ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Εισαγωγή Στις Διμετρικές Θεωρίες Βαρύτητας

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

ΧΡΙΣΤΟΔΟΥΛΟΥ-ΓΕΩΡΓΙΟΥ ΒΛΑΧΟΥΤΣΙΚΟΥ

Επιβλέπων : Ελευθέριος Παπαντωνόπουλος
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Φεβρουάριος 2019

Περίληψη

Από το 1915 που δημοσιεύτηκε από τον Albert Einstein η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας, μέχρι και σήμερα, θεωρείται, μαζί με την Κβαντική Θεωρία, ένας από τους δύο βασικότερους πυλώνες της σύγχρονης φυσικής. Ωστόσο κάθε απόπειρα σύνδεσης αυτών των δύο θεωριών καταλλήγει αναπόφευκτα σε μαθηματικά παράδοξα γεγονός που έχει οδηγήσει τα τελευταία χρόνια σε μία πληθώρα θεωριών βαρύτητας με σκοπό την τροποποίηση της Γενικής Σχετικότητας. Στην παρούσα εργασία παρουσιάζεται μία εισαγωγή στις Διμετρικές Θεωρίες Βαρύτητας και κατόπιν μία μελέτη σφαρικά συμμετρικών λύσεων σε μία από αυτές τις θεωρίες.

Στο πρώτο μέρος παρουσιάζεται μία σύντομη εισαγωγή στους λόγους και τις ιδέες που οδήγησαν στην ανάγκη μίας διμετρικής θεωρίας βαρύτητας από τον Nathan Rosen μέχρι τις πιο σύγχρονες ιδέες της διβαρυτικής θεωρίας δίνοτας μεγαλύτερη σημασία στη διμετρική θεωρία βαθμωτού τανυστή του John W. Moffat. Το δεύτερο μέρος αφορά τη μελέτη σφαιρικά συμμετρικών λύσεων στην παραπάνω θεωρία. Αρχικά γίνεται μία αναφορά στη λύση MTZ με σκοπό να γίνουν καλύτερα αντιληπτά τα αποτελέσματα που θα παρουσιαστούν στη συνέχεια και παρατίθεται η πρώτη έρευνα σφαιρικά συμμετρικών λύσεων, καθώς και προβλήματα αυτής, από τους Anoop Narayanan και P K Suresh.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή στις Διμετρικές Θεωρίες Βαρύτητας

1.1 Μια σύντομη εισαγωγή

Η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας θεωρείται σημείο αναφοράς για την ιστορία της επιστήμης ως η πρωτοπόρα, μη γραμμική θεωρία της βαρύτητας. Ωστόσο κάποια προβλήματα παραμένουν άλυτα εξαιτίας της εφαρμογής της γεωμετρίας Riemann στην διατύπωση της θεωρίας. Ένα από αυτά τα προβλήματα είναι συνδεδεμένο με τις αρχές διατήρησης της ενέργειας και της ορμής, για το οποίο συμφωνήθηκε να δοατηρούμε τη μετρική επίπεδη σε μεγάλη απόσταση από μία πηγή βαρύτητας.

Ο Nathan Rosen εισήγαγε πρώτος μία λύση σε αυτό πρόβλημα προτείνοντας δύο διαφορετικές μετρικές: την μετρική Riemann $g_{\mu\nu}$ για να περιγράψει τη γεωμετρία του χώρο-χρόνου (άρα του βαρυτικού πεδίου) και την Ευκλείδια μετρική $\gamma_{\mu\nu}$ για τον επίπεδο χώρο-χρόνο (δηλαδή την περιγραφή αδρανειακού πεδίου. Χρησιμοποιώντας αυτή την υπόθεση κατέληξε πως οι εξισώσεις πεδίου του Einstein αφορούν μία θεωρία βρύτητας σε επίπεδο χώρο. Ένα νέο όμως πρόβλημα προέκυψε από το ότι η ψευδο-μετρική της Γενικής Σχετικότητας αποδείχθηκε να είναι "κανονική" μετρική. Αυτό οδήγησε τον Yalmoz[21] να εξετάσει μία νέα τάξη λύσεων των εξισώσεων πεδίου του Rosen με σκοπό να επιλύσει το πρόβλημα της επίπεδης μετρικής. Αλλά ένα ακόμα μικρό πρόβλημα προέκυψε: η ταχύτητα του φωτός δε μπορεί να είναι πια σταθερά, το οποίο έρχεται σε αντίφαση με την Αρχή της Αμεταβλητότητας της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας.

Αυτό οδήγησε τον John W. Moffat[15] σε μία προσέγγιση διμετρικής θεωρίας βαρύτητας για μεταβαλλόμενη ταχύτητα του φωτός, βοηθώντας τον να ενώσει το παζλ του προβλήματος της σκοτεινής ενέργειας. Σε αυτή την προσέγγιση συνέδεσε τις δύο μετρικές με όρους διαφορικών βαθμωτών/διβαθμωτών πεδίων για να εξηγήσει την ταχύρρυθμη εξάπλωση των γαλαξιών ως αποτέλεσμα της μεταβαλλόμενης ταχύτητας του φωτός από μία εποχή σε μία άλλη όπου, για παράδειγμα, η σκοτεινή ενέργεια μπορεί να γίνει αντιληπτή. Τέτοιου είδους θεωρίες έχουν σκοπό να εκφράσουν την διόγκωση του σύμπαντος μέσω μία διμετρικής εκδοχής για μεταβαλλόμενη ταχύτητα του φωτός. Μερικές εφαρμογές του φορμαλισμού της διμετρικής θεωρίας της βαρύτητας του Moffat επιχειρούν να εξηγήσουν την σύνδεση της Κβαντομηχανικής [16] και εξετάζουν την διάδοση νετρίνων χρησιμοποιώντας το πείραμα OPERA[17].

Ένα ακόμη πρόβλημα της Γενικής Σχετικότητας είναι η αδυναμία να εξηγήσει τις περιστρεφόμενες καμπύλες ενός σπειροειδή γαλαξία[11]. Ο Mordehai Milgrom το 1983 πρότεινε μία ειδική μεταχείριση παρουσιάζοντας μία τροποποίηση της Νευτώνιας Δυναμικής (MOND) ικανή μεν να εξηγήσει τέτοιου είδους φαινόμενα αλλά έρχεται σε αντίθεση με την θεωρία σκοτεινής ύλης. Το επόμενο λοιπόν βήμα ήταν η επέκταση της MOND σε όρους διμετρικής θεωρίας με αποτέλεσμα την BIMOND[12]. Χρησιμοποιώντας δύο εξισώσεις πεδίου που περιγράφουν την ύλη και την "δίδυμη-ύλη"[13], μπορούσαν να εξετάσουν την ύπαρξη βαρυτικών κυμάτων ή να εξετάσουν δύο αλληλεπιδρόμενες τετρα-διάστατες μεμβράνες[14].

Το 2012 οι Fawad Hassan και Rachel Rosen[8] επέκτειναν την έννοια μιας διμετρικής θεωρίας σε μία διβαρυτική που χρησιμοποιούσε δύο μετρικές για την περιγραφή των βαρυτικών πεδίων. Με αυτόν τον τρόπο κατέρριψαν τις προηγούμενες διμετρικές εκδοχές που χρησιμοποιούσαν την μία μετρική για να περιγράψουν τη βαρύτητα και την άλλη να έχει το ρόλο μίας φυσικής μετρικής. Τελικά κατέληξαν σε μία νέα μαζική (massive) θεωρία βαρύτητας για spin-2 πεδία, ελεύθερη από "φαντάματα" (ghost-free)[3]. Διάφορες εφαρμογές αυτής της θεωρίας είναι εφικτό να δώσουν εξισώσεις πεδίου για πολύ ισχυρά βαρυτικά πεδία άστρων νετρονίων[4] το οποίο δίνει την δυνατότητα να εξετάσουμε μελανές οπές και super-massive black holes.

1.2 Η Διμετρική θεωρία της Σχετικότητας του Nathan Rosen

Πρώτη φορά η ιδέα των δύο μετρικών είχε παρουσιαστεί από τον Nathan Rosen το 1940 [18],[19]. Ο Rosen χρησιμοποίησε την μετρική Riemann $g_{\mu\nu}$ για να περιγράψει τη γεωμετρία του χώρο-χρόνου και την Ευκλείδια μετρική $\gamma_{\mu\nu}$ για την περιγραφή αδρανειακού πεδίου. Έτσι για κάθε σημείο του χωροχρόνου έχουμε δύο μετρικές.

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$$

$$d\sigma^2 = \gamma_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$$

Θεωρώντας τα σύμβολα Christoffel να είναι $\{^{\mu}_{\nu k}\}$ και $\Gamma^{\mu}_{\nu k}$ των $g_{\mu\nu}$ και $\gamma_{\mu\nu}$ αντίστοιχα τότε η διαφορά των Levi-Civita συνδέσεων θα είναι τανυστής.

$$\Delta^{\mu}_{\nu k} = \{^{\mu}_{\nu k}\} - \Gamma^{\mu}_{\nu k} \tag{1.1}$$

Επίσης για τους τανυστές Riemann $R^{l}_{\mu\nu k}$ και $P^{l}_{\mu\nu k}$ των $g_{\mu\nu}$ και $\gamma_{\mu\nu}$ αντίστοιχα καταλήγουμε πως ο $P^{l}_{\mu\nu k}$ είναι μηδενικός, αφού η μετρική $\gamma_{\mu\nu}$ αφορά επίπεδο χώρο-χρόνο. Έτσι υπολογίζουμε τον τανυστή $R^{l}_{\mu\nu k}$

$$\begin{aligned} R^{l}_{\mu\nu k} &= P^{l}_{\mu\nu k} - \Delta^{l}_{\mu\nu/k} - \Delta^{l}_{\mu k/\nu} + \Delta^{l}_{m\nu}\Delta^{m}_{\mu k} - \Delta^{l}_{mk}\Delta^{m}_{\mu\nu} \\ &= -\Delta^{l}_{\mu\nu/k} - \Delta^{l}_{\mu k/\nu} + \Delta^{l}_{m\nu}\Delta^{m}_{\mu k} - \Delta^{l}_{mk}\Delta^{m}_{\mu\nu} \end{aligned}$$

Όπου με (/) συμβολίζουμε τη συναλλοίωτη παράγωγο που βασίζεται στην $\gamma_{\mu\nu}$.

