



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΕΜΦΕ

Διάγνωση και Αντιμετώπιση Συστημικού Κινδύνου

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΟΥ

Βουτσινά Ιωάννη

Επιβλέπων: Αντώνιος Παπαπαντολέων
Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2019



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Μαθηματικών ΣΕΜΦΕ

Διάγνωση και Αντιμετώπιση Συστημικού Κινδύνου

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

Βουτσινά Ιωάννη

Επιβλέπων: Αντώνιος Παπαπαντολέων
Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή στις 24 Σεπτεμβρίου, 2019.

(Υπογραφή)

(Υπογραφή)

(Υπογραφή)

.....
Αντώνιος Παπαπαντολέων
Επίκουρος Καθηγητής
Ε.Μ.Π.

.....
Μιχαήλ Λουλάκης
Αναπληρωτής Καθηγητής
Ε.Μ.Π.

.....
Συμεών Παπαβασιλείου
Καθηγητής
Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2019

(Υπογραφή)

.....
Βουτσινάς Ιωάννης

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Copyright ©–All rights reserved Βουτσινάς Ιωάννης, 2019.

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ' ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν το συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Περίληψη

Ο συστημικός κίνδυνος αποτελεί ένα ιδιαίτερα μείζον και διαχρονικό πρόβλημα που καλούνται να αντιμετωπίσουν συχνά οι κοινωνίες. Η σύγχρονη Οικονομική Κρίση που ξέσπασε το 2008 αποτέλεσε αφορμή για αρκετές μελέτες και έρευνες με στόχο την αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος. Ωστόσο, ο συστημικός κίνδυνος δείχνει να είναι ένα εξαιρετικά πολυδιάστατο πρόβλημα, η προσέγγιση του οποίου μπορεί να γίνει με τη συμβολή πολλών διαφορετικών επιστημονικών πεδίων.

Στο πλαίσιο της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας προσπαθούμε αρχικά να κατανοήσουμε την έννοια του συστημικού κινδύνου και να εξετάσουμε τη δομή των τραπεζών, ώστε να γίνει ευκολότερα αντιληπτός ο τρόπος με τον οποίο ένα συστημικό γεγονός μπορεί να εξαπλωθεί στο χρηματοπιστωτικό δίκτυο.

Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε κάποιες μαθηματικές μοντελοποιήσεις του προβλήματος που έχουν διατυπωθεί σε επιστημονικά άρθρα, δίνοντας ιδιαίτερη έμφαση στο Heisenberg-Noe model.

Στο υπόλοιπο μέρος της Διπλωματικής Εργασίας γίνεται η χρήση των γράφων για την αναπαράσταση των χρηματοπιστωτικών δικτύων και το πρόβλημα προσεγγίζεται από τη σκοπιά της επιστήμης των Κοινωνικών Δικτύων. Τα βήματα που ακολουθεί η προσέγγισή μας είναι τα εξής:

1. Ανάλυση της έννοιας του γράφου και των βασικών του γνωρισμάτων.
2. Παρουσίαση των Τυχαίων Γραφημάτων.
3. Ανάλυση των μετρικών που καθορίζουν τη σημασία κάθε κόμβου σε ένα γράφο.
4. Παρουσίαση των βασικών μοντέλων αναπαράστασης επιδημιών.
5. Πειραματισμός σε Python για την υλοποίηση των μοντέλων αναπαράστασης επιδημιών και τη σύγκριση των μετρικών τις οποίες αναφέραμε στα προηγούμενα βήματα.
6. Σχολιασμός των συμπερασμάτων που προκύπτουν από τον πειραματισμό.

Επίσης, στο τέλος της εργασίας αναφέρουμε κάποιες ιδέες που θα μπορούσαν να αποτελέσουν αντικείμενο μελλοντικής έρευνας για την προέκταση της συγκεκριμένης εργασίας.

Λέξεις Κλειδιά

Συστημικός Κίνδυνος, Τράπεζα, Χρηματοπιστωτικό Δίκτυο, Γράφος, Μοντελοποίηση, Μοντέλα Επιδημιών

Abstract

Systemic risk is a particularly major and intertemporal problem that societies are often faced with. The current Financial Crisis that erupted in 2008 has prompted numerous studies and research aimed at facing this problem. However, systemic risk seems to be an extremely multidimensional problem, which can be approached by the contribution of many different fields.

In this Diploma Thesis we first try to understand the concept of systemic risk and examine the structure of banks in order to better understand how a systemic event can spread to the financial network.

Below, we present some mathematical modeling of the problem formulated in scientific articles, with particular emphasis on the Heisenberg-Noe model.

The rest of the thesis uses the graphs to represent the financial networks and the problem is approached from the perspective of Social Networks. The steps that follow our approach are:

1. Analysis of the concept of the graph and its basic features.
2. Presentation of Random Graph Models.
3. Analysis of metrics that determine the importance of each node in a graph.
4. Presentation of basic epidemic models.
5. Experiment with Python to implement the epidemic models and compare the metrics we mentioned in the previous steps.
6. Comment on the conclusions drawn from the experiment.

Also, at the end of the thesis, we present some ideas that could be the subject of future research on extension of this work.

Keywords

Systemic Risk, Bank, Financial Network, Graph, Modelling, Epidemic Models

Ευχαριστίες

Ολοκληρώνοντας αυτόν τον πανέμορφο κύκλο σπουδών, θα ήθελα να εκφράσω την ειλικρινή και εγκάρδια ευγνωμοσύνη μου σε όλους τους ανθρώπους που στάθηκαν δίπλα μου όλα αυτά τα χρόνια στηρίζοντας την προσπάθειά μου με κάθε τρόπο.

Θα ήθελα αρχικά να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή της παρούσας εργασίας, κ. Αντώνιο Παπαπαντολέοντα. Αισθάνομαι βαθύτατα ευγνώμων για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε, για το χρόνο που διέθεσε απαντώντας στις απορίες μου, για τις συμβουλές του, την καθοδήγησή του και την ανιδιοτελή του προσφορά σε κάθε επίπεδο.

Ακόμη, νιώθω την ανάγκη να ευχαριστήσω την οικογένειά μου για τη συνεχή και πολύτιμη στήριξη που μου παρείχε, υποστηρίζοντας τα όνειρά μου και ενθαρρύνοντας την προσπάθειά μου με κάθε δυνατό και αδύνατο μέσο. Κυρίως όμως θα ήθελα να την ευχαριστήσω για το γεγονός ότι με βοήθησε από πολύ μικρή ηλικία να κατανοήσω τη σημασία της παιδείας και όλων των βαθύτερων αξιών που διέπουν τη ζωή και συμβάλλουν στην καλλιέργεια της προσωπικότητάς μου.

Στη συνέχεια, αισθάνομαι τη βαθιά ανάγκη να ευχαριστήσω όλους τους φίλους μου, που έκαναν και συνεχίζουν να κάνουν τη ζωή μου πιο όμορφη. Ξεκινώντας από τον αδελφικό μου φίλο Μανώλη, θα ήθελα να επισημάνω την ειλικρινή μου ευγνωμοσύνη για όλες τις φοιτητικές αναμνήσεις που έχουμε να θυμόμαστε ως συμφοιτητές, μα κυρίως ως φίλοι και να τονίσω την καθοριστική του συμβολή στην περάτωση αυτού του απαιτητικού προγράμματος σπουδών. Παράλληλα, θα ήθελα να ευχαριστήσω τη Σαββίνα, τη Σοφία, το Γιώργο, τον Κοσμά και το Ρομέο για τη στήριξή τους και για όλες τις στιγμές που μοιραστήκαμε όλα αυτά τα χρόνια και θα μείνουν για πάντα χαραγμένες στη μνήμη μου. Επίσης, οφείλω να ευχαριστήσω και όλους τους υπόλοιπους φίλους και γνωστούς μου με τους οποίους μίλησα, διασκέδασα και αλληλεπίδρασα με κάθε τρόπο και να απολογηθώ για το γεγονός ότι στα πλαίσια αυτής της σελίδας δεν ήταν δυνατό να αναφερθώ σε όλους ονομαστικά.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους συμφοιτητές μου με τους οποίους συνεργάστηκα με κάθε τρόπο και να επισημάνω το γεγονός ότι η αλληλεπίδραση μαζί τους διέυρνε τους πνευματικούς μου ορίζοντες και συνέβαλε καθοριστικά στην επίτευξη των στόχων μου.

«Το μυαλό δεν είναι ένα δοχείο που πρέπει να γεμίσει, αλλά μια φωτιά που πρέπει να ανάψει»

Πλούταρχος

Περιεχόμενα

Περίληψη	7
Abstract	8
Ευχαριστίες	9
Περιεχόμενα	12
Κατάλογος Σχημάτων	13
Κατάλογος Πινάκων	14
1 Εισαγωγή	15
1.1 Βασικές Ιδέες	15
1.1.1 Η έννοια της Οικονομικής Κρίσης	15
1.1.2 Η συνεισφορά της επιστήμης των Δικτύων	16
1.1.3 Νομοθετικό Πλαίσιο	16
1.2 Είδη Χρηματοοικονομικών Κινδύνων	17
1.3 Στόχος της διπλωματικής εργασίας	18
2 Μετάδοση Συστημικού Κινδύνου	20
2.1 Κεφαλαιακή Διάρθρωση Τραπεζών	20
2.1.1 Στοιχεία Ενεργητικού Κεφαλαίου Τραπεζών	21
2.1.2 Στοιχεία Παθητικού Κεφαλαίου Τραπεζών	22
2.1.3 Καθαρή Θέση (Equity)	23
2.2 Διάλυτοι Συστημικού Κινδύνου	23
3 Στατικά Μοντέλα Καταρράκτη (Static Cascade Models)	25
3.1 Εισαγωγικές Έννοιες	25
3.2 Default Καταρράκτες	27
3.2.1 Eisenberg-Noe 2001 Model	27
3.3 Καταρράκτες Ρευστότητας Liquidity Cascades	36
3.3.1 Gai-Kapadia 2010 Liquidity Cascade Model	36
3.3.2 The Liquidity Model of S.H. Lee 2013	37
3.4 Καταρράκτες Λόγω Υποτίμησης Περιουσιακών Αξιών (Asset Fire Sales)	38
4 Θεωρία των Γράφων	41
4.1 Εισαγωγικές Έννοιες	41
4.2 Συνεκτικότητα Γραφημάτων	45

4.3	Τυχαία Γραφήματα (Random Graph Models)	46
4.3.1	Το μοντέλο Erdős–Rényi ($G(n, M)$)	46
4.3.2	Το μοντέλο Gilbert ($G(n, p)$)	47
4.4	Καθορισμός Σημαντικών Κόμβων	47
4.4.1	Closeness Centrality	47
4.4.2	Betweenness Centrality	48
5	Μοντέλα Επιδημιών	51
5.1	SIR model	51
5.2	SIS model	53
6	Πειραματισμός σε Python	56
6.1	Πρόγραμμα 1: Εύρεση των Centralities κάθε κόμβου σε γνωστό και απλό γράφο	56
6.2	Πρόγραμμα 2: Προσομοίωση SIR MODEL σε Τυχαίο Μεγάλο Μη Κατευθυνόμενο Γράφημα χωρίς βάρη στις ακμές	60
6.3	Πρόγραμμα 3: Προσομοίωση SIS MODEL σε Τυχαίο Μεγάλο Μη Κατευθυνόμενο Γράφημα χωρίς βάρη στις ακμές	65
7	Επίλογος	68
7.1	Απολογισμός-Συνεισφορά	68
7.2	Μελλοντική Έρευνα	68

Κατάλογος Σχημάτων

4.1	Κατευθυνόμενος γράφος	42
4.2	Μη κατευθυνόμενος γράφος	42
4.3	Παράδειγμα κατευθυνόμενου γράφου με βάρη στις ακμές	42
4.4	Πίνακας γειτνίασης του γράφου του σχήματος 4.1	43
4.5	Γράφος G	44
4.6	Υπογράφος του G	44
4.7	Παράδειγμα μη-συνεκτικού γράφου	46
4.8	Γράφος G	48
4.9	Star Graph	49
6.1	Input Graph	57
6.2	Degree Centrality	58
6.3	Closeness Centrality	58
6.4	Betweenness Centrality	59
6.5	SIR model-Betweenness Centrality	60
6.6	SIR model-Closeness Centrality	62
6.7	SIR model-Degree Centrality	63
6.8	SIS model-Closeness Centrality	65
6.9	SIS model-Betweenness Centrality	66
6.10	SIS model-Degree Centrality	67

Κατάλογος Πινάκων

2.1	Περιουσιακά Στοιχεία Τραπεζών	20
3.1	Απλουστευμένος Ισολογισμός Τραπεζών	26

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Βασικές Ιδέες

Ο *Συστημικός Κίνδυνος* (Systemic Risk) αποτελεί ένα από τα πιο φλέγοντα οικονομικά προβλήματα που μαστιάζουν τις κοινωνίες του 21^{ου} αιώνα. Η Διεθνής Χρηματοπιστωτική Κρίση της περιόδου 2007-2008 είχε ως αποτέλεσμα τη χρεοκοπία μεγάλων τραπεζών με ολέθριες συνέπειες στον τρόπο ζωής πολλών ανθρώπων σε ολόκληρο τον κόσμο. Το γεγονός αυτό οδήγησε στη μελέτη της έννοιας του Συστημικού Κινδύνου και των συνθηκών που μπορούν να προκαλέσουν την εξάπλωση ενός μεμονωμένου συστημικού γεγονότος (systemic event) σε μια ολόκληρη αγορά.

1.1.1 Η έννοια της Οικονομικής Κρίσης

Βασικός παράγοντας για την ομαλή λειτουργία της οικονομίας είναι η κατανάλωση των προϊόντων και υπηρεσιών που παράγονται. Σε περιπτώσεις που υπάρχει υπερπαραγωγή αγαθών και υπηρεσιών που ξεπερνά την αντίστοιχη ζήτηση, εμφανίζεται η Οικονομική Κρίση.

Ορισμός 1.1. Οικονομική Κρίση είναι το φαινόμενο κατά το οποίο μια οικονομία χαρακτηρίζεται από μια διαρκή και αισθητή μείωση της οικονομικής της δραστηριότητας. Ο όρος της οικονομικής δραστηριότητας αναφέρεται σε όλα τα μακροοικονομικά μεγέθη της οικονομίας, όπως είναι μεταξύ άλλων η απασχόληση, το εθνικό προϊόν, οι τιμές και οι επενδύσεις.

Τα αίτια μίας οικονομικής κρίσης ενδέχεται να σχετίζονται είτε με εξωγενείς είτε με ενδογενείς παράγοντες. Εξωγενείς ονομάζονται οι παράγοντες που δεν εντάσσονται στο πλέγμα λειτουργίας της οικονομίας και αποτελούν συνήθως απρόοπτα γεγονότα, τα οποία αυξομειώνουν κατά περίπτωση την οικονομική δραστηριότητα. Τέτοιοι παράγοντες είναι οι πόλεμοι, οι σεισμοί, οι θεομηνίες και κάθε άλλη φυσική καταστροφή. Ενδογενείς χαρακτηρίζονται οι παράγοντες, οι οποίοι δρουν εντός του οικονομικού συστήματος προκαλώντας έντονες διακυμάνσεις στους δείκτες της Οικονομίας. Η υπερβολική αύξηση των επενδύσεων σε περιόδους ανάπτυξης και οι απότομες μεταβολές των επιτοκίων αποτελούν παραδείγματα τέτοιων παραγόντων.

Οι συνέπειες μιας οικονομικής κρίσης είναι πολύπλευρες τόσο σε οικονομικό, όσο και σε κοινωνικό επίπεδο. Μία οικονομία που βιώνει οικονομική κρίση καλείται συνήθως να αντιμετωπίσει την πτώση του ΑΕΠ, τη μείωση της ρευστότητας και την απότομη μεταβολή στις τιμές των αγαθών και υπηρεσιών λόγω του πληθωρισμού. Ακόμη, η αύξηση της ανεργίας και η μείωση της αγοραστικής δύναμης των πολιτών έχουν ως αποτέλεσμα την αύξηση του πο-

σοστού των νοικοκυριών που ζουν κάτω από το όριο της φτώχειας, γεγονός που έχει πολλές κοινωνικές προεκτάσεις.

Η οικονομική κρίση είναι ένα φαινόμενο, που εμφανίζεται διαχρονικά στην οικονομική σκηνή. Ωστόσο, παρά το πλούσιο υλικό προς μελέτη που έχει αντληθεί ανά τους αιώνες, η έγκαιρη διάγνωση του κινδύνου και η λήψη απαραίτητων μέτρων διάσωσης της οικονομίας αποτελεί ένα πολύπλοκο πρόβλημα.

1.1.2 Η συνεισφορά της επιστήμης των Δικτύων

Τα χρηματοπιστωτικά δίκτυα παρουσιάζουν αρκετές ομοιότητες με άλλους τύπους δικτύων. Συνεπώς, η μελέτη της επιστήμης των Δικτύων και η εφαρμογή της σε άλλες επιστήμες μπορεί να συνεισφέρει στην άντληση σημαντικών συμπερασμάτων για τον τρόπο συμπεριφοράς των χρηματοπιστωτικών δικτύων.

Ο Haldane προσπάθησε να διερευνήσει τα λάθη που συνέβησαν στο χρηματοπιστωτικό δίκτυο την περίοδο πριν την κρίση του 2007-2008. Σύμφωνα με την άποψή του, τα υψηλά συνδεδεμένα, ετερογενή δίκτυα μπορεί να είναι εύρωστα αλλά εύθραυστα, που σημαίνει ότι μπορεί να είναι ανθεκτικά σε μέσες ή τυπικές διαταραχές, αλλά πολύ επιρρεπή σε μία επίθεση που στοχεύει έναν άκρως συνδεδεμένο ή κυρίαρχο κόμβο. Σε περιόδους κρίσης, η υψηλή συνδεσιμότητα αυτών των δικτύων μπορεί να ενισχύσει τα οικονομικά σοκ, γεγονός που καθιστά αυτά τα δίκτυα πολύ ευάλωτα και εξαρτώμενα από τους άκρως συνδεδεμένους κόμβους.

Κατά τον Haldane [22], τα χρηματοπιστωτικά δίκτυα την περίοδο πριν το ξέσπασμα της κρίσης του 2007 είχαν γίνει εξαιρετικά πολύπλοκα, γεγονός στο οποίο συνετέλεσαν και χρηματοπιστωτικές καινοτομίες (όπως η τιτλοποίηση στεγαστικών δανείων), που δημιούργησαν πρόσθετη αστάθεια. Η αύξηση της πολυπλοκότητας των δικτύων έκανε επίσης δύσκολη την αξιολόγησή τους. Παράλληλα, η εφαρμογή παρόμοιων στρατηγικών από τις τράπεζες την περίοδο πριν το 2007, τις κατέστησε ευπαθείς στις ίδιες απειλές.

Μια οικονομική κρίση μπορεί να οδηγήσει τις τράπεζες είτε στη συσσώρευση ρευστότητας, είτε στην πώληση περιουσιακών στοιχείων. Οι δύο αυτές στάσεις είναι λογικές, αλλά διογκώνουν το συστημικό πρόβλημα. Σε τέτοιες περιπτώσεις απαιτείται η μαζική κυβερνητική παρέμβαση για την παροχή ρευστότητας και την αποκατάσταση των τραπεζικών κεφαλαίων, προκειμένου να περιοριστούν τα συστημικά γεγονότα.

1.1.3 Νομοθετικό Πλαίσιο

Για την ορθή λειτουργία του τραπεζικού συστήματος είναι απαραίτητη η ύπαρξη ενός νομοθετικού πλαισίου, το οποίο θα διαθέτει συγκεκριμένα χαρακτηριστικά και θα εφαρμόζεται από όλες τις τράπεζες χωρίς διακρίσεις. Για το σκοπό αυτό, η Επιτροπή της Βασιλείας θέσπισε αρχικά το νομοθετικό πλαίσιο της Βασιλείας I, η αναθεώρηση του οποίου οδήγησε στη θέσπιση της Βασιλείας II και εν τέλει στη Βασιλεία III. Παρακάτω γίνεται μία σύντομη ανάλυση αυτών των συμφωνιών:

- **Βασιλεία I.** Η συμφωνία της Βασιλείας του 1988, που ονομάστηκε Βασιλεία I, ήταν ένα σύνολο ελάχιστων κεφαλαιακών απαιτήσεων για τις τράπεζες που προέκυψαν από τις διαβουλεύσεις των τραπεζών που συγκρότησαν την Επιτροπή της Βασιλείας για την Τραπεζική Εποπτεία.
- **Βασιλεία II.** Η επιτροπή της Βασιλείας του 1999, διαπιστώνοντας ότι η Βασιλεία I δεν κάλυπτε όλες τις χρηματοοικονομικές απαιτήσεις και ανάγκες προχώρησε στην αναθεώρησή της και τη θέσπιση της Βασιλείας II. Στη Βασιλεία II εισάγεται και η πρόβλεψη του λειτουργικού κινδύνου για την πρόβλεψη της κεφαλαιακής επάρκειας.

Εντούτοις, δεν είχε ληφθεί υπόψη η εξάρτηση των κινδύνων μεταξύ των τραπεζών. Για παράδειγμα ο δείκτης κεφαλαιακής επάρκειας (CAR), ο οποίος απαιτεί να ισχύει η συνθήκη:

$$RiskWeightedAssets \leq 12,5 \times TotalCapital \quad (1.1)$$

είναι η κύρια απαίτηση της Βασιλείας II, η οποία όμως βασίζεται μόνο στους ισολογισμούς της κάθε τράπεζας ξεχωριστά και όχι στη διασύνδεση μεταξύ των τραπεζών.

- **Βασιλεία III.** Όπως αναφέρθηκε, η Βασιλεία II δεν λάμβανε υπόψη τις διατραπεζικές σχέσεις με αποτέλεσμα να μην αντιμετωπίσει το συστημικό κίνδυνο. Η οικονομική κρίση του 2008 οδήγησε στην προσπάθεια αναθεώρησης της Βασιλείας II. Ο Γκρόρτσος [18] διακρίνει δύο κατηγορίες διατάξεων στο νομοθετικό πλαίσιο της Βασιλείας III. Στην πρώτη κατηγορία περιλαμβάνονται τροποποιήσεις και προσθήκες στις διατάξεις του ήδη ισχύοντος νομοθετικού πλαισίου, οι οποίες σχετίζονται με τους δείκτες της κεφαλαιακής επάρκειας των τραπεζών. Στη δεύτερη κατηγορία εντάσσονται καινοτόμες διατάξεις τόσο για την ενίσχυση της μικρο-προληπτικής και ρυθμιστικής παρέμβασης στη λειτουργία των τραπεζών, όσο και για την θέσπιση κανόνων που αφορούν την μακρο-προληπτική ρυθμιστική παρέμβαση.

1.2 Είδη Χρηματοοικονομικών Κινδύνων

Σύμφωνα με τον Culp (2002) [13], χρηματοοικονομικός κίνδυνος ονομάζεται το ενδεχόμενο ένα συγκεκριμένο γεγονός να επηρεάσει αρνητικά και αναπάντεχα την χρηματοοικονομική επίδοση ενός οργανισμού, είτε μειώνοντας την καθαρή αξία ή τις εισροές κεφαλαίων, είτε επιδρώντας στα κέρδη του. Μπορούμε να διακρίνουμε τα παρακάτω είδη χρηματοοικονομικού κινδύνου:

- **Κίνδυνος Αγοράς (Market Risk).** Ορίζεται ως η πιθανότητα ενός επενδυτή να βιώνει ζημίες εξαιτίας παραγόντων που επηρεάζουν τη συνολική απόδοση των χρηματοπιστωτικών αγορών στις οποίες εμπλέκεται. Τέτοιοι παράγοντες μπορούν να είναι οι μεταβολές των τιμών της Αγοράς (επιτοκίων, μετοχικών δεικτών, χρηματιστηριακών τιμών κλπ). Ο κίνδυνος αυτός εμφανίζεται όταν ένα χρηματοοικονομικό ίδρυμα κάνει δοσοληψίες με στοιχεία του ενεργητικού και του παθητικού αντί να τα διατηρεί για μετέπειτα επένδυση.
- **Πιστωτικός Κίνδυνος (Credit Risk).** Είναι ο κίνδυνος αθέτησης πληρωμής ενός χρέους, που μπορεί να προκύψει από την αδυναμία του οφειλέτη να καταβάλλει τις απαιτούμενες πληρωμές. Για τον περιορισμό του πιστωτικού κινδύνου, ο δανειστής μπορεί να διενεργήσει πιστωτικό έλεγχο στον υποψήφιο δανειολήπτη, είτε να απαιτήσει από αυτόν να συνάψει κατάλληλη ασφάλιση (όπως ασφάλιση υποθηκών). Επίσης, μπορεί να αναζητήσει ασφάλεια έναντι ορισμένων περιουσιακών στοιχείων του οφειλέτη ή εγγύηση τρίτου.
- **Κίνδυνος Ρευστότητας (Liquidity Risk).** Πρόκειται για τον κίνδυνο μια εταιρία ή μια τράπεζα να μην είναι σε θέση να ανταποκριθεί σε βραχυπρόθεσμες οικονομικές απαιτήσεις. Αυτό συμβαίνει συνήθως λόγω της αδυναμίας μετατροπής περιουσιακών στοιχείων σε μετρητά χωρίς απώλεια κεφαλαίου ή εισοδήματος στη διαδικασία.

- **Λειτουργικός Κίνδυνος (Operational Risk)**. Αποτελεί τον κίνδυνο απώλειας αξίας λόγω απάτης, ανθρώπινων σφαλμάτων ή κακής λειτουργίας του συστήματος.
- **Συστημικός Κίνδυνος (Systemic Risk)**. Είναι η μορφή χρηματοοικονομικού κινδύνου που διερευνάται στην παρούσα διπλωματική εργασία. Έχουν διατυπωθεί πολλοί διαφορετικοί ορισμοί της έννοιας του συστημικού κινδύνου. Στην πηγή [11] υποστηρίζεται ότι η ασάφεια στον ορισμό του συστημικού κινδύνου οφείλεται στο γεγονός ότι ο περιορισμός του μπορεί να σημαίνει διαφορετικά πράγματα για κάθε άνθρωπο. Παρακάτω παρουσιάζεται ένας εκ των επικρατέστερων ορισμών:

Ορισμός 1.2. *Συστημικός Κίνδυνος ονομάζεται ο κίνδυνος αλυσιδωτής αθέτησης υποχρεώσεων που οδηγεί σε έλλειψη ρευστότητας σε επίπεδο αγοράς.*

Ωστόσο, όπως προαναφέρθηκε, αυτός ο ορισμός δεν είναι ο μοναδικός. Ο Mishkin (1995) [29] ως Συστημικό Κίνδυνο ορίζει: «την πιθανότητα ενός ξαφνικού, συνήθως απροσδόκητου γεγονότος που διαταράσσει τις πληροφορίες στις χρηματοπιστωτικές αγορές, καθιστώντας αδύνατο για αυτές να διοχετεύσουν αποτελεσματικά τα κεφάλαια στις πιο παραγωγικές επενδυτικές ευκαιρίες», ενώ σύμφωνα με τον Kaufman (1995) [26]: «Ο Συστημικός Κίνδυνος ορίζεται ως η πιθανότητα να προκύψουν σωρευτικές ζημιές από ένα γεγονός που θέτει σε κίνηση μια σειρά διαδοχικών ζημιών σε μια αλυσίδα ιδρυμάτων ή αγορών που περιλαμβάνει ένα σύστημα. Δηλαδή, ο συστημικός κίνδυνος είναι ο κίνδυνος μιας αλυσιδωτής αντίδρασης πτώσης των διασυνδεδεμένων δεσμών».

