AFFINE VOLTERRA ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ

Σπαής Γεώργιος

Διπλωματική εργασία

Επιβλέπων καθηγητής :Παπαπαντολέων
Αντώνης

Σχολή εφαρμοσμένων μαθηματικών και
φυσικών επιστημών

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σε αυτή την εργασία θα μελετήσουμε τη λύση μίας ειδικής κατηγορίας στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων, της Affine Volterra διαδικάσιας. Οι Στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις αυτές είναι εξισώσεις συνέλιξης, που οι συντελεστές της έχουν affine μορφή. Εμείς θα δούμε κάποια αποτελέσματα για την χαρακτηριστική συνάρτηση των λύσεων αυτών των εξισώσεων. Οι χαρακτηριστική συνάρτηση τους είναι εκθετικά affine με τους συντελεστές να προκύπτουν ως λύση ενός συστήματος εξισώσεων Volterra Ricatti.

Στο πρώτο κεφάλαιο, περιγράφουμε τις κλασσικές Affine διαδικασίες, που προκύπτουν ως λύσεις κλασικών Στοχαστικών Διαφορικών Εξισώσεων με Affine συντελεστές. Δίνεται το θεώρημα που περιγράφει την χαρακτηριστική τους συνάρτηση καθώς και μερικά παραδείγματα τέτοιων διαδικασιών.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζεται η fractional κίνηση Brown (fbm σε συντομογραφία). Η fbm είναι μια γενίκευση της κίνησης Brown, η οποία αντίθετα με την κίνηση Brown, έχει προσαυξήσεις οι οποίες συχετίζονται σε έντονο βαθμό. Δίνονται μερικές από τις βασικές ιδιότητες της, όπως για παράγειγμα ότι δεν είναι semi-martingale και παρουσιάζεται το μοντέλο Rough Heston.

Στο επόμενο κεφάλαιο γίνεται μια μικρή εισαγωγή στις Γραμμικές Ολοκληρωτικές εξισώσεις Volterra και ορίζεται η έννοια του resolvent που χρησιμοποιείται για την λύση τους. Επίσης βλέπουμε μερικές ιδιότητες ολοκληρωμάτων (στοχαστικών και ντετερμινιστικών) συνέλιξης, για να μελετήσουμε Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις Volterra. Αυτό το κεφάλαιο είναι κυρίως προκαταρτικό για το τελευταίο κεφάλαιο.

Τέλος, παρουσιάζεται το βασικό αποτέλεσμα της εργασίας των Eduardo Abi Jaber, Martin Larsson, Sergio Pulido, Affine Volterra processes, για την χαρακτηριστική συνάρτηση των Affine Volterra διαδικασιών.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Διαδικασίες διάχυσης Affine

1.1. Χαρακτηριστικές συναρτήσεις

Πριν μιλήσουμε για τις διαδικασίες Affine είναι απαραίτητο να δούμε μερικές από τις βασικές ιδιότητες των χαρακτηριστικών συναρτήσεων τυχαίων μεταβλητών. Οι χαρακτηριστικές συναρτήσεις είναι απαραίτητο εργαλείο στην θεωρία πιθανοτήτων. Δύο από τους κυριότερους λόγους είναι ότι χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες τους, μπορούμε να αποδείξουμε το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα και ο δεύτερός λόγος είναι ότι, άν γνωρίζουμε την χαρακτηριστική συνάρτηση μίας τυχαίας μεταβήτης μπορούμε να βρούμε την κατανομή της.

Ορισμος 1.1.1. Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ένας χώρος πιθανότητας και X μια τυχαία μεταβλητή ορισμένη σε αυτόν, η χαρακτηριστική συνάρτηση της X είναι μια $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ που ορίζεται από την σχέση

$$\phi(t) = E(e^{itX})$$

όπου αν μ_X η κατανομή της X θα έχουμε

$$\phi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} d\mu_X$$

Παρατηρηση 1.1.2. Αν X είναι μια τυχαία μεταβλητή με σ.π.π $f(x)$, ισχύει ότι

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x) dx$$

όπου $\phi(t)$ είναι ουσιαστικά ο μετασχηματισμός Fourier της $f(x)$, οπότε

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \hat{f}(t) dt$$

Άρα με αυτή την διαδικασία μπορούμε πάντα να βρίσκουμε την κατανομή μιας τυχαία μεταβλητής μέσο της χαρακτηριστικής της συνάρτησης.

Παρατηρηση 1.1.3. Θα χρειαστεί να επεκτείνουμε το πεδίο ορισμού των χαρακτηριστικών συναρτήσεων σε ένα σύνολο της μορφής $\{u \in \mathbb{C} :$

$E(e^{uX}) < \infty\}$. Οι περισσότερες ιδιότητες παραμένουν ίδιες και σε αυτή την περίπτωση.

Προταση 1.1.4. *Εστω X μια τυχαία μεταβλητή για την οποία η ροπογεννήτρια συνάρτηση $E(e^{tX})$ ορίζεται για $t \in (a,b)$, τοτε η χαρακτηριστική $E(e^{uX})$ συνάρτηση ορίζεται για $u \in \{z \in \mathbb{C} : Re(z) \in (a,b)\}$.*

Θα δούμε παρακάτω μερικές απο τις βασικές ιδιότητες των χαρασκτηριστικών συναρτήσεων. Έστω ϕ η χαρακτηριστική συνάρτηση μιας τυχαίας μεταβλητής τότε ισχύουν τα εξής:

- $\phi(0) = 1$
- $\mid \phi(t) \mid \leq 1$
- Η ϕ είναι ομοιόμορφα συνεχής
- Αν η X έχει χαρακτηριστική συνάρτηση την ϕ τότε η $aX + b$ έχει χαρακτηριστική την $e^{ibt}\phi(at)$
- Αν δύο τυχαίες μεταβλητές έχουν την ίδια χαρακτηριστική συνάρτηση ϕ τότε έχουν την ίδια κατανομή (είναι ισόνομες δηλαδή).

Θεωρημα 1.1.5. *Έστω X μια τυχαία μεταβλητή με $E(\mid X \mid^k)$ για κάποιο k στους φυσικούς αριθμούς. Τότε η ϕ είναι κ-φορές παραγωγίσιμη και ισχύει ότι*

$$\frac{d^k\phi}{dt}(t) = i^k E(X^k e^{itX})$$

Οι Affine διαδικασίες που θα δούμε στην επόμενη παράγραφο είναι μια κατηγορία στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων που η χαρακτηριστική συνάρτηση της λύσης τους, έχει μια συγκεκριμένη μορφή, είναι εκθετικά Affine. Πίο συγκεκριμένα αν $(X_t^x)_{t\in[0,T]}$ είναι μια Affine διαδικασία που προέρχεται ως λύση μιας μονοδιάστατης στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης με $X_0 = x$, για την χαρακτηριστική της συνάρτηση ισχύει ότι

$$E(e^{uX_t^x}) = e^{\phi(t,u)+\psi(t,u)x}$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα Markov των διαδικασιών διάχυσης μπορούμε να δείξουμε το εξής:

$$E(e^{uX_{\mathrm{T}}^x} \mid \mathcal{F}_t) = e^{\phi(T-t,u)+\psi(T-t,u)X_t^x}$$

όπου $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ είναι μια διύλιση στην οποία είναι προσαρμοσμένη η $(X_t^x)_{t\in[0,T]}$.

1.2. Ορισμός και χαρακτηρισμός των διαδικασικών Affine

Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ χώρος πιθανότητας εφοδιασμένος με μια διύληση $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$, $S \subset \mathbb{R}$. Έστω οι συναρτήσεις $b : S \to \mathbb{R}^d$,$\sigma : S \to \mathbb{R}^{d\times d}$ και $a(x) = \sigma(x)\sigma(x)^T$, για τις οποίες υποθέτουμε ότι είναι συνεχής. Έστω

$(W_t)_{t\geq 0}$ μια $d-$διάστατη κίνηση Brown και ότι η στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t$$
$$X_0 = x$$

έχει μοναδική λύση $X = X^x$. Με τον συμβολισμό X^x εννοούμε μια διαδικασία $(X_t^x)_t$ για την οποία $X_0 = x$.

Ορισμος 1.2.1. Λέμε ότι η $X = X^x$ είναι μια διαδικασία Affine, αν υπάρχουν συναρτήσεις $\phi(t,u)$ και $\psi(t,u)$ με τιμές στον $\mathbb{C}$ και $\mathbb{C}^d$ αντίστοιχα με συνεχείς $t-$παραγώγους, τέτοιες ώστε η $X = X^x$ να ικανοποιεί την σχέση

$$E(e^{u^T X(T)} \mid \mathcal{F}_t) = e^{\phi(T-t,u)+\psi(T-t,u)^T X(t)}$$

για όλα τα $u \in i\mathbb{R}^d$, $t \leq T$ και όλα τα $x \in S$.

Η $E(e^{u^T X(T)} \mid \mathcal{F}_t)$ λέγεται δεσμευμένη χαρακτηριστική συνάρτηση. Θέτουμε $M_t = E(e^{u^T X(T)} \mid \mathcal{F}_t)$, από τις ιδιότητες της δεσμευένης μέσης τιμής μπορούμε εύκολα να συμπεράνουμε ότι η διαδίκασια $(M_t)_{t\in[0,T]}$ είναι martingale, οπότε

$$E(M_T) = E(e^{\phi(0,u)+\psi(0,u)^T X(T)}) = E(e^{u^T X(T)})$$

Από το τελευταίο συμπαιρένουμε ότι

$$\phi(0,u) = 0$$
$$\psi(0,u) = u$$

Επίσης οι συναρτήσεις ϕ, ψ προσδιορίζονται μοναδικά, αυτό οφείλεται στην εξής ιδιότητα των χαρακτηριστικών συναρτήσεων: αν έχουμε δύο τυχαίες μεταβλητές που έχουν ίδιες χαρακτηριστικές συναρτήσεις, τότε αυτές είναι ισόνομες (έχουν ίδιες κατανομές).

Τα δύο παρακάτω θεωρήματα δίνουν ικανές και αναγκαίες συνθήκες για την μορφή της τάσης $b(x)$ (drift) και του πίνακα διάχυσης $a(x) = \sigma(x)\sigma(x)^T$ μιας διαδικασίας Affine. Πριν ανάφερουμε τα θεωρήματα αυτά θα χρειαστούμε την φόρμουλα του Ito. Έστω μια διασικασία που γράφεται στην μορφή:

$$dX_t = b_t dt + \sigma_t dW_t$$

(δηλαδή μια διαδικασία Ito) και $f(t,x)$ μια συνάρτηση, μια φορά παραγωγίσιμη ως προς t και δύο ως προς x. Τότε η $f(t,X_t)$ είναι και αυτή μια διαδικασία Ito και ισχύει το εξής:

$$df(t,X_t) = [\frac{\partial f}{\partial t}(s,X_s) + \sum_{i=1}^{n} b_i(s)\frac{\partial f}{\partial x_i}(s,X_s) +$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}(\sigma_s^T)_{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(s,X_s)]ds+[\nabla f(s,X_s)\cdot\sigma_s]dW_s$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.2.2. *Έστω X μια Affine διαδικασία,τότε ο πινακάς διαχύσης $a(x)$ και η τασή της $b(x)$ έχουν την μόρφη:*

$$a(x)=a_0+\sum_{i=1}^{d}x_i a_i$$

$$b(x)=b_0+\sum_{i=1}^{d}x_i b_i=b_0+\mathcal{B}x$$

όπου α,α_i είναι $d\times d$ πίνακες, b,b_i $d-$διάστατα διανύσματα και $\mathcal{B}=(b_1,b_2,\ldots,b_d)$. Επιπλέον οι συναρτήσεις ϕ και $\psi=(\psi_1,\psi_2,...,\psi_d)$ ικανοποιούν το Συστημά Διαφορικών Εξισώσεων Riccati

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}(t,u)=\frac{1}{2}\psi(t,u)^T a_0\psi(t,u)+b_0^T\psi(t,u)$$

$$\phi(0,u)=0$$

$$\frac{\partial\psi_i}{\partial t}(t,u)=\frac{1}{2}\psi(t,u)^T a_i\psi(t,u)+b_i^T\psi(t,u)$$

$$\psi(0,u)=u$$

για $1\le i\le d$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω ότι η X είναι μία διαδικασία Affine. Για $T>0$ και $u\in i\mathbb{R}^d$, ορίζουμε

$$M_t=e^{\phi(T-t,u)+\psi(T-t,u)^T X(t)}$$

θέτουμε $f(t,x)=e^{\phi(T-t,u)+\psi(T-t,u)^T x}$ και θα εφαρμόσουμε σε αυτή την φόρμουλα Ito, οπότε χρειαζόμαστε τις εξής μερικές παραγώγους

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,X_t)=(\phi(T-t,u)+\psi(T-t,u)^T x)M_t$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(t,X_t)=\psi_i M_t$$

$$\frac{\partial^{2f}}{\partial x_i\partial x_j}(t,X_t)=\psi_i\psi_j M_t$$

Επίσης

$$\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}a_{ij}(X_t)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}=\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}a_{ij}(X_t)\psi_i\psi_j M_t=\psi^T a(X_t)\psi M_t$$

Όποτε έχουμε

$$dM_t = [(\frac{\partial \phi}{\partial t}(T-t,u) + \frac{\partial \psi}{\partial t}(T-t,u)^T X_t)M_t + b(X_t)^T\psi(T-t,u)M_t +$$

$$\frac{1}{2}\psi(T-t,u)^T a(X_t)\psi(T-t,u)M_t]dt + (\nabla f \sigma(X_t))dW_t$$

Επειδή το (M_t) είναι martingale θα πρέπει να ισχύει ότι

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(T-t,u)+\frac{\partial \psi}{\partial t}(T-t,u)^T X_t+b(x)^T\psi(T-t,u)+\frac{1}{2}\psi(T-t,u)^T a(x)\psi(T-t,u) = 0$$

Επίσης έυκολα παρατηρούμε ότι ισχύει

$$\frac{\partial \phi}{\partial T} = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial T} = -\frac{\partial \psi}{\partial t}$$

οπότε η προηγούμενη σχέση γίνεται

$$\frac{\partial \phi}{\partial T}(T-t,u)+\frac{\partial \psi}{\partial T}(T-t,u)^T x = b(x)^T\psi(T-t,u)M_t+\frac{1}{2}\psi(T-t,u)^T a(x)\psi(T-t,u)$$

Για $t=0, u \in i\mathbb{R}^d, x \in \mathbb{R}^d, T \geq 0$

(1.2.1)

$$\frac{\partial \phi}{\partial T}(T,u) + \frac{\partial \psi}{\partial T}(T,u)^T x = b(x)^T\psi(T,u) + \frac{1}{2}\psi(T,u)^T a(x)\psi(T,u)$$

Για $T=0$

$$\frac{\partial \phi}{\partial T}(0,u) + \frac{\partial \psi}{\partial T}(0,u)^T x = b(x)^T u + \frac{1}{2}u^T a(x)u$$

Από αυτή την εξίσωση μπορούμε να συμπεράνουμε ότι οι b, σ έχουν την ζητούμενη μορφή. Θα το δούμε για την περίπτωση που $d=1$.

$$\frac{\partial \phi}{\partial T}(0,u) + \frac{\partial \psi}{\partial T}(0,u)x = b(x)u + \frac{1}{2}ua(x)u$$

Πρώτα παρατηρούμε ότι το αριστερό μέρος της εξίσωσης είναι γραμμικό ως προς x, άρα θα έχει τη μορφή

$$iI(u,x) + R(u,x)$$

όπου I, R είναι συναρτήσεις γραμμικές ως προς x. Επειδή $u \in i\mathbb{R}$ έχουμε ότι $u^2 \in \mathbb{R}$, οπότε

$$R(u,x) = \frac{1}{2}u^2 a(x)$$

$$I(u,x) = b(x)Re(u)$$

Άρα οι a, b θα είναι γρμμικές (Affine) ως προς x.

