

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗ ΒΙΟΪ́ΑΤΡΙΚΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΥΓΕΙΑΣ - ΤΜΗΜΑ ΙΑΤΡΙΚΗΣ



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ - ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΤΙΚΟΣ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ "ΠΕΡΙΣΤΑΛΤΙΚΩΝ ΑΝΤΛΙΩΝ ΑΙΜΑΤΟΣ"

ΧΡΗΣΤΟΣ Γ. ΜΑΝΟΠΟΥΛΟΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: ΣΩΚΡΑΤΗΣ ΤΣΑΓΓΑΡΗΣ καθηγητής ε.μ.π.

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΤΙΚΟΣ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ "ΠΕΡΙΣΤΑΛΤΙΚΩΝ ΑΝΤΛΙΩΝ ΑΙΜΑΤΟΣ"

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΠΕΡΙΣΤΑΛΤΙΚΗΣ ΡΟΗΣ (1-D) ΣΕ ΑΓΩΓΟΥΣ ΚΙΝΟΥΜΕΝΩΝ ΤΟΙΧΩΜΑΤΩΝ ΜΕ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟ

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ:

- 1. Ροή ούρων ουρητήρα.
- 2. Ροή ρευστού περισταλτικής αντλίας.
- 3. Ροή αίματος ενδοαορτικής αντλίας μπαλονιού

Εκπονηθείσα παρά του: Χρήστου Γ. Μανόπουλου Μεταπτυχιακού Φοιτητή Βιοϊατρικής Τεχνολογίας (Α.Μ.: 103) Ακαδ. Έτη: 1996-'97 & 1997-'98

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:

Σωκράτης Τσαγγάρης, Καθηγητής (επιβλέπων) Διδώ Γιόβα, Αναπλ. Καθηγήτρια Δημήτριος Μαθιουλάκης, Επίκ. Καθηγητής

Είς τὸν Θεόκριτο παραπονιοῦνταν μιὰ μέρα ὁ νέος ποιητὴς Εὐμένης "Τώρα δυὸ χρόνια πέρασαν ποὺ γράφω κ' ἕνα είδύλλιο ἕκαμα μονάχα Τὸ μόνον ἄρτιόν μου ἔργον εἶναι. Άλλοίμονον, εἶν' ὑψηλὴ τὸ βλέπω, πολύ ύψηλή τῆς Ποιήσεως ή σκάλα[.] κι άπ' τὸ σκαλὶ τὸ πρῶτο ἐδῶ ποὺ εἶμαι, ποτὲ δὲν θ' ἀνεβῶ ὁ δυστυχισμένος." Εἶπ' ὁ Θεόκριτος· "Αὐτὰ τὰ λόγια άνάρμοστα καὶ βλασφημίες εἶναι. Κι ἄν εἶσαι στὸ σκαλί τὸ πρῶτο, πρέπει νά 'σαι ὑπερήφανος κ' εὐτυχισμένος. Έδῶ ποὺ ἔφθασες, λίγο δὲν εἶναι[.] τόσο πού ἕκαμες, μεγάλη δόξα. Κι αὐτὸ ἀκὸμη τό σκαλὶ τὸ πρῶτο πολύ ἀπὸ τὸν κοινὸ τὸν κόσμο ἀπέχει. Εἰς τὸ σκαλὶ γιὰ νὰ πατήσεις τοῦτο πρέπει μὲ τὸ δικαίωμά σου νά σαι πολίτης εἰς τῶν ἰδεῶν τὴν πόλι. Καὶ δύσκολο στὴν πόλι ἐκείνην εἶναι σπάνιο νὰ σὲ πολιτογραφήσουν. καὶ Στὴν ἀγορά της βρίσκεις Νομοθέτας ποὺ δέν γελά κανένας τυχοδιώκτης. Εδῶ ποὺ ἔφθασες, λίγο δὲν εἶναι[.] τόσο πού ἕκαμες, μεγάλη δόξα"

ΤΟ ΠΡΩΤΟ ΣΚΑΛΙ, Κ. Π. Καβάφη, 1899

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εκπονήθηκε στο Εργαστήριο Αεροδυναμικής του Τομέα Ρευστών του Τμήματος Μηχανολόγων Μηχανικών του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου στα πλαίσια Διατμηματικού Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στη Βιοϊατρική Τεχνολογία.

Διαπραγματεύεται σε μία διάσταση μαθηματικώς μοντελοποιημένες ροές σε αγωγούς με κινούμενα τοιχώματα. Το εύνασμα για τη μελέτη των συγκεκριμένων ροών δόθηκε από μελέτες του ιδίου φαινομένου από το γερμανό Η. J. Rath την περίοδο 1976-78, αποτελέσματα και συμπεράσματα του οποίου παρουσιάζονται και εδώ.

Αρχικά παρουσιάζεται μια περιγραφή του φαινομένου, τόσο σε φυσιολογικό επίπεδο, όσο και σε επίπεδο Μηχανικής Ρευστών. Κατόπιν καταστρώνεται το θεωρούμενο πείραμα και οι εξισώσεις που το διέπουν, οι οποίες οδηγούνται σε μορφή τέτοια, ώστε να μπορούν να επιλυθούν με αριθμητικές μεθοδολογίες. Οι μεθοδολογίες που αναπτύσσονται εδώ, είναι οι explicit MacCormack και Lax-Wendroff, όσο αφορά την επίλυση των Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων, ενώ η 4ης τάξης Runge-Kutta αναπτύσσεται για την επίλυση των Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων που προκύπτουν. Ο προγραμματισμός των μεθόδων γίνεται σε κώδικες Fortran και τα αποτελέσματα παρουσιάζονται σε γραφήματα με μεγέθη, τόσο διαστατά, όσο και αδιάστατα. Η αδιαστατοποίηση γίνεται με τρόπο που να απλοποιούνται όσο το δυνατό οι εξισώσεις και να εξάγονται χρήσιμα συμπεράσματα και συγκρίσεις.

Η Υπολογιστική Ρευστομηχανική αποτελεί μια πολλαπλή επιστήμη, που καλείται να συνθέσει τις επιστήμες της Αριθμητικής Ανάλυσης, των Μαθηματικών, του Προγραμματισμού Η/Υ και της Μηχανικής των Ρευστών, πράγμα, που από την αρχή δείχνει τη δυσκολία εξαγωγής ολοκληρωτικών συμπερασμάτων, σχετικά με το φαινόμενο που διαπραγματεύεται κάθε φορά.

Από αυτή τη θέση έχω την ευκαιρία να αναφέρω με ιδιαίτερη ευχαρίστηση, όσους κατά κάποιο τρόπο έχουν συμβάλλει στη συγγραφή της παρούσας εργασίας.

Είναι η Δρα. Θεοδώρα Πάππου, της οποίας η βοήθεια ήταν πολύτιμη και αναγκαία, τόσο σε υπολογιστικό, όσο και σε επίπεδο ρευστομηχανικής, ο Επίκουρος Καθηγητής Δημήτρης Μαθιουλάκης με τον οποίο συζητήσαμε τα μοντέλα σε πειραματικό επίπεδο, ώστε να μπορούν να έχουν πρακτική εφαρμογή και ο δάσκαλός μου Καθηγητής Σωκράτης Τσαγγάρης, στον οποίο οφείλω, τόσο το ενδιαφέρον μου στη Βιορευστομηχανική, όσο και την εδραίωση της προτίμησής μου σ' αυτήν.

Ευχαριστώ επίσης θερμά τους γονείς μου και τα αδέρφια μου, για την αγάπη και συμπαράστασή τους, κατά την κοπιαστική περίοδο της συγγραφής και προετοιμασίας της παρούσας εργασίας.

Ιούνιος 1998

Χ. Γ. Μανόπουλος

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΤΙΚΟΣ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ "ΠΕΡΙΣΤΑΛΤΙΚΩΝ ΑΝΤΛΙΩΝ ΑΙΜΑΤΟΣ"

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Δύο είδη θεωρητικών μοντέλων έχουν αναπτυχθεί για να αναπαραστήσουν τα φαινόμενα άντλησης μέσω κυλινδρικών αγωγών με εύκαμπτα τοιχώματα. Στο πρώτο, η άντληση επιτυγχάνεται σε έναν ελαστικό αγωγό με την εφαρμογή μιας εξωτερικής πίεσης, η οποία είναι μεταβλητή στο χώρο και το χρόνο προκαλώντας περισταλτική κίνηση. Το σχεδόν μονοδιάστατο μοντέλο καθορίζεται από τρεις μεταβλητές συναρτήσεις στο χώρο και το χρόνο, την εγκάρσια διατομή του ελαστικού αγωγού, την διαμορφούμενη εσωτερική πίεση και την ταχύτητα του ρευστού εντός του ελαστικού αγωγού. Οι τρεις αυτές συναρτήσεις επιλύονται μέσω ενός συστήματος μη γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων υπερβολικού τύπου. Οι διαφορικές εξισώσεις του συστήματος έχουν εξαχθεί από την εφαρμογή των αρχών διατήρησης της μάζας και της ορμής του ρευστού σε μια διάσταση και από την μαθηματική περιγραφή της διδιάστατης εντατικής κατάστασης του τοιχώματος του ελαστικού σωλήνα το οποίο αλληλεπιδρά κινούμενο με το ρευστό. Η παροχή του ρευστού εντός του ελαστικού αγωγού υπολογίζεται ως συνάρτηση της συχνότητας διέγερσης. Η αριθμητική λύση λαμβάνεται με μεθόδους πεπερασμένων διαφορών δεύτερης τάξης ακρίβειας (σύμφωνα με τα αριθμητικά σχήματα Lax-Wendroff και MacCormack). Τα αποτελέσματα αυτού του πρώτου μοντέλου προσομοιάζουν πάρα πολύ καλά τα αντίστοιχα μετρούμενα στον ανθρώπινο ουρητήρα για φυσιολογικές τιμές συχνοτήτων διέγερσης του ελαστικού τοιχώματος. Στη συνέχεια, ένα δεύτερο μοντέλο εφαρμόζεται για την επιβεβαίωση των αποτελεσμάτων του προηγούμενου μοντέλου. Σε αυτό η άντληση επιτυγχάνεται προκαλώντας ένα προοδευτικό κύμα διαστολής και συρρίκνωσης της εγκάρσιας διατομής κατά μήκος των τοιχωμάτων ενός αγωγού με κινούμενα τοιχώματα που περιέχει ρευστό. Σε αυτό το δεύτερο μοντέλο χρησιμοποιείται σχεδόν η ίδια μέθοδος με το πρώτο, εκτός του ότι η εγκάρσια διατομή δεν είναι πια άγνωστη αλλά μια γνωστή συνάρτηση μεταβαλλόμενη με το χώρο και το χρόνο. Με αυτόν τον τρόπο, οι μονοδιάστατες εξισώσεις Navier-Stokes οδηγούν σε μία μη γραμμική συνήθη διαφορική εξίσωση με μεταβλητούς συντελεστές ως προς το χρόνο, η οποία επιλύεται αριθμητικά με ένα σχήμα Runge-Kutta τέταρτης τάξης. Η παροχή του ρευστού εντός του εύκαμπτου αγωγού αποκτά μη μηδενικές μέσες τιμές στο χρόνο, οπότε και προκαλείται άντληση, μόνο όταν υφίστανται οι μη γραμμικοί όροι της διαφορικής εξίσωσης του μοντέλου και αυτό συμβαίνει αν εκατέρωθεν του εύκαμπτου αγωγού υπάρχουν ασυμμετρίες είτε γεωμετρικές είτε απωλειών ενέργειας. Ο πειραματικός προσδιορισμός θα ακολουθήσει σε επόμενα διδακτικά εξάμηνα κατά την εκπόνηση διδακτορικής διατριβής τμήμα της οποίας θα αποτελεί στο περιεχόμενο και το αντικείμενό της ο εν λόγω πειραματικός προσδιορισμός.

EXPERIMENTAL AND THEORETICAL ASSESSMENT OF PERISTALTIC BLOOD PUMPS

ABSTRACT

Two types of theoretical models have been developed to represent pumping phenomena through cylindrical tubes with flexible walls. In the first, pumping is achieved in an elastic tube by applying an external pressure, which is variable in space and time causing peristaltic motion. The guasi one-dimensional model is defined by three function variables in space and time, the cross section area of the tube, the building up internal pressure and the fluid velocity inside the tube. These three functions are solved through a system of nonlinear partial differential equations of hyperbolic type. The differential equations of this system have been derived by applying in one dimension the conservation principles of fluid mass and momentum and by mathematical description of the two-dimensional stress state of the tube's elastic wall, which interacts with the moving fluid. The flow-rate inside the elastic tube is calculated as a function of the excitation frequency. The numerical solution is based on finite difference methods of second-order accuracy (according to both schemes Lax-Wendroff and MacCormack's). The results of this initial model are similar in range to those measured in the human ureter, corresponding to the normal excitation frequencies values of the tube's elastic wall. Furthermore, a second type model is applied to confirm the results of the first one. In this type, pumping is achieved by causing a progressive wave of expansion and contraction of the crosssection area along the walls of a flexible tube containing fluid. In the second model almost the same method is used as in the first one, except that the cross-section area is no longer unknown, but a known function varying with space and time. In this way, the one dimensional Navier-Stokes equations lead to a non-linear ordinary differential equation with time-varying coefficients, which is numerically solved by a fourth-order Runge-Kutta scheme. The time average flow-rate of the fluid is nonzero into the flexible tube, and thus pumping is caused, when the nonlinear terms of the model's differential equation are taking effect. The higher the geometry and the energy loss asymmetries are at the edges of the flexible tube, the higher is the effect of the nonlinear terms of the model's differential equation. The experimental assessment will follow in subsequent semesters, during the preparation of a doctoral dissertation, part of which will be the said experimental assessment in its content and subject.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

		σελ.
	ΕΙΣΑΓΩΓΗ	1
	ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1º Μοντέλο περισταλτικής άντλησης ελαστικού αγωγού	5
1.1	Θεωρούμενη πειραματική διάταξη και ρευστομηχανικές εξισώσεις	5
1.1.1	Διατήρηση της μάζας	6
1.1.2	Διατήρηση της ορμής μονοδιάστατης ροής	7
1.1.3	Θεώρηση μοντέλου ελαστικού αγωγού	9
1.2	Αδιαστατοποίηση εξισώσεων	11
	ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2° Αριθμητική επίλυση συστήματος εξισώσεων	13
2.1	Explicit μέθοδοι Lax-Wendroff δύο ημιβημάτων σε μια διάσταση	13
2.1.1	Σχήμα Richtmyer - Morton	13
2.1.2	Σχήμα MacCormack πρόβλεψης-διόρθωσης (predictor-corrector)	14
2.2	Επαλήθευση των αριθμητικών μεθόδων με αναλυτική λύση	15
2.3	Διακριτοποίηση αδιάστατων εξισώσεων	22
2.3.1	Σχήμα Richtmyer - Morton	22
2.3.2	Σχήμα MacCormack predictor-corrector	22

	ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3°	05
	Αριθμητική επίλυση περισταλτικής ροής σε ελαστικό αγωγό	25
3.1	Αριθμητικό πείραμα Η. J. Rath	25
3.2	Αρχικές συνθήκες θεωρούμενου πειράματος	26
3.3	Οριακές συνθήκες θεωρούμενου πειράματος	27
3.3.1	Ταχύτητα εισόδου-εξόδου	27
3.3.2	Διατομή εισόδου-εξόδου	29
3.3.3	Πίεση εξωτερική και εισόδου-εξόδου	29
3.4	Μέγιστη επιτρεπόμενη διαφορά πίεσης	30
3.5	Υπολογισμός παροχής σωλήνα	32
3.6	Αδιαστατοποίηση οριακών συνθηκών	33
3.6.1	Αδιάστατη ταχύτητα εισόδου-εξόδου	34
3.6.2	Αδιάστατη διατομή εισόδου-εξόδου	34
3.6.3	Αδιάστατη εξωτερική και πίεση εισόδου-εξόδου	34
3.6.4	Αδιάστατη παροχή	35
3.7	Φυσιολογικά χαρακτηριστικά και ανατομία ουρητήρα	36
3.8	Προσδιορισμός πλάτους περίσταλσης	37
3.9	Αποτελέσματα αριθμητικών μεθόδων	39

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4°

	Αριθμητική επίλυση περισταλτικής και αντλητικής ροής σε αγωγό με κινούμενα τοιχώματα	51
4.1	Θεωρητικό μοντέλο γνωστού συναρτησιακού διατομής	51
4.2	Αριθμητική επίλυση Σ.Δ.Ε. με τη μέθοδο Runge-Kutta	52
4.3	Συμπεριφορά μοντέλου με επιβολή αρμονικού συναρτησιακού διατομής δύο ανεξάρτητων μεταβλητών (περίσταλση)	53
4.4	Συμπεριφορά μοντέλου με επιβολή αρμονικού συναρτησιακού διατομής μιας ανεξάρτητης μεταβλητής (αντλία μπαλονιού)	56
4.4.1	Τοπικές απώλειες στα στόμια των δοχείων	60
4.4.2	Επιρροή ασύμμετρων δοχείων	61

ΠΕΡΙΕΧ	DMENA	
4.4.3	Ενδοαορτική αντλία μπαλονιού (Intra-Aortic Balloon Pump, I.A.B.P.)	63
4.4.4	Επιρροή στατικής και δυναμικής βαλβίδας	64
	ΕΠΙΛΟΓΟΣ Συμπερασματική επισκόπηση	69
	ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι Λίστες προγραμμάτων και κωδικών Fortran	73
1.	Πρόγραμμα analytic.for υπολογισμού αναλυτικής λύσης ελαστικού αγωγού σε περίσταλση.	73
2.	Πρόγραμμα laxtest.for υπολογισμού ροής ελαστικού αγωγού σε περίσταλση, με τη μέθοδο Lax-Wendroff, για σύγκριση με αναλυτική λύση.	75
3.	Πρόγραμμα mactest.for υπολογισμού ροής ελαστικού αγωγού σε περίσταλση, με τη μέθοδο MacCormack, για σύγκριση με αναλυτική λύση.	78
4.	Πρόγραμμα rathpap.for προσδιορισμού παραμόφωσης πλάτους περίσταλσης ε=0.1, ελαστικού αγωγού (παράμετροι και υπολογισμοί διπλής ακρίβειας). Εφαρμόζεται η αριθμητική μεθοδολογία MacCormack για διαστατές τιμές των παραμέτρων.	82
5.	Πρόγραμμα rathmac.for προσδιορισμού των συναρτήσεων A(x,t), υ(x,t) και p(x,t) καθώς και της Q(t). Εφαρμόζεται η αριθμητική μεθοδολογία MacCormack για αδιάστατες τιμές των παραμέτρων.	87
6.	Πρόγραμμα rathlax.for προσδιορισμού των συναρτήσεων A(x,t), υ(x,t) και p(x,t) καθώς και της Q(t). Εφαρμόζεται η αριθμητική μεθοδολογία Lax Wendroff για αδιάστατες τιμές των παραμέτρων.	93
7.	Πρόγραμμα acpercon.for υπολογισμού παροχής εύκαμπτου αγωγού, με τη μέθοδο Runge-Kutta 4 ^{ης} τάξης, στην περίπτωση επιβολής αρμονικού συναρτησιακού περίσταλσης δύο ανεξαρτήτων μεταβλητών.	98
8.	Πρόγραμμα zarea.for υπολογισμού παροχής εύκαμπτου αγωγού, με τη μέθοδο Runge-Kutta 4 ^{ης} τάξης, στην περίπτωση επιβολής αρμονικού συναρτησιακού μιας ανεξάρτητης μεταβλητής.	103
	ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι Ι Μαθηματική διαμόρφωση Συνήθους Διαφορικής Εξίσωσης μοντέλου	111
	ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΙΙΙ	

Αδιαστατοποίηση και εύρεση συντελεστών Σ.Δ.Ε. για την περίπτωση επιβολής αρμονικού συναρτησιακού περίσταλσης δύο ανεξαρτήτων μεταβλητών

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

119

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην παρούσα εργασία εφαρμόζονται γνωστές υπολογιστικές μεθοδολογίες για την αντιμετώπιση προβλημάτων ροής ρευστού μέσα σε αγωγό με κινούμενα τοιχώματα. Παρουσιάζεται μια μονοδιάστατη μοντελοποίηση των εξισώσεων Navier-Stokes που επιλύονται με αριθμητικό τρόπο.

Κύρια διαπραγματεύεται περισταλτικές ροές οι οποίες εδώ μοντελοποιούνται με αρμονικές συναρτήσεις της διατομής του σωλήνα ή της εξωτερικής επιβαλλόμενης πίεσης. Τέτοιου είδους ροές απαντώνται σε φυσιολογικό επίπεδο: στον οισοφάγο για την κατάποση της τροφής, στην εντερική οδό για την προώθηση του χυλού, στον ουρητήρα για την μετακίνηση των ούρων από τα νεφρά στην ουροδόχο κύστη, σε διάφορους πόρους αδένων, στα αρτηρίδιαφλεβίδια για την προώθηση των συστατικών του αίματος, στο χοληδόχο πόρο, στα λεμφικά αγγεία κλπ., ενώ σε τεχνολογικό επίπεδο απαντώνται: στην άντληση οξειδωτικών υλικών και ρευστών (αίμα, υγρά φάρμακα, υγρές τροφές, λάσπη τσιμέντου) με τα οποία δεν πρέπει να έρθει σε επαφή ο αντλητικός μηχανισμός.

Ο Taylor (1951)^[1], μελέτησε τη περισταλτική ροή παρατηρώντας την κίνηση των υδρόβιων μικροσκοπικών οργανισμών. Μεταγενέστερες μελέτες συγκέντρωσαν το ενδιαφέρον τους στη μεταφορά φυσιολογικών ρευστών και στη πιθανή χρησιμοποίηση της περισταλτικής άντλησης για την αποδοτική μεταφορά της λάσπης τσιμέντου και των ευαίσθητων και διαβρωτικών υγρών. Οι Burns & Parkes (1967)^[2] και ο Hanin (1968)^[3], συνεισφέρανε στη θεωρία της περισταλτικής άντλησης χωρίς αναφορά σε φυσιολογικές εφαρμογές. Οι Barton & Raynor (1968)^[4], έκαναν υπολογισμούς βασισμένοι στη θεωρία της αξονοσυμμετρικής περίσταλσης για το χρόνο που απαιτείται, ώστε να διασχίσει ο χυλός το λεπτό έντερο και βρέθηκε αυτή η τιμή να είναι πολύ κοντά στις παρατηρούμενες.

Επίσης πειραματικές έρευνες περισταλτικής άντλησης έχουν πραγματοποιηθεί. Οι Latham (1966)^[5], Weinberg (1970)^[6] και Eckstein (1970)^[7], επιβεβαίωσαν πειραματικά τα κύρια χαρακτηριστικά των υπαρχουσών μέχρι τότε θεωριών στην περιοχή των μεγάλων μηκών κυμάτων.

Ενδιαφέρον για την περισταλτική άντληση προκλήθηκε και από τη μελέτη της λειτουργίας του ουρητήρα. Αξιόπιστες και ακριβείς μετρήσεις ούρων έγιναν διαθέσιμες μέσω εργασιών των Kiil (1957)^[8] και Boyarsky (1964)^[9]. Διάφορα υδροδυναμικά μοντέλα της λειτουργίας του ουρητήρα με περισταλτική κίνηση επιχειρήθηκαν, όπως των Shapiro (1967)^[10], Fung & Yih (1968)^[11], Shapiro, Jaffrin & Weinberg (1969)^[12], τα οποία παρουσιάζουν την περίσταλση ως μια σειρά απείρων όρων από ημιτονοειδή κύματα σε ένα κανάλι δύο διαστάσεων. Γι αυτό το λόγο η λειτουργία του ουρητήρα παραστήθηκε μόνο ποιοτικά. Αυτά τα μοντέλα εν μέρει εξηγούν το φαινόμενο βασιζόμενα στη σπουδαιότητα του παλίνδρομου ρεύματος (reflux), που αναπτύσσεται κατά την περίσταλση. Μια εκδήλωση αυτού του φαινομένου έχουμε, μερικές φορές, με το ταξίδι των βακτηρίων από την ουροδόχο κύστη στα νεφρά ενάντια στη συνολική μέση παροχή. Παρόμοιο φαινόμενο έχει παρατηρηθεί επίσης στο λεπτό έντερο. Αυτές οι παρατηρήσεις περιπλέκουν πολύ το φαινόμενο, διότι ο χρόνος της μετακίνησης είναι πολύ μικρός, ώστε να έχουμε μια εξήγηση λόγω διάχυσης και, διότι παλινδρομικά περισταλτικά κύματα δεν παρατηρούνται.

Οι Jaffrin & Shapiro (1971)^[13], εξήγησαν τις βασικές αρχές της περισταλτικής άντλησης και ξεκαθάρισαν τη σημασία των διάφορων παραμέτρων που κυριαρχούν στη ροή. Οι Weinberg, Jaffrin & Shapiro (1971)^[14], πρότειναν μοντέλα που παρουσιάζουν την περίσταλση του ουρητήρα πιο ρεαλιστικά. Ο Fung (1971)^[15], μελέτησε το συσχετισμό μεταξύ των δυνάμεων στα όρια ρευστού-τοιχώματος και δυναμικής των μυών του ουρητήρα. Μερικά από αυτά τα μοντέλα έδειξαν ότι παρατηρούνται ουρομετρικοί παλμοί πίεσης και ρυθμοί παροχής, που μπορούν να εξηγηθούν φυσιολογικά υποθέτοντας τις διαστάσεις του ουρητήρα.

Η επίδραση της αδράνειας και της καμπυλότητας στη ροϊκή γραμμή της περίσταλσης ερευνήθηκε, για κανάλι διδιάστατο, από τον Jaffrin (1973)^[16], ενώ για αξονοσυμμετρικούς αγωγούς από τον Manton (1975)^[17]. Στα επόμενα χρόνια πολλές μελέτες παρουσιάστηκαν, αναλύοντας μεταξύ άλλων, σωματιδιακή μεταφορά στις περισταλτικές ροές (Hung & Brown 1976^[18]), οι ίδιοι (1977)^[19], χρησιμοποίησαν σχήμα πεπερασμένων διαφορών βασισμένο σε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες και επικεντρώθηκαν στις επιδράσεις της αδράνειας και στα χαρακτηριστικά μεταφοράς μηχανικής ενέργειας. Οι Takabatake & Ayukawa (1982)^[20] παρουσίασαν λύσεις πεπερασμένων διαφορών για μέτριους αριθμούς Reynolds. Την επίδραση των περιφερειακών στρωμάτων έδειξαν οι Shukla, Parihar & Rao (1980)^[21]. Μια σύνοψη των περισσοτέρων θεωρητικών και πειραματικών ερευνών παρουσίασε ο Rath (1980)^[22], ενώ στην επίδραση μη νευτώνειων χαρακτηριστικών αναφέρονται οι Bohme & Friedrich (1983)^[23]. Μια πλήρη επισκόπηση θεωρίας και πειραμάτων παρουσιάζεται από τους Srivastava & Srivastava(1984)^[24]. Στις περισσότερες των εργασιών τουλάχιστον μία των παραμέτρων, κυρίως το πλάτος διέγερσης, ο λόγος του πλάτους του καναλιού προς το μήκος κύματος και ο αριθμός Reynolds υποθέτονται μικροί. Οι Takabatake, Ayukawa & Mori (1988)^[25], στην αριθμητική τους μελέτη για την περισταλτική ροή, αποδέσμευσαν τις παραμέτρους από τους ανωτέρω περιορισμούς. Μια σημαντική ανάπτυξη του θέματος τελευταία έγινε από τους Srivastava & Saxena (1994)^[26].

Όλες οι ανωτέρω προσεγγίσεις έγιναν με διδιάστατη μοντελοποίηση της ροής ή αξονοσυμμετρική και είναι προφανής η απουσία μιας αποτελεσματικής αριθμητικής μεθόδου με εκτεταμένη ανάλυση στη γενική περίπτωση ροής τριών διαστάσεων. Από τις ελάχιστες εργασίες που αντιμετωπίζουν το πρόβλημα της περίσταλσης αριθμητικά με μοντελοποίηση της ροής σε μία διάσταση, είναι αυτές του γερμανού Η. J. Rath (1976-78). Αρχικά εκπόνησε διατριβή σε αριθμητικό μονοδιάστατο πρόβλημα μη μόνιμης ροής σε αγωγό (1976)^[27] και εκ των υστέρων παρουσίασε με την ίδια μεθοδολογία ένα καθαρά περισταλτικό πρόβλημα (1978)^[28], το οποίο επιλύεται στην παρούσα εργασία. Και στις δύο περιπτώσεις η περισταλτική κίνηση επιτυγχάνεται με μεταβλητή επιβαλλόμενη εξωτερικά πίεση σε ελαστικό αγωγό.

Η ασυμφωνία των αποτελεσμάτων οδήγησε στην αντιμετώπιση του προβλήματος με διαφορετικό τρόπο και με την ανάπτυξη μιας επιπλέον αριθμητικής μεθοδολογίας, ώστε να εξαχθούν τελικά κάποια χρήσιμα και ισχύοντα συμπεράσματα.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ ΕΙΣΑΓΩΓΗΣ:

- [1] TAYLOR, G. I. 1951. Analysis of the swimming of microscopic organisms. Proc. R. Soc. A 209: 447-461.
- ^[2] BURNS, J. C. & PARKES, T. 1967. Peristaltic motion. J. Fluid Mech. 29: 731-743
- ^[3] HANIN, M. 1968. The flow through a channel due to transversely oscillating walls. *Israel J. Technol.* **6**: 67-71.
- ^[4] BARTON, C. & RAYNOR, S. 1968. Peristaltic flow in tubes. Bull. Math. Biophys. 30: 663-680.
- ^[5] LATHAM, T. W. 1966. Fluid Motions in a Peristaltic Pump. S. M. Thesis, M.I.T., Cambridge, Mass.
- ^[6] WEINBERG, S. L. 1970. A Theoretical and Experimental Treatment of Peristaltic Pumping and its Relation to Ureteral Function. *Ph.D. Thesis*, M.I.T. ., Cambridge, Mass.
- ^[7] ECKSTEIN, E. C. 1970. Experimental and Theoretical Pressure Studies of Peristaltic Pumping. S. M. *Thesis*, Dep. of Mech. Eng., M.I.T., Cambridge, Mass.
- ^[8] KIIL, F. 1957. The Function of the Ureter and the Renal Pelvis. Philadelphia: Saunders.
- ^[9] BOYARSKY, S. 1964. Surgical physiology of the renal pelvis. *Monogr. Surg. Sci.* 1: 173-213
- ^[10] SHAPIRO, A. H. 1967. Pumping and retrograde diffusion in peristaltic waves. *Proc. Workshop Ureteral Reflux Children*, Nat. Acad. Sci. Wash., D.C.
- ^[11] FUNG, Y. C. & YIH, C. S. 1968. Peristaltic transport. J. Appl. Mech. 35: 669-675.
- ^[12] SHAPIRO, A. H., JAFFRIN, M. Y., WEINBERG, S. L. 1969. Peristaltic pumping with long wavelengths at low Reynolds number. *J. Fluid Mech.* **37**: 799-825..
- ^[13] JAFFRIN, M. Y. & SHAPIRO, A. H. 1971. Peristaltic pumping. Ann. Rev. Fluid Mech. 3: 13-36.
- ^[14] WEINBERG, S. L., JAFFRIN, M. Y. & SHAPIRO, A. H. 1971. An hydrodynamical model of ureteral function. *Proc. Workshop Hydrodynam. Upper Urinary Tract.* Nat. Acad. Wash. D.C.
- ^[15] Fung, Y. C. 1971. Peristaltic pumping, a bioengineering model. *Proc. Workshop Hydrodynam. Upper Urinary Tract.* Nat. Acad. Sci, Wash., D.C.
- ^[16] JAFFRIN, M. Y. 1973. Inertia and streamline curvature effects on peristaltic pumping. *Intl. J. Eng. Sci.* **11**: 681-699.
- ^[17] MANTON, M. J. 1975. Long wavelength peristaltic pumping at low Reynolds number. *J. Fluid Mech.* **68**, 467-476.
- ^[18] HUNG, T. K. & BROWN, T.D. 1976. Solid-particle motion in two-dimensional peristaltic flows. *J. Fluid Mech.* **73**: 77-96.
- ^[19] BROWN, T. D. & HUNG, T. K. 1977. Computational and experimental investigation of two-dimensional nonlinear peristaltic flows. *J. Fluid Mech.* **83**: 249-272.
- ^[20] TAKABATAKE, S. & AYUKAWA, K. 1982. Numerical study of two dimensional peristaltic flows. *J. Fluid Mech.* **122**: 439-465.
- ^[21] SHUKLA. J. B., PARIHAR, R. S. & RAO, B. R. 1980. Effects of peripheral-layer viscosity on peristaltic transport of a bio-fluid. *J. Fluid Mech.* **97**: 225-237.
- ^[22] RATH, H. J. 1980. Peristaltische Strömungen, Spring-Verlag, Berlin.
- ^[23] BOHME, G. & FRIEDRICH, R. 1983. Peristaltic flow of viscoelastic liquids. *J. Fluid Mech.* **128**: 109-122.

- ^[24] SRIVASTAVA, L. M. & SRIVASTAVA, V. P. 1984. Peristaltic transport of blood: Casson model II. *J. Biomech.* **17**: 821-830.
- ^[25] TAKABATAKE, S., AYUKAWA, K. & MORI, A. 1988. Peristaltic pumping in circular cylindrical tubes: A numerical study of fluid transport and its efficiency. *J. Fluid Mech.* **193**: 267-283.
- ^[26] SRIVASTAVA, V. P. & SAXENA, M. 1994. A two-fluid model of non-Newtonian blood flow induced by peristaltic waves. *Rheol. Acta* **33**, in press.
- ^[27] RATH, H. J. 1976. Berechnungen zu einem ventillosen Pumpprinzip. *Dissertation*, TU Hannover.
- ^[28] RATH, H. J. 1978. Ein Beitrag zur Berechnung einer peristaltischen Strömung in elastischen Leitungen, Acta Mechanica **31**: 1-12.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1°

Μοντέλο περισταλτικής άντλησης ελαστικού αγωγού

1.1 Θεωρούμενη πειραματική διάταξη και ρευστομηχανικές εξισώσεις

Το πείραμα που θα προσομοιωθεί σε Η/Υ για να επιλυθεί αριθμητικά, είναι αυτό που φαίνεται στο σχήμα 1.1. Πρόκειται για θεώρηση όμοια με αυτή του Η. J. Rath⁽³¹⁾, όπου υπάρχει ένας αγωγός με ελαστικά τοιχώματα, στον οποίο εφαρμόζεται εξωτερικά ένα κύμα πίεσης τέτοιο ώστε, να προκαλείται περισταλτική κίνηση του ρευστού που περιέχεται σ'αυτόν. Η *περίσταλση* είναι μια μορφή μεταφοράς ρευστού, που προκαλείται όταν ένα προοδευτικό κύμα, που προκύπτει από τη συστολή και τη διαστολή ενός παραμορφώσιμου αγωγού, διαδίδεται κατά μήκος των τοιχωμάτων του αγωγού αυτού, που περιέχει το ρευστό, το οποίο μεταφέρεται στη διεύθυνση του διαδιδόμενου κύματος. Στη δεδομένη περίπτωση ο αγωγός συνδέεται στα άκρα του με δύο όμοια απαραμόρφωτα κυλινδρικά δοχεία δεξιά και αριστερά, μέσω των οποίων μπορούμε και παρατηρούμε τη στάθμη του ρευστού κατά την εξέλιξη του πειράματος. Πρόκειται δηλαδή για μία διάταξη συγκοινωνούντων δοχείων τα οποία όμως συνδέονται με ελαστικό αγωγό.



Σχήμα 1.1 Πειραματική διάταξη θεωρούμενου πειράματος (συγκοινωνούντα δοχεία).

1.1.1 Διατήρηση της μάζας

Η διαφορική εξίσωση του θεωρήματος διατήρησης της μάζας ή εξίσωση της συνέχειας έχει ως εξής:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{\upsilon}) = 0 \tag{1.1}$$

όπου: ρ η πυκνότητα του ρευστού υ η ταχύτητά του t ο χρόνος

Ο μετασχηματισμός της ανωτέρω, σε κυλινδρικές συντεταγμένες τριών διαστάσεων (r, φ, x), γίνεται με χρήση του διαφορικού τελεστή:

$$\operatorname{div}(\rho\vec{\upsilon}) = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \rho \upsilon_{r}) + \frac{\partial}{\partial \phi} (\rho \upsilon_{\phi}) + \frac{\partial}{\partial x} (r \rho \upsilon_{x}) \right]$$
(1.2)**

Συνδυάζοντας τις (1.1) και (1.2) προκύπτει:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \rho \upsilon_r) + \frac{\partial}{\partial \phi} (\rho \upsilon_{\phi}) + \frac{\partial}{\partial x} (r \rho \upsilon_x) \right] = 0$$
(1.3)

 Θεωρούμε ρευστό ασυμπίεστο, δηλαδή ομογενές ρευστό με σταθερή πυκνότητα σε κάθε σημείο του χώρου που καταλαμβάνει [ρ(r, φ, x)=σταθ.]. Επομένως μιλάμε για ασυμπίεστη ροή. Έτσι:

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} = 0$$

 Θεωρούμε αξονοσυμμετρική ροή του ρευστού, με τη μια διάσταση x να έχει διεύθυνση όμοια με του άξονα του αγωγού και με την άλλη r να έχει τη διεύθυνση της ακτίνας του αγωγού, ενώ κατά το φ άξονα δεν υφίσταται ροή, δηλαδή έχουμε μόνο αξονική και ακτινική κίνηση του

ρευστού, χωρίς να έχουμε περιφερειακή $\left(\frac{\partial \upsilon_{\phi}}{\partial \phi} = 0\right)$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω η (1.3) γίνεται:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{r}\,\boldsymbol{\upsilon}_{\mathrm{r}}) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{r}\,\boldsymbol{\upsilon}_{\mathrm{x}}) = 0$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη επί (2πr dr) και ολοκληρώνοντας από 0 έως την ακτίνα του αγωγού R=R(x,t), παίρνουμε:

$$2\pi \int_{0}^{R} \frac{\partial}{\partial r} (r \upsilon_{r}) dr + 2\pi \int_{0}^{R} \frac{\partial (\upsilon_{x} r)}{\partial x} dr = 0$$
(1.4)

* Τσαγγάρη Σ., Μηχανική των Ρευστών.

Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα, 1995. Σελ.:58, σχ.(4.10).

^{**} Τσαγγάρη Σ., Μηχανική των Ρευστών. Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα, 1995. Σελ.:511, παράρτημα Ι6.

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Leibnitz για παραγώγιση ολοκληρωμάτων*, ο δεύτερος όρος της (1.4) γίνεται:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{R_1(x,t)}^{R_2(x,t)} \upsilon_x r \, dr = \int_{R_1(x,t)}^{R_2(x,t)} \frac{\partial}{\partial x} (\upsilon_x r) \, dr + [\upsilon_x(R_1,x,t) \cdot R_1] \frac{\partial R_1}{\partial x} - [\upsilon_x(R_2,x,t) \cdot R_2] \frac{\partial R_2}{\partial x}$$

Είναι $R_1(x,t)=0$ και $R_2(x,t)=R(x,t)$ η ακτίνα του ελαστικού αγωγού, ενώ η αξονική ταχύτητα στο τοίχωμα είναι μηδενική, δηλαδή: $u_x(R,x,t)=0$. Οπότε η ανωτέρω γίνεται:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{R(x,t)} \upsilon_x r \, dr = \int_0^{R(x,t)} \frac{\partial(\upsilon_x r)}{\partial x} \, dr$$

Αντικαθιστώντας στην (1.4) έχουμε: $2\pi [r \upsilon_r]_0^R + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^R \upsilon_x \cdot 2\pi r \, dr = 0$

όπου: $\int_{0}^{R} \upsilon_{x} \cdot 2\pi r \, dr \, \eta \, \pi \alpha \rho \circ \chi \dot{\eta} \, \delta \gamma \kappa \circ \upsilon \, Q = A \cdot \overline{\upsilon}_{x}, \, (\theta \epsilon \omega \rho \dot{\omega} v \tau \alpha \zeta \, \alpha \sigma \upsilon \mu \pi i \epsilon \sigma \tau o \rho \epsilon \upsilon \sigma \tau \dot{\sigma}), \, \epsilon v \dot{\omega}$ $\upsilon_{r} (R, x, t) = \frac{\partial R}{\partial t}, \, \delta i \dot{\sigma} \tau \eta \, \alpha \xi \circ v i \kappa \dot{\eta} \, \tau \alpha \chi \dot{\upsilon} \tau \eta \tau \alpha \tau \sigma \upsilon \rho \epsilon \upsilon \sigma \tau \dot{\sigma} \dot{\kappa} \alpha \tau \sigma \rho \upsilon \theta \mu \dot{\sigma} \zeta \, \mu \epsilon \tau \alpha \beta \circ \lambda \dot{\eta} \zeta \, \tau \eta \zeta \, \alpha \kappa \tau i v \alpha \zeta \, R$

 $\upsilon_r(\mathbf{R}, \mathbf{x}, t) = \frac{1}{\partial t}$, διότι η αξονική ταχύτητα του ρευστού και ο ρυθμός μεταβολής της ακτίνας R ταυτίζονται. Η τελευταία γίνεται τελικά:

$$2\pi \frac{\partial R}{\partial t}R + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \implies \frac{\partial \pi R^2}{\partial t} + \frac{\partial A\overline{\upsilon}_x}{\partial x} = 0 \implies \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial (A \cdot \overline{\upsilon}_x)}{\partial x} = 0 \qquad (1.5)$$

1.1.2 Διατήρηση της ορμής μονοδιάστατης ροής

Έστω ότι σε οποιοδήποτε σημείο της ροής, είτε στα δοχεία, είτε στον αγωγό, ξεχωρίζουμε ένα κυλινδρικό στοιχείο ρευστού μάζας dm, πυκνότητας ρ σε ροή ταχύτητας υ_s, κατά τη διεύθυνση s, που σχηματίζει γωνία α με την κατακόρυφη, σχήμα 1.2. Το μήκος του στοιχείου είναι ds και η διατομή του dA, ενώ ο όγκος του dV=ds dA. Επιδρούν σ' αυτό τρία είδη δυνάμεων κατά τη διεύθυνση της ροής.