Σε κάθε περίπτωση, ο συστημικός κίνδυνος χαρακτηρίζεται από τα εξής:

1. Ένα αρχικό γεγονός-σοκ που πυροδοτεί τον κίνδυνο.
2. Τη μετάδοση του σοκ σε ολόκληρο το χρηματοπιστωτικό σύστημα. Η μετάδοση αυτή πραγματοποιείται είτε μέσω των σχέσεων μεταξύ των τραπεζών, είτε μέσω της πώλησης διαμοιραζόμενου κεφαλαίου από κάποιες τράπεζες που οδηγεί σε πτώση της αξίας αυτού του κεφαλαίου.
3. Τις συνέπειες της μετάδοσης για ολόκληρο το σύστημα. Η αξιολόγηση των συνεπειών μπορεί να γίνει με διάφορες μετρικές, όπως είναι το σύνολο των πληρωμών που αθετήθηκαν στο διάστημα της μετάδοσης.

4

1.3 Στόχος της διπλωματικής εργασίας

Ο στόχος της συγκεκριμένης διπλωματικής εργασίας χωρίζεται σε δύο σκέλη. Το πρώτο σκέλος αφορά την κατανόηση της έννοιας του συστημικού κινδύνου και των μαθηματικών μοντέλων που έχουν αναπτυχθεί για την περιγραφή και την αντιμετώπισή του. Το δεύτερο σκέλος εστιάζει στην προσπάθεια διάγνωσης του κινδύνου μέσω της μελέτης της θεωρίας των Κοινωνικών Δικτύων και της υλοποίησης προγραμμάτων που βοηθούν στον καθορισμό των κρίσιμων κόμβων ενός χρηματοπιστωτικού δικτύου.

Το Κεφάλαιο 1 ήταν εισαγωγικό και είχε σκοπό την ομαλή είσοδο του αναγνώστη στο πρόβλημα που θα μελετηθεί. Η διάρθρωση της υπόλοιπης διπλωματικής εργασίας ακολουθεί την εξής δομή:

- Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζεται η κεφαλαιακή διάρθρωση των τραπεζών και αναλύονται τα επιμέρους στοιχεία Ενεργητικού και Παθητικού Κεφαλαίου τους. Στη συνέχεια, διερευνώνται οι σημαντικότεροι μηχανισμοί μετάδοσης του συστημικού σοκ μεταξύ των τραπεζών.
- Στο Κεφάλαιο 3 αναλύονται ορισμένα μαθηματικά μοντέλα που έχουν αναπτυχθεί για την περιγραφή και αντιμετώπιση του συστημικού κινδύνου και δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στο μοντέλο των Eisenberg-Noe.
- Στο Κεφάλαιο 4 αναλύονται τα βασικά χαρακτηριστικά των γράφων. Παράλληλα, ο αναγνώστης εξοικειώνεται με την έννοια των τυχαίων Γραφημάτων και με τις μετρικές που αποτυπώνουν το πόσο «κεντρικός» είναι ένας κόμβος σε ένα γράφο.
- Στο Κεφάλαιο 5 αναλύονται τα βασικά μοντέλα επιδημιών SIR και SIS με τη βοήθεια απλού προγράμματος που έχει υλοποιηθεί στη γλώσσα Python για την κατανόηση της συμπεριφοράς τους.
- Στο Κεφάλαιο 6 γίνεται παρουσίαση των αποτελεσμάτων των προγραμμάτων που υλοποιήθηκαν σε Python για την ανίχνευση των σημαντικών κόμβων σε τυχαία γραφήματα. Επίσης, γίνεται μία σύγκριση των μετρικών που παρουσιάζονται στο 4 και υλοποιούνται εκτενέστερα το SIR model και το SIS model.
- Τέλος, στο Κεφάλαιο 7 ολοκληρώνουμε τη διπλωματική εργασία συζητώντας συνοπτικά μελλοντικές ερευνητικές πορείες και κατευθύνσεις που μπορεί να ακολουθήσει η επέκταση των ιδεών της εργασίας.

Κεφάλαιο 2

Μετάδοση Συστημικού Κινδύνου

2.1 Κεφαλαιακή Διάρθρωση Τραπεζών

Οι τράπεζες στο σύγχρονο κόσμο ποικίλουν σε μορφές και μεγέθη και πέραν των παραδοσιακών λιανικών τραπεζών, τα μοντέλα των χρηματοπιστωτικών δικτύων πρέπει να περιλαμβάνουν και ένα πλήθος από «σκιώδη» χρηματοπιστωτικά ιδρύματα. Μεταξύ αυτών συμπεριλαμβάνονται τα συνταξιοδοτικά και επενδυτικά ταμεία και τα ταμειευτήρια. Καθώς τα συστημικά μοντέλα εξελίσσονται, το σύστημα γίνεται ολοένα και πιο πολύπλοκο, συνεπώς στο πλαίσιο της Διπλωματικής θα γίνουν κάποιες παραδοχές και υπεραπλουστεύσεις, οι οποίες αντλούνται και από τον Hurd [23]. Οι ισολογισμοί των τραπεζών παρέχουν ένα στιγμιότυπο των τρέχοντων τιμών του ενεργητικού και του παθητικού κεφαλαίου και ενημερώνονται σε καθημερινή βάση, ενώ δημοσιοποιούνται μέσω των οικονομικών αναφορών των τραπεζών κάθε 3 μήνες. Στον επόμενο πίνακα φαίνονται τα σημαντικότερα είδη του ενεργητικού και του παθητικού κεφαλαίου που διαθέτουν οι τράπεζες. Όλες οι εγγραφές πρέπει να είναι μη αρνητικές και η καθαρή θέση (equity), η οποία είναι η καθαρή αξία της επιχείρησης προς τους μετόχους, ορίζεται ως η διαφορά:

$$E = A - L \quad (2.1)$$

μεταξύ της αξίας του ενεργητικού κεφαλαίου A και του παθητικού κεφαλαίου L .

Ενεργητικό Κεφάλαιο (Assets)	Παθητικό Κεφάλαιο (Liabilities)
Χαρτοφυλάκιο δανείων	Καταθέσεις
Εξωχρηματοπιστηριακές Συναλλαγές	Εξωχρηματοπιστηριακές Συναλλαγές
Τίτλοι Αγοράς	Τίτλοι Αγοράς
Αντίστροφα repos	Repos
Μετρητά και ισοδύναμα μετρητών	Υβριδικό Κεφάλαιο
Λοιπά στοιχεία ενεργητικού	Λοιπά στοιχεία παθητικού
	Καθαρή Αξία (Equity)

Πίνακας 2.1: Περιουσιακά Στοιχεία Τραπεζών

Το πιο θεμελιώδες χαρακτηριστικό του τραπεζικού ισολογισμού είναι η λογιστική αναλογία του A/E . Ο λόγος αυτός στο παρελθόν υπερέβαινε το 50 και αποτυπώνει τη δυνατότητα της τράπεζας να απορροφήσει τις διαταραχές του ισολογισμού. Πολύ σημαντικό βήμα τόσο για τη μελέτη του χρηματοπιστωτικού συστήματος, όσο και για τη συστημική ανάλυση αποτελεί η διάκριση του εσωτερικού από το εξωτερικό σύστημα. Ο συστημικός κίνδυνος διαδίδεται

στο χρηματοπιστωτικό σύστημα, καθώς σχεδόν κάθε στοιχείο ενεργητικού μιας τράπεζας συνδέεται με κάποιο στοιχείου παθητικού μιας άλλης.

2.1.1 Στοιχεία Ενεργητικού Κεφαλαίου Τραπεζών

Τα στοιχεία ενεργητικού κεφαλαίου των τραπεζών είναι αυτά που ανήκουν στην ιδιοκτησία της τράπεζας και φαίνονται στο αριστερό μέρος του προηγούμενου πίνακα. Παρακάτω γίνεται μία σύντομη περιγραφή αυτών των στοιχείων:

- **Χαρτοφυλάκιο Δανείων (Loan Portfolio).** Περιλαμβάνει το σύνολο των πιστώσεων που οι τράπεζες, οι επενδυτικές εταιρίες ή ακόμη και οι κυβερνητικές υπηρεσίες κατέχουν και διαχειρίζονται. Τα χαρτοφυλάκια δανείων αποτελούν περιουσιακά στοιχεία λόγω των επαναλαμβανόμενων εσόδων που δημιουργούν οι πληρωμές των δανείων. Τα έσοδα αυτά προέρχονται μεταξύ άλλων από υποθήκες, εμπορικά δάνεια και πιστωτικές κάρτες. Ωστόσο, ένα χαρτοφυλάκιο δανείων μπορεί επίσης να θέσει μια επιχείρηση σε χρηματοοικονομικό κίνδυνο εάν μεγάλος αριθμός δανειοληπτών αδυνατεί να πληρώσει τα δάνεια.
- **Εξωχρηματιστηριακές Συναλλαγές (Over-the-counter Transactions).** Σε αυτήν την κατηγορία εντάσσονται οι συναλλαγές χρηματοπιστωτικών μέσων, όπως είναι οι μετοχές, τα ομόλογα, τα παράγωγα κι άλλα στοιχεία Ενεργητικού, η διαπραγμάτευση των οποίων πραγματοποιείται μέσω ενός δικτύου αντιπροσώπων και όχι μέσω μιας κεντρικής, επίσημης πλατφόρμας όπως το Χρηματιστήριο Αθηνών. Τα χρεόγραφα που γίνονται αντικείμενα εξωχρηματιστηριακής (over-the-counter) διαπραγμάτευσης, συνήθως δημιουργούνται από ιδιωτικούς εμπόρους χρεογράφων (όπως μια επενδυτική τράπεζα), οι οποίοι δρουν ως μεσολαβητές μεταξύ των πωλητών και πιθανών αγοραστών. Τα πλεονεκτήματα των εξωχρηματιστηριακών συμβολαίων είναι κυρίως το χαμηλότερο κόστος, οι χαμηλότεροι φόροι και η δυνατότητα που παρέχεται στους πωλητές και τους αγοραστές αυτών των προϊόντων να διαπραγματεύονται διμερώς και να ρυθμίζουν οι ίδιοι τις συναλλαγές.
- **Μετρητά και Τίτλοι Αγοράς.** Οι τράπεζες πέρα από μετρητά διαθέτουν και άλλα περιουσιακά στοιχεία, τα οποία μπορούν να ρευστοποιηθούν εύκολα χωρίς μεγάλο κόστος. Αυτά τα ισοδύναμα μετρητών χρησιμοποιούνται για τη βραχυπρόθεσμη πληρωμή των καταθετών κατόπιν αιτήματος. Το νομοθετικό πλαίσιο της Βασιλείας III υποχρέωσε τις τράπεζες να ασκούν συνετή διαχείριση της ρευστότητας και συγκεκριμένα τις ανάγκασε να διαθέτουν ένα ποσοστό των περιουσιακών τους στοιχείων σε ένα χαρτοφυλάκιο μετρητών και τίτλων αγοράς, ώστε να μπορούν να ανταποκριθούν στις βραχυπρόθεσμες υποχρεώσεις τους μέσω της ρευστοποίησης αυτών των περιουσιακών στοιχείων.
- **Αντίστροφα repos.** Αποτελούν Συμφωνίες Επαναγοράς για τις οποίες την πρωτοβουλία αναλαμβάνει ο δανειστής και όχι ο οφειλέτης. Η σημασία των συμφωνιών επαναγοράς (repos) θα γίνει κατανοητή στην επόμενη παράγραφο, όπου αναλύονται τα στοιχεία παθητικού κεφαλαίου.
- **Άλλα στοιχεία ενεργητικού.** Υπάρχουν και άλλες, λιγότερο σημαντικές κατηγορίες περιουσιακών στοιχείων όπως: ακίνητα, εισπρακτέοι λογαριασμοί και άλλα παρόμοια.

2.1.2 Στοιχεία Παθητικού Κεφαλαίου Τραπεζών

Στα στοιχεία του παθητικού κεφαλαίου μιας τράπεζας περιλαμβάνονται τα χρέη της και οι υποχρεώσεις της προς άλλες τράπεζες, ενώ η καθαρή θέση (equity) δεν αποτελεί κάποιο είδος χρέους ή υποχρέωσης, αλλά είναι η διαφορά των στοιχείων του ενεργητικού από τα στοιχεία του παθητικού κεφαλαίου όπως έχουμε ήδη αναφέρει στην εξίσωση (2.1). Η ανάλυση των επιμέρους κατηγοριών στις οποίες διακρίνονται τα στοιχεία παθητικού ακολουθεί παρακάτω:

- **Καταθέσεις (Deposits).** Αποτελούν ένα μεγάλο μέρος του χρέους μιας παραδοσιακής τράπεζας. Οι καταθέσεις γίνονται τόσο από θεσμικούς επενδυτές, όσο και από μικρούς επενδυτές λιανικής και έχουν συνήθως μεγάλο φάσμα προθεσμιών. Σε περιπτώσεις συστημικού κινδύνου, οι μικροί καταθέτες προστατεύονται συνήθως από την ασφάλεια καταθέσεων αν υπάρχει αδυναμία πληρωμής από την τράπεζα, ενώ οι θεσμικοί καταθέτες δεν έχουν ανάλογη προστασία.
- **Εξωχρηματιστηριακές Συναλλαγές (Over-the-counter Transactions).** Τα ομόλογα συνιστούν ένα σημαντικό μέσο για την αύξηση του μακροπρόθεσμου δανειακού κεφαλαίου από τις τράπεζες. Ένα ομόλογο είναι ένα χρεόγραφο, η ονομαστική αξία του οποίου καταβάλλεται από τον εκδότη (οφειλέτη) στον κάτοχο (δανειστή) στη λήξη της σύμβασης. Κάθε ομόλογο χαρακτηρίζεται από το πλασματικό του ποσό, τη λήξη, το επιτόκιο κουπονιών και μια πληθώρα άλλων γνωρισμάτων. Ορισμένες φορές τα ομόλογα μιας επιχείρησης διαφέρουν ως προς την παλαιότητα και σε περίπτωση αθέτησης τα παλαιότερα ομόλογα πληρώνονται εξ' ολοκλήρου πριν τα νεότερα.
- **Τίτλοι Αγοράς (Market Securities).** Συχνά οι μεγάλες επενδυτικές τράπεζες ακολουθούν την τεχνική Ανοιχτής Πώλησης (Short Position) σε τίτλους αγοράς όπως τα ομόλογα και τα χρεόγραφα. Δηλαδή, οι τράπεζες αυτές δανείζονται περιουσιακά στοιχεία που δεν κατέχουν, τα πωλούν και σε μεταγενέστερη χρονική στιγμή θα αναγκαστούν να τα αγοράσουν πάλι για να τα επιστρέψουν στο δανειστή. Αυτή η τεχνική ακολουθείται από τις τράπεζες, με σκοπό το κέρδος από την πτώση των τιμών. Συνεπώς, αυτά τα περιουσιακά στοιχεία εντάσσονται στο παθητικό κεφάλαιο των τραπεζών.
- **Συμφωνίες Επαναγοράς (Repos).** Είναι συμφωνίες μεταξύ ενός δανειστή και ενός οφειλέτη να πουλήσουν και μετά να αγοράσουν και πάλι κάποιο χρεόγραφο μικρού κινδύνου. Ένας οφειλέτης εκδίδει ένα repo κάνοντας συμφωνία να πουλήσει χρεόγραφο σε ένα δανειστή σε μια συγκεκριμένη τιμή και ταυτόχρονα συμφωνεί να τα επαναγοράσει σε μια μελλοντική στιγμή σε μια συγκεκριμένη τιμή. Η διαφορά μεταξύ των δύο τιμών είναι η απόδοση του δανειστή. Με άλλα λόγια το ένα από τα δύο συμβαλλόμενα μέρη δανείζεται χρήματα για να καλύψει τις ανάγκες ρευστότητάς του, χρησιμοποιώντας ως ενέχυρο ένα χρεόγραφο γνωστής αξίας από το χαρτοφυλάκιό του.
- **Υβριδικό Κεφάλαιο (Hybrid Capital).** Αποτελεί κεφάλαιο της επιχείρησης που έχει χαρακτηριστικά τόσο ενεργητικού όσο και παθητικού κεφαλαίου. Παράδειγμα αποτελούν οι προνομιούχες μετοχές και τα COCOs που συμπεριφέρονται ως ομόλογα όσο η τράπεζα είναι υγιής, αλλά παρέχουν επιπλέον αποταμίευση μετοχών για την τράπεζα όταν αποδυναμωθούν οι ισολογισμοί της.
- **Λοιπές Υποχρεώσεις.** Πολλές φορές οι τράπεζες έχουν υποχρεώσεις, οι οποίες δεν ανήκουν σε κάποια από τις προαναφερθείσες κατηγορίες. Ένα παράδειγμα αποτελούν τα ομολογιακά δάνεια για τα οποία είναι υπεύθυνες οι τράπεζες όταν λειτουργούν ως μεσίτες μεταξύ των πελατών τους για παροχή ασφάλειας.

2.1.3 Καθαρή Θέση (Equity)

Η Καθαρή Θέση αποτελεί το μετοχικό κεφάλαιο της επιχείρησης, που ορίζεται ως η αξία των περιουσιακών στοιχείων μείον την αξία όσων οφείλει η επιχείρηση και αντιπροσωπεύει τη συνολική αξία που μεταφέρεται από την ιδιοκτησία της.

Σε μια δημόσια επιχείρηση, η συνολική αξία της διακρίνεται σε μετοχές καθεμιά από τις οποίες έχει μια τρέχουσα αγοραία τιμή. Αντίθετα, στις ιδιωτικές επιχειρήσεις, τα ίδια κεφάλαια δεν έχουν διαφανή αγοραία αξία. Κατά την έναρξη μιας επιχείρησης, οι ιδιοκτήτες χρηματοδοτούν τις διάφορες λειτουργίες της. Σύμφωνα με την αρχή περιορισμένης ευθύνης -η οποία ισχύει σε όλες σχεδόν τις δημόσιες επιχειρήσεις- η επιχείρηση και οι ιδιοκτήτες της αποτελούν ξεχωριστές οντότητες. Δηλαδή, η επιχείρηση θεωρείται ότι οφείλει στους κατόχους της τα χρήματα που επενδύθηκαν από αυτούς, ως χρέος υπό μορφή μετοχικού κεφαλαίου. Αυτό σημαίνει ότι σε περίπτωση που η εταιρία σταματήσει να λειτουργεί, οι μέτοχοι δεν είναι υπεύθυνοι για τις μη καταβληθείσες υποχρεώσεις. Συνεπώς, το μετοχικό κεφάλαιο δε γίνεται ποτέ αρνητικό, αλλά μηδενίζεται όταν η εταιρία πτωχεύσει και πάψει να λειτουργεί. Η επιχείρηση παρέχει στους μετόχους κέρδος είτε μέσω της πληρωμής τακτικών μερισμάτων, είτε μέσω της αύξησης της αξίας των μετοχών.

2.2 Δίαυλοι Συστημικού Κινδύνου

Ο συστημικός κίνδυνος διαδίδεται στο χρηματοπιστωτικό δίκτυο μέσω των διατραπεζικών σχέσεων. Όπως αναφέρθηκε στην προηγούμενη ενότητα, τα στοιχεία ενεργητικού μίας τράπεζας αποτελούν συνήθως στοιχεία παθητικού μίας άλλης, με αποτέλεσμα να δημιουργείται ένας δίαυλος μετάδοσης του συστημικού κινδύνου στο δίκτυο. Ωστόσο, τα χρηματοπιστωτικά δίκτυα έχουν γίνει πολύ σύνθετα, με την έννοια ότι υπάρχουν διαφορετικοί τύποι διατραπεζικών συνδέσεων, που δημιουργούν πολλαπλά κανάλια μετάδοσης του σοκ. Παρακάτω αναλύονται οι σημαντικότερες μορφές συσχετίσεων κεφαλαίου μεταξύ των τραπεζών, που αποτελούν τους βασικούς μηχανισμούς μετάδοσης:

- **Συσχέτιση Περιουσιακών Στοιχείων (Asset Correlation).** Διαφορετικές τράπεζες τείνουν να μοιράζονται κοινά περιουσιακά στοιχεία. Σύμφωνα με τον Haldane, την περίοδο πριν το 2007 τα κεφάλαια των τραπεζών γίνονταν όλο και περισσότερο παρόμοια, γεγονός που τις κατέστησε ευάλωτες στην εμφάνιση συστημικών γεγονότων.
- **Κίνδυνος Αλυσιδωτής Αθέτησης (Default Contagion).** Στη σύγχρονη εποχή, ο αριθμός των συνδέσεων μεταξύ των τραπεζικών αντισυμβαλλόμενων έχει επεκταθεί για να συμπεριλάβει συμβάσεις ανταλλαγής, παράγωγα και άλλα τιτλοποιημένα περιουσιακά στοιχεία. Συνεπώς, αν μια τράπεζα πτωχεύσει, οι πιστωτές της θα υποστούν σοβαρές ζημιές, με αποτέλεσμα να γίνεται ορατό το σενάριο αλυσιδωτών αθετήσεων. Αυτός ο μηχανισμός μετάδοσης ονομάζεται Default Contagion.
- **Κίνδυνος Μετάδοσης Έλλειψης Ρευστότητας (Liquidity Contagion).** Η έλλειψη ρευστότητας οδηγεί τις τράπεζες στην υιοθέτηση στρατηγικών, οι οποίες ενδέχεται να οδηγήσουν σε συρρίκνωση των ισολογισμών τους. Για παράδειγμα, οι τράπεζες που αντιμετωπίζουν πρόβλημα ρευστότητας μπορεί να αρνηθούν το δανεισμό repos σε άλλους αντισυμβαλλόμενους. Λογικό επακόλουθο μίας τέτοιας στάσης είναι η μετάδοση της χρηματικής διαταραχής στο δίκτυο.
- **Έλλειψη Ρευστότητας στην αγορά και Πωλήσεις Περιουσιακών Στοιχείων (Market Illiquidity and Asset Fire Sales).** Σε αντίθεση με τις καλές

περιόδους της αγοράς, σε περιόδους κρίσεις, οι τράπεζες που αντιμετωπίζουν προβλήματα έλλειψης ρευστότητας καταφεύγουν σε πωλήσεις περιουσιακών στοιχείων. Αυτή η στρατηγική τους αποτελεί ένα μηχανισμό μετάδοσης που είναι γνωστός ως *πώληση ενεργητικού* και έχει ως συνέπεια την πτώση των τιμών, με αποτέλεσμα να πλήττονται οι τράπεζες που κατέχουν αυτά τα περιουσιακά στοιχεία.

- **Άλλοι Διάυλοι Μετάδοσης.** Αρχετοί συγγραφείς έχουν εντοπίσει και άλλους διαύλους μετάδοσης του συστημικού κινδύνου. Ένα παράδειγμα είναι ο κίνδυνος ανατροπής που εντοπίζεται σε περιπτώσεις που οι δανειστές μπορεί να μην ανανεώσουν ή να «ανατρέψουν» το βραχυπρόθεσμο χρέος. Μια τέτοια απόφαση μπορεί να οφείλεται είτε στην αξιολόγηση της υγείας του αντισυμβαλλόμενου από την τράπεζα (διαρθρωτική αβεβαιότητα), είτε στην εκτίμηση της τράπεζας σχετικά με τη συμπεριφορά δανεισμού άλλων τραπεζών (στρατηγική αβεβαιότητα). Σε πολλές πηγές υποστηρίζεται ότι η κρίση του 2008 οφείλεται σε μεγάλο βαθμό στην έλλειψη εμπιστοσύνης μεταξύ των τραπεζών σχετικά με την αγορά *repos*, γεγονός που οδήγησε στην απώλεια των ευκαιριών χρηματοδότησης των τραπεζών. Το αποτέλεσμα αυτό ήταν μεταδοτικό, καθώς οι τράπεζες που αύξησαν τις περιχοπές επέβαλλαν την έλλειψη χρηματοδότησης ρευστότητας στους αντισυμβαλλόμενούς τους, οδηγώντας σε περαιτέρω αμφισβήτηση της ποιότητας των αντισυμβαλλόμενων και της εξασφάλισής τους.

Κεφάλαιο 3

Στατικά Μοντέλα Καταρράκτη (Static Cascade Models)

3.1 Εισαγωγικές Έννοιες

Οι μεταβολές στο χρηματοπιστωτικό δίκτυο μεταδίδονται μεταξύ των τραπεζών τόσο με άμεσο όσο και με έμμεσο τρόπο. Η άμεση μετάδοση πραγματοποιείται μέσω των διατραπεζικών τους εκθέσεων. Η έμμεση μετάδοση των διαταραχών λαμβάνει χώρα συνήθως σε περιπτώσεις πώλησης παθητικού κεφαλαίου λόγω της πτώσης της αξίας των περιουσιακών στοιχείων που πωλούνται. Κατά την πώληση, οι διαταραχές μεταδίδονται από την τράπεζα που πωλεί αυτά τα στοιχεία, στις τράπεζες που κατέχουν μέρος αυτών.

Σε περιόδους οικονομικών διαταραχών, οι τράπεζες αντιδρούν στις πιέσεις, πραγματοποιώντας μεγάλες προσαρμογές στους ισολογισμούς τους. Αυτές οι προσαρμογές αποδίδουν περαιτέρω σοκ στους αντισυμβαλλόμενους τους, τόσο άμεσα μέσω των ανοιγμάτων τους, όσο και έμμεσα μέσω του αντίκτυπου των τιμών των στοιχείων ενεργητικού, δημιουργώντας έναν καταρράκτη. Όλοι αυτοί οι μηχανισμοί καταρράκτη μπορούν να μοντελοποιηθούν μαθηματικά. Σε αυτά τα μοντέλα, το τελικό στάδιο της κρίσης είναι ένα σταθερό σημείο που ονομάζεται και σημείο ισορροπίας καταρράκτη. Στα μοντέλα καταρράκτη που αναλύονται γίνονται οι εξής παραδοχές:

1. Το σύστημα που πριν το ξέσπασμα της κρίσης ήταν σε μια φυσιολογική κατάσταση δέχτηκε πλήγμα από ένα καταστροφικό γεγονός. Αυτό το γεγονός έθεσε μία ή περισσότερες τράπεζες σε κατάσταση οικονομικού στρες.
2. Το πλήγμα μεταδίδεται από τις πληγείσες τράπεζες στις αντισυμβαλλόμενες μέσω των διατραπεζικών τους σχέσεων.
3. Στη συνέχεια, το σύστημα υφίσταται μια σειρά από αναπροσαρμογές για να ανταποκριθεί στα σοκ των ισολογισμών, με αποτέλεσμα να δημιουργούνται νέα συστημικά σοκ.
4. Τελικά το σύστημα καταλήγει σε μια κατάσταση ισορροπίας στο τέλος της κρίσης.

