Εθνικο Μετσοβιο Πολυτεχνειο
Σχολη Εφαρμοσμενων Μαθηματικων και Φυσικων Επιστημων
Τομεας Μαθηματικων
Δ.Π.Μ.Σ. Εφαρμοσμενες Μαθηματικες Επιστημες

Γωνία Γραμμικού Τελεστή

Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία

Μπίτση Αγγέλα-Μαρία

Επιβλέποντες:

Γιαννακάκης Νικόλαος
Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Δριβαλιάρης Δημοσθένης
Επίκουρος Καθηγητής Πανεπιστημίου Αιγαίου

Αθήνα, Ιούλιος 2019

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγικές έννοιες

1.1 Τελεστές

Ορισμός **1.1.1.** *Έστω V ένας μιγαδικός διανυσματικός χώρος. Εσωτερικό γινόμενο στον V είναι μία απεικόνιση*

$$\langle\,,\rangle : V \times V \to \mathbb{C}$$

τέτοια, ώστε για κάθε $x, y, z \in V$ και $\lambda \in \mathbb{C}$, να ισχύουν:

1. $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$
2. $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$
3. $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$
4. $\langle x, x\rangle \geq 0$ *και αν* $\langle x, x\rangle = 0$*, τότε x=0*

Ένας διανυσματικός χώρος V, μαζί με ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle\,,\rangle$, λέγεται διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο.

Πρόταση **1.1.2.** *(Cauchy-Schwarz) Σε ένα διανυσματικό χώρο V με εσωτερικό γινόμενο, για κάθε $x, y \in V$ ισχύει ότι*

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$$

Ορισμός **1.1.3.** *Ένας διανυσματικός χώρος $(V, \langle\,,\rangle)$ με εσωτερικό γινόμενο λέγεται χώρος Hilbert, αν είναι πλήρης ως προς τη νόρμα που ορίζει το εσωτερικό γινόμενο.*

Ορισμός **1.1.4.** *Ένα χώρος Hilbert λέγεται διαχωρίσιμος, αν έχει ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο.*

Ορισμός **1.1.5.** *Έστω $(X, \|\|_X), (Y, \|\|_Y)$ δύο χώροι με νόρμα και $T : X \to Y$ μία γραμμική απεικόνιση. Θέτουμε:*

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\|_Y : x \in X, \|x\|_X \leq 1\} \in [0, +\infty)$$

Η απεικόνιση T λέγεται φραγμένη, ή φραγμένος τελεστής, αν $\|T\| < +\infty$. Το σύνολο των φραγμένων γραμμικών τελεστών $T : X \to Y$ συμβολίζεται με $\mathcal{B}(X,Y)$, ή απλά με $\mathcal{B}(X)$, αν X=Y.

***Πρόταση* 1.1.6.** *Έστω X,Y χώροι με νόρμα και $T : X \to Y$ ένας φραγμένος τελεστής. Είναι:*

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \in X, \|x\| = 1\} = \sup\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \in X, x \neq 0\} =$$

$$\inf\{c > 0 : \|Tx\| \leq c\|x\|, x \in X\}$$

και ισχύει: $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$ για κάθε $x \in X$.

***Ορισμός* 1.1.7.** *Έστω $T : X \to Y$ φραγμένος τελεστής. Η συνάρτηση*

$$\|\cdot\| : \mathcal{B} \to \mathbb{R}_+ : T \to \|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \in X, \|x\| \leq 1\}$$

ορίζει μία νόρμα στον $\mathcal{B}(X,Y)$, η οποία λέγεται νόρμα τελεστών.

***Ορισμός* 1.1.8.** *(Ταυτότητα Πολικότητας) Έστω $T \in \mathcal{B}(H)$. Τότε:*

$$\langle Tx, y \rangle =$$

$$\frac{1}{4}\{\langle T(x+y), x+y \rangle - \langle T(x-y), x-y \rangle + i\langle T(x+iy), x+iy \rangle - i\langle T(x-iy), x-iy \rangle\}$$

***Θεώρημα* 1.1.9.** *Έστω H,K δύο χώροι Hilbert και $T \in \mathcal{B}(H,K)$. Τότε υπάρχει μοναδικός τελεστής $T^* : K \to H, T^* \in \mathcal{B}(H,K)$, τέτοιος ώστε*
$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle$, για κάθε $x \in H, y \in K$ με $\|T^*\| = \|T\|$.

***Ορισμός* 1.1.10.** *Ο τελέστής $T^* \in \mathcal{B}(H,K)$, ονομάζεται συζυγής τελστής του τελεστή $T \in \mathcal{B}(H,K)$.*

***Ορισμός* 1.1.11.** *Ένας τελεστής $T \in \mathcal{B}(H)$ λέγεται κανονικός, αν $TT^* = T^*T$.*

***Ορισμός* 1.1.12.** *Ένας τελεστής $T \in \mathcal{B}(H)$ λέγεται αυτοσυζυγής, αν $T = T^*$.*

***Πρόταση* 1.1.13.** *Ένας τελεστής $T \in \mathcal{B}(H)$ είναι αυτοσυζυγής, αν και μόνο αν $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}$, για κάθε $x \in H$.*

***Θεώρημα* 1.1.14.** *Αν $T \in \mathcal{B}(H)$ είναι αυτοσυζυγής, τότε:*

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} | \langle Tx, x \rangle | = \sup_{\|x\| = 1} | \langle Tx, x \rangle |$$

***Ορισμός* 1.1.15.** *Ένας τελεστής $T \in \mathcal{B}(H)$ λέγεται θετικός και συμβολίζεται $T \geq 0$, αν ισχύει $\langle Tx, x \rangle \geq 0$ για κάθε $x \in H$ και αυστηρά θετικός, και συμβολίζεται T>0, αν ισχύει $\langle Tx, x \rangle > 0$ για κάθε $x \in H, x \neq 0$.*

***Ορισμός* 1.1.16.** *Ένας τελεστής T, με πεδίο ορισμού D(T) και σύνολο τιμών R(T) σε ένα χώρο Hilbert H, λέγεται αυξητικός (accretive) , αν* $\Re\langle Tx, x\rangle \geq 0, \forall x \in D(T)$ *και αυστηρά αυξητικός (strongly accretive) αν* $\Re\langle Tx, x\rangle > 0, \forall x \in D(T)$. *Αντίστοιχα ένας τελεστής T, με πεδίο ορισμού D(T) και σύνολο τιμών R(T) σε ένα χώρο Hilbert H, λέγεται μειωτικός (dissipative) , αν* $\Re\langle Tx, x\rangle \leq 0, \forall x \in D(T)$ *και αυστηρά μειωτικός (strongly dissipative) αν* $\Re\langle Tx, x\rangle < 0, \forall x \in D(T)$.

Ισοδύναμα, όπως θα αποδειχθεί σε επόμενη ενότητα, ένας Ένας τελεστής T, με πεδίο ορισμού D(T) και σύνολο τιμών R(T) σε ένα χώρο Hilbert H, λέγεται accretive (αυξητικός), αν $\|(\lambda I + T)x\| \geq \|x\|, \forall x \in D(T), \forall \lambda > 0$. Αντίστοιχα ένας τελεστής T, με πεδίο ορισμού D(T) και σύνολο τιμών R(T) σε ένα χώρο Hilbert H, λέγεται dissipative (μειωτικός), αν $\|(\lambda I - T)x\| \geq \|x\|, \forall x \in D(T), \forall \lambda > 0$.

***Πρόταση* 1.1.17.** *(Γενικευμένη ανισότητα Cauchy-Schwarz) Έστω τελεστής* $T \in \mathcal{B}(H), T \geq 0$. *Τότε για κάθε* $x, y \in H$, *ισχύει ότι:*

$$| \langle Tx, y\rangle |^2 \leq \langle Tx, x\rangle\langle Ty, y\rangle$$

***Πρόταση* 1.1.18.** *Έστω τελεστής* $T \in \mathcal{B}(H), T \geq 0$. *Τότε για κάθε* $x \in H$, *ισχύει ότι:*

$$\|Tx\|^2 \leq \|T\|\langle Tx, x\rangle$$

***Ορισμός* 1.1.19.** *Έστω* $T \in \mathcal{B}(H)$. *Ονομάζουμε φάσμα του τελεστή T, το σύνολο:*

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \nexists(\lambda I - T)^{-1}\}$$

***Πρόταση* 1.1.20.** *Έστω* $T \in \mathcal{B}(H)$, *ένας αυτοσυζυγής τελεστής. Τότε ισχύουν τα επόμενα:*

1. $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$
2. $-\|T\| \in \sigma(T)$, *ή* $\|T\| \in \sigma(T)$

***Θεώρημα* 1.1.21.** *Έστω* $T \in \mathcal{B}(H)$, *ένας αυτοσυζυγής τελεστής,* $m = \inf_{\|x\|=1} \langle Tx, x\rangle$ *και* $M = \sup_{\|x\|=1} \langle Tx, x\rangle$. *Τότε:*

1. $\sigma(T) \subseteq [m, M]$
2. $m, M \in \sigma(T)$

***Πρόταση* 1.1.22.** *Έστω* $T \in \mathcal{B}(H)$. *Ισχύει ότι αν T αυτοσυζυγής, τότε:* $\|T^n\| = \|T\|^n$, *n=1,2,...*

Η πλειοψηφία των ορισμών, προτάσεων, πορισμάτων και θεωρημάτων της παραγράφου, βρίσκεται στα κεφάλαια 1,2,3,5 του [2].

1.2 Αριθμητικό πεδίο και Αριθμητική ακτίνα τελεστή

***Ορισμός* 1.2.1.** *Έστω ένας τελεστής T σε ένα μιγαδικό διαχωρίσιμο χώρο Hilbert H με εσωτερικό γινόμενο. Το αριθμητικό πεδίο του τελεστή T είναι ένα υποσύνολο του* $\mathbb{C}$ *και ορίζεται ως:*

$$W(T) = \{\langle Tx, x\rangle, x \in H, \|x\| = 1\}$$

Το αριθμητικό πεδίο ενός τελεστή σε ένα χώρο Hilbert, είναι πρακτικά η εικόνα της μοναδιαίας σφαίρας του χώρου H, μέσω του εσωτιρικού γινομένου.

***Ορισμός* 1.2.2.** *Έστω πάλι ένας τελεστής T σε ένα μιγαδικό διαχωρίσιμο χώρο Hilbert H με εσωτερικό γινόμενο. Η αριθμητική ακτίνα του T ορίζεται να είναι:*

$$w(T) = \sup\{| \lambda | : \lambda \in W(T)\}$$

Ακόμη ορίζεται: $m(T) = \inf\{| \lambda | : \lambda \in W(T)\}$.

***Παρατήρηση* 1.** *Για κάθε διάνυσμα* $x \in H$*, ισχύει ότι:*

$$| \langle Tx, x\rangle | \leq w(T)\|x\|^2$$
και
$$| \langle Tx, x\rangle | \geq m(T)\|x\|^2$$

***Θεώρημα* 1.2.3.** *Έστω τελεστής T σε ένα μιγαδικό διαχωρίσιμο χώρο Hilbert H με εσωτερικό γινόμενο. Ισχύει ότι:*

$$w(T) \leq \|T\| \leq 2w(T)$$

Απόδειξη Έστω $\lambda = \langle Tx, x\rangle$, με $\|x\| = 1$. Ισχύει ότι:
$| \lambda | \leq | \langle Tx, x\rangle | \leq \|Tx\|\|x\| \overset{\|x\|=1}{=} \|Tx\| \leq \|T\|\|x\| \overset{\|x\|=1}{=} \|T\|$

άρα $\|T\| \geq w(T)$.

Ακόμη από την ταυτότητα πολικότητας, ισχύει ότι:

$\langle Tx, y\rangle = \frac{1}{4}\{\langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle + i\langle T(x+iy), x+iy\rangle - i\langle T(x-iy), x-iy\rangle\}$
$4\langle Tx, y\rangle = \langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle + i\langle T(x+iy), x+iy\rangle - i\langle T(x-iy), x-iy\rangle$
Άρα:

$4 | \langle Tx, y\rangle | \leq w(T)(\|x+y\|^2+\|x-y\|^2+\|x+iy\|^2+\|x-iy\|^2) = w(T)4(\|x\|^2+\|y\|^2) \overset{\|x\|=\|y\|=1}{=} 4w(T)(1+1) = 8w(T)$
Δηλαδή: $4 | \langle Tx, y\rangle | \leq 8w(T) \Leftrightarrow | \langle Tx, y\rangle | \leq 2w(T) \Leftrightarrow \|T\| \leq 2w(T)$.

Συνολικά λοιπόν: $w(T) \leq \|T\| \leq 2w(T)$. ■

Πόρισμα **1.2.4.** *Άμεσο από το παραπάνω θεώρημα είναι ότι:* $T = 0 \Leftrightarrow w(T) = 0.$

Θεώρημα **1.2.5.** *Ισχύει ότι: T αυτοσυζυγής* $\Leftrightarrow W(T) \in \mathbb{R}$.

