ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Διπλωματική Εργασία

Θεώρημα Πληρότητας, Καθοδικό Θεώρημα Löwenheim-Skolem και Δυσδιάκριτα

Σταύρος Ταξιάρχης Ποτσάκης

Τριμελής επιτροπή: Α. Αρβανιτάκης (Επιβλέπων καθηγητής)
Π. Στεφανέας
Α. Χαραλαμπόπουλος

Αθήνα,Οκτώβριος 2019

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Διπλωματική Εργασία

Θεώρημα Πληρότητας, Καθοδικό Θεώρημα Löwenheim-Skolem και Δυσδιάκριτα

Σταύρος Ταξιάρχης Ποτσάκης

Επιβλέπων:
Α.Αρβανιτάκης (Επίκουρος Καθηγητής)
Τριμελής επιτροπή:
Α.Αρβανιτακης
Π. Στεφανέας
Α. Χαραλαμπόπουλος

Αθήνα, Οκτώβριος 2019

Εισαγωγή

Ο σκοπός αυτής της διπλωματικής εργασίας είναι να παρουσιάσουμε κάποια θέματα απο τη Θεωρία Μοντέλων.Στο 1ο κεφάλαιο δίνουμε κάποια προαπαιτούμενα απο τη Λογική για την πρωτοβάθμια γλώσσα,τα μοντέλα και το αποδεικτικο σύστημα Hilbert.Στο 2ο κεφάλαιο θα διατυπώσουμε και αποδείξουμε το Θεώρημα Πληρότητας και θα δωσουμε το Θεώρημα Συμπάγειας και το Ασθενές Θεώρημα Löwenheim-Skolem ως απόρροιες του Θεωρήματος Πληρότητας.Στο 3ο κεφαλαιο θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε το Καθοδικό Θεώρημα Löwenheim-Skolem.Στο 4ο κεφάλαιο θα ορίσουμε τις Skolem συναρτήσεις,τα δυσδιάκριτα και θα παρουσιάσουμε πορίσματα για την κατασκεύη μοντέλων παραγόμενα απο στοιχεία δυσδιάκριτα.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ.Αρβανιτάκη για το πολύ όμορφο και ενδιαφέρον θέμα που μου πρότεινε να ασχοληθώ,αλλά και για την βοήθεια που μου παρείχε σε ολη την πορεία αυτής της διπλωματικής εργασίας.Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ.Στεφανέα και τον κ.Χαραλαμπόπουλο για τη συμμετοχή και την παρουσία τους στην τριμελή επιτροπή.

Περιεχόμενα

 ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο 1

Προαπαιτούμενα

1.1 Πρωτοβάθμια Γλώσσα

Ο όρος ¨πρωτοβάθμια γλώσσα' δηλώνει ότι η γλώσσα διαθέτει μεταβλητές μόνο για τα αντικείμενα και όχι μεταβλητές για σχέσεις ή συναρτήσεις ή σύνολα.

Ορισμός 1.1.1. *Μια πρωτοβάθμια γλώσσα L περιλαμβάνει :*
α)τα λογικά σύμβολα
1)συνδέσμων : $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
2)ποσοδεικτών : $\forall$*(καθολικούς) ή* $\exists$*(υπαρξιακούς)*
3)ισότητας : $=$
4)μεταβλητών : x_1,x_2,*...(αριθμησιμο πλήθος)*
5)παρενθέσεων : (,) και

β)μη λογικά σύμβολα
6)σχέσεων R_i,$i\in I$
7)συναρτήσεων f_j,$j\in J$
8)σταθερών c_k,$k\in K$
όπου I,J,K είναι κάποια σύνολα δεικτών πεπερασμένα η άπειρα.

Γενικά μια πρωτοβάθμια γλώσσα γράφεται ώς : $L=< (R_i)_{i\in I}$, $(f_j)_{j\in J}$, $(c_k)_{k\in K} >$.Από εδώ και πέρα οπότε θα λέμε γλώσσα θα εννοούμε πρωτοβάθμια γλώσσα.Η δύναμη ή πληθάριθμος μιας γλώσσας,συμβολίζεται με $\| L \|$

,ορίζεται
$\| L \| = | L | \cup \omega$.Λέμε ότι μια γλώσσα L είναι αριθμήσιμη ή μη αριθμήσιμη αν $\| L \|$ είναι αριθμήσιμο ή μη αριθμήσιμο.

Σε πολλές περιπτώσεις παιρνάμε από μια δοσμένη γλώσσα L σε μια άλλη γλώσσα L' η οποία έχει όλα τα σύμβολα της L με επιπλέον κάποια επιπρόσθετα σύμβολα.Σε μία τέτοια περίπτωση χρησιμοποιούμε το συμβολίσμο $L \subseteq L'$ και λέμε ότι η γλώσσα L' είναι επέκταση της L , και L είναι μία μείωση της L'.Αφού L και L' είναι μόνο σύνολα συμβόλων,η επέκταση L' μπορεί να γραφεί ότι $L' = L \cup X$,όπου X είναι ένα σύνολο από νέα σύμβολα.

Ορισμός 1.1.2. *Οι όροι ορίζονται με αναδρομή: (a)Κάθε μεταβλητή είναι όρος.*
(β)Κάθε σύμβολο σταθεράς είναι όρος.
(γ)Αν $t_1,\ldots,t_n$ είναι όροι και f είναι ένα n-μελές σύμβολο συνάρτησης,τότε $f(t_1,\ldots,t_n)$ είναι όρος.

Ορισμός 1.1.3. *Οι τύποι είναι ορισμένοι με αναδρομή:*
(a)Αν s,t είναι όροι τότε $s=t$ είναι τύπος.
(β)Αν οι $t_1,\ldots,t_n$ είναι όρος και R είναι ένα n-μελές σύμβολο σχέσης τότε $R(t_1,\ldots,t_n)$ είναι τύπος.
(γ)Αν φ και ψ είναι τύπος και u μία μεταβλητή τότε τα ακόλουθα είναι τύποι: $\neg\varphi$, $\varphi\vee\psi$, $\varphi\wedge\psi$, $\varphi\rightarrow\psi$, $\forall u\varphi(u)$, $\exists u\varphi(u)$.

Πρόταση 1.1.4. *Κάθε όρος t ικανοποιεί ακριβώς μία από τις ακόλουθες συνθήκες:*
1)$t\equiv u$, για μία μοναδικά ορισμένη μεταβλητή u.
2)$t\equiv c$, για μια μοναδικά ορισμένη σταθερά c.
3)$t\equiv f(t_1,\ldots,t_n)$, για ένα μοναδικά ορισμένο σύμβολο συναρτήσεως f και μοναδικά όρισμένους όρους $t_1,\ldots,t_n$.

Πρόταση 1.1.5. *Κάθε τύπος φ ικανοποιεί ακριβώς μια από τις ακόλουθες συνθήκες:*
1)$\chi\equiv s=t$,για μοναδικά ορισμένους όρους s,t.
2)$t\equiv R(t_1,\ldots,t_n)$, για ένα μαναδικά ορισμένο σύμβολο συναρτήσεως R και μοναδικά όρισμένους όρους $t_1,\ldots,t_n$.
3)$\chi\equiv \neg\varphi$,για ένα μοναδικά ορισμένο τύπο φ.

4)$\chi \equiv \varphi \vee \psi$,για μοναδικά ορισμένους τύπους φ και ψ.
5)$\chi \equiv \varphi \wedge \psi$,για μοναδικά ορισμένους τύπους φ κα ψ.
6)$\chi \equiv \varphi \rightarrow \psi$,για μοναδικά ορισμένους τύπους φ κα ψ.
7)$\chi \equiv \exists u \varphi(u)$,για μια μοναδικά ορισμένη μεταβλητή u και ένα μοναδικά ορισμένο τύπο φ.
8)$\chi \equiv \forall u \varphi(u)$,για μια μοναδικά ορισμένη μεταβλητή u και ένα μοναδικά ορισμένο τύπο φ.

Αυτές οι προτάσεις μας επιτρέπουν να αποδείξουμε ιδιότητες εκφράσεων με δομική επαγωγή,δηλαδή επαγωγή στο μήκος της έκφρασης και μπορούμε επίσης να δώσουμε ορισμούς με δομικη αναδρομή,δηλαδή αναδρομή στο μήκος των έκφρασεων.

Ορισμός 1.1.6. *Μια εκτεταμένη έκφραση είναι ένα ζεύγος $(a,(u_1,\ldots,u_n))$ από ένα (καλά δοσμένο) όρο ή τύπο a και μια λίστα από συγκεκριμένες μεταβλητές θα χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό $a(u_1,\ldots,u_n) \equiv (a,(u_1,\ldots,u_n))$ και για κάθε ακολουθία όρων $t_1,\ldots,t_n \equiv a(u_1 \equiv t_1,\ldots,u_n \equiv t_n)$.*

Επίσης,μια εκτεταμένη έκφραση $a(u_1,\ldots,u_n)$ είναι πλήρης άν η λίστα $(u_1,\ldots,u_n)$ περιλαμβάνει όλες τις μεταβλητές οι οποίες εμφανίζονται ως ελεύθερες στο a.

1.2 Μοντέλα

Σε αυτήν την ενότητα θα μιλήσουμε για τα μοντέλα σε μια δοσμένη γλώσσα.Ένα μοντέλο **A** για την γλώσσα L περιέχει,πρωτα από όλα,ένα πεδίο δομής A,το οποίο είναι ένα μη κενό σύνολο.Σε αυτό το πεδίο δομής,κάθε n-μελές σύμβολο σχέσης R αντιστοιχεί σε μια n-μελή σχέση $R^{\mathbf{A}} \subseteq A^n$ στο A,κάθε n-μελές σύμβολο συνάρτησης f αντιστοιχεί σε μια n-μελή συνάρτηση $f^{\mathbf{A}}:A^n \rightarrow A$ στο A,και κάθε σύμβολο σταθεράς c αντιστοιχεί σε μια σταθερά $c^{\mathbf{A}}$ η οποία ανήκει στο A.Ένα μοντέλο για τη L είναι ένα ζεύγος $<A,I>$,και γράφουμε $\mathbf{A}=<A,I>$,$\mathbf{B}=<B,I>$ κ.ο.κ..Θα προσπαθήσουμε να είμαστε αρκετά συνεπής έτσι ώστε τα πεδία δομής των μοντέλων **A**,**B**,κ.λ.π. να είναι τα A,B,κ.λ.π..Οι σχέσεις,συναρτήσεις και σταθερές του **A** είναι είκονες ως προς το I των συμβόλων σχέσεων,συναρτήσεων και σταθερών στη L.

Αν ξεκινήσουμε με ένα μοντέλο **A** για τη γλώσσα L μπορούμε πάντα να το επεκτείνουμε σε ένα μοντέλο για την γλώσσα L'=L∪X δίνοντας κατάλληλες ερμηνείες για κάθε σύμβολο στο X.Αν I' είναι οποιαδήποτε ερμηνεία για τα σύμβολα του X στο **A** ,και X διαχωριστεί από τη L,τότε $\mathbf{A}'=<A,I\cup I'>$ είναι ένα μοντέλο για τη L'.Σε αυτήν την περίπτωση λέμε ότι $\mathbf{A}'$ είναι επέκταση του **A** στη L' ,και **A** είναι η μείωση του $\mathbf{A}'$ στη L.Στις περισσότερες φορές χρησιμοποιούμε έναν ευκολότερο συμβολισμό για το $<\mathbf{A}',I>$ ο οποίος είναι $\mathbf{A}'$.Ξεκάθαρα υπάρχουν πολλοί τρόποι ένα μοντέλο **A** για τη L να επεκταθεί σε ένα μοντέλο $\mathbf{A}'$ για τη L'.Από την άλλη,ένα δοσμένο μοντέλο $\mathbf{A}'$ για τη L',έχει μόνο μια μείωση **A** για τη L.Φτιάχνουμε το **A** περιορίζοντας τη συνάρτηση ερμηνείας I' της L∪X στη L.Η διαδικασία επέκτασης ή μείωσης δεν αλλάζει το πεδίο δομής.

1.3 Αποδεικτικό Σύστημα Hilbert για την Πρωτοβάθμια Γλώσσα

Αξιώματα και Κανόνες Παραγωγής:

1)$\varphi \to (\varphi \to \psi)$
2)$(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to (\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$
3)$(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi)$
4)$\neg \neg \varphi \to \varphi$
5)$\varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi))$
6α)$(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$ και 6β)$(\varphi \wedge \psi) \to \psi$
7α)$(\varphi \vee \psi) \to \varphi$ και 7β)$(\varphi \vee \psi) \to \psi$
8)$(\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to ((\varphi \vee \psi) \to \chi))$
9)$\forall u \varphi(u) \to \varphi(t)$ (t ελεύθερο για u στην $\varphi(u)$)
10)$\forall u(\varphi \to \psi)$(u όχι ελεύθερη στο φ)
11)$\varphi(t) \to \exists u \varphi(u)$(t ελεύθερος για u στο $\varphi(u)$).

Κανόνες Παραγωγής:

12)φ, $\varphi \to \psi \Rightarrow \psi$ (Modus Pones)

13)$\varphi \Rightarrow \forall u \varphi(u)$(Γενίκευση)
14)$\varphi \to \psi \Rightarrow \exists u(\varphi \to \psi)$(u όχι ελεύθερη στο ψ)

Αξιώματα Ισότητας:Για κάθε n-μελές σύμβολο σχέσης R στην L και για κάθε n-μελές σύμβολο συνάρτησης f στην L:
15) $\vdash u=u$, $\vdash u=u' \leftrightarrow u'=u$ και $\vdash u=u' \to (u'=u'' \to (u=u''))$
16)$\vdash (v_1=w_1 \wedge ... \wedge v_n=w_n) \to (R(v_1,...v_n) \leftrightarrow R(w_1,...w_n))$
17)$\vdash (v_1=w_1 \wedge ... \wedge v_n=w_n) \to (f(v_1,...v_n)=f(w_1,...w_n))$.

Ορισμός 1.3.1. *Μια απόδειξη στην L από μια θεωρία T είναι κάθε ακολουθία τύπων $\varphi_0,...,\varphi_n$ όπου κάθε φ_i είναι η αξίωμα ή ένας τύπος στην T ή προκύπτει από δύο προηγούμενους τύπους με έναν από τους Κανόνες Παραγωγής.*

Θεώρημα 1.3.2. *(Θεώρημα Ορθότητας): Κάθε θεώρημα της θεωρίας T είναι μια σημασιολογική συνέπεια της T ,δηλαδή αν $T \vdash \varphi \Rightarrow T \models \varphi$.*

Θεώρημα 1.3.3. *(Θεώρημα Παραγωγής): Για κάθε θεωρία T,κάθε πρόταση χ και κάθε τύπος φ έχουμε : $T,\chi \vdash \varphi \Leftrightarrow T \vdash \chi \to \varphi$.*

Θεώρημα 1.3.4. *Αν T είναι ένα σύνολο από προτάσεις,η ενδεδειγμένη αντικατάσταση είναι ελεύθερη και ο επιπλέον περιορισμός ισχύει :*
Αν $T,\varphi \vdash \chi$ τότε $T, \exists u\varphi(u) \vdash \chi$.
Περιορισμός:u να μην εμφανίζεται ελεύθερα στο χ, $\exists u\varphi(u)$ είναι πρόταση .και η δοσμένη απόδειξη να μην έχει δεσμευμένες εμφανίσεις του u.

Απόδειξη(Θεώρημα 1.3.4.):Αν $T,\varphi \vdash \chi$ τότε από Θεώρημα Παραγωγής : $T \vdash \chi \to \varphi$ και από τον Κανόνα Παραγωγής 14 έχουμε $T \vdash \exists u\varphi(u) \to \chi$ και άρα πάλι από το Θεώρημα Παραγωγής :$T, \exists u\varphi(u) \vdash \chi$. $\dashv$

Ορισμός 1.3.5. *Υποθέτουμε ότι T είναι μια L-θεωρία:*
1)T είναι συνεπής αν δεν αποδεικνύει μια αντίφαση ,δηλαδή αν δεν υπάρχει πρόταση χ τέτοια ώστε $T \vdash \chi \wedge \neg\chi$.
2)T είναι πλήρης αν για κάθε L-πρόταση ϑ, είτε $T \vdash \vartheta$ ή $T \vdash \neg\vartheta$.

Λήμμα 1.3.6. *1)Μια θεωρία είναι συνεπής αν και μόνο αν υπάρχει πρόταση χ τέτοια ώστε $T \nvdash \chi$.*

2)Μια θεωρία T είναι συνεπής αν και μόνο αν κάθε πεπερασμένο υποσύνολο $T_0 \subseteq T$ είναι συνεπής.

3)Για κάθε θεωρία T και κάθε πρόταση χ ισχύει :$T \vdash \chi \Leftrightarrow T \cup \{ \neg\chi \}$ είναι ασυνεπής.

4)Αν T είναι συνεπής,τότε για κάθε πρόταση χ,είτε $T \cup \{ \chi \}$ είναι συνεπής ή $T \cup \{ \neg\chi \}$ είναι συνεπής.

5)Αν $\exists u\varphi(u)$ πρόταση,$T \cup \{ \exists u\varphi(u) \}$ είναι συνεπής και c είναι μια σταθερά η οποία δεν εμφανίζεται στο T ή στο $\exists u\varphi(u)$,τότε $T \cup \{ \varphi(c) \}$ είναι συνεπής.

Απόδειξη(Λήμμα 1.3.6.):1)Έχουμε ότι T είναι συνεπής τότε έστω ότι δεν υπάρχει πρόταση χ τέτοια ώστε $T \nvdash \chi$ άρα $T \vdash \chi$ για κάθε πρόταση χ,και έστω $\chi = \varphi \wedge \neg\varphi$ τότε $T \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$.άτοπο αφού T είναι συνεπής.Αντίστροφα,υπάρχει πρόταση χ τέτοια ώστε $T \nvdash \chi$ και έστω ότι T είναι ασυνεπής τότε $T \vdash \chi \wedge \neg\chi$,άτοπο αφού $T \nvdash \chi$ τότε T είναι συνεπές.

2)Έχουμε T να έιναι μια θεωρία η οποία είναι συνεπής,έστω ότι το πεπερασμένο υποσύνολο $T_0 \subseteq T$ είναι ασυνεπές τότε $T_0 \vdash \chi \wedge \neg\chi$ και αφού T_0 είναι υποσύνολο του T και η πρόταση $\chi \wedge \neg\chi$ έχει απόδειξη στο T_0 τότε θα έχει και στο T άρα $T \vdash \chi \wedge \neg\chi$,άτοπο άρα κάθε πεπερασμένο υποσύνολο $T_0 \subseteq T$ είναι συνεπές.Αντίστροφα,τώρα έχουμε $T_0 \subseteq T$ να είναι πεπερασμένο υποσύνολο του T το οποίο είναι συνεπές,έστω ότι T είναι ασυνεπές τότε $T \vdash \chi \wedge \neg\chi$ και τότε έστω $\varphi_0,...,\varphi_k$ μία ακολουθία που αποδεικνύει την αντίφαση στο T και έστω $T_0 = \{\varphi_0,...,\varphi_i :$ όπου $1 \leq i \leq k\}$ άρα $T_0 \vdash \chi \wedge \neg\chi$,άτοπο άρα T είναι συνεπής.

3)Για κάθε θεωρία T και πρόταση χ έχουμε :
Αν $T \vdash \chi$ τότε για το $T \cup \{ \neg\chi \}$ ξέρουμε ότι : $T \cup \{ \neg\chi \} \vdash \chi$ και $T \cup \{ \neg\chi \} \vdash \neg\chi$ άρα $T \cup \{ \neg\chi \} \vdash \chi \wedge \neg\chi$ άρα $T \cup \{ \neg\chi \}$ είναι ασυνεπές.Αντίστροφα,αν $T \cup \{ \neg\chi \}$ είναι ασυνεπές τότε $T \cup \{ \neg\chi \} \vdash \chi \wedge \neg\chi \Rightarrow T \cup \{ \neg\chi \} \vdash \chi$ και $T \cup \{ \neg\chi \} \vdash \neg\chi \Rightarrow T \vdash \chi$,άφου καμία πρόταση χ δεν μπορεί να αποδειχθεί από μια θεωρία αποτελούμενη αποκλειστικά από την άρνηση της πρότασης αυτής

που θέλουμε να αποδειχθεί.