Η δύναμη πίεσης, που είναι:

$$F_{p} = \left[p - \left(p + \frac{\partial p}{\partial s} ds \right) \right] dA$$
(1.6)

 Η δύναμη του πεδίου βαρύτητας g, που είναι η συνιστώσα του βάρους dG κατά τη διεύθυνση s της ροής, δηλαδή:

$$F_{G} = dG \cdot \cos \alpha = g \cdot dm \cdot \cos \alpha = g \cdot \frac{dm}{dV} dV \cdot \cos \alpha \Longrightarrow$$

$$F_{G} = g \cdot \rho \cdot ds \cdot dA \cdot \cos \alpha \qquad (1.7)$$

^{*} Murray R. Spiegel, Mathematical Handbook of Formulas and Tables, Schaum's Outline Series, Mc Graw-Hill, New York. (μετάφραση: Περσίδη Σ. Κ., ΕΣΠΙ, Αθήνα. Σελ.: 95, σχ.: 15.14)



Σχήμα 1.2. Ισορροπία δυνάμεων στοιχείου ρευστού σε γενική περίπτωση μονοδιάστατης ροής.

 Η δύναμη τριβής ασκείται στα τοιχώματα του στοιχείου και δρα αντίθετα προς την κίνηση του ρευστού, μέσω διατμητικών τάσεων. Αν p_v είναι η πίεση απωλειών ισχύει:

$$F_{v} = -\frac{\partial p_{v}}{\partial s} dV$$
(1.8)

Θεωρώντας στρωτή ροή ρευστού δυναμικού ιξώδους μ, για αγωγό μήκους Ι, ισχύει ο νόμος Poiseuille^{*} ο οποίος εκφράζει την παροχή Q ανάλογη με την τέταρτη δύναμη της ακτίνας του αγωγού R:

$$Q = \overline{\upsilon}_{s}A = \frac{\delta p}{8\mu l} \pi R^{4} \Longrightarrow \frac{\delta p}{l-0} = \frac{8\pi\mu A\overline{\upsilon}_{s}}{\left(\pi R^{2}\right)^{2}} \Longrightarrow$$

 $\frac{\delta p}{\delta l} \equiv \frac{\partial p_v}{\partial s} = 8\pi\mu \frac{\upsilon_s}{A}$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω στην (1.8) και λαμβάνοντας υπόψη τον ορισμό της κινηματικής συνεκτικότητας^{**}, από τον οποίο έχουμε μ = ρ ν, παίρνουμε:

$$F_{v} = -\rho \cdot 8\pi v \frac{\upsilon_{s}}{A} ds dA$$
(1.9)

Η δύναμη αδράνειας ισορροπεί τις παραπάνω εξωτερικές δυνάμεις στο στοιχείο ρευστού, οπότε:

$$d\mathbf{m} \cdot \mathbf{b}_{s} = \mathbf{F}_{p} + \mathbf{F}_{G} + \mathbf{F}_{v} \tag{1.10}$$

όπου b_s^\dagger η ουσιώδης επιτάχυνση στη ροϊκή γραμμή s:

 $\mathbf{b}_{\mathrm{s}} = \frac{\partial \mathbf{\upsilon}_{\mathrm{s}}}{\partial t} + \mathbf{\upsilon}_{\mathrm{s}} \frac{\partial \mathbf{\upsilon}_{\mathrm{s}}}{\partial \mathrm{s}}$

^{*} Τσαγγάρη Σ., Μηχανική των Ρευστών.

Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα, 1995. Σελ.: 161, σχ.(9.33).

^{**} Τσαγγάρη Σ., Μηχανική των Ρευστών. Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα, 1995. Σελ.: 27.

[†] Τσαγγάρη Σ., Μηχανική των Ρευστών. Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα, 1995. Σελ.: 515, παράρτημα ΙΙ1.

Αντικαθιστώντας τις δυνάμεις, την επιτάχυνση και τη dm=pdsdA, στην (1.10), παίρνουμε:

$$\rho \cdot ds \cdot dA \left(\frac{\partial \upsilon_s}{\partial t} + \upsilon_s \frac{\partial \upsilon_s}{\partial s} \right) = \left[p - \left(p + \frac{\partial p}{\partial s} ds \right) \right] dA + g \cdot \rho \cdot ds \cdot dA \cdot \cos \alpha - \rho \cdot 8\pi v \frac{\upsilon_s}{A} ds \cdot dA \Rightarrow$$

$$\rho \frac{\partial \upsilon_s}{\partial t} + \rho \upsilon_s \frac{\partial \upsilon_s}{\partial s} = -\frac{\partial p}{\partial s} + \rho \cdot g \cdot \cos \alpha - \rho \cdot 8\pi v \frac{\upsilon_s}{A}$$

Το cosα εκφράζεται με τα στοιχειώδη διαστήματα ds και dh στο τρίγωνο που σχηματίζεται με προβολή του ds στη κατακόρυφη διεύθυνση h:

$$\cos \alpha = -\frac{\mathrm{dh}}{\mathrm{ds}}$$

Αντικαθιστώντας στην τελευταία έχουμε:

$$\rho \frac{\partial \upsilon_{s}}{\partial t} + \frac{\rho}{2} \frac{\partial \left(\upsilon_{s}^{2}\right)}{\partial s} + \frac{\partial p}{\partial s} + \rho \cdot g \cdot \frac{dh}{ds} + \rho \cdot 8\pi \nu \frac{\upsilon_{s}}{A} = 0$$
(1.11)

Η συγκεκριμένη εξίσωση αποτελείται από όρους εκφρασμένους σε (N/m³), δύναμη ανά μονάδα όγκου. Διαιρώντας με την πυκνότητα, εκφράζουμε αυτούς σε (N/kg), δύναμη ανά μονάδα μάζας και για την περίπτωση του οριζόντιου αγωγού δεν έχουμε υψομετρική διαφορά dh=0, οπότε η (1.11) γίνεται:

$$\frac{\partial \upsilon_{s}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\upsilon_{s}^{2}}{2} + \frac{p}{\rho} \right) + 8\pi \upsilon \frac{\upsilon_{s}}{A} = 0$$
(1.12)

1.1.3 Θεώρηση μοντέλου ελαστικού αγωγού

Η θεώρηση που ακολουθεί αναφέρεται σε λεπτότοιχους σωλήνες, που είναι συμμετρικοί εκ περιστροφής, έχοντας μια εσωτερική πίεση p και καταπονείται το τοίχωμά τους με μια επίπεδη εντατική κατάσταση. Το τοίχωμα του σωλήνα θεωρείται ως μια μεμβράνη, που δέχεται μόνο εφελκυστικές ή θλιπτικές τάσεις εφαπτομενικές στο επίπεδό της. Οι ορθές αυτές τάσεις θεωρούνται, (επειδή το πάχος είναι πολύ μικρό) σταθερές σε όλο το πάχος s του τοιχώματος. Λεπτότοιχος θεωρείται ένας σωλήνας, αν το πάχος του είναι μικρότερο από το 10% της ακτίνας του.

Έστω ο κυλινδρικός ελαστικός σωλήνας του σχήματος 1.3, με εσωτερική διάμετρο απαραμόρφωτου αγωγού D₀ και πάχος s<<D₀, περιέχει ρευστό με εσωτερική πίεση p, ενώ η εξωτερική πίεση είναι p_α. Οι τάσεις που αναπτύσσονται στα τοιχώματά του είναι σ_x και σ_t.

Η τάση σ_t έχει τη διεύθυνση της εφαπτομένης της περιμέτρου ονομάζεται εφαπτομενική ή εγκάρσια τάση και υπολογίζεται από τη σχέση^{*} :

$$\sigma_{t} = \frac{D_{0}}{2s} (p - p_{\alpha})$$

^{*} Κερμανίδη Θ., Αντοχή Υλικών 1. Εκδοτικός Οίκος Αφών Κυριακίδη, Θεσσαλονίκη, 1988. Σελ.: 220, σχ.(5.2).



Σχήμα 1.3. Εντατική κατάσταση στο τοίχωμα του ελαστικού σωλήνα.

Η τάση σ_x, που ασκείται στο τοίχωμα του αγωγού, έχει την διεύθυνση του άξονα του σωλήνα, ονομάζεται αξονική ή διαμήκης τάση και υπολογίζεται από τη σχέση^{*}:

$$\sigma_{x} = \frac{1}{2}\sigma_{t} = \frac{D_{0}}{4s}(p - p_{\alpha})$$

Οι παραπάνω τάσεις επιφέρουν αντίστοιχες παραμορφώσεις. Με επαλληλία των δύο παραπάνω εντατικών καταστάσεων προκύπτει η σχέση μεταξύ εγκάρσιας παραμόρφωσης ε_t και τάσεων^{**}. Αν ν είναι ο λόγος Poisson και Ε το μέτρο ελαστικότητας του υλικού του σωλήνα, τότε:

$$\epsilon_{t} = \frac{1}{E} \left(\sigma_{t} - v \sigma_{x} \right) \stackrel{\circ}{=} \frac{D - D_{0}}{D_{0}}$$

όπου D η μεταβαλλόμενη εσωτερική διάμετρος του αγωγού.

Επιλύνοντας την τελευταία ως προς τη μεταβλητή διάμετρο D και αντικαθιστώντας τις τάσεις προκύπτει:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_{0} \left[1 + \frac{\mathbf{D}_{0} (2 - \mathbf{v})}{4 \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{s}} (\mathbf{p} - \mathbf{p}_{\alpha}) \right]$$
(1.13)

Αντικαθιστώντας την (1.13) στη σχέση που δίνει τη διατομή του σωλήνα: $A = \frac{\pi D^2}{4}$, παίρνουμε τη συνάρτηση της διατομής με την πίεση:

$$A = A(p) = \frac{\pi D_0^2}{4} \left[1 + \frac{D_0 \left(1 - \frac{1}{2} v \right)}{2 \cdot E \cdot s} (p - p_\alpha) \right]^2$$
(1.14)

* Κερμανίδη Θ., Αντοχή Υλικών 1.

Εκδοτικός Οίκος Αφών Κυριακίδη, Θεσσαλονίκη, 1988. Σελ.: 219, σχ.(5.1) & (5.3).

** Κερμανίδη Θ., Αντοχή Υλικών 1. Εκδοτικός Οίκος Αφών Κυριακίδη, Θεσσαλονίκη, 1988. Σελ.: 169, σχ.(4.19). Η τελευταία μπορεί να λυθεί ως προς την εσωτερική πίεση οπότε σχηματίζουμε τη συνάρτηση της εσωτερικής πίεσης με τη διατομή:

$$p = p_{\alpha} + \frac{2 \cdot E \cdot s \left(\sqrt{\frac{A}{A_0}} - 1 \right)}{D_0 \left(1 - \frac{1}{2} v \right)}$$
(1.15)

Οι εξισώσεις συνέχειας (1.5), ορμής (1.12) και ελαστικότητας (1.15), απαρτίζουν ένα υπερβολικό, μη γραμμικό σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους, το οποίο επιλύεται με αριθμητικό τρόπο στα επόμενα κεφάλαια. Οι άγνωστοι στη συγκεκριμένη περίπτωση, που περιγράφουν τη περισταλτική ροή, είναι οι τρεις συναρτήσεις: A=A(x,t) εσωτερικής διατομής σωλήνα, υ_x=υ_x(x,t) ταχύτητας του ρευστού στο σωλήνα και p=p(x,t) πίεσης του ρευστού στο εσωτερικό του σωλήνα, με τη γνώση των οποίων περιγράφεται η μοντελοποιημένη ροή έτσι όπως αυτή τέθηκε.

1.2 Αδιαστατοποίηση εξισώσεων

Re

Το συγκεκριμένο ροϊκό πρόβλημα μπορεί να απλουστευθεί ως προς τις παραμέτρους, κάνοντας αδιαστατοποίηση των εξισώσεων. Ορίζουμε τα παρακάτω αδιάστατα μεγέθη και αδιάστατους αριθμούς:

$$\begin{split} \tilde{x} &= \frac{x}{\lambda}: & \text{για το αδιάστατο μήκος, όπου λ το μήκος κύματος με το οποίο διεγείρουμε εξωτερικά τον ελαστικό σωλήνα. \\ \tilde{t} &= \frac{t}{\lambda_c}: & \text{για τον αδιάστατο χρόνο, όπου c η φασική ταχύτητα του κύματος διέγερσης.} \\ \tilde{A} &= \frac{A}{A_m}: & \text{για την αδιάστατη εσωτερική διατομή του ελαστικού σωλήνα, όπου A_m η μέση εσωτερική διατομή του ελαστικού σωλήνα κατά τη διέγερση. \\ \tilde{\upsilon} &= \frac{\upsilon}{c}: & \text{για την αδιάστατη ταχύτητα του ρευστού.} \\ \tilde{p} &= \frac{p}{\rho c^2}: & \text{για την αδιάστατη εσωτερική πίεση του σωλήνα.} \\ \varepsilon &= \frac{R_m \cdot c}{v}: & \text{για την αδιάστατη εσωτερική πίεση του σωλήνα.} \\ \delta &= \frac{R_m}{\lambda}: & \text{για την αδιάστατη εσωτερική πίεση του σωλήνα.} \\ \delta &= \frac{R_m}{\lambda}: & \text{για την μέση αδιάστατη εσωτερική πίεση του σωλήνα.} \\ \delta &= \frac{R_m}{\lambda}: & \text{για την μέση αδιάστατη εσωτερική ακτίνα του ελαστικού σωλήνα.} \\ \delta &= \frac{R_m}{\lambda}: & \text{για την μέση αδιάστατη εσωτερική ακτίνα του ελαστικού σωλήνα.} \\ \delta &= \frac{R_m}{\lambda}: & \text{για την μέση αδιάστατη εσωτερική ακτίνα του ελαστικού σωλήνα.} \\ \delta &= \frac{R_m}{\lambda}: & \text{για την μέση αδιάστατη εσωτερική ακτίνα του ελαστικού σωλήνα.} \\ \delta &= \frac{R_m}{\lambda}: & \text{για την μέση αδιάστατη εσωτερική ακτίνα του ελαστικού σωλήνα.} \\ \delta &= \frac{R_m}{\lambda}: & \text{για την μέση αδιάστατη εσωτερική ακτίνα του ελαστικού σωλήνα.} \\ \delta &= \frac{R_m}{\lambda}: & \text{για την μέση αδιάστατη εσωτερική ακτίνα του ελαστικού σωλήνα.} \\ \delta &= \frac{R_m}{\lambda}: & \text{για την μέση αδιάστατη εσωτερική ακτίνα του ελαστικού σωλήνα.} \\ \delta &= \frac{R_m}{\lambda}: & \text{για την μέση αδιάστατη εσωτερική ακτίνα του ελαστικού σωλήνα.} \\ \delta &= \frac{R_m}{\lambda}: & \text{για την μέση αδιάστατη το συτερική ακτίνα του ελαστικού σωλήνα.} \\ \varepsilon &= \frac{R_m}{\lambda}: & \text{για την μέση αδιάστατη του συτερική ακτίνα του ελαστικού σωλήνα.} \\ \varepsilon &= \frac{R_m}{\lambda}: & \text{για την μέση αδιάστατη εσωτερική ακτίνα του ελαστικού σωλήνα.} \\ \varepsilon &= \frac{R_m}{\lambda}: & \text{για την μέση αδιάστατη του συτερική ακτίνα του ελαστικού σωλήνα.} \\ \varepsilon &= \frac{R_m}{\lambda}: & \text{για την μέση αδιάστατη του συτερική ακτίνα του ελαστικού σωλήνα.} \\ \varepsilon &= \frac{R_m}{\lambda}: & \text{για την μέση αδιάστατη του συτερική αται ασιδαστατη α συ ασισο συτο α α σιδα στα ατα α$$

$$(\delta \equiv \text{Str} = \frac{f \cdot R_m}{c}).$$

$$\tilde{E} = \frac{E}{\rho c^2}$$
: για το αδιάστατο μέτρο ελαστικότητας του υλικού του ελαστικού σωλήνα.

$$\begin{split} \widetilde{\mathbb{S}} &= \frac{\mathbb{S}}{R_{m}} \colon \quad \text{για το αδιάστατο πάχος τοιχώματος του ελαστικού σωλήνα.} \\ \widetilde{R}_{0} &= \frac{R_{0}}{R_{m}} \colon \quad \text{για την αδιάστατη αρχική εσωτερική ακτίνα του ελαστικού σωλήνα.} \\ \widetilde{p}_{\alpha} &= \frac{p_{\alpha}}{\rho c^{2}} \colon \quad \text{για την αδιάστατη εξωτερική πίεση διέγερσης.} \end{split}$$

Αν χρησιμοποιήσουμε τα ανωτέρω, οι εξισώσεις: (1.5) της συνέχειας, (1.12) της ορμής και (1.15) της συνάρτησης της πίεσης παίρνουν την πιο κάτω αδιάστατη μορφή:

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial (\tilde{A} \cdot \tilde{v}_x)}{\partial \tilde{x}} = 0$$
(1.16)

$$\frac{\partial \tilde{v}_{s}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial}{\partial \tilde{s}} \left(\frac{\tilde{v}_{s}^{2}}{2} + \tilde{p} \right) + \frac{8}{\text{Re} \cdot \delta} \frac{\tilde{v}_{s}}{\tilde{A}} = 0$$
(1.17)

$$\widetilde{p} = \widetilde{p}_{\alpha} + \frac{\widetilde{E} \cdot \widetilde{s} \left(\sqrt{\frac{\widetilde{A}}{\widetilde{A}_{0}}} - 1 \right)}{\widetilde{R}_{0} \left(1 - \frac{1}{2} v \right)}$$
(1.18)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2°

Αριθμητική επίλυση συστήματος εξισώσεων

2.1 Explicit μέθοδοι Lax-Wendroff δύο ημιβημάτων σε μια διάσταση

Τέτοια σχήματα κεντρικών, ως προς το χώρο, πεπερασμένων διαφορών διαπραγματεύονται μη γραμμικότητες και αποτελούν τη βάση πολλών σύγχρονων δι-βηματικών σχημάτων. Πρόκειται για μεθόδους με ακρίβεια δευτέρας τάξης, οι οποίες μεταξύ τους, για μη γραμμικά προβλήματα, οδηγούν σε διαφορετικά αποτελέσματα, παρόλο που είναι ταυτόσημες σε γραμμικά.

2.1.1 Σχήμα Richtmyer - Morton

Είναι αυτό που εφαρμόζεται εδώ, το οποίο παρουσιάστηκε για πρώτη φορά από τους Richtmyer & Morton (1967). Εισάγει ένα ενδιάμεσο βήμα αρχικά, το οποίο μπορεί να θεωρηθεί ως η λύση στην χρονική στιγμή t=(n+ ½)Δt, ακολουθούμενο από ένα δεύτερο βήμα, το οποίο δίνει τη λύση στο τελικό χρονικό βήμα t=(n+1)Δt. Έτσι οι εξισώσεις: (1.5) της συνέχειας, (1.12) της ορμής (με s≡x) και (1.15) της συνάρτησης της πίεσης διακριτοποιούνται ως εξής^{*}:

<u>1° βήμα</u>:

•
$$A_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left(A_i^n + A_{i+1}^n \right) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[\left(A \upsilon_x \right)_{i+1}^n - \left(A \upsilon_x \right)_i^n \right]$$

•
$$\left(\upsilon_{x}\right)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left[\left(\upsilon_{x}\right)_{i}^{n} + \left(\upsilon_{x}\right)_{i+1}^{n}\right] - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\left[\left(\frac{\upsilon_{x}^{2}}{2} + \frac{p}{\rho}\right)_{i+1}^{n} - \left(\frac{\upsilon_{x}^{2}}{2} + \frac{p}{\rho}\right)_{i}^{n}\right] - \frac{\Delta t}{2}8\pi\nu\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\upsilon_{x}}{A}\right)_{i}^{n} + \left(\frac{\upsilon_{x}}{A}\right)_{i+1}^{n}\right]$$

•
$$p_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = p_{\alpha} + \frac{2Es\left(\sqrt{\frac{A_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{A_{0}}} - 1\right)}{D_{0}\left(1 - \frac{1}{2}v\right)}$$
 (2.1. α, β, γ)

^{*} Charles Hirsch, Numerical Computation of Internal and External Flows 2.

John Wiley & Sons Ltd., Chichester - New York - Brisbane - Toronto - Singapore, 1988. Pg.: 238, eq.:(17.2.27).

•
$$A_{i}^{n+1} = A_{i}^{n} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\left(A \upsilon_{x} \right)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \left(A \upsilon_{x} \right)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right]$$

• $\left(\upsilon_{x} \right)_{i}^{n+1} = \left(\upsilon_{x} \right)_{i}^{n} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\left(\frac{\upsilon_{x}^{2}}{2} + \frac{p}{\rho} \right)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \left(\frac{\upsilon_{x}^{2}}{2} + \frac{p}{\rho} \right)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right] - \Delta t \cdot 8\pi v \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\upsilon_{x}}{A} \right)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + \left(\frac{\upsilon_{x}}{A} \right)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right]$
• $p_{i}^{n+1} = p_{\alpha} + \frac{2Es \left(\sqrt{\frac{A_{i}^{n+1}}{A_{0}}} - 1 \right)}{D_{0} \left(1 - \frac{1}{2} v \right)}$
(2.2. α, β, γ)

2.1.2 Σχήμα MacCormack πρόβλεψης-διόρθωσης (predictor-corrector)

Πρόκειται για δι-βηματικό σχήμα predictor-corrector, που ανέπτυξε ο MacCormack (1969) και αποτελεί μια άλλη έκδοση της Lax-Wendroff διακριτοποίησης. Πιθανώς είναι το πιο ευρέως διαδεδομένο σχήμα κατά το οποίο οι τιμές του predictor ορίζονται στο n+1 στο σημείο i και κατόπιν διορθώνονται στο βήμα του corrector όπου χρησιμοποιούνται οι τιμές του πρώτου βήματος. Το πρώτο βήμα του predictor, περιέχει μια προς τα μπρος πεπερασμένη διαφορά στο χώρο, ενώ το δεύτερο του corrector περιέχει μια προς τα πίσω, έτσι ώστε το συνολικό συνδυαζόμενο σχήμα να είναι ευσταθές. Στη περίπτωση αυτή οι εξισώσεις: (1.5) της συνέχειας, (1.12) της ορμής (με s=x) και (1.15) της συνάρτησης της πίεσης διακριτοποιούνται ως εξής^{*}:

Predictor:

•
$$A_i^{\overline{n+1}} = A_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\left(A \upsilon_x \right)_{i+1}^n - \left(A \upsilon_x \right)_i^n \right]$$

•
$$\left(\upsilon_{x}\right)_{i}^{\overline{n+1}} = \left(\upsilon_{x}\right)_{i}^{n} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\left(\frac{\upsilon_{x}^{2}}{2} + \frac{p}{\rho}\right)_{i+1}^{n} - \left(\frac{\upsilon_{x}^{2}}{2} + \frac{p}{\rho}\right)_{i}^{n} \right] - \Delta t \ 8\pi \nu \frac{\left(\upsilon_{x}\right)_{i}^{n}}{A_{i}^{n}}$$

•
$$p_i^{\overline{n+1}} = p_{\alpha} + \frac{2Es\left(\sqrt{\frac{A_i^{\overline{n+1}}}{A_0}} - \frac{B_i^{\overline{n+1}}}{D_0\left(1 - \frac{1}{2}v\right)}\right)}$$

(2.3.α,β,γ)

Corrector:

•
$$A_i^{n+1} = \frac{1}{2} \left(A_i^n + A_i^{\overline{n+1}} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\left(A \upsilon_x \right)_i^{\overline{n+1}} - \left(A \upsilon_x \right)_{i-1}^{\overline{n+1}} \right] \right)$$

20 Rhua

Charles Hirsch, Numerical Computation of Internal and External Flows 2.

John Wiley & Sons Ltd., Chichester - New York - Brisbane - Toronto - Singapore, 1988. Pg.: 239, eq.: (17.2.28).

•
$$(\upsilon_{x})_{i}^{n+1} = \frac{1}{2} \left((\upsilon_{x})_{i}^{n} + (\upsilon_{x})_{i}^{\overline{n+1}} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\left(\frac{\upsilon_{x}^{2}}{2} + \frac{p}{\rho} \right)_{i}^{\overline{n+1}} - \left(\frac{\upsilon_{x}^{2}}{2} + \frac{p}{\rho} \right)_{i-1}^{\overline{n+1}} \right] - \Delta t \, 8\pi v \, \frac{(\upsilon_{x})_{i}^{\overline{n+1}}}{A_{i}^{\overline{n+1}}} \right)$$

• $p_{i}^{n+1} = p_{\alpha} + \frac{2Es \left(\sqrt{\frac{A_{i}^{n+1}}{A_{0}}} - 1 \right)}{D_{0} \left(1 - \frac{1}{2} \, v \right)}$ (2.4. α, β, γ)

Σε όλες τις παραπάνω εξισώσεις το i δηλώνει τον αριθμό κάθε κόμβου από την αρχή του αντίστοιχου διαστήματος.

2.2 Επαλήθευση των αριθμητικών μεθόδων με αναλυτική λύση

Πρόκειται για μία διαδικασία που ελέγχει, κατά ένα τρόπο, αν λειτουργούν σωστά οι κώδικες των αριθμητικών μεθοδολογιών, ώστε να είμαστε σίγουροι, ότι το συγκεκριμένο πρόγραμμα εφαρμόζει, χωρίς λάθος, το συγκεκριμένο αριθμητικό σχήμα για το οποίο έχει φτιαχτεί. Για το σκοπό αυτό επιλύουμε το σύστημα των εξισώσεων: (1.5) της συνέχειας και (1.12) της ορμής, θεωρώντας ως γνωστή τη συνάρτηση μεταβολής της διατομής A(x,t), οπότε προκύπτουν αναλυτικά οι άλλες δύο άγνωστες συναρτήσεις της ταχύτητας υ_x(x,t) και της πίεσης p(x,t).

Έστω ότι η διατομή εκφράζεται από τη συνάρτηση μονοδιάστατου κύματος:

$$A(x,t) = A_0 + A_b \sin(\omega t - \kappa x)$$
(2.5)

Με αντικατάσταση στην εξίσωση της συνέχειας (1.5) έχουμε:

$$\frac{\partial (\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_{x})}{\partial x} = -\mathbf{A}_{b} \cdot \boldsymbol{\omega} \cdot \cos(\boldsymbol{\omega} t - \boldsymbol{\kappa} x)$$
(2.6)

Πολλαπλασιάζοντας επί dx και ολοκληρώνοντας προκύπτει η σχέση:

$$Av_{x} = A_{b} \frac{\omega}{\kappa} \sin(\omega t - \kappa x) + f(t)$$
(2.7)

όπου f(t) η σταθερά, ως προς x, ολοκλήρωσης, η οποία εκφράζει μια αρχική παροχή, που έχει ο αγωγός πριν τη διέγερσή του και παραμένει ως προσθετικός όρος και στη συνέχεια που υφίσταται η περίσταλση.

Ο κυματαριθμός κ του κύματος, που εφαρμόζεται, ορίζεται από τη σχέση: $\kappa = \frac{2\pi}{\lambda}$, ενώ η κυκλική συχνότητα είναι: $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$ και η περίοδος είναι: $T = \frac{\lambda}{c}$. Ο λόγος συνεπώς $\frac{\omega}{\kappa} = c$.

Επιλύνοντας τη (2.7) ως προς την ταχύτητα υ_x, θεωρώντας την f(t)=0, έχουμε την αναλυτική έκφραση της ταχύτητας:

$$\upsilon_{x} = \frac{c \cdot A_{b} \sin(\omega t - \kappa x)}{A_{0} + A_{b} \sin(\omega t - \kappa x)}$$
(2.8)

Θεωρούμε την εξίσωση ορμής (1.11) για τον ελαστικό αγωγό (s≡x, dh=0) και για άτριβη ροή, οπότε ο τελευταίος όρος, που περιέχει το κινηματικό ιξώδες, μηδενίζεται. Είναι:

$$\rho \frac{\partial \upsilon_x}{\partial t} + \frac{\rho}{2} \frac{\partial (\upsilon_x^2)}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

(-)

Διαιρούμε με την πυκνότητα, πολλαπλασιάζουμε επί dx και ολοκληρώνουμε από 0 μέχρι μια τυχαία θέση x, οπότε έχουμε:

$$-\frac{1}{\rho}\int_{0}^{x} dp = \frac{1}{2}\int_{0}^{x} d(\upsilon_{x}^{2}) + \int_{0}^{x} \frac{\partial \upsilon_{x}}{\partial t} dx + g(t)$$
(2.9)

Με αναγωγή των ολοκληρωμάτων και για g(t)=0 η τελευταία γίνεται:

$$-\frac{1}{\rho}(p(x,t) - p(0,t)) = \frac{1}{2}(\upsilon_{x}^{2}(x,t) - \upsilon_{x}^{2}(0,t)) + \int_{0}^{x} \frac{\partial \upsilon_{x}}{\partial t} dx$$
(2.10)

Αν αντικαταστήσουμε την ταχύτητα από τη σχέση (2.8) στην παραπάνω και θεωρήσουμε την p(0,t)=0, θα καταλήξουμε στη συνάρτηση της πίεσης:

$$p(x,t) = -\frac{\rho c^2 A_0^2}{2} \left(\frac{1}{\left[A_0 + A_b \sin(\omega t - \kappa x) \right]^2} - \frac{1}{\left(A_0 + A_b \sin \omega t \right)^2} \right)$$
(2.11)

Στην (2.11) αν αντικαταστήσουμε τη διατομή βάσει του συναρτησιακού της που ορίσαμε πιο πάνω θα πάρουμε τη συνάρτηση p=p(A), δηλαδή:

$$p(\mathbf{x},t) = -\frac{\rho c^2 A_0^2}{2} \left(\frac{1}{A^2} - \frac{1}{\left[A(0,t) \right]^2} \right)$$
(2.12)

Χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις: (2.5) της διατομής A(x,t), (2.8) της ταχύτητας υ_x(x,t) και (2.11) της πίεσης p(x,t), καταστρώνουμε το πρόγραμμα analyt.for^(παρ.:11), το οποίο μας δίνει αποτελέσματα για τις τρεις αναλυτικές συναρτήσεις.

Τα δεδομένα είναι όμοια με αυτά του Rath, H. J.* και έχουν ως εξής:

I=0.3 m : το μήκος του ελαστικού σωλήνα

λ=0.1 m : το μήκος του κύματος διέγερσης

c=0.035 m/sec : η φασική ταχύτητα του κύματος διέγερσης

^{*} Rath H. J., Ein Beitrag zur Berechnung einer peristaltischen Strömung in elastischen Leitungen. Acta Mechanica 31,1978. Pg.: 8-9.

D₀=0.024 m : η εσωτερική διάμετρος του αγωγού

 $ε_{max} = \frac{D_b - D_0}{D_0} = 0.1$: η παραμόρφωση διέγερσης της εσωτερικής διαμέτρου, με D_b τη μέγιστη εσωτερική διάμετρο διόγκωσης.

ρ=1000 kg/m³ : η πυκνότητα του νερού στους 4 °C

Στα διαγράμματα 2.4, 2.5 και 2.6 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των προγραμμάτων laxtest.for^(παρ.:I2) και mactest.for^(παρ.:I3), στα οποία αναπτύσσονται οι αριθμητικές μεθοδολογίες Lax-Wendroff και MacCormack αντίστοιχα, επιλύνοντας το παραπάνω αναλυτικό πρόβλημα.

Έχουμε θεωρήσει ότι δεν υπάρχουν τα δοχεία στα άκρα του αγωγού και ότι η εξωτερική πίεση είναι μηδέν, οπότε οι αρχικές και συνοριακές συνθήκες δίνονται από τις εξισώσεις (2.5), (2.8) και (2.11), για τη διατομή, ταχύτητα και πίεση αντίστοιχα.

Καλούνται τα δύο προγράμματα να δώσουν την αναλυτική λύση εκτός των άκρων, που ούτως ή άλλως εφαρμόζεται με τις συνοριακές συνθήκες, χρησιμοποιώντας την εξίσωση της συνέχειας για τον υπολογισμό της διατομής και την εξίσωση της ορμής για τον υπολογισμό της ταχύτητας, ενώ η πίεση δίνεται από την εξίσωση (2.12) για κάθε βήμα. Ουσιαστικά επιλύουμε μια αναλυτική λύση του προβλήματος με τις αριθμητικές μεθοδολογίες και επαληθεύουμε τα αποτελέσματα με αυτά του προγράμματος analyt.for^(παρ.:11). Και στις δύο αριθμητικές μεθοδολογίες που εφαρμόζονται, ο Courant number είναι τ=(Δt/Δx)=0.6. Τα διαγράμματα 2.1, 2.2 και 2.3 δείχνουν τις συναρτήσεις A(x,t), υ_x(x,t) και p(x,t) αντίστοιχα όπως προκύπτουν από το πρόγραμμα analyt.for^(παρ.:11).



Διάγραμμα 2.1. Η συνάρτηση της διατομής A(x,t).



Διάγραμμα 2.2. Η συνάρτηση της ταχύτητας υ_x(x,t).



Διάγραμμα 2.3. Η συνάρτηση της πίεσης p(x,t).



Διάγραμμα 2.4. Μεταβολές Α(x₀,t) που προκύπτουν από αναλυτική και αριθμητικές λύσεις.



Διάγραμμα 2.5. Μεταβολές υ_x(x₀,t) που προκύπτουν από αναλυτική και αριθμητικές λύσεις.



Διάγραμμα 2.6. Μεταβολές p(x₀,t) που προκύπτουν από αναλυτική και αριθμητικές λύσεις.

2.3 Διακριτοποίηση αδιάστατων εξισώσεων

Οι τρεις αδιάστατες εξισώσεις του υπερβολικού συστήματος (1.16), (1.17) και (1.18) αν διακριτοποιηθούν βάσει των δύο αριθμητικών μεθόδων παραπάνω, έχουμε:

2.3.1 Σχήμα Richtmyer - Morton

<u>1° βήμα</u>:

•
$$\tilde{A}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left(\tilde{A}_{i}^{n} + \tilde{A}_{i+1}^{n} \right) - \frac{\Delta \tilde{t}}{2\Delta \tilde{x}} \left[\left(\tilde{A} \tilde{\upsilon}_{x} \right)_{i+1}^{n} - \left(\tilde{A} \tilde{\upsilon}_{x} \right)_{i}^{n} \right]$$

•
$$\left(\tilde{\upsilon}_{x}\right)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[\left(\tilde{\upsilon}_{x}\right)_{i}^{n} + \left(\tilde{\upsilon}_{x}\right)_{i+1}^{n} \right] - \frac{\Delta \tilde{t}}{2\Delta \tilde{x}} \left[\left(\frac{\tilde{\upsilon}_{x}^{2}}{2} + \tilde{p}\right)_{i+1}^{n} - \left(\frac{\tilde{\upsilon}_{x}^{2}}{2} + \tilde{p}\right)_{i}^{n} \right] - \frac{\Delta \tilde{t}}{2} \frac{8}{Re \cdot \delta} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\tilde{\upsilon}_{x}}{\tilde{A}}\right)_{i}^{n} + \left(\frac{\tilde{\upsilon}_{x}}{\tilde{A}}\right)_{i+1}^{n} \right] \right] \\ + 2 \cdot \tilde{E} \cdot \tilde{s} \left(\sqrt{\frac{\tilde{A}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\tilde{A}_{0}}} - 1 \right) \\ \tilde{D}_{0} \left(1 - \frac{1}{2} v \right)$$
 (2.13. α, β, γ)

<u>2° βήμα</u>:

•
$$\tilde{\mathbf{A}}_{i}^{n+1} = \tilde{\mathbf{A}}_{i}^{n} - \frac{\Delta \tilde{\mathbf{t}}}{\Delta \tilde{\mathbf{x}}} \left[\left(\tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{v}}_{x} \right)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \left(\tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{v}}_{x} \right)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right]$$

$$\Delta \tilde{\mathbf{t}} \left[\left(\tilde{\mathbf{v}}_{x}^{2} - \mathbf{v} \right)^{n+\frac{1}{2}} - \left(\tilde{\mathbf{v}}_{x}^{2} - \mathbf{v} \right)^{n+\frac{1}{2}} \right]$$

•
$$\left(\tilde{\upsilon}_{x}\right)_{i}^{n+1} = \left(\tilde{\upsilon}_{x}\right)_{i}^{n} - \frac{\Delta \tilde{t}}{\Delta \tilde{x}} \left[\left(\frac{\tilde{\upsilon}_{x}^{2}}{2} + \tilde{p}\right)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \left(\frac{\tilde{\upsilon}_{x}^{2}}{2} + \tilde{p}\right)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right] - \Delta \tilde{t} \cdot \frac{8}{\operatorname{Re} \cdot \delta} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\tilde{\upsilon}_{x}}{\tilde{A}}\right)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + \left(\frac{\tilde{\upsilon}_{x}}{\tilde{A}}\right)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right]$$
•
$$\tilde{p}_{i}^{n+1} = \tilde{p}_{\alpha} + \frac{2 \cdot \tilde{E} \cdot \tilde{s} \left(\sqrt{\frac{\tilde{A}_{i}^{n+1}}{\tilde{A}_{0}}} - 1 \right)}{\tilde{D}_{0} \left(1 - \frac{1}{2} \operatorname{v} \right)}$$

$$(2.14.\alpha, \beta, \gamma)$$

2.3.2 Σχήμα MacCormack predictor-corrector

Predictor:

•
$$\tilde{A}_{i}^{n+1} = \tilde{A}_{i}^{n} - \frac{\Delta \tilde{t}}{\Delta \tilde{x}} \Big[\Big(\tilde{A} \tilde{v}_{x} \Big)_{i+1}^{n} - (\tilde{A} \tilde{v}_{x})_{i}^{n} \Big]$$

•
$$\left(\tilde{\upsilon}_{x}\right)_{i}^{\overline{n+1}} = \left(\tilde{\upsilon}_{x}\right)_{i}^{n} - \frac{\Delta \tilde{t}}{\Delta \tilde{x}} \left[\left(\frac{\tilde{\upsilon}_{x}^{2}}{2} + \tilde{p}\right)_{i+1}^{n} - \left(\frac{\tilde{\upsilon}_{x}^{2}}{2} + \tilde{p}\right)_{i}^{n} \right] - \Delta \tilde{t} \frac{8}{\operatorname{Re} \cdot \delta} \frac{\left(\tilde{\upsilon}_{x}\right)_{i}^{n}}{\tilde{A}_{i}^{n}}$$

•
$$\tilde{p}_{i}^{\overline{n+1}} = \tilde{p}_{\alpha} + \frac{2 \cdot \tilde{E} \cdot \tilde{s} \left(\sqrt{\frac{\tilde{A}_{i}^{\overline{n+1}}}{\tilde{A}_{0}}} - 1 \right)}{\tilde{D}_{0} \left(1 - \frac{1}{2} v \right)}$$
 (2.15. α, β, γ)

Corrector:

•
$$\tilde{A}_{i}^{n+1} = \frac{1}{2} \left(\tilde{A}_{i}^{n} + \tilde{A}_{i}^{\overline{n+1}} - \frac{\Delta \tilde{t}}{\Delta \tilde{x}} \left[\left(\tilde{A} \tilde{\upsilon}_{x} \right)_{i}^{\overline{n+1}} - \left(\tilde{A} \tilde{\upsilon}_{x} \right)_{i-1}^{\overline{n+1}} \right] \right)$$
•
$$\left(\tilde{\upsilon}_{x} \right)_{i}^{n+1} = \frac{1}{2} \left(\left(\tilde{\upsilon}_{x} \right)_{i}^{n} + \left(\tilde{\upsilon}_{x} \right)_{i}^{\overline{n+1}} - \frac{\Delta \tilde{t}}{\Delta \tilde{x}} \left[\left(\frac{\tilde{\upsilon}_{x}^{2}}{2} + \tilde{p} \right)_{i}^{\overline{n+1}} - \left(\frac{\tilde{\upsilon}_{x}^{2}}{2} + \tilde{p} \right)_{i-1}^{\overline{n+1}} \right] - \Delta \tilde{t} \frac{8}{Re \cdot \delta} \frac{\left(\tilde{\upsilon}_{x} \right)_{i}^{\overline{n+1}}}{\tilde{A}_{i}^{\overline{n+1}}} \right)$$
•
$$\tilde{p}_{i}^{n+1} = \tilde{p}_{\alpha} + \frac{2 \cdot \tilde{E} \cdot \tilde{s} \left(\sqrt{\frac{\tilde{A}_{i}^{\overline{n+1}}}{\tilde{A}_{0}} - 1 \right)}{\tilde{D}_{0} \left(1 - \frac{1}{2} \, v \right)}$$
(2.16. α, β, γ)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3°

Αριθμητική επίλυση περισταλτικής ροής σε ελαστικό αγωγό

3.1 Αριθμητικό πείραμα Η. J. Rath

Σ' αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται οι θεωρήσεις και τα αποτελέσματα του αριθμητικού πειράματος του Η. J. Rath, όπως δημοσιεύτηκαν το 1978⁽³¹⁾ και γίνεται μια προσπάθεια απόκτησης αυτών των αποτελεσμάτων με τις μεθόδους που παρουσιάστηκαν στο 2° κεφάλαιο. Για τη θεώρηση αρχικών, συνοριακών συνθηκών και αριθμητικών δεδομένων έχουν μελετηθεί, τόσο η δημοσίευση (31), όσο και η διδακτορική διατριβή (28) του Η. J. Rath.

