



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Τίτλος

«Εφαρμογή μικρομηχανικών μοντέλων για την περιγραφή του μέτρου ελαστικότητας πολυμερικών νανοσυνθέτων υλικών»

Δημήτριος Μήταλας

Οκτώβριος 2019

Πρόλογος

Ευχαριστώ θερμά την κ. Ε. Κοντού-Δρούγκα, που παρά το μεγάλο φόρτο εργασίας της ανέλαβε την επίβλεψη της παρούσας διπλωματικής εργασίας, τον κ. Αιμίλιο Σιδερίδη, που ανέλαβε να συνεργαστεί μαζί μου καθ' όλη τη διαδικασία της εκπόνησης της εργασίας, καθώς και το Γιώργο Γεωργούση, που μας παρέδωσε πειραματικά αποτελέσματα της σχετικής ερευνάς του, προκειμένου να βελτιωθεί και να συμπληρωθεί η παρούσα εργασία.

Prologue

With regarding to Mrs. E. Kontou-Drougka, who, in contrast with her big amount of work, took the responsibility of supervising this diploma thesis, to Mr. Emilios Sideridis, who took the responsibility of cooperating with me during whole the procession of doing this work and to George Georgousis who gave to us experimental results of his survey according to improve and complete this project.

Περίληψη

Ο σκοπός της διπλωματικής αυτής εργασίας είναι να προσδιορισθεί το πεδίο εφαρμογής θεωρητικών τύπων ή μοντέλων μικροσυνθέτων υλικών σε νανοσύνθετα. Έτσι ελήφθησαν διάφοροι τύποι στους οποίους εχρησιμοποιήθηκαν οι σταθερές των νανοσυνθέτων. Τα αποτελέσματα συνεκρίθησαν με πειραματικές τιμές από πειράματα που έγιναν σε νανοσύνθετα ώστε να διαπιστωθεί η μεταξύ τους σύγκλιση/απόκλιση. Τα μοντέλα, τα οποία ήταν μη τετριμμένα, δηλαδή το E_f ή το U_f , βρίσκονταν και στον παρονομαστή ή μόνο στον παρονομαστή αποδείχθηκαν πιο αντιπροσωπευτικά για τις πειραματικές τιμές.

Abstract

The purpose of this diploma thesis is to try to establish the field of application of theoretical equations or models of micro-composite materials to nanocomposites. Thus, we applied different models and theoretical expressions, in which we used the nanocomposites' constants. The theoretical values were compared with experimental results obtained from experiments that were carried out in nanocomposites, with purpose to observe whether theoretical and experimental results are found near to each other or not. The models, in which the E_f or the U_f were found in the low part of the clasmatic number or only in this low part were better for the experimental values.

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα σελίδα 6

Κεφάλαιο 1: "Εισαγωγή-Θεωρία Σύνθετων-Νανοσύνθετων Υλικών" σελίδες 7-11

Κεφάλαιο 2: "Θεωρητικοί Τύποι" σελίδες 12-41

Κεφάλαιο 3: "Μοντέλο Των Τομών" σελίδες 42-55

Κεφάλαιο 4: "Μοντέλο Του Πρίσματος" σελίδες 56-74

Κεφάλαιο 5: "Μοντέλο Της Ισοδύναμης Ίνας" σελίδες 75-91

Κεφάλαιο 6 : "Θεωρητικοί Τύποι για τον υπολογισμό της τάσης διαρροής (σ_y)"
σελίδες 92-95

Κεφάλαιο 7: "Υπολογισμοί-Αποτελέσματα" σελίδα 96

Κεφάλαιο 8: "Συμπεράσματα" σελίδα 97

Κεφάλαιο 9: "Βιβλιογραφία" σελίδα 98

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΕΙΣΑΓΩΓΗ-ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΝΘΕΤΩΝ-ΝΑΝΟΣΥΝΘΕΤΩΝ

ΥΛΙΚΩΝ^[9.1]

1. Σύνθετα υλικά:

Ένα υλικό, το οποίο αποτελείται από 2 ή περισσότερα υλικά ή φάσεις με διαφορετικές μηχανικές και φυσικές ιδιότητες μεταξύ τους και εμφανίζει διαφορετικές μηχανικές και φυσικές ιδιότητες από αυτές καθενός από τα συστατικά του ονομάζεται **σύνθετο υλικό (composite material)**. Για να είναι ένα υλικό καταταγμένο στην κατηγορία των σύνθετων υλικών, θα πρέπει οι **ιδιότητες** του ενός από τα συστατικά του μέρη να είναι μεγαλύτερες από του άλλου (τουλάχιστον 5 πλάσιες) και η **κατ' όγκον περιεκτικότητα** του ενός υλικού (συστατικού μέρους) να μην είναι πολύ μικρή (>10%). Κάθε τμήμα του υλικού που παρουσιάζει παρόμοιες μηχανικές και φυσικές ιδιότητες ονομάζεται φάση του υλικού. Κάθε συνεχής φάση από την οποία αποτελείται ένα σύνθετο υλικό, ονομάζεται **μήτρα**, ενώ κάθε ασυνεχής φάση του, ονομάζεται **έγκλεισμα**. Η δημιουργία των σύνθετων υλικών έχει σκοπό τη **βελτιστοποίηση μηχανικών χαρακτηριστικών**, όπως η **δυσκαμψία**, η **δυσθραυστότητα**, η **αντοχή σε υψηλές θερμοκρασίες**, καθώς και η **θερμοδυναμική και χημική σταθερότητα** του υλικού για πολυάριθμες τεχνολογικές εφαρμογές που αυξάνονται με πολύ γρήγορους ρυθμούς. Τα σύνθετα υλικά μπορούμε να τα κατηγοριοποιήσουμε με βάση το **είδος** της μήτρας ή των εγκλεισμάτων που περιέχουν.

Με βάση το είδος της μήτρας που περιέχουν κατηγοριοποιούνται σε **μεταλλικά, κεραμικά και πολυμερή**, ενώ με βάση το είδος του εγκλείσματος που περιέχουν κατηγοριοποιούνται σε **κοκκώδη, ινώδη και πολύστρωτα**.

1.1 Πολυμερή:

Τα πολυμερή σύνθετα υλικά βρίσκονται στις υψηλότερες θέσεις μεταξύ των προηγμένων σύνθετων υλικών, έχοντας πολύ ευρεία χρήση σε εφαρμογές, λόγω του ότι παρέχουν πολλές καλές ιδιότητες (κυρίως μηχανικές), είναι εύκολο να παραχθούν και ότι έχουν σχετικά μικρό κόστος. Τα πολυμερικά σύνθετα υλικά αποτελούνται από **μήτρα πολυμερούς** (συνήθως θερμοπλαστική ή θερμοσκληρυνόμενη) και το **έγκλεισμα** ή ενισχυτικό μέσο είναι συνήθως κοκκώδες, ινώδες κτλ.

Οι οργανικές μήτρες είναι σημαντικές για ένα σύνθετο υλικό. Συνοπτικά, ο ρόλος τους είναι:

1. Μεταφορά τάσεων του σύνθετου υλικού
2. Προστασία και καθορισμός αντοχής σε διάτμηση του σύνθετου υλικού
3. Καθορισμός διατμητικής αντοχής ανάμεσα στις στρώσεις του σύνθετου υλικού
4. Προσδιορισμός θερμοκρασιακής αντοχής σε υψηλές θερμοκρασίες
5. Καθορισμός του πόσο επεξεργάσιμο είναι το σύνθετο υλικό (επεξεργασιμότητα)

Οι οργανικές μήτρες διακρίνονται σε **θερμοπλαστικές** και **θερμοσκληρυνόμενες**, ανάλογα με την πολυμερική μήτρα που χρησιμοποιείται για τον καθορισμό των ιδιοτήτων, που είναι επιθυμητές για να καλυφθούν οι απαιτήσεις της εκάστοτε εφαρμογής.

- Θερμοπλαστικές μήτρες:

Έχουν **γραμμική πολυμερική αλυσίδα**. Η διασύνδεση των **μοριακών αλυσίδων** γίνεται με **ασθενείς δυνάμεις Van der Waals**, που λύνονται αν αυξήσουμε τη θερμοκρασία με αντιστρεπτό τρόπο. Αυτό το φαινόμενο καθιστά το υλικό πιο μαλακό σε υψηλές θερμοκρασίες. Έχουν χαμηλό κόστος και χρήση σε εφαρμογές με ευρεία κατανάλωση. Αντιπροσωπευτικά παραδείγματα αποτελούν μήτρες **πολυαιθυλενίου (PE)** και **πολυστυρενίου (PS)**, ενώ ως εγκλείσματα χρησιμοποιούνται φθηνά υλικά όπως αμίαντος και μαρμαρυγίες, ώστε η τιμή του τελικού προϊόντος να είναι χαμηλή.

- Θερμοσκληρυνόμενες μήτρες:

Είναι πολυμερή που τα χρησιμοποιούμε κυρίως, όταν απαιτούμε καλές μηχανικές ιδιότητες. Τα πολυμερή αυτά όταν αυξήσουμε τη θερμοκρασία γίνονται **σκληρότερα** και **ψαθυρότερα**, καθώς οι **δεσμοί** μεταξύ των πολυμερικών αλυσίδων είναι ισχυροί. Αντιπροσωπευτικά παραδείγματα αποτελούν οι **πολυεστερικές ρητίνες**, που το έγκλεισμά τους είναι γυάλινο, οι **εποξειδικές ρητίνες** (θερμοκρασία λειτουργίας περίπου 200 βαθμούς Κελσίου), που χρησιμοποιούνται σε εφαρμογές που απαιτούν **πολύ καλές μηχανικές ιδιότητες**, όπως η αεροναυπηγική κτλ. Και τέλος, οι **φαινολικές ρητίνες** (θερμοκρασία λειτουργίας φτάνει τους 400 βαθμούς Κελσίου περίπου) **χαμηλής πλαστικότητας και μέτριων μηχανικών ιδιοτήτων**.

1.2 Νανοςύνθετα υλικά:

Μια ειδική περίπτωση σύνθετων υλικών είναι τα νανοςύνθετα υλικά. Σε αυτά τα ενισχυτικά μέρη (εγκλείσματα) έχουν διαστάσεις της τάξης του νανόμετρου ($1\text{nm}=10^{-9}\text{m}$). Με αυτόν τον τρόπο, προσδίδουμε ιδιαίτερες ιδιότητες στο υλικό και βελτιώνουμε ακόμα περισσότερο επιθυμητές ιδιότητες όπως η **μηχανική αντοχή**, **θερμική**, **χημική σταθερότητα** κτλ. Αν δημιουργηθούν **νανοσκοπικές δομές**, είναι εφικτή επίσης η μεταβολή της **θερμοκρασίας τήξης**, **ηλεκτρικών**, **μαγνητικών** ιδιοτήτων ενός υλικού και του **χρώματος** ενός υλικού, χωρίς να έχουμε αλλαγή της **χημικής του σύστασης**. Ο επιστημονικός κλάδος που μελετά αυτά τα υλικά και τις ιδιότητες της ύλης σε τέτοιες χωρικές διαστάσεις, ονομάζεται **νανοτεχνολογία**. Η νανοτεχνολογία έχει ιλιγγιώδη εξέλιξη στις μέρες μας, καθώς επιτελεί το ρόλο της κάλυψης πολυάριθμων αναγκών στα πλαίσια της κοινωνίας (ευκολία υλοποίησης ενεργειών της καθημερινότητας, ενέργειας και περιβάλλοντος, συστήματα ασφαλείας, βιομηχανία, καταναλωτικά

αγαθά) της επιστήμης (δημιουργία σύγχρονων και έξυπνων υλικών για διευκόλυνση στην έρευνα) της πληροφορικής και επικοινωνίας (κάρτες μνήμης, νέες οπτοηλεκτρονικές διατάξεις, κβαντικοί υπολογιστές, νέες διατάξεις ημιαγωγών), της υγείας (μέσω νανοδομών μπορεί να δοθεί σε έναν ασθενή κατάλληλη δόση φαρμάκου και επιλεκτικά σε κύτταρα που νοσούν, χωρίς ανεπιθύμητες ενέργειες (drug delivery), φάρμακα σε νανοκάψουλες που θα διοχετεύονται στον οργανισμό

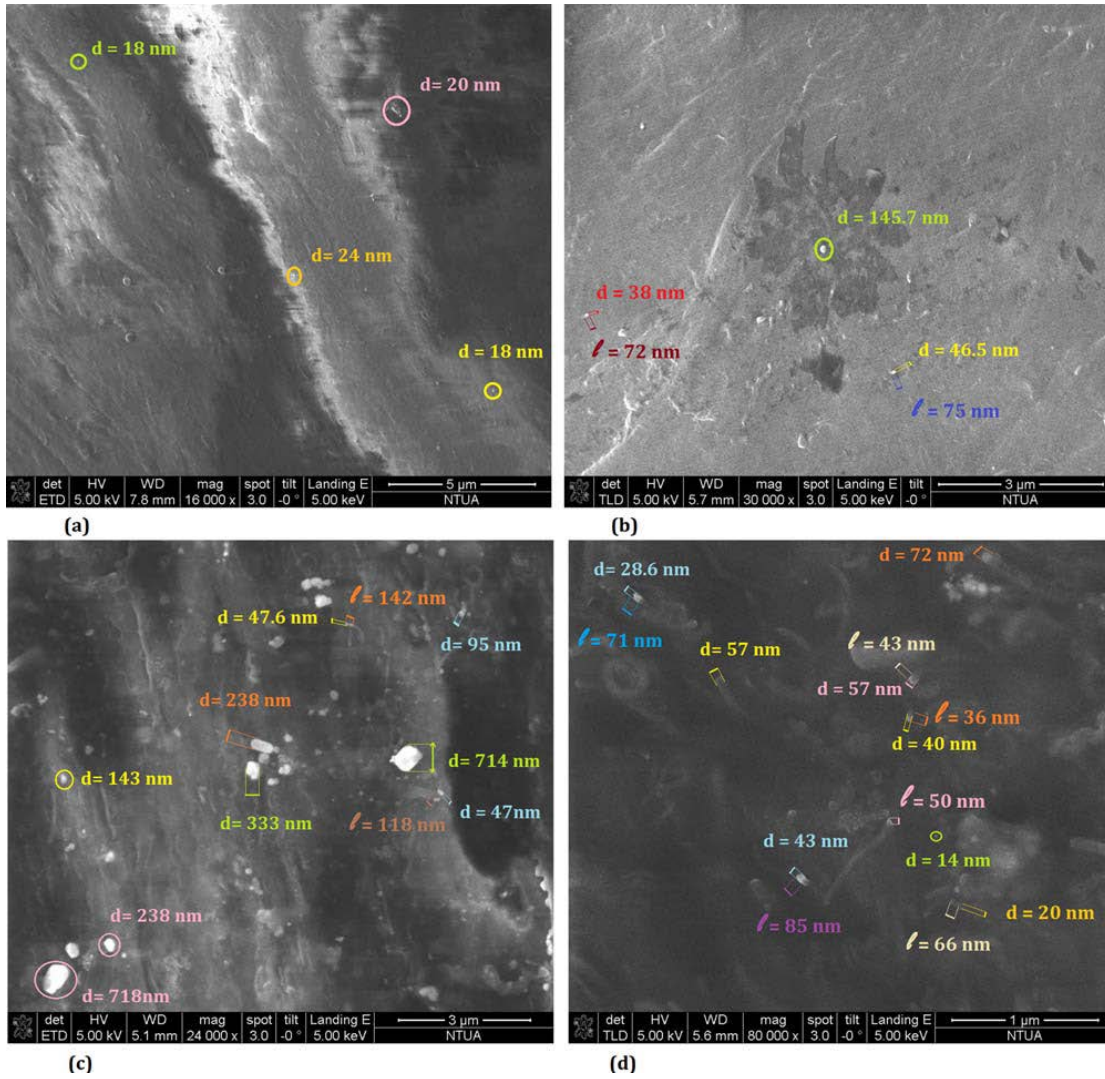
Σκοπός της εργασίας αυτής είναι μέσω υπολογισμών, χρησιμοποιώντας μία σειρά από μαθηματικά πρότυπα, που χρησιμοποιούνται στη θεωρία των σύνθετων και νανοσύνθετων υλικών για τον υπολογισμό του μέτρου ελαστικότητας του σύνθετου υλικού (E_c), να εξάγουμε συμπέρασμα αναφορικά με το ποια από αυτά είναι κατάλληλα για τον όσο το δυνατόν ακριβέστερο υπολογισμό του E_c . Επιπλέον, λαμβάνοντας ως δεδομένες ορισμένες πειραματικές μετρήσεις για δεδομένες τιμές της κατ' όγκον περιεκτικότητας του εγκλείσματος (U_f) για το E_c , θα υπολογίσουμε το E_c για τις διάφορες τιμές του U_f , θα συγκρίνουμε με τα θεωρητικά αποτελέσματα που προκύπτουν με τα πειραματικά και στα μαθηματικά πρότυπα, στα οποία τα θεωρητικά αποτελέσματα βρίσκονται «κοντά» στα πειραματικά, θα θεωρηθούν κατάλληλα πρότυπα περιγραφής.

1.3 Υλικά

Στην εργασία χρησιμοποιήθηκαν τα πειραματικά αποτελέσματα του μέτρου Ελαστικότητας νανοσυνθέτων υλικών με πολυμερική μήτρα το πολυαιθυλένιο χαμηλής πυκνότητας (LLDPE), ενισχυμένο με νανοσωλήνες άνθρακα πολλαπλών τοιχωμάτων σε διάφορες κατά βάρος περιεκτικότητες. Συγκεκριμένα, 2, 4, 6, 8, 10, 15 και 20% κ.β.

Οι ονομαστικές διαστάσεις των νανοσωλήνων ήταν, μέση διάμετρος 10-20 nm, και το μήκος 10 μ m.

Η προετοιμασία των υλικών έγινε με τη διαδικασία ανάμιξης τήγματος και η ποιότητα της διασποράς των νανοσωλήνων απεικονίζεται στο παρακάτω διάγραμμα, από την ηλεκτρονική μικροσκοπία, για τις περιεκτικότητες 6,8, 15 και 20%. Για 6% κ.β. διακρίνονται σωματίδια μέσου μεγέθους 18-25 nm. Για 8% υπάρχουν συσσωματώματα 45-145 nm, ενώ για 15% κ.β. συσσωματώματα 35 nm, αλλά και μεγαλύτερα. Για 20%κ.β. υπάρχει μια κατανομή από συσσωματώματα μικρού μεγέθους και μεγαλύτερου των 30 nm.



Σχήμα 1: Απεικόνιση της διασποράς των νανοσωλήνων για 6% (a), 8% (b), 15% (c) και 20% (d).

Οι μηχανικές ιδιότητες των νανοσυνθέτων υλικών συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα

Υλικό	CNT (%) V_f	Young's Modulus (MPa)	Αύξηση μέτρου (%)	Τάση διαρροής (MPa)	Τάση θραύσης (MPa)	Τροπή διαρροής (%)	Τροπή αστοχίας (%)
LLDPE	-	335 ± 20	-	5.6 ± 0.27	22.7 ± 1.11	12	1125
LLDPE/2%CNT	0.0131	430 ± 23.6	28.3	6.8 ± 0.32	16.7 ± 0.92	8.4	874
LLDPE/4%CNT	0.262	472 ± 25.1	40.9	7.0 ± 0.35	18.1 ± 1.11	10.3	871
LLDPE/6%CNT	0.0393	477 ± 29.1	42.4	7.5 ± 0.36	23.2 ± 1.27	10.0	915
LLDPE/8%CNT	0.0525	500 ± 26.0	49.2	8.0 ± 0.37	18.2 ± 0.91	12.0	682
LLDPE/10%CNT	0.0655	600 ± 33.0	79.1	9.7 ± 0.49	11.9 ± 0.71	7.7	445
LLDPE/15%CNT	0.098	548 ± 33.4	63.6	10.5 ± 0.57	10.7 ± 0.64	11.5	275
LLDPE/20%CNT	0.131	730 ± 41.6	118.0	11.2 ± 0.55	10.9 ± 0.65	8.9	125

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΘΕΩΡΗΤΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ

Παρουσίαση του μοντέλου του νόμου των φάσεων(2.1)^[9,2]: Για τον υπολογισμό των ελαστικών σταθερών εργαζόμαστε με το μοντέλο που αποδεικνύεται ότι έχει ως εξής:

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12} * \nu_{21}}$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$$

$$Q_{12} = \nu_{21} * \frac{E_1}{1 - \nu_{12} * \nu_{21}} = \nu_{12} * \frac{E_2}{1 - \nu_{12} * \nu_{21}}$$

$$Q_{66} = G_6 \quad \mathbf{(2.1.1)}$$

Στο περιστρεφόμενο σύστημα x-y κατά γωνία θ σε σχέση με το αρχικό σύστημα εισάγουμε Q_{11}^* , Q_{22}^* , Q_{12}^* , Q_{66}^* , όπου ισχύουν τα εξής:

$$Q_{11}^* = Q_{11} * (\sin\theta)^4 + Q_{22} * (\cos\theta)^4 + (2 * Q_{12} + 2 * Q_{66}) * (\sin\theta)^2 * (\cos\theta)^2 \quad \mathbf{(2.1.2)}$$

$$Q_{22}^* = Q_{11} * (\cos\theta)^4 + Q_{22} * (\sin\theta)^4 + (2 * Q_{12} + 4 * Q_{66}) * (\sin\theta)^2 * (\cos\theta)^2 \quad \mathbf{(2.1.3)}$$

$$Q_{12}^* = (Q_{11} + Q_{22} - 4 * Q_{66}) * (\sin\theta)^2 * (\cos\theta)^2 + Q_{12} * [\cos^4(\theta) + \sin^4(\theta)] \quad \mathbf{(2.1.4)}$$

$$Q_{66}^* = (Q_{11} + Q_{22} - 2 * Q_{12}) * (\sin\theta)^2 * (\cos\theta)^2 + Q_{66} * (\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta))^2 \quad \mathbf{(2.1.5)}$$

Επίσης εισάγουμε Q_{ij}' με:

$$Q_{ij}' = \left(\frac{1}{\pi}\right) * \int_0^\pi (Q_{ij}^*) * d\theta \quad \mathbf{(2.1.6)}$$

Τελικά αποδεικνύεται ότι:

$$Q_{11}^* = Q_{22}^* = \left(\frac{1}{8}\right) * (3 * Q_{11} + 3 * Q_{22} + 2 * Q_{12} + 4 * Q_{66}) \quad \mathbf{(2.1.7)}$$

$$Q_{12}^* = \left(\frac{1}{8}\right) * (Q_{11} + Q_{22} + 6 * Q_{12} - 4 * Q_{66}) \quad \mathbf{(2.1.8)}$$

$$Q_{66}^* = \left(\frac{1}{8}\right) * (Q_{11} + Q_{22} - 2 * Q_{12} + 4 * Q_{66}) \quad \mathbf{(2.1.9)}$$

Το μοντέλο του νόμου των φάσεων γράφεται ως εξής:

$$\mathbf{E}_c = \mathbf{k} * \mathbf{E}_f * \mathbf{U}_f + \mathbf{E}_m * \mathbf{U}_m \quad \mathbf{(2.1)}$$

,όπου E_f το μέτρο ελαστικότητας του εγκλείσματος και E_m το μέτρο ελαστικότητας της μήτρας και k ο συντελεστής ενίσχυσης του υλικού(εξαρτάται από την ενίσχυση που έχουμε δώσει σε αυτό. Με βάση τα παραπάνω κάνουμε την παραδοχή ότι $k = 0.375$).

Στους πίνακες κάτω από την αναγραφή «Μοντέλο 2.1» έχουμε κάποιες μετρήσεις για το E_c με βάση το παραπάνω μοντέλο.

(Μοντέλο 2.1 Νόμου Φάσεων)

Για $E_f = 18GPa$

Πίνακας 2.1.α

$M_f(\%)$	U_f	$E_c(GPa)$
0	0	0.335
2	0.0131	0.426
4	0.0262	0.519
6	0.0393	0.612
8	0.0525	0.706
10	0.0655	0.802
15	0.098	1.047
20	0.131	1.297

Για $E_f = 29GPa$

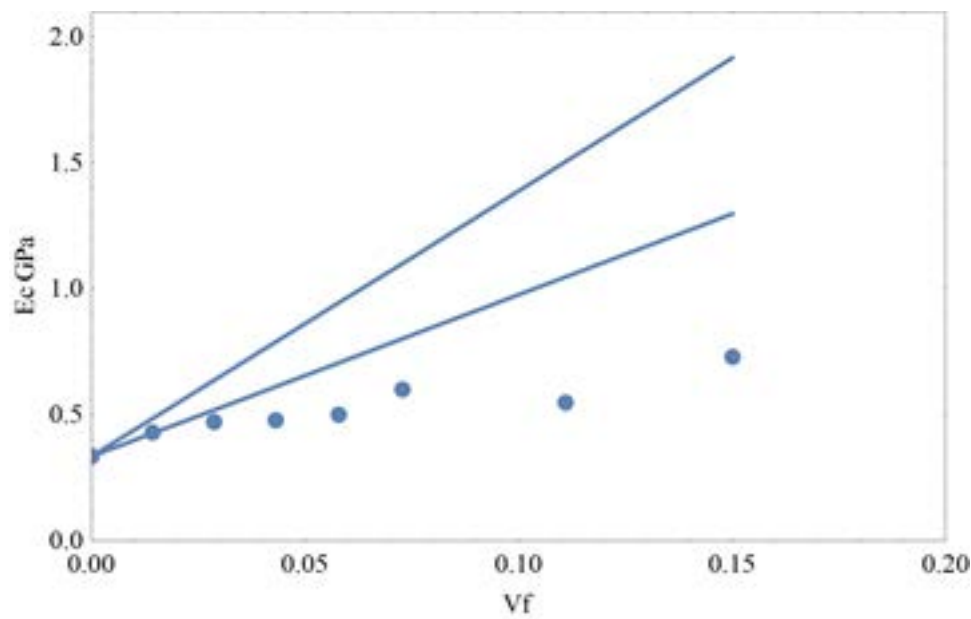
Πίνακας 2.1.β

$M_f(\%)$	U_f	$E_c(GPa)$
0	0	0.335
2	0.0131	0.485
4	0.0262	0.636
6	0.0393	0.789
8	0.0525	0.945
10	0.0655	1.102
15	0.098	1.505
20	0.131	1.916

Για $E_f = 40\text{GPa}$

Πίνακας 2.1.γ

$M_f(\%)$	U_f	$E_c(\text{GPa})$
0	0	0.335
2	0.0131	0.543
4	0.0262	0.754
6	0.0393	0.967
8	0.0525	1.184
10	0.0655	1.402
15	0.098	1.963
20	0.131	2.535



Γράφημα 1: μοντέλο 2.1 (Νόμου των Φάσεων) (" V_f " = " U_f ")

Παρατηρήσεις:

1. Η πιο «πάνω» γραμμή είναι για $E_f = 29\text{GPa}$, ενώ η πιο «κάτω» είναι για $E_f = 18\text{GPa}$.
2. Για $E_f = 40\text{GPa}$ όπως προκύπτει και από τον πίνακα τιμών οι τιμές είναι «πολύ πιο πάνω» από τις πειραματικές, οπότε κρίνουμε πως δεν υπάρχει νόημα να σχεδιάσουμε τη συγκεκριμένη γραμμή.
3. Τέλος, συμπεραίνουμε ότι το μοντέλο αυτό δεν δύναται να θεωρηθεί ακριβές, διότι μόνο οι θεωρητικές τιμές για $E_f = 18\text{GPa}$ συγκλίνουν με τις αρχικές πειραματικές.

Παρουσίαση της εξίσωσης Christensen(2.2)^[9.2] και [9.3]: Η εξίσωση Christensen είναι μια πιο ακριβής μικρομηχανική ανάλυση, συγκριτικά με το νόμο των φάσεων. Η θεωρία αυτή βασίζεται σε ένα ημι-ισοτροπικό μοντέλο και μια τεχνική υπολογισμού ενός μέσου όρου έτσι ώστε να εξαχθεί μια τιμή για το μέτρο ελαστικότητας ενός συνθέτου με ίνες τυχούσης διευθύνσεως. Για δισδιάστατες περιπτώσεις εξαγάγουμε την εξής εξίσωση για το μέτρο ελαστικότητας:

$$E_c = (1 - U_f) * \frac{E_m}{3} + \left(\frac{U_f}{3}\right) * E_f + \left(\frac{19}{27}\right) * \left\{ \frac{[E_f*(1+U_f)+E_m*(1-U_f)]}{[E_f*(1-U_f)+E_m*(1+U_f)]} \right\} * E_m \quad (2.2)$$

Στους πίνακες κάτω από την αναγραφή «Μοντέλο 2» έχουμε μερικές μετρήσεις για το E_c με βάση την παραπάνω εξίσωση.