Τελός γυρνάμε στην περίπτωση που $d > 1$, παίρνουμε το x να έχει μηδενικά εκτός από την i-θέση στην οποία έχει 1, προκύπτει το ζητούμενο Σύστημα Διαφορικών Εξισώσεων Riccati. □

Παρατηρηση 1.2.3. Στο προηγούμενο θεώρημα χρησιμοποίσαμε μια βασική ιδιότητα των διαδικασιών Ito. Μια διαδικασία Ito είναι local martingale αν και μόνο αν η τάση (drift) της είναι μηδέν

Θεωρημα 1.2.4. *Έστω $(X_t)_t$ η στοχαστική διαδικασία, που είναι λύση της εξής στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης*

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t$$
$$X_0 = x$$

για τους συντελεστές της οποίας ισχύει

$$a(x) = \sigma(x)\sigma(x)^T = a + \sum_{i=1}^{d} x_i a_i$$

$$b(x) = b + \sum_{i=1}^{d} x_i b_i = b + \mathcal{B}x$$

όπου α,α_ι είναι $d \times d$ πίνακες, b,b_i $d-$διάστατα διανύσματα και $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \ldots, b_d)$. Αν το παρακάτω σύστημα διαφορικών εξισώσεων Riccati

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t,u) = \frac{1}{2}\psi(t,u)^T a(x)\psi(t,u) + b(x)^T\psi(t,u)$$
$$\phi(0,u) = 0$$
$$\frac{\partial \psi_i}{\partial t}(t,u) = \frac{1}{2}\psi(t,u)^T a_i(x)\psi(t,u) + b_i(x)^T\psi(t,u)$$
$$\psi(0,u) = u$$

έχει λύση τέτοια ώστε η συνάρτηση $\phi(t,u) + \psi(t,u)^T x$ να έχει αρνητικό πραγματικό μέρος γιά όλα τα $t \geq 0$, $u \in i\mathbb{R}^n$, $x \in S$. Τότε η X είναι μία διαδικασία Affine.

Αποδειξη. Έστω (ϕ, ψ) μια λύση του συστήματος διαφορικών εξισώσεων Riccati. Θέτουμε

$$M_t = e^{\phi(T-t,u)+\psi(T-t,u)^T X(t)}$$

και εφαρμόζουμε σε αυτό την formula Ito όπως και στην απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος, οπότε έχουμε:

$$dM_t = [(-\frac{\partial \phi}{\partial T}(T-t,u) - \frac{\partial \psi}{\partial T}(T-t,u)^T X_t)M_t + b(X_t)^T\psi(T-t,u)M_t +$$

$$\frac{1}{2}\psi(T-t,u)^T a(X_t)\psi(T-t,u)M_t]dt + (\nabla f b(X_t))dW_t$$

Επειδή η (ϕ,ψ) είναι μια λύση του συστήματος διαφορικών εξισώσεων Riccati, προκύπτει ότι

$$dM_t = (\nabla f b(t))dW_t$$

επομένος το $(M_t)_t$ είναι local martingale . Όμως το $\phi(t,u)+\psi(t,u)^T x$ έχει αρνητικό πραγματικό μέρος οπότε είναι ομοιόμοραφα φραγμένο, άρα είναι και martingale. Παρατηρούμε ότι $M_T = e^{u^T X_T}$και επειδή το $(M_t)_t$ είναι martingale, έχουμε $E(M_T \mid \mathcal{F}_t) = M_t$. Όποτε

$$E(e^{u^T X(T)} \mid \mathcal{F}_t) = e^{\phi(T-t,u)+\phi(T-t,u)^T X(T)}$$

□

1.3. Παραδείγματα μονοδιάστατων διαδικασιών *Affine*

Μια μονοδιάστατη διαδικασία Affine $(X_t)_t$ με βάση τα αποτελέσματα της προηγούμενης παραγράφου θα είναι λύση μιας στοχαστικής διαφορική εξίσωσης

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t$$

$$X_0 = x$$

για την οποία θα ισχύει

$$\sigma(x)^2 = a(x) = a_0 + a_1 x$$

και

$$b(x) = b_0 + b_1 x$$

Επίσης το σύστημα διαφορικών εξισώσεων Riccati, που χρειάζεται να λύσουμε για να υπολογίσουμε την χαρακτηριστική συνάρτηση της διαδικασίας είναι το εξής

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t,u) = \frac{1}{2}a_0\psi(t,u)^2 + b_0\psi(t,u)$$

$$\phi(0,u) = 0$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(t,u) = \frac{1}{2}a_1\psi(t,u)^2 + b_1\psi(t,u)$$

$$\psi(0,u) = u$$

Παραδειγμα 1.3.1. Το πιο απλό παράδειγμα μονοδιάστατης διαδικασίας Affine, είναι η κινηση Brown. Θεωρούμε την εξής κίνηση Brown

$$dX_t = b_0 dt + a_0 dW_t$$

$$X_0 = x$$

Με βάση των παραπάνω φορμαλισμό έχουμε ουσιαστικά διαλέξει

$$a_1 = b_1 = 0$$

και το σύστημα διαφορικών εξισώσεων Riccati παίρνει την μορφή

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t,u) = \frac{1}{2}a_0\psi(t,u)^2 + b_0\psi(t,u)$$
$$\phi(0,u) = 0$$
$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(t,u) = 0$$
$$\psi(0,u) = u$$

Οπότε έχουμε $\psi(t,u) = u$ και η πρώτη εξίσωση γίνεται

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t,u) = \frac{1}{2}a_0 u^2 + b_0 u$$

και λύνωντας αυτή καταλλήγουμε $\phi(t,u) = (\frac{1}{2}a_0u^2 + b_0u)t$. Οπότε η δεσμευμένη χαρακτηριστική συνάρτηση της κίνησης Brown παίρνει την μορφή

$$E(e^{uX_T} \mid \mathcal{F}_t) = e^{(\frac{1}{2}a_0u^2 + b_0u)(T-t) + uX_t}$$

Παραδειγμα 1.3.2. Ένα ακόμα απλό παράδειγμα είναι το μοντέλο Vasicek:

$$dX_t = b(m - X_t)dt + \sigma dW_t$$

όπου

$b_0 = mb$
$b_1 = -b$
$a_0 = \sigma^2$
$a_1 = 0$

Επομένως το σύστημα διαφορικών εξισώσεων Riccati θα έχει την μόρφη

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t,u) = \frac{1}{2}a_0\psi(t,u)^2 + b_0\psi(t,u)$$
$$\phi(0,u) = 0$$
$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(t,u) = b_1\psi(t,u)$$
$$\psi(0,u) = u$$

Λύνουμε πρώτα την εξίσωση για την ψ, οπότε έχουμε $\psi(t,u) = ue^{b_1 t}$. Έπειτα την αντικαθιστούμε στην εξίσωση για την ϕ και προκύπτει ότι

$$\phi(t,u) = \int_0^t (\frac{1}{2}a_0 ue^{2b_1 t} + b_0 ue^{b_1 t})dt$$

$$\phi(t,u) = \frac{1}{2}\frac{a_0}{2b_1}u^2 e^{2b_1 t} + u\frac{b_0}{b_1}e^{b_1 t}$$

Παραδειγμα 1.3.3. Ένα ακομά παράδειγμα είναι το μοντέλο των Cox-Intersoll-Ross (CIR), το οποίο έχει την εξής μορφή

$$dX_t = (\alpha - \beta X_t)dt + \sigma\sqrt{X_t}dW_t$$

Με βάση τον φορμαλισμό των διαδικασιών Affine οι συντελεστές έχουν τις εξής τιμές.

$b_0 = a$
$b_1 = -\beta$
$a_0 = 0$
$a_1 = \sigma^2$

Επομένως το σύστημα διαφορικών εξισώσεων Riccati θα έχει την μόρφη

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}(t,u) = b_0\psi(t,u)$$
$$\phi(0,u) = 0$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial t}(t,u) = \frac{1}{2}a_1\psi(t,u) + b_1\psi(t,u)$$
$$\psi(0,u) = u$$

Οπότε αρχικά λύνουμε την εξής διαφορική εξισωση Riccati:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}(t,u) = \frac{1}{2}a_1\psi(t,u) + b_1\psi(t,u)$$
$$\psi(0,u) = u$$

Θέτωντας $\psi = \frac{1}{y}$ έχουμε

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = -y^2\frac{d\psi}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = -y^2(\frac{1}{2}a_1(\frac{1}{y})^2 + b_1\frac{1}{y})$$
$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2}a_1 - b_1 y$$

Έτσι καταλλήξαμε σε μια γραμμική διαφορική εξίσωση, για την οποία εργαζόμαστε ώς εξής:

$$b_1 e^{b_1 t} y + e^{b_1 t}\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2}a_1 e^{b_1 t}$$

$$y e^{b_1 t} = -\frac{a_1}{2b_1}e^{b_1 t} + c$$

Χρησιμοποιώντας την αρχική συνθήκη, υπολογίζουμε και την παράμετρο c οπότε έχουμε

$$y(t,u) = -\frac{a_1}{2b_1} + (\frac{1}{u} + \frac{a_1}{2b_1})e^{-b_1 t}$$

$$\psi(t,u) = \frac{1}{-\frac{a_1}{2b_1} + (\frac{1}{u} + \frac{a_1}{2b_1})e^{-b_1 t}}$$

$$\psi(t,u) = \frac{e^{b_1 t}}{-\frac{a_1}{2b_1}e^{b_1 t} + (\frac{1}{u} + \frac{a_1}{2b_1})}$$

Θέτω $\gamma = -\frac{a_1}{2b_!}$ και $\delta = \frac{1}{u} + \frac{a_1}{2b_1}$. Οπότε

$$\psi(t,u) = \frac{e^{b_1 t}}{\gamma e^{b_1 t} + \delta}$$

Τέλος για να βρούμε και την $\phi(t,u)$, έχουμε

$$\phi(t,u) = \int_0^t \psi(t,u)dt = \ln(\gamma e^{b_1 t} + \delta) - u$$

1.4. Το μοντέλο στοχαστικής μεταβλητότητας του *Heston*

Το μοντέλο στοχαστικής μεταβλητότητας του Heston είναι ένα παράδειγμα μιας δισδιάστατης διαδικασίας Affine. Το μοντέλο αυτό ορίζεται απο τις εξής στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις

$$dX_1(t) = (k + \kappa X_1(t))dt + \sigma\sqrt{2X_1(t)}dW_1(t)$$

$$dX_2(t) = (r - X_1(t))dt + \sqrt{2X_1(t)}(\rho dW_1(t) + \sqrt{1-\rho^2}dW_2(t))$$

με $k, r \geq 0$, $\kappa \in \mathbb{R}$ και $\rho \in [-1,1]$. Σε μορφή πινάκων παίρνει την εξής μορφή

$$\begin{pmatrix} dX_1(t) \\ dX_2(t) \end{pmatrix} = [\begin{pmatrix} k \\ r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \kappa & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix}]dt$$
$$+ \begin{pmatrix} \sigma\sqrt{2X_1(t)} & 0 \\ \rho\sqrt{2X_1(t)} & \sqrt{(1-\rho^2)2X_1(t)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dW_1(t) \\ dW_2(t) \end{pmatrix}$$

Οι συντελεστές του μοντέλου για την τάση έχουν ως εξής

$$b_0 = \begin{pmatrix} k \\ r \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \kappa & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ενώ για τον πίνακα διάχυσης εργαζόμαστε ως εξής:

$$a(X_1, X_2) = \begin{pmatrix} \sigma\sqrt{2X_1} & 0 \\ \rho\sqrt{2X_1} & \sqrt{(1-\rho^2)2X_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma\sqrt{2X_1} & \rho\sqrt{2X_1} \\ 0 & \sqrt{(1-\rho^2)2X_1} \end{pmatrix}$$

$$a(X_1, X_2) = \begin{pmatrix} 2\sigma^2 X_1 & 2\rho\sigma X_1 \\ 2\rho\sigma X_1 & 2\rho^2 X_1 + 2(1-\rho^2)X_1 \end{pmatrix}$$

$$a(X_1, X_2) = \begin{pmatrix} 2\sigma^2 & 2\rho\sigma \\ 2\rho\sigma & 2\rho^2 + 2(1-\rho^2) \end{pmatrix} X_1$$

Οπότε

$$a_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a_1 = \begin{pmatrix} 2\sigma^2 & 2\rho\sigma \\ 2\rho\sigma & 2\rho^2 + 2(1-\rho^2) \end{pmatrix}$$

$$a_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Τέλος το σύστημα διαφορικών εξισώσεων Riccati παίρνει την μορφή

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = k\psi_1 + r\psi_2$$

$$\phi(0, u) = 0$$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial t} = \sigma^2\psi_1^2 + 2\rho\sigma\psi_1\psi_2 + \psi_2^2 + \kappa\psi_1 - \psi_2$$

$$\psi_1(0, u) = u_1$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial t} = 0$$

$$\psi_2(0, u) = u_2$$

Η λύση της παραπάνω εξίσωσης δίνεται στην παρακάτω Πρόταση.

Πρόταση 1.4.1. *Θεωρούμε την διαφορική εξίσωση Riccati*

$$\frac{\partial}{\partial t}G(t,u) = AG(t,u)^2 + BG(t,u) - C$$

$$G(0,u) = u$$

με $A, B, C \in \mathbb{C}$, $u \in \mathbb{C}$, $A \neq 0$ *και* $B^2 + 4AC \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$, *επίσης θέτουμε* $\lambda = \sqrt{B^2 + 4AC}$ *(όπου με* $\sqrt{}$ *συμβολίζουμε την επέκταση της τετραγωνικής ρίζας στο μιγαδικό επίπεδο). Τότε η συνάρτηση*

$$G(t,u) = -\frac{2C(e^{\lambda t} - 1) - [\lambda(e^{\lambda t} + 1) + B(e^{\lambda t} - 1)]u}{\lambda(e^{\lambda t} + 1) - B(e^{\lambda t} - 1) - 2A(e^{\lambda t} - 1)u}$$

είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης και επιπλέον

$$\int_0^t G(s,u)ds = \frac{1}{A}\log\left(\frac{2\lambda e^{\frac{\lambda - B}{2}t}}{\lambda(e^{\lambda t} + 1) - B(e^{\lambda t} - 1) - 2A(e^{\lambda t} - 1)u}\right)$$

Το μοντέλο συνήθως παρουσιάζεται στην μορφή $X = (X_1, e^{X_2})$. Σε αυτή την μορφή όμως δεν είναι διαδικασία affine και για αυτο το παρουσιάσαμε στην παραπάνω μορφή. Αν υποθέσουμε ότι η τιμή μιάς μετοχής κάτω από ένα μετρό ουδέτερου κινδύνου, ακολουθεί το μοντέλο του Heston, θα έχουμε

$$dS_t = rS_t dt + S_t\sqrt{2X_1}d\mathcal{W}$$

όπου S_t η τιμή της μετοχής και $\mathcal{W} = \rho W_1 + \sqrt{1-\rho^2}W_2$ κίνηση Brown. Η $\sqrt{2X_1}$ είναι η στοχαστική μεταβλητότητα της στοχαστικής διαδικασίας της μετοχής και το σ έχει την έννοια δεύτερης τάξης μεταβλητότητας (δηλαδή μεταβλητότητα της μεταβλητότητας).

Η λύση για την παραπάνω στοχαστική εξίσωση για την μετοχή θα έχει την μορφή

$$S_t = S_0 e^{\int_0^t (r - X_1(t))dt + \int_0^t \sqrt{2X_1}d\mathcal{W}_t}$$

Κεφάλαιο 2

Fractional κίνηση Brown και το μοντέλο Rough Heston

2.1. Ορισμός Fractional κίνησης Brown

Η fractional κίνηση Brown (fbm σε συντομογραφία), είναι μια στοχαστική διαδικασία με τρεις πολύ απλές ιδότητες, είναι καταρχήν μια διαδικασία Gauss, έχει την ιδιότητα της self similarity και έχει στάσιμες προσαυξήσεις. Παρακάτω δίνεται ο αυστηρός ορισμός.

Ορισμος 2.1.1. Έστω $H \in [0,1]$. Μια fractional κίνηση Brown (fbm) με παράμετρο H είναι μία στοχαστική διαδικασία $B^H = (B_t^H)_{t\geq 0}$ η οποία είναι μια διαδικασία Gauss με συνδιασπορά

$$cov(B_t^H, B_s^H) = \frac{1}{2}(\mid t \mid^{2H} + \mid s \mid^{2H} - \mid t-s \mid^{2H})$$

και $B_0^H = 0$.

Από τον ορίσμο της fbm προκύπτουν τα εξής:

(1) $B_0^H = 0$ και $E(B_t^H) = 0$ για κάθε θετικό t
(2) Η $B_t^H - B_s^H$ έχει την ίδια κατανομή με την B_{t-s}^H για $s,t \geq 0$ (δηλαδή έχουμε στάσιμες προσαυξήσεις)
(3) Η fbm είναι μια διαδικασία Gauss οπότε B_t^H ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(0, t^{2H})$

Επίσης από το θεώρημα $Kolmogorov - Censtov$ η fbm έχει μια συνεχή εκδοχή, την οποία θα χρησιμοποιούμε. Οπότε όταν αναφερόμαστε σε μια fbm θα εννούμε την συνεχή εκδοχή της.

