



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
Δ.Π.Μ.Σ. ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

Ανάλυση του κεκλιμένου διεισδυτή τύπου
σφήνας στα πλαίσια της θεωρίας ελαστικότητας
τάσεων ζεύγους

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΤΟΥ

ΣΤΕΦΑΝΟΥ ΝΙΚΟΛΟΠΟΥΛΟΥ

Επιβλέπων: Ζήσης Α.

Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

Αθήνα, Ιούνιος 2019



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
Δ.Π.Μ.Σ. Εφαρμοσμένη Μηχανική
Τομέας Μηχανικής

Ανάλυση του κεκλιμένου διεισδυτή τύπου
σφήνας στα πλαίσια της θεωρίας ελαστικότητας
τάσεων ζεύγους

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΤΟΥ

ΣΤΕΦΑΝΟΥ ΝΙΚΟΛΟΠΟΥΛΟΥ

Επιβλέπων: Ζήσης Α.
Επ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 27η Ιουνίου 2019.

(Υπογραφή)

(Υπογραφή)

(Υπογραφή)

.....

Ζήσης Α.

Επ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....

Γιανακόπουλος Α.

Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....

Τσόπελας Π.

Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούνιος 2019

(Υπογραφή)

.....

ΣΤΕΦΑΝΟΣ ΝΙΚΟΛΟΠΟΥΛΟΣ

Διπλωματούχος Πολιτικός Μηχανικός Πανεπιστημίου Πατρών.

© 2019 – All rights reserved



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
Δ.Π.Μ.Σ. Εφαρμοσμένη Μηχανική
Τομέας Μηχανικής

Copyright ©–All rights reserved Στέφανος Νικολόπουλος, 2019.

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή κ. Αθανάσιο Ζήση για την επιστημονική καθοδήγηση όλο αυτο το διάστημα. Η συμβολή του ήταν καθοριστική για την εκπόνηση αυτής της εργασίας. Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου για την στήριξη που μου παρέχει όλα τα χρόνια των σπουδών μου, δίνοντας μου την δυνατότητα να κυνηγώ τα όνειρα μου.

Περίληψη

Το αντικείμενο της Μεταπτυχιακής Διατριβής είναι η ανάλυση του επίπεδου προβλήματος επαφής ενός κεκλιμένου άκαμπτου διεισδυτή τύπου σφήνας με την επιφάνεια ελαστικού ημίχωρου στα πλαίσια της θεωρίας τάσεων ζεύγους, σύμφωνα με την οποία λαμβάνεται υπόψη η επίδραση της μικροδομής του υλικού στα μακροσκοπικά χαρακτηριστικά του προβλήματος επαφής. Συγκεκριμένα, εισάγεται το χαρακτηριστικό μήκος του υλικού, το οποίο αντιστοιχεί στα χαρακτηριστικά της μικροδομής. Τέτοιου είδους επαφές προκύπτουν σε ένα ευρύ φάσμα εφαρμογών της μηχανικής, από τη δομική και τη γεωτεχνική μηχανική, μέχρι τη μικρο και νάνο τεχνολογία.

Η μεθοδολογία επίλυσης βασίζεται στις ιδιόμορφες ολοκληρωτικές εξισώσεις, οι οποίες προκύπτουν από τον χειρισμό του προβλήματος μιστών συνοριακών τιμών με ολοκληρωτικούς μετασχηματισμούς *Fourier* και γενικευμένες συναρτήσεις. Η ιδιόμορφη ολοκληρωτική εξίσωση που διέπει το πρόβλημα επιλύεται αριθμητικά για διάφορες τιμές του χαρακτηριστικού μήκους του υλικού. Τα αποτελέσματα εστιάζουν στην επίδραση της μικροδομής του υλικού και της κλίσης του διεισδυτή στην απόκριση της επαφής. Όπου είναι εφικτό, γίνεται σύγκριση των αποτελεσμάτων με τα αντίστοιχα αποτελέσματα που προκύπτουν από την κλασική ελαστικότητα.

Τα αποτελέσματα της ανάλυσης κάνουν φανερό τόσο την επίδραση της μικροδομής του υλικού, όσο και της κλίσης του διεισδυτή στην απόκριση της επαφής. Η μελέτη και η επίλυση προβλημάτων επαφής όπως αυτό της παρούσας εργασίας, μπορεί να συνεισφέρει στο σχεδιασμό πειραματικών εξοπλισμών, μηχανικών εξαρτημάτων και άλλων εφαρμογών της μηχανικής.

Λέξεις Κλειδιά

Μηχανική επαφών, θεωρία τάσεων ζεύγους, ιδιόμορφες ολοκληρωτικές εξισώσεις, κεκλιμένος τριγωνικός διεισδυτής, χαρακτηριστικό μήκος υλικού.

Abstract

This thesis examines the plane contact problem of a tilted rigid wedge penetrator and a flat half-plane within the context of couple stress elasticity, which takes into account the effect of the microstructural characteristics of the material in the macroscopic contact response. In particular, the material characteristic length is introduced which corresponds to the microstructural characteristics. Such contacts arise in a wide range of engineering applications, from structural and geotechnical engineering to micro and nano technology.

The Solution methodology is based on singular integral equations arising from the treatment of the mixed boundary value problem with Fourier integral transforms and generalized functions. The singular integral equation governing the problem is solved numerically for various values of the material characteristic length. The results focus on the effect of the material microstructure and the inclination of the indenter upon the contact response. When possible, they are compared with those predicted by classical elasticity.

The results obtained from the analysis reveal the impact of the material microstructure and the wedge inclination upon the contact response. Solutions of such problems may be of interest to the design of machine components, experimental setups, or other engineering applications.

Keywords

Contact mechanics, couple stress elasticity, singular Integral Equations, tilted swallow wedge, material characteristic length.

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες	1
Περίληψη	3
Abstract	5
Περιεχόμενα	8
Κατάλογος Σχημάτων	11
1 Εισαγωγή	13
1.1 Γενικά	13
1.2 Αντικείμενο και διάρθρωση της διατριβής	15
2 Θεωρία τάσεων ζεύγους	17
2.1 Γενικά	17
2.2 Βασικές εξισώσεις	17
2.3 Επίπεδη παραμόρφωση	22
2.4 Τάσεις von Mises	26
3 Ορισμός του προβλήματος και μεθοδολογία επίλυσης	29
3.1 Συνοριακές συνθήκες	29
3.2 Ολοκληρωτικοί μετασχηματισμοί Fourier	31
3.3 Ιδιόμορφη ολοκληρωτική εξίσωση	33
4 Αριθμητική Επίλυση	37
4.1 Πίεση κάτω από την επιφάνεια του διεισδυτή	37
4.2 Τάσεις εντός του ημιχώρου	40
5 Αποτελέσματα και Συζήτηση	43
5.1 Εκκεντρότητα και μέση πίεση	43
5.2 Κατανομή της πίεσης	45
5.3 Τάσεις και τάσεις ζεύγους καθ' ύψος κάτω από την αιχμή του διεισδυτή	47
5.3.1 Επίδραση του κανονικοποιημένου χαρακτηριστικού μήκους	47

5.3.2	Επίδραση της κλίσης του διεισδυτή	52
5.4	Τασιικά πεδία	56
6	Συμπεράσματα	65
	Βιβλιογραφία	67

Κατάλογος Σχημάτων

2.1	Οι συνιστώσες των τάσεων και των τάσεων ζεύγους σε καρτεσιανές συντεταγμένες για ένα στοιχειώδες σωματίδιο σε συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης.	24
3.1	Διείσδυση ενός άκαμπτου διεισδυτή τύπου σφήνας σε ένα ελαστικό ημίχωρο υπο την δράση ενός συγκεντρωμένου φορτίου P και μίας ροπής M	29
5.1	Επίδραση του κανονικοποιημένου χαρακτηριστικού μήκους $2\ell/(a+b)$, (a) στην αδιαστατοποιημένη εκκεντρότητα e/e_{class} και (b) την αδιαστατοποιημένη μέση πίεση $p_{av}/p_{av,class}$, για $\nu = 0$, $\nu = 0.3$ και $\nu = 0.5$ και $a/b = 1$, $a/b = 0.5$ και $a/b = 0.33$.	44
5.2	Η κατανομή της αδιάστατοποιημένης πίεσης $p(r)/\mu \cot(\phi)$ κάτω από την επιφάνεια του διεισδυτή συναρτήσει της κανονικοποιημένης απόστασης $r = (2x - a + b)/(a + b)$ για $a/b = 1$, $\nu = 0$ και $\nu = 0.5$ και διάφορες τιμές του λόγου $2\ell/(a + b)$.	45
5.3	Η κατανομή της αδιάστατοποιημένης πίεσης $p(r)/\mu \cot(\phi)$ κάτω από την επιφάνεια του διεισδυτή συναρτήσει της κανονικοποιημένης απόστασης $r = (2x - a + b)/(a + b)$ για $a/b = 1/2$, $\nu = 0$ και $\nu = 0.5$ και διάφορες τιμές του λόγου $2\ell/(a + b)$.	46
5.4	Η κατανομή της αδιάστατοποιημένης πίεσης $p(r)/\mu \cot(\phi)$ κάτω από την επιφάνεια του διεισδυτή συναρτήσει της κανονικοποιημένης απόστασης $r = (2x - a + b)/(a + b)$ για $a/b = 1/3$, $\nu = 0$ και $\nu = 0.5$ και διάφορες τιμές του λόγου $2\ell/(a + b)$.	46
5.5	Η $\sigma_{xx}/\mu \cot(\phi)$ συναρτήσει της κατακόρυφης κανονικοποιημένης απόστασης $2y/(a + b)$ κάτω από την αιχμή του διεισδυτή για $\nu = 0$ και $\nu = 0.5$, $a/b = 0.5$ και διάφορες τιμές του λόγου $2\ell/(a + b)$.	47
5.6	Η $\sigma_{yy}/\mu \cot(\phi)$ συναρτήσει της κατακόρυφης κανονικοποιημένης απόστασης $2y/(a + b)$ κάτω από την αιχμή του διεισδυτή για $\nu = 0$ και $\nu = 0.5$, $a/b = 1/2$ και διάφορες τιμές του λόγου $2\ell/(a + b)$.	48
5.7	Η $\sigma_{xy}/\mu \cot(\phi)$ συναρτήσει της κατακόρυφης κανονικοποιημένης απόστασης $2y/(a + b)$ κάτω από την αιχμή του διεισδυτή για $\nu = 0$ και $\nu = 0.5$, $a/b = 1/2$ και διάφορες τιμές του λόγου $2\ell/(a + b)$.	49

- 5.8 Η $\sigma_{yx}/\mu \cot(\phi)$ συναρτήσει της κατακόρυφης κανονικοποιημένης απόστασης $2y/(a+b)$ κάτω από την αιχμή του διεισδυτή για $\nu = 0$ και $\nu = 0.5$, $a/b = 1/2$ και διάφορες τιμές του λόγου $2\ell/(a+b)$ 49
- 5.9 Η $m_{xz}/\mu \cot(\phi)\ell$ συναρτήσει της κατακόρυφης κανονικοποιημένης απόστασης $2y/(a+b)$ κάτω από την αιχμή του διεισδυτή για $\nu = 0$ και $\nu = 0.5$, $a/b = 1/2$ και διάφορες τιμές του λόγου $2\ell/(a+b)$ 50
- 5.10 Η $m_{yz}/\mu \cot(\phi)\ell$ συναρτήσει της κατακόρυφης κανονικοποιημένης απόστασης $2y/(a+b)$ κάτω από την αιχμή του διεισδυτή για $\nu = 0$ και $\nu = 0.5$, $a/b = 1/2$ και διάφορες τιμές του λόγου $2\ell/(a+b)$ 50
- 5.11 Η $\sigma_{eq}/\mu \cot(\phi)$ συναρτήσει της κατακόρυφης κανονικοποιημένης απόστασης $2y/(a+b)$ κάτω από την αιχμή του διεισδυτή για $\nu = 0$ και $\nu = 0.5$, $a/b = 1/2$ και διάφορες τιμές του λόγου $2\ell/(a+b)$ 51
- 5.12 Η $\sigma_{xx}/\mu \cot(\phi)$ συναρτήσει της κατακόρυφης κανονικοποιημένης απόστασης $2y/(a+b)$ κάτω από την αιχμή του διεισδυτή για $\nu = 0$ και $\nu = 0.5$, $2\ell/(a+b) = 0.5$ και διάφορες τιμές του λόγου a/b 52
- 5.13 Η $\sigma_{yy}/\mu \cot(\phi)$ συναρτήσει της κατακόρυφης κανονικοποιημένης απόστασης $2y/(a+b)$ κάτω από την αιχμή του διεισδυτή για $\nu = 0$ και $\nu = 0.5$, $2\ell/(a+b) = 0.5$ και διάφορες τιμές του λόγου a/b 52
- 5.14 Η $\sigma_{xy}/\mu \cot(\phi)$ συναρτήσει της κατακόρυφης κανονικοποιημένης απόστασης $2y/(a+b)$ κάτω από την αιχμή του διεισδυτή για $\nu = 0$ και $\nu = 0.5$, $2\ell/(a+b) = 0.5$ και διάφορες τιμές του λόγου a/b 53
- 5.15 Η $\sigma_{yx}/\mu \cot(\phi)$ συναρτήσει της κατακόρυφης κανονικοποιημένης απόστασης $2y/(a+b)$ κάτω από την αιχμή του διεισδυτή για $\nu = 0$ και $\nu = 0.5$, $2\ell/(a+b) = 0.5$ και διάφορες τιμές του λόγου a/b 53
- 5.16 Η $m_{xz}/\mu \cot(\phi)\ell$ συναρτήσει της κατακόρυφης κανονικοποιημένης απόστασης $2y/(a+b)$ κάτω από την αιχμή του διεισδυτή για $\nu = 0$ και $\nu = 0.5$, $2\ell/(a+b) = 0.5$ και διάφορες τιμές του λόγου a/b 54
- 5.17 Η $m_{yz}/\mu \cot(\phi)\ell$ συναρτήσει της κατακόρυφης κανονικοποιημένης απόστασης $2y/(a+b)$ κάτω από την αιχμή του διεισδυτή για $\nu = 0$ και $\nu = 0.5$, $2\ell/(a+b) = 0.5$ και διάφορες τιμές του λόγου a/b 54
- 5.18 Η $\sigma_{eq}/\mu \cot(\phi)$ συναρτήσει της κατακόρυφης κανονικοποιημένης απόστασης $2y/(a+b)$ κάτω από την αιχμή του διεισδυτή για $\nu = 0$ και $\nu = 0.5$, $2\ell/(a+b) = 0.5$ και διάφορες τιμές του λόγου a/b 55
- 5.19 Το ποσοστό μείωσης των τάσεων συναρτήσει του κανονικοποιημένου βάρους $2y/(a+b)$, για $a/b = 1/3$ και $\nu = 0$, σε σχέση με τις αντίστοιχες τάσεις της συμμετρικής επαφής 55
- 5.20 Η $\sigma_{xx}/\mu \cot(\phi)$ σε όλο το πεδίο για $\nu = 0$ και διάφορες τιμές των λόγων $2\ell/(a+b)$ και a/b 56
- 5.21 Η $\sigma_{xx}/\mu \cot(\phi)$ σε όλο το πεδίο για $\nu = 0.5$ και διάφορες τιμές των λόγων $2\ell/(a+b)$ και a/b 57

5.22 Η $\sigma_{yy}/\mu \cot(\phi)$ σε όλο το πεδίο για $\nu = 0$ και διάφορες τιμές των λόγων $2\ell/(a+b)$ και a/b	57
5.23 Η $\sigma_{yy}/\mu \cot(\phi)$ σε όλο το πεδίο για $\nu = 0.5$ και διάφορες τιμές των λόγων $2\ell/(a+b)$ και a/b	58
5.24 Η $\sigma_{xy}/\mu \cot(\phi)$ σε όλο το πεδίο για $\nu = 0$ και διάφορες τιμές των λόγων $2\ell/(a+b)$ και a/b	58
5.25 Η $\sigma_{xy}/\mu \cot(\phi)$ σε όλο το πεδίο για $\nu = 0.5$ και διάφορες τιμές των λόγων $2\ell/(a+b)$ και a/b	59
5.26 Η $\sigma_{yx}/\mu \cot(\phi)$ σε όλο το πεδίο για $\nu = 0$ και διάφορες τιμές των λόγων $2\ell/(a+b)$ και a/b	59
5.27 Η $\sigma_{yx}/\mu \cot(\phi)$ σε όλο το πεδίο για $\nu = 0.5$ και διάφορες τιμές των λόγων $2\ell/(a+b)$ και a/b	60
5.28 Η $m_{xz}/\mu \cot(\phi)\ell$ σε όλο το πεδίο για $\nu = 0$ και διάφορες τιμές των λόγων $2\ell/(a+b)$ και a/b	60
5.29 Η $m_{xz}/\mu \cot(\phi)\ell$ σε όλο το πεδίο για $\nu = 0.5$ και διάφορες τιμές των λόγων $2\ell/(a+b)$ και a/b	61
5.30 Η $m_{yz}/\mu \cot(\phi)\ell$ σε όλο το πεδίο για $\nu = 0$ και διάφορες τιμές των λόγων $2\ell/(a+b)$ και a/b	61
5.31 Η $m_{yz}/\mu \cot(\phi)\ell$ σε όλο το πεδίο για $\nu = 0.5$ και διάφορες τιμές των λόγων $2\ell/(a+b)$ και a/b	62
5.32 Η $\sigma_{eq}/\mu \cot(\phi)$ σε όλο το πεδίο για $\nu = 0$ και διάφορες τιμές των λόγων $2\ell/(a+b)$ και a/b	62
5.33 Η $\sigma_{eq}/\mu \cot(\phi)$ σε όλο το πεδίο για $\nu = 0.5$ και διάφορες τιμές των λόγων $2\ell/(a+b)$ και a/b	63

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Γενικά

Αισθητήρες με σφηνοειδή γεωμετρία εμφανίζονται συχνά στο σχεδιασμό οργάνων, όπως επιφανειακά προφιλόμετρα, όργανα μετρήσεων για τον προσδιορισμό και την μέτρηση της ποιότητας της επιφάνειας και όργανα για τον υπολογισμό των μηχανικών ιδιοτήτων υλικών με δοκιμές διείσδυσης. Επιπλέον, τέτοιου είδους επαφές μπορούν να προκύψουν σε επιφανειακές θεμελιώσεις κατασκευών οπλισμένου σκυροδέματος.

Τα μηχανικά χαρακτηριστικά τέτοιων τύπων επαφών μπορεί να είναι ευαίσθητα στην επίδραση της μικροδομής του υλικού, λόγω του μεγέθους των κόκκων ή του πάχους πιθανών στρώσεων καθώς και άλλων παραμέτρων που μπορεί να σχετίζονται με την τραχύτητα της επιφάνειας, παραμένουσες τάσεις και ελαστική ανισοτροπία. Συγκεκριμένα, η επίδραση της μικροδομής του υλικού (μέγεθος κόκκου ή πάχος στρώματος ή ακόμη και η ύπαρξη διαβάθμισης υλικού) σύνθηως οδηγεί στον υπολογισμό των λεγόμενων 'φαινομένων κλίμακας', τα οποία επηρεάζουν σημαντικά την αναμενόμενη μακροσκοπική μηχανική απόκριση της επαφής.

Μελέτες έχουν δείξει ότι υπάρχει μεγάλη επίδραση των φαινομένων κλίμακας στη σκληρότητα σε πολυκρυσταλλικά, κυψελοειδή και πολυμερή υλικά ειδικά όταν το βάθος διείσδυσης είναι της τάξης μεγέθους του υπομικρομέτρου. Για παράδειγμα, η μετρούμενη σκληρότητα της διείσδυσης των μετάλλων και των κεραμικών αυξάνεται με συντελεστή δύο, καθώς το πλάτος της επαφής μειώνεται από 10 έως 1 μm (Ma and Clarke, 1995, Poole et al., 1996; Stelmashenko et al., 1993). Επιπλέον, διείσδυση λεπτών φίλμ έδειξε αύξηση της τάσης διαρροής με μειούμενο πάχος μεμβράνης. (Huber et al., 2002). Οι Fleck et al. (1994) πρότειναν ότι η επίδραση των φαινομένων κλίμακας στην σκληρότητα σχετίζεται με τις υψηλές κλίσεις τάσης/τροπής που υπάρχουν σε διεδύσεις μικρού βάθους. Αυτή η εξάρτηση από τις βαθμίδες τάσης/τροπής μπορεί επίσης να εξαχθεί από τη θεωρία εξάρθρωσης (dislocation theory) (Fleck et al., 1994). Επιπλέον, οι Ma and Clarke (1995) παρατήρησαν ότι η διακύμανση της σκληρότητας με το μέγεθος της διείσδυσης ταιριάζει στο μοντέλο πλαστικότητας βαθμίδας τροπής (strain gradient plasticity model). Σε γενικές γραμμές, η σκλήρυνση των υλικών οφείλεται στη συνδυασμένη παρουσία γεωμετρικά αναγκαίων εξάρθρώσεων που συνδέονται με τις πλαστικές βαθμίδες τροπών (strain gradient) και στατιστικά αποθηκευμένες διαταραχές

που σχετίζονται με τις πλαστικές τροπές. Ωστόσο, αν και οι βαθμίδες των τροπών χρησιμοποιούνται εκτεταμένα για την ερμηνεία των φαινομένων κλίμακας τα αποτελέσματα στην πλαστική παραμόρφωση, είναι επίσης σημαντικά για τα υλικά που παραμορφώνονται ελαστικά όταν το αντιπροσωπευτικό μήκος του πεδίου παραμόρφωσης γίνεται συγκρίσιμο με τα μήκη της μικροδομής του υλικού. Στην πραγματικότητα, οι Maranganti and Sharma (2007) έδειξαν ότι τα φαινόμενα βαθμίδας (gradient effects) διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο σε σύνθετα υλικά με δομή χονδροειδών κόκκων. Πράγματι, οι Chen et al. (1998) ανέπτυξαν ένα μοντέλο συνεχούς για κυψελοειδή υλικά και κατέληξε στο συμπέρασμα ότι η περιγραφή του συνεχούς αυτών των υλικών υπακούει σε μια θεωρία βαθμίδας ελαστικότητας του τύπου τάσης ζεύγους. Στην τελευταία μελέτη, το μήκος υλικού αναγνωρίστηκε φυσικά με το μέγεθος των κυψελών. Εξάλλου, οι θεωρίες βαθμίδας χρησιμοποιήθηκαν με επιτυχία στο παρελθόν για την μοντελοποίηση υλικών με μικροδομές όπως οι αφροί (Lakes, 1983) και πορώδη στερεά (Lakes, 1993). Οι Fleck and Shu (1995) έδειξαν τη σημασία της επίδρασης της βαθμίδας της τροπής στο λυγισμό των ελαστικών ινών σύνθετων υλικών. Φαινόμενα κλίμακας παρατηρήθηκαν επίσης πειραματικά στη συμπεριφορά μετά από λυγισμό λεπτών φιλμ (Fang and Wickert, 1994).

Επιπλέον, σε πειράματα διείδυσης πολυ μικρού βάθους διείδυσης η πλαστική διαρροή δεν συμβαίνει παρα μόνο όταν η ισοδύναμη παραμόρφωση λάβει μια κρίσιμη τιμή διαρροής. Επιπλέον, η μετατόπιση που ανακτάται κατά την αποφόρτιση είναι σε μεγάλο βαθμό ελαστική και για το λόγο αυτό η θεωρία των ελαστικών επαφών χρησιμοποιείται γενικά για τον προσδιορισμό του μέτρου ελαστικότητας από μια απλή ανάλυση των δεδομένων μετατόπισης - φορτίου της διείδυσης (Pharr et al., 1992). Υπο αυτές τις συνθήκες, η παρατηρούμενη απόκριση του υλικού μπορεί να ερμηνευθεί μόνο μέσω εκτιμήσεων ελαστικότητας. Ωστόσο, η κλασική ελαστικότητα δεν περιλαμβάνει εσωτερικές κλίμακες μήκους και επομένως δεν είναι δυνατή για την πρόβλεψη των πειραματικά παρατηρούμενων επιδράσεων κλίμακας. Στην πραγματικότητα, όσο η κλίμακα επαφής μειώνεται προοδευτικά (μικρο έως νανο-κλίμακα) τα εσωτερικά μήκη του υλικού γίνονται σημαντικά και η επίδραση τους στη μακροσκοπική απόκριση της επαφής δεν μπορεί να αγνοηθεί. Για το λόγο αυτό, γενικευμένες θεωρίες του συνεχούς μέσου όπως είναι η θεωρία τάσεων ζεύγους και η πιο γενική θεωρία βαθμίδας τροπής, μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την ερμηνεία του μεγέθους που εξαρτάται από την μικροδομή του υλικού στις ελαστικές ιδιότητες του υλικού. Αυτές οι θεωρίες λαμβάνουν υπόψη της επίδραση της μικροδομής καθώς εμπλουτίζουν το κλασικό συνεχές με επιπλέον κλίμακες χαρακτηριστικού μήκους του υλικού.

Οι συνθήκες επαφής μεταξύ δύο σωμάτων είναι δυνατόν να μὴν είναι συμμετρικές, λόγω πιθανής στροφής του διειδυτή, εξαιτίας κάποια επιβαλλόμενης ροπής σε αυτόν ή ανεπιθύμητων γεωμετρικών ανωμαλιών στην επιφάνεια του υπο διείδυση σώματος. Σε τέτοιες συνθήκες, αναμένεται σημαντική αλλοίωση των αποτελεσμάτων επαφής και μπορεί να προκύψουν σημαντικά μακροσκοπικά σφάλματα. Επιπλέον, θα επηρέαζε καταλυτικά τις παρατηρούμενες μορφές αστοχίας, επομένως είναι απαραίτητη η θεωρητική ανάλυση τέτοιου είδους επαφών. Μη συμμετρικές συνθήκες επαφής μπορούν να εμφανιστούν στις εφαρμογές της επιστήμης των υλικών (δοκιμές διείδυσης) όταν για παράδειγμα οι ιδιότητες ενός υλικού εξάγονται μέσω της τεχνικής διείδυσης. Παρόμοιες ασυμμετρίες μπορούν επίσης να εντοπιστούν σε καταστάσεις

επαφής μεγάλης κλίμακας σε έργα πολιτικού μηχανικού και σε γεωτεχνικές εφαρμογές όπου τα πέδιλα λειτουργούν ουσιαστικά ως άκαμπτοι διεισδυτές του εδάφους.