Μοντέλο 2.2(Christensen)

Για $E_f = 18GPa$

Πίνακας 2.α

$M_f(\%)$	U_f	$E_c(GPa)$
0	0	0.347
2	0.0131	0.438
4	0.0262	0.529
6	0.0393	0.622
8	0.0525	0.716
10	0.0655	0.812
15	0.098	1.058
20	0.131	1.310

Για $E_f = 29GPa$

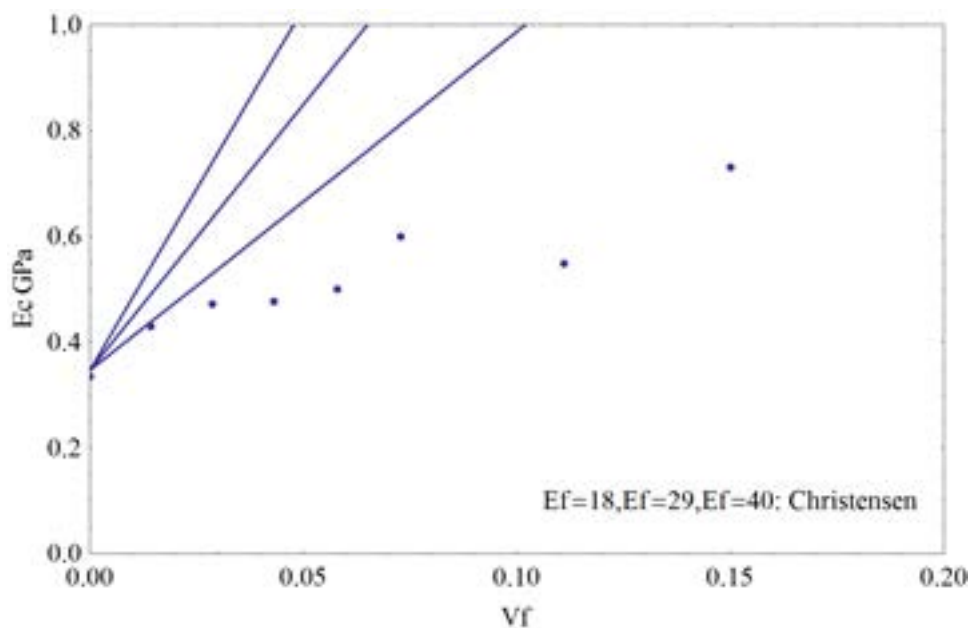
Πίνακας 2.β

$M_f(\%)$	U_f	$E_c(GPa)$
0	0	0.347
2	0.0131	0.490
4	0.0262	0.634
6	0.0393	0.780
8	0.0525	0.929
10	0.0655	1.079
15	0.098	1.465
20	0.131	1.867

Για $E_f = 40 \text{ GPa}$

Πίνακας 2.γ

$M_f(\%)$	U_f	$E_c(\text{GPa})$
0	0	0.347
2	0.0131	0.542
4	0.0262	0.739
6	0.0393	0.938
8	0.0525	1.135
10	0.0655	1.346
15	0.098	1.872
20	0.131	2.412



Γράφημα 1 μοντέλο 2.2 (Christensen) (" V_f "=" U_f " " E_f "=" E_f ")

Παρατηρήσεις: 1. Όσο μικρότερη τιμή λαμβάνει το E_f , τόσο «πιο κάτω» βρίσκεται η αντίστοιχη γραμμή. Άρα για $E_f = 18 \text{ GPa}$ βρισκόμαστε «πιο κοντά» στα πειραματικά δεδομένα και αυτό στις πολύ χαμηλές τιμές εγκλείσματος.

2. Συμπεραίνουμε ότι το μοντέλο αυτό δεν δύναται να θεωρηθεί ακριβές, διότι μόνο μια αρχική τιμή, για $E_f = 18 \text{ GPa}$ συγκλίνει με πειραματικά δεδομένα.

2.3 Halpin-Kardos

Παρουσίαση του μοντέλου Halpin-Kardos(2.3)^[9,4]: Το μοντέλο αυτό εισάγει 2 όρους, που καθορίζουν το μέτρο ελαστικότητας του νανοσύνθετου υλικού. Ο πρώτος όρος είναι ο διαμήκης όρος και ο δεύτερος ο εγκάρσιος. Μαθηματικά

λοιπόν, η σχέση που ισχύει είναι η εξής: $E_c = w_1 * E_L + w_2 * E_T$ με $w_1 + w_2 = 1$ όπου w_1, w_2 : νορμαλισμένοι δείκτες βαρύτητας, έτσι ώστε, να δηλώνουν τη βαρύτητα που κάθε όρος προσδίδει στο τελικό αποτέλεσμα.

Σε αυτό το μοντέλο, γίνεται η υπόθεση για τυχαίο προσανατολισμό (random orientation) του νανοεγκλείσματος στην πολυμερική μήτρα και συμπεριλαμβάνονται φαινόμενα μήκους. Βέβαια, το μοντέλο δε λαμβάνει υπόψη στην προσέγγιση την τραχύτητα της επιφάνειας της πολυμερικής μήτρας (roughness & waviness).

Οι εξισώσεις του μοντέλου έχουν την εξής μορφή:

$$\frac{E_c}{E_m} = w_1 * \left[\frac{1+2*\left(\frac{l}{d}\right)*\eta_L*U_f}{1-\eta_L*U_f} \right] + w_2 * \left[\frac{1+2*\eta_T*U_f}{1-\eta_T*U_f} \right] \quad (2.3)$$

$$\text{Όπου: } \eta_L = \left[\frac{\left(\frac{E_f}{E_m}\right)-1}{\left(\frac{E_f}{E_m}\right)+2*\left(\frac{l}{d}\right)} \right], \quad \eta_T = \left[\frac{\left(\frac{E_f}{E_m}\right)-1}{\left(\frac{E_f}{E_m}\right)+2} \right] \quad (2.3.1 \text{ α και } \beta)$$

$$a = \frac{l}{d} \text{ (aspect ratio)}, w_1 = 0.2, w_2 = 0.8 \quad (2.3.2 \text{ α, } \beta \text{ και } \gamma)$$

Στους πίνακες κάτω από την αναγραφή «Μοντέλο 2.3» έχουμε κάποιες μετρήσεις για το E_c με βάση το μοντέλο αυτό.

Μοντέλο 2.3

Για $E_f = 18GPa$

Για $\alpha = 30$

Πίνακας 2.3.4.1

$M_f(\%)$	U_f	$E_c(\text{GPa})$
0	0	0.335
2	0.0131	0.373
4	0.0262	0.412
6	0.0393	0.453
8	0.0525	0.495
10	0.0655	0.538
15	0.098	0.651
20	0.131	0.774

Για $\alpha = 40$

Πίνακας 2.3.1.1

$M_f(\%)$	U_f	$E_c(\text{GPa})$
0	0	0.335
2	0.0131	0.377
4	0.0262	0.419
6	0.0393	0.463
8	0.0525	0.506
10	0.0655	0.555
15	0.098	0.678
20	0.131	0.809

Για $\alpha = 300$

Πίνακας 2.3.1.2

$M_f(\%)$	U_f	$E_c(\text{GPa})$
0	0	0.335
2	0.0131	0.392
4	0.0262	0.455
6	0.0393	0.511
8	0.0525	0.572
10	0.0655	0.634
15	0.098	0.795
20	0.131	0.963

Για $\alpha = 600$

Πίνακας 2.3.1.3

$M_f(\%)$	U_f	$E_c(\text{GPa})$
0	0	0.335
2	0.0131	0.394
4	0.0262	0.454
6	0.0393	0.515
8	0.0525	0.578
10	0.0655	0.642
15	0.098	0.806
20	0.131	0.978

Για $E_f = 29GPa$

Για $\alpha = 30$

Πίνακας 2.3.4.2

$M_f(\%)$	U_f	$E_c(GPa)$
0	0	0.335
2	0.0131	0.380
4	0.0262	0.427
6	0.0393	0.475
8	0.0525	0.526
10	0.0655	0.577
15	0.098	0.722
20	0.131	0.864

Για $\alpha = 40$

Πίνακας 2.3.2.1

$M_f(\%)$	U_f	$E_c(GPa)$
0	0	0.335
2	0.0131	0.386
4	0.0262	0.439
6	0.0393	0.493
8	0.0525	0.549
10	0.0655	0.607
15	0.098	0.760
20	0.131	0.925

Για $\alpha = 300$

Πίνακας 2.3.2.2

$M_f(\%)$	U_f	$E_c(GPa)$
0	0	0.335
2	0.0131	0.418
4	0.0262	0.503
6	0.0393	0.588
8	0.0525	0.676
10	0.0655	0.766
15	0.098	0.998
20	0.131	1.241

Για $\alpha = 600$

Πίνακας 2.3.2.3

$M_f(\%)$	U_f	$E_c(\text{GPa})$
0	0	0.335
2	0.0131	0.423
4	0.0262	0.512
6	0.0393	0.603
8	0.0525	0.696
10	0.0655	0.790
15	0.098	1.035
20	0.131	1.288

Για $E_f = 40\text{GPa}$

Για $\alpha = 30$

Πίνακας 2.3.4.3

$M_f(\%)$	U_f	$E_c(\text{GPa})$
0	0	0.335
2	0.0131	0.385
4	0.0262	0.437
6	0.0393	0.490
8	0.0525	0.545
10	0.0655	0.603
15	0.098	0.756
20	0.131	0.922

Για $\alpha = 40$

Πίνακας 2.3.3.1

$M_f(\%)$	U_f	$E_c(\text{GPa})$
0	0	0.335
2	0.0131	0.393
4	0.0262	0.452
6	0.0393	0.513
8	0.0525	0.576
10	0.0655	0.642
15	0.098	0.816
20	0.131	1.004

Για $\alpha = 300$

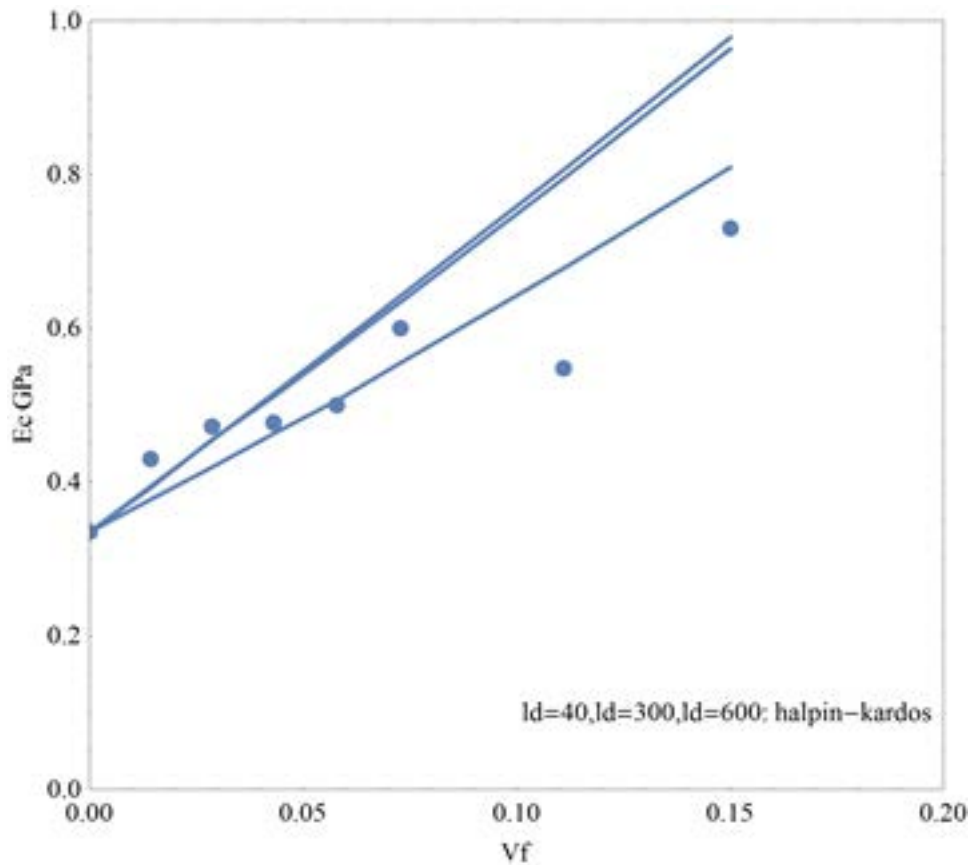
Πίνακας 2.3.3.2

$M_f(\%)$	U_f	$E_c(\text{GPa})$
0	0	0.335
2	0.0131	0.438
4	0.0262	0.549
6	0.0393	0.659
8	0.0525	0.771
10	0.0655	0.886
15	0.098	1.184
20	0.131	1.495

Για $\alpha = 600$

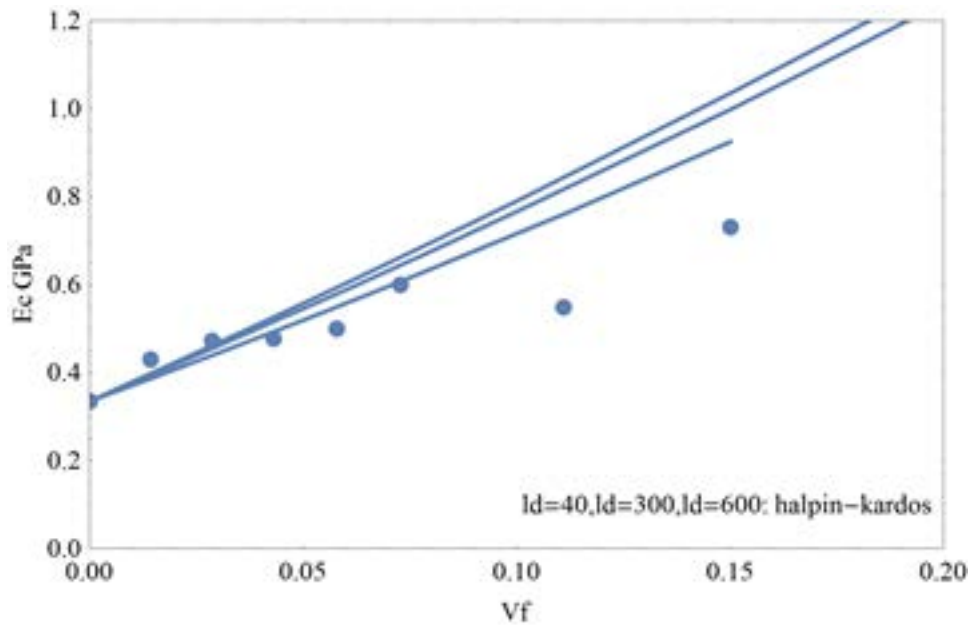
Πίνακας 2.3.3.3

$M_f(\%)$	U_f	$E_c(\text{GPa})$
0	0	0.335
2	0.0131	0.450
4	0.0262	0.566
6	0.0393	0.684
8	0.0525	0.804
10	0.0655	0.927
15	0.098	1.245
20	0.131	1.574



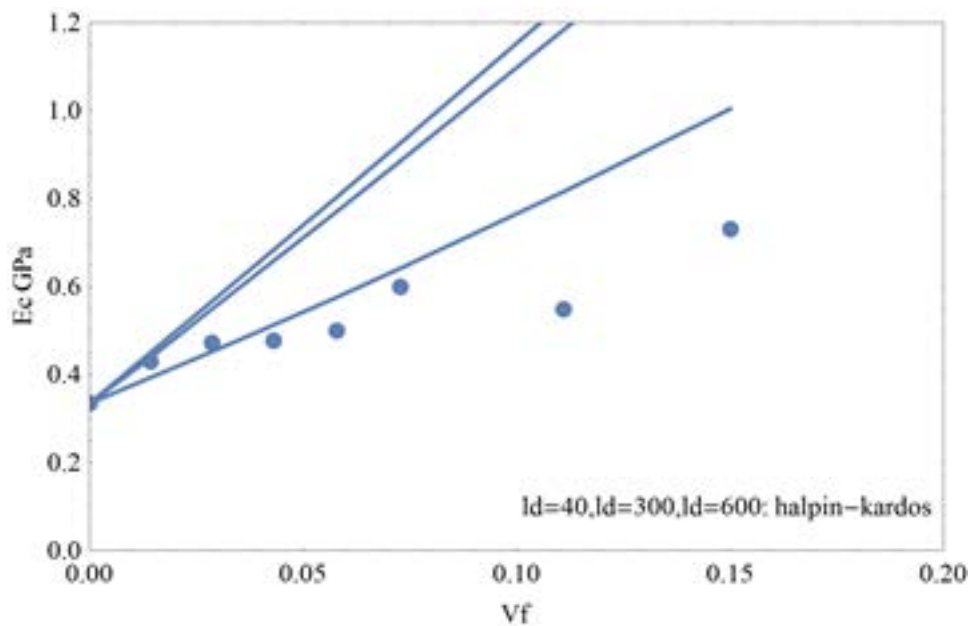
Γράφημα 2.3.1:($E_f=18\text{GPa}$) (Halpin-Kardos)(“ l_d ”=“ l/d ”, “ V_f ”=“ U_f ”)

Παρατήρηση: Όσο μικρότερη τιμή λαμβάνει το α , τόσο «πιο κοντά» βρισκόμαστε στα πειραματικά δεδομένα. Άρα για $\alpha = 40$ βρισκόμαστε σε αυτό το γράφημα «πιο κοντά» στις πειραματικές τιμές. Επίσης, σε μεγαλύτερες τιμές του U_f , υπάρχει μικρότερη σύγκλιση θεωρητικών και πειραματικών τιμών.



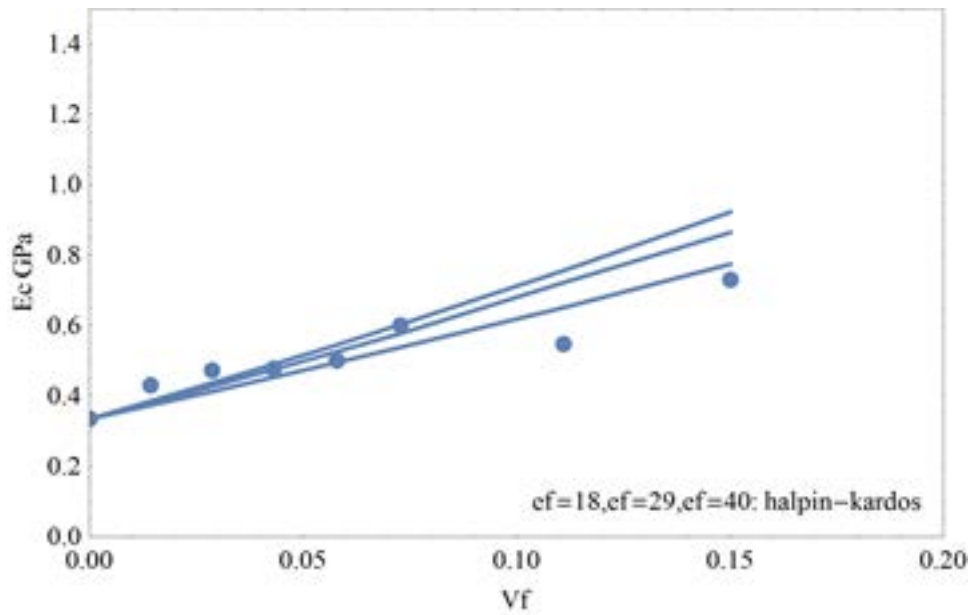
Γράφημα 2.3.2:($E_f=29\text{GPa}$) (Halpin-Kardos)(“ l/d ”, “halpin-kardos”=“Halpin-Kardos”, “ V_f ”=“ U_f ”)

Παρατήρηση: Ομοίως με την παρατήρηση για το γράφημα 2.3.1.



Γράφημα 2.3.3:($E_f=40\text{GPa}$) (Halpin-Kardos) (“ l/d ”, “ V_f ”=“ U_f ”, “halpin-kardos”=“Halpin-Kardos”)

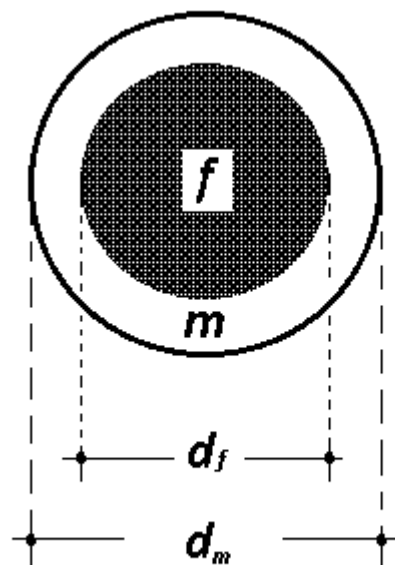
Παρατήρηση: Ομοίως με την παρατήρηση για το γράφημα 2.3.1.



Γράφημα 2.3.4:($\alpha=30$)Halpin-Kardos) (" e_f "="E_f", " v_f "="U_f", "halpin-kardos"="Halpin-Kardos")

Παρατήρηση: Όσο μεγαλύτερη τιμή λαμβάνει το E_f τόσο απομακρυνόμαστε από τις πειραματικές τιμές. Άρα για E_f = 18GPa βρισκόμαστε πλησιέστερα στα πειραματικά δεδομένα.

Αντίστροφος Νόμος Των Φάσεων



Σχήμα 2.4

Ο αντίστροφος νόμος των φάσεων για το μέτρο ελαστικότητας, δίνεται ως

$$\frac{1}{E_c} = \frac{U_f}{E_f} + \frac{U_m}{E_m} \quad (2.4.α)$$

Ο αντίστροφος νόμος των φάσεων για το λόγο Poisson δίνεται ως

$$\frac{1}{\nu_c} = \frac{U_f}{\nu_f} + \frac{U_m}{\nu_m} \quad (2.4.β)$$

Όπου $\nu_f=0.2$ (λόγος Poisson του εγκλείσματος)

$\nu_m=0.35$ (λόγος Poisson της μήτρας)

Όπου ν_c : ο λόγος Poisson του συνθέτου υλικού

Παρουσίαση του μοντέλου του βελτιωμένου αντιστρόφου νόμου των φάσεων^[9.5]:

1. Προσδιορισμός του Μέτρου Ελαστικότητας E_c του σύνθετου υλικού

Η προσέγγιση αυτή βασίζεται στη θεωρία ελαστικότητας. Θα θεωρήσουμε ότι το έγκλεισμα είναι κύλινδρος συγκεκριμένης διαμέτρου και μήκους. Θεωρούμε το διφασικό κυλινδρικό μοντέλο του παραπάνω σχήματος. Για να προσδιορίσουμε το εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας, εφαρμόζουμε εξωτερική πίεση p_1 κατά την ακτινική διεύθυνση στην επιφάνεια του κυλίνδρου, έτσι ώστε:

$$p_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad (2.4.1)$$

Επίσης, υποθέτουμε ότι εφαρμόζεται στον κύλινδρο τάση κατά την αξονική διεύθυνση, τέτοια ώστε η αξονική παραμόρφωση να είναι μηδέν ($\epsilon_z = 0$). Το πρόβλημα αυτό είναι αξονοσυμμετρικό, και συνεπώς οι μετατοπίσεις, οι παραμορφώσεις και οι τάσεις εξαρτώνται μόνο από την ακτίνα. Άρα ισχύει η τασική συνάρτηση του Airy δίνοντας για αυτή την παρακάτω εξίσωση:

$$\nabla^4 \Phi = \frac{d^4 \Phi}{dr^4} + \left(\frac{2}{r}\right) * \left(\frac{d^3 \Phi}{dr^3}\right) - \left(\frac{1}{r^2}\right) * \left(\frac{d^2 \Phi}{dr^2}\right) + \left(\frac{1}{r^3}\right) * \left(\frac{d\Phi}{dr}\right) = 0 \quad (2.4.2)$$

$$\Phi = C_1 * \ln(r) + C_2 * r^2 * \ln(r) + C_3 * r^2 + C_4 \quad (2.4.3)$$

Έκαστη από τις 2 φάσεις του σύνθετου υλικού χαρακτηρίζεται από μια τασική συνάρτηση. Έτσι έχουμε τις παρακάτω εξισώσεις για τις τάσεις:

$$\sigma_{r,f} = \left(\frac{1}{r}\right) * \left(\frac{d\Phi_f}{dr}\right) = \left(\frac{A}{r^2}\right) + B * (1 + 2 * \ln(r)) + 2C \quad (2.4.4)$$

$$\sigma_{\theta,f} = \left(\frac{d^2\Phi_f}{dr^2}\right) = \left(-\frac{A}{r^2}\right) + B * (3 + 2 * \ln(r)) + 2C \quad (2.4.5)$$

$$\sigma_{r,m} = \left(\frac{1}{r}\right) * \left(\frac{d\Phi_m}{dr}\right) = \left(\frac{F}{r^2}\right) + G * (1 + 2 * \ln(r)) + 2H \quad (2.4.6)$$

$$\sigma_{\theta,m} = \left(\frac{d^2\Phi_m}{dr^2}\right) = \left(-\frac{F}{r^2}\right) + G * (3 + 2 * \ln(r)) + 2H \quad (2.4.7)$$

Έχουμε επίσης:

A) Για την αποφυγή του απειρισμού των τάσεων στο $r = 0$, οι σταθερές A και B πρέπει να μηδενιστούν:

$$A = B = 0$$

B) Για τη μήτρα αποδεικνύεται από τις σχέσεις των μετατοπίσεων που προκύπτουν απ τις παραμορφώσεις ότι ο συντελεστής G πρέπει να μηδενίζεται:

$$G = 0$$

$$\sigma_{r,f} = \sigma_{\theta,f} = 2 * C \quad (2.4.8), \quad \sigma_{r,m} = \left(\frac{F}{r^2}\right) + 2 * H \quad (2.4.9)$$

Έτσι για τις τάσεις από τις εξισώσεις (2.4.8) και (2.4.9) έχουμε:

$$\sigma_{\theta,m} = \left(-\frac{F}{r^2}\right) + 2 * H \quad (2.4.10)$$

Από την μηδενική παραμόρφωση κατά την αξονική διεύθυνση έχουμε:

$$\varepsilon_{z,f} = \left(\frac{1}{E_f}\right) * [\sigma_{z,f} - \nu_f * (\sigma_{r,f} + \sigma_{\theta,f})] = 0$$

$$\varepsilon_{z,m} = \left(\frac{1}{E_m}\right) * [\sigma_{z,m} - \nu_m * (\sigma_{r,m} + \sigma_{\theta,m})] = 0 \quad (2.4.11 \text{ α και β})$$

Με αντικατάσταση των (2.4.8), (2.4.9) και (2.4.10) στις (2.4.11) έχουμε:

$$\sigma_{z,f} = 4 * C * \nu_f, \sigma_{z,m} = 4 * H * \nu_m \quad (2.4.12 \text{ α και β})$$

$$u_{r,f} = r * \varepsilon_{\theta,f} = \left(2 * \frac{C}{E_f}\right) * (1 - \nu_f - 2 * \nu_f^2) * r$$

$$u_{r,m} = \left(\frac{r}{E_m}\right) * \left[\left(-\frac{F}{r^2}\right) * (1 + \nu_m) + 2 * H * (1 - \nu_m - 2 * \nu_m^2)\right]$$

(2.4.13 α και β)

Οι συνοριακές συνθήκες είναι:

$$\text{Στο } r = r_f: \sigma_{r,f} = \sigma_{r,m}$$

$$\rightarrow 2 * C = \frac{F}{r_f^2} + 2 * H \quad (2.4.14)$$

$$u_{r,f} = u_{r,m}$$

$$\rightarrow 2 * C * (1 - \nu_f - 2 * \nu_f^2) * E_m = E_f * \left[\left(-\frac{F}{r_f^2}\right) * (1 + \nu_m) + 2 * H * (1 - \nu_m - 2 * \nu_m^2)\right]$$

(2.4.15)

$$\text{Στο } r = r_m: \sigma_{r,m} = -p_1$$

$$\frac{F}{r_m^2} + 2 * H = -p_1 \quad (2.4.16),$$

Η λύση του συστήματος (2.4.14-2.4.16) δίνει τις σταθερές C, F, H.