Θεώρημα **1.2.6.** *Αν ο T είναι αυτοσυζυγής (βάσει του προηγούμενου θεωρήματος) ισχύει ότι* $W(T) = [m, M] \in \mathbb{R}$ *και τότε:* $\|T\| = \sup\{| m |, | M |\}$.

Θεώρημα **1.2.7.** *Έστω T τελεστής, τέτοιος ώστε* $\overline{W(T)} = [m, M]$. *Τότε ισχύει ότι:* $m, M \in \sigma(T)$.

Παρατήρηση **2.** *Από τα 2 τελευταία θεωρήματα, βγαίνει το συμπέρασμα ότι αν ο T είναι αυτοσυζυγής, τότε:* $w(T) = \|T\|$.

Πόρισμα **1.2.8.** *Έστω A θετικός, αντιστρέψιμος και αυτοσυζυγής τελεστής σε ένα χώρο Hilbert H. Τότε ισχύει ότι:*

$$m_A = \frac{1}{\|A^{-1}\|}$$
$$M_A = \|A\|$$

Η πλειοψηφία των ορισμών, προτάσεων, πορισμάτων και θεωρημάτων της παραγράφου, βρίσκεται στο 1ο κεφάλαιο του [1].

1.3 Κυρτές συναρτήσεις

Ορισμός **1.3.1.** *Έστω* $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. *Η συνάρτηση* φ *λέγεται κυρτή, αν*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \lambda \in (0, 1),\ \varphi(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda\varphi(x) + (1 - \lambda)\varphi(y)$$

Το σύνολο αυτό των κυρτών συναρτήσεων συμβολίζεται με $conv\mathbb{R}$.

Ορισμός **1.3.2.** *Το σύνολο* $dom\varphi = \{x \in \mathbb{R} : \varphi(x) < \infty\}$ *λέγεται ουσιαστικό πεδίο ορισμού της* φ.

Πρόταση **1.3.3.** *Αν* ϕ *κυρτή συνάρτηση, τότε το* $dom\varphi \subseteq \mathbb{R}$ *είναι κυρτό, άρα διάστημα.*

Θεώρημα **1.3.4.** *Αν* $\varphi \in conv\mathbb{R}$, *τότε η* φ *είναι συνεχής στο* $intdom\varphi$ *και είναι τοπικά Lipschitz.*

Πρόταση **1.3.5.** *Αν* $\varphi \in conv\mathbb{R}$ *και* $x_0 \in intdom\varphi$, *τότε*

$$\varphi'_-(x_0) = \lim_{x \uparrow x_0} \frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0} = \sup_{x<x_0} \frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}$$
$$\text{και}$$
$$\varphi'_+(x_0) = \lim_{x \downarrow x_0} \frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0} = \inf_{x>x_0} \frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}$$

υπάρχουν και είναι αύξουσες συναρτήσεις στο $intdom\varphi$. *Επιπλέον* $\varphi'_-(x_0) \leq \varphi'_+(x_0)$.

Πρόταση **1.3.6.** *Αν* $\varphi \in conv\mathbb{R}$ *και* $intdom\varphi \neq \varnothing$, *τότε η* $\varphi(x)$ *υπάρχει για όλα τα* $x \in intdom\varphi - C$, *όπου C αριθμήσιμο και* $x \longrightarrow \varphi'(x)$ *είναι συνεχής στο* $intdom\varphi - C$

Η πλειοψηφία των ορισμών, προτάσεων, πορισμάτων και θεωρημάτων της παραγράφου, βρίσκεται στις σελίδες 71-76 του [3].

Κεφάλαιο 2

Γωνίες τελεστών

2.1 Ορισμός συνημιτόνου ενός τελεστή T

Η έννοια της γωνίας ενός τελεστή T εισήχθη το 1967. Το κύριο ενδιαφέρον, αφορά φραγμένους γραμμικούς τελεστές T, σε ένα μιγαδικό χώρο Hilbert H. Έστω λοιπόν ένας τελεστής T και ένα διάνυσμα x. Βασική ερώτηση που πρέπει να απαντηθεί, είναι ποιά είναι η μεγαλύτερη δυνατή γωνία που μπορεί να υπάρξει μεταξύ του διανύσματος x και του Tx. Σε έναν πραγματικό χώρο αυτό θα μπορούσε να γίνει με τη βοήθεια του εσωτερικού γινομένου. Εδώ όμως που ο χώρος είναι μιγαδικός, χρειάζεται μία παραλλαγή του εσωτερικού γινομένου. Αρχικά δίνεται ο ορισμός του συνημιτόνου ενός τελεστή T $\in B(H)$.

***Ορισμός* 2.1.1.** *Έστω T* $\in B(H)$ *και Tx* $\neq 0$. *Ορίζεται το πραγματικό συνημίτονο του τελεστή T να είναι:*

$$\cos_{min}^{Re} T = \inf_{x \in D(T)} \frac{\Re\langle Tx,x\rangle}{\|Tx\|\|x\|}$$

Το inf στον παραπάνω ορισμό,δίνει τη μέγιστη δυνατή γωνία μεταξύ Tx και x που είναι βασικό ζητούμενο. Από ορισμό αυτό, έρχεται ο ορισμός της γωνίας $\phi\left(T\right)$, που είναι η μέγιστη δυνατή.

***Ορισμός* 2.1.2.** *Έστω T* $\in B(H)$ *και Tx* $\neq 0$. *Η μέγιστη δυνατή γωνία μεταξύ του T και του Tx, ορίζεται ως:*

$$\phi\left(T\right) = \cos^{-1} \inf_{x \in D(T)} \frac{\Re\langle Tx,x\rangle}{\|Tx\|\|x\|}$$

***Παρατήρηση* 3.** *Αν T αντιστρέψιμος τελεστής, T* $\in B(H)$, *τότε*

$$\phi\left(T^{-1}\right) = \phi\left(T\right)$$

Αυτό συμβαίνει αφού:

$$\phi\left(T^{-1}\right) = \cos^{-1}\inf_{Tx\neq 0}\frac{\Re\langle T^{-1}x,x\rangle}{\|T^{-1}x\|\|x\|} =$$

$$\cos^{-1}\inf_{Tx\neq 0}\frac{\Re\langle T^{-1}x,TT^{-1}x\rangle}{\|T^{-1}x\|\|TT^{-1}x\|} = \cos^{-1}\inf_{Tx\neq 0}\frac{\Re\langle TT^{-1}x,T^{-1}x\rangle}{\|TT^{-1}x\|\|T^{-1}x\|} =$$

$$\cos^{-1}\inf_{Tx\neq 0}\frac{\Re\langle T\left(T^{-1}x\right),T^{-1}x\rangle}{\|T(T^{-1}x)\|\|T^{-1}x\|} = \cos^{-1}\inf_{Tx\neq 0}\frac{\Re\langle Tx,x\rangle}{\|Tx\|\|x\|} = \phi\left(T\right)$$

***Παρατήρηση* 4.** *Έστω T ένας τελεστής όπως αυτός του ορισμού 2.1.1 και c ένας πραγματικός αριθμός, με $c \neq 0$, τότε:*

$$\phi\left(cT\right) = \begin{cases}\phi\left(T\right), c > 0,\\ \cos^{-1}\sup\limits_{Tx\neq 0}\frac{\Re\langle Tx,x\rangle}{\|Tx\|\|x\|}, c < 0\end{cases}$$

Αυτό συμβαίνει αφού:

$$\phi\left(cT\right) = \cos^{-1}\inf_{Tx\neq 0}\frac{\Re\langle cTx,x\rangle}{\|cTx\|\|x\|} =$$

$$\cos^{-1}\inf_{Tx\neq 0}\frac{c\Re\langle Tx,x\rangle}{\|c\|\|Tx\|\|x\|} = \cos^{-1}\inf_{Tx\neq 0}\frac{c\Re\langle Tx,x\rangle}{|c|\|Tx\|\|x\|} =$$

αν c>0, τότε: $\cos^{-1}\inf\limits_{Tx\neq 0}\frac{c\Re\langle Tx,x\rangle}{c|Tx\|\|x\|} = \cos^{-1}\inf\limits_{Tx\neq 0}\frac{\Re\langle Tx,x\rangle}{|Tx\|\|x\|} = \phi\left(T\right)$

αν c<0, τότε: $\cos^{-1}\inf\limits_{Tx\neq 0}\frac{c\Re\langle Tx,x\rangle}{-c|Tx\|\|x\|} = \cos^{-1}\inf\limits_{Tx\neq 0}\frac{\Re\langle Tx,x\rangle}{-|Tx\|\|x\|} = \cos^{-1}\sup\limits_{Tx\neq 0}\frac{\Re\langle Tx,x\rangle}{\|Tx\|\|x\|}$

***Παρατήρηση* 5.** *Από τις 2 παραπάνω παρατηρήσεις βγαίνει το συμπέρασμα, ότι*

$$\phi\left(cT^{-1}\right) = \begin{cases}\phi\left(T^{-1}\right), c > 0,\\ \cos^{-1}\sup\limits_{Tx\neq 0}\frac{\Re\langle T^{-1}x,x\rangle}{\|T^{-1}x\|\|x\|}, c < 0\end{cases}$$

***Πρόταση* 2.1.3.** *Έστω $T \in B(H)$ και U ορθομοναδιαίος. Τότε*

$$\cos UTU^{*} = \cos T$$

Απόδειξη έχουμε ότι: $\cos UTU^{*} = \inf\limits_{Tx\neq 0}\frac{\Re\langle UTU^{*}x,x\rangle}{\|UTU^{*}x\|\|x\|}$
αλλά $\langle UTU^{*}x,x\rangle = \langle TU^{*}x,U^{*}x\rangle$, άρα

$\inf\limits_{Tx\neq 0}\frac{\Re\langle UTU^{*}x,x\rangle}{\|UTU^{*}x\|\|x\|} = \inf\limits_{Tx\neq 0}\frac{\Re\langle TU^{*}x,U^{*}x\rangle}{\|UTU^{*}x\|\|x\|}$

επίσης ισχύει ότι: $\|UTU^{*}x\|\|x\| = \|TU^{*}x\|\|UU^{*}x\| = \|TU^{*}x\|\|U^{*}x\|$, συνεπώς
$\inf\limits_{Tx\neq 0}\frac{\Re\langle TU^{*}x,U^{*}x\rangle}{\|UTU^{*}x\|\|x\|} = \inf\limits_{Tx\neq 0}\frac{\Re\langle TU^{*}x,U^{*}x\rangle}{\|TU^{*}x\|\|U^{*}x\|} \overset{y=U^{*}x}{=} \inf\limits_{Ty\neq 0}\frac{\Re\langle Ty,y\rangle}{\|Ty\|\|y\|} = \cos T$

συνολικά λοιπόν ισχύει ότι: $\cos UTU^* = \cos T$ ■

Όλα τα παραπάνω συμπεράσματα έχουν βγει για το πραγματικό συνημίτονο ενός φραγμένου τελεστή και την αντίστοιχη γωνία, όπως αυτά ορίστηκαν στους ορισμούς 2.1.1, 2.1.2. Εκτός όμως από αυτούς τους ορισμούς, θα μπορούσε να έχει δοθεί, και ο ακόλουθος πιο γενικός ορισμός για το συνημίτονο ενός φραγμένου τελεστή T:

***Ορισμός* 2.1.4.** *Έστω $T \in B(H)$ και Tx $\neq 0$. Ορίζεται το πραγματικό ή φανταστικό συνημίτονο του τελεστή T να είναι:*

$$\cos^{Re}_{min} T = \inf_{x \in D(T)} \frac{\Re\langle Tx, x\rangle}{\|Tx\|\|x\|}$$

$$\cos^{Re}_{max} T = \sup_{x \in D(T)} \frac{\Re\langle Tx, x\rangle}{\|Tx\|\|x\|}$$

$$\cos^{Im}_{min} T = \inf_{x \in D(T)} \frac{\Im\langle Tx, x\rangle}{\|Tx\|\|x\|}$$

$$\cos^{Im}_{max} T = \inf_{x \in D(T)} \frac{\Im\langle Tx, x\rangle}{\|Tx\|\|x\|}$$

Βάσει αυτού του τετραπλού ορισμού, η γωνία ενός τελεστή ορίζεται με 4 διαφορετικούς τρόπους, εξυπηρετώντας άλλο σκοπό κάθε φορά. Από αυτούς τους 3 επιπλέον ορισμούς του συνημιτόνου και της γωνίας ενός τελεστή, θα μπορούσαν να βγουν διάφορα αποτελέσματα τα οποία όμως δεν είναι αντικείμενο μελέτης της παρούσας εργασίας.