Το πείραμα είναι παρόμοιο με αυτό του σχήματος 1.1, με τη μόνη διαφορά ότι σε κάθε δοχείο υπάρχει μια εξωτερική παροχέτευση ρευστού, με σκοπό τον έλεγχο του επιπέδου της στάθμης των δοχείων (σχήμα 3.1).



Σχήμα 3.1. Θεωρούμενη πειραματική διάταξη Η. J. Rath⁽³¹⁾, σε στιγμιότυπο κίνησης του ρευστού από αριστερά προς τα δεξιά.

Αν ποσότητα ρευστού μετακινηθεί από το αριστερό δοχείο (1) προς το δεξιό (2), λόγω άντλησης του σωλήνα, αμέσως η ίδια ποσότητα θα προσδοθεί από την αριστερή παροχέτευση, ώστε η στάθμη να μη κατέβει καθόλου. Αυτή η ποσότητα, που πάει στο δεξιό δοχείο, απάγεται από την δεξιά παροχέτευση, ώστε να μη προλάβει η στάθμη να ανέβει καθόλου. Θεωρείται ότι η πρόσδοση και απαγωγή γίνονται με τρόπο ημιστατικό, μεταβλητό στο χρόνο, ανάλογο με το ρυθμό άντλησης του σωλήνα. Στην αντίθετη περίπτωση, όπου το ρευστό μετακινείται από το δεξιό δοχείο (2) στο αριστερό (1), ισχύουν ακριβώς τα αντίστροφα, ώστε πάντα οι στάθμες των δοχείων να διατηρούνται σταθερές. Δηλαδή διατηρείται συνεχώς μια σταθερή ποσότητα ρευστού στο όλο σύστημα σωλήνα - δοχείων, η οποία θα μετακινείται με τον περιορισμό η στάθμη του αριστερού δοχείου να μην κατέρχεται ούτε να ανέρχεται από το αρχικό επίπεδο στάθμης συν μια διαφορά Δh. Το ύψος αυτό Δh είναι σταθερό καθ' όλη τη διάρκεια του πειράματος.

Τα αποτελέσματα της παροχής συναρτήσει της συχνότητας που δίνει ο Rath στο (31), αναφέρονται στην περίπτωση που Δh=0, δηλαδή οι στάθμες των δύο δοχείων βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο κατά την εισροή-εκροή. Ας σημειωθεί ότι είναι και η περίπτωση που δίνει τις μεγαλύτερες παροχές αφού ο σωλήνας δε χρειάζεται να υπερνικήσει κάποιο μανομετρικό και κατόπιν να εκχύσει.



Διάγραμμα 3.1. Μεταβολή αδιάστατης παροχής \overline{Q}^* συναρτήσει του γινομένου Reδ κατά H. J. Rath⁽³¹⁾.

Στο διάγραμμα 3.1 παριστάνεται η μέση αδιάστατη παροχή \overline{Q} * συναρτήσει του γινομένου των αδιάστατων αριθμών Re·δ, όπως προέκυψε από το αριθμητικό πείραμα του Rath⁽³¹⁾.

3.2 Αρχικές συνθήκες θεωρούμενου πειράματος

Πριν εφαρμόσουμε την εξωτερική διέγερση πίεσης στον ελαστικό σωλήνα, η εξωτερική πίεση είναι p₀, ίδια με αυτή που έχουμε στις ελεύθερες στάθμες των δοχείων πριν και καθ' όλη τη διάρκεια του πειράματος. Αυτή μπορεί να είναι για παράδειγμα η ατμοσφαιρική πίεση, θεωρώντας ότι το πείραμα γίνεται στην ατμόσφαιρα ή οποιαδήποτε άλλη πίεση, αφού είναι σταθερή και εφαρμόζεται παντού. Όλο το σύστημα των συγκοινωνούντων δοχείων περιέχει αρχικά ρευστό σε ύψος H, κοινό και για τα δύο δοχεία. Η εσωτερική πίεση του αγωγού, σ' αυτή την περίπτωση, είναι η ατμοσφαιρική συν την υδροστατική. Θεωρούμε ότι ο αγωγός βρίσκεται σε διάμετρο D₀ σταθερή, καθ' όλο το μήκος του, όταν το ρευστό έχει τοποθετηθεί μέσα του, το
οποίο παραμένει ακίνητο μέχρι τη διέγερση και συνεπώς οι αρχικές ταχύτητες παντού είναι μηδενικές.

Συνοψίζοντας:

- $p_{\alpha}(x,0) = p_0$
- h₁(0)=h₂(0)=H
- p(x,0)=p₀+pgH
- A(x,0)=A₀
- U_x(x,0)=0

3.3 Οριακές συνθήκες θεωρούμενου πειράματος

Όλες οι παρακάτω εξισώσεις καταστρώνονται, θεωρώντας τη στιγμή που το ρευστό κινείται από αριστερά προς τα δεξιά. Σε κάποια άλλη στιγμή, που το ρευστό κινείται αντίθετα, ισχύουν οι ίδιες εξισώσεις με αλλαγμένα πρόσημα. Η αλλαγή αυτή των προσήμων γίνεται μέσω των μεγεθών, χωρίς να χρειάζεται να επεμβαίνουμε στις εξισώσεις.

3.3.1 Ταχύτητα εισόδου-εξόδου

Σε κάθε άκρο του ελαστικού σωλήνα οι ταχύτητες $u_{(1)}=u_x(0,t)$ και $u_{(2)}=u_x(L,t)$ υπολογίζονται από την εξίσωση διατήρησης της ενέργειας (unsteady Bernoulli), στην οποία υπάρχει όρος μη μονιμότητας της ροής, καθώς και όρος τοπικών απωλειών, λόγω της γεωμετρικής ασυνέχειας στα στόμια των δοχείων. Δεν λαμβάνονται υπόψη οι γραμμικές απώλειες, δηλαδή η τριβή του ρευστού με τα τοιχώματα του δοχείου, πράγμα όμως που γίνεται στον ελαστικό σωλήνα, όπως φαίνεται από τον τελευταίο όρο της εξίσωσης (1.12), που προέκυψε από τη θεώρηση ροής Hagen - Poiseuille.

Αναφερόμενοι στο σχήμα 1.1, μεταξύ της ελεύθερης στάθμης του αριστερού δοχείου (01) και του αριστερού στομίου του (1), η εξίσωση Bernoulli γράφεται^{*}:

$$p_{(01)} + \frac{1}{2}\rho \upsilon_{(01)}^{2} + \rho g h_{1} - \int_{0}^{h_{1}} \frac{\partial \upsilon_{s}}{\partial t} dh = p_{(1)} + \frac{1}{2}\rho \upsilon_{(1)}^{2} \pm \xi_{1,2} \frac{1}{2}\rho \upsilon_{(1)}^{2}$$
(3.1)

όπου το πρόσημο του όρου τοπικών απωλειών εξαρτάται από το πρόσημο της ταχύτητας υ₍₁₎ του στομίου, δηλαδή την κατεύθυνση ως προς την οποία κινείται το ρευστό, σε τρόπο ώστε να καταναλώνει ενέργεια. Έτσι για κίνηση του ρευστού από αριστερά προς τα δεξιά είναι (+), ενώ για κίνηση από τα δεξιά προς τα αριστερά είναι (-). Επίσης η θεωρούμενη σταθερή τιμή του συντελεστή απωλειών, θα πρέπει να είναι διαφορετική, ανάλογα αν η ροή είναι από το δοχείο προς το σωλήνα προς το δοχείο (ξ₁).

Θεωρώντας απαραμόρφωτα τα δοχεία και τα στόμιά τους, για τις ίδιες θέσεις, η εξίσωση συνέχειας δίνει*:

^{*} Rath H. J., Ein Beitrag zur Berechnung einer peristaltischen Strömung in elastischen Leitungen.

Acta Mechanica 31,1978. Pg.: 6, Eq.:(16).

^{*} Rath H. J., Ein Beitrag zur Berechnung einer peristaltischen Strömung in elastischen Leitungen.

$$\mathbf{A}_{\delta} \cdot \mathbf{v}_{(01)} = \mathbf{A}_{0} \cdot \mathbf{v}_{(1)} \implies \mathbf{v}_{(01)} = \frac{\mathbf{A}_{0}}{\mathbf{A}_{\delta}} \cdot \mathbf{v}_{(1)}$$
(3.2)

όπου οι ταχύτητες της στάθμης και του στομίου είναι μόνο χρονικές συναρτήσεις.

Ακόμη θεωρούμε ότι η επιτάχυνση στα δοχεία μπορεί να εκφραστεί ως η μέση τιμή μεταξύ των επιταχύνσεων: της στάθμης στο δοχείο και αυτής του στομίου^{**}, οπότε η επιτάχυνση στο δοχείο γίνεται επίσης μόνο χρονική συνάρτηση και μπορεί να βγει εκτός ολοκληρώματος. Δηλαδή:

$$\frac{\partial \upsilon_{s}}{\partial t} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{d\upsilon_{(01)}}{dt} + \frac{d\upsilon_{(1)}}{dt} \right) \xrightarrow{(3.2)} \frac{\partial \upsilon_{s}}{\partial t} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{A_{0}}{A_{\delta}} + 1 \right) \cdot \frac{d\upsilon_{(1)}}{dt}$$
(3.3)

Αντικαθιστούμε τις (3.2) και (3.3) στην (3.1) και λύνουμε ως προς την επιτάχυνση:

$$\frac{d\upsilon_{(1)}}{dt} = \frac{\frac{A_0^2}{A_\delta^2} - 1 \pm \xi_{1,2}}{\left(1 + \frac{A_0}{A_\delta}\right) \cdot h_1} \cdot \upsilon_{(1)}^2 + \frac{p_{(01)}}{\rho \frac{1}{2} \left(1 + \frac{A_0}{A_\delta}\right) \cdot h_1} - \frac{p_{(1)}}{\rho \frac{1}{2} \left(1 + \frac{A_0}{A_\delta}\right) \cdot h_1} + \frac{g}{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{A_0}{A_\delta}\right)}$$
(3.4)

Διακριτοποιώντας την ανωτέρω προκύπτει η ταχύτητα του αριστερού άκρου της τρέχουσας χρονικής στιγμής, συναρτήσει μεγεθών της προηγούμενης. Δηλαδή:

$$\left(\upsilon_{(1)}\right)_{i}^{n+1} = \left(\upsilon_{(1)}\right)_{i}^{n} + \frac{\Delta t \cdot \left(\frac{A_{0}^{2}}{A_{\delta}^{2}} - 1 \pm \xi_{1,2}\right)}{\left(1 + \frac{A_{0}}{A_{\delta}}\right) \cdot \left(h_{1}\right)_{i}^{n}} \cdot \left[\left(\upsilon_{(1)}\right)_{i}^{n}\right]^{2} + \frac{\Delta t \cdot p_{(01)}}{\rho \frac{1}{2} \left(1 + \frac{A_{0}}{A_{\delta}}\right) \cdot \left(h_{1}\right)_{i}^{n}} - \frac{\Delta t \cdot p_{(1)}}{\rho \frac{1}{2} \left(1 + \frac{A_{0}}{A_{\delta}}\right) \cdot \left(h_{1}\right)_{i}^{n}} + \frac{\Delta t \cdot g}{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{A_{0}}{A_{\delta}}\right)} \cdot \left(h_{1}\right)_{i}^{n}} - \frac{\Delta t \cdot p_{(1)}}{\rho \frac{1}{2} \left(1 + \frac{A_{0}}{A_{\delta}}\right) \cdot \left(h_{1}\right)_{i}^{n}} + \frac{\Delta t \cdot g}{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{A_{0}}{A_{\delta}}\right)} \cdot \left(h_{1}\right)_{i}^{n}} - \frac{\Delta t \cdot p_{(1)}}{\rho \frac{1}{2} \left(1 + \frac{A_{0}}{A_{\delta}}\right) \cdot \left(h_{1}\right)_{i}^{n}} - \frac{\Delta t \cdot g}{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{A_{0}}{A_{\delta}}\right) \cdot \left(h_{1}\right)_{i}^{n}} - \frac{\Delta t \cdot g}{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{A_{0}}{A_{\delta}}\right) \cdot \left(h_{1}\right)_{i}^{n}} - \frac{\Delta t \cdot g}{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{A_{0}}{A_{\delta}}\right) \cdot \left(h_{1}\right)_{i}^{n}} - \frac{\Delta t \cdot g}{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{A_{0}}{A_{\delta}}\right) \cdot \left(h_{1}\right)_{i}^{n}} - \frac{\Delta t \cdot g}{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{A_{0}}{A_{\delta}}\right) \cdot \left(h_{1}\right)_{i}^{n}} - \frac{\Delta t \cdot g}{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{A_{0}}{A_{\delta}}\right) \cdot \left(h_{1}\right)_{i}^{n}} - \frac{\Delta t \cdot g}{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{A_{0}}{A_{\delta}}\right) \cdot \left(h_{1}\right)_{i}^{n}} - \frac{\Delta t \cdot g}{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{A_{0}}{A_{\delta}}\right) \cdot \left(h_{1}\right)_{i}^{n}} - \frac{\Delta t \cdot g}{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{A_{0}}{A_{\delta}}\right) \cdot \left(h_{1}\right)_{i}^{n}} - \frac{\Delta t \cdot g}{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{A_{0}}{A_{\delta}}\right) \cdot \left(h_{1}\right)_{i}^{n}} - \frac{\Delta t \cdot g}{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{A_{0}}{A_{\delta}}\right) \cdot \left(h_{1}\right)_{i}^{n}} - \frac{\Delta t \cdot g}{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{A_{0}}{A_{\delta}}\right) \cdot \left(h_{1}\right)_{i}^{n}} - \frac{\Delta t \cdot g}{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{A_{0}}{A_{\delta}}\right) \cdot \left(h_{1}\right)_{i}^{n}} - \frac{\Delta t \cdot g}{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{A_{0}}{A_{\delta}}\right) \cdot \left(h_{1}\right)_{i}^{n}} - \frac{\Delta t \cdot g}{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{A_{0}}{A_{\delta}}\right) \cdot \left(h_{1}\right)_{i}^{n}} - \frac{\Delta t \cdot g}{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{A_{0}}{A_{\delta}}\right) \cdot \left(h_{1}\right)_{i}^{n}} - \frac{\Delta t \cdot g}{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{A_{0}}{A_{\delta}}\right) \cdot \left(h_{1}\right)_{i}^{n}} - \frac{\Delta t \cdot g}{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{A_{0}}{A_{\delta}}\right) \cdot \left(h_{1}\right)_{i}^{n}} - \frac{\Delta t \cdot g}{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{A_{0}}{A_{\delta}}\right) \cdot \left(h_{1}\right)_{i}^{n}} - \frac{\Delta t \cdot g}{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{A_{0}}{A_{\delta}}\right) \cdot \left(h_{1}\right)_{i}^{n}} - \frac{\Delta t \cdot g}{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{A_{0}}{A_{\delta}}\right) \cdot \left(h_{1}\right) \cdot \left(h_{1}\right)_{i}^{n}} - \frac{\Delta t \cdot g}{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{A_{0}}{A_{\delta}}$$

Με αντίστοιχο τρόπο, μεταξύ της ελεύθερης στάθμης του δεξιού δοχείου (02) και του δεξιού στομίου του (2), καταστρώνεται η εξίσωση Bernoulli, οπότε προκύπτει η ταχύτητα του δεξιού άκρου της τρέχουσας χρονικής στιγμής, συναρτήσει μεγεθών της προηγούμενης. Δηλαδή:

$$\left(\upsilon_{(2)}\right)_{k}^{n+1} = \left(\upsilon_{(2)}\right)_{k}^{n} - \frac{\Delta t \cdot \left(\frac{A_{0}^{2}}{A_{\delta}^{2}} - 1 \pm \zeta_{1,2}\right)}{\left(1 + \frac{A_{0}}{A_{\delta}}\right) \cdot \left(h_{2}\right)_{k}^{n}} \cdot \left[\left(\upsilon_{(2)}\right)_{k}^{n}\right]^{2} - \frac{\Delta t \cdot p_{(02)}}{\rho \frac{1}{2} \left(1 + \frac{A_{0}}{A_{\delta}}\right) \cdot \left(h_{2}\right)_{k}^{n}} + \frac{\Delta t \cdot p_{(2)}}{\rho \frac{1}{2} \left(1 + \frac{A_{0}}{A_{\delta}}\right) \cdot \left(h_{2}\right)_{k}^{n}} - \frac{\Delta t \cdot g}{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{A_{0}}{A_{\delta}}\right)} \cdot \left(h_{2}\right)_{k}^{n}} - \frac{\Delta t \cdot g}{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{A_{0}}{A_{\delta}}\right)} \cdot \left(h_{2}\right)_{k}^{n}} - \frac{\Delta t \cdot g}{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{A_{0}}{A_{\delta}}\right)} \cdot \left(h_{2}\right)_{k}^{n}} - \frac{\Delta t \cdot g}{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{A_{0}}{A_{\delta}}\right)} \cdot \left(h_{2}\right)_{k}^{n}} - \frac{\Delta t \cdot g}{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{A_{0}}{A_{\delta}}\right)} \cdot \left(h_{2}\right)_{k}^{n}} - \frac{\Delta t \cdot g}{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{A_{0}}{A_{\delta}}\right)} \cdot \left(h_{2}\right)_{k}^{n}} - \frac{\Delta t \cdot g}{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{A_{0}}{A_{\delta}}\right)} \cdot \left(h_{2}\right)_{k}^{n}} - \frac{\Delta t \cdot g}{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{A_{0}}{A_{\delta}}\right)} \cdot \left(h_{2}\right)_{k}^{n}} - \frac{\Delta t \cdot g}{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{A_{0}}{A_{\delta}}\right)} \cdot \left(h_{2}\right)_{k}^{n}} - \frac{\Delta t \cdot g}{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{A_{0}}{A_{\delta}}\right)} \cdot \left(h_{2}\right)_{k}^{n}} - \frac{\Delta t \cdot g}{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{A_{0}}{A_{\delta}}\right)} \cdot \left(h_{2}\right)_{k}^{n}} - \frac{\Delta t \cdot g}{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{A_{0}}{A_{\delta}}\right)} \cdot \left(h_{2}\right)_{k}^{n}} - \frac{\Delta t \cdot g}{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{A_{0}}{A_{\delta}}\right)} \cdot \left(h_{2}\right)_{k}^{n}} - \frac{\Delta t \cdot g}{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{A_{0}}{A_{\delta}}\right)} \cdot \left(h_{2}\right)_{k}^{n}} - \frac{\Delta t \cdot g}{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{A_{0}}{A_{\delta}}\right)} \cdot \left(h_{2}\right)_{k}^{n}} - \frac{\Delta t \cdot g}{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{A_{0}}{A_{\delta}}\right)} \cdot \left(h_{2}\right)_{k}^{n}} - \frac{\Delta t \cdot g}{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{A_{0}}{A_{\delta}}\right)} \cdot \left(h_{2}\right)_{k}^{n}} - \frac{\Delta t \cdot g}{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{A_{0}}{A_{\delta}}\right)} \cdot \left(h_{2}\right)_{k}^{n}} - \frac{\Delta t \cdot g}{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{A_{0}}{A_{\delta}}\right)} \cdot \left(h_{2}\right)_{k}^{n}} - \frac{\Delta t \cdot g}{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{A_{0}}{A_{\delta}}\right)} \cdot \left(h_{2}\right)_{k}^{n}} - \frac{\Delta t \cdot g}{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{A_{0}}{A_{\delta}}\right)} \cdot \left(h_{2}\right)_{k}^{n}} - \frac{\Delta t \cdot g}{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{A_{0}}{A_{\delta}}\right)} \cdot \left(h_{2}\right)_{k}^{n}} - \frac{\Delta t \cdot g}{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{A_{0}}{A_{\delta}}\right)} \cdot \left(h_{2}\right)_{k}^{n}} - \frac{\Delta t \cdot g}{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{A_{0}}{A_{\delta}}\right)} \cdot \left(h_{2}\right)} - \frac{\Delta t \cdot g}{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{A_{0}}{A_{\delta}}\right)} \cdot \left(h_{2}\right)} - \frac{\Delta t \cdot g}{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{A_{0}}{A_{\delta}}\right)} \cdot \left(h_{2}\right)} - \frac{$$

όπου το πρόσημο του συντελεστή τοπικών απωλειών εξαρτάται από το πρόσημο της ταχύτητας υ₍₂₎ του στομίου, δηλαδή την κατεύθυνση ως προς την οποία κινείται το ρευστό, σε τρόπο ώστε να καταναλώνει ενέργεια. Έτσι για κίνηση του ρευστού από αριστερά προς τα δεξιά είναι (+), ενώ για κίνηση από τα δεξιά προς τα αριστερά είναι (-). Επίσης η θεωρούμενη σταθερή τιμή του συντελεστή απωλειών, θα πρέπει να είναι διαφορετική, ανάλογα αν η ροή είναι από το δοχείο προς το σωλήνα προς το δοχείο (ζ1).

Acta Mechanica 31,1978. Pg.: 7, Eq.:(17).

^{**} Rath H. J., Berechnungen zu einem ventillosen Pumpprinzip. Dissertation, T. U. Hannover 1976. Pg.: 54, Eq.:(4.28).

3.3.2 Διατομή εισόδου-εξόδου

Σε κάθε άκρο του ελαστικού σωλήνα οι διατομές: A₍₁₎=A(0,t) και A₍₂₎=A(L,t) υπολογίζονται, διακριτοποιώντας την εξίσωση διατήρησης της μάζας (1.5), μεταξύ του πρώτου και δευτέρου γειτονικού κόμβου και του τελευταίου και προτελευταίου ως προς το χώρο αντίστοιχα, οπότε προκύπτει η διατομή της τρέχουσας χρονικής (n+1), συναρτήσει μεγεθών της προηγούμενης (n). Δηλαδή:

αριστερό άκρο:

$$\left(A_{(1)}\right)_{1}^{n+1} = \left(A_{(1)}\right)_{1}^{n} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\left(A_{(1)}\upsilon_{(1)}\right)_{2}^{n} - \left(A_{(1)}\upsilon_{(1)}\right)_{1}^{n} \right]$$
(3.7)

δεξιό άκρο:

$$\left(A_{(2)}\right)_{k}^{n+1} = \left(A_{(2)}\right)_{k}^{n} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\left(A_{(2)}\upsilon_{(2)}\right)_{k}^{n} - \left(A_{(2)}\upsilon_{(2)}\right)_{k-1}^{n} \right]$$
(3.8)

3.3.3 Πίεση εξωτερική και εισόδου-εξόδου

Εξωτερικά στον ελαστικό σωλήνα ασκείται μια σταθερή πίεση p₀, για παράδειγμα η ατμοσφαιρική και μια αρμονικά μεταβαλλόμενη πίεση υπό μορφή κύματος πλάτους p_b. Δηλαδή η πίεση p_α είναι της μορφής:

$$p_{\alpha}(\mathbf{x},t) = p_0 + p_b \cos(\kappa \mathbf{x} - \omega t)$$
(3.9)

Σε κάθε άκρο του ελαστικού σωλήνα οι πιέσεις: p₍₁₎=p(0,t) και p₍₂₎=p(L,t) υπολογίζονται, διακριτοποιώντας την εξίσωση (1.15) ως προς το χρόνο, για τον πρώτο και τελευταίο χωρικό κόμβο αντίστοιχα. Στη θέση της συνάρτησης Α αντικαθίσταται η τρέχουσα διατομή του κάθε άκρου, που έχει ήδη προκύψει από τις εξισώσεις (3.7) και (3.8). Η εξωτερική πίεση p_α παίρνει τις τρέχουσες τιμές του πρώτου και τελευταίου κόμβου επίσης. Οπότε έχουμε:

αριστερό άκρο:

$$(p_{(1)})_{1}^{n+1} = (p_{\alpha})_{1}^{n+1} + \frac{2 \cdot E \cdot s \left(\sqrt{\frac{(A_{(1)})_{1}^{n+1}}{A_{0}}} - 1\right)}{D_{0} \left(1 - \frac{1}{2}v\right)}$$
(3.10)

δεξιό άκρο:

$$(p_{(2)})_{k}^{n+1} = (p_{\alpha})_{k}^{n+1} + \frac{2 \cdot E \cdot s \left(\sqrt{\frac{(A_{(2)})_{k}^{n+1}}{A_{0}}} - 1\right)}{D_{0} \left(1 - \frac{1}{2}v\right)}$$

(3.11)

$$(p_{(2)})_{k}^{n+1} = (p_{\alpha})_{k}^{n+1} + \frac{2 \cdot E \cdot s \left(\sqrt{\frac{(A_{(2)})_{k}^{n+1}}{A_{0}}} - 1\right)}{D_{0} \left(1 - \frac{1}{2}v\right)}$$
(3.11)

3.4 Μέγιστη επιτρεπόμενη διαφορά πίεσης

Αν στη σχέση (1.15) μεταφερθεί στο πρώτο μέλος η εξωτερική πίεση ρ_α, σχηματίζεται η διαφορά πίεσης Δρ, που έχουμε μέσα και έξω από τον αγωγό. Αυτή ρυθμίζει το πόσο θα παραμορφωθεί ο ελαστικός σωλήνας. Επειδή για την εντατική κατάσταση του ελαστικού τοιχώματος έχει γίνει η θεώρηση της παραγράφου 1.1.3, όπου το πάχος του ελαστικού σωλήνα πρέπει να είναι μικρότερο του 10% της ακτίνας του, είναι κατανοητό ότι υπάρχει μία μέγιστη επιτρεπόμενη διαφορά πίεσης, πέραν της οποίας θα έχει ελαττωθεί τόσο η ακτίνα του ελαστικού σωλήνα, ώστε το πάχος να μην είναι κάτω του 10% της ακτίνας στην παράγραφο 1.1.3.



Σχήμα 3.2. Διαμόρφωση πλάτους περίσταλσης από την εφαρμογή αρμονικής εξωτερικής πίεσης διέγερσης.

Παρατηρήθηκε από την εκτέλεση του αριθμητικού πειράματος, ότι για όλο το εύρος συχνοτήτων το πλάτος παραμόρφωσης του σωλήνα μεταβάλλεται συνθέτως αρμονικά με το χώρο και το χρόνο, με αποτέλεσμα να προκαλείται ασύμμετρη διέγερση κατά το μήκος του ελαστικού σωλήνα. Δηλαδή διεγείροντας με ένα σταθερό αρμονικό πλάτος πίεσης p_b, προκαλείται διέγερση του σωλήνα με πλάτος b που διαφέρει από θέση σε θέση κατά το μήκος του αγωγού, αλλά και χρονικά με την πάροδο του χρόνου.

Η μελέτη με θεώρηση λεπτότοιχου ελαστικού τοιχώματος υφίσταται για το αρχικό διάστημα χαμηλών συχνοτήτων, διότι μόνο εκεί παραμένει το πάχος του σωλήνα κάτω του 10% της ακτίνας. Τα αποτελέσματα για τις επόμενες συχνότητες απλώς αναφέρονται, χωρίς να είναι ρεαλιστικά, εξαιτίας της αύξησης του πλάτους, η οποία θέτει εκτός ισχύος την υπόθεση που κάναμε για το τοίχωμα του αγωγού.

Εξετάζοντας το διάγραμμα 3.1 καθώς και όλη τη δημοσίευση του Rath (31), δεν αναφέρεται πουθενά μεταβολή του γεωμετρικού πλάτους με τη συχνότητα, παρά αφήνεται να εννοηθεί ο ισχυρισμός ότι, σταθερό πλάτος αρμονικής διέγερσης της πίεσης, δημιουργεί σταθερό πλάτος διέγερσης της ακτίνας του ελαστικού σωλήνα. Αυτό που ισχύει όμως είναι ότι, σταθερό πλάτος αρμονικής διέγερσης της πίεσης, δημιουργεί σχεδόν σταθερό πλάτος διέγερσης της ακτίνας του ελαστικού σωλήνα σε χαμηλές συχνότητες μόνο. Η αδυναμία συσχέτισης του πλάτους διέγερσης πίεσης με το πλάτος της ακτίνας στο (31), φαίνεται και από το γεγονός ότι δεν αναφέρεται πουθενά αριθμητική τιμή του πλάτους p_b που να μπορεί να προκαλεί γεωμετρική διέγερση παραμόρφωσης πλάτους $ε = \frac{R_{max} - R_m}{R_m} = \frac{|R_{min} - R_m|}{R_m} = 0.1$ για κάθε συχνότητα, όπως δείχνεται στο διάγραμμα 3.1. Και είναι φυσικό ύστερα από την παρούσα

ανάλυση, διότι για να είχαμε για κάθε συχνότητα πλάτος παραμόρφωσης σταθερό ε=0.1, θα έπρεπε να μεταβάλαμε το πλάτος διέγερσης της πίεσης κάθε φορά που θα τρέχαμε το πείραμα για διαφορετική συχνότητα.

Για την περιοχή ενδιαφέροντος των χαμηλών συχνοτήτων, όπου το γεωμετρικό πλάτος παραμόρφωσης παραμένει σχεδόν σταθερό, θα εξετάσουμε τι συμβαίνει σ' ένα σημείο του σωλήνα, όταν η διατομή γίνεται η ελάχιστη Α_{min}. Σ΄ αυτή την περίπτωση η διαφορά πίεσης Δρ, που εφαρμόζεται δίνεται από την εξίσωση (1.15):

$$\Delta p = \frac{2 \cdot E \cdot s \left(\sqrt{\frac{A_{min}}{A_0}} - 1 \right)}{D_0 \left(1 - \frac{1}{2} v \right)}$$

Αντικαθιστούμε τις διατομές συναρτήσει των ακτινών τους, οπότε η παραπάνω γίνεται:

$$\Delta p = \frac{2 \cdot E \cdot s \left(\frac{R_{\min}}{R_0} - 1\right)}{D_0 \left(1 - \frac{1}{2}v\right)}$$
(3.12)

Αντικαθιστούμε την ελάχιστη ακτίνα συναρτήσει του πλάτους b σύμφωνα με το σχήμα 3.2, οπότε η (3.12) γίνεται:

$$\Delta p = \frac{2 \cdot E \cdot s \left(\frac{R_m - b}{R_0} - 1\right)}{D_0 \left(1 - \frac{1}{2}v\right)}$$
(3.13)

Η μέγιστη παραμόρφωση συρρίκνωσης με ακτίνα αναφοράς την απαραμόρφωτη $R_{\rm 0}$ του αγωγού είναι:

$$(\varepsilon_{s})_{max} = \frac{b - (R_{m} - R_{0})}{R_{0}} = -\frac{R_{m} - b}{R_{0}} + 1 \implies \frac{R_{m} - b}{R_{0}} = 1 - (\varepsilon_{s})_{max}$$
 (3.14)

Αντικαθιστώντας την (3.14) στην (3.13) προκύπτει:

$$\Delta p = -\frac{2 \cdot E \cdot s \cdot (\varepsilon_s)_{max}}{D_0 \left(1 - \frac{1}{2} v\right)}$$
(3.15)

Από τη θεώρηση λεπτότοιχου σωλήνα ισχύει:

$$s \leq \frac{R_{\min}}{10} \implies R_{\min} \geq 10 \cdot s \implies -(R_m - b) \leq -10 \cdot s \implies \frac{R_0 - (R_m - b)}{R_0} \leq \frac{R_0 - 10 \cdot s}{R_0} \implies \frac{b - (R_m - R_0)}{R_0} \leq \frac{R_0 - 10 \cdot s}{R_0}$$

Χρησιμοποιώντας την (3.14) η τελευταία ανισότητα γίνεται:

$$\left(\varepsilon_{s}\right)_{\max} \leq \frac{R_{0} - 10 \cdot s}{R_{0}} \implies -\frac{2 \cdot E \cdot s}{D_{0} \left(1 - \frac{1}{2} v\right)} \cdot \left(\varepsilon_{s}\right)_{\max} \geq -\frac{2 \cdot E \cdot s}{D_{0} \left(1 - \frac{1}{2} v\right)} \cdot \frac{R_{0} - 10 \cdot s}{R_{0}}$$

Αντικαθιστώντας το πρώτο μέλος από την (3.15) έχουμε:

$$\Delta p \ge -\frac{2 \cdot E \cdot s}{D_0 \left(1 - \frac{1}{2}v\right)} \cdot \frac{R_0 - 10 \cdot s}{R_0}$$
(3.16)

Αν η διαφορά πίεσης γίνει πιο αρνητική από την τιμή που ορίζει η (3.16), τότε η ελάχιστη ακτίνα του αγωγού γίνεται μικρότερη από την επιτρεπόμενη, οπότε δεν ισχύει η υπόθεση της εντατικής κατάστασης του τοιχώματος. Η (3.16) αποτελεί ουσιαστικά τη σχέση περιορισμού του πλάτους p_b της εξωτερικής πίεσης p_α, όταν πρόκειται για κυματικές συναρτήσεις της πίεσης.

3.5 Υπολογισμός παροχής σωλήνα

Η παροχή σ' ένα οποιοδήποτε σημείο του σωλήνα x₀ είναι μια χρονική συνάρτηση που δίνεται από τη σχέση:

$$q = \int_{A} \upsilon_x(x_0, t) dA$$
(3.17)

Όπως είδαμε στην παράγραφο 1.1.2, έχουμε θεωρήσει την υ_x ως τη μέση ταχύτητα πάνω στη διατομή, πράγμα που σημαίνει ότι έχει την ίδια τιμή σε οποιοδήποτε σημείο της διατομής. Επομένως μπορεί να βγει εκτός ολοκληρώματος, οπότε τελικά παίρνουμε τη συνάρτηση της παροχής, ως το γινόμενο των δύο συναρτήσεων, ταχύτητας και διατομής, σε ένα σημείο x₀. Δηλαδή:

$$Q(t) = A(x_0, t) \cdot v_x(x_0, t)$$
(3.18)

Ενδιαφέρει η ποσότητα ρευστού που εισρέει-εκρέει από τις παροχετεύσεις συνολικά στην περίοδο του χρόνου. Αυτή εκφράζεται με την τιμή της μέσης παροχής, η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$\overline{Q} = \frac{1}{T} \int_0^T Q(t) dt$$
(3.19)

όπου Τ η περίοδος της συνάρτησης Q(t), που στην προκειμένη περίπτωση είναι όμοια με αυτή της διέγερσης του σωλήνα, δηλαδή T=λ/c.

Το τελευταίο ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί αριθμητικά με τον κανόνα του τραπεζίου και να έχουμε την τιμή της μέσης παροχής για κάθε συχνότητα διέγερσης.

3.6 Αδιαστατοποίηση οριακών συνθηκών

Εκτός από τα αδιάστατα μεγέθη και αριθμούς της παραγράφου 1.2, θα λάβουμε υπόψη και τα παρακάτω:

$$h = \frac{h}{\lambda}$$
: για το αδιάστατο ύψος του εκάστοτε δοχείου, όπου λ το μήκος κύματος με το οποίο διεγείρουμε εξωτερικά τον ελαστικό σωλήνα.

$$Fr = rac{c}{g \cdot \lambda}$$
: για τον αριθμό Froude (λόγος δυνάμεων αδράνειας προς τις δυνάμεις βαρύτητας), όπου g η επιτάχυνση της βαρύτητας.

Πρέπει να σημειωθεί εδώ, ότι οι μεταβολές των αριθμών Reynolds, Strouhal και Froude, δε μπορεί να είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, θεωρώντας ότι το πείραμα γίνεται κάθε φορά μεταβάλλοντας μόνο μία παράμετρο του προβλήματος. Δηλαδή δε μπορούμε να μεταβάλουμε κάποιον αριθμό, κρατώντας κάποιον άλλο σταθερό και αυτό συμβαίνει επειδή θέλουμε τα αποτελέσματα να παριστάνονται σε διαγράμματα μονοπαραμετρικής μεταβολής. Για παράδειγμα, όταν κάνουμε το πείραμα για το ίδιο ρευστό, τον ίδιο σωλήνα και στο ίδιο γεωγραφικό σημείο, κρατάμε σταθερά τα ν, R_m και g και μεταβάλλουμε μόνο τη συχνότητα διέγερσης από την οποία εξαρτώνται και οι τρεις αδιάστατοι αριθμοί.



Διάγραμμα 3.2. Συμμεταβολή των αδιάστατων αριθμών Re και Fr.

Για λόγους απλοποίησης και καλύτερης κατανόησης του φαινομένου επιλέγουμε η μεταβολή της συχνότητας να γίνεται μεταβάλλοντας μόνο τη φασική ταχύτητα c του κύματος διέγερσης διατηρώντας σταθερό το μήκος κύματος λ. Με αυτό τον τρόπο διατηρείται σταθερός ο

3.6.1 Αδιάστατη ταχύτητα εισόδου-εξόδου

Οι εξισώσεις (3.5) και (3.6) μετατρέπονται στις:

$$\left(\widetilde{\upsilon}_{(1)} \right)_{i}^{n+1} = \left(\widetilde{\upsilon}_{(1)} \right)_{i}^{n} + \frac{\Delta \widetilde{t} \cdot \left(\frac{\widetilde{A}_{0}^{2}}{\widetilde{A}_{\delta}^{2}} - 1 \pm \xi_{1,2} \right)}{\left(1 + \frac{\widetilde{A}_{0}}{\widetilde{A}_{\delta}} \right) \cdot \left(\widetilde{h}_{1} \right)_{i}^{n}} \cdot \left[\left(\widetilde{\upsilon}_{(1)} \right)_{i}^{n} \right]^{2} + \frac{\Delta \widetilde{t} \cdot \widetilde{p}_{(01)}}{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\widetilde{A}_{0}}{\widetilde{A}_{\delta}} \right) \cdot \left(\widetilde{h}_{1} \right)_{i}^{n}} - \frac{\Delta \widetilde{t} \cdot \widetilde{p}_{(1)}}{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\widetilde{A}_{0}}{\widetilde{A}_{\delta}} \right) \cdot \left(\widetilde{h}_{1} \right)_{i}^{n}} + \frac{\Delta \widetilde{t}}{\frac{Fr}{2} \left(1 + \frac{\widetilde{A}_{0}}{\widetilde{A}_{\delta}} \right)} \cdot \left(\widetilde{t}_{1} \right)_{i}^{n} + \frac{2}{2} \left(1 + \frac{\widetilde{A}_{0}}{\widetilde{A}_{\delta}} \right) \cdot \left(\widetilde{t}_{1} \right)_{i}^{n}} + \frac{2}{2} \left(1 + \frac{\widetilde{A}_{0}}{\widetilde{A}_{\delta}} \right) \cdot \left(\widetilde{t}_{1} \right)_{i}^{n}} + \frac{2}{2} \left(1 + \frac{\widetilde{A}_{0}}{\widetilde{A}_{\delta}} \right) \cdot \left(\widetilde{t}_{1} \right)_{i}^{n}} + \frac{2}{2} \left(1 + \frac{\widetilde{A}_{0}}{\widetilde{A}_{\delta}} \right) \cdot \left(\widetilde{t}_{1} \right)_{i}^{n}} + \frac{2}{2} \left(1 + \frac{\widetilde{A}_{0}}{\widetilde{A}_{\delta}} \right) \cdot \left(\widetilde{t}_{1} \right)_{i}^{n}} + \frac{2}{2} \left(1 + \frac{\widetilde{A}_{0}}{\widetilde{A}_{\delta}} \right) \cdot \left(\widetilde{t}_{1} \right)_{i}^{n}} + \frac{2}{2} \left(1 + \frac{\widetilde{A}_{0}}{\widetilde{A}_{\delta}} \right) \cdot \left(\widetilde{t}_{1} \right)_{i}^{n}} + \frac{2}{2} \left(1 + \frac{\widetilde{A}_{0}}{\widetilde{A}_{\delta}} \right) \cdot \left(\widetilde{t}_{1} \right)_{i}^{n}} + \frac{2}{2} \left(1 + \frac{\widetilde{A}_{0}}{\widetilde{A}_{\delta}} \right) \cdot \left(\widetilde{t}_{1} \right)_{i}^{n}} + \frac{2}{2} \left(1 + \frac{\widetilde{A}_{0}}{\widetilde{A}_{\delta}} \right) \cdot \left(\widetilde{t}_{1} \right)_{i}^{n}} + \frac{2}{2} \left(1 + \frac{\widetilde{A}_{0}}{\widetilde{A}_{\delta}} \right) \cdot \left(\widetilde{t}_{1} \right)_{i}^{n}} + \frac{2}{2} \left(1 + \frac{\widetilde{A}_{0}}{\widetilde{A}_{\delta}} \right) \cdot \left(\widetilde{t}_{1} \right)_{i}^{n}} + \frac{2}{2} \left(1 + \frac{\widetilde{A}_{0}}{\widetilde{A}_{\delta}} \right) \cdot \left(1 + \frac{\widetilde{A}_{0}}{\widetilde{A}_{\delta}}$$

$$\left(\tilde{\upsilon}_{(2)}\right)_{k}^{n+1} = \left(\tilde{\upsilon}_{(2)}\right)_{k}^{n} - \frac{\Delta \tilde{t} \cdot \left(\frac{\tilde{A}_{0}^{2}}{\tilde{A}_{\delta}^{2}} - 1 \pm \zeta_{1,2}\right)}{\left(1 + \frac{\tilde{A}_{0}}{\tilde{A}_{\delta}}\right) \cdot \left(\tilde{h}_{2}\right)_{k}^{n}} \cdot \left[\left(\tilde{\upsilon}_{(2)}\right)_{k}^{n}\right]^{2} - \frac{\Delta \tilde{t} \cdot \tilde{p}_{(02)}}{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\tilde{A}_{0}}{\tilde{A}_{\delta}}\right) \cdot \left(\tilde{h}_{2}\right)_{k}^{n}} + \frac{\Delta \tilde{t} \cdot \tilde{p}_{(2)}}{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\tilde{A}_{0}}{\tilde{A}_{\delta}}\right) \cdot \left(\tilde{h}_{2}\right)_{k}^{n}} - \frac{\Delta \tilde{t}}{\frac{Fr}{2}\left(1 + \frac{\tilde{A}_{0}}{\tilde{A}_{\delta}}\right)}$$
(3.21)

3.6.2 Αδιάστατη διατομή εισόδου-εξόδου

Οι εξισώσεις (3.7) και (3.8) γίνονται:

αριστερό άκρο:

$$\left(\tilde{A}_{(1)}\right)_{1}^{n+1} = \left(\tilde{A}_{(1)}\right)_{1}^{n} - \frac{\Delta \tilde{t}}{\Delta \tilde{x}} \left[\left(\tilde{A}_{(1)}\tilde{\upsilon}_{(1)}\right)_{2}^{n} - \left(\tilde{A}_{(1)}\tilde{\upsilon}_{(1)}\right)_{1}^{n} \right]$$
(3.22)

δεξιό άκρο:

$$\left(\tilde{A}_{(2)}\right)_{k}^{n+1} = \left(\tilde{A}_{(2)}\right)_{k}^{n} - \frac{\Delta \tilde{t}}{\Delta \tilde{x}} \left[\left(\tilde{A}_{(2)} \tilde{\upsilon}_{(2)}\right)_{k}^{n} - \left(\tilde{A}_{(2)} \tilde{\upsilon}_{(2)}\right)_{k-1}^{n} \right]$$
(3.23)

3.6.3 Αδιάστατη εξωτερική και πίεση εισόδου-εξόδου

Οι (3.9), (3.10) και (3.11), αδιαστατοποιώντας, έχουν ως εξής:

αδιάστατη εξωτερική πίεση σωλήνα:

$$\tilde{p}_{\alpha}(\tilde{x},\tilde{t}) = \tilde{p}_0 + \tilde{p}_b \cos[2\pi \cdot (\tilde{x} - \tilde{t})]$$
(3.24)

αριστερό άκρο:

$$\left(\tilde{p}_{(1)}\right)_{1}^{n+1} = \left(\tilde{p}_{\alpha}\right)_{1}^{n+1} + \frac{\tilde{E} \cdot \tilde{s}\left(\sqrt{\frac{\left(\tilde{A}_{(1)}\right)_{1}^{n+1}}{\tilde{A}_{0}} - 1}\right)}{\tilde{R}_{0}\left(1 - \frac{1}{2}v\right)}$$
(3.25)

δεξιό άκρο:

$$\left(\tilde{p}_{(2)}\right)_{k}^{n+1} = \left(\tilde{p}_{\alpha}\right)_{k}^{n+1} + \frac{\tilde{E} \cdot \tilde{s}\left(\sqrt{\frac{\left(\tilde{A}_{(2)}\right)_{k}^{n+1}}{\tilde{A}_{0}} - 1}\right)}{\tilde{R}_{0}\left(1 - \frac{1}{2}v\right)}$$
(3.26)

3.6.4 Αδιάστατη παροχή

Αδιαστατοποιούμε τη σχέση (3.19), αφού πρώτα έχουμε αντικαταστήσει την (3.18), δηλαδή:

$$\overline{\tilde{Q}} = \int_0^1 \tilde{A} \cdot \tilde{\upsilon}_x \, d\tilde{t}$$
(3.27)

όπου η αδιάστατη περίοδος γίνεται μονάδα, αφού αποτελεί το μέγεθος αδιαστατοποίησης του χρόνου.