4)Έστω T είναι συνεπές και έστω ότι κανένα από τα $T\cup\{\chi\}$ και $T\cup\{\neg\chi\}$ είναι συνεπή ,άρα από το (3) έχουμε $T\vdash\neg\chi$ και $T\vdash\chi$,άτοπο αφού T είναι συνεπές άρα είτε $T\cup\{\chi\}$ είναι συνεπής ή $T\cup\{\neg\chi\}$ είναι συνεπής.

5)Έχουμε $\exists u\varphi(u)$ να είναι πρόταση ,$T\cup\{\exists u\varphi(u)\}$ να είναι συνεπής θεωρία,και c να είναι σταθερά τέτοια ώστε να μην εμφανίζεται ούτε στο T ούτε στο $\exists u\varphi(u)$ τότε έστω ότι $T\cup\{\varphi(c)\}$ είναι ασυνεπής και τότε $T\cup\{\varphi(c)\}\vdash\chi\wedge\neg\chi$ και από το Θεώρημα 1.3.4 έχουμε ότι αν $T\cup\{\varphi\}\vdash\chi\wedge\neg\chi$ τότε $T\cup\{\exists u\varphi(u)\}\vdash\chi\wedge\neg\chi$ με περιορισμούς το u να μην εμφανίζεται ελεύθερα στη $\chi\wedge\neg\chi$, $\exists u\varphi(u)$ να είναι πρόταση,και η δοσμένη απόδειξη να μην έχει δεσμεύμενες εμφανίσεις του u.Άρα έχουμε $T\cup\{\exists u\varphi(u)\}\vdash\chi\wedge\neg\chi$,άτοπο άρα $T\cup\{\varphi(c)\}$ είναι συνεπής. $\dashv$

Κεφάλαιο 2

Θεώρημα Πληρότητας

2.1 Θεώρημα Πληρότητας

Θεώρημα 2.1.1. *(*Θεώρημα Πληρότητας*)*
1)*Κάθε συνεπής αριθμήσιμη θεωρία T εχει αριθμήσιμο μοντέλο.*
2)*Για κάθε αριθμήσιμη L-θεωρία T και κάθε L-πρόταση χ έχουμε : άν $T \models \chi$ τότε $T \vdash \chi$.*

Θα αποδείξουμε τον δεύτερο ισχυρισμό δεχόμενοι ότι ισχύει ο πρώτος. Υποθέτουμε ότι $T \models \chi$ αλλά $T \nvdash \chi$,τότε $T \cup \{ \neg\chi \}$ είναι συνεπής,και έτσι έχει ένα μοντέλο **A** σύμφωνα με το 1) το οποίο είναι και μοντέλο του T τέτοιο ώστε $A \nvDash \chi$ άτοπο αφού $T \models \chi$,άρα άν $T \models \chi$ τότε $T \vdash \chi$.

Συγκεκρίμενα ειναι αρκετά συνιθισμένο να αναφερόμαστε στο 1) ή στο 2) ώς Θεώρημα Πληρότητας του Gödel.

Η ιδέα κλειδί για την απόδειξη του 1) στο Θεώρημα Πληρότητας είναι η ακόλουθη:

Ορισμός 2.1.2. *(Σύνολα Henkin) Μία L-θεώρια H είναι Henkin σύνολο εάν ικανοποίει τις ακόλουθες συνθήκες:*
(1):η H είναι συνεπής
(2):Για κάθε L-πρόταση χ ,είτε $\chi \in H$ είτε $\neg\chi \in H$,δηλαδή συγκεκριμένα η H

ειναι πλήρης.
(3):Εάν $\exists u\chi(u)\in H$,τότε υπάρχει κάποια σταθερά c τέτοια ώστε $\chi(c)\in H$.

Η σταθέρα c στην τελευταία συνθήκη ονομάζεται Henkin μάρτυρας για τις υπαρξιακές προτάσεις ∃uφ(u) ,έτσι ένα Henkin σύνολο είναι μια συνεπή πλήρης θεωρία η οποία εχει Henkin μάρτυρες.

Λήμμα 2.1.3. *(Ιδιότητες των Henkin συνόλων)*
Υποθέτουμε ότι H είναι Henkin σύνολο,όταν:

1)H είναι κλειστό ως πρός $\vdash$,δηλαδή για κάθε πρόταση χ ισχύει : αν $H\vdash\chi$,τότε $\chi\in$ H.

2)Για κάθε πρόταση φ,ψ,$\exists u\varphi(u)$:

i) $\neg\ \varphi \in$ H $\Leftrightarrow \varphi \notin$ H.

ii) $\varphi \wedge \psi \in$ H $\Leftrightarrow \varphi \in$ H και $\psi \in$ H.

iii) $\varphi \vee \psi \Leftrightarrow \varphi \in$ H ή $\psi \in$ H.

iv) $\varphi \to \psi \in$ H $\Leftrightarrow \varphi \notin$ H ή $\psi \in$ H.

v)$\exists u\varphi(u) \in$ H $\Leftrightarrow$ υπάρχει κάποιο c τέτοιο ώστε $\varphi(c) \in$ H.

vi)$\forall u\varphi(u) \in$ H $\Leftrightarrow \varphi(c) \in$ H για όλα τα c.

Απόδειξη(Λήμμα 2.1.3):1)Υποθέτουμε ότι Η ⊢ χ αλλά χ ∉ Η αφού Η πλήρης και έτσι Η ⊢ ¬ χ το οποίο κάνει το Η άσυνεπες,άτοπο άρα Η ⊢ χ τότε χ ∈ Η.

2)i)Αν ¬ φ ∈ Η τότε Η ⊢ ¬ φ ,και έστω ότι δεν ισχύει ότι φ ∉ Η τότε αφού Η πλήρης έχουμε φ ∈ Η ⇒ Η ⊢ φ ,άτοπο αφου Η είναι συνεπής από τον ορισμό.Άρα ¬ φ∈ Η ⇒ φ ∉ Η.Αντίστροφα,αν φ ∉ Η τότε έστω ότι ¬ φ ∉ Η άρα φ ∈ Η αφού Η πλήρης,άτοπο.

ii)Αν φ ∧ ψ ∈ Η και φ ∧ ψ ⊢ φ και φ ∧ ψ ⊢ ψ,αφού φ ∧ ψ ∈ Η τότε Η ⊢ φ και Η ⊢ ψ άρα από το (1) έχουμε φ και ψ ∈ Η.Αντίστροφα,χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι φ,ψ ⊢ φ ∧ ψ ,όπου αν φ,ψ ∈ Η, τότε Η⊢φ∧ψ και έτσι φ∧ψ∈ Η, από την ιδιότητα (1).

iii)Αν φ ∨ ψ ∈ Η τότε φ∈ Η ή ψ∈ Η,αφού άν φ∉ Η και ψ∉ Η τότε από (i) έχουμε ¬φ∈ Η και ¬ψ∈ Η άρα ¬(φ∨ψ)∈ Η δηλαδή φ ∨ ψ ∉ Η απο το (ii) άτοπο.Αντίστροφα,άν φ∈ Η ή ψ∈ Η τότε έχουμε ότι φ,ψ⊢ φ ∨ ψ και αφού φ ή ψ ∈ Η τότε Η⊢ φ ∨ ψ ⇒ φ ∨ ψ ∈ Η από την ιδιότητα 1).

iv)Αν $\varphi \to \psi \in$ H τότε $(\neg\varphi \vee \psi) \in$ H άρα από το (iii) $\neg\varphi\in$ H ή $\psi\in$ H και απο (i) ότι $\varphi\notin$ H ή $\psi\in$ H.Αντίστροφα,άν $\varphi\notin$ H ή $\psi\in$ H τότε από (i) έχουμε : $\neg\varphi\in$ H ή $\psi\in$ H $\Rightarrow$ $(\neg\varphi\vee \psi) \in$ H $\Rightarrow$ $\varphi \to \psi \in$ H.

v)Αν $\exists u\varphi(u)\in$ H ,τότε $\varphi(c)\in$ H για κάποιο c,από τον ορισμό των Henkin συνόλων.Το αντίστροφο ισχύει διότι $\varphi(c)\vdash \exists u\varphi(u)$ και αφού $\varphi(c)\in$ H τότε H$\vdash \exists u\varphi(u)$ και τότε $\exists u\varphi(u)\in$ H από την ιδιότητα 1).

vi)Έχουμε $\forall u\varphi(u)\in$ H και ισχύει $\forall u\varphi(u)\vdash\varphi(c)$ για όλα τα c άρα H$\vdash\varphi(c)$ και την ιδιότητα 1) $\varphi(c)\in$ H για όλα τα c.Αντίστροφα,έστω $\varphi(c)\in$ H για όλα τα c και $\forall u\varphi(u)\notin$ H $\Rightarrow$ $\varphi(c)$ για όλα τα c και $\neg(\ \forall u\varphi(u)\ )\in$ H από το (i) $\Rightarrow$ $\varphi(c) \in$ H για όλα τα c και $\exists u\ \neg\varphi(u) \in$ H $\Rightarrow$ $\varphi(c) \in$ H για όλα τα c και για κάποιο c' έχουμε $\neg\varphi(c')$ $\Rightarrow$ $\varphi(c)\in$ H για όλα τα c και $\exists c'$ τέτοιο ώστε $\varphi(c')\notin$ H,άτοπο άρα $\forall u\varphi(u)\in$ H $\dashv$.

Το παραπάνω λήμμα προτείνει ότι κάθε Henkin σύνολο είναι Th(A) για κάποια δόμη A ,δηλαδή θεωρία δομής,και έτσι για να κατασκευάσουμε ένα μοντέλο κάποιας συνεπής θεώριας πρέπει να κατασκεύασουμε ένα Henkin σύνολο το οποίο επεκτείνει την T.Για να το κάνουμε αυτό αρχικά θα χρειαστούμε να επεκτείνουμε την γλώσσα(για να εισάγουμε αρκετές σταθερές έτσι ώστε να χρησιμοποιηθούν ως Henkin μάρτυρες) και αυτή η επέκταση είναι το βασικό κομμάτι για την απόδειξη του Θεωρήματος Πληρότητας.

Λήμμα 2.1.4. *Αν L είναι μια αριθμήσιμη γλώσσα ,τότε κάθε συνεπής L-θεωρία T περιέχεται σε ένα Henkin σύνολο H στην L' όπου L' είναι μια επέκταση της L με μια άπειρη ακολουθία νέων σταθερών $(d_0, d_1, ...)$.*

Απόδειξη(Λήμμα 2.1.4):Έχουμε μια αρίθμηση S=$\{=, s_1, ...\}$ όλων των συμβόλων σταθερών,σχέσεων και συναρτήσεων στην L συμπεριλαμβανόμενου και του συμβόλου της ισότητας,και λέμε ότι ένα σύμβολο s έχει τάξη n άν αυτό ορίζεται σε μια n-άδα $\{s_0, ..., s_n\}$.Έτσι το σύμβολο = είναι το μόνο που έχει τάξη 0.

Υπολήμμα 2.1.5. *Υπάρχει μια αρίθμηση $\chi_0,\chi_1,....$ όλων των προτάσεων της L' έτσι ώστε για κάθε n ,η σταθερά d_n να μην εμφανίζεται σε καμία τις πρώτες n προτάσεις $\chi_0,...,\chi_{n-1}$.*

Απόδειξη(Υπολήμματος 2.1.5):Για κάθε n=0,1,2,..... S_n είναι το σύνολο όλων των προτάσεων της γλώσσας L' μήκους μικρότερου ή ίσου του 5+n,όπου οι μεταβλητές προτάσεων ανήκουν στο σύνολο $\{u_0, ..., u_n\}$,στο οποίο υπάρχουν μόνο σταθερές της γλώσσας L τάξης n και οι νέες σταθερές d_0,...,d_{n-1},d_n.

Η επιλογή του αριθμού 5 στον ορισμό του S_n διασφαλίζει ότι το S_0 δεν είναι κένο,αφού $\exists u_0(u_0=u_0)\in S_0$.

Έπισης ισχύει ότι :
1)Κάθε S_n είναι πεπερασμένο.
2)$S_n \subseteq S_{n+1}$ $\forall n$.
3)Το d_0 δεν εμφανίζεται σε καμία πρόταση στο S_0 και για κάθε $n > 0$,το d_n δεν εμφανίζεται σε καμία πρόταση τουS_{n-1}.

Πράγματι,το (1) ισχύει αφού όλες οι προτάσεις του S_n έχουν μήκος μικρότερο η ίσο με 5+n,δηλαδή πεπερασμένο αριθμό και όλα τα στοιχεία,σύμβολα και τα λοιπά που μπορούν να απαρτίσουν μια προτάση είναι πεπερασμένα.Τότε όλες οι προτάσεις στο S_n , είναι στο πλήθος πεπερασμένες.

Για το (2) έχουμε οτι το S_{n+1} είναι το σύνολο των προτάσεων της L' μήκους μικρότερου ή ίσου με 5+(n+1) και το S_n είναι το αντιστοίχο σύνολο μήκους μικρότερου ή ίσου με 5+n< 5+(n+1) άρα οι προτάσεις του S_n περιέχονται στο S_{n+1}, άρα $S_n \subseteq S_{n+1}$.

Για το (3) χρησιμοποιούμε τον ορισμό των S_n,για το S_0 στις μεταβλητές των προτάσεων του δεν εμφανίζεται κανενα από τα d_n άρα ούτε το d_0.Για το S_{n-1} οι μεταβλητές των προτάσεων του είναι στο σύνολο $\{u_0, ..., u_{n-1}\}$ στο οποίο υπάρχουν μόνο σταθερές τάξης n-1 και οι νεές σταθερές d_0,...,d_{n-2},άρα το d_n δεν εμφανίζεται σε καμία πρόταση του S_{n-1}.

Τώρα αριθμούμε με ένα συγκεκριμένο τρόπο αυτά τα πεπερασμένα σύνολα ως: S_n= { χ_0^n,χ_1^n,...,$\chi_{k_n}^n$ } και ολοκληρώνουμε με το ότι η απαιτούμενη αρίθμηση όλων των προτάσεων της γλώσσας L' είναι η αλληλουχία όλων των αριθμήσεων : $\chi_0^0,\dots,\chi_{k_0}^0,\chi_0^1,\dots,\chi_{k_1}^1,\dots\dots$.$\dashv$

Υπολήμμα 2.1.6. *:Υπάρχει $\varphi_0,\varphi_1,\dots..$ μια ακολουθία των προτάσεων στην L' με τις ακόλουθες ιδιότητες :*
1)Για κάθε n, $\varphi_{2n}=\chi_n$ ή $\varphi_{2n}=\neg\chi_n$.
2)Για κάθε n ,άν $\varphi_{2n}=\exists u\psi(u)$ για κάποιο τύπο $\psi(u)$ στην L' τότε $\varphi_{2n+1}=\psi(d_n)$,διαφορετικά $\varphi_{2n}=\varphi_{2n+1}$.
3)Για κάθε n, το σύνολο $T\cup\{\varphi_0,\varphi_1,\dots,\varphi_{2n+1}\}$ είναι συνεπές.

Απόδειξη(Υπολήμματος 2.1.6.):Για κάθε n θα ορίσουμε το φ_{2n} και φ_{2n+1} με αναδρομή στο n.Για n έχουμε:
1)$\varphi_{2n}=\chi_n$ ή $\neg\chi_n$.
2)άν $\varphi_{2n}=\exists u\psi(u)$ για κάποιο τυπο $\psi(u)$ στην L' τότε $\varphi_{2n+1}=\psi(d_n)$,διαφορετικά $\varphi_{2n}=\varphi_{2n+1}$.
3)$A_n=T\cup\{\varphi_0,\varphi_1,\dots,\varphi_{2n+1}\}$ συνεπές.
Για n+1 έχουμε ότι αφού A_n είναι συνεπές τότε $A_n\cup\{\chi_{n+1}\}$ ή $A_n\cup\{\neg\chi_{n+1}\}$ είναι συνεπές από Λήμμα 1.3.6.(4) άρα $\varphi_{2n+2}=\chi_{n+1}$ ή $\varphi_{2n+2}=\neg\chi_{n+1}$,δηλαδή $A_n\cup\{\varphi_{2n+2}\}$ είναι συνεπές.Αν $\varphi_{2n+2}=\exists u\psi(u)$ τότε για κάποιο τύπο $\psi(u)$ της L' και d_{n+1} που δεν ανήκει ούτε στο A_n ούτε στο φ_{2n+2} έχουμε από Λήμμα 1.3.6.(5) ότι $A_n\cup\{\psi(d_{n+1})\}$ είναι συνεπές ,άρα $\varphi_{2n+3}=\psi(d_{n+1})$,αλλιώς $\varphi_{2n+3}=\varphi_{2n+2}$. Έπισης έχουμε ότι $A_n\subseteq A_{n+1}=T\cup\{\varphi_0,\dots.,\varphi_{2n+3}\}$ και A_n είναι συνεπές άρα από Λήμμα 1.3.6.(2) έχουμε A_{n+1} είναι συνεπές.Αρα ορίστηκε η ακολουθία $\varphi_0,\varphi_1,\dots\dots$. $\dashv$

Τώρα είναι εύκολο να δειξούμε οτι το $H=\{\varphi_0,\dots,\varphi_n,\dots..\}$ από την ακολουθία των προτάσεων που κατασκευάστηκε στην απόδειξη του Υπολήμματος 2.1.6. είναι ένα σύνολο Henkin.Πράγματι,από το Υπολήμμα 2.1.6.(3) έχουμε $T\cup\{\varphi_0,\dots,\varphi_{2n+1}\}$ είναι συνεπές και $\{\varphi_0,\dots,\varphi_{2n+1}\}\subseteq T\cup\{\varphi_0,\dots,\varphi_{2n+1}\}$ και $\{\varphi_0,\dots,\varphi_{2n+1}\}\subseteq H$ άρα από το Λήμμα 1.3.6.(2) το $\{\varphi_0,\dots,\varphi_{2n+1}\}$ είναι συνεπές αρα απο το ιδιο λήμμα πάλι το H είναι συνεπές.Από το Υπολήμμα 2.1.6.(2) αν $\varphi_{2n}=\exists u\psi(u)\in H$ τότε για κάθε τύπο $\varphi(u)$ στην L' έχουμε ότι $\varphi_{2n+1}=\psi(d_n)\in H$ άρα $\exists\,\psi(u)\in H$ τότε υπάρχει σταθερά d_n τέτοια ώστε $\psi(d_n)\in H$.Για κάθε πρόταση χ_n στην L' έχουμε $\varphi_{2n}=\chi_n$ ή $\varphi_{2n}=\neg\chi_n$ και αφού $\chi_n\in H$ ή

$\neg\chi_n \in$ H,άρα H είναι πλήρης.

