήμμα 1.4, υπάρχει  $p \in P_m(\Omega)$  τ.ω.

$$\int_{\Omega} \partial_{\alpha}(v+p)(x) dx = 0 \quad \text{για } |\alpha| \leq m.$$

Από το Λήμμα 1.5 για  $l = m + 1$  και θεωρώντας κάθε όρο στην νόρμα  $\|\cdot\|_{W_p^{m+1}(\Omega)}$  ξεχωριστά, έχουμε,

$$\|v+p\|_{W_p^{m+1}(\Omega)} \leq C(\Omega) \|D^{m+1}(v+p)\|_{L^p(\Omega)} = \|D^{m+1}v\|_{L^p(\Omega)}.$$

Από την υπόθεση για την  $F$  για  $p \in P_m(\Omega)$  και την συνέχειά της έχουμε,

$$|F(v)| = |F(v+p)| \leq c \|v+p\|_{W_p^{m+1}(\Omega)} \leq C(\Omega) \|D^{m+1}v\|_{L^p(\Omega)}.$$

□

**Σημείωση 1.12** (Υποθέσεις, ορισμός του τελεστή παρεμβολής). Έστω  $\hat{K} \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d \in \{2, 3\}$ , στοιχείο αναφοράς (συμπαγές πολύεδρο),  $\hat{P}(\hat{K})$  ένας πολυωνμικός χώρος διάστασης  $N$  και  $\hat{\Phi}_1, \dots, \hat{\Phi}_N : C^s(\hat{K}) \mapsto \mathbb{R}$  συνεχή γραμμικά συναρτησιακά. Θα θεωρήσουμε ότι στον χώρο  $\hat{P}(\hat{K})$  ορίζονται κατά μοναδικό τρόπο πολυώνυμα σε σχέση με αυτά τα συναρτησιακά. Τότε υπάρχει βάση  $\hat{\phi}_1, \dots, \hat{\phi}_N \in \hat{P}(\hat{K})$ . Θεωρούμε  $\hat{v} \in C^s(\Omega)$ , τότε ο τελεστής παρεμβολής  $I_{\hat{K}}\hat{v} \in \hat{P}(\hat{K})$  ορίζεται ως

$$I_{\hat{K}}\hat{v}(\hat{x}) = \sum_{i=1}^N \hat{\Phi}_i(\hat{v}) \hat{\phi}_i(\hat{x}).$$

Ο τελεστής  $I_{\hat{K}}$  είναι συνεχής και γραμμικός από τον  $C^s(\hat{K})$  στον  $\hat{P}(\hat{K})$ . Από την γραμμικότητα προκύπτει ότι ο  $I_{\hat{K}}$  είναι ο ταυτοτικός τελεστής στον  $\hat{P}(\hat{K})$ ,

$$I_{\hat{K}}\hat{p} = \hat{p} \quad \forall \hat{p} \in \hat{P}(\hat{K}).$$

**Θεώρημα 1.7 (Εκτίμηση σφάλματος για τον τελεστή παρεμβολής σε ένα στοιχείο αναφοράς).** Έστω  $P_m(\hat{K}) \subset \hat{P}(\hat{K})$  και  $p \in [1, \infty]$  με  $(m+1-s)p > d$ . Τότε υπάρχει σταθερά  $C$  ανεξάρτητη του  $\hat{v}(\hat{x})$  τ.ω.

$$\|\hat{v} - I_{\hat{K}}\hat{v}\|_{W_p^{m+1}(\hat{K})} \leq C \|D^{m+1}\hat{v}\|_{L^p(\hat{K})} \quad \forall \hat{v} \in W_p^{m+1}(\hat{K}). \quad (1.3.23)$$

Απόδειξη. Λόγω των ενσφηνώσεων στους χώρους Sobolev, Θεώρημα 1.1, για  $\lambda = 0$ ,  $m = m + 1$ ,  $j = s$ ,  $n = d$  ότι

$$W_p^{m+1}(\hat{K}) \rightarrow C^s(\hat{K})$$

αν  $(m + 1 - s)p > d$ . Αυτό σημαίνει ότι ο τελεστής παρεμβολής είναι καλά ορισμένος στον  $W_p^{m+1}(\hat{K})$ . Από την ταυτοτική ιδιότητα του τελεστή παρεμβολής στον χώρο  $\hat{P}(\hat{K})$ , την τριγωνική ανισότητα, την φραξιμότητα του τελεστή παρεμβολής (είναι γραμμικός και συνεχής τελεστής από τον  $C^s(\hat{K}) \rightarrow \hat{P}(\hat{K}) \subset W_p^{m+1}(\hat{K})$ ) και την ενσφήνωση σε χώρους Sobolev, παίρνουμε για  $\hat{q} \in \hat{P}(\hat{K})$  το εξής

$$\begin{aligned} \|\hat{v} - I_{\hat{K}}\hat{v}\|_{W_p^{m+1}(\hat{K})} &= \|\hat{v} + \hat{q} - I_{\hat{K}}(\hat{v} + \hat{q})\|_{W_p^{m+1}(\hat{K})} \\ &\leq \|\hat{v} + \hat{q}\|_{W_p^{m+1}(\hat{K})} + \|I_{\hat{K}}(\hat{v} + \hat{q})\|_{W_p^{m+1}(\hat{K})} \\ &\leq \|\hat{v} + \hat{q}\|_{W_p^{m+1}(\hat{K})} + c\|\hat{v} + \hat{q}\|_{C^s(\hat{K})} \leq c'\|\hat{v} + \hat{q}\|_{W_p^{m+1}(\hat{K})}. \end{aligned}$$

Διαλέγοντας  $\hat{q}(\hat{x})$  στο Λήμμα 1.4 τ.ω.

$$\int_{\hat{K}} \partial_\alpha(\hat{v} + \hat{q})(\hat{x})d\hat{x} = 0 \quad \forall |\alpha| \leq m$$

οι συνθήκες του Λήμματος 1.5 ικανοποιούνται και έτσι έχουμε

$$\|\hat{v} + \hat{q}\|_{W_p^{m+1}(\hat{K})} \leq C \|D^{m+1}(\hat{v} + \hat{q})\|_{L^p(\hat{K})} = C \|D^{m+1}\hat{v}\|_{L^p(\hat{K})}.$$

□

**Σημείωση 1.13** (Υποθέσεις για την τριγωνοποίηση). Για να υπολογίσουμε την εκτίμηση σφάλματος σε ένα τυχαίο στοιχείο  $K$  και, σε τελική ανάλυση, σε όλο τον χώρο πεπερασμένων στοιχείων, πρέπει κανείς να μελετήσει τις ιδιότητες των απεικονίσεων από το  $K$  στο  $\hat{K}$  καθώς και τις αντίστροφες, οι οποίες περιστρέφουν και μετατοπίζουν το  $\hat{K}$  στον χώρο. Θεωρούμε μια οικογένεια πεπερασμένων στοιχείων που έχει προκύψει ακριβώς με αυτή τη διαδικασία (περιστροφές και μετατοπίσεις του στοιχείου αναφοράς  $\hat{K}$ )

$$F_K \hat{x} = B\hat{x} + b$$

όπου ο  $B$  είναι ένας  $d \times d$  αντιστρέψιμος πίνακας και  $b$  είναι ένα διάνυσμα μήκους  $d$ .

Εστω  $h_K$  είναι η διάμετρος του  $K = F_K(\hat{K})$ , δηλαδή η μέγιστη απόσταση μεταξύ δύο σημείων εντός του  $K$ . Οι εικόνες  $\{K = F_K(\hat{K})\}$  θεωρούμε ότι ικανοποιούν τις εξής ιδιότητες

- το  $K \subset \mathbb{R}^d$  περιέχεται εντός μιας μπάλας με ακτίνα  $C_R h_K$ ,

- το  $K$  περιέχει μια μπάλα με ακτίνα  $C_R^{-1}h_K$ ,

όπου η σταθερά  $C_R$  είναι ανεξάρτητη του  $K$ . Συνεπώς, για κάθε  $K$  ισχύει

$$\frac{\text{ακτίνα περιγεγραμμένου κύκλου}}{\text{ακτίνα εγγεγραμμένου κύκλου}} \leq C_R^2.$$

Μια τριγωνοποίηση  $\mathcal{T}_h$ , με  $h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K$ , με την παραπάνω ιδιότητα λέγεται σχεδόν ομοιόμορφη τριγωνοποίηση.

**Θεώρημα 1.8 (Τοπική εκτίμηση για τον τελεστή παρεμβολής).** Έστω μια οικογένεια πεπερασμένων στοιχείων, η οποία έχει προκύψει από στροφές και μετατοπίσεις του στοιχείου αναφοράς  $\hat{K}$ , τα συναρτησιακά  $\{\Phi_i\}$  και ο πολυωνυμικός χώρος  $\hat{P}(\hat{K})$ . Έστω ότι ισχύουν όλες οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος 1.7. Τότε για κάθε  $v \in W_p^{m+1}(K)$ , όπου  $K$  τυχαίο στοιχείο, υπάρχει μια σταθερά  $C$  ανεξάρτητη του  $v(x)$  τ.ω.

$$\|D^k(v - I_K v)\|_{L^p(K)} \leq Ch_K^{m+1-k} \|D^{m+1}v\|_{L^p(K)}, \quad k \leq m+1. \quad (1.3.24)$$

**Σημείωση 1.14.** Είναι εύκολο κανείς να επεκτείνει τα αποτελέσματα των Θεωρημάτων 1.7 και 1.8 σε όλο το  $\Omega$  θεωρώντας σχεδόν ομοιόμορφη τριγωνοποίηση  $\mathcal{T}_h$  με  $h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K$ . Έτσι καταλήγουμε στα εξής,

$$\|v - I_h v\|_{W_p^{m+1}(\Omega)} \leq \|D^{m+1}v\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall v \in W_p^{m+1}(\Omega) \quad (1.3.25)$$

$$\|D^k(v - I_h v)\|_{L^p(\Omega)} \leq Ch^{m+1-k} \|D^{m+1}v\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall v \in W_p^{m+1}(\Omega), \quad k \leq m+1. \quad (1.3.26)$$



## Κεφάλαιο 2

# Η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων (ΜΠΣ) για την εξίσωση Poisson

### 2.1 Ανάλυση Σφάλματος της ΜΠΣ για την εξίσωση Poisson με Robin ΣΣ

Έστω ότι έχουμε το πρόβλημα (1.3.1) και την ασθενή του μορφή (1.3.3). Θα δείξουμε ότι έχει μοναδική λύση στον  $H^1(\Omega)$ .