Παρατηρηση 2.1.2. Η $B^H = (B_t^H)_t$ ορίζεται και για t σε όλο το $\mathbb{R}$.

Παρατηρηση 2.1.3. Η $B^H = (B_t^H)_t$ για $H = \frac{1}{2}$ είναι μια κίνηση Brown

Παρατηρηση 2.1.4. Η $B^H = (B_t^H)_t$, για $H = 1$, έχει διασπορά $E[(B_t^1)^2] = t^2$. Σε αυτή την περίπτωση έχει μια αναπαράσταση της μορφής $B_t^1 = tZ$, όπου Z τυχαία μεταβλητή, που ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή.

2.2. Βασικές ιδιότητες της fbm

2.2.1. Αυτο-ομοιότητα (self-similarity).

Ορισμος 2.2.1. Έστω $X = (X_t)_t$ μια στοχαστική διαδικασία αυτή θα λέμε ότι είναι b-αυτοόμοια (b-self-similar) αν οι διαδικασίες $\{X_{at}, t \geq 0\}$, $\{a^b X_t, t \geq 0\}$, έχουν ίδιες πεπερασμένης διάστασης κατανομές για όλα τα $a \in \mathbb{R}_+$.

Μια κίνηση fbm έχει την ιδιότητα της αυτό-ομοιότητας γιατί οι μεταβλητές B^H_{at}, $a^H B^H_t$ έχουν τη ίδια κατανομή (την $N(0,(at)^{2H})$)

2.2.2. Εσωτερική εξάρτηση. Η συνάρτηση συνδιακύμανσης για μια fbm όπως είδαμε δίνεται από την σχέση:

$$cov(B^H_t, B^H_s) = \frac{1}{2}(\mid t \mid^{2H} + \mid s \mid^{2H} - \mid t-s \mid^{2H})$$

Στην περίπτωση της κίνησης Brown ($H = \frac{1}{2}$) ισχύει

$$cov(B^{\frac{1}{2}}_t, B^{\frac{1}{2}}_s) = \min\{t, s\}$$

Έπισης η κίνηση Brown έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις. Αυτή η ιδιότητα δεν ισχύει για τις υπόλοιπες τιμές τις παραμέτρου H της fbm, για την ακρίβεια υπάρχει έντονη συσχέτιση μεταξύ των προσαυξήσεων μιάς fbm, Έστω $s, t \geq 0$ με $s + h \leq t$ και $t - s = nh$, τότε η συνδιασπορά των προσαυξήσεων $B^H_{t+h} - B^H_t$και $B^H_{s+h} - B^H_s$ δίνεται από την σχέση

$$\rho_H(n) = \frac{1}{2}h^{2H}[(n+1)^{2H} + (n-1)^{2H} - 2n^{2H}]$$

Η $\rho_H(n)$ λέγεται συνάρτηση αυτοσυσχέτησης.

Για $H = \frac{1}{2}$ ισχύει ότι $\rho_H(n) = 0$, για $H > \frac{1}{2}$ έχουμε $\rho_H(n) > 0$ και για $H < \frac{1}{2}$ έχουμε $\rho_H(n) < 0$. Επίσης για $h = 1$ και $n \to \infty$ η $\rho_H(n)$ συμπεριφέρεται όπως η ακολουθία $H(2H-1)n^{2H-2}$, δηλαδή

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\rho_H(n)}{H(2H-1)n^{2H-2}} = 1$$

Άρα γιά ολές τις επιτρεπτές τιμές της παραμέτρου H η συνάρτηση αυτοσυσχέτησης πάει στο μηδέν όσο το n μεγαλώνει και ισχύουν τα εξής:

(1) Για $H > \frac{1}{2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \rho_H(n) = \infty$ (σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι η fbm έχει long memory dependence).

(2) Για $H < \frac{1}{2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \rho_H(n) < \infty$

Για την fbm βλέπουμε δύο διαφορετικές συμπεριφορές, για $H < \frac{1}{2}$ οι προσαυξήσεις συσχετίζονται αρνητικά, οπότε οι τροχίες τις θα έχουν τραχία και χαοτική συμπεριφορά, γιατί αν σε ένα χρονικό διάστημα η fbm έχει την τάση να αυξάνει, σε ένα μελλοντικό χρονικό διάστημα λόγω της αρνητικής συσχέτησης των προσαυξήσεών της θα έχει την τάση να μειώνεται. Από την άλλη για $H > \frac{1}{2}$ οι προσαυξήσεις έχουνε θετική συσχέτιση, οπότε οι τροχιές της θα είναι λιγότερο τραχίες, δηλαδή θα έχουν μια ποιό ομαλή συμπεριφορά και δεν θα αλλάζουν τόσο απότομα. Η συμπεριφορά των τροχιών θα φανεί καλύτερα στην επόμενη παράγραφο που θα προσομοιώσουμε μερικές τροχιές για την fbm.

2.2.3. Προσομοίωση τροχιών της fbm. Όπως είδαμε η fbm είναι μία διαδικασία Gauss με γνωστή συνάρτηση διασποράς και για την οποία ισχύει $B_t^H \sim N(0, t^{2H})$. Εμείς θέλουμε να προσομοιώσουμε μερικές τροχιές για να φανεί η διαφορετική συμπεριφορά που έχει ανάλογα με τις τιμές του H. Για να το πετύχουμε, θεωρούμε πρώτα μια πεπερασμένη αύξουσα ακολουθία χρονικών στιγμών

$$(t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n)$$

και θέτουμε

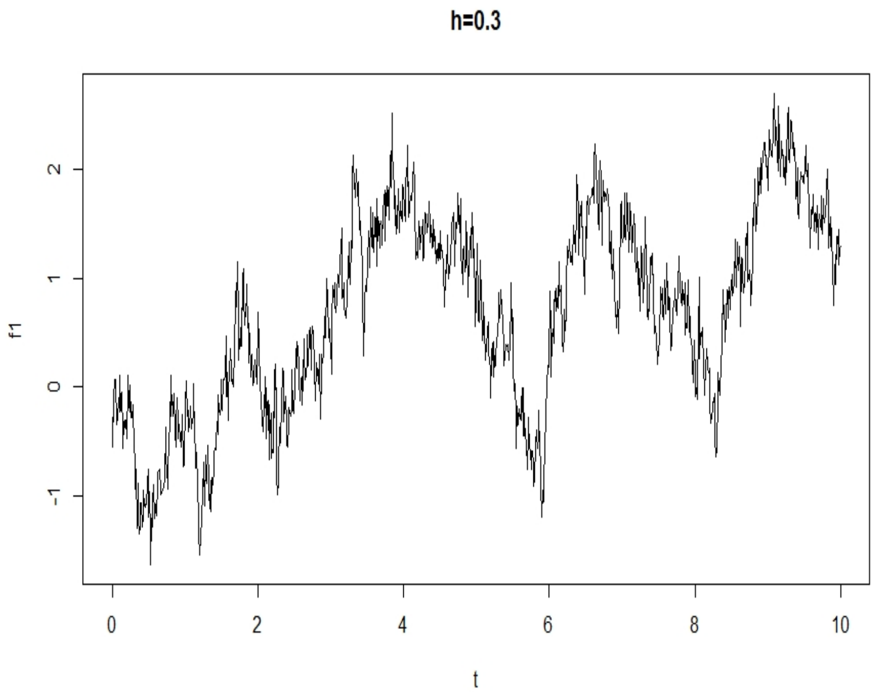
$$B = (B_{t_1}, B_{t_2}, B_{t_3}, \ldots, B_{t_n})$$

Η B ακολουθεί πολυδιάσταστη κανονική κατανομή με γνωστό πίνακα συνδιασποράς Σ. Τα στοιχεία του πίνακα Σ, δίνονται από την σχέση

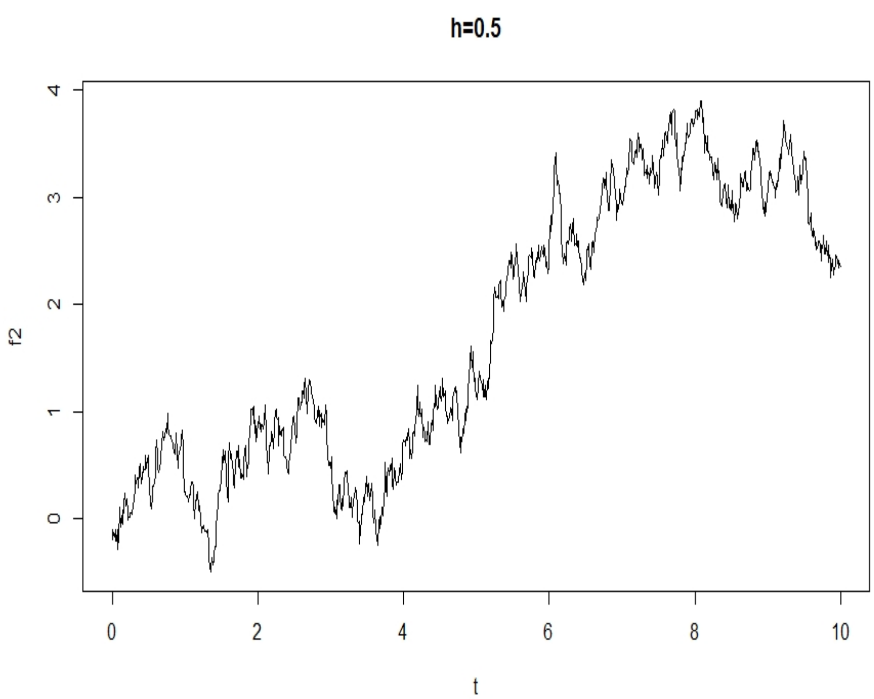
$$\Sigma_{ij} = cov(t_i, t_j) = \frac{1}{2}(\mid t_i \mid^{2H} + \mid t_j \mid^{2H} - \mid t_i - t_j \mid^{2H})$$

Στον πίνακα Σ μπορούμε να εφαρμόσουμε μια παραγοντοποίηση Cholesky δηλαδή να τον γράψουμε στην μορφή $\Sigma = UU^T$, όπου U άνω τριγωνικός πίνακας. Αν Z είναι ένα τυχαίο διάνυσμα από ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές από την τυπική κανονική κατανομή, τότε οι μεταβλητές B και UZ είναι ισόνομες. Εμείς θα προσομοιώσουμε την μεταβλητή UZ. Στις παρακάτω τρείς εικόνες προσομοιώνονται τρεις τροχιές της fbm για $H = 0.3,\ 0.5,\ 0.8$.

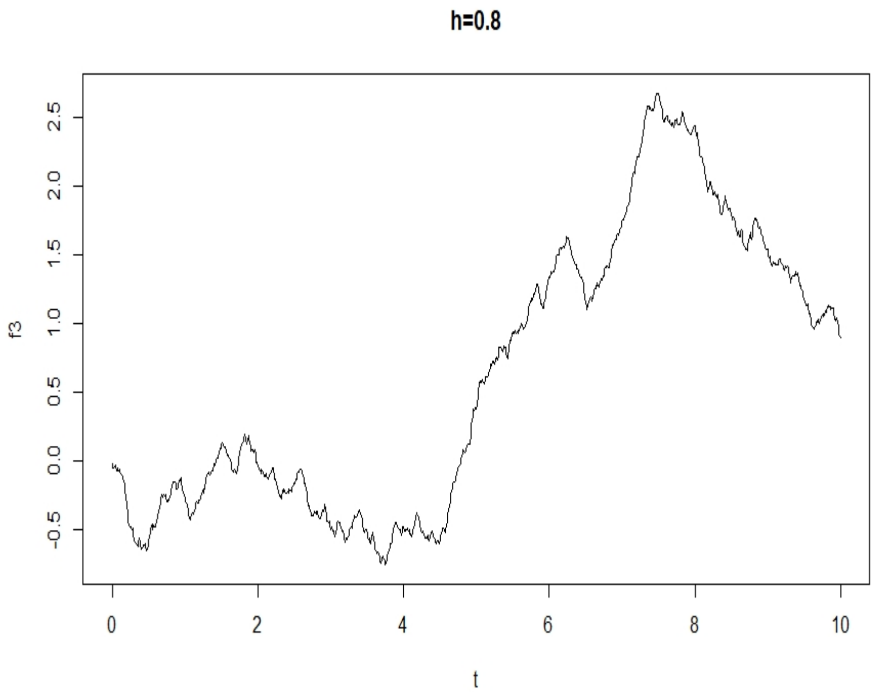
Παρατηρηση 2.2.2. Ένας τετραγωνικός πίνακας έχει παραγοντοποίηση Cholesky αν είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος. Ένας πίνακας διασποράς είναι πάντα συμμετρικός και θετικά ορισμένος.



Σχημα 2.2.1. Προσομοίωση της fbm για $H = 0.3$



Σχημα 2.2.2. Προσομοίωση της fbm για $H = 0.5$



Σχημα 2.2.3. Προσομοίωση της fbm για $H = 0.8$

Από τις εικόνες είναι εμφανές ότι για $H = 0.3$ η συμπεριφορά τών τροχιών της fbm είναι ποίο απότομη και τραχιά απο ότι για $H = 0.8$. Όσο μικραίνει το H οι τροχιές γίνονται όλο και περισσότερο τραχιές.

2.2.4. Μη διαφορισιμότητα των τροχιών της fbm. Οι τροχιές της κίνησης Brown δεν είναι πουθενά διαφοροποιήσιμες, αυτή την ιδιότητα την έχει γενικά μια διαδικασία fbm με $H \in (0, 1)$. Πίο συγκεκριμένα έχουμε την εξής πρόταση:

Προταση 2.2.3. *Έστω $H \in (0, 1)$. Τότε οι τροχίες μιας fbm $(B_t^H)_t$ δεν είναι διαφορήσιμες. Επίσης ισχύει ότι, $\forall t \in [0, \infty)$*

$$\limsup_{h \to 0} \mid \frac{B_{t+h}^H - B_t^H}{h} \mid = \infty$$

με πιθανότητα 1.

Αποδειξη. Η μεταβλητή

$$\frac{B^H(t_0 + h) - B^H(t_0)}{h}$$

έχει την ίδια κατανομή με τήν

$$\frac{B^H(h)}{h}$$

Οπότε αρκεί να δείξουμε ότι

$$\limsup_{h\to 0} \mid \frac{B^H(h)}{h} \mid = \infty$$

με πιθανότητα 1. Έστω $d > 0$, θέτουμε

$$A_t = \{\sup_{0\leq s\leq t} \frac{\mid B^H(s) \mid}{s} > d\}$$

και θεωρούμε μια φθίνουσα ακολουθία $(t_n)_n$ τέτοια ώστε $t_n \to 0$. Η ακολουθία συνόλων $(A_{t_n})_n$ είναι φθίνουσα και

$$\{\frac{B^H(t_n)}{t_n} > d\} \subset A_{t_n}$$

Λόγω της ιδιότητας της αυτό-ομοιότητας της fbm τα σύνολα

$$\{\frac{B^H(t_n)}{t_n} > d\}$$

και

$$\{B^H(1) > t_n^{1-H} d\}$$

έχουν την ίδια πιθανότητα και διαφέρουν κάτα ένα σύνολο που έχει πιθανότητα μηδέν.

$$P(\cap_n A_n) = \lim_n P(A_n) = \lim_n P(B^H(1) > t_n^{1-H} d)$$

$$= P(\cap_n \{B^H(1) > t_n^{1-H} d\}) = P(\mid B^H(1) \mid > 0) = 1$$

Άρα

$$P(\cap_n A_n) = 1$$

και από το τελευταίο προκύπτει ότι

$$\limsup_{h\to 0} \mid \frac{B^H(h)}{h} \mid = \infty$$

□

2.2.5. Η fbm δεν είναι semimartingale για $H \neq \frac{1}{2}$. Η γενικότερη κατηγορία στοχαστικών διαδικασιών που συναντάμε στον κλασικό στοχαστικό λογισμό είναι τα semimartingales. Για παράδειγμα μια διαδικασία Ito της μορφής

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s$$

είναι ένα semimartingale. Όπως θα δούμε στον παρακάρω ορισμό ένα semimartingale είναι το άθροισμα ένος local-martingale και μίας στοχαστικής διαδικασίας πεπερασμένης κύμανσης.