Ο προσδιορισμός του εγκάρσιου μέτρου ελαστικότητας E_T του σύνθετου υλικού γίνεται εφαρμόζοντας τις συνθήκες ενέργειας στο διφασικό κυλινδρικό μοντέλο. Η ενέργεια παραμορφώσεως του σύνθετου υλικού είναι ίση με το άθροισμα των ενεργειών παραμορφώσεως του εγκλείσματος και της μήτρας. Στην περίπτωση μας, τη συνθήκη αυτή τη γράφουμε ως εξής:

$$\left(\frac{1}{2}\right) * \iiint \left(\frac{p_1^2}{K_c}\right) dV_c = \left(\frac{1}{2}\right) * \iiint (\sigma_{r,f} * \varepsilon_{r,f} + \sigma_{\theta,f} * \varepsilon_{\theta,f} + \sigma_{z,f} * \varepsilon_{z,f}) dV_f + (1/2) * \iiint (\sigma_{r,m} * \varepsilon_{r,m} + \sigma_{\theta,m} * \varepsilon_{\theta,m} + \sigma_{z,m} * \varepsilon_{z,m}) dV_m \quad (2.4.15)$$

$$\varepsilon_{r,f} = \left(2 * \frac{c}{E_f}\right) * (1 - \nu_f - 2\nu_f^2) = \varepsilon_{\theta,f} \quad (2.4.17 \alpha, \beta, \gamma)$$

$$\varepsilon_{r,m} = \left(\frac{1}{E_m}\right) * \left[\left(+\frac{F}{r^2}\right) * (1 + \nu_m) + 2 * H * (1 - \nu_m - 2 * \nu_m^2)\right]$$

$$\varepsilon_{\theta,m} = \left(\frac{1}{E_m}\right) * \left[\left(-\frac{F}{r^2}\right) * (1 + \nu_m) + 2 * H * (1 - \nu_m - 2 * \nu_m^2)\right]$$

Το μέτρο διόγκωσης K_c του σύνθετου υλικού το ορίζουμε ως $K_c = \frac{p_1}{\frac{\Delta V}{V_0}}$ και

υπολογίζεται από την μεταβολή όγκου, η οποία προκαλείται από την εφαρμογή της εξωτερικής πίεσης p_1 . Έχουμε:

$$1 + \frac{\Delta V}{V_0} = (1 + \varepsilon_x) * (1 + \varepsilon_y) * (1 + \varepsilon_z)$$

$$\rightarrow \frac{\Delta V}{V_0} \approx \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

Υποθέτοντας ότι το σύνθετο υλικό έχει μακροσκοπική ομοιογένεια και ότι υπακούει στον νόμο του Hooke, εξάγονται οι παρακάτω σχέσεις τάσεων-παραμορφώσεων:

$$\varepsilon_x = \left(\frac{1}{E_T}\right) * (\sigma_x - \nu_{TT} * \sigma_y) - \left(\frac{\nu_{LT}}{E_L}\right) * \sigma_z \quad (2.4.18)$$

$$\varepsilon_y = \left(\frac{1}{E_T}\right) * (\sigma_y - \nu_{TT} * \sigma_x) - \left(\frac{\nu_{LT}}{E_L}\right) * \sigma_z \quad (2.4.19)$$

$$\varepsilon_z = \left(\frac{1}{E_L}\right) * [\sigma_z - \nu_{LT} * (\sigma_x + \sigma_y)] \quad (2.4.20)$$

Στις εξισώσεις αυτές το ν_{TT} είναι ο εγκάρσιος λόγος Poisson. Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (2.4.18-2.4.20) στη σχέση $\Delta V/V_0$, αφού λάβουμε υπόψιν ότι έχουμε

μηδενισμό της παραμόρφωσης ϵ_z στην αξονική διεύθυνση ($\epsilon_z = 0$) και $\sigma_z = \nu_{LT}^*(\sigma_x + \sigma_y)$ έχουμε:

$$\frac{\Delta V}{V_0} = 2 * p_1 * \left\{ \left[\frac{1 - \nu_{TT}}{E_T} \right] - \left[2 * \frac{\nu_{LT}^2}{E_L} \right] \right\} \quad (2.4.21)$$

Οπότε, το μέτρο διόγκωσης του υλικού K_c δίνεται από τη σχέση:

$$K_c = \frac{p_1}{\frac{\Delta V}{V_0}} = \frac{1}{\left\{ 2 * \left[\frac{1 - \nu_{TT}}{E_T} - 2 * \frac{\nu_{LT}^2}{E_L} \right] \right\}} \quad (2.4.22)$$

Αντικαθιστώντας στο δεξιό μέρος της συνθήκης ισορροπίας ενέργειας, τις τάσεις [Εξισώσεις (2.4.8-2.4.10)] τις παραμορφώσεις [Εξισώσεις (2.4.17 α,β,γ)] με $V = \pi * r^2 * h$ και με $dV = 2 * \pi * r * h * dr$, καταλήγουμε έπειτα πό πράξεις στην ακόλουθη έκφραση:

$$\int_0^{r_m} \left(\frac{p_1}{K_c} \right) * r * dr = \int_0^{r_f} \left\{ \left(\frac{1}{E_f} \right) * \left[8 * C^2 * (1 - \nu_f - 2 * \nu_f^2) \right] \right\} * r * dr + \int_{r_f}^{r_m} \left\{ \left(\frac{1}{E_m} \right) * \left[2 * (1 - \nu_m) * \left(\frac{F^2}{r^4} \right) + 8 * H^2 * (1 - \nu_m - 2 * \nu_m^2) \right] \right\} * r * dr \quad (2.4.23)$$

Αντικαθιστώντας το μέτρο διόγκωσης K_c από την εξίσωση (2.4.22) στο αριστερό μέρος και αν λάβουμε υπόψιν ότι:

$$U_f = \frac{r_f^2}{r_m^2}$$

και

$$U_m = 1 - \left(\frac{r_f^2}{r_m^2} \right) \quad (2.4.24a,b)$$

έχουμε:

$$\frac{1 - \nu_{TT}}{E_T} - 2 * \frac{\nu_{LT}^2}{E_L} = \left(\frac{1}{E_f} \right) * \left[4 * C^2 * (1 - \nu_f - 2 * \nu_f^2) \right] * U_f + \left(\frac{1}{E_m} \right) * \left[(1 + \nu_m) * \left(\frac{F^2}{r_f^2 * r_m^2} \right) + 4 * H^2 * (1 - \nu_m - 2 * \nu_m^2) \right] * U_m \quad (2.4.25)$$

Εκτός από την εξίσωση (2.4) που αποτελεί την ακριβή λύση του προβλήματος, προσπαθούμε να βρούμε μια απλουστευμένη λύση. Όπως φαίνεται από αρχικούς υπολογισμούς έχουμε: $2 * C \rightarrow -1$, $2 * H \rightarrow -1$ και $F^2 \rightarrow 1$

Επομένως, προτείνουμε την εξής προσεγγιστική έκφραση για το E_T :

$$\frac{1-v_{TT}}{E_T} - 2 * \frac{v_{LT}^2}{E_L} = \left(\frac{1}{E_f}\right) * (1 - v_f - 2 * v_f^2) * U_f + \left(\frac{1}{E_m}\right) * (1 - v_m - 2 * v_m^2) * U_m \quad (2.4.26)$$

Τέλος, αν θεωρήσουμε ότι το υλικό τείνει προς το κοκκώδες υλικό έχουμε δύο ανεξάρτητες ελαστικές σταθερές, E και ν , η σχέση γράφεται τελικά με $E_L = E_T = E_c$ και $\nu_{LT} = \nu_{TT} = \nu_c$. Επομένως, προσεγγιστικά η έκφραση για το E_c είναι:

$$\frac{1-\nu_c-2*\nu_c^2}{E_c} = \left(\frac{1}{E_f}\right) * (1 - \nu_f - 2 * \nu_f^2) * U_f + \left(\frac{1}{E_m}\right) * (1 - \nu_m - 2 * \nu_m^2) * U_m \quad (2.4.γ)$$

2. Προσδιορισμός του Λόγου Poisson ν_c του σύνθετου υλικού

Ο λόγος Poisson του συνθέτου υλικού προσδιορίζεται από την εξής σχέση του νόμου των φάσεων:

$$\nu_c = \nu_f * U_f + \nu_m * U_m \quad (2.4.δ)$$

Στους πίνακες κάτω από την αναγραφή «Μοντέλο 2.4» έχουμε κάποιες μετρήσεις για το E_c με βάση το μοντέλο αυτό.

Μοντέλο 2.4

Για $E_f = 29GPa$

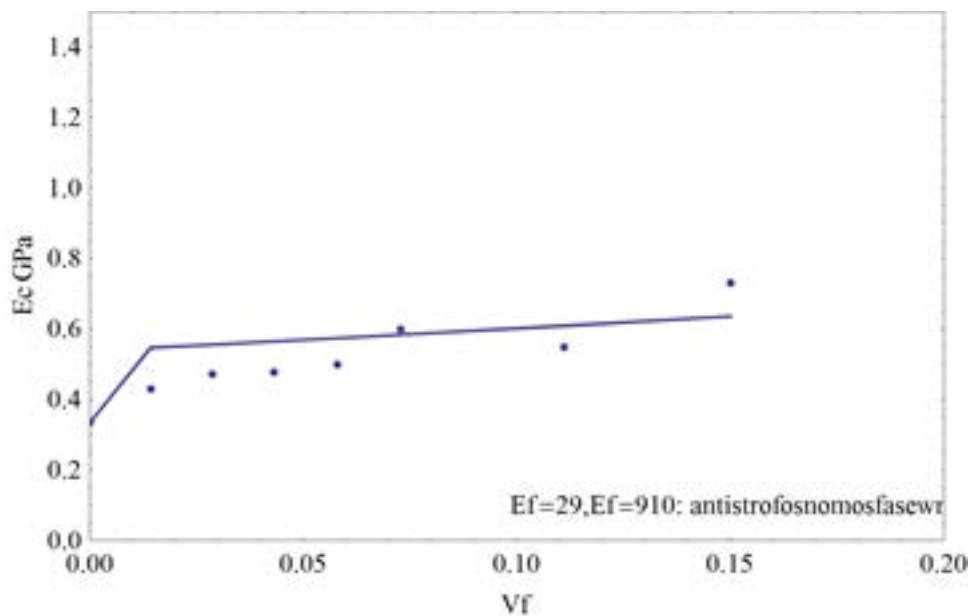
Πίνακας 2.4.1

$M_f(\%)$	U_f	$E_c(GPa)$
0	0	0.335
2	0.0131	0.548
4	0.0262	0.555
6	0.0393	0.565
8	0.0525	0.574
10	0.0655	0.584
15	0.098	0.608
20	0.131	0.636

Για $E_f = 910 \text{ GPa}$

Πίνακας 2.4.2

$M_f(\%)$	U_f	$E_c(\text{GPa})$
0	0	0.335
2	0.0131	0.546
4	0.0262	0.556
6	0.0393	0.565
8	0.0525	0.574
10	0.0655	0.584
15	0.098	0.610
20	0.131	0.636



Γράφημα 2.4(αντιστρόφου νόμου των φάσεων) (" V_f "=" U_f ")

Παρατήρηση: Σε αυτήν την περίπτωση βρισκόμαστε κοντά στις πειραματικές τιμές σε γενικές γραμμές. «Ξεκινάμε» από σχετικά μεγαλύτερες θεωρητικές τιμές και καταλήγουμε σε σχετικά μικρότερη τιμή. Γενικά, δύναται να συμπεραίνουμε ότι όταν σε θεωρητική έκφραση το μέτρο ελαστικότητας είναι στον παρονομαστή το αποτέλεσμα για το μέτρο του σύνθετου επηρεάζεται πολύ λίγο από το μέτρο του εγκλείσματος.

2.5 Ημιεμπειρικό μοντέλο Halpin-Tsai

Παρουσίαση του ημι-εμπειρικού μοντέλου Halpin-Tsai(2.5)^{[9.4] και [9.6]}: Το μοντέλο Halpin-Tsai είναι ένα μαθηματικό μοντέλο μικρομηχανικής φύσεως που χρησιμοποιείται για το θεωρητικό υπολογισμό του μέτρου ελαστικότητας του νανοσύνθετου υλικού με βάση τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά και τον προσανατολισμό της νανοϊνας και τις ελαστικές ιδιότητες νανοϊνας και μήτρας. Υπολογίζει την επίδραση ενίσχυσης οφειλούμενης στην παρουσία άκαμπτων ινών σε μαλακή μήτρα, χωρίς να υπολογίζονται οι αλληλεπιδράσεις ίνας με ίνα ή μήτρας με ίνα. Υποθέτει ότι τέτοια υλικά μπορούν να προβληθούν ως επίπεδα (group layers) που περιέχουν στρώσεις σε μια κατεύθυνση, με προσανατολισμό σε διάφορες γωνίες για να δώσουν ένα ιστροπικό νανοσύνθετο υλικό. Ένα από τα κύρια πλεονεκτήματα αυτής της μικρομηχανικής προσέγγισης, είναι ότι υπολογίζει την ανισοτροπία των μηχανικών ιδιοτήτων της νανοϊνας.

Οι εξισώσεις που χρησιμοποιούνται σε αυτό το μοντέλο είναι η

$$E_L = E_m * \left[\frac{1 + \left(\frac{l}{d}\right) * \eta_L * U_f}{1 - \eta_L * U_f} \right] \quad E_T = E_m * \left[\frac{1 + \eta_T * U_f}{1 - \eta_T * U_f} \right]$$

(2.5 α,β)

$$\text{Όπου } a_f = \frac{l_f}{d_f} \quad \text{και } \eta_L = \frac{\left[\left(\frac{E_f}{E_m}\right) - 1\right]}{\left[\left(\frac{E_f}{E_m}\right) + 2 * \alpha_f\right]}, \quad \eta_T = \frac{\left[\left(\frac{E_f}{E_m}\right) - 1\right]}{\left[\left(\frac{E_f}{E_m}\right) + 2\right]} \quad (2.5.1, 2.5.2 \text{ και } 2.5.3)$$

Στους πίνακες κάτω από την αναγραφή «Μοντέλο 5» έχουμε κάποιες μετρήσεις για το E_L με βάση το παραπάνω μοντέλο.

Μοντέλο 2.5

Για $\alpha = 500$

Για $E_f = 6GPa$

Πίνακας 2.5.1.1

$M_f(\%)$	U_f	$E_L(GPa)$
0	0	0.335
2	0.0131	0.372
4	0.0262	0.410
6	0.0393	0.447
8	0.0525	0.485
10	0.0655	0.522
15	0.098	0.615
20	0.131	0.710

Για $E_f = 6.35GPa$

Πίνακας 2.5.2.1

$M_f(\%)$	U_f	$E_L(GPa)$
0	0	0.335
2	0.0131	0.375
4	0.0262	0.414
6	0.0393	0.454
8	0.0525	0.494
10	0.0655	0.533
15	0.098	0.632
20	0.131	0.732

Για $E_f = 7GPa$

Πίνακας 2.5.3.1

$M_f(\%)$	U_f	$E_L(GPa)$
0	0	0.335
2	0.0131	0.379
4	0.0262	0.423
6	0.0393	0.467
8	0.0525	0.511
10	0.0655	0.555
15	0.098	0.665
20	0.131	0.776

Για $\alpha = 1000$

Για $E_f = 6GPa$

Πίνακας 2.5.1.2

$M_f(\%)$	U_f	$E_L(GPa)$
0	0	0.335
2	0.0131	0.372
4	0.0262	0.409
6	0.0393	0.446
8	0.0525	0.483
10	0.0655	0.520
15	0.098	0.611
20	0.131	0.704

Για $E_f = 6.35 \text{ GPa}$

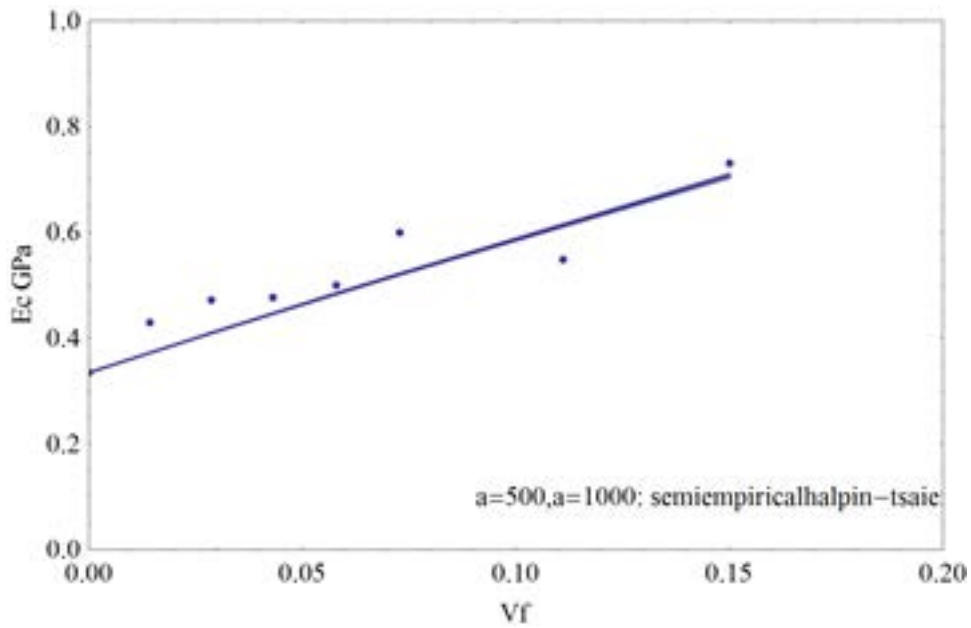
Πίνακας 2.5.2.2

$M_f(\%)$	U_f	$E_L(\text{GPa})$
0	0	0.335
2	0.0131	0.374
4	0.0262	0.413
6	0.0393	0.452
8	0.0525	0.492
10	0.0655	0.531
15	0.098	0.628
20	0.131	0.726

Για $E_f = 7 \text{ GPa}$

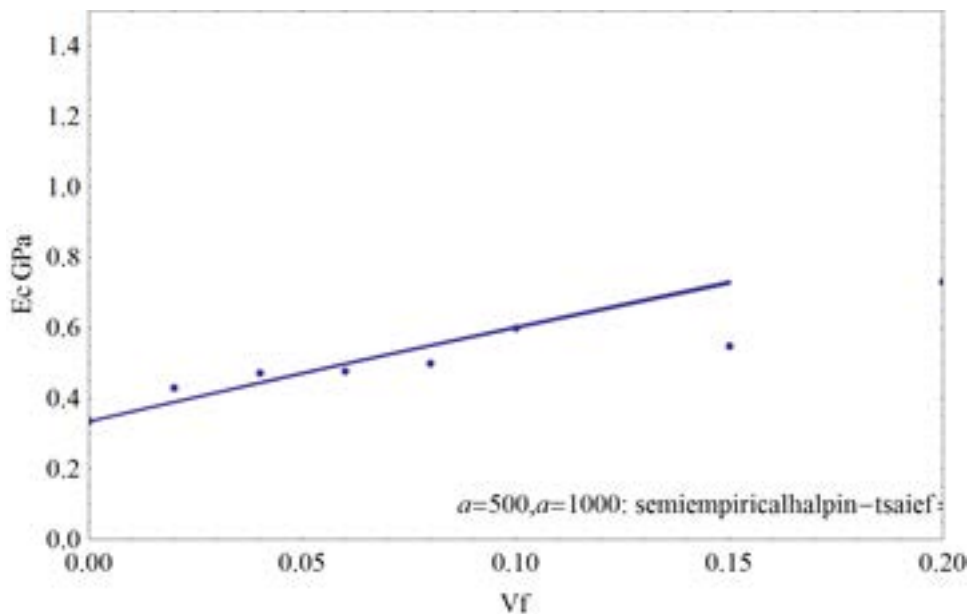
Πίνακας 2.5.3.2

$M_f(\%)$	U_f	$E_L(\text{GPa})$
0	0	0.335
2	0.0131	0.378
4	0.0262	0.422
6	0.0393	0.465
8	0.0525	0.509
10	0.0655	0.552
15	0.098	0.661
20	0.131	0.768



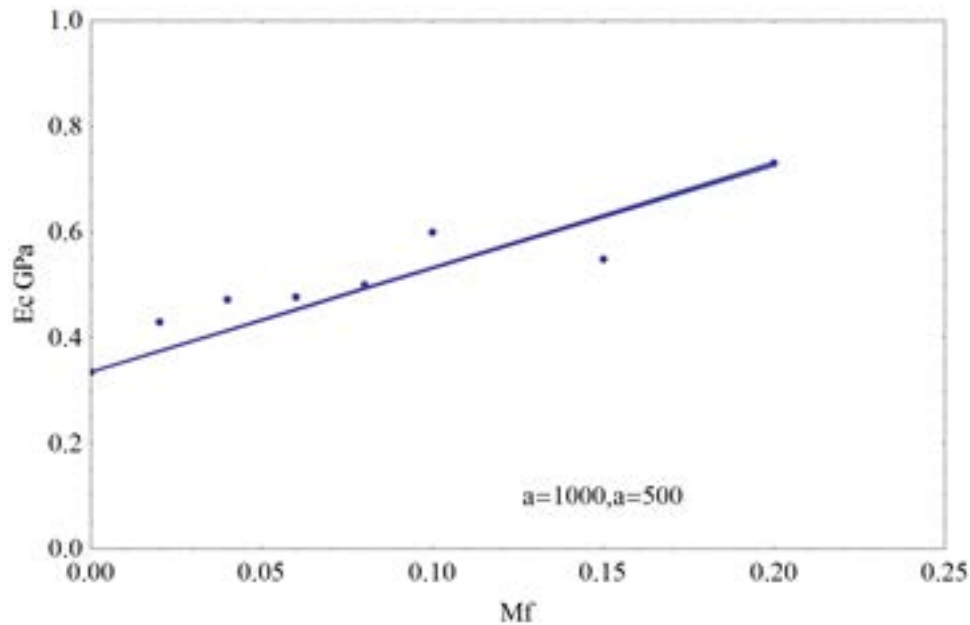
Γράφημα 2.5.1:(E_f=6GPa) (ημιεμπειρικό Halpin-Tsai) (“V_f” = “U_f”)

Παρατήρηση: Όσο μεγαλύτερη τιμή λαμβάνει το α , τόσο «πιο πάνω» βρισκόμαστε. Άρα για $\alpha = 1000$ βρισκόμαστε πιο κοντά στις πειραματικές τιμές.



Γράφημα 2.5.2:(E_f=7GPa) (ημιεμπειρικό Halpin-Tsai) (“V_f” = “U_f”)

Παρατήρηση: Ομοίως με την παρατήρηση για το γράφημα 2.5.1.



Γράφημα 2.5.3:($E_f=6.35\text{GPa}$) (ημιεμπειρικό Halpin-Tsai)

Παρατήρηση: Από το γράφημα αιτιολογώντας σύμφωνα με τα 2 προηγούμενα γραφήματα προκύπτει ότι για $\alpha = 500$ βρισκόμαστε πιο κοντά στα πειραματικά δεδομένα.

Τέλος παραθέτουμε τις θεωρητικές εκφράσεις που έχουν εκφράσει οι Ogorkiewicz-Weidmann για το E_L με το μοντέλο των διακεκομμένων ινών και οι Phan-Tien και Hylilgot για το E_c με το μοντέλο των διακεκομμένων ινών. Στους πίνακες με τις αναγραφές «Μοντέλο 2.6» και «Μοντέλο 2.7» έχουμε κάποιες θεωρητικές τιμές με βάση τις 2 αυτές σχέσεις.

Τύπος των Ogorkiewicz-Weidmann (Διακεκομμένες ίνες)^[9.7-9.10]

$$E_L = E_m * \frac{\{E_f*(a_f*U_f + \sqrt{U_f} - U_f - 1) + E_m*(a_f - a_f*U_f - \sqrt{U_f} - U_f)\}}{\{E_f*(\sqrt{U_f} - 1) + E_m*(a_f - \sqrt{U_f} + U_f)\}} \quad (2.6)$$

$$E_f = 4\text{GPa}$$

Μοντέλο 2.6

Για $\alpha_f = 300$

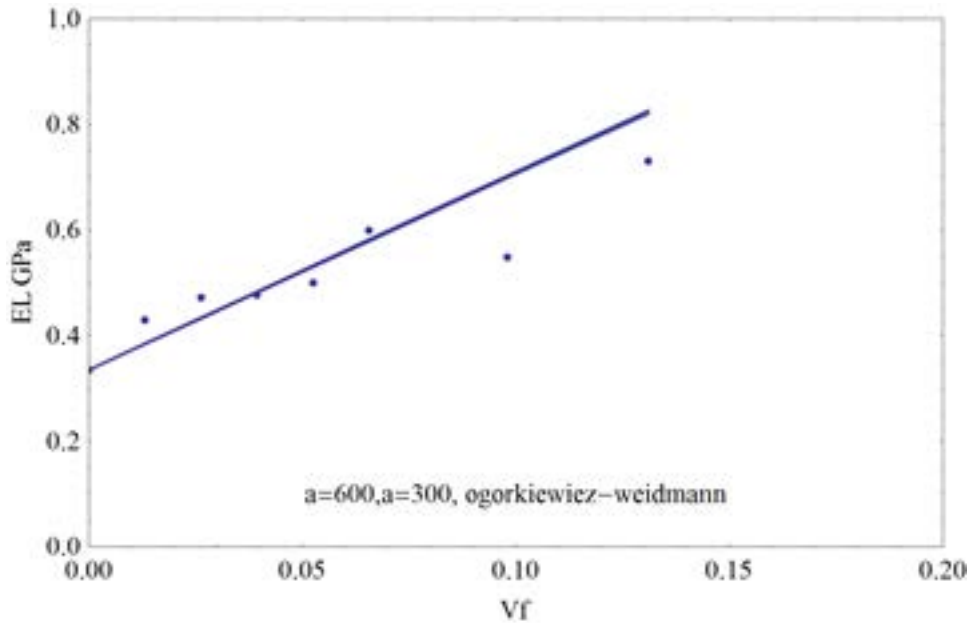
Πίνακας 2.6.1

$M_f(\%)$	U_f	$E_L(\text{GPa})$
0	0	0.335
2	0.0131	0.385
4	0.0262	0.434
6	0.0393	0.483
8	0.0525	0.533
10	0.0655	0.582
15	0.098	0.703
20	0.131	0.826

Για $\alpha_f = 600$

Πίνακας 2.6.2

$M_f(\%)$	U_f	$E_L(\text{GPa})$
0	0	0.335
2	0.0131	0.384
4	0.0262	0.432
6	0.0393	0.481
8	0.0525	0.530
10	0.0655	0.578
15	0.098	0.699
20	0.131	0.820



Γράφημα 2.6(Ogorkiewicz-Weidmann) (“V_f” = “U_f”)

Παρατήρηση: Επειδή, όπως προκύπτει από τον πίνακα τιμών, για $\alpha_f = 600$ και $U_f = 0.0393$, ενώ για $\alpha_f = 300$ καταλήγουμε σε πλησιέστερη τιμή στην αντίστοιχη πειραματική για $U_f = 0.0655$. Γενικά, από το γράφημα προκύπτει ότι για $\alpha_f = 600$ βρισκόμαστε πλησιέστερα στα πειραματικά δεδομένα. Γενικά για μεγαλύτερες τιμές του U_f , υπάρχει μικρότερη σύγκλιση με τα πειραματικά δεδομένα.