Επειδή η φασική ταχύτητα c που αδιαστατοποιούμε τη σχέση (3.27) είναι παράμετρος που μεταβάλλεται όταν μεταβάλλουμε τη συχνότητα διέγερσης, τα αδιάστατα διαγράμματα που θα προκύπτουν δε θα έχουν την ίδια μορφή με τα αντίστοιχα διαστατά. Επιπλέον δε θα μπορεί να γίνει σύγκριση με το διάγραμμα 3.1, στο οποίο ο Rath χρησιμοποιεί ως ταχύτητα αδιαστατοποίησης την ταχύτητα διάδοσης για κύματα πίεσης και ταχύτητας κατά Moens-Korteweg, η οποία δε μεταβάλλεται όταν μεταβάλλεται η συχνότητα. Για τον παραπάνω λόγο, θεωρούμε για τα αποτελέσματα την αδιάστατη παροχή που προκύπτει από τη σχέση:

$$\overline{\mathbf{Q}}^* = \frac{c}{\alpha_0} \overline{\tilde{\mathbf{Q}}}$$
(3.28)

όπου το α₀ ορίζεται από την παρακάτω σχέση:

$$\alpha_0^2 = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{A}{\partial A / \partial p} \bigg|_{p = p_\alpha}$$
(3.29)

η οποία μέσω της εξίσωσης (1.14) δίνει*:

$$\alpha_{0} = \sqrt{\frac{\$ \cdot E}{\rho \cdot D_{0} \left(1 - \frac{1}{2} v\right)}}$$
(3.30)

3.7 Φυσιολογικά χαρακτηριστικά και ανατομία ουρητήρα

Οι ουρητήρες, δύο σε κάθε ανθρώπινο οργανισμό, είναι λεπτοί σωλήνες ινομυώδεις 30 cm μήκους, οι οποίοι αρχίζουν από τη νεφρική πύελο, περνούν στη λεκάνη πίσω από το περιτόναιο (οπισθοπεριτοναϊκά) και εκβάλλουν σ' ένα κοίλο μυώδες όργανο την ουροδόχο κύστη στο πίσω μέρος (εικ.: 3.1(α)). Είναι επιστρωμένοι με μεταβατικό επιθηλιακό ιστό και τα τοιχώματά τους, κατά βάση, αποτελούνται από ένα εσωτερικό επιμήκη και ένα εξωτερικό κυκλικό στρώμα λείων μυικών ινών (εικ.: 3.1(β)).

Τσαγγάρη Σ., Βιο-Ρευστομηχανική.

Εκδόσεις Ε.Μ.Π., Αθήνα, 1995. Σελ.:130, σχ.(30).

Οι ουρητήρες, δύο σε κάθε ανθρώπινο οργανισμό, είναι λεπτοί σωλήνες ινομυώδεις 30 cm μήκους, οι οποίοι αρχίζουν από τη νεφρική πύελο, περνούν στη λεκάνη πίσω από το περιτόναιο (οπισθοπεριτοναϊκά) και εκβάλλουν σ' ένα κοίλο μυώδες όργανο την ουροδόχο κύστη στο πίσω μέρος (εικ.: 3.1(α)). Είναι επιστρωμένοι με μεταβατικό επιθηλιακό ιστό και τα τοιχώματά τους, κατά βάση, αποτελούνται από ένα εσωτερικό επιμήκη και ένα εξωτερικό κυκλικό στρώμα λείων μυικών ινών (εικ.: 3.1(β)).



Εικόνα 3.1. Αναπαράσταση ουροποιητικού συστήματος (α). Φωτογραφία εγκάρσιας τομής ουρητήρα (β).

Ο ουρητήρας μπορεί να διακριθεί από τα αιμοφόρα αγγεία στο ζωντανό σώμα ως μια λευκώδης περίπου δομή λώρου, που δεν πάλλεται (όπως μια αρτηρία), αλλά κινείται περισταλτικά με συστολές των λείων μυών, οι οποίες αρχίζουν στη νεφρική πύελο, από ορισμένα ειδικά μυικά κύτταρα και μεταδίδονται στο μυ του ουρητηρικού τοιχώματος, προάγοντας τη ροή των ούρων προς την ουροδόχο κύστη. Η χωρητικότητα της ουροδόχου κύστης είναι 2-3 lt. Πάντως πολύ μικρότερες ποσότητες μέχρι 300 ml ούρων, προκαλούν την επιθυμία για ούρηση^{*}.

Το στόμιο κάθε ουρητήρα στο σημείο εκβολής είναι κλειστό μ' ένα είδος πτυχωτής βαλβίδας του βλεννογόνου υμένα. Αυτές οι βλεννογόνιες βαλβίδες και το λοξό επιστόμιο των ουρητήρων διαμέσου του μυώδους κυστικού τοιχώματος, εμποδίζουν τον ανάρρου των ούρων κατά τη διάρκεια κυστικής συστολής.

Από την ανατομία μπορούμε να εξάγουμε χρήσιμα συμπεράσματα σχετικά με τη τάξη μεγέθους της φυσιολογικής παροχής του ουρητήρα. Αν σκεφτεί κανείς ότι ο ανθρώπινος οργανισμός ουρεί κατά μέσο όρο 4 φορές ημερησίως (δηλαδή ανά εξάωρο) περί τα 300 ml, τότε η φυσιολογική παροχή και των δύο ουρητήρων, είναι της τάξης των 50 ml/hr, δηλαδή ο καθένας 25 ml/hr. Αυτή η τάξη μεγέθους μπορεί να επαληθευτεί και από την περιγραφή που γίνεται στο (42), όπου αναφέρεται ότι η φυσιολογική παραγωγή ούρων το 24ωρο από τα νεφρά, μπορούμε να εξάγουμε τη συνολική μέση παραγωγή που προσδίδουν οι δύο ουρητήρες: $42 \le \overline{Q}_1 \le 125$ (ml/hr). Για κάθε ένα ουρητήρα

Μυλωνάκη Μ., Ο οργανισμός του ανθρώπου.

Ο.Ε.Δ.Β. Σελ.: 242.

το ποσό αυτό είναι το μισό, θεωρώντας ότι μοιράζεται εξίσου στους δυο ουρητήρες του ανθρωπίνου σώματος, δηλαδή: 21≤ Q ≤62.5 (ml/hr).

3.8 Προσδιορισμός πλάτους περίσταλσης

Παρατηρώντας τη σχέση (3.13) διαπιστώνεται πως δεν μπορεί να εξαχθεί μια αναλυτική σχέση που να συνδέει το πλάτος περίσταλσης b με το πλάτος της εξωτερικής πίεσης p_b, διότι η εξωτερική πίεση p_a γράφεται συναρτήσει της άγνωστης εσωτερικής πίεσης p. Για να βρούμε τη τιμή πλάτους πίεσης p_b, που προσδίδει παραμόρφωση πλάτους περίσταλσης ε=0.1, όπως αναφέρεται στο διάγραμμα 3.1, εκτελούμε το πρόγραμμα rathpap.for^(παρ.: 14) για διάφορα πλάτη p_b μέχρι να πετύχουμε μέγιστη παραμόρφωση περίσταλσης του σωλήνα 0.1 και μάλιστα για το διάστημα των χαμηλών συχνοτήτων, όπου, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, μπορούμε να έχουμε σταθερό γεωμετρικό πλάτος με το χρόνο και από θέση σε θέση του σωλήνα. Το πρόγραμμα rathpap.for^(παρ.: 14) επιλύει το υπερβολικό σύστημα σε διαστατή μορφή για τιμές των παραμέτρων και δεδομένων που δίνονται στο (31). Ουσιαστικά ο Rath, H. J. προσομοιάζει την περισταλτική κίνηση του ουρητήρα του ανθρωπίνου σώματος, οποίος έχει τα εξής χαρακτηριστικά^{*}:

Εσωτερική διάμετρος D₀: από 0.0001περίπου - ακραία 0.005 m

Εύρος ταχύτητας κύματος c: από 0.01-0.06 m/sec

Εύρος μήκους κύματος λ: από 0.01-0.15 m

Παρακάτω περιγράφονται τα αριθμητικά δεδομένα με επεξηγήσεις, τα οποία έχουν προκύψει τόσο από το (36), όσο και από αυτά που χρησιμοποιεί ο Rath στα (31) και (28):

- I=0.3 m : το μήκος του ελαστικού σωλήνα, δεδομένο από την ανατομία του ουρητήρα
- λ=0.1 m : το μήκος του κύματος διέγερσης της εξωτερικής πίεσης, σχεδόν μέση τιμή που δίνεται από την φυσιολογία του ουρητήρα (παίρνεται ως ακέραιο πολλαπλάσιο του μήκους του σωλήνα, πράγμα που όπως θα φανεί παρακάτω, παίζει σημαντικό ρόλο).
- s=0.0001 m : το πάχος του τοιχώματος του ελαστικού σωλήνα
- D₀=0.0024 m : η εσωτερική διάμετρος του ελαστικού αγωγού όταν είναι απαραμόρφωτος, σχεδόν μέση τιμή μεταξύ ελάχιστης και μέγιστης που δίνεται από την ανατομία του ουρητήρα, και η διάμετρος στομίου του κάθε δοχείου
- $v = 7 \ 10^{-7} \ m^2/sec$: το κινηματικό ιξώδες του θεωρούμενου ρευστού, όπως αναφέρεται στο (36) και στο (31)
 - ρ=1000 kg/m³ : η πυκνότητα του θεωρούμενου ρευστού

^{*} Shapiro A. H., Jaffrin, M. Y., Weinberg, S. L., Peristaltic Pumping with Long Wave-lengths at Low Reynolds Number. Journal of Fluid Mechanics 37, 799-825 (1969).

- E=2.35 10⁵ N/m² : το μέτρο ελαστικότητας του υλικού του σωλήνα, βέβαια ο Rath στο (31) έχει τιμή της τάξης 10⁷ N/m² που αντιστοιχεί σε πλαστικό υλικό σκληρού PVC το οποίο δύσκολα παραμορφώνεται. Η τάξη μεγέθους 10⁶ N/m² αντιστοιχεί σε πλαστικό υλικό μαλακού PVC το οποίο μπορεί να παραμορφωθεί εύκολα. Η τάξη μεγέθους 10⁵ N/m² αντιστοιχεί στην ενδοτικότητα υλικού σιλικόνης η οποία είναι μαλακό υλικό πολύ κοντά στη σύσταση του τοιχώματος του ουρητήρα και παραμορφώνεται εύκολα στην ελαστική περιοχή, χωρίς πρόκληση μόνιμων πλαστικών παραμορφώσεων ή φαινομένων ερπυσμού. Έπειτα είναι και η κατάλληλη τιμή που μαζί με θεώρηση μονοαξονικής εντατικής κατάστασης στο τοίχωμα, μπορεί να δώσει τιμή στην ταχύτητα Moens-Korteweg, όποια δίνει και ο Rath στο διάγραμμα 3.1 παρμένο από το (31)
 - v=0.001 : ο λόγος Poisson του υλικού του σωλήνα ο οποίος έχει σχεδόν μηδενική τιμή, ώστε να προκύπτει η τιμή της ταχύτητας Moens-Korteweg που δίνει ο Rath. Μηδενική τιμή του λόγου Poisson σημαίνει ότι το τοίχωμα του σωλήνα δεν καταπονείται αξονικά, θεώρηση την οποία κάνει στη διατριβή του ο Rath (28) και δεν απέχει από την πραγματικότητα του πειράματος διότι τα άκρα του αγωγού είναι ελεύθερα και όχι κλειστά με υλικό, που σημαίνει ότι οι διαμήκεις τάσεις στο τοίχωμα του αγωγού είναι αμελητέες*
 - p_b=2058 Pa: το πλάτος της εξωτερικής πίεσης διέγερσης του αγωγού, το οποίο είναι το κατάλληλο, ώστε σε διάστημα χαμηλών συχνοτήτων ($0.005 \le c \le 0.309 \text{ m/sec}$), να δίνει πάντα γεωμετρική διέγερση παραμόρφωσης πλάτους: $\epsilon = \frac{R_{max} - R_m}{R_m} = \frac{|R_{min} - R_m|}{R_m} = 0.1$
 - p₀=101325 Pa : η ατμοσφαιρική πίεση που ασκείται τόσο στις ελεύθερες επιφάνειες των δοχείων όσο και στον ελαστικό αγωγό εξωτερικά με τρόπο στατικό
 - D_δ=0.0155 m : η διάμετρος των δύο δοχείων με τα οποία συνδέεται ο αγωγός
 - H=0.1 m : το ύψος της στάθμης ρευστού στα δοχεία, το οποίο είναι κοινό, αφού εξαναγκάζουμε, όπως ο Rath κάνει στο [1], τις στάθμες των δύο δοχείων να βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο κατά την εισροή-εκροή, με το να τοποθετούμε τις παροχετεύσεις των δύο δοχείων σε ύψος Η από τον πυθμένα.
 - g=9.81 m/sec² : η επιτάχυνση της βαρύτητας

^{*} Nash A. William, Schaum's Outline of Theory and Problems of Strength of Materials.

McGraw-Hill, New York, 1977. (Μετάφραση: Σωτηρίου Κ. Περσίδη, Αντοχή των Υλικών. ΕΣΠΙ, Αθήνα, 1988. Σελ.: 39-52.)

ξ1=ξ2=ζ1=ζ2=0.5: οι συντελεστές τοπικών απωλειών των στομίων των δύο δοχείων, όπου χρησιμοποιείται κοινή τιμή για τη ροή από το δοχείο προς το σωλήνα (ξ2, ζ2) και από το σωλήνα προς το δοχείο (ξ1, ζ1), διότι εφαρμόζοντας τις σχέσεις εύρεσης τοπικών απωλειών απότομης στένωσης και απότομης διεύρυνσης^{*}, προκύπτουν οι τιμές ξ2=ζ2=0.492 και ξ1=ζ1=0.583 αντίστοιχα, που η μέση τιμή τους βρίσκεται σχεδόν στην επιλεχθείσα τιμή.

3.9 Αποτελέσματα αριθμητικών μεθόδων

Τα αποτελέσματα που ακολουθούν προκύπτουν εκτελώντας τα προγράμματα rathmac.for^(παρ. 15) και rathlax.for^(παρ. 16) τα οποία εφαρμόζουν σε νλώσσα Fortran τις αριθμητικές μεθοδολογίες MacCormack και Lax Wendroff αντίστοιχα για τιμές αδιάστατων μεγεθών. Στο διάγραμμα 3.3 παρουσιάζονται σε αντιπαράθεση τα αποτελέσματα του (31) με αυτά της MacCormack μεθόδου που εφαρμόζεται εδώ. Στους χαμηλούς αριθμούς Reδ (χαμηλές συχνότητες), τα αποτελέσματα εδώ είναι μικρότερων τιμών από αυτά στο (31). Το διάγραμμα 3.4(α) δείχνει τη μεταβολή της μέσης αδιάστατης χρονικής παροχής με τους αδιάστατους αριθμούς Re και Fr, που προκύπτει και από τις δύο αριθμητικές μεθοδολογίες. Τα ίδια αποτελέσματα αλλά σε διαστατή μορφή φαίνονται στο διάγραμμα 3.4(β). Στα διαγράμματα 3.5(α) και 3.5(β) παρουσιάζονται οι μεταβολές του μέγιστου και ελάχιστου αντίστοιχα πλάτους παραμόρφωσης του ελαστικού σωλήνα και με τις δυο μεθόδους. Είναι προφανής η έντονη μεταβολή του πλάτους παραμόρφωσης με την αύξηση των αριθμών Re και Fr. Η μη μηδενική μέση χρονική παροχή οφείλεται σε δύο ειδών ασυμμετρίες που παρουσιάζονται. Η μία είναι η ασυμμετρία του πλάτους παραμόρφωσης, διόγκωσης ή συρρίκνωσης, από θέση σε θέση χ στον ελαστικό αγωγό. Παράδειγμα άλλη η διόγκωση - συρρίκνωση του αγωγού κοντά στο δοχείο (1), άλλη κοντά στο (2) και άλλη προς τα μέσα του αγωγού. Η άλλη ασυμμετρία υφίσταται για την ίδια θέση του αγωγού όμως για διαφορετικό βαθμό διόγκωσης από ότι συρρίκνωσης. Φαίνεται από τα διαγράμματα 3.6(α) και 3.6(β), ότι υπερισχύει η διόγκωση έναντι της συρρίκνωσης όσο αφορά τις μέγιστες τιμές.

Το φαινόμενο είναι αμελητέο για χαμηλούς αριθμούς Re δ 0.1 - 7 που αντιστοιχεί σε διάστημα κυκλικών συχνοτήτων 0.3 - 19.4 rad/sec, γι' αυτό το λόγο είναι αμελητέα και η μέση παροχή σ' αυτό το διάστημα. Αντιπροσωπευτικά για αυτό το διάστημα παρουσιάζονται στο διάγραμμα 3.9 όλες οι συναρτήσεις για Reδ =2, που προκύπτουν από τη μέθοδο MacCormack. Στο διάστημα αριθμών Reδ 7 - 15 που αντιστοιχεί σε διάστημα κυκλικών συχνοτήτων 19.4 -41.6 rad/sec αρχίζει το φαινόμενο να γίνεται έντονο, οπότε προκαλείται αύξηση της παροχής. Αντιπροσωπευτικά για αυτό το διάστημα παρουσιάζονται στο διάγραμμα 3.10 όλες οι συναρτήσεις για Reδ =12, που προκύπτουν από τη μέθοδο MacCormack, ενώ στο διάγραμμα 3.8 παρουσιάζονται με την ίδια μέθοδο οι μεταβολές του μέγιστου και ελάχιστου πλάτους παραμόρφωσης, που για το συγκεκριμένο διάστημα αρχίζουν να γίνονται έντονες. Στο διάστημα Reδ 15 - 600 που αντιστοιχεί σε διάστημα κυκλικών συχνοτήτων 41.6 - 1662 rad/sec το φαινόμενο γίνεται άκρως ισχυρό αφού η μεταβολή του πλάτους απαντάται σε ποσοστό για τη διόγκωση μέχρι και 144.2% για Reδ=80, ενώ για τη συρρίκνωση μέχρι και 48.1% με αποτέλεσμα να εμφανίζονται μέγιστες τιμές παροχής. Αντιπροσωπευτικά για αυτό το διάστημα παρουσιάζονται στο διάγραμμα 3.11 όλες οι συναρτήσεις για Reδ =60, που προκύπτουν από τη μέθοδο MacCormack. Τέλος για αριθμούς Reδ>600 δηλαδή για κυκλικές συχνότητες ω>1662 rad/sec, το πλάτος διόγκωσης τείνει να μηδενιστεί ενώ το πλάτος συρρίκνωσης σταθεροποιείται σε μικρό ποσοστό 4.76% με μηδενικά φαινόμενα ασυμμετρίας πράγμα που οδηγεί σε μηδενική μέση τιμή παροχής. Αντιπροσωπευτικά για αυτό το διάστημα παρουσιάζονται στο διάγραμμα 3.12 όλες οι συναρτήσεις για Reδ =500, που προκύπτουν από τη μέθοδο MacCormack.

[΄] Τσαγγάρη Σ., Μηχανική των Ρευστών.

Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα, 1995. Σελ.: 484 ->σχ.(20.38) & , 489 -> σχ.(20.49).

Σημειώνουμε εδώ ότι τα προαναφερθέντα διαστήματα συμπεριφοράς είναι κοινά για τις δύο αριθμητικές μεθόδους MacCormack και Lax Wendroff. Η μόνη διαφορά βρίσκεται στο που παρουσιάζεται το μέγιστο πλάτος διόγκωσης καθώς και τι τιμή έχει τόσο αυτό όσο και το μέγιστο πλάτος συρρίκνωσης. Οι μέγιστες τιμές παραπάνω είναι αυτές που αποκτούνται με τη μέθοδο Lax Wendroff. Επιπλέον παρατηρείται ότι στο πρώτο διάστημα συχνοτήτων η μέση παροχή είναι αμελητέα, σε σχέση με αυτή που ακολουθεί στα επόμενα διαστήματα και σε σχέση με αυτή που ακολουθεί στα επόμενα διαστήματα και σε σχέση με αυτή που ακολουθεί στα επόμενα διαστήματα και σε σχέση με αυτή που ακολουθεί στα επόμενα διαστήματα και σε σχέση με αυτή που ακολουθεί στα επόμενα διαστήματα και σε σχέση με αυτή που ακολουθεί στα επόμενα διαστήματα και σε σχέση με αυτή που ακολουθεί στα επόμενα διαστήματα και σε σχέση με αυτή που ακολουθεί στα επόμενα διαστήματα και σε σχέση με αυτή που ακολουθεί στα επόμενα διαστήματα και σε σχέση με αυτή που ακολουθεί στα επόμενα διαστήματα και σε σχέση με αυτή που παρουσιάζει ο Rath στο (31) για τα ίδια διαστήματα χαμηλών συχνοτήτων. Η ουσιαστική διαφωνία με το αριθμητικό πείραμα του Rath βρίσκεται στο πρωταρχικό διάστημα χαμηλών συχνοτήτων, ο οποίος παρουσιάζει μη ρεαλιστικά αποτελέσματα, όπως ο ίδιος τα χαρακτηρίζει στο (33) και όπως φαίνονται στο διάγραμμα 3.3(β), όπου η μέση χρονική παροχή κάθε ουρητήρα κυμαίνεται από 1 έως 10lt/hr. Φαίνεται από τα διαγράμματα 3.7(α) και 3.7(β) ότι οι τιμές μέσης παροχής που εκδίδει το παρόν μοντέλο, για τα ανατομικά και γεωμετρικά χαρακτηριστικά του ουρητήρα, είναι πάρα πολύ κοντά στις φυσιολογικές που αναφέρονται στην παράγραφο 3.7. Συνεπώς το μοντέλο αποκρίνεται πολύ καλά στις χαμηλές συχνότητες, που είναι εξάλλου αυτές της φυσιολογικής λειτουργίας του ουρητήρα.



Διάγραμμα 3.3(α). Σύγκριση αποτελεσμάτων αριθμητικής λύσης Rath με τη παρούσα μέθοδο MacCormack σε αδιάστατη μορφή.



Διάγραμμα 3.3(β). Σύγκριση αποτελεσμάτων αριθμητικής λύσης Rath με τη παρούσα μέθοδο MacCormack σε διαστατή μορφή.



Διάγραμμα 3.4. Συμπεριφορά της μέσης χρονικής παροχής σε αδιάστατη (α) και διαστατή μορφή, συναρτήσει του αριθμού Reδ και της κυκλικής συχνότητας ω αντίστοιχα.



Διάγραμμα 3.5. Συμπεριφορά μέγιστου (α) και ελάχιστου (β) πλάτους παραμόρφωσης ελαστικού σωλήνα συναρτήσει των αδιάστατων αριθμών Reδ και Fr.



Διάγραμμα 3.6. Συμπεριφορά μέγιστου και ελάχιστου πλάτους παραμόρφωσης ελαστικού σωλήνα με τη μέθοδο MacCormack (α) και Lax Wendroff (β), συναρτήσει των αδιάστατων αριθμών Reδ και Fr.



Διάγραμμα 3.7. (α) Μεταβολή μέσης χρονικής παροχής συναρτήσει των αδιάστατων αριθμών Reδ και Fr με τιμές που καθορίζονται από το φυσιολογικό διάστημα συχνοτήτων του ουρητήρα. (β) Η ίδια μεταβολή σε διαστατή μορφή.



Διάγραμμα 3.8. Μεταβολή πλάτους παραμόρφωσης σε χαμηλούς αριθμούς Reδ (α) και σε χαμηλές συχνότητες ω (β) που προκύπτει με τη μέθοδο MacCormack.



Διάγραμμα 3.9. (α) Μεταβολή της συνάρτησης της αδιάστατης παροχής $Q^*(\tilde{t})$ και (β),(γ),(δ) μεταβολή κατά μήκος και για μια περίοδο των αδιάστατων συναρτήσεων $\tilde{p}(\tilde{x}, \tilde{t}), \tilde{A}(\tilde{x}, \tilde{t}), \tilde{\upsilon}(\tilde{x}, \tilde{t})$ αντίστοιχα, για Reδ=2 με τη μέθοδο MacCormack.



αγραμμα 3.10. (α) Μεταρολή της συναρτησης της ασιαστατής παροχής (ξ. (τ.) και (β),(γ),(δ) μεταβολή κατά μήκος και για μια περίοδο των αδιάστατων συναρτήσεων ῆ(ᾶ, τ̃), Ã(ᾶ, τ̃), ῦ(ᾶ, τ̃) αντίστοιχα, για Reδ=12 με τη μέθοδο MacCormack.



Διάγραμμα 3.11. (α) Μεταβολή της συνάρτησης της αδιάστατης παροχής $Q^*(\tilde{t})$ και (β),(γ),(δ) μεταβολή κατά μήκος και για μια περίοδο των αδιάστατων συναρτήσεων $\tilde{p}(\tilde{x}, \tilde{t}), \tilde{A}(\tilde{x}, \tilde{t}), \tilde{\upsilon}(\tilde{x}, \tilde{t})$ αντίστοιχα, για Reδ=60 με τη μέθοδο MacCormack.



Διάγραμμα 3.12. (α) Μεταβολή της συνάρτησης της αδιάστατης παροχής $Q^*(\tilde{t})$ και (β),(γ),(δ) μεταβολή κατά μήκος και για μια περίοδο των αδιάστατων συναρτήσεων $\tilde{p}(\tilde{x}, \tilde{t}), \tilde{A}(\tilde{x}, \tilde{t}), \tilde{\upsilon}(\tilde{x}, \tilde{t})$ αντίστοιχα, για Reδ=500 με τη μέθοδο MacCormack.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4°

Αριθμητική επίλυση περισταλτικής και αντλητικής ροής σε αγωγό με κινούμενα τοιχώματα

4.1 Θεωρητικό μοντέλο γνωστού συναρτησιακού διατομής

Εξαιτίας της απόκλισης των αποτελεσμάτων του κεφαλαίου 3 με το (31), εκτελούμε με διαφορετικό τρόπο το προηγούμενο αριθμητικό πείραμα. Θεωρούμε ότι η άντληση προκαλείται από ένα προοδευτικό κύμα διαστολής και συρρίκνωσης της διατομής κατά μήκος των τοιχωμάτων εύκαμπτου σωλήνα, ο οποίος μπορεί να συνδέεται εκατέρωθεν με δοχεία διαφορετικών διατομών. Δηλαδή είναι γνωστή η συνάρτηση μεταβολής της διατομής του εύκαμπτου αγωγού A(x,t). Με αυτό το τρόπο πετυχαίνουμε άμεση κίνηση των τοιχωμάτων του αγωγού, χωρίς να μεσολαβεί κάποια εξωτερική πίεση, οπότε η γεωμετρία της ταλάντωσης είναι καθορισμένη. Με αυτό τον τρόπο δεν υπάρχουν ασυμμετρίες στα πλάτη μεταβολής του αγωγού, παρά μόνο στο περιβάλλον του όταν τοποθετηθούν διαφορετικά δοχεία εκατέρωθεν. Έτσι έχουμε να αντιμετωπίσουμε μια μονοδιάστατη ροή ξανά αλλά με σταθερό γεωμετρικό πλάτος διέγερσης.

Αναφερόμενοι στο σχήμα 3.1 και χρησιμοποιώντας τόσο την εξίσωση ορμής όσο και την εξίσωση συνέχειας για τον εύκαμπτο αγωγό και για τα δοχεία αντίστοιχα, εξάγεται^(παρ.:ΙΙ) η συνήθης διαφορική εξίσωση (Σ.Δ.Ε.), που διέπει το μοντέλο με γνωστή πλέον τη συνάρτηση A(x,t).

Η Σ.Δ.Ε. με άγνωστη την συνάρτηση παροχής, που εισάγεται και εξάγεται στο σύστημα, είναι 1^{ης} τάξης μη γραμμική της μορφής του Riccati:

$$B(t) \cdot \dot{Q} + C(t) \cdot Q + D \cdot Q^{2} + E(t) = 0$$
(4.1)

Για την αναλυτική επίλυση της Δ.Ε. Riccati απαιτείται να γνωρίζουμε μια μερική λύση, αλλιώς η αναλυτική της επίλυση καθίσταται αδύνατη. Αν ξέρουμε μια μερική λύση Q_s(t) κάνουμε το μετασχηματισμό Q=Q_s(t)+1/f(t), όπου f(t)≠0, οπότε η Δ.Ε. μετατρέπεται σε γραμμική 1^{ης} τάξης και 1^{ου} βαθμού, η οποία ως γνωστόν επιλύεται αναλυτικά^{*}.

Θεωρώντας ότι η επιτάχυνση στα δοχεία έχει την ίδια τιμή παντού, δηλαδή όπως επιταχύνεται το ρευστό στο στόμιο το ίδιο επιταχύνεται και η στάθμη του ρευστού και η ίδια επιτάχυνση επικρατεί στο ρευστό κατά τη ροϊκή γραμμή από τη στάθμη έως το στόμιο, οι συντελεστές της (4.1)^(παρ.:II) έχουν ως εξής:

Μανατάκη Μ., Διαφορικές εξισώσεις με εφαρμογές.

Έκδ. Παν. Πατρών, Πάτρα, 1991, σελ.:12.

$$B(t) = \frac{h_1}{A_1} + \frac{h_2}{A_2} + \int_0^L \frac{1}{A(x,t)} dx$$
(4.2)

$$C(t) = 8\pi v \cdot \left(\frac{h_1}{A_1^2} + \frac{h_2}{A_2^2} + \int_0^L \frac{1}{[A(x,t)]^2} dx\right) - \left(\frac{\pm \zeta_{1,2}}{A_{02}^2} + \frac{1}{A_2^2}\right) \cdot \frac{dV(L,t)}{dt} + \int_0^L \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{A(x,t)}\right) dx \quad (4.3)$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mathbf{A}_2^2} - \frac{1}{\mathbf{A}_1^2} \pm \frac{\xi_{1,2}}{\mathbf{A}_{01}^2} \pm \frac{\zeta_{1,2}}{\mathbf{A}_{02}^2} \right)$$
(4.4)

$$E(t) = g(h_{2} - h_{1}) - \frac{h_{2}}{A_{2}} \cdot \frac{d^{2}V(L,t)}{dt^{2}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\pm \zeta_{1,2}}{A_{02}^{2}} + \frac{1}{A_{2}^{2}} \right) \cdot \left[\frac{dV(L,t)}{dt} \right]^{2} - 8\pi v \frac{h_{2}}{A_{2}^{2}} \cdot \frac{dV(L,t)}{dt} - \int_{0}^{L} \frac{1}{A(x,t)} \cdot \frac{\partial^{2}V(x,t)}{\partial t^{2}} dx - \int_{0}^{L} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{A(x,t)} \right) \cdot \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} dx - 8\pi v \int_{0}^{L} \frac{1}{[A(x,t)]^{2}} \cdot \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} dx$$
(4.5)

4.2 Αριθμητική επίλυση Σ.Δ.Ε. με τη μέθοδο Runge-Kutta

Για την επίλυση της (4.1) Σ.Δ.Ε. εφαρμόζεται η κλασσική 4ης τάξης μέθοδος Runge-Kutta. Σύμφωνα μ' αυτή απομονώνουμε στο ένα μέλος της Σ.Δ.Ε. την παράγωγο της άγνωστης συνάρτησης, οπότε:

$$\dot{\mathbf{Q}} = -\frac{\mathbf{B}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{Q} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{Q}^2 + \mathbf{D}(\mathbf{t})}{\mathbf{A}(\mathbf{t})} \tag{4.6}$$

Κατόπιν υπολογίζουμε τους συντελεστές κάθε τάξης μέσα στο χρονικό διάστημα Δt κάθε φορά, οι οποίοι έχουν ως εξής^{*} :

$$k_{1} = \dot{Q}(t_{i}, Q_{i}) = -\frac{B(t_{i}) \cdot Q_{i} + C \cdot Q_{i}^{2} + D(t_{i})}{A(t_{i})}$$
(4.7a)

$$k_{2} = \dot{Q}(t_{i} + \Delta t/2, Q_{i} + \Delta t \cdot k_{1}/2) = -\frac{B(t_{i} + \Delta t/2) \cdot (Q_{i} + \Delta t \cdot k_{1}/2) + C \cdot (Q_{i} + \Delta t \cdot k_{1}/2)^{2} + D(t_{i} + \Delta t/2)}{A(t_{i} + \Delta t/2)}$$
(4.7β)

$$k_{3} = \dot{Q}(t_{i} + \Delta t/2, Q_{i} + \Delta t \cdot k_{2}/2) = -\frac{B(t_{i} + \Delta t/2) \cdot (Q_{i} + \Delta t \cdot k_{2}/2) + C \cdot (Q_{i} + \Delta t \cdot k_{2}/2)^{2} + D(t_{i} + \Delta t/2)}{A(t_{i} + \Delta t/2)}$$

$$k_{4} = \dot{Q}(t_{i} + \Delta t, Q_{i} + \Delta t \cdot k_{3}) = -\frac{B(t_{i} + \Delta t) \cdot (Q_{i} + \Delta t \cdot k_{3}) + C \cdot (Q_{i} + \Delta t \cdot k_{3})^{2} + D(t_{i} + \Delta t)}{A(t_{i} + \Delta t)}$$
(4.76)

^{*} Chapra C. Steven, Canale P. Raymond, Numerical Methods for Engineers, McGraw-Hill, New York, 1988.

Τέλος η επόμενη τιμή της ζητούμενης συνάρτησης βρίσκεται από τη σχέση:

$$Q_{i+1} = Q_i + \left[\frac{1}{6} \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\right] \cdot \Delta t$$
(4.8)

4.3 Συμπεριφορά μοντέλου με επιβολή αρμονικού συναρτησιακού διατομής δύο ανεξάρτητων μεταβλητών (περίσταλση)

Θεωρούμε την περίπτωση που χρησιμοποιείται αρμονικό συναρτησιακό διατομής δύο ανεξάρτητων μεταβλητών x και t (σχήμα 4.1). Πρόκειται για επιβολή αρμονικής περισταλτικής διέγερσης στον εύκαμπτο αγωγό, κατά την οποία η μεταβολή της διατομής του δίνεται από τη σχέση:

$$A(x,t) = A_0 + A_b \cdot \cos(\omega t - \kappa x)$$
(4.9)



Σχήμα 4.1. Θεωρούμενη πειραματική διάταξη εύκαμπτου αγωγού που υπόκειται σε περίσταλση. Τα δοχεία μπορεί να είναι διαφόρων διατομών.

Για να εκτιμήσουμε τη συμπεριφορά της μέσης χρονικής παροχής σ' αυτή την περίπτωση ολοκληρώνουμε την εξίσωση συνέχειας (1.5) για όλο το μήκος του αγωγού από 0 έως L. Το γινόμενο A(L,t)υ(L,t) εκφράζει την παροχή στο τέλος του σωλήνα, ενώ το γινόμενο A(0,t)υ(0,t) εκφράζει την παροχή στην αρχή του σωλήνα. Η διαφορά τους αποτελεί την αντλητική ικανότητα του εύκαμπτου σωλήνα. Μπορούμε δηλαδή να γράψουμε την εξίσωση συνέχειας (1.5) ως εξής:

$$Q(L,t) - Q(0,t) = -\frac{\partial}{\partial t} \int_0^L A(x,t) dx$$
(4.10)

Αντικαθιστώντας την (4.9) στην (4.10) και επιλύνοντας το ολοκλήρωμα έχουμε:

$$\Delta Q = \frac{\omega}{\kappa} A_{b} \cdot \left[\cos(\omega t - \kappa L) - \cos \omega t \right]$$
(4.11)

Αν αντικαταστήσουμε την κυκλική συχνότητα ω=2πc/λ και τον κυματαριθμό κ=2π/λ παραπάνω έχουμε:

$$\Delta \mathbf{Q} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{A}_{b} \cdot \left[\cos \left(\omega \mathbf{t} - 2\pi \frac{\mathbf{L}}{\lambda} \right) - \cos \omega \mathbf{t} \right]$$
(4.12)

όπου c η φασική ταχύτητα του κύματος και λ το μήκος κύματος.

Παρατηρώντας την (4.12) μπορούμε να ανάγουμε το πρώτο συνημίτονο της διαφοράς στο πρώτο τεταρτημόριο όταν ο λόγος L/λ είναι ακέραιος. Έτσι όταν το μήκος του αγωγού είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του μήκους κύματος η (4.12) δίνει ΔQ=0. Συνεπώς μπορεί να αναπτυχθεί μη μηδενική διαφορά παροχής από τον εύκαμπτο αγωγό μόνο στην περίπτωση που ο λόγος μήκους του αγωγού προς το μήκος κύματος δεν είναι ακέραιος.

Γενικεύοντας το ίδιο συμβαίνει και για αρμονικό συναρτησιακό διατομής όπου ο τριγωνομετρικός αριθμός έχει τεθεί σε κάποια άρτια δύναμη. Δηλαδή για:

$$A(x,t) = A_0 + A_h \cdot \cos^n(\omega t - \kappa x)$$
 (n: άρτιος ακέραιος) (4.13)

η διαφορά παροχής είναι:
$$\Delta Q = c \cdot A_b \cdot \left[\cos^n \left(\omega t - 2\pi \frac{L}{\lambda} \right) - \cos^n \omega t \right]$$
(4.14)

Για να μπορεί να γίνει σύγκριση με το αριθμητικό πείραμα του Rath, εξάγουμε ξανά τους συντελεστές της (4.1)^(παρ.:III), θεωρώντας την επιτάχυνση των δοχείων ως τη μέση τιμή μεταξύ των επιταχύνσεων της στάθμης και αυτής του στομίου, όπως περιγράφει η σχέση (3.3). Για λόγους καλύτερης απλούστευσης αδιαστατοποιούμε με διαφορετικά αδιάστατα μεγέθη και αδιάστατους αριθμούς από αυτά που χρησιμοποιήσαμε στο ελαστικό πρόβλημα^(παρ.:III). Η διαφορική εξίσωση (III.5), που προκύπτει, επιλύεται με το πρόγραμμα acpercon.for^(παρ.:I7), το οποίο εφαρμόζει την αριθμητική μέθοδο Runge-Kutta της παραγράφου 4.2.