Ορισμος 2.2.4. Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ένας χώρος πιθανότητας και $(\mathcal{F}_t)$ μία διύλιση ορισμένη σε αυτόν. Μια δεξία συνεχής στοχαστική διαδικασία $(X)_{t\geq 0}$ με πεπερασμένα δεξία όρια λέγεται semimartingale, αν είναι προσαρμοσμένη στην διύλιση $(\mathcal{F}_t)$ και μπορεί να γραφτεί ως άθροισμά ενός local martingale (M_t) και μίας διαδικασίας με πεπεραμένη πρώτης τάξης κύμανση (A_t). Επιπλέον $M_0 = 0$, $A_0 = 0$ και

$$X_t = X_0 + A_t + M_t$$

για κάθε t θετικό ή μηδέν.

Παραδειγμα 2.2.5. Το ποιό απλό παράδειγμα semimartingale είναι η κίνηση Brown. Επίσης κάθε martingale και κάθε διαδικασία φραγμένης κύμανσης είναι semimartingale.

Παραδειγμα 2.2.6. Κάθε *submartingale* είναι semimartingale, γιατί χρησιμοποιώντας το Λήμμα της διάσπασης Doob-Meyer, γράγεται ώς άθροισμα ενός local martinagle και μιας αύξουσας διαδικασίας.

Έστω τώρα $(X_t)_{t\geq 0}$ μία στοχαστική διαδικασία , ένα $t > 0$ και μια διαμέριση $\Pi = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ του $[0, t]$, με $0 = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n$. Ορίζουμε $(p > 0)$ το εξής άθροισμα

$$S_t^{(p)}(\Pi) = \sum_{k=1}^{n} \mid X_{t_k} - X_{t_{k-1}} \mid^p$$

και θέτουμε

$$\mid \Pi \mid := \max_{1\leq k\leq n} \mid t_k - t_{k-1} \mid$$

το κατα πιθανότητα όριο της $S_t^{(p)}$ καθώς το $\mid \Pi \mid \to 0$, ορίζεται ώς p-στη κύμανση της $(X_t)_{t\geq 0}$ και συμβολίζεται με $V_p(X, [0, t])$. Επίσης ορίζουμε ως δείκτη κύμανσης μιας διαδικασίας ως εξής

$$I(X, [0, t]) = \inf\{p > 0 : V_p(X, [0, t]) < \infty\}$$

Παρατηρηση 2.2.7. Για $p = 2$ η $V_p(X, [0,t])$ ονομάζεται τετραγωνική κύμανση και συνήθως συμβολίζεται με $\langle X \rangle_t$

Αποδεικνύεται ότι για μία fbm ισχύει ότι $I(B^H, [0,t]) = \frac{1}{H}$. Όμως κάθε semimartingale X ισχύει ότι $I(X, [0,t]) \in [0,1] \cup \{2\}$ άρα η fbm δεν μπορεί να είναι semimartingale για $H \neq \frac{1}{2}$.

Επειδή η fbm δεν είναι semimartingale δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε την κλασσική θεωρία ολοκλήρωσης του Ito. Στην βιβλιογραφία έχουν οριστεί αρκετά στοχαστικά ολοκληρώματα ως προς μια fbm, για περισσότερες λεπτομέριες παραπέμπουμε στο βιβλίο της Uuliya Mishura «Stochastic Calculus for fractional Brownian Motion and Related Processes»

2.3. Το μοντέλο *Rough Heston*

Οι Mandelbrot και ο Van Ness αποδείξανε στην εργασία τους «Fractional Brownian motions, fractional noises and applications», μια αναπαράσταση για την fbm της μορφής:

$$B_t^H = \frac{1}{\Gamma(a)}(Z_t + \int_0^t (t-s)^{a-1} dW_t)$$

όπου $a = H + \frac{1}{2}$ και Z_t μια διαδικασία με συνεχείς τροχίες. Η διαδικασία

$$W_t^H = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^t (t-s)^{a-1} dW_t$$

λέγεται Liouville fbm και μοιράζεται αρκετές από τις ιδιότητες με την fbm.

Το κλασσικό μοντέλο του Heston είναι αρκετά διάσημο μοντέλο στοχαστικής μεταβλητότητα (Stochastic Volatility). Στο μοντέλο Rough Heston αυτό που αλλάζει, είναι ότι η μεταβλητότητα έχει ποίο τραχιές τροχίες, το οποίο οφείλεται στην εισαγωγή της fbm στο μοντέλο. Το μοντέλο Rough Heston ορίζεται από τις εξισώσεις

$$dS_t = S_t \sqrt{V_t} dW_t$$

$$V_t = V_0 + \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^t (t-s)^{a-1} \lambda(\theta - V_s) ds + \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^t (t-s)^{a-1} \gamma\sigma \sqrt{V_t} dB_t$$

όπου W, B κινήσεις Brown με $\langle dW, dB \rangle_t = \rho dt$ με $\rho \in [-1, 1]$.

Θα δούμε ένα αποτέλεσμα απο την εργασία των Omar El Euch και Mathieu Rosenbaun για την χαρακτηριστική συνάρτηση του Rough Heston. Βάσή αυτού μπορούμε να υπολογίζουμε την χαρακτηριστική συνάρτηση αυτού του μοντέλου λύνωντας μια Fractional Riccati εξίσωση.

Σε επόμενο κεφάλαιο θα δούμε ένα γενικότερο αποτέλεσμα, στο οποίο η χαρακτηριστική συνάρτηση μια Affine Volterra διαδικασίας, υπολογίζεται λύνωντας μιας Volterra Riccati εξίσωση. Θα δούμε πρώτα δύο απλούς ορισμούς.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.3.1. Ορίζουμε ως fractional ολοκλήρωμα τάξης $r \in (0,1]$ μιας συνάρτησης f ως εξής:

$$I^r f(t) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^t (t-s)^{r-1} f(s) ds$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.3.2. Ορίζουμε ως fractional παράγωγο τάξης $r \in (0,1]$ μιας συνάρτησης f ως εξής:

$$D^r f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-r)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-s)^{-r} f(s) ds = \frac{d}{dt} I^{1-a}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.3.3. *Θεωρούμε το μοντέλο Rough Heston με* $\rho \in (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, *τότε για την χαρακτηριστική συνάρτηση του ισχύει ότι*

$$E(e^{uln(S_T)}) = \exp(\phi(T) + \chi(T)V_0)$$

όπου ϕ, χ *ορίζονται από τις σχέσεις*

$$D^a \psi = \frac{1}{2}(u^2 - u) + (u\rho\sigma - \lambda)\psi + \frac{\sigma^2}{2}\psi^2 \tag{2.3.1}$$

$$\phi' = \lambda\theta\chi$$
$$\phi(0) = 0$$
$$\chi' = D^a\psi$$

οπού η ψ *είναι λύση της 2.3.1.*

Κεφάλαιο 3

Συνέλιξη

3.1. Γραμμικές Volterra ολοκληρωτικές Εξισώσεις

Σε αυτή την παράγραφο θα δούμε πολύ γρήγορα μερικές από τις βασικές ιδιότητες των Ολοκληρωτικών εξισώσεων Volterra, αλλά κυριώς τις έννοιες του resolvent και της συνέληξης συναρτήσεων, που θα μας χρειαστούν σε επόμενες παραγράγους.

Μια μονοδιάστατη Γραμμική Ολοκληρωτική εξίσωση Volterra έχει την μορφή

$$x(t) + \int_0^t k(t-s)x(s)ds = f(t)$$

όπου x, f, k είναι συναρτήσεις από τον $\mathbb{R}^+$ στον $\mathbb{R}$. Η άγνωστη συνάρτηση είναι η x, την k την ονομάζουμε συνάρτηση πυρήνα (kernel) και την f δυναμική συνάρτηση (forcing function). Οι ελάχιστες υποθέσεις που κάνουμε πρός το παρόν είναι ότι οι k, fείναι τοπικά ολοκληρώσιμές.

Η λύση της παραπάνω εξίσωσης μπορεί να γραφτεί στη μορφή:

$$x(t) = f(t) - \int_0^t r(t-s)f(s)ds$$

όπου r μια συνάρτηση που ονομάζεται resolvent και θα δούμε πίο αναλυτικά παρκάτω.

Αυτή η μορφή της λύσης, είναι ανάλογη με την μέθοδο μεταβλητών συντελεστών σε γραμμικά συστήματα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης. Έστω το μη ομογενές γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης $x' = Ax + b$ αν Ψ ένας θεμελιώδης πίνακας λύσεων της ομογενής εξίσωσης, τότε μια ειδική λύση της μη ομογενής δίνεται από την σχέση:

$$x(t) = \Psi(t)\Psi^{-1}(0)x_0 + \Psi(0)\int_0^t \Psi^{-1}(s)b(s)ds$$

Το resolvent είναι ανάλογο του θεμελιώδη πίνακα λύσεων $\Psi(t)$.

Όρίζουμε τώρα ώς συνέλιξη δύο συναρτήσεων a, b ως εξής

$$(a * b)(t) = \int_0^t a(t-s)b(s)ds$$

οπότε η αρχική ολοκληρωτική εξίσωση γράφεται στην μορφή

$$x + k * x = f$$

Παρατηρηση 3.1.1. Η συνέλιξη ορίζεται με τον ίδιο τρόπο και όταν οι a, b είναι πίνακες συναρτήσεων, αρκεί βέβαια να έχουν τις κατάλληλες διαστάσεις.

Παρακάτω έχουμε μερικές από τις βασικές ιδιότητες της συνέλιξης συναρτήσεων.

Θεωρημα 3.1.2. *1. Αν $a \in L^1(\mathbb{R}_+)$ και $b \in L^p(\mathbb{R}_+)$ τότε $a * b \in L^p(\mathbb{R}_+)$. Επιπλέον $|| a * b ||_{L^p} \leq || a ||_{L^1} || b ||_{L^p}$*

2. Αν $a \in L^1(\mathbb{R}_+)$ και $b \in L_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ τότε $a * b \in BC_0(\mathbb{R}_+)$, όπου $L_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ ο χώρος των φραγμένων μετρήσιμων συναρτήσεων, που τείνουν στο μηδέν στο άπειρο και $BC_0(\mathbb{R}^+)$ ο χώρος των φραγμένων και συνεχών συναρτήσεων που τείνουν στο μηδέν στο άπειρο.

3. Αν $a \in L^1(\mathbb{R}_+)$ και $b \in BC_l(\mathbb{R}_+)$ τότε $a * b \in BC_l(\mathbb{R}_+)$, όπου $BC_l(\mathbb{R}_+)$ ο χώρος των φραγμένων συνεχών συναρτήσεων, με πεπερασμένα όρια στο άπειρο.

4. Αν $a \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $b \in L^1(\mathbb{R}_+)$ και $c \in L^q(\mathbb{R}_+)$ με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, τότε

$$a * (b * c) = (a * b) * c$$

Επίσης με αυτές τις υποθέσεις η αντιμεταθετική ιδιότητα, ισχύει με οπιαδήποτε σειρά και να τα τοποθετήσουμε.

5. Αν $a, b \in L^1(\mathbb{R}_+)$ και $c \in BL^1(\mathbb{R}_+)$ (ο χώρος των φραγμέων και ολοκληρώσιμων συναρτήσεων) τότε

$$a * (b * c) = (a * b) * c$$

6. Αν a, b βαθμωτές συναρτήσεις τότε $a * b = b * a$

Ας επιστρέψουμε στην εξίσωση $x + k * x = f$, όπως είπαμε η λύση της θα έχει την μορφή $x = f - r * f$. Η συνάρτηση r ονομάζεται resolvent (δεύτερου είδους) του πυρήνα k και ικανοποιεί τις εξής δύο εξισώσεις:

$$r = k - k * r$$

$$r = k - r * k$$

Όταν οι δύο αυτές εξισώσεις έχουν λύση, αυτή θα είναι και μοναδική. Επίσης για κατάλληλα επιλεγμένη f η $x + k * x = f$ θα έχει και αυτή μια μοναδική λύση. Πράγματι αν εφαρμόσουμε το $r*$ στην $x + k * x = f$ έχουμε

$$r * x + r * (k * x) = r * f$$

και έπειτα εφαρμόσουμε $*x$ στην $r + r * k = k$,

$$r * x + r * (k * x) = r * x$$

Χρησιμοποιώντας της δύο τελευταίες εξισώσεις

$$r * x = r * f$$

Και έτσι η εξίσωση $x + k * x = f$ γίνεται

$$x = f - r * f$$

που ουσιαστικά αυτή είναι η λύση της.

Σε αυτό το σημείο θα δούμε θεωρήματα μοναδικότητας και ύπαρξης λύσης για την εξίσωσης $x+k*x = f$, όπου x, f διανύσματα και k πίνακας. Το πρώτο θεώρημα αφορά ύπαρξη και μονδικότητα του resolvent.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.1.3. *Έστω $k \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^{nxn})$. Τότε υπαρχει μια μοναδική λύση $r \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^{nxn})$ των δύο εξισώσεων $r + k * r = r + r * k = k$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θα αποδείξουμε πρώτα την ύπαρξη. Θέτουμε

$$r_0(t) = k(t)$$

$$r_m(t) = k(t) - \int_0^t k(t-s) r_{m-1} ds$$

Από την προηγούμενη σχέση επαγωγικά μπορούμε να δείξουμε το εξής

$$r_m = -\sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} k^{*j}$$

όπου με k^{*j} συμβολίζουμε τις $(j-1)$ συνελίξεις του k με τον εαυτό του. Από το 1 του θεωρήματος 3.1.2 έχουμε ότι

$$\| k^{*j} \|_{L^1} \leq \| k \|^j_{L^1}$$

Χωρίς να περιορίσουμε την γενικότητα μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$\| k \|_{L^1} = \int_0^T | k(s) | ds < 1$$

Άρα η $(r_m)_m$ είναι Cauchy ακολουθία του L^1. Ο L^1είναι πλήρης οπότε η $(r_m)_m$ είναι συγκλίνουσα και θα συμβολίζουμε το όριο της με r. Για κάθε $m \geq 2$ ισχύει ότι

$$r_m + k * r_{m-1} = r_m + r_{m-1} * k = k$$

Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι

$$\lim_m k * r_{m-1} = k * r$$

$$\lim_m r_{m-1} * k = r * k$$

Και τα δύο όρια είναι με την L^1 εννοία. Χρησιμοποιώντας τις τελευταίες σχέσεις προκύπτει το ζητούμενο.

Μένει να δούμε ότι δεν είναι περιοριστική η υπόθεση ότι

$$|| k ||_{L^1} = \int_0^T | k(s) | ds < 1$$

Για την συνάρτηση $e^{-\sigma t}k(t)$ ισχύει ότι $| e^{-\sigma t}k(t) | \leq k(t)$, εφαρμόζοντας το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης προκύπτει ότι

$$\lim_{\sigma \to \infty} \int_0^T | e^{-\sigma s}k(s) | ds = 0$$

Άρα υπάρχει $\sigma > 0$ τέτοιο ώστε

$$\int_0^T | e^{-\sigma s}k(s) | ds < 1$$

Θέτουμε $a(t) = e^{-\sigma t}k(t)$. Οπότε όπως είδαμε οι εξισώσεις

$$q + a * q = q + q * a = a$$

έχουν λύση και συμβολίζουμε την λύση τους με q. Ορίζουμε

$$r(t) = e^{\sigma t}q(t)$$

και προκύπτει εύκολα από τον ορισμό της συνέλιξης ότι

$$r + k * r = r + r * k = k$$

Θα δείξουμε τώρα την μοναδικότητα. Έστω r, q δύο λύσεις της εξίσωσης, οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} r = k - r * k &= k - r * (q + q * k) \\ &= k - r * q - r * (k * q) \\ &= k - r * q - (r * k) * q \\ &= k - (r + r * k) * q \\ &= k - k * q \\ &= q \end{aligned}$$

$\square$

Μετά από το θεώρημα ύπαρξης του resolvnet, αξίζει να σημειωθεί ότι πολλές ιδιότητες του πυρήνα k μεταφέρονται στο resolvent του. Για παράδειγμα αν $k \in BC_l(\mathbb{R}_+)$ από το Θεώρημα 3.1.2 θα ανήκει και το $r*k$ στον $BC_l(\mathbb{R}_+)$ και από την σχέση $r = k - r*k$ προκύπτει ότι και το r θα ανήκει στον $BC_l(\mathbb{R}_+)$.

