ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΗΣ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΜΕΤΑΛΛΙΚΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

ΑΝΤΟΧΗ ΘΛΙΒΟΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΥΠΟ ΑΞΟΝΙΚΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ ΔΥΝΑΜΗ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΔΗΜΟΣΘΕΝΗ ΣΜΠΑΡΟΥΝΗ

Αθήνα, Νοέμβριος 2010

Επιβλέπων Καθηγητής: Γεώργιος Ιωαννίδης

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Στην παρούσα εργασία μελετάται η ελαστική ευστάθεια αξονικά θλιβόμενων ράβδων σταθερής διατομής υπό μεταβαλλόμενη κατά μήκος του άξονά των αξονική θλίψη. Αρχικά διατυπώνεται η εξίσωση λυγισμού αμφιαρθρωτών ράβδων υποκείμενων σε συγκεντρωμένο αξονικό θλιπτικό φορτίο στο άκρο τους και επιπλέον ενδιάμεσα φορτία ίδιας τιμής με του άκρου. Εξάγονται αριθμητικά αποτελέσματα για διαφορετικό αριθμό ενδιάμεσων φορτίων, τα οποία είναι ισαπέχοντα, ενώ τα φατνώματα έχουν την ίδια δυσκαμψία. Η περίπτωση αυτή είναι μια αρκετά καλή προσομοίωση για τους φορείς-πλαίσια σύγχρονων εργοστασιακών κτιρίων (π.χ. κτίρια ναυπηγείων).

Σε τέτοια πλαίσια σχετικά μεγάλου ύψους, στα οποία λειτουργούν βαριές γερανογέφυρες, τα υποστυλώματα μορφώνονται μέχρι τη στάθμη εδράσεως ως σύνθετα, προκειμένου να εξασφαλιστεί η απαιτούμενη δυσκαμψία. Το εσωτερικό κύριο μέλος έχει σταθερή διατομή, γι’ αυτό στην προσομοίωση τα φατνώματα θεωρήθηκαν ίδιας δυσκαμψίας. Το κατακόρυφο φορτίο της γερανογέφυρας προσομοιώνεται με το φορτίο που ασκείται στο άκρο του μέλους. Η πρόσθετη, αυξανόμενη κατά βήματα προς τη βάση του υποστυλώματος, αξονική θλιπτική δύναμη που προέρχεται από τα συνυπάρχοντα οριζόντια φορτία (πλευρική ώθηση γερανογέφυρας, ανεμοπίεση), είναι κατ’ αντιστοιχία τα ενδιάμεσα θλιπτικά φορτία. Το μέλος αυτό για περίπτωση λυγισμού εκτός του επιπέδου του πλαισίου (περί τον ισχυρό άξονα αδράνειας της διατομής) μπορεί να θεωρηθεί (σε συνδυασμό με τη διαμόρφωση της λεπτομέρειας έδρασής του) ως αμφιαρθρωτό στοιχείο. Οι παραδοχές που έγιναν χάριν απλοποίησης είναι η ισότητα μεταξύ των ασκούμενων φορτίων, καθώς και τα ισαπέχοντα διαστήματα μεταξύ των φορτίων.

Με αφορμή λοιπόν την περίπτωση αυτή, μελετάται η περίπτωση αμφιαρθρωτού υποστυλώματος με σταθερή διατομή και πραγματοποιείται η εύρεση του κρίσιμου φορτίου λυγισμού για ένα έως τρία ισαπέχοντα θλιπτικά φορτία. Στη συνέχεια πραγματοποιείται η λύση για περισσότερα ισαπέχοντα θλιπτικά φορτία. Λόγω του μεγάλου πλήθους αγνώστων-εξισώσεων και της πινακοποίησης του προβλήματος, η

διαδικασία αυτή πραγματοποιήθηκε σε ηλεκτρονικό υπολογιστή με τη βοήθεια μαθηματικού προγράμματος, το οποίο αναλύεται στην εργασία. Αριθμητικά αποτελέσματα εξάγονται για μέχρι και οκτώ ίσα και ισαπέχοντα μεταξύ τους θλιπτικά φορτία.

Στην εργασία χρησιμοποιήθηκε η (γραμμική) διαφορική εξίσωση λυγισμού τετάρτης τάξης, η οποία προκύπτει από τη θεώρηση στο στοιχειώδες τμήμα dx του φορέα. Είναι λοιπόν ανεξάρτητη των συνοριακών συνθηκών. Ακολούθως, λαμβάνονται οι εκάστοτε κινηματικές (γεωμετρικές) και φυσικές (που αφορούν τα εντατικά μεγέθη) συνοριακές συνθήκες, οι οποίες μεταφράζονται μαθηματικά σε ένα σύστημα n εξισώσεων με n αγνώστους. Από αυτές προκύπτει μετά από επεξεργασία ένας πίνακας, του οποίου η ορίζουσα (ορίζουσα ευστάθειας) πρέπει να ισούται με μηδέν προκειμένου το σύστημα να έχει μη τετριμμένη (δηλαδή μη μηδενική) λύση. Από το μηδενισμό της ορίζουσας ευστάθειας προκύπτει η εξίσωση λυγισμού, από τη λύση της οποίας λαμβάνεται το κρίσιμο φορτίο λυγισμού. Εν συνεχεία εξάγονται και τα ισοδύναμα μήκη λυγισμού, δηλαδή το μήκος που θα απαιτείτο για να λυγίσει μια αμφιέρειστη ράβδος θλιβόμενη ολόκληρη από κρίσιμο φορτίο λυγισμού το οποίο ασκείται στο άκρο της.

Στο τέλος της εργασίας επιχειρείται να δοθεί μια προσεγγιστική λύση με τη θεώρηση συνεχούς φορτίου, μεταβαλλόμενου κατά μήκος της ράβδου. Με τη θεώρηση αυτή αλλάζει η διαφορική εξίσωση λυγισμού τετάρτης τάξης από σταθερών συντελεστών σε μη σταθερούς. Η επίλυση της εξίσωσης αυτής είναι πολύπλοκη, και για το λόγο αυτό επιχειρούνται κάποιες προσεγγίσεις. Το αποτέλεσμα είναι απλούστερο στη συνέχεια καθώς ο αριθμός των συνοριακών συνθηκών είναι μικρότερος. Στόχος είναι να βρεθεί μια ικανοποιητική προσέγγιση κατά τη θεώρηση του ασκούμενου φορτίου, η οποία δηλαδή θα δίνει αποτελέσματα για το κρίσιμο φορτίο με ανεκτή απόκλιση από τις ακριβείς τιμές.

Το θέμα της διπλωματικής αυτής εργασίας, η οποία εκπονήθηκε κατά το τελευταίο μου εξάμηνο στη Σχολή Πολιτικών Μηχανικών του Ε.Μ.Π., μου υποδείχθηκε από τον Καθηγητή κ. Γ. Ιωαννίδη. Στο σημείο αυτό θέλω να του αποδώσω τις θερμότερες ευχαριστίες μου για τη συνεχή βοήθεια και καθοδήγησή του. Επίσης, ευχαριστώ

θερμά τον καθηγητή μου, κ. Τάσο Αβραάμ, για την πολύτιμη βοήθειά του κατά την εκπόνηση αυτής της διπλωματικής εργασίας.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ευστάθεια ενός σώματος θεωρείται η ιδιότητά του να αναπτύσσει δυνάμεις ή ροπές οι οποίες τείνουν να το επαναφέρουν στην κατάσταση ισορροπίας του όταν αυτή διαταράσσεται. Απλουστευτικά, η δυνατότητά του αντικειμένου να στέκεται ή να αντέχει χωρίς διαφοροποίηση της θέσης του ή αλλαγή στο υλικό του. Παρακάτω αναφέρονται κάποιες σημαντικές πτυχές των ορισμών αυτών.

- Το σώμα βρίσκεται αρχικά σε κατάσταση ισορροπίας.
- Εφαρμόζεται μια διατάραχη στο σώμα κατά την αρχική κατάσταση (εξετάζεται η μορφή της κίνησής του, φραγμένη ή μη).
- Υπάρχει ανταπόκριση του σώματος σε αυτή τη διαταραχή.
- Προσδιορίζεται η συμπεριφορά του σώματος η οποία ακολουθεί τη διαταραχή.

Ο όρος «λυγισμός» δηλώνει την απώλεια της ευστάθειας ενός θλιβομένου στοιχείου. Οι κατασκευές ανθίστανται στα φορτία με το υλικό και τη γεωμετρία τους (μορφή διατομής, τρόποι στήριξης). Οι επιπτώσεις του λυγισμού είναι κυρίως γεωμετρικές: πραγματοποιούνται τόσο μεγάλες μετατοπίσεις στην κατασκευή ώστε μεταβάλλεται το σχήμα της. Το φορτίο στο οποίο συμβαίνουν αυτές οι αλλαγές στη γεωμετρία είναι το φορτίο λυγισμού.

Η ευστάθεια είναι συνδεδεμένη με το όνομα του Euler. Ο Euler το $18^{ο}$ αιώνα μελέτησε την ευστάθεια πριν εδραιωθεί η θεωρία της ελαστικότητας χρησιμοποιώντας αξιόλογα εργαλεία τα οποία ανέπτυξαν οι James και Daniel Bernoulli. Ο James Bernoulli ασχολήθηκε με το πρόβλημα του βέλους ελαστικά καμπτόμενης ράβδου και ανακάλυψε ότι η αντίσταση οφείλεται στην επιμήκυνση και επικόλληση των διαμήκων ινών. Οι θεωρητικές του παρατηρήσεις συνέδεσαν τις ροπές με την καμπυλότητα της παραμορφωμένης ράβδου. Ο Daniel Bernoulli πρότεινε στον Euler πώς να καταλήξει σε μια διαφορική εξίσωση ισορροπίας της ράβδου. Ο Euler ακολούθησε το βήμα αυτό και προχώρησε περαιτέρω στην ταξινόμηση των σχέσεων. Παρατήρησε ότι ένας θλιβόμενος βραχύς πρόβολος υπό το ίδιο βάρος του η για φορτίο P εφαρμοζόμενο στο άκρο του δημιουργούσε

πλήρη βράχυνση χωρίς κάμψη, ενώ σε ένα λυγηρό πρόβολο το θλιπτικό φορτίο επέφερε και κάμψη. Το οριακό φορτίο στο οποίο μεταβάλλεται η συμπεριφορά του προβόλου προσδιορίσθηκε ως $Pcr = EI\left(\frac{\pi}{2L}\right)^2$ όπου Ε είναι το μέτρο ελαστικότητας, I η ροπή αδράνειας της διατομής και L το μήκος του προβόλου. Ο Lagrange επίσης μελέτησε το πρόβλημα.

Τα κατασκευαστικά υλικά στην εποχή του Euler ήταν το ξύλο κι η πέτρα, με χαμηλές εντοχές σε ελαστικές παραμορφώσεις, οπότε ήταν απαραίτητες οι ογκώδεις κατασκευές. Η ευστάθεια δεν αποτελούσε πρόβλημα για τέτοιες κατασκευές και η κατασκευή του Euler δεν είχε πρακτική εφαρμογή μέχρι τα 1850, όταν λόγω της κατασκευής σιδηρών σιδηροδρομικών γεφυρών το θέμα της ευστάθειας αναδείχθηκε σε σημαντικό τομέα της ασφάλειας της κατασκευής.

Κατά το δεύτερο μισό του 19^{ου} αιώνα οι μελέτες του Euler για τα υποστυλώματα επεκτάθηκαν και σε άλλες μορφές κατασκευών. Το 1859 ο Bresse εξέδωσε την πρώτη μελέτη για το λυγισμό ελαστικού δακτυλίου υπό ανομοιογενή ακτινική θλίψη. Τα ορθογωνικά πλαίσια αποτέλεσαν αντικείμενο έρευνας για πρώτη φορά το 1893. Η πρώτη γενική θεωρία ελαστικής ευστάθειας εκδόθηκε το 1889 από τον Bryan. Ο Bryan ανακάλυψε ότι το θεώρημα της μοναδικότητας της λύσης στην ελαστικότητα δεν ισχύει σε 2 περιπτώσεις:

1. Όταν εμφανίζονται σχετικά μεγάλες μετατοπίσεις για μικρές τάσεις.
2. Όταν ένα πεδίο μετατοπίσεων είναι όμοιο με την κίνηση ενός άκαμπτου σώματος. Τέτοια είναι η περίπτωση ενός σφαιρικού κελύφους το οποίο συμπιέζεται μέσα σε κυκλικό δακτύλιο ελαφρώς μικρότερης διαμέτρου.

Σύμφωνα με τον Bryan όποτε υπάρχουν περισσότερες από μία καταστάσεις ισορροπίας, το κριτήριο για να αποφασιστεί ποια θα ακολουθηθεί από την κατασκευή δίνεται από την ελάχιστη ενέργεια.

Η θεωρία της διακλάδωσης αναπτύχθηκε απο τον Henri Poincare και, παρότι δεν είχε αντίκτυπο στις μελέτες ευστάθειας των σύγχρονών του, ήταν η βάση πάνω στην οποία στηρίχθηκε η σύγχρονη θεωρία της ευστάθειας. Ο Lapyunov έδωσε

έναν αυστηρά μαθηματικό ορισμό της ευστάθειας χρησιμοποιώντας ένα δυναμικό κριτήριο, το οποίο θεωρείται ακόμα ένα γενικό κριτήριο ευστάθειας.

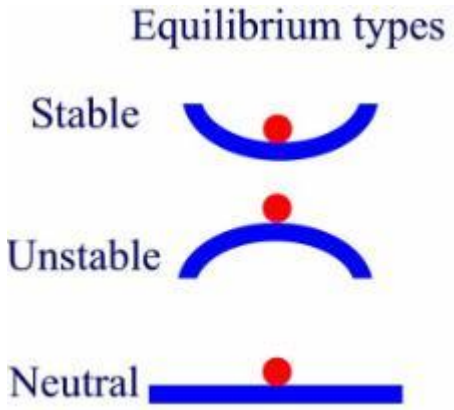
Στο πρώτο μισό του 20ου αιώνα, εντοπίστηκαν και ερευνήθηκαν πολλά προβλήματα των κατασκευών που υπόκεινται σε λυγισμό. Ο Timoshenko το 1936 αποτυπώνει μια επιτομή των έως τότε γνωστών και θεωρούμενων ως ελαστική ευστάθεια προβλημάτων. Βασίστηκε σε θεωρήσεις ισορροπίας και υπολόγισε μόνο το φορτίο λυγισμού με αυτόν τον τρόπο. Ενδιαφέρον για μεταλυγισμική συμπεριφορά ανιχνεύεται το 1937 σχετικά με το σχεδιασμό αεροπλάνων. Σε αυτό το πεδίο εμφανίζεται ως αποτέλεσμα των σοβαρών ανακολουθιών μεταξύ θεωρητικών προβλέψεων και πειραματικών αποτελεσμάτων σε ό,τι αφορά τα φορτία λυγισμού κελυφών.

Από τη δουλειά του νεαρού Ολλανδού W.T. Koiter, ο οποίος χρησιμοποίησε τη θεωρία της διακλάδωσης σε συνεχή συστήματα, προέκυψε αλλαγή στο μοντέλο. Λόγω του πολέμου η διατριβή του εκδόθηκε το 1945. Με τη νέα προσέγγιση η πληροφορία του κρίσιμου φορτίου κρίθηκε ανεπαρκής και ο Koiter ανέπτυξε μια ασυμπτωτική ανάλυση, η οποία του επέτρεψε να ακολουθήσει το μεταλυγισμικό δρόμο στα πρώιμα του στάδια. Το έργο του Koiter αγνοούνταν στις δυτικές χώρες για τα επόμενα 20 χρόνια, όταν και επανανακαλύφθηκε στο Harvard από τους Budianski και Hutchinson. Η πιο ενδιαφέρουσα ανασκόπηση της μεταλυγισμικής θεωρίας έγινε από τους Hutchinson και Koiter. Στην Αγγλία, οι Thompson, Sidwell και Chilver συνέβαλαν στη μελέτη ευστάθειας συστημάτων τα οποία προσδιορίζονταν σε όρους γενικευμένων συντεταγμένων ως τα 1960. Το 1963, στο University College London ξεκίνησε η μεγαλύτερη προσπάθεια έρευνας σε ένα και μόνο κέντρο, η οποία διήρκεσε σχεδόν 20 χρόνια. Ρώσοι επιστήμονες επίσης ενδιαφέρονταν για το πρόβλημα της μη γραμμικής ανάλυσης ευστάθειας, ιδιαίτερα δε ο Bolotin, ο οποίος επηρέασε σε μεγάλο βαθμό τη θεωρία ευστάθειας.

ΜΟΡΦΕΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

Η ευστάθεια απεικονίζεται στο χαρακτηριστικό παράδειγμα της σφαίρας σε καμπύλη επιφάνεια. Σε μια σφαίρα η οποία βρίσκεται αρχικά σε ισορροπία επί κοίλης διατομής, μια ελαφρώς αποκλίνουσα δύναμη θα μετακινήσει λίγο τη

σφαίρα αλλά, όταν σταματήσει η επιρροή της δύναμης, αυτή θα επιστρέψει στην αρχική της θέση. Η σφαίρα βρίσκεται σε ευσταθή ισορροπία. Αν η καμπύλη επιφάνεια είναι κυρτή, η σφαίρα θα απομακρύνεται συνεχώς και δε θα επιστρέψει ποτέ στην αρχική κατάσταση ισορροπίας. Η σφαίρα βρίσκεται δηλαδή σε ασταθή κατάσταση ισορροπίας. Εάν η δύναμη εφαρμοσθεί σε σφαίρα σε επίπεδη επιφάνεια, η σφαίρα θα μετακινηθεί σε μια νέα θέση ισορροπίας, στην οποία θα παραμείνει αφού αποσυρθεί η δύναμη. Σε αυτή την περίπτωση η σφαίρα θεωρείται ότι βρίσκεται σε ουδέτερη ισορροπία.



Εικόνα 1 Μορφές ισορροπίας

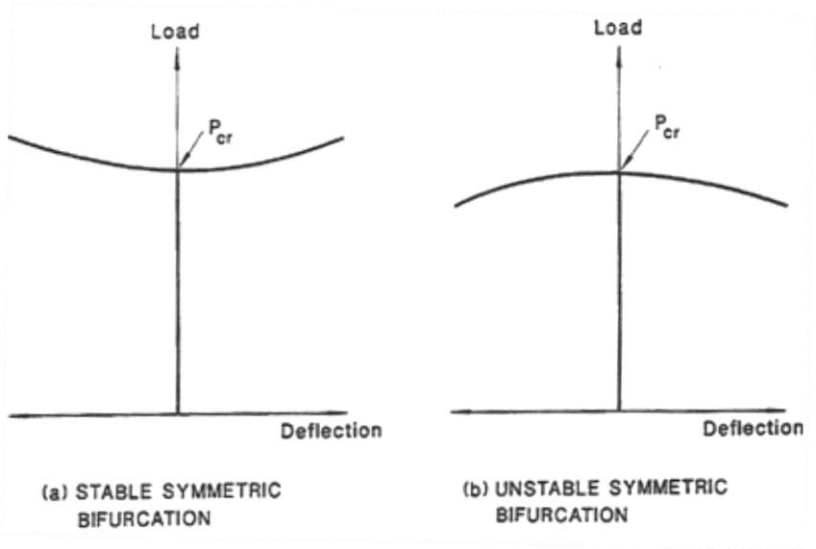
ΤΥΠΟΙ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ

Α. Αστάθεια μέσω Σημείου Διακλάδωσης

Η μορφή αυτή χαρακτηρίζεται από το γεγονός ότι όσο το θλιπτικό αυξάνει, το μέλος ή το σύστημα το οποίο συνήθως εκτρέπεται στην κατεύθυνση των ασκούμενων φορτίων, ξαφνικά εκτρέπεται σε διαφορετική κατεύθυνση. Το σημείο μετάβασης από τη συνήθη μορφή εκτροπής στη διαφοροποιημένη αναφέρεται ως σημείο διακλάδωσης της ισορροπίας. Το φορτίο στο σημείο διακλάδωσης ονομάζεται κρίσιμο φορτίο. Ο δρόμος ισορροπίας μέχρι τη διακλάδωση καλείται πρωτεύων ή κύριος δρόμος ισορροπίας ενώ μετά από αυτή λέγεται δευτερεύων η μεταλυγισμικός δρόμος ισορροπίας. Ανάλογα με τη φύση του μεταλυγισμικού δρόμου ισορροπίας, διακρίνονται δυο είδη διακλάδωσης:

1. **Συμμετρική Διακλάδωση**

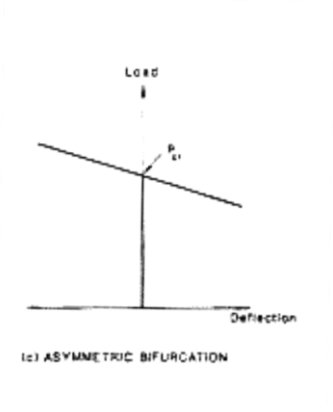
Στη συμμετρική διακλάδωση οι μεταλυγισμικοί δρόμοι είναι συμμετρικοί ως προς τον άξονα των φορτίων. Αν ο μεταλυγισμικός κλάδος είναι ανοδικός το σύστημα θεωρείται ότι εκτίθεται σε ευσταθή συμμετρική διακλάδωση. Σε αυτή την περίπτωση το φορτίο το οποίο απαιτείται για να διατηρηθεί η ισορροπία μετά το λυγισμό αυξάνεται όσο αυξάνεται το βέλος. Αν ο μεταλυγισμικός κλάδος είναι καθοδικός το σύστημα θεωρείται ότι εκτίθεται σε ασταθή συμμετρική διακλάδωση. Σε αυτή την περίπτωση το φορτίο το οποίο απαιτείται για να διατηρηθεί η ισορροπία μετά το λυγισμό μειώνεται όσο αυξάνεται το βέλος.



Εικόνα 2 Συμμετρική διακλάδωση

2. Ασύμμετρη Διακλάδωση

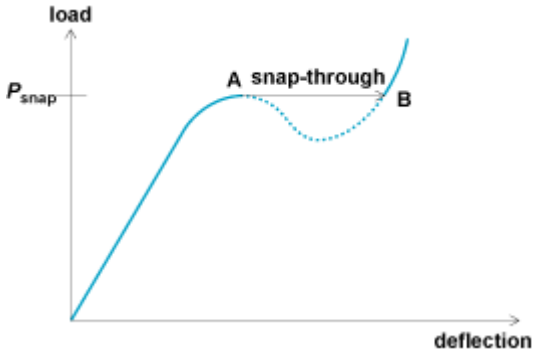
Στο σύστημα αυτό το φορτίο το οποίο απαιτείται για να διατηρηθεί η ισορροπία μετά το λυγισμό θεωρητικά μπορεί να αυξάνεται ή να μειώνεται ανάλογα με την κατεύθυνση προς την οποία εκτρέπεται το σύστημα μετά το λυγισμό. Πρακτικά η περίπτωση αυτή αφορά ασταθή ισορροπία οπότε ο ανοδικός μεταλυγισμικός κλάδος αποτελεί απλά μαθηματική λύση.



Εικόνα 3 Ασύμμετρη διακλάδωση

Β. Αστάθεια μέσω Οριακού Σημείου

Σε αυτόν τον τύπο αστάθειας υπάρχει μόνο ένας τρόπος εκτροπής από την αρχή της φόρτισης ως το οριακό ή μέγιστο φορτίο.



Εικόνα 4 Αστάθεια μέσω οριακού σημείου

Αντίθετα από την περίπτωση του ευσταθούς συμμετρικού σημείου διακλάδωσης που συνδέεται με ευσταθή μεταλυγισμικό δρόμο ισορροπίας, οι άλλες τρεις περιπτώσεις (συμμετρικό ασταθές σημείο διακλάδωσης, αντιμετρικό σημείο και οριακό κρίσιμο σημείο) συνδέονται με ακαριαίο λυγισμό.

Για τις περιπτώσεις συμμετρικού σημείου διακλάδωσης, η γραμμική ανάλυση δίνει συνήθως πολύ ικανοποιητικά αποτελέσματα λόγω της πολύ μικρής μετατόπισης στον προλυγισμικό κλάδο. Αντιθέτως, στις περιπτώσεις ασύμμετρου σημείου διακλάδωσης ή οριακού σημείου η γραμμική ανάλυση αποτυγχάνει να δώσει

ικανοποιητικά αποτελέσματα, λόγω μεγάλων μετατοπίσεων στον προλυγισμικό δρόμο.

Λυγισμός υποστυλώματος σταθερής διατομής και φορτίου

Οι λυγηρές αξονικά θλιβόμενες ράβδοι υπόκεινται σε έναν τύπο συμπεριφοράς γνωστό ως λυγισμό. Αν το φορτίο σε ένα τέτοιο μέλος είναι σχετικά μικρό, η αύξηση στο φορτίο προκαλέι μόνο αξονική βράχυνση στο μέλος. Μόλις, όμως, προσεγγιστεί ένα συγκεκριμένο φορτίο, το φορτίο λυγισμού, το μέλος ξαφνικά αποκλίνει πλευρικά. Αυτή η κάμψη προκαλεί μεγάλες παραμορφώσεις οι οποίες οδηγούν στην αστοχία του μέλους. Έτσι, το φορτίου λυγισμού αποτελεί κριτήριο σχεδιασμού για θλιβόμενα μέλη.

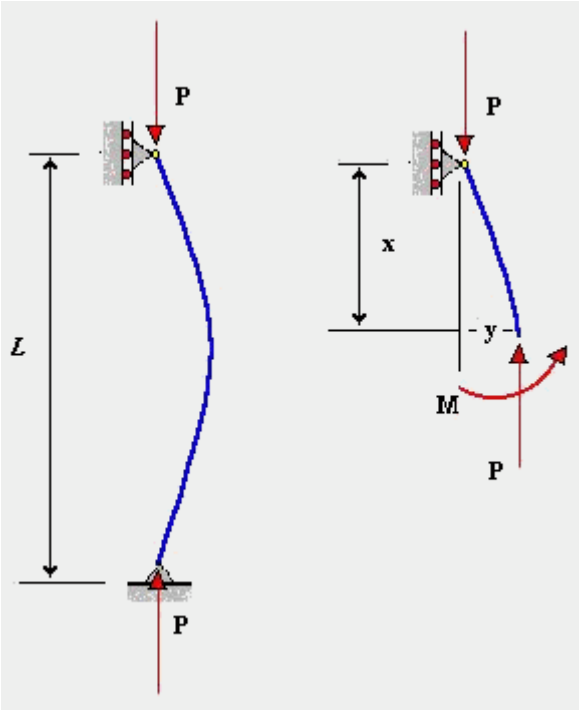
Τα εφελκυόμενα μέλη όπως και τα βραχέα συμπαγή υποστυλώματα αστοχούν όταν η φόρτιση φτάσει ένα όριο αντοχής του υλικού. Με δεδομένο το όριο αντοχής του υλικού είναι σχετικά απλός ο προσδιορισμός της αντοχής του μέλους. Ωστόσο, ο λυγισμός ως φαινόμενο δε σχετίζεται αποκλειστικά με την προβλέψιμη αντοχή του υλικού. Το επίπεδο θλίψης στο οποίο θα συμβεί εξαρτάται από πλήθος παραγόντων, στους οποίους συμπεριλαμβάνονται οι διαστάσεις του μέλους, ο τρόπος στήριξης και οι ιδιότητες του υλικού. Ο προσδιορισμός του φορτίου λυγισμού είναι ένα σχετικά περίπλοκο θέμα.

Ο λυγισμός ως φυσικό φαινόμενο εξηγείται από το βασικό νόμο της φύσης ότι οποιοδήποτε φυσικό φαινόμενο επιλέγει τον ευκολότερο δρόμο για να πραγματοποιηθεί. Το υποστύλωμα τείνει να υποβιβάσει το σημείο εφαρμογής του φορτίου. Σε σχετικά μικρά φορτία είναι πιο εύκολο αυτό να γίνει μέσω βράχυνσης παρά μέσω κάμψης. Καθώς το επιβαλλόμενο φορτίο αυξάνεται, είναι ευκολότερο για ένα λυγηρό υποστύλωμα να υποβιβάσει το φορτίο μέσω κάμψης παρά μέσω βράχυνσης, και αυτό λαμβάνει χώρα όταν το θλιπτικό φορτίο εξισωθεί με το φορτίο λυγισμού.

Το φορτίο λυγισμού, λοιπόν, είναι το οριακό φορτίο για το οποίο είναι δυνατή η αξονική θλίψη στην απαραμόρφωτη κατάσταση. Η μετάβαση από την ευθύγραμμη

στην παραμορφωμένη κατάσταση συμβαίνει επειδή η ευθύγραμμη μορφή παύει να είναι ευσταθής.

Λυγισμός του Υποστυλώματος Euler



Εικόνα 5 Το υποστύλωμα Euler

Ένα αξονικά θλιβόμενο μέλος συμπεριφέρεται με σχετικά περίπλοκο τρόπο. Επομένως η μελέτη των υποστυλωμάτων ξεκινά με ιδεατές συνθήκες, όπως αυτές του υποστυλώματος Euler. Το αξονικά θλιβόμενο μέλος έχει σταθερή διατομή και αποτελείται από ομογενές υλικό. Ακόμα ισχύουν οι εξής παραδοχές:

- Στα άκρα του μέλους υπάρχουν απλές στηρίξεις. Στο κατώτερο υπάρχει αμετακίνητη άρθρωση και στο ανώτερο κύλιση η οποία απαγορεύει την οριζόντια μετατόπιση.
- Το μέλος είναι τελείως ευθύγραμμο και το φορτίο εφαρμόζεται στον κεντρικό του άξονα.
- Το υλικό υπακούει στο νόμο του Hooke.
- Οι παραμορφώσεις y (η συνάρτηση της ελαστικής γραμμής του παραμορφωμένου μέλους) του μέλους είναι αρκετά μικρές ώστε ο όρος y'^2 να θεωρείται αμελητέος στην έκφραση της καμπυλότητας $\frac{y''}{[1+(y')^2]^{3/2}}$. Η

καμπυλότητα προσεγγίζεται επομένως ως η δεύτερη παράγωγος της ελαστικής γραμμής y’’.

Η εσωτερική ροπή σε απόσταση x από το άκρο είναι:

$$M_x = -EIy''$$

Και εξισώνοντας αυτην με την εξωτερικά επιβαλλόμενη ροπή P*y

$$Py + EIy'' = 0$$

Από την επίλυση προκύπτει το κρίσιμο φορτίο λυγισμού

$$P = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

Αυτό είναι το φορτίο Euler, στο οποίο η ράβδος ισορροπεί συγχρόνως στην ευθύγραμμη και την παραμορφωμένη κατάσταση. Είναι επίσης το ελάχιστο φορτίο στο οποίο το υποστύλωμα παύει να βρίσκεται σε ευσταθή ισορροπία.

Η συμπεριφορά του υποστυλώματος Euler συνοψίζεται ως εξής: έως το φορτίο Euler το υποστύλωμα πρέπει να παραμείνει ευθύγραμμο. Στο φορτίο Euler συναντάται μια διακλάδωση της ισορροπίας, δηλαδή το υποστύλωμα μπορεί είτε να παραμείνει ευθύγραμμο είτε να υποτεθεί ενα παραμορφωμένο σχήμα απροσδιορίστου μεγέθους. Αυτή η συμπεριφορά υποδεικνύει ότι στο φορτίο Euler υπάρχει μια κατάσταση ουδέτερης ισορροπίας και συνεπώς το φορτίο Euler υποδεικνύει τη μετάβαση από την ευσταθή στην ασταθή ισορροπία.

Οι ακριβές αυτές μέθοδοι καταλήγουν πολλές φορές σε μεγάλες και πολύπλοκες εξισώσεις (μεταβλητή διατομή, μεταβλητό αξονικό φορτίο, κλπ.), καθιστώντας εξαιρετικά δύσκολη την επίλυση του προβλήματος. Για το λόγο αυτό έχουν αναπτυχθεί διάφορες προσεγγιστικές μέθοδοι.

Μέθοδος Rayleigh-Ritz

Η μέθοδος αυτή θεωρεί συνάρτηση βέλους η οποία ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες. Για να είναι δυνατή η ισορροπία θα πρέπει το συνολικό δυναμικό να έχει στάσιμη τιμή στο κρίσιμο φορτίο. Η παράγωγος του συνολικού δυναμικού ως προς

την άγνωστη μεταβλητή της συνάρτησης του βέλους οδηγεί στην τιμή του κρίσιμου φορτίου.

Μέθοδος Galerkin

Όπως και στη μέθοδο Rayleigh-Ritz, η μέθοδος Galerkin χρησιμοποιεί πάλι συνάρτηση βέλους ικανοποιούσα τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος, η οποία όμως εισάγεται απευθείας στη διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξης.