Τα βασικά μοντέλα καταρράκτη αυτού του κεφαλαίου υποθέτουν ότι το χρηματοπιστωτικό σύστημα αποτελείται από N τράπεζες, που συμβολίζονται με:

$$n \in \{1, 2, \dots, N\} := |N| \quad (3.1)$$

Οι ισολογισμοί των τραπεζών υποθέτουμε ότι έχουν τη μορφή που φαίνεται στον παρακάτω πίνακα. Αρχικά, οι εγγραφές στους ισολογισμούς αυτών των τραπεζών αναφέρονται στις

Assets	Liabilities
Interbank Assets \bar{Z}	Interbank Debt \bar{X}
External Fixed Assets \bar{Y}^F	External Debt \bar{D}
External Liquid Assets \bar{Y}^L	Equity \bar{E}

Πίνακας 3.1: Απλουστευμένος Ισολογισμός Τραπεζών

ονομαστικές αξίες. Τα περιουσιακά στοιχεία και οι υποχρεώσεις διακρίνονται σε διατραπεζικές και εξωτερικές ποσότητες ανάλογα με το αν ο αντισυμβαλλόμενος είναι τράπεζα ή όχι.

Ορισμός 3.3. Ονομαστική αξία του ενεργητικού μιας τράπεζας v ορίζεται το άθροισμα της ονομαστικής αξίας των εξωτερικών περιουσιακών στοιχείων \bar{Y}_v (τόσο των σταθερών, όσο και των ρευστών) και των διατραπεζικών περιουσιακών στοιχείων \bar{Z}_v . Δηλαδή:

$$\bar{A}_v = \bar{Y}_v + \bar{Z}_v \quad (3.2)$$

όπου:

$$\bar{Y}_v = \bar{Y}_v^F + \bar{Y}_v^L \quad (3.3)$$

Ορισμός 3.4. Η ονομαστική αξία των υποχρεώσεων μιας τράπεζας δίνεται από το άθροισμα του εξωτερικού χρέους \bar{D}_v και του διατραπεζικού χρέους \bar{X}_v όπως φαίνεται στην παρακάτω εξίσωση:

$$\bar{L}_v = \bar{X}_v + \bar{D}_v \quad (3.4)$$

Ορισμός 3.5. Η ονομαστική τιμή της Καθαρής Θέσης (Equity) \bar{E}_v μιας τράπεζας v ορίζεται από τη σχέση:

$$\bar{E}_v = \bar{Y}_v + \bar{Z}_v - \bar{D}_v - \bar{X}_v \quad (3.5)$$

Ορισμός 3.6. Ονομαστική έκθεση \bar{W}_{vw} μιας τράπεζας w σε μια τράπεζα v ονομάζουμε το ποσό που η v οφείλει στην w . Ορίζουμε επίσης τα κλάσματα των διατραπεζικών δανείων:

$$\bar{P}_{vw} = \frac{\bar{W}_{vw}}{\bar{X}_v} \quad (3.6)$$

Ως άμεση συνέπεια των παραπάνω ορισμών προκύπτουν οι εξής σχέσεις:

$$\bar{Z}_v = \sum_w \bar{W}_{vw} \quad (3.7)$$

$$\bar{X}_v = \sum_w \bar{W}_{vw} \quad (3.8)$$

$$\sum_v \bar{Z}_v = \sum_v \bar{X}_v \quad (3.9)$$

$$\bar{W}_{vv} = 0, \quad \forall v \in \{1, 2, \dots, N\} \quad (3.10)$$

Ορισμός 3.7. Θα λέμε ότι μια τράπεζα v βρίσκεται σε κατάσταση Αδυναμίας Πληρωμής (*Defaulted*) όταν ισχύει ότι:

$$\bar{E}_v = 0 \quad (3.11)$$

Αντίθετα, ορίζουμε ως Αξιόχρηη (*Solvent*) μία τράπεζα v που ικανοποιεί τη σχέση:

$$\bar{E}_v > 0 \quad (3.12)$$

Τέλος, θα λέμε ότι μία τράπεζα v βρίσκεται σε κατάσταση Πίεσης (*Stressed*) αν:

$$\bar{Y}_v^L = 0 \quad (3.13)$$

Τα μοντέλα καταρράκτη που θα μελετηθούν σε αυτό το κεφάλαιο ονομάζονται στατικά (*static*), επειδή το τελικό τους σημείο προκύπτει ως αποτέλεσμα μίας ντετερμινιστικής συνάρτησης των αρχικών ισολογισμών και εκθέσεων. Στις επόμενες παραγράφους αναλύονται τα βασικότερα είδη των μοντέλων καταρράκτη ανάλογα με το δίκτυο μετάδοσης που περιγράφουν.

3.2 Default Καταρράκτες

Σε αυτήν την παράγραφο θα ασχοληθούμε με τη σημαντικότερη κατηγορία μοντέλων καταρράκτη που είναι οι default καταρράκτες και θα αναλύσουμε διεξοδικά το μοντέλο των Eisenberg-Noe, που αποτελεί ίσως την πιο δημοφιλή μοντελοποίηση καταρράκτη. Στους default καταρράκτες αντιμετωπίζουμε τα μη διατραπεζικά έσοδα συνολικά, ενδιαφερόμενοι μόνο για την τιμή \bar{Y} χωρίς να εστιάζουμε ξεχωριστά στα \bar{Y}^L και \bar{Y}^F . Επίσης, σε αυτά τα μοντέλα γίνεται η υπόθεση ότι ένα αρχικό γεγονός-σοκ έχει οδηγήσει μία ή περισσότερες τράπεζες σε κατάσταση Αδυναμίας Πληρωμής ($E = 0$). Η εξέλιξη του καταρράκτη έχει ως αποτέλεσμα να πλήττονται οι ισολογισμοί κι άλλων τραπεζών, με συνέπεια κάποιες από αυτές να καταλήγουν επίσης σε κατάσταση Αδυναμίας Πληρωμής προκαλώντας ένα φαύλο κύκλο.

3.2.1 Eisenberg-Noe 2001 Model

Στη μοντελοποίηση των Eisenberg-Noe [15] ένα χρηματοπιστωτικό σύστημα περιγράφεται ως ένα δίκτυο N κόμβων που αντιπροσωπεύουν τράπεζες, οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους με κατευθυνόμενες ακμές που κατευθύνονται από τις τράπεζες-οφειλέτες στις τράπεζες-πιστωτές. Για την καλύτερη κατανόηση της έννοιας του δικτύου κόμβων συστήνεται στον αναγνώστη να ανατρέξει στην παράγραφο (4.1), όπου ορίζουμε τις βασικές έννοιες των γράφων.

Στο Eisenberg-Noe 2001 Model χρησιμοποιούνται επίσης έννοιες και συμβολισμοί από τη Γραμμική Άλγεβρα, η κατανόηση των οποίων είναι απαραίτητη για τη συνέχιση της ανάλυσης:

Συμβολισμός 1. Έστω R^n ο Ευκλείδειος χώρος n -διάστασης και $N = [1, 2, \dots, n]$. Για οποιαδήποτε $x, y \in R^n$ ισχύουν οι εξής συμβολισμοί:

- $x \wedge y := (\min[x_1, y_1], \min[x_2, y_2], \dots, \min[x_n, y_n])$
- $x \vee y := (\max[x_1, y_1], \max[x_2, y_2], \dots, \max[x_n, y_n])$
- $x^+ := (\max[x_1, 0], \max[x_2, 0], \dots, \max[x_n, 0])$
- $x \leq y \Leftrightarrow x_i \leq y_i \quad \forall i \in N$

Συμβολισμός 2. Στο χώρο R^n υιοθετούμε ακόμη τους εξής συμβολισμούς:

- $\mathbf{1} := (1, 1, \dots, 1)$
- $\mathbf{0} := (0, 0, \dots, 0)$
- $\|x\| := \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \forall x \in R^n$

Ορισμός 3.8. Μία απεικόνιση $T : R^n \rightarrow R^n$ θα λέγεται L^1 -μη επεκτατική (L^1 -non-expansive) αν ισχύει ότι:

$$\|T(x) - T(y)\| \leq \|x - y\| \quad \forall x, y \in R^n \quad (3.14)$$

Έχοντας κατανοήσει τις παραπάνω έννοιες και έχοντας στο μυαλό μας τους ορισμούς (3.3)-(3.7) και τις αντίστοιχες σχέσεις (3.2)-(3.13) μπορούμε πλέον να συνεχίσουμε την ανάλυση μας. Όμοια με την εξίσωση (3.2), η συνολική εισροή ρευστότητας στους ιδιοκτήτες μίας τράπεζας i θα ισούται με το άθροισμα των διατραπεζικών εσόδων Z_i που λαμβάνει η i από αντισυμβαλλόμενες τράπεζες και των λειτουργικών εσόδων Y_i . Έστω: $x = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ το διάνυσμα των διατραπεζικών πληρωμών. Υποθέτουμε ότι το διατραπεζικό χρέος είναι της ίδιας προτεραιότητας, δηλαδή ότι τα χρήματα που δίνονται από την τράπεζα i σε μία τράπεζα j είναι ίσα με: $X_i * \bar{P}_{ij}$. Συνεπώς, προκύπτει άμεσα ότι η συνολική εισροή ρευστότητας στην τράπεζα i θα δίνεται από τη σχέση:

$$A_i = \sum_{j=1}^n \bar{P}_{ij}^T X_j + Y_i \quad (3.15)$$

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, πέρα από τα διατραπεζικά της χρέη, κάθε τράπεζα i έχει οφειλές προς εξωτερικούς παράγοντες (όπως προμηθευτές, εργαζόμενους κλπ), τα οποία συμβολίσαμε με \bar{D}_i . Αυτά τα λειτουργικά έξοδα κάθε τράπεζας μπορούν να απαλοιφθούν, εισάγοντας στο σύστημά μας μία νέα «ψευδοτράπεζα» με δείκτη 0. Αυτή η τράπεζα θεωρούμε ότι έχει μηδενικά λειτουργικά έσοδα και μηδενικές διατραπεζικές υποχρεώσεις, ενώ τα λειτουργικά έξοδα των υπόλοιπων τραπεζών απλοποιούνται θεωρώντας τα ως διατραπεζικά χρέη προς την τράπεζα 0. Αυτές οι παραδοχές συνοψίζονται στις παρακάτω σχέσεις:

$$\bar{Y}_0 = 0 \quad (3.16)$$

$$\bar{W}_{0j} = 0, \quad \forall j \quad (3.17)$$

$$\bar{D}_i = \bar{W}_{i0} \quad (3.18)$$

Βάσει των παραπάνω θεωρήσεων, προκύπτει πλέον ότι η Καθαρή Θέση E_i ενός κόμβου i θα ισούται με τη συνολική εισροή κεφαλαίου σε αυτόν μείον τις πληρωμές του στις άλλες τράπεζες:

$$E_i = \sum_{j=1}^n \bar{P}_{ij}^T X_j + Y_i - X_i \quad (3.19)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι μέσω των σχέσεων (3.6) και (3.8) το σύστημα (\bar{W}, \bar{Y}) μπορεί ισοδύναμα να περιγραφεί από τις ποσότητες $(\bar{P}, \bar{X}, \bar{Y})$.

Είναι διαισθητικά αναγκαίο να ορίσουμε ένα διάνυσμα πληρωμών, το οποίο θα ορίζει τις πληρωμές που θα πραγματοποιούνται από κάθε κόμβο σε κάθε βήμα και θα γίνει σεβαστό από όλες τις τράπεζες του συστήματος. Στο μοντέλο των Eisenberg-Noe το διάνυσμα αυτό ονομάζεται Clearing Payment Vector και ικανοποιεί τα εξής κριτήρια:

- Περιορισμένη Ευθύνη (Limited Liability). Οι συνολικές πληρωμές που πραγματοποιούνται από έναν κόμβο είναι απαραίτητο να μην υπερβαίνουν τις διαθέσιμες ταμειακές ροές προς αυτόν.
- Προτεραιότητα Απαιτήσεων Χρέους (Priority of Debt Claims). Οι μέτοχοι κάθε τράπεζας δεν έχουν δικαίωμα να λάβουν καμία αξία μέχρι η τράπεζα να είναι σε θέση να εξοφλήσει όλες τις εκκρεμούσες υποχρεώσεις της.
- Αναλογικότητα (Proportionality). Σε περίπτωση που μία τράπεζα βρεθεί σε κατάσταση αδυναμίας πληρωμής, όλοι οι πιστωτές της πληρώνονται κατ' αναλογία προς το μέγεθος της ονομαστικής τους απαίτησης επί των περιουσιακών στοιχείων της επιχείρησης.

Με βάση τα παραπάνω κριτήρια προκύπτει ο κάτωθι ορισμός:

Ορισμός 3.9. Ένα διάνυσμα πληρωμών $X^* \in [0, \bar{X}]$ για ένα χρηματοπιστωτικό σύστημα $(\bar{P}, \bar{X}, \bar{Y})$ θα ονομάζεται *Clearing Payment Vector* αν ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

1. Περιορισμένη Ευθύνη. $X_i^* \leq \sum_{j=1}^n \bar{P}_{ij}^T X_j + Y_i, \quad \forall i \in N$
2. Απόλυτη Ευθύνη. $\forall i \in N$, είτε οι υποχρεώσεις πληρώνονται εξ' ολοκλήρου, δηλαδή: $X_i^* = \bar{X}_i$, είτε όλες οι εισροές τις τράπεζας μεταφέρονται στους πιστωτές της, που σημαίνει ότι: $X_i^* = \sum_{j=1}^n \bar{P}_{ij}^T X_j + Y_i$

Από τον παραπάνω ορισμό, συνδυάζοντας τη συνθήκη Περιορισμένης Ευθύνης με τη συνθήκη Απόλυτης Ευθύνης καταλήγουμε ότι ένα διάνυσμα $X^* \in [0, \bar{X}]$ είναι Clearing Payment Vector αν και μόνο αν ισχύει ότι:

$$\bar{X}_i^* = \min \left[\sum_{j=1}^n \bar{P}_{ij}^T X_j + Y_i, \bar{X}_i \right], \quad \forall i \in N \quad (3.20)$$

Δηλαδή το Clearing Payment Vector είναι ένα διάνυσμα πληρωμών, σύμφωνα με το οποίο κάθε κόμβος πληρώνει το ελάχιστο μεταξύ αυτών που οφείλει και αυτών που κατέχει.

Συνεπώς, μπορούμε να πούμε ότι το διάνυσμα αυτό αποτελεί σταθερό σημείο της απεικόνισης:

$F(\cdot, \bar{P}, \bar{X}, Y) : [0, \bar{X}] \rightarrow [0, \bar{X}]$ που ορίζεται ως εξής:

$$F(X; \bar{P}, \bar{X}, Y) \equiv (\bar{P}^T X + Y) \wedge \bar{X}$$

Αυτό σημαίνει ότι η F ικανοποιεί τη συνθήκη:

$$X^* = F(X^*) \quad (3.21)$$

Προκύπτει εύλογα το ερώτημα αν για κάθε χρηματοπιστωτικό σύστημα υπάρχει ένα Clearing Payment Vector. Επίσης, θα μπορούσε λογικά να αναρωτηθεί κάποιος αν ενδέχεται σε κάποιο χρηματοπιστωτικό σύστημα να υπάρχουν περισσότερα του ενός Clearing Payment Vectors. Για να δοθεί απάντηση σε αυτά τα ερωτήματα είναι απαραίτητο να προηγηθεί το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 3.1. Σε κάθε χρηματοπιστωτικό σύστημα $(\bar{P}, \bar{X}, \bar{Y})$:

1. Υπάρχει ένα μέγιστο και ένα ελάχιστο Clearing Payment Vector X^+ και X^- αντίστοιχα.
2. Για κάθε Clearing Payment Vector η Καθαρή Θέση E_i κάθε τράπεζας i είναι η ίδια, δηλαδή αν X', X'' είναι δυο τυχαία Clearing Payment Vectors ισχύει ότι:

$$(\bar{P}^T X' + Y - \bar{X})^+ = (\bar{P}^T X'' + Y - \bar{X})^+$$

Απόδειξη. Μελετώντας τη συνάρτηση F , διαπιστώνουμε πως αυτή είναι θετική, αύξουσα, κυρτή και μη επεκτατική. Το πρόσημο, η μονοτονία και η κυρτότητα της F , προκύπτουν από το γεγονός ότι η F αποτελεί σύνθεση της θετικής, αύξουσας και γραμμικής απεικόνισης: $X \rightarrow \bar{P}^T X + Y$ και της θετικής, αύξουσας και κυρτής απεικόνισης: $X \rightarrow X \wedge \bar{X}$. Ο ισχυρισμός ότι η F είναι μη-επεκτατική πηγάζει από το ότι για οποιαδήποτε διανύσματα x, y, z ισχύει ότι:

$$\|x \wedge z - y \wedge z\| \leq \|x - y\|.$$

Συνεπώς, έπεται ότι:

$$\|F(x) - F(x')\| = \|(\bar{P}^T x + Y) \wedge \bar{x} - (\bar{P}^T x' + Y) \wedge \bar{x}\| \leq \|\bar{P}^T x - \bar{P}^T x'\|$$

Ακόμη, από τον τρόπο που ορίστηκε ο \bar{P} προκύπτει ότι το άθροισμα των όρων κάθε γραμμής του ισούται με τη μονάδα. Συνεπώς, το άθροισμα των όρων κάθε στήλης του \bar{P}^T θα ισούται επίσης με τη μονάδα. Επομένως προκύπτει εύκολα από τους κανόνες της γραμμικής άλγεβρας ότι: $\|\bar{P}^T\| = 1$, άρα:

$$\|\bar{P}^T x - \bar{P}^T x'\| \leq \|x - x'\|,$$

από όπου προκύπτει η συνθήκη 1 του θεωρήματος.

Για να αποδείξουμε το (2) αρκεί να δείξουμε ότι αν X' είναι ένα τυχαίο Clearing Payment Vector, τότε η Καθαρή Θέση είναι ίδια με την περίπτωση που έχουμε διάνυσμα πληρωμών

το X^+ . Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η απεικόνιση \bar{P}^T είναι αύξουσα, όπως και η απεικόνιση $x \rightarrow x^+$. Συνεπώς, επειδή $X' \leq X^+$ παίρνουμε ότι:

$$(\bar{P}^T(X^+) + Y - \bar{X})^+ \geq (\bar{P}^T(X') + Y - \bar{X})^+ \quad (3.22)$$

Έστω ότι: $(\bar{P}^T(X^+) + Y - \bar{X})^+ \neq (\bar{P}^T(X') + Y - \bar{X})^+$. Τότε, η σχέση (3.22) γίνεται:

$$(\bar{P}^T(X^+) + Y - \bar{X})^+ > (\bar{P}^T(X') + Y - \bar{X})^+ \quad (3.23)$$

Επειδή τα X^+ , X' είναι Clearing Payment Vectors, θα ισχύουν τα εξής:

$$(\bar{P}^T(X^+) + Y - \bar{X})^+ = \bar{P}^T(X^+) + Y - X^+ \quad (3.24)$$

$$(\bar{P}^T(X') + Y - \bar{X})^+ = \bar{P}^T(X') + Y - X' \quad (3.25)$$

Συνεπώς, από τις σχέσεις (3.23), (3.24) και (3.25) παίρνουμε ότι:

$$\bar{P}^T(X^+) + Y - X^+ > \bar{P}^T(X') + Y - X' \quad (3.26)$$

Ακόμη, ισχύει ότι: $\bar{P}\mathbf{1} = 1$, από όπου οδηγούμαστε στο ότι:

$$\mathbf{1}(\bar{P}^T(X^+) - X^+) = \mathbf{1}(\bar{P}^T(X') - X') \quad (3.27)$$

Επομένως:

$$\mathbf{1}(\bar{P}^T(X^+) + Y - X^+) = \mathbf{1}(\bar{P}^T(X') + Y - X') \quad (3.28)$$

Οι σχέσεις (3.26) και (3.28) αποτελούν προφανή αντίφαση, η οποία προέκυψε διότι υποθέσαμε ότι:

$$(\bar{P}^T(X^+) + Y - \bar{X})^+ \neq (\bar{P}^T(X') + Y - \bar{X})^+$$

Άρα:

$$(\bar{P}^T(X^+) + Y - \bar{X})^+ = (\bar{P}^T(X') + Y - \bar{X})^+$$

□

Αποδείξαμε λοιπόν την ύπαρξη Clearing Payment Vector για κάθε χρηματοπιστωτικό σύστημα. Το επόμενο ερώτημα στο οποίο καλούμαστε να απαντήσουμε είναι αν αυτό το διάνυσμα είναι μοναδικό. Για το σκοπό αυτό, είναι απαραίτητο αρχικά να δοθεί ο επόμενος ορισμός.

Ορισμός 3.10. Ένα σύνολο κόμβων $S \subset N$ θα ονομάζεται σύνολο πλεονασμάτων, αν κανένας κόμβος του συνόλου δεν έχει υποχρεώσεις σε κόμβο εκτός του συνόλου S και το σύνολο έχει θετικές λειτουργικές ταμειακές ροές. Δηλαδή:

$$\forall (i, j) \in S \times S^c, \quad \bar{P}_{ij} = 0$$

και:

$$\sum_{i \in S} Y_i > 0$$

Διαισθητικά, ένα σύνολο πλεονασμάτων είναι ένα κλειστό αποθεματικό αξίας στο χρηματοπιστωτικό σύστημα. Το χρηματοπιστωτικό σύστημα δε δημιουργεί ούτε καταστρέφει αξία, συνεπώς η αξία ενός συνόλου πλεονασμάτων πρέπει να κατανοηθεί κάπου. Επειδή το σύνολο πλεονασμάτων είναι κλειστό, η τιμή πρέπει να ρέει προς κάποιο κόμβο στο ίδιο το σύνολο πλεονασμάτων. Αυτή η παρατήρηση τυποποιείται στο επόμενο λήμμα:

Λήμμα 3.1. *Αν X^* ένα Clearing Payment Vector, είναι αδύνατο όλοι οι κόμβοι ενός συνόλου πλεονασμάτων να έχουν μηδενική Καθαρή Θέση.*

Απόδειξη. Έστω S ένα σύνολο πλεονασμάτων και P_i^+ το σύνολο των πληρωμών που λαμβάνει ο κόμβος i από τους κόμβους που ανήκουν στο S^c . Από τον τρόπο που ορίστηκε το σύνολο πλεονασμάτων, είναι προφανές ότι οι κόμβοι του S δεν έχουν οφειλές προς τους κόμβους του S^c . Συνεπώς, αν υποθέσουμε πως όλοι οι κόμβοι του S έχουν μηδενική Καθαρή Θέση, έπεται ότι:

$$X_i = \sum_{j \in S} \bar{P}_{ij}^T X_j + Y_i + P_i^+, \quad \forall i \in S \quad (3.29)$$

Αθροίζοντας τις σχέσεις (3.29) για όλους τους κόμβους στο S παίρνουμε ότι:

$$\sum_{i \in S} X_i = \sum_{j \in S} \sum_{i \in S} \bar{P}_{ij}^T X_j + \sum_{i \in S} (Y_i + P_i^+) \quad (3.30)$$

Όμως επειδή το S αποτελεί σύνολο πλεονασμάτων ισχύει ότι:

$$\sum_{i \in S} \bar{P}_{ij}^T = 1 \quad (3.31)$$

Συνεπώς, λόγω των σχέσεων (3.30),(3.31) έχουμε ότι:

$$\sum_{i \in S} (Y_i + P_i^+) = 0 \quad (3.32)$$

Η παραπάνω σχέση δεν μπορεί να ισχύει εφόσον: $\sum_{i \in S} Y_i > 0$.

Οδηγηθήκαμε σε άτοπο διότι υποθέσαμε ότι όλοι οι κόμβοι του S έχουν μηδενική Καθαρή Θέση, άρα το ζητούμενο αποδείχτηκε. \square

Για τη συνέχιση της ανάλυσης σχετικά με τη μοναδικότητα του Clearing Payment Vector για κάθε χρηματοπιστωτικό σύστημα, είναι απαραίτητη η εισαγωγή των εννοιών του Financial Structure Graph και της Risk Orbit ενός κόμβου στο σύστημα.

Ορισμός 3.11. *Για ένα χρηματοπιστωτικό σύστημα $(\bar{P}, \bar{X}, \bar{Y})$ ορίζουμε ως Financial Structure Graph το κατευθυνόμενο γράφημα, οι κόμβοι του οποίου είναι οι κόμβοι του συστήματος και οι ακμές του ορίζονται μέσω της ισοδυναμίας:*

$$i \longrightarrow j \iff \bar{P}_{ij} > 0$$

Ορισμός 3.12. Ορίζουμε την Τροχιά Κινδύνου *Risk Orbit* $o(i)$ κάθε κόμβου i σε ένα χρηματοπιστωτικό σύστημα ως εξής:

$$o(i) = [j \in S : \text{υπάρχει κατευθυνόμενο μονοπάτι από τον } i \text{ στον } j]$$

Η αδυναμία πληρωμής ενός κόμβου μειώνει τις εισροές των πιστωτών του, οδηγώντας ενδεχομένως κάποιους από αυτούς επίσης σε αθέτηση πληρωμών, με αποτέλεσμα να διαδίδεται με αυτόν τον τρόπο η διαταραχή στο σύστημα. Η τροχιά κινδύνου ενός κόμβου i μας δίνει ουσιαστικά τη μέγιστη διάδοση που μπορεί να παρατηρηθεί στο σύστημα, σε περίπτωση που ξεκινήσει μια διαταραχή από τον κόμβο i .

Λήμμα 3.2. Έστω X^* ένα Clearing Payment Vector για το σύστημα $(\bar{P}, \bar{X}, \bar{Y})$. Αν η τροχιά κινδύνου $o(i)$ ενός κόμβου i ικανοποιεί τη συνθήκη:

$$\sum_{j \in o(i)} Y_j > 0,$$

τότε με διάνυσμα πληρωμών το X^* υπάρχει ένας τουλάχιστον κόμβος $j \in o(i)$ με θετική Καθαρή θέση. Δηλαδή:

$$\exists j \in o(i) \text{ τέτοιο ώστε: } \bar{X}_j < (\bar{P}^T X^* + Y)_j$$

Απόδειξη. Για να αποδείξουμε το ζητούμενο, αρκεί να δείξουμε ότι το $o(i)$ είναι σύνολο πλεονασμάτων, καθώς στο προηγούμενο Λήμμα δείξαμε ότι σε κάθε σύνολο πλεονασμάτων υπάρχει τουλάχιστον ένας κόμβος με θετική Καθαρή θέση. Έστω ότι $o(i)$ δεν είναι σύνολο πλεονασμάτων. Τότε θα υπάρχει $i' \in o(i)$ που θα έχει οφειλές προς κάποιο κόμβο $j \in o(i)^c$. Όμως, σε αυτήν την περίπτωση θα υπάρχει στον Financial Structure Graph μονοπάτι που θα ενώνει τον i' με τον j . Επίσης, εφόσον $i' \in o(i)$ υπάρχει μονοπάτι που ενώνει τον i με τον i' . Συνεπώς, συνενώνοντας αυτά τα 2 μονοπάτια θα μπορούσαμε να κατασκευάσουμε μονοπάτι από τον i στον j και επομένως $j \in o(i)$. Άτοπο, εφόσον υποθέσαμε ότι $j \in o(i)^c$. \square

Τα προηγούμενα Λήμματα αποτελούν τη βάση για την απόδειξη της μοναδικότητας ενός Clearing Payment Vector όταν υπάρχει μία επιπλέον συνθήκη που ονομάζουμε Ομαλότητα.

Ορισμός 3.13. Ένα χρηματοπιστωτικό σύστημα θα ονομάζεται Ομαλό (*Regular*) αν κάθε τροχιά του $o(i)$ είναι σύνολο πλεονασμάτων.