Το επόμενο θεώρημα αφορά ύπαρξη και μοναδικότητα των Ολοκληρωτικών εξισώσεων Volterra.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.1.4. *Έστω $k \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^{nxn})$. Τότε για κάθε $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^{nxn})$ υπάρχει μοναδική λύση $x \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^{nxn})$ της εξίσωσης $x + k*x = f$ και η λύση δίνεται από την φόρμουλα*

$$x(t) = f(t) - (r*f)(t)$$

όπου r το resolvent του k.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θέτουμε $x = f - r*f$, θα δείξουμε ότι η x ικανοποιεί την $x + k*x = f$.

$$\begin{aligned} x + k*x &= x + k*(f - r*f) \\ &= x + k*f - k*(r*f) \\ &= x + k*f - (k*r)*f \\ &= x + (k - k*r)*f \\ &= x + r*f \\ &= x \end{aligned}$$

Αντίστροφα έστω ξ μια λύση της $x + k*x = f$. Έχουμε

$$\begin{aligned} x &= f - k*x \\ &= f - (r + r*k)*x \\ &= f - r*(x + k*x) \\ &= f - r*f \end{aligned}$$

Άρα $x = f - r*f$ και αποδείκτηκε το ζητούμενο. $\square$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3.1.5. Η μοναδικότητα στα παραπάνω θεωρήματα, είναι με την σχεδόν παντού έννοια, δηλαδή αν έχουμε δύο λύσεις αυτές θα είναι ίσες παντού εκτός, από ένα σύνολο μέτρου μήδεν.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3.1.6. Όσα αναφέραμε επεκτείνονται και στην περίπτωση που το k είναι πίνακας συναρτήσεων και τα x, f είναι διανύσματα συναρτήσεων.

Για να κλείσουμε, θα αναφέρουμε και την Ολοκληρωτική εξίσωση Volterra πρώτου είδους, η οποία έχει την μορφή:

$$\int_0^t k(t-s)x(s)ds = f(t)$$

Σε αυτή την εξίσωση το resolvent r του πυρήνα k, λέγεται resolvent πρώτου είδους και προκύπτει ως λύση των εξισώσεων

$$(k * r)(t) = (r * k)(t) = id(t)$$

όπου $id(t)$ η ταυτοτική απεικόνιση, δηλαδή ο μοναδιαίος πίνακας, άρα σε μια διάσταση $id(t) = 1$.

3.2. Συνέλιξη μέτρων και συναρτήσεων

Στην προηγούμενη παράγραφο ορίσαμε την συνέλιξη δύο βαθμωτών συναρτήσεων a,b ως εξής:

$$(a * b)(t) = \int_0^t a(t-s)b(s)ds$$

Ο ορισμός και οι ιδιότητες της συνέλιξης που είδαμε, μεταφέρονται και στην περίπτωση που οι a,b είναι πίνακες συναρτήσεων, με κατάλληλες διαστάσεις ώστε να ορίζονται τα γινόμενα ab και ba. Η μόνη ιδιότητα που δεν μεταφέρεται είναι η $a * b = b * a$.

Παρακάτω θα επεκτείνουμε τον ορισμό της συνέλιξης, σε μέτρα με συναρτήσεις. Θα δούμε πρώτα όμως κάποιους ορισμούς από την θεωρία μέτρου.

Ορισμος 3.2.1. Έστω $(\Omega, \mathcal{F})$ ένας μετρήσιμος χώρος και μια συνολοσυνάρτηση $\mu : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$, αυτή θα λέγεται πράγματικο μέτρο, αν ικανοποιεί τις δύο εξής ιδιότητες:

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. $\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_i) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_i)$ αν $(E_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ακολουθία ξένων ανά δύο μετρήσιμων συνόλων.

Το μ θα λέγεται θετικό μέτρο αν ικανοποιεί την 1, 2 και $\mu : \mathcal{F} \to \mathbb{R}_+$και μιγαδικό αν ικανοποιεί της 1, 2 και $\mu : \mathcal{F} \to \mathbb{C}$

Παρατηρηση 3.2.2. Η διαφορά ενός θετικού με ένα σ-αθροιστικό μέτρο, είναι ότι στο πρώτο υποθέτουμε ότι η σειρά $\sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_i)$ συγκλίνει σε ένα θετικό αριθμό, ενώ στο δεύτερο επιτρέπουμε, η σειρά να πάρει και την τιμή άπειρο.

Ορισμος 3.2.3. Έστω $(\Omega, \mathcal{F})$ ένας μετρήσιμος χώρος και μ ένα μιγαδικό (ή πραγματικό) μέτρο. Τότε ορίζουμε με $\mid \mu \mid$, την συνολοσυνάρτηση

$$\mid \mu \mid (E) = \sup \sum_{i=1}^{\infty} \mid \mu(E_i) \mid$$

όπου $E \in \mathcal{F}$ και το *supremum* το παίρνουμε πάνω σε όλες τις διαμερίσεις του E. Η $\mid \mu \mid$ λέγεται ολική κύμανση του μ.

Παρατηρηση 3.2.4. Είναι πολύ εύκολο να δούμε ότι άν το μ είναι ένα θετικό μέτρο, τότε $\mid \mu \mid = \mu$

Θεωρημα 3.2.5. *Έστω $(\Omega, \mathcal{F})$ ένας μετρήσιμος χώρος και μ ένα μιγαδικό (ή πραγματικό) μέτρο ορισμένο σε αυτόν, τότε το $\mid \mu \mid$ είναι θετικό μέτρο και*

$$\mid \mu \mid (\Omega) < \infty$$

Ας θεωρήσουμε τώρα μ, λ δύο μιγαδικά μέτρα τότε ορίζουμε, την πρόσθεση δύο μιγαδικών μέτρων και τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό ως εξής

$$(\mu + \lambda)(E) := \mu(E) + \lambda(E)$$

$$(c\mu)(E) := c\mu(E)$$

όπου $c \in \mathbb{C}$ και E μετρήσιμο σύνολο. Μετά είναι αρκετά απλό να δούμε ότι τα $\mu + \lambda$ και $c\mu$ είναι μιγαδικά μέτρα. Οπότε ο χώρος όλων των μιγαδικών μέτρων είναι ένας γραμμικός χώρος και θα τον συμβολίζουμε με $M(\mathbb{C})$ (ή $M(\mathbb{R})$ για πραγματικά μέτρα). Επίσης η νόρμα σε αυτό τον χώρο ορίζεται ως εξής

$$\parallel \mu \parallel = \mid \mu \mid (\Omega)$$

Αντίστοιχα μπορούμε να δούμε όλα τα παραπάνω για έναν πίνακα $n \times m$ που αποτελείται από βαθμωτά μιγαδικά (ή πραγματικά) μέτρα. Τον χώρο αυτών των μέτρων θα τον συμβολίζουμε με $M(\mathbb{C}^{n \times m})$ (αντίστοιχα $M(\mathbb{R}^{n \times m})$).

Θα ορίσουμε τώρα την συνέλιξη μεταξύ ενός μέτρου και μίας μετρήσιμης συνάρτησης.

Ορισμος 3.2.6. Έστω $\mu \in M(\mathbb{R})$ και a μετρήσιμη συνάρτηση, ορίζουμε ως συνέλιξη $\mu * a$ του μέτρου μ και της συνάρτησης a ως εξής:

$$(\mu * a)(t) = \int_0^t \mu(ds) a(t - s)$$

και αντίστοιχα

$$(\alpha * \mu)(t) = \int_0^t a(t-s)\mu(ds)$$

Πρέπει να τονιστεί ότι το ολοκλήρωμα

$$(\mu * a)(t) = \int_0^t \mu(ds)a(t-s)$$

όταν μ, a μονοδιάστατα είναι ίσο πάντα με το

$$(\alpha * \mu)(t) = \int_0^t a(t-s)\mu(ds)$$

Αυτό δεν ισχύει όταν επεκτείνουμε τον ορισμό γιά $\mu \in M(\mathbb{C}^{n\times m})$ και a πίνακας συναρτήσεων με τιμές στον $\mathbb{C}^{n\times m}$. Για παράδειγμα άν $\mu \in M(\mathbb{R}^{n\times n})$ και ο α παίρνει τιμές στον $\mathbb{R}^n$, τότε το $\mu * a$ ορίζεται από τις παρακάτω σχέσεις

$$(\mu * a)_i = \int_0^t \sum_{j=1}^{n} d\mu_{ij} a_j$$

όπου $\mu_{ij} \in M(\mathbb{R})$ και βρίσκεται στην (i,j) θέση του πίνακα μέτρου μ. Το a_j είναι το j στοιχείο του διανύσματος α. Επίσης πρέπει να σημειωθεί ότι σε μια διάσταση $\mu * a = a * \mu$

Παρουσιάζουμε συνοπτικά μερικές από τις βασικές ιδιότητες της συνέληξης μέτρου και συνάρτησης.

Θεωρημα 3.2.7. *1.Έστω $a \in L^p(\mathbb{R}_+)$ με $p \geq 1$ και $\mu \in M(\mathbb{R}_+)$ τότε $\mu * a \in L^p(\mathbb{R}_+)$*

2.Έστω $\alpha \in BC_l(\mathbb{R}_+)$ και $\mu \in M(\mathbb{R}_+)$ τότε $\mu * a \in BC_l(\mathbb{R}_+)$

3.Έστω $a \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $b \in L^q(\mathbb{R}_+)$ με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ και $\mu \in M(\mathbb{R}_+)$ τότε

$$a * (b * \mu) = (a * b) * \mu$$

Επίσης με αυτές τις συνθήκες η προσεταιριστική ιδιότητα ισχύει για οποιαδήποτε σειρά των a, b, μ.

4. Όταν α και μ βαθμωτές συναρτήσεις ισχύει ότι $\mu * a = a * \mu$

Για την απόδειξη του Θεωρήματος παραπέμπουμε στο βιβλίο των G.Gripenberg, S. O. Londen, O. Staffans, Volterra integral and functonal equations.

Αφού έχουμε ορίσει την συνέλιξη μέτρου ή συνάρτησης, θα δούμε και τον ορισμό του resolvent πρώτου είδους.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.2.8. Έστω $k \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^{n\times n})$ και $\rho \in M_{loc}(\mathbb{R}_+{}^{n\times n})$ ένα μέτρο το οποίο ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$k * \rho = \rho * k = id$$

Τότε αυτό λέγεται (μέτρο) resolvent πρώτου είδους του k. Αν $k \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^{nxn})$ και $r \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+{}^{n\times n})$ με

$$k * r = r * k = id$$

τότε το r λέγεται (συνάρτηση) resolvent πρώτου είδους του k.

Αν r η συνάρτηση resolvent πρώτου είδους, τότε μπορούμε από την σχέση $d\rho = rdm$ (όπου m το μετρο Lebesque) να συνδέσουμε το μέτρο resolvent με την συνάρτηση resolvent. Για το αντίστροφο χρειαζόμαστε την Radon-Nykodim παράγωγο.

3.3. Συνέλιξη στοχαστικών ολοκληρωμάτων

Έστω M ένα συνεχές local-martingale και K μια συνάρτηση για την οποία ισχύει ότι

$$\int_0^t \mid K(t-s) \mid^2 d\langle M\rangle_s < \infty$$

γία όλα τα $t \in \mathbb{R}_+$. Τότε ορίζουμε ως συνέλιξη του K με M ώς εξής:

$$(K * dM)_t = \int_0^t K(t-s) dM_s$$

για όλα τα $t \in \mathbb{R}_+$.

Το παρακάτω θεώρημα βρίσκεται στην εργασία του Mark Veraar «The stochastic Fubini theorem revisited». Το θεώρημα αυτο επεκτείνει το κλασσικό θεώρημα Fubini και δίνει συνθήκες για την αλλαγή της σειράς ολοκλήρωσης μεταξύ ενός στοχαστικού ολοκληρώματος ως προς ένα local martingale και ενός Lebesque ολοκληρώματος ως προ κάποιο μέτρο.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.3.1. *Έστω μ ένα σ-πεπερασμένο μέτρο και M ένα συνεχές local martingale. Έστω επίσης μια προοδευτικά μετρήσιμη διαδικασία $\psi : X \times [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ για την οποία*

$$\int_X (\int_0^T \mid \psi(x,t,\omega) \mid^2 d\langle M\rangle_t(\omega))^{\frac{1}{2}} \mu(dx) < \infty$$

Τότε

$$\int_X (\int_0^T \psi(x,t,\omega) dM_t)\mu(dx) = \int_0^T (\int_X \psi(x,t,\omega)\mu(dx))dM_t$$

Παρατηρηση 3.3.2. Το θεώρημα 3.3.1 αναφέρεται στην βιβλιογραφία ως στοχαστικό θεώρημα Fubini.

Προταση 3.3.3. *Έστω $K \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^{m\times d})$, $L \in M(\mathbb{R}_+^{n\times m})$. Έστω επίσης M ένα d-διάστατο συνεχές local-martingale για το οποίο ισχύει ότι $\langle M\rangle_t = \int\limits_0^t a_s ds$ για $t \geq 0$, όπου a μια τοπικά φραγμένη διαδικασία, τότε*

$$L * (K * dM)_t = ((L * K) * dM)_t$$

για όλα τα $t \in \mathbb{R}_+$.

Αποδειξη. Θα αποδείξουμε το θεώρημα στην περίπτωση που $d = m = n = 1$.

$$\begin{aligned}(L * (K * dM))_t &= \int_0^t L(ds) \int_0^{t-s} K(t-s-u) dM_u \\ &= \int_0^t \int_0^t 1_{\{u<t-s\}} K(t-s-u) dM_u L(ds)\end{aligned}$$

Αφού

$$\int_0^t (\int_0^t 1_{\{u<t-s\}} K(t-s-u)^2 d\langle M\rangle_u L(ds) \leq \max_{s\in[0,t]}(\mid a_s \mid^{1/2} ||K||_{L^2} L([0,t]))$$

το οποίο είναι πεπερασμένο, οπότε μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα 3.3.1

$$\begin{aligned}(L * (K * dM))_t &= \int_0^t (\int_0^t 1_{\{u<t-s\}} K(t-s-u) L(ds)) dM_u \\ &= \int_0^t \int_0^{t-s} K(t-s-u) L(ds) dM_u \\ &= ((L * K) * dM)_t\end{aligned}$$

□

Μας ενδιαφέρει πότε η στοχαστική διαδικασία $(K*dM)_t$ έχει μια εκδοχή με συνεχείς τροχιές. Στην βιβλιογραφία υπάρχουν αρκετές συνθήκες για να έχει συνεχείς τροχιές η συνέλιξη, εμείς θα χρησιμοποιήσουμε την εξής συνθήκη:

$K \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ και υπάρχει $\gamma \in (0, 2]$ τέτοιο ώστε $\int_0^h K(t)^2 dt = O(h^\gamma)$ και $\int_0^T (K(t+h) - K(t))^2 dt = O(h^\gamma)$ για κάθε $T < \infty$.

Έστω τώρα ένα semimartingale της μορφής

$$Z_t = \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s$$

με $K * dZ$ θα συμβολίζουμε την εξής διαδικασία

$$(K * dZ)_t = \int_0^t K(t-s) b_s ds + \int_0^t K(t-s) \sigma_s dW_s$$

Η παρακάτω πρόταση ουσιαστικά επεκτείνει τις Γραμμικές Ολοκληρωτικές Εξισώσεις Volterra της παραγράφου 3.1 , βάζοντας την f (forcing function) να είναι ένα semimartingale.

Πρόταση 3.3.4. *Έστω X μια συνεχής στοχαστική διαδικασία, $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^m$ μια συνεχής συνάρτηση, $B \in \mathbb{R}^{d\times d}$ και*

$$Z_t = \int_0^t b_t dt + \int_0^t \sigma_t dW_t$$

ένα συνεχές semimartingale και $K * dZ$ συνεχές. Τότε

$$X = F + (KB) * X + K * dZ$$

αν και μόνο αν

$$X = F - R_B * F + E_B * dZ$$

όπου R_B είναι το resolvent του $-KB$ και $E_B = K - R_B * K$.