Μέθοδος πεπερασμένων διαφορών

Η θλιβόμενη ράβδος χωρίζεται σε n τμήματα 0-1, 1-2, ..., n-1, n. Από την ισορροπία ροπών για κάθε θέση της ράβδου προκύπτει μια διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξης. Λαμβάνοντας τη δεύτερη παράγωγο του βέλους για κάθε φάτνωμα με τη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών και κάνοντας χρήση των συνοριακών συνθηκών προκύπτει ένα ομογενές σύστημα n-1 εξισώσεων. Ο μηδενισμός της ορίζουσας του συστήματος δίνει το κρίσιμο φορτίο.

Θεωρητικά αποτελέσματα-Κανονιστικές διατάξεις EC3

Μέσω της ακριβούς ή της όποιας προσεγγιστικής λύσης προσδιορίζονται κρίσιμα φορτία Ncr και στη συνέχεια η ανηγμένη λυγηρότητα $\bar{\lambda} = \sqrt{(\frac{N_{pl}}{N_{cr}})}$. Από τις καμπύλες στις οποίες παραπέμπει ο Κανονισμός και ανάλογα με τη γεωμετρία της διατομής υπολογίζεται ο μειωτικός συντελεστής x. Τέλος, το οριακό φορτίο όπως ορίζεται στον EC3. είναι ίσο με

$$N_{b,Rd} = xN_{pl.Rd} = \frac{xAf_y}{1{,}10}$$

Λυγισμός υποστυλώματος μεταβλητής διατομής ή φορτίου

Οι S. P. Timoshenko και J. M. Gere παρουσίασαν πρώτοι εργασία με τα κρίσιμα φορτία λυγισμού αξονικά θλιβόμενων προβόλων μεταβλητής διατομής από αξονικό φορτίο στο άκρο του προβόλου ή από διανεμημένο αξονικό φορτίο κατά μήκος του άξονα του. Ο G. Silver μελέτησε θλιβόμενα στοιχεία με τμηματικά μεταβλητή διατομή ενώ ο M. Abbasi εξέτασε την περίπτωση θλιβόμενου υποστυλώματος με

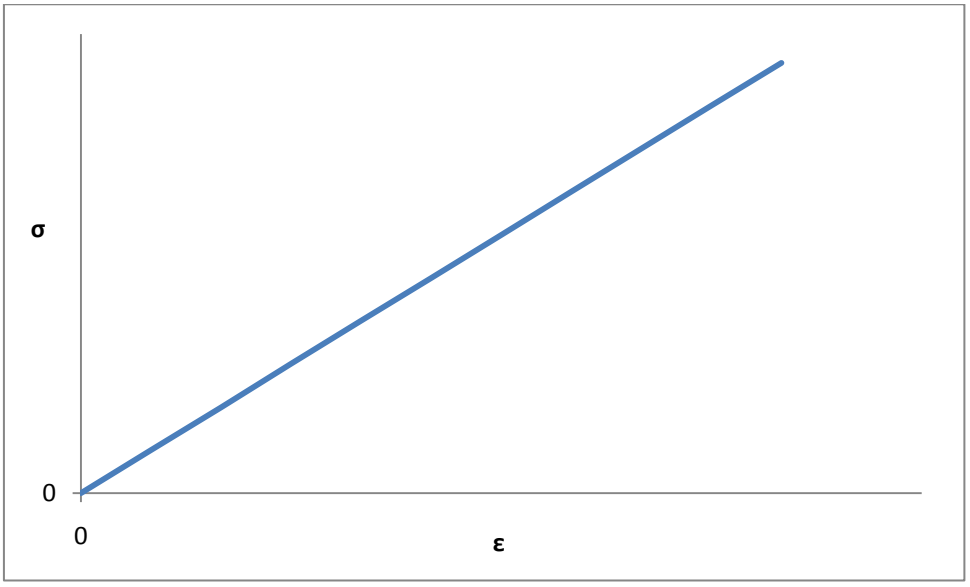
μεταβλητή διατομή και μεταβλητό αξονικό φορτίο. Οι H.H. Vaziri και J. Xie εξέτασαν την περίπτωση θλιβόμενου προβόλου τυχούσας μεταβλητής διατομής με τυχούσα συνάρτηση μεταβολής του αξονικού θλιπτικού φορτίου κατά μήκος του άξονα του προβόλου μέσω επαναληπτικής αριθμητικής επίλυσης με απευθείας ολοκλήρωση της διαφορικής εξίσωσης ισορροπίας (Runge-Kutta). Οι L. Qinsheng, C. Hong και L. Guiging μελέτησαν επίσης αξονικά θλιβόμενα στοιχεία για διάφορες περιπτώσεις μεταβλητής διατομής και μεταβλητού αξονικού φορτίου. Ο Ι. Ερμόπουλος προσδιόρισε κρίσιμα φορτία και ισοδύναμα μήκη λυγισμού θλιβόμενων μελών με ή χωρίς πρόσθετα θλιπτικά φορτία στο άνοιγμά τους σε επίπεδα πλαίσια με ή χωρίς μετάθεση. Τέλος, οι Ι. Ραυτογιάννης και Ι. Ερμόπουλος μελέτησαν θλιβόμενα υποστυλώματα μεταβλητής διατομής σε ελαστικές στηρίξεις υπό έκκεντρη φόρτιση κάνοντας χρήση της μεθόδου γωνιών στροφής και της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων.

1 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

1.1 Βασικές παραδοχές θεωρίας ελαστικής ευστάθειας

Το κεφάλαιο αυτό βασίζεται στις βιβλιογραφικές αναφορές του Αντ. Κουνάδη (1997)

1. Ο υπό μελέτη φορέας αποτελείται από γραμμικά (ραβδωτά) μέλη και είναι κατασκευασμένος από ομογενές, ισότροπο, γραμμικά ελαστικό υλικό που ακολουθεί το νόμο του Hooke.



Διάγραμμα 1.1 Διάγραμμα τάσεων-παραμορφώσεων υλικού

2. Το διάγραμμα σ-ε θεωρείται το ίδιο για εφελκυσμό και θλίψη.
3. Παραδοχή Bernoulli-Navier : Επίπεδες διατομές κάθετες στον απαραμόρφωτο άξονα του γραμμικού μέλους πριν από το λυγισμό παραμένουν επίπεδες και κάθετες στον παραμορφωμένο άξονα του μέλους μετά το λυγισμό.
4. Τα εξωτερικά εγκάρσια φορτία διέρχονται δια του κέντρου διάτμησης της διατομής του μέλους και είναι παράλληλα προς έναν από τους κύριους άξονες αδράνειας. Με αυτόν τον τρόπο αποκλείεται οποιαδήποτε στροφή ή στρέψη της διατομής (περί τον άξονα του μέλους), η οποία έτσι υπόκειται μόνο σε κάμψη σε ένα από τα κύρια επίπεδά της.

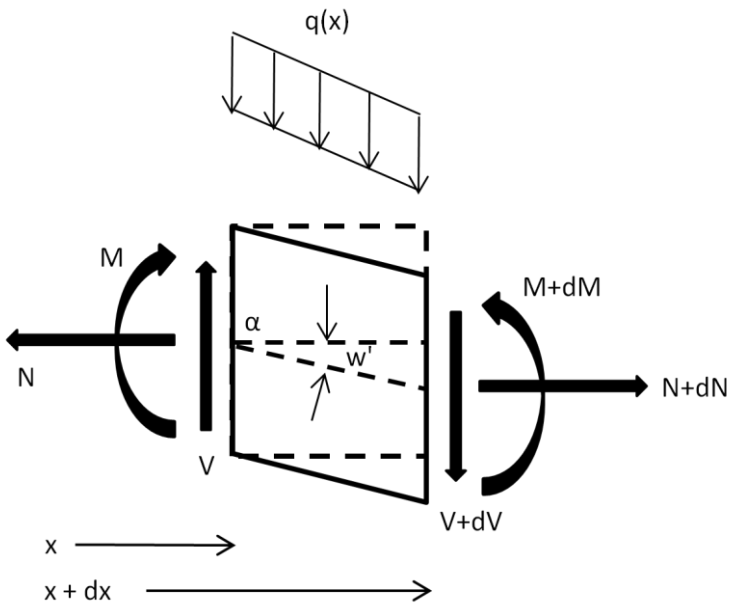
5. Η αξονική και η εγκάρσια μετατόπιση ενός σημείου κατά μήκος του άξονα x είναι πολύ μικρές συγκριτικά με τις διαστάσεις της διατομής του μέλους. Η γραμμική θεωρία ελαστικής ευστάθειας είναι δηλαδή θεωρία μικρών βελών. Η ανηγμένη παραμόρφωση ε, η αξονική μετατόπιση ξ, η καμπυλότητα κ (=1/R) και η εγκάρσια μετατόπιση w (βέλος) συνδέονται με τις σχέσεις:

   $\varepsilon = \frac{d\xi}{dx} = \xi' \qquad \kappa = -\frac{d^2w}{dx^2} = -w''$

   Όπου ε και κ αντιστοιχούν σε σημείο του άξονα, το οποίο είναι συνάρτηση της τετμημένης x. Συνεπώς, σύμφωνα με τη θεωρία μικρών βελών ο όρος w'^2 είναι αμελητέος συγκριτικά με τη μονάδα και τον όρο ξ'. Επιπρόσθετα, ο άξονας του μελούς θεωρείται ότι δεν έχει αλλάξει μήκος, δηλαδή ούτε βραχύνεται ούτε μηκύνεται. Ακόμα, η επιρροή της διατμητικής παραμόρφωσης στο βέλος κάμψης αμελείται.
6. Τα κρίσιμα φορτία λυγισμού υπολογίζονται με τη θεώρηση ότι η ελαστική παραμόρφωση οφείλεται μόνο σε κάμψη (αμελείται η αξονική παραμόρφωση που τυχόν προηγήθηκε).

Επισημαίνεται ότι οι παραδοχές 1-4 ισχύουν και για την περίπτωση μη γραμμικής θεωρίας ελαστικής ευστάθειας.

1.2 Σήμανση



Εικόνα 1.1 Στοιχειώδες τμήμα dx

Οι θετικές φορές των εντατικών μεγεθών (ροπή κάμψης, τέμνουσα δύναμη, αξονική δύναμη) και των μεγεθών μετατοπίσεως/κινηματικών (αξονικό βέλος ξ, εγκάρσιο βέλος w, στροφή διατομής w') καθορίζονται αυτόματα μετά την επιλογή συστήματος ορθογώνιων συντεταγμένων κατά το οποίο ο άξονας x ταυτίζεται γενικά με τον άξονα του μέλους και διέρχεται συνήθως από τα κέντρα βάρους των διατομών. Ο άξονας w είναι κάθετος στον άξονα x.

Ορίζουμε θετική αξονική μετατόπιση ξ(x) όταν κατευθύνεται προς τη θετική φορά του άξονα x. Ακόμα, θετικό το βέλος w(x) όταν κατευθύνεται προς τη θετική φορά του άξονα w. Η θετική γωνία ορίζεται εκείνη κατά την οποία ο θετικός άξονας x στρεφόμενος κατά μια ορθή γωνία συμπίπτει με τον θετικό άξονα w. Οι θετικές φορές των εντατικών μεγεθών M,V,N ορίζονται στη διατομή x+dx. Έτσι η αξονική δύναμη N+dN είναι θετική όταν έχει τη φορά του θετικού άξονα x. Η τέμνουσα V+dV είναι κάθετη στον απαραμόρφωτο άξονα της δοκού και θετική όταν έχει τη φορά του θετικού άξονα w. Από την ισορροπία στο στοιχειώδες κομμάτι dx προκύπτει και η θετική φορά για τη ροπή κάμψης M+dM.

1.3 Διαφορική εξίσωση λυγισμού

Η δοκός βρίσκεται υπό εγκάρσια φόρτιση και αξονική θλίψη. Θεωρείται η ισορροπία των δυνάμεων που δρουν στο στοιχείο dx στην παραμορφωμένη κατάσταση με παρειές κάθετες στον απαραμόρφωτο άξονα.

Ισορροπία κατά τη διεύθυνση του άξονα w:

$$V + dV - V + q * dx = 0$$

$$\frac{dV}{dx} = -q$$

Ισορροπία κατά τη διεύθυνση του άξονα x:

$$N + dN - N = 0$$

$$N(x) = C = \sigma\tau\alpha\theta.$$

Δηλαδή η αξονική δύναμη είναι σταθερή σε ολόκληρο το μήκος της δοκού. Επομένως από τη συνοριακή συνθήκη στο άκρο της δοκού όπου δρα η θλιπτική δύναμη P είναι

$$N(l) = -P$$

Ισορροπία ροπών κάμψης ως προς σημείο α:

$$M - (M + dM) - dM + q * dx * \frac{dx}{2} + (V + dV) * dx - (N + dN) * \frac{dw}{dx} * dx = 0$$

Αμελώντας διαφορικούς όρους ανώτερης τάξης προκύπτει:

$$V = \frac{dM}{dx} + N * \frac{dw}{dx}$$

Παραγωγίζοντας ως προς x και αντικαθιστώντας από τα προηγούμενα είναι

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2} + N * \frac{d^2w(x)}{dx^2} = -q(x)$$

Για δοκό υπό αξονική θλίψη N(x)=-P , άρα η εξίσωση γράφεται

$$-\frac{d^2M(x)}{dx^2}+P*\frac{d^2w(x)}{dx^2}=q(x)$$

Οι εξισώσεις αυτές προκύπτουν με βάση την ισορροπία ενός ενδιάμεσου στοιχείου dx, άρα είναι ανεξάρτητες: α) της φύσης του υλικού (ελαστικό ή ανελαστικό) και β) των συνθηκών στήριξης. Από τις σχέσεις της Αντοχής των Υλικών για υλικό γραμμικά ελαστικό με σταθερή διατομή προκύπτει η σχέση ροπής κάμψης(M(x))-καμπυλότητας(κ(x))

$$M(x)=-E*I*\frac{d^2w(x)}{dx^2}=-E*I*w''(x)$$

Αντικαθιστώντας στην προηγούμενη

$$E*I*\frac{d^4w(x)}{dx^4}+P*\frac{d^2w(x)}{dx^2}=q(x)$$

Πιο απλά: EIw’’’’(x)+Pw’’(x)=q(x)

Αυτή είναι μια 4^{ης} τάξης μη ομογενής γραμμική συνήθης διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές. Θέτοντας M(x)=-EIw’’(x) (γραμμικά ελαστικό υλικό) και N=-P λαμβάνονται οι εκφράσεις της τέμνουσας δύναμης κάθετης στον απαραμόρφωτο άξονα της δοκού και του κατανεμημένου φορτίου q(x)

$$V(x)=-E*I*\frac{d^3w(x)}{dx^3}-P*\frac{dw(x)}{dx}=-EIw'''(x)-Pw'(x)$$

$$q(x)=-\frac{dV(x)}{dx}=EIw''''(x)+Pw''(x)$$

Στην περίπτωση που η εγκάρσια φόρτιση είναι μηδέν (όπως στην περίπτωση της παρούσας διπλωματικής), τότε

$$EIw''''(x)+Pw''(x)=0$$

ή θέτοντας k^2=P/EI

$$w''''(x)+k^2w''(x)=0$$

Στην εξίσωση αυτή καταλήγει κανείς θεωρώντας την ισορροπία της αμφιέρειστης δοκού στην παραμορφωμένη κατάσταση. Το φορτίο P εννοείται είναι το κρίσιμο φορτίο λυγισμού, καθώς για φορτίο P<Pcr η δοκός παραμένει ευθύγραμμη (w(x)=0).

1.3.1 Λύση της διαφορικής εξίσωσης λυγισμού

$$w''''(x) + k^2 w''(x) = 0$$

$$w'''(x) + k^2 w'(x) = K$$

$$w''(x) + k^2 w(x) = Kx + \Lambda$$

$$w''(x) + k^2 w(x) = 0$$

Θεωρούμε λύση της μορφής $w(x)=e^{\rho x}$ οπότε αντικαθιστώντας στη διαφορική προκύπτει

$$\rho^2 e^{\rho x} + k^2 e^{\rho x} = 0$$

$$\rho^2 + k^2 = 0$$

$$\rho = k\iota$$

Άρα $w_h(x) = e^{ikx} = \cos(kx) + i\sin(kx)$ δηλαδή 2 γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις είναι οι $\cos(kx)$, $\sin(kx)$ άρα $w_h(x) = C_1 \sin(kx) + C_2 \cos(kx)$

Με τη μέθοδο μεταβολής των παραμέτρων θα βρεθεί η μερική λύση της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης. Αναζητείται λύση της μορφής:

$$w_p(x) = C_1(x)\sin(kx) + C_2(x)\cos(kx)$$

η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες:

$$C_1' \sin(kx) + C_2' \cos(kx) = 0$$
$$C_1' \mathrm{k}\cos(kx) - C_2' k sin(kx) = Kx + \Lambda$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα θα βρεθούν οι $C_1(x)$ και $C_2(x)$

$$C_1' = -\frac{C_2' \cos(kx)}{\sin(kx)}$$

$$-\frac{kC_2{}'cos^2(kx)}{\sin(kx)} - kC_2' \sin(kx) = Kx + \Lambda$$

$$C_2' = -\frac{(Kx + \Lambda)\sin(kx)}{k}$$

$$C_2(x) = -\frac{Ksin(kx)}{k^3} + \frac{Kxcos(kx)}{k^2} + \frac{\Lambda \cos(kx)}{k^2}$$

$$C_1(x) = \frac{Kcos(kx)}{k^3} + \frac{Kxsin(kx)}{k^2} + \frac{\Lambda \sin(kx)}{k^2}$$

Άρα μετά τις πράξεις είναι: $w_p(x) = \frac{Kx}{k^2} + \frac{\Lambda}{k^2}$, δηλαδή

$$w_p(x) = \Gamma x + \Delta$$

Επομένως η λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι:

$$w(x) = Asin(kx) + Bcos(kx) + \Gamma x + \Delta$$

Οι σταθερές Α, Β, Γ, Δ προσδιορίζονται από ισάριθμες συνθήκες στήριξης. Οι συνθήκες αυτές συνδέονται με κινηματικά μεγέθη (το βέλος w και τη στροφή w') και εντατικά μεγέθη (τη ροπή M(x) και την τέμνουσα δύναμη V(x)). Η τέμνουσα δύναμη V(x)=-EIw'''(x)-Pw'(x) απλοποιείται σύμφωνα με την προηγούμενη λύση ως εξής:

$$V(x) = -P\Gamma$$

1.3.2 Περίπτωση αξονικού εφελκυσμού

Στην περίπτωση που έχουμε εφελκυσμό αντί θλίψης τότε η στη διαφορική εξίσωση αλλάζει το πρόσημο της δύναμης P και έτσι προκύπτει η παρακάτω διαφορική τετάρτης τάξης

$$w''''(x) - k^2 w''(x) = 0 \qquad k^2 = \frac{P}{EI}$$

Ακολουθώντας ίδια διαδικασία επίλυσης όπως προηγουμένως, λαμβάνεται έπειτα από 2 ολοκληρώσεις

$$w''(x) - k^2 w(x) = \Gamma x + \Delta$$

Η αντίστοιχη ομογενής εξίσωση έχει λύση της μορφής: $w_h(x)= C_1e^{kx} + C_2e^{-kx}$ και με δεδομένο ότι

$$\sinh(kx) = \frac{1}{2}(e^{kx} - e^{-kx}) \quad , \qquad \cosh(kx) = \frac{1}{2}(e^{kx} + e^{-kx})$$

η λύση της ομογενούς λαμβάνει τη μορφή

$$w_h(x) = A\sinh(kx) + B\cosh(kx)$$

Το γενικό ολοκλήρωμα προκύπτει πάλι ως άθροισμα της λύσης της ομογενούς εξίσωσης και μίας μερικής λύσης της αρχικής δοθείσας. Άρα τελικά

$$w(x) = A\sinh(kx) + B\cosh(kx) + \Gamma x + \Delta$$

ενώ η τέμνουσα δύναμη είναι τώρα

$$V(x) = -EIw'''(x) + Pw'(x) = P\Gamma$$

1.4 Παρατηρήσεις

Σε ό,τι αφορά τις εξισώσεις της κλασικής στατικής που διέπουν τη συμπεριφορά δοκών (ράβδων) υπό αξονική θλίψη η εφελκυσμό, παρατηρεί κανείς ότι προκύπτουν με μηδενισμό της αξονικής φόρτισης P στις προηγούμενες εξισώσεις. Έτσι λαμβάνονται οι σχέσεις της κλασικής στατικής:

$$EIw''''(x) = q(x)$$

$$V(x) = -EIw'''(x) \ \big(= Q(x)\big)$$

$$q(x) = -\frac{dV(x)}{dx}$$

Αυτό οφείλεται στο ότι για τις εξισώσεις ισορροπίας από τις οποίες προκύπτουν αυτές οι σχέσεις αγνοείται πλήρως η καμπτική παραμόρφωση της ελαστικής γραμμής. Στην περίπτωση του λυγισμού (στατική 2ας τάξης) όμως η παραμόρφωση αυτή λαμβάνεται υπόψη στη μόρφωση των εξισώσεων ισορροπίας. Αυτό οδηγεί σε μια πρόσθετη ροπή κάμψης λόγω αξονικής φόρτισης, πέραν εκείνης που προκαλείται από την εγκάρσια φόρτιση q(x). Στην περίπτωση που η αξονική δύναμη είναι θλιπτική, η πρόσθετη ροπή κάμψης προστίθεται σε αυτήν λόγω του φορτίου

q(x). Όταν όμως είναι εφελκυστική, τότε η πρόσθετη ροπή κάμψης έχει αντίθετο πρόσημο από τη ροπή κάμψης λόγω του φορτίου q(x). Η πρόσθετη ροπή κάμψης ισούται με $\pm Pw$ (+ για θλίψη, - για εφελκυσμό) και ονομάζεται δευτερεύουσα ροπή κάμψης. Η ροπή κάμψης λόγω του φορτίου q(x) καλείται κύρια ροπή κάμψης. Σε διάφορους κανονισμούς (π.χ. σιδηρών κατασκευών) η δευτερεύουσα ροπή κάμψης καλείται επιρροή P-Δ.

Ακόμα, να σημειωθεί ότι ο χαρακτηρισμός «Γραμμική και Μη Γραμμική Θεωρία Ελαστικής Ευστάθειας» απορρέει από τη μορφή της διαφορικής εξίσωσης, και εάν αυτή είναι γραμμική ή μη γραμμική. Η σχέση όμως μεταξύ βέλους κάμψεως w(x) και αξονικής φόρτισης P είναι έντονα μη γραμμική.

Από μαθηματικής άποψης το γραμμικό πρόβλημα του λυγισμού είναι ένα πρόβλημα ιδιοτιμών. Δηλαδή, μόνο για ορισμένες τιμές της παραμέτρου k (κατά συνέπεια P) προκύπτουν μη τετριμμένες (μη μηδενικές) λύσεις. Οι τιμές αυτές της παραμέτρου k είναι άπειρες στο πλήθος και λέγονται ιδιοτιμές ή χαρακτηριστικές τιμές. Οι λύσεις που αντιστοιχούν σ αυτές τις ιδιοτιμές ονομάζονται ιδιοσυναρτήσεις ή κανονικές μορφές λυγισμού. Μέσω των ιδιοσυναρτήσεων καθορίζεται μόνο το σχήμα της ελαστικής γραμμής, δηλαδή η μορφή της λύσης πολλαπλασιασμένη με μια αυθαίρετη σταθερά ολοκλήρωσης. Τα μεγέθη των βελών κάμψης w(x), όπως και τα υπόλοιπα εξαρτημένα μεγέθη (w'(x), M(x), V(x), ε(x), κλπ.) δεν είναι δυνατό να προσδιοριστούν μέσω της γραμμικής ανάλυσης. Για την εύρεση τους απαιτείται μη γραμμική ανάλυση λυγισμού. Η μικρότερη ιδιοτιμή αντιστοιχεί στο μικρότερο φορτίο λυγισμού (που ενδιαφέρει στην πράξη) και η αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση στην πρώτη ή θεμελιώδη κανονική μορφή λυγισμού. Οι κανονικές μορφές λυγισμού είναι γραμμικά ανεξάρτητες συναρτήσεις οι οποίες ικανοποιούν τη συνθήκη ορθογωνικότητας.

$$\int_0^l w_i(x) * w_j(x)\, dx = 0 \; \gamma\iota\alpha \; i \neq j$$

Οι ιδιοσυναρτήσεις και τα αντίστοιχα φορτία Euler εξαρτώνται από τις συνοριακές συνθήκες, γι' αυτό τα προβλήματα αυτά λέγονται προβλήματα συνοριακών τιμών.

Η ιδιότητα της ορθογωνικότητας είναι ιδιαίτερα χρήσιμη κατά την επίλυση (μη γραμμικών) προβλημάτων με αριθμητικές μεθόδους.

1.5 Επίλυση για 1 αξονικό φορτίο

Αρχικά επιλύεται μια αμφιέρειστη ράβδος υπό αξονική θλίψη, για εξωτερική φόρτιση P. Όσο η εξωτερική φόρτιση είναι μικρότερη της κρίσιμης ($P<P_{cr}$) η ράβδος παραμένει ευθύγραμμη και υπόκειται σε αξονική βράχυνση Δl και ανηγμένη βράχυνση ε. Στην κρίσιμη φόρτιση $P=P_{cr}$ επιτυγχάνεται η μέγιστη αξονική βράχυνση για την ευθύγραμμη μορφή ισορροπίας ($\Delta l_{cr}=P_{cr}l/EA$) και συναντώνται δύο απείρως γειτονικές μορφές ισορροπίας, η ευθύγραμμη που είναι ασταθής και η ελαφρώς καμπυλωμένη, η οποία αποδεικνύεται ότι είναι ευσταθής. Υπάρχει πρόσθετη μετατόπιση $\Delta l' = \frac{1}{2}\int_0^l w'^2 dx$. Η ισορροπία στην παραμορφωμένη κατάσταση είναι δυνατή εφόσον η διαφορική εξίσωση λυγισμού έχει μορφωθεί για μια τέτοια κατάσταση και έχει λύση. Λαμβάνεται λοιπόν η γενική λύση:

$$w(x) = Asin(kx) + Bcos(kx) + \Gamma x + \Delta$$

Μένει να προσδιορισθούν οι 4 συνοριακές συνθήκες, από τις οποίες θα προκύψουν οι 4 άγνωστες σταθερές ολοκλήρωσης.

1. Συνθήκη: $M(0) = 0$ $(\acute{\alpha}\rho\theta\rho\omega\sigma\eta) \rightarrow -EIw''(0) = 0 \rightarrow w''(0) = 0$

   $w''(x) = -Ak^2 sin(kx) - Bk^2 cos(kx) \rightarrow w''(0) = -Bk^2$

   Άρα B=0
2. Συνθήκη: $w(0) = 0$ $(\acute{\alpha}\rho\theta\rho\omega\sigma\eta)$

   $w(0) = \Delta$

   Άρα και Δ=0, δηλαδή το βέλος της δοκού είναι:

   $$w(x) = Asin(kx) + \Gamma x$$
3. Συνθήκη: $w(l) = 0$ $(\acute{\alpha}\rho\theta\rho\omega\sigma\eta) \rightarrow A\sin(kl) + \Gamma l = 0$
4. Συνθήκη: $M(l) = 0$ $(\acute{\alpha}\rho\theta\rho\omega\sigma\eta) \rightarrow -EIw''(l) = 0 \rightarrow w''(l) = 0$

   $-Ak^2 \sin(kl) = 0$

   Από τη σχέση αυτή προκύπτει είτε ότι A=0 , που απορρίπτεται, γιατί τότε w(x)=0, η οποία είναι τετριμμένη είτε ότι sin(kl)=0. Τότε είναι Γ=0 και ακόμα:

   $$kl = n\pi$$

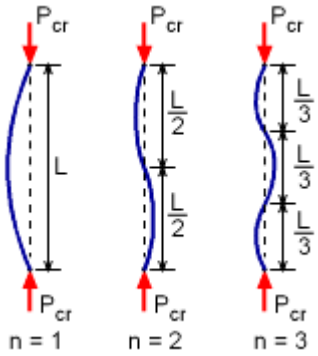
$$k^2 l^2 = n^2 \pi^2$$

$$k^2 = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}$$

$$P_{(n)} = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} EI \quad , \qquad n = 1,2, \ldots$$

Οπότε οι κανονικές μορφές λυγισμού δίνονται από την εξίσωση

$$w_n(x) = A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \ , \ \ n = 1,2, \ldots$$



Εικόνα 1.2 Ιδιομορφές λυγισμού

A_n είναι αυθαίρετες σταθερές ολοκλήρωσης διάφορες του μηδενός. Παρατηρείται δηλαδή ότι οι τιμές των βελών κάμψης δεν είναι γνωστές. Γνωστές είναι οι συναρτήσεις σχήματος της ελαστικής γραμμής. Τα φορτία Euler όμως προσδιορίζονται κατά μέγεθος, ενώ για n=1 λαμβάνεται το μικρότερο φορτίο λυγισμού του Euler, το λεγόμενο κρίσιμο φορτίο ελαστικού λυγισμού.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} = 9.869604404 * EI/l^2$$

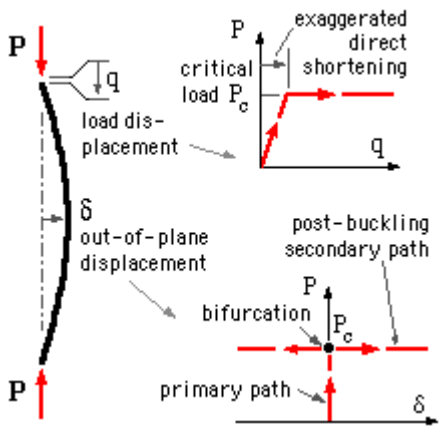
Το φορτίο αυτό είναι το μικρότερο φορτίο για το οποίο ένα αμφιέρειστα εδραζόμενο υποστύλωμα βρίσκεται σε ουδέτερη ισορροπία. Τα υπόλοιπα φορτία Euler (για n=1,2,…) αποτελούν μαθηματικές λύσεις οι οποίες έχουν θεωρητικό μόνον ενδιαφέρον (π.χ. σε περίπτωση τέτοιας δέσμευσης που να μην επιτρέπει το λυγισμό κατά την πρώτη ιδιομορφή). Το φορτίο Euler είναι φυσικώς αποδεκτό εν προκειμένω και καθορίζει τη φέρουσα ικανότητα σε αξονικό φορτίο του αμφιέρειστου υποστυλώματος.

Αξιόλογο είναι και το συμπέρασμα ότι το αμφιέρειστο υποστύλωμα τελικώς μπορεί να ισορροπήσει σε ελαφρώς καμπυλωμένη μορφή για τις διάφορες τιμές του P που

προκύπτουν για τις διαφορετικές τιμές του n. Η κανονική μορφή λυγισμού είναι η εξίσωση ελαστικής γραμμής για n=1, δηλαδή $w_1(x) = A_1 \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$.

1.5.1 Σχέση Φορτίου-Βέλους

Η συμπεριφορά του αμφιέρειστου υποστυλώματος καθώς το φορτίο αυξάνεται από το μηδέν μέχρι την κρίσιμη τιμή παριστάνεται γραφικά μέσω της σχέσης του φορτίου P και της χαρακτηριστικής μετατόπισης $\delta = w\left(\frac{l}{2}\right) = A \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = A$



Εικόνα 1.3 Δρόμος ισορροπίας

Για $P<P_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{l^2}$ το υποστύλωμα ισορροπεί παραμένοντας ευθύγραμμο. Άρα ο δρόμος ισορροπίας ταυτίζεται αρχικά με τον άξονα P. Για $P=P_{cr}$ το υποστύλωμα εγκαταλείπει την ευθύγραμμη μορφή ισορροπίας που είναι ασταθής, και κάμπτεται ελαφρώς χωρίς να μεταβάλλεται η τιμή του φορτίου. Έχουμε δηλαδή διακλάδωση ισορροπίας στην οποία αντιστοιχούν δύο απείρως γειτονικές μορφές ισορροπίας. Η ευθύγραμμη (ασταθής) και η ελαφρώς καμπυλωμένη που παριστάνεται με μια οριζόντια ευθεία διερχόμενη από το σημείο διακλάδωσης, η οποία δεν επιτρέπει τον προσδιορισμό του βέλους δ για $P>P_{cr}$.

Το σημείο διακλάδωσης αντιστοιχεί σε ουδέτερη ισορροπία και αποτελεί το σύνορο μεταξύ ασταθούς και ευσταθούς ισορροπίας. Με εφαρμογή μη γραμμικής θεωρίας ευστάθειας μπορεί να αποδειχθεί ότι η ισορροπία είναι ευσταθής ή ασταθής.