Η υιοθέτηση μιας γενικευμένης θεωρίας συνεχούς μέσου κρίνεται αναγκαία προκειμένου να καλύψει τις αδυναμίες της κλασικής ελαστικότητας, η οποία δεν προβλέπει την επίδραση της μικροδομής του υλικού στην απόκριση της επαφής. Μια τέτοια θεωρία, είναι η θεωρία τάσεων ζεύγους, γνωστή και ως "Cosserat theory of elasticity with constrained rotations" (Mindlin and Tiersten, 1962; Toupin, 1964).

1.2 Αντικείμενο και διάρθρωση της διατριβής

Στην παρούσα διατριβή έγινε ανάλυση του επίπεδου προβλήματος επαφής ενός παραμόρφωτου διεισδυτή τύπου σφήνας και ενός ελαστικού ημίχωρου υπο την επίδραση ενός συγκεντρωμένου φορτίου και μίας ροπής. Το ίδιο πρόβλημα επαφής είχε επιλυθεί αρχικά από τον Sackfield (Sackfield et al., 2005), στα πλαίσια της κλασικής θεωρίας ελαστικότητας. Στη παρούσα εργασία παρέχονται λύσεις που λαμβάνουν υπόψη την επίδραση της μικροδομής του υλικού, χρησιμοποιώντας την θεωρία τάσεων ζεύγους.

Συγκεκριμένα, σε αυτή την θεωρία, η πυκνότητα ενέργειας παραμόρφωσης και οι σχέσεις συμβιβαστού των παραμορφώσεων περιλαμβάνουν, εκτός από τις συνηθισμένες απειροελάχιστες τροπές, τις παραγώγους των στρωφών. Οι γενικευμένες σχέσεις τάσης - παραμόρφωσης για την περίπτωση ισότροπου υλικού περιλαμβάνουν ένα ζεύγος νέων ελαστικών σταθερών, μια εξ' αυτών είναι το χαρακτηριστικό μήκος του υλικού.

Στο κεφάλαιο που ακολουθεί γίνεται αναλυτική περιγραφή της θεωρίας τάσεων ζεύγους καθώς και η παρουσίαση των βασικών εξισώσεων για προβλήματα επίπεδης παραμόρφωσης και του κριτηρίου διαρροής von Mises.

Στα επόμενα κεφάλαια γίνεται πλήρης περιγραφή της προσέγγισης του προβλήματος επαφής με την θεωρία τάσεων ζεύγους και των συνοριακών συνθηκών. Αναλύεται η μεθοδολογία επίλυσης του προβλήματος μικτών συνοριακών τιμών, η οποία μεταξύ άλλων περιλαμβάνει ολοκληρωτικούς μετασχηματισμούς Fourier και γενικευμένες συναρτήσεις. Τέλος, περιγράφονται οι ιδιόμορφικές ολοκληρωτικές εξισώσεις που προκύπτουν από την παραπάνω μεθοδολογία καθώς και η αριθμητική τους επίλυση.

Στο τελευταίο κεφάλαιο αναλύονται τα αποτελέσματα, στα οποία μεταξύ άλλων συμπεριλαμβάνονται, η κατανομή της πίεσης κάτω από την επιφάνεια του διεισδυτή, η μέση πίεση και η εκκεντρότητα συναρτήσει του χαρακτηριστικού μήκους και το τασικό πεδίο για όλες τις τάσεις και τις τάσεις ζεύγη. Όπου είναι εφικτό, τα αποτελέσματα συγκρίνονται με αυτά που προβλέπονται από την κλασική Ελαστικότητα, ώστε να γίνει αντιληπτή η επίδραση της μικροδομής του υλικού στην απόκριση της επαφής.

Κεφάλαιο 2

Θεωρία τάσεων ζεύγους

2.1 Γενικά

Η θεωρία τάσεων ζεύγους (couple-stress theory) υποθέτει ότι κάθε στοιχείο επιφάνειας ΔS , που βρίσκεται είτε στο εσωτερικό του σώματος είτε στην επιφάνεια του, υπόκειται όχι μόνο σε μια συνισταμένη δύναμη αλλά και σε μια συνισταμένη ροπή, ανά μονάδα επιφάνειας. Η υπόθεση αυτή είναι κατάλληλη για υλικά με κοκκώδη ή κρυσταλλική δομή όπου η αλληλεπίδραση δυο γειτονικών στοιχείων εισάγει εσωτερικές ροπές.

Όπως είναι γνωστό, οι βασικές ιδέες της θεωρίας τάσεων ζεύγους διατυπώθηκαν αρχικά από τους Voigt (1887) και E. και F. Cosserat (1909). Όμως, η αυστηρή θεμελίωση της θεωρίας έγινε τη δεκαετία του 1960 με τις εργασίες των Toupin (1962), Mindlin and Tiersten (1962) και Koiter (1964). Ενδιαφέρουσες παρουσιάσεις της θεωρίας τάσεων ζεύγους μπορούν επίσης να βρεθούν στις εργασίες των Aero and Kuvshinskii (1960), Palmov (1964), Muki and Sternberg (1965) και Georgiadis and Velgaki (2003). Συγκεκριμένα, στην τελευταία εργασία παρέχεται μία πληρέστερη και πιο ολοκληρωμένη περιγραφή της θεωρίας, καθώς περιλαμβάνονται και φαινόμενα αδράνειας και μικρο-αδράνειας, επισημαίνοντας έτσι τη μικροδομική προέλευση της θεώρησης τάσεων ζεύγους.

Τέλος, σημειώνεται ότι η θεωρία τάσεων ζεύγους αποτελεί μία υπό-περίπτωση του τύπου III (Form III) της γενικής θεωρίας του Mindlin (1964), ενώ είναι διαφορετική από τη γενική μικροπολική θεωρία των Cosserat (micropolar) (Nowacki, 1972), που θεωρεί τα σωματίδια του υλικού με έξι ανεξάρτητους βαθμούς ελευθερίας (τρεις συνιστώσες μετατόπισης και τρεις συνιστώσες στροφής).

2.2 Βασικές εξισώσεις

Προχωρούμε, στη συνέχεια, σε μία σύντομη παρουσίαση της θεωρίας τάσεων ζεύγους. Η θεωρία αυτή υποθέτει ότι: (i) κάθε υλικό σημείο έχει τρεις ανεξάρτητους βαθμούς ελευθερίας (τρεις συνιστώσες μετατόπισης), (ii) η Αρχή των Τάσεων (Stress Principle) των Euler-Cauchy επεκτείνεται λαμβάνοντας υπόψη την ύπαρξη ελκυστών τάσεων ζεύγους (ροπής), (iii) η πυκνότητα παραμορφωσιακής ενέργειας εξαρτάται όχι μόνο από την τροπή αλλά

και από την βαθμίδα της στροφής. Απουσία αδρανειακών φαινομένων, οι νόμοι διατήρησης της ορμής και της στροφορμής για έναν όγκο ελέγχου CV με επιφάνεια S είναι (Mindlin and Tiersten, 1962, Georgiadis and Velgaki, 2003)

$$\int_S t_p^{(n)} dS + \int_{CV} f_p d(CV) = 0 \quad (2.1)$$

$$\int_S (x_q t_p e_{pqk} + M_p^{(n)}) dS + \int_{CV} (x_q f_k e_{pqk} + C_p) d(CV) = 0 \quad (2.2)$$

όπου $t_i^{(n)}$ είναι η επιφανειακή δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας (ο ελκυστής των τάσεων), f_p είναι οι καθολικές δυνάμεις ανά μονάδα όγκου, $M_p^{(n)}$ είναι η επιφανειακή ροπή ανά μονάδα επιφάνειας, C_p είναι οι καθολικές ροπές ανά μονάδα όγκου και x_q είναι οι συνιστώσες του διανύσματος θέσης κάθε υλικού στοιχείου με στοιχειώδη όγκο dCV .

Στη συνέχεια, οι τάσεις και οι τάσεις ζεύγους ορίζονται αν λάβουμε υπ' όψιν την ισορροπία στοιχειώδους υλικού τετραέδρου (τετραέδρου Cauchy) και χρησιμοποιήσουμε τις Εξ. (2.1) και (2.2), αντίστοιχα (Aero and Kuvshinskii, 1960; Malvern, 1969). Ο τανυστής των τάσεων σ_{pq} , ο οποίος είναι ασύμμετρος, ορίζεται ως :

$$t_p = \sigma_{pq} n_q \quad (2.3)$$

και ο τανυστής των τάσεων ζεύγους μ_{pq} , ο οποίος είναι επίσης ασύμμετρος ορίζεται ως :

$$M_p^{(n)} = \mu_{pq} n_q \quad (2.4)$$

Οι σχέσεις $t^{(n)} = -t^{(-n)}$ και $M^{(n)} = -M^{(-n)}$ που n είναι το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα σε ένα στοιχείο επιφάνειας (είτε στο σύνορο, είτε σε οποιαδήποτε ιδεατή επιφάνεια στο εσωτερικό του σώματος) με φορά προς τα έξω, μπορούν εύκολα να αποδειχθούν αν θεωρήσει κανείς την ισορροπία μίας «λεπτής λωρίδας» (thin slice) του υλικού. Οι τάσεις ζεύγους m_{pq} έχουν διαστάσεις $[\deltaύναμη][\mu\eta\kappa\omicron\varsigma]^{-1}$. Επιπλέον, η τάση σ_{pq} χωρίζεται σε ένα συμμετρικό και ένα αντισυμμετρικό τμήμα :

$$\sigma_{pq} = \tau_{pq} + \alpha_{pq} \quad (2.5)$$

όπου $\tau_{pq} = \tau_{qp}$ και $\alpha_{pq} = -\alpha_{qp}$, ενώ το μ_{pq} χωρίζεται σε ένα αποκλίνον $\mu_{pq}^{(D)}$ και ένα σφαιρικό τμήμα $\mu_{pq}^{(S)}$ με τον ακόλουθο τρόπο:

$$\mu_{pq} = m_{pq} + \frac{1}{3} \delta_{pq} \mu_{kk} \quad (2.6)$$

όπου $m_{pq} \equiv \mu_{pq}^{(D)}$, $\mu_{pq}^{(S)} \equiv \frac{1}{3}\delta_{pq}\mu_{kk}$ και δ_{pq} είναι το δέλτα του Kronecker.

Σύμφωνα με τους ανωτέρω ορισμούς και χρησιμοποιώντας το θεώρημα Green-Gauss προκύπτουν οι εξισώσεις ισορροπίας δυνάμεων και ροπών :

$$\partial_p \sigma_{pq} + f_q = 0 \quad (2.7)$$

$$\partial_p \mu_{pq} + \sigma_{kp} e_{pqk} + C_q = 0 \quad (2.8)$$

ή, λόγω της (2.5):

$$\partial_p \tau_{pq} + \partial_p \alpha_{pq} + f_q = 0 \quad (2.9)$$

$$\frac{1}{2} \partial_p \mu_{pq} e_{pqk} + \alpha_{pq} + \frac{1}{2} C_k e_{pqk} = 0 \quad (2.10)$$

Συνδυάζοντας τις Εξ. (2.9) και (2.10) και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $\text{curl}(\text{div}(\frac{1}{3}\delta_{pq}\mu_{kk})) = 0$ προκύπτει μία ενιαία εξίσωση ισορροπίας:

$$\partial_p \tau_{pq} - \frac{1}{2} \partial_p \partial_r m_{rk} e_{pqk} + f_q - \frac{1}{2} \partial_p C_k e_{pqk} = 0 \quad (2.11)$$

Για την κινηματική περιγραφή του σώματος ορίζονται, στα πλαίσια μιας γεωμετρικά γραμμικής θεωρίας, οι ακόλουθες ποσότητες:

$$\omega_q = \frac{1}{2} e_{pqk} u_{k,p} \quad (2.12)$$

$$k_{pq} = \omega_{q,p} \quad (2.13)$$

όπου ω_q είναι το διάνυσμα της στροφής και k_{pq} είναι ο τανυστής καμπυλότητας (curvature tensor), ο οποίος έχει διαστάσεις $[\text{μήκος}]^{-1}$ και ορίζεται ως η βαθμίδα της στροφής είτε ως ο στροβιλισμός της τροπής:

$$k_{pq} = \frac{1}{2} e_{qkl} \partial_p \partial_k u_l \equiv e_{qkl} \partial_k e_{pl} \quad (2.14)$$

Η εξίσωση (2.14) εκφράζει την εξίσωση συμβιβαστού μεταξύ τροπών και καμπυλοτήτων. Επιπλέον, η ταυτότητα $\partial_s k_{pq} = \partial_p \partial_s \omega_q = \partial_p k_{sq}$ εκφράζει τις εξισώσεις συμβιβαστού για τον ταυστή καμπυλότητας. Για τον ταυστή των τροπών ισχύουν οι συνήθεις εξισώσεις συμβιβαστού κατά Saint Venant (Barber, 1992). Τέλος, σημειώνεται ότι ο ταυστής k_{pq} είναι ασύμμετρος και πώς $k_{pp} = 0$ (traceless tensor) λόγω της αντισυμμετρίας του συμβόλου εναλλαγής, επομένως το k_{pq} έχει μόνο οκτώ ανεξάρτητες συνιστώσες.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, η αρμόζουσα μεταβολική έκφραση για την θεωρία τάσεων ζεύγους είναι:

$$\int_V \delta W(e_{pq}, \partial_p \omega_q) dV = \int_V f_q \delta u_q dV + \int_V C_q \delta \omega_q dV + \int_S t_q^{(n)} \delta u_q dS + \int_S M_q^{(n)} \delta \omega_q dS \quad (2.15)$$

Ως προς τις συνοριακές συνθήκες, σε κάθε σημείο μιας λείας συνοριακής επιφάνειας ορίζονται τρεις τροποποιημένοι ελκυστές δύναμης και δύο εφαπτομενικοί ελκυστές ροπής (Mindlin and Tiersten, 1962; Koiter, 1964):

$$P_q = \sigma_{pq} n_p - \frac{1}{2} e_{qpr} n_p \partial_r m_{(nn)} \quad (2.16)$$

όπου m_{nn} είναι η κάθετη συνιστώσα του αποκλίνοντος ταυστή τάσεων ζεύγους m_{pq} . Αξίζει να σημειωθεί ότι η ύπαρξη ακμών στην συνοριακή επιφάνεια οδηγεί σε επιπλέον συνοριακές συνθήκες (Koiter, 1964).

Σύμφωνα με τα ανωτέρω, οι τροποποιημένοι ελκυστές δύναμης και ροπής ($P_q^{(n)}, R_q^{(n)}$) σχετίζονται με τους ελκυστές ($t_q^{(n)}, M_q^{(n)}$) με τις ακόλουθες σχέσεις:

$$P_q^{(n)} = t_q^{(n)} - \frac{1}{2} n_k e_{kpq} \partial_p (M_p^{(n)} n_p) \quad (2.17)$$

$$R_q^{(n)} = M_q^{(n)} - (M_p^{(n)} n_p) n_p \quad (2.18)$$

Απο την Εξ. (2.18) προκύπτει ότι $n_q R_q^{(n)} = 0$, επομένως ο ελκυστής ροπής $R_q^{(n)}$ εφάπτεται σε κάθε σημείο του συνόρου (δηλαδή, έχει μηδενική κάθετη συνιστώσα στο σύνορο).

Τονίζεται ότι με μια πρώτη ματιά, θα ήταν εύλογο να σκεφτεί κανείς ότι οι επιφανειακοί ελκυστές $t_p^{(n)}$ και $M_p^{(n)}$ μπορούν να ορισθούν ανεξάρτητα σε κάθε σημείο της συνοριακής επιφάνειας του σώματος βάσει των Εξ. (2.3) και (2.4). Ωστόσο, σύμφωνα με τον Koiter (1964), ο αριθμός των έξι συνοριακών συνθηκών (τρεις συνιστώσες για τον ελκυστή δύναμης $t_p^{(n)}$ και τρεις συνιστώσες για τον ελκυστή ροπής $M_p^{(n)}$) θα ερχόταν σε αντίθεση με τις πέντε γεωμετρικές συνθήκες που μπορούν να ορισθούν ανεξάρτητα σε ένα σημείο του συνόρου. Πράγματι, επειδή στη θεωρία τάσεων ζεύγους το διάνυσμα της στροφής ω_q εξαρτάται από το διάνυσμα της μετατόπισης u_q (όπως άλλωστε υποδηλώνεται από την Εξ. (2.12)), η κάθετη συνιστώσα

της στροφής προσδιορίζεται πλήρως από την κατανομή των εφαπτομενικών μετατοπίσεων στο σύνορο. Συνεπώς, μόνο οι τρεις συνιστώσες της μετατόπισης και οι δυο εφαπτομενικές συνιστώσες της στροφής μπορούν να περιγραφούν ανεξάρτητα στο σύνορο. Κατ' επέκταση, μόνο πέντε επιφανειακοί ελκυστές (οι ενεργειακά συζυγής των παραπάνω κινηματικών μεγεθών) ορίζονται σε ένα σημείο μιας λείας συνοριακής επιφάνειας. Οι ελκυστές αυτοί δίνονται στις Εξ. (2.14) και (2.15). Σημειώνουμε ότι παρόμοια κατάσταση συναντάται και στην θεωρία πλακών κατά Kirchhoff, όπου ο αριθμός των συνοριακών συνθηκών, σε μια ελεύθερη παρειά της πλάκας, μειώνεται από τρεις σε δυο. Αντιθέτως, στη θεωρία Cosserat (micropolar), όπου η στροφή είναι πλήρως ανεξάρτητη από το διάνυσμα της μετατόπισης, οι συνοριακές συνθήκες είναι έξι (Nowacki, 1972) και μπορούν άμεσα να εξαχθούν από την ισορροπία του τετραέδρου Cauchy (Εξ. (2.3) και (2.4)).

Όσον αφορά τις καταστατικές εξισώσεις της θεωρίας τάσεων ζεύγους, στην απλούστερη περίπτωση γραμμικής και ισότροπης καταστατικής συμπεριφοράς, η πυκνότητα παραμορφωσιακής ενέργειας λαμβάνει την ακόλουθη τετραγωνική μορφή:

$$W = W(e_{pq}, k_{pq}) = \frac{1}{2} \lambda \varepsilon_{pp} \varepsilon_{qq} + \mu \varepsilon_{pq} + 2\eta k_{pq} k_{pq} + 2\eta' k_{pq} k_{qp} \quad (2.19)$$

όπου περιλαμβάνονται τέσσερις διαφορετικές υλικές σταθερές, οι συνήθεις σταθερές Lamé (λ, μ) με διαστάσεις [δύναμη][μήκος]⁻² και δύο μικροδομικές σταθερές (η, η') που εισάγονται από την θεωρία τάσεων ζεύγους και έχουν διαστάσεις δύναμης.

Γραμμικές και ισότροπες καταστατικές σχέσεις προκύπτουν από την Εξ. (2.19) μέσω των ακόλουθων μεταβολικών εκφράσεων:

$$\tau_{pq} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{pq}} = \lambda \delta_{pq} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{pq} \quad (2.20)$$

$$m_{pq} = \frac{\partial W}{\partial k_{pq}} = 4\eta k_{pq} + 4\eta' k_{qp} \quad (2.21)$$

Έπειτα, αντικαθιστώντας τις καταστατικές σχέσεις (2.20) και (2.21) στην εξίσωση ισορροπίας (2.11) και χρησιμοποιώντας τις γεωμετρικές σχέσεις (2.12) και (2.13) καταλήγουμε, απουσία καθολικών δυνάμεων και ροπών, στις εξισώσεις ισορροπίας ως προς τις μετατοπίσεις (Muki and Sternberg, 1965):

$$\nabla^2 u_q - \ell^2 \nabla^4 + \partial_p \left(\frac{1}{1-2\nu} u_{p,p} + \ell^2 \nabla^2 (u_{p,p}) \right) = 0 \quad (2.22)$$

όπου $\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$ είναι ο λόγος Poisson, $\ell \equiv \left(\frac{\eta}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}$ το χαρακτηριστικό μήκος του υλικού, ∇^2 ο τελεστής Laplace και $\nabla^4 \equiv \nabla^2 \nabla^2$ ο διαρμονικός τελεστής. Αξίζει να σημειωθεί, ότι καθώς $\ell \rightarrow 0$, οι παραπάνω εξισώσεις εκφυλίζονται στις εξισώσεις Navier-Cauchy της κλασικής ελαστικότητας.

Κάνοντας εφαρμογή του τελεστή βαθμίδας $\nabla() \equiv \partial_p$ στην Εξ. (2.22) καταλήγουμε στην έκφραση:

$$\nabla^2(\nabla \cdot u) \equiv u_{q,pp} = 0 \quad (2.23)$$

Παρατηρούμε ότι η συστολή/διαστολή (dilatation) $\varepsilon_{qq} = u_{q,q}$, υπακούει στην ίδια εξίσωση με την κλασική ελαστικότητα (Koiter, 1964).

Ολοκληρώνοντας, μπορεί κανείς να παρατηρήσει τα ακόλουθα: (α) Καθώς ισχύει η σχέση $k_{pp} = 0$ θα ισχύει και $m_{pp} = 0$ και, για το λόγο αυτό, ο τανυστής m_{pq} έχει μόνο οκτώ ανεξάρτητες συνιστώσες. (β) Το σφαιρικό τμήμα $\frac{1}{3}\mu_{kk}$ του τανυστή τάσεων ζεύγους μ_{pq} δεν εμφανίζεται ούτε στην τελική εξίσωση κίνησης, ούτε στις καταστατικές εξισώσεις. Συνεπώς, η ποσότητα αυτή παραμένει απροσδιόριστη στη θεωρία τάσεων ζεύγους. Με άλλα λόγια, το πεδίο μ_{pq} είναι μοναδικό, εκτός από ένα πρόσθετο αυθαίρετο (σταθερό) και ισότροπο πεδίο τάσεων ζεύγους. (γ) Για να είναι θετικά ορισμένη η παραμορφωσιακή ενέργεια, που είναι απαραίτητη προϋπόθεση για τη μοναδικότητα της λύσεως (Mindlin and Tiersten, 1962, Mindlin and Eshel, 1968), πρέπει να ισχύουν οι ακόλουθοι περιορισμοί (Mindlin and Tiersten, 1962) μεταξύ των σταθερών του υλικού:

$$3\lambda + 2\mu > 0, \quad \mu > 0, \quad \eta > 0, \quad -1 < \frac{\eta'}{\eta} < 1 \quad (2.24)$$

2.3 Επίπεδη παραμόρφωση

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται οι βασικές εξισώσεις της θεωρίας τάσεων ζεύγους για ομογενή και ισότροπα στερεά σε συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.

Για ένα σώμα δύο διαστάσεων σε συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης, το πεδίο των μεταπίσεων παίρνει την γενική μορφή:

$$u_x \equiv u_x(x, y) \neq 0, u_y \equiv u_y(x, y) \neq 0, u_z = 0 \quad (2.25)$$

Επιπλέον, οι κινηματικές σχέσεις του ελαστικού σώματος γίνονται:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \quad (2.26)$$

$$\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right), \quad k_{xz} = \frac{\partial \omega}{\partial x}, \quad k_{yz} = \frac{\partial \omega}{\partial y} \quad (2.27)$$

όπου ε είναι ο συνήθης τανυστής των τροπών, ω είναι η στροφή, και k_{yz}, k_{xz} είναι οι μη μηδενικοί όροι του τανυστή καμπυλότητας, εκφραζόμενοι σε διαστάσεις [μήκος]⁻¹.

Σε συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης, ο συμμετρικός τανυστής των τάσεων τ_{pq} έχει τρεις ανεξάρτητες συνιστώσες εντός του επιπέδου (x, y) , οι οποίες γράφονται συναρτήσει του πεδίου των μετατοπίσεων σύμφωνα με τις εξ. (2.20) και (2.27):

$$\tau_{xx} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad (2.28)$$

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \quad (2.29)$$

$$\tau_{yy} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_y}{\partial y} + \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (2.30)$$

Ο τανυστής τάσεων-ζεύγους m_{pq} έχει δύο ανεξάρτητες συνιστώσες εντός του πεδίου (x, y) , που γράφονται συναρτήσει των μετατοπίσεων σύμφωνα με τις Εξ. (2.21) και (2.27):

$$m_{xz} = 2\mu\ell^2 \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} \right) \quad (2.31)$$

$$m_{yz} = 2\mu\ell^2 \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) \quad (2.32)$$

Κάνοντας θεώρηση μηδενικών καθολικών δυνάμεων και ροπών, το αντισυμμετρικό τμήμα του τανυστή των τάσεων γράφεται σύμφωνα με την εξ. (2.10):

$$\alpha_{xx} = \alpha_{yy} = 0 \quad (2.33)$$

$$\alpha_{xy} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial m_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial m_{yz}}{\partial y} \right) = -2\mu\ell^2 \nabla^2 \omega, \quad \alpha_{yx} = -\alpha_{xy}, \quad (2.34)$$

όπου $\nabla^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2$ είναι ο διδιάστατος τελεστής Laplace σε καρτεσιανές συντεταγμένες.

