ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Διπλωματική Εργασία

Ευθύ Πρόβλημα Σκέδασης για Μη Ομογενή Υλικά

Χριστίνα - Θάλεια Μάστουρα
Επιβλέπων Καθηγητής: Δρόσος Γκιντίδης - Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Σεπτέμβρης 2019

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή της διπλωματικής μου εργασιας κ. Δρόσο Γκιντίδη τόσο για την καθοδήγηση και την πολύτιμη συμβολή του σε κάθε φάση της δημιουργίας της καθώς και την προτροπή και την στηριξή του στο να ασχοληθώ περαιτέρω με τον τομέα της σκέδασης. Παράλληλα θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τα μέλη της επιτροπής την καθηγήτρια κα. Κυριακή Κυριάκη, και τον καθηγητή κ. Αντώνιο Χαραλαμπόπουλο για τις συμβουλές τους για την εκπόνηση της παρούσας εργασίας. Ιδιαίτερα θα ήθελα να ευχαριστήσω την κα. Κυριακή Κυριάκη που από την πρώτη στιγμή που της εκδήλωσα το ενδιαφέρον μου για τον τομέα των Διαφορικών Εξισώσεων ενδιαφέρθηκε για μένα και με καθοδήγησε και είναι κάτι που δεν θα ξεχάσω. Τέλος, θέλω να ευχαριστήσω τόσο την οικογένειά μου όσο και τους φίλους μου για την στήριξή τους σε αυτή μου την πορεία.

Περιεχόμενα

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία ασχολούμαστε με το Ευθύ Πρόβλημα Σκέδασης Ακουστικών Κυμάτων για Μη Ομογενή Υλικά. Το κύριο βιβλίο που χρησιμοποιήσαμε σε αυτήν την εργασία είναι το [1]. Αρχικά γίνεται μελέτη του Ευθέος Προβλήματος Σκέδασης για Ομογενή Υλικά και γίνεται ο κάτωθι διαχωρισμός σε τρία κεφάλαια.

Στην εισαγωγή παρουσιάζουμε με συνοπτικό τρόπο βασικά σημεία από την Θεωρία Τελεστών, συγκεκριμένα περιγράφουμε βασικά αποτελέσματα για συμπαγείς τελεστές και παρουσιάζουμε την Θεωρία $Riesz - Fredholm$ που χρησιμοποιούμε στην ανάλυσή μας. Κάνουμε επίσης μία σύντομη εισαγωγή στους χώρους $H\ddot{o}lder$ και $Sobolev$ ώστε να χτίσουμε μία καλή βάση για να ξεκινήσουμε την ανάλυσή μας.[2],[3]

Στο δεύτερο κεφάλαιο μελετάμε το Ευθύ Πρόβλημα Σκέδασης Ακουστικών Κυμάτων για Ομογενή Υλικά. Το πρόβλημα αυτό εμφανίζεται στην ρευστομηχανική, προκύπτει από τη σκέδαση ακουστικών κυμάτων μικρού πλάτους σε ομογενες ισοτροπικό μέσο και αντιμετωπίζεται ως ένα υγρό χωρίς ιξώδες. Στην αρχή θα αναφερθούμε στα δυναμικά απλού και διπλού στρώματος, τις σχέσεις συνέχειας και διαπήδησης για αυτά. Συνεχίζουμε με τη μελέτη του προβλήματος ύπαρξης και μοναδικότητας λύσης u με $u = u^i + u^s$ όπου u^i το εισερχόμενο ($incoming\ wave$) και u^s το σκεδαζόμενο κύμα ($scattered\ wave$) για την εξίσωση $Helmholtz$

$$\Delta u + k^2 u = 0$$

, όπου k είναι ο κυματικός αριθμός, για το οποίο υποθέτουμε ότι ο δείκτη διάθλασης $n(x)$ είναι σταθερός και ίσος με 1. Το σκεδαζόμενο κύμα πρέπει να ικανοποιεί την συνθήκη ακτινοβολίας $Sommerfeld$ η οποία είναι

$$\lim_{r\to\infty}\left(r\frac{\partial u}{\partial r} - iku\right) = 0\ .$$

Τελιώνουμε αυτό το κεφάλαιο με το Εξωτερικό Πρόβλημα $Dirichlet$ και το Εξωτερικό πρόβλημα $Neumann$.[1],[2]

Το τελευταίο κεφάλαιο είναι αφιερωμένο στο Ευθύ Πρόβλημα Σκέδαση Ακουστικών Κυμάτων για Μη Ομογενή Υλικά. Το πρόβλημα αυτό εμφανίζεται στην ρευστομηχανική και προκύπτει από τη σκέδαση ακουστικών κυμάτων μικρού πλάτους σε ένα μη ομογενές μέσο με όμοιο τρόπο όπως στο προηγούμενο κεφάλαιο με τη διαφορά ότι τώρα υποθέτουμε διαταραχές μέχρι τάξης ϵ όπου $0 < \epsilon << 1$ για να διατυπώσουμε το πλαίσιο του προβλήματος. Το προβλήμα αυτό ασχολείται με την εύρεση μοναδικής λύσης u με $u = u^i + u^s$, όπου u^i το προσπίπτον πεδίο ($incident\ field$) και u^s το σκεδασμένο πεδίο ($scattered\ field$) για την εξίσωση $Helmholtz$,

$$\Delta u + k^2 n(x) u = 0$$

όπου k είναι ο κυματικός αριθμός. Στην περίπτωση που δεν υπάρχει ιξώδες ο δείκτης διάθλασης $n(x)$ ισούται με

$$n(x) = n_1(x)$$

, όπου $n_1(x) > 0$. Επειδή όμως αποδεικνύουμε ότι η εύρεση λύσης για αυτό το πρόβλημα είναι ισοδύναμη με την εύρεση λύσης της ολοκληρωτικής εξίσωσης $Lippmann - Schwinger$ τελικά χρειάζεται να υποθέσουμε ότι ο δείκτης διάθλασης $n(x)$ ισούται με

$$n(x) = n_1(x) + i\frac{n_2(x)}{k}$$

με $n_1(x) > 0,\ n_2(x) \geq 0$, δηλαδή υπάρχει ιξώδες για $n_2(x) \neq 0$ (λόγω απώλειας ενέργειας). Το σκεδασμένο πεδίο πρέπει να ικανοποιεί την συνθήκη ακτινοβολίας $Sommerfeld$ η οποία είναι

$$\lim_{r\to\infty}\left(r\frac{\partial u}{\partial r} - iku\right) = 0\ .$$

Αρχικά, αποδεικνύουμε ότι η εύρεση λύσης για αυτό το πρόβλημα είναι ισοδύναμη με την εύρεση λύσης της ολοκληρωτικής εξίσωσης $Lippmann - Schwinger$ και στην συνέχεια αποδεικνύουμε την ύπαρξη και μοναδικότητα αυτής της λύσης με την βοήθεια της Αρχής Μοναδικής Συνέχισης.[1]

Abstract

This work is about the Direct Scattering Problem for Acoustic Waves in Inhomogeneous Medium, which is also the title of this work. The main book that we used in this work is [1]. We first study the Scattering Problem in Homogeneous Medium and for this reason this work is divided in three chapters.

In the introduction we present briefly main points from Operators Theory, in particular we describe main results for compact operators and present Riesz-Fredholm Theory that we use in our analysis. We also do a brief introduction in Hölder and Sobolev spaces in order to build a good basis to begin our analysis.[2],[3]

In the second chapter we study the Direct Scattering Problem for Acoustic Waves in Homogeneous Medium. This problem appears in fluid dynamics, occurs from the scattering of acoustic waves of small amplitude in a homogeneous isotropic medium which is treated as an inviscid fluid. In the beginning we refer to single and double layer potentials, regularity and jump relations for them. We continue with the analysis of the problem of finding a unique solution u with $u = u^i + u^s$ where u^i is the incoming wave and u^s is the scattered wave for the Helmholtz equation

$$\Delta u + k^2 u = 0$$

where k is the wave number, for which we assume that the refraction index $n(x)$ is constant and equal to 1. The scattered wave must satisfies the Sommerfeld radiation condition which is

$$\lim_{r\to\infty}\left(r\frac{\partial u}{\partial r} - iku\right) = 0\ .$$

We conclude this chapter with the Exterior Dirichlet Problem and the Exterior Neumann Problem.[1],[2]

The last chapter is dedicated to the Direct Scattering Problem for Acoustic Waves in Inhomogeneous Medium. This problem appears in fluid dynamics and it occurs from the scattering of acoustic waves of small amplitude in an inhomogeneous medium in a similar way as in the previous chapter with the difference that in this one we assume pertubations order up to ϵ, where $0 < \epsilon << 1$, in order to state the frame of the problem. This problem is about finding a unique solution u with $u = u^i + u^s$, where u^i is the incident field and u^s is the scattered field for the Helmholtz equation,

$$\Delta u + k^2 n(x) u = 0$$

where k is the wave number. If we have an inviscid fluid the refraction index $n(x)$ is equal to

$$n(x) = n_1(x)$$

, where $n_1(x) > 0$. But due to the fact that we prove that finding a solution to this problem is equivalent to finding a solution to the Lippmann-Schwinger integral equation we need to assume that the refraction index $n(x)$ is equal to

$$n(x) = n_1(x) + i\frac{n_2(x)}{k}$$

with $n_1(x) > 0,\ n_2(x) \geq 0$, hence there is viscosity in case that $n_2(x) \neq 0$ (due to loss of energy). The scattered field must satisfies the Sommerfeld radiation condition which is

$$\lim_{r\to\infty}\left(r\frac{\partial u}{\partial r} - iku\right) = 0\ .$$

Firstly, we prove that finding a solution to this problem is equivalent to finding a solution to the Lippmann-Schwinger integral equation and then we proceed with proving the existence and uniqueness of this solution with aid of the Unique Continuation Principle.[1]

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναφερθούν κάποιες απαραίτητες έννοιες για την κατανόηση επόμενων κεφαλαίων. Θεωρείται για τον αναγώστη απαραίτητη η γνώση μετρικών χώρων γιατί στη παρούσα ενότητα θα αναφερθούν περιληπτικά αναγκαίες έννοιες από θεωρία τελεστών και θα καταγραφούν οι αποδείξεις μόνο για συγκεκριμένα θεωρήματα,πορίσματα, προτάσεις και λήμματα.

1.1 Ολοκληρωτικοί Τελεστές - Θεωρία Riesz – Fredholm

Ορισμός 1.1. *Ένας μετρικός χώρος (X,ρ) καλείται* ***πλήρης*** *αν κάθε ακολουθία Cauchy του X συγκλίνει σε στοιχείο του X ως προς την μετρική ρ.*

Ορισμός 1.2. *Έστω μετρικός χώρος (X,ρ). Οποιοσδήποτε πλήρης μετρικός χώρος $\hat{X}$ με μετρική $\hat{\rho}$ ο οποίος περιέχει τον X ώστε η ρ να είναι ο περιορισμός της $\hat{\rho}$ στον X και ώστε ο X να είναι πυκνός στον $\hat{X}$ ονομάζεται* ***πλήρωση*** *του X.*

Ορισμός 1.3.

1. *Ένας μετρικός χώρος X καλείται* ***συμπαγής*** *αν κάθε ανοιχτό κάλυμμα του X έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα.*
2. *Ένας μετρικός χώρος X καλείται* ***συμπαγής*** *αν κάθε ακολουθία στοιχείων του X έχει συγκλίνουσα υπακολουθία και το όριο αυτής ανήκει στον X.*

Ορισμός 1.4. *Ένα σύνολο U ενός χώρου με νόρμα X καλείται* ***σχετικά συμπαγές*** *σύνολο αν η κλειστότητά του $\bar{U}$ είναι συμπαγές σύνολο στον X.*

Ορισμός 1.5. *Έστω X και Υ χώροι με νόρμα και γραμμικός τελεστής $A : X \to Y$ η* ***νόρμα του A*** *είναι*

$$\|A\| = \sup_{0\neq\|\phi\|,\phi\in X} \frac{\|A\phi\|}{\|\phi\|} = \sup_{\|\phi\|=1} \|A\phi\| \tag{1.1}$$

Ορισμός 1.6. *Έστω X και Υ χώροι με νόρμα, ένας γραμμικός τελεστής $A : X \to Y$, καλείται* ***φραγμένος*** *αν υπάρχει θετική σταθερά C ώστε*

$$\|A\phi\| \leq C\|\phi\| \ , \ \forall \phi \in X$$

Η νόρμα του A είναι η μικρότερη σταθερά C που ικανοποιεί αυτή την σχέση.

Αν $Y = \mathbb{C}$, ο τελεστής A καλείται ***φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό****. Ο χώρος X^* είναι ο χώρος των φραγμένων γραμμικών συναρτησιακών του χώρου που ορίζονται στον χώρο X και καλείται* ***δυϊκός χώρος*** *του X.*

Θεώρημα 1.7. *Έστω X και Υ χώροι με νόρμα, ένας γραμμικός τελεστής $A : X \to Y$, ο A είναι συνεχής αν και μόνο αν είναι φραγμένος.*

Ορισμός 1.8. *Έστω X και Υ χώροι με νόρμα, ένας γραμμικός τελεστής $A : X \to Y$, καλείται* ***συμπαγής*** *αν απεικονίζει οποιοδήποτε φραγμένο σύνολο του X σε ένα σχετικά συμπαγές σύνολο του Υ.*

Θεώρημα 1.9. *Έστω X και Υ χώροι με νόρμα, ένας γραμμικός τελεστής $A : X \to Y$ είναι συμπαγής αν και μόνο αν για κάθε φραγμένη ακολουθία $(\phi_n)_n$ του X, η ακολουθία $(A\phi_n)_n$ του Υ περιέχει συγκλίνουσα υπακολουθία.*

Θεώρημα 1.10. *Όλοι οι συμπαγείς γραμμικοί τελεστές είναι φραγμένοι.*

Απόδειξη*:*

Έστω ότι ο συμπαγής γραμμικός τελεστής $A : X \to Y$ δεν είναι φραγμένος. Τότε έχουμε:

$$\exists (\phi_n)_n \ , \|\phi_n\| = 1 \ : \|A\phi_n\| \geq n \ \forall n \in \mathbb{N}, \tag{1.2}$$

όπου $(\phi_n)_n$ ακολουθία του X. Αφου A συμπαγής υπάρχει υπακολουθία της $(A\phi_n)$ η $(A\phi_n)_k$ ώστε

$$A\phi_{n_k} \to \psi \in Y, \ k \to \infty \Rightarrow \|A\phi_{n_k}\| \to \|\psi\|, \ k \to \infty$$

που είναι άτοπο λόγω της (1.2).

□

Θεώρημα 1.11. *Κάθε γραμμικός συνδιασμός συμπαγών γραμμικών τελεστών είναι συμπαγής τελεστής.*

Θεώρημα 1.12. *Έστω X,Υ,Z χώροι με νόρμα και έστω $A : X \to Y$ και $B : X \to Z$ φραγμένοι γραμμικοί τελεστές. Τότε το γινόμενο $BA : X \to Z$ είναι συμπαγής τελεστής αν και μόνο αν ένας από τους δύο τελεστές ο A ή ο B είναι συμπαγής.*

Θεώρημα 1.13. *Έστω X χώρος με νόρμα και Υ χώρος* Banach. *Έστω ακολουθία $A_n : X \to Y$ συμπαγών γραμμικών τελεστών που συγκλίνει ομοιόμορφα στον γραμμικό τελεστή $A : X \to Y$ δηλαδή $\|A_n - A\| \to 0, \ n \to \infty$. Τότε ο A είναι συμπαγής.*

Θεώρημα 1.14. *Έστω X και Υ χώροι με νόρμα, ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής $A : X \to Y$ με εικόνα $A(X)$ πεπερασμένης διάστασης. Τότε ο A είναι σύμπαγής.*

Απόδειξη:

Έστω $(\phi_n)_n$ φραγμένη ακολουθία στο X ώστε $\|\phi_n\| \le C,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Τότε, αφού $\|A\phi_n\| \le \|A\|\|\phi_n\| \le C\|A\|$ η ακολουθία $(A\phi_n)$ είναι φραγμένη στον πεπερασμένης διάστασης υπόχωρο $A(X)$. Από θεώρημα $\mathrm{Bolzano-Weierstrass}$ *κάθε φραγμένη ακολουθία σε χώρο με νόρμα πεπερασμένης διάστασης έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Άρα ο A είναι συμπαγής.*

□

Λήμμα 1.15 (Λήμμα Riesz). *Έστω X χώρος με νόρμα, $U \subset X$, $U \neq X$ κλειστός υπόχωρος και $\alpha \in (0,1)$. Τότε*

$$\exists \psi \in X,\ \|\psi\| = 1\ :\ \|\psi - \phi\| \ge \alpha,\ \forall \phi \in U \cdot$$

Απόδειξη:

Υπάρχει $f \in X, f \notin U$ και αφού U κλειστός υπόχωρος

$$\beta := \inf_{\phi \in U} \|f - \phi\| > 0 \cdot$$

Διαλέγουμε $g \in U$ έτσι ώστε,

$$\beta \le \|f - g\| \le \frac{\beta}{\alpha}$$

και ορίζουμε

$$\psi = \frac{f - g}{\|f - g\|} \cdot$$

Τότε, αφού $\|\psi\| = 1,\ \forall \phi \in U$ και επειδή U υπόχωρος $g + \|f - g\|\phi \in U$ έχουμε

$$\|\psi - \phi\| = \frac{1}{\|f - g\|}\|f - (g + \|f - g\|\phi)\| \ge \frac{\beta}{\|f - g\|} \ge \alpha \cdot$$

□

Θεώρημα 1.16. *Έστω X χώρος με νόρμα. Ο ταυτοτικός τελεστής $I : X \to X$ είναι συμπαγής αν και μόνο αν ο X είναι χώρος πεπερασμένης διάστασης.*

Απόδειξη:

(Ευθύ)

Έστω ότι ο I είναι συμπαγής αλλά ο X δεν έχει πεπερασμένη διάσταση. Διαλέγουμε $\phi_1 \in X$ με $\|\phi_1\| = 1 \Rightarrow U_1 := \mathrm{span}\ \{\phi_1\}$ είναι κλειστός υπόχωρος του X και από Λήμμα Riesz *(1.15) $\exists\ \phi_2 \in X,\ \|\phi_2\| = 1$ με $\|\phi_2 - \phi_1\| \ge \frac{1}{2}$. Τώρα έστω $U_2 := \mathrm{span}\ \{\phi_1, \phi_2\}$ πάλι από Λήμμα*

Riesz *(1.15)* $\exists\, \phi_3 \in X,\ \|\phi_3\| = 1$ *με* $\|\phi_3 - \phi_1\| \geq \frac{1}{2}$ *και* $\|\phi_3 - \phi_2\| \geq \frac{1}{2}$. *Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο δημιουργούμε μία ακολουθία* $(\phi_n)_n \in X,\ \|\phi_n\| = 1$ *με* $\|\phi_n - \phi_m\| \geq \frac{1}{2}$, $\forall n \neq m$ *η οποία επόμενως δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία και άρα ο* I *δεν είναι συμπαγής άτοπο λόγω υπόθεσης.*

(Αντίστροφο)

Έστω X *πεπερασμένης διάστασης τότε η εικόνα του* I *δηλαδή η* $I(X)$ *είναι πεπερασμένης διάστασης και από Θεώρημα(1.14) έχουμε ότι ο* I *είναι συμπαγής.*

□

Θεωρία Riesz

Στα επόμενα τρία θεωρήματα θεωρείται X χώρος με νόρμα, συμπαγής γραμμικός τελεστής $A : X \to Y$ και η εξίσωση

$$\phi - A\phi = f$$

, όπου $\phi \in X$ και $f \in X$. Ορίζεται, επίσης, ο τελεστής L ως

$$L := I - A$$

, όπου I ο ταυτοτικός τελεστής.

Θεώρημα 1.17 (**Πρώτο Θεώρημα Riesz**). *Ο πυρήνας* (nullspace) *του τελεστή* L *που ορίζεται ως*

$$N(L) = \{\phi \in X | L\phi = 0\}$$

είναι πεπερασμένης διάστασης.

Θεώρημα 1.18 (**Δευτέρο Θεώρημα Riesz**). *Η εικόνα* (range) *του τελεστή* L *που ορίζεται ως*

$$L(X) = \{L\phi | \phi \in X\}$$

είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος.

Ορίζουμε τους τελεστές $L^n,\ n \geq 1$ ως εξής:

$$L^0 = I,\ L^n = LL^{n-1}$$

μπορούν να γραφτούν στην μορφή

$$L^n = (I - A)^n = I - A_n$$

, όπου

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} A^k$$

είναι συμπαγείς από Θεώρημα(1.11) και Θεώρημα(1.12). Επίσης $\forall n \geq 1$ από Πρώτο Θεώρημα Riesz(1.17) οι πυρήνες $N(L^n)$ έχουν πεπερασμένη διάσταση και Δευτέρο Θεώρημα Riesz(1.18) οι εικόνες $L^n(X)$ είναι κλειστοί υπόχωροι.

Θεώρημα 1.19 (Τρίτο Θεώρημα Riesz). *Υπάρχει μοναδικά ορισμένος μη-αρνητικός αριθμός r που καλείται αριθμός* Riesz *για τον τελεστή A τέτοιος ώστε*

$$\begin{array}{rcl} 0 &=& N(L^0) \subsetneqq N(L^1) \subsetneqq \cdots \subsetneqq N(L^r) \;=\; N(L^{r+1}) \;=\; \cdots, \\ X &=& L^0(X) \supsetneqq L^1(X) \supsetneqq \cdots \supsetneqq L^r(X) \;=\; L^{r+1}(X) \;=\; \cdots. \end{array}$$

Επομένως,

$$X \;=\; N(L^r) \oplus L^r(X).$$

Θεώρημα 1.20. *Ο τελεστής προβολής $P : X \to N(L^r)$ που ορίζεται από το ευθύ άθροισμα*

$$X \;=\; N(L^r) \oplus L^r(X)$$

είναι συμπαγής. Ο τελεστής

$$L - P = I - A - P$$

είναι μονοσήμαντος (injective).

Θεώρημα 1.21 (Θεώρημα Riesz). *Έστω X χώρος με νόρμα και έστω ένας συμπαγής γραμμικός τελεστής $A : X \to X$.Τότε ισχύει ένα από τα επόμενα:*
1. η ομογενής εξίσωση

$$\phi - A\phi = 0$$

έχει μη τετριμμένη λύση $\phi \in X$.
2. $\forall f \in X$ η μη ομογενής εξίσωση

$$\phi - A\phi = f$$

έχει μοναδική λύση $\phi \in X$.

Αν ο $I - A$ είναι μονοσήμαντος τότε, ο $(I - A)^{-1} : X \to X$ είναι φραγμένος.

Πόρισμα 1.21.1. *Έστω X χώρος με νόρμα και έστω ένας συμπαγής γραμμικός τελεστής $A : X \to X$. Αν η ομογενής εξίσωση*

$$\phi - A\phi = 0$$

έχει μόνο τη τετριμμένη λύση $\phi = 0, \ \phi \in X$ τότε $\forall f \in X$ η μη ομογενής εξίσωση

$$\phi - A\phi = f$$

έχει μοναδική λύση $\phi \in X$ και η λύση αυτή εξαρτάται με συνεχή τρόπο από την $f \in X$.

Θεώρημα 1.22. *Έστω X χώρος με νόρμα , ένας συμπαγής γραμμικός τελεστής $A : X \to X$ και έστω $I - A$ μονοσήμαντος. Τότε, ο αντίστροφος τελεστής $(I - A)^{-1}$ υπάρχει και είναι φραγμένος.*

Θεώρημα 1.23. *Έστω X χώρος με νόρμα και έστω ένας συμπαγής γραμμικός τελεστής $A : X \to X$ και έστω ότι ο $I - A$ δεν είναι μονοσήμαντος. Τότε ο πυρήνας $N(I - A)$ έχει πεπερασμένη διάσταση και η εικόνα $(I - A)(X) \subsetneqq X$ είναι γνήσιος υπόχωρος.*

Απόδειξη:

Από την υπόθεση έχουμε ότι $N(L) \supsetneqq \{0\}$. Αυτό σημαίνει ότι $r > 0$ από Τρίτο Θεώρημα Riesz*(1.19) προκύπτει ότι $L(X) \subsetneqq X$.*

$\square$

Πόρισμα 1.23.1. *Έστω X χώρος με νόρμα και έστω ένας συμπαγής γραμμικός τελεστής $A : X \to X$. Αν η ομογενής εξίσωση*

$$\phi - A\phi = 0$$

έχει μόνο μη τετριμμένες λύσεις τότε, $\forall f \in X$ η μη ομογενής εξίσωση

$$\phi - A\phi = f$$

είτε δεν έχει λύση είτε η γενική της λύση έχει την μορφή

$$\phi \;=\; \phi^* + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \phi_k$$

, όπου με ϕ^* συμβολίζεται η ειδική λύση της μη ομογενούς, με $\phi_1, \cdots, \phi_m$ συμβολίζονται γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς εξίσωσης και είναι αυθαίρετοι $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ μιγαδικοί αριθμοί.

Θεώρημα 1.24 (**Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz**). *Έστω X χώρος Hilbert. Τότε, για κάθε φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό $F : X \to \mathbb{C}$ υπάρχει μοναδική $f \in X$ ώστε*

$$F(\phi) = (\phi, f) \quad , \quad \forall \phi \in X.$$

Επίσης,

$$\|f\| = \|F\|.$$

Θεώρημα 1.25. *Έστω X και Y χώροι Hilbert και έστω ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής $A : X \to Y$. Τότε, υπάρχει μοναδικά ορισμένος γραμμικός τελεστής $A^* : Y \to X$ ώστε,*

$$(A\phi, \psi) = (\phi, A^*\psi) \quad , \quad \forall \phi \in X, \ \forall \psi \in Y.$$

Ο A^* καλείται συζυγής (adjoint) *του A και είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής που ικανοποιεί την σχέση*

$$\|A^*\| = \|A\|.$$

Θεώρημα 1.26. *Έστω X και Y χώροι Hilbert και έστω ένας συμπαγής γραμμικός τελεστής $A : X \to Y$. Τότε, ο γραμμικός τελεστής $A^* : Y \to X$ είναι, επίσης, συμπαγής.*

Λήμμα 1.27. *Έστω X χώρος Hilbert και έστω U ένας κλειστός υπόχωρός του. Τότε,*

$$U^{\perp\perp} \;=\; U.$$

Απόδειξη:

Αφού U είναι κλειστός υπόχωρος, συνεπάγεται ότι $X = U \oplus U^{\perp}$ και $X = U^{\perp} \oplus U^{\perp\perp}$. Επομένως για $\phi \in X$ προκύπτει ότι,

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 \quad , \quad \phi_1 \in U, \ \phi_2 \in U^{\perp},$$

$$\phi = \psi_1 + \psi_2 \quad , \quad \psi_1 \in U^{\perp\perp},\ \psi_2 \in U^{\perp}.$$

Συγκεκριμένα,

$$(\phi_1 - \psi_1) + (\phi_2 - \psi_2) = 0$$

εύκολα προκύπτει ότι $U \subseteq U^{\perp\perp}$ *και άρα,*

$$(\phi_1 - \psi_1) = (\phi_2 - \psi_2) \in U^{\perp}\ ,\ \phi_1 - \psi_1 \in U^{\perp\perp} \Rightarrow\ \phi_1 = \psi_1 \Rightarrow\ U^{\perp\perp} = U.$$

□

Θεώρημα 1.28. *Έστω* X *και* Υ *χώροι Hilbert και έστω ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής* $A : X \to Y$. *Αν* $N(A)$ *ο πυρήνας του* A, $A(X)$ *η εικόνα του* A *και* $A^* : Y \to X$ *ο συζυγής του* A *τότε,*

$$A(X)^{\perp} \ = \ N(A^*) \quad , \quad N(A^*)^{\perp} \ = \ \overline{A(X)}.$$

Απόδειξη:

Ισχύει ότι,

$$g \in A(X)^{\perp} \ \Leftrightarrow\ (A\phi, g) = 0\ ,\ \forall \phi \in X.$$

Αφού,

$$(A\phi, g) \ = \ (\phi, A^* g)\ ,\ \forall \phi \in X \ \Rightarrow\ A^* g \ = \ 0 \ \Rightarrow\ g \in N(A^*) \ \Rightarrow\ A(X)^{\perp} \subseteqq N(A^*).$$

Λόγω του Λήμματος(1.27) αφού $A(X)^{\perp} \ = \ \overline{A(X)}^{\perp} \ = \ N(A^*)$ *προκύπτει,*

$$\overline{A(X)} \ = \ \overline{A(X)}^{\perp\perp} \ = \ N(A^*)^{\perp}$$

□

Ορισμός 1.29. *Έστω* X *χώρος Hilbert. Ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής* $A : X \to X$ *καλείται* ***αυτοσυζυγής*** *(selfadjoint) αν*

$$A \ = \ A^* \ \Leftrightarrow\ (A\phi, \psi) = (\phi, A\psi) \quad , \quad \forall \phi, \psi \in X.$$

Θεώρημα 1.30 (Θεώρημα Hilbert – Schmidt). *Έστω* X *χώρος Hilbert και έστω ένας συμπαγής, αυτοσυζυγής γραμμικός τελεστής* $A : X \to X$. *Τότε, αν* $A \neq 0$ *ο* A *έχει τουλάχιστον μία ιδιοτιμή διαφορετική του μηδενός, όλες οι ιδιοτιμές του* A *είναι πραγματικές και ο* X *έχει μία ορθοκανονική βάση που αποτελείται από τα ιδιοστοιχεία του* A.