Βλέπουμε ότι το H περιέχει το T.Υποθέτουμε ότι $\chi \in$T.Έχουμε $\chi=\chi_n$ για κάποιο n ,και έτσι $\varphi_{2n}=\chi$ ή $\varphi_{2n}=\neg\chi$,αλλά T$\cup$ { $\varphi_0,\ldots,\varphi_{2n},\varphi_{2n+1}$ } είναι συνεπές και άρα δεν μπορεί να περιέχει το χ και το $\neg\chi$ οπότε $\varphi_{2n}=\chi$,άρα T $\subseteq$ H. $\dashv$

Γνωρίζουμε ότι μια διμερή σχέση $\sim$ σε ένα σύνολο C είναι σχέση ισοδυναμίας αν για όλα τα x,y,z $\in$ C ισχύει :
1)x $\sim$ x
2)x~y $\Leftrightarrow$ y~x
3)(x~y και y~z) $\Rightarrow$ x~z

Λήμμα 2.1.7. *Αν L' είναι μια αριθμήσιμη γλώσσα και H είναι ένα σύνολο Henkin στη γλώσσα L' ,τότε υπάρχει μια αριθμήσιμη L'-δομή C τέτοια ώστε για κάθε L'-πρόταση χ: $\boldsymbol{C} \models \chi \Leftrightarrow \chi \in H$.*

Απόδειξη(Λήμματος 2.1.7.):Έστω C ένα (αριθμήσιμο) σύνολο όλων των σταθερών στη γλώσσα L$'$.Το Λήμμα 2.1.3. προτείνει να κατασκευάσουμε ένα μοντέλο C της H με πεδίο δομής το C,θέτοντας για $e_1,e_2,\ldots,e_n,e \in$ C:
$R^C(e_1,e_2,\ldots,e_n) \Leftrightarrow R(e_1,e_2,\ldots,e_n) \in$ H ,και
$f^C(e_1,e_2,\ldots,e_n)=e \Leftrightarrow (f(e_1,e_2,\ldots,e_n)=e) \in$ H
και αυτό σχεδόν δουλεύει,εκτός ότι δίνει πολλές διαφορετικές ερμηνείες των σταθερών,δηλαδή μπόρει να είναι $(e=e') \in$ H ,ενώ e και e' είναι διαφορετικές σταθερές.Για την αντιμετώπιση αυτού του θέματος χρειαζόμαστε να ταυτοποιήσουμε τις σταθέρες τις οποίες το H θεώρει ότι είναι ίσες,ως εξής:
a $\sim$ b $\Leftrightarrow$ (a=b) $\in$ H με a,b $\in$ C.

Υπολήμμα 2.1.8. *H σχέση $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο C των σταθερών της L'.*

Απόδειξη(Υπολήμματος2.1.8.):Η απόδειξη είναι άμεση από τα αξιώματα της Ισότητας του συστήματος Hilbert,όπου ένα από τα οποία αναφέρει ότι στη L$'$ έχουμε $\vdash$u=u , $\vdash u=u' \leftrightarrow u'=u$ και $\vdash u=u' \rightarrow (u'=u'' \rightarrow (u=u''))$.

Για a,b,c $\in$ C:
1) $\vdash$ a=a $\Rightarrow$ (a=a)$\in$ H $\Rightarrow$ a $\sim$ a
2)[$\vdash$ a=b $\leftrightarrow$ b=a]$\Rightarrow$ [(a=b)$\leftrightarrow$ (b=a)]$\in$ H $\Rightarrow$ [(a=b)$\in$H $\Leftrightarrow$ (b=a)]$\in$H $\Rightarrow$ [a$\sim$b $\Leftrightarrow$ b$\sim$a]
3) [$\vdash$(a=b)$\rightarrow$[(b=c)$\rightarrow$(a=c)]] $\Rightarrow$ [(a=b)$\rightarrow$ [(b=c)$\rightarrow$(a=c)]]$\in$ H $\Rightarrow$ [(a=b)$\in$ H και (b=c)$\in$ H $\Rightarrow$ (a=c)$\in$ H] $\Rightarrow$ [a$\sim$b και b$\sim$ c $\Rightarrow$ a$\sim$c]. $\dashv$

Άρα αυτά τα τρία αποδεικνύουν οτι η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας.Παίρνουμε τώρα την ομάδα πηλίκο C$'$ και ένα ομομορφισμό ρ: C $\rightarrow$ C$'$ της $\sim$,όπου ρ(a)=a$'$,έτσι ώστε : (a=b)$\in$H $\Leftrightarrow$ a$'$=b$'$,για a,b$\in$C,και a$'$,b$'$ $\in$C$'$.

Υπολήμμα 2.1.9. *Για κάθε n-μελές σύμβολο R,υπάρχει μια n-μελής σχέση R$'$ στο C$'$ τέτοια ώστε για κάθε $a_1,....,a_n \in C$:*
$R'(a'_1,a'_2,...,a'_n) \Leftrightarrow R(a_1,...,a_n) \in H$ (1)

Απόδειξη(Υπολήμματος 2.1.9.):Από τα αξιώματα Ισότητας έχουμε ότι για κάθε n-μελές σύμβολο σχέσης R στην L$'$ $\vdash$ $(v_1=w_1 \wedge ... \wedge v_n=w_n) \rightarrow (R(v_1,...v_n) \leftrightarrow R(w_1,...w_n))$.Για κάθε σταθερά $a_1,...,a_n,b_1,...,b_n$ έχουμε : $\vdash$ $(a_1=b_1 \wedge ... \wedge a_n=b_n) \rightarrow (R(a_1,...a_n) \leftrightarrow R(b_1,...b_n))$ άρα αυτό είναι στην H ,και αφού το H είναι κλειστό ως πρός το $\vdash$ και από το Λήμμα 2.1.3. έχουμε :
$[(a_1=b_1 \wedge ... \wedge a_n=b_n) \rightarrow (R(a_1,...a_n) \leftrightarrow R(b_1,...b_n))] \in H \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow [(a_1=b_1 \wedge ... \wedge a_n=b_n)] \notin H$ ή $[(R(a_1,...a_n) \leftrightarrow R(b_1,...b_n))] \in H \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \neg[(a_1=b_1 \wedge ... \wedge a_n=b_n)] \in H$ ή $[(R(a_1,...a_n) \notin H$ ή $R(b_1,...b_n)) \in H$ και $(R(a_1,...a_n) \in H$ ή $R(b_1,...b_n)) \notin H] \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow [a'_1=b'_1,a'_2=b'_2,...,a'_n=b'_n] \Rightarrow [R(a_1,...,a_n)\in H \Leftrightarrow R(b_1,...,b_n)\in H]$.
Μπορούμε τώρα να εξασφαλίσουμε την (1) θέτοντας $R'(u_1,...,u_n) \Leftrightarrow R(a_1,...,a_n)\in H$, όπου $a_1,...,a_n$ είναι οποιεσδήποτε μεταβλητές τέτοιες ώστε $a'_1=u_1,...,a'_n=u_n$,και οποιαδήποτε άλλη επιλογή των $a_1,...,a_n$ θα δώσει την ίδια τίμη αλήθειας στο $R'(u_1,...,u_n)$. $\dashv$

Υπολήμμα 2.1.10. *Για κάθε κλειστό όρο t ,υπάρχει μια σταθερά c τέτοια ώστε (t=c)$\in$H ,και για οποιεσδήποτε δύο σταθερές c,d : [(t=c)$\in$H $\wedge$ (t=d)$\in$H] $\Rightarrow$ (c=d)$\in$H.*

Απόδειξη(Υπολήμματος 2.1.10.):Για τον πρώτο ισχυρισμό ,παίρνουμε ότι για κάθε όρο ισχύει ότι $\vdash$u(t=u) ,αφού:

1.u=u από το Αξιώματα Ισότητας
2.$\forall$u(u=u) (13)
3.$\forall$u(u=u) $\rightarrow$ t=t (9)
4.t=t 2,3,Modus Pones
5.t=t $\rightarrow$ $\vdash$u(t=u) (11)
6.$\vdash$u(t=u) 4,5,Modus Pones
και θέτουμε φ(u)$\equiv$ t=u .Άρα $\vdash$ $\exists$uφ(u) και άρα H $\vdash$ $\exists$uφ(u) και από το Λήμμα 2.1.3. $\exists$uφ(u)$\in$H και από τον ορισμό των Henkin συνόλων υπάρχει κάποια σταθερά c τέτοια ώστε φ(c)$\in$H,δηλαδή (t=c)$\in$H.

Για το δεύτερο ισχυρισμό από τα Αξιώματα Ισότητας έχουμε ότι :
$\vdash$[(c=t) $\rightarrow$ ((t=d) $\rightarrow$ (c=d))] $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ $\vdash$[[$\neg$(c=t)] $\vee$[(t=d) $\rightarrow$ (c=d)]] $\Leftrightarrow$ $\vdash$[[$\neg$(c=t)] $\vee$ [{ $\neg$(t=d) } $\vee$[c=d]]] $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ $\vdash$[[$\neg$(c=t)] $\vee$[$\neg$(t=d)] $\vee$ (c=d)] $\Leftrightarrow$ $\vdash$[$\neg$((t=c)$\wedge$(t=d)) $\vee$ (c=d)] $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ $\vdash$[(t=c)$\wedge$(t=d) $\rightarrow$ (c=d)] και άρα H$\vdash$[(t=c)$\wedge$(t=d) $\rightarrow$ (c=d)] και από Λήμμα 2.1.3. [(t=c)$\wedge$(t=d) $\rightarrow$ (c=d)]$\in$H $\Rightarrow$ [(t=c)$\wedge$(t=d)]$\notin$H ή (c=d)$\in$H από Λήμμα 2.1.3. $\Leftrightarrow$ $\neg$[(t=c)$\wedge$(t=d)]$\in$H ή (c=d)$\in$H $\Leftrightarrow$
[(t=c)$\in$H $\wedge$ (t=d)$\in$H] $\Rightarrow$ (c=d)$\in$H. $\dashv$

Υπολήμμα 2.1.11. *Για κάθε n-μελές σύμβολο συνάρτησης f ,υπάρχει μια n-μελής συνάρτηση* $f^{'}:C^{'^n} \rightarrow C^{'}$ *τέτοια ώστε για κάθε σταθερά* $a_1,...,a_n,c \in C$ *έχουμε :* $f^{'}(a_1^{'},...,a_n^{'})=c^{'} \Leftrightarrow (f(a_1,...,a_n)=c) \in H$.

Απόδειξη(Υπολήμματος 2.1.11.):Από το Υπολήμμα 3 για κάθε $a_1,...,a_n$ υπάρχει κάποια σταθερά c τέτοια ώστε $(f(a_1,...,a_n)=c)\in$ H.Μετά ορίζουμε την $f^{'}$ ως $f^{'}(u_1,...,u_n)=c^{'}$ για κάθε $a_1,...,a_n$ τέτοιο ώστε $u_1=a_1^{'},...,u_n=a_n^{'}$.Από τα Αξιώματα της Ισότητας έχουμε ότι για n-μελές σύμβολο συνάρτησης f στην $L^{'}$ έχουμε $\vdash$ $(v_1=w_1 \wedge ... \wedge v_n=w_n) \rightarrow (f(v_1,...v_n)=f(w_1,...w_n))$.

Για κάθε σταθερά $a_1,...,a_n,b_1,...,b_n$ έχουμε : $\vdash$ $(a_1=b_1 \wedge ... \wedge a_n=b_n) \rightarrow (f(a_1,...a_n)=f(b_1,...b_n))$ άρα αυτό είναι στην H ,και αφού το H είναι κλειστό ως πρός το $\vdash$ και από το Λήμμα 2.1.3. έχουμε : $[(a_1=b_1 \wedge ... \wedge a_n=b_n) \rightarrow (f(a_1,...a_n) =f(b_1,...b_n))] \in$ H $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ $[(a_1=b_1 \wedge ... \wedge a_n=b_n)] \notin$ H ή $[(f(a_1,...a_n) = f(b_1,...b_n))] \in$ H $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ $\neg[(a_1=b_1 \wedge ... \wedge a_n=b_n)] \in$ H ή $(f(a_1,...,a_n) = f(b_1,...,b_n)) \in$ H $\Leftrightarrow$ $[(a_1^{'}=b_1^{'} \vee ... \vee a_n^{'}=b_n^{'})]$ ή $(f(a_1,...,a_n) = f(b_1,...,b_n)) \in$ H από το Υπολήμμα 2.1.5.. Άρα $[(a_1^{'}=b_1^{'} \vee ... \vee a_n^{'}=b_n^{'})]$ ή $(f(a_1,...,a_n) = f(b_1,...,b_n)=c) \in$ H

και καταλήγουμε στο ζητούμενο θέτοντας $f'(u_1,...,u_n)=c' \Leftrightarrow (f(a_1,...,a_n)=c) \in H$,
όπου $a_1,...,a_n$ είναι οποιεσδήποτε μεταβλητές τέτοιες ώστε $a_1'=u_1,...,a_n'=u_n$,και οποιαδήποτε άλλη επιλογή των $a_1,...,a_n$ θα δώσει την ίδια τίμη αλήθειας στο $f'(u_1,...,u_n)$. $\dashv$

Η δομή που χρειαζόμαστε είναι η :
$\mathbf{C}' = \{ C', \{c'\}_{c \in Const}, \{R'\}_{R \in Rel}, \{f'\}_{f \in Fun} \}$ και έχουμε το επόμενο Υπολήμμα.

Υπολήμμα 2.1.12. *Για κάθε κλειστό όρο t , υπάρχει μια σταθερά c τέτοια ώστε :(t=c)∈H και* $t^{C'} = c'$.

Απόδειξη(Υπολήμματος 2.1.12.):Αφού το Υπολήμμα αναφέρεται σε κλειστούς όρους t τότε από το Υποληµµά 2.1.10. υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε $(t=c) \in H$ για κάθε κλειστό όρο t.Άρα το ένα μέρος αποδείχθηκε,τώρα πρέπει να δείξουμε ότι η ερμηνεία του κλειστού όρου t στο C' ισούται με c',δηλαδή $t^{C'}=c'$. Με επαγωγή στους κλειστούς όρους.Αν t=c τότε $c^{C'}=c'$ ισχύει απο τον ορισμό.Έστω ότι η υπόθεση ισχύει για $t_1,....,t_n$,δηλαδή $t_1^{C'}=c_1',...,t_1^{C'}=c_n'$ και $(t_i=c_i) \in H$ άρα $t=f(t_1,...,t_n)$ και τότε γνωρίζουμε ότι $(f(t_1,...,t_n)=c) \in H$ ή $(f(c_1,...,c_n)=c) \in H$ άρα $t=f(c_1,..,c_n)$ και $t^{C'}=f^{C'}(c_1^{C'},...,c_n^{C'})=c'$.Άρα $(t=c) \in H$ και $t^{C'}=c'$. $\dashv$

Για να απόδειξουμε την ισοδυναμία $\mathbf{C}' \models \chi \Leftrightarrow \chi \in H$ θα κάνουμε επαγωγή στο τύπο χ.Αρχικά θα το δείξουμε για τους πρωταρχικούς τύπους.
Αν $\chi \equiv s=t$,τότε από το Υπολήμμα 2.1.12. για τους κλειστούς όρους t,s υπάρχουν σταθερές a,b τέτοιες ώστε : $(t=a) \in H$ και $t^{C'}=a'$ και $(s=b) \in H$ και $s^{C'}=b'$.Άρα $\mathbf{C}' \models \mathbf{s=t} \Leftrightarrow s^{C'}=t^{C'} \Leftrightarrow a'=b' \Leftrightarrow (a=b) \in H$,από Υπολήμμα 2.1.8..Άρα έχουμε : $(t_i=a_i) \in H \Leftrightarrow \chi \in H$.

Αν $\chi=R(t_1,...,t_n)$ όπου $t_1,...,t_n$ κλειστοί όροι άρα από το Υπολήμμα 2.1.12. υπάρχουν σταθερές $a_1,...,a_n$ τέτοιες ώστε $(t_i=a_i) \in H$ και $t_i^{C'}=a_i'$ $\forall$i.Έχουμε : $\mathbf{C}' \models R(t_1,...,t_n) \Leftrightarrow R^{C'}(t_1^{C'},...,t_n^{C'}) \Leftrightarrow R^{C'}(a_1',...,a_n') \Leftrightarrow R(a_1,...,a_n) \in H$, από το Υπολήμμα 2.1.9. $\Leftrightarrow R(t_1,...,t_n) \in H$,αφού $(t_i=a_i) \in H \Leftrightarrow \chi \in H$.

Έστω ότι το ζητούμενο ισχύει για τύπους με τάξη μικρότερη του n και τώρα έστω φ τυπος τάξης n τέτοιος ώστε $\varphi = \neg\psi$ ή $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$ ή $\varphi = \psi_1 \vee \psi_2$ ή $\varphi = \psi_1 \to \psi_2$ ή $\varphi = \exists u \psi(u)$ ή $\varphi = \forall u \psi(u)$,όπου για όλα αυτά έχουμε ότι η τάξη των ψ_1,ψ_2 και ψ για οποιοδήποτε φ ειναι μικρότερη του n,άρα για αυτά ισχύει η υπο΄θέση της επαγωγής.

Αν $\chi = \neg\psi$ τότε $\mathbf{C}' \models \chi \Leftrightarrow \mathbf{C}' \models \neg\psi \Leftrightarrow \mathbf{C}' \not\models \psi \Leftrightarrow \psi \notin$ H $\Leftrightarrow \neg\psi \in$H, αφού H πλήρης $\Leftrightarrow \chi \in$H.

Αν $\chi = \psi_1 \wedge \psi_2$ τότε $\mathbf{C}' \models \psi_1 \wedge \psi_2 \Leftrightarrow \mathbf{C}' \models \psi_1$ και $\mathbf{C}' \models \psi_2 \Leftrightarrow \psi_1 \in$ H και $\psi_2 \in$ H ,απο την υπόθεση της επαγωγής $\Leftrightarrow \psi_1 \wedge \psi_2 \in$ H από το Λήμμα 2.1.3. $\Leftrightarrow \chi \in$ H.

Αν $\chi = \psi_1 \vee \psi_2$τότε $\mathbf{C}' \models \chi \Leftrightarrow \mathbf{C}' \models \psi_1 \vee \psi_2 \Leftrightarrow \mathbf{C}' \models \psi_1$ ή $\mathbf{C}' \models \psi_2 \Leftrightarrow \psi_1 \in$ H ή $\psi_2 \in$ H ,από υπόθεση της επαγωγής $\Leftrightarrow \psi_1 \vee \psi_2 \in$ H ,από το Λήμμα 2.1.3. $\Leftrightarrow \chi \in$ H.

Αν $\chi = \psi_1 \to \psi_2$τότε $\mathbf{C}' \models \chi \Leftrightarrow \mathbf{C}' \models \psi_1 \to \psi_2 \Leftrightarrow \mathbf{C}' \models \neg\psi_1$ ή $\mathbf{C}' \models \psi_2 \Leftrightarrow \psi_1 \notin$ H ή $\psi_2 \in$ H ,από υπόθεση της επαγωγής $\Leftrightarrow \psi_1 \to \psi_2 \in$ H ,από το Λήμμα 2.1.3. $\Leftrightarrow \chi \in$ H.

Αν $\chi = \exists u \psi(u)$ τότε $\mathbf{C}' \models \chi \Leftrightarrow \mathbf{C}' \models \psi(c')$ για κάποιο c' στο $C' \Leftrightarrow \psi(c')$ $\in$ H ,από υπόθεση της επαγωγής για κάποιο c' στο $C' \Leftrightarrow \exists u \psi(u) \in$ H ,από το Λήμμα 2.1.3. $\Leftrightarrow \chi \in$ H.

Αν $\chi = \forall u \psi(u)$ τότε $\mathbf{C}' \models \chi \Leftrightarrow \mathbf{C}' \models \psi(c')$ για όλα τα c' στο $C' \Leftrightarrow \psi(c')$ $\in$ H ,από υπόθεση της επαγωγής για όλα τα c' στο $C' \Leftrightarrow \forall u \psi(u) \in$ H ,από το Λήμμα 2.1.3. $\Leftrightarrow \chi \in$ H. $\dashv$

Άρα για κάθε τύπο χ ισχύει $\mathbf{C}' \models \chi \Leftrightarrow \chi \in$ H.

Για την ολοκλήρωση της απόδειξης του θεωρήματος Πληρότητας αρχικά φτιάχνουμε μια συνέπη L-θεώρια ,όπου L αριθμήσιμη γλώσσα ,τώρα έστω H να είναι ένα σύνολο Henkin όπως το Λήμμα 2.1.4. για μια επεκταμένη γλώσσα L' από σταθερές ,δηλαδή $c=Const\cup\{d_0,...,d_n,....\}$ και έστω $\mathbf{A}'=(A',\{c'\}_{c\in Const},\{d_0',...,d_n',....\},\{R'\}_{R\in Rel},\{f'\}_{f\in Fun})$ να είναι μια L'-δομή όπως το Λήμμα 2.1.7. για το Η.Η L-δομή που χρειαζόμαστε είναι η περιορισμένη $\mathbf{A}=(A',\{c'\}_{c\in Const},\{R'\}_{R\in Rel},\{f'\}_{f\in Fun})$ στην οποία δεν υπάρχουν οι σταθερές $d_0,...,d_n,....$ με την επιπλέον παρατήρηση οτι τα $d_0',...,d_n',....$ είναι στοιχεία του πεδίου δομής A' της δομής $\mathbf{A}$.