Όταν ο λόγος μήκους του αγωγού προς το μήκος κύματος της διέγερσης είναι ακέραιος, το πρόγραμμα δίνει τη μηδενική συνάρτηση για κάθε χρονική στιγμή στην προς επίλυση συνάρτηση παροχής για οποιαδήποτε συχνότητα. Ούτε η ασυμμετρία επιφέρει κάποια τιμή στην παροχή σ'αυτή την περίπτωση ακεραίου λόγου, παρά λαμβάνουμε τη μηδενική συνάρτηση επίσης. Δηλαδή η επιρροή του ασύμμετρου περιβάλλοντος στον αγωγό υφίσταται μόνο για μη μηδενικές τιμές της στιγμιαίας συνάρτησης παροχής.

Ένας τρόπος με τον οποίο μπορούμε να προκαλέσουμε ασυμμετρία χωρίς να μεταβάλουμε τα δοχεία εκατέρωθεν του αγωγού αλλά ούτε και τις τοπικές απώλειες των στομίων, είναι να έχουμε διαφορετική τιμή της συνάρτησης διατομής στην αρχή και στο τέλος του αγωγού. Δηλαδή για κάθε χρονική στιγμή t_i να ισχύει A(0,t_i)≠ A(L,t_i). Αυτό πετυχαίνεται όταν ο λόγος μήκους του αγωγού προς το μήκος κύματος της διέγερσης δεν είναι ακέραιος, οπότε η σχέση (4.12) δίνει μη μηδενική διαφορά παροχής στα άκρα του αγωγού. Χρησιμοποιούμε τα αριθμητικά δεδομένα της παραγράφου 3.8, εκτός από το μήκος του αγωγού το οποίο λαμβάνουμε ίσο με 0.31m αντί για 0.3m, ώστε ο λόγος L/λ=3.1, να μην είναι ακέραιος. Σ' αυτή την περίπτωση ο αριθμός Strouhal είναι Str=19.478. Υπενθυμίζοντας τα δεδομένα έχουμε:

A ₁ =A ₂ =1.887 10 ⁻⁴ m ²	L=0.31 m
A ₀ =4.988 10 ⁻⁶ m ²	λ=0.1 m
A _b =1.047 10 ⁻⁶ m ²	Q ₀ =0
$A_{01}=A_{02}=4.524 \ 10^{-6} \ m^2$	$v = 7 \ 10^{-7} \ m^2/sec$
H=0.1 m	ρ=1000 kg/m³
g=9.81 m/sec ²	ξ ₁ =ξ ₂ =ζ ₁ =ζ ₂ =0.5

Τα αποτελέσματα του προγράμματος acpercon.for όχι μόνο δίνουν μη μηδενική περιοδική συνάρτηση παροχής, αλλά επιπλέον η μέση τιμή της συνάρτησης είναι διάφορη του μηδενός, πράγμα που δείχνει κάποιο βαθμό αντλητικής ικανότητας. Στα διαγράμματα 4.1 και 4.2 παρουσιάζεται η συνάρτηση αδιάστατης χρονικής παροχής που δίνει το μοντέλο ενδεικτικά



για δύο συχνότητες. Όσο αυξάνει η συχνότητα τόσο αργότερα αποκαθίσταται η ισορροπία στο σύστημα.

Για να μπορεί να γίνει μια σύγκριση στις τάξεις μεγέθους παροχής, που δίνει το παρόν μοντέλο, μ' αυτές που δίνει το ελαστικό μοντέλο του κεφαλαίου 3 για τη γεωμετρία του ουρητήρα, παραθέτουμε το διάγραμμα 4.3, το οποίο παρουσιάζει τη μεταβολή της μέσης χρονικής παροχής με τις φυσιολογικές συχνότητες λειτουργίας του ουρητήρα. Η σύγκριση μπορεί να γίνει μόνο σε επίπεδο τάξης μεγέθους και όχι επακριβώς, διότι στο ελαστικό μοντέλο του κεφαλαίου 3 η μη μηδενική μέση χρονική παροχή οφείλεται σε ασυμμετρία του πλάτους διέγερσης, όπως περιγράφηκε, ενώ εδώ οφείλεται στην ασύμμετρη μεταβολή της συνάρτησης διατομής μεταξύ αρχής και τέλους του αγωγού. Συγκρίνοντας τα δύο διαγράμματα 4.3 και 3.7(β), παρατηρείται ίδια τάξη μεγέθους της μέσης χρονικής παροχής, η οποία είναι φυσιολογική κατά την παράγραφο 3.7 και ίδια μορφή μεταβολής. Έτσι επιβεβαιώνεται ακόμη μια φορά η μη ρεαλιστικότητα του διαγράμματος 3.1 του Rath.



4.4 Συμπεριφορά μοντέλου με επιβολή αρμονικού συναρτησιακού διατομής μιας ανεξάρτητης μεταβλητής (αντλία μπαλονιού)

Εξετάζεται τώρα η περίπτωση που χρησιμοποιείται αρμονικό συναρτησιακό διατομής μιας ανεξάρτητης μεταβλητής t, ώστε το μοντέλο να γίνει πιο απλό και έτσι να είναι δυνατή η εκτίμηση της συμπεριφοράς του με περισσότερη σιγουριά. Πρόκειται για επιβολή αρμονικής

διέγερσης στον εύκαμπτο αγωγό, κατά την οποία η μεταβολή της διατομής του δίνεται από τη σχέση:

$$A(t) = A_0 + A_b \cdot \cos\omega t \tag{4.15}$$

Το μοντέλο τώρα παίρνει τη μορφή του σχήματος (4.2), όπου ο εύκαμπτος αγωγός πάλλεται ομοιόμορφα καθόλου το μήκος του γύρω από την αρχική του διατομή Α₀ με ένα πλάτος Α₀.



Σχήμα 4.2. Παράσταση μοντέλου με μεταβολή της διατομής του εύκαμπτου αγωγού στο χρόνο μόνο.

Θα αδιαστατοποιήσουμε με διαφορετικά αδιάστατα μεγέθη και αδιάστατους αριθμούς από αυτά που χρησιμοποιήσαμε στο περισταλτικό πρόβλημα, διότι εδώ δεν υπεισέρχεται η μεταβολή της χωρικής συντεταγμένης x. Έτσι η (4.1) Σ.Δ.Ε. μπορεί να απλουστευθεί ως προς τις παραμέτρους, κάνοντας αδιαστατοποίηση με χρήση των κατωτέρω:

$$\widetilde{x} = \frac{x}{L}$$
: για το αδιάστατο μήκος, όπου L το μήκος του ελαστικού σωλήνα.

- $\tilde{t} = t \cdot \omega$: για τον αδιάστατο χρόνο, όπου ω=2πc/λ είναι η κυκλική συχνότητα του κύματος διέγερσης, με c τη φασική ταχύτητα του κύματος και λ το μήκος κύματος.

$$\begin{split} W &= R_0 \cdot \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} : \quad \text{για τον αριθμό Womersley, όπου ν το κινηματικό ιξώδες του ρευστού και R_0 } \\ \eta \ \mu \acute{e} \sigma \eta \ εσωτερική ακτίνα του ελαστικού σωλήνα κατά τη διέγερση. \\ \widetilde{h} &= \frac{h}{L} : \quad \text{για το αδιάστατο ύψος του εκάστοτε δοχείου.} \end{split}$$

$$Fr = \frac{g}{\omega^2 \cdot L}$$
: για τον αριθμό Froude (λόγος δυνάμεων αδράνειας προς τις δυνάμεις βαρύτητας), όπου g η επιτάχυνση της βαρύτητας.

$$\tilde{Q}_{01} = \frac{Q_{01}}{A_0 \cdot \omega \cdot L}$$
: για την ζητούμενη αδιάστατη συνάρτηση παροχής.
 $\tilde{V} = \frac{V}{A_0 \cdot L}$: για τον αδιάστατο όγκο.

Πρέπει να σημειωθεί εδώ, ότι οι μεταβολές των αριθμών Womersley και Froude, δε μπορεί να είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, θεωρώντας ότι το πείραμα γίνεται κάθε φορά μεταβάλλοντας μόνο μία παράμετρο του προβλήματος. Δηλαδή δε μπορούμε να μεταβάλουμε τον ένα αριθμό, κρατώντας τον άλλο σταθερό και αυτό συμβαίνει επειδή θέλουμε τα αποτελέσματα να παριστάνονται σε διαγράμματα μονοπαραμετρικής μεταβολής. Για παράδειγμα, όταν κάνουμε το πείραμα για το ίδιο ρευστό, τον ίδιο σωλήνα και στο ίδιο γεωγραφικό σημείο, κρατάμε σταθερά τα ν, R₀, L και g και μεταβάλλουμε μόνο τη συχνότητα διέγερσης από την οποία εξαρτώνται και οι δυο αδιάστατοι αριθμοί.



Διάγραμμα 4.4. Συμμεταβολή των αδιάστατων αριθμών Fr και W.

Αν χρησιμοποιήσουμε τα ανωτέρω, οι εξισώσεις: (4.1) έως (4.5) παίρνουν την πιο κάτω αδιάστατη μορφή:

$$\widetilde{B}(\widetilde{t}) \cdot \widetilde{Q} + \widetilde{C}(\widetilde{t}) \cdot \widetilde{Q} + \widetilde{D} \cdot \widetilde{Q}^2 + \widetilde{E}(\widetilde{t}) = 0$$
(4.16)

όπου:

$$\widetilde{B}(\widetilde{t}) = \frac{\widetilde{h}_1}{\widetilde{A}_1} + \frac{\widetilde{h}_2}{\widetilde{A}_2} + \int_0^1 \frac{1}{\widetilde{A}} d\widetilde{x}$$
(4.17)

$$\widetilde{C}(\widetilde{t}) = \frac{8}{W^2} \cdot \left(\frac{\widetilde{h}_1}{\widetilde{A}_1^2} + \frac{\widetilde{h}_2}{\widetilde{A}_2^2} + \int_0^1 \frac{1}{\widetilde{A}^2} d\widetilde{x}\right) - \left(\frac{\pm \zeta_{1,2}}{\widetilde{A}_{02}^2} + \frac{1}{\widetilde{A}_2^2}\right) \cdot \frac{d\widetilde{V}}{d\widetilde{t}} + \int_0^1 \frac{\partial}{\partial\widetilde{t}} \left(\frac{1}{\widetilde{A}}\right) d\widetilde{x}$$
(4.18)

$$\widetilde{\mathbf{D}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\widetilde{A}_2^2} - \frac{1}{\widetilde{A}_1^2} \pm \frac{\xi_{1,2}}{\widetilde{A}_{01}^2} \pm \frac{\zeta_{1,2}}{\widetilde{A}_{02}^2} \right)$$
(4.19)

$$\widetilde{E}(\widetilde{t}) = \operatorname{Fr} \cdot (\widetilde{h}_{2} - \widetilde{h}_{1}) - \frac{\widetilde{h}_{2}}{\widetilde{A}_{2}} \cdot \frac{d^{2}\widetilde{V}}{d\widetilde{t}^{2}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\pm \zeta_{1,2}}{\widetilde{A}_{02}^{2}} + \frac{1}{\widetilde{A}_{2}^{2}} \right) \cdot \left(\frac{d\widetilde{V}}{d\widetilde{t}} \right)^{2} - \frac{8}{W^{2}} \frac{\widetilde{h}_{2}}{\widetilde{A}_{2}^{2}} \cdot \frac{d\widetilde{V}}{d\widetilde{t}} - - \int_{0}^{1} \frac{1}{\widetilde{A}} \cdot \frac{\partial^{2}\widetilde{V}}{\partial\widetilde{t}^{2}} d\widetilde{x} - \int_{0}^{1} \frac{\partial}{\partial\widetilde{t}} \left(\frac{1}{\widetilde{A}} \right) \cdot \frac{\partial\widetilde{V}}{\partial\widetilde{t}} d\widetilde{x} - \frac{8}{W^{2}} \int_{0}^{1} \frac{1}{\widetilde{A}^{2}} \cdot \frac{\partial\widetilde{V}}{\partial\widetilde{t}} d\widetilde{x}$$

$$(4.20)$$

Λόγω της εξάρτησης μόνο από το χρόνο της διατομής οι συντελεστές της (4.16) έχουν ως εξής:

$$\widetilde{B}(\widetilde{t}) = \frac{\widetilde{h}_1}{\widetilde{A}_1} + \frac{\widetilde{h}_2}{\widetilde{A}_2} + \frac{1}{\widetilde{A}}$$
(4.21)

$$\widetilde{C}(\widetilde{t}) = \frac{8}{W^2} \cdot \left(\frac{\widetilde{h}_1}{\widetilde{A}_1^2} + \frac{\widetilde{h}_2}{\widetilde{A}_2^2} + \frac{1}{\widetilde{A}^2}\right) - \left(\frac{\pm \zeta_{1,2}}{\widetilde{A}_{02}^2} + \frac{1}{\widetilde{A}_2^2} + \frac{1}{\widetilde{A}^2}\right) \cdot \frac{d\widetilde{A}}{d\widetilde{t}}$$
(4.22)

$$\widetilde{\mathbf{D}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\widetilde{A}_{2}^{2}} - \frac{1}{\widetilde{A}_{1}^{2}} \pm \frac{\xi_{1,2}}{\widetilde{A}_{01}^{2}} \pm \frac{\zeta_{1,2}}{\widetilde{A}_{02}^{2}} \right)$$
(4.23)

$$\widetilde{E}(\widetilde{t}) = \operatorname{Fr} \cdot (\widetilde{h}_{2} - \widetilde{h}_{1}) - \left(\frac{\widetilde{h}_{2}}{\widetilde{A}_{2}} + \frac{1}{2\widetilde{A}}\right) \cdot \frac{d^{2}\widetilde{A}}{d\widetilde{t}^{2}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\pm \zeta_{1,2}}{\widetilde{A}_{02}^{2}} + \frac{1}{\widetilde{A}_{2}^{2}} + \frac{1}{\widetilde{A}^{2}}\right) \cdot \left(\frac{d\widetilde{A}}{d\widetilde{t}}\right)^{2} - \frac{8}{W^{2}} \left(\frac{\widetilde{h}_{2}}{\widetilde{A}_{2}^{2}} + \frac{1}{2\widetilde{A}^{2}}\right) \cdot \frac{d\widetilde{A}}{d\widetilde{t}}$$

$$(4.24)$$

Στις σχέσεις (4.22) έως (4.24), οι δείκτες των τοπικών απωλειών εναλλάσσονται ανάλογα με τη φορά κίνησης του ρευστού. Δηλαδή όταν το ρευστό ρέει από μεγαλύτερη διατομή σε μικρότερη τότε ισχύει ο δείκτης 2, ενώ όταν ρέει από μικρότερη σε μεγαλύτερη ισχύει ο 1. Επιπλέον όταν η φορά κίνησης του ρευστού είναι από τα αριστερά προς τα δεξιά ισχύει το πρόσημο (+) ενώ από τα δεξιά προς τα αριστερά το (-).

Για συμμετρικά δοχεία και μηδενικές τοπικές απώλειες στα στόμια των δοχείων, ο συντελεστής Ď μηδενίζεται και ο μη γραμμικός όρος απαλείφεται. Έτσι η Σ.Δ.Ε. (4.16) γίνεται γραμμική πρώτης τάξης και εκφράζει τη συμμετρική ταλάντωση του ρευστού μεταξύ των συγκοινωνούντων δοχείων. Σ' αυτή την περίπτωση η μέση χρονική παροχή που αποδίδει το σύστημα είναι μηδέν και συνεπώς το μοντέλο χάνει την αντλητική του ικανότητα. Η μη μηδενική μέση χρονική παροχή οφείλεται στο μη γραμμικό όρο της Σ.Δ.Ε. και στη συνέχεια αναλύεται η επιρροή του σε ότι αφορά την απόδοση παροχής.

4.4.1 Τοπικές απώλειες στα στόμια των δοχείων

Εξετάζοντας το αριστερό στόμιο, μπορούμε να διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1) Av **A**₁>**A**₀, τότε:

 α) όταν Q1>0 (ροή ρευστού από τα αριστερά προς τα δεξιά), ο συντελεστής τοπικών απωλειών έχει την τιμή που δίνεται από την πειραματική σχέση^{*}:

$$\xi_{2} = 0.587 + \frac{0.395}{\sqrt{\tilde{A}_{1}}} - \frac{4.538}{\tilde{A}_{1}} + \frac{14.243}{\sqrt{\tilde{A}_{1}^{3}}} - \frac{19.222}{\tilde{A}_{1}^{2}} + \frac{8.54}{\sqrt{\tilde{A}_{1}^{5}}}$$
(4.25)

β) όταν Q1<0 (ροή ρευστού από τα δεξιά προς τα αριστερά), ο συντελεστής τοπικών απωλειών έχει την τιμή που δίνεται από τη σχέση*:

$$\xi_1 = \left(1 - \frac{1}{\widetilde{A}_1}\right)^2 \tag{4.26}$$

2) Av A1<A0, τότε:

α) όταν Q1>0 (ροή ρευστού από τα αριστερά προς τα δεξιά), ο συντελεστής τοπικών απωλειών έχει την τιμή που δίνεται από τη σχέση**:

$$\xi_1 = \left(1 - \widetilde{A}_1\right)^2 \tag{4.27}$$

β) όταν Q1<0 (ροή ρευστού από τα δεξιά προς τα αριστερά), ο συντελεστής τοπικών απωλειών έχει την τιμή που δίνεται από την πειραματική σχέση*:

$$\xi_{2} = 0.587 + 0.395 \cdot \sqrt{\tilde{A}_{1}} - 4.538 \cdot \tilde{A}_{1} + 14.243 \cdot \sqrt{\tilde{A}_{1}^{3}} - 19.222 \cdot \tilde{A}_{1}^{2} + 8.54 \cdot \sqrt{\tilde{A}_{1}^{5}}$$
(4.28)

Παρόμοια για το δεξιό στόμιο, μπορούμε να διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1) Av A₂>A₀, τότε:

α) όταν Q₂>0 (ροή ρευστού από τα αριστερά προς τα δεξιά), ο συντελεστής τοπικών απωλειών έχει την τιμή που δίνεται από τη σχέση**:

$$\zeta_1 = \left(1 - \frac{1}{\widetilde{A}_2}\right)^2 \tag{4.29}$$

β) όταν Q₂<0 (ροή ρευστού από τα δεξιά προς τα αριστερά), ο συντελεστής τοπικών απωλειών έχει την τιμή που δίνεται από την πειραματική σχέση^{*}:

$$\zeta_{2} = 0.587 + \frac{0.395}{\sqrt{\tilde{A}_{2}}} - \frac{4.538}{\tilde{A}_{2}} + \frac{14.243}{\sqrt{\tilde{A}_{2}^{3}}} - \frac{19.222}{\tilde{A}_{2}^{2}} + \frac{8.54}{\sqrt{\tilde{A}_{2}^{5}}}$$
(4.30)

^{*} Τσαγγάρη Σ., Μηχανική των Ρευστών.

Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα, 1995. Σελ.: 489 ->σχ.(20.49).

^{**} Τσαγγάρη Σ., Μηχανική των Ρευστών.

Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα, 1995. Σελ.: 484 ->σχ.(20.38).

2) Av A₂<A₀, τότε:

α) όταν Q₂>0 (ροή ρευστού από τα αριστερά προς τα δεξιά), ο συντελεστής τοπικών απωλειών έχει την τιμή που δίνεται από την πειραματική σχέση^{*}:

$$\zeta_{2} = 0.587 + 0.395 \cdot \sqrt{\tilde{A}_{2}} - 4.538 \cdot \tilde{A}_{2} + 14.243 \cdot \sqrt{\tilde{A}_{2}^{3}} - 19.222 \cdot \tilde{A}_{2}^{2} + 8.54 \cdot \sqrt{\tilde{A}_{2}^{5}}$$
(4.31)

β) όταν Q₂<0 (ροή ρευστού από τα δεξιά προς τα αριστερά), ο συντελεστής τοπικών απωλειών έχει την τιμή που δίνεται από τη σχέση^{**}:

 $\zeta_1 = \left(1 - \widetilde{A}_2\right)^2 \tag{4.32}$

4.4.2 Επιρροή ασύμμετρων δοχείων

Το διάγραμμα 4.5 προκύπτει από την εκτέλεση του προγράμματος zarea.for^(παρ.:I8) και παρουσιάζει την επιρροή, στο μοντέλο, της ασυμμετρίας μεταξύ των δοχείων αλλά και μεταξύ των δοχείων και του αγωγού υπό σταθερό αριθμό Womersley και σταθερό πλάτος διέγερσης του σωλήνα.



^{*} Τσαγγάρη Σ., Μηχανική των Ρευστών.

Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα, 1995. Σελ.: 489 ->σχ.(20.49).

^{**} Τσαγγάρη Σ., Μηχανική των Ρευστών. Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα, 1995. Σελ.: 484 ->σχ.(20.38).

Όλα τα αποτελέσματα του προγράμματος zarea.for έχουν παρθεί θεωρώντας τις στάθμες στα δοχεία σε μηδενικό ύψος για λόγους απλοποίησης της Σ.Δ.Ε. (4.16) και μη εξάρτησης από τον αριθμό Froude ολοκλήρου του φαινομένου. Συνεπώς μηδενίζοντας τα ύψη των σταθμών αποφεύγουμε τη συμμεταβολή των αδιάστατων αριθμών W και Fr που ορίζει το διάγραμμα 4.4. Η συνθήκη για μη μηδενική μέση χρονική παροχή είναι τα δύο δοχεία να είναι διαφορετικά μεταξύ τους. Επιπλέον η συνθήκη για μέγιστη μέση χρονική παροχή είναι να έχουμε διατομές των δοχείων, διαφορετικές μεν μεταξύ τους, μικρότερες δε από τη διατομή A₀ του σωλήνα γύρω από την οποία υφίσταται η διέγερση. Όσο μικρότερες είναι οι διαφορετικές μεταξύ τους διατομές από την A₀, τόσο μεγαλύτερη είναι η μέση χρονική παροχή του συστήματος.

Το διάγραμμα 4.6 δείχνει πως αυξάνεται η αδιάστατη μέση χρονική παροχή με την αύξηση του αριθμού Womersley για διαφορετικές διατομές δοχείων. Ισχύει ότι η μέση χρονική παροχή έχει φορά πάντα από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο δοχείο. Συγκρίνοντας τα διαγράμματα 4.6, 4.3 και 3.7, μπορούμε να διακρίνουμε παρόμοια συμπεριφορά για την αύξηση της μέσης χρονικής παροχής με τη συχνότητα.



Η επιρροή των τοπικών απωλειών είναι ασήμαντη, λόγω αλλαγής της γεωμετρίας από τον αγωγό σε κάθε δοχείο, διότι είναι συνήθως $0 \le \zeta_{1,2}, \xi_{1,2} \le 1$ και συνεπώς μπορούμε να πούμε ότι όλη η ανωτέρω διαφοροποίηση της μέσης χρονικής παροχής οφείλεται στην ασυμμετρία των δοχείων και μόνο. Για να μπορέσουμε να δούμε σημαντική επιρροή των τοπικών απωλειών πρέπει να αυξήσουμε τις τιμές τους και αυτό μπορεί να γίνει με την εισαγωγή στο σύστημα μιας βαλβίδας π.χ. στο δεξιό άκρο του αγωγού. Αν αυτή η βαλβίδα γίνει και μεταβλητή, το όλο μοντέλο μπορούμε απλουστευτικά να το προσομοιάσουμε με την ενδοαορτική αντλία μπαλονιού, η οποία περιγράφεται στην επόμενη παράγραφο.
4.4.3 Ενδοαορτική αντλία μπαλονιού (Intra-Aortic Balloon Pump, I.A.B.P.)

Η ιστορία της ενδοαορτικής αντλίας μπαλονιού ξεκινά με την εισαγωγή της έννοιας της αντιπάλμωσης (counterpulsation) από τον Harken D.E. & associates στο Harvard το 1958. Η αντιπάλμωση ενεργεί μειώνοντας το αντλητικό φορτίο, κατά τη διάρκεια πτώσης της αορτικής πίεσης, όπου εκχύνει η αριστερή κοιλία (διαστολική φάση) και κατά την αύξηση της διαστολικής πίεσης που ακολουθεί με το κλείσιμο της αορτικής βαλβίδας. Έτσι επιτυγχάνει αύξηση της έκχυσης στις στεφανιαίες αρτηρίες κατά τη διαστολική φάση. Το κέρδος που προκαλείται από αυτές τις εναλλαγές είναι διπλό, μειώνονται οι απαιτήσεις οξυγόνου του μυοκαρδίου, αλλά και αυξάνεται η τροφοδοσία οξυγόνου στο μυοκάρδιο. Το 1962 ο Clauss R.P.H. et al* προκάλεσαν αντιπάλμωση εισάγοντας ένα καθετήρα με μπαλόνι στην ανιούσα αορτή διαμέσου της μηριαίας αρτηρίας. Την ίδια χρονιά ο Μουλόπουλος Δ.Σ. με τους συνεργάτες του**, προτείνει τη χρήση ενός ενδοαορτικού μπαλονιού τοποθετημένου στην κατιούσα θωρακική αορτή. Το μπαλόνι αυτό φέρει αποτελέσματα παρόμοια με εκείνα της εξωτερικής αντιπάλμωσης, αποφεύγοντας όμως την έξοδο του αίματος από το σώμα. Λειτουργεί με διοξείδιο του άνθρακα γεμίζοντας κατά τη διαστολή στο κλείσιμο της αορτικής ρίζας, οπότε αυξάνει τη στεφανιαία έκχυση και αδειάζοντας κατά τη συστολή δημιουργώντας κενό, οπότε μειώνει τη μεταφόρτιση της αριστερής κοιλίας. Το 1968 ο Kantrowitz R.A. et al τοποθετούν για πρώτη φορά την αντλία μπαλονιού σε τρεις ασθενείς, οι οποίοι έπασχαν από καρδιογεννητικό σοκ ύστερα από οξεία μυοκαρδιακή απόφραξη. Μετά από πέντε ώρες μηχανικής υποστήριξης ο ένας από τους ασθενείς επανήλθε από το σοκ και επέζησε.

Σήμερα η μέθοδος αντιπάλμωσης με ενδοαορτικό μπαλόνι πραγματοποιείται με τη βοήθεια ενός συστήματος καθετήρα μπαλονιού το οποίο τοποθετείται στην κατιούσα αορτή μέσω της μηριαίας αρτηρίας. Το μπαλόνι βρίσκεται κοντά στην υποκλείδια αρτηρία. Στο σχήμα 4.3 παρουσιάζεται η λειτουργία του μπαλονιού μέσα στο σώμα.



Σχήμα 4.3. Αρχή λειτουργίας ενδοαορτικής αντλίας μπαλονιού. Α, Διαστολή του μπαλονιού κατά την κοιλιακή διαστολική αύξηση της αορτικής ρίζας και της στεφανιαίας διαστολικής πίεσης. Β, Συστολή του μπαλονιού κατά την προσυστολική μείωση της κοιλιακής συστολικής πίεσης.

Αρχικά το μπαλόνι, κατά την κοιλιακή χαλάρωση, φουσκώνει πολύ γρήγορα μέχρι το μέγιστο όγκο του, που κυμαίνεται μεταξύ 30 και 40cm³. Με την κίνηση αυτή πετυχαίνεται αύξηση της διαστολικής πίεσης στην ανιούσα αορτή, η οποία οδηγεί σε αύξηση της στεφανιαίας

^{*} Clauss, R.P.H., Missier P., Reed G.E., Tice D. Assisted circulation by counterpulsation with intraortic balloon: methods and effects. (Presentation) Annual Conference on Engineering in Medicine and Biology, Chicago, 1962.

^{**} Moulopoulos et al., Diastolic balloon pumping (with carbon dioxide) in the aorta - A mechanical assistance to the failing circulation. American Heart Journal, Vol.63, 669-675, 1962.

παροχής κατά τη διαστολή. Έτσι το μεγαλύτερο ποσό της στεφανιαίας παροχής αίματος πηγαίνει στο μυοκάρδιο κατά τη διαστολή, όπου η αντίσταση των στεφανιαίων αγγείων είναι μειωμένη. Επομένως, στη φάση αυτή το μπαλόνι πραγματοποιεί δύο στόχους: αυξάνει τα εφόδια οξυγόνου της ισχαιμικής καρδιάς και βελτιώνει τη συστηματική οργανική έκχυση, εξαιτίας της αύξησης της μέσης αρτηριακής πίεσης. Στη συνέχεια κατά τη φάση της συστολής, το μπαλόνι ξεφουσκώνει δημιουργώντας έναν κενό χώρο, ο οποίος καλείται να φυλάξει, χωρίς αντίσταση μέρος του όγκου παλμού της αριστερής κοιλίας. Το κενό αυτό έχει ως αποτέλεσμα τη μείωση της αρτηριακής πίεσης συστολής, καθώς και τη μείωση της μεταφόρτωσης της αριστερής κοιλίας. Κατά συνέπεια αυξάνει η κοιλιακή έγχυση και μειώνονται οι απαιτήσεις του μυοκαρδίου σε οξυγόνο.

Για τη παραπάνω λειτουργία του μπαλονιού απαιτείται ένα μηχανικό σύστημα, ικανό να συγχρονίζει την κίνηση του μπαλονιού με την καρδιακή δραστηριότητα. Έτσι η έναρξη του μπαλονιού θα πρέπει να πραγματοποιείται αμέσως μετά το κλείσιμο της αορτικής βαλβίδας, ενώ όσον αφορά το χρονικό σημείο συστολής του μπαλονιού υπάρχουν διάφορες προτάσεις. Επειδή ο όγκος του μπαλονιού είναι μικρότερος από τον όγκο παλμού της καρδιάς, για να έχουμε καλύτερα αποτελέσματα, η θετική μηχανική υποστήριξη λαμβάνει χώρα κατά την τελοδιαστολή ή κατευθείαν στη συστολή. Η πρώτη μέθοδος παρουσιάζει κάποια προβλήματα, όπως είναι: η αναστροφή της στεφανιαίας ροής, το γεγονός ότι δεν μπορεί να μειώσει το έργο της καρδιάς, αφού ο όγκος δεν είναι διαθέσιμος στο συστολικό μέγιστο, η μέση τιμή της αορτικής πίεσης να μειώνεται. Με τη δεύτερη μέθοδο πετυχαίνεται βέλτιστη αποσυμπίεση για την ελάττωση του έργου της καρδιάς, βέλτιστη στεφανιαία παροχή καθ' όλη τη διάρκεια της διαστολής και αύξηση της μέσης τιμής της αορτικής πίεσης. Η επιλογή της χρονικής έναρξης του μπαλονιού γίνεται ανάλογα με τον παράγοντα στον οποίο δίνεται προτεραιότητα, δηλαδή με το αν ενδιαφέρει η αορτική πίεση, η στεφανιαία λειτουργία η μείωση του έργου της καρδιάς ή η μείωση του συστολικού άκρου.

4.4.4 Επιρροή στατικής και δυναμικής βαλβίδας

Διατηρώντας δοχεία κοινής διατομής εκατέρωθεν του αγωγού και προσθέτοντας στις τοπικές απώλειες ζ του δεξιού άκρου αυτές που προκύπτουν από μια βαλβίδα, μπορούμε να δούμε την επιρροή του συντελεστή \tilde{D} , του μη γραμμικού όρου της εξίσωσης (4.16) στο μοντέλο, που οφείλεται σε τοπικές απώλειες.

Θεωρούμε την ύπαρξη μιας βαλβίδας πύλης (gate) στο δεξιό άκρο του εύκαμπτου αγωγού. Οι τοπικές απώλειες που προκαλούνται ανάλογα με το πόσο είναι ανοιχτή η βαλβίδα παρίστανται στο διάγραμμα 4.7^{*}.

Το εμβαδόν που αφήνει ανοιχτό η βαλβίδα πύλη εξάγεται χρησιμοποιώντας τις σχέσεις εμβαδού μεταξύ χορδής και τόξου κύκλου από τη γεωμετρία. Αν μ=h/d είναι ο λόγος ανοίγματος της βαλβίδας (σχήμα διαγράμματος 4.7), τότε το εμβαδόν του στομίου του δεξιού δοχείου όπου έχει τοποθετηθεί η βαλβίδα είναι:

$$A_{02} = \left[\pi - 2\left(\cos^{-1}\mu - \mu\sqrt{1 - \mu^2}\right)\right] \cdot \frac{d^2}{4} \qquad \mu\epsilon \ 0 < \mu < 1$$
(4.33)

Για διάφορες τιμές του λόγου μ υπολογίζουμε το εμβαδόν του δεξιού στομίου από τη σχέση (4.33), ενώ έχουμε τις αντίστοιχες τιμές του συντελεστή απωλειών από το διάγραμμα 4.7.

Τσαγγάρη Σ., Μηχανική των Ρευστών.

Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα, 1995. Σελ.: 570 ->παρ.: V3Z, συρτοβαλβίδες.



Έτσι τρέχοντας το πρόγραμμα zarea.for^(παρ.:18) λαμβάνουμε στα διαγράμματα 4.9 και 4.10, την μεταβολή της μέσης αδιάστατης χρονικής παροχής συναρτήσει του συντελεστή απωλειών και του εμβαδού ανοίγματος της στατικής βαλβίδας αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι υπάρχει ένα μέγιστο στη μέση χρονική παροχή για λόγο μ=0.3 που αντιστοιχεί σε άνοιγμα της βαλβίδας κατά 37.6% του συνολικού εμβαδού όταν είναι πλήρως ανοιχτή. Κλείνοντας περαιτέρω τη βαλβίδα δε πετυχαίνουμε αύξηση αλλά μείωση της μέσης χρονικής παροχής του συστήματος και επομένως και της αντλητικής του ικανότητας.

Σε προσπάθεια προσομοίωσης του ενδοαορτικού μπαλονιού που περιγράφηκε στην προηγούμενη παράγραφο, θεωρούμε τη βαλβίδα πύλης, που χρησιμοποιήσαμε προηγουμένως στο στόμιο του δεξιού δοχείου, να μεταβάλλεται με το χρόνο. Επινοήθηκε εδώ μια χρονική συνάρτηση μεταβολής της βαλβίδας που να υπακούει στη θεώρηση: όταν συμβαίνει η συστολή του εύκαμπτου αγωγού, το στόμιο του δεξιού δοχείο, που είναι βαλβίδα, να έχει το ελάχιστο εμβαδόν ανοίγματος που αριθμητικά μπορούμε να επιτύχουμε και όταν συμβαίνει η διαστολή του εύκαμπτου αγωγού, τότε το στόμιο να έχει το μέγιστο δυνατό εμβαδόν που είναι του στομίου χωρίς τη βαλβίδα. Θεωρώντας συχνότητα διέγερσης αυτή που αντιστοιχεί στον αδιάστατο αριθμό W=5, πλάτος διέγερσης A_b=10%A₀ και κοινά δοχεία A₁=A₂=A₀, μπορούμε να δώσουμε ελάχιστη τιμή ανοιχτού εμβαδού της βαλβίδας, που να μην απειρίζει τον κώδικα zarea.for^(παρ.: 1), ίση με 8.4% του A₀. Αυτή η τιμή αντιστοιχεί σε λόγο ανοίγματος της βαλβίδας μ=0.066 και σύμφωνα με το διάγραμμα 4.7 έχουμε μέγιστο συντελεστή απωλειών ζ_{max}=400. Μετατρέποντας την παραπάνω ιδέα σε μαθηματικά, προκύπτουν οι χρονικές συναρτήσεις μεταβολής της βαλβίδας πύλης, τόσο για το εμβαδόν ανοίγματος όσο και για το συντελεστή τοπικών απωλειών:

$$\widetilde{A}_{02} = \widetilde{A}_{\min} + (1 - \widetilde{A}_{\min}) \cdot \cos^{40} [\sin^4 (\widetilde{t}/2)]$$
(4.34)

$$\zeta = \zeta_{\max} + \zeta_{\max} \cdot \cos^{40} [\sin^4 (\tilde{t}/2)]$$
(4.35)

Η συνάρτηση της σχέσης (4.34) παριστάνεται γραφικά στο διάγραμμα 4.8(α) για τρεις περιόδους σε αντιπαράθεση με τη γραφική παράσταση του συναρτησιακού της σχέσης (4.15) που ορίζει τη συρρίκνωση και διόγκωση του εύκαμπτου αγωγού. Ενώ η συνάρτηση της σχέσης (4.35) (4.35) παριστάνεται γραφικά στο διάγραμμα 4.8(β).



Διάγραμμα 4.8. (α) Χρονική μεταβολή του εμβαδού ανοίγματος βαλβίδας Α₀₂ στο στόμιο του δεξιού δοχείου και γραφική παράσταση της διατομής του εύκαμπτου αγωγού.

(β) Χρονική μεταβολή του συντελεστή απωλειών ζ της βαλβίδας.

Τα αποτελέσματα στην περίπτωση της μεταβλητής βαλβίδας φαίνονται στα διαγράμματα 4.9 και 4.10, μόνο που οι οριζόντιοι άξονες αντιπροσωπεύουν το μέγιστο συντελεστή απωλειών ζ_{max} και την ελάχιστη ανοιχτή διατομή της βαλβίδας Α_{min} αντίστοιχα. Παρατηρούμε και σ' αυτή την περίπτωση της δυναμικής βαλβίδας, ότι υπάρχει ένα μέγιστο στη μέση χρονική παροχή για

λόγο μ=0.2, που αντιστοιχεί σε άνοιγμα της βαλβίδας κατά 25.3% του συνολικού εμβαδού όταν είναι πλήρως ανοιχτή. Συνεπώς υπάρχει βέλτιστο ζεύγος τιμών \widetilde{A}_{min} και ζ_{max}, τις οποίες πρέπει να τοποθετούμε στις σχέσεις (4.34) και (4.35) ώστε να πετυχαίνουμε μέγιστη μέση χρονική παροχή για το σύστημα. Προφανώς δεν είναι απαραίτητο να κλείνουμε όσο το δυνατό περισσότερο τη βαλβίδα κατά τη συρρίκνωση του αγωγού, ώστε να έχουμε όσο το δυνατό μεγαλύτερη παροχή. Συγκρίνοντας τη στατική βαλβίδα με τη δυναμική, που μπορεί και αποκρίνεται στη συστολή και διαστολή του εύκαμπτου αγωγού, μπορούμε να δούμε ότι τις μεγαλύτερες παροχές σε τάξεις μεγέθους επιφέρει η δυναμική.



Τέλος στο διάγραμμα 4.11 παρουσιάζονται οι ισοπαροχές καμπύλες για μέσες αδιάστατες τιμές, συναρτήσει του πλάτους διέγερσης και του αριθμού Womersley. Θεωρούμε και εδώ μηδενικά τα ύψη των σταθμών, κοινά δοχεία και μάλιστα $A_1=A_2=A_0$, ενώ $\widetilde{A}_{min} = 25.3\%$ και $\zeta_{max}=15.6$. Η μέση αδιάστατη χρονική παροχή έχει τις τιμές του κατακόρυφου άξονα στο διάγραμμα 4.11, αλλά με φορά από το δεξιό προς το αριστερό δοχείο. Παρόλο που φαίνεται στο διάγραμμα αυτό ότι η μέση παροχή μένει σταθερή πάνω από κάποιες συχνότητες αυτό δεν είναι αλήθεια διότι η αδιαστατοποίηση της παροχής γίνεται με την κυκλική συχνότητα η οποία έχει διαφορετική τιμή για κάθε αδιάστατο αριθμό Womersley. Αυτό που ισχύει είναι ότι όσο αυξάνεται η συχνότητα και το πλάτος διέγερσης τόσο αυξάνεται και η μέση χρονική παροχή. Το διάγραμμα είναι αληθές για μεταβολές άλλων παραμέτρων του αριθμού Womersley, όπως για παράδειγμα της ακτίνας του εύκαμπτου αγωγού. Για μια σταθερή συχνότητα και σταθερό πλάτος διέγερσης αυξάνοντας συνεχώς το μέγεθος του εύκαμπτου αγωγού (και επομένως τον αριθμό Womersley), προκύπτει σταθεροποίηση της μέσης χρονικής παροχής.



ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Συμπερασματική επισκόπηση

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα που εξάγονται από το ελαστικό μοντέλο της παρούσας εργασίας με εκείνα του Η. J. Rath στο (31), μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι το μόνο κοινό είναι η μεγιστοποίηση της μέσης χρονικής παροχής στις ίδιες συχνότητες. Κατά τα άλλα η απόκλιση των αποτελεσμάτων είναι μεγάλη (διάγραμμα 3.3). Τα αποτελέσματα του Η. J. Rath (διάγραμμα 3.1), για το διάστημα χαμηλών συχνοτήτων 0.42 - 37.7 rad/sec, της φυσιολογικής λειτουργίας του ουρητήρα είναι μη ρεαλιστικά, όπως ο ίδιος τα χαρακτηρίζει στο (33), όπου η παροχή για κάθε ουρητήρα κυμαίνεται από 1 έως 10 lt/hr. Από την ανατομία μπορούμε να εξάγουμε τη τάξη μεγέθους της φυσιολογικής παροχής για κάθε ουρητήρα, η οποία κυμαίνεται, όπως δείχθηκε στην παράγραφο 3.7, στο διάστημα $21 \le \overline{Q} \le 62.5$ (ml/hr). Αυτή η τάξη μεγέθους συμφωνεί με τη παροχή, που αποδίδει το ελαστικό μοντέλο της παρούσας εργασίας (διάγραμμα 3.7β). Επίσης συμφωνεί με την τάξη μεγέθους παρούσας εργασίας (διάγραμμα 3.7β). Επίσης συμφωνεί με την τάξη μεγέθους του αιποδίδει το περισταλτικό μοντέλο του εύκαμπτου αγωγού της παρούσας εργασίας (διάγραμμα 4.3), η οποία κυμαίνεται στο διάστημα 6.6≤ $\overline{Q} \le 994$ (ml/hr). Επομένως τα μοντέλα αποκρίνονται πολύ καλά στις χαμηλές συχνότητες φυσιολογικής λειτουργίας του ουρητήρα.