Θεωρία Fredholm

Ορισμός 1.31. *Έστω* X *και* Υ *χώροι με νόρμα και* $< .,. >: X \times Y \to \mathbb{C}$ *μια μη εκφυλισμένη* ***διγραμμική μορφή*** *όπου,*

1.

$$\forall 0 \neq \phi \in X \ \ \exists \psi \in Y \ \ : < \phi, \psi > \neq 0,$$
$$\forall 0 \neq \psi \in Y \ \ \exists \phi \in X \ \ : < \phi, \psi > \neq 0.$$

2. $\forall \phi_1, \phi_2, \phi \in X,\ \forall \psi_1, \psi_2, \psi \in Y,\ \forall \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \in \mathbb{C}$ *ισχύει ότι,*

$$< \alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2, \psi > = \alpha_1 < \phi_1, \psi > + \alpha_2 < \phi_2, \psi >,$$

$$< \phi, \beta_1\psi_1 + \beta_2\psi_2 > = \beta_1 < \phi, \psi_1 > + \beta_2 < \phi, \psi_2 > .$$

Οι χώροι X και Υ που είναι εφοδιασμένοι με μία τέτοια μη εκφυλισμένη διγραμμική μορφή αποτελούν ***δυϊκό σύστημα*** *(dual system) και συμβολίζεται με $< X, Y >$.*

Από εδώ και έπειτα θεωρούμε το συμπαγές σύνολο $G \subset \mathbb{R}^2$ να είναι $Jordan-$μετρήσιμο ($Jordan - measurable$), με μη μηδενικό μέτρο και $C(G)$ ο χώρος $Banach$ των συνεχών μιγαδικών συναρτήσεων ορισμένων στο G εφοδιασμένος με την εξής νόρμα:

$$\|\phi\|_\infty := \max_{x \in G} |\phi(x)|.$$

Ορισμός 1.32. *Ορίζουμε τον* ***ολοκληρωτικό τελεστή*** *$A : C(G) \to C(G)$ ως εξής:*

$$(A\phi)(x) = \int_G K(x,y)\phi(y)\, dy\ , \quad x \in G \tag{1.3}$$

, όπου $K : G \times G \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής πυρήνας.

Θεώρημα 1.33. *Ένας ολοκληρωτικός τελεστής A με συνεχή πυρήνα είναι συμπαγής τελεστής στον $C(G)$.*

Ορισμός 1.34. *Ο ολοκληρωτικός τελεστής $A : C(G) \to C(G)$ ορίζεται όπως στην σχέση (1.3) όμως ο πυρήνας K είναι* ***ασθενώς ιδιάζων*** *(weakly singular), δηλαδή ο K ορίζεται και είναι συνεχής $\forall x, y \in G, x \neq y$ και ισχύει ότι*

$$\exists M > 0\ ,\ \alpha \in (0, 2]\ :\ |K(x,y)| \leq M|x-y|^{\alpha-2}\ \ ,\ \ \forall x \neq y \in G. \tag{1.4}$$

Αν το συμπαγές σύνολο $G \subset \mathbb{R}^n$ τότε η σχέση (1.4) γενικεύεται ως

$$\exists M > 0\ ,\ \alpha \in (0, n]\ :\ |K(x,y)| \leq M|x-y|^{\alpha-n}\ \ ,\ \ \forall x \neq y \in G. \tag{1.5}$$

Θεώρημα 1.35 (Arzelá – Ascoli). *Έστω συμπαγές σύνολο $G \subset \mathbb{R}^n$. Ένα σύνολο $K \subset C(G)$ είναι σχετικά συμπαγές (ως προς την νόρμα του $C(G)$) αν και μόνο αν είναι φραγμένο, ισοσυνεχές (equicontinuous), δηλαδή υπάρχει σταθερά C ώστε:*

$$|\phi(x)| \leq C\ ,\ \forall x \in G,\ \forall \phi \in K$$

και

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ :\ |x - y| < \delta \Rightarrow |\phi(x) - \phi(y)| < \epsilon\ ,\ \forall x, y \in G, \forall \phi \in K.$$

Θεώρημα 1.36. *Ένας ολοκληρωτικός τελεστής A με ασθενώς ιδιάζων πυρήνα είναι συμπαγής τελεστής στον $C(G)$.*

Απόδειξη:

Το ολοκλήρωμα της (1.3) υπάρχει ως γενικευμένο ολοκλήρωμα αφού,

$$|K(x,y)\phi(y)| \leq M\|\phi\|_\infty |x-y|^{\alpha-2} \tag{1.6}$$

$$\int_G |x-y|^{\alpha-2}\,dy \leq 2\pi\int_0^d r^{\alpha-2} r\,dr = \frac{2\pi}{\alpha} d^\alpha \tag{1.7}$$

, όπου έγινε αλλαγή σε πολικές συντεταγμένες και x *είναι η απόσταση από την αρχή και* d *η διάμετρος του* G *και με* $|\cdot|$ *συμβολίζεται η Ευκλείδεια νόρμα. Ορίζουμε τις τμηματικά γραμμικές συνεχείς συναρτήσεις* $k_n : [0,\infty) \to \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$ *ως*

$$k_n(t) := \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2n} \\ 2nt-1, & \frac{1}{2n} \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 1, & \frac{1}{n} < t < \infty \end{cases}$$

, ορίζουμε τους συνεχείς πυρήνες $K_n : G \times G$ *ως*

$$K_n(x,y) := \begin{cases} k_n(|x-y|)K(x,y), & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

και οι αντίστοιχοι ολοκληρωτικοί τελεστές $A_n : C(G) \to C(G)$ *είναι συμπαγείς από το Θεώρημα (1.33). Εκτιμούμε, τωρα, την ποσότητα*

$$\begin{aligned} |(A\phi)(x) - (A_n\phi)(x)| &= \left| \int_G [K(x,y) - K_n(x,y)\phi(y)\,dy \right| \\ &\leq \int_{G_{x,1/n}} |K(x,y)| \|\phi\|_\infty\,dy \\ &\leq 2\pi M\|\phi\|_\infty \int_0^{1/n} r^{\alpha-2} r\,dr \\ &= M\|\phi\|_\infty \frac{2\pi}{\alpha}\left(\frac{1}{n}\right)^\alpha\ ,\ x \in G \end{aligned}$$

, όπου χρησιμοποιήσαμε τις σχέσεις (1.6) και (1.7) $G_{x,1\ n} := \{y \in G||y-x| \leq 1/n\}$*. Από αυτή συνεπάγεται ότι,*

$$A_n\phi \to A\phi\ ,\ n \to \infty$$

και άρα $A\phi \in C(G)$*. Επομένως προκύπτει ότι,*

$$\|A - A_n\|_\infty \leq M\frac{2\pi}{\alpha}\left(\frac{1}{n}\right)^\alpha \to 0, \quad n \to \infty \tag{1.8}$$

Από το Θεώρημα(1.13) ο A *είναι συμπαγής.*

$\square$

Θεώρημα 1.37. *Το* $< C(G), C(G) >$ *είναι δυϊκό σύστημα με διγραμμική μορφή*

$$< \phi, \psi > := \int_G \phi(x)\psi(x)\, dx \ , \quad \phi, \psi \in C(G). \tag{1.9}$$

Ορισμός 1.38. *Έστω το* $< X, Y >$ *δυϊκό σύστημα. Τότε δύο τελεστές* $A : X \to X$, $B : Y \to Y$ *καλούνται* ***συζυγείς*** *(adjoint) αν*

$$< A\phi, \psi > = < \phi, B\psi > \ , \quad \forall \phi \in X, \forall \psi \in Y$$

Θεώρημα 1.39. *Έστω το* $< X, Y >$ *δυϊκό σύστημα. Τότε αν ένας τελεστής* $A : X \to X$ *έχει συζυγή έναν* $B : Y \to Y$*, τότε ο* B *είναι μοναδικά ορισμένος και* A *και* B *είναι γραμμικοί ως προς την διγραμμική μορφή του δυϊκου συστήματος.*

Θεώρημα 1.40. *Έστω* K *είτε συνεχής είτε ασθενώς ιδιάζων πυρήνας. Τότε, στο δυϊκό σύστημα* $< C(G), C(G) >$ *οι (συμπαγείς) ολοκληρωτικοί τελεστές που ορίζονται ως*

$$(A\phi)(x) = \int_G K(x,y)\phi(y)\, dy \ , \quad x \in G \tag{1.10}$$

$$(B\psi)(x) = \int_G K(y,x)\psi(y)\, dy \ , \quad x \in G \tag{1.11}$$

είναι συζυγείς.

Απόδειξη*:*

$$\begin{aligned}
< A\phi, \psi > &= \int_G (A\phi)(x)\psi(x)\, dx \\
&= \int_G \left(\int_G K(x,y)\phi(y)\, dy \right) \psi(x)\, dx \\
&= \int_G \phi(y) \left(\int_G K(x,y)\psi(x)\, dx \right) dy \\
&= \int_G \phi(y)(B\psi)(y)\, dy \\
&= < \phi, B\psi >
\end{aligned}$$

, όπου στην περίπτωση του ασθενούς ιδιάζοντος πυρήνα η αλλαγή στην σειρά ολοκλήρωσης έγινε χρησιμοποιώντας τους ολοκληρωτικούς τελεστές $A_n : C(G) \to C(G)$ *και από την σχέση (1.8)έχουμε* $\|A_n - A\|_\infty \to \ 0, \ n \to \infty$ *όπως στο Θεώρημα(1.36).*

□

Λήμμα 1.41. *Έστω* $< X, Y >$ *ένα δυϊκό σύστημα. Τότε, για κάθε σύνολο γραμμικώς ανεξάρτητων στοιχείων* $\phi_1, \cdots, \phi_n \in X$ *υπάρχει ένα σύνολο* $\psi_1, \cdots, \psi_n \in Y$ *ώστε,*

$$< \phi_i, \psi_k > = \delta_{ik} \ \ , \quad i, k = 1, \cdots, n \ .$$

Όμοιος ισχυρισμός ισχύει αν ο ρόλος των X *και* Y *εναλλαχθεί.*

Θεώρημα 1.42 (Πρώτο Θεώρημα Fredholm). *Έστω* $< X, Y >$ *ένα δυϊκό σύστημα και έστω* $A : X \to X$, $B : Y \to Y$ *συμπαγείς συζυγείς τελεστές. Τότε οι πυρήνες των τελεστών* $I - A$ *και* $I - B$ *έχουν την ίδια πεπερασμένη διάσταση.*

Θεώρημα 1.43 (Δεύτερο Θεώρημα Fredholm). *Η μη ομογενής εξίσωση*

$$\phi - A\phi = f \ \mid \ \psi - B\psi = g$$

είναι επιλύσιμη αν και μόνο αν η συνθήκη

$$< f, \psi >= 0 \ \mid \ < \phi, g >= 0$$

ικανοποιείται για όλες τις λύσεις της συζυγούς ομογενής εξίσωσης

$$\psi - B\psi = 0 \ \mid \ \phi - A\phi = 0$$

Θεώρημα 1.44 (Θεώρημα Εναλλακτικότητας του Fredholm - Fredholm Alternative). *Έστω* $< X, Y >$ *ένα δυϊκό σύστημα και έστω* $A : X \to X$, $B : Y \to Y$ *συμπαγείς συζυγείς τελεστές. Τότε* ***είτε***

$$\begin{array}{lcl} N(I-A) = \{0\} & , & N(I-B) = \{0\} \\ (I-A)(X) = X & , & (I-B)(Y) = Y \end{array}$$

είτε

$$dimN(I-A) = dimN(I-B) \in \mathbb{N}$$

και

$$\begin{array}{lcl} (I-A)(X) & = & \{f \in X \mid < f, \psi >= 0, \ \ \psi \in N(I-B)\} \\ (I-B)(Y) & = & \{g \in Y \mid < \phi, g >= 0, \ \ \phi \in N(I-A)\}. \end{array}$$

1.2 Χώροι Hölder

Ορισμός 1.45 (Χώρος Hölder $C^{0,\alpha}(G)$). *Έστω* $G \subset \mathbb{R}^3$ *φαγμένο και κλειστό. Με* $C^{0,\alpha}(G)$, $0 < \alpha \leq 1$ *συμβολίζουμε τον γραμμικό χώρο όλων των μιγαδικών συναρτήσεων* ϕ *ορισμένων στο* G *που ικανοποιούν την*

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq C|x - y|^{\alpha} \tag{1.12}$$

, όπου C *θετική σταθερά που εξαρτάται από το* ϕ *και όχι από τα* x *και* y.

Αν το G *δεν είναι φραγμένο τότε, με* $\phi \in C^{0,\alpha}(G)$ *εννοούμε ότι η* ϕ *είναι φραγμένη και ικανοποιεί την (1.12).*

Ο χώρος $C^{0,\alpha}(G)$ *καλείται* ***χώρος* Hölder** *ή* ***χώρος των ομοιόμορφα* Hölder *συνεχών συναρήσεων***. *Αν* $\phi \in C^{0,\alpha}(G)$, $0 < \alpha \leq 1$ *τότε* ϕ *είναι ομοιόμορφα συνεχής στο* G.

Παρατήρηση: Στην μετέπειτα ανάλυσή μας ο χώρος των ομοιόμορφα *Hölder* συνεχών συναρτήσεων έχει εξέχοντα ρόλο στην διερεύνηση των σχέσεων συνέχειας των δυναμικών απλού και διπλού στρώματος (*single and double layer potential*). Σε αυτή τη μελέτη το G θα είναι το φραγμένο χωρίο $\overline{D}$, είτε το μη φραγμένο χωρίο $\mathbb{R}^3 \setminus D$, είτε το σύνορο ∂D.

Επίσης παρόμοια προκύπτει ο παρακάτω ορισμός.

Ορισμός 1.46 (Χώρος Hölder $C^{1,\alpha}(G)$). *Έστω $G \subset \mathbb{R}^3$ κλειστό και φραγμένο. Με $C^{1,\alpha}(G)$, $0 < \alpha \leq 1$ συμβολίζουμε τον* ***χώρο των ομοιόμορφα* Hölder *συνεχώς παραγωγίσιμων συναρήσεων****, δηλαδή όλων των συναρτήσεων για τις οποίες grad ϕ (ή Grad ϕ αν $G = \partial D$ που δηλώνει ότι είναι επιφανειακό) που ικανοποιεί την σχέση*

$$|grad\ \phi(x) - grad\ \phi(y)| \leq C|x-y|^{\alpha} \tag{1.13}$$

, για την οποία οι ϕ και grad ϕ θεωρούνται φραγμένες στην περίπτωση που το G είναι μη φραγμένο.

Θεώρημα 1.47. *Ο χώρος Hölder $C^{0,\alpha}(G)$ είναι Banach με τη νόρμα*

$$\|\phi\|_{\alpha} := \sup_{x \in G} |\phi(x)| \ + \sup_{\substack{x,y \in G \\ x \neq y}} \frac{|\phi(x) - \phi(y)|}{|x-y|^{\alpha}}. \tag{1.14}$$

Απόδειξη:

Εύκολα διαπιστώνεται ότι η

$$|\phi|_{\alpha} = \sup_{\substack{x,y \in G \\ x \neq y}} \frac{|\phi(x) - \phi(y)|}{|x-y|^{\alpha}} \tag{1.15}$$

είναι ημινόρμα (έχει όλες τις ιδιότητες της νόρμας εκτός από την $\|\phi\|_{\alpha} = 0 \Leftrightarrow \ \phi = 0$) στον $C^{0,\alpha}(G)$. Τότε η $\| \ \cdot \|_{\alpha}$ είναι νόρμα, αφού $\|\phi\|_{\infty} = \sup_{x \in G} |\phi(x)|$ είναι νόρμα.

Μένει να δειχθεί ότι ο χώρος $C^{0,\alpha}(G)$ είναι πλήρης. Έστω $(\phi_n)_n$ ακολουθία Cauchy στον $C^{0,\alpha}(G)$ τότε είναι επίσης ακολουθία Cauchy στον $C(G)$ και άρα

$$\exists \phi \in C(G) \ : \ \|\phi_n - \phi\|_{\infty} \to 0 \ , \ n \to \infty.$$

Αφού $(\phi_n)_n$ είναι ακολουθία Cauchy στον $C^{0,\alpha}(G)$, δοσμένου $\epsilon > 0$ έχουμε ότι,

$$\epsilon > 0 \ \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N} \ \ : \ |\phi_n - \phi_m| < \epsilon, \ \ \forall n, m \geq N(\epsilon)$$

και άρα

$$|[\phi_n(x) - \phi_m(x)] - [\phi_n(y) - \phi_m(y)]| \leq \epsilon |x-y|^{\alpha} \ , \ \ \forall n, m \geq N(\epsilon) \ , \ \forall x, y \in G \ .$$

Αφού $\phi_n \to \phi, n \to \infty$ ομοιόμορφα στο G, αφήνοντας το $m \to \infty$ έχουμε,

$$|[\phi_n(x) - \phi(x)] - [\phi_n(y) - \phi(y)]| \leq \epsilon |x-y|^{\alpha} \ , \ \ \forall n \geq N(\epsilon) \ , \ \forall x, y \in G \ .$$

Επομένως καταλήγουμε ότι,

$$\phi \in C^{0,\alpha}(G) \ , \ |\phi_n - \phi|_{\alpha} \leq \epsilon \ , \ n \geq N(\epsilon) \Rightarrow \|\phi_n - \phi\|_{\alpha} \to 0, n \to \infty.$$

$\square$

Θεώρημα 1.48. *Ο χώρος Hölder $C^{1,\alpha}(G)$ είναι Banach με τη νόρμα*

$$\|\phi\|_\alpha := \sup_{x\in G}|\phi(x)| \ + \ \sup_{x\in G}|grad\ \phi(x)| \ + \ \sup_{\substack{x,y\in G\\ x\neq y}}\frac{|grad\ \phi(x)-grad\ \phi(y)|}{|x-y|^\alpha}. \tag{1.16}$$

Πρόταση 1.49 (Ιδιότητα Ενσφήνωσης $C^{0,\alpha}(G)$). *Έστω $0<\alpha<\beta\le 1$ ισχύει η ακόλουθη ιδιότητα ενσφήνωσης (imbedding property)*

$$\forall\ \phi\in C^{0,\beta}(G)\ \Rightarrow\ \phi\in C^{0,\alpha}(G)$$

Πρόταση 1.50 (Ιδιότητα Ενσφήνωσης $C^{1,\alpha}(G)$). *Έστω $0<\alpha<\beta\le 1$ ισχύει η ακόλουθη ιδιότητα ενσφήνωσης (imbedding property)*

$$\forall\ \phi\in C^{1,\beta}(G)\ \Rightarrow\ \phi\in C^{1,\alpha}(G)$$

Θεώρημα 1.51 (Τελεστές Ενσφήνωσης $C^{0,\alpha}(G)$). *Έστω $0<\alpha<\beta\le 1$ και έστω G συμπαγές. Τότε οι τελεστές ενσφήνωσης (imbedding operators)*

$$I^\beta\ :\ C^{0,\beta}(G)\ \to\ C(G) \tag{1.17}$$

$$I^{\alpha,\beta}\ :\ C^{0,\beta}(G)\ \to\ C^{0,\alpha}(G) \tag{1.18}$$

είναι συμπαγείς.

***Απόδειξη**:*

Έστω K φραγμένο σύνολο στον $C^{0,\beta}(G)$ δηλαδή,

$$\|\phi\|_\beta\le C\ ,\ \ \forall\phi\in K\ .$$

Όπως και στο Θεώρημα(1.10) αν ένα σύνολο είναι συμπαγές είναι και φραγμένο άρα

$$|\phi(x)|\le C\ ,\ \ \forall x\in G,\ \forall\phi\in K$$

όπως στον Ορισμό (1.45) έχουμε για τον $C^{0,\beta}(G)$

$$|\phi(x)-\phi(y)|\le C|x-y|^\beta\ ,\ \ \forall x,y\in G,\ \forall\phi\in K\ . \tag{1.19}$$

Τότε, το K είναι φραγμένο και ισοσυνεχές και από Θεώρημα $Arzelá-Ascoli$(1.35) το K είναι σχετικά συμπαγές στον $C(G)$ άρα ο τελεστής $I^\beta\ :\ C^{0,\beta}(G)\ \to\ C(G)$ είναι συμπαγής σύμφωνα με τον Ορισμό(1.8).

Μένει να δειχθεί ότι το K είναι σχετικά συμπαγές στο $C^{0,\alpha}(G)$. Από την εξίσωση(1.19) έχουμε

$$\begin{aligned}|[\phi_n(x)-\phi(x)]-[\phi_n(y)-\phi(y)]| &= |[\phi_n(x)-\phi(x)]-[\phi_n(y)-\phi(y)]|^{\alpha/\beta}\\ &\cdot\ \ |[\phi_n(x)-\phi(x)]-[\phi_n(y)-\phi(y)]|^{1-\alpha/\beta}\\ &\le (2C)^{\alpha/\beta}|x-y|^\alpha(2\|\phi-\psi\|_\infty)^{1-\alpha/\beta},\ \ \forall x,y\in G,\ \forall\phi,\psi\in K\end{aligned}$$

και επομένως

$$|\phi-\psi|_a \le (2C)^{\alpha/\beta}2^{1-\alpha/\beta}\|\phi-\psi\|_\infty^{1-\alpha/\beta}, \ \ \forall x,y\in G,\ \forall \phi,\psi\in K \ . \tag{1.20}$$

Αλλά από αυτό προκύπτει ότι κάθε ακολουθία του K συγκλίνει μέσα στον $C(G)$ άρα συγκλίνει και στον $C^{0,\alpha}(G)$ από Πρόταση(1.49).

□

Θεώρημα 1.52 (Τελεστές Ενσφήνωσης $C^{1,\alpha}(G)$). *Έστω $0<\alpha<\beta\le 1$ και έστω G συμπαγές. Τότε οι τελεστές ενσφήνωσης (imbedding operators)*

$$I^{\beta} \ : \ C^{1,\beta}(G) \ \to \ C^{1}(G) \tag{1.21}$$

$$I^{\alpha,\beta} \ : \ C^{1,\beta}(G) \ \to \ C^{1,\alpha}(G) \tag{1.22}$$

είναι συμπαγείς.

1.3 Χώροι Sobolev H^p

Στα πλαίσια αυτής της εργασίας θα χρησιμοποιηθούν κάποια βασικά αποτελέσματα χώρων *Sobolev* για το λόγο αυτό ο αναγνώστης θα πρέπει ήδη να έχει μία τριβή με αυτούς τους χώρους καθώς τα αποτελέσματα που θα παρουσιαστούν θα είναι στοχευμένα και θα χρησιμοποιούν στοιχειώδη θεωρία σειρών *Fourier*. Υπενθυμίζουμε, αρχικά κάποιες έννοιες που θα χρειαστούν στην ανάλυσή μας.

Ορισμός 1.53. *Δύο στοιχεία ϕ και ψ στον χώρο Hilbert X καλούνται **ορθογώνια** αν*

$$(\phi,\psi)=0 \ \Leftrightarrow \ \phi\perp\psi \ .$$

*Ένα υποσύνολο $U\subset X$ καλείται **ορθογώνιο σύστημα** αν*

$$(\phi,\psi)=0 \ \ , \ \ \forall\ \phi,\psi\in U,\ \phi\ne\psi \ .$$

*Ένα ορθογώνιο σύστημα U καλείται **ορθοκανονικό σύστημα** αν επιπλέον ισχύει*

$$\|\phi\|=1 \ , \ \phi\in U \ .$$

*Ένα πλήρες ορθοκανονικό σύστημα U καλείται **ορθοκανονική βάση** του X. Το σύνολο*

$$U^{\perp}:=\{\psi\in X|\psi\perp U\}$$

*καλείται **ορθογώνιο συμπλήρωμα** του U.*

Ορισμός 1.54. *Έστω X χώρος με νόρμα, $U\subset X$ και έστω $\phi\in X$. Ένα στοιχείο $v\in U$ καλείται **βέλτιστη προσέγγιση** του ϕ ως προς το U αν*

$$\|\phi-v\|=\inf_{u\in U}\|\phi-u\|.$$

Θεώρημα 1.55. *Έστω χώρος Hilbert X και έστω $U \subset X$. Ένα στοιχείο $v \in U$ είναι βέλτιστη προσέγγιση του $\phi \in X$ ως προς το U αν και μόνο αν $\phi - v \perp U$. Ισχύει ότι $\forall \phi \in X$ υπάρχει το πολύ μία βέλτιστη προσέγγιση ως προς το U.*

Θεώρημα 1.56. *Έστω χώρος Hilbert X και έστω πλήρες $U \subset X$. Για κάθε στοιχείο του X υπάρχει μοναδική βέλτιστη προσέγγιση ως προς το U.*

Θεώρημα 1.57. *Έστω $\{\phi_n\}_1^\infty$ στον χώρο Hilbert X.*
Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

i. *Το $\{\phi_n\}_1^\infty$ είναι πλήρες.*

ii. *Κάθε $\phi \in X$ μπορεί να γραφτεί ως ανάπτυγμα σειράς Fourier ως*

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} (\phi, \phi_n)\phi_n \ .$$

iii. *Ισχύει η* ***εξίσωση* Parseval**

$$\|\phi\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(\phi, \phi_n)|^2 \ , \ \forall \phi \in X.$$

iv. *Το $\phi = 0$ είναι το μόνο στοιχείο $\phi \in X$ ώστε*

$$(\phi, \phi_n) = 0 \ \forall \ n \in \mathbb{N} \ .$$

Απόδειξη:
[$i. \Rightarrow ii.$]

Από Θεώρημα(1.55) και Θεώρημα(1.56)

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} (\phi, \phi_k)\phi_k$$

βέλτιστη προσέγγιση του $\phi \in X$ $span\{\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n\}$. Το σύστημα $\{\phi_n\}_1^\infty$ είναι πλήρες, άρα

$$\exists \ \widehat{u_n} \in span\{\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n\} \ : \ \|\widehat{u_n} - \phi\| \to 0, \ n \to \infty$$

και αφού

$$\|\widehat{u_n} - \phi\| \geq \|u_n - \phi\| \Rightarrow \quad u_n \to \phi \ , \ n \to \infty \ .$$

[$ii. \Rightarrow iii.$]
Ισχύει ότι

$$\|u_n\|^2 = (u_n, u_n) = \sum_{k=1}^{n} |(\phi, \phi_k)|^2 \ .$$

Με $n \to \infty$ και από συνέχεια της νόρμας $\|\cdot\|$ προκύπτει το ζητούμενο.
[iii. ⇒ iv.]
Από ιδιότητες της νόρμας $\|\cdots\|$ έχουμε

$$\|\phi\| = 0 \Leftrightarrow \ \phi \equiv 0 \Rightarrow \ (\phi, \phi_n) = 0, \ n \in \mathbb{N} \ .$$

[iv. ⇒ i.]
Έστω το σύνολο $U := \overline{span(\phi_n)}$ με $X \neq U$. Τότε,

$$\exists \ \phi \in X \ : \ \phi \notin U \ .$$

Αφού U κλειστός υπόχωρος του X, το σύστημα $\{\phi_n\}_1^\infty$ είναι πλήρες στο U. Άρα από Θεώρημα(1.56) η βέλτιστη προσέγγιση $v \in U$ του $\phi \in X$ ως προς το U ικανοποιεί τη σχέση

$$(v - \phi, \phi_n) = 0 \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow \quad v = \phi$$

και καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα $X = U$.