Αξίζει να σημειωθεί ότι στο μοντέλο των Eisenberg-Noe γίνεται η υπόθεση ότι το σύστημα είναι κλειστό με την έννοια ότι κάθε αξία μεταβιβάζεται μόνο εντός του συστήματος. Συνεπώς, η Ομαλότητα απαιτεί ουσιαστικά την ύπαρξη κάποιας αξίας στο σύστημα, η οποία μπορεί να φτάσει σε όλους τους κόμβους του συστήματος. Μια απλή επαρκής προϋπόθεση για την Ομαλότητα είναι ότι όλοι οι κόμβοι έχουν θετικές λειτουργικές ταμειακές ροές, ενώ μια άλλη επαρκής συνθήκη για την Ομαλότητα είναι ότι όλοι οι κόμβοι του Financial Structure Graph είναι ισχυρά διασυνδεδεμένοι και κάποιος κόμβος έχει θετική Καθαρή Θέση. Η Ομαλότητα ενός συστήματος εξασφαλίζει την ύπαρξη μοναδικού Clearing Payment Vector όπως φαίνεται και στο παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 3.2. Αν το χρηματοπιστωτικό σύστημα είναι Ομαλό, τότε το μέγιστο και το ελάχιστο Clearing Payment Vector συμπίπτουν, δηλαδή:

$$X^+ = X^-$$

Συνεπώς, όταν το σύστημα είναι ομαλό, το Clearing Payment Vector X^* είναι μοναδικό.

Απόδειξη. Όπως έχουμε δείξει στο θεώρημα (3.1), για κάθε χρηματοπιστωτικό σύστημα υπάρχει ένα μέγιστο κι ένα ελάχιστο Clearing Payment Vector X^+ και X^- αντίστοιχα, για τα οποία ισχύει προφανώς ότι:

$$X^+ \geq X^- \quad (1)$$

Έστω ότι: $X^+ \neq X^-$ και επομένως: $X^+ > X^-$.

Έστω ακόμη E_j^+ και E_j^- αντίστοιχα η Καθαρή Θέση ενός κόμβου j με την εφαρμογή του Clearing Payment Vector X^+ και X^- αντίστοιχα.

Από το θεώρημα (3.1) έπεται ότι:

$$\forall j, \quad E_j^+ = E_j^- \quad (2)$$

Από την παραπάνω σχέση, προκύπτει άμεσα ότι οι κόμβοι που έχουν μηδενική Καθαρή Θέση είναι οι ίδιοι ανεξάρτητα από το αν εφαρμόσουμε το X^+ ή το X^- . Άρα στη συνέχεια της απόδειξης μπορούμε να αναφερόμαστε σε κόμβους με θετική Καθαρή Θέση και μηδενική Καθαρή Θέση, χωρίς να προσδιορίζουμε το Clearing Payment Vector.

Από τη συνθήκη της Απόλυτης Ευθύνης, θα πρέπει για όλους τους κόμβους j που έχουν θετική Καθαρή Θέση να ισχύει ότι:

$$X_j^+ = X_j^- = \bar{X}_j$$

Συνεπώς, για να ισχύει η υπόθεση ότι $X^+ > X^-$, θα πρέπει να υπάρχει ένας τουλάχιστον κόμβος i με $E_i = 0$, που να ικανοποιεί τη συνθήκη:

$$X_i^+ > X_i^- \quad (3)$$

Από την υπόθεση της Ομαλότητας και το Λήμμα 3.1 προκύπτει ότι υπάρχει κόμβος

$$m \in o(i) : E_m > 0.$$

Συνεπώς, μπορούμε να βρούμε μονοπάτι:

$$i = i_0 \longrightarrow i_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow i_{l-1} \longrightarrow i_l = m,$$

όπου όλοι οι κόμβοι του μονοπατιού έχουν μηδενική Καθαρή Θέση, εκτός από τον m .

Αρχικά, θα δείξουμε με τη μέθοδο της Επαγωγής ότι για τους κόμβους: i_0, i_1, \dots, i_{l-1} ισχύει ότι: $X_{i_k}^+ - X_{i_k}^- > 0$.

Καταρχάς, για $k = 0$ ισχύει, εφόσον $X_i^+ > X_i^-$

Έστω ότι ισχύει για $k - 1$. Επειδή οι κόμβοι i_0, i_1, \dots, i_{l-1} έχουν μηδενική Καθαρή Θέση, οι πληρωμές τους θα ταυτίζονται με τις εισροές τους, επομένως για όλους τους κόμβους i_k , όπου $k \leq l - 1$ έχουμε ότι:

$$X_{i_k}^+ = \sum_{j=1}^N P_{ji_k} X_j^+ + Y_{i_k} \quad \text{και} \quad X_{i_k}^- = \sum_{j=1}^N P_{ji_k} X_j^- + Y_{i_k}$$

Οπότε:

$$X_{i_k}^+ - X_{i_k}^- = \sum_{j=1}^N P_{ji_k} (X_j^+ - X_j^-) \quad (4)$$

Από επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι: $X_{i_{k-1}}^+ - X_{i_{k-1}}^- > 0$
Επειδή $i_{k-1} \rightarrow i_k$, θα είναι: $P_{i_{k-1}i_k} > 0$. Οπότε:

$$P_{i_{k-1}i_k} (X_{i_{k-1}}^+ - X_{i_{k-1}}^-) > 0 \quad (5)$$

Από τις σχέσεις (1),(4),(5) προκύπτει άμεσα ότι: $X_{i_k}^+ - X_{i_k}^- > 0$ Άρα δείξαμε με επαγωγή ότι: $X_{i_k}^+ - X_{i_k}^- > 0, \forall k \leq l-1$.
Συνεπώς, για $k = l-1$ θα είναι:

$$X_{i_{l-1}}^+ - X_{i_{l-1}}^- > 0 \quad (6)$$

Θα δείξουμε πως η σχέση (6) οδηγεί στο συμπέρασμα ότι: $E_m^+ > E_m^-$. Από τον τρόπο που ορίστηκε η Καθαρή Θέση θα είναι:

$$E_m^+ - E_m^- = \sum_{j=1}^N P_{jm} (X_j^+ - X_j^-) - (X_m^+ - X_m^-) \quad (7)$$

Επειδή ο m είναι κόμβος με θετική Καθαρή Θέση, από τη συνθήκη Απόλυτης Ευθύνης παίρνουμε:

$$X_m^+ = X_m^- = \bar{X}_m$$

Συνεπώς, η σχέση (7) γίνεται:

$$E_m^+ - E_m^- = \sum_{j=1}^N P_{jm} (X_j^+ - X_j^-) \quad (8)$$

Όμως: $i_{l-1} \rightarrow m$, οπότε: $P_{i_{l-1}m} > 0$. Συνεπώς:

$$P_{i_{l-1}m} (X_{i_{l-1}}^+ - X_{i_{l-1}}^-) > 0 \quad (9)$$

Από τις σχέσεις (8),(9) έπεται ότι:

$$E_m^+ > E_m^- \quad (10)$$

Ωστόσο, η σχέση (10) έρχεται σε αντίθεση με τη σχέση (2).

Καταλήξαμε σε άτοπο διότι υποθέσαμε ότι: $X^+ \neq X^-$. Άρα, τα διανύσματα X^+, X^- ταυτίζονται και επομένως το Clearing Payment Vector είναι μοναδικό.

□

3.3 Καταρράκτες Ρευστότητας Liquidity Cascades

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε τους Καταρράκτες Ρευστότητας. Αυτή η κατηγορία καταρρακτών εμφανίζεται όταν ένα συστημικό γεγονός οδηγεί τις τράπεζες στην προσπάθεια διατήρησης της ρευστότητας τους, με αποτέλεσμα να αποφεύγουν ή να περιορίζουν το δανεισμό τους σε άλλες τράπεζες. Σε αυτή τη μορφή καταρρακτών, η διαταραχή μεταδίδεται από τις τράπεζες-πιστωτές στις τράπεζες-οφειλέτες. Παρακάτω παρουσιάζονται σύντομα δύο μοντέλα καταρράκτη αυτής της μορφής για την καλύτερη κατανόηση από τον αναγνώστη.

3.3.1 Gai–Karadia 2010 Liquidity Cascade Model

Στο μοντέλο Gai–Karadia [17] γίνεται η υπόθεση ότι το Ενεργητικό Κεφάλαιο κάθε τράπεζας v αποτελείται από τα διατραπεζικά της έσοδα \bar{Z}_v , τα σταθερά εξωτερικά έσοδα \bar{Y}_v^F και τα ρευστά έσοδα \bar{Y}_v^L . Όταν τα ρευστά έσοδα \bar{Y}_v^L είναι μη μηδενικά, χρησιμοποιούνται ως περιουσιακά στοιχεία ρευστότητας \bar{S}_v από τα οποία αποπληρώνονται οι υποχρεώσεις που προκύπτουν. Ωστόσο η τιμή S_v μπορεί να μηδενιστεί ή να γίνει αρνητική λόγω της εμφάνιση ενός συστημικού γεγονότος.

Μία τράπεζα v για την οποία ισχύει ότι $S_v < 0$ λέμε ότι βρίσκεται σε Κατάσταση Πίεσης (Stressed).

Οι υποχρεώσεις μιας τράπεζας v θεωρούμε ότι διακρίνονται στο εξωτερικό χρέος \bar{D}_v και το διατραπεζικό χρέος \bar{X}_v .

Το μοντέλο Gai–Karadia υιοθετεί τις εξής παραδοχές:

1. Στο βήμα 0 του καταρράκτη μία ή περισσότερες τράπεζες αρχίζουν να αντιμετωπίζουν προβλήματα έλλειψης ρευστότητας, γεγονός που τις ωθεί σε Κατάσταση Πίεσης ($S_v^{(0)} < 0$).
2. Οι τράπεζες που οδηγούνται σε Κατάσταση Πίεσης αποκρίνονται αμέσως κατακρατώντας ένα κλάσμα $\lambda \leq 1$ του διατραπεζικού τους δανεισμού. Το γεγονός αυτό προκαλεί ένα σοκ ρευστότητας της τάξης $\lambda \bar{W}_{vw}$ σε κάθε δανειζόμενο w της v . Οι τράπεζες που ωθούνται σε Κατάσταση Πίεσης παραμένουν σε αυτήν την κατάσταση ως το τέλος της κρίσης.
3. Σε κάθε βήμα $n \geq 0$ μια τράπεζα v τηρεί όλες τις διατραπεζικές υποχρεώσεις με τους νέους όρους δανεισμού.

Γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι η υπόθεση του σταθερού παράγοντα λ αποτελεί μια υπεραπλούστευση που δεν ανταποκρίνεται στα πραγματικά δίκτυα. Ωστόσο, θα διατηρήσουμε αυτήν την παραδοχή για την καλύτερη κατανόηση της ουσίας του μοντέλου.

Με αυτές τις παραδοχές οδηγούμαστε σε ένα μηχανισμό καταρράκτη που εκφράζεται μέσω μίας αναδρομικής σχέσης των περιουσιακών στοιχείων ρευστότητας όλων των τραπεζών ξεκινώντας από μία αρχική κατάσταση $S_v^{(0)} = \bar{S}_v$.

Η τελική αναδρομική εξίσωση στην οποία καταλήγουμε είναι η εξής:

$$S_v^{(n)} = \bar{S}_v - \lambda \sum_w \bar{W}_{vw} (1 - \bar{h}(S_w^{(n-1)})) \quad (3.33)$$

$$\text{όπου } \bar{h}(x) = \mathbf{1}(x > 0) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

Σε αυτόν το μηχανισμό καταρράκτη, η παράμετρος λ αντιπροσωπεύει τη μέση τιμή της μείωσης του διατραπεζικού δανεισμού που επιλέγουν οι τράπεζες. Η παραπάνω αναδρομική σχέση συγκλίνει σε ένα σημείο ισορροπίας που αποτελεί το μέγιστο σταθερό σημείο S^+ της σχέσης (3.33).

Για τον προσδιορισμό των συνεπειών της κρίσης, το Gai–Karadia 2010 Liquidity Cascade Model χρησιμοποιεί τις εξής μετρικές:

1. Ποσοστό τραπεζών σε Κατάσταση Πίεσης : $SP = \frac{1}{N} \sum_v \mathbf{1}(S_v^+ \leq 0)$
2. Συνολική επίδραση του καταρράκτη στο δίκτυο : Πρόκειται για τη συνολική αξία των διατραπεζικών εσόδων που «πάγωσαν» στη διάρκεια της κρίσης, που δίνεται από τη σχέση $LCI = \lambda \sum_v \bar{Z}_v \mathbf{1}(S_v^+ \leq 0)$.

3.3.2 The Liquidity Model of S.H. Lee 2013

Σε αυτό το μοντέλο [27] γίνεται η υπόθεση ότι οι τράπεζες εξοφλούν τις διατραπεζικές και τις εξωτερικές τους υποχρεώσεις πωλώντας αρχικά τα εξωτερικά και διατραπεζικά ρευστά περιουσιακά τους στοιχεία και σε περιπτώσεις που αυτά δεν αρκούν, επιλέγουν να πουλήσουν τα μη ρευστα-εξωτερικά κεφάλαιά τους.

Επίσης, εισάγουμε στο χρηματοπιστωτικό δίκτυο μία τράπεζα με το δείκτη 0, η οποία θεωρούμε ότι δανείζεται από τις άλλες, όμως δε δανείζει σε καμία και κάνουμε τη σύμβαση ότι: $\bar{Z}_0 = \bar{D}_0 = 0$. Συνεπώς, οι διατραπεζικές εκθέσεις θα έχουν τη μορφή:

$$\bar{W}_{vw} = \begin{cases} b_{vw}, & v, w \neq 0 \\ q_w, & v = 0, w \neq 0 \\ 0, & w = 0 \end{cases} \quad (3.34)$$

Όπως και πριν θα είναι: $\bar{Z}_v = \sum_w \bar{W}_{vw}$ και $\bar{X}_v = \sum_w \bar{W}_{vw}$, ενώ θεωρούμε ότι $Y_v^F = z_v$, $Y_v^L = q_v = \bar{W}_{0v}$ και $\bar{D}_v = d_v$.

Θεωρούμε ότι στο βήμα 0 του καταρράκτη, κάθε τράπεζα δέχεται μία απώλεια ρευστότητας $\delta d_v \geq 0$. Αυτές οι απώλειες καλύπτονται από κάθε τράπεζα v του συστήματος αρχικά μέσω των διατραπεζικών ρευστών περιουσιακών της εσόδων \bar{Z}_v (στα οποία πλέον περιλαμβάνονται και οι πληρωμές από την τράπεζα 0) μέχρι αυτά να εξαντληθούν και στη συνέχεια από την πώληση των εξωτερικών εσόδων Y_v^F .

Ορίζουμε τώρα τον stress buffer τη χρονική στιγμή 0 να είναι $S_v^{(0)} = \bar{S}_v = -\delta d_v$. Προκύπτει ότι στο n βήμα του καταρράκτη ρευστότητας, κάθε buffer $S_v^{(n)}$ -που έχει την ίδια τιμή και αντίθετο πρόσημο με τις ανάγκες ρευστότητας της τράπεζας- θα έχει συνολική τιμή:

$$S_v^{(n)} = \bar{S}_v - \sum_w \bar{W}_{vw} (1 - h(S_w^{(n-1)}/\bar{Z}_w)) \quad (3.35)$$

Θα λέμε ότι μία τράπεζα v βρίσκεται σε Κατάσταση Έλλειψης Ρευστότητας όταν ισχύει ότι: $S_v \leq -Z_v$. Οι μετρικές που χρησιμοποιεί το μοντέλο αυτό για τον καθορισμό του μεγέθους της κρίσης είναι οι εξής:

1. Ποσοστό τραπεζών σε Κατάσταση Έλλειψης Ρευστότητας :

$$LP = \frac{1}{N} \sum_v \mathbf{1}(S_v^+ \leq -Z_v)$$

2. Συνολική επίδραση του καταρράκτη ρευστότητας στο δίκτυο : Πρόκειται για τη συνολική αξία των εξωτερικών εσόδων που πωλήθηκαν στη διάρκεια της κρίσης και δίνεται από τη σχέση: $LCI = \sum_v (-S_v^+ - \bar{Z}_v)^+$

3.4 Καταρράκτες Λόγω Υποτίμησης Περιουσιακών Αξιών (Asset Fire Sales)

Σε αυτήν την παράγραφο ασχολούμαστε με τους Καταρράκτες που κάνουν την εμφάνισή τους σε περιπτώσεις υποβάθμισης της αξίας ορισμένων τραπεζικών περιουσιακών στοιχείων. Η υποβάθμιση αυτή οδηγεί σε αυτό που ονομάζουμε *Σοκ Συσχέτισης Κεφαλαίων* και αποτελεί έναν πολύ συχνό παράγοντα εμφάνισης χρηματοπιστωτικών κρίσεων.

Πολλές φορές οι τράπεζες που βιώνουν καταστάσεις πίεσης καταφεύγουν σε μεγάλη κλίμακα πωλήσεις των εξωτερικών περιουσιακών τους στοιχείων. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την πώση της αξίας αυτών των στοιχείων, γεγονός που πλήττει όλες τις τράπεζες που κατέχουν αντίστοιχης κλάσης περιουσιακά στοιχεία και καλούνται να αντιμετωπίσουν την υποτίμηση της αξίας τους.

Οι καταρράκτες αυτής της μορφής ενδέχεται να προξενούνται από τις πωλήσεις ενός ή περισσότερων στοιχείων του ενεργητικού κεφαλαίου. Στην παρούσα Διπλωματική Εργασία θα ασχοληθούμε μόνο με το One Asset Model θεωρώντας πως ο καταρράκτης πυροδοτείται από το ξεπούλημα ενός μόνο στοιχείου. Στο μοντέλο αυτό [12] θεωρούμε ότι το δίκτυο μας προσδιορίζεται από τις ποσότητες $(Y^F, \bar{Z}, \bar{Y}^L, \bar{D}, \bar{X}, \bar{W})$ με τις τράπεζες να έχουν ισολογισμούς όπως παρουσιάστηκαν στα προηγούμενα μοντέλα. Εδώ είναι χρήσιμο να εισάγουμε την έννοια του initial default buffer $\Delta_v^{(0)}$ ο οποίος αποτελεί επέκταση της έννοιας της Καθαρής Αξίας και ορίζεται από την εξίσωση:

$$\Delta_v^{(0)} = \bar{\Delta}_v := \bar{Y}_v + \sum_w W_{vw} - \bar{D}_v - \bar{X}_v$$

Θεωρούμε ότι η αρχική τιμή του στοιχείου είναι: $\bar{p} = p^{(0)} = 1$, έτσι ώστε κάθε τράπεζα να κατέχει $s_v^{(0)} = \bar{Y}_v^F$ μονάδες. Το καινούργιο χαρακτηριστικό αυτού του μοντέλου είναι ότι εισάγουμε τον Capital Adequacy Ratio (CAR) περιορισμό, σύμφωνα με τον οποίο για κάθε τράπεζα v θα πρέπει να ικανοποιείται η συνθήκη:

$$\frac{\Delta_v}{Y_v^F + Z_v} \geq r^* \quad (3.36)$$

όπου r^* μία καθορισμένη σταθερά ≤ 1 που δηλώνει ποσοστό. Σε περιπτώσεις που η παραπάνω συνθήκη παραβιάζεται, οι τράπεζες προσπαθούν να ικανοποιήσουν και πάλι τον περιορισμό πωλώντας τα σταθερά μη ρευστά περιουσιακά τους στοιχεία. Το γεγονός αυτό προκαλεί μία πτωτική τάση στην αξία αυτών των στοιχείων ενεργητικού.

Στο μοντέλο αυτό γίνονται οι εξής υποθέσεις:

1. Μία τράπεζα v για την οποία ισχύει ότι $r^* Z_v \leq \Delta_v < r^*(Y_v^F + Z_v)$ δεν υπακούει τον CAR περιορισμό, όμως θα λέμε ότι είναι Αξιόχρηη και θα πρέπει να πουλήσει τα σταθερά εξωτερικά περιουσιακά της στοιχεία για να ικανοποιήσει τη σχέση (3.36).

2. Μια τράπεζα v με $r^*Z_v > \Delta_v$ θεωρείται Μη Αξιόχρεη και ρευστοποιείται πλήρως. Αυτή η τακτική ακολουθείται διότι ακόμη κι αν πουλήσει όλα τα σταθερά εξωτερικά περιουσιακά της στοιχεία Y_v^F δεν είναι δυνατό να ικανοποιήσει τον CAR περιορισμό. Συνεπώς, μία τέτοια τράπεζα σταματά τη λειτουργία της, ακόμη κι αν ισχύει ότι $\Delta_v > 0$.
3. Όταν μία τράπεζα αναγκάζεται να διακόψει τη λειτουργία της, τα διατραπεζικά περιουσιακά της στοιχεία διαμοιράζονται στους πιστωτές της ανάλογα με τις διατραπεζικές της εκθέσεις σε αυτούς. Επίσης, οι εξωτερικές καταθέσεις θεωρούμε ότι είναι της ίδιας παλαιότητας με τις διατραπεζικές υποχρεώσεις, συνεπώς οι συνολικές υποχρεώσεις της Μη Αξιόχρεης τράπεζας αποτιμώνται αναλογικά σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$\bar{P}_{vw} = \frac{\bar{W}_{vw}}{\bar{X}_v + \bar{D}_v}.$$

4. Η τιμή του περιουσιακού στοιχείου όταν πωλείται, καθορίζεται από μια καμπύλη ανελαστικής προσφοράς και μια ανεστραμμένη συνάρτηση ζήτησης $d^{(-1)}(\cdot)$. Δηλαδή, η τιμή p του στοιχείου δίνεται από τη σχέση:

$$p = d^{(-1)}(s)$$

όπου $s = \sum_v s_v$ η συνολική ποσότητα που πωλήθηκε.

Η ανεστραμμένη συνάρτηση ζήτησης έχει τη μορφή:

$$d^{(-1)}(s) = e^{-\alpha s}$$

για μία συγκεκριμένη τιμή του α .

Στο βήμα $n = 0$ του καταρράκτη θεωρούμε ότι το δίκτυο μας $(\bar{Y}^F, \bar{Z}, \bar{Y}^L, \bar{X}, \bar{W})$ έχει default buffers:

$$\Delta^{(0)} = \bar{\Delta} = \bar{Y}^F + \bar{Z} + \bar{Y}^L - \bar{X}$$

και μία τουλάχιστον τράπεζα παραβιάζει τον CAR περιορισμό.

Για να απλοποιήσουμε το εξωτερικό χρέος, εισάγουμε και πάλι στο σύστημα μας μία τράπεζα με δείκτη 0, η οποία θεωρούμε ότι δανείζει σε όλες τις άλλες και δε δανείζεται από αυτές. Δηλαδή θεωρούμε:

$$\bar{D}_w := \bar{W}_w 0$$

Υπενθυμίζουμε πως ορίσαμε: $\bar{p} = p^{(0)} = 1$, έτσι ώστε κάθε τράπεζα v να κατέχει $s_v^{(0)} = Y_v^F$ μονάδες. Τα επόμενα βήματα του καταρράκτη ακολουθούν την εξής λογική:

1. Λόγω της παραβίασης του CAR περιορισμού, κάθε τράπεζα v προσπαθεί να προσαρμοστεί πωλώντας:

$$\delta s_v = \min(s_v^{(n-1)}, \max(0, s_v^{(n-1)} + Z_v^{(n-1)})/p^{(n-1)} - \Delta_v^{(n-1)}/(r^*p^{(n-1)}))$$

μονάδες στην τιμή $p^{(n-1)}$. Να σημειωθεί ότι $\delta s_v = 0$ για μια τράπεζα που τηρεί τον CAR περιορισμό και $\delta s_v = s_v^{(n-1)}$ για μια μη Αξιόχρεη τράπεζα. Όταν $\delta s_v > 0$, η πώληση των σταθερών εξωτερικών περιουσιακών στοιχείων αυξάνει τη ρευστότητα της τράπεζας στην τιμή: $Y_v^{L(n)} = Y_v^{L(n-1)} + \delta s_v p^{(n-1)}$ και ο αριθμός των μετοχών του στοιχείου που κρατάει η τράπεζα γίνεται: $s_v^{(n)} = s_v^{(n-1)} - \delta s_v$.

2. Στην περίπτωση που $s_v^{(n)} = 0$, η μη Αξιόχρητη τράπεζα v πρέπει να ρευστοποιηθεί όπως περιγράψαμε προηγουμένως και η αξία του χρέους προς την αγορά αναπροσαρμόζεται ως εξής:

$$X_v^{(n)} = \bar{X}_v + \min(0, \Delta_v^{(n-1)})$$

3. Αφού όλες οι τράπεζες έχουν ολοκληρώσει τις πωλήσεις των περιουσιακών τους στοιχείων, η αξία του στοιχείου στην αγορά κινείται καθοδικά σε μία τιμή που εξαρτάται από τη συνολική ποσότητα που πωλήθηκε. Επομένως:

$$p^{(n)} = d^{(-1)}(\sum_v (s_v^{(0)} - s_v^{(n)}))$$

και τα διατραπεζικά περιουσιακά στοιχεία ενημερώνονται για να καταχωρήσουν νέες απώλειες: $Z_v^{(n)} = \sum_w \bar{P}_{wv} X_w^{(n)}$

4. Ο ενημερωμένος default buffer της τράπεζας v γίνεται:

$$\Delta_v^{(n)} = s_v^{(n)} p^{(n)} + Y_v^{L(n)} + \sum_w \bar{P}_{wv} X_w^{(n)} - \bar{X}_v.$$

Κεφάλαιο 4

Θεωρία των Γράφων

4.1 Εισαγωγικές Έννοιες

Η Θεωρία Γράφων είναι κλάδος των Διακριτών Μαθηματικών, με εφαρμογές στην Πληροφορική, τη Μηχανική, τη Χημεία, την Κοινωνιολογία και άλλες επιστήμες. Αν και οι απαρχές της θεωρίας θεμελιώθηκαν κατά τον 18ο αιώνα, το μεγαλύτερο μέρος της αναπτύχθηκε μεταπολεμικά ως ιδιαίτερος κλάδος των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών. Ένας γράφος αποτελεί μια αφηρημένη αναπαράσταση ενός συνόλου στοιχείων που συγκροτούν ένα δίκτυο. Τα διασυνδεδεμένα στοιχεία ενός γράφου ονομάζονται κορυφές, ενώ οι δεσμοί που συνδέουν τα ζευγάρια των κορυφών ονομάζονται ακμές. Στο πλαίσιο της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας, οι γράφοι χρησιμοποιούνται για την αναπαράσταση ενός χρηματοπιστωτικού δικτύου. Συνεπώς, στη μελέτη που θα κάνουμε στο εξής θεωρούμε ότι οι κορυφές των γράφων αναπαριστούν τράπεζες και οι ακμές συμβολίζουν τις διατραπεζικές εκθέσεις. Έχουν διατυπωθεί πολλοί ορισμοί για την απόδοση της έννοιας του γράφου, ωστόσο ο αυστηρός μαθηματικός ορισμός που απαντάται στα περισσότερα επιστημονικά κείμενα είναι ο επόμενος:

Ορισμός 4.14. Γράφος είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος $G = (V, E)$, όπου V είναι ένα σύνολο σημείων (που ονομάζονται κόμβοι ή κορυφές) και E μια διμελής σχέση πάνω στο V . Τα στοιχεία του E καλούνται ακμές και είναι ευθύγραμμο ή καμπύλο τμήματα με άκρα ένα ή δύο στοιχεία του συνόλου V .

