



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ  
ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΜΗΧΑΝΩΝ

**Εκτίμηση κλάσης ακρίβειας οδοντώσεων κατά AGMA μέσω  
ανάλυσης φάσματος με αριθμητική μοντελοποίηση των  
γεωμετρικών αποκλίσεων και της τραχύτητας**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΟΥ

**Χρήστου Παπαλέξη**

**Επιβλέπων:** Βασίλειος Σπιτάς

Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούλιος 2019



## Περίληψη

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η ανάπτυξη μεθοδολογίας για την διαπίστωση της κλάσης ποιότητας των οδόντων κατά την συνεργασία τους μέσω ανάλυσης φάσματος. Για τον σκοπό αυτό αναπτύχθηκε ένα ολοκληρωμένο μοντέλο συστημάτων μετάδοσης με οδοντωτούς τροχούς ώστε να προσομοιωθεί το φαινόμενο σε προγραμματιστικό περιβάλλον για διάφορα χαρακτηριστικά του εξεταζόμενου συστήματος με στόχο την εξαγωγή συμπερασμάτων. Πιο συγκεκριμένα, αρχικά καθορίστηκε το σύστημα περιγραφής των εργαζόμενων κατατομών των οδόντων οι οποίες δίνονται υπό την μορφή σημειοσυνόλων. Στην συνέχεια περιγράφεται ένας αριθμητικός αλγόριθμος υπολογισμού της θέσης επαφής κατά την συνεργασία ο οποίος καλύπτει κάθε μορφή κατατομής. Με βάση την ανάλυση της γεωμετρίας γίνεται ο υπολογισμός των ενδοτικότητων των οδόντων. Με αυτόν τον τρόπο αναπτύσσεται το στατικό μοντέλο υπολογισμού του Static Transmission Error είτε λόγω γεωμετρικών αποκλίσεων είτε λόγω της ενδοτικότητας του συστήματος για τις ονομαστικές κατατομές. Δηλαδή χωρίς να συμπεριλαμβάνεται στο γεωμετρικό μοντέλο η πληροφορία της τραχύτητας. Η πληροφορία αυτή ενσωματώνεται ως ένα σφάλμα στην διεύθυνση της αναπτυσσόμενης δύναμης στην διεπαφή των τροχών. Τέλος, αναπτύσσεται το δυναμικό μοντέλο με χρήση των αποτελεσμάτων του στατικού ώστε να ενσωματωθούν αδρανειακά φαινόμενα και με αυτόν τρόπο να προσομοιώνεται η συνεργασία μίας βαθμίδας και σε υψηλές ταχύτητες περιστροφής. Η μοντελοποίηση έγινε σε περιβάλλον MATLAB. Από την διεξαγωγή προσομοιώσεων εξάχθηκαν χρήσιμα συμπεράσματα αλλά και καταρτήθηκαν μετρικές της ποιότητας.

## Abstract

The purpose of this thesis is to develop a methodology for determining the tolerance class of teeth during their collaboration through spectrum analysis. For this purpose, an integrated model of gear transmission systems was developed to simulate the phenomenon in a computational environment for different characteristics of the system in order to draw conclusions. More specifically, at first a mathematical formulation is defined for describing tooth geometry in the form of point clouds. Subsequently, an arithmetic algorithm for calculating position of contact is described capable of covering every form of tooth profile. Based in part on the geometrical analysis, the stiffness properties of gear teeth are calculated. Hence, the static model was developed for the calculation of Static Transmission Error either due to geometrical deviations or due to system compliance for nominal profiles. That is, without including the roughness information in the geometric model. This information is incorporated as a fault in the direction of the developing force at the interface of the teeth. Finally, the dynamic model is developed, using the results of the static, to integrate inertial phenomena, in order to simulate the function of one stage of gears and at high angular velocity. The modeling was done in MATLAB environment. From the simulations, useful conclusions were drawn, but also quality metrics were extracted.

## Ευχαριστίες

Ολοκληρώνοντας τις προπτυχιακές μου σπουδές με την παρούσα διπλωματική εργασία θα ήθελα να ευχαριστήσω εκείνους που κατά την διάρκεια της εκπόνησης της αλλά και καθ' όλη την διάρκεια των σπουδών μου στάθηκαν δίπλα μου και με περισσή αγάπη με βοήθησαν.

Κατ' αρχήν θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου τον κύριο Βασίλειο Σπιτά για την πολύτιμη καθοδήγηση του και τις πολύτιμες συμβουλές του τόσο κατά την εκπόνηση της διπλωματικής όσο και κατά την διάρκεια των σπουδών μου γενικότερα. Η πόρτα του εργαστηρίου του ήταν για εμένα, αλλά και για κάθε άλλο σπουδαστή, πάντοτε ανοικτή κι εκείνος πρόθυμος να ασχοληθεί προσωπικά με τον καθένα χωρίς να υπολογίζει την κούραση. Ο τρόπος εργασίας του και η στάση του απέναντι στους σπουδαστές της σχολής αποτελούν πηγή έμπνευσης για εμένα. Εύχομαι ο Θεός να του δίνει δύναμη να συνεχίζει το έργο του.

Επιπροσθέτως, θέλω να απευθύνω ένα μεγάλο ευχαριστώ στους συσπουδαστές και τους φίλους μου η συνεργασία με τους οποίους υπήρξε πολύ διδακτική και βοηθητική καθ' όλη την διάρκεια των σπουδών και ιδιαιτέρως στον Κωνσταντίνο Ρακτιβάν. Ακόμη αισθάνομαι την ανάγκη να ευχαριστήσω προσωπικά τον επιστημονικό συνεργάτη του εργαστηρίου Εμμανουήλ Σακκαρίδη που συμμετείχε στην επίβλεψη της διπλωματικής εργασίας η καθοδήγηση του οποίου υπήρξε καταλυτική στην εκπόνηση της. Τέλος, μεγάλη είναι η ευγνωμοσύνη μου στην οικογένεια μου που αφανώς με στηρίζει σε κάθε στάδιο της ζωής μου. Η εργασία αυτή αφιερώνεται στον αγαπημένο μου παππού που έφυγε από την ζωή κατά την διάρκεια εκπόνηση της. Η ζωή του αποτελεί πρότυπο και σταθερό οδοδείκτη για εμένα.



## Περιεχόμενα

1. Εισαγωγή.....	9
2. Ανάλυση της γεωμετρίας.....	10
2.1. Βασικές γεωμετρικές επισημάνσεις.....	10
2.2. Εύρεση κλίσης της κατατομής οδόντος οδοντωτού τροχού.....	12
3. Κινηματική.....	13
3.1. Επαφή ενός ζεύγους οδόντων.....	13
3.2. Κινηματική οδοντωτών τροχών.....	18
3.3. Αποτελέσματα κινηματικού μοντέλου.....	19
4. Ανάλυση της ελαστικής συμπεριφοράς οδόντων.....	24
4.1. Καμπτική ενδοτικότητα.....	25
4.2. Ενδοτικότητα ποδός.....	27
4.3. Ενδοτικότητα κατά Hertz.....	27
4.4. Αποτελέσματα ενδοτικότητας.....	28
5. Μοντέλο τραχύτητας.....	30
6. Στατικό μοντέλο.....	33
6.1. Σύνθεση στατικού μοντέλου.....	33
6.2. Αποτελέσματα στατικού μοντέλου.....	35
7. Δυναμικό μοντέλο.....	38
7.1. Εξισώσεις κίνησης.....	38
7.2. Αποτελέσματα προσομοιώσεων.....	40
8. Συμπεράσματα.....	51
9. Βιβλιογραφία.....	52
10. Παράρτημα.....	53
10.1. Πίνακας εικόνων.....	53
10.2. Υπολογιστικοί κώδικες.....	55





## 1. Εισαγωγή

Στο χώρο των συστημάτων μετάδοσης κίνησης οι οδοντωτοί τροχοί ξεχωρίζουν ως το πιο διαδεδομένο σύστημα, με το μεγαλύτερο εύρος εφαρμογών από άποψη ισχύος, ταχύτητας περιστροφής και μεγέθους. Αποτελούν βασικά εξαρτήματα για όλα τα είδη οχημάτων, εργαλειομηχανών, αεροσκαφών και γενικότερα για μία ευρεία ποικιλία βιομηχανικού εξοπλισμού. Η δημοφιλία αυτή των οδοντωτών τροχών είναι εύλογη, καθώς η βασική αρχή λειτουργίας τους, η αξιοποίηση μιας ειδικά διαμορφωμένης γεωμετρίας για τη μεταφορά ισχύος μέσω κάθετων δυνάμεων και όχι τριβής, εξασφαλίζει τη δυνατότητα μεταφοράς υψηλών φορτίων, σε μεγάλο εύρος ταχυτήτων περιστροφής και με υψηλό βαθμό απόδοσης. Επιπροσθέτως, η ανάπτυξη της τεχνολογίας των κατεργασιών παρέχει την δυνατότητα κατασκευής τροχών εξαιρετικά υψηλής ποιότητας.

Για αυτούς τους λόγους έχει δοθεί στην βιομηχανία ιδιαίτερη έμφαση στον σχεδιασμό και στην κατασκευή τους. Οι σχεδιαστές αντιμετωπίζουν αυξανόμενες απαιτήσεις όσον αφορά την διάρκεια ζωής, την εκπομπή θορύβου, ενώ το βάρος και το μέγεθος των τροχών μειώνεται συνεχώς. Για την επίτευξη των παραπάνω προκλήσεων η ποιότητα κατασκευής των οδοντωτών τροχών είναι βαρύνουσα σημασία ώστε να πληρούν τις προδιαγραφές. Επομένως, η μέτρηση των οδοντωτών τροχών και των κοπτικών εργαλείων αυτών είναι πολύ σημαντική για την παραγωγή.

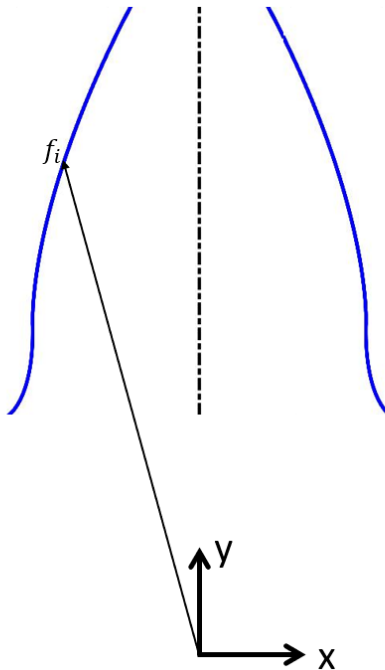
Ως εκ τούτου έχουν δημιουργηθεί πολλές τυποποιήσεις ώστε να ερευνάται, να διασφαλίζεται και να κατηγοριοποιείται η ποιότητά τους για να εξυπηρετείται καταλλήλως κάθε εφαρμογή. Για την διαπίστωση της ποιότητας τους έχουν αναπτυχθεί πολλές μετρολογικές διαδικασίες, στις οποίες κυριαρχούν οι μέθοδοι οπτικής ανίχνευσης σχεδόν αποκλειστικά [6]. Όμως, αυτές οι διαδικασίες απαιτούν εγκαταστάσεις υψηλού κόστους και είναι πολύ αργές.

Επομένως, η διαπίστωση της ποιότητας των οδοντωτών τροχών εύκολα και γρήγορα χωρίς την απαίτηση σύνθετων μετρολογικών διεργασιών σε ιδιαίτερες περιβαλλοντικές συνθήκες είναι σημαντικό ζητούμενο. Αυτό επιχειρείται να καλυφθεί και στην παρούσα διπλωματική εργασία, στην οποία προτείνεται ένας αποδοτικότερος τρόπος εύρεσης της ποιότητας οδοντωτών τροχών βασισμένος σε λειτουργικό έλεγχο παρακάμπτοντας τέτοιες μετρολογικές διαδικασίες.

## 2. Ανάλυση της γεωμετρίας

### 2.1. Βασικές γεωμετρικές επισημάνσεις

Μια βασική απαίτηση του μοντέλου που αναπτύχθηκε είναι να λειτουργεί για οποιαδήποτε γεωμετρική μορφή και αν έχουν οι κατατομές των οδόντων. Το σύστημα συντεταγμένων, όμως, οφείλει να είναι έτσι ώστε η γεωμετρία του οδόντος να έχει ως άξονα συμμετρίας την ευθεία  $x=0$  ενώ η αρχή του να ταυτίζεται με το κέντρο του οδοντωτού τροχού. Το πρώτο είναι απαραίτητο για να γίνονται σωστά οι υπολογισμοί των μετατοπίσεων, ενώ το δεύτερο για να επιλύεται σωστά η κινηματική του συστήματος. Επομένως, όποια γεωμετρία εισαχθεί στο μοντέλο θα πρέπει να είναι εκφρασμένη σε αυτό το σύστημα συντεταγμένων.

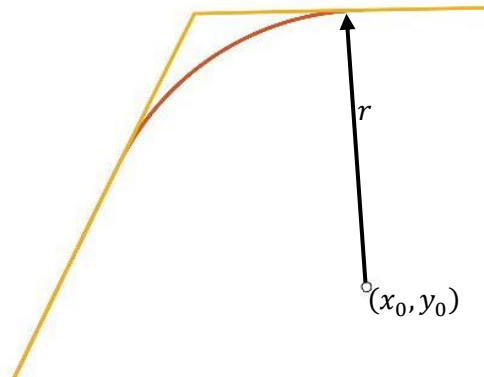


Εικόνα 1: Σύστημα συντεταγμένων

Κάθε σημείο των εργαζόμενων κατατομών εκφράζεται ως ένα σημείο  $f_i$  στο μιγαδικό επίπεδο. Με αυτόν τον τρόπο, με την χρήση, δηλαδή, ενός μιγαδικού αριθμού  $(x+iy)$  αντί ενός  $(x,y)$  ζεύγους συντεταγμένων για την περιγραφή κάθε σημείου της κατατομής, επιτυγχάνεται ένας ευκολότερος και πιο εύρωστος τρόπος υπολογισμών. Για παράδειγμα δεν χρειάζονται μητρώα στροφής αλλά αρκεί ένας πολλαπλασιασμός του σημειοσυνόλου με  $e^{i\theta}$  για την στρέψη του, ακόμη αρκεί η πρόσθεση ενός μιγαδικού για την μετατόπισή του και ο πολλαπλασιασμός με έναν πραγματικό αριθμό για την μεγέθυνσή του.

Σε κάθε οδόντα εξειλιγμένης δημιουργείται μία γωνία εκεί όπου τελειώνει το τμήμα της εξειλιγμένης και αρχίζει ο κύκλος κεφαλής. Η υποκατάσταση της γωνίας αυτής με έναν κυκλικό τομέα κρίθηκε απαραίτητη για δύο λόγους. Πρώτον, για να επιτευχθεί η συνέχεια στην πρώτη παράγωγο της καμπύλης κάτι που είναι πολύ βοηθητικό για την κινηματική του συστήματος και δεύτερον για τον υπολογισμό της επαφής κατά Hertz όπου απαιτείται στους υπολογισμούς μια ακτίνα καμπυλότητας. Εκτός αυτών, είναι και αντιπροσωπευτικό της πραγματικής γεωμετρίας καθώς λόγω φθοράς αλλοιώνεται η ακμή αυτή κατά απροσδιόριστο, για την ακρίβεια, τρόπο αλλά

τελικά η γεωμετρία τοπικά είναι πολύ παρόμοια με ένα μικρό τόξο κύκλου με κέντρο  $(x_0, y_0)$  και ακτίνα καμπυλότητας  $r$  (εικόνα 2).



Εικόνα 2: Υποκατάσταση της γωνίας με μικρό τοπικό κύκλο

Το τόξο, όπως φαίνεται στο παραπάνω διάγραμμα πρέπει να εφάπτεται στην εργαζόμενη κατατομή και στον κύκλο ποδός για μια επιθυμητή ακτίνα καμπυλότητας  $r$ . Οι παραπάνω συνθήκες ορίζουν πλήρως την γεωμετρία του τόξου. Πρώτα υπολογίζεται αριθμητικά η πρώτη παράγωγος της καμπύλης της κατατομής γενικά σε όλο της το μήκος:

$$\lambda = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (1)$$

Έπειτα προσδιορίζεται το κέντρο του τόξου με την εξής διαδικασία:

Ο κύκλος κέντρου  $(x_0, y_0)$  τμήμα του οποίου αποτελεί το τόξο που πρόκειται να ενσωματώθει στην καμπύλη, ως γνωστόν, περιγράφεται από την εξίσωση:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \quad (2)$$

Πρέπει, όμως, να εφάπτεται στην κατατομή, δηλαδή πρέπει να έχουν οπωσδήποτε κοινή κάθετο στο σημείο επαφής, η οποία αναπόφευκτα θα διέρχεται και από το κέντρο του. Η ευθεία αυτή περιγράφεται από την εξίσωση:

$$(y - y_0) = -\frac{1}{\lambda}(x - x_0) \quad (3)$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις προκύπτει ότι το κέντρο του κύκλου  $(x_0, y_0)$  ανήκει στην οικογένεια λύσεων:

$$y_0 = y - \sqrt{\frac{r^2}{1 + \lambda^2}} \quad (4)$$

$$x_0 = x + \sqrt{r^2 - (y - y_0)^2}$$

Όπου  $x, y$  κάθε σημείο της κατατομής.

Η απόσταση κάθε κέντρου που προκύπτει ως λύση των παραπάνω εξισώσεων από την αρχή των αξόνων υπολογίζεται κατά τα γνωστά ως:

$$D = \sqrt{y_0^2 + x_0^2} \quad (5)$$

Όμως είναι γνωστό ότι η απόσταση που όντως πρέπει να έχει είναι:

$$D = r_k - r \quad (6)$$

Όπου  $r_k$  η ακτίνα του κύκλου κεφαλής και  $r$  η επιθυμητή ακτίνα καμπυλότητας του τόξου καθώς αυτό είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο κεφαλής.

Με αυτόν τον τρόπο υπολογίστηκαν οι συντεταγμένες του κέντρου του τόξου. Επομένως το μόνο που μένει είναι ο προσδιορισμός των δύο του άκρων, ή αλλιώς των δύο του ακραίων γωνιών. Η μία είναι η ίδια η γωνία του κέντρου καθώς η αρχή των αξόνων, το κέντρο και το σημείο επαφής του τόξου με τον κύκλο κεφαλής είναι σημεία συνευθειακά. Ενώ, η άλλη είναι η γωνία του σημείου επαφής του τόξου με την κατατομή

Σε όλη την έκταση της διπλωματικής εργασίας σε κάθε παράδειγμα που εκτίθεται η ακτίνα καμπυλότητας λήφθηκε 50μm. Χάριν συντομίας αυτό το χαρακτηριστικό δεν θα αναφέρεται.

## 2.2. Εύρεση κλίσης της κατατομής οδόντος οδοντωτού τροχού

Η παραγωγή της καμπύλης της κατατομής, που όπως θα διαπιστωθεί στην συνέχεια είναι απαραίτητη, έγινε με την μέθοδο των κεντρικών πεπερασμένων διαφορών, εκτός από τα πρώτα σημεία των καμπυλών που παραγωγίστηκαν με πρόσω πεπερασμένες διαφορές και τα τελευταία που παραγωγίστηκαν με πεπερασμένες διαφορές προς τα πίσω. Χρησιμοποιήθηκαν οι εξής γνωστοί συντελεστές:

Derivative	Accuracy	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
1	2					-1/2	0	1/2				
	4				1/12	-2/3	0	2/3	-1/12			
	6			-1/60	3/20	-3/4	0	3/4	-3/20	1/60		
	8		1/280	-4/105	1/5	-4/5	0	4/5	-1/5	4/105	-1/280	
2	2					1	-2	1				
	4				-1/12	4/3	-5/2	4/3	-1/12			
	6			1/90	-3/20	3/2	-49/18	3/2	-3/20	1/90		
	8		-1/560	8/315	-1/5	8/5	-205/72	8/5	-1/5	8/315	-1/560	

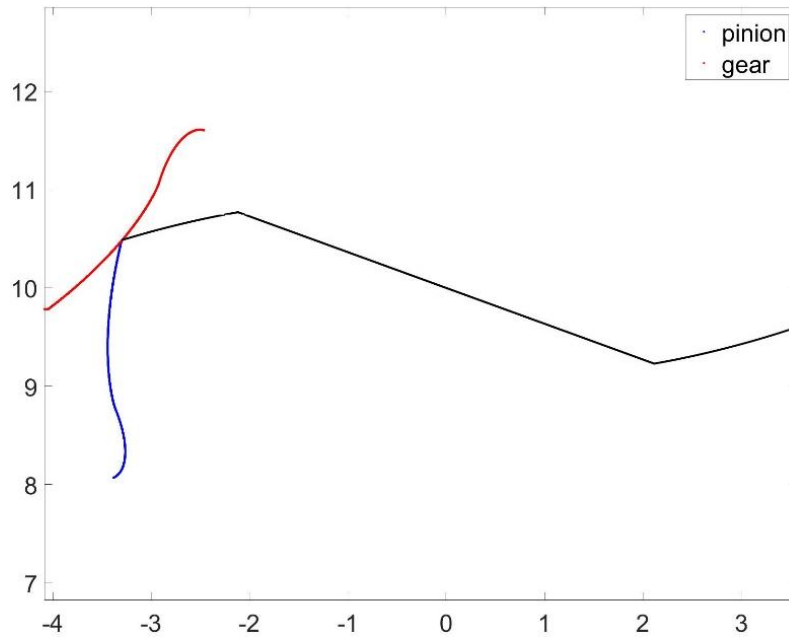
Εικόνα 3: Συντελεστές πεπερασμένων διαφορών [1]

Για την αξιοποίησή τους με ευκολία υλοποιήθηκε κατάλληλη συνάρτηση η οποία ως εισόδους έχει την καμπύλη που θέλουμε να παραγωγίσουμε ως διάνυσμα από μιγαδικούς αριθμούς, την τάξη της επιθυμητής παραγωγού και την ακρίβειά της. Έξοδος, βεβαίως, της συνάρτησης είναι η ζητούμενη παράγωγος. Λόγω της πυκνής δειγματοληψίας που έχει εισαχθεί στην καμπύλη, μόνο στο τμήμα της εξειλιγμένης έχουμε  $10^4$  σημεία, δεν παρατηρήθηκε να έχει κάποια επίδραση στην λύση η αυξημένη ακρίβεια.

### 3. Κινηματική

#### 3.1. Επαφή ενός ζεύγους οδόντων

Η προσομοίωση της επαφής των οδόντων μίας βαθμίδας οδοντωτών τροχών βασίστηκε κυρίως στο μαθηματικό μοντέλο που αναπτύχθηκε από τους Σπιτά Β., Σπιτά Χ [2].



Εικόνα 4: Τροχιά επαφών οδόντων εξειλιγμένης

Στην εικόνα ένα φαίνεται η εφαρμογή του συγκεκριμένου μοντέλου για κατατομές οδόντων μοναδιαίου modul και εξειλιγμένης  $20^\circ$  όπου ο μπλε κατατομή είναι του πινιόν και η κόκκινη του συνεργαζόμενου. Και οι δύο οδόντες έχουν προκύψει από κοπτικό κανόνα μηδενικής ακτίνας καμπυλότητας οδόντων, ενώ και οι δύο συνεργαζόμενοι τροχοί έχουν 25 οδόντες ο καθένας.

Πιο συγκεκριμένα, το μαθηματικό μοντέλο της επαφής υλοποιήθηκε με την κάτωθι διαδικασία. Αρχικά, εισάγονται οι γεωμετρίες των κατατομών. Στην συνέχεια βρίσκεται η παράγωγος κάθε καμπύλης με χρήση κεντρικών πεπερασμένων διαφορών.

Η επαφή των δύο κατατομών βρίσκεται με την εξής διαδικασία κατά την οποία λαμβάνεται πάντοτε ως αρχή των αξόνων το κέντρο του πινιόν: Επιλέγεται τυχαία ένα σημείο  $i$  της εξειλιγμένης του πινιόν. Υπολογίζεται το μιγαδικό διάνυσμα θέσης  $r_1$  του που εξαρτάται από την θέση του σημείου στην κατατομή και την γωνία που είναι στραμμένος ο τροχός:

$$r_1 = f_1 e^{j\theta} \quad (7)$$

Όμως, το σημείο επαφής πρέπει να αποτελεί κοινό σημείο των δύο κατατομών επομένως το μιγαδικό διάνυσμα θέσης  $r_2$  του σημείου επαφής του συνεργαζόμενου δίνεται από την σχέση:

$$r_2 = r_1 - a_{12} \quad (8)$$

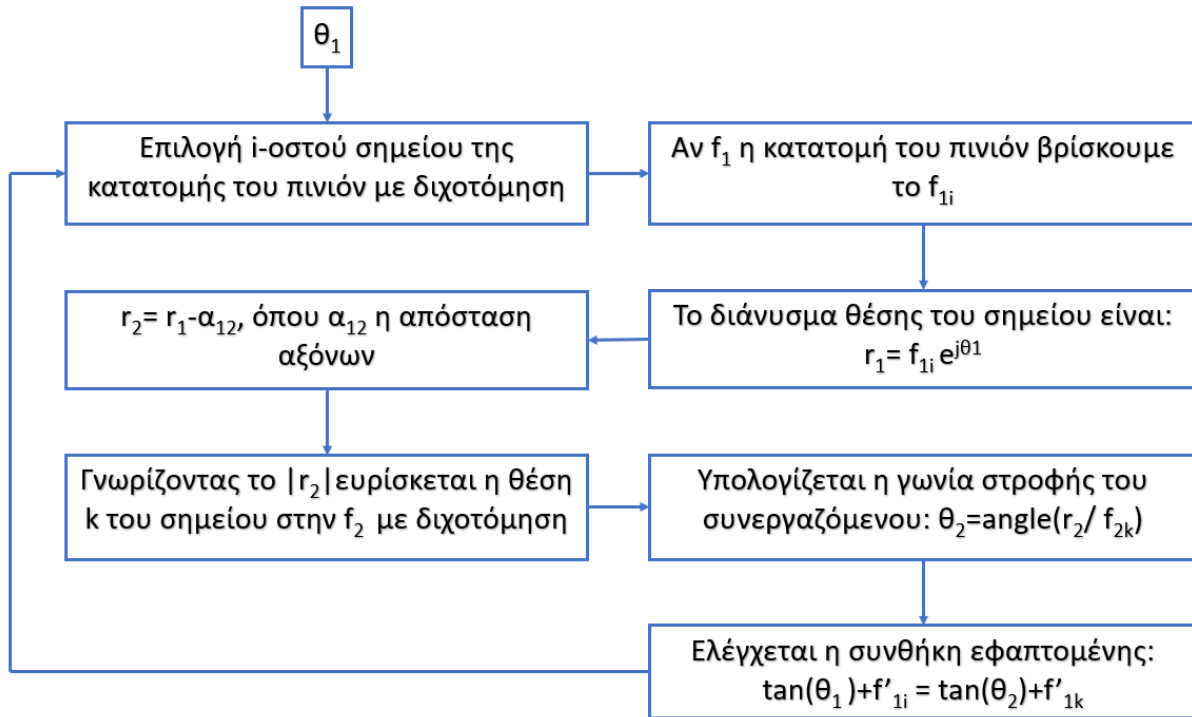
όπου  $a_{12}$  η απόσταση αξόνων η οποία είναι κι αυτή μιγαδικός αριθμός.

Στην συνέχεια με μέθοδο της διχοτόμησης βρίσκεται η θέση  $k$  [7] του σημείο αυτού στην κατατομή του συνεργαζόμενου. Έτσι, γνωρίζοντας και το  $r_2$  και το  $f_{2k}$  μπορούμε να βρούμε και την μεταξύ τους γωνία, δηλαδή την γωνία  $\theta_2$  που στράφηκε το συνεργαζόμενο αν το πινιόν στράφηκε κατά  $\theta_1$ . Όμως, στο σημείο επαφής πρέπει οι δύο κατατομές να εφάπτονται, δηλαδή πρέπει να ικανοποιείται και η εξίσωση:

$$\tan(\theta_1) + f'_{1i} = \tan(\theta_2) + f'_{2i} \quad (9)$$

Συνεπώς, επαναλαμβάνουμε την παραπάνω διαδικασία μέχρι την σύγκλιση χρησιμοποιώντας και εδώ την μέθοδο της διχοτόμησης για τις τιμές που δίνονται στο  $i$ .