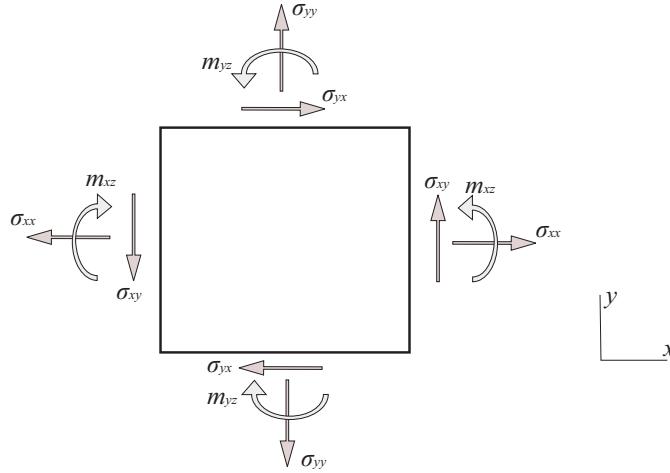
Σύμφωνα με τα παραπάνω, οι συνιστώσες του ασύμμετρου τανυστή τάσεων σ_{pq} γράφονται:

$$\sigma_{xx} = \tau_{xx} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad (2.35)$$

$$\sigma_{yy} = \tau_{yy} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_y}{\partial y} + \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (2.36)$$

$$\sigma_{yx} = \tau_{yx} + \alpha_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + \mu \ell^2 \left(\frac{\partial^3 u_y}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 u_x}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u_y}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 u_x}{\partial y^3} \right) \quad (2.37)$$

$$\sigma_{xy} = \tau_{xy} + \alpha_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) - \mu \ell^2 \left(\frac{\partial^3 u_y}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 u_x}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u_y}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 u_x}{\partial y^3} \right) \quad (2.38)$$



Σχήμα 2.1: Οι συνιστώσες των τάσεων και των τάσεων ζεύγους σε καρτεσιανές συντεταγμένες για ένα στοιχειώδες σωματίδιο σε συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης.

Η πυκνότητα ενέργειας παραμόρφωσης (2.19) λαμβάνει την μορφή:

$$W = \frac{\lambda}{2} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})^2 + \mu (\varepsilon_{xx}^2 + 2\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yy}^2) + 2\mu \ell^2 (k_{xz}^2 + k_{yz}^2) \quad (2.39)$$

ή με όρους τάσεων:

$$W = \frac{1}{2\mu} \left(\tau_{xy}^2 + \frac{1}{2(1+\nu)} (\tau_{xx}^2 + \tau_{yy}^2 - 2\nu \tau_{xx} \tau_{yy} - \nu^2 (\tau_{xx} + \tau_{yy})^2) \right) + \frac{1}{8\mu \ell^2} (m_{xz}^2 + m_{yz}^2) \quad (2.40)$$

Επιπλέον, συνδυάζοντας τις Εξ. (2.33), (2.34) και (2.40) με τις (2.7) και (2.8), αποκτούμε το ακόλουθο σύστημα συζευγμένων μερικών διαφορικών εξισώσεων ως προς τις συνιστώσες του διδιάστατου πεδίου μετατοπίσεων (u_x, u_y) :

$$\frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x} \left[2(1-\nu) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right] + \frac{\partial u_x^2}{\partial y^2} + \ell^2 \left(\frac{\partial^4 u_y}{\partial x^3 \partial y} - \frac{\partial^4 u_x}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u_y}{\partial x \partial y^3} - \frac{\partial^4 u_x}{\partial x^4} \right) = 0 \quad (2.41)$$

$$\frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left[2(1-\nu) \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \right] + \frac{\partial u_y^2}{\partial x^2} + \ell^2 \left(\frac{\partial^4 u_x}{\partial x^3 \partial y} - \frac{\partial^4 u_y}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u_x}{\partial x \partial y^3} - \frac{\partial^4 u_y}{\partial x^4} \right) = 0 \quad (2.42)$$

Σύμφωνα με τον Mindlin (1963), η πλήρης λύση των Εξ. (2.7) και (2.8) στην περίπτωση επίπεδης παραμόρφωσης, διατυπώνεται μέσω τασικών συναρτήσεων ως εξής:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial^2 y} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y}, \quad (2.43)$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial^2 y}, \quad \sigma_{yx} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial^2 y}$$

$$m_{xz} = \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad m_{yz} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad (2.44)$$

όπου $\Phi \equiv \Phi(x, y)$, $\Psi \equiv \Psi(x, y)$ είναι δύο αυθαίρετες (επαρκώς ομαλές) τασικές συναρτήσεις, οι οποίες συνδέονται μέσω του παρακάτω συζευγμένου συστήματος μερικών διαφορικών εξισώσεων (Mindlin, 1963):

$$\frac{\partial}{\partial x} (\Psi - \ell^2 \nabla^2 \Psi) = -2(1-\nu) \ell^2 \nabla^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (\Psi - \ell^2 \nabla^2 \Psi) = -2(1-\nu) \ell^2 \nabla^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \quad (2.46)$$

Μετά την αποσύζευξη τους οδηγούν στις ακόλουθες εξισώσεις πεδίου:

$$\nabla^4 \Phi = 0 \quad (2.47)$$

$$\nabla^2 \Psi - \ell^2 \nabla^4 \Psi = 0 \quad (2.48)$$

Όταν οι ποσότητες ℓ , $\partial \Psi / \partial x$, $\partial \Psi / \partial y$ τείνουν στο μηδέν, οι παραπάνω εξισώσεις εκφυλίζονται στην αναπαράσταση του Airy για την κλασική ελαστικότητα. Επιπλέον, συνδυάζοντας τις εξ. (2.26), (2.27), (2.35)-(2.38) (2.43) και (2.44), προκύπτουν οι εξής σχέσεις μετατοπίσεων - τασικών συναρτήσεων:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial^2 y} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \nu \nabla^2 \Phi \right) \quad (2.49)$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \nu \nabla^2 \Phi \right) \quad (2.50)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = -\frac{1}{2\mu} \left(2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial^2 y} \right) \quad (2.51)$$

2.4 Τάσεις von Mises

Στον τομέα της Μηχανικής Στερεών Σωμάτων ο Richard von Mises συνέβαλε σημαντικά στη θεωρία της πλαστικότητας, διατυπώνοντας αυτό που έχει γίνει γνωστό ως το κριτήριο διαρροής von Mises (Von Mises yield criterion). Η ισοδύναμη τάση von Mises σ_{eq} χρησιμοποιείται για να προβλέψει τη διαρροή των υλικών κάτω από οποιαδήποτε εντατική κατάσταση από τα αποτελέσματα των απλών μονοαξονικών δοκιμών αντοχής. Ικανοποιεί την ιδιότητα ότι δύο εντατικές καταστάσεις με την ίδια ενέργεια παραμόρφωσης έχουν ίση τάση von Mises. Σύμφωνα με το συγκεκριμένο κριτήριο (γνωστό και ως κριτήριο μέγιστης ενέργειας παραμόρφωσης), η διαρροή ενός όλκιμου υλικού ξεκινάει όταν η δεύτερη αμετάβλητη του αποκλίνοντος τανυστή των τάσεων J_2 φτάσει σε μια οριακή τιμή και εφαρμόζεται καλύτερα σε υλικά που έχουν όλκιμη συμπεριφορά, όπως πολλά μέταλλα. Σε αυτή την ενότητα θα διατυπωθεί το κριτήριο διαρροής von Mises στην θεωρία τάσεων ζεύγους. Αναλυτικότερα, η ισοδύναμη τάση σ_{eq} ισούται με:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{3J_2} \quad (2.52)$$

Η δεύτερη αμετάβλητη του αποκλίνοντος τανυστή των τάσεων J_2 για την θεωρία τάσεων ζεύγους ορίζεται (Muhlhaus and Vardoulakis, 1987) :

$$J_2 = \frac{1}{4} s_{ij} s_{ij} + \frac{1}{4} s_{ij} s_{ji} + \frac{m_{ij} m_{ij}}{2\ell^2} \quad (2.53)$$

όπου s_{ij} είναι ο αποκλίνων τανυστής των τάσεων. Απουσία των τάσεων ζεύγους ($m_{ij} = 0$, $s_{ij} = s_{ji}$), η σχέση (2.53) εκφυλίζεται στην κλασική αναπαράσταση:

$$J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} \quad (2.54)$$

Για την περίπτωση επίπεδης παραμόρφωσης η σχέση (2.53) γίνεται:

$$J_2 = \frac{1}{2}[s_{xx}^2 + s_{yy}^2 + s_{zz}^2] + \frac{1}{4}\sigma_{xy}^2 + \frac{1}{2}\sigma_{xy}\sigma_{yx} + \frac{1}{4}\sigma_{yx}^2 + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{m_{xz}}{\ell}\right)^2 + \left(\frac{m_{yz}}{\ell}\right)^2\right] \quad (2.55)$$

Τελος, αντικαθιστώντας την σχέση (2.55) στην (2.52) προκύπτει η τελική έκφραση για την ισοδύναμη τάση σ_{eq} στα πλαίσια της θεωρίας τάσεων ζεύγους:

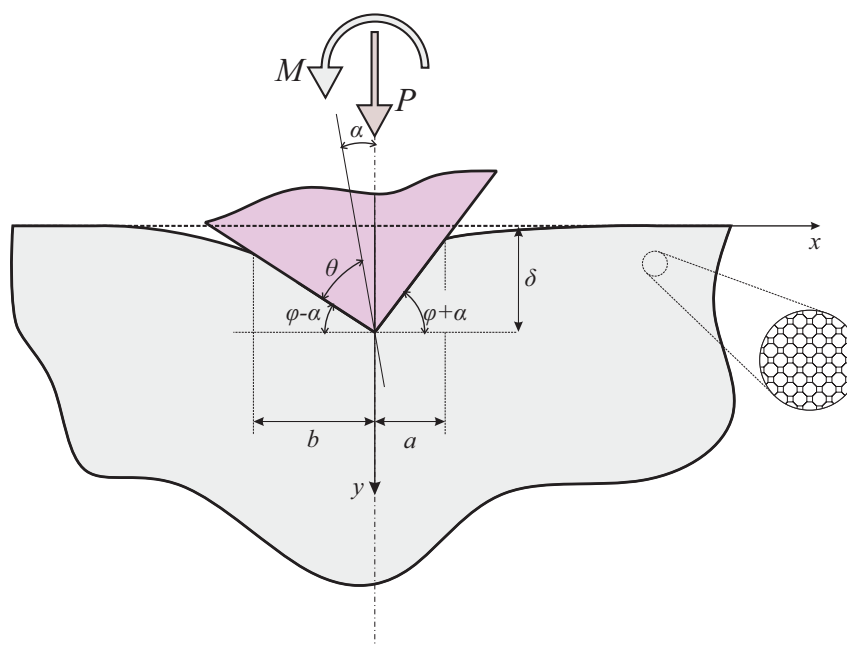
$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2}[s_{xx}^2 + s_{yy}^2 + s_{zz}^2] + \frac{3}{4}\sigma_{xy}^2 + \frac{3}{2}\sigma_{xy}\sigma_{yx} + \frac{3}{4}\sigma_{yx}^2 + \frac{3}{2}\left[\left(\frac{m_{xz}}{\ell}\right)^2 + \left(\frac{m_{yz}}{\ell}\right)^2\right]} \quad (2.56)$$

Κεφάλαιο 3

Ορισμός του προβλήματος και μεθοδολογία επίλυσης

3.1 Συνοριακές συνθήκες

Η παρούσα εργασία πραγματεύεται το πρόβλημα επαφής μεταξύ ενός απαραμόρφωτου διεισδυτή τύπου σφήνας και ενός ελαστικού ημίχωρου. Το σώμα διέπεται από τις εξισώσεις της θεωρίας τάσεων ζεύγους στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων $Oxyz$ με αρχή των αξόνων στην κεντρική γραμμή της γεωμετρίας του διεισδυτή. Επιπλέον, ο διεισδυτής φορτίζεται από συγκεντρωμένο φορτίο P και μία ροπή M , η οποία δημιουργεί κλίση στον διεισδυτή και η επαφή γίνεται ασύμμετρη. Ακολούθως, παράγεται ασύμμετρη γραμμή επαφής μήκους $(b + a)$ και βάθος επαφής δ .



Σχήμα 3.1: Διείσδυση ενός άκαμπτου διεισδυτή τύπου σφήνας σε ένα ελαστικό ημίχωρο υπό την δράση ενός συγκεντρωμένου φορτίου P και μίας ροπής M

Αναλυτικότερα, σύμφωνα με τον Johnson (1985) υποθέτουμε ότι ο διεισδυτής είναι ικανοποιητικά μακρύς στην διεύθυνση z για να ισχύουν οι συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης. Επιπλέον, η ημιγωνία του διεισδυτή θ πρέπει να προσεγγίζει τις 90° έτσι ώστε οι παραμορφώσεις να είναι μικρές, όπως ορίζεται στα πλαίσια μιας γεωμετρικά γραμμικής θεωρίας. Για την επίλυση του προβλήματος έγινε η παραδοχή ότι $\theta = 89^\circ$. Ο διεισδυτής στρέφεται αντίθετα από την φορά των δεικτών του ρολογιού υπο την επίδραση ενός συγκεντρωμένου φορτίου P , το οποίο είναι μετατοπισμένο από την κεντρική γραμμή της γεωμετρίας του σώματος κατά μια θετική απόσταση e (εκκεντρότητα). Το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με έναν διεισδυτή επιβαλλόμενο σε ένα συγκεντρωμένο φορτίο P και μια ροπή $M = -Pe$ (Σχήμα 3.1). Παρατηρούμε ότι για $e \rightarrow 0$ προκύπτει το αντίστοιχο συμμετρικό πρόβλημα επαφής, το οποίο έχει λυθεί από τους Zisis et al. (2014). Σε αυτό το σημείο πρέπει να τονισθεί ότι σε δι-διάστατα προβλήματα επαφής παρουσιάζεται δυσκολία στον ακριβό προσδιορισμό του βάθους διεισδύσης δ . Η δυσκολία αυτή δεν υφίσταται σε τρι-διάστατα προβλήματα επαφής. Όπως έχει συζητηθεί και από τον Johnson (1985), η τιμή της μετατόπισης ενός σημείου της επιφάνειας του ελαστικού ημιχώρου κατά την φόρτιση από σημειακό φορτίο, πάντα αναφερόμενοι σε δι-διάστατα προβλήματα επαφής, δεν μπορεί να προσδιορισθεί ως τυχαίο σημείο το οποίο βρίσκεται στο άπειρο, εξαιτίας του γεγονότος ότι οι μετατοπίσεις δεν φράσσονται και παρουσιάζουν συμπεριφορά στο άπειρο $O(\ln \rho)$, όπου ρ είναι η απόσταση από το σημείο φόρτισης. Ακολούθως, η ορθή μετατόπιση u_y μπορεί να ορισθεί ως προς κάποιο τυχαίο σημείο επιλογής στην επιφάνεια του ημιχώρου (βλέπε Bower, 2009).

Για τα σημεία εντός της περιοχής επαφής ($-b \leq x \leq a$) ισχύουν οι παρακάτω γενικές γεωμετρικές συνθήκες:

$$u_y = \delta - x(\phi + \alpha), \quad 0 \leq x \leq a \quad (3.1)$$

$$u_y = \delta - x(\phi - \alpha), \quad -b \leq x \leq 0$$

όπου ϕ είναι η εξωτερική γωνία του διεισδυτή, α είναι η γωνία στροφής του διεισδυτή ($|\alpha| < \phi$) και δ είναι μια θετική σταθερά, συγκεκριμένα το βάθος διεισδύσης στο $x = 0$, το οποίο είναι απροσδιόριστο για διδιάστατα προβλήματα, όπως το υπο μελέτη. Επιπλέον, για μια ομαλή και άτριβη επαφή, ισχύουν οι ακόλουθες συνοριακές συνθήκες ελκυστή (Shu and Fleck, 1998; Zisis et al., 2014):

$$\sigma_{yy}(x, 0) = 0, \quad x \notin [-b, a] \quad (3.2)$$

$$\sigma_{yx}(x, 0) = 0, \quad -\infty \leq x \leq \infty \quad (3.3)$$

$$m_{yz}(x, 0) = 0, \quad -\infty \leq x \leq \infty \quad (3.4)$$

οι οποίες συνοδεύονται από τις εξής συμπληρωματικές εξισώσεις:

$$\int_{-b}^a \sigma_{yy}(x, 0) dx = - \int_{-b}^a p(x) dx = -P \quad (3.5)$$

$$\int_{-b}^a \sigma_{yy}(x, 0) x dx = - \int_{-b}^a p(x) x dx = -M = Pe \quad (3.6)$$

όπου $p(x) \geq 0$ είναι η πίεση κάτω από την επιφάνεια του διεισδυτή.

Τέλος, δεδομένου ότι το η οριζόντια επιφάνεια είναι απεριόριστη, οι παραπάνω συνοριακές συνθήκες πρέπει να συμπληρωθούν από τις συνθήκες κανονικότητας στο άπερο:

$$\sigma_{pq} \rightarrow 0, \quad m_{pq} \rightarrow 0, \quad \rho \equiv \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty \quad (3.7)$$

3.2 Ολοκληρωτικοί μετασχηματισμοί Fourier

Το πρόβλημα επαφής επίπεδης παραμόρφωσης του διεισδυτή τύπου σφήνας επιλύεται με την βοήθεια του ολοκληρωτικού μετασχηματισμού Fourier. Ο ευθύς μετασχηματισμός Fourier και ο αντίστροφος του ορίζονται ως εξής:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-b}^a f(x) e^{i\xi x} dx, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^a \hat{f}(\xi) e^{-i\xi x} d\xi \quad (3.8)$$

όπου $i \equiv \sqrt{-1}$

Ο μετασχηματισμός των (2.47) και (2.48) με την (3.8) παράγει τις ακόλουθες διαφορικές εξισώσεις για τις μετασχηματισμένες τασικές συναρτήσεις:

$$\frac{d^4 \hat{\Phi}}{dy^4} - 2\xi^2 \frac{d^2 \hat{\Phi}}{dy^2} + \xi^4 \hat{\Phi} = 0 \quad (3.9)$$

$$\ell^2 \frac{d^4 \hat{\Psi}}{dy^4} - (1 + 2\ell^2 \xi^2) \frac{d^2 \hat{\Psi}}{dy^2} + \xi^2 (1 + \ell^2 \xi^2) \hat{\Psi} = 0 \quad (3.10)$$

Ομοίως, οι μετασχηματισμένες τάσεις, τάσεις-ζεύγη και μετατοπίσεις είναι οι εξής:

$$\hat{\sigma}_{xx} = \frac{d^2 \hat{\Phi}}{dy^2} + i\xi \frac{d\hat{\Psi}}{dy}, \quad \hat{\sigma}_{yy} = -\xi^2 \hat{\Phi} - i\xi \frac{d\hat{\Psi}}{dy} \quad (3.11)$$

$$\hat{\sigma}_{yx} = i\xi \frac{d\hat{\Phi}}{dy} - \xi^2 \hat{\Psi}, \quad \hat{\sigma}_{xy} = i\xi \frac{d\hat{\Phi}}{dy} - \frac{d^2 \hat{\Psi}}{dy^2}$$

$$\hat{m}_{xz} = -i\xi \hat{\Psi}, \quad \hat{m}_{yz} = \frac{d\hat{\Psi}}{dy} \quad (3.12)$$

$$\hat{u}_x = \frac{1}{2\mu\xi} \left(i(1-\nu) \frac{d^2 \hat{\Phi}}{dy^2} - \xi \frac{d\hat{\Psi}}{dy} + i\nu\xi^2 \hat{\Phi} \right) \quad (3.13)$$

$$\hat{u}_y = \frac{1}{2\mu\xi^2} \left((1-\nu) \frac{d^3 \hat{\Phi}}{dy^3} - (2-\nu)\xi^2 \frac{d\hat{\Phi}}{dy} - i\xi^3 \hat{\Psi} \right)$$

Οι εξ. (3.9) και (3.10) έχουν την παρακάτω γενική λύση, η οποία πρέπει να είναι φραγμένη καθώς $y \rightarrow +\infty$:

$$\hat{\Phi}(\xi, y) = [C_1(\xi) + yC_2(\xi)] e^{-|\xi|y} \quad (3.14)$$

$$\hat{\Psi}(\xi, y) = C_3(\xi) e^{-|\xi|y} + C_4(\xi) e^{-\gamma y} \quad (3.15)$$

όπου $\gamma \equiv \gamma(\xi) = (\ell^{-2} + \xi^2)^{\frac{1}{2}}$

Χρησιμοποιώντας τις εξ. (3.2), (3.3) και (3.4) οι σχέσεις για τις άγνωστες σταθερές $C_i(\xi)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) διαμορφώνονται ως εξής:

$$C_2(\xi) = |\xi|C_1(\xi) - i\xi(1 - |\xi|^{-1}\gamma)C_4(\xi) \quad (3.16)$$

$$C_3(\xi) = -\gamma|\xi|^{-1}C_4(\xi) \quad (3.17)$$

όπου οι σταθερές $C_2(\xi)$, $C_3(\xi)$ συνδέονται μέσω των εξ. (2.45) και (2.46) σύμφωνα με:

$$C_3(\xi) = -4i\ell^2(1-\nu)\xi C_2(\xi) \quad (3.18)$$

Η μετασχηματισμένη πίεση κάτω από την επιφάνεια του διεισδυτή σύμφωνα με την εξ. (3.8) γράφεται ως:

$$\hat{p}(\xi) = \int_{-b}^a p(x) e^{i\xi x} dx = -\hat{\sigma}_{yy}(\xi, 0) = -\int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{yy}(x, 0) e^{i\xi x} dx \quad (3.19)$$

και λαμβάνοντας υπόψη την εξ. (3.11) είναι :

$$\hat{p}(\xi) = \xi^2 \hat{\Phi} + i\xi \frac{d\hat{\Psi}}{dy} \quad (3.20)$$

Κάνοντας αντικατάσταση τις εξ. (3.14) και (3.15) στην (3.20) προκύπτει:

$$C_1(\xi) = \frac{\hat{p}(\xi)}{\xi^2} \quad (3.21)$$

Τέλος, σύμφωνα με τις εξ. (3.16)-(3.21) οι σχέσεις για τις μετασχηματισμένες τασιικές συναρτήσεις γράφονται:

$$\hat{\Phi}(\xi, y) = \left[1 + \frac{|\xi|\gamma y}{\gamma - 4(1-\nu)\ell^2\xi^2(|\xi| - \gamma)} \right] \frac{e^{-|\xi|y}}{\xi^2} \hat{p}(\xi) \quad (3.22)$$

$$\hat{\Psi}(\xi, y) = -\frac{4i\ell^2(1-\nu)[|\xi|\gamma e^{|\xi|y} - \xi^2 e^{-\gamma y}]}{\gamma - [4(1-\nu)\ell^2\xi^2(|\xi| - \gamma)]\xi} \hat{p}(\xi) \quad (3.23)$$

3.3 Ιδιόμορφη ολοκληρωτική εξίσωση

Στόχος είναι η εύρεση της κατανομής της πίεσης $p(x)$ στην επιφάνεια επαφής. Για την λύση του προβλήματος μικτών συνοριακών τιμών χρησιμοποιείται η μέθοδος των ιδιόμορφων ολοκληρωτικών εξισώσεων. Στην κλασική θεωρία ελαστικότητας η γενική διαδικασία αναγωγής προβλημάτων μικτών συνοριακών τιμών σε ιδιόμορφες ολοκληρωτικές εξισώσεις παρουσιάζεται μεταξύ άλλων από τους Erdogan (1978), Hills and Nowell (1994). Εφαρμογές αυτής της τεχνικής στα πλαίσια της θεωρίας τάσεων ζεύγους για προβλήματα επαφής επίπεδης παραμόρφωσης, μπορούν να αναζητηθούν στις εργασίες των Gourgiotis and Georgiadis (2007,2008), Zisis et al. (2014), Gourgiotis et al. (2016) και στα πλαίσια της θεωρίας βαθμίδας ελαστικότητας στις εργασίες των Paulinios et al. (2003), Gourgiotis and Georgiadis (2009).

Ο ορισμός του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier στην (3.8) οδηγεί στην ακόλουθη ολοκληρωτική εξίσωση:

$$\frac{du_y}{dx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{-i}{2\mu\xi} \left((1-\nu) \frac{d^3\Phi}{dy^3} - (2-\nu)\xi^2 \frac{d\Phi}{dy} - i\xi^3\Psi \right) \right) e^{-ix\xi} d\xi \quad (3.24)$$

Ακολούθως, εάν ληφθούν υπόψη οι εκφράσεις για τις τασιικές συναρτήσεις από τις εξ. (3.22) και (3.23), καθώς και της κατανομής πίεσης στην επιφάνεια επαφής από την εξ. (3.20) και θέτοντας $y = 0$ προκύπτει:

$$\left. \frac{du_y}{dx} \right|_{y=0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i(1-\nu)|\xi|\gamma}{\mu\xi[4(1-\nu)\ell^2\xi^2(|\xi|-\gamma)-\gamma]} \left(\int_{-b}^a p(t)e^{i\xi t} dt \right) e^{-ix\xi} d\xi \quad (3.25)$$

Επιπλέον, αλλάζοντας την σειρά ολοκλήρωσης το πρόβλημα διέπεται απο την κάτωθι ολοκληρωτική εξίσωση:

$$\left. \frac{du_y}{dx} \right|_{y=0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^a p(t) \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{i(1-\nu)|\xi|\gamma}{\mu\xi[4(1-\nu)\ell^2\xi^2(|\xi|-\gamma)-\gamma]} \right) e^{-i(x-t)\xi} d\xi dt \quad (3.26)$$

Τέλος, χρησιμοποιώντας τις συνοριακή συνθήκη στην εξ. (3.1) και γνωρίζοντας οτι η ποσότητα μέσα στην παρένθεση είναι περιττή συνάρτηση του ξ , η σχέση (3.26) μπορεί να γραφεί ως:

$$\frac{1}{\mu\pi} \int_{-b}^a K(x-t)p(t)dt = -\phi - \text{sign}(x)\alpha, \quad x \in [-b, a] \quad (3.27)$$

όπου ο πυρήνας $K(x-t)$ ορίζεται ως:

$$K(x-t) = \int_0^{\infty} g(\xi) \sin(\xi(x-t)) d\xi \quad (3.28)$$

και

$$g(\xi) = \frac{(1-\nu)\gamma}{4(1-\nu)\ell^2\xi^2(\xi-\gamma)-\gamma} \quad (3.29)$$

Αξίζει να σημειωθεί πως θέτοντας $\ell \rightarrow 0$ στην εξίσωση (3.27), προκύπτει η ολοκληρωτική εξίσωση που διέπει το αντίστοιχο πρόβλημα στην κλασική Ελαστικότητα.

