

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΥΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΩΝ

**Αριθμητική προσομοίωση πρόσπτωσης δι-διάστατης
δέσμης ρευστού σε επίπεδη επιφάνεια με την μέθοδο
υδροδυναμικής ρεόντων σωματιδίων (SPH).**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΟΝΟΜΑ: Μιχαήλ Μιχαήλ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: Ι.Σ. Αναγνωστόπουλος
Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2007

ΠΡΟΛΟΓΟΣ.

Η παρούσα εργασία, εκπονήθηκε στο Εργαστήριο Υδροδυναμικών Μηχανών του Ε.Μ.Π στα πλαίσια της πτυχιακής άσκησης για την απόκτηση του διπλώματος Μηχανολόγου Μηχανικού.

Αντικείμενο της εργασίας είναι η χρησιμοποίηση της μεθόδου υδροδυναμικής ρεόντων σωματιδίων, (Smoothed Particles Hydrodynamics, S.P.H), για μοντελοποίηση της πρόσκρουσης δέσμης ρευστού υψηλών ταχυτήτων υπό γωνία, σε σταθερή επίπεδη επιφάνεια. Η μοντελοποίηση αυτή απώτερο σκοπό έχει την διερεύνηση και περαιτέρω ανάπτυξη της SPH, ώστε να χρησιμοποιηθεί για την προσομοίωση της πολύπλοκης ροής που αναπτύσσεται στους δρομείς υδροστροβίλων δράσης (Pelton, Turgo).

Στην εργασία αυτή, αρχικά παρατίθενται στοιχεία θεωρίας και βιβλιογραφίας, για τις διάφορες πλεγματικές και μη πλεγματικές μεθόδους. Στο πρώτο κεφάλαιο ακολουθούν επεξηγήσεις της μη πλεγματικής μεθόδου SPH, καθώς και την μετατροπή των εξισώσεων Navier-Stokes σε μορφή κατάλληλη για χρήση τους από την μέθοδο. Στο ίδιο κεφάλαιο παρουσιάζονται επεξηγήσεις για την καταστατική εξίσωση πίεσης-πυκνότητας καθώς και για το χρονικό βήμα ολοκληρώσεις ροής. Ακολούθως παρουσιάζονται οι τρεις διαφορετικοί τύποι οριακών συνθηκών της μεθόδου και κάποιες πρόσφατες βελτιώσεις της μεθόδου.

Στο δεύτερο κεφάλαιο δοκιμάζεται ο κώδικας, ο οποίος αναπτύχθηκε στο εργαστήριο υδροδυναμικών μηχανών του τμήματος Μηχανολόγων Μηχανικών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου, που σκοπό έχει την προσομοίωση πρόσκρουσης δέσμης μη-συνεκτικού ρευστού υψηλών ταχυτήτων σε επίπεδη επιφάνεια. Στο κεφάλαιο αυτό γίνονται διάφοροι έλεγχοι για την επαλήθευση της ανεξαρτησίας των αποτελεσμάτων του κώδικα, αρχικά ως προς τη μονιμότητα του ροϊκού πεδίου που προσομοιώνεται και ακολούθως ως προς των αριθμό των σωματιδίων που χρησιμοποιούνται..

Στο τρίτο κεφάλαιο εφαρμόζεται ο κώδικας για να μελετηθεί η επίδραση της γωνίας πρόσκρουσης, καθώς και της ταχύτητας της δέσμης στην μορφή της ροής που αναπτύχθηκε στην επιφάνεια, πρώτα για διάφορες γωνίες πρόσκρουσης της δέσμης και ακολούθως για διαφορετικούς αριθμούς ταχυτήτων.

Στο τελευταίο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα συμπεράσματα και προτάσεις για περαιτέρω ανάπτυξη της μεθόδου, και δίνεται η βιβλιογραφία που χρησιμοποιήθηκε για την διεκπεραίωση αυτής της διπλωματικής εργασίας.

Καθόλη τη διάρκεια εκπόνησης της εργασίας, πολύτιμη ήταν η βοήθεια του επιβλέποντα καθηγητή κ. Αναγνωστόπουλου Ιωάννη, ο οποίος παρακολούθησε με προσοχή την πορεία των αποτελεσμάτων και συνέβαλε ουσιαστικά στην διεκπεραίωση της. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τον υποψήφιο διδάκτορα κ. Σταματέλο Φώτη, η συμπαράσταση του οποίου ήταν καθοριστική για την ολοκλήρωση του παρόντος.

Κάθε πρόοδος στο ηθικό επίπεδο
δεν μπορεί παρά να είναι αντιστρόφως ανάλογη
προς την ικανότητα που έχουν η δύναμη και ο αριθμός
να καθορίζουν τα πεπρωμένα μας

Μιχαήλ Κ. Μιχαήλ

Ο. Ελύτης

Αθήνα 2007

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ	1
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ	2-3
1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	4
1.1 ΟΙ ΠΛΕΓΜΑΤΙΚΕΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ.....	4-5
1.2 ΟΙ ΜΗ-ΠΛΕΓΜΑΤΙΚΕΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ.....	6-8
2. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΥΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΡΕΟΝΤΩΝ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ (SMOOTHED PARTICLE HYDRODYNAMICS-SPH).....	9
2.1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ.....	9-13
2.2 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΥΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΡΕΟΝΤΩΝ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ (SPH).....	14-18
3. Η ΜΕΘΟΔΟΣ SPH ΓΙΑ ΤΙΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ NAVIER-STOKES.....	19
3.1 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ ΚΑΙ ΟΡΜΗΣ.....	19 -23
3.2 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΙΕΣΗΣ-ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ.....	24
3.3 ΤΟ ΧΡΟΝΙΚΟ ΒΗΜΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ.....	25
3.4 ΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΣΕ ΤΟΙΧΩΜΑΤΑ.....	26
3.4,1 Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ.....	27-29
3.4,2 Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΚΑΤΟΠΤΡΙΚΩΝ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ(Ghost ή mirror particles)....	30-31
3.4,3 Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΣΤΑΘΕΡΩΝ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ (Fixed particles).....	32-34
3.5 ΒΕΛΤΙΩΣΗΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ SPH.....	35-38
4. ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ.....	39-41
5. ΕΛΕΓΧΟΣ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΤΟΥ ΚΩΔΙΚΑ.....	42
5.1 ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΜΟΝΙΜΟΤΗΤΑ	42-46
5.2 ΧΡΟΝΙΚΑ ΜΕΣΟ ΠΕΔΙΟ ΡΟΗΣ	47-54
5.3 ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΑΡΙΘΜΟ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ	55-63

6. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΚΩΔΙΚΑ-ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΕΣ ΜΕΛΕΤΕΣ.....	64
6.1 ΜΕΓΙΣΤΗ ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΗ ΓΩΝΙΑΣ ΠΡΟΣΠΤΩΣΗΣ.....	64-72
6.2 ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΗΣ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ ΠΡΟΣΠΤΩΣΗΣ.....	73-88
7. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΠΕΡΑΙΤΕΡΩ ΕΡΕΥΝΑ.....	89
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	99-98

1.ΕΙΣΑΓΩΓΗ

(1.1) ΟΙ ΠΛΕΓΜΑΤΙΚΕΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ

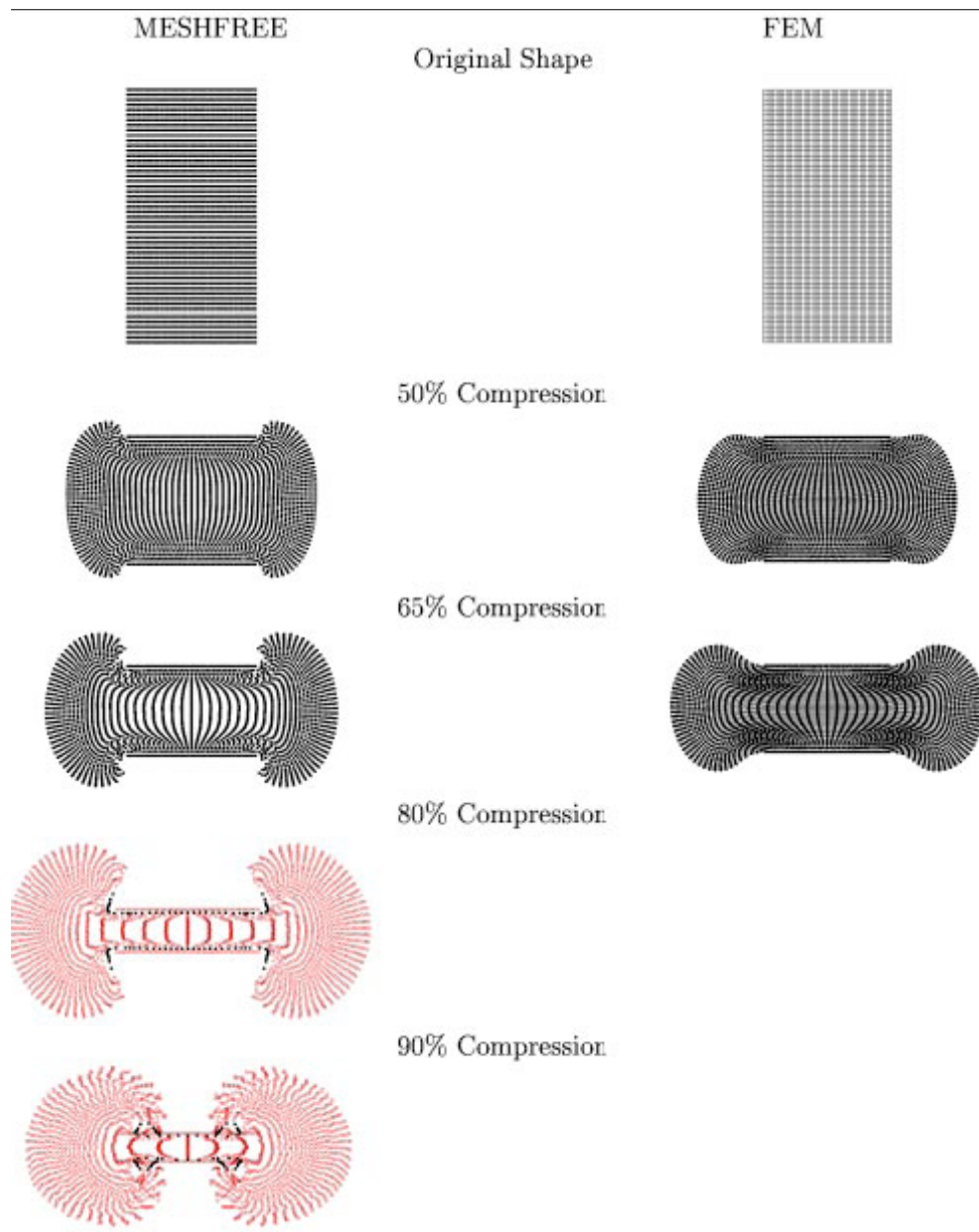
Κατά την δεκαετία του 50 πρωτοεμφανίστηκε η πρώτη πλεγματική αριθμητική μέθοδος FEM που σκοπό είχε την επίλυση φυσικών προβλημάτων. Στις αρχές η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων FEM [1] είχε ένα εμφανές χαρακτηριστικό γνώρισμα, να διαιρεί ένα συνεχές μέσο σε ιδιαίτερα στοιχεία. Αυτή η υποδιαίρεση καλείται διακριτοποίηση. Στη FEM, τα μεμονωμένα στοιχεία συνδέονται με έναν τοπολογικό χάρτη, ο οποίος καλείται πλέγμα. Ακολούθως οι λειτουργίες χτίζονται επάνω στο πλέγμα, το οποίο εξασφαλίζει τη συμβατότητα-συνέχεια της παρεμβολής.

Η FEM απαιτεί πολύ πυκνό πλέγμα σε προβλήματα που χρειάζονται υψηλή ευκρίνεια, κάτι το οποίο είναι υπολογιστικά πολύ ακριβό. Για αυτόν τον λόγο, οι πλεγματικές αριθμητικές μέθοδοι εξελιχθήκαν σε διαδικασίες remeshing, όπου καινούργιο πλέγμα δημιουργείται ανά τακτά χρονικά διαστήματα για προσομοίωση διάφορων γεωμετριών. Προβλήματα του τύπου πρόσκρουσης /διείσδυσης ρευστού, προβλήματα έκρηξης-τεμαχισμού, και αλληλεπίδραση ρευστού με σταθερές δομές έχουν πλέον γίνει προβλήματα ρουτίνας.

Εντούτοις η διαδικασία του remeshing έχει επιφέρει και καινούρια προβλήματα όπως την σωστή διατύπωση-μεταφορά των μεταβλητών από το παλιό στο καινούργιο πλέγμα. Αυτή η διαδικασία εισάγει πολύ συχνά αριθμητικά λάθη, κάτι που δεν είναι επιθυμητό. Για τον λόγο αυτό έχουν αναπτυχθεί οι λεγόμενες Arbitrary Lagrangian Eulerian (ALE) μέθοδοι, που σκοπό έχουν να ανεξαρτητοποιήσουν το πλέγμα από την διαστρέβλωση.

Σε υπολογιστικές προσομοιώσεις για μεγάλα μηχανικά και δομικά συστήματα, ακόμη και με διατύπωση του τύπου ALE, ένα στρεβλό πλέγμα εισάγει μεγάλης τάξης μεγέθους λάθη στους αριθμητικούς υπολογισμούς. Η διαδικασία μεταφοράς αποτελεσμάτων, από το παλιό στο καινούργιο πλέγμα, οδηγεί συχνά σε αποκλίσεις, κάτι που πρέπει να σταθεροποιηθεί από μία τεχνική σύγκλισης.

Επομένως, αποτελεσματικό θα ήταν σε ένα σύνολο κομβικών σημείων να υπάρχει μία συνέχεια χωρίς τους περιορισμούς ενός πλέγματος. Αυτό είναι εμφανές και στο Σχ.(1) όπου βλέπουμε την σύγκριση παραμορφώσεων, σε διαφορετικά χρονικά στάδια, για ένα υπέρ-ελαστικό κυλινδρικό κομμάτι υπό συμπίεση με τη χρήση FEM και χωρίς πλέγμα μέθοδο για $\Delta t = 1 \times 10^{-6} (s)$.



Σχήμα (1) : Σύγκριση παραμορφώσεων με τη χρήση FEM και χωρίς πλέγμα μέθοδο.

(1.2) ΟΙ ΜΗ-ΠΛΕΓΜΑΤΙΚΕΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ

Σε περιοχές όπως η αστροφυσική, η φυσική στερεάς κατάστασης, η βιοφυσική, η βιοχημεία και η βιοϊατρική έρευνα, μπορούν να υπάρξουν περιπτώσεις όπου το υπό εξέταση σύστημα δεν είναι συνεχές αλλά προσεγγίζεται από μια σειρά σωματιδίων. Σε αυτές τις περιπτώσεις δεν χρειάζεται διακριτοποίηση. Οι σωματιδιακές μέθοδοι είναι η φυσική επιλογή για αυτού του τύπου τις αριθμητικές προσομοιώσεις. Σχετικά παραδείγματα είναι η προσομοίωση του σχηματισμού ενός συστήματος αστεριών, ή η νάνο-κλίμακα μετακίνησης εκατομμυρίων ατόμων σε ένα σύστημα μη ισορροπίας, το δίπλωμα και ξεδίπλωμα του DNA [1] καθώς και δυναμικές αλληλεπιδράσεις μεταξύ διάφορων τύπων μορίων.

Γενικά, οι σωματιδιακές μέθοδοι μπορούν να ταξινομηθούν βάσει δύο διαφορετικών κριτηρίων. Η μία κατηγορία ορίζεται βάσει των φυσικών αρχών και η άλλη βάσει υπολογιστικών διατυπώσεων. Για την προσέγγιση των ισχυρών μορφών μερικών διαφορικών εξισώσεων συνήθως χρησιμοποιείται μια σωματιδιακή μέθοδος με συγκεκριμένα τεχνικά χαρακτηριστικά. Παραδείγματα είναι η Smoothed Particles Hydrodynamics (SPH), η μέθοδος Vortex, ή η γενικευμένη μορφή πεπερασμένων διαφορών. Εδώ σημειώνεται πως αν και στην αρχή οι μέθοδοι SPH και Vortex αναπτύχθηκαν ως πιθανολογικές μέθοδοι σήμερα χρησιμοποιούνται και ως αιτιοκρατικές. Εντούτοις, η πλειοψηφία των σωματιδιακών μεθόδων είναι βασισμένες σε πιθανολογικές αρχές, ή χρησιμοποιούνται ως εργαλεία για πιθανολογική προσομοίωση. Υπάρχουν τρεις βασικές τεχνικές σε αυτήν την κατηγορία:

- Μοριακή δυναμική (κβαντική μοριακή δυναμική καθώς και η κλασική μοριακή δυναμική) [2-13].
- Άμεση προσομοίωση Monte Carlo (DSMC), ή αλλιώς γνωστή ως μέθοδος Monte Carlo βασισμένη στην μοριακή δυναμική, όπως η κβαντική μέθοδος. Εδώ σημειώνεται πως δεν είναι όλες οι Monte Carlo μέθοδοι χωρίς πλέγμα, παράδειγμα είναι η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων [14-22].
- Η μέθοδος Lattice Gas Automaton (LGA), ή αλλιώς μέθοδος του κυψελοειδούς αυτόματου αερίου δικτυωτού πλέγματος [23-27].

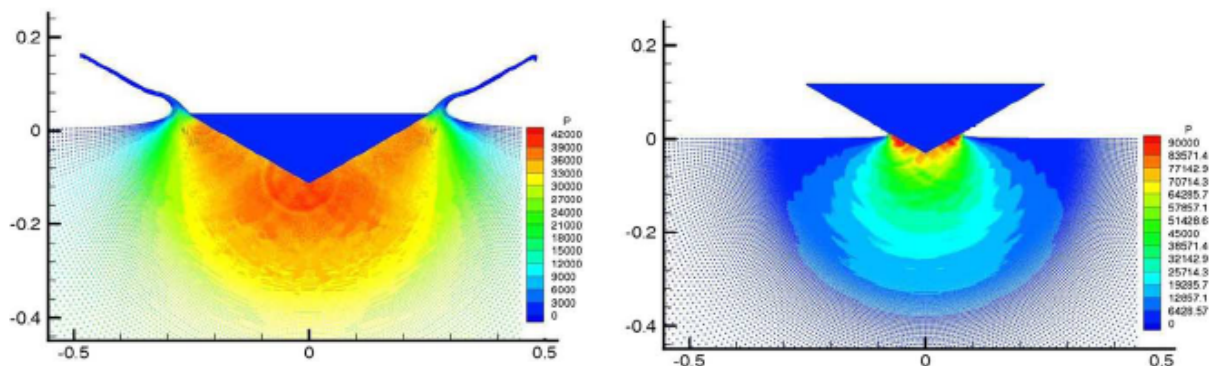
Στην δεύτερη κατηγορία σωματιδιακών μεθόδων χρησιμοποιούμε διάφορες μεθόδους του τύπου Galerkin για αδύνατες μορφές, μερικών διαφορικών εξισώσεων οι οποίες δεν χρειάζονται πλέγμα. Μερικές από αυτές τις μεθόδους είναι οι Diffuse Element Method (DEM) [28-31], Element Free Galerkin Method (EFGM) [32-36], Reproducing Kernel Particle Method (RKPM) [37-45], H-p Cloud Method [46-49], Partition of Unity Method [50-52], Meshless Local Petrov-Galerkin Method [53-56], Free Mesh Method [57-61] και άλλες.

Σε αυτή την ταξινόμηση υπάρχουν και εξαιρέσεις, για τον λόγο ότι μερικές από τις προαναφερόμενες σωματιδιακές μεθόδους χρησιμοποιούνται τόσο για επίλυση ισχυρών μορφών μερικών διαφορικών εξισώσεων όσο και για επίλυση ασθενών μορφών, παράδειγμα είναι η μέθοδος Particle-In-Cell (PIC) [62-64].