Θεωρώ  $\|\cdot\|_\alpha = \alpha(\cdot, \cdot)^{1/2}$ . Θα δείξω αρχικά ότι η  $\|\cdot\|_\alpha$  είναι νόρμα:

1.  $\|u\|_\alpha = 0 \quad \forall u \in H^1(\Omega)$ .

Απόδειξη.  $\|u\|_\alpha^2 = \alpha(u, u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_{\partial\Omega} \mu u^2 ds \geq 0 \Leftrightarrow \mu \geq 0$  □

2.  $\|u\|_\alpha = 0 \Leftrightarrow u = 0$ .

Απόδειξη. Έστω ότι  $\|u\|_\alpha^2 = 0 \Leftrightarrow$ . Τότε,

$$\left. \begin{array}{l} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx = 0 \Rightarrow u = c \text{ στο } \Omega \\ \int_{\partial\Omega} \mu u^2 ds = 0 \Rightarrow u = 0 \text{ στο } \partial\Omega \text{ αν } \mu > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow u = 0 \text{ στο } \bar{\Omega} \text{ αν } \mu > 0$$

□

3.  $\|\lambda u\|_\alpha = |\lambda| \|u\|_\alpha$  για κάθε  $u \in H^1(\Omega)$  και για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Απόδειξη.  $\|\lambda u\|_\alpha^2 = \alpha(\lambda u, \lambda u) = \int_\Omega \lambda^2 \|\nabla u\|^2 dx + \int_{\partial\Omega} \lambda^2 \mu u^2 ds$

$$= \lambda^2 \left( \int_\Omega \|\nabla u\|^2 dx + \int_{\partial\Omega} \mu u^2 ds \right) = \lambda^2 \alpha(u, u) = \lambda^2 \|u\|_\alpha^2$$

□

4.  $\|u + v\|_\alpha \leq \|u\|_\alpha + \|v\|_\alpha$  για κάθε  $u, v \in H^1(\Omega)$ .

$$\begin{aligned}
\text{Απόδειξη. } \|u + v\|_\alpha^2 &= \alpha(u + v, u + v) = \int_\Omega |\nabla(u + v)|^2 dx + \int_{\partial\Omega} \mu(u + v)^2 ds \\
&= \int_\Omega |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 dx + \int_{\partial\Omega} \mu(u + v)^2 ds \\
&= \int_\Omega (\nabla u + \nabla v) \nabla u dx + \int_\Omega (\nabla u + \nabla v) \nabla v dx + \int_{\partial\Omega} \mu(u^2 + v^2 + 2uv) ds \\
&= \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega |\nabla v|^2 dx + 2 \int_\Omega \nabla u \nabla v dx + \int_{\partial\Omega} \mu u^2 ds + \int_{\partial\Omega} \mu v^2 ds + 2 \int_{\partial\Omega} \mu uv ds \\
&= \|u\|_\alpha^2 + \|v\|_\alpha^2 + 2 \left( \int_\Omega \nabla u \nabla v dx + \int_{\partial\Omega} \mu uv ds \right) \\
&\leq \|u\|_\alpha^2 + \|v\|_\alpha^2 + 2\|u\|_\alpha \|v\|_\alpha = (\|u\|_\alpha + \|v\|_\alpha)^2 \Rightarrow \|u + v\|_\alpha \leq \|u\|_\alpha + \|v\|_\alpha. \quad \square
\end{aligned}$$

Επομένως η διγραμμική απεικόνιση  $\alpha(\cdot, \cdot)$  ορίζει νόρμα αν και μόνο αν  $\mu > 0$ .

**Σημείωση 2.1.** Από την γραμμή 5 στην γραμμή 6 χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα του εσωτερικού γινομένου που ορίζει η διγραμμική απεικόνιση. Μένει να δείξουμε ότι η διγραμμική απεικόνιση  $\alpha(\cdot, \cdot)$  ορίζει εσωτερικό γινόμενο.

Οι ιδιότητες 1 και 2 παραπάνω συμπίπτουν με δύο από τις ιδιότητες που πρέπει να ελέγχξουμε για να δούμε αν η παραπάνω απεικόνιση είναι ένα εσωτερικό γινόμενο. Γι' αυτό θα προχωρήσουμε κατευθείαν στις ιδιότητες που μένουν:

•  $\alpha(u, v) = \alpha(v, u)$  για κάθε  $u, v \in H^1(\Omega)$ .

$$\text{Απόδειξη. } \alpha(u, v) = \left( \int_\Omega \nabla u \nabla v dx + \int_{\partial\Omega} \mu uv ds \right)^{1/2} = \left( \int_\Omega \nabla v \nabla u dx + \int_{\partial\Omega} \mu vu ds \right)^{1/2} = \alpha(v, u) \quad \square$$

•  $\alpha(\lambda u + \kappa v, w) = \lambda \alpha(u, w) + \kappa \alpha(v, w)$  για κάθε  $u, v, w \in H^1(\Omega)$  και για κάθε  $\lambda, \kappa \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned}
\text{Απόδειξη. } \alpha(\lambda u + \kappa v, w) &= \int_\Omega \nabla(\lambda u + \kappa v) \nabla w dx + \int_{\partial\Omega} \mu(\lambda u + \kappa v) w ds \\
&= \int_\Omega (\lambda \nabla u + \kappa \nabla v) \nabla w dx + \int_{\partial\Omega} \mu \lambda u w ds + \int_{\partial\Omega} \mu \kappa v w ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Omega} \lambda \nabla u \nabla w \, dx + \int_{\Omega} \kappa \nabla v \nabla w \, dx + \int_{\partial\Omega} \mu \lambda u w \, ds + \int_{\partial\Omega} \mu \kappa v w \, ds \\
&= \int_{\Omega} \lambda \nabla u \nabla w \, dx + \int_{\partial\Omega} \mu \lambda u w \, ds + \int_{\Omega} \kappa \nabla v \nabla w \, dx + \int_{\partial\Omega} \mu \kappa v w \, ds \\
&= \lambda \alpha(u, w) + \kappa \alpha(v, w). \quad \square
\end{aligned}$$

Άρα δείξαμε ότι η διγραμμική απεικόνιση  $\alpha(\cdot, \cdot)$  είναι, επίσης, εσωτερικό γινόμενο. Πλέον μπορούμε να προχωρήσουμε και να δείξουμε ότι το πρόβλημα: Βρες  $u \in H^1(\Omega)$  τ.ω. να ικανοποιείται η (1.3.3) έχει μια μοναδική λύση. Θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα Lax-Milgram.

- Ελλειπτικότητα.  $\alpha(v, v) = \int_{\Omega} \|\nabla v\|^2 dx + \int_{\partial\Omega} \mu v^2 ds = \|v\|_{\alpha}$  για κάθε  $v \in H^1(\Omega)$ .
- Φραξιμότητα. Εφόσον η διγραμμική μορφή  $\alpha(\cdot, \cdot)$  ορίζει εσωτερικό γινόμενο στον  $H^1(\Omega)$ , τότε  $|\alpha(u, v)| \leq \|u\|_{\alpha} \|v\|_{\alpha}$  για κάθε  $u, v \in H^1(\Omega)$ .
- Το  $(f, v)$  είναι φραγμένο ως προς την  $\|\cdot\|_{\alpha}$ . Πράγματι έχουμε  $|f(v)| = \left| \int_{\Omega} f v \, dx \right| \leq \int_{\Omega} |f v| \, dx \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq c \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{\alpha} \leq \tilde{c} \|v\|_{\alpha} \quad \forall v \in H^1(\Omega)$ .

Επομένως, υπάρχει μοναδικό  $u$  που να ικανοποιεί την (1.3.3). Αυτό που μας ενδιαφέρει πλέον είναι να κοιτάξουμε το πρόβλημα από την αριθμητική του σκοπιά. Το όλο ζήτημα, δηλαδή, είναι να φτιάξουμε μια λύση στο πρόβλημα η οποία να προσεγγίζει όσο το δυνατόν περισσότερο την πραγματική λύση. Δηλαδή, συνεχίζοντας από την (1.3.3), με παρόμοια βήματα όπως στην Σημείωση 1.7, έχουμε το εξής πρόβλημα: Βρες  $u_h \in V_h \subset H^1(\Omega)$  τ.ω.

$$\alpha(u_h, v_h) = (f, v_h) = f(v_h) \quad \forall v_h \in V_h \quad (2.1.1)$$

**Σημείωση 2.2.** Ο συμβολισμός  $u_h$  αντί για  $u_k$  προτιμάται για να δοθεί βάρος στη διαμέριση του χωρίου  $\Omega$  και όχι στην διάσταση του υπόχωρου  $V_h$ .

Αυτό που θέλουμε είναι να δείξουμε αρχικά ότι το παραπάνω πρόβλημα έχει μια μοναδική λύση. Καθώς η διγραμμική απεικόνιση είναι η ίδια, παρατηρούμε ότι το πρόβλημα έχει μοναδική λύση, με βάση τα κριτήρια που ελέγχθηκαν παραπάνω. Κάνοντας παρόμοια δουλειά με το λήμμα του C'ea στην παραπάνω διγραμμική απεικόνιση παίρνουμε το εξής,

$$\|u - u_h\|_{\alpha} = \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{\alpha}. \quad (2.1.2)$$

Παρατηρούμε ότι η  $u_h$  αποτελεί τη βέλτιστη προσέγγιση της  $u$  ως προς τη νόρμα  $\|\cdot\|_{\alpha}$ . Το Λήμμα του C'ea 1.3 για την ακρίβεια δίνει εκτίμηση για την νόρμα που ορίζεται από το εσωτερικό γινόμενο του χώρου Hilbert  $V$ . Δηλαδή, εδώ το Λήμμα 1.3 θα μας έδινε εκτίμηση για την νόρμα  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ .

## 2.2 Ανάλυση Σφάλματος της ΜΠΣ για την εξίσωση Poisson με μη-γραμμικές Robin ΣΣ

Έστω τώρα ότι έχουμε το λίγο τροποποιημένο πρόβλημα: Βρες  $u \in H^2(\Omega)$  τ.ω. να ικανοποιεί το εξής ΠΣΣ

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{στο } \Omega \\ \nabla u \mathbf{n} + \mu|u|^{p-2}u &= 0 \quad \text{στο } \partial\Omega \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

όπου  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $p \geq 2$  ( $p = 2$  είναι η απλή Robin ΣΣ) και το  $\Omega$  έχει Lipschitz σύνορο.

Όπως και πριν θα μετατρέψουμε το πρόβλημα στην ασθενή του μορφή. Επομένως έχουμε,

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega} \Delta u v \, dx &= \int_{\Omega} f v \, dx \Rightarrow \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} \nabla u \mathbf{n} v \, ds = \int_{\Omega} f v \, dx \\ \Rightarrow \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx + \int_{\partial\Omega} \mu|u|^{p-2}uv \, ds &= \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in H^1(\Omega) \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

όπου  $v$  είναι συνάρτηση δοκιμής.

Θεωρούμε την ημιγραμμική απεικόνιση  $\alpha(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx + \int_{\partial\Omega} \mu|u|^{p-2}uv \, ds$  και το εσωτερικό γινόμενο του  $L^2(\Omega)$  όπως προηγουμένως, κι έτσι καταλήγουμε στην ασθενή μορφή του προβλήματος: Βρες  $u \in H^1(\Omega)$  τ.ω. να ικανοποιείται η εξίσωση

$$\alpha(u, v) = (f, v) = f(v) \quad \forall v \in H^1(\Omega) \quad (2.2.3)$$

Όπως και στην γραμμική περίπτωση αυτό που μας ενδιαφέρει είναι να μετατρέψουμε το πρόβλημα σε μια προσεγγιστική μορφή και να το λύσουμε αριθμητικά. Η ιδέα είναι να χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο Galerkin για τον χώρο  $V$  που απαιτούμε να βρισχεται η λύση  $u$ . Έτσι η μέθοδος μας δίνει για την εξίσωση (2.2.3) το εξής πρόβλημα: Βρες  $u_h \in V_h$  τ.ω. να ικανοποιεί

$$\alpha(u_h, v_h) = (f, v_h) = f(v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \quad (2.2.4)$$

Εφόσον έχουμε ημιγραμμική απεικόνιση, δεν μπορεί να οριστεί νόρμα που να επάγεται από αυτήν και προφανώς η απεικόνιση αυτή δεν ορίζει εσωτερικό γινόμενο. Γι' αυτό δεν μπορούμε να ακολουθήσουμε τα ίδια βήματα με πριν για την ανάλυση σφάλματος. Αυτό που πρέπει να κάνουμε είναι να εξετάσουμε εκ νέου αυτήν την ημιγραμμική απεικόνιση και να δείξουμε:

1. Ότι υπάρχει λύση στο πρόβλημα.

2. Ότι η προσεγγιστική λύση συγκλίνει στην πραγματική λύση καθώς η προσεγγιστική απεικόνιση συγκλίνει στην πραγματική απεικόνιση.
3. Την ανάλυση σφάλματος του προβλήματος καθώς και την τάξη σύγκλισης της μεθόδου που θα αναπτύξουμε.

Ας θεωρήσουμε δεδομένη την ύπαρξη λύσης και θα προχωρήσουμε στο επόμενο βήμα.

**Πρόταση 2.1.** Έστω  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  φραγμένο χωρίο και  $\alpha(u, u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\partial\Omega} \mu |u|^p ds = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \mu \|u\|_{L^p(\partial\Omega)}^p$ . Τότε η ημιγραμμική απεικόνιση  $\alpha(\cdot, \cdot)$  είναι κάτω φραγμένη (ή  $H^1(\Omega)$ -ελλειπτική).

Απόδειξη. Αφού το  $\Omega$  είναι φραγμένο τότε για κάθε  $u \in H^1(\Omega)$  έχουμε

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 &= \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_{PF} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_{PF} \|u\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 = c_1 \left( \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 \right) \\ &\leq c_2 \left( \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^p(\partial\Omega)}^p \right) = c_2 \left( \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \mu \frac{1}{\mu} \|u\|_{L^p(\partial\Omega)}^p \right) \\ &\leq c_3 \left( \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \mu \|u\|_{L^p(\partial\Omega)}^p \right) = c_3 \alpha(u, u) \Rightarrow \tilde{c} \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \alpha(u, u), \end{aligned}$$

$$\text{όπου } c_3 = c_2 \cdot \max \left\{ 1, \frac{1}{\mu} \right\} \text{ και } \tilde{c} = \frac{1}{c_3}. \quad \square$$

Το επόμενο λήμμα είναι αυτό που θα μας δείξει την εκτίμηση σφάλματος για την μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων για την εξίσωση Poisson με μη γραμμικές Robin συνοριακές συνθήκες. Πριν προχωρήσουμε, όμως, θα δείξουμε δύο σημαντικές προτάσεις που θα μας βοηθήσουν στην απόδειξη του λήμματος.

**Πρόταση 2.2.** Για κάθε  $p \geq 2$  υπάρχει  $\gamma > 0$  τ.ω.

$$(a - b)(|a|^{p-2}a - |b|^{p-2}b) \geq \gamma |a - b|^p \text{ για κάθε } a, b \in \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}. \quad (2.2.5)$$

Απόδειξη. Για  $p = 2$  και  $\gamma = 1$  η απόδειξη είναι προφανής. Γι' αυτό θα ασχοληθούμε με την περίπτωση  $p > 2$ . Θεωρώ συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = |x|^{p-2}$ . Εύκολα μπορεί κανείς να δει ότι  $f'(x) = (p-2)|x|^{p-4}x$ . Άρα πλέον μπορούμε να γράψουμε για  $s \in [0, 1] \subset \mathbb{R}$

$$(a - b)(|a|^{p-2}a - |b|^{p-2}b) = \int_0^1 \frac{d}{ds} (|sa + (1-s)b|^{p-2}(sa + (1-s)b)) (a - b) ds$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 |sa + (1-s)b|^{p-2} |a-b|^2 ds + (p-2) \int_0^1 |sa + (1-s)b|^{p-4} ((sa + (1-s)b)(a-b))^2 ds \\
&\Rightarrow (a-b)(|a|^{p-2}a - |b|^{p-2}b) \geq \int_0^1 |sa + (1-s)b|^{p-2} |a-b|^2 ds \text{ για κάθε } a, b \in \mathbb{R}^n.
\end{aligned}$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

- 1η περίπτωση.  $|a| > |a-b|$

$$|sa + (1-s)b| = |sa + b - sb| = |s(a-b) + b| = |a-b - (a-b) + s(a-b) + b|$$

$$= |a - (1-s)(a-b)| \geq |a| - (1-s)|a-b| \geq |a-b| - (1-s)|a-b| = s|a-b|.$$

$$\text{Άρα, } (a-b)(|a|^{p-2}a - |b|^{p-2}b) > \int_0^1 s^{p-2} |a-b|^p ds = \left[ \frac{s^{p-1}}{p-1} \right]_0^1 |a-b|^p = \frac{1}{p-1} |a-b|^p.$$

- 2η περίπτωση.  $|a| \leq |a-b|$

$$|sa + (1-s)b| = |a - (1-s)(a-b)| \leq |a| + (1-s)|a-b|$$

$$\leq |a-b| + (1-s)|a-b| = (2-s)|a-b|.$$

$$\begin{aligned}
\text{Άρα, } (a-b)(|a|^{p-2}a - |b|^{p-2}b) &\geq \int_0^1 \frac{|sa + (1-s)b|^p}{|sa + (1-s)b|^2} |a-b|^2 ds \geq \int_0^1 \frac{|sa + (1-s)b|^p}{(2-s)^2} ds \\
&= \int_0^1 \frac{(|sa + (1-s)b|^2)^{p/2}}{(2-s)^2} ds \geq \frac{1}{4} \int_0^1 (|sa + (1-s)b|^2)^{p/2} ds = \frac{1}{4} \int_0^1 (|sa + (1-s)b|^2)^{p/2} ds \int_0^1 1 ds \\
&\geq \frac{1}{4} \left( \int_0^1 |sa + (1-s)b|^2 ds \right)^{p/2} = \frac{1}{4} \left( \int_0^1 |a|^2 s^2 + (1-s)^2 |b|^2 + 2s(1-s)ab ds \right)^{p/2} \\
&= \frac{1}{4} \left( \left[ |a|^2 \frac{s^3}{3} - |b|^2 \frac{(1-s)^3}{3} + s^2 ab - \frac{2s^3}{3} ab \right]_0^1 \right)^{p/2} = \frac{1}{4 \cdot 3^{p/2}} (|a|^2 + ab + |b|^2)^{p/2} \\
&\geq \frac{1}{4 \cdot 3^{p/2}} \left( \frac{1}{2} (|a|^2 + |b|^2) \right)^{p/2} \geq \frac{1}{4 \cdot 3^{p/2}} \left( \frac{1}{4} (|a|^2 - 2ab + |b|^2) \right)^{p/2} = \frac{1}{4^{p+2/2} \cdot 3^{p/2}} |a-b|^p.
\end{aligned}$$

Επομένως σε κάθε περίπτωση για  $p \geq 2$  υπάρχει  $\gamma > 0$  τ.ω. να ικανοποιείται η (2.2.5). □