□

Αρχικά, θεωρούμε ότι το ορθοκανονικό σύστημα

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{imt} \right)_{-\infty}^{\infty} \tag{1.23}$$

είναι πλήρες στον $L^2[0, 2\pi]$. Από Θεώρημα(1.57), για $\phi \in L^2[0, 2\pi]$ έχουμε υπό την έννοια της σύγκλισης μέσων τετραγώνων

$$\phi(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m e^{imt} \tag{1.24}$$

όπου οι συντελεστές $Fourier$ α_m δίνονται από την σχέση

$$\alpha_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(t) e^{-imt} \, dt. \tag{1.25}$$

Με $(\cdot, \cdot)$ συμβολίζουμε το εσωτερικό γινόμενο στον L^2 με αντίστοιχη νόρμα $\|\cdot\|$ που δίνεται από την εξίσωση $Parseval$ όπως αναφέραμε στο $[iii.]$ του Θεωρήματος (1.57)

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\alpha_m|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\phi(t)|^2 \, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \|\phi(t)\|^2 \end{aligned}$$

Ορισμός 1.58 (Χώρος Sobolev H^p). *Έστω $0 \leq p < \infty$ ορίζουμε τον $H^p[0, 2\pi]$ ως τον χώρο όλων των συναρτήσεων $\phi \in L^2[0, 2\pi]$ για τις οποίες ισχύει*

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} (1 + m)^p |\alpha_m|^2 < \infty \tag{1.26}$$

*, όπου α_m συντελεστές $Fourier$ της ϕ όπως αναφέρθηκαν στην σχέση (1.25). Ο χώρος $H^p = H^p[0, 2\pi]$ καλείται **χώρος Sobolev** και ισχύει ότι $H^0[0, 2\pi] \equiv L^2[0, 2\pi]$.*

Θεώρημα 1.59. *Ο $H^p[0,2\pi]$ είναι χώρος Hilbert με εσωτερικό γινόμενο*

$$(\phi,\psi)_p := \sum_{m=-\infty}^{\infty} (1+m^2)^p \alpha_m \overline{\beta_m} \tag{1.27}$$

όπου α_m και β_m οι συντελεστές Fourier των ϕ και ψ αντίστοιχα. Τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα είναι πυκνά στον $H^p[0,2\pi]$.

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι παρόμοιο με το Θεώρημα (1.49) που συναντήσαμε στους χώρους *Hölder*. Δηλαδή είναι θεώρημα που αφορά **τελεστές ενσφήνωσης σε χώρους Sobolev** H^p.

Θεώρημα 1.60 (Θεώρημα Rellich). *Αν $0 \leq p < q < \infty$ τοτε $H^q[0,2\pi]$ είναι πυκνός στον $H^p[0,2\pi]$ και ο τελεστής ενσφήνωσης (imbedding operator)*

$$I : H^q \to H^p \tag{1.28}$$

είναι συμπαγής.

Απόδειξη:

Αφού,

$$(1+m^2)^p \;\leq\; (1+m^2)^q \;,\;\; 0 \leq p < q < \infty \tag{1.29}$$

προκύπτει ότι $H^q \subset H^p$ και επίσης

$$\|\phi\|_p \;\leq\; \|\phi\|_q \;\;,\;\; \forall \phi \in H^q \;. \tag{1.30}$$

Ότι ο H^q είναι πυκνός στον H^p προκύπτει επειδή τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα είναι πυκνά στον H^p από Θεώρημα(1.59).

Μένει να δειχθεί ότι ο τελεστής $I : H^q \to H^p$ είναι συμπαγής, για αυτό ορίζουμε τους τελεστή

$$I_n : H^q \to H^p \;,\; \forall n \in \mathbb{N}$$

με δράση

$$I_n\phi \;:=\; \sum_{m=-n}^{n} \alpha_m f_m \;,\;\; \forall \phi \in H^q,\; \forall n \in \mathbb{N} \tag{1.31}$$

, όπου α_m συντελεστές Fourier.

Τότε,

$$
\begin{aligned}
\|(I_n - I)\phi\|_p^2 &= \sum_{|m|=n+1}^{\infty} (1+m^2)^p |\alpha_m|^2 \\
&\le \frac{1}{(1+n^2)^{q-p}} \sum_{|m|=n+1}^{\infty} (1+m^2)^q |\alpha_m|^2 \\
&\le \frac{1}{(1+n^2)^{q-p}} \|\phi\|_q^2 \\
\Leftrightarrow \ \|(I_n - I)\phi\|_p &\le (1+n^2)^{\frac{p-q}{2}} \|\phi\|_p \le (1+n^2)^{\frac{p-q}{2}} \|\phi\|_q \\
\Leftrightarrow \ \|(I_n - I)\phi\|_p \le \|(I_n - I)\|_p \|\phi\|_p &\le (1+n^2)^{\frac{p-q}{2}} \|\phi\|_p \\
\Leftrightarrow \ \|(I_n - I)\|_p &\le (1+n^2)^{\frac{p-q}{2}} \ \to 0 \ , \ \ n \to \infty
\end{aligned}
$$

λόγω της σχέσης (1.30) και επειδή ο κάθε τελεστής I_n έχει πεπερασμένης διάστασης εικόνα και από το Θεώρημα (1.14) I_n συμπαγής $\forall n \in \mathbb{N}$ και άρα από Θεώρημα (1.13) ο I είναι συμπαγής.

$\square$

Θεώρημα 1.61 (Θεώρημα Ενσφήνωσης Sobolev). *Έστω $p > \frac{1}{2}$ και $\phi \in H^p[0, 2\pi]$. Τότε η ϕ συμπίπτει σχεδόν παντού με μία συνεχή και 2π-περιοδική συνάρτηση. Η διαφορά της ϕ από αυτήν την συνάρτηση είναι μία συνάρτηση w μέτρου μηδέν $\|w\|_p = 0$.*

Ορισμός 1.62 (Χώρος H^{-p}). *Για $0 \le p < \infty$ ο χώρος $H^{-p} = H^{-p}[0, 2\pi]$ ορίζεται να είναι ο δυϊκός του χώρου $H^p[0, 2\pi]$, δηλαδή ο χώρος όλων των φραγμένων γραμμικών συναρτησιακών ορισμένων στον $H^p[0, 2\pi]$.*

Θεώρημα 1.63 (Χαρακτηρισμός του χώρου H^{-p}). *Για $F \in H^{-p}[0, 2\pi]$ η νόρμα δίνεται από τον τύπο*

$$
\|F\|_p = \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} (1+m^2)^{-p} |c_m|^2 \right]^{1/2} \tag{1.32}
$$

, όπου $c_m = F(f_m)$.

Αντίστροφα, για κάθε ακολουθία $(c_m)_m$ στοιχείων του $\mathbb{C}$ που ικανοποιούν την συνθήκη

$$
\sum_{m=-\infty}^{\infty} (1+m^2)^{-p} |c_m|^2 \ < \ \infty \tag{1.33}
$$

υπάρχει ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό $F \in H^{-p}[0, 2\pi]$, με $F(f_m) = c_m$.

Θεώρημα 1.64. *Για $g \in L^2[0, 2\pi]$ το* ***δυϊκό ζευγάρι*** *(duality pairing)*

$$
G(\phi) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(t) g(t)\, dt, \quad \phi \in H^p \tag{1.34}
$$

ορίζει ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό στον $H^p[0, 2\pi]$, δηλαδή $G \in H^{-p}[0, 2\pi]$. Ειδικότερα, ο $L^2[0, 2\pi]$ είναι υπόχωρος του δυϊκού χώρου $H^{-p}[0, 2\pi]$ με $0 \le p < \infty$ και τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα είναι πυκνά στον $H^{-p}[0, 2\pi]$.

Πόρισμα 1.64.1. *Ισχύει η σχέση ενσφήνωσης*

$$H^p[0,2\pi] \ \subseteq \ L^2[0,2\pi] \subseteq \ H^{-p}[0,2\pi] \quad , \quad 0 \leq p < \infty \tag{1.35}$$

και τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα είναι πυκνά σε καθέναν από αυτούς τους χώρους.

Παρατηρήσεις:

1. Το δυϊκό ζευγάρι μπορεί να επεκταθεί σε φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό στον H^{-p}. Ειδικότερα, για $\phi \in H^p[0,2\pi]$ και $g \in H^{-p}[0,2\pi]$ ορίζεται
$$g(\phi) = \int_0^{2\pi} \phi(t)g(t)\,dt \ .$$

2. Ο χώρος H^{-p} γίνεται χώρος *Hilbert* το εσωτερικό γινόμενο που ορίστηκε προηγουμένως να είναι ορισμένο από το $p \geq 0$ στο $p < 0$.

3. Γενικότερα, αν X χώρος με νόρμα και X^* ο δυϊκός του, τότε για δοσμένα $\phi \in X$ και $g \in X^*$ ορίζουμε το δυϊκό ζευγάρι $< g, \phi >$ ως
$$< g, \phi >= g(\phi) \ , \quad \phi \in X, \ g \in X^*$$

Τώρα ορίζουμε τους χώρους *Sobolev* στο σύνορο ∂D ενός επίπεδου χωρίου $D \subset \mathbb{R}^2$ τους χώρους *Sobolev* στο χωρίο $D \subset \mathbb{R}^2$ και μελετάμε τις σχέσεις μεταξύ τους. Όμοια θα δουλεύαμε για χωρίο $D \subset \mathbb{R}^3$.

Για αυτό θεωρούμε ότι το χωρίο D είναι απλά συνεκτικό και φραγμένο ώστε το σύνορο ∂D να είναι κλάσης C^k, δηλαδή το ∂D να έχει μία $k-$φορές συνεχώς παραγωγίσιμη $2\pi-$περιοδική αναπαράσταση

$$\partial D \ = \ \{x(t) | t \in [0,2\pi), x \in C^k[0,2\pi]\} \ .$$

Ορισμός 1.65 (**Χώρος Sobolev** $H^p(\partial D)$)**.** *Για $0 \leq p \leq k$ ορίζουμε τον χώρο Sobolev $H^p(\partial D)$ ως τον χώρο όλων των συναρτήσεων*

$$\phi \in L^2(\partial D) \ : \ \phi(x(t)) \in H^p[0,2\pi] \ .$$

Το εσωτερικό γινόμενο στον χώρο $H^p(\partial D)$ ορίζεται από το εσωτερικό γινόμενο του $H^p[0,2\pi]$ ως

$$(\phi,\psi)_{H^p(\partial D)} \ := \ (\phi(x(t)),\psi(x(t)))_{H^p[0,2\pi]} \ . \tag{1.36}$$

Ορισμός 1.66 (**Χώρος Sobolev** $H^1(D)$)**.** *Ο χώρος Sobolev $H^1(D)$ για $D \subset \mathbb{R}^2$ φραγμένο με σύνορο ∂D κλάσης C^1 ορίζεται ως η πλήρωση του χώρου $C^1(\bar{D})$ ως προς τη νόρμα*

$$\|u\|_{H^1(D)} \ := \ \left[\int_D (|u(x)|^2 + |grad\ u(x)|^2)\,dx\right]^{1/2} \ . \tag{1.37}$$

Ισχύει ότι ο $H^1(D) \subset L^2(D)$ είναι υπόχωρος του $L^2(D)$.

Ο στόχος είναι να δούμε ότι όλες οι συναρτήσεις του $H^1(D)$ αν περιοριστούν στο σύνορο ∂D έχουν νόημα, δηλαδή όλες οι **συναρτήσεις ίχνους** από τον $H^1(D)$ στο σύνορο είναι καλά ορισμένες.

Θεώρημα 1.67 (**Θεώρημα Dini**). *Αν $(\phi_n)_1^\infty$ ακολουθία πραγματικών συνεχών συναρτήσεων που συγκλίνει σημειακά σε μία συνεχή συνάρτηση ϕ στο συμπαγές σύνολο D και αν*

$$\phi_n(x) \geq \phi_{n+1}(x) \quad , \quad \forall x \in D, \forall n = 1, 2, \cdots \Rightarrow \phi_n \to \phi \tag{1.38}$$

ομοιόμορφα στο D.

Θεώρημα 1.68 (**Θεώρημα Ίχνους**). *Έστω $D \subset \mathbb{R}^2$ απλά συνεκτικό φραγμένο χωρίο με σύνορο ∂D κλάσης C^2.Τότε ύπαρχει θετική σταθερά C ώστε,*

$$\|u\|_{H^{1/2}(\partial D)} \; \leq \; C\|u\|_{H^1(D)} \quad , \quad \forall u \in H^1(D) \; , \tag{1.39}$$

, δηλαδή αν $u \in H^1(D)$ ο περιορισμός της στο σύνορο $u \to u|_{\partial D}$ είναι καλά ορισμένος και φραγμένη απεικόνιση από τον $H^1(D)$ στον $H^{1/2}(\partial D)$.

Απόδειξη:

Αρχικά θεωρούμε συνεχώς παραγωγίσιμες συνάρτησεις u ορισμένες στη λωρίδα $\mathbb{R} \times [0,1]$ που είναι $2\pi-$περιοδικές ως προς την πρώτη μεταβλητή. Έστω

$$Q := [0, 2\pi) \times [0, 1]$$

$$a_m(\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(t, \eta) e^{-imt} \, dt, \quad 0 \leq \eta \leq 1 \; . \tag{1.40}$$

Τότε από την εξίσωση Parseval έχουμε

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} |a_m(\eta)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(t, \eta)|^2 \, dt, \quad 0 \leq \eta \leq 1 \; . \tag{1.41}$$

Από Θεώρημα Dini(1.67) αυτές οι σειρές συγκλίνουν ομοιόμορφα. Επομένως, ολοκληρώνοντας όρο προς όρο έχουμε,

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^1 |a_m(\eta)|^2 \, d\eta = \frac{1}{2\pi} \|u(t, \eta)\|^2_{L^2(Q)} \; . \tag{1.42}$$

Όμοια έχουμε ότι,

$$\begin{aligned} a'_m(\eta) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial \eta}(t, \eta) e^{-imt} \, dt \\ ima_m(\eta) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial t}(t, \eta) e^{-imt} \, dt \end{aligned}$$

και χρησιμοποιώντας αυτές τις εξισώσεις προκύπτει ότι,

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^1 |a'_m(\eta)|^2 \, d\eta = \frac{1}{2\pi} \left\| \frac{\partial u}{\partial \eta} \right\|^2_{L^2(Q)}$$
$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^1 m^2 |a_m(\eta)|^2 \, d\eta = \frac{1}{2\pi} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2_{L^2(Q)} .$$

Τώρα υποθέτουμε ότι $u(\cdot, 1) = 0$. *Τότε από την ανισότητα* $Cauchy - Schwarz$ *και επειδή* $a_m(1) = 0, \ \forall m$ *προκύπτει ότι,*

$$\begin{aligned}
\|u(\cdot,0)\|^2_{H^{1/2}[0,2\pi]} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} (1+m^2)^{1/2} |a_m(0)|^2 \\
&= 2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} (1+m^2)^{1/2} Re \int_1^0 a'_m(\eta) \overline{a_m(\eta)} \, d\eta \\
&= 2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\int_0^1 |a'_m(\eta)|^2 \, d\eta \right]^{1/2} \left[(1+m^2) \int_0^1 |a_m(\eta)|^2 \, d\eta \right]^{1/2} \\
&\leq 2 \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^1 |a'_m(\eta)|^2 \, d\eta \right]^{1/2} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} (1+m^2) \int_0^1 |a_m(\eta)|^2 \, d\eta \right]^{1/2} \\
&= \frac{1}{\pi} \left\| \frac{\partial u}{\partial \eta} \right\|_{L^2(Q)} \left[\|u\|^2_{L^2(Q)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2_{L^2(Q)} \right]^{1/2} \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\left\| \frac{\partial u}{\partial \eta} \right\|^2_{L^2(Q)} \right]^{1/2} \left[\|u\|^2_{L^2(Q)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2_{L^2(Q)} \right]^{1/2} \\
&\leq \frac{1}{\pi} \left[\|u\|^2_{L^2(Q)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2_{L^2(Q)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial \eta} \right\|^2_{L^2(Q)} \right]^{1/2} \left[\|u\|^2_{L^2(Q)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2_{L^2(Q)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial \eta} \right\|^2_{L^2(Q)} \right]^{1/2} \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\|u\|^2_{L^2(Q)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2_{L^2(Q)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial \eta} \right\|^2_{L^2(Q)} \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \|u\|^2_{H^1(Q)} .
\end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$\|u(\cdot,0)\|^2_{H^{1/2}[0,2\pi]} \leq \frac{1}{\pi} \|u\|^2_{H^1(Q)} . \tag{1.43}$$

Επιστρέφοντας στο χωρίο D *διαλέγουμε παράλληλη λωρίδα*

$$D_h := \{x + \eta h v(x) | x \in \partial D, \eta \in [0,1]\}$$

, όπου ν *το εσωτερικό κάθετο διάνυσμα στο σύνορο* ∂D, $h > 0$ *ώστε κάθε* $y \in D_h$ *αναπαριστάται με μοναδικό τρόπο μέσω προβολής στο* ∂D *υπό τη μορφή*

$$y = x + \eta h v(x) \ , \ x \in \partial D, \eta \in [0,1] \ .$$

Με ∂D_h *συμβολίζουμε το εσωτερικό σύνορο του* D_h. *Παραμετρικοποιώντας το*

$$\partial D := \{x(t)|0 \leq t \leq 2\pi\}$$

η παραμετρικοποίηση του D_h *έχει τη μορφή*

$$x(t,\eta) = x(t) + \eta h v(x(t)), \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \ 0 \leq \eta \leq 1 \ .$$

Η ανίσωση (1.43) δείχνει ότι $\forall u \in C^1(D_h)$ *με* $u = 0$ ∂D_h *και άρα*

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^{1/2}(\partial D)} = \|u(x(t))\|_{H^{1/2}[0,2\pi]} &\leq \frac{1}{\sqrt{\pi}}\|u(x(t,\eta))\|_{H^1(Q)} \\ &\leq C\|u\|_{H^1(D_h)} \end{aligned}$$

, όπου C *είναι θετική σταθερά που εξαρτάται από τα φράγματα των παραγώγων της απεικόνισης* $x(t,\eta)$ *και της αντίστροφής της.*

Τώρα επεκτείνουμε αυτήν την εκτίμηση για αυθαίρετο $u \in C^1(\bar{D})$. *Για αυτό διαλέγουμε* $g \in C^1(\bar{D})$ *ώστε*

$$g(y) = 0 \ , \ y \notin D_h$$

και

$$g(y) = f(\eta) \ , \ y = x + \eta h v(x) \in D_h$$

, όπου

$$f(\eta) := (1-\eta)^2(1+3\eta) \ .$$

Τότε για $f(0) = f'(0) = 1$ *και* $f(1) = f'(1) = 0$ *έχουμε*

$$\|u\|_{H^{1/2}(\partial D)} = \|gu\|_{H^{1/2}(\partial D)} \leq C\|gu\|_{H^1(D)} \leq C_1\|u\|_{H^1(D)}, \ \forall u \in C^1(\bar{D})$$

, όπου C_1 *θετική σταθερά που εξαρτάται μόνο από τα φράγματα* g *και των πρώτων της παραγώγων.*

Θεμελειώσαμε την επιθυμητή ανίσωση για $u \in C^1(\bar{D})$, *δηλαδή ο τελεστής* $A : u \mapsto u|_{\partial D}$ *είναι φραγμένος από τον* $C^1(\bar{D})$ *στον* $H^{1/2}(\partial D)$. *Ισχύει ότι αν* X *πυκνός υπόχωρος ενός χώρου με νόρμα* $\hat{X}$ *και* Y *είναι χώρος Banach αν* $A : X \to Y$ *είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής τότε μπορεί να επεκταθεί σε ένα φραγμένο γραμμικό τελεστή* $\hat{A} : \hat{X} \to Y$, *όπου* $\|\hat{A}\| = \|A\|$. *Σύμφωνα με αυτό η επιθυμητή ανίσωση προκύπτει επεκτείνοντας τον τελεστή* A *από τον* $C^1(\bar{D})$ *στον* $H^1(D)$.

$\square$

Κεφάλαιο 2

Ευθύ Πρόβλημα Σκέδασης για Ομογενή Υλικά

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναφερθούμε στο **Ευθύ Πρόβλημα Σκέδασης για Ομογενή Υλικά** ώστε να θεμελειώσουμε το πρόβλημα και να το επεκτείνουμε στο **Ευθύ Πρόβλημα Σκέδασης για Μη Ομογενή Υλικά** στο επόμενο κεφάλαιο. Για το λόγο αυτό θα αναφερθούμε στοχευμένα σε συγκεκριμένα αποτελέσματα και αποδείξεις θεωρημάτων σε αυτά που κρίνονται αναγκαία για την κατανόηση των εννοιών του επόμενου κεφαλαίου.

2.1 Δυναμικά Απλού και Διπλού Στρώματος

Γεωμετρία επιφανειών

Αρχικά, θεωρούμε για αυτήν την ενότητα ότι το χωρίο $D \subset \mathbb{R}^3$ είναι ανοιχτό και φραγμένο, το συμπλήρωμά του $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ είναι συνεκτικό και ότι το σύνορο ∂D αποτελείται από ένα στοιχείο επιφάνειας κλάσης C^2. Γενικά, το σύνορο ∂D σε αυτή τη μελέτη αποτελείται από πεπερασμένο αριθμό, ασύνδετων κλειστών επιφανειών κλάσης C^2.

Η ιδιότητα ότι το σύνορο ∂D είναι κλάσης C^2 σημαίνει ότι $\forall z \in \partial D\ \exists\ V_z$ τρισδίαστατη περιοχή του z ώστε η τομή $\partial D \cap V_z$ να απεικονίζεται με μονοσήμαντη απεικόνιση σε ένα ανοιχτό χωρίο $U \subset \mathbb{R}^2$ ώστε η απεικόνιση αυτή να είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη.

Παραθέτουμε στην συνέχεια κάποιους ορισμούς που θα χρησιμοποιήσουμε στις επόμενες ενότητες και κεφάλαια.

Ορισμός 2.1.

1. ***Χωρίο*** *$D \subset \mathbb{R}^3$ ονομάζεται ένα ανοικτό και συνεκτικό σύνολο του $\mathbb{R}^3$.*

2. *Ένα **χωρίο** $D \subset \mathbb{R}^3$ είναι **κλάσης** $C^k, k \in \mathbb{N}$ αν $\forall z \in \partial D \exists\ V_z$ τρισδίαστατη περιοχή του z ώστε να ισχύουν οι ιδιότητες:*

   i. η τομή $\bar{D} \cap V_z$ να απεικονίζεται με μονοσήμαντη απεικόνιση στην μισή μοναδιαία μισή μπάλα

   $$\{x \in \mathbb{R}^2 |\ |x| < 1\ ,\ x_3 \geq 0\}$$

   όπου τόσο αυτή η απεικόνιση όσο και η αντίστροφή της είναι $k-$φορές συνεχώς παραγωγίσιμες, *ii. η τομή $\partial D \cap V_z$ να απεικονίζεται με μοσήμαντη απεικόνιση στον ανοιχτό μοναδιαίο δίσκο*

$$\{x \in \mathbb{R}^2 |\ |x| < 1\ ,\ x_3 = 0\}\ .$$

Αυτή η ιδιότητα πολλές φορές αντί να αναφερθεί ως, ***το χωρίο*** *D είναι* ***κλάσης*** *C^k αναφέρεται ως* ***το σύνορο*** *∂D είναι* ***κλάσης*** *C^k.*

3. *Με $C^k(D)$ συμβολίζουμε τον γραμμικό χώρο των πραγματικών ή μιγαδικών συναρτήσεων ορισμένων στο χωρίο D που είναι $k-$φορές συνεχώς παραγωγίσιμες.*

4. *Με $C^k(\bar{D})$ συμβολίζουμε τον υπόχωρο του $C^k(D)$ που περιέχει όλες τις συναρτήσεις του $C^k(D)$ που μαζί με τις παραγώγους τους μέχρι $k-$τάξης μπορούν να επεκταθούν από το χωρίο D στην κλειστότητα του $\bar{D}$.*

Θεώρημα 2.2. *Έστω ν το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα που κατευθύνεται προς το εξωτερικό του σύνορο ∂D. Αν το ∂D είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη επιφάνεια, τότε υπάρχει θετική σταθερά L ώστε*

$$|(\nu(y), x - y)| \leq L|x - y|^2 \quad , \quad \forall x, y \in \partial D \tag{2.1}$$

και

$$|\nu(x) - \nu(y)| \leq L|x - y| \quad , \quad \forall x, y \in \partial D\ . \tag{2.2}$$

Σημείωση:

Το προηγούμενο Θεώρημα έχει βασικό ρόλο στην διερεύνηση των σχέσεων συνέχειας (*regularity relations*) των δυναμικών απλού και διπλού στρώματος (*single and double layer potentials*). Με $(\cdot,\cdot)$ συμβολίσαμε το εσωτερικό γινόμενο όπως στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Παρατήρηση:

Όπως στην απόδειξη του τελευταίου αποτελέσματος στους χώρους *Sobolev* μπορούμε να πάρουμε παράλληλες επιφάνειες ∂D_h της ∂D μέσω της αναπαράστασης

$$x = z + h\nu(z), \quad z \in \partial D \tag{2.3}$$

, όπου η παράμετρος h συμβολίζει την απόσταση της ∂D_h από την γεννήτορα επιφάνεια ∂D.

Ασθενώς Ιδιάζοντες Ολοκληρωτικοί Τελεστές για επιφάνειες

Στο χώρο *Banach* $C(\partial D)$ των μιγαδικών συνεχών συναρτήσεων ορισμένων στην επιφάνεια ∂D εφοδιασμένη με τη νόρμα μέγιστο

$$\|\phi\|_\infty := \max_{x\in\partial D} |\phi(x)|$$

θεωρούμε τον ολοκληρωτικό τελεστή $A : C(\partial D) \to C(\partial D)$ που ορίζεται από

$$(A\phi)(x) := \int_{\partial D} K(x,y)\phi(y)ds(y) \quad , \quad x \in \partial D \tag{2.4}$$

, όπου K ο πυρήνας είναι είτε συνεχής είτε ασθενώς ιδιάζων όπως είδαμε στον Ορισμό(1.34) όπου τώρα $G = \partial D$ και με τις σχέσεις (1.4) και (1.5) ανάλογα αν μιλάμε για δύο ή περισσότερες διαστάσεις αντίστοιχα. Εδώ χρησιμοποιείται ο τύπος (1.4) στην αποδείξη του επόμενου θεωρήματος που είναι αντίστοιχο των Θεωρημάτων (1.33) και (1.36). Την απόδειξη δεν θα την δούμε αλλά θα υποδείξουμε δύο κρίσιμα σημεία της.