Το θεώρημα Πληρότητας του Godel ταυτοποιεί την έννοια της αλήθειας με την δικαιλογημένη αλήθεια (δηλαδή αλήθεια που μπορεί να δικαιολογηθεί) ,και η θεμελιώδης σημασία του δεν μπορεί να υπερκτιμηθεί.Επίσης έχει ένα μεγάλο αριθμό από μαθηματίκες εφαρμογές.

2.2 Θεώρημα Συμπάγειας και Ασθενές Θεώρημα Löwenheim-Skolem

Σε αυτήν την ενότητα θα αναφέρουμε ένα θεώρημα αρκετά σημαντικό όπου η απόδειξη του απορρέει από το Θεώρημα Πληρότητας του Gödel ,και είναι το εξής :

Θεώρημα 2.2.1. *(Θεώρημα Συμπάγειας):Αν κάθε πεπερασμένο υποσύνολο μιας αριθμήσιμης θεωρίας T έχει μοντέλο ,τότε η T έχει (αριθμήσιμο) μοντέλο.*

Απόδειξη(Θεώρηματος Συμπάγειας):Από υπόθεση έχουμε κάθε πεπερασμένο υποσύνολο μιας αριθμήσιμης θεωρίας T έχει μοντέλο ,άρα κάθε πεπερασμένο τέτοιο υποσύνολο είναι συνεπές ,άρα από το Λήμμα 1.3.6.(2) έχουμε ότι η T είναι συνεπή και από το Θεώρημα Πληρότητας του Gödel ,το (1) ,η T έχει (αριθμήσιμο) μοντέλο. $\dashv$

Μπορούμε να βρούμε πολλές εφαρμογές του Θεώρηματος Συμπάγειας σε προβλήματα,αλλά το ακόλουθο βασικό γεγονός δίνει μια ιδέα πως αυτό το θεώρημα μπόρει να εφαρμοστεί.

Πόρισμα 2.2.2. *Εάν μια αριθμήσιμη θεωρία T έχει αυθαίρετα μεγάλα πεπερασμένα μοντέλα,τότε έχει άπειρο μοντέλο.*

Απόδειξη(Πόρισμα 2.2.2.):Για κάθε n , έστω $\vartheta_n = \exists u_0 ... \exists u_n[(u_0 \neq u_1) \wedge (u_1 \neq u_2) .... \wedge (u_{n-1} \neq u_n)]$ να είναι πρόταση η οποία υποστηρίζει ότι υπάρχουν τουλάχιστον n+1 αντικείμενα ,και σύνολο $T^* = T \bigcup \{ \vartheta_0, \vartheta_1, ... \}$.Από υπόθεση η T έχει αυθαίρετα μεγάλα πεπερασμένα μοντέλα,άρα έχει και μοντέλα τα οποία ικανοποιούν κάθε υποσύνολο του T^* ,άρα από Θεώρημα Συμπάγειας η T^* έχει ένα μοντέλο ,το οποίο είναι άπειρο μοντέλο του T ,αφού το ϑ_n,έτσι όπως το έχουμε ορίσει,είναι πρόταση η οποία υποστηρίζει ότι υπάρχουν τουλάχιστον n+1 αντικείμενα ,άρα κάθε μοντέλο του T^* πρέπει να ικανοποιεί και το T και το $\{ \vartheta_0, \vartheta_1, ... \}$ άρα είναι άπειρο. ⊣

Το Θεώρημα Πληρότητας του Gödel είναι το βασικότερο αποτέλεσμα που αφορά τη σχέση θεωριών και μοντέλων,αφού βεβαιώνει ότι κάθε συνεπής θεωρία έχει μοντέλο.Στις αρχές του εικοστού αιώνα ο Löwenheim είχε αποδείξει μια πρόταση σχετικά με το μέγεθος των μοντέλων μιας θεωρίας. Το Θεώρημα Löwenheim αναφέρεται σε μοντέλα μιας μόνο πρότασης αλλά στα επόμενα χρόνια ο Skolem το επέκτεινε σε μοντέλα τυχόντος συνόλου προτάσεων.Η απόδειξη του θεωρήματος αυτού απορρέει απο την απόδειξη του Θεωρήματος Πληρότητας του Gödel και για αυτό θεωρείται πόρισμα αυτού του θεωρήματος.

Θεώρημα 2.2.3. *(Θεώρημα Ασθενές Löwenheim-Skolem): Αν μια αριθμήσιμη θεωρία T έχει μοντέλο ,τότε έχει αριθμήσιμο μοντέλο.*

Απόδειξη(Θεώρημα Ασθενές Löwenheim-Skolem): Η αριθμήσιμη θεωρία T έχει μοντέλο τότε γνωρίζουμε ότι είναι συνεπής άρα από το Θεώρημα Πληρότητας του Gödel έχουμε ένα αριθμήσιμο μοντέλο για την T. ⊣

Το θεώρημα Löwenheim-Skolem αποδίδει μια συναρπαστική συνέπεια εάν το εφαρμόσουμε στη Zermelo-Fraenkel Θεωρία Συνόλων (ZFC) .Η (ZFC) αποδεικνύει την ύπαρξη μη αριθμήσιμων συνόλων ,αλλά έχει αριθμήσιμο μοντέλο όπως έχουμε αναφέρει προηγουμένως.Αυτό αναφέρεται για πρώτη φορά απο τον Skolem και λέγεται παράδοξο Skolem:Αν **A** είναι ένα αριθμήσιμο μοντέλο τέτοιας θεωρίας που περιέχει το σύνολο **N** των φυσικών ,για να είναι ένα σύνολο $X \in A$ μη αριθμήσιμο ως πρός **A** ,αρκεί να μην υπάρχει μέσα στο **A** συνάρτηση $f{:}\mathbf{N} \rightarrow X$ η οποία ειναι 1-1 και επί.

Κεφάλαιο 3

Καθοδικό Θεώρημα Löwenheim-Skolem

3.1 Στοιχειώδης εμφύτευση,υποδομή και περίβλημα ενός συνόλου

Ορισμός 3.1.1. *Έστω* $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ *δύο L-δομές.Λέμε ότι* $\boldsymbol{A}$ *είναι μια υποδομή(υπομοντέλο) του* $\boldsymbol{B}$ *και* $\boldsymbol{B}$ *μια επέκταση του* $\boldsymbol{A}$ *και γράφουμε* $\boldsymbol{A}\subseteq\boldsymbol{B}$ *αν ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες:*
1)$A\subseteq B$.
2)Για κάθε σύμβολο σταθεράς c στην L,$c^{\boldsymbol{B}}=c^{\boldsymbol{A}} \in A$.
3)Για κάθε n-μελές σύμβολο σχέσης R και για όλα τα $x_1,\ldots,x_n \in A$
$R^{\boldsymbol{B}}\ (x_1,\ldots,x_n) \Leftrightarrow R^{\boldsymbol{A}}\ (x_1,\ldots,x_n)$
4)Για κάθε n-μελές σύμβολο συνάρτησης f και για όλα τα $x_1,\ldots,x_n \in A$
$f^{\boldsymbol{B}}(x_1,\ldots,x_n) = f^{\boldsymbol{A}}(x_1,\ldots,x_n)$

Ορισμός 3.1.2. *Έστω* $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ *L-δομές .Μια 1-1 συνάρτηση* $F{:}A \to B$ *είναι μια εμφύτευση αν ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες:*
1»Για κάθε σύμβολο σταθεράς c στην L,$c^{\boldsymbol{B}}=F(c^{\boldsymbol{A}})$.
2)Για κάθε n-μελές σύμβολο σχέσης R και για όλα τα $x_1,\ldots,x_n \in A$
$R^{\boldsymbol{A}}\ (x_1,\ldots,x_n) \Leftrightarrow R^{\boldsymbol{B}}\ (F(x_1),\ldots,F(x_n))$.
3)Για κάθε n-μελές σύμβολο συνάρτησης f και για όλα τα $x_1,\ldots,x_n \in A$

$f^{\mathbf{B}}\ (\mathsf{F}(x_1),...,\mathsf{F}(x_n)) = F(f^{\mathbf{A}}\ (x_1,...,x_n))$

Η F:A→B είναι στοιχειώδης εμφύτευση αν επιπρόσθετα ,για κάθε πλήρως εκτεταμένο τύπο $\chi(u_1,...,u_n)$ και για όλα τα $x_1,...,x_n \in A$:
$\mathbf{A} \models \chi(x_1,...,x_n) \Leftrightarrow \mathbf{B} \models \chi(F(x_1),...,F(x_n))$
Αν A⊆B ,τότε ξεκάθαρα η ταυτοτική απεικόνιση id:A→B είναι εμφύτευση όταν **A** είναι υποδομή(υπομοντέλο) του **B** ,δηλαδή **A**⊆**B**.Ορίζουμε:
$\mathbf{A} \preceq \mathbf{B} \Leftrightarrow$ id:A→B είναι μια στοιχειώδης εμφύτευση
και όταν αυτό ισχύει ,λέμε ότι **A** είναι μια στοιχειώδης υποδόμη(υπομοντέλο) της **B** και **B** μια στοιχειώδης επέκταση της **A**.

Ορισμός 3.1.3. *Έστω δυο L-δομές* ***A***,***B***.*Οι* ***A*** *και* ***B*** *λέγονται στοιχειώδης ισοδύναμες η απλώς ισοδύναμες ,με σύμβολα* $\mathbf{A}\equiv\mathbf{B}$ *αν* $Th(\mathbf{A})=Th(\mathbf{B})$ *δηλαδή οι* ***A*** *και* ***B*** *ικανοποιούν τις ίδιες προτάσεις στην L.*

Ο ισομορφισμός είναι προφανώς στοιχειώδης εμφύτευση ,και η σύνθεση στοιχειώδων εμφυτεύσεων είναι στοιχειώδης εμφύτευση.Επίσης είναι ξεκάθαρο ότι αν $\mathbf{A} \preceq \mathbf{B}$ τότε $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$ αλλά δεν ισχύει το αντίθετο.

Έστω A ένα σύνολο και $F:A^n \to A$ μια n-μελής συνάρτηση στο A.Ένα σύνολο X⊆A λέγεται κλειστό ως πρός F αν $F(a_1,...,a_n)\in X$ για όλα τα $a_1,...,a_n \in X$.Για κάθε σύνολο X,κάθε συλλογή απο συναρτήσεις **F** στο X και για κάθε A⊆X ,έστω : $A^{(0)}=A$ και $A^{(n+1)}=A^{(n)} \cup \{F(x_1,...,x_n):x_1,...,x_n \in A^{(n)}, F\in\mathbf{F}\}$ τότε $A^{\mathbf{F}}=\cup_{n=0}^{\infty} A^{(n)}$ είναι περίβλημα του A.

Πρόταση 3.1.4. *Το* $A^{\mathbf{F}}$ *είναι υποσύνολο του X που περιέχει το A και είναι κλειστό ως πρός όλες τις συναρτήσεις στη* ***F*** .

Απόδειξη(Πρόταση 3.1.4.):Για να αποδείξουμε το ζητούμενο πρέπι να δείξουμε ότι :
1)$A\subseteq A^{\mathbf{F}}$
2)$A^{\mathbf{F}}$ είναι κλειστό ως πρός όλες τις συναρτήσεις στην **F**.
3)Αν $\Upsilon\subseteq X, A\subseteq\Upsilon$,και Υ είναι κλειστό ως πρός κάθε $F\in\mathbf{F}$,τότε $A^{\mathbf{F}} \subseteq \Upsilon$.

1)Έχουμε ορίσει ότι $A^{\mathbf{F}}=\cup_{n=0}^{\infty} A^{(n)}=A^{(0)} \cup A^{(1)} \cup .... A^{(n)}$ άρα $A\subseteq A^{\mathbf{F}}$.

2)Έστω μια συνάρτηση $F(x_1,...,x_n)$ όπου $F \in \mathbf{F}$.Αν $x_1,...,x_n$ συλλέγονται από ένα πλήθος συνόλων A^n ,$\forall n$,δηλαδή έστω $A^{(0)}, A^{(1)},...,A^{(k)}$ τότε $A^{(k+1)}=A^{(k)} \cup \{ F(x_1,...,x_n):x_1,...,x_n \in ,F \in \mathbf{F} \}$ έχουμε ότι $x_1,...,x_n \in A^{(k)}$ και $F(x_1,...,x_n) \in A^{(k+1)}$.Άρα $F(x_1,...,x_n) \in A^{\mathbf{F}}$ άρα $A^{\mathbf{F}}$ είναι κλειστό ως πρός κάθε $F \in \mathbf{F}$.
3)Θα αποδείξουμε το ζητούμενο με επαγωγή στο n.
Αν n=0 τότε $A^{(0)}=A \subseteq \Upsilon$.
Έστω για n ισχύει ότι $A^{(n)} \subseteq \Upsilon$,και τώρα έχουμε :
$A^{(n+1)}=A^{(n)} \cup \{F(x_1,...,x_n):x_1,...,x_n \in A^{(n)} ,F \in \mathbf{F} \}$ και αφού $A^{(n)} \subseteq \Upsilon$ τότε $x_1,...,x_n \in A^{(n)} \Rightarrow x_1,...,x_n \in Y$ και αφού Υ είναι κλειστό ως προς κάθε συνάρτηση $F \in \mathbf{F}$ τότε $F(x_1,...,x_n) \in Y$,άρα $\{F(x_1,...,x_n):x_1,...,x_n \in A^{(n)} ,F \in \mathbf{F} \} \subseteq \Upsilon$ άρα $A^{(n+1)} \subseteq \Upsilon$.Άρα $A^{(n)} \subseteq \Upsilon$ $\forall n$ και $A^{\mathbf{F}} = \cup_{n=0}^{\infty} A^{(n)} \subseteq \Upsilon$. $\dashv$

Λήμμα 3.1.5. *(Λήμμα Ελέγχου Στοιχειώσους Υποδομής):Υποθέτουμε $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B}$,τότε $\boldsymbol{A} \preceq \boldsymbol{B}$ αν και μόνο αν για κάθε πλήρως εκτεταμένο τύπο $\varphi(u_1,...,u_n,u)$ και οποιαδήποτε $x_1,...,x_n \in A$ ισχύει ότι :*
(1) αν υπάρχει κάποιο $y \in B$ τέτοιο ώστε $\boldsymbol{B} \models \varphi(x_1,...,x_n,y)$ τότε υπάρχει κάποιο $z \in A$ τέτοιο ώστε $\boldsymbol{B} \models \varphi(x_1,...,x_n,z)$.

Απόδειξη(Λήμματος Ελέγχου Στοιχειώσους Υποδομής): Υποθέτουμε πρώτα ότι $\mathbf{A} \preceq \mathbf{B}$.Αν η υπόθεση του (1) ισχύει για κάποια $x_1,...,x_n \in A$ τότε $\mathbf{B} \models \exists u \varphi[x_1,...,x_n]$ και από τον ορισμό της στοιχειώδους υποδομής ,έχουμε $\mathbf{A} \models \exists u \varphi[x_1,...,x_n]$ και αυτό συνεπάγεται ότι για κάποιο $z \in A$:$\mathbf{A} \models \varphi[x_1,...,x_n,z]$. Αφού $\mathbf{A} \preceq \mathbf{B}$,έχουμε πάλι ότι $\mathbf{B} \models \varphi[x_1,...,x_n,z]$,άρα καταλήξαμε στο συμπέρασμα του (1).

Αντίστροφα, υποθέτουμε $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ και η (1) ισχύει για κάθε τύπο $\varphi(u_1,...,u_n,u)$. Χρειαζόμαστε να αποδείξουμε ότι για κάθε $\chi(u_1,...,u_n)$ και για όλα τα $x_1,...,x_n \in A$ ισχύει : $\mathbf{A} \models \chi[x_1,...,x_n] \Leftrightarrow \mathbf{B} \models \chi[x_1,...,x_n]$ και το κάνουμε με επαγωγή στον τύπο χ. Αρχικά για τους πρωταρχικούς τύπους έχουμε :

Αν $\chi \equiv s=t$,όπου $t,s \in A$ τότε: $\mathbf{A} \models \chi[x_1,...,x_n] \Leftrightarrow \mathbf{A} \models s=t \Leftrightarrow s^{\mathbf{A}}=t^{\mathbf{A}} \Leftrightarrow s^{\mathbf{B}}=t^{\mathbf{B}}$,επειδή $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{B} \models s=t \Leftrightarrow \mathbf{B} \models \chi[x_1,...,x_n]$.

Αν $\chi=R(x_1,...,x_n)$ όπου $x_1,...,x_n \in A$ τότε : $\mathbf{A} \models \chi[x_1,...,x_n] \Leftrightarrow \mathbf{A} \models R(x_1,...,x_n) \Leftrightarrow R(x_1^{\mathbf{A}},...,x_n^{\mathbf{A}}) \Leftrightarrow R(x_1^{\mathbf{B}},...,x_n^{\mathbf{B}})$,επειδή $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{B} \models R(x_1,...,x_n) \Leftrightarrow \mathbf{B} \models \chi[x_1,...,x_n]$.

Έστω ότι το ζητούμενο ισχύει για τυπους με τάξη μικρότερη του n και τώρα έστω φ τυπος τάξης n τέτοιος ώστε $\varphi = \neg\, \psi$ ή $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$ ή $\varphi = \psi_1 \vee \psi_2$ ή $\varphi = \psi_1 \rightarrow \psi_2$ ή $\varphi = \exists u \psi(u)$ ή $\varphi = \forall u \psi(u)$,όπου για όλα αυτά έχουμε ότι η τάξη των ψ_1,ψ_2 και ψ για οποιοδήποτε φ ειναι μικρότερη του n,άρα για αυτά ισχύει η υπόθεση της επαγωγής.

Αν $\chi = \neg\psi$ τότε $\mathbf{A} \models \chi[\, x_1,...,x_n] \Leftrightarrow \mathbf{A} \not\models \psi[x_1,...,x_n] \Leftrightarrow \mathbf{B} \not\models \psi[x_1,...,x_n]$ από υπόθεση επαγωγής $\Leftrightarrow \mathbf{B} \models \chi[\, x_1,...,x_n]$.

Αν $\chi = \psi_1 \wedge \psi_2$ τότε $\mathbf{A} \models \chi[\, x_1,...,x_n] \Leftrightarrow \mathbf{A} \models \psi_1[x_1,...,x_n]$ και $\mathbf{A} \models \psi_2[x_1,...,x_n] \Leftrightarrow \mathbf{B} \models \psi_1[x_1,...,x_n]$ και $\mathbf{B} \models \psi_2[x_1,...,x_n]$ από υπόθεση επαγωγής $\Leftrightarrow \mathbf{B} \models \chi[\, x_1,...,x_n]$.

Αν $\chi = \psi_1 \vee \psi_2$ τότε $\mathbf{A} \models \chi[\, x_1,...,x_n] \Leftrightarrow \mathbf{A} \models \psi_1[x_1,...,x_n]$ ή $\mathbf{A} \models \psi_2[x_1,...,x_n] \Leftrightarrow \mathbf{B} \models \psi_1[x_1,...,x_n]$ ή $\mathbf{B} \models \psi_2[x_1,...,x_n]$ από υπόθεση επαγωγής $\Leftrightarrow \mathbf{B} \models \chi[\, x_1,...,x_n]$.

Αν $\chi = \psi_1 \rightarrow \psi_2$ τότε $\mathbf{A} \models \chi[\, x_1,...,x_n] \Leftrightarrow \mathbf{A} \not\models \psi_1[x_1,...,x_n]$ ή $\mathbf{A} \models \psi_2[x_1,...,x_n]$ $\Leftrightarrow \mathbf{B} \not\models \psi_1[x_1,...,x_n]$ ή $\mathbf{B} \models \psi_2[x_1,...,x_n]$ από υπόθεση επαγωγής $\Leftrightarrow$ $\mathbf{B} \models \chi[\, x_1,...,x_n]$.