**Πρόταση 2.3.** Για κάθε  $p \geq 2$  ισχύει ότι

$$||a|^{p-2}a - |b|^{p-2}b| \leq (p-1)|a-b|(|a|^{p-2}+|b|^{p-2}) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}. \quad (2.2.6)$$

*Απόδειξη.* Θεωρώ συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  με  $f(x) = |x|^{p-2}$ . Όπως και πριν, έχουμε ότι  $f'(x) = (p-2)|x|^{p-4}x$ . Άρα πλέον μπορούμε να γράψουμε για  $s \in [0, 1] \subset \mathbb{R}$  το εξής

$$\begin{aligned} |a|^{p-2}a - |b|^{p-2}b &= \int_0^1 \frac{d}{ds} (|sa + (1-s)b|^{p-2}(sa + (1-s)b)) ds \\ &= \int_0^1 |sa + (1-s)b|^{p-2}(a-b) ds + (p-2) \int_0^1 |sa + (1-s)b|^{p-4}(sa + (1-s)b)(a-b)(sa + (1-s)b) ds \\ &\Rightarrow (a-b) (|a|^{p-2} - |b|^{p-2}) \\ &= \int_0^1 |sa + (1-s)b|^{p-2} |a-b|^2 ds + (p-2) \int_0^1 |sa + (1-s)b|^{p-4} ((sa + (1-s)b)(a-b))^2 ds. \end{aligned}$$

Κάνοντας Cauchy-Schwarz στο δεξί μέλος στο  $((sa + (1-s)b)(a-b))^2$  παίρνουμε το εξής αποτέλεσμα

$$\begin{aligned} |a-b| ||a|^{p-2} - |b|^{p-2}| &\leq \int_0^1 |sa + (1-s)b|^{p-2} |a-b|^2 ds + (p-2) \int_0^1 |sa + (1-s)b|^{p-2} |a-b|^2 ds \\ &= (p-1)|a-b|^2 \int_0^1 |sa + (1-s)b|^{p-2} ds \Rightarrow ||a|^{p-2} - |b|^{p-2}| \leq (p-1)|a-b| \int_0^1 |sa + (1-s)b|^{p-2} ds. \end{aligned}$$

Έχουμε ότι  $|sa + (1-s)b| = |b + s(a-b)|$ . Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

- 1η περίπτωση.  $a > b$ .

$$\max_{s \in [0,1]} |b + s(a-b)| = |a| \Rightarrow \max_{s \in [0,1]} |b + s(a-b)|^{p-2} = |a|^{p-2}$$

- 2η περίπτωση.  $a < b$ .

$$\max_{s \in [0,1]} |b + s(a-b)| = |b| \Rightarrow \max_{s \in [0,1]} |b + s(a-b)|^{p-2} = |b|^{p-2}.$$

Σε κάθε περίπτωση ισχύει ότι  $|b + s(a-b)|^{p-2} \leq |a|^{p-2} + |b|^{p-2}$ . Άρα,

$$\begin{aligned}
||a|^{p-2}a - |b|^{p-2}b| &\leq (p-1)|a-b| \int_0^1 (|a|^{p-2} + |b|^{p-2}) ds \\
&\leq (p-1)|a-b|(|a|^{p-2} + |b|^{p-2}).
\end{aligned}$$

□

**Λήμμα 2.1 (Εκτίμηση σφάλματος για την ΜΠΣ).** Έστω  $\alpha : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  κάτω φραγμένη ημιγραμμική απεικόνιση στον χώρο Hilbert  $H^1(\Omega)$ , όπως ορίστηκε πριν, και  $f \in V'$  είναι ένα φραγμένο συναρτησιακό (το  $f$  ως συναρτησιακό είναι το  $f(\cdot) = \int_{\Omega} f \cdot dx$  και όχι η συνάρτηση  $f$  στο δεξί μέλος του (2.2.1)). Έστω  $u$  η λύση του (2.2.3) και  $u_h$  η λύση του (2.2.4). Τότε έχουμε την εκτίμηση σφάλματος:

$$\alpha(u - u_h, u - u_h) \leq C \inf_{v_h \in V_h} \left( \|\nabla(u - v_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \mu \left( \|u - v_h\|_{L^p(\Omega)}^{p/(p-1)} + \|u - v_h\|_{L^{p/(p-1)}(\Omega)}^p \right) \right). \quad (2.2.7)$$

Απόδειξη. Όπως και στο Λήμμα του Cèa, θα χρησιμοποιήσουμε μια σχέση η οποία προσομοιάζει την ορθογωνιότητα Galerkin. Η (2.2.3) ισχύει για κάθε  $v \in H^1(\Omega)$ , άρα ισχύει και για οποιοδήποτε  $v_h \in V_h$ , δηλαδή

$$\alpha(u, v_h) = f(v_h) \quad \text{για κάθε } v_h \in V_h. \quad (2.2.8)$$

Αφαιρώντας την (2.2.4) από την (2.2.6) έχουμε

$$\begin{aligned}
\alpha(u, v_h) - \alpha(u_h, v_h) &= 0 \Rightarrow \int_{\Omega} \nabla u \nabla v_h dx + \int_{\partial\Omega} \mu |u|^{p-2} u v_h ds - \int_{\Omega} \nabla u_h \nabla v_h dx - \int_{\partial\Omega} \mu |u_h|^{p-2} u_h v_h ds = 0 \\
&\Rightarrow \int_{\Omega} \nabla(u - u_h) \nabla v_h dx + \int_{\partial\Omega} \mu (|u|^{p-2} u - |u_h|^{p-2} u_h) v_h ds = 0.
\end{aligned} \quad (2.2.9)$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση (2.2.5), προκύπτει ότι η ποσότητα  $\alpha(u, u - u_h) - \alpha(u_h, u - u_h)$  είναι κάτω φραγμένη. Δηλαδή,

$$\begin{aligned}
\alpha(u, u - u_h) - \alpha(u_h, u - u_h) &= \int_{\Omega} |\nabla(u - u_h)|^2 dx + \int_{\partial\Omega} \mu (|u|^{p-2} u - |u_h|^{p-2} u_h) (u - u_h) ds \\
&\geq \int_{\Omega} |\nabla(u - u_h)|^2 dx + \int_{\partial\Omega} \mu \gamma |u - u_h|^p ds \geq \gamma \left( \int_{\Omega} |\nabla(u - u_h)|^2 dx + \int_{\partial\Omega} \mu |u - u_h|^p ds \right) \\
&\Rightarrow \alpha(u, u - u_h) - \alpha(u_h, u - u_h) \geq \gamma (\|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \mu \|u - u_h\|_{L^p(\partial\Omega)}^p) \geq \gamma \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}^2
\end{aligned} \quad (2.2.10)$$

$$\text{με } \gamma = \min \left\{ \frac{1}{4^{p+2/2} \cdot 3^{p/2}}, \frac{1}{p-1} \right\}.$$

Θα συνεχίσουμε με το άνω φράγμα της  $\alpha(u, u - u_h) - \alpha(u_h, u - u_h)$ . Έχουμε, λοιπόν, για κάθε  $v_h \in V_h$



$$\begin{aligned}
& \alpha(u, u - u_h) - \alpha(u_h, u - u_h) = \alpha(u, u) - \alpha(u, u_h) - (\alpha(u_h, u) - \alpha(u_h, u_h)) \\
& = \alpha(u, u) - \alpha(u_h, u) = \alpha(u, u) - \alpha(u_h, u) - \alpha(u, v_h) + \alpha(u_h, v_h) \\
& = \alpha(u, u - v_h) - \alpha(u_h, u - v_h) \leq |\alpha(u, u - v_h) - \alpha(u_h, u - v_h)| \\
& = \left| \int_{\Omega} \nabla(u - u_h) \nabla(u - v_h) dx + \int_{\partial\Omega} \mu (|u|^{p-2}u + |u_h|^{p-2}u_h) (u - v_h) ds \right| \\
& \leq \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla(u - v_h)\|_{L^2(\Omega)} + \int_{\partial\Omega} \mu (|u|^{p-2}u + |u_h|^{p-2}u_h) |u - v_h| ds \\
& \leq \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla(u - v_h)\|_{L^2(\Omega)} + \int_{\partial\Omega} \mu(p-1) (|u|^{p-2} + |u_h|^{p-2}) |u - u_h| |u - v_h| ds \\
& = \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla(u - v_h)\|_{L^2(\Omega)} + \mu(p-1) \int_{\partial\Omega} (|u|^{p-2} + |u_h|^{p-2}) |u - u_h| |u - v_h| ds \\
& = \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla(u - v_h)\|_{L^2(\Omega)} + \mu(p-1) \int_{\partial\Omega} |u|^{p-2} |u - u_h| |u - v_h| + |u_h|^{p-2} |u - u_h| |u - v_h| ds \\
& \leq \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla(u - v_h)\|_{L^2(\Omega)} + \\
& \quad + \mu(p-1) \int_{\partial\Omega} |u|^{p-2} |u - u_h| |u - v_h| + 2^{p-3} (|u - u_h|^{p-2} + |u|^{p-2}) |u - u_h| |u - v_h| ds \\
& = \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla(u - v_h)\|_{L^2(\Omega)} + \mu(p-1)(2^{p-3} + 1) \int_{\partial\Omega} |u|^{p-2} |u - u_h| |u - v_h| ds + \\
& \quad + \mu(p-1)2^{p-3} \int_{\partial\Omega} |u - u_h|^{p-1} |u - v_h| ds.
\end{aligned}$$

Από Θεώρημα Ενσφήνωσης Χώρων Sobolev 1.1 έχουμε ότι  $H^1(\Omega) \subset L^p(\Omega)$  για κάθε  $p \in [1, +\infty)$  εφόσον  $|\Omega| < +\infty$ . Άρα για  $p > 2$  έχουμε

$$\|u\|_{L^{p-2}(\Omega)}^{p-2} \leq c \|u\|_{H^1(\Omega)}^{p-2} < +\infty \Rightarrow |u|^{p-2} < +\infty \Rightarrow \exists M_u > 0 \text{ τ.ω } |u|^{p-2} < M_u$$