Ο πυρήνας $K(x-s)$ στην εξ. (3.27) διαχωρίζεται στο κανονικό και στο ιδιόμορφο μέρος του εξετάζοντας την ασυμπτωτική συμπεριφορά της συνάρτησης $g(\xi)$ στο $\xi \rightarrow \infty$ χρησιμοποιώντας θεωρήματα τύπου Abel-Tauber (Ross, 1969). Παρατηρώντας οτι:

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} g(\xi) = g_{\infty}(\xi) = -\frac{1-\nu}{3-2\nu} \quad (3.30)$$

η $g(\xi)$ διασπάται ως:

$$g(\xi) = g_{\infty}(\xi) + [g(\xi) - g_{\infty}(\xi)] \quad (3.31)$$

και ο πυρήνας $K(x-t)$ γίνεται:

$$\begin{aligned} K(x-t) &= \underbrace{\int_0^\infty g_\infty(\xi) \sin(\xi(x-t)) d\xi}_{\text{singular part}} \\ &+ \underbrace{\int_0^\infty [g(\xi) - g_\infty(\xi)] \sin(\xi(x-t)) d\xi}_{\text{regular part}} \\ &= -\frac{1-\nu}{3-2\nu} \frac{1}{x-t} + N(x-t) \end{aligned} \quad (3.32)$$

όπου:

$$N(x-t) = \frac{2(1-\nu)^2}{3-2\nu} \int_0^\infty \left[\frac{2\ell^2 \xi^2 (\gamma - \xi) - \gamma}{\gamma + 4(1-\nu)\ell^2 \xi^2 (\gamma - \xi)} \right] \sin(\xi(x-t)) d\xi \quad (3.33)$$

είναι ένας κανονικός (regular) πυρήνας.

Επιπλέον, χρησιμοποιούνται οι ακόλουθες κανονικοποιήσεις:

$$x = \frac{a+b}{2}(r+c), \quad t = \frac{a+b}{2}(s+c), \quad \xi = \frac{2}{a+b}\zeta, \quad \ell = \frac{a+b}{2}q \quad (3.34)$$

όπου $c = (a-b)/(a+b)$. Ακολούθως, η ιδιόμορφη ολοκληρωτική εξίσωση για την πίεση κάτω από την επιφάνεια του διεισδυτή παίρνει την εξής μορφή:

$$-\frac{1-\nu}{3-2\nu} \int_{-1}^1 \frac{p(s)}{r-s} ds + \int_{-1}^1 \tilde{N}(r-s)p(s) ds = \mu\pi(-\phi - \text{sign}(r)\alpha), \quad |r| \leq 1 \quad (3.35)$$

και οι συμπληρωματικές εξισώσεις (3.5) και (3.6) γράφονται:

$$\int_{-1}^1 p(s) ds = \frac{2P}{a+b} \quad (3.36)$$

$$\int_{-1}^1 p(s) s ds = \frac{4M}{(a+b)^2} - c \frac{2P}{a+b} = \frac{2P(b-a-2e)}{(a+b)^2} \quad (3.37)$$

Σημειώνεται ότι το πρώτο ολοκλήρωμα της σχέσης (3.35) αντιμετωπίζεται ως ολοκλήρωμα κύριας τιμής κατά Cauchy (CPV), ενώ ο κανονικοποιημένος πυρήνας $\tilde{N}(r-s)$ να έχει την παρακάτω μορφή:

$$\tilde{N}(r-s) = \frac{2(1-\nu)^2}{3-2\nu} \int_0^\infty \left[\frac{2q^2 \zeta^2 (\tilde{\gamma} - \zeta) - \tilde{\gamma}}{\tilde{\gamma} + 4(1-\nu)q^2 \zeta^2 (\tilde{\gamma} - \zeta)} \right] \sin(\zeta(r-s)) d\zeta \quad (3.38)$$

όπου $\tilde{\gamma} = (q^{-2} + \zeta^2)^{\frac{1}{2}}$. Το ολοκλήρωμα αυτό συγκλίνει, είναι ένας ημιτονικός μετασχηματισμός Fourier και υπολογίζεται αριθμητικά μέσω των αλγορίθμων του Mathematica, όπου λαμβάνεται υπόψη ο ταλαντευόμενος χαρακτήρας του.

Κεφάλαιο 4

Αριθμητική Επίλυση

4.1 Πίεση κάτω απο την επιφάνεια του διεισδυτή

Η αριθμητική λύση της ιδιόμορφης ολοκληρωτικής εξίσωσης (3.35) επιτυγχάνεται χρησιμοποιώντας την μέθοδο της παράθεσης (collocation method). Περαιτέρω, η πίεση μηδενίζεται στα ακραία σημεία του μήκους επαφής. Οπως έχει επισυμανθεί απο τους Zisis et. al. (2014) η παρουσία της συνάρτησης signum στο δεξί μέρος της εξ. (3.35) οδηγεί σε μια ασυνέχεια της λύσης στο σημείο $r = -(a - b)/(a + b)$. Προκειμένου να αντιμετωπισθεί αυτό, γίνεται εφαρμογή της μεθοδολογίας που προτάθηκε απο την εργασία (Ioakimidis, 1980) για προβλήματα ρωγμών στα οποία η φόρτιση παρουσιάζει ασυνέχειες. Γίνεται η υπόθεση οτι:

$$p(s) = \psi(s) + h(s) \quad (4.1)$$

όπου $\psi(s)$ είναι μια νέα συνάρτηση η οποία πρέπει να προσδιορισθεί και $h(s)$ ικανοποιεί την ιδιόμορφη ολοκληρωτική εξίσωση:

$$-\frac{1-\nu}{3-2\nu} \int_{-1}^1 \frac{h(s)}{r-s} ds = \mu\pi(-\phi - \text{sign}(r)\alpha) \quad (4.2)$$

Παρατηρείται οτι η εξ. (4.2) έχει την ίδια γενική μορφή με εκείνη που περιγράφει το πρόβλημα του κεκλιμένου διεισδυτή τύπου σφήνας στην κλασική Ελαστικότητα (Sackfield et al., 2005). Η αναλυτική λύση δίνεται απο τον σχέση:

$$h(s) = -\frac{2\mu(3-2\nu)\phi}{\pi(1-\nu)} \log \left(\left| \frac{\sqrt{\frac{1+c}{1-c}} - \sqrt{\frac{1-s}{1+s}}}{\sqrt{\frac{1+c}{1-c}} + \sqrt{\frac{1-s}{1+s}}} \right| \right) \quad (4.3)$$

όπου

$$c = \frac{a-b}{a+b} \quad (4.4)$$

Επιπλέον, έχει αποδειχθεί ότι η παρακάτω σχέση συνδέει τα μεγέθη c, ϕ, θ (Sackfield et al., 2005):

$$\sin^{-1}(c) = \frac{\pi\alpha}{2\phi} \quad (4.5)$$

Με αντικατάσταση της εξ. (4.1) στην (3.35) και χρησιμοποιώντας την (4.3) καταλήγουμε στην:

$$-\frac{1-\nu}{3-2\nu} \int_{-1}^1 \frac{\psi(s)}{r-s} ds + \int_{-1}^1 \tilde{N}(r-s)\psi(s)ds = f(r), \quad |r| \leq 1 \quad (4.6)$$

όπου:

$$f(r) = - \int_{-1}^1 \tilde{N}(r-s)h(s)ds \quad (4.7)$$

Εύκολα αποδυναμώνεται ότι η $f(r)$ είναι συνεχής στο διάστημα $r \in [-1, 1]$, επομένως μπορεί να εφαρμοσθεί η μεθοδολογία που περιγράφεται από τους Zisis et. al. (2014) για τον κυλινδρικό διεισδυτή. Αναλυτικότερα υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $\psi(s)$ έχει την μορφή:

$$\psi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n U_n(s) \sqrt{1-s^2} \quad (4.8)$$

όπου $U_n(s)$ είναι πολυώνυμα Chebyshev δεύτερης τάξης και a_n πραγματικές σταθερές.

Ακολουθώντας, η ολοκληρωτική εξίσωση (4.6) γίνεται:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(-\frac{1-\nu}{3-2\nu} \int_{-1}^1 \frac{U_n(s)\sqrt{1-s^2}}{r-s} ds + \int_{-1}^1 U_n(s)\sqrt{1-s^2}\tilde{N}(r-s)ds \right) = f(r) \quad (4.9)$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα της εξ. (4.9) υπολογίζεται σαν ολοκλήρωμα CPV χρησιμοποιώντας την εξής σχέση (Chan et al., 2003):

$$\int_{-1}^1 \frac{U_n(s)\sqrt{1-s^2}}{r-s} ds = \pi T_{n+1}(r), \quad n \geq 0, \quad |r| \leq 1 \quad (4.10)$$

όπου $T_{n+1}(r)$ πολυώνυμα Chebyshev πρώτης τάξης και $U_n(s)$ πολυώνυμα Chebyshev δεύτερης τάξης.

Επιπλέον, με αντικατάσταση της εξ. (4.10) στην (4.9) καταλήγουμε στην παρακάτω εξίσωση:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(-\frac{(1-\nu)\pi}{3-2\nu} T_{n+1}(r) + W_n(r) \right) = f(r) \quad (4.11)$$

όπου:

$$W_n(r) = \int_{-1}^1 U_n(s) \sqrt{1-s^2} \tilde{N}(r-s) ds \quad (4.12)$$

είναι ένα κανονικό ολοκλήρωμα, το οποίο μπορεί να υπολογισθεί μέσω της μεθόδου τετραγωνισμού Gauss-Chebyshev. Αναλυτικότερα είναι:

$$W_n(r) = \sum_{m=1}^M \left(\frac{\pi}{M+1} \sin^2 \left[\frac{m\pi}{M+1} \right] U_n(s_m) \tilde{N}(r-s_m) \right) \quad (4.13)$$

όπου:

$$s_m = \cos \left[\frac{m\pi}{M+1} \right], \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (4.14)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (4.13) και (4.14) στην (4.11) προκύπτει η τελική εξίσωση που θα χρησιμοποιηθεί για την αριθμητική διακριτοποίηση:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left\{ -\frac{(1-\nu)\pi}{3-2\nu} T_{n+1}(r) + \sum_{m=1}^M \left(\frac{\pi}{M+1} \sin^2 \left[\frac{m\pi}{M+1} \right] U_n(s_m) \tilde{N}(r-s_m) \right) \right\} = f(r) \quad (4.15)$$

Η εξίσωση (4.15) λύνεται φράσσοντας την σειρά σε πεπερασμένο αριθμό $n = N$ και χρησιμοποιώντας μια κατάλληλη τεχνική παράθεσης με σημεία παράθεσης αυτά των ριζών της $T_{N+1}(r)$:

$$r_n = \cos \left[\frac{(2n-1)\pi}{2(N+1)} \right], \quad n = 0, 1, 2, \dots, N+1 \quad (4.16)$$

Με αυτό τον τρόπο σχηματίζεται μια γραμμική αλγεβρική εξίσωση για τις $N+1$ σταθερές a_n . Σε αυτό το σημείο σημειώνεται ότι οι συμπληρωματικές εξισώσεις (3.36) και (3.37) δεν απαιτούνται για τον υπολογισμό των συντελεστών a_n αλλά είναι απαραίτητες για τον υπολογισμό των μηκών επαφής a και b (Zisis et. al., 2014). Στο παρόν πρόβλημα, αντι να υπολογίζονται απευθείας τα μήκη επαφής, είναι προτιμώτερος ο υπολογισμός του φορτίου P και της εκκεντρότητας e για δεδομένες τιμές των a και b .

4.2 Τάσεις εντός του ημιχώρου

Σε αυτή την ενότητα περιγράφεται η διαδικασία υπολογισμού του τασιικού πεδίου εντός του ελαστικού ημιχώρου. Η ανάλυση θα γίνει ενδεικτικά για την σ_{yy} και με ανάλογο τρόπο υπολογίζονται τα τασιικά πεδία για τις υπόλοιπες τάσεις και τάσεις ζεύγους. Αναλυτικότερα, με αντικατάσταση των εξ. (3.22) και (3.23) στην (3.11) προκύπτει:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{yy}(\xi, y) = & \left[- \left(1 + \frac{\xi\gamma y}{\gamma - 4(1-\nu)\ell^2\xi^2(|\xi| - \gamma)} \right) e^{-|\xi|y} \right. \\ & \left. - \frac{4\xi^2\ell^2(1-\nu)[\gamma e^{-\gamma y} - e^{-|\xi|\gamma}]}{\gamma - 4(1-\nu)\ell^2\xi^2(|\xi| - \gamma)} \right] \hat{p}(\xi) \end{aligned} \quad (4.17)$$

όπου:

$$\hat{p}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) e^{i\xi t} dt \quad (4.18)$$

Εφαρμόζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier στην $\hat{\sigma}_{yy}(\xi, y)$ είναι:

$$\sigma_{yy}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\sigma}_{yy}(\xi, y) e^{-i\xi x} d\xi \quad (4.19)$$

και αντικαθιστώντας την σχέση (4.17) στην (4.19) προκύπτει η παρακάτω ολοκληρωτική εξίσωση:

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}(x, y) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left[- \left(1 + \frac{\xi\gamma y}{\gamma - 4(1-\nu)\ell^2\xi^2(|\xi| - \gamma)} \right) e^{-|\xi|y} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{4\xi^2\ell^2(1-\nu)[\gamma e^{-\gamma y} - e^{-|\xi|\gamma}]}{\gamma - 4(1-\nu)\ell^2\xi^2(|\xi| - \gamma)} \right] \left[\int_{-b}^a p(t) e^{i\xi t} dt \right] \right\} e^{-i\xi x} d\xi \end{aligned} \quad (4.20)$$

Αλλάζοντας την σειρά ολοκλήρωσης στην εξ. (4.20) γράφουμε:

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}(x, y) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^a p(t) \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left[- \left(1 + \frac{\xi\gamma y}{\gamma - 4(1-\nu)\ell^2\xi^2(|\xi| - \gamma)} \right) e^{-|\xi|y} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{4\xi^2\ell^2(1-\nu)[\gamma e^{-\gamma y} - e^{-|\xi|\gamma}]}{\gamma - 4(1-\nu)\ell^2\xi^2(|\xi| - \gamma)} \right] \right\} e^{-i\xi(x-t)} d\xi dt \end{aligned} \quad (4.21)$$

Παρατηρείται πως η σχέση:

$$-\left(1 + \frac{\xi\gamma y}{\gamma - 4(1-\nu)\ell^2\xi^2(|\xi| - \gamma)}\right)e^{-|\xi|y} - \frac{4\xi^2\ell^2(1-\nu)[\gamma e^{-\gamma y} - e^{-|\xi|\gamma}]}{\gamma - 4(1-\nu)\ell^2\xi^2(|\xi| - \gamma)} \quad (4.22)$$

είναι άρτια ως προς ξ , επομένως η σχέση (4.21) μπορεί να γραφεί ως:

$$\sigma_{yy}(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-b}^a p(t) \int_0^\infty K(x-t, \xi) d\xi dt \quad (4.23)$$

όπου:

$$K(x-t, \xi) = \left[-\left(1 + \frac{\xi\gamma y}{\gamma - 4(1-\nu)\ell^2\xi^2(\xi - \gamma)}\right)e^{-\xi y} - \frac{4\xi^2\ell^2(1-\nu)[\gamma e^{-\gamma y} - e^{-\xi\gamma}]}{\gamma - 4(1-\nu)\ell^2\xi^2(\xi - \gamma)} \right] \cos[\xi(x-t)] \quad (4.24)$$

Ακολούθως, χρησιμοποιείται η παρακάτω κανονικοποίηση:

$$y = \frac{a+b}{2}z \quad (4.25)$$

και μαζί με τις κανονικοποιήσεις της σχέσης (3.34) η εξ. (4.23) γίνεται:

$$\sigma_{yy}(r, z) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 p(s) R(r-s, \zeta) ds \quad (4.26)$$

όπου:

$$R(r-s, \zeta) = \int_0^\infty K(r-s, \zeta) d\zeta \quad (4.27)$$

και

$$K(r-s, \zeta) = \left[-\left(1 + \frac{\zeta\tilde{\gamma}z}{\tilde{\gamma} - 4(1-\nu)q^2\zeta^2(\zeta - \tilde{\gamma})}\right)e^{-\zeta z} - \frac{4\zeta^2q^2(1-\nu)[\tilde{\gamma}e^{-\tilde{\gamma}z} - e^{-\zeta\tilde{\gamma}}]}{\tilde{\gamma} - 4(1-\nu)q^2\zeta^2(\zeta - \tilde{\gamma})} \right] \cos[\zeta(r-s)] \quad (4.28)$$

Επιπλέον, κάνοντας χρήση των σχέσεων (4.1) και (4.8) προκύπτει η ακόλουθη έκφραση για την πίεση κάτω από τον διεισδυτή:

$$p(s) = h(s) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n U_n(s) \sqrt{1-s^2} \quad (4.29)$$

Αντικαθιστώντας την σχέση (4.29) στην (4.27) η $\sigma_{yy}(r, z)$ παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$\sigma_{yy}(r, z) = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-1}^1 h(s) R(r-s, \zeta) ds + \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-1}^1 a_n U_n(s) \sqrt{1-s^2} R(r-s, \zeta) ds \right\} \quad (4.30)$$

Το ολοκλήρωμα

$$I = \int_{-1}^1 a_n U_n(s) \sqrt{1-s^2} R(r-s, \zeta) d\zeta \quad (4.31)$$

υπολογίζεται με την μέθοδο τετραγωνισμού Gauss-Chebyshev σύμφωνα με την ακόλουθη σχέση:

$$I = \sum_{m=1}^M \frac{\pi}{M+1} \sin^2 \left[\frac{m\pi}{M+1} \right] U_n(s_m) R(r-s_m, \zeta) \quad (4.32)$$

όπου:

$$s_m = \cos \left[\frac{m\pi}{M+1} \right], \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (4.33)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (4.31) και (4.32)-(4.33) και φράσσοντας τό άθροισμα σε πεπερασμένο αριθμό N , καταλήγουμε στην τελική έκφραση για την σ_{yy} :

$$\sigma_{yy}(r, z) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 h(s) R(r-s, \zeta) ds + \frac{1}{M+1} \sum_{n=0}^N \sum_{m=1}^M \sin^2 \left[\frac{m\pi}{M+1} \right] U_n(s_m) R(r-s_m, \zeta) \quad (4.34)$$

Κεφάλαιο 5

Αποτελέσματα και Συζήτηση

Στη παρούσα ενότητα γίνεται η ανάλυση και ο σχολιασμός των αποτελεσμάτων. Συγκεκριμένα, εξετάζεται η επίδραση του κανονικοποιημένου χαρακτηριστικού μήκους $2\ell/(a+b)$, της κλίσης του διεισδυτή μέσω του λόγου a/b και του λόγου Poisson ν , στην εκκεντρότητα, την μέση πίεση, την καταναμομή της πίεσης κάτω από την επιφάνεια του διεισδυτή και των τασικών πεδίων. Επιπλέον, παρέχονται λύσεις για τις τάσεις και τις τάσεις ζεύγους κάτω από την αιχμή του διεισδυτή ($r = -(a-b)/(a+b)$). Όπου είναι εφικτό γίνεται σύγκριση των αποτελεσμάτων με τα αντίστοιχα της κλασικής ελαστικότητας.

5.1 Εκκεντρότητα και μέση πίεση

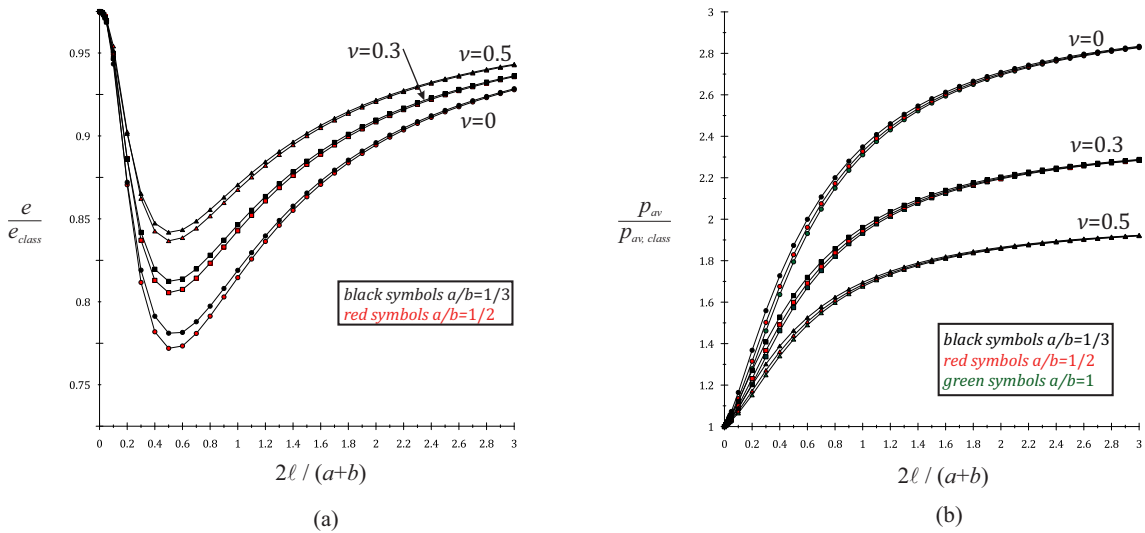
Στο σχήμα 5.1(a) παρουσιάζεται η αδιαστατοποιημένη εκκεντρότητα e/e_{class} συναρτήσει του κανονικοποιημένου χαρακτηριστικού μήκους του υλικού $2\ell/(a+b)$ για διαφορετικές τιμές του λόγου a/b και του λόγου Poisson ν . Όσο ο λόγος $2\ell/(a+b)$ απομακρύνεται από το μηδέν, η εκκεντρότητα παρουσιάζει μια απότομη μείωση φτάνοντας στην ελάχιστη τιμή της όταν $2\ell/(a+b) \rightarrow 0.5$. Για ακόμα μεγαλύτερες τιμές του κανονικοποιημένου χαρακτηριστικού μήκους, η εκκεντρότητα αυξάνεται και προσεγγίζει την τιμή της κλασικής ελαστικότητας ($e \rightarrow e_{class}$) όταν $2\ell/(a+b) \rightarrow \infty$. Υπό το πρίσμα όσων αναφέρθηκαν παραπάνω, συμπεραίνεται πως όταν το μέγεθος της μικροδομής του υλικού είναι συγκρίσιμο με το μήκος επαφής του διεισδυτή, παρατηρείται μια μείωση της απαίτησης εκκεντρότητας (μειωμένη ροπή M για δεδομένο φορτίο P) σε σχέση με αυτή της κλασικής ελαστικότητας για την επίτευξη δεδομένης τιμής του λόγου a/b . Όσο αναφορά τον λόγο Poisson ν , αξίζει να σημειωθεί πως αυξανόμενου ν , τόσο μεγαλύτερη είναι η απαίτηση εκκεντρότητας για την επίτευξη δεδομένης τιμής του λόγου a/b , και η επίδραση του γίνεται μέγιστη όταν $2\ell/(a+b) \rightarrow 0.5$.

Στο σχήμα 5.1(b) απεικονίζεται η αδιαστατοποιημένη μέση πίεση κάτω από την επιφάνεια του διεισδυτή $p_{av}/p_{av,class}$ συναρτήσει του κανονικοποιημένου χαρακτηριστικού μήκους του υλικού $2\ell/(a+b)$, για διαφορετικές τιμές του λόγου a/b και του λόγου Poisson ν . Παρατηρείται πως όσο ο λόγος $2\ell/(a+b)$ αυξάνεται, η αδιαστατοποιημένη μέση πίεση $p_{av}/p_{av,class}$ αυξάνεται μέχρι να αποκτήσει μια οριακή τιμή:

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{p_{av}}{p_{av,class}} = 3 - 2\nu \quad (5.1)$$

Επιπροσθέτως, για σταθερές τιμές του λόγου Poisson ν και του μήκους επαφής $a + b$, όσο αυξάνεται η κλίση του διεισδυτή, η μέση πίεση p_{av} ελαττώνεται. Παρατηρώντας το διάγραμμα 5.1(b) στην περιοχή $0.2 < 2\ell/(a + b) < 0.8$ προκύπτει πως όσο μικρότερος είναι ο λόγος a/b (μεγαλύτερη κλίση του διεισδυτή), η αδιαστατοποιημένη μέση πίεση $p_{av}/p_{av,class}$ γίνεται μεγαλύτερη παρόλο που η μέση πίεση κατα απόλυτη τιμή μειώνεται. Απο τα παραπάνω προκύπτει το ενδιαφέρον συμπέρασμα πως ο κεκλιμένος διεισδυτής είναι περισσότερο επιρρεπής σε φαινόμενα κλίμακας και όσο μεγαλύτερη είναι η κλίση του, τόσο μεγαλύτερες είναι οι αποκλίσεις απο την θεωρία της κλασικής ελαστικότητας. Όσο το κανονικοποιημένο χαρακτηριστικό μήκος $2\ell/(a + b)$ απομακρύνεται απο αυτή την περιοχή, σταδιακά παύει να ισχυεί αυτή η διαφοροποίηση και ο λόγος $p_{av}/p_{av,class}$ συγκλίνει στην τιμή $3 - 2\nu$, ανεξαρτήτως της κλίσης του διεισδυτή.

Αξίζει να σημειωθεί πως καθώς το κανονικοποιημένο χαρακτηριστικό μήκος αυξάνεται, η μέση πίεση δεν επηρεάζεται απο την κλίση του διεισδυτή, παρα μόνο απο την μικροδομή του υλικού και το λόγο Poisson ν , με την επίδραση του δεύτερου να γίνεται μέγιστη όταν $2\ell/(a + b) \rightarrow \infty$.