Αν $\chi = \exists u \psi(x_1,...,x_n,u)$ τότε $\mathbf{A} \models \chi[\, x_1,...,x_n] \Leftrightarrow$ για κάποιο $z \in A$,$\mathbf{A} \models \psi[x_1,...,x_n,z]$ $\Leftrightarrow$ για κάποιο $z \in A$,$\mathbf{B} \models \psi[x_1,...,x_n,z]$ από υπόθεση επαγωγής $\Leftrightarrow$ για κάποιο $y \in B$ $\mathbf{B} \models \psi[x_1,...,x_n,y]$ από την υπόθεση (1)$\Leftrightarrow \mathbf{B} \models \exists u \psi[x_1,...,x_n,u] \Leftrightarrow$ $\mathbf{B} \models \chi[\, x_1,...,x_n]$.

Αν $\chi = \forall u \psi(x_1,...,x_n,u)$,τότε ισχύει ότι $\models \chi[\, x_1,...,x_n] \leftrightarrow \neg(\, \exists u \neg\psi[x_1,...,x_n,u])$ (2) άρα $\mathbf{A} \models \chi[\, x_1,...,x_n] \Leftrightarrow \mathbf{A} \models \neg\, \exists u \neg\psi[x_1,...,x_n,u]$ από το (2) $\Leftrightarrow \mathbf{A} \not\models \exists u \neg\psi[x_1,...,x_n,u] \Leftrightarrow \mathbf{A} \not\models \exists u \neg\psi[x_1,...,x_n,u]$ από το προηγούμενο $\Leftrightarrow$ $\mathbf{B} \models \forall u \psi(x_1,...,x_n,u) \Leftrightarrow \mathbf{B} \models \chi[\, x_1,...,x_n]$. $\dashv$

3.2 Καθοδικό Θεώρημα Löwenheim-Skolem

Θεώρημα 3.2.1. *(Καθοδικό Θεώρημα Lowenheim-Skolem):Αν $X \subseteq B$ είναι ένα αριθμήσιμο υποσύνολο του πεδίου δομής της δομής $\boldsymbol{B}$,τότε υπάρχει μια αριθμήσιμη ,στοιχειώδης υποδομή $\boldsymbol{A} \preceq \boldsymbol{B}$ τέτοια ώστε $X \subseteq A$.*

Η απόδειξη του θεωρήματος θα χρησιμοποιήσει δύο απλά λήμματα ,και το Λήμμα Ελέγχου Στοιχειώδους Υποδομής.

Λήμμα 3.2.2. *Υποθέτουμε ότι είναι $\boldsymbol{B}$ μια L-δομή και $A \subseteq B$,τότε A είναι πεδίο δομής της υποδομής $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B}$ αν και μόνο αν το A περιέχει την ερμηνεία $c^{\boldsymbol{B}}$ του $\boldsymbol{B}$ για κάθε σταθερά στη γλώσσα L και είναι κλειστό ως προς τις συναρτήσεις $f^{\boldsymbol{B}}$ για κάθε σύμβολο συνάρτησης στη γλώσσα L :*
$x_1,\dots,x_n \in A \Rightarrow f^{\boldsymbol{B}}(x_1,\dots,x_n) \in \boldsymbol{A}$

Απόδειξη(Λήμμα 3.2.2):Αν $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ και A πεδίο δομής του $\mathbf{A}$ τότε από τον ορισμό της υποδομής έχουμε ότι :
1)$A \subseteq B$, 2)$c^{\mathbf{B}}=c^{\mathbf{A}} \in A$, 3) και για όλα τα $x_1,\dots,x_n \in A$ $R^{\mathbf{B}}(x_1,\dots,x_n) \Leftrightarrow R^{\mathbf{A}}(x_1,\dots,x_n)$ και $f^{\mathbf{B}}(x_1,\dots,x_n) = f^{\mathbf{A}}(x_1,\dots,x_n)$,όπου c,R,f σύμβολο σταθερών,σχέσεων και συναρτήσεων αντίστοιχα στη γλώσσα L.Άρα έχουμε $c^{\mathbf{B}}=c^{\mathbf{A}} \in A$ άρα η ερμηνεία $c^{\mathbf{B}}$ της $\mathbf{B}$ περιέχεται στο A και $f^{\mathbf{B}}(x_1,\dots,x_n) = f^{\mathbf{A}}(x_1,\dots,x_n) \in \mathbf{A}$ δηλαδή $x_1,\dots,x_n \in A \Rightarrow f^{\mathbf{B}}(x_1,\dots,x_n) \in \mathbf{A}$.

Αν η A περιέχει την ερμηνεία στη $\mathbf{B}$ για κάθε σύμβολο σταθεράς στη γλώσσα L και είναι κλειστό ως προς τις συναρτήσεις $f^{\mathbf{B}}$ για $f \in L$ δηλαδή $x_1,\dots,x_n \in A \Rightarrow f^{\mathbf{B}}(x_1,\dots,x_n) \in \mathbf{A}$.Θέτουμε $c^{\mathbf{B}}=c^{\mathbf{A}}$,$f^{\mathbf{A}}=f^{\mathbf{B}} \upharpoonright A$ και $R^{\mathbf{B}}(x_1,\dots,x_n) \Leftrightarrow R^{\mathbf{A}}(x_1,\dots,x_n)$ για $x_1,\dots,x_n \in A$ άρα $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ και A πεδίο δομής $\mathbf{A}$. $\dashv$

Ορισμός 3.2.3. *(Απολυτότητα και Skolem σύνολα): Υποθέτουμε ότι $\boldsymbol{B}$ είναι μια L-δομή και φ είναι ένας τύπος.Ένα σύνολο συναρτήσεων S στο πεδίο δομής του $\boldsymbol{B}$ είναι Skolem σύνολο για το φ στο $\boldsymbol{B}$,αν για κάθε υποδομή $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B}$,αν A είναι κλειστό ως προς όλες τις συναρτήσεις στο S ,τότε φ είναι απόλυτα ανάμεσα ,δηλαδή για κάθε πλήρως εκτεταμένο τύπο $\varphi(u_1,\dots,u_n)$ και για όλα τα $x_1,\dots,x_n \in A$ $\boldsymbol{A} \models \varphi(x_1,\dots,x_n) \Leftrightarrow \boldsymbol{B} \models \varphi(x_1,\dots,x_n)$ (2).*

Παρατηρούμε ότι σύμφωνα με τον ορισμό ,αν S είναι Skolem σύνολο για φ και $S \subseteq S'$,τότε S' είναι επίσης Skolem σύνολο για φ.

Για την απόδειξη του επόμενου λήμματος ,θα χρησιμοποιήσουμε το Αξίωμα Επιλογής στην ακόλουθη λογική μορφή :αν $R \subseteq X \times Y$ είναι μια διμερής σχέση,τότε:$(\forall x \in X)(\exists y \in Y)R(x,y) \Rightarrow (\exists f{:}X \to Y)(\forall x \in X)R(x,f(x))$.

Λήμμα 3.2.4. *Σε κάθε L-δομή* $\boldsymbol{B}$ *, κάθε τύπος φ έχει πεπερασμένο Skolem σύνολο .*

Απόδειξη(Λήμματος 3.2.4.):Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στον τύπο φ. Για τους πρωταρχικούς τύπους $\varphi \equiv s=t$ ή $\varphi \equiv R(t_1,...,t_n)$,όπου $t_1,...,t_n$,s όροι παίρνουμε $S_f = \emptyset$,άρα οι πρωταρχικοί τύποι φ έχουν πεπερασμένο Skolem σύνολο.

Παρατήρηση 3.2.5. *Με* $S_f, S_y, S_{f\wedge y}, S_{f\vee y}, S_{f\to y}, S_{\exists uy}, S_{\forall uy}$ *θα συμβολίζουμε τα Skolem σύνολα για τους τύπους* $\varphi,\psi,\varphi\wedge\psi,\varphi\vee\psi,\varphi\to\psi,\exists u\psi(u),\forall u\psi(u)$ *αντίστοιχα.*

Η υποθέση της επαγωγής είναι ότι οι τύποι φ και ψ έχουν πεπρασμένο Skolem σύνολα.Προχωρόντας επαγωγικά,θέτουμε : $S_{\neg f}=S_f, S_{f\wedge y}=S_{f\vee y}=S_{f\to y}=S_f \cup S_y$.Πράγματι S_f είναι το Skolem σύνολο για το φ ,δηλαδή για τον τύπο φ και για όλα τα $x_1,...,x_n \in A$ ισχύει : $\mathbf{A} \models \varphi(x_1,...,x_n) \Leftrightarrow \mathbf{B} \models \varphi(x_1,...,x_n)$,όπου $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$,τότε έχουμε :$\mathbf{A} \models \neg\varphi(u_1,...,u_n) \Leftrightarrow \mathbf{A} \not\models \varphi(u_1,...,u_n) \Leftrightarrow \mathbf{B} \not\models \varphi(u_1,...,u_n) \Leftrightarrow \mathbf{B} \models \neg\varphi(u_1,...,u_n)$ άρα $S_{\neg f}=S_f$.Αν S_f και S_y τα Skolem σύνολα για τα φ και ψ αντίστοιχα τότε : $\mathbf{A} \models \varphi[x_1,...,x_n] \wedge \psi[x_1,...,x_n] \Leftrightarrow \mathbf{A} \models \varphi[x_1,...,x_n]$ και $\mathbf{A} \models \psi[x_1,...,x_n] \Leftrightarrow \mathbf{B} \models \psi_1[x_1,...,x_n]$ και $\mathbf{B} \models \psi_2[x_1,...,x_n]$ από υπόθεση επαγωγής $\Leftrightarrow \mathbf{B} \models \varphi[x_1,...,x_n] \wedge \psi[x_1,...,x_n]$και $\mathbf{A} \models \varphi[x_1,...,x_n] \vee \psi[x_1,...,x_n] \Leftrightarrow \mathbf{A} \models \varphi[x_1,...,x_n]$ ή $\mathbf{A} \models \psi[x_1,...,x_n] \Leftrightarrow \mathbf{B} \models \varphi[x_1,...,x_n]$ ή $\mathbf{B} \models \psi[x_1,...,x_n]$ από υπόθεση επαγωγής $\Leftrightarrow \mathbf{B} \models \varphi[x_1,...,x_n] \vee \psi[x_1,...,x_n]$ και $\mathbf{A} \models \varphi[x_1,...,x_n] \to \psi[x_1,...,x_n] \Leftrightarrow \mathbf{A} \models \neg\varphi[x_1,...,x_n]$ ή $\mathbf{A} \models \psi[x_1,...,x_n] \Leftrightarrow \mathbf{B} \models \neg\varphi_1[x_1,...,x_n]$ ή $\mathbf{B} \models \psi[x_1,...,x_n]$ από υπόθεση επαγωγής $\Leftrightarrow \mathbf{B} \models \varphi[x_1,...,x_n] \to \psi[x_1,...,x_n]$ γνωρίζοντας ότι $\mathbf{A} \models \psi(x_1,...,x_n) \Leftrightarrow \mathbf{B} \models \psi(x_1,...,x_n)$ για όλα τα $x_1,...,x_n \in A$.Άρα έχουμε $S_{f\wedge y}=S_{f\vee y}=S_{f\to y}=S_f \cup S_y$,και από την υπόθεση της επαγωγής έχουμε ότι S_f και S_y είναι πεπερασμένα Skolem σύνολα άρα $S_{f\wedge y}, S_{f\vee y}, S_{f\to y}$ είναι πεπεπρασμένα Skolem σύνολα.

Στην ενδιαφέρουσα περίπτωση όπου $\varphi(u_1,...,u_n) \equiv \exists u\psi(u_1,...,u_n,u)$ παίρνουμε κάποιο $y_0 \in B$ και θέτουμε:$R(x_1,...,x_n,y) \Leftrightarrow \mathbf{B} \models \psi(x_1,...,x_n)$ ή (για όλα τα $y \in B, \mathbf{B} \not\models \psi(x_1,...,x_n,y)$ και $y=y_0$).
Είναι προφανές ότι για όλα τα $\overrightarrow{x} \in B^n$,υπάρχει κάποιο $y \in B$ τέτοιο ώστε $R(\overrightarrow{x},y)$.Το Αξίωμα Επιλογής μας δίνει μια συνάρτηση $f:B^n \rightarrow B$ τέτοια ώστε $R(\overrightarrow{x},f(\overrightarrow{x}))$ για όλα τα $\overrightarrow{x} \in B^n$,και θέτουμε $S_{\exists uy}=S_y \cup \{ f \}$.

Είναι προφανές ότι $\mathbf{A} \models \exists u\psi(x_1,...,x_n) \Rightarrow \mathbf{B} \models \exists u\psi(x_1,...,x_n)$.Για την μη τετριμμένη κατεύθυνση του (2) ,υποθέτουμε ότι $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$,A είναι κλειστό ως προς όλες τις συναρτήσεις στο $S_{\exists uy}$ συμπεριλαμβανομένης και της f και $x_1,...,x_n \in$ A .Υπολογίζουμε ,χρησιμοποιώντας την υπόθεση της επαγωγής:
$\mathbf{B} \models \exists u\psi(x_1,...,x_n) \Rightarrow$ για κάποιο $y \in B, \mathbf{B} \models \psi(x_1,...,x_n,y) \Rightarrow \mathbf{B} \models \psi(x_1,...,x_n,f(x_1,...,x_n))$
$\Rightarrow \mathbf{A} \models \psi(x_1,...,x_n,f(x_1,...,x_n))$
Άρα $\mathbf{B} \models \exists u\psi(x_1,...,x_n) \Leftrightarrow \mathbf{A} \models \exists u\psi(x_1,...,x_n)$, και αφού S_y είναι πεπερασμένο Skolem σύνολο.

Τέλος ,όταν $\varphi \equiv \forall u\psi$ θέτουμε $S_{\forall uy}=S_{\neg(\exists u \neg y)}=S_{\exists u \neg y}$ και το οποίο επαληθεύται αμέσως από την (2),και άρα το $S_{\forall uy}$ είναι πεπερασμένο Skolem σύνολο.
Άρα για κάθε τύπο φ υπάρχει πεπερασμένο Skolem σύνολο. $\dashv$

Απόδειξη(Θεωρήματος Löwenheim-Skolem):Έχουμε L-δομή **B** και ένα αριθμήσιμο σύνολο $X \subseteq B$,παίρνουμε κάποιο $y_0 \in B$,και θέτουμε $\Upsilon = X \cup \{ y_0 \} \cup \{ c^{\mathbf{B}} \mid c$ ένα σύμβολο σταθεράς $\}$ και με αυτόν τον τρόπο το Υ είναι αριθμήσιμο και όχι κενό ακόμα και αν $X=\emptyset$ και δεν υπάρχουν σταθερές.Έστω S_f να είναι πεπερασμένο Skolem σύνολο για κάθε τύπο φ απο το Λήμμα 3.2.4. και θέτουμε $\mathbf{F} = \{ f^{\mathbf{B}} \mid f$ είναι ένα σύμβολο συνάρτησης $\} \cup \bigcup_f S_f$ και έστω A να είναι το περίβλημα του Υ ως προς **F** σύμφωνα με την Πρόταση 3.1.4. .Το σύνολο A είναι αριθμήσιμο ,αφού το Υ και **F** είναι αριθμήσιμα σύνολα,και γνωρίζουμε ότι η αριθμήσιμη ένωση αριθμήσιμων συνόλων είναι αριθμήσιμη,και αυτό το σύνολο είναι το πεδίο δομής κάποιας δομής **A** η οποία είναι υποδομή του **B** από το Λήμμα 3.2.2..Επιπλεόν,για καθε φ,A είναι κλειστό ως προς όλες τις συναρτήσεις που ανήκουν σε ένα Skolem σύνολο για το φ,και έτσι ισχύει η (2),και αυτό σημαίνει ακριβώς ότι $\mathbf{A} \preceq \mathbf{B}$. $\dashv$

Κεφάλαιο 4

Δυσδιάκριτα

4.1 Skolem Συναρτήσεις και Θεώρημα Ramsey

Σε αυτήν την ενότητα υπάρχει λιγότερη έμφαση στην αριθμήσιμη γλώσσα.Θα πρέπει να συνδυάσουμε τη μέθοδο κατασκευής μοντέλων απο Skolem συναρτήσεις μαζί με μια αλλή σημαντική έννοια,αυτήν των δυσδιάκριτων στοιχειων ενός μοντέλου.Πρώτα θα μελετήσουμε τις Skolem συναρτήσεις. Μετα θα απόδείξουμε ένα συνδιαστικό αποτέλεσμα το οποίο είναι γνωστό ως Θεώρημα Ramsey.Τότε το εφαρμόζουμε για να προκύψουν μοντέλα παραγόμενα απο στοιχεία δυσδιάκριτα ,και τελικά δίνουμε αρκετές εφαρμογές.

Έχουμε μια γλώσσα L,επεκτείνουμε την γλώσσα L σε μια γλώσσα L^* προσθέτοντας νέα σύμβολα συναρτήσεων .Έστω F να είναι μια απεικόνιση από το σύνολο όλων των τύπων της μορφής $\psi=(\exists x)\varphi$ της γλώσσας L σε μια λίστα από νέα σύμβολα συναρτήσεων F_y.

Υποθέτουμε ότι F είναι 1-1 και ότι αν ψ έχει ακριβώς n ελεύθερες μεταβλητές ,τότε F_y είναι ένα n-μελές σύμβολο Skolem συνάρτησης.Ονομάζουμε την επέκταση $L \cup \{ F_y : \psi=(\exists x)\varphi$ ένας τύπος της $L \}$ μια Skolem επέκταση της L ,και το συμβολίζουμε με L^*.Επίσης ισχύει ότι $| L |=| L^* |$.Πράγματι,ας πούμε ότι ο πληθάριθμος της L είναι κ ,δηλαδή $| L |=\kappa$,η L^* είναι μια γλώσσα η οποία προκύπτει από επέκταση της L προσθέτοντας νέα σύμβολα συναρτήσεων ,τα οποία προέρχονται από την απεικόνιση F ,όπως έχουμε αναφέρει

προηγουμένως ,το σύνολο των τύπων της μορφής $\psi=(\exists x)\varphi$ της L οι οποίοι μέσω της F καταλήγουν στις F_y έχουν πληθάριθμο μικρότερο του κ ,έστω $\lambda\leq\kappa$,τότε έχουμε : $\mid L^* \mid = \mid L \cup \{ F_y : \psi=(\exists x)\varphi$ ένας τύπος της $L \} \mid = \mid L \mid \cup \mid \{ F_y : \psi=(\exists x)\varphi$ ένας τύπος της $L \} \mid = \kappa+\lambda=\kappa$,από τις ιδιότητες των πληθαρίθμων,άρα $\mid L \mid = \mid L^* \mid$.Η Skolem θεωρία Σ_L της γλώσσας L στην γλώσσα L^* έχει τις ακόλουθες προτάσεις της L^* ως αξιώματα:
(1)Έστω $\psi=(\exists x)\varphi$ να είναι οποιοσδήποτε τύπος της L και υποθέτουμε ότι ψ έχει ακριβώς τις ελεύθερες μεταβλητές $x_1,...,x_n$.Έστω $y_1,...,y_n$ να είναι μεταβλητές οι οποίες δεν εμφανίζονται στο ψ.Τότε η πρόταση:
$(\forall y_1....y_n)(\psi(y_1,...,y_n)\rightarrow \varphi(F_y(y_1,...,y_n),y_1,...,y_n))$ είναι ένα αξίωμα της Σ_L.

Πρατηρούμε ότι $\varphi(F_y(y_1,...,y_n),y_1,...,y_n))$ προκύπτει από την $\varphi(x,x_1,...,x_n)$ αντικαθιστώντας όλες τις ελεύθερες μεταβλητές x στο φ με τον όρο $F_y(y_1,...,y_n)$,και όλες τις ελεύθερες εμφανίσεις των x_i και y_i.