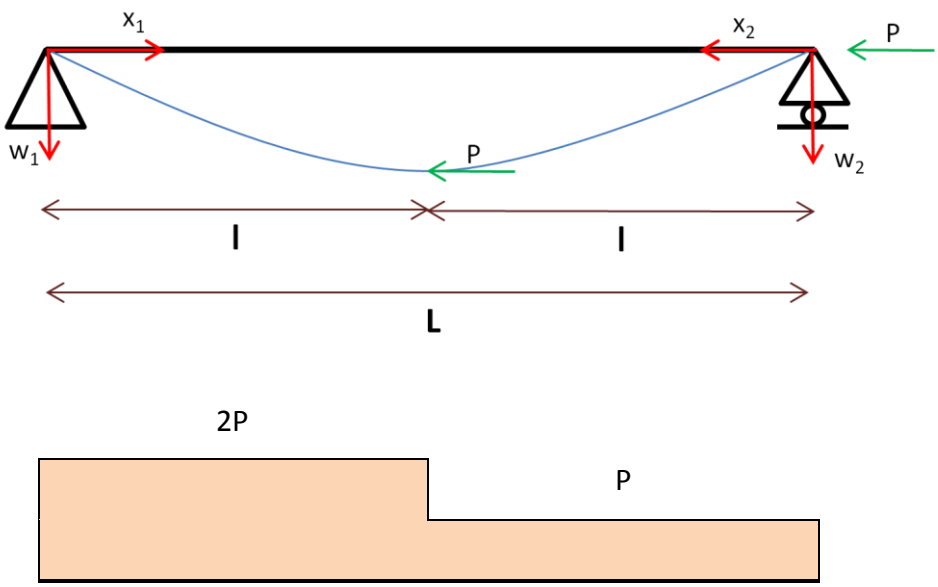
2 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

2.1 Επίλυση αμφιαρθρωτού υποστυλώματος με 2 αξονικά φορτία

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται η διαδικασία εύρεσης του κρίσιμου φορτίου για ένα αμφιαρθρωτό υποστύλωμα. Το υποστύλωμα φορτίζεται με αξονικό θλιπτικό φορτίο P το οποίο εφαρμόζεται στην άκρη του και από ενδιάμεσο φορτίο ίσο με το ακραίο (δηλαδή επίσης P), το οποίο εφαρμόζεται στη μέση του υποστυλώματος. Η δοκός θεωρείται μήκους L=2l και έχει ίδια δυσκαμψία EI καθ' όλον το μήκος της. Η λογική της διαδικασίας έχει ως εξής. Είναι δεδομένη η διαφορική εξίσωση που διέπει την ισορροπία της ράβδου για το εκάστοτε τμήμα με σταθερή αξονική δύναμη, όπως φυσικά και η λύση της. Συνεπώς για κάθε τμήμα (μήκους l) η κάθε λύση περιέχει 4 αγνώστους σταθερές ολοκλήρωσης. Συνολικά έχουμε 8 αγνώστους άρα απαιτούνται 8 εξισώσεις. Οι 4 προκύπτουν από τις συνοριακές συνθήκες στις στηρίξεις (2 και 2 αντίστοιχα). Οι υπόλοιπες 4 προκύπτουν από τη συνέχεια που απαιτείται για τα κινηματικά (βέλος κάμψης w και στροφή w') και τα εντατικά (ροπή κάμψης και τέμνουσα δύναμη) μεγέθη.

Για διευκόλυνση των υπολογισμών εκλέγονται 2 συστήματα συντεταγμένων, το καθένα με αρχή τη στήριξη και με φορά «προς το εσωτερικό της δοκού». Ιδιαίτερη προσοχή απαιτείται στην εξισώσεις των συνοριακών συνθηκών σε σχέση με τις φορές (δηλαδή τα πρόσημα) των εκάστοτε κινηματικών και εντατικών μεγεθών.

Είναι ${k_1}^2 = \frac{2P}{EI}$, ${k_2}^2 = \frac{P}{EI}$ δηλαδή $k_1 = \sqrt{2}k_2$ και $l_1 = l_2 = l$



Είναι για το βέλος κάμψης w_1

$$w_1(x_1) = A_1\, sin(k_1x_1) + B_1\, cos(k_1x_1) + \Gamma_1x_1 + \Delta_1$$

$$w_1{}'(x_1) = A_1k_1\, cos(k_1x_1) - B_1k_1\, sin(k_1x_1) + \Gamma_1$$

$$w_1''(x_1) = -A_1{k_1}^2\, sin(k_1x_1) - B_1{k_1}^2 cos(k_1x_1)$$

$$w_1'''(x_1) = -A_1{k_1}^3\, cos(k_1x_1) + B_1{k_1}^3 sin(k_1x_1)$$

Ομοίως για το βέλος w_2

$$w_2(x_2) = A_2\, sin(k_2x_2) + B_2\, cos(k_2x_2) + \Gamma_2x_2 + \Delta_2$$

$$w_2{}'(x_2) = A_2k_2\, cos(k_2x_2) - B_2k_2\, sin(k_2x_2) + \Gamma_2$$

$$w_2''(x_2) = -A_2{k_2}^2\, sin(k_2x_2) - B_2{k_2}^2 cos(k_2x_2)$$

$$w_2'''(x_2) = -A_2{k_2}^3\, cos(k_2x_2) + B_2{k_2}^3 sin(k_2x_2)$$

1. $w_1(0) = 0$

$$B_1 + \Delta_1 = 0$$

2. $M_1(0) = 0\ , -EIw_1{}''(0) = 0$

$$w_1''(0) = 0$$

$$B_1 = 0$$

άρα το βέλος κάμψης w_1 απλουστεύεται σε

$$w_1(x_1) = A_1\, sin(k_1 x_1) + \Gamma_1 x_1$$

Ομοίως

3. $w_2(0) = 0$
4. $M_2(0) = 0$

Άρα

$$w_2(x_2) = A_2 sin(k_2 x_2) + \Gamma_2 x_2$$

Αφού χρησιμοποιήθηκαν οι 4 συνοριακές συνθήκες των στηρίξεων θα παρουσιαστούν και οι 4 συνοριακές συνθήκες στο μέσον της δοκού. Είναι το σημείο l_1 για το 1° σύστημα συντεταγμένων και l_2 για το 2°. Όμως τα 2 μήκη είναι ίσα με l άρα χάριν απλοποίησης θα αναφέρεται παντού l.

5. $V_1(l) + V_2(l) = 0$

$$\left(-EIw_1'''(l) - 2Pw_1'(l)\right) + \left(-EIw_2'''(l) - Pw_2(l)\right) = 0$$

Διαιρώντας με (–EI) προκύπτει

$$\left(w_1'''(l) + {k_1}^2 w_1'(l)\right) + \left(w_2'''(l) + {k_2}^2 w_2(l)\right) = 0$$

$$-{k_1}^3\, cos(k_1 l) + {k_1}^3\, cos(k_1 l) + {k_1}^2 \Gamma_1 - {k_2}^3\, cos(k_2 l) + {k_2}^3\, cos(k_2 l) + {k_2}^2 \Gamma_2 = 0$$

$$k_1{}^2 \Gamma_1 + k_2{}^2 \Gamma_2 = 0$$

$$\Gamma_2 = -2\Gamma_1$$

6. $M_1(l) = M_2(l)$

$$-EIw_1''(l) = -EIw_2{}''(l)$$
$$-A_1 k_1{}^2 sin(k_1 l) = -A_2 k_2{}^2 sin(k_2 l)$$
$$2A_1\, sin(k_1 l) = A_2 sin(k_2 l)$$

7. $w_1(l) = w_2(l)$

$$\mathrm{A_1\, sin(k_1 l) + \Gamma_1 l = A_2\, sin(k_2 l) + \Gamma_2 l}$$
$$\mathrm{A_1\, sin(k_1 l) + \Gamma_1 l = 2A_1\, sin(k_1 l) - 2\Gamma_1 l}$$
$$\mathrm{A_1\, sin(k_1 l) = 3\Gamma_1 l}$$

8. $w_1'^{(l)} = -w_2'(l)$

$$A_1 k_1 \cos(k_1 l) + \Gamma_1 = -A_2 k_2 \cos(k_2 l) - \Gamma_2$$

Πολλαπλασιάζοντας αυτή τη σχέση επί 3*l* και αντικαθιστώντας Γ_2=-2Γ_1, 3Γ_1*l*=$A_1 \sin(k_1 l)$ έχουμε

$$3A_1(k_1 l)\cos(k_1 l) + A_1 \sin(k_1 l) = -3A_2(k_2 l)\cos(k_2 l) + 2A_1 \sin(k_1 l)$$

Έστω τώρα ότι sin(k_2l)=0. Τότε k_2l=nπ και k_1l=$\sqrt{2}n\pi$. Άρα sin(k_1l)≠0 και από το αποτέλεσμα της συνθήκης 6. έπεται ότι πρέπει A_1=0=Γ_1=Γ_2=A_2. Τούτο είναι άτοπο (τετριμμένη λύση), γιατί σημαίνει ότι η ράβδος είναι σε προλυγισμική κατάσταση. Με παρόμοια συλλογιστική καταλήγουμε σε αντίστοιχη τετριμμένη λύση και στην περίπτωση που sin(k_1l)=0. Αυτό θα μας επέτρεπε την πραγματοποίηση κάποιων διαιρέσεων, ωστόσο γίνεται να συνεχίσουμε και χωρίς την παρατήρηση αυτή. Πολλαπλασιάζουμε λοιπόν με $\sin(k_2 l)$ και προκύπτει

$$3A_1(k_1 l)\cos(k_1 l)\sin(k_2 l) - A_1 \sin(k_1 l)\sin(k_2 l) = -3A_2(k_2 l)\sin(k_2 l)\cos(k_2 l)$$

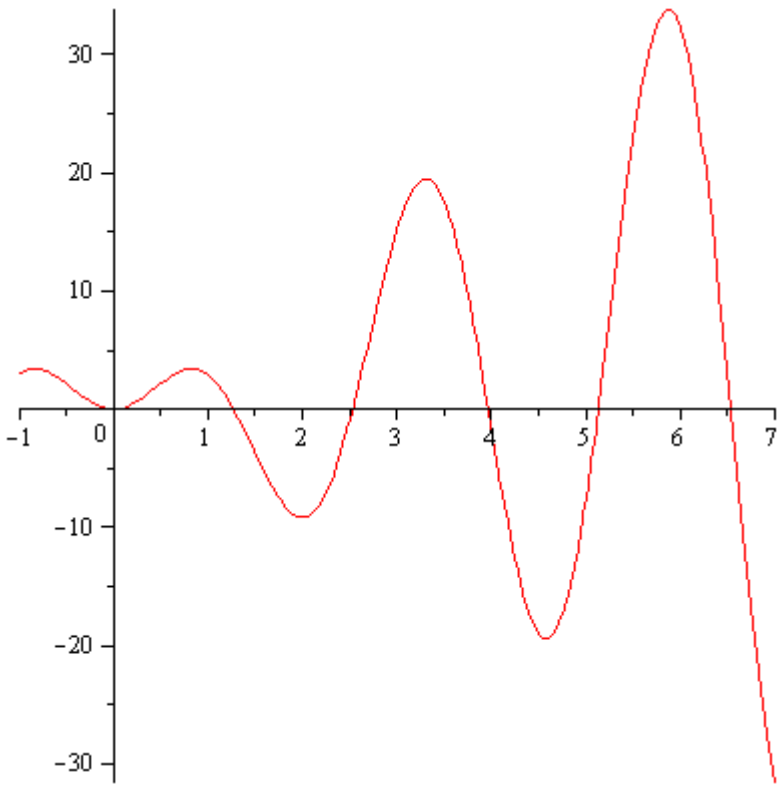
Όμως είναι και $2A_1 \sin(k_1 l) = A_2 \sin(k_2 l)$ άρα

$$3A_1(k_1 l)\cos(k_1 l)\sin(k_2 l) - A_1 \sin(k_1 l)\sin(k_2 l) = -6A_1(k_2 l)\sin(k_1 l)\cos(k_2 l)$$

Όπως εξηγήθηκε A_1≠0 και θέτοντας k_2l=x είναι k_1l=$\sqrt{2}x$

$$3\sqrt{2}x\cos(\sqrt{2}x)\sin(x) + 6x\sin(\sqrt{2}x)\cos(x) - \sin(\sqrt{2}x)\sin(x) = 0$$

Πρόκειται για μία μη γραμμική εξίσωση. Με τη βοήθεια ενός μαθηματικού προγράμματος (Maple), το οποίο θα εξηγηθεί περαιτέρω σε επόμενο κεφάλαιο, μπορεί να βρεθεί η ακριβής λύση. Αναζητείται η πρώτη μη μηδενική λύση. Για το λόγο αυτό είναι χρήσιμο να γίνει η γραφική παράσταση της παραπάνω εξίσωσης.



Αναζητείται λοιπόν μια λύση στο διάστημα (0,2), η οποία είναι η

$$x = 1.278282003$$

Άρα

$$k_2 l = 1.278282003$$

$$(k_2 l)^2 = 1.634004879$$

Όμως είναι $l = \frac{L}{2}$ και k_2=P/EI άρα

$$P = 6.536019516 * \frac{EI}{L^2}$$

Το ισοδύναμο μήκος λυγισμού είναι το μήκος στο οποίο θα λύγιζε η αμφιαρθρωτή αυτή ράβδος έαν θλίβονταν ολόκληρη από αυτό το φορτίο, δηλαδή

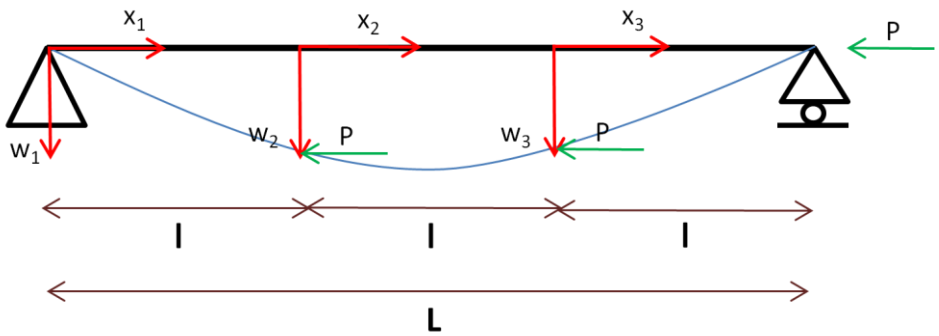
$$L' = \sqrt{\frac{\pi^2}{6.536019516}} * L = 1.228833953 * L$$

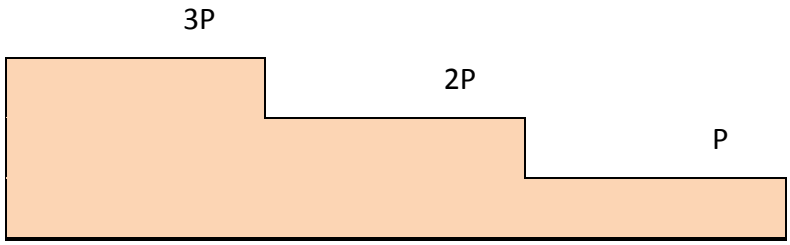
2.2 Επίλυση αμφιαρθρωτού υποστυλώματος με 3 αξονικά φορτία

Το αμφιαρθρωτό υποστύλωμα φορτίζεται τώρα από τρία ισαπέχοντα θλιπτικά φορτία. Το πρώτο ασκείται στο άκρο του υποστυλώματος, το δεύτερο σε απόσταση *l* από το πρώτο και το τρίτο αντίστοιχα σε απόσταση *l* από το δεύτερο. Η δοκός λοιπόν έχει μήκος L=3l. Η ράβδος έχει την ίδια δυσκαμψία EI καθ΄όλο το μήκος της.

Αντίστοιχα με την προηγούμενη ενότητα, για κάθε τμήμα με σταθερό αξονικό φορτίο στο μήκος του είναι γνωστή η διαφορική εξίσωση και η λύση της. Για κάθε τμήμα λοιπόν θα υπάρχουν 4 άγνωστες σταθερές ολοκλήρωσης. Άρα συνολικά θα έχουμε 12 αγνώστους και πρέπει να βρεθούν 12 εξισώσεις.

Εκλέγονται 3 συστήματα συντεταγμένων, ομόφορα. Το πρώτο έχει αφετηρία την αριστερή άρθρωση, το δεύτερο ξεκινά σε απόσταση l από το πρώτο και το τρίτο σε απόσταση l από το δεύτερο.





Είναι $k_1{}^2 = \frac{3P}{EI}$, $k_2{}^2 = \frac{2P}{EI}$, $k_3{}^2 = \frac{P}{EI} = k^2$ δηλαδή $k_1 = \sqrt{3}k$, $k_2 = \sqrt{2}k$, $k_3 = k$ και $l_1 = l_2 = l_3 = l$

Είναι για το βέλος κάμψης w_1

$$w_1(x_1) = A_1\, sin(k_1x_1) + B_1\, cos(k_1x_1) + \Gamma_1x_1 + \Delta_1$$

$$w_1{}'(x_1) = A_1k_1\, cos(k_1x_1) - B_1k_1\, sin(k_1x_1) + \Gamma_1$$

$$w_1''(x_1) = -A_1{k_1}^2\, sin(k_1x_1) - B_1{k_1}^2 cos(k_1x_1)$$

$$w_1'''(x_1) = -A_1{k_1}^3\, cos(k_1x_1) + B_1{k_1}^3 sin(k_1x_1)$$

Ομοίως για το βέλος w_2

$$w_2(x_2) = A_2\, sin(k_2x_2) + B_2\, cos(k_2x_2) + \Gamma_2x_2 + \Delta_2$$

$$w_2{}'(x_2) = A_2k_2\, cos(k_2x_2) - B_2k_2\, sin(k_2x_2) + \Gamma_2$$

$$w_2''(x_2) = -A_2{k_2}^2\, sin(k_2x_2) - B_2{k_2}^2 cos(k_2x_2)$$

$$w_2'''(x_2) = -A_2{k_2}^3\, cos(k_2x_2) + B_2{k_2}^3 sin(k_2x_2)$$

Ομοίως και το βέλος w_3

$$w_3(x_3) = A_3\, sin(k_3x_3) + B_3\, cos(k_3x_3) + \Gamma_3x_3 + \Delta_3$$

$$w_3{}'(x_3) = A_3k_3\, cos(k_3x_3) - B_3k_3\, sin(k_3x_3) + \Gamma_3$$

$$w_3''(x_3) = -A_3{k_3}^2\, sin(k_3x_3) - B_3{k_3}^2 cos(k_3x_3)$$

$$w_3'''(x_3) = -A_3{k_3}^3\, cos(k_3x_3) + B_3{k_3}^3 sin(k_3x_3)$$

Όπως έγινε αντιληπτό ήδη από τη φόρτιση με 2 αξονικά φορτία, η επίλυση είναι αρκετά δυσχερής. Η απλή περίπτωση των 2 φορτίων καταλήγει σε ένα σύστημα 4 εξισώσεων με 4 αγνώστους (καθώς κάποιοι από τους 8 αρχικά αγνώστους μηδενίστηκαν εύκολα) και τελικά σε μια μη γραμμική εξίσωση. Κατά τη φόρτιση με 3 θλιπτικά φορτία θα πρέπει να επιλυθεί αντίστοιχα ένα σύστημα 10 εξισώσεων με 10 αγνώστους, ενώ αντιλαμβάνεται κανείς ότι και η μη γραμμική εξίσωση στο τέλος θα είναι ιδιαίτερα πολύπλοκης μορφής. Αυτό πρακτικά καθιστά την επίλυση «με το χέρι» αδύνατη. Ωστόσο επιχειρείται να δοθούν τα βήματα αυτής της διαδικασίας ώστε να γίνει πιο αντιληπτή αυτή η δυσκολία. Ακόμα, θα συμβάλει και στην εξοικείωση με τα βήματα που απαιτούνται και για την πινακοποίηση του προβλήματος και την επίλυση αυτού με τη χρήση μαθηματικού προγράμματος.

Από τις 2 συνοριακές συνθήκες στη στήριξη της δοκού είναι

1. $w_1(0) = 0$

$$B_1 + \Delta_1 = 0$$

2. $M_1(0) = 0$, $-EIw_1''(0) = 0$

$$w_1''(0) = 0$$
$$B_1 = 0$$

Αυτό απλοποιεί τη συνάρτηση για το βέλος κάμψης w_1 σε

$$w_1(x_1) = A_1\, sin(k_1 x_1) + \Gamma_1 x_1$$

3. $V_1(l) - V_2(0) = 0$

$$-3P\Gamma_1 = -2P\Gamma_2$$
$$\Gamma_2 = \frac{3}{2}\Gamma_1$$

4. $V_2(l) - V_3(0) = 0$

$$-2P\Gamma_2 = -P\Gamma_3$$
$$\Gamma_3 = 2\Gamma_2 = 3\Gamma_1$$

5. $M_1(l) = M_2(0)$

$$w_1''(l) = w_2''(0)$$
$$-{k_1}^2 A_1 \sin(k_1 l) = -B_2 {k_2}^2$$
$$B_2 = \frac{3}{2} A_1 \sin(k_1 l)$$

6. $M_2(l) = M_3(0)$

$$w_2''(l) = w_3''(0)$$
$$-{k_2}^2 A_2 \sin(k_2 l) - {k_2}^2 B_2 \cos(k_2 l) = -{k_3}^2 B_3$$
$$2A_2 \sin(k_2 l) + 2B_2 \cos(k_2 l) = B_3$$

7. $w_1(l) = w_2(0)$

$$A_1 \sin(k_1 l) + \Gamma_1 l = B_2 + \Delta_2$$

8. $w_2(l) = w_3(0)$

$$A_2 \sin(k_2 l) + B_2 \cos(k_2 l) + \Gamma_2 l + \Delta_2 = B_3 + \Delta_3$$

9. $w_3(l) = 0$

$$A_3\, sin(k_3 l) + B_3\, cos(k_3 l) + \Gamma_3 l + \Delta_3 = 0$$

10. $w_3''(l) = 0$

$$A_3\, sin(k_3 l) + B_3\, cos(k_3 l) = 0$$

Άρα σε συνδυασμό με την 9. θα είναι

$$\Gamma_3 l + \Delta_3 = 0$$

11. $w_1{}'(l) = w_2{}'(0)$

$$A_1 k_1 \cos(k_1 l) + \Gamma_1 = A_2 k_2 + \Gamma_2$$

$$A_1 (k_1 l) \cos(k_1 l) + \Gamma_1 l = A_2 (k_2 l) + \Gamma_2 l$$

12. $w_2{}'(l) = w_3{}'(0)$

$$A_2 k_2 \cos(k_2 l) - B_2 k_2 \sin(k_2 l) + \Gamma_2 = A_3 k_3 + \Gamma_3$$

$$A_2 (k_2 l) \cos(k_2 l) - B_2 (k_2 \mathrm{l}) \sin(k_2 l) + \Gamma_2 l = A_3 (k_3 l) + \Gamma_3 l$$

Παρατηρείται λοιπόν ότι με την προσθήκη ενός μόνο φορτίου το σύστημα των εξισώσεων έχει γίνει εξαιρετικά πολύπλοκο για να επιλυθεί με το χέρι. Για το λόγο αυτό η επίλυση 3 και περισσοτέρων θλιπτικών φορτίων έγινε με τη βοήθεια του μαθηματικού προγράμματος Maple και παρουσιάζεται στο επόμενο κεφάλαιο.

3 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΑΜΦΙΑΡΘΡΩΤΟ ΥΠΟΣΤΥΛΩΜΑ ΘΛΙΒΟΜΕΝΟ ΑΠΟ ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΜΕΝΑ ΑΞΟΝΙΚΑ ΦΟΡΤΙΑ

3.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό εξετάζεται η περίπτωση θλιβόμενου αμφιαρθρωτού υποστυλώματος από πολλά αξονικά φορτία. Το ένα φορτίο τοποθετείται στο άκρο του υποστυλώματος και τα υπόλοιπα ενδιάμεσα, σε ισαπέχουσες θέσεις. Η ράβδος έχει σταθερή διατομή καθ' όλο το μήκος της. Από την επίλυση προκύπτουν κρίσιμα φορτία και ισοδύναμα μήκη λυγισμού.

Όπως φάνηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο η διαδικασία εύρεσης του κρίσιμου φορτίου λυγισμού ενός υποστυλώματος που θλίβεται από πολλά αξονικά φορτία είναι ιδιαίτερα δυσχερής. Είναι όμως το πρόβλημα του λυγισμού, ένα πρόβλημα ιδιοτιμών όπως έχει προαναφερθεί. Με αυτή τη θεώρηση το πρόβλημα γίνεται απλούστερο εάν διατυπωθεί με πίνακες οι οποίοι στη συνέχεια εισάγονται στο μαθηματικό πρόγραμμα Maple. Για να γίνει πλήρως κατανοητή αυτή η διαδικασία, θα παρουσιαστεί αναλυτικά στο πρόγραμμα για έναν μικρό αριθμό φορτίων (2, 3 και 4) ενώ ακολουθεί πιο συνοπτικά για περισσότερα φορτία.

Η λογική έχει ως εξής: οι n εξισώσεις (συνοριακές συνθήκες κινηματικών και εντατικών μεγεθών) διατυπώνονται με τέτοιο τρόπο ώστε στο αριστερό μέλος να εμφανίζονται οι n άγνωστοι (σταθερές ολοκλήρωσης) με τους συντελεστές τους και το δεξί μέλος να είναι μηδενικό. Ακολούθως διατυπώνονται οι πίνακες που αντιστοιχούν σε τούτο το σύστημα. Δηλαδή ένας πίνακας με τους συντελεστές των αγνώστων, πολλαπλασιάζεται με ένα μητρώο στήλης (τους άγνωστους) και αυτό το γινόμενο πρέπει να ισούται με τον μηδενικό πίνακα. Εφόσον η εξίσωση είναι η ομογενής, για να έχει το σύστημα μη τετριμμένη (δηλαδή μη μηδενικό τον πίνακα των αγνώστων, ο οποίος θα σήμαινει προλυγισμική κατάσταση) λύση θα πρέπει η ορίζουσα του πίνακα των συντελεστών να είναι μηδενική. Δηλαδή

$$[A] * \{x\} = \{0\}$$

Εάν υπάρχει ο $[A]^{-1}$, κάτι το όποιο ισχύει αν και μόνον αν $det[A] \neq 0$, τότε θα είναι

$$\{x\} = [A]^{-1} * \{0\}$$

Δηλαδή

$$\{x\} = \{0\}$$

Άρα πρέπει ο πίνακας $[A]$ να μην είναι αντιστρέψιμος και τούτο συμβαίνει όταν η ορίζουσα του είναι μηδενική. Από το μηδενισμό λοιπόν της ορίζουσας θα προκύψει η εξίσωση λυγισμού του υποστυλώματος και από τη λύση αυτής της εξίσωσης βρίσκεται το κρίσιμο φορτίο λυγισμού.

Για διευκόλυνση κατά το σχηματισμό των πινάκων εκλέγονται πάντα τα συστήματα συντεταγμένων με την ίδια λογική. Το πρώτο τοποθετείται στην αριστερή στήριξη (άρθρωση) του υποστυλώματος (δεξιόφορο), το δεύτερο σε απόσταση l από το πρώτο (ομόφορο), το τρίτο σε απόσταση l από το δεύτερο, κοκ.

Ακόμα ισχύει γενικά για το βέλος κάμψης w_n

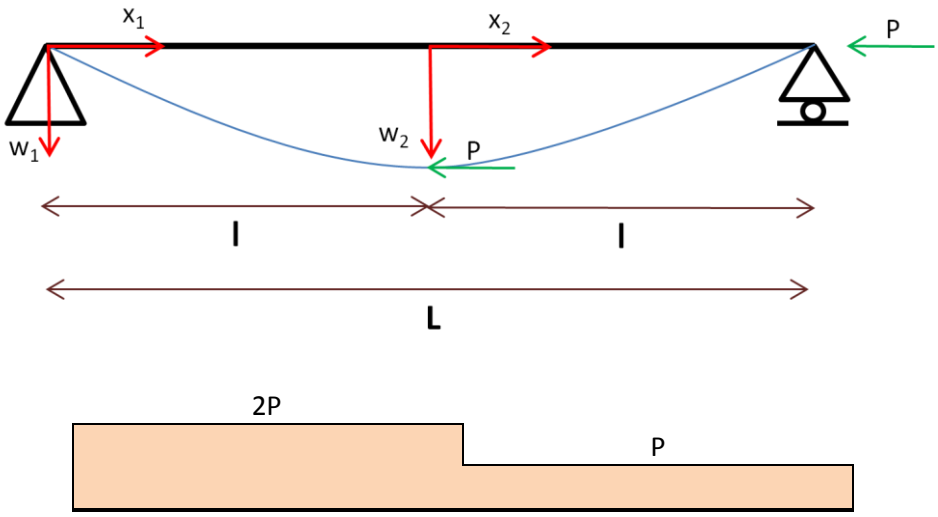
$$w_n(x_n) = A_n\, sin(k_n x_n) + B_n\, cos(k_n x_n) + \Gamma_n x_n + \Delta_n$$

$$w_n{}'(x_n) = A_n k_n\, cos(k_n x_n) - B_n k_n\, sin(k_n x_n) + \Gamma_n$$

$$w_n''(x_n) = -A_n {k_n}^2\, sin(k_n x_n) - B_n {k_n}^2 cos(k_n x_n)$$

$$w_n'''(x_n) = -A_n {k_n}^3\, cos(k_n x_n) + B_n {k_n}^3 sin(k_n x_n)$$

3.2 Αμφιαρθρωτή ράβδος σταθερής διατομής θλιβόμενη από 2 αξονικά φορτία



Είναι ${k_1}^2 = \frac{2P}{EI}$, ${k_2}^2 = \frac{P}{EI} = k^2$ δηλαδή $k_1 = \sqrt{2}k_2 = k$ και $l_1 = l_2 = l = \frac{L}{2}$

1. $w_1(0) = 0$

$$B_1 + \Delta_1 = 0$$

2. $M_1(0) = 0$, $-EI{w_1}''(0) = 0$

$$w_1''(0) = 0$$
$$B_1 = 0$$

Αυτές οι 2 συνθήκες θα ισχύουν πάντα ανεξάρτητα του πλήθους των συγκεντρωμένων φορτίων, καθώς είναι οι συνοριακές συνθήκες που αφορούν στην αριστερή στήριξη (άρθρωση) που σημαίνουν πάντα μηδενισμό βέλους κάμψης και ροπής κάμψης. Άρα πάντα θα μηδενίζονται οι σταθερές B_1 και Δ_1 !

3. $w_1(l) = w_2(0)$

$$A_1 \sin(k_1 l) + \Gamma_1 l = B_2 + \Delta_2$$
$$A_1 \sin(k_1 l) + \Gamma_1 l - B_2 - \Delta_2 = 0$$

4. ${w_1}'(l) = {w_2}'(0)$

$$A_1 k_1 \cos(k_1 l) + \Gamma_1 = A_2 k_2 + \Gamma_2$$

$$A_1 k_1 \cos(k_1 l) + \Gamma_1 - A_2 k_2 - \Gamma_2 = 0$$

5. $M_1(l) = M_2(0)$

$$w_1''(l) = w_2''(0)$$

$$-{k_1}^2 A_1 \sin(k_1 l) = -B_2 {k_2}^2$$

$$2A_1 \sin(k_1 l) - B_2 = 0$$

6. $V_1(l) - V_2(0) = 0$

$$-2P\Gamma_1 = -P\Gamma_2$$

$$2\Gamma_1 - \Gamma_2 = 0$$

7. $w_2(l) = 0$

$$A_2\, sin(k_2 l) + B_2\, cos(k_2 l) + \Gamma_2 l + \Delta_2 = 0$$

8. $M_2\ (l) = 0$

$$A_2\, sin(k_2 l) + B_2\, cos(k_2 l) = 0$$

Τώρα που μορφώθηκαν οι εξισώσεις θα τις φέρουμε σε μητρωική μορφή στο πρόγραμμα Maple. Να σημειωθεί ότι επειδή προέκυψε εύκολα ο μηδενισμός των 2 σταθερών B_1 και Δ_1 , αυτές τις γνωρίζουμε άρα θα χρησιμοποιηθούν μόνον οι εξισώσεις 3-8, δηλαδή ο πίνακας των συντελεστών θα είναι ένας πίνακας 6*6. Αυτός θα πολλαπλασιάζεται με τον πίνακα-στήλη των 6 αγνώστων.