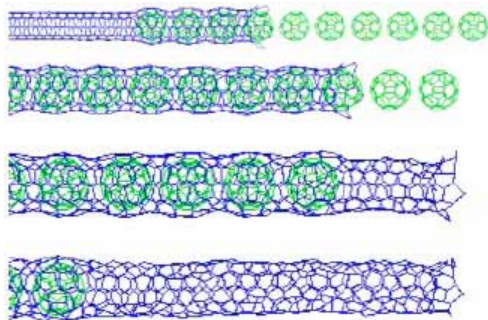
Στην πραγματικότητα, η σύγχρονη τάση δεν είναι να χρησιμοποιούμε σωματιδιακές μεθόδους μόνο ως εργαλεία διακριτοποίησης για να λύσουμε προβλήματα συνέχειας όπως οι μέθοδοι SPH, Vortex, ή ακόμα και η χωρίς πλέγμα μέθοδο Galerkin. Σήμερα οι σωματιδιακές μέθοδοι χρησιμοποιούνται και ως φυσικά μοντέλα (στατικά ή ατομικά), για την προσομοίωση συμπεριφοράς συνέχειας στην φυσική. Το πιο πρόσφατο παράδειγμα είναι η χρήση της μεθόδου δικτυωτού πλέγματος Boltzmann για λύση ρευστομηχανικών προβλημάτων, ή η χρήση της μεθόδου μοριακής δυναμικής για επίλυση προβλημάτων μηχανικού σπασίματος σε στερεούς μηχανισμούς.

Τα πλεονεκτήματα των μεθόδων χωρίς πλέγμα

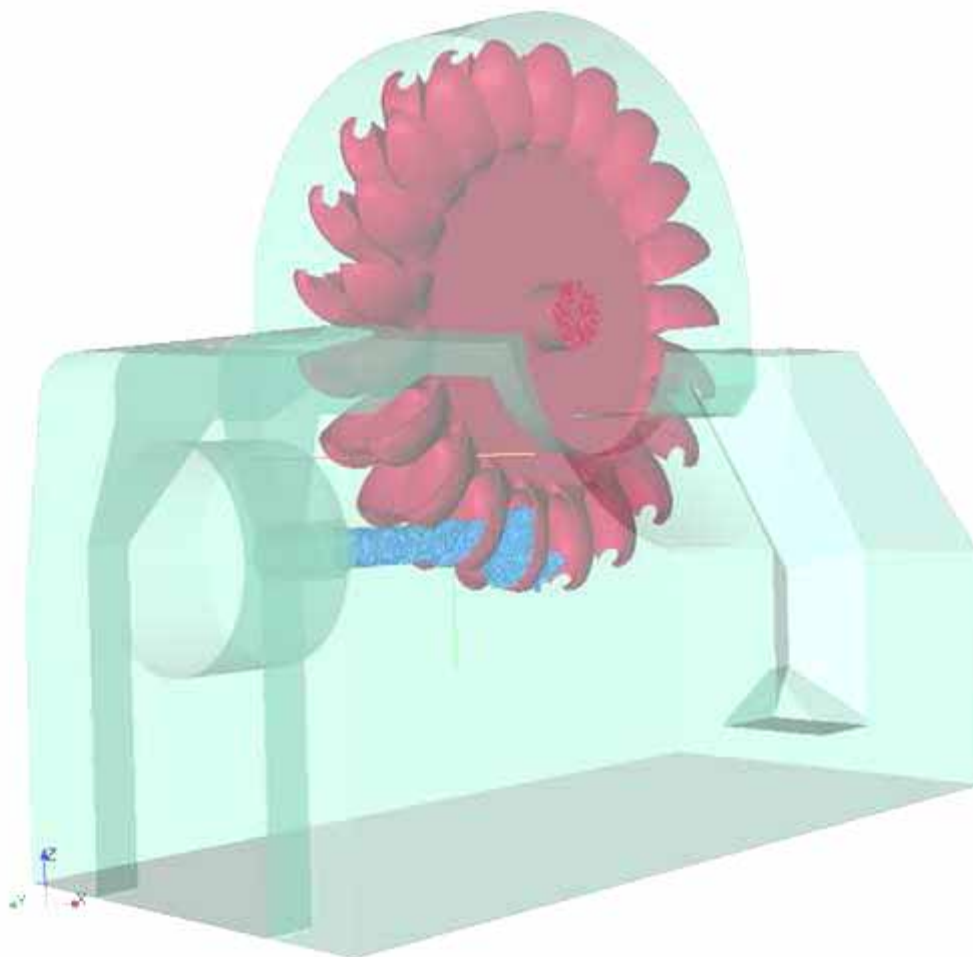
- Εύκολα μπορούν να χειριστούν πολύ μεγάλες παραμορφώσεις, για τον λόγο ότι η αλληλεξάρτηση μεταξύ των κόμβων είναι συνάρτηση του χρόνου (Σχ. 2).
- Η μεθοδολογία μπορεί να συνδεθεί ευκολότερα με μία βάση δεδομένων CAD, σε αντίθεση με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, όπου είναι απαραίτητο να παράγεται ένα καινούριο πλέγμα στοιχείων κάθε φορά που δίνονται καινούριες αρχικές τιμές.
- Η μέθοδος μπορεί εύκολα να περιγράψει αστοχίες υλικών, όπως μια ρωγμή, κάτι που αποδεικνύεται πολύ χρήσιμο στην μοντελοποίηση τέτοιου είδους προβλημάτων.
- Μεγαλύτερη ακρίβεια επιτυγχάνεται με την πρόσθεση επιπλέον κόμβων.
- Οι μέθοδοι συνέχειας χωρίς πλέγμα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να μοντελοποιήσουν μεγάλες παραμορφώσεις πολύ λεπτών διατομών, όπως οι νάνοσωλήνες (Σχ. 3).
- Οι χωρίς πλέγμα μέθοδοι μπορούν εύκολα, να ενσωματώσουν σε προβλήματα νάνοκλίμακας χαρακτηριστικά γνωρίσματα όπως οι ασυνέχειες της πίεσης. Μπορούν εύκολα δε, να τα μετατρέψουν στην μικρό-κλίμακα, και
- Η χωρίς πλέγμα διακριτοποίηση παρέχει την ακριβή εικόνα – μοντελοποίηση για πολύπλοκες γεωμετρίες όπως η επιφάνειες σκαφιδίων υδροστροβίλων (Σχ. 4).



Σχήμα (2): Αποτελέσματα πρόσπτωσης στερεάς γεωμετρίας σε στάσιμο ρευστό, για $\tau = 0.0043$ s και $\tau = 0.0202$ s.



Σχήμα (3) : Δυναμική μοριακή προσομοίωση του C_{60} καθώς περνά μέσα από νάνο-σωλήνα.



Σχήμα (4) : Πρόσκρουση δέσμης νερού σε υδροστρόβιλο τύπου Pelton.

(2.) Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΥΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΡΕΟΝΤΩΝ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ (SMOOTHED PARTICLE HYDRODYNAMICS-SPH).

2.1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ

Η Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) είναι μια μέθοδος αριθμητικής επίλυσης των εξισώσεων της ρευστοδυναμικής με αντικατάσταση του ρευστού από ένα σύνολο σωματιδίων. Για τον μαθηματικό, τα σωματίδια είναι ακριβή σημεία παρεμβολής τα οποία περιέχουν ιδιότητες του ρευστού που μπορούν να υπολογιστούν. Για τον φυσικό, τα σωματίδια της SPH είναι υλικά μόρια που μπορούν να αντιμετωπιστούν όπως οποιοδήποτε άλλο σύστημα μορίων. Το κύριο πλεονέκτημα της μεθόδου είναι πως η καθαρή μετατόπιση υπολογίζεται ακριβώς. Παραδείγματος χάριν, εάν στα σωματίδια δινόταν ένα χρώμα, και η ταχύτητα καθοριζόταν από πριν, η μεταφορά του χρώματος από το σύστημα σωματιδίων θα ήταν ακριβής. Το δεύτερο κύριο πλεονέκτημα είναι όταν έχουμε προβλήματα με περισσότερα από ένα υλικά. Οι ιδιότητες κάθε υλικού περιγράφονται από ένα σύνολο μορίων. Τα προβλήματα διεπαφών είναι σύνηθες να επιλύονται με την μέθοδο SPH αλλά δύσκολα με την μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών. Το τρίτο πλεονέκτημα είναι ότι οι σωματιδιακές μέθοδοι γεφυρώνουν το χάσμα μεταξύ συνέχειας και τεμαχισμού με έναν φυσικό τρόπο. Κατά συνέπεια, η καλύτερη μέθοδος για μελέτη εύθραυστων γεωμετριών και τεμαχισμού είναι η SPH [65]. Ένα τέταρτο πλεονέκτημα είναι ότι η ανάλυση εξαρτάται από τη θέση και το χρόνο, κάτι που καθιστά τη μέθοδο πολύ ελκυστική για αστροφυσικά [1] και γεωφυσικά προβλήματα. Το πέμπτο πλεονέκτημα της SPH, είναι καθαρά υπολογιστικό. Σε προβλήματα που περιλαμβάνουν τεμάχια, πτώσεις ή ακόμα και αστερισμούς, έχουμε σημαντική μείωση του υπολογιστικού χρόνου που χρειάζεται. Τέλος, λόγω της στενής ομοιότητας μεταξύ της SPH και της μεθόδου της μοριακής δυναμικής, η σύνθετη φυσική εύκολα ενσωματώνεται στην πρώτη μέθοδο.

Αν και η ιδέα της χρησιμοποίησης σωματιδίων είναι λογική, δεν είναι προφανές ποιες αλληλεπιδράσεις μεταξύ των μορίων θα αναπαραγάγουν πιστά τις ρευστό δυναμικές εξισώσεις ή τις εξισώσεις συνέχειας. Ένας τρόπος προτάθηκε από τους Gingold και Monaghan [66], όπου δημιούργησαν τις εξισώσεις κίνησης χρησιμοποιώντας μια τεχνική εκτίμησης πυρήνων, η οποία πρώτο ανακαλύφθηκε από στατιστικούς, με σκοπό να υπολογίσουν την πυκνότητα πιθανοτήτων από τιμές δειγμάτων, Rosenblatt [67], Parzen [68] και Boneva et al [69].

Οι καταστατικές εξισώσεις της ρευστοδυναμικής πέρνουν τη μορφή

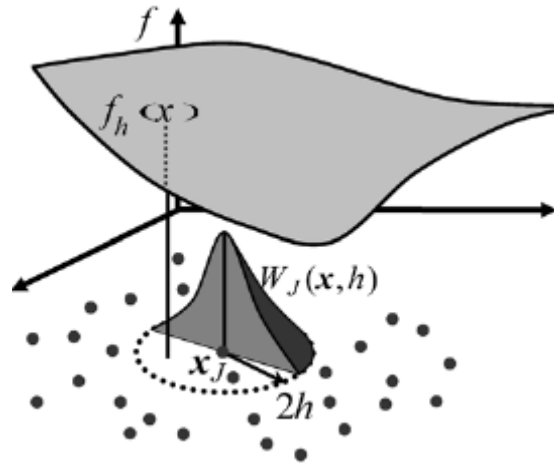
$$\frac{dA}{dt} = f(A, \nabla A, \bar{r}) \quad (1),$$

και

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \cdot \nabla \quad (2).$$

Όπου A το εξεταζόμενο μέγεθος και \vec{r} η χωρική συντεταγμένη. Η εξίσωση (2) είναι η Lagrangian παράγωγος, με u το διάνυσμα της ταχύτητας. Στις εξισώσεις της ρευστοδυναμικής ο υπολογισμός των φυσικών μεγεθών απαιτεί τη χωρική παραγωγή τους. Το κλειδί για οποιοδήποτε υπολογιστικό αλγόριθμο είναι η προσέγγιση των παραγώγων με χρήση πληροφοριών από ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων. Στις μεθόδους πεπερασμένων στοιχείων αυτά τα σημεία αποτελούν τους κόμβους κάποιου πλέγματος. Στη μέθοδο SPH τα σημεία παρεμβολής είναι σωματίδια στο εσωτερικό του ρευστού τα οποία κινούνται και η παρεμβολή οποιασδήποτε ποσότητας σε οποιοδήποτε σημείο του πεδίου ροής βασίζεται στην εκτίμηση μιας συνάρτησης παρεμβολής, που ονομάζεται πυρήνας (kernel).

Όταν εφαρμόζεται η παρεμβολή, αυτό παράγει μια εκτίμηση λειτουργίας σε οποιοδήποτε σημείο, χρησιμοποιώντας τιμές λειτουργίας των σωματιδίων, όπως φαίνεται και στο Σχ. 5.



Σχήμα (5): Πυρήνας (Kernel)

Αυτή η εκτίμηση λειτουργίας θα μπορούσε να παραγωγιστεί με ακρίβεια, με την προϋπόθεση πως και ο πυρήνας (Kernel) είναι παραγωγίσιμος. Με αυτό τον τρόπο, οι παράγωγοι που απαιτούνται για τις ρευστό δυναμικές εξισώσεις γράφονται βάση των ιδιοτήτων των σωματιδίων. Λόγω της στενής σχέσης της μεθόδου με στατιστικές ιδέες, οι Gingold και Monaghan [66] περιέγραψαν τη μέθοδο ως μέθοδο Monte Carlo. Εντούτοις, σε εργασίες που ακολούθησαν (π.χ. Gingold και Monaghan [70]), ανακαλύφθηκε ότι τα λάθη ήταν πολύ μικρότερα από τις προβλεφθείσες εκτιμήσεις. Οι Gingold και Monaghan έκαναν αυτή την διαπίστωση, όταν συνειδητοποίησαν πως η πυκνότητα αριθμού σωματιδίων δεν ήταν ισοδύναμη με την πυκνότητα που έδινε η θεωρία των πιθανοτήτων. Και αυτό γιατί οι διακυμάνσεις απαιτούσαν ενέργεια, η οποία δεν είναι διαθέσιμη στις εξισώσεις κίνησης. Δυναμικά προβλήματα με περισσότερη αναταραχή μπορούν να εμφανιστούν αλλά μόνο στην έκταση που επιτρέπεται από τις δυναμικές εξισώσεις.

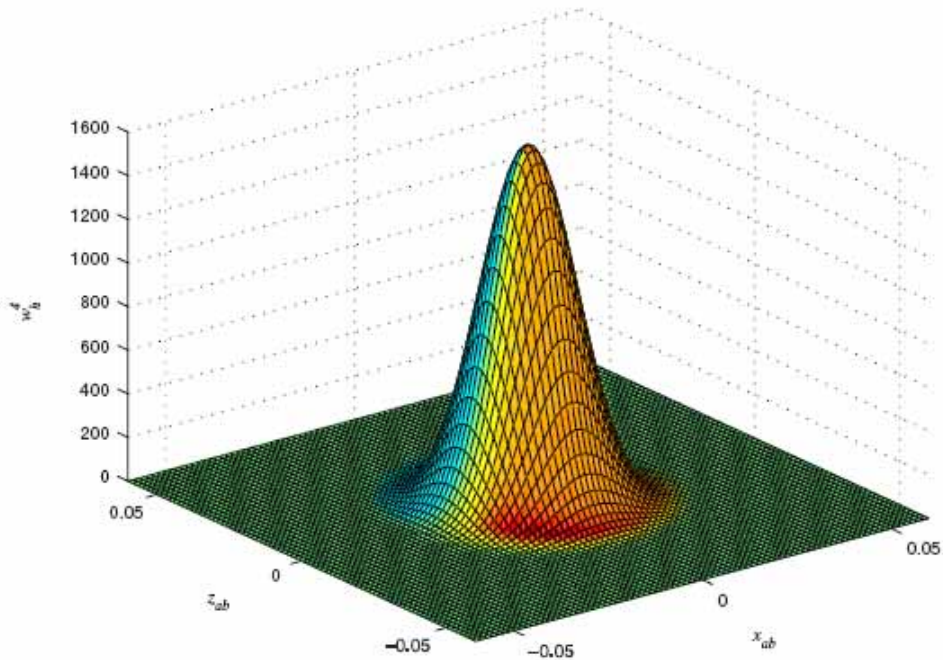
Η παρεμβολή της ποσότητας A με βάση τη μέθοδο SPH, όταν η ποσότητα αυτή είναι συνάρτηση των χωρικών συντεταγμένων \vec{r} και \vec{r}' , βασίζεται σε ολοκλήρωμα παρεμβολής :

$$A_1(\bar{r}) = \int A(\bar{r}') W(\bar{r} - \bar{r}', h) d\bar{r}' \quad (3),$$

όπου η συνάρτηση W είναι ο πυρήνας (kernel) και $d\bar{r}'$ είναι ο διαφορικός όγκος. Το ολοκλήρωμα παρεμβολής αναπαριστά ακριβώς την ποσότητα A όταν το kernel είναι η συνάρτηση Kronecher $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$. Στην πράξη, τα kernel είναι συναρτήσεις οι οποίες τείνουν στη συνάρτηση δ όταν η κλίμακα μήκους h , το οποίο ισούται με την ακτίνα αλληλεπίδρασης μεταξύ των σωματιδίων, τείνει στο 0.

Σύμφωνα με τους *Viola* και *Issa* [71] μία συνήθεις συνάρτηση πυρήνας που χρησιμοποιείται είναι το spline τέταρτης τάξης Σχ. 6.

$$W(q) = \frac{a_d}{h^d} \begin{cases} \left(\frac{5}{2}-q\right)^4 - 5\left(\frac{3}{2}-q\right)^4 + 10\left(\frac{1}{2}-q\right)^4 & 0 \leq q \leq 0.5 \\ \left(\frac{5}{2}-q\right)^4 - 5\left(\frac{3}{2}-q\right)^4 & 0.5 \leq q \leq 1.5 \\ \left(\frac{5}{2}-q\right)^4 & 1.5 \leq q \leq 2.5 \\ 0 & q \geq 2.5 \end{cases} \quad (4),$$



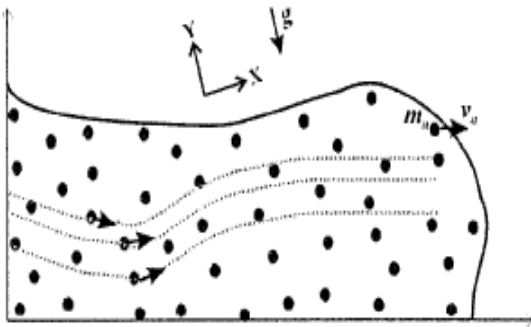
Σχήμα (6): Πυρήνας spline τέταρτης τάξης

όπου το $q = \frac{\bar{r}_{ab}}{h}$, με \bar{r}_{ab} την απόσταση μεταξύ των σημείων a και b , και d ο αριθμός των διαστάσεων επίλυσης του πεδίου. Για ένα πρόβλημα δύο διαστάσεων, όπως το δικό μας,

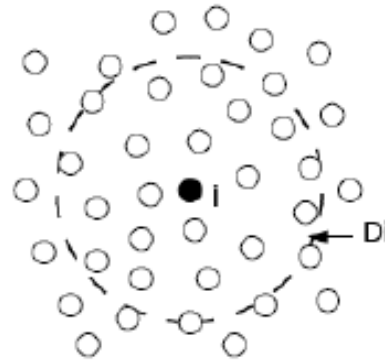
ο συντελεστής a_d παίρνει την τιμή $\frac{96\pi}{1199}$. Για πρόβλημα τριών διαστάσεων ο συντελεστής a_d παίρνει την τιμή $\frac{\pi}{20}$, έτσι ώστε να έχουμε κανονικοποίηση του kernel.

Στις αρχικές εργασίες οι Gingold και Monaghan [66], πρότειναν αριθμητικές λύσεις που δεν συντηρούσαν τη γραμμική και γωνιακή ορμή ακριβώς, αλλά έδιναν πολύ καλά αποτελέσματα για μια κατηγορία αστροφυσικών προβλημάτων που θεωρούνταν δισεπίλυτα για τις τότε υπάρχουσες τεχνικές. Από τότε ο βασικός αλγόριθμος SPH βελτιώθηκε για να διατηρεί την γραμμική ορμή και στροφορμή όπου χρησιμοποιεί ακριβώς το ισοδύναμο lagrangian σωματίδιο για συμπιεστό ρευστό που δεν εισχωρεί στα όρια (Gingold και Monaghan [70]). Με αυτή την διαδικασία, οι ομοιότητες μεταξύ της μεθόδου SPH και της μοριακής δυναμικής έγιναν πιο σαφείς. Πρόσφατες μελέτες από τους Hoover [72] και Hoover et al [73] ερευνήσαν τις ομοιότητες και διαφορές μεταξύ της SPH και της μεθόδου της μοριακής δυναμικής.