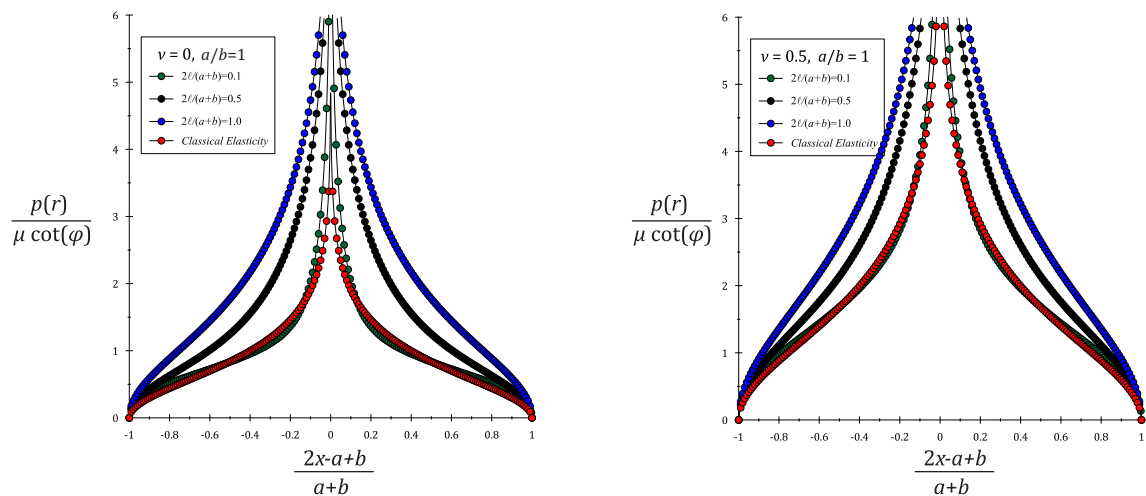


Σχήμα 5.1: Επίδραση του κανονικοποιημένου χαρακτηριστικού μήκους $2\ell/(a + b)$, (a) στην αδιαστατοποιημένη εκκεντρότητα e/e_{class} και (b) την αδιαστατοποιημένη μέση πίεση $p_{av}/p_{av,class}$, για $\nu = 0$, $\nu = 0.3$ και $\nu = 0.5$ και $a/b = 1$, $a/b = 0.5$ και $a/b = 0.33$.

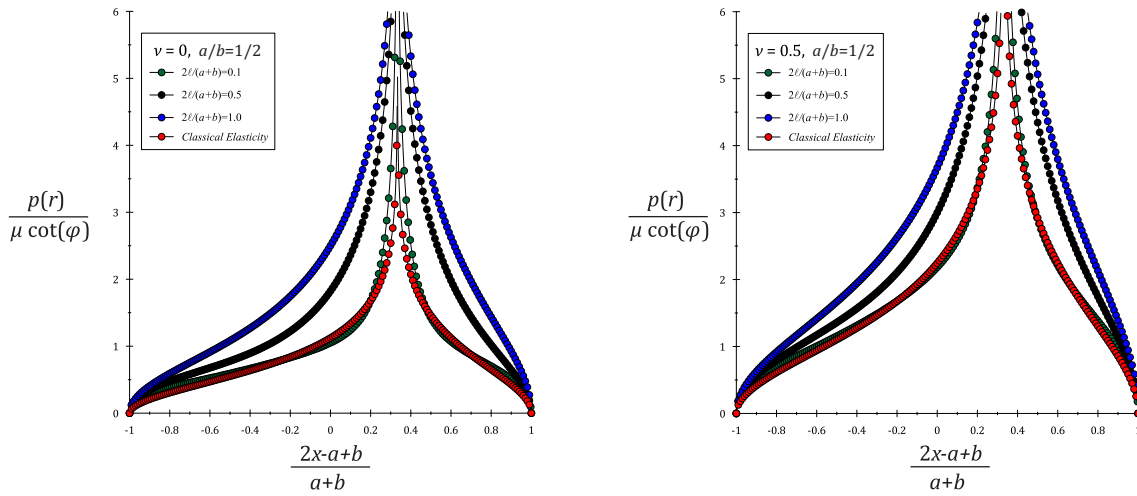
5.2 Κατανομή της πίεσης

Στα σχήματα (5.2) – (5.4) παρουσιάζονται επιλεγμένα διαγράμματα της κανονικοποιημένης κατανομής της πίεσης κάτω από την επιφάνεια του διεισδυτή για τρεις διαφορετικές τιμές του λόγου a/b , συγκεκριμένα για $a/b = 1$, $a/b = 1/2$ και $a/b = 1/3$. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται για λόγους Poisson $\nu = 0$ και $\nu = 0.5$, για τις περιπτώσεις της κλασικής ελαστικότητας και της θεωρίας τάσεων ζεύγους για υλικά με κανονικοποιημένο χαρακτηριστικό μήκος $2\ell/(a+b) = 0.1, 0.5$, και 1.0 .

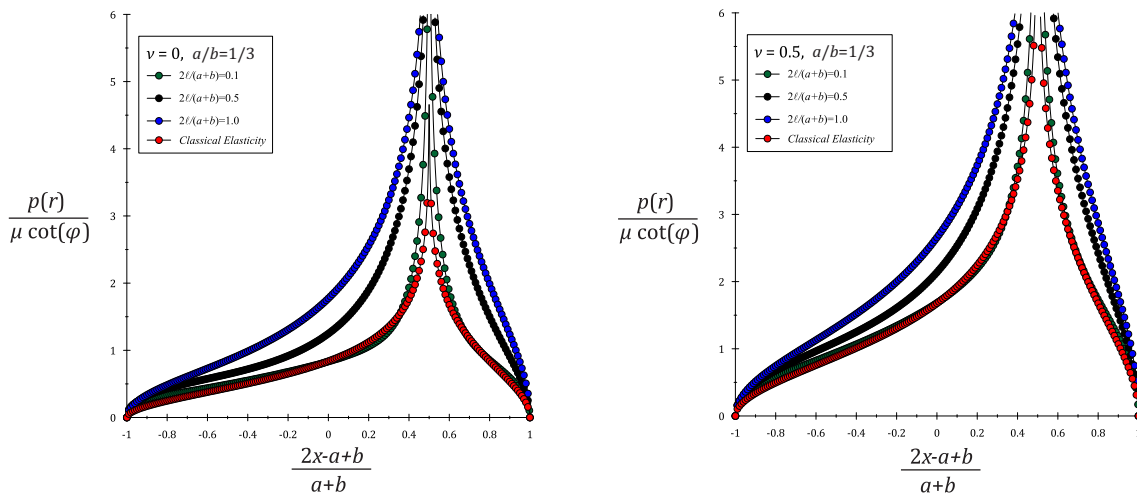
Όσο το κανονικοποιημένο χαρακτηριστικό μήκος του υλικού $2\ell/(a+b)$ αυξάνεται, η κατανομή της πίεσης κάτω από την επιφάνεια του διεισδυτή παρουσιάζει σημαντική αύξηση σε σχέση με τα αντίστοιχα αποτελέσματα που προβλέπονται από την κλασική ελαστικότητα. Συγκεκριμένα, για μικρές τιμές του λόγου $2\ell/(a+b)$, η κατανομή της πίεσης προσεγγίζει αυτή της κλασικής ελαστικότητας. Σημειώνεται πως τόσο η κλασική ελαστικότητα, όσο και η θεωρία τάσεων-ζεύγους παρουσιάζουν λογαριθμική ιδιομορφία στο σημείο $r = -(a-b)/(a+b)$. Όσο ο λόγος $2\ell/(a+b)$ αυξάνεται, η μικροδομή επηρεάζει όλο και περισσότερο την μακροσκοπική συμπεριφορά του διεισδυτή και ο ελαστικός ημίχωρος γίνεται πιο δύσκαμπτος. Τέλος, παρατηρείται πως όσο αυξάνεται ο λόγος Poisson, η πίεση κάτω από τον διεισδυτή αυξάνεται.



Σχήμα 5.2: Η κατανομή της αδιάστατοποιημένης πίεσης $p(r)/\mu\cot(\phi)$ κάτω από την επιφάνεια του διεισδυτή συναρτήσει της κανονικοποιημένης απόστασης $r = (2x - a + b)/(a + b)$ για $a/b = 1$, $\nu = 0$ και $\nu = 0.5$ και διάφορες τιμές του λόγου $2\ell/(a + b)$.



Σχήμα 5.3: Η κατανομή της αδιάστατοποιημένης πίεσης $p(r)/\mu \cot(\phi)$ κάτω από την επιφάνεια του διεισδυτή συναρτήσει της κανονικοποιημένης απόστασης $r = (2x - a + b)/(a + b)$ για $a/b = 1/2$, $\nu = 0$ και $\nu = 0.5$ και διάφορες τιμές του λόγου $2\ell/(a + b)$.



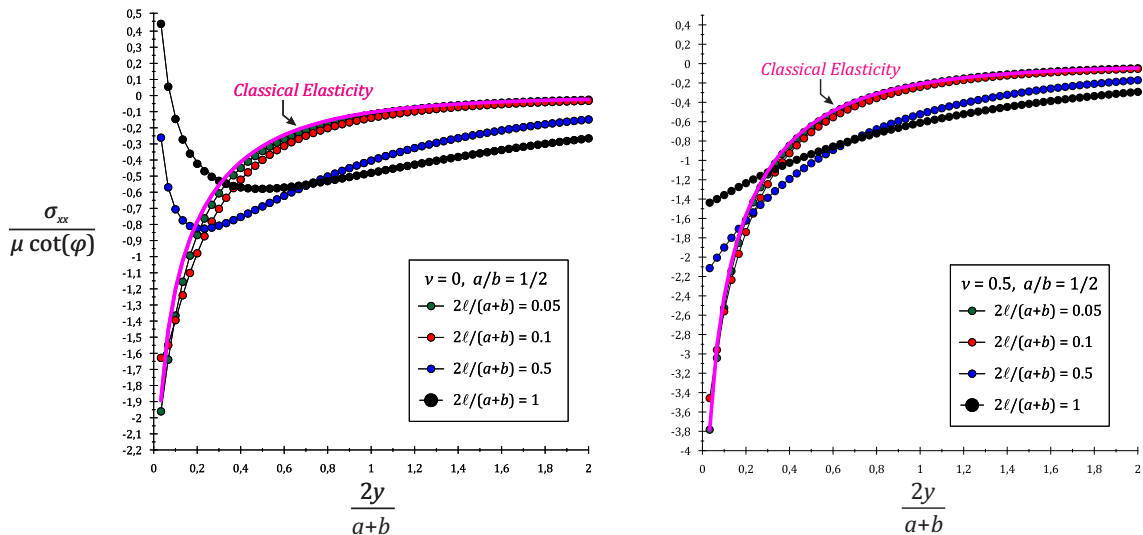
Σχήμα 5.4: Η κατανομή της αδιάστατοποιημένης πίεσης $p(r)/\mu \cot(\phi)$ κάτω από την επιφάνεια του διεισδυτή συναρτήσει της κανονικοποιημένης απόστασης $r = (2x - a + b)/(a + b)$ για $a/b = 1/3$, $\nu = 0$ και $\nu = 0.5$ και διάφορες τιμές του λόγου $2\ell/(a + b)$.

5.3 Τάσεις και τάσεις ζεύγους καθ' ύψος κάτω απο την αιχμή του διεισδυτή

Σε αυτήν την ενότητα παρουσιάζονται οι αδιαστατοποιημένες τάσεις και οι τάσεις ζεύγους κάτω απο την αιχμή του διεισδυτή ($r = -(a - b)/(a + b)$) κατα μήκος του άξονα $2y/(a + b)$. Απο τα αποτελέσματα των αναλύσεων γίνεται φανερή η επίδραση του χαρακτηριστικού μήκους του υλικού καθώς παρατηρείται σημαντική διακύμανση της εντατικής κατάστασης σε σύγκριση με τα αντίστοιχα αποτελέσματα της κλασικής ελαστικότητας. Όμως, εκτός απο την επιρροή της μικροδομής του υλικού, σημαντική επίδραση στην απόκριση της επαφής έχει και η κλίση του διεισδυτή όπου διαπιστώνεται διαφοροποίηση των τάσεων ανάλογα με το λόγο a/b .

5.3.1 Επίδραση του κανονικοποιημένου χαρακτηριστικού μήκους

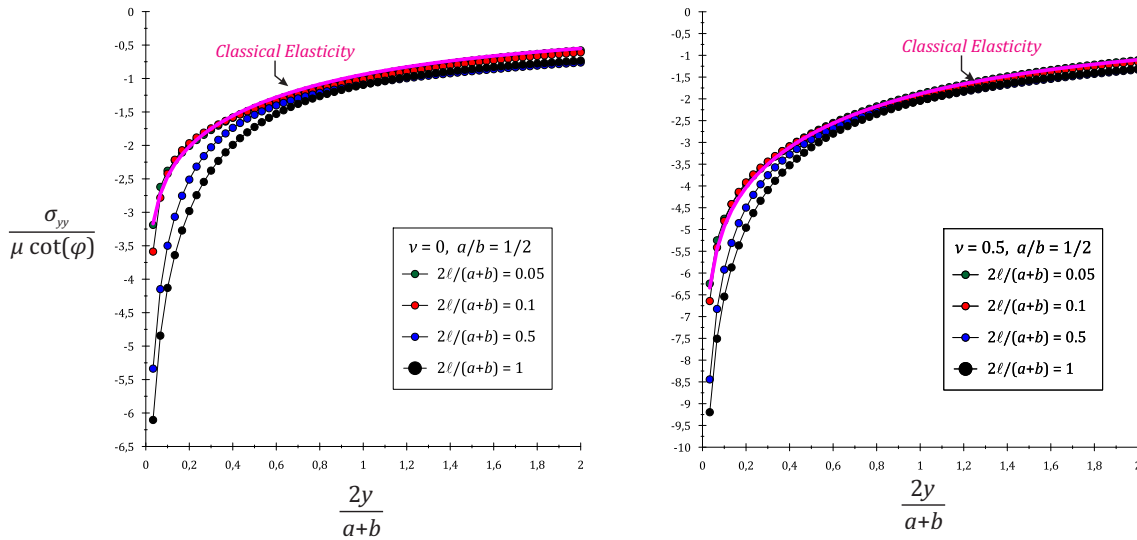
Στα διαγράμματα που ακολουθούν απεικονίζονται οι αδιαστατοποιημένες τάσεις και οι τάσεις ζεύγη για σταθερή κλίση του διεισδυτή (σταθερός λόγος $a/b = 1/2$) και διάφορες τιμές του κανονικοποιημένου χαρακτηριστικού μήκους, για $\nu = 0$ και $\nu = 0.5$.



Σχήμα 5.5: Η $\sigma_{xx}/\mu \cot(\phi)$ συναρτήσε της κατακόρυφης κανονικοποιημένης απόστασης $2y/(a + b)$ κάτω απο την αιχμή του διεισδυτή για $\nu = 0$ και $\nu = 0.5$, $a/b = 0.5$ και διάφορες τιμές του λόγου $2l/(a + b)$.

Για μικρές τιμές του λόγου $2l/(a + b)$, η $\sigma_{xx}/\mu \cot(\phi)$ παρουσιάζει την ίδια συμπεριφορά με αυτή που προβλέπεται απο την κλασική ελαστικότητα, ενώ για μεγαλύτερες τιμές τα αποτελέσματα διαφοροποιούνται. Συγκεκριμένα, παρατηρώντας το σχήμα (5.5) στην περιοχή $2y/(a + b) < 0.6$ για τους λόγους $2l/(a + b)$, 0.5 και 1, διαπιστώνεται οτι η $\sigma_{xx}/\mu \cot(\phi)$ αυξάνεται αλβγεβρικά όσο το κανονικοποιημένο χαρακτηριστικό μήκος του υλικού αυξάνεται. Μάλιστα για $2l/(a + b) = 1$ και $\nu = 0$ αλλάζει πρόσημο κοντά στην επιφάνεια του υλικού ($2y/(a + b) \simeq 0.1$). Αυτό έχει ως αποτέλεσμα ένα στοιχειώδες σωματίδιο του υλικού που βρίσκεται σε αυτή την περιοχή να καταπονείται απο εφελκυστικές τάσεις αντί των αναμενόμενων θλιπτικών τάσεων που προβλέπονται απο την κλασική ελαστικότητα. Αξίζει να

τονισθεί ότι όσο μεγαλύτερος είναι ο λόγος Poisson, τόσο μεγαλύτερη είναι η $\sigma_{xx}/\mu \cot(\phi)$ κατα απόλυτη τιμή (θλιπτική) και απαιτούνται πολύ μεγαλύτερες τιμές του κανονικοποιημένου χαρακτηριστικού μήκους του υλικού, προκειμένου να παρατηρηθεί εναλλαγή του πρόσημου της τάσης.



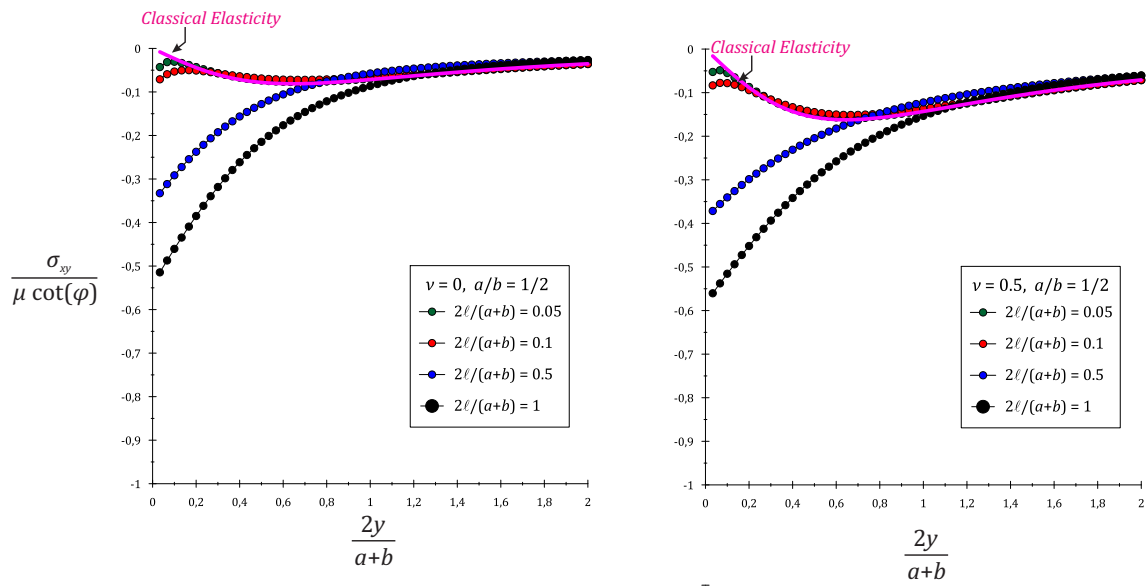
Σχήμα 5.6: Η $\sigma_{yy}/\mu \cot(\phi)$ συναρτήσει της κατακόρυφης κανονικοποιημένης απόστασης $2y/(a+b)$ κάτω από την αιχμή του διεισδυτή για $\nu = 0$ και $\nu = 0.5$, $a/b = 1/2$ και διάφορες τιμές του λόγου $2l/(a+b)$.

Όσο αναφορά την συμπεριφορά της $\sigma_{yy}/\mu \cot(\phi)$ (Σχήμα 5.6), παρατηρείται ομοιότητα με την κλασική ελαστικότητα. Όπως αναφέρθηκε στην προηγούμενη ενότητα, τόσο η λύση της κλασικής ελαστικότητας, όσο και αυτή της θεωρίας τάσεων ζεύγους παρουσιάζουν λογαριθμική ιδιομορφία στο σημείο $y = 0$. Στην περιοχή $2y/(a+b) < 1$, αύξηση του λόγου $2l/(a+b)$, συνεπάγεται αύξηση της $\sigma_{yy}/\mu \cot(\phi)$, ενώ για μεγαλύτερες τιμές του βάθους του ημίχωρου, η $\sigma_{yy}/\mu \cot(\phi)$ τείνει στην αντίστοιχη τιμή της κλασικής ελαστικότητας. Αυτή η συμπεριφορά έχει ως αποτέλεσμα το στοιχειώδες σωματίδιο του υλικού που βρίσκεται σε βάθος κοντά στην επιφάνεια του ημίχωρου να επιβάλλεται σε αρκετά μεγαλύτερες θλιπτικές τάσεις σε σχέση με αυτές που προβλέπονται από την κλασική ελαστικότητα. Συγκεκριμένα, για $\nu = 0$, $2l/(a+b) = 1$ και βάθος $2y/(a+b) = 0.1$ είναι:

$$\frac{\sigma_{yy}}{\sigma_{yy,clas}} = 1.68. \quad (5.2)$$

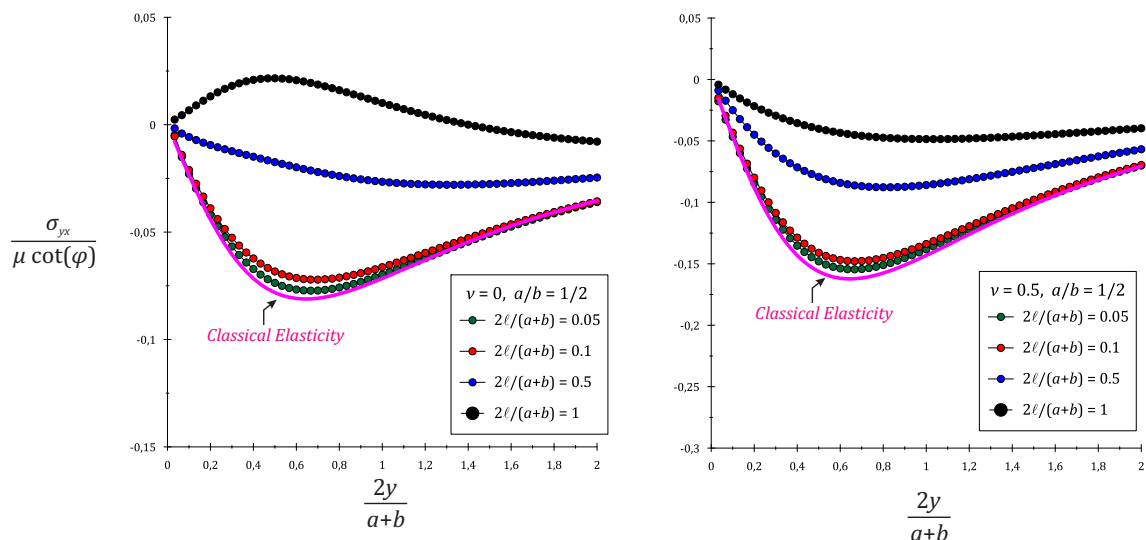
Για τις διατμητικές τάσεις ισχύουν τα παρακάτω. Η $\sigma_{xy}/\mu \cot(\phi)$ μειώνεται αλγεβρικά όσο ο λόγος $2l/(a+b)$ αυξάνεται. Γίνεται αντιληπτό από το σχήμα (5.7) πως ο λόγος Poisson ν δεν επηρεάζει σε σημαντικό βαθμό τα αποτελέσματα, παρόλα αυτά παρατηρείται μια μικρή αύξηση των τάσεων κατ' απόλυτη τιμή. Τέλος, ενώ η κλασική ελαστικότητα προβλέπει η $\sigma_{xy}/\mu \cot(\phi)$ να τείνει στο μηδέν στο σημείο της επαφής, δεν ισχυί το ίδιο για την θεωρία

τάσεων ζεύγους, όπου παρατηρείται ολο και μεγαλύτερη τάση (κατ' απόλυτη τιμή) στο σημείο της επαφής για αυξανόμενους λόγους $2\ell/(a+b)$.



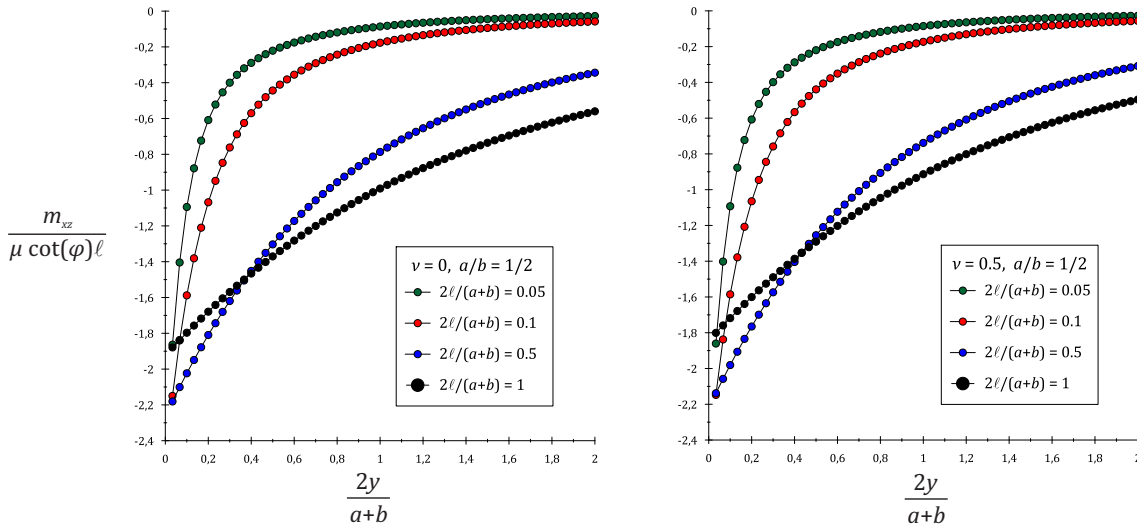
Σχήμα 5.7: Η $\sigma_{xy}/\mu \cot(\phi)$ συναρτήσεως της κατακόρυφης κανονικοποιημένης απόστασης $2y/(a+b)$ κάτω από την αιχμή του διεισδυτή για $\nu = 0$ και $\nu = 0.5$, $a/b = 1/2$ και διάφορες τιμές του λόγου $2\ell/(a+b)$.

Αντίθετα η $\sigma_{yx}/\mu \cot(\phi)$ αυξάνεται αλγεβρικά όσο αυξάνεται το κανονικοποιημένο χαρακτηριστικό μήκος του υλικού. Μάλιστα για $\nu = 0$ και $2\ell/(a+b) = 1$, η τάση αλλάζει πρόσημο. Η επιρροή του λόγου Poisson είναι μεγαλύτερη απ' ότι στην $\sigma_{xy}/\mu \cot(\phi)$ αφού όπως φαίνεται από το διάγραμμα (5.8), οι τάσεις είναι αρκετά μεγαλύτερες (κατ' απόλυτη τιμή) για $\nu = 0.5$.