Τύπος των Phan-Tien και Hylgot (Διακεκομμένες ίνες) ^[9.10]

$$E_c = K_1 * E_f * \frac{U_f}{1+K_2} + E_m * (1 - U_f) \quad (2.7)$$

$$K_2 = (1 + \nu_m) * \left(\frac{E_f}{E_m}\right) * \left(\frac{1}{4\alpha^2}\right) * \ln(2 * a)$$

$\alpha = l/d$ (aspect ratio)

$E_f = 18\text{GPa}$, E_f : το μέτρο ελαστικότητας του εγκλείσματος, $E_m = 0.335\text{ GPa}$

E_m : το μέτρο ελαστικότητας της μήτρας

Μοντέλο 2.7

Για $K_1=1/3$

Για $\alpha = 300$

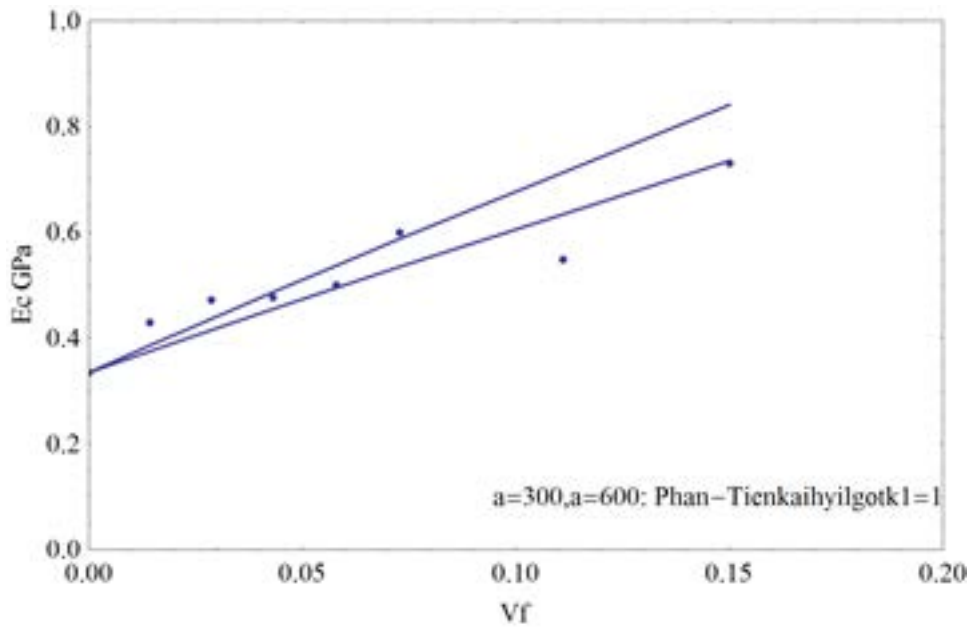
Πίνακας 2.7.1.1

$M_f(\%)$	U_f	$E_c(\text{GPa})$
0	0	0.335
2	0.0131	0.375
4	0.0262	0.415
6	0.0393	0.455
8	0.0525	0.495
10	0.0655	0.535
15	0.098	0.634
20	0.131	0.735

Για $\alpha = 600$

Πίνακας 2.7.1.2

$M_f(\%)$	U_f	$E_c(\text{GPa})$
0	0	0.335
2	0.0131	0.386
4	0.0262	0.436
6	0.0393	0.487
8	0.0525	0.537
10	0.0655	0.588
15	0.098	0.713
20	0.131	0.841



Γράφημα 2.7.1(Phan-Tien και Hyilgot)(“ V_f ”=“ U_f ”)

Παρατήρηση: Όσο μικρότερη τιμή λαμβάνει το α τόσο «πιο κάτω» βρισκόμαστε. Άρα από το γράφημα για $\alpha = 300$ βρισκόμαστε πλησιέστερα στα πειραματικά δεδομένα.

Για $K_1=3/8$

Για $\alpha = 300$

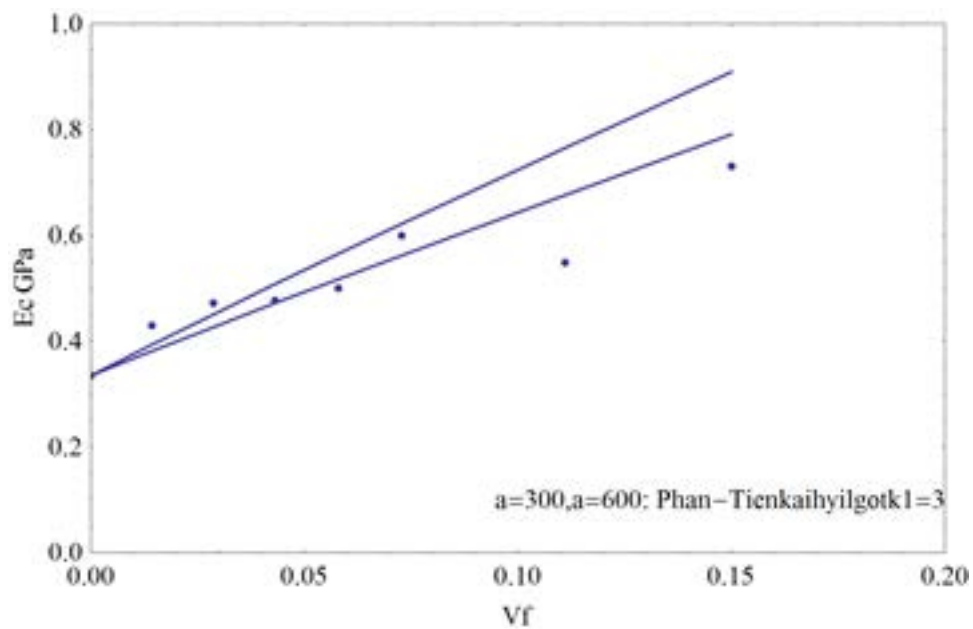
Πίνακας 2.7.2.1

$M_f(\%)$	U_f	$E_c(\text{GPa})$
0	0	0.335
2	0.0131	0.381
4	0.0262	0.426
6	0.0393	0.472
8	0.0525	0.517
10	0.0655	0.562
15	0.098	0.676
20	0.131	0.791

Για $\alpha = 600$

Πίνακας 2.7.2.2

$M_f(\%)$	U_f	$E_c(\text{GPa})$
0	0	0.335
2	0.0131	0.393
4	0.0262	0.450
6	0.0393	0.508
8	0.0525	0.565
10	0.0655	0.622
15	0.098	0.765
20	0.131	0.909



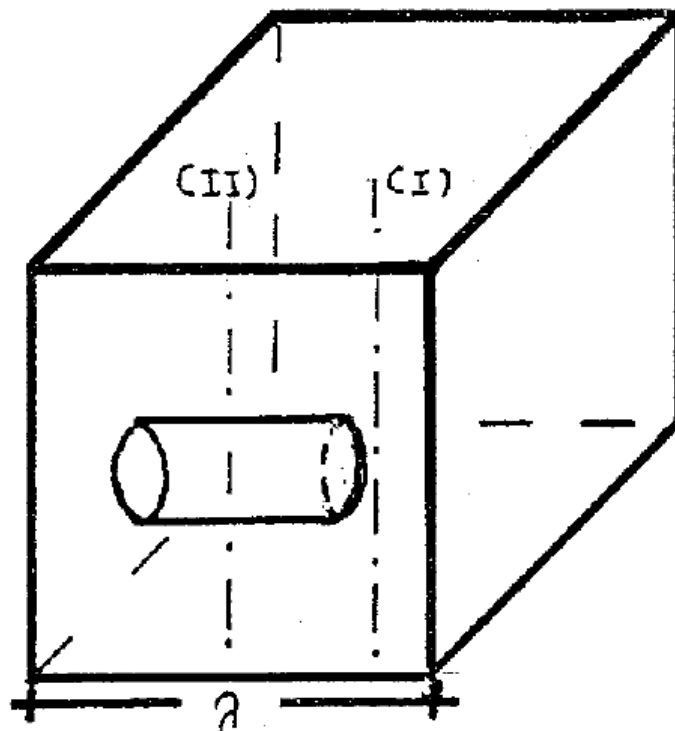
Γράφημα 2.7.2 (Phan-Tien και Hyilgot) (" V_f " = " U_f ")

Παρατήρηση: Όμοια με το γράφημα 2.7.1

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΩΝ ΤΟΜΩΝ^[9.2]

Μαθηματικά πρότυπα περιγραφής της συμπεριφοράς σύνθετων/νανοσύνθετων υλικών μέσω μοντέλου των τομών

3.1 Κυλινδρικό έγκλεισμα σε κύβο



Σχήμα 3.1 (Το μήκος του κυλίνδρου είναι “l” και η διάμετρός του “d”)

$$\frac{\lambda}{E_c} = \int_0^{\lambda} \left[A_{ολ.} \frac{dx}{A_f * E_f + A_m * E_m} \right] \quad (3.1)$$

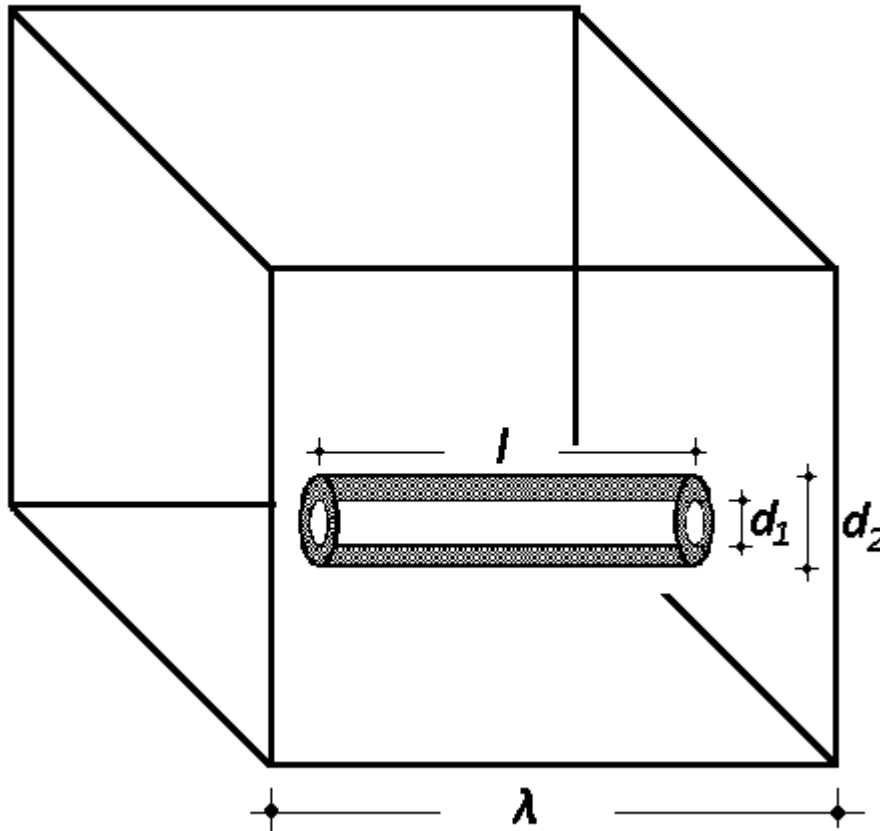
Όπου $\lambda = k * l, k > 1$ (3.1.1), $\lambda^2 = \pi * \frac{d^2}{4 * k * U_f} A_f = \pi * \frac{d^2}{4}, A_{ολ.} = \lambda^2$

$$A_m = A_{ολ.} - A_f \quad (3.1.2 \text{ } \alpha, \beta, \gamma \text{ και } \delta)$$

$A_{ολ.}$: ολικό εμβαδό κύβου πλευράς λ ,

A_f : το εμβαδόν του εγκλείσματος που τέμνεται, A_m : το εμβαδόν της μήτρας

3.2 Κοίλο έγκλεισμα σε κύβο



Σχήμα 3.2

$$\frac{\lambda}{E_c} = \int_0^\lambda \left[A_{ολ} \frac{dx}{A_f * E_f + A_m * E_m} \right] \quad (3.2)$$

$$\lambda = k * l, k > 1 \quad (3.2.1), \quad \lambda^2 = \pi * \frac{(d_2^2 - d_1^2)}{4 * k * U_f}, \quad A_f = \pi * \frac{d_2^2 - d_1^2}{4}, \quad A_{ολ} = \lambda^2$$

$$A_m = A_{ολ} - A_f \quad (3.2.2 \quad \alpha, \beta, \gamma \text{ και } \delta), \quad d_2 = 20\text{nm}, \quad d_1 = 10\text{nm}$$

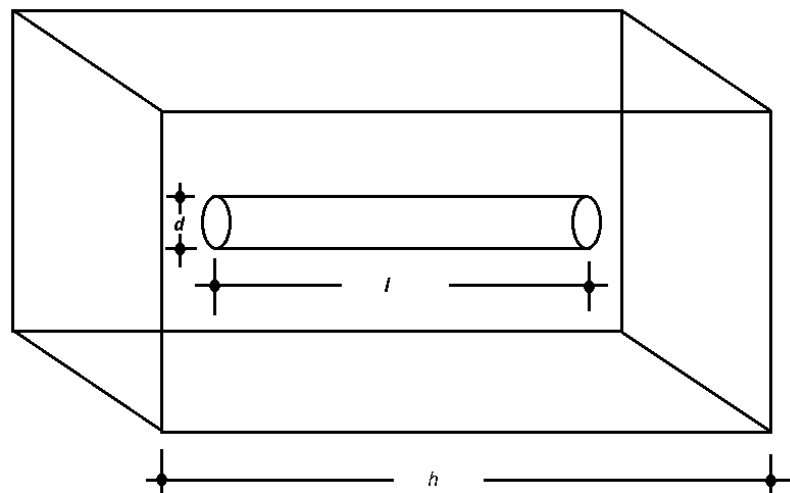
$A_{ολ}$: το ολικό εμβαδό κύβου πλευράς λ

A_f : το εμβαδόν του εγκλείσματος που τέμνεται

A_m : το εμβαδόν της μήτρας

3.3 Κυλινδρικό έγκλεισμα σε πρίσμα μοντέλο των τομών

Σχήμα 3.3

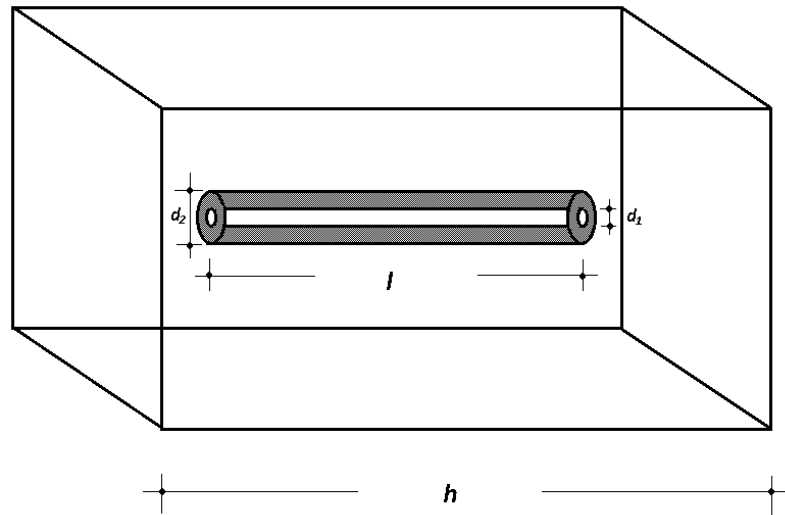


$$\frac{h}{E_c} = \int_0^h \left[A_{ολ} \frac{dx}{A_f * E_f + A_m * E_m} \right] \quad (3.3)$$

$$h = k * l \quad (3.3.1), k > 1, A_{ολ} = \lambda * h, A_f = \pi * \frac{d^2}{4}, A_m = A_{ολ} - A_f \quad (3.3.2 \alpha, \beta \text{ και } \gamma)$$

$A_{ολ}$: ολικό εμβαδό κάθετης τομής του πρίσματος, A_f : το εμβαδόν του εγκλείσματος που τέμνεται, A_m : το εμβαδόν της μήτρας

3.4 Κοίλο έγκλεισμα σε πρίσμα μοντέλο των τομών



Σχήμα 3.4

$$\frac{h}{E_c} = \int_0^h \left[A_{ολ} \frac{dx}{A_f * E_f + A_m * E_m} \right] \quad (3.4)$$

$$h = k * l \quad (3.4.1), \quad k > 1, \quad \lambda^2 = \pi * \frac{(d_2^2 - d_1^2)}{4 * k * U_f}, \quad A_f = \pi * \frac{d_2^2 - d_1^2}{4},$$

$$A_{ολ} = \lambda * h, \quad A_m = A_{ολ} - A_f \quad (3.4.2 \text{ α, β, γ και δ}) \quad d_2 = 20\text{nm}, \quad d_1 = 10\text{nm}$$

$A_{ολ}$: το ολικό εμβαδό κάθετης τομής του πρίσματος, A_f : το εμβαδόν του εγκλείσματος που τέμνεται, A_m : το εμβαδόν της μήτρας

Παρουσίαση του μοντέλου των τομών^[9.2]:

Αυτό το μοντέλο μελετά αναλυτικά τη μηχανική συμπεριφορά των συνθέτων υλικών αν τοποθετήσουμε έγκλεισμα διαφόρου σχήματος (κυβικό, κυλινδρικό, σφαιρικό

κ.λ.π). Για την προσέγγιση του σύνθετου μοντέλου λαμβάνουμε υπόψιν μας το **νόμο των φάσεων (law of mixtures)**.

Έχει διαπιστωθεί όμως πως υπάρχει μεγάλη απόκλιση μεταξύ των **πειραματικών τιμών** αυτών και των **θεωρητικών τιμών** που υπολογίζονται με αυτόν το νόμο. Για αυτό θα επιχειρήσουμε να το βελτιώσουμε.

Πρώτον, πρέπει να λάβουμε υπόψη ένα **αντιπροσωπευτικό στοιχείο**. Διότι, στη **μικρομηχανική** δεχόμαστε ότι οι **τάσεις** και οι **παραμορφώσεις** είναι **μακροσκοπικά ομοιόμορφες**. **Μικροσκοπικά** όμως δεν ισχύει το παραπάνω. Αυτό συμβαίνει διότι το υλικό είναι **ετερογενές**, λόγω της πρόσφυσης μήτρας και εγκλείσματος, που συνήθως δεν είναι ικανοποιητική.

Το αντιπροσωπευτικό στοιχείο είναι κυβικής μορφής πλευράς λ , που εκφράζει τα όρια της μήτρας και το οποίο περιέχει ένα ομόκεντρο έγκλεισμα (μορφής κύβου, κυλίνδρου, σφαίρας, κ.λ.π) οι διαστάσεις του οποίου προσδιορίζονται από την κατ' όγκο περιεκτικότητα. Η μέση τάση σ ενεργεί κάθετα στην τελική επιφάνεια διατομής πάχους dx . Η συνολική δύναμη που ασκείται πάνω στο μοντέλο του συνθέτου υλικού είναι οι εξής:

$$\sigma_c * A_c = \sigma_f * A_f + \sigma_m * A_m \quad (3.a.1)$$

όπου σ_f είναι η τάση που ενεργεί κάθετα στην επιφάνεια A_f του εγκλείσματος σ_m είναι η τάση που ενεργεί κάθετα στην επιφάνεια A_m της μήτρας, σ_c η συνολική τάση του συνθέτου υλικού που ενεργεί κάθετα στην επιφάνεια A_c .

Ας υποθέσουμε ότι σε όλες τις φάσεις το σύνθετο υλικό συμπεριφέρεται ελαστικά. Επομένως οι τάσεις για κάθε φάση μπορούν να εκφραστούν ως εξής:

$$\sigma_f = E_f * \epsilon \quad \text{και} \quad \sigma_m = E_m * \epsilon \quad (3.a.2)$$

Η εξίσωση (1) καταλήγει μέσω της εξίσωσης (2) και της σχέσης $\sigma_c = E_c * \epsilon$ στην εξίσωση:

$$E_c(x) = E_f * (A_f/A_c) + E_m * (A_m/A_c) \quad (3.a)$$

Η εξίσωση (3) μετατρέπει τα εμβαδά A_f και A_m σε ποσοστιαίες εκφράσεις σε συνάρτηση με το ολικό εμβαδό του υλικού ($A_c = A_f + A_m$).

Το φαινομενικό μέτρο ενδόσεως του παραπάνω αντιπροσωπευτικού στοιχείου συμβολίζεται με D και δίνεται από τη σχέση:

$$D_c(x) = \lambda/E_c(x)$$

$$D_c = \frac{\lambda}{E_c} = \int_0^\lambda A_{o\lambda} \frac{dx}{E_m * A_m + E_f * A_f}$$

(3.α μορφή 1)

$A_{o\lambda} = A_f + A_m$ άρα $A_m = A_{o\lambda} - A_f$. Η παράσταση του παρονομαστή γράφεται: $E_m * (A_{o\lambda} - A_f) + E_f * A_f = E_m * A_{o\lambda} + (E_f - E_m) * A_f$. Επομένως, η εξίσωση (4) γράφεται:

$$D_c = \frac{\lambda}{E_c} = \int_0^\lambda A_{o\lambda} \frac{dx}{E_m * A_{o\lambda} + (E_f - E_m) * A_f}$$

(3.α μορφή 2)

ΜΟΝΤΕΛΟ ΜΕ ΟΡΙΖΟΝΤΙΟ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΟ ΕΓΚΛΕΙΣΜΑ

Θεωρώντας ότι $h = k * r_f$ και ως πρώτη προσέγγιση αρχικά $d = h = 2 * r_f$ επίσης προκύπτουν τα: $V = \pi * d^2 * h / 4 = \pi * d^3 / 4$ και $U_f = (\pi * d^3 / 4) / \lambda^3 = [\pi * (2 * r_f)^3 / 4] / \lambda^3 = (2 * \pi * r_f^3) / \lambda^3$, άρα

$$\lambda^3 = 2 * \pi * \frac{r_f^3}{U_f} \quad (3.β.1 \text{ μορφή 1})$$

$$\text{και τελικά: } \lambda = \left(2 * \frac{\pi}{U_f} \right)^{\frac{1}{3}} * r_f \quad (3.β.1 \text{ μορφή 2})$$

Στην περιοχή (I) έχουμε τομή μόνο μήτρας, άρα $A_f(x) = 0$ και το ολοκλήρωμα της περιοχής αυτής καταλήγει στη μορφή:

$$0 < x < \frac{\lambda}{2} - r_f$$

$$D_c(I) = \frac{\lambda}{E_c} = 2 * \int_0^{\frac{\lambda}{2} - r_f} \frac{\lambda^2 * dx}{\lambda^2 * E_m + (E_f - E_m) * 0} = 2 * \frac{\frac{\lambda}{2} - r_f}{E_m} = \frac{\lambda - 2 * r_f}{E_m}$$

Στην περιοχή (II) έχουμε τομή και μήτρας και εγκλείσματος, άρα $A_f(x) = \pi * r_f^2$ και το ολοκλήρωμα της περιοχής αυτής γράφεται με τη μορφή:

$$0 < x < r_f$$

$$D_c(II) = 2 * \int_0^{r_f} \frac{\lambda^2 * dx}{\lambda^2 * E_m + (E_f - E_m) * \pi * r_f^2}$$

Άρα το συνολικό ολοκλήρωμα γράφεται με τη μορφή:

$$D_c = \frac{\lambda}{E_c} = \frac{\lambda - 2r_f}{E_m} = 2 * \int_0^{r_f} \frac{\lambda^2 dx}{\lambda^2 E_m + (E_f - E_m) \pi r_f^2} \quad (3.β)$$

ΜΟΝΤΕΛΟ ΜΕ ΟΡΙΖΟΝΤΙΟ ΚΟΙΛΟ ΕΓΚΛΕΙΣΜΑ

Θεωρώντας ότι $d = h = 2r_f$ επίσης προκύπτουν τα: $V = \pi d^2 h / 4 = \pi d^3 / 4$ και $U_f = (\pi d^3 / 4) / \lambda^3 = [\pi ((2r_m)^3 - (2r_f)^3) / 4] / \lambda^3 = (2\pi (r_m^3 - r_f^3)) / \lambda^3$, άρα

$$\lambda^3 = 2 * \pi * \frac{r_m^3 - r_f^3}{U_f} \quad (3.γ.3 \text{ μορφή 1})$$

$$\text{και τελικά: } \lambda = \left(2 * \frac{\pi}{U_f} \right)^{\frac{1}{3}} * (r_m^3 - r_f^3)^{\frac{1}{3}} \quad (3.γ.3 \text{ μορφή 2})$$

Στην περιοχή (I) έχουμε τομή μόνο μήτρας, άρα $A_f(x) = 0$ και το ολοκλήρωμα της περιοχής αυτής καταλήγει στη μορφή:

$$0 < x < \frac{\lambda}{2} - r_m + r_f$$

$$D_c(I) = \frac{\lambda}{E_c} = 2 * \int_0^{\frac{\lambda}{2} - r_m + r_f} \frac{\lambda^2 dx}{\lambda^2 E_m + (E_f - E_m) * 0} = 2 * \frac{\frac{\lambda}{2} - r_m + r_f}{E_m} = \frac{\lambda - 2(r_m - r_f)}{E_m} \quad (3.γ.1)$$

Στην περιοχή (II) έχουμε τομή και μήτρας και εγκλείσματος, άρα $A_f(x) = \pi r_f^2$ και το ολοκλήρωμα της περιοχής αυτής γράφεται με τη μορφή:

$$0 < x < r_f$$

$$D_c(II) = 2 * \int_0^{r_f} \frac{\lambda^2 dx}{\lambda^2 E_m + (E_f - E_m) \pi (r_m^2 - r_f^2)} \quad (3.γ.2)$$

Άρα το συνολικό ολοκλήρωμα γράφεται με τη μορφή:

$$D_c = \frac{\lambda}{E_c} = \frac{\lambda - 2(r_m - r_f)}{E_m} = 2 * \int_0^{r_m - r_f} \frac{\lambda^2 dx}{\lambda^2 E_m + (E_f - E_m) \pi (r_m^2 - r_f^2)} = 2 * \lambda^2 * (r_m - r_f) * \left(\frac{1}{\lambda^2 E_m + (E_f - E_m) \pi (r_m^2 - r_f^2)} \right) \quad (3.γ)$$

Στους πίνακες κάτω από τις αναγραφές «Μοντέλο 3.1», «Μοντέλο 3.2», «Μοντέλο 3.3» και «Μοντέλο 3.4» έχουμε μερικές μετρήσεις για την ελαστικές σταθερές με βάση το παραπάνω μοντέλο.

Μοντέλο 3.1(Κυλινδρικού εγκλείσματος σε κύβο)

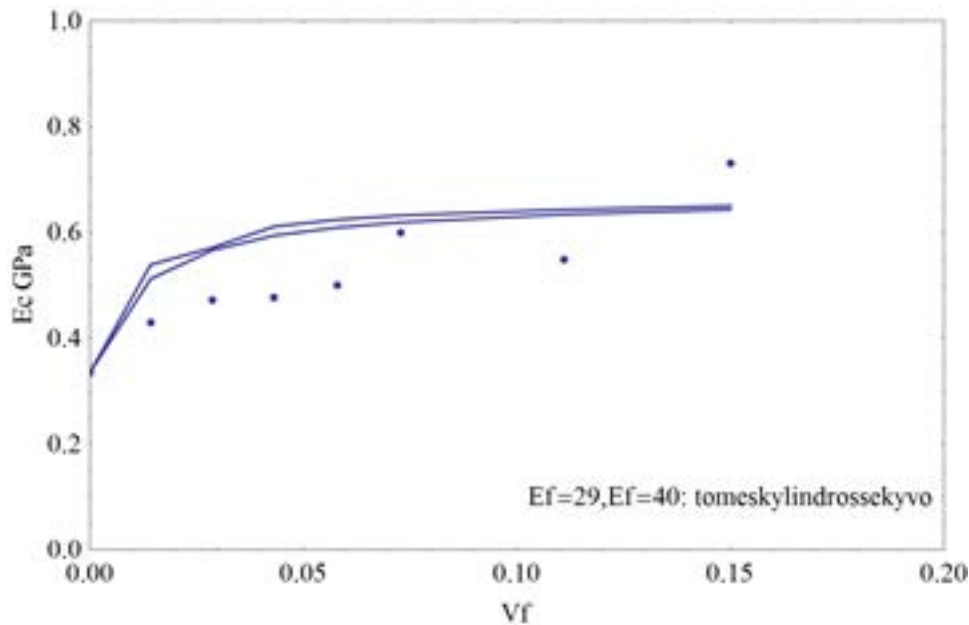
Για $k = 2$
 Για $d = 10nm$
 Για $E_f = 29GPa$
 Πίνακας 3.1.1.1

$M_f(\%)$	U_f	$E_L(GPa)$
0	0	0.335
2	0.0131	0.512
4	0.0262	0.566
6	0.0393	0.594
8	0.0525	0.609
10	0.0655	0.619
15	0.098	0.634
20	0.131	0.643

Για $E_f = 40GPa$

Πίνακας 3.1.1.2

$M_f(\%)$	U_f	$E_L(GPa)$
0	0	0.335
2	0.0131	0.539
4	0.0262	0.571
6	0.0393	0.611
8	0.0525	0.624
10	0.0655	0.632
15	0.098	0.643
20	0.131	0.650



Γράφημα 3.1.1(κυλινδρικό έγκλεισμα σε κύβο τομές) (“ V_f ”=“ U_f ”)

Παρατήρηση: Επειδή η γραμμή που «καταλήγει πιο ψηλά» είναι αυτή που αντιστοιχεί στο $E_f = 40\text{GPa}$, από το γράφημα προκύπτει ότι για $E_f = 40\text{GPa}$ βρισκόμαστε πλησιέστερα στα πειραματικά δεδομένα. Γενικά όμως, υπάρχει σημαντική απόκλιση μεταξύ θεωρητικών τιμών και πειραματικών δεδομένων.