Δεδομένου ότι η SPH προσομοιάζει ένα ρευστό ως μηχανικό και θερμοδυναμικό σύστημα σωματιδίων, είναι φυσικό οι συνθήκες μη εισχώρησης να προκύπτουν από Lagrangian σύστημα σωματιδίων. Οι πρώτες εξισώσεις που χρησιμοποιήθηκαν στην μέθοδο SPH για προσομοιώσεις διχοτόμησης και ασταθειών προήλθαν από Lagrangian σύστημα σωματιδίων, Gingold και Monaghan [70], [74], [75]. Τα Lagrangian συστήματα σωματιδίων λάμβαναν υπόψη την ακτίνα επίδρασης (η ίδια τιμή για κάθε σωματίδιο), όπως φαίνεται και στα σχήματα 7 και 8. Στο σχήμα 7 βλέπουμε την διακροτοποίηση της ροϊκής μάζας με ένα lagrangian σύστημα σωματιδίων, ενώ στο 8 τον χώρο επίδρασης ενός σωματιδίου.



Σχήμα (7): Διακροτοποίηση της ροϊκής μάζας



Σχήμα (8): Ο χώρος επίδρασης ενός σωματιδίου.

Σε πιο πρόσφατες εργασίες περιλαμβάνονται Lagrangian συστήματα σωματιδίων που χρησιμοποιούν διαφορετική ακτίνα επίδρασης για κάθε ένα σωματίδιο ξεχωριστά, [76], [77], παρομοίως [78], Lagrangian για προβλήματα τύπου MHD, [79-80], Lagrangian για προβλήματα δίνης συμπιεστής ροής [77]. Επιπρόσθετα ο Bonet και οι συνεργάτες του [81-83], έχουν χρησιμοποιήσει Lagrangians στην μέθοδο SPH για μοντελοποίηση ελαστικών υλικών. Το πλεονέκτημα των Lagrangian εξισώσεων κίνησης είναι ότι όχι μόνο έχουμε διατήρηση της ορμής και της ενέργειας, αλλά εξασφαλίζεται επίσης ότι ένα μεγάλο μέρος της γεωμετρικής δομής του συστήματος διατηρεί την συνοχή του ακόμα και σε φάσεις κενού των σωματιδίων.

Για να μπορέσουμε να εφαρμόσουμε το ολοκλήρωμα παρεμβολής στο ρευστό το χωρίζουμε σε μικρά στοιχεία μάζας, τα σωματίδια. Το σωματίδιο a θα έχει μάζα m_a , πυκνότητα ρ_a και θέση \bar{r}_a . Η τιμή της ποσότητας A στο σωματίδιο a θα είναι A_a . Το ολοκλήρωμα παρεμβολής τότε μπορεί να γραφεί ως :

$$\int \frac{A(\bar{r}')}{\rho(\bar{r}')} \rho(\bar{r}') d\bar{r}' \quad (5),$$

όπου ένα στοιχείο μάζας θα είναι $\rho d\bar{r}'$. Το ολοκλήρωμα μπορεί να προσεγγιστεί πλέον από το άθροισμα των στοιχείων μάζας. Άρα το ολοκλήρωμα παρεμβολής παίρνει τη μορφή :

$$A_S(\bar{r}) = \sum_b m_b \frac{A_b}{\rho_b} W(\bar{r} - \bar{r}_b, h) \quad (6),$$

όπου το άθροισμα- S αναφέρεται σε όλα τα σωματίδια που λήφθηκαν υπόψη στους υπολογισμούς την δεδομένη χρονική στιγμή. Το b είναι το γειτονικό σωματίδιο με το οποίο αλληλεπιδρούν. Πρακτικά στο άθροισμα συμβάλλουν μόνο τα γειτονικά σωματίδια καθώς η τιμή της συνάρτησης πυρήνα μειώνεται δραστικά με την αύξηση της απόστασης. Όπως φαίνεται και από τη σχέση (4) όταν η απόσταση μεταξύ δύο σωματιδίων είναι μεγαλύτερη από $2.5h$ τότε δεν υπάρχει αλληλεπίδραση μεταξύ τους. Η μέθοδος SPH παρέχει εκφράσεις ποσοτήτων οι οποίες μπορούν εύκολα να παραγωγισθούν. Αν η συνάρτηση πυρήνα είναι παραγωγίσιμη τότε η τελευταία σχέση μπορεί να παραγωγιστεί και να μας δώσει :

$$\nabla A_S(\bar{r}) = \sum_b m_b \frac{A_b}{\rho_b} \nabla W(\bar{r} - \bar{r}_b, h) \quad (7).$$

Ωστόσο αυτή η έκφραση δεν μηδενίζεται όταν η ποσότητα A είναι σταθερή. Για να μπορέσουμε να εξασφαλίσουμε το μηδενισμό της παραγώγου για σταθερή τιμή της ποσότητας A θεωρούμε ότι η παράγωγος αυτής έχει τη μορφή :

$$\frac{\partial A_a}{\partial x_a} = \sum_b \frac{m_b}{\rho_b} (A_b - A_a) \frac{\partial W_{ab}}{\partial x_a} \quad (8).$$

Όπου το a υποδηλώνει το τρέχον σωματίδιο που λαμβάνουν χώρα οι υπολογισμοί και b το γειτονικό σωματίδιο με το οποίο αλληλεπιδρά.

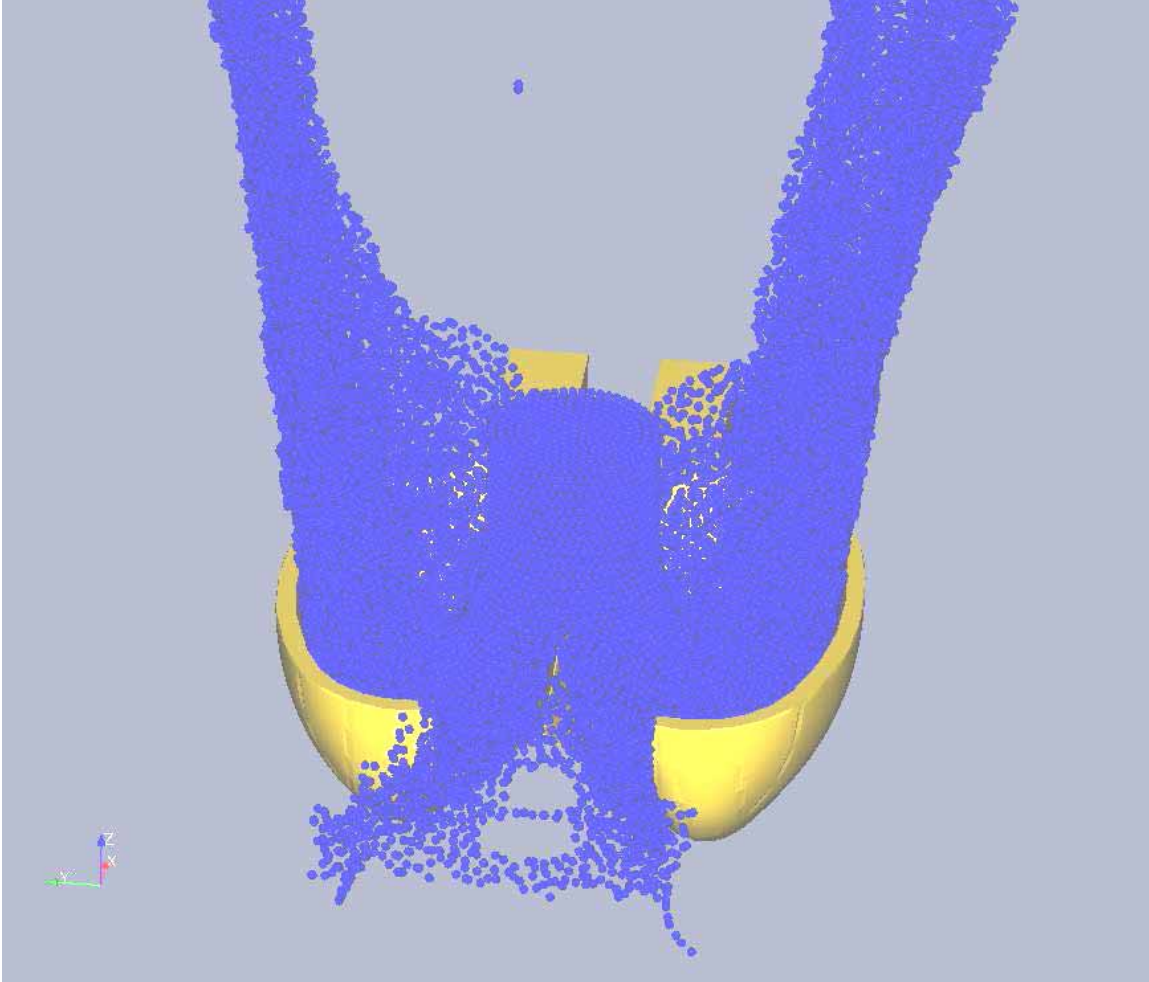
(2.2) ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΥΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΡΕΟΝΤΩΝ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ (SPH).

Όπως είδη έχει αναφερθεί κάθε σωματίδιο έχει ξεχωριστή ακτίνα επίδρασης [1]. Επομένως, είναι ιδανικό για αστροφυσικά προβλήματα όπου οι τεράστιες παραλλαγές στις σχετικές κλίμακες μήκους είναι κοινές (βλ., π.χ. προσομοίωση σχηματισμού του φεγγαριού Benz et al [84], ή οι μελέτες σχηματισμού αστεριών [85-86]). Επιπλέον, η μέθοδος SPH συνδυάζεται εύκολα με τις σωματιδιακές μεθόδους που χρησιμοποιούνται για μοντελοποίηση συστημάτων αστεριών και είναι ένα φυσικό εργαλείο για τις κοσμολογικές προσομοιώσεις [87-90].

Επειδή ουσιαστικά η SPH είναι μια τεχνική που προσομοιώνει τις εξισώσεις συνέχειας, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για ένα ευρύ φάσμα των ρευστών δυναμικών προβλημάτων. Αν και οι αρχικές εφαρμογές αφορούσαν δυναμικά προβλήματα αερίου, πλέον εφαρμόζεται σε προβλήματα ασυμπίεστης ροής όπου η ροή λαμβάνεται ελαφρώς συμπίεσιμη με μια κατάλληλη εξίσωση [91]. Παρομοίως η μέθοδος SPH χρησιμοποιείται, σε προβλήματα πρόσκρουσης ρευστού σε ακανόνιστες γεωμετρίες [92-94] Σχ 9-10, καθώς επίσης και τα κλασικότερα προβλήματα, όπως πρόσκρουσης κυμάτων σε παραλίες [95].

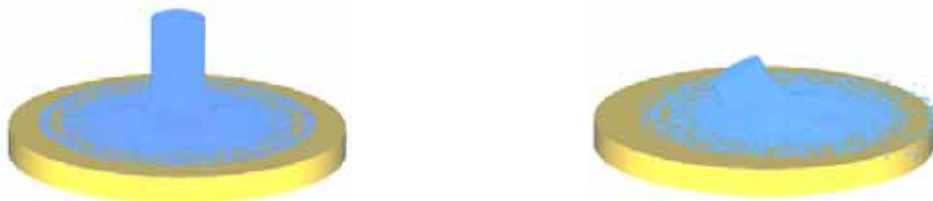


Σχήμα (9): Πειραματική εικόνα πρόσκρουσης δέσμης νερού σε σκαφίδιο *LMH-EPFL*



Σχήμα (10): Υπολογιστική εικόνα πρόσκρουσης δέσμης νερού σε σκαφίδιο *LMH-EPFL*

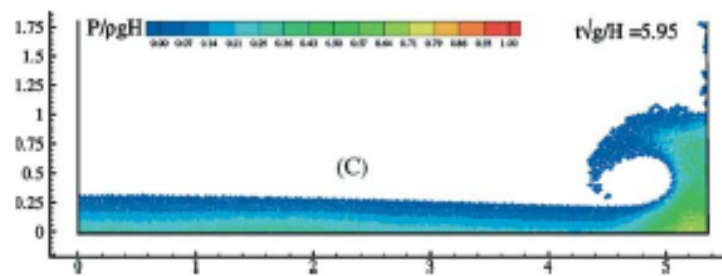
Στο Σχ. 11 βλέπουμε μία εφαρμογή της μεθόδου SPH, [94] για μοντελοποίηση δέσμης νερού. Πράγματι η SPH έδειξε πολύ καλή ευαισθησία στην αρχική διανομή των σωματιδίων. Το επόμενο βήμα των συγγραφέων ήταν ο καθορισμός των οριακών συνθηκών για τις περίπλοκες γεωμετρίες. Για απλότητα ελήφθησαν απλοποιημένες αρχικές συνθήκες για τα όρια. Πολλές μέθοδοι οριακών συνθηκών με επιπλέον σωματίδια αποδείχτηκαν ανεπαρκείς για την μοντελοποίηση των σκαφιδίων. Επιλέχθηκε μια πιο απλή μέθοδος, με αντίκτυπο στην ακρίβεια., όπου ίσες και αντίθετες δυνάμεις ασκούνται μεταξύ του στερεού σώματος και του νερού. Υπολογιστικά η αναγκαιότητα της παράλληλης μοντελοποίησης επιτεύχθηκε με ίσο αριθμό σωματιδίων νερού και σταθερών σωματιδίων.



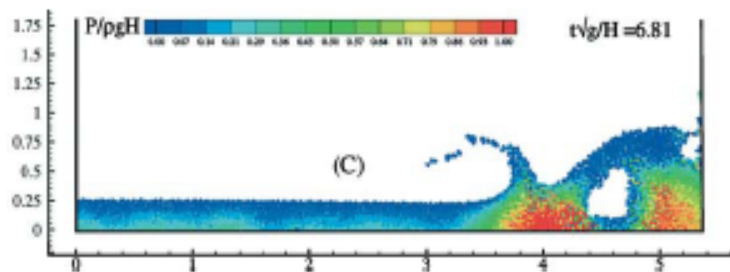
Σχήμα (11): Πρόσκρουση δέσμης νερού σε σταθερή πλάκα.

Οι συγγραφείς λαμβάνοντας υπόψη τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την πιο πάνω διαδικασία έφτασαν στο συμπέρασμα πως η μέθοδος SPH, όχι μόνο είναι κατάλληλη για επίλυση τέτοιου είδους προβλημάτων, αλλά υπάρχουν και αρκετά πλεονεκτήματα για την μαθηματική μοντελοποίηση τους.

Ο Colagrossi [96] έχει κάνει μια λεπτομερή μελέτη εφαρμογής της SPH σε προβλήματα κυμάτων που σπάνε στην ακτή, όπου μια ακριβής μέθοδος συνοριακών στοιχείων μπόρεσε να χρησιμοποιηθεί μέχρις οσότου το κύμα να ‘κατσαρώσει’ για να αγγίξει την επιφάνεια ύδατος στην ακτή Σχ. 12. Οι υπολογισμοί δίνουν καλά αποτελέσματα σύμφωνα με την μέθοδο *mitgor* που επιλέχθηκε, και αυτό επαληθεύεται από συγκρίσεις με πειραματικά αποτελέσματα. Εμφανής είναι η διαφορά του Σχ.12 από το Σχ. 13 αφού στο τελευταίο δεν χρησιμοποιήθηκε καθόλου τεχνητή συνεκτικότητα.

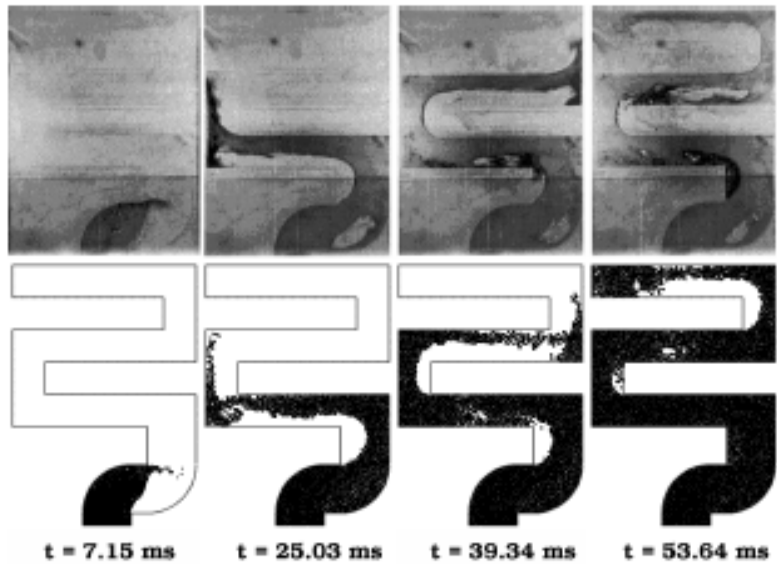


Σχήμα (12): Κύμα που σπάει στην ακτή.



Σχήμα (13): Κύμα που σπάει στην ακτή χωρίς συνεκτικότητα.

Ο Colagrossi [96] επίσης έδειξε πως η προσομοίωση με την συγκεκριμένη μέθοδο στήλης νερού που πέφτει και τα τόξα κυμάτων που παράγονται από ορισμένα σκάφη είναι σε συμφωνία με τις πειραματικές μετρήσεις. Προσομοιώσεις χύτευσης παρουσιάζουν επίσης καλή συμφωνία με το πείραμα [97], όπως φαίνεται και στο Σχ. 13 όπου έχουμε γέμισμα σχήματος τύπου S με μιογία χρησιμοποιώντας $\mu = 0.001 \text{ kg/ms}$



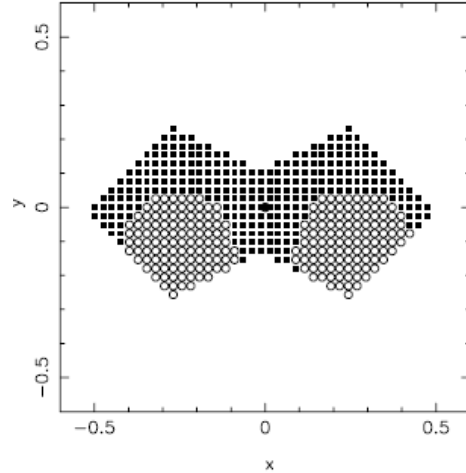
Σχήμα (13): Σύγκριση πειραματικών και υπολογιστικών αποτελεσμάτων σε περίπτωση χύτευσης.

Μια άλλη κατηγορία προβλημάτων κατάλληλα για εφαρμογή του αλγόριθμου της μεθόδου SPH είναι προβλήματα ελαστικότητας και σπασίματος. Ο Libersky και Petschek [98] παρήγαγαν και εφάρμοσαν τις εξισώσεις SPH για την ελαστικότητα. Ο Benz και Asphaug [99-101], απέδειξαν πώς η SPH θα μπορούσε να εφαρμοστεί στο σπάσιμο εύθραυστων στερεών, όπου μας δίνει πολύ καλύτερα αποτελέσματα από την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων ή τις μεθόδους πεπερασμένων διαφορών. Σε αυτές τις προσομοιώσεις, η ευκολία με την οποία τα σωματίδια SPH μπορούν να περιγράψουν τη μετάβαση από μια συνέχεια σε ένα σύνολο τεμαχίων μας δίνει ένα υπολογιστικό πλεονέκτημα έναντι άλλων αριθμητικών μεθόδων. Πλέον υπάρχουν και πακέτα λογισμικού όπως Dyna3D και Autodyn για την προσομοίωση των σωματιδίων και τα αποτελέσματα τις μεθόδου. Η μέθοδος SPH παρέχει επίσης μια απλή τεχνική για το σύνθετο σπάσιμο σε γεωλογικούς σχηματισμούς βράχων και σε εύθραυστα υλικά [102-103]. Η μέθοδος SPH χρησιμοποιείται επίσης σε χειρουργικές επεμβάσεις εικονικής πραγματικότητας (see, e.g. the work of M Mueller, S Schirm and M Teschner at the Computer Graphics Laboratory ETH, Zurich).

Σε πολλά από αυτά τα προβλήματα οι εκτιμήσεις ακρίβειας της παρεμβολής SPH μας προϊδεάζουν πως τα αποτελέσματα θα είναι ιδιαίτερα ανακριβή. Κατά συνέπεια, αναπτύχθηκε μια τεχνική ελάχιστων τετραγώνων Dilts [104] η οποία μας εγγυάται μία τέλεια γραμμική παρεμβολή. Επιπλέον στην πράξη, όπως αναφέρθηκε νωρίτερα, η χαμηλή ακρίβεια που προβλέπεται από τα λάθη παρεμβολής συνήθως δεν εμφανίζεται.