Επομένως η προηγούμενη εκτίμηση φράσσεται περαιτέρω από

$$\begin{aligned}
& \leq \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla(u - v_h)\|_{L^2(\Omega)} + \mu(p-1)M_u(2^{p-3} + 1) \int_{\partial\Omega} |u - u_h| |u - v_h| ds + \\
& \quad + \mu(p-1)2^{p-3} \int_{\partial\Omega} |u - u_h|^{p-1} |u - v_h| ds \\
& \leq \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla(u - v_h)\|_{L^2(\Omega)} + c_1\mu \|u - u_h\|_{L^p(\partial\Omega)} \|u - v_h\|_{L^{p/p-1}(\partial\Omega)} + \\
& \quad + c_2\mu \|u - u_h\|_{L^p(\partial\Omega)}^{p-1} \|u - v_h\|_{L^{p/p-1}(\partial\Omega)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla(u - v_h)\|_{L^2(\Omega)} + c_1 \mu \|u - u_h\|_{L^p(\partial\Omega)} \|u - v_h\|_{L^p(\partial\Omega)} + \\
&\quad + c_2 \mu \|u - u_h\|_{L^p(\partial\Omega)}^{p-1} \|u - v_h\|_{L^{p/p-1}(\partial\Omega)} \\
&\leq \frac{\gamma}{2} \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\|\nabla(u - v_h)\|_{L^2(\Omega)}^2}{2\gamma} + \mu c_1 \frac{\|u - u_h\|_{L^p(\partial\Omega)}^p \varepsilon_1^p}{p} + \mu c_1 \frac{\|u - v_h\|_{L^p(\partial\Omega)}^{p/p-1}}{\frac{p}{p-1} \varepsilon_1^{p/p-1}} + \\
&\quad + \mu c_2 \frac{\|u - u_h\|_{L^p(\partial\Omega)}^p \varepsilon_2^{p/p-1}}{\frac{p}{p-1}} + \mu c_2 \frac{\|u - v_h\|_{L^{p/p-1}(\partial\Omega)}^p}{p \varepsilon_2^p}.
\end{aligned}$$

Διαλέγω  $\varepsilon_1 = \left(\frac{\gamma p}{4c_1}\right)^{1/p} > 0$  και  $\varepsilon_2 = \left(\frac{\gamma(p-1)}{4pc_2}\right)^{p-1/p} > 0$ . Άρα η τελευταία σχέση γίνεται

$$\begin{aligned}
&\frac{\gamma}{2} \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\|\nabla(u - v_h)\|_{L^2(\Omega)}^2}{2\gamma} + \frac{\gamma}{2} \|u - u_h\|_{L^p(\partial\Omega)}^p + c_3 \mu \|u - v_h\|_{L^p(\partial\Omega)}^{p/p-1} + c_4 \mu \|u - v_h\|_{L^{p/p-1}(\partial\Omega)}^p \\
&= \frac{\gamma}{2} \left( \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u - u_h\|_{L^p(\partial\Omega)}^p \right) + \frac{\|\nabla(u - v_h)\|_{L^2(\Omega)}^2}{2\gamma} + c_3 \mu \|u - v_h\|_{L^p(\partial\Omega)}^{p/p-1} + c_4 \mu \|u - v_h\|_{L^{p/p-1}(\partial\Omega)}^p \\
&\Rightarrow \gamma \left( \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u - u_h\|_{L^p(\partial\Omega)}^p \right) \leq \frac{\gamma}{2} \left( \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u - u_h\|_{L^p(\partial\Omega)}^p \right) + \frac{\|\nabla(u - v_h)\|_{L^2(\Omega)}^2}{2\gamma} + \\
&\quad + c_3 \mu \|u - v_h\|_{L^p(\partial\Omega)}^{p/p-1} + c_4 \mu \|u - v_h\|_{L^{p/p-1}(\partial\Omega)}^p \\
&\Rightarrow \frac{\gamma}{2} \left( \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u - u_h\|_{L^p(\partial\Omega)}^p \right) \leq \frac{\|\nabla(u - v_h)\|_{L^2(\Omega)}^2}{2\gamma} + c_3 \mu \|u - v_h\|_{L^p(\partial\Omega)}^{p/p-1} + c_4 \mu \|u - v_h\|_{L^{p/p-1}(\partial\Omega)}^p \\
&\Rightarrow \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u - u_h\|_{L^p(\partial\Omega)}^p \leq \frac{\|\nabla(u - v_h)\|_{L^2(\Omega)}^2}{\gamma^2} + \frac{2c_3}{\gamma} \mu \|u - v_h\|_{L^p(\partial\Omega)}^{p/p-1} + \frac{2c_4}{\gamma} \mu \|u - v_h\|_{L^{p/p-1}(\partial\Omega)}^p \\
&\Rightarrow \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u - u_h\|_{L^p(\partial\Omega)}^p \leq C \left( \|\nabla(u - v_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \mu \left( \|u - v_h\|_{L^p(\partial\Omega)}^{p/p-1} + \|u - v_h\|_{L^{p/p-1}(\partial\Omega)}^p \right) \right).
\end{aligned}$$

Εφόσον η παραπάνω ανισότητα ισχύει για κάθε  $v_h \in V_h$  τότε,

$$\|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u - u_h\|_{L^p(\partial\Omega)}^p \leq C \inf_{v_h \in V_h} \left( \|\nabla(u - v_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \mu \left( \|u - v_h\|_{L^p(\partial\Omega)}^{p/p-1} + \|u - v_h\|_{L^{p/p-1}(\partial\Omega)}^p \right) \right)$$

$$\mu \varepsilon C = \max \left\{ \frac{1}{\gamma^2}, \frac{2c_3}{\gamma}, \frac{2c_4}{\gamma} \right\}.$$

□

**Σημείωση 2.3.** Εύκολα συμπεραίνει κανείς ότι η  $u_h$  συγκλίνει ασθενώς στην  $u$ , δηλαδή αν

$$\alpha(u, u - u_h) - \alpha(u_h, u - u_h) \rightarrow 0 \Rightarrow \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0.$$

**Λήμμα 2.2 (Τάξη σύγκλισης της μεθόδου).** Για την παραπάνω ημυγραμμική απεικόνιση η τάξη σύγκλισης δίνεται από την εξής ανισότητα

$$\alpha(u - u_h, u - u_h)^{1/2} \leq \tilde{C}h \left( |u|_{H^2(\Omega)}^2 + \mu \left( |u|_{W_{2p}^2(\Omega)} |u|_{W_{2p/p+1}^2(\Omega)}^{1/p-1} + |u|_{W_{2p/p-1}^2(\Omega)} |u|_{W_{2p/2p-1}^2(\Omega)}^{p-1} \right) \right)^{1/2} \quad (2.2.11)$$

όπου  $h = \max_{K \in T_h} h_K$ .

*Απόδειξη.* Αυτό που θα κάνουμε είναι να φράξουμε περαιτέρω το δεξί μέλος της σχέσης (2.2.7). Αρχικά θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 1.2 για να φράξουμε τις νόρμες στο σύνορο. Για  $\Omega_k = \partial\Omega$ ,  $k = 1$ ,  $n = 2$ ,  $\nu = 1$  έχουμε

- Για την νόρμα  $\|\cdot\|_{L^{p/p-1}(\partial\Omega)}$ :  $q_0 = \frac{2p}{p-1}$ ,  $p_0 = \frac{2p}{2p-1}$ ,  $m = 1$ ,  $\theta = \frac{p-1}{p} \Rightarrow 1 - \theta = \frac{1}{p}$  και άρα

$$\|u\|_{L^{p/p-1}(\partial\Omega)} \leq c_1 \|u\|_{L^{2p/p-1}(\Omega)}^{1/p} \|u\|_{W_{2p/2p-1}^1(\Omega)}^{p-1/p} \quad \forall u \in W_{2p/2p-1}^1(\Omega). \quad (2.2.12)$$

- Για την νόρμα  $\|\cdot\|_{L^p(\partial\Omega)}$ :  $q_0 = 2p$ ,  $p_0 = \frac{2p}{p+1}$ ,  $m = 1$ ,  $\theta = \frac{1}{p} \Rightarrow 1 - \theta = \frac{p-1}{p}$  και άρα

$$\|u\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq c_2 \|u\|_{L^{2p}(\Omega)}^{p-1/p} \|u\|_{W_{2p/p+1}^1(\Omega)}^{1/p} \quad \forall u \in W_{2p/p+1}^1(\Omega). \quad (2.2.13)$$

Επομένως έχουμε

$$\begin{aligned} \alpha(u - u_h, u - u_h) &= \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u - u_h\|_{L^p(\partial\Omega)}^p \leq C_1 (\|\nabla(u - v_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \\ &\quad + \mu (\|u - v_h\|_{L^{2p/p-1}(\Omega)} \|u - v_h\|_{W_{2p/2p-1}^1(\Omega)}^{p-1} + \|u - v_h\|_{L^{2p}(\Omega)} \|u - v_h\|_{W_{2p/p+1}^1(\Omega)}^{1/p-1})) \\ &\leq C_2 (\|\nabla(u - v_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \mu (\|u - v_h\|_{L^{2p/p-1}(\Omega)} \|u - v_h\|_{W_{2p/2p-1}^1(\Omega)}^{p-1} + \|u - v_h\|_{L^{2p}(\Omega)} \|u - v_h\|_{W_{2p/p+1}^1(\Omega)}^{1/p-1})) \\ &\leq \tilde{C}h^2 \left( |u|_{H^2(\Omega)}^2 + \mu \left( |u|_{W_{2p/p-1}^2(\Omega)} |u|_{W_{2p/2p-1}^2(\Omega)}^{p-1} + |u|_{W_{2p}^2(\Omega)} |u|_{W_{2p/p+1}^2(\Omega)}^{1/p-1} \right) \right) \end{aligned}$$

απ' όπου προκύπτει το ζητούμενο. □

**Σημείωση 2.4.** Για να αποδείξουμε το παραπάνω λήμμα χρησιμοποιήσαμε την περίπτωση  $\Gamma$  του Θεωρήματος Ενσφήνωσης των χώρων Sobolev 1.1 και τις σχέσεις 1.3.25 και 1.3.26.