Θεώρημα 2.3. *Ο ολοκληρωτικός τελεστής A με συνεχή ή ασθενώς ιδιάζων πυρήνα είναι συμπαγής τελεστής στο $C(\partial D)$.*

***Απόδειξη**:*

- *Η βασική διαφορά σε σχέση με τις αποδείξεις των Θεωρημάτων (1.33) και (1.36) είναι η ανάγκη για πιστοποίηση της ύπαρξης του ολοκληρώματος (2.4) ως όριο ολοκληρωμάτων στην περίπτωση του ασθενούς ιδιάζοντος πυρήνα.*

- *Γράφοντας*
$$(\nu(x), \nu(y)) = 1 - (\nu(x), \nu(x) - \nu(y))$$
βλέπουμε από Θεώρημα(2.2)
$$\exists\ R \in (0,1]\ :\ (\nu(x), \nu(y)) \geq \frac{1}{2} \quad , \quad \forall x, y \in \partial D \tag{2.5}$$
, όπου $|x - y| \leq R$.

- *Στην αλλαγή μεταβλητής σε πολικές συντεγμένες (ρ,θ) πλέον το επιφανειακό στοιχείο ικανοποιεί την σχέση*
$$ds(y) = \frac{\rho d\rho d\theta}{(\nu(x), \nu(y))} \tag{2.6}$$

$\square$

Στο επόμενο θεώρημα θα επιβάλλουμε επιπλέον συνθήκες στον πυρήνα ώστε να εξασφαλίσουμε την συμπάγεια του ολοκληρωτικού τελεστή A στο χώρο *Hölder* $C^{0,\beta}(\partial D)$.

Θεώρημα 2.4. *Έστω G κλειστό χωρίο που περιέχει το ∂D στο εσωτερικό του. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση K ορίζεται και είναι συνεχής $\forall x \in G$, $\forall y \in \partial D$ με $x \neq y$ και ότι υπάρχουν θετική σταθερά $M > 0$ και $a \in (0, 2]$ ώστε*

$$|K(x,y)| \leq M|x-y|^{a-2} \quad , \quad \forall x \in G, \forall y \in \partial D,\ x \neq y\ . \tag{2.7}$$

Υποθέτουμε, επίσης, ότι $\exists\ m \in \mathbb{N}$ ώστε

$$|K(x_1,y) - K(x_2,y)| \leq M \sum_{j=1}^{m} |x_1 - y|^{a-2-j}|x_1 - x_2|^j \quad , \quad \forall x_1, x_2 \in G, \forall y \in \partial D \tag{2.8}$$

με $2|x_1 - x_2| \leq |x_1 - y|$. Τότε το γενικευμένο δυναμικό u ορίζεται ως

$$u(x) := \int_{\partial D} K(x,y)\phi(y)ds(y) \quad , \quad x \in G, \tag{2.9}$$

, όπου $\phi \in C(\partial D)$ η πυκνότητα του u, το u ανήκει στο χώρο Hölder $C^{0,\beta}(G)$

$$\begin{cases} \forall \beta \in (0, \alpha], & \alpha\nu\ 0 < \alpha < 1\ , \\ \forall \beta \in (0, 1), & \alpha\nu\ \alpha = 1\ , \\ \forall \beta \in (0, 1], & \alpha\nu\ 1 < \alpha < 2 \end{cases}$$

και ισχύει ότι

$$\|u\|_{\beta,G} \leq C_\beta \|\phi\|_{\infty,\partial D} \tag{2.10}$$

, για κάποια σταθερά C_β που εξαρτάται από το β.

Πόρισμα 2.4.1. *Έστω ότι πυρήνας K είναι ασθενώς ιδιάζων και ικανοποιεί τη συνθήκη (2.7) $\forall x_1, x_2 \in G$, $\forall y \in \partial D$ με $2|x_1 - x_2| \leq |x_1 - y|$. Τότε ο ολοκληρωτικός τελεστής $A : C^{0,\beta}(\partial D) \to C^{0,\beta}(\partial D)$ που ορίζεται από την σχέση (2.4) είναι συμπαγής για*

$$\begin{cases} \forall \beta \in (0, \alpha], & \alpha\nu\ 0 < \alpha < 1\ , \\ \forall \beta \in (0, 1), & \alpha\nu\ \alpha = 1\ , \\ \forall \beta \in (0, 1], & \alpha\nu\ 1 < \alpha < 2\ . \end{cases}$$

Πρόταση 2.5. *Αν ο πυρήνας K είναι ορισμένος και συνεχής $\forall x, y \in \partial D$ $, x \neq y$, και ικανοποιεί τις συνθήκες (2.7) και (2.8) στο σύνορο ∂D, τότε το δυναμικό u ορίζεται από σχέση (2.9) όπου $\phi \in C(\partial D)$ η πυκνότητα του u, το u ανήκει στο χώρο Hölder $C^{0,\beta}(\partial D)$ και ισχύει ότι*

$$\|u\|_{\beta,\partial D} \leq C_\beta \|\phi\|_{\infty,\partial D} \tag{2.11}$$

, για κάποια σταθερά C_β που εξαρτάται από το β.

Λήμμα 2.6. *Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση K ορίζεται και είναι συνεχής $\forall x \in D_{h_0}$ $\forall y \in \partial D$ με $x \neq y$ και ότι υπάρχει θετική σταθερά $M > 0$ ώστε*

$$|K(x,y)| \leq M|x-y|^{-2} \quad , \quad \forall x \in D_{h_0}, \forall y \in \partial D, \; x \neq y \; . \tag{2.12}$$

Υποθέτουμε, επίσης, ότι $\exists \; m \in \mathbb{N}$ ώστε

$$|K(x_1,y) - K(x-2,y)| \leq M \sum_{j=1}^{m} |x_1 - y|^{-2-j} |x_1 - x_2|^j \quad , \quad \forall x_1, x_2 \in D_{h_0}, \forall y \in \partial D \tag{2.13}$$

με $2|x_1 - x_2| \leq |x_1 - y|$,

$$\left| \int_{\partial D \setminus S_{z,r}} K(x,y) ds(y) \right| \leq M \quad , \quad \forall z \in \partial D, \; x = z + h\nu(z) \in D_{h_0}, \; 0 < r < R \; . \tag{2.14}$$

Τότε το δυναμικό u ορίζεται ως

$$u(x) := \int_{\partial D} K(x,y)[\phi(y) - \phi(z)] ds(y) \quad , \quad x \in D_{h_0}, \tag{2.15}$$

, όπου $\phi \in C^{0,\alpha}(\partial D)$, $0 < \alpha < 1$ η πυκνότητα του u, το u ανήκει στο χώρο Hölder $C^{0,\alpha}(D_{h_0})$ και ισχύει ότι

$$\|u\|_{\alpha, D_{h_0}} \leq C \|\phi\|_{\alpha, \partial D} \tag{2.16}$$

, για κάποια σταθερά C.

Πρόταση 2.7. *Για πυρήνα K που είναι ορισμένος μόνο στο σύνορο ∂D όπως στη Πρόταση(2.5) διατυπώνουμε μία μεταβολή του Λήμματος(2.6) η οποία είναι*

$$\|u\|_{\alpha, \partial D} \leq C \|\phi\|_{\alpha, \partial D} \tag{2.17}$$

, για κάποια σταθερά C.

Δυναμικά Απλού και Διπλού Στρώματος (Single and Double layer potentials)

Έστω μη αρνητικός αριθμός

$$k \geq 0 \; ,$$

τότε η συνάρτηση

$$\Phi(x,y) := \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \quad , \quad x, y \in \mathbb{R}^3 \; , \; x \neq y \tag{2.18}$$

είναι λύση της **Εξίσωσης Helmholtz**

$$\Delta \Phi + k^2 \Phi = 0 \tag{2.19}$$

ως προς x με σταθερό y. Επειδή η Φ είναι με μορφή πόλου ιδιάζουσα για $x = y$, η συνάρτηση Φ καλείται **θεμελειώδης λύση της εξίσωσης Helmholtz**.

Από εδώ και πέρα θεωρούμε ότι η Φ ορίζεται για $k > 0$ από την σχέση (2.18) ενώ για την ειδική θεωρητική περίπτωση $k = 0$ έχουμε την θεμελιώδη λύση Φ_0 που ορίζεται ως

$$\Phi_0(x,y) := \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x-y|} \quad , \quad x, y \in \mathbb{R}^3 \; , \; x \neq y \tag{2.20}$$

Ορισμός 2.8 (Δυναμικό Απλού Στρώματος). *Δοσμένης συνάρτησης $\phi \in C(\partial D)$ και με Φ θεμελειώδη λύση της εξίσωσης Helmholtz (2.19) η συνάρτηση*

$$u(x) := \int_{\partial D} \Phi(x,y)\phi(y)\, ds(y) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial D \tag{2.21}$$

καλείται ***ακουστικό δυναμικό απλού στρώματος*** **(acoustic single layer potential)**, *όπου ϕ είναι η πυκνότητα της u.*

Για $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial D$ η u είναι παραγωγίσιμη και αποτελεί λύση της εξίσωσης *Helmholtz* και μάλιστα αναλυτική όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο. Τώρα θα διερευνήσουμε την στις **ιδιότητες του επιφανειακού δυναμικού** για σημεία του συνόρου ∂D.

- Αφού,

  $$|\Phi(x,y)| \leq \frac{1}{4\pi|x-y|} \leq \frac{1}{4\pi}|x-y|^{1-2} \quad , \quad x \neq y \tag{2.22}$$

  άρα η σχέση (2.7) του Θεωρήματος(2.4) ικανοποιείται για $a = 1$ και άρα το δυναμικό απλού στρώματος είναι καλά ορισμένο $\forall x \in \partial D$.

- Χρησιμοποιώντας την σχέση

  $$\left| \frac{1}{|x_1 - y|} - \frac{1}{|x_2 - y|} \right| \leq \frac{|x_1 - x_2|}{|x_1 - y||x_2 - y|} \leq \frac{2|x_1 - x_2|}{|x_1 - y|^2}$$

  για

  $$2|x_1 - x_2| \leq |x_2 - y|$$

  και την

  $$\left| e^{ik|x_1 - y|} - e^{ik|x_2 - y|} \right| \leq k|x_1 - x_2|$$

  βλέπουμε ότι η σχέση (2.8) του Θεωρήματος (2.4) ικανοποιείται για $m = 1$.

Επομένως το Θεώρημα(2.4) μπορεί να εφαρμοστεί για $a = 1$ και $m = 1$ και έτσι αποκτάμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 2.9. *Το δυναμικό απλού στρώματος u με συνεχή πυκνότητα ϕ είναι ομοιόμορφα Hölder συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}^3$ και*

$$\|u\|_{a,\mathbb{R}^3} \leq C_a \|\phi\|_{\infty,\partial D} \quad , \quad \forall 0 < a < 1 \tag{2.23}$$

για κάποια σταθερά C_a που εξαρτάται από το σύνορο ∂D και από το a.

Δοσμένης συνάρτησης $\psi \in C(\partial D)$ και με Φ θεμελειώδη λύση της εξίσωσης Helmholtz (2.19) η συνάρτηση

$$v(x) := \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(y)} \psi(y)\, ds(y) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial D \tag{2.24}$$

καλείται ***ακουστικό δυναμικό διπλού στρώματος*** (**acoustic double layer potential**), *όπου* ψ *είναι η πυκνότητα της* v. *Με* ν *το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα που κατευθύνεται προς το εξωτερικό χωρίο* $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$. *Το δυναμικό διπλού-στρώματος* v *είναι λύση της εξίσωσης Helmholtz και μάλιστα αναλυτική στο* $\mathbb{R}^3 \setminus \partial D$. *Με τους δείκτες* $+$ *και* $-$ *συμβολίζουμε (αυτή θα είναι η ερμηνεία τους και για τα επόμενα θεωρήματα) ως τα όρια που παίρνουμε προσεγγίζοντας το σύνορο* ∂D *από το εσωτερικό του χωρίου* $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ *και από το εσωτερικό του χωρίου* D *αντίστοιχα και έχουμε*

$$v_+(x) = \lim_{\substack{y \to x \\ y \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}}} v(x) \quad , \quad v_-(x) = \lim_{\substack{y \to x \\ y \in D}} v(x) \quad , \quad x \in \partial D \ . \tag{2.25}$$

Θεώρημα 2.10. *Το δυναμικό διπλού στρώματος* v *με συνεχή πυκνότητα* ψ *μπορεί να επεκταθεί με συνεχή τρόπο (continuously) από το* $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ *στο* $\mathbb{R}^3 \setminus D$ *και από το* D *στο* $\bar{D}$ *με οριακές τιμές*

$$v_\pm(x) = \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(y)} \psi(y)\, ds(y) \pm \frac{1}{2}\psi(x) \quad , \quad x \in \partial D \tag{2.26}$$

, όπου το ολοκλήρωμα υπάρχει ως γενικευμένο ολοκλήρωμα (improper integral).

Πόρισμα 2.10.1. *Για το δυναμικό διπλού στρώματος* v *με συνεχή πυκνότητα* ψ, *έχουμε την σχέση διαπήδησης (jump relation)*

$$v_+ - v_- = \psi \quad , \quad \sigma\tau o \ \ \partial D \ . \tag{2.27}$$

Θεώρημα 2.11. *Οι ευθείς τιμές (direct values) του δυναμικού διπλού στρώματος* v *με συνεχή πυκνότητα* ψ

$$v(x) := \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(y)} \psi(y)\, ds(y) \quad , \quad x \in \partial D \tag{2.28}$$

είναι ομοιόμορφα Hölder στο σύνορο ∂D *με*

$$\|v\|_{a,\partial D} \leq C_a \|\psi\|_{\infty,\partial D} \quad , \quad \forall 0 < a < 1 \tag{2.29}$$

για κάποια σταθερά C_a *που εξαρτάται από το σύνορο* ∂D *και από το* a.

Θεώρημα 2.12. *Το δυναμικό διπλού στρώματος* v *με ομοιόμορφα Hölder συνεχή πυκνότητα* $\psi \in C^{0,a}(\partial D)$, $0 < a < 1$, *είναι ομοιόμορφα Hölder συνεχής στο* $\mathbb{R}^3 \setminus D$ *και στο* $\bar{D}$ *με*

$$\|v\|_{a,\mathbb{R}^3 \setminus D} \leq C_a \|\psi\|_{\infty,\partial D} \quad , \quad \|v\|_{a,\bar{D}} \leq C_a \|\psi\|_{\infty,\partial D} \tag{2.30}$$

για κάποια σταθερά C_a *που εξαρτάται από το σύνορο* ∂D *και από το* a.

Τώρα θα εξετάσουμε την παραγωγισιμότητα των επιφανειακών δυναμικών στο σύνορο.

Θεώρημα 2.13. *Οι πρώτες παράγωγοι του δυναμικού απλού στρώματος* u *με ομοιόμορφα Hölder συνεχή πυκνότητα* $\phi \in C^{0,a}(\partial D)$, $0 < a < 1$, *μπορεί να επεκταθεί με ομοιόμορφα Hölder συνεχή τρόπο από το* $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ *στο* $\mathbb{R}^3 \setminus D$ *και από το* D *στο* $\bar{D}$ *με οριακές τιμές*

$$grad\ u_\pm(x) = \int_{\partial D} grad_x \Phi(x,y) \phi(y)\, ds(y) \mp \frac{1}{2}\nu(x)\phi(x) \quad , \quad x \in \partial D \tag{2.31}$$

, το ολοκλήρωμα υπάρχει με την έννοια των αρχικών τιμών Cauchy (Cauchy principal value).

Επιπλέον έχουμε τις εκτιμήσεις

$$\|grad\ u\|_{a,\mathbb{R}^3\setminus D} \leq C_a \|\phi\|_{\infty,\partial D} \quad , \quad \|grad\ u\|_{a,\bar{D}} \leq C_a \|\phi\|_{\infty,\partial D} \tag{2.32}$$

για κάποια σταθερά C_a που εξαρτάται από το σύνορο ∂D και από το a.

Πόρισμα 2.13.1. *Για το δυναμικό απλού στρώματος u με ομοιόμορφα Hölder συνεχή πυκνότητα ϕ, έχουμε την σχέση διαπήδησης*

$$grad\ u_+ - grad\ u_- = \nu\phi \quad , \quad \sigma\tau o \;\; \partial D\ . \tag{2.33}$$

Θεώρημα 2.14. *Για το δυναμικό απλού στρώματος u με συνεχή πυκνότητα ϕ έχουμε οριακές τιμές*

$$\frac{\partial u_\pm}{\partial \nu}(x) = \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(x)} \phi(y)\, ds(y) \mp \frac{1}{2}\phi(x) \quad , \quad x \in \partial D \tag{2.34}$$

, όπου

$$\frac{\partial u_\pm}{\partial \nu}(x) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{\partial u(x \pm h\nu(x))}{\partial \nu(x)} \tag{2.35}$$

κατανοείται υπό την έννοια της ομοιόμορφης σύγκλισης και όπου το ολοκλήρωμα της σχέσης (2.34) υπάρχει ως γενικευμένο ολοκλήρωμα.

Πόρισμα 2.14.1. *Για το δυναμικό απλού στρώματος u με ομοιόμορφα Hölder συνεχή πυκνότητα ϕ, έχουμε την σχέση διαπήδησης*

$$\frac{\partial u_+}{\partial \nu}(x) - \frac{\partial u_-}{\partial \nu}(x) = -\psi \quad , \quad \sigma\tau o \;\; \partial D\ . \tag{2.36}$$

Θεώρημα 2.15. *Για το δυναμικό διπλού στρώματος v με συνεχή πυκνότητα ψ, έχουμε την σχέση διαπήδησης*

$$\frac{\partial v_+}{\partial \nu} = \frac{\partial v_-}{\partial \nu} \quad , \quad \sigma\tau o \;\; \partial D \tag{2.37}$$

,υπό την έννοια

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \left[\frac{\partial v(x + h\nu(x))}{\partial \nu(x)} - \frac{\partial v(x + h\nu(x))}{\partial \nu(x)} \right] = 0 \quad , \quad x \in \partial D \tag{2.38}$$

ομοιόμορφα για $x \in \partial D$.

Παρατήρηση:

- Για $k \neq 0$ η διαφορά των δυναμικών διπλού στρώματος v με πυρήνες Φ και Φ_0 αντίστοιχα με συνεχή πυκνότητα ψ είναι ομοιόμορφα *Hölder* συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}^3$ από Θεώρημα(2.4) αφού η συνάρτηση

$$\begin{aligned} K(x,y): &= \frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial\nu(y)} - \frac{\partial\Phi_0(x,y)}{\partial\nu(y)} \\ &= \frac{(\nu(y), x-y)}{4\pi|x-y|^3}[e^{ik|x-y|} - ik|x-y|e^{ik|x-y|} - 1] \end{aligned}$$

  ικανοποιεί τις συνθήκες (2.7) και (2.8) για $a = 2$ και $m = 1$ σε όλο το $\mathbb{R}^3$.

- Για $k \neq 0$ η διαφορά των πρώτων παραγώγων (*gradients*) ως προς x των δυναμικών διπλού στρώματος v με πυρήνες Φ και Φ_0 αντίστοιχα με συνεχή πυκνότητα ψ είναι ομοιόμορφα *Hölder* συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}^3$ από Θεώρημα(2.4) αφού η συνάρτηση

$$\begin{aligned} K(x,y): &= grad_x\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial\nu(y)} - grad_x\frac{\partial\Phi_0(x,y)}{\partial\nu(y)} \\ &= (x-y)\frac{(\nu(y), x-y)}{4\pi|x-y|^5}[(3 - 3ik|x-y| + k^2|x-y|^2)e^{ik|x-y|} - 3] \\ &\quad + \frac{\nu(y)}{4\pi|x-y|^3}[(1 - ik|x-y|)e^{ik|x-y|} - 1] \end{aligned}$$

  ικανοποιεί τις συνθήκες (2.7) και (2.8) για $a = 1$ και $m = 1$ σε όλο το $\mathbb{R}^3$.

Σημείωση:
1. Με *Grad* συμβολίζουμε το επιφανειακό *gradient*.
2. Με *Div* συμβολίζουμε την επιφανειακή απόκλιση *divergence*.
3. Με " $\times$ " συμβολίζουμε το εξωτερικό γινόμενο.
4. Με " $\cdot$ " και με $(\cdot,\cdot)$ συμβολίζουμε το εσωτερικό γινόμενο.

Θεώρημα 2.16. *Οι ευθείς τιμές (direct values) του δυναμικού διπλού στρώματος v που δίνεται από τη σχέση (2.28) με ομοιόμορφα Hölder συνεχή πυκνότητα $\psi \in C^{0,a}(\partial D)$, $0 < a < 1$, είναι ομοιόμορφα Hölder συνεχώς παραγωγίσιμη στο σύνορο ∂D με*

$$\|Grad\ v\|_{a,\partial D} \leq C_a \|\psi\|_{a,\partial D} \quad , \quad \forall 0 < a < 1 \tag{2.39}$$

για κάποια σταθερά C_a που εξαρτάται από το σύνορο ∂D και από το a.

Θεώρημα 2.17. *Οι πρώτες παράγωγοι του δυναμικού διπλού στρώματος v που δίνεται από τη σχέση (2.28) με ομοιόμορφα Hölder συνεχώς παραγωγίσιμη πυκνότητα $\psi \in C^{1,a}(\partial D)$, $0 <$*

$a < 1$, μπορεί να επεκταθεί με ομοιόμορφα Hölder συνεχή τρόπο από το $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ στο $\mathbb{R}^3 \setminus D$ και από το D στο $\bar{D}$ με οριακές τιμές

$$\begin{aligned} grad\ v_{\pm}(x) &= k^2 \int_{\partial D} \Phi(x,y)\nu(y)\psi(y)\, ds(y) \\ &\quad - \int_{\partial D} grad_x \Phi(x,y) \times (Grad\ \psi(y) \times \nu(y))\, ds(y) \\ &\quad \pm \frac{1}{2} Grad\ \psi(x) \quad , \quad x \in \partial D \end{aligned}$$

, το δεύτερο ολοκλήρωμα υπάρχει με την έννοια των αρχικών τιμών Cauchy (Cauchy principal value).

Επιπλέον έχουμε τις εκτιμήσεις

$$\|grad\ v\|_{a,\mathbb{R}^3 \setminus D} \leq C_a \|\psi\|_{1,a,\partial D} \quad , \quad \|grad\ v\|_{a,\bar{D}} \leq C_a \|\psi\|_{1,a,\partial D} \tag{2.40}$$

για κάποια σταθερά C_a που εξαρτάται από το σύνορο ∂D και από το a.

Τώρα θα ασχοληθούμε με **διανυσματικά δυναμικά**.

Ορισμός 2.18. *Δοσμένου διανυσματικού πεδίου $\alpha \in C(\partial D)$ ορίζουμε το **διανυσματικό δυναμικό** A ως*

$$A(x) := \int_{\partial D} \Phi(x,y)\alpha(y)\, ds(y) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial D \ . \tag{2.41}$$

Θεώρημα 2.19. *Οι πρώτες παράγωγοι του διανυσματικού δυναμικού A με ομοιόμορφα Hölder συνεχώς παραγωγίσιμη πυκνότητα $\alpha \in C^{1,a}(\partial D)$, $0 < a < 1$, μπορεί να επεκταθούν με ομοιόμορφα Hölder συνεχή τρόπο από το $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ στο $\mathbb{R}^3 \setminus D$ και από το D στο $\bar{D}$ με οριακές τιμές*

$$curl\ A_{\pm}(x) = k^2 \int_{\partial D} curl_x \{\Phi(x,y)\alpha(y)\}\, ds(y) \mp \frac{1}{2}\nu(x) \times \alpha(x) \quad , \quad x \in \partial D \ , \tag{2.42}$$

$$div\ A_{\pm}(x) = k^2 \int_{\partial D} div_x \{\Phi(x,y)\alpha(y)\}\, ds(y) \mp \frac{1}{2}(\nu(x), \alpha(x)) \quad , \quad x \in \partial D \tag{2.43}$$

, όπου τα ολοκλήρωματα υπάρχουν με την έννοια των αρχικών τιμών Cauchy (Cauchy principal values).

Επιπλέον έχουμε τις εκτιμήσεις

$$\|curl\ A\|_{a,\mathbb{R}^3 \setminus D} \leq C_a \|alpha\|_{a,\partial D} \quad , \quad \|curl\ A\|_{a,\bar{D}} \leq C_a \|\alpha\|_{a,\partial D} \ , \tag{2.44}$$

$$\|div\ A\|_{a,\mathbb{R}^3 \setminus D} \leq C_a \|alpha\|_{a,\partial D} \quad , \quad \|div\ A\|_{a,\bar{D}} \leq C_a \|\alpha\|_{a,\partial D} \ , \tag{2.45}$$

για κάποια σταθερά C_a που εξαρτάται από το σύνορο ∂D και από το a.

Πόρισμα 2.19.1. *Για το διανυσματικό δυναμικό A με ομοιόμορφα Hölder συνεχή πυκνότητα α, έχουμε τις σχέσεις διαπήδησης*

$$curl\ A_+ - curl\ A_- = -\nu \times \alpha \quad , \quad \sigma\tau o \ \ \partial D \ , \tag{2.46}$$

$$div\ A_+ - div\ A_- = -\nu \times \alpha \quad , \quad \sigma\tau o \ \ \partial D \ . \tag{2.47}$$

Θεώρημα 2.20. *Για το διανυσματικό δυναμικό A με συνεχή εφαπτομενική πυκνότητα α, έχουμε τις οριακές τιμές*

$$\nu(x) \times curl\ A_{\pm}(x) = \int_{\partial D} \nu(x) \times curl_x\{\Phi(x,y)\alpha(y)\}\, ds(y) \pm \frac{1}{2}\alpha(x) \quad , \quad x \in \partial D \tag{2.48}$$

, όπου

$$\nu(x) \times curl\ A_{\pm}(x) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} [\nu(x) \times curl\ A(x \pm h\nu(x))] \quad , \quad x \in \partial D, \tag{2.49}$$

κατανοείται υπό την έννοια της ομοιόμορφης σύγκλισης και όπου το ολοκλήρωμα της σχέσης (2.48) υπάρχει ως γενικευμένο ολοκλήρωμα.