Αναφερόμενοι στην μονοδιάστατη περισταλτική ροή μπορούμε να ισχυριστούμε ότι αρμονική μεταβολή της διατομής A(x,t), προκαλεί μηδενική παροχή για ακέραιους λόγους μήκους του αγωγού προς μήκος κύματος διέγερσης της διατομής, όπως δείχθηκε στην παράγραφο 4.3. Συνεπώς οποιαδήποτε περιοδική συνάρτηση της παροχής με μέση τιμή διάφορη του μηδενός, οφείλεται σε φαινόμενα ασυμμετρίας.

Τα φαινόμενα ασυμμετρίας για το ελαστικό μοντέλο δημιουργούνται εξαιτίας της σύνθετης αρμονικής μεταβολής του πλάτους παραμόρφωσης με το χρόνο και το χώρο. Σ' αυτή την περίπτωση εντοπίζονται δύο ειδών ασυμμετρίες. Η μία είναι η ασυμμετρία του πλάτους παραμόρφωσης, διόγκωσης ή συρρίκνωσης, από θέση σε θέση στον ελαστικό αγωγό. Παράδειγμα άλλη η διόγκωση - συρρίκνωση του αγωγού κοντά στο δοχείο (1), άλλη κοντά στο (2) και άλλη προς τα μέσα του αγωγού. Η άλλη ασυμμετρία υφίσταται για την ίδια θέση του αγωγού στον διαφορετικό βαθμό διόγκωσης από ότι συρρίκνωσης. Δηλαδή διεγείροντας με ένα σταθερό αρμονικό πλάτος πίεσης p_b, προκαλείται διέγερση του σωλήνα με πλάτος b που διαφέρει από θέση σε θέση κατά το μήκος του αγωγού, αλλά και χρονικά με την πάροδο του χρόνου.

Εξετάζοντας το διάγραμμα 3.1 καθώς και όλη τη δημοσίευση του Rath (31), δεν αναφέρεται πουθενά μεταβολή του γεωμετρικού πλάτους με τη συχνότητα, παρά αφήνεται να εννοηθεί ο ισχυρισμός ότι, σταθερό πλάτος αρμονικής διέγερσης της πίεσης, δημιουργεί σταθερό πλάτος διέγερσης της ακτίνας του ελαστικού σωλήνα. Αυτό που ισχύει όμως είναι ότι, σταθερό πλάτος αρμονικής διέγερσης της πίεσης, δημιουργεί σχεδόν σταθερό πλάτος διέγερσης της ακτίνας του ελαστικού σωλήνα σε χαμηλές συχνότητες μόνο. Η αδυναμία συσχέτισης του πλάτους διέγερσης πίεσης με το πλάτος της ακτίνας στο (31), φαίνεται και από το γεγονός ότι δεν αναφέρεται πουθενά αριθμητική τιμή του πλάτους p_b που να μπορεί να προκαλεί γεωμετρική διέγερση παραμόρφωσης πλάτους ε=0.1 για κάθε συχνότητα, όπως δείχνεται στο διάγραμμα 3.1.

Ένας λόγος που δεν μπορούν να παρατηρηθούν οι ασυμμετρίες που υπεισέρχονται στο αριθμητικό πείραμα του Η. J. Rath, ίσως είναι ότι ο Η. J. Rath επιλύει τη ροή στο ελαστικό μοντέλο, διαμορφώνοντας το σύστημα των μερικών διαφορικών εξισώσεων που προκύπτουν από τις εξισώσεις Navier-Stokes, σε τέτοιο, ώστε οι άγνωστες συναρτήσεις να είναι η αξονική ταχύτητα ροής υ και η ταχύτητα κατά Moens-Korteweg α, οπότε δεν επιλύει κάπου τη συνάρτηση A(x,t), για να μπορεί να παρατηρήσει τη συνθέτως αρμονική μεταβολή της στο χρόνο.

Βέβαια η πλήρης διαφωνία στις χαμηλές συχνότητες και όχι μόνο εκεί, μπορεί να οφείλεται σε αριθμητικό σφάλμα, αφού ο τρόπος επίλυσης ναι μεν παραμένει η μέθοδος Mac Cormack, όμως επιλύει διαφορετικές εξισώσεις περιγραφής του μοντέλου, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, οι οποίες αριθμητικά ίσως να παρουσιάζουν διαφορετική συμπεριφορά. Σημειώνεται ότι, τόσο οι εξισώσεις της παρούσας εργασίας περιγραφής του ελαστικού μοντέλου, όσο και οι εξισώσεις του Η. J. Rath περιγράφουν ισοδύναμα το φυσικό φαινόμενο.

Τα φαινόμενα ασυμμετρίας για το μοντέλο του εύκαμπτου αγωγού, μπορούν να εμφανιστούν στην περίπτωση της περίσταλσης, λόγω διαφοράς φάσης στη μεταβολή της διατομής στο ένα άκρο του αγωγού σε σχέση με το άλλο, ή στην περίπτωση της αντλίας μπαλονιού, λόγω ασύμμετρων δοχείων και ύπαρξη έντονων τοπικών απωλειών.

Για συμμετρικά δοχεία και μηδενικές τοπικές απώλειες στα στόμια των δοχείων, ο συντελεστής του μη γραμμικού όρου, της συνήθους διαφορικής εξίσωσης που περιγράφει το μοντέλο, μηδενίζεται οπότε ο μη γραμμικός όρος απαλείφεται. Έτσι καταλήγουμε σε μια γραμμική πρώτης τάξης Σ.Δ.Ε., που εκφράζει τη συμμετρική ταλάντωση του ρευστού μεταξύ των συγκοινωνούντων δοχείων. Σ' αυτή την περίπτωση η μέση χρονική παροχή που αποδίδει το σύστημα είναι μηδέν και συνεπώς το μοντέλο χάνει την αντλητική του ικανότητα. Η μη μηδενική μέση χρονική παροχή οφείλεται στο μη γραμμικό όρο της Σ.Δ.Ε.

Εξετάζοντας τις παραμέτρους που επηρεάζουν το συντελεστή του μη γραμμικού όρου της Σ.Δ.Ε. καταλήγουμε στα εξής συμπεράσματα:

- Η συνθήκη για μη μηδενική μέση χρονική παροχή είναι τα δύο δοχεία να είναι διαφορετικά μεταξύ τους. Επιπλέον η συνθήκη για μέγιστη μέση χρονική παροχή είναι να έχουμε διατομές των δοχείων, διαφορετικές μεν μεταξύ τους, μικρότερες δε από τη διατομή Α₀ του σωλήνα γύρω από την οποία υφίσταται η διέγερση. Όσο μικρότερες είναι οι διαφορετικές μεταξύ τους διατομές από την Α₀, τόσο μεγαλύτερη είναι η μέση χρονική παροχή του συστήματος (διάγραμμα 4.5).
- Η αδιάστατη μέση χρονική παροχή αυξάνεται με την αύξηση του αριθμού Womersley για διαφορετικές διατομές δοχείων (διάγραμμα 4.6). Ισχύει ότι η μέση χρονική παροχή έχει φορά πάντα από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο δοχείο. Συγκρίνοντας τα διαγράμματα 4.6, 4.3 και 3.7, μπορούμε να διακρίνουμε παρόμοια συμπεριφορά για την αύξηση της μέσης χρονικής παροχής με τη συχνότητα, σε αντίθεση με το διάγραμμα 3.1 του Η. J. Rath όπου παριστάνεται μείωση (διάγραμμα 4.6).
- Η επιρροή των τοπικών απωλειών είναι ασήμαντη, λόγω αλλαγής της γεωμετρίας από τον αγωγό σε κάθε δοχείο, διότι είναι συνήθως 0≤ζ_{1,2},ξ_{1,2}≤1 και συνεπώς μπορούμε να πούμε ότι η διαφοροποίηση της μέσης χρονικής παροχής οφείλεται στην ασυμμετρία των δοχείων και μόνο, όταν αυτή υπάρχει. Σημαντική επιρροή των τοπικών απωλειών υφίσταται για υψηλές

τιμές τους και αυτό μπορεί να γίνει με την εισαγωγή στο σύστημα μιας βαλβίδας στατικής ή δυναμικής.

- Παρατηρούμε ότι υπάρχει ένα μέγιστο στη μέση χρονική παροχή, που αντιστοιχεί σε άνοιγμα της στατικής βαλβίδας κατά 37.6% του συνολικού εμβαδού όταν είναι πλήρως ανοιχτή. Κλείνοντας περαιτέρω τη βαλβίδα δε πετυχαίνουμε αύξηση αλλά μείωση της μέσης χρονικής παροχής του συστήματος και επομένως και της αντλητικής του ικανότητας.
- Παρατηρούμε και στην περίπτωση της δυναμικής βαλβίδας ότι υπάρχει ένα μέγιστο στη μέση χρονική παροχή, που αντιστοιχεί σε άνοιγμα της βαλβίδας κατά 25.3% του συνολικού εμβαδού όταν είναι πλήρως ανοιχτή. Προφανώς δεν ισχύει, όσο μικρότερο το άνοιγμα της βαλβίδας, κατά τη συρρίκνωση του αγωγού, τόσο μεγαλύτερη να είναι η παροχή.
- Συγκρίνοντας τη στατική βαλβίδα με τη δυναμική, που μπορεί και αποκρίνεται στη συστολή και διαστολή του εύκαμπτου αγωγού, μπορούμε να δούμε ότι τις μεγαλύτερες παροχές σε τάξεις μεγέθους επιφέρει η δυναμική (διαγράμματα 4.9, 4.10).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι

Λίστες προγραμμάτων και κωδικών Fortran

1. Πρόγραμμα analytic.for υπολογισμού αναλυτικής λύσης ελαστικού αγωγού σε περίσταλση.

PROGRAM analyt DIMENSION A(600),V(600),P(600)

OPEN(1,FILE='analyt.in')

OPEN(2,FILE='ANAA.DAT') OPEN(3,FILE='ANAV.DAT') OPEN(4,FILE='ANAP.DAT')

OPEN(5,FILE='ANAAV55.DAT') OPEN(6,FILE='ANAAV107.DAT') OPEN(7,FILE='ANAAV163.DAT')

OPEN(8,FILE='ANAP55.DAT') OPEN(9,FILE='ANAP107.DAT') OPEN(10,FILE='ANAP163.DAT')

READ(1,*) AL,WL,C,D0,PL,DENS,NT,NX

WRITE(*,*) 'l=',AL WRITE(*,*) 'wl=',WL WRITE(*,*) 'c=',C WRITE(*,*) 'Do=',D0 WRITE(*,*) 'ampl=',PL WRITE(*,*) 'dens=',DENS WRITE(*,*) 'time steps=',NT WRITE(*,*) 'space steps=',NX WRITE(*,*) '-----'

PI=3.141592653589793 WK=2.*PI/WL W=2.*PI*C/WL A0=PI*D0*D0/4. DB=(1.+PL)*D0

WRITE(8,*) FLOAT(J-1)*DT,P(55) WRITE(9,*) FLOAT(J-1)*DT,P(107) WRITE(10,*) FLOAT(J-1)*DT,P(163)

```
WRITE(5,*) FLOAT(J-1)*DT,A(55),V(55)
WRITE(6,*) FLOAT(J-1)*DT,A(107),V(107)
WRITE(7,*) FLOAT(J-1)*DT,A(163),V(163)
```

ENDDO

WRITE(2,*) FLOAT(J-1)*DT,FLOAT(I-1)*DX,A(I) WRITE(3,*) FLOAT(J-1)*DT,FLOAT(I-1)*DX,V(I) WRITE(4,*) FLOAT(J-1)*DT,FLOAT(I-1)*DX,P(I)

DO I=1,NX

IF(MOD(J,10).EQ.0) THEN

```
Print of results
------
```

```
_____
```

ENDDO

С

С

С

.1./((1.+SINT)*(1.+SINT)))

P(I)=-(DENS/2.)*C*C*(1./((1.+SINX)*(1.+SINX))-

 $V(I)=C^{(SINX)}(1.+SINX)$

 $A(I) = A0^{*}(1.+SINX)$

SINX=(AB/A0)*SIN(W*T-WK*X) SINT=(AB/A0)*SIN(W*T)

DO I=1,NX X=(I-1)*DX

T=(J-1)*DT

DO 1 J=1.NT

Start of Loop

AB=(PI*DB*DB/4.)-A0 DX=AL/FLOAT(NX-1)

DT=TP/FLOAT(NT-1)

TP=WL/C

WRITE(*,*) 'k=',WK WRITE(*,*) 'w=',W WRITE(*,*) 'Ao=',A0 WRITE(*,*) 'Db=',DB WRITE(*,*) 'Ab=',AB WRITE(*,*) 'Dx=',DX WRITE(*,*) 'period=',TP WRITE(*,*) 'Dt=',DT WRITE(*,*) '-----'

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΤΙΚΟΣ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ "ΠΕΡΙΣΤΑΛΤΙΚΩΝ ΑΝΤΛΙΩΝ ΑΙΜΑΤΟΣ"

С С

С

ELSE END IF

1 CONTINUE

STOP END

2. Πρόγραμμα laxtest.for υπολογισμού ροής ελαστικού αγωγού σε περίσταλση, με τη μέθοδο Lax-Wendroff, για σύγκριση με αναλυτική λύση.

PROGRAM laxtest DIMENSION A(600,2),V(600,2),P(600,2)

OPEN(1,FILE='laxtest.in')

OPEN(2,FILE='LAXA.DAT') OPEN(3,FILE='LAXV.DAT') OPEN(4,FILE='LAXP.DAT')

OPEN(5,FILE='LAXAV55.DAT') OPEN(6,FILE='LAXAV107.DAT') OPEN(7,FILE='LAXAV163.DAT')

OPEN(8,FILE='LAXP55.DAT') OPEN(9,FILE='LAXP107.DAT') OPEN(10,FILE='LAXP163.DAT')

READ(1,*) AL,K,DT,DENS,D0,WL,C,PL,NY,NT

```
WRITE(*,*) 'l=',AL
WRITE(*,*) 'space steps=',K
WRITE(*,*) 'Dt=',DT
WRITE(*,*) 'dens.=',DENS
WRITE(*,*) 'Do=',D0
WRITE(*,*) 'wl=',WL
WRITE(*,*) 'c=',C
WRITE(*,*) 'ampl.=',PL
WRITE(*,*) 'time for (.dat)=',NY
WRITE(*,*) 'time steps=',NT
WRITE(*,*) '-----'
T=0.
PI=3.141592653589793
WK=(2.*PI)/WL
W=(2.*PI*C)/WL
A0=PI*D0*D0/4.
DB=(1.+PL)*D0
AB=(PI*DB*DB/4.)-A0
DX=AL/FLOAT(K-1)
R=DT/DX
WRITE(*,*) 'To=',T
WRITE(*,*) 'Ao=',A0
```

WRITE(*,*) 'Db=',DB

```
WRITE(*,*) 'Ab=',AB
  WRITE(*,*) 'k=',WK
WRITE(*,*) 'w=',W
WRITE(*,*) 'Dx=',DX
   WRITE(*,*) 'v=Dt/Dx=',R
   WRITE(*,*) '-----'
С
   _____
С
    Set of initial values
С
   _____
   DO I=1,K
   X=(I-1)*DX
   SINX=(AB/A0)*SIN(W*T-WK*X)
   SINT=(AB/A0)*SIN(W*T)
  A(I,2)=A0*(1.+SINX)
  V(I,2)=C^{*}(SINX)/(1.+SINX)
   P(I,2)=-(DENS/2.)*C*C*(1./((1.+SINX)*(1.+SINX))-
  .1./((1.+SINT)*(1.+SINT)))
   ENDDO
С
С
      Start of Loop
С
   DO 1 J=2,NT
   T=(J-1)*DT
С
        ~~~~~~~~
С
      Computation of boundaries
С
   С
      _____
С
       Left boundary
С
     _____
   AIN=A(1,2)
   VIN=V(1,2)
   PIN=P(1,2)
   SINX=(AB/A0)*SIN(W*T-WK*0.)
   SINT=(AB/A0)*SIN(W*T)
   T1=T-DT/2.
   A12=A0*(1.+(AB/A0)*SIN(W*T1-WK*0.))
  A(1,2)=A0*(1.+SINX)
```

 $V(1,2)=C^{*}(SINX)/(1.+SINX)$

P(1,2)=-(DENS/2.)*C*C*(1./((1.+SINX)*(1.+SINX))-.1./((1.+SINT)*(1.+SINT)))

C -----C Right boundary С ------AOUT=A(K,2)VOUT=V(K,2) POUT=P(K,2) SINX=(AB/A0)*SIN(W*T-WK*AL) SINT=(AB/A0)*SIN(W*T) $A(K,2) = A0^{*}(1.+SINX)$ $V(K,2)=C^{*}(SINX)/(1.+SINX)$ P(K,2)=-(DENS/2.)*C*C*(1./((1.+SINX)*(1.+SINX))-.1./((1.+SINT)*(1.+SINT))) С С С -----С Computation of 1st Semistep С _____ DO I=1,K-1 X = (I-1)*DX+DX/2.AM = (A(I,2) + A(I+1,2))/2.IF(I.EQ.1) AM = (AIN + A(I+1,2))/2.IF(I.EQ.(K-1)) AM=(A(I,2)+AOUT)/2. $AV = (R/2.)^{*}(A(I+1,2)^{*}V(I+1,2)-A(I,2)^{*}V(I,2))$ IF(I.EQ.1) AV=(R/2.)*(A(I+1,2)*V(I+1,2)-AIN*VIN) IF(I.EQ.(K-1)) AV=(R/2.)*(AOUT*VOUT-A(I,2)*V(I,2)) A(I,1)=AM-AV VM = (V(I,2) + V(I+1,2))/2.IF(I.EQ.1) VM=(VIN+V(I+1,2))/2. IF(I.EQ.(K-1)) VM=(V(I,2)+VOUT)/2. V1=(V(I,2)**2.)/2.+P(I,2)/DENS IF(I.EQ.1) V1=(VIN**2.)/2.+PIN/DENS V2=(V(I+1,2)**2.)/2.+P(I+1,2)/DENS IF(I.EQ.(K-1)) V2=(VOUT**2.)/2.+POUT/DENS V(I,1)=VM-(R/2)*(V2-V1)P(I,1)=-(DENS/2.)*C*C*A0*A0*(1./(A(I,1)*A(I,1))-.1./(A12*A12)) ENDDO С -----С Computation of 2nd Semistep С -----DO I=2,K-1 X=(I-1)*DX AV=A(I,1)*V(I,1)-A(I-1,1)*V(I-1,1) $A(I,2)=A(I,2)-R^*AV$

V2=(V(I,1)**2.)/2.+P(I,1)/DENS

```
V1=(V(I-1,1)**2.)/2.+P(I-1,1)/DENS
V(I,2)=V(I,2)-R*(V2-V1)
```

P(I,2)=-(DENS/2.)*C*C*A0*A0*(1./(A(I,2)*A(I,2))-.1./(A(1,2)*A(1,2)))

ENDDO

С -----

C C Print of results

IF(J.GT.NY) THEN

IF(MOD(J,10).EQ.0) THEN

DO I=1,K X=(I-1)*DX

WRITE(2,*) FLOAT(J-1-NY)*DT,FLOAT(I-1)*DX,A(I,2) WRITE(3,*) FLOAT(J-1-NY)*DT,FLOAT(I-1)*DX,V(I,2) WRITE(4,*) FLOAT(J-1-NY)*DT,FLOAT(I-1)*DX,P(I,2)

ENDDO

WRITE(5,*) FLOAT(J-1-NY)*DT,A(55,2),V(55,2) WRITE(6,*) FLOAT(J-1-NY)*DT,A(107,2),V(107,2) WRITE(7,*) FLOAT(J-1-NY)*DT,A(163,2),V(163,2)

WRITE(8,*) FLOAT(J-1-NY)*DT,P(55,2) WRITE(9,*) FLOAT(J-1-NY)*DT,P(107,2) WRITE(10,*) FLOAT(J-1-NY)*DT,P(163,2)

ELSE END IF

ELSE END IF

1 CONTINUE

```
STOP
END
```

3. Πρόγραμμα mactest.for υπολογισμού ροής ελαστικού αγωγού σε περίσταλση, με τη μέθοδο MacCormack, για σύγκριση με αναλυτική λύση.

PROGRAM mactest DIMENSION A(600,2),V(600,2),P(600,2)

OPEN(1,FILE='mactest.in')

OPEN(2,FILE='MACA.DAT') OPEN(3,FILE='MACV.DAT') OPEN(4,FILE='MACP.DAT')

OPEN(5,FILE='MACAV55.DAT')

С

С

С

```
OPEN(6,FILE='MACAV107.DAT')
OPEN(7, FILE='MACAV163.DAT')
OPEN(8, FILE='MACP55.DAT')
OPEN(9, FILE='MACP107.DAT')
OPEN(10,FILE='MACP163.DAT')
READ(1,*) AL,K,DT,DENS,D0,WL,C,PL,NY,NT
WRITE(*,*) 'l=',AL
WRITE(*,*) 'space steps=',K
WRITE(*,*) 'Dt=',DT
WRITE(*,*) 'dens.=',DENS
WRITE(*,*) 'Do=',D0
WRITE(*,*) 'wl=',WL
WRITE(*,*) 'c=',C
WRITE(*,*) 'ampl.=',PL
WRITE(*,*) 'time for (.dat)=',NY
WRITE(*,*) 'time steps=',NT
WRITE(*,*) '-----'
T=0.
PI=3.141592653589793
WK=(2.*PI)/WL
W=(2.*PI*C)/WL
A0=PI*D0*D0/4.
DB=(1.+PL)*D0
AB=(PI*DB*DB/4.)-A0
DX=AL/FLOAT(K-1)
R=DT/DX
WRITE(*,*) 'To=',T
WRITE(*,*) 'Ao=',A0
WRITE(*,*) 'Db=',DB
WRITE(*,*) 'Ab=',AB
WRITE(*,*) 'k=',WK
WRITE(*,*) 'w=',W
WRITE(*,*) 'Dx=',DX
WRITE(*,*) 'v=Dt/Dx=',R
WRITE(*,*) '-----'
_____
  Set of initial values
 _____
DO I=1.K
X=(I-1)*DX
SINX=(AB/A0)*SIN(W*T-WK*X)
SINT=(AB/A0)*SIN(W*T)
A(I,2) = A0^{*}(1.+SINX)
V(I,2)=C^{*}(SINX)/(1.+SINX)
```

P(I,2)=-(DENS/2.)*C*C*(1./((1.+SINX)*(1.+SINX))-.1./((1.+SINT)*(1.+SINT)))

C C	Start of Loop
С	DO 1 J=2,NT T=(J-1)*DT
C C C	Computation of boundaries
C C C	Left boundary
	 SINX=(AB/A0)*SIN(W*T-WK*0.) SINT=(AB/A0)*SIN(W*T)
	A(1,2)=A0*(1.+SINX)
	V(1,2)=C*(SINX)/(1.+SINX)
	P(1,2)=-(DENS/2.)*C*C*(1./((1.+SINX)*(1.+SINX))- .1./((1.+SINT)*(1.+SINT)))
C C C	Right boundary
	AOUT=A(K,2) VOUT=V(K,2) POUT=P(K,2)
	SINX=(AB/A0)*SIN(W*T-WK*AL) SINT=(AB/A0)*SIN(W*T)
	A(K,2)=A0*(1.+SINX)
	V(K,2)=C*(SINX)/(1.+SINX)
	P(K,2)=-(DENS/2.)*C*C*(1./((1.+SINX)*(1.+SINX))- .1./((1.+SINT)*(1.+SINT)))
C C	***************************************
C C C	Computation of Predictor
	DO I=2,K-1 X=(I-1)*DX
	AM=A(I,2) AV=A(I+1,2)*V(I+1,2)-A(I,2)*V(I,2) IF(I.EQ.(K-1)) AV=AOUT*VOUT-A(I,2)*V(I,2) A(I,1)=AM-R*AV

VM=V(I,2) V1=(V(I,2)**2.)/2.+P(I,2)/DENS V2=(V(I+1,2)**2.)/2.+P(I+1,2)/DENS IF(I.EQ.(K-1)) V2=(VOUT**2.)/2.+POUT/DENS V(I,1)=VM-R*(V2-V1)

P(I,1)=-(DENS/2.)*C*C*A0*A0*(1./(A(I,1)*A(I,1))-.1./(A(1,2)*A(1,2)))

ENDDO

C -----C Computation of Corrector C ------DO I=2,K-1 X=(I-1)*DX

> AV=A(I,1)*V(I,1)-A(I-1,1)*V(I-1,1) IF(I.EQ.2) AV=A(I,1)*V(I,1)-A(1,2)*V(1,2) A(I,2)=0.5*(A(I,2)+A(I,1)-R*AV)

V2=(V(I,1)**2.)/2.+P(I,1)/DENS V1=(V(I-1,1)**2.)/2.+P(I-1,1)/DENS IF(I.EQ.2) V1=(V(1,2)**2.)/2.+P(1,2)/DENS V(I,2)=0.5*(V(I,2)+V(I,1)-R*(V2-V1))

P(I,2)=-(DENS/2.)*C*C*A0*A0*(1./(A(I,2)*A(I,2))-.1./(A(1,2)*A(1,2)))

ENDDO

С -----

С

С

Print of results

IF(J.GT.NY) THEN

IF(MOD(J,10).EQ.0) THEN

DO I=1,K X=(I-1)*DX

WRITE(2,*) FLOAT(J-1-NY)*DT,FLOAT(I-1)*DX,A(I,2) WRITE(3,*) FLOAT(J-1-NY)*DT,FLOAT(I-1)*DX,V(I,2) WRITE(4,*) FLOAT(J-1-NY)*DT,FLOAT(I-1)*DX,P(I,2)

ENDDO

WRITE(5,*) FLOAT(J-1-NY)*DT,A(55,2),V(55,2) WRITE(6,*) FLOAT(J-1-NY)*DT,A(107,2),V(107,2) WRITE(7,*) FLOAT(J-1-NY)*DT,A(163,2),V(163,2)

WRITE(8,*) FLOAT(J-1-NY)*DT,P(55,2) WRITE(9,*) FLOAT(J-1-NY)*DT,P(107,2) WRITE(10,*) FLOAT(J-1-NY)*DT,P(163,2) ELSE END IF

ELSE END IF

1 CONTINUE

STOP END

4. Πρόγραμμα rathpap.for προσδιορισμού παραμόφωσης πλάτους περίσταλσης ε=0.1, ελαστικού αγωγού (παράμετροι και υπολογισμοί διπλής ακρίβειας). Εφαρμόζεται η αριθμητική μεθοδολογία MacCormack για διαστατές τιμές των παραμέτρων.

PROGRAM rathpap IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H), .DOUBLE PRECISION (O-Z) DIMENSION A(200,2),P(200,2),V(200,2),Q(50000)

OPEN(1,FILE='rathpap.in') OPEN(2,FILE='RMV.DAT') OPEN(3,FILE='RMA.DAT') OPEN(4,FILE='RMP.DAT') OPEN(5,FILE='RMQ.DAT') OPEN(6,FILE='RMMED.DAT')

OUT=0.D+0

READ(1,*) K,DT,NY,NT,KT READ(1,*) AL,VIS,DENS,D0,E,S,WL,C,PR,PB,P0,V0,DD,H,G,TR1,TR2

WRITE(6,*) 'K=',K WRITE(6,*) 'ft=',DT WRITE(6,*) 'time for(.dat) =',NY WRITE(6,*) 'total time steps =',NT WRITE(6,*) 'integral periods =',KT WRITE(6,*) 'L=',AL WRITE(6,*) 'v=',VIS WRITE(6,*) 'dens=',DENS WRITE(6,*) 'Do=',D0 WRITE(6,*) 'E=',E WRITE(6,*) 's=',S WRITE(6,*) 'wl=',WL WRITE(6,*) 'c=',C WRITE(6,*) 'm=',PR WRITE(6,*) 'Pb=',PB WRITE(6,*) 'Po=',P0 WRITE(6,*) 'Vo=',V0 WRITE(6,*) 'Dd=',DD WRITE(6,*) 'H=',H WRITE(6,*) 'g=',G WRITE(6,*) 'loss1=',TR1 WRITE(6,*) 'loss2=',TR2 WRITE(6,*) '-----'

```
PI=4.D+0*DATAN(1.D+0)
  T=0.D+0
  FF=8.D+0*PI*VIS
  WK=(2.D+0*PI)/WL
  W=WK*C
  D00=D0^{(1.D+0-1.D+0/(2.D+0^{PR}))}
  A0=PI*D0*D0/4.D+0
  AMAX=A0
  AMIN=A0
  AD=PI*DD*DD/4.D+0
  DX=AL/DFLOAT(K-1)
  R=DT/DX
  P00=P0+DENS*G*H
  WRITE(6,*) 'k=',WK
  WRITE(6,*) 'w=',W
  WRITE(6,*) 'Doo=',D00
  WRITE(6,*) 'Ao=',A0
  WRITE(6,*) 'Ad=',AD
  WRITE(6,*) 'Dx=',DX
  WRITE(6,*) 'v=Dt/Dx=',R
  WRITE(6,*) 'Poo=',P00
  WRITE(6,*) '-----'
С
   ------
С
    Set of initial values
С
   -----
  DO I=1,K
  X=(I-1)*DX
  A(1,2) = A0
  P(I,2)=P00
  V(1,2) = V0
  ENDDO
С
   _____
С
      Start of Loop
С
   _____
  DO 1 J=1,NT
  T=T+DT
С
   -----
С
      Computation of boundaries
С
   -----
С
   -----
С
      Left boundary
С
   ------
  CON=DENS*0.5D+0*(1.D+0+A0/AD)*H
  IF(V(1,2).LT.0.D+0) TR=+TR2
  IF(V(1,2).GT.0.D+0) TR=-TR1
```

IF(V(1,2).EQ.0.D+0) TR=0.D+0

 $A(1,2)=A(1,2)-(DT/DX)^{*}(A(2,2)^{*}V(2,2)-A(1,2)^{*}V(1,2))$

V(1,2)=V(1,2)+(DT*P0/CON)-(P(1,2)*DT/CON)+(DENS*0.5D+0*DT/CON)* .((A0*A0/AD*AD)-1.D+0)*V(1,2)*V(1,2)+(DENS*G*DT*H/CON)+ .(TR*DT*DENS*0.5D+0/CON)*V(1,2)*V(1,2)

PA=P0+PB*DCOS(WK*(0.D+0-C*T)) PN=DSQRT(A(1,2)/A0)-1.D+0 PD=D00/(2.D+0*E*S) P(1,2)=PA+(PN/PD)

```
C -----C Right boundary
```

C C

AOUT=A(K,2) VOUT=V(K,2) POUT=P(K,2)

CON=DENS*0.5D+0*(1.D+0+A0/AD)*H

IF(V(K,2).LT.0.D+0) TR=+TR1 IF(V(K,2).GT.0.D+0) TR=-TR2 IF(V(K,2).EQ.0.D+0) TR=0.D+0

A(K,2)=A(K,2)-(DT/DX)*(A(K,2)*V(K,2)-A(K-1,2)*V(K-1,2))

V(K,2)=V(K,2)-(DT*P0/CON)+(P(K,2)*DT/CON)-(DENS*0.5D+0*DT/CON)* .((A0*A0/AD*AD)-1.D+0)*V(K,2)*V(K,2)-(DENS*G*DT*H/CON)+ .(TR*DT*DENS*0.5D+0/CON)*V(K,2)*V(K,2)

PA=P0+PB*DCOS(WK*(AL-C*T)) PN=DSQRT(A(K,2)/A0)-1.D+0 PD=D00/(2.D+0*E*S) P(K,2)=PA+(PN/PD)

```
C
C
C
```

Computation of Predictor DO I=2,K-1

X=(I-1)*DX

AM=A(I,2) AV=A(I+1,2)*V(I+1,2)-A(I,2)*V(I,2) IF(I.EQ.(K-1)) AV=AOUT*VOUT-A(I,2)*V(I,2) A(I,1)=AM-R*AV

F=FF*(V(I,2)/A(I,2)) VM=V(I,2) V1=(V(I,2)**2.D+0)/2.D+0+P(I,2)/DENS V2=(V(I+1,2)**2.D+0)/2.D+0+P(I+1,2)/DENS IF(I.EQ.(K-1)) V2=(VOUT**2.D+0)/2.D+0+POUT/DENS V(I,1)=VM-R*(V2-V1)-(DT*F)

PA=P0+PB*DCOS(WK*(X-C*T))

```
PN=DSQRT(A(I,1)/A0)-1.D+0
PD=D00/(2.D+0*E*S)
P(I,1)=PA+(PN/PD)
```

C C C

Computation of Corrector DO I=2,K-1

X=(I-1)*DX

AV=A(I,1)*V(I,1)-A(I-1,1)*V(I-1,1) IF(I.EQ.2) AV=A(I,1)*V(I,1)-A(1,2)*V(1,2) A(I,2)=0.5D+0*(A(I,2)+A(I,1)-R*AV)

F=FF*(V(I,1)/A(I,1)) V2=(V(I,1)**2.D+0)/2.D+0+P(I,1)/DENS V1=(V(I-1,1)**2.D+0)/2.D+0+P(I-1,1)/DENS IF(I.EQ.2) V1=(V(1,2)**2.D+0)/2.D+0+P(1,2)/DENS V(I,2)=0.5D+0*(V(I,2)+V(I,1)-R*(V2-V1)-DT*F)

```
PA=P0+PB*DCOS(WK*(X-C*T))
PN=DSQRT(A(I,2)/A0)-1.D+0
PD=D00/(2.D+0*E*S)
P(I,2)=PA+(PN/PD)
```

ENDDO

C -----C Print of results

C -----

IF(J.GT.NY) THEN

IF(A(I,2).GT.AMAX) THEN AMAX=A(I,2) ELSE END IF

IF(A(I,2).LT.AMIN) THEN AMIN=A(I,2) ELSE END IF

MM=J-NYQ(MM)=A(K,2)*V(K,2)

IF(OUT.EQ.1.) GO TO 3 IF(NY.EQ.0) THEN OUT=1.D+0 DO I=1,K X=(I-1)*DX

WRITE(2,*) 0.D+0,X,V0 WRITE(3,*) 0.D+0,X,A0 WRITE(4,*) 0.D+0,X,P00

ELSE END IF

3 CONTINUE

IF(MOD(J,100).EQ.0) THEN

DO I=1,K X=(I-1)*DX

WRITE(2,*) DFLOAT(J-NY)*DT,X,V(I,2) WRITE(3,*) DFLOAT(J-NY)*DT,X,A(I,2) WRITE(4,*) DFLOAT(J-NY)*DT,X,P(I,2)

ENDDO

ELSE END IF

ELSE END IF

- 1 CONTINUE
- C Computation of Flow

SQ=0.D+0 NN=NT-NY

IF(NY.EQ.0) THEN

WRITE(5,*) 0.D+0,V0*A0 WRITE(6,*) 0.D+0,H WRITE(7,*) 0.D+0,H

CONTINUE END IF

DO I=2,NN T=(I-1)*DT

IF(T.GT.(DFLOAT(KT)*WL/C)) GO TO 2 SQ=SQ+(Q(I-1)+Q(I))*DT/2.D+0

2 CONTINUE

IF(MOD(I,100).EQ.0) THEN

WRITE(5,*) T,Q(I-1)

ELSE END IF

QM=SQ/(DFLOAT(KT)*WL/C)

RMAX=DSQRT(AMAX/PI) RMIN=DSQRT(AMIN/PI) B=(RMAX-RMIN)/2.D+0 RMED=(RMAX+RMIN)/2.D+0 EPSI=(RMAX-RMED)/RMED

WRITE(6,*) 'Qm=',QM WRITE(6,*) 'Pb=',PB WRITE(6,*) 'Rmax=',RMAX WRITE(6,*) 'Rmin=',RMIN WRITE(6,*) 'b=',B WRITE(6,*) 'km=',RMED WRITE(6,*) 'rel. ampl.=',EPSI WRITE(6,*) 'Amax=',AMAX WRITE(6,*) 'Amin=',AMIN

STOP END

5. Πρόγραμμα rathmac.for προσδιορισμού των συναρτήσεων A(x,t), υ(x,t) και p(x,t) καθώς και της Q(t). Εφαρμόζεται η αριθμητική μεθοδολογία MacCormack για αδιάστατες τιμές των παραμέτρων.