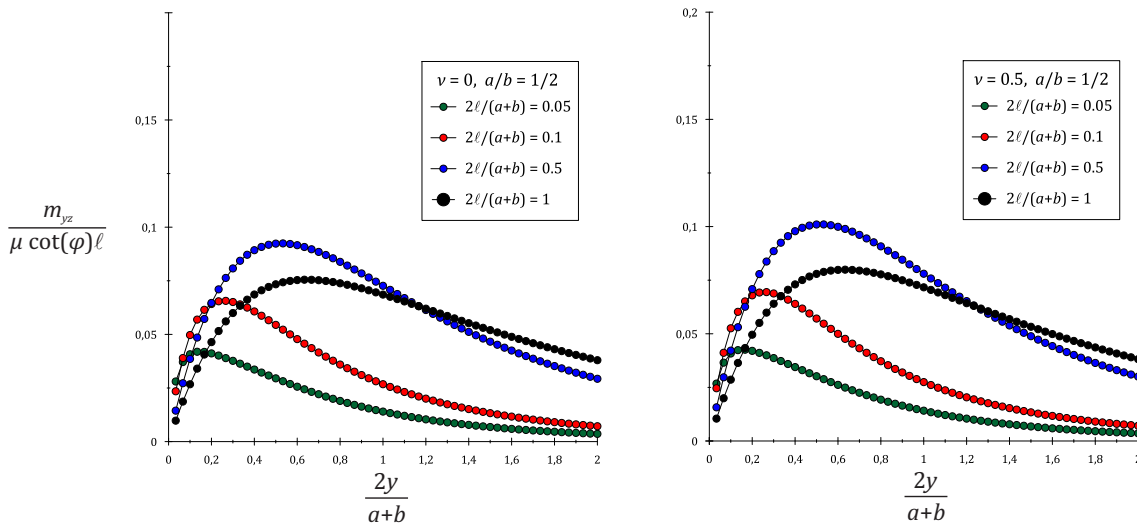


Σχήμα 5.8: Η $\sigma_{yx}/\mu \cot(\phi)$ συναρτήσεως της κατακόρυφης κανονικοποιημένης απόστασης $2y/(a+b)$ κάτω από την αιχμή του διεισδυτή για $\nu = 0$ και $\nu = 0.5$, $a/b = 1/2$ και διάφορες τιμές του λόγου $2\ell/(a+b)$.

Οι αδιαστατοποιημένες τάσεις ζεύγους $m_{xz}/\mu \cot(\phi)\ell$ και $m_{yz}/\mu \cot(\phi)\ell$ για μεγαλύτερες τιμές του λόγου $2\ell/(a+b)$ αυξάνονται (κατ' απόλυτη τιμή) έως ότου $2\ell/(a+b) \rightarrow 0.5$. Για τιμές του κανονικοποιημένου χαρακτηριστικού μήκους μεγαλύτερες από 0.5, οι αδιαστατοποιημένες τάσεις ζεύγους παρουσιάζουν μια περίεργη συμπεριφορά όπου σε σημεία κοντά της επιφάνειας του υλικού παρουσιάζονται αυξανόμενες και σε σημεία μεγαλύτερου βάθους μειωμένες (κατ' απόλυτη τιμή).

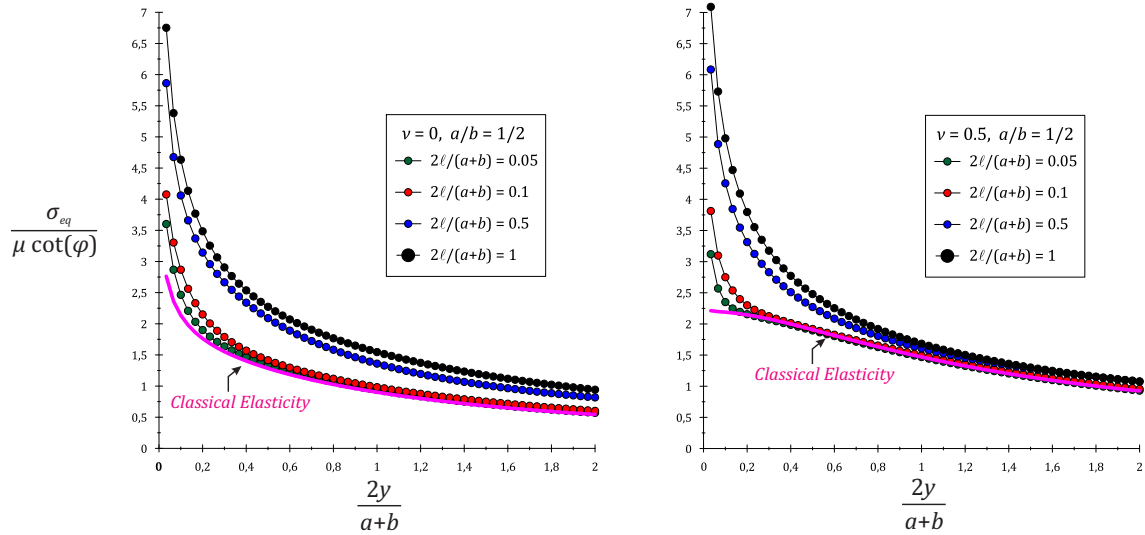


Σχήμα 5.9: Η $m_{xz}/\mu \cot(\phi)\ell$ συναρτήσε της κατακόρυφης κανονικοποιημένης απόστασης $2y/(a+b)$ κάτω από την αιχμή του διεισδυτή για $\nu = 0$ και $\nu = 0.5$, $a/b = 1/2$ και διάφορες τιμές του λόγου $2\ell/(a+b)$.



Σχήμα 5.10: Η $m_{yz}/\mu \cot(\phi)\ell$ συναρτήσε της κατακόρυφης κανονικοποιημένης απόστασης $2y/(a+b)$ κάτω από την αιχμή του διεισδυτή για $\nu = 0$ και $\nu = 0.5$, $a/b = 1/2$ και διάφορες τιμές του λόγου $2\ell/(a+b)$.

Αναλυτικότερα, παρατηρώντας το σχήμα (5.9) σε βάθος $2y/(a+b) < 0.5$, για $2\ell/(a+b) = 0.5$ και $2\ell/(a+b) = 1$, η $m_{xz}/\mu \cot(\phi)\ell$ είναι μεγαλύτερη (κατ' απόλυτη τιμή) στην πρώτη περίπτωση, ενώ σε μεγαλύτερο βάθος στην δεύτερη περίπτωση. Παρόμοια συμπεριφορά παρουσιάζει και η $m_{yz}/\mu \cot(\phi)\ell$, όπου σύμφωνα με το διάγραμμα (5.10) για βάθος $2y/(a+b) < 1.0$ και τιμές του λόγου $2\ell/(a+b)$, 0.5 και 1.0, οι αδιαστατοποιημένες τάσεις ζεύγη στην πρώτη περίπτωση είναι μεγαλύτερες (κατ' απόλυτη τιμή), ενώ σε μεγαλύτερο βάθος οι αντίστοιχες της δεύτερης περίπτωσης υπερισχύουν.



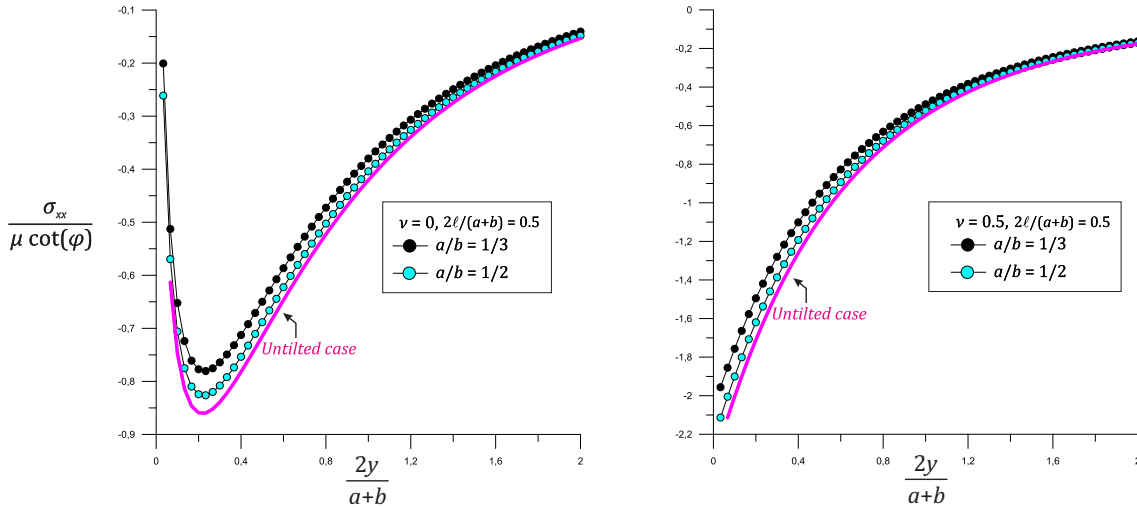
Σχήμα 5.11: Η $\sigma_{eq}/\mu \cot(\phi)$ συναρτήσε της κατακόρυφης κανονικοποιημένης απόστασης $2y/(a+b)$ κάτω απο την αιχμή του διεισδυτή για $\nu = 0$ και $\nu = 0.5$, $a/b = 1/2$ και διάφορες τιμές του λόγου $2\ell/(a+b)$.

Τέλος, παρατηρώντας το σχήμα (5.11), οι αδιαστατοποιημένες τάσεις von Mises $\sigma_{eq}/\mu \cot(\phi)$ σε βάθος κοντα στην επιφάνεια του υλικού, είναι αρκετά μεγαλύτερες όσο ο λόγος $2\ell/(a+b)$ αυξάνεται. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η διαρροή του υλικού να επέρχεται γρηγορότερα στις περιπτώσεις όπου το κανονικοποιημένο χαρακτηριστικό μήκος είναι μεγάλο. Όσο αυξάνεται το βάθος του υλικού, η $\sigma_{eq}/\mu \cot(\phi)$ τείνει στην τιμή της κλασικής ελαστικότητας. Συγκεκριμένα, για $\nu = 0$, $2\ell/(a+b) = 1$ και βάθος $2y/(a+b) = 0.1$ είναι:

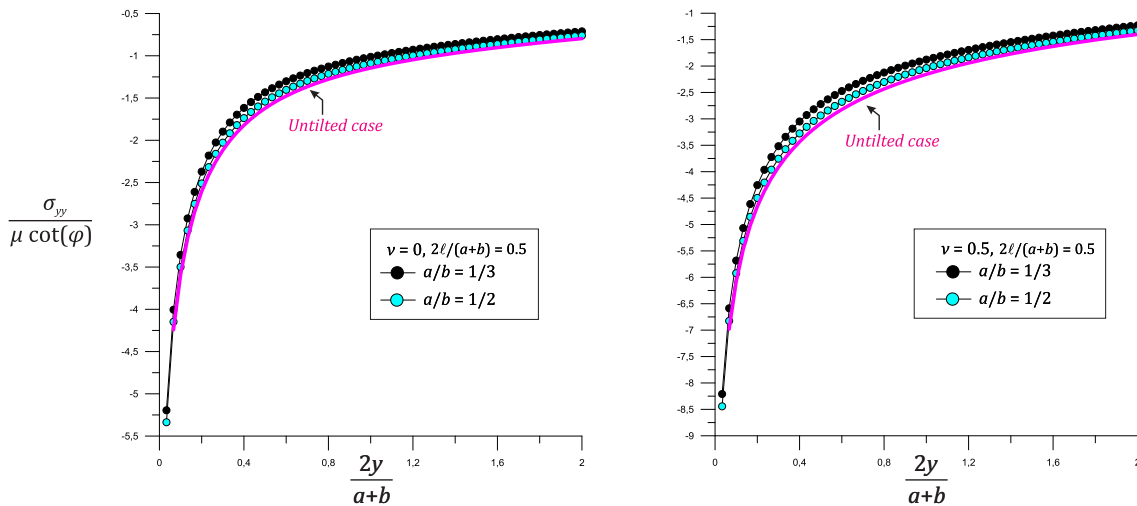
$$\frac{\sigma_{eq}}{\sigma_{eq,clas}} = 2.17 \quad (5.3)$$

5.3.2 Επίδραση της κλίσης του διεισδυτή

Στα διαγράμματα που ακολουθούν παρουσιάζονται οι αδιαστατοποιημένες τάσεις και οι τάσεις ζεύγους για σταθερή τιμή του κανονικοποιημένου χαρακτηριστικού μήκους του υλικού, $2\ell/(a+b) = 0.5$ και διάφορες τιμές λόγου a/b , για $\nu = 0$ και $\nu = 0.5$.



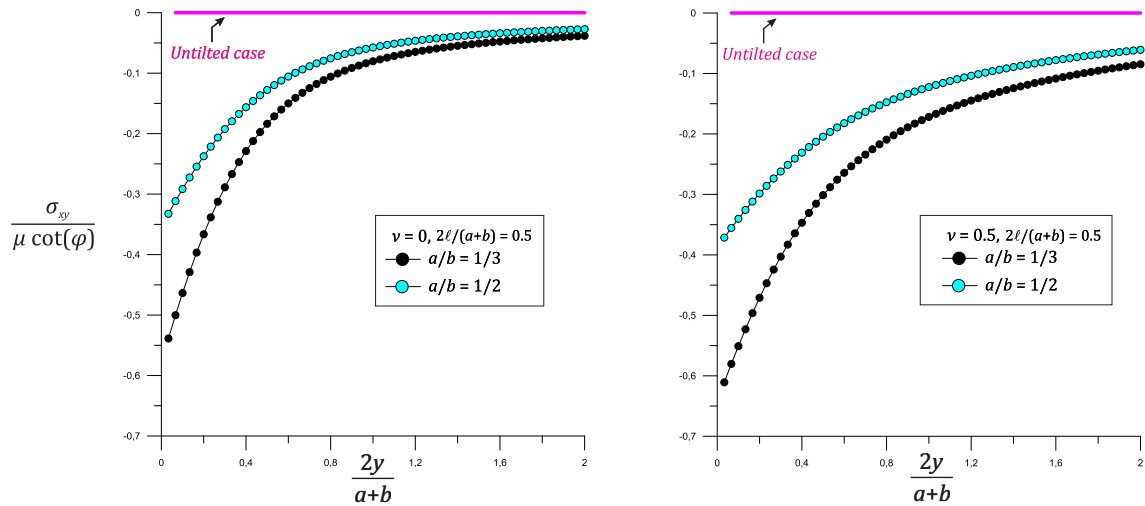
Σχήμα 5.12: Η $\sigma_{xx}/\mu \cot(\phi)$ συναρτήσει της κατακόρυφης κανονικοποιημένης απόστασης $2y/(a+b)$ κάτω από την αιχμή του διεισδυτή για $\nu = 0$ και $\nu = 0.5$, $2\ell/(a+b) = 0.5$ και διάφορες τιμές του λόγου a/b .



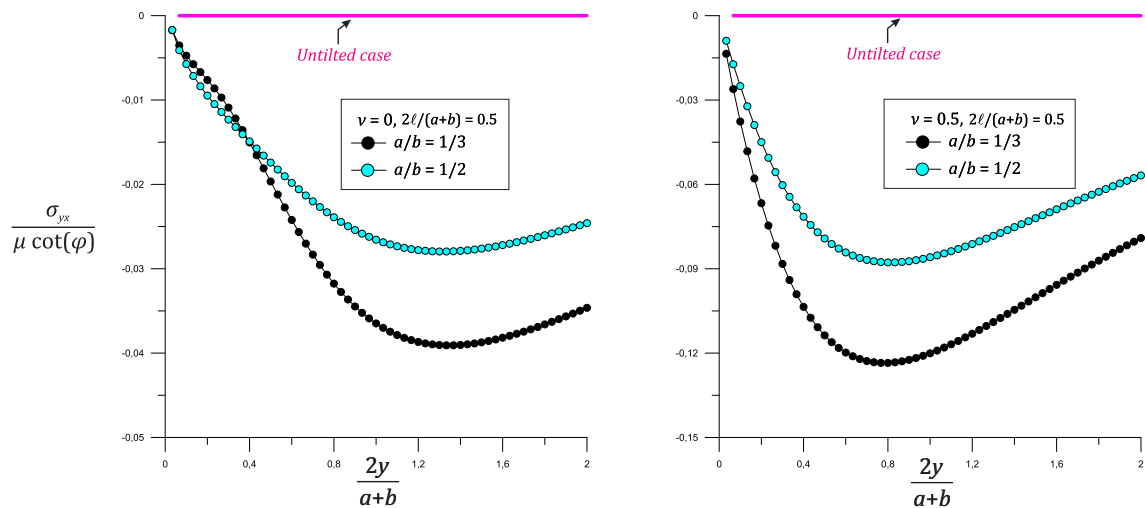
Σχήμα 5.13: Η $\sigma_{yy}/\mu \cot(\phi)$ συναρτήσει της κατακόρυφης κανονικοποιημένης απόστασης $2y/(a+b)$ κάτω από την αιχμή του διεισδυτή για $\nu = 0$ και $\nu = 0.5$, $2\ell/(a+b) = 0.5$ και διάφορες τιμές του λόγου a/b .

Όσο αναφορά τις αδιαστατοποιημένες ορθές τάσεις, η $\sigma_{xx}/\mu \cot(\phi)$ παρουσιάζει σημαντική διαφοροποίηση ανάλογα με τον λόγο a/b κοντά στην επιφάνεια του υλικού ($2y/(a+b) < 0.5$). Αντίθετα η $\sigma_{yy}/\mu \cot(\phi)$ δεν επηρεάζεται σημαντικά από την κλίση του διεισδυτή κοντά στην

επιφάνεια του υλικού. Συγκεκριμένα, για βάθος $2y/(a+b) = 0.1$ και $a/b = 1/3$, για $\nu = 0$, υφίσταται μείωση της σ_{xx} κατά 12.7% και της σ_{yy} κατά 6.6% σε σχέση με τα αποτελέσματα της αντίστοιχης συμμετρικής επαφής. Από την άλλη, όσο αυξάνεται το βάθος, η κλίση του διεισδυτή ελαττώνει την επιρροή της στην σ_{xx} , ενώ η σ_{yy} επηρεάζεται σε μεγαλύτερο βαθμό, γεγονός που προκύπτει από τα αντίστοιχα ποσοστά μείωσης τους στο βάθος $2y/(a+b) = 1$, τα οποία υπολογίζονται 9.7% και 11.5% αντίστοιχα.

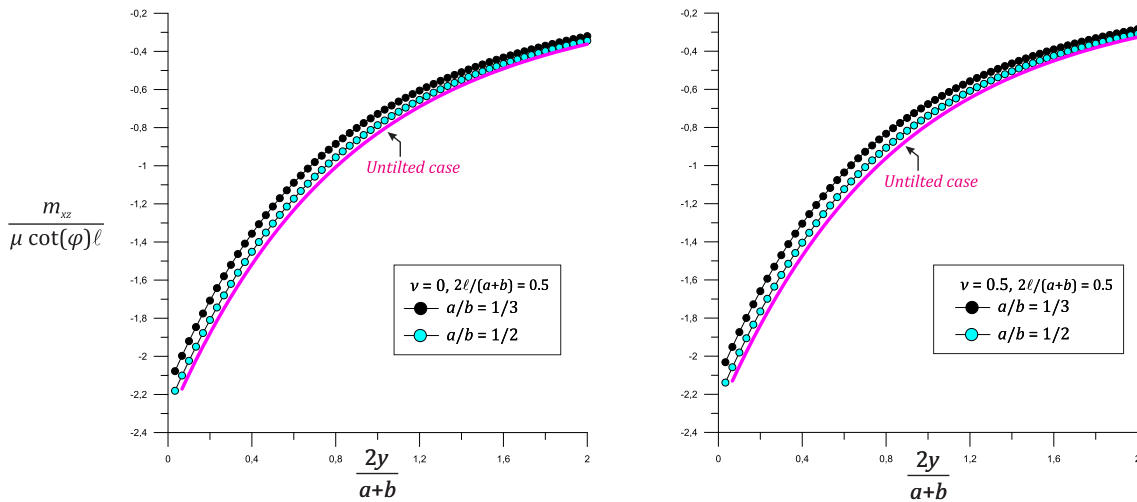


Σχήμα 5.14: Η $\sigma_{yy}/\mu \cot(\phi)$ συναρτήσει της κατακόρυφης κανονικοποιημένης απόστασης $2y/(a+b)$ κάτω από την αιχμή του διεισδυτή για $\nu = 0$ και $\nu = 0.5$, $2\ell/(a+b) = 0.5$ και διάφορες τιμές του λόγου a/b .

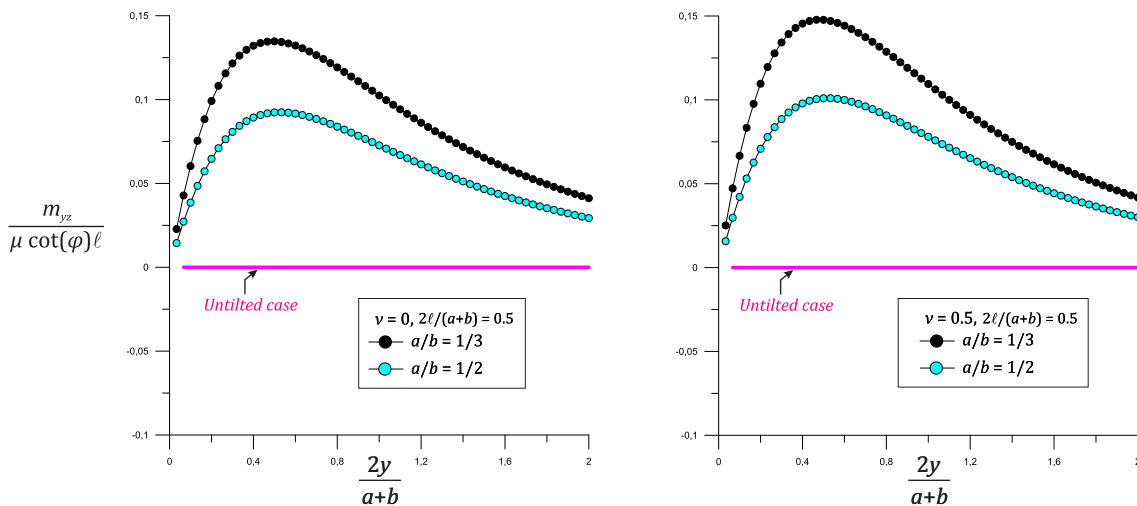


Σχήμα 5.15: Η $\sigma_{yx}/\mu \cot(\phi)$ συναρτήσει της κατακόρυφης κανονικοποιημένης απόστασης $2y/(a+b)$ κάτω από την αιχμή του διεισδυτή για $\nu = 0$ και $\nu = 0.5$, $2\ell/(a+b) = 0.5$ και διάφορες τιμές του λόγου a/b .

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι αδιαστατοποιημένες διατμητικές τάσεις $\sigma_{xy}/\mu \cot(\phi)$ και $\sigma_{yx}/\mu \cot(\phi)$, όπου σύμφωνα με τα διαγράμματα (5.14) και (5.15), δεν είναι πλέον μηδενικές αλλά αυξάνονται κατ' απόλυτη τιμή όσο αυξάνεται η κλίση του διεισδυτή.



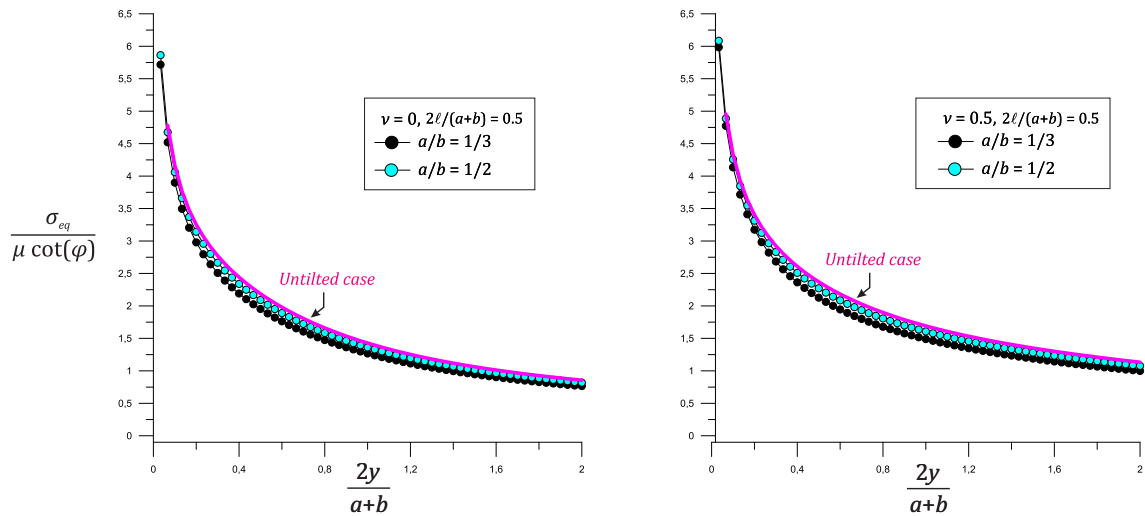
Σχήμα 5.16: Η $m_{xz}/\mu \cot(\phi)\ell$ συναρτήσει της κατακόρυφης κανονικοποιημένης απόστασης $2y/(a+b)$ κάτω από την αιχμή του διεισδυτή για $\nu = 0$ και $\nu = 0.5$, $2\ell/(a+b) = 0.5$ και διάφορες τιμές του λόγου a/b .



Σχήμα 5.17: Η $m_{yz}/\mu \cot(\phi)\ell$ συναρτήσει της κατακόρυφης κανονικοποιημένης απόστασης $2y/(a+b)$ κάτω από την αιχμή του διεισδυτή για $\nu = 0$ και $\nu = 0.5$, $2\ell/(a+b) = 0.5$ και διάφορες τιμές του λόγου a/b .