Κάθε όρος στο δεξί μέλος της εξίσωσης είναι ένας τανυστής. Εύκολα επίσης παρατηρούμε πως από τη Γενική Σχετικότητα μπορούμε εύκολα να μεταβούμε σε αυτόν τον σχηματισμό απλά αντικαθιστώντας τα σύμβολα Christoffel {} με Δ, τις μερικές παραγώγους με τις γ-συναλλοίωτες, το $\sqrt{-g}$ με το $\sqrt{\frac{g}{\gamma}}$, το d^4x με το $\sqrt{-\gamma}d^4x$,

όπου $g = det(g_{\mu\nu}), \gamma = det(\gamma_{\mu\nu})$.
Οι γαιοδαιτικές εξισώσεις στη Διμετρική Σχετικότητα είναι

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\nu k}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^k}{ds} + \Delta^\mu_{\nu k}\frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0 \tag{1.2}$$

Από τις εξισώσεις (1.1) και (1.2) παρατηρούμε πως το Γ μπορεί να θεωρηθεί ότι περιγράφει το αδρανειακό πεδίο επειδή εξαφανίζεται με έναν κατάλληλο μετασχηματισμό συντεταγμένων. Η ποσότητα Δ, ως τανυστής, είναι ανεξάρτητη από το σύστημα συντεταγμένων, επομένως μπορεί να θεωρηθεί πως περιγράφει το σταθερό βαρυτικό πεδίο.

Ο Rosen το 1973 [20] ανακάλυψε πως η Διμετρική Σχετικότητα ικανοποιεί την Αρχή της Ισοδυναμίας. Το 1966 ο Rosen έδειξε πως η εισαγωγή της χωρικής μετρικής στο πλαίσιο της Γενικής Σχετικότητας όχι μόνο επιτρέπει να πάρουμε τον τανυστή ενέργειας-ορμής από το βαρυτικό πεδίο, αλλά κι από variational principle(?). Οι εξισώσεις κίνησης προκύπτουν από variational principle(?) κι έχουν την μορφή

$$K^\mu_\nu = N^\mu_\nu - \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu N = -8\pi\kappa T^\mu_\nu, \tag{1.3}$$

όπου

$$N^\mu_\nu = \frac{1}{2}\gamma^{\alpha\beta}(g^{k\mu}g_{k\nu/\alpha})_{/\beta}$$

$$N = g^{\lambda\sigma}N_{\lambda\sigma}, \kappa = \sqrt{\frac{g}{\gamma}}$$

Η variation of principle οδηγεί επίσης στη σχέση

$$T^\mu_{\nu;\mu} = 0.$$

άρα από την (1.3)

$$K^{\mu}_{\nu;\mu} = 0,$$

το οποίο συνεπάγεται ότι στην Διμετρική Σχετικότητα, ένα δοκιμαστικό σωματίδιο κινείται στην γεωδαισιακή που επάγεται η $g_{\mu\nu}$.
παρ Όπως αποδείχθηκε στη συνέχεια η Διμετρική Σχετικότητα διαφέρει από τη Γενική Σχετικότητα στα εξής:
• Δεν προβλέπεται η ύπαρξη μελανών οπών.
• Στο εξωτερικό ενός αστέρα νετρονίων.
• Στη συμπεριφορά ισχυρών βαρυτικών κυμάτων που διαδίδονται από ένα ισχυρό βρυτικό πεδίο

Επίσης οι προβλέψεις του Rosen για τη βαρυτική ακτινοβολία έδειξαν να έρχονται σε αντίφαση με παρατηρήσεις που έγιναν στο δυαδικό πάλσαρ των Hulse και Taylor.

1.3 Η θεωρία John W. Moffat για τη μεταβαλλόμενη ταχύτητα του φωτός

1.3.1 Η ιδέα της μεταβαλλόμενης ταχύτητας του φωτός

Η Ειδική θεωρία της Σχετικότητας του Einstein βασίζεται σε δύο βασικά αξιώματα.

•(Αρχή της Σχετικότητας)Οι νόμοι της φυσικής είναι αμετάβλητοι σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς.

•(Αρχή της Αμεταβλητότητας) Η ταχύτητα του φωτός είναι ίδια σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς.

Για την Ειδική θεωρία της Σχετικότητας είναι αρκετό να δεχτούμε το πρώτο αξίωμα. Παρ'όλα αυτά, αν και η ταχύτητα του φωτός είναι σταθερά, μπορεί η σταθερά αυτή να αλλάζει από ένα σύστημα αναφοράς σε ένα άλλο. Οι συντεταγμένες του χώρου είναι έτσι ορισμένες ώστε η "one-way" ταχύτητα του φωτός να είναι είναι σταθερή.

Στον χωρο-χρόνο του Γαλιλαίου βασική είναι η υπόθεση ενός απόλυτου χρόνου, όπου ταυτόχρονα γεγονότα μπορούν να συμβούν σε όλα τα συστήματα αναφοράς. Σε αντίθεση με τη "σχετικότητα" του Γαλιλαίου, ο ταυτοχρονισμός στην Ειδική θεωρία της Σχετικότητας, είναι σχετικός και εξαρτάται από την κίνηση του παρατηρητή. Μπορεί όμως και το πρώτο αξίωμα του Einstein να μην είναι καλά παγιωμένο στην κλίμακα της κοσμολογίας ή σε πολύ μικρές αποστάσεις.

Ο βασικός λόγος προβληματισμού απέναντι στην "γενικότητα" της Ειδικής θεωρίας της Σχετικότητας είναι το κενό που υπάρχει ανάμεσα στους δύο βασικότερους κλάδους της σύγχρονης φυσικής, τη Γενική θεωρίας της Σχετικότητας και την Κβαντομηχανική. Στη Γενική Σχετικότητα η έννοια του χρόνου ως φυσική ποσότητα εξαφανίζεται και γι αυτό τον λόγο μία σημαντική έρευνα ξεκίνησε με σκοπό την κατασκευή μίας συνεπής θεωρίας Κβαντικής Βαρύτητας. Το πρόβλημα όμως είναι πως όταν προσπαθούμε να δούμε τον χώρο-χρόνο "κβαντισμένο", είναι δύσκολο να διατηρήσουμε τις βασικές αρχές της Ειδικής Σχετικότητας που σχετίζονται με τους κώνους φωτός του Minkowski. Επίσης στην Κβαντομηχανική ο χρόνος είναι εξωτερική παράμετρος ενώ στην Γενική Σχετικότητα ο χώρος και ο χρόνος είναι της ίδιας σημασίας.

Στον χώρο της κοσμολογίας μια ομοκινητική συντεταγμένη του χρόνου εμφανίζεται στο μοντέλο Friedmann, Robertson and Walker (FRW) ως μάλιστα μια καθολική έννοια που εκφράζει την ηλικία του σύμπαντος. Η μετρική όμως όμως του μοντέλου FRW εξαρτάται από έναν μετασχηματισμό σε μη-ομοκινητικές συντεταγμένες και η ιδέα του καθολικού-απόλυτου χρόνου εξαφανίζεται.

Ο Moffat επικεντρώθηκε στην ιδέα πως η μεταβαλλόμενη ταχύτητα του φωτός θα μπορέσει να επίλυσει το πρόβλημα αρχικών τιμών της Μεγάλης Έκρηξης. Κάτι που προφανώς απαιτεί τροποποίηση στις θεωρίες κι εξισώσεις του Einstein τόσο στην Ειδική όσο και στη Γενική Σχετικότητα.

Σαν πρώτη ιδέα της μεταβαλλόμενης ταχύτητας του φωτός ήταν πως στην πρώιμη φάση του σύμπαντος η ομάδα $SO(3;1)$ του Lorentz έσπασε στην ομάδα $O(3)$ του Γαλιλαίου. Αυτό εισήγαγε την ιδέα ενός 'άπόλυτου χρόνου" κι ενός σχηματισμού Κβαντικής Βαρύτητας η οποία δεν ήταν σε ασυμφωνία με την ιδέα του χρόνου στην Κβαντομηχανική. Κατά τη διαστολή του σύμπαντος όμως, υπήρξε μία μεταβατική φάση κατά την οποία επανήλθε η τετραδιάστατη συμμετρία της ομογενούς ομάδας Lorentz. Ωστόσο η ταχύτητα του φωτός μπορούσε να αλλάξει τιμές μόνο με ασυνεχή τρόπο από την αρχική σταθερά, κατά τη δημιουργία του σύμπαντος, σε μία πολύ μικρότερη τιμή ανάλογη αυτής που μετράμε σήμερα

$c_0 = 299, 792, 458 m/s$.

Αυτό που έλλειπε στην θεωρία της μεταβαλλόμενης ταχύτητας του φωτός ήταν να είναι συνεπής με μία θεωρία Βαρύτητας. Για την επίλυση αυτού του πρόβληματος καταλλήξαμε στην θεωρία της Διμετρικής Βαρύτητας η οποία παρείχε έναν συνεπή αμετάβλητο διαφορομορφισμό για να εξηγήσει φαινόμενα όπως η μεταβαλή της ταχύτητας του φωτός.