Αρχικά πρέπει να καλέσουμε τις εντολές του προγράμματος για τη Γραμμική Άλγεβρα

```
with(LinearAlgebra)
```

Ύστερα θα γράψουμε τα διανύσματα που προκύπτουν. Εδώ επιλέγεται να οριστούν διανύσματα-στήλες. Αυτά είναι βέβαια 6 διανύσματα τα οποία εν συνεχεία θα τοποθετηθούν στον πίνακα το ένα δίπλα στο άλλο.

```
v := ⟨sin(k1·l), k1·cos(k1·l), 2·sin(k1·l), 0, 0, 0⟩

u := ⟨l, 1, 0, 2, 0, 0⟩

w := ⟨0, -k2, 0, 0, sin(k2·l), sin(k2·l)⟩
```

$z := \langle -1, 0, -1, 0, \cos(k2 \cdot l), \cos(k2 \cdot l) \rangle$

$a := \langle 0, -1, 0, -1, l, 0 \rangle$

$b := \langle -1, 0, 0, 0, 1, 0 \rangle$

Τώρα θα οριστεί ο πίνακας των συντελεστών με παράθεση των ορισμένων διανυσμάτων

$M := \langle v | u | w | z | a | b \rangle$

$$\begin{bmatrix} \sin(k1\, l) & l & 0 & -1 & 0 & -1 \\ k1 \cos(k1\, l) & 1 & -k2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 \sin(k1\, l) & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sin(k2\, l) & \cos(k2\, l) & l & 1 \\ 0 & 0 & \sin(k2\, l) & \cos(k2\, l) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Να σημειωθεί ότι το διάνυσμα-στήλη {x} έχει την εξής μορφή

$$\begin{bmatrix} A1 \\ \Gamma1 \\ A2 \\ B2 \\ \Gamma2 \\ \Delta2 \end{bmatrix}$$

Ακολούθως δίνεται η εντολή για να βρει το πρόγραμμα την ορίζουσα (Determinant) αυτού του πίνακα, στην οποία δίνουμε το όνομα “det”.

$det := Determinant(M)$

$$-\sin(k1\, l) \sin(k2\, l) + 3\, k1 \cos(k1\, l)\, l \sin(k2\, l) + 6 \sin(k1\, l)\, l\, k2 \cos(k2\, l)$$

Ακολούθως αντικαθιστούμε τα k_1, k_2 σε σχέση με το k, $k^2 = \frac{P}{EI}$

$subs(k2 = k, k1 = \sqrt{2} \cdot k, det)$

Εν συνεχεία αντικαθιστούμε τα kl με x (αντικατάσταση μεταβλητής), ώστε να έχουμε μία μεταβλητή και να είναι πιο διαχειρίσιμη η εξίσωση λυγισμού. Στη συνάρτηση αυτή δίνεται και το όνομα f.

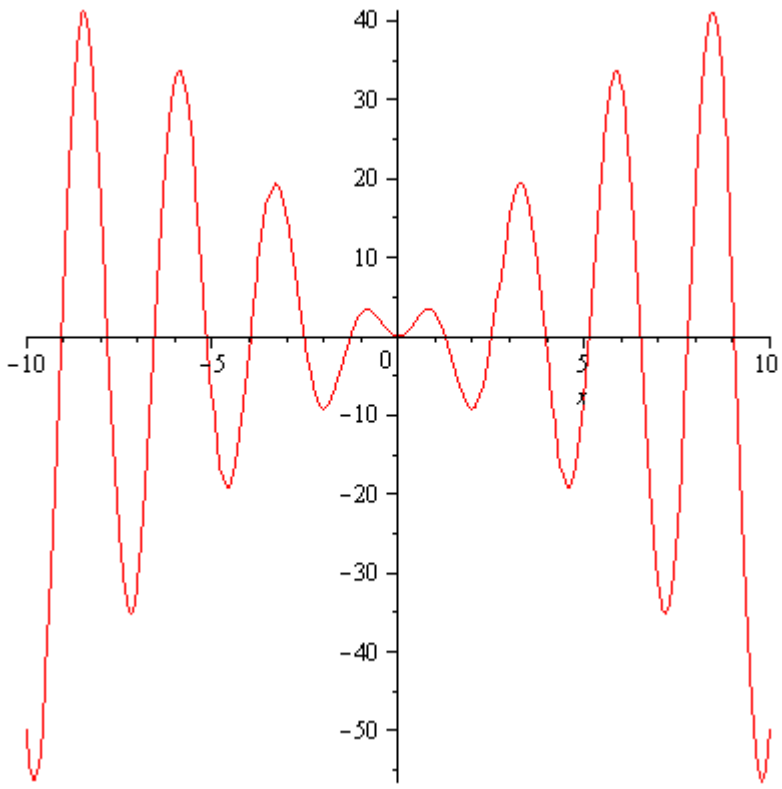
$algsubs(k \cdot l = x, \%)$

$f := \%$

$$-\sin(\sqrt{2}\,x)\sin(x) + 6\sin(\sqrt{2}\,x)\cos(x)\,x + 3\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}\,x)\sin(x)\,x$$

Φαίνεται ότι η εξίσωση λυγισμού θα είναι (όπως άλλωστε αναμενόταν) η ίδια με αυτήν που καταλήξαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο λύνοντας το σύστημα με το χέρι. Τώρα πρέπει να γίνει η γραφική παράσταση αυτής της συνάρτησης για να δούμε σε ποιο διάστημα μηδενίζεται για πρώτη φορά εκτός από το σημείο 0. Εάν ζητούσαμε από το πρόγραμμα απλά να λύσει την f(x)=0 θα μας έδινε μόνο τη λύση x=0. Για να δώσει το πρώτο κρίσιμο φορτίο λυγισμού πρέπει να του πούμε να ψάξει για λύση στο διάστημα που βλέπουμε ότι η συνάρτηση έχει ρίζα διαφορετική του σημείου (0,0).

$plot(f)$



Γίνεται ορατό τώρα ότι η πρώτη μη μηδενική τιμή που μηδενίζει τη συνάρτηση αυτή είναι στο διάστημα (1,2), οπότε ζητάμε από το πρόγραμμα να την εντοπίσει.

$fsolve(f = 0, x, 0.2..4)$

$$1.278282003$$

Δηλαδή είναι $x = k * l = 1.27828003$. Όμως εμείς θέλουμε το κρίσιμο φορτίο λυγισμού. $x^2 = k^2 l^2 = \frac{P}{EI} * \frac{L^2}{4}$ άρα $P_{cr} = 4x^2 * \frac{EI}{L^2}$. Ο συντελεστής προ της ποσότητας $\frac{EI}{L^2}$, δηλαδή εν προκειμένω η ποσότητα $4x^2$, καλείται αδιάστατο κρίσιμο φορτίο λυγισμού ${\beta_{cr}}^2$.

$1.278282003^2 \cdot 4$

$$6.536019516$$

Όσο για το ισοδύναμο μήκος λυγισμού KL, αυτό βρίσκεται ως εξής. Από τον

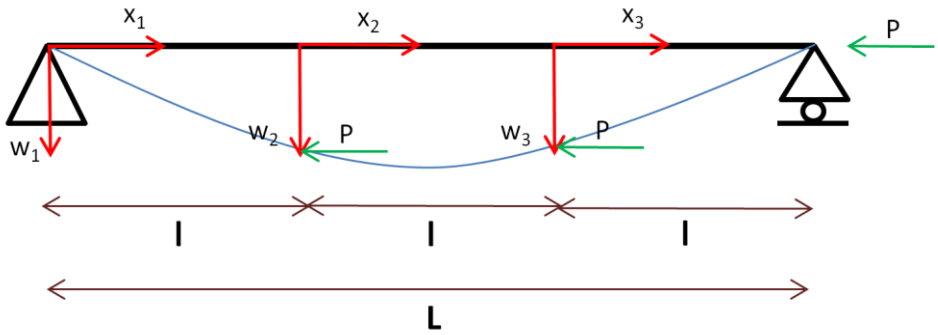
ορισμό του θέλουμε την ισότητα

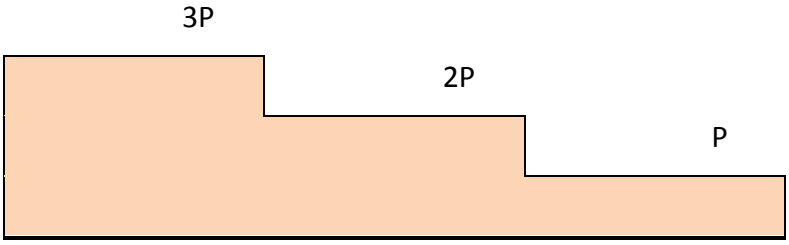
$$P_{cr} = \pi^2 * \frac{EI}{L'^2} = \beta_{cr}{}^2 * \frac{EI}{L^2}$$

$$L' = \frac{\pi}{\beta} * L$$

Δηλαδή ο συντελεστής ισοδύναμου μήκους λυγισμού είναι $K = \frac{\pi}{\beta} = 1.228833953$

3.3 Αμφιαρθρωτή ράβδος σταθερής διατομής θλιβόμενη από 3 αξονικά φορτία





Είναι $k_1{}^2 = \frac{3P}{EI}$, $k_2{}^2 = \frac{2P}{EI}$, $k_3{}^2 = \frac{P}{EI} = k^2$ δηλαδή $k_1 = \sqrt{3}k$, $k_2 = \sqrt{2}k$, $k_3 = k$ και $l_1 = l_2 = l_3 = l = \frac{L}{3}$

1. $w_1(0) = 0$

$$B_1 + \Delta_1 = 0$$

2. $M_1(0) = 0$, $-EIw_1''(0) = 0$

$$w_1''(0) = 0$$
$$B_1 = 0$$

Φαίνεται δηλαδή πάλι ότι μηδενίζονται τα B_1 , Δ_1, χάρη στο επιλεχθέν σύστημα συντεταγμένων.

3. $w_1(l) = w_2(0)$

$$A_1 \sin(k_1 l) + \Gamma_1 l = B_2 + \Delta_2$$
$$A_1 \sin(k_1 l) + \Gamma_1 l - B_2 - \Delta_2 = 0$$

4. $w_1'(l) = w_2'(0)$

$$A_1 k_1 \cos(k_1 l) + \Gamma_1 = A_2 k_2 + \Gamma_2$$
$$A_1 k_1 \cos(k_1 l) + \Gamma_1 - A_2 k_2 - \Gamma_2 = 0$$

5. $M_1(l) = M_2(0)$

$$w_1''(l) = w_2''(0)$$
$$-{k_1}^2 A_1 \sin(k_1 l) = -B_2 {k_2}^2$$
$$\frac{3}{2} A_1 \sin(k_1 l) - B_2 = 0$$

6. $V_1(l) - V_2(0) = 0$

$$-3P\Gamma_1 = -2P\Gamma_2$$
$$\frac{3}{2}\Gamma_1 - \Gamma_2 = 0$$

7. $w_2(l) = w_3(0)$

$$A_2 \sin(k_2 l) + B_2 \cos(k_2 l) + \Gamma_2 l + \Delta_2 = B_3 + \Delta_3$$
$$A_2 \sin(k_2 l) + B_2 \cos(k_2 l) + \Gamma_2 l + \Delta_2 - B_3 - \Delta_3 = 0$$

8. ${w_2}'(l) = {w_3}'(0)$

$$A_2 k_2 \cos(k_2 l) - B_2 k_2 \sin(k_2 l) + \Gamma_2 = A_3 k_3 + \Gamma_3$$

$$A_2 k_2 \cos(k_2 l) - B_2 k_2 \sin(k_2 l) + \Gamma_2 - A_3 k_3 - \Gamma_3 = 0$$

9. $M_2(l) = M_3(0)$

$$w_2''(l) = w_3''(0)$$
$$-{k_2}^2 A_2 \sin(k_2 l) - {k_2}^2 B_2 \cos(k_2 l) = -{k_3}^2 B_3$$
$$2A_2 \sin(k_2 l) + 2B_2 \cos(k_2 l) - B_3 = 0$$

10. $V_2(l) - V_3(0) = 0$

$$-2P\Gamma_2 = -P\Gamma_3$$
$$2\Gamma_2 - \Gamma_3 = 0$$

11. $w_3(l) = 0$

$$A_3 \, sin(k_3 l) + B_3 \, cos(k_3 l) + \Gamma_3 l + \Delta_3 = 0$$

12. $M_3 \ (l) = 0$

$$A_3 \, sin(k_3 l) + B_3 \, cos(k_3 l) = 0$$

Τώρα θα μορφωθεί ο πίνακας (10*10) στο πρόγραμμα Maple. Τα διανύσματα θα μορφωθούν πάλι ως στήλες, οι οποίες θα παρατεθούν η μια δίπλα στην άλλη για το σχηματισμό του πίνακα.

Αρχικά καλούμε τις εντολές Γραμμικής Άλγεβρας του προγράμματος

$with(LinearAlgebra)$

$$a1 := \left\langle \sin(k1 \cdot l), 0, k1 \cdot \cos(k1 \cdot l), 0, \frac{3}{2} \cdot \sin(k1 \cdot l), 0, 0, 0, 0, 0 \right\rangle$$

$$c1 := \left\langle l, 0, 1, 0, 0, 0, \frac{3}{2}, 0, 0, 0 \right\rangle$$

$$a2 := \langle 0, \sin(k2 \cdot l), -k2, k2 \cdot \cos(k2 \cdot l), 0, 2 \cdot \sin(k2 \cdot l), 0, 0, 0, 0 \rangle$$

$$b2 := \langle -1, \cos(k2 \cdot l), 0, -k2 \cdot \sin(k2 \cdot l), -1, 2 \cdot \cos(k2 \cdot l), 0, 0, 0, 0 \rangle$$

$$c2 := \langle 0, l, -1, 1, 0, 0, -1, 2, 0, 0 \rangle$$

$$d2 := \langle -1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \rangle$$

$$a3 := \langle 0, 0, 0, -k3, 0, 0, 0, 0, \sin(k3 \cdot l), \sin(k3 \cdot l) \rangle$$

$$b3 := \langle 0, -1, 0, 0, 0, -1, 0, 0, \cos(k3 \cdot l), \cos(k3 \cdot l) \rangle$$

$$c3 := \langle 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, -1, l, 0 \rangle$$

$$d3 := \langle 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0 \rangle$$

Ακολούθως ορίζεται ο πίνακας, όπως προηγουμένως. Του δίνεται το όνομα Matr.

$Matr := \langle a1|c1|a2|b2|c2|d2|a3|b3|c3|d3 \rangle$

$$\begin{bmatrix} \sin(k1\,l) & l & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin(k2\,l) & \cos(k2\,l) & l & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ k1\cos(k1\,l) & 1 & -k2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k2\cos(k2\,l) & -k2\sin(k2\,l) & 1 & 0 & -k3 & 0 & -1 & 0 \\ \frac{3}{2}\sin(k1\,l) & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sin(k2\,l) & 2\cos(k2\,l) & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin(k3\,l) & \cos(k3\,l) & l & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin(k3\,l) & \cos(k3\,l) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Στη συνέχεια βρίσκεται η ορίζουσα ευστάθειας.

$det := Determinant(Matr)$

$$\frac{5}{2}\sin(k1\,l)\,k2\cos(k2\,l)\sin(k3\,l) + \frac{1}{2}\sin(k1\,l)\sin(k2\,l)\,k3\cos(k3\,l) + \frac{3}{4}\sin(k1\,l)\,k2\sin(k3\,l)$$

$$-\frac{11}{2}k1\cos(k1\,l)\,k2\cos(k2\,l)\,l\sin(k3\,l) - 11\,k1\cos(k1\,l)\sin(k2\,l)\,l\,k3\cos(k3\,l)$$

$$+\frac{3}{2}k1\cos(k1\,l)\sin(k2\,l)\sin(k3\,l) + \frac{33}{4}\sin(k1\,l)\,k2^2\sin(k2\,l)\,l\sin(k3\,l)$$

$$-\frac{33}{2}\sin(k1\,l)\,k2\cos(k2\,l)\,l\,k3\cos(k3\,l) + \frac{3}{4}\sin(k1\,l)\,k2\sin(k2\,l)^2\sin(k3\,l)$$

$$+\frac{3}{4}\sin(k1\,l)\,k2\cos(k2\,l)^2\sin(k3\,l)$$

Παρατηρούμε ότι κυριαρχούν τα διάφορα k_i*l. Αυτά τα k_i είναι συνάρτηση ενός k, ενώ εμείς θα αναζητήσουμε το k*l=x. Για να διευκολυνθούμε λοιπόν σε αυτές τις αντικαταστάσεις πρέπει να έχουμε στην ορίζουσα μας ίδια τάξη k_i και l. Θα πολλαπλασιάσουμε λοιπόν την ορίζουσα αυτή με l και εν συνεχεία θα αντικαταστήσουμε $k_1 = \sqrt{3}k$, $k_2 = \sqrt{2}k$, $k_3 = k$ και k*l=x. Δηλαδή

$f := det \cdot l$

$expand(f)$

$subs(k1 = \sqrt{3} \cdot k, k2 = \sqrt{2} \cdot k, k3 = k, f)$

$expand(\%)$

$g := \%$

Για να γίνει αλγεβρική αντικατάσταση πρέπει να χρησιμοποιηθεί η εντολή “algsubs”

$algsubs(k \cdot l = x, g)$

$h := \%$

$$\frac{5}{2} \sin(\sqrt{3}\, x) \sqrt{2} \cos(\sqrt{2}\, x) \sin(x)\, x - \frac{33}{2} \sin(\sqrt{3}\, x) \sqrt{2} \cos(\sqrt{2}\, x) \cos(x)\, x^2$$

$$- \frac{11}{2} \sqrt{3} \cos(\sqrt{3}\, x) \sqrt{2} \cos(\sqrt{2}\, x) \sin(x)\, x^2 - 11 \sqrt{3} \cos(\sqrt{3}\, x) \sin(\sqrt{2}\, x) \cos(x)\, x^2$$

$$+ \frac{33}{2} \sin(\sqrt{3}\, x) \sin(\sqrt{2}\, x) \sin(x)\, x^2 + \frac{3}{2} \sqrt{3} \cos(\sqrt{3}\, x) \sin(\sqrt{2}\, x) \sin(x)\, x$$

$$+ \frac{1}{2} \sin(\sqrt{3}\, x) \sin(\sqrt{2}\, x) \cos(x)\, x + \frac{3}{4} \sin(\sqrt{3}\, x) \sqrt{2} \sin(x)\, x$$

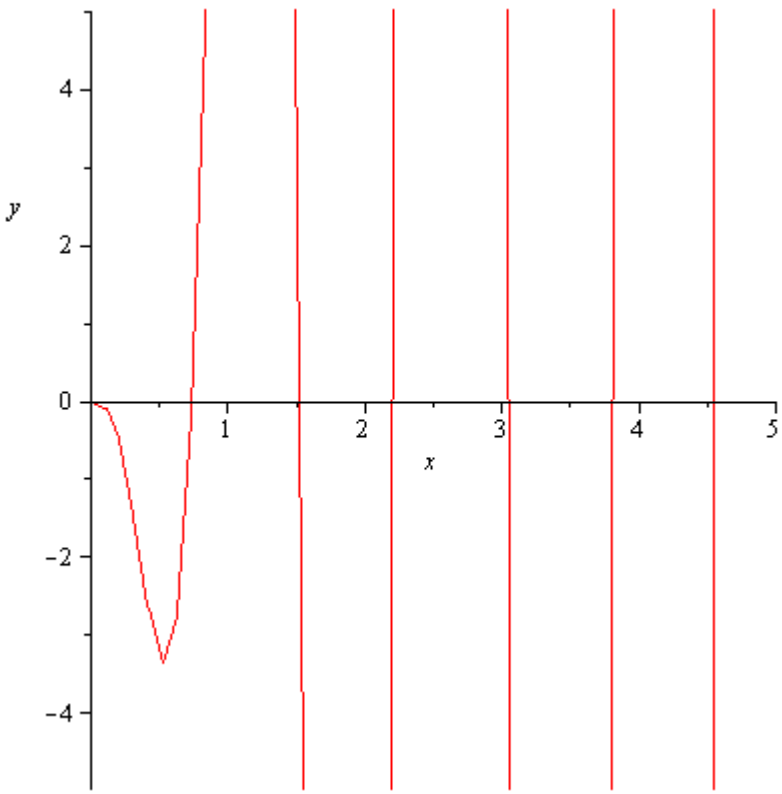
$$+ \frac{3}{4} \sin(\sqrt{3}\, x) \sqrt{2} \cos(\sqrt{2}\, x)^2 \sin(x)\, x + \frac{3}{4} \sin(\sqrt{3}\, x) \sqrt{2} \sin(\sqrt{2}\, x)^2 \sin(x)\, x$$

Τώρα θα γίνει η γραφική παράσταση αυτής της συνάρτησης. Πρώτα καλείται το πακέτο εντολών για τις γραφικές παραστάσεις.

$with(plots)$

Για καλύτερη ευκρίνεια, προκειμένου να βρεθεί το διάστημα στο οποίο θα πρέπει να αναζητηθεί η πρώτη λύση, επιλέγουμε το διάστημα της γραφικής παράστασης το οποίο θα φαίνεται στο σχέδιο.

$plot(h, x = 0..5, y = -5..5)$



άρα η λύση αναζητείται στο διάστημα (0,5..1)

$fsolve(h = 0, x, 0.5..1)$

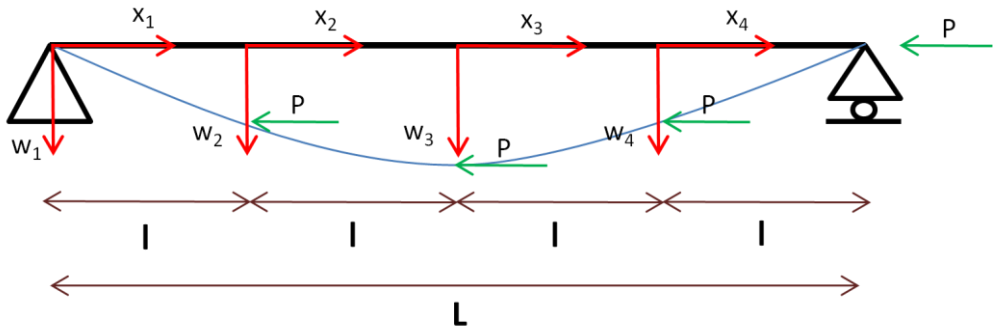
$$0.7314655265$$

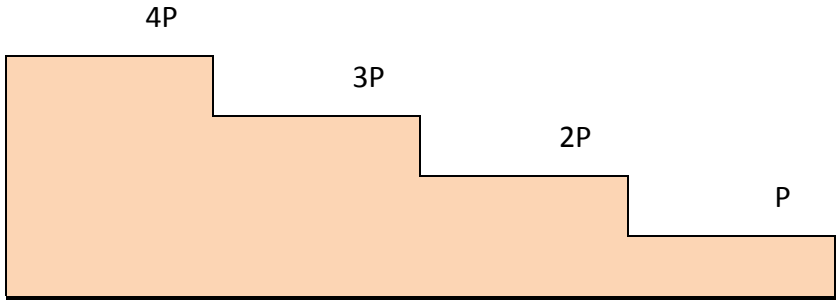
Για το κρίσιμο φορτίο λυγισμού ισχύει αντίστοιχα με την προηγούμενη παράγραφο. $x^2 = k^2 l^2 = \frac{P}{EI} * \frac{L^2}{9}$ άρα $P_{cr} = 9x^2 * \frac{EI}{L^2} = 4.815376348 \frac{EI}{L^2}$. Δηλαδή τώρα το αδιάστατο κρίσιμο φορτίο λυγισμού είναι ${\beta_{cr}}^2$

$$4.815376348$$

ενώ ο συντελεστής ισοδύναμου μήκους λυγισμού είναι $K = \frac{\pi}{\beta} = 1.431643069$

3.4 Αμφιαρθρωτή ράβδος σταθερής διατομής θλιβόμενη από 4 αξονικά φορτία





Είναι $k_1{}^2 = \frac{4P}{EI}$, $k_2{}^2 = \frac{3P}{EI}$, $k_3{}^2 = \frac{2P}{EI}$, $k_4 = \frac{P}{EI} = k^2$ δηλαδή $k_1 = 2k$, $k_2 = \sqrt{3}k$, $k_3 = \sqrt{2}k$, $k_4 = k$ και $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = l = \frac{L}{4}$

1. $w_1(0) = 0$

$$B_1 + \Delta_1 = 0$$

2. $M_1(0) = 0$, $-EIw_1''(0) = 0$

$$w_1''(0) = 0$$
$$B_1 = 0$$

3. $w_1(l) = w_2(0)$

$$A_1 \sin(k_1 l) + \Gamma_1 l = B_2 + \Delta_2$$
$$A_1 \sin(k_1 l) + \Gamma_1 l - B_2 - \Delta_2 = 0$$

4. $w_1'(l) = w_2'(0)$

$$A_1 k_1 \cos(k_1 l) + \Gamma_1 = A_2 k_2 + \Gamma_2$$
$$A_1 k_1 \cos(k_1 l) + \Gamma_1 - A_2 k_2 - \Gamma_2 = 0$$

5. $M_1(l) = M_2(0)$

$$w_1''(l) = w_2''(0)$$

$$-{k_1}^2 A_1 \sin(k_1 l) = -B_2 {k_2}^2$$

$$\frac{4}{3} A_1 \sin(k_1 l) - B_2 = 0$$

6. $V_1(l) - V_2(0) = 0$

$$-4P\Gamma_1 = -3P\Gamma_2$$

$$\frac{4}{3}\Gamma_1 - \Gamma_2 = 0$$

7. $w_2(l) = w_3(0)$

$$A_2 \sin(k_2 l) + B_2 \cos(k_2 l) + \Gamma_2 l + \Delta_2 = B_3 + \Delta_3$$

$$A_2 \sin(k_2 l) + B_2 \cos(k_2 l) + \Gamma_2 l + \Delta_2 - B_3 - \Delta_3 = 0$$

8. ${w_2}'(l) = {w_3}'(0)$

$$A_2 k_2 \cos(k_2 l) - B_2 k_2 \sin(k_2 l) + \Gamma_2 = A_3 k_3 + \Gamma_3$$

$$A_2 k_2 \cos(k_2 l) - B_2 k_2 \sin(k_2 l) + \Gamma_2 - A_3 k_3 - \Gamma_3 = 0$$

9. $M_2(l) = M_3(0)$

$$w_2''(l) = w_3''(0)$$

$$-{k_2}^2 A_2 \sin(k_2 l) - {k_2}^2 B_2 \cos(k_2 l) = -{k_3}^2 B_3$$

$$\frac{3}{2} A_2 \sin(k_2 l) + \frac{3}{2} B_2 \cos(k_2 l) - B_3 = 0$$

10. $V_2(l) - V_3(0) = 0$

$$-3P\Gamma_2 = -2P\Gamma_3$$

$$\frac{3}{2}\Gamma_2 - \Gamma_3 = 0$$

11. $w_3(l) = w_4(0)$

$$A_3 \sin(k_3 l) + B_3 \cos(k_3 l) + \Gamma_3 l + \Delta_3 = B_4 + \Delta_4$$

$$A_3 \sin(k_3 l) + B_3 \cos(k_3 l) + \Gamma_3 l + \Delta_3 - B_4 - \Delta_4 = 0$$

12. ${w_3}'(l) = {w_4}'(0)$

$$A_3 k_3 \cos(k_3 l) - B_3 k_3 \sin(k_3 l) + \Gamma_3 = A_4 k_4 + \Gamma_4$$

$$A_3 k_3 \cos(k_3 l) - B_3 k_3 \sin(k_3 l) + \Gamma_3 - A_4 k_4 - \Gamma_4 = 0$$

13. $M_3(l) = M_4(0)$

$$w_3''(l) = w_4''(0)$$

$$-{k_3}^2 A_3 \sin(k_3 l) - {k_3}^2 B_3 \cos(k_3 l) = -{k_4}^2 B_4$$

$$2A_3 \sin(k_3 l) + 2B_3 \cos(k_3 l) - B_4 = 0$$

14. $V_3(l) - V_4(0) = 0$

$$-2P\Gamma_3 = -P\Gamma_4$$

$$2\Gamma_3 - \Gamma_4 = 0$$

15. $w_4(l) = 0$

$$A_4\, sin(k_4 l) + B_4\, cos(k_4 l) + \Gamma_4 l + \Delta_4 = 0$$

16. $M_4\ (l) = 0$

$$A_4\, sin(k_4 l) + B_4\, cos(k_4 l) = 0$$

Ακολουθεί η μόρφωση του πίνακα (14*14) στο πρόγραμμα Maple. Παρουσιάζονται τα διανύσματα

$with(LinearAlgebra)$

Ακόμα, δίνουμε εντολή για να μπορεί το πρόγραμμα να εμφανίσει ολόκληρο τον πίνακα, καθώς έχει μεγάλο αριθμό στήλων και σειρών.