Για $d = 20\text{nm}$

Για $E_f = 29\text{GPa}$

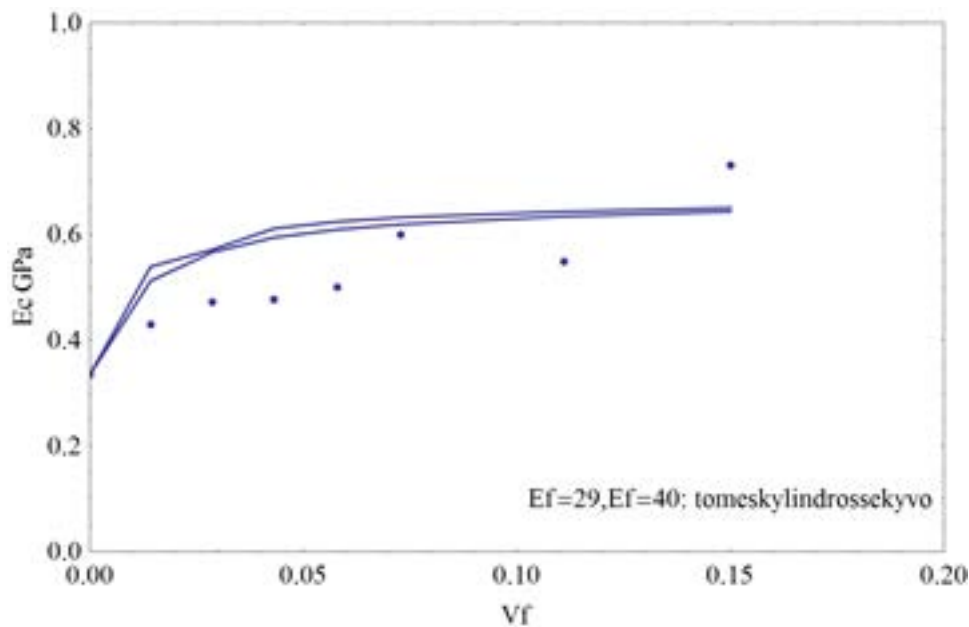
Πίνακας 3.1.2.1

$M_f(\%)$	U_f	$E_c(\text{GPa})$
0	0	0.335
2	0.0131	0.512
4	0.0262	0.567
6	0.0393	0.593
8	0.0525	0.605
10	0.0655	0.619
15	0.098	0.634
20	0.131	0.642

Για $E_f = 40\text{GPa}$

Πίνακας 3.1.2.2

$M_f(\%)$	U_f	$E_L(\text{GPa})$
0	0	0.335
2	0.0131	0.539
4	0.0262	0.571
6	0.0393	0.611
8	0.0525	0.624
10	0.0655	0.632
15	0.098	0.643
20	0.131	0.650



Γράφημα 3.1.2(κυλινδρικό έγκλεισμα σε κύβο τομές)

Παρατήρηση: Ομοίως με παραπάνω προκύπτει ότι τελικά για $E_f = 40\text{GPa}$ βρισκόμαστε πλησιέστερα στα πειραματικά δεδομένα. Και πάλι όμως η απόκλιση μεταξύ θεωρίας και πειράματος είναι πολύ σημαντική. Είναι και πάλι εμφανές ότι το μέτρο ελαστικότητας του σύνθετου, E_c , επηρεάζεται πολύ λίγο από το μέτρο ελαστικότητας του εγκλείματος, E_f , επειδή αυτό βρίσκεται στον παρονομαστή της θεωρητικής έκφρασης όπως συνέβη και προηγουμένως με άλλο μοντέλο.

Για $k = 5$

Για $E_f = 29GPa$

Για $d = 10nm$

Σε αυτή την περίπτωση υπολογίζοντας την τιμή του E_c για $U_f = 0.0131$, ευρέθηκε η τιμή 0.404 Gra, ενώ για $U_f = 0.131$, ευρέθηκε η τιμή 0.417 Gra, γεγονός που αποδεικνύει ότι το μοντέλο δεν αποδίδει για τα πειραματικά δεδομένα της εργασίας μας.

Για $d = 20nm$

Τα ίδια ακριβώς με την προηγούμενη περίπτωση.

Για $E_f = 40 GPa$

Για $d = 10nm$

Τα ίδια ακριβώς με $E_f = 29GPa$

Για $d = 20nm$

Μόνη αλλαγή σε σχέση με τα προηγούμενα για $U_f = 0.131$ εξάγεται η τιμή 0.418 Gra.

Για $k = 10$ και στις 2 περιπτώσεις του μοντέλου εξάγουμε ως αποτέλεσμα $A_{ολ} < A_f$, πράγμα το οποίο δεν ισχύει, γεγονός που σημαίνει ότι δεν μπορούμε να θεωρήσουμε αυτό το μοντέλο.

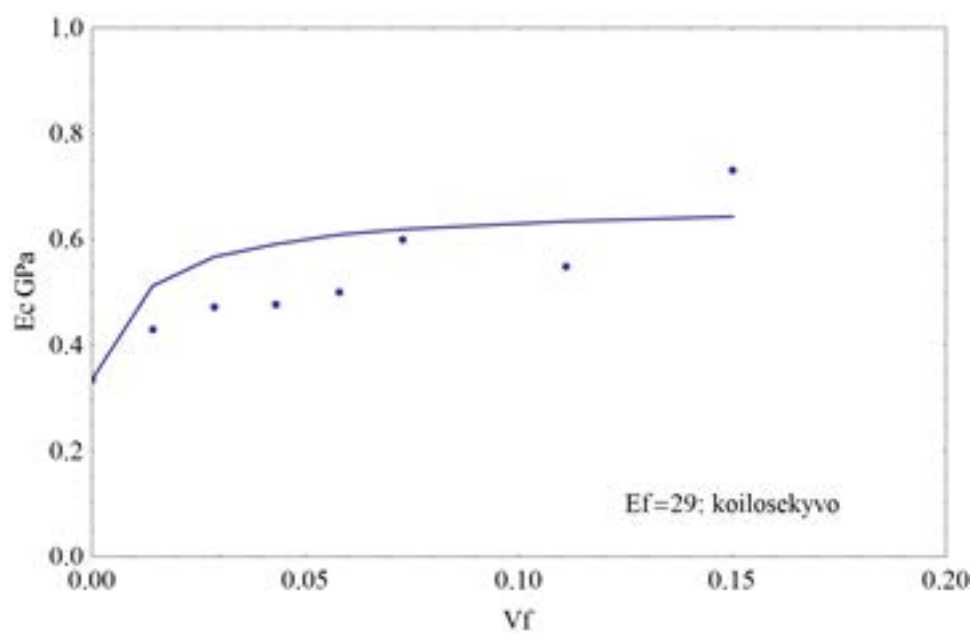
Μοντέλο 3.2(Κοίλου εγκλείσματος σε κύβο)

Για $k = 2$

Για $E_f = 29 \text{ GPa}$

Πίνακας 3.2

$M_f(\%)$	U_f	$E_c(\text{GPa})$
0	0	0.335
2	0.0131	0.512
4	0.0262	0.567
6	0.0393	0.593
8	0.0525	0.605
10	0.0655	0.619
15	0.098	0.634
20	0.131	0.642



Γράφημα 3.2(τομές κοίλο εγκλείσμα σε κύβο) (" V_f "=" U_f ")

Παρατήρηση: Από το γράφημα προκύπτει ότι το μοντέλο είναι δεν «καλό» αφού υπάρχει απόκλιση με τα πειράματα.

$$\text{Για } k = 5$$

$$\text{Για } E_f = 29\text{GPa}$$

Για $U_f = 0.0131$ εξάγεται η τιμή 0.404 GPa, ενώ για $U_f = 0.131$ εξάγεται η τιμή 0.417GPa, γεγονός που αποδεικνύει ότι το μοντέλο δεν αποδίδει.

$$\text{Για } E_f = 40\text{GPa}$$

Τα ίδια με παραπάνω.

Για $k = 10$ και στις 2 εξεταζόμενες περιπτώσεις εξάγεται $A_{ολ} < A_f$, γεγονός που αποδεικνύει ότι δεν μπορούμε και πάλι να εργαστούμε με αυτό το μοντέλο.

Μοντέλο 3.3 (Κυλινδρικού εγκλείσματος σε πρίσμα)

$$\text{Για } k = 2$$

$$\text{Για } d = 10\text{nm}$$

$$\text{Για } E_f = 29\text{GPa}$$

Για $U_f = 0.0655$ εξάγεται η τιμή 0.339 GPa, ενώ για $U_f = 0.098$ εξάγεται η τιμή 0.341 GPa, γεγονός που αποδεικνύει ότι το μοντέλο και πάλι δεν αποδίδει.

$$\text{Για } E_f = 40\text{GPa}$$

Στο δεξί μέλος της εξίσωσης μας εμφανίζεται περίπου η τιμή «59», οπότε διαιρούμενη με το 20 δε μας εμφανίζει τα επιθυμητά αποτελέσματα για την εργασία μας.

$$\text{Για } d = 20\text{nm}$$

$$\text{Για } E_f = 29\text{GPa}$$

Για $U_f = 0.0655$ εξάγεται η τιμή 0.339 GPa, ενώ για $U_f = 0.098$ εξάγεται η τιμή 0.341 GPa, γεγονός που αποδεικνύει ότι το μοντέλο δεν αποδίδει.

$$\text{Για } E_f = 40\text{GPa}$$

Για $U_f = 0.0655$ εξάγεται η τιμή 0.341 GPa, ενώ για $U_f = 0.098$ εξάγεται η τιμή 0.344 GPa, γεγονός που αποδεικνύει ότι το μοντέλο δεν αποδίδει.

$$\text{Για } k = 10$$

$$\text{Για } d = 10\text{nm}$$

Στην πρώτη περίπτωση ($E_f = 29$ Gra) για $U_f = 0.0655$ εξάγεται η τιμή 0.335 Gra, ενώ για $U_f = 0.098$ εξάγεται η τιμή 0.336 Gra, γεγονός που αποδεικνύει ότι το μοντέλο δεν αποδίδει, ενώ στη δεύτερη περίπτωση ($E_f = 40$ Gra), επειδή έχουμε παρατηρήσει ότι το μοντέλο δεν παρουσιάζει μεγάλες διαφορές μεταξύ των 2 αυτών τιμών, συμπεραίνουμε ότι το μοντέλο αυτό δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί.

Για $d = 20\text{nm}$

Στην πρώτη περίπτωση ($E_f = 29$ Gra) για $U_f = 0.0655$ εξάγεται η τιμή 0.335 Gra, ενώ για $U_f = 0.098$ εξάγεται η τιμή 0.336 Gra, γεγονός που αποδεικνύει ότι το μοντέλο δεν αποδίδει, ενώ στη δεύτερη περίπτωση ($E_f = 40$ Gra), επειδή έχουμε παρατηρήσει ότι το μοντέλο δεν παρουσιάζει μεγάλες διαφορές μεταξύ των 2 αυτών τιμών, συμπεραίνουμε ότι το μοντέλο δεν μπορεί να αποδώσει.

Μοντέλο 3.4 (Κοίλου εγκλείσματος σε πρίσμα)

Για $k = 2$

Και στις 2 περιπτώσεις που εξετάζουμε στο δεξί μέλος της εξίσωσης μας εμφανίζεται περίπου η τιμή «59», οπότε διαιρούμενη με το 20 δε μας εμφανίζει τα επιθυμητά αποτελέσματα για την εργασία μας (δηλαδή να συγκλίνουν με τις πειραματικές τιμές).

Για $k = 5$

Και στις 2 περιπτώσεις που εξετάζουμε στο δεξί μέλος της εξίσωσης μας εμφανίζεται η τιμή $2 \cdot (59.70 + \eta) \eta > 0$, οπότε διαιρούμενη με το 50 δε μας εμφανίζει επιθυμητά αποτελέσματα για την εργασία μας.

Για $k = 10$

Και στις 2 περιπτώσεις που εξετάζουμε στο δεξί μέλος της εξίσωσης μας εμφανίζεται η τιμή $2 \cdot (134.33 + \eta) \eta > 0$, οπότε διαιρούμενη με το 100 δε μας εμφανίζει και πάλι επιθυμητά αποτελέσματα για την εργασία μας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΟΥ ΠΡΙΣΜΑΤΟΣ^[9.10]

Παρουσίαση του μοντέλου του πρίσματος: Θεωρούμε το μοντέλο «πρίσμα-σε-πρίσμα», όπου το κυλινδρικό έγκλεισμα(κυλινδρική ίνα) προσομοιώνεται με ορθογωνικό πρίσμα. Το δύσκολο μέρος σε αυτό το μοντέλο είναι να προσδιορίσουμε γεωμετρικά το περιβάλλον διαστήματος της μήτρας, αντιστοιχούμενη σε μια ίνα.

Έτσι, υποθέτουμε ότι το διάστημα από το άκρο της ίνας μέχρι το άκρο της μήτρας ισούται με το διάστημα του πλαϊνού άκρου της ίνας μέχρι το πλαϊνό άκρο της μήτρας.

Κατόπιν, θεωρώντας ότι τα δύο υλικά, που αποτελούν το σύνθετο, είναι ελαστικά και ότι υπάρχει τέλεια πρόσφυση ανάμεσα στην ίνα και στη μήτρα, χωρίζουμε το σύνθετο σε 2 μοντέλα, που αποτελούνται από διαφορετικούς συνδυασμούς των στρώσεων.

Οι εξισώσεις που θα χρησιμοποιηθούν γενικά είναι η εξίσωση της ισορροπίας των δυνάμεων σε κάθε «κομμάτι» του συνθέτου και οι καταστατικές εξισώσεις του

Hooke δηλαδή οι εξισώσεις:

$$\sigma_1 = \varepsilon_1 * E_f \quad (4.α)$$

$$\sigma_2 = \varepsilon_2 * E_m \quad (4.β)$$

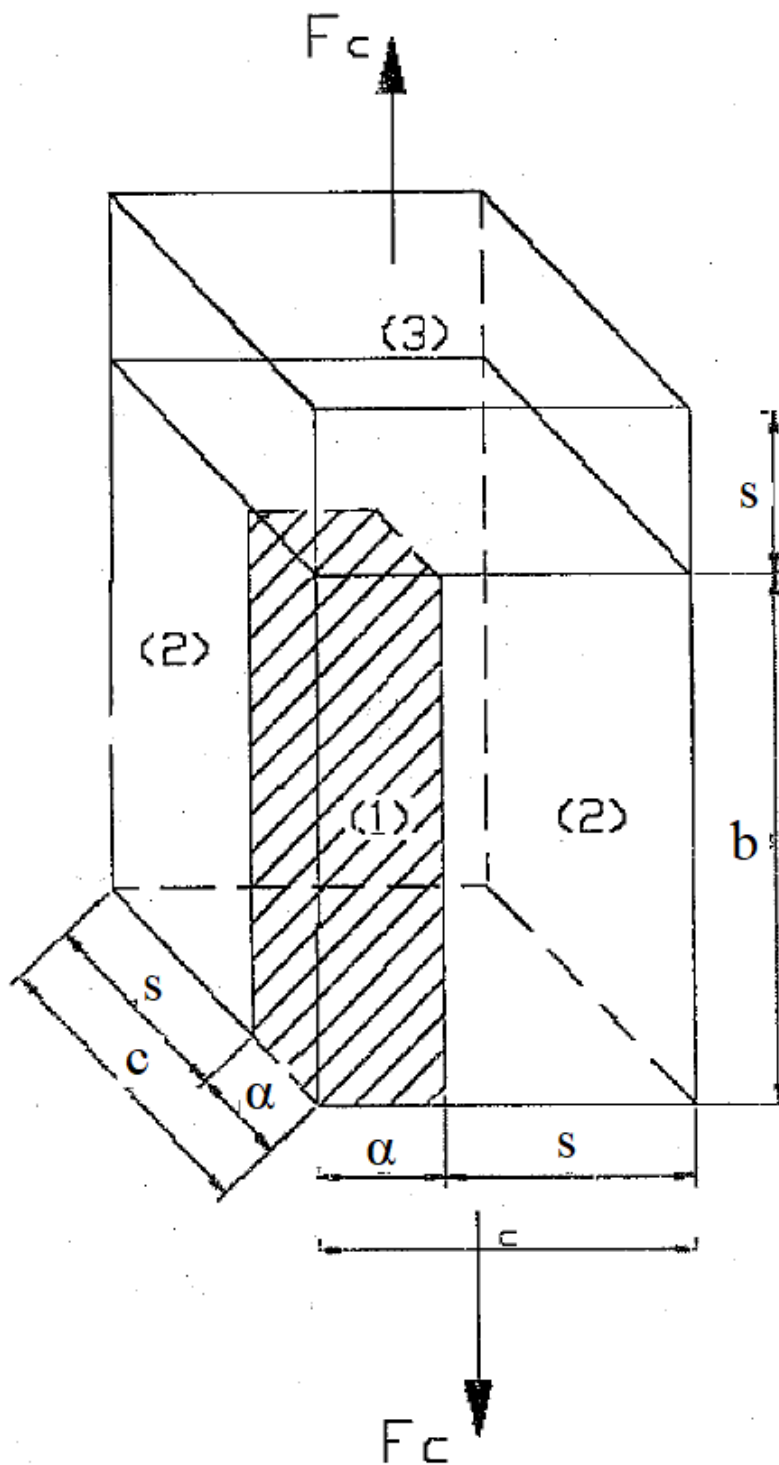
$$\sigma_3 = \varepsilon_3 * E_m \quad (4.γ)$$

$$\sigma_c = \varepsilon_c * E_c \quad (4.δ)$$

Μοντέλο πρώτο:Κάτω από την επίδραση μιας εφελκυστικής δύναμης F_c , ενεργούμενη παράλληλα στην μακριά πλευρά της ίνας (1), το μοντέλο που φαίνεται στο σχήμα μπορεί να θεωρηθεί ότι συνίσταται από μια στρώση μήτρας (2), που περιβάλλει το πρίσμα της ίνας, του οποίου το μήκος είναι ίσο με το μήκος b του πρίσματος της ίνας, και μια δεύτερη στρώση (3) μήτρας, μόνη της, της οποίας το πάχος είναι ίσο με το άκρο-σε-άκρο διάστημα των ινών, $s = c-a$, ίσο με το πλευρά-σε-πλευρά διάστημα των ινών.

Μοντέλο δεύτερο: Κάτω από την επίδραση μιας εφελκυστικής δύναμης F_c , ενεργούμενη παράλληλα στην μακριά πλευρά της ίνας (1), το μοντέλο που φαίνεται στο σχήμα μπορεί να θεωρηθεί ότι συνίσταται από μια στρώση μήτρας (3), που περιβάλλει το πρίσμα της ίνας, του οποίου το μήκος είναι ίσο με το μήκος b του πρίσματος της ίνας, και μια δεύτερη στρώση (2) μήτρας, μόνη της, της οποίας το πάχος είναι ίσο με το άκρο-σε-άκρο διάστημα των ινών, $s = c-a$, ίσο με το πλευρά-σε-πλευρά διάστημα των ινών.

4.1.1 Πρισματικό έγκλεισμα σε πρίσμα προερχόμενο από μετατροπή κυλινδρικό σε διαμήκη φόρτιση. Μοντέλο πρώτο



Σχήμα 4.1.1

$$U_f = \frac{[a^2 * b]}{[c^2 * (b + s)]}$$

Όπου ισχύει $\sigma_c = \varepsilon_c * E_c$, $\sigma_1 = \varepsilon_1 * E_f$, $\sigma_2 = \varepsilon_2 * E_f$, $\sigma_3 = \varepsilon_3 * E_f$ (4.1.1.α),

$$\frac{a}{c} = U_f^{\frac{1}{2}} \text{ για } s \rightarrow 0, b = \lambda * a, b = 10\mu\text{m}, a = \left(\frac{d}{2}\right) * \sqrt{\pi} \text{ (4.1.1.β)}$$

Οι εξισώσεις που θα χρησιμοποιηθούν σε αυτήν την περίπτωση είναι οι εξής:

$$\sigma_c * c^2 = \sigma_3 * c^2 = \sigma_1 * a^2 + \sigma_3 * (c^2 - a^2) \text{ (4.1.1.γ)}$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \text{ (4.1.1.δ)}$$

και λόγω γεωμετρίας του μοντέλου:

$$\varepsilon_c * (b + s) = \varepsilon_1 * b + \varepsilon_3 * s \text{ (4.1.1.ε)}$$

$$E_c = E_m * \left[\frac{E_f * \lambda * U_f + E_m * (\lambda - \lambda * U_f)}{E_f * (U_f^{1/2} - U_f) + E_m * \lambda} \right] \text{ (4.1.1)}$$

Στους πίνακες κάτω από την αναγραφή «Μοντέλο 10» έχουμε κάποιες μετρήσεις για τη μετατροπή του κυλινδρικού εγκλείσματος και στους πίνακες κάτω από την αναγραφή «Μοντέλο 4.1.1» έχουμε πάλι κάποιες μετρήσεις για την περίπτωση του κοίλου εγκλείσματος με βάση το μοντέλο αυτό.

Μοντέλο 4.1.1

Για $E_f = 4GPa$

Για $d = 10nm$

Πίνακας 4.1.1.1

$M_f(\%)$	U_f	$E_c(GPa)$
0	0	0.335
2	0.0131	0.383
4	0.0262	0.430
6	0.0393	0.478
8	0.0525	0.526
10	0.0655	0.574
15	0.098	0.692
20	0.131	0.813

Παρατήρηση: Η μεταβολή του μέτρου ελαστικότητας του σύνθετου στη διαμήκη διεύθυνση παρουσιάζει μια γραμμική μεταβολή συναρτήσει της περιεκτικότητας.

Για $d = 20\text{nm}$

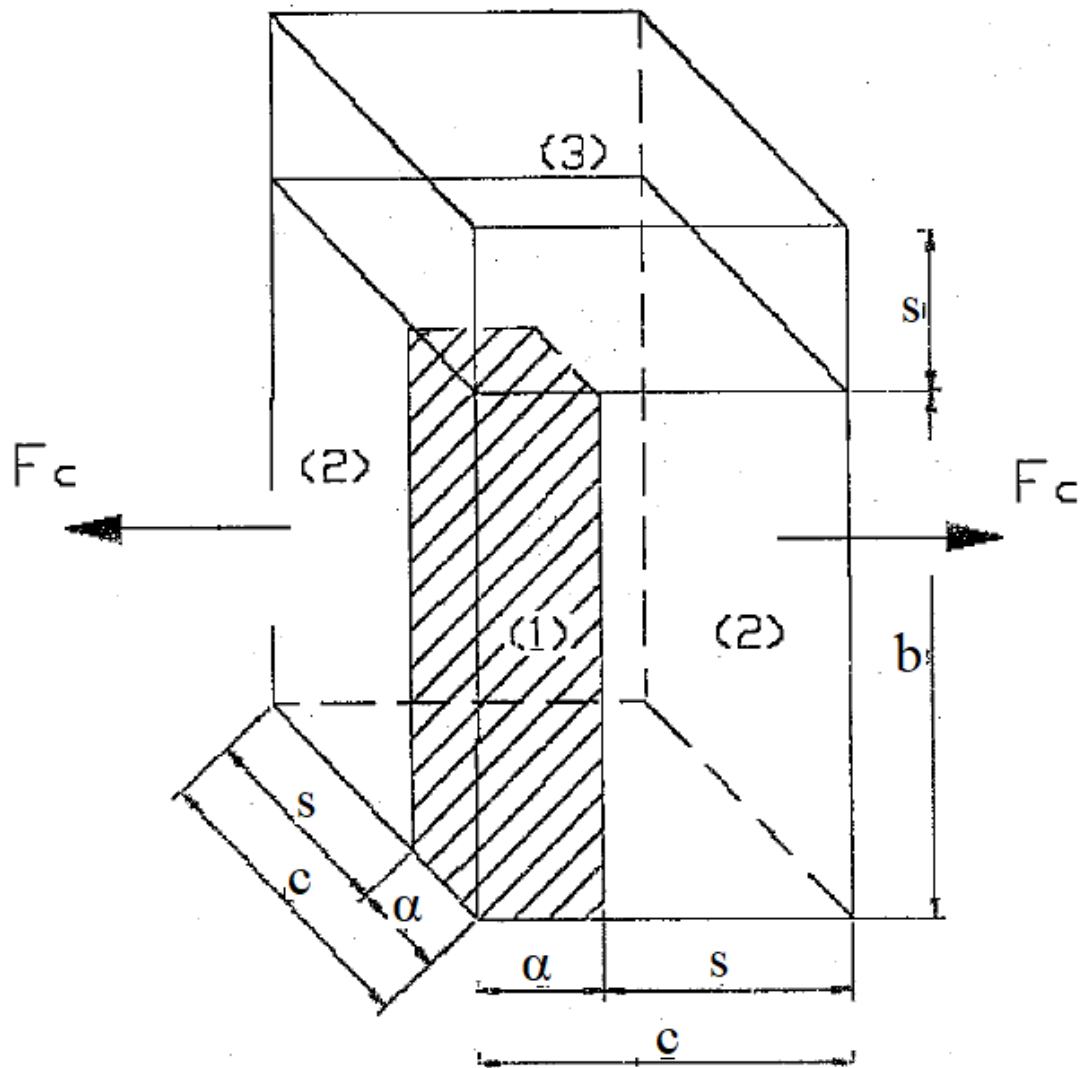
Πίνακας 4.1.1.2

$M_f(\%)$	U_f	$E_c(\text{GPa})$
0	0	0.335
2	0.0131	0.382
4	0.0262	0.430
6	0.0393	0.477
8	0.0525	0.526
10	0.0655	0.572
15	0.098	0.691
20	0.131	0.811

Φαίνεται ότι και πάλι η αύξηση του E_f δεν επηρεάζει σημαντικά το μέτρο, E_c , του σύνθετου.

Σημείωση: Για $E_f = 29\text{GPa}$ δεν μπορέσαμε να εξάγουμε τα επιθυμητά αποτελέσματα και μετά από προσπάθειες η βέλτιστη προσέγγιση των πειραμάτων με ακέραια τιμή E_f ήταν για την τιμή «4».

4.1.2 Πρισματικό έγκλεισμα σε πρίσμα προερχόμενο από κυλινδρικό σε εγκάρσια φόρτιση. Μοντέλο πρώτο



Σχήμα 4.1.2

$$F_1 = F_2, \quad F_c = F_1 + F_3 \quad (4.1.2.\alpha)$$

$$\alpha = \left(\frac{d}{2}\right) * \sqrt{\pi}, \quad \frac{a}{c} = U_f^{1/2} \quad (4.1.2.\beta)$$

$$\sigma_1 * \alpha^2 = \sigma_2 * (c^2 - a^2) \quad (4.1.2.\gamma)$$

$$\varepsilon_c * c = \varepsilon_1 * \alpha + \varepsilon_2 * (c - a) \quad (4.1.2.\delta)$$

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_c, \sigma_1 = \varepsilon_1 * E_f, \sigma_2 = \varepsilon_2 * E_m, \sigma_3 = \varepsilon_3 * E_m, \sigma_c = \varepsilon_c * E_c \quad (4.1.2.\varepsilon)$$

Οι εξισώσεις που θα χρησιμοποιηθούν σε αυτήν την περίπτωση είναι οι εξής:

$$\sigma_1 * a^2 = \sigma_2 * (c^2 - a^2) \quad (4.1.2.\sigma\tau)$$

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_c \quad (4.1.2.\zeta)$$

και λόγω γεωμετρίας του μοντέλου:

$$\varepsilon_c * c = \varepsilon_1 * a + \varepsilon_2 * (c - a) \quad (4.1.2.\eta)$$

$$E_c = U_f * \left[\frac{U_f^{1/2}}{E_f} + \frac{U_f}{\{E_m * (1 + U_f^{1/2})\}} \right]^{-1} + E_m \quad (4.1.2)$$

Στον πίνακα κάτω από τις αναγραφές «Μοντέλο 4.1.2» και Μοντέλο 4.1.4» έχουμε κάποιες μετρήσεις για το E_c με βάση το μοντέλο αυτό.

Σημείωση: ο πίνακας και στις 2 περιπτώσεις είναι ο ίδιος γιατί δεν έχουμε εξάρτηση από το λ , άρα δεν επηρεάζει το τελικό αποτέλεσμα η αλλαγή του α .