PROGRAM rathmac IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H), .DOUBLE PRECISION (O-Z) DIMENSION A(900,2),P(900,2),V(900,2),Q(500000)

OPEN(1,FILE='rathmac.in') OPEN(2,FILE='RMV.DAT') OPEN(3,FILE='RMA.DAT') OPEN(4,FILE='RMP.DAT') OPEN(5,FILE='RMQ.DAT') OPEN(6,FILE='RMMED.DAT')

OUT=0.D+0

READ(1,*) K,DT,NY,NMED,NT,KT,KM,KN READ(1,*) AL,VIS,DENS,D0,E,S,WL,PR,PB,RM,P0,V0,DD,H,G,TR1,TR2 READ(1,*) RED

WRITE(6,*) 'K=',K WRITE(6,*) 'Dt=',DT WRITE(6,*) 'time for(.dat) =',NY WRITE(6,*) 'time for(medium) =',NMED WRITE(6,*) 'total time steps =',NT WRITE(6,*) 'total periods =',KT WRITE(6,*) 'L=',AL WRITE(6,*) 'V=',VIS WRITE(6,*) 'dens=',DENS

```
WRITE(6,*) 'Do=',D0
   WRITE(6,*) 'E=',E
   WRITE(6,*) 's=',S
   WRITE(6,*) 'wl=',WL
   WRITE(6,*) 'm=',PR
   WRITE(6,*) 'Pb=',PB
   WRITE(6,*) 'Rm=',RM
   WRITE(6,*) 'Po=',P0
   WRITE(6,*) 'Vo=',V0
   WRITE(6,*) 'Dd=',DD
   WRITE(6,*) 'H=',H
   WRITE(6,*) 'g=',G
   WRITE(6,*) 'loss1=',TR1
   WRITE(6,*) 'loss2=',TR2
   WRITE(6,*) 'ReStr=',RED
   WRITE(6,*) '-----'
   PI=4.D+0*DATAN(1.D+0)
   T=0.D+0
   C=VIS*WL*RED/(RM*RM)
   A00=DSQRT(S*E/(DENS*D0*(1.D+0-1.D+0/(2.D+0*PR))))
   W=2.D+0*PI*C/WL
С
    ------
С
     Dimensionless
С
    _____
   STR=RM/WL
   RE=RED/STR
   FR=C*C/(G*WL)
   AD=(DD^*DD)/(4.D+0^*RM^*RM)
   A0=(D0^{*}D0)/(4.D+0^{*}RM^{*}RM)
   AMAX=A0
   AMIN=A0
   R0=(D0/2.D+0)/RM
   AL=AL/WL
   H=H/WL
   P0=P0/(DENS*C*C)
   E=E/(DENS*C*C)
   S=S/RM
   PB=PB/(DENS*C*C)
   V0=V0/C
   D00=R0^{(1.D+0-1.D+0/(2.D+0^{PR}))}
   DX=AL/DFLOAT(K-1)
   R=DT/DX
   P00=P0+H/FR
   WRITE(6,*) 'c=',C
   WRITE(6,*) 'ao=',A00
   WRITE(6,*) 'Fr=',FR
   WRITE(6,*) 'Re=',RE
   WRITE(6,*) 'Str=',STR
   WRITE(6,*) 'Dx=',DX
   WRITE(6,*) 'v=Dt/Dx=',R
   WRITE(6,*) '-----'
```

	Set of initial values
C	DO I=1,K X=(I-1)*DX
	A(I,2)=A0
	P(I,2)=P00
	V(I,2)=V0
	ENDDO
C C C	Start of Loop
	DO 1 J=1,NT T=T+DT
C C C	Computation of boundaries
	Left boundary
U	CON=0.5D+0*(1.D+0+A0/AD)*H
	IF(V(1,2).LT.0.D+0) TR=+TR2 IF(V(1,2).GT.0.D+0) TR=-TR1 IF(V(1,2).EQ.0.D+0) TR=0.D+0
	A(1,2)=A(1,2)-(DT/DX)*(A(2,2)*V(2,2)-A(1,2)*V(1,2))
	V(1,2)=V(1,2)+(DT*P0/CON)-(P(1,2)*DT/CON)+(0.5D+0*DT/CON)* .((A0*A0/AD*AD)-1.D+0)*V(1,2)*V(1,2)+(DT*H/(FR*CON))+ .(TR*DT*0.5D+0/CON)*V(1,2)*V(1,2)
	PA=P0+PB*DCOS(2.D+0*PI*(0.D+0-T)) PN=DSQRT(A(1,2)/A0)-1.D+0 PD=D00/(E*S) P(1,2)=PA+(PN/PD)
C C C	Right boundary
	AOUT=A(K,2) $VOUT=V(K,2)$ $POUT=P(K,2)$
	CON=0.5D+0*(1.D+0+A0/AD)*H
	IF(V(K,2).LT.0.D+0) TR=+TR1 IF(V(K,2).GT.0.D+0) TR=-TR2 IF(V(K,2).EQ.0.D+0) TR=0.D+0

A(K,2)=A(K,2)-(DT/DX)*(A(K,2)*V(K,2)-A(K-1,2)*V(K-1,2))

V(K,2)=V(K,2)-(DT*P0/CON)+(P(K,2)*DT/CON)-(0.5D+0*DT/CON)* .((A0*A0/AD*AD)-1.D+0)*V(K,2)*V(K,2)-(DT*H/(FR*CON))+ .(TR*DT*0.5D+0/CON)*V(K,2)*V(K,2)

PA=P0+PB*DCOS(2.D+0*PI*(AL-T)) PN=DSQRT(A(K,2)/A0)-1.D+0 PD=D00/(E*S) P(K,2)=PA+(PN/PD)

C Computation of Predictor

DO I=2,K-1 X=(I-1)*DX

AM=A(I,2) AV=A(I+1,2)*V(I+1,2)-A(I,2)*V(I,2) IF(I.EQ.(K-1)) AV=AOUT*VOUT-A(I,2)*V(I,2) A(I,1)=AM-R*AV

F=(8.D+0/(RE*STR))*(V(I,2)/A(I,2)) VM=V(I,2) V1=(V(I,2)**2.D+0)/2.D+0+P(I,2) V2=(V(I+1,2)**2.D+0)/2.D+0+P(I+1,2) IF(I.EQ.(K-1)) V2=(VOUT**2.D+0)/2.D+0+POUT V(I,1)=VM-R*(V2-V1)-(DT*F)

```
PA=P0+PB*DCOS(2.D+0*PI*(X-T))
PN=DSQRT(A(I,1)/A0)-1.D+0
PD=D00/(E*S)
P(I,1)=PA+(PN/PD)
```

ENDDO

```
C
C
C
```

Computation of Corrector DO I=2,K-1 X=(I-1)*DX

AV=A(I,1)*V(I,1)-A(I-1,1)*V(I-1,1) IF(I.EQ.2) AV=A(I,1)*V(I,1)-A(1,2)*V(1,2) A(I,2)=0.5D+0*(A(I,2)+A(I,1)-R*AV)

F=(8.D+0/(RE*STR))*(V(I,1)/A(I,1)) V2=(V(I,1)**2.D+0)/2.D+0+P(I,1) V1=(V(I-1,1)**2.D+0)/2.D+0+P(I-1,1) IF(I.EQ.2) V1=(V(1,2)**2.D+0)/2.D+0+P(1,2) V(I,2)=0.5D+0*(V(I,2)+V(I,1)-R*(V2-V1)-DT*F)

PA=P0+PB*DCOS(2.D+0*PI*(X-T)) PN=DSQRT(A(I,2)/A0)-1.D+0 PD=D00/(E*S) P(I,2)=PA+(PN/PD)

ENDDO

- C -----C Print of results
- C C
- IF(J.GT.NY) THEN
- IF(J.GT.NMED) THEN IF(A(I,2).GT.AMAX) THEN AMAX=A(I,2) ELSE
- END IF
- IF(A(I,2).LT.AMIN) THEN AMIN=A(I,2) ELSE END IF
- ELSE END IF
- MM=J-NY Q(MM)=(C/A00)*A(K,2)*V(K,2)
- IF(OUT.EQ.1.D+0) GO TO 3 IF(NY.EQ.0) THEN OUT=1.D+0 DO I=1,K X=(I-1)*DX
- WRITE(2,*) 0.D+0,X,V0 WRITE(3,*) 0.D+0,X,A0 WRITE(4,*) 0.D+0,X,P00
- ENDDO ELSE END IF
- 3 CONTINUE
- C IF(MOD(J,KM).EQ.0) THEN
- C DO I=1,K
- C IF(MOD(I,KN).EQ.0) THEN
- C X=(I-1)*DX
- C WRITE(2,*) DFLOAT(J-NY)*DT,X,V(I,2)
- C WRITE(3,*) DFLOAT(J-NY)*DT,X,A(I,2)
- C WRITE(4,*) DFLOAT(J-NY)*DT,X,P(I,2)
- C ELSE
- C END IF
- C ENDDO

- С ELSE С
 - END IF

ELSE END IF

- CONTINUE 1
- ***** С
- С Computation of Flow С *******

SQ=0.D+0 NN=NT-NY NQ=NT-NMED

IF(NQ.EQ.0) THEN

WRITE(5,*) 0.D+0,(C/A00)*V0*A0

END IF

DO I=2,NQ T=(I-1)*DT

IF(T.GT.(DFLOAT(KT))) GO TO 2 SQ=SQ+(Q(I-1)+Q(I))*DT/2.D+0

2 CONTINUE **ENDDO**

> DO I=2,NN T=(I-1)*DT

IF(MOD(I,KM).EQ.0) THEN

WRITE(5,*) T,Q(I-1)

ELSE END IF

ENDDO

QM=SQ/(DFLOAT(KT))

RMAX=RM*DSQRT(AMAX) RMIN=RM*DSQRT(AMIN) EPSIMAX=(RMAX-RM)/RM EPSIMIN=(RMIN-RM)/RM

WRITE(6,*) 'QmD=',QM WRITE(6,*) 'ReStr=',RED WRITE(6,*) 'Qm=',QM*A00*PI*RM*RM WRITE(6,*) 'w=',W WRITE(6,*) 'rel. ampl. max=',EPSIMAX WRITE(6,*) 'rel. ampl. min=',EPSIMIN

6. Πρόγραμμα rathlax.for προσδιορισμού των συναρτήσεων A(x,t), υ(x,t) και p(x,t) καθώς και της Q(t). Εφαρμόζεται η αριθμητική μεθοδολογία Lax Wendroff για αδιάστατες τιμές των παραμέτρων.

PROGRAM rathlax IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H), .DOUBLE PRECISION (O-Z) DIMENSION A(900,2),P(900,2),V(900,2),Q(500000)

OPEN(1,FILE='rathmac.in') OPEN(2,FILE='RLV.DAT') OPEN(3,FILE='RLA.DAT') OPEN(4,FILE='RLP.DAT') OPEN(5,FILE='RLQ.DAT') OPEN(6,FILE='RLMED.DAT')

OUT=0.D+0

```
READ(1,*) K,DT,NY,NMED,NT,KT,KM,KN
READ(1,*) AL,VIS,DENS,D0,E,S,WL,PR,PB,RM,P0,V0,DD,H,G,TR1,TR2
READ(1,*) RED
```

```
WRITE(6,*) 'K=',K
WRITE(6,*) 'Dt=',DT
WRITE(6,*) 'time for(.dat) =',NY
WRITE(6,*) 'time for(medium) =',NMED
WRITE(6,*) 'total time steps =',NT
WRITE(6,*) 'integral periods =',KT
WRITE(6,*) 'L=',AL
WRITE(6,*) 'v=',VIS
WRITE(6,*) 'dens=',DENS
WRITE(6,*) 'Do=',D0
WRITE(6,*) 'E=',E
WRITE(6,*) 's=',S
WRITE(6,*) 'wl=',WL
WRITE(6,*) 'm=',PR
WRITE(6,*) 'Pb=',PB
WRITE(6,*) 'Rm=',RM
WRITE(6,*) 'Po=',P0
WRITE(6,*) 'Vo=',V0
WRITE(6,*) 'Dd=',DD
WRITE(6,*) 'H=',H
WRITE(6,*) 'g=',G
WRITE(6,*) 'loss1=',TR1
WRITE(6,*) 'loss2=',TR2
WRITE(6,*) 'ReStr=',RED
WRITE(6,*) '-----'
```

PI=4.D+0*DATAN(1.D+0) T=0.D+0 T1=0.D+0

```
C=VIS*WL*RED/(RM*RM)
   A00=DSQRT(S*E/(DENS*D0*(1.D+0-1.D+0/(2.D+0*PR))))
   W=2.D+0*PI*C/WL
С
    -----
С
     Dimensionless
С
    -----
   STR=RM/WL
   RE=RED/STR
   FR=C*C/(G*WL)
   AD=(DD^*DD)/(4.D+0^*RM^*RM)
   A0=(D0^{*}D0)/(4.D+0^{*}RM^{*}RM)
   AMAX=A0
   AMIN=A0
   R0=(D0/2.D+0)/RM
   AL=AL/WL
   H=H/WL
   P0=P0/(DENS*C*C)
   E=E/(DENS*C*C)
   S=S/RM
   PB=PB/(DENS*C*C)
   V0=V0/C
   D00=R0^{(1.D+0-1.D+0/(2.D+0^{PR}))}
   DX=AL/DFLOAT(K-1)
   R=DT/DX
   P00=P0+H/FR
   WRITE(6,*) 'c=',C
   WRITE(6,*) 'ao=',A00
   WRITE(6,*) 'Fr=',FR
   WRITE(6,*) 'Re=',RE
   WRITE(6,*) 'Str=',STR
   WRITE(6,*) 'Dx=',DX
   WRITE(6,*) 'v=Dt/Dx=',R
   WRITE(6,*) '-----'
С
    ------
С
     Set of initial values
С
   ------
   DO I=1,K
   X=(I-1)*DX
   A(I,2)=A0
   P(I,2)=P00
```

V(I,2)=V0

ENDDO

T=T+DT

С _____ С Start of Loop С _____ DO 1 J=1,NT

- С -----
- C Computation of boundaries
- С -----
- C C

С

Left boundary

AIN=A(1,2) VIN=V(1,2) PIN=P(1,2)

CON=0.5D+0*(1.D+0+A0/AD)*H

IF(V(1,2).LT.0.D+0) TR=+TR2 IF(V(1,2).GT.0.D+0) TR=-TR1 IF(V(1,2).EQ.0.D+0) TR=0.D+0

A(1,2)=A(1,2)-(DT/DX)*(A(2,2)*V(2,2)-A(1,2)*V(1,2))

V(1,2)=V(1,2)+(DT*P0/CON)-(P(1,2)*DT/CON)+(0.5D+0*DT/CON)* .((A0*A0/AD*AD)-1.D+0)*V(1,2)*V(1,2)+(DT*H/(FR*CON))+ .(TR*DT*0.5D+0/CON)*V(1,2)*V(1,2)

PA=P0+PB*DCOS(2.D+0*PI*(0.D+0-T)) PN=DSQRT(A(1,2)/A0)-1.D+0 PD=D00/(E*S) P(1,2)=PA+(PN/PD)

C -----C Right boundary C -----

AOUT=A(K,2) VOUT=V(K,2) POUT=P(K,2)

CON=0.5D+0*(1.D+0+A0/AD)*H

IF(V(K,2).LT.0.D+0) TR=+TR1 IF(V(K,2).GT.0.D+0) TR=-TR2 IF(V(K,2).EQ.0.D+0) TR=0.D+0

A(K,2)=A(K,2)-(DT/DX)*(A(K,2)*V(K,2)-A(K-1,2)*V(K-1,2))

V(K,2)=V(K,2)-(DT*P0/CON)+(P(K,2)*DT/CON)-(0.5D+0*DT/CON)* .((A0*A0/AD*AD)-1.D+0)*V(K,2)*V(K,2)-(DT*H/(FR*CON))+ .(TR*DT*0.5D+0/CON)*V(K,2)*V(K,2)

PA=P0+PB*DCOS(2.D+0*PI*(AL-T)) PN=DSQRT(A(K,2)/A0)-1.D+0 PD=D00/(E*S) P(K,2)=PA+(PN/PD)

С -----

C Computation of 1st Semistep

С -----

DO I=1,K-1 X=(I-1)*DX+DX/2.D+0

AM=(A(I,2)+A(I+1,2))/2.D+0 IF(I.EQ.1) AM=(AIN+A(I+1,2))/2.D+0 IF(I.EQ.(K-1)) AM=(A(I,2)+AOUT)/2.D+0 AV=(R/2.D+0)*(A(I+1,2)*V(I+1,2)-A(I,2)*V(I,2)) IF(I.EQ.1) AV=(R/2.D+0)*(A(I+1,2)*V(I+1,2)-AIN*VIN) IF(I.EQ.(K-1)) AV=(R/2.D+0)*(AOUT*VOUT-A(I,2)*V(I,2)) A(I,1)=AM-AV

F=(8.D+0/(RE*STR))*0.5D+0*(V(I,2)/A(I,2)+V(I+1,2)/A(I+1,2)) VM=(V(I,2)+V(I+1,2))/2.D+0 IF(I.EQ.1) VM=(VIN+V(I+1,2))/2.D+0 V1=(V(I,2)*2.D+0)/2.D+0+P(I,2) IF(I.EQ.1) V1=(VIN*2.D+0)/2.D+0+PIN V2=(V(I+1,2)*2.D+0)/2.D+0+P(I+1,2) IF(I.EQ.(K-1)) V2=(VOUT*2.D+0)/2.D+0+POUT V(I,1)=VM-(R/2.D+0)*(V2-V1)-((DT/2.D+0)*F)

```
T1=T-DT/2.D+0
PA=P0+PB*DCOS(2.D+0*PI*(X-T1))
PN=DSQRT(A(I,1)/A0)-1.D+0
PD=D00/(E*S)
P(I,1)=PA+(PN/PD)
```

ENDDO

C C

С

Computation of 2nd Semistep

DO I=2,K-1 X=(I-1)*DX

AV=A(I,1)*V(I,1)-A(I-1,1)*V(I-1,1) A(I,2)=A(I,2)-R*AV

```
F=(8.D+0/(RE*STR))*0.5D+0*(V(I,1)/A(I,1)+V(I-1,1)/A(I-1,1))
V2=(V(I,1)**2.D+0)/2.D+0+P(I,1)
V1=(V(I-1,1)**2.D+0)/2.D+0+P(I-1,1)
V(I,2)=V(I,2)-R*(V2-V1)-DT*F
```

```
PA=P0+PB*DCOS(2.D+0*PI*(X-T))
PN=DSQRT(A(I,2)/A0)-1.D+0
PD=D00/(E*S)
P(I,2)=PA+(PN/PD)
```

ENDDO

C -----

C Print of results C -----

IF(J.GT.NY) THEN

IF(J.GT.NMED) THEN

IF(A(I,2).GT.AMAX) THEN AMAX = A(I,2)ELSE END IF IF(A(I,2).LT.AMIN) THEN AMIN=A(I,2)ELSE END IF ELSE END IF MM=J-NY Q(MM)=(C/A00)*A(K,2)*V(K,2)IF(OUT.EQ.1.D+0) GO TO 3 IF(NY.EQ.0) THEN OUT=1.D+0 DO I=1,K X=(I-1)*DX WRITE(2,*) 0.D+0,X,V0 WRITE(3,*) 0.D+0,X,A0 WRITE(4,*) 0.D+0,X,P00 **ENDDO** ELSE END IF CONTINUE IF(MOD(J,KM).EQ.0) THEN DO I=1,K IF(MOD(I,KN).EQ.0) THEN X=(I-1)*DX WRITE(2,*) DFLOAT(J-NY)*DT,X,V(I,2) WRITE(3,*) DFLOAT(J-NY)*DT,X,A(I,2) WRITE(4,*) DFLOAT(J-NY)*DT,X,P(I,2) ELSE END IF **ENDDO** ELSE END IF ELSE END IF

1 CONTINUE

3

С

С

С

С

С

C C

С

С

С

С

С

- С Computation of Flow С
 - *******
 - SQ=0.D+0 NN=NT-NY NQ=NT-NMED

IF(NQ.EQ.0) THEN

WRITE(5,*) 0.D+0,(C/A00)*V0*A0

END IF

DO I=2,NQ T=(I-1)*DT

IF(T.GT.(DFLOAT(KT))) GO TO 2 SQ=SQ+(Q(I-1)+Q(I))*DT/2.D+0

2 CONTINUE ENDDO

> DO I=2,NN T=(I-1)*DT

IF(MOD(I,KM).EQ.0) THEN

WRITE(5,*) T,Q(I-1)

ELSE END IF

ENDDO

QM=SQ/(DFLOAT(KT))

RMAX=RM*DSQRT(AMAX) RMIN=RM*DSQRT(AMIN) EPSIMAX=(RMAX-RM)/RM EPSIMIN=(RMIN-RM)/RM

WRITE(6,*) 'QmD=',QM WRITE(6,*) 'ReStr=',RED WRITE(6,*) 'Qm=',QM*A00*PI*RM*RM WRITE(6,*) 'w=',W WRITE(6,*) 'rel. ampl. max=',EPSIMAX WRITE(6,*) 'rel. ampl. min=',EPSIMIN

STOP END

7. Πρόγραμμα acpercon.for υπολογισμού παροχής εύκαμπτου αγωγού, με τη μέθοδο Runge-Kutta 4^{ης} τάξης, στην περίπτωση επιβολής αρμονικού συναρτησιακού περίσταλσης δύο ανεξαρτήτων μεταβλητών.

PROGRAM acpercon IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H),
```
.DOUBLE PRECISION (O-Z)
```

OPEN(1,FILE='acpercon.in') OPEN(2,FILE='qtacpercon.dat') OPEN(3,FILE='acmedcon.dat')

READ(1,*) NT,DT,RN,NR,RR,KM,BL,WL,WW,VIS,RM,GR READ(1,*) H1,H2,Q0,A1,A2,AB,A01,A02,TR1,TR2,TR

- С -----
- C Print of inputs
- С

-----WRITE(3,*) 'Total time nodes =',NT WRITE(3,*) 'Dt=',DT WRITE(3,*) 'Time for medium flow =',RN WRITE(3,*) 'Integer periods =',NR WRITE(3,*) 'Time limit for .dat =',RR WRITE(3,*) 'L =',BL WRITE(3,*) 'Wavelength =',WL WRITE(3,*) 'cyclic freq.=',WW WRITE(3,*) 'v=',VIS WRITE(3,*) 'Rm=',RM WRITE(3,*) 'g =',GR WRITE(3,*) 'h1=',H1 WRITE(3,*) 'h2=',H2 WRITE(3,*) 'Q(0)=',Q0 WRITE(3,*) 'A1=',A1 WRITE(3,*) 'A2=',A2 WRITE(3,*) 'Ab =',AB WRITE(3,*) 'A01=',A01 WRITE(3,*) 'A02=',A02 WRITE(3,*) 'TR1=',TR1 WRITE(3,*) 'TR2=',TR2 WRITE(3,*) 'TR=',TR WRITE(3,*) '-----'

```
PI=4.D+0*DATAN(1.D+0)
T=0.D+0
TRAP3=0.D+0
QB3=Q0
TRAP4=0.D+0
QB4=Q0
WK=2.D+0*PI/WL
WC=(WL*WW)/(2.D+0*PI)
```

С -----

C Dimensionless C ------FR=WC*WC*WK/GR AL=BL*WK W=RM*DSQRT(WW/VIS)

C -----C Initial values C -----

Q3=Q0

Q4=Q0

WRITE(2,*) T,Q3,Q4

С _____ С Start of Loop С _____ DO 1 J=2,NT T=(J-1)*DT С _____ С Computation of First Order С _____ T1=T-DT ASL=1.D+0+AB*DCOS(T1-AL) AS0=1.D+0+AB*DCOS(T1) RA=-(2.D+0/(DSQRT(1.D+0-AB*AB)))* .DATAN(DSQRT((1.D+0-AB)/(1.D+0+AB)))*(DTAN(T1/2.D+0-AL/2.D+0) .-DTAN(T1/2.D+0)) RAA=-(1.D+0/(AB*AB-1.D+0))*((AB/ASL)*DSIN(T1-AL)-.(AB/AS0)*DSIN(T1)+RA) RDA=-((1.D+0/ASL)-(1.D+0/AS0)) VTL=-(AB/AL)*(DCOS(T1-AL)-DCOS(T1)) V2TL=(AB/AL)*(DSIN(T1-AL)-DSIN(T1)) RAV2T=(1.D+0/AL)*(DLOG(ASL/AS0)-AB*DSIN(T1)*RA) RDAVT=-(1.D+0/AL)*(DLOG(ASL/AS0)+(AS0/ASL)-1.D+0) RAAVT=-(1.D+0/AL)*(RA-AS0*RAA) A=(H1/(2.D+0*A1))*(1.D+0+A1/A01)+ .(H2/(2.D+0*A2))*(1.D+0+A2/A02)+RA B=(8.D+0/(W*W))*((H1/(A1*A1))+(H2/(A2*A2))+RAA)-.AL*(TR2/(A02*A02)+1.D+0/(A2*A2))*VTL+RDA C=0.5D+0*AL*(1.D+0/(A2*A2)-1.D+0/(A1*A1)+TR1/(A01*A01)+ .TR2/(A02*A02)) D=(1.D+0/(FR*AL))*(H2-H1)-(H2/(2.D+0*A2))*(1.D+0+A2/A02)*V2TL+ .0.5D+0*AL*(1.D+0/(A2*A2)+TR2/(A02*A02))*VTL*VTL-.(8.D+0/(W*W))*(H2/(A2*A2))*VTL-RAV2T-RDAVT-(8.D+0/(W*W))*RAAVT AK1=-(B*Q3+C*Q3*Q3+D)/A

C -----C Computation of Second Order

-----T2=T-DT/2.D+0

С

Q32=Q3+DT*AK1/2.D+0

ASL=1.D+0+AB*DCOS(T2-AL) AS0=1.D+0+AB*DCOS(T2) RA=-(2.D+0/(DSQRT(1.D+0-AB*AB)))* .DATAN(DSQRT((1.D+0-AB)/(1.D+0+AB)))*(DTAN(T2/2.D+0-AL/2.D+0)) .-DTAN(T2/2.D+0))

RAA=-(1.D+0/(AB*AB-1.D+0))*((AB/ASL)*DSIN(T2-AL)-.(AB/AS0)*DSIN(T2)+RA) RDA=-((1.D+0/ASL)-(1.D+0/AS0)) VTL=-(AB/AL)*(DCOS(T2-AL)-DCOS(T2)) V2TL=(AB/AL)*(DSIN(T2-AL)-DSIN(T2)) RAV2T=(1.D+0/AL)*(DLOG(ASL/AS0)-AB*DSIN(T2)*RA) RDAVT=-(1.D+0/AL)*(DLOG(ASL/AS0)+(AS0/ASL)-1.D+0)RAAVT=-(1.D+0/AL)*(RA-AS0*RAA)

A=(H1/(2.D+0*A1))*(1.D+0+A1/A01)+ .(H2/(2.D+0*A2))*(1.D+0+A2/A02)+RA

B=(8.D+0/(W*W))*((H1/(A1*A1))+(H2/(A2*A2))+RAA)-.AL*(TR2/(A02*A02)+1.D+0/(A2*A2))*VTL+RDA

C=0.5D+0*AL*(1.D+0/(A2*A2)-1.D+0/(A1*A1)+TR1/(A01*A01)+ .TR2/(A02*A02))

D=(1.D+0/(FR*AL))*(H2-H1)-(H2/(2.D+0*A2))*(1.D+0+A2/A02)*V2TL+ .0.5D+0*AL*(1.D+0/(A2*A2)+TR2/(A02*A02))*VTL*VTL-.(8.D+0/(W*W))*(H2/(A2*A2))*VTL-RAV2T-RDAVT-(8.D+0/(W*W))*RAAVT

AK2=-(B*Q32+C*Q32*Q32+D)/A

С _____ С Computation of Third Order С

Q33=Q3+DT*AK2/2.D+0

ASL=1.D+0+AB*DCOS(T2-AL) AS0=1.D+0+AB*DCOS(T2)RA=-(2.D+0/(DSQRT(1.D+0-AB*AB)))* .DATAN(DSQRT((1.D+0-AB)/(1.D+0+AB)))*(DTAN(T2/2.D+0-AL/2.D+0) .-DTAN(T2/2.D+0)) RAA=-(1.D+0/(AB*AB-1.D+0))*((AB/ASL)*DSIN(T2-AL)-.(AB/AS0)*DSIN(T2)+RA) RDA = -((1.D + 0/ASL) - (1.D + 0/AS0))VTL=-(AB/AL)*(DCOS(T2-AL)-DCOS(T2)) V2TL=(AB/AL)*(DSIN(T2-AL)-DSIN(T2))RAV2T=(1.D+0/AL)*(DLOG(ASL/AS0)-AB*DSIN(T2)*RA)RDAVT=-(1.D+0/AL)*(DLOG(ASL/AS0)+(AS0/ASL)-1.D+0)RAAVT=-(1.D+0/AL)*(RA-AS0*RAA)

A=(H1/(2.D+0*A1))*(1.D+0+A1/A01)+ .(H2/(2.D+0*A2))*(1.D+0+A2/A02)+RA

B=(8.D+0/(W*W))*((H1/(A1*A1))+(H2/(A2*A2))+RAA)-.AL*(TR2/(A02*A02)+1.D+0/(A2*A2))*VTL+RDA

C=0.5D+0*AL*(1.D+0/(A2*A2)-1.D+0/(A1*A1)+TR1/(A01*A01)+ .TR2/(A02*A02))

D=(1.D+0/(FR*AL))*(H2-H1)-(H2/(2.D+0*A2))*(1.D+0+A2/A02)*V2TL+ .0.5D+0*AL*(1.D+0/(A2*A2)+TR2/(A02*A02))*VTL*VTL-.(8.D+0/(W*W))*(H2/(A2*A2))*VTL-RAV2T-RDAVT-(8.D+0/(W*W))*RAAVT AK3=-(B*Q33+C*Q33*Q33+D)/A

- С
- С Computation of Fourth Order С

Q34=Q3+DT*AK3

ASL=1.D+0+AB*DCOS(T-AL) AS0=1.D+0+AB*DCOS(T) RA=-(2.D+0/(DSQRT(1.D+0-AB*AB)))* .DATAN(DSQRT((1.D+0-AB)/(1.D+0+AB)))*(DTAN(T/2.D+0-AL/2.D+0) .-DTAN(T/2.D+0)) RAA=-(1.D+0/(AB*AB-1.D+0))*((AB/ASL)*DSIN(T-AL)-.(AB/AS0)*DSIN(T)+RA) RDA=-((1.D+0/ASL)-(1.D+0/AS0)) VTL=-(AB/AL)*(DCOS(T-AL)-DCOS(T)) V2TL=(AB/AL)*(DSIN(T-AL)-DSIN(T)) RAV2T=(1.D+0/AL)*(DLOG(ASL/AS0)-AB*DSIN(T)*RA) RDAVT=-(1.D+0/AL)*(DLOG(ASL/AS0)+(AS0/ASL)-1.D+0) RAAVT=-(1.D+0/AL)*(RA-AS0*RAA)

A=(H1/(2.D+0*A1))*(1.D+0+A1/A01)+ .(H2/(2.D+0*A2))*(1.D+0+A2/A02)+RA

B=(8.D+0/(W*W))*((H1/(A1*A1))+(H2/(A2*A2))+RAA)-.AL*(TR2/(A02*A02)+1.D+0/(A2*A2))*VTL+RDA

C=0.5D+0*AL*(1.D+0/(A2*A2)-1.D+0/(A1*A1)+TR1/(A01*A01)+ .TR2/(A02*A02))

D=(1.D+0/(FR*AL))*(H2-H1)-(H2/(2.D+0*A2))*(1.D+0+A2/A02)*V2TL+ .0.5D+0*AL*(1.D+0/(A2*A2)+TR2/(A02*A02))*VTL*VTL-.(8.D+0/(W*W))*(H2/(A2*A2))*VTL-RAV2T-RDAVT-(8.D+0/(W*W))*RAAVT

AK4=-(B*Q34+C*Q34*Q34+D)/A

С _____ Results

С С

Q3=Q3+(DT/6.D+0)*(AK1+2.D+0*AK2+2.D+0*AK3+AK4)

Q4=Q3-VTL

IF(Q3.GT.0.D+0) TR1=TR1

IF(Q3.LT.0.D+0) TR1=-TR2

IF(TR.NE.0.D+0) THEN

IF(Q4.GT.0.D+0) TR2=TR

IF(Q4.LT.0.D+0) TR2=-TR

ELSE

IF(Q4.GT.0.D+0) TR2=TR2

103

IF(Q4.LT.0.D+0) TR2=-TR1

END IF

IF(T.LE.RR) GOTO 2 IF(MOD(J,KM).EQ.0) THEN

WRITE(2,*) DFLOAT(J-1)*DT,Q3,Q4

ELSE END IF

IF(T.GT.(RN+2.D+0*PI*DFLOAT(NR))) GOTO 1 IF(T.GT.RN) THEN

TRAP3=TRAP3+(QB3+Q3)*DT/2.D+0 TRAP4=TRAP4+(QB4+Q4)*DT/2.D+0

ELSE END IF

2 CONTINUE

QB3=Q3 QB4=Q4

1 CONTINUE

WRITE(3,*) 'Fr= ',FR WRITE(3,*) 'Str= ',AL WRITE(3,*) 'A1/A2=',A1/A2 WRITE(3,*) '------'

Q3M=TRAP3/(2.D+0*PI*DFLOAT(NR)) Q4M=TRAP4/(2.D+0*PI*DFLOAT(NR))

WRITE(3,*) 'Q3m=',Q3M WRITE(3,*) 'Q4m=',Q4M WRITE(3,*) 'W= ',W

STOP END

8. Πρόγραμμα zarea.for υπολογισμού παροχής εύκαμπτου αγωγού, με τη μέθοδο Runge-Kutta 4^{ης} τάξης, στην περίπτωση επιβολής αρμονικού συναρτησιακού μιας ανεξάρτητης μεταβλητής.

PROGRAM zarea IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H), .DOUBLE PRECISION (O-Z)

OPEN(1,FILE='zarea.in') OPEN(2,FILE='zqtarea.dat') OPEN(3,FILE='zareamed.dat') OPEN(4,FILE='trgrid.dat') READ(1,*) VIS,G,AL,H1,H2,A0 READ(1,*) NT,DT,RN,NR,RR,KM READ(1,*) Q0,A1,A2,AB,A01,A02,W READ(1,*) TR,TRS,SM

- C -----
- C Print of inputs C -----

-----WRITE(3,*) 'Total time nodes =',NT WRITE(3,*) 'Dt=',DT WRITE(3,*) 'Time for medium flow =',RN WRITE(3,*) 'Integer periods =',NR WRITE(3,*) 'Time limit for .dat =',RR WRITE(3,*) '-----' WRITE(3,*) 'Q(0)=',Q0 WRITE(3,*) 'A1=',A1 WRITE(3,*) 'A2=',A2 WRITE(3,*) 'AB=',AB WRITE(3,*) 'A01=',A01 WRITE(3,*) 'A02=',A02 WRITE(3,*) 'TR=',TR WRITE(3,*) 'SM=',SM WRITE(3,*) '-----' WRITE(3,*) 'h1=',H1 WRITE(3,*) 'h2=',H2

PI=4.D+0*DATAN(1.D+0) D0=DSQRT(4.D+0/PI) AMIN=(D0*D0/4.D+0)*(PI-2.D+0*(DACOS(SM)-SM*DSQRT(1.D+0-SM*SM)))

```
IF(H2-H1.NE.0.D+0) THEN

R0=DSQRT(A0/PI)

FR=(G*R0**4.D+0)/(VIS*VIS*AL*W**4.D+0)

WW=(VIS*W*W)/(R0*R0)

WRITE(3,*) 'v =',VIS

WRITE(3,*) 'g =',G

WRITE(3,*) 'L=',AL

WRITE(3,*) 'Ao=',A0

WRITE(3,*) 'freq.=',WW

ELSE

FR=0.D+0

ENDIF
```

```
T=0.D+0
TRAP3=0.D+0
QB3=Q0
TRAP4=0.D+0
QB4=Q0
```

С -----

C Initial values

С -----

Q3=Q0 Q4=Q0

WRITE(2,*) T,Q3,Q4

С _____ С Start of Loop С _____ DO 1 J=2,NT T=(J-1)*DT С _____ С Computation of First Order С -----T1=T-DT AS=1.D+0+AB*DSIN(T1) DAS=AB*DCOS(T1) D2AS=-AB*DSIN(T1) IF(Q3.GT.0.D+0.AND.A1.GT.1.D+0) TR1=0.578D+0+0.395D+0/DSQRT(A1) .-4.538D+0/A1+14.243D+0/DSQRT(A1**3.D+0)-19.222D+0/(A1*A1) .+8.54D+0/DSQRT(A1**5.D+0) IF(Q3.GT.0.D+0.AND.A1.LE.1.D+0) TR1=(1.D+0-A1)**2.D+0 IF(Q3.LT.0.D+0.AND.A1.GE.1.D+0) TR1=-(1.D+0-1.D+0/A1)**2.D+0 IF(Q3.LT.0.D+0.AND.A1.LT.1.D+0) TR1=-(0.578D+0 .+0.395D+0*DSQRT(A1)-4.538D+0*A1+14.243D+0*DSQRT(A1**3.D+0) .-19.222D+0*(A1*A1)+8.54D+0*DSQRT(A1**5.D+0)) IF(TR.NE.0.D+0) THEN TRV=TR-TRS*(DCOS((DSIN(T1/2.D+0))**4.D+0))**40.D+0 IF(TRS.NE.0.D+0) THEN A02=AMIN+(1.D+0-AMIN)*(DCOS((DSIN(T1/2.D+0))**4.D+0))**40.D+0 ELSE A02=AMIN END IF ELSE TRV=0.D+0 END IF IF(Q4.GT.0.D+0.AND.A2.GE.1.D+0) TR2=(1.D+0-1.D+0/A2)**2.D+0+TRV IF(Q4.GT.0.D+0.AND.A2.LT.1.D+0) TR2=0.578D+0 .+0.395D+0*DSQRT(A2)-4.538D+0*A2+14.243D+0*DSQRT(A2**3.D+0) .-19.222D+0*(A2*A2)+8.54D+0*DSQRT(A2**5.D+0)+TRV IF(Q4.LT.0.D+0.AND.A2.GT.1.D+0) TR2=-(0.578D+0 .+0.395D+0/DSQRT(A2)-4.538D+0/A2+14.243D+0/DSQRT(A2**3.D+0) .-19.222D+0/(A2*A2)+8.54D+0/DSQRT(A2**5.D+0))-TRV IF(Q4.LT.0.D+0.AND.A2.LE.1.D+0) TR2=-(1.D+0-A2)**2.D+0-TRV A=H1/A1+H2/A2+1.D+0/AS B=(8.D+0/(W*W))*(H1/(A1*A1)+H2/(A2*A2)+1.D+0/(AS*AS))-.(TR2/(A02*A02)+1.D+0/(A2*A2)+1.D+0/(AS*AS))*DAS C=0.5D+0*(1.D+0/(A2*A2)-1.D+0/(A1*A1)+TR1/(A01*A01)+ .TR2/(A02*A02)) D=FR*(H2-H1)-(H2/A2+1.D+0/(2.D+0*AS))*D2AS+

.0.5D+0*(1.D+0/(A2*A2)+TR2/(A02*A02)+1.D+0/(AS*AS))*DAS*DAS-.(8.D+0/(W*W))*(H2/(A2*A2)+1.D+0/(2.D+0*AS*AS))*DAS

AK1=-(B*Q3+C*Q3*Q3+D)/A

- С -----
- C Computation of Second Order

T2=T-DT/2.D+0

AS=1.D+0+AB*DSIN(T2) DAS=AB*DCOS(T2) D2AS=-AB*DSIN(T2)

Q32=Q3+DT*AK1/2.D+0 Q42=Q32-DAS

```
IF(Q32.GT.0.D+0.AND.A1.GT.1.D+0) TR1=0.578D+0
.+0.395D+0/DSQRT(A1)-4.538D+0/A1+14.243D+0/DSQRT(A1**3.D+0)
.-19.222D+0/(A1*A1)+8.54D+0/DSQRT(A1**5.D+0)
IF(Q32.GT.0.D+0.AND.A1.LE.1.D+0) TR1=(1.D+0-A1)**2.D+0
```

```
IF(Q32.LT.0.D+0.AND.A1.GE.1.D+0) TR1=-(1.D+0-1.D+0/A1)**2.D+0
IF(Q32.LT.0.D+0.AND.A1.LT.1.D+0) TR1=-(0.578D+0
.+0.395D+0*DSQRT(A1)-4.538D+0*A1+14.243D+0*DSQRT(A1**3.D+0)
.-19.222D+0*(A1*A1)+8.54D+0*DSQRT(A1**5.D+0))
```

```
IF(TR.NE.0.D+0) THEN
TRV=TR-TRS*(DCOS((DSIN(T2/2.D+0))*4.D+0))*40.D+0
IF(TRS.NE.0.D+0) THEN
A02=AMIN+(1.D+0-AMIN)*(DCOS((DSIN(T2/2.D+0))*4.D+0))*40.D+0
ELSE
A02=AMIN
END IF
ELSE
TRV=0.D+0
END IF
```

IF(Q42.GT.0.D+0.AND.A2.GE.1.D+0) TR2=(1.D+0-1.D+0/A2)**2.D+0 .+TRV IF(Q42.GT.0.D+0.AND.A2.LT.1.D+0) TR2=0.578D+0 .+0.395D+0*DSQRT(A2)-4.538D+0*A2+14.243D+0*DSQRT(A2**3.D+0) .-19.222D+0*(A2*A2)+8.54D+0*DSQRT(A2**5.D+0)+TRV

```
IF(Q42.LT.0.D+0.AND.A2.GT.1.D+0) TR2=-(0.578D+0
.+0.395D+0/DSQRT(A2)-4.538D+0/A2+14.243D+0/DSQRT(A2**3.D+0)
.-19.222D+0/(A2*A2)+8.54D+0/DSQRT(A2**5.D+0))-TRV
IF(Q42.LT.0.D+0.AND.A2.LE.1.D+0) TR2=-(1.D+0-A2)**2.D+0-TRV
```

A=H1/A1+H2/A2+1.D+0/AS

B=(8.D+0/(W*W))*(H1/(A1*A1)+H2/(A2*A2)+1.D+0/(AS*AS))-.(TR2/(A02*A02)+1.D+0/(A2*A2)+1.D+0/(AS*AS))*DAS

C=0.5D+0*(1.D+0/(A2*A2)-1.D+0/(A1*A1)+TR1/(A01*A01)+ .TR2/(A02*A02)) С

С

С

D=FR*(H2-H1)-(H2/A2+1.D+0/(2.D+0*AS))*D2AS+ .0.5D+0*(1.D+0/(A2*A2)+TR2/(A02*A02)+1.D+0/(AS*AS))*DAS*DAS-.(8.D+0/(W*W))*(H2/(A2*A2)+1.D+0/(2.D+0*AS*AS))*DAS AK2=-(B*Q32+C*Q32*Q32+D)/A _____ Computation of Third Order _____ Q33=Q3+DT*AK2/2.D+0 Q43=Q33-DAS IF(Q33.GT.0.D+0.AND.A1.GT.1.D+0) TR1=0.578D+0 .+0.395D+0/DSQRT(A1)-4.538D+0/A1+14.243D+0/DSQRT(A1**3.D+0) .-19.222D+0/(A1*A1)+8.54D+0/DSQRT(A1**5.D+0) IF(Q33.GT.0.D+0.AND.A1.LE.1.D+0) TR1=(1.D+0-A1)**2.D+0 IF(Q33.LT.0.D+0.AND.A1.GE.1.D+0) TR1=-(1.D+0-1.D+0/A1)**2.D+0 IF(Q33.LT.0.D+0.AND.A1.LT.1.D+0) TR1=-(0.578D+0 .+0.395D+0*DSQRT(A1)-4.538D+0*A1+14.243D+0*DSQRT(A1**3.D+0) .-19.222D+0*(A1*A1)+8.54D+0*DSQRT(A1**5.D+0)) IF(Q43.GT.0.D+0.AND.A2.GE.1.D+0) TR2=(1.D+0-1.D+0/A2)**2.D+0 .+TRV IF(Q43.GT.0.D+0.AND.A2.LT.1.D+0) TR2=0.578D+0 .+0.395D+0*DSQRT(A2)-4.538D+0*A2+14.243D+0*DSQRT(A2**3.D+0) .-19.222D+0*(A2*A2)+8.54D+0*DSQRT(A2**5.D+0)+TRV IF(Q43.LT.0.D+0.AND.A2.GT.1.D+0) TR2=-(0.578D+0 .+0.395D+0/DSQRT(A2)-4.538D+0/A2+14.243D+0/DSQRT(A2**3.D+0) .-19.222D+0/(A2*A2)+8.54D+0/DSQRT(A2**5.D+0))-TRV IF(Q43.LT.0.D+0.AND.A2.LE.1.D+0) TR2=-(1.D+0-A2)**2.D+0-TRV A=H1/A1+H2/A2+1.D+0/AS B=(8.D+0/(W*W))*(H1/(A1*A1)+H2/(A2*A2)+1.D+0/(AS*AS))-.(TR2/(A02*A02)+1.D+0/(A2*A2)+1.D+0/(AS*AS))*DAS C=0.5D+0*(1.D+0/(A2*A2)-1.D+0/(A1*A1)+TR1/(A01*A01)+ .TR2/(A02*A02)) D=FR*(H2-H1)-(H2/A2+1.D+0/(2.D+0*AS))*D2AS+ .0.5D+0*(1.D+0/(A2*A2)+TR2/(A02*A02)+1.D+0/(AS*AS))*DAS*DAS-.(8.D+0/(W*W))*(H2/(A2*A2)+1.D+0/(2.D+0*AS*AS))*DAS AK3=-(B*Q33+C*Q33*Q33+D)/A Computation of Fourth Order

AS=1.D+0+AB*DSIN(T) DAS=AB*DCOS(T) D2AS=-AB*DSIN(T)