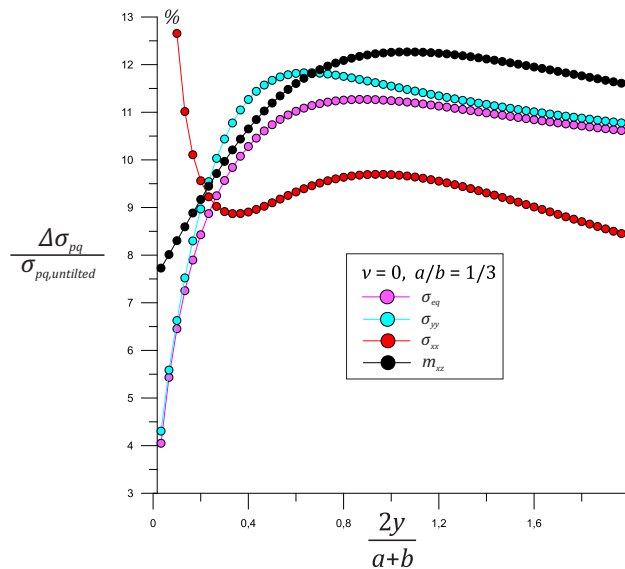
Στό σχήμα (5.16) παρουσιάζεται η αδιαστατοποιημένη τάση ζεύγους $m_{xz}/\mu \cot(\phi)\ell$, η οποία εμφανίζει μείωση του μέτρου της όσο αυξάνεται η κλίση του διεισδυτή. Για τιμές του λόγου $2y/(a+b)$ στο εύρος $0 - 1$, η επιρροή του λόγου a/b στην τιμή της $m_{xz}/\mu \cot(\phi)\ell$ αυξάνεται όσο απομακρυνόμαστε από την επιφάνεια του υλικού. Συγκεκριμένα, για $\nu = 0$, $2y/(a+b) = 1$ και $a/b = 1/3$, παρατηρείται μείωση 12.3% σε σχέση με την αντίστοιχη τιμή της συμμετρικής επαφής. Όσο πλησιάζουμε την επιφάνεια του ημίχωρου, τόσο μικρότερη είναι η επίδραση του λόγου a/b , κάτι που εύκολα διαπιστώνεται αν εξεταστεί το αντίστοιχο ποσοστό μείωσης της $m_{xz}/\mu \cot(\phi)\ell$ στο βάθος $2y/(a+b) = 0.1$, τό οποίο υπολογίζεται 8.3%. Η συμπεριφορά της $m_{yz}/\mu \cot(\phi)\ell$ στο σχήμα (5.17) είναι παρόμοια με αυτή των αδιαστατοποιημένων

διατηρητικών τάσεων $\sigma_{xy}/\mu \cot(\phi)$ και $\sigma_{yx}/\mu \cot(\phi)$. Αναλυτικότερα, ενώ στην συμμετρική επαφή προβλέπεται μηδενική καθ' όλο το βάθος του ημίχωρου, στην θεωρία τάσεων ζεύγους εμφανίζεται μη μηδενική και αυξάνεται με την αύξηση της κλίσης του διεισδυτή.



Σχήμα 5.18: Η $\sigma_{eq}/\mu \cot(\phi)$ συναρτήσει της κατακόρυφης κανονικοποιημένης απόστασης $2y/(a+b)$ κάτω από την αιχμή του διεισδυτή για $\nu = 0$ και $\nu = 0.5$, $2l/(a+b) = 0.5$ και διάφορες τιμές του λόγου a/b .

Τέλος, σύμφωνα με το διάγραμμα (5.18), η $\sigma_{eq}/\mu \cot(\phi)$ παρουσιάζει παρόμοια συμπεριφορά με την $\sigma_{yy}/\mu \cot(\phi)$. Αναλυτικότερα, για $\nu = 0$, $2y/(a+b) = 0.1$ και $a/b = 1/3$, παρατηρείται μείωση 6.5% σε σχέση με την αντίστοιχη τιμή της συμμετρικής επαφής, ενώ το αντίστοιχο ποσοστό για $2y/(a+b) = 1$ ανέρχεται σε 11.2%.



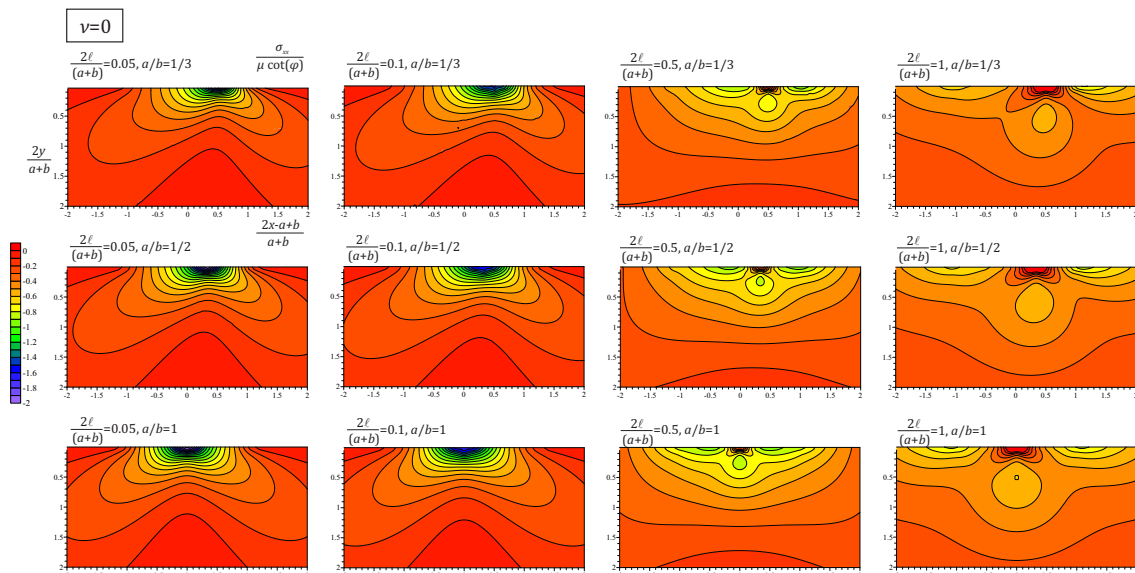
Σχήμα 5.19: Το ποσοστό μείωσης των τάσεων συναρτήσει του κανονικοποιημένου βάθους $2y/(a+b)$, για $a/b = 1/3$ και $\nu = 0$, σε σχέση με τις αντίστοιχες τάσεις της συμμετρικής επαφής

Στο σχήμα (5.19) δίνεται το ποσοστό μείωσης των σ_{xx} , σ_{yy} , m_{xz} και σ_{eq} κάτω από την αιχμή του διεισδυτή, συναρτήσει του αδιαστατοποιημένου βάθους του υλικού $2y/(a+b)$, για $\nu = 0$ και $a/b = 1/3$, σε σχέση με τις αντίστοιχες τάσεις και τάσεις ζεύγους της συμμετρικής επαφής. Παρατηρώντας το εν λόγω διάγραμμα διαπιστώνεται πως η κλίση του διεισδυτή επηρεάζει τα αποτελέσματα των τάσεων και τάσεων ζεύγους σε ποσοστό που δεν μπορεί να θεωρηθεί αμελητέο. Αφενός οι ορθές τάσεις σ_{xx} , σ_{yy} , η τάση ζεύγους m_{xz} και η ισοδύναμη τάση von Mises σ_{eq} μειώνονται όσο αυξάνεται η κλίση του διεισδυτή, αφετέρου οι διατμητικές τάσεις σ_{xy} , σ_{yx} και η τάση ζεύγους m_{yz} αυξάνονται σε μεγάλο βαθμό ενώ στην συμμετρική επαφή είναι μηδενικές.

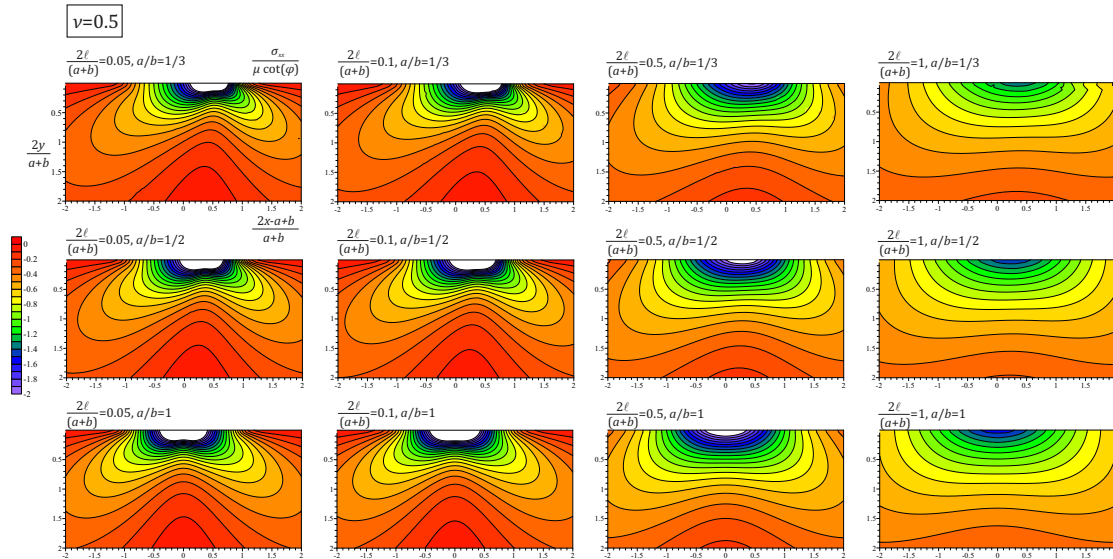
5.4 Τασικά πεδία

Σε αυτή την ενότητα παρατίθενται τα τασικά πεδία του ελαστικού ημίχωρου για διάφορες τιμές των λόγων $2\ell/(a+b)$ και a/b , για $\nu = 0$ και $\nu = 0.5$ αντίστοιχα. Μελέτωντας τα παρακάτω διαγράμματα, τα συμπεράσματα της προηγούμενης ενότητας για τις τάσεις και τάσεις ζεύγους καθ' ύψος κάτω από την αιχμή του διεισδυτή γενικεύονται σε όλο το πεδίο.

Στα σχήματα (5.20) και (5.21) παρουσιάζεται η $\sigma_{xx}/\mu \cot(\phi)$. Παρατηρείται πως όσο αυξάνεται το κανονικοποιημένο χαρακτηριστικό μήκος του υλικού $2\ell/(a+b)$, η τάση κοντά στην επιφάνεια του υλικού ($2y/(a+b) < 0.5$) μειώνεται, ενώ σε μεγαλύτερα βάθη αυξάνεται. Όσο αναφορά την επιρροή της κλίσης του διεισδυτή, όσο αυτή αυξάνεται η $\sigma_{xx}/\mu \cot(\phi)$ μειώνεται.

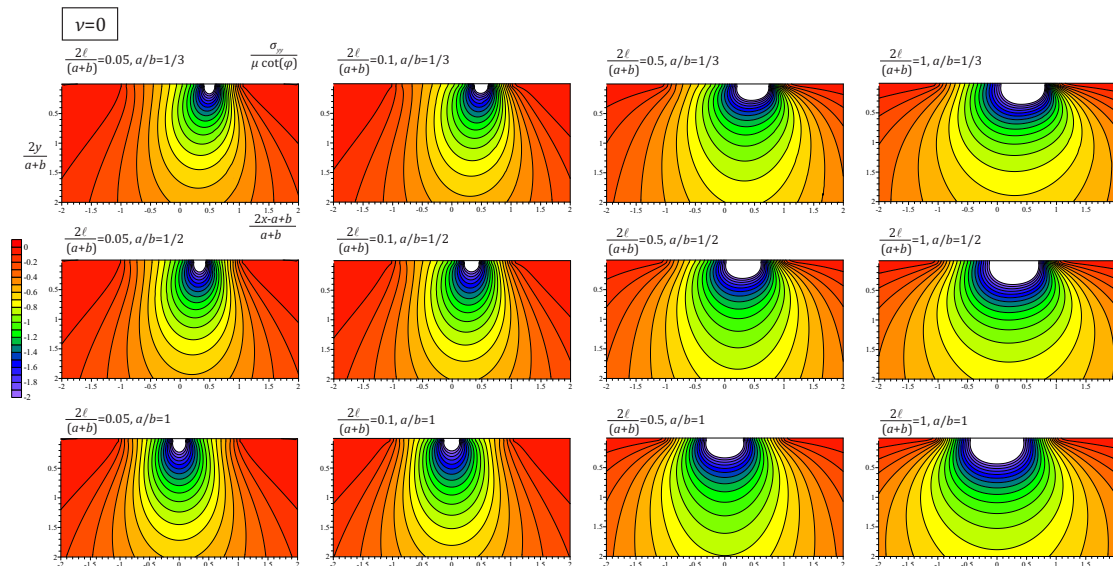


Σχήμα 5.20: Η $\sigma_{xx}/\mu \cot(\phi)$ σε όλο το πεδίο για $\nu = 0$ και διάφορες τιμές των λόγων $2\ell/(a+b)$ και a/b .

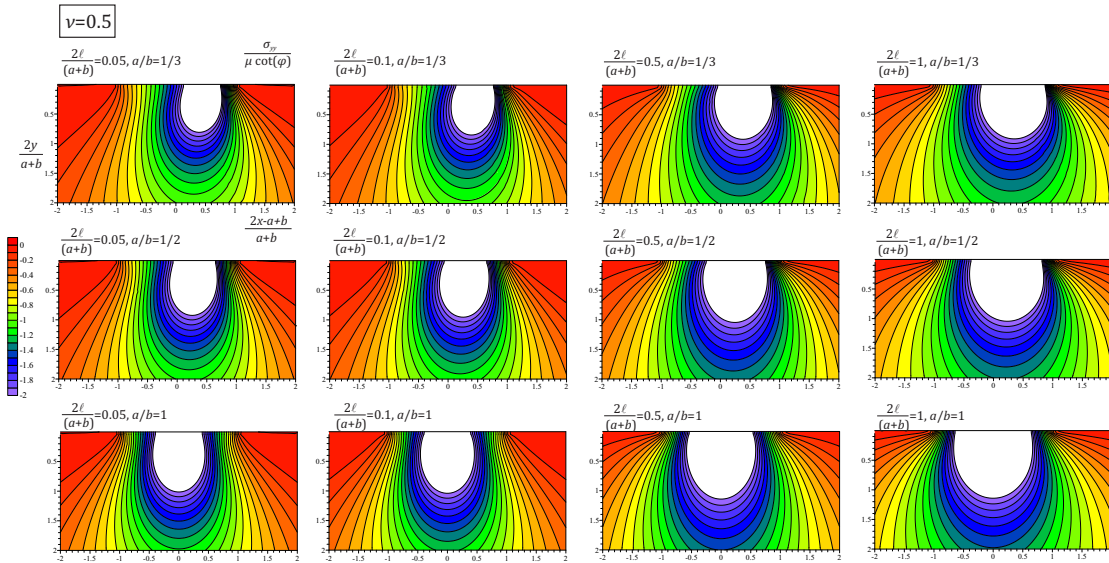


Σχήμα 5.21: Η $\sigma_{xx}/\mu \cot(\phi)$ σε όλο το πεδίο για $\nu = 0.5$ και διάφορες τιμές των λόγων $2l/(a+b)$ και a/b .

Σχετικά με την $\sigma_{yy}/\mu \cot(\phi)$, εξετάζοντας τα σχήματα (5.22) και (5.23), παρατηρείται πως αύξηση του κανονικοποιημένου χαρακτηριστικού μήκους $2l/(a+b)$ επιφέρει αύξηση της $\sigma_{yy}/\mu \cot(\phi)$ κατ' απόλυτη τιμή. Απο την άλλη, όσο αυξάνεται η κλίση του διεισδυτή, το μέτρο της τάσης που καταπονείται ο ημίχωρος μειώνεται.

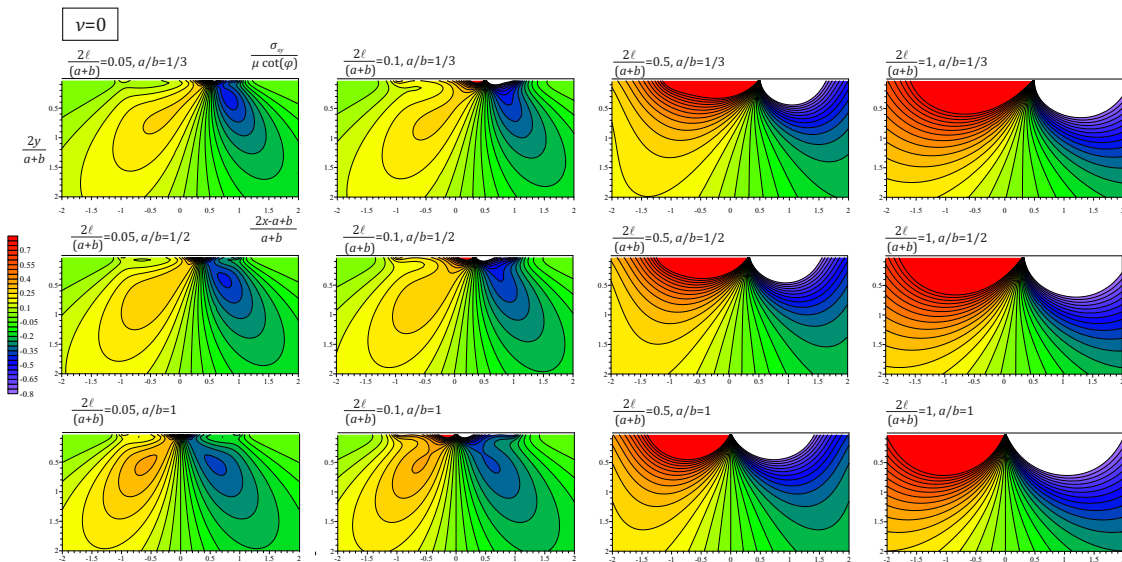


Σχήμα 5.22: Η $\sigma_{yy}/\mu \cot(\phi)$ σε όλο το πεδίο για $\nu = 0$ και διάφορες τιμές των λόγων $2l/(a+b)$ και a/b .

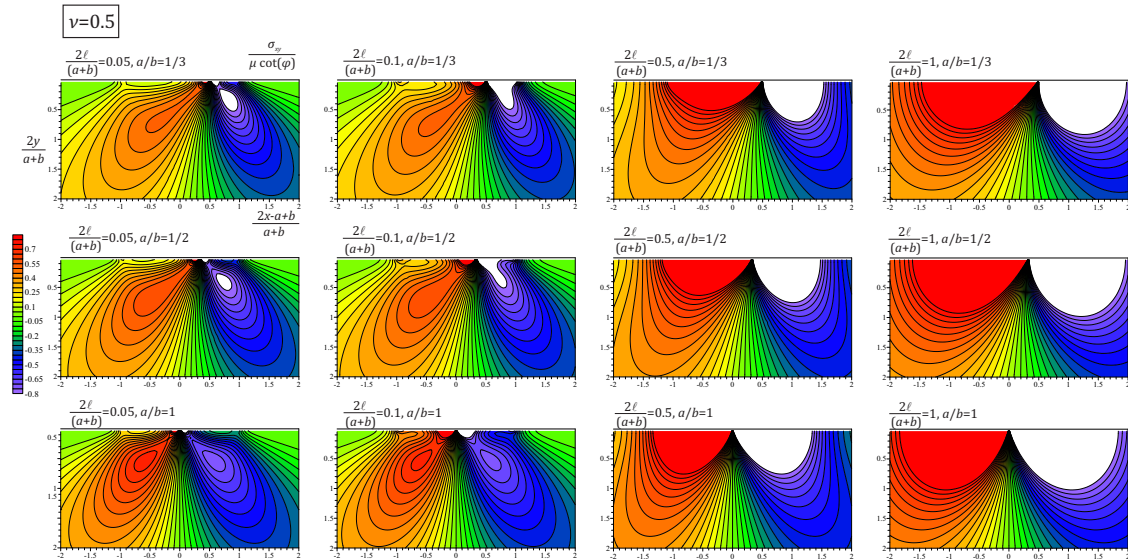


Σχήμα 5.23: Η $\sigma_{xy}/\mu \cot(\phi)$ σε όλο το πεδίο για $\nu = 0.5$ και διάφορες τιμές των λόγων $2l/(a+b)$ και a/b .

Η αδιαστατοποιημένη διατμητική τάση $\sigma_{xy}/\mu \cot(\phi)$, η οποία παρουσιάζεται στα σχήματα (5.24) και (5.25) αυξάνεται κατ' απόλυτη τιμή όσο το κανονικοποιημένο χαρακτηριστικό μήκος $2l/(a+b)$ αυξάνεται. Κοντά στην επιφάνεια του ημίχωρου ($2y/(a+b) < 1$), όσο αυξάνεται η κλίση του διεισδυτή, αριστερά της αιχμής οι τάσεις μειώνονται, ενώ δεξιά της αιχμής οι τάσεις αυξάνονται. Όσο απομακρυνόμαστε από την επιφάνεια Ο λόγος a/b δεν επηρεάζει σημαντικά την $\sigma_{xy}/\mu \cot(\phi)$.

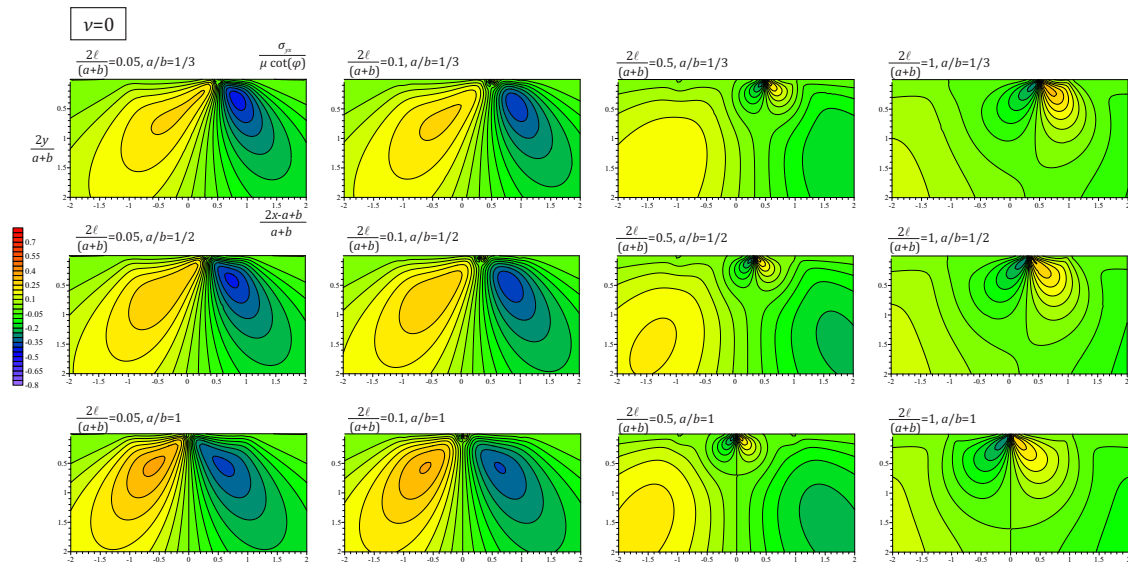


Σχήμα 5.24: Η $\sigma_{xy}/\mu \cot(\phi)$ σε όλο το πεδίο για $\nu = 0$ και διάφορες τιμές των λόγων $2l/(a+b)$ και a/b .

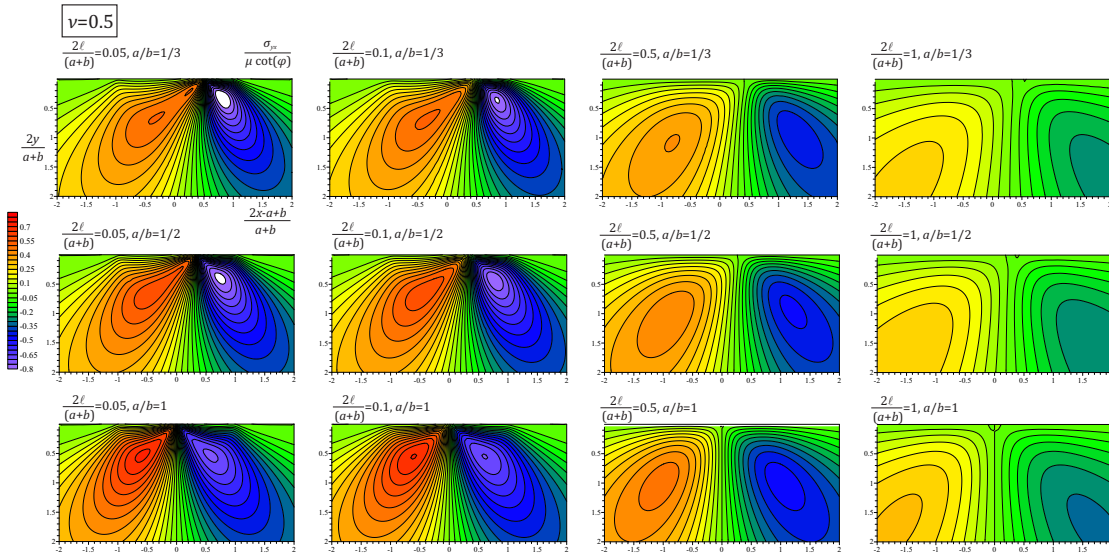


Σχήμα 5.25: Η $\sigma_{xy}/\mu \cot(\phi)$ σε όλο το πεδίο για $\nu = 0.5$ και διάφορες τιμές των λόγων $2\ell/(a+b)$ και a/b .

Στα σχήματα (5.26) και (5.27) παρουσιάζεται η $\sigma_{yx}/\mu \cot(\phi)$. Η συμπεριφορά της είναι αντίθετη από την $\sigma_{xy}/\mu \cot(\phi)$ ως προς το κανονικοποιημένο χαρακτηριστικό μήκος του υλικού. Συγκεκριμένα, όσο ο λόγος $2\ell/(a+b)$ αυξάνεται οι τάσεις μειώνονται κατ' απόλυτη τιμή ωστόσο αλλάζουν πρόσημο εκατέρωθεν της αιχμής του διεισδυτή για $2\ell/(a+b) = 0.5$. Όσο αναφορά της επίδραση της κλίσης του διεισδυτή η συμπεριφορά είναι παρόμοια με την $\sigma_{xy}/\mu \cot(\phi)$.