Μοντέλο 4.1.2

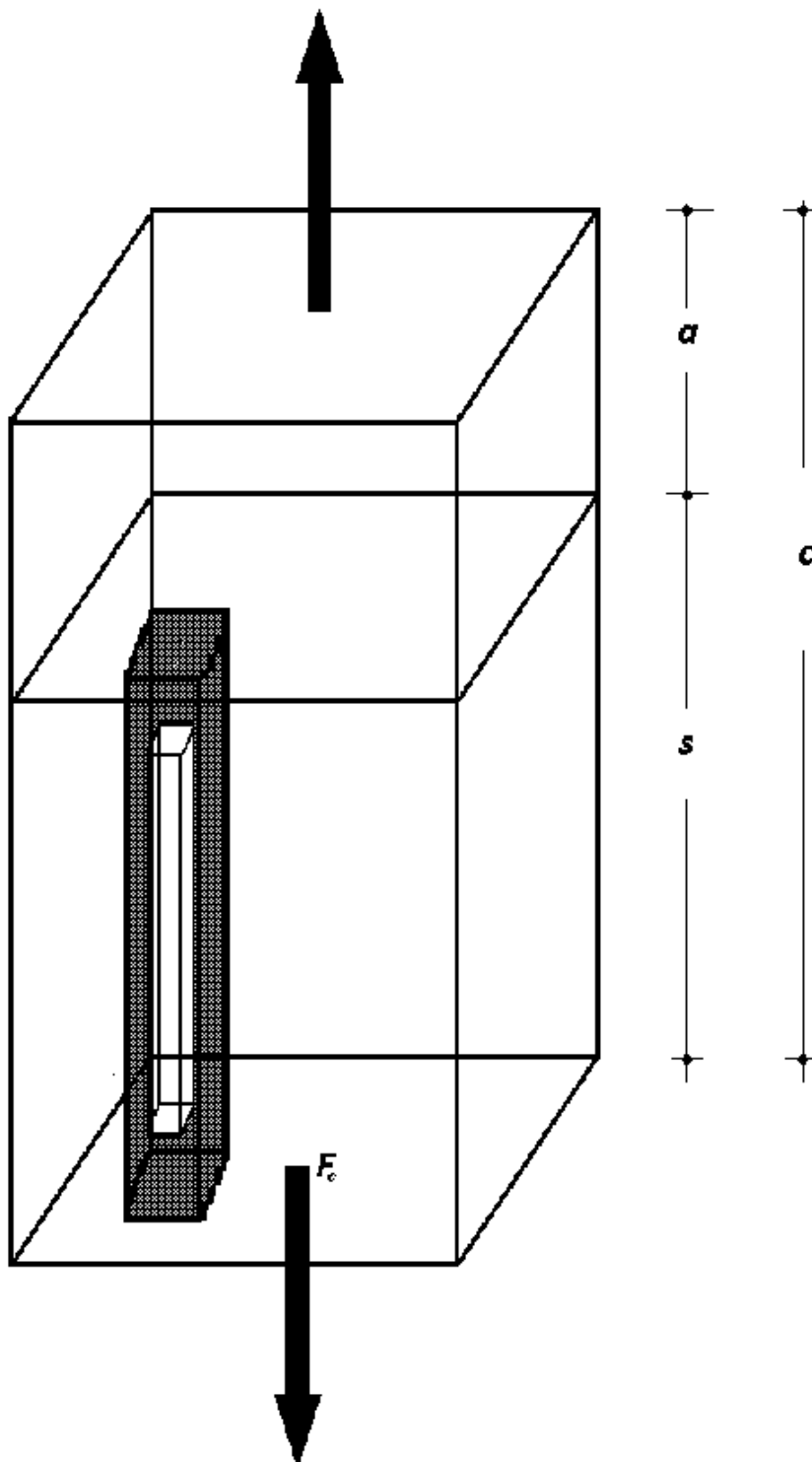
Για $E_f = 4GPa$

Πίνακας 4.1.2

$M_f(\%)$	U_f	$E_c(GPa)$
0	0	0.335
2	0.0131	0.522
4	0.0262	0.578
6	0.0393	0.601
8	0.0525	0.620
10	0.0655	0.634
15	0.098	0.661
20	0.131	0.681

Παρατήρηση: Η μεταβολή του μέτρου ελαστικότητας κατά την εγκάρσια διεύθυνση δεν παρουσιάζει γραμμική συμπεριφορά συναρτήσει της περιεκτικότητας, εν αντιθέσει με αυτήν κατά τη διαμήκη διεύθυνση.

4.1.3 Πρισματικό έγκλεισμα σε πρίσμα προερχόμενο από κοίλο σε
διαμήκη φόρτιση. Μοντέλο πρώτο



Σχήμα 4.1.3

$$E_c = E_m * \left[\frac{E_f * \lambda * U_f + E_m * (\lambda - \lambda * U_f)}{E_f * (U_f^{1/2} - U_f) + E_m * \lambda} \right] \quad (4.1.3)$$

Όπου ισχύει $\sigma_c = \varepsilon_c * E_c$, $\sigma_1 = \varepsilon_1 * E_f$, $\sigma_2 = \varepsilon_2 * E_f$, $\sigma_3 = \varepsilon_3 * E_f$ (4.1.3.1 α,β,γ και δ) ,

$$\frac{a}{c} = U_f^{1/2}, \quad b = \lambda * a, \quad b = 10\mu\text{m}, \quad a = \left(\frac{1}{2}\right) * \sqrt{\pi * (d_2^2 - d_1^2)} \quad (4.1.3.2 \alpha, \beta, \gamma \text{ και } \delta)$$

Ομοίως με 4.1.1 και 4.1.2 και στους πίνακες με την αναγραφή «Μοντέλο 4.1.3» έχουμε θεωρητικά αποτελέσματα για το μοντέλο αυτό.

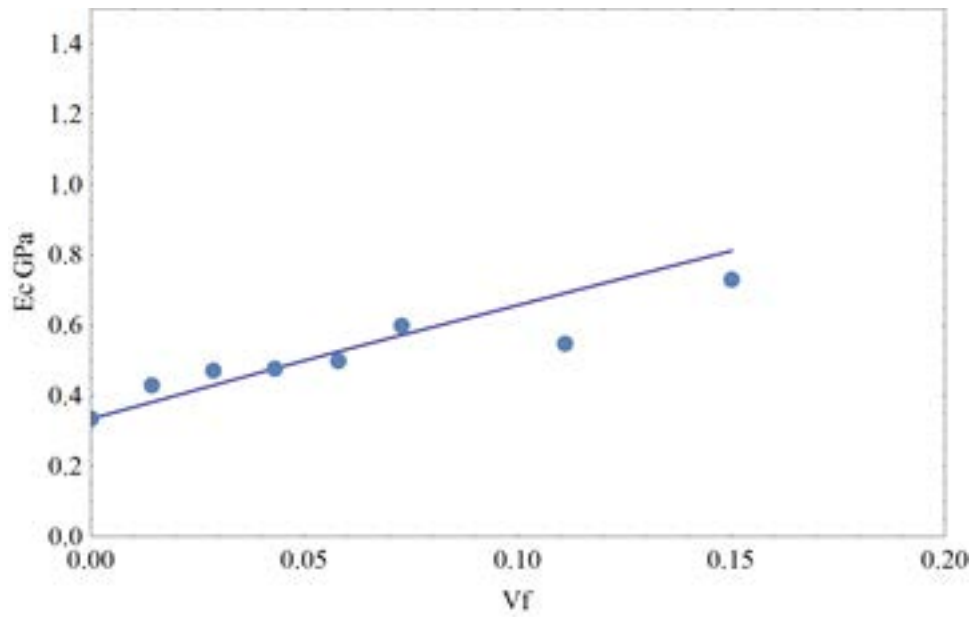
Μοντέλο 4.1.3

Για $E_f = 4\text{GPa}$

Πίνακας 4.1.3

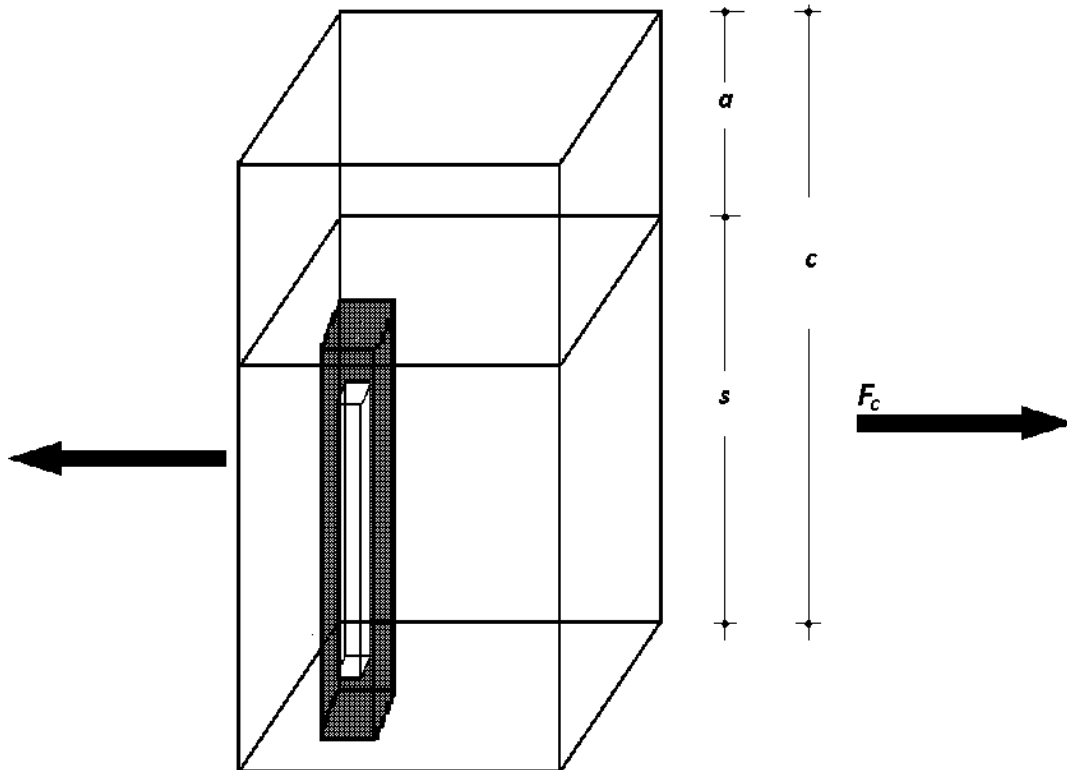
$M_f(\%)$	U_f	$E_c(\text{GPa})$
0	0	0.335
2	0.0131	0.382
4	0.0262	0.430
6	0.0393	0.478
8	0.0525	0.526
10	0.0655	0.573
15	0.098	0.692
20	0.131	0.812

Παρατήρηση: Και εδώ η μεταβολή του μέτρου ελαστικότητας του σύνθετου συναρτήσει της περιεκτικότητας είναι γραμμική. Οι προκύπτουσες τιμές παρουσιάζουν πολύ μικρές διαφορές σε σχέση με αυτές χωρίς κοίλο τμήμα. Η σύγκλιση μεταξύ θεωρητικών και πειραματικών τιμών είναι καλή, ιδίως στις χαμηλές και μεσαίες περιεκτικότητες.



Γράφημα 4.β: μοντέλο πρίσματος (μοντέλο 4.1.3) (" V_f " = " U_f ")

4.1.4 Πρισματικό έγκλεισμα σε πρίσμα μετατραπόμενο από κοίλο εγκάρσια φόρτιση μοντέλο πρώτο



Σχήμα 4.1.4

Οι εξισώσεις που θα χρησιμοποιηθούν για το παρόν μοντέλο είναι οι εξής:

$$F_1 = F_2, , F_c = F_1 + F_3, \quad (4.1.4.1 \text{ α και β})$$

$$\alpha = \left(\frac{1}{2}\right) * \sqrt{\pi * (d_2^2 - d_1^2)} \quad \frac{a}{c} = U_f^{1/2} \quad (4.1.4.2 \text{ α και β})$$

$$\sigma_1 * \alpha^2 = \sigma_2 * (c^2 - a^2), \varepsilon_c * c = \varepsilon_1 * \alpha + \varepsilon_2 * (c - a) \quad (4.1.4.3 \text{ α,β και γ})$$

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_c, \sigma_1 = \varepsilon_1 * E_f, \sigma_2 = \varepsilon_2 * E_m, \sigma_3 = \varepsilon_3 * E_m, \sigma_c = \varepsilon_c * E_c \quad (4.1.4.4 \text{ α,β,γ,δ και ε})$$

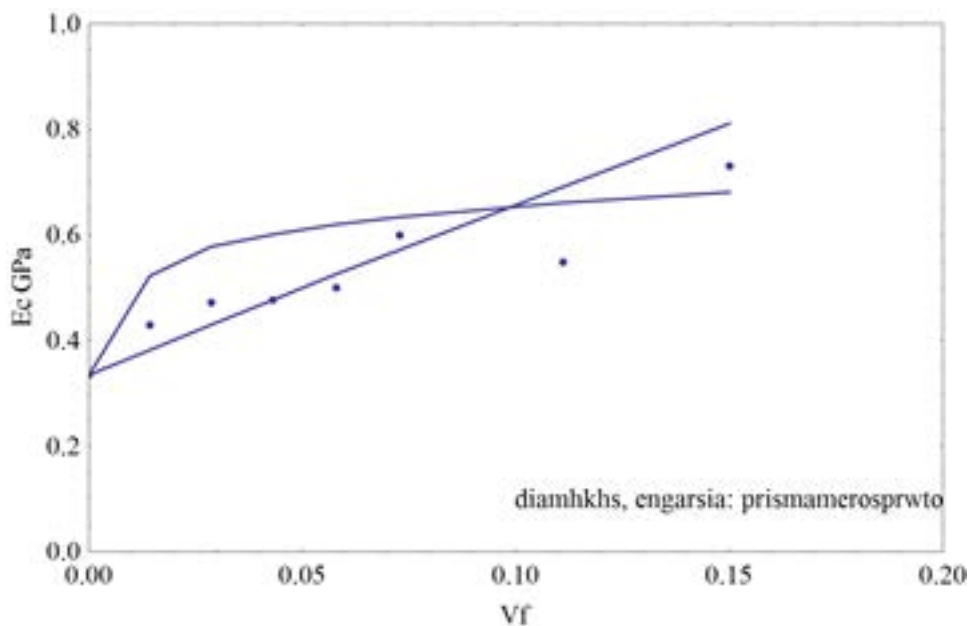
$$E_c = U_f * \left[\left(\frac{U_f^2}{E_f} \right) + \left(\frac{U_f}{E_m} \right) * \left(\frac{1}{1+U_f^2} \right) \right]^{-1} + E_m \quad (4.1.4)$$

Μοντέλο 4.1.4

Για $E_f = 4GPa$

Πίνακας 4.1.4

$M_f(\%)$	U_f	$E_c(GPa)$
0	0	0.335
2	0.0131	0.522
4	0.0262	0.578
6	0.0393	0.601
8	0.0525	0.620
10	0.0655	0.634
15	0.098	0.661
20	0.131	0.681

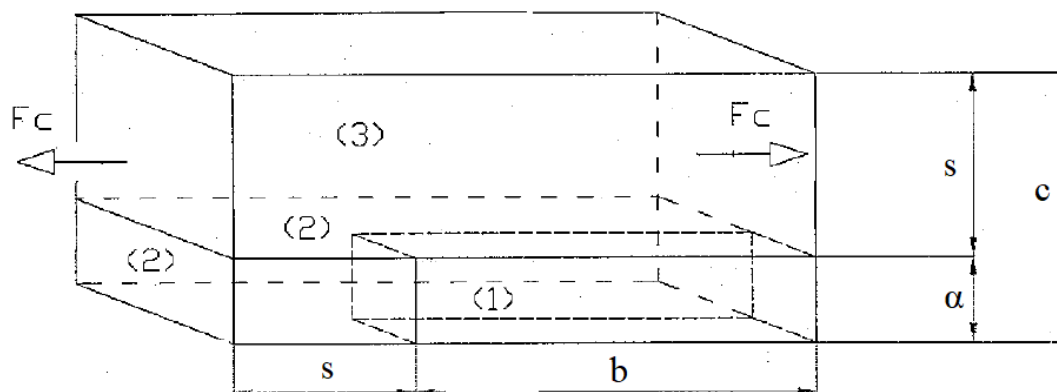


Γράφημα 4.α:μοντέλο πρίσματος(μοντέλα 4.1.1, 4.1.2 και 4.1.4)(“ V_f ”=“ U_f ”)

Παρατήρηση: Γενικώς, τα μοντέλα 4.1.2 και 4.1.4, τα οποία δεν παρουσιάζουν γραμμική μεταβολή συναρτήσεως της κατ’ όγκον περιεκτικότητας συγκλίνουν με τα πειραματικά δεδομένα, ενώ το μοντέλο 4.1.1, το οποίο παρουσιάζει γραμμική μεταβολή για μεγαλύτερες τιμές του U_f συγκλίνει λιγότερο.

Παρατήρηση: Από το γράφημα προκύπτει ότι το υπομοντέλο είναι αρκετά «καλό», αφού συγκλίνει πολύ με τα πειραματικά δεδομένα.

4.2.1 Πρισματικό έγκλεισμα σε πρίσμα προερχόμενο από κυλινδρικό σε διαμήκη φόρτιση. Μοντέλο δεύτερο



Σχήμα 4.2.1

Οι εξισώσεις που θα χρησιμοποιηθούν σε αυτήν την περίπτωση είναι οι εξής:

$$\sigma_c * c^2 = \sigma_3 * c^2 = \sigma_1 * a^2 + \sigma_3 * (c^2 - a^2) \quad (4.2.1.1)$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \quad (4.2.1.2)$$

και λόγω γεωμετρίας του μοντέλου:

$$\varepsilon_c * (b + s) = \varepsilon_1 * b + \varepsilon_2 * s \quad (4.2.1.3)$$

Όπου: $s = c - a$

$$E_c = \left[\frac{1}{U_f^{-1/2} - 1} \right] * \left[\left(\frac{1}{E_f} \right) + \frac{U_f^{-1/2} - 1}{[(\lambda + U_f^{-1/2} - 1) * E_m]} \right]^{-1} + \left[\frac{\lambda + U_f^{-1/2} - 2}{\{(\lambda + U_f^{-1/2} - 1) * (U_f^{-1/2} - 1)\}} \right] * E_m \quad (4.2.1)$$

Μοντέλο 4.2.1

Για $E_f = 3GPa$

Για $d = 10nm$

Πίνακας 4.2.1.1

$M_f(\%)$	U_f	$E_c(GPa)$
0	0	0.335
2	0.0131	0.412
4	0.0262	
6	0.0393	
8	0.0525	
10	0.0655	
15	0.098	
20	0.131	1.244

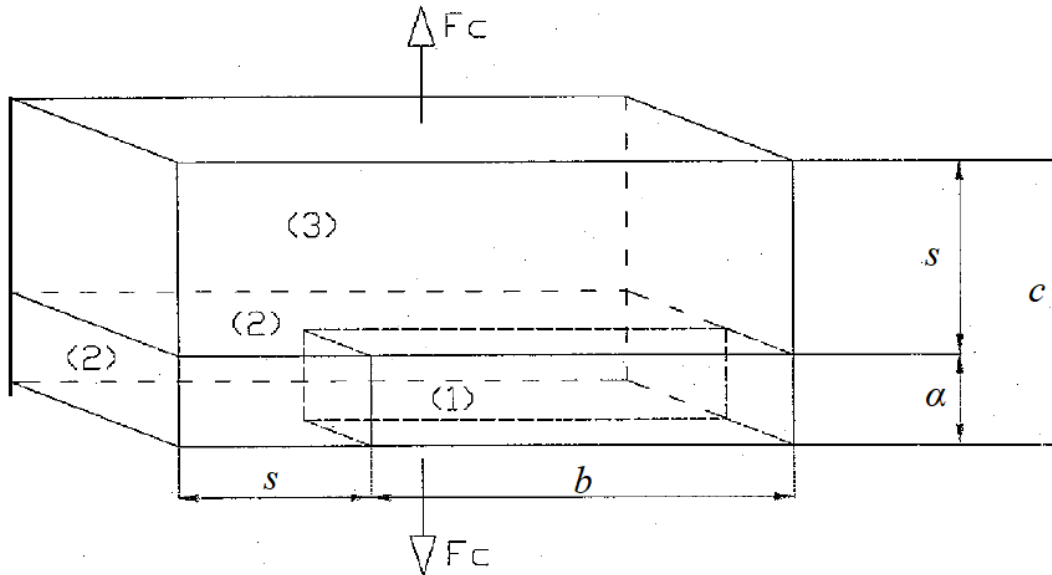
Για $d = 20nm$

Πίνακας 4.2.2.2

$M_f(\%)$	U_f	$E_c(GPa)$
0	0	0.335
2	0.0131	0.392
4	0.0262	
6	0.0393	
8	0.0525	
10	0.0655	
15	0.098	
20	0.131	1.860

Παρατήρηση: Οι θεωρητικές τιμές αποκλίνουν πολύ από τις πειραματικές όσο αυξάνει η κατ' όγκον περιεκτικότητα U_f . Η μεγαλύτερη διάμετρος παρέχει υψηλότερες τιμές όσο αυξάνει η U_f . Η μεταβολή είναι γραμμική.

4.2.2 Πρισματικό έγκλεισμα σε πρίσμα προερχόμενο από κυλινδρικό σε εγκάρσια φόρτιση. Μοντέλο δεύτερο



Σχήμα 4.2.2

$$F_1 = F_2, F_c = F_1 + F_3 \quad (4.2.2.α),$$

$$\alpha = \left(\frac{d}{2}\right) * \sqrt{\pi}, \lambda = \frac{b}{a}, \frac{a}{c} = U_f^{1/2} \quad (4.2.2.β),$$

$$\varepsilon_c * (b + c - a) = \varepsilon_1 * b + \varepsilon_2 * (c - a) \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_c \quad (4.2.2.γ)$$

$$E_c = E_m * \frac{[E_f * \lambda * U_f^{1/2} + E_m * (\lambda - \lambda * U_f^{1/2} + U_f^{-1/2} - 1)]}{[E_f * (\lambda * U_f^{1/2} - \lambda * U_f) + E_m * (\lambda - \lambda * U_f^{1/2} + U_f^{1/2} - 1)]} \quad (4.2.2)$$

Στους πίνακες κάτω από τις αναγραφές «Μοντέλο 4.2.2» και «Μοντέλο 4.2.4» υπάρχουν καποιες μετρήσεις για το E_c για το κυλινδρικό και το κοίλο μετατραπόμενο έγκλεισμα αντίστοιχα με βάση το μοντέλο αυτό.

Μοντέλο 4.2.2

Για $E_f = 3GPa$

Για $d = 10nm$

Πίνακας 4.2.2.1

$M_f(\%)$	U_f	$E_L(GPa)$
0	0	0.335
2	0.0131	0.357
4	0.0262	
6	0.0393	
8	0.0525	
10	0.0655	
15	0.098	
20	0.131	0.480

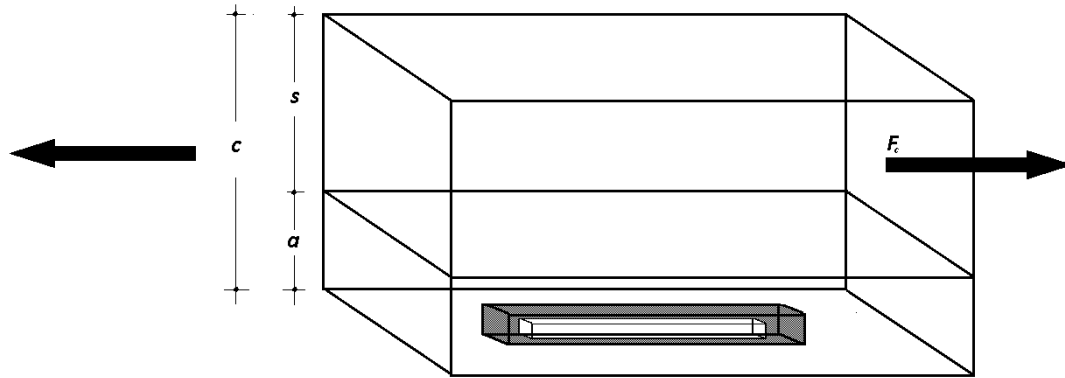
Για $d = 20 nm$

Πίνακας 4.2.2.2

$M_f(\%)$	U_f	$E_L(GPa)$
0	0	0.335
2	0.0131	0.357
4	0.0262	
6	0.0393	
8	0.0525	
10	0.0655	
15	0.098	
20	0.131	0.447

Παρατήρηση: Η μεταβολή του μέτρου ελαστικότητας του σύνθετου φαίνεται μη γραμμική και είναι μικρή συναρτήσει της περιεκτικότητας. Η αύξηση της διαμέτρου φαίνεται ότι δε δημιουργεί μεγάλες μεταβολές. Το εύρος μεταβολής των τιμών του E_c είναι πολύ μικρό.

4.2.3 Πρισματικό έγκλεισμα σε πρίσμα προερχόμενο από κοίλο σε διαμήκη φόρτιση. Μοντέλο δεύτερο



Σχήμα 4.2.3

Οι εξισώσεις που θα χρησιμοποιηθούν για το παρόν μοντέλο είναι οι εξής:

$$F_1 = F_2, F_c = F_1 + F_3 \quad (4.2.3.1 \text{ α και β}),$$

$$\sigma_1 * \alpha^2 = \sigma_2 * (c^2 - a^2), \sigma_1 = \varepsilon_1 * E_f, \sigma_2 = \varepsilon_2 * E_m, \sigma_3 = \varepsilon_3 * E_m, \sigma_c = \varepsilon_c * E_c,$$

$$\varepsilon_c * c = \varepsilon_1 * \alpha + \varepsilon_2 * (c - a), \varepsilon_3 = \varepsilon_c, \quad (4.2.3.2 \text{ α, β, γ, δ, ε, στ και ζ})$$

$$E_c = \left[\frac{1}{U_f^{-1/2} - 1} \right] * \left[\left(\frac{1}{E_f} \right) + \frac{U_f^{-1/2} - 1}{\left[(\lambda + U_f^{-1/2} - 1) * E_m \right]} \right]^{-1} + \left[\frac{\lambda + U_f^{-1/2} - 2}{\left\{ (\lambda + U_f^{-1/2} - 1) * (U_f^{-1/2} - 1) \right\}} \right] * E_m \quad (4.2.3)$$

$$\frac{a}{c} = U_f^{1/2}, b = \lambda * a, a = (1/2) * \sqrt{\pi * (d_2^2 - d_1^2)} \quad (4.2.3.3 \text{ α, β και γ})$$

$$b = 10\mu\text{m}$$

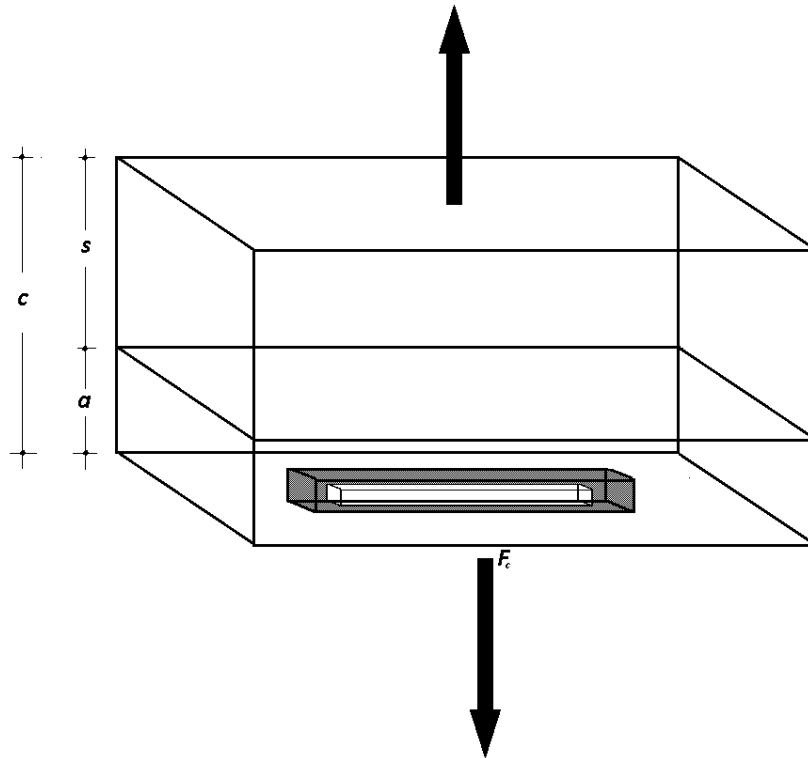
Για $d_2 = 20\text{nm}$ και $d_1 = 10\text{nm}$

Πίνακας 4.2.3

$M_f(\%)$	U_f	$E_l(\text{GPa})$
0	0	0.335
2	0.0131	0.392
4	0.0262	
6	0.0393	
8	0.0525	
10	0.0655	
15	0.098	
20	0.131	1.860

Παρατήρηση: Η μεταβολή του E_c είναι γραμμική. Αυξάνει πολύ συναρτήσει της περιεκτικότητας. Η σύγκλιση πειραματικών και θεωρητικών αποτελεσμάτων φαίνεται να υπάρχει μόνο στις χαμηλές τιμές.