2.2 Το συνολικό συνημίτονο ενός τελεστή και το συνημίτονο αυτοσυζυγών τελεστών

Ο ορισμός 2.1.1 είναι πολύ χρήσιμος για τον υπολογισμό γωνιών τελεστών αλλά δεν είναι γενικός, αφού υπολογίζει κάθε φορά το πραγματικό ή το φανταστικό συνημίτονο ενός τελεστή, είτε για τη μέγιστη είτε για την ελάχιστη γωνία μεταξύ Tx και x. Για να υπάρχει ένα γενικό συμπέρασμα για το συνημίτονο ενός τελεστή, είναι επιτακτική η ανάγκη ενός πιο γενικού ορισμού.

***Ορισμός* 2.2.1.** *Έστω $T \in B(H)$. Ορίζεται το συνολικό συνημίτονο του τελεστή T να είναι:*

$$|\cos| \, T = \inf_{Tx \neq 0} \frac{|\langle Tx, x\rangle|}{\|Tx\|\|x\|}$$

Ο παραπάνω ορισμός, δίνει τη δυνατότητα για εύρεση άνω και κάτω φράγματος του συνημιτόνου ενός τελεστή, στη γενική περίπτωση.

***Θεώρημα* 2.2.2.** *Για κάθε τελεστή $T \in B(H)$ και Tx $\neq 0$, ισχύει ότι*

$$\frac{m(T)}{\|T\|} \leq \mid \cos \mid T \leq \frac{w(T)}{\|T\|}$$

Απόδειξη από το προηγούμενο κεφάλαιο υπενθυμίζονται οι ορισμοί
$w(T) = \sup\{\mid \lambda \mid : \lambda \in W(T)\}$

$m(T) = \inf\{\mid \lambda \mid : \lambda \in W(T)\}$, όπου

$W(T) = \{\langle Tx, x\rangle, x \in H, \|x\| = 1\}$. Επίσης για οποιεσδήποτε θετικές ποσότητες a_n, b_n ισχύει ότι:
$\inf(a_n)\inf(b_n) \leq \inf(a_n b_n) \leq \sup(a_n)\inf(b_n)$
αρχικά, ο ορισμός 2.2.1, για $\|x\| = 1$ γίνεται $\mid \cos \mid T = \inf\limits_{\|x\|=1} \frac{|\langle Tx,x\rangle|}{\|Tx\|}$
και προφανώς $\frac{|\langle Tx,x\rangle|}{\|Tx\|} = \mid \langle Tx, x\rangle \mid \frac{1}{\|Tx\|}$, άρα χρησιμοποιώντας την παραπάνω διπλή ανισότητα προκύπτει ότι:
$\inf\limits_{\|x\|=1} \mid \langle Tx, x\rangle \mid \inf\limits_{\|x\|=1} \frac{1}{\|Tx\|} \leq \inf\limits_{\|x\|=1} \frac{|\langle Tx,x\rangle|}{\|Tx\|} \leq \sup\limits_{\|x\|=1} \mid \langle Tx, x\rangle \mid \inf\limits_{\|x\|=1} \frac{1}{\|Tx\|}$

Ακόμη, γνωρίζοντας ότι

$$\mid \langle Tx, x\rangle \mid \leq w(T)\|x\|^2 \overset{\|x\|=1}{=} w(T) \Rightarrow \sup \mid \langle Tx, x\rangle \mid \leq w(T)$$

και ότι

$$\inf \frac{1}{\|Tx\|} = \frac{1}{\sup \|Tx\|} = \frac{1}{\|Tx\|}$$

προκύπτει ότι

$$\mid \cos \mid T = \inf_{\|x\|=1} \frac{|\langle Tx,x\rangle|}{\|Tx\|} \leq \sup_{\|x\|=1} \mid \langle Tx, x\rangle \mid \inf_{\|x\|=1} \frac{1}{\|Tx\|} =$$
$$= \sup_{\|x\|=1} \mid \langle Tx, x\rangle \mid \frac{1}{\|Tx\|} \leq w(T)\frac{1}{\|Tx\|} = \frac{w(T)}{\|Tx\|}$$

αντίστοιχα, γνωρίζοντας ότι

$$\mid \langle Tx, x\rangle \mid \geq m(T)\|x\|^2 \overset{\|x\|=1}{=} m(T) \Rightarrow \inf \mid \langle Tx, x\rangle \mid \geq m(T)$$

προκύπτει ότι

$$\mid \cos \mid T = \inf_{\|x\|=1} \frac{|\langle Tx,x\rangle|}{\|Tx\|} \geq \inf_{\|x\|=1} \mid \langle Tx, x\rangle \mid \inf_{\|x\|=1} \frac{1}{\|Tx\|} =$$
$$= \inf_{\|x\|=1} \mid \langle Tx, x\rangle \mid \frac{1}{\|Tx\|} \geq m(T)\frac{1}{\|Tx\|} = \frac{m(T)}{\|Tx\|}$$

άρα αποδείχθηκε ότι $\frac{m(T)}{\|T\|} \leq \mid \cos \mid T \leq \frac{w(T)}{\|T\|}$ ■

Τα παραπάνω άνω και κάτω φράγματα δεν είναι τόσο ισχυρά, αλλά έχουν το πλεονέκτημα ότι ισχύουν σε κάθε περίπτωση.

Μία πολύ σημαντική κλάση τελεστών, είναι οι αυτοσυζυγείς. Στην περίπτωση αυτή, αν ο τελεστής είναι και αυστηρά θετικός (strongly positive) υπάρχει το επόμενο θεώρημα που δίνει με ακρίβεια το συνημίτονο του τελεστή.

***Θεώρημα* 2.2.3.** *Για κάθε τελεστή* $T \in B(H)$ *όπου* T *αυτοσυζυγής και αυστηρά θετικός (m>0), ισχύει ότι*

$$\cos T = \frac{2\sqrt{mM}}{m+M}$$

όπου $m = m(T)$ *και* $M = w(T)$.

Για την απόδειξη του θεωρήματος 2.2.3 απαραίτητη είναι η ανισότητα του Kantorovich [4], η οποία λέει ότι αν έχω έναν ερμιτιανό, positive definite πίνακα A, με α,β να είναι η μικρότερη και η μεγαλύτερη ιδιοτιμή του αντίστοιχα, τότε ισχύει ότι:

$$\langle Ay, y\rangle\langle A^{-1}y, y\rangle \ \leq \frac{1}{4}\{\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\}^2$$

Αυτό το αποτέλεσμα για τελεστές αναφέρει ότι: για έναν T αυτοσυζυγή και αυστηρά θετικό τελεστή,με m,M να ικανοποιούν τη σχέση: $m\langle x, x\rangle \ \leq \ \langle Ax, x\rangle \ \leq M\langle x, x\rangle$, ισχύει ότι:

$$\langle Tx, x\rangle\langle T^{-1}x, x\rangle \ \leq \frac{1}{4}\{\sqrt{\frac{M}{m}} + \sqrt{\frac{m}{M}}\}^2$$

Μία παραλλαγή αυτού δίνει ότι για έναν T αυτοσυζυγή και αυστηρά θετικό τελεστή, με $m = m(T)$ και $M = w(T)$ ισχύει ότι:

$$\sup_{\|y\|=1}\{\langle y, Ty\rangle\langle y, T^{-1}y\rangle\} = \frac{1}{4}\{\sqrt{\frac{M}{m}} + \sqrt{\frac{m}{M}}\}^2$$

Όλα αυτά υπάρχουν στα [4], [5], [6], [7] . Στην τελευταία σχέση, ο Strang [7] έδειξε την ισότητα και οι Werner Greub και Werner Rheinboldt [5] έδειξαν ότι ισχύει το αποτέλεσμα.

Απόδειξη Για κάθε αυτοσυζυγή τελεστή T ισχύει ότι: $\langle Tv, w\rangle = \langle v, Tw\rangle$, αφού $T = T^*$, ακόμη ότι $\Re\langle Tx, x\rangle = \langle Tx, x\rangle$, και τέλος ότι αν ένας τελεστής είναι αυτοσυζυγής, είναι αυτοσυζυγείς και οι δυνάμεις του.

Για κάθε αυστηρά θετικό τελεστή T ισχύει ότι $\langle Tv, v\rangle > 0$, $v \neq 0$.

οπότε:

$$(\cos T)^{-2} = (\inf_{Tx\neq 0}\frac{\Re\langle Tx, x\rangle}{\|Tx\|\|x\|})^{-2} = (\inf_{Tx\neq 0}\frac{\langle Tx, x\rangle}{\|Tx\|\|x\|})^{-2} =$$

$$(\frac{1}{\inf\limits_{Tx\neq 0}\frac{\langle Tx,x\rangle}{\|Tx\|\|x\|}})^2 = (\sup_{Tx\neq 0}\frac{\|Tx\|\|x\|}{\langle Tx, x\rangle})^2 = \sup_{Tx\neq 0}\frac{\|Tx\|^2\|x\|^2}{\langle Tx, x\rangle^2}$$

Αλλά ισχύει ότι:
$\sup\limits_{Tx\neq 0}\{\|Tx\|^2\|x\|^2 : x \neq 0, \langle Tx, x\rangle = 1\} = \sup\limits_{\langle Tx,x\rangle=1}\{\frac{\|Tx\|^2\|x\|^2}{\langle Tx,x\rangle^2} : x \neq 0\} \leq \sup\limits_{Tx\neq 0}\{\frac{\|Tx\|^2\|x\|^2}{\langle Tx,x\rangle^2} : x \neq 0\}$

και ότι:
$\frac{\|Tx\|^2\|x\|^2}{\langle Tx,x\rangle^2} = \frac{\|Tx\|^2\|x\|^2}{\|\langle Tx,x\rangle\|^2} = \frac{\|Tx\|^2\|x\|^2}{\|\langle Tx,x\rangle^{\frac{1}{2}}\langle Tx,x\rangle^{\frac{1}{2}}\|^2} = \|T\frac{x}{\langle Tx,x\rangle^{\frac{1}{2}}}\|^2\|\frac{x}{\langle Tx,x\rangle^{\frac{1}{2}}}\|^2$

και θέτοντας $y = \frac{x}{\langle Tx,x\rangle^{\frac{1}{2}}}$, με $\langle Ty, y\rangle = \langle T\frac{x}{\langle Tx,x\rangle^{\frac{1}{2}}}, \frac{x}{\langle Tx,x\rangle^{\frac{1}{2}}}\rangle = \frac{\langle Tx,x\rangle}{\langle Tx,x\rangle} = 1$,
προκύπτει ότι: $\frac{\|Tx\|^2\|x\|^2}{\langle Tx,x\rangle^2} = \|Ty\|^2\|y\|^2$, με $\langle Ty, y\rangle = 1$

οπότε $(\cos T)^{-2} = \sup\limits_{Tx\neq 0}\frac{\|Tx\|^2\|x\|^2}{\langle Tx,x\rangle^2} = \sup\limits_{\langle Tx,x\rangle=1}\|Tx\|^2\|x\|^2$

ακόμη ισχύει ότι:

$$\|Tx\|^2\|x\|^2 = \langle Tx, x\rangle\langle x, x\rangle = \langle T^2x, x\rangle\langle T^{-\frac{1}{2}}T^{\frac{1}{2}}x, x\rangle =$$

$$\langle T^{\frac{1}{2}}T^{\frac{3}{2}}x, x\rangle\langle T^{\frac{1}{2}}x, (T^{-\frac{1}{2}})^*x\rangle = \langle T^{\frac{1}{2}}x, (T^{\frac{3}{2}})^*x\rangle\langle T^{\frac{1}{2}}x, T^{-\frac{1}{2}}x\rangle =$$

$$\langle T^{\frac{1}{2}}x, T^{\frac{3}{2}}x\rangle\langle T^{\frac{1}{2}}x, T^{-\frac{1}{2}}x\rangle =$$

$$\langle T^{\frac{1}{2}}x, TT^{\frac{1}{2}}x\rangle\langle T^{\frac{1}{2}}x, T^{-1}T^{\frac{1}{2}}x\rangle$$

άρα: $(\cos T)^{-2} = \sup\limits_{\langle Tx,x\rangle=1}\|Tx\|^2\|x\|^2 = \sup\limits_{\langle Tx,x\rangle=1}\langle T^{\frac{1}{2}}x, TT^{\frac{1}{2}}x\rangle\langle T^{\frac{1}{2}}x, T^{-1}T^{\frac{1}{2}}x\rangle$
Συνεπώς θέτοντας $y = T^{\frac{1}{2}}x$ και απαιτώντας $\|y\|^2 = 1$, προκύπτει ότι:
$(\cos T)^{-2} = \sup\limits_{\langle Tx,x\rangle=1}\langle T^{\frac{1}{2}}x, TT^{\frac{1}{2}}x\rangle\langle T^{\frac{1}{2}}x, T^{-1}T^{\frac{1}{2}}x\rangle = \sup\limits_{\|y\|=1}\langle y, Ty\rangle\langle y, T^{-1}y\rangle \overset{Kantorovich}{=}$