$interface(rtablesize = \infty)$

$$a1 := \left\langle \sin(k1 \cdot l), k1 \cdot \cos(k1 \cdot l), \frac{4}{3}\sin(k1 \cdot l), 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\rangle$$

$$c1 := \left\langle l, 1, 0, \frac{4}{3}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\rangle$$

$$a2 := \left\langle 0, -k2, 0, 0, \sin(k2 \cdot l), k2 \cdot \cos(k2 \cdot l), \frac{3}{2} \cdot \sin(k2 \cdot l), 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\rangle$$

$$b2 := \left\langle -1, 0, -1, 0, \cos(k2 \cdot l), -k2 \cdot \sin(k2 \cdot l), \frac{3}{2} \cdot \cos(k2 \cdot l), 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\rangle$$

$$c2 := \left\langle 0, -1, 0, -1, l, 1, 0, \frac{3}{2}, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\rangle$$

$$d2 := \langle -1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \rangle$$

$$a3 := \langle 0, 0, 0, 0, 0, -k3, 0, 0, \sin(k3 \cdot l), k3 \cdot \cos(k3 \cdot l), 2 \cdot \sin(k3 \cdot l), 0, 0, 0 \rangle$$

$$b3 := \langle 0, 0, 0, 0, -1, 0, -1, 0, \cos(k3 \cdot l), -k3 \cdot \sin(k3 \cdot l), 2 \cdot \cos(k3 \cdot l), 0, 0, 0 \rangle$$

$$c3 := \langle 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, -1, l, 1, 0, 2, 0, 0 \rangle$$

$$d3 := \langle 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0 \rangle$$

$$a4 := \langle 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -k4, 0, 0, \sin(k4 \cdot l), \sin(k4 \cdot l) \rangle$$

$$b4 := \langle 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, -1, 0, \cos(k4 \cdot l), \cos(k4 \cdot l) \rangle$$

$$c4 := \langle 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, -1, l, 0 \rangle$$

$$d4 := \langle 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 1, 0 \rangle$$

Άρα ο πίνακας είναι ο ακόλουθος

$$M := \langle a1 | c1 | a2 | b2 | c2 | d2 | a3 | b3 | c3 | d3 | a4 | b4 | c4 | d4 \rangle$$

$$\left[\left[\sin(k1\, l), l, 0, -1, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right], \right.$$

$$\left[k1 \cos(k1\, l), 1, -k2, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right],$$

$$\left[\frac{4}{3} \sin(k1\, l), 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right],$$

$$\left[0, \frac{4}{3}, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right],$$

$$\left[0, 0, \sin(k2\, l), \cos(k2\, l), l, 1, 0, -1, 0, -1, 0, 0, 0, 0 \right],$$

$$\left[0, 0, k2 \cos(k2\, l), -k2 \sin(k2\, l), 1, 0, -k3, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0 \right],$$

$$\left[0, 0, \frac{3}{2} \sin(k2\, l), \frac{3}{2} \cos(k2\, l), 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, \frac{3}{2}, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0 \right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, \sin(k3\, l), \cos(k3\, l), l, 1, 0, -1, 0, -1 \right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, k3\cos(k3\,l), -k3\sin(k3\,l), 1, 0, -k4, 0, -1, 0\right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 2\sin(k3\,l), 2\cos(k3\,l), 0, 0, 0, -1, 0, 0\right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, -1, 0\right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \sin(k4\,l), \cos(k4\,l), l, 1\right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \sin(k4\,l), \cos(k4\,l), 0, 0\right]\Big]$$

Η ορίζουσα του πίνακα είναι

$$Determinant(M)$$

$$\frac{50}{3}\,k1\cos(k1\,l)\,k2\cos(k2\,l)\sin(k3\,l)\,l\,k4\cos(k4\,l) + \frac{25}{3}\,k1\cos(k1\,l)\,k2\cos(k2\,l)\,k3\cos(k3\,l)\,l\sin(k4\,l)$$

$$-\frac{2}{9}\sin(k1\,l)\,k2\,k3\cos(k3\,l)\sin(k4\,l) + 25\,k1\cos(k1\,l)\sin(k2\,l)\,k3\cos(k3\,l)\,l\,k4\cos(k4\,l)$$

$$-\frac{10}{3}\,k1\cos(k1\,l)\sin(k2\,l)\,k3\cos(k3\,l)\sin(k4\,l) - k1\cos(k1\,l)\sin(k2\,l)\,k3\sin(k3\,l)^2\sin(k4\,l)$$

$$-\frac{25}{2}\,k1\cos(k1\,l)\sin(k2\,l)\,k3^2\sin(k3\,l)\,l\sin(k4\,l) - \frac{2}{3}\,k1\cos(k1\,l)\sin(k2\,l)\sin(k3\,l)\,k4\cos(k4\,l)$$

$$-k1\cos(k1\,l)\sin(k2\,l)\,k3\sin(k4\,l) - 2\,k1\cos(k1\,l)\,k2\cos(k2\,l)\sin(k3\,l)\sin(k4\,l)$$

$$-k1\cos(k1\,l)\sin(k2\,l)\,k3\cos(k3\,l)^2\sin(k4\,l) - \frac{2}{3}\sin(k1\,l)\,k2\cos(k2\,l)^2\,k3\cos(k3\,l)^2\sin(k4\,l)$$

$$-\frac{50}{3}\sin(k1\,l)\,k2\cos(k2\,l)\,k3^2\sin(k3\,l)\,l\sin(k4\,l) - \frac{200}{9}\sin(k1\,l)\,k2^2\sin(k2\,l)\sin(k3\,l)\,l\,k4\cos(k4\,l)$$

$$-\frac{2}{9}\sin(k1\,l)\,k2\cos(k2\,l)^2\,k3\cos(k3\,l)\sin(k4\,l) - \frac{4}{9}\sin(k1\,l)\,k2\cos(k2\,l)^2\sin(k3\,l)\,k4\cos(k4\,l)$$

$$-\frac{2}{3}\sin(k1\,l)\,k2\cos(k2\,l)^2\,k3\sin(k3\,l)^2\sin(k4\,l) - \frac{2}{3}\sin(k1\,l)\,k2\sin(k2\,l)^2\,k3\sin(k3\,l)^2\sin(k4\,l)$$

$$-\frac{2}{3}\sin(k1\,l)\,k2\sin(k2\,l)^2\,k3\cos(k3\,l)^2\sin(k4\,l) - \frac{100}{9}\sin(k1\,l)\,k2^2\sin(k2\,l)\,k3\cos(k3\,l)\,l\sin(k4\,l)$$

$$-\frac{2}{3}\sin(k1\,l)\,k2\,k3\sin(k4\,l)+\frac{100}{3}\sin(k1\,l)\,k2\cos(k2\,l)\,k3\cos(k3\,l)\,l\,k4\cos(k4\,l)$$

$$-\frac{4}{3}\sin(k1\,l)\,k2\cos(k2\,l)\,k3\sin(k3\,l)^2\sin(k4\,l)-\frac{4}{3}\sin(k1\,l)\,k2\cos(k2\,l)\,k3\cos(k3\,l)^2\sin(k4\,l)$$

$$-\frac{2}{9}\sin(k1\,l)\,k2\sin(k2\,l)^2\,k3\cos(k3\,l)\sin(k4\,l)-\frac{4}{9}\sin(k1\,l)\,k2\sin(k2\,l)^2\sin(k3\,l)\,k4\cos(k4\,l)$$

$$-\frac{4}{3}\sin(k1\,l)\,k2\cos(k2\,l)\,k3\sin(k4\,l)+\frac{8}{3}\sin(k1\,l)\,k2^2\sin(k2\,l)\sin(k3\,l)\sin(k4\,l)$$

$$-\frac{41}{9}\sin(k1\,l)\,k2\cos(k2\,l)\,k3\cos(k3\,l)\sin(k4\,l)-\frac{10}{9}\sin(k1\,l)\,k2\cos(k2\,l)\sin(k3\,l)\,k4\cos(k4\,l)$$

$$+\frac{1}{6}\sin(k1\,l)\sin(k2\,l)\,k3^2\sin(k3\,l)\sin(k4\,l)-\frac{1}{3}\sin(k1\,l)\sin(k2\,l)\,k3\cos(k3\,l)\,k4\cos(k4\,l)$$

$$-\frac{4}{9}\sin(k1\,l)\,k2\sin(k3\,l)\,k4\cos(k4\,l)$$

Τώρα δίνεται ένα όνομα στην ορίζουσα («orizousa»), στην οποία αντικαθιστούμε τα $k_1 = 2k$, $k_2 = \sqrt{3}k$, $k_3 = \sqrt{2}k$, $k_4 = k$ και πολλαπλασιάζουμε με την ποσότητα l^2 προκειμένου να έχουμε τελικά ίδιας τάξης k και l.

$orizousa := \%$

$subs\left(k4 = k, k3 = \sqrt{2}\cdot k, k2 = \sqrt{3}\cdot k, k1 = 2\cdot k, orizousa\right)$

$ori := \%\cdot l^2$

$expand(\%)$

$f := \%$

Τώρα γίνεται να προχωρήσουμε στην αλγεβρική αντικατάσταση k*l=x.

$algsubs(k\cdot l = x, f)$

Έτσι έχουμε να βρούμε την πρώτη μη μηδενική ρίζα της ακόλουθης συνάρτησης

$g := \%$

$$-\frac{92}{9}x^2\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}x)\sin(\sqrt{2}x)\sin(x)\cos(x)^2-\frac{50}{3}x^3\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}x)\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}x)\sin(x)$$

$$-50x^3\sin(\sqrt{3}x)\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}x)\cos(x)-\frac{200}{3}x^3\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}x)\sin(\sqrt{2}x)\sin(x)^2\cos(x)$$

$$+100x^3\sin(\sqrt{3}x)\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}x)\cos(x)^3+\frac{200}{3}x^3\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}x)\sin(\sqrt{2}x)\cos(x)^3$$

$$-\frac{200}{3}x^3\sin(\sqrt{3}x)\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}x)\sin(x)^2\cos(x)-\frac{700}{3}x^3\sin(\sqrt{3}x)\sin(\sqrt{2}x)\sin(x)\cos(x)^2$$

$$+100x^3\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}x)\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}x)\sin(x)\cos(x)^2-\frac{100}{3}x^3\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}x)\sin(\sqrt{2}x)\cos(x)$$

$$-\frac{4}{3}x^2\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}x)^2\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}x)^2\sin(x)^2\cos(x)-4x^2\sin(\sqrt{3}x)\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}x)^2\sin(x)\cos$$

$$-14x^2\sin(\sqrt{3}x)\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}x)\sin(x)\cos(x)^2-\frac{8}{3}x^2\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}x)\sqrt{2}\sin(x)^2\cos(x)$$

$$-\frac{8}{9}x^2\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}x)^2\sin(\sqrt{2}x)\cos(x)^2\sin(x)-\frac{4}{3}x^2\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}x)^2\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}x)^2\sin(x)^2c$$

(26

$$-\frac{8}{3}x^2\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}x)\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}x)^2\sin(x)^2\cos(x)-4x^2\sin(\sqrt{3}x)\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}x)^2\sin(x)\cos($$

)

$$+\frac{20}{3}x^2\sin(\sqrt{3}x)\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}x)\sin(x)-\frac{82}{9}x^2\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}x)\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}x)\sin(x)^2\cos(x)$$

$$-\frac{4}{9}x^2\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}x)^2\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}x)\sin(x)^2\cos(x)$$

$$-\frac{4}{9}x^2\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}x)^2\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}x)\sin(x)^2\cos(x)$$

$$-\frac{4}{3}x^2\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}x)^2\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}x)^2\sin(x)^2\cos(x)-\frac{8}{9}x^2\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}x)^2\sin(\sqrt{2}x)\cos(x)^2$$

$$-\frac{8}{3}x^2\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}x)\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}x)^2\sin(x)^2\cos(x)-\frac{4}{3}x^2\sqrt{3}\sqrt{2}\sin(x)^2\cos(x)$$

$$+\frac{50}{3}x^2\sin(\sqrt{3}x)\sin(\sqrt{2}x)\sin(x)^2\cos(x)+4x^2\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}x)\sin(\sqrt{2}x)\sin(x)$$

$$-\frac{8}{9}x^2\sqrt{3}\sin(\sqrt{2}x)\cos(x)^2\sin(x)+2x^2\sin(\sqrt{3}x)\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}x)^2\sin(x)$$

$$+ 2\,x^2 \sin(\sqrt{3}\,x)\,\sqrt{2}\,\sin(\sqrt{2}\,x)^2 \sin(x) - 4\,x^2 \sin(\sqrt{3}\,x)\,\sqrt{2}\,\sin(x)\cos(x)^2$$

$$- \frac{4}{9}\,x^2\,\sqrt{3}\,\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}\,x)\sin(x)^2\cos(x) - \frac{4}{3}\,x^2\,\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}\,x)^2\,\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}\,x)^2\sin(x)^2\cos(x)$$

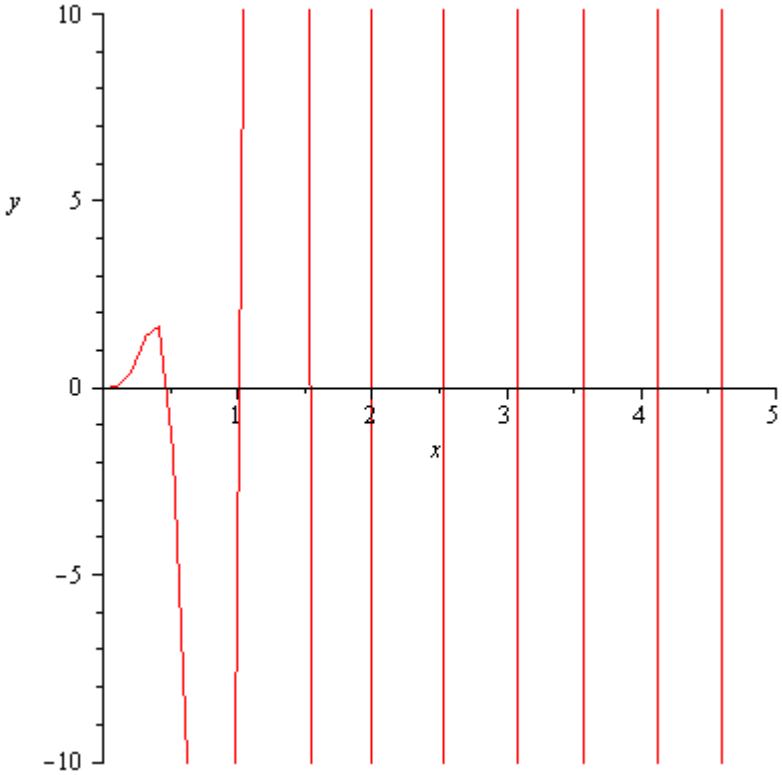
$$+ 50\,x^3 \sin(\sqrt{3}\,x)\sin(\sqrt{2}\,x)\sin(x) - \frac{8}{3}\,x^2 \sin(\sqrt{3}\,x)\sin(\sqrt{2}\,x)\cos(x)^3 + 2\,x^2 \sin(\sqrt{3}\,x)\,\sqrt{2}\,\sin$$

$$+ \frac{4}{3}\,x^2 \sin(\sqrt{3}\,x)\sin(\sqrt{2}\,x)\cos(x)$$

Πάλι θα γίνει η γραφική παράσταση για να ζητηθεί από το πρόγραμμα πού να αναζητήσει τη λύση.

with(*plots*)

plot(*g*, *x* = 0 ..5, *y* = -10 ..10)



Άρα αναζητείται η λύση στο διάστημα (0,2..0,7)

fsolve(*g* = 0, *x*, 0.2 ..0.7)

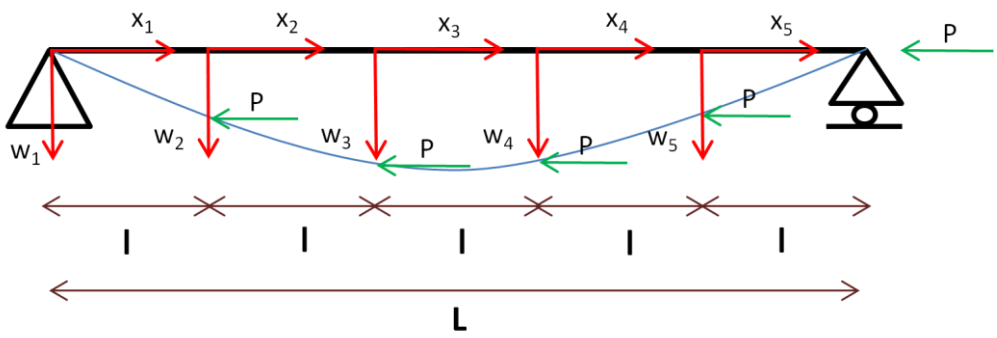
$$0.4885177835$$

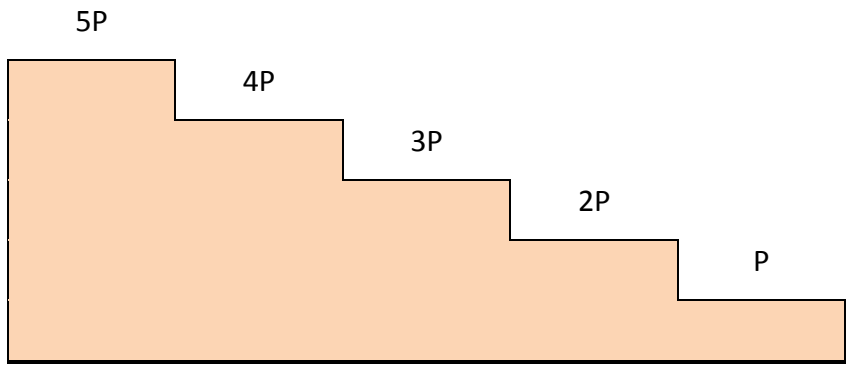
Άρα είναι $x^2 = k^2 l^2 = \frac{P}{EI} * \frac{L^2}{16}$, δηλαδή $P_{cr} = 16x^2 * \frac{EI}{L^2} = 3.818393997 \frac{EI}{L^2}$. Δηλαδή το $\beta_{cr}{}^2$ είναι

$$3.818393997$$

Ενώ το αδιάστατο ισοδύναμο μήκος λυγισμού είναι $K = \frac{\pi}{\beta} = 1.607716628$

3.5 Αμφιαρθρωτή ράβδος σταθερής διατομής θλιβόμενη από 5 αξονικά φορτία





Είναι ${k_1}^2 = \frac{5P}{EI}$, ${k_2}^2 = \frac{4P}{EI}$, ${k_3}^2 = \frac{3P}{EI}$, $k_4 = \frac{2P}{EI}$, $k_5 = \frac{P}{EI} = k^2$ δηλαδή $k_1 = \sqrt{5}k$, $k_2 = 2k$, $k_3 = \sqrt{3}k$, $k_4 = \sqrt{2}k$, $k_5 = k$ και $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = l_5 = l = \frac{L}{5}$

1. $w_1(0) = 0$

$$B_1 + \Delta_1 = 0$$

2. $M_1(0) = 0$, $-EIw_1''(0) = 0$

$$w_1''(0) = 0$$
$$B_1 = 0$$

3. $w_1(l) = w_2(0)$

$$A_1 \sin(k_1 l) + \Gamma_1 l = B_2 + \Delta_2$$
$$A_1 \sin(k_1 l) + \Gamma_1 l - B_2 - \Delta_2 = 0$$

4. $w_1'(l) = w_2'(0)$

$$A_1 k_1 \cos(k_1 l) + \Gamma_1 = A_2 k_2 + \Gamma_2$$

$$A_1 k_1 \cos(k_1 l) + \Gamma_1 - A_2 k_2 - \Gamma_2 = 0$$

5. $M_1(l) = M_2(0)$

$$w_1''(l) = w_2''(0)$$
$$-{k_1}^2 A_1 \sin(k_1 l) = -B_2 {k_2}^2$$
$$\frac{5}{4} A_1 \sin(k_1 l) - B_2 = 0$$

6. $V_1(l) - V_2(0) = 0$

$$-5P\Gamma_1 = -4P\Gamma_2$$
$$\frac{5}{4}\Gamma_1 - \Gamma_2 = 0$$

7. $w_2(l) = w_3(0)$

$$A_2 \sin(k_2 l) + B_2 \cos(k_2 l) + \Gamma_2 l + \Delta_2 = B_3 + \Delta_3$$
$$A_2 \sin(k_2 l) + B_2 \cos(k_2 l) + \Gamma_2 l + \Delta_2 - B_3 - \Delta_3 = 0$$

8. ${w_2}'(l) = {w_3}'(0)$

$$A_2 k_2 \cos(k_2 l) - B_2 k_2 \sin(k_2 l) + \Gamma_2 = A_3 k_3 + \Gamma_3$$

$$A_2 k_2 \cos(k_2 l) - B_2 k_2 \sin(k_2 l) + \Gamma_2 - A_3 k_3 - \Gamma_3 = 0$$

9. $M_2(l) = M_3(0)$

$$w_2''(l) = w_3''(0)$$
$$-{k_2}^2 A_2 \sin(k_2 l) - {k_2}^2 B_2 \cos(k_2 l) = -{k_3}^2 B_3$$
$$\frac{4}{3} A_2 \sin(k_2 l) + \frac{4}{3} B_2 \cos(k_2 l) - B_3 = 0$$

10. $V_2(l) - V_3(0) = 0$

$$-4P\Gamma_2 = -3P\Gamma_3$$
$$\frac{4}{3}\Gamma_2 - \Gamma_3 = 0$$

11. $w_3(l) = w_4(0)$

$$A_3 \sin(k_3 l) + B_3 \cos(k_3 l) + \Gamma_3 l + \Delta_3 = B_4 + \Delta_4$$
$$A_3 \sin(k_3 l) + B_3 \cos(k_3 l) + \Gamma_3 l + \Delta_3 - B_4 - \Delta_4 = 0$$

12. ${w_3}'(l) = {w_4}'(0)$

$$A_3 k_3 \cos(k_3 l) - B_3 k_3 \sin(k_3 l) + \Gamma_3 = A_4 k_4 + \Gamma_4$$

$$A_3k_3\cos(k_3l) - B_3k_3\sin(k_3l) + \Gamma_3 - A_4k_4 - \Gamma_4 = 0$$

13. $M_3(l) = M_4(0)$

$$w_3''(l) = w_4''(0)$$

$$-{k_3}^2A_3\sin(k_3l) - {k_3}^2B_3\cos(k_3l) = -{k_4}^2B_4$$

$$\frac{3}{2}A_3\sin(k_3l) + \frac{3}{2}B_3\cos(k_3l) - B_4 = 0$$

14. $V_3(l) - V_4(0) = 0$

$$-3P\Gamma_3 = -2P\Gamma_4$$

$$\frac{3}{2}\Gamma_3 - \Gamma_4 = 0$$

15. $w_4(l) = w_5(0)$

$$A_4\sin(k_4l) + B_4\cos(k_4l) + \Gamma_4l + \Delta_4 = B_5 + \Delta_5$$

$$A_4\sin(k_4l) + B_4\cos(k_4l) + \Gamma_4l + \Delta_4 - B_5 - \Delta_5 = 0$$

16. ${w_4}'(l) = {w_5}'(0)$

$$A_4k_4\cos(k_4l) - B_4k_4\sin(k_4l) + \Gamma_4 = A_5k_5 + \Gamma_5$$

$$A_4k_4\cos(k_4l) - B_4k_4\sin(k_4l) + \Gamma_4 - A_5k_5 - \Gamma_5 = 0$$

17. $M_4(l) = M_5(0)$

$$w_4''(l) = w_5''(0)$$

$$-{k_4}^2A_4\sin(k_4l) - {k_4}^2B_4\cos(k_4l) = -{k_5}^2B_5$$

$$2A_4\sin(k_4l) + 2B_4\cos(k_4l) - B_5 = 0$$

18. $V_4(l) - V_5(0) = 0$

$$-2P\Gamma_4 = -P\Gamma_5$$

$$2\Gamma_4 - \Gamma_5 = 0$$

19. $w_5(l) = 0$

$$A_5\,sin(k_5l) + B_5\,cos(k_5l) + \Gamma_5l + \Delta_5 = 0$$

20. $M_5\ (l) = 0$

$$A_5\,sin(k_5l) + B_5\,cos(k_5l) = 0$$

Ακολουθεί η μόρφωση του πίνακα και η επίλυση στο πρόγραμμα Maple.

$with(LinearAlgebra)$

$interface(rtablesize = \infty)$

$$a1 := \left\langle \sin(k1 \cdot l), k1 \cdot \cos(k1 \cdot l), \frac{5}{4}\sin(k1 \cdot l), 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\rangle$$

$$c1 := \left\langle l, 1, 0, \frac{5}{4}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\rangle$$

$$a2 := \left\langle 0, -k2, 0, 0, \sin(k2 \cdot l), k2 \cdot \cos(k2 \cdot l), \frac{4}{3}\sin(k2 \cdot l), 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\rangle$$

$$b2 := \left\langle -1, 0, -1, 0, \cos(k2 \cdot l), -k2 \cdot \sin(k2 \cdot l), \frac{4}{3}\cos(k2 \cdot l), 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\rangle$$

$$c2 := \left\langle 0, -1, 0, -1, l, 1, 0, \frac{4}{3}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\rangle$$

$$d2 := \langle -1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \rangle$$

$$a3 := \left\langle 0, 0, 0, 0, 0, -k3, 0, 0, \sin(k3 \cdot l), k3 \cdot \cos(k3 \cdot l), \frac{3}{2}\sin(k3 \cdot l), 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\rangle$$

$$b3 := \left\langle 0, 0, 0, 0, -1, 0, -1, 0, \cos(k3 \cdot l), -k3 \cdot \sin(k3 \cdot l), \frac{3}{2}\cos(k3 \cdot l), 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\rangle$$

$$c3 := \left\langle 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, -1, l, 1, 0, \frac{3}{2}, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\rangle$$

$$d3 := \langle 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \rangle$$

$$a4 := \langle 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -k4, 0, 0, \sin(k4 \cdot l), k4 \cdot \cos(k4 \cdot l), 2 \cdot \sin(k4 \cdot l), 0, 0, 0 \rangle$$

$$b4 := \langle 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, -1, 0, \cos(k4 \cdot l), -k4 \cdot \sin(k4 \cdot l), 2 \cdot \cos(k4 \cdot l), 0, 0, 0 \rangle$$

$$c4 := \langle 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, -1, l, 1, 0, 2, 0, 0 \rangle$$

$$d4 := \langle 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0 \rangle$$

$$a5 := \langle 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -k5, 0, 0, \sin(k5 \cdot l), \sin(k5 \cdot l) \rangle$$

$$b5 := \langle 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, -1, 0, \cos(k5 \cdot l), \cos(k5 \cdot l) \rangle$$

$$c5 := \langle 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, -1, l, 0 \rangle$$

$$d5 := \langle 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 1, 0 \rangle$$

$$M := \langle a1|c1|a2|b2|c2|d2|a3|b3|c3|d3|a4|b4|c4|d4|a5|b5|c5|d5 \rangle$$

$$\left[\left[\sin(k1\,l), l, 0, -1, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right],\right.$$

$$\left[k1\cos(k1\,l), 1, -k2, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right],$$

$$\left[\frac{5}{4}\sin(k1\,l), 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right],$$

$$\left[0, \frac{5}{4}, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right],$$

$$\left[0, 0, \sin(k2\,l), \cos(k2\,l), l, 1, 0, -1, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right],$$

$$\left[0, 0, k2\cos(k2\,l), -k2\sin(k2\,l), 1, 0, -k3, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right],$$

$$\left[0, 0, \frac{4}{3}\sin(k2\,l), \frac{4}{3}\cos(k2\,l), 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, \frac{4}{3}, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, \sin(k3\,l), \cos(k3\,l), l, 1, 0, -1, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0\right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, k3\cos(k3\,l), -k3\sin(k3\,l), 1, 0, -k4, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{3}{2}\sin(k3\,l), \frac{3}{2}\cos(k3\,l), 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{3}{2}, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \sin(k4\,l), \cos(k4\,l), l, 1, 0, -1, 0, -1, 0\right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, k4\cos(k4\,l), -k4\sin(k4\,l), 1, 0, -k5, 0, -1, 0, 0\right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2\sin(k4\,l), 2\cos(k4\,l), 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0\right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, -1, 0\right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \sin(k5\, l), \cos(k5\, l), l, 1\right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \sin(k5\, l), \cos(k5\, l), 0, 0\right]\Big]$$

$$orizousa := Determinant(M)$$

$$subs\left(k5 = k, k4 = \sqrt{2}\cdot k, k3 = \sqrt{3}\cdot k, k2 = 2\cdot k, k1 = \sqrt{5}\cdot k, orizousa\right)$$

Πολλαπλασιάζουμε με l^3 για να έχουμε ίδιας τάξης k και l

$$ori := \%\cdot l^3$$

$$expand(\%)$$

$$algsubs(k\cdot l = x, \%)$$

$$f := \%$$

Τώρα θα γίνει η γραφική παράσταση αυτής της συνάρτησης. Έφοσον θέλουμε τη μη τετριμμένη λύση, πρέπει x≠0, άρα μπορούμε να διαιρέσουμε με x^3 για να απλοποιηθεί η συνάρτηση και να είναι πιο εύκολα διαχειρίσιμη, τόσο προγραμματιστικά όσο και εποπτικά.

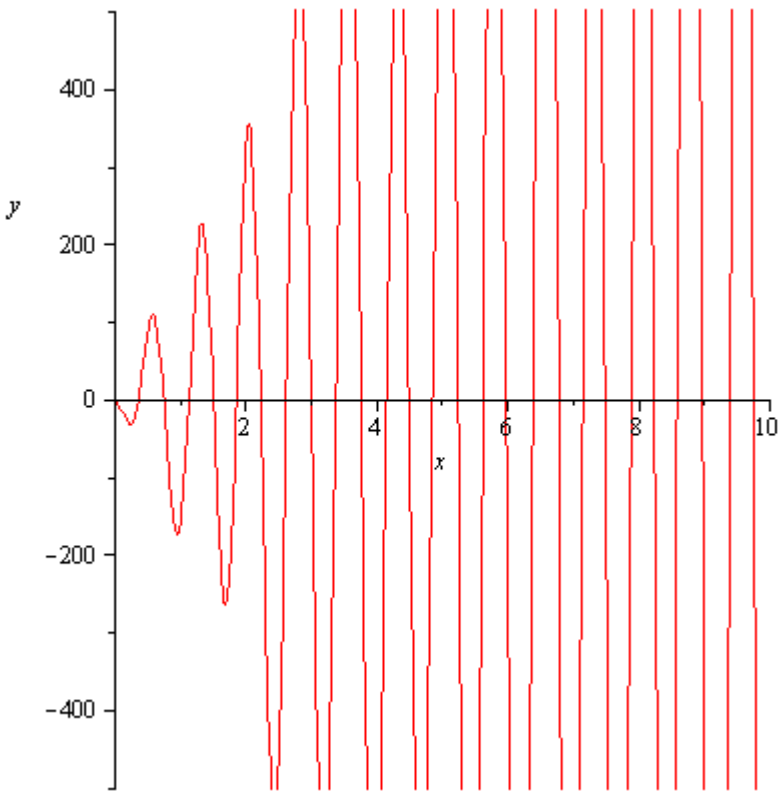
$$with(plots)$$

$$g := \frac{f}{x^3}$$

$$expand(\%)$$

$$h := \%$$

$$plot(h, x = 0..10, y = -500..500)$$



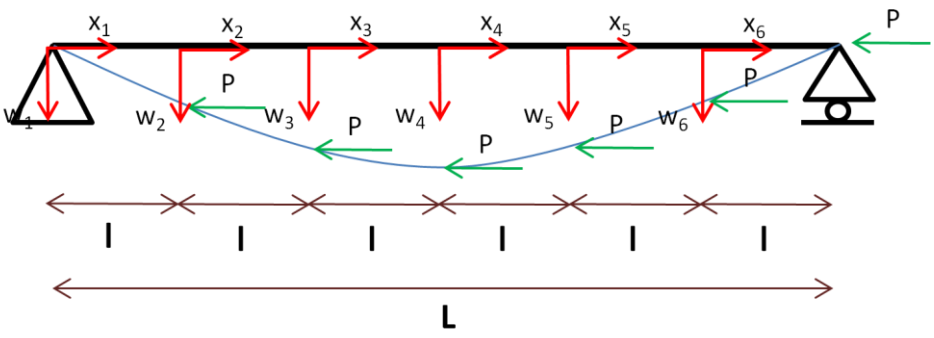
Αναζητείται λοιπόν μια λύση στο διάστημα (0,1..0,7)

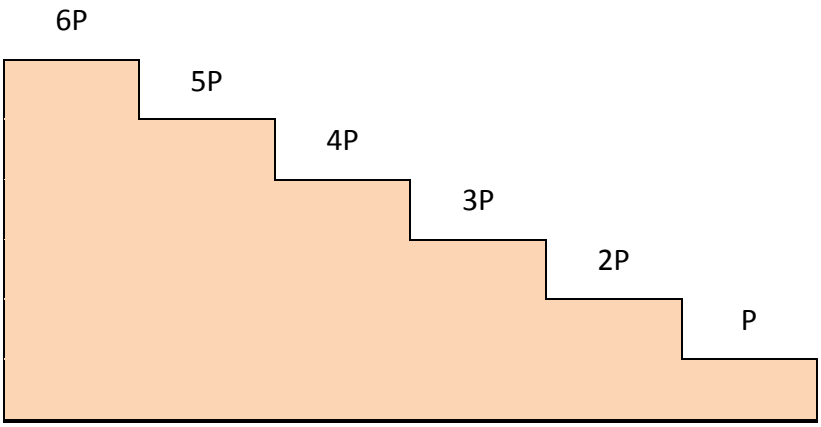
$fsolve(h = 0, x, 0.1..0.7)$

$$0.3557932440$$

Άρα είναι $x^2 = k^2 l^2 = \frac{P}{EI} * \frac{L^2}{25}$, δηλαδή $P_{cr} = 25x^2 * \frac{EI}{L^2} = 3.164720812 \frac{EI}{L^2}$. Δηλαδή το β_{cr}^2 είναι 3.164720812. Ενώ το αδιάστατο ισοδύναμο μήκος λυγισμού είναι $K = \frac{\pi}{\beta} = 1.765965322$

3.6 Αμφιαρθρωτή ράβδος σταθερής διατομής θλιβόμενη από 6 αξονικά φορτία





Είναι $k_1{}^2 = \frac{6P}{EI}$, $k_2{}^2 = \frac{5P}{EI}$, $k_3{}^2 = \frac{4P}{EI}$, $k_4 = \frac{3P}{EI}$, $k_5 = \frac{2P}{EI}$, $k_6 = \frac{P}{EI} = k^2$ δηλαδή $k_1 = \sqrt{6}k$, $k_2 = \sqrt{5}k$, $k_3 = 2k$, $k_4 = \sqrt{3}k$, $k_5 = \sqrt{2}k$, $k_6 = k$ και $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = l_5 = l_6 = l = \frac{L}{6}$

1. $w_1(0) = 0$

$$B_1 + \Delta_1 = 0$$

2. $M_1(0) = 0$, $-EIw_1''(0) = 0$

$$w_1''(0) = 0$$

$$B_1 = 0$$

3. $w_1(l) = w_2(0)$

$$A_1 \sin(k_1 l) + \Gamma_1 l = B_2 + \Delta_2$$
$$A_1 \sin(k_1 l) + \Gamma_1 l - B_2 - \Delta_2 = 0$$

4. $w_1{}'(l) = w_2{}'(0)$

$$A_1 k_1 \cos(k_1 l) + \Gamma_1 = A_2 k_2 + \Gamma_2$$
$$A_1 k_1 \cos(k_1 l) + \Gamma_1 - A_2 k_2 - \Gamma_2 = 0$$

5. $M_1(l) = M_2(0)$

$$w_1''(l) = w_2''(0)$$
$$-k_1{}^2 A_1 \sin(k_1 l) = -B_2 k_2{}^2$$
$$\frac{6}{5} A_1 \sin(k_1 l) - B_2 = 0$$

6. $V_1(l) - V_2(0) = 0$

$$-6P\Gamma_1 = -5P\Gamma_2$$
$$\frac{6}{5}\Gamma_1 - \Gamma_2 = 0$$

7. $w_2(l) = w_3(0)$

$$A_2 \sin(k_2 l) + B_2 \cos(k_2 l) + \Gamma_2 l + \Delta_2 = B_3 + \Delta_3$$
$$A_2 \sin(k_2 l) + B_2 \cos(k_2 l) + \Gamma_2 l + \Delta_2 - B_3 - \Delta_3 = 0$$

8. $w_2{}'(l) = w_3{}'(0)$

$$A_2 k_2 \cos(k_2 l) - B_2 k_2 \sin(k_2 l) + \Gamma_2 = A_3 k_3 + \Gamma_3$$

$$A_2 k_2 \cos(k_2 l) - B_2 k_2 \sin(k_2 l) + \Gamma_2 - A_3 k_3 - \Gamma_3 = 0$$