**Σημείωση 2.5.** Παρατηρούμε ότι πλέον ζητάμε από την λύση  $u$  να ανήκει στον χώρο  $H^1(\Omega) \cap W_{2p/p+1}^2(\Omega) \cap W_{2p/2p-1}^2(\Omega)$  καθώς και τα  $u_h, v_h$  στον  $V_h \subset H^1(\Omega) \cap W_{2p/p+1}^2(\Omega) \cap W_{2p/2p-1}^2(\Omega)$ .

## Κεφάλαιο 3

# Αριθμητικά παραδείγματα

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε την αριθμητική επίλυση της παραπάνω μεθόδου μέσω ενός μη τετριμμένου παραδείγματος. Για την επίλυση αυτού του μη γραμμικού προβλήματος χρησιμοποιήθηκε η Μέθοδος Σταθερού Σημείου. Όπως και στη Σημείωση 1.9, πρέπει να μετατρέψουμε την ασθενή μορφή του προβλήματος σε ένα σύνολο εξισώσεων (στη συγκεκριμένη περίπτωση μη γραμμικών) της μορφής  $\mathbf{A}u = \mathbf{f}$  για να επιλυθεί αριθμητικά. Πιο συγκεκριμένα, διαλέγοντας ως  $\{\phi_i\}_{i=1}^N$  τα  $P_1$ -στοιχεία, για την λύση  $u_h$  έχουμε

$$u_h = \sum_{j=1}^N u^j \phi_j$$

με  $u^j \in \mathbb{R}$  τις άγνωστες σταθερές που ψάχνουμε. Για  $v_h$  διαλέγουμε τις πιο απλές συναρτήσεις του χώρου  $V_h$  που είναι η ίδια η βάση του χώρου  $\{\phi_i\}_{i=1}^N$ . Άρα, έχουμε πλέον τις εξισώσεις

$$\sum_{j=1}^N u^j \alpha(\phi_j, \phi_i) = f(\phi_i) \text{ για } i = 1, 2, \dots, N$$

που είναι ισοδύναμες με το σύστημα  $\mathbf{A}u = \mathbf{f}$  με

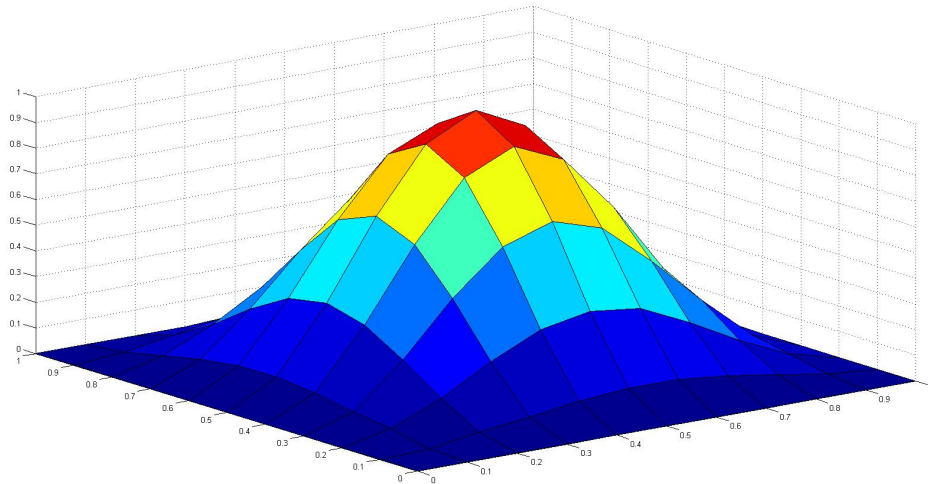
$$\mathbf{A} = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^N = \alpha(\phi_j, \phi_i)_{i,j=1}^N = \left( \int_{\Omega} \nabla \phi_j \nabla \phi_i \, dx + \int_{\partial\Omega} \mu \left| \sum_{j=1}^N u^j \phi_j \right| \phi_j \phi_i \, ds \right)_{i,j=1}^N,$$

$$\mathbf{f} = (f_i)_{i=1}^N = f(\phi_i)_{i=1}^N = \left( \int_{\Omega} f \phi_i \, ds \right)_{i=1}^N.$$

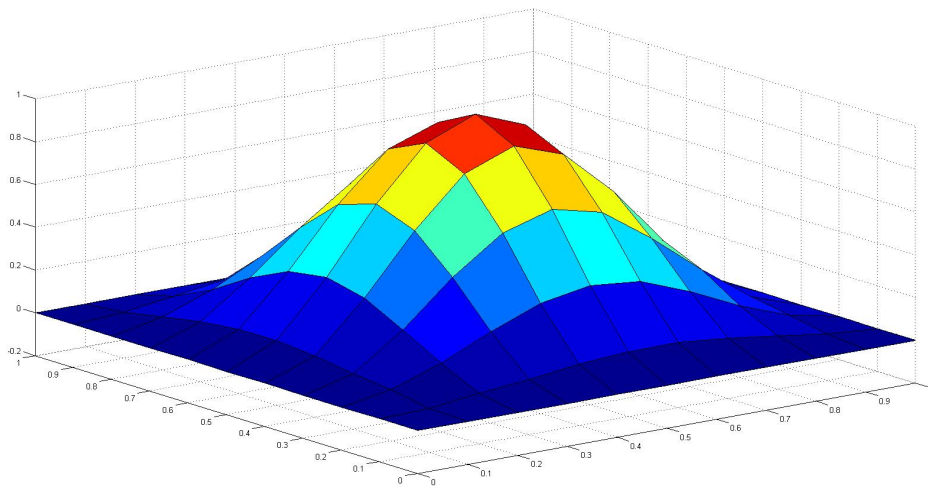
Η Μέθοδος Σταθερού Σημείου χρησιμοποιείται για να μπορέσουμε να υπολογίσουμε την ποσότητα  $\left| \sum_{j=1}^N u^j \phi_j \right|$  μέσα στο ολοκλήρωμα που προκύπτει από την συνοριακή συνθήκη. Αναλυτικά η επαναληπτική μέθοδος είναι η εξής

$$u_{k+1} = \mathbf{A}^{-1}(u_k) \mathbf{f} \text{ για } k = 0, 1, \dots$$

Η  $u_0$  είναι μια αρχική τιμή που δίνουμε εμείς στον αλγόριθμο για να ξεκινήσει. Στη συνέχεια θα λύσουμε το πρόβλημα για  $u(x, y) = \sin^2(\pi x) \sin^2(\pi y)$  στο  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$  με  $\mu = 1$  και  $p = 3$ . Το πρόβλημα λύθηκε διαδοχικά για διαμέριση  $h = 0.1, 0.05, 0.01, 0.005, 0.0025$  με αρχική τιμή τη λύση από το αντίστοιχο γραμμικό πρόβλημα, δηλαδή για  $\mu = 1$  και  $p = 2$ .

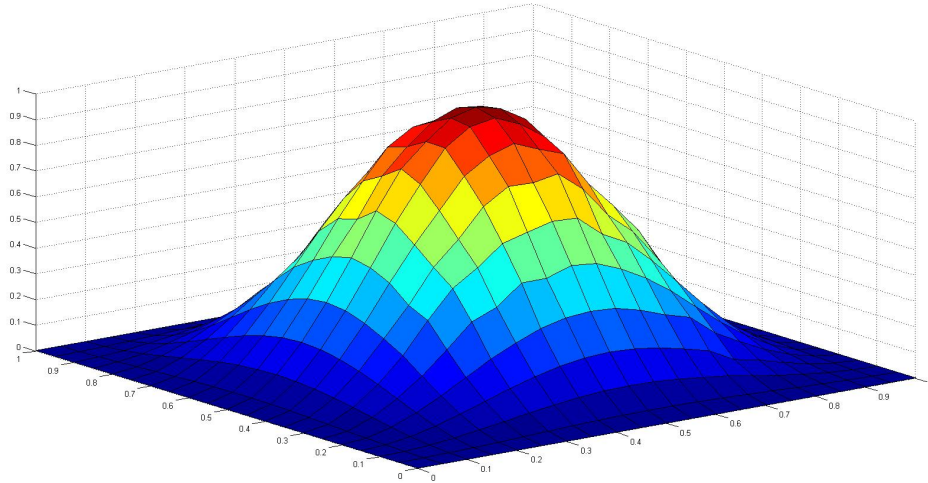


Σχήμα 3.1: Η κανονική λύση για διαμέριση  $h = 0.1$ .

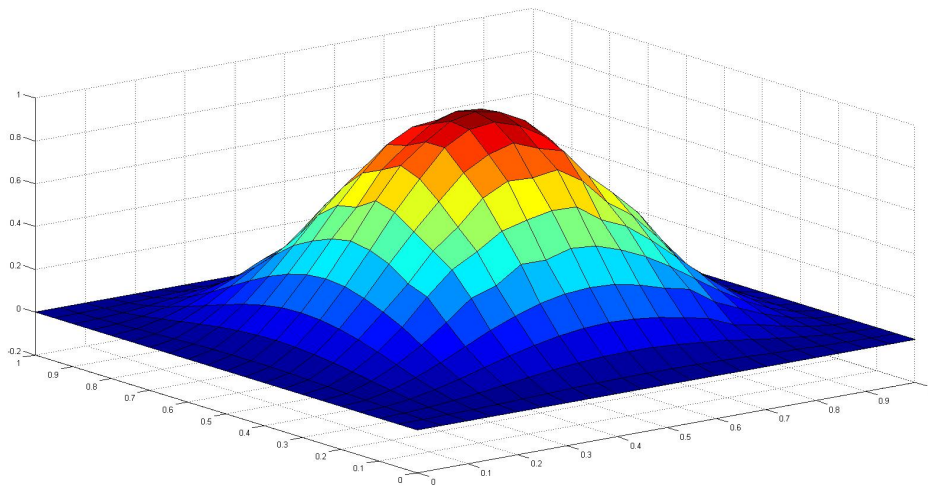


Σχήμα 3.2: Η προσεγγιστική λύση για διαμέριση  $h = 0.1$ .