$\frac{1}{4}\{\sqrt{\frac{M}{m}} + \sqrt{\frac{m}{M}}\}^2 = \frac{1}{4}(\frac{M}{m} + 2 + \frac{m}{M}) = \frac{1}{4}\frac{M^2+2Mm+m^2}{Mm} = \frac{(M+m)^2}{4Mm}$

Συνολικά λοιπόν:

$$(\cos T)^{-2} = \frac{(M+m)^2}{4Mm} \Leftrightarrow$$

$$(\cos T)^{-1} = \frac{|M+m|}{2\sqrt{Mm}} \overset{M,m>0}{\Leftrightarrow}$$

$$(\cos T)^{-1} = \frac{M+m}{2\sqrt{Mm}} \Leftrightarrow$$

$$\cos T = \frac{2\sqrt{Mm}}{M+m}$$

$\blacksquare$

***Πόρισμα* 2.2.4.** *Έστω A θετικός, αντιστρέψιμος και αυτοσυζυγής τελεστής σε ένα χώρο Hilbert H. Τότε ισχύει ότι:*

$$\cos A = \frac{2\sqrt{\|A\|\|A^{-1}\|}}{\|A\|\|A^{-1}\|+1}$$
και
$$\sin A = \frac{\|A\|\|A^{-1}\|-1}{\|A\|\|A^{-1}\|+1}$$

Απόδειξη Υπενθυμίζεται εδώ από το πόρισμα 1.2.8, αφού A αυτοσυζυγής $m_A = \frac{1}{\|A^{-1}\|}$ και $M_A = \|A\|$. Από το θεώρημα 2.2.3, ισχύει για τον τελεστή A ότι:

$$\cos A = \frac{2\sqrt{m_A M_A}}{m_A+M_A} = \frac{2\sqrt{\frac{1}{\|A^{-1}\|}\|A\|}}{\frac{1}{\|A^{-1}\|}+\|A\|} = \frac{2\frac{\|A\|}{\|A^{-1}\|}}{\frac{\|A\|\|A^{-1}\|+1}{\|A^{-1}}} = \frac{2\sqrt{\|A\|\|A^{-1}\|}}{\|A\|\|A^{-1}\|+1}$$

και από τη σχέση 3.17 ισχύει ότι:

$$\sin A = \frac{M_A-m_A}{m_A+M_A} = \frac{\|A\|-\frac{1}{\|A^{-1}\|}}{\frac{1}{\|A^{-1}\|}+\|A\|} = \frac{\|A\|\|A^{-1}\|-1}{\|A\|\|A^{-1}\|+1}$$ $\blacksquare$

Παρότι η παρούσα εργασία ασχολείται μόνο με φραγμένους τελεστές, παρατίθεται το επόμενο βασικό αποτέλεσμα για το συνημίτονο ενός μη φραγμένου τελεστή, χωρίς απόδειξη.

***Θεώρημα* 2.2.5.** *Αν T accretive (αυξητικός) και μη φραγμένος τελεστής σε ένα χώρο Hilbert H, τότε:* $\cos T = 0$

Η πλειοψηφία των ορισμών, προτάσεων, πορισμάτων και θεωρημάτων του παρόντος κεφαλαίου, βρισκεται στην παράγραφο 3.1 του [1].

Κεφάλαιο 3

Το θεώρημα min-max

3.1 Το θεώρημα min-max

Ένα πολύ σημαντικό θεώρημα για την ανάπτυξη της τριγωνομετρίας τελεστών αλλά και της θεωρίας ημιομάδων είναι το θεώρημα min-max. Πριν από το θεώρημα αυτό, δίνονται και αποδεικνύονται δύο πολύ χρήσιμα εργαλεία, που αφορούν ισοδύναμες εκφράσεις του πότε ένας τελεστής είναι accretive (αυξητικός).

***Πρόταση* 3.1.1.** *Έστω T ένας accretive (αυξητικός) τελεστής. Τότε ισχύει ότι:*

$$\Re\langle Tx, x\rangle \geq 0 \Leftrightarrow \|tTx + x\| \geq \|x\|, \text{ για κάθε } t > 0$$

Απόδειξη

$\|tTx+x\|^2 = t^2\|Tx\|^2 + \|x\|^2 + 2t\Re\langle Tx, x\rangle \overset{\Re\langle Tx,x\rangle \geq 0}{\geq} t^2\|Tx\|^2 + \|x\|^2 \geq \|x\|^2$
άρα

$$\|tTx + x\|^2 \geq \|x\|^2 \Leftrightarrow$$

$$\|tTx + x\| \geq \|x\|$$

αντίστροφα:

$$\|tTx + x\| \geq \|x\| \Leftrightarrow$$

$$\|tTx + x\|^2 \geq \|x\|^2 \Leftrightarrow$$

$$t^2\|Tx\|^2 + \|x\|^2 + 2t\Re\langle Tx, x\rangle \geq \|x\|^2 \Leftrightarrow$$

$$t^2\|Tx\|^2 + 2t\Re\langle Tx, x\rangle \geq 0 \overset{t\geq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$t\|Tx\|^2 + 2\Re\langle Tx, x\rangle \geq 0$$

και για $t \to 0$, προκύπτει το ζητούμενο $2\Re\langle Tx, x\rangle \geq 0 \Leftrightarrow \Re\langle Tx, x\rangle \geq 0$

■

***Πρόταση* 3.1.2.** *Έστω T ένας strongly accretive (αυξητικός) τελεστής. Τότε ισχύει ότι:*

$$\Re\langle Tx, x\rangle \geq m_T > 0, \text{ για } \|x\| = 1 \Leftrightarrow$$

$$\exists \varepsilon > 0 : \|\varepsilon T - I\| < 1$$

Απόδειξη

$\|\varepsilon T - I\|^2 = \|\varepsilon T\|^2 - 2\Re\langle \varepsilon Tx, x\rangle + \|x\|^2 \stackrel{\|x\|=1}{=} \|\varepsilon T\|^2 - 2\Re\langle \varepsilon Tx, x\rangle + 1 =$
$\varepsilon^2\|T\|^2 - 2\varepsilon\Re\langle Tx, x\rangle + 1 \stackrel{\Re\langle Tx,x\rangle \geq m_T > 0}{\leq} \varepsilon^2\|T\|^2 - 2\varepsilon m_T + 1$
Ο στόχος του να βρεθεί ε>0 που να ικανοποιεί τη ζητούμενη ανισότητα, θα επιτευχθεί, αν βρεθεί ε>0 που να ικανοποιεί την $\varepsilon^2\|T\|^2 - 2\varepsilon m_T + 1 < 1$.
Αρκεί δλδ να βρεθεί ε>0 που να ικανοποιεί την:

$$\varepsilon^2\|T\|^2 - 2\varepsilon m_T < 0 \stackrel{\varepsilon>0}{\Leftrightarrow}$$

$$\varepsilon\|T\|^2 - 2m_T < 0 \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon\|T\|^2 < 2m_T \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon < \frac{2m_T}{\|T\|^2}$$

Συνεπώς, για οποιοδήποτε $\varepsilon < \frac{2m_T}{\|T\|^2}$ ισχύει ότι $\|\varepsilon T - I\|^2 < 1 \Leftrightarrow \|\varepsilon T - I\| < 1$

αντίστροφα:
Αρχικά ισχύει ότι:

$$\|\varepsilon T - I\| < 1 \Rightarrow$$

$$\|\varepsilon T - I\|^2 < 1 \Rightarrow$$

$$\sup_{\|x\|=1} \|(\varepsilon T - I)x\|^2 < 1$$

Ακόμη
$\|(\varepsilon T - I)x\|^2 = \|\varepsilon Tx\|^2 - 2\Re\langle \varepsilon Tx, x\rangle + \|x\|^2 \stackrel{\|x\|=1}{\leq} \varepsilon^2\|Tx\|^2 - 2\varepsilon\Re\langle Tx, x\rangle + 1$
Άρα

$$\sup_{\|x\|\leq 1} \|(\varepsilon T - I)x\|^2 < 1 \Rightarrow$$

$$\varepsilon^2\|T\|^2 - 2\varepsilon\Re\langle Tx, x\rangle + 1 < 1 \Rightarrow$$

$$\varepsilon^2\|Tx\|^2 - 2\varepsilon\Re\langle Tx, x\rangle < 0 \stackrel{\varepsilon>0}{\Rightarrow}$$

$$\varepsilon\|Tx\|^2 - 2\Re\langle Tx, x\rangle < 0 \Rightarrow$$

$$2\Re\langle Tx, x\rangle > \varepsilon\|Tx\|^2 \Rightarrow$$

$$\Re\langle Tx, x\rangle > \tfrac{\varepsilon\|Tx\|^2}{2}$$

Αλλά αφού $\|\varepsilon T - I\| < 1 \Rightarrow$, ο $I - \varepsilon T - I = -\varepsilon T$ είναι αντιστρέψιμος, άρα $\|\varepsilon Tx \geq c\|x\| \overset{\|x\|=1}{=} c$. Συνεπώς παίρνουμε ότι:

$$\Re\langle Tx, x\rangle > \tfrac{\varepsilon\|Tx\|^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Re\langle Tx, x\rangle \geq \tfrac{c^2\varepsilon}{2} = m_T > 0$$

■

Οι δύο αυτές προτάσεις είναι πολύ χρήσιμες για την απόδειξη του θεωρήματος που ακολουθεί. Πιο συγκεκριμένα, το ενδιαφέρον εστιάζεται στο

$$g_m(B) = \min_{\varepsilon>0} \|\varepsilon B - I\| \tag{3.1}$$

που είναι μία πολύ σημαντική ποσότητα στη θεωρία ημιομάδων, που ήταν η απαρχή της τριγωνομετρίας τελεστών. Και τριγωνομετρία τελεστών, χωρίς τη βασική τριγωνομετρική ταυτότητα $\sin^2 B + \cos^2 B = 1$ δεν μπορεί να υπάρξει. Αυτός είναι και ο λόγος που το επόμενο θεώρημα είναι τόσο σημαντικό.

***Θεώρημα* 3.1.3.** *Η min-max ισότητα Για έναν strongly accretive (αυστηρά αυξητικό) και φραγμένο τελεστή B σε ένα χώρο Hilbert H, ισχύει ότι:*

$$\sup_{\|x\|\leq 1} \inf_{\varepsilon>0} \|(\varepsilon B - I)x\|^2 = \inf_{\varepsilon>0} \sup_{\|x\|\leq 1} \|(\varepsilon B - I)x\|^2 \tag{3.2}$$

δλδ, βάσει της σχέσης 3.1, ισχύει ότι:

$$\sin B = g_m(B)$$

όπου το ημίτονο του τελεστή B ορίζεται να είναι $\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B}$

Απόδειξη Αρχικά αφού ο τελεστής B είναι strongly accretive (αυστηρά αυξητικός),ισχύει ότι:
$\Re\langle Bx, x\rangle \geq m_B > 0, \|x\| = 1 \overset{3.1.2}{\Leftrightarrow} \exists\varepsilon > 0 : \|\varepsilon B - I\| < 1$
Ακόμη το δεύτερο μέλος της σχέσης 3.2 είναι το $g_m^2(B)$. Αυτό συμβαίνει διότι:
$\|(\varepsilon B - I)x\| \leq \|\varepsilon B - I\|\|x\| \Rightarrow \|(\varepsilon B - I)x\|^2 \leq \|\varepsilon B - I\|^2\|x\|^2 \Rightarrow$
$\sup_{\|x\|\leq 1} \|\varepsilon B - I\|^2 = \|\varepsilon B - I\|^2 \Rightarrow \inf_{\varepsilon>0} \sup_{\|x\|\leq 1} \|\varepsilon B - I\|^2 = \inf_{\varepsilon>0} \|\varepsilon B - I\|^2$

Άρα
$\inf_{\varepsilon>0} \sup_{\|x\|\leq 1} \|(\varepsilon B - I)x\|^2 \overset{\|x\|=1}{=} \inf_{\varepsilon>0} \|\varepsilon B - I\|^2 = \min_{\varepsilon>0} \|\varepsilon B - I\|^2 \overset{3.1}{=} g_m^2(B)$
όπου το inf είναι ίσο με το min από τη συνέχεια της νόρμας
άρα

$$\inf_{\varepsilon>0} \sup_{\|x\|\leq 1} \|(\varepsilon B - I)x\|^2 = g_m^2(B) \tag{3.3}$$