1.3.2 Η διμετρική θεωρία βαθμωτού τανυστή

Η διμετρική θεωρία βαθμωτού τανυστή του Moffat περιγράφεται από δύο μετρικές, την μετρική της "ύλης" $\hat{g}_{\mu\nu}$ και τη μετρική της "βαρύτητας" $g_{\mu\nu}$, οι οποίες συνδέονται από το "διβαθμωτό" πεδίο ϕ μέσω της εξίσωσης

$$\hat{g}_{\mu\nu} = A[\phi] g_{\mu\nu} + B[\phi] \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \tag{1.4}$$

όπου $\partial_\mu \phi = \partial \phi / \partial x^\mu$ και οι αντίστροφες μετρικές $g^{\mu\nu}$ και $\hat{g}^{\mu\nu}$ ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\hat{g}^{\mu\nu} \hat{g}_{\mu\nu} = \delta^\mu{}_\nu, \;\; g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = \delta^\mu{}_\nu$$

Είναι εύκολο να παρατηρήσεις κανείς πως για $A[\phi] = 1$ και $B[\phi] = 0$ επιστρέφουμε στην κλασική Γενική Σχετικότητα. Στο συγκεκριμένο μοντέλο ο Moffat επέλεξε $A[\phi] = 1$ και $B[\phi] = B = constant$ όπου η σταθερά B σε μονάδες [μήκος]^2. Η μετρική $\hat{g}^{\mu\nu}$ χρησιμοποιείται για την κατασκευή του μέρους ύλης της δράσης, δηλαδή παριστάνει την γεωμετρία του πεδίου της ύλης.

$$\hat{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + B \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \tag{1.5}$$

Η μορφή της δράσης είναι η εξής

$$S = S_{grav} + S_\phi + \hat{S}_M \tag{1.6}$$

όπου

$$S_{grav} = -\frac{1}{\kappa}\int d\mu(R[g] + 2\Lambda), \tag{1.7}$$

$\kappa = 16\pi G/c_0^4$, Λ είναι η κοσμολογική σταθερά και χειριζόμαστε τη μετρική με πρόσημα $(+,-,-,-)$. Η δράση του minimally-coupled ? βαθμωτού πεδίου δίνεται από τη σχέση

$$S_\phi = \frac{1}{k}\int d^4x\sqrt{-g}\Big[\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi)\Big], \tag{1.8}$$

όπου το βαθμωτό πεδίο ϕ επιλέχθηκε ώστε να είναι αδιάστατο. Ο τανυστής ενέργειας-ορμής για το βαθμωτό πεδίο είναι

$$T_\phi^{\mu\nu} = \frac{1}{\kappa}\Big[g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi + g^{\mu\nu}V(\phi)\Big] \tag{1.9}$$

και η μεταβολλή της δράσης του βαθμωτού πεδίου ως προς τη μεταβολλή της βαρυτικής μετρικής είναι

$$\frac{\delta S_\phi}{\delta g_{\mu\nu}} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}T_\phi^{\mu\nu}. \tag{1.10}$$

Για την κατασκευή της δράσης της ύλης $\hat{S}_M$ χρησιμοποιείται η μετρική (1.5), ταυτίζοντας έτσι την $\hat{g}_{\mu\nu}$ ως τη μετρική που παράγει το χώρο όπου το πεδίο της ύλης αλληλεπιδρά. Έτσι $\hat{S}_M[\psi^I] = \hat{S}_M[\hat{g}, \psi^I]$, όπου ψ^I παριστάνει όλα τα πεδία της ύλης στον χώροχρόνο. Ο τανυστής ενέργειας-ορμής είναι

$$\frac{\delta S_M}{\delta \hat{g}_{\mu\nu}} = -\frac{1}{2}\sqrt{-\hat{g}}\hat{T}^{\mu\nu} \tag{1.11}$$

και ικανοποιεί το νόμο διατήρησης

$$\hat{\nabla}_\nu[\sqrt{-\hat{g}}\hat{T}^{\mu\nu}] = 0 \tag{1.12}$$

Αφού η $\hat{g}_{\mu\nu}$ είναι αυτή μόνο που εμφανίζεται στο πεδίο της ύλης, είναι λογικό να θεωρηθεί πως ένα δοκιμαστικό σωματίδιο θα ακολουθήσει τις γεωδαιτικές καμπύλες της $\hat{g}_{\mu\nu}$:

$$\frac{d\hat{u}^\alpha}{d\lambda} + \hat{\Gamma}^a_{\mu\nu}\hat{u}^\mu\hat{u}^\nu = 0 \tag{1.13}$$

όπου το λ είναι μία ομοπαράλληλη παραμέτρος και το εφαπτόμενο διάνυσμα είναι κανονικοποιημένο έτσι ώστε $\hat{g}_{\mu\nu}\hat{u}^\mu\hat{u}^\nu = 0$ για φωτοειδή γεωδαιτικές και $\hat{g}_{\mu\nu}\hat{u}^\mu\hat{u}^\nu = c^2$ για χρονοειδή γεωδαιτικές. Λόγω της σύζευξης όλων των πεδίων ύλης με την $\hat{g}_{\mu\nu}$ η Ασθενής Αρχή της Ισοδυναμίας (ΑΑΙ) δεν παραβιάζεται. Επίσης αν εργαστούμε σε μία περιοχή με $\hat{g}_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu}$, όπου $\eta_{\mu\nu}$ η μετρική Minkowski για επίπεδο χώρο-χρόνο, τότε οι εξισώσεις του πεδίου ύλης μπορούν να πάρουν τη μορφή τους βάσει τη Ειδικής Σχετικότητας οπότε ούτε Αρχή της Ισοδυναμίας του Einstein παραβιάζεται. Παρ΄όλα αυτά αν επεκτείνουμε τα πεδία ύλης και βαρύτητας σε μία περιοχή όπου $\hat{g}_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu}$ τότε οι διαταραχές των $\hat{g}_{\mu\nu}$ και ϕ δε θα πάρουν τη μορφή τους βάσει της Ειδικής Σχετικότητας, άρα η Ισχυρή Αρχή της Ισοδυναμίας (ΙΑΙ) αναμένεται να παραβιαστεί.

Ένα πολύ βασικό χαρακτηριστικό του μοντέλου του Moffat είναι πως η δύζευξη αυτή δεν προκαλεί αστάθεια, με την έννοια υψηλών βαθμού παραγώγων. Για να φανεί αυτό παραγωγίζουμε τις εξισώσεις πεδίου.

Για μικρή μεταβολή της μετρικής (1.5) έχουμε

$$\delta\hat{g}_{\mu\nu} = \delta g_{\mu\nu} + 2B\partial_{(\mu}\phi\partial_{\nu)}\delta\phi \tag{1.14}$$

και από την ανάλυση της (1.11) παίρνουμε τις εξισώσεις πεδίου

$$G^{\mu\nu} = \frac{\kappa}{2}(T^{\mu\nu}_\phi + s\hat{T}^{\mu\nu}), \tag{1.15}$$

$$\nabla^2\phi + V'[\phi] - \kappa s B \hat{T}^{\mu\nu}\hat{\nabla}_\mu\hat{\nabla}_\nu\phi = 0. \tag{1.16}$$

Όπου $G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R,\ s = \sqrt{-\hat{g}}/\sqrt{g}$ και $\nabla^2\phi = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\phi$.

Ως έλεγχο για τις παραπάνω εξισώσεις, μπορούμε να δείξουμε πως οι ταυτότες Bianchi για την καμπύλη της $g_{\mu\nu}$ είναι συμβατές με τις εξισώσεις. Από την (1.15) μπορούμε να γράψουμε τις αντίστροφες μετρικές στη μορφή

$$\hat{g}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \frac{B}{I}\nabla^\mu\phi\nabla^\nu\phi \tag{1.17}$$

και

$$g^{\mu\nu} = \hat{g}^{\mu\nu} + \frac{B}{K}\hat{\nabla}^\mu\phi\hat{\nabla}^\nu\phi \tag{1.18}$$

όπου

$$I = 1 + Bg^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi, \quad K = 1 - B\hat{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi \tag{1.19}$$

οπότε $IK = 1$ και έχοντας ορίσει $\nabla^\mu\phi = g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi$ και

$$\hat{\nabla}^\mu\phi = \hat{g}^{\mu\nu}\partial_\nu\phi = K\nabla^\mu\phi \tag{1.20}$$

Ένα βασικό χαρακτηριστικό της Διμετρικής Βαρύτητας του Moffat είναι πως υπάρχει ένα διαφορετικό σύστημα που σχετίζεται με κάθε μετρική και κάθε μετρική έχει τον δικό της κώνο φωτός. Λόγω του διβαθμωτού πεδίου που συσχετίζει αυτές τις δύο μετρικές, οι δύο αυτοί κώνοι δε μπορούν να ταυτίζονται. Αν επιλέξουμε ένα μικρό τμήμα του χώρο-χρόνου στο βαρυτικό σύστημα με τη μετρική $g_{\mu\nu}$ τότε τοπικά την μετατρέπουμε σε επίπεδη (Minkowski). Για παράδειγμα αν $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$,όπου $\eta_{\mu\nu} = diag(1,-1,-1,-1)$ οπότε

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{1.21}$$

Κι από την (1.5)

$$d\hat{s}^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + B\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi dx^\mu dx^\nu \tag{1.22}$$

Αν χρησιμοποιήσουμε τοπικά ένα μετασχηματισμό Lorentz

$$x^{'\mu} = \Lambda^{\alpha}{}_{\nu} x^{\nu}, \tag{1.23}$$

όπου $\Lambda^{\alpha}{}_{\nu}$ είναι ένς σταθερός συντελεστής-τανυστής που ικανοποιεί τη σχέση

$$\Lambda^{\alpha}{}_{\mu} \Lambda_{\alpha\nu} = \eta_{\mu\nu}, \tag{1.24}$$

Τότε οι (1.21) και (1.22) παραμένουν αμετάβλητες. Το ίδιο συμπέρασμα θα είχαμε για $V_{\mu} = \partial_{\mu}\phi$, όπου $V'_{\mu} = \Lambda_{\mu}{}^{\alpha} V_{\alpha}$ κάτω από έναν σχηματισμό Lorentz. Αν η εξίσωση του κώνου φωτός $ds^2 = 0$ ικανοποιείται, τότε $d\hat{s}^2 \neq 0$ για τον ίδιο κώνο φωτός, εκτός αν $\phi = 0$. Παρ'όλα αυτά,$d\hat{s}^2 = 0$ σε έναν διευρημένο κώνο φωτός που περιβάλει τον κώνο $ds^2 = 0$. Παρατηρούμε ότι ενώ μπορούμε να μετασχηματίσουμε τα σύμβολα Christoffel $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ σε ένα σημείο του χώρο-χρόνου, δε μπορούμε να μετασχηματίσουμε το βαθμωτό πεδίο ϕ στο ίδιο σημείο, ούτε τα σύμβολα Christoffel $\hat{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu}$