Q34=Q3+DT*AK3

C C

С

Q44=Q34-DAS

IF(Q34.GT.0.D+0.AND.A1.GT.1.D+0) TR1=0.578D+0 .+0.395D+0/DSQRT(A1)-4.538D+0/A1+14.243D+0/DSQRT(A1**3.D+0) .-19.222D+0/(A1*A1)+8.54D+0/DSQRT(A1**5.D+0) IF(Q34.GT.0.D+0.AND.A1.LE.1.D+0) TR1=(1.D+0-A1)**2.D+0

IF(Q34.LT.0.D+0.AND.A1.GE.1.D+0) TR1=-(1.D+0-1.D+0/A1)**2.D+0 IF(Q34.LT.0.D+0.AND.A1.LT.1.D+0) TR1=-(0.578D+0 .+0.395D+0*DSQRT(A1)-4.538D+0*A1+14.243D+0*DSQRT(A1**3.D+0) .-19.222D+0*(A1*A1)+8.54D+0*DSQRT(A1**5.D+0))

IF(TR.NE.0.D+0) THEN TRV=TR-TRS*(DCOS((DSIN(T/2.D+0))**4.D+0))**40.D+0 IF(TRS.NE.0.D+0) THEN A02=AMIN+(1.D+0-AMIN)*(DCOS((DSIN(T/2.D+0))**4.D+0))**40.D+0 ELSE A02=AMIN END IF ELSE TRV=0.D+0 END IF

IF(Q44.GT.0.D+0.AND.A2.GE.1.D+0) TR2=(1.D+0-1.D+0/A2)**2.D+0 .+TRV IF(Q44.GT.0.D+0.AND.A2.LT.1.D+0) TR2=0.578D+0 .+0.395D+0*DSQRT(A2)-4.538D+0*A2+14.243D+0*DSQRT(A2**3.D+0) .-19.222D+0*(A2*A2)+8.54D+0*DSQRT(A2**5.D+0)+TRV

IF(Q44.LT.0.D+0.AND.A2.GT.1.D+0) TR2=-(0.578D+0 .+0.395D+0/DSQRT(A2)-4.538D+0/A2+14.243D+0/DSQRT(A2**3.D+0) .-19.222D+0/(A2*A2)+8.54D+0/DSQRT(A2**5.D+0))-TRV IF(Q44.LT.0.D+0.AND.A2.LE.1.D+0) TR2=-(1.D+0-A2)**2.D+0-TRV

A=H1/A1+H2/A2+1.D+0/AS

B=(8.D+0/(W*W))*(H1/(A1*A1)+H2/(A2*A2)+1.D+0/(AS*AS))-.(TR2/(A02*A02)+1.D+0/(A2*A2)+1.D+0/(AS*AS))*DAS

C=0.5D+0*(1.D+0/(A2*A2)-1.D+0/(A1*A1)+TR1/(A01*A01)+ .TR2/(A02*A02))

D=FR*(H2-H1)-(H2/A2+1.D+0/(2.D+0*AS))*D2AS+ .0.5D+0*(1.D+0/(A2*A2)+TR2/(A02*A02)+1.D+0/(AS*AS))*DAS*DAS-.(8.D+0/(W*W))*(H2/(A2*A2)+1.D+0/(2.D+0*AS*AS))*DAS

AK4=-(B*Q34+C*Q34*Q34+D)/A

C -----

- C Results
- С -----
 - Q3=Q3+(DT/6.D+0)*(AK1+2.D+0*AK2+2.D+0*AK3+AK4)

Q4=Q3-DAS

IF(T.LE.RR) GOTO 2

```
IF(MOD(J,KM).EQ.0) THEN
```

```
WRITE(2,*) DFLOAT(J-1)*DT,Q3,Q4
IF(TR.NE.0.D+0) THEN
WRITE(4,*) DFLOAT(J-1)*DT,A02,TR2
ELSE
END IF
```

ELSE END IF

IF(T.GT.(RN+2.D+0*PI*DFLOAT(NR))) GOTO 1 IF(T.GT.RN) THEN

```
TRAP3=TRAP3+(QB3+Q3)*DT/2.D+0
TRAP4=TRAP4+(QB4+Q4)*DT/2.D+0
```

ELSE END IF

2 CONTINUE

QB3=Q3 QB4=Q4

1 CONTINUE

WRITE(3,*) 'Fr= ',FR WRITE(3,*) 'A1/A2=',A1/A2 WRITE(3,*) 'TR1=',TR1 WRITE(3,*) 'TR2=',DABS(TR2)-DABS(TRV) WRITE(3,*) 'Q3=',Q3 WRITE(3,*) 'Q4=',Q4 WRITE(3,*) '------'

Q3M=TRAP3/(2.D+0*PI*DFLOAT(NR)) Q4M=TRAP4/(2.D+0*PI*DFLOAT(NR))

WRITE(3,*) 'Q3m=',Q3M WRITE(3,*) 'Q4m=',Q4M WRITE(3,*) 'W= ',W

WRITE(*,*) 'Q3m=',Q3M WRITE(*,*) 'Q4m=',Q4M WRITE(*,*) 'W= ',W WRITE(*,*) 'AB=',AB

```
STOP
END
```

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι Ι

Μαθηματική διαμόρφωση Συνήθους Διαφορικής Εξίσωσης μοντέλου

Θεωρούμε μια στιγμή όπου το ρευστό κινείται από τα αριστερά προς τα δεξιά όπως δείχνει το σχήμα 3.1. Εφαρμόζουμε την εξίσωση κίνησης (1.12) για το αριστερό δοχείο προσθέτοντας και τον όρο τοπικών απωλειών λόγω στομίου του δοχείου. Ολοκληρώνουμε θεωρώντας ότι η επιτάχυνση στα δοχεία έχει την ίδια τιμή παντού, χωρίς να εξάγεται από τη σχέση (3.3), η οποία θεωρεί ότι η επιτάχυνση στα δοχεία μπορεί να εκφραστεί ως η μέση τιμή μεταξύ των επιταχύνσεων της στάθμης στο δοχείο και αυτής του στομίου. Δηλαδή όπως επιταχύνεται το ρευστό στο στόμιο το ίδιο επιταχύνεται και η στάθμη του ρευστού και η ίδια επιτάχυνση επικρατεί στο ρευστό κατά τη ροϊκή γραμμή από τη στάθμη έως το στόμιο. Έτσι προκύπτει η εξίσωση που διέπει την κίνηση του ρευστού στο αριστερό δοχείο:

$$p_{01} - p_1 + \frac{\rho}{2} \Big[\upsilon_{01}^2(t) - \upsilon_1^2(t) \Big] + \rho g h_1 - \rho \frac{d \upsilon_{01}}{dt} h_1 - 8\pi \rho v h_1 \frac{\upsilon_{01}(t)}{A_1} \mp \xi_{1,2} \frac{\rho}{2} \upsilon_1^2(t) = 0 \qquad (II.1)^*$$

όπου ο όρος των τοπικών απωλειών έχει το αρνητικό πρόσημο για υ₁(t)>0 και το θετικό για υ₁(t)<0, ενώ η θεωρούμενη σταθερή τιμή του συντελεστή απωλειών, θα πρέπει να είναι διαφορετική, ανάλογα αν η ροή είναι από μεγαλύτερη διατομή προς μικρότερη (ξ₂) ή από μικρότερη προς μεγαλύτερη (ξ₁).

Εργαζόμενοι με τον ίδιο τρόπο για το δεξιό δοχείο παίρνουμε την εξίσωση:

$$p_{02} - p_2 + \frac{\rho}{2} \left[\upsilon_{02}^2(t) - \upsilon_2^2(t) \right] + \rho g h_2 + \rho \frac{d \upsilon_{02}}{dt} h_2 + 8\pi \rho v h_2 \frac{\upsilon_{02}(t)}{A_2} \pm \zeta_{1,2} \frac{\rho}{2} \upsilon_2^2(t) = 0$$
(II.2)

όπου ο όρος των τοπικών απωλειών έχει το θετικό πρόσημο για υ₂(t)>0 και το αρνητικό για υ₂(t)<0, ενώ η θεωρούμενη σταθερή τιμή του συντελεστή απωλειών, θα πρέπει να είναι διαφορετική, ανάλογα αν η ροή είναι από μεγαλύτερη διατομή προς μικρότερη (ζ₂) ή από μικρότερη προς μεγαλύτερη(ζ₁).

^{*} Μόνο τα μεγέθη της πίεσης και ταχύτητας, όταν περιέχουν το δείκτη μηδέν, αναφέρονται στη στάθμη του ρευστού στο δοχείου. Το μέγεθος της διατομής, όταν περιέχει το δείκτη μηδέν, αναφέρεται είτε στο απαραμόρφωτο στόμιο του εκάστοτε δοχείου ή στον αγωγό σε ηρεμία.

Αν εφαρμόσουμε την εξίσωση (1.12) για τον εύκαμπτο αγωγό και ολοκληρώσουμε προκύπτει η σχέση διαφοράς πίεσης των άκρων του:

$$p_2 - p_1 = -\frac{\rho}{2} \left[\upsilon_2^2(t) - \upsilon_1^2(t) \right] - 8\pi\rho v \int_0^L \frac{\upsilon(x,t)}{A(x,t)} dx - \rho \int_0^L \frac{\partial \upsilon(x,t)}{\partial t} dx$$
(II.3)

Ολοκληρώνοντας την εξίσωση συνέχειας (1.5) για ένα τμήμα του αγωγού από 0 έως x έχουμε την:

$$\int_{0}^{x} d(A\upsilon) = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{0}^{x} A(x, t) dx$$
(II.4)

όπου το _xA(x,t)dx παριστάνει τη συνάρτηση του μεταβαλλόμενου όγκου V(x,t) στο θεωρούμενο τμήμα του αγωγού. Αναλύοντας το πρώτο μέλος της (II.4) και εφαρμόζοντας την αρχή της συνέχειας μεταξύ στάθμης ρευστού αριστερού δοχείου και του στομίου του έχουμε:

$$A(x,t) \cdot \upsilon(x,t) = A_1 \cdot \upsilon_{01}(t) - \frac{\partial}{\partial t} \int_0^x A(x,t) dx$$
(II.5)

Η τελευταία σχέση εκφράζει την αρχή διατήρησης της μάζας, κατά την οποία η παροχή σε ένα τυχαίο σημείο του σωλήνα A(x,t)u(x,t) θα είναι ίση με την παροχή που εισάγεται στην αρχή του A(0,t)u(0,t)=A₁u₀₁(t) μείον το ρυθμό μεταβολής του όγκου του ρευστού κατά το μήκος του. Δηλαδή:

$$Q(x,t) = Q_{01}(t) - \frac{\partial}{\partial t} \int_0^x A(x,t) dx$$
(II.6)

Εφαρμόζοντας την (ΙΙ.6) για το δεξιό άκρο του αγωγού, σχηματίζουμε την έκφραση που συνδέει την παροχή εισόδου και εξόδου στο σύστημα:

$$Q_{02}(t) = Q_{01}(t) - \frac{\partial}{\partial t} \int_0^L A(x, t) dx$$
(II.7)

Οι σχέσεις μεταξύ ταχυτήτων στις στάθμες των δοχείων και των στομίων τους και η σύνδεση αυτών με τις παροχές πρόσδοσης - απαγωγής στο σύστημα, δίνονται εφαρμόζοντας την αρχή της συνέχειας ανάμεσα στις στάθμες του ρευστού στα δοχεία και των στομίων τους. Δηλαδή:

$$Q_{01}(t) = A_1 \cdot \upsilon_{01}(t) = A_{01} \cdot \upsilon_1(t) \iff \upsilon_{01}(t) = \frac{Q_{01}(t)}{A_1} \implies \frac{d\upsilon_{01}(t)}{dt} = \frac{1}{A_1} \cdot \frac{dQ_{01}(t)}{dt}$$
(II.8)

$$Q_{02}(t) = A_2 \cdot \upsilon_{02}(t) = A_{02} \cdot \upsilon_1(t) \Leftrightarrow \upsilon_{02}(t) = \frac{Q_{02}(t)}{A_2} \stackrel{\text{(II.7)}}{\Leftrightarrow} \upsilon_{02}(t) = \frac{Q_{01}(t)}{A_2} - \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int_0^L A(x, t) dx$$

$$\Rightarrow \frac{d\upsilon_{02}(t)}{dt} = \frac{1}{A_2} \cdot \frac{dQ_{01}(t)}{dt} - \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^L A(x, t) dx$$
(II.9)

Από την εξίσωση (ΙΙ.5) εξάγεται η συνάρτηση της ταχύτητας:

$$\upsilon(\mathbf{x},t) = \frac{\mathbf{A}_1}{\mathbf{A}(\mathbf{x},t)} \cdot \upsilon_{01}(t) - \frac{1}{\mathbf{A}(\mathbf{x},t)} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int_0^x \mathbf{A}(\mathbf{x},t) d\mathbf{x}$$
(II.10)

Παραγωγίζοντας την (ΙΙ.10) ως προς το χρόνο και ολοκληρώνοντας ως προς την απόσταση προκύπτει:

$$\int_{0}^{L} \frac{\partial \upsilon}{\partial t} dx = \frac{dQ_{01}(t)}{dt} \cdot \int_{0}^{L} \frac{1}{A(x,t)} dx - Q_{01}(t) \cdot \int_{0}^{L} \frac{1}{[A(x,t)]^{2}} \cdot \frac{\partial A(x,t)}{\partial t} dx - \int_{0}^{L} \frac{1}{A(x,t)} \cdot \frac{\partial^{2} V(x,t)}{\partial t^{2}} dx + \int_{0}^{L} \frac{1}{[A(x,t)]^{2}} \cdot \frac{\partial A(x,t)}{\partial t} \cdot \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} dx$$
(II.11)

Αφαιρώντας κατά μέλη τις (ΙΙ.1) και (ΙΙ.2), σχηματίζουμε τη διαφορά πίεσης που είναι στο πρώτο μέλος της εξίσωσης (ΙΙ.3). Αντικαθιστώντας στην (ΙΙ.3) σχηματίζουμε την εξίσωση (ΙΙ.12), όπου έχει απαλειφθεί η πυκνότητα του ρευστού.

$$\frac{1}{2} \Big[\upsilon_{02}^{2}(t) - \upsilon_{01}^{2}(t) \Big] + g(h_{2} - h_{1}) + \frac{d\upsilon_{01}(t)}{dt} h_{1} + \frac{d\upsilon_{02}(t)}{dt} h_{2} + 8\pi v h_{2} \frac{\upsilon_{02}(t)}{A_{2}} + 8\pi v h_{1} \frac{\upsilon_{01}(t)}{A_{1}} + \int_{0}^{L} \frac{\partial\upsilon}{\partial t} dx + 8\pi v \int_{0}^{L} \frac{\upsilon}{A} dx \pm \zeta_{1,2} \frac{1}{2} \frac{A_{2}^{2}}{A_{02}^{2}} \upsilon_{02}^{2}(t) \pm \xi_{1,2} \frac{1}{2} \frac{A_{1}^{2}}{A_{01}^{2}} \upsilon_{01}^{2}(t) = 0$$
(II.12)

Αντικαθιστώντας στην (ΙΙ.12) τις σχέσεις (ΙΙ.8) - (ΙΙ.11) προκύπτει η παρακάτω συνήθης διαφορική εξίσωση της συνάρτησης παροχής:

$$\begin{split} & \left[\frac{h_{1}}{A_{1}} + \frac{h_{2}}{A_{2}} + \int_{0}^{L} \frac{1}{A(x,t)} dx\right] \cdot \frac{dQ_{01}(t)}{dt} + \\ & + \left[8\pi v \cdot \left(\frac{h_{1}}{A_{1}^{2}} + \frac{h_{2}}{A_{2}^{2}} + \int_{0}^{L} \frac{1}{[A(x,t)]^{2}} dx\right) - \left(\frac{\pm \zeta_{1,2}}{A_{02}^{2}} + \frac{1}{A_{2}^{2}}\right) \cdot \frac{dV(L,t)}{dt} + \int_{0}^{L} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{A(x,t)}\right) dx\right] \cdot Q_{01}(t) + \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{A_{2}^{2}} - \frac{1}{A_{1}^{2}} \pm \frac{\xi_{1,2}}{A_{01}^{2}} \pm \frac{\zeta_{1,2}}{A_{02}^{2}}\right) \cdot Q_{01}^{2}(t) + \\ & + g(h_{2} - h_{1}) - \frac{h_{2}}{A_{2}} \cdot \frac{d^{2}V(L,t)}{dt^{2}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\pm \zeta_{1,2}}{A_{02}^{2}} + \frac{1}{A_{2}^{2}}\right) \cdot \left[\frac{dV(L,t)}{dt}\right]^{2} - 8\pi v \frac{h_{2}}{A_{2}^{2}} \cdot \frac{dV(L,t)}{dt} - \\ & - \int_{0}^{L} \frac{1}{A(x,t)} \cdot \frac{\partial^{2}V(x,t)}{\partial t^{2}} dx - \int_{0}^{L} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{A(x,t)}\right) \cdot \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} dx - 8\pi v \int_{0}^{L} \frac{1}{[A(x,t)]^{2}} \cdot \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} dx = 0 \end{split}$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΙΙΙ

Αδιαστατοποίηση και εύρεση συντελεστών Σ.Δ.Ε. για την περίπτωση επιβολής αρμονικού συναρτησιακού περίσταλσης δύο ανεξαρτήτων μεταβλητών

Αν θεωρήσουμε ότι η επιτάχυνση στα δοχεία μπορεί να εκφραστεί ως η μέση τιμή μεταξύ των επιταχύνσεων της στάθμης στο δοχείο και αυτής του στομίου, όπως περιγράφει η σχέση (3.3), τότε οι συντελεστές της (4.1) έχουν ως εξής:

$$B(t) = \frac{h_1}{2A_1} \left(1 + \frac{A_1}{A_{01}} \right) + \frac{h_2}{2A_2} \left(1 + \frac{A_2}{A_{02}} \right) + \int_0^L \frac{1}{A(x,t)} dx$$
(III.1)

$$C(t) = 8\pi v \cdot \left(\frac{h_1}{A_1^2} + \frac{h_2}{A_2^2} + \int_0^L \frac{1}{[A(x,t)]^2} dx\right) - \left(\frac{\pm \zeta_{2,1}}{A_{02}^2} + \frac{1}{A_2^2}\right) \cdot \frac{dV(L,t)}{dt} + \int_0^L \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{A(x,t)}\right) dx$$
(III.2)

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{A_2^2} - \frac{1}{A_1^2} \pm \frac{\zeta_{1,2}}{A_{01}^2} \pm \frac{\zeta_{2,1}}{A_{02}^2} \right)$$
(III.3)

Λόγω μεταβολής του συναρτησιακού της διατομής κατά τη x κατεύθυνση, είναι καλύτερα η αδιαστατοποίηση της Σ.Δ.Ε. (4.1) να γίνει με τα παρακάτω αδιάστατα μεγέθη:

- $\tilde{x} = x \cdot \kappa$: για το αδιάστατο μήκος, όπου κ=2π/λ είναι ο κυματαριθμός του κύματος με το οποίο διεγείρουμε εξωτερικά τον ελαστικό σωλήνα.
- $\tilde{t} = t \cdot \omega$: για τον αδιάστατο χρόνο, όπου ω=2πc/λ είναι η κυκλική συχνότητα του κύματος διέγερσης.

- $\tilde{A} = \frac{A}{A_0}$: για την αδιάστατη εσωτερική διατομή του ελαστικού σωλήνα, όπου A_0 η εσωτερική διατομή του ελαστικού σωλήνα πριν τη διέγερση. Με αυτή τη διατομή αδιαστατοποιούμε και τις διατομές των δοχείων και των στομίων τους.
- $W = R_0 \cdot \sqrt{\frac{\omega}{v}}$: για τον αριθμό Womersley, όπου v το κινηματικό ιξώδες του ρευστού και R₀ η μέση εσωτερική ακτίνα του ελαστικού σωλήνα κατά τη διέγερση.
 - $$\begin{split} \widetilde{L} = L \cdot \kappa : & \text{για το αδιάστατο μήκος του ελαστικού σωλήνα. Πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας με τη συχνότητα f της διέγερσης, η οποία είναι f=c/λ, το αδιάστατο μήκος μετατρέπεται στον αριθμό Strouhal ο οποίος χαρακτηρίζει μη μόνιμα ροϊκά φαινόμενα ταλαντώσεων με συχνότητα f. Δηλαδή ουσιαστικά πίσω από τον αριθμό <math>\widetilde{L}$$
 κρύβεται ο αριθμός Str $(\widetilde{L} = \text{Str} = \frac{\omega \cdot L}{c}). \end{split}$

$$\tilde{\mathbf{h}} = \mathbf{h} \cdot \mathbf{\kappa}$$
 ; για το αδιάστατο ύψος του εκάστοτε δοχείου.

$$\operatorname{Fr} = \frac{c^2 \cdot \kappa}{g}$$
:

για τον αριθμό Froude (λόγος δυνάμεων αδράνειας προς τις δυνάμεις βαρύτητας), όπου g η επιτάχυνση της βαρύτητας.

$$\tilde{Q}_{01} = \frac{Q_{01}}{A_0 \cdot \omega \cdot L}$$
: για την ζητούμενη αδιάστατη συνάρτηση παροχής.
 $\tilde{V} = \frac{V}{A_0 \cdot L}$: για τον αδιάστατο όγκο.

Πρέπει να σημειωθεί εδώ, ότι οι μεταβολές των αριθμών Womersley, Strouhal και Froude, δε μπορεί να είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, θεωρώντας ότι το πείραμα γίνεται κάθε φορά μεταβάλλοντας μόνο μία παράμετρο του προβλήματος. Δηλαδή δε μπορούμε να μεταβάλουμε κάποιον αριθμό, κρατώντας κάποιον άλλο σταθερό και αυτό συμβαίνει επειδή θέλουμε τα αποτελέσματα να παριστάνονται σε διαγράμματα μονοπαραμετρικής μεταβολής. Για παράδειγμα, όταν κάνουμε το πείραμα για το ίδιο ρευστό, τον ίδιο σωλήνα και στο ίδιο γεωγραφικό σημείο, κρατάμε σταθερά τα ν, R₀, L και g και μεταβάλλουμε μόνο τη συχνότητα διέγερσης από την οποία εξαρτώνται και οι τρεις αδιάστατοι αριθμοί.



Διάγραμμα ΙΙΙ.1. Συμμεταβολή των αδιάστατων αριθμών Fr, W και Str.

Αν χρησιμοποιήσουμε τα ανωτέρω, οι εξισώσεις: (4.1) και (ΙΙΙ.1) έως (ΙΙΙ.4) παίρνουν την πιο κάτω αδιάστατη μορφή:

$$\widetilde{B}(\widetilde{t}) \cdot \dot{\widetilde{Q}} + \widetilde{C}(\widetilde{t}) \cdot \widetilde{Q} + \widetilde{D} \cdot \widetilde{Q}^2 + \widetilde{E}(\widetilde{t}) = 0$$
(III.5)

όπου:

$$\widetilde{B}(\widetilde{t}) = \frac{\widetilde{h}_1}{2\widetilde{A}_1} \left(1 + \frac{\widetilde{A}_1}{\widetilde{A}_{01}} \right) + \frac{\widetilde{h}_2}{2\widetilde{A}_2} \left(1 + \frac{\widetilde{A}_2}{\widetilde{A}_{02}} \right) + \int_0^{\widetilde{L}} \frac{1}{\widetilde{A}(\widetilde{x},\widetilde{t})} d\widetilde{x}$$
(III.6)

$$\widetilde{C}(\widetilde{t}) = \frac{8}{W^2} \cdot \left(\frac{\widetilde{h}_1}{\widetilde{A}_1^2} + \frac{\widetilde{h}_2}{\widetilde{A}_2^2} + \int_0^{\widetilde{L}} \frac{1}{[\widetilde{A}(\widetilde{x},\widetilde{t})]^2} d\widetilde{x}\right) - \widetilde{L} \cdot \left(\frac{\pm \zeta_{2,1}}{\widetilde{A}_{02}^2} + \frac{1}{\widetilde{A}_2^2}\right) \cdot \frac{d\widetilde{V}(\widetilde{L},\widetilde{t})}{d\widetilde{t}} + \int_0^{\widetilde{L}} \frac{\partial}{\partial \widetilde{t}} \left(\frac{1}{\widetilde{A}(\widetilde{x},\widetilde{t})}\right) d\widetilde{x} \quad (III.7)$$

$$\widetilde{\mathbf{D}} = \frac{\widetilde{\mathbf{L}}}{2} \left(\frac{1}{\widetilde{\mathbf{A}}_{2}^{2}} - \frac{1}{\widetilde{\mathbf{A}}_{1}^{2}} \pm \frac{\zeta_{1,2}}{\widetilde{\mathbf{A}}_{01}^{2}} \pm \frac{\zeta_{2,1}}{\widetilde{\mathbf{A}}_{02}^{2}} \right)$$
(III.8)

$$\begin{split} \widetilde{E}(\widetilde{t}) &= \frac{1}{Fr \cdot \widetilde{L}} (\widetilde{h}_2 - \widetilde{h}_1) - \frac{\widetilde{h}_2}{2\widetilde{A}_2} \left(1 + \frac{\widetilde{A}_2}{\widetilde{A}_{02}} \right) \cdot \frac{d^2 \widetilde{V}(\widetilde{L}, \widetilde{t})}{d\widetilde{t}^2} + \frac{\widetilde{L}}{2} \left(\frac{\pm \zeta_{2,1}}{\widetilde{A}_{02}^2} + \frac{1}{\widetilde{A}_2^2} \right) \cdot \left[\frac{d\widetilde{V}(\widetilde{L}, \widetilde{t})}{d\widetilde{t}} \right]^2 - \frac{8}{W^2} \frac{\widetilde{h}_2}{\widetilde{A}_2^2} \cdot \frac{d\widetilde{V}(\widetilde{L}, \widetilde{t})}{d\widetilde{t}} - \\ &- \int_0^{\widetilde{L}} \frac{1}{\widetilde{A}(\widetilde{x}, \widetilde{t})} \cdot \frac{\partial^2 \widetilde{V}(\widetilde{x}, \widetilde{t})}{\partial \widetilde{t}^2} d\widetilde{x} - \int_0^{\widetilde{L}} \frac{\partial}{\partial \widetilde{t}} \left(\frac{1}{\widetilde{A}(\widetilde{x}, \widetilde{t})} \right) \cdot \frac{\partial \widetilde{V}(\widetilde{x}, \widetilde{t})}{\partial \widetilde{t}} d\widetilde{x} - \frac{8}{W^2} \int_0^{\widetilde{L}} \frac{1}{[\widetilde{A}(\widetilde{x}, \widetilde{t})]^2} \cdot \frac{\partial \widetilde{V}(\widetilde{x}, \widetilde{t})}{\partial \widetilde{t}} d\widetilde{x} \\ \end{split}$$
(III.9)

Κατά την επιβολή του συναρτησιακού της σχέσης (4.9) τα ολοκληρώματα που υπάρχουν στους συντελεστές παραπάνω έχουν ως εξής:

$$\int_{0}^{\widetilde{L}} \frac{1}{\widetilde{A}} d\widetilde{x} = -\frac{2}{\sqrt{1 - \widetilde{A}_{b}^{2}}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{1 - \widetilde{A}_{b}}{1 + \widetilde{A}_{b}}} \left(\tan \frac{\widetilde{t} - \widetilde{L}}{2} - \tan \frac{\widetilde{t}}{2} \right)$$
(III.10)

$$\int_{0}^{\tilde{L}} \frac{1}{\tilde{A}^{2}} d\tilde{x} = -\frac{1}{\tilde{A}_{b}^{2} - 1} \cdot \left(\frac{\tilde{A}_{b} \sin(\tilde{t} - \tilde{L})}{1 + \tilde{A}_{b} \cos(\tilde{t} - \tilde{L})} - \frac{\tilde{A}_{b} \sin\tilde{t}}{1 + \tilde{A}_{b} \cos\tilde{t}} - \frac{2}{\sqrt{1 - \tilde{A}_{b}^{2}}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{1 - \tilde{A}_{b}}{1 + \tilde{A}_{b}}} \left(\tan \frac{\tilde{t} - \tilde{L}}{2} - \tan \frac{\tilde{t}}{2} \right) \right)$$
(III.11)

$$\int_{0}^{\tilde{L}} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \left(\frac{1}{\tilde{A}} \right) d\tilde{x} = -\left(\frac{1}{1 + \tilde{A}_{b} \cos(\tilde{t} - \tilde{L})} - \frac{1}{1 + \tilde{A}_{b} \cos\tilde{t}} \right)$$
(III.12)

$$\int_{0}^{\widetilde{L}} \frac{1}{\widetilde{A}} \frac{\partial^{2} \widetilde{V}}{\partial \widetilde{t}^{2}} d\widetilde{x} = \frac{1}{\widetilde{L}} \cdot \ln \frac{1 + \widetilde{A}_{b} \cos(\widetilde{t} - \widetilde{L})}{1 + \widetilde{A}_{b} \cos\widetilde{t}} - \frac{2\widetilde{A}_{b} \sin\widetilde{t}}{\widetilde{L}\sqrt{1 - \widetilde{A}_{b}^{2}}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{1 - \widetilde{A}_{b}}{1 + \widetilde{A}_{b}}} \left(\tan \frac{\widetilde{t} - \widetilde{L}}{2} - \tan \frac{\widetilde{t}}{2} \right)$$
(III.13)

$$\int_{0}^{\widetilde{L}} \frac{\partial}{\partial \widetilde{t}} \left(\frac{1}{\widetilde{A}}\right) \frac{\partial \widetilde{V}}{\partial \widetilde{t}} d\widetilde{x} = -\frac{1}{\widetilde{L}} \cdot \left(\ln \frac{1 + \widetilde{A}_{b} \cos(\widetilde{t} - \widetilde{L})}{1 + \widetilde{A}_{b} \cos\widetilde{t}} + \frac{1 + \widetilde{A}_{b} \cos\widetilde{t}}{1 + \widetilde{A}_{b} \cos(\widetilde{t} - \widetilde{L})} - 1 \right)$$
(III.14)

$$\int_{0}^{\tilde{L}} \frac{1}{\tilde{A}^{2}} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{t}} d\tilde{x} = -\frac{\tilde{A}_{b}}{\tilde{L}(\tilde{A}_{b}^{2}-1)} \cdot \left[(1+\tilde{A}_{b}\cos\tilde{t}) \left(\frac{\sin(\tilde{t}-\tilde{L})}{1+\tilde{A}_{b}\cos(\tilde{t}-\tilde{L})} - \frac{\sin\tilde{t}}{1+\tilde{A}_{b}\cos\tilde{t}} \right) - \frac{2(\tilde{A}_{b}+\cos\tilde{t})}{\sqrt{1-\tilde{A}_{b}^{2}}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{1-\tilde{A}_{b}}{1+\tilde{A}_{b}}} \left(\tan\frac{\tilde{t}-\tilde{L}}{2} - \tan\frac{\tilde{t}}{2} \right) \right]$$
(III.15)

Τα παραπάνω ολοκληρώματα αλληλεξαρτούνται ως εξής:

$$\int_{0}^{\tilde{L}} \frac{1}{\tilde{A}^{2}} d\tilde{x} = -\frac{1}{\tilde{A}_{b}^{2} - 1} \cdot \left(\frac{\tilde{A}_{b} \sin(\tilde{t} - \tilde{L})}{1 + \tilde{A}_{b} \cos(\tilde{t} - \tilde{L})} - \frac{\tilde{A}_{b} \sin\tilde{t}}{1 + \tilde{A}_{b} \cos\tilde{t}} + \int_{0}^{\tilde{L}} \frac{1}{\tilde{A}} d\tilde{x} \right)$$
(III.16)

$$\int_{0}^{\tilde{L}} \frac{1}{\tilde{A}} \frac{\partial^{2} \tilde{V}}{\partial \tilde{t}^{2}} d\tilde{x} = \frac{1}{\tilde{L}} \cdot \left[\ln \frac{1 + \tilde{A}_{b} \cos(\tilde{t} - \tilde{L})}{1 + \tilde{A}_{b} \cos \tilde{t}} - (\tilde{A}_{b} \sin \tilde{t}) \int_{0}^{\tilde{L}} \frac{1}{\tilde{A}} d\tilde{x} \right]$$
(III.17)

$$\int_{0}^{\tilde{L}} \frac{1}{\tilde{A}^{2}} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{t}} d\tilde{x} = -\frac{1}{\tilde{L}} \cdot \left[\int_{0}^{\tilde{L}} \frac{1}{\tilde{A}} d\tilde{x} - (1 + \tilde{A}_{b} \cos \tilde{t}) \int_{0}^{\tilde{L}} \frac{1}{\tilde{A}^{2}} d\tilde{x} \right]$$
(III.18)

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- (1) ANDERSON A. D., TANNEHILL C. J., PLETCHER H. R., Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer. *McGraw-Hill*, New York, 1984.
- (2) BREDOW H. J., Untersuchung eines ventillosen Pumpprinzips. Fortschritt - Berichte VDI - Zeitschrift Reihe 7, Nr. 9, 1968.
- (3) CHAPRA C. S., CANALE P. R., Numerical Methods for Engineers. *McGraw-Hill*, New York, 1988.
- (4) CLAUSS, R.P.H., MISSIER P., REED G.E., TICE D. Assisted circulation by counterpulsation with intraortic balloon: methods and effects. (Presentation) *Annual Conference on Engineering in Medicine and Biology*, Chicago, 1962.
- (5) DESPOPOULOS A., SILBERNAGL S., Color Atlas of Physiology. *Thieme*, New York, 1991.
- (6) GILES V. R., Fluid Mechanics and Hydraulics. (Schaum's Outline Series), McGraw-Hill, New York, 1977. (Μετάφραση: ΝΟΥΤΣΟΠΟΥΛΟΣ Γ., ΜΕΓΓΟΣ Α., Μηχανική των Ρευστών και Υδραυλική. ΕΣΠΙ, Αθήνα, 1986).
- (7) ΖΥΓΚΟΠΟΥΛΟΥ Χ., Θεωρητική και πειραματική μελέτη της ενδοαορτικής αντλίας μπαλόνι. Διπλωματική Εργασία Ε.Μ.Π., Αθήνα, 1998.
- (8) HIRSCH C., Numerical Computation of Internal and External Flows 1, 2. John Wiley & Sons Ltd., Chichester - New York - Brisbane - Toronto - Singapore, 1988.
- (9) ΚΑΡΒΟΥΝΤΖΗ Γ., Περισταλτική ροή. Επίλυση αντίστροφου προβλήματος. Διπλωματική Εργασία Ε.Μ.Π., Αθήνα, 1992.
- (10) ΚΕΡΜΑΝΙΔΗΣ Θ., Αντοχή Υλικών 1, 2.Εκδ. Οίκος Αφών Κυριακίδη, Θεσσαλονίκη, 1988.
- (11) ΛΑΓΑΡΗΣ Ι. Η., ΠΑΝΤΗΣ Γ., Προγραμματισμός σε FORTRAN. *Έκδ. Παν. Ιωαννίνων*, Ιωάννινα, 1987.
- (12) Mac CORMACK R. W., The Effect of Viscosity in Hypervelocity Impact Cratering. *AIAA-Paper* No. 69-354, p.: 1-6, 1969.
- (13) ΜΑΝΑΤΑΚΗΣ Μ., Διαφορικές Εξισώσεις με Εφαρμογές.Έκδ. Παν. Πατρών, Πάτρα, 1991.
- (14) ΜΑΝΑΤΑΚΗΣ Μ., Εφαρμοσμένα Μαθηματικά.

120 ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΤΙΚΟΣ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ "ΠΕΡΙΣΤΑΛΤΙΚΩΝ ΑΝΤΛΙΩΝ ΑΙΜΑΤΟΣ"

Έκδ. Παν. Πατρών, Πάτρα, 1992.

- (15) MANOPOULOS G. C., PAPPOU TH., TSANGARIS S., Numerical study of one-dimensional peristaltic flow in the human ureter, *Proc. European Symposium in Biomedical Technology and Medical Physics*, Patras, 1998.
- (16) ΜΑΡΚΕΛΟΣ Β. Β., ΚΟΥΤΡΟΥΒΕΛΗΣ Ι. Α., ΧΑΤΖΗΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ Π. Μ., Μαθηματικά για Μηχανικούς (Τεύχη: 1-3). *Εκδόσεις Συμμετρία*, Αθήνα, 1990.
- (17) Mc MINN M. H. R., GADDUM-ROSSE P., HUTCHINGS T. R., LOGAN M. B., Functional and Clinical Anatomy. *Mosby*, 1995.
- (18) MILLER D.S., Internal flow systems. *bhra-Fluid Engineering*, vol. 5, 1978.
- (19) MOULOPOULOS D. S. et al., Diastolic balloon pumping (with carbon dioxide) in the aorta A mechanical assistance to the failing circulation. *American Heart Journal*, Vol.63, 669-675, 1962.
- (20) MOULOPOULOS D. S. et al., Intraventricular Plus Intra-aortic Balloon Pumping During Intractable Cardiac Arrest. *Circulation* Supplement III (p.:167-173), Vol 80, No. 5, 1989.
- (21) MURRAY R. S., Mathematical Handbook of Formulas and Tables. (Schaum's Outline Series), *Mc Graw-Hill*, New York, 1968. (μετάφραση: ΠΕΡΣΙΔΗΣ Σ. Κ., ΕΣΠΙ, Αθήνα, 1976).
- (22) ΜΥΛΩΝΑΚΗΣ Μ., Ο οργανισμός του ανθρώπου. Ο.Ε.Δ.Β., 1986.
- (23) NASH A. W., Schaum's Outline of Theory and Problems of Strength of Materials. *McGraw-Hill*, New York, 1977. (Μετάφραση: ΠΕΡΣΙΔΗΣ Σ. Κ., Αντοχή των Υλικών. ΕΣΠΙ, Αθήνα, 1988).
- (24) ΠΑΓΙΑΤΑΚΗΣ Α. Χ., Εισαγωγή στη Ρευστομηχανική, Εκδ. Παν. Πατρών, 1993.
- (25) ΠΑΪΠΕΤΗΣ Α. Σ., ΠΟΛΥΖΟΣ Δ., Ταλαντώσεις Φυσικών Συστημάτων. Εκδ. Παν. Πατρών, Πάτρα, 1992.
- (26) ΠΑΠΑΝΙΚΑΣ Γ. Δ., Εφαρμοσμένη Ρευστομηχανική Τομ.: 1, 2. Αχαιός, Πάτρα, 1981.
- (27) PEYRET R., TAYLOR D. TH., Computational Methods for Fluid Flow. *Springer-Verlag*, New York, 1983.
- (28) RATH H. J., Berechnungen zu einem ventillosen Pumpprinzip. *Dissertation T. U.* Hannover, 1976.
- (29) RATH H. J., Mathematisches Modell einer ventillosen Schlauchpumpe. *Fluid Mechanics*, *ZAMM* 57, 201-203, 1977.
- (30) RATH H. J., Der Fördereffekt in ventillosen, elastischen Leitungen. ZAMP Vol.: 29, 123-133, 1978.
- (31) RATH H. J., Ein Beitrag zur Berechnung einer peristaltischen Strömung in elastischen Leitungen. Acta Mechanica 31, 1-12, 1978.
- (32) RATH H. J., Ueber peristaltische Strömungen in elastischen Leitungen. *Mechanics of Fluid, ZAMM* 59, 255-257, 1979.
- (33) RATH H. J., Peristaltische Strömungen. *Medizinische Informatik und Statistik* 19. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1980.

- (34) SCHIESSER E. W., Computational mathematics in engineering and applied science: ODEs, DAEs and PDEs. *CRC Press*, Lehigh University Bethlehem Pennsylvania, 1994.
- (35) SETO W. W., Mechanical Vibrations. (Schaum's Outline Series), *McGraw-Hill*, New York, 1964.
- (36) SHAPIRO A. H., JAFFRIN M. Y., WEINBERG S. L., Peristaltic pumping with long wavelengths at low Reynolds number, *J. Fluid Mech.*, vol. 37, part 4, pp.: 799-825, 1969.
- (37) SPIEGEL R. M., Mathematical Handbook of Formulas and Tables. (Schaum's Outline Series), *McGraw-Hill*, New York, 1968. (Μετάφραση: ΠΕΡΣΙΔΗΣ Σ. Κ., Μαθηματικό Τυπολόγιο. *ΕΣΠΙ*, Αθήνα, 1976).
- (38) STREETER V. L., WYLIE E. B., Fluid Mechanics. McGraw-Hill, 1985.
- (39) THEWS G., MUTSCHLER E., VAUPEL P., Human Anatomy, Physiology and Pathophysiology. *Elsevier*, Amsterdam - New York - Oxford, 1985.
- (40) ΤΣΑΓΓΑΡΗΣ Σ., Μηχανική των Ρευστών. Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα, 1995.
- (41) ΤΣΑΓΓΑΡΗΣ Σ., Βιο-Ρευστομηχανική. Εκδόσεις Ε.Μ.Π., Αθήνα, 1995.
- (42) ΦΕΙΔΑΣ Α., Ακράτεια Ούρων, Κατάταξη-Διάγνωση-Θεραπεία.
 22° Ετήσιο Πανελλήνιο Ιατρικό Συνέδριο (Ι.Ε.Α.), Αθήνα, 1996.
- (43) FLETCHER C. A. J., Computational Techniques for Fluid Dynamics 1, 2. *Springer-Verlag*, Berlin - Heidelberg - New York, 1997.
- (44) ΧΑΤΖΟΠΟΥΛΟΣ Ι. Δ., Διαφορικαί Εξισώσεις. Θεσσαλονίκη, 1978.
- (45) ΧΑΤΖΟΠΟΥΛΟΣ Ι. Δ., Ανώτερα Μαθηματικά, τομ.: 1 3. Θεσσαλονίκη, 1988.