Πόρισμα 2.20.1. *Για το διανυσματικό δυναμικό A με συνεχή εφαπτομενική πυκνότητα α, έχουμε τη σχέση διαπήδησης*

$$\nu \times curl\ A_+ - \nu \times curl\ A_- = \alpha \quad , \quad \sigma\tau o\ \ \partial D\ , \tag{2.50}$$

Θεώρημα 2.21 (Θεώρημα Gauss– Θεώρημα Απόκλισης). *Έστω α και Div α συνεχείς στο σύνορο ∂D και έστω φ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση στο σύνορο ∂D. Τότε*

$$\int_{\partial D} \phi Div\ \alpha\, ds\ +\ \int_{\partial D} (Grad\ \phi, \alpha)\, ds = 0 \tag{2.51}$$

και συγκεκριμένα

$$\int_{\partial D} Div\ \alpha\, ds = 0\ . \tag{2.52}$$

Θεώρημα 2.22. *Η απόκλιση του διανυσματικού δυναμικού A με συνεχή εφαπτομενική πυκνότητα α έχει συνεχή επιφανειακή απόκλιση Div α που μπορεί να εκφραστεί υπό την μορφή ενός δυναμικού απλού στρώματος ως*

$$div\ A(x) = \int_{\partial D} \Phi(x,y) Div\ \alpha(y) ds(y) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial D\ . \tag{2.53}$$

2.2 Ευθύ Πρόβλημα Σκέδασης για Ομογενή Υλικά

Εισαγωγή και διατύπωση του προβλήματος

Υποθέτουμε την διάδοση ακουστικού κύματος μικρού πλάτους σε ομογενές ισοτροπικό μέσο στον $\mathbb{R}^3$ το οποίο μέσω της ρευστομηχανικής το αντιμετωπίζουμε ως υγρό χωρίς ιξώδες. Έστω $v = v(x,t)$ η ταχύτητα του πεδίου και έστω με $p = p(x,t)$, $\rho = \rho(x,t)$ και $S = S(x,t)$ συμβολίζουμε την πίεση, την πυκνότητα και την ειδική εντροπία, αντίστοιχα, του υγρού.

Η κίνηση, επομένως διέπεται από

- την **εξίσωση Euler**

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot grad)v + \frac{1}{\rho} grad\ p = 0\ ,$$

- με **εξίσωση συνέχειας**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho v) = 0 \ ,$$

- με **καταστατική εξίσωση**

$$p = f(\rho, S)$$

- και με **αδιαβατική υπόθεση**

$$\frac{\partial S}{\partial t} + v \cdot grad\ S = 0$$

, όπου f είναι μία συνάρτηση που εξαρτάται από την φύση του υγρού.

Υποθέτουμε τώρα ότι v, p, ρ και S είναι μικρές διαταραχές της στατικής κατάστασης $v_0 = 0$ p_0 =σταθερή ρ_0 =σταθερή και S_0 =σταθερή και με αυτόν τον τρόπο έχουμε τις γραμμικοποιημένες εξισώσεις

- την **εξίσωση Euler**

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} grad\ p = 0 \ ,$$

- με **εξίσωση συνέχειας**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 div(v) = 0 \ ,$$

- και με **καταστατική εξίσωση**

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \rho}(\rho_0, S_0) \frac{\partial \rho}{\partial t} \ .$$

Έτσι έχουμε την **εξίσωση κύματος**

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \Delta p$$

όπου η **ταχύτητα του ήχου** c ορίζεται ως

$$c^2 = \frac{\partial f}{\partial \rho}(\rho_0, S_0) \ .$$

Από την γραμμικοποιημένη εξίσωση *Euler* παρατηρούμε ότι υπάρχει το δυναμικό της ταχύτητας $U = U(x,t)$ τετοιο ώστε

$$v = \frac{1}{\rho_0} grad\ U$$

και

$$p = -\frac{\partial U}{\partial t} \ .$$

Η $U = U(x,t)$ ικανοποιεί, επιπλέον, την εξίσωση κύματος

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \Delta U \ .$$

Για χρονικά-αρμονικά ακουστικά κύματα ($time - harmonic\ acoustic\ waves$) της μορφής

$$U(x,t) = Re\left[u(x)e^{-i\omega t}\right]$$

με συχνότητα $\omega > 0$, συμπεραίνουμε ότι το μιγαδικό εξαρτώμενο από τον χώρο κομμάτι της u ικανοποιεί την **εξίσωση Helmholtz**

$$\Delta u + k^2 u = 0 \tag{2.54}$$

, όπου ο κυματικός αριθμός k δίνεται από την θετική σταθερά $k = \omega/c$. Η οποία είναι η **ομογενής εξίσωση Helmholtz για ομογενές μέσο**.

Θα ασχοληθούμε με σκέδαση χρονικά-αρμονικων ακουστικων κυμάτων μέσω εξωτερικών προβλημάτων συνοριακών τιμών της εξίσωση $Helmholtz$ αρχικά σε ομογενή μέσα και στο επόμενο κεφάλαιο με σκέδαση σε μη ομομεγή μέσα υποθέτοντας ότι μέσα σε μία αρκετά μεγάλη σφαίρα μπορούν να θεωρηθούν ομογενή.

Χωρίζουμε τα εμπόδια που προκαλούν την σκέδαση σε δύο κατηγορίες ανάλογα με την διαπερατότητά τους:

1. **Μη διαπερατά αντικείμενα** (**Impenetrable objects**).

2. **Διαπερατά αντικείμενα** (**Penetrable objects**).

Χωρίζουμε τα εμπόδια που προκαλούν την σκέδαση σε δύο κατηγορίες ανάλογα με τις συνοριακές τους συνθήκες δηλαδή την εξίσωση που επιβάλλεται στο κύμα στο σύνορο του εμποδίου:

1. **Ηχητικά - μαλακά**(**Sound – soft**) - **Πρόβλημα Dirichlet**

   Καθορίζοντας τις τιμές της u στο σύνορο αυτό φυσικά ισοδυναμεί με καθορισμό της πίεσης του ακουστικού κύματος. Συγκεκριμένα, δοσμένου εισερχόμενου κύματος ($incoming\ wave$) u^i δοσμένου αντικειμένου D το συνολικό κύμα $u = u^i + u^s$, όπου u^s το σκεδαζόμενο κύμα ($scattered\ wave$) πρεπει να ικανοποιεί την εξίσωση στο εξωτερικό $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ του D η συνολική πίεση πρέπει να εξαφανίζεται στο σύνορο δηλαδη $u = 0\ ,\ \partial D$.

2. **Ηχητικά - σκληρά**(**Sound – hard**) - **Πρόβλημα Neumann**

   Καθορίζοντας τις τιμές της κάθετης παραγώγου της u στο σύνορο αυτό φυσικά ισοδυναμεί με καθορισμό της κάθετης συνιστώσας της ταχύτητας του ακουστικού κύματος. Συγκεκριμένα,η συνολική κάθετη παράγωγος του κύματος $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ όπου ν είναι το κάθετο διανυσμα που κατευθύνεται στο εξωτερικό της επιφάνειας δηλαδή η συνολική κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας πρέπει να εξαφανίζεται στο σύνορο δηλαδη $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0\ ,\ \partial D$.

Η σκέδαση από διαπέρατο αντικείμενο D με σταθερή πυκνότητα ρ_D και ταχύτητα ήχου c_D διαφέρουν από την πυκνότητα ρ την ταχύτητα c στο εξωτερικό μέσο $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ οδηγεί σε πρόβλημα μετάδοσης (*transmission problem*). Όπου το συνολικό κύμα είναι υπέρθεση $u = u^i + u^s$ του εισερχόμενου κύματος u^i και του σκεδαζόμενου κύματος u^s στον $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ ικανοποιεί την εξίσωση *Helmholtz* με κυματικό αριθμό k δίνεται από την θετική σταθερά $k = \omega/c$, στο μεταδιδόμενο κύμα v στο D ο κυματικός αριθμός δίνεται από την θετική σταθερά $k_D = \omega/c_D \neq k$. Η συνέχεια της πίεσης και της κάθετης ταχύτητας πάνω στην επιφάνεια οδηγεί στις συνθήκες μετάδοσης (*transmission conditions*)

$$u = v \quad , \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{1}{\rho_D}\frac{\partial u}{\partial \nu} \quad \sigma\tau o \quad \partial D \ .$$

Έχουμε ότι η

$$\frac{e^{ik|x|}}{|x|}$$

είναι σφαιρικά συμμετρική λύση της εξίσωσης *Helmholtz*, ικανοποιεί την συνθήκη

$$Re\left(\frac{e^{ik|x|}}{|x|}\right) = \frac{cos(k|x| - \omega t)}{|x|}$$

και την συνθήκη ακτινοβολίας *Sommerfeld* (*Sommerfeld radiation condition*).

$$\lim_{r \to \infty} r\left(\frac{\partial u^s}{\partial r} - iku^s\right) = 0 \quad , \quad r = |x| \tag{2.55}$$

και αντιστοιχεί σε εξερχόμενο κύμα.

Διατύπωση προβλήματος

$$\begin{aligned}
\Delta u + k^2 u &= 0 \quad , \mathbb{R}^3 \setminus \partial D \quad \text{Εξίσωση } Helmholtz \\
u &= u^i + u^s \\
\lim_{r \to \infty}\left(r\frac{\partial u^s}{\partial r} - iku^s\right) &= 0 \quad , \quad r = |x| \quad \text{Συνθήκη Ακτινοβολίας } Sommerfeld
\end{aligned}$$

όπου u^i το εισερχόμενο κύμα (*incoming wave*) και u^s το σκεδαζόμενο κύμα (*scattered wave*) με συνοριακές συνθήκες είτε,

$$u = 0 \quad , \quad \partial D \quad (Dirichlet) \quad (Sound - soft)$$

είτε,

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad , \quad \partial D \quad (Neumann) \quad (Sound - hard)$$

Θεώρημα 2.23 (Πρώτο Θεώρημα Green). *Έστω D φραγμένο χωρίο κλάσης C^1 και με ν συμβολίζουμε το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο ∂D που κατευθύνεται προς το εξωτερικό του D. Τότε για $u \in C^1(\bar{D})$ και $v \in C^2(\bar{D})$ έχουμε,*

$$\int_D (u\Delta v + grad\ u \cdot grad\ v)\, dx = \int_{\partial D} u\frac{\partial v}{\partial \nu}\, ds \ . \tag{2.56}$$

Θεώρημα 2.24 (Δεύτερο Θεώρημα Green). *Έστω D φραγμένο χωρίο κλάσης C^1 και με ν συμβολίζουμε το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο ∂D που κατευθύνεται προς το εξωτερικό του D. Τότε για $u, v \in C^2(\bar{D})$ έχουμε,*

$$\int_D (u\Delta v - v\Delta u)\, dx = \int_{\partial D} \left(u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu} \right) ds \ . \tag{2.57}$$

Θεώρημα 2.25. *Έστω D φραγμένο χωρίο κλάσης C^2 και με ν συμβολίζουμε το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο ∂D που κατευθύνεται προς το εξωτερικό του D. Υποθέτουμε $u \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$ είναι συνάρτηση που έχει κάθετη παράγωγο στο σύνορο υπό την έννοια του ορίου*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \lim_{h \to 0^+} \nu(x) \cdot grad\ u(x - h\nu(x)) \quad , \quad x \in \partial D \tag{2.58}$$

υπάρχει ομοιόμορφα στο σύνορο ∂D. Τότε έχουμε τον τύπο του Green

$$u(x) = \int_{\partial D} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\Phi(x,y) - v\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(y)} \right) ds(y) - \int_D (\Delta u(y) + k^2 u(y))\Phi(x,y)\, dy \ , \ x \in D \tag{2.59}$$

, όπου το ολοκλήρωμα του όγκου υπάρχει ως γενικευμένο ολοκλήρωμα. Συγκεκριμένα αν u είναι λύση της εξίσωσης Helmholtz

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad , \quad \sigma\tau o \ \ D \ , \tag{2.60}$$

*τότε έχουμε την **αναπαράσταση του** **Helmholtz***

$$u(x) = \int_{\partial D} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\Phi(x,y) - u(y)\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(y)} \right) ds(y) \quad , \quad x \in D \ . \tag{2.61}$$

Θεώρημα 2.26 (Θεώρημα Αναλυτικότητας). *Αν u είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη λύση της εξίσωσης Helmholtz σε ένα χωρίο D, τότε η u είναι αναλυτική.*

Παρατηρήσεις:

1. Από το Θεώρημα Αναλυτικότητας (2.26) συνεπάγεται ότι αν η λύση u της εξίσωσης *Helmholtz* μηδενίζεται σε ανοιχτό υποσύνολο του χωρίου ορισμού της τότε μηδενίζεται παντού.
2. Από εδώ και πέρα αν λέμε ότι η u είναι λύση της εξίσωσης *Helmholtz* εννοούμε ότι η u είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη και άρα αναλυτική στο εσωτερικό του χωρίου ορισμού της.

Θεώρημα 2.27 (Θεώρημα Holmgren). *Έστω D φραγμένο χωρίο κλάσης C^2 και με ν συμβολίζουμε το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο ∂D που κατευθύνεται προς το εξωτερικό του D. Υποθέτουμε $u \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ είναι λύση της εξίσωσης Helmholtz στο D τέτοια ώστε*

$$u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad , \quad \sigma\tau o\ \Gamma \tag{2.62}$$

για κάποιο ανοιχτό υποσύνολο $\Gamma \subset \partial D$. Τότε η u μηδενίζεται στο D.

Απόδειξη:

Χρησιμοποιούμε την αναπαράταση του Helmholtz (2.61) και την (2.62) έχουμε:

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\partial D \setminus \Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\Phi(x,y) - v\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(y)} \right) ds(y) + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\Phi(x,y) - v\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(y)} \right) ds(y) \Rightarrow \\ u(x) &= \int_{\partial D \setminus \Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\Phi(x,y) - v\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(y)} \right) ds(y), \;\; x \in (\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}) \cup \Gamma \; . \end{aligned}$$

Τότε από δεύτερο θεώρημα Green αν εφαρμόσουμε την σχέση (2.57) στην u και την $\Phi(x,\cdot)$, έχουμε $u = 0$ $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$. Έστω $G \subset \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$: $\Gamma \cap \partial D \neq \emptyset$. Άρα, η u λύνει την εξίσωση Helmholtz στο $\mathbb{R}^3 \setminus \partial D$ $\Rightarrow$ $u = 0$ στο D, αφού D και G συνδέονται μέσα από το Γ. Αυτό προκύπτει από την αναλυτικότητα της $u = 0$ στο D μέσω διαδοχικών επικαλυπτόμενων σφαιρών στις οποίες η u είναι αναλυτική και άρα μεταφέρει τον μηδεισμό στο εσωτερικό της σφαίρας.

□

Ορισμός 2.28 (**Ακτινοβόλος Λύση**). *Μία λύση της εξίσωσης Helmholtz της οποίας το χωρίο ορισμού περιέχει το εξωτερικό μίας σφαίρας είναι* ***ακτινοβόλος*** *(radiating) αν ικανοποιεί την συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld*

$$\lim_{r \to \infty} r \left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) = 0 \;\; , \;\; r = |x| \tag{2.63}$$

και το όριο υπάρχει ομοιόμορφα για όλες τις κατευθύνσεις $x/|x|$.

Θεώρημα 2.29. *Έστω D φραγμένο χωρίο ανοιχτό συμπλήρωμα ενός μη-φραγμένου χωρίου κλάσης C^2 και με ν συμβολίζουμε το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο ∂D που κατευθύνεται προς το εξωτερικό του D. Υποθέτουμε $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ είναι ακτινοβόλος λύση της εξίσωσης Helmholtz*

$$\Delta u + k^2 u = 0 \;\; , \text{στο} \;\; \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} \tag{2.64}$$

συνάρτηση που έχει κάθετη παράγωγο στο σύνορο υπό την έννοια του ορίου

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \lim_{h \to 0^+} \nu(x) \cdot grad\; u(x + h\nu(x)) \;\; , \;\; x \in \partial D \; , \tag{2.65}$$

υπάρχει ομοιόμορφα στο σύνορο ∂D. Τότε έχουμε τον τύπο του Green

$$u(x) = \int_{\partial D} \left(u(y)\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\Phi(x,y) \right) ds(y) \; , \; x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} \tag{2.66}$$

Πόρισμα 2.29.1. *Μία ακτινοβόλος λύση της εξίσωσης Helmholtz είναι πεπερασμένη κατά Sommerfeld δηλαδή ικανοποιεί την συνθήκη*

$$u(x) = O\left(\frac{1}{|x|} \right) \;\; , \; |x| \to \infty \tag{2.67}$$

ομοιόμορφα προς όλες τις κατευθύνσεις $x/|x|$.

Ορισμός 2.30. *Μια λύση της Helmholtz ορισμένη στον* $\mathbb{R}^3$ *καλείται* ***ακέραια λύση*** *(entire solution) και αν επιπλέον είναι ακτινοβόλος έχει την ιδιότητα να μηδενίζεται στο σύνορο.*

Θεώρημα 2.31. *Μία ακτινοβόλος λύση* u *της Helmholtz έχει ασυμπτωτική συμπεριφορά ενός σφαιρικού εξερχόμενου κύματος*

$$u(x) = \frac{e^{ik|x|}}{|x|}\left[u_\infty(\hat{x}) + O\left(\frac{1}{|x|}\right)\right] \quad , \ |x| \to \infty \tag{2.68}$$

ομοιόμορφα για όλες τις κατευθύνσεις $x/|x|$ *και η συνάρτηση* u_∞ *ορίζεται στην μοναδιαία σφαίρα* $\mathbb{S}^2$ *και καλείται* ***μακρινό πεδίο*** *(far field pattern) της* u*. Κάτω από τις υποθέσεις του Θεωρήματος (2.29) έχουμε,*

$$u_\infty(\hat{x}) = \frac{1}{4\pi}\int_{\partial D}\left[u(y)\frac{\partial e^{-ik\hat{x}\cdot y}}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u}{\partial \nu}(y)e^{-ik\hat{x}\cdot y}\right] ds(y) \ , \ \hat{x} \in \mathbb{S}^2 \tag{2.69}$$

Απόδειξη:
Ισχύει ότι

$$|x-y| = \sqrt{|x|^2 - 2x\cdot y + |y|^2} = |x| - \hat{x}\cdot y + O\left(\frac{1}{|x|}\right)$$

προκύπτει ότι

$$\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} = \frac{e^{ik|x|}}{|x|}\left[e^{-ik\hat{x}\cdot y} + O\left(\frac{1}{|x|}\right)\right] \tag{2.70}$$

και

$$\frac{\partial}{\partial \nu(y)}\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} = \frac{e^{ik|x|}}{|x|}\left[\frac{\partial e^{-ik\hat{x}\cdot y}}{\partial \nu(y)} + O\left(\frac{1}{|x|}\right)\right] \tag{2.71}$$

ομοιόμορφα $\forall y \in \partial D$*. Από την σχέση (2.18) που δίνει την συνάρτηση* Φ *δηλαδή την θεμελιώδη λύση της εξίσωσης Helmholtz και τις σχέσεις (2.70) και (2.71) προκύπτει μέσω του τύπου του Green (2.66) ότι*

$$\begin{aligned}
u(x) &= \int_{\partial D}\left(u(y)\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\Phi(x,y)\right) ds(y) \\
&= \frac{1}{4\pi}\frac{e^{ik|x|}}{|x|}\int_{\partial D}\left(u(y)\frac{\partial e^{-ik\hat{x}\cdot y}}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u}{\partial \nu}(y)e^{-ik\hat{x}\cdot y}\right) ds(y) + \frac{e^{ik|x|}}{|x|}O\left(\frac{1}{|x|}\right) \\
&= \frac{e^{ik|x|}}{|x|}\left[u_\infty(\hat{x}) + O\left(\frac{1}{|x|}\right)\right] \\
\Leftrightarrow \ u(x) &= \frac{e^{ik|x|}}{|x|}\left[u_\infty(\hat{x}) + O\left(\frac{1}{|x|}\right)\right], \ \ |x| \to \infty \\
\text{, όπου } \ u_\infty(\hat{x}) &= \frac{1}{4\pi}\int_{\partial D}\left(u(y)\frac{\partial e^{-ik\hat{x}\cdot y}}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u}{\partial \nu}(y)e^{-ik\hat{x}\cdot y}\right) ds(y)\ .
\end{aligned}$$

□

Λήμμα 2.32 (Λήμμα Rellich). *Έστω ένα φραγμένο σύνολο D, το οποίο αποτελεί ανοιχτό συμπλήρωμα ενός μη φραγμένου χωρίου και έστω $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D})$ λύση της εξίσωσης Helmholtz που ικανοποιεί την σχέση*

$$\lim_{r \to \infty} \int_{|x|=r} |u(x)|^2 \, ds = 0 \, . \tag{2.72}$$

Τότε $u = 0$ στο $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$.

Το Λήμμα *Rellich*(2.32) εξασφαλίζει την μοναδικότητα των λύσεων των εξωτερικών συνοριακών προβλημάτων μέσω των ακόλουθων δύο θεωρημάτων.

Θεώρημα 2.33. *Έστω φραγμένο σύνολο D, το οποίο αποτελεί ανοιχτό συμπλήρωμα ενός μη φραγμένου χωρίου και έστω ότι το σύνορο ∂D είναι κλάσης C^2 όπου το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα ν κατευθύνεται προς το εξωτερικό του D. Έστω, επίσης, $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ είναι ακτινοβόλος λύση της εξίσωσης Helmholtz με κυματικό αριθμό $k > 0$ η οποία έχει κάθετη παράγωγο υπό την έννοια της ομοιόμορφης σύγκλισης και για την οποία ισχύει*

$$Im \int_{\partial D} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} \, ds \geq 0 \, .$$

Τότε $u = 0$ στο $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$.

Το Λήμμα *Rellich*(2.32) θεμελιώνει την ένα-προς-ένα αντιστοιχία μεταξύ των ακτινοβόλων κυμάτων και του ασυμπτωτικού τους πεδίου.

Θεώρημα 2.34. *Έστω φραγμένο σύνολο D είναι ανοιχτό συμπλήρωμα ενός μη φραγμένου χωρίου και έστω $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D})$ είναι ακτινοβόλος λύση της εξίσωσης Helmholtz για την οποία το μακρινό πεδίο μηδενίζεται δηλαδή $u_\infty = 0$.*
Τότε $u = 0$ στο $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$.

- Θυμίζουμε τα **δυναμικά απλού και διπλού στρώματος** που ορίζονται ως:

$$u(x) := \int_{\partial D} \Phi(x, y) \phi(y) ds(y), \;\; x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial D \;\; \textbf{Δυναμικό Απλού Στρώματος} \tag{2.73}$$

$$v(x) := \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \psi(y) ds(y), \;\; x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial D \;\; \textbf{Δυναμικό Διπλού Στρώματος} \tag{2.74}$$

, όπου φ και ψ συνεχείς πυκνότητες των u και v αντίστοιχα και Φ η θεμελιώδης λύση της εξίσωσης *Helmholtz*. Λόγω του προβλήματος στο οποίο εντάσσονται λέγονται ακουστικά δυναμικά απλού και διπλού στρώματος. Είναι λύσεις της εξίσωσης *Helmholtz* στο D και στο $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ και ικανοποιούν την συνθήκη ακτινοβολίας *Sommerfeld*. Από τους τύπους του *Green* (2.61) και (2.66) προκύπτει ότι κάθε λύση της εξίσωσης *Helmholtz* μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός ενός δυναμικού απλού και ενός διπλού στρώματος.

Για συνεχείς πυκνότητες η συμπεριφορά τους στο σύνορο περιγράφεται από τις σχέσεις διαπήδησης. Επιπλέον αν αντί για συνεχείς πυκνότητες είχαμε ομοιόμορφα *Hölder* συνεχείς πυκνότητες, η μελέτη σε χώρους *Hölder* θα χάριζε επιπλέον ομαλότητα στο πρόβλημα. Με $\|\cdot\|_\infty = \|\cdot\|_{\infty,G}$ συμβολίζουμε την *supremum* νόρμα για $G \subset \mathbb{R}^3$. Παραθέτουμε τα δύο ακόλουθα θεωρήματα που έχουν συμπτύξει τις έννοιες που έχουμε δει σε προηγούμενη ενότητα αλλά πλέον ενταγμένες στο πλαίσιο αυτού του προβλήματος.

Θεώρημα 2.35. *Έστω σύνορο ∂D κλάσης C^2 και έστω φ και ψ συνεχείς. Τότε το δυναμικό απλού στρώματος u με πυκνότητα φ είναι συνεχής στον $\mathbb{R}^3$ και*

$$\|u\|_{\infty,\mathbb{R}^3} \leq C\|\phi\|_{\infty,\partial D}$$

για σταθερά C που εξαρτάται από το σύνορο ∂D. Στο σύνορο έχουμε

$$u(x) := \int_{\partial D} \Phi(x,y)\phi(y)ds(y), \quad x \in \partial D, \tag{2.75}$$

$$\frac{\partial u_\pm}{\partial \nu}(x) = \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(x)}\phi(y)ds(y) \mp \frac{1}{2}\phi(x) \quad , \quad x \in \partial D \tag{2.76}$$

, όπου

$$\frac{\partial u_\pm}{\partial \nu}(x) := \lim_{h\to 0^+} \nu(x)\cdot grad\ u(x \pm h\nu(x)) \quad , \quad x \in \partial D \ , \tag{2.77}$$

υπό την έννοια της ομοιόμορφης σύγκλισης στο σύνορο ∂D και όπου τα ολοκληρώματα υπάρχουν ως γενικευμένα ολοκληρώματα. Το δυναμικό διπλού στρώματος v με πυκνότητα ψ μπορεί να επεκταθεί με συνεχή τρόπο από το D στο $\bar{D}$ και από το $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ στο $\mathbb{R}^3 \setminus D$ με οριακές τιμές

$$v_\pm(x) = \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(y)}\psi(y)ds(y) \pm \frac{1}{2}\psi(x) \quad , \quad x \in \partial D \tag{2.78}$$

, όπου

$$v_\pm(x) := \lim_{h\to 0^+} v(x \pm h\nu(x)) \quad , \quad x \in \partial D \tag{2.79}$$

και όπου το ολοκλήρωμα υπάρχει ως γενικευμένο ολοκλήρωμα. Επιπλέον

$$\|v\|_{\infty,\bar{D}} \leq C\|\psi\|_{\infty,\partial D} \ , \ \|v\|_{\infty,\mathbb{R}^3\setminus D} \leq C\|\psi\|_{\infty,\partial D} \tag{2.80}$$

, για κάποια σταθερά C που εξαρτάται από το σύνορο ∂D και

$$\lim_{h\to 0^+}\left[\frac{\partial v}{\partial \nu}(x + h\nu(x)) - \frac{\partial v}{\partial \nu}(x - h\nu(x))\right] = 0, \quad x \in \partial D, \tag{2.81}$$

ομοιόμορφα στο σύνορο ∂D.

Θυμόμαστε ότι οι νόρμες των χώρων *Hölder* για $G \subset \mathbb{R}^3$ στον $C^{0,\alpha}(G)$ δίνεται από τη σχέση (1.14)και στον $C^{1,\alpha}(G)$ δίνεται από τη σχέση (1.16). Επίσης ισχύει

$$\|\phi\|_{1,\alpha} := \|\phi\|_{1,\alpha,G} := \|\phi\|_\infty + \|grad\ \phi\|_{0,\alpha} \tag{2.82}$$

Επίσης ισχύουν τα θεωρήματα ενσφήνωσης (*imbedding theorems*) (1.51) και (1.52) και οι ιδιότητες ενσφήνωσης (*imbedding properties*) (1.49) και (1.50).

Θεώρημα 2.36. *Έστω σύνορο ∂D κλάσης C^2 και $0 < \alpha < 1$. Τότε το δυναμικό απλού στρώματος u με πυκνότητα $\phi \in C(\partial D)$ είναι ομοιόμορφα Hölder συνεχής στον $\mathbb{R}^3$ και*

$$\|u\|_{\alpha,\mathbb{R}^3} \leq C_\alpha \|\phi\|_{\infty,\partial D}$$

για σταθερά C_α που εξαρτάται από το σύνορο ∂D και το α.