4.2.4 Πρισματικό έγκλεισμα σε πρίσμα προερχόμενο από κοίλο σε εγκάρσια φόρτιση. Μοντέλο δεύτερο



Σχήμα 4.2.4

Οι εξισώσεις που θα χρησιμοποιηθούν για το παρόν μοντέλο είναι οι εξής:

$$F_1 = F_2, F_c = F_1 + F_3 \quad (4.2.4.1 \text{ α και β}),$$

$$\alpha = \left(\frac{1}{2}\right) * \sqrt{\pi * (d_2^2 - d_1^2)}, \lambda = \frac{b}{a}, b = 10\mu\text{m} \quad (4.2.4.2 \text{ α και β}),$$

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_c, \varepsilon c * (b + c - a) = \varepsilon_1 * b + \varepsilon_2 * (c - a) \quad (4.2.4.3 \text{ α και β}),$$

$$E_c = E_m * \frac{\left[E_f * \lambda * U_f^{\frac{1}{2}} + E_m * \left(\lambda - \lambda * U_f^{\frac{1}{2}} + U_f^{-\frac{1}{2}} - 1 \right) \right]}{\left[E_f * \left(\lambda * U_f^{\frac{1}{2}} - \lambda * U_f \right) + E_m * \left(\lambda - \lambda * U_f^{\frac{1}{2}} + U_f^{\frac{1}{2}} - 1 \right) \right]} \quad (4.2.4)$$

Μοντέλο 4.2.4

Για $E_f = 3GPa$

$d_1 = 20nm, d_2 = 10nm$

Πίνακας 4.2.4

$M_f(\%)$	U_f	$E_c(\text{GPa})$
0	0	0.335
2	0.0131	0.357
4	0.0262	
6	0.0393	
8	0.0525	
10	0.0655	
15	0.098	
20	0.131	0.480

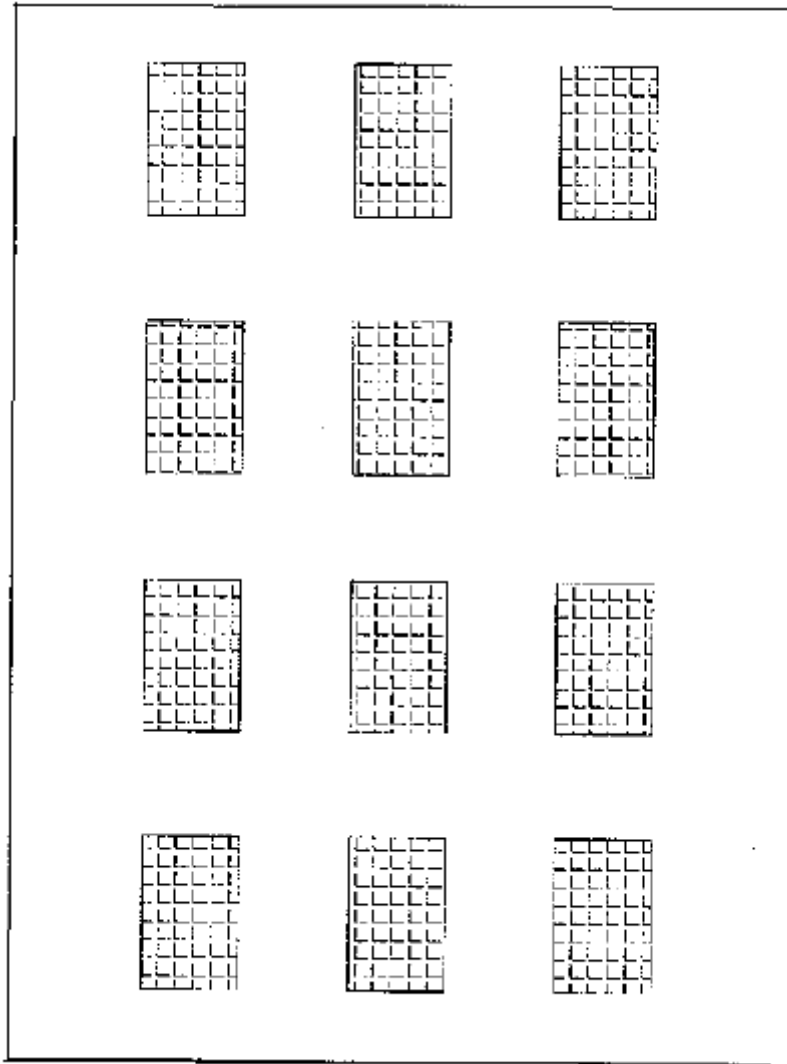
Παρατήρηση: Για το μοντέλο 4.2 υπάρχει μεγάλη απόκλιση από τα πειραματικά αποτελέσματα, σε μεσαίες και υψηλότερες περιεκτικότητες. Η μεταβολή είναι μη γραμμική. Το εύρος των τιμών είναι μικρό όπως και στην περίπτωση του μη κοίλου εγκλείσματος, οπότε κρίναμε πως δεν υπάρχει νοήμα να σχεδιαστούν τα αντίστοιχα γραφήματα.

Γενική παρατήρηση για το λ: Το λ είναι η αντίστροφη εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η πρώτη διαγώνιος του εγκλείσματος με την πλευρά μήκους α του εγκλείσματος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΜΟΝΤΕΛΟ ΙΣΟΔΥΝΑΜΗΣ ΙΝΑΣ^[9.2]

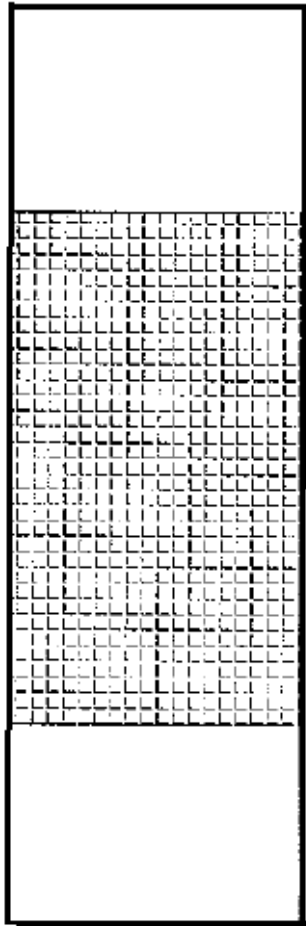
5.1 Μοντέλο της ισοδύναμης ίνας πρώτη προσέγγιση

Παρουσίαση του μοντέλου της ισοδύναμης ίνας. Πρώτη προσέγγιση(5.1)^[9.2]: Υποθέτουμε ότι αντικείμενο της εργασίας μας είναι ένα σύνθετο υλικό που περιέχει διακεκομμένες ίνες συγκεκριμένης διεύθυνσης όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:

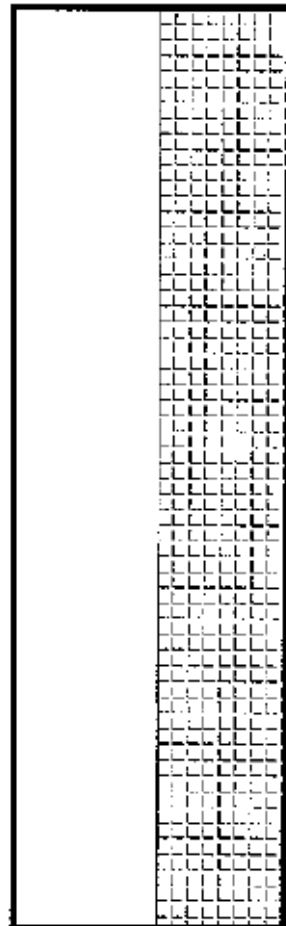


Σχήμα 5.1.1

Αν εργαστούμε με ένα αντιπροσωπευτικό στοιχείο του συνθέτου, τότε θα έχουμε το στοιχείο του παρακάτω σχήματος:



Σχήμα 5.1.2.1



Σχήμα 5.1.2.2

Σχήμα 5.1.2

Με μετασχηματισμό αυτού του στοιχείου όπως φαίνεται στα σχήματα 5.1.2.1 και 5.1.2.2 δημιουργώντας το στοιχείο του σχήματος 5.1.2.2, το οποίο περιέχει ένα ισοδύναμο έγκλεισμα:

Το πραγματικό σύστημα αποτελείται από μήτρα και έγκλεισμα με E_f, E_m, U_f, U_m , ενώ το ισοδύναμο έγκλεισμα αποτελείται από μήτρα και ισοδύναμο έγκλεισμα $E_{f,eq}, E_m, U_{f,eq}, U_{m,eq}$.

Υπολογισμός μέτρου ελαστικότητας και λόγου Poisson του ισοδύναμου εγκλείματος.

Υποθέτοντας ότι το γινόμενο του λόγου Poisson επί την κατ' όγκον περιεκτικότητα σε έγκλεισμα είναι αναλλοίωτο και στο αρχικό και στο ισοδύναμο έγκλεισμα και το γινόμενο του μέτρου ελαστικότητας επί την κατ' όγκον περιεκτικότητα σε έγκλεισμα είναι αναλλοίωτο και στο αρχικό και στο ισοδύναμο έγκλεισμα εξάγουμε τις εξής σχετικές εξισώσεις:

$$v_f * U_f = v_{f,eq} * U_{f,eq} \quad (5.1.γ) \quad \text{και} \quad E_f * U_f = E_{f,eq} * U_{f,eq} \quad (5.1.δ)$$

$$\text{με } U_{f,eq} = U_f * (1+R) \quad (5.1.ε) \quad \text{και} \quad R = \frac{1-S}{S} \quad (5.1.στ), \quad \text{όπου } S = \frac{l_f}{l} \quad (5.1.ζ)$$

$$\text{και } R = \frac{l_m}{l} \quad (5.1.η)$$

Υπολογισμός του διαμήκους και εγκάρσιου μέτρου ελαστικότητας ινώδους σύνθετου υλικού.

Θεωρούμε ότι το έγκλεισμα με το τμήμα της μήτρας είναι σύνδεση δύο ελατηρίων σε σειρά που παρέχουν το ισοδύναμο έγκλεισμα όπως φαίνεται στα σχήματα 5.1.2.1 και 5.1.2.2 .

Το διάμηκες μέτρο ελαστικότητας E_L ινώδους συνθέτου υλικού εξάγεται από τη σχέση:

$$\frac{1}{E_L} = \frac{U_f}{E_f} + \frac{U_m}{E_m} \quad (5.1.α.1)$$

και για το ισοδύναμο που υποθέτουμε:

$$\frac{1}{E_{L,eq}} = \frac{U_{f,eq}}{E_f} + \frac{U_{m,eq}}{E_m} \quad (5.1.α.2)$$

Το εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας εξάγεται από τη σχέση:

$$\frac{1-\nu_{TT}}{E_T} - 2 * \frac{\nu_{LT}^2}{E_L} = \left[\frac{(1-\nu_f-2*\nu_f^2)}{E_f} \right] * U_f + \left[\frac{1-\nu_m-2*\nu_m^2}{E_m} \right] * U_m \quad (5.1.β.1)$$

και για το ισοδύναμο:

$$\frac{1-v_{TT,eq}}{E_{T,eq}} - 2 * \frac{v_{LT,eq}^2}{E_{L,eq}} = \left[\frac{(1-v_{f,eq}-2*v_{f,eq}^2)}{E_{f,eq}} \right] * U_{f,eq} + \left[\frac{1-v_m-2*v_m^2}{E_m} \right] * U_{m,eq} \quad (5.1.\beta.2)$$

Από το νόμο των φάσεων έχουμε:

$$v_{LT} = v_f * U_f + v_m * U_m \quad (5.1.\gamma.1)$$

ενώ για το ισοδύναμο έχουμε:

$$v_{LT,eq} = v_f * U_{f,eq} + v_m * U_{m,eq} \quad (5.1.\gamma.2)$$

Εφ' όσον η σύνδεση των 2 φάσεων είναι σε σειρά από τον αντίστροφο νόμο των φάσεων παίρνουμε:

$$\frac{1}{v_{TT}} = \frac{U_f}{v_f} + \frac{U_m}{v_m} \quad (5.1.\delta.1)$$

και για το ισοδύναμο:

$$\frac{1}{v_{TT,eq}} = \frac{U_{f,eq}}{v_{f,eq}} + \frac{U_{m,eq}}{v_m} \quad (5.1.\delta.2)$$

Υπολογισμός του μέτρου διάτμησης στο επίπεδο ινώδους σύνθετου υλικού.

Το μέτρο διάτμησης στο επίπεδο δίνεται από την εξής σχέση:

$$G_{LT} = G_m * \frac{[(G_f+G_m)+(G_f-G_m)*U_f]}{[(G_f+G_m)-(G_f-G_m)*U_f]} \quad (5.1.\epsilon.1)$$

$$\text{όπου } G_f = \frac{E_f}{[2*(1+v_f)]}$$

$$\text{και } G_m = \frac{E_m}{[2*(1+v_m)]}$$

Άρα για το ισοδύναμο θα ισχύει:

$$G_{LT,eq} = G_m * \frac{[(G_{f,eq}+G_m)+(G_{f,eq}-G_m)*U_{f,eq}]}{[(G_{f,eq}+G_m)-(G_{f,eq}-G_m)*U_{f,eq}]} \quad (5.1.\epsilon.2)$$

$$\text{όπου } G_{f,eq} = \frac{E_{f,eq}}{[2*(1+v_{f,eq})]}$$

Στους πίνακες κάτω από την αναγραφή «Μοντέλο 5.1» έχουμε μετρήσεις για τις ελαστικές σταθερές με βάση το παραπάνω μοντέλο.

Μοντέλο 5.1

Για $S = 0.45$

$$E_f = 29 \text{ GPa}$$

$$\nu_f = 0.2$$

$$\nu_m = 0.35$$

Πίνακας 5.1.1.1

M_f (%)	U_f	$U_{f,eq}$	G_{LT} (GPa)	$G_{LT,eq}$ (GPa)
0	0	0	0.124	0.124
2	0.0131	0.029	0.127	0.131
4	0.0262	0.058	0.131	0.139
6	0.0393	0.087	0.134	0.147
8	0.0525	0.116	0.138	0.155
10	0.0655	0.147	0.141	0.165
15	0.098	0.218	0.150	0.190
20	0.131	0.29	0.161	0.220

Πίνακας 5.1.1.2

M_f (%)	U_f	$U_{f,eq}$	E_L (GPa)	$E_{L,eq}$ (GPa)
0	0	0	0.335	0.335
2	0.0131	0.029	0.339	0.345
4	0.0262	0.058	0.344	0.355
6	0.0393	0.087	0.349	0.366
8	0.0525	0.116	0.353	0.378
10	0.0655	0.147	0.358	0.391
15	0.098	0.218	0.370	0.425
20	0.131	0.29	0.385	0.467

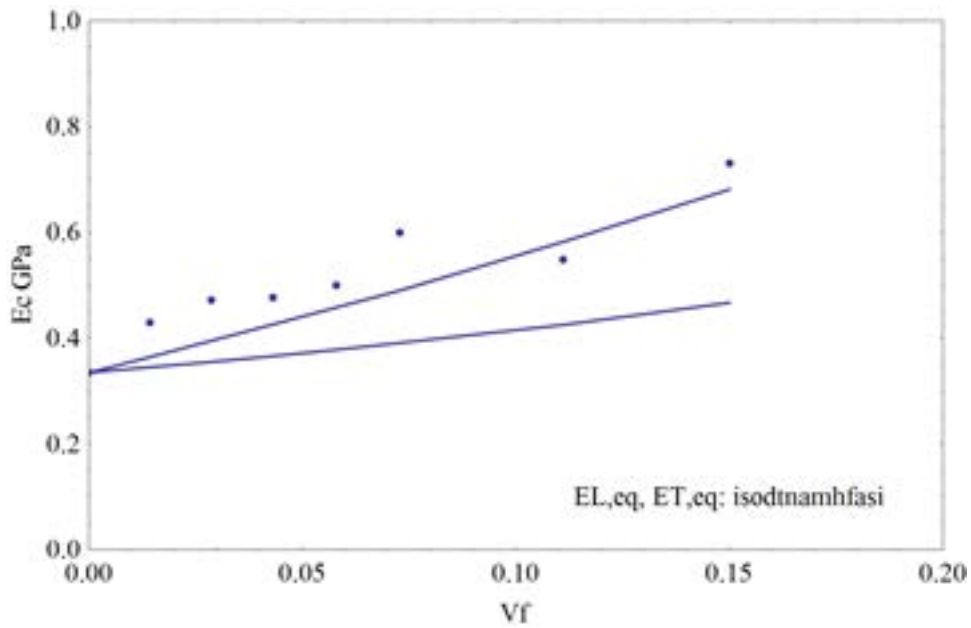
Πίνακας 5.1.1.3

$M_f(\%)$	U_f	ν_{TT}	ν_{LT}	$U_{f,eq}$	$\nu_{TT,eq}$	$\nu_{LT,eq}$
0	0	0.35	0.35	0	0.35	0.35
2	0.0131	0.347	0.348	0.029	0.323	0.343
4	0.0262	0.343	0.346	0.058	0.30	0.335
6	0.0393	0.340	0.344	0.087	0.28	0.327
8	0.0525	0.337	0.342	0.116	0.262	0.320
10	0.0655	0.334	0.340	0.147	0.246	0.312
15	0.098	0.326	0.335	0.218	0.215	0.293
20	0.131	0.319	0.330	0.29	0.19	0.275

Πίνακας 5.1.1.4

$M_f(\%)$	U_f	$U_{f,eq}$	$E_T(\text{GPa})$	$E_{T,eq}(\text{GPa})$
0	0	0	0.335	0.335
2	0.0131	0.029	0.342	0.364
4	0.0262	0.058	0.350	0.395
6	0.0393	0.087	0.359	0.426
8	0.0525	0.116	0.366	0.458
10	0.0655	0.147	0.374	0.490
15	0.098	0.218	0.396	0.582
20	0.131	0.29	0.420	0.681

Παρατήρηση: Υπάρχει σε όλες τις περιπτώσεις αύξηση των τιμών των ελαστικών σταθερών E_L , E_T , G_{LT} και $E_{L,eq}$, $E_{T,eq}$, $G_{LT,eq}$ και μείωση των ν_{LT} και $\nu_{LT,eq}$ συναρτήσει της περιεκτικότητας ως αναμενόταν.



Γράφημα 5.1.1(ισοδύναμης ίνας μέρος πρώτο για $S = 0.45$)(“ V_f ”=“ U_f ”)

Παρατήρηση: Αφού το $E_{T,eq}$ λαμβάνει μεγαλύτερη τιμή από το γράφημα προκύπτει ότι το μοντέλο είναι «καλό» στην εγκάρσια διεύθυνση.

Για $S = 0.23$

Πίνακας 5.1.2.1

$M_f(\%)$	U_f	v_{TT}	V_{LT}	$U_{f,eq}$	$v_{TT,eq}$	$V_{LT,eq}$
0	0	0.35	0.35	0	0.35	0.35
2	0.0131	0.347	0.348	0.057	0.261	0.333
4	0.0262	0.343	0.346	0.114	0.208	0.316
6	0.0393	0.340	0.344	0.171	0.173	0.297
8	0.0525	0.337	0.342	0.228	0.148	0.282
10	0.0655	0.334	0.340	0.285	0.129	0.265
15	0.098	0.326	0.335	0.428	0.098	0.222
20	0.131	0.319	0.330	0.57	0.079	0.179

Πίνακας 5.1.2.2

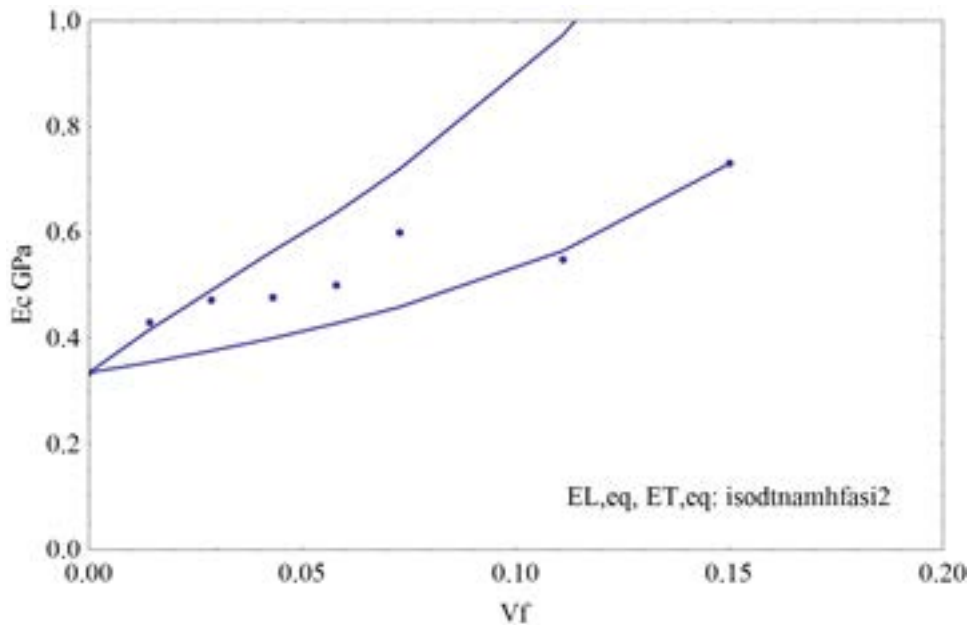
M_f (%)	U_f	$U_{f,eq}$	E_L (GPa)	$E_{L,eq}$ (GPa)
0	0	0	0.335	0.335
2	0.0131	0.029	0.339	0.354
4	0.0262	0.058	0.344	0.376
6	0.0393	0.087	0.349	0.400
8	0.0525	0.116	0.353	0.428
10	0.0655	0.147	0.358	0.459
15	0.098	0.218	0.370	0.565
20	0.131	0.29	0.385	0.730

Πίνακας 5.1.2.3

M_f (%)	U_f	$U_{f,eq}$	E_T (GPa)	$E_{T,eq}$ (GPa)
0	0	0	0.335	0.335
2	0.0131	0.029	0.342	0.416
4	0.0262	0.058	0.350	0.490
6	0.0393	0.087	0.359	0.565
8	0.0525	0.116	0.366	0.637
10	0.0655	0.147	0.374	0.720
15	0.098	0.218	0.396	0.973
20	0.131	0.29	0.420	1.339

Πίνακας 5.1.2.4

M_f (%)	U_f	$U_{f,eq}$	G_{LT} (GPa)	$G_{LT,eq}$ (GPa)
0	0	0	0.124	0.124
2	0.0131	0.029	0.127	0.138
4	0.0262	0.058	0.131	0.153
6	0.0393	0.087	0.134	0.171
8	0.0525	0.116	0.138	0.190
10	0.0655	0.147	0.141	0.213
15	0.098	0.218	0.150	0.287
20	0.131	0.29	0.161	0.401



Γράφημα 5.1.2(ισοδύναμης ίνας μέρος πρώτο για $S = 0.23$)(“ V_f ”=“ U_f ”)

Παρατήρηση: Αφού το $E_{T,eq}$ λαμβάνει μεγαλύτερη τιμή από το γράφημα προκύπτει ότι το μοντέλο είναι «καλό» στη διαμήκη διεύθυνση. Όμως, υπάρχει σύγκλιση θεωρητικών και πειραματικών τιμών μόνο στις χαμηλές τιμές της περιεκτικότητας.

5.2 Μοντέλο ισοδύναμης ίνας δεύτερη προσέγγιση

Παρουσίαση μοντέλου ισοδύναμης ίνας(δεύτερη προσέγγιση)(5.2)^[9,21]:

Μέχρι στιγμής στην παρουσίαση του μοντέλου αυτού χρησιμοποιήσαμε την παράμετρο R που εκφράζει το λόγο της απόστασης μεταξύ των ινών προς το μήκος των ινών. Τώρα εισάγουμε μια άλλη παράμετρο που εκφράζει το λόγο του μήκους των ινών προς τη διάμετρό τους. Ο λόγος α (aspect ratio) δίνεται από τη σχέση:

$$a_f = \frac{l_f}{d_f} \quad (5.2.1)$$

Έχει υπολογιστεί ήδη ότι:

$$U_{f,eq} = \frac{d_f^2}{d^2}$$

Και

$$U_f = \left(\frac{d_f^2}{d^2}\right) * \left(\frac{l_f}{l}\right)$$

Οπότε

$$U_f = \left(\frac{d_f^2}{d^2}\right) * S \quad (5.2.2)$$

όπου

$$S = \frac{l_f}{l} \quad (5.2.3)$$

Από την τελευταία εξίσωση εξάγεται:

$$U_f = \left(\frac{d_f^2}{l_f^2}\right) * \left(\frac{l_f^2}{d^2}\right) * S$$

Επομένως

$$\alpha^2 * U_f = \left(\frac{l_f^2}{d^2}\right) * S$$

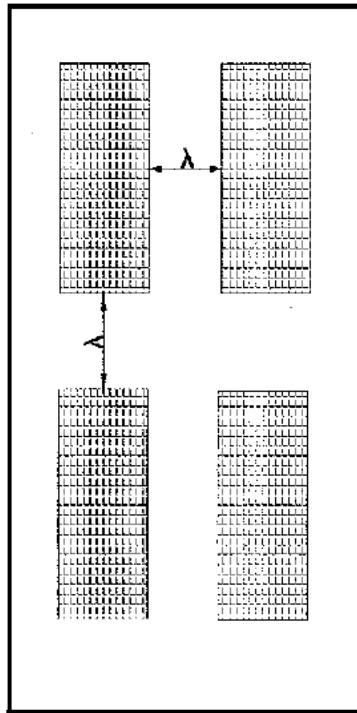
Επομένως

$$\alpha^2 * U_f = \left(\frac{l_f^2}{l^2}\right) * \left(\frac{l^2}{d^2}\right) * S$$

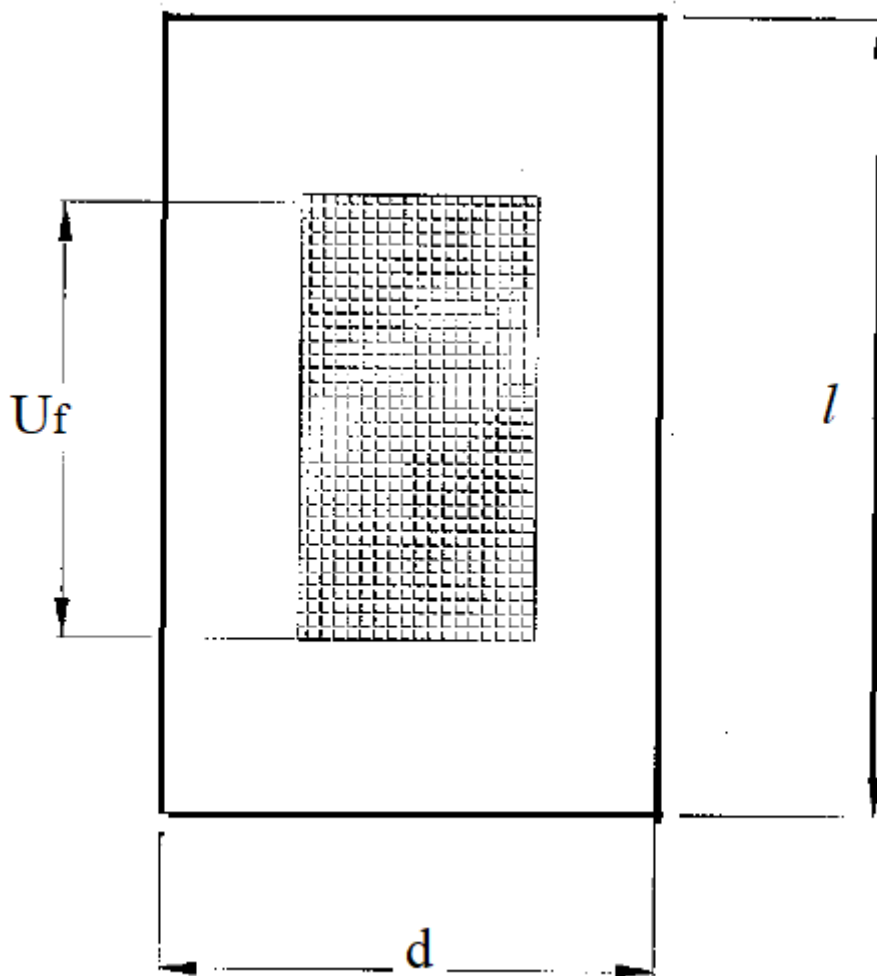
Επομένως

$$\alpha^2 * U_f = S^3 * \left(\frac{l}{d}\right)^2 \quad (5.2.4)$$

Αυτό που πρέπει να κάνουμε είναι να βρούμε μια σχέση για τον λόγο l/d . Θεωρούμε ότι η απόσταση δυο ινών κατά τη διαμήκη διεύθυνση ισούται με την απόσταση αυτών κατά την εγκάρσια διεύθυνση όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Αυτό δε συμβαίνει πάντοτε, αλλά με αυτόν τον τρόπο επιτυγχάνεται η μη προσθήκη νέας παραμέτρου.