Αν επιλέξουμε την αναμενόμενη τιμή του κενού $\mathcal{V}_{\mu} =< V_{\mu} >_0 \neq 0$, τότε το $grad\phi$ συμπεριφέρεται σαν ένα (spontaneous symmetry breaking field, ώστε να είναι αδύνατο να διατηρηθεί η τοπική Lorentz αναλλοίωτη σε κατάσταση κενού και για τις δύο μετρικές $g_{\mu\nu}$ και $\hat{g}_{\mu\nu}$. Χρησιμοποιώντας ένα προτιμώμενο σύστημα υπό την spontaneous symmetry breaking του κενού, αφού το $\mathcal{V}_{\mu}$ επιλέγει μία προτιμώτερη κατεύθυνση στον χώρο-χρόνο. Αυτό το σύστημα αντιστοιχεί σε ένα χρονοειδές διάνυσμα $\mathcal{V}_{\mu} = (\mathcal{V}, 0, 0, 0)$ το οποίο οδηγεί σε ένα spontaneous breaking της ομογενούς ομάδας του Lorentz $SO(3,\ 1) \to O(3)$ όπου μόνο η συμμετρική ομάδα περιστροφών θα διατηρηθεί. Στην Γενική Σχετικότητα υπάρχουν μόνο ένας κώνος φωτός και μία μετρική ενώ η τοπικά αναλλοίωτη του Lorentz διατηρείται αυστηρά.

1.3.3 Εφρμογή σε κοσμολιγικό μοντέλο Friedmann-Robertson-Walker(FRW)

Ξεκινάμε θεωρώντας πως ο χωροχρόνος και το βαθμωτό πεδίο ϕ είναι ομογενεί και ισοτροπικά και την βαρυτική μετρική $g_{\mu\nu}$ στο FRW μοντέλο

$$ds^2 = c_0^2 dt^2 - R^2(t)\Big[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 sin^2\theta d\phi^2\Big] \quad (1.25)$$

με r μία αδιάστατη ακτινική μεταβλητή και $k = 0, \pm 1$ για επίπεδο, κλειστό κι ανοιχτό σύμπαν αντίστοιχα. Οπότε η μετρική στο σύστημα της μεταβαλλόμενης ταχύτητας του φωτός δίνει

$$d\hat{s}^2 = c^2(t)dt^2 - R^2(t)\Big[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 sin^2\theta d\phi^2\Big] \quad (1.26)$$

όπου

$$c(t) = c_0 I^{1/2} \quad (1.27)$$

και

$$I = 1 + \frac{B}{c_0^2}\dot{\phi}^2 \quad (1.28)$$

Όπου η τελεία δηλώνει την παράγωγο ως προς t. Ο τανυστής ορμής-ενέργειας της ύλης είναι.

$$\hat{T}^{00} = \frac{\rho}{I}, \hat{T}^{0i} = 0, \hat{T}^{ij} = \frac{p}{R^2}\gamma^{ij}, \quad (1.29)$$

όπου γ^{ij} η χωρική μετρική. Οι νόμοι διατήρησης παίρνουν τη μορφή

$$\dot{\rho} + 3H\Big(\rho + \frac{p}{c_0^2}\Big) = 0 \quad (1.30)$$

όπου $H = \dot{R}/R$ η συνάρτηση Hubble

Παρατηρούμε πως στο σύστημα της VSL η ταχύτητα του φωτός εξαρτάται από τον χρόνο, ενώ στην VSGW η τχύτητα του φωτός είναι σταθερή και η ταχύτητα των βαρυτικών κυμάτων εξαρτάται από τον χρόνο. Αυτό προκύπτει γράφοντας τη μετρική της ύλης $\hat{g_{\mu\nu}}$ σε ομοκινητική μορφή με σταθερά c_0

$$d\hat{s}^2 = c_0^2 dt^2 - R^2(t)\Big[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 sin^2\theta d\phi^2\Big]. \quad (1.31)$$

Επομένως παίρνουμε

$$ds^2 = u_g^2 dt^2 - R^2(t)\Big[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 sin^2\theta d\phi^2\Big], \quad (1.32)$$

όπου u_g η ταχύτητα των βαρυτικών κυμάτων

$$u_g(t) = c_0 K^{1/2}, \quad (1.33)$$

και

$$K = 1 - \frac{B}{c_0^2}\dot{\phi}^2. \quad (1.34)$$

Καταλλήγουμε λοιπόν πως, στο VSGW σύστημα, η ταχύτητα των βαρυτικών κυμάτων u_g για $B > 0$ είναι μικρότερη από την ταχύτητα του φωτός c_0 Οι νόμοι της φυσικής θα εκλαμβάνονται διαφορετικά για κάθε παρατηρητή, ανάλογα με το σύστημα (VSL ή VSGW) που θα ακολουθεί το πείραμά του.

Η εξίσωση Friedmann στο VSL σύστημα είναι

$$H^2 + \frac{kc_0^2}{R^2} = \frac{8\pi G}{3I^{1/2}}\rho + \frac{1}{3}c_0^2\Lambda + \frac{1}{6}\rho_\phi, \quad (1.35)$$

όπου

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + c_0^2 V(\phi). \quad (1.36)$$

Η υπόλοιπη εξίσωση είναι

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3I^{1/2}}\Big(\rho + 3I\frac{p}{c_0^2}\Big) + \frac{1}{3}c_0^2\Lambda - \frac{1}{12}(\rho_\phi + 3p_\phi), \quad (1.37)$$

όπου

$$p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - c_0^2 V(\phi). \tag{1.38}$$

Η εξίσωση βαθμωτού πεδίου στο VSL σύστημα είναι

$$\frac{1}{c_0^2}\Big(1 - \frac{16\pi GB}{c_0^2 I^{3/2}}\rho\Big)\ddot{\phi} + \frac{3}{c_0^2}H\dot{\phi}\Big(1 + \frac{16\pi GB}{c_0^4 I^{1/2}}p\Big) + V'(\phi) = 0. \tag{1.39}$$

Η εξίσωση Friedmann στο VSGW σύστημα είναι

$$H^2 + \frac{kc_0^2}{R^2} = \frac{8\pi G}{3}K^{3/2}\rho + \frac{1}{3}c_0^2\Lambda K + \frac{1}{6}\rho_\phi, \tag{1.40}$$

όπου

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + c_0^2 K V(\phi), \quad p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - c_0^2 K V(\phi). \tag{1.41}$$

Αντίστοιχα η υπόλοιπη εξίσωση είναι

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3}\Big(K^{3/2}\rho + \frac{3}{c_0^2}K^{1/2}p\Big) + \frac{1}{3}c_0^2\Lambda K - \frac{1}{12}(\rho_\phi + 3p_\phi) + \frac{1}{2}\frac{\dot{K}}{K}H. \tag{1.42}$$

Τέλος η εξίσωση βαθμωτού κύματος στο συγκεκριμένο σύστημα είναι

$$\frac{1}{c_0^2}\Big(1 - \frac{16\pi GB}{c_0^2}K^{3/2}\rho\Big)\ddot{\phi} + \frac{3K}{c_0^2}H\dot{\phi}\Big(1 + \frac{16\pi GB}{c_0^4}K^{1/2}p\Big) + K^2 V'(\phi). \tag{1.43}$$

1.3.4 Συμπεράσματα

Σύμφωνα με τα παραπάνω, το πρόβλημα κατασκευής μία συνεπής θεωρίας που επιτρέπει τόσο μια μεταβαλλόμενη ταχύτητα του φωτός όσο και μία μεταβαλλόμενη ταχύτητα των βαρυτικών κυμάτων μπορεί να επιλυθεί μέσω του διμετρικού φορμαλισμού του Moffat. Με την κατασκευή ενός κατάλληλου νόμου διατήρησης του τανυστή της ύλης, τα σωμτίδια θα κινηθούν στις γεωδαιτικές που δίνονται από την ομοκινητική $\hat{g}_{\mu\nu}$. Σε αυτή την περίπτωση η ταχύτητα του φωτός είναι σταθερή και οι παρατηρητές μπορούν να επικοινωνούν μεταξύ τους με φωτεινά σήματα. Ένας παρατηρητής στον χωροχρόνο που καθορίζεται από την $g_{\mu\nu}$ μετρική βλέπει την ταχύτητα των βαρυτικών κυμάτων να μεταβάλεται με τον χρόνο και το σύμπαν να επιταχύνεται αναμένοντας την ύπαρξη ενός μελλοντικού κοσμολογικού ορίζοντα.

Στην περίπτωση που επιλέξουμε την $g_{\mu\nu}$ ομοκινητική, ώστε η ταχύτητα των βαρυτικών κυμάτων να είναι σταθερή και οι παρατηρητές να μπορούν να επικοινωνούν με σήματα μέσω βαρυτικών κυμάτων, τότε ένας παρατηρητής στο $\hat{g}_{\mu\nu}$ σύστημα θα μπορεί να ανιχνεύει μεταβολλές στην ταχύτητα του φωτούς, όπως στο dimming? ενός υπερκαινοφανή αστέρα (supernovae) λόγω της αύξηση της $c(t)$ στο παρελθοντικό σύμπαν κι ένα επιβραδυνόμενο σύμπαν χωρίς κοσμολογικό ορίζοντα για μία αυξανόμενη ταχύτητα του φωτός στο μέλλον.

Ένας παρατηρητής στο VSL σύστημα θα είναι στη θέση να πραγματοποιεί φυσικά πειράματα και η ανυπαρξία ενός μελλοντικού κοσμολογικού ορίζοντα θα επιτρέψει την κατασκευή ενός S-πίνακα για την διάχυση των διάφορων σωματιδίων.