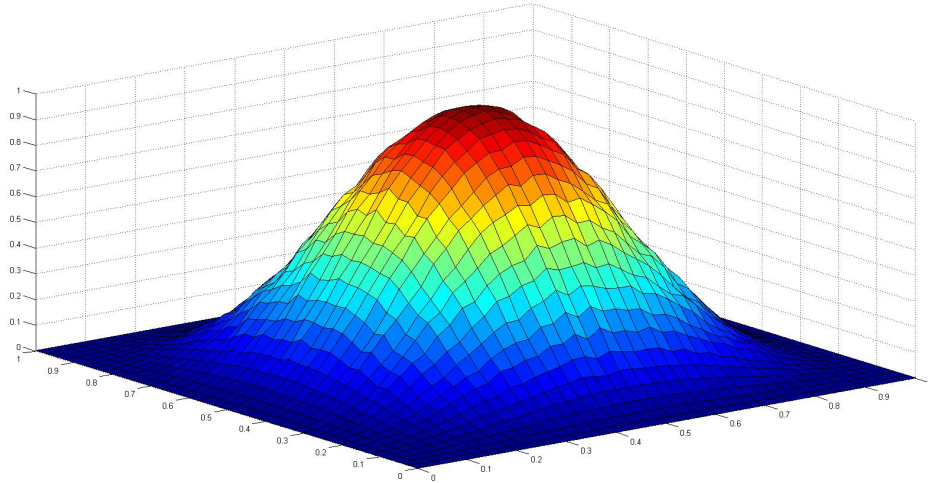
Παρατηρούμε ότι η προσεγγιστική λύση πλησιάζει αρκετά την κανονική.



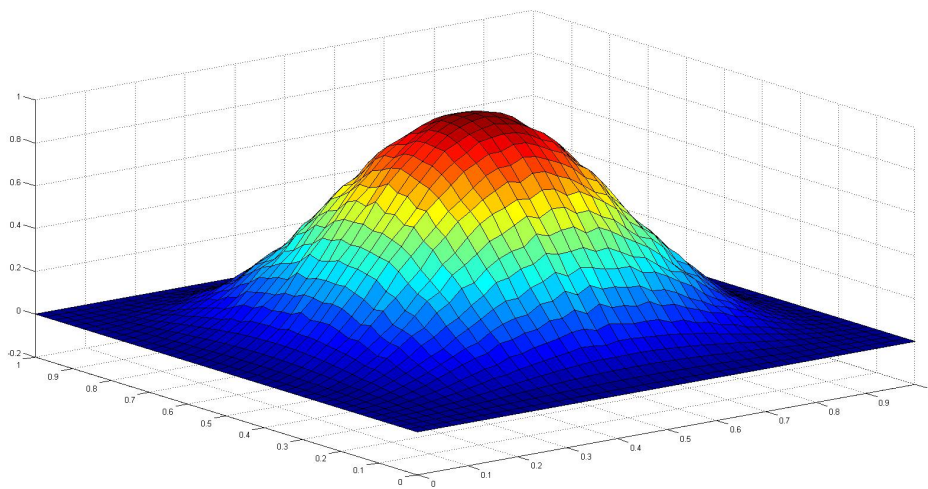
Σχήμα 3.3: Η κανονική λύση για διαμέριση  $h = 0.05$ .



Σχήμα 3.4: Η προσεγγιστική λύση για διαμέριση  $h = 0.05$ .

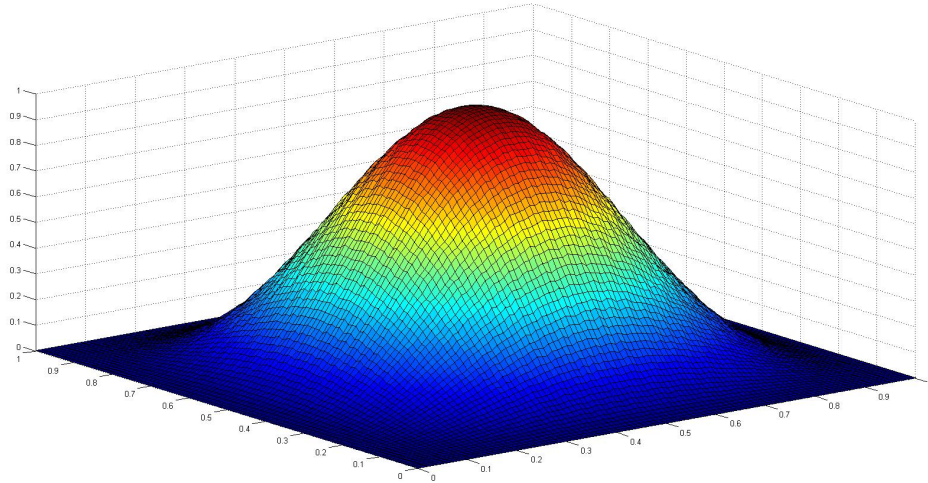


Σχήμα 3.5: Η κανονική λύση για διαμέριση  $h = 0.025$ .

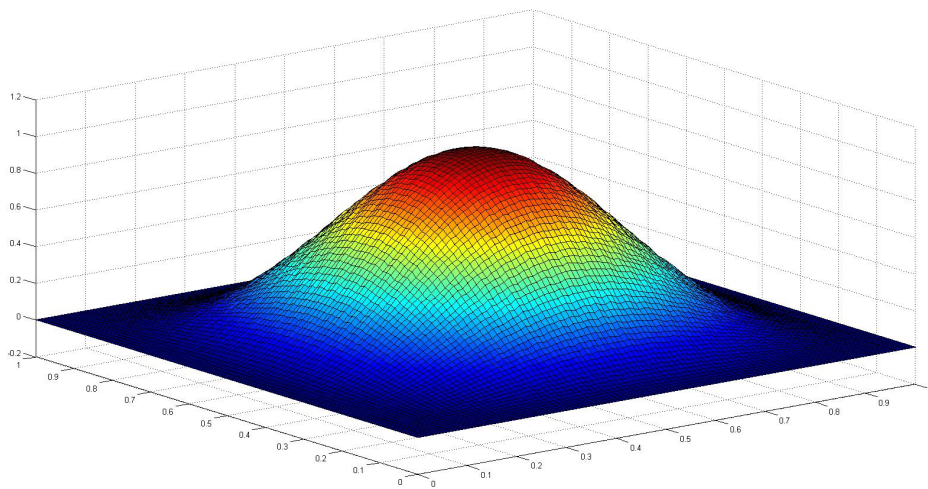


Σχήμα 3.6: Η προσεγγιστική λύση για διαμέριση  $h = 0.025$ .

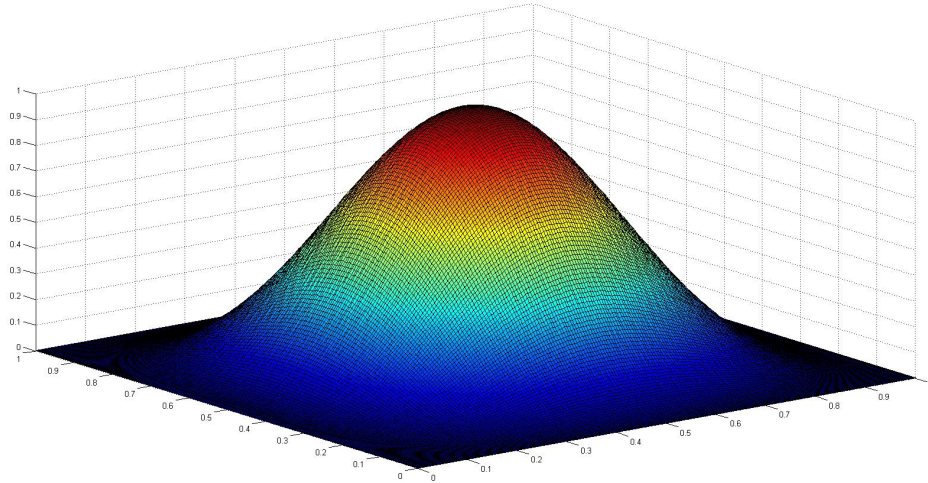




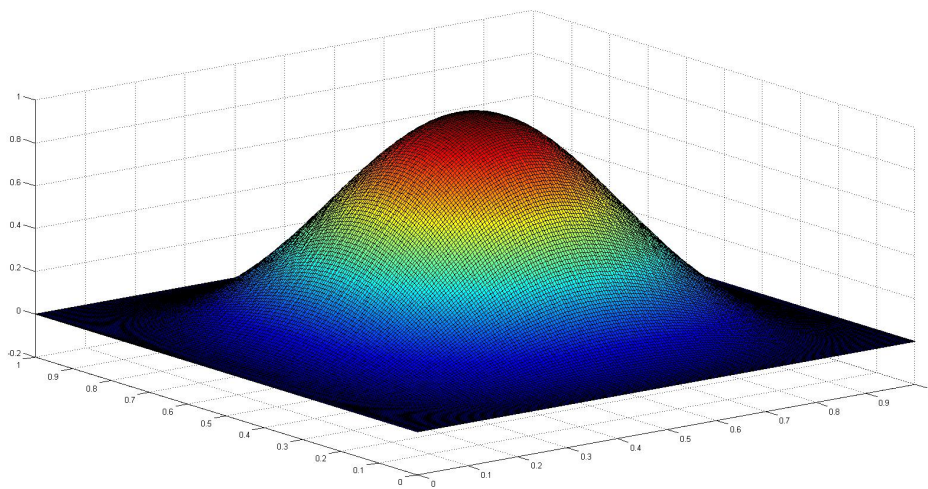
Σχήμα 3.7: Η κανονική λύση για διαμέριση  $h = 0.01$ .