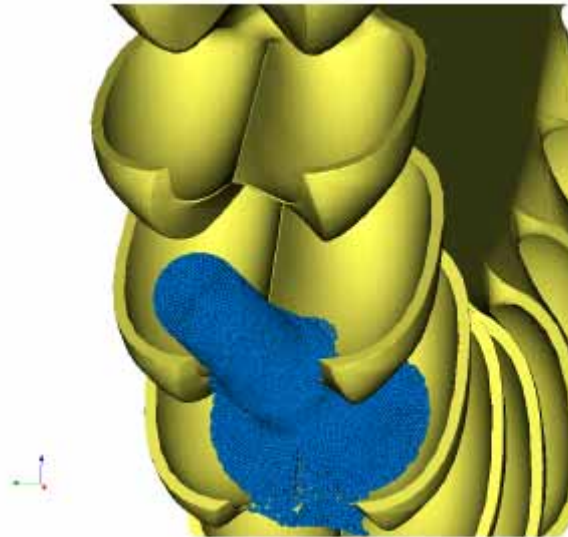
Σε προβλήματα που περιλαμβάνουν μεταφορά θερμότητας, οι Cleary και Monaghan [95] έδειξαν ότι σε προσομοιώσεις της SPH, οι οποίες συντηρούν τη θερμική ενέργεια και εγγυώνται ότι η εντροπία αυξάνεται, τα αποτελέσματα είναι πολύ ακριβής ακόμα κι αν οι θέσεις των σωματιδίων είναι διαταραγμένες και η θερμική αγωγιμότητα ασυνεχής. Αυτά τα αποτελέσματα μαζί με εκείνα που αναφέρθηκαν προηγουμένως δείχνουν ότι εάν οι εξισώσεις SPH καταστρωθούν έτσι ώστε να ικανοποιούν τους θεμελιώδεις νόμους συντήρησης, τα αποτελέσματα είναι πολύ καλύτερα. Ακόμα και εάν

αποτελέσματα εξάγονταν μόνο από την εκτίμηση της παρεμβολής, όπως στο Σχ. 14 όπου έχουμε τις συντεταγμένες των SPH σωματιδίων στην περίπτωση δύο καταβόθρων θερμότητας με συντεταγμένες $x = \pm 0.25$ και $y = 0$ με ακανόνιστο κλείσιμο. Τα σωματίδια του πάγου παριστάνονται με ανοιχτούς κύκλους και τα σωματίδια του ρευστού με γεμάτα τετράγωνα..



Σχήμα (14): Δύο απορροφητές θερμότητας.

Στο Σχ. 15 βλέπουμε ακόμη μία εφαρμογή της SPH, από τους Marongiu-F.Leboeuf-Jean M.Favre-E.Parkinson [94] για μοντελοποίηση της δέσμης νερού σε αλληλεπίδραση με πολύπλοκες γεωμετρίες, κάτι που αφήνει πολλές υποσχέσεις για την επίλυση των προβλημάτων που προκύπτουν από την επίλυση των εξισώσεων Euler.



Σχήμα (15): Πρόσκρουση δέσμης ρευστού σε υδροστρόβιλο τύπου Pelton.

3. Η ΜΕΘΟΔΟΣ SPH ΓΙΑ ΤΙΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ NAVIER-STOKES

(3.1) ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ ΚΑΙ ΟΡΜΗΣ

Η επίλυση του πεδίου ροής γίνεται με βάση τις εξισώσεις Navier-Stokes. Η συνεχής μορφή των εξισώσεων στο δι-διάστατο χώρο για ασυμπίεστο ρευστό είναι η ακόλουθη :

$$\text{Ορμής:} \quad \frac{d\bar{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \bar{u} + \bar{g} \quad (9)$$

$$\text{Συνέχειας:} \quad \frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \bar{u} \quad (10),$$

όπου ρ η πυκνότητα, p η πίεση, ν η κινηματική συνεκτικότητα και \bar{g} η επιτάχυνση της βαρύτητας.

Με βάση λοιπόν τη μέθοδο SPH οι εξισώσεις Navier-Stokes μπορούν να εκφραστούν ως εξής :

$$\text{Ορμής:} \quad \left. \begin{aligned} \frac{du_a}{dt} &= -\sum_b m_b \left[\left(\frac{p_a}{\rho_a^2} + \frac{p_b}{\rho_b^2} \right) \frac{\partial W}{\partial x} - \Pi_{\alpha\beta} \right] + \bar{g} \\ \frac{dv_a}{dt} &= -\sum_b m_b \left[\left(\frac{p_a}{\rho_a^2} + \frac{p_b}{\rho_b^2} \right) \frac{\partial W}{\partial y} - \Pi_{\alpha\beta} \right] + \bar{g} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\text{Συνέχειας:} \quad \frac{d\rho_a}{dt} = \sum_b m_b \left[(u_b - u_a) \frac{\partial W}{\partial x} + (v_b - v_a) \frac{\partial W}{\partial y} \right] \quad (12)$$

όπου Π_{ab} είναι οι δυνάμεις λόγω ιξώδους που υπολογίζονται βάσει της σχέσης :

$$\Pi_{ab} = 8 \frac{v_a + v_b}{\rho_a + \rho_b} \frac{\bar{u}_{ab} \cdot \bar{r}_{ab}}{r_{ab}^2} \nabla W_{ab} \quad (13)$$

όπου v_a είναι το κινηματικό ιξώδες του σωματιδίου που λαμβάνουμε υπόψη στους λογαριασμούς και v_b το κινηματικό ιξώδες του γειτονικού σωματιδίου. Το \bar{u}_{ab} αντιπροσωπεύει το διάνυσμα της ταχύτητας μεταξύ του σωματιδίου a που λαμβάνουμε υπόψη στους λογαριασμούς και του γειτονικού του b και \bar{r}_{ab} η απόσταση μεταξύ του σωματιδίου a που λαμβάνουμε υπόψη στους λογαριασμούς και του γειτονικού του b .

Σύμφωνα με τον Monaghan ή σύμφωνα με τους Morris et al η εξίσωση (13) μπορεί να πάρει την μορφή ,

$$\Pi_{ab} = \frac{\mu_a + \mu_b}{\rho_a \rho_b} \frac{\bar{u}_{ab}}{r_{ab}^2} \bar{r}_{ab} \cdot \nabla W_{ab} \quad (14)$$

Όπως φαίνεται από τις παραπάνω σχέσεις για τον υπολογισμό των παραγώγων των ταχυτήτων και της πυκνότητας απαιτείται ο υπολογισμός της πρώτης παραγώγου της συνάρτησης-πυρήνα, με μ να συμβολίζεται το δυναμικό ιξώδες. Θεωρώντας ότι η απόσταση μεταξύ δύο σωματιδίων είναι dr η παράγωγος της συνάρτησης-πυρήνα μπορεί να εκφραστεί ως εξής

$$\frac{\partial W}{\partial r} = \frac{96\pi}{1199} \frac{1}{h^2} \begin{cases} 4\left(\frac{5}{2}-q\right)^3 \left(-\frac{1}{h}\right) - 20\left(\frac{3}{2}-q\right)^3 \left(-\frac{1}{h}\right) + 40\left(\frac{1}{2}-q\right)^3 \left(-\frac{1}{h}\right) & 0 \leq q \leq 0.5 \\ 4\left(\frac{5}{2}-q\right)^3 \left(-\frac{1}{h}\right) - 20\left(\frac{3}{2}-q\right)^3 \left(-\frac{1}{h}\right) & 0.5 \leq q \leq 1.5 \\ 4\left(\frac{5}{2}-q\right)^3 \left(-\frac{1}{h}\right) & 1.5 \leq q \leq 2.5 \\ 0 & q \geq 2.5 \end{cases} \quad (15)$$

Θεωρούμε ότι η απόσταση μεταξύ δύο σωματιδίων είναι $\Delta r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ όπου Δx , Δy είναι η απόσταση των σωματιδίων κατά x- και y- αντίστοιχα. Κάνοντας πράξεις από την παράγωγο της συνάρτησης-πυρήνα μπορούμε να υπολογίσουμε την παράγωγο του πυρήνα ως προς x και x αντίστοιχα. Έτσι θα ισχύει

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} \quad (16)$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\partial W}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} \quad (17).$$

Από τη σχέση $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, η οποία αντιπροσωπεύει το κέντρο του πολικού συστήματος του σωματιδίου αναφοράς, προκύπτουν οι παράγωγοί του :

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r} = \frac{\Delta x}{\Delta r} \quad (18)$$

$$\text{και } \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{r} = \frac{\Delta y}{\Delta r} \quad (19)$$

Με βάση τις σχέσεις 18 και 19 γίνεται ο υπολογισμός της ταχύτητας και της πυκνότητας των σωματιδίων για το επόμενο υπολογιστικό βήμα. Θεωρώντας ότι το ρευστό είναι ιδανικό και μη λαμβάνοντας υπ' όψη της δυνάμεις του πεδίου βαρύτητας οι σχέσεις 18 και 19 παίρνουν τη μορφή :

$$\left. \begin{aligned} u_2 &= u_1 - dt \sum_b m_b \left[\left(\frac{p_a}{\rho_a^2} + \frac{p_b}{\rho_b^2} \right) \frac{\partial W}{\partial x} \right] \\ v_2 &= v_1 - dt \sum_b m_b \left[\left(\frac{p_a}{\rho_a^2} + \frac{p_b}{\rho_b^2} \right) \frac{\partial W}{\partial y} \right] \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$$\rho_2 = \rho_1 + dt \sum_b m_b \left[(u_b - u_a) \frac{\partial W}{\partial x} + (v_b - v_a) \frac{\partial W}{\partial y} \right] \quad (21)$$

Πολύ σημαντικό συμπέρασμα, από την πιο πάνω σχέση (18), είναι η εξάρτηση της u_2 μόνο από τις τιμές της πίεσης, ενώ η ρ_2 εξαρτάται μόνο από τις διαφορές της ταχύτητας.

Μια άλλη πρόταση από τους Gordon R. Johnson, Robert A. Stryk και Stephen R. Beissel [106] είναι το B-Spline που έχει κάποια πλεονεκτήματα, όπως καλύτερη προσέγγιση της συνάρτησης πυρήνα. Μια μορφή του B-Spline kernel εκφράζεται ως.

$$W_{ij} = \frac{1}{\pi h_{ij}^2} \left[\frac{15}{7} \left(\frac{2}{3} - u_{ij}^2 + \frac{1}{2} u_{ij}^3 \right) \right] \quad 0 \leq u_{ij} \leq 1 \quad (22)$$

$$W_{ij} = \frac{1}{\pi h_{ij}^2} \left[\frac{15}{14} (2 - u_{ij}^3) \right] \quad 0 \leq u_{ij} \leq 2 \quad (23),$$

όπου $u_{ij} = \frac{r_{ij}}{h_{ij}}$, και $h_{ij} = a \frac{(d_i + d_j)}{2}$. Η αδιάστατη σταθερά a παίρνει συνήθως την τιμή 1

αλλά το πεδίο τιμών της είναι [0.8,1.5]. Οι διάμετροι d_i και d_j παίρνουν τιμές για αξονοσυμμετρικές γεωμετρίες από τον τύπο,

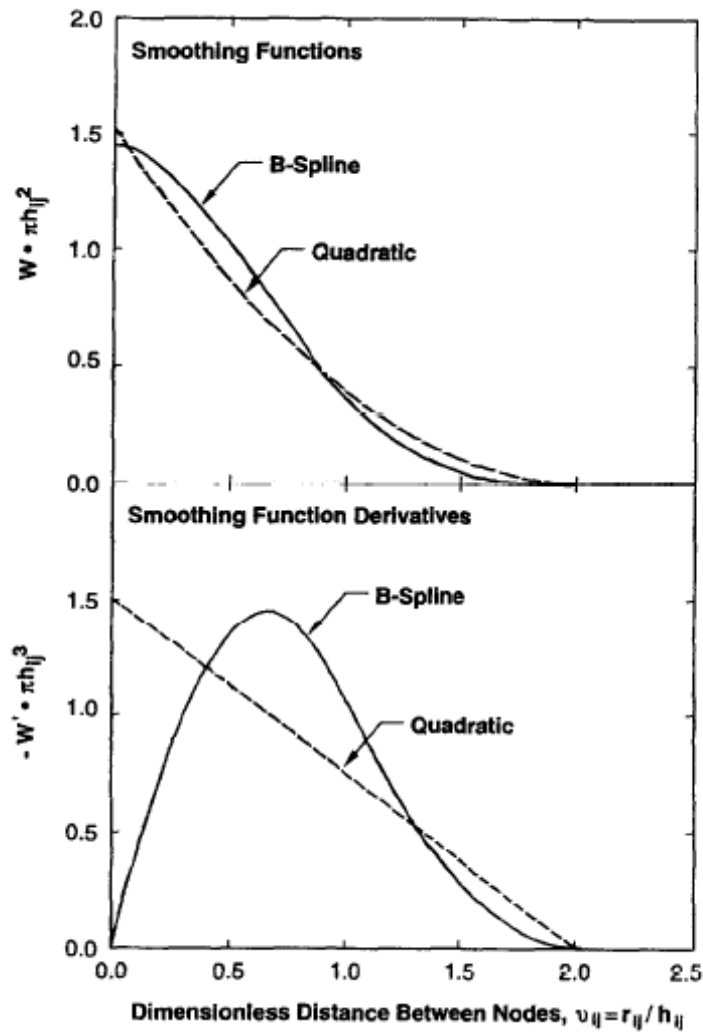
$$d = d_0 \sqrt{\frac{(1 + \varepsilon_u) x_0}{x}} \quad (24),$$

όπου ε_u η ογκομετρική πίεση και d_0 η αρχική διάμετρος των σωματιδίων. Τα x_0 είναι οι αρχικές και x οι τρέχουσες τιμές των πολικών συντεταγμένων.

Απαράβατος κανόνας για την τιμή της συνάρτησης-πυρήνα και σε αυτή την περίπτωση είναι να τείνει στη συνάρτηση δ όταν το μήκος αλληλεπίδρασης μεταξύ των σωματιδίων h , τείνει στο 0. Η αρνητική τιμή της παραγώγου του B-Spline πυρήνα Εξ. 19-20 εκφράζεται ως,

$$-W'_{ij} = -\frac{1}{\pi h_{ij}^3} \left[-\frac{30}{7} u_{ij} + \frac{45}{14} u_{ij}^2 \right] \quad 0 \leq u_{ij} \leq 1 \quad (25)$$

$$-W'_{ij} = -\frac{1}{\pi h_{ij}^3} \left[-\frac{15}{14} (2 - u_{ij})^2 \right] \quad 0 \leq u_{ij} \leq 2 \quad (26)$$



Σχήμα (16) : Σύγκριση B-Spline και Quadratic συνάρτηση πυρήνα.

Το χαρακτηριστικό γνώρισμα της παραγώγου της B-Spline είναι πως η $-W'_{ij}$ παρουσιάζει μέγιστο στο $u_{ij} = \frac{2}{3}$ και μειώνεται για μικρότερες και μεγαλύτερες τιμές του u_{ij} , όπως φαίνεται και στο Σχ. 16. Στο Σχ. 16 έχουμε το γράφημα της 2D B-Spline, και της τετραγωνικής συνάρτησης-πυρήνα καθώς και τις παράγωγους τους. Για $u_{ij} > \frac{2}{3}$ είναι φυσικό να μειώνεται η τιμή του $-W'_{ij}$ καθώς μειώνεται και η επίδραση του με την αύξηση της απόστασης. Η μείωση του $-W'_{ij}$ για $u_{ij} < \frac{2}{3}$ δεν είναι ικανοποιητική γιατί όσο πλησιάζει ο γειτονικός κόμβος στον κεντρικό τόσο μικρότερη επίδραση έχει, κάτι που οδηγεί σε αστάθειες κατά την συμπίεση.

(3.2) ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΙΕΣΗΣ-ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ.

Η μέθοδος SPH είναι μια μέθοδος που αφορά συμπιεστά ρευστά κοντά στο όριο της ασυμπίεστότητας θεωρώντας πως η ταχύτητα του ήχου είναι πολύ μεγαλύτερη σε σχέση με την ταχύτητα του ρευστού. Αυτό ισχύει και για τη ροή των πραγματικών ρευστών.

Η θεωρητική καταστατική εξίσωση που δίνει τη σχέση μεταξύ πίεσης και πυκνότητας είναι :

$$p_a = \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma} \left[\left(\frac{\rho_a}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right] \quad (27),$$

όπου ρ_0 είναι μια πυκνότητα αναφοράς, c_0 είναι η ταχύτητα του ήχου στο ρευστό και $\gamma = 7$ όταν η ανάλυση γίνεται για το νερό.

Η πραγματική εξίσωση της πίεσης υπολογίζεται με διαφορετικό συντελεστή c_0 . Σύμφωνα με τους *Cleary et al.* [107] ο όρος

$$\frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma} = 100V^2 \quad (28),$$

όπου V είναι η μέγιστη ταχύτητα του ρευστού. Αυτό εξασφαλίζει ότι η διακύμανση της πυκνότητας δεν ξεπερνάει το 1% και επομένως η ροή μπορεί να θεωρηθεί ως ασυμπιεστή. Για πολύπλοκες ροές το κριτήριο του 1% είναι ακόμα μικρότερο για την ασυμπίεστότητα.

(3.3) ΤΟ ΧΡΟΝΙΚΟ ΒΗΜΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ.

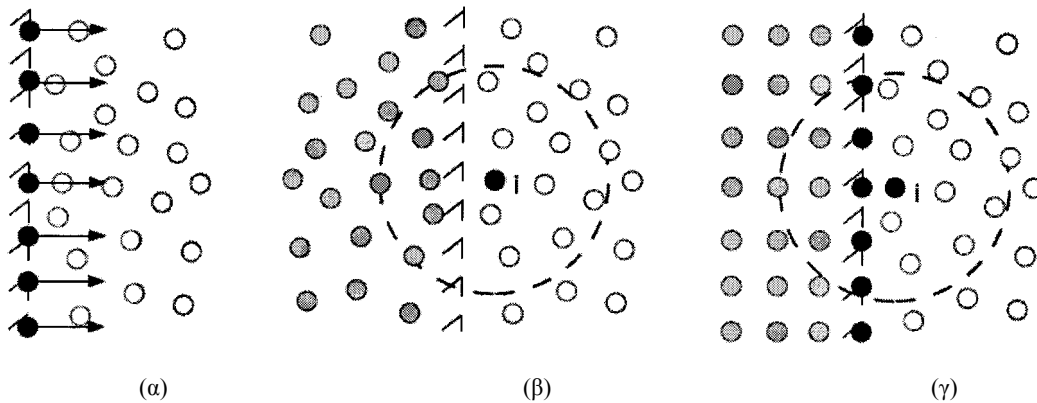
Το χρονικό βήμα υπόκειται συνήθως σε κάποιους περιορισμούς ευστάθειας, όπως :

$$\delta t = \min \left(0.4 \frac{h}{c_0}, 0.25 \min_a \left(\sqrt{\frac{h}{\gamma_\alpha}} \right), 0.125 \min_a \left(\frac{\rho_a h^2}{\mu_a} \right) \right) \quad (29),$$

όπου το γ_α είναι η επιτάχυνση του σωματιδίου α . Ο πρώτος από τους τρεις όρους χρησιμοποιεί κριτήριο Courant, όπου οι συντελεστές είναι βασισμένοι σε αριθμητικά πειράματα [108]. Η ταχύτητα του ήχου που εμφανίζεται στον πρώτο περιορισμό θα παρήγε πολύ μικρά χρονικά βήματα εάν κάποιος έθετε το c_0 ίσο με την φυσική τιμή του. Συνήθως, συστήνεται να τεθεί ίσο με τεχνητή (αριθμητική) τιμή ίση με 10 φορές τη μέγιστη ταχύτητα ροής, όπου οι διακυμάνσεις σχετικής πυκνότητας παραμένουν κάτω από το 1%. Με αυτήν την προσέγγιση, η SPH εμφανίζεται να είναι μια ελαφρός συμπίεστη μέθοδος. Εδώ πρέπει να αναφέρουμε ότι η πίεση (εξίσωση 24) μερικές φορές υπόκειται σε αστάθειες και παρουσιάζει μη συνεχή κατανομή [109]. Προκειμένου να αποφευχθούν αυτές οι δυσκολίες, ερευνητές [110] προτίμησαν την επίλυση μιας εξίσωσης πίεσης Poisson. Εντούτοις, αυτή η προσέγγιση χρειάζεται επιπρόσθετο υπολογιστικό χρόνο ενώ η πρώτη μέθοδος είναι υπολογιστικά πιο γρήγορη. Σύμφωνα με τον Monaghan [1] η απλή μέθοδος είναι ισορροπημένη μεταξύ ακρίβειας και απλότητας.