Υπάρχουν διάφορες εφαρμογές της διμετρικής θεωρίας του Moffat που ακόμα δεν έχουμε ασχοληθεί. Στο δεύτερο μέρος θα μελετήσουμε την ύπαρξη σφαιρικά συμμετρικών λύσεων σε αυτή τη θεωρία.

1.4 Διβαρυτική θεωρία και spin-2 πεδία

Γραμμικοποίηση της βρύτητας

και η θεωρία των Fierz-Pauli

Σύμφωνα με το θεώρημα του Lovelock, οι εξισώσεις βαρυτικού πεδίου του Einstein είναι οι μοναδικές δεύτερης τάξης, μη γραμμικές, τοπικές εξισώσεις κίνησης ενός άμαζου spin-2 σωματιδίου στον τετραδιάστατο χωροχρόνο.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 0$$

με δράση

$$S_{EH}[g] = M_p^2 \int d^4x\sqrt{-g}(R(g) - \Lambda)$$

όπου M_p είναι η μάζα Plank ($M_p = (16\pi G)^{-1}$).

Η κατασκευή ενός spin-2 πεδίου $h_{\mu\nu}$ που διαδίδεται στον χώρο Minkowski μπορεί να επιτευχθεί με τη γραμμικοποιημένη βαύτητα, γραμμικοποιώντας την γενική σχετικότητα σε επίπεδο χώρο,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + M_P^{-1}h_{\mu\nu}$$

. Αυτό οδηγεί σε έναν κινητικό όρο στη Λαγκραζιανή για το $h_{\mu\nu}$ ο οποίος κάνει σύζευξη με την ύλη. Υπάρχουν λοιπόν 2 πιθανοί όροι μάζας

$$\mathcal{L}_{int} = ah^{\mu\nu}h_{\mu\nu} + b(\eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu})^2$$

Το 1939 οι Fierz και Pauli έδειξαν πως αυτό εξηγεί τις 5 πολώσεις ενός βαρυτονίου με μάζα (σε σχέση με ένα άμαζο που έχει 2) στην περίπτωση που επιλέξουμε τους συντελεστές a και b έτσι ώστε $a = -b$. Οποιαδήποτε άλλη επιλογή καταλλήγει σε ένα 6ο βαθμό ελευθερίας το οποίο συνεπάγεται μία "ghost" θεωρία. Ο όρος μάζας των Fierz-Pauli

$$\mathcal{L}_{FP} = m^2(h^{\mu\nu}h_{\mu\nu} - (\eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu})^2)$$

είναι η μοναδική συνεπής θεωρία γραμμικοποίησης ενός spin-2 πεδίου. Το 1972 οι Boulware και deser έδειξαν πως οποιαδήποτε μη γραμμική επέκταση της παραπάνω θεωρίας οδηγεί σε "ghosts.

Το μοντέλο dRGT

Το 2010 οι de Rham, Gabadadze και Tolley κατασκεύασαν μία θεωρία βαρύτητας [6][7] με μάζα με συντελεστές τέτοιους ώστε να αποφύγουν το "ghost" των Boulware-Deser η οποία ολοκληρώθηκε από τους Faward Hassan και Rachel Rosen[10][9]. Η δράση της "ghost-free θεωρίας των de Rham, Gabadadze και Tolley (dRGT) είναι

$$S = -\frac{M_g^2}{2}\int d^4x\sqrt{-g}R(g) - \frac{M_f^2}{2}\int d^4x\sqrt{-f}R(f)$$

$$+m^2M_g^2\int d^4x\sqrt{-g}\sum_{n=0}^{4}\beta_n e_n(\mathbb{X}) + \int d^4x\sqrt{-g}\mathcal{L}_m(g,\Phi_i)$$

Όπως στο βασικό μοντέλο της γενικής σχετικότητας υπάρχει κι εδώ ένα κινητικός όρος Einstein-Hilbert ανάλογος του βαθμωτού Ricci R και της ελάχιστης σύζευξης με την ύλη $\mathcal{L}_m$, με το Φ_i να αντιπροσωπεύει όλα τα πεδία ύλης. Το νέο κομμάτι της θεωρίας είναι ο όρος μάζας (δυναμικό αλληλεπίδρασης), κατασκευασμένος έτσι ώστε να αποφεύγει τα "ghosts" των Boulware-Deser και είναι στενά συνδεδεμένος με τη μάζα του βαρυτονίου. Το δυναμικό αλληλεπίδρασης είναι κατασκευσμένο από τα στοιχειώδη συμμετρικά πολυώνυμα e_n των ιδιοτιμών των πινάκων $\mathbb{K} = \mathbb{I} - \sqrt{g^{-1}f}$,

$\mathbb{X} = \sqrt{g^{-1}f}$, από την παραμετροποίηση των αδιάστατων σταθερών α_i, β_i και ο $\mathbb{X}$ ορίζεται από τη σχέση

$$X^{\mu}_{\ \alpha} X^{\alpha}_{\ \nu} = g^{\mu\alpha} f_{\nu\alpha}$$

Εδώ έχουμε εισάγει μία νέα μετρική $f_{\mu\nu}$ για την κατασκευή του όρου αλληλεπίδρασης αφού είναι αδύνατο να κατασκευαστεί μόνο από τη $g_{\mu\nu}$. Οι μόνες πιθανότητες είναι $g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}$ και $detg$ που οδηγούν σε κοσμολογικές σταθερές.

Τα στοιχειώδη πολυώνυμα δίνονται από τους τύπους

$$e_0(\mathbb{X}) = 1,$$
$$e_1(\mathbb{X}) = [\mathbb{X}],$$
$$e_2(\mathbb{X}) = \frac{1}{2}([\mathbb{X}]^2 - [\mathbb{X}^2]),$$
$$e_3(\mathbb{X}) = \frac{1}{6}([\mathbb{X}]^3 - 3[\mathbb{X}][\mathbb{X}^2] + 2[\mathbb{X}^3]),$$
$$e_4(\mathbb{X}) = det\mathbb{X},$$

όπου με αγκύλες συμβολίζουμε το ίχνος του πίνακα $[\mathbb{X}] \equiv X^{\mu}_{\ \mu}$. Η επιλογή του $\mathbb{X}$ ή του $\mathbb{K} = \mathbb{I} - \mathbb{X}$, με $\mathbb{I}$ το μοναδιαίο πίνακα είναι μία σύμβαση αφού και στις δύο περιπτώσεις ο ghost-free όρος μάζας είναι ένας γραμμικός συνδιασμός των στοιχειωδών πολυωνύμων του πίνακα που θα επιλέξουμε. Επίσης μπορούμε να μετασχηματίσουμε από τη μία βάση στην άλλη όπου σε κάθε περίπτωση η σχέση που συνδέει τις σταθερές δίνεται από τον τύπο

$$\beta_n = (4-n)! \sum_{i=n}^{4} \frac{(-1)^{i+n}}{(4-i)!(i-n)!} \alpha_i$$

Κοσμολογία

Στην περίπτωση που η μάζα του βαρυτονίου είναι ανάλογη με τη σταθερά Hubble H_0, τότε σε κοσμολογικές αποστάσεις ο όρος της μάζας μπορεί να προκαλέσει βαυτικά φαινόμενα που οδηγούν στην επιτάχυνση του σύμπαντος. Έτσι η συγκεκριμένη θεωρία μπορεί να παρέχει μία λύση στο πρόβλημα της κοσμολογικής σταθεράς: γιατί οι κβαντικές διορθώσεις δεν προκάλεσαν την επιτάγχυνση του σύμπαντος στα πρώτα δευτερόλεπτα;

Παρ'όλα αυτά φαίνεται πως οι κλειστές και επίπεδες λύσεις των Friedmann-Lemaître–Robertson–Walker δεν έχουν βάση στην dRGT θεωρία με επίπεδη μετρική $f_{\mu\nu}$[5]. Ανοιχτές λύσεις ή λύσεις με μία γενική μετρική $f_{\mu\nu}$ παρουσιάζουν προβλήματα ευστάθειας. Επομένως, για να έχει νόημα η συγκεκριμένη θεωρία πρέπει να αφήσουμε στην άκρη την κοσμολογική αρχή πως το σύμπαν είναι ομοιόμορφο σε μεγάλες κλίμακες ή να την γενικεύσουμε. Προς το παρόν κοσμολογικές λύσεις συμπεριφέρονται καλύτερα στη διβαρυτική θεωρία που αποτελεί μία επέκταση της dRGT θεωρώντας την $f_{\mu\nu}$ δυναμική[1].

Κεφάλαιο 2

Μελέτη σφαιρικά συμμετρικών λύσεων στη διμετρική θεωρία του Moffat

2.1 Η λύση MTZ

Γνωρίζουμε πως στη γενική σχετικότητα οι μοναδικές σφαιρικά συμμετρικές λύσεις στο κενό δίνονται από τη γεωμετρία Schwarzschild. Η λύση δηλαδή των εξισώσεων Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{2.1}$$

στο κενό με μηδενική κοσμολογική σταθερά ($\Lambda = 0$) δίνουν

$$ds^2 = -\Big(1 - \frac{2GM}{r}\Big)dt^2 + \Big(1 - \frac{2GM}{r}\Big)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2) \tag{2.2}$$

Ένας τρόπος να μελετήσουμε τη γεωμετρία του χωροχρόνου είναι να εξερευνίσουμε τη δομή όπως ορίζεται από τους κώνους φωτός. Γι αυτό τον λόγο θα θεωρήσουμε τις καμπύλες για τις οποίες τα θ και ϕ είναι σταθερά και $ds^2 = 0$

$$ds^2 = -\Big(1 - \frac{2GM}{r}\Big)dt^2 + \Big(1 - \frac{2GM}{r}\Big)^{-1}dr^2 = 0 \tag{2.3}$$

και καταλήγουμε στη σχέση

$$\frac{dt}{dr} = \pm\Big(1 - \frac{2GM}{r}\Big)^{-1}. \tag{2.4}$$

Η παραπάνω σχέση εκφράζει την κλίση των κώνων φωτός σε ένα χωροχρονικό $t-r$ διάγραμμα. Για πολύ μεγάλο r η κλίση θα είναι ± 1, όπως αναμένεται να είναι σε επίπεδο χώρο, ενώ καθώς πλησιάζει την τιμή $r = 2GM$ παίρνουμε $dt/dr \rightarrow \pm\inf$ και οι κώνοι φωτός «κλείνουν». Έτσι ενώ μία δέσμη φωτός ή ένα σωματίδιο καθώς πλησιάζουν τον ορίζοντα γεγονότων (event horizon) $r = 2GM$ φαίνονται, για έναν παρατηρητή που βρίσκεται πιο μακριά, να μετατοπίζονται συνεχώς προς το ερυθρό. Οτιδήποτε περάσει τον ορίζοντα, ακόμη και το φως, δε μπορεί να επιστρέψει.