όπου στην τελευταία σχέση το min πιάνεται και μάλιστα μοναδικά. Αυτό συμβαίνει επειδή η νόρμα είναι κυρτή συνάρτηση. Έστω προς απαγωγή σε άτοπο, ότι το ελάχιστο αυτό δεν πιάνεται μοναδικά. Αφού η νόρμα είναι κυρτή συνάρτηση, το να μην έχει μοναδικό ελάχιστο, σημαίνει ότι θα έχει διάστημα ελαχίστου. Έστω $[\varepsilon_1, \varepsilon_2]$, με $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ το διάστημα αυτό ελαχίστου της $\|\varepsilon B - I\|$, και έστω $\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}$ τ μέσο του διαστήματος αυτού.
Αφού $[\varepsilon_1, \varepsilon_2]$ δια΄στημα ελαχίσοτυ της $\|\varepsilon B - I\|$, ισχύει ότι:

$$g_m(B) = \min_{\varepsilon>0} \|\varepsilon B - I\| = \|\varepsilon_1 B - I\| = \|\varepsilon_2 B - I\| = \|\tfrac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2} B - I\|$$

$$g_m^2(B) = \|\varepsilon_1 B - I\|^2 = \|\varepsilon_2 B - I\|^2 = \|\tfrac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2} B - I\|^2$$

Αλλά

$\|\varepsilon_1 B - I\|^2 = \sup\limits_{\|x\|=1} \|(\varepsilon_1 B - I)x\|^2$ και
$\|\varepsilon_2 B - I\|^2 = \sup\limits_{\|x\|=1} \|(\varepsilon_2 B - I)x\|^2$
Άρα: $g_m^2(B) = \sup\limits_{\|x\|=1} \|(\varepsilon_1 B - I)x\|^2 = \sup\limits_{\|x\|=1} \|(\varepsilon_2 B - I)x\|^2$

Οπότε $\forall x : \|x\| = 1$

$$g_m^2(B) \geq \|(\varepsilon_1 B - I)x\|^2$$
$$g_m^2(B) \geq \|(\varepsilon_2 B - I)x\|^2$$

Ακόμη $g_m^2(B) = \|\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2} B - I\|^2 = \sup\limits_{\|x\|=1} \|\frac{(\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2} B - I)x\|^2$

και από τον ορισμό του supremum ισχύει ότι: $\forall \delta > 0 \; \exists x_0$:

$$\|\tfrac{(\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2} B - I)x_0\|^2 \geq \sup_{\|x\|=1} \|\tfrac{(\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2} B - I)x\|^2 - \delta$$
$$\|\tfrac{(\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2} B - I)x_0\|^2 \geq g_m^2(B) - \delta$$

Οπότε για αυτό το x_0, ισχύουν και οι παραπάνω σχέσεις,δηλαδή

$$g_m^2(B) \geq \|(\varepsilon_1 B - I)x_0\|^2$$
$$g_m^2(B) \geq \|(\varepsilon_2 B - I)x_0\|^2$$

Συνλικά λοιπόν για την κυρτή ως προς ε συνάρτηση (παραβολή)
$f(\varepsilon) = \|(\varepsilon B - I)x_0\|^2$, ισχύει ότι:

$$f(\varepsilon_1) \leq g_m^2(B)$$
$$f(\varepsilon_2) \leq g_m^2(B)$$
$$f(\tfrac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}) \geq g_m^2(B) - \delta$$

Δηλαδή στα άκρα του διαστήματος ελαχίστου, η κυρτή παραβολή είναι κάτω από το $g_m^2(B)$, αλλά στο μέσο του είναι όσο κοντά θέλω σε αυτό που είναι άτοπο, άρα το ελάχιστο είναι μοναδικό.
Στη συνέχεια θα αποδειχθεί ότι το πρώτο μέλος της σχέσης 3.2 είναι ίσο με $1-\cos^2 B$, δλδ ότι $\sup\limits_{\|x\|\leq 1}\inf\limits_{\varepsilon>0}\|(\varepsilon B-I)x\|^2 = 1-\cos^2 B$
Ισχύει ότι:
$\|(\varepsilon B-I)x\|^2 = \|\varepsilon Bx - x\|^2 = \|\varepsilon Bx\|^2 + \|x\|^2 - 2\Re\langle\, \varepsilon Bx, x\rangle \ = \mid \varepsilon\mid^2 \|Bx\|^2 + \|x\|^2 - 2\varepsilon\Re\langle\, Bx, x\rangle \ \overset{\varepsilon\geq 0}{=} \varepsilon^2\|Bx\|^2 + \|x\|^2 - 2\varepsilon\Re\langle\, Bx, x\rangle \ \overset{\|x\|=1}{=} \varepsilon^2\|Bx\|^2 - 2\varepsilon\Re\langle\, Bx, x\rangle \ + 1$
Η σχέση τώρα $\varepsilon^2\|Bx\|^2 - 2\varepsilon\Re\langle\, Bx, x\rangle \ + 1$, είναι μία παραβολή ως προς ε (της μορφής $\alpha\varepsilon^2 + \beta\varepsilon + \gamma$), και αφού $\alpha = \|Bx\|^2 > 0$, παρουσιάζει ελάχιστο στο $\varepsilon_m(x) = -\frac{\beta}{2\alpha}$, το $-\frac{\Delta}{4\alpha}$. Για να υπολογιστεί το ελάχιστο αυτό, χρειάζεται αρχικά να υπολογιστεί η διακρίνουσα του τριωνύμου:
$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 4\Re^2\langle\, Bx, x\rangle \ - 4\|Bx\|^2$
Άρα η παραβολή παρουσιάζει ελάχιστο στο $\varepsilon_m(x) = -\frac{\beta}{2\alpha} = \frac{2\Re\langle\, Bx,x\rangle}{2\|Bx\|^2} =$

$$\varepsilon_m(x) = \frac{\Re\langle\, Bx, x\rangle}{\|Bx\|^2} \tag{3.4}$$

το $-\frac{\Delta}{4\alpha} = -\frac{4\Re^2\langle\, Bx,x\rangle \ -4\|Bx\|^2}{4\|Bx\|^2} = -\frac{\Re^2\langle\, Bx,x\rangle \ -\|Bx\|^2}{\|Bx\|^2} = \frac{\|Bx\|^2-\Re^2\langle\, Bx,x\rangle}{\|Bx\|^2} = 1-\frac{\Re^2\langle\, Bx,x\rangle}{\|Bx\|^2}$

$$-\frac{\Delta}{4\alpha} = 1-(\frac{\Re\langle\, Bx, x\rangle}{\|Bx\|})^2 \tag{3.5}$$

Άρα συνολικά ισχύει ότι:

$$\inf_{\varepsilon>0}\|(\varepsilon B-I)x\|^2 = 1-(\tfrac{\Re\langle\, Bx,x\rangle}{\|Bx\|})^2$$

$$\sup_{\|x\|\leq 1}\inf_{\varepsilon>0}\|(\varepsilon B-I)x\|^2 = \sup_{\|x\|\leq 1} 1-(\tfrac{\Re\langle\, Bx,x\rangle}{\|Bx\|})^2$$

$$\sup_{\|x\|\leq 1}\inf_{\varepsilon>0}\|(\varepsilon B-I)x\|^2 = 1-(\inf_{\varepsilon>0}\tfrac{\Re\langle\, Bx,x\rangle}{\|Bx\|})^2$$

$$\sup_{\|x\|\leq 1}\inf_{\varepsilon>0}\|(\varepsilon B-I)x\|^2 = 1-\cos^2 B$$

Έστω τώρα ε_m, το μοναδικό αυτό ε>0, στο οποίο πιάνεται το $g_m(B)$, δλδ ε_m, είναι το ε>0 στο οποίο ισχύει ότι $g_m(B) = \min\limits_{\varepsilon>0}\|\varepsilon B - I\|$. Το ενδιαφέρον πλέον εστιάζεται στην κυρτή καμπύλη $\|\varepsilon B - I\|^2$, η οποία είναι συνεχής ως προς ε και παραγωγίσιμη με δεξιά και αριστερή παράγωγο ίσες σε όλο το πεδίο ορισμού της, εκτός από ένα αριθμήσιμο σύνολο, άρα μπορεί να εξεταστεί η κλίση της.
Μελετάται η κυρτή αυτή καμπύλη $\|\varepsilon B - I\|^2$ κοντά στο μοναδικό της ελάχιστο

$g_m^2(B)$. Επιλέγεται ε>0, με $\varepsilon < \varepsilon_m$. Τότε η $\|\varepsilon B - I\|^2$ έχει αρνητική κλίση και κατεβαίνει προς το minimum της, δλδ το $\|\varepsilon_m B - I\|^2$.
Άρα $\|\varepsilon B - I\|^2 > \|\varepsilon_m B - I\|^2$.
Ακόμη αφού το $\|\varepsilon B - I\|^2$ είναι εξ'ορισμού ένα supremum και από την τελευταία ανισοτική σχέση, ισχύει ότι: $\|\varepsilon B - I\|^2 = \sup\limits_{\|x\|=1} \|(\varepsilon B - I)x\|^2$. Άρα για το δεδομένο ε>0 που έχει επιλεχθεί:
$\exists x_1 : \|x_1\| = 1 : \|(\varepsilon B - I)x_1\|^2 > \|\varepsilon_m B - I\|^2$. Ακόμη αυτό το x_1, μπορεί να έχει επιλεχθεί, ώστε το ελάχιστό του $\varepsilon_m(x_1)$, να βρίσκεται (όχι απαραίτητα αυστηρά) δεξιά από το ε_m. Δλδ $\varepsilon_m(x_1) > \varepsilon_m$. Αυτό ισχύει γιατί αλλιώς, όλες οι παραβολές $\|(\varepsilon B - I)x_1\|^2$ που ανεβαίνουν για να φτάσουν το supremum τους $\|\varepsilon B - I\|^2$, αρχίζουν την ανοδική τους πορεία από σημεία $\varepsilon_m(x_(1))$ τα οποία είναι γνήσια αριστερά από το $\varepsilon_(m)$, με αποτέλεσμα να παραβιάζουν την αρνητική κλίση της καμπύλης $\|\varepsilon B - I\|^2$. Ομοίως, για ένα δεδομένο ε>0 που επιλέγεται ώστε αυτή τη φορά $\varepsilon > \varepsilon_m$, η $\|\varepsilon B - I\|^2$ έχει θετική κλίση και ανεβαίνει από το minimum της, δλδ το $\|\varepsilon_m B - I\|^2$. Άρα πάλι $\|\varepsilon B - I\|^2 > \|\varepsilon_m B - I\|^2$. Και ακριβώς όπως και πριν, για το ε>0 που έχει επιλεχθεί:
$\exists x_2 : \|x_2\| = 1 : \|(\varepsilon B - I)x_2\|^2 > \|\varepsilon_m B - I\|^2$.
Και ακριβώς για τον ίδιο λόγο όπως πριν, το x_2 μπορεί να επιλεχθεί, ώστε το ελάχιστό του $\varepsilon_m(x_2)$, να βρίσκεται (όχι απαραίτητα αυστηρά) αριστερά από το ε_m. Δλδ $\varepsilon_m(x_2) < \varepsilon_m$. Τέλος, αυτά τα x_1, x_2, μπορούν να επιλεχθούν, έτσι ώστε να ισχύει

$$\|(\varepsilon_m B - I)x_1\|^2 \geq g_m^2(B) - \delta, \|(\varepsilon_m B - I)x_2\|^2 \geq g_m^2(B) - \delta \qquad (3.6)$$

για προκαθορισμένο πολύ μικρό δ>0, έτσι ώστε οι 2 αυτές παραβολές να περνούν αυθαιρέτως κοντά, κάτω από το ελάχιστο $g_m(B)$.
Στην πρώτη τώρα περίπτωση, όπου για δεδομένο δ>0, $\varepsilon_m(x_1) > \varepsilon_m$ και $\varepsilon_m(x_2) < \varepsilon_m$:
Έστω $x = \xi x_1 + \eta x_2$,
με τα ξ,η να ικανοποιούν τη σχέση:

$$1 = \|x\|^2 = \xi^2 + \eta^2 + 2\eta\xi\Re\langle x_1, x_2\rangle \qquad (3.7)$$

Η τελευταία σχέση παριστάνει μία έλλειψη, και ισχύει αφού:
$\|x\|^2 = \|\xi x_1 + \eta x_2\|^2 = \|\xi x_1\|^2 + \|\eta x_2\|^2 + 2\Re\langle \xi x_1, \eta x_2\rangle =$
$|\ \xi\ |^2\ \|x_1\|^2 + |\ \eta\ |^2\ \|x_2\|^2 + 2\eta\xi\Re\langle x_1, x_2\rangle \overset{\|x_1\|=\|x_2\|=1}{=} \xi^2 + \eta^2 + 2\eta\xi\Re\langle x_1, x_2\rangle$.