Έστω **A** ένα μοντέλο για την L.Μια επέκταση $\mathbf{A}^*$ του **A** στην L^* ,είναι μια Skolem επέκταση του **A** αν και μόνο αν $\mathbf{A}^* \models \Sigma_L$.Αν T είναι μια θεωρία στην L,τότε η Skolem επέκταση της T,η οποία συμβολίζεται ,με T^*,είναι η θεωρία T^* με το σύνολο αξιώματων $T \cup \Sigma_L$.

Πρόταση 4.1.1. *i)Κάθε μοντέλο* $\mathbf{A}$ *της L έχει μια Skolem επέκταση* $\mathbf{A}^*$.
ii)Αν T είναι μια συνεπής θεωρία στην L ,τότε η Skolem επέκταση της T^* *είναι μια συνεπής θεωρία στην* L^*.
iii)Έστω $\mathbf{A},\mathbf{B}$ *μοντέλα για την L ,έστω* $\mathbf{B}^*$ *να είναι μια επέκταση του* $\mathbf{B}$*,και έστω* $\mathbf{A}^*$ *να είναι μια επέκταση του* $\mathbf{A}$ *στην* L^**.Αν* $\mathbf{A}^* \subseteq \mathbf{B}^*$ *τότε* $\mathbf{A}\preceq\mathbf{B}$.

Απόδειξη(Πρόταση 4.1.1.):i)Έστω **A** ένα μοντέλο για την L.Έστω $\psi=(\exists x)\varphi$ και υποθέτουμε ότι ψ έχει ακριβώς τις ελεύθερες μεταβλητές $x_1,...,x_n$.Θα πρέπει να ορίσουμε την ερμηνεία G_y της F_y στο **A** ως ακολούθως:
Για κάθε $a_1,...,a_n\in A$:αν $\mathbf{A} \models \psi(a_1,...,a_n)$ τότε έστω $G_y(a_1,...,a_n)$ να είναι το πρώτο στοιχείο a της A τέτοιο ώστε $\mathbf{A} \models \varphi(a,a_1,...,a_n)$ και αν όχι $\mathbf{A} \models \psi(a_1,...,a_n)$,τότε έστω $G_y(a_1,...,a_n)$ να είναι τυχαίο.Είναι εύκολο τώρα να ελέγξουμε ότι η επέκταση $\mathbf{A}^*=\mathbf{A}\cup \{ G_y:\psi=(\exists x)\varphi$ να είναι τύπος της $L \}$ είναι Skolem επέκταση του **A**.Πράγματι,αυτό που θέλουμε να δείξουμε είναι $\mathbf{A}^* \models \Sigma_L$,όπου Σ_L θεωρία στην L^*.Από τη θεωρία ξέρουμε ότι $\mathbf{A} \models \Sigma_L$ και αφού η Σ_L έχει ως αξίωμα το (1) τότε $\{ G_y:\psi=(\exists x)\varphi$ να είναι τύπος της $L \} \models \Sigma_L$ άρα

$\mathbf{A}\cup$ { G_y:ψ=(∃x)φ να είναι τύπος της L } $\models \Sigma_L \Leftrightarrow \mathbf{A}^* \models \Sigma_L$.
ii)Αφού η T είναι συνεπής θεωρία στην L τότε από το Θεώρημα Πληρότητας η T έχει μοντέλο ,έστω **A**,και από το (i) το **A** έχει Skolem επέκταση $\mathbf{A}^*$,όπου από την θεωρία γνωρίζουμε ότι $\mathbf{A}^* \models \Sigma_L$ και $\mathbf{A}^* \models T$ αφού $\mathbf{A}\models T$ άρα $\mathbf{A}^* \models T \cup \Sigma_L$,και αφού το $\mathbf{A}^*$ ικανοποιεί το σύνολο αξιώματων της T^* τότε ικανοποιεί και τη T^* ,τότε η Skolem επέκταση T^* της T είναι συνεπής θεωρία.
iii)Έστω $\mathbf{A}^* \subseteq \mathbf{B}^*$ έχουμε ότι : $\mathbf{B} \models \exists x\psi(x,a_1,...,a_n)$ για όλα τα $a_1,...,a_n \in A$ και αφού $\mathbf{B}^*$ Skolem επέκταση του **B** τότε:
$\mathbf{B}\models \exists x\psi(x,a_1,...,a_n) \Rightarrow \exists G_y(a_1,...,a_n)=a{:}\mathbf{B}\models\psi(a,a_1,...,a_n) \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists G_y(a_1,...,a_n)=a\in A{:}\mathbf{B}\models\psi(a,a_1,...,a_n)$,αφού από το Λήμμα Ελέγχου Στοιχειώδους Υποδομής από το προηγούμενο κεφάλαιο έχουμε ότι $\mathbf{A}\preceq\mathbf{B}$. ⊣

Έστω $\mathbf{A}^*$ να είναι μια Skoem επέκταση του **A** ,και έστω $X\subset A$.Το Skolem περίβλημα της X στο $\mathbf{A}^*$ είναι το σύνολο Υ τέτοιο ώστε $X\subset \Upsilon \subset A$,Υ περιέχει όες τις συναρτήσεις στο $\mathbf{A}^*$,και να προσθέσουμε ότι με τον ορισμό του περιβλήματος και την απόδειξη των ιδιότητων έχουμε ασχοληθεί στο προηγούμενο κεφάλαιο,άρα εδώ δεν χρειάζονται απόδειξη.Με H(X) αποκαλούμε το Skolem περίβλημα και D(X) το αντίστοιχο υπομοντέλο του **A** καθορισμένο από το σύνολο H(X).

Πρόταση 4.1.2. *Έστω $\mathbf{A}^*$ μια Skolem επέκταση του **A** και έστω $X\subset A$.Τότε το Skolem περίβλημα D(X) είναι στοιχειωδης υπομοντέλο του **A**.*

Απόδειξη(Πρόταση 4.1.2):Αν ονομάσουμε $D(X)^*$ το μοντέλο καθορισμένο απο το H(X) στο μοντέλο $\mathbf{A}^*$,τότε είναι προφανώς ότι D(X) στην L^* τότε από Πρόταση 4.2.1.(iii) έχουμε ότι $D(X)\preceq A$. ⊣

Μια θεωρία στην L έχει εσωτερικές Skolem συναρτήσεις αν και μόνο αν για καθε τύπο ψ=(∃x)φ με ακριβώς τις μεταβλητές $x_1,...,x_n$ ελεύθερες ,υπάρχει ένας n-μελής όρος t_y τέτοιος ώστε:
$T\vdash (\forall y_1....y_n)(\psi(y_1,...,y_n)\rightarrow \varphi(t_y(y_1,...,y_n),y_1,...,y_n))$

Παρατήρηση 4.1.3. *Οι μεταβλητές $y_1,...,y_n$ δεν εμφανίζονται στο ψ ή στο t_y ,και $\psi(y_1,...,y_n)$,$\varphi(t_y(y_1,...,y_n),y_1,...,y_n))$ είναι οι προφανείς τύποι που προκύπτουν από $\psi(x_1,...,x_n)$ και $\varphi(x,x_1,...,x_n)$.*

Πρόταση 4.1.4. *Αν μια θεωρία T έχει εσωτερίκες Skolem συναρτήσεις ,τότε το T είναι πλήρης μοντέλων ,δηλαδή όποτε **A** και **B** είναι δύο μοντέλα της T και **A**⊆**B**,τότε **A**⪯**B**.*

Απόδειξη(Πρόταση 4.1.4.):Αφού **A** είναι υπομοντέλο του **B**,τότε **A** είναι κλειστό ως προς όλους τους όρους t_y της L.Έστω ψ=(∃x)φ και έχουμε: $\mathbf{B}\models \exists x\ \varphi(x,x_1,...,x_n) \Rightarrow \exists y{\in}B$ τέτοιο ώστε :$\mathbf{B}\models \varphi(y,x_1,...,x_n)$,και αφού η T έχει εσωτερικές Skolem συναρτήσεις έχουμε ότι :$\mathbf{B}\models\varphi(t_y(y_1,...,y_n),y_1,...,y_n))$ όπου $t_y(y_1,...,y_n),y_1,...,y_n){\in}A$,αφού A κλειστό ως προς όλους τους όρους t_y ,άρα από το Λήμμα Ελέγχου Στοιχειώδους Υποδομής έχουμε ότι **A**⪯**B**. ⊣

Πρόταση 4.1.5. *Έστω T μια θεωρία στην L.Τότε υπάρχουν μια επέκταση L' της L και μια επέκταση T' της T (T' μια θεωρία στην L') τέτοια ώστε T' έχει εσωτερικές Skolem συναρτήσεις.Επιπλεόν,κάθε μοντέλο της T ,έχει μια επέκταση που είναι μοντέλο της T'.*

Απόδειξη(Πρόταση 4.1.5.):Ξεκινώντας από την γλώσσα $L=L_0$,ορίζουμε μια αύξουσα ακολουθία επέκτασεων L_n θέτοντας $L_{n+1}=L_n^*$.Σημειώνουμε ότι για κάθε n,η Skolem θεωρία Σ_{L_n} είναι ένα σύνολο προτάσεων από την L_{n+1}.Έστω $L'=\cup_n L_n$ και έστω T' έχει το σύνολο των αξιωμάτων $T\cup \cup_n\Sigma_{L_n}$.Επείδη ,κάθε τύπος της L' περιέχει το πολύ πεπερασμένο αριθμό συμβόλων ,βλέπουμε ότι T' έχει εσωτερικές Skolem συναρτήσεις.Πράγματι,αφού κάθε τύπος της L' περιέχει το πολύ πεπερασμένο αριθμό συμβόλων τότε η T' θα έχει πεπερασμένο πλήθος όρων ,οπότε $\varphi(t(t_1,..,t_n),t_1,..,t_n)$ ένας τύπος και $t_1,..,t_n$ όροι τότε ο $t(t_1,..,t_n)$ ως όρος δεν περιέχεται στο πεπερασμένο πλήθος όρων που αναφερθήκαμε προηγουμένως και άρα κατασκευάζεται απο τους ήδη υπάρχοντες όρους,το οποιό επιβεβαιώνει τον ορισμό των εσωτερικών Skolem συναρτήσεων και άρα η T' έχει εσωτερικές Skolem συναρτήσεις.
Έχουμε την γλώσσα $L=L_0$ και την T θεωρία στη γλώσσα αυτή και έστω **A** ένα μοντέλο της T στην L.Από την Πρόταση 4.2.1(i) έχουμε ότι υπάρχει Skolem επέκταση $\mathbf{A}_1$ της **A**,για την οποία ισχύει ότι $\mathbf{A}_1 \models \Sigma_{L_0}$ στην γλώσσα $L_1=(L_0)^*$ με θεωρία την T_1 με σύνολο αξιωμάτων το $T\cup\Sigma_{L_0}$.Έχουμε τη γλώσσα L_n,και τη θεωρία T_n με σύνολο αξιωμάτων $T\cup\Sigma_{L_{n-1}}$ και με μοντέλο $\mathbf{A}_n$ τότε από την Πρόταση 4.2.1.(i) υπάρχει Skolem επέκταση $\mathbf{A}_{n+1}$ τέτοια ώστε $\mathbf{A}_{n+1} \models \Sigma_{L_n}$ στη γλώσσα $L_{n+1}=(L_n)^*$ με θεωρία την T_{n+1} με σύνολο αξιωμάτων το $T\cup\Sigma_{L_n}$.Άρα για τη γλώσσα $L'=\cup_n L_n$,η θεωρία $T'=\cup_n T_n$ με

σύνολο αξιωμάτων το T$\cup$ $\cup_n \Sigma_{L_n}$ έχει μοντέλο $\mathbf{A}=\cup_n \mathbf{A}_n$. $\dashv$

Έστω M$\subseteq$ N(το σύνολο των φυσικών αριθμών) και k$\in$N.Χρησιμοποιούμε τους ακόλουθους συμβολισμούς: $[M]^\infty=\{A\subseteq M$: A άπειρο $\}$,$[M]^{<\infty}=\{$ A$\subseteq$M : A πεπρασμένο } και $[M]^k=\{(n_1,...,n_k)$: $n_1 <....< n_k$ όπου $n_1,...,n_k\in M$ }

Τα στοιχεία του τελευταίου συνόλου θα τα ονομάζουμε και k-σύνολα του M.Παρατηρούμε ότι σύμφωνα με το παραπάνω ισχύει ότι:$[M]^{<\infty}=\cup_{k=1}^{\infty}[M]^k$.

Όταν έχουμε ένα σύνολο X και δύο ξένα ,με κένα υποσύνολα του A,B με X=A$\cup$B θα λέμε ότι έχουμε ένα διχρωματισμό του X με τα χρώματα A και B.Αν $\Upsilon\subseteq$X τέτοιο ώστε $\Upsilon\subseteq$A ή $\Upsilon\subseteq$B τότε το Υ θα λέγεται μονοχρωματικό.

Έστω τώρα ένας διχρωματισμός του N με τα χρώματα A και B ή πιο α-πλά ας πούμε ότι χρωματίζουμε τους φυσικούς αριθμούς με τα χρώματα μπλέ και κόκκινο.Τότε σίγουρα άπειροι από αυτούς θα είναι μπλέ ή άπειροι θα ε-ίναι κόκκινοι.Με άλλα λόγια υπάρχει ένα άπειρο υποσύνολο τους το οποίο είναι μονοχρωματικό.Πράγματι,αν δεν υπήρχε τέτοιο σύνολο τότε το σύνολο των μπλέ φυσικών αριθμών θα ήταν πεπερασμένο.Συνεπώς και η ένωση τους (δηλαδή όλοι οι φυσικοι αριθμοί) θα ήταν πεπερασμένη,άτοπο.Αυτή είναι η πιο απλή εκδοχή του Θεωρήματος Ramsey,αργότερα θα το γενικέυσουμε με κάποιον τρόπο.

Θεώρημα 4.1.6. *(Θεώρημα Ramsey) Έστω ότι* $[N]^2$=A$\cup$B *όπου A,B μη κένα και ξένα υποσύνολα του* $[N]^2$*.Τότε υπάρχει* M$\in[N]^\infty$ *τέτοιο ώστε* $[M]^2 \subseteq$ *A ή* $[M]^2 \subseteq$B.

Απόδειξη(Θεώρημα Ramsey):Θα κάνουμε χρήση του Θεωρήματος Ramsey στην πιο απλή περίπτωση που αναφέραμε παραπάνω.Θεωρούμε το σύνολο $P_0=\{(1,n)$: n$\in$N$\setminus$ { 1 } } το οποίο είναι ένα υποσύνολο του $[N]^2$ και άρα από την υπόθεση μας είναι χρωματισμένο με τα χρώματα A και B.Συνεπώς υπάρχει ένα $M_1 \subseteq$ N άπειρο τέτοιο ώστε το $R_0=\{(1,n)$: n$\in M_1$ } να είναι μονο-χρωματικό.Έστω τώρα m_1=minM_1 το οποίο υπάρχει από την άρχη της καλής διάταξης των φυσικών αριθμών.Έστω $P_1=\{(m_1,n)$:n$\in M_1 \setminus \{ m_1 \}$ }.Παρόμοια υπάρχει $M_2 \subseteq M_1$ άπειρο τέτοιο ώστε το $R_1=\{ (m_1,n)$: n$\in M_2$ } να είναι μο-νοχρωματκό.Έστω m_2=minM_2.Με παρόμοιο τρόπο κατασκεύαζουμε γνησιώς φθίνουσα ακολουθία συνόλων $N=M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq ... \supseteq ....$ και αύξουσα ακολουθία αριθμών $1=m_0 < m_1 < m_2 <...$ τέτοιες ώστε $m_i \in M_i$ για κάθε $i\in N\setminus \{ 0\}$.Κοιτάμε το σύνολο $\{ (m_{i-1},m_i) : i\in N \}$.Είναι υποσύνολο του $A\cup B$ και συνεπώς υπάρχει $K\subseteq N$ άπειρο τέτοιο ώστε το $\{ (m_{i-1},m_i) :i\in K \}$ να είναι μονοχρωματικό.Υποθέτουμε εδώ χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι έχει χρώμα A.Έστω $M=\{ m_i : i\in K \}$.Το ζητούμενο σύνολο.Δηλαδή ισχύει ότι $[M]^2 \subseteq A$.Πράγματι,έστω $(m_i,m_{i+j})\in[M]^2$.Τότε το στοιχείο αυτό ανηκεί στο R_i και συνεπώς έχει το ίδιο χρώμα με το (m_i,m_{i+1}).Το τελευταίο ανήκει στο $\{ (m_i,m_{i+1}) : i\in K \}$ συνεπώς έχει το χρώμα A.Οπότε και (m_i,m_{i+j}) όπως θέλαμε. $\dashv$

Θα δούμε τώρα ότι το θεώρημα Ramsey γενικεύεται για k-σύνολα και για r-χρώματα.Η ιδέα της απόδειξης παραμένει η ίδια ενώ οι γενικευμένες θα προκύψουν με επαγωγή.

Θεώρημα 4.1.7. *(Θεώρημα Ramsey) Έστω $k,r\in N$.Τότε για κάθε $f:[N]^k \to \{1,2,...,r\}$ υπάρχει $M\in[N]^\infty$ και $i_0 \in \{ 1,2,...,r \}$ τέτοια ώστε $f[[M]^k]=\{i_0 \}$.*

Απόδειξη(Θεώρημα Ramsey):Υποθέτουμε πρώτα ότι r=2.Για k=1 αν $f:N\to \{1,2\}$ τότε υπάρχει $M\in[N]^\infty$ και i_0 $\{1,2\}$ τέτοια ώστε $f[M]=\{i_0 \}$,διότι το N ως άπειρο σύνολο δεν μπορεί να χωρίσει σε δυο πεπερασμένα.Υποθέτουμε τώρα ότι το Θεώρημα αληθεύει για k.Έστω $f:[N]^{k+1} \to \{1,2\}$.θα δείξουμε ότι υπάρχει $M\in[N]^\infty$ και $i_0\in \{1,2\}$ τέτοια ώστε $f([M]^{k+1})=\{i_0 \}$.Θεώρουμε το σύνολο $A=\{(1,a_1,...,a_k) : (a_1,...,a_k)\in[N]^k \}$.Από την υπόθεση υπάρχουν $M_1 \in [N]^\infty$ και $i_1 \in \{1,2\}$ τέτοια ώστε

$$f[\{(1,a_1,...,a_k):(a_1,...,a_k)\in[M_1]^k \}]=\{ i_1 \}$$

Έστω $m_1=\min M_1$.Θεωρούμε το σύνολο

$$A_1=\{ (m_1,a_1,....,a_k) : (a_1,...,a_k)\in[M_1 \setminus \{ m_1 \}]^k \}$$

Από την υπόθεση υπάρχουν $M_2 \in[N]^\infty$ και $i_2 \in \{1,2\}$ τέτοια ώστε

$$f[\{(m_1,a_1,...,a_k) : (a_1,...,a_k)\in[M_2]^k \}]=\{i_2 \}$$

Έστω $m_2=\min M_2$.Παρόμοια ορίζουμε:

$$A_2=\{(m_2,a_1,....,a_k) : (a_1,...,a_k)\in[M_2 \setminus \{m_2 \}]^k \}$$

Έστω $m_3=\min M_3$.Κατασκεύαζουμε με αυτόν τον τρόπο ακολουθία $M_1 \supseteq M_2 \supseteq M_3 \supseteq.....$ και αύξουσα ακολουθία φυσικών $(m_n)_{n\in N}$ τέτοιες ώστε $m_n=\min M_n$ για κάθε $n\in N$.Έστω τώρα:

$$B=\{(m_n,m_{n+1},...,m_{n+k}) : n\in K \} \subseteq [N]^{k+1}$$

Από το θεώρημα για k=1 παίρνουμε ότι υπάρχει $K\in[N]^\infty$ τέτοιο ώστε

$$f[\{(m_n,...,m_{n+k}) : n\in K\}]=\{i_0\}$$

για κάποιο $i_0 \in \{1,2\}$.Ορίζουμε $M=\{m_n : n\in K\}$.Το M είναι το ζήτουμενο σύνολο.Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $f[[M]^{k+1}]=\{i_0\}$.Έστω $(m_{j_1},...,m_{j_{k+1}})\in[M]^{k+1}$ όπου $j_1,...,j_{k+1} \in K$.Αφού $j_1\in K$ ισχύει ότι $f((m_{j_1},m_{j_1+1}...,m_{j_1+k}))=\{i_0\}$.Επίσης εκ κατασκευής $m_{j_1},...,m_{j_{k+1}} \in M_{j_1}$.Συνεπώς από τον ορισμό του M_{j_1} ισχύει ότι:

$$f((m_{j_1},...,m_{j_{k+1}}))=f((m_{j_1},m_{j_1+1},...,m_{j_1+k}))=\{i_0\}$$

όπως θέλαμε.Άρα από επαγωγή το θεώρημα ισχύει για κάθε $k\in N$.Έστω τώρα ότι το θεώρημα ισχύει για $r\geq2$.Θα δείξουμε ότι ισχύει και για r+1.Έστω $f:[N]^k \to \{1,2,...,r+1\}$.Αντιστοιχούμε τα r και r+1.Δηλαδή ορίζουμε $g:[N]^k \to \{1,2,...,r\}$ τέτοια ώστε $g(A)=r \Leftrightarrow f(A)=r$ ή $f(A)=r+1$ και $g(A)=f(A)$ όταν $f(A)\neq r$ και $f(A)\neq r+1$ όπου $A\in[N]^k$.Το θέώρημα εφαρμόζεται για την g.Συνεπώς υπάρχει $M\in[N]^\infty$ και $i_0 \in \{1,2,...r\}$ τέτοιο ώστε $g[[M]^k]=\{i_0\}$.Αν $i_0 \neq r$ έχουμε το ζητούμενο διότι τότε η g ταυτίζεται με την f στο $[M]^k$.Αν $i_0=r$ τότε αντιστοιχούμε το M με το N και εφαρμόζουμε το Θεώρημα για k=2.Συνεπώς υπάρχει $M_1 \in[M]^\infty \subseteq[N]^\infty$ και $i_1 \in \{r,r+1\}$ τέτοια ώστε $g[[M_1]^k]=\{i_1\}$.Τότε ισχύει ότι $f[[M_1]^k]=\{i_1\}$. $\dashv$

4.2 Δυσδιάκριτα

Έστω **A** ένα μοντέλο στο L,και έστω $X\subseteq A$ να είναι ένα υποσύνολο του A το οποίο 'κουβαλάει' τη σχέση $<$,όπου αυστηρά ολικά διατάζει το X.Παρατηρούμε ότι η $<$ μπορεί να είναι ή και να μην είναι σχέση στο **A**.Λέμε ότι το X είναι ένα σύνολο από στοιχεία δυσδιάκριτα στο **A** αν και μόνο αν για όλα τα n και όλες τις πεπερασμένες ακολουθίες $x_1 <...<x_n$ και $y_1 <...<y_n$ από το X, $(\mathbf{A},x_1...x_n)\equiv(\mathbf{A},y_1...y_n)$.