Είναι δυνατό δυο κορυφές ενός γράφου να συνδέονται με περισσότερες της μίας ακμές. Σε ένα γράφο ορίζουμε την έννοια των παρακείμενων κορυφών όπως φαίνεται παρακάτω:

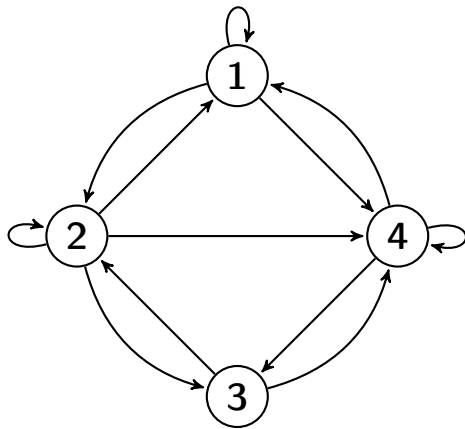
Ορισμός 4.15. Δυο κορυφές ενός γράφου ονομάζονται παρακείμενες αν συνδέονται με μία ή περισσότερες ακμές. Οι παρακείμενες κορυφές απαντώνται στην ελληνική βιβλιογραφία και ως γειτονικές ή ακόμα και ως γειτνιαζουσες.

Οι γράφοι διακρίνονται σε κατευθυνόμενους και μη κατευθυνόμενους, ανάλογα με το αν οι ακμές τους έχουν προσανατολισμό ή όχι. Παρακάτω παρατίθεται ο ορισμός του κατευθυνόμενου γράφου για να γίνει καλύτερη η κατανόηση της διάκρισης:

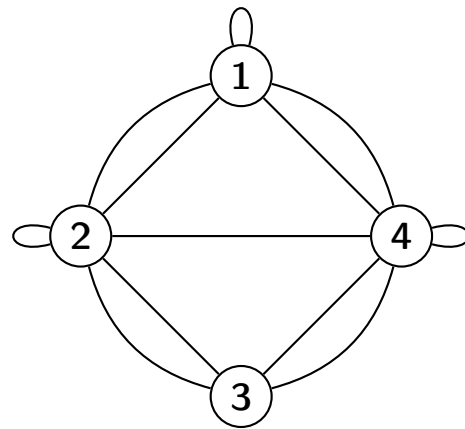
Ορισμός 4.16. Ένας γράφος θα ονομάζεται κατευθυνόμενος (ή προσανατολισμένος) αν τα στοιχεία του E είναι διατεταγμένα ζεύγη της μορφής: (v_1, v_2) , όπου $v_1, v_2 \in V$.

Είναι προφανές ότι ένας γράφος χαρακτηρίζεται ως *μη κατευθυνόμενος* όταν δεν είναι κατευθυνόμενος, δηλαδή όταν δεν υπάρχει η έννοια της διάταξης στα ζεύγη του E .

Παρακάτω φαίνεται ένας κατευθυνόμενος και ένας μη κατευθυνόμενος γράφος:

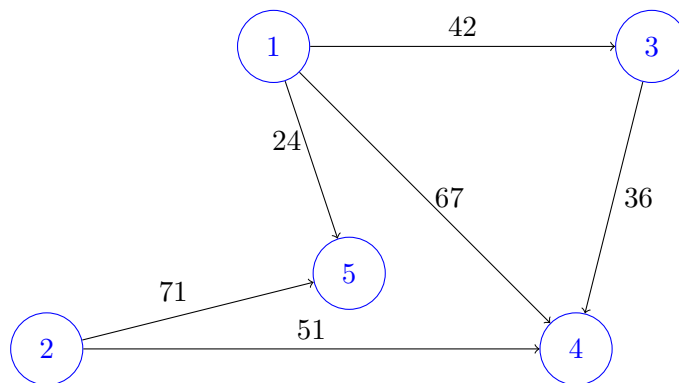


Σχήμα 4.1: Κατευθυνόμενος γράφος



Σχήμα 4.2: Μη κατευθυνόμενος γράφος

Σε πολλές περιπτώσεις είναι χρήσιμο για την αναπαράσταση του δικτύου να επισημαίνονται κάποιες τιμές στις ακμές των γράφων. Αυτές οι τιμές ονομάζονται συνήθως βάρη και μπορεί να αντικατοπτρίζουν μεγέθη όπως απόσταση ή χρόνο. Στην περίπτωση μας θα μπορούσαν να αναπαριστούν το μέγεθος των διατραπεζικών εκθέσεων:



Σχήμα 4.3: Παράδειγμα κατευθυνόμενου γράφου με βάρη στις ακμές

Ορισμός 4.17. *Τάξη (Order) ενός γράφου ονομάζεται ο αριθμός $|V|$ των κορυφών του, ενώ ο αριθμός $|E|$ των ακμών ενός γράφου ορίζεται ως Μέγεθος (Size) του γράφου.*

Κάθε γράφος μπορεί να αναπαρασταθεί μέσω ενός πίνακα, που ονομάζεται πίνακας γειτνίασης.

Ορισμός 4.18. Ο πίνακας γειτνίασης (Adjacency Matrix) A ενός γράφου $G(V, E)$ είναι ο τετραγωνικός πίνακας $A(G) = [a_{ij}]$, του οποίου τα στοιχεία παίρνουν τις τιμές:

- $a_{ij} = 1$, αν και μόνο εάν η κορυφή v_j συνδέεται με την κορυφή v_i .
- $a_{ij} = 0$, σε αντίθετη περίπτωση.

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{pmatrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Σχήμα 4.4: Πίνακας γειτνίασης του γράφου του σχήματος 4.1

Ανάλογα με το αν ο γράφος είναι κατευθυνόμενος ή όχι ορίζουμε το βαθμό ενός γράφου όπως φαίνεται παρακάτω:

Ορισμός 4.19. Σε ένα μη κατευθυνόμενο γράφο ορίζουμε ως Βαθμό (Degree) k_i ενός κόμβου i τον αριθμό των γειτονικών κορυφών του:

$$k_i = \sum_{j=1}^N a_{ij} = \sum_{j=1}^N a_{ji}$$

Σε έναν κατευθυνόμενο γράφο ορίζουμε ως Εσωτερικό Βαθμό (In-Degree) k_i^{in} ενός κόμβου i :

$$k_i^{in} = \sum_{j=1}^N a_{ji}$$

και ως Εξωτερικό Βαθμό (Out-Degree) k_i^{out} του κόμβου i

$$k_i^{out} = \sum_{j=1}^N a_{ij}$$

Για παράδειγμα, στο σχήμα 4.2 είναι: $k_2 = 4$, ενώ στο σχήμα 4.3 έχουμε ότι: $k_2^{in} = 0$ και $k_2^{out} = 2$.

Για κάθε κόμβο i ενός γράφου με βάρη στις ακμές ορίζουμε τη δύναμη του i ως εξής:

Ορισμός 4.20. Δύναμη (Strength) s_i ενός κόμβου i σε ένα μη κατευθυνόμενο γράφο με βάρη στις ακμές ορίζεται το άθροισμα των βαρών των ακμών που ενώνουν τον i με τις γειτονικές του κορυφές:

$$s_i = \sum_{j=1}^N w_{ij} = \sum_{j=1}^N w_{ji}$$

όπου w_{ij} το συνολικό βάρος των ακμών που συνδέουν τον i με τον j και προφανώς $w_{ij} = 0$, αν δεν υπάρχει σύνδεση μεταξύ του i και του j .

Αντίστοιχα, σε έναν κατευθυνόμενο γράφο με βάρη στις ακμές ορίζουμε την εισερχόμενη δύναμη s_i^{in} και την εξερχόμενη δύναμη s_i^{out} ενός κόμβου i ως εξής:

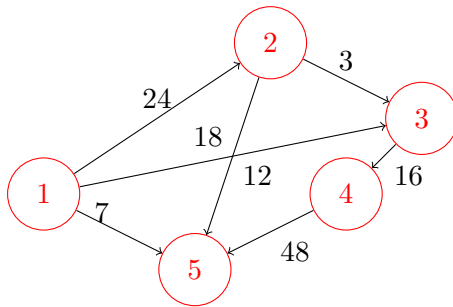
$$s_i^{in} = \sum_{j=1}^N w_{ji}, \quad s_i^{out} = \sum_{j=1}^N w_{ij}$$

Πολλές φορές σε προβλήματα Θεωρίας Γράφων είναι απαραίτητη η μελέτη των επιμέρους υπογράφων. Συνεπώς, είναι πολύ χρήσιμο να γίνει κατανοητός ο παρακάτω ορισμός:

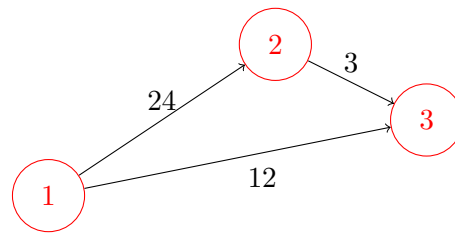
Ορισμός 4.21. Ένας γράφος $G_0 = (V_0, E_0)$ θα ονομάζεται υπογράφος ενός γράφου $G = (V, E)$ αν είναι:

$$V_0 \subseteq V \quad \text{και} \quad E_0 \subseteq E$$

όπου E_0 ορίζεται πάνω στο σύνολο V_0 .
Τότε συμβολίζουμε: $G_0 \subseteq G$.



Σχήμα 4.5: Γράφος G



Σχήμα 4.6: Υπογράφος του G

Σημαντική για τη μελέτη της τοπολογίας και της συνδεσιμότητας ενός γράφου είναι η έννοια του μονοπατιού:

Ορισμός 4.22. Μονοπάτι (*Path*) ενός γράφου ονομάζουμε μια ακολουθία κόμβων του γράφου με την ιδιότητα κάθε ζευγάρι διαδοχικών κόμβων της ακολουθίας να συνδέεται με μια τουλάχιστον ακμή.

Για παράδειγμα, στο γράφο G του σχήματος 4.5, η ακολουθία κορυφών: $(1,3,4,5)$ αποτελεί ένα μονοπάτι του G .

Ορισμός 4.23. Ένας γράφος N κορυφών θα ονομάζεται πλήρης αν κάθε κορυφή του είναι παρακείμενη σε όλες τις άλλες.

Προκύπτει άμεσα ότι ο πίνακας γειτνίασης $A = (a_{ij})$ ενός πλήρους γράφου G έχει την ιδιότητα:

$$a_{ij} = 1, \quad \forall i \neq j$$

Ορισμός 4.24. Κλίκα (*Clique*) ενός γράφου G ονομάζουμε κάθε γράφο $H \subseteq G$ που είναι πλήρης.

4.2 Συνεκτικότητα Γραφημάτων

Η μελέτη της Συνεκτικότητας ενός γράφου αποτελεί πολύ σημαντικό παράγοντα για την εξαγωγή συμπερασμάτων που σχετίζονται με τη διασυνδεσιμότητα του γράφου και την πιθανότητα μετάδοσης μίας διαταραχής από έναν κόμβο του δικτύου στο υπόλοιπο δίκτυο.

Ορισμός 4.25. Ένας γράφος G θα λέγεται συνεκτικός αν για κάθε ζεύγος κορυφών (i, j) του G υπάρχει μονοπάτι από το i στο j .

Σημαντικές μετρικές της συνεκτικότητας ενός συνεκτικού γράφου αποτελούν η κομβική συνεκτικότητα και η ακμική συνεκτικότητά του.

Ορισμός 4.26. Κομβική Συνεκτικότητα (Node-Connectivity) $k(G)$ ενός γράφου G ορίζουμε τον ελάχιστο αριθμό κόμβων του G , η αφαίρεση των οποίων μετατρέπει τον G σε μη συνεκτικό.

Ορισμός 4.27. Ακμική Συνεκτικότητα (Edge-Connectivity) $l(G)$ ενός γράφου G ορίζουμε τον ελάχιστο αριθμό ακμών του G , η αφαίρεση των οποίων μετατρέπει τον G σε μη συνεκτικό.

Υπάρχουν ωστόσο πολλά παραδείγματα μη-συνεκτικών γράφων που αναπαριστούν δίκτυα της καθημερινής μας ζωής. Χαρακτηριστικότερο παράδειγμα αποτελούν οι γράφοι που μοντελοποιούν κοινωνικά δίκτυα όπως το Facebook, εφόσον μεταξύ δύο χρηστών δεν υπάρχει πάντα ακολουθία χρηστών που να δημιουργεί «μονοπάτι» σύνδεσης από τον έναν στον άλλον. Ένας μη-συνεκτικός γράφος G αποτελείται από ένα σύνολο συνεκτικών τμημάτων, καθένα από τα οποία αποτελεί συνεκτικό υπογράφο του G .

Ορισμός 4.28. Ισχυρά συνεκτική συνιστώσα (Connected Component) s ενός μη-συνεκτικού γράφου G ονομάζουμε ένα σύνολο κόμβων του G που έχουν τις ιδιότητες:

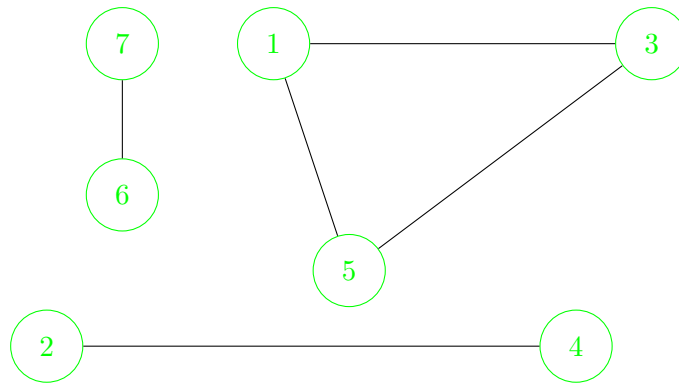
1. Για κάθε ζεύγος κόμβων του συνόλου s υπάρχει ένα τουλάχιστον μονοπάτι που να τους ενώνει.
2. Δεν υπάρχει υπερσύνολο του s με την παραπάνω ιδιότητα.

Για παράδειγμα, ο γράφος του σχήματος 4.7 που ακολουθεί έχει ισχυρά συνεκτικές συνιστώσες τα σύνολα κόμβων:

$$\{1, 3, 5\}, \{2, 4\}, \{6, 7\}$$

Τα μεγάλα και πολύπλοκα δίκτυα είναι συνήθως μη-συνεκτικά, αλλά συχνά έχουν αυτό που ονομάζεται giant connected component, δηλαδή μια ισχυρά συνεκτική συνιστώσα που περιέχει ένα σημαντικό κλάσμα όλων των κόμβων.

Πριν ορίσουμε την έννοια της απόστασης μεταξύ δύο κόμβων -η οποία είναι πολύ σημαντική για την υπόλοιπη ανάλυση- είναι απαραίτητο να ορίσουμε την έννοια του μήκους ενός μονοπατιού.



Σχήμα 4.7: Παράδειγμα μη-συνεκτικού γράφου

Ορισμός 4.29. Μήκος ενός μονοπατιού σε ένα γράφο ορίζουμε τον αριθμό των βημάτων που μεσολαβούν από τον αρχικό ως τον τελικό κόμβο του μονοπατιού. Δηλαδή, για ένα γράφο χωρίς βάρη ορίζουμε ως μήκος μονοπατιού τον αριθμό των ακμών του μονοπατιού, ενώ σε ένα γράφο με βάρη το μήκος ενός μονοπατιού είναι το άθροισμα των βαρών των ακμών του μονοπατιού.

Μεταξύ δύο μονοπατιών, συντομότερο θεωρούμε αυτό που έχει το μικρότερο μήκος. Συνεπώς, η απόσταση μεταξύ δύο κόμβων ενός γράφου ορίζεται ως εξής:

Ορισμός 4.30. Απόσταση (Distance) $d(u, v)$ μεταξύ δύο κόμβων u, v ενός γράφου ορίζουμε το μήκος του συντομότερου μονοπατιού από τον u στον v .

Για παράδειγμα, στο σχήμα 4.2 είναι: $d(1, 3) = 2$, ενώ στο σχήμα 4.5 είναι $d(2, 4) = 19$.

4.3 Τυχαία Γραφήματα (Random Graph Models)

Στην επιστήμη των Δικτύων είναι εξαιρετικά χρήσιμη και συνήθης η μελέτη της συμπεριφοράς των Τυχαίων Γραφημάτων. Τυχαία ονομάζονται τα γραφήματα, ο σχηματισμός των οποίων πραγματοποιείται με μια τυχαία διαδικασία. Από τις ιδιότητες και τη συμπεριφορά αυτών των γραφημάτων μπορούμε να αντλήσουμε συμπεράσματα για τις ιδιότητες που έχουν ορισμένα κοινωνικά και οικονομικά δίκτυα. Ένα τυχαίο δίκτυο σχηματίζεται από ένα σύνολο:

$$V = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$$

n κορυφών, στο οποίο προσθέτουμε ακμές με τυχαίο τρόπο. Υπάρχουν διάφοροι τρόποι να επιλέξουμε τυχαία τις ακμές, γεγονός που οδηγεί σε διαφορετικά μοντέλα και σε διαφορετικές κατανομές πιθανοτήτων στα γραφήματα που προκύπτουν.

4.3.1 Το μοντέλο Erdős–Rényi ($G(n, M)$)

Το μοντέλο αυτό [16] ορίστηκε αρχικά σε εργασία των Erdős και Rényi το 1959. Στο μοντέλο Erdős–Rényi $G(n, M)$ αντιστοιχίζεται ίση πιθανότητα σε όλα τα γραφήματα που

έχουν ακριβώς M ακμές, ($0 \leq M \leq N$) όπου $N = \binom{n}{2}$.

Συνεπώς, το ζητούμενο είναι να σχηματιστεί με τυχαίο τρόπο γράφημα με M ακμές, οι οποίες είναι από τις N δυνατές υπάρχουσες. Επομένως υπάρχουν $\binom{N}{M}$ ισοπίθανοι τρόποι επιλογής αυτών των M ακμών. Έτσι ο δειγματοχώρος $G(n, M)$ περιέχει $\binom{N}{M}$ στοιχεία, καθένα από τα οποία επιλέγεται με πιθανότητα:

$$p = \frac{1}{\binom{N}{M}}$$

Το M σε πολλές περιπτώσεις αποτελεί συνάρτηση του n , δηλαδή $M = M(n)$ και τότε το μοντέλο συμβολίζεται $G(n, M(n))$.

4.3.2 Το μοντέλο Gilbert ($G(n, p)$)

Το μοντέλο Gilbert [20] $G(n, p)$ προτάθηκε από τον Edgar Gilbert στην εργασία του «Random Graphs» το 1959. Στο μοντέλο $G(n, p)$ υποθέτουμε ότι καθεμιά από τις $N = \binom{n}{2}$ δυνατές ακμές του γράφου επιλέγεται με πιθανότητα p , όπου προφανώς $0 < p < 1$.

Συνεπώς όταν για παράδειγμα αναφερόμαστε σε μοντέλο Gilbert με παραμέτρους $n = 100$, $p = 0.3$, θεωρούμε ότι παράγεται με τυχαίο τρόπο ένα γράφημα 100 κορυφών και καθεμιά από τις $N = \binom{100}{2}$ δυνατές ακμές του γράφου εμφανίζεται σε αυτόν με πιθανότητα $p = 0.3$.

Προκύπτει άμεσα ότι στο μοντέλο $G(n, p)$, η πιθανότητα το γράφημα G που παράγεται να έχει ακριβώς M ακμές, όπου $M \leq N = \binom{n}{2}$ είναι:

$$p_M = p^m \cdot (1 - p)^{N-m}$$

4.4 Καθορισμός Σημαντικών Κόμβων

Σε πολλές περιπτώσεις δικτύων είναι αναγκαίο να καθορίσουμε τους κόμβους, οι οποίοι είναι πιο σημαντικοί. Ο προσδιορισμός αυτών των κόμβων θα μας δώσει τη δυνατότητα να εστιάσουμε την προσοχή μας σε σημεία του δικτύου από τα οποία είναι πιθανή η διάδοση μίας διαταραχής σε μεγάλο τμήμα του δικτύου.

Υπάρχουν αρκετές μετρικές από τις οποίες μπορούμε να αντλήσουμε συμπεράσματα για το πόσο «κεντρικός» είναι ένας κόμβος. Παραδείγματα τέτοιων μετρικών αποτελούν ο βαθμός k_i και η δύναμη s_i που ορίστηκαν στην αρχή του κεφαλαίου. Ο βαθμός ενός κόμβου εισάγει την έννοια της Βαθμικής Κεντρικότητας (**Degree Centrality**) του κόμβου. Ωστόσο αυτή η μετρική μας δίνει μια εικόνα για την επιρροή ενός κόμβου κυρίως στις παρακείμενες κορυφές του και όχι στο σύνολο του δικτύου.

4.4.1 Closeness Centrality

Ένας σημαντικός δείκτης που αποτυπώνει το πόσο κεντρικός είναι ένας κόμβος στο σύνολο του δικτύου ονομάζεται *Closeness Centrality*:

Ορισμός 4.31. Ορίζουμε ως *Closeness Centrality* ενός κόμβου k σε ένα δίκτυο n κόμβων το λόγο της μονάδας προς το άθροισμα των αποστάσεων του k από καθέναν από τους n κόμβους του δικτύου. Συμβολικά:

$$C_P(k) = \left(\sum_{i=1}^n d(i, k) \right)^{-1}$$

Εναλλακτικά πολλές φορές ορίζουμε:

$$C'_P(k) = \frac{n-1}{\sum_{i=1}^n d(i, k)}$$

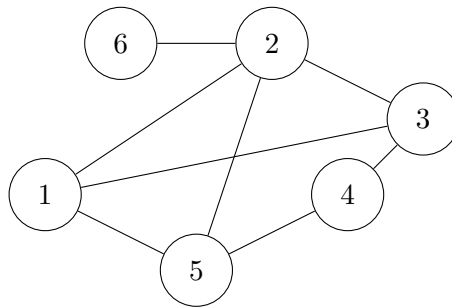
Είναι προφανές ότι όσο μεγαλύτερη είναι η Closeness Centrality ενός κόμβου, τόσο πιο σημαντικός είναι ο κόμβος αυτός για το δίκτυο.

Στο γράφο G του παρακάτω σχήματος είναι:

$$C'_P(1) = \frac{n-1}{\sum_{i=1}^n d(i, 1)} = \frac{5}{1+1+2+1+2} = \frac{5}{7}$$

$$C'_P(4) = \frac{n-1}{\sum_{i=1}^n d(i, 4)} = \frac{5}{2+2+1+1+3} = \frac{5}{9}$$

$$C'_P(6) = \frac{n-1}{\sum_{i=1}^n d(i, 6)} = \frac{5}{2+1+2+3+2} = \frac{5}{10}$$



Σχήμα 4.8: Γράφος G

Η Closeness Centrality μίας κορυφής k δίνει ένα μέτρο της ταχύτητας μετάδοσης της πληροφορίας από την κορυφή k προς όλες τις υπόλοιπες κορυφές του δικτύου. Αποτελεί κατάλληλη μετρική σε περιπτώσεις δικτύων όπου η πληροφορία μεταδίδεται μεταξύ των κόμβων μέσω των συντομότερων μονοπατιών που τους συνδέουν.

Ωστόσο η Closeness Centrality μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο σε περιπτώσεις συνεκτικών γράφων.

4.4.2 Betweenness Centrality

Η Betweenness Centrality είναι από τις πιο διαδεδομένες μετρικές της «κεντρικότητας» ενός κόμβου και ορίζεται μέσω των shortest paths. Συγκεκριμένα εκφράζει τη συχνότητα με την οποία εμφανίζεται ένας κόμβος στα συντομότερα μονοπάτια που συνδέουν όλα τα υπόλοιπα ζευγάρια κορυφών του δικτύου. Για να οριστεί η Betweenness Centrality ενός κόμβου, θα πρέπει πρώτα να ορίσουμε την Partial Betweenness Centrality ενός κόμβου k μεταξύ δύο τυχαίων κόμβων i, j του δικτύου:

Ορισμός 4.32. Ορίζουμε ως *Partial Betweenness Centrality* ενός κόμβου k μεταξύ δύο κόμβων i, j του δικτύου το πηλίκο του αριθμού $g_{ij}(p_k)$ των συντομότερων μονοπατιών που ενώνουν τα i, j στα οποία εμφανίζεται ο κόμβος k προς τον συνολικό αριθμό g_{ij} των συντομότερων μονοπατιών που ενώνουν τα i, j . Συμβολικά:

$$b_{ij}(p_k) = \frac{g_{ij}(p_k)}{g_{ij}}$$

Συνεπώς, μπορούμε πλέον να ορίσουμε τη *Betweenness Centrality* ενός κόμβου ως εξής:

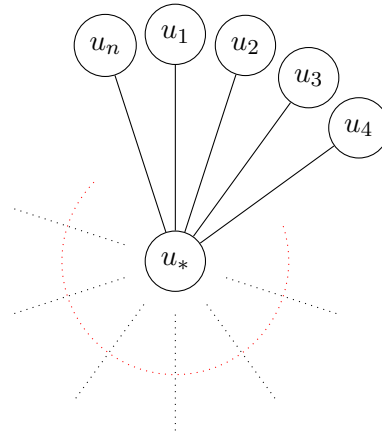
Ορισμός 4.33. Ορίζουμε ως *Betweenness Centrality* ενός κόμβου k το άθροισμα των *Partial Betweenness Centralities* του k μεταξύ όλων των μη διατεταγμένων ζευγών κόμβων του δικτύου.

Δηλαδή:

$$C_B(p_k) = \sum_{i < j} \sum_{j=2}^n \sum_{i, j \neq k} b_{ij}(p_k)$$

Πολλές φορές υπολογίζουμε τη *Betweenness Centrality* κανονικοποιημένη ως προς το πλήθος των ζευγών κόμβων ως εξής:

$$C'_B(p_k) = \frac{C_B(p_k)}{(n-2)(n-1)/2} = \frac{2C_B(p_k)}{(n-2)(n-1)}$$



Σχήμα 4.9: Star Graph

Η μεγαλύτερη δυνατή *Betweenness Centrality* μπορεί να παρατηρηθεί σε γράφους της μορφής του παραπάνω σχήματος (Star Graphs).

Στο σχήμα 4.9 είναι:

$$C_B(u_*) = C_{Bmax} = \frac{n(n-1)}{2} - (n-1) = \frac{n^2 - 3n + 2}{2}$$

και:

$$C'_B(u_*) = C'_B \max = 1$$

Στο σχήμα 4.8 είναι:

$$C_B(p_2) = b_{13}(p_2) + b_{14}(p_2) + b_{15}(p_2) + b_{16}(p_2) + b_{34}(p_2) + b_{35}(p_2) + b_{36}(p_2) + b_{45}(p_2) + b_{46}(p_2) + b_{56}(p_2) = 0 + 0 + 0 + 1 + 0 + \frac{1}{2} + 1 + 0 + 1 + 1 = \frac{9}{2}$$

και επομένως:

$$C'_B(p_2) = \frac{\frac{9}{2}}{5 \cdot 4} = \frac{9}{20}$$

Στο ίδιο σχήμα μπορεί όμοια να υπολογίσει κανείς ότι:

$$C'_B(p_3) = C'_B(p_5) = \frac{3}{20}$$

και:

$$C'_B(p_6) = 0$$

Η Betweenness Centrality αποτυπώνει το πόσο κυρίαρχος είναι ένας κόμβος στο δίκτυο, εφόσον δίνει ένα μέτρο της συνεισφοράς του ως «μεσάζοντα» στη μετάδοση μίας πληροφορίας. Επίσης, αποτελεί κατάλληλη μετρική τόσο για συνεκτικά όσο και για μη συνεκτικά γραφήματα.