Κάνοντας τώρα πράξεις, ισχύει ότι:

$$\|(\varepsilon_m B - I)x\|^2 = \|(\varepsilon_m B - I)(\xi x_1 + \eta x_2)\|^2 =$$

$$\|(\varepsilon_m B - I)\xi x_1 + (\varepsilon_m B - I)\eta x_2\|^2 =$$

$$\|(\varepsilon_m B - I)\xi x_1\|^2 + \|(\varepsilon_m B - I)\eta x_2\|^2 + 2\Re\langle (\varepsilon_m B - I)\xi x_1, (\varepsilon_m B - I)\eta x_2\rangle =$$

$$\xi^2\|(\varepsilon_m B - I)x_1\|^2 + \eta^2\|(\varepsilon_m B - I)x_2\|^2 + 2\eta\xi\Re\langle (\varepsilon_m B - I)x_1, (\varepsilon_m B - I)x_2\rangle \overset{3.6}{\geq}$$

$$\xi^2(g_m^2(B)-\delta)+\eta^2(g_m^2(B)-\delta)+2\eta\xi\Re\langle\,(\varepsilon_m B-I)x_1,(\varepsilon_m B-I)x_2\rangle\ =$$

$$(g_m^2(B)-\delta)(\xi^2+\eta^2)+2\eta\xi\Re\langle\,(\varepsilon_m B-I)x_1,(\varepsilon_m B-I)x_2\rangle\ \overset{3.7}{=}$$

$$(g_m^2(B)-\delta)(1-2\eta\xi\Re\langle\,x_1,x_2\rangle\ )+2\eta\xi\Re\langle\,(\varepsilon_m B-I)x_1,(\varepsilon_m B-I)x_2\rangle\ =$$

$$g_m^2(B)-\delta-2\eta\xi(g_m^2(B)-\delta)\Re\langle\,x_1,x_2\rangle\ +2\eta\xi\Re\langle\,(\varepsilon_m B-I)x_1,(\varepsilon_m B-I)x_2\rangle\ =$$

$$g_m^2(B)-\delta+2\eta\xi\Re\langle\,(\varepsilon_m B-I)x_1,(\varepsilon_m B-I)x_2\rangle\ -(g_m^2(B)-\delta)\Re\langle\,x_1,x_2\rangle$$

και θέτοντας $C=\Re\langle\,(\varepsilon_m B-I)x_1,(\varepsilon_m B-I)x_2\rangle\ -(g_m^2(B)-\delta)\Re\langle\,x_1,x_2\rangle$, ισχύει ότι: $\|(\varepsilon_m B-I)x\|^2\geq g_m^2(B)-\delta+2\eta\xi C$.
Τώρα περιορίζονται τα η,ξ στο κατάλληλο τεταρτημόριο, έτσι ώστε να ισχύει ότι $2\eta\xi C\ \geq\ 0$. Διαλέγοντας τα η,ξ με τα κατάλληλα πρόσημα, αλλά και όσο κοντά στους άξονες βολεύει, εξασφαλίζεται ότι ο όρος $2\eta\xi C$ της προηγούμενης κατασκευής είναι αυθαίρετα μικρός. Αυτό γίνεται αυτόματα και από την κατασκευή, άρα δε χρειάζεται να συμβεί τώρα. Ο στόχος στο επόμενο αυτό κομμάτι της απόδειξης, είναι να αποδειχθεί ότι το $\varepsilon_m(x)$ μπορεί να έρθει όσο κοντά είναι απαραίτητο στο ε_m.

Αρχικά εξετάζεται η περίπτωση όπου $\varepsilon_m=\varepsilon_m(x)$

Ζητάται να πιάνεται το min αν αντικατασταθεί το ε_m με $\varepsilon_m(x)$. Δλδ έχοντας ότι $\|(\varepsilon_m B-I)x\|^2\overset{(3.5)}{=}1-(\frac{\Re\langle\,Bx,x\rangle}{\|Bx\|})^2$, ο στόχος είναι να αποδειχθεί ότι $\|(\varepsilon_m B-I)x\|^2=\|(\varepsilon_m(x)B-I)x\|^2\overset{(3.5)}{=}1-(\frac{\Re\langle\,Bx,x\rangle}{\|Bx\|})^2$ και ότι το ελάχιστο αυτό πιάνεται για $\varepsilon_m=\varepsilon_m(x)\overset{(3.4)}{=}\frac{\Re\langle\,Bx,x\rangle}{\|Bx\|^2}$.
Θέτοντας $\varepsilon_1=\varepsilon_m(x_1)$ και $\varepsilon_2=\varepsilon_m(x_2)$ και δεδομένου ότι στην περίπτωση αυτή $\varepsilon_m(x_2)<\varepsilon_m<\varepsilon_m(x_1)$ και $x=\xi x_1+\eta x_2$, ισχύει ότι:

$$\frac{\Re\langle\,Bx,x\rangle}{\|Bx\|^2}=\varepsilon_m$$

$$\frac{\Re\langle\,B(\xi x_1+\eta x_2),(\xi x_1+\eta x_2)\rangle}{\|B(\xi x_1+\eta x_2)\|^2}=\varepsilon_m$$

$$\frac{\Re\langle\,B\xi x_1+B\eta x_2,\xi x_1+\eta x_2\rangle}{\|B\xi x_1+B\eta x_2\|^2}=\varepsilon_m$$

$$\frac{\Re\langle\,B\xi x_1,\xi x_1\rangle\ +\Re\langle\,B\xi x_1,\eta x_2\rangle\ +\Re\langle\,B\eta x_2,\xi x_1\rangle\ +\Re\langle\,B\eta x_2,\eta x_2\rangle}{\|B\xi x_1\|^2+\|B\eta x_2\|^2+2\Re\langle\,B\xi x_1,B\eta x_2\rangle}=\varepsilon_m$$

$$\frac{\xi^2\Re\langle\,Bx_1,x_1\rangle\ +\eta\xi\Re\langle\,Bx_1,x_2\rangle\ +\eta\xi\Re\langle\,Bx_2,x_1\rangle\ +\eta^2\Re\langle\,Bx_2,x_2\rangle}{\xi^2\|Bx_1\|^2+\eta^2\|Bx_2\|^2+2\eta\xi\Re\langle\,Bx_1,Bx_2\rangle}=\varepsilon_m$$

$$\xi^2\Re\langle\,Bx_1,x_1\rangle\ +\eta\xi\Re\langle\,Bx_1,x_2\rangle\ +\eta\xi\Re\langle\,Bx_2,x_1\rangle\ +\eta^2\Re\langle\,Bx_2,x_2\rangle\ =$$
$$\varepsilon_m(\xi^2\|Bx_1\|^2+\eta^2\|Bx_2\|^2+2\eta\xi\Re\langle\,Bx_1,Bx_2\rangle$$

$$\xi^2\Re\langle Bx_1, x_1\rangle + \eta\xi\Re\langle Bx_1, x_2\rangle + \eta\xi\Re\langle Bx_2, x_1\rangle + \eta^2\Re\langle Bx_2, x_2\rangle =$$
$$\varepsilon_m\xi^2\|Bx_1\|^2 + \varepsilon_m\eta^2\|Bx_2\|^2 + 2\varepsilon_m\eta\xi\Re\langle Bx_1, Bx_2\rangle$$

$$\xi^2\Re\langle Bx_1, x_1\rangle + \eta\xi\Re\langle Bx_1, x_2\rangle + \eta\xi\Re\langle Bx_2, x_1\rangle + \eta^2\Re\langle Bx_2, x_2\rangle -$$
$$\varepsilon_m\xi^2\|Bx_1\|^2 - \varepsilon_m\eta^2\|Bx_2\|^2 - 2\varepsilon_m\eta\xi\Re\langle Bx_1, Bx_2\rangle = 0$$

$$\xi^2(\Re\langle Bx_1, x_1\rangle - \varepsilon_m\|Bx_1\|^2) + \eta^2(\Re\langle Bx_2, x_2\rangle - \varepsilon_m\|Bx_2\|^2) +$$
$$\eta\xi(\Re\langle Bx_1, x_2\rangle + \Re\langle Bx_2, x_1\rangle - 2\varepsilon_m\Re\langle Bx_1, x_2\rangle) = 0$$

$$\xi^2\Re\langle Bx_1, x_1\rangle (1 - \tfrac{\varepsilon_m\|Bx_1\|^2}{\Re\langle Bx_1, x_1\rangle}) + \eta^2\Re\langle Bx_2, x_2\rangle (1 - \tfrac{\varepsilon_m\|Bx_2\|^2}{\Re\langle Bx_2, x_2\rangle}) +$$
$$\eta\xi(\Re\langle Bx_1, x_2\rangle + \Re\langle Bx_2, x_1\rangle - 2\varepsilon_m\Re\langle Bx_1, x_2\rangle) = 0$$

$$\xi^2\Re\langle Bx_1, x_1\rangle (1 - \tfrac{\varepsilon_m}{\frac{\|Bx_1\|^2}{\Re\langle Bx_1, x_1\rangle}}) + \eta^2\Re\langle Bx_2, x_2\rangle (1 - \tfrac{\varepsilon_m}{\frac{\|Bx_2\|^2}{\Re\langle Bx_2, x_2\rangle}}) +$$
$$\eta\xi(\Re\langle Bx_1, x_2\rangle + \Re\langle Bx_2, x_1\rangle - 2\varepsilon_m\Re\langle Bx_1, x_2\rangle) = 0$$

$$\xi^2\Re\langle Bx_1, x_1\rangle (1 - \tfrac{\varepsilon_m}{\varepsilon_1}) + \eta^2\Re\langle Bx_2, x_2\rangle (1 - \tfrac{\varepsilon_m}{\varepsilon_2}) + \eta\xi(\Re\langle Bx_1, x_2\rangle +$$
$$\Re\langle Bx_2, x_1\rangle - 2\varepsilon_m\Re\langle Bx_1, x_2\rangle) = 0$$

$$\xi^2\Re\langle Bx_1, x_1\rangle (1 - \tfrac{\varepsilon_m}{\varepsilon_1}) + \eta^2\Re\langle Bx_2, x_2\rangle (1 - \tfrac{\varepsilon_m}{\varepsilon_2}) +$$
$$2\eta\xi(\tfrac{\Re\langle Bx_1, x_2\rangle + \Re\langle Bx_2, x_1\rangle}{2} - \varepsilon_m\Re\langle Bx_1, x_2\rangle) = 0$$

$$\xi^2\Re\langle Bx_1, x_1\rangle (1 - \tfrac{\varepsilon_m}{\varepsilon_1}) + \eta^2\Re\langle Bx_2, x_2\rangle (1 - \tfrac{\varepsilon_m}{\varepsilon_2}) - 2\eta\xi(\varepsilon_m\Re\langle Bx_1, x_2\rangle -$$
$$\tfrac{\Re\langle Bx_1, x_2\rangle + \Re\langle Bx_2, x_1\rangle}{2}) = 0$$

Άρα η καταληκτική σχέση, είναι η:

$$\xi^2\Re\langle Bx_1, x_1\rangle (1 - \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_1}) + \eta^2\Re\langle Bx_2, x_2\rangle (1 - \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_2}) - \tag{3.8}$$
$$-2\eta\xi(\varepsilon_m\Re\langle Bx_1, x_2\rangle - \tfrac{\Re\langle Bx_1, x_2\rangle + \Re\langle Bx_2, x_1\rangle}{2}) = 0$$

η οποία παριστάνει μία εκφυλισμένη υπερβολή. Ακόμη ισχύει στην περίπτωση αυτή ότι: $\varepsilon_2 < \varepsilon_m < \varepsilon_1$, αφού $\varepsilon_m(x_2) < \varepsilon_m(x) < \varepsilon_m(x_1)$. Άρα $\varepsilon_2 < \varepsilon_m \Rightarrow \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_2} > 1 \Rightarrow 1 - \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_2} < 0$ και $\varepsilon_m < \varepsilon_1) \Rightarrow \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_1} < 1 \Rightarrow 1 - \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_1} > 0$, και αφού ο B είναι αυξητικός, $\Re\langle Bx_1, x_1\rangle > 0$ και $\Re\langle Bx_2, x_2\rangle > 0$. Άρα στην εκφυλισμένη υπερβολή, ισχύει για τους συντελεστές των η^2, ξ^2: $\Re\langle Bx_1, x_1\rangle (1 - \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_1}) > 0$ και $\Re\langle Bx_2, x_2\rangle (1 - \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_2}) < 0$, δηλαδή είναι ετερόσημοι και άρα η εκφυλισμένη υπερβολή (3.8) και η έλλειψη (3.7) τέμνονται. Δλδ από όλα τα σημεία της έλλειψης 3.7, υπάρχει τουλάχιστον ένα (το σημείο τομής με την υπερβολή) για το οποίο $\varepsilon_m(x) = \varepsilon_m$. Άρα $\varepsilon_m(x) = \varepsilon_m$ και $\|(\varepsilon_m B - I)x\|^2 \geq g_m^2(B) - \delta + 2\eta\xi C$, για αυθαίρετα μικρό δ>0.