Οι πρώτες παράγωγοι του δυναμικού απλού στρώματος u με πυκνότητα $\phi \in C^{0,\alpha}(\partial D)$ μπορούν να επεκταθούν με ομοιόμορφο Hölder συνεχή τρόπο από το D στο $\bar{D}$ και από το $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ στο $\mathbb{R}^3 \setminus D$ με συνοριακές τιμές

$$grad\ u_\pm(x) = \int_{\partial D} \psi(y) grad_x \Phi(x,y) ds(y) \mp \frac{1}{2}\phi(x)\nu(x) \quad , \quad x \in \partial D \tag{2.83}$$

, όπου

$$grad\ u_\pm(x) := \lim_{h \to 0^+} grad\ u(x \pm h\nu(x)) \quad , \quad x \in \partial D \tag{2.84}$$

και όπου το ολοκλήρωμα υπάρχει ως γενικευμένο ολοκλήρωμα. Επιπλέον,

$$\|grad\ u\|_{\alpha,\bar{D}} \leq C_\alpha \|\phi\|_{\alpha,\partial D} \ , \ \|grad\ u\|_{\alpha,\mathbb{R}^3\setminus D} \leq C_\alpha \|\phi\|_{\alpha,\partial D} \tag{2.85}$$

, για σταθερά C_α που εξαρτάται από το σύνορο ∂D και το α.

Για δυναμικό διπλού στρώματος v με πυκνότητα $\psi \in C^{0,\alpha}(\partial D)$ μπορεί να επεκταθεί με ομοιόμορφο Hölder συνεχή τρόπο από το D στο $\bar{D}$ και από το $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ στο $\mathbb{R}^3 \setminus D$ ώστε

$$\|v\|_{\alpha,\bar{D}} \leq C_\alpha \|\psi\|_{\alpha,\partial D} \ , \ \|v\|_{\alpha,\mathbb{R}^3\setminus D} \leq C_\alpha \|\psi\|_{\alpha,\partial D} \tag{2.86}$$

Οι πρώτες παράγωγοι του δυναμικού διπλού στρώματος v με πυκνότητα $\psi \in C^{1,\alpha}(\partial D)$ μπορούν να επεκταθούν με ομοιόμορφο Hölder συνεχή τρόπο από το D στο $\bar{D}$ και από το $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ στο $\mathbb{R}^3 \setminus D$ ώστε

$$\|grad\ v\|_{\alpha,\bar{D}} \leq C_\alpha \|\psi\|_{1,\alpha,\partial D} \ , \ \|grad\ v\|_{\alpha,\mathbb{R}^3\setminus D} \leq C_\alpha \|\psi\|_{1,\alpha,\partial D} \tag{2.87}$$

, για σταθερά C_α που εξαρτάται από το σύνορο ∂D και το α.

Τελεστές Δυναμικού Απλού και Διπλού Στρώματος

Οι τελεστές δυναμικού απλού και διπλού στρώματος (*single and double layer potential operators*) S και K αντίστοιχα ορίζονται ως

$$(S\phi)(x) := 2\int_{\partial D} \Phi(x,y)\phi(y)\, ds(y), \quad x \in \partial D\ , \tag{2.88}$$

$$(K\phi)(x) := 2\int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(y)}\phi(y)\, ds(y), \quad x \in \partial D\ . \tag{2.89}$$

Οι τελεστές των κάθετών τους παραγώγων είναι οι K′ και T αντίστοιχα, δηλαδή K′ ο τελεστής κάθετης παραγώγου του S και T ο τελεστής κάθετης παραγώγου του K και ορίζονται ως

$$(K'\phi)(x) := 2\int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(x)}\phi(y)\, ds(y), \quad x \in \partial D\ , \tag{2.90}$$

$$(T\phi)(x) := 2\frac{\partial}{\partial \nu(x)}\int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(y)}\phi(y)\, ds(y), \quad x \in \partial D\ . \tag{2.91}$$

Θεώρημα 2.37. *Έστω σύνορο ∂D κλάσης C^2. Τότε οι τελεστές*

$$S, K, K' : C(\partial D) \to C^{0,a}(\partial D)\ ,$$

$$S, K : C^{0,a}(\partial D) \to C^{1,a}(\partial D)\ ,$$

και

$$T : C^{1,a}(\partial D) \to C^{0,a}(\partial D)$$

είναι φραγμένοι τελεστές.

Έστω η διγραμμική μορφή

$$<\phi,\psi> = \int_{\partial D} \phi(x)\psi(x)\, ds(x), \quad \forall \phi,\psi \in C(\partial D)$$

τότε ως προς αυτήν ο K και ο K′ είναι συζυγείς και ο S είναι αυτοσυζυγής, δηλαδή ισχύουν

$$\begin{aligned} <K\phi,\psi> &= <\phi, K'\psi>\ , \\ <S\phi,\psi> &= <\phi, S\psi>\ . \end{aligned}$$

Έστω v και w δυναμικά διπλού στρώματος με πυκνότητες $\phi,\psi \in C^{1,\alpha}(\partial D)$ αντίστοιχα. Από τις σχέσεις διαπήδησης του Θεωρήματος (2.35), το Δεύτερο Θεώρημα *Green* (2.24) και την συνθήκη ακτινοβολίας του *Sommerfeld* έχουμε ότι

$$\int_{\partial D} (T\phi)\psi\, ds = 2\int_{\partial D} \frac{\partial v}{\partial \nu}(w_+ - w_-)\, ds = 2\int_{\partial D} (v_+ - v_-)\frac{\partial w}{\partial \nu}\, ds = \int_{\partial D} \phi T\psi\, ds$$

$$\Leftrightarrow <T\phi,\psi> = <\phi, T\psi>$$

Άρα ο T είναι αυτοσυζυγής.

Έστω u δυναμικό απλού στρώματος με πυκνότητα $\phi \in C(\partial D)$ και v δυναμικό διπλού στρώματος με πυκνότητα $\psi \in C^{1,\alpha}(\partial D)$ τότε

$$\int_{\partial D}(S\phi)(T\psi)\,ds = 4\int_{\partial D} u\frac{\partial v}{\partial \nu}\,ds = 4\int_{\partial D}(v_-)\frac{\partial u_-}{\partial \nu}\,ds = \int_{\partial D}[(K'+I)\phi][(K-I)\psi]\,ds$$

επομένως

$$< \phi, ST\psi >= \int_{\partial D}\phi(ST\psi)\,ds = \int_{\partial D}\phi[(K^2-I)\psi]\,ds =< \phi,(K^2-I)\psi >$$

$$\Leftrightarrow < \phi, ST\psi >=< \phi,(K^2-I)\psi > \Leftrightarrow < \phi,[ST-(K^2-I)]\psi >= 0, \ \ \forall \phi \in C(\partial D), \forall \psi \in C^{1,\alpha}(\partial D)$$

και άρα

$$ST = K^2 - I \ . \tag{2.92}$$

Όμοια προκύπτει η συζυγής της σχέση

$$< TS\phi, \psi >= \int_{\partial D}(TS\phi)\psi\,ds = \int_{\partial D}[(K'^2-I)\phi]\psi\,ds =< (K'^2-I)\phi, \psi >$$

$$\Leftrightarrow < TS\phi, \psi >=< (K'^2-I)\phi, \psi > \Leftrightarrow < [TS-(K'^2-I)]\phi, \psi >= 0, \ \ \forall \phi \in C(\partial D), \forall \psi \in C^{1,\alpha}(\partial D)$$

και άρα

$$TS = K'^2 - I \ . \tag{2.93}$$

Θεώρημα 2.38 (Θεώρημα Lax). *Έστω X και Y χώροι με νόρμα που και οι δύο είναι εφοδιασμένοι με ένα βαθμωτό γινόμενο $(\cdot,\cdot)$ και υποθέτουμε ότι υπάρχει θετική σταθερά C ώστε*

$$|(\phi,\psi)| \leq C\|\phi\|\|\psi\|, \quad \forall \phi,\psi \in X \ . \tag{2.94}$$

Έστω $U \subset X$ υπόχωρος του X και έστω $A : U \to Y$ και $B : Y \to X$ φραγμένοι γραμμικοί τελεστές που ικανοποιούν την σχέση

$$(A\phi,\psi) = (\phi, B\psi), \quad \forall \phi \in U, \forall \psi \in Y \ . \tag{2.95}$$

Τότε ο $A : U \to Y$ είναι φραγμένος ως προς τις νόρμες που επάγονται από τα βαθμωτά γινόμενα.

Απόδειξη:

Συμβολίζουμε τις νόρμες από το βαθμωτό γινόμενο ως $\|\cdot\|_s$. Έστω ο φραγμένος τελεστής $M : U \to X$ που δίνεται από την σχέση $M := BA$ με $\|M\| \leq \|B\|\|A\|$. Τότε, από την σχέση (2.95) προκύπτει ότι ο M είναι αυτοσυζυγής δηλαδή $(M\phi,\psi) = (\phi, M\psi)$, $\forall \phi,\psi \in U$. Επομένως, χρησιμοποιώντας την ανισότητα $Cauchy - Schwarz$ και με $\|\phi\|_s \leq 1$ έχουμε,

$$\|M^n\phi\|_s^2 = (M^n\phi, M^n\phi) = (\phi, M^{2n}\phi) \leq \|M^2n\phi\|_s \ , \ \forall \phi \in U, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Με επαγωγή προκύπτει ότι

$$\|M\phi\|_s \leq \|M^{2^n}\phi\|_s^{2^{-n}} \ .$$

Από την σχέση (2.94) συνεπάγεται ότι $\|\phi\|_s \leq \sqrt{c}\|\phi\|, \ \ \forall\phi \in X$. *Άρα,*

$$\|M\phi\|_s \leq \left[\sqrt{c}\|M^{2^n}\phi\|\right]^{2^{-n}} \leq \left[\sqrt{c}\|M\|^{2^n}\|\phi\|\right]^{2^{-n}} = [\sqrt{c}\|\phi\|]^{2^{-n}}\|M\| \ .$$

Με $n \to \infty$ *και* $\|\phi\|_s \leq 1$ *καταλήγουμε στην σχέση*

$$\|M\phi\|_s \leq \|M\|, \quad \forall\phi \in U \ .$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα $Cauchy - Schwarz$ *και με* $\|\phi\|_s \leq 1$ *έχουμε,*

$$\|A\phi\|_s^2 = (A\phi, A\phi) = (\phi, M\phi) \leq \|M\phi\|_s \leq \|M\|$$

και άρα προκύπτει το ζητούμενο.

□

Χρησιμοποιούμε το Θεώρημα $Lax(2.38)$ για να δείξουμε τις ιδιότητες των επιφανειακών δυναμικών για χώρους $Sobolev$. Έχουμε δει μία συνοπτική ανάλυση για τους χώρους $Sobolev$ $H^p(\partial D)$, $p \in \mathbb{R}$ και $H^p(D)$, $p \in \mathbb{R}$ στο πρώτο κεφάλαιο. Σημειώνουμε ότι:

- $H^1_{loc}(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D})$ είναι ο χώρος όλων συναρτήσεων $u : \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} \to \mathbb{C}$ ώστε $u \in H^1((\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}) \cap B)$ για όλες τις ανοιχτές σφαίρες που περιέχουν το $\bar{D}$.

και για $0 \leq p < \infty$

- $H^p_{loc}(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D})$ είναι ο χώρος όλων συναρτήσεων $u : \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} \to \mathbb{C}$ ώστε $u \in H^p((\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}) \cap B)$ για όλες τις ανοιχτές σφαίρες που περιέχουν το $\bar{D}$.

, αντίστοιχα για τους δυϊκούς τους δηλαδή για $0 \geq p > -\infty$.

Θεώρημα 2.39. *Έστω σύνορο* ∂D *κλάσης* C^2 *τότε ο τελεστής* $S : L^2(\partial D) \to H^1(\partial D)$ *είναι φραγμένος. Έστω επιπλέον ότι το σύνορο* ∂D *ανήκει στον* $C^{2,\alpha}$ *τότε οι τελεστές* $K, K' : L^2(\partial D) \to H^1(\partial D)$ *και* $T : H^1(\partial D) \to L^2(\partial D)$ *είναι φραγμένοι.*

Πόρισμα 2.39.1. *Έστω σύνορο* ∂D *κλάσης* C^2 *τότε ο τελεστής* $S : H^{-1/2}(\partial D) \to H^{1/2}(\partial D)$ *είναι φραγμένος. Έστω επιπλέον ότι το σύνορο* ∂D *ανήκει στον* $C^{2,\alpha}$ *τότε οι τελεστές* $K, K' : H^{-1/2}(\partial D) \to H^{1/2}(\partial D)$ *και* $T : H^{1/2}(\partial D) \to H^{-1/2}(\partial D)$ *είναι φραγμένοι.*

Πόρισμα 2.39.2. *Έστω σύνορο* ∂D *κλάσης* $C^{2,\alpha}$. *Τότε το δυναμικό απλού στρώματος* u *ορίζει φραγμένο γραμμικό τελεστή από τον* $H^{-1/2}(\partial D)$ *στον* $H^1(D)$ *και στον* $H^1_{loc}(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D})$, *δηλαδή οι τελεστές* $u : H^{-1/2}(\partial D) \to H^1(D)$ *και* $u : H^1(D) \to H^1_{loc}(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D})$ *είναι γραμμικοί και φραγμένοι. Επίσης, το δυναμικό διπλού στρώματος* v *ορίζει φραγμένο γραμμικό τελεστή από τον* $H^{1/2}(\partial D)$ *στον* $H^1(D)$ *και στον* $H^1_{loc}(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D})$, *δηλαδή οι τελεστές* $v : H^{1/2}(\partial D) \to H^1(D)$ *και* $v : H^1(D) \to H^1_{loc}(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D})$ *είναι γραμμικοί και φραγμένοι.*

Από την παραπάνω ανάλυση προκύπτει ότι οι σχέσεις διαπήδησης του ίχνους στο σύνορο και της κάθετη παραγώγου του ίχνους των δυναμικών απλού και διπλού στρώματος συνεχίζουν να ισχύουν για χώρους $Sobolev$.

Οι σχέσεις διαπήδησης του Θεωρήματος (2.35) μπορούν επίσης να επεκταθούν χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Lax(2.38) οι συνεχείς πυκνότητες σε πυκνότητες του χώρου L^2. Στο πλαίσιο εργασίας στον L^2, οι σχέσεις διαπήδησης (2.75), (2.77), (2.78) και (2.81) μπορούν να αντικατασταθούν από τις ακόλουθες για u δυναμικό απλού στρώματος και v δυναμικό διπλού στρώματος με πυκνότητες $\phi, \psi \in L^2(\partial D)$ αντίστοιχα οπότε έχουμε,

$$\lim_{h\to 0^+} \int_{\partial D} |2u(x \pm h\nu(x)) - (S\phi)(x)|^2 \, ds(x) = 0, \tag{2.96}$$

$$\lim_{h\to 0^+} \int_{\partial D} \left| 2\frac{\partial u}{\partial \nu}(x \pm h\nu(x)) - (K'\phi)(x) \pm \phi(x) \right|^2 ds(x) = 0, \tag{2.97}$$

$$\lim_{h\to 0^+} \int_{\partial D} |2v(x \pm h\nu(x)) - (K\phi)(x) \mp \phi(x)|^2 \, ds(x) = 0, \tag{2.98}$$

$$\lim_{h\to 0^+} \int_{\partial D} \left| \frac{\partial v}{\partial \nu}(x + h\nu(x)) - \frac{\partial v}{\partial \nu}(x - h\nu(x)) \right|^2 ds(x) = 0\ . \tag{2.99}$$

, επίσης για την σχέση (2.83) του Θεωρήματος(2.36) έχουμε

$$\lim_{h\to 0^+} \int_{\partial D} \left| grad\ u(\cdot \pm h\nu) - \int_{\partial D} grad_x \Phi(\cdot, y)\phi(y)\, ds(y) \pm \frac{1}{2}\phi\nu \right|^2 ds(x) = 0\ . \tag{2.100}$$

Εξωτερικό Πρόβλημα Dirichlet

Δοσμένης συνεχούς συνάρτησης f στο σύνορο ∂D, να βρεθεί μία ακτινοβόλος λύση $u : C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ της εξίσωσης $Helmholtz$

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad \sigma\tau o\ \ \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$$

η οποία ικανοποιεί την συνοριακή συνθήκη

$$u = f, \quad \sigma\tau o\ \partial D$$

Θεώρημα 2.40. *Το εξωτερικό πρόβλημα Dirichlet έχει το πολύ μία λύση.*

Λήμμα 2.41. *Έστω $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ λύση της εξίσωσης Helmholtz στον $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ που ικανοποιεί την ομογενή συνοριακή συνθήκη $u = 0$ στο ∂D. Ορίζουμε τα σύνολα $D_R := y \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} : |y| < R$ και $S_R := y \in \mathbb{R} : |y| = R$ για αρκετά μεγάλη ακτίνα R. Τότε $grad\ u \in L^2(D_R)$ και*

$$\int_{D_R} |grad\ u|^2 \, dx - k^2 \int_{D_R} |u|^2 \, dx = \int_{S_R} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} \, ds\ . \tag{2.101}$$

Για να εξετάσουμε την ύπαρξη λύσης του εξωτερικού προβλήματος $Dirichlet$ ψάχνουμε λύση που να είναι συνδιασμός ενός δυναμικού απλού και ενός διπλού στρώματος της μορφής

$$u(x) = \int_{\partial D} \left[\frac{\Phi(x,y)}{\partial \nu(y)} - i\eta \Phi(x,y) \right] \phi(y)\, ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial D\ , \tag{2.102}$$

, με πυκνότητα $\phi \in C(\partial D)$ και $\eta \neq 0$ παράμετρο σύζευξης που είναι πραγματικός αριθμός. Τότε από τις σχέσεις άλματος του Θεωρήματος(2.35) βλέπουμε ότι το δυναμικό u δίνεται από την σχέση (2.102) στον $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ λύνει το εξωτερικό πρόβλημα *Dirichlet* και η πυκνότητά του ϕ λύνει την ολοκληρωτική εξίσωση

$$(I + K - i\eta S)\phi = 2f \tag{2.103}$$

Από τα Θεωρήματα (1.51) και (2.37) οι τελεστές $S, K : C(\partial D) \to C(\partial D)$ είναι συμπαγείς. Η ύπαρξη λύσης της εξίσωσης (2.103) θεμελιώνεται από θεωρία $Riesz - Fredholm$. Έστω φ συνεχής λύση της ομογενούς (2.103). Τότε το δυναμικό u που δίνεται από την σχέση (2.102) ικανοποιεί συνοριακή συνθήκη $u_+ = 0, \;\; \sigma\tau o \;\; \partial D$ όπου από μοναδικότητα του εξωτερικού προβλήματος *Dirichlet* προκύπτει ότι $u = 0, \;\; \sigma\tau o \;\; \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$. Από τις σχέσεις άλματος του Θεωρήματος (2.35) έχουμε,

$$-u_- = \phi, \; -\frac{\partial u_-}{\partial \nu} = i\eta\phi \;\; \sigma\tau o \;\; \partial D \; .$$

Από Πρώτο Θεώρημα *Green* (2.24) προκύπτει ότι

$$i\eta \int_{\partial D} |\phi|^2 \, ds = \int_{\partial D} \bar{u}_- \frac{\partial u_-}{\partial \nu} \, ds = \int_D [|grad \; u|^2 - k^2|u|^2] \, dx \; . \tag{2.104}$$

Παίρνοντας μόνο το φανταστικό μέρος της προηγούμενης εξίσωσης καταλήγουμε ότι $\phi = 0$. Η μοναδικότητα της ολοκληρωτικής εξίσωσης (2.103) ισοδυναμεί με το γεγονός ότι ο τελεστής $(I+K-i\eta S)^{-1} : C(\partial D) \to C(\partial D)$ από θεωρία $Riesz-Fredholm$ ο τελεστής $I+K-i\eta S$ είναι μονοσήμαντος συνεπώς αντιστρέφεται και ο αντίστροφος $(I + K - i\eta S)^{-1} : C(\partial D) \to C(\partial D)$ είναι φραγμένος. Επομένως η μη ομογενής εξίσωση (2.103) έχει λύση και η λύση εξαρτάται συνεχώς από την f ως προς την *supremum* νόρμα.

Από την αναπαράσταση (2.102), τις σχέσεις συνέχειας που δίνει το Θεώρημα(2.35) και τη συνεχή εξάρτηση της πυκνότητας ϕ από τα συνοριακά δεδομένα f προκύπτει ότι το εξωτερικό πρόβλημα *Dirichlet* είναι καλά ορισμένο. Δηλαδή μικρές μεταβολές της f ως προς τη *supremum* νόρμα προκαλούν μικρές μεταβολές στην u ως προς τη *supremum* νόρμα στον $\mathbb{R}^3 \setminus D$ και μικρές μεταβολές όλων της των παραγώγων ως προς τη *supremum* νόρμα σε κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$.

Θεώρημα 2.42. *Το εξωτερικό πρόβλημα Dirichlet έχει μοναδική λύση και η λύση αυτή εξαρτάται με συνεχή τρόπο από τα συνοριακά δεδομένα ως προς την ομοιόμορφη σύγκλιση της λύσης στον* $\mathbb{R}^3 \setminus D$ *και όλων των παραγώγων της σε κλειστά υποσύνολα του* $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$.

Για $\eta = 0$ η λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης (2.103) χάνει την μοναδικότητά της αν ο κυματικός αριθμός k είναι όπως καλείται μη-κανονικός κυματικός αριθμός ή αλλιώς εσωτερική αντίσταση, δηλαδή αν υπάρχουν μη τετριμμένες λύσεις u της εξίσωσης *Helmholtz* στο εσωτερικό του χωρίου D που να ικανοποιούν την *Neumann* ομογενή συνοριακή συνθήκη $\partial u/\partial \nu$ στο ∂D.

Για να μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο αναπαράστασης του *Green* για την λύση του εξωτερικού προβλήματος *Dirichlet*, πρέπει να παραγωγίσουμε με κάθετη παράγωγο. Υποθέτοντας ότι τα δοσμένα συνοριακά δεδομένα είναι απλώς συνεχή σημαίνει εν γένει ότι η κάθετη παράγωγός τους δεν θα υπάρχει. Επομένως χρειάζεται να επιβάλλουμε επιπλέον ομαλότητα στα συνοριακά δεδομένα.

Από τα Θεωρήματα (1.51) και (2.37) οι τελεστές $S, K : C^{1,a}(\partial D) \to C^{1,a}(\partial D)$ είναι συμπαγείς. Από θεωρία $Riesz - Fredholm$ ο τελεστής $I + K - i\eta S$ είναι μονοσήμαντος συνεπώς αντιστρέφεται και ο αντίστροφός του $(I+K-i\eta S)^{-1} : C^{1,a}(\partial D) \to C^{1,a}(\partial D)$ είναι φραγμένος. Αν $f \in C^{1,a}(\partial D) \Rightarrow \phi \in C^{1,a}(\partial D)$ και εξαρτάται με συνεχή τρόπο από την f ως προς την νόρμα $\|\cdot\|_{1,\alpha}$. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις συνέχειας του Θεωρήματος (2.36) για τις παραγώγους των δυναμικών απλού και διπλού στρώματος, από την (2.102) προκύπτει ότι $u \in C^{1,a}(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ και εξαρτάται με συνεχή τρόπο από την f τότε η $\frac{\partial u}{\partial \nu} \in C^{0,a}(\partial D)$ και δίνεται από την σχέση

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \mathcal{A} f$$

, όπου $\mathcal{A} := (i\eta(I - K') + T)(I + K - i\eta S)^{-1} : C^{1,a}(\partial D) \to C^{0,a}(\partial D)$ καλείται **Dirichlet σε Neumann απεικόνιση** μετατρέπει συνοριακά δεδομένα $Dirichlet$ σε $Neumann$ και είναι φραγμένη. Για να δείξουμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι μονοσήμαντη και έχει φραγμένο αντίστροφο αρκεί να δείξουμε ότι η $(i\eta(I - K') + T) : C^{1,a}(\partial D) \to C^{0,a}(\partial D)$ είναι μονοσήμαντη και έχει φραγμένο αντίστροφο. Όμως επειδή ο T δεν είναι συμπαγείς δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε την θεωρία $Riesz - Fredholm$ και έτσι πρέπει να εξετάσουμε και το **συνοριακό πρόβλημα Neumann**.

Εξωτερικό Πρόβλημα Neumann

Δοσμένης συνεχούς συνάρτησης g στο σύνορο ∂D, να βρεθεί μία ακτινοβόλος λύση $u : C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ της εξίσωσης $Helmholtz$

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad \sigma\tau o \;\; \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$$

που ικανοποιεί την συνοριακή συνθήκη

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = g, \quad \sigma\tau o \; \partial D$$

, υπό την έννοια της ομοιόμορφης σύγκλισης στο σύνορο ∂D.

Η μοναδικότητα του προβλήματος $Neumann$ έπεται από το Θεώρημα(2.33). Ψάχνουμε λύση που να είναι συνδιασμός ενός δυνμικού απλού και ενός διπλού στρώματος. Ξεπερνάμε το πρόβλημα της υπάρξης της κάθετης παραγώγου του δυναμικού διπλού στρώματος στην περίπτωση που θεωρούμε απλά συνεχή πυκνότητα συμπεριλαμβάνοντας έναν τελεστή ομαλοποίησης και τελικά η λύση που ψάχνουμε είναι της μορφής

$$u(x) = \int_{\partial D} \left[\Phi(x,y)\phi(y) + i\eta \frac{\Phi(x,y)}{\partial \nu(y)} (S_0^2 \phi)(y) \right] ds(y) \; \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} \tag{2.105}$$

, με πυκνότητα $\phi \in C(\partial D)$ και $\eta \neq 0$ παράμετρο σύζευξης που είναι πραγματικός αριθμός. Με S_0 συμβολίζουμε τον τελεστή δυναμικού απλού-στρώματος (2.88) για την θεωρητική περίπτωση όπου $k = 0$. Τότε ο S_0^2 τελεστής που δρα πάνω στην φ είναι ο τελεστής ομαλοποίησης καθώς από Θεώρημα(2.37) η πυκνότητα $S_0^2\phi$ του δυναμικού διπλού στρώματος ανήκει στον $C^{1,a}(\partial D)$. Από το Θεώρημα(2.35) βλέπουμε ότι η (2.105) λύνει το εξωτερικό πρόβλημα *Neumann* και η πυκνότητά της είναι λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης

$$(I - K' - i\eta T S_0^2)\phi = -2g \tag{2.106}$$

Από τα Θεωρήματα (1.51) και (2.37) οι τελεστές $K' + i\eta T S_0^2 : C(\partial D) \to C(\partial D)$ και $K' + i\eta T S_0^2 : C^{0,a}(\partial D) \to C^{0,a}(\partial D)$ είναι συμπαγείς και άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε τη θεωρία $Riesz - Fredholm$.

Έστω ϕ συνεχής λύση της ομογενούς (2.106). Τότε το δυναμικό u που δίνεται από την σχέση (2.105) ικανοποιεί την ομογενή συνοριακή συνθήκη *Neumann* $\partial u_+/\partial\nu = 0$ στο ∂D και από την μοναδικότητα του εξωτερικού προβλήματος *Neumann* προκύπτει ότι $u = 0$ στο $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$. Από Θεώρημα(2.35) έχουμε ότι,

$$-u_- = i\eta S_0^2\phi, \ -\frac{\partial u_-}{\partial \nu} = -\phi \ \ \sigma\tau o \ \ \partial D \ .$$

Αλλάζοντας την σειρά ολοκλήρωσης και χρησιμοποιώντας το Πρώτο Θεώρημα *Green*(2.23) καταλήγουμε ότι

$$\begin{aligned} i\eta \int_{\partial D} |S_0\phi|^2 \, ds &= i\eta \int_{\partial D} \phi S_0^2 \bar{\phi} \, ds \\ &= \int_{\partial D} \bar{u}_- \frac{\partial u_-}{\partial \nu} \, ds \\ &= \int_D [|grad\ u|^2 - k^2 |u|^2] \, dx \\ \Rightarrow \quad S_0\phi &= 0, \ \text{στο}\ \partial D. \end{aligned}$$

Παρατήρηση:

Το δυναμικό απλού στρώματος w με πυκνότητα ϕ και κυματικό αριθμό $k = 0$ είναι συνεχές στον $\mathbb{R}^3$, αρμονικό στο D και στο $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$, $w = 0$, στο ∂D και $w_\infty = 0$. Επομένως από την Αρχή Μεγίστου-Ελαχίστου για αρμονικές συναρτήσεις έχουμε $w = 0$, στο $\mathbb{R}^3$ και από Θεώρημα(2.35) $\Rightarrow \quad \phi = 0$.