9. $M_2(l) = M_3(0)$

$$w_2''(l) = w_3''(0)$$
$$-k_2{}^2 A_2 \sin(k_2 l) - k_2{}^2 B_2 \cos(k_2 l) = -k_3{}^2 B_3$$
$$\frac{5}{4} A_2 \sin(k_2 l) + \frac{5}{4} B_2 \cos(k_2 l) - B_3 = 0$$

10. $V_2(l) - V_3(0) = 0$

$$-5P\Gamma_2 = -4P\Gamma_3$$
$$\frac{5}{4}\Gamma_2 - \Gamma_3 = 0$$

11. $w_3(l) = w_4(0)$

$$A_3 \sin(k_3 l) + B_3 \cos(k_3 l) + \Gamma_3 l + \Delta_3 = B_4 + \Delta_4$$
$$A_3 \sin(k_3 l) + B_3 \cos(k_3 l) + \Gamma_3 l + \Delta_3 - B_4 - \Delta_4 = 0$$

12. $w_3{}'(l) = w_4{}'(0)$

$$A_3 k_3 \cos(k_3 l) - B_3 k_3 \sin(k_3 l) + \Gamma_3 = A_4 k_4 + \Gamma_4$$

$$A_3 k_3 \cos(k_3 l) - B_3 k_3 \sin(k_3 l) + \Gamma_3 - A_4 k_4 - \Gamma_4 = 0$$

13. $M_3(l) = M_4(0)$

$$w_3''(l) = w_4''(0)$$
$$-k_3{}^2 A_3 \sin(k_3 l) - k_3{}^2 B_3 \cos(k_3 l) = -k_4{}^2 B_4$$
$$\frac{4}{3} A_3 \sin(k_3 l) + \frac{4}{3} B_3 \cos(k_3 l) - B_4 = 0$$

14. $V_3(l) - V_4(0) = 0$

$$-4P\Gamma_3 = -3P\Gamma_4$$
$$\frac{4}{3}\Gamma_3 - \Gamma_4 = 0$$

15. $w_4(l) = w_5(0)$

$$A_4 \sin(k_4 l) + B_4 \cos(k_4 l) + \Gamma_4 l + \Delta_4 = B_5 + \Delta_5$$
$$A_4 \sin(k_4 l) + B_4 \cos(k_4 l) + \Gamma_4 l + \Delta_4 - B_5 - \Delta_5 = 0$$

16. $w_4{}'(l) = w_5{}'(0)$

$$A_4 k_4 \cos(k_4 l) - B_4 k_4 \sin(k_4 l) + \Gamma_4 = A_5 k_5 + \Gamma_5$$

$$A_4 k_4 \cos(k_4 l) - B_4 k_4 \sin(k_4 l) + \Gamma_4 - A_5 k_5 - \Gamma_5 = 0$$

17. $M_4(l) = M_5(0)$

$$w_4''(l) = w_5''(0)$$
$$-k_4{}^2 A_4 \sin(k_4 l) - k_4{}^2 B_4 \cos(k_4 l) = -k_5{}^2 B_5$$
$$\frac{3}{2} A_4 \sin(k_4 l) + \frac{3}{2} B_4 \cos(k_4 l) - B_5 = 0$$

18. $V_4(l) - V_5(0) = 0$

$$-3P\Gamma_4 = -2P\Gamma_5$$
$$\frac{3}{2}\Gamma_4 - \Gamma_5 = 0$$

19. $w_5(l) = w_6(0)$

$$A_5 \sin(k_5 l) + B_5 \cos(k_5 l) + \Gamma_5 l + \Delta_5 = B_6 + \Delta_6$$
$$A_5 \sin(k_5 l) + B_5 \cos(k_5 l) + \Gamma_5 l + \Delta_5 - B_6 - \Delta_6 = 0$$

20. $w_5{}'(l) = w_6{}'(0)$

$$A_5 k_5 \cos(k_5 l) - B_5 k_5 \sin(k_5 l) + \Gamma_5 = A_6 k_6 + \Gamma_6$$

$$A_5 k_5 \cos(k_5 l) - B_5 k_5 \sin(k_5 l) + \Gamma_5 - A_6 k_6 - \Gamma_6 = 0$$

21. $M_5(l) = M_6(0)$

$$w_5''(l) = w_6''(0)$$
$$-k_5{}^2 A_5 \sin(k_5 l) - k_5{}^2 B_5 \cos(k_5 l) = -k_6{}^2 B_6$$
$$2A_5 \sin(k_5 l) + 2B_5 \cos(k_5 l) - B_6 = 0$$

22. $V_5(l) - V_6(0) = 0$

$$-2P\Gamma_5 = -P\Gamma_6$$
$$2\Gamma_5 - \Gamma_6 = 0$$

23. $w_6(l) = 0$

$$A_6\, sin(k_6 l) + B_6\, cos(k_6 l) + \Gamma_6 l + \Delta_6 = 0$$

24. $M_6\ (l) = 0$

$$A_6\, sin(k_6 l) + B_6\, cos(k_6 l) = 0$$

Ακολουθεί η μόρφωση των διανυσμάτων

$$a1 := \left\langle \sin(k1 \cdot l), k1 \cdot \cos(k1 \cdot l), \frac{6}{5} \cdot \sin(k1 \cdot l), 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\rangle$$

$$c1 := \left\langle l, 1, 0, \frac{6}{5}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\rangle$$

$$a2 := \left\langle 0, -k2, 0, 0, \sin(k2 \cdot l), k2 \cdot \cos(k2 \cdot l), \frac{5}{4} \cdot \sin(k2 \cdot l), 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\rangle$$

$$b2 := \left\langle -1, 0, -1, 0, \cos(k2 \cdot l), -k2 \cdot \sin(k2 \cdot l), \frac{5}{4} \cdot \cos(k2 \cdot l), 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\rangle$$

$$c2 := \left\langle 0, -1, 0, -1, l, 1, 0, \frac{5}{4}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\rangle$$

$$d2 := \langle -1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \rangle$$

$$a3 := \left\langle 0, 0, 0, 0, 0, -k3, 0, 0, \sin(k3 \cdot l), k3 \cdot \cos(k3 \cdot l), \frac{4}{3} \cdot \sin(k3 \cdot l), 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\rangle$$

$$b3 := \left\langle 0, 0, 0, 0, -1, 0, -1, 0, \cos(k3 \cdot l), -k3 \cdot \sin(k3 \cdot l), \frac{4}{3} \cdot \cos(k3 \cdot l), 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\rangle$$

$$c3 := \left\langle 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, -1, l, 1, 0, \frac{4}{3}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\rangle$$

$$d3 := \langle 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \rangle$$

$$a4 := \left\langle 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -k4, 0, 0, \sin(k4 \cdot l), k4 \cdot \cos(k4 \cdot l), \frac{3}{2} \cdot \sin(k4 \cdot l), 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\rangle$$

$$b4 := \left\langle 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, -1, 0, \cos(k4 \cdot l), -k4 \cdot \sin(k4 \cdot l), \frac{3}{2} \cdot \cos(k4 \cdot l), 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\rangle$$

$$c4 := \left\langle 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, -1, l, 1, 0, \frac{3}{2}, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\rangle$$

$$d4 := \langle 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \rangle$$

$$a5 := \langle 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -k5, 0, 0, \sin(k5 \cdot l), k5 \cdot \cos(k5 \cdot l), 2 \cdot \sin(k5 \cdot l), 0, 0, 0 \rangle$$

$$b5 := \langle 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, -1, 0, \cos(k5 \cdot l), -k5 \cdot \sin(k5 \cdot l), 2 \cdot \cos(k5 \cdot l), 0, 0, 0 \rangle$$

$$c5 := \langle 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, -1, l, 1, 0, 2, 0, 0 \rangle$$

$$d5 := \langle 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0 \rangle$$

$$a6 := \langle 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -k6, 0, 0, \sin(k6 \cdot l), \sin(k6 \cdot l) \rangle$$

$$b6 := \langle 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, -1, 0, \cos(k6 \cdot l), \cos(k6 \cdot l) \rangle$$

$$c6 := \langle 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, -1, l, 0 \rangle$$

$$d6 := \langle 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 1, 0 \rangle$$

$$with(LinearAlgebra)$$

$$interface(rtablesize = \infty)$$

$$M := \langle a1 | c1 | a2 | b2 | c2 | d2 | a3 | b3 | c3 | d3 | a4 | b4 | c4 | d4 | a5 | b5 | c5 | d5 | a6 | b6 | c6 | d6 \rangle$$

$$\Big[\Big[\sin(k1\ l), l, 0, -1, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\Big],$$

$$\left[k1\cos(k1\,l),\ 1,\ -k2,\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right],$$

$$\left[\frac{6}{5}\sin(k1\,l),\ 0,\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right],$$

$$\left[0,\ \frac{6}{5},\ 0,\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right],$$

$$\left[0,\ 0,\ \sin(k2\,l),\ \cos(k2\,l),\ l,\ 1,\ 0,\ -1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right],$$

$$\left[0,\ 0,\ k2\cos(k2\,l),\ -k2\sin(k2\,l),\ 1,\ 0,\ -k3,\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right],$$

$$\left[0,\ 0,\ \frac{5}{4}\sin(k2\,l),\ \frac{5}{4}\cos(k2\,l),\ 0,\ 0,\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right],$$

$$\left[0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{5}{4},\ 0,\ 0,\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right],$$

$$\left[0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \sin(k3\,l),\ \cos(k3\,l),\ l,\ 1,\ 0,\ -1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right],$$

$$\left[0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ k3\cos(k3\,l),\ -k3\sin(k3\,l),\ 1,\ 0,\ -k4,\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right],$$

$$\left[0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{4}{3}\sin(k3\,l),\ \frac{4}{3}\cos(k3\,l),\ 0,\ 0,\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right],$$

$$\left[0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{4}{3},\ 0,\ 0,\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right],$$

$$\left[0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \sin(k4\,l),\ \cos(k4\,l),\ l,\ 1,\ 0,\ -1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right],$$

$$\left[0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ k4\cos(k4\,l),\ -k4\sin(k4\,l),\ 1,\ 0,\ -k5,\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right],$$

$$\left[0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{3}{2}\sin(k4\,l),\ \frac{3}{2}\cos(k4\,l),\ 0,\ 0,\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right],$$

$$\left[0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{3}{2},\ 0,\ 0,\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\right],$$

$$\left[0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \sin(k5\,l),\ \cos(k5\,l),\ l,\ 1,\ 0,\ -1,\ 0,\ -1\right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, k5\cos(k5\,l), -k5\sin(k5\,l), 1, 0, -k6, 0, -1, 0\right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2\sin(k5\,l), 2\cos(k5\,l), 0, 0, 0, -1, 0, 0\right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, -1, 0\right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \sin(k6\,l), \cos(k6\,l), l, 1\right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \sin(k6\,l), \cos(k6\,l), 0, 0\right]\Big]$$

$$orizousa := Determinant(M)$$

$$subs\left(k1 = \sqrt{6}\cdot k, k2 = \sqrt{5}\cdot k, k3 = 2\cdot k, k4 = \sqrt{3}\cdot k, k5 = \sqrt{2}\cdot k, k6 = k, orizousa\right)$$

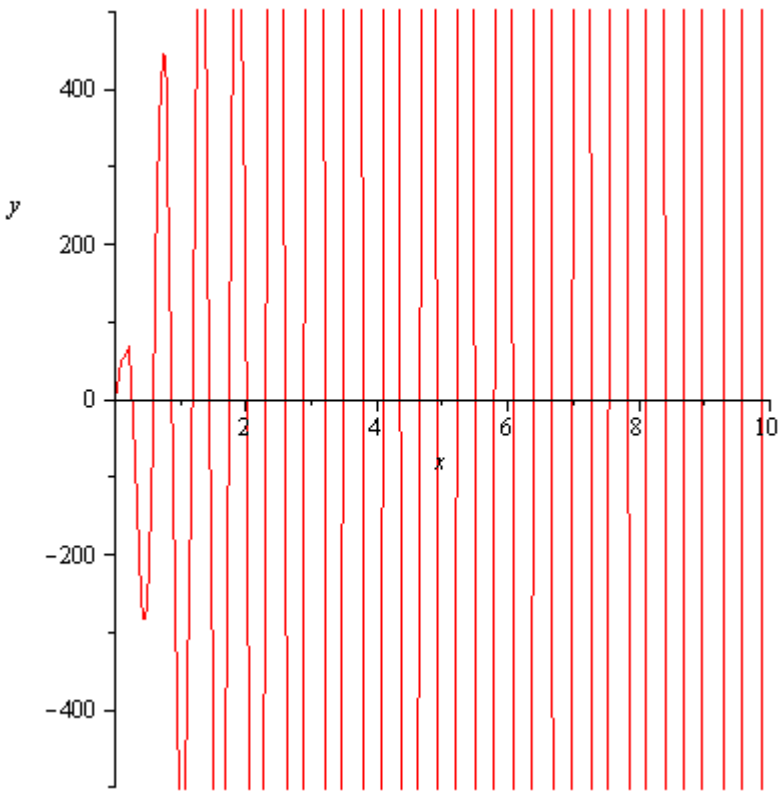
$$\frac{\%}{k^4}$$

$$expand(\%)$$

$$f := algsubs(k\cdot l = x, \%)$$

Ακολουθεί η γραφική παράσταση, από την οποία προκύπτει ότι η πρώτη λύση αναζητείται στο διάστημα (0,2..0,5)

$$plot(f, x = 0..10, y = -500..500)$$

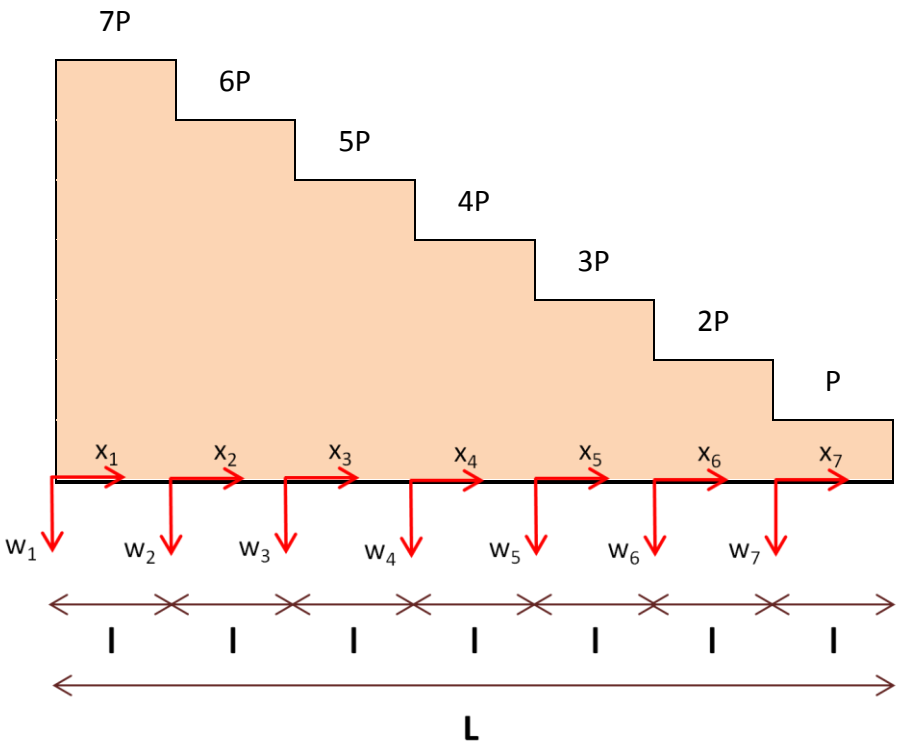


$fsolve(f = 0, x, 0.2..0.5)$

0.2739953097

Άρα είναι $x^2 = k^2 l^2 = \frac{P}{EI} * \frac{L^2}{36}$, δηλαδή $P_{cr} = 36x^2 * \frac{EI}{L^2} = 2.702643471 \frac{EI}{L^2}$. Δηλαδή το $\beta_{cr}{}^2$ είναι 2.702643471. Ενώ το αδιάστατο ισοδύναμο μήκος λυγισμού είναι $K = \frac{\pi}{\beta} = 1.910977149$.

3.7 Αμφιαρθρωτή ράβδος σταθερής διατομής θλιβόμενη από 7 αξονικά φορτία



Είναι $k_1{}^2 = \frac{7P}{EI}$, $k_2{}^2 = \frac{6P}{EI}$, $k_3{}^2 = \frac{5P}{EI}$, $k_4 = \frac{4P}{EI}$, $k_5 = \frac{3P}{EI}$, $k_6 = \frac{2P}{EI}$, $k_7 = \frac{P}{EI} = k^2$

δηλαδή $k_1 = \sqrt{7}k$, $k_2 = \sqrt{6}k$, $k_3 = \sqrt{5}k$, $k_4 = 2k$, $k_5 = \sqrt{3}k$, $k_6 = \sqrt{2}k$, $k_7 = k$

και $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = l_5 = l_6 = l_7 = l = \frac{L}{7}$

1. $w_1(0) = 0$

$$B_1 + \Delta_1 = 0$$

2. $M_1(0) = 0$, $-EIw_1{}''(0) = 0$

$$w_1''(0) = 0$$
$$B_1 = 0$$

3. $w_1(l) = w_2(0)$

$$A_1 \sin(k_1 l) + \Gamma_1 l = B_2 + \Delta_2$$
$$A_1 \sin(k_1 l) + \Gamma_1 l - B_2 - \Delta_2 = 0$$

4. $w_1{}'(l) = w_2{}'(0)$

$$A_1 k_1 \cos(k_1 l) + \Gamma_1 = A_2 k_2 + \Gamma_2$$
$$A_1 k_1 \cos(k_1 l) + \Gamma_1 - A_2 k_2 - \Gamma_2 = 0$$

5. $M_1(l) = M_2(0)$

$$w_1''(l) = w_2''(0)$$
$$-k_1{}^2 A_1 \sin(k_1 l) = -B_2 k_2{}^2$$
$$\frac{7}{6} A_1 \sin(k_1 l) - B_2 = 0$$

6. $V_1(l) - V_2(0) = 0$

$$-7P\Gamma_1 = -6P\Gamma_2$$
$$\frac{7}{6}\Gamma_1 - \Gamma_2 = 0$$

7. $w_2(l) = w_3(0)$

$$A_2 \sin(k_2 l) + B_2 \cos(k_2 l) + \Gamma_2 l + \Delta_2 = B_3 + \Delta_3$$
$$A_2 \sin(k_2 l) + B_2 \cos(k_2 l) + \Gamma_2 l + \Delta_2 - B_3 - \Delta_3 = 0$$

8. $w_2{}'(l) = w_3{}'(0)$

$$A_2 k_2 \cos(k_2 l) - B_2 k_2 \sin(k_2 l) + \Gamma_2 = A_3 k_3 + \Gamma_3$$

$$A_2 k_2 \cos(k_2 l) - B_2 k_2 \sin(k_2 l) + \Gamma_2 - A_3 k_3 - \Gamma_3 = 0$$

9. $M_2(l) = M_3(0)$

$$w_2''(l) = w_3''(0)$$
$$-k_2{}^2 A_2 \sin(k_2 l) - k_2{}^2 B_2 \cos(k_2 l) = -k_3{}^2 B_3$$
$$\frac{6}{5} A_2 \sin(k_2 l) + \frac{6}{5} B_2 \cos(k_2 l) - B_3 = 0$$

10. $V_2(l) - V_3(0) = 0$

$$-6P\Gamma_2 = -5P\Gamma_3$$
$$\frac{6}{5}\Gamma_2 - \Gamma_3 = 0$$

11. $w_3(l) = w_4(0)$

$$A_3 \sin(k_3 l) + B_3 \cos(k_3 l) + \Gamma_3 l + \Delta_3 = B_4 + \Delta_4$$
$$A_3 \sin(k_3 l) + B_3 \cos(k_3 l) + \Gamma_3 l + \Delta_3 - B_4 - \Delta_4 = 0$$

12. $w_3{}'(l) = w_4{}'(0)$

$$A_3k_3\cos(k_3l) - B_3k_3\sin(k_3l) + \Gamma_3 = A_4k_4 + \Gamma_4$$

$$A_3k_3\cos(k_3l) - B_3k_3\sin(k_3l) + \Gamma_3 - A_4k_4 - \Gamma_4 = 0$$

13. $M_3(l) = M_4(0)$

$$w_3''(l) = w_4''(0)$$

$$-k_3{}^2A_3\sin(k_3l) - k_3{}^2B_3\cos(k_3l) = -k_4{}^2B_4$$

$$\frac{5}{4}A_3\sin(k_3l) + \frac{5}{4}B_3\cos(k_3l) - B_4 = 0$$

14. $V_3(l) - V_4(0) = 0$

$$-5P\Gamma_3 = -4P\Gamma_4$$

$$\frac{5}{4}\Gamma_3 - \Gamma_4 = 0$$

15. $w_4(l) = w_5(0)$

$$A_4\sin(k_4l) + B_4\cos(k_4l) + \Gamma_4l + \Delta_4 = B_5 + \Delta_5$$

$$A_4\sin(k_4l) + B_4\cos(k_4l) + \Gamma_4l + \Delta_4 - B_5 - \Delta_5 = 0$$

16. $w_4{}'(l) = w_5{}'(0)$

$$A_4k_4\cos(k_4l) - B_4k_4\sin(k_4l) + \Gamma_4 = A_5k_5 + \Gamma_5$$

$$A_4k_4\cos(k_4l) - B_4k_4\sin(k_4l) + \Gamma_4 - A_5k_5 - \Gamma_5 = 0$$

17. $M_4(l) = M_5(0)$

$$w_4''(l) = w_5''(0)$$

$$-k_4{}^2A_4\sin(k_4l) - k_4{}^2B_4\cos(k_4l) = -k_5{}^2B_5$$

$$\frac{4}{3}A_4\sin(k_4l) + \frac{4}{3}B_4\cos(k_4l) - B_5 = 0$$

18. $V_4(l) - V_5(0) = 0$

$$-4P\Gamma_4 = -3P\Gamma_5$$

$$\frac{4}{3}\Gamma_4 - \Gamma_5 = 0$$

19. $w_5(l) = w_6(0)$

$$A_5\sin(k_5l) + B_5\cos(k_5l) + \Gamma_5l + \Delta_5 = B_6 + \Delta_6$$

$$A_5\sin(k_5l) + B_5\cos(k_5l) + \Gamma_5l + \Delta_5 - B_6 - \Delta_6 = 0$$

20. $w_5{}'(l) = w_6{}'(0)$

$$A_5k_5\cos(k_5l) - B_5k_5\sin(k_5l) + \Gamma_5 = A_6k_6 + \Gamma_6$$

$$A_5k_5\cos(k_5l) - B_5k_5\sin(k_5l) + \Gamma_5 - A_6k_6 - \Gamma_6 = 0$$

21. $M_5(l) = M_6(0)$

$$w_5''(l) = w_6''(0)$$

$$-k_5{}^2A_5\sin(k_5l) - k_5{}^2B_5\cos(k_5l) = -k_6{}^2B_6$$

$$\frac{3}{2}A_5\sin(k_5l) + \frac{3}{2}B_5\cos(k_5l) - B_6 = 0$$

22. $V_5(l) - V_6(0) = 0$

$$-3P\Gamma_5 = -2P\Gamma_6$$

$$\frac{3}{2}\Gamma_5 - \Gamma_6 = 0$$

23. $w_6(l) = w_7(0)$

$$A_6\sin(k_6l) + B_6\cos(k_6l) + \Gamma_6l + \Delta_6 = B_7 + \Delta_7$$

$$A_6\sin(k_6l) + B_6\cos(k_6l) + \Gamma_6l + \Delta_6 - B_7 - \Delta_7 = 0$$

24. $w_6{}'(l) = w_7{}'(0)$

$$A_6k_6\cos(k_6l) - B_6k_6\sin(k_6l) + \Gamma_6 = A_7k_7 + \Gamma_7$$

$$A_6k_6\cos(k_6l) - B_6k_6\sin(k_6l) + \Gamma_6 - A_7k_7 - \Gamma_7 = 0$$

25. $M_6(l) = M_7(0)$

$$w_6''(l) = w_7''(0)$$

$$-k_6{}^2A_6\sin(k_6l) - k_6{}^2B_6\cos(k_6l) = -k_7{}^2B_7$$

$$2A_6\sin(k_6l) + 2B_6\cos(k_6l) - B_7 = 0$$

26. $V_6(l) - V_7(0) = 0$

$$-2P\Gamma_6 = -P\Gamma_7$$

$$2\Gamma_6 - \Gamma_7 = 0$$

27. $w_7(l) = 0$

$$A_7\,sin(k_7l) + B_7\,cos(k_7l) + \Gamma_7l + \Delta_7 = 0$$

28. $M_7\ (l) = 0$

$$A_7\, sin(k_7 l) + B_7\, cos(k_7 l) = 0$$

Ακολουθεί η μόρφωση των διανυσμάτων

$$a1 := \left\langle \sin(k1\cdot l), k1\cdot\cos(k1\cdot l), \frac{7}{6}\cdot\sin(k1\cdot l), 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\rangle$$

$$c1 := \left\langle l, 1, 0, \frac{7}{6}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\rangle$$

$$a2 := \left\langle 0, -k2, 0, 0, \sin(k2\cdot l), k2\cdot\cos(k2\cdot l), \frac{6}{5}\sin(k2\cdot l), 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\rangle$$

$$b2 := \left\langle -1, 0, -1, 0, \cos(k2\cdot l), -k2\cdot\sin(k2\cdot l), \frac{6}{5}\cos(k2\cdot l), 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\rangle$$

$$c2 := \left\langle 0, -1, 0, -1, l, 1, 0, \frac{6}{5}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\rangle$$

$$d2 := \langle -1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \rangle$$

$$a3 := \left\langle 0, 0, 0, 0, 0, -k3, 0, 0, \sin(k3\cdot l), k3\cdot\cos(k3\cdot l), \frac{5}{4}\cdot\sin(k3\cdot l), 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\rangle$$

$$b3 := \left\langle 0, 0, 0, 0, -1, 0, -1, 0, \cos(k3\cdot l), -k3\cdot\sin(k3\cdot l), \frac{5}{4}\cos(k3\cdot l), 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\rangle$$

$$c3 := \left\langle 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, -1, l, 1, 0, \frac{5}{4}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\rangle$$

$$d3 := \langle 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \rangle$$

$$a4 := \left\langle 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -k4, 0, 0, \sin(k4\cdot l), k4\cdot\cos(k4\cdot l), \frac{4}{3}\cdot\sin(k4\cdot l), 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\rangle$$

$$b4 := \left\langle 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, -1, 0, \cos(k4\cdot l), -k4\cdot\sin(k4\cdot l), \frac{4}{3}\cdot\cos(k4\cdot l), 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\rangle$$

$$c4 := \left\langle 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, -1, l, 1, 0, \frac{4}{3}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\rangle$$

$$d4 := \langle 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \rangle$$

$$a5 := \left\langle 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -k5, 0, 0, \sin(k5\cdot l), k5\cdot\cos(k5\cdot l), \frac{3}{2}\cdot\sin(k5\cdot l), 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\rangle$$

$$b5 := \left\langle 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, -1, 0, \cos(k5\cdot l), -k5\cdot\sin(k5\cdot l), \frac{3}{2}\cdot\cos(k5\cdot l), 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\rangle$$

$$c5 := \left\langle 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, -1, l, 1, 0, \frac{3}{2}, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\rangle$$

$d5 := \langle 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \rangle$

$a6 := \langle 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -k6, 0, 0, \sin(k6 \cdot l), k6 \cdot \cos(k6 \cdot l), 2 \cdot \sin(k6 \cdot l), 0, 0, 0 \rangle$

$b6 := \langle 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, -1, 0, \cos(k6 \cdot l), -k6 \cdot \sin(k6 \cdot l), 2 \cdot \cos(k6 \cdot l), 0, 0, 0 \rangle$

$c6 := \langle 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, -1, l, 1, 0, 2, 0, 0 \rangle$

$d6 := \langle 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0 \rangle$

$a7 := \langle 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -k7, 0, 0, \sin(k7 \cdot l), \sin(k7 \cdot l) \rangle$

$b7 := \langle 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, -1, 0, \cos(k7 \cdot l), \cos(k7 \cdot l) \rangle$

$c7 := \langle 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, -1, l, 0 \rangle$

$d7 := \langle 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 1, 0 \rangle$

$with(LinearAlgebra)$

$interface(rtablesize = \infty)$

$M := \langle a1|c1|a2|b2|c2|d2|a3|b3|c3|d3|a4|b4|c4|d4|a5|b5|c5|d5|a6|b6|c6|d6|a7|b7|c7|d7 \rangle$

$$\left[\left[\sin(k1\, l), l, 0, -1, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right],\right.$$

$$\left[k1 \cos(k1\, l), 1, -k2, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right],$$

$$\left[\frac{7}{6} \sin(k1\, l), 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right],$$

$$\left[0, \frac{7}{6}, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right],$$

$$\left[0, 0, \sin(k2\, l), \cos(k2\, l), l, 1, 0, -1, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right],$$

$$\left[0, 0, k2 \cos(k2\, l), -k2 \sin(k2\, l), 1, 0, -k3, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right],$$

$$\left[0, 0, \frac{6}{5} \sin(k2\, l), \frac{6}{5} \cos(k2\, l), 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, \frac{6}{5}, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, \sin(k3\,l), \cos(k3\,l), l, 1, 0, -1, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, k3\cos(k3\,l), -k3\sin(k3\,l), 1, 0, -k4, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{5}{4}\sin(k3\,l), \frac{5}{4}\cos(k3\,l), 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{5}{4}, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \sin(k4\,l), \cos(k4\,l), l, 1, 0, -1, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, k4\cos(k4\,l), -k4\sin(k4\,l), 1, 0, -k5, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{4}{3}\sin(k4\,l), \frac{4}{3}\cos(k4\,l), 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{4}{3}, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \sin(k5\,l), \cos(k5\,l), l, 1, 0, -1, 0, -1, 0, 0, 0, 0\right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, k5\cos(k5\,l), -k5\sin(k5\,l), 1, 0, -k6, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0\right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{3}{2}\sin(k5\,l), \frac{3}{2}\cos(k5\,l), 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{3}{2}, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0\right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \sin(k6\,l), \cos(k6\,l), l, 1, 0, -1, 0, -1\right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, k6\cos(k6\,l), -k6\sin(k6\,l), 1, 0, -k7, 0, -1, 0\right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2\sin(k6\,l), 2\cos(k6\,l), 0, 0, 0, -1, 0, 0\right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, -1, 0\right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \sin(k7\, l), \cos(k7\, l), l, 1\right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \sin(k7\, l), \cos(k7\, l), 0, 0\right]\Big]$$

$$orizousa := Determinant(M)$$

$$ori := subs\left(k1 = \sqrt{7} \cdot k, k2 = \sqrt{6} \cdot k, k3 = \sqrt{5} \cdot k, k4 = 2 \cdot k, k5 = \sqrt{3} \cdot k, k6 = \sqrt{2} \cdot k, k7 = k, orizousa\right)$$

Προκειμένου να έχουμε ίδιας τάξης k και l διαιρούμε με k^5

$$\frac{\%}{k^5}$$

$$det := expand(\%)$$

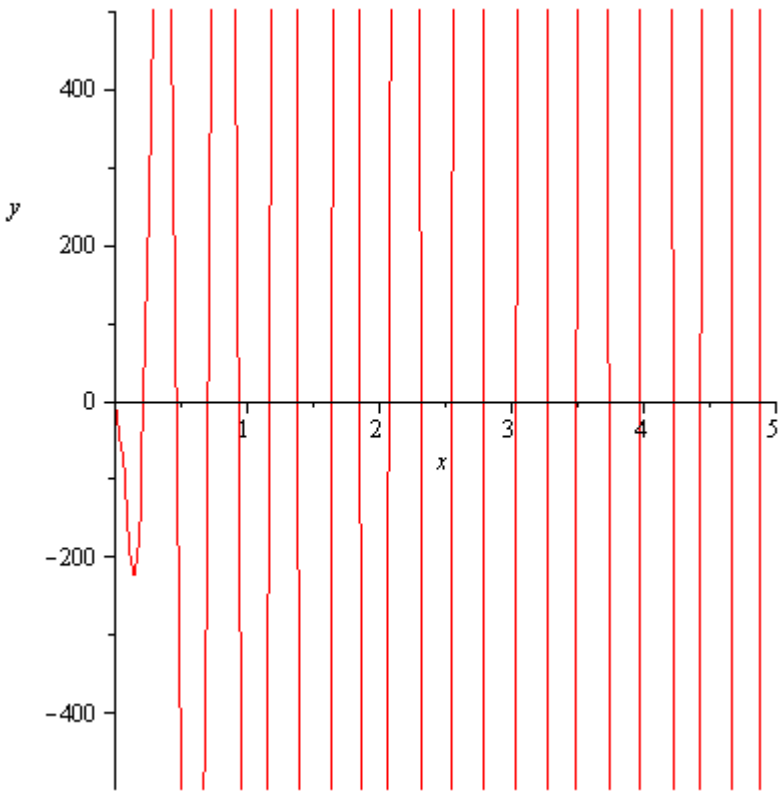
$$algsubs(k \cdot l = x, \%)$$

$$f := \%$$

Ακολουθεί η γραφική παράσταση αυτής της συνάρτησης f.