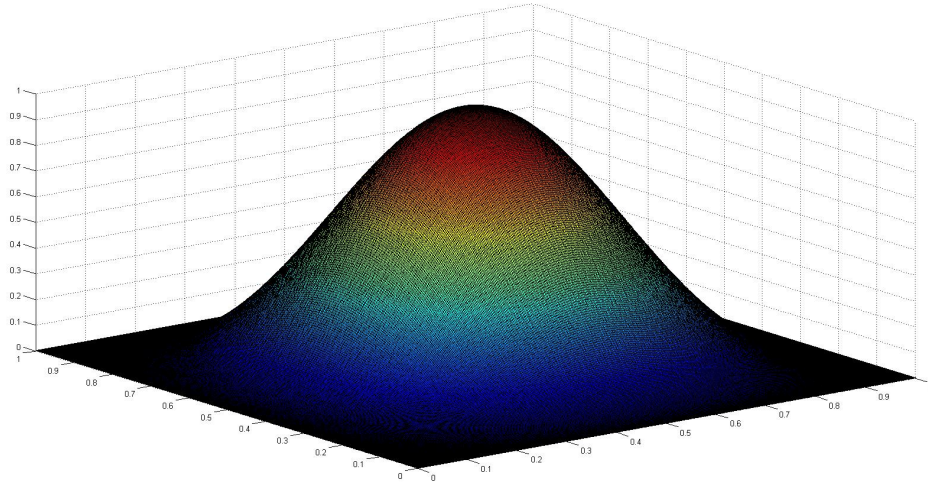
Σχήμα 3.8: Η προσεγγιστική λύση για διαμέριση  $h = 0.01$ .



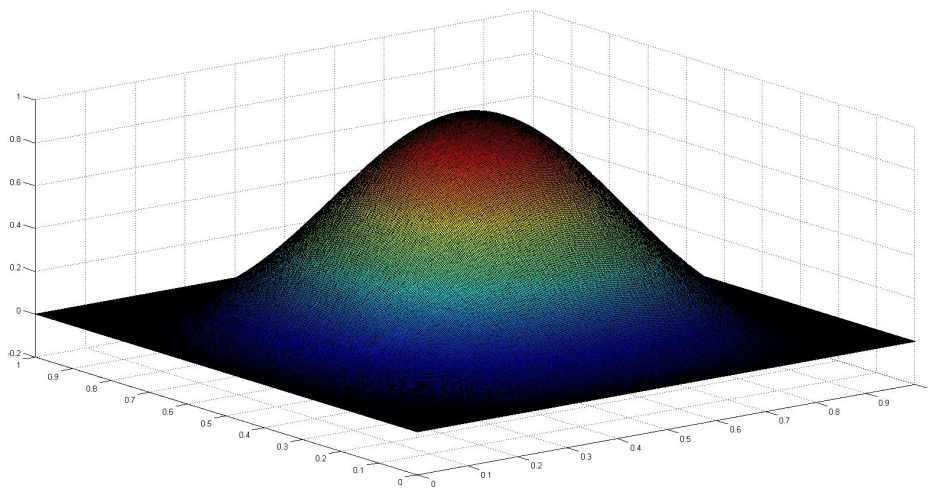
Σχήμα 3.9: Η κανονική λύση για διαμέριση  $h = 0.005$ .



Σχήμα 3.10: Η προσεγγιστική λύση για διαμέριση  $h = 0.005$ .



Σχήμα 3.11: Η κανονική λύση για διαμέριση  $h = 0.0025$ .



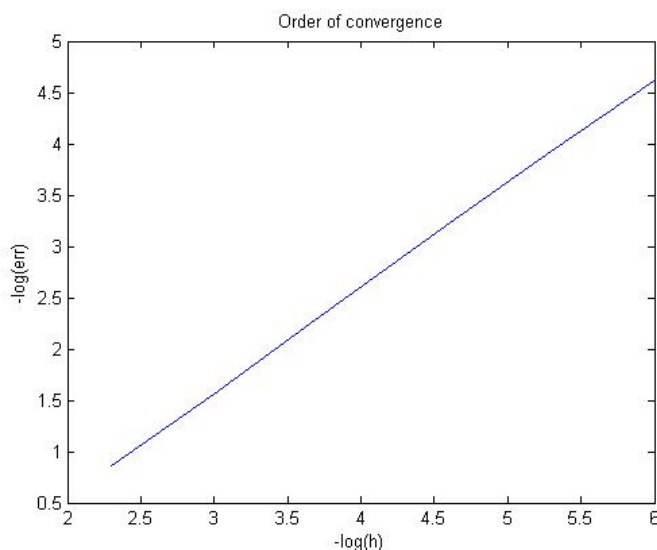
Σχήμα 3.12: Η προσεγγιστική λύση για διαμέριση  $h = 0.0025$ .

Είναι εμφανές ότι όσο μειώνουμε την διαμέριση  $h$  τόσο η προσεγγιστική λύση  $u_h$  πλησιάζει την  $u$ . Το ζητούμενο είναι να επαληθεύσουμε το αποτέλεσμα που δείξαμε στο Λήμμα 2.2, δηλαδή ότι η τάξη σύγκλισης της μεθόδου είναι 1. Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται το πως κυμαίνεται το ολικό σφάλμα σε σχέση με την διαμέριση. Το σφάλμα υπολογίστηκε ως προς την νόρμα  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$  λόγω της Πρότασης 2.1.

$h$	err
0.1	0.4221
0.05	0.2112
0.025	0.1016
0.01	0.0398
0.005	0.0198
0.0025	0.0099

Παίρνοντας  $-\log h$  και  $-\log(\text{err})$  και βρίσκοντας την κλίση της ευθείας της γραφικής παράστασης αυτών των σημείων, θα εκτιμήσουμε την τάξη σύγκλισης.

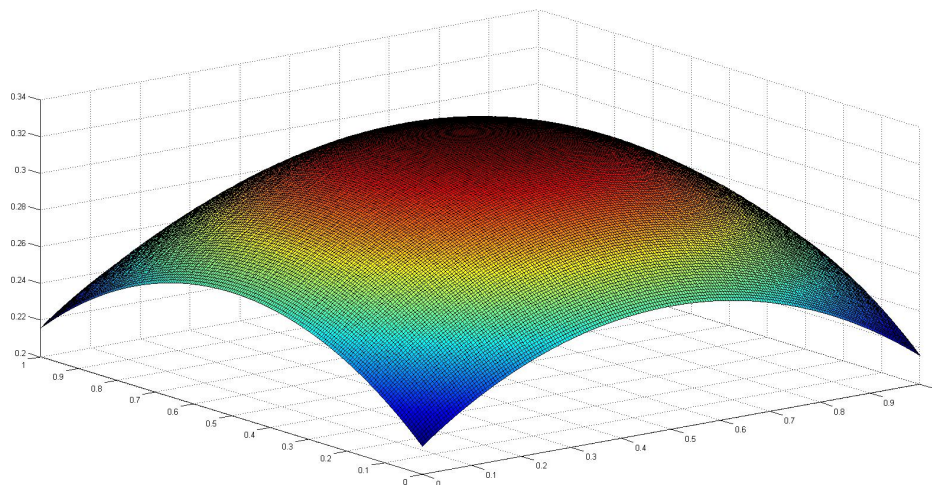
$-\log h$	$-\log(\text{err})$
5.9915	4.6152
5.2983	3.9221
4.6052	3.2239
3.6889	2.2867
2.9957	1.5549
2.3026	0.8625



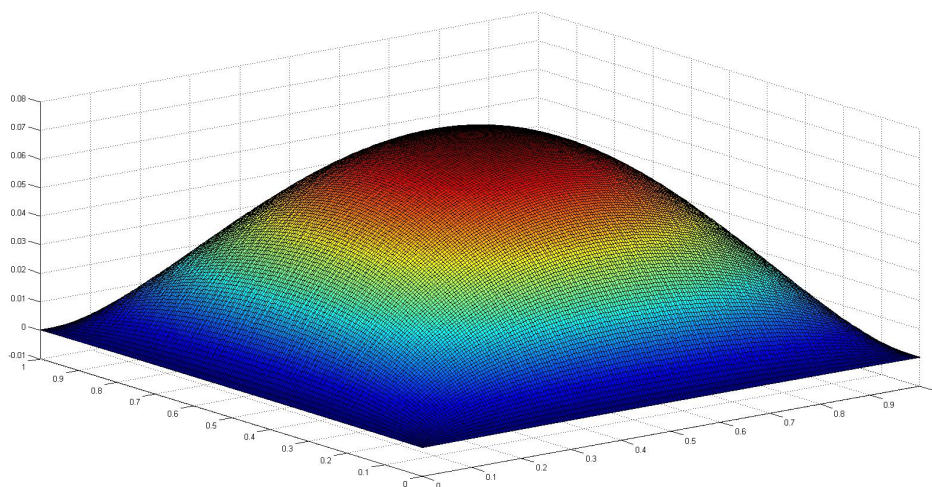
Ενδεικτικά υπολογίζοντας την κλίση της ευθείας έχουμε  $\frac{3.2239 - 2.2867}{5.2983 - 3.6889} = 1.0228 \simeq 1$ .



Παρακάτω παραθέτω με σειρά τη λύση του προβλήματος για  $f = 1$ ,  $\mu = 1$  και  $p = 2, 3$ .



Σχήμα 3.13: Η λύση για  $p = 2$ .



Σχήμα 3.14: Η λύση για  $p = 3$ .

# Βιβλιογραφία

- [1] R. A. Adams and J. J. F. Fournier, Sobolev Spaces, Second Edition. Pure and applied Mathematics, Academic Press/Elsevier, Amsterdam, 2003
- [2] V. John, Numerical Methods for Partial Differential Equations, Free University of Berlin, Summer Semester, 2013