Οπότε συνολικά για $x = \xi x_1 + \eta x_2$ ισχύει:

$$\|(\varepsilon_m B - I)x\|^2 \geq g_m^2(B) - \delta + 2\eta\xi C \tag{3.9}$$

Τα η,ξ, διαλέγονται πολύ μικρά, γιατί αλλιώς ο όρος 2ηξC, θα υπερβεί το δ>0 και η ανισότητα θα γίνει γνήσια, πράγμα που δεν μπορεί να ισχύσει, αφού: $\|(\varepsilon_m B - I)x\|^2 > g_m^2(B) = \|(\varepsilon_m B - I)\|^2 = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|(\varepsilon_m B - I)x\|^2$, που είναι άτοπο, αφού δεν γίνεται το supremum μίας ποσότητας να είναι κάτω από την ποσότητα αυτή. Ακόμη τα η,ξ μπορούν να επιλεχθούν έτσι ώστε:

$$\|(\varepsilon_m B - I)x\|^2 = \min_{\varepsilon>0} \|(\varepsilon B - I)x\|^2 \tag{3.10}$$

θεωρώντας τώρα ως x(δ), τα x εκείνα για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις (3.9) και (3.10), η απαίτηση είναι: $\sup\limits_{\|x\|\leq 1} \inf\limits_{\varepsilon>0} \|(\varepsilon_m B - I)x\|^2 = g_m^2(B)$

Στην περίπτωση που το $\varepsilon_m(x)$ πλησιάζει το ε_m, η κατασκευή είναι η ίδια αλλά αντί να επιθυμούμε $\varepsilon_m(x) = \varepsilon_m$ και να κάνουμε την αντικάτάσταση, η επιθυμητή κατάσταση είναι τώρα $\varepsilon_m(x) = \frac{\xi^2 \Re\langle Bx_1, x_1\rangle + \eta^2 \Re\langle Bx_2, x_2\rangle + 2\eta\xi \Re\langle Bx_1, x_2\rangle}{\xi^2\|Bx_1\|^2 + \eta^2\|Bx_2\|^2 + 2\eta\xi\Re\langle Bx_1, x_2\rangle}$. Και η κατασκευή γίνεται κανονικά χωρίς να αλλάζει κάτι.

Στην περίπτωση που είτε το $\varepsilon_m(x_1)$ είτε το $\varepsilon_m(x_2)$ ταυτίζονται με το $\varepsilon_m(x)$, είμαστε στον ένα ή τον άλλο κλάδο της υπερβολής αποκλειστικά, και διαλέγουμε ξ=η=0 και τότε ο όρος $2\eta\xi C$ εφαφανίζεται τελείως. Ενώ τέλος στην περίπτωση που $x_1 = x_2$ είμαστε στην παραβολή 3.7.

Σε κάθε λοιπόν περίπτωση, έχει κατασκευαστεί ένα x, με $\varepsilon_m(x)$ αυθαίρετα κοντά στο ε_m και με $\|(\varepsilon_m B - I)x\|^2$ αυθαίρετα κάτω από το $g_m^2(B)$.

Ανακεφαλαιώνοντας λοιπόν για να αποδειχθεί η ισότητα του θεωρήματος, χρειάζονται οι 2 ανισότητες:

Για το $\geq$:
$\forall\delta > 0$ ισχύει ότι:

$$\inf_{\varepsilon>0} \|(\varepsilon B - I)x_\delta\|^2 \overset{(3.10)}{=} \|(\varepsilon_m B - I)x_\delta\|^2 \geq g_m^2(B) - \delta \tag{3.11}$$

άρα: $\sup\limits_{\|x\|\leq 1} \inf\limits_{\varepsilon>0} \|(\varepsilon B - I)x\|^2 \geq \sup\limits_{\delta>0} \|(\varepsilon_m B - I)x_\delta\|^2$, αφού τα x(δ) είναι λιγότερα από τα x. Ακόμα: $\sup\limits_{\delta>0} \|(\varepsilon_m B - I)x_\delta\|^2 \overset{(3.11)}{\geq} \sup\limits_{\delta>0} g_m^2(B) - \delta = g_m^2(B)$, αφού το $g_m^2(B) - \delta$ πιάνει τη μεγαλύτερη τιμή του όταν $\delta \to 0$ και αυτή είναι το $g_m^2(B)$. Άρα

$$\sup_{\|x\|\leq 1} \inf_{\varepsilon>0} \|(\varepsilon B - I)x\|^2 \geq g_m^2(B) \tag{3.12}$$

Για το $\leq$:
Ο στόχος εδώ είναι να αποδειχθεί ότι: $g_m^2(B) \geq \sup\limits_{\|x\|\leq 1} \inf\limits_{\varepsilon>0} \|(\varepsilon B - I)x\|^2$, δλδ ότι

$\forall\delta > 0 \; g_m^2(B) \geq \sup_{\|x\|\leq 1} \inf_{\varepsilon>0} \|(\varepsilon B - I)x\|^2 - \delta$

Έστω δ>0. Αφού το $\sup_{\|x\|\leq 1} \inf_{\varepsilon>0} \|(\varepsilon B - I)x\|^2$ είναι supremum, $\exists x_0 : \|x_0\| = 1$:

$\sup_{\|x\|\leq 1} \inf_{\varepsilon>0} \|(\varepsilon B - I)x\|^2 - \delta \leq \inf_{\varepsilon>0} \|(\varepsilon B - I)x_0\|^2 \leq \inf_{\varepsilon>0} (\|\varepsilon B - I\|\|x_0\|)^2 \overset{\|x_0\|=1}{=} \inf_{\varepsilon>0} \|\varepsilon B - I\|^2 = g_m^2(B)$

Άρα:

$$g_m^2(B) \geq \sup_{\|x\|\leq 1} \inf_{\varepsilon>0} \|(\varepsilon B - I)x\|^2 \tag{3.13}$$

και από τις σχέσεις (3.12) και (3.13) ισχύει ότι:

$$\sup_{\|x\|\leq 1} \inf_{\varepsilon>0} \|(\varepsilon B - I)x\|^2 = g_m^2(B)$$

και από τη σχέση (3.3) ισχύει το ζητούμενο, δλδ ότι:

$$\sup_{\|x\|\leq 1} \inf_{\varepsilon>0} \|(\varepsilon B - I)x\|^2 = \inf_{\varepsilon>0} \sup_{\|x\|\leq 1} \|(\varepsilon B - I)x\|^2$$

■

Μία λιγότερο γεωμετρική απόδειξη του min-max θεωρήματος 3.1.3, υπάρχει στο [8].
Βασικό συμπέρασμα του παραπάνω θεωρήματος, είναι ότι και στη θεωρία τελεστών, δεδομένου ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος 3.1.3, ισχύει η τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\sin^2 B + \cos^2 B = 1$$

Παρατίθεται εδώ ένα παράδειγμα ενός τελεστή T που δεν πληροί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος αυτού και συνεπώς δεν ισχύει για αυτόν η παραπάνω τριγωνομερτρική ταυτότητα.

***Αντιπαράδειγμα* 3.1.4.** *Έστω ο τελεστής* $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.
Ο τελεστής αυτός δεν είναι αυστηρά αυξητικός. Το ζητούμενο είναι να φανεί ότι δεν ισχύει η τριγωνομετρική ταυτότητα: $\sin^2 T + \cos^2 T = 1$

Αρχικά υπολογίζεται το ημίτονό του: $\sin T = \sup_{\|x\|\leq 1} \inf_{\varepsilon>0} \|(\varepsilon T - I)x\|^2$

Έστω το διάνυσμα $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$. Ισχύει ότι: $(\varepsilon T - I)x = (\varepsilon \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - I) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \varepsilon \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 + \varepsilon x_2 \\ -x_2 \end{bmatrix}$.

Άρα: $\|(\varepsilon T - I)x\|^2 = \| \begin{bmatrix} -x_1 + \varepsilon x_2 \\ -x_2 \end{bmatrix} \|^2 = | x_1 - \varepsilon x_2 |^2 + | x_2 |^2 = | x_1 |^2$

$-2\varepsilon x_1x_2 + \varepsilon^2 \mid x_2 \mid^2 + \mid x_2 \mid^2 \overset{\|x\|=1}{=} 1 - 2\varepsilon x_1x_2 + \varepsilon^2 \mid x_2 \mid^2$.
Συνεπώς: $\inf\limits_{\varepsilon>0} \|(\varepsilon T - I)x\|^2 = \inf\limits_{\varepsilon>0}(1 - 2\varepsilon x_1x_2 + \varepsilon^2 \mid x_2 \mid^2) = 1$.

Οπότε το ζητούμενο ημίτονο είναι: $\sin T = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} \inf\limits_{\varepsilon>0} \|(\varepsilon T - I)x\|^2 = 1$.

Και έχοντας δείξει ότι $\cos T = -1$, η σχέση $\sin^2 T + \cos^2 T = 1$ γίνεται: $1+1 = 1$, που προφανώς δεν ισχύει.

3.2 Γινόμενα Τελεστών

Ένα βασικό ερώτημα που εγείρεται είναι πότε το γινόμενο δύο τελεστών A,B είναι dissipative (μειωτικό) η accretive (αυξητικό). Έχει αποδειχθεί στην Πρόταση 3.1.2, ότι αν B strongly accretive (αυστηρά αυξητικός) τελεστής τότε ισχύει η ισοδυναμία ότι:

$$\Re\langle Bx, x\rangle \geq m_B > 0, \text{ για } \|x\| = 1 \Leftrightarrow$$

$$\exists \varepsilon > 0 : \|\varepsilon B - I\| < 1$$

Αυτή η σχέση είναι τελείως ανεξάρτητη του τελεστή A, οπότε αφού το ζητούμενο είναι πότε το γινόμενο BA είναι dissipative (μειωτικό) η accretive (αυξητικός), το ενδιαφέρον εστιάζεται στο πότε $\Re\langle BAx, x\rangle \leq 0 \Leftrightarrow \Re\langle \varepsilon BAx, x\rangle \leq 0$ ή $\Re\langle BAx, x\rangle \geq 0 \Leftrightarrow \Re\langle \varepsilon BAx, x\rangle \geq 0$ αντίστοιχα.

***Πρόταση* 3.2.1.** *Έστω A,B φραγμένοι τελεστές σε ένα χώρο Hilbert H. Τότε το γινόμενο BA είναι dissipative (μειωτικό), αν*

$$\|\varepsilon B - I\| \leq \cos(-A),\ \forall \varepsilon > 0$$

Απόδειξη Αρχικά ισχύει ότι:
$\Re\langle \varepsilon BAx, x\rangle = \Re\langle \varepsilon BAx - Ax + Ax, x\rangle = \Re\langle (\varepsilon B - I)Ax, x\rangle + \Re\langle Ax, x\rangle \overset{C-S}{\leq}$
$\|\varepsilon B - I\|\|Ax\|\|x\| + \Re\langle Ax, x\rangle$
Αναζητώντας λοιπόν πότε BA dissipative (μειωτικό), αναζητάται πότε $\Re\langle \varepsilon BAx, x\rangle \leq 0$, δλδ

$$\|\varepsilon B - I\|\|Ax\|\|x\| + \Re\langle Ax, x\rangle \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\|\varepsilon B - I\|\|Ax\|\|x\| \leq -\Re\langle Ax, x\rangle \Leftrightarrow$$

$$\|\varepsilon B - I\|\|Ax\|\|x\| \leq \Re\langle -Ax, x\rangle \Leftrightarrow$$

$$\|\varepsilon B - I\| \leq \tfrac{\Re\langle -Ax, x\rangle}{\|Ax\|\|x\|} \Leftrightarrow$$

$$\|\varepsilon B - I\| \leq \inf_{Tx\neq 0} \tfrac{\Re\langle -Ax, x\rangle}{\|-Ax\|\|x\|} \Leftrightarrow$$

$$\|\varepsilon B - I\| \leq \cos(-A)$$

$\blacksquare$

Κάπως έτσι ξεκίνησε η τριγωνομετρία τελεστών. Τώρα σημαντικό στην τριγωνομετρία τελεστών είναι η κατανόηση (μέσω του θεωρήματος 3.1.3) ότι $g_m(B) = min\|\varepsilon B - I\| = \sin B$, ε>0.

***Πόρισμα* 3.2.2.** *Έστω A,B φραγμένοι τελεστές σε ένα χώρο Hilbert H. Τότε το γινόμενο BA είναι dissipative (μειωτικό), αν*

$$\sin B \leq \cos(-A)$$

Απόδειξη Από την πρόταση 3.2.1 ισχύει ότι $\|\varepsilon B - I\| \leq \cos(-A) \Leftrightarrow$
$\min\limits_{\varepsilon>0} \|\varepsilon B - I\| \leq \cos(-A) \Leftrightarrow \sin B \leq \cos(-A)$ $\blacksquare$

Στην επόμενη πρόταση, δίνεται απάντηση στο ερώτημα πότε το γινόμενο BA δύο accretive (αυξητικών) τελεστών A,B, είναι και αυτό accretive (αυξητικό).