Απόδειξη. Θα δείξουμε πρώτα το ευθύ. Έστω λοιπόν ότι

$$X = F + (KB) * X + K * dZ$$

Εφαρμόζουμε $R_B *$ στην παραπάνω εξίσωση οπότε έχουμε

$$R_B * X = R_B * F + R_B * ((KB) * X) + R_B * (K * dZ)$$

Έπειτα τις αφαιρούμε κατά μέλη και έχουμε

$$X - R_B * X = F - R_B * F + (KB) * X - R_B * ((KB) * X) + K * dZ - R_B * (K * dZ)$$

Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 3.3.3 προκύπτει

$$X - R_B * X = F - R_B * F + ((KB) - R_B * (KB)) * X + (K - R_B * K) * dZ$$

Το R_B είναι το resolvent του $-KB$ οπότε

$$(-KB) * R_B = R_B * (-KB) = -KB - R_B$$

$$KB - R_B * (KB) = -R_B$$

Οπότε η προηγούμενη σχέση γίνεται

$$X - R_B * X = F - R_B * F - R_B * X + E_B * dZ$$

Για το αντίστροφο, έστω ότι ισχύει

$$X = F - R_B * F + E_B * dZ$$

Επειδή το R_B είναι resolvent του $-KB$ έχουμε

$$KB - (KB) * R_B = -R_B$$

Εφαρμόζουμε την $KB*$ στην προηγούμενη σχέση οπότε έχουμε

$$(KB) * E_B = (KB) * (K - R_B * K) = -R_B * K$$

Εφαρμόζουμε την $KB*$ στη σχέση

$$X = F - R_B * F + E_B * dZ$$

και χρησιμοποιούμε την Πρόταση 3.3.3, έχουμε

$$\begin{aligned} X-(KB)*X &= F+(-R_B-KB+(KB)*R_B)*F+(E_B-(KB)*E_B)*dZ \\ &= F + (E_B + R_B * K)dZ \\ &= F + K * dZ \end{aligned}$$

Από το τελευταίο καταλλήγουμε στο ζητούμενο. □

Πρόταση 3.3.5. *Έστω X μια συνεχής στοχαστική διαδικασία και*

$$Z_t = \int_0^t b_t dt + \int_0^t \sigma_t dW_t$$

ένα συνεχές semimartingale με σ, b συνεχή και $K * dZ$ συνεχές. Υποθέτουμε ότι το K έχει ένα resolvent πρώτου είδους L. Τότε

$$X - X_0 = K * dZ$$

αν και μόνο αν

$$L * (X - X_0) = Z$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι

$$X - X_0 = K * dZ$$

και εφαρμόζουμε και στις δύο μεριές $L*$,

$$\begin{aligned} L * (X - X_0) &= L * (K * dZ) \\ &= (L * K) * dZ \\ &= id * dZ \\ &= Z \end{aligned}$$

Για το αντίστροφο υποθέτουμε ότι

$$L * (X - X_0) = Z$$

Οπότε

$$\begin{aligned} id * (X - X_0) &= (K * L) * (X - X_0) \\ &= K * (L * (X - X_0)) \\ &= K * Z \\ &= K * (id * dZ) \\ &= id * (K * dZ) \end{aligned}$$

□

3.4. Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις Volterra

Θα δούμε αρχικά μερικές βασικές ιδιότητες για την ύπαρξη και μονδικότητας των Στοχαστικών Διαφορικών εξισώσεων και έπειτα θα δούμε θεωρήματα ύπαρξης και μοναδικότητας για τις Στοχαστικές Διαφορικές εξισώσεις Volterra.

Έστω $b : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ και $\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times n}$ δύο μετρήσιμες συναρτήσεις και Z ένα διάνυσμα από τυχαίες μεταβλητές ή από αριθμούς. Μια Στόχαστική Διαφορική εξίσωση έχει την μορφή

$$X_t = Z + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s \tag{3.4.1}$$

ή σε διαφορική μορφή

$$\begin{aligned} dX_t &= b(t, X_t)ds + \sigma(t, X_t)dW_t \\ X_0 &= Z \end{aligned}$$

Ας δούμε πρώτα την έννοια της λύσης μιας Στοχαστικής Διαφορικής εξίσωσης.

Ορισμος 3.4.1. Έστω η Στοχαστική Διαφορική εξίσωση (3.4.1), θα λέμε ότι αυτή έχει λύση με την ασθενή έννοια, αν υπάρχουν ένας χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, μια διύλιση $(\mathcal{F}_t)_t$, μια κίνηση Brown $(W_t)_t$ και μια διαδικασία $(X_t)_t$ ορισμένη στον παραπάνω χώρο πιθανότητας, που ικανοποιεί τις εξής συνθήκες

1. Η $(X_t)_t$ είναι συνεχής και $\mathcal{F}_t-$προσαρμοσμένη.
2. $P(X_0 = Z)$=1
3. Η $(X_t)_t$ ικανοποιεί την στοχαστική διαφορική εξίσωση (3.4.1)

Η $(X_t)_t$ λέγεται ασθενή λύση της (3.4.1)

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.4.2. Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ένας δοσμένος χώρος πιθανότητας, μια δοσμένη $(W_t)_t$ μια κίνηση Brown με $(\mathcal{F}_t^W)$ την φυσική της διύλιση και Z μια $\mathcal{F}_0^W-$μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή.. Θα λέμε ότι η Στοχαστική Διαφορική εξίσωση 3.4.1 έχει λύση με την ισχυρή έννοια, αν υπάρχει μια διαδικασία $(X_t)_t$ για την οποία

1. Η $(X_t)_t$ είναι συνεχής.
2.Η $(X_t)_t$ είναι $\mathcal{F}_t^W-$προσαρμοσμένη
3. $P(X_0 = Z)$
4. Η $(X_t)_t$ ικανοποιεί την Στοχαστική Διαφορική Εξίσωση (3.4.1).

Η $(X_t)_t$ λέγεται ισχυρή λύση της (3.4.1)

Μια ισχυρή λύση κατασκευάζεται σε έναν δοσμένο χώρο πιθανότητας και για μια δοσμένη κίνηση Brown. Αντίθετα, για μια ασθενή λύση ο χώρος πιθανότητας και η κίνηση Brown δεν καθορίζονται εκ των προτέρων, αλλά ουσιστικά είναι μέρος της λύσης.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.4.3. Έστω η Στοχαστική Διαφορική εξίσωση (3.4.1). Θα λέμε ότι έχουμε μοναδική λύση με την ασθενή έννοια, αν δύο λύσεις της είναι ισοδύναμες (δηλαδή έχουν την ίδια κατανομή).

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.4.4. Έστω η Στοχαστική Διαφορική εξίσωση (3.4.1). Θα λέμε ότι έχουμε μοναδική λύση με την ισχυρή έννοια, αν δύο λύσεις της που ορίζονται στον ίδιο χώρο πιθανότητας, είναι μη διακρινόμενες.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3.4.5. Δύο στοχαστικές διαδικασίες $(X_t)_{t\geq 0}$, $(Y_t)_{t\geq 0}$, λέμε ότι είναι μη διακρινόμενες, αν σχεδόν όλες οι τροχίες τους συμπίπτουν, δηλαδή

$$P(X_t = Y_t, \forall t \geq 0) = 1$$

Αν είχαμε μια Συνήθη Διαφορική εξίσωση, στην ολοκληρωτική της μορφή

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds$$

για να έχουμε μοναδική λύση αρκεί η συνάρτηση $b(t, x)$ να είναι τοπικά Lipschitz ως προς x ομοιόμορφα για ολά τα t. Το ιδίο ισχύει και για μια Στοχαστική Διαφορική εξίσωση, με την επιπλέον υπόθεση, να είναι τοπικά Lipschitz ως προς x ομοιόμορφα για όλα τα t και η $\sigma(t, x)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.4.6. *Έστω η Στοχαστική Διαφορική εξίσωση (3.4.1). Έστω ακόμη ότι η τυχαία μεταβλητή Y είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη και οι συναρτήσεις b, σ είναι τοπικά Lipschitz ως προς x ομοιόμορφα για* *όλα τα t , δηλαδή για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $K_n \geq 0$ τέτοιο ώστε*

$$| b(t,x) - b(t,y) |^2 + | \sigma(t,x) - \sigma(t,y) |^2 \leq K_n | x - y |^2$$

για όλα τα $| x |, | y | \leq n$ με $t \in [0,T]$. Τότε έχουμε μοναδική λύση με την ισχυρή έννοια.

Θεωρημα 3.4.7. *Έστω η Στοχαστική Διαφορική εξίσωση 3.4.1. Έστω ακόμη ότι η τυχαία μεταβλητή Y τετραγωνικά ολοκληρώσιμη και οι συναρτήσεις b, σ είναι τοπικά Lipschitz ως προς x ομοιόμορφα για όλα τα t και ότι*

$$| b(t,x) |^2 + | \sigma(t,x) |^2 \leq K(1 + | x |^2)$$

για όλα τα $x \in \mathbb{R}^d$και $t \in [0,T]$, όπου K θετική σταθερά. Τότε υπάρχει λύση με την ισχυρή έννοια και είναι μοναδική επίσης με την ισχυρή έννοια.

Προταση 3.4.8. *Έστω X μια λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s$$

αν ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος 3.4.7 και $E[| X_0 |^{2p}] < \infty$ για κάποιο $p \geq 1$,τότε υπάρχει μια σταθερά C που εξαρτάται μόνο από τα T, p, έτσι ώστε

$$E[\sup_{t_0 \leq s \leq t} | X_s |^{2p}] \leq C$$

με $0 \leq t_0 < t \leq T$.

Θεωρημα 3.4.9. *Έστω η Στοχαστική Διαφορική εξίσωση 3.4.1, για την οποία οι συντελεστές της ικανοποιούν την συνθήκη*

$$| b(t,x) |^2 + | \sigma(t,x) |^2 \leq K(1 + | x |^2)$$

για όλα τα $x \in \mathbb{R}^d$και $t \in [0,T]$, όπου K θετική σταθερά. Τότε η εξίσωση 3.4.1, δέχεται τουλάχιστον μια ασθενή λύση.

Παρατηρηση 3.4.10. Οι αποδείξεις των παραπάνω θεωρημάτων μπορούν να βρεθούν στο κλασικό βιβλίο Brownian Motion and Stochastic Calculus των Karatzas και Shreve.

Θεωρούμε τώρα μια συνάρτηση πυρήνα $K \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^{d \times n})$, μια Volterra Στοχαστική Διαφορική Εξίσωση έχει την εξής μορφή

$$X_t = Z + \int_0^t K(t-s) b(X_s) ds + \int_0^t K(t-s) \sigma(X_s) dW_s \tag{3.4.2}$$

ή σε ποίο συμπαγή μορφή

$$X = X_0 + K * (b(X)dt + \sigma(X)dW)$$

Υποθέτουμε πάντα ότι ο πυρήνας K ικανοποιεί τα εξής:

$K \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ και υπάρχει $\gamma \in (0, 2]$ τέτοιο ώστε

$$\int_0^h K(t)^2 dt = O(h^\gamma) \tag{3.4.3}$$

και

$$\int_0^T (K(t+h) - K(t))^2 dt = O(h^\gamma) \tag{3.4.4}$$

για κάθε $T < \infty$. Υποθέτουμε επίσης ότι συντελεστές b, σ είναι συνεχείς συναρτήσεις ώστε η 3.4.2 να έχει συνεχείς λύσεις.

Πρόταση 3.4.11. *Υποθέτουμε ότι οι b, σ είναι συνεχείς και ικανοποιούν την συνθήκη*

$$| b(x) |^2 + | \sigma(x) |^2 \leq C(1 + | x |^2)$$

όπου C μια σταθερά. Έστω X μια συνεχή λύση της 3.4.2 με αρχική συνθήκη X_0. Τότε υπάρχει μια σταθερά C' έτσι ώστε

$$E[\sup_{0 \leq s \leq t} | X_s |^{2p}] \leq C'$$

Θεώρημα 3.4.12. *Υποθέτουμε ότι ο πυρήνας K έχει resolvent πρώτου είδους, ικανοποιεί τις συνθήκες 3.4.3 και 3.4.4 και οι συντελεστές b, σ είναι Lipschitz συνεχείς και ικανοποιούν την συνθήκη*

$$| b(x) |^2 + | \sigma(x) |^2 \leq C(1 + | x |^2)$$

όπου C μια σταθερά. Τότε η εξίσωση 3.4.2 έχει μια συνεχής ασθενή λύση.

Για τις αποδείξεις των δύο παραπάνω θεωρημάτων παραπέμπτουμε στην εξής αναφορά: Eduardo Abi Jaber Larsson, and Sergio Pulido. Affine Volterra processes, στην τρίτη παράγραφο.

Κεφάλαιο 4

Διαδικασίες Affine Volterra

4.1. Affine Volterra Διαδικασιες

Στο πρώτο κεφάλαιο είδαμε ότι μια διαδικασία Affine είναι της μορφής

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)dW_s$$

όπου οι συναρτήσεις $\sigma : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times n}$, $a = \sigma\sigma^T$ και b: $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ έχουν την μορφή:

$$a(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{d} x_i a_i \tag{4.1.1}$$

$$b(x) = b_0 + \sum_{i=1}^{d} x_i b_i = b_0 + Bx \tag{4.1.2}$$

$$A(x) = (xa_1x^T, xa_2x^T, xa_3x^T, ..., xa_dx^T)$$

Επίσης είδαμε ότι η χαρακτηριστική της συνάρτηση έχει την μορφή

$$E(e^{uX_t}) = \exp(\phi(t,u) + \psi(t,u)X_0)$$

και οι συναρτήσεις ϕ, ψ ικανοποιούν το εξής σύστημα διαφορικών εξισώσεων Riccati της μορφής

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{2}\psi^{\mathrm{T}} a_0 \psi + b_0^T \psi$$

$$\phi(0,u) = 0$$

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial t}(t,u) = \frac{1}{2}\psi^{\mathrm{T}} a_i \psi + b_i^{\mathrm{T}} \psi$$

$$\psi_i(0,u) = u_i$$

Η σε ποίο συμπαγή μορφή

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{2}\psi^{\mathrm{T}} a_0 \psi + b_0^T \psi$$

$$\phi(0,u)=0$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=\mathcal{B}\psi+\frac{1}{2}A(\psi)$$

$$\psi(0,u)=u$$

Για τις Affine Volterra θα έχουμε παρόμοια αποτελέσματα, για τις χαρακτηριστικές τους συναρτήσεις. Στην περίπτωση αυτών θα έχουμε να λύσουμε ένα Riccati Volterra σύστημα εξισώσεων.

Ας δούμε πρώτα πως ορίζονται οι Affine Volterra διαδικασίες.

Ορισμος 4.1.1. Έστω $K\in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}^{d\times d})$ ένας πυρήνας. Μια στοχαστική διαδικασία της μορφής

$$X_t=X_0+\int_0^t K(t-s)b(X_s)ds+\int_0^t K(t-s)\sigma(X_s)dW_s \tag{4.1.3}$$

ή σε πιο συμπαγή μορφή

$$X=X_0+K*(b(X)dt+\sigma(X)dW)$$

που οι συντελεστέτης b,σ, $a=\sigma\sigma^T$ικανοποιούν τις 4.1.1 και 4.1.2, θα λέγεται Affine Volterra Διαδικασία.

Παρατηρηση 4.1.2. Αν πάρουμε το K να ισούται με την ταυτοτική απεικόνιση (δηλαδή με τον μοναδιαίο πίνακα), τότε οι Affine Volterra διαδικασίες ταυτίζονται με τις κλασσικές Affine του πρώτου κεφαλαίου.

Προταση 4.1.3. *Έστω X μια Affine Volterra διαδιακασίας. Τότε για όλα τα $t\in[0,T]$,*

$$E(X_T\mid\mathcal{F}_t)=(id-\int\limits_0^T R_B(s)ds)X_0+(\int_0^T E_B(s)ds)b_0+\int\limits_0^t E_B(T-s)\sigma(X_s)dW_s$$

όπου R_B είναι το resolvent του $-BK$ και $E_B=K-R_B*K$. Επιπλέον

$$E(X_T)=(id-\int\limits_0^T R_B(s)ds)X_0+(\int_0^T E_B(s)ds)b_0$$

Αποδειξη. Την διαδικασία μας

$$X_t=X_0+\int_0^t K(t-s)b(X_s)ds+\int_0^t K(t-s)\sigma(X_s)dW_s$$

την γράφουμε στην μορφή

$$X=X_0+K*(b(X_s)ds+\sigma(X_s)dW_s)$$

$$X = X_0 + K * ((b_0 + \mathcal{B}X)ds + \sigma(X_s)dW_s)$$
$$X = X_0 + K * (\mathcal{B}X) + K * (b_0 ds + \sigma(X_s)dW_s)$$
$$X = X_0 + (K\mathcal{B}) * X + K * (b_0 ds + \sigma(X_s)dW_s)$$

Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 3.3.4 έχουμε

$$X = X_0 - R_B * X_0 + E_B * (b_0 ds + \sigma(X_s)dW_s)$$

$$X = (id - R_B) * X_0 + E_B * (b_0 ds + \sigma(X_s)dW_s)$$

Θέτουμε $M_t = \int_0^t E_B(T-s)\sigma(X_s)dW_s$. Αφου

$$E[\int_0^T (E_B(T-s)^2\sigma(X_s)^2)]ds \leq || E_B ||_2^2 E(\int_0^T \sigma(X_s)^2 ds)$$

το οποίο είναι πεπερασμένο λόγω της πρότασης 3.4.10. άρα το M_t είναι martingale.

$$E[X_T \mid \mathcal{F}_t] = E[X_0 - \int_0^T R_B(s)dsX_0 + \int_0^T E_B(s)b_0 ds + \int_0^T E_B(T-s)\sigma(X_s)dW_s \mid \mathcal{F}_t]$$

$$E[X_T \mid \mathcal{F}_t] = X_0 - \int_0^T R_B(s)dsX_0 + \int_0^T E_B(s)b_0 ds + E[\int_0^T E_B(T-s)\sigma(X_s)dW_s \mid \mathcal{F}_t]$$

$$E[X_T \mid \mathcal{F}_t] = E[X_0 - \int_0^T R_B(s)dsX_0 + \int_0^T E_B(s)b_0 ds + M_T \mid \mathcal{F}_t]$$

Και αφού M_t είναι martingale.

$$E[X_T \mid \mathcal{F}_t] = X_0 - \int_0^T R_B(s)dsX_0 + \int_0^T E_B(s)b_0 ds + M_t$$

$$E[X_T \mid \mathcal{F}_t] = X_0 - \int_0^t R_B(s)dsX_0 + \int_0^t E_B(s)b_0 ds + \int_0^t E_B(T-s)\sigma(X_s)dW_s$$

$\square$

Πρόταση 4.1.4. *Η εξίσωση Riccati-Volterra*

$$\psi = uK + (f + \psi\mathcal{B} + \frac{1}{2}A(\psi)) * K \tag{4.1.4}$$

είναι ισοδύναμη με την εξής

$$\psi = uE_B + (f + \frac{1}{2}A(\psi)) * E_B \tag{4.1.5}$$

όπου τα $A, \mathcal{B}$ προέρχονται από Affine Volterra διαδικασία 4.1.3, $E_B = K - R_B * K$ και R_B το resolvent του $-K\mathcal{B}$.