Επομένως, έχουμε θεμελιώσει, από θεωρία $Riesz - Fredholm$, ότι οι τελεστές $I - K' - i\eta T S_0^2 : C(\partial D) \to C(\partial D)$ και $I - K' - i\eta T S_0^2 : C^{0,a}(\partial D) \to C^{0,a}(\partial D)$ είναι μονοσήμαντοι και συνεπώς οι αντίστροφοι $(I - K' - i\eta T S_0^2)^{-1} : C(\partial D) \to C(\partial D)$ και $(I - K' - i\eta T S_0^2)^{-1} : C^{0,a}(\partial D) \to C^{0,a}(\partial D)$ αντίστοιχα υπάρχουν και είναι φραγμένοι. Έτσι, καταλήγουμε ότι υπάρχει λύση στο εξωτερικό πρόβλημα *Neumann* για συνεχή συνοριακά δεδομένα g και η λύση εξαρτάται με συνεχή τρόπο από τα συνοριακά δεδομένα.

Θεώρημα 2.43. *Το εξωτερικό πρόβλημα Neumann έχει μοναδική λύση και η λύση αυτή εξαρτάται με συνεχή τρόπο από τα συνοριακά δεδομένα ως προς την ομοιόμορφη σύγκλιση της λύσης στο* $\mathbb{R}^3 \setminus D$ *και όλων της των παραγώγων σε κλειστά υποσύνολα του* $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$.

Αν το $g \in C^{0,a}(\partial D)$ η λύση της (2.106) $\phi \in C^{0,a}(\partial D)$ και εξαρτάται με συνεχή τρόπο από το g ως προς την νόρμα του $C^{0,a}(\partial D)$. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις συνέχειας του Θεωρήματος(2.36) για τα δυναμικά απλού και διπλού στρώματος, από την (2.105) έχουμε ότι $u \in C^{1,a}(\mathbb{R}^3 \setminus D)$. Συγκεκριμένα, η u στο σύνορο ∂D δίνεται από την σχέση

$$u = \mathcal{B}g$$

, όπου

$$\mathcal{B} := (i\eta(I+K)S_0^2 + S)(I - K' - i\eta T S_0^2)^{-1} : C^{0,a}(\partial D) \to C^{1,a}(\partial D)$$

καλείται **Neumann σε Dirichlet απεικόνιση** και μετατρέπει συνοριακά δεδομένα *Neumann* σε *Dirichlet* και είναι φραγμένη. Η $\mathcal{B}$ είναι η αντίστροφη απεικόνιση της $\mathcal{A}$.

Θεώρημα 2.44. *Η Dirichlet σε Neumann απεικόνιση $\mathcal{A}$ που απεικονίζει τα συνοριακά δεδομένα μίας ακτινοβόλου λύσης της εξίσωσης Helmholtz στις κάθετές τους παραγώγους είναι μονοσήμαντη και φραγμένη απεικόνιση $\mathcal{A} : C^{1,a}(\partial D) \to C^{0,a}(\partial D)$ με φραγμένη αντίστροφη. Η λύση του εξωτερικού προβλήματος Dirichlet $u \in C^{1,a}(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ αν οι συνοριακές τιμές ανήκουν στον $C^{1,a}(\partial D)$ και η απεικόνιση των συνοριακών δεδομένων στη λύση του προβλήματος είναι συνεχής απεικόνιση από τον $C^{1,a}(\partial D)$ στον $C^{1,a}(\mathbb{R}^3 \setminus D)$.*

Αντί να ψάχνουμε κλασικές λύσεις είτε σε χώρους σύνεχών είτε ομοιόμορφα *Hölder* συνεχών συναρτήσεων των προβλημάτων συνοριακών τιμών για την εξίσωση *Helmholtz* μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μια ασθενή θεώρηση του προβλήματος είτε υπό την L^2 έννοια είτε σε ένα πλαίσιο χώρων *Sobolev*. Αυτό οδηγεί σε αποτελέσματα για την ύπαρξη λύσης κάτω από ασθενέσθερες υποθέσεις κανονικότητας για τα δοσμένα συνοριακά δεδομένα και την συνεχή τους εξάρτηση από τις διαφορετικές νόρμες.

Σε ένα πλαίσιο χώρων *Sobolev*, η λύση του εξωτερικού προβλήματος *Dirichlet* πρέπει να ανήκει στον ενεργειακό χώρο $H^1_{loc}(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D})$ με συνοριακή συνθήκη $u = f$ στο ∂D. Η δοσμένη f πρέπει να ανήκει στον $H^{1/2}(\partial D)$ και υπάρχει υπό την έννοια ενός τελεστή ίχνους. Αυτό απλοποιεί τα θέματα της μοναδικότητας αφού η (2.101) ισχύει για συναρτήσεις στον $H^1_{loc}(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D})$. Η ανάλυση για την ύπαρξη μέσω του συνδιασμού ενός δυναμικού απλού και ενός διπλού στρώματος (2.102) με πυκνότητα ϕ που να ανήκει στον $H^{1/2}(\partial D)$ και η ολοκληρωτική εξίσωση (2.103) μπορούν να υπεισέρθουν σε αυτήν την ανάλυση με φυσικό τρόπο.

Για το εξωτερικό πρόβλημα *Neumann* για $g \in H^{-1/2}(\partial D)$ η συνοριακή συνθήκη $\partial u/\partial \nu = g$, ∂D υπάρχει υπό την έννοια ενός τελεστή ίχνους. Η ανάλυση για την ύπαρξη μέσω του συνδιασμού ενός δυναμικού απλού και ενός διπλού στρώματος (2.105) με πυκνότητα ϕ που να ανήκει στον $H^{-1/2}(\partial D)$ και η ολοκληρωτική εξίσωση (2.106) μπορούν να υπεισέρθουν σε αυτήν την ανάλυση με φυσικό τρόπο. Από το Πόρισμα (2.39.1) προκύπτει ότι το πρόβλημα είναι καλά ορισμένο υπό την έννοια ότι η απεικόνιση των συνοριακών δεδομένων $f \in H^{1/2}(\partial D)$ στην λύση του προβλήματος $u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D})$ είναι συνεχής. Ανάλογα με το Θεώρημα(2.44) η *Dirichlet* σε *Neumann* απεικόνιση $\mathcal{A}$ είναι μονοσήμαντη και φραγμένη από τον $H^{1/2}(\partial D)$ στον $H^{-1/2}(\partial D)$ με φραγμένη αντίστροφη.

Παρουσιάζουμε την λύση για την σκέδαση ενός επίπεδου κύματος

$$u^i(x) = e^{ikx\cdot d}$$

από μία ακουστικά μαλακή σφαίρα ($sound - soft\ ball$) με κέντρο την αρχή και ακτίνα R. Το μοναδιαίο διάνυσμα d περιγράφει την διεύθυνση διάδοσης του εισερχόμενου κύματος με ολική συνοριακή συνθήκη

$$u = 0, \text{ στο } \partial D \Leftrightarrow u^i + u^s = 0 \text{ στο } \partial D\,.$$

Εν γένει, για το πρόβλημα σκέδασης οι συνοριακές τιμές είναι τόσο ομαλές όσο ομαλό είναι και το σύνορο αφού είναι τέτοιες ώστε η u^i να είναι αναλυτική στο ∂D. Συγκεκριμένα για χωρίο D κλάσης C^2 η ανάλυση συνέχειας επιτάσσει το σκεδαζόμενο κύμα u^s να ανήκει στον $C^{1,a}(\mathbb{R}^3 \setminus D)$. Έτσι εφαρμόζοντας τον τύπο *Green* (2.66) στο σκεδαζόμενο κύμα προκύπτει ότι

$$u^s(x) = \int_{\partial D} \left[u^s(y)\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u^s}{\partial \nu}(y)\Phi(x,y) \right] ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} \tag{2.107}$$

από το Δεύτερο Θεώρημα *Green* (2.24) και εφαρμόζοντάς τον στην ακέραια λύση u^i με $\Phi(x,\cdot)$ έχουμε,

$$0 = \int_{\partial D} \left[u^i(y)\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u^i}{\partial \nu}(y)\Phi(x,y) \right] ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}\,. \tag{2.108}$$

Προσθέτοντας τις σχέσεις (2.107) και (2.108) και χρησιμοποιώντας την σχέση

$$u^i + u^s = 0 \text{ στο } \partial D$$

προκύπτει το ακόλουθο θεώρημα. Παίρνουμε την αναπαράσταση του μακρινού πεδίου με την βοήθεια της σχέσης (2.70).

Θεώρημα 2.45. *Για την σκέδαση ενός ακέραιου πεδίου u^i από ένα ηχητικά-μαλακό εμπόδιο D έχουμε*

$$u(x) = u^i(x) - \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\Phi(x,y)\, ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}, \tag{2.109}$$

και το μακρινό πεδίο του σκεδαζόμενου πεδίου u^s δίνεται από την σχέση

$$u_\infty(\hat{x}) = -\frac{1}{4\pi}\int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) e^{-ik\hat{x}\cdot y}\, ds(y), \quad \hat{x} \in \mathbb{S}^2. \tag{2.110}$$

Στην φυσική, η αναπαράσταση (2.109) για σκεδαζόμενο πεδίο που προκύπτει από δευτερεύουσες πηγές (*secondary sources*) είναι γνωστή ως **Αρχή του Huygens**.

Κεφάλαιο 3

Ευθύ Πρόβλημα Σκέδασης Ακουστικών Κυμάτων σε Μη Ομογενή Υλικά

Είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο το ευθύ προβλημα σκέδασης ακουστικών χρονικά αρμονικών κυμάτων για ομογενή μέσα και συγκεκριμένα το εξωτερικό πρόβλημα *Dirichlet* και το εξωτερικό πρόβλημα *Neumann*. Τώρα θα θεωρήσουμε σκέδαση ακουστικών κυμάτων από ένα μη ομογενές μέσο με συμπαγή φορέα. Συγκεκριμένα, θα αναφερθούμε στην περίπτωση που δυναμικό της ταχύτητας δεν έχει ασυνέχειες κατα μήκος του συνόρου του μη ομογενούς υλικού.

Θα χρησιμοποιήσουμε πάλι ολοκληρωτικές εξισώσεις για να διερευνήσουμε το ευθύ πρόβλημα σκέδασης. Μία ακόμα διαφορά είναι, ότι σε αυτήν την περίπτωση απουσιάζουν οι συνοριακές συνθήκες και για το λόγο αυτό αντί να χρησιμοποιήσουμε επιφανειακά δυναμικά όπως στο προηγούμενο κεφάλαιο θα χρησιμοποιήσουμε δυναμικά όγκου.

Ξεκινάμε την πρώτη ενότητα διατυπώνοντας τις γραμμικοποιημένες εξισώσεις που διέπουν την διάδοση ακουστικών κυμάτων μικρού πλάτους. Στην συνέχεια θα επαναδιατυπώσουμε το ευθύ πρόβλημα σκέδασης για μη ομογενή μέσα με την μορφή της ολοκληρωτικής εξίσωσης που είναι γνωστή ως **εξίσωση Lippmann – Schwinger**.

Στην δεύτερη ενότητα για να μπορέσουμε να εφαρμόσουμε την θεωρία *Riesz – Fredholm* στην εξίσωση *Lippmann – Schwinger* πρέπει να αποδείξουμε την **Αρχή Μοναδικής Συνέχισης** (**Unique Continuation Principle**) για δεύτερης τάξης ελλειπτικές μερικές διαφορικές εξισώσεις. Με αυτόν τον τρόπο θα δείξουμε και την ύπαρξη μοναδικής λύσης για την εξίσωση *Lippmann – Schwinger* και άρα για το πρόβλημα σκέδασης για μη ομογενή υλικά.

3.1 Εξίσωση Lippmann – Schwinger

Ξεκινάμε θεωρώντας πάλι διάδοση ακουστικών κυμάτων μικρού πλάτους στον $\mathbb{R}^3$ και το αντιμετωπίζουμε ως πρόβλημα ρευστομηχανικής. Με $x \in \mathbb{R}^3$ έστω $v(x,t)$ το διάνυσμα της ταχύτητας των σωματιδίων του υγρού για ένα υγρό χωρίς ιξώδες και έστω με $p(x,t)$, $\rho(x,t)$ και $S(x,t)$

συμβολίζουμε την πίεση, την πυκνότητα και την ειδική εντροπία του υγρού αντίστοιχα. Αν δεν επιβάλλονται εξωτερικές δυνάμεις στο υγρό όπως στην **Ενότητα 2.2** έχουμε τις εξισώσεις

- **εξίσωση Euler**
$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot grad)v + \frac{1}{\rho} grad\ p = 0 \ ,$$

- **εξίσωση συνέχειας**
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho v) = 0 \ ,$$

- **καταστατική εξίσωση**
$$p = f(\rho, S)$$

- **αδιαβατική υπόθεση**
$$\frac{\partial S}{\partial t} + v \cdot grad\ S = 0$$

, όπου f είναι μία συνάρτηση που εξαρτάται από την φύση του υγρού.

Υποθέτουμε ότι $v(x,t)$, $p(x,t)$, $\rho(x,t)$ και $S(x,t)$ είναι αρκετά μικρές ώστε να μπορούμε να τους προκαλέσουμε διαταραχή γύρω από τις στάσιμες καταστάσεις $v = 0,\ \rho = \rho_0(x),\ S = S_0(x)$ και $p = p_0 = f(\rho_0, S_0)$ και να έχουν την μορφή

$$\begin{aligned} v(x,t) &= 0 + \epsilon v_1(x,t) + \cdots \\ p(x,t) &= p_0 + \epsilon p_1(x,t) + \cdots \\ \rho(x,t) &= \rho_0(x) + \epsilon \rho_1(x,t) + \cdots \\ S(x,t) &= S_0(x) + \epsilon S_1(x,t) + \cdots \end{aligned}$$

, όπου $0 < \epsilon << 1$ και οι τελείες αναφέρονται σε όρους μεγαλύτερης ταξης του ϵ.

Τώρα αντικαθιστούμε αυτές τις διαταραχές στις παραπάνω εξισώσεις μόνο μέχρι τους όρους τάξης ϵ και έτσι έχουμε τις γραμμικοποιημένες εξισώσεις

- **Εξίσωση Euler**
$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} grad\ p_1 = 0 \ ,$$

- **Εξίσωση Συνέχειας**
$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + div(\rho_0 v_1) = 0 \ ,$$

- **Καταστατική Εξίσωση**
$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = c^2(x) \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + v_1 \cdot\ grad\ \rho_0 \right) \ ,$$

- **Ταχύτητα του ηχού**
$$c^2 = \frac{\partial f}{\partial \rho}(\rho_0(x), S_0(x)) \ .$$

Η πίεση p_1 επόμένως ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = c^2(x)\rho_0(x) div \left(\frac{1}{\rho_0(x)} grad\ p_1 \right) \ .$$

Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι οι όροι που συμπεριλαμβάνουν το $grad\ \rho_0$ είναι αμεληταίοι τότε η p_1 περιγράφει χρονικά-αρμονικό ακουστικό κύμα

$$p_1(x,t) = Re\left[u(x)e^{-i\omega t}\right]$$

και η u ικανοποιεί την εξίσωση

$$\Delta u + \frac{\omega^2}{c^2(x)} u = 0 \ . \tag{3.1}$$

Η εξίσωση (3.1) διέπει την διάδοση χρονικά-αρμονικών κυμάτων μικρού πλάτους σε ένα αργά μεταβαλλόμενο μη ομογενές μέσο. Θα ασχοληθούμε με την περίπτωση που η μη ομογένεια έχει συμπαγή φορέα, η περιοχή που δουλεύουμε είναι όλος ο $\mathbb{R}^3$ και η κυματική διάδοση είναι αποτέλεσμα ενός προσπίπτοντος πεδίου ($incident\ field$) u^i που ικανοποιεί τις μη διαταραγμένες γραμμικοποιημένες εξισώσεις σκεδαζόμενο από ένα μη ομογενές μέσο. Υποθέτουμε ότι η περιοχή ανομοιογένειας περιέχεται στο εσωτερικό μίας μπάλας B, όπου $c(x) = c_0$ =σταθερή $\forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus B$ και από την σχέση(3.1) έχουμε,

$$\begin{aligned}
0 = \Delta u + \frac{\omega^2}{c^2(x)} u &= \Delta u + \frac{\omega^2}{c_0^2}\frac{c_0^2}{c^2(x)} u \\
&= \Delta u + k^2 n(x) u \\
\Leftrightarrow \Delta u + k^2 n(x) u &= 0 \quad (\text{Εξίσωση } Helmholtz \text{ για Μη Ομογενή Υλικά}) \\
\text{, όπου } k = \omega/c_0 \ > \ 0 &\quad , \quad \text{ο κυματικός αριθμός} \\
\text{και } n(x) := \frac{c_0^2}{c^2(x)} &\quad , \quad \text{δείκτης διάθλασης .}
\end{aligned}$$

Έτσι έχουμε την μοντελοποίηση του προβλήματος η οποία είναι η ακόλουθη

$$\Delta u + k^2 n(x) u = 0 \ \ , \mathbb{R}^3 \ \ (\text{Εξίσωση } Helmholtz), \tag{3.2}$$

$$u = u^i + u^s, \tag{3.3}$$

$$\lim_{r\to\infty} \left(r\frac{\partial u^s}{\partial r} - iku^s \right) = 0 \ \ , \ \ r = |x| \quad (\text{Συνθήκη Ακτινοβολίας } Sommerfeld) \tag{3.4}$$

, όπου u^i ακέραια λύση της εξίσωσης $Helmholtz$ $\Delta u + k^2 u = 0$ και u^s το σκεδασμένο πεδίο που ασχοληθήκαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο και που ικανοποιεί την συνθήκη ακτινοβολίας 3.4 ομοιόμορφα προς όλες τις κατευθύνσεις. Ο δείκτης διάθλασης είναι πάντα θετικός και στην περίπτωσή μας $n(x) = 1, \ x \in \mathbb{R}^3 \setminus B$. Αν το μέσο είναι απορροφητικό ($absorbing$) ο δείκτης διάθλασης έχει και φανταστικό μέρος.

Για να πάρουμε μία ολοκληρωτική εξίσωση ισοδύναμη με το πρόβλημα σκέδασης (3.2)-(3.4) ο δείκτης διάθλασης n στην περιπτωσή μας πρέπει να έχει τη γενική μορφή

$$n(x) = n_1(x) + i\frac{n_2(x)}{k} \tag{3.5}$$

για να είναι τμηματικά συνεχής στον $\mathbb{R}^3$ ώστε

$$m = 1 - n \tag{3.6}$$

να έχει συμπαγή φορέα και

$$n_1(x) > 0\ ,\ n_2 \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^3\ . \tag{3.7}$$

Σε όλο το κεφάλαιο θεωρούμε ότι αυτές οι υποθέσεις ισχύουν και έστω

$$D := \{x \in \mathbb{R}^3 : m(x) \neq 0\}\ .$$

Έστω το δυναμικό όγκου

$$u(x) := \int_{\mathbb{R}^3} \Phi(x,y)\phi(y)\,ds(y),\ x \in \mathbb{R}^3, \tag{3.8}$$

, όπου

$$\Phi(x,y) := \frac{1}{4\pi}\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}\quad,\quad x,y \in \mathbb{R}^3\ ,\ x \neq y \tag{3.9}$$

η θεμελιώδης λύση της εξίσωσης *Helmholtz* και φ συνεχής συνάρτηση στον $\mathbb{R}^3$ με συμπαγή φορέα και το συμβολίζουμε ως $\phi \in C_0(\mathbb{R}^3)$.

Θυμίζουμε ότι για χωρίο $G \subset \mathbb{R}^3$ οι χώροι *Hölder* $C^{p,\alpha}(G)$ είναι υπόχωροι των $C^p(G)$ και η νόρμα τους ικανοποιεί την σχέση

$$\|\phi\|_{p,\alpha} := \|\phi\|_\infty + \|grad\ \phi\|_{p-1,\alpha}\quad . \tag{3.10}$$

Θεώρημα 3.1. *Το δυναμικό όγκου που ορίσαμε στη σχέση (3.8) υπάρχει ως μη γνήσιο ολοκλήρωμα $\forall x \in \mathbb{R}^3$ και έχει τις ακόλουθες ιδιότητες.*

- *Αν $\phi \in C_0(\mathbb{R}^3) \Rightarrow u \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^3)$ και η σειρά παραγώγισης και ολοκλήρωσης μπορεί να αλλάξει.*

- *Αν $\phi \in C_0(\mathbb{R}^3) \cap C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^3) \Rightarrow u \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^3)$ και*

$$\Delta u + k^2 u = -\phi,\ \textit{στον}\ \mathbb{R}^3 \tag{3.11}$$

  , επίσης

$$\|u\|_{2,\alpha,\mathbb{R}^3} \leq C\|\phi\|_{\alpha,\mathbb{R}^3}\ .$$

- *Αν $\phi \in C_0(\mathbb{R}^3) \cap C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^3) \Rightarrow u \in C^{3,\alpha}(\mathbb{R}^3)$.*

Επειδή για τμηματικά συνεχή συνάρτηση n δεν μπορούμε να αναζητήσουμε λύση στον C^2 αναζητούμε λύση στον $H^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$, δηλαδή τον χώρο όλων των τοπικά τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων όπου οι παράγωγοι υπάρχουν υπό την έννοια των κατανομών μέχρι και δεύτερης τάξης. Διασφαλίζουμε την ύπαρξη λύσης μέσω του Θεωρήματος *Lax*(2.38) και κάνουμε την μετάβαση από *Hölder* σε *Sobolev* μέσω και της ανισότητας (3.10).

Θεώρημα 3.2. *Δοσμένων δύο φραγμένων χωρίων D και G, το δυναμικό όγκου*

$$(V\phi)(x) := \int_D \Phi(x,y)\phi(y)\,dy,\ x \in \mathbb{R}^3 \tag{3.12}$$

, ορίζει φραγμένο τελεστή $V : L^2(D) \to H^2(G)$.

Απόδειξη:
Διαλέγουμε ανοιχτή μπάλα B τέτοια ώστε $\bar{G} \subset B$ και μη αρνητική συνάρτηση $\gamma \in C_0^2(\mathbb{R}^3)$: $\gamma(x) = 1,\ x \in G$. Έστω χώροι $X = C^{0,\alpha}(D)$ και $Y = C^{2,\alpha}(B)$ εφοδιασμένοι με τις κλασσικές Hölder νόρμες. Ορίζουμε στον X το γνωστό εσωτερικό γινόμενο του L^2 και στον Y το εσωτερικό γινόμενο με βάρος του Sobolev

$$(u,v)_Y = \int_B \gamma \left(u\bar{v} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x_i \partial x_j} \right) dx\ .$$

Ισχύει για $\phi \in X$, $\psi \in Y$

$$grad_x \Phi(x,y) = -grad_y \Phi(x,y)$$

ορίζουμε

$$(V^*\psi)(x) := \int_B \psi(y)\Phi(x,y)\,dy\ x \in \mathbb{R}^3 \tag{3.13}$$

και κανοντας αλλαγή στην σειρά ολοκλήρωσης από Θεώρημα(3.1) έχουμε τις εξισώσεις

$$\int_B \gamma\psi V\phi\,dx = \int_D \phi V^*(\gamma\psi)\,dx \tag{3.14}$$

και

$$\int_B \gamma \frac{\partial}{\partial x_i}(V\phi)\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\,dx = -\int_D \phi \frac{\partial}{\partial x_i} V^* \left(\gamma \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) dx \tag{3.15}$$

γιατί

$$\begin{aligned}
\int_B \gamma\psi V\phi\,dx &= \int_B \gamma(x)\psi(x)V\phi(x)\,dx \\
&= \int_B \gamma(x) \int_D \Phi(x,y)\phi(y)\,dy\psi(x)\,dx \\
&= \int_D \phi(y) \int_B \gamma(x)\psi(x)\Phi(x,y)\,dx\,dy \\
&= \int_D \phi(y)V^*(\gamma\psi)(y)\,dy \\
&= \int_D \phi(x)V^*(\gamma\psi)(x)\,dx \\
&= \int_D \phi V^*(\gamma\psi)\,dx
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
\int_B \gamma \frac{\partial}{\partial x_i}(V\phi)\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\,dx &= \int_B \gamma(x)\frac{\partial}{\partial x_i}(V\phi)(x)\frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x)\,dx \\
&= \int_B \gamma(x)\int_D \phi(y)\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial x_i}\,dy\frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x)\,dx \\
&= -\int_B \gamma(x)\int_D \phi(y)\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial y_i}\,dy\frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x)\,dx \\
&= -\int_D \phi(y)\int_B \gamma(x)\frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x)\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial y_i}\,dx\,dy \\
&= -\int_D \phi(y)\frac{\partial}{\partial y_i}\int_B \gamma(x)\frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x)\Phi(x,y)\,dx\,dy \\
&= -\int_D \phi(y)\frac{\partial}{\partial y_i}V^*\left(\gamma\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\right)(y)\,dy \\
&= -\int_D \phi(x)\frac{\partial}{\partial x_i}V^*\left(\gamma\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\right)(x)\,dx \\
&= -\int_D \phi\frac{\partial}{\partial x_i}V^*\left(\gamma\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\right)\,dx
\end{aligned}$$

Ισχύει για $\phi \in C_0^1(D)$, $\psi \in Y$ *χρησιμοποιώντας το θεώρημα απόκλισης Gauss(2.21) έχουμε ότι,*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\int_D \Phi(x,y)\phi(y)\,dy = \int_D \Phi(x,y)\frac{\partial \phi}{\partial y_i}(y)\,dy \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x_i}(V\phi) = V\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right)$$

και άρα από την (3.15) και το θεώρημα απόκλισης Gauss(2.21) έχουμε ότι,

$$\int_B \gamma\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(V\phi)\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j}\,dx = \int_D \phi\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}V^*\left(\gamma\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j}\right)\,dx\ . \tag{3.16}$$

Θέτουμε $U = C_0^1(D) \subset X$ *για* $\phi \in U$, $\psi \in Y$ *από τις σχέσεις (3.14)-(3.16) έχουμε ότι οι τελεστές* $V : U \to Y$ *και* $W : Y \to X$ *όπου,*

$$W\psi := \overline{V^*\bar{\psi}} - \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{V^*\left(\gamma\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_i}\right)} + \sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}\overline{V^*\left(\gamma\frac{\partial^2\bar{\psi}}{\partial x_i \partial x_j}\right)}$$

είναι συζυγείς δηλαδή

$$(V\phi,\psi)_X = (\phi, W\psi)_Y.$$

Από το προηγούμενο Θεώρημα (3.1) V και W είναι φραγμένοι ως προς τις νόρμες Hölder. Από το Θεώρημα Lax(2.38) και επειδή η νόρμα του Y κυριαρχεί τη νόρμα του H^2 *πάνω από το G υπάρχει* $c > 0$

$$\|V\phi\|_{H^2(G)} \leq c\|\phi\|_{L^2(D)},\ \forall \phi \in U$$

Η απόδειξη τελειώνει επειδή $C_0^1(D)$ *είναι πυκνός στον* $L^2(D)$.