$$with(plots)$$

$$plot(f, x = 0..5, y = -500..500)$$



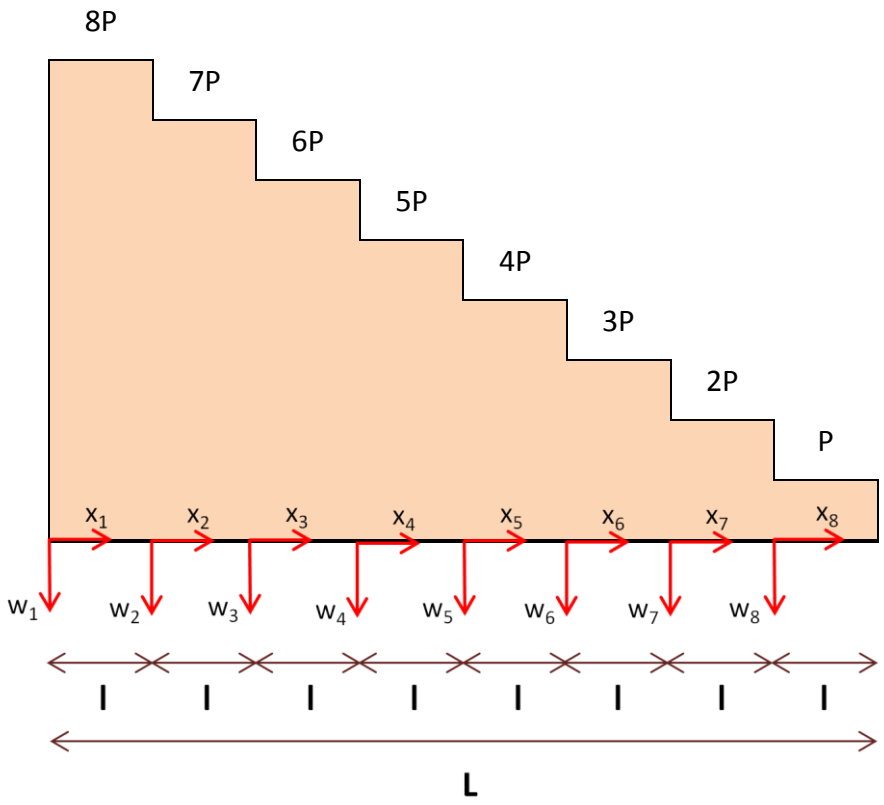
Άρα η λύση αναζητείται στο διάστημα (0,1..0,4)

fsolve(*f* = 0, *x*, 0.1 ..0.4)

0.2193937609

Άρα είναι $x^2 = k^2 l^2 = \frac{P}{EI} * \frac{L^2}{49}$, δηλαδή $P_{cr} = 49x^2 * \frac{EI}{L^2} = 2.358547494 \frac{EI}{L^2}$. Δηλαδή το β_{cr}^2 είναι 2.358547494. Ενώ το αδιάστατο ισοδύναμο μήκος λυγισμού είναι $K = \frac{\pi}{\beta} = 2.045632241$

3.8 Αμφιαρθρωτή ράβδος σταθερής διατομής θλιβόμενη από 8 αξονικά φορτία



Είναι $k_1{}^2 = \frac{7P}{EI}$, $k_2{}^2 = \frac{6P}{EI}$, $k_3{}^2 = \frac{5P}{EI}$, $k_4 = \frac{4P}{EI}$, $k_5 = \frac{3P}{EI}$, $k_6 = \frac{2P}{EI}$, $k_7 = \frac{2P}{EI}$, $k_8 = \frac{P}{EI} = k^2$ δηλαδή $k_1 = \sqrt{8}k$, $k_2 = \sqrt{7}k$, $k_3 = \sqrt{6}k$, $k_4 = \sqrt{5}k$, $k_5 = 2k$, $k_6 = \sqrt{3}k$, $k_7 = \sqrt{2}k$, $k_8 = k$ και $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = l_5 = l_6 = l_7 = l_8 = l = \frac{L}{8}$

1. $w_1(0) = 0$

$$B_1 + \Delta_1 = 0$$

2. $M_1(0) = 0$, $-EIw_1''(0) = 0$

$$w_1''(0) = 0$$

$$B_1 = 0$$

3. $w_1(l) = w_2(0)$

$$A_1 \sin(k_1 l) + \Gamma_1 l = B_2 + \Delta_2$$

$$A_1 \sin(k_1 l) + \Gamma_1 l - B_2 - \Delta_2 = 0$$

4. $w_1{}'(l) = w_2{}'(0)$

$$A_1 k_1 \cos(k_1 l) + \Gamma_1 = A_2 k_2 + \Gamma_2$$
$$A_1 k_1 \cos(k_1 l) + \Gamma_1 - A_2 k_2 - \Gamma_2 = 0$$

5. $M_1(l) = M_2(0)$

$$w_1''(l) = w_2''(0)$$
$$-k_1{}^2 A_1 \sin(k_1 l) = -B_2 k_2{}^2$$
$$\frac{8}{7} A_1 \sin(k_1 l) - B_2 = 0$$

6. $V_1(l) - V_2(0) = 0$

$$-8P\Gamma_1 = -7P\Gamma_2$$
$$\frac{8}{7}\Gamma_1 - \Gamma_2 = 0$$

7. $w_2(l) = w_3(0)$

$$A_2 \sin(k_2 l) + B_2 \cos(k_2 l) + \Gamma_2 l + \Delta_2 = B_3 + \Delta_3$$
$$A_2 \sin(k_2 l) + B_2 \cos(k_2 l) + \Gamma_2 l + \Delta_2 - B_3 - \Delta_3 = 0$$

8. $w_2{}'(l) = w_3{}'(0)$

$$A_2 k_2 \cos(k_2 l) - B_2 k_2 \sin(k_2 l) + \Gamma_2 = A_3 k_3 + \Gamma_3$$

$$A_2 k_2 \cos(k_2 l) - B_2 k_2 \sin(k_2 l) + \Gamma_2 - A_3 k_3 - \Gamma_3 = 0$$

9. $M_2(l) = M_3(0)$

$$w_2''(l) = w_3''(0)$$
$$-k_2{}^2 A_2 \sin(k_2 l) - k_2{}^2 B_2 \cos(k_2 l) = -k_3{}^2 B_3$$
$$\frac{7}{6} A_2 \sin(k_2 l) + \frac{7}{6} B_2 \cos(k_2 l) - B_3 = 0$$

10. $V_2(l) - V_3(0) = 0$

$$-7P\Gamma_2 = -6P\Gamma_3$$
$$\frac{7}{6}\Gamma_2 - \Gamma_3 = 0$$

11. $w_3(l) = w_4(0)$

$$A_3 \sin(k_3 l) + B_3 \cos(k_3 l) + \Gamma_3 l + \Delta_3 = B_4 + \Delta_4$$

$$A_3 \sin(k_3 l) + B_3 \cos(k_3 l) + \Gamma_3 l + \Delta_3 - B_4 - \Delta_4 = 0$$

12. $w_3{}'(l) = w_4{}'(0)$

$$A_3 k_3 \cos(k_3 l) - B_3 k_3 \sin(k_3 l) + \Gamma_3 = A_4 k_4 + \Gamma_4$$

$$A_3 k_3 \cos(k_3 l) - B_3 k_3 \sin(k_3 l) + \Gamma_3 - A_4 k_4 - \Gamma_4 = 0$$

13. $M_3(l) = M_4(0)$

$$w_3''(l) = w_4''(0)$$

$$-k_3{}^2 A_3 \sin(k_3 l) - k_3{}^2 B_3 \cos(k_3 l) = -k_4{}^2 B_4$$

$$\frac{6}{5} A_3 \sin(k_3 l) + \frac{6}{5} B_3 \cos(k_3 l) - B_4 = 0$$

14. $V_3(l) - V_4(0) = 0$

$$-6P\Gamma_3 = -5P\Gamma_4$$

$$\frac{6}{5}\Gamma_3 - \Gamma_4 = 0$$

15. $w_4(l) = w_5(0)$

$$A_4 \sin(k_4 l) + B_4 \cos(k_4 l) + \Gamma_4 l + \Delta_4 = B_5 + \Delta_5$$

$$A_4 \sin(k_4 l) + B_4 \cos(k_4 l) + \Gamma_4 l + \Delta_4 - B_5 - \Delta_5 = 0$$

16. $w_4{}'(l) = w_5{}'(0)$

$$A_4 k_4 \cos(k_4 l) - B_4 k_4 \sin(k_4 l) + \Gamma_4 = A_5 k_5 + \Gamma_5$$

$$A_4 k_4 \cos(k_4 l) - B_4 k_4 \sin(k_4 l) + \Gamma_4 - A_5 k_5 - \Gamma_5 = 0$$

17. $M_4(l) = M_5(0)$

$$w_4''(l) = w_5''(0)$$

$$-k_4{}^2 A_4 \sin(k_4 l) - k_4{}^2 B_4 \cos(k_4 l) = -k_5{}^2 B_5$$

$$\frac{5}{4} A_4 \sin(k_4 l) + \frac{5}{4} B_4 \cos(k_4 l) - B_5 = 0$$

18. $V_4(l) - V_5(0) = 0$

$$-5P\Gamma_4 = -4P\Gamma_5$$

$$\frac{5}{4}\Gamma_4 - \Gamma_5 = 0$$

19. $w_5(l) = w_6(0)$

$$A_5 \sin(k_5 l) + B_5 \cos(k_5 l) + \Gamma_5 l + \Delta_5 = B_6 + \Delta_6$$
$$A_5 \sin(k_5 l) + B_5 \cos(k_5 l) + \Gamma_5 l + \Delta_5 - B_6 - \Delta_6 = 0$$

20. $w_5{}'(l) = w_6{}'(0)$

$$A_5 k_5 \cos(k_5 l) - B_5 k_5 \sin(k_5 l) + \Gamma_5 = A_6 k_6 + \Gamma_6$$

$$A_5 k_5 \cos(k_5 l) - B_5 k_5 \sin(k_5 l) + \Gamma_5 - A_6 k_6 - \Gamma_6 = 0$$

21. $M_5(l) = M_6(0)$

$$w_5''(l) = w_6''(0)$$
$$-k_5{}^2 A_5 \sin(k_5 l) - k_5{}^2 B_5 \cos(k_5 l) = -k_6{}^2 B_6$$
$$\frac{4}{3} A_5 \sin(k_5 l) + \frac{4}{3} B_5 \cos(k_5 l) - B_6 = 0$$

22. $V_5(l) - V_6(0) = 0$

$$-4P\Gamma_5 = -3P\Gamma_6$$
$$\frac{4}{3}\Gamma_5 - \Gamma_6 = 0$$

23. $w_6(l) = w_7(0)$

$$A_6 \sin(k_6 l) + B_6 \cos(k_6 l) + \Gamma_6 l + \Delta_6 = B_7 + \Delta_7$$
$$A_6 \sin(k_6 l) + B_6 \cos(k_6 l) + \Gamma_6 l + \Delta_6 - B_7 - \Delta_7 = 0$$

24. $w_6{}'(l) = w_7{}'(0)$

$$A_6 k_6 \cos(k_6 l) - B_6 k_6 \sin(k_6 l) + \Gamma_6 = A_7 k_7 + \Gamma_7$$

$$A_6 k_6 \cos(k_6 l) - B_6 k_6 \sin(k_6 l) + \Gamma_6 - A_7 k_7 - \Gamma_7 = 0$$

25. $M_6(l) = M_7(0)$

$$w_6''(l) = w_7''(0)$$
$$-k_6{}^2 A_6 \sin(k_6 l) - k_6{}^2 B_6 \cos(k_6 l) = -k_7{}^2 B_7$$
$$\frac{3}{2} A_6 \sin(k_6 l) + \frac{3}{2} B_6 \cos(k_6 l) - B_7 = 0$$

26. $V_6(l) - V_7(0) = 0$

$$-3P\Gamma_6 = -2P\Gamma_7$$
$$\frac{3}{2}\Gamma_6 - \Gamma_7 = 0$$

27. $w_7(l) = w_8(0)$

$$A_7 \sin(k_7 l) + B_7 \cos(k_7 l) + \Gamma_7 l + \Delta_7 = B_8 + \Delta_8$$
$$A_7 \sin(k_7 l) + B_7 \cos(k_7 l) + \Gamma_7 l + \Delta_7 - B_8 - \Delta_8 = 0$$

28. $w_7'(l) = w_8'(0)$

$$A_7 k_7 \cos(k_7 l) - B_7 k_7 \sin(k_7 l) + \Gamma_7 = A_8 k_8 + \Gamma_8$$

$$A_7 k_7 \cos(k_7 l) - B_7 k_7 \sin(k_7 l) + \Gamma_7 - A_8 k_8 - \Gamma_8 = 0$$

29. $M_7(l) = M_8(0)$

$$w_7''(l) = w_8''(0)$$
$$-{k_7}^2 A_7 \sin(k_7 l) - {k_7}^2 B_7 \cos(k_7 l) = -{k_8}^2 B_8$$
$$2A_7 \sin(k_7 l) + 2B_7 \cos(k_7 l) - B_8 = 0$$

30. $V_7(l) - V_8(0) = 0$

$$-2P\Gamma_7 = -P\Gamma_8$$
$$2\Gamma_7 - \Gamma_8 = 0$$

31. $w_8(l) = 0$

$$A_8\, sin(k_8 l) + B_8\, cos(k_8 l) + \Gamma_8 l + \Delta_8 = 0$$

32. $M_8\ (l) = 0$

$$A_8\, sin(k_8 l) + B_8\, cos(k_8 l) = 0$$

Ακολουθεί η μόρφωση των διανυσμάτων

$$a1 := \left\langle \sin(k1 \cdot l), k1 \cdot \cos(k1 \cdot l), \frac{8}{7} \cdot \sin(k1 \cdot l), 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\rangle$$

$$c1 := \left\langle l, 1, 0, \frac{8}{7}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\rangle$$

$$a2 := \left\langle 0, -k2, 0, 0, \sin(k2 \cdot l), k2 \cdot \cos(k2 \cdot l), \frac{7}{6}\sin(k2 \cdot l), 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\rangle$$

$$b2 := \left\langle -1, 0, -1, 0, \cos(k2 \cdot l), -k2 \cdot \sin(k2 \cdot l), \frac{7}{6}\cos(k2 \cdot l), 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\rangle$$

$$c2 := \left\langle 0, -1, 0, -1, l, 1, 0, \frac{7}{6}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\rangle$$

$$d2 := \langle -1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \rangle$$

$$a3 := \left\langle 0, 0, 0, 0, 0, -k3, 0, 0, \sin(k3 \cdot l), k3 \cdot \cos(k3 \cdot l), \frac{6}{5} \cdot \sin(k3 \cdot l), 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\rangle$$

$$b3 := \left\langle 0, 0, 0, 0, -1, 0, -1, 0, \cos(k3 \cdot l), -k3 \cdot \sin(k3 \cdot l), \frac{6}{5}\cos(k3 \cdot l), 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\rangle$$

$$c3 := \left\langle 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, -1, l, 1, 0, \frac{6}{5}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\rangle$$

$$d3 := \langle 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \rangle$$

$$a4 := \left\langle 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -k4, 0, 0, \sin(k4 \cdot l), k4 \cdot \cos(k4 \cdot l), \frac{5}{4} \cdot \sin(k4 \cdot l), 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\rangle$$

$$b4 := \left\langle 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, -1, 0, \cos(k4 \cdot l), -k4 \cdot \sin(k4 \cdot l), \frac{5}{4} \cdot \cos(k4 \cdot l), 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\rangle$$

$$c4 := \left\langle 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, -1, l, 1, 0, \frac{5}{4}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\rangle$$

$$d4 := \langle 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \rangle$$

$$a5 := \left\langle 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -k5, 0, 0, \sin(k5 \cdot l), k5 \cdot \cos(k5 \cdot l), \frac{4}{3} \cdot \sin(k5 \cdot l), 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\rangle$$

$$b5 := \left\langle 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, -1, 0, \cos(k5 \cdot l), -k5 \cdot \sin(k5 \cdot l), \frac{4}{3} \cdot \cos(k5 \cdot l), 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\rangle$$

$$c5 := \left\langle 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, -1, l, 1, 0, \frac{4}{3}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\rangle$$

$$d5 := \langle 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \rangle$$

$$a6 := \left\langle 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -k6, 0, 0, \sin(k6 \cdot l), k6 \cdot \cos(k6 \cdot l), \frac{3}{2} \cdot \sin(k6 \cdot l), 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\rangle$$

$$b6 := \left\langle 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, -1, 0, \cos(k6 \cdot l), -k6 \cdot \sin(k6 \cdot l), \frac{3}{2} \cdot \cos(k6 \cdot l), 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\rangle$$

$$c6 := \left\langle 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, -1, l, 1, 0, \frac{3}{2}, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\rangle$$

$$d6 := \langle 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \rangle$$

$$a7 := \langle 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -k7, 0, 0, \sin(k7 \cdot l), k7 \cdot \cos(k7 \cdot l), 2 \cdot \sin(k7 \cdot l), 0, 0, 0 \rangle$$

$$b7 := \langle 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, -1, 0, \cos(k7 \cdot l), -k7 \cdot \sin(k7 \cdot l), 2 \cdot \cos(k7 \cdot l), 0, 0, 0 \rangle$$

$$c7 := \langle 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, -1, l, 1, 0, 2, 0, 0 \rangle$$

$$d7 := \langle 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0 \rangle$$

$$a8 := \langle 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -k8, 0, 0, \sin(k8 \cdot l), \sin(k8 \cdot l) \rangle$$

$$b8 := \langle 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, -1, 0, \cos(k8 \cdot l), \cos(k8 \cdot l) \rangle$$

$$c8 := \langle 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, -1, l, 0 \rangle$$

$$d8 := \langle 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 1, 0 \rangle$$

Και παρατίθεται ο πίνακας που προκύπτει

$$with(LinearAlgebra)$$

$$interface(rtablesize = \infty)$$

$$M := \langle a1|c1|a2|b2|c2|d2|a3|b3|c3|d3|a4|b4|c4|d4|a5|b5|c5|d5|a6|b6|c6|d6|a7|b7|c7|d7|a8|b8|c8|d8 \rangle$$

$$\left[\left[\sin(k1\, l), l, 0, -1, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right],\right.$$

$$\left[k1 \cos(k1\, l), 1, -k2, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right],$$

$$\left[\frac{8}{7} \sin(k1\, l), 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right],$$

$$\left[0, \frac{8}{7}, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right],$$

$$\left[0, 0, \sin(k2\, l), \cos(k2\, l), l, 1, 0, -1, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right],$$

$$\left[0, 0, k2 \cos(k2\, l), -k2 \sin(k2\, l), 1, 0, -k3, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right],$$

$$\left[0, 0, \frac{7}{6} \sin(k2\, l), \frac{7}{6} \cos(k2\, l), 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, \frac{7}{6}, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, \sin(k3\, l), \cos(k3\, l), l, 1, 0, -1, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, k3 \cos(k3\, l), -k3 \sin(k3\, l), 1, 0, -k4, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{6}{5} \sin(k3\, l), \frac{6}{5} \cos(k3\, l), 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{6}{5}, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \sin(k4\, l), \cos(k4\, l), l, 1, 0, -1, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, k4 \cos(k4\, l), -k4 \sin(k4\, l), 1, 0, -k5, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{5}{4} \sin(k4\, l), \frac{5}{4} \cos(k4\, l), 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{5}{4}, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \sin(k5\, l), \cos(k5\, l), l, 1, 0, -1, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, k5 \cos(k5\, l), -k5 \sin(k5\, l), 1, 0, -k6, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{4}{3} \sin(k5\, l), \frac{4}{3} \cos(k5\, l), 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{4}{3}, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \sin(k6\, l), \cos(k6\, l), l, 1, 0, -1, 0, -1, 0, 0, 0, 0\right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, k6 \cos(k6\, l), -k6 \sin(k6\, l), 1, 0, -k7, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0\right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{3}{2} \sin(k6\, l), \frac{3}{2} \cos(k6\, l), 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{3}{2}, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0\right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \sin(k7\, l), \cos(k7\, l), l, 1, 0, -1, 0, -1\right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, k7 \cos(k7\, l), -k7 \sin(k7\, l), 1, 0, -k8, 0, -1, 0\right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2 \sin(k7\, l), 2 \cos(k7\, l), 0, 0, 0, -1, 0, 0\right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, -1, 0\right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \sin(k8\, l), \cos(k8\, l), l, 1\right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \sin(k8\, l), \cos(k8\, l), 0, 0\right]\Big]$$

$$orizousa := Determinant(M)$$

$$subs\left(k1 = \sqrt{8} \cdot k, k2 = \sqrt{7} \cdot k, k3 = \sqrt{6} \cdot k, k4 = \sqrt{5} \cdot k, k5 = 2 \cdot k, k6 = \sqrt{3} \cdot k, k7 = \sqrt{2} \cdot k, k8 = k, \%\right)$$

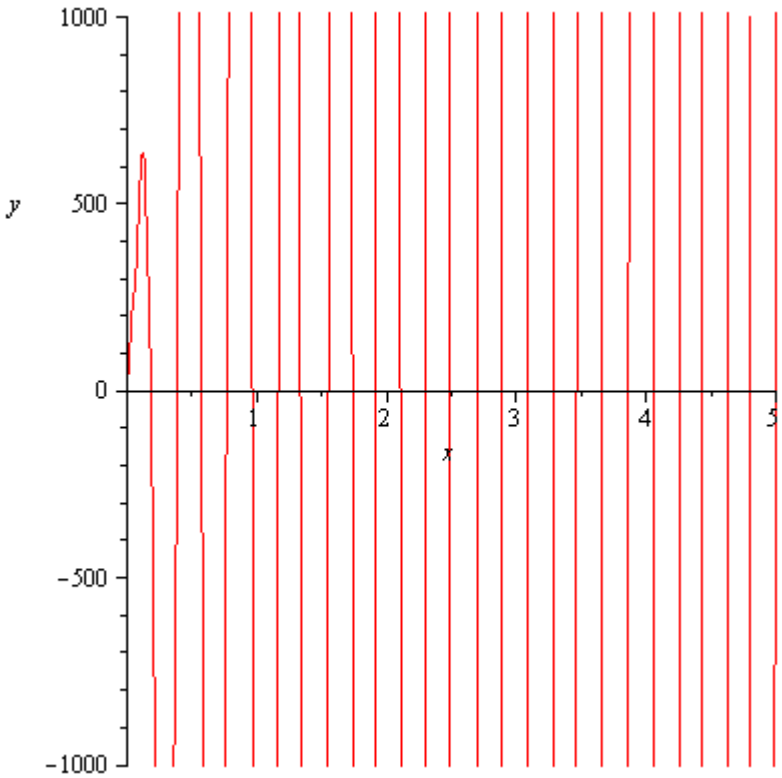
$$expand\left(\frac{\%}{k^6}\right)$$

$$algsubs(k \cdot l = x, \%)$$

$$f := \%$$

Και τώρα θα γίνει η γραφική παράσταση της f.

$$plot(f, x = 0..5, y = -1000..1000)$$



Ζητείται τώρα από το πρόγραμμα να απλοποιήσει τη συνάρτηση, να εκτελέσει δηλαδή κάποιες πράξεις, ώστε να πάρει λιγότερο υπολογιστικό χρόνο στη συνέχεια η εύρεση της λύσης. Αυτή θα αναζητηθεί στο διάστημα (0,16..0,21). Να σημειωθεί ακόμα ότι όσο πιο πολύπλοκη γίνεται η συνάρτηση που δίνει την εξίσωση λυγισμού είναι σημαντικό το διάστημα στο οποίο αναζητείται η λύση να είναι κατά το δυνατόν μικρό ώστε να μπορέσει το πρόγραμμα να βρει τη λύση. Πλέον η διαδικασία αυτή μπορεί να πάρει πάνω από μισή ώρα για το πρόγραμμα.

simplify(*f*)

fsolve(% = 0, *x*, 0.16 ..0.21)

0.1808098189

Δηλαδή είναι $x^2 = k^2 l^2 = \frac{P}{EI} * \frac{L^2}{64}$, δηλαδή $P_{cr} = 64x^2 * \frac{EI}{L^2} = 2.092300199 \frac{EI}{L^2}$. Δηλαδή το β_{cr}^2 είναι 2.092300199. Ενώ το αδιάστατο ισοδύναμο μήκος λυγισμού είναι $K = \frac{\pi}{\beta} = 2.171890245$.

4 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΑΜΦΙΑΡΘΡΩΤΟ ΥΠΟΣΤΥΛΩΜΑ ΘΛΙΒΟΜΕΝΟ ΑΠΟ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΟ ΔΙΑΝΕΜΗΜΕΝΟ ΑΞΟΝΙΚΟ ΦΟΡΤΙΟ

Όπως φάνηκε από τα προηγούμενα η ακριβής μαθηματική επίλυση του προβλήματος ενός υποστυλώματος που θλίβεται από πολλά αξονικά φορτία είναι αρκετά περίπλοκη διαδικασία που απαιτεί μεγάλο υπολογιστικό χρόνο ακόμα και με τη χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή. Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται προσπάθεια για να γίνει η διαδικασία αυτή πιο εύκολα μέσα από κάποια προσέγγιση.

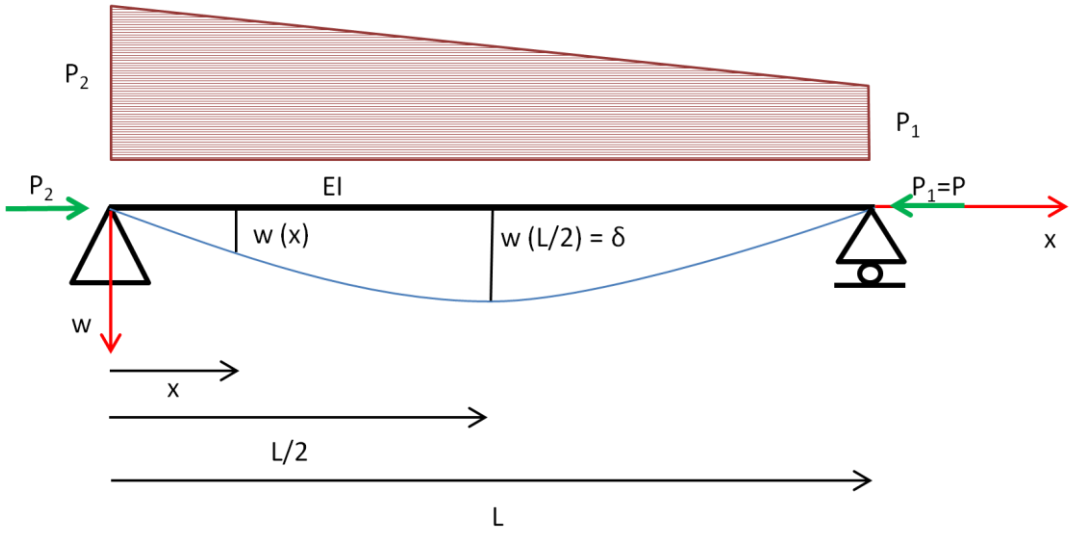
Έτσι εξετάζεται η περίπτωση θλιβόμενου αμφιαρθρωτού υποστυλώματος από ομοιόμορφο διανεμημένο αξονικό φορτίο σε όλο το μήκος του υποστυλώματος. Παρουσιάζεται η αντίστοιχη διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξης που προκύπτει από μια τέτοια θεώρηση.

Θεωρείται υποστύλωμα μήκους L, αμφιαρθρωτό, με σταθερή δυσκαμψία EI. Δέχεται αξονικό συγκεντρωμένο θλιπτικό φορτίο P_1 στο άκρο και ενδιάμεσο ομοιόμορφο διανεμημένο θλιπτικό φορτίο. Έτσι η αντίδραση στην άλλη στήριξη είναι P_2. Είναι P_1=P , P_2=a*P και τώρα αναζητείται η έκφραση της P(x) τέτοια ώστε P(0)=P_1*a=P*a και P(L)=P_1=P. Αυτή είναι η ακόλουθη

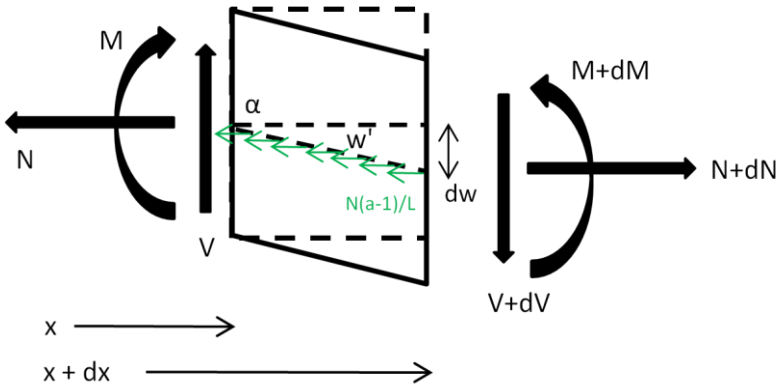
$$P(x) = P + (L - x) * \frac{P(a-1)}{L}$$

Η οποία πράγματι για x=0 δίνει την τιμή Pa και για x=L την P.

$$P(x) = P + (L - x) * \frac{P(a-1)}{L}$$



Θα γίνει προσπάθεια να διατυπωθεί η ισορροπία στο στοιχειώδες τμήμα dx.