Αποδειξη. Υποθέτουμε ότι ισχύει η (4.15). Παρατηρούμε ότι ισχύει το εξής $E_B * (BK) = -R_B * K$. Έπειτα έχουμε

$$\psi - \psi * (\mathcal{B}K) = uE_B - uE_B * (\mathcal{B}K) + (f + \frac{1}{2}A(\psi)) * E_B - (f + \frac{1}{2}A(\psi)) * (\mathcal{B}K)$$

$$\psi - \psi * (\mathcal{B}K) = u(E_B + R_B * K) + (f + \frac{1}{2}A(\psi)) * (E_B + R_B * K)$$

Αντικαθιστώνστας την $E_B = K - R_B * K$ στην προηγούμενη σχέση καταλήγουμε στην (4.1.4).

Θεωρούμε τώρα ότι ισχύει η 4.1.4 και συμβολίζουμε με $\widetilde{R_B}$ το resolvent του $-\mathcal{B}K$. Τώρα έχουμε

$$\psi - \psi * \widetilde{R_B} = u(E_B - K * \widetilde{R_B}) + (f + \frac{1}{2}A(\psi)) * (K - K * \widetilde{R_B}) - \psi * \widetilde{R_B}$$

Οπότε για να καταλήξουμε στην (4.1.5) αρκεί να δείξουμε ότι

$$K * \widetilde{R_B} = R_B * K$$

Το παραπάνω είναι ισοδύναμο, με το να δείξουμε ότι, για κάθε $T < \infty$ υπάρχει $\sigma > 0$ τέτοιο ώστε

$$(e^{-\sigma t}K) * (e^{-\sigma t}\widetilde{R_B}) = (e^{-\sigma t}R_B) * (e^{-\sigma t}K) \tag{4.1.6}$$

στο $[0, T]$. Είναι εύκολο να δούμε ότι το resolvent του $-e^{-\sigma t}K\mathcal{B}$, είναι το $e^{-\sigma t}R_B$ και το $e^{-\sigma t}\widetilde{R_B}$ το resolvent του $-\mathcal{B}K$. Για να αποδείξουμε την σχέση 4.1.6, εργαζόμαστε παρόμοια όπως όταν θέλουμε να αποδείξουμε την ύπαρξη του resolvent (Θεώρημα 3.1.3). Για την ακρίβεια ορίζουμε

$$e^{-\sigma t}R_B^m = -\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}(e^{-\sigma t}K\mathcal{B})^{*j}$$

$$e^{-\sigma t}\widetilde{R}_B^m = -\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}(e^{-\sigma t}\mathcal{B}K)^{*j}$$

Όπου με k^{*j} συμβολίζουμε $j-1$ συνελίξεις του k. Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 3.3.2 μπορούμε ευκολά να δούμε ότι

$$K * \widetilde{R_B}^m = R_B^m * K$$

και παιρνώντας όρια καταλλήγουμε στο ζητούμενο. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.1.5. *Έστω Q μια Affine Volterra διαδικασία, $f \in L^1([0,T])$ και $u \in \mathbb{C}^d$. Υποθέτουμε ότι η ψ λύνει την εξής εξίσωση Riccati Volterra*

$$\psi = uK + (f + \psi\mathcal{B} + A(\psi)) * K$$

Τότε η διαδικασία $(Y_t)_{t\geq 0}$ που ορίζεται από την σχέση

(4.1.7)

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \psi(T-s)\sigma(X_s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \psi(T-s)a(X_s)\psi(T-s)^T ds$$

$$Y_0 = uX_0 + \int_0^T (f(s)X_0 + \psi(s)b(X_0) + \frac{1}{2}\psi(s)a(X_0)\psi(s)^T)ds \tag{4.1.8}$$

ικανοποιεί τη σχέση

(4.1.9)

$$Y_t = E[uX_T + (f * X)_T \mid \mathcal{F}_t] + \frac{1}{2}\int_t^T \psi(T-s)a(E(X_s \mid \mathcal{F}_t))\psi(T-s)^T ds$$

για όλα τα $t \in [0,T]$. Τότε η διαδικασία $(e^{Y_t})_{t\geq 0}$ είναι local martingale και αν είναι martingale ικανοποιεί την σχέση

$$E[\exp(uX_T + (f * X)_T \mid \mathcal{F}_t] = \exp(Y_t)$$

για $t \in [0,T]$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θέτουμε το δεξί μέρος της (4.1.9) ως Z_t. Θα δείξουμε πρώτα ότι $Y_0 = Z_0$. Έχουμε

$$Z_0 - Y_0 = E[uX_T + (f * X)_T] + \frac{1}{2}\int_0^T \psi(T-s)a(E(X_s)\psi(T-s)^T ds$$

$$-uX_0 - \int_0^T (f(s)X_0 + \psi(s)b(X_0) + \frac{1}{2}\psi(s)a(X_0)\psi(s)^T)ds$$

Χρησιμοποιούμε την εξής ιδιότητα $ua(x)u^T = ua_0u^T + A(u)x$

$$Z_0 - Y_0 = uE[X_T - X_0] + E[(f*X)_T)] + \frac{1}{2}\int_0^T (\psi(T-s)a_0\psi(T-s)^T + A(\psi(T-s))E[X_s]ds$$

$$-\int_0^T [f(s)X_0 + \psi(s)b(X_0)]ds - \frac{1}{2}\int_0^T (\psi(s)a_0\psi(s)^T + A(\psi(s))X_0)ds$$

Έπειτα χρησιμοποιούμε την εξής ιδιότητα $\int_0^T g(T-s)ds = \int_0^T g(u)du$ όπου g μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση, οπότε η προηγούμενη σχέση γίνεται

$$Z_0 - Y_0 = uE[X_T - X_0] + E[(f * X)_T)] + \frac{1}{2}\int_0^T A(\psi(T-s))E[X_s - X_0]ds$$

$$-\int_0^T [f(s)X_0 + \psi(s)b(X_0)]ds$$

$$= uE[X_T - X_0] + E[\int_0^T f(T-s)X_T ds] + \frac{1}{2}\int_0^T A(\psi(T-s))E[X_s - X_0]ds$$

$$-\int_0^T [f(T-s)X_0 + \psi(s)b(X_0)]ds$$

$$= uE[X_T - X_0] + \int_0^T f(T-s)E[X_T - X_0]ds] + \frac{1}{2}\int_0^T A(\psi(T-s))E[X_s - X_0]ds$$

$$-\int_0^T [\psi(s)b(X_0)]ds$$

$$Z_0 - Y_0 = uE[X_T - X_0] + (f * E[X - X_0])_T + \frac{1}{2}A(\psi) * E[X_s - X_0] \tag{4.1.10}$$

$$-\int_0^T [\psi(s)b(X_0)]ds$$

Με $E[X - X_0]$ συμβολίζουμε την συνάρτηση $t \to E[X_t - X_0]$. Η συνάρτηση αυτή ικανοποιεί την εξής σχέση

$$E[X - X_0] = K * (b_0 + \mathcal{B}E(X))$$

Για να δείξουμε αυτή την σχέση εργαζόμαστε ως εξής: αρχικά βάζουμε μέσες τιμές στην σχέση

$$X = X_0 + K * (b(X)dt + \sigma(X)dW)$$

και χρησιμοποιώντας την Πρόταση 3.4.11 προκύπτει ότι

$$E[\int_0^T K(T-s)^2\sigma(X_s)^2 ds] < \infty$$

άρα $E[(K*(\sigma(X)dW))_t]=0$, οπότε προκύπτει το ζητούμενο. Έχουμε

$$\frac{1}{2}A(\psi)*E[X-X_0]=\frac{1}{2}A(\psi)*K*(b_0+\mathcal{B}E[X])$$

χρησιμοποιώντας την σχέση 4.1.

$$\psi-uK-f*K-(\psi\mathcal{B})*K=\frac{1}{2}A(\psi)*K$$

$$=(\psi-uK-f*K-(\psi\mathcal{B})*K)*(b_0+\mathcal{B}E[X])$$

$$=(\psi-uK-(f+\psi\mathcal{B})*K)*(b_0+\mathcal{B}E[X])$$

$$=(\psi*(b_0+\mathcal{B}E[X])-(uK)*(b_0+\mathcal{B}E[X])-[(f+\psi\mathcal{B})*K]*(b_0+BE[X])$$

$$=(\psi*(b_0+\mathcal{B}E[X])-uE[X-X_0]-[(f+\psi\mathcal{B})*K]*(b_0+BE[X])$$

Βάζουμε την παραπάνω σχέση στη 4.1.10 και προκύπτει ότι $Z_0-Y_0=0$. Τώρα θα δείξουμε ότι $Z_t=Y_t$, έχουμε ότι

$$Z_t=E[uX_T+(f*X)_T\mid\mathcal{F}_t]+\frac{1}{2}\int_t^T\psi(T-s)a(E(X_s\mid\mathcal{F}_t))\psi(T-s)^Tds$$

Χρησιμοποούμε πάλι την ιδιότητα $ua(x)u^T=ua_0u^T+A(u)x$, έχουμε

$$Z_t=E[uX_T+(f*X)_T\mid\mathcal{F}_t]$$

$$+\frac{1}{2}\int_t^T\psi(T-s)a_0\psi(T-s)^T+A(\psi(T-s))E(X_s\mid\mathcal{F}_t)ds$$

$$Z_t=E[uX_T\mid\mathcal{F}_t]+\int_0^Tf(T-s)E[X_s\mid\mathcal{F}_t]ds$$

$$+\frac{1}{2}\int_t^T\psi(T-s)a_0\psi(T-s)^T+A(\psi(T-s))E(X_s\mid\mathcal{F}_t)ds$$

$$Z_t=E[uX_T\mid\mathcal{F}_t]+\int_0^Tf(T-s)E[X_s\mid\mathcal{F}_t]ds$$

$$+\frac{1}{2}\int_t^T\psi(T-s)a_0\psi(T-s)^T+A(\psi(T-s))E(X_s\mid\mathcal{F}_t)ds$$

Θα κάνουμε την εξής σύμβαση, στις παρακάτω πράξεις, με C θα συμβολίζουμε τις ποσότητες που είναι $\mathcal{F}_0$ μετρήσιμες δεν εξάρτωνται από το t και ίσως αλλάζουν απο γραμμή σε γραμμή. Οπότε

$$Z_t = C + uE[X_T \mid \mathcal{F}_t] + \int_0^T (f + \frac{1}{2}A(\psi))(T-s)E[X_s \mid \mathcal{F}_t]ds$$

Χρησιμποποιώντας την Πρόταση

$$Z_t = C + uE[X_T \mid \mathcal{F}_t] + \int_0^T (f + \frac{1}{2}A(\psi))(T-s) \int_0^s E_B(s-r)\sigma(X_r)dW_r ds$$

$$Z_t = C + uE[X_T \mid \mathcal{F}_t] + \int_0^T (f + \frac{1}{2}A(\psi))(T-s) \int_0^t 1_{\{r<s\}} E_B(s-r)\sigma(X_r)dW_r ds$$

Χρησιμοποιώντας το Στοχαστικό θεώρημα Fubini έχουμε

$$Z_t = C + uE[X_T \mid \mathcal{F}_t] + \int_0^t (\int_0^T (f + \frac{1}{2}A(\psi))(T-s)1_{\{r<s\}} E_B(s-r)ds)\sigma(X_r)dW_r$$

$$Z_t = C + uE[X_T \mid \mathcal{F}_t] + \int_0^t (\int_r^T (f + \frac{1}{2}A(\psi))(T-s)E_B(s-r)ds)\sigma(X_r)dW_r$$

Κάνωντας μια αλλαγή μεταβλητής στο μέσα ολοκλήρωμα έχουμε

$$Z_t = C + uE[X_T \mid \mathcal{F}_t] + \int ({}_0^t(f + \frac{1}{2}A(\psi) * E_B))(T-r)\sigma(X_r)dW_r$$

Από την Πρόταση 4.1.3 παίνρουμε την σχέση

$$E[X_T \mid \mathcal{F}_t] = C + \int_0^t E_B(T-r)\sigma(X_r)dW_r$$

και καταλήγουμε στην

$$Z_t = Z_0 + \int_0^t (uE_B + (f + \frac{1}{2}A(\psi) * E_B))(T-r)\sigma(X_r)dW_r$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^t \psi(T-s)a(X_s)\psi(T-s)^T ds$$

Χρησιμοποιώντας την 4.1.5 και ότι $\Upsilon_0 = Z_0$ καταλήγουμε στο ζητούμενο

$$Z_t = Z_0 + \int_0^t \psi(T-r)\sigma(X_r)dW_r - \frac{1}{2}\int_0^t \psi(T-s)a(X_s)\psi(T-s)^T ds$$

Για το τελευταίο κομμάτι του θεωρήματος αρκεί να παρατηρήσουμε ότι, αν θέσουμε

$$M_t = \int_0^t \psi(T-r)\sigma(X_r)dW_r$$

τότε

$$< M >_t = \int_0^t \psi(T-s)\sigma(X_s)\sigma(X_s)^T\psi(T-s)^T ds$$

Οπότε το $\exp(Y) = \exp(M - \frac{1}{2} < M >)$ είναι ένα εκθετικό local martingale. Και στην περίπτωση που το $\exp(Y)$ είναι martingale, από την 4.1.9 προκύπτει ότι

$$Y_T = E[uX_T + (f*X)_T \mid \mathcal{F}_T] + \frac{1}{2}\int_T^T \psi(T-s)a(E(X_s \mid \mathcal{F}_t))\psi(T-s)^T ds$$

$$Y_T = E[uX_T + (f*X)_T \mid \mathcal{F}_T]$$

$$Y_T = uX_T + (f*X)_T$$

Και επειδή το $\exp(Y)$ είναι martingale έχουμε ότι

$$E[\exp(Y_T) \mid \mathcal{F}_t] = \exp(Y_t)$$

$$E[\exp(uX_T + (f*X)_T \mid \mathcal{F}_t] = \exp(Y_t)$$

□

Παρατηρηση 4.1.6. Αν θεωρήσουμε την εξής διαδικασία

$$M_t = \int_0^t u_s dW_s$$

τότε ανάλογα με τις υποθέσεις που έχουμε κάνει για την u, η M θα είναι local martingale ή martingale. Η τετραγωνική της κύμανση δίνεται από την σχέση

$$\langle M\rangle_t = \int_0^t u_s^2 ds$$

και η διαδικασία $\exp(X_t - \frac{1}{2}\langle X\rangle_t)$ είναι πάντα local martingale ή martingale ανάλογα με τις υποθέσεις τις u. Τις ιδιότητες αυτές τις χρησιμοποιήσαμε στην παραπάνω απόδειξη με

$$u_s = \psi(T-s)\sigma(X_s)$$

Αν στην σχέση

$$E[\exp(uX_T + (f*X)_T \mid \mathcal{F}_t] = \exp(Y_t)$$

πάρουμε $f = 0$ και $t = 0$, προκύπτει η εξής σχέση για την χαρακτηριστική συνάρτηση μιας Affine Volterra διαδικασίας

$$E(e^{uX_T}) = \exp\{\int_0^T (\psi(s)b_0 \frac{1}{2}\psi(s)a_0\psi(s)^T)ds + uX_0 + \int_0^T (\psi(s)\mathcal{B}X_0 + \frac{1}{2}A(\psi(s))X_0)ds\}$$
$$= \exp\{\phi(T) + \chi(T)X_0\}$$

με ϕ, χ να ορίζονται από την σχέση

$$\phi^{'}(t) = \psi(t)b_0 + \frac{1}{2}\psi(t)a_0\psi(t)^T$$
$$\phi(0) = 0$$
$$\chi^{'}(t) = \psi(t)\mathcal{B} + \frac{1}{2}A(\psi(s))$$
$$\chi(0) = u$$

Επίσης αν το K έχει resolvent πρώτου είδους, δηλαδή ένα μέτρο L τέτοιο ώστε

$$K * L = L * K = id$$

Αν εφαρμόσουμε το $*L$ στη σχέση

$$\psi = uK + (\psi\mathcal{B} + \frac{1}{2}A(\psi)) * K$$

έχουμε

$$\psi * L = uK * L + [(\psi\mathcal{B} + \frac{1}{2}A(\psi)) * K] * L$$
$$\psi * L = uK * L + (\psi\mathcal{B} + \frac{1}{2}A(\psi)) * (K * L)$$
$$\psi * L = uK * L + (\psi\mathcal{B} + \frac{1}{2}A(\psi)) * id$$
$$(\psi * L)(s) = u + \int_0^t (\psi(s)\mathcal{B} + \frac{1}{2}A(\psi(s))ds$$

και άρα $\chi = \psi * L$.