Αν η σχέση $<$ είναι κατανοητή ,τότε δεν θα την αναφέρουμε λεπτομερώς.Επίσης αναφερόμαστε στο X απλά ως ένα σύνολο δυσδιάκριτων στο **A**.Ο όρος δυσδιάκριτα σημαίνει ότι οι ακολουθίες $x_1 <...<x_n$ και $y_1 <...<y_n$ δεν μπορούν να ξεχωρίσουν από κανένα πρώτης τάξης τύπο $\varphi(u_1,...,u_n)$ της L.Τακτόμορφη εμφύτευση θα εννοούμε μια ισομορφική εμφύτευση μιας ολικά διατεταγμένης δομής σε μια αλλή.Ένας τακτομορφισμός του $<X,<>$ είναι ένας αυτομορφισμός του <X,< >.Αυτή η έννοια θα βοηθήσει να δώσουμε έμφαση στην διαφορά μεταξύ ένος ισομορφισμού μοντέλων για την L και ένος τακτομορφισμού των συνόλων των δυσδιάκριτων στα μοντέλα.

Εδώ έχουμε μια επαρκή συνθήκη η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να πάρουμε παραδείγματα από σύνολα δυσδιάκριτων :

Πρόταση 4.2.1. *Έστω <X,< > να είναι ένα γραμμικά διατεταγμένο υποσύνολο ένος μοντέλου* $\boldsymbol{A}$*.Υποθέτουμε ότι για κάθε δύο αύξουσες n-αδες* $x_1 <\ldots< x_n$ *και* $y_1 <\ldots< y_n$ *από το X ,υπάρχει ένας αυτομορφισμός f από το* $\boldsymbol{A}$ *στο* $\boldsymbol{A}$ *τέτοιος ώστε* $f(x_1)=y_1,\ldots,f(x_n)=y_n$*.Τότε το X είναι ένα σύνολο δυσδιάκριτων στο* $\boldsymbol{A}$.

Απόδειξη(Πρόταση 4.2.1.):Έχουμε $f:(\mathbf{A},x_1\ldots x_n)\cong(\mathbf{A},y_1\ldots y_n)$ συνεπώς $(\mathbf{A},x_1\ldots x_n)\equiv(\mathbf{A},y_1\ldots y_n)$,άρα X είναι ένα σύνολο απο δυσδιάκριτα. ⊣

Λήμμα 4.2.2. *Έστω* $L'=L\cup\{c_n{:}n\in w\}$*,όπου τα* c_n *είναι νέες σταθερές.Έστω T μια θεωρία στην L με άπειρα μοντέλα.Τότε το ακόλουθο σύνολο* T' *από προτάσεις της* L' *είναι συνεπής:*
$T'=T\cup\{\varphi(c_{i_1},\ldots,c_{i_n})\leftrightarrow\varphi(c_{j_1},\ldots,c_{j_n}){:}\varphi(u_1,\ldots,u_n)$ *είναι ένας τύπος της L,* $n\in\omega$*,και* $i_1<\ldots<i_n$ *και* $j_1<\ldots<j_n\}\cup\{\neg c_1\equiv c_2\}$.

Απόδειξη(Λήμματος 4.2.2.):Έστω **A** ένα άπειρο μοντέλο του T,και έστω I να είναι ένα αριθμήσιμο άπειρο υποσύνολο του A.Υποθέτουμε ότι η σχέση < διατάζει κάλα το I ,έτσι ώστε: $i_0,\ldots,i_n,\ldots$ είναι μια λίστα όλων των στοιχείων του I.Ισχυριζόμαστε ότι:
(1)δοσμένου οποιουδήποτε πεπερασμένου υποσυνόλου Δ του T',υπάρχει ένα άπειρο υποσύνολο J του I ,όπου τα στοιχεία του J είναι :$j_0<\ldots<j_n$ τέτοια ώστε η επέκταση $(\mathbf{A},j_n)_{n\in\omega}$ να ικανοποιεί το Δ.

Αυτό αποδεικνύεται με επαγωγή στον αριθμό των προτάσεων στο Δ.Έτσι υποθέτουμε ότι η (1) ισχύει για κάποιο πεπερασμένο υποσύνολο $\Delta\subseteq T'$ και έστω $\varphi(u_1,\ldots,u_n)$ να είναι ένας τύπος της L.Τώρα διαχωρίζουμε το $[J]^m$ σε δύο κομμάτια:Έστω:
$A_0=\{x_1<\ldots<x_m : x_i\in J$ και $\mathbf{A}\models\varphi(x_1,\ldots,x_m)\}$ και
$A_1=\{x_1<\ldots<x_m : x_i\in J$ και $\mathbf{A}\models\neg\varphi(x_1,\ldots,x_m)\}$
Ξεκάθαρα $[J]^m\subseteq A_0\cup A_1$.Από το θεώρημα Ramsey για k=m και r=2 υπάρχει ένα άπειρο υποσύνολο $K\subseteq J$ με τα στοιχεία του K να απαριθμούνται ως

εξής:$k_0 < k_1 <...< k_n <....$ τέτοια ώστε $[K]^m \subseteq A_0$ ή $[K]^m \subseteq A_1$.Είναι αρκετά εύκολο να επαληθευεί ότι και σε αυτήν την περίπτωση η επέκταση $(\mathbf{A},k_n)_{n\in\omega}$ ικανοποιεί το $\varphi(c_{s_1},...,c_{s_m}) \leftrightarrow \varphi(c_{t_1},...,c_{t_m})$ με $s_1 <...<s_n$ και
$t_1 <...<t_n$.Πράγματι,αρχικά έχουμε ότι:
$(\mathbf{A},k_n)_{n\in\omega} \models \varphi(c_{s_1},...,c_{s_m}) \leftrightarrow \varphi(c_{t_1},...,c_{t_m}) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\mathbf{A},k_n)_{n\in\omega} \models [\neg\varphi(c_{s_1},...,c_{s_m})\vee \varphi(c_{t_1},...,c_{t_m})]\wedge[\varphi(c_{s_1},...,c_{s_m})\vee \neg\varphi(c_{t_1},...,c_{t_m})]$
$\Leftrightarrow (\mathbf{A},k_n)_{n\in\omega} \models [\neg\varphi(c_{s_1},...,c_{s_m})\vee \varphi(c_{t_1},...,c_{t_m})]$ και
$(\mathbf{A},k_n)_{n\in\omega} \models [\varphi(c_{s_1},...,c_{s_m})\vee \neg\varphi(c_{t_1},...,c_{t_m})] \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\mathbf{A},k_n)_{n\in\omega} \models \neg\varphi(c_{s_1},...,c_{s_m})$ ή $(\mathbf{A},k_n)_{n\in\omega} \models \varphi(c_{t_1},...,c_{t_m})$ και
$(\mathbf{A},k_n)_{n\in\omega} \models \varphi(c_{s_1},...,c_{s_m})$ ή $(\mathbf{A},k_n)_{n\in\omega} \models \neg\varphi(c_{t_1},...,c_{t_m})$
,όπου την τελευταία ισοδυναμία θα την ονομάσουμε (2) για λόγους ευκολίας,με $s_1 <...<s_n$ και $t_1 <...<t_n$.

Το επιχείρημα τώρα χωρίζεται σε δύο περιπτώσεις εξαρτώμενες στο αν $[K]^m \subseteq A_0$ ή $[K]^m \subseteq A_1$.Έστω $[K]^m \subseteq A_0$,τότε παίρνουμε $(c_{t_1},...,c_{t_m})$ και $(c_{s_1},...,c_{s_m})$ $\in [K]^m \subseteq A_0$ και έχουμε $\mathbf{A} \models \varphi(c_{s_1},...,c_{s_m})$ και $\mathbf{A} \models \varphi\ (c_{t_1},...,c_{t_m})$ άρα ισχύει η (2) και συνεπώς η αρχική ισοδυναμία.

Άρα η επέκταση $(\mathbf{A},k_n)_{n\in\omega}$ ικανοποιεί το $\varphi(c_{s_1},...,c_{s_m}) \leftrightarrow \varphi(c_{t_1},...,c_{t_m})$ με $s_1 <...<s_n$ και $t_1 <...<t_n$.Επιπλέον,φυσικά και $(\mathbf{A},k_n)_{n\in\omega}$ ικανοποιεί όλες τις προτάσεις του Δ.Έτσι αυτό αποδεικνύει ότι η (1) ισχύει οποτεδήποτε το Δ αυξάνεται με την προσθήκη μιας πρότασεις,και έτσι η επαγωγή είναι ολοκληρωμένη.Η συνέπεια του T' είναι άμεσο επακόλουθο της (1).Αφού ένα πεπερασμένο υποσύνολο του T' έχει μοντέλο τότε είναι ικανοποιήσιμο άρα η T' είναι πεπρασμένα ικανοποιήσιμη και από το Θεώρημα Συμπάγειας έχουμε ότι η T' έχει μοντέλο άρα είναι συνεπής. $\dashv$

Θεώρημα 4.2.3. *Έστω T μια θεωρία στην L με άπειρα μοντέλα,και έστω 'X,<' να είναι ένα ολικά διατεταγμένο σύνολο.Τότε υπάρχει ένα μοντέλο $\mathbf{A}$ της T με X⊆A και τέτοιο ώστε X να είναι ένα σύνολο δυσδιάκριτων στο $\mathbf{A}$.*

Απόδειξη(Θεώρημα 4.2.3.):Έστω $L'=L\cup \{c_x:x\in X\}$ και έστω
$T'=T\cup \{\varphi(c_{x_1},...,c_{x_n}) \leftrightarrow \varphi(c_{y_1},...,c_{y_n}):\varphi(u_1,...,u_n)$ είναι ένας τύπος της L, $n\in\ \omega$,και $x_1 <...<x_n$ και $y_1 <...<y_n$ από το X $\} \cup \{\ \neg c_1 \equiv c_2\ :\ x_1 \neq x_2$ στο X}.Αφού κάθε πεπερασμένο υποσύνολο X μπορεί να είναι τακτομορφικά εμφυτεύσιμο στο $<\ \omega,<\ >$,βλέπουμε ότι από το Λήμμα 4.2.2.,T' είναι ένα συνεπές σύνολο προτάσεων της L'.Έστω $\mathbf{A}'$ ένα οποιοδήποτε μοντέλο

του T' ,και έστω $\mathbf{A}$ να είναι η μείωση του $\mathbf{A}'$ στο L.Τότε $\mathbf{A}$ είναι ένα μοντέλο του T.Μπορούμε,χωρίς βλάβη της γενικότητας ,να ταυτοποιήσουμε τις ερμηνείες του c_x,$x \in X$,στο $\mathbf{A}$ με τα ίδια τα στοιχεία x.Τώρα ,από την μορφή του T',βλέπουμε ότι το δοσμένο $\varphi(u_1,...,u_n)$ της L και $x_1 <...< x_n$ και $y_1 <...< y_n$ του X ,έχουμε $\mathbf{A} \models \varphi(x_1,...,x_n)$ αν και μόνο αν $\mathbf{A} \models \varphi(y_1,...,y_n)$.Άρα $(\mathbf{A},x_1...x_n) \equiv (\mathbf{A},y_1...y_n)$ και έτσι X είναι ένα σύνολο συσδιάκριτων στο $\mathbf{A}$. $\dashv$

Το γεγονός ότι η T έχει μοντέλο με δυσδιάκριτα από οποιαδήποτε διατεταγμενη περιγραφή είναι ήδη αρκετά αξιοσημείωτο.Βλέπουμε παρακάτω ότι αν T επίσης έχει εσωτερικές Skolem συναρτήσεις τότε η κατασκευή μας δίνει μοντέλα με ακόμα περισσότερες ενδιαφέρουσες ιδιότητες.

Στην παράγραφο παρακάτω,ας υποθέσουμε ότι η T έχει εσωτερικές Skolem συναρτήσεις θα κάνουμε τις ακόλουθες απλές παρατηρήσεις σχετικά με τα μοντέλα του T:
Αρχικά παρατήρουμε ότι από την Πρόταση 4.1.5. ότι κάθε θεωρία μπορεί να επέκταθει σε μια θεωρία με εσωτερικές Skolem συναρτήσεις.Αν $\mathbf{A}$ είναι ένα μοντέλο του T ,η Skolem επέκταση $\mathbf{A}^*$ του $\mathbf{A}$ μπορεί να προκύψει από το $\mathbf{A}$ με την προσθήκη κάποιων συναρτήσεων οι οποίες είναι ήδη ορισμένες στο $\mathbf{A}$,δηλαδή συναρτήσεις οι οποίες είναι ερμηνείες των όρων της L στο $\mathbf{A}$.Άρα δεν υπάρχει απαραίτητη διαφορά μεταξύ $\mathbf{A}^*$ και $\mathbf{A}$ και σε όλες τις μελλοντικές συζητήσεις θα τα θεωρούμε πρακτικά το ίδιο μοντέλο.Πράγματι,$\mathbf{A}^*$ και $\mathbf{A}$,είναι ακριβώς το ίδιο μοντέλο αν οι Skolem συναρτήσεις στο L,και όπως ξέρουμε αυτό μπορει να γίνει.Θυμίζουμε επίσης ότι αν $X \subset A$,τότε το Skolem περίβλημα παραγόμενο απο το X είναι το μοντέλο $D(X) = \langle H(X),... \rangle$,όπου H(X) είναι το περίβλημα του X ως προς όλους όρους στο $\mathbf{A}$,όπως το έχουμε ορίσει στο προηγούμενο κεφάλαιο.Επίσης $D(X) \preceq \mathbf{A}$.Βλέπουμε ότι ένα μοντέλο $\mathbf{A}$ είναι παραγόμενο από ένα σύνολο δυσδιάκριτων αν και μόνο αν για κάποιο σύνολο $X \subset A$ από δυσδιάκριτα στο $\mathbf{A}$, $\mathbf{A} = D(X)$.

Σε αυτό το σημείο θα δώσουμε την έννοια της περιγράφης ,της παράλειψης και της πραγματοποίησης.Αυτές οι έννοιες είναι αρκετά σημαντικές και αυτό θα φανεί στη συνέχεια.

Στην αρχή θα αναφερθούμε στην έννοια ένος συνόλου Σ από τύπους της L στις ελεύθερες μεταβλητές $x_1,...,x_n$.Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε τα $x_1,...,x_n$ ως ονόματα για αυθαίρετες τυχαίες μεταβλητές στη L. Το Σ είναι ένα σύνολο από τύπους της L με ελεύθερες μεταβλητές $x_1,...,x_n$ (συμβολικά,$\Sigma=\Sigma(x_1,...,x_n)$ αν και μόνο αν $x_1,...,x_n$ είναι ακριβείς μεμονωμένες μεταβλητές και κάθε τύπος στο Σ περιέχει το πολύ τις μεταβλητές $x_1,...,x_n$ ελεύθερες). Τώρα εισάγουμε την σύμβαση $\sigma=\sigma(x_1,...,x_n)$,όπως κάναμε και για $\varphi=\varphi(u_0,...,u_n)$.Αν $\sigma=\sigma(x_1,...,x_n)$ τότε ο συμβολισμός $\mathbf{A}\models\sigma[a_1,...,a_n]$ σημαίνει ότι η ακολουθία $a_1,...,a_n$ του A ικανοποιεί το σ στο **A**.Είναι αρκετά χρήσιμο επίσης να εισάγουμε το συμβολισμό $\mathbf{A}\models\Sigma[a_1,...,a_n]$ που σημαίνει ότι για κάθε $\sigma\in\Sigma$,τα $a_1,...,a_n$ ικανοποιούν το σ στο **A**,σε αυτήν την περίπτωση λέμε ότι $a_1,...,a_n$ ικανοποιούν το Σ στο **A**.

Έστω Σ ένα σύνολο από τύπους με μεταβλήτες $x_1,...,x_n$ και έστω **A** να είναι ένα μοντέλο για τη L.Λέμε ότι **A** πραγματοποιεί το Σ αν και μόνο αν κάποια n-άδα των στοιχείων του A ικανοποιεί το Σ στο **A**.Λέμε ότι **A** παραλείπει το Σ αν και μόνο αν **A** δεν πραγματοποιεί το Σ.Η φράση Σ είναι ικανοποιήσιμη στο **A** έχει ακριβώς την ίδια σημασία όπως το **A** πραγματοποιεί το Σ. Με την περιγραφη $\Sigma(x_1,...,x_n)$ στις μεταβλητές $x_1,...,x_n$ εννοούμε ένα μέγιστο συνεπή σύνολο τύπων της L σε αυτές τις μεταβλητές.Δοσμένου οποιουδήποτε μοντέλου **A** και n-άδα $a_1,...,a_n\in A$,το σύνολο $\Sigma(x_1,...,x_n)$ από όλους τους τύπους $\gamma(x_1,...,x_n)$ ικανοποιείται από τα $a_1,...,a_n$ είναι μια περιγραφή και πιο συγκεκριμένα είναι η μοναδική περιγραφή που πραγματοποιείται από τα $a_1,...,a_n$.Καλείται η περιγραφή των $a_1,...,a_n$ στο **A**.

Το ακόλουθο θεώρημα περέχει περισσότερες από τις πιο βασικές και σημαντικές ιδιότητες των μοντέλων παραγόμενα από δυσδιάκριτα.