Εικόνα 4.1 Στοιχειώδες τμήμα dx

1. ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΑΞΟΝΙΚΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

$$N + dN = N + \frac{N(a-1)}{L}dx$$

$$\frac{dN}{dx} = -\frac{N(a-1)}{L}$$

Και αφού N=-P

$$\frac{dP}{dx} = -\frac{P(a-1)}{L}$$

2. ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΡΟΠΩΝ

$$M + dM - M + (N + dN)dw - (V + dV)dx - \frac{N(a-1)}{L} * \frac{dwdx}{2}$$

Αμελούνται οι όροι διαφορικών ανώτερης τάξης και προκύπτει

$$dM + Ndw = Vdx$$

$$\frac{dM}{dx} + N * \frac{dw}{dx} = V$$

Είναι ακόμα N(x)=-P(x) , M(x)=-EIw(x)''. Άρα

$$-EIw'''(x) - P(x)w'(x) = V(x)$$

3. ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΤΕΜΝΟΥΣΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

$$-V + V + dV = 0$$

Και αντικαθιστώντας την έκφραση της dV από την προηγούμενη σχέση λαμβάνεται

$$-EIw''''(x) - P(x)w''(x) - \frac{dP(x)}{dx}w'(x) = 0$$

$$EIw''''(x) + P(x)w''(x) = -\frac{dP(x)}{dx}w'(x)$$

Έχουμε λοιπόν τελικά

$$EIw''''(x) + \left[P + (L - x) * \frac{P(a-1)}{L}\right]w''(x) = \frac{P(a-1)}{L}w'(x)$$

$$EIw''''(x) + Pw''(x) = \frac{P(a-1)}{L}w'(x) - (L - x) * \frac{P(a-1)}{L}w''(x)$$

Η διαφορική αυτή εξίσωση τετάρτης τάξης έχει δύσκολη επίλυση ακόμα και με τη βοήθεια μαθηματικού προγράμματος. Πρέπει να γίνουν προσεγγίσεις, ενδεχομένως να θεωρηθούν κάποιες συναρτήσεις σχήματος. Αυτή η διαδικασία ξεφεύγει από τους σκοπούς της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Θα μπορούσε να αποτελέσει αντικείμενο περαιτέρω μελέτης μελλοντικά. Εδώ παρατίθεται η πορεία επίλυσης στο πρόγραμμα Maple.

$$ode := w''''(x) + k^2 \cdot w''(x) = \frac{k^2 \cdot (a-1)}{L} \cdot w'(x) - \frac{(L-x) \cdot k^2 \cdot (a-1)}{L} \cdot w''(x)$$

$$dsolve(ode, w(x))$$

$$w(x) = \_C1 + \_C2\,(L\,a - x\,a + x)^3\,\mathrm{hypergeom}\left([1, 1], \left[\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2\right], -\frac{1}{9}\,\frac{k^2\,(L\,a - x\,a + x)^3}{L\,(a-1)^2}\right) + \_C3\,\Big($$

$$\int \mathrm{BesselI}\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\sqrt{-\frac{k^2 (L a - x a + x)^3}{L (a-1)^2}}\right)\left(-\frac{k^2 (L a - x a + x)^3}{L (a-1)^2}\right)^{1/6} \mathrm{d}x\Bigg) + \_C4 \Bigg($$

$$\int \frac{\mathrm{BesselI}\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\sqrt{-\frac{k^2 (L a - x a + x)^3}{L (a-1)^2}}\right)(L a - x a + x)}{\left(-\frac{k^2 (L a - x a + x)^3}{L (a-1)^2}\right)^{1/6}} \mathrm{d}x\Bigg)$$

Ενώ ακόμα και αν θέσουμε κάποιες αρχικές συνθήκες η λύση δεν είναι απλούστερη. Αντιθέτως:

$$ints := (w(0) = 0, w''(0) = 0)$$

$$dsolve(\{ode, ints\}, y(x))$$

$$y(x) = \frac{280}{3}\Bigg(k^2 a^4 \Bigg(-2\_C4\, L\, a \left(-\frac{L^2 k^2 a^3}{(a-1)^2}\right)^{5/3}\left(\frac{L^2 k^2 a^3}{(a-1)^2}\right)^{1/3} \mathrm{BesselI}\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\sqrt{-\frac{L^2 k^2 a^3}{(a-1)^2}}\right)$$

$$- \_C3\, \mathrm{BesselI}\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\sqrt{-\frac{L^2 k^2 a^3}{(a-1)^2}}\right)\left(-\frac{L^2 k^2 a^3}{(a-1)^2}\right)^{3/2}\left(\frac{L^2 k^2 a^3}{(a-1)^2}\right)^{1/3} + 2\_C4\, L\, a^2 \Bigg($$

$$-\frac{L^2 k^2 a^3}{(a-1)^2}\Bigg)^{5/3}\left(\frac{L^2 k^2 a^3}{(a-1)^2}\right)^{1/3} \mathrm{BesselI}\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\sqrt{-\frac{L^2 k^2 a^3}{(a-1)^2}}\right) + 2\_C3\left(-\frac{L^2 k^2 a^3}{(a-1)^2}\right)^{7/3} \mathrm{BesselI}\Bigg(\frac{2}{3},$$

$$\frac{2}{3}\sqrt{-\frac{L^2 k^2 a^3}{(a-1)^2}}\Bigg) + 2\_C4\, L\, a^2\left(-\frac{L^2 k^2 a^3}{(a-1)^2}\right)^{7/6}\left(\frac{L^2 k^2 a^3}{(a-1)^2}\right)^{1/3} \mathrm{BesselI}\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\sqrt{-\frac{L^2 k^2 a^3}{(a-1)^2}}\right)$$

$$+ \_C3\, \mathrm{BesselI}\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\sqrt{-\frac{L^2 k^2 a^3}{(a-1)^2}}\right) a \left(-\frac{L^2 k^2 a^3}{(a-1)^2}\right)^{3/2}\left(\frac{L^2 k^2 a^3}{(a-1)^2}\right)^{1/3} + \_C3\, a \Bigg($$

$$-\frac{L^2 k^2 a^3}{(a-1)^2}\Bigg)^{11/6} \mathrm{BesselI}\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\sqrt{-\frac{L^2 k^2 a^3}{(a-1)^2}}\right) - 2\_C3\, a\left(-\frac{L^2 k^2 a^3}{(a-1)^2}\right)^{7/3} \mathrm{BesselI}\Bigg(\frac{2}{3},$$

$$\frac{2}{3}\sqrt{-\frac{L^2 k^2 a^3}{(a-1)^2}}\Bigg) - 2\_C4\, L\, a\left(-\frac{L^2 k^2 a^3}{(a-1)^2}\right)^{7/6}\left(\frac{L^2 k^2 a^3}{(a-1)^2}\right)^{1/3} \mathrm{BesselI}\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\sqrt{-\frac{L^2 k^2 a^3}{(a-1)^2}}\right)$$

$$- \_C3 \left(-\frac{L^2 k^2 a^3}{(a-1)^2}\right)^{11/6} \mathrm{BesselI}\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\sqrt{-\frac{L^2 k^2 a^3}{(a-1)^2}}\right) L^3 \,\mathrm{hypergeom}\left([1,1],\left[\frac{4}{3},\frac{5}{3},2\right],\right.$$

$$\left.-\frac{1}{9}\frac{L^2 k^2 a^3}{(a-1)^2}\right)\Bigg) \Bigg/ \Bigg(\left(-\frac{L^2 k^2 a^3}{(a-1)^2}\right)^{7/3} \left(\frac{L^2 k^2 a^3}{(a-1)^2}\right)^{1/3} \Bigg(1120\, a^4 \,\mathrm{hypergeom}\left([1,1],\left[\frac{4}{3},\frac{5}{3},2\right],\right.$$

$$\left.-\frac{1}{9}\frac{L^2 k^2 a^3}{(a-1)^2}\right) - 112\, L^2 a^3 \,\mathrm{hypergeom}\left([2,2],\left[\frac{7}{3},\frac{8}{3},3\right],-\frac{1}{9}\frac{L^2 k^2 a^3}{(a-1)^2}\right) k^2 + 6720\,\mathrm{hypergeom}\Big([1,1]$$

$$\left[\frac{4}{3},\frac{5}{3},2\right],-\frac{1}{9}\frac{L^2 k^2 a^3}{(a-1)^2}\Big) a^2 - 4480\, a^3 \,\mathrm{hypergeom}\left([1,1],\left[\frac{4}{3},\frac{5}{3},2\right],-\frac{1}{9}\frac{L^2 k^2 a^3}{(a-1)^2}\right)$$

$$- 112\, L^2 a^5 \,\mathrm{hypergeom}\left([2,2],\left[\frac{7}{3},\frac{8}{3},3\right],-\frac{1}{9}\frac{L^2 k^2 a^3}{(a-1)^2}\right) k^2 - 4480\,\mathrm{hypergeom}\left([1,1],\left[\frac{4}{3},\frac{5}{3},2\right],\right.$$

$$\left.-\frac{1}{9}\frac{L^2 k^2 a^3}{(a-1)^2}\right) a + 224\, L^2 a^4 \,\mathrm{hypergeom}\left([2,2],\left[\frac{7}{3},\frac{8}{3},3\right],-\frac{1}{9}\frac{L^2 k^2 a^3}{(a-1)^2}\right) k^2 + L^4 a^6 \,\mathrm{hypergeom}\Big([3,$$

$$3],\left[\frac{10}{3},\frac{11}{3},4\right],-\frac{1}{9}\frac{L^2 k^2 a^3}{(a-1)^2}\Big) k^4 + 1120\,\mathrm{hypergeom}\left([1,1],\left[\frac{4}{3},\frac{5}{3},2\right],-\frac{1}{9}\frac{L^2 k^2 a^3}{(a-1)^2}\right)\Bigg)\Bigg)$$

$$- \frac{280}{3}\Bigg(k^2 a\Bigg(-2\,\_C4\, L\, a\left(-\frac{L^2 k^2 a^3}{(a-1)^2}\right)^{5/3}\left(\frac{L^2 k^2 a^3}{(a-1)^2}\right)^{1/3} \mathrm{BesselI}\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3}\sqrt{-\frac{L^2 k^2 a^3}{(a-1)^2}}\right)$$

$$- \_C3\,\mathrm{BesselI}\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\sqrt{-\frac{L^2 k^2 a^3}{(a-1)^2}}\right)\left(-\frac{L^2 k^2 a^3}{(a-1)^2}\right)^{3/2}\left(\frac{L^2 k^2 a^3}{(a-1)^2}\right)^{1/3} + 2\,\_C4\, L\, a^2\Bigg($$

$$-\frac{L^2 k^2 a^3}{(a-1)^2}\Bigg)^{5/3}\left(\frac{L^2 k^2 a^3}{(a-1)^2}\right)^{1/3} \mathrm{BesselI}\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3}\sqrt{-\frac{L^2 k^2 a^3}{(a-1)^2}}\right) + 2\,\_C3\left(-\frac{L^2 k^2 a^3}{(a-1)^2}\right)^{7/3} \mathrm{BesselI}\Bigg(\frac{2}{3},$$

$$\frac{2}{3}\sqrt{-\frac{L^2 k^2 a^3}{(a-1)^2}}\Bigg) + 2\,\_C4\, L\, a^2\left(-\frac{L^2 k^2 a^3}{(a-1)^2}\right)^{7/6}\left(\frac{L^2 k^2 a^3}{(a-1)^2}\right)^{1/3} \mathrm{BesselI}\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\sqrt{-\frac{L^2 k^2 a^3}{(a-1)^2}}\right)$$

$$+ \_C3\,\mathrm{BesselI}\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\sqrt{-\frac{L^2 k^2 a^3}{(a-1)^2}}\right) a\left(-\frac{L^2 k^2 a^3}{(a-1)^2}\right)^{3/2}\left(\frac{L^2 k^2 a^3}{(a-1)^2}\right)^{1/3} + \_C3\, a\Bigg($$

$$-\frac{L^2 k^2 a^3}{(a-1)^2}\Bigg)^{11/6} \mathrm{BesselI}\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\sqrt{-\frac{L^2 k^2 a^3}{(a-1)^2}}\right) - 2\,\_C3\, a\left(-\frac{L^2 k^2 a^3}{(a-1)^2}\right)^{7/3} \mathrm{BesselI}\Bigg(\frac{2}{3},$$

$$\frac{2}{3}\sqrt{-\frac{L^2 k^2 a^3}{(a-1)^2}}\Bigg) - 2\,\_C4\, L\, a\left(-\frac{L^2 k^2 a^3}{(a-1)^2}\right)^{7/6}\left(\frac{L^2 k^2 a^3}{(a-1)^2}\right)^{1/3} \mathrm{BesselI}\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\sqrt{-\frac{L^2 k^2 a^3}{(a-1)^2}}\right)$$

$$- \_C3 \left(- \frac{L^2 k^2 a^3}{(a-1)^2}\right)^{11/6} \mathrm{BesselI}\left(- \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \sqrt{- \frac{L^2 k^2 a^3}{(a-1)^2}}\right) (x + L a - x a)^3 \,\mathrm{hypergeom}\left([1, 1], \left[\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right.\right.$$

$$\left.\left.2\right], - \frac{1}{9} \frac{k^2 (x + L a - x a)^3}{L (a-1)^2}\right)\Bigg) \Bigg/ \Bigg(\left(- \frac{L^2 k^2 a^3}{(a-1)^2}\right)^{7/3} \left(\frac{L^2 k^2 a^3}{(a-1)^2}\right)^{1/3} \Bigg(1120\, a^4 \,\mathrm{hypergeom}\left([1, 1], \left[\frac{4}{3},\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{5}{3}, 2\right], - \frac{1}{9} \frac{L^2 k^2 a^3}{(a-1)^2}\right) - 112\, L^2 a^3 \,\mathrm{hypergeom}\left([2, 2], \left[\frac{7}{3}, \frac{8}{3}, 3\right], - \frac{1}{9} \frac{L^2 k^2 a^3}{(a-1)^2}\right) k^2$$

$$+ 6720 \,\mathrm{hypergeom}\left([1, 1], \left[\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2\right], - \frac{1}{9} \frac{L^2 k^2 a^3}{(a-1)^2}\right) a^2 - 4480\, a^3 \,\mathrm{hypergeom}\left([1, 1], \left[\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2\right],\right.$$

$$\left.- \frac{1}{9} \frac{L^2 k^2 a^3}{(a-1)^2}\right) - 112\, L^2 a^5 \,\mathrm{hypergeom}\left([2, 2], \left[\frac{7}{3}, \frac{8}{3}, 3\right], - \frac{1}{9} \frac{L^2 k^2 a^3}{(a-1)^2}\right) k^2 - 4480 \,\mathrm{hypergeom}\left([1, 1]\right.$$

$$\left.\left[\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2\right], - \frac{1}{9} \frac{L^2 k^2 a^3}{(a-1)^2}\right) a + 224\, L^2 a^4 \,\mathrm{hypergeom}\left([2, 2], \left[\frac{7}{3}, \frac{8}{3}, 3\right], - \frac{1}{9} \frac{L^2 k^2 a^3}{(a-1)^2}\right) k^2$$

$$+ L^4 a^6 \,\mathrm{hypergeom}\left([3, 3], \left[\frac{10}{3}, \frac{11}{3}, 4\right], - \frac{1}{9} \frac{L^2 k^2 a^3}{(a-1)^2}\right) k^4 + 1120 \,\mathrm{hypergeom}\left([1, 1], \left[\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2\right],\right.$$

$$\left.\left.\left.- \frac{1}{9} \frac{L^2 k^2 a^3}{(a-1)^2}\right)\right)\right) + \_C3 \left(\int_0^x \mathrm{BesselI}\left(- \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \sqrt{- \frac{k^2 (\_z1 + L a - \_z1 a)^3}{L (a-1)^2}}\right) \Bigg(\right.$$

$$\left.\left.- \frac{k^2 (\_z1 + L a - \_z1 a)^3}{L (a-1)^2}\right)^{1/6} d\_z1\right) + \_C4 \Bigg($$

$$\int_0^x \frac{\mathrm{BesselI}\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \sqrt{- \frac{k^2 (\_z1 + L a - \_z1 a)^3}{L (a-1)^2}}\right) (\_z1 + L a - \_z1 a)}{\left(- \frac{k^2 (\_z1 + L a - \_z1 a)^3}{L (a-1)^2}\right)^{1/6}} d\_z1 \Bigg)$$

Και τελικά λαμβάνεται το εξής μήνυμα καθώς γίνεται προσπάθεια να θέσουμε τις συνοριακές συνθήκες:

> $solve(\{w(L), w''(L) = 0\}, k)$

```
Warning, solutions may have been lost
```

5 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στη διπλωματική αυτή εργασία παρουσιάστηκε η διαδικασία εύρεσης του κρίσιμου φορτίου λυγισμού ενός αμφιαρθρωτού υποστυλώματος σταθερής δυσκαμψίας κατά το μήκος του, το οποίο θλίβεται από πολλά συγκεντρωμένα αξονικά φορτία ίσα και ισαπέχοντα μεταξύ τους. Έγινε η μαθηματική επίλυση και βρέθηκαν τιμές για 1 έως 8 φορτία. Ακολούθως έγινε προσπάθεια για την εύρεση ενός πιο εύκολου τρόπου εύρεσης αυτού του φορτίου με την προσέγγιση ενός ομοιόμορφα διανεμημένου θλιπτικού φορτίου. Με τον τρόπο αυτό το πρόβλημα απλοποιείται καθώς κάθε φορά απαιτούνται μόνον 4 συνοριακές συνθήκες. Ωστόσο η μαθηματική επίλυση της προκύπτουσας διαφορικής εξίσωσης είναι ιδιαίτερα δυσχερής.

Από τη διαδικάσια της επίλυσης και την επεξεργασία των αποτελεσμάτων προκύπτουν διάφορα συμπεράσματα.

Η θεώρηση του προβλήματος του λυγισμού ως πρόβλημα ιδιοτιμών, δηλαδή η πινακοποίηση του, απλοποιεί σημαντικά τη διαδικασία και τη μετατρέπει σε «επαναληπτική». Ο προγραμματισμός της διαδικασίας αυτής θα ήταν ένα ενδιαφέρον εγχείρημα.

Με αφετηρία τα 2 και 3 συγκεντρωμένα φορτία παρατηρεί κανείς ότι κάθε επιπλέον φορτίο δίνει 4 επιπλέον εξισώσεις συνοριακών συνθηκών. Έτσι για αριθμό n φορτίων προκύπτουν 4n εξισώσεις και άρα ένας πίνακας [4n*4n]. Ακόμα, με το επιλεχθέν στη διπλωματική αυτή εργασία σύστημα συντεταγμένων μειώνεται πάντα κατά 2 ο αριθμός των αγνώστων σταθερών, από τις 2 συνθήκες για την αριστερή άρθρωση, οι οποίες μηδενίζουν εύκολα τις σταθερές B_1 και $Δ_1$. Ο πίνακας δηλαδή θα είναι [(4n-2)*(4n-2)].

Ας παρατηρήσουμε τώρα ενδεικτικά τους πίνακες για τα 3 και 4 φορτία

$$\begin{bmatrix} \sin(k1\,l) & l & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k1\cos(k1\,l) & 1 & -k2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2}\sin(k1\,l) & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin(k2\,l) & \cos(k2\,l) & l & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & k2\cos(k2\,l) & -k2\sin(k2\,l) & 1 & 0 & -k3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sin(k2\,l) & 2\cos(k2\,l) & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin(k3\,l) & \cos(k3\,l) & l & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin(k3\,l) & \cos(k3\,l) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Big[\Big[\sin(k1\,l), l, 0, -1, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\Big],$$

$$\Big[k1\cos(k1\,l), 1, -k2, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\Big],$$

$$\Big[\frac{4}{3}\sin(k1\,l), 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\Big],$$

$$\Big[0, \frac{4}{3}, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\Big],$$

$$\Big[0, 0, \sin(k2\,l), \cos(k2\,l), l, 1, 0, -1, 0, -1, 0, 0, 0, 0\Big],$$

$$\Big[0, 0, k2\cos(k2\,l), -k2\sin(k2\,l), 1, 0, -k3, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0\Big],$$

$$\Big[0, 0, \frac{3}{2}\sin(k2\,l), \frac{3}{2}\cos(k2\,l), 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0\Big],$$

$$\Big[0, 0, 0, 0, \frac{3}{2}, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0\Big],$$

$$\Big[0, 0, 0, 0, 0, 0, \sin(k3\,l), \cos(k3\,l), l, 1, 0, -1, 0, -1\Big],$$

$$\Big[0, 0, 0, 0, 0, 0, k3\cos(k3\,l), -k3\sin(k3\,l), 1, 0, -k4, 0, -1, 0\Big],$$

$$\Big[0, 0, 0, 0, 0, 0, 2\sin(k3\,l), 2\cos(k3\,l), 0, 0, 0, -1, 0, 0\Big],$$

$$\Big[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, -1, 0\Big],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \sin(k4\, l), \cos(k4\, l), l, 1\right],$$

$$\left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \sin(k4\, l), \cos(k4\, l), 0, 0\right]\Big]$$

Με μια προσεκτική ματιά παρατηρεί κανείς ορισμένα ενδιαφέροντα στοιχεία. Οι σειρές των πινάκων μοιάζουν να έχουν κάποια κοινά στοιχεία όπως και οι συντελεστές τους. Θα μπορούσε κάποιος να θεωρήσει ότι αποτελούνται από υποπίνακες με σταθερά στοιχεία τα εκάστοτε $\sin(k_n l)$, $\cos(k_n l)$, κλπ, και φυσικούς αριθμούς οι οποίοι μεταβάλλονται ανάλογα με το πλήθος των φορτίων.

A1	Γ1	A2	B2	Γ2	Δ2	An-1	Bn-1	Γn-1	Δn-1	An	Bn	Γn	Δn
sin(k1*l)	l	0	-1	0	-1								
k1*cos(k1*l)	1	-k2	0	-1	0								
n*sin(k1*l)/(n-1)	0	0	-1	0	0								
0	n/(n-1)	0	0	-1									
		sin(k2*l)	cos(k2*l)	l	1	0	-1	0	-1				
		k2*cos(k2*l)	-k2*sin(k2*l)	1	0	$-k_{n-1}$	0	-1	0				
		(n-1)*sin(k2*l)/(n-2)	(n-1)*cos(k2*l)/(n-2)	0	0	0	-1	0	0				
		0	0	(n-1)/(n-2)	0	0	0	-1	0				
						$\sin(k_{n-1}*l)$	$\cos(k_{n-1}*l)$	l	1	0	-1	0	-1
						$K_{n-1}*\cos(k_{n-1}*l)$	$-k_{n-1}*\sin(k_{n-1}*l)$	1	0	-kn	0	-1	0
						$2*\sin(k_{n-1}*l)/1$	$2*\cos(k_{n-1}*l)/1$	0	0	0	-1	0	0
						0	0	2/1	0	0	0	-1	0
										sin(kn*l)	cos(kn*l)	l	1
										sin(kn*l)	cos(kn*l)	0	0

Πίνακας 5.1 Γενική μορφή πίνακα συντελεστών για n αξονικά θλιπτικά φορτία

Ο πίνακας αυτός είναι μια προσπάθεια απόδοσης της λογικής που χρησιμοποιείται για την κατασκευή του πίνακα πολλών (έχει νόημα για 2 ή περισσότερα φορτία) και λειτουργεί «αντίστροφα». Δηλαδή ξεκινά κανείς από τις τελευταίες 4 στήλες (δεξιά στον πίνακα που αντιστοιχεί δεξιά στη δοκό) και σε αυτές προσθέτει (επαυξάνει) από μπροστά (αριστερά) σταδιακά τους υπόλοιπους υποπίνακες μέχρι να φτάσει στο αριστερότερο φορτίο (δηλαδή μέχρι να φτάσει στο τμήμα k_1 το οποίο είναι πάντα το ίδιο υποπινακάκι [4*2]). Έτσι παραδείγματος χάριν για τα 3 φορτία, ξεκινάμε από κάτω δεξιά.

0	-1	0	-1
-k3	0	-1	0
0	-1	0	0
0	0	-1	0
sin(k3*l)	cos(k3*l)	l	1
sin(k3*l)	cos(k3*l)	0	0

Ακολούθως προσθέτουμε τις 4 στήλες-8 σειρές για το τμήμα k_2.

0	-1	0	-1
-k2	0	-1	0
0	-1	0	0
0	0	-1	0
sin(k2*l)	cos(k2*l)	l	1
K2*cos(k2*l)	-k2*sin(k2*l)	1	0

2*sin(k2*l)/1	2*cos(k2*l)/1	0	0
0	0	2/1	0

Τέλος και το τμήμα με k_1 (4*2).

sin(k1*l)	l
k1*cos(k1*l)	1
n*sin(k1*l)/(n-1)	0
0	n/(n-1)

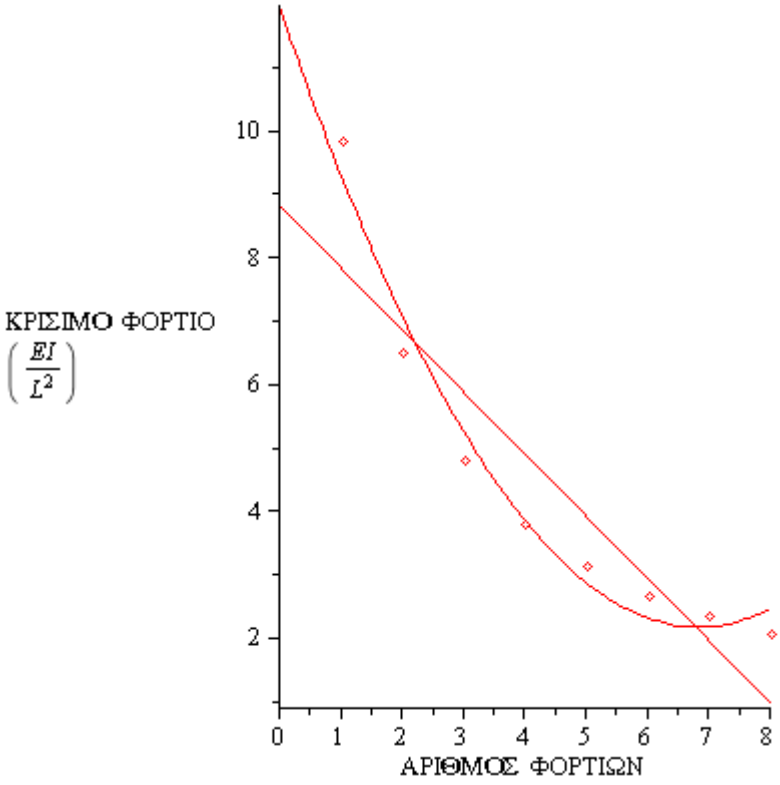
Παρακάτω παρουσιάζεται ένας συνοπτικός πίνακας με τα αποτελέσματα για τα κρίσιμα φορτία και τα ισοδύναμα μήκη λυγισμού

Αριθμός συγκεντρωμένων φορτίων	**Αδιάστατο κρίσιμο φορτίο λυγισμού**	**Αδιάστατο ισοδύναμο μήκος λυγισμού**
1	9,870	1,00
2	6,536	1,23
3	4,815	1,43
4	3,818	1,61
5	3,165	1,77
6	2,703	1,91
7	2,359	2,05
8	2,092	2,17

Πίνακας 5.2 Συγκεντρωτικός πίνακας αποτελεσμάτων

Τα αποτελέσματα φαίνονται λογικά. Υπάρχει μείωση στο κρίσιμο φορτίο λυγισμού με την αύξηση των θλιπτικών φορτίων.

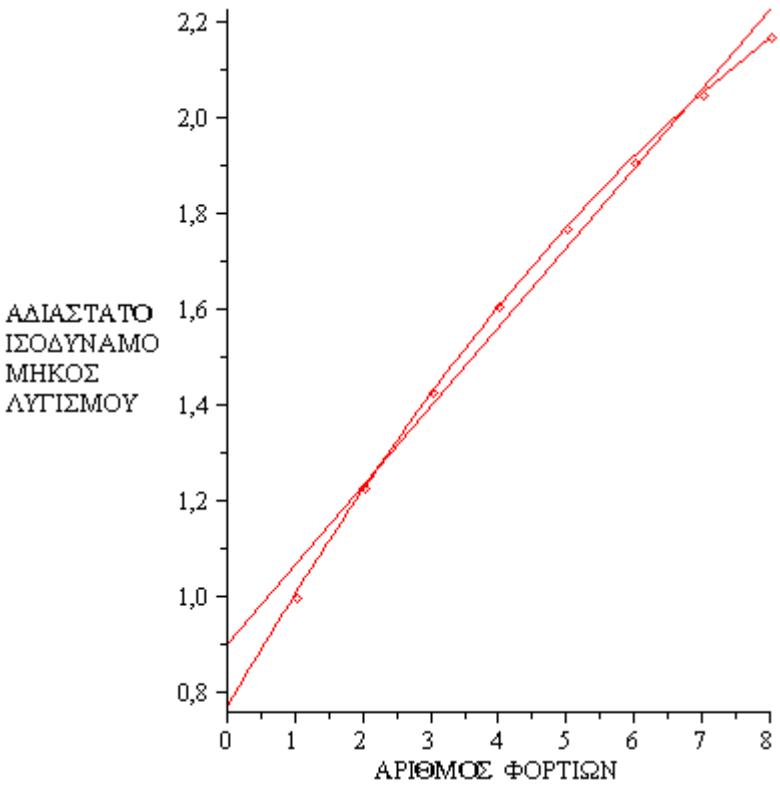
Ο παραπάνω πίνακας παρουσιάζεται και με τη μορφή διαγράμματος (για μέχρι 8 φορτία) και γίνεται μια προσπάθεια να βρεθεί η εξίσωση παρεμβολής.



Διάγραμμα 5.1 Καμπύλη κρίσιμου φορτίου

Η παρεμβολή γίνεται με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων και το πολυώνυμο παρεμβολής είναι το $0{,}209n^2 - 2{,}864n + 11{,}969$ για n θετικό ακέραιο.

Ακολουθεί παρόμοια προσπάθεια για το αδιάστατο ισοδύναμο μήκος λυγισμού



Διάγραμμα 5.2 Καμπύλη ισοδύναμου μήκους λυγισμού

Από το διάγραμμα φαίνεται ότι ικανοποιητική προσέγγιση μπορεί να δώσει και η ευθεία $y = 0{,}17x + 0{,}9$, όπου x ο αριθμός των φορτίων.

Σε ό,τι αφορά την προσπάθεια προσέγγισης μέσω διανεμημένου αξονικού φορτίου, στην παρούσα διπλωματική εργασία καταλήξαμε στη διαφορική εξίσωση που διέπει την ισορροπία του στοιχειώδους τμήματος dx.

$$EIw''''(x) + Pw''(x) = \frac{P(a-1)}{L} w'(x) - (L-x) * \frac{P(a-1)}{L} w''(x)$$

Η ακριβής λύση αυτής της διαφορικής εξίσωσης όμως είναι δύσχρηστη καθώς περιλαμβάνει υπεργεωμετρικές συναρτήσεις και συναρτήσεις Bessel. Με τον τρόπο αυτό δεν είναι εύκολο να εξάγει κανείς κάποιο πρακτικό αποτέλεσμα σε διαχειρίσιμη και κατανοητή μορφή.

Επιπλέον, παρατηρεί κανείς ότι το αριστερό μέλος είναι ίδιο με της διαφορικής εξίσωσης τετάρτης τάξης για σταθερό θλιπτικό φορτίο, η οποία όμως είναι και ομογενής. Θα είχε ίσως ενδιαφέρον να δοκιμάσει κανείς κάποια προσέγγιση με συναρτήσεις σχήματος (που θα ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες) για το βέλος στο δεξιό μέλος. Ίσως ένα άλλο βέλος $\overline{w}(x) = c\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$.

Ακολούθως, εφόσον βρεθεί κάποια «απλή» λύση της εξίσωσης, να χρησιμοποιηθούν οι 4 συνοριακές συνθήκες και να βρεθεί το κρίσιμο φορτίο λυγισμού και να εξεταστεί εάν αποτελεί καλή προσέγγιση της ακριβούς λύσης. Να επισημανθεί ότι χρήζει προσοχής το συγκρίσιμο μέγεθος. Επειδή το φορτίο είναι διανεμημένο δηλαδή, ίσως να ήταν προτιμότερο ως κρίσιμο φορτίο να θεωρηθεί αυτό που ασκείται στο μέσον (εάν αναφερόμαστε σε γραμμικά αυξανόμενο φορτίο) της ράβδου, ώστε να έχουμε μια μέση τιμή του συνολικά ασκούμενου φορτίου.

Φυσικά ενδιαφέρον θα είχε η μελέτη του γενικότερου προβλήματος. Η περίπτωση δηλαδή όπου αλλάζει η δυσκαμψία κατά μήκος της ράβδου, ή εκείνη που τα φορτία δεν είναι ίσα ή ισαπέχοντα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Timoshenko S. P. & Gere J. M., (1961), “Theory of Elastic Stability”, McGraw-Hill
2. Chajes A., (1974), “Principles of Structural Stability Theory”, Prentice-Hall
3. Chen W. F. & Lui E. M., (1987), “Structural Stability-Theory and Implementation”, Elsevier
4. Godoy L. A., (1999), ”Theory of Elastic Stability-Analysis and Sensitivity”, Taylor & Francis
5. Κουνάδη Α. Ν., (1997), “Γραμμική Θεωρία Ελαστικής Ευστάθειας”, Εκδόσεις Συμεών
6. Silver G., (1951), “Critical Loads on variable-section Columns in Elastic Range”, Applied Mechanics Division (pp. 414-420)
7. Abassi M. M., (1958), “Buckling of Struts of variable Bending Rigidity”, Journal of Applied Mechanics (pp. 537-540)
8. Ιωαννίδης Γ. Ι. & Κουνάδης Α. Ν., (1991), “Μια απλοποιημένη και αποτελεσματική μέθοδος για τον προσδιορισμό του κρίσιμου φορτίου πλευρικού και στρεπτοκαμπτικού λυγισμού”, Α΄ Εθνικό Συνέδριο Σιδηρών Κατασκευών (σελ. 67-77)
9. Vaziri H. H. &Xie J., (1992), “Buckling of Columns under variably distributed Axial Loads“, Computers & Structures (Vol.45, No 3, pp. 505-509)
10. Qiusheng Li, Hong Cao &Guiqing Li, (1993), “Stability Analysis of a Bar with Multi-Segments of variable Cross-Section”, Computers & Structures (Vol.53, No 5, pp. 1085-1089)
11. Ioannidis G. I. & Kounadis A.N., (1994), “Lateral Postbuckling Analysis of Monosymmetric I-Beams under Uniform Bending”, Journal of Constructional Steel Research (Vol.30, pp.1-12)
12. Qiusheng Li, Hong Cao &Guiqing Li, (1994), “Stability Analysis of Bars with varying Cross-Section”, International Journal of Solids & Structures (Vol.32, No 21, pp. 3217-3228)

13. Ermopoulos J. Ch., (1997), “Equivalent Buckling Length of Non-uniform Members“, Journal of Constructional Steel Research (Vol.42, No 2, pp. 141-158)
14. Ermopoulos J. Ch., (1998), “Buckling length of non-uniform members under stepped axial loads“, Computers & Structures (Vol.73, pp. 573-582)
15. Raftoyiannis I. G. & Ermopoulos J. Ch., (2005), “Stability of tapered and stepped steel columns with initial imperfections”, Engineering Structures (Vol.27, pp. 1248-1257)