Συνοπτικά, η αριθμητική διαδικασία εύρεσης του σημείου επαφής όπως υλοποιείται σε κάθε γωνία στροφής του πινιόν παρουσιάζεται στο τέλος του κεφαλαίου σε μορφή διαγράμματος ροής:

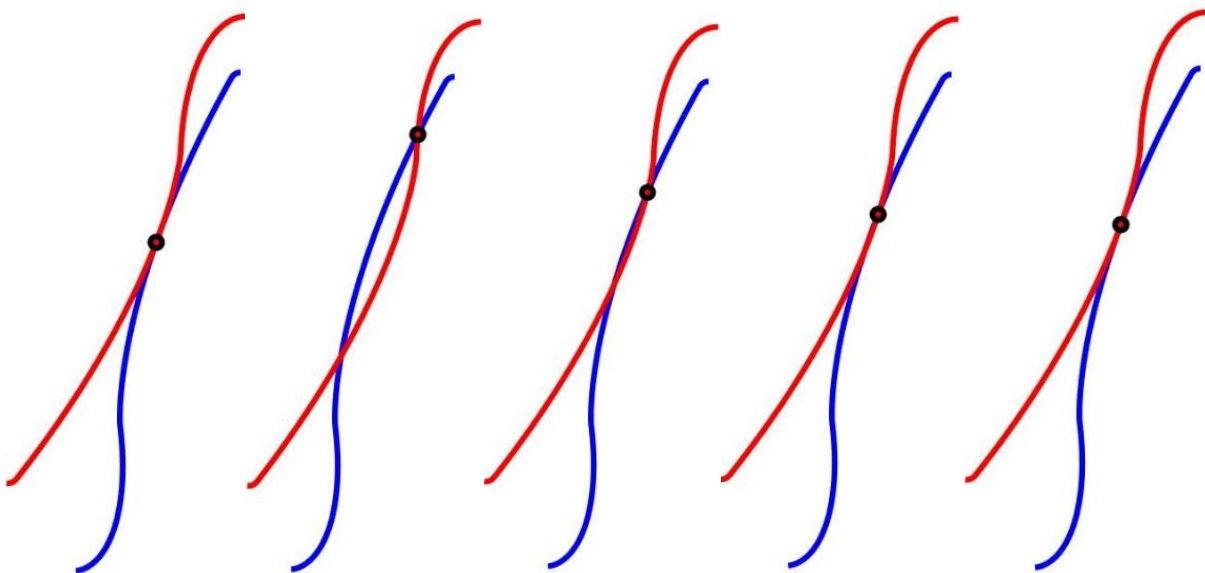


Εικόνα 5: Αλγόριθμος εύρεσης σημείου επαφής με δεδομένα: κατατομές, απόσταση αξόνων, γωνία στροφής πινιόν

Για διακριτοποίηση  $10^4$  σημείων στο τμήμα της εξιλειγμένης η διαδικασία που περιγράφηκε παραπάνω συγκλίνει περίπου στην  $15^{\text{η}}$  αναζήτηση του σημείου επαφής  $i$  στο πινιόν. Στην συνέχεια παρατίθενται οι πέντε πρώτες, καθώς ήδη το σημείο που έχει βρεθεί μετά από πέντε επαναλήψεις είναι πολύ κοντά στο πραγματικό σημείο επαφής για να γίνει αισθητή οποιαδήποτε διαφορά στις εικόνες, κατά την συνεργασία οδόντων που ανήκουν σε τροχούς με τα εξής χαρακτηριστικά:

Οδοντωτοί τροχοί		
Απόσταση αξόνων $a_{12}$ [mm]	25	
	<b>Πινιόν</b>	<b>Συνεργαζόμενος</b>
Αριθμός οδόντων ( $Z$ )	25	25
Μοντουλ ( $m$ ) [mm]	1	1
Γωνία πίεσης ( $\alpha_0$ ) [°]	20	20
Συντελεστής πάχους ( $C_s$ )	0.5	0.5
Συντελεστής ύψους κεφαλής ( $C_k$ )	1	1
Συντελεστής μετατόπισης ( $C_\mu$ )	0	0
Συντελεστής καμπυλότητας ( $C_c$ )	0	0

Πίνακας 1: Χαρακτηριστικά ενδεικτικού ζεύγους οδοντωτών τροχών



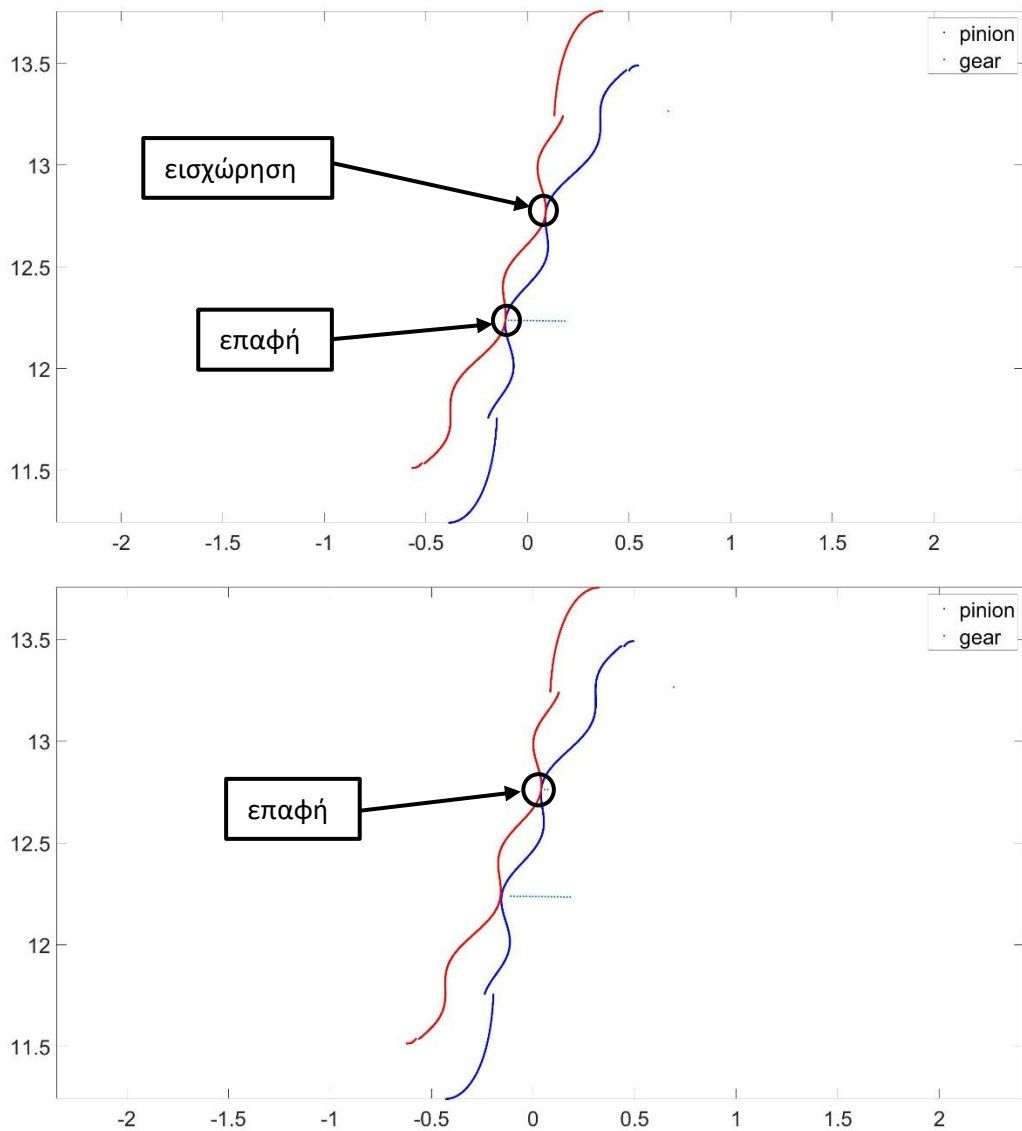
Εικόνα 6: Σύγκλιση αλγορίθμου επαφής οδόντων

Να σημειωθεί ότι ο αριθμός των δεκαπέντε επαναλήψεων απαιτείται για την σύγκλιση την πρώτης γωνίας. Για κάθε επόμενη αξιοποιείται η γνώση του προηγούμενου σημείου επαφής και τα άκρα της διχοτόμησης τοποθετούνται γύρω από αυτό το σημείο καθώς και το νέο σημείο επαφής που θα προκύψει θα είναι κοντά στο προηγούμενο. Πιο συγκεκριμένα για διακριτοποίηση  $10^4$  σημείων στο τμήμα της εξειλιγμένης επιλέγονται τα άκρα της διχοτόμησης για την εύρεση του νέου σημείου επαφής  $\pm 300$  από την θέση του προηγούμενου. Επομένως, ο αριθμός των επαναλήψεων μειώνεται.

Ο παραπάνω αλγόριθμος είναι αρκετός για την σωστή προσομοίωση της επαφής για τέλειες εξειλιγμένες καμπύλες και οποιαδήποτε άλλη κυρτή και παραγωγίσιμη καμπύλη σε όλο το μήκος της. Όμως, δεν εξασφαλίζει σωστή προσομοίωση της επαφής για οποιαδήποτε μορφή κατατομής καθώς μπορεί να βρίσκει το σημείο επαφής δύο συνεργαζόμενων κατατομών ως το σημείο που πληροί τις δύο βασικές συνθήκες του αλγορίθμου, δηλαδή το σημείο να αποτελεί κοινό σημείο των δύο κατατομών και αυτές στο σημείο αυτό να εφάπτονται, ενώ, ταυτόχρονα, σε κάποιο άλλο σημείο των κατατομών να παρατηρείται εισχώρηση της μίας εντός της άλλης κάτι που προφανώς δεν ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα.

Για να προσομοιώνεται σωστά η σύμπλεξη για κάθε πιθανή μορφή κατατομής και όχι μόνο των κυρτών κρίθηκε απαραίτητη η προσθήκη μίας συνθήκης μη εισχώρησης. Ο έλεγχος αυτός πραγματοποιήθηκε με την μέτρηση της περιφερειακής απόστασης των κατατομών σε ακτίνες ανά 600 σημεία της κατατομής. Σε περίπτωση, που κάποια από τις ελεγχόμενες αποστάσεις γίνει οριακά αρνητική υποχρεώνεται ο παραπάνω αλγόριθμος να βρει λύση κοντά σε αυτό το σημείο. Αυτό επιτυγχάνεται δίνοντας άκρα στην μέθοδο της διχοτόμησης τιμές  $\pm 300$  σημεία γύρω από το σημείο που εντοπίζεται αυτή η πολύ μικρή εισχώρηση ( $p-300$ ,  $p+300$ ) και όχι γύρω το σημείο που αποτελούσε το προηγούμενο σημείο επαφής. Στις παρακάτω εικόνες παρουσιάζονται κατατομές όπου η κυρτότητα αλλάζει με πολύ εξογκωμένο για οπτικούς λόγους τρόπο κατά την στιγμή της αναπήδησης του σημείου επαφής:





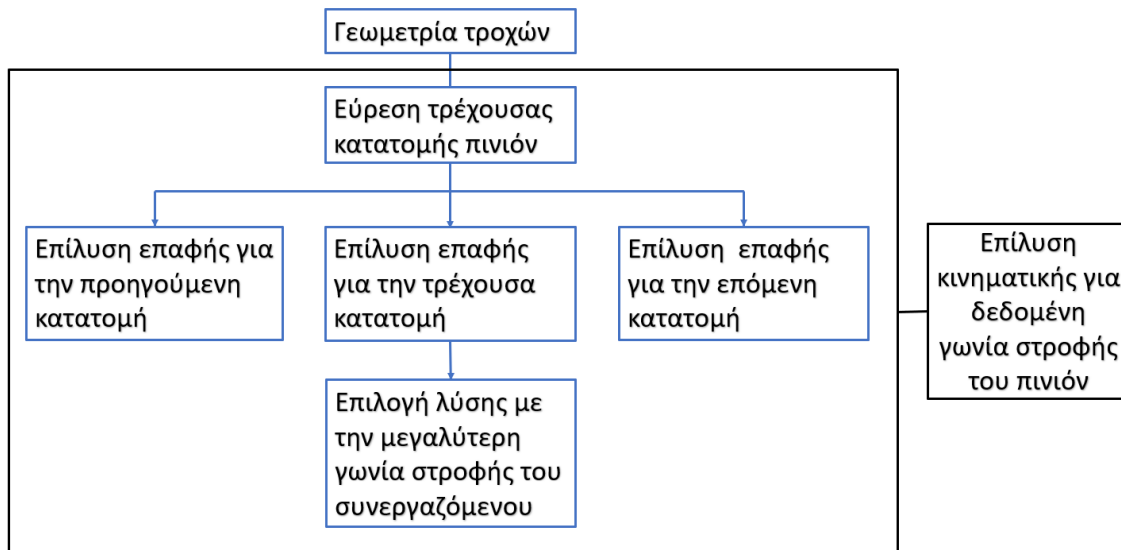
Εικόνα 7: Αναπήδηση σημείου επαφής εκεί όπου στιγμιαία παρατηρήθηκε εισχώρηση του πινιόν στον συνεργαζόμενο

Τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των οδόντων είναι ίδια με αυτά του προηγούμενου παραδείγματος με την διαφορά ότι έχει προστεθεί ένα ημιτονοειδές σήμα στα σημεία της εξειλιγμένης για να δοκιμαστεί ο κώδικας.

Με το τέχνασμα αυτό πετυχαίνουμε ο κώδικας να βρίσκει σωστή λύση για την πλειονότητα των καμπυλών που έρχονται σε επαφή.

### 3.2. Κινηματική οδοντωτών τροχών

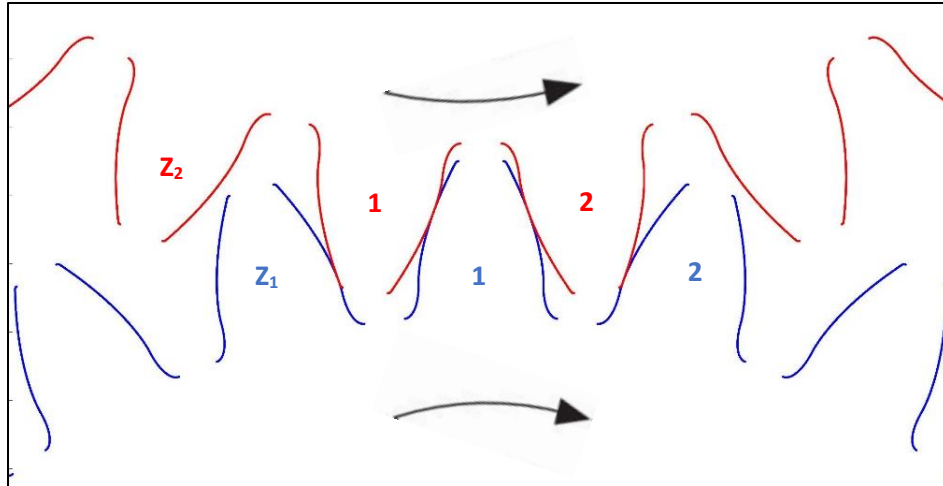
Η κινηματική δύο συνεργαζόμενων οδοντωτών τροχών για μη συζευγμένη συνεργασία βασίζεται στον παραπάνω κώδικα επαφής μεταξύ δύο οδόντων. Πιο συγκεκριμένα, εφαρμόζεται σε κάθε οδόντα που βρίσκεται σε εύρος γωνιών:  $[\pi/2-\pi/Z_1, \pi/2+\pi/Z_1]$  αλλά και στους εκατέρωθεν αυτού οδόντες. Δηλαδή, σε κάθε γωνία εξετάζεται η επαφή σε τρία ζεύγη οδόντων καλώντας την ίδια ακριβώς συνάρτηση τρεις φορές. Η συνάρτηση αυτή έχει ως είσοδο το ζεύγος των συνεργαζόμενων κατατομών, την γωνία στροφής του πινιόν και την απόσταση αξόνων και τα άκρα της διχοτόμησης, ενώ δίνει ως έξοδο το ίδιο το σημείο επαφής και την γωνία που πρέπει να στραφεί ο συνεργαζόμενος τροχός. Ο υπολογισμός αυτός της γωνίας γίνεται όπως περιεγράφηκε στην παραπάνω ενότητα. Προφανώς, η γωνία αυτή είναι διαφορετική για κάθε ζεύγος από τα τρία που εξετάζονται. Η γωνία στροφής, όμως, του συνεργαζόμενου, όπως είναι λογικό, θα είναι η μεγαλύτερη από τις τρεις. Συνεπώς, το ζεύγος για το οποίο προκύπτει η μεγαλύτερη γωνία στροφής της συνεργαζόμενης κατατομής είναι αυτό που καθορίζει την κίνηση όλου του συνεργαζόμενου τροχού. Σε αυτό το ζεύγος θα υπάρξει οπωσδήποτε και το σημείο επαφής μεταξύ των δύο οδοντωτών τροχών το οποίο όπως αναφέρθηκε έχει ήδη ευρεθεί.



Εικόνα 8: Διάγραμμα ροής για την επίλυση της κινηματικής του συστήματος

Σε κάθε στάδιο όπου αναφέρεται η επίλυση της επαφής αυτή πραγματοποιείται όπως υποδηλώνει το διάγραμμα ροής της εικόνας 5.

Για την σωστή λειτουργία του αλγορίθμου ο μαθηματικός φορμαλισμός που χρησιμοποιήθηκε είναι ο εξής: Αρχικά γίνεται μία αρίθμηση των οδόντων η οποία στην αρχική γωνιακή θέση είναι αυτή που φαίνεται στην εικόνα 9.

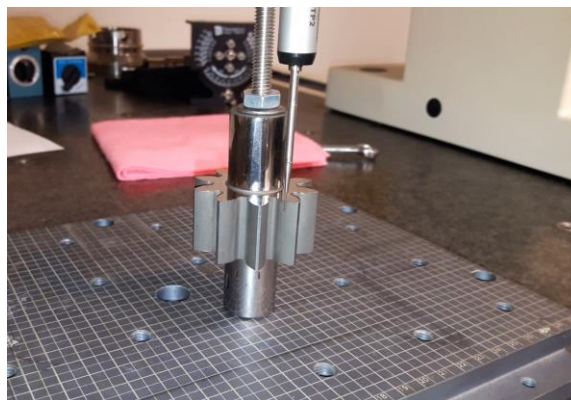


Εικόνα 9: Αρίθμηση των οδόντων των τροχών

Παρατηρείται ότι φορά αρίθμησης των οδόντων του πινιόν είναι δεξιόστροφη καθώς η φορά περιστροφής του είναι αριστερόστροφη. Το αντίθετο ισχύει για τον συνεργαζόμενο. Όταν ένας οδόντας πινιόν εισέλθει στην ζώνη των γωνιών  $[\pi/2 - \pi/Z_1, \pi/2 + \pi/Z_1]$  αποκτά στον αλγόριθμο τον χαρακτηρισμό ως τρέχων οδόντας του πινιόν, ενώ ο οδόντας του συνεργαζόμενου που έρχεται σε σύμπλεξη με αυτόν χαρακτηρίζεται ως τρέχων οδόντας του συνεργαζόμενου. Οι οδόντες που έχουν αύξον αριθμό μεγαλύτερο κατά ένα από τους τρέχοντες χαρακτηρίζονται ως «επόμενοι», ενώ αυτή που έχουν αύξοντα μικρότερο κατά ένα χαρακτηρίζονται από τον αλγόριθμο ως «προηγούμενοι». Με αυτόν τον τρόπο ο αλγόριθμος ελέγχει την επαφή κάθε φορά μόνο σε αυτά τα τρία ζευγάρια. Όταν στραφεί ένας τροχός γωνία κοντά στα  $2\pi$  rad και ο επόμενος είναι ο οδόντας με αύξον αριθμό 1, ή όταν ο προηγούμενος έχει αύξον αριθμό  $Z$  με κατάλληλες προγραμματιστικές προσθήκες εξασφαλίζεται και εκεί η σωστή λειτουργία του κώδικα.

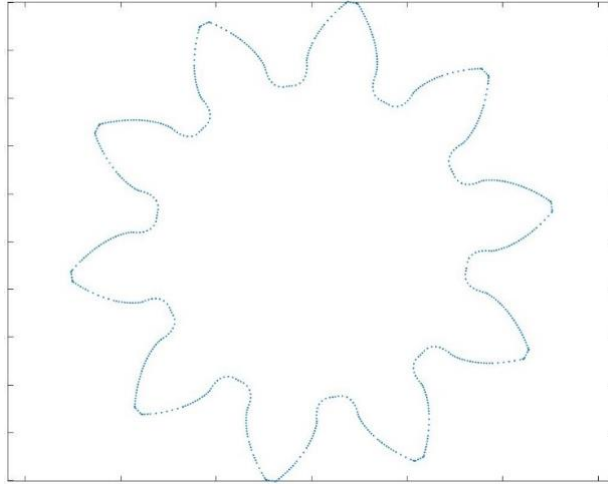
### 3.3. Αποτελέσματα κινηματικού μοντέλου

Για την δοκιμή του κινηματικού μοντέλου σε πραγματικές συνθήκες ώστε να διαπιστωθεί ότι πράγματι η επίλυση γίνεται σωστά και σε πραγματικές κατατομές, δηλαδή σε κατατομές με ατέλειες οποιασδήποτε ονομαστικής γεωμετρίας λήφθηκαν μετρήσεις στην CMM από έναν οδοντωτό τροχό γραναζωτής αντλίας.



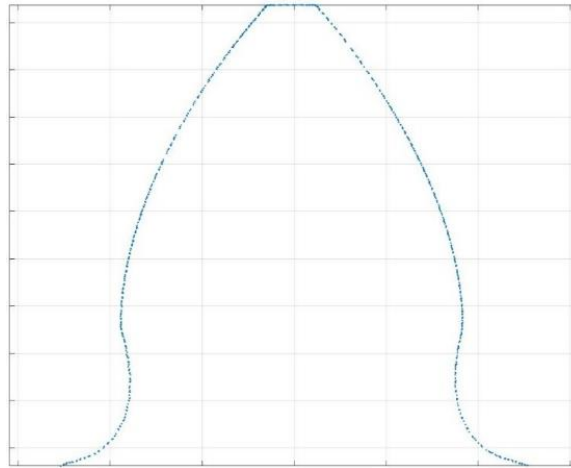
Εικόνα 10: Λήψη μετρήσεων στην CMM του εργαστηρίου ταχείας κατασκευής πρωτοτύπων ΕΜΠ

Οι ληφθείσες μετρήσεις φαίνονται στην παρακάτω εικόνα:



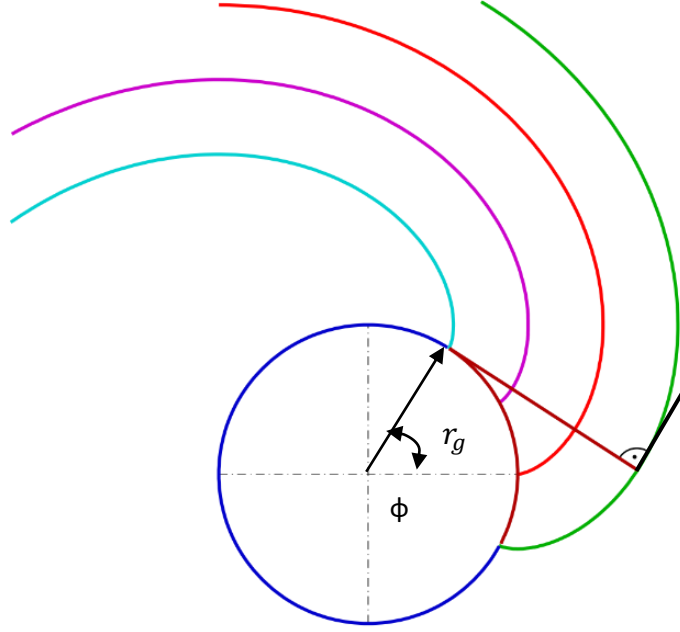
Εικόνα 11: Μετρηθέντα σημεία

Επειδή όμως τα ονομαστικά γεωμετρικά χαρακτηριστικά του τροχού δεν ήταν εκ των προτέρων γνωστά τέθηκε ως αρχικός στόχος η εύρεση των βασικών χαρακτηριστικών της εξειλιγμένης καμπύλης των κατατομών. Για την αξιοποίηση περισσότερης πληροφορίας αρχικά πραγματοποιήθηκε η συγχώνευση των οδόντων σε έναν.



Εικόνα 12: Συγχώνευση μετρήσεων

Το μέρος των κατατομών που μας ενδιαφέρει είναι αυτό της εξειλιγμένης καθώς εκεί μόνο υπάρχει συνεργασία μεταξύ των οδόντων συνεργαζόμενων τροχών. Κάθε εξειλιγμένη καμπύλη μπορεί να περιγραφεί πλήρως από τις εξής δύο παραμέτρους: την ακτίνα του κύκλου ποδός και την γωνία από την οποία αρχίζει.



Εικόνα 13: Παράμετροι εξειλιγμένης καμπύλης [3]

Σε πολικές συντεταγμένες η καμπύλη δίνεται ως εξής:

$$inva = \tan\left(\pm \arccos\left(\frac{r_g}{r}\right)\right) \mp \arccos\left(\frac{r_g}{r}\right) + \varphi \quad (10)$$

Η εύρεση των παραμέτρων πραγματοποιήθηκε με δύο διαφορετικούς τρόπους. Ο πρώτος τρόπος αφορά βελτιστοποίηση με χρήση γενετικού αλγορίθμου. Στην παραπάνω σχέση δίνονται οι τιμές της ακτινικής απόστασης  $r$  από το κέντρο του τροχού ώστε στην συνέχεια να συγκριθεί η υπολογιζόμενη γωνία εξειλιγμένης  $inva$  που προκύπτει με την μετρούμενη. Η απολυτή τιμή αυτής της διαφοράς για όλα τα σημεία αποτέλεσε και την αντικειμενική της βελτιστοποίησης για την εύρεση των παραμέτρων:

$$\sum_{i=1}^n |inva_i(r, r_g, \varphi) - \theta_i| \quad (11)$$

Ο δεύτερος τρόπος αποτελεί μια αναλυτική λύση του προβλήματος καθώς σε αυτόν βρίσκεται το ελάχιστο της παραπάνω συνάρτησης από τις εξής σχέσεις:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr_g} \left( \sum_{i=1}^n |inva_i(r, r_g, \varphi) - \theta_i| \right) &= 0 \\ \frac{d}{d\varphi} \left( \sum_{i=1}^n |inva_i(r, r_g, \varphi) - \theta_i| \right) &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

Η επίλυση του συστήματος μας δίνει τις ζητούμενες τιμές των παραμέτρων.

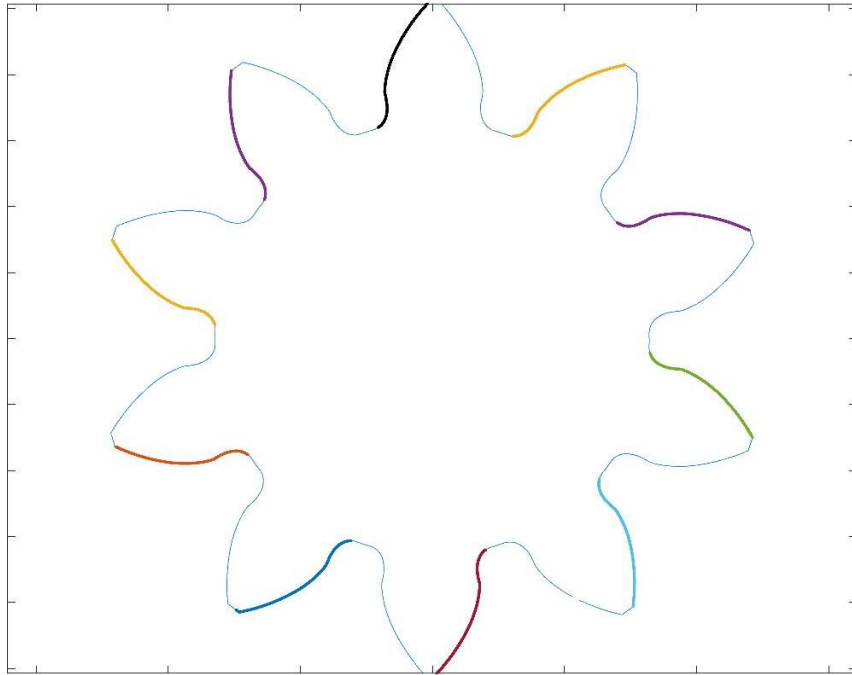
Τα αποτελέσματα που προέκυψαν ήταν τα ίδια και με τις δύο μεθόδους από τα σημεία της μίας κατατομής είναι:

$$\varphi = 78.74^\circ \quad r_g = 18.64mm$$

Ενώ με χρήση της άλλης κατατομής βρίσκεται:

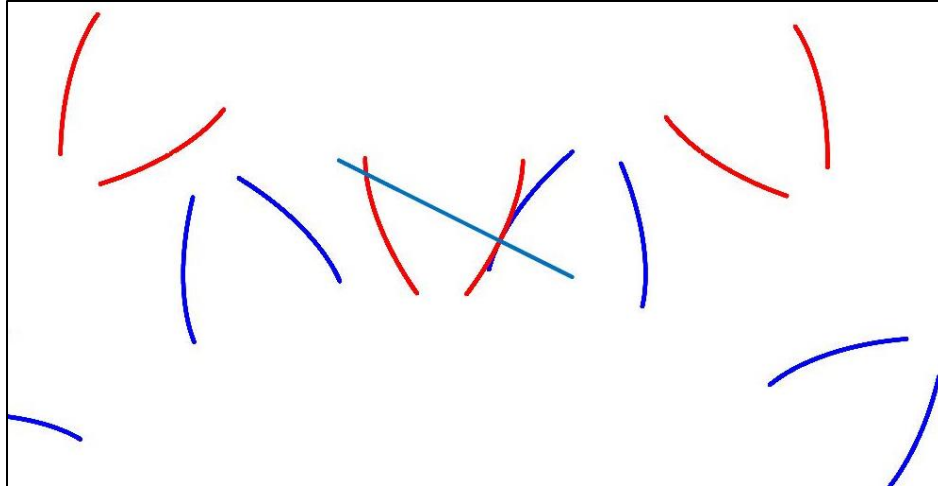
$$S_g = r_g \Delta\varphi = 7.45mm$$

Με γνωστά τα χαρακτηριστικά της καμπύλης δοκιμάστηκε στο μοντέλο της κινηματικής τόσο η θεωρητική όσο και η πραγματική γεωμετρία. Επειδή όμως το μοντέλο απαιτεί αρκετά υψηλές διακριτοποιήσεις στην κατατομή παρεμβλήθηκαν τα μετρηθέντα σημεία με spline [7] ώστε κάθε εργαζόμενη κατατομή να αποτελείται  $10^4$  σημεία.

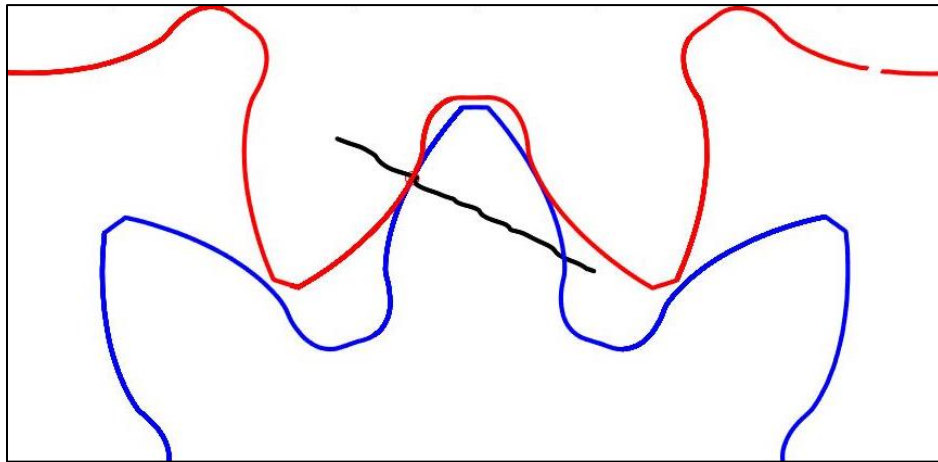


Εικόνα 14: Παρεμβεθλημένα με spline σημεία με τονισμένες τις περιοχές των εργαζόμενων κατατομών

Εισάγεται στον αλγόριθμο της κινηματικής τόσο τις θεωρητικές γεωμετρίες, δηλαδή τις εξειλιγμένες με τα υπολογισθέντα χαρακτηριστικά όσο και τις πραγματικές, δηλαδή τις spline. Ακολούθως παρουσιάζεται η τροχιά επαφών για κάθε περίπτωση.



Εικόνα 15: Τροχιά επαφών κατά την συνεργασία των θεωρητικών κατατομών



Εικόνα 16: : Τροχιά επαφών κατά την συνεργασία των πραγματικών κατατομών

Παρατηρείται ότι η τροχιά επαφών που προκύπτει από την συνεργασία των θεωρητικών κατατομών είναι όντως ευθεία όπως εξάλλου αναμενόταν και έχει διαπιστωθεί ότι συμβαίνει για τις εξειλιγμένες καμπύλες. Όμως, η τροχιά επαφών των πραγματικών κατατομών δεν είναι απολύτως ευθεία αλλά παρουσιάζει διακυμάνσεις που οφείλονται στις αποκλίσεις των πραγματικών κατατομών από την εξειλιγμένη. Κατά την συνεργασία δε τα σφάλματα αυτά πολλαπλασιάζονται με αποτέλεσμα η τροχιά επαφών να αποκλίνει αρκετά από την ευθεία.

#### 4. Ανάλυση της ελαστικής συμπεριφοράς οδόντων

Σε μία βαθμίδα οδοντωτών τροχών οι συνεργαζόμενοι οδόντες κατά την διάρκεια της φορτίσεώς τους συμπιέζονται και επομένως δημιουργείται μετατόπιση των οδόντων κατά την διεύθυνση της γραμμής ενέργειας. Η μετατόπιση αυτή έχει την ίδια επίδραση στην συνεργασία των τροχών όπως θα είχαν τυχόν κατασκευαστικά λάθη επί των συνεργαζόμενων κατατομών των οδόντων. Για να προσδιοριστεί ποσοτικά η μετατόπιση των οδόντων χρησιμοποιείται ο αδιάστατος συντελεστής ενδοτικότητας  $C$  [4].

$$C = \frac{Eb\delta}{W} \quad (13)$$

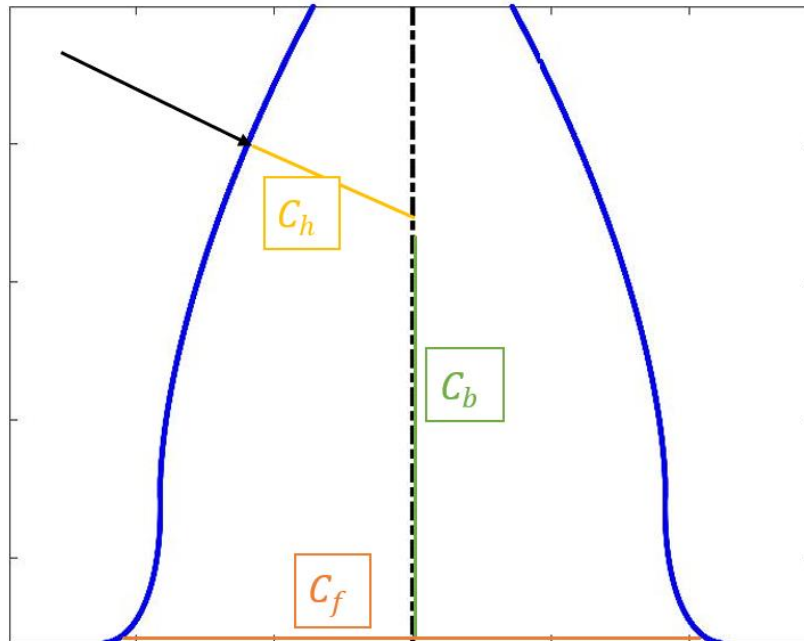
Όπου  $E$  το μέτρο ελαστικότητας,  $b$  το πλάτος οδόντος,  $W$  το φορτίο και  $\delta$  η μετατόπιση κατά μήκος της γραμμής ενέργειας.

Η ενδοτικότητα έχει τρεις συνιστώσες. Την καμπτική της συνιστώσα  $C_b$ , δηλαδή την μετατόπιση του κεντρικού άξονα του οδόντος λόγω καμπτικών ροπών και θλιπτικών και τέμνουσων δυνάμεων. Την συνιστώσα που οφείλεται στην ενδοτικότητα ποδός  $C_f$ , δηλαδή στην περιστροφή του οδόντος περί τη βάση του και την συνιστώσα κατά Hertz  $C_h$ , από την οποία προκύπτει η τοπική παραμόρφωση της κατατομής στο σημείο επαφής.

$$\delta = \delta_{b1} + \delta_{b2} + \delta_{f1} + \delta_{f2} + \delta_h \quad (14)$$

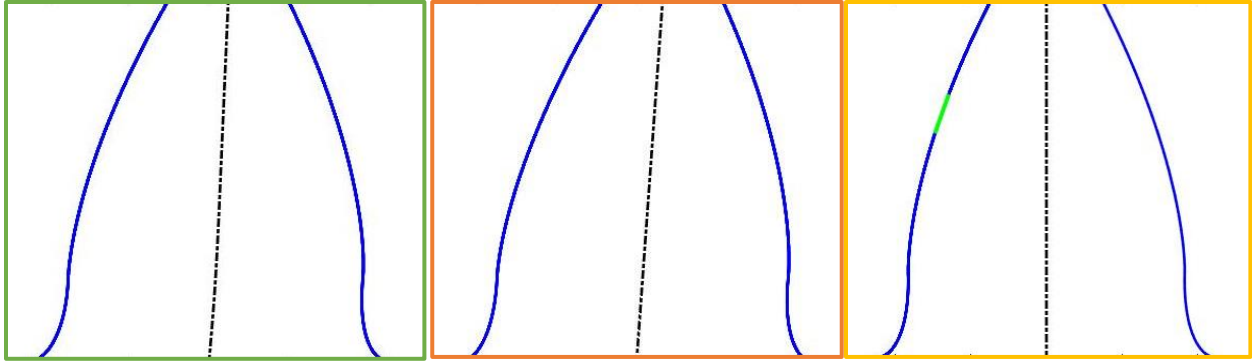
Εάν τα μέτρα ελαστικότητας  $E_1$  και  $E_2$  των τροχών 1 και 2 αντίστοιχα το ισοδύναμο μέτρο ελαστικότητας είναι:

$$E = \frac{2E_1E_2}{E_1 + E_2} \quad (15)$$



Εικόνα 17: Σχηματική απεικόνιση των τριών συνιστωσών ενδοτικότητας





Εικόνα 18: καμπτική ενδοτικότητα - ενδοτικότητα ποδός - ενδοτικότητα Hertz

Στα παραπάνω σχήματα εμφανίζονται οι παραμορφώσεις καθ' υπερβολήν που επέρχονται στον οδόντα λόγω των τριών ενδοτικοτήτων. Η επαλληλία αυτών δίνει την συνολική παραμόρφωση. Η παραμόρφωση που οφείλεται στην καμπτική ενδοτικότητα έχει ως αποτέλεσμα ο άξονας συμμετρίας του οδόντος να έχει την μορφή πολυωνύμου 3<sup>ου</sup> βαθμού, ως δοκός σε κάμψη, μέχρι το ισοδύναμο σημείο άσκησης της δύναμης σε αυτόν από όπου αποκτά μορφή ευθείας εφαπτόμενης στο πολυώνυμο σε αυτό το σημείο καθώς η περιοχή από αυτό το σημείο και άνω δεν φορτίζεται. Η επίδραση της ενδοτικότητας ποδός στην παραμόρφωση του άξονα συμμετρίας έχει ως αποτέλεσμα την στροφή αυτού καθώς αυτήν την περίπτωση θεωρείται άκαμπτος σε ελαστική βάση. Τέλος, η ενδοτικότητα Hertz είναι ένα τοπικό φαινόμενο γύρω από το σημείο επαφής όπου η κατατομή παραμορφώνεται τοπικά και γίνεται ευθεία. Οι δύο πρώτες ενδοτικότητες οφείλονται στην ιδιοσυμπεριφορά του οδόντος ενώ η τρίτη και από την συνεργασία, καθώς η ενδοτικότητα του Hertz εξαρτάται από το φορτίο όπως θα διαπιστωθεί στην συνέχεια.

#### 4.1. Καμπτική ενδοτικότητα

Η δύναμη  $W$  ασκείται πάντα κάθετα στην κατατομή και δύνανται να αναλυθεί στις συνιστώσες  $Q$  &  $N$ . Το εξωτερικό έργο της δύναμης  $W$  ισούται με το άθροισμα των εσωτερικών ενεργειών ως εξής:

$$\frac{1}{2} W\delta = \frac{1}{2} \int_0^{\psi} \frac{M^2}{EI} dy + \frac{1}{2} \int_0^{\psi} \frac{Q^2}{GA} dy + \frac{1}{2} \int_0^{\psi} \frac{N^2}{EA} dy \quad (16)$$

Όπου:

$A = bt$  εμβαδόν τετραγωνικής διατομής

$I = \frac{bt^3}{12}$  ροπή αδράνειας διατομής

$Q = W \cos\varphi$  τέμνουσα δύναμη

$N = W \sin\varphi$  ακτινική συνιστώσα φορτίου

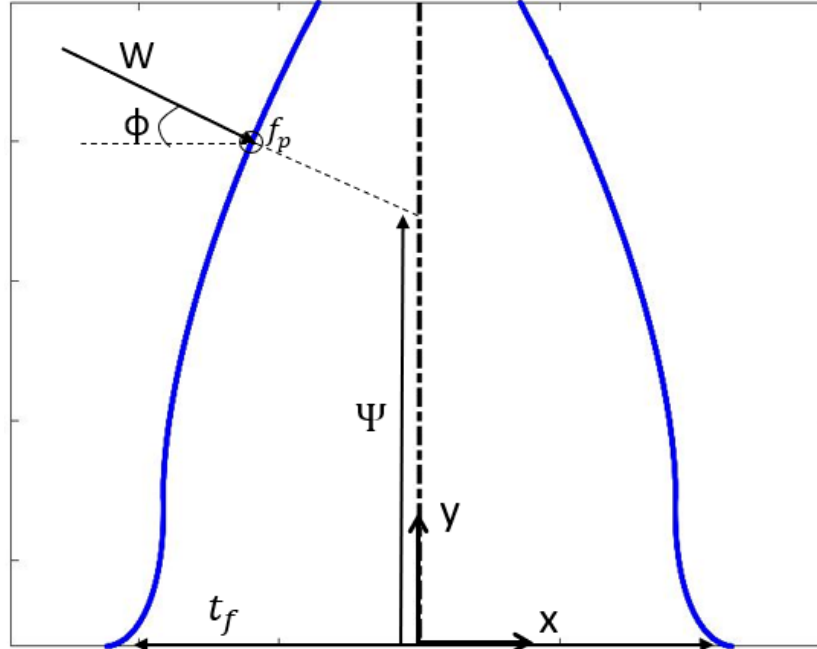
$M = -(\Psi - y)Q$  καμπτική ροπή στην θέση  $y$

$K = 1.2$  διορθωτικός συντελεστής της ανομοιομορφίας της κατανομής  $Q$

$E$  μέτρο ελαστικότητας

$\nu$  λόγος Poisson

$G = \frac{E}{2} \frac{1}{1+\nu}$  μέτρο στρέψης υλικού



Εικόνα 19: Χαρακτηριστικές διαστάσεις για τον υπολογισμό ενδοτικότητας κάμψης και ποδός

Αντικατάσταση των ανωτέρω στην προηγούμενη σχέση δίνει:

$$C_b = \frac{Eb\delta}{W} = 12 \cos^2 \varphi \left\{ I_2 + \left( 0.2(1 + \nu) + \tan^2 \frac{\varphi}{12} \right) I_1 \right\} \quad (17)$$

$$I_1 = \int_0^{\Psi} \frac{dy}{t} \quad I_2 = \int_0^{\Psi} \frac{(y - \Psi)^2}{t} dy$$

Η γωνία  $\varphi$  είναι η κάθετη στην κατατομή στο σημείο επαφής οπότε υπολογίζεται εύκολα:

$$\varphi = \left| \arctan \left( -\frac{1}{f'_p} \right) \right| \quad (18)$$

Ενώ η απόσταση  $y$ , με  $0 < y < \Psi$ , κατά μήκος του άξονα συμμετρίας του οδόντος από την βάση αυτού μέχρι το σημείο  $\Psi$  όπου η διεύθυνση της φόρτισης τον τέμνει και βρίσκεται ως εξής:

$$\Psi = im(f_p) + \tan(\varphi) * re(f_p) \quad (19)$$

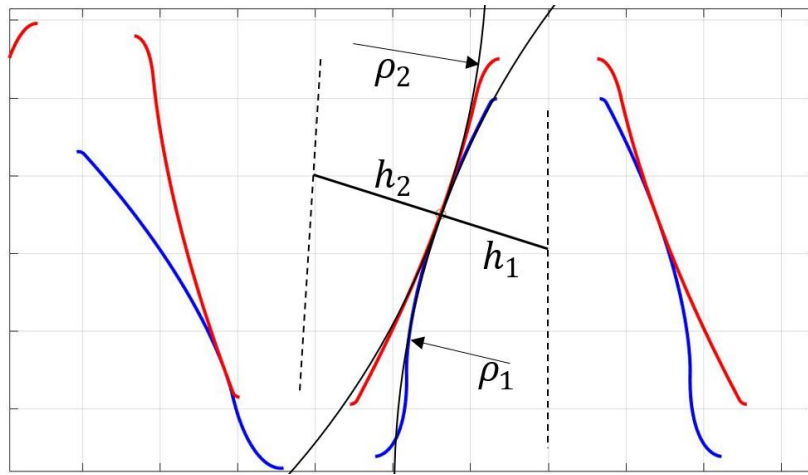
#### 4.2. Ενδοτικότητα ποδός

Η μετατόπιση του σημείου φορτίσεως οδόντος που οφείλεται στην μετατόπιση και την στροφή της βάσης αυτού λόγω ευκαμψίας της μπορεί να υπολογιστεί κατά Ο' Donnel:

$$C_f = (1 - \nu)^2 \cos^2 \varphi \left( \frac{50}{2\pi} \left( \frac{\Psi}{t_f} \right)^2 + \frac{2(1 - 2\nu) \Psi}{1 - \nu} \frac{\Psi}{t_f} + \frac{4.82}{\pi} \left( 1 + \frac{\tan^2 \varphi}{2.4(1 + \nu)} \right) \right) \quad (20)$$

Όπου  $t_f$  είναι το πάχος οδόντος στον πόδα όπως μαρτυρά και η εικόνα 19

#### 4.3. Ενδοτικότητα κατά Hertz



Εικόνα 20: Χαρακτηριστικές διαστάσεις για τον υπολογισμό της ενδοτικότητας Hertz

Η θεωρία Hertz που χρησιμοποιείται κατά τον υπολογισμό οδόντος σε πίεση επιφανείας θεωρεί στιγμιαία την κατατομή ως κύλινδρο με ισοδύναμη ακτίνα καμπυλότητας:

$$\rho = \left| \frac{ds}{d\varphi} \right| = \left| \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}} \right| \quad (21)$$

Επιπλέον χρήσιμο μέγεθος είναι και η απόσταση του σημείου επαφής από τον άξονα συμμετρίας του οδόντος ο οποίος στο σύστημα συνταταγμένων που έχουμε, όπως έχει αναφερθεί και πιο πάνω ταυτίζεται με την ευθεία  $x=0$ . Επομένως το μήκος αυτό προκύπτει από την σχέση:

$$h = |i(y + \min(|\text{im}(f)|)) - f_p| \quad (22)$$

Οπότε με δεδομένα τα απαιτούμενα χαρακτηριστικά του υλικού, λόγο poisson και μέτρο ελαστικότητας βρίσκουμε την κατά Hertz ενδοτικότητα ως εξής:

$$\nu^2 = 1 - \frac{E}{2} \left( \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right) \quad (23)$$

$$p_{max}^2 = \frac{W \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} E}{\pi b 2(1 - \nu^2)} \quad (24)$$

$$c = \frac{4}{E} \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} (1 - \nu^2) p_{max} \quad (25)$$

$$C_h = \frac{2(1 - \nu^2)}{\pi} \left( \ln \frac{4h_1 h_2}{c^2} - \frac{\nu}{1 - \nu} \right) \quad (26)$$

#### 4.4. Αποτελέσματα ενδοτικότητας

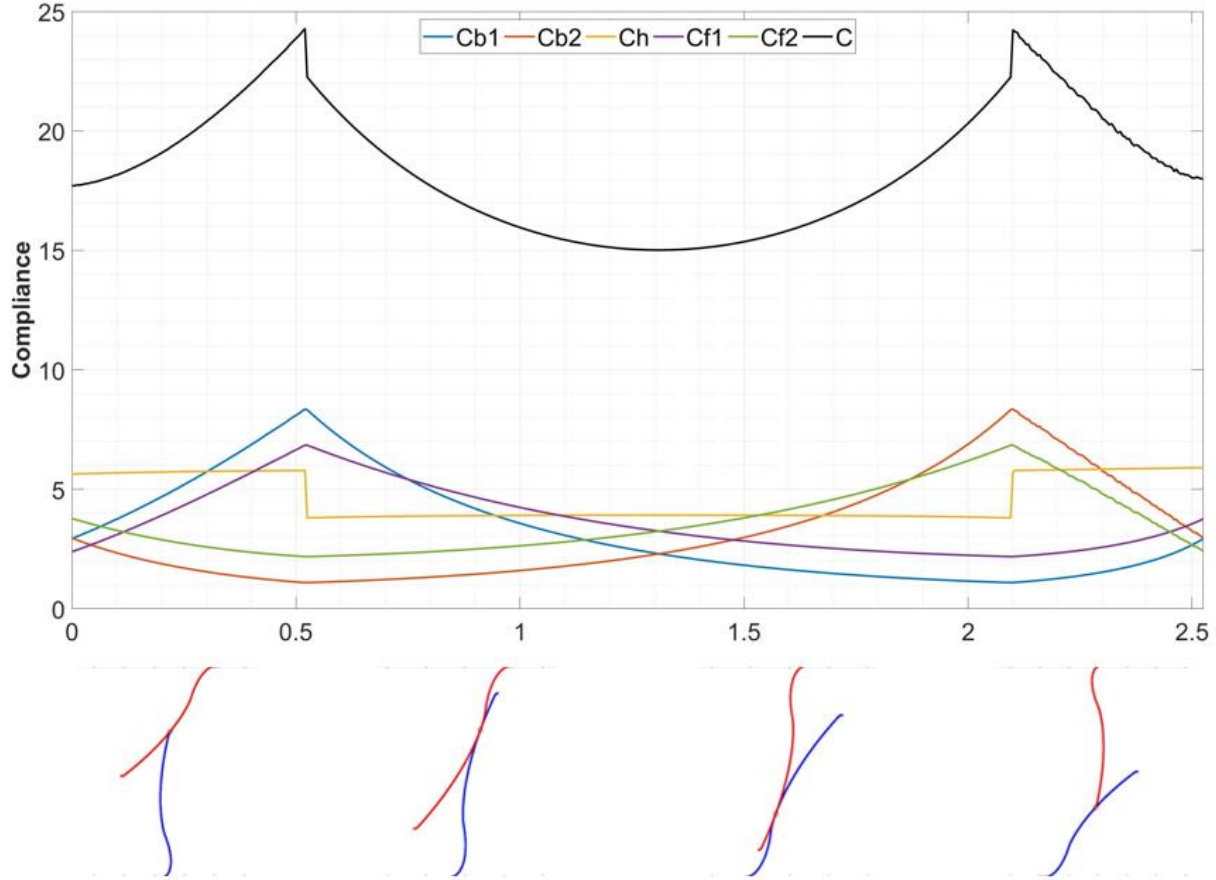
Συνδυάζοντας όλες τις ενδοτικότητες που περιεγράφηκαν παραπάνω, μπορεί να υπολογιστεί η συνολική ενδοτικότητα ενός ζεύγους οδόντων. Εκπεφρασμένη ως προς το ισοδύναμο μέτρο ελαστικότητας η ενδοτικότητα αυτή είναι:

$$C = (C_{b1} + C_{b2}) \frac{E}{E_1} + (C_{f1} + C_{f2}) \frac{E}{E_2} + C_h \quad (27)$$

Στην συνέχεια παρουσιάζονται ως παράδειγμα οι ενδοτικότητες κατά την πορεία της συνεργασίας ενός ζεύγους οδόντων από τροχούς με χαρακτηριστικά:

Οδοντωτοί τροχοί		
Απόσταση αξόνων $a_{12}$ [mm]	25	
Ροπή [Nm]	20	
	<b>Πινιόν</b>	<b>Συνεργαζόμενος</b>
Αριθμός οδόντων (Z)	25	25
Μοντουλ (m) [mm]	1	1
Πλάτος (b) [mm]	20	20
Γωνία πίεσης ( $\alpha_0$ ) [°]	20	20
Συντελεστής πάχους ( $C_s$ )	0.5	0.5
Συντελεστής ύψους κεφαλής ( $C_k$ )	1	1
Συντελεστής μετατόπισης ( $C_\mu$ )	0	0
Συντελεστής καμπυλότητας ( $C_c$ )	0	0
Μέτρο ελαστικότητας (E) [GPa]	210	210
Λόγος Poisson	0.3	0.3

Πίνακας 2: Χαρακτηριστικά ενδεικτικού ζεύγους οδοντωτών τροχών

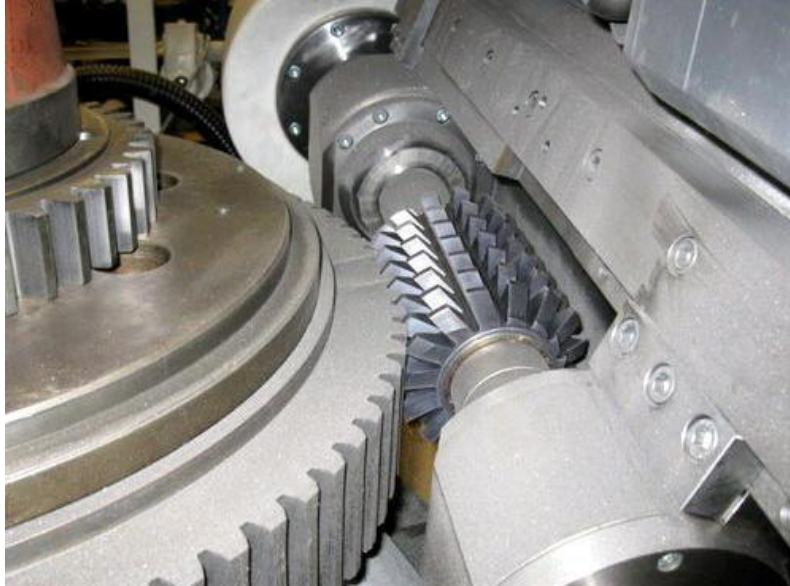


Εικόνα 21: Διάγραμμα ενδοτικότητας για ενδεικτικό ζεύγος οδόντων (Πίνακας 1)

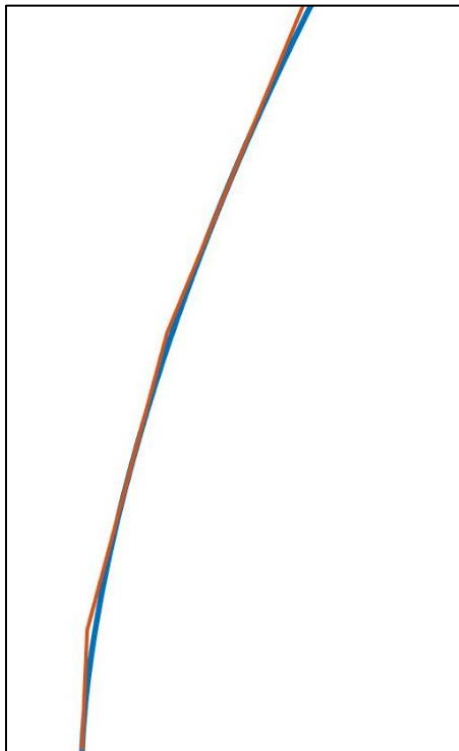
Σχολιάζοντας τα αποτελέσματα του παραπάνω διαγράμματος αρχικά διαπιστώνεται ότι το διάγραμμα είναι συμμετρικό κάτι που είναι αναμενόμενο αφού οι δύο συνεργαζόμενοι οδοντωτοί τροχοί είναι ίδιοι μεταξύ τους. Στο διάγραμμα κυριαρχεί η εφαπτομενική επαφή μεταξύ των οδόντων ενώ στην αρχή και στο τέλος του εμφανίζονται και τμήματα γωνιακής επαφής. Σε αυτά τα τμήματα η ενδοτικότητα λόγω Hertz είναι αυξημένη λόγω του ότι η ακτίνα καμπυλότητας ενός εκ των δύο οδόντων σε αυτήν την περιοχή είναι πολύ μικρή. Στην απότομη μεταβολή της ακτίνας καμπυλότητας οφείλεται και η ασυνέχεια στην συνολική ενδοτικότητα που παρατηρείται.

## 5. Μοντέλο τραχύτητας

Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζεται ο τρόπος με τον οποίον εισήχθη στο μοντέλο η τραχύτητα στις επιφάνειες των κατατομών. Η μορφή της τραχύτητας που εφαρμόζεται στις κατατομές των οδόντων προσομοιώνει αυτήν που προκύπτει από την κοπή των τροχών με hob.



Εικόνα 22: Κατεργασία τροχού με hob



Εικόνα 23: Τμήμα της θεωρητικής και της πραγματικής κατατομής με μπλε και πορτοκαλί χρώμα αντίστοιχα

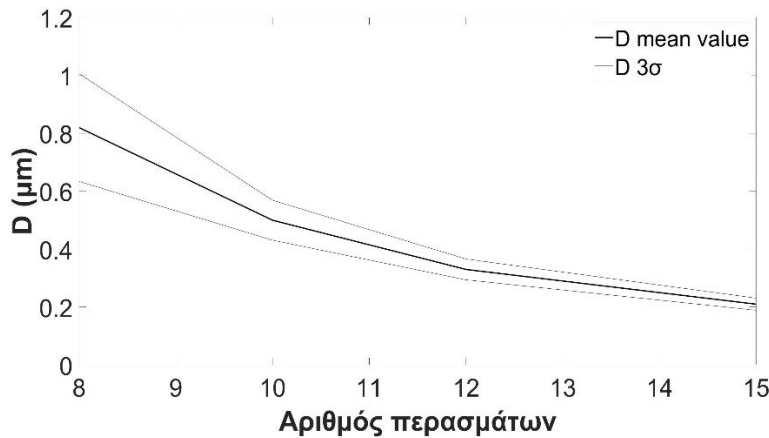
Στο σχήμα 22 παρουσιάζεται καθ' υπερβολήν με πορτοκαλί χρώμα η κατατομή που προκύπτει από την κατεργασία αν με μπλε χρώμα απεικονίζεται η ονομαστική. Φαίνεται ότι έχουν γίνει τρία ακριβώς κοψίματα για τον σχηματισμό της κατατομής. Δηλαδή, η κατατομή προσεγγίζεται πάντα από μία τεθλασμένη γραμμή. Όσες περισσότερες είναι οι τομές που γίνονται από το hob τόσο περισσότερο προσεγγίζει η τεθλασμένη την ονομαστική καμπύλη, η οποία στην εικόνα είναι η κλασική εξελιγμένη αλλά μπορεί να είναι οτιδήποτε και άλλο, και επομένως τόσο καλύτερη θα είναι και η ποιότητα της κατεργασίας με την επιφάνεια που θα προκύπτει να έχει όλο και μικρότερη τραχύτητα.

Η υλοποίηση του παραπάνω συλλογισμού για την εισαγωγή της τραχύτητας στο μοντέλο έγινε με τον εξής τρόπο: Πρώτον τα σημεία τομής αποφασίστηκε να απέχουν σταθερή απόσταση μεταξύ τους για λόγους απλότητας και ευκολίας. Κάθε οδόντας του ίδιου τροχού θα περιέχει τον ίδιο αριθμό τομών αλλά σε διαφορετική τυχαία φάση η οποία εισάγεται με μία γεννήτρια τυχαίων αριθμών. Αφού αποφασίστηκε κατ' αυτόν τον τρόπο ποια θα είναι τα κοινά σημεία της πραγματικής και της θεωρητικής καμπύλης, όπως αυτές φαίνονται στην εικόνα, αρκεί να ευρεθούν τα σημεία όπου συναντώνται τα ευθύγραμμα τμήματα μεταξύ

τους ώστε να έχουμε την πλήρη περιγραφή της πραγματικής καμπύλης. Η εύρεση, λοιπόν, κάθε ζητούμενου σημείου βασίζεται στα δύο ευθύγραμμα τμήματα για τα οποία γνωρίζουμε ήδη την κλίση τους  $\lambda_i$  και ένα σημείο τους  $(x_i, y_i)$ . Συνεπώς, για την εύρεση των συντεταγμένων του σημείου τομής δύο διαδοχικών ευθυγράμμων τμημάτων η επίλυση γίνεται ως εξής:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\lambda_i \\ 1 & -\lambda_{i+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_i - \lambda_i x_i \\ y_{i+1} - \lambda_{i+1} x_{i+1} \end{bmatrix} \quad (28)$$

Στην συνέχεια πραγματοποιήθηκε ο υπολογισμός της μετρικής D ως η μέση τιμή των αποστάσεων κάθε σημείου της πραγματικής καμπύλης από την ονομαστική κατά τα πρότυπα υπολογισμού της τραχύτητας. Για την αντιστοίχιση αυτής με το αριθμό περασμάτων του hob διεξήχθησαν για κάθε αριθμό περασμάτων 100 επαναλήψεις. Παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται συγκεντρωμένα για τέσσερις διαφορετικούς αριθμούς περασμάτων η μέση τιμή της μετρικής D παράλληλα με την τυπική απόκλιση της, καθώς και η ποιότητα κατά AGMA που αντιστοιχεί σε αυτήν.

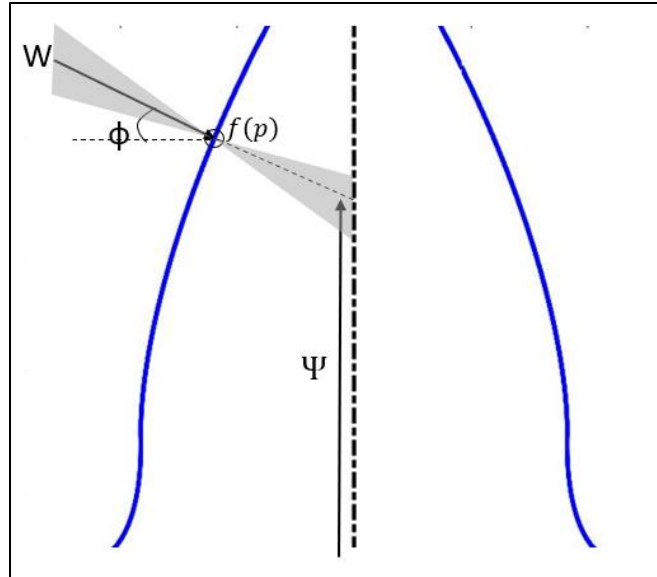


Εικόνα 24: Τιμή της μετρικής D συναρτήση του αριθμού περασμάτων του hob σε μία κατατομή

Αριθμός περασμάτων	Ποιότητα κατά AGMA
15	10
12	9
10	8
8	7

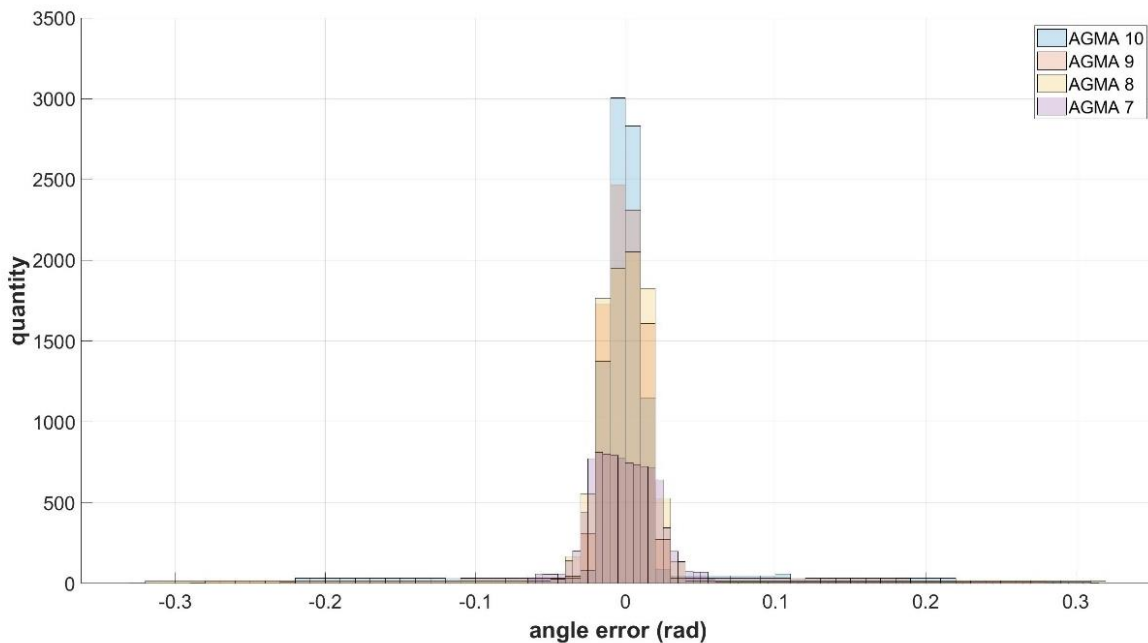
Πίνακας 3: Αντιστοίχιση αριθμού περασμάτων του hob με ποιότητα κατά AGMA

Η ουσιαστική διαφορά που επιφέρουν οι γεωμετρικές αυτές αποκλίσεις είναι η αλλαγή στην διεύθυνση της δύναμης. Αυτό επηρεάζει πολλά γεωμετρικά μεγέθη που παίζουν ρόλο για τους υπολογισμούς των ενδοτικοτήτων. Είναι προφανές ότι όταν η γωνία  $\phi$ , όπως ορίζεται από το σχήμα 23, είναι πιο μεγάλη τότε οι θλιπτικές δυνάμεις αυξάνονται και οι καμπτικές και τέμνουσες μειώνονται, ενώ το αντίστροφο ισχύει όταν η γωνία  $\phi$  τύχει λόγω τραχύτητας να μειωθεί. Οι αλλαγές αυτές στις τιμές των ενδοτικοτήτων προκαλεί αυξομειώσεις και στις τιμές των παραμορφώσεων που προκύπτουν σε σχέση με αυτές που θα προέκυπταν από ιδανικούς τροχούς. Επομένως αναμένεται να διαπιστωθούν και αυξομειώσεις στο σφάλμα μετάδοσης ανάλογες με την τραχύτητα της επιφάνειας.



Εικόνα 25: Αλλαγή στην διεύθυνση της δύναμης λόγω τραχύτητας

Στο ιστόγραμμα παρακάτω απεικονίζεται η κατανομή σφαλμάτων στην κλίση που έχει κάθε σημείο στην κατατομή ενός οδόντος που ανήκει σε τροχό με τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του πίνακα 3 για διάφορες ποιότητες επιφανείας κατά AGMA. Όπως φαίνεται από το διάγραμμα όσο καλύτερη είναι η ποιότητα επιφανείας τόσο το μικρότερα είναι και τα εμφανιζόμενα σφάλματα.



Εικόνα 26: Σφάλμα κλίσεως κάθε σημείου τεσσάρων κατατομών διαφορετικής ποιότητας

Συνεπώς, είναι γνωστό για κάθε σημείο της κατατομής πώς πρέπει να διαφοροποιηθεί η διεύθυνση της δύναμης που αναπτύσσεται κατά την επαφή των κατατομών. Εξασφαλίζεται ότι η διεύθυνση της δύναμης που δέχεται η μία κατατομή είναι ίδια με την διεύθυνση της δύναμης στην άλλη ως δράση-αντίδραση εισάγοντας και στις δύο το μέσο σφάλμα τους.



## 6. Στατικό μοντέλο

### 6.1. Σύνθεση στατικού μοντέλου

Έχει αναπτυχθεί εκτενώς στα προηγούμενα κεφάλαια κατά σειρά η κινηματική του συστήματος, ο τρόπος υπολογισμού της ενδοτικότητας ενός ζεύγους οδόντων που έρχονται σε επαφή και ο τρόπος με τον οποίο επιδρά ο παράγοντας της τραχύτητας. Όλα τα παραπάνω ενσωματώνονται σε ένα ενιαίο μοντέλο ώστε να υπολογίζεται το static transmission error κατά την λειτουργία μίας βαθμίδας.

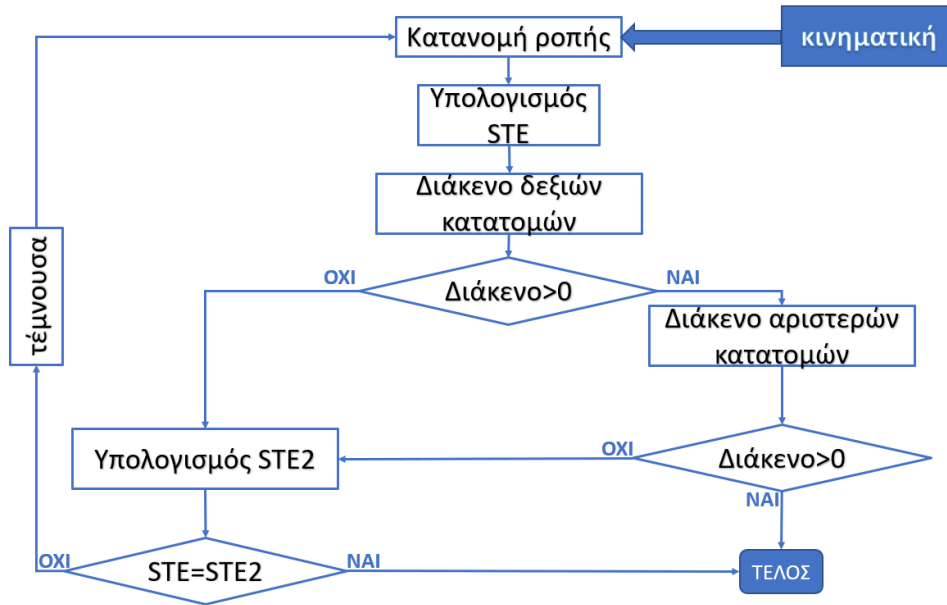
Στην ενότητα όπου έγινε αναφορά στον τρόπο επίλυσης της κινηματικής περιεγράφηκε ο τρόπος με τον οποίο βρίσκεται ένα σημείο επαφής μεταξύ των δύο οδοντωτών τροχών. Προφανώς, το σημείο αυτό για μία γωνία στροφής είναι το κοινό σημείο δύο κατατομών. Όμως, γνωρίζουμε ότι ενδέχεται κατά την συνεργασία των δύο τροχών να έρθουν σε επαφή δύο ζεύγη οδόντων ταυτόχρονα. Σε αυτήν την περίπτωση η ενδοτικότητα του συστήματος θα μειωθεί, καθώς πρακτικά θα έχουμε ένα ελατήριο επιπλέον παράλληλα με το πρώτο. Αυτός είναι και ο τρόπος που μοντελοποιήθηκε το σύστημα.

Η μέθοδος που ακολουθήθηκε για την επίλυση βασίζεται στην παραδοχή ότι κατά την συνεργασία μπορούν έρθουν σε επαφή ταυτόχρονα το πολύ δύο διαφορετικά ζεύγη οδόντων και με δεδομένη την ροπή  $M$  που μεταφέρει το σύστημα υπολογίζεται τελικά το static transmission error. Η επίλυση έγινε ως εξής: Σίγουρα καταπονείται το ζεύγος εκείνο που ευρέθηκε από την επίλυση κινηματικής να περιέχει το σημείο επαφής. Η ροπή με την οποία φορτίζεται είναι σίγουρα μεγαλύτερη του μηδενός και μικρότερη ή ίση της  $M$ . Για αρχή εφαρμόζουμε στο ζεύγος αυτό την μέγιστη ροπή και στην συνέχεια υπολογίζουμε το μέγεθος των διακένων στα εκατέρωθεν αυτού ζεύγη οδόντων. Εφόσον δεν εντοπιστεί εισχώρηση σε κάποιο, αυτό σημαίνει ότι η επαφή των τροχών πραγματοποιείται μεταξύ μόνο αυτού του ζεύγους. Αν όμως εντοπιστεί η εισχώρηση σε κάποιο από τα δύο εκατέρωθεν ζεύγη ξέρουμε ότι και αυτό το ζεύγος πρέπει να λάβει ένα μέρος της συνολικής ροπής  $M$ . Αυτό ευρίσκεται επαναληπτικά έως την σύγκλιση με την χρήση της αριθμητικής μεθόδου της τέμνουσας [7] κατά την οποία ελέγχεται η διαφορά του static transmission error ( $\delta\phi$ ) μεταξύ των δύο ζευγών για την κατανομή της ροπής μεταξύ των δύο ζευγών οδόντων. Προφανώς επιδιώκεται ο μηδενισμός του  $\delta\phi$ .

$$M_m = M_{m-1} - \frac{\delta\phi_{m-1}(M_{m-1} - M_{m-2})}{\delta\phi_{m-1} - \delta\phi_{m-2}} \quad (29)$$

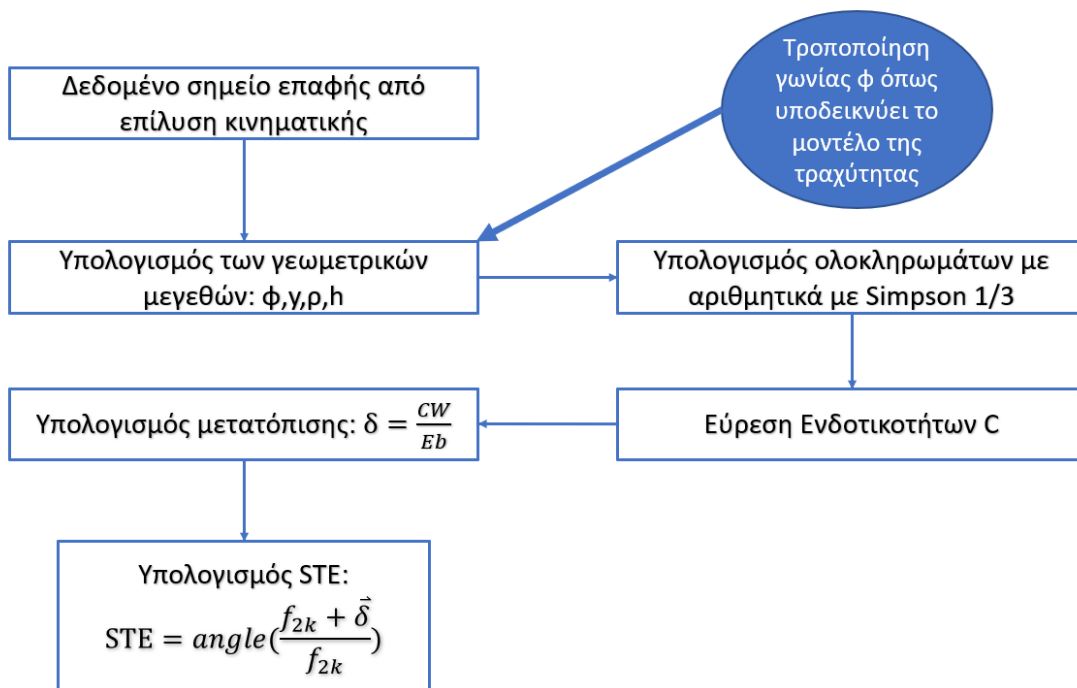
Όπου:  $M_m$  είναι η ροπή που λαμβάνει το ζεύγος οδόντων που έχει υποδειχθεί από την κινηματική του συστήματος. Είναι προφανές ότι το άλλο ζεύγος που συμμετέχει στην συνεργασία παραλαμβάνει φορτίο ίσο με  $M - M_m$ . Η διαδικασία τερματίζει για την κατανομή της ροπής η οποία δίνει την παραπάνω διαφορά μικρότερη από  $10^{-8}\text{rad}$ . Η ακρίβεια αυτή επιτυγχάνεται μετά από δύο ή τρεις επαναλήψεις.

Για γίνει η διαδικασία που περιεγράφηκε πιο κατανοητή παρουσιάζεται συνοπτικά και σε διάγραμμα ροής:



Εικόνα 27: Αλγόριθμος υπολογισμών στατικού μοντέλου

Όπου στο στάδιο που αναφέρεται η κινηματική, η επίλυση γίνεται όπως υποδεικνύεται από το διάγραμμα ροής της εικόνας 8, ενώ το διάκενο υπολογίζονται με τον κώδικα της επαφής ο οποίος έχει παρουσιαστεί συνοπτικά στο διάγραμμα ροής της εικόνας 5. Στα στάδια όπου αναφέρονται υπολογισμοί static transmission error αυτοί γίνονται όπως υποδεικνύεται από το διάγραμμα ροής παρακάτω:



Εικόνα 28: Αλγόριθμος υπολογισμού STE

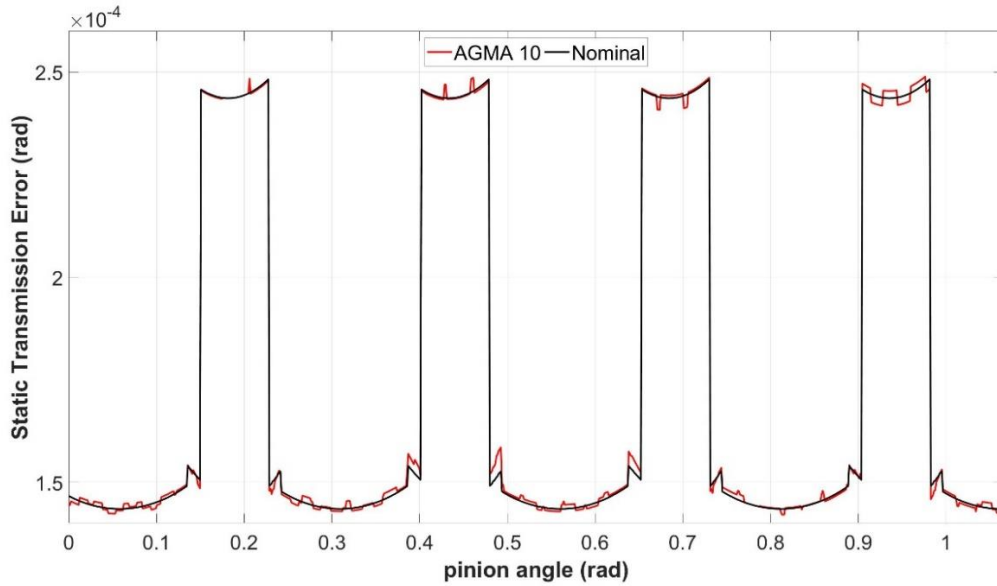
Πρέπει να επισημανθεί ότι το STE σε αυτήν την περίπτωση αφορά το γωνιακό σφάλμα στην μετάδοση κίνησης που οφείλεται μόνο στην ενδοτικότητα των οδόντων και όχι στην γεωμετρία τους. Δηλαδή υπολογίζεται ως το μέτρο της διαφοράς της πραγματικής τιμής της γωνίας στροφής του συνεργαζόμενου με αυτήν που θα είχε αν το υλικό ήταν τελείως άκαμπτο.

## 6.2. Αποτελέσματα στατικού μοντέλου

Παρατίθενται ενδεικτικά αποτελέσματα του στατικού μοντέλου. Πιο συγκεκριμένα παρουσιάζεται το STE για τροχό χωρίς κατασκευαστικές ατέλειες και για τροχό ποιότητας AGMA 10. Και οι δύο τροχοί έχουν τα εξής χαρακτηριστικά:

Οδοντωτοί τροχοί		
Απόσταση αξόνων $a_{12}$ [mm]	25	
Ροπή [Nm]	10	
	Πινιόν	Συνεργαζόμενος
Αριθμός οδόντων (Z)	25	25
Μοντούλ (m) [mm]	1	1
Πλάτος (b) [mm]	20	20
Γωνία πίεσης ( $\alpha_0$ ) [°]	20	20
Συντελεστής πάχους ( $C_s$ )	0.5	0.5
Συντελεστής ύψους κεφαλής ( $C_k$ )	1	1
Συντελεστής μετατόπισης ( $C_\mu$ )	0	0
Συντελεστής καμπυλότητας ( $C_c$ )	0	0
Μέτρο ελαστικότητας (E) [GPa]	210	210
Λόγος Poisson	0.3	0.3

Πίνακας 4:Χαρακτηριστικά ενδεικτικού ζεύγους οδοντωτών τροχών



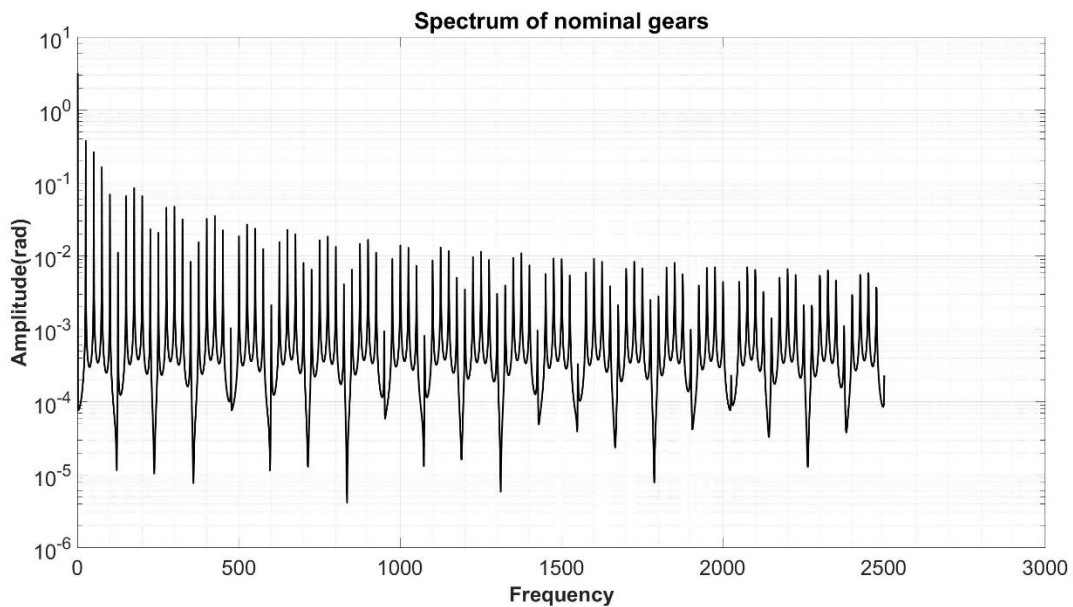
Εικόνα 29: Σήμα STE για εμπλοκή τεσσάρων διαδοχικών ζευγών οδόντων

Επειδή κάθε οδόντας είναι διαφορετικός η περίοδος του φαινομένου είναι ίση με:

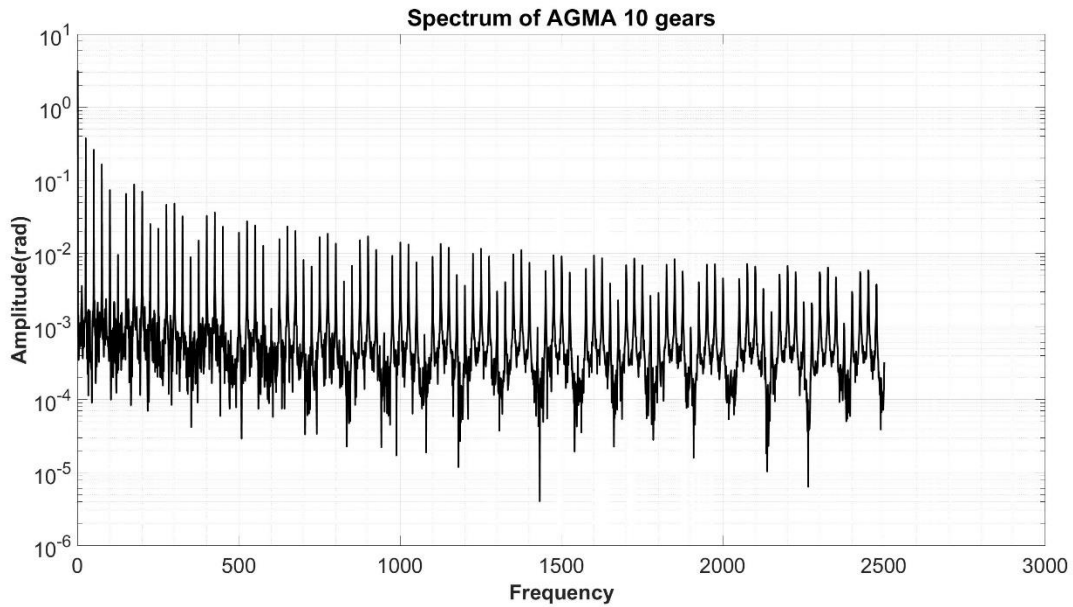
$$T = 2\pi \frac{LCM(Z_1, Z_2)}{Z_1} \quad (30)$$

οπότε έρχονται ξανά σε επαφή οι δύο οδόντες για πρώτη φορά. Για το συγκεκριμένο παράδειγμα έχουμε  $T=2\pi$  η οποία, όπως είναι προφανές, ισούται με 25 περιόδους σύμπλεξης.

Ακολούθως παρατίθενται τα δύο φάσματα, των ιδανικών τροχών και των τροχών ποιότητας AGMA 10 σε λογαριθμική κλίμακα στον  $y$  άξονα:

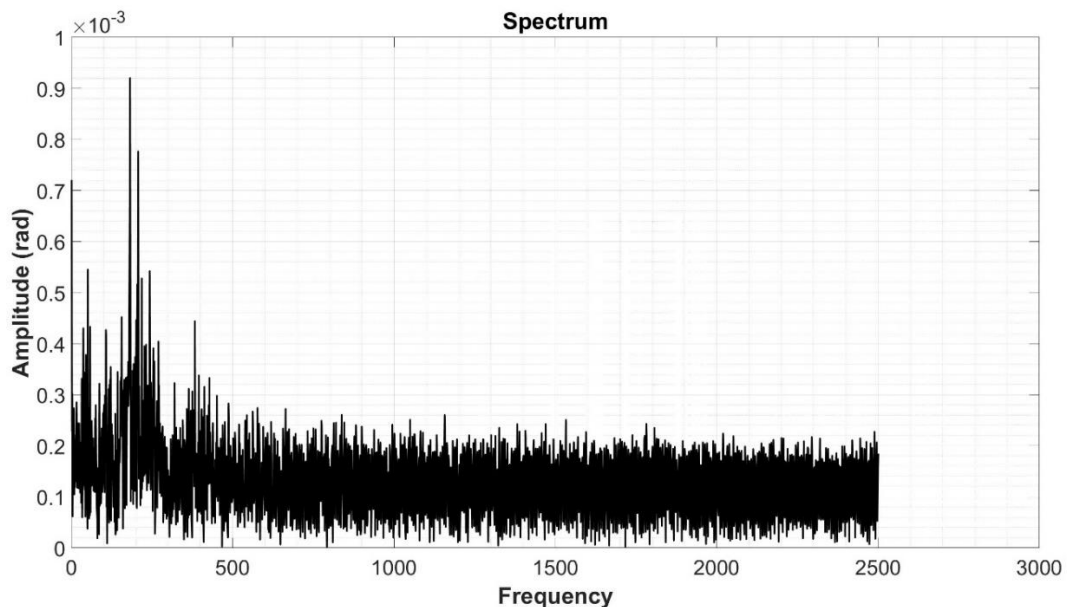


Εικόνα 30: Φάσμα STE ιδανικού ζεύγους οδοντωτών τροχών



Εικόνα 31: Φάσμα STE ζεύγους οδοντωτών τροχών ποιότητας 10 κατά AGMA

Παρατηρώντας τα δύο φάσματα είναι ευδιάκριτη η επίδραση της τραχύτητας στο δεύτερο. Ενώ στο πρώτο φάσμα των ιδανικών τροχών παρατηρούνται κορυφές που οφείλονται στην συχνότητα σύμπλεξης, στο δεύτερο φάσμα όπου συμπεριλαμβάνονται και χαρακτηριστικά τραχύτητας στις επιφάνειες των κατατομών παρατηρείται ένα δάσος κορυφών μικρού πλάτους στην συχνότητα περιστροφής των αξόνων. Στο επόμενο διάγραμμα παρουσιάζεται η διαφορά των δύο ανωτέρω φασμάτων ώστε να φανεί απομονωμένα η συνεισφορά της τραχύτητας.



Εικόνα 32: Φάσμα απομονωμένων χαρακτηριστικών τραχύτητας

## 7. Δυναμικό μοντέλο

### 7.1. Εξισώσεις κίνησης

Η επίδραση της τραχύτητας κατά την λειτουργία ενός ζεύγους οδόντων φάνηκε ήδη στο φάσμα του STE. Όμως για να καλυφθούν και πειράματα με υψηλές ταχύτητες περιστροφής στα οποία τα αδρανειακά φαινόμενα δεν είναι δυνατόν να αμεληθούν είναι απαραίτητη η δημιουργία ενός δυναμικού μοντέλου της μορφής:

$$\mathbf{I}\ddot{\boldsymbol{\phi}} + \mathbf{C}\dot{\boldsymbol{\phi}} + \mathbf{G}(\boldsymbol{\phi})\boldsymbol{\phi} = \mathbf{M} \quad (31)$$

Όπου  $\mathbf{I}$  είναι το μητρώο αδρανείας,  $\mathbf{C}$  το μητρώο απόσβεσης του συστήματος,  $\mathbf{G}(\boldsymbol{\phi})$  το μητρώο της στροφικής ελαστικότητας του και το διάνυσμα των εξωτερικών ροπών.

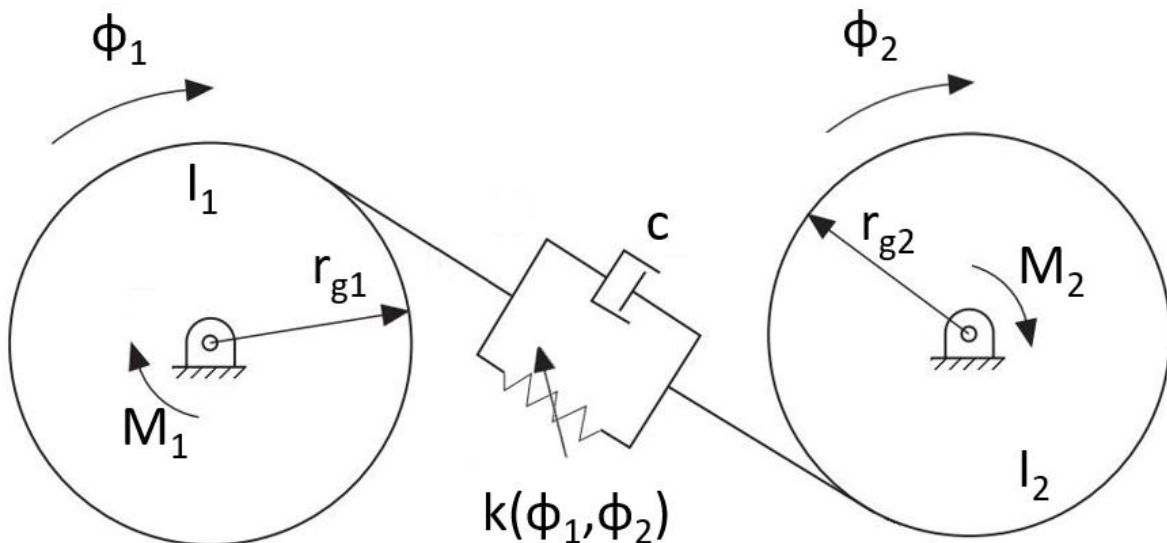
Το μητρώο ελαστικότητας εξαρτάται από την θέση των δύο τροχών και επομένως μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:

$$g = \frac{STE(\varphi)}{M_2} \quad (32)$$

Όπου  $STE$  είναι το σήμα του Static Transmission Error στο οποίο έχει γίνει παρεμβολή με κυβική Ερμιτιανή spline (PCHIP) για αυξημένη διακριτοποίηση.

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} gi & g \\ gi & g \end{bmatrix} \quad (33)$$

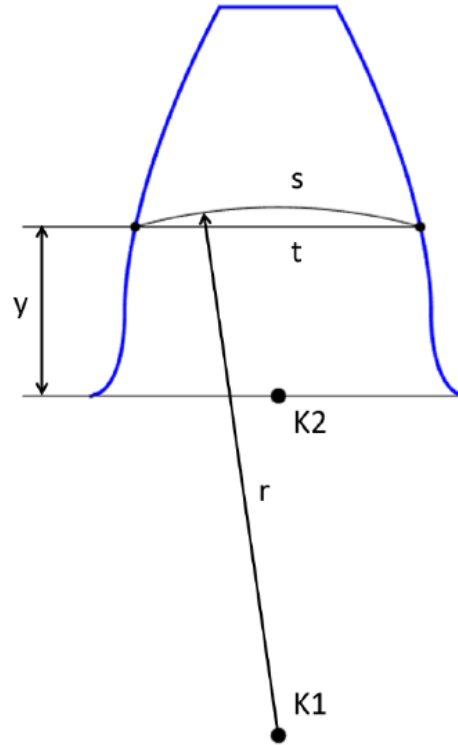
Όπου:  $i = Z_2/Z_1$  η σχέση μετάδοσης.



Εικόνα 33: Μοντέλο βαθμίδας οδοντωτών τροχών

Ενώ ακόμη θεωρείται το ελατήριο αυτό γραμμικό για ροπές κοντά σε αυτήν με την οποία υπολογίστηκε το STE. Στην πραγματικότητα η ενδοτικότητα Hertz εισάγει έναν μη γραμμικό όρο

στην συνολική ενδοτικότητα του συστήματος. Αν όμως θεωρηθεί ότι το φορτίο που ασκείται στην διεπαφή των οδόντων είναι περίπου σταθερό με μικρές μόνο διαταραχές, τότε είναι δυνατόν να θεωρηθεί το ελατήριο γραμμικό και να το αποτυπωθεί στην παραπάνω μητρική μορφή.



Εικόνα 34: Χαρακτηριστικά μεγέθη για τον υπολογισμό των ροπών αδρανείας

Η ροπή αδρανείας τροχών ευθύγραμμης μετωπικής οδόντωσης δίνεται ως το άθροισμα της ροπής αδρανείας του κύκλου ποδός και της ροπής αδρανείας των οδόντων του.

$$I = I_f + ZI_{tooth} = \rho b \left( 2\pi \int_0^{r_f} r^3 dr + Z \int_{r_f}^{r_k} r^2 s dr \right) = \rho b \left( \frac{\pi}{2} r_f^4 + Z \int_{r_f}^{r_k} r^2 s dr \right) \quad (34)$$

Στην παραπάνω σχέση με  $r$  ορίζεται η τοπική ακτίνα κάθε σημείου, ενώ  $r_f$  και  $r_k$  είναι οι ακτίνες ποδός και κεφαλής αντίστοιχα. Επιπλέον, με  $\rho$  συμβολίζεται η πυκνότητα του υλικού, ενώ  $b$  είναι το πλάτος του τροχού. Το ολοκλήρωμα που αφορά την συνεισφορά των οδόντων στην συνολική ροπή αδρανείας υπολογίζεται αριθμητικά με χρήση της μεθόδου Simpson 1/3.

Το μητρώο αδρανείας είναι:

$$I = \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} \quad (35)$$

Όπου  $I_1$  και  $I_2$  οι ροπές αδρανείας πινιόν και συνεργαζόμενου τροχού αντίστοιχα.

Η σταθερά απόσβεσης του υλικού υπολογίστηκε για έναν τροχό ως εξής:

$$C = 2\zeta\sqrt{GI} \quad (36)$$

Στην πορεία της εργασίας για στον συντελεστή  $\zeta$  έχει επιλεγθεί δίνεται πάντα η τιμή  $\zeta=0.05$  ως αντιπροσωπευτική.

Το μητρώο απόσβεσης είναι:

$$C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix} \quad (37)$$

Όπου  $c_1$  και  $c_2$  οι εγγενείς αποσβέσεις του πινιόν και του συνεργαζόμενου τροχού αντίστοιχα.

Συνεπώς σε ανεπτυγμένη μορφή το σύστημα των εξισώσεων που πρέπει να επιλυθεί είναι:

$$\begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\phi}_1 \\ \ddot{\phi}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} gi & g \\ gi & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} \quad (38)$$

Η επίλυση του παραπάνω συστήματος διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης έγινε με χρήση της μεθόδου Runge Kutta 4<sup>ης</sup> τάξης. Σε αυτήν δίνονται οι αρχικές συνθήκες και ένα χρονικό βήμα επίλυσης. Το χρονικό αυτό βήμα είναι σταθερό καθ' όλη την διάρκεια της προσομοίωσης και μάλιστα μετά από την επίλυση για ένα χρονικό βήμα η επίλυση συνεχίζεται εισάγοντας στο επόμενο χρονικό βήμα ως αρχικές συνθήκες τα υπολογισθέντα μεγέθη από το προηγούμενο.

## 7.2. Αποτελέσματα προσομοιώσεων

Το μοντέλο αυτό υποβλήθηκε σε διάφορες δοκιμές για να ελεγχθεί η λειτουργία του σε βαθμίδα οδοντωτών τροχών με τα χαρακτηριστικά του πίνακα 5.

Οι ιδιοσυχνότητες του συστήματος προκύπτουν κατά τα γνωστά [5] από την παρακάτω σχέση

$$\left| G_{mean} - \left( \frac{f_n}{2\pi} \right)^2 I \right| = 0 \quad (39)$$

Όπου  $G_{mean}$  είναι το μέσο μητρώο ελαστικότητας, καθώς όπως έχει προαναφερθεί το μητρώο αυτό είναι διαφορετικό σε κάθε γωνιακή θέση. Για το συγκεκριμένο ζεύγος οδοντωτών τροχών η ιδιοσυχνότητα του πινιόν είναι:

$$f_n = 2.2547 \cdot 10^4 \text{ Hz}$$

Είναι υποχρέωση να αναφερθεί ότι η συχνότητα δειγματοληψίας που επελέχθη για την διενέργεια όλων των προσομοιώσεων είναι:

$$f_s = 10^6 \text{ Hz} > f_n$$

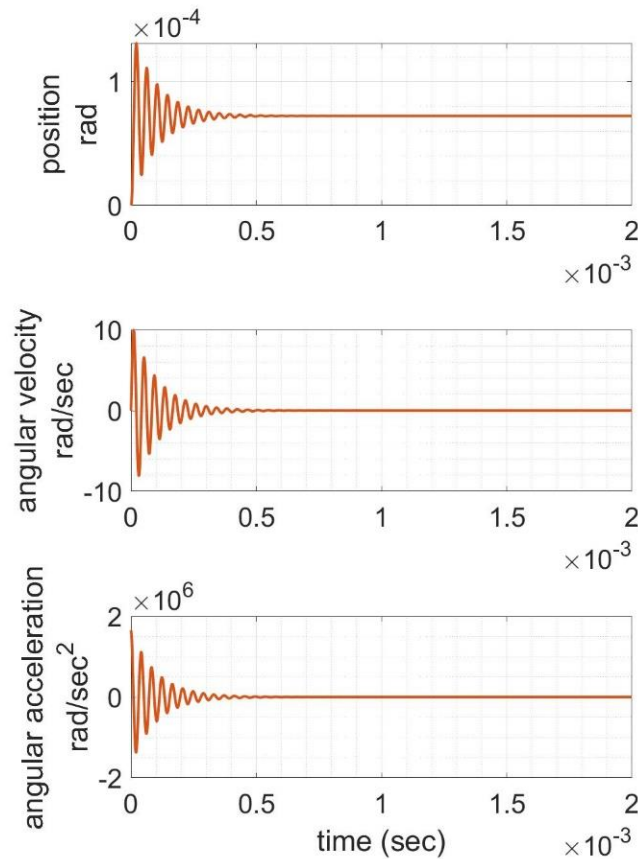
Σε όλες τις επόμενες προσομοιώσεις η μπλε γραμμή στα χρονικά σήματα αφορά το πινιόν και η πορτοκαλί τον συνεργαζόμενο.



Η πρώτη προσομοίωση έγινε για τις εξής συνθήκες:

Εξωτερικές ροπές		Αρχική θέση		Αρχική ταχύτητα	
$M_1$	10 Nm	$\varphi_1$	0 rad	$d\varphi_1/dt$	0 rad/sec
$M_2$	10 Nm	$\varphi_2$	0 rad	$d\varphi_2/dt$	0 rad/sec

Πίνακας 5: Συνθήκες φόρτισης και αρχικές συνθήκες



Εικόνα 35: Χρονικά σήματα θέσης, ταχύτητας, επιτάχυνσης για ίσες ροπές και μηδενικές αρχικές συνθήκες

Παρατηρείται από τα χρονικά σήματα για την θέση την ταχύτητα και την επιτάχυνση ότι μετά από μία αποσβεννύμενη ταλάντωση το σύστημα ισορροπεί στην κατάλληλη θέση δίνοντας σφάλμα μετάδοσης (TE):

$$TE = \varphi_1 + \varphi_2 = 1.446 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \quad (38)$$

Ίσο με το  $STE(\varphi_1)$  όπως φαίνεται από το διάγραμμα αυτού στην εικόνα 28.

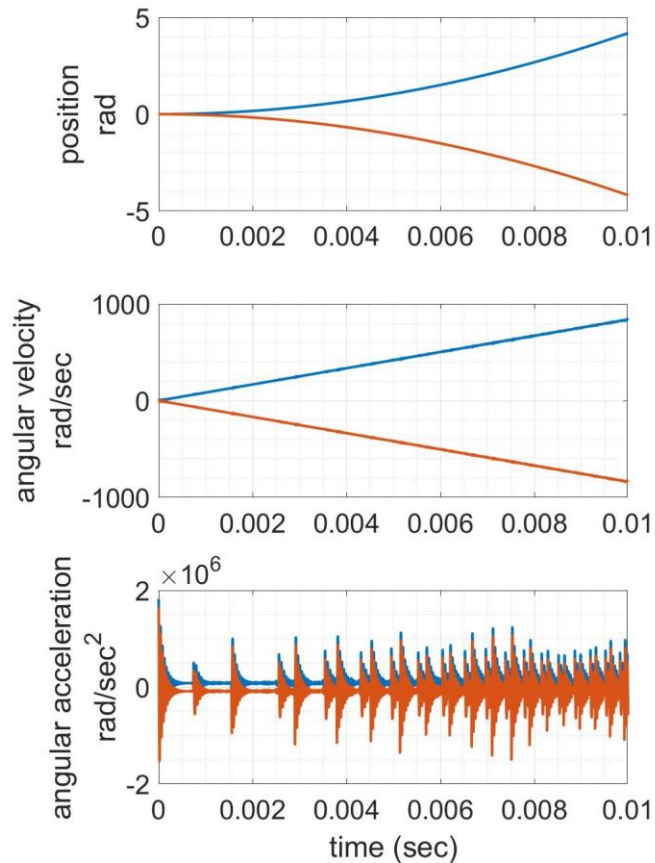
Να σημειωθεί ότι στα παραπάνω διαγράμματα τα χρονικά σήματα για τα κινηματικά μεγέθη των δύο τροχών δεν ξεχωρίζουν μεταξύ τους γιατί αλληλεπικαλύπτονται.

Στην συνέχεια επιλέχθηκε να πραγματοποιηθεί δοκιμή κατά την οποία εφαρμόζεται στον άξονα του πινιόν μία μεγαλύτερη ροπή από το φορτίο ώστε οι τροχοί να αρχίσουν να επιταχύνονται.

Στην κάτωθι εικόνα παρατηρούμε πράγματι όλα τα χαρακτηριστικά της επιταχυνόμενης κίνησης στα χρονικά σήματα θέσης, ταχύτητας ενώ ιδιαίτερος στο σήμα της επιτάχυνσης παρατηρείται ότι κάθε τροχός έχει ίσες και αντίθετες επιταχύνσεις, αφού οι δύο τροχοί είναι ίδιοι μεταξύ τους, ενώ κάθε φορά που ένα ζεύγος οδόντων έρχεται σε επαφή παρατηρείται και ο χαρακτηριστικός παλμός όπου οι οδόντες ταλαντώνονται την ιδιοσυχνότητά τους στο σύστημα ο οποίος αποσβένεται λόγω της εγγενούς απόσβεσης του υλικού. Διαπιστώνεται ότι καθώς αυξάνεται η ταχύτητα περιστροφής του συστήματος αυτοί οι παλμοί εμφανίζονται όλο και με μεγαλύτερη συχνότητα όπως αναμενόταν. Όπως είναι εμφανές και από τα διαγράμματα ο χρόνος της προσομοίωσης είναι 0.01 sec.

Εξωτερικές ροπές		Αρχική θέση		Αρχική ταχύτητα	
$M_1$	11 Nm	$\varphi_1$	0 rad	$d\varphi_1/dt$	0 rad/sec
$M_2$	10 Nm	$\varphi_2$	0 rad	$d\varphi_2/dt$	0 rad/sec

Πίνακας 6: Συνθήκες φόρτισης και αρχικές συνθήκες



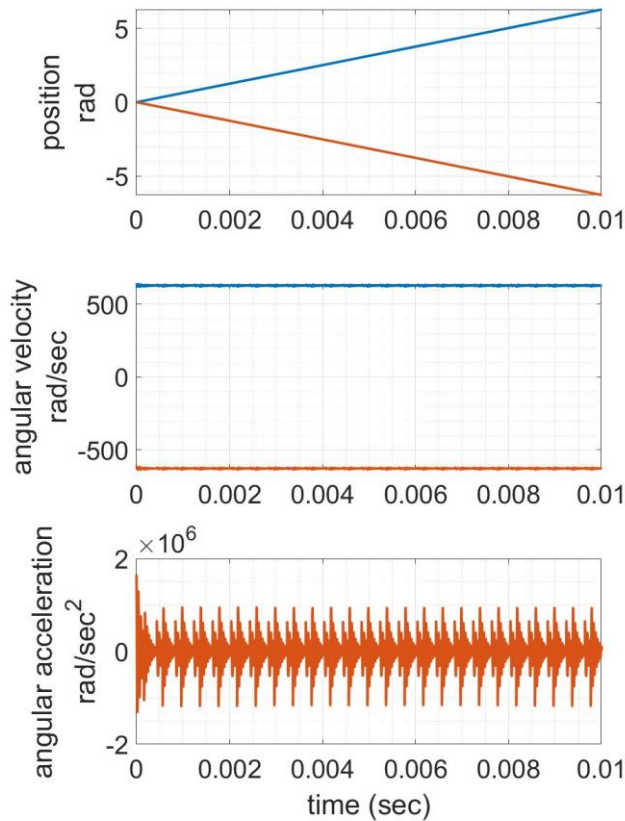
Εικόνα 36: Χρονικά σήματα θέσης, ταχύτητας, επιτάχυνσης για εφαρμογή μεγαλύτερης ροπής στο πινιόν από τον συνεργαζόμενο και μηδενικές αρχικές συνθήκες

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον, όμως, για τον σκοπό της εργασίας έχει η απόκριση στην μόνιμη κατάσταση, δηλαδή για σταθερή ταχύτητα περιστροφής, από την οποία λαμβάνονται συνήθως και οι περισσότερες πειραματικές μετρήσεις με στόχο την εύρεση της ποιότητας επιφανείας των οδόντων. Η επόμενη προσομοίωση πραγματοποιείται με τις συνθήκες που αναγράφονται στον πίνακα 8.

Παρατηρείται στην παρακάτω εικόνα ότι οι θέσεις των τροχών αυξάνονται γραμμικά, οι ταχύτητες παραμένουν σταθερές ενώ η επιτάχυνση είναι και για τους δύο μηδενική και διαταράσσεται όταν έρχεται σε σύμπλεξη ένα νέο ζεύγος οδόντων. Αυτήν την φορά η εμφάνιση των παλμών στο χρονικό σήμα της γωνιακής επιτάχυνσης γίνεται με σταθερή συχνότητα καθώς οι τροχοί κινούνται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα. Οι παλμοί αυτοί είναι μεταξύ τους όμοιοι εκτός τους πρώτου καθώς πρόκειται για μεταβατική κατάσταση από την στιγμή που οι αρχικές συνθήκες δεν δίνονται για την προσυμπιεσμένη κατάσταση.

Εξωτερικές ροπές		Αρχική θέση		Αρχική ταχύτητα	
$M_1$	10 Nm	$\varphi_1$	0 rad	$d\varphi_1/dt$	100Hz
$M_2$	10 Nm	$\varphi_2$	0 rad	$d\varphi_2/dt$	100Hz

Πίνακας 7: Συνθήκες φόρτισης και αρχικές συνθήκες



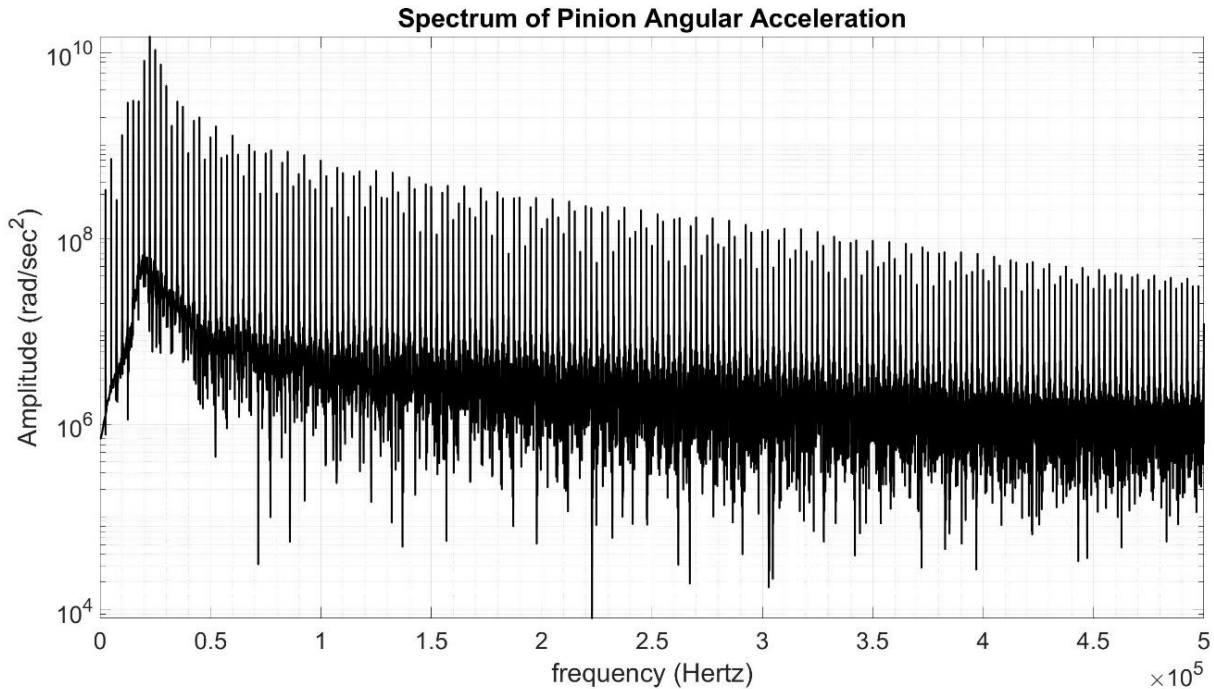
Εικόνα 37: Χρονικά σήματα θέσης, ταχύτητας, επιτάχυνσης για ίσες ροπές και αρχικές ταχύτητες

Στην συνέχεια παρατίθεται το φάσμα της επιτάχυνσης του πινιόν σε λογαριθμική κλίμακα. Κάθε κορυφή που εμφανίζεται σε αυτό είναι μία αρμονική της συχνότητας σύμπλεξης η οποία στην συγκεκριμένη περίπτωση είναι:

$$f_{mesh} = 25f_o = 2500Hz$$

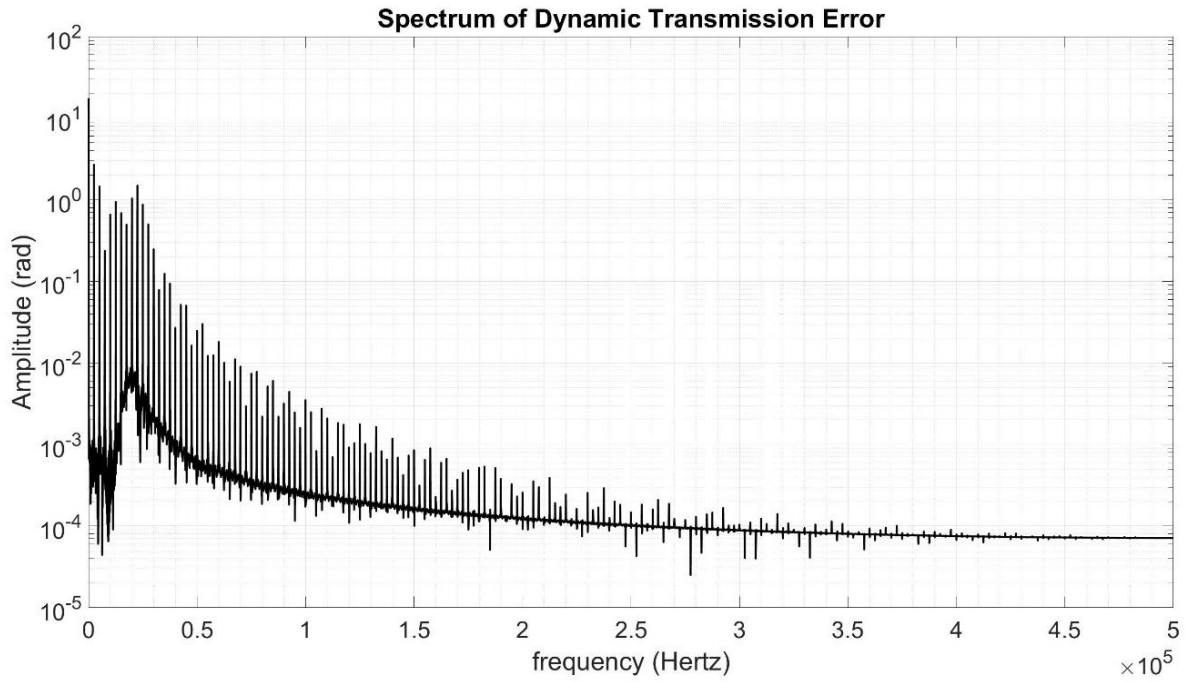
Καθώς και οι δύο συνεργαζόμενοι τροχοί έχουν από 25 οδόντες

Όπως αναμενόταν η κορυφή με το μέγιστο πλάτος του φάσματος είναι η πλησιέστερη αρμονική της  $f_{mesh}$  στην ιδιοσυχνότητα του πινιόν.



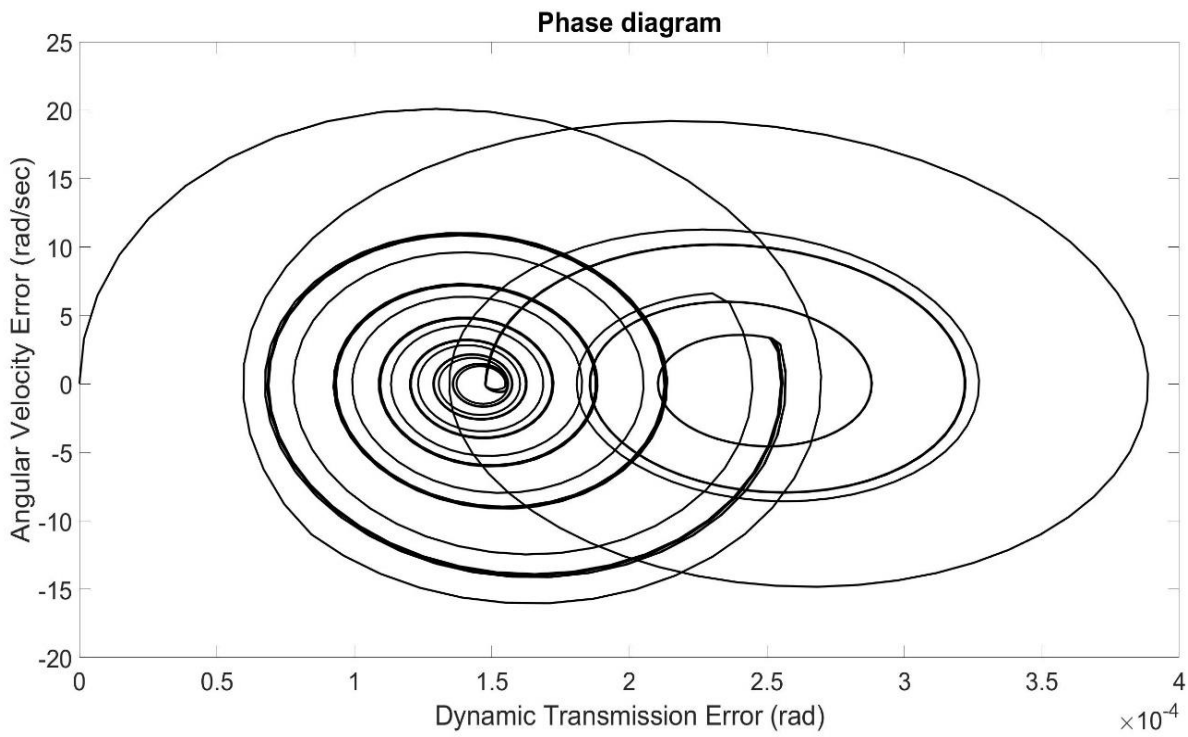
Εικόνα 38: : Φάσμα γωνιακής επιτάχυνσης ιδανικού πινιόν

Στην συνέχεια παρουσιάζεται το φάσμα από το προκύπτουν Dynamic Transmission Error (DTE) το οποίο σύμφωνα με τον ορισμό των γωνιών, όπως αυτός έχει παρουσιαστεί στο σχήμα 32, δίνεται από το αλγεβρικό άθροισμά τους κάθε στιγμή. Παρατηρείται και από αυτό το φάσμα ότι οι κορυφές είναι οι αρμονικές της συχνότητας σύμπλεξης, με μέγιστη αυτών την πλησιέστερη στην ιδιοσυχνότητα εκτός της DC.



Εικόνα 39: DTE ιδανικής βαθμίδας

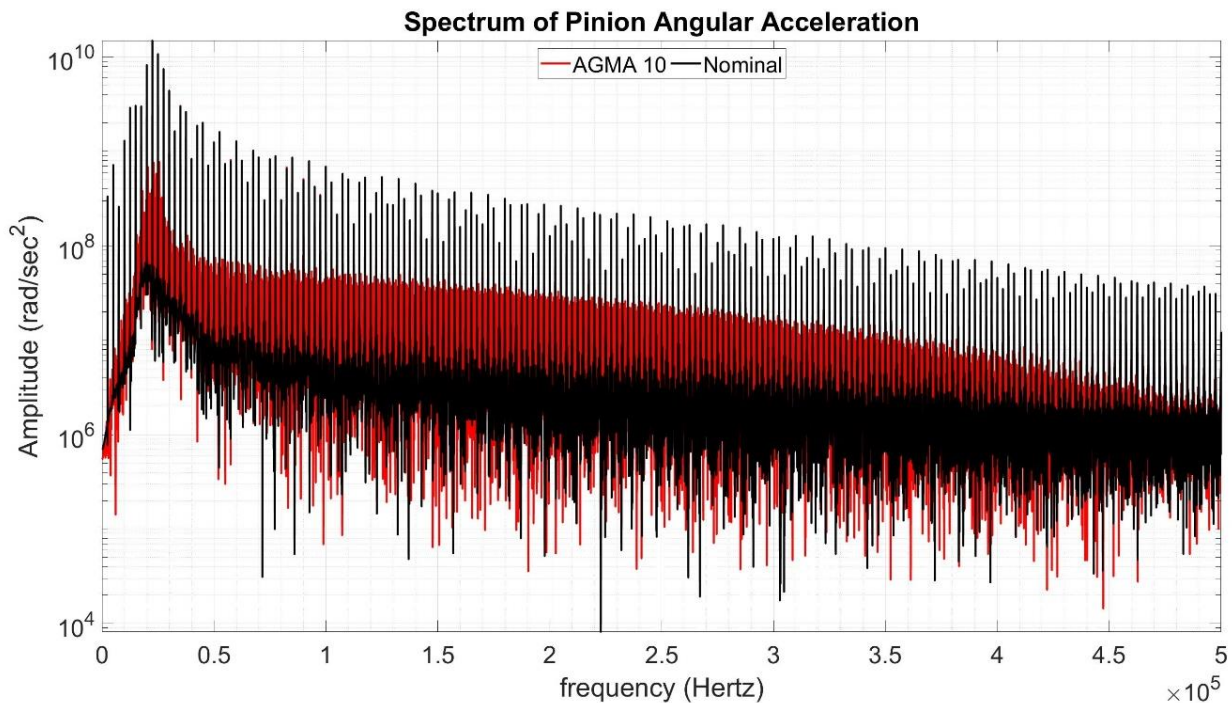
Στην συνέχεια παρουσιάζεται το διάγραμμα φάσης προέκυψε από αυτήν την προσομοίωση:



Εικόνα 40: Διάγραμμα φάσης ιδανικής βαθμίδας

Στον x άξονα βρίσκεται στο DTE και στον y η διαφορά ταχυτήτων των δύο τροχών σε μία χρονική στιγμή. Παρατηρούνται δύο λοβοί στο παραπάνω διάγραμμα ο αριστερός που έχει μικρότερα σφάλματα μετάδοσης αφορά την διπλή επαφή, όταν δηλαδή δύο ζεύγη οδόντων βρίσκονται ταυτοχρόνως σε επαφή, και ο δεξιός που αντιστοιχεί στην περίπτωση της απλής επαφής. Ο λόγος που ο αριστερός λοβός έχει περισσότερη πληροφορία από τον δεξιό είναι γιατί η διπλή επαφή συμβαίνει για μεγαλύτερο χρονικό διάστημα από ότι η απλή. Οι δύο λοβοί εμφανίζονται σπειροειδείς λόγω της εγγενούς απόσβεσης του υλικού των τροχών. Σε περίπτωση που αυτή δεν υπήρχε η ταλάντωση των οδόντων δεν θα αποσβενόταν και συνεπώς αντί για σπείρες θα εμφανίζονταν στο διάγραμμα κύκλοι. Επιπροσθέτως, παρατηρώντας το διάγραμμα διαπιστώνεται ότι το σύστημα εκκινά από την αρχή των αξόνων όπου τα σφάλματα σε ταχύτητα και θέση είναι μηδενικά και μεταβαίνει σε κατάσταση συνεργασίας με διπλή επαφή, λόγω του ότι αυτό υποδεικνύουν οι ορισμένες αρχικές συνθήκες. Στην συνέχεια μεταβαίνει σε απλή επαφή και έπειτα ξανά διπλή κ.ο.κ. Το διάστημα του διαγράμματος όπου η γραμμή εμφανίζεται λεπτή αφορά την μεταβατική κατάσταση, ενώ αυτό όπου η γραμμή εμφανίζεται με αυξημένο πάχος την μόνιμη. Τέλος, παρατηρείται ότι καμπύλες του διαγράμματος δεν είναι λείες. Ουσιαστικά είναι πολύγωνα. Αυτό βέβαια οφείλεται σε αριθμητικά σφάλματα και εξαρτάται από την διακριτοποίηση.

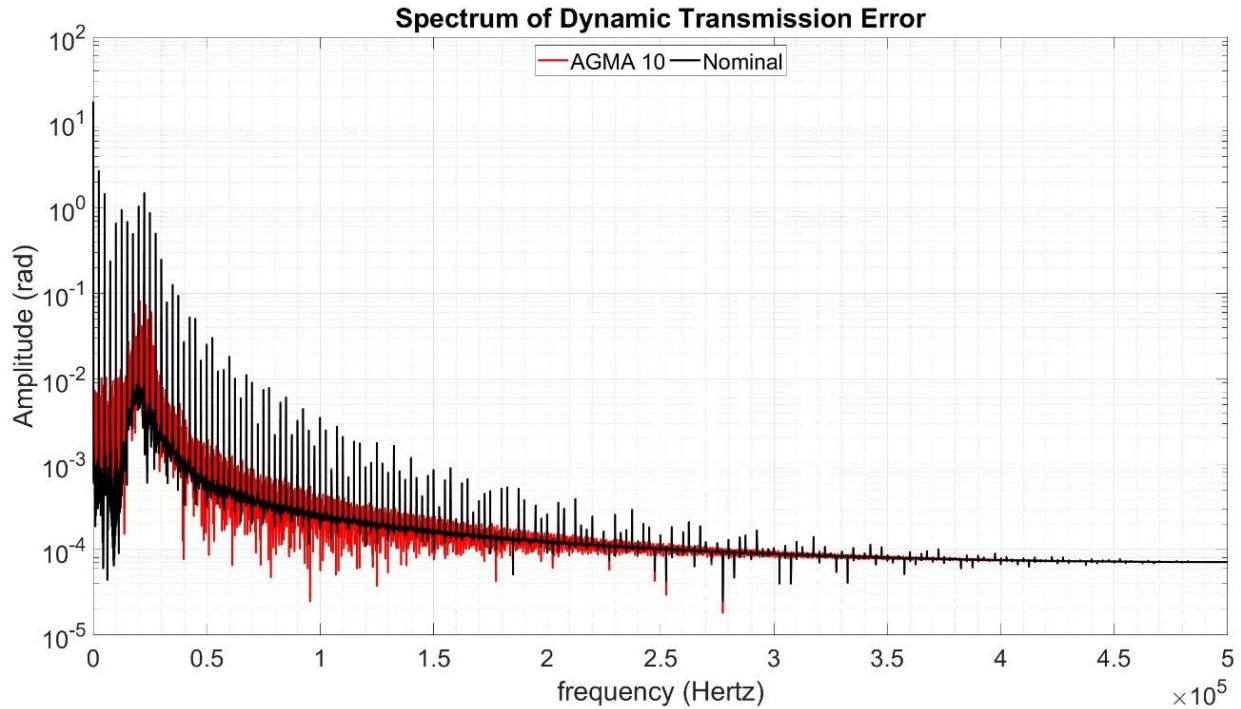
Ιδιαίτερο ενδιαφέρον όμως έχει η σύγκριση των παραπάνω διαγραμμάτων που αναφέρονται σε ιδανικούς τροχούς με τροχούς που έχουν ατέλειες. Στην συνέχεια παρουσιάζονται οι ίδιοι τύποι διαγραμμάτων για τροχούς ποιότητας AGMA 10 σε αντιδιαστολή με τους ιδανικούς.



Εικόνα 41: Φάσμα επιτάχυνσης από τροχούς ποιότητας AGMA10 και ιδανικούς

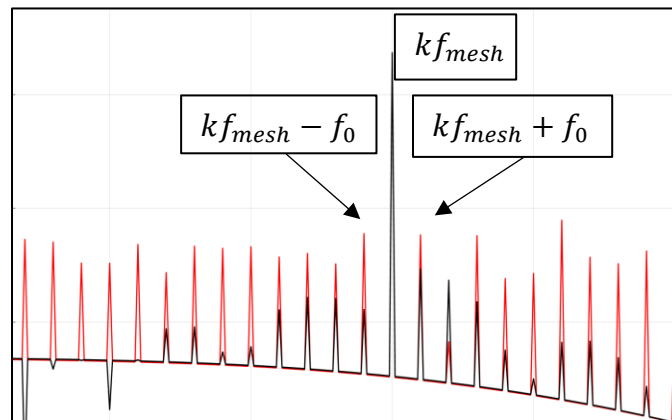
Παρατηρείται στο φάσμα ότι ενώ οι αρμονικές της συχνότητας σύμπλεξης εμφανίζονται για τους δύο τύπους τροχών σε περίπου ίσα πλάτη τα πολλαπλάσια της συχνότητας περιστροφής του άξονα είναι εμφανώς αυξημένα στην περίπτωση των τροχών με ενσωματωμένα τα χαρακτηριστικά τραχύτητας. Επομένως, φαίνεται να είναι δυνατή η εξαγωγή συμπερασμάτων για την ποιότητα των τροχών από το φάσμα της επιτάχυνσης ενός εκ των δύο.

Πολλές φορές, όμως, κατά την διενέργεια πειραμάτων μετρώνται οι θέσεις των αξόνων. Επομένως, έχουμε κάθε στιγμή μέτρηση της θέσης των δύο τροχών από το αλγεβρικό άθροισμά τους έχουμε και το Dynamic Transmission Error (DTE). Στην συνέχεια παρατίθεται ομοίως το φάσμα αυτού για την βαθμίδα τροχών ποιότητας AGMA 10 και για ιδανικούς, όπου και πάλι η επίδραση των κατασκευαστικών ατελειών είναι εμφανής.



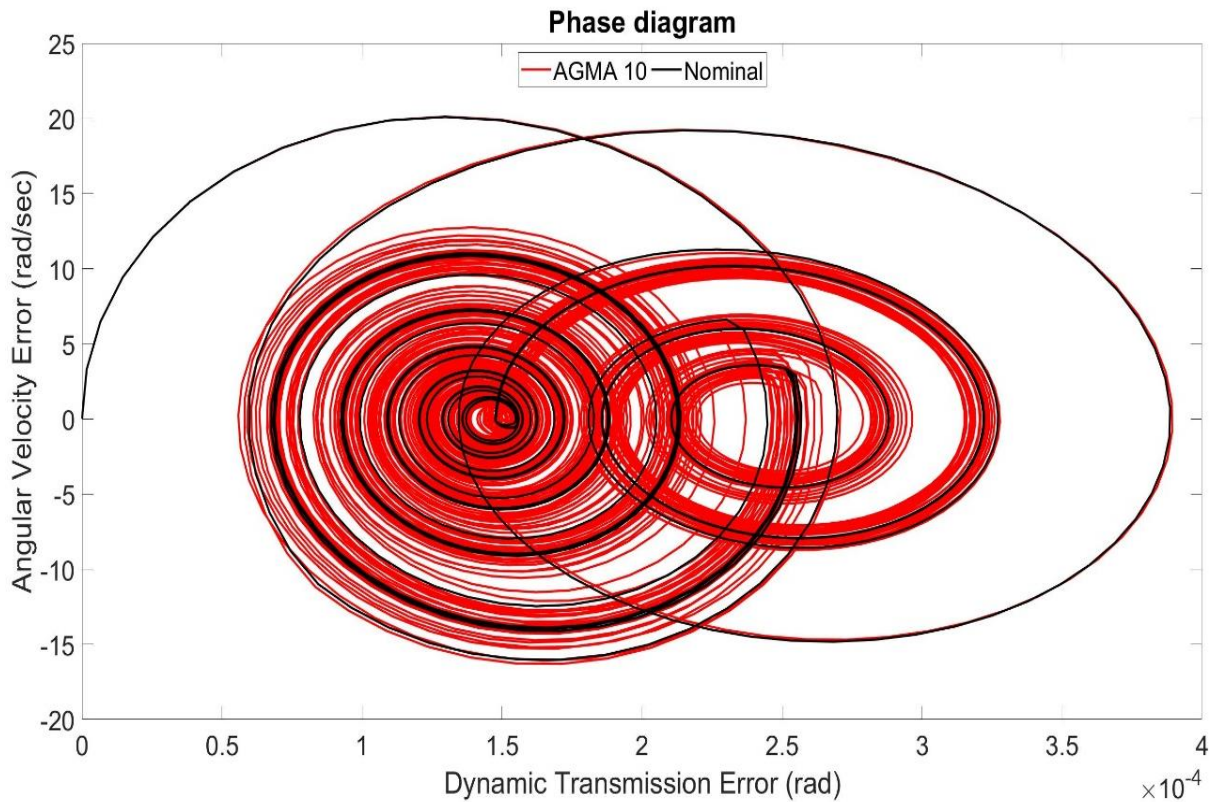
Εικόνα 42: Φάσμα DTE από τροχούς ποιότητας AGMA 10 και ιδανικούς

Μετά από μεγέθυνση στην περιοχή γύρω από μια αρμονική της συχνότητας σύμπλεξης γίνεται πιο κατανοητή η επίδραση της τραχύτητας. Παρατηρείται ότι ενώ τα πλάτη των πολλαπλασίων της συχνότητας της ταχύτητας περιστροφής γύρω από την  $kf_{mesh}$  είναι μικρά και βαίνουν σε γενικές γραμμές μειούμενα όσο απομακρύνονται από αυτήν για την θεωρητικές κατατομές, κάτι τέτοιο δεν ισχύει και για τις πραγματικές. Όπου αυτά τα πλάτη είναι εμφανώς αυξημένα.



Εικόνα 43: Μεγεθυμένη περιοχή του φάσματος του DTE γύρω από μία αρμονική της συχνότητας σύμπλεξης

Παρακάτω παρατίθεται και το διάγραμμα φάσης για τις δύο αυτές περιπτώσεις σε αντιδιαστολή:

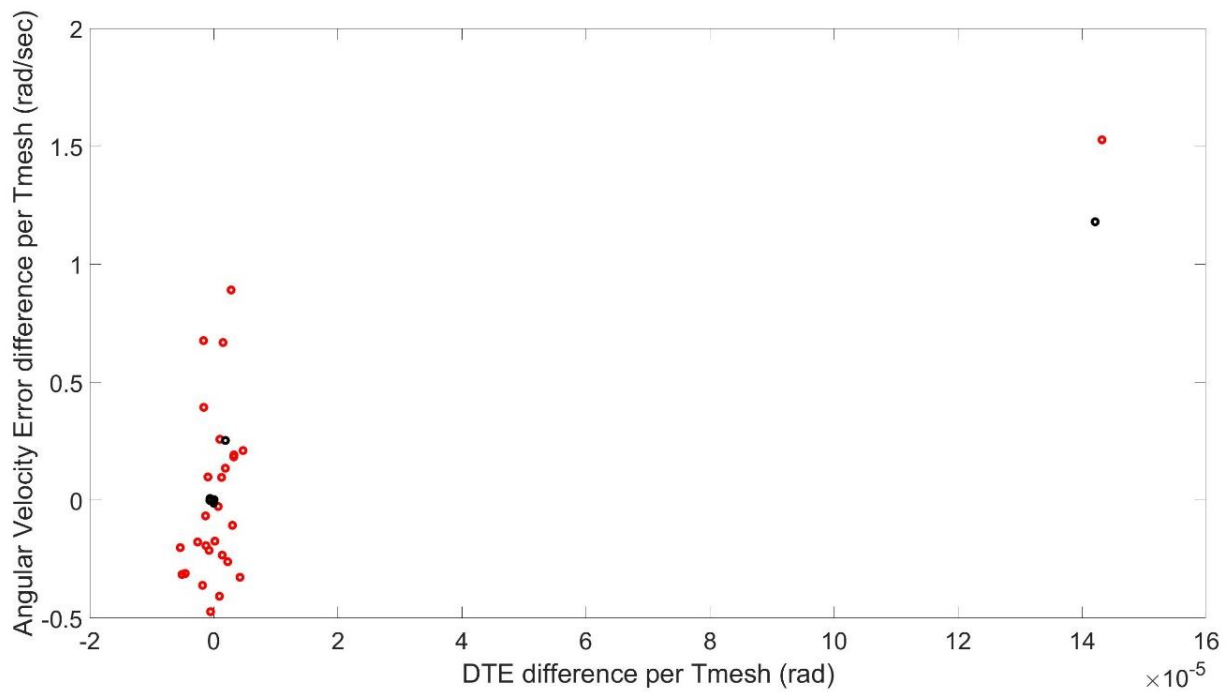


Εικόνα 44: Διάγραμμα φάσης από τροχούς ποιότητας AGMA 10 και ιδανικούς

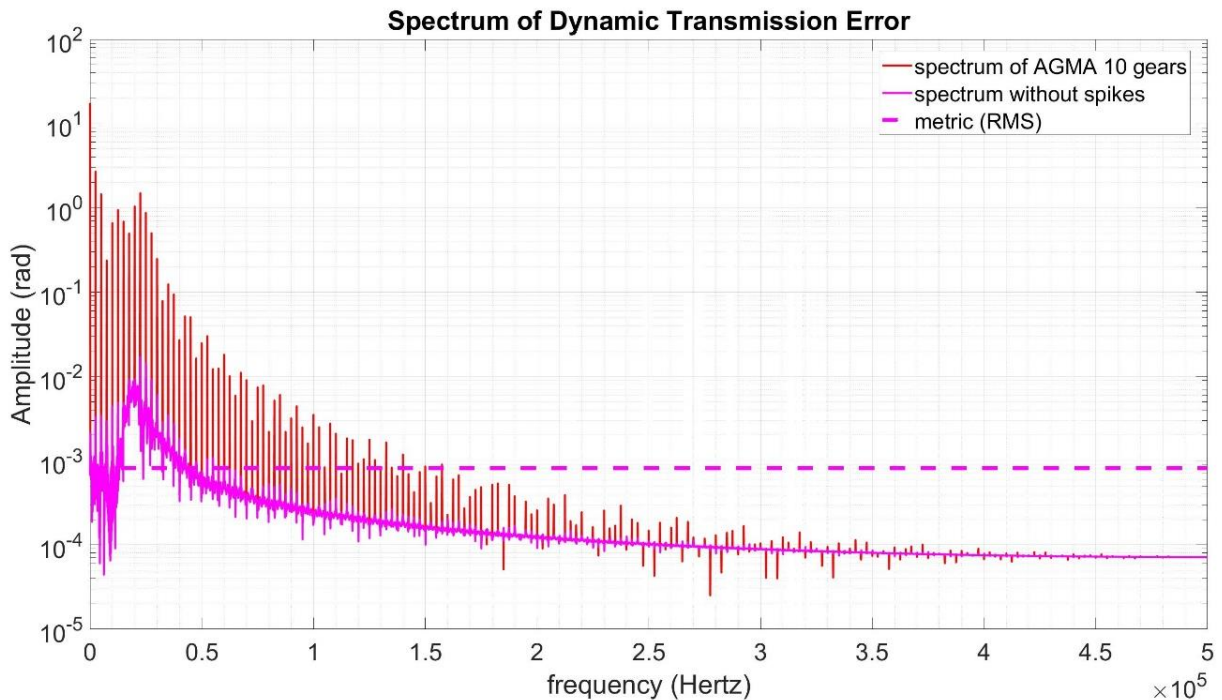
Τέλος, μπορεί να διερευνηθεί στο παρακάτω διάγραμμα η μεταβολή των δύο παραπάνω μεγεθών, δηλαδή του DTE και του σφάλματος στην γωνιακή ταχύτητα, ανά μία περίοδο σύμπλεξης. Λαμβάνονται ενδιαφέροντα αποτελέσματα που πρόχειρα παρουσιάζονται στο διάγραμμα της εικόνας 23.

Παρατηρείται σε αυτό ότι η διασπορά στον χώρο των μεγεθών είναι εμφανώς αυξημένη για τους τροχούς με ατέλειες. Το διάγραμμα αυτό μπορεί να εμφανίζει ξεκάθαρα περισσότερο από κάθε άλλο την επίδραση των κατασκευαστικών ατελειών στην λειτουργία των τροχών όμως στην πράξη περισσότερο εύχρηστα διαγράμματα για την εξαγωγή μετρικών της ποιότητας από αυτά είναι τα φάσματα της επιτάχυνσης και του DTE καθώς αυτά τα μεγέθη λαμβάνονται συνήθως από πειραματικές διατάξεις.





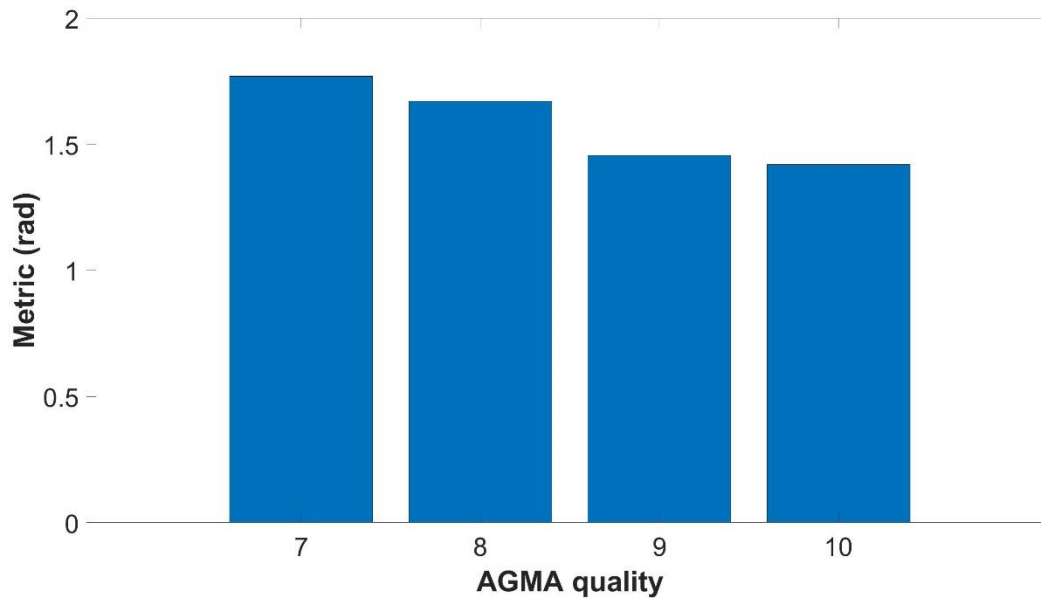
Εικόνα 45: Μεταβολή των σφαλμάτων θέσης και ταχύτητας ανά περίοδο σύμπλεξης τροχών ποιότητας AGMA 10 και ιδανικούς



Εικόνα 46: Εξαγωγή μετρική της ποιότητας των τροχών από το φάσμα

Στην συνέχεια επιλέγεται μία τέτοια μετρική η οποία υπολογίζεται με την αφαίρεση από το φάσμα του DTE των κορυφών που αντιστοιχούν στις αρμονικές της συχνότητας σύμπλεξης και στην συνέχεια με τον υπολογισμό του RMS των εναπομεινάντων σημείων στο φάσμα

πολλαπλασιασμένο επί 1000. Ακολούθως, παρατίθεται η τιμή που λαμβάνει αυτή για βαθμίδα οδοντωτών τροχών με τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του πίνακα 5 για ταχύτητα περιστροφής του άξονα του πινιόν ίση με 100Hz και φορτίο 10Nm για τέσσερις AGMA ποιότητες.



Εικόνα 47: Τιμή μετρικής για τέσσερις ποιότητες AGMA

Παρατηρείται ότι όσο χειρότερη είναι η ποιότητα των τροχών τόσο μεγαλύτερη είναι η τιμή της μετρικής που προκύπτει από τις προσομοιώσεις καθώς ο θόρυβος που εμφανίζεται στα φάσματα του DTE είναι μεγαλύτερος. Επομένως, είναι, πλέον, δυνατόν να εκτιμάται την ποιότητα των τροχών εύκολα και γρήγορα κατά την λειτουργία τους παραλείποντας τις επίπονες μετρολογικές διαδικασίες.

## 8. Συμπεράσματα

Σε αυτήν την διπλωματική εργασία επιχειρήθηκε η δημιουργία ενός ολοκληρωμένου γενικευμένου μοντέλου για την λειτουργία μίας βαθμίδας, ώστε να διαπιστωθούν τα αποτελέσματα που επιφέρει η τραχύτητα των εργαζόμενων κατατομών στην λειτουργία της βαθμίδας. Συνοπτικά, αρχικά καταστρώθηκε το μοντέλο για την επίλυση της κινηματικής, στην συνέχεια ενσωματώθηκαν χαρακτηριστικά ελαστικότητας στους οδόντες ώστε να δημιουργηθεί ένας υπολογιστικός αλγόριθμος του static transmission error και τέλος δημιουργήθηκε το δυναμικό μοντέλο του συστήματος ώστε να ενσωματωθούν και χαρακτηριστικά αδράνειας και απόσβεσης.

Τα αποτελέσματα αυτά των προσομοιώσεων κατέστησαν, πράγματι, δυνατόν η προυπάρχουσα τραχύτητα να μπορέσει να ανιχνευθεί. Πιο συγκεκριμένα η επίδρασή της γίνεται αντιληπτή από τον θόρυβο που εισάγει ο οποίος μπορεί ποσοτικοποιηθεί μέσω ανάλυσης φάσματος του σφάλματος μετάδοσης και της επιτάχυνσης, αλλά και από άλλα διαγράμματα όπως το διάγραμμα φάσης. Στην συγκεκριμένη αναφορά επιλέχθηκε να παρουσιαστεί μία μετρική της επίδρασης της τραχύτητας στην λειτουργία είναι όμως δυνατόν να εξαχθούν και άλλες και να καταστρωθούν χάρτες αυτών μετά από προσομοιώσεις για διάφορες συνθήκες λειτουργίας. Κάτι τέτοιο, βέβαια, απαιτεί μεγάλο υπολογιστικό κόστος και γι' αυτόν τον λόγο δεν πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια αυτής της διπλωματικής εργασίας, παρά μόνο ενδεικτικά. Συνεπώς, είμαστε πλέον σε θέση να εκτιμούμε την ποιότητα τροχών αποφεύγοντας τις αργές και ακριβές μετρολογικές διαδικασίες.

Βεβαίως, έγιναν και ορισμένες παραδοχές όπως η αμέλεια των τριβών, η θεώρηση ότι και μετά την παραμόρφωση του οδόντος το σημείο επαφής παραμένει το ίδιο, η θεώρηση ότι η τραχύτητα επηρεάζει το σημείο επαφής, η συνεχής επαφή μεταξύ των δύο τροχών της βαθμίδας και η γραμμικοποίηση του ελατηρίου λόγω Hertz στο δυναμικό μοντέλο. Η εργασία αυτή θα μπορεί να βελτιωθεί με την άρση και των υπολογισμό ορισμένων εκ των ανωτέρω παραδοχών, με την μοντελοποίηση και του λιπαντικού στο σύστημα, ενώ μπορεί εύκολα να ενσωματωθεί και διαφορετική μοντελοποίηση της τραχύτητας αν αυτή προκύπτει από διαφορετική κατεργασία. Τέλος, η επικύρωση των αποτελεσμάτων με την διενέργεια πειραμάτων είναι σίγουρα η φυσική συνέχεια της εργασίας αυτής.

## 9. Βιβλιογραφία

- [1] Fornberg, Bengt, "Generation of Finite Difference Formulas on Arbitrarily Spaced Grids", 1988
- [2] C.Spitas, V.Spitas, "Direct analytical solution of a modified form of the meshing equations in two dimensions for non-conjugate gear contact, 2007
- [3] McCleary, John, "Geometry from a Differentiable Viewpoint", 1995
- [4] Θ.Κωστόπουλος, *Οδοντώσεις και Μειωτήρες Στροφών*. Αθήνα: ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΣΥΜΕΩΝ, 2010
- [5] Σ.Νατσιάβας, *Ταλαντώσεις μηχανικών συστημάτων*. Θεσσαλονίκη: ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΖΗΤΗ, 2001
- [6] G.Goch, "*Gear Metrology*", 2003
- [7] Γιαννάκογλου Κ.Χ., Αναγνωστόπουλος Ι., Μπεργελές Γ., *Αριθμητική Ανάλυση για Μηχανικούς*, 3<sup>η</sup> Έκδοση, ΕΜΠ, Μηχανολόγων Μηχανικών, Αθήνα 2003

## 10. Παράρτημα

### 10.1. Πίνακας εικόνων

Εικόνα 1: Σύστημα συντεταγμένων .....	10
Εικόνα 2: Υποκατάσταση της γωνίας με μικρό τοπικό κύκλο .....	11
Εικόνα 3: Συντελεστές πεπερασμένων διαφορών [1] .....	12
Εικόνα 4: Τροχιά επαφών οδόντων εξειλιγμένης.....	13
Εικόνα 5: Αλγόριθμος εύρεσης σημείου επαφής με δεδομένα: κατατομές, απόσταση αξόνων, γωνία στροφής πινιόν .....	14
Εικόνα 6: Σύγκλιση αλγορίθμου επαφής οδόντων.....	15
Εικόνα 7: Αναπήδηση σημείου επαφής εκεί όπου στιγμιαία παρατηρήθηκε εισχώρηση του πινιόν στον συνεργαζόμενο .....	17
Εικόνα 8: Διάγραμμα ροής για την επίλυση της κινηματικής του συστήματος.....	18
Εικόνα 9: Αρίθμηση των οδόντων των τροχών .....	19
Εικόνα 10: Λήψη μετρήσεων στην CMM του εργαστηρίου ταχείας κατασκευής πρωτοτύπων ΕΜΠ.....	19
Εικόνα 11: Μετρηθέντα σημεία.....	20
Εικόνα 12: Συγχώνευση μετρήσεων .....	20
Εικόνα 13: Παράμετροι εξειλιγμένης καμπύλης [3].....	21
Εικόνα 14: Παρεμβεβλημένα με spline σημεία με τονισμένες τις περιοχές των εργαζόμενων κατατομών .....	22
Εικόνα 15: Τροχιά επαφών κατά την συνεργασία των θεωρητικών κατατομών.....	23
Εικόνα 16: : Τροχιά επαφών κατά την συνεργασία των πραγματικών κατατομών .....	23
Εικόνα 17: Σχηματική απεικόνιση των τριών συνιστωσών ενδοτικότητας .....	24
Εικόνα 18: καμπτική ενδοτικότητα - ενδοτικότητα ποδός - ενδοτικότητα Hertz .....	25
Εικόνα 19: Χαρακτηριστικές διαστάσεις για τον υπολογισμό ενδοτικότητας κάμψης και ποδός .....	26
Εικόνα 20: Χαρακτηριστικές διαστάσεις για τον υπολογισμό της ενδοτικότητας Hertz .....	27
Εικόνα 21: Διάγραμμα ενδοτικότητας για ενδεικτικό ζεύγος οδόντων (Πίνακας 1).....	29
Εικόνα 22: Κατεργασία τροχού με hob.....	30
Εικόνα 23: Τμήμα της θεωρητικής και της πραγματικής κατατομής με μπλε και πορτοκαλί χρώμα αντίστοιχα.....	30
Εικόνα 24: Τιμή της μετρικής D συναρτήση του αριθμού περασμάτων του hob σε μία κατατομή.....	31
Εικόνα 25: Αλλαγή στην διεύθυνση της δύναμης λόγω τραχύτητας .....	32
Εικόνα 26: Σφάλμα κλίσεως κάθε σημείου τεσσάρων κατατομών διαφορετικής ποιότητας .....	32
Εικόνα 27: Αλγόριθμος υπολογισμών στατικού μοντέλου .....	34
Εικόνα 28: Αλγόριθμος υπολογισμού STE .....	34
Εικόνα 29: Σήμα STE για εμπλοκή τεσσάρων διαδοχικών ζευγών οδόντων.....	36
Εικόνα 30: Φάσμα STE ιδανικού ζεύγους οδοντωτών τροχών.....	36
Εικόνα 31: Φάσμα STE ζεύγους οδοντωτών τροχών ποιότητας 10 κατά AGMA .....	37
Εικόνα 32:Φάσμα απομονωμένων χαρακτηριστικών τραχύτητας .....	37
Εικόνα 33: Μοντέλο βαθμίδας οδοντωτών τροχών .....	38
Εικόνα 34: Χαρακτηριστικά μεγέθη για τον υπολογισμό των ροπών αδρανείας.....	39
Εικόνα 35: Χρονικά σήματα θέσης, ταχύτητας, επιτάχυνσης για ίσες ροπές και μηδενικές αρχικές συνθήκες.....	41
Εικόνα 36: Χρονικά σήματα θέσης, ταχύτητας, επιτάχυνσης για εφαρμογή μεγαλύτερης ροπής στο πινιόν από τον συνεργαζόμενο και μηδενικές αρχικές συνθήκες .....	42
Εικόνα 37: Χρονικά σήματα θέσης, ταχύτητας, επιτάχυνσης για ίσες ροπές και αρχικές ταχύτητες .....	43
Εικόνα 38: : Φάσμα γωνιακής επιτάχυνσης ιδανικού πινιόν .....	44
Εικόνα 39: DTE ιδανικής βαθμίδας.....	45

Εικόνα 40: Διάγραμμα φάσης ιδανικής βαθμίδας .....	45
Εικόνα 41: Φάσμα επιτάχυνσης από τροχούς ποιότητας AGMA10 και ιδανικούς.....	46
Εικόνα 42: Φάσμα DTE από τροχούς ποιότητας AGMA 10 και ιδανικούς.....	47
Εικόνα 43: Μεγεθυμένη περιοχή του φάσματος του DTE γύρω από μία αρμονική της συχνότητας σύμπλεξης.....	47
Εικόνα 44: Διάγραμμα φάσης από τροχούς ποιότητας AGMA 10 και ιδανικούς.....	48
Εικόνα 45: Μεταβολή των σφαλμάτων θέσης και ταχύτητας ανά περίοδο σύμπλεξης τροχών ποιότητας AGMA 10 και ιδανικούς.....	49
Εικόνα 46: Εξαγωγή μετρική της ποιότητας των τροχών από το φάσμα.....	49
Εικόνα 47: Τιμή μετρικής για τέσσερις ποιότητες AGMA .....	50

## 10.2. Υπολογιστικοί κώδικες

Στο παράρτημα παρατίθενται οι υπολογιστικοί κώδικες που αναπτύχθηκαν σε προγραμματιστικό περιβάλλον MATLAB και χρησιμοποιήθηκαν για την εξαγωγή των αποτελεσμάτων της εργασίας.

### STE\_calculator

Ο κώδικας αυτός υπολογίζει το STE με εισόδους τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των τροχών το υλικό τους.

```
clear
global b E v E8 v8 a12 M
b=20; %tooth width (or contact width if not common)
E=[210000;210000]; %Young's modulus in MPa 50CrV4
G = 80000; %Shear modulus in MPa 50CrV4v=[0.3,0.3]; %poisson's
ratio
v=[0.3,0.3]; %poisson's ratio

E8 = 2*E(1)*E(2)/(E(1)+E(2)); %8-
>*; Equivalent Young's modulus
v8 = sqrt(1 - (E8/2) * ((1-v(1)^2)/E(1) + (1-v(2)^2)/E(2))); %
Equivalent poisson ratio
M = 1e4; %[N*mm]

%% pinion specs
Z1 = 25; Cc1 = 0;
[do1, xpc1, ypc1, n1, x_kat1, y_kat1] = geometry(Z1,Cc1);
%[do1, x_kat1, y_kat1, n1, xpc1, ypc1] = geometry(Z1,Cc1);

f1 = xpc1 + 1i * ypc1; % complex array of the whole side of the gear
l1 = length(f1);
fdv1 = diff_approx(f1,8,1); % complex array - 1st derivative of
involute
fd1 = angle(fdv1); % angle of involute at every spot
fddv1 = diff_approx(f1,8,2); % complex array - 2nd derivative of involute
yfoot1 = min(abs(imag(f1))); % y coord at foot
flinfo = [f1;fd1;fdv1;fddv1];
f1l = -real(f1) + 1i * imag(f1);
yfoot1 = min(abs(imag(f1))); % y coord at foot

%% gear specs
Z2 = 25; Cc2 = 0;
i12 = Z2/Z1; a12 = 1i * (1/2 * do1 * (1 + i12)); % axis distance
[do2, xpc2, ypc2, n2, x_kat2, y_kat2] = geometry(Z2,Cc2);
%[do2, x_kat2, y_kat2, n2, xpc2, ypc2] = geometry(Z2,Cc2);

f2 = xpc2 + 1i * ypc2;
% load f2_measured.mat
l2 = length(f2); % complex array of the whole side of the gear
fdv2 = diff_approx(f2,8,1); % complex array differentiation of involute
for compliance_geom_param
fd2 = angle(fdv2); % angle of involute at every spot
fddv2 = diff_approx(f2,8,2); % complex array 2nd derivative of involute for
compliance_geom_param
yfoot2 = min(abs(imag(f2))); % y coord at foot
```

```

f2info = [f2;fd2;fdv2;fddv2];
f2l = -real(f2) + 1i * imag(f2);
yfoot2 = min(abs(imag(f2))); % y coord at foot

%% Gears' generation
th1start = 0; % Initial angle è of Gear 1
th2start = -th1start/i12 + pi;
nrp = 10;

% Gear 1 flanks generation
f1m = zeros(l1,Z1);
fd1m = zeros(l1,Z1);
f1lm = zeros(l1,Z1);
fd1lmcertain = zeros(l1,Z1);
for nt1=1:Z1
    f1m(:,nt1)=f1*exp(-1i * 2*pi/Z1*(nt1-1))*exp(1i*th1start);
    fd1m(:,nt1)=angle(diff_approx(f1m(:,nt1),8,1));
    f1lm(:,nt1)=f1l*exp(-1i * 2*pi/Z1*(nt1-1))*exp(1i*th1start);
    %[ang_error1(:,nt1)] = hob_roughness_gen(nrp,max(l1,l2));
    ang_error1(:,nt1) = hob_roughness_f_fun(f1,l1,fd1,nrp);
end

% Gear 2 flanks generation
f2m = zeros(l2,Z2);
fd2m = zeros(l2,Z2);
f2lm = zeros(l2,Z2);
for nt2=1:Z2
    f2m(:,nt2)=f2*exp(1i * 2*pi/Z2*(nt2-1))*exp(1i*th2start);
    fd2m(:,nt2)=angle(diff_approx(f2m(:,nt2),8,1));
    f2lm(:,nt2)=f2l*exp(-1i * 2*pi/Z2*(nt2-1))*exp(1i*th2start);
    %[ang_error2(:,nt2)] = hob_roughness_gen(nrp,max(l1,l2));
    ang_error2(:,nt2) = hob_roughness_f_fun(f2,l2,fd2,nrp);
end

%% contact

% finding tooth 0
for nt1=1:Z1
    f1k=f1m;
    if angle(f1k(1,nt1))>(pi/2-pi/Z1-0.5*pi/180) &&
angle(f1k(1,nt1))<(pi/2+pi/Z1+0.5*pi/180)
        break
    end
end
nt1c = nt1;
th2start = -th1start/i12;
for nt2=1:Z2
    f2k=f2m;
    if angle(f2k(1,nt2))>(-pi/2-pi/Z2-0.5*pi/180) && angle(f2k(1,nt2))<(-
pi/2+pi/Z2+0.5*pi/180)
        break
    end
end
nt2c = nt2;

```



```

% find contact on tooth 0

left = 1; right = 11;
leftk = 1; rightk = 12;
lefte = 1; righte = 12;

leftp = 1; rightp = 11;
leftkp = 1; rightkp = 12;
leftn = 1; rightn = 11;
leftkn = 1; rightkn = 12;

LEFTP = 1; RIGHTP = 11;
LEFTKP = 1; RIGHTKP = 12;
LEFTN = 1; RIGHTN = 11;
LEFTKN = 1; RIGHTKN = 12;

count = 1;
NT1 = 1;
NT1C = 1;
for thetal = th1start : pi/Z1/100: Z1*(2*pi/Z1) + th1start

    %[p1, p2, theta2_theor] = contact_for_compliance(f1m(:,nt1), f2m(:,nt2),
fd1m(:,nt1), fd2m(:,nt1), thetal, a12); % [i,k] find contact spot
    [p1,p2,left,right,leftk,rightk,theta2c] =
contact_checkpenetration_for_compliance(f1m(:,nt1), f2m(:,nt2), fd1m(:,nt1),
fd2m(:,nt2), thetal, a12, left, right, leftk, rightk, lefte, righte, l1, l2, 0);

    nt1p = nt1-1; nt2p = nt2-1;
    nt1n = nt1+1; nt2n = nt2+1;
    if nt1p==0; nt1p=Z1; end
    if nt1n==Z1+1; nt1n=1; end
    if nt2p==0; nt2p=Z2; end
    if nt2n==Z2+1; nt2n=1; end

    [p1p,p2p,leftp,rightp,leftkp,rightkp,theta2p] =
contact_checkpenetration_for_compliance(f1m(:,nt1p), f2m(:,nt2p),
fd1m(:,nt1p), fd2m(:,nt2p), thetal,
a12, leftp, rightp, leftkp, rightkp, lefte, righte, l1, l2, 0);
    [p1n,p2n,leftn,rightn,leftkn,rightkn,theta2n] =
contact_checkpenetration_for_compliance(f1m(:,nt1n), f2m(:,nt2n),
fd1m(:,nt1n), fd2m(:,nt2n), thetal,
a12, leftn, rightn, leftkn, rightkn, lefte, righte, l1, l2, 0);

    if p2==1; theta2c=100; end
    if p1p==1; theta2p=100; end
    if p2n==1; theta2n=100; end

    [~,cpn] = min([theta2c, theta2p, theta2n]);
    if theta2c>0 & theta2p<0
        cpn = 1;
    end
end

```

```

if cpn == 2
    theta2_theor = theta2p;
    NT1 = nt1p; NT2 = nt2p;
    P1 = p1p; P2 = p2p;
    if NT1C ~= NT1
        LEFTP = 1; RIGHTP = l1;
        LEFTKP = 1; RIGHTKP = l2;
        LEFTN = left; RIGHTN = right;
        LEFTKN = leftk; RIGHTKN = rightk;
    end
elseif cpn == 3
    theta2_theor = theta2n;
    NT1 = nt1n; NT2 = nt2n;
    P1 = p1n; P2 = p2n;
    if NT1C ~= NT1
        LEFTP = left; RIGHTP = right;
        LEFTKP = leftk; RIGHTKP = rightk;
        LEFTN = 1; RIGHTN = l1;
        LEFTKN = 1; RIGHTKN = l2;
    end
else
    theta2_theor = theta2c;
    NT1 = nt1; NT2 = nt2;
    P1 = p1; P2 = p2;
    if NT1C ~= NT1
        LEFTP = leftp; RIGHTP = rightp;
        LEFTKP = leftkp; RIGHTKP = rightkp;
        LEFTN = leftn; RIGHTN = rightn;
        LEFTKN = leftkn; RIGHTKN = rightkn;
    end
end

NT1P = NT1 - 1;
NT1N = NT1 + 1;
NT2P = NT2 - 1;
NT2N = NT2 + 1;
if NT1P==0; NT1P=Z1; end
if NT1N==Z1+1; NT1N=1; end
if NT2P==0; NT2P=Z2; end
if NT2N==Z2+1; NT2N=1; end
NT1C = NT1;

%theta2_theor = wrapTo2Pi(theta2_theor);
input =
{f1info,f2info,l1,l2,f1,f2,yfoot1,yfoot2,theta1,theta2_theor,count};

ang_error = (ang_error1(P1,NT1) + ang_error2(P2,NT2))/2;
[dth2] = tooth_compliance_fun(M,P1,P2,input,ang_error);
[P1P,P2P,LEFTP,RIGHTP,LEFTKP,RIGHTKP,THETA2P] =
contact_checkpenetration_for_compliance(f1m(:,NT1P), f2m(:,NT2P),
fd1m(:,NT1P), fd2m(:,NT2P), theta1,
a12,LEFTP,RIGHTP,LEFTKP,RIGHTKP,lefte,righte,l1,l2,0);
[P1N,P2N,LEFTN,RIGHTN,LEFTKN,RIGHTKN,THETA2N] =
contact_checkpenetration_for_compliance(f1m(:,NT1N), f2m(:,NT2N),

```

```

fd1m(:,NT1N), fd2m(:,NT2N), theta1,
a12, LEFTN, RIGHTN, LEFTKN, RIGHTKN, lefte, righte, l1, l2, 0);
theta2_real = theta2_theor - dth2;
f1k = f1m*exp(1i*theta1);
f2k = f2m*exp(1i*(theta2_real))+a12;
ang_error = (ang_error1(P1,NT1) + ang_error2(P2,NT2))/2;
ang_error_p = (ang_error1(P1P,NT1P) + ang_error2(P2P,NT2P))/2;
ang_error_n = (ang_error1(P1N,NT1N) + ang_error2(P2N,NT2N))/2;
maxerr = 1e-8;

if abs(imag(f1k(P1P,NT1P)) - imag(f2k(P2P,NT2P))) < 0.5 &&
real(f1k(P1P,NT1P) - (f2k(P2P,NT2P))) < 0
    Mc = secant(M-5, 5, maxerr, P1, P2, P1P, P2P, input, ang_error, ang_error_p);
    [dth2] = tooth_compliance_fun(Mc, P1, P2, input, ang_error);
end

if abs(imag(f1k(P1N,NT1N)) - imag(f2k(P2N,NT2N))) < 0.5 &&
real(f1k(P1N,NT1N) - (f2k(P2N,NT2N))) < 0
    Mc = secant(M-5, 5, maxerr, P1, P2, P1N, P2N, input, ang_error, ang_error_n);
    [dth2] = tooth_compliance_fun(Mc, P1, P2, input, ang_error);
end
TE(count) = (-dth2);

theta2_real = theta2_theor - dth2;
f1k = f1m*exp(1i*theta1);
f2k = f2m*exp(1i*(theta2_real))+a12;
f11k = f11m*exp(1i*theta1-2*pi/Z1*(NT1-1));
f21k = f21m*exp(1i*(theta2_real))+a12;

% finding tooth 0
for nt1c=1:Z1
    if angle(f1k(1,nt1c))>(pi/2-pi/Z1-10*pi/180) &&
angle(f1k(1,nt1c))<(pi/2+pi/Z1-5*pi/180)
        break
    end
end

ntchange=nt1c-nt1; % Teeth numbers distance
nt2c=nt2+ntchange; % Respective tooth at Gear 2

if nt1c==0; nt1c=Z1; end
if nt1c==Z1+1; nt1c=1; end
if nt2c==0; nt2c=Z2; end
if nt2c==Z2+1; nt2c=1; end

if ntchange ~= 0
    left = 1; right = l1;
    leftk = 1; rightk = l2;
    lefte = 1; righte = l2;

    leftp = 1; rightp = l1;
    leftkp = 1; rightkp = l2;
    leftn = 1; rightn = l1;
    leftkn = 1; rightkn = l2;
end

```

```

    nt1 = nt1c;
    nt2 = nt2c;

    count = count + 1;
end
save(sprintf('STELoad%dnrp%d',M,nrp), 'TE')

```

### diff\_approx

Η συνάρτηση αυτή βρίσκει την πρώτη ή την δεύτερη παράγωγο μίας καμπύλης εκπεφρασμένης στον μιγαδικό χώρο με την επιθυμητή ακρίβεια.

```

function [fd] = diff_approx(f,nA,nD)

D1A2 = [-1/2 0 1/2]; % nA = 2
D1A4 = [1/12 -2/3 0 2/3 -1/12]; % nA = 4
D1A6 = [-1/60 3/20 -3/4 0 3/4 -3/20 1/60]; % nA = 6
D1A8 = [1/280 -4/105 1/5 -4/5 0 4/5 -1/5 4/105 -1/280]; % nA = 8
D2A2 = [1 -2 1]; % nA = 22
D2A4 = [-1/12 4/3 -5/2 4/3 -1/12]; % nA = 24
D2A6 = [1/90 -3/20 3/2 -49/18 3/2 -3/20 1/90]; % nA = 26
D2A8 = [-1/560 8/315 -1/5 8/5 -205/72 8/5 -1/5 8/315 -1/560]; % nA = 28

if nA==2 && nD==1 FDC = D1A2; end
if nA==4 && nD==1 FDC = D1A4; end
if nA==6 && nD==1 FDC = D1A6; end
if nA==8 && nD==1 FDC = D1A8; end
if nA==2 && nD==2 FDC = D2A2; end
if nA==4 && nD==2 FDC = D2A4; end
if nA==6 && nD==2 FDC = D2A6; end
if nA==8 && nD==2 FDC = D2A8; end

fd = conv(flip(FDC),f);
fd = fd(nA/2 : end-1-nA/2);
end

```

### hob\_roughness\_f\_fun

Η συνάρτηση αυτή προσθέτει την πληροφορία της τραχύτητας σε μία κατατομή. Δηλαδή με εισόδους την ίδια την κατατομή και την πρώτη της παράγωγο αλλά και την επιθυμητή ποιότητα αυτής, υπολογίζει ένα κατάλληλο σφάλμα για την διεύθυνση της δύναμης σε κάθε της σημείο.

```

function ang_error = hob_roughness_f_fun(f,l,fd,nrp)
fd = fd+pi;
x1 = randi(floor(l/10));
x2 = x1 + floor(8*l/10);
po = round(linspace(x1,x2,nrp));
phio = angle(f(po));
xo = real(f(po));
yo = imag(f(po));
lamda = tan(fd(po));

%% find the tips
for i=1:nrp-1
    A = [1 -lamda(i); 1 -lamda(i+1)];
    B = [yo(i)-lamda(i)*xo(i); yo(i+1)-lamda(i+1)*xo(i+1)];

```

```

X = linsolve(A,B);
yk(i) = X(1);
xk(i) = X(2);
frpk = (xk(i) + 1i*yk(i));
[~,pk(i)] = min(abs(f-frpk));
phik(i) = atan(yk(i)/xk(i));
end

%% surface
data = sortrows([xo,xk;yo,yk;phio,phik;po,pk]');
surf = data(:, [1,2]);
phim = data(:,3);
p = data(:,4);
points = length(surf);

%% roughness Ra Rt Rz & tolerance class
dist = sqrt(surf(:,1).^2+surf(:,2).^2)-abs(f(p));
Rt = max(dist);
Ra = mean(dist);

Z1 = max(dist(1:points/5)) - min(dist(1:points/5));
Z2 = max(dist(points/5:2*points/5)) - min(dist(points/5:2*points/5));
Z3 = max(dist(2*points/5:3*points/5)) - min(dist(2*points/5:3*points/5));
Z4 = max(dist(3*points/5:4*points/5)) - min(dist(3*points/5:4*points/5));
Z5 = max(dist(4*points/5:5*points/5)) - min(dist(4*points/5:5*points/5));
Rz = mean([Z1 Z2 Z3 Z4 Z5]);
tol = 1e3*Rt;

fr = surf(:,1)+1i*surf(:,2);

k = 1;
for j = 1:l
    for i = 1:length(pk)
        if j < pk(i)
            break
        end
        i = i+1;
    end
    frd(j) = fd(po(i));
end

ang_error = fd - frd;

end

```

### contact\_checkpenetration\_for\_compliance

Εύρεση του σημείου επαφής μεταξύ δύο κατατομών και την γωνία στροφής του συνεργαζόμενου με δεδομένες τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά και τα άκρα εφαρμογής των δυαδικών αναζητήσεων που απαιτούνται εντός της συνάρτησης

```

function [p1,p2,left,right,leftk,rightk,theta2] =
contact_checkpenetration_for_compliance(f1, f2, fd1, fd2, thetal,
a12, left, right, leftk, rightk, leftte, righte, l1, l2, choose)

```

```

while left <= right                                % i -> f1(i)
    midi = ceil((left + right) / 2);
    r1 = f1(midi)*exp(1i*theta1);                    % f1(i) -> r1
    r2 = r1 - a12;                                    % U1: r1 -> r2
    A = abs(f2); num = abs(r2);

    [k] = BS(A,num,leftk,rightk);
    [%~,k] = min(abs(abs(f2)-abs(r2)));
    theta2 = angle(r2/f2(k));                        % U2: r2,f2(k) -> theta2
    tang = tan(theta1 + fd1(midi) - (theta2 + fd2(k)));

    %leftk = max(floor(k-300),1); rightk = min(ceil(k+300),l2);

    if tang == 0
        i = midi;
        break
    elseif tang > 0
        right = midi - 1;
    else
        left = midi + 1;
    end
    i = midi;
end
p1 = i; p2 = k;
% left = max(floor(i-300),1); right = min(ceil(i+300),l1);
% leftk = max(floor(k-300),1); rightk = min(ceil(k+300),l2);
left = 1; right = l1;
leftk = 1; rightk = l2;

%
% if i>1 && k>1
%
% left = max(floor(i-500),1); right = min(ceil(i+500),l1);
% leftk = max(floor(k-500),1); rightk = min(ceil(k+500),l2);
%
% te = f1(i)*exp(1i*theta1);
%
% flk = f1*exp(1i*theta1);
% f2k = f2*exp(1i*theta2) + a12;
%
% for ie = l1:-1000:1
%     r1e = f1k(ie);
%     Ae = abs(f2k); nume = abs(r1e);
%     [ke] = BS_R(Ae,nume,lefte,righte);
%     [%~,ke] = min(abs(Ae-nume))
%     %de = r1e - a12 - f2(ke)*exp(j*theta2);
%     de = f2k(ke) - r1e;
%     if real(de) > 0
%         k = ke;
%         i = ie;
%     end
% end
%
%
if p1>1 && p2>1
% left = max(floor(i-300),1); right = min(ceil(i+300),l1);
% leftk = max(floor(k-300),1); rightk = min(ceil(k+300),l2);

```

```

f1k = f1*exp(1i*theta1);
f2k = f2*exp(1i*theta2) + a12;

te = f1k(p1); % troxia epafwn
te2 = f2k(p2);

iter = 1;
for ie = 11:-600:1

    ie_s(iter) = ie;
    r1e = f1k(ie);
    Ae = abs(f2k); nume = abs(r1e);
    [ke(iter)] = BS_R(Ae,nume,lefte,righte);
    de(iter) = f2k(ke(iter)) - r1e;
    iter = iter+1;
end

[ampe,pose] = max(real(de));
if ampe>0 && imag(de(pose))<0.001
    k = ke(pose);
    i = ie_s(pose);
end

left = max(floor(i-300),1); right = min(ceil(i+300),11);
leftk = max(floor(k-300),1); rightk = min(ceil(k+300),12);
if choose == 1
    plot(f1k,'--b','linewidth',2)
    hold on
    plot(f2k,'--r','linewidth',2)
    %plot(te,'.')
    axis('equal')
    axis([-7 7 4 16])
    grid on
    grid minor
end
if choose == 2
    plot(f1k,'b','linewidth',2)
    hold on
    plot(f2k,'r','linewidth',2)
    plot(te,'ok')
    axis('equal')
    axis([-7 7 4 16])
    legend('rigid geometry of pinion','rigid geometry of
gear','deformed geometry of pinion','deformed geometry of gear')
end

f2k = f2k - a12;

end
end

```

Η συνάρτηση που επιτελεί την δυαδική αναζήτηση για αύξουσες συναρτήσεις

```
function [index] = BS(A,num,left,right)

while left <= right
    mid = ceil((left + right) / 2);
    if A(mid) == num
        index = mid
        break
    else if A(mid) < num
        right = mid - 1;
    else
        left = mid + 1;
    end
end
end
index = mid;
end
```

### BS\_R

Η συνάρτηση που επιτελεί την δυαδική αναζήτηση για φθίνουσες συναρτήσεις

```
function [index] = BS_R(A,num,left,right)

while left <= right
    mid = ceil((left + right) / 2);
    if A(mid) == num
        index = mid;
        break
    else if A(mid) > num
        right = mid - 1;
    else
        left = mid + 1;
    end
end
end
index = mid;
end
```

### tooth\_compliance\_fun

Η συνάρτηση αυτή υπολογίζει το STE μεταξύ δύο οδόντων.

```
function [dth2] = tooth_compliance_fun(M,P1,P2,input,ang_error)

%% Data
global W
global b %tooth width (or contact width if not common)
global E %Young's modulus in MPa 50CrV4
G = 80000; %Shear modulus in MPa 50CrV4
global v %poisson's ratio
global E8 %8->*; Equivalent Young's modulus
global v8 % Equivalent poisson ratio

f1info = input{1}; f1 = f1info(1,:); fd1 = f1info(2,:); fdv1 = f1info(3,:);
fddv1 = f1info(4,:);
f2info = input{2}; f2 = f2info(1,:); fd2 = f2info(2,:); fdv2 = f2info(3,:);
fddv2 = f1info(4,:);
```



```

l1 = input{3};
l2 = input{4};
% f1m = input{5};
% f2m = input{5};
f1m = f1;
f2m = f2;
p1 = P1;
p2 = P2;

yfoot1 = input{7};
yfoot2 = input{8};
theta1_theor = input{9};
theta2_theor = input{10};
count = input{11};

%% Calculations

tangential contact
    [phi1, y1, roc1, h1] =
compliance_geom_param(f1,fd1,fdv1,fddv1,p1,ang_error);    % pinion geom
param for compliance
    [phi2, y2, roc2, h2] =
compliance_geom_param(f2,fd2,fdv2,fddv2,p2,ang_error);    % gear geom param
for compliance
    Y1 = y1 - yfoot1;    Y2 = y2 - yfoot2; % tooth height at y-axis from
foot to y

    %% normal Force
    xgg = (real(f1(p1))*tan(phi1)-imag(f1(p1))) / (tan(phi1)^2+1) *tan(phi1);
    ygg = -1/tan(phi1)*xgg;
    rgg = sqrt(xgg^2+ygg^2);
    W = M/rgg;

    %% Compliance bend and foot
    [I1_1,I2_1] = compliance_simpson3_integration(f1,l1,y1); % calculate I1
I2 integrals
    [I1_2,I2_2] = compliance_simpson3_integration(f2,l2,y2);

    Cb1 = 12*cos(phi1)^2*(I2_1+(0.2*(1+v(1))+tan(phi1)^2/12)*I1_1);
    Cf1 = (1-v(1)^2)*cos(phi1)^2 * (50/(2*pi)*(Y1/(2*abs(real(f1(end))))))^2 +
2*(1-2*v(1))/(1-v(1))*Y1/(2*abs(real(f1(end)))) +
4.82/pi*(1+tan(phi1^2)/(2.4*(1+v(1)))));
    Cb2 = 12*cos(phi2)^2*(I2_2+(0.2*(1+v(2))+tan(phi2)^2/12)*I1_2);
    Cf2 = (1-v(2)^2)*cos(phi2)^2 * (50/(2*pi)*(Y2/(2*abs(real(f2(end))))))^2 +
2*(1-2*v(2))/(1-v(2))*Y2/(2*abs(real(f2(end)))) +
4.82/pi*(1+tan(phi2^2)/(2.4*(1+v(2)))));

    %% hertz calcs
    c_sq=8*roc1*roc2*(1-v8^2) / (pi*E8*(roc1+roc2));    % c^2 without W/b
    hertz_a=2*(1-v8^2)/pi;
    hertz_b=4*h1*h2/c_sq;
    hertz_c=v8/(1-v8);
    Ch = hertz_a*(log(hertz_b*b/W)-hertz_c);

    %% static transmision error

```

```

C = Cb1 + Cb2 + Ch + Cf1 + Cf2;
delta(count) = C*W/E8/b;
deltac(count) = delta(count)*cos(-phi1) + 1i*delta(count)*sin(-phi1);
dth2 = angle((f2(p2)+deltac(count))/f2(p2));

C = (Cb1 + Cf1)*E8/E(1) + Ch + (Cb2 + Cf2)*E8/E(1);
end

```

### compliance\_geom\_param

Υπολογίζονται τα βασικά γεωμετρικά μεγέθη που απαιτούν οι υπολογισμοί των ενδοτικοτήτων.

```

function [phi,y, roc, h] = compliance_geom_param(fc,fdc,fdv,fddv,p,ang_error)
phi = (atan(-1/tan(fdc(p)))));
% add roughness contribution
phi = phi + ang_error;
y = imag(fc(p))+tan(abs(phi))*(real(fc(p)));
roc = abs((real(fdv(p))^2+imag(fdv(p))^2)^1.5/(real(fdv(p))*imag(fddv(p))-
imag(fdv(p))*real(fddv(p))));
h = abs(1i*y - fc(p));
end

```

### compliance\_simpson3\_integration

Η συνάρτηση αυτή επιτελεί τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων που απαιτούνται για της εύρεση των ενδοτικοτήτων με την μέθοδο Simpson 1/3.

```

function [I1,I2] = compliance_simpson3_integration(fkat,l,y)

p = 1;
I1 = 0; I2 = 0;
while imag(fkat(p)) < y
    if p==1
        break
    end
    t = 2*abs(real(fkat(p))); % tooth width x-
axis
    funs1 = 1/t; funs2 = (imag(fkat(p))-y)^2/t^3; % fsun1 = 1/t, fsun2 =
(y-Y)^2/t^3 functions for integration
    dh = abs(diff(imag(fkat(p:-1:p-1)))); % dy
    if p == 1 || p == 2
        I1 = I1 + dh*funs1/3;
        I2 = I2 + dh*funs2/3;
    else
        I1 = I1 + dh*(2*mod(p,2)+2)*funs1/3;
        I2 = I2 + dh*(2*mod(p,2)+2)*funs2/3;
    end
    p = p-1;
end
end

```

### secant

Στην περίπτωση της διπλής επαφής η συνάρτηση αυτή είναι υπεύθυνη και τον κατάλληλο διαμοιρασμό του φορτίου μεταξύ των δύο οδόντων. Αυτός γίνεται αριθμητικά με την μέθοδο της τέμνουσας.

```

function y =
secant(xn_2,xn_1,maxerr,P1,P2,P1P,P2P,input,ang_error,ang_error_p)

%xn = (xn_2*secfun(xn_1,P1,P2,P1P,P2P,input,ang_error,ang_error_p) -
xn_1*secfun(xn_2,P1,P2,P1P,P2P,input,ang_error,ang_error_p))/(secfun(xn_1,P1,
P2,P1P,P2P,input,ang_error,ang_error_p) -
secfun(xn_2,P1,P2,P1P,P2P,input,ang_error,ang_error_p));
xn = xn_2 - secfun(xn_2,P1,P2,P1P,P2P,input,ang_error,ang_error_p)*(xn_2-
xn_1)/(secfun(xn_2,P1,P2,P1P,P2P,input,ang_error,ang_error_p) -
secfun(xn_1,P1,P2,P1P,P2P,input,ang_error,ang_error_p));

maxiter = 100;
flag = 1;

while abs(secfun(xn,P1,P2,P1P,P2P,input,ang_error,ang_error_p)) > maxerr

    xn_2 = xn_1;
    xn_1 = xn;
    %xn = (xn_2*secfun(xn_1,P1,P2,P1P,P2P,input,ang_error,ang_error_p) -
xn_1*secfun(xn_2,P1,P2,P1P,P2P,input,ang_error,ang_error_p))/(secfun(xn_1,P1,
P2,P1P,P2P,input,ang_error,ang_error_p) -
secfun(xn_2,P1,P2,P1P,P2P,input,ang_error,ang_error_p));
    xn = xn_2 - secfun(xn_2,P1,P2,P1P,P2P,input,ang_error,ang_error_p)*(xn_2-
xn_1)/(secfun(xn_2,P1,P2,P1P,P2P,input,ang_error,ang_error_p) -
secfun(xn_1,P1,P2,P1P,P2P,input,ang_error,ang_error_p));

    flag = flag + 1;
    if(flag == maxiter)
        break
    end
end

y = xn;
end

```

### secfun

Η συνάρτηση που ελαχιστοποιείται από την παραπάνω και υπολογίζει την διαφορά του STE μεταξύ των δύο ζευγών οδόντων που συνεργάζονται ταυτόχρονα.

```

function [Ddth2] = secfun(Mc,P1,P2,P1P,P2P,input,ang_error,ang_error_p)
global M
Mp = M - Mc;
Ddth2 = abs(tooth_compliance_fun(Mc,P1,P2,input,ang_error)) -
abs(tooth_compliance_fun(Mp,P1P,P2P,input,ang_error_p));
end

```

### Dynamic\_solver\_RK4

Με υπολογισθέν το STE πραγματοποιείται σε αυτόν το κώδικα η επίλυση με Runge Kutta 4<sup>ης</sup> τάξης η επίλυση του δυναμικού συστήματος και στην συνέχεια η εξαγωγή των μετρικών την ποιότητας των συνεργαζόμενων τροχών.

```

clear

%% load
M = [10; 10]; % [N*m]

```

```

load(sprintf('STE RESULTS\\LOAD%d\\PERFECT.mat', M(2))) % nominal STE
TE_PERF = TE;
load(sprintf('STE RESULTS\\LOAD%d\\THETA2.mat', M(2)))
load(sprintf('STE RESULTS\\LOAD%d\\NRP15.mat', M(2))) % AGMA STE

STE_crit = M(2)*2e-5;
% M = 40 -> STE_crit = 8e-4
% M = 20 -> STE_crit = 4e-4
% M = 10 -> STE_crit = 2e-4
% M = 5 -> STE_crit = 1e-4

%% pinion specs
Z1 = 25; Cc1 = 0;
[do1, xpc1, ypc1, n1, x_kat1, y_kat1] = geometry(Z1,Cc1);
f1 = xpc1 + 1i * ypc1; % complex array of the whole side of the gear
l1 = length(f1);
fdv1 = diff_approx(f1,8,1); % complex array - 1st derivative of involute
fd1 = angle(fdv1); % angle of involute at every spot
fddv1 = diff_approx(f1,8,2); % complex array - 2nd derivative of involute
yfoot1 = min(abs(imag(f1))); % y coord at foot
flinfo = [f1;fd1;fdv1;fddv1];
f1l = -real(f1) + 1i * imag(f1);
yfoot1 = min(abs(imag(f1))); % y coord at foot
b=20*10^(-3); %tooth width (or contact width if not common)

%% gear specs
Z2 = 25; Cc2 = 0;
i12 = Z2/Z1; a12 = 1i * (1/2 * do1 * (1 + i12)); % axis distance
[do2, xpc2, ypc2, n2, x_kat2, y_kat2] = geometry(Z2,Cc2);
f2 = xpc2 + 1i * ypc2;
l2 = length(f2); % complex array of the whole side of the gear
fdv2 = diff_approx(f2,8,1); % complex array differentiation of involute for
compliance_geom_param
fd2 = angle(fdv2); % angle of involute at every spot
fddv2 = diff_approx(f2,8,2); % complex array 2nd derivative of involute for
compliance_geom_param
yfoot2 = min(abs(imag(f2))); % y coord at foot
f2info = [f2;fd2;fdv2;fddv2];
f2l = -real(f2) + 1i * imag(f2);
yfoot2 = min(abs(imag(f2))); % y coord at foot

%% moment of inertia
dens = 7840; % [kg/m^3]
Ic1 = pi/2*(abs(f1(end))*10^(-3))^4; % foot circle
inertia
It1 = Z1*toothinertia_simpson3_integration(f1,l1)*10^(-12); % teeth inertia
I1 = dens*b*(Ic1+It1); % pinion
inertia
Ic2 = pi/2*(abs(f2(end))*10^(-3))^4; % foot circle
inertia
It2 = Z2*toothinertia_simpson3_integration(f2,l2)*10^(-12); % teeth inertia
I2 = dens*b*(Ic2+It2); % gear inertia
I = [I1 0; 0 I2];

%% data for elasticity
THETA2 = THETA2-THETA2(1);

```

```

THETA2 = wrapTo2Pi (THETA2);
THETA2(1) = 2*pi;
THETA2 = fliplr(THETA2);
THETA1 = 0:pi/Z1/100:2*pi;
THETA1q = linspace(0,2*pi,2e4);
TEp = pchip(THETA1,TE,THETA1q);
THETA2p = pchip(THETA1,THETA2,THETA1q);
THETA2p = (THETA2p-THETA2p(1));

%% dumping
zhta = 0.05;
c = 2*zhta*sqrt(mean(M(2)*TEp.^(-1))*I(1,1));
C = [c c; c c];

%% solve
fs = 1e6; % sampling frequency
fo = 100; % load hertz frequency
time_step = 1/fs; % time step

y = [0;0;0;0];
p = 1;
y(1) = THETA1q(p); % initial conditions
y(2) = THETA2p(p);
y(3) = fo*2*pi;
y(4) = -fo*2*pi;
% y(3) = 0;
% y(4) = 0;
yo = [y(1);y(2);y(3);y(4)];
i = 1; t = time_step; j = 1;
while t <= 0.1
    dtheta2 = TEp(p);
    g = M(2)/dtheta2;
    G = [g g; g g];

    k1 = time_step * DynamicModel(y(:,i),I,C,G,M);
    y1(:,i) = y(:,i) + 0.5*k1;
    k2 = time_step * DynamicModel(y1(:,i),I,C,G,M);
    y2(:,i) = y(:,i) + 0.5*k2;
    k3 = time_step * DynamicModel(y2(:,i),I,C,G,M);
    y3(:,i) = y(:,i) + k3;
    k4 = time_step * DynamicModel(y3(:,i),I,C,G,M);
    y(:,i+1) = y(:,i) + (1/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4); % main equation
    a1(i) = diff(y(3,i:i+1))/time_step;
    a2(i) = diff(y(4,i:i+1))/time_step;
    ang = wrapTo2Pi(y(2,i+1));
    [~,p] = min(abs(ang-THETA2p));
    store(i)=dtheta2;
    t = t + time_step;
    i = i+1;
    time(i) = t;
end

P = length(y);
time2=0:1/fs:P/fs-1/fs; % time array
ff=0:fs/P:fs; % frequency array

```

```

%% find natural frequencies for single and double tooth contact
nf = sqrt(2*mean(M(2)*TE.^(-1))/I(1,1))/(2*pi);
s = find(TE>STE_crit);
nf_1 = sqrt(2*mean(M(2)*TE(s).^(-1))/I(1,1))/(2*pi);
TE_double = TE;
TE_double(s) = [];
nf_2 = sqrt(2*mean(M(1)*TE_double.^(-1))/I(1,1))/(2*pi);

%% error on position and velocity
TEd = y(1,:) + y(2,:);
domega = y(3,:) + y(4,:);
tmesh_step = P*(Z1*fo*P/fs)^(-1);
k = 1;
for i = 1:tmesh_step-1
while k*tmesh_step<P
    dTEd(j) = (TEd(tmesh_step*k+i)-TEd(tmesh_step*(k-1)+i));
    ddomega(j) = (domega(tmesh_step*k+i)-domega(tmesh_step*(k-1)+i));
    k=k+1;
    j=j+1;
end
end
mc = sum(sqrt(dTEd.^2+ddomega.^2));

```

## DynamicModel

Η συνάρτηση αυτή περιέχει το σύστημα των διαφορικών που περιγράφουν το φαινόμενο.

```

function dYdt = DynamicModel(Y, I, C, G, M)
dYdt = [ Y(3);
        Y(4);
        -C(1,1)/I(1,1)*Y(3) - C(1,2)/I(1,1)*Y(4) - G(1,1)/I(1,1)*Y(1) -
G(1,2)/I(1,1)*Y(2) + M(1)/I(1,1);
        -C(2,1)/I(2,2)*Y(3) - C(2,2)/I(2,2)*Y(4) - G(2,1)/I(2,2)*Y(1) -
G(2,2)/I(2,2)*Y(2) + M(2)/I(2,2);
        ];
end

```

## invbestfit

Ο παρακάτω κώδικας βρίσκει με χρήση γενετικών αλγορίθμων ποια εξειλιγμένη καμπύλη ταιριάζει καλύτερα σε ένα σύνολο από μετρηθέντα σημεία.

```

clear

%% involute best fit with ga
lb = [18.4 deg2rad(-180)]; % parameter lower bound
ub = [18.8 deg2rad(181)]; % parameter upper bound
nvar = 2;
fun = @invgenerator;
options = optimoptions('ga', 'MaxGenerations', 300, ...
    'MaxStallGenerations', Inf, 'PlotFcn', @gplotbestf);
x = ga(fun, nvar, [], [], [], [], lb, ub, [], options);
[x(1) , rad2deg(x(2))] % display involute angle
and rotation angle

%% visualise result
[~, r, theta, inva] = invgenerator(x);

```

```

%figure()
[xtheor,ytheor] = pol2cart(inva,r);
plot(xtheor,ytheor,'o')
%polarplot(inva,r)
hold on
[xdata,ydata] = pol2cart(theta,r);
plot(xdata,ydata,'.')
axis('equal')

function [dtheta,r,theta,inva] = invgenerator(x) %r,theta,invarot
%% measured points
load ('pick_rightmergedinv.mat')
theta = pick(1:length(pick)/2,1)';    r = pick(1:length(pick)/2,2)';

%% calculate involute
rg = x(1);    % basiki diametros
for i = 1:length(r)
    a = acos(rg / r(i));                % angle
    inva(i) = tan(a) - a;
end
inva = inva + x(2);
dtheta = sum(abs(inva-theta));

end

```

### find\_inv\_param\_theor

Αναλυτική εύρεση την βέλτιστης εξειλιγμένης για ένα νέφος μετρηθέντων σημείων.

```

%% initial
rg = 18.64;
phi = deg2rad(100);
x0 = [phi,rg];

%% right inv
fun_right = @root2d;
x_right = fsolve(fun_right,x0);
[rad2deg(x_right(1)),x_right(2)]

function [F] = root2d(x)
load ('pick_rightmergedinv.mat')
theta = pick(length(pick)/2:length(pick),1)';    r =
pick(length(pick)/2:length(pick),2)';

phi = x(1);
rg = x(2);

F(1) = sum(2*(tan(acos(rg./r))-acos(rg./r)+phi-theta) .* (-
r.^2./(rg^2*sqrt(r.^2-rg^2)) + 1./sqrt(r.^2-rg^2)));
F(2) = sum(2*(tan(acos(rg./r))-acos(rg./r)+phi-theta));

end

```