Θεώρημα 4.2.4. *Έστω X να είναι ένα σύνολο δυσδιάκριτων σε ένα μοντέλο **A** μιας θεωρίας T με εσωτερικές Skolem συναρτήσεις.Τότε :*

(a)(Θεώρημα Υποσυνόλου):Αν $\Upsilon\subseteq X$,τότε Υ είναι ένα σύνολο δυσδιάκριτων στο $D(\Upsilon)$ με σεβασμό στην διάταξη που κληρονομείται από το X και $D(\Upsilon)\preceq D(X)$.

*(b)(Θεώρημα Stretching):Υποθέτουμε ότι X και Υ είναι άπειρα ολικά διατεταγμένα σύνολα.Τότε υπάρχει ένα μοντέλο **B**,στο οποίο Υ είναι ένα σύνολο δυσδιάκριτων και τα σύνολα των τύπων που ικανοποιούνται από αύξουσες ακολουθίες στοιχείων από το X στο **A** και από το Υ στο **B** είναι τα ίδια.*

(c)(Θεώρημα Αυτομορφισμού):Έστω f να είναι ένας τακτομορφισμός του X στο X.Τότε f μπορεί να επεκταθεί μοναδικά σε έναν αυτομορφισμό του D(X) στο D(X).

*(d)(Θεώρημα Στοιχειώδους Εμφύτευσης):Έστω Υ να είναι ένα σύνολο δυσδιάκριτων στο **B** και τέτοιο ώστε τα σύνολα των τύπων που ικανοποιούνται από αύξουσες ακόλουθιες στοιχείων από το X και Υ να είναι τα ίδια.Έστω f να είναι μια 1-1 τακτομορφική εμφύτευση του X στο Υ ,τότε f μπορεί να επεκταθεί μοναδικά σε μια στοιχειώδη εμφύτευση f' από το D(X) στο D(Υ).Το range f' είναι H,όπου H είναι το range της f.*

*(e)(Θεώρημα Διαπίστωσης και Παράλειψης Τύπων):Έστω Υ,**B** ικανοποιούν την πρώτη πρόταση του (d).Υποθέτουμε επίσης ότι X και Υ είναι άπειρα.Τότε δοσμένου οποιασδήποτε περιγραφής $\Sigma(u_1,...,u_n)$ της L , D(X) πραγματοποιεί το Σ αν και μόνο αν D(Υ) πραγματοποιεί το Σ.*

Απόδειξη(Θεώρημα 4.2.4.):(a)Αρχικά παρατηρούμε ότι D(Υ) είναι ένα στοιχειώδες υπομοντέλο στο D(X).Πράγματι,αφού $\Upsilon\subseteq X$ τότε $D(\Upsilon)\subseteq D(X)$,όπου D(Υ) και D(X) είναι μοντέλα της θεωρίας T και αφού η T έχει εσωτερικές Skolem συναρτήσεις τότε από πρόταση 4.1.4. έχουμε $D(\Upsilon)\preceq D(X)$.Από υπόθέση γνωρίζουμε ότι X είμαι σύνολο δυσδιάκριτων στο **A** και αφού $\Upsilon\subseteq X$ τότε είναι ξεκάθαρο ότι οι αύξουσες ακολουθίες από το Υ ικανοποιούν τους ίδιους τύπους που ικανοποιούν και οι αύξουσες ακολουθίες από το X.Άρα Υ είναι ένα σύνολο δυσδιάκριτων στο D(Υ).

(b)Έστω Σ να είναι το σύνολο όλων των τύπων $\varphi(u_1,...,u_n)$ της L που ικανοποιούνται από αύξουσες ακολουθίες $x_1 <...< x_n$ του X.Σε μια επέκταση $L'=L\cup\{ c_y : y\in Y \}$ της L,έστω Σ' να είναι το σύνολο όλων των προτάσεων $\varphi(c_{y_1},...,c_{y_n})$,όπου $\varphi\in\Sigma$ και $y_1 <...< y_n$ στο Υ.Αφού X είναι άπειρο από το Λήμμα 4.2.2. έχουμε ότι Σ' είναι συνεπής .Άρα υπάρχει μοντέλο **B** με $\Upsilon\subseteq B$ τέτοιο ώστε Υ να είναι ένα σύνολο δυσδιάκριτων στο **B**.

(c)H απόδειξη του είναι απόρροια του (d),άρα θα απόδείξουμε το (d).

(d)Κάθε στοιχείο $y \in H(X)$ είναι παραγόμενο από κάποιο όρο $t(u_1,...,u_n)$ και κάποια στοιχεία $x_1,...,x_n$ του X.Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο όρος t και τα στοιχεία x_i από το X μπορούν να επιλεχθούν έτσι ώστε το t να έχει ακριβώς τις μεταβλητές $u_1,...,u_n$ ελεύθερες ,$x_1 <...< x_n$,και $y=t(x_1,...,x_n)$.(Αυστηρά μιλώντας,θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το $t[x_1,...,x_n]$ για την τιμή του όρου t στα $x_1,...,x_n$.Θα αφήσουμε τις τετραγωνικές παρενθέσεις και θα δεχθούμε ότι t είναι μια συνάρτηση).Θα αναφερόμαστε σε αυτό ως μια συνήθης αναπαράσταση του y στο D(X).Έστω $y=t(x_1,...,x_n)$ να είναι μια συνήθης αναπαράσταση του y.Ορίζουμε $f'(y)=t(f(x_1),...,f(x_n))$.

Πρώτα δείχνουμε ότι f' είναι καλά ορισμένο.Υποθέτουμε ότι $t'(z_1,...,z_m)$ είναι μια αλλή συνήθης αναπαράσταση.Τότε στο D(X) έχουμε $t'(x_1,...,x_n)= =t'(z_1,...,z_m)$.Έστω $u_1 <...< u_l$ να είναι μια λίστα από το σύνολο $\{x_1,...,x_n,z_1,...,z_m\}$ σε αύξουσα διάταξη.Τότε θα εκφράσουμε την ισότητα $t'(x_1,...,x_n)=t'(z_1,...,z_m)$ με έναν τύπο φ σε όρους από τους $u_1,...,u_l$,έτσι $D(X) \models \varphi(u_1,...,u_l)$.Από υπόθεση ,$D(\Upsilon) \models \varphi(f(u_1),...,f(u_n))$.Από αυτό ακολουθεί ότι $t'(f(x_1),...,f(x_n))= =t'(f(z_1),...,f(z_m))$ στο $D(\Upsilon)$.

Έστω $\varphi(u_1,...,u_l)$ να είναι οποιοσδήποτε τύος στο L,και έστω $y_1,...,y_l$ να είναι τέτοια ώστε $D(X) \models \varphi(y_1,...,y_l)$.Ας πάρουμε τις συνήθειες αναπαραστάσεις των $y_1,...,y_l$ οι οποίες δίνονται ,ας πούμε,από τα $t_1,...,t_l$ μαζί με μια ακολουθία από γεννήτορες $x_1 <...< x_n$ από το X.Θεωρούμε ότι κάθε t_i όταν εφαρμόζεται σε μια κατάλληλη υπακολουθία των $x_1 <...< x_n$ δίνει y_i.Μπορούμε να βρούμε ένα τύπο ψ να περιέχει τους όρους $t_1,...,t_l$ και τις μεταβλητές $u_1,...,u_n$ τέτοιες ώστε:$D(X) \models \varphi[y_1,...,y_l]$ αν και μόνο αν $D(X) \models \psi[x_1,...,x_l]$.

Επίσης πάλι έχουμε $D(\Upsilon) \models \psi[f(x_1),...,f(x_l)]$.Άρα εξετάζοντας τη μορφή του ψ βλέπουμε ότι $D(\Upsilon) \models \varphi[f'(y_1),...,f'(y_l)]$.Έτσι η f' είναι ισομορφισμός.Αν $z \in H(\text{range } f)$,τότε υπάρχει μια συνήθη αναπαράσταση $z=t(y_1,...,y_m)$ με $y_1,...,y_m$ στο range της f.Τότε f' απεικονίζει το στοιχείο $t(x_1,...,x_n)$ του H(X) στο z.Έτσι f' είναι στο H(range της f) και το αποτέλεσμα του (d) προκύπτει απο το (a).Είναι αρκετά εύκολο να δείξουμε ότι f' είναι μοναδική.Πράγματι, με επαγωγή θα δείξουμε ότι αν f' επεκτείνει την f και είναι ισομορφισμός τότε για κάθε $t(u_1,...,u_n)$ και $x_1,...,x_n \in X$: $f'(t(x_1,...,x_n))=f(t(x_1,...,x_n))$. Επείδη f,f' είναι ισομορφισμοί αν c είναι σταθερά τότε $f'(c)=f(c)$.Αν $t=g(t_1,...,t_n)$,όπου $t_1,...,t_n$ είναι όροι για τους οποίους ισχύει η υπόθεση της επαγωγής,τότε

$f'(g(t_1(x_1,...,x_n),...,t_n(x_1,...,x_n)))=g(f'(t_1(x_1,...,x_n),...,f'(t_n(x_1,...,x_n))))=$
$=g(f(t_1(x_1,...,x_n),...,f(t_n(x_1,...,x_n))))$(λόγω υπόθεση της επαγωγής)$=$
$=f(g(t_1(x_1,...,x_n),...,t_n(x_1,...,x_n)))$,άρα το ζητούμενο αποδείχθηκε.

(e)Έστω X,Υ,D(X),D(Υ) ικανοποιούν τις υποθέσεις του (e).Υποθέτουμε ότι $z_1,...,z_n$ στο H(X) πραγματοποιούν το Σ στο D(X).Έστω ότι $z_1,...,z_n$ έχουν τις συνήθεις αναπαραστάσεις στο D(X) και ας θεωρήσουμε ότι σε αυτές τις αναπαραστάσεις το πολύ οι γεννήτορες $x_1 <...< x_m$ από το X περιλαμβάνονται.Έστω f να είναι μια οποιαδήποτε απεικόνιση που διατηρεί τη διάταξη από το $x_1 <...< x_m$ στο $y_1 <...< y_m$ στο Υ.Τότε από (d),$D(\{x_1,...,x_m\})\cong D(\{y_1,...,y_m\})$ από την απεικόνιση f'.Έτσι η n-άδα των στοιχείων $f'(z_1),...,f'(z_n)$ του $D(\{ y_1,...,y_m\})$ πραγματοποιεί το Σ.Αφού $D(\{ y_1,...,y_m\})\preceq D(\Upsilon)$,από το (a) αφού $\{ y_1,...,y_m\} \subseteq \Upsilon$,βλέπουμε ότι $f'(z_1),...,f'(z_n)$ πραγματοποιεί το Σ επίσης στο D(Υ).Η άλλη κατεύθυνση γίνεται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο,αφού ξεκινάμε υποθέτοντας ότι $z_1,...,z_n$ στο H(Υ) πραγματοποιούν το Σ στο D(Υ),και εργαζόμαστε αναλόγως και καταλήγουμε ότι τα $f''(z_1),...,f''(z_n)$ πραγματοποιούν το Σ επίσης στο D(X),όπου f' η αντίστοιχη απεικόνιση που διατηρεί τη διάταξη από το $y_1 <...<y_n$ στο $x_1 <...<x_n$ στο X και f' είναι η απεικόνιση που προκύπτει απο το (d). $\dashv$

Κάποιες από τις εφαρμογές για την κατασκευή μοντέλων παραγόμενα απο δυσδιάκριτα δίνονται παρακάτω.

Πόρισμα 4.2.5. *Έστω L μια αριθμήσιμη γλώσσα και έστω T να είναι μια θεωρία στην L με άπειρα μοντέλα.Τότε υπάρχει μια αριθμήσιμη συλλόγη Δ από περιγραφές της L τέτοια ώστε T να έχει αυθαίρετα μεγάλα μοντέλα τα οποία πραγματοποιούν μόνο αυτές τις περιγραφές στο Δ.*

Απόδειξη(Πόρισμα 4.2.5.):Αρχικά επεκτείνουμε τη γλώσσα L στην L' και την T σε μια θεωρία T' στην L' με εσωτερικές Skolem συναρτήσεις.Η T' ακόμα έχει άπειρα μοντέλα.Έστω X να είναι ένα από τα σύνολα δυσδιάκριτων στο D(X),όπου D(X) είναι ένα μοντέλο του T' και η διάταξη $<$ στο X είναι από το ω.Τότε αφού L' είναι αριθμήσιμη ,D(X) είναι ξανά αριθμήσιμο.Έτσι το D(X) πραγματοποιεί το πολύ έναν αριθμήσιμο αριθμό τύπων της L'.Αν Υ είναι ένα άπειρο σύνολο δυσδιάκριτων στο D(Υ) τέτοιο ώστε αύξουσες ακολουθίες από το Υ ικανοποιούν τους ίδιους τύπους όπως και αύξουσες ακολουθίες από X ,τότε D(Υ) πραγματοποιεί το πολύ αυτούς τους τύπους της L' που πραγματοποιούνται στο D(X).Οι μειώσεις των D(X) και D(Υ) στην L είναι και τα δύο μοντέλα της T και πραγματοποιούνται ακριβώς τις ίδιες περιγραφές. $\dashv$

Πόρισμα 4.2.6. *Κάθε άπειρο μοντέλο έχει στοιχειώδη επέκταση με αυθαίρετα μεγάλες ομάδες από αυτομορφισμούς.*

Απόδειξη(Πόρισμα 4.2.6.):Έστω $\mathbf{A}$ να είναι ένα άπειρο μοντέλο για την L,και έστω $\mathbf{A}^*$ να είναι μια επέκταση του $\mathbf{A}$ της οποίας η θεωρία έχει εσωτερικές Skolem συναρτήσεις.Έστω T να είναι η θεωρία δομής του $\mathbf{A}^*$ στην γλώσσα $L^* \cup \{ c_a : a \in A \}$.Η T είναι μια θεωρία με εσωτερικές Skolem συναρτήσεις,και η T έχει άπειρα μοντέλα $(\mathbf{A}^*,a)_{a\in A}$.Έστω X να είναι ένα σύνολο από δυσδιάκριτα στο D(X),το οποίο είναι μοντέλο του T.Τότε η μείωση του D(X) στη γλώσσα L είναι μια στοχειώδης επέκταση του $\mathbf{A}$ με τουλάχιστον τόσους πολλούς αυτομορφισμούς όσοι τακτομορφισμοί στο X,αφού από το Θεώρημα 4.2.4.(c) έχουμε οποιοσδήποτε τακτομορφισμός από το X στο X επεκτείνεται μοναδικά σε ένα αυτομορφισμό του D(X) στο D(X). $\dashv$

Πόρισμα 4.2.7. *Έστω L να είναι μια αριθμήσιμη γλώσσα και έστω T να είναι μια θεωρία στην L με άπειρα μοντέλα.Τότε για κάθε άπειρο πληθάριθμο α,η T έχει ένα μοντέλο $\mathbf{A}$ πληθαρίθμου α τέτοιο ώστε για κάθε υποσύνολο $B\subseteq A$ το εκτεταμένο μοντέλο $(\mathbf{A},b)_{b\in B}$ πραγματοποιεί το πολύ $|B| \cup \omega$ περιγραφές στην εκτεταμένη γλώσσα $L\cup \{ c_b : b \in B \}$.*

Απόδειξη(Πόρισμα 4.2.7.):Επεκτείνουμε την T σε μια θεωρία T' η οποία έχει εσωτερικές Skolem συναρτήσεις σε μια εκτεταμένη γλώσσα L'.Έστω $<X,< >$ να είναι ένα οριακά διατεταγμένο σύνολο τάξης τύπου α,και έστω $\mathbf{A}'$=D(X) να είναι ένα μοντέλο της T' στο οποίο το X είναι ένα σύνολο δυσδιάκριτων.Τότε το $\mathbf{A}'$ έχει δύναμη α,επείδη L' είναι ακόμα αριθμήσιμο.Έστω $B\subseteq A$.Επιλέγουμε μια συνήθη αναπαράσταση για κάθε $b\in B$,και έστω Υ να είναι το σύνολο όλων των $y\in X$ τα οποία εμφανίζονται σε μια από αυτές τις συνήθεις αναπαραστάσεις.Τότε $|\Upsilon| \leq |B| \cup \omega$.Καλούμε δύο ακολουθίες $x_1 <...<x_n$ και $y_1 <...<y_n$ ισοδύναμες στο Υ αν και μόνο αν για όλα τα $k\leq n$ και

όλα τα $z \in \Upsilon$,έχουμε $x_k \neq z, y_k \neq z$,και $x_k < z$ αν και μόνο αν $y_k < z$.Η μορφή της εκτεταμένης γλώσσας είναι $L' = L \cup \{ c_z : z \in Y \}$.Οποτεδήποτε τα $x_1 < ... < x_n$ και $y_1 < ... < y_n$ είναι ισοδύναμα στο Υ,ικανοποιούν τους ίδιους τύπους στο εκτεταμένο μοντέλο $(\mathbf{A}', z)_{z\in\Upsilon}$.Αυτό ακολουθεί ότι για κάθε όρο $t(u_1, ..., u_n)$ της L',τα δύο στοιχεία $t(x_1, ..., x_n)$ και $t(y_1, ..., y_n)$ πραγματροποιούν την ίδια περιγραφή στο μοντέλο $(\mathbf{A}', z)_{z\in\Upsilon}$,άρα επίσης στο μοντέλο $(\mathbf{A}', b)_{b\in B}$.Έστω $\mathbf{A}$ να είναι η μείωση του $\mathbf{A}'$ στο L.Τότε,οποτεδήποτε τα $x_1 < ... < x_n$ και $y_1 < ... < y_n$ είναι ισοδύναμα στο Υ, τα δύο στοιχεία $t(x_1, ..., x_n)$ και $t(y_1, ..., y_n)$ πραγματοποιούν την ίδια περιγραφή στο μοντέλο $(\mathbf{A}', b)_{b\in B}$.Ωστόσο,υπάρχουν το πολύ $|\Upsilon| \cup \omega$ μη ισοδύναμες n-άδες στο Υ,επείδη αν γράψουμε
x'=είναι το ελάχιστο $z \in \Upsilon$ τέτοιο ώστε $x < z$ ή
x'=άπειρο αν $\Upsilon < x$
τότε βλέπουμε ότι $x_1 < ... < x_n$ και $y_1 < ... < y_n$ είναι ισοδύναμα στο Υ αν και μόνο αν $x_1' = y_1', ..., x_n' = y_n'$,άρα για τις μη ισοδύναμες n-άδες στο Υ ισχύει ότι $x_1' \neq y_1', ..., x_n' \neq y_n'$,και το θέμα είναι πόσες n-άδες $x_1' < ... < x_n'$ οι οποίες δεν είναι ίσες μεταξύ τους,και λόγου αυτού καταλήγουμε ότι υπάρχουν το πόλυ $|\Upsilon| \cup \omega$ μη ισοδύναμες n-άδες στο Υ.Επιπλέον,κάθε στοιχείο του A είναι ίσο με κάποιο όρο $t(x_1, ..., x_n)$ στο μοντέλο $(\mathbf{A}, z)_{z\in\Upsilon}$ με $x_1 \notin \Upsilon, ..., x_n \notin \Upsilon$.Επίσης υπάρχουν το πολύ $|\Upsilon| \cup \omega$ όροι στη γλώσσα L' αυτού του μοντέλου.Αυτό ακολουθεί ότι το μοντέλο $(\mathbf{A}, b)_{b\in B}$ πραγματοποιεί το πολύ $|\Upsilon| \cup \omega \leq$
$\leq |B| \cup \omega$ περιγραφές. $\dashv$

Βιβλιογραφία

[1] C. C. CHANG, H. J. KEISLER , *MODEL THEORY*, 1973

[2] YIANNIS MOSCHOVAKIS, Καθηγητής U.C.L.A, *LECTURE NOTES IN LOGIC*, March 29,2014

[3] Αλέξανδρος Γεωργακόπουλος, Διπλωματική Εργασία, *Το Θεώρημα Ramsey,επεκτάσεις του και εφαρμογές στη Συναρτησιακή Ανάλυση*, 2011