Σχήμα 5.2.1



Σχήμα 5.2.2(“ U_f ” = “ l_f ”, “οριζόντιο μήκος εγκλείσματος” = “ d_f ”)

Εξάγεται λοιπόν:

$$l - l_f = d - d_f = \lambda \quad (5.2.5), \text{ οπότε: } l = d - d_f, \text{ επομένως } \frac{l}{d} = 1 + \frac{l_f}{d} - \frac{d_f}{d} \quad (5.2.6)$$

$$\text{Επειδή όμως: } \frac{d_f}{d} = \sqrt{U_{f,eq}} = \sqrt{\frac{U_f}{S}} \quad \text{και} \quad \frac{l_f}{d} = \left(\frac{l_f}{d_f}\right) * \left(\frac{d_f}{d}\right) = a * \sqrt{\frac{U_f}{S}}$$

$$\text{Και μέσω της (5.2.6) εξάγεται τελικά: } \frac{l}{d} = \frac{\sqrt{S} + \sqrt{U_f} * (a-1)}{\sqrt{S}} \quad (5.2.7)$$

Από την εξίσωση (5.2.4) εξάγεται τελικά:

$$U_f * (S^2 - 1) * a^2 - 2 * S^2 * (U_f - \sqrt{S * U_f}) * a + S^2 * (S + U_f - 2 * \sqrt{S * U_f}) = 0 \quad (5.2.8)$$

Η εξίσωση (5.2.8) είναι δευτεροβάθμια με 2 λύσεις άνισες μεταξύ τους τις εξής:

$$\alpha = \frac{[S * (U_f - \sqrt{S * U_f})]}{[U_f * (S + 1)]}$$

και

$$\alpha = \frac{[S * (U_f - \sqrt{S * U_f})]}{[U_f * (S - 1)]}$$

Από τους 2 αυτούς τύπους κρατάμε τον δεύτερο καθώς δίνει θετικές λύσεις εν αντιθέσει με τον πρώτο.

Ο τύπος που συνδέει το S και το R είναι ο εξής: $S = \frac{1}{R+1}$ (5.2.9)

και η σχέση που τελικά θα χρησιμοποιήσουμε γίνεται:

$$\alpha = \frac{\left\{ \left[\frac{1}{R+1} \right] * \left[U_f - \sqrt{\frac{1}{R+1} * U_f} \right] \right\}}{\left\{ U_f * \left[\left(\frac{1}{R+1} \right) - 1 \right] \right\}} \quad (5.2.10)$$

Στους πίνακες κάτω από την αναγραφή «Μοντέλο 5.2» έχουμε μερικές μετρήσεις των ελαστικών σταθερών χρησιμοποιώντας την εξίσωση (5.2.10).

Οι κύριες εξισώσεις που θα χρησιμοποιηθούν στο μοντέλο αυτό είναι οι εξής:

$$E_f * U_f = E_{f,eq} * U_{f,eq}, v_f * U_f = v_{f,eq} * U_{f,eq}, U_{f,eq} = k * (1 + R) * U_f, R = \frac{1-S}{S}$$

$$G_f = \frac{E_f}{[2*(1+v_f)]}, G_m = \frac{E_m}{[2*(1+v_m)]}, G_{f,eq} = \frac{E_{f,eq}}{[2*(1+v_{f,eq})]}$$

$$\frac{1}{v_{TT}} = \frac{U_f}{v_f} + \frac{U_m}{v_m}, v_{LT} = v_f * U_f + v_m * U_m, U_m = 1 - U_f, \frac{1}{v_{TT,eq}} = \frac{U_{f,eq}}{v_{f,eq}} + \frac{U_{m,eq}}{v_m}$$

$$v_{LT,eq} = v_{f,eq} * U_{f,eq} + v_m * U_{m,eq}$$

$$U_{m,eq} = 1 - U_{f,eq}$$

$$\frac{1}{E_{LT}} = \frac{U_f}{E_f} + \frac{U_m}{E_m},$$

$$\frac{1 - v_{TT}}{E_T} - 2 * \frac{v_{LT}^2}{E_L} = (1 - v_f - 2 * v_f^2) * \frac{U_f}{E_f} + (1 - v_m - 2 * v_m^2) * \frac{U_m}{E_m}$$

$$\frac{1}{E_{LT,eq}} = \frac{U_{f,eq}}{E_{f,eq}} + \frac{U_{m,eq}}{E_m} \quad (5.2.\alpha)$$

$$\frac{1-\nu_{TT,eq}}{E_{T,eq}} - 2 * \frac{\nu_{LT,eq}^2}{E_{L,eq}} = (1 - \nu_{f,eq} - 2 * \nu_{f,eq}^2) * \frac{U_{f,eq}}{E_{f,eq}} + (1 - \nu_m - 2 * \nu_m^2) * \frac{U_m}{E_m}$$

(5.2.β)

Μοντέλο 5.2

Για k = 2

Πίνακας 5.2.1.1

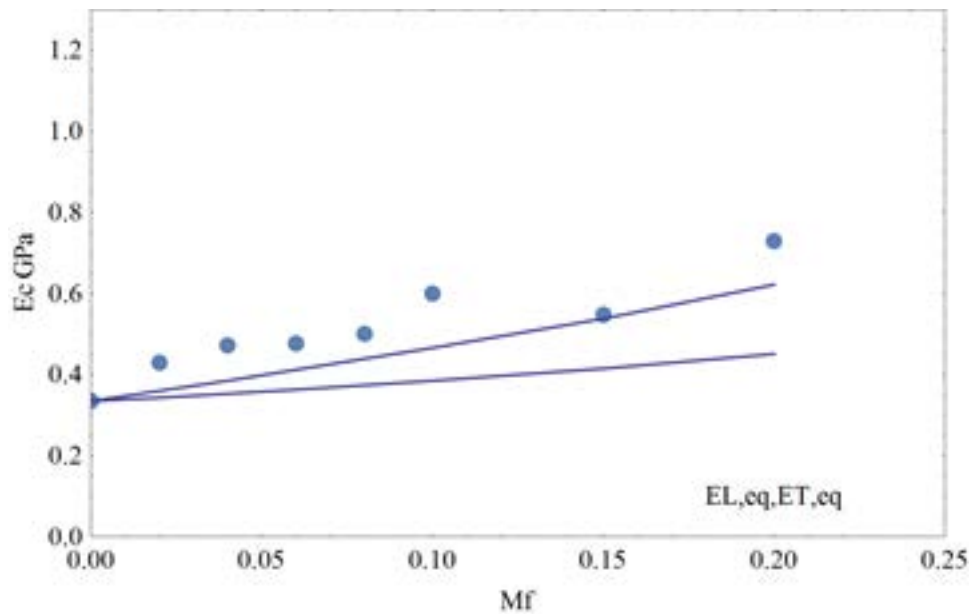
M _f (%)	R	V _{f,eq}	U _f	U _{f,eq}	V _{LT,eq}	ν _{TT,eq}
0	-	-	0	0	0.35	0.35
2	0.013	0.0987	0.0131	0.029	0.343	0.328
4	0.009	0.0991	0.0262	0.058	0.337	0.309
6	0.007	0.0993	0.0393	0.087	0.330	0.292
8	0.006	0.0994	0.0525	0.116	0.324	0.276
10	0.005	0.0995	0.0655	0.145	0.317	0.263
15	0.004	0.0996	0.098	0.218	0.301	0.234
20	0.003	0.0997	0.131	0.29	0.284	0.211

Πίνακας 5.2.1.2

M _f (%)	E _{f,eq} (GPa)	E _{L,eq} (GPa)	E _{T,eq} (GPa)
0	-	0.335	0.335
2	14.31	0.343	0.360
4	14.37	0.353	0.385
6	14.40	0.363	0.412
8	14.41	0.374	0.439
10	14.43	0.385	0.466
15	14.44	0.415	0.538
20	14.46	0.451	0.622

Πίνακας 5.2.1.3

M _f (%)	U _f	U _{f,eq}	G _{LT} (GPa)	G _{LT,eq} (GPa)
0	0	0	0.124	0.124
2	0.0131	0.0265	0.127	0.131
4	0.0262	0.0529	0.131	0.137
6	0.0393	0.0792	0.134	0.145
8	0.0525	0.1056	0.138	0.152
10	0.0655	0.1317	0.141	0.160
15	0.098	0.182	0.150	0.182
20	0.131	0.208	0.161	0.208



Γράφημα 5.2.1(ισοδύναμης ίνας δεύτερη προσέγγιση)

Παρατήρηση: Αφού το $E_{T,eq}$ δίνει μεγαλύτερες τιμές από το γράφημα προκύπτει ότι το μοντέλο είναι «καλό» στην εγκάρσια διεύθυνση, διότι δίνει τιμές πιο κοντά στις πειραματικές τιμές. Αλλά και πάλι υπάρχει απόκλιση μεταξύ θεωρητικών και πειραματικών τιμών.

Για $k = 4$

Πίνακας 5.2.2.1

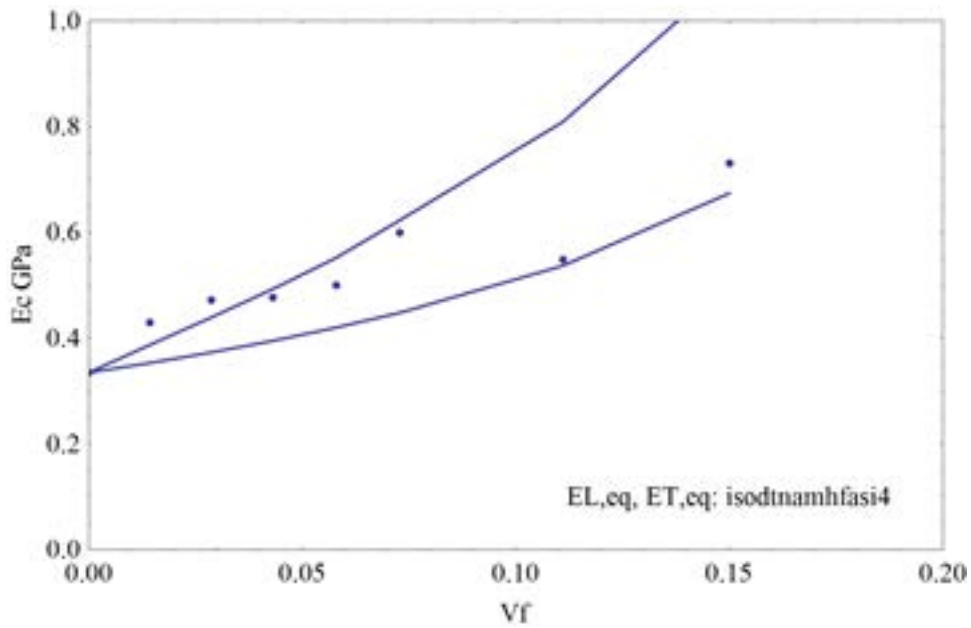
$M_f(\%)$	R	$V_{f,eq}$	U_f	$U_{f,eq}$	$V_{LT,eq}$	$V_{TT,eq}$
0	-	-	0	0	0.35	0.35
2	0.025	0.0976	0.0131	0.0537	0.336	0.307
4	0.016	0.0984	0.0262	0.1065	0.323	0.275
6	0.013	0.0987	0.0393	0.1592	0.310	0.249
8	0.011	0.0989	0.0525	0.2123	0.297	0.227
10	0.01	0.099	0.0655	0.2646	0.278	0.210
15	0.007	0.0993	0.098	0.3947	0.251	0.175
20	0.006	0.0994	0.131	0.5271	0.218	0.150

Πίνακας 5.2.2.2

$M_f(\%)$	$E_{f,eq}(\text{GPa})$	$E_{L,eq}(\text{GPa})$	$E_{T,eq}(\text{GPa})$
0	-	0.335	0.335
2	7.08	0.353	0.387
4	7.14	0.373	0.439
6	7.16	0.395	0.493
8	7.17	0.420	0.552
10	7.18	0.448	0.623
15	7.20	0.537	0.809
20	7.21	0.674	1.086

Πίνακας 5.2.2.3

$M_f(\%)$	U_f	$U_{f,eq}$	$G_{LT}(\text{GPa})$	$G_{LT,eq}(\text{GPa})$
0	0	0	0.124	0.124
2	0.0131	0.0537	0.127	0.137
4	0.0262	0.1065	0.131	0.151
6	0.0393	0.1592	0.134	0.167
8	0.0525	0.2123	0.138	0.184
10	0.0655	0.2646	0.141	0.203
15	0.098	0.3947	0.150	0.263
20	0.131	0.5271	0.161	0.348



Γράφημα 5.2.2(ισοδύναμης ίνας δεύτερη προσέγγιση για $k = 4$)(“ $V_f = U_f$ ”)

Παρατήρηση: Αφού το $E_{T,eq}$ λαμβάνει μεγαλύτερη τιμή από το γράφημα προκύπτει ότι το μοντέλο είναι «καλό» στην διαμήκη διεύθυνση, διότι έχει αρκετά καλή σύγκλιση με τις πειραματικές τιμές. Επίσης, φαίνεται ότι η αύξηση του k από 2 σε 4 δίνει τιμές που είναι πιο κοντά στις πειραματικές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: ΘΕΩΡΗΤΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ ΓΙΑ ΤΟΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ ΤΗΣ ΤΑΣΗΣ ΔΙΑΡΡΟΗΣ(σ_y)

6.1 Νόμος Των Φάσεων

$$\sigma_c = \left(\frac{3}{8}\right) * \sigma_f * U_f + \sigma_m * U_m \quad (6.1) \text{ (Νόμος Φάσεων)}$$

Παρουσίαση του μοντέλου του νόμου των φάσεων(6.1)^[9,2]:

Το μοντέλο του νόμου των φάσεων για τις τάσεις γράφεται ως εξής:

$$\sigma_y = k * \sigma_f * U_f + \sigma_m * U_m \quad (6.1.1)$$

,όπου k ο συντελεστής ενίσχυσης του υλικού(εξαρτάται από την ενίσχυση που έχουμε δώσει σε αυτό. Με βάση τα παραπάνω κάνουμε την παραδοχή ότι k = 0.375.

Στους πίνακες κάτω από την αναγραφή «Μοντέλο 6.1» έχουμε κάποιες μετρήσεις για το σ_y με βάση το παραπάνω μοντέλο.

(Μοντέλο 6.1 Νόμου Φάσεων)

Για $\sigma_f = 100MPa$

Πίνακας 6.1.1

$M_f(\%)$	U_f	$\sigma_y(MPa)$
0	0	5.60
2	0.0131	6.02
4	0.0262	6.44
6	0.0393	6.85
8	0.0525	7.28
10	0.0655	7.69
15	0.098	8.73
20	0.131	9.78

Πίνακας 6.1.2

Για $\sigma_f = 150MPa$

$M_f(\%)$	U_f	$\sigma_c(MPa)$
0	0	5.60
2	0.0131	6.26
4	0.0262	6.93
6	0.0393	7.59
8	0.0525	8.26
10	0.0655	8.92
15	0.098	10.56
20	0.131	12.24

Πίνακας 6.1.3

Για $\sigma_f = 200MPa$

$M_f(\%)$	U_f	$\sigma_c(MPa)$
0	0	5.60
2	0.0131	6.50
4	0.0262	7.42
6	0.0393	8.33
8	0.0525	9.24
10	0.0655	10.15
15	0.098	12.40
20	0.131	14.69

Παρατήρηση: Η τάση αστοχίας του σύνθετου υλικού αυξάνει αυξανόμενης της περιεκτικότητας αφού ο τύπος αυτός παρουσιάζει γραμμική μεταβολή και ισχύει όταν το έγκλεισμα είναι ίνες.

6.2 Γνωστές Θεωρητικές Σχέσεις

$$\sigma_c = k * \sigma_m * (1 - U_f^{2/3}) \quad (6.2.1) \text{ (Nielsen)}^{[9.11], [9.12]} \text{ και } [9.14]$$

$$\sigma_c = \sigma_m * (1 - 1.21 * U_f^{2/3}) \quad (6.2.2) \text{ (Nicolas-Narkis)}^{[9.13]} \text{ και } [9.14]$$

$$\sigma_c = \sigma_m * \exp(-r * U_f) \quad (6.2.3) \text{ (Schrager)}^{[9.14]}$$

Θεωρητικές Σχέσεις (6.2)^[9.11-9.14]: Τέλος παραθέτουμε τις θεωρητικές εκφράσεις που έχουν εκφράσει οι Nielsen, Nicolas-Narkis και Schrager για το σ_c . Στους πίνακες με την αναγραφή «Μοντέλο 2», «Μοντέλο 3», «Μοντέλο 4» έχουμε κάποιες θεωρητικές τιμές με βάση τις 2 αυτές σχέσεις.

Μοντέλο 6.2.1(Νόμου Nielsen)

$M_f(\%)$	U_f	$\sigma_c(\text{MPa})$
0	0	2.80
2	0.0131	2.64
4	0.0262	2.55
6	0.0393	2.48
8	0.0525	2.41
10	0.0655	2.35
15	0.098	2.21
20	0.131	2.08

Μοντέλο 6.2.2(Νόμου Nicolas-Narkis)

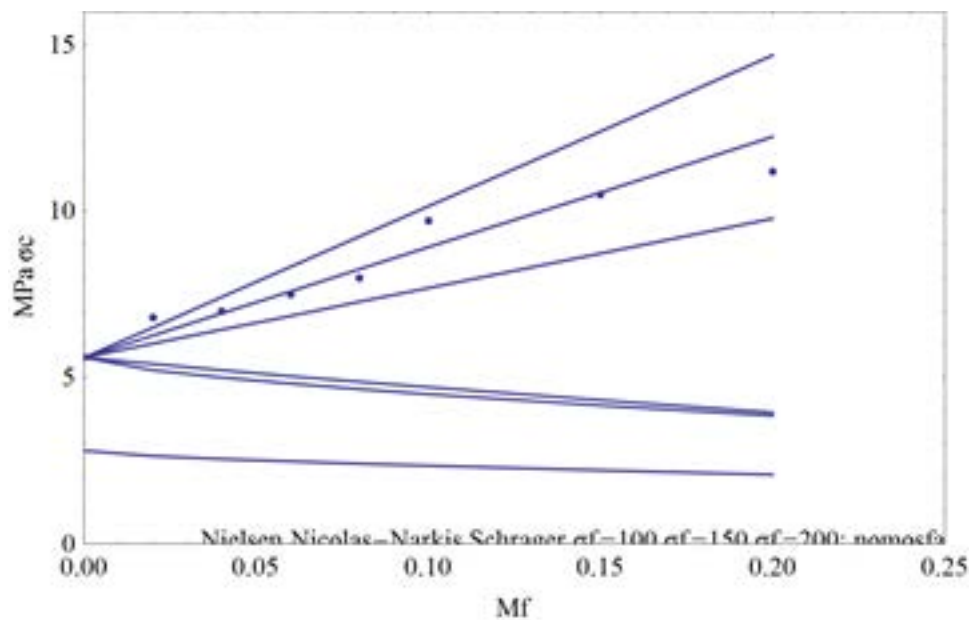
$M_f(\%)$	U_f	$\sigma_c(\text{MPa})$
0	0	5.60
2	0.0131	5.22
4	0.0262	5.00
6	0.0393	4.82
8	0.0525	4.65
10	0.0655	4.50
15	0.098	4.16
20	0.131	3.85

Μοντέλο 6.2.3(Νόμου Schragger)

$M_f(\%)$	U_f	$\sigma_c(\text{MPa})$
0	0	5.60
2	0.0131	5.41
4	0.0262	5.22
6	0.0393	5.04
8	0.0525	4.87
10	0.0655	4.71
15	0.098	4.32
20	0.131	3.95

Παρατήρηση: Η τάση αστοχίας του υλικού ελαττώνεται όταν αυξάνεται η περιεκτικότητα και στους τρεις τύπους. Είναι προφανές ότι οι τύποι αυτοί ανταποκρίνονται περισσότερο σε κοκκώδη υλικά όπου συνήθως η προσθήκη εγκλεισμάτων σε μορφή κόκκου ελαττώνει την τάση αστοχίας, εν αντιθέσει με τα

ινώδη υλικά, όπου η προσθήκη ινών αυξάνει την τάση αυτή. Με δεδομένο ότι στα πειραματικά αποτελέσματα είχε ευρεθεί ότι η τάση αστοχίας αυξάνει αυξανομένης της περιεκτικότητας οι τύποι αυτοί δεν μπορούν να περιγράψουν το υλικό που εξετάζουμε.



Γράφημα 6(Τάση διαρροής(σ_c))("σ_c"="σ_v")

Παρατήρηση: Όσο «πάμε πιο δεξιά» στα ονόματα των γραμμών, τόσο «πάμε πιο πάνω» στο γράφημα. Άρα το μοντέλο του Νόμου Των Φάσεων για $\sigma_f = 150$ MPa αποδίδει καλύτερα για τα πειραματικά αποτελέσματα. Όπως αναφέρθη και προηγουμένως οι τρεις τύποι των Nielsen, Nicolas-Narkis και Schrager δεν μπορούν να θεωρηθούν ότι περιγράφουν το υλικό μας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7: ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ, ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Τα πειραματικά αποτελέσματα που θα θεωρηθούν δεδομένα για την εργασία μας συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα:

$M_f(\%)(\text{επί } \% \text{ κατά βάρος})$	U_f (κατ όγκον)	$E_c(\text{GPa})$
0	0	0.335
2	0.0131	0.430
4	0.0262	0.472
6	0.0393	0.477
8	0.0525	0.500
10	0.0655	0.600
15	0.098	0.548
20	0.131	0.730

Επειδή η περιεκτικότητα του εγκλείσματος στην αρχή εδίνετο κατά βάρος όπως συνήθως κατά την παρασκευή του υλικού χρειάζεται η μετατροπή σε κατ' όγκον περιεκτικότητα, η οποία χρησιμοποιείται στις θεωρητικές εκφράσεις. Αυτό γίνεται βάσει του παρακάτω τύπου.

$$U_f = \frac{M_f}{\left[\left(\frac{\rho_f}{\rho_m} \right) * M_f + \left(1 - \left(\frac{\rho_f}{\rho_m} \right) * M_f \right) \right]}$$

,όπου ρ_f και ρ_m είναι η κατ' όγκον περιεκτικότητα της ίνας και της μήτρας αντίστοιχα και M_f : η κατά βάρος περιεκτικότητα σε εγκλείσμα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

- 1) Το Μοντέλο του Νόμου Των Φάσεων δεν αποδίδει αντιπροσωπευτικά τα πειράματα για το μέτρο ελαστικότητας. Πάντως, πλησιέστερα στα πειραματικά, θεωρητικά αποτελέσματα έχουμε για $E_f = 18 \text{ GPa}$.
- 2) Για την τάση θραύσεως το παραπάνω μοντέλο είναι πολύ αντιπροσωπευτικό των πειραμάτων. Πάντως, καλύτερα αποδίδει για $\sigma_f = 150 \text{ MPa}$.
- 3) Το Μοντέλο του Christensen, δεν αποδίδει αντιπροσωπευτικά τα πειράματα. Πάντως, αποδίδει καλύτερα για $E_f = 18 \text{ GPa}$.
- 4) Το Μοντέλο Halpin-Kardos αποδίδει καλύτερα τα πειραματικά αποτελέσματα για $E_f = 18 \text{ GPa}$ και $\alpha = 30$
- 5) Στο Μοντέλο του Αντιστρόφου Νόμου Των Φάσεων δεν υπάρχει καμία πρακτική διαφορά μεταξύ των τιμών $E_f = 29 \text{ GPa}$ και $E_f = 910 \text{ GPa}$
- 6) Στο Ημιεμπειρικό Μοντέλο Halpin-Tsai αποδίδονται σε μεγάλο βαθμό αντιπροσωπευτικά τα πειράματα. Πάντως, καλύτερα αποδίδονται για $E_f = 6.35 \text{ GPa}$.
- 7) Στο Μοντέλο Των Τομών, καλύτερα αποδίδονται τα πειράματα για $k = 2$, $E_f = 40 \text{ GPa}$ και $d = 10 \text{ nm}$.
- 8) Στο Μοντέλο Του Πρίσματος καλύτερα αποδίδονται τα πειράματα με την εξίσωση κάτω από την αναγραφή «Πρισματικό έγκλεισμα σε πρίσμα μετατραπόμενο από κοίλο διαμήκης φόρτιση μέρος πρώτο».
- 9) Στο πρώτο μέρος του Μοντέλου Της Ισοδύναμης Ίνας, τα πειράματα αποδίδονται καλύτερα για $S = 0.23$ στη διάμηκη διεύθυνση και για $S = 0.45$ στην εγκάρσια διεύθυνση.
- 10) Στο δεύτερο μέρος του Μοντέλου Της Ισοδύναμης Ίνας, τα πειράματα αποδίδονται καλύτερα για $k = 4$ στη διάμηκη διεύθυνση και για $k = 2$ στην εγκάρσια διεύθυνση.
- 11) Στο μοντέλο των Ogorkiewicz-Weidmann τα πειράματα αποδίδονται καλύτερα για $\alpha = 600$.
- 12) Στο μοντέλο των Phan-Tien και Hylgot τα πειράματα αποδίδονται καλύτερα για $K_1 = 0.375$ και $\alpha = 300$.
- 13) Τέλος, τα μοντέλα Nielsen, Nicolas-Narkis και Schragger για την τάση θραύσεως, δεν αποδίδουν αντιπροσωπευτικά τις πειραματικές τιμές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9:ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ:

- 9.1 Dieter Vollath “Nanomaterials: An introduction to Synthesis, Properties and Applications”.
- 9.2 Διπλωματική εργασία Βόρρη Δημήτριου «Θεωρητική προσέγγιση ελαστικών σταθερών με τη μέθοδο της εποξειδικής ρητίνης».
- 9.3 R.M. Christensen, “Mechanics of Composite Materials”, (Willet New York, 1979).
- 9.4 J.S. Halpin, J.L. Kardos, “The Halpin Tsai equations”, 2004
- 9.5 Διπλωματική εργασία Παπαδόπουλου Γεώργιου «Μελέτη Στατικών & Δυναμικών Ιδιοτήτων Εποξειδικής Ρητίνης και Κόκκων Σιδήρου» σελίδες 75—84 με εξαίρεση την ενδιάμεση φάση.
- 9.6 S.W. Tsai, NASA CR-71 (1964)
- 9.7 R.M. Ogorkiewiez and A. A. M. Saying, J. Strain Analysis, 6,226 (1971).
- 9.8 R.M. Ogorkiewiez and G.M. Weidmann, “Tensile Stiffness of a Thermoplastic Reinforced with Glass Fibres or Spheres” J. Mech. Eng. Sc., Vol. 16, No.1(1974).
- 9.9 R.M. Ogorkiewiez and G.M. Weidmann, “Shear Stiffness of Epoxy-Glass Composites”, Composites (1974).
- 9.10 Διπλωματική εργασία Μιχάλη Δημήτριου «Μελέτη Των Ελαστικών Σταθερών Ινωδών Και Κοκκωδών Σύνθετων Υλικών Με Χρήση Πολυτμηματικών Μοντέλων 3, 4 Και 5 Τμημάτων,
- 9.11 L.F. Nielsen, J. Compos. Mater. 1 (1967) 100.
- 9.12 L.F. Nielsen, J. Appl. Polym. Sci. 10 (1966) 97.
- 9.13 L. Nicolais and M. Narkis, ibid 11 (1971) 194.
- 9.14 Διπλωματική εργασία Μιτσικουρίδη Γεώργιου «Εφαρμογή μικρομηχανικών μοντέλων ως προς την ιξωδοελαστική συμπεριφορά πολυμερικών σύνθετων υλικών».