Ας θεωρήσουμε τώρα μία τετραδιάστατη βαρύτητα με μία αρνητική κοσμολογική σταθερά ($\Lambda = -3l^{-2}$ όπου l είναι η ακτίνα AdS) και ένα βαθμωτό πεδίο ϕ που περιγράφονται από τη δράση

$$S[g_{\mu\nu}, \phi] = \int d^4x\sqrt{-g}\Big[\frac{R-2\Lambda}{16\pi G} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi)\Big] \tag{2.5}$$

όπου το δυναμικό αλληλεπίδρασης δίνεται από τον τύπο

$$V(\phi) = -\frac{3}{4\pi G l^2} sinh^2\sqrt{\frac{4\pi G}{3}}\phi \tag{2.6}$$

το οποίο έχει ολικό μέγιστο στο $\phi = 0$ και έναν όρο μάζας $m^2 = V'' \mid_{\phi=0} = -2l^{-2}$. Αυτή η μάζα ικανοποιεί το όριο Breitenlohner-Friedman που εξασφαλίζει τη σταθερότητα του AdS κάτω από διαταραχές.

Οι εξισώσεις πεδίου είναι

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \tag{2.7}$$

$$\Box\phi - \frac{dV}{d\phi} = 0 \tag{2.8}$$

όπου $\Box \equiv g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu$ και ο τανυστής ορμής-ενέργειας δίνεται από

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\pi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi - g_{\mu\nu}V(\phi). \qquad (2.9)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις δέχονται στατική λύση μελανής οπής με τοπολογία $\mathbb{R}^2 \times \Sigma$, όπου το Σ είναι μία διδιάστατη πολλαπλότητα αρνητικής καμπυλότητας. Η μελανή οπή είναι

$$ds^2 = \frac{r(r+2G\mu)}{(r+G\mu)^2}\Big[-\Big(\frac{r^2}{l^2}-\Big(1+\frac{G\mu}{r}\Big)^2\Big)dt^2+\Big(\frac{r^2}{l^2}-\Big(1+\frac{G\mu}{r}\Big)^2\Big)^{-1}dr^2+r^2d\sigma^2\Big], \qquad (2.10)$$

ενώ το βαθμωτό πεδίο δίνεται από τη σχέση

$$\phi = \sqrt{\frac{3}{4\pi G}}Arctanh\frac{G\mu}{r+G\mu}. \qquad (2.11)$$

Το $d\sigma^2$ είναι η μετρική της Σ.

Η λύση (2.10) είναι ασυμπτωτικά τοπικά AdS, με ένα χρονοειδές διάνυσμα Killing, ∂_t, αρκεί το Σ να είναι συμπαγές χωρίς όρια. Οι μοναδικές ανωμαλίες της καμπυλότητας και του βαθμωτού πεδίου συμβαίνουν όταν μηδενίζεται ο σύμμορφος συντελεστής της (2.10), δηλαδή όταν $r = 0$ και $r = -2G\mu$. Το πεδίο ορισμού του r είναι $r > -2G\mu$ για αρντική μάζα και $r > 0$ διαφορετικά. Αυτές οι ανωμαλίες περιβάλλονται από έναν ορίζοντα γεγονότων που βρίσκεται στη θέση

$$r_+ = \frac{l}{2}(1+\sqrt{1+4G\mu/l}), \qquad (2.12)$$

αρκεί η μάζα να ξεπερνά το όριο

$$\mu > -\frac{l}{4G} \qquad (2.13)$$

Η MTZ έχει την ίδια αιτιακή δομή με την Schwarzschild-AdS αρκεί σε κάθε σημείο του διαγράμματος Penrose να αντικαταστήσουμε τη σφαίρα S^2 με Σ.

Κάνοντας ένα σύμμορφο μετασχηματισμό και έναν επανορισμό του βαθμωτού πεδίου της μορφής

$$\hat{g}_{\mu\nu} = \Big(1 - \frac{4\pi G}{3}\Psi^2\Big)^{-1} g_{\mu\nu} \tag{2.14}$$

με

$$\Psi = \sqrt{\frac{3}{4\pi G}} tanh \sqrt{\frac{4\pi g}{3}}\phi \tag{2.15}$$

η δράση (2.5) παίρνει τη μορφή

$$S[\hat{g}_{\mu\nu}, \Psi] = \int d^4x\sqrt{-\hat{g}}\Big[\frac{\hat{R}+6l^{-2}}{16\pi G} - \frac{1}{2}\hat{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\Psi\partial_\nu\Psi - \frac{1}{12}\hat{R}\Psi^2 - \alpha\Psi^4\Big] \tag{2.16}$$

με $\alpha = -2\pi\Lambda G/9$. Σε αυτό το σύστημα αναφοράς η δράση είναι αναλλοίωτη κάτω από αυθαίρετους τοπικούς μετασχηματισμούς $\hat{g}_{\mu\nu} \to \Omega^2(x)\hat{g}_{\mu\nu}$ και $\Psi \to \Omega^{-1}(x)\Psi$, οπότε η εξίσωση του βαθμωτού πεδίου είναι σύμμορφα αναλοίωτη. Οι εξισώσεις πεδίου γίνονται

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \tag{2.17}$$

$$\Box\Psi = \frac{1}{6}R\Psi + 4\alpha\Psi^3, \tag{2.18}$$

και ο τανυστής ορμής-ενέργειας δίνεται από τη σχέση

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\Psi\partial_\nu\Psi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\Psi\partial_\beta\Psi + \frac{1}{6}[g_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu\nabla_\mu + G_{\mu\nu}]\Psi^4 - g_{\mu\nu}\alpha\Psi^4. \tag{2.19}$$

Επειδή μάλιστα στο συγκεκριμένο σύστημα αναφοράς το ίχνος του $T_{\mu\nu}$ ισούτε με μηδέν έπεται ότι $R = 4\Lambda$.

Η μελανή οπή (2.10) και το βαθμωτό πεδίο (2.11) παίρνουν τη μορφή

$$d\hat{s}^2 = -\Big[\frac{r^2}{l^2} - \Big(1+\frac{G\mu}{r}\Big)^2\Big]dt^2 + \Big[\frac{r^2}{l^2} - \Big(1+\frac{G\mu}{r}\Big)^2\Big]^{-1}dr^2 + r^2 d\sigma^2 \tag{2.20}$$

$$\Psi = \sqrt{\frac{3}{4\pi G}}\frac{G\mu}{r+G\mu} \tag{2.21}$$

Ο μετασχηματισμός (2.14),(2,15) από το ένα σύστημα αναφοράς στο άλλο είναι αντιστρέψιμος στην περιοχή όπου ο συντελεστής $(1-4\pi G\Psi^2/3)$ είναι θετικός. Αυτό σημαίνει πως για μη αρνητική μάζα ($\mu \geq 0$) για $r > 0$ και για αρνητική μάζα για $r > -2G\mu$. Για μη αρνητικές μάζες η λύση έχει μόνο έναν ορίζοντα γεγονότων και έχει την ίδια αιτιακή δομή όπως και στο σύστημα αναφοράς Einstein. Όμως για το υπόλοιπο επιτρεπόμενο πεδίο τιμών, $-l/4 < G\mu < 0$, η μετρική αποκτά τρεις ορίζοντες, για τους οποίους ισχύει

$$0 < r_{--} < -G\mu < r_{-} < l/2 < r_{+}.$$

Μπορούμε να πούμε ότι αυτή η λύση περιγράφει μία μελανή οπή εντός μία άλλης. Σε αυτό το σύστημα αναφοράς το πεδίο απειρίζεται για $r = -G\mu$, αλλά επειδή η γεωμετρία καθώς και ο τανυστής ορμής-ενέργειας είναι ομαλοί εκεί, η ανωμαλία φαίνεται ακίνδυνη.