(3.4) ΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΣΕ ΤΟΙΧΩΜΑΤΑ.

Η μέθοδος SPH είχε σχεδιαστεί αρχικά για ροές χωρίς συγκεκριμένα όρια. Η αντιμετώπιση λοιπόν των οριακών συνθηκών ακόμα παρουσιάζει δυσκολίες. Παρά τη μεγάλη σημασία αντιμετώπισης των οριακών συνθηκών για πρακτικές εφαρμογές, το κυρίως πρόβλημα που υπάρχει έχει σχέση με την έλλειψη σωματιδίων και συνεκτικότητας σε περιοχές κοντά στα όρια. Αυτό το πρόβλημα μπορεί να αντιμετωπιστεί αν αυξηθεί ο υπολογιστικός χώρος και περιλάβει και τα τοιχώματα τα οποία αντιπροσωπεύονται από σωματίδια. Αρχικά ο *Monaghan* είχε εισαγάγει την έννοια της δύναμης από τα σωματίδια του τοιχώματος προς τα σωματίδια του ρευστού, σχήμα 17-α. Σωματίδια τοποθετούνται κατά μήκος του τοιχώματος και υπάρχει η ανάπτυξη απωθητικών δυνάμεων με τα σωματίδια του ρευστού καταλήγοντας σε μη-εισχώρηση των σωματιδίων του ρευστού στο τοίχωμα. Η μέθοδος αυτή παρουσιάζει πρόβλημα όταν τα σωματίδια του ρευστού πλησιάσουν κοντά στο τοίχωμα αφού ο υπολογιστικός χώρος δεν έχει επαρκή αριθμό σωματιδίων, όσον αφορά στο τοίχωμα. Παρόλα αυτά εύκολα μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε πολύπλοκες γεωμετρίες και αιχμηρές ακμές.



Σχήμα (17): (α) Μέθοδος δυνάμεων, (β) Μέθοδος κατοπτρικών σωματιδίων, (γ) Μέθοδος σταθερών σωματιδίων

Άλλες μέθοδοι [133] προτείνουν ότι τα σωματίδια των τοιχωμάτων μπορούν να κατανεμηθούν από την αρχή και να παραμείνουν σταθερά στις θέσεις τους, (fixed particles σχήμα 17-γ), ή μπορούν να προκύπτουν συμμετρικά ως προς την επιφάνεια του τοιχώματος από τη θέση των σωματιδίων του ρευστού, (ghost or image particles σχήμα 17-β). Οι τιμές των χαρακτηριστικών μεταβλητών των σωματιδίων του τοιχώματος καθορίζονται κατά τέτοιο τρόπο ώστε να επιβάλλονται οι κατάλληλες οριακές συνθήκες. Τόσο η μέθοδος των fixed όσο και η μέθοδος των ghost particles δίνει καλά αποτελέσματα αλλά παρουσιάζουν προβλήματα όταν η ροή είναι πολύπλοκη. Η μέθοδος των απωθητικών δυνάμεων είναι η πιο απλή από τις τρεις αλλά και η λιγότερο ακριβής.

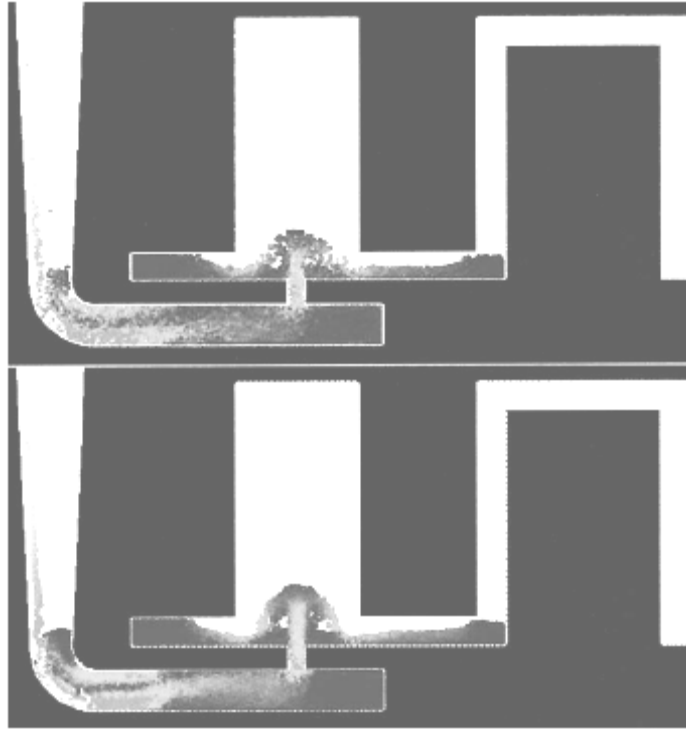
3.4,1 Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ.

Το τοίχωμα μπορεί να αντικαταστεί από μια σειρά σωματιδίων τα οποία ασκούν στα σωματίδια του ρευστού δυνάμεις οι οποίες μοιάζουν με τις μοριακές [35]. Οι δυνάμεις αυτές έχουν τη Lennard-Jones μορφή και εξαρτώνται από την κάθετη απόσταση των σωματιδίων από την επιφάνεια του τοιχώματος

$$f(r) = D \left[\left(\frac{r_0}{r} \right)^{p_1} - \left(\frac{r_0}{r} \right)^{p_2} \right] \frac{\bar{r}}{r^2} \quad (30).$$

Η δύναμη αυτή μηδενίζεται στην περίπτωση όπου $r \geq r_0$ ώστε οι δυνάμεις να είναι καθαρά απωθητικές. Για τις σταθερές p_1 και p_2 ισχύει ότι $p_1 \geq p_2$ ενώ σε αρκετές περιπτώσεις έχει υπολογισθεί πως οι τιμές $p_1 = 12$ και $p_2 = 6$ δίνουν ικανοποιητικά αποτελέσματα. Το r_0 είναι η αρχική απόσταση μεταξύ των σωματιδίων ενώ όταν $r \leq r_0$ έχουμε την έναρξη της διαδικασίας. Ο συντελεστής D επιλέγεται σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος. Η μέθοδος αυτή εξασφαλίζει τη μη-εισχώρηση των σωματιδίων του ρευστού μέσα και πάνω στην επιφάνεια του τοιχώματος αντίστοιχα. Όταν η επίλυση γίνεται για πραγματικό ρευστό τότε τα σωματίδια του τοιχώματος συμμετέχουν στον υπολογισμό του όρου του ιξώδους στην εξίσωση ορμής.

Η μέθοδος των απωθητικών δυνάμεων Lennard-Jones έχει εφαρμοστεί για την προσομοίωση της ροής κατά τη χύτευση [97]. Σε αυτή την περίπτωση είναι σημαντικό τα σωματίδια να μην εισέρχονται στο εσωτερικό του τοιχώματος. Καθώς τα σωματίδια του ρευστού πλησιάζουν τα σταθερά τοιχώματα οι απωθητικές δυνάμεις αυξάνονται σε μεγάλο βαθμό εξασφαλίζοντας κατά αυτόν τον τρόπο τη συνθήκη μη-εισχώρησης των σωματιδίων του ρευστού στο τοίχωμα. Αυτός ο τρόπος μοντελοποίησης επιτρέπει τη μελέτη της ροής με τοιχώματα χωρίς απότομες γεωμετρικές μεταβολές. Στην εφαπτομενική κατεύθυνση, τα σωματίδια του τοίχου συμπεριλαμβάνονται στον υπολογισμό των διατμητικών δυνάμεων ώστε να εξασφαλίζεται η συνθήκη μη-ολίσθησης, όπως φαίνεται και στο Σχ. 18 όπου στο πάνω σχήμα έχουμε την αραιή ανάλυση ενώ στο κάτω την πυκνή.

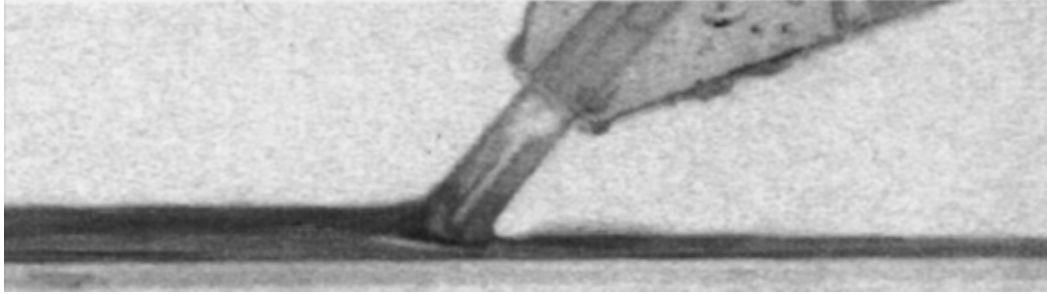


Σχήμα (18): Χύτευση με αραιή και πυκνή ανάλυση.

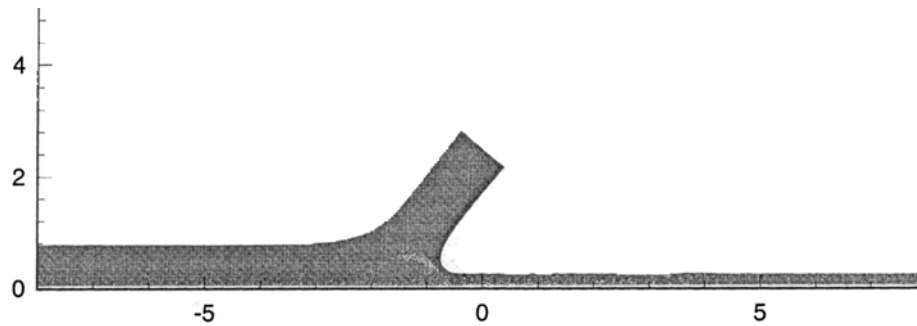
Για τη μελέτη της πρόσκρουσης μιας δέσμης νερού σε ακίνητη πλάκα οι *Reichl et al* [111] προτείνουν για την αντιπροσώπευση του τοίχου τη μέθοδο των δυνάμεων Lennard-Jones ή την τοποθέτηση πολλαπλών σειρών σωματιδίων. Οι δυνάμεις Lennard-Jones μπορούν να χρησιμοποιηθούν χωρίς τη μοντελοποίηση του ιξώδους για τη συμπεριφορά του τοιχώματος μόνο στην περίπτωση που δεν υπάρχει ολίσθηση. Για τη συνθήκη μη-ολίσθησης στο τοίχωμα, θα πρέπει τα σωματίδια του τοίχου να διαταχθούν κατάλληλα. Οι δοκιμές που πραγματοποιήθηκαν για την ακίνητη πλάκα έγιναν με τους παρακάτω συνδυασμούς αριθμών Reynolds και Froude.

$$\begin{aligned} \text{Re}=800, \text{Fr}=4.0, \\ \text{Re}=4000, \text{Fr}=4.0, \\ \text{Re}=8000, \text{Fr}=4.0. \end{aligned}$$

Για την περίπτωση της ακίνητης πλάκας και για όλους τους αριθμούς Reynolds δοκιμάστηκαν οι δυνάμεις Lennard-Jones και διαφορετικές συναρτήσεις-πυρήνα. Για να είναι δυνατή όμως η σύγκριση και να ελεγχθεί η ευαισθησία του μοντέλου στη μέθοδο αλλά και στο πυρήνα δοκιμάστηκε και η μέθοδος των πολλαπλών επιπέδων σωματιδίων για την περίπτωση $\text{Re}=800$. Στο Σχ. 19 βλέπουμε την πειραματική πρόσπτωση νερού σε σταθερή πλάκα με κλίση 40° , ενώ στο Σχ. 20 έχουμε το αριθμητικό αντίστοιχο αποτέλεσμα.

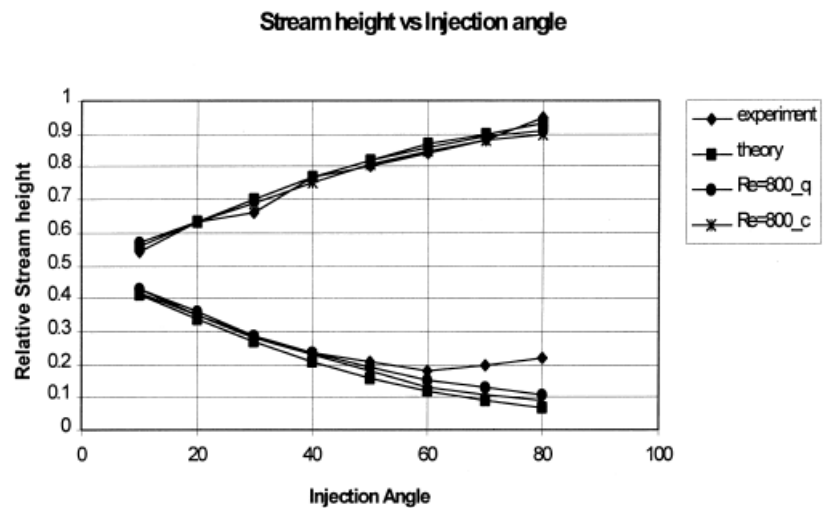


Σχήμα (19): Πειραματική πρόσπτωση νερού.



Σχήμα (20): Αριθμητική προσομοίωση πρόσπτωσης νερού.

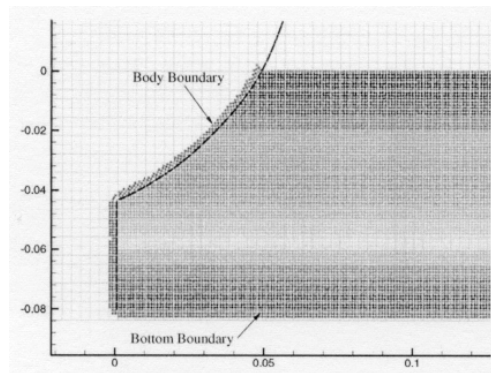
Για να αξιολογηθούν και ποιοτικά τα αποτελέσματα της SPH, έγινε σύγκριση μεταξύ των θεωρητικών και πειραματικών αποτελεσμάτων, η οποία όπως φαίνεται και στο Σχ. 20 είναι αρκετά ικανοποιητική. Στο Σχ. 21 όπου $_q$ quintic spline ενώ στο $_c$ χρησιμοποιήθηκε κυβική spline.



Σχήμα (20): Σύγκριση πειραματικών τιμών με quintic spline και κυβική spline.

3.4,2 Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΚΑΤΟΠΤΡΙΚΩΝ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ(Ghost ή mirror particles).

Στην περίπτωση αντιπροσώπευσης του τοιχώματος με *ghost particles* θα πρέπει τα σωματίδια του τοιχώματος κάθε χρονική στιγμή να χαρακτηρίζονται από πυκνότητα, πίεση και ταχύτητα. Αυτά τα χαρακτηριστικά τους εξαρτώνται από τα αντίστοιχα χαρακτηριστικά των γειτονικών σωματιδίων του ρευστού [112, 113]. Στη μέθοδο αυτή η συνεισφορά των γειτονικών σωματιδίων σε πυκνότητα, πρέπει να μειώνει την πίεση των σωματιδίων του ρευστού όταν αυτά αποκλίνουν από τα σωματίδια του ορίου. Τα κατοπτρικά σωματίδια δημιουργούνται με αντικατοπτρισμό των σωματιδίων του ρευστού στην άλλη πλευρά του ορίου, αλλά με αντίθετη ταχύτητα. Αυτή η μέθοδος λειτουργεί σωστά για ευθείες, αλλά δημιουργεί υπολογιστικά λάθη στην πυκνότητα για καμπύλες επιφάνειες, Σχ 22.

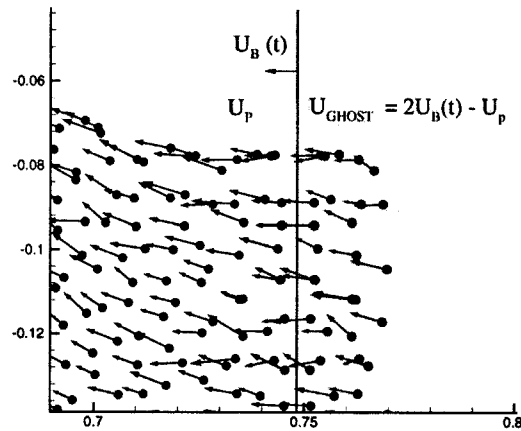


Σχήμα (22): Καμπύλη επιφάνεια.

Θεωρώντας ένα κάθετο τοίχωμα όπως αυτό του Σχ. 23 όλα τα σωματίδια του ρευστού που βρίσκονται σε μικρότερη απόσταση από την ακτίνα αλληλεπίδρασης h από την επιφάνεια του τοιχώματος δημιουργούν τα *ghost particles*. Οι χαρακτηριστικές εξισώσεις των *ghost particles* είναι

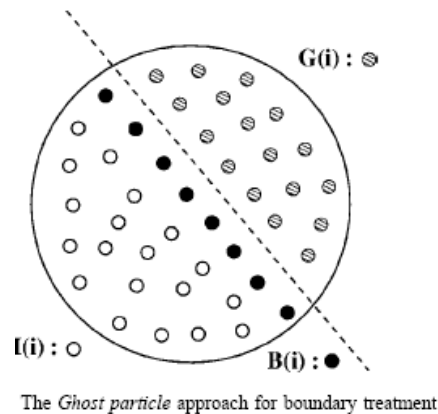
$$\left. \begin{aligned} x_{iG} &= 2x_W - x_i \\ u_{niG} &= 2U_{nW} - u_{ni} \\ u_{tiG} &= u_{ti} \\ p_{iG} &= p_i \end{aligned} \right\},$$

όπου ο δείκτης $()_t$ και $()_n$ συμβολίζει την εφαπτομενική και κάθετη προς την επιφάνεια του τοιχώματος συνιστώσα της ταχύτητας. U_{nW} είναι η τοπική ταχύτητα του τοιχώματος στη θέση x_W . Για κατακόρυφα τοιχώματα οι παραπάνω σχέσεις παρέχουν τις συνθήκες μη ολίσθησης. Για τοιχώματα τυχαίας γεωμετρίας η δημιουργία των σωματιδίων του τοιχώματος γίνεται με βάση την κάθετη απόσταση των σωματιδίων του ρευστού από το τοπικό επαπτόμενο επίπεδο στην επιφάνεια του τοιχώματος.



Σχήμα (23): Κάθετο τοίχωμα.

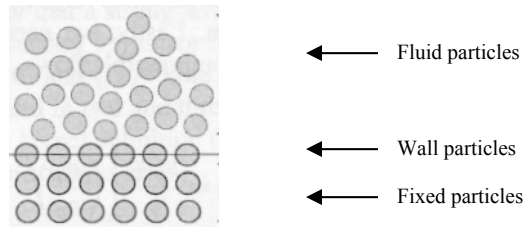
Τα σωματίδια ορίου συνεισφέρουν στους υπολογισμούς των πιέσεων και πυκνοτήτων τόσο των σωματιδίων του ρευστού όσο και στα γειτονικά σωματίδια ορίου. Η συνεισφορά των οριακών σωματιδίων βρέθηκε πως δίνει καλύτερα αποτελέσματα, παρά εάν θεωρούνταν να είχαν σταθερές τιμές πυκνότητας. Το πλεονέκτημα αυτής της προσέγγισης είναι μια ομαλή έναρξη καθώς η πυκνότητα των σωματιδίων είναι αρχικά σταθερή σε όλη την υπολογιστική περιοχή. Εντούτοις, όταν έχουμε κυρτό όριο μπορεί να εξαχθούν λάθος αποτελέσματα. Μια εναλλακτική λύση θα ήταν να τοποθετηθούν τα σωματίδια ορίου στην επιφάνεια κάθε εμποδίου. Η δυσκολία αυτής της μεθόδου είναι το ‘γέμισμα’ του χώρου με σωματίδια σταθερής πυκνότητας, Σχ. 24.



Σχήμα (24): Σωματίδια ορίου.

3.4.3 Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΣΤΑΘΕΡΩΝ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ (Fixed particles).

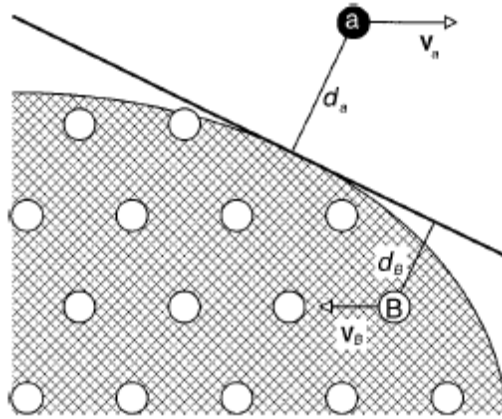
Σε αυτή την μέθοδο τα σωματίδια του τοιχώματος διατάσσονται σε πολλαπλά επίπεδα κατά τρόπο ώστε να ταιριάζουν με το σχήμα του. Τα σωματίδια αυτά κατά την προσομοίωση της πρόσκρουσης δεν κινούνται στο χώρο. Το μόνο χαρακτηριστικό τους που μπορεί να μεταβάλλεται είναι η πυκνότητά τους το οποίο μας επιτρέπει να περιλαμβάνουμε στους υπολογισμούς την αντίδραση του τοιχώματος στις διακυμάνσεις της πίεσης που σχετίζονται με την κίνηση των σωματιδίων του ρευστού. Με αυτή τη θεώρηση μπορεί να υπολογιστεί καλύτερα η αλληλεπίδραση μεταξύ τοιχώματος και ρευστού. Επίσης η μέθοδος των σταθερών σωματιδίων προτιμάται γιατί οι εξισώσεις διατήρησης εξακολουθούν να ισχύουν [71]. Εκτός από τα επίπεδα των σωματιδίων μέσα στο όριο, τοποθετείται και μια σειρά από σωματίδια πάνω στο επίπεδο του τοιχώματος όπως φαίνεται και στο Σχ. 25.



Σχήμα (25): Σειρά από σωματίδια πάνω στο επίπεδο του τοιχώματος.

Όταν ένα σωματίδιο του τοίχου επιδρά και μεταβάλλει την πυκνότητα ενός σωματιδίου του ρευστού τότε δέχεται και το ίδιο την ίδια επίδραση και μεταβολή στην πυκνότητά του. Κατά αυτόν τον τρόπο διατηρείται η συμμετρία της πίεσης ως προς το τοίχωμα. Αυτή η προσέγγιση επιτρέπει την τέλεια στεγανότητα του τοιχώματος ακόμα και σε ταχέως μεταβαλλόμενα φαινόμενα. Υπό συνθήκες στρωτής ροής τα σωματίδια του τοίχου έχουν μηδενική ταχύτητα ώστε να εξασφαλίζεται η συνθήκη μη-ολίσθησης.

Οι *Jiang, Oliveira* και *Sousa* [114] συμφωνούν με τον Monaghan όσον αφορά στις δυνάμεις Lennard-Jones μεταξύ των σωματιδίων για την εξασφάλιση των συνθηκών μη-εισχώρησης. Όμως τοποθετούν περισσότερα σωματίδια στην περιοχή του τοιχώματος όπως έκαναν και οι *Morris et al* [115] για να πετύχουν τις απαραίτητες συνθήκες μη-ολίσθησης. Τα σωματίδια αυτά συμβάλλουν στις SPH σχέσεις για την κλίση της πυκνότητας και της πίεσης, ενώ και η δική τους πυκνότητα μεταβάλλεται. Για κάθε σωματίδιο του ρευστού υπολογίζεται η κάθετη απόσταση από το τοίχωμα d_A , και αν το τοίχωμα δεν είναι επίπεδο τότε η απόσταση υπολογίζεται από το εφαπτόμενο προς το τοίχωμα επίπεδο, όπως φαίνεται στο Σχ. 26.



Σχήμα (26): Γεωμετρικά στοιχεία της μεθόδου.

Στη συνέχεια βρίσκεται η απόσταση των σωματιδίων του τοίχου από το επίπεδο αυτό d_B και ορίζεται η τεχνητή ταχύτητα των σωματιδίων του τοιχώματος να είναι ίση με:

$$\bar{v}_B = -\left(\frac{d_B}{d_A}\right)\bar{v}_A,$$

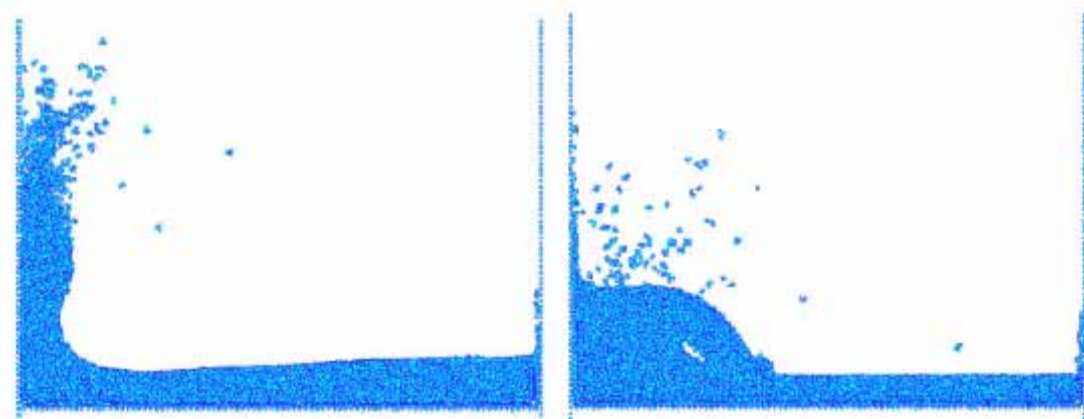
υπό την προϋπόθεση αυτή να μηδενίζεται για τα σωματίδια εκείνα τα οποία βρίσκονται πάνω στο επίπεδο της επιφάνειας του τοιχώματος. Η ταχύτητα αυτή χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των δυνάμεων ιξώδους που αναπτύσσονται στα γειτονικά προς το τοίχωμα σωματίδια και όχι για τον εντοπισμό της θέσης των σωματιδίων του τοιχώματος. Τα σωματίδια του τοίχου είναι ακίνητα ή κινούνται με προκαθορισμένη ταχύτητα, όταν έχουμε κινούμενο όριο. Η σχετική ταχύτητα των σωματιδίων του τοίχου προς τα σωματίδια του ρευστού είναι:

$$\bar{v}_{AB} = \bar{v}_A - \bar{v}_B = x\bar{v}_A,$$

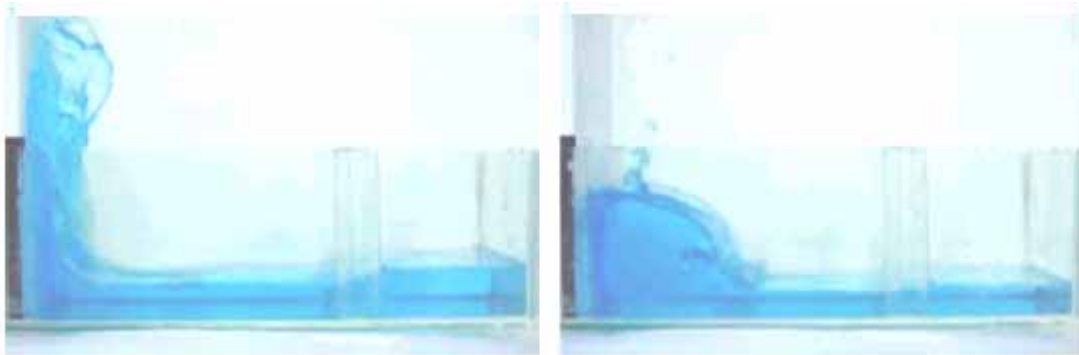
$$\text{όπου } x = \min\left(x_{\max}, 1 + \frac{d_B}{d_A}\right).$$

Το x_{\max} χρησιμοποιείται για να αποκλειστούν μεγάλες τιμές όταν τα σωματίδια του ρευστού πλησιάσουν πολύ κοντά στο τοίχωμα. Σύμφωνα με τους *Morris et al* [115] για την προσομοίωση ροής με μικρό αριθμό Reynolds η τιμή $x_{\max} = 1.5$ έδωσε ικανοποιητικά αποτελέσματα. Γνωρίζοντας τη σχετική ταχύτητα των σωματιδίων του τοιχώματος ως προς τα σωματίδια του ρευστού \bar{v}_{AB} μπορεί να γίνει ο υπολογισμός της μεταβολής της πυκνότητας των σωματιδίων του ρευστού λαμβάνοντας υπ' όψη και την επίδραση από τα σωματίδια του τοίχου.

Στο [71] οι *Viroleau* και *Issa* χρησιμοποίησαν την μέθοδο των σταθερών σωματιδίων για να μοντελοποιήσουν την πτώση στήλης ρευστού. Οι μέθοδος έχει πολύ καλά αποτελέσματα Σχ. 27 που συμφωνούν ικανοποιητικά με τα αντίστοιχα πειραματικά, Σχ. 28.



Σχήμα (27): Μοντελοποίηση πτώσης στήλης ρευστού.



Σχήμα (28): Πειραματική πτώση στήλης ρευστού.

3.5 ΒΕΛΤΙΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ SPH.

Προσομοιώνοντας ένα πεδίο ροής με τη μέθοδο SPH παρατηρείται ότι η επίδραση του τοιχώματος στην κίνηση του ρευστού αφορά μόνο στον όρο πίεσης στις εξισώσεις της ορμής. Έτσι σύμφωνα με τους *Marongiu et al.* [116] θα πρέπει να βελτιωθεί η περιγραφή της μεταβολής της πίεσης στις εξισώσεις αυτές. Η μεταβολή ενός μεγέθους σύμφωνα με την κατά SPH παρεμβολή είναι,

$$\nabla f(x) = - \int_{\Omega} f(y) \nabla W(x-y) dy \quad (31).$$

Όμως η ακριβής έκφραση αυτής της εκτίμησης είναι

$$\nabla f(x) = \int_{\Omega'} f(y) W(x-y) \bar{n} dS - \int_{\Omega} f(y) \nabla W(x-y) dy \quad (32),$$

όπου Ω , Ω' είναι το πεδίο ροής και το όριό του αντίστοιχα και \bar{n} είναι το κάθετο προς την επιφάνεια του τοιχώματος διάνυσμα. Ο πρώτος όρος συνήθως αγνοείται όμως για κάποιο σωματίδιο το οποίο βρίσκεται κοντά στο τοίχωμα μπορεί να έχει σημαντικό ρόλο. Αρχικά θα πρέπει τα σωματίδια του τοίχου να έχουν την ίδια κατανομή με τα σωματίδια του ρευστού. Στη συνέχεια μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος SPH ώστε να υπολογιστεί ο όρος της πίεσης. Έτσι θα έχουμε

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = \sum_{b'} m_{b'} \left(\frac{p_a}{\rho_a^2} + \frac{p_b}{\rho_b^2} \right) \frac{W_{ij}}{\Delta r_{b'}} \bar{n}_{b'} - \sum_b m_b \left(\frac{p_a}{\rho_a^2} + \frac{p_b}{\rho_b^2} \right) \bar{\nabla} W_{ab} \quad (33),$$

όπου $\Delta r_{b'}$ είναι το μέγεθος των σωματιδίων του τοιχώματος και ο δείκτης b' υποδηλώνει τα σωματίδια του τοιχώματος. Η έκφραση αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην περίπτωση που η πίεση των σωματιδίων του τοίχου είναι γνωστή.

Οι J.C. Marongiu – F. Leboeuf – E. Parkinson στην [126] δίνουν μια καινούργια λύση για το πρόβλημα των οριακών συνθηκών. Η κλασική εξίσωση καθιερώθηκε χρησιμοποιώντας την τεχνική παρεμβολής της SPH, για διακριτοποίηση της κλίσης :

$$(\nabla f(x))_i = - \int_{\Omega} f(y) \nabla W(x-y) dy \quad (34),$$

αλλά η ακριβής μορφή αυτής της εξίσωσης με ολοκλήρωση από τα μέρη δίνει την :

$$(\nabla f(x)) = \int_{\partial\Omega} f(y) W(x-y) \bar{n} dS - \int_{\Omega} f(y) \nabla W(x-y) dy \quad (35),$$

όπου το $\partial\Omega$ είναι το όριο της περιοχής και το \bar{n} (το διάνυσμα κατεύθυνσης).

Σημαντικό είναι πως στην μέθοδο SPH, ο όρος επιφάνειας παραμελείτε πάντα λόγω της επιλογής μιας λειτουργίας πυρήνων με συμπαγή υποστήριξη, η οποία επιτρέπει μηδενική συμβολή για ένα σωματίδιο μέσα στην περιοχή μακριά από τα όρια. Αλλά για

ένα σωματίδιο κοντά στο όριο και έναν όρο ορίου Dirichlet διάφορο του 0, αυτός ο όρος μπορεί να διαδραματίσει έναν σημαντικό ρόλο. Αντί της επέκτασης της υπολογιστικής περιοχής έξω από το όριο, προκειμένου να αποφευχθεί εκείνος ο όρος, μια άλλη προσέγγιση θα μπορούσε να είναι ο υπολογισμός του ορίου επιφάνειας με ολοκλήρωση. Το πρώτο βήμα είναι να διακριτοποιηθούν οι στερεοί τοίχοι με τουλάχιστον την ίδια ακρίβεια για το μέγεθος Δr των σωματιδίων του ρευστού. Η τεχνική παρεμβολής SPH μπορεί έπειτα να χρησιμοποιηθεί για να λάβει την ιδιαίτερη μορφή του όρου πίεσης, με την ίδια συμμετρική διατύπωση όπως την :

$$\frac{dv_a}{dt} = -\sum_b m_b \left[\left(\frac{p_a}{\rho_a^2} + \frac{p_b}{\rho_b^2} \right) \frac{\partial W}{\partial y} - \Pi_{ab} \right] + \bar{g} \quad (36).$$

Η καινούργια εξίσωση είναι,

$$\left(\frac{1}{\rho} \nabla P \right)_i = \sum_{j \in \partial D_i} m_j \left(\frac{P_i}{\rho_i^2} + \frac{P_j}{\rho_j^2} \right) \frac{W_{ij}}{\Delta r_j} \bar{n}_j - \sum_{j \in D_i} m_j \left(\frac{P_i}{\rho_i^2} + \frac{P_j}{\rho_j^2} \right) \bar{\nabla} W_{ij} \quad (37),$$

όπου το Δr_j είναι το μέγεθος του σωματιδίου j και το ∂D_i είναι η επίδραση του D_i με το $\partial \Omega$. Αυτή η έκφραση μπορεί να αξιολογηθεί υπό τον όρο ότι οι τιμές πίεσης στα σωματίδια των τοίχων είναι γνωστές. Η χαρακτηριστικές εξισώσεις που χρησιμοποιήθηκαν ταυτίζονται με τις κλασσικές αλλά οι τελικές σχέσεις συμβατότητας λαμβάνονται με την προβολή των κυβερνώντων εξισώσεων στα eigenvectors:

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{\rho}{c} \frac{du_n}{dt} + (u_n - v_n^0 + c) \left[\frac{\partial \rho}{\partial n} + \frac{\rho}{c} \frac{\partial u_n}{\partial n} \right] = \frac{\rho \bar{g} \cdot \bar{n}}{c} \quad (38)$$

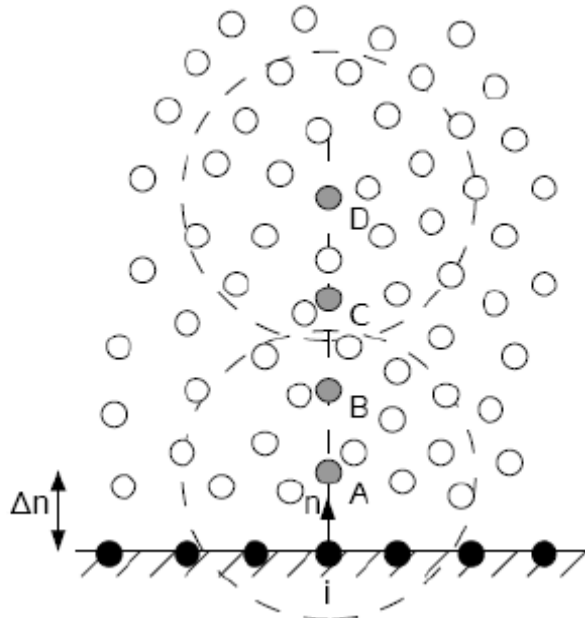
$$\frac{d\rho}{dt} - \frac{\rho}{c} \frac{du_n}{dt} + (u_n - v_n^0 - c) \left[\frac{\partial \rho}{\partial n} - \frac{\rho}{c} \frac{\partial u_n}{\partial n} \right] = -\frac{\rho \bar{g} \cdot \bar{n}}{c} \quad (39),$$

όπου για ένα σωματίδιο τοίχου που συνδέεται με σταθερό όρο ορίου, η εξίσωση μειώνεται στην :

$$\frac{d\rho}{dt} = c \frac{\partial \rho}{\partial n} - \rho \frac{\partial u_n}{\partial n} - \frac{\rho \bar{g} \cdot \bar{n}}{c} \quad (40).$$

Τα σημεία τοποθετούνται σε τακτά μήκη κανονικών διανυσματικών και φυσικών μεταβλητών. Η τελική εξίσωση ταχυτήτων για μια περιοχή A είναι η:

$$u_A = \frac{\sum_j \frac{m_j}{\rho_j} u_j W_{Aj}}{\sum_j \frac{m_j}{\rho_j} W_{Aj}}$$

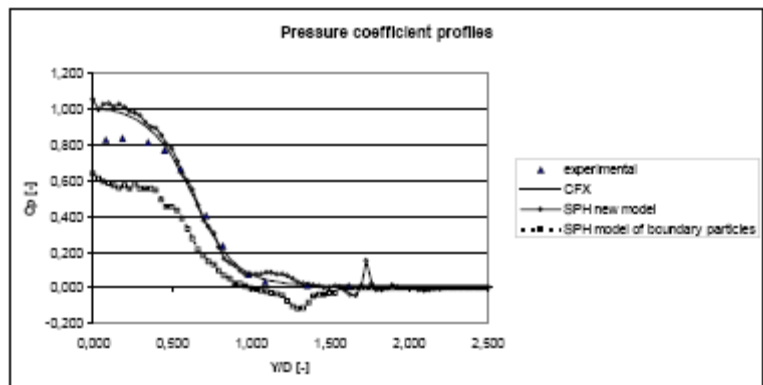


Σχήμα (29): Σημεία παρεμβολής για τη διακριτοποίηση της γεωμετρίας.

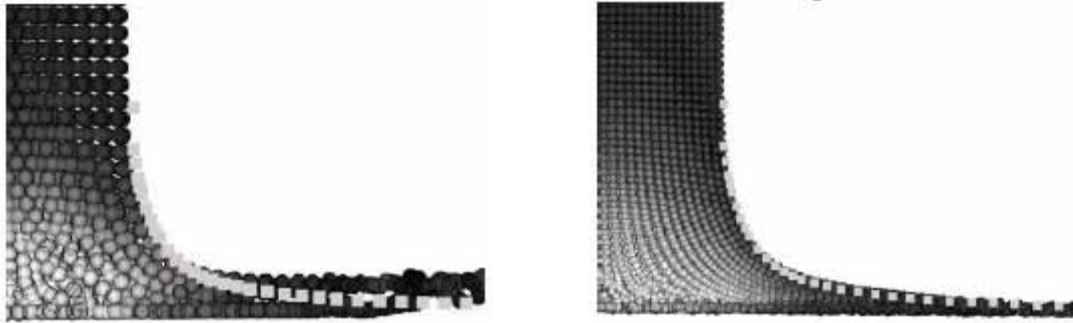
Τα αποτελέσματα αυτής της εργασίας είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρον καθώς τα πλεονεκτήματα της καινούργιας μεθόδου είναι εμφανή.



Σχήμα (30): Η κατανομή της πίεσης σε στερεό πιάτο με την καινούργια μέθοδο οριακών συνθηκών.



Σχήμα (31): Χρόνος και azimuthal υπολογισμένα με τον μέσο όρο συντελεστής πίεσης πάνω σε στερεό πιάτο. Σύγκριση παλαιάς και νέας μεθόδου καθώς και σύγκριση με πειραματικά δεδομένα και μια μέθοδο VOF.



Σχήμα (32): Σύγκριση των πειραματικών (γκρίζα τετράγωνα) και αριθμητικών φύλλων ύδατος.
Αριστερά : Παλιό μοντέλο οριακών σωματιδίων. Δεξιά: Καινούργιο μοντέλο

Τα κυριότερο συμπέρασμα αυτής της εργασίας είναι πως τα αποτελέσματα είναι υποσχόμενα αλλά η επεξεργασία στα όρια είναι ακόμα ένα βασικό ζήτημα προς επίλυση. Ένα νέο πρότυπο έχει παρουσιαστεί το οποίο είναι βασισμένο, από μαθηματικής άποψης, σε αυστηρά ακέραιους όρους. Η χρήση της επιφάνειας έγινε με μονό-διάστατη προσέγγιση κατά μήκος του κανονικού ορίου για την διακριτοποίηση των σχέσεων συμβατότητας έτσι ώστε να έχουμε τις τιμές της πίεσης στον τοίχο. Το καινούργιο πρότυπο βελτιώνει την ακρίβεια και τη σταθερότητα της μεθόδου. Περαιτέρω βελτιώσεις χρειάζονται ώστε να αναπτυχθούν πλήρεις τρισδιάστατες προσεγγίσεις δηλαδή ακριβέστερες σχέσεις συμβατότητας.

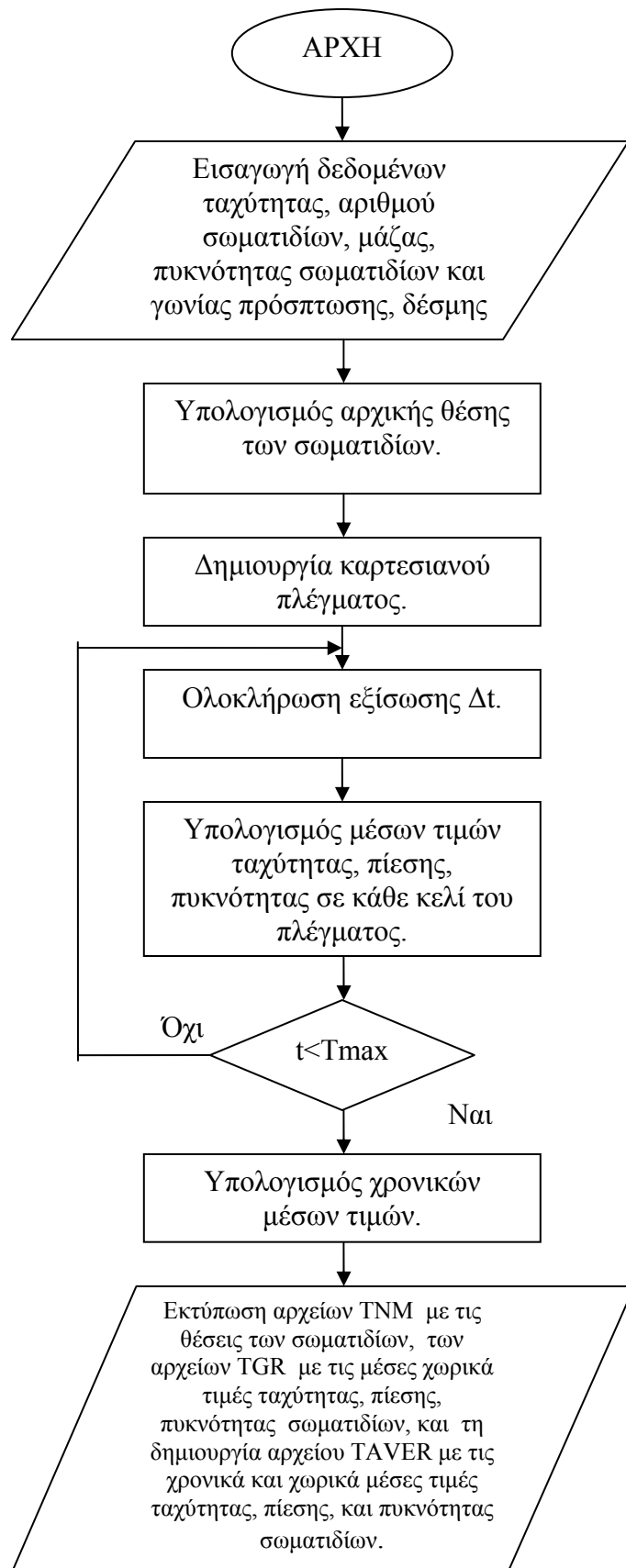
(4.) ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

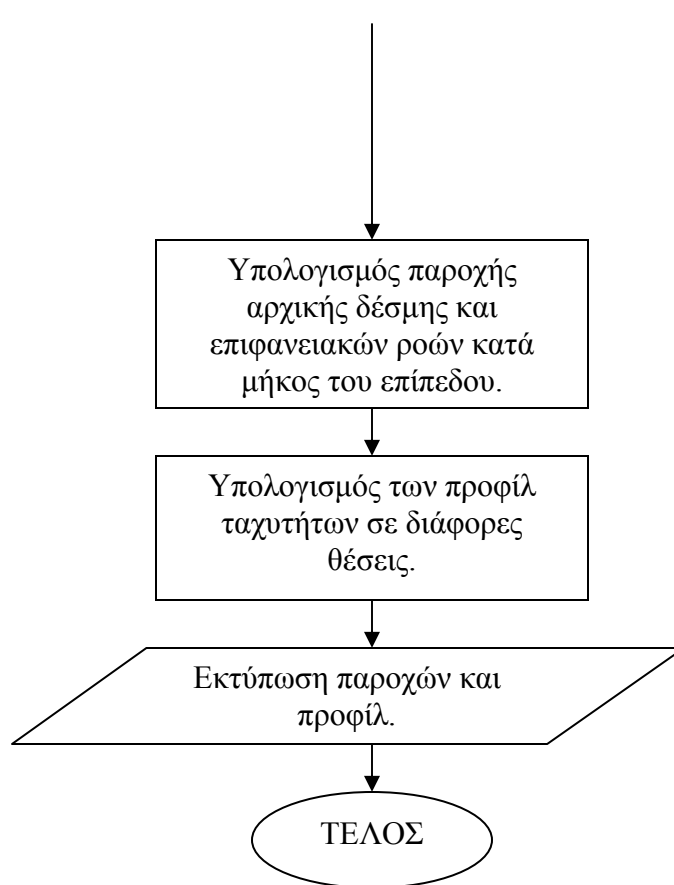
Ο υπολογιστικός κώδικας που χρησιμοποιήθηκε, στην εργασία αυτή, σκοπό είχε να μοντελοποιήσει την πρόσπτωση δέσμης νερού σε κάθετη επιφάνεια. Ο κώδικας αναπτύχθηκε στο εργαστήριο υδροδυναμικών μηχανών του τμήματος Μηχανολόγων Μηχανικών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Ο λειτουργία του κώδικα βασίζεται στην μέθοδο SPH, παράγραφος 2.1, όπου οι βασικές εξισώσεις που χρησιμοποιήθηκαν είναι η (4) για την συνάρτηση προσέγγισης πυρήνα, καθώς και οι κλασικές εξισώσεις της μεθόδου SPH (6) και (8). Ο υπολογισμός της ταχύτητας και της πυκνότητας των σωματιδίων για το επόμενο υπολογιστικό βήμα, γίνεται βάση της εξίσωσης (18). Στον κώδικα το ιξώδες θεωρήθηκε ίσο με μηδέν ενώ ως μέθοδος οριακών συνθηκών ελήφθη η μέθοδος των σταθερών σωματιδίων, παράγραφος 3.4γ.

Όπως φαίνεται και στο πιο κάτω λογικό διάγραμμα, μετά την εισαγωγή των βασικών δεδομένων όπως η γωνία πρόσπτωσης του ρευστού, ο αριθμός, η ταχύτητα, πίεση και πυκνότητα των σωματιδίων, γίνεται ο υπολογισμός της αρχικής τους θέσης. Ακολούθως δημιουργείται ένα καρτεσιανό πλέγμα το οποίο χρειάζεται για την διαχείριση της θέσης των σωματιδίων κατά την διάρκεια της κίνησής τους, και την εξαγωγή των χωρικά μέσων τιμών των αποτελεσμάτων. Στη συνέχεια ολοκληρώνονται οι εξισώσεις ορμής και συνέχειας οι οποίες μας δίνουν τις τιμές της ταχύτητας στην επόμενη χρονική στιγμή. Η ολοκλήρωση συνεχίζεται και μετά την επίτευξη μόνιμης ροής, ώστε να ληφθούν οι χρονικά και χωρικά μέσες τιμές των μεγεθών.

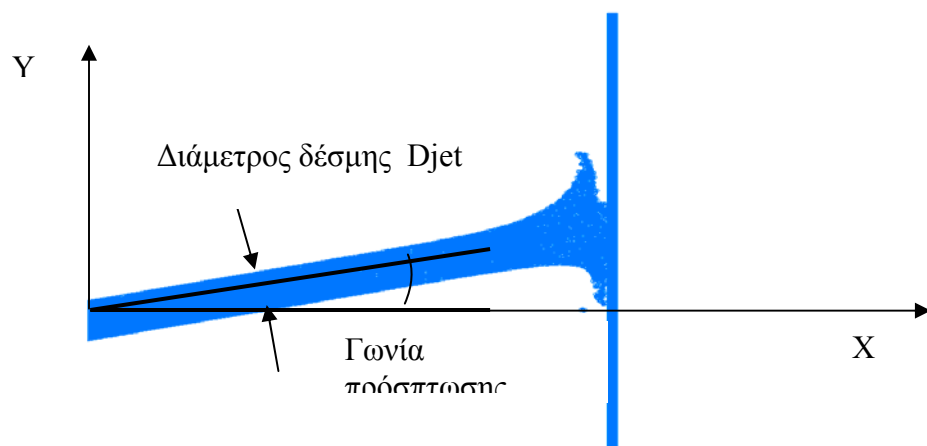
Ο υπολογισμός των μέσων χρονικά τιμών για κάθε κελί του πλέγματος ακολουθεί, παράλληλα με τον υπολογισμό των χρονικών μέσων τιμών. Στο τέλος για επαλήθευση της εξίσωσης διατήρησης, υπολογίζονται η παροχή εισόδου και παροχή εξόδου στην πάνω και κάτω φλέβα, κατά μήκος της επιφάνειας. Ακόμη μία επαλήθευση για την ορθότητα του κώδικα γίνεται με τον προσδιορισμό των προφίλ ταχυτήτων σε διάφορες θέσεις της ροής.





Σχήμα 33: Λογικό διάγραμμα

Όπως φαίνεται και από το Σχ. 33 δημιουργούνται πέντε διαφορετικοί τύποι αρχείων. Τα αρχεία TGR περιέχουν τις μέσες χωρικές τιμές της πίεσης, της πυκνότητας και τις ταχύτητες των σωματιδίων ανά συγκεκριμένο χρονικό διάστημα, ενώ τα αρχεία TNM περιέχουν τις αντίστοιχες θέσεις όλων των σωματιδίων. Τα δύο αρχεία TGR και TNM μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη κατασκευή κινούμενης εικόνας (animation) της εξέλιξης του φαινομένου. Το αρχείο FLOW-CALCULATIONS περιέχει τις παροχές στην αρχή της δέσμης καθώς και στην πάνω και κάτω φλέβα. Τα αρχεία VELOCITY-PROFILE μας δίνουν τα προφίλ ταχυτήτων σε διάφορες θέσεις ως προς την αρχική ταχύτητα της δέ



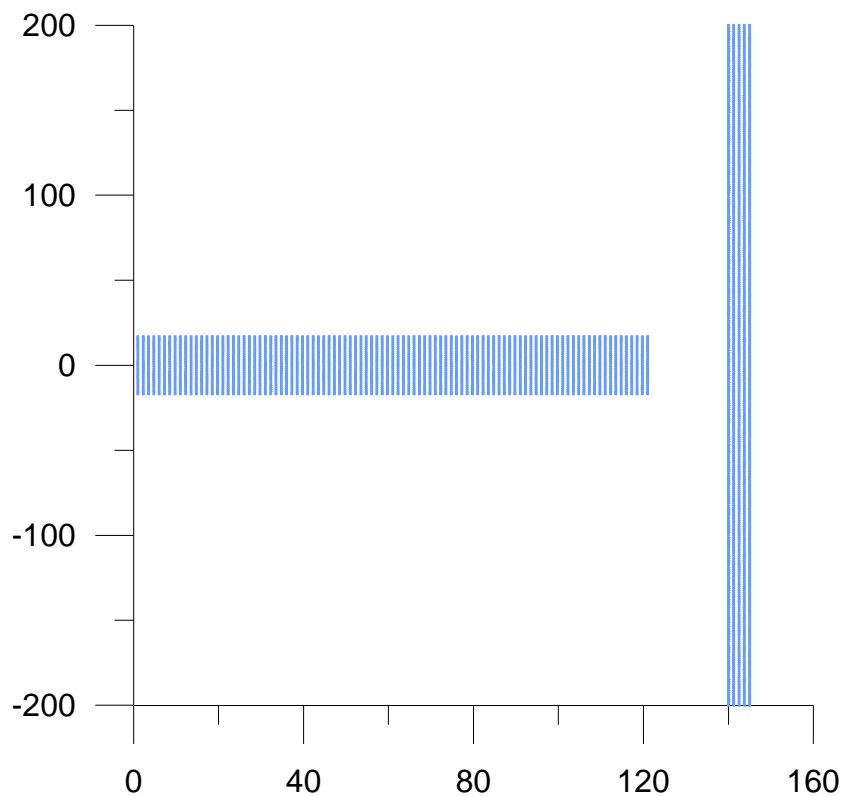
Γράφημα 1: Γεωμετρία της δέσμης

5. ΕΛΕΓΧΟΣ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΤΟΥ ΚΩΔΙΚΑ.

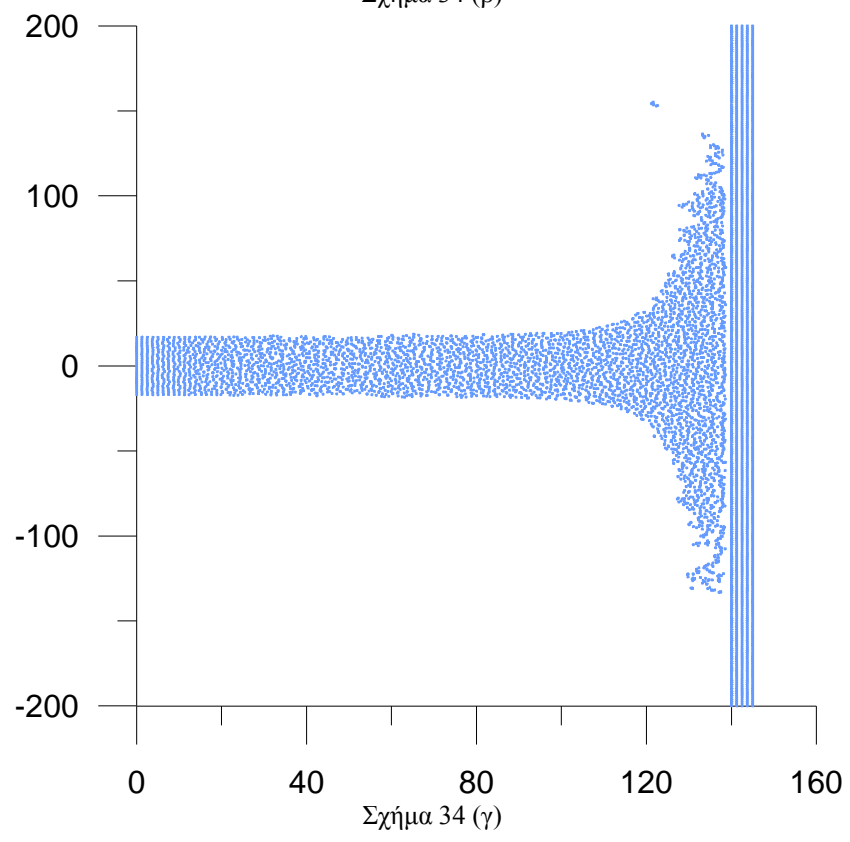
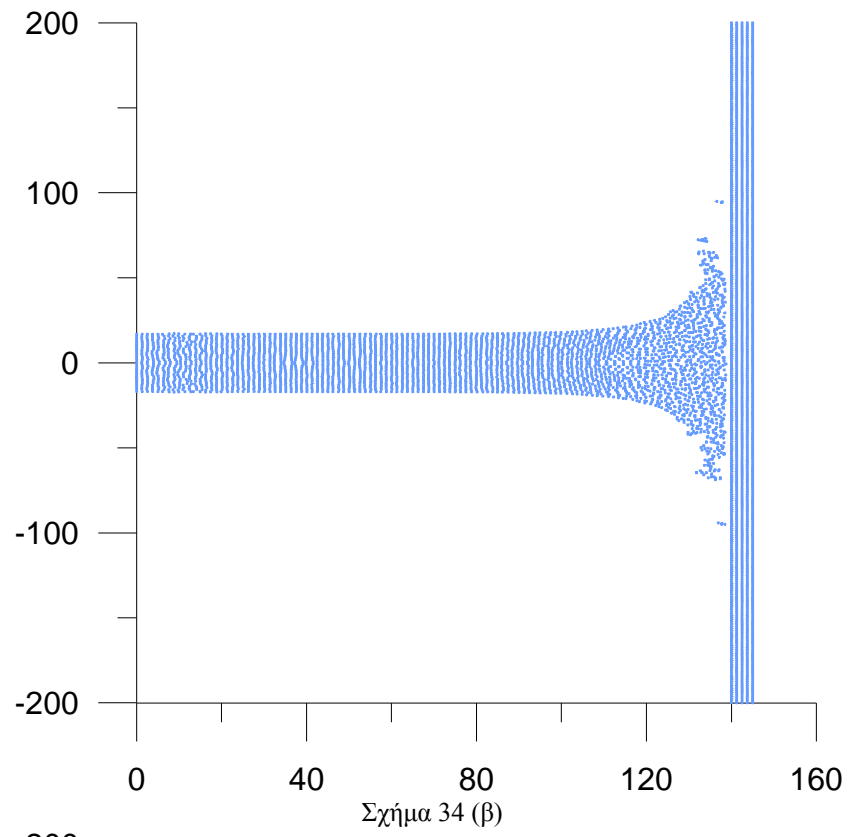
(5.1) ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΜΟΝΙΜΟΤΗΤΑ

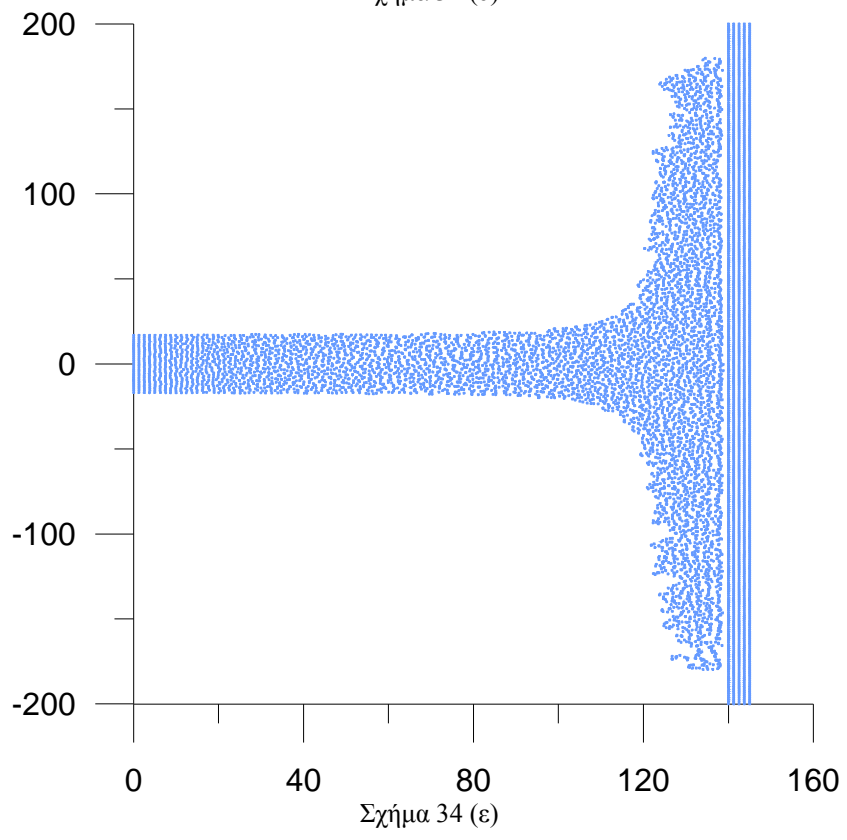
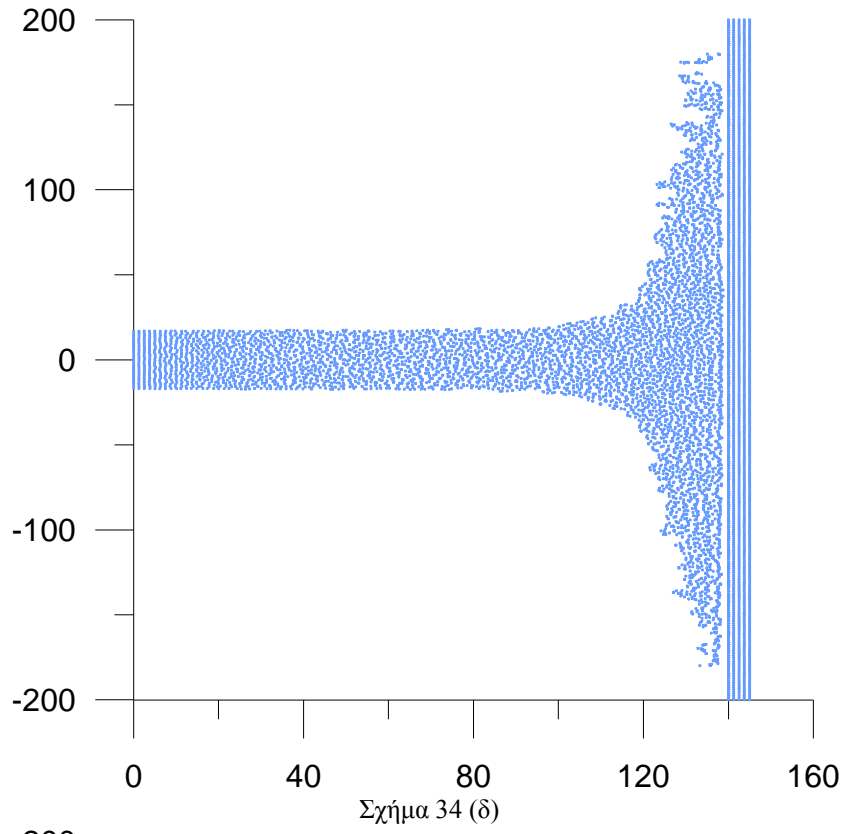
Πριν ξεκινήσουμε τρεξίματα στον κώδικα για να πάρουμε αποτελέσματα, επιβαλλόταν να γίνουν διάφοροι έλεγχοι έτσι ώστε να διασφαλιστεί η ακρίβεια του. Ο πρώτος έλεγχος που διενεργήθηκε αφορούσε το χρονικό διάστημα που χρειάζεται η ροή επάνω στην πλάκα για να γίνει μόνιμη.

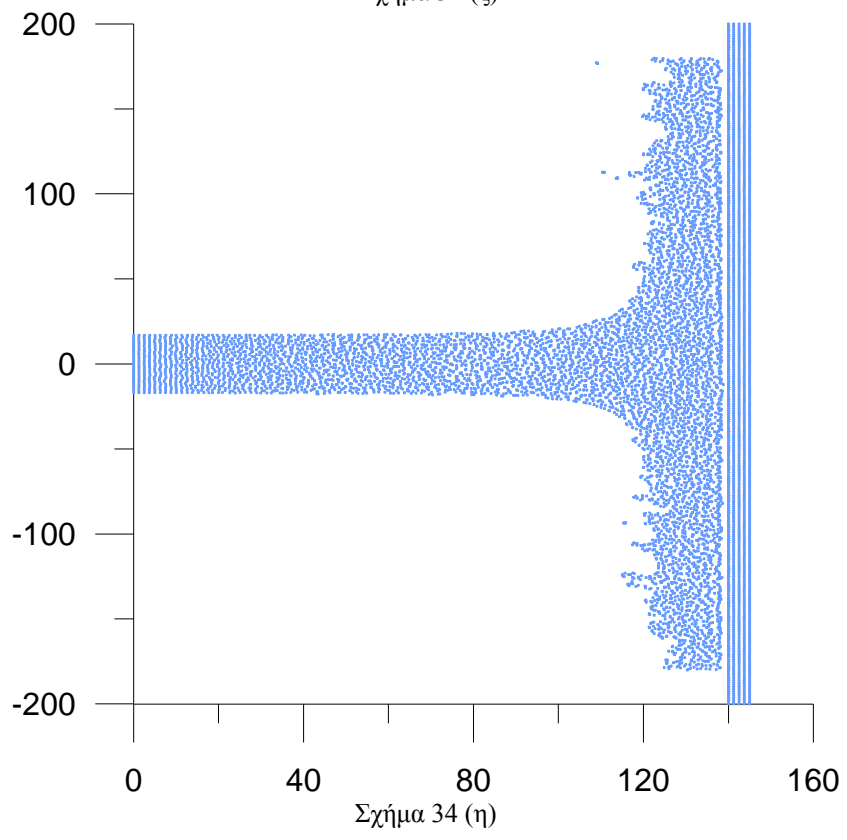
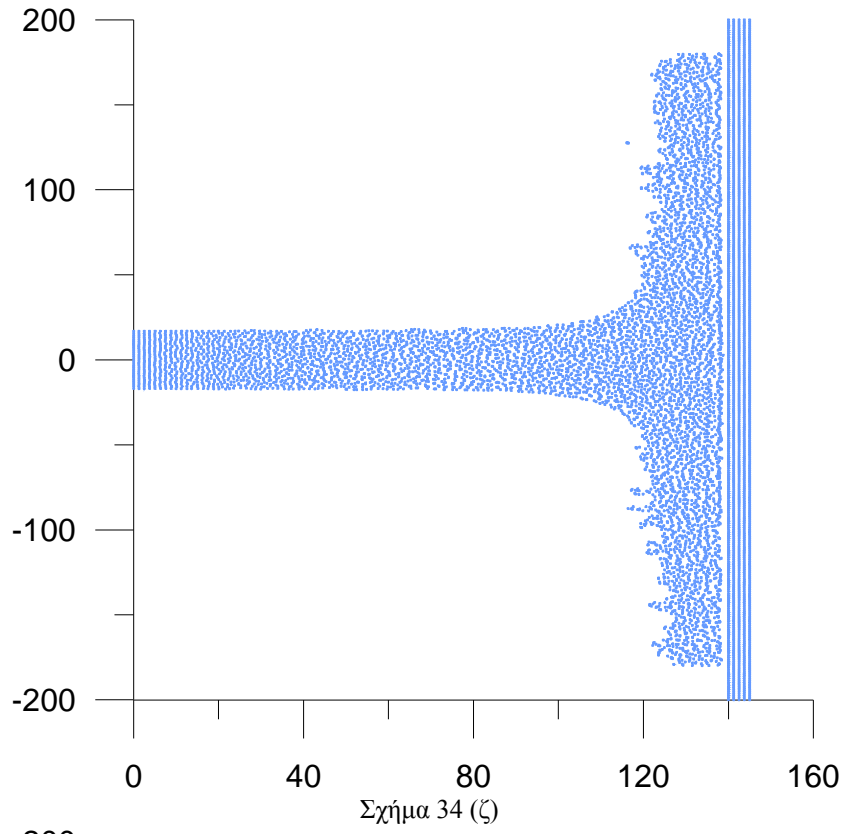
Για τον έλεγχο επίτευξης μόνιμης ροής, πρώτα ελέγξαμε τα αποτελέσματα οπτικά, κατά την διάρκεια εξέλιξης της ροής. Ελέγξαμε το φαινόμενο, από τον αριθμό των seconds που χρειάζονται να λαμβάνονται υπόψη για την εύρεση του αριθμού του αρχείου αποτελεσμάτων από το οποίο μονιμοποιείται το πεδίο. Από τα αρχεία αποτελεσμάτων μετά την μονιμοποίηση του πεδίου γίνεται ο υπολογισμός των μέσω των τιμών πίεσης, πυκνότητας V-ταχύτητας, μέτρου της ταχύτητας και της παροχής.

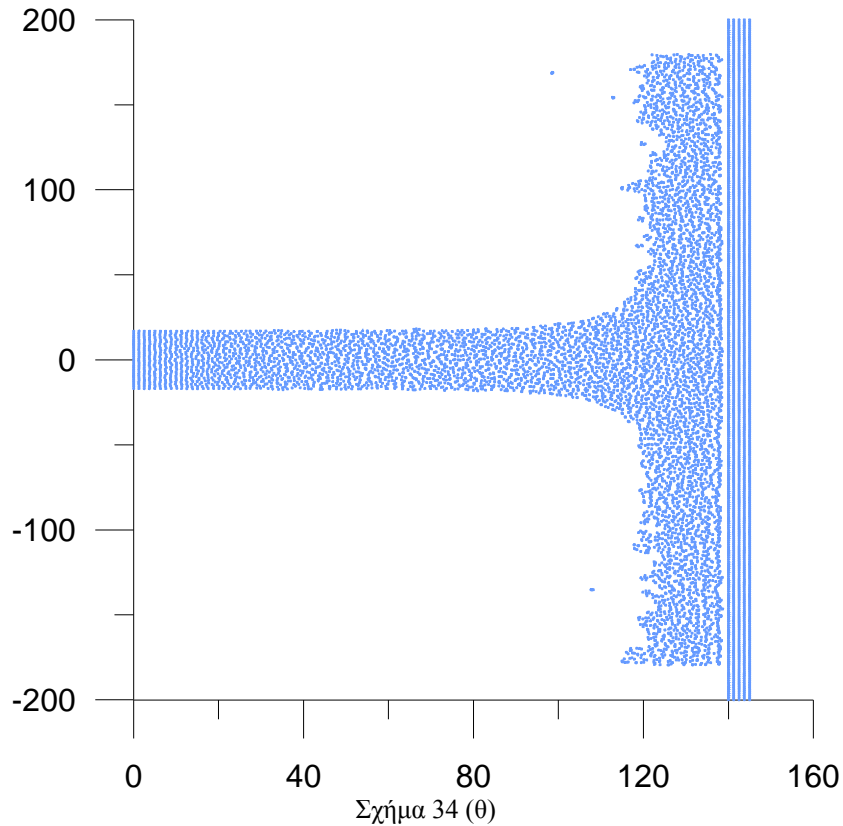


Σχήμα 34 (α)









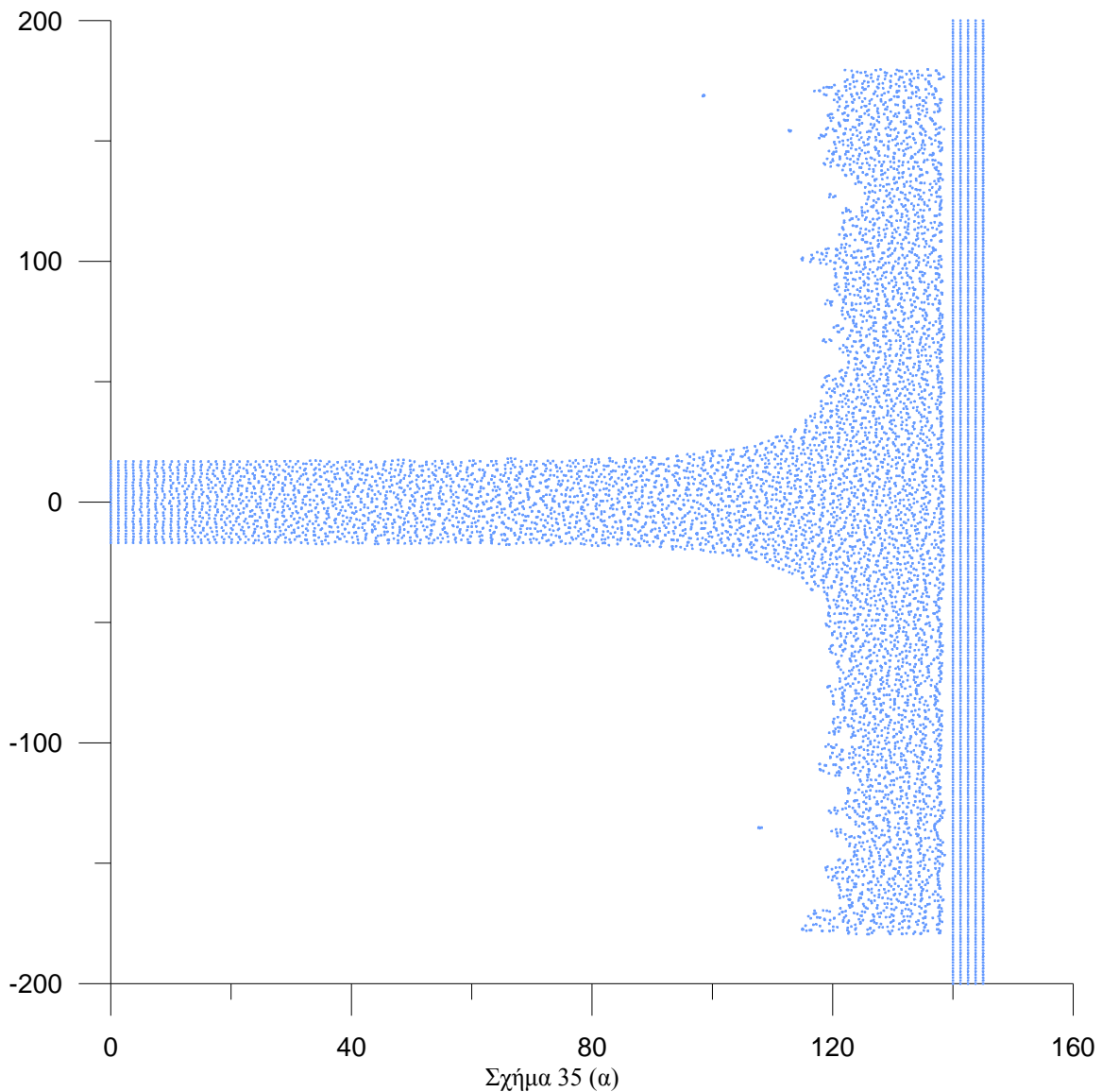
Σχήμα 34- Η χρονική εξέλιξη του φαινομένου, στην περίπτωση Fine, για ταχύτητα 10 και γωνία 0: (α) $t=0$ sec, (β) $t=5$ sec, (γ) $t=10$ sec, (δ) $t=15$ sec, (ε) $t=20$ sec, (ζ) $t=25$ sec, (η) $t=30$ sec, (θ) $t=35$ sec.

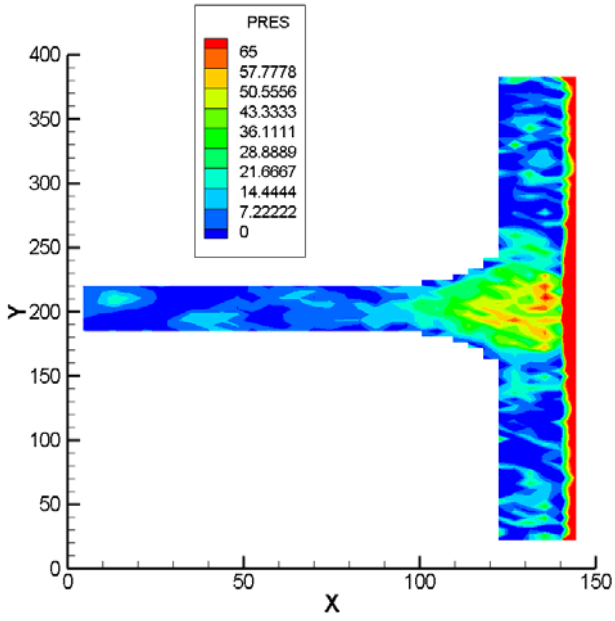
Στο Σχ. 34 παρατηρούμαι ότι η δέσμη προσκρούει σε $t \approx 4$ sec και στην συνέχεια η ροή ανοίγει στις πάνω και κάτω φλέβες. Το φαινόμενο εξελίσσεται κατά την διάρκεια του χρόνου ενώ διαπιστώθηκε πως η ροή μονιμοποιείται σε $t \approx 30$ sec. Η ελαφριά διακύμανση των σωματιδίων στην επιφάνεια αποδεικνύει πως η αριθμητική λύση είναι καλή προσομοίωση του πραγματικού φαινομένου, όπου μπορεί να υπάρχουν τέτοιες διαταραχές. Η ροή μονιμοποιείται όταν οι πάνω και κάτω φλέβες αποκτούν σταθερό πάχος το οποίο πλέον δεν μεταβάλλεται στην πορεία του χρόνου. Αυτό είναι εμφανές στα σχήματα 37η και 37θ, όπου οι διαφορές είναι πλέον ελάχιστες. Όπως καθίσταται φανερό, ο υπολογισμός των μέσων τιμών πρέπει να γίνεται μετά τα πρώτα 30 δευτερόλεπτα, όπου η ροή έχει πλέον φτάσει σε μόνιμη κατάσταση.

(5.2) ΧΡΟΝΙΚΑ ΜΕΣΟ ΠΕΔΙΟ ΡΟΗΣ

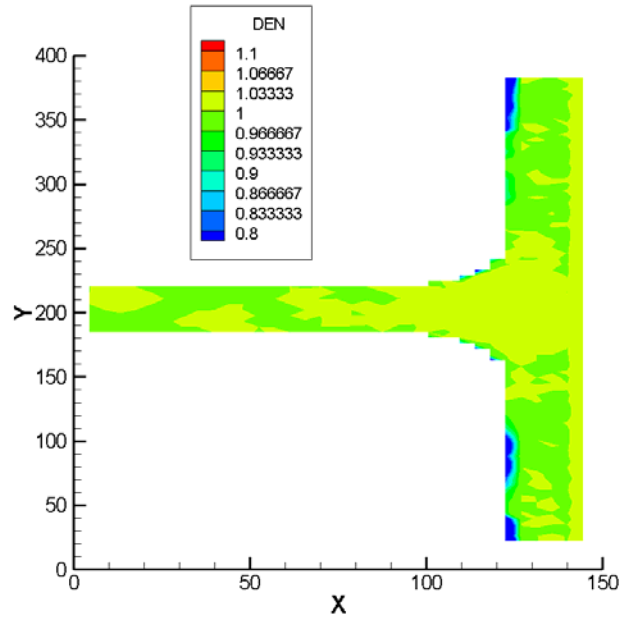
Ο δεύτερος έλεγχος που έγινε αφορούσε το χρονικό διάστημα που ολοκληρώνουμε για να βγουν σωστές στατιστικά οι μέσες χρονικά τιμές. Στην παράγραφο 5.1 διαπιστώσαμε πως μονιμότητα πετυχαίνετε για $t > 30$ sec. Για έλεγχο θα γίνουν χρονικές συγκρίσεις για χρονικά διαστήματα ολοκλήρωσης $t = 30 - 35$ sec ($\Delta t = 5$ sec), $t = 30 - 40$ sec ($\Delta t = 10$ sec) και $t = 30 - 50$ sec ($\Delta t = 15$ sec).

$\Delta t = 5$ sec

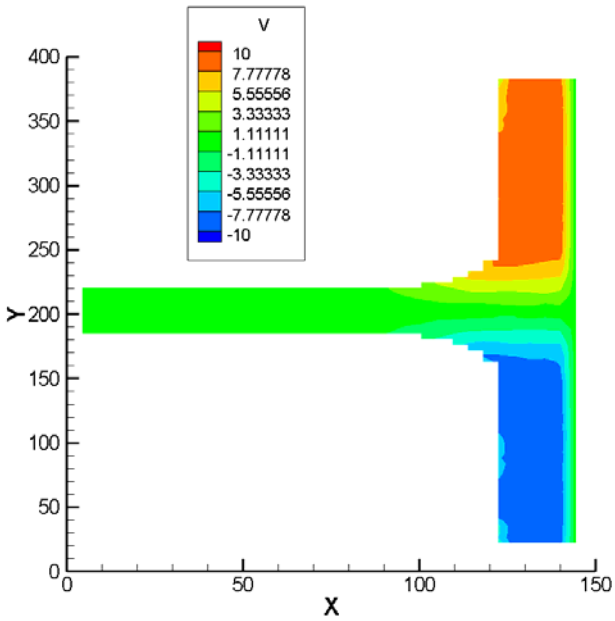