$\square$

Προσεγγίζοντας στον L^2 μία πυκνότητα φ με συμπαγή φορέα από μία ακολουθία συναρτήσεων του $C^{0,\alpha}$ με συμπαγή φορέα από Θεώρημα(3.2) προκύπτει ότι η (3.11) ισχύει και στον H^2. Στον $\mathbb{R}^3$ για φραγμένο χωρίο D με C^2 σύνορο από θεωρημα ενσφήνωσης *Sobolev* στον $H^2(D)$ οι συναρτήσεις είναι συνεχείς. Για συναρτήσεις $u \in H^2(D)$ με ίχνη $u|_{\partial D} \in H^{3/2}(\partial D)$ και $\partial u/\partial \nu|_{\partial D} \in H^{1/2}(\partial D)$ ο τύπος του *Green* (2.59) συνεχίζει να ισχύει και συγκεκριμένα η (2.61) συνεχίζει να ισχύει για συναρτήσεις του H^2 που είναι λύσεις της *Helmholtz*. Άρα οι H^2 λύσεις της *Helmholtz* είναι αυτόματα C^2 λύσεις και η συνθήκη ακτινοβολίας *Sommerfeld* είναι καλά ορισμένη στον H^2.

Η λύση του προβλήματος σκέδασης (3.2)-(3.4) για μη ομογενή μέσα είναι ισοδύναμη με την λύση της εξίσωσης

$$u(x) := u^i(x) - k^2 \int_{\mathbb{R}^3} \Phi(x,y)m(y)u(y)\,dy,\ x \in \mathbb{R}^3 \tag{3.17}$$

η οποία είναι η εξίσωση Lippmann − Schwinger.

Θεώρημα 3.3. *Αν $u \in H^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$ λύση του προβλήματος σκέδασης για μη ομογενή μέσα (3.2)-(3.4), τότε u είναι λύση της εξίσωσης Lippmann − Schwinger (3.17). Αντίθετα, αν $u \in C(\mathbb{R}^3)$ λύση της εξίσωσης Lippmann − Schwinger (3.17) τότε $u \in H^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$ και u είναι λύση του προβλήματος σκέδασης για μη ομογενή μέσα (3.2)-(3.4).*

Απόδειξη:

Έστω $u \in H^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$ λύση του (3.2)-(3.4) και έστω αυθαίρετο σημείο $x \in \mathbb{R}^3$ ανοιχτής σφαίρας B με εξωτερικό κάθετο διάνυσμα ν που περιέχει το φορέα της m ώστε $x \in B$. Από τύπο του Green (2.59) για την u έχουμε,

$$u(x) = \int_{\partial B} \left[\frac{\partial u}{\partial \nu}\Phi(x,\cdot) - u\frac{\partial \Phi(x,\cdot)}{\partial \nu}\right] ds - k^2 \int_B \Phi(x,\cdot)mu\,dy \tag{3.18}$$

αφού

$$\Delta u + k^2 u = mk^2 u\ .$$

Στο χωρικό ολοκλήρωμα πάνω από τη B μπορούμε να ολοκληρώσουμε πάνω από όλο $\mathbb{R}^3$ αφού m έχει στήριγμα στην B. Από τύπο Green (2.61) για την u^i έχουμε,

$$u^i(x) = \int_{\partial B} \left[\frac{\partial u^i}{\partial \nu}\Phi(x,\cdot) - u^i\frac{\partial \Phi(x,\cdot)}{\partial \nu}\right] ds\ . \tag{3.19}$$

Από το Θεώρημα Green(2.24) και την συνθήκη ακτινοβολίας (3.4) βλέπουμε ότι

$$\int_{\partial B} \left[\frac{\partial u^s}{\partial \nu}\Phi(x,\cdot) - u^s\frac{\partial \Phi(x,\cdot)}{\partial \nu}\right] ds = 0\ . \tag{3.20}$$

Με τη βοήθεια της $u = u^i + u^s$ και τις (3.18)-(3.20) καταλήγουμε ότι η (3.17) ικανοποιείται.

Αντίστροφα, έστω $u \in C(\mathbb{R}^3)$ λύση της (3.17) και ορίζουμε το u^s από την

$$u^s := -k^2 \int_{\mathbb{R}^3} \Phi(x,y)m(y)u(y)\, ds, \quad x \in \mathbb{R}^3 \ . \tag{3.21}$$

Η Φ ικανοποιεί την συνθήκη ακτινοβολίας (3.4) ομοιόμορφα ως προς y σε συμπαγή σύνολα και m έχει συμπαγή φορέα, τότε η u^s ικανοποιεί την (3.4). Αφού m τμηματικά συνεχής και έχει συμπαγή φορέα καταλήγουμε από το Θεώρημα(3.2) και την (3.11) ότι $u^s \in H^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$ με

$$\Delta u^s + k^2 u^s = mk^2 u \ .$$

Τελικά αφού

$$\Delta u^i + k^2 u^i = 0$$

έχουμε

$$\Delta u + k^2 u = (\Delta u^i + k^2 u^i) + (\Delta u^s + k^2 u^s) = mk^2 u \ ,$$
$$\Rightarrow \ \Delta u + k^2 u = 0, \quad \mathbb{R}^3$$

και άρα έχουμε το ζητούμενο.

□

Στην (3.17) μπορούμε να αντικαταστήσουμε το χωρίο ολοκλήρωσης με οποιοδήποτε χωρίο G ώστε ο φορέας της m να περιέχεται στο $\bar{G}$ και ψάχνουμε λύση στο $C(\bar{G})$. Τότε για $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{G}$ ορίζουμε τη $u(x)$ όπως στην *Lippmann – Schwinger* και έτσι παίρνουμε συνεχή λύση της εξίσωσης *Lippmann – Schwinger* σε όλο τον $\mathbb{R}^3$.

Θεώρημα 3.4. *Υποθέτουμε ότι $m(x) = 0, |x| \geq \alpha$ με $\alpha > 0$ και $k^2 < 2/M\alpha^2$, όπου $M := \sup_{|x|\leq\alpha} |m(x)|$. Τότε, υπάρχει μοναδική λύση για την εξίσωση* Lippmann – Schwinger *(3.17).*

Απόδειξη:

Όπως είπαμε και προηγουμένως αρκεί να λύσουμε την (3.17) για $u \in C(\bar{B})$ με μπάλα $B := \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < \alpha\}$. Στο χώρο Banach $C(\bar{B})$, ορίζουμε τον τελεστή $T_m : C(\bar{B}) \to C(\bar{B})$ από την σχέση

$$(T_m u)(x) := \int_B \Phi(x,y)m(y)u(y)\, dy, \quad x \in \bar{B} \ . \tag{3.22}$$

Με την μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων θα έχουμε αποδείξει το θεώρημά μας αν δείξουμε ότι $\|T_m\| \leq M\alpha^2/2$. Έτσι σκεπτόμενοι έχουμε

$$|(T_m u)(x)| \leq \frac{M\|u\|_\infty}{4\pi} \int_B \frac{dy}{|x-y|}, \quad x \in \bar{B} \ . \tag{3.23}$$

Για να εκτιμήσουμε το ολοκλήρωμα της (3.23) ορίζουμε το

$$h(x) := \int_B \frac{dy}{|x-y|}, \quad x \in \bar{B} \ ,$$

να είναι η λύση της εξίσωσης Poisson $\Delta h = -4\pi$ *και είναι συνάρτηση μόνο του* $r = |x|$. *Άρα η* h *λύνει την διαφορική εξίσωση*

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dh}{dr}\right) = -4\pi$$

της οποίας η γενική λύση είναι της μορφής

$$h(r) = -\frac{2}{3}\pi r^2 + \frac{c_1}{r} + c_2$$

, όπου c_1 *και* c_2 *είναι αυθαίρετες σταθερές. Αφού* h *είναι συνεχής σε περιοχή της αρχής δηλαδή για* $h = 0$, *πρέπει υποχρεωτικά* $c_1 = 0$ *και αφήνοντας* $r \to 0$ *βλέπουμε ότι*

$$c_2 = h(0) = \int_B \frac{dy}{|y|} = 4\pi \int_0^\alpha \rho d\rho = 2\pi\alpha^2 \ .$$

Επομένως,

$$h(r) = 2\pi\left(\alpha^2 - \frac{r^3}{3}\right)$$

και άρα $\|h\|_\infty = 2\pi\alpha^2$. *Από την (3.23) καταλήγουμε ότι*

$$|(T_m u)(x)| \leq \frac{M\alpha^2}{2}\|u\|_\infty, \quad x \in \bar{B} \ ,$$

$$|(T_m u)(x)| \leq \|T_m\|_\infty \|u\|_\infty \leq \frac{M\alpha^2}{2}\|u\|_\infty$$

$$\Leftrightarrow \ \|T_m\|_\infty \leq \frac{M\alpha^2}{2}$$

και άρα έχουμε το ζητούμενο.

□

3.2 Αρχή Μοναδικής Συνέχισης

Για να θεμελιώσουμε την ύπαρξη μοναδικής λύσης στο πρόβλημα σκέδασης (3.18)-(3.20) για όλες τις θετικές τιμές του κυματικού αριθμού k είναι απαραίτητο να θεμελιώσουμε την ύπαρξη μοναδικής λύση της εξίσωσης $Lippmann - Schwinger$ (3.17). Θέλουμε να εφαρμόσουμε την θεωρία $Riesz - Fredholm$ αφού ο ολοκληρωτικός τελεστής (3.22) έχει ασθενώς ιδιάζοντα πυρήνα και άρα είναι ένας συμπαγής τελεστής $T_m : C(\bar{B}) \to C(\bar{B})$, όπου B μπάλα η οποία έχει την ιδιότητα η κλειστοτητά της $\bar{B}$ να περιέχει τον φορέα της m. Για να το πετύχουμε αυτό πρέπει να δείξουμε ότι η ομογενής εξίσωση έχει μόνο την τετρημμένη λύση ή ισοδύναμα η λύση του προβλήματος

$$\Delta u + k^2 n(x) u = 0 \quad , \mathbb{R}^3 \quad (\text{Εξίσωση } Helmholtz), \tag{3.24}$$

$$\lim_{r\to\infty}\left(r\frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) = 0 \tag{3.25}$$

είναι η $u = 0$.

Λήμμα 3.5. *Έστω χωρίο $G \subset \mathbb{R}^3$ και έστω $u_1, \cdots, u_p \in H^2(G)$ πραγματικές συναρτήσεις που ικανοποιούν την*

$$|\Delta u_p| \leq c \sum_{q=1}^{P} [|u_q| + |grad\ u_q|], \quad \sigma\tau o\ \ G \tag{3.26}$$

για $p = 1, \cdots, P$ και για κάποια σταθερά c. Υποθέτουμε ότι $u_p = 0$ σε περιοχή κάποιου $x_0 \in G$, $\forall p = 1, \cdots, P$. Τότε $u_p = 0$ στο G, $\forall p = 1, \cdots, P$.

***Απόδειξη**:*

Για $0 < R \leq 1$, έστω $B[x_0, R]$ είναι κλειστή μπάλα ακτίνας R και κέντρου x_0. Διαλέγουμε ακτίνα R τέτοια ώστε $B[x_0, R] \subset G$. Θα δείξουμε ότι $u_p(x) = 0, \quad x \in B[x_0, R/2]$ και $p = 1, \cdots, P$. Το θεώρημα προκύπτει από το γεγονός ότι οποιοδήποτε άλλο σημείο $x_1 \in G$ μπορεί να συνδεθεί με το x_0 μέσω διαδοχικών επικαλυπτόμενων σφαιρών. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $x_0 = 0$ και για ευκολία γράφουμε $u = u_p$ για τώρα.

Για $r = |x|$ και αυθαίρετο $n > 0, n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε την $v \in H^2(G)$ ως την συνάρτηση,

$$v(x) := \begin{cases} e^{r^{-n}} u(x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Τότε,

$$\Delta u = e^{-r^{-n}} \left[\Delta v + \frac{2n}{r^{n+1}} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{n}{r^{n+2}} \left(\frac{n}{r^n} - n + 1 \right) v \right] .$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα $(\alpha+\beta)^2 \geq 2\alpha\beta$ καλώντας τον μεσαίο όρο εντός της παρένθεσης ως β βλέπουμε ότι,

$$\begin{aligned}
(\Delta u)^2 &\geq \frac{4ne^{-2r^{-n}}}{r^{n+1}} \frac{\partial v}{\partial r} \left[\Delta v + \frac{n}{r^{n+2}} \left(\frac{n}{r^n} - n + 1 \right) v \right] \\
\Leftrightarrow (\Delta u)^2 &\geq \frac{4rne^{-2r^{-n}}}{r^{n+2}} \frac{\partial v}{\partial r} \left[\Delta v + \frac{n}{r^{n+2}} \left(\frac{n}{r^n} - n + 1 \right) v \right] \\
\Leftrightarrow r^{n+2} e^{2r^{-n}} (\Delta u)^2 &\geq 4nr \frac{\partial v}{\partial r} \left[\Delta v + \frac{n}{r^{n+2}} \left(\frac{n}{r^n} - n + 1 \right) v \right]
\end{aligned}$$

Τώρα έστω $\phi \in C^2(\mathbb{R}^3)$ ώστε $\phi(x) = 1, |x| \leq R/2$ και $\phi(x) = 0, |x| \geq R$. Τότε ορίζοντας τις $\hat{u} := \phi u$ και $\hat{v} := \phi v$ και αντικαθιστώντας τις u και v με τις $\hat{u}$ και $\hat{v}$ αντίστοιχα στην παραπάνω ανισότητα αυτή συνεχίζει να ισχύει. Συγκεκριμένα έχουμε την ανισότητα

$$\int_G r^{n+2} e^{2r^{-n}} (\Delta \hat{u})^2 \, dx \geq 4n \int_G r \frac{\partial \hat{v}}{\partial r} \left[\Delta \hat{v} + \frac{n}{r^{n+2}} \left(\frac{n}{r^n} - n + 1 \right) \hat{v} \right] \, dx \; . \tag{3.27}$$

Προχωράμε στην ολοκλήρωση κατά μέρη της (3.27) και παρατηρούμε ότι λόγω της συγκεκριμένης φ οι συνοριακές συνθήκες μηδενίζονται. Χρησιμοποιούμε την παρακάτω ταυτότητα

$$2grad \; [x \cdot grad \; \hat{v}] \cdot grad \; \hat{v} = div[x|grad \; \hat{v}|^2] - |grad \; \hat{v}|^2, \tag{3.28}$$

από Πρώτο Θεώρημα Green (2.23) και Θεώρημα Απόκλισης Gauss (2.21) έχουμε ότι,

$$\int_G r \frac{\partial \hat{v}}{\partial r} \Delta \hat{v} \, dx = - \int_G grad \; [x \cdot grad \; \hat{v}] \cdot grad \; \hat{v} \, dx = \frac{1}{2} \int_G |grad \; \hat{v}|^2 \, dx$$

και άρα

$$\int_G r \frac{\partial \hat{v}}{\partial r} \Delta \hat{v} \, dx = \frac{1}{2} \int_G |grad \; \hat{v}|^2 \, dx \; . \tag{3.29}$$

Για $m \in \mathbb{N}$ με μερική ολοκλήρωση ως προς r έχουμε,

$$\begin{aligned} \int_G \frac{\hat{v}}{r^m} \frac{\partial \hat{v}}{\partial r} \, dx &= -\int_G \frac{\hat{v}}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\hat{v}}{r^{m-2}} \right) dx \\ &= -\int_G \frac{\hat{v}}{r^m} \frac{\partial \hat{v}}{\partial r} \, dx + (m-2) \int_G \frac{\hat{v}^2}{r^{m+1}} \, dx \end{aligned}$$

και άρα

$$\int_G \frac{\hat{v}}{r^m} \frac{\partial \hat{v}}{\partial r} \, dx = \frac{1}{2}(m-2) \int_G \frac{\hat{v}^2}{r^{m+1}} \, dx \; . \tag{3.30}$$

Τώρα εισάγουμε τις (3.29) και (3.30) (για $m = 2n+1$ και $m = n+1$) στην ανισότητα (3.27) και χρησιμοποιώντας την

$$\int_G \frac{\hat{v}^2}{r^{2n+2}} \, dx \geq \int_G \frac{\hat{v}^2}{r^{n+2}} \, dx$$

αφού $\hat{v}^2(x) = 0, \quad r = |x| \geq R, \; 0 < R \leq 1$ προκύπτει ότι

$$\int_G r^{n+2} e^{2r^{-n}} (\Delta \hat{u})^2 \, dx \geq 2n \int_G |grad \; \hat{v}|^2 \, dx + 2n^2(n^2+n-1) \int_G \frac{\hat{v}^2}{r^{2n+2}} \, dx \; . \tag{3.31}$$

Αφού

$$grad \; \hat{u} = e^{-r^{-n}} \left[grad \; \hat{v} + \frac{n}{r^{n+1}} \frac{x}{r} \hat{v} \right]$$

μπορούμε να εκτιμήσουμε

$$e^{2r^{-n}} |grad \; \hat{u}|^2 \leq 2|grad \; \hat{v}|^2 + \frac{2n^2}{r^{2n+2}} |\hat{v}|^2$$

και χρησιμοποιώντας αυτήν και την (3.31) έχουμε,

$$\int_G r^{n+2} e^{2r^{-n}} |\Delta \hat{u}|^2 \, dx \geq n \int_G e^{2r^{-n}} |grad \ \hat{u}|^2 \, dx + n^4 \int_G \frac{e^{2r^{-n}}}{r^{2n+2}} \hat{u}^2 \, dx. \tag{3.32}$$

Μετονομάζοντας πάλι την u σε u_p από την (3.26) και από την ανισότητα $Cauchy-Schwarz$ προκύπτει ότι

$$|\Delta u_p(x)|^2 \leq 2Pc^2 \sum_{q=1}^{P} \left[\frac{|grad \ u_q(x)|^2}{r^{n+2}} + \frac{|u_q(x)|}{r^{3n+4}} \right], \quad |x| \leq R/2$$

, αφού $R \leq 1$. Ακόμα έχουμε

$$|\Delta \hat{u}_p(x)|^2 \leq \frac{|\Delta \hat{u}_p(x)|}{r^{3n+4}}, \quad R/2 \leq |x| \leq R,$$

, αφού $R \leq 1$. Παρατηρώντας ότι $u_p(x) = \hat{u}_p(x), \ |x| \leq R/2$ από την (3.32) έχουμε ότι

$$n \int_{|x| \leq R/2} e^{2r^{-n}} |grad \ u_p|^2 \, dx + n^4 \int_{|x| \leq R/2} \frac{e^{2r^{-n}}}{r^{2n+2}} u_p^2 \, dx \leq \int_G r^{n+2} e^{2r^{-n}} |\Delta \hat{u}_p|^2 \, dx$$

$$\leq 2Pc^2 \sum_{q=1}^{P} \left[\int_{|x| \leq R/2} e^{2r^{-n}} |grad \ u_q|^2 \, dx + \int_{|x| \leq R/2} \frac{e^{2r^{-n}}}{r^{2n+2}} u_q^2 \, dx \right] + \int_{R/2 \leq |x| \leq R} \frac{e^{2r^{-n}} |\Delta \hat{u}_p(x)|^2}{r^{2n+2}} \, dx$$

, όπου για αρκετά μεγάλο n έχουμε

$$n^4 \int_{|x| \leq R/2} \frac{e^{2r^{-n}}}{r^{2n+2}} u_p^2 \, dx \leq C \int_{R/2 \leq |x| \leq R} \frac{e^{2r^{-n}} |\Delta \hat{u}_p(x)|^2}{r^{2n+2}} \, dx, \quad p = 1, \cdots, P$$

, για κάποια σταθερά C. Από αυτό, αφού η απεικόνιση

$$r \mapsto \frac{e^{2r^{-n}}}{r^{2n+2}} \quad , \quad r > 0,$$

είναι φθίνουσα, για αρκετά μεγάλο n έχουμε

$$n^4 \int_{|x| \leq R/2} u_p^2 \, dx \leq C \int_{R/2 \leq |x| \leq R} |\Delta \hat{u}_p(x)|^2 \, dx, \quad p = 1, \cdots, P \ .$$

Αφήνοντας

$$n \to \infty \ \Rightarrow u_p(x) = 0, \quad |x| \leq R/2, \quad p = 1, \cdots, P$$

και έχουμε το ζητούμενο.

$\square$

Θεώρημα 3.6. *Έστω G χωρίο του $\mathbb{R}^3$ και έστω $u \in H^2(G)$ λύση της*

$$\Delta + k^2 n(x) u = 0 \quad Helmholtz \tag{3.33}$$

, στο G ώστε n τμηματικά συνεχής G και $u = 0$ σε περιοχή κάποιου $x_0 \in G$.
Τότε $u = 0, \;\; στο \;\; G$.

***Απόδειξη**:*

Θα εφαρμόσουμε το Λήμμα(3.5) για το πραγματικό $u_1 := Re\ u$ και το φανταστικό μέρος $u_2 := Im\ u$ της λύσης u αφού για να εφαρμοστεί χρειάζεται πραγματικές συναρτήσεις και οι u_1 και u_2 είναι πραγματικές συναρτήσεις. Αρχικά, αφού $u = 0$ σε περιοχή του $x_0 \in G$ συνεπάγεται ότι $u_1 = 0$ και $u_2 = 0$ σε περιοχή του $x_0 \in G$. Μένει να δείξουμε επομένως για $P = 2$ ότι ισχύει η ανισότητα (3.26) με u_1 και u_2 όπως τα ορίσαμε και άρα $p = 1, 2$ που θα το συμβολίζουμε εδώ με i γιατί θα το μπερδεύουμε αλλιώς σαν συμβολισμό με τους χώρους Sobolev.

Ξεκινάμε παρατηρώντας ότι

$$\|\Delta u_i\|_{2,G} \leq \|\Delta u\|_{2,G} \; \forall i = 1, 2. \tag{3.34}$$

, όπου με $\|\cdot\|_{2,G}$ συμβολίζουμε την νόρμα του $H^2(G)$ αντίστοιχα συμβολίζουμε και τις υπόλοιπες $p-$νόρμες για τους χώρους Sobolev. Θα χρησιμοποιήσουμε ακόμα την ιδιότητα ενσφήνωσης για τους χώρους Sobolev δηλαδή το γεγονός ότι με $0 \leq p < q < \infty$ ισχύει ότι $H^q(G) \subset H^p(G)$ όπου $H^q(G)$ είναι πυκνός στον $H^p(G)$ και έχουμε,

$$\|\phi\|_p \;\leq\; \|\phi\|_q \;\;, \;\; \forall \phi \in H^q(G) \tag{3.35}$$

, με $L^2(G) = H^0(G)$. Ισχύει ότι

$$\|u\|_{1,G} \leq \|u\|_{0,G} + \|grad\ u\|_{0,G}, \quad u \in \; H^1(G) \tag{3.36}$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.35) και (3.36) έχουμε

$$\begin{aligned}
\|u\|_{1,G} &\leq \|u\|_{0,G} + \|grad\ u\|_{0,G} \\
&\leq \|u\|_{1,G} + \|grad\ u\|_{1,G} \\
&\leq \|u\|_{2,G} + \|grad\ u\|_{2,G} \\
\text{επίσης} & \\
\|u\|_{1,G} &\leq \|u\|_{2,G} \\
\text{και άρα} & \\
\|u\|_{2,G} &\leq \|u\|_{2,G} + \|grad\ u\|_{2,G}
\end{aligned}$$

, όπου είναι λογικό αποτέλεσμα.

Η u είναι λύση της εξίσωσης Helmholtz και ξέρουμε ότι η $m(x) = 1 - n(x)$ έχει συμπαγή φορέα και είναι τμηματικά συνεχής στον $\mathbb{R}^3$ επομένως

$$\begin{aligned}
\|\Delta u\|_{2,G} = \|k^2(1-m(x))u\|_{2,G} &\leq k^2 \sup_{x\in G}(1-m(x))\|u\|_{2,G} \\
&\leq k^2\|1-m\|_\infty(\|u_1\|_{2,G}+\|u_2\|_{2,G}) \\
&\leq C(\|u_1\|_{2,G}+\|grad\ u_1\|_{2,G}+\|u_2\|_{2,G}+\|grad\ u_2\|_{2,G})
\end{aligned}$$

, όπου $C = k^2\|1-m\|_\infty$.
Επίσης,

$$\|\Delta u_i\|_{2,G} \leq \|\Delta u\|_{2,G} \quad ,\forall i = 1,2$$

και άρα

$$\|\Delta u_i\|_{2,G} \leq C(\|u_1\|_{2,G}+\|grad\ u_1\|_{2,G}+\|u_2\|_{2,G}+\|grad\ u_2\|_{2,G})\ ,\forall i=1,2\ . \tag{3.37}$$

Επομένως, ισχύει η (3.26) του Λήμματος(3.5) και άρα $u_1 = 0$ *στο* G *και* $u_2 = 0$ *στο* G. *Δηλαδή και το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της* u *μηδενίζονται στο* G *και άρα η* $u = 0$ *στο* G.

□

Τώρα θα δείξουμε ότι $\forall k > 0$ υπάρχει μοναδική λύση για το πρόβλημα σκέδασης (3.2)-(3.4).

Θεώρημα 3.7. *Για κάθε* $k > 0$ *υπάρχει μοναδική λύση* $u \in H^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$ *του προβλήματος σκέδασης για μη ομογενή υλικά (3.2)-(3.4) και* u *εξαρτάται με συνεχή τρόπο ως προς την maximum νόρμα από το προσπίπτον πεδίο* u^i.

Απόδειξη:

Για να δείξουμε την ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης αρκέι να δείξουμε όπως είδαμε στην αρχή της ενότητας ότι η μόνη λύση στο πρόβλημα (3.24),(3.25) είναι η $u = 0$. *Αν ισχύει αυτό από θεωρία* $Riesz - Fredholm$ *η ολοκληρωτική εξίσωση (3.17) μπορεί να αντιστραφεί στον* $C(\bar{B})$ *και ο αντίστροφος τελεστής είναι φραγμένος. Από αυτό προκύπτει ότι η* u *εξαρτάται με συνεχή τρόπο από το προσπίπτον πεδίο* u^i *ως προς την maximum νόρμα. Τώρα το μόνο που πρέπει να δείξουμε είναι ότι η μόνη λύση στο πρόβλημα (3.24),(3.25) είναι η* $u = 0$.

Θυμώμαστε ότι B *είναι η μπάλα ακτίνας* a *και με κέντρο την αρχήώστε το* m *να μηδενίζεται εξωτερικά της* B. *Όπως συνήθως* ν *είναι το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο σύνορο* ∂B. *Από το Πρώτο Θεώρημα Green (2.23) και την (3.24) έχουμε ότι*

$$\int_{|x|=\alpha} u\frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu}\,ds = \int_{|x|\leq\alpha}(|grad\ u|^2 - k^2\bar{n}|u|^2)\,dx\ .$$

Από αυτό, αφού $Im\ n \geq 0$, *προκύπτει ότι*

$$Im\int_{|x|=\alpha} u\frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu}\,ds = k^2\int_{|x|\leq\alpha} Im\ n|u|^2\,dx \geq 0\ . \tag{3.38}$$

και από το Θεώρημα(2.33) συνεπάγεται ότι $u(x) = 0, |x| \geq \alpha$ *και άρα από Θεώρημα(3.6) προκύπτει ότι* $u(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^3$.

□

Βιβλιογραφία

1. *D. Colton*,*R. Kress*:*Inverse Acoustic and Electomagnetic Scattering Theory*, *ThirdEdition*, *Copyright Springer Science+ Business Media New York* 1992, 1998, 2013

2. *D. Colton*,*R. Kress*:*Integral Equation Methods In Scattering Theory*, *Copyright Wiley Interscience Publications J. Wiley and Sons* 1983

3. *F. Cakoni*,*D. Colton*:*Qualitative Methods In Inverse Scattering Theory*, *Copyright Springer Science + Business Media New York* 2006