***Πρόταση* 3.2.3.** *Έστω A,B φραγμένοι και accretive (αυξητικοί) τελεστές σε ένα χώρο Hilbert H. Τότε το γινόμενο BA είναι accretive (αυξητικό), αν*

$$\sin(B) \leq \cos(A)$$

Απόδειξη Από την πρόταση 3.2.1 ισχύει ότι $\|\varepsilon B - I\| \leq \cos(-A)$.
Αν BA dissipative (μειωτικός), τότε -BA accretive (αυξητικός), δλδ B(-A) accretive (αυξητικός). Άρα
BA dissipative (μειωτικός) αν $\|\varepsilon B - I\| \leq \cos(-A)$
B(-A) accretive (αυξητικός) αν $\|\varepsilon B - I\| \leq \cos(-A)$
και για -A=A ισχύει ότι BA accretive (αυξητικός) αν

$$\|\varepsilon B - I\| \leq \cos(A) \Leftrightarrow$$

$$\min_{\varepsilon>0} \|\varepsilon B - I\| \leq \cos(A) \Leftrightarrow$$

$$\sin(B) \leq \cos(A)$$

$\blacksquare$

***Πρόταση* 3.2.4.** *Έστω A,B φραγμένοι και strongly accretive (αυστηρά αυξητικοί) τελεστές σε ένα χώρο Hilbert H, και x τυχαίο. Τότε το γινόμενο BA είναι accretive (αυξητικό), αν*

$$\|B - I\| \leq \frac{m(A)}{\|A\|}$$

Απόδειξη Αρχικά ισχύει ότι:
$\Re\langle BAx, x\rangle = \Re\langle BAx - Ax + Ax, x\rangle = \Re\langle (B-I)Ax, x\rangle + \Re\langle Ax, x\rangle$
O στόχος είναι να βρεθούν φράγματα για τους δύο όρους της τελευταίας ισότητας.
Αφού A strongly accretive (αυστηρά αυξητικός): $\Re\langle Ax, x\rangle > m_(A) > 0$.
Για να είναι BA accretive (αυξητικό), πρέπει $\Re\langle BAx, x\rangle \geq 0$, δλδ $\Re\langle (B - I)Ax, x\rangle \geq -m_A$

Για τον άλλο όρο ισχύει ότι:
$\Re\langle (B-I)Ax, x\rangle \leq \|B-I\|\|Ax\|\|x\| \overset{\|x\|=1}{=} \|B-I\|\|A\|$
Άρα αρκεί $\|B-I\| \leq \frac{m(A)}{\|A\|}$, αφού τότε
$|\Re\langle (B-I)Ax, x\rangle| \leq \|\Re\langle (B-I)Ax, x\rangle\| \leq \|B-I\|\|Ax\|\|x\|$
$\overset{\|x\|=1}{=} \|B-I\|\|A\|$

άρα:

$$-\|B-I\|\|A\| \leq \Re\langle (B-I)Ax, x\rangle \leq \|B-I\|\|A\|$$

$$-m_A \leq \Re\langle (B-I)Ax, x\rangle \leq m_A$$

■

Αν λοιπόν A,B strongly accretive (αυστηρά αυξητικοί) και x τυχαίο, τότε ικανή συνθήκη για να είναι το γινόμενο BA accretive (αυξητικό), είναι η

$$\|B-I\| \leq \frac{m(A)}{\|A\|} \tag{3.14}$$

Ο στόχος είναι να βελτιωθεί η ικανή αυτή συνθήκη (3.14). Βάζοντας αντί για B εB στη σχέση $|\Re\langle (B-I)Ax, x\rangle| \leq \|\Re\langle (B-I)Ax, x\rangle\| \leq \|B-I\|\|A\|$ της παραπάνω απόδειξης, με ε το ε εκείνο για το οποίο $\|\varepsilon B - I\| = \sin B$, ενώ στην απόδειξη της πρότασης 3.2.4 απαιτούνταν $\|B-I\| \leq \frac{m(A)}{\|A\|}$, τώρα απαιτείται $\|\varepsilon B - I\| \leq \frac{m(A)}{\|A\|}$, δλδ

$$\sin B \leq \frac{m(A)}{\|A\|} \tag{3.15}$$

***Παράδειγμα* 3.2.5.** *Έστω A,B θετικοί και αυτοσυζυγείς τελεστές, με $\|A\| = \|B\| = 1$ και $m_A = \frac{1}{2}$, $m_B > 0$. Κοιτώντας τις ικανές συνθήκες για να είναι το γινόμενο BA accretive (αυξητικό) από την πιο απλή στην πιο βελτιωμένη ισχύει ότι:*

Από την ικανή συνθήκη (3.14), ισχύει ότι:
$\|B-I\| \leq \frac{m(A)}{\|A\|} \Leftrightarrow \|B-I\| \leq \frac{1}{2}$
Αφού B αυτοσυζυγής, ισχύει ότι:
$\|B-I\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \langle Bx - x, x\rangle = \sup\limits_{\|x\|=1} \{\langle Bx, x\rangle - \langle x, x\rangle\} = \sup\limits_{\|x\|=1} \{\langle Bx, x\rangle - 1\} = 1 - \inf\limits_{\|x\|=1} \langle Bx, x\rangle = 1 - m_B$

Άρα $\|B-I\| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - m_B \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 - 2m_B \leq 1 \Leftrightarrow -2m_B \leq -1 \Leftrightarrow 2m_B \geq 1 \Leftrightarrow m_B \geq \frac{1}{2}$
δλδ BA αυξητικό, αν

$$m_B \geq \frac{1}{2} \tag{3.16}$$

Πριν χρησιμοποιηθεί η επόμενη ικανή συνθήκη για να είναι το γινόμενο BA accretive (αυξητικό), απαραίτητο είναι να υπενθυμιστεί ότι αν T αυτοσυζυγής και θετικός τελεστής, τότε $M_T = \|T\|$ και $m_T = \frac{1}{\|T^{-1}\|}$ Η ικανή συνθήκη (3.15) λέει ότι BA accretive (αυξητικός), αν $\sin B \leq \frac{m(A)}{\|A\|}$. Για το $\sin B$ ισχύει βάσει του Θεωρήματος 3.1.3 ότι:

$$\sin^2 B + \cos^2 B \Leftrightarrow$$

$$\sin^2 B = 1 - \cos^2 B \Leftrightarrow$$

$$\sin^2 B \overset{2.2.3}{=} 1 - \{\tfrac{2\sqrt{m_B M_B}}{m_B + M_B}\}^2 \Leftrightarrow$$

$$\sin^2 B = \tfrac{(m_B + M_B)^2 - 4m_B M_B}{(m_B + M_B)^2} \Leftrightarrow$$

$$\sin^2 B = \tfrac{m_B^2 + 2m_B M_B + M_B^2 - 4m_B M_B}{(m_B + M_B)^2} \Leftrightarrow$$

$$\sin^2 B = \tfrac{m_B^2 - 2m_B M_B + M_B^2}{(m_B + M_B)^2} \Leftrightarrow$$

$$\sin^2 B = \tfrac{(m_B - M_B)^2}{(m_B + M_B)^2} \overset{\sin B > 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\sin B = \mid \tfrac{m_B - M_B}{m_B + M_B} \mid \Leftrightarrow$$

$$\sin B = \frac{M_B - m_B}{m_B + M_B} \tag{3.17}$$

Άρα με τη συνθήκη (3.15) για να είναι το BA accretive (αυξητικό) θα ισχύει ότι:
$\sin B = \frac{\|B\| - m_B}{m_B + \|B\|} = \frac{1 - m_B}{1 + m_B}$
Άρα η (3.15), αφού $\frac{m(A)}{\|A\|} = \frac{1}{2}$ γίνεται:
$\sin B \leq \frac{m(A)}{\|A\|} \Leftrightarrow \frac{1 - m_B}{1 + m_B} \leq \frac{1}{2} \overset{m_B > 0 \Leftarrow m_B + 1 > 0}{\Leftrightarrow} 2 - 2m_B \leq 1 + m_B \Leftrightarrow -2m_B - m_B \leq 1 - 2 \Leftrightarrow -3m_B \leq 1 \Leftrightarrow 3m_B \geq -1 \Leftrightarrow m_B \geq \frac{1}{3}$
Τώρα, η ικανή συνθήκη της Πρότασης 3.2.3, για να είναι το γινόμενο BA accretive (αυξητικό), λέει ότι πρέπει $\sin B \leq \cos A$. Ακριβώς όπως πριν, εξάγεται το συμπέρασμα ότι $\sin B = \frac{\|B\| - m_B}{m_B + \|B\|} = \frac{1 - m_B}{1 + m_B}$ Ακόμη, από θεώρημα 2.2.3, ισχύει για τον τελεστή A ότι:
$\cos = \frac{2\sqrt{m_A M_A}}{m_A + M_A} = \frac{2\sqrt{1\frac{1}{2}}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ Άρα η ικανή συνθήκη της Πρότασης 3.2.3 γίνεται:

$$\sin B \leq \cos A$$

$$\tfrac{1 - m_B}{1 + m_B} \leq \tfrac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$3 - 3m_B \leq 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}m_B$$

$$3m_B + 2\sqrt{2}m_B \geq 3 - 2\sqrt{2}$$

$$m_B(3 + 2\sqrt{2}) \geq 3 - 2\sqrt{2}$$

$$m_B \geq \frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}$$

$$m_B \geq\approx 0,02944$$

Η βασική παρατήρηση σε αυτό το παράδειγμα, είναι ότι καθώς άλλαζαν οι ικανές συνθήκες για να είναι το γινόμενο ΒΑ accretive (αυξητικό), τα αποτελέσματα για το m_B, γίνονταν όλο και καλύτερα, αφού με τη σειρά τα αποτελέσματα ήταν

$$m_B \geq \frac{1}{2} = 0,5$$
$$m_B \geq \frac{1}{3} \approx 0,3333$$
$$m_B \geq\approx 0,02944$$

δλδ κάθε φορά υπάρχει μεγαλύτερο περιθώριο για το m_B, δλδ όλο και περισσότεροι τελεστές που μπορούν να ικανοποιούν το ζητούμενο.

Το τελευταίο αποτέλεσμα που δίνεται, αφορά τον ευκολότερο υπολογισμό του ημιτόνου μίας συγκεκριμένης κλάσης τελεστών:

***Πόρισμα* 3.2.6.** *Έστω A θετικός, αντιστρέψιμος και αυτοσυζυγής τελεστής σε ένα χώρο Hilbert H. Τότε ισχύει ότι:*

$$\sin A = \frac{\|A\|\|A^{-1}\|-1}{\|A\|\|A^{-1}\|+1}$$

Απόδειξη Υπενθυμίζεται εδώ από το πόρισμα 1.2.8, αφού Α αυτοσυζυγής $m_A = \frac{1}{\|A^{-1}\|}$ και $M_A = \|A\|$. Από το Πόρισμα 2.2.4, ισχύει για τον τελεστή Α ότι:
$\cos A = \frac{2\sqrt{\|A\|\|A^{-1}\|}}{\|A\|\|A^{-1}\|+1}$
και από τη σχέση 3.17 ισχύει ότι:
$\sin A = \frac{M_A - m_A}{m_A + M_A} = \frac{\|A\| - \frac{1}{\|A^{-1}\|}}{\frac{1}{\|A^{-1}\|} + \|A\|} = \frac{\|A\|\|A^{-1}\|-1}{\|A\|\|A^{-1}\|+1}$ ■

Η πλειοψηφία των ορισμών, προτάσεων, πορισμάτων και θεωρημάτων του παρόντος κεφαλαίου, βρίσκεται στις παραγράφους 3.2 και 3.4 του [1]

Βιβλιογραφία

[1] Karl E. Gustafson, Duggirala K.M. Rao, Numerical Range: The Field of Values of Linear Operators and Matrices, Springer 1997.

[2] Σωτήριος Καρανάσιος, Θεωρία Τελεστών και Εφαρμογές, ΕΚΔΟΣΗ 2009.

[3] Παπαγεωργίου Νικόλαος, Σημειώσεις: Κυρτή Ανάλυση.

[4] Leonid Vitaliyevich Kantorovich, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА1 (Functional analysis and apoplied mathematics), Uspehi Mat. Nauk 3, pp.137-143, 1948.

[5] Werner Greub, Werner Rheinboldt, On a generalization of an inequality of L.V.Kantorovich, Proc. Amer. Math. Soc. vol 10, pp.407-415, 1959.

[6] Morris Newman, Kantorovich's inequality, J. Res. Nat. Bur. Standards 64B, pp. 33-34, 1959.

[7] William Gilbert Strang, On the Kantorovich inequality, Proc. Amer. Math. Soc. 11, pp. 468-470, 1960.

[8] Kallol Paul, Gopal Das, Cosine of angle and center of mass of an operator, Mathematica Slovaca 62(1), 109–122, 2012.