Παρατηρηση 4.1.7. Η ύπαρξη και μοναδικότητα μιας Affine Volterra διαδικασιάς (4.1.3) δεν είναι τετριμμένο πρόβλημα. Αν ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος 3.4.12 τότε η (4.1.3) έχει ασθενή λύση, δεν ξέρουμε αν η λύση είναι μοναδική όμως. Αν όμως χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 4.1.5 και το e^Yείναι martingale η χαρακτηριστική συνάρτηση της (4.1.3) θα έχει όπως είδαμε την μορφή

$$E[e^{uX_T}] = \exp\{\phi(T) + \chi(T)X_0\}$$

Οπότε αν έχουμε δύο ασθενείς λύσεις της (4.1.3), όπως φαίνεται από την παραπάνω εξίσωση, αυτές θα έχουν την ίδια χαρακτηριστική συνάρτηση, άρα την ίδια κατανομή. Οπότε σε αυτή την περίπτωση έχουμε μοναδική λύση με την ασθενή έννοια.

Παρατηρηση 4.1.8. Αν πάρουμε τον πυρήνα K να ίσουται με τον ταυτοτικό πίνακα και $f = 0$, τότε τα αποτελέσματα του θεωρήματος (4.1.5) γίνονται ως εξής:

Καταρχήν η εξίσωση (4.1.4) παίρνει την μορφή

$$\psi(t) = u + \int_0^t (\psi(s)\mathcal{B} + \frac{1}{2}A(\psi(s))ds$$

$$\psi_i(t) = u + \int_0^t (\psi(s)b_i + \frac{1}{2}\psi_i(s)a_i\psi(s)^T)ds \ i \in \{1, 2, ..., d\}$$

και

$$\phi^{'}(t) = \psi(t)b_0 + \frac{1}{2}\psi(t)a_0\psi(t)^T$$

$$\phi(0) = 0$$

Οπότε για την χαρακτηριστική συνάρτηση της X_T έχουμε τα ίδια αποτελέσματα της παραγράφου 1.2.

4.2. Παραδείγματα Affine Volterra Διαδικασιών

Όπως αναφέραμε και στην προηγούμενη παράγραφο το πρώτο παράδειγμα Affine Volterra διαδικασιών, είναι οι κλασσικές Affine διαδικασίες. Το βασικότερο παράδειγμα Affine Volterra διαδικασιών είναι οι Fractional Affine διαδικασίες. Σε αυτές τις διαδικασίες ο πυρήνας K έχει την μορφή:

$$K = diaq(K_1, K_2, ..., K_d)$$

όπου $K_i(t) = \frac{t^{a_i-1}}{\Gamma(a_i)}$ με $a_i \in (0, 1)$. Το resolvnet πρώτου είδους του K, έχει την μορφή

$$L = diag(L_1, L_2, ..., L_d)$$

με $L_i(dt) = \frac{t^{-a_i}}{\Gamma(1-a_i)}dt$. Αν στη σχέση

$$\psi = uK + (f + \psi\mathcal{B} + A(\psi)) * K$$

εφαρμόσουμε $*L$ έχουμε

$$\psi * L = uK * L + (f + \psi\mathcal{B} + A(\psi)) * K$$

$$(\psi * L)(t) = u + \int_0^t (f(s) + \psi(s)\mathcal{B} + A(\psi(s))ds = \chi(t)$$

Ισοδύναμα για κάθε συντεταγμένη του διανύσματος

$$(\psi_i * L_i)(t) = u + \int_0^t (f_i(s) + \psi(s)b_i + \psi(s)a_i\psi(s)^T)ds = \chi_i(t)$$

Όμως

$$(\psi_i * L_i)(t) = \int_0^t \psi(t-u)\frac{u^{-a_i}}{\Gamma(1-a_i)}du$$

αν κάνουμε την εξής αλλαγή μεταβλητών $s = t - u$, προκύπτει

$$(\psi_i * L_i)(t) = \int_0^t (\frac{(t-s)^{-a_i}}{\Gamma(1-a_i)}\psi(s))ds = I^{1-a_i}\psi(t)$$

$$\frac{d}{dt}\chi_i(t) = \frac{d}{dt}I^{1-a_i}\psi_i(t) = D^{a_i}\psi_i(t)$$

Άρα καταλήγουμε στο εξής σύστημα εξισώσεων

$$D^{a_i}\psi_i(t) = f_i(t) + \psi(t)b_i + \psi(t)a_i\psi(t)^T)$$

$$I^{1-a_i}\psi(0) = u_i$$

Θέτουμε

$$\phi^{'}(t) = \psi(t)b_0 + \frac{1}{2}\psi(t)a_0\psi(t)^T$$

$$\phi(0) = 0$$

Οπότε η χαρακτηριστική συνάρτηση της X_T έχει την μορφή

$$E[e^{uX_T}] = exp\{\phi(T) + I^{1-\alpha}\psi(T)X_0\}$$

όπου $I^{1-a}\psi = (I^{1-a_1}\psi_1, I^{1-a_2}\psi_2, ..., I^{1-a_d}\psi_d)$.

Θα δούμε τώρα το πίο απλό παράδειγμα μιας Affine Volterra διαδικασίας, που είναι σαν μια επέκταση του μοντέλου Vacisek σε $d-$διαστάσεις και αντί για την κίνηση Brown έχουμε μια διαδικασία της μορφής

$$\int_0^t K(t-s)\sigma dW_s$$

Υποθέτουμε ότι $a_1 = a_2 = ... = a_d = 0$ και $a = a_0 = \sigma\sigma^T$, τότε η διαδικασία λέγεται Volterra Ornstein-Uhlenbeck και είναι λύση της εξής εξίσωσης

$$X_t = X_0 + \int_0^t K(t-s)(b_0 + \mathcal{B}X_s)ds + \int_0^t K(t-s)\sigma dW_s$$

Σε αυτή την περίπτωση επειδή το volatility δεν εξαρτάται από το x, δεν χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 3.4.12 για να αποδείξουμε ότι έχει λύση, αλλά την Πρόταση 3.3.4. Χρησιμοποιώντας αυτή την πρόταση μπορούμε και να την λύσουμε. Αρχικά την γράφουμε στην μορφή

$$X_t = X_0 + \int_0^t K(t-s)\mathcal{B}X_s ds + \int_0^t K(t-s)b_0 ds + \int_0^t K(t-s)\sigma dW_s$$

Θέτουμε $F = X_0$ και

$$dZ = b_0 ds + \sigma dW_s$$

$$X = X_0 + K * (\mathcal{B}X) + K * dZ$$

Εφαρμόζουμε την Πρόταση 3.3.3

$$X_t = X_0 - (R_B * X_0)(t) + (E_B * dZ)(t)$$

$$X_t = X_0 - \int_0^t R_B(t-s)X_0 ds + \int_0^t E_B(t-s)b_0 ds + \int_0^t E_B(t-s)\sigma dW_s$$

$$X_t = X_0 - \int_0^t R_B(s)X_0 ds + \int_0^t E_B(s)b_0 ds + \int_0^t E_B(t-s)\sigma dW_s$$

Επειδή το στοχαστικό μέρος της X_t είναι ένα στοχαστικό ολοκλήρωμα μιας ντετερμενιστικής συνάρτησης, αυτή θα ακολουθεί κανονική κατανομή, οπότε η διαδιακασία $(X_t)_t$ είναι μια διαδικασία Gauss.Τέλος χρησιμοποιώτας την Πρόταση 4.1.4, έχουμε ότι

$$\psi = uE_B + f * E_B$$

Το επόμενο μοντέλο που θα δούμε είναι το Volterra CIR (sqaue root process). Το μοντέλο έχει την εξής μορφή

$$X_t = X_0 + \int_0^t K(t-s)(b_0 + b_1 X_s)ds + \int_0^t K(t-s)\sigma\sqrt{X_s}ds$$

Όπου $b_0 \in \mathbb{R}, b_1 \in \mathbb{R}_+$ και το K ικανοποιεί τις εξής υποθέσεις:

(1) $K \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ και $\gamma \in (0,2]$ τέτοιο ώστε

$$\int_0^h K(t)^2 dt = O(h^\gamma)$$

και

$$\int_0^T (K(t+h) - K(t))^2 = O(h^\gamma)$$

για όλα τα $T \in \mathbb{R}$.

(2) Το K είναι μη-αρνητικό, όχι ταυτοτικά μηδέν, μη-αύξουσα στο $(0,\infty)$ και το resolvent πρώτου είδους του L, να είναι μη-αρνητικό, μη-αύξων, με την έννοια ότι η συνάρτηση $s \to L([s, s+t])$ είναι μη-αύξων για όλα τα t.

Η Volterra Riccati που αντοιστιχεί είναι η εξής

$$\psi(t) = uK(t) + \int_0^t K(t-s)[\psi(s)b_1 + \frac{\sigma^2}{2}\psi^2(s)]ds$$

Παρατηρηση 4.2.1. Αν K ένας πυρήνας που είναι απόλυτα μονότονος (comlete monotone) στο $(0,\infty)$ και μη-ταυτοτικά μηδέν λόγω του θεωρήματος 5.5.4 του G. Gripenberg, 1990 έχει resolvent πρώτου είδους. Μια συνάρτηση f λέγεται απόλυτα μονότονη στο $(0,\infty)$, αν είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη και $(-1)^k f^k(t) \geq 0$ για κάθε $t \geq 0$ και $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Απόλυτα μονότονη είναι για παράδειγμα οι πυρήνες που είναι θετικές σταθερές, ο fractional πυρήνας $\frac{t^{a-1}}{\Gamma(a)}$ με $a \in (\frac{1}{2}, 1)$. Αναφέραμε τους απόλυτα μονότονους πυρήνες για αυτοί έχουν πάντα resolvent πρώτου είδους.

Αν πάρουμε το $K = \frac{t^{a-1}}{\Gamma(a)}$ η παραπάνω εξίσωση γίνεται

$$D^a\psi(t) = \psi(t)b_1 + \frac{\sigma^2}{2}\psi^2(t)$$
$$I^{1-a}\psi(0) = u$$

Το τελευταίο μοντέλο που θα δούμε είναι το Volterra Heston περιγράφεται από τις εξισώσεις

$$V(t) = V(0) + \int_0^t K(t-s)(k+\kappa V(s))ds + \int_0^t K(t-s)\sigma\sqrt{2V(s)}dW_1(s)$$

$$dX(t) = (r - V(t))dt + \sqrt{2V(t)}(\rho dW_1(t) + \sqrt{1-\rho^2}dW_2(t))$$

με $k, r \geq 0$, $\kappa \in \mathbb{R}$ και $\rho \in [-1, 1]$. Σε μορφή πινάκων παίρνει την εξής μορφή

$$\begin{pmatrix} V(t) \\ X(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_0 \\ X_0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} K(t-s) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} [\begin{pmatrix} k \\ r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \kappa & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} V(s) \\ X(s) \end{pmatrix}]ds + \int_0^t \begin{pmatrix} K(t-s) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma\sqrt{2V(s)} & 0 \\ \rho\sqrt{2V(s)} & \sqrt{(1-\rho^2)2V(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dW_1(s) \\ dW_2(s) \end{pmatrix}$$

Ο πυρήνας για το Volterra Heston model δίνεται από τον πίνακα

$$K'(t) = \begin{pmatrix} K(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

και οι affine συντελεστές δίνονται από την σχέση

$$b_0 = \begin{pmatrix} k \\ r \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \kappa & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a_0 = a_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a_1 = \begin{pmatrix} 2\sigma^2 & 2\rho\sigma \\ 2\rho\sigma & 2\rho^2 + 2(1-\rho^2) \end{pmatrix}$$

Η αντίστοιχη Volterra Riccati εξίσωση δίνεται από την σχέση

$$\psi_1 = u_1 K + K * (\sigma^2\psi_1^2 + 2\rho\sigma\psi_1\psi_2 + \psi_2^2 + \kappa\psi_1 - \psi_2)$$
$$\psi_2 = u_2$$

Αν πάρουμε το $K = \frac{t^{a-1}}{\Gamma(a)}$ η παραπάνω εξίσωση γίνεται (και έχουμε rough Heston model)

$$D^a \psi_1 = (\sigma^2 \psi_1^2 + 2\rho\sigma\psi_1\psi_2 + \psi_2^2 + \kappa\psi_1 - \psi_2)$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

(1) Andrea Passucci, PDE and Martingale Methods in Option Pricing, Bocconi & Springer, 2011
(2) Aurelien Alfonsi, Affine Diffusions and Related Processes Simulation, Theory and Applications, Bocconi & Springer, 2015
(3) Christian Bayer, Peter Friz, Jim Gatheral, Pricing under rough volatility, Quantitative Finace 16(6), 2015
(4) Damir Filipovic, Eberhard Mayerhofer, Affine Diffusions Processes Theory and Applications (2009)
(5) D. Duffie, D. Filipovic, W. Schachermayer Affine Processes and Applications in Finance, Ann Appl. Propbab, 13(3), 2003
(6) David Nualart, Stochastic integration with respect to fractional Brownian Motion and Applications
(7) Eduardo Abi Jaber, Martin Larsson, Sergio Pulido, Affine Volterra processes, arXiv (2017)
(8) G. Gripenberg, S. O. Londen, O. Staffans Volterra integral and functional equations, Cambridge University Press, 1990
(9) Jim Gatheral, Thibault Jaisson, Mathieu Rosenbaum Volatility is rough, arXiv (2014)
(10) Jim Gtheral, Martin Keller-Ressel Affine forward variance models, arXiv,2018
(11) Ioannis Karatzas, Steve Shreve, Brownian Motion and Stochastic Calculus, Springer, 1991
(12) Lucas Jodar, Solving Coupled Riccati Matrix Differential Systems
(13) Mark Veraar The stochastic Fubini Theorem revisited, Stochastics 84(4), 2012
(14) Martin Keller-Ressel, Martin Larsson, Sergio Pulido, Affine Rough Models, arXiv preprint, 2018)
(15) M & Van Ness Fractional Brownian motions, fractionals noises and applications, 1968
(16) Omar El Euch, Mathieu Rosenbaum, The characteristic function of rough Heston models, arXiv preprint, 2016

(17) Robert C. Dalang, Extending the martingale measure stochastic integral with applications to spatially S.P.D.E's, Electron J. Probab. 4:no 6 29 pp, 1999
(18) S.G Samko A.A Kilbas O.I. Marichev Fractional Integrals and Derivatives Theory and Applications, Gordon and Breach Science Publishers,1993
(19) Yuliya Mishura Stochastic Calculus for fractional Brownian Motion and Related Processes, Springer, 2008
(20) Walter Rudin, Real and Complex Analysis, McGraw-Hill, Inc. New York, 1987