Κεφάλαιο 5

Μοντέλα Επιδημιών

Στο προηγούμενο κεφάλαιο αναφερθήκαμε εκτενώς στα γραφικά μοντέλα που θα μας χρειαστούν στο πλαίσιο της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας. Προσδιορίσαμε διάφορα χαρακτηριστικά των γράφων, που τους διακρίνουν σε διαφορετικά είδη ανάλογα με τη συνδεσιμότητά τους, τον τρόπο κατασκευής τους κ.ο.κ. Παράλληλα, ορίσαμε μετρικές, βάσει των οποίων μπορεί να προσδιοριστεί η σημασία ενός κόμβου σε ένα γράφημα. Σκοπός της ανάλυσης του προηγούμενου κεφαλαίου ήταν να εισαχθούμε ομαλά στη μελέτη της συμπεριφοράς των κοινωνικών δικτύων σε περιπτώσεις «μόλυνσης» ενός ή περισσότερων κόμβων.

Για τον προσδιορισμό της συμπεριφοράς των δικτύων σε περιπτώσεις εμφάνισης μιας επιδημίας έχουν αναπτυχθεί διάφορα μοντέλα με δημοφιλέστερα το SIR και το SIS που αναλύονται παρακάτω:

5.1 SIR model

Στο SIR μοντέλο θεωρούμε ότι κάθε κόμβος μπορεί να βρίσκεται σε μία από τις εξής καταστάσεις:

- **Susceptible (S)**. Ένας κόμβος βρίσκεται στην κατάσταση S όταν δεν έχει «μολυνθεί» από την επιδημία, αλλά είναι πιθανόν να φτάσει η επιδημία σε αυτόν.
- **Infected (I)**. Ένας κόμβος λέμε ότι βρίσκεται στην κατάσταση I όταν έχει «μολυνθεί» και δεν έχει ακόμη ξεπεράσει τη μόλυνση.
- **Recovered (R)**. Ένας κόμβος λέμε ότι βρίσκεται στην κατάσταση R όταν έχει «μολυνθεί» και έχει ξεπεράσει τη μόλυνση.

Στο μοντέλο αυτό μπορούμε να θεωρήσουμε ότι υπάρχει μια ανεξάρτητη μεταβλητή t του χρόνου και τρεις εξαρτημένες μεταβλητές $S(t)$, $I(t)$, $R(t)$ που δηλώνουν το πλήθος των κόμβων που βρίσκονται στην κατάσταση S , I και R αντίστοιχα. Με όμοιο τρόπο μπορούμε να ορίσουμε την αναλογία των κόμβων που βρίσκονται σε κάθε κατάσταση ως προς το συνολικό πλήθος N των κόμβων ως εξής:

$$s(t) = \frac{S(t)}{N}$$

$$i(t) = \frac{I(t)}{N}$$

$$r(t) = \frac{R(t)}{N}$$

Είναι προφανές ότι $S(t) + I(t) + R(t) = N$ και $s(t) + i(t) + r(t) = 1$.

Στην ανάλυση του μοντέλου *SIR* υιοθετούμε τις εξής υποθέσεις:

1. Κανείς δεν προστίθεται στην ομάδα *S*, δεδομένου ότι αγνοούμε τις γεννήσεις και τη μετανάστευση. Ένα άτομο αποχωρεί από την κατάσταση *S* μόνο αν μολυνθεί.
2. Κάθε μολυσμένο άτομο έχει σταθερό αριθμό *b* επαφών στη μονάδα του χρόνου που αρκούν για να εξαπλωθεί η ασθένεια. Ωστόσο, δεν είναι όλες αυτές οι επαφές με ευαίσθητα άτομα. Αν υποθέσουμε μια ομοιογενή ανάμειξη του πληθυσμού, το κλάσμα αυτών των επαφών με ευαίσθητα άτομα θα είναι: $s(t)$. Έτσι, κατά μέσο όρο, κάθε μολυσμένο άτομο δημιουργεί $b \cdot s(t)$ νέα μολυσμένα άτομα ανα μονάδα χρόνου.
3. Υποθέτουμε επίσης ότι ένα σταθερό κλάσμα *k* των κόμβων που είναι μολυσμένοι, θα ανακάμψουν κατά τη διάρκεια μιας δεδομένης μονάδας χρόνου. Για παράδειγμα, εάν η μέση διάρκεια της ασθένειας είναι τρεις ημέρες, τότε, κατά μέσο όρο, το 1/3 του παρόντος μολυσμένου πληθυσμού ανακάμπτει κάθε μέρα.
4. Κάθε κόμβος που έχει ξεπεράσει την ασθένεια και βρίσκεται στην κατάσταση *R* παραμένει μόνιμα στην κατάσταση *R*, χωρίς να είναι εφικτό να ξαναγίνει πιθανό «θύμα» της ασθένειας μεταβαίνοντας ξανά στις καταστάσεις *S* ή *I*.

Λόγω των 2 πρώτων υποθέσεων προκύπτει η *Εξίσωση Ευαισθησίας* που φαίνεται παρακάτω:

$$\frac{dS}{dt} = -b \cdot s(t) \cdot I(t) \quad (5.1)$$

ή ισοδύναμα:

$$\frac{ds}{dt} = -b \cdot s(t) \cdot i(t) \quad (5.2)$$

Ακόμη, από την τρίτη και την τέταρτη υπόθεση οδηγούμαστε άμεσα στην *Εξίσωση Ανάρρωσης* που είναι η εξής:

$$\frac{dr}{dt} = k \cdot i(t) \quad (5.3)$$

Επιπλέον, έχουμε επισημάνει ότι: $s(t) + i(t) + r(t) = 1$.

Συνεπώς, παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση παίρνουμε ότι:

$$\frac{ds}{dt} + \frac{di}{dt} + \frac{dr}{dt} = 0 \quad (5.4)$$

Τέλος, αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (5.2), (5.3) στην εξίσωση (5.4) έπεται ότι:

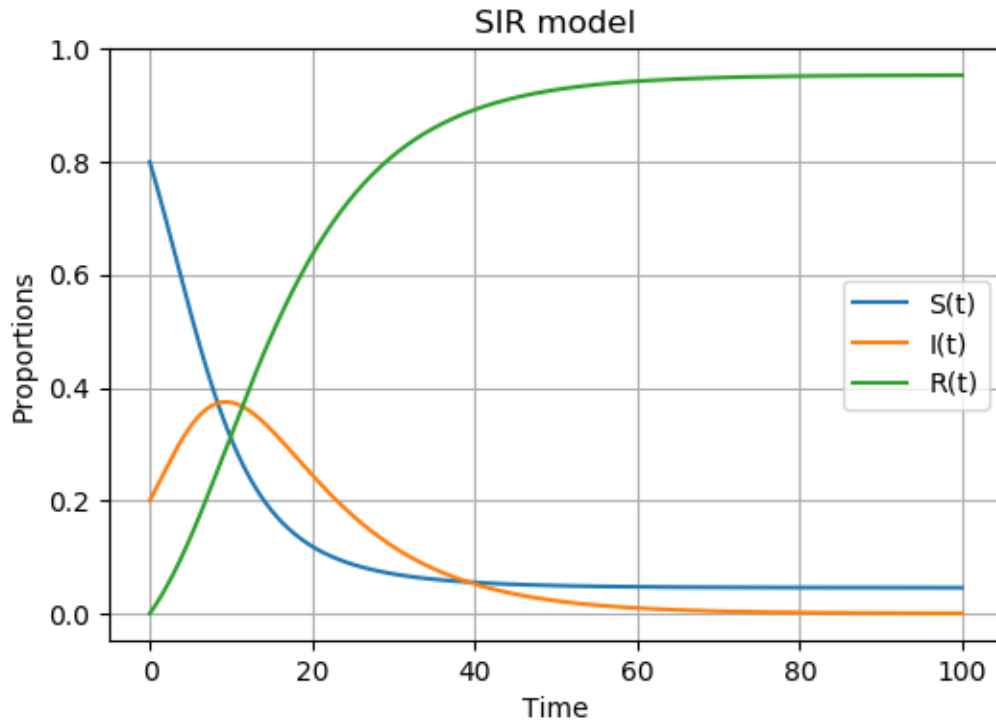
$$\frac{di}{dt} = b \cdot s(t) \cdot i(t) - k \cdot i(t) \quad (5.5)$$

Παρακάτω παρουσιάζονται ενδεικτικά οι γραφικές παραστάσεις $s(t)$, $i(t)$, $r(t)$ όπως προέκυψαν από πρόγραμμα της Python που προσομοιώνει το SIR model με αρχικές συνθήκες:

$$s_0 = 0.8, \quad i_0 = 0.2, \quad r_0 = 0$$

και σταθερές:

$$b = 0.3, \quad k = 0.1$$



Παρατηρούμε ότι η μπλε καμπύλη που αντιπροσωπεύει την $s(t)$ ξεκινάει τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ από την τιμή $s_0 = 0.8$ και καταλήγει ασυμπτωτικά σε μια τιμή ελαφρώς πάνω από τον οριζόντιο άξονα. Αντίστροφη πορεία παρουσιάζει η πράσινη καμπύλη που αναφέρεται στη συνάρτηση $r(t)$, η οποία ξεκινάει από την τιμή $r_0 = 0$ και καταλήγει ασυμπτωτικά σε μια τιμή ελαφρώς κάτω από τη μονάδα. Τέλος, η πορτοκαλί καμπύλη ξεκινάει από την τιμή $i_0 = 0.2$ και καταλήγει ασυμπτωτικά στη μηδενική τιμή.

5.2 SIS model

Στο SIS μοντέλο θεωρούμε ότι οι πιθανές καταστάσεις στις οποίες ενδέχεται να βρίσκεται ένας κόμβος είναι μόνο η S και η I . Συγκεκριμένα:

- Ένας κόμβος βρίσκεται στην κατάσταση S όταν η επιδημία είναι πιθανό να φτάσει σε αυτόν, αλλά στην παρούσα κατάσταση δεν είναι μολυσμένος.
- Ένας κόμβος λέμε ότι βρίσκεται στην κατάσταση I όταν έχει «μολυνθεί» και δεν έχει ακόμη ξεπεράσει τη μόλυνση.

Η διαφορά του μοντέλου SIS από το μοντέλο SIR εντοπίζεται στην απουσία της κατάστασης R . Συνεπώς, όταν ένας κόμβος ξεπερνά τη μόλυνση δε μεταβαίνει στην κατάσταση R , όπως

συνέβαινε στο μοντέλο *SIR*. Αντίθετα, μεταβαίνει στην κατάσταση *S* και είναι εφικτό να ξαναφτάσει σε αυτόν η επιδημία και να μεταβεί και πάλι στην κατάσταση *I*.

Επομένως, στο μοντέλο *SIS* ισχύει ότι:

$$S(t) + I(t) = N \text{ και } s(t) + i(t) = 1.$$

Επίσης, υιοθετώντας και πάλι τις 3 πρώτες υποθέσεις που κάναμε στο μοντέλο *SIR* με τους συντελεστές b και k να έχουν την έννοια που τους αποδόθηκε στην προηγούμενη παράγραφο, καταλήγουμε στις εξής σχέσεις:

$$\frac{ds}{dt} = -b \cdot s(t) \cdot i(t) + k \cdot i(t) \quad (5.6)$$

$$\frac{di}{dt} = b \cdot s(t) \cdot i(t) - k \cdot i(t) \quad (5.7)$$

Προκύπτει εύκολα και αναμενόμενα ότι:

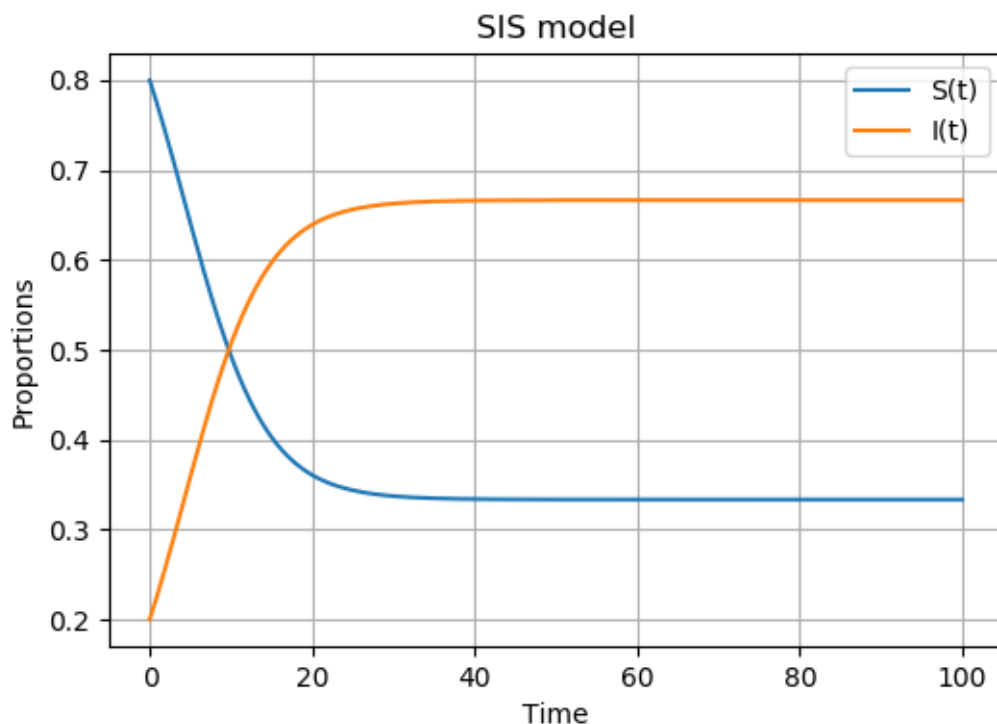
$$\frac{ds}{dt} + \frac{di}{dt} = 0 \quad (5.8)$$

Παρακάτω παρουσιάζονται ενδεικτικά οι γραφικές παραστάσεις $s(t)$, $i(t)$ όπως προέκυψαν από πρόγραμμα της Python που προσομοιώνει το *SIS* model με αρχικές συνθήκες:

$$s_0 = 0.8, \quad i_0 = 0.2$$

και σταθερές:

$$b = 0.3, \quad k = 0.1$$



Παρατηρούμε ότι η μπλε καμπύλη που αντιπροσωπεύει την $s(t)$ ξεκινάει τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ από την τιμή $s_0 = 0.8$ και καταλήγει ασυμπτωτικά σε μια τιμή κοντά στο 0.33.

Αντίστροφη πορεία παρουσιάζει η πορτοκαλί καμπύλη που αναφέρεται στη συνάρτηση $i(t)$, η οποία ξεκινάει από την τιμή $i_0 = 0.2$ και καταλήγει ασυμπτωτικά σε μια τιμή κοντά στο 0.67.

Συνεπώς, ο λόγος του αριθμού των susceptible προς τον αριθμό των infected κόμβων παραμένει σταθερός μετά από ένα μεταβατικό διάστημα του χρόνου. Είναι προφανές ότι οι τιμές στις οποίες συγκλίνουν οι συναρτήσεις $s(t)$, $i(t)$ εξαρτώνται από τις αρχικές συνθήκες και τις σταθερές που θέτουμε.

Κεφάλαιο 6

Πειραματισμός σε Python

Σκοπός του κεφαλαίου αυτού είναι να κατανοήσουμε μέσω προσομοιώσεων σε Python τη σημασία προσδιορισμού των καθοριστικών κόμβων ενός γράφου και να συγκρίνουμε την ταχύτητα μετάδοσης μιας επιδημίας ανάλογα με το πόσο σημαντικός είναι ο κόμβος εκκίνησης.

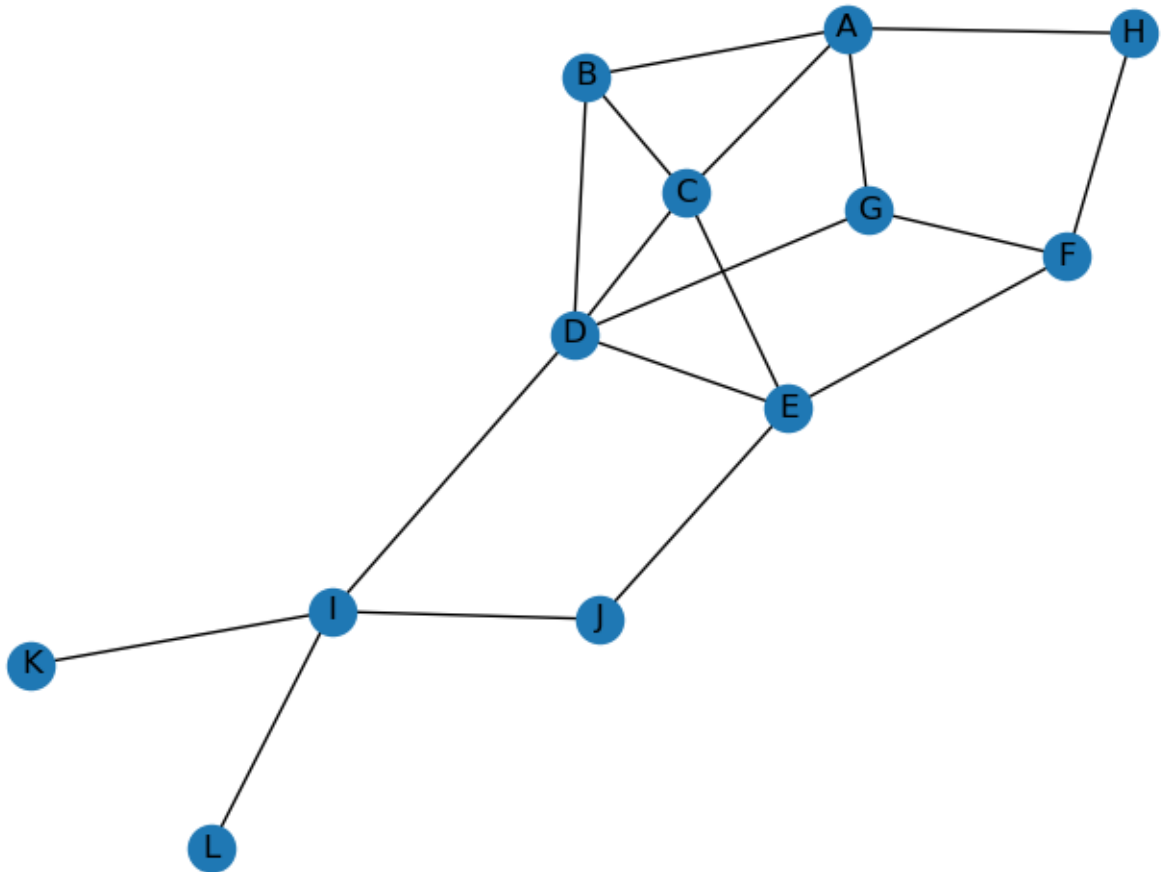
Αρχικά θα προσπαθήσουμε να φτιάξουμε πρόγραμμα σε Python που να μας δίνει τις Centralities (Degree, Closeness, Betweenness) των κόμβων ενός απλού και μικρού γράφου. Στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να επεκτείνουμε το πρόγραμμα αυτό, ούτως ώστε να κατασκευάζει ένα τυχαίο γράφημα πολλών κόμβων, να εντοπίζει το σημαντικότερο και το λιγότερο σημαντικό κόμβο βάσει των διαφόρων Centralities και να προσομοιώνει τα μοντέλα επιδημιών SIR, SIS με αφετηρία την πρώτη φορά το σημαντικότερο και τη δεύτερη φορά το λιγότερο σημαντικό κόμβο. Με αυτόν τον τρόπο, θα προσπαθήσουμε να συγκρίνουμε τις Degree, Closeness και Betweenness Centralities και να αποφανθούμε για το ποια δείχνει να είναι η καταλληλότερη για να προσδιορίσουμε τους κρίσιμους κόμβους στο πρόβλημά μας.

6.1 Πρόγραμμα 1 : Εύρεση των Centralities κάθε κόμβου σε γνωστό και απλό γράφο

Στο πρώτο μας πρόγραμμα κάνουμε import το module networkx, στην αρχή του κώδικά μας και κατασκευάζουμε έναν απλό γράφο, τη μορφή του οποίου απεικονίζουμε μέσω της εισαγωγής του module matplotlib.pyplot, το οποίο επίσης κάνουμε import.

Στόχος του προγράμματος αυτού είναι να λάβουμε ως έξοδο τις centralities κάθε κόμβου, κάτι το οποίο είναι γενικά πολύ σημαντικό, ώστε να διακρίνουμε τους πολύ σημαντικούς από τους λιγότερο σημαντικούς κόμβους του γράφου που κατασκευάσαμε.

Ο γράφος που κατασκευάζουμε φαίνεται παρακάτω:



Σχήμα 6.1: Input Graph

Η έξοδος που λαμβάνουμε για την Degree Centrality κάθε κόμβου είναι η εξής:

'A': 0.36363636363636365, 'B': 0.2727272727272727, 'C': 0.36363636363636365, 'D': 0.4545454545454546,
'E': 0.36363636363636365, 'F': 0.2727272727272727, 'G': 0.2727272727272727, 'H': 0.18181818181818182,
'I': 0.36363636363636365, 'J': 0.18181818181818182, 'K': 0.09090909090909091, 'L': 0.09090909090909091

Αντίστοιχα, η Closeness Centrality κάθε κόμβου που μας δίνει το πρόγραμμα φαίνεται παρακάτω:

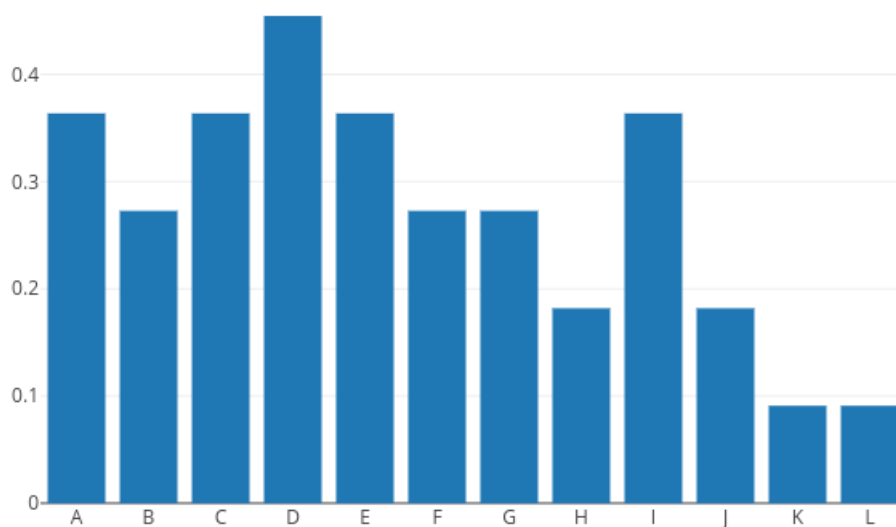
'A': 0.4583333333333333, 'B': 0.4782608695652174, 'C': 0.55, 'D': 0.6111111111111112, 'E': 0.55, 'F': 0.44, 'G': 0.5, 'H': 0.36666666666666664, 'I': 0.5, 'J': 0.4583333333333333, 'K': 0.34375, 'L': 0.34375

και η Betweenness Centrality που παίρνουμε είναι η εξής:

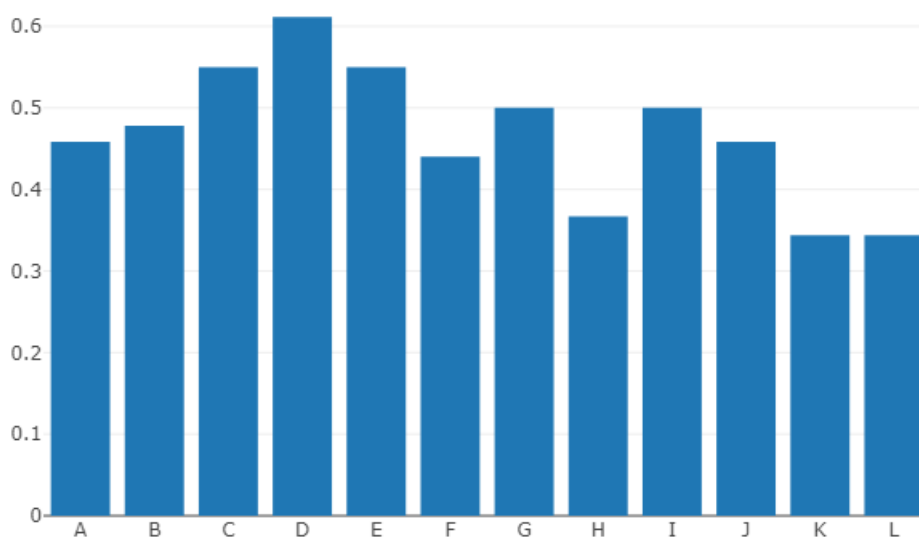
'A': 0.10909090909090909, 'B': 0.036969696969696965, 'C': 0.09212121212121212, 'D': 0.39515151515151514,
'E': 0.1987878787878788, 'F': 0.09515151515151515, 'G': 0.09333333333333334, 'H': 0.0127272727272726,
'I': 0.3666666666666667, 'J': 0.05454545454545454, 'K': 0.0, 'L': 0.0

Για την καλύτερη απεικόνιση των παραπάνω πληροφοριών, χρησιμοποιήσαμε το module plotly

της Python, με αποτέλεσμα να λάβουμε τις Centralities των κόμβων όπως φαίνονται στα παρακάτω σχήματα:



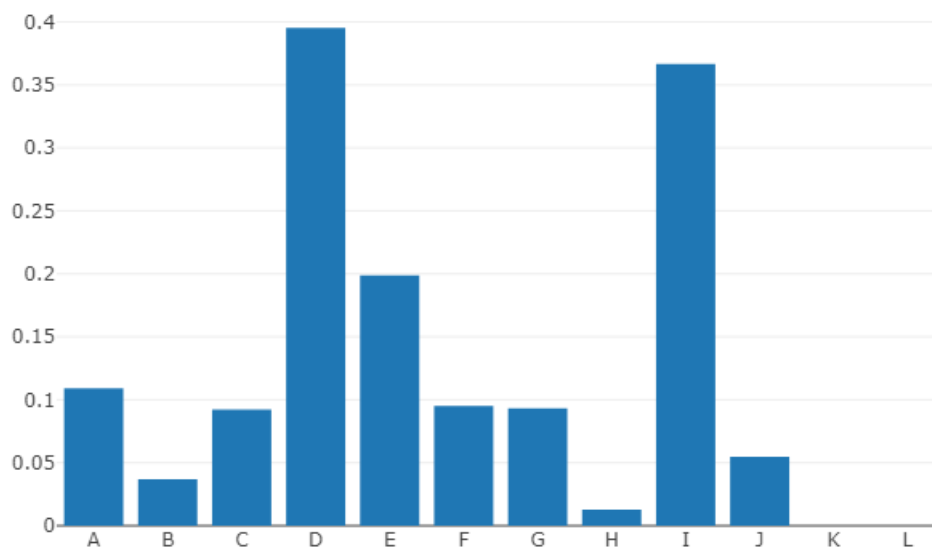
Σχήμα 6.2: Degree Centrality



Σχήμα 6.3: Closeness Centrality

Όπως βλέπουμε στα σχήματα 6.2-6.4, ο *D* αποτελεί πολύ κρίσιμο κόμβο για το γράφο μας, καθώς έχει πολύ υψηλές τιμές σε όλες τις Centralities, σε αντίθεση για παράδειγμα με τον κόμβο *L*, ο οποίος παρουσιάζει πολύ χαμηλότερες τιμές και δεν είναι εξίσου σημαντικός για το Δίκτυο.