2.2 Η μελέτη των Anoop Narayanan και P K Suresh

2.2.1 Η εφαρμογή

Οι Anoop Narayanan και P K Suresh[2] από το Πανεπιστήμιο του Hyderabad της Ινδίας έκαναν την πρώτη προσπάθεια να βρουν σφαιρικά συμμετρικές λύσεις ξεκινώντας από το μοντέλο του Moffat

$$\hat{g}_{\mu\nu} = A[\phi]g_{\mu\nu} + B[\phi]\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi \tag{2.22}$$

όπου $\hat{g}_{\mu\nu}$ η μετρική της ύλης, $g_{\mu\nu}$ η μετρική της βαρύτητας, $\phi := \phi(t)$ το διβαθμωτό πεδίο. Επιλέγοντας $A[\phi] = 1$ και $B[\phi] =$

B =σταθερά, $B \simeq \frac{1}{32\pi} l_p^2$ με l_p το μήκος Plank η (2.1) παίρνει τη μορφή.

$$\hat{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + B\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \tag{2.23}$$

με

$$g_{tt} = e^\nu, g_{rr} = -e^\lambda, g_{\theta\theta} = -r^2, g_{\phi\phi} = -r^2 sin^2\theta \tag{2.24}$$

για σφαιρικά συμμετρικές λύσεις. Επίσης, από την (2.2) έχουμε

$$\hat{g}_{tt} = e^\nu + B\dot{\phi}^2, \hat{g}_{rr} = -e^\lambda, \hat{g}_{\theta\theta} = -r^2, \hat{g}_{\phi\phi} = -r^2 sin^2\theta \tag{2.25}$$

όπου $\nu := \nu(t,r)$ και $\lambda := \lambda(t,r)$ Το στοιχείο μήκους λοιπόν της γεωμετρίας τους δίνεται από τη σχέση

$$ds^2 = (e^\nu + B\dot{\phi}^2)c^2 dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2) \tag{2.26}$$

Ως δράση έχουν θεωρήσει

$$S = \frac{1}{16\pi G}\int \sqrt{-\hat{g}}(R[\hat{g}] - 2\Lambda) \tag{2.27}$$

Όπου οι μικές μεταβολλές ως προς $\hat{g}$ οδηγούν στην εξίσωση Einstein για το κενό.

$$G_{\mu\nu} = 0. \tag{2.28}$$

Για τον τανυστή του Einstein υπολογίζουμε

$$G_t^t = \frac{e^{-\lambda}(e^\lambda - 1 + r\lambda')}{r^2} \tag{2.29}$$

$$G_t^r = \frac{e^{-\lambda}\dot{\lambda}}{r} \tag{2.30}$$

$$G_r^r = \frac{-B(-1 + e^\lambda)\dot{\phi}^2 + e^\nu(1 - e^\lambda + r\nu')}{r^2(e^\nu + B\dot{\phi}^2)} \tag{2.31}$$

$$G_\theta^\theta = G_\phi^\phi$$
$$= \frac{r^2}{4(e^\nu + B\dot\phi^2)} r e^{-\lambda}(-2Be^\lambda r\dot\phi\ddot\phi\dot\lambda + 2B^2\dot\phi^4\lambda' + e^\nu(e^\lambda r\dot\lambda^2$$
$$-e^\lambda r\dot\lambda\dot\nu + 2e^\lambda r\ddot\lambda + e^\nu(-2\nu' - r\nu'^2 + \lambda'(2 + r\nu') - 2r\nu''))$$
$$+B\dot\phi^2(re^\lambda\dot\lambda^2 + 2e^\lambda r\ddot\lambda + e^\nu(\lambda'(4 + r\nu') - 2(\nu' + r\nu'^2 + r\nu''))))$$
$$(2.32)$$

όπου με τόνο θεωρούμε την παράγωγο ως προς r και με τελεία την παράγωγο ως προς t. Οι εξισώσεις (2.7)-(2.10) παίρνουν τη μορφή

$$\dot\lambda = 0 \tag{2.33}$$

$$\frac{e^{-\lambda}\lambda'}{r} - \frac{e^{-\lambda}}{r^2} + \frac{1}{r^2} = 0 \tag{2.34}$$

$$\frac{e^{\nu-\lambda}\nu'}{r(e^\nu + B\dot\phi^2)} + \frac{e^{-\lambda}}{r^2} - \frac{1}{r^2} = 0 \tag{2.35}$$

Από την εξίσωση (2.12) καταλήγουμε πως το λ εξαρτάται μόνο από το r και προσθέτωντας τις εξισώσεις (2.13) και (2.14) παίρνουμε τη σχέση μεταξύ των λ και ν

$$\partial_r(\lambda + ln(e^\nu + B\dot\phi^2)) = 0 \tag{2.36}$$

άρα

$$e^\lambda = \frac{1}{e^\nu + B\dot\phi^2} \tag{2.37}$$

Έτσι καταλλήγουν στο συμπέρασμα

$$e^{-\lambda} = e^\nu + B\dot\phi^2 = 1 + \frac{F}{r} \tag{2.38}$$

όπου F σταθερά. Οπότε

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \pm \frac{B\dot\phi^2}{r}\right)c^2dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \pm \frac{B\dot\phi^2}{r}\right)} - r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2) \tag{2.39}$$

Δεδομένης της ορθότητας τόσο των ισχυρισμών όσο και των λύσεών τους, μπορούμε να υποθέσουμε την ύπαρξη μελανών οπών με βαρυτική ακτίνα

$$r_{BM} = \frac{2GM}{rc^2} \mp B\dot{\phi}^2. \tag{2.40}$$

Όπως όμως θα δούμε παρακάτω υπάρχουν μερικά προβλήματα στην θεωρία των Anoop Narayanan και P K Suresh.

2.2.2 Προβλήματα της συγκεκριμένης θεωρίας

Πολύ βασικό σημείο στην διμετρική θεωρία του Moffat είναι η διαφοροποίηση των δύο μετρικών σε μία βαρύτητας $g_{\mu\nu}$ και μία ύλης $\hat{g}_{\mu\nu}$ όπου συνδεόνται μέσω της σχέσης (2.1). Επίσης λόγω αυτή της διαφοροποίησης πρέπει η συνολική δράση της θεωρίας αυτής να παίρνει την μορφή

$$S_{tot} = S_{grav}[g] + S_{\phi}[g, \phi] + S_M[\hat{g}, \phi]. \tag{2.41}$$

Η S_{grav} είναι η δράση Einstein-Hilbert οπότε είναι λογικό να εξαρτάται από τη μετρική $g_{\mu\nu}$ ενώ η S_M είναι η δράση της ύλης και αντίστοιχα θα πρέπει να εξαρτάται από τη μετρική της ύλης $\hat{g}_{\mu\nu}$.

Εξίσου σημαντικό είναι πως λόγω των δύο διαφορετικών μετρικών θα πάρουμε και δύο διφορετικούς κώνους φωτός ds^2 και $d\hat{s}^2$. Στην περίπτωση μελέτης μελανών οπών, η γεωμετρία του χώρου θα μας δίνεται από το στοιχείο

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} \tag{2.42}$$

Αρχικά λοιπόν παρατηρούμε πως στην περίπτωση των Anoop Narayanan και P. K. Suresh η δράση, που δίνεται από την εξίσωση (2.6), δεν είναι τίποτα άλλο από την δράση Einstein-Hilbert υπολογισμένη για την μετρική που εκφράζει την ύλη, $\hat{g}_{\mu\nu}$. Επίσης, όπως φαίνεται από τις εξισώσεις (2.5) και (2.18) η γεωμετρία του χώρου εκφράζεται μέσω της μετρικής $\hat{g}_{\mu\nu}$. Από αυτά τα δύο όμως καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως η μετρική $\hat{g}_{\mu\nu}$, που θα έπρεπε να εκφράζει την ύλη, στην συγκεκριμένη θεωρία παρουσιάζεται ως μία καινούργια μετρική βαρύτητας που συνδέεται με την προηγούμενη μέσω της σχέσης (2.2). Η μόνη διαφορά είναι πως η νέα αυτή μετρική περιέχει στον $\hat{g}_{tt}$ όρο της μία συνάρτηση του χρόνου

$$f(t) = B\dot{\phi}^2 \tag{2.43}$$

αφού $\phi := \phi(t)$.

Από την εξίσωση (2.12) πήραμε πως το λ εξαρτάται μόνο από το r. Αν τώρα αντικαταστήσουμε την (2.16) στην (2.14) και πάρουμε τη μερική παράγωγο ως προς χρόνο θα καταλλήξουμε στην εξίσωση

$$\partial_t \partial_r \nu + \partial_t \nu \partial_r \nu = 0 \tag{2.44}$$

2.3 Εύρεση λύσεων

Θα ξεκινήσουμε με την εξίσωση (1.4) του Moffat που συνδέει τις δύο μετρικές $g_{\mu\nu}$ και $\hat{g}_{\mu\nu}$ για $A[\phi] = 1$ και $B[\phi] = B =$σταθερά. Η ολική δράση δίνεται από την σχέση

$$S = S_{grav}[g] + S_{\phi}[g, \phi] + S_{matter}[\hat{g}, \psi] \tag{2.45}$$

όπου

$$S_{grav}[g] = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g}[R[g] - 2\Lambda] \tag{2.46}$$

$$S_{\phi}[g_{\mu\nu}, \phi] = \int d^4x \sqrt{-g}\Big[-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - V(\phi)\Big] \tag{2.47}$$

$$S_{matter}[\hat{g}, \psi] = \int d^4x \sqrt{-\hat{g}}\Big[-\frac{1}{2} \hat{g}^{\mu\nu} \nabla_\mu \psi \nabla_\nu \psi\Big] \tag{2.48}$$

Με μικρές μεταβολές της δράσης να είναι μηδέν παίρνουμε τις εξισώσεις πεδίου

$$\mathcal{E}^{\mu\nu} = G^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu} = 16\pi G (T^{\mu\nu}_{\phi} + s\hat{T}^{\mu\nu}_{\psi}) \tag{2.49}$$

$$\Box \phi - V'(\phi) = Bs\hat{T}^{\mu\nu}_{\psi} \hat{\nabla}_\mu \hat{\nabla}_\nu \phi \tag{2.50}$$

$$\hat{\Box} \psi = 0 \tag{2.51}$$

όπου $s = \sqrt{-\hat{g}}/\sqrt{-g}, \Box = \nabla^2 = \nabla^\mu \nabla_\mu, \hat{\Box} = \hat{\nabla}^2 = \hat{\nabla}^\mu \hat{\nabla}_\mu$. Οι δύο τανιστές ορμής-ενέργειας δίνονται από τις σχέσεις

$$T^{\mu\nu}_{\phi} = -\frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 + \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi - g^{\mu\nu} V(\phi) \tag{2.52}$$

$$\hat{T}^{\mu\nu}_{\psi} = -\frac{1}{2}(\hat{\nabla} \psi)^2 + \hat{\nabla}^\mu \psi \hat{\nabla}^\nu \psi \tag{2.53}$$

με $(\nabla\phi)^2 = \nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi$ και $(\hat{\nabla}\psi)^2 = \hat{\nabla}^\mu \psi \hat{\nabla}_\mu \psi$. Υπενθυμίζουμε επίσης την εξίσωση (1.20) $\hat{\nabla}^\mu \phi = \hat{g}^{\mu\nu} \partial_\nu \phi = K \nabla^\mu \phi$ με $K = 1 - B(\hat{\nabla}\phi)^2$

Για σφαιρικά συμμετρικές λύσεις θα χρξσιμοποιήσουμε τη γενικευμένη μορφή

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -N^2 F dt^2 + \frac{dr^2}{F} + H^2(sin^2\theta d\phi^2 + d\theta^2) \quad (2.54)$$

με $N := N(r)$, $F := F(r)$, $H := H(r)$, $\psi := \psi(r)$, $\phi := \phi(r)$.