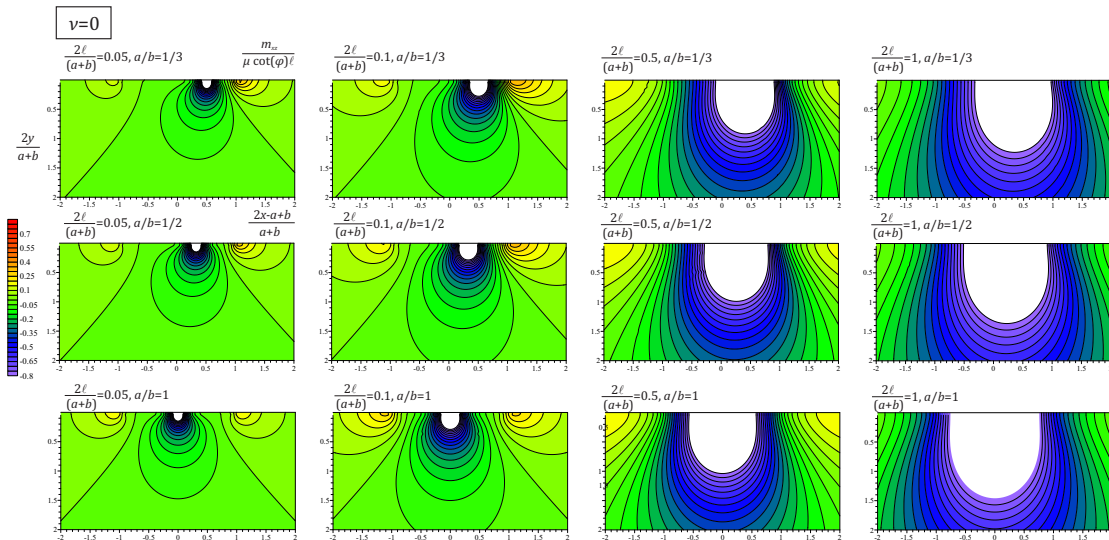


Σχήμα 5.26: Η $\sigma_{yx}/\mu \cot(\phi)$ σε όλο το πεδίο για $\nu = 0$ και διάφορες τιμές των λόγων $2\ell/(a+b)$ και a/b .

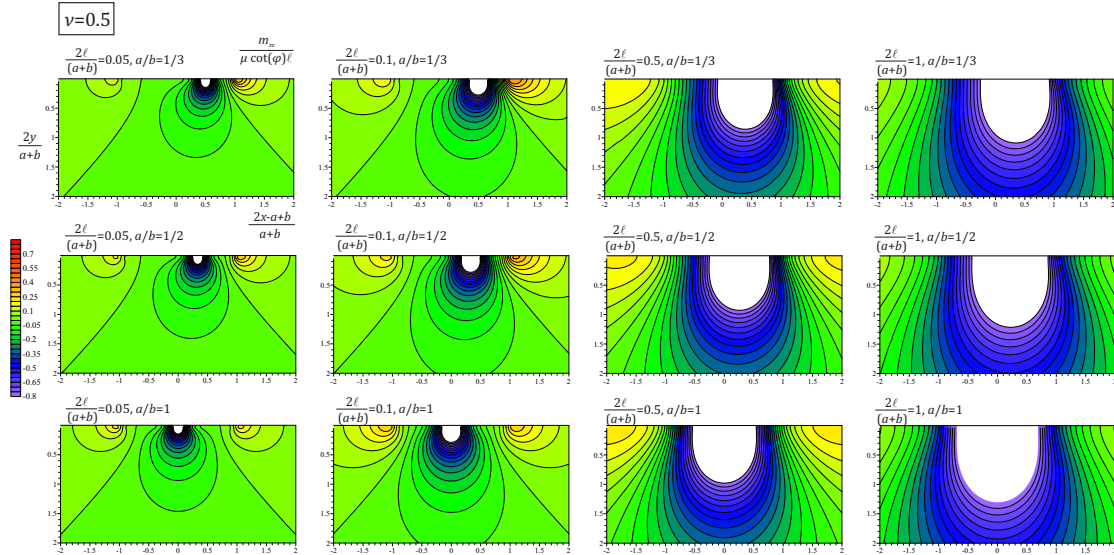


Σχήμα 5.27: Η $\sigma_{yy}/\mu \cot(\phi)$ σε όλο το πεδίο για $\nu = 0.5$ και διάφορες τιμές των λόγων $2\ell/(a+b)$ και a/b .

Στα επόμενα σχήματα απεικονίζονται οι αδιαστατοποιημένες τάσεις ζεύγη. Αναλυτικότερα, στα διαγράμματα (5.28) και (5.29) η $m_{xz}/\mu \cot(\phi)\ell$ παρουσιάζει αντίστοιχη συμπεριφορά με την $\sigma_{yy}/\mu \cot(\phi)$ ως προς την επιρροή του κανονικοποιημένου χαρακτηριστικού μήκους, δηλαδή αύξηση του λόγου $2\ell/(a+b)$ επιφέρει αύξηση της $m_{xz}/\mu \cot(\phi)\ell$. Επιπλέον, όσο αυξάνεται η κλίση του διεισδυτή, η $m_{xz}/\mu \cot(\phi)\ell$ μειώνεται κοντά στην επιφάνεια του υλικού ($2y/(a+b) < 1$) ενώ για μεγαλύτερα βάθη ο λόγος a/b δεν επηρεάζει σε σημαντικό βαθμό τα αποτελέσματα.

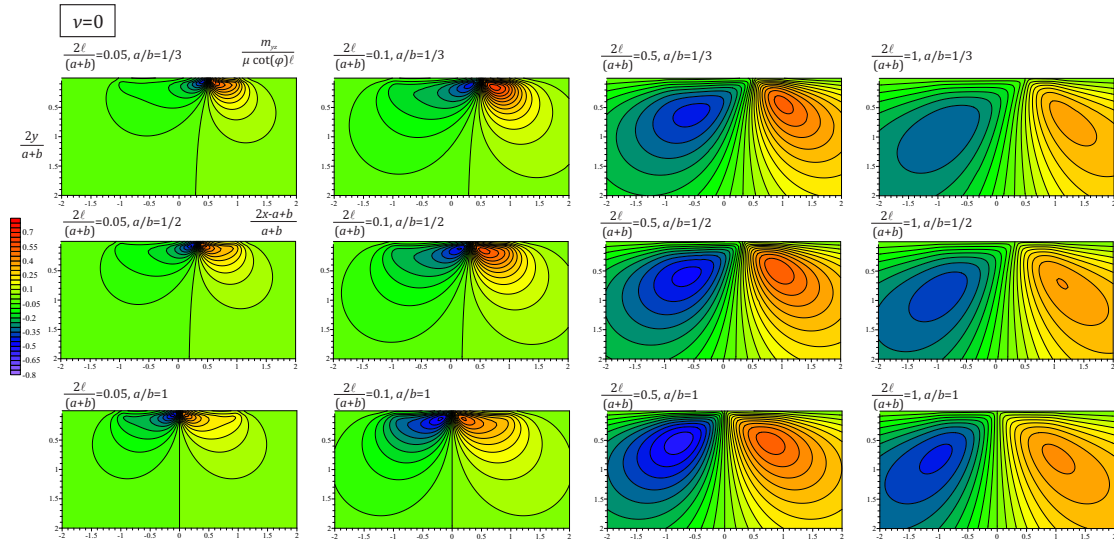


Σχήμα 5.28: Η $m_{xz}/\mu \cot(\phi)\ell$ σε όλο το πεδίο για $\nu = 0$ και διάφορες τιμές των λόγων $2\ell/(a+b)$ και a/b .

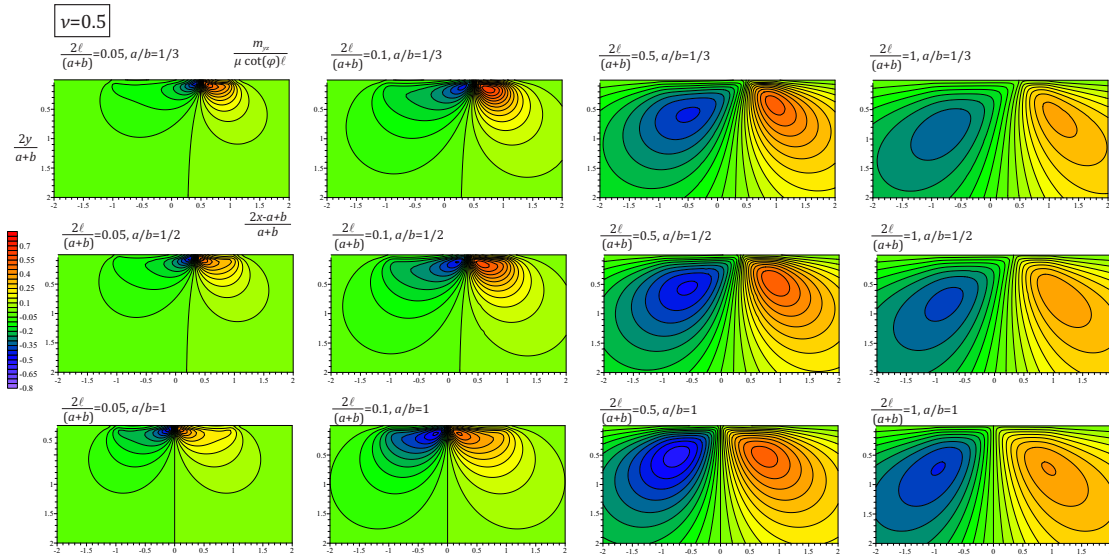


Σχήμα 5.29: Η $m_{xz}/\mu \cot(\phi)\ell$ σε όλο το πεδίο για $\nu = 0.5$ και διάφορες τιμές των λόγων $2\ell/(a + b)$ και a/b .

Η αδιαστατοποιημένη τάση ζεύγους $m_{yz}/\mu \cot(\phi)\ell$ αυξάνεται κατ' απόλυτη τιμή όσο αυξάνεται το κανονικοποιημένο χαρακτηριστικό μήκος μέχρι την οριακή τιμή $2\ell/(a + b) = 0.5$. Παρατηρώντας τα σχήματα (5.30) και (5.31) διαπιστώνεται ότι περαιτέρω αύξηση του κανονικοποιημένου χαρακτηριστικού μήκους επιφέρει μείωση της $m_{yz}/\mu \cot(\phi)\ell$. Όσο αναφορά την επιρροή της κλίσης του διεισδυτή, όσο αυτή αυξάνεται το μέτρο των αδιαστατοποιημένων τάσεων ζεύγους μειώνεται.

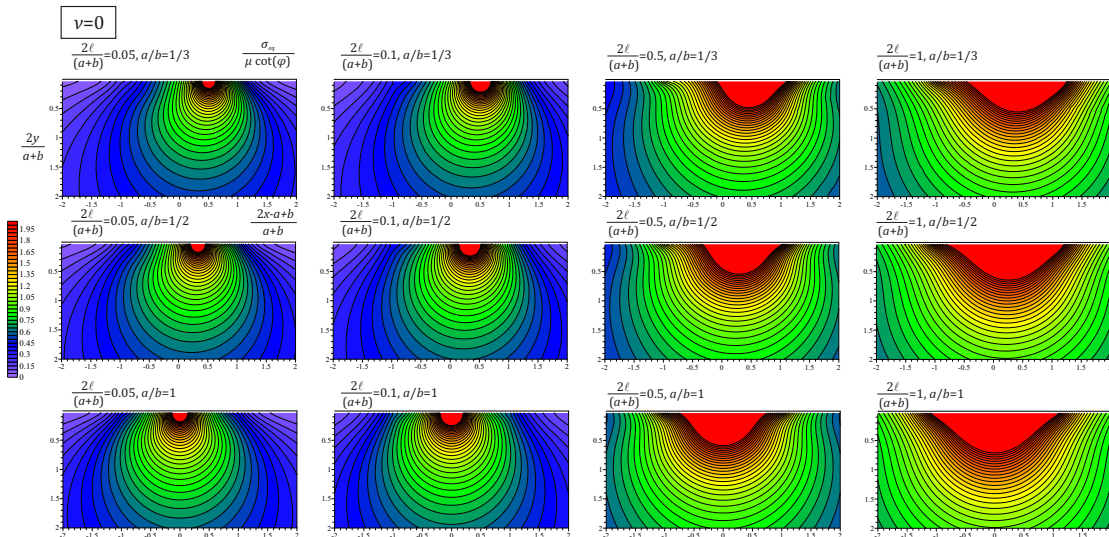


Σχήμα 5.30: Η $m_{yz}/\mu \cot(\phi)\ell$ σε όλο το πεδίο για $\nu = 0$ και διάφορες τιμές των λόγων $2\ell/(a + b)$ και a/b .

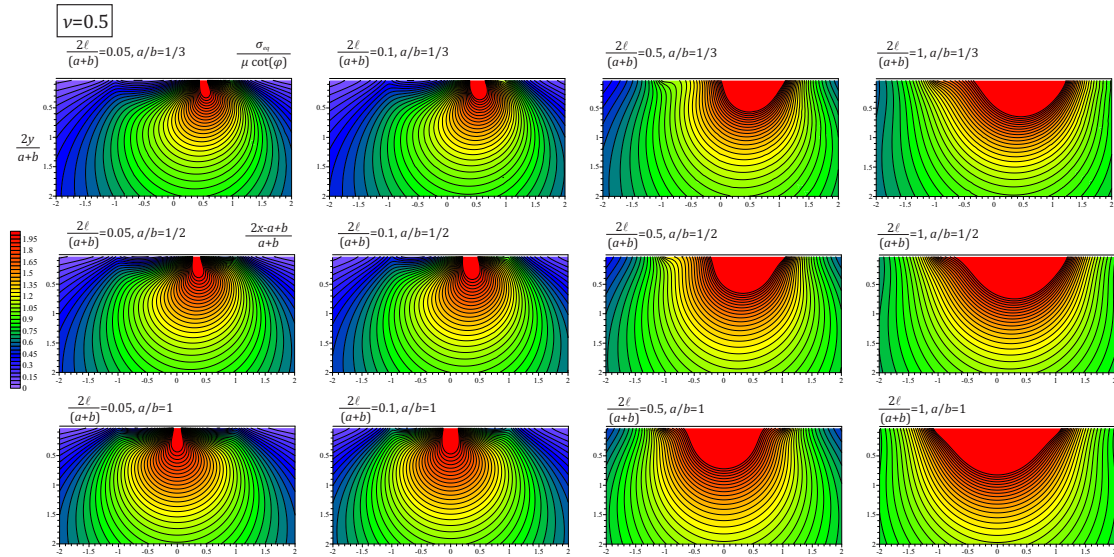


Σχήμα 5.31: Η $m_{yz}/\mu \cot(\phi)l$ σε όλο το πεδίο για $\nu = 0.5$ και διάφορες τιμές των λόγων $2l/(a+b)$ και a/b .

Τέλος, στα σχήματα (5.32) και (5.33) παρουσιάζονται οι αδιαστατοποιημένες ισοδύναμες τάσεις von Mises. Παρατηρείται αύξηση της $\sigma_{eq}/\mu \cot(\phi)$ όσο αυξάνεται το κανονικοποιημένο χαρακτηριστικό μήκος του υλικού $2l/(a+b)$. Επίσης, όσο αυξάνεται η κλίση του διεισδυτή, η $\sigma_{eq}/\mu \cot(\phi)$ μειώνεται κοντά στην επιφάνεια του ημίχωρου ($2y/(a+b) < 1$), ενώ σε μεγαλύτερα βάθη η επιρροή της εξασθενεί.



Σχήμα 5.32: Η $\sigma_{eq}/\mu \cot(\phi)$ σε όλο το πεδίο για $\nu = 0$ και διάφορες τιμές των λόγων $2l/(a+b)$ και a/b .



Σχήμα 5.33: Η $\sigma_{eq}/\mu \cot(\phi)$ σε όλο το πεδίο για $\nu = 0.5$ και διάφορες τιμές των λόγων $2l/(a + b)$ και a/b .

Κεφάλαιο 6

Συμπεράσματα

Η παρούσα εργασία πραγματεύεται το πρόβλημα επαφής μεταξύ ενός απαραμόρφωτου διεισδυτή τύπου σφήνας και ενός ελαστικού ημίχωρου στα πλαίσια της θεωρίας ελαστικότητας τάσεων ζεύγους, η οποία εισάγει στις εξισώσεις το χαρακτηριστικό μήκος του υλικού για να περιγράψει την επίδραση της μικροδομής στην μακροσκοπική απόκριση της επαφής. Επιπλέον, ο διεισδυτής φορτίζεται από συγκεντρωμένο φορτίο P και μία ροπή M , η οποία δημιουργεί κλίση στον διεισδυτή και η επαφή γίνεται ασύμμετρη. Η μεθοδολογία επίλυσης του προβλήματος επαφής βασίζεται στις ιδιόμορφες ολοκληρωτικές εξισώσεις, οι οποίες προκύπτουν από τον χειρισμό του προβλήματος μιστών συνοριακών τιμών με ολοκληρωτικούς μετασχηματισμούς Fourier και γενικευμένες συναρτήσεις.

Τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας έδειξαν ότι η επίδραση της μικροδομής του υλικού τροποποιεί την πίεση κάτω από την επιφάνεια του διεισδυτή και τις τάσεις εντός του ελαστικού ημίχωρου σε πολύ σημαντικό βαθμό σε σύγκριση με την κλασική ελαστικότητα. Επιπλέον, εισάγονται δύο νέες τάσεις, οι λεγόμενες τάσεις ζεύγους. Συγκεκριμένα, όσο αυξάνεται το κανονικοποιημένο χαρακτηριστικό του μήκους $2l/(a+b)$, η πίεση κάτω από την επιφάνεια του διεισδυτή και οι τάσεις και τάσεις ζεύγους εντός του ελαστικού ημίχωρου αυξάνονται σε πολύ μεγάλο βαθμό και μάλιστα σε κάποιες περιπτώσεις είναι πολλαπλάσιες από αυτές που προβλέπονται από την κλασική ελαστικότητα.

Επιπλέον, τυχόν στροφή του διεισδυτή κατά την διάρκεια της διείσδυσης επηρεάζει την μακροσκοπική απόκριση της επαφής αφού όπως αποδείχτηκε αλλοιώνει το τασικό πεδίο και είναι δυνατό να προκύψουν εσφαλμένα στοιχεία για τα μηχανικά χαρακτηριστικά του υλικού ακόμα και αν ληφθεί υπόψη η επίδραση της μικροδομής του. Τέλος, όσο αυξάνεται ο λόγος Poisson ν οι τάσεις είναι κατ' απόλυτη τιμή μεγαλύτερες. Αν όλα τα παραπάνω δεν ληφθούν υπόψη κατά τον σχεδιασμό της διείσδυσης, μπορεί να οδηγήσει σε λανθασμένη εκτίμηση των μηχανικών χαρακτηριστικών του υλικού.

Από τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας συμπεραίνεται πως η επίλυση προβλημάτων διείσδυσης σε υλικά με σύνθετη μικροδομή με την κλασική μηχανική επαφών δεν είναι ρεαλιστική. Αντίθετα, κρίνεται επιτακτική η προσέγγιση τέτοιων προβλημάτων με θεωρίες που λαμβάνουν υπόψη την επίδραση της μικροδομής στην μακροσκοπική απόκριση της επαφής, όπως η θεωρία ελαστικότητας τάσεων ζεύγους.

Βιβλιογραφία

- [1] Aero, E.L., Kuvshinskii, E.V., 1960. Fundamental equations of the theory of elastic media with rotationally interacting particles. *Fiz. Tverd. Tela* 2, 1399-1409, Translated in *Soviet Physics—Solid State* 2, 1272-1281 (1961).
- [2] Barber, J.R., 1992. *Elasticity*. Kluwer, Academic Publishers, Dordrecht.
- [3] Chan, Y.-S., Fannjiang, A.C., Paulino, G.H., 2003. Integral equations with hyper-singular kernels theory and applications to fracture mechanics. *Int. J. Eng. Sci.* 41, 683–720.
- [4] Chen, J.Y., Huang, Y., Ortiz, M., 1998. Fracture analysis of cellular materials: a strain gradient model. *J. Mech. Phys. Solids* 46, 789–828.
- [5] Cosserat, E., Cosserat, F., 1909. *Theorie des Corps Deformables*. Hermann et Fils, Paris.
- [6] Erdogan, F. , Gupta, G.D. , Cook, T.S. , 1973. Numerical solution of singular integral equations. In: Sih, G.C. (Ed.), *Mechanics of Fracture vol. 1: Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems*, pp. 368–425.
- [7] Erdogan, F. , 1978. Mixed boundary-value problems in mechanics. In: Nemat- Nasser, S. (Ed.), *Mechanics Today*. Pergamon Press, New York, pp. 1–86.
- [8] Fang, W., Wickert, J.A., 1994. Post buckling of micromachined beams. *J. Micromech. Microeng.* 4, 116.
- [9] Fleck, N.A., Shu, J.Y., 1995. Microbuckle initiation in fibre composites: a finite element study. *J. Mech. Phys. Solids* 43, 1887–1918.
- [10] Georgiadis, H.G., Velgaki, E.G., 2003. High-frequency Rayleigh waves in materials with microstructure and couple-stress effects. *Int. J. Solids Struct.* 40, 2501-2520.
- [11] Gourgiotis, P.A., Georgiadis, H.G., 2007. Distributed dislocation approach for cracks in couple-stress elasticity: shear modes. *Int. J. Fract.* 147, 83–102.
- [12] Gourgiotis, P.A., Georgiadis, H.G., 2008. An approach based on distributed dislocations and disclinations for crack problems in couple-stress elasticity. *Int. J. Solids Struct.* 45, 5521–5539.

- [13] Gourgiotis, P.A., Georgiadis, H.G., 2009. Plane-strain crack problems in micro-structured solids governed by dipolar gradient elasticity. *J. Mech. Phys. Solids* 57, 1898–1920..
- [14] Gourgiotis, P.A. , Zisis, Th. , Baxevanakis, K.P. , 2016. Analysis of the tilted flat punch in couple-stress elasticity. *Int. J. Solids Struct.* 85-86, 34-43
- [15] Hills, D., Nowell, D., 1994. *Mechanics of Fretting Fatigue*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht..
- [16] Huber, N., Nix, W.D., Gao, H., 2002. Identification of elastic–plastic material parameters from pyramidal indentation of thin films. *Proc. R. Soc. London, Ser. A* 458, 1593–1620.
- [17] Ioakimidis, N.I., 1980. The numerical solution of crack problems in plane elasticity in the case of loading discontinuities. *Eng. Fract. Mech.* 15, 709–716.
- [18] Johnson, K.L., 1985. *Contact Mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, UK
- [19] Koiter, W. , 1964. Couple stresses in the theory of elasticity. Parts I and II. In: *Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen*, B67, pp. 17–29.
- [20] Ma, Q., Clarke, D.R., 1995. Size dependent hardness of silver single crystals. *J. Mater. Res.* 10, 853–863.
- [21] Maranganti, R., Sharma, P., 2007. A novel atomistic approach to determine strain-gradient elasticity constants: tabulation and comparison for various metals, semiconductors, silica, polymers and the (Ir) relevance for nanotechnologies. *J. Mech. Phys. Solids* 55, 1823–1852.
- [22] Mindlin, R.D., 1963. Influence of couple-stresses on stress concentrations. *Exp. Mech.* 3, 1–7.
- [23] Mindlin, R.D., Tiersten, H.F., 1962. Effects of couple-stresses in linear elasticity. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 11, 415–448.
- [24] Mindlin, R.D., Eshel, N.N., 1968. On first-gradient theories in linear elasticity. *Int. J. Solids Struct.* 4, 109-124.
- [25] Muhlhaus H,-B., Vardoulakis ., 1987. The thickness of shear bands in granular materials, *Geotechnique* 37 271+283
- [26] Muki, R., Sternberg, E., 1965. The influence of couple-stresses on singular stress concentrations in elastic solids. *ZAMP* 16, 611-618.

- [27] Nowacki, W., 1972. Theory of micropolar elasticity. CISM International Centre for Mechanical Sciences No. 25. Springer-Verlag.
- [28] Palmov, V.A., 1964. The plane problem of non-symmetrical theory of elasticity. Appl. Math. Mech. (PMM) 28, 1117-1120.
- [29] Paulino, G.H., Fannjiang, A.C., Chan, Y.S., 2003. Gradient elasticity theory for mode iii fracture in functionally graded materials – Part I: crack perpendicular to the material gradation. ASME J. Appl. Mech. 70, 531–542.
- [30] Pharr, G.M., Oliver, W.C., Brotzen, F.R., 1992. On the generality of the relationship among contact stiffness, contact area, and elastic modulus during indentation. J. Mater. Res. 7, 613–617.
- [31] Poole, W.J., Ashby, M.F., Fleck, N.A., 1996. Micro-hardness of annealed and work-hardened copper polycrystals. Scr. Mater. 34, 559–564.
- [32] R. de Borst, 1993. A generalisation of J2-flow theory for polar continua. Computer Methods Appl. Mech. Eng. 103:3, 347–362
- [33] Sackfield A. , Dini D. , Hills D.A., 2005. The tilted shallow wedge problem. Eur. J. Mech. Solids 24, 919-928
- [34] Stelmashenko, N.A., Walls, M.G., Brown, L.M., Milman, Y.V., 1993. Microindentations on W and Mo oriented single crystals: an STM study. Acta Metall. Mater. 41, 2855–2865.
- [35] Lakes, R.S., 1983. Size effects and micromechanics of a porous solid. J. Mater. Sci. 18, 2572–2580.
- [36] Lakes, R.S., 1993. Strongly Cosserat elastic lattice and foam materials for enhanced toughness. Cell. Polym. 12, 17–30.
- [37] Toupin, R.A. , 1964. Theories of elasticity with couple-stress. Arch. Ration. Mech. Anal. 17, 85–112.
- [38] Voigt, W., 1887. Theoretische Studien über die Elasticitätsverhältnisse der Krystalle. Abh. Ges. Wiss. Gottingen 34.
- [39] Zisis, Th. , Gourgiotis, P.A. , Baxevanakis, K.P. , Georgiadis, H.G. , 2014. Some basic contact problems in couple-stress elasticity. Int. J. Solids Struct. 51, 2084–2095.