Το πρόγραμμα που χρησιμοποιήθηκε για τον προσδιορισμό των Centralities του κόμβου του



Σχήμα 6.4: Betweenness Centrality

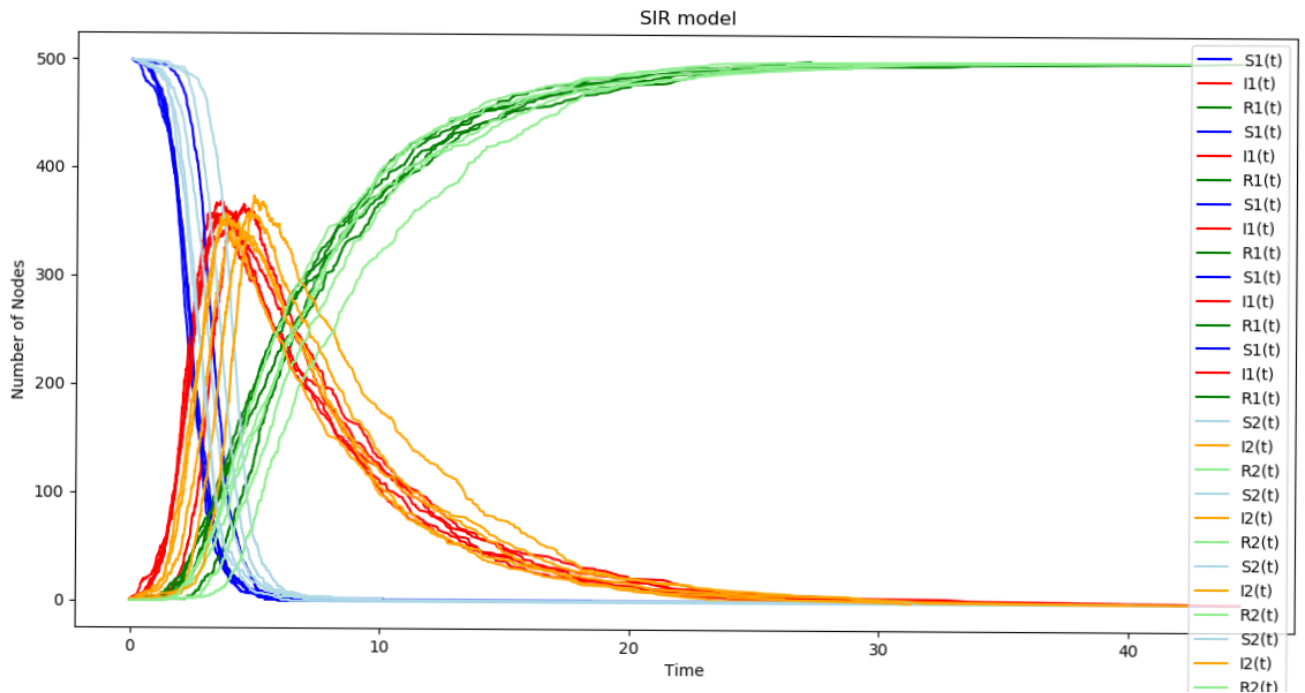
σχήματος 6.1 θα μπορούσε να αξιοποιηθεί για τον προσδιορισμό των Centralities οποιουδήποτε άλλου γραφήματος, γεγονός που το καθιστά πολύ χρήσιμο για τον καθορισμό των χρήσιμων κόμβων ενός γραφήματος.

Στο πλαίσιο της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας θεωρούμε ότι τα γραφήματα αναπαριστούν Χρηματοπιστωτικά Δίκτυα και οι κόμβοι αντιπροσωπεύουν τράπεζες ή άλλα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα. Συνεπώς, το συγκεκριμένο πρόγραμμα δύναται να προσδιορίσει τις τράπεζες που απαιτούν ιδιαίτερη προσοχή λόγω της κρίσιμότητας των διατραπεζικών τους σχέσεων με τις υπόλοιπες τράπεζες του δικτύου. Είναι προφανές ότι αν ξεκινήσει ένα συστημικό γεγονός από ένα σημαντικό κόμβο του δικτύου, όπως για παράδειγμα είναι ο κόμβος *D* στο σχήμα 6.1, η διαταραχή θα διαδοθεί πολύ σύντομα σε μεγάλο μέρος του Δικτύου. Αντίθετα, αν η διαταραχή έχει ως αφετηρία ένα λιγότερο σημαντικό κόμβο του Δικτύου, ο χρόνος μετάδοσής της στους υπόλοιπους κόμβους του Δικτύου θα είναι αισθητά μεγαλύτερος και οι συνέπειες της πιο ήπιες.

6.2 Πρόγραμμα 2 : Προσομοίωση SIR MODEL σε Τυχαίο Μεγάλο Μη Κατευθυνόμενο Γράφημα χωρίς βάρη στις ακμές

Στο δεύτερο πρόγραμμά μας προσομοιώνουμε το SIR model με συντελεστές $b = 0.1$ και $k = 0.2$ σε τυχαίο μη κατευθυνόμενο γράφημα 500 κόμβων χωρίς βάρη στις ακμές. Για την προσομοίωση του SIR model κάνουμε import το module EoN της Python, το οποίο μας δίνει τη δυνατότητα κλήσης κατάλληλης συνάρτησης για το σκοπό αυτό. Επίσης, για την παραγωγή τυχαίου γραφήματος, καλούμε συνάρτηση του Networkx, η οποία μας δίνει τυχαίο γράφημα Gilbert (βλέπε παράγραφο 4.3.2) 500 κόμβων με παράγοντα $p = 0.05$.

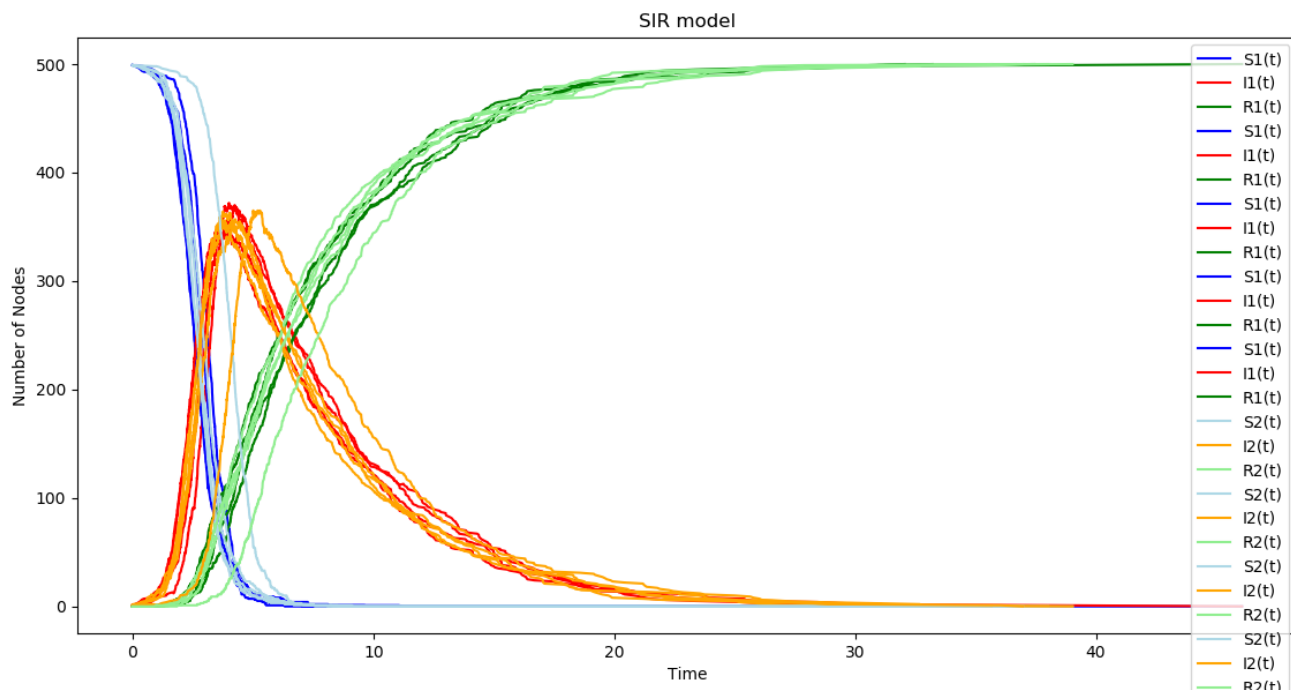
Στον τυχαίο γράφο που δημιουργούμε, χρησιμοποιούμε το Πρόγραμμα 1 για να βρούμε τον κόμβο με τη μεγαλύτερη και τον κόμβο με τη μικρότερη Betweenness Centrality. Αφού βρίσκουμε τους κόμβους αυτούς προσομοιώνουμε 5 φορές το SIR model αρχικά με αφετηρία τον κόμβο που έχει τη μεγαλύτερη Betweenness Centrality και στη συνέχεια με αφετηρία τον κόμβο που έχει τη μικρότερη Betweenness Centrality. Η έξοδος του προγράμματος φαίνεται στο επόμενο σχήμα:



Σχήμα 6.5: SIR model-Betweenness Centrality

Οι καμπύλες $S1(t)$, $I1(t)$, $R1(t)$ που επισημαίνονται με σκούρο μπλε, κόκκινο και πράσινο χρώμα αντίστοιχα αποτελούν τις προσομοιώσεις του SIR model με κόμβο εκκίνησης αυτόν που έχει τη μεγαλύτερη Betweenness Centrality. Αντίστοιχα, οι καμπύλες $S2(t)$, $I2(t)$, $R2(t)$ που αναπαρίστανται με τα πιο ανοιχτά χρώματα είναι οι προσομοιώσεις με αφετηρία τον κόμβο με τη μικρότερη Betweenness Centrality. Παρατηρούμε ότι οι κόκκινες καμπύλες ($I1(t)$) βρίσκονται στην πλειονότητά τους αισθητά αριστερότερα από τις πορτοκαλί καμπύλες ($I2(t)$), γεγονός που μας δείχνει πως όταν ξεκινάμε από το σημαντικότερο κόμβο βάσει της Betweenness Centrality, η διαταραχή μεταδίδεται ταχύτερα στο υπόλοιπο δίκτυο. Το αποτέλεσμα αυτό είναι σύμφωνο με τη Θεωρία και όσα αναφέραμε στις προηγούμενες παραγράφους.

Ωστόσο, το αποτέλεσμα αυτό δεν επιβεβαιώνεται σε κάθε εκτέλεση του προγράμματος. Για παράδειγμα, παρακάτω φαίνεται μια εκτέλεση του προγράμματος στην οποία δεν παρουσιάζεται αισθητή διαφορά στη θέση των κόκκινων και των πορτοκαλί καμπυλών:

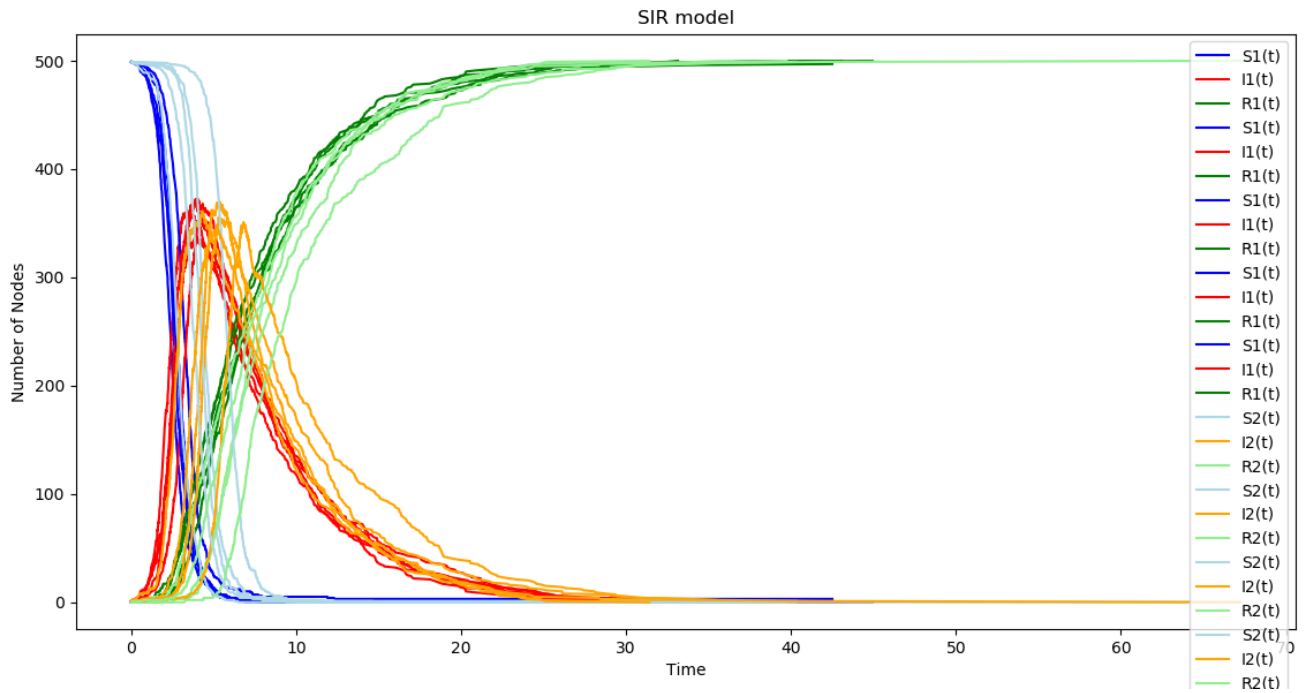


Εκτελέσαμε πάρα πολλές φορές το συγκεκριμένο πρόγραμμα και διαπιστώσαμε ότι στις περισσότερες περιπτώσεις οι πορτοκαλί καμπύλες βρίσκονται έστω και οριακά δεξιότερα από τις αντίστοιχες κόκκινες. Σε κάποιες λιγοστές εκτελέσεις -όπως στην εκτέλεση που παρουσιάσαμε ακριβώς παραπάνω- οι κόκκινες και οι πορτοκαλί καμπύλες σχεδόν ταυτίζονταν, ενώ σε ελάχιστες περιπτώσεις είδαμε τις πορτοκαλί καμπύλες να βρίσκονται ακόμη και αριστερότερα των κόκκινων.

Στη συνέχεια, δημιουργούμε τυχαίο γράφημα όπως και πριν και αξιοποιούμε εκ νέου το Πρόγραμμα 1, ώστε να βρούμε το σημαντικότερο και το λιγότερο σημαντικό κόμβο βάσει της Closeness Centrality. Γνωρίζοντας αυτούς τους κόμβους, προσομοιώνουμε ξανά το SIR model εκκινώντας αρχικά από τον κόμβο με την υψηλότερη και έπειτα από τον κόμβο με τη χαμηλότερη Closeness Centrality.

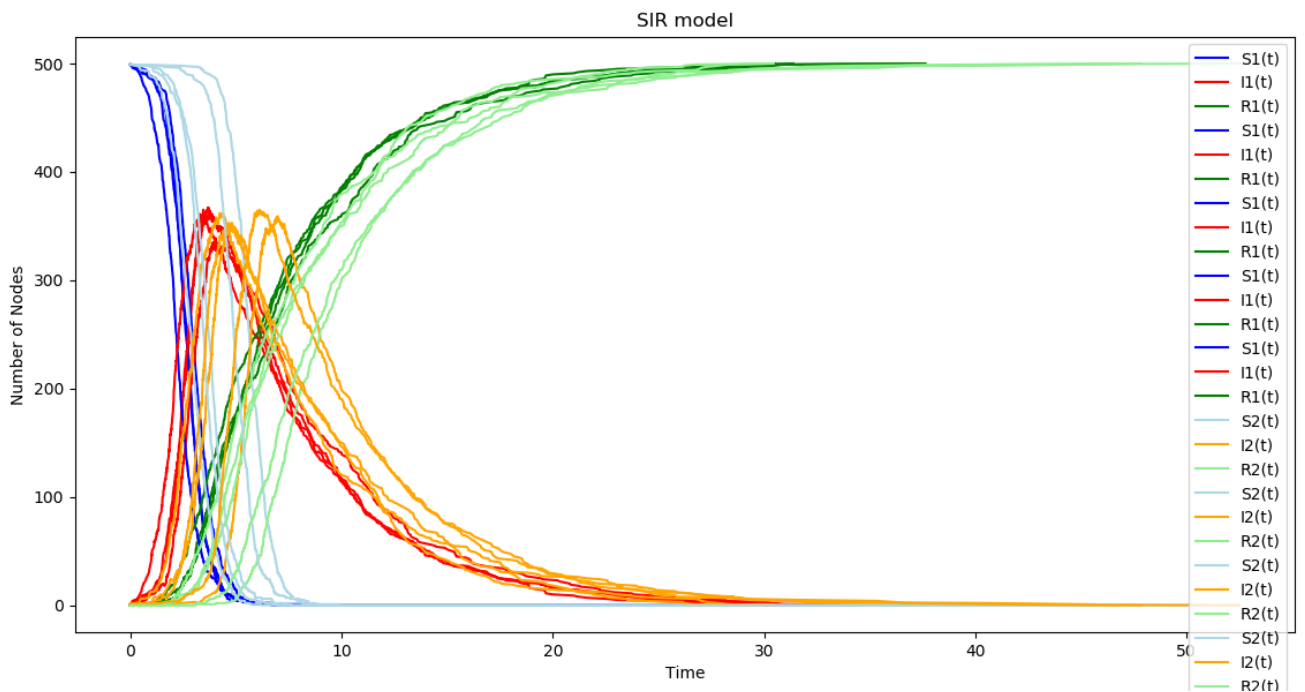
Το αποτέλεσμα της εκτέλεσης του εν λόγω προγράμματος φαίνεται στο Σχήμα 6.6 της επόμενης σελίδας.

Όμοια με πριν, οι καμπύλες $S1(t)$, $I1(t)$, $R1(t)$ που επισημαίνονται με σκούρο μπλε, κόκκινο και πράσινο χρώμα αντίστοιχα αποτελούν τις προσομοιώσεις του SIR model με κόμβο εκκίνησης αυτόν που έχει τη μεγαλύτερη Closeness Centrality, ενώ οι καμπύλες $S2(t)$, $I2(t)$, $R2(t)$ που αναπαρίστανται με τα πιο ανοιχτά χρώματα είναι οι προσομοιώσεις με αφετηρία τον κόμβο με τη μικρότερη Closeness Centrality. Σε αυτήν την περίπτωση, βλέπουμε ακόμη πιο έντονα πως όταν η διαταραχή ξεκινάει από το σημαντικότερο κόμβο βάσει της Closeness Centrality, η μετάδοση στο υπόλοιπο δίκτυο συμβαίνει ταχύτερα σε σχέση με τη μετάδοση της διαταραχής με κόμβο εκκίνησης το λιγότερο σημαντικό κόμβο.



Σχήμα 6.6: SIR model-Closeness Centrality

Οι πορτοκαλί καμπύλες ($I2(t)$) βρίσκονται αισθητά δεξιότερα από τις αντίστοιχες κόκκινες καμπύλες ($I1(t)$), γεγονός που φαίνεται ακόμη πιο ξεκάθαρα σε άλλες εκτελέσεις του προγράμματος, όπως παρακάτω:

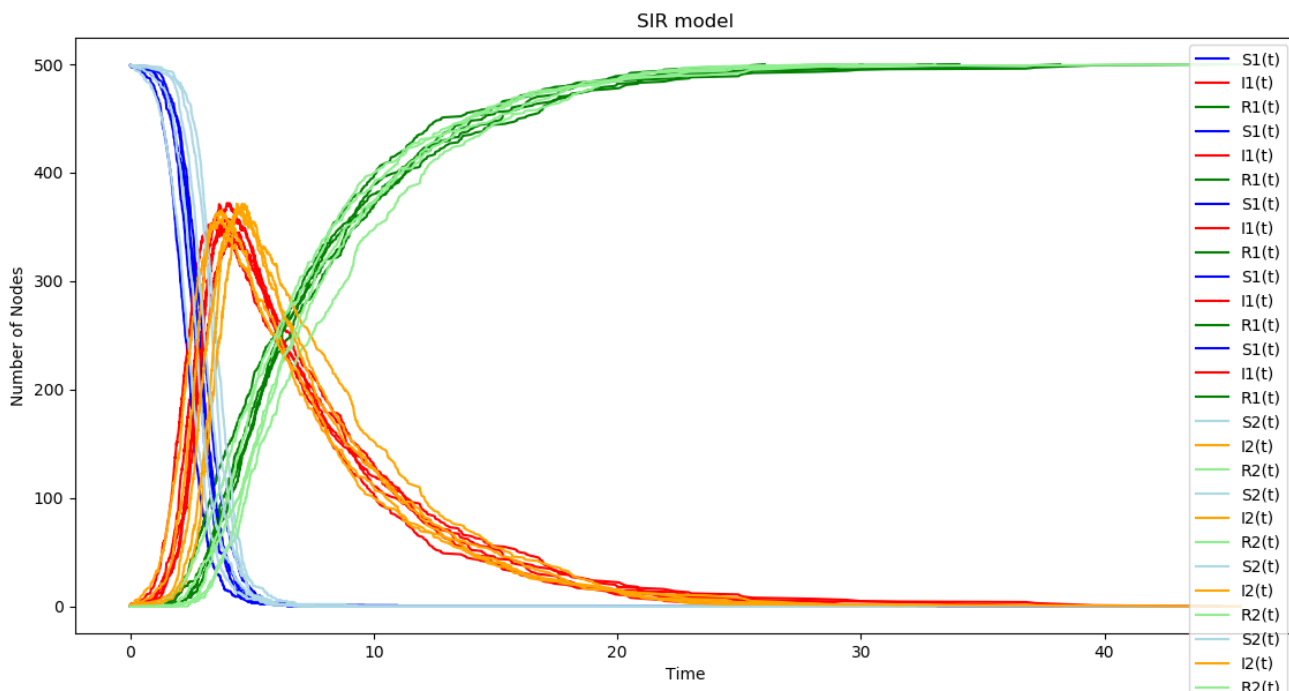


Εκτελέσαμε πολλές φορές το εν λόγω πρόγραμμα και παρατηρήσαμε ότι στη συντριπτική πλειονότητα των εκτελέσεων οι πορτοκαλί καμπύλες ($I2(t)$) βρίσκονταν αρκετά δεξιότερα από

τις κόκκινες καμπύλες ($I_1(t)$), ενώ μόνο σε ελάχιστες εκτελέσεις οι πορτοκαλί και οι κόκκινες καμπύλες σχεδόν ταυτίζονταν.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η διαφορά στην ταχύτητα μετάδοσης ήταν φανερά πιο αισθητή από αυτήν που παρατηρήσαμε βάσει της Betweenness Centrality.

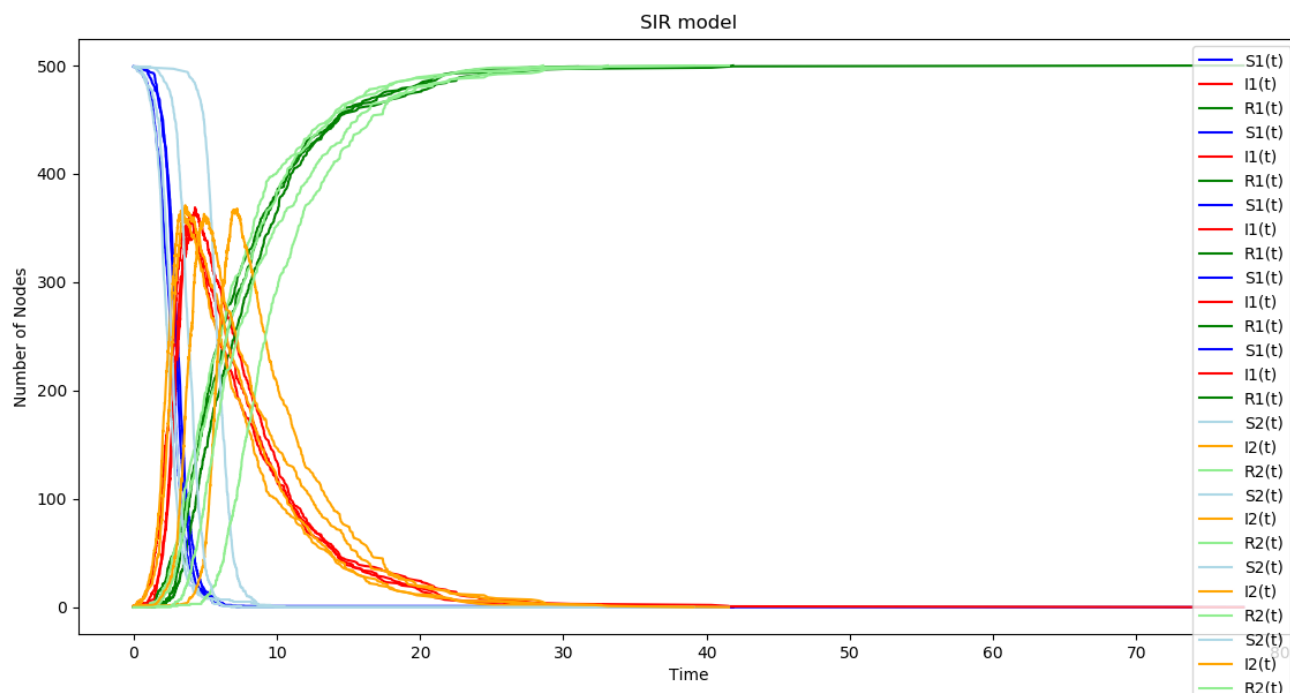
Έπειτα, χρησιμοποιούμε ξανά με την ίδια λογική το Πρόγραμμα 1 ώστε να βρούμε τον κόμβο με τη μεγαλύτερη και τον κόμβο με τη μικρότερη Degree Centrality σε τυχαίο γράφημα που παράγουμε και προσομοιώνουμε και πάλι το SIR model με αφετηρία αρχικά το σημαντικότερο και στη συνέχεια το λιγότερο σημαντικό κόμβο βάσει της Degree Centrality. Το αποτέλεσμα της εκτέλεσης του εν λόγω προγράμματος παρουσιάζεται στο Σχήμα 6.7 που φαίνεται παρακάτω:



Σχήμα 6.7: SIR model-Degree Centrality

Παρατηρούμε ότι σε αυτήν την περίπτωση οι πορτοκαλί και οι κόκκινες καμπύλες σχεδόν ταυτίζονται, γεγονός που μαρτυρά ότι δεν υπάρχει ιδιαίτερη διαφορά στην ταχύτητα μετάδοσης της διαταραχής στο δίκτυο. Το αποτέλεσμα αυτό είναι μάλλον αναμενόμενο, εφόσον η Degree Centrality δεν αποτελεί την καταλληλότερη μετρική για τον καθορισμό των σημαντικών κόμβων, καθώς -όπως έχουμε ήδη επισημάνει- μας δίνει μια εικόνα για την επιρροή ενός κόμβου κυρίως στις παρακείμενες κορυφές του και όχι στο σύνολο του δικτύου.