Οι μόνοι μη μηδενικοί όροι της εξίσωσης (2.28) είναι οι $\mathcal{E}_t^t$, $\mathcal{E}_r^r$ και $\mathcal{E}_\theta^\theta = \mathcal{E}_\phi^\phi$. Οπότε έχουμε τις εξισώσεις

$$\begin{gathered}\tfrac{F'H'+2FH''}{H} + \tfrac{FH'^2-1}{H^2} + \\ \Lambda + 8\pi G F(\phi'^2 + \sqrt{K}\psi'^2) + 16\pi G V = 0\end{gathered} \quad (2.55)$$

$$\begin{gathered}\tfrac{H'(NF'+2FN')}{HN} + \tfrac{FH'^2-1}{H^2} + \\ \Lambda - 8\pi G F(\phi'^2 + K^{3/2}\psi'^2) + 16\pi G V = 0\end{gathered} \quad (2.56)$$

$$\begin{gathered}\tfrac{F''}{2} + \tfrac{F'H'}{H} + \tfrac{3F'N'+2FN''}{2N} + \tfrac{F}{H}\Big(H'' + \tfrac{H'N'}{N}\Big) \\ +\Lambda + 8\pi G F(\phi'^2 + \sqrt{K}\psi'^2) + 16\pi G V = 0\end{gathered} \quad (2.57)$$

Για τις πρώτες παραγώγους των πεδίων ϕ και ψ παίρνουμε από την Klein-Gordon την εξίσωση

$$\phi'(r) = \Big[\frac{1}{BF}(\frac{F^2H^4N^2\psi'^2}{\lambda^2} - 1)\Big]^{\frac{1}{2}} \quad (2.58)$$

Αντικαθιστώντας την (2.37) στις (2.34), (2.35), (2.36) και πεοσθέσουμε τις (3.34) και (2.35) το δυναμικό V μπορεί να γραφεί σε όρους N, F, H της μετρικής και το πεδίο ύλης ψ. Αντικαθιστώντας την εξίσωση αυτή στις (2.34), (2.35), (2.36) παίρνουμε

$$\begin{gathered}\tfrac{F}{HN}(NH'' - H'N') + \\ 4\pi G\Big(\tfrac{2F^2H^4N^2\psi'^2}{B\lambda^2} - \tfrac{2}{B} + \tfrac{\lambda\psi'}{H^2N} + \tfrac{\lambda^3}{F^2H^6N^3\psi'}\Big) = 0\end{gathered} \quad (2.59)$$

$$\begin{aligned}&\tfrac{NF''+3F'N'+2FN''}{2N}+\tfrac{1-FH'^2}{H^2}+\\4\pi G\Big(&\tfrac{2F^2H^4N^2\psi'^2}{B\lambda^2}-\tfrac{2}{B}+\tfrac{\lambda\psi'}{H^2N}+\tfrac{\lambda^3}{F^2H^6N^3\psi'}\Big)=0\end{aligned}\tag{2.60}$$

$$\begin{aligned}16\pi GV+\Lambda-\tfrac{1-FH'^2}{H^2}+\tfrac{H'}{HN}(NF'+2FN')\\-8\pi G\Big(\tfrac{2F^2H^4N^2\psi'^2}{B\lambda^2}-\tfrac{1}{B}\tfrac{\lambda^3}{F^2H^6N^3\psi'}\Big)=0\end{aligned}\tag{2.61}$$

όπου στην τελευταία εξίσωση αντικατασήσαμε το H'' από την (2.38) για να κατέβει μία τάξη η διαφορική. Έτσι καταλλήξαμε σε 3 εξισώσεις με 5 αγνώστους (N, F, H, ψ, V). Οποιαδήποτε λύση βγει από αυτές τις εξισώσεις θα ικανοποιεί την εξίσωση Klein-Gordon για το ϕ. Παρακάτω θα πάρουμε περιπτώσεις για τις διάφορες μεταβλητές.

1η Περίπτωση $H(r) = r$, $N(r) = 1$

Σε αυτή την περίπτωση ο συνδιασμός των (2.38), (2.39) δίνουν

$$\frac{r^2F''}{2}+1-F=0, \tag{2.62}$$

η οποία έχει λύση

$$F(r)=\frac{r^2}{l^2}+1-\frac{2M}{r} \tag{2.63}$$

κι αντικαθιστώντας στην (2.33) παίρνουμε

$$ds^2=-\Big(\frac{r^2}{l^2}+1-\frac{2M}{r}\Big)dt^2+\Big(\frac{r^2}{l^2}+1-\frac{2M}{r}\Big)^{-1}dr^2+r^2(sin^2\theta d\phi^2+d\theta^2). \tag{2.64}$$

Παρατηρούμε πως η ασυμπτωτική συμπεριφορά της μετρικής είναι anti-de Sitter (AdS), αφού $g_{tt} \sim r^2 + O(r^0)$ χωρίς γραμμικούς όρου ως προς r.

Το πεδίο ύλης ψ δίνεται από την εξίσωση

$$\frac{2r^2\psi'^2(l^2(r-M)+r^3)^2}{B\lambda^2 l^4} - \frac{2}{B} + \frac{\lambda^3 l^4}{r^4\psi'(l^2(r-M)+r^3)^2} + \frac{\lambda\psi'}{r^2} = 0 \tag{2.65}$$

και το δυναμικό από τη σχέση

$$V(r) = \frac{1}{8\pi G}\Big(\frac{3}{l^2} - \Lambda\Big) + \frac{\lambda^3 l^4}{4r^4\psi'(l^2(r-M)+r^3)^2} - \frac{\lambda\psi'}{4r^2} \tag{2.66}$$

2η Περίπτωση $H(r) = r$, $V(r) = 0$

Συνδιάζοντας ξανά τις εξισώσεις (2.38), (2.39) παίρνουμε

$$\frac{2F - 2 - r^2 F''}{2r^2} - \frac{3rF'N' + 2F(rN'' + N')}{2r} = 0. \tag{2.67}$$

Ο συνδιασμός των (2.39) και (2.40) οδηγεί σε μία δευτέρου βαθμού αλγεβρική εξίσωση για το ψ' η οποία αν αντικατασταθεί στην (2.38) δίνει μία δεύτερη εξίσωση για τα N και F. Το σύστημα της τελευταίας εξίσωσης και της (2.67) θα μας δώσουν τα ζητούμενα F και N. Ωστόσο το σύστημα αυτών των εξισώσεων είναι αρκετά πολύπλοκο.

Βιβλιογραφία

[1] Tomi S.; Sandstad Marit Akrami, Yashar; Koivisto. Accelerated expansion from ghost-free bigravity: a statistical analysis with improved generality. jhep. 1303: 099. arxiv:1209.0457. 2013.

[2] P K Suresh Anoop Narayanan P E. Spherically symmetric solution in bi-metric theory of gravity. arxiv:1403.7018 [gr-qc]. 2014.

[3] K. Aoki and K. Maeda. arxiv: 1409.0202. 2014.

[4] Churabian E.V. Avakian, R.M and H. A. Grigiorian. Astronomische nachrichten. (309):229, 1988.

[5] C.; Dubovsky S.; Gabadadze G.; Pirtskhalava D.; Tolley A.J. D'Amico, G.; de Rham. Massive cosmologies. phys. rev. d84: 124046. arxiv:1108.5231. 2011.

[6] Gregory de Rham, Claudia; Gabadadze. "generalization of the fierz-pauli action.phys. rev. d. 82: 044020. arxiv:1007.0443. 2010.

[7] Gregory; Tolley Andrew J. de Rham, Claudia; Gabadadze. Resummation of massive gravity. phys. rev. lett. 106: 231101. arxiv:1011.1232. 2010.

[8] S.F. Hassan and Rachel.A. Rosen. Bimetric gravity from ghost-free massive gravity. arxiv 1109.3515. 2012.

[9] S.F. Hassan and Rachel.A. Rosen. Confirmation of the secondary constraint and absence of ghost in massive gravity and bimetric gravity". jhep. 1204: 123. arxiv:1111.2070. 2012.

[10] S.F. Hassan and Rachel.A. Rosen. Resolving the ghost problem in non-linear massive gravity. phys. rev. lett. 108: 041101. arxiv:1106.3344. 2012.

[11] M Milgram. Astrophys. j. (270):365, 1983.

[12] M Milgram. Phys.rev.d80:123536,2009 arxiv: 0912.0790. 2009.

[13] M Milgram. arxiv: 1404.7661. 2014.

[14] M Milgram. Phys. rev. d 89, 024027 (2014); arxiv:1308.5388. 2014.

[15] J.W. Moffat. arxiv: quant-ph/0204151. 2002.

[16] J.W. Moffat. arxiv: 1110.1330. 2011.

[17] J.W. Moffat. arxiv: 1306.5470. 2013.

[18] Nathan Rosen. General relativity and flat space. i. *Physical Review*, 57(2):147–150, 1940.

[19] Nathan Rosen. General relativity and flat space. ii. *Physical Review*, 57(2):150, 1940.

[20] Nathan Rosen. A bi-metric theory of gravitation. *Gen. Rel. Grav*, 4(6), 1973.

[21] H. Yalmoz. Gen. relativ. and gravit. *Int.J.Mod>phys.*, (6):269, 1975.