Εθνικο Μετσοβιο Πολυτεχνειο

Σχολη Εφαρμοσμενων Μαθηματικων και Φυσικων Επιστημων

Λύσεις Μελανών Οπών Συζευγμένων με Βαθμωτά Πεδία - $f(R)$ Τροποποιημένη Βαρύτητα

Πτυχιακή Διπλωματική Εργασία

Συγγραφέας
Αθανάσιος Καρακάσης

Επιβλέπων
Ελευθέριος
Παπαντωνόπουλος
Ομότιμος Καθηγητής ΕΜΠ

Σεπτέμβριος 2019

A species had been armed too heavily – by spirit made almighty without, but equally a menace to its own well-being. Its weapon was like a sword without hilt or plate, a two-edged blade cleaving everything.

"The Last Messiah",
Peter Wessel Zapffe

Ευχαριστίες

Για την εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας θα ήθελα θερμά να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Ελευθέριο Παπαντωνόπουλο, για την υπομονή του, την καθοδήγησή του και την υποστήριξή του καθόλη τη διάρκειά της και τον υποψήφιο διδάκτορα Χριστόφορο Βλάχο για την πολύτιμη βοήθειά του όποτε τη χρειάστηκα.

Περίληψη

Στα τρία πρώτα κεφάλαια αυτής της εργασίας παρουσιάζεται συνοπτικά ο μαθηματικός φορμαλισμός της Ειδικής και Γενικής Σχετικοτητας του Einstein, ενώ στο τέταρτο δίνεται μια αναλυτική απόδειξη της πρώτης και απλούστερης λύσης μελανής οπής αυτής του Schwarzschild, στην οποία θεωρούμε στατικό, στάσιμο και σφαιρικά συμμετρικό χωρόχρονο απουσία ορμής και ενέργειας. Στο πεμπτο, παρουσιάζεται η λύση MTZ η πρώτη ακριβής λύση μελανής οπής ελάχιστα συζευγμένης με βαθμωτό πεδίο. Οι συγκεκριμένες λύσεις παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον καθώς έρχονται σε αντίθεση με το Θεώρημα Εξάλειψης Ιχνών, σύμφωνα με το οποίο κάθε λύση μελανής οπής περιγράφεται από τη μάζα, το φορτίο και τη στροφορμή της, ενώ όπως θα δούμε το στοιχείο μήκους που προκύπτει εξαρτάται από το βαθμωτό πεδίο μέσω του μ όπως μπορεί να δει κανείς.αλλά και η MTS λύση, όπου το βαθμωτό πεδίο δεν είναι ελάχιστα συζευγμένο με τη βαρύτητα αφού έχουμε όρο της μορφής φR, αλλά σύμμορφα συζευγμένο καθώς ο τανυστής ορμής-ενέργειας που προκύπτει από αυτό είναι άιχνος και τέλος, στο έκτο κεφάλαιο γίνεται μια εισαγωγή στην μετρική $f(R)$ βαρύτητα.

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή-Ειδική Σχετικότητα **6**
1.1 Αδρανειακά Συστήματα Αναφοράς 7
1.2 Σχετικότητα και Συμμετρίες 7
1.3 Ειδική Σχετικότητα 8
1.4 Μετασχηματισμοί Συμμετρίας 8
1.5 Περιστροφές στον Τετραδιάστατο Χωρόχρονο 9
1.6 Διαστολή του Χρόνου 12
1.7 Συστολή του Μήκους 12
1.8 Η Αρχή της Ελάχιστης Δράσης-Εξίσωση Euler-Lagrange 14

2 Διανύσματα-Τανυστές **15**
2.1 Συναλλοίωτα Διανύσματα 16
2.2 Εσωτερικό Γινόμενο 17
2.3 Τανυστές 17
2.4 Σχετικιστική Κινηματική και Δυναμική 18

3 Στοιχεία Διαφορικής Γεωμετρίας - Καμπυλότητα **22**
3.1 Πολλαπλότητες 22
3.2 Η Συναλλοίωτη Παράγωγος 23
3.3 Η Παράλληλη Μεταφορά - Γεωδαιτικές Εξισώσεις 29
3.4 Καμπυλότητα 31
3.5 Ο Τανυστής του Einstein 34

4 Η Λύση στο Κενό **36**
4.1 Η Λύση Schwarzschild 36
4.2 Το Νευτώνειο Όριο 48
4.3 Δράσεις που δίνουν τανυστή ορμής-ενέργειας 53
4.4 Το Ιδανικό Ρευστό 54

5 Λύσεις Μελανών Οπών Συζευγμένων με Βαθμωτά Πεδία **55**
5.1 Το Θεώρημα Εξάλειψης Ιχνών 55
5.2 Η Λύση MTZ (Martinez, Troncoso, Zanelli) 56
5.3 Η Λύση MTS (Martinez, Troncoso, Staforelli) 75

6 Τροποποιημένη Βαρύτητα **89**
6.1 $f(R)$ Βαρύτητα 89
6.2 Οι Πεδιακές Εξισώσεις 90
6.3 f(R) Βαρύτητα Ελάχιστα Συζευγμένη με Βαθμωτό Πεδίο 94

1 Εισαγωγή-Ειδική Σχετικότητα

Η βαρυτητα αποτελεί μία από τις 4 θεμελιώδεις αλληλεπιδράσεις της φύσης. Είναι η καθολικότερη εξ'αυτών, καθώς επιδρά σε όλα τα σωματίδια που διαθέτουν μάζα ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα χαρακτηριστικά τους(αν για παράδειγμα έχουν φορτίο). Είναι η ασθενέστερη από τις 4 αλληλεπιδράσεις, αλλά διαθέτει το μεγαλύτερο εύρος. Ο Newton, πρώτος έθεσε τα θεμέλια της βαρυτικής θεωρίας διατυπώνοντας το νόμο της παγκόσμιας έλξης. Η θεωρία του Newton υποστηρίζει ότι σε ένα βαρυτικό πεδίο, τα σώματα ακολουθούν μια συγκεκριμένη διαδρομή εξαιτίας της δύναμης της βαρύτητας που ασκείται πάνω τους. Αν ένα σώμα εκτοξευτεί από την επιφάνεια της γης προς τα πάνω την αρχική στιγμή t=0, θα επιβραδύνθεί εξαιτίας της βαρυτικής δύναμης, θα φτάσει σε μια μέγιστη τιμή ύψους και εν συνεχεία επιστρέφει πίσω στη γη. Οποιοδήποτε άλλο σώμα εκτοξευθεί προς τα πάνω με τις ίδιες αρχικές συνθήκες θα ακολουθήσει αυτή την τροχιά. Η σκέψη του Einstein είναι ότι αφού όλα τα σώματα ακολουθούν την ίδια τροχιά, το γεγονός αυτό, δηλαδή η μοναδικότητα της τροχιάς στον τετραδιάστατο χωρόχρονο(ενοποίηση των τριών διαστάσων του χώρου και της μιας διάστατης του χρόνου) θα αποτελεί μια γεωμετρική ιδιότητα του χωρόχρονου. Ο Einstein πρότεινε ότι η παρουσία μιας μάζας όπως η γη καμπυλώνει το γειτονικό χωρόχρονο με αποτέλεσμα τα σώματα να κινούνται πάνω σε ευθείες αυτού του καμπυλωμένου χωρόχρονου. Η τροχιά δηλαδή του σωματιδίου οφείλεται στην καμπύλωση του χωρόχρονου εξαιτίας της γης και όχι στην ύπαρξη βαρυτικής δύναμης.

1.1 Αδρανειακά Συστήματα Αναφοράς

Οι νόμοι της φυσικής είναι ταυτόσημοι για όλα τα συστήματα αναφοράς που κινούνται το ένα ως προς το άλλο με σταθερή ταχύτητα. Ο πρώτος νόμος του Νεύτωνα(νόμος αδράνειας) μας λέει ότι ένα σώμα πάνω στο οποίο δεν ασκούνται δυνάμεις θα παραμένει ακίνητο ή θα κινείται με σταθερή ταχύτητα. Αδρανειακό σύστημα αναφοράς καλείται το σύστημα στο οποίο η μεταβολή της ταχύτητας ελεύθερων σωματιδίων είναι σταθερή, δηλαδή οι θέσεις των σωματιδίων μεταβάλλονται με σταθερούς ρυθμούς και ένας παρατηρητής μέσα στο σύστημα μπορεί να ορίζει μια ποσότητα t(χρόνος) τέτοια ώστε:

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = 0 \quad \text{όπου} \quad x_i = (x, y, z) \tag{1}$$

1.2 Σχετικότητα και Συμμετρίες

Ξεκινάμε από τη βασική παραδοχή ότι οι νόμοι της φυσικής θα έχουν την ίδια μορφή για όλους τους παρατηρητές που βρίσκονται σε αδρανειακά συστήματα αναφοράς(αδρανειακοί παρατηρητές).

Οι συμμετρίες παίζουν βασικό ρόλο στη φυσική. Χάρη στις συμμετρίες μπορούμε να απλοποιήσουμε μαθηματικές σχέσεις και να γλιτώσουμε από πολλούς υπολογισμούς, όπως φαίνεται στη συνέχεια αυτής της εργασίας όταν θεωραούμε σφαιρική συμμετρία. Μπορούμε να θεωρήσουμε 3 συμμετρίες του χώρου και του χρόνου.

Ισοτροπίες του χώρου: Περιστρέφοντας το χώρο τίποτα δεν αλλάζει. Αν για παράδειγμα εκτελέσουμε ένα πείραμα σε ένα εργαστήριο και περιστρέψουμε το εργαστήριο θα πάρουμε τα ίδια αποτελέσματα.

Ομοιογένεια του χώρου: Μπορούμε να μετακινήσουμε το εργαστήριο στο χώρο και πάλι η φυσική δε θα αλλάξει.

Ομιογένεια του χρόνου: Μπορούμε να "μετακινηθούμε" στο χρόνο και να πάρουμε το ίδιο αποτέλεσμα για ένα πείραμα. Είτε δηλαδή εκτελέσουμε το πείραμα τώρα είτε σε λίγη ώρα, αν οι εξωτερικές συνθήκες δεν αλλάξουν καθόλου τότε οι νόμοι της φυσικής δε θα αλλάξουν ,δίνοντάς μας το ίδιο αποτέλεσμα.

1.3 Ειδική Σχετικότητα

Η Νευτώνεια φυσική(και οι μετασχηματισμού του Γαλιλαίου) στηρίζονται στην υπόθεση πως όλοι οι παρατηρητές πρέπει να συμφωνούν στο διάστημα μεταξύ δύο γεγονότων. Ο Einstein από την άλλη υποστήριξε πως η ταχύτητα του φωτός είναι σταθερή ανεξαρτήτως της κατάστασης του παρατηρητή που τη μετρά. Αυτές οι δύο υποθέσεις όμως δεν είναι συμβατές. Υπήρξαν πειράματα που υποδεικνύουν ότι η ταχύτητα του φωτός είναι σταθερή. Το γεγονός αυτό οδήγησε στην Ειδική Σχετικότητα, η σταθερή για όλους ταχύτητα του φωτός συνεπάγεται ισοτροπία στο χωρόχρονο, δηλαδή "περιστροφές" στο χωρόχρονο δεν αλλάζουν τη φυσική. Θα μπορούσε κανείς να πει πως η Ειδική Σχετικότητα αποτελεί μια θεωρία περιστροφών στον 4-d χωρόχρονο, με την ίδια λογική που η ισοτροπία του χώρου είναι μια θεωρία περιστροφών στον 3-d χώρο.

1.4 Μετασχηματισμοί Συμμετρίας

Θεωρούμε την αναπαράσταση r ενός πίνακα. Από αυτή μπορούμε να δημιουργήσουμε τη δυαδική αναπαράσταση του r, $\tilde{r}$ ως εξής:
Έστω A ένας πίνακας μετασχηματισμού που ανήκει στην ομάδα G, έστω για παράδειγμα πως ο A είναι ένας μετασχηματισμός περιστροφής. Το r θα μετασχηματίζεται ως εξής: $r \to Ar$ και το $\tilde{r}$, $\tilde{r} \to (A^{-1})^T\tilde{r}$. Τότε το $\tilde{r}^T r$ παραμένει αναλλοίωτο. Πράγματι:

$$\tilde{r}^T r = ((A^{-1})^T\tilde{r})^T Ar = \tilde{r}^T((A^{-1})^T)^T Ar = \tilde{r}^T A^{-1} Ar = \tilde{r}^T r$$

Υπάρχει τρόπος να πάρουμε το $\tilde{r}$ από το r χρησιμοποιώντας τον πίνακα της μετρικής, δηλαδή: $\tilde{r} = gr$. Η μετρική είναι ένας συμμετρικός πίνακας τον οποίο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για να πάρουμε τη δυαδική αναπαράσταση της αναπαράστασης στην οποία την εφαρμόζουμε. Θα έχουμε:

$$\tilde{r}r = (gr)^T r = r^T g^T r = r^T gr$$

Όμως το $\tilde{r}^T r$ είναι αναλλοίωτο κάτω από μετασχηματισμούς, άρα και το $r^T gr$ θα πρέπει να είναι αναλλοίωτο. Θα έχουμε:

$$r^T gr \to (Ar)^T gAr = r^T A^T gAr = r^T A^T gAr$$

Θέλουμε το $r^T A^T gAr$ να είναι ίσο με $r^T gr$ και άρα θα πρέπει: $A^T gA = g$.

1.5 Περιστροφές στον Τετραδιάστατο Χωρόχρονο

Θεωρούμε την ομάδα αναπαράστασης περιστροφών στον τρισδιάστατο χώρο: $G = \{R_x(\theta), R_y(\phi), R_z(\psi)\}$, όπου οι δείκτες x,y,z αντιπροσωπεύουν τη στροφή γύρω από τους αντίστοιχους άξονες. Το μήκος ενός διανύσματος παραμένει αναλλοίωτο κάτω από περιστροφές στον τρισδιάστατο χωρο, παρόλο που το ίδιο το διάνυσμα μετασχηματίζεται. Έστω $A(x_1, y_1, z_1)$ και $B(x_2, y_2, z_2)$ δύο σημεία στον τρισδιάστατο χώρο. Η απόσταση μεταξύ αυτών των δύο σημείων αποτελεί μια γενίκευση του πυθαγορείου θεωρήματος στις τρεις διαστάσεις. Θα έχουμε δηλαδή:

$$\Delta s = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} \Rightarrow$$

$$\Delta s^2 = \begin{bmatrix}\Delta x \Delta y \Delta z\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z\end{bmatrix}$$

Το μήκος αυτό δεν αλλάζει. Οπότε για ένα νέο σύστημα αναφοράς το οποίο έχει περιστραφεί, για $A \to A'$ και $B \to B'$ θα πρέπει: $\Delta s^2 = \Delta s'^2$. Έστω R ένας πίνακας που

εκφράζει περιστροφή. Άρα:
$\begin{bmatrix}\Delta x\\ \Delta y\\ \Delta z\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}\Delta x'\\ \Delta y'\\ \Delta z'\end{bmatrix} = R\begin{bmatrix}\Delta x\\ \Delta y\\ \Delta z\end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix}\Delta x \Delta y \Delta z\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}\Delta x' \Delta y' \Delta z'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}R\begin{bmatrix}\Delta x\\ \Delta y\\ \Delta z\end{bmatrix}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$.
Για το Δs θα έχουμε:

$$\Delta s^2 = \begin{bmatrix}\Delta x \Delta y \Delta z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta x\\ \Delta y\\ \Delta z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\Delta x' \Delta y' \Delta z'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta x'\\ \Delta y'\\ \Delta z'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\Delta x \Delta y \Delta z\end{bmatrix} R^T R \begin{bmatrix}\Delta x\\ \Delta y\\ \Delta z\end{bmatrix},$$

άρα θα πρέπει:

$$R^T R = I$$

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα η μετρική είναι ο μοναδιαίος πίνακας αφού: $R^T g R = g$

Στην ειδική σχετικότητα, στις περιστροφές δηλαδή στο χωρόχρονο, οι νόμοι της φυσικής δεν αλλάζουν κάτω από μετασχηματισμούς που διατηρούν χωροχρονικά διαστήματα της μορφής: $\Delta s^2 = -c^2\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$.

'Αρα θα έχουμε: $\Delta s^2 = -c^2\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 = \begin{bmatrix}c\Delta t \Delta x \Delta y \Delta z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c\Delta t\\ \Delta x\\ \Delta y\\ \Delta z\end{bmatrix}$

, όπου: $\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \eta$ είναι η μετρική Minkowski σε καρτεσιανές συντεταγμένες. Μπορούμε λοιπόν να εφραμόσουμε μετασχηματισκούς για τους οποίους ισχύει: $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$.
Αφού υπάρχει ένας 1-1 ισομορφισμός μεταξύ ενός επιπέδου και του διανύσματος κάθετο σε αυτό μπορούμε να γράψουμε την ομάδα περιστροφών στον τρισδιάστατο χώρο ως εξής: $G = \{R_{yz}, R_{zx}, R_{xy}\}$. Στο χωρόχρονο θα υπάρχουν δύο διανύσματα που είναι κάθετα σε ένα επίπεδο. Για το λόγο αυτό η ομάδα περιστροφών στον χωρόχρονο παίρνει τη μορφή: $G = \{R_{yz}, R_{zx}, R_{xy}, R_{tx}, R_{ty}, R_{tz}\}$. Μια στροφή στο επίπεδο xy κατά γωνία θ, θα έχει τη μορφή:

$$\Lambda_{xy} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & sin\theta & 0 \\ 0 & -sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ο πιο πάνω μετασχηματισμός αφήνει αναλλοίωτα τα dt και dz και περιστρέφει κατά μια γωνία ϑ το επίπεδο xy. Ο μετασχηματισμός αυτός ικανοποιεί τη σχέση: $\Lambda_{xy}^T \eta \Lambda_{xy} = \eta$. Ένας μετασχηματισμός στο xt επίπεδο θα έχει τη μορφή:

$$\Lambda_{xt} = \begin{bmatrix} cosh\varphi & -sinh\varphi & 0 & 0 \\ -sinh\varphi & cosh\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και ικανοποιεί τη σχέση: $\Lambda_{xt}^T \eta \Lambda_{xt} = \eta$

Έστω τώρα ένα σύστημα αναφοράς S ακίνητο και ένα άλλο σύστημα αναφοράς S' το οποίο κινείται ως προς το S με ταχύτητα: $\vec{v} = u\hat{x}$. Θα έχουμε:

$$\begin{bmatrix} cdt \\ dx \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} cdt' \\ dx' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cosh\varphi & -sinh\varphi \\ -sinh\varphi & cosh\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cdt \\ dx \end{bmatrix}$$

Στο S' η αρχή των αξόνων (0,0) παραμένει ακίνητη, δηλαδή: $dx' = 0 \Rightarrow (-sinh\varphi)cdt + (cosh\varphi)dx = 0$.

Στο S, το σημείο αυτό, φαίνεται να κινείται με μια ταχύτητα: $v = \dfrac{dx}{dt}$ Άρα:

$$\frac{dx}{dt} = tanh\varphi = \frac{u}{c} \Rightarrow cosh\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}} = \gamma \text{ και } sinh\varphi = \gamma\frac{u}{c}$$

,άρα το Λ_{xt} έχει τη μορφή:

$$\Lambda_{xt} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\dfrac{u}{c} \\ -\gamma\dfrac{u}{c} & \gamma \end{bmatrix}$$

που είναι ο μετασχηματισμός Lorentz.

1.6 Διαστολή του Χρόνου

Έστω δύο συστήματα αναφοράς, τα S και S', με το S' να κινείται ως προς το S με ταχύτητα $\vec{v} = u\hat{x}$. Σε κάθε ένα σύστημα υπάρχει ένα ρολόι. Έστω στο S ένα γεγονός που συμβαίνει στην ίδια θέση στη χώρο δηλαδή: $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$, για παράδειγμα οι χτύποι του ρολογιού. Στο S δηλαδή θα ισχύει:

$$\begin{bmatrix} c\Delta t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} c\Delta t' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\frac{u}{c} & 0 & 0 \\ -\gamma\frac{u}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\Delta t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma c\Delta t \\ -\gamma u\Delta t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Άρα: $c\Delta t' = \gamma c\Delta t \Rightarrow \Delta t' = \gamma\Delta t \Rightarrow \Delta t' > \Delta t$ αφού ο παράγοντας Lorentz γ είναι μεγαλύτερος της μονάδας. Δηλαδή κινούμενα ρολόγια μετρούν μεγαλύτερα χρονικά διαστήματα.

1.7 Συστολή του Μήκους

Μια ράβδος βρίσκεται σε ένα σύστημα αναφοράς S' το οποίο κινείται ως προς το ένα άλλο σύστημα αναφοράς το S το οποίο είναι ακίνητο. Η ράβδος έχει μήκος στο κινούμενο σύστημα αναφοράς S': $L' = \Delta x'$. Παρατηρητής βρίσκεται ακίνητος στο σύστημα S στην αρχή των αξόνων του συστήματος, δηλαδή: $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$. Ο παρατηρητής θα δει το ένα άκρο της ράβδου να περνά από το σημείο στο x=0 μια χρονική στιγμή t=0 και το δεύτερο άκρο της ράβδου μια χρονική στιγμή t'. Άρα έχουμε ένα χρονικό διάστημα Δt. Στο ακίνητο σύστημα S θα έχουμε Δx=0 και Δt. Στο κινούμενο S' σύστημα θα έχουμε: $\Delta x' = L'$. Εφαρμόζοντας τώρα το μετασχηματισμό Lorentz(για το επίπεδο t-x) έχουμε:

$$\begin{bmatrix} cdt' \\ L' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cdt \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow L' = -\frac{u}{c}\gamma cdt \Rightarrow L' = -\gamma L \Rightarrow L = -\frac{L'}{\gamma}$$

,όπου αντικαταστήσαμε ότι: $udt = L$. Αφού $\gamma > 1$ το μήκος που μετράμε στο ακίνητο σύστημα θα είναι μεγαλύτερο από αυτό που θα μετράμε στο κινούμενο σύστημα. Ένας κινούμενος παρατηρητής θα μετράει δηλαδή μικρότερα χωρικά διαστήματα απότι ένας που κινείται. Το μήκος της ράβδου, σα μήκος, παραμένει το ίδιο, δεν αλλάζει η ατομική δομή της ράβδου ή κάτι τέτοιο. Η διαφορά μέτρησης μήκους οφείλεται στις χρονικές στιγμές που γίνονται οι μετρήσεις. Το αρνητικό πρόσημο που υπάρχει οφείλεται στο γεγονός πως μετράμε από τα δεξιά προς τα αριστερά, δηλαδή μετρήσαμε πρώτα το δεξί άκρο της ράβδου που πέρασε από το x=0 και μετά το αριστερό άκρο.

1.8 Η Αρχή της Ελάχιστης Δράσης-Εξίσωση Euler-Lagrange

Η εξίσωση Euler-Lagrange βασίζεται στην αρχή της ελάχιστης δράσης. Σύμφωνα με αυτή την αρχή, ένα σημειακό αντικείμενο στο χρονικό διάστημα $t_2 - t_1$ θα ακολουθήσει τη διαδρομή εκείνη, για την οποία η ποσότητα $\int Ldt$ παρουσιάζει ακρότατο. Δηλαδή, η εξίσωση Euler-Lagrange είναι μια διαφορική εξίσωση της οποίας οι λύσεις είναι συναρτήσεις για τίς οποίες το ολοκλήρωμα $\int Ldt$ παρουσιάζει ακρότατο. Η L είναι συνάρτηση μιας ποσότητας (της θέσης του σωματιδίου) και της παραγώγου αυτής της ποσότητας (της ταχύτητας) και του χρόνου(μέσω των συντεταγμένων q) και είναι ίση με τη διαφορά: L = T-V όπου το T παριστάνει μια μαθηματική ποσότητα αντίστοιχη της κινητικής ενέργειας του σωματιδίου και το V είναι μια μαθηματική ποσότητα αντίστοιχη της δυναμικής ενέργειας του σωματιδίου (δε χρειάζεται να θεωρήσουμε ένα συγκεκριμένο σύστημα αναφοράς). Η εξίσωση αυτή δηλαδή θα έχει τη μορφή: $L(x, u, t)$.Για την απόδειξη της εξίσωσης Euler-Lagrange ξεκινάμε από τη δράση: $S = \int_a^b L(t, q(t), \dot{q(t)})dt$. Παίρνοντας τη μεταβολή πρώτης τάξεως αυτή της δράσης έχουμε:

$$\delta S = \int_a^b (\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta \dot{q})dt = 0 \Rightarrow \delta S = \int_a^b dt(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}})\delta q + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\right]_a^b = 0 \Rightarrow$$

$$\delta S = \int_a^b dt(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}})\delta q = 0$$

,

όπου στην προ-τελευταία σχέση μηδενίζουμε τον τελευταίο όρο διότι τα τα άκρα του q θεωρούνται αμετάβλητα, δηλαδή $\delta q = 0$ στα άκρα α και b.
Για να είναι μηδέν η τελευταία σχέση για κάθε αυθαίρετη μεταβολή του q θα πρέπει:

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0 \tag{2}$$

η οποία είναι η εξίσωση Euler-Lagrange.

2 Διανύσματα-Τανυστές

Τα διανύσματα είναι στοιχεία που ανήκουν σε ένα διανυσματικό χώρο. Εδώ θα αναφερόμαστε σε χωροχρονικά διανύσματα.

Ιδιότητες:
1) Τα διανύσματα είναι αναλλοίωτα κάτω από αλλαγές συντεταγμένων. Η διεύθυνση δηλαδή του διανύσματος δεν αλλάζει αν πάμε από καρτεσιανές σε σφαιρικές συντεταγμένες.
2) Όταν επιλέξουμε συντεταγμένες, τα διανύσματα έχουν συνιστώσες που ικανοποιούν ένασ χωροχρονικό νόμο μετασχηματισμού.
3) Σε έναν καμπυλομένο χωρόχρονο για να ορίσουμε τη διανυσματική απόσταση απόσταση μεταξύ δύο σημείων πρέπει να ορίσουμε ένα επίπεδο χώρο στον οποίο θα βρίσκονται τα διανύσματα. Αυτός ο χώρος ονομάζεται εφαπτομενικός χώρος της καμπυλωμένης επιφάνειας. Σε ένα σημείο στην επιφάνειας μιας σφαίρας για παράδειγμα, εφαπτομενικό είναι εκείνο το επίπεδο που στο σημείο επαφής με τη σφαίρα έχει την ίδια κλίση με τη σφαίρα. Δηλαδή σε κάθε διαφορετικό σημείο μιας σφαίρας ορίζεται και ένα διαφορετικό εφαπτομενικό επίπεδο. Στον επίπεδο χώρο, όλα τα εφαπτομενικά επίπεδα σε κάθε σημείο έχουν την ίδια κατεύθυνση κάτι που δε συμβαίνει στον καμπυλωμένο χωρόχρονο.
Όπως είδαμε, οι συντεταγμένες ενός διανύσματος μετασχηματίζονται(όπου εδώ χρησιμοποιούμε τη σύμβαση άθροισης του Einstein):

$$x^{\mu} \to x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\nu} x^{\nu}$$

.
Άρα οι συντεταγμένες του ds θα μετασχηματίζονται και αυτές σαν:

$$dx^{\mu} \to dx^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\nu} x^{\nu}$$

Το ds παραμένει αναλλοίωτο ($ds = dx^{\mu} e_{(\hat{\mu})}$) όπου $\hat{e}_{(\mu)}$ το διάνυσμα βάσης. Στο dx^{μ} το μ αφορά τις συντεταγμένες ενώ στο $\hat{e}_{(\mu)}$ το μ εκφράζει το ποιο διάνυσμα βάσης χρησιμοποιούμε. Άρα:

$$ds \to ds' = dx^{\mu'} e_{(\hat{\mu}')} = ds = \Lambda^{\mu'}_{\mu} dx^{\mu} e_{(\hat{\mu}')} = \Lambda^{\mu'}_{\mu} dx^{\mu} \Lambda^{\nu}_{\mu'} e_{(\hat{\nu})} = \Lambda^{\mu'}_{\mu} \Lambda^{\nu}_{\mu'} dx^{\mu} e_{(\hat{\nu})} = dx^{\mu} e_{(\hat{\mu})}$$

αφού το ds είναι αναλλοίωτο. Θα πρέπει δηλαδή: $\Lambda^{\mu'}_{\mu} \Lambda^{\nu}_{\mu'} = \delta^{\nu}_{\mu}$. Δηλαδή τα διανύσματα βάσης μετασχηματίζονται: $e_{(\hat{\mu})} \to e_{(\hat{\mu}')} = \Lambda^{\alpha}_{\mu'} e_{(\hat{\alpha})}$

Ένα τυχαίο διανύσμα γράφεται: $v = v^{\mu}\hat{e_{\mu}}$. Γνωρίζουμε πως το $\hat{e_{\mu}}$ μετασχηματίζεται και πως το υ είναι αναλλοίωτο κάτω από μετασχηματισμούς συντεταγμένων. Άρα μπορούμε να βρούμε πως μετασχηματίζονται οι συντεταγμένες. Θα έχουμε:

$$v = v^{\mu}\hat{e_{\mu}} \to v' = v^{\mu'}\hat{e_{\mu'}} = v' = v \Rightarrow v^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\mu} v^{\mu}$$

2.1 Συναλλοίωτα Διανύσματα

Τα συναλλοίωτα διανύσμτα είναι αναλλοίωτα, αλλά δεδομένου ενός συστήματος αναφοράς μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει συνιστωσών και συναλλοίωτων διανυσμάτων βάσης, ποσόστητες οι οποίες μετασχηματίζονται. Τα συναλλοίωτα(ή δυαδικά) διανύσματα, αν συνδυαστούν με διανύσματα μας δίνουν βαθμωτές ποσότητες. Δηλαδή, για ω δυαδικό διάνυσμα, a και b βαθμωτές ποσότητες και v και w διανύσματα θα ισχύει:

$$\omega(av + bw) = \omega(av) + \omega(bw) = \text{ βαθμωτή ποσότητα}$$

Δηλαδή θα ισχύει: $\theta^{\hat{(\mu)}} e_{\hat{(\nu)}} = \delta^{\mu}_{\nu}$ όπου $\delta^{\mu}_{\nu} = 1$ αν μ=ν και μηδέν σε κάθε άλλη περίπτωση για $\theta^{\hat{(\mu)}}$ το συναλλοίωτο διάνυσμα βάσης. Το δ^{μ}_{ν} είναι αναλλοίωτο, το $e_{\hat{(\nu)}}$ ξέρουμε πως μετασχηματίζεται άρα μπορούμε να βρούμε πως μετασχηματίζεται το συναλλοίωτο διάνυσμα βάσης $\theta^{\hat{(\mu)}}$. Θα έχουμε:

$$\theta^{\hat{(\mu)}} e_{\hat{(\nu)}} = \delta^{\mu}_{\nu} \to \theta^{\hat{(\mu')}} e_{\hat{(\nu')}} = \delta^{\mu'}_{\nu'} \Rightarrow \theta^{\hat{(\mu')}} \Lambda^{\nu}_{\nu'} e_{\hat{(\nu)}} = \delta^{\mu'}_{\nu'} \Rightarrow \Lambda^{\mu'}_{\mu} \theta^{\hat{(\mu)}} \Lambda^{\nu}_{\nu'} e_{\hat{(\nu)}} = \delta^{\mu'}_{\nu'} \Rightarrow$$

$$\theta^{\hat{(\mu)}} \to \theta^{\hat{(\mu')}} = \Lambda^{\mu'}_{\mu} \theta^{\hat{(\mu)}}$$

Άρα πλέον μπορούμε να δούμε πως μετασχηματίζονται οι συνιστώσες ενός συναλλοίωτου διανύσματος $w = w_{\mu}\theta^{\hat{(\mu)}}$. Ξέρουμε πως το w είναι αναλλοίωτο κάτω από μετασχηματισμούς συντεταγμένων, ξέρουμε πως μετασχηματίζεται το $\theta^{\hat{(\mu)}}$, άρα μπορούμε να βρούμε πως μετασχηματίζεται το w_μ. Καταλήγουμε ότι:

$$w_\mu \to w_{\mu'} = \Lambda^{\mu}_{\mu'} w_\mu$$

2.2 Εσωτερικό Γινόμενο

Αν w είναι ένα δυαδικό διάνυσμα και n ένα διάνυσμα έχουμε:

$$w(n) = w_\mu \theta^{(\hat{\mu})} n^\nu e_{(\hat{\nu})} = w_\mu n^\nu \theta^{(\hat{\mu})} e_{(\hat{\nu})} = w_\mu n^\nu \delta^\mu_\nu = w_\mu n^\mu = w_1 n^1 + w_2 n^2 + w_3 n^3 + ...$$

Μπορούμε να μετρέψουμε τις συνιστώσες ενός δυαδικού διανύσματος σε διάνυσμα και αντίστροφα χρησιμοποιώντας το δ του Kronecker. Στη γενική σχετικότητα η μετρική παίζει το ρόλο του δ. Δηλαδή θα ισχύει:

$$w^\mu = g^{\mu\nu} w_\nu$$

2.3 Τανυστές

Ένας τανυστής είναι μια απεικόνιση μιας συλλογής δυαδικών διανυσμάτων και διανυσμάτων στον χώρο των πραγματικών αριθμών R. Οτιδήποτε μετασχηματίζεται σαν τανυστής είναι ένας τανυστής. Έστω ένας τανυστής T^μ_ν. Θα ισχύει: $T^\mu_\nu A_\mu B^\nu =$ βαθμωτό. Ξέρουμε πως μετασχηματίζονται τα διανύσματα και τα δυαδικά διανύσματα και πως οι βαθμωτές ποσότητες είναι αναλλοίωτες άρα, μπορούμε να βρούμε πως μετασχηματίζεται ο τανυστής T^μ_ν. Θα έχουμε:

$$T^\mu_\nu A_\mu B^\nu \to T^{\mu'}_{\nu'} A_{\mu'} B^{\nu'} = T^{\mu'}_{\nu'} \Lambda^{\mu}_{\mu'} A_\mu \Lambda^{\nu'}_{\nu} B^\nu = T^{\mu'}_{\nu'} \Lambda^{\mu}_{\mu'} \Lambda^{\nu'}_{\nu} A_\mu B^\nu$$

Συγκρίνοντας τώρα την αρχική με την τελική σχέση μπορούμε να πούμε πως:

$$T^{\mu}_{\nu} = T^{\mu'}_{\nu'} \Lambda^{\mu}_{\mu'} \Lambda^{\nu'}_{\nu} \Rightarrow T^{\mu'}_{\nu'} = T^{\mu}_{\nu} \Lambda^{\mu'}_{\mu} \Lambda^{\nu}_{\nu'}$$

Για την παράγωγο των συντεταγμένων ενός διανύσματος γνωρίζουμε πως ισχύει: $\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}(x^{\nu}) = \delta^{\nu}_{\mu}$. Ξέρουμε πως μετασχηματίζεται το δ^{ν}_{μ} και οι συντεταγμένες x^{ν} άρα μπορούμε να δούμε πως η παράγωγος $\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$ μετασχηματίζεται σαν ένα δυαδικό διάνυσμα.

2.4 Σχετικιστική Κινηματική και Δυναμική

Θέλουμε να δούμε ποια είναι η τροχιά ενός σωματιδίου στις τρεις διαστάσεις. Γιαυτό, ορίζουμε ένα σύστημα συντεταγμένων, ώστε κάθε χρονική στιγμή t να έχουμε $x^i(t)$,$(x^i t, y, z)$, να γνωρίζουμε δηλαδή τη θέση του σωματιδίου. Μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα $u^i(t)$ που θα έχει το σωματίδιο παραγωγίζοντας τη θέση $x^i(t)$ ως προς το χρόνο t και την επιτάχυνση $a^i(t)$ παραγωγίζοντας την ταχύτητα $u^i(t)$.
Στις τέσσερις διαστάσεις έχουμε: $x^i \to x^{\mu}$, όπου μ = 0,1,2,3, δηλαδή θα έχουμε για παράδειγμα: $u^{\mu} = (u^0, u^1, u^2, u^3)$. Θα μπορούσε κανείς να θεωρήσει: $u^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{dt}$ σε αντιστοιχία με τις τρεις διαστάσεις. Όμως το dx^{μ} είναι διάνυσμα και το dt συντεταγμένη διανύσματος, οπότε το u^{μ} δε θα είναι ούτε διάνυσμα ούτε τανυστής, διότι δε θα μετασχηματίζεται ούτε σα διάνυσμα ούε σαν τανυστής.
Αν μπορούσαμε να κοιτάξουμε ένα ακίνητο σωμτίδιο σε ένα τριδιάστατο χώρο μια χρονική στιγμή θα το βλέπαμε σε ένα σημείο. Αν όμως μπορούσαμε να το δούμε στις 4 διαστάσεις του χωρόχρονου θα βλέπαμε ότι ακολουθεί μια τροχιά, μια κοσμική γραμμή. Το μήκος αυτής τη γραμμής είναι το ίδιο για όλους τους παρατηρητές, είναι δηλαδή αναλλοίωτο. Θα είναι:

$$s = \int \sqrt{|ds|^2} = \tau$$

,όπου $ds^2 = -cdt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$. Άρα αν: $x^i(t) \rightarrow x^\mu(\tau)$ τότε:
$u^i = \dfrac{dx^i}{dt} \rightarrow u^\mu = \dfrac{dx^\mu}{d\tau}$, όπου το dτ θα είναι βαθμωτό (αναλλοίωτο), άρα το u^μ είναι διάνυσμα, αφού μετασχηματίζεται σα διάνυσμα και συγκεκριμένα θα είναι το διάνυσμα της τετραταχύτητας.
Για $dx = dy = dz \Rightarrow d\tau = cdt$ στο σύστημα αναφοράς του σωματιδίου. Το dτ θα είναι ο ιδιόχρονος, ο χρόνος δηλαδή που θα μετράει το ίδιο το σωματίδιο για τον εαυτό του.
Για την τετραταχύτητα u^μ (όπου c=1) έχουμε:

$$u^\mu u_\mu = \eta_{\mu\nu} u^\nu u^\mu = \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{\eta_{\mu\nu} dx^\nu dx^\mu}{d\tau^2}$$

Όμως $d\tau = \sqrt{d\tau^2} = \sqrt{-ds^2}$. Άρα:

$$u^\mu u_\mu = \frac{\eta_{\mu\nu} dx^\nu dx^\mu}{-ds^2} = \frac{\eta_{\mu\nu} dx^\nu dx^\mu}{-\eta_{\mu\nu} dx^\nu dx^\mu} = -1 \Rightarrow$$

$$u^\mu u_\mu = -1 \tag{3}$$

Στις τρεις χωρικές διαστάσεις, αν κανείς υψώσει στο τετράγωνο την ταχύτητα, θα πάρει το μέτρο της στο τετράγωνο. Στη γενική σχετικότητα, παίρνουμε -1 ανεξαρτήτως του πόσο γρήγορα κινούμαστε. Αυτό συμβαίνει γιατί ενώ στις τρεις διαστάσεις παραμετροποιούμε την ταχύτητα με το χρόνο, στη γενική σχετικότητα παραμετροποιούμε την ταχύτητα ενός σώματος σε σχέση με την απόσταση που αυτό έχει διανύσει.
Θα εκφράσουμε τώρα τις συντεταγμένες της τετραταχύτητας. Αυτές θα εκφραστούν σε ένα σύστημα αναφοράς S(t,x,y,z). Θεωρούμε ακόμα ένα σύστημα αναφοράς S_{rest} στο οποίο το σωματίδιο είναι ακίνητο. Η χρονική συνιστώσα θα είναι: $u^0(\tau) = \dfrac{dt}{d\tau} = \gamma\dfrac{dt_{rest}}{d\tau} = \gamma\dfrac{d\tau}{d\tau} = \gamma$ από τον τύπο της διαστολής του χρόνου. Για τις χωρικές συντεταγμένες θα έχουμε: $u^i(\tau) = \dfrac{dx^i}{d\tau} = \dfrac{dx^i}{dt}\dfrac{dt}{d\tau} = \gamma u^i$. Δηλαδή έχουμε:

$$u^\mu = \begin{bmatrix} \gamma \\ \gamma u^i \end{bmatrix}$$

Το u^i είναι η ταχύτητα που βλέπει ένας παρατηρητής στο σύστημα S ενώ το u που υπεισέρχεται στο γ είναι η ταχύτητα με την οποία το σύστημα S_{rest} κινείται ως προς το σύστημα S. Αλλά το σύστημα S_{rest} κινείται όπως ακριβώς κινείται και το σωματίδιο. Άρα οι δύο αυτές ταχύτητες είναι οι ίδιες. Στο σύστημα ηρεμίας η τετραταχύτητα θα έχει τη μορφή:

$$u^\mu = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Δηλαδή στον τετραδιάστατο χωρόχρονο ένα ακίνητο σώμα θα συνεχίζει να κινείται. Θα κινείται χρονικά. Για την τετραορμή θα έχουμε:

$$p^i \to p^\mu = mu^\mu = m \begin{bmatrix} \gamma \\ \gamma u^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m\gamma \\ m\gamma u^i \end{bmatrix}$$

Για $u^2 << c^2 = 1$ μπορούμε να αναπτύξουμε σε σειρά Taylor τον παράγοντα γ, άρα: $\gamma = 1 + \dfrac{1}{2}u^2$. Δηλαδή, η τετραορμή θα γίνει:

$$p^\mu = \begin{bmatrix} m\gamma \\ m\gamma u^i \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} m + \frac{1}{2}mu^2 \\ mu^i \end{bmatrix}$$

Το mu^i αποτελεί τη μη σχετικιστική ορμή. Στη χρονική συνιστώσα της τετραταχύτητας βλέπουμε τον όρο: $\frac{1}{2}mu^2$ ο οποίος είναι η κινητική ενέργεια, και τον όρο μάζας m. Αν επαναφέρουμε την ταχύτητα του φωτός c που έχουμε θεωρήσει 1 θα έχουμε: $m \to mc^2$, που είναι η μάζα ηρεμίας. Μπορούμε δηλαδή να θεωρήσουμε: $m\gamma = E_{rela}$ και $m\gamma u^i = P^i_{rela}$. Για την τετραορμή θα ισχύει μια παρόμοια σχέση με αυτή της τετραταχύτητας δηλαδή:

$$p_\mu p^\mu = m^2 u_\mu u^\mu = -m^2 \tag{5}$$

Άρα θα έχουμε:

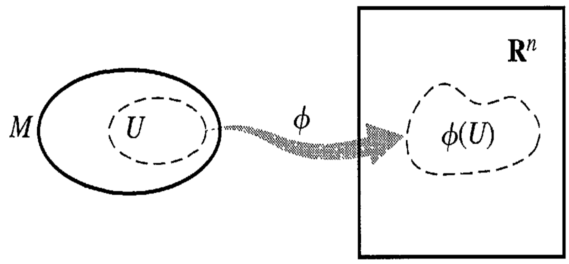
$$-m^2 = -E_{rest}^2 + P_{rest}^2 \Rightarrow -E_{rest}^2 = -m^2 + P_{rest}^2 \Rightarrow$$

$$E^2 = P^2 + m^2 \tag{6}$$

3 Στοιχεία Διαφορικής Γεωμετρίας - Καμπυλότητα

3.1 Πολλαπλότητες

Μια πολλαπλότητα είναι ένας τοπολογικός χώρος που πολύ κοντά σε κάθε σημείο της μοιάζει με τον Ευκλίδειο επίπεδο χώρο. Μια C^p n διάστατη πολλαπλότητα είναι ένα σύνολο M με ένα μέγιστο άτλα. Έστω τώρα μια πολλαπλότητα M. Χάρτης ονομάζεται ένα υποσύνολο της πολλαπλότητας M με μία ένα προς ένα απεικόνιση φ, η οποία παίρνει στοιχεία από το χάρτη U και τα αντιστοιχεί σε στοιχεία του R^n. Η απεικόνιση φ είναι ουσιαστικά μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το U και σύνολο τιμών τον R^n. Μια ένα προς ένα απεικόνιση αντιστοιχίζει κάθε στοιχείο του U σε ένα και μοναδικό στοιχείο του R^n, κάθε δηλαδή στοιχείο του U έχει ένα και μοναδικό προορισμό στον R^n. Ένας άτλας μιας πολλαπλότητας M είναι μια συλογή από χάρτες $\{U, \phi\}$, τέτοια ώστε, η ένωση όλων των χαρτών U να δίνει την πολλαπλότητα M.



Εικόνα 1: Μια πολλαπλότητα M με χάρτη U και απεικόνιση φ η οποία αντιστοιχεί στοιχεία από τον U στον R^n

Αν υπάρχει η p-οστή παράγωγος της απεικόνισης φ και αυτή η παράγωγος είναι συνεχής, τότε η φ καλείται C^p. Αν η φ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη με συνεχείς παραγώγους, τότε, η φ καλείται διαφορομορφισμός. Παραδείγματα συναρτήσεων που είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμες με συνεχείς παραγώγους είναι οι $cosx$, $sinx$, x^2 κ.λπ.

3.2 Η Συναλλοίωτη Παράγωγος

Ένας χώρος μπορεί να περιγράφεται από πολλές διαφορετικές μετρικές ανάλογα με το σύστημα συντεταγμένων που θα επιλέξουμε. Στο Ευκλείδειο R^3 χώρο η μετρική στο σύστημα συντεταγμένων {x,y,z} (καρτεσιανές συντεταγμένες) είναι:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και ισχύει ότι: $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$. Σε σφαιρικές συντεταγμένες όμως {r,ϑ,φ} είναι:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 sin^2\theta \end{bmatrix}$$

Παρόλο που η μορφή της μετρικής είναι πολύ διαφορετική και περιλαμβάνει τις συντεταγμένες r και ϑ ο χώρος είναι ο ίδιος επίπεδος ευκλείδιος R^3. Επίσης ισχύει ότι: $g_{\mu\nu} \neq g^{\mu\nu}$. Για τη σφαίρα S^2 η μετρική σε συντεταγμένες {ϑ,φ} παίρνει τη μορφή:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 sin^2\theta \end{bmatrix}$$

Η πιο πάνω μετρική περιγράφει τον καμπυλωμένο χώρο της S^2. Δηλαδή, η μορφή της μετρικής δε μπορεί να εγγυηθεί εάν ο χωρόχρονος που περιγράφει η μετρική είναι καμπυλωμένος ή όχι.

Ο κανόνας μετασχηματισμού ενός τανυστή και της παραγώγου είναι:

$$T^{\nu}_{\mu} \to T^{\nu'}_{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu}} T^{\nu}_{\mu}$$

$$\partial_{\mu} \to \partial_{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \partial_{\mu}$$

Είναι όμως η παράγωγος ενός τανυστή ένας τανυστής; Για να ισχύει αυτό, θα πρέπει η παράγωγος του τανυστή να μετασχηματίζεται σαν ένας τανυστής. Θα έχουμε:

$$\partial_\mu T^\nu \rightarrow \partial_{\mu'} T^{\nu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \partial_\mu \big(\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} T^\nu \big) = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \partial_\mu T^\nu + \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} T^\nu \partial_\mu \big(\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \big)$$

Ο πρώτος όρος βλέπουμε πως έχει τη μορφή ενός τανυστή αλλά ο δεύτερος όχι. Πρέπει λοιπόν να διορθώσουμε την παράγωγο ώστε να μετασχηματίζεται σαν τανυστής. Η διόρθωση αυτή θα οδηγήσει στην εισαγωγή μιας νέας παραγώγου της συναλλοίωτης παραγώγου και θα έχει τη μορφή:

$$\nabla_\mu = \partial_\mu + \Gamma^*_{\mu *} \tag{7}$$

με τα αστεράκια στο Γ να αποτελούν δείκτες οι οποίοι αποκτούν νόημα όταν η συναλλοίωτη παράγωγος δράσει πάνω σε έναν τανυστή/διάνυσμα/δυαδικό διάνυσμα. Το Γ καλείται συνοχή. Ιδιότητες της συναλλοίωτης παραγώγου:

α) Η παράγωγος ∇_μ θα πρέπει να υπακούει στον κανόνα του Leibniz.
β)Το $\nabla_\mu V^\nu$ θα είναι τανυστής.
γ) Η παράγωγος ∇_μ θα πρέπει να υπακούει στη σύμβαση άθροισης.
δ) Θα πρέπει: $\nabla_\mu \rightarrow \partial_\mu$ όταν η παράγωγος δρα πάνω σε βαθμωτές ποσότητες.
ε) Δεν υπάρχει στρέψη. Η συνοχή Γ θα είναι ελεύθερη στρέψης.
στ) Ισχύει η συμβατότητα μετρικής δηλαδή: $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$.

Οι δύο τελευταίες συνθήκες μας οδηγούν στη συνοχή Christoffel. Αν για παράδειγμα επιλέξουμε να επιτρέψουμε στρέψη, παίρνουμε μια άλλη συνοχή.

Για το α) θα έχουμε:

$$\nabla(T \times S) = (\nabla T) \times S + T \times (\nabla S)$$

Μπορούμε να δούμε πως για να ισχύει αυτό θα πρέπει:

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\alpha} V^\alpha \tag{8}$$

Το Γ έχεις τρεις δείκτες. Ο ένας εξ'αυτών είναι ίδιος με το δείκτη του τανυστή, ένας άλλος ίδιος με το δείκτη της παραγώγου και ο τρίτος θα υποδηλώνει άθροιση με τα στοιχεία του τανυστή. Για παράδειγμα, η χρονική παράγωγος στη σχέση (8) θα είναι: $\nabla_t V^\nu = \partial_t V^\nu + \Gamma^\nu_{t\alpha} V^\alpha$. Θα μπορούσε κανείς να πει πως το $\Gamma^\nu_{t\alpha}$ είναι ένας πίνακας που πολλαπλασιάζει ένα διάνυσμα. Το $\Gamma^\nu_{t\alpha} V^\alpha$ είναι η διόρθωση της απλής παραγώγου όταν δουλέυουμε σε καμπυλωμένο χωρόχρονο, όπου τα διανύσματα βάσης είναι διαφορετικά σε διαφορετικά σημεία του χωρόχρονου.

Για το β): Θέλουμε το $\nabla_\mu V^\nu$. Για να είναι τανυστής θα πρέπει να μετασχηματίζεται σαν τανυστής. Δηλαδή:

$$\nabla_\mu V^\nu \to \nabla_{\mu'} V^{\nu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \nabla_\mu V^\nu$$

Το $\nabla_{\mu'}$ περιέχει το $\Gamma^{\nu'}_{\mu'\alpha'}$ και το ∇_μ το $\Gamma^\nu_{\mu\alpha}$. Γνωρίζουμε πως τα ∂_μ και V^ν μετασχηματίζονται, άρα μπορούμε να δούμε πως μετασχηματίζεται η συνοχή Christoffel:

$$\Gamma^{\nu'}_{\mu'\lambda'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}} \Gamma^\nu_{\mu\lambda} - \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}} \frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^\mu \partial x^\lambda}$$

Βλέπουμε πως η συνοχή Γ δεν μετασχηματίζεται ως τανυστής αφού υπάρχει ο δεύτερος όρος στο δεύτερο μέρος της πιο πάνω εξίσωσης. Όμως, ούτε η απλή παράγωγος ενός τανυστη μετασχηματίζεται ως τανυστής. Η απλή παράγωγος που δρα σε ένα τανυστή μαζί με τη συνοχή όμως δημιουργούν ένα τανυστή καθώς, ο μετασχηματισμός της απλής παραγώγου γεννά έναν αντίστοιχο όρο με αυτόν που γεννά ο μετασχηματισμός της συνοχής και αυτοί οι δύο όροι φεύγουν, οπο΄τε η συναλλοίωτη παράγωγος μετασχηματίζεται ως τανυστής και άρα είναι ένας τανυστής.

Για το γ) θέλουμε η συναλλοίωτη παράγωγος να υπακούει σε μια σύμβαση άθροισης. Δηλαδή θέλουμε:

$\nabla_\mu(T^\lambda_\lambda) = (\nabla T)^\lambda_{\mu\lambda}$

Οπότε:

$\nabla_\mu(T^\nu_\lambda \delta^\lambda_\nu) = (\nabla_\mu T^\nu_\lambda)\delta^\lambda_\nu + T^\nu_\lambda(\nabla_\mu \delta^\lambda_\nu) = (\nabla_\mu T^\nu_\lambda)\delta^\lambda_\nu = (\nabla T)^\lambda_{\mu\lambda}$

Για να ισχύει η πιο πάνω σχέση θα πρέπει: $\nabla_\mu \delta^\lambda_\nu = 0$.

Για το δ) θέλουμε η συναλλοίωτη παράγωγος όταν δρα πάνω σε βαθμωτές ποσότητες

να δρα σαν την απλή παράγωγο, δηλαδή θέλουμε: $\nabla_\mu c = \partial_\mu c$.
Όπως έχουμε πει προηγουμένως, το γινόμενο ενός δυαδικού διανύσματος και ενός διανύσματος μας δίνει μια βαθμωτή ποσότητα. Αν δούμε πως δρα η συναλλοίωτη παράγωγος πάνω σε ένα δυαδικό διάνυσμα, θα μπορέσουμε να εξετάσουμε πως αυτή δρα πάνω σε τανυστές. Θα έχουμε:

$$\nabla_\mu(\omega_\lambda V^\lambda) = (\nabla_\mu \omega_\lambda)V^\lambda + \omega_\lambda(\nabla_\mu V^\lambda) \tag{9}$$

Η συναλλοίωτη παράγωγος θα δρα πάνω σε δυαδικό διάνυσμα όπως περίπου δρα και σε ένα διάνυσμα. Μπορούμε δηλαδή να θεωρήσουμε πως:

$\nabla_\mu \omega_\lambda = (\partial_\mu \omega_\lambda) + \Gamma^{\hat{\beta}}_{\mu\lambda}\omega_\beta$. Άρα:

$$(\partial_\mu \omega_\lambda + \Gamma^{\hat{\beta}}_{\mu\lambda}\omega_\beta)V^\lambda + \omega_\lambda(\partial_\mu V^\lambda + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}V^\nu) =$$

$$\omega_\lambda(\partial_\mu V^\lambda) + (\partial_\mu \omega_\lambda)V^\lambda + (\Gamma^{\hat{\beta}}_{\mu\lambda}\omega_\beta)V^\lambda + \omega_\lambda(\Gamma^\lambda_{\mu\nu}V^\nu)$$

Στην παραπάνω σχέση θέλουμε να μείνουν μόνο οι μερικές παράγωγοι, δηλαδή θέλουμε:

$(\Gamma^{\hat{\beta}}_{\mu\lambda}\omega_\beta)V^\lambda + \omega_\lambda(\Gamma^\lambda_{\mu\nu}V^\nu) = 0$

$\Gamma^{\hat{\beta}}_{\mu\lambda}\omega_\beta V^\lambda + \omega_\lambda \Gamma^\lambda_{\mu\nu}V^\nu = 0 \Rightarrow \Gamma^{\hat{\beta}}_{\mu\lambda}\omega_\beta V^\lambda = -\omega_\lambda \Gamma^\lambda_{\mu\nu}V^\nu \Rightarrow \Gamma^{\hat{\beta}}_{\mu\lambda}\omega_\beta V^\lambda = -\Gamma^\beta_{\mu\lambda}\omega_\beta V^\lambda$

Δηλαδή βλέπουμε ότι:

$$\Gamma^{\hat{\beta}}_{\mu\lambda} = -\Gamma^\beta_{\mu\lambda} \tag{10}$$

Άρα:

$$\nabla_\mu \omega_\lambda = \partial_\mu \omega_\lambda - \Gamma^\alpha_{\mu\lambda}\omega_\alpha \tag{11}$$

$$\nabla_\mu V^\lambda = \partial_\mu V^\lambda + \Gamma^\lambda_{\mu\alpha}V^\alpha \tag{12}$$

$$\nabla_\mu T^\beta_\alpha = \partial_\mu T^\beta_\alpha + \Gamma^\beta_{\mu\kappa} T^\kappa_\alpha - \Gamma^\delta_{\mu\alpha} T^\beta_\delta \tag{13}$$

Στα ε) και στ) θα δείξουμε πως η συνοχή Γ είναι η συνοχή Christoffel. Έστω ότι έχουμε δύο διαφορετικές συνοχές, τη $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ και $\hat{\Gamma^\lambda_{\mu\nu}}$. Η δαφορά δύο τανυστών θα είναι τανυστής. Δηλαδή για δύο συναλλοίωτες παραγώγους θα ισχύει: $\nabla_\mu V^\lambda - \hat{\nabla_\mu} V^\lambda \rightarrow$ τανυστής. Θα έχουμε:

$$\nabla_\mu V^\lambda - \hat{\nabla_\mu} V^\lambda = \partial_\mu V^\lambda + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} V^\nu - \partial_\mu V^\lambda - \hat{\Gamma^\lambda_{\mu\nu}} V^\nu = (\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \hat{\Gamma^\lambda_{\mu\nu}}) V^\nu$$

Αφού η διαφορά των συναλλοίωτων παραγώγων είναι τανυστής θα πρέπει και η διαφορά μεταξύ δύο συνοχών να είναι τανυστής. Τώρα, ξεκινώντας από μια συνοχή Γ, μπορούμε να ορίσουμε τον τανυστή στρέψης $T^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} = 2\Gamma^\lambda_{[\mu\nu]}$. Γενικά, ισχύει ότι: $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\Gamma^\lambda_{[\mu\nu]} + \frac{1}{2}\Gamma^\lambda_{(\mu\nu)}$. Δηλαδή κάθε συνοχή μπορούμε να τη γράψουμε σαν το άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού μέρους. Το αντισυμμετρικό μέρος είναι τανυστής, αφού προέρχεται από τη διαφορά δύο συνοχών. Το πρόβλημα είναι πως εμείς χρειαζόμαστε κάτι που δεν είναι τανυστής(δηλαδή δε μετασχηματίζεται ως τανυστής) για να μπορεί η συναλλοίωτη παράγωγος να μετασχηματίζεται ως τανυστής. Άρα το συμμετρικό μέρος της συνοχής δε μας κάνει και γιαυτό το λόγο θα χρησιμοποιούμε μόνο το αντισυμμετρικό μέρος. Με δυο λόγια: **Η συνοχή είναι συμμετρική σε εναλλαγές των κάτω δεικτών.**

Το στ) θα μας δώσει τη μορφή της συνοχής. Θέλουμε η συνοχή να είναι συναλλοίωτα σταθερή: $\nabla_\mu g_{\lambda\rho} = 0$. Αυτό θα μας οδηγήσει στη συνοχή Christoffel ή σύμβολα Christoffel. Εναλλάσσοντας κυκλικά τους τρεις δείκτες της εξίσωσης παίρνουμε τρεις εξισώσεις. Θα έχουμε:

$$\nabla_\rho g_{\mu\nu} = \partial_\rho g_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\rho\mu} g_{\lambda\nu} - \Gamma^\lambda_{\rho\nu} g_{\mu\lambda} = 0 \tag{14}$$

$$\nabla_\mu g_{\nu\rho} = \partial_\mu g_{\nu\rho} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} g_{\lambda\rho} - \Gamma^\lambda_{\mu\rho} g_{\nu\lambda} = 0 \tag{15}$$

$$\nabla_\nu g_{\rho\mu} = \partial_\nu g_{\rho\mu} - \Gamma^\lambda_{\nu\rho} g_{\lambda\mu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} g_{\rho\lambda} = 0 \tag{16}$$

Όμως η συνοχή και η μετρική είναι συμμετρικές στις εναλλαγές των κάτω δεικτών, οπότε αφαιρώντας από την (14) τις (15) και (16) παίρνουμε:

$$\Gamma^\kappa_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\kappa\rho} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) \tag{17}$$

Τα σύβμολα Christoffel δεν είναι τανυστές, όπως και περιμέναμε, αφού περιέχουν απλές παραγώγους που δε μετασχηματίζονται ως τανυστές. Για ένα τετραδιάστατο χωρόχρονο τα σύμβολα Christoffel είναι 64.
Η συναλλοίωτη παράγωγος μας δείχνει πως αλλάζει ένα διάνυμσα σε διαφορετικά σημεία του χωρόχρονου. Το κομμάτι της με την απλή παράγωγο μας δείχνει πως οι συνιστώσες του διανύσματος αλλάζουν σε διαφορετικά σημεία του χωρόχρονου και το το κομμάτι με το σύμβολο Christoffel μας δείχνει πως η βάση των διανυσμάτων αλλάζει σε διαφορετικά σημεία του χωρόχρονου.

3.3 Η Παράλληλη Μεταφορά - Γεωδαιτικές Εξισώσεις

Η παράγωγος ενός διανύσματος V^v

$$\partial_\mu V^v|_{x^\mu} = \lim_{\varepsilon^\mu \to 0} \frac{V^v(x^\mu + \varepsilon^\mu) - V^v(x^\mu)}{\varepsilon^\mu}$$

δεν έχει νόημα καθώς τα διανύσματα $V^v(x^\mu + \varepsilon^\mu)$ και $V^v(x^\mu)$ μπορεί να βρίσκονται σε διαφορετικούς εφαπτομενικούς χώρους, οπότε για να τα αφαιρέσουμε θα πρέπει να βρίσκονται στον ίδιο εφαπτομενικό χώρο. Ωστόσο η συναλλοίωτη παράγωγος:

$$\nabla_\mu V^v|_{x^\mu} = \lim_{\varepsilon^\mu \to 0} \frac{V^v_{//}(x^\mu + \varepsilon^\mu) - V^v(x^\mu)}{\varepsilon^\mu}$$

"παίρνει" την τιμή του διανύσματας V στο $x^\mu + \varepsilon^\mu$ και το μεταφέρει παράλληλα στο x^μ, ώστε η δαφορά τους να έχει νόημα.

Έστω τώρα, ότι θέλουμε να μεταφέρουμε παράλληλα ένα διάνυσμα V σε μια τροχιά $x^\mu(\lambda)$. Η κατευθυνόμενη παράγωγος θα έχει τη μορφή:

$$\frac{D}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda}\nabla_\mu = \frac{d}{d\lambda} + \Gamma^*_{\mu *}\frac{dx^\mu}{d\lambda}$$

όπου: $\dfrac{d}{d\lambda} = \dfrac{dx^\mu}{d\lambda}\partial_\mu$. Αφού θέλουμε να μεταφέρουμε παράλληλα το διάνυσμα, θέλουμε η κατευθυνόμενη παράγωγος να είναι μηδέν. Δηλαδή:

$$\frac{D}{d\lambda}V^v = 0 \Rightarrow \frac{dV^v}{d\lambda} + \Gamma^v_{\mu\rho}\frac{dx^\mu}{d\lambda}V^\rho = 0$$

Τώρα, για $V^v = \dfrac{dx^v}{d\lambda}$ έχουμε:

$$\frac{d^2x^v}{d\lambda^2} + \Gamma^v_{\mu\rho}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\rho}{d\lambda} = 0 \tag{18}$$

Η εξίσωση (18) καλείται γεωδαιτική εξίσωση. Από την άποψη της κλασικής μηχανικής, οι γεωδαισίακές μπορούν να θεωρηθούν ως τροχιές ελεύθερων σωματιδίων. Η γεωδαισιακή αποτελεί μια γενίκευση της "ευθείας γραμμής" σε καμπυλωμένους χώρους. Βλέπουμε πως οι εξισώσεις αυτές είναι διαφορικές εξισώσεις δευτέρας τάξεως και χρειάζονται δύο συνοριακές συνθήκες για να λυθούν, όπως για παράδειγμα, αρχική και τελική θέση του σωματιδίου ή αρχική θέση και ταχύτητα του σωματιδίου κ.λπ.
Έστω τώρα πως δουλεύουμε στον R^3 (x,y,z συντεταγμένες). Ο Ευκλείδειος αυτός χώρος δεν είναι καμπύλος, η μετρική είναι σταθερή(Δέλτα του Kronecker) και συνεπώς τα σύμβολα Christoffel που περιέχουν παραγώγους της μετρικής θα είναι μηδέν. Δηλαδή η εξίσωση (18) γίνεται:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} = 0 \tag{19}$$

,η οποία εξίσωση (19) έχει λύσεις:

$$x^\mu(\lambda) = \lambda\varepsilon^\mu + x_0^\mu \tag{20}$$

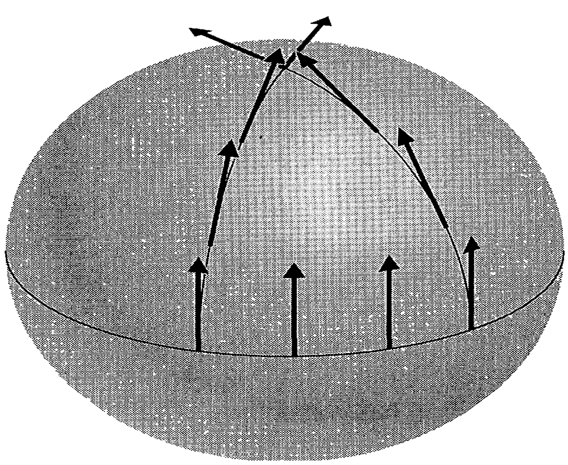
,όπου τα ε^μ και x_0^μ αποτελούν σταθερές που καθορίζονται από τις συνοριακές συνθήκες. Η εξίσωση (20) αποτελεί μία εξίσωση ευθείας, η οποία αποτελεί και τη συντομότερη απόσταση μεταξύ δύο σημείων στον R^3.

3.4 Καμπυλότητα

Πως μπορούμε να αποφανθούμε αν ένας χώρος είναι καμπυλωμένος; Κανείς θα μπορούσε να θεωρήσει πως η μετρική μας δείχνει αν ένας χώρος είναι καμπύλος. Ωστόσο, όπως δείξαμε και πιο πριν, μπορεί η μετρική να μοιάζει "περίεργη" και παρόλα αυτά ο χώρος να είναι επίπεδος. Επίσης, όπως είπαμε και πιο πριν τα σύμβολα Christoffel είναι μηδέν(σε καρτεσιανές συντεταγμένες) στον R^3. Άρα θα μπορούσε κάποιος να θεωρήσει πως όταν τα σύμβολα Christoffel είναι μηδέν, ο χώρος είναι επίπεδος. Όμως τα σύμβολα Christoffel δεν έιναι τανυστές, αφού δε μετασχηματίζονται ως τέτοιοι. Τα σύμβολα Christoffel μετασχηματίζονται:

$$\Gamma^{\nu'}_{\mu'\lambda'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}}\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} - \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}}\frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\lambda}}$$

Οπότε, αν τα σύμβολα Christoffel σε ένα σύστημα συντεταγμένων είναι μηδέν, δηλαδή στην πιο πάνω εξίσωση το πρώτο μέρος του δεύτερου μέλους μηδενίζεται αφού $\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} = 0$ δε θα είναι και τα $\Gamma^{\nu'}_{\mu'\lambda'}$ μηδέν, αφού υπάρχει το κομμάτι: $\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}}\frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^{\mu}\partial x^{\lambda}}$. Γενικά κάθε τανυστής που είναι μηδέν σε ένα σύστημα συντεταγμένων θα είναι και σε κάθε άλλο, γιαυτό και βολεύει να δουλέυουμε με αυτούς. Επίσης ακόμα και σε ένα καμπυλωμένο χώρο αν εστιάσουμε πάρα πολύ σε αυτόν, ο χώρος γίνεται ευκλείδειος και τα σύμβολα Christoffel μηδενίζονται και η μετρική γίνεται το Δέλτα του Kronecker.



Εικόνα 2: Η παράλληλη μεταφορά ενός διανύσματος σε ένα καμπύλο χώρο.

Αν μεταφέρουμε ένα διάνυσμα κατά μήκος μιας κλειστής καμπύλης σε ένα καμπυλωμένο χώρο τότε το διάνυσμα επιστρέφει στο αρχικό σημείο αλλαγμένο. Συνεπώς, αυτό το γεγονός, η σύγκριση του αρχικού και του τελικού διανύσματος μετά από μια παράλληλη μεταφορά μπορεί να μας πει εάν ο χώρος μας είναι καμπύλος. Γιαυτό το λόγο, θα υπολογίσουμε τον μεταθέτη δύο συναλλοίωτων παραγώγων ενός διανύσματος. Θα έχουμε:

$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]V^\lambda = \nabla_\mu \nabla_\nu V^\lambda - \nabla_\nu \nabla_\mu V^\lambda$

Για το $\nabla_\mu \nabla_\nu V^\lambda$ έχουμε:

$$\nabla_\mu \nabla_\nu V^\lambda = \partial_\mu(\nabla_\nu V^\lambda) - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\nabla_\alpha V^\lambda + \Gamma^\lambda_{\mu\kappa}\nabla_\nu V^\kappa =$$
$$= \partial_\mu(\partial_\nu V^\lambda + \Gamma^\lambda_{\nu\delta}V^\delta) - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}(\partial_\alpha V^\lambda + \Gamma^\lambda_{\alpha\sigma}V^\sigma) + \Gamma^\lambda_{\mu\kappa}(\partial_\nu V^\kappa + \Gamma^\kappa_{\nu\varepsilon}V^\varepsilon) =$$
$$= \partial_\mu\partial_\nu V^\lambda + (\partial_\mu\Gamma^\lambda_{\nu\delta})V^\delta + \Gamma^\lambda_{\nu\delta}\partial_\mu V^\delta - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\partial_\alpha V^\lambda - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\alpha\sigma}V^\sigma + \Gamma^\lambda_{\mu\kappa}\partial_\nu V^\kappa + \Gamma^\lambda_{\mu\kappa}\Gamma^\kappa_{\nu\varepsilon}V^\varepsilon \Rightarrow$$
$$\nabla_\mu \nabla_\nu V^\lambda =$$

$$\partial_\mu\partial_\nu V^\lambda + (\partial_\mu\Gamma^\lambda_{\nu\delta})V^\delta + \Gamma^\lambda_{\nu\delta}\partial_\mu V^\delta - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\partial_\alpha V^\lambda - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\alpha\sigma}V^\sigma + \Gamma^\lambda_{\mu\kappa}\partial_\nu V^\kappa + \Gamma^\lambda_{\mu\kappa}\Gamma^\kappa_{\nu\varepsilon}V^\varepsilon \quad (21)$$

Άρα, για το $\nabla_\nu \nabla_\mu V^\lambda$ θα έχουμε μια αντίστοιχη σχέση:

$\nabla_\nu \nabla_\mu V^\lambda =$

$$= \partial_\nu\partial_\mu V^\lambda + (\partial_\nu\Gamma^\lambda_{\mu\delta})V^\delta + \Gamma^\lambda_{\mu\delta}\partial_\nu V^\delta - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\partial_\alpha V^\lambda - \Gamma^\alpha_{\nu\mu}\Gamma^\lambda_{\alpha\sigma}V^\sigma + \Gamma^\lambda_{\nu\kappa}\partial_\mu V^\kappa + \Gamma^\lambda_{\nu\kappa}\Gamma^\kappa_{\mu\varepsilon}V^\varepsilon \quad (22)$$

Αφαιρώντας τώρα την (22) από την (21) και αφού όπως προείπαμε τα σύμβολα Christoffel είναι συμμετρικά ως προς την αλλαγή των κάτω δεικτών αρκετοί όροι φεύγουν. Επίσης όροι της μορφής: $\Gamma^\lambda_{\mu\kappa}\partial_\nu V^\kappa$, $\Gamma^\lambda_{\mu\delta}\partial_\nu V^\delta$ ακυρώνονται αν αλλάξουμε τους βουβούς δείκτες. Οπότε καταλήγουμε:

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]V^\lambda = [\partial_\mu\Gamma^\lambda_{\nu\delta} - \partial_\nu\Gamma^\lambda_{\mu\delta} + \Gamma^\lambda_{\mu\kappa}\Gamma^\kappa_{\nu\delta} - \Gamma^\lambda_{\nu\kappa}\Gamma^\kappa_{\mu\delta}]V^\delta = R^\lambda_{\delta\mu\nu} \quad (23)$$

Η πιο πάνω εξίσωση (23) καλείται τανυστής του Riemann. Ειναι τανυστής καθώς δημιουργήθκε από διαφορά τανυστών. Ο τανυστής αυτός έχει 4 δείκτες δηλαδή σε ένα τετραδιάστατο χωρο-χωρόχρονο θα έχει 256 συνιστώσες. Ωστόσο έχει αρκετές συμμετρίες και αυτό περιορίζει κατά πολύ τις ανεξάρτητες συνιστώσες που πρέπει εν τέλει κανείς να υπολογίσει. Αρχικά θα ορίσουμε το: $R_{\alpha\delta\mu\nu} = g_{\alpha\lambda} R^{\lambda}_{\delta\mu\nu}$. Οι συμμετρίες είναι οι ακόλουθες:

1) $R_{\alpha\delta\mu\nu} = -R_{\alpha\delta\nu\mu}$ (προέρχεται από: $[\nabla_\mu, \nabla_\nu] = -[\nabla_\nu, \nabla_\mu]$)
2) $R_{\alpha\delta\mu\nu} = -R_{\delta\alpha\mu\nu}$
3) $R_{\alpha\delta\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\delta}$
4) $R_{\alpha\delta\mu\nu} + R_{\alpha\mu\nu\delta} + R_{\alpha\nu\mu\delta}$

Αν ο τανυστής του Riemann είναι μηδέν τότε ο χώρος είναι επίπεδος. Επίσης, από τον τανυστή του Riemann μπορούμε να ορίσουμε και άλλες ποσότητες που εκφράζουν καμπυλότητα, όπως είναι ο τανυστής του Ricci: $R^{\lambda}_{\delta\lambda\nu} = g^{\lambda\alpha} R_{\alpha\delta\lambda\nu} = R_{\delta\nu}$. Ο τανυστής του Ricci είναι συμμετρικός στις εναλλαγές των κάτω δεικτών.
Τί μας δείχνουν όμως οι παραπάνω ποσότητες για την καμπύλωση του χωρόχρονου; Αν ο τανυστής του Riemann μηδενίζεται ο χωρόχρονος είναι επίπεδος. Τέτοιοι χώροι είναι ο Ευκλείδειος R^n, ο Minkowski. Αν ο τανυστής του Ricci είναι μηδέν τότε λέμε ότι ο χώρος είναι επίπεδος κατά Ricci. Ένας τέτοιος χώρος είναι ο 10διάστατος χώρος $AdS^5 \times S^5$.Μπορούμε επίσης να κατασκευάσουμε και το βαθμωτό Ricci: $R = g^{\delta\nu} R_{\delta\nu}$. Το R=0 δε μας δίνει ιδιαίτερες πληροφορίες για την καμπυλότητα ενός χώρου. Ωστόσο σε συγκεκριμένους μέγιστα συμμετρικούς χώρους, μπορούμε να αποφανθούμε για την καμπυλότητα του χώρου από το βαθμωτό αυτό. Τέλος, μπορούμε να θεωρήσουμε και το βαθμωτό του Kretschmann. Το βαθμωτό αυτό είναι ουσιαστικά η νόρμα του τανυστή του Riemann και δίνεται από τη σχέση: $K = R_{\lambda\delta\mu\nu} R^{\lambda\delta\mu\nu}$. Από αυτό για χώρους κενούς από ενέργεια μπορούμε να αποφανθούμε για την καμπύλωση του χωρόχρονου και παρακάτω θα το χρησιμοποιήσουμε για να αποδείξουμε πως για r=0 η μελανή οπή Schwarzschild παρουσιάζει πραγματική ιδιομορφία, ενώ το r=2GM αποτελεί μια ιδομορφία των συντεταγμένων με τις οποίες εκφράζεαι η μετρική.

3.5 Ο Τανυστής του Einstein

Για την εξίσωση του Einstein ξεκινάμε από τη δεύτερη ταυτότητα του Bianchi, η οποία είναι:

$$\nabla_\sigma R_{\alpha\beta\gamma\delta} + \nabla_\gamma R_{\alpha\beta\delta\sigma} + \nabla_\delta R_{\alpha\beta\sigma\gamma} = 0 \tag{24}$$

Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση (24) με $g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta}$ και χρησιμοποιώντας τη συμβατότητα μετρικής, δηλαδή: $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$ έχουμε:

$$\nabla_\sigma R_{\alpha\beta\gamma\delta} + \nabla_\gamma R_{\alpha\beta\delta\sigma} + \nabla_\delta R_{\alpha\beta\sigma\gamma} = 0 \Rightarrow$$

$$\nabla_\sigma (g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta}) + \nabla_\gamma (g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta}R_{\alpha\beta\delta\sigma}) + \nabla_\delta (g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta}R_{\alpha\beta\sigma\gamma}) = 0 \Rightarrow$$

$$\nabla_\sigma R^{\gamma\delta}_{\gamma\delta} + \nabla_\gamma (-g^{\alpha\gamma}R^{\delta}_{\alpha\delta\sigma}) + \nabla_\delta (-g^{\beta\delta}R^{\gamma}_{\beta\gamma\sigma}) = 0 \Rightarrow$$

$$\nabla_\sigma R + \nabla_\gamma (-g^{\alpha\gamma}R_{\alpha\sigma}) + \nabla_\delta (-g^{\beta\delta}R_{\beta\sigma}) = 0 \Rightarrow$$

Οι δείκτες γ και α στον δεύτερο όρο της πιο πάνω σχέσης είναι βοβοί δείκτες αφού αθροίζονται, οπότε μπορούμε να θέσουμε όπου α το β και όπου γ το δ. Άρα η σχέση αυτή γίνεται:

$$\nabla_\sigma R - 2\nabla_\delta g^{\beta\delta}R_{\beta\sigma} = 0 \Rightarrow$$

$$\nabla_\delta (g^{\delta\beta}g_{\beta\sigma}R) - 2\nabla_\delta g^{\beta\delta}R_{\beta\sigma} = 0 \Rightarrow$$

$$\nabla_\delta (g^{\delta\beta}g_{\beta\sigma}R - 2g^{\beta\delta}R_{\beta\sigma}) = 0 \Rightarrow$$

$$\nabla_\delta g^{\delta\beta}(g_{\beta\sigma}R - 2R_{\beta\sigma}) = 0 \Rightarrow$$

Ορίζοντας $-2G_{\beta\sigma} = g_{\beta\sigma}R - 2R_{\beta\sigma} \Rightarrow$

$$\nabla_\delta g^{\delta\beta}(2G_{\beta\sigma}) = 0 \Rightarrow \nabla^\beta G_{\beta\sigma} = 0$$

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0 \tag{25}$$

Η εξίσωση (25) είναι η εξίσωση του Einstein για ένα κενό από ενέργεια και ορμή χωρόχρονο και ο $G_{\mu\nu}$ είναι ο τανυστής του Einstein. Σε περίπτωση που θεωρήσει κανείς μη μηδενική ενέργεια τότε το δεύτερο μέλος της εξίσωσης αυτής αντικαθίσταται με τον τανυστή ορμής ενέργειας, δηλαδή η εξίσωση γίνεται:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = T_{\mu\nu} \tag{26}$$

4 Η Λύση στο Κενό

4.1 Η Λύση Schwarzschild

Εδώ, παρουσιάζεται μια αναλυτική απόδειξη της λύσης του Schwarzschild. Η λύση του Schwarzschild περιγράφει την καμπύλωση του χωρόχρονου γύρω από μια σφαιρική κατανομή μάζας M. Η σφαιρική αυτή κατανομή μπορεί να είναι μια μαύρη τρύπα, ένας πλανήτης, ένας αστέρας. Θωρούμε πως αυτή η σφαιρική κατανομή μάζας δεν περιστρέφεται και αναζητούμε τη μετρική που περιγράφει τη γεωμετρία του χωρόχρονου έξω από αυτή τη μάζα.

Θα αποδείξουμε τη μορφή που θα έχει η μετρική χρησιμοποιώντας επιχειρήματα συμμετρίας. Σε ενα στατικό χωρόχρονο οι συνιστώσες της μετρικής είναι ανεξάρτητες του χρόνου και η ελάχιστη απόσταση μεταξύ δύο σημείων ,το στοιχείο μήκους ds^2, είναι αναλλοίωτο κάτω από μετασχηματισμούς $t \to -t$. 'Ενας χωρόχρονος που ικανοποιεί την πρώτη αλλά όχι τη δεύτερη από τις δύο πιο πάνω συνθήκες ονομάζεται στάσιμος χωρόχρονος.
Η μετρική που θα περιγράφει τη γεωμετρία Schwarzschild θα έχει την παρακάτω μορφή:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} g_{tt} & g_{tr} & g_{t\theta} & g_{t\phi} \\ g_{rt} & g_{rr} & g_{r\theta} & g_{r\phi} \\ g_{\theta t} & g_{\theta r} & g_{\theta\theta} & g_{\theta\phi} \\ g_{\phi t} & g_{\phi r} & g_{\phi\theta} & g_{\phi\phi} \end{bmatrix}$$

όπου τα t,r,ϑ,φ είναι οι σφαιρικές συντεταγμένες του χωρόχρονου. Το στοιχείο μήκους θα δίνεται από τον τύπο:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{27}$$

όπου τα μ και ν παίρνουν τις τιμές t,r,ϑ,φ. Η ανεξαρτησία των συνιστωσών της μετρικής από το χρόνο t συνεπάγεται: $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial t} = 0$. Η στατική μορφή του χωρόχρονου απαιτεί και την αναλοιώτητα του στοιχείου μήκους κάτω από χρονική αντιστροφή. Δηλαδή, μπορούμε στο στοιχείο μήκους να έχουμε όρους της μορφής $dtdt$ καθώς για $t \to -t$ παίρνουμε $dtdt$. Αντιθέτως, δε μπορούμε να έχουμε όρους της μορφής $dtdk$, όπου k = r,ϑ,φ, καθώς για $t \to -t$ παίρνουμε: $-dtdk$. Οπότε έχουμε την μετρική:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} g_{tt} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{rr} & g_{r\theta} & g_{r\phi} \\ 0 & g_{\theta r} & g_{\theta\theta} & g_{\theta\phi} \\ 0 & g_{\phi r} & g_{\phi\theta} & g_{\phi\phi} \end{bmatrix}$$

Αντίστοιχα στην αντιστροφή της ακτινικής συντεταγμένης $r \to -r$ έχουμε: $drdr \to drdr$, αλλά $drd\theta \to -drd\theta$ και $drd\phi \to -drd\phi$, οπότε η μετρική παίρνει τη μορφή:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} g_{tt} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{\theta\theta} & g_{\theta\phi} \\ 0 & 0 & g_{\phi\theta} & g_{\phi\phi} \end{bmatrix}$$

Τέλος για την αντιστροφή των γωνιών ϑ και φ έχουμε, σε αντιστοιχία με προηγουμένως, αναλλοίωτους μόνο τους όρους: $d\theta d\theta$ και $d\phi d\phi$. Άρα έχουμε την τελική μορφή της μετρικής η οποία είναι:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} g_{tt} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{\phi\phi} \end{bmatrix}$$

Οπότε η μετρική μας έχει τη μορφή: $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = g_{tt}dt^2 + g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2 + g_{\phi\phi}d\phi^2$. Σκοπός μας είναι να προσδιορίσουμε τα στοιχεία της μετρικής λύνοντας την εξίσωση του

Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu} = 0 \tag{28}$$

αφού αναζητούμε τη λύση στο κενό, σε ένα χώρο που δεν περιέχει ενέργεια και ορμή. Για να λύσουμε την εξίσωση αυτή θα πρέπει να υπολογίσουμε την καμπυλότητα Ricci και κατά συνέπεια τα σύμβολα Christoffel. Η σχετικά απλή διαγώνια μορφή της μετρικής και η απουσία τανυστή ορμής-ενέργειας διευκολύνει πάρα πολύ τους υπολογισμούς. Στους πιο κάτω υπολογισμούς ο τόνος " $'$ " συμβολίζει την παραγώγιση ως προς την ακτινική συνιστώσα r. Θεωρούμε λοιπόν την ακόλουθη μορφή μετρικής:

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2sin^2\theta d\phi^2$$

Τα σύμβολα Christoffel υπολογίζονται από τον παρακάτω τύπο:

$$\Gamma^{\delta}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}g^{\alpha\delta}(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}})$$

Για α=δ=r τα μη μηδενικά σύμβολα Christoffel υπολογίζονται:

$$\Gamma^{r}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}g^{rr}(\frac{\partial g_{r\beta}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial g_{r\gamma}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial r})$$

Για β=γ=t: $\Gamma^r_{tt} = \frac{1}{2}g^{rr}(\frac{\partial g_{rt}}{\partial t} + \frac{\partial g_{rt}}{\partial t} - \frac{\partial g_{tt}}{\partial r}) \Rightarrow \Gamma^r_{tt} = \frac{1}{2}g^{rr}(-\frac{\partial g_{tt}}{\partial r}) = \frac{A'(r)}{2B(r)}$

Για β=γ=r: $\Gamma^r_{rr} = \frac{1}{2}g^{rr}(\frac{\partial g_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial g_{rr}}{\partial r} - \frac{\partial g_{rr}}{\partial r}) \Rightarrow \Gamma^r_{rr} = \frac{1}{2}g^{rr}(\frac{\partial g_{rr}}{\partial r}) = \frac{B'(r)}{2B(r)}$

Για β=γ=ϑ: $\Gamma^r_{\theta\theta} = \frac{1}{2}g^{rr}(\frac{\partial g_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial g_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r}) \Rightarrow \Gamma^r_{\theta\theta} = \frac{1}{2}g^{rr}(\frac{-\partial g_{\theta\theta}}{\partial r}) = \frac{-2r}{2B(r)} = \frac{-r}{B(r)}$

Για β=γ=φ: $\Gamma^r_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2}g^{rr}(\frac{\partial g_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial g_{r\varphi}}{\partial \varphi} - \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r}) \Rightarrow \Gamma^r_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2}g^{rr}(\frac{-\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r}) = \frac{-2rsin^2\theta}{2B(r)} =$
$\frac{-rsin^2\theta}{B(r)}$

Για α=δ=t τα μη μηδενικά σύμβολα Christoffel είναι τα εξής:

$$\Gamma^t_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}g^{tt}(\frac{\partial g_{t\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{t\gamma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial t})$$

Για β=r, γ =t: $\Gamma^t_{rt} = \frac{1}{2}g^{tt}(\frac{\partial g_{tr}}{\partial r} + \frac{\partial g_{tt}}{\partial r} - \frac{\partial g_{rr}}{\partial t}) \Rightarrow \Gamma^t_{rt} = \frac{1}{2}g^{tt}(\frac{\partial g_{tt}}{\partial r}) = \frac{A'(r)}{2A(r)}$

Για α=δ=ϑ τα μη μηδενικά σύμβολα Christoffel είναι τα εξής:

$$\Gamma^\theta_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}g^{\theta\theta}(\frac{\partial g_{\theta\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{\theta\gamma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial \theta})$$

Για β=γ=φ: $\Gamma^\theta_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2}g^{\theta\theta}(\frac{\partial g_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial g_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} - \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial \theta}) \Rightarrow \Gamma^\theta_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2}g^{\theta\theta}(\frac{-\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial \theta}) =$
$\frac{-2r^2sin\theta cos\theta}{2r^2} = -sin\theta cos\theta$

Για β=ϑ,γ=r: $\Gamma^\theta_{\theta r} = \frac{1}{2}g^{\theta\theta}(\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r} + \frac{\partial g_{\theta r}}{\partial \theta} - \frac{\partial g_{\theta r}}{\partial \theta}) \Rightarrow \Gamma^\theta_{\theta r} = \frac{1}{2}g^{\theta\theta}(\frac{-\partial g_{\theta\theta}}{\partial r}) = \frac{2r}{2r^2} = \frac{1}{r}$

Για α=δ=φ τα μη μηδενικά σύμβολα Christoffel είναι τα εξής:

$$\Gamma^{\varphi}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}g^{\varphi\varphi}(\frac{\partial g_{\varphi\beta}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial g_{\varphi\gamma}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial \varphi})$$

Για β=r, γ =φ: $\Gamma^{\varphi}_{r\varphi} = \frac{1}{2}g^{\varphi\varphi}(\frac{\partial g_{\varphi r}}{\partial \varphi} + \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r} - \frac{\partial g_{r\varphi}}{\partial \varphi}) \Rightarrow \Gamma^{\varphi}_{r\varphi} = \frac{1}{2}g^{\varphi\varphi}(\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r}) = \frac{2rsin^2\theta}{2r^2sin^2\theta} = \frac{1}{r}$

Για β=ϑ, γ =φ: $\Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi} = \frac{1}{2}g^{\varphi\varphi}(\frac{\partial g_{\varphi\theta}}{\partial \varphi} + \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial \theta} - \frac{\partial g_{\theta\varphi}}{\partial \varphi}) \Rightarrow \Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi} = \frac{1}{2}g^{\varphi\varphi}(\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial \theta}) =$
$\frac{2r^2sin\theta cos\theta}{2r^2sin^2\theta} = \frac{cos\theta}{sin\theta}$

Συνοψίζοντας τα σύμβολα Christoffel είναι τα εξής:

$$\Gamma^{r}_{tt} = \frac{1}{2}g^{rr}(\frac{\partial g_{rt}}{\partial t} + \frac{\partial g_{rt}}{\partial t} - \frac{\partial g_{tt}}{\partial r}) = \frac{1}{2}g^{rr}(-\frac{\partial g_{tt}}{\partial r}) = \frac{A'(r)}{2B(r)}$$

$$\Gamma^{r}_{rr} = \frac{1}{2}g^{rr}(\frac{\partial g_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial g_{rr}}{\partial r} - \frac{\partial g_{rr}}{\partial r}) = +\frac{1}{2}g^{rr}(\frac{\partial g_{rr}}{\partial r}) = \frac{B'(r)}{2B(r)}$$

$$\Gamma^{r}_{\theta\theta} = \frac{1}{2}g^{rr}(\frac{\partial g_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial g_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r}) = -\frac{1}{2}g^{rr}(\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r}) = \frac{-2r}{2B(r)} = \frac{-r}{B(r)}$$

$$\Gamma^{t}_{rt} = \frac{1}{2}g^{tt}(\frac{\partial g_{tt}}{\partial r} + \frac{\partial g_{tr}}{\partial t} - \frac{\partial g_{tt}}{\partial t}) = \frac{1}{2}g^{tt}(\frac{\partial g_{tt}}{\partial r}) = \frac{A'(r)}{2A(r)}$$

$$\Gamma^{r}_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2}g^{rr}(\frac{\partial g_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial g_{r\varphi}}{\partial \varphi} - \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r}) = -\frac{1}{2}g^{rr}(\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r}) = \frac{-rsin^2\theta}{B(r)}$$

$$\Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2}g^{\theta\theta}(\frac{\partial g_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial g_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} - \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial \theta}) = -\frac{1}{2}g^{\theta\theta}(\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial \theta}) = -sin\theta cos\theta$$

$$\Gamma^{\theta}_{\theta r} = \frac{1}{2}g^{\theta\theta}(\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r} + \frac{\partial g_{\theta r}}{\partial \theta} - \frac{\partial g_{\theta r}}{\partial \theta}) = \frac{1}{2}g^{\theta\theta}(\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r}) = \frac{1}{r} = \Gamma^{\varphi}_{r\varphi}$$

$$\Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi} = \frac{1}{2}g^{\varphi\varphi}(\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial \theta} + \frac{\partial g_{\varphi\theta}}{\partial \varphi} - \frac{\partial g_{\varphi\theta}}{\partial \varphi}) = \frac{1}{2}g^{\varphi\varphi}(\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial \theta}) = \frac{cos\theta}{sin\theta}$$

Αφού υπολογίσαμε τα σύμβολα Christoffel, μπορούμε να υπολογίσουμε πλέον και την καμπυλότητα Ricci. Ο τανυστής Ricci δίνεται από τον τύπο:

$$R_{\alpha\beta} = \Gamma^{\rho}_{\beta\alpha,\rho} - \Gamma^{\rho}_{\rho\alpha,\beta} + \Gamma^{\rho}_{\rho\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\beta\alpha} - \Gamma^{\rho}_{\beta\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\rho\alpha}$$

, όπου τα ρ παίρνει τις τιμές t,r,ϑ,φ και το ",ρ" συμβολίζει την παραγώγιση ως προς ρ, αντίστοιχα το ",β" συμβολίζει την παραγώγιση ως προς β. Μιας και η μετρική είναι διαγώνια και οι συντελεστές της εξαρτώνται μόνο από την ακτινική συνιστώσα r, χρειάζεται να υπολογίσουμε μόνο τα διαγώνια στοιχεία του τανυστή Ricci R_{tt}, R_{rr}, $R_{\theta\theta}$, $R_{\varphi\varphi}$. Ακολουθεί η απόδειξη του παραπάνω ισχυρισμού. Η καμπυλότητα Ricci δίνεται από τον τύπο πιο πάνω. Για $\alpha \neq \beta$:

$$\begin{aligned}
&R_{\alpha\beta} = \Gamma^{\rho}_{\beta\alpha,\rho} - \Gamma^{\rho}_{\rho\alpha,\beta} + \Gamma^{\rho}_{\rho\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\beta\alpha} - \Gamma^{\rho}_{\beta\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\rho\alpha} = \\
&\Gamma^{t}_{\beta\alpha,t} - \Gamma^{t}_{t\alpha,\beta} + \Gamma^{t}_{t\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\beta\alpha} - \Gamma^{t}_{\beta\lambda}\Gamma^{\lambda}_{t\alpha} + \\
&\Gamma^{r}_{\beta\alpha,r} - \Gamma^{r}_{r\alpha,\beta} + \Gamma^{r}_{r\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\beta\alpha} - \Gamma^{r}_{\beta\lambda}\Gamma^{\lambda}_{r\alpha} + \\
&\Gamma^{\theta}_{\beta\alpha,\theta} - \Gamma^{\theta}_{\theta\alpha,\beta} + \Gamma^{\theta}_{\theta\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\beta\alpha} - \Gamma^{\theta}_{\beta\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\theta\alpha} + \\
&\Gamma^{\varphi}_{\beta\alpha,\varphi} - \Gamma^{\varphi}_{\varphi\alpha,\beta} + \Gamma^{\varphi}_{\varphi\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\beta\alpha} - \Gamma^{\varphi}_{\beta\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\varphi\alpha}
\end{aligned}$$

Θα εξετάσουμε τώρα έναν έναν τους όρους ξεχωριστά:

$\Gamma^{t}_{\beta\alpha,t} = 0$ (δεν έχουμε εξάρτηση από το χρόνο)
$\Gamma^{t}_{t\alpha,\beta} = 0$ (υπάρχει μόνο το Γ^{t}_{tr} και έχει εξάρτηση από το r αλλά $\alpha \neq \beta$)
$\Gamma^{r}_{\beta\alpha,r} = 0$ $(a \neq \beta)$
$\Gamma^{r}_{r\alpha,\beta} = 0$ $(a \neq \beta)$
$\Gamma^{\theta}_{\alpha\beta,\theta} = 0$ (για $a \neq \beta$ υπάρχει μόνο το $\Gamma^{\theta}_{\theta r}$ το οποίο έχει εξάρτηση μόνο από το r)
$\Gamma^{\theta}_{\theta\alpha,\beta} = 0$ (για $a \neq \beta$ υπάρχει μόνο το $\Gamma^{\theta}_{\theta r}$ το οποίο έχει εξάρτηση μόνο από το r)
$\Gamma^{\varphi}_{\alpha\beta,\varphi} = 0$ (δεν έχουμε εξάρτηση από το φ)
$\Gamma^{\varphi}_{\varphi\alpha,\beta} = 0$ (υπάρχουν το $\Gamma^{\varphi}_{\varphi r}$ το οποίο έχει εξάρτηση από το r και το $\Gamma^{\varphi}_{\varphi\theta}$ το οποίο έχει

εξάρτηση από το ϑ αλλά $a \neq \beta$)

$\Gamma^t_{t\lambda}\Gamma^\lambda_{\beta\alpha} = \Gamma^t_{tt}\Gamma^t_{\beta\alpha} + \Gamma^t_{tr}\Gamma^r_{\beta\alpha} + \Gamma^t_{t\theta}\Gamma^\theta_{\beta\alpha} + \Gamma^t_{t\varphi}\Gamma^\varphi_{\beta\alpha} = 0 + \Gamma^t_{tr}\Gamma^r_{\beta\alpha} + 0 + 0 = 0 \; (a \neq \beta)$

$\Gamma^t_{\beta\lambda}\Gamma^\lambda_{t\alpha} = \Gamma^t_{\beta t}\Gamma^t_{t\alpha} + \Gamma^t_{\beta r}\Gamma^r_{t\alpha} + \Gamma^t_{\beta\theta}\Gamma^\theta_{t\alpha} + \Gamma^t_{\beta\varphi}\Gamma^\varphi_{t\alpha} = \Gamma^t_{\beta t}\Gamma^t_{t\alpha} + \Gamma^t_{tr}\Gamma^r_{t\alpha} + 0 + 0 = 0 \; (a \neq \beta)$

$\Gamma^r_{r\lambda}\Gamma^\lambda_{\beta\alpha} = \Gamma^r_{rt}\Gamma^t_{\beta\alpha} + \Gamma^r_{rr}\Gamma^r_{\beta\alpha} + \Gamma^r_{r\theta}\Gamma^\theta_{\beta\alpha} + \Gamma^r_{r\varphi}\Gamma^\varphi_{\beta\alpha} = 0 + \Gamma^r_{rr}\Gamma^r_{\beta\alpha} + 0 + 0 = 0 \; (a \neq \beta)$

$\Gamma^r_{\beta\lambda}\Gamma^\lambda_{r\alpha} = \Gamma^r_{\beta t}\Gamma^t_{r\alpha} + \Gamma^r_{\beta r}\Gamma^r_{r\alpha} + \Gamma^r_{\beta\theta}\Gamma^\theta_{r\alpha} + \Gamma^r_{\beta\varphi}\Gamma^\varphi_{r\alpha} = 0 + 0 + 0 + 0 = 0 \; (a \neq \beta)$

$\Gamma^\theta_{\theta\lambda}\Gamma^\lambda_{\beta\alpha} = \Gamma^\theta_{\theta t}\Gamma^t_{\beta\alpha} + \Gamma^\theta_{\theta r}\Gamma^r_{\beta\alpha} + \Gamma^\theta_{\theta\theta}\Gamma^\theta_{\beta\alpha} + \Gamma^\theta_{\theta\varphi}\Gamma^\varphi_{\beta\alpha} = 0 + 0 + 0 + \Gamma^\theta_{\theta\varphi}\Gamma^\varphi_{\varphi r} = \dfrac{cos\theta}{sin\theta}\dfrac{1}{r} \; (a \neq \beta)$

$\Gamma^\theta_{\beta\lambda}\Gamma^\lambda_{\theta\alpha} = \Gamma^\theta_{\beta t}\Gamma^t_{\theta\alpha} + \Gamma^\theta_{\beta r}\Gamma^r_{\theta\alpha} + \Gamma^\theta_{\beta\theta}\Gamma^\theta_{\theta\alpha} + \Gamma^\theta_{\beta\varphi}\Gamma^\varphi_{\theta\alpha} = 0 + 0 + 0 + 0 = 0 + 0 \; (a \neq \beta)$

$\Gamma^\varphi_{\varphi\lambda}\Gamma^\lambda_{\beta\alpha} = \Gamma^\varphi_{\varphi t}\Gamma^t_{\beta\alpha} + \Gamma^\varphi_{\varphi r}\Gamma^r_{\beta\alpha} + \Gamma^\varphi_{\varphi\theta}\Gamma^\theta_{\beta\alpha} + \Gamma^\varphi_{\varphi\varphi}\Gamma^\varphi_{\beta\alpha} = 0 + 0 + \Gamma^\varphi_{\theta\varphi}\Gamma^\theta_{\theta r} + 0 = \dfrac{cos\theta}{sin\theta}\dfrac{1}{r} \; (a \neq \beta)$

$\Gamma^\varphi_{\beta\lambda}\Gamma^\lambda_{\varphi\alpha} = \Gamma^\varphi_{\beta t}\Gamma^t_{\varphi\alpha} + \Gamma^\varphi_{\beta r}\Gamma^r_{\varphi\alpha} + \Gamma^\varphi_{\beta\theta}\Gamma^\theta_{\varphi\alpha} + \Gamma^\varphi_{\beta\varphi}\Gamma^\varphi_{\varphi\alpha} = 0 + 0 + \Gamma^\varphi_{r\varphi}\Gamma^\varphi_{\varphi\theta} + \Gamma^\varphi_{\theta\varphi}\Gamma^\varphi_{\varphi r} =$
$2\dfrac{cos\theta}{sin\theta}\dfrac{1}{r} \; (a \neq \beta)$

Οι μη μηδενικοί όροι μας δίνουν:

$$\Gamma^\theta_{\theta\varphi}\Gamma^\varphi_{\varphi r} + \Gamma^\varphi_{\theta\varphi}\Gamma^\theta_{\theta r} - \Gamma^\varphi_{r\varphi}\Gamma^\varphi_{\varphi\theta} - \Gamma^\varphi_{\theta\varphi}\Gamma^\varphi_{\varphi r} = \frac{cos\theta}{sin\theta}\frac{1}{r} + \frac{cos\theta}{sin\theta}\frac{1}{r} - 2\frac{cos\theta}{sin\theta}\frac{1}{r} = 0$$

Συνεπώς για $a \neq \beta$ όλα τα $R_{\alpha\beta}$ είναι μηδέν. Για α=β ϑα έχουμε:

$$R_{tt} = \Gamma^\rho_{tt,\rho} - \Gamma^\rho_{\rho t,t} + \Gamma^\rho_{\rho\lambda}\Gamma^\lambda_{tt} - \Gamma^\rho_{t\lambda}\Gamma^\lambda_{\rho t} =$$
$$\Gamma^t_{tt,t} - \Gamma^t_{tt,t} + \Gamma^t_{t\lambda}\Gamma^\lambda_{tt} - \Gamma^t_{t\lambda}\Gamma^\lambda_{tt} +$$
$$\Gamma^r_{tt,r} - \Gamma^r_{rt,t} + \Gamma^r_{r\lambda}\Gamma^\lambda_{tt} - \Gamma^r_{t\lambda}\Gamma^\lambda_{rt} +$$
$$\Gamma^\theta_{tt,\theta} - \Gamma^\theta_{\theta t,t} + \Gamma^\theta_{\theta\lambda}\Gamma^\lambda_{tt} - \Gamma^\theta_{t\lambda}\Gamma^\lambda_{\theta t} +$$
$$\Gamma^\varphi_{tt,\varphi} - \Gamma^\varphi_{\varphi t,t} + \Gamma^\varphi_{\varphi\lambda}\Gamma^\lambda_{tt} - \Gamma^\varphi_{t\lambda}\Gamma^\lambda_{\varphi t} =$$
$$\Gamma^r_{tt,r} + \Gamma^r_{rr}\Gamma^r_{tt} - \Gamma^r_{tt}\Gamma^t_{rt} + \Gamma^\theta_{\theta r}\Gamma^r_{tt} + \Gamma^\theta_{\theta r}\Gamma^r_{tt} =$$
$$\frac{-B'(r)A'(r)}{2B^2(r)} - \frac{A''(r)}{2B(r)} + \frac{A'(r)A'(r)}{4B(r)B(r)} - \frac{A'(r)A'(r)}{4A(r)A(r)} + \frac{A'(r)}{2rB(r)} + \frac{A'(r)}{2rB(r)} = -\frac{A'(r)B'(r)}{2B^2(r)} +$$
$$\frac{A''(r)}{2B(r)} + \frac{A'(r)B'(r)}{4B^2(r)} - \frac{(A'(r))^2}{4A(r)B(r)} + \frac{A'(r)}{rB(r)} \Rightarrow$$

$$R_{tt} = -\frac{A'(r)B'(r)}{2B^2(r)} + \frac{A''(r)}{2B(r)} + \frac{A'(r)B'(r)}{4B^2(r)} - \frac{(A'(r))^2}{4A(r)B(r)} + \frac{A'(r)}{rB(r)} \tag{29}$$

$R_{rr} = \Gamma^{\rho}_{rr,\rho} - \Gamma^{\rho}_{\rho r,r} + \Gamma^{\rho}_{\rho\lambda}\Gamma^{\lambda}_{rr} - \Gamma^{\rho}_{r\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\rho r} =$
$\Gamma^{t}_{rr,t} - \Gamma^{t}_{tr,r} + \Gamma^{t}_{t\lambda}\Gamma^{\lambda}_{rr} - \Gamma^{t}_{r\lambda}\Gamma^{\lambda}_{tr} +$
$\Gamma^{r}_{rr,r} - \Gamma^{r}_{rr,r} + \Gamma^{r}_{r\lambda}\Gamma^{\lambda}_{rr} - \Gamma^{r}_{r\lambda}\Gamma^{\lambda}_{rr} +$
$\Gamma^{\theta}_{rr,\theta} - \Gamma^{\theta}_{\theta r,r} + \Gamma^{\theta}_{\theta\lambda}\Gamma^{\lambda}_{rr} - \Gamma^{\theta}_{r\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\theta r} +$
$\Gamma^{\varphi}_{rr,\varphi} - \Gamma^{\varphi}_{\varphi r,r} + \Gamma^{\varphi}_{\varphi\lambda}\Gamma^{\lambda}_{rr} - \Gamma^{\varphi}_{r\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\varphi r} =$
$-\Gamma^{t}_{tr,r} + \Gamma^{t}_{tr}\Gamma^{r}_{rr} - \Gamma^{t}_{rt}\Gamma^{t}_{tr} - \Gamma^{\theta}_{\theta r,r} + \Gamma^{\theta}_{\theta r}\Gamma^{r}_{rr} - \Gamma^{\theta}_{r\theta}\Gamma^{\theta}_{\theta r} - \Gamma^{\varphi}_{\varphi r,r} + \Gamma^{\varphi}_{\varphi r}\Gamma^{r}_{rr} - \Gamma^{\varphi}_{r\varphi}\Gamma^{\varphi}_{\varphi r} =$
$-\frac{A''(r)2A(r) - A'(r)2A'(r)}{4A^2(r)} + \frac{A'(r)B'(r)}{4A(r)B(r)} - \frac{(A'(r))^2}{4A^2(r)} + \frac{2}{r^2} + \frac{B'(r)}{2rB(r)} - \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{B'(r)}{2rB(r)} =$
$-\frac{A''(r)}{2A(r)} + \frac{(A'(r))^2}{4A^2(r)} + \frac{A'(r)B'(r)}{4A(r)B(r)} + \frac{B'(r)}{rB(r)} \Rightarrow$

$$R_{rr} = -\frac{A''(r)}{2A(r)} + \frac{(A'(r))^2}{4A^2(r)} + \frac{A'(r)B'(r)}{4A(r)B(r)} + \frac{B'(r)}{rB(r)} \tag{30}$$

$$R_{\theta\theta}=\Gamma^{\rho}_{\theta\theta,\rho}-\Gamma^{\rho}_{\rho\theta,\theta}+\Gamma^{\rho}_{\rho\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\theta\theta}-\Gamma^{\rho}_{\theta\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\rho\theta}=$$
$$\Gamma^{t}_{\theta\theta,t}-\Gamma^{t}_{t\theta,\theta}+\Gamma^{t}_{t\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\theta\theta}-\Gamma^{t}_{\theta\lambda}\Gamma^{\lambda}_{t\theta}+$$
$$\Gamma^{r}_{\theta\theta,r}-\Gamma^{r}_{r\theta,\theta}+\Gamma^{r}_{r\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\theta\theta}-\Gamma^{r}_{\theta\lambda}\Gamma^{\lambda}_{r\theta}+$$
$$\Gamma^{\theta}_{\theta\theta,\theta}-\Gamma^{\theta}_{\theta\theta,\theta}+\Gamma^{\theta}_{\theta\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\theta\theta}-\Gamma^{\theta}_{\theta\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\theta\theta}+$$
$$\Gamma^{\varphi}_{\theta\theta,\varphi}-\Gamma^{\varphi}_{\varphi\theta,\theta}+\Gamma^{\varphi}_{\varphi\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\theta\theta}-\Gamma^{\varphi}_{\theta\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\varphi\theta}=$$
$$\Gamma^{r}_{\theta\theta,r}-\Gamma^{\varphi}_{\varphi\theta,\theta}+\Gamma^{t}_{tr}\Gamma^{r}_{\theta\theta}+\Gamma^{r}_{rr}\Gamma^{r}_{\theta\theta}-\Gamma^{r}_{\theta\theta}\Gamma^{\theta}_{r\theta}+\Gamma^{\varphi}_{\varphi r}\Gamma^{r}_{\theta\theta}-\Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi}\Gamma^{\varphi}_{\varphi\theta}=$$
$$-\frac{B(r)-rB'(r)}{B^2(r)}-\frac{-sin^2\theta-cos^2\theta}{sin^2\theta}+\frac{A'(r)(-r)}{2A(r)B(r)}+\frac{B'(r)(-r)}{2B(r)B(r)}-\frac{(-r)}{rB(r)}+\frac{(-r)}{B(r)r}$$
$$-\frac{cos^2\theta}{sin^2\theta}=-\frac{1}{B(r)}-\frac{rA'(r)}{2A(r)B(r)}+1+\frac{rB'(r)}{2B^2(r)}\Rightarrow$$
$$R_{\theta\theta}=-\frac{1}{B(r)}-\frac{rA'(r)}{2A(r)B(r)}+1+\frac{rB'(r)}{2B^2(r)} \tag{31}$$

$$R_{\varphi\varphi}=\Gamma^{\rho}_{\varphi\varphi,\rho}-\Gamma^{\rho}_{\rho\varphi,\varphi}+\Gamma^{\rho}_{\rho\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\varphi\varphi}-\Gamma^{\rho}_{\varphi\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\rho\varphi}=$$
$$\Gamma^{t}_{\varphi\varphi,t}-\Gamma^{t}_{t\varphi,\varphi}+\Gamma^{t}_{t\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\varphi\varphi}-\Gamma^{t}_{\varphi\lambda}\Gamma^{\lambda}_{t\varphi}+$$
$$\Gamma^{r}_{\varphi\varphi,r}-\Gamma^{r}_{r\varphi,\varphi}+\Gamma^{r}_{r\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\varphi\varphi}-\Gamma^{r}_{\varphi\lambda}\Gamma^{\lambda}_{r\varphi}+$$
$$\Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi,\theta}-\Gamma^{\theta}_{\theta\varphi,\varphi}+\Gamma^{\varphi}_{\varphi\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\varphi\varphi}-\Gamma^{\varphi}_{\varphi\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\varphi\varphi}+$$
$$\Gamma^{\varphi}_{\varphi\varphi,\varphi}-\Gamma^{\varphi}_{\varphi\varphi,\varphi}+\Gamma^{\varphi}_{\varphi\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\varphi\varphi}-\Gamma^{\varphi}_{\varphi\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\varphi\varphi}=$$
$$=\Gamma^{r}_{\varphi\varphi,r}+\Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi,\theta}+\Gamma^{t}_{tr}\Gamma^{r}_{\varphi\varphi}+\Gamma^{r}_{rr}\Gamma^{r}_{\varphi\varphi}-\Gamma^{r}_{\varphi\varphi}\Gamma^{\varphi}_{r\varphi}+\Gamma^{\theta}_{\theta r}\Gamma^{r}_{\varphi\varphi}-\Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi}\Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi}=-sin^2\theta\frac{B(r)-rB'(r)}{B^2(r)}+$$
$$sin^2\theta-cos^2\theta+\frac{-A'(r)rsin^2\theta}{2A(r)B(r)}+\frac{B'(r)(-rsin^2\theta)}{2B^2(r)}+\frac{rsin^2\theta}{B(r)r}-\frac{rsin^2\theta}{rB(r)}+cos^2\theta\Rightarrow$$
$$R_{\varphi\varphi}=-\frac{sin^2\theta B(r)-rB'(r)}{B^2(r)}+sin^2\theta-\frac{A'(r)rsin^2\theta}{2A(r)B(r)}+\frac{B'(r)(-rsin^2\theta)}{2B^2(r)}\Rightarrow$$

$$R_{\varphi\varphi} = sin^2\theta R_{\theta\theta} \tag{32}$$

Η εξίσωση του Einstein για το κενό είναι:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0 \tag{33}$$

Για να τη λύσουμε θα πρέπει να υπολογίσμουμε το βαθμωτό Ricci. Ωστόσο αυτό μπορεί να παρακαμφεί, γλιτώνοντάς μας από τους υπολλογισμούς αλλά και την πολυπλοκότερη μορφή των εξισώσεων:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0 \Rightarrow g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}R = 0 \Rightarrow R - \frac{1}{2}4R = 0 \Rightarrow -R = 0 \Rightarrow R = 0$$

Άρα έχουμε τις εξής τρεις εξισώσεις.(Η εξίσωση για το $R_{\varphi\varphi}$ ανάγεται στην εξίσωση για το $R_{\theta\theta}$) :

$$R_{tt} = 0 \tag{34}$$

$$R_{rr} = 0 \tag{35}$$

$$R_{\theta\theta} = 0 \tag{36}$$

$$R_{tt} = 0 \Rightarrow -\frac{A'(r)B'(r)}{2B^2(r)} + \frac{A''(r)}{2B(r)} + \frac{A'(r)B'(r)}{4B^2(r)} - \frac{(A'(r))^2}{4A(r)B(r)} + \frac{A'(r)}{rB(r)} = 0 \Rightarrow -\frac{A'(r)B'(r)}{4B^2(r)} +$$

$$\frac{A''(r)}{2B(r)} - \frac{(A'(r))^2}{4A(r)B(r)} + \frac{A'(r)}{rB(r)} = 0 \Rightarrow$$
$$-rA(r)A'(r)B(r) + 2B(r)A(r)rA''(r) - B(r)r(A'(r))^2 + 4A(r)B(r)A'(r) = 0$$

$$R_{rr} = 0 \Rightarrow -\frac{A''(r)}{2A(r)} + \frac{(A'(r))^2}{4A^2(r)} + \frac{A'(r)B'(r)}{4A(r)B(r)} + \frac{B'(r)}{rB(r)} = 0 \Rightarrow$$
$$-2A(r)B(r)rA''(r) + B(r)r(A'(r))^2 + A(r)rA'(r)B'(r) + 4A^2(r)B'(r) = 0$$

Προσθέτοντας τις δύο αυτές εξισώσεις κατά μέλη έχουμε:

$4A(r)B(r)A'(r) + 4A^2(r)B'(r) = 0 \Rightarrow B(r)A'(r) + A(r)B'(r) = 0 \Rightarrow (A(r)B(r))' = 0 \Rightarrow$

$$A(r)B(r) = c \tag{37}$$

Η εξίσωση (36) δίνει:

$R_{\theta\theta} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{B(r)} - \frac{rA'(r)}{2A(r)B(r)} + 1 + \frac{rB'(r)}{2B^2(r)} = 0 \Rightarrow -2A(r)B(r) - rB(r)A'(r) + 2A(r)B^2(r) + rA(r)B'(r) = 0 \Rightarrow -2A(r)B(r) + 2A(r)B^2(r) - rB(r)A'(r) + 2rA(r)B'(r) - rA(r)B'(r) = 0 \Rightarrow -2A(r)B(r) + 2A(r)B^2(r) + 2rA(r)B'(r) - r[B(r)A'(r) + B(r)A'(r)] = 0 \Rightarrow -2A(r)B(r) + 2A(r)B^2(r) + 2A(r)rB'(r) = 0 \Rightarrow rB'(r) = B(r) - B^2(r) \Rightarrow \frac{B'(r)}{B(r) - B^2(r)} = \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{dB(r)}{dr}\frac{1}{B(r) - B^2(r)} = \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{dB(r)}{B(r) - B^2(r)} = \frac{dr}{r}$

Ισχύει όμως ότι: $\int \frac{dr}{ar + br^2} = -\frac{1}{a}ln(\frac{ar + b}{r})$.
Προσαρμόζοντας τη σχέση αυτή στη δική μας εξίσωση έχουμε:

$ln\big(\frac{B(r) - 1}{B(r)}\big) = -lnr + c \Rightarrow ln\big(\frac{B(r) - 1}{B(r)}\big) = ln\big(\frac{1}{r}\big) + c \Rightarrow \frac{B(r) - 1}{B(r)} = exp\big(ln(\tfrac{1}{r})\big) + c \Rightarrow \frac{B(r) - 1}{B(r)} = exp\big(ln(\tfrac{1}{r})\big)exp\big(c\big) \Rightarrow \frac{B(r) - 1}{B(r)} = \frac{1}{r}C \Rightarrow$

$$B(r) = \frac{1}{1 - \frac{C}{r}} \tag{38}$$

, όπου $C = e^c$. Αφού βρήκαμε το B(r) το αντικαθιστούμε στην (37) για να πάρουμε το A(r).

$A'(r)B(r)+B'(r)A(r) = 0 \Rightarrow A'(r)\dfrac{1}{1-\frac{C}{r}}+A(r)\dfrac{\frac{(-C)}{r^2}}{(1-\frac{C}{r})^2} = 0 \Rightarrow A'(r) = \dfrac{C}{r(r-C)}A(r) \Rightarrow$
$\dfrac{A'(r)}{A(r)} = \dfrac{C}{r(r-C)} \Rightarrow \dfrac{dA(r)}{A(r)} = \dfrac{Cdr}{r(r-C)}$

Εφαρμόζοντας τον ίδιο τύπο $\left(\int \dfrac{dr}{ar+br^2} = -\dfrac{1}{a}ln(\dfrac{ar+b}{r})\right)$ με πριν έχουμε:

$lnA(r) = C\dfrac{1}{C}ln(\dfrac{r-C}{r}) \Rightarrow lnA(r) = ln(\dfrac{r-C}{r}) \Rightarrow$

$$A(r) = \frac{r-C}{r} \tag{39}$$

Βρήκαμε τους συντελεστές A και B. Είμαστε πλέον σε θέση να γράψουμε το στοιχείο μήκους. Έχουμε:

$$ds^2 = (\frac{C}{r} - 1)dt^2 + \frac{1}{(1-\frac{C}{r})}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2sin^2\theta d\phi^2 \tag{40}$$

Για $r \to \infty$ παίρνουμε: $ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2sin^2\theta d\phi^2$, η οποία είναι το στοιχείο μήκους του χώρου Minkowski σε σφαιρικές συντεταγμενες. Δηλαδή, αν απομακρυνθούμε(σε ένα κενό χώρο) πολύ από τη σφαιρική κατανομή μάζας ο χωρόχρονος δεν "αισθάνεται" την ύπαρξή της.

4.2 Το Νευτώνειο Όριο

Η σταθερά C μπορεί να υπλογιστεί ως εξής από την προσέγγιση ασθενούς πεδίου(όριο χαμηλών ταχυτήτων). Μπορούμε μακριά από την πηγή καμπυλότητας να θεωρήσουμε ότι η μετρική αποτελείται από τη μετρική του επίπεδου χωρόχρονου(Minkowski) αν της προσθέσουμε μια μικρή διαταραχή. Δηλαδή:

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \tag{41}$$

,όπου $h_{\alpha\beta}$ είναι η διαταραχή της επίπεδης μετρικής για την οποία ισχύει: $|h_{\alpha\beta}| << 1$. Η διαταραχή της μετρικής θεωρείται ανεξάρτητη του χρόνου και η αντίστροφη μετρική ορίζεται: $g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta}$. Οπότε μετά τις αλλαγές που περιγράφονται πιο πριν, τα σύμβολα Christoffel γίνονται:

$\Gamma^{\delta}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}(\eta^{\alpha\delta} - h^{\alpha\delta})(\frac{\partial(\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta})}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial(\eta_{\alpha\gamma} + h_{\alpha\gamma})}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial(\eta_{\beta\gamma} + h_{\beta\gamma})}{\partial x^{\alpha}}) = \frac{1}{2}(\eta^{\alpha\delta} - h^{\alpha\delta})(\frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial h_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial h_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}}) = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\delta}(\frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial h_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial h_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}})$

Η γεωδαιτική εξίσωση δίνεται από τον τύπο(όπου τ ο ιδιόχρονος, ο χρόνος που το ίδιο το σώμα μετρά για τον εαυτό του):

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{d\tau^2} + \Gamma^{\mu}_{\beta\gamma}\frac{dx^{\beta}}{d\tau}\frac{dx^{\gamma}}{d\tau} = 0 \tag{42}$$

Το διάνυσμα της τετραταχύτητας για ένα σώμα στον χώρο Minkowski είναι:

$$u^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\tau} = \gamma\frac{dx^{\mu}}{dt} = (\gamma c, \gamma\frac{dx^1}{dt}, \gamma\frac{dx^2}{dt}, \gamma\frac{dx^3}{dt}) \tag{43}$$

Όμως, το στο όριο χαμηλών ταχυτήτων: $\frac{dx^i}{dt} << c \Rightarrow \frac{dx^i}{dt} << 1 \Rightarrow dx^i << dt \Rightarrow$

$\frac{dx^i}{d\tau} << \frac{dt}{d\tau}$, δηλαδή: $u^0 >> u^i$. Άρα θα έχουμε:

$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{tt}\frac{dt}{d\tau}\frac{dt}{d\tau} = 0 \Rightarrow \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{tt}(\frac{dt}{d\tau})^2 = 0$

Όμως: $\Gamma^\mu_{tt} = \frac{1}{2}\eta^{\lambda\mu}\big(\partial_t h_{\lambda t} + \partial_t h_{\lambda t} - \partial_\lambda h_{tt}\big) = \frac{1}{2}\eta^{\lambda\mu}(-\partial_\lambda h_{tt})$

Άρα:$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\eta^{\lambda\mu}\partial_\lambda h_{tt}(\frac{dt}{d\tau})^2$

Το η έχει μόνο διαγώνια στοιχεία, οπότε για να μην είναι μηδέν ο όρος στην πιο πάνω εξίσωση θα πρέπει λ = μ. Για λ = μ = t.

$\frac{d^2t}{d\tau^2} = 0 \Rightarrow t = \tau$, αφού η διαταραχή είναι ανεξάρτητη του χρόνου. Για λ = μ = x,y,z:

$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\partial^\mu h_{tt}$

Όμως από τη νευτώνεια φυσική, ξέρουμε ότι: $a = -\nabla\varphi$ όπου φ το δυναμικό, οπότε μπορούμε να ταυτοποιήσουμε: $h_{tt} = -2\varphi$

Άρα, η σταθερά C γίνεται: $g_{tt} = \eta_{tt} + h_{tt} \Rightarrow g_{tt} = -1 - 2\varphi = -1 - 2\frac{(-GM)}{r} \Rightarrow C = 2GM$, όπου χρησιμοποιήσαμε ότι το δυναμικό έξω από μια σφαιρική πηγή στη νευτώνια βαρύτητα είναι: $\varphi = -\frac{GM}{r}$.
Οπότε η μετρική μας παίρνει την τελική της μορφή η οποία είναι:

$$ds^2 = (\frac{2GM}{r} - 1)dt^2 + \frac{1}{(1 - \frac{2GM}{r})}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2sin^2\theta d\phi^2 \tag{44}$$

,όπου G η βαρυτική σταθερά του Newton και M η μάζα της σφαιρικής κατανομής.

Εξ'αρχής, θεωρήσαμε πως η μετρική θα είναι χρονικά ανεξάρτητη. Αυτή η χρονική ανεξαρτησία(διατήρηση της ενέργειας) συνδέεται με ένα διάνυσμα Killing της μορφής: $\xi^\alpha = (1,0,0,0)$. Επίσης, η μετρική είναι ανεξάρτητη από τη γωνία φ, παραμένει

δηλαδή αναλοίωτη κάτω από στροφές γύρω από τον άξονα z, άρα ορίζεται ένα διάνυσμα Killing της μορφής: $\eta^{\alpha} = (0,0,0,1)$. Για r=0 έχουμε πραγματική ιδιομορφία του χωρόχρονου(singularity), ενώ για r=2MG παρότι $g_{tt} = 0$ και $g_{rr} \to \infty$, δεν έχουμε ιδιομορφία. Αυτό σημαίνει ότι το r=2GM δεν είναι μια πραγματική ιδιομορφία του χωρόχρονου αλλά μια ιδιομορφία των συντεταγμένων που επιλέξαμε να γράψουμε τη μετρική.
Η r=2MG αποκαλείται ακτίνα Shcwarzschild και ουσιαστικά οριοθετεί το χώρο, καθώς ό,τι πλησιάσει σε απόσταση μικρότερη από 2MG τη μοναδικότητα της μαύρης τρύπας(r=0), τότε δε μπορεί να εξέλθει από αυτήν. Μπορούμε επίσης να αποφανθούμε για την καμπυλότητα από το βαθμωτό του Kretschmann. Έχουμε βρει τη μορφή της μετρικής συνεπώς μπορούμε να υπολογίσουμε τα σύμβολα Christoffel. Θα έχουμε:

$$\Gamma^{r}_{tt} = \frac{1}{2}g^{rr}(\frac{\partial g_{rt}}{\partial t} + \frac{\partial g_{rt}}{\partial t} - \frac{\partial g_{tt}}{\partial r}) = \frac{1}{2}g^{rr}(-\frac{\partial g_{tt}}{\partial r}) = \frac{A'(r)}{2B(r)} = \frac{GM(-2GM+r)}{r^3}$$

$$\Gamma^{r}_{rr} = \frac{1}{2}g^{rr}(\frac{\partial g_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial g_{rr}}{\partial r} - \frac{\partial g_{rr}}{\partial r}) = +\frac{1}{2}g^{rr}(\frac{\partial g_{rr}}{\partial r}) = \frac{B'(r)}{2B(r)} = \frac{GM}{2GMr - r^2}$$

$$\Gamma^{r}_{\theta\theta} = \frac{1}{2}g^{rr}(\frac{\partial g_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial g_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r}) = -\frac{1}{2}g^{rr}(\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r}) = \frac{-2r}{2B(r)} = \frac{-r}{B(r)} = 2GM - r$$

$$\Gamma^{t}_{rt} = \frac{1}{2}g^{tt}(\frac{\partial g_{tt}}{\partial r} + \frac{\partial g_{tr}}{\partial t} - \frac{\partial g_{tt}}{\partial t}) = \frac{1}{2}g^{tt}(\frac{\partial g_{tt}}{\partial r}) = \frac{A'(r)}{2A(r)} = \frac{GM}{r(-2GM+r)}$$

$$\Gamma^{r}_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2}g^{rr}(\frac{\partial g_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial g_{r\varphi}}{\partial \varphi} - \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r}) = -\frac{1}{2}g^{rr}(\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r}) = \frac{-r sin^2\theta}{B(r)} = (-1 + \frac{2GM}{r})sin^2\theta$$

$$\Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2}g^{\theta\theta}(\frac{\partial g_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial g_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} - \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial \theta}) = -\frac{1}{2}g^{\theta\theta}(\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial \theta}) = -sin\theta cos\theta$$

$$\Gamma^{\theta}_{\theta r} = \frac{1}{2}g^{\theta\theta}(\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r} + \frac{\partial g_{\theta r}}{\partial \theta} - \frac{\partial g_{\theta r}}{\partial \theta}) = \frac{1}{2}g^{\theta\theta}(\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r}) = \frac{1}{r} = \Gamma^{\varphi}_{r\varphi}$$

$$\Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi} = \frac{1}{2}g^{\varphi\varphi}(\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial \theta} + \frac{\partial g_{\varphi\theta}}{\partial \varphi} - \frac{\partial g_{\varphi\theta}}{\partial \varphi}) = \frac{1}{2}g^{\varphi\varphi}(\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial \theta}) = \frac{cos\theta}{sin\theta}$$

Ο τανυστής του Riemann δίνεται απο τον τύπο: $R^{\alpha}_{\mu\nu\beta} = \partial_{\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} - \partial_{\beta}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\gamma\nu}\Gamma^{\gamma}_{\mu\beta} -$

$\Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta}\Gamma^{\gamma}_{\mu\nu}$ και από το Mathematica παίρνουμε τις μη μηδενικές συνιστώσες.

$$R^{t}_{rtr} = \partial_t\Gamma^{t}_{rr} - \partial_r\Gamma^{t}_{tr} + \Gamma^{t}_{t\kappa}\Gamma^{\kappa}_{rr} - \Gamma^{t}_{r\kappa}\Gamma^{\kappa}_{tr} \Rightarrow R^{t}_{rtr} = \frac{2GM}{r^2(-2GM+r)}$$

$$R^{t}_{\theta t\theta} = \partial_t\Gamma^{t}_{\theta\theta} - \partial_\theta\Gamma^{t}_{t\theta} + \Gamma^{t}_{t\kappa}\Gamma^{\kappa}_{\theta\theta} - \Gamma^{t}_{\theta\kappa}\Gamma^{\kappa}_{t\theta} \Rightarrow R^{t}_{\theta t\theta} = \frac{-GM}{r}$$

$$R^{t}_{\varphi t\varphi} = \partial_t\Gamma^{t}_{\varphi\varphi} - \partial_\theta\Gamma^{t}_{t\varphi} + \Gamma^{t}_{t\kappa}\Gamma^{\kappa}_{\varphi\varphi} - \Gamma^{t}_{\varphi\kappa}\Gamma^{\kappa}_{t\varphi} \Rightarrow R^{t}_{\varphi t\varphi} = \frac{-GMsin^2\theta}{r}$$

$$R^{r}_{\theta\theta r} = \partial_\theta\Gamma^{r}_{r\theta} - \partial_r\Gamma^{r}_{\theta\theta} + \Gamma^{r}_{\theta\kappa}\Gamma^{\kappa}_{r\theta} - \Gamma^{r}_{r\kappa}\Gamma^{\kappa}_{\theta\theta} \Rightarrow R^{r}_{\theta\theta r} = \frac{GM}{r}$$

$$R^{r}_{\varphi\varphi r} = \partial_\varphi\Gamma^{r}_{r\varphi} - \partial_r\Gamma^{r}_{\varphi\varphi} + \Gamma^{r}_{\varphi\kappa}\Gamma^{\kappa}_{r\varphi} - \Gamma^{r}_{r\kappa}\Gamma^{\kappa}_{\varphi\varphi} \Rightarrow R^{r}_{\varphi\varphi r} = \frac{GMsin^2\theta}{r}$$

$$R^{r}_{ttr} = \partial_t\Gamma^{r}_{rt} - \partial_r\Gamma^{r}_{tt} + \Gamma^{r}_{t\kappa}\Gamma^{\kappa}_{rt} - \Gamma^{r}_{r\kappa}\Gamma^{\kappa}_{tt} \Rightarrow R^{r}_{ttr} = \frac{2GM(-2GM+r)}{r^4}$$

$$R^{\theta}_{\varphi\varphi\theta} = \partial_\varphi\Gamma^{\theta}_{\theta\varphi} - \partial_\theta\Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi} + \Gamma^{\theta}_{\varphi\kappa}\Gamma^{\kappa}_{\theta\varphi} - \Gamma^{\theta}_{\theta\kappa}\Gamma^{\kappa}_{\varphi\varphi} \Rightarrow R^{\theta}_{\varphi\varphi\theta} = \frac{-2GMsin^2\theta}{r}$$

$$R^{\theta}_{tt\theta} = \partial_t\Gamma^{\theta}_{\theta t} - \partial_\theta\Gamma^{\theta}_{tt} + \Gamma^{\theta}_{t\kappa}\Gamma^{\kappa}_{t\varphi} - \Gamma^{\theta}_{\theta\kappa}\Gamma^{\kappa}_{tt} \Rightarrow R^{\theta}_{tt\theta} = \frac{GM(2GM-r)}{r}$$

$$R^{\varphi}_{r\varphi r} = \partial_\varphi\Gamma^{\varphi}_{rr} - \partial_r\Gamma^{\varphi}_{\varphi r} + \Gamma^{\varphi}_{\varphi\kappa}\Gamma^{\kappa}_{rr} - \Gamma^{\varphi}_{r\kappa}\Gamma^{\kappa}_{\varphi r} \Rightarrow R^{\varphi}_{r\varphi r} = \frac{GM}{r^2(2GM-r)}$$

$$R^{\varphi}_{\theta\varphi\theta} = \partial_\varphi\Gamma^{\varphi}_{\theta\theta} - \partial_\theta\Gamma^{\varphi}_{\varphi\theta} + \Gamma^{\varphi}_{\varphi\kappa}\Gamma^{\kappa}_{\theta\theta} - \Gamma^{\varphi}_{\theta\kappa}\Gamma^{\kappa}_{\varphi\theta} \Rightarrow R^{\varphi}_{\theta\varphi\theta} = \frac{2GM}{r}$$

$$R^{\varphi}_{tt\varphi} = \partial_t\Gamma^{\varphi}_{\varphi t} - \partial_\varphi\Gamma^{\varphi}_{tt} + \Gamma^{\varphi}_{t\kappa}\Gamma^{\kappa}_{\varphi t} - \Gamma^{\varphi}_{\varphi\kappa}\Gamma^{\kappa}_{tt} \Rightarrow R^{\varphi}_{tt\varphi} = \frac{GM(2GM-r)}{r^4}$$

Αφού έχουμε και τις συνιστώσες του τανυστή του Riemann μπορούμε να υπολογίσουμε το βαθμωτό του Kretschmann, το οποίο δίνεται από τον τύπο: $K = R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}$. Παίρνουμε ότι: $K = \dfrac{48G^2M^2}{r^6}$. Βλέπουμε πως το βαθμωτό για r=0 απειρίζεται δηλαδή εκεί έχουμε άπειρη καμπυλότητα. Για r=2GM το βαθμωτό αποκτά μια πεπερασμένη τιμή και για $r \to \infty$ το βαθμωτό τείνει στο μηδέν, δηλαδή όταν απομακρυνθούμε πάρα πολύ από την πηγή της καμπυλότητας ο χωρόχρονος γαίνεται Minkowski.

4.3 Δράσεις που δίνουν τανυστή ορμής-ενέργειας

Η δράση Einstein-Hilbert μας δίνει το αριστερό μέλος της εξίσωσης του Einstein που περιγράφει τη γεωμετρία του χωρόχρονου. Μπορούμε να δημιουργήσουμε και όρους που δίνουν τανυστή ορμής ενέργειας. Μπορουμε να εισάγουμε ένα βαθμωτό πεδίο στην δράση Einstein-Hilbert. Για να το εισάγουμε θα πρέπει πρώτα να δημιουργήσουμε αναλλοιώτητα κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz. Η απλούστερη τέτοια αναλλοίωτη μορφή ποσότητας που μπορούμε να δημιουργήσουμε από ένα βαθμωτό πεδίο είναι ένα πολυώνυμο της μορφής $V(\varphi) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \varphi^n$. Η ποσότητα αυτή όμως δεν περιέχει παραγώγους του βαθμωτού πεδίου. Για να έχουμε εξισώσεις κίνησης θα χρειαστούμε παραγώγους του βαθμωτού πεδίου. Η απλούστερη αναλλοίωτη μορφή ποσότητας που περιέχει παραγώγους του βαθμωτού πεδίου είναι η: $g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi$. Μπορούμε τώρα να γράψουμε τη δράση του βαθμωτού πεδίου φ. Θα είναι:

$$S_\varphi = \int d^4x\sqrt{-g}\big[g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - V(\varphi)\big]$$

Αυτό είναι το απλούστερο παράδειγμα δράσης βαθμωτού πεδίου, όπου το V(φ) παριστάνει τον δυναμικό όρο και το $g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi$ τον κινητικό.
Μπορούμε να δημιουργήσουμε και μια δράση που να δίνει τανυστή ορμής ενέργειας χρησιμοποιώντας τον τανυστή του ηλεκτρομαγνητικου πεδίου. Ο τανυστής αυτός ορίζεται:

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu - \Gamma^\rho_{\mu\nu}A_\rho - \partial_\nu A_\mu + \Gamma^\rho_{\nu\mu}A_\rho = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

καθώς τα σύμβολα Christoffel είναι συμμετρικά σε αλλαγές των κάτω δεικτών. Οπότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την αναλλοίωτη αυτή ποσότητα $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$, άρα η δράση του ηλεκτρομαγνητικού τανυστή είναι:

$$S_\varphi = \int d^4x\sqrt{-g}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

4.4 Το Ιδανικό Ρευστό

Ο τανυστής ορμής-ενέργειας του ιδανικού ρευστού δίνεται από τη σχέση:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)\upsilon_\mu \upsilon_\nu + P g_{\mu\nu} \tag{45}$$

,όπου ρ η πυκνότητα μάζας, η οποία θεωρείται σταθερή(για πιο ρεαλιστικές λύσεις δε θα πρέπει να θεωρηθεί σταθερή, αλλά θεωρώντας τη σταθερή μπορούν οι διαφορικές εξισώσεις που θα προκύψουν να λυθούν αναλυτικά), P η πίεση και υ_μ η τετραταχύτητα του ρευστού. Μπορούμε να θεωρήσουε πως το ρευστό βρίσκεται σε ηρεμία, δηλαδή οι χωρικές συνιστώσες της τετραταχύτητας είναι μηδέν, δηλαδή αυτή, θα έχει τη μορφή: $\upsilon_\mu = (\upsilon_t, 0, 0, 0)$. Από την κανονικοποίηση της τετραταχύτητας έχουμε:

$$g^{\mu\nu}\upsilon_\mu \upsilon_\nu = -1 \Rightarrow -g^{tt}\upsilon_t \upsilon_t = -1 \Rightarrow \upsilon_t = \sqrt{g_{tt}} \tag{46}$$

Οι συνιστώσες του τανυστή ορμής ενέργειας παίρνουν δηλαδή τη μορφή:

$$T_{tt} = -\rho g_{tt} + P g_{tt} - P g_{tt} = -g_{tt}\rho$$

$$T_{rr} = 0 + P g_{rr} = g_{rr} P$$

$$T_{\theta\theta} = 0 + g_{\theta\theta} P = g_{\theta\theta} P$$

$$T_{\varphi\varphi} = 0 + g_{\varphi\varphi} P = g_{\varphi\varphi} P$$

5 Λύσεις Μελανών Οπών Συζευγμένων με Βαθμωτά Πεδία

5.1 Το Θεώρημα Εξάλειψης Ιχνών

Περισσότερα από 40 χρόνια πριν, ο J.A.Wheeler συνόψισε τις διαδικασίες που λαμβάνουν χώρα σε μια μελανή οπή με τη φράση: Μια μελανή οπή δεν αφήνει ίχνη("Black holes have no hair"). Αυτό σημαίνει ότι:

Όλες οι στάσιμες μελανές οπές χαρακτηρίζονται πλήρως από τη μάζα τους, τη στροφορμή και το ηλεκτρικό φορτίο τους.

Οι μελανές οπές δε μπορούν να υποστηρίξουν ίχνη. Διεργασίες μπορούν να συμβαίνουν στην περιοχή του ορίζοντα γεγονότων αλλά δε μπορούν να μετρηθούν στο άπειρο.

Για τους λόγους αυτούς τα μόνα χαρακτηριστικά μιας μελανής οπής είναι αυτά που συνδέονται με το νόμο του Gauss και μπορούν να μετρηθούν από αυτόν. Οι μελανές οπές σχηματίζονται από τη βαρυτική κατάρρευση, η οποία αποτελεί μια τόσο βίαιη διαδικασία που παραβιάζει όλους τους συνηθισμένους νόμους διατήρισης. Για παράδειγμα η χημική σύσταση, ο βαρυονικός αριθμός δε διατηρούνται κατά τη βαρυτική κατάρρευση και η μελανή οπή "καταπίνει" όλες τις πληροφορίες που σχετίζονται με αυτές τις ποσότητες. Οτιδήποτε μπορεί να απορροφηθεί από μια μελανή οπή απορροφάται. Μόνο μερικές συμμετρίες, όπως η τοπική U(1) συμμετρία επιβιώνουν της βαρυτικής κατάρρευσης. Η μάζα, το φορτίο και η στροφορμή που σχετίζονται με τέτοιες τοπικές συμμετρίες που επιβιώνουν, θα είναι και οι μόνες που μπορούν να μετρηθούν.

Τα παραπάνω εγείρουν το συμπέρασμα πως η γενικότερη στάσιμη, σφαιρικά συμμετρική λύση των εξισώσεων του Einstein θα είναι αυτή των Roy Kerr και Ezra Newman που περιγράφει μια μελανή οπή με μάζα, φορτίο και στροφορμή.

5.2 Η Λύση MTZ (Martinez, Troncoso, Zanelli)

Η λύση MTZ περιγράφει μια τετραδιάστατη μελανή οπή συζευγμένη με ένα βαθμωτό πεδίο. Αρχικά, θα θεωρήσουμε μια τετραδιάστατη βαρύτητα, με αρνητική κοσμολογική σταθερά Λ και ένα βαθμώτο πεδίο φ, τα οποία περιγράφονται από την παρακάτω δράση:

$$I[g_{\mu\nu},\varphi] = \int d^4x\sqrt{-g}\Big[\frac{R-2\Lambda}{16\pi G} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - V(\varphi)\Big] \tag{47}$$

όπου, φ είναι το βαθμωτό πεδίο

$$\varphi = \sqrt{\frac{3}{4\pi G}}Arctanh\frac{G\mu}{r+G\mu} \tag{48}$$

, G είναι η σταθερά του Newton, V(φ) είναι το δυναμικό το οποίο δίνεται από τη σχέση:

$$V(\varphi) = -\frac{3}{4\pi G l^2}sinh^2\sqrt{\frac{4\pi G}{3}}\varphi \tag{49}$$

με το l να είναι η ακτίνα του Anti de Sitter χωρόχρονου και το g η ορίζουσα της μετρικής $g_{\mu\nu}$. Για να πάρουμε τις εξισώσεις πεδίου που διέπουν τη συγκεκριμένη τετραδιάστατη βαρύτητα, θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο των μεταβολών ως προς το βαθμωτό πεδίο φ και τη μετρική $g_{\mu\nu}$. Παρατηρούμε πως το βαθμωτό πεδίο δε συζεύγεται άμεσα με την καμπυλότητα(η δράση αποτελείται από τέσσερις όρους, έναν Einstein - Hilbert όρο, την κοσμολογική σταθερά Λ, έναν κινητικό όρο και έναν δυναμικό όρο). Αυτό σημαίνει ότι εφαρμόζοντας τη μέθοδο των μεταβολών ως προς το βαθμωτό πεδίο φ, αυτή θα αφήσει αναλοίωτους τους Einstein - Hilbert όρους και αντίστοιχα μεταβάλλοντας τη δράση ως προς τη μετρική, δε θα επηρεαστούν ο κινητικός και ο δυναμικός όρος. Άρα, κάνοντας μεταβολές ως προς τη μετρική έχουμε:

$$\delta I = \delta I[g_{\mu\nu},\varphi] = \delta\int d^4x\sqrt{-g}\Big[\frac{R-2\Lambda}{16\pi G} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - V(\varphi)\Big] = \int d^4x\Big[\delta\sqrt{-g}\frac{R}{16\pi G} +$$

$$\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\frac{1}{16\pi G} + \frac{1}{16\pi G}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} - \frac{2\Lambda}{16\pi G}\delta\sqrt{-g} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\delta\sqrt{-g}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi -$$

$$\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} - V(\varphi)\delta\sqrt{-g}\Big].$$

Για τη μεταβολή της ορίζουσας της μετρικής έχουμε:

Έστω A ένας διαγώνιος πίνακας n*n διαστάσεων. Θα ισχύει ότι: $e^A = I + \frac{1}{2!} * A * A + \frac{1}{3!} * A * A * A + ...$ από ανάπτυγμα της σειράς Taylor. Έστω τώρα ότι: $e^A = B$, όπου B ένας διαγώνιος πίνακας n*n διαστάσεων.Για ευκολία, χωρίς αυτό να επηρεάζει τη γενικότητα, θα θεωρήσουμε ότι και οι δύο πίνακες είναι 2*2.
Θα ισχύει ότι: $trA = a_0 + a_1$, $e^{trA} = e^{a_0 + a1}$, $det(e^A) = e^{a_0}e^{a_1}$.

Δηλαδή: $e^{trA} = det(e^A)$.

Όμως: $e^A = B \Rightarrow ln(e^A) = lnB \Rightarrow A = lnB$. Άρα: $detB = e^{tr(lnB)} \Rightarrow ln(detB) = tr(lnB) \Rightarrow d(ln(detB)) = d(tr(lnB)) \Rightarrow \dfrac{1}{(detB)}\delta(detB) = tr(d(lnB)) \Rightarrow \dfrac{\delta(detB)}{(detB)} = tr(B^{-1}\delta B)$.

Για $B = g_{\mu\nu} : \dfrac{\delta det g_{\mu\nu}}{(det g_{\mu\nu})} = tr(g_{\mu\nu}^{-1}\delta g_{\mu\nu}) \Rightarrow \dfrac{\delta g}{g} = tr(g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}) \Rightarrow \dfrac{\delta g}{g} = g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \Rightarrow \delta g = g(g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}) = -g g_{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}$.

Άρα: $\delta\sqrt{-g} = -\dfrac{\delta g}{2\sqrt{-g}} \Rightarrow \delta\sqrt{-g} = -\dfrac{1}{2\sqrt{-g}} g g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \Rightarrow \delta\sqrt{-g} = \dfrac{1}{2}\sqrt{-g} g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}$
$= -\dfrac{1}{2}\sqrt{-g} g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} = -\dfrac{1}{2}\sqrt{-g} g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}$.
(Αφού ισχύει ότι: $g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = \delta^\mu_\mu \Rightarrow d(g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}) = 0 \Rightarrow dg_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = -dg^{\mu\nu}g_{\mu\nu}$)

Άρα μπορούμε πλέον να εκφράσουμε όλους τους όρους που περιέχουν τη μεταβολή της ορίζουσας της μετρικής συναρτήσει της μεταβολής της μετρικής. Αυτό που μένει τώρα, είναι να υπολογίσουμε τη μεταβολή της καμπυλότητας Ricci, η οποία δίνεται από τον τύπο:

$$R_{ab} = \partial_c\Gamma^c_{ab} - \partial_b\Gamma^c_{ac} + \Gamma^c_{cd}\Gamma^d_{ba} - \Gamma^c_{bd}\Gamma^d_{ac}$$

Η μεταβολή του R_{ab} θα είναι:

$$\delta R_{ab} = \partial_c\delta\Gamma^c_{ab} - \partial_b\delta\Gamma^c_{ac} + \delta\Gamma^c_{cd}\Gamma^d_{ba} + \Gamma^c_{cd}\delta\Gamma^d_{ba} - \Gamma^c_{bd}\delta\Gamma^d_{ac} - \delta\Gamma^c_{bd}\Gamma^d_{ac}$$

Μπορούμε να δούμε ότι η παραπάνω ποσότητα είναι η διαφορά δύο συναλλοίωτων παραγώγων των μεταβολών των συμβόλων Christoffel. Πράγματι έχουμε:

$$\nabla_c \delta\Gamma^c_{ab} - \nabla_b \delta\Gamma^c_{ac} =$$

$$\partial_c \Gamma^c_{ab} + \Gamma^c_{cd}\delta\Gamma^d_{ba} - \delta\Gamma^c_{bd}\Gamma^d_{ac} - \Gamma^d_{cb}\delta\Gamma^c_{da}$$

$$-[\partial_b \delta\Gamma^c_{ac} + \Gamma^c_{bd}\delta\Gamma^d_{ac} - \delta\Gamma^c_{cd}\Gamma^d_{ba} - \Gamma^d_{cb}\delta\Gamma^c_{da}] =$$

$$\delta R_{ab}$$

Ο όρος λοιπόν γίνεται:

$$\int d^4x\sqrt{-g}g^{ab}\delta R_{ab} = \int d^4x\sqrt{-g}g^{ab}[\nabla_c \delta\Gamma^c_{ab} - \nabla_b \delta\Gamma^c_{ac}] =$$

$$\int d^4x\sqrt{-g}[\nabla_c g^{ab}\delta\Gamma^c_{ab} - \nabla_b g^{ab}\delta\Gamma^c_{ac}] =$$

$$\int d^4x\sqrt{-g}[\nabla_c g^{ab}\delta\Gamma^c_{ab} - \nabla^a \delta\Gamma^c_{ac}] =$$

$$\int d^4x\sqrt{-g}[\nabla_c g^{ab}\delta\Gamma^c_{ab} - \nabla_c g^{ac}\delta\Gamma^c_{ac}] =$$

$$\int d^4x\sqrt{-g}\nabla_c[g^{ab}\delta\Gamma^c_{ab} - g^{ac}\delta\Gamma^c_{ac}] =$$

$$\int d^4x\sqrt{-g}\nabla_c[A^c]$$

Άρα:

$$\int d^4x\sqrt{-g}\nabla_c A^c = \int \sqrt{-n}A^c\hat{n}_c d^3x = 0$$

μέσα από το νόμο του Gauss και γιατί τα άκρα της επιφάνειας του χωρόχρονου είναι αμετάβλητα. Συνεπώς, ο όρος δε συνεισφέρει.
Είμαστε πλέον σε θέση να εκφράσουμε όλους τους όρους συναρτήσει της μεταβολής της μετρικής, έχοντας υπολογίσει και τη συνεισφορά του όρου της μεταβολής της καμ-

πυλότητας Ricci. Θα έχουμε:

$$\delta I = \delta I[g_{\mu\nu},\varphi] = \delta \int d^4x\sqrt{-g}\Big[\frac{R-2\Lambda}{16\pi G} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - V(\varphi)\Big] = \int d^4x\Big[\delta\sqrt{-g}\frac{R}{16\pi G} +$$

$$\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\frac{1}{16\pi G} + \frac{1}{16\pi G}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} - \frac{2\Lambda}{16\pi G}\delta\sqrt{-g} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\delta\sqrt{-g}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi -$$

$$\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} - V(\varphi)\delta\sqrt{-g}\Big] = \int d^4x\Big[-\frac{R}{16\pi G}\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} + \frac{1}{16\pi G}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} +$$

$$0 + \frac{2\Lambda}{16\pi G}\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} +$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}V(\varphi)\Big]$$

Σε αυτό το σημείο μπορούμε να βγάλουμε κοινούς παράγοντες τη ρίζα της ορίζουσας της μετρικής αλλά και τη μεταβολή της μετρικής, αλλάζοντας όλους τους βουβούς δείκτες από μν σε αβ. Παίρνουμε:

$$\delta I = \int d^4x\Big[-\frac{R}{16\pi G}\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} + \frac{1}{16\pi G}\sqrt{-g}\delta g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} + \frac{2\Lambda}{16\pi G}\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}$$

$$+\frac{1}{4}\sqrt{-g}g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - \frac{1}{2}\partial_\alpha\varphi\partial_\beta\varphi\sqrt{-g}\delta g^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta}V(\varphi)\Big] =$$

$$\int d^4x\sqrt{-g}\delta g^{\alpha\beta}\Big[-\frac{R}{16\pi G}\frac{1}{2}g_{\alpha\beta} + \frac{1}{16\pi G}R_{\alpha\beta} + \frac{2\Lambda}{16\pi G}\frac{1}{2}g_{\alpha\beta} + \frac{1}{4}g_{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - \frac{1}{2}\partial_\alpha\varphi\partial_\beta\varphi +$$

$$\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}V(\varphi)\Big]$$

$$= \int d^4x\sqrt{-g}\delta g^{\alpha\beta}\Big\{\frac{1}{16\pi G}[-\frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\Lambda g_{\alpha\beta}] + \frac{1}{4}g_{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - \frac{1}{2}\partial_\alpha\varphi\partial_\beta\varphi +$$

$$\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}V(\varphi)\Big\} = 0.$$

Για να ισούται με μηδέν η μεταβολή της δράσης για κάθε αυθαίρετη μεταβολή της μετρικής, θα πρέπει η προς ολοκλήρωση ποσότητα να ισούται με μηδέν. Δηλαδή:

$$\frac{1}{16\pi G}[-\tfrac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\Lambda g_{\alpha\beta}] + \frac{1}{4}g_{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - \frac{1}{2}\partial_\alpha\varphi\partial_\beta\varphi + \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}V(\varphi) = 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\Lambda g_{\alpha\beta} = 16\pi G[-\frac{1}{4}g_{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi + \frac{1}{2}\partial_\alpha\varphi\partial_\beta\varphi - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}V(\varphi)] \Rightarrow$$

$$G_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} = 8\pi G[-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi + \partial_\alpha\varphi\partial_\beta\varphi - g_{\alpha\beta}V(\varphi)] \Rightarrow$$

$$G_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} = 8\pi G T_{\alpha\beta}$$

Η τελευταία εξίσωση είναι εξίσωση του Einstein, όπου $G_{\alpha\beta}$ ο τανυστής του Einstein και $T_{\alpha\beta}$ ο τανυστής ορμής-ενέργειας.

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}$$

,

$$T_{\alpha\beta} = \partial_\alpha\varphi\partial_\beta\varphi - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - g_{\alpha\beta}V(\varphi)$$

Από τη μεταβολή της μετρικής πήραμε λοιπόν μια εξίσωση πεδίου. Σειρά τώρα έχει η μεταβολή του βαθμωτού πεδίου φ. Όπως προείπαμε, η μεταβολή του βαθμωτού πεδίου φ αφήνει αναλοίωτους όλους τους όρους που αφορούν τη δράση Einstein-Hilbert. Δηλαδή:

$$\delta I_\varphi = I_{E-H} + \delta I_\varphi$$

$$-\int d^4x\sqrt{-g}[\delta[\tfrac{1}{2}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\varphi\nabla_\nu\varphi]-\delta V(\varphi)]=0$$

$$-\int d^4x\sqrt{-g}[\tfrac{1}{2}g^{\mu\nu}[(\nabla_\mu\delta\varphi)\nabla_\nu\varphi+\nabla_\mu\varphi\nabla_\nu\delta\varphi]-\tfrac{dV}{d\varphi}\delta\varphi]=0$$

$$-\int d^4x\sqrt{-g}[\tfrac{1}{2}2g^{\mu\nu}[(\nabla_\mu\delta\varphi)\nabla_\nu\varphi]-\tfrac{dV}{d\varphi}\delta\varphi]=0$$

$$-\int d^4x\sqrt{-g}[(\nabla^\nu\delta\varphi)\nabla_\nu\varphi]-\int d^4x\sqrt{-g}\tfrac{dV}{d\varphi}\delta\varphi=0$$

$$-\int d^4x\sqrt{-g}\nabla^\nu[(\delta\varphi)\nabla_\nu\varphi]+\int d^4x\sqrt{-g}\delta\varphi[\nabla^\nu\nabla_\nu\varphi]-\int d^4x\sqrt{-g}\tfrac{dV}{d\varphi}\delta\varphi=0$$

$$\int d^4x\sqrt{-g}\delta\varphi[g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\varphi]-\int d^4x\sqrt{-g}\tfrac{dV}{d\varphi}\delta\varphi=0$$

$$\int d^4x\sqrt{-g}\delta\varphi[g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\varphi-\tfrac{dV}{d\varphi}]=0$$

Βλέπουμε πως η μεταβολή του βαθμωτού πεδίου μας έδωσε μία ακόμα εξίσωση πεδίου. Συνολικά έχουμε:

$$G_{\alpha\beta}+\Lambda g_{\alpha\beta}=8\pi G T_{\alpha\beta} \tag{50}$$

$$g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\varphi-\frac{dV}{d\varphi}=0 \tag{51}$$

Μπορούμε να εξάγουμε την εξίσωση για το βαθμωτό πεδίο από την διατήρηση του τανυστή ορμής ενέργειας. Θα έχουμε:

$$\nabla^\alpha(\nabla_\alpha\varphi\nabla_\beta\varphi) - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\nabla^\alpha(\nabla_\mu\varphi\nabla_\nu\varphi) - \nabla^\alpha g_{\alpha\beta}V(\varphi) = 0 \Rightarrow$$

$$\nabla^\alpha\nabla_\alpha\varphi\nabla_\beta\varphi + \nabla_\alpha\varphi\nabla^\alpha\nabla_\beta\varphi - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\nabla^\alpha(\nabla_\mu\varphi)\nabla_\nu\varphi -$$

$$\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\varphi\nabla^\alpha\nabla_\nu\varphi - \nabla^\alpha g_{\alpha\beta}V(\varphi) = 0 \Rightarrow$$

$$\nabla^\alpha\nabla_\alpha\varphi\nabla_\beta\varphi + \nabla_\alpha\varphi\nabla^\alpha\nabla_\beta\varphi - \frac{1}{2}\nabla_\beta(\nabla^\nu\varphi)\nabla_\nu\varphi - \frac{1}{2}\nabla_\beta(\nabla^\mu\varphi)\nabla_\mu\varphi - \nabla_\beta\varphi\frac{dV}{d\varphi} = 0 \Rightarrow$$

$$\nabla^\alpha\nabla_\alpha\varphi\nabla_\beta\varphi - \nabla_\beta\varphi\frac{dV}{d\varphi} = 0 \Rightarrow$$

$$\nabla_\beta\varphi(\nabla^\alpha\nabla_\alpha\varphi - \frac{dV}{d\varphi}) = 0$$

,όπου διαγράψαμε ίδιους όρους και στην προτελευταία σχέση δε μπορεί $\nabla_\beta\varphi = 0$ καθώς αυτό θα σήμαινε ότι το βαθμωτό πεδίο είναι μια σταθερά.
Οι παραπάνω δύο εξισώσεις, είναι οι εξισώσεις πεδίου που διέπουν τη συγκεκριμένη δράση.

Μπορούμε να ενσωματώσουμε την κοσμολογική σταθερά Λ στο δυναμικό ($\Lambda = \mathrm{V}(0)$). Τώρα η εξίσωση Einstein γίνεται: $G_{\alpha\beta} = 8\pi G T_{\alpha\beta} = \kappa T_{\alpha\beta}$,όπου,$\kappa = 8\pi G$. Έχουμε:

$$G_{\alpha\beta} = \kappa T_{\alpha\beta} \Rightarrow R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} = \kappa T_{\alpha\beta} \Rightarrow g^{\nu\alpha}R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg^{\nu\alpha}g_{\alpha\beta} = \kappa g^{\nu\alpha}T_{\alpha\beta} \Rightarrow$$

$$R^\nu_\beta - \frac{1}{2}\delta^\nu_\beta R = \kappa T^\nu_\beta \Rightarrow R^\nu_\nu - \frac{1}{2}\delta^\nu_\nu R = \kappa T^\nu_\nu.$$

Όμως: $\delta^\nu_\nu = 1+1+1+1 = 4$ αφού δουλεύουμε στις 4 διαστάσεις.

Άρα: $R - \frac{1}{2}4R = \kappa T \Rightarrow R = -\kappa T$

Συνεπώς: $R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} = \kappa T_{\alpha\beta} \Rightarrow R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}(-\kappa T) = \kappa T_{\alpha\beta} \Rightarrow R_{\alpha\beta} = \kappa(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}T)$,
όπου T: $T = g^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta}$, άρα υπολογίζοντας πρώτα το ίχνος του τανυστή ορμής ενέργειας

και μετά αντικαθιστώντας στην εξίσωση $R_{\alpha\beta} = \kappa(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}T) =$ θα έχουμε:

$$T = g^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\varphi\partial_\beta\varphi - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}V(\varphi) \Rightarrow$$

$$T = g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\varphi\partial_\beta\varphi - 2g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - 4V(\varphi) \Rightarrow$$

$$T = -g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - 4V(\varphi)$$

Άρα:

$$R_{\alpha\beta} = \kappa(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}T) =$$

$$\kappa(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}[-g_{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - 4g_{\alpha\beta}V(\varphi)]) =$$

$$\kappa(T_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi + 2g_{\alpha\beta}V(\varphi)) =$$

$$\kappa(\partial_\alpha\varphi\partial_\beta\varphi - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - g_{\alpha\beta}V(\varphi) + \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi + 2g_{\alpha\beta}V(\varphi)) \Rightarrow$$

$$R_{\alpha\beta} = \kappa[\partial_\alpha\varphi\partial_\beta\varphi + g_{\alpha\beta}V(\varphi)] \tag{52}$$

Για να λύσουμε την πιο πάνω εξίσωση θα πρέπει να υπολογίσουμε τις καμπυλότητες Ricci. Για να συμβεί αυτό θα υπολογίσουμε τα σύμβολα Christoffel. Θεωρούμε πως το στοιχείο μήκους, η ελάχιστη απόσταση μεταξύ δύο γειτονικών σημείων, έχει την παρακάτω μορφή:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + a(r)^2 d\sigma^2$$

όπου $d\sigma^2$ η μετρική της στοιχειώδους σφαίρας ακτίνας r, δηλαδή: $d\sigma^2 = r^2(d\theta^2 +$

$sin^2\theta d\varphi^2)$. Όπως βλέπουμε οι συντελεστές της μετρικής δεν έχουν εξάρτηση από το χρόνο και τις γωνίες. Αυτό συμβαίνει γιατί η μετρική μιας ανεξάρτητης πηγής πρέπει να έιναι ανεξάρτητη της χρονικής συντεταγμένης t και δε θα πρέπει να περιλαμβάνει όρους dx_i, όπου $x_i = r, \theta, \varphi$, αφού αλλάζουν πρόσημο κάτω από το μετασχηματισμό $t \to -t$. Για παράδειγμα $dtdr \to -dtdr$ για $t \to -t$, ενώ $dtdt \to dtdt$ για $t \to -t$. Επιπλέον, οι σφαιρικές συντεταγμένες είναι εκλεγμένες κατά τέτοιο τρόπο ώστε μια περιστροφή του χωρόχρονου να παράγει ίδιο μετασχηματισμό στις συντεταγμένες ϑ και φ για όλες τις σφαίρες, Άρα δε θα υπάρχουν όροι drdϑ, drdφ, στο στοιχείο μήκους αφού δεν είναι σφαιρικά συμμετρικοί. Τα παραπάνω επιχειρήματα εξηγούν την εκλογή της μορφής του στοιχείου μήκους.

Θα προχωρήσουμε τώρα στον υπολογισμό των καμπυλοτήτων. Θα βρούμε πρώτα τα σύμβολα Christoffel. Αυτά, δίνονται από τον τύπο:

$$\Gamma^{\delta}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\delta} \left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}}\right)$$

όπου $\partial g_{\alpha\beta}$ οι συντελεστές της μετρικής με τα α,β,γ,δ να παίρνουν τις τιμές t,r,φ,ϑ. Για ευκολία θα παρουσιάσουμε μόνο τον υπολογισμό των συμβόλων Christoffel που δεν είναι μηδέν, καθώς, η διαγώνια μορφή της μετρικής απλοποιεί κατά πολύ τους υπολογισμούς. Έχουμε:

$$\Gamma^r_{tt} = \frac{1}{2}g^{rr}(\frac{\partial g_{rt}}{\partial t} + \frac{\partial g_{rt}}{\partial t} - \frac{\partial g_{tt}}{\partial r}) = \frac{1}{2}g^{rr}(-\frac{\partial g_{tt}}{\partial r}) = \frac{f'(r)f(r)}{2}$$

$$\Gamma^r_{rr} = \frac{1}{2}g^{rr}(\frac{\partial g_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial g_{rr}}{\partial r} - \frac{\partial g_{rr}}{\partial r}) = +\frac{1}{2}g^{rr}(\frac{\partial g_{rr}}{\partial r}) = -\frac{f'(r)}{2f(r)}$$

$$\Gamma^r_{\theta\theta} = \frac{1}{2}g^{rr}(\frac{\partial g_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial g_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r}) = -\frac{1}{2}g^{rr}(\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r}) = a(r)a'(r)f(r)$$

$$\Gamma^r_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2}g^{rr}(\frac{\partial g_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial g_{r\varphi}}{\partial \varphi} - \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r}) = -\frac{1}{2}g^{rr}(\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r}) = sin^2\theta a(r)a'(r)f(r) = sin^2\theta\Gamma^r_{\theta\theta}$$

$$\Gamma^t_{tr} = \frac{1}{2}g^{tt}(\frac{\partial g_{tt}}{\partial r} + \frac{\partial g_{tr}}{\partial t} - \frac{\partial g_{tt}}{\partial t}) = \frac{1}{2}g^{tt}(\frac{\partial g_{tt}}{\partial r}) = \frac{f'(r)}{2f(r)}$$

$$\Gamma^\theta_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2}g^{\theta\theta}(\frac{\partial g_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial g_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} - \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial \theta}) = -\frac{1}{2}g^{\theta\theta}(\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial \theta}) = -cos\theta sin\theta$$

$$\Gamma^\theta_{\theta r} = \frac{1}{2}g^{\theta\theta}(\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r} + \frac{\partial g_{\theta r}}{\partial \theta} - \frac{\partial g_{\theta r}}{\partial \theta}) = \frac{1}{2}g^{\theta\theta}(\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r}) = \frac{a'(r)}{a(r)}$$

$$\Gamma^\varphi_{\varphi\theta} = \frac{1}{2}g^{\varphi\varphi}(\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial \theta} + \frac{\partial g_{\varphi\theta}}{\partial \varphi} - \frac{\partial g_{\varphi\theta}}{\partial \varphi}) = \frac{1}{2}g^{\varphi\varphi}(\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial \theta}) = \frac{cos\theta}{sin\theta}$$

$$\Gamma^\varphi_{\varphi r} = \frac{1}{2}g^{\varphi\varphi}(\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r} + \frac{\partial g_{\varphi r}}{\partial \varphi} - \frac{\partial g_{\varphi r}}{\partial \varphi}) = \frac{1}{2}g^{\varphi\varphi}(\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r}) = \frac{a'(r)}{a(r)}$$

Υπολογίσαμε λοιπόν τα σύμβολα Christoffel. Θα υπολογίσουμε τώρα τους τανυστές της καμπυλότητας Ricci: $R_{\alpha\beta} = \Gamma^\rho_{\beta\alpha,\rho} - \Gamma^\rho_{\rho\alpha,\beta} + \Gamma^\rho_{\rho\lambda}\Gamma^\lambda_{\beta\alpha} - \Gamma^\rho_{\beta\lambda}\Gamma^\lambda_{\rho\alpha}$. Για ένα τετραδιάστατο χώρο, οι καμπυλότητες Ricci που πρέπει να υπλογίσουμε είναι 10. Ωστόσο, από τη θεώρηση μιας διαγώνιας μετρικής που εξαρτάται μόνο από την ακτινική συνιστώσα r έχουμε μόνο τους 4 διαγώνιους όρους $R_{tt}, R_{rr}, R_{\theta\theta}, R_{\varphi\varphi}$. Πράγματι, υπολογίζοντας έναν έναν τους όρους ξεχωριστά για $\alpha \neq \beta$ έχουμε:

$\Gamma^{t}_{\beta\alpha,t} = 0$ (δεν έχουμε εξάρτηση από το t)

$\Gamma^{t}_{t\alpha,\beta} = 0$ (υπάρχει μόνο το Γ^{t}_{tr} και έχει εξάρτηση από το r αλλά $\alpha \neq \beta$)

$\Gamma^{r}_{\beta\alpha,r} = 0$ (Υπάρχουν μόνο τα σύμβολα για α=β)

$\Gamma^{r}_{r\alpha,\beta} = 0$ (Υπάρχει μόνο το Γ^{r}_{rr}, εξαρτάται από το r αλλά $\alpha \neq \beta$)

$\Gamma^{\theta}_{\alpha\beta,\theta} = 0$ (για $a \neq \beta$ υπάρχει μόνο το $\Gamma^{\theta}_{\theta r}$ το οποίο έχει εξάρτηση μόνο από το r)

$\Gamma^{\theta}_{\theta\alpha,\beta} = 0$ (για $a \neq \beta$ υπάρχει μόνο το $\Gamma^{\theta}_{\theta r}$ το οποίο έχει εξάρτηση μόνο από το r)

$\Gamma^{\varphi}_{\alpha\beta,\varphi} = 0$ (δεν έχουμε εξάρτηση από το φ)

$\Gamma^{\varphi}_{\varphi\alpha,\beta} = 0$ (Υπάρχουν το $\Gamma^{\varphi}_{\varphi r}$ το οποίο έχει εξάρτηση από το r και το $\Gamma^{\varphi}_{\varphi\theta}$ το οποίο έχει εξάρτηση από το ϑ αλλά $a \neq \beta$)

$\Gamma^{t}_{t\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\beta\alpha} = \Gamma^{t}_{tt}\Gamma^{t}_{\beta\alpha} + \Gamma^{t}_{tr}\Gamma^{r}_{\beta\alpha} + \Gamma^{t}_{t\theta}\Gamma^{\theta}_{\beta\alpha} + \Gamma^{t}_{t\varphi}\Gamma^{\varphi}_{\beta\alpha} = 0 + \Gamma^{t}_{tr}\Gamma^{r}_{\beta\alpha} + 0 + 0 = 0$ (Υπάρχουν τα $\Gamma^{r}_{\beta\alpha}$ για α=β αλλά $\alpha \neq \beta$)

$\Gamma^{t}_{\beta\lambda}\Gamma^{\lambda}_{t\alpha} = \Gamma^{t}_{\beta t}\Gamma^{t}_{t\alpha} + \Gamma^{t}_{\beta r}\Gamma^{r}_{t\alpha} + \Gamma^{t}_{\beta\theta}\Gamma^{\theta}_{t\alpha} + \Gamma^{t}_{\beta\varphi}\Gamma^{\varphi}_{t\alpha} = \Gamma^{t}_{\beta t}\Gamma^{t}_{t\alpha} + \Gamma^{t}_{tr}\Gamma^{r}_{t\alpha} + 0 + 0 = 0$ $(a \neq \beta)$

$\Gamma^{r}_{r\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\beta\alpha} = \Gamma^{r}_{rt}\Gamma^{t}_{\beta\alpha} + \Gamma^{r}_{rr}\Gamma^{r}_{\beta\alpha} + \Gamma^{r}_{r\theta}\Gamma^{\theta}_{\beta\alpha} + \Gamma^{r}_{r\varphi}\Gamma^{\varphi}_{\beta\alpha} = 0 + \Gamma^{r}_{rr}\Gamma^{r}_{\beta\alpha} + 0 + 0 = 0$ $(a \neq \beta)$

$\Gamma^{r}_{\beta\lambda}\Gamma^{\lambda}_{r\alpha} = \Gamma^{r}_{\beta t}\Gamma^{t}_{r\alpha} + \Gamma^{r}_{\beta r}\Gamma^{r}_{r\alpha} + \Gamma^{r}_{\beta\theta}\Gamma^{\theta}_{r\alpha} + \Gamma^{r}_{\beta\varphi}\Gamma^{\varphi}_{r\alpha} = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$ $(a \neq \beta)$

$\Gamma^{\theta}_{\theta\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\beta\alpha} = \Gamma^{\theta}_{\theta t}\Gamma^{t}_{\beta\alpha} + \Gamma^{\theta}_{\theta r}\Gamma^{r}_{\beta\alpha} + \Gamma^{\theta}_{\theta\theta}\Gamma^{\theta}_{\beta\alpha} + \Gamma^{\theta}_{\theta\varphi}\Gamma^{\varphi}_{\beta\alpha} = 0 + 0 + 0 + \Gamma^{\theta}_{\theta\varphi}\Gamma^{\varphi}_{\varphi r} = \frac{cos\theta}{sin\theta}\frac{\alpha'(r)}{a(r)}$ $(a \neq \beta)$

$\Gamma^{\theta}_{\beta\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\theta\alpha} = \Gamma^{\theta}_{\beta t}\Gamma^{t}_{\theta\alpha} + \Gamma^{\theta}_{\beta r}\Gamma^{r}_{\theta\alpha} + \Gamma^{\theta}_{\beta\theta}\Gamma^{\theta}_{\theta\alpha} + \Gamma^{\theta}_{\beta\varphi}\Gamma^{\varphi}_{\theta\alpha} = 0 + 0 + 0 + 0 = 0 + 0$ $(a \neq \beta)$

$\Gamma^{\varphi}_{\varphi\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\beta\alpha} = \Gamma^{\varphi}_{\varphi t}\Gamma^{t}_{\beta\alpha} + \Gamma^{\varphi}_{\varphi r}\Gamma^{r}_{\beta\alpha} + \Gamma^{\varphi}_{\varphi\theta}\Gamma^{\theta}_{\beta\alpha} + \Gamma^{\varphi}_{\varphi\varphi}\Gamma^{\varphi}_{\beta\alpha} = 0 + 0 + \Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi}\Gamma^{\theta}_{\theta r} + 0 = \frac{cos\theta}{sin\theta}\frac{a'(r)}{a(r)}$ $(a \neq \beta)$

$\Gamma^{\varphi}_{\beta\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\varphi\alpha} = \Gamma^{\varphi}_{\beta t}\Gamma^{t}_{\varphi\alpha} + \Gamma^{\varphi}_{\beta r}\Gamma^{r}_{\varphi\alpha} + \Gamma^{\varphi}_{\beta\theta}\Gamma^{\theta}_{\varphi\alpha} + \Gamma^{\varphi}_{\beta\varphi}\Gamma^{\varphi}_{\varphi\alpha} = 0 + 0 + \Gamma^{\varphi}_{r\varphi}\Gamma^{\varphi}_{\varphi\theta} + \Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi}\Gamma^{\varphi}_{\varphi r} =$

$2\frac{cos\theta}{sin\theta}\frac{a'(r)}{a(r)}$ $(a \neq \beta)$

Οι μη μηδενικοί όροι μας δίνουν:

$\Gamma^{\theta}_{\theta\varphi}\Gamma^{\varphi}_{\varphi r} + \Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi}\Gamma^{\theta}_{\theta r} - \Gamma^{\varphi}_{r\varphi}\Gamma^{\varphi}_{\varphi\theta} - \Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi}\Gamma^{\varphi}_{\varphi r} = \frac{cos\theta}{sin\theta}\frac{a'(r)}{a(r)} + \frac{cos\theta}{sin\theta}\frac{a'(r)}{a(r)} - 2\frac{cos\theta}{sin\theta}\frac{a'(r)}{a(r)} = 0$

Συνεπώς για $a \neq \beta$ όλα τα $R_{\alpha\beta}$ είναι μηδέν. Για α=β θα έχουμε:

Καμπυλότητα Ricci

$$R_{\alpha\beta} = \frac{\partial\Gamma^{\rho}_{\beta\alpha}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial\Gamma^{\rho}_{\rho\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma^{\rho}_{\rho\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\beta\alpha} - \Gamma^{\rho}_{\beta\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\rho\alpha}$$

$$R_{tt} = \frac{\partial\Gamma^{\rho}_{tt}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial\Gamma^{\rho}_{\rho t}}{\partial t} + \Gamma^{\rho}_{\rho\lambda}\Gamma^{\lambda}_{tt} - \Gamma^{\rho}_{t\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\rho t} =$$

$$\frac{\partial\Gamma^{t}_{tt}}{\partial t} - \frac{\partial\Gamma^{t}_{tt}}{\partial t} + \Gamma^{t}_{t\lambda}\Gamma^{\lambda}_{tt} - \Gamma^{t}_{t\lambda}\Gamma^{\lambda}_{tt} +$$

$$\frac{\partial\Gamma^{r}_{tt}}{\partial r} - \frac{\partial\Gamma^{r}_{rt}}{\partial t} + \Gamma^{r}_{r\lambda}\Gamma^{\lambda}_{tt} - \Gamma^{r}_{t\lambda}\Gamma^{\lambda}_{rt} +$$

$$\frac{\partial\Gamma^{\theta}_{tt}}{\partial\theta} - \frac{\partial\Gamma^{\theta}_{\theta t}}{\partial t} + \Gamma^{\theta}_{\theta\lambda}\Gamma^{\lambda}_{tt} - \Gamma^{\theta}_{t\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\theta t} +$$

$$\frac{\partial\Gamma^{\varphi}_{tt}}{\partial\varphi} - \frac{\partial\Gamma^{\varphi}_{\varphi t}}{\partial t} + \Gamma^{\varphi}_{\varphi\lambda}\Gamma^{\lambda}_{tt} - \Gamma^{\varphi}_{t\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\varphi t} =$$

$$\frac{\partial\Gamma^r_{tt}}{\partial r} + \Gamma^r_{rr}\Gamma^r_{tt} - \Gamma^r_{tt}\Gamma^t_{rt} + \Gamma^\theta_{\theta r}\Gamma^r_{tt} + \Gamma^\varphi_{\varphi r}\Gamma^r_{tt} =$$

$$\frac{1}{2}f''(r)f(r) + \frac{1}{2}f'(r)f'(r) + \frac{f'(r)f(r)}{2}(\frac{-f'(r)}{2f(r)})$$

$$+\frac{f'(r)f(r)}{2}(\frac{-f'(r)}{2f(r)}) + \frac{a'(r)}{a(r)}\frac{f'(r)f(r)}{2} + \frac{a'(r)}{a(r)}\frac{f'(r)f(r)}{2} =$$

$$\frac{2f(r)a'(r)f'(r) + a(r)f(r)f''(r)}{2a(r)} \Rightarrow$$

$$R_{tt} = \frac{2f(r)a'(r)f'(r) + a(r)f(r)f''(r)}{2a(r)}$$

$$R_{rr} = \frac{\partial\Gamma^\rho_{rr}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial\Gamma^\rho_{\rho r}}{\partial r} + \Gamma^\rho_{\rho\lambda}\Gamma^\lambda_{rr} - \Gamma^\rho_{r\lambda}\Gamma^\lambda_{\rho r} =$$

$$\frac{\partial\Gamma^t_{rr}}{\partial t} - \frac{\partial\Gamma^t_{tr}}{\partial r} + \Gamma^t_{t\lambda}\Gamma^\lambda_{rr} - \Gamma^t_{r\lambda}\Gamma^\lambda_{tr} +$$

$$\frac{\partial\Gamma^r_{rr}}{\partial r} - \frac{\partial\Gamma^r_{rr}}{\partial r} + \Gamma^r_{r\lambda}\Gamma^\lambda_{rr} - \Gamma^r_{r\lambda}\Gamma^\lambda_{rr} +$$

$$\frac{\partial\Gamma^\theta_{rr}}{\partial \theta} - \frac{\partial\Gamma^\theta_{\theta r}}{\partial r} + \Gamma^\theta_{\theta\lambda}\Gamma^\lambda_{rr} - \Gamma^\theta_{r\lambda}\Gamma^\lambda_{\theta r} +$$

$$\frac{\partial \Gamma^{\varphi}_{rr}}{\partial \varphi} - \frac{\partial \Gamma^{\varphi}_{\varphi r}}{\partial r} + \Gamma^{\varphi}_{\varphi\lambda}\Gamma^{\lambda}_{rr} - \Gamma^{\varphi}_{r\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\varphi r} =$$

$$-\frac{\partial \Gamma^{t}_{tr}}{\partial r} + \Gamma^{t}_{tr}\Gamma^{r}_{rr} - \Gamma^{t}_{rt}\Gamma^{t}_{tr} - \frac{\partial \Gamma^{\theta}_{\theta r}}{\partial r} - \frac{\partial \Gamma^{\varphi}_{\varphi r}}{\partial r} + \Gamma^{\theta}_{\theta r}\Gamma^{r}_{rr} - \Gamma^{\theta}_{r\theta}\Gamma^{\theta}_{\theta r} + \Gamma^{\varphi}_{\varphi r}\Gamma^{r}_{rr} - \Gamma^{\varphi}_{\varphi r}\Gamma^{\varphi}_{r\varphi} =$$

$$-\frac{f''(r)2f(r) - 2f'(r)f'(r)}{4f^2(r)} - \frac{f'(r)f'(r)}{4f^2(r)} - \frac{f'(r)f'(r)}{4f^2(r)} - 2\frac{a''(r)a(r) - a'(r)a'(r)}{a^2(r)}$$

$$-\frac{f'(r)a'(r)}{2f(r)a(r)} - 2\frac{a'(r)a'(r)}{a(r)a(r)} - \frac{a'(r)f'(r)}{2a(r)f(r)} = \frac{-2a'(r)f'(r) - 4f(r)a''(r) - a(r)f''(r)}{2a(r)f(r)} \Rightarrow$$

$$R_{rr} = \frac{-2a'(r)f'(r) - 4f(r)a''(r) - a(r)f''(r)}{2a(r)f(r)}$$

$$R_{\theta\theta} = \frac{\partial \Gamma^{\rho}_{\theta\theta}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial \Gamma^{\rho}_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \Gamma^{\rho}_{\rho\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\theta\theta} - \Gamma^{\rho}_{\theta\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\rho\theta} =$$

$$\frac{\partial \Gamma^{t}_{\theta\theta}}{\partial t} - \frac{\partial \Gamma^{t}_{t\theta}}{\partial \theta} + \Gamma^{t}_{t\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\theta\theta} - \Gamma^{t}_{\theta\lambda}\Gamma^{\lambda}_{t\theta} +$$

$$\frac{\partial \Gamma^{r}_{\theta\theta}}{\partial r} - \frac{\partial \Gamma^{r}_{r\theta}}{\partial \theta} + \Gamma^{r}_{r\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\theta\theta} - \Gamma^{r}_{\theta\lambda}\Gamma^{\lambda}_{r\theta} +$$

$$\frac{\partial \Gamma^{\theta}_{\theta\theta}}{\partial \theta} - \frac{\partial \Gamma^{\theta}_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \Gamma^{\theta}_{\theta\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\theta\theta} - \Gamma^{\theta}_{\theta\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\theta\theta} +$$

$$\frac{\partial\Gamma^{\varphi}_{\theta\theta}}{\partial\varphi} - \frac{\partial\Gamma^{\varphi}_{\varphi\theta}}{\partial\theta} + \Gamma^{\varphi}_{\varphi\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\theta\theta} - \Gamma^{\varphi}_{\theta\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\varphi\theta} =$$

$$\Gamma^{t}_{tr}\Gamma^{r}_{\theta\theta} + \frac{\partial\Gamma^{r}_{\theta\theta}}{\partial r} + \Gamma^{r}_{rr}\Gamma^{r}_{\theta\theta} - \Gamma^{r}_{\theta\theta}\Gamma^{\theta}_{r\theta} - \frac{\partial\Gamma^{\varphi}_{\varphi\theta}}{\partial\theta} + \Gamma^{\varphi}_{\varphi r}\Gamma^{r}_{\theta\theta} - \Gamma^{\varphi}_{\varphi\theta}\Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi} =$$

$$-\frac{f'(r)a(r)a'(r)}{2} - f'(r)a'(r)a(r) - f(r)a'(r)a'(r) - f(r)a(r)a''(r)$$

$$+\frac{f'(r)a(r)a'(r)}{2} + f(r)a'(r)a'(r) - \frac{-sin^2\theta - cos^2\theta}{sin^2\theta}$$

$$+\frac{a'(r)}{a(r)}(-f(r)a(r)a'(r)) - \frac{f'(r)a(r)a'(r)}{2} - f'(r)a(r)a'(r) - \frac{cos^2\theta}{sin^2\theta} \Rightarrow$$

$$R_{\theta\theta} = 1 - f(r)(a'(r))^2 - a(r)a'(r)f'(r) - a(r)f(r)a''(r)$$

$$R_{\varphi\varphi} = \frac{\partial\Gamma^{\rho}_{\varphi\varphi}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial\Gamma^{\rho}_{\rho\varphi}}{\partial\varphi} + \Gamma^{\rho}_{\rho\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\varphi\varphi} - \Gamma^{\rho}_{\varphi\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\rho\varphi} =$$

$$\frac{\partial\Gamma^{t}_{\varphi\varphi}}{\partial t} - \frac{\partial\Gamma^{t}_{t\varphi}}{\partial\varphi} + \Gamma^{t}_{t\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\varphi\varphi} - \Gamma^{t}_{\varphi\lambda}\Gamma^{\lambda}_{t\varphi} +$$

$$\frac{\partial\Gamma^{r}_{\varphi\varphi}}{\partial r} - \frac{\partial\Gamma^{r}_{r\varphi}}{\partial\varphi} + \Gamma^{r}_{r\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\varphi\varphi} - \Gamma^{r}_{\varphi\lambda}\Gamma^{\lambda}_{r\varphi} +$$

$$\frac{\partial\Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi}}{\partial\theta} - \frac{\partial\Gamma^{\theta}_{\theta\varphi}}{\partial\varphi} + \Gamma^{\theta}_{\theta\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\varphi\varphi} - \Gamma^{\theta}_{\varphi\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\theta\varphi} +$$

$$\frac{\partial\Gamma^{\varphi}_{\varphi\varphi}}{\partial\varphi}-\frac{\partial\Gamma^{\varphi}_{\varphi\varphi}}{\partial\varphi}+\Gamma^{\varphi}_{\varphi\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\varphi\varphi}-\Gamma^{\varphi}_{\varphi\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\varphi\varphi}=$$

$$\Gamma^{t}_{tr}\Gamma^{r}_{\varphi\varphi}+\frac{\partial\Gamma^{r}_{\varphi\varphi}}{\partial r}+\Gamma^{r}_{rr}\Gamma^{r}_{\varphi\varphi}-\Gamma^{r}_{\varphi\varphi}\Gamma^{\varphi}_{r\varphi}+\frac{\partial\Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi}}{\partial\theta}+\Gamma^{\theta}_{\theta r}\Gamma^{r}_{\varphi\varphi}-\Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi}\Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi}=$$

$$\frac{f'(r)}{2f(r)}sin^2\theta(-f(r)a(r)a'(r))+sin^2\theta[-f'(r)a(r)a'(r)-f(r)a'(r)a'(r)-f(r)a(r)a''(r)]$$

$$+\frac{f'(r)}{2f(r)}sin^2\theta(f(r)a(r)a'(r))+sin^2\theta(f(r)a(r)a'(r))\frac{a'(r)}{a(r)}+sin^2\theta$$

$$-cos^2\theta-sin^2\theta(f(r)a(r)a'(r))\frac{a'(r)}{a(r)}+cos^2\theta\Rightarrow$$

$$R_{\varphi\varphi}=sin^2\theta[1-f(r)(a'(r))^2-a(r)a'(r)f'(r)-a(r)f(r)a''(r)]=sin^2\theta R_{\theta\theta}$$

Οι εξισώσεις που παίρνουμε θεωρώντας το δυναμικό και το βαθμωτό πεδίο αδιάστατα για την απλοποίηση των υπολογισμών(δηλαδή: $\frac{r}{l}\to r$, $\kappa V(\varphi)\to V(\varphi)$, $\kappa\varphi\to\varphi$) είναι :

$$R_{tt}=\partial_t\varphi\partial_t\varphi+g_{tt}V(\varphi)=g_{tt}V(\varphi) \tag{53}$$

$$R_{rr}=\partial_r\varphi\partial_r\varphi+g_{rr}V(\varphi)=(\partial_r\varphi(r))^2+g_{rr}V(\varphi) \tag{54}$$

$$R_{\theta\theta}=\partial_\theta\varphi\partial_\theta\varphi+g_{\theta\theta}V(\varphi)=g_{\theta\theta}V(\varphi) \tag{55}$$

$$R_{\varphi\varphi} = \partial_\varphi\varphi\partial_\varphi\varphi + g_{\varphi\varphi}V(\varphi) = g_{\varphi\varphi}V(\varphi) \tag{56}$$

Η τελευταία από αυτές τις εξισώσεις γίνεται:

$R_{\varphi\varphi} = g_{\varphi\varphi}V(\varphi) \Rightarrow sin^2\theta R_{\theta\theta} = sin^2\theta g_{\theta\theta}V(\varphi) \Rightarrow R_{\theta\theta} = g_{\theta\theta}V(\varphi)$, δηλαδή παίρνουμε την εξίσωση (56), γεγονός που περιμέναμε εξαιτίας της σφαιρικής συμμετρίας.

Από την εξίσωση (53) έχουμε:

$R_{tt} = g_{tt}V(\varphi) \Rightarrow \dfrac{2f(r)a'(r)f'(r) + a(r)f(r)f''(r)}{2a(r)} = (-f(r))V(\varphi) \Rightarrow \dfrac{f''(r)}{2} + \dfrac{f'(r)a'(r)}{a(r)} + V(\varphi) = 0 \Rightarrow$

$$f''(r) + 2f'(r)\frac{a'(r)}{a(r)} + 2V(\varphi) = 0 \tag{57}$$

Από την εξίσωση (54) έχουμε:

$R_{rr} = (\partial_r\varphi(r))^2 + g_{rr}V(\varphi) \Rightarrow \dfrac{-2a'(r)f'(r) - 4f(r)a''(r) - a(r)f''(r)}{2a(r)f(r)} = (\partial_r\varphi(r))^2 + \dfrac{1}{f(r)}V(\varphi) \Rightarrow \dfrac{-2a'(r)f'(r)}{2a(r)} - \dfrac{2f(r)a''(r)}{2a(r)} - \dfrac{a(r)f''(r)}{2a(r)} = f(r)(\partial_r\varphi(r))^2 + V(\varphi) \Rightarrow$

$$f''(r) + 2f(r)a''(r) + \frac{2a'(r)f(r)}{a(r)} + 2f(r)(\partial_r\varphi(r))^2 + 2V(\varphi) = 0 \tag{58}$$

Από την (55) εξίσωση έχουμε:

$R_{\theta\theta} = g_{\theta\theta}V(\varphi) = 1 - f(r)(a'(r))^2 - a(r)a'(r)f'(r) - a(r)f(r)a''(r) = a^2(r)V(\varphi) \Rightarrow$

$$f'(r)\frac{a'(r)}{a(r)} + f(r)\Big[\frac{(a'(r))^2}{a^2(r)} + \frac{a''(r)}{a(r)}\Big] - \frac{1}{a^2(r)} + V(\varphi) = 0 \tag{59}$$

Λύνοντας ως προς το δυναμικό V(φ) την εξίσωση (57) έχουμε:

$$2V(\varphi) = -f''(r) - \frac{a'(r)}{a(r)}f(r) \tag{60}$$

Αντικαθιστώντας στις εξισώσεις (58) (59) παίρνουμε:

$$f''(r) + 2f'(r)\frac{a'(r)}{a(r)} + 4(\frac{a''(r)}{a(r)} + 2(\partial_r\varphi(r))^2)f(r) - f''(r) - 2f(r)\frac{a'(r)}{a(r)} = 0 \Rightarrow$$

$$a''(r) + \frac{1}{2}a(r)(\partial_r\varphi(r))^2 = 0 \tag{61}$$

$$f'(r)\frac{a'(r)}{a(r)} + (\frac{a''(r)}{a(r)} + \frac{(a'(r))^2}{a^2(r)})f(r) - \frac{1}{a^2(r)} - \frac{f''(r)}{2} - f(r)\frac{a'(r)}{a(r)} = 0 \Rightarrow$$

$$f''(r) - 2(\frac{a''(r)}{a(r)} + \frac{(a'(r))^2}{a^2(r)})f(r) + \frac{2}{a^2(r)} = 0 \tag{62}$$

Από τις παραπάνω δύο εξισώσεις παίρνουμε τις συναρτήσεις α(r), f(r), οπότε η μετρική μας παίρνει την τελική της μορφή:

$$ds^2 = \frac{r(r+2G\mu)}{(r+G\mu)^2}\left[-\left(\frac{r^2}{l^2} - \left(1+\frac{G\mu}{r}\right)^2\right)dt^2 + \left(\frac{r^2}{l^2} - \left(1+\frac{G\mu}{r}\right)^2\right)^{-1}dr^2 + r^2d\sigma^2\right] \tag{63}$$

Η μάζα αυτής της λύσης δίνεται από: $M = \dfrac{\mu}{4\pi}\sigma$, όπου σ είναι το εμβαδό μιας διδιάσατης πολλαπλότητας με αρνητική καμπυλότητα. Οι ιδιομορφίες του χωρόχρονου υπάρχουν για r=0 και r=-2GM, για τις οποίες ο πολλαπλασιαστικός συντελεστής της μετρικής μηδενίζεται. Το r παίρνει τιμές $r > -2GM$ για αρνητικές μάζες και $r > 0$ διαφορετικά, καθώς, επιλεξαμε πως το βαθμωτό πεδίο έχει τη μορφή:

$$\varphi = \sqrt{\frac{3}{4\pi G}} Arctanh \frac{G\mu}{r + G\mu}$$

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης Arctanh είναι [-1,1].Οπότε θα είχαμε:

$$-1 < Arctanh \frac{G\mu}{r + G\mu} < 1 \Rightarrow r > -2GM, r > 0$$

Αυτές οι ιδιομορφίες περικλύονται από τον ορίζοντα γεγονότων ο οποίος βρίσκεται στο

$$r_+ = \frac{l}{2}\big(1 + \sqrt{1 + 4G\mu/l}\big)$$

αρκεί η μάζα να έχει τιμή μεγαλύτερη από $\mu > -\frac{l}{4G}$.

5.3 Η Λύση MTS (Martinez, Troncoso, Staforelli)

Για τη λύση MTS, θεωρούμε το Einstein-Maxwell σύστημα στις 4 διαστάσεις, με κοσμολογική σταθερά Λ και ένα πραγματικό συζευγμένο βαθμωτό πεδίο φ, το οποίο(σύστημα) περιγράφεται από την ακόλουθη δράση:

$$I[g_{\mu\nu}, \varphi, A_\mu] =$$

$$\int d^4x\sqrt{-g}\Big[\frac{R-2\Lambda}{16\pi G} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - \frac{1}{12}R\varphi^2 - \alpha\varphi^4\Big] - \frac{1}{16\pi}\int d^4x\sqrt{-g}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

, όπου G η βαρυτική σταθερά του Newton και α μια αυθέραιτη σταθερά σύζευξης. Παρατηρούμε πως η δράση εξαρτάται από τρεις συνιστώσες, τον μετρικό τανυστή $g_{\mu\nu}$, το βαθμωτό πεδίο φ και το δυναμικό βαθμίδας A_μ. Συνεπώς, η αρχή των μεταβολών περιμένουμε να μας δώσει τρεις εξισώσεις αφού η δράση εξαρτάται από τρεις συνιστώσες. Η μεταβολή ως προς το μετρικό τανυστή του πρώτου όρου της δράσης: $\frac{R-2\Lambda}{16\pi G}$, έχει υπολογισθεί αναλυτικά στην MTZ λύση και γιαυτό θα πάρουμε έτοιμα τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την εφαρμογή πρώτης τάξεως μεταβολών ως προς τη μετρική. Δηλαδή οι όροι που μας ενδιαφέρουν είναι οι:
$\frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi$, $(\sqrt{-g}R\varphi^2)$, $(\sqrt{-g}\alpha\varphi^4)$, $(\sqrt{-g}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu})$. Με μια πρώτη ματια, πέρα από την απουσία δυναμικού όρου, και την ύπαρξη του ηλεκτρομαγνητικού τανυστή, εδώ έχουμε έναν όρο με τον οποίο το πραγματικό πεδίο φ συζεύγεται με την καμπυλότητα Ricci, δηλαδή το βαθμωτό πεδίο φ δεν είναι ελάχιστα συζευγμένο με τη βαρύτητα όπως συνέβαινε στην MTZ περίπτωση. Επίσης αυτός ο όρος θα μας δημιουργήσει σχετικές δυσκολίες στον υπολογισμό της μεταβολής του, καθώς η ύπαρξη του φ^2 μας εμποδίζει να γράψουμε τη μεταβολή της καμπυλότητας Ricci σαν το ολικό διαφορικό της διαφοράς της μεταβολής δύο συνοχών Christoffel και άρα να το στείλουμε στο μηδέν μέσω του νόμου του Gauss, θεωρώντας πως η μετρική μηδενίζεται στο σύνορο όπως ορίζει η αρχή των μεταβολών. Ξεκινάμε λοιπόν από τον πρώτο από αυτούς όρο τον $(\sqrt{-g}R\varphi^2)$ και παίρνοντας τη μεταβολή πρώτης τάξεως ως προς τον μετρικό τανυστή έχουμε:

$$\delta(\sqrt{-g}R\varphi^2) = \delta(\sqrt{-g})R\varphi^2 + \delta(g^{\mu\nu})R_{\mu\nu}\varphi^2 + \delta(R_{\mu\nu})g^{\mu\nu}\varphi^2$$

Η ορίζουσα της μετρικής δείξαμε προηγουμένως πως μεταβάλεται. Ο δεύτερος όρος είναι ”έτοιμος”, καθώς μεταβάλουμε ως προς τη μετρική. Για τη μεταβολή του τανυστή Ricci έχουμε:

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}[\nabla_\rho \delta\Gamma^\rho_{\mu\nu} - \nabla_\nu \delta\Gamma^\rho_{\rho\mu}] = \nabla_\rho[g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\rho_{\mu\nu} - g^{\mu\rho}\delta\Gamma^\sigma_{\sigma\mu}] \tag{64}$$

Θα υπολογίσουμε τώρα τη μεταβολή των συμβόλων του Christoffel. Καταρχάς, ισχύει η σχέση:

$g^{ad}g_{de} = \delta^a_e \Rightarrow (\delta g^{ad})g_{de} + (\delta g_{de})g^{ad} = 0 \Rightarrow \delta g^{ad} = -g^{ad}g^{de}(\delta g_{de})$.

Τα σύμβολα Christoffel , δίνονται από τον τύπο:

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}g^{ad}(\partial_b g_{dc} + \partial_c g_{bd} - \partial_d g_{bc}) \Rightarrow$$

$$\delta\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}\delta g^{ad}(\partial_b g_{dc} + \partial_c g_{bd} - \partial_d g_{bc})$$

$$+\frac{1}{2}g^{ad}(\partial_b \delta g_{dc} + \partial_c \delta g_{bd} - \partial_d \delta g_{bc}) \Rightarrow$$

$$\delta\Gamma^a_{bc} = -\frac{1}{2}g^{ad}g^{de}(\delta g_{de})(\partial_b g_{dc} + \partial_c g_{bd} - \partial_d g_{bc}) + \frac{1}{2}g^{ad}(\partial_b \delta g_{dc} + \partial_c \delta g_{bd} - \partial_d \delta g_{bc}) \Rightarrow$$

$$\delta\Gamma^a_{bc} = -g^{ad}(\delta g_{de})\Gamma^e_{bc} + \frac{1}{2}g^{ad}(\partial_b \delta g_{dc} + \partial_c \delta g_{bd} - \partial_d \delta g_{bc}) \Rightarrow$$

$$\delta\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}g^{ad}\big[\partial_b \delta g_{dc} + \partial_c \delta g_{bd} - \partial_d \delta g_{bc} - 2\delta g_{de}\Gamma^e_{bc}\big] \Rightarrow$$

$$\delta\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}g^{ad}\big[\partial_b \delta g_{dc} - \Gamma^e_{bc}\delta g_{ed} - \Gamma^e_{bd}\delta g_{ec}$$

$$+\partial_c \delta g_{bd} - \Gamma^e_{cd}\delta g_{eb} - \Gamma^e_{cb}\delta g_{ed}$$

$$-\partial_d \delta g_{bc} + \Gamma^e_{db}\delta g_{ec} + \Gamma^e_{dc}\delta g_{eb}\big] \Rightarrow$$

$$\delta\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}g^{ad}\big[\nabla_b \delta g_{dc} + \nabla_c \delta g_{bd} - \nabla_d \delta g_{bc}\big]$$

Αντικαθιστώντας αυτή την εξίσωση στην (64) και εκφράζοντας όλους τους όρους με τη μεταβολή της αντίστροφης της μετρικής και όχι της μετρικής παίρνουμε:

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = -\nabla_\mu\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu} + g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta\delta g^{\mu\nu} \tag{65}$$

Άρα συνολικά:

$$\delta R = R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} - \nabla_\mu\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu} + g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta\delta g^{\mu\nu} \tag{66}$$

Δεν τελειώσαμε όμως εδώ. Οι συναλλοίωτες παράγωγοι δρουν πάνω στη μεταβολή της αντίστροφης της μετρικής, ενώ εμείς θέλουμε αυτή να είναι ένας πολλαπλασιαστικός όρος, ώστε αφού βγει κοινός παράγοντας από κάθε παράγοντα της δράσης να μας δώσει τις εξισώσεις κίνησης. Γιαυτό το λόγο θα πρέπει να ολοκληρώσουμε κατά παράγοντες την (66), ώστε να "μετακινήσουμε" την παράγωγο από τη μεταβολή της αντίστροφης της μετρικής στο βαθμωτό πεδίο φ. Ο πρώτος όρος της (66) είναι ήδη έτοιμος, εκεί η μεταβολή της μετρικής αποτελεί έναν πολλαπλασιαστικό παράγοντα. Οι άλλοι δύο όροι μαζί με το φ^2 θα είναι:

$$\int d^4x\sqrt{-g}\varphi^2[g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta\delta g^{\mu\nu} - \nabla_\mu\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu}] =$$

$$\int d^4x\sqrt{-g}\varphi^2[g_{\mu\nu}\nabla^\beta\nabla_\beta\delta g^{\mu\nu} - \nabla_\mu\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu}] =$$

$$\int d^4x\sqrt{-g}\varphi^2[g_{\mu\nu}\nabla^\beta\nabla_\beta\delta g^{\mu\nu}] - \int d^4x\sqrt{-g}\varphi^2\nabla_\mu\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu}$$

Ο πρώτος όρος θα μας δώσει:

$$\int d^4x\sqrt{-g}\nabla^\beta(g_{\mu\nu}\varphi^2\nabla_\beta\delta g^{\mu\nu}) =$$

$$\int d^4x\sqrt{-g}\nabla^\beta(g_{\mu\nu}\varphi^2)\nabla_\beta\delta g^{\mu\nu} + \int d^4x\sqrt{-g}\varphi^2 g_{\mu\nu}\nabla^\beta\nabla_\beta\delta g^{\mu\nu}$$

Ο πρώτος όρος αποτελεί ένα ολικό διαφορικό (ισχύει η συμβατότητα μετρικής, δηλαδή: $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$) ο οπόιος δε θα συνεισφέρει διότι η μεταβολή της μετρικής μηδενίζεται στο σύνορο όπως ορίζει η αρχή των μεταβολών. Άρα παίρνουμε ότι:

$$0 = \int d^4x\sqrt{-g}\nabla^\beta(\varphi^2)g_{\mu\nu}\nabla_\beta\delta g^{\mu\nu} + \int d^4x\sqrt{-g}\varphi^2 g_{\mu\nu}\nabla^\beta\nabla_\beta\delta g^{\mu\nu} \Rightarrow$$

$$\int d^4x\sqrt{-g}\varphi^2 g_{\mu\nu}\nabla^\beta\nabla_\beta\delta g^{\mu\nu} = -\int d^4x\sqrt{-g}\nabla^\beta(\varphi^2)g_{\mu\nu}\nabla_\beta\delta g^{\mu\nu}$$

Ολοκληρώσαμε για πρώτη φορά και θα ολοκληρώσουμε για ακόμα μία φορά ώστε να δημιουργήσουμε έναν επιφανειακό όρο και να μετακινήσουμε τη δράση των παραγώγων στο φ^2. Σε απόλυτη αντιστοιχία με πριν έχουμε: :

$$\int d^4x\sqrt{-g}\nabla_\beta(\nabla^\beta g_{\mu\nu}\varphi^2\delta g^{\mu\nu}) =$$

$$\int d^4x\sqrt{-g}\nabla_\beta\nabla^\beta(\varphi^2)g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \int d^4x\sqrt{-g}(\nabla^\beta\varphi^2)g_{\mu\nu}\nabla_\beta\delta g^{\mu\nu}$$

Το αριστερό μέλος της πιο πάνω εξίσωσης είναι και αυτό ένα ολικό διαφορικό και άρα δε θα συνεισφέρει. Οπότε έχουμε:

$$\int d^4x\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\nabla_\beta\nabla^\beta(\varphi^2)\delta g^{\mu\nu} = -\int d^4x\sqrt{-g}(\nabla^\beta\varphi^2)g_{\mu\nu}\nabla_\beta\delta g^{\mu\nu}$$

Άρα έχουμε εν τέλει:

$$\int d^4x\sqrt{-g}\varphi^2[g_{\mu\nu}\nabla^\beta\nabla_\beta\delta g^{\mu\nu}] = \int d^4x\sqrt{-g}g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta(\varphi^2)\delta g^{\mu\nu}$$

Αντίστοιχα πράττουμε και για τον άλλο όρο, τον: $\int d^4x\sqrt{-g}\varphi^2\nabla_\mu\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu}$ ο υπολογισμός του οποίου ακολουθεί.

$$\int d^4x\sqrt{-g}\nabla_\mu(\varphi^2\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu}) = \int d^4x\sqrt{-g}\nabla_\mu(\varphi^2)\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu} + \int d^4x\sqrt{-g}\varphi^2\nabla_\mu\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu} \Rightarrow$$

$$\int d^4x\sqrt{-g}(\varphi^2)\nabla_\mu\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu} = -\int d^4x\sqrt{-g}\nabla_\mu\varphi^2\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu}$$

,όπου ο όρος στο αριστερό μέλος μηδενίζεται ως ολικό διαφορικό. Ολοκληρώνουμε κατά παράγοντες για ακόμη μία και τελευταία φορά:

$$\int d^4x\sqrt{-g}\nabla_\nu(\nabla_\mu\varphi^2\delta g^{\mu\nu}) = \int d^4x\sqrt{-g}(\nabla_\nu\nabla_\mu\varphi^2)\delta g^{\mu\nu} + \int d^4x\sqrt{-g}(\nabla_\mu\varphi^2)\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu} \Rightarrow$$

$$\int d^4x\sqrt{-g}\nabla_\mu(\varphi^2)\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu} = -\int d^4x\sqrt{-g}(\nabla_\mu\nabla_\nu\varphi^2)\delta g^{\mu\nu}$$

Αρα:

$$-\int d^4x\sqrt{-g}\varphi^2[\nabla_\mu\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu}] = -\int d^4x\sqrt{-g}\nabla_\mu\nabla_\nu(\varphi^2)\delta g^{\mu\nu}$$

οπότε όλοι οι όροι του $\delta(\sqrt{-g}R\varphi^2)$ μας δίνουν:

$$\delta(\sqrt{-g}R\varphi^2) = \sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \nabla_\mu\nabla_\nu + g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta]\varphi^2$$

,όπου ισχύει η σχέση: $\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$. Μεταβάλλοντας τον όρο $(\sqrt{-g}\alpha\varphi^4)$ ως προς τη μετρική έχουμε:

$$\delta(\sqrt{-g}\alpha\varphi^4) = \delta(\sqrt{-g})\alpha\varphi^4 + \sqrt{-g}\delta\alpha\varphi^4 = \delta(\sqrt{-g})\alpha\varphi^4 = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\alpha\varphi^4$$

Μεταβάλλοντας τον όρο $(\sqrt{-g}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu})$ ως προς τη μετρική έχουμε:

$$\delta(\sqrt{-g}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}) = \delta(\sqrt{-g}F_{\alpha\beta}g^{\alpha\lambda}g^{\beta\sigma}F_{\lambda\sigma}) =$$

$$\delta(\sqrt{-g})F_{\alpha\beta}g^{\beta\sigma}g^{\alpha\lambda}F_{\lambda\sigma} + \sqrt{-g}F_{\alpha\beta}\delta(g^{\alpha\lambda})g^{\beta\sigma}F_{\lambda\sigma} + \sqrt{-g}F_{\lambda\sigma}g^{\alpha\lambda}\delta(g^{\beta\sigma})F_{\alpha\beta} =$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}g^{\alpha\lambda}g^{\beta\sigma}F_{\lambda\sigma} + 2\sqrt{-g}F_{\lambda\sigma}\delta(g^{\alpha\lambda})g^{\beta\sigma}F_{\alpha\beta} =$$

$$2\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\big[F_{\mu\beta}F^{\beta}_{\nu}-\frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\big]$$

Υπολογίσαμε όλους τους όρους που θα μας δώσουν την πρώτη εξίσωση κίνησης. Χρησιμοποιώντας τους όρους που υπολογίστηκαν στη λύση MTZ και αυτούς που υπολογίστηκαν εδώ έχουμε συνολικά:

$$\delta I=\int d^4x\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\Big\{\frac{1}{16\pi G}\big[-\frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}+R_{\mu\nu}+\frac{1}{2}\Lambda g_{\mu\nu}\big]+\frac{1}{4}g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}\varphi\partial_{\beta}\varphi-\frac{1}{2}\partial_{\mu}\varphi\partial_{\nu}\varphi-\frac{1}{12}\big[R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R-\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}+g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}\big]\varphi^2+\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\alpha\varphi^4-\frac{2}{16\pi}\big[F_{\mu\beta}F^{\beta}_{\nu}-\frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\big]\Big\}=0$$

Για να ισούται η δράση με μηδέν θα πρέπει η προς ολοκλήρωση ποσότητα να ισούται με μηδέν δηλαδή:

$$G_{\mu\nu}+\Lambda g_{\mu\nu}=8\pi G(T^{\varphi}_{\mu\nu}+T^{EM}_{\mu\nu})$$

όπου:

$$T^{\varphi}_{\mu\nu}=\partial_{\mu}\varphi\partial_{\nu}\varphi-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}\varphi\partial_{\beta}\varphi+\frac{1}{6}\big[g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}-\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}+G_{\mu\nu}\big]\varphi^2-g_{\mu\nu}\alpha\varphi^4$$

$$T^{EM}_{\mu\nu}=\frac{1}{4\pi}\big[F_{\mu\beta}F^{\beta}_{\nu}-\frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\big]$$

Πήραμε την πρώτη εξίσωση κίνησης θεωρώντας μεταβολές ως προς τη μετρική. Μεταβάλλοντας τώρα το βαθμωτό πεδίο φ οι όροι που δεν το περιέχουν μηδενίζονται οπότε θα ασχοληθούμε μόνο με τους όρους που το περιέχουν. Η μεταβολή σε ένα βαθμωτό πεδίο ως προς το βαθμωτό πεδίο δρα όπως το ολικό διαφορικό. Οι όροι που μας ενδιαφέρουν είναι: $-\frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_{\mu}\varphi\partial_{\nu}\varphi$, $-\frac{1}{12}R\sqrt{-g}\varphi^2$ και $\sqrt{-g}\alpha\varphi^4$. Έχουμε:

$$\frac{1}{2}\delta(g^{\mu\nu}\nabla_\mu\varphi\nabla_\nu\varphi) = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\nabla_\mu(\delta\varphi)\nabla_\nu\varphi + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\nabla_\nu(\delta\varphi)\nabla_\mu\varphi =$$

$$\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\nabla_\mu(\delta\varphi)\nabla_\nu\varphi + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\nabla_\mu(\delta\varphi)\nabla_\nu\varphi = 2\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\delta\varphi\nabla_\nu\varphi = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\delta\varphi\nabla_\nu\varphi$$

Άρα συνολικά, ο όρος αυτός μέσα στο ολοκλήρωμα πάνω στο χωρόχρονο θα είναι:

$$\int d^4x\sqrt{-g}\nabla^\nu(\delta\varphi\nabla_\nu\varphi) = \int d^4x\sqrt{-g}\nabla^\nu(\delta\varphi)\nabla_\nu\varphi + \int d^4x\sqrt{-g}\nabla^\nu\nabla_\nu\varphi\delta\varphi \Rightarrow$$

$$\int d^4x\sqrt{-g}\nabla^\nu(\delta\varphi)\nabla_\nu\varphi = -\int d^4x\sqrt{-g}\nabla^\nu\nabla_\nu\varphi\delta\varphi$$

, όπου εφαρμόσαμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες και μηδενίσαμε τον όρο $\nabla^\nu(\delta\varphi\nabla_\nu\varphi)$ σαν έναν επιφανειακό όρο ο οποίος δε θα συνεισφέρει αφού το βαθμωτό πεδίο παραμένει αμετάβλητο στα άκρα του συνόρου, όπως ορίζει η αρχή των μεταβολών.

Για τον όρο $-\frac{1}{12}R\sqrt{-g}\varphi^2$ έχουμε:

$$-\frac{1}{12}\delta(R\sqrt{-g}\varphi^2) = -\frac{1}{12}R\sqrt{-g}2\varphi\delta\varphi$$

Για τον όρο $(\sqrt{-g}\alpha\varphi^4)$ έχουμε:

$$\delta(\sqrt{-g}\alpha\varphi^4) = \sqrt{-g}\alpha 4\varphi^3\delta\varphi$$

Άρα:

$$\int d^4\sqrt{-g}\big[g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\mu\varphi - \frac{R\varphi}{6} - 4\alpha\varphi^3\big]\delta\varphi$$

Για να είναι το ολοκλήρωμα μηδέν για κάθε αυθαίρετη μεταβολή του φ θα πρέπει η προς ολοκλήρωση ποσότητα να είναι μηδέν. Συνεπώς, παίρνουμε τη δεύτερη εξίσωση κίνησης η οποία είναι:

$$g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\varphi = \frac{R\varphi}{6} + 4\alpha\varphi^3$$

Πήραμε ακόμα μία εξίσωση κίνησης από τη μεταβολή του βαθμωτού πεδίου φ. Το μόνο που μένει τώρα είναι να μεταβάλλουμε το A_μ από την οποία μεταβολή επηρεάζεται μόνο ο τελευταίος όρος που περιέχει τον τανυστή του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Θα έχουμε:

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu - \Gamma^\rho_{\mu\nu}A_\rho - \partial_\nu A_\mu + \Gamma^\rho_{\nu\mu}A_\rho = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

,αφού τα σύμβολα Christoffel είναι συμμετρικά στις εναλλαγές των κάτω δεικτών(Ο τανυστής του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου έχει οριστεί έτσι και αλλιώς $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ χωρίς να εμπλακεί κάπου ο μετρικός τανυστής. Πρακτικά ακόμα και αν κάποιος θεωρήσει πως υπάρχει στρέψη δε θα ισχύει η πιο πάνω σχέση αφού πλέον τα σύμβολα του Christoffel δε θα είναι συμμετρικά στις εναλλαγές κάτω δεικτών πλέον. Αυτό δε σημαίνει πως άλλαζει μορφή ο ηλεκτρομαγνητικός τανυστής, παραμένει έτσι όπως έχει οριστεί:$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Απλά εδώ χρειάζεται να δουλέψουμε με τις συναλλοίωτες παραγώγους διότι δουλεύουμε σε ένα γενικά καμπυλωμένο χωρόχρονο και όχι στο χωρόχρονο Minkowski). Παίρνοντας τώρα τη μεταβολή θα έχουμε:

$$\delta \int d^4x\sqrt{-g}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} =$$

$$\int d^4x\sqrt{-g}\delta F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \int d^4x\sqrt{-g}F^{\mu\nu}\delta F_{\mu\nu} =$$

$$2\int d^4x\sqrt{-g}F^{\mu\nu}\delta F_{\mu\nu} =$$

$$2\int d^4x\sqrt{-g}F^{\mu\nu}(\nabla_\mu\delta A_\nu - \nabla_\nu\delta A_\mu) =$$

$$4\int d^4x\sqrt{-g}F^{\mu\nu}(\nabla_\mu\delta A_\nu)$$

Όμως:

$$\int d^4x\sqrt{-g}\nabla_\mu(F^{\mu\nu}\delta A_\nu) = \int d^4x\sqrt{-g}F^{\mu\nu}\nabla_\mu(\delta A_\nu) + \int d^4x\sqrt{-g}(\nabla_\mu F^{\mu\nu})\delta A_\nu$$

$$\int d^4x\sqrt{-g}F^{\mu\nu}\nabla_\mu(\delta A_\nu) = -\int d^4x\sqrt{-g}(\nabla_\mu F^{\mu\nu})\delta A_\nu$$

Άρα για να μηδενίζεται η δράση για κάθε αυθαίρετη μεταβολή του A_ν θα πρέπει:

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}F^{\mu\nu}) = \partial_\mu(\sqrt{-g}F^{\mu\nu}) = 0$$

,

η οποία είναι η τρίτη και τελευταία εξίσωση κίνησης.
Βρήκαμε λοιπόν τις εξισώσεις κίνησης οι οποίες είναι οι εξής:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G(T^{\varphi}_{\mu\nu} + T^{EM}_{\mu\nu}) \tag{67}$$

$$g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\varphi = \frac{R\varphi}{6} + 4\alpha\varphi^3 \tag{68}$$

$$\partial_\mu(\sqrt{-g}F^{\mu\nu}) = 0 \tag{69}$$

Επιλέγοντας λύσεις της μορφής:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f^{-1}(r)dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2sin^2\theta d\varphi^2$$

και επιλέγοντας $\varphi = \sqrt{\frac{-\Lambda}{6\alpha}}\frac{G\mu}{r+G\mu}$ και $A = -\frac{q}{r}dt$, παίρνουμε τη λύση:

$$ds^2 = -\Big[-\frac{\Lambda r^2}{3} - \Big(1+\frac{G\mu}{r}\Big)^2\Big]dt^2 + \Big[-\frac{\Lambda r^2}{3} - \Big(1+\frac{G\mu}{r}\Big)^2\Big]^{-1}dr^2 + r^2d\sigma^2 \tag{70}$$

Οι σταθερές ολοκλήρωσης q και μ συνδέονται μεταξύ τους με τη σχέση:

$$q^2 = -G\mu^2\big(1 + \frac{2\pi\Lambda G}{9\alpha}\big)$$

όπου:

$$M = -\gamma\frac{\sigma}{4\pi}\mu \text{ και } Q = \frac{\sigma}{4\pi}q$$

είναι η μάζα και το φορτίο της μαύρης τρύπας και σ είναι το εμβαδό της επιφάνειας της πολλαπλότητας Σ η οποία στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι η σφαίρα S^2. Μπορούμε να δείξουμε ότι το βαθμωτό Ricci είναι $R = 4\Lambda$.

Για τους τανυστές ορμής-ενέργειας έχουμε (Τα ∇ στον τανυστη του βαθμωτού πεδίου δρουν πλέον πάνω στο βαθμωτό πεδίο, οπότε μπορούμε να τα αντικαταστήσουμε με ∂):

$$g^{\mu\nu}T^{EM}_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}g^{\mu\nu}[F_{\mu\beta}F^{\beta}_{\nu} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}] = \frac{1}{4\pi}[F_{\mu\beta}F^{\mu\beta} - \frac{1}{4}4F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}] = 0$$

$$g^{\mu\nu}T^{\varphi}_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - g^{\mu\nu}\frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\varphi\partial_\beta\varphi + \frac{1}{6}g^{\mu\nu}\left[g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta - \nabla_\mu\nabla_\nu + G_{\mu\nu}\right]\varphi^2 - g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}\varphi^4$$

$$= g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - 4\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\varphi\partial_\beta\varphi + \frac{4}{6}g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta(\varphi^2) - \frac{1}{6}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu(\varphi^2) + \frac{1}{6}g^{\mu\nu}[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R]\varphi^2 - 4\alpha\varphi^4$$

$$= -g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu(\varphi^2) + \frac{1}{6}[R - \frac{1}{2}4R]\varphi^2 - 4\alpha\varphi^4 =$$

$$= -g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu(\varphi^2) - \frac{1}{6}R\varphi^2 - 4\alpha\varphi^4 =$$

$$= -g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}[2\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi + 2\varphi\nabla_\mu\nabla_\nu\varphi] - \frac{1}{6}R\varphi^2 - 4\alpha\varphi^4 =$$

$$= \varphi g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\varphi - \frac{1}{6}R\varphi^2 - 4\alpha\varphi^4 =$$

$$= \varphi[\nabla^\nu\nabla_\nu\varphi - \frac{1}{6}R\varphi - 4\alpha\varphi^3]$$

$$= \varphi[\frac{1}{6}R\varphi + 4\alpha\varphi^3 - \frac{1}{6}R\varphi - 4\alpha\varphi^3] = 0$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι ο τανυστής ορμής ενέργειας του βαθμωτού πεδίου, αλλά και ο τανυστής ενέργειας του ηλεκτρομαγνητισμού είναι άιχνοι. Δηλαδή:

$$T^{EM} = 0,\ T^\varphi = 0,\ \text{άρα: } T^{EM} + T^\varphi = 0$$

Έχουμε:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G(T^\varphi_{\mu\nu} + T^{EM}_{\mu\nu}) \Rightarrow$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G(T^\varphi_{\mu\nu} + T^{EM}_{\mu\nu}) \Rightarrow$$
$$g^{\mu\alpha}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\alpha}g_{\mu\nu}R + \Lambda g^{\mu\alpha}g_{\mu\nu} = 8\pi G g^{\mu\alpha}(T^\varphi_{\mu\nu} + T^{EM}_{\mu\nu}) \Rightarrow$$
$$R^\alpha_\nu - \frac{1}{2}\delta^\alpha_\nu R + \delta^\alpha_\nu\Lambda = 8\pi G(T^\alpha_\nu + T^\alpha_\nu) \Rightarrow$$
$$R^\nu_\nu - \frac{1}{2}\delta^\nu_\nu R + \delta^\nu_\nu\Lambda = 8\pi G(T^\nu_\nu + T^\nu_\nu) \Rightarrow$$
$$R - \frac{1}{2}4R + 4\Lambda = 0 \Rightarrow$$

$$R - 2R + 4\Lambda = 0 \Rightarrow$$

$$R = 4\Lambda \tag{71}$$

Για να βρούμε τώρα τις ιδιομορφίες αυτής της μελανής οπής, θα υπολογίσουμε βαθμωτές ποσότητες καμπυλότητας, όπως το βαθμωτό Ricci, η συστολή του τανυστή του Ricci με τον εαυτό του, ή το βαθμωτό του Kretschmann. Από το Mathematica βρίσκουμε πως:

$$R = 2(-\tfrac{6}{l^2})$$

$$R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} = 2\frac{\left((2r^4 - \frac{6r^6}{l^2} + 18\frac{18r^8}{l^4} - 2G^2\mu^2 l^2 + 2G^4\mu^4 - \frac{2r^2(3r^4+l^2(-r^2+G^2\mu^2}{l^2}\right)}{r^8}$$

$$K = R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta} =$$

$$4\frac{\left(2r^4 - \frac{2r^6}{l^2} + \frac{6r^8}{l^4} + 4Gr^3\mu + 14G^2r^2\mu^2 + 24G^3r\mu^3 + 14G^4\mu^4 + 2\frac{r^2(-r^4+l^2(r+G\mu)^2}{l^2}\right)}{r^8}$$

Για το βαθμωτό του Ricci, οι υπολογισμοί επαληθεύουν αυτό που υπολογίσαμε προηγουμένως. Για $\Lambda = -\dfrac{3}{l^2}$ όπου l η ακτίνα του Anti de Sitter χωρόχρονου πράγματι έχουμε $R = 4\Lambda$. Τώρα, παίρνοντας τα όρια στο 0 της συστολής του τανυστή του Ricci με τον εαυτό του και του βαθμωτού του Kretschmann βρίσκουμε πως τείνουν στο άπειρο. Άρα για $r = 0$ έχουμε χωροχρονική ιδιομορφία (singularity). Για $r \to \infty$ το βαθμωτό Kretschmann μας δίνει $K = \dfrac{24}{l^4}$ και η συστολή του Ricci με τον εαυτό του $\dfrac{36}{l^4}$. Την εξίσωση (68) για το βαθμωτό πεδίο μπορούμε να την εξάγουμε κάνοντας χρήστη της διατήρισης του τανυστή ορμής ενέργειας που προέρχεται από την εξίσωση $\nabla^\nu G_{\mu\nu}$, όπως κάναμε και στη λύση MTZ. Εφαρμόζοντας αυτή τη σχέση για το συγκεκριμένο τανυστή ορμής ενέργειας σε κάθε όρο ξεχωριστά έχουμε:

$$\nabla^\mu T^\varphi_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow$$

$$\nabla^\mu \Big(\partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi + \tfrac{1}{6} \big[g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\mu \nabla_\nu + G_{\mu\nu} \big] \varphi^2 - g_{\mu\nu} \alpha \varphi^4 \Big) = 0 \Rightarrow$$

$$\nabla^\mu (\partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi) - \tfrac{1}{2} \nabla^\mu (g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi) + \tfrac{1}{6} \big[\nabla^\mu (g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta \varphi^2) - \nabla^\mu (\nabla_\mu \nabla_\nu \varphi^2) +$$

$$\nabla^\mu (G_{\mu\nu} \varphi^2) \big] - \nabla^\mu (g_{\mu\nu} \alpha \varphi^4) = 0$$

Θα εξετάσουμε τον κάθε ένα όρο ξεχωριστά, έχοντας υπόψη τη συμβατότητα μετρικής $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$ και πως $\nabla_\mu \varphi = \partial_\mu \varphi$, αλλά $\nabla_\nu \nabla_\mu \varphi = \nabla_\nu \partial_\mu \varphi$ και όπου δεν είναι άμεσα ξεκάθαρο θα χρησιμοποιούμε συναλλοίωτη παράγωγο. Θα έχουμε:

$$\nabla^\mu (\partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi) = \nabla^\mu (\partial_\mu \varphi) \partial_\nu \varphi + \partial_\mu \varphi \nabla^\mu (\partial_\nu \varphi)$$

$$\nabla^\mu (g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi) = g^{\alpha\beta} (\nabla_\nu \partial_\alpha \varphi) \partial_\beta \varphi + g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi (\nabla_\nu \partial_\beta \varphi)$$

$$\nabla^\mu (g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta \varphi^2) = g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \nabla^\mu (\nabla_\alpha \nabla_\beta \varphi^2) = g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \nabla^\mu (\nabla_\alpha (2\varphi \nabla_\beta \varphi)) =$$

$$g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \nabla^\mu (\nabla_\alpha 2\varphi \nabla_\beta \varphi + 2\varphi \nabla_\alpha \nabla_\beta \varphi) =$$

$$g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \big[\nabla^\mu (\nabla_\alpha (2\varphi \nabla_\beta \varphi)) + \nabla_\alpha (2\varphi) \nabla^\mu \nabla_\beta \varphi + \nabla^\mu 2\varphi \nabla_\alpha \nabla_\beta \varphi + 2\varphi \nabla^\mu \nabla_\alpha \nabla_\beta \varphi \big]$$

$$\nabla^\mu (\nabla_\mu \nabla_\nu \varphi^2) = \nabla^\mu (\nabla_\mu 2\varphi \nabla_\nu \varphi + 2\varphi \nabla_\mu \nabla_\nu \varphi) = \nabla^\mu (\nabla_\mu 2\varphi \nabla_\nu \varphi) + \nabla^\mu (2\varphi \nabla_\mu \nabla_\nu \varphi) =$$

$$\nabla^\mu (\nabla_\mu 2\varphi) \nabla_\nu \varphi + \nabla_\mu 2\varphi \nabla^\mu \nabla_\nu \varphi + \nabla^\mu (2\varphi) \nabla_\mu \nabla_\nu \varphi + 2\varphi \nabla^\mu \nabla_\mu \nabla_\nu \varphi$$

$$\nabla^\mu (G_{\mu\nu} \varphi^2) = G_{\mu\nu} \nabla^\mu \varphi^2 = G_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \nabla_\nu \varphi^2 = (R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2 g_{\mu\nu}} R) g^{\mu\nu} 2\varphi \nabla_\nu \varphi =$$

$$(R - 2R) \varphi \nabla_\nu \varphi = -R \varphi \nabla_\nu \varphi$$

$$\nabla^\mu (g_{\mu\nu} \alpha \varphi^4) = 4\alpha \varphi^3 \nabla_\nu \varphi$$

Από τους πρώτους δύο όρους (μετονομάζοντας βουβούς δείκτες) μένει μόνο το $\nabla^\mu (\partial_\mu \varphi) \partial_\nu \varphi$

από τον τρίτο και τέταρτο κανένας ενώ οι δύο τελευταίοι όροι είναι έτομοι. Οπότε έχουμε:

$$\nabla^{\mu}(\partial_{\mu}\varphi)\partial_{\nu}\varphi - \tfrac{1}{6}R\varphi\nabla_{\nu}\varphi - 4\alpha\varphi^{3}\nabla_{\nu}\varphi = 0 \Rightarrow$$

$$\partial_{\nu}\varphi\big[\nabla^{\mu}(\partial_{\mu}\varphi) - \tfrac{1}{6}R\varphi - 4\alpha\varphi^{3}\big] = 0 \Rightarrow$$

$$\nabla^{\mu}(\partial_{\mu}\varphi) - \tfrac{1}{6}R\varphi - 4\alpha\varphi^{3} = 0 \Rightarrow$$

$$\nabla^{\mu}(\partial_{\mu}\varphi) = \tfrac{1}{6}R\varphi + 4\alpha\varphi^{3}$$

6 Τροποποιημένη Βαρύτητα

6.1 $f(R)$ Βαρύτητα

Η $f(R)$ βαρύτητα αποτελεί μια μορφή τροποποιημένης βαρύτητας που γενικεύει τη Γενική Σχετικότητα του Einstein. Ουσιαστικά, η καμπυλότητα που εισαγάγεται στη δράση που περιγράφει το φυσικό σύστημα πλέον, δεν η βαθμωτή καμπυλότητα R, αλλά μια συνάρτηση αυτής. Η απλούστερη περίπτωση είναι για $f(R) = R$ όπου παίρνει κανείς τη Γενική Σχετικότητα του Einstein. Υπάρχουν διάφορα είδη f(R) βαρύτητας, όπως η Palatini f(R) βαρύτητα. Εκεί θεωρούμε πως οι ανεξάρτητες μεταβλητές είναι η μετρική και η συνοχή, οπότε μεταβάλλοντας τη δράση ως προς τη μετρική και τη συνοχή θα καταλήξουμε σε δύο εξισώσεις κίνησης. Εδώ θα ασχοληθούμε με την μετρική f(R) βαρύτητα όπου η μοναδική ανεξάρτητη μεταβλητή είναι η μετρική. Η δράση εδώ θα έχει τη μορφή:

$$I = \int d^4x \sqrt{-g} f(R) \tag{72}$$

6.2 Οι Πεδιακές Εξισώσεις

Μεταβάλλοντας τη δράση ως προς την αντίστροφη της μετρικής έχουμε:

$$\delta \int d^4x\sqrt{-g}f(R) = 0 \Rightarrow$$

$$\int d^4x\delta(\sqrt{-g}f(R)) = \int d^4x\delta(\sqrt{-g})f(R) + \int d^4x\sqrt{-g}\delta f(R) \Rightarrow$$

$$\int d^4x\delta(\sqrt{-g}f(R)) = \int d^4x\delta(\sqrt{-g})f(R) + \int d^4x\sqrt{-g}f'(R)\delta R =$$

$$-\int d^4x\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}f(R) + \int d^4x\sqrt{-g}\delta Rf'(R) =$$

$$-\int d^4x\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}f(R) + \int d^4x\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}f'(R) + \int d^4x\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}f'(R) =$$

$$\int d^4x\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\big[-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R) + R_{\mu\nu}f'(R)\big] + \int d^4x\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}f'(R) =$$

Στους πιο πάνω υπολογισμούς χρησιμοποιήσαμε τη σχέση: $\delta f(R) = \frac{df}{dR}\delta R$ και $\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$. Στη λύση MTS στο προηγούμενο κεφάλαιο δείξαμε ότι: $g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = [g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta - \nabla_\mu\nabla_\nu]\delta g^{\mu\nu}$. Οι παράγωγοι δρουν πάνω στη μεταβολή της μετρικής οπότε με κατάλληλες πράξεις θα προσπαθήσουμε να μεταφέρουμε αλλού τη δράση των παραγώγων ώστε η μεταβολή της μετρικής να αποτελεί έναν πολλαπλασιαστικό παράγοντα, για να πάρουμε τις εξισώσεις κίνησης. Πράγματι εφαρμόζοντας τον κανόνα του Leibniz και διαγράφοντας επιφανειακούς όρους μπορούμε να μετακινήσουμε τη δράση των παραγώγων στην παράγωγο της συνάρτησης καμπυλότητας $f'(R)$. (Για μια αυστηρότερη απόδειξη των πεδιακών εξισώσεων της $f(R)$ βαρύτητας, ο αναγνώστης παραπέμπεται στο [14], όπου οι επιφανειακοί όροι δεν αγνοούνται - θεωρούνται μηδέν.) Ο πρώτος όρος θα μας δώσει:

$$\int d^4x\sqrt{-g}f'(R)[g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta\delta g^{\mu\nu}] =$$

$$\int d^4x\sqrt{-g}f'(R)[g_{\mu\nu}\nabla^\beta\nabla_\beta\delta g^{\mu\nu}] =$$

$$\int d^4x\sqrt{-g}\nabla^\beta[f'(R)g_{\mu\nu}\nabla_\beta\delta g^{\mu\nu}] - \int d^4x\sqrt{-g}\nabla^\beta[f'(R)]g_{\mu\nu}\nabla_\beta\delta g^{\mu\nu} =$$

$$-\int d^4x\sqrt{-g}\nabla^\beta[f'(R)]g_{\mu\nu}\nabla_\beta\delta g^{\mu\nu} =$$

$$-\int d^4x\sqrt{-g}\nabla_\beta[\nabla^\beta f'(R)g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}] + \int d^4x\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\nabla_\beta[\nabla^\beta f'(R)]\delta g^{\mu\nu} =$$

$$\int d^4x\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\nabla_\beta[\nabla^\beta f'(R)]\delta g^{\mu\nu} =$$

$$\int d^4x\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}[g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\nabla_\beta\nabla_\alpha f'(R)]$$

Για τον όρο: $\int d^4x\sqrt{-g}f'(R)\nabla_\mu\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu}$ έχουμε:

$$\int d^4x\sqrt{-g}f'(R)[\nabla_\mu\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu}] =$$

$$\int d^4x\sqrt{-g}\nabla_\mu[f'(R)\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu}] - \int d^4x\sqrt{-g}\nabla_\mu[f'(R)]\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu} =$$

$$-\int d^4x\sqrt{-g}\nabla_\mu[f'(R)]\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu} =$$

$$-\int d^4x\sqrt{-g}\nabla_\nu[\nabla_\mu f'(R)\delta g^{\mu\nu}] + \int d^4x\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\nabla_\nu[\nabla_\mu f'(R)] =$$

$$\int d^4x\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\nabla_\nu[\nabla_\mu f'(R)]$$

Άρα, μαζεύοντας μαζί όλους τους παραπάνω όρους έχουμε:

$$\int d^4x\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\big[-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R) + R_{\mu\nu}f'(R)\big] + \int d^4x\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}f'(R) = 0 \Rightarrow$$

$$\int d^4x\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\big[-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R) + R_{\mu\nu}f'(R)\big]+$$

$$\int d^4x\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\big[g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\nabla_\beta\nabla_\alpha f'(R) - \nabla_\nu\nabla_\mu f'(R)\big] = 0 \Rightarrow$$

$$\int d^4x\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\big[-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R) + R_{\mu\nu}f'(R) + g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\nabla_\beta\nabla_\alpha f'(R) - \nabla_\nu\nabla_\mu f'(R)\big] = 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R)+R_{\mu\nu}f'(R)+g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\nabla_\beta\nabla_\alpha f'(R)-\nabla_\nu\nabla_\mu f'(R)=0 \tag{73}$$

Αν υπάρχει και τανυστής ορμής ενέργειας, τότε η παραπάνω εξίσωση παίρνει τη μορφή:

$$R_{\mu\nu}f'(R)-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R)+g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\nabla_\beta\nabla_\alpha f'(R)-\nabla_\nu\nabla_\mu f'(R)=T_{\mu\nu} \tag{74}$$

,ενώ αν εισαγάγουμε και κοσμολογική σταθερά Λ, η δράση παίρνει τη μορφή:

$$S=\int d^4x\sqrt{-g}[f(R)-\Lambda]$$

,οπότε μεταβάλοντας και το κομμάτι της κοσμολογικής σταθεράς $\sqrt{-g}\Lambda$ ως προς τη μετρική:

$$\delta(\sqrt{-g}\Lambda)=-\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\Lambda$$

και οι εξισώσεις πεδίου αποκτούν τη μορφή:

$$R_{\mu\nu}f'(R)-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}[f(R)-\Lambda]+g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\nabla_\beta\nabla_\alpha f'(R)-\nabla_\nu\nabla_\mu f'(R)=0 \tag{75}$$

Μπορούμε να πάρουμε το ίχνος της εξίσωσης (74) και οι εξισώσεις θα απλοποιηθούν σημαντικά:

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} - \nabla_\mu\nabla_\nu f'(R) + g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta f'(R) = 0 \Rightarrow$$

$$f'(R)g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} - g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu f'(R) + g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta f'(R) = 0 \Rightarrow$$

$$f'(R)R - 2f(R) - g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu f'(R) + 4g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta f'(R) = 0 \Rightarrow$$

$$I^\mu_\mu = f'(R)R - 2f(R) + 3g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu f'(R) = 0 \tag{76}$$

Βλέπουμε πως οι εξισώσεις (75) έχουν τετάρτης τάξεως παραγώγους ως προς τη μετρική. Οι εξισώσεις της γενικής σχετικότητας έχουν δευτέρας τάξεως παραγώγους ως προς τη μετρική αφού περιέχουν παραγώγους των συμβόλων Christoffel που αυτά περιέχουν παραγώγους της μετρικής. Οπότε αυτή είναι μία διαφορά μεταξύ $f(R)$ και Γενικής Σχετικότητας. Για $f(R) = R$ έχουμε: $f'(R) = 1$ και παίρνουμε τις εξισώσεις του Αινστάιν. Επίσης η εξίσωση ίχνους (76) δε μας δίνει κάποια πληροφορία για το βαθμωτό Ricci, αντίθετα με τη γενική σχετικότητα όπου στο κενό έχουμε $R = 0$ και εν γένει $R = -\kappa T$ (απουσία κοσμολογικής σταθεράς).

6.3 f(R) Βαρύτητα Ελάχιστα Συζευγμένη με Βαθμωτό Πεδίο

Η δράση μιας τροποποιημένης f(R) βαρύτητας ελάχιστα συζευγμένη με βαθμωτό πεδίο θα δίνεται από τη σχέση:

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}[f(R) - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - V(\varphi)] \tag{77}$$

Μεταβάλλοντας την πιο πάνω δράση ως προς τις δυναμικές μετραβλητές $g^{\mu\nu}$ και φ παίρνουμε τις εξισώσεις πεδίου:

$$R_{\mu\nu}f'(R) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R) + g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\nabla_\beta\nabla_\alpha f'(R) - \nabla_\nu\nabla_\mu f'(R) = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\varphi\partial_\beta\varphi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}V(\varphi) \tag{78}$$

Ενώ από το βαθμωτό πεδίο θα προκύψει μια Klein-Gordon εξίσωση:

$$-\int d^4x\sqrt{-g}[\delta[\tfrac{1}{2}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\varphi\nabla_\nu\varphi] - \delta V(\varphi)] = 0$$

$$-\int d^4x\sqrt{-g}[\tfrac{1}{2}g^{\mu\nu}[(\nabla_\mu\delta\varphi)\nabla_\nu\varphi + \nabla_\mu\varphi\nabla_\nu\delta\varphi] - \tfrac{dV}{d\varphi}\delta\varphi] = 0$$

$$-\int d^4x\sqrt{-g}[\tfrac{1}{2}2g^{\mu\nu}[(\nabla_\mu\delta\varphi)\nabla_\nu\varphi] - \tfrac{dV}{d\varphi}\delta\varphi] = 0$$

$$-\int d^4x\sqrt{-g}[(g^{\mu\nu}\nabla_\mu\delta\varphi)\nabla_\nu\varphi] - \int d^4x\sqrt{-g}\tfrac{dV}{d\varphi}\delta\varphi = 0$$

$$-\int d^4x\sqrt{-g}\nabla^\nu[(\delta\varphi)\nabla_\nu\varphi] + \int d^4x\sqrt{-g}\delta\varphi[\nabla^\nu\nabla_\nu\varphi] - \int d^4x\sqrt{-g}\tfrac{dV}{d\varphi}\delta\varphi = 0$$

$$\int d^4x\sqrt{-g}\delta\varphi[g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\varphi] - \int d^4x\sqrt{-g}\tfrac{dV}{d\varphi}\delta\varphi = 0$$

$$\int d^4x\sqrt{-g}\delta\varphi[g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\varphi - \tfrac{dV}{d\varphi}] = 0 \Rightarrow$$

$$g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\varphi - \frac{dV}{d\varphi} = 0 \tag{79}$$

Οι πιο πάνω εξισώσεις για $f(R) = R - 2\Lambda$ δίνουν τη λύση MTZ. Μια λύση "hairy" μελανής οπής σε τροποποιημένη f(R) βαρύτητα δεν έχει βρεθεί ακόμα.

Βιβλιογραφία

[1] James B. Hartle, ”Gravity: An Introduction to Einstein’s General Relativity”, Addison Wesley (2003).

[2] Sean Carroll, ”Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity”, Pearson (2003).

[3] Cosimo Bambi, ”Introduction to General Relativity”, Springer, Singapore (2018)

[4] S. Chandrasekhar, ”The mathematical theory of black holes”, Clarendon Press, Oxford University Press (1983)

[5] Robert M Wald, ”General relativity”, University of Chicago Press (1984)

[6] Øyvind Grøn, Sigbjorn Hervik ”Einstein’s general theory of relativity”, Springer (2010)

[7] Jerry B. Griffiths, Jirí Podolský, ”Exact Space-Times in Einstein’s General Relativity”,Cambridge University Press (2009)

[8] Máximo Bañados, Claudio Teitelboim, Jorge Zanelli, ”The Black Hole in Three Dimensional Space Time”,[arXiv:hep-th/9204099], (2001), https://arxiv.org/abs/hep-th/9204099

[9] Federico Marquez, ”A brief introduction to f(R) gravity”, http://www.johnboccio.com/courses/Physics130_2013/Alternative_GR/fR_1.pdf

[10] Lorenzo Sebastiani, Sergio Zerbini, ”Static Spherically Symmetric Solutions in F(R) Gravity” ,[arXiv:1012.5230], (2011) https://arxiv.org/abs/1012.5230

[11] T. Multamaki, I. Vilja, ”Static spherically symmetric perfect fluid solutions in f(R) theories of gravity” , [arXiv:astro-ph/0612775] (2007), https://arxiv.org/abs/astro-ph/0612775

[12] A. de la Cruz-Dombriz, A. Dobado, A. L. Maroto, ”Black Holes in f(R) theories”, (2007), [arXiv:0907.3872], https://arxiv.org/abs/0907.3872

[13] Lukas Hollenstein, Francisco S. N. Lobo, ”Exact solutions of f(R) gravity coupled to nonlinear electrodynamics”, (2008), [arXiv:0807.2325], https://arxiv.org/abs/0807.2325

[14] Alejandro Guarnizo, Leonardo Castaneda, Juan M. Tejeiro, "Boundary Term in Metric f(R) Gravity: Field Equations in the Metric Formalism", [arXiv:1002.0617], (2010), https://arxiv.org/abs/1002.0617

[15] Cristian Martinez, Juan Pablo Staforelli, Ricardo Troncoso, "Topological black holes dressed with a conformally coupled scalar field and electric charge", [arXiv:hep-th/0512022], (2006) , https://arxiv.org/abs/hep-th/0512022

[16] Cristian Martinez, Ricardo Troncoso, Jorge Zanelli, "Exact black hole solution with a minimally coupled scalar field", [arXiv:hep-th/0406111], (2004), https://arxiv.org/abs/hep-th/0406111

[17] P. A. Gonzalez, Eleftherios Papantonopoulos, Joel Saavedra, Yerko Vasquez, "Four-Dimensional Asymptotically AdS Black Holes with Scalar Hair", [arXiv:1309.2161] (2013), https://arxiv.org/abs/1309.2161

[18] Theodoros Kolyvaris, George Koutsoumbas, Eleftherios Papantonopoulos, George Siopsis, "A New Class of Exact Hairy Black Hole Solutions", [arXiv:0911.1711], https://arxiv.org/abs/0911.1711

[19] Χριστόφορος Βλάχος, "Λύσεις Μελανών Οπών Συζευγμένων με Βαθμωτά Πεδία - Μελανές Οπές Brans-Dicke", Διπλωματική Εργασία (2016)

[20] Θεόδωρος Κολυβάρης, "Μελέτη Μελανών Οπών Συζευγμένων με Βαθμωτά Πεδία", Διδακτορική Διατριβή (2013)

[21] Στέλλα Κιορπελίδη, "Superradiance σε Φορτισμένες Μελανές Οπές" Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία (2017)

[22] Χριστόφορος Βλάχος, "Τοπικές Λύσεις στην Complete Brans-Dicke Θεωρία" Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία (2018)