Μια άλλη εκτέλεση του προγράμματος δίνει το αποτέλεσμα που φαίνεται παρακάτω:



Σε αυτήν την εκτέλεση βλέπουμε ότι υπάρχει μία σχετική μετατόπιση των πορτοκαλί καμπυλών προς τα δεξιά σε σχέση με τις αντίστοιχες κόκκινες, όμως και πάλι βλέπουμε ότι υπάρχουν πορτοκαλί καμπύλες που βρίσκονται αριστερότερα ή πάνω στις κόκκινες, με αποτέλεσμα να μην υπάρχει αισθητή καθυστέρηση της μετάδοσης της διαταραχής όταν χρησιμοποιούμε για αφετηρία το λιγότερο σημαντικό κόμβο βάσει της Degree Centrality.

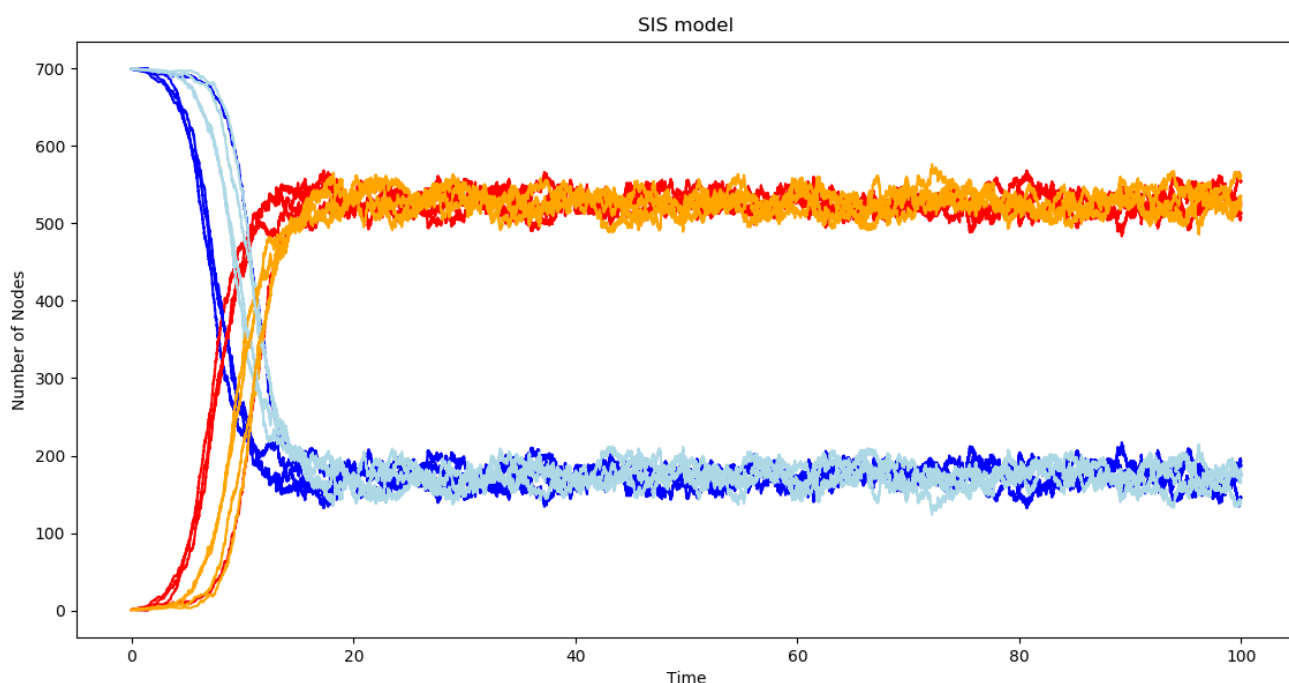
Εκτελέσαμε πολλές φορές το συγκεκριμένο πρόγραμμα και διαπιστώσαμε πως το αποτέλεσμα που παίρνουμε είναι αρκετά ασταθές για να εξάγουμε συμπεράσματα, καθώς υπήρχαν περιπτώσεις στις οποίες η διαταραχή μεταδιδόταν αισθητά ταχύτερα όταν ξεκινούσαμε από τον κόμβο με τη μεγαλύτερη Degree Centrality, ενώ υπήρχαν και περιπτώσεις που δεν παρατηρούσαμε ιδιαίτερη αλλαγή όπως φάνηκε και στα σχήματα 6.6-6.7.

Συνεπώς, το Πρόγραμμα 2 μας οδηγεί συνολικά στο συμπέρασμα ότι η Closeness Centrality αποτελεί πιθανότατα την καλύτερη μετρική για τον καθορισμό των σημαντικών κόμβων στο πρόβλημα μας, καθώς -όπως είδαμε παραπάνω- το υποπρόγραμμα που μας παρουσίασε τις πιο ξεκάθαρες διαφορές ταχυτήτων μετάδοσης της επιδημίας ήταν αυτό στο οποίο οι διαφορετικές αφετηρίες επιλέχθηκαν βάσει της Closeness Centrality.

6.3 Πρόγραμμα 3 : Προσομοίωση SIS MODEL σε Τυχαίο Μεγάλο Μη Κατευθυνόμενο Γράφημα χωρίς βάρη στις ακμές

Στο τρίτο μας πρόγραμμά προσομοιώνουμε το SIS model με συντελεστές $b = 0.03$ και $k = 0.25$ σε τυχαίο μη κατευθυνόμενο γράφημα 700 κόμβων χωρίς βάρη στις ακμές. Για την προσομοίωση του SIS model κάνουμε και πάλι import το module EoN της Python, ώστε να καλέσουμε τη συνάρτηση που θα υλοποιήσει την προσομοίωση. Επίσης, το τυχαίο γράφημα Gilbert μας δίνεται -όπως και πριν- μέσω της κλήσης της συνάρτησης του module Networkx, στην οποία δίνουμε όρισμα $p = 0.05$.

Έπειτα, χρησιμοποιούμε ξανά το Πρόγραμμα 1 για να βρούμε τον κόμβο με τη μεγαλύτερη και τον κόμβο με τη μικρότερη Closeness Centrality. Αφού βρίσκουμε τους κόμβους αυτούς προσομοιώνουμε 5 φορές το SIS model με αφετηρία αρχικά τον πιο σημαντικό και στη συνέχεια το λιγότερο σημαντικό κόμβο. Η έξοδος του προγράμματος αυτού παρουσιάζεται στο επόμενο σχήμα:

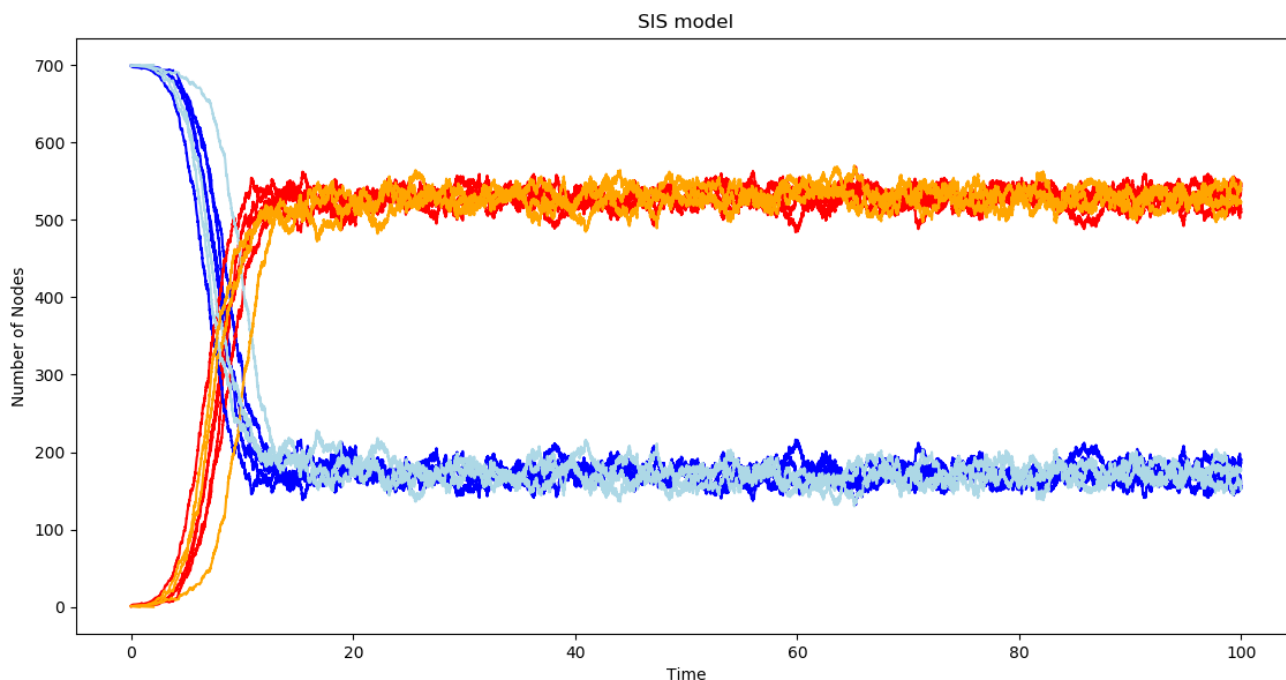


Σχήμα 6.8: SIS model-Closeness Centrality

Παρατηρούμε και πάλι ότι στην περίπτωση που ξεκινάμε από το σημαντικότερο κόμβο, η διαταραχή μεταδίδεται ταχύτερα, καθώς όπως φαίνεται από το σχήμα οι κόκκινες καμπύλες βρίσκονται αισθητά αριστερότερα από τις πορτοκαλί. Ωστόσο, στην περίπτωση του SIS model βλέπουμε πως ο αριθμός των κόμβων που βρίσκονται στην κατάσταση I σε κάθε περίπτωση φτάνει σε μια μέγιστη τιμή και ακολούθως οι κόκκινες και οι πορτοκαλί καμπύλες παρουσιάζουν μικρές αποκλίσεις από αυτήν την τιμή. Στο παράδειγμά μας, η μέγιστη τιμή των κόμβων που νοσούν είναι κοντά στο 560 και βλέπουμε ότι οι κόκκινες καμπύλες πλησιάζουν για πρώτη φορά σε αυτήν την τιμή περίπου για $time = 14$, ενώ οι πορτοκαλί περίπου για $time = 18$. Το γεγονός ότι μετά από κάποιο μεταβατικό χρόνο οι κόκκινες και οι πορτοκαλί καμπύλες «ταλαντώνονται» γύρω από μια μέγιστη τιμή ήταν αναμενόμενο, καθώς στο SIS model δεν

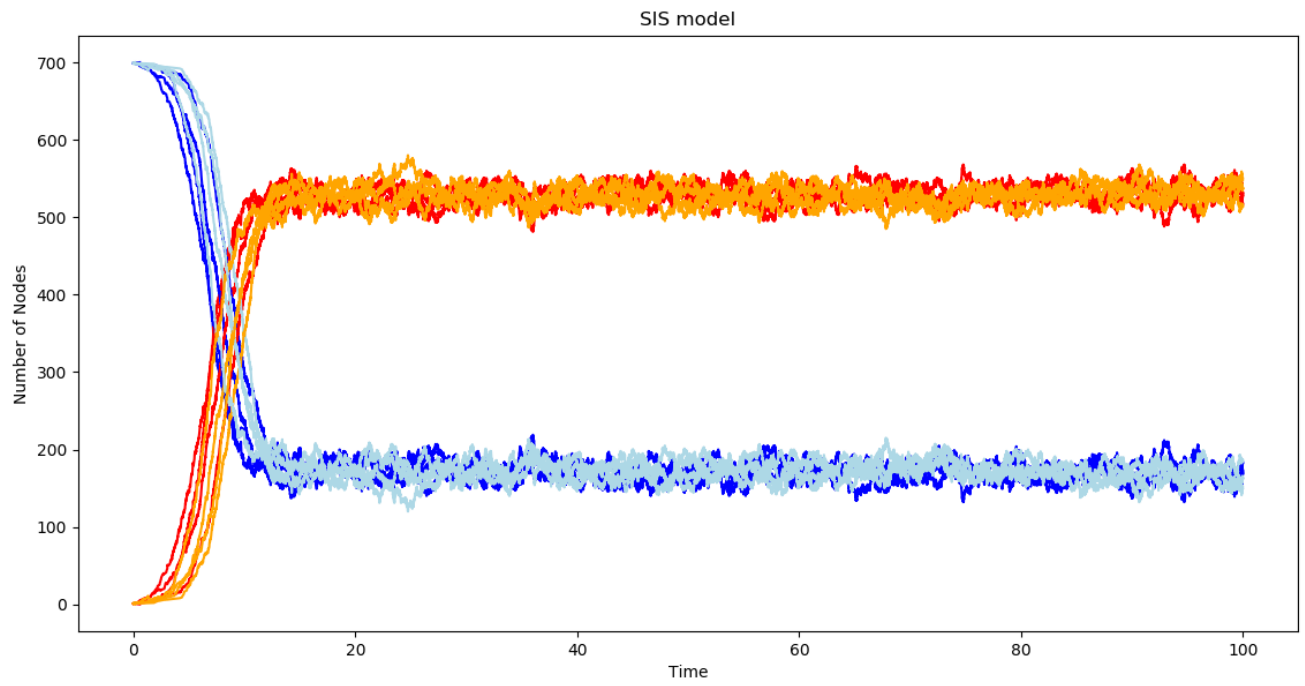
υπάρχει η κατάσταση R , συνεπώς οι κόμβοι μεταβαίνουν από την κατάσταση S στην I και αντιστρόφως.

Στη συνέχεια προσομοιώσαμε με πανομοιότυπη διαδικασία το SIS model χρησιμοποιώντας ως αφετηρία το σημαντικότερο και το λιγότερο σημαντικό κόμβο βάσει της Betweenness Centrality και η έξοδος του προγράμματος ήταν η εξής:



Σχήμα 6.9: SIS model-Betweenness Centrality

Τέλος, κάνουμε το ίδιο εκκινώντας αρχικά από τον κόμβο με τη μεγαλύτερη και στη συνέχεια από τον κόμβο με τη μικρότερη Degree Centrality και λαμβάνουμε την έξοδο που φαίνεται στην επόμενη σελίδα. Βλέπουμε και πάλι ότι η διαφορά στην ταχύτητα μετάδοσης που παρατηρείται στο σχήμα 6.8 είναι πολύ πιο αισθητή από τις διαφορές που παρατηρούνται στα σχήματα 6.9 και 6.10, γεγονός που προέκυψε από τη συντριπτική πλειονότητα των εκτελέσεων των προγραμμάτων. Συνεπώς, μέσω του Προγράμματος 3 καταλήγουμε ξανά στο συμπέρασμα ότι η Closeness Centrality αποτελεί πιθανότατα την καταλληλότερη μετρική για τον καθορισμό των σημαντικών κόμβων ενός γράφου σε περιπτώσεις επιδημιών.



Σχήμα 6.10: SIS model-Degree Centrality

Κεφάλαιο 7

Επίλογος

7.1 Απολογισμός-Συνεισφορά

Στο πλαίσιο της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας προσπαθήσαμε να κατανοήσουμε την έννοια του Συστημικού Κινδύνου και να παρουσιάσουμε κάποιες μαθηματικές μοντελοποιήσεις που έχουν αναπτυχθεί για την περιγραφή του. Ωστόσο, στο μεγαλύτερο μέρος της εργασίας μας εστιάσαμε το ενδιαφέρον μας στη μελέτη της θεωρίας των Κοινωνικών Δικτύων, με σκοπό να αντλήσουμε συμπεράσματα για τη συμπεριφορά ενός χρηματοπιστωτικού δικτύου. Όπως αναφέραμε και στα προηγούμενα κεφάλαια, ένα χρηματοπιστωτικό δίκτυο μπορεί να αναπαρασταθεί με τη μορφή ενός γράφου. Συνεπώς, θεωρώντας το χρηματοπιστωτικό δίκτυο ως γράφο προσπαθήσαμε να προσδιορίσουμε τους σημαντικούς κόμβους του, να κατανοήσουμε τα μοντέλα επιδημιών SIR και SIS και να τα υλοποιήσουμε προγραμματιστικά στο Κεφάλαιο 6.

Ο καθορισμός των κρίσιμων κόμβων ενός γράφου μπορεί να βοηθήσει πολύ στην υιοθέτηση μέτρων πρόληψης για την αποφυγή της εμφάνισης μιας επιδημίας στο δίκτυο. Για παράδειγμα, αν σε ένα χρηματοπιστωτικό δίκτυο μπορούσαμε να διακρίνουμε τις τράπεζες που αποτελούν «σημαντικούς κόμβους» του δικτύου, τότε ο συνεχής έλεγχος της λειτουργίας αυτών των τραπεζών και η προσπάθεια εξυγίανσής τους θα μπορούσαν να περιορίσουν τη συχνότητα εμφάνισης του συστημικού κινδύνου. Συνεπώς, τα προγράμματα που υλοποιήθηκαν στο Κεφάλαιο 6 καθώς και τα συμπεράσματα στα οποία μας οδήγησαν θα μπορούσαν να βοηθήσουν σε αυτήν την κατεύθυνση. Ωστόσο, είναι σίγουρο ότι η εν λόγω εργασία δεν έχει εξαντλήσει τη δυνατότητα επίλυσης του προβλήματος και έχει πολλά περιθώρια επέκτασης που παρουσιάζονται στην επόμενη παράγραφο.

7.2 Μελλοντική Έρευνα

Θα μπορούσαν να διατυπωθούν πάρα πολλές ιδέες επέκτασης της έρευνας της παρούσας εργασίας. Χαρακτηριστικά εδώ αναφέρουμε τα εξής:

1. Τα χρηματοπιστωτικά δίκτυα στο πλαίσιο της εργασίας μας αναπαρίστανται ως απλοί γράφοι. Ωστόσο, αυτή η αναπαράσταση είναι ιδιαίτερα αφαιρετική και δεν περιέχει καμία πληροφορία που να ξεχωρίζει τα χρηματοπιστωτικά δίκτυα από τις άλλες μορφές δικτύων. Θα μπορούσαμε για παράδειγμα στην αναπαράστασή μας να προσθέταμε σε κάθε κόμβο του δικτύου πληροφορίες που αφορούν την Καθαρή Θέση της τράπεζας ή τα λειτουργικά της έσοδα και έξοδα και να συμπεριλαμβάναμε στη πειραματική διαδικασία μας και αυτές τις παραμέτρους.

2. Στα προγράμματα που υλοποιήθηκαν στο Κεφάλαιο 6 θεωρήσαμε γράφους μη κατευθυνόμενους χωρίς βάρη στις ακμές. Οι μη κατευθυνόμενοι γράφοι αποτελούν κατάλληλη αναπαράσταση σε ορισμένες περιπτώσεις, όπως για παράδειγμα αν θέλουμε να μελετήσουμε πως επηρεάζεται το δίκτυο από μία ενδεχόμενη πτώση της αξίας ενός κεφαλαίου διαμοιραζόμενου μεταξύ των τραπεζών. Ωστόσο, σε αρκετές περιπτώσεις η πληροφορία που μας δίνουν οι μη κατευθυνόμενοι γράφοι είναι ελλιπής. Θα μπορούσαμε για παράδειγμα να θεωρήσουμε προσανατολισμένους γράφους, στους οποίους η ακμή κατευθύνεται από την τράπεζα-οφειλέτη στην τράπεζα-πιστωτή και το βάρος της ακμής αποτυπώνει το μέγεθος της διατραπεζικής έκθεσης ή την πιθανότητα μετάδοσης μιας διαταραχής από τη μία τράπεζα στην άλλη.
3. Τα γραφήματα που χρησιμοποιήσαμε για την πειραματική διαδικασία προέκυψαν από την κλήση μίας συνάρτησης παραγωγής τυχαίων γραφημάτων. Ωστόσο, θα είχε πολύ μεγαλύτερο ενδιαφέρον να μπορούσαμε να υλοποιήσουμε τα προγράμματα του Κεφαλαίου 6 για γράφους που αναπαριστούν πραγματικά χρηματοπιστωτικά δίκτυα.

Bibliography

- [1] (), [Online]. Available: <http://ikee.lib.auth.gr/record/275586/files/GRI-2015-15320.pdf?fbclid=IwAR2OD-C9MoAbWRNhOFES7nthF8dHR8YAh8E3PNeR1CLmX-4UuskhQbh1gfk>.
- [2] (), [Online]. Available: http://oceanis.lib.teipir.gr/xmlui/bitstream/handle/123456789/2391/log_201400075.pdf?sequence=1&isAllowed=y&fbclid=IwAR20ycfs-44jSujm5BIajbd3GFVYgKThYe0MEA5ZYdzfjCtDDsPxMVjfkIY.
- [3] (), [Online]. Available: https://www.euretirio.com/over-counter-otc/?fbclid=IwAR0zj3D1EreStBK2Mpt3ZS9Fjg-RShnUD_GsCk4bXdGlawqENTV-bvXwVR4.
- [4] (), [Online]. Available: https://repository.kallipos.gr/bitstream/11419/461/1/06_chapter_05.pdf?fbclid=IwAR1pjJc9IkCI9BH2it7SMGuKGSPjX1l7GRbD00lkOPPbHkYs34wEppxAVp8
- [5] (), [Online]. Available: <https://repository.kallipos.gr/bitstream/11419/2079/1/AGT-Book-F-Ch-04.pdf?fbclid=IwAR34J-Uvt1TB5b-DJZyUVy7cX-wnqnY6CgogIsxj51cKr85hrrvqEqRuvIO>.
- [6] (), [Online]. Available: <https://www.geeksforgeeks.org/betweenness-centrality-centrality-measure/?fbclid=IwAR2KZj10AxMZCfBaeGZJQNVfne0BrTd-KHffRJC-jPulfyLHZoToDwaYJ-0>.
- [7] (), [Online]. Available: https://en.wikipedia.org/wiki/Strongly_connected_component?fbclid=IwAR1ie44ZtGmgv8A9nYXRT00SgQbNkGf0_YPYPWdWCCTGnG3SAE2yr_FkIck.
- [8] (), [Online]. Available: https://epidemicsonnetworks.readthedocs.io/en/latest/EoN.html?fbclid=IwAR3IUH_3Hy4Ubd160AsBGokF6zB8NXgTIYhuWqScgUhoXM_pZso0hSHhI.
- [9] (), [Online]. Available: https://epidemicsonnetworks.readthedocs.io/en/latest/GettingStarted.html?fbclid=IwAR0U3wSP1fxZvY_g109MKbkbG1hL5k_uwKI--PJLp10yX14gjJI2UXdB5-E#quickstart-guide.
- [10] (), [Online]. Available: https://institutefordiseasemodeling.github.io/Documentation/general/model-si.html?fbclid=IwAR3kd2zpis1wBjd5Y07dMbrx7DYupkOYyhm4_Czq5tezSn03QMtWka7-f1Q.
- [11] A. Admati and M. Hellwig, *The Bankers' New Clothes: What's Wrong with Banking and What to Do about It-Updated Edition*. Princeton University Press, 2014.
- [12] R. Cifuentes, G. Ferrucci, and H. S. Shin, «Liquidity risk and contagion», *Journal of the European Economic Association*, vol. 3, no. 2-3, pp. 556-566, 2005.
- [13] C. L. Culp, *The risk management process: Business strategy and tactics*. John Wiley & Sons, 2002, vol. 103.
- [14] D. Darrell and K. J. Singleton, *Credit Risk: Pricing, Measurement, and Management*, 2003.

- [15] L. Eisenberg and T. H. Noe, «Systemic risk in financial systems», *Management Science*, vol. 47, no. 2, pp. 236–249, 2001.
- [16] P. Erdős and A. Rényi, «On the evolution of random graphs», *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.*, vol. 5, no. 1, pp. 17–60, 1960.
- [17] P. Gai and S. Kapadia, «Contagion in financial networks», *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 466, no. 2120, pp. 2401–2423, 2010.
- [18] Χ Γκόρτσος, «Βασιλεία ΙΙΙ»: Η αναθεώρηση του ισχύοντος κανονιστικού πλαισίου της Επιτροπής της Βασιλείας για την τραπεζική εποπτεία με στόχο την ενδυνάμωση της σταθερότητας του διεθνούς τραπεζικού συστήματος», *Χρηματοπιστωτικό δίκαιο, Τεύχος*, vol. 1, 2011.
- [19] (). Getting Started with Plotly for Python, [Online]. Available: <https://plot.ly/python/getting-started/?fbclid=IwAR08HpYcxwUulJeff7Sydoc24ZGiBkHf05JvP2xtB4CCudfqSKX>
- [20] E. N. Gilbert, «Random graphs», *The Annals of Mathematical Statistics*, vol. 30, no. 4, pp. 1141–1144, 1959.
- [21] M. Goering, N. Albin, P. Poggi-Corradini, C. Scoglio, and F. D. Sahneh, «Numerical investigation of metrics for epidemic processes on graphs», in *2015 49th Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, IEEE, 2015, pp. 1317–1322.
- [22] A. G. Haldane, «Rethinking the financial network», in *Fragile stabilität—stabile fragilität*, Springer, 2013, pp. 243–278.
- [23] T. R. Hurd, *Contagion! Systemic Risk in Financial Networks*. Springer, 2016.
- [24] M. O. Jackson, *Social and economic networks*. Princeton university press, 2010.
- [25] C. John. (). What Is a Loan Portfolio?, [Online]. Available: <https://pocketsense.com/loan-portfolio-8246062.html> (visited on 04/19/2019).
- [26] G. G. Kaufman, «Comment on systemic risk», *Research in Financial Services: Banking, Financial Markets, and Systemic Risk*, vol. 7, pp. 47–52, 1995.
- [27] S. H. Lee, «Systemic liquidity shortages and interbank network structures», *Journal of Financial Stability*, vol. 9, no. 1, pp. 1–12, 2013.
- [28] (). Measures Of Centrality, [Online]. Available: https://necromuralist.github.io/data_science/posts/Measures-of-Centrality/?fbclid=IwAR2Ey2X4Y_-T-XJjN9vTdw_nw7LeK-4p7DQw4jFEckDWe4y6gPaTNWX1EQ4.
- [29] F. Mishkin, «Comment on systemic risk», *Research in Financial Services: Banking, Financial Markets, and Systemic Risk*, vol. 7, pp. 31–45, 1995.
- [30] (). The SIR epidemic model, [Online]. Available: <https://scipython.com/book/chapter-8-scipy/additional-examples/the-sir-epidemic-model/?fbclid=IwAR2IykgqhJaAyIkx5Ea2QNEE7kC0t9g9XZejU5S1j3x00EOMN34DL1b5gzw>.
- [31] (). The SIR Model for Spread of Disease - The Differential Equation Model, [Online]. Available: <https://www.maa.org/press/periodicals/loci/joma/the-sir-model-for-spread-of-disease-the-differential-equation-model?fbclid=IwAR1Y05rRIJ9sZGsAxJ9h4JUvb086qP1Ja-tVfjB0pgH395TIPQgx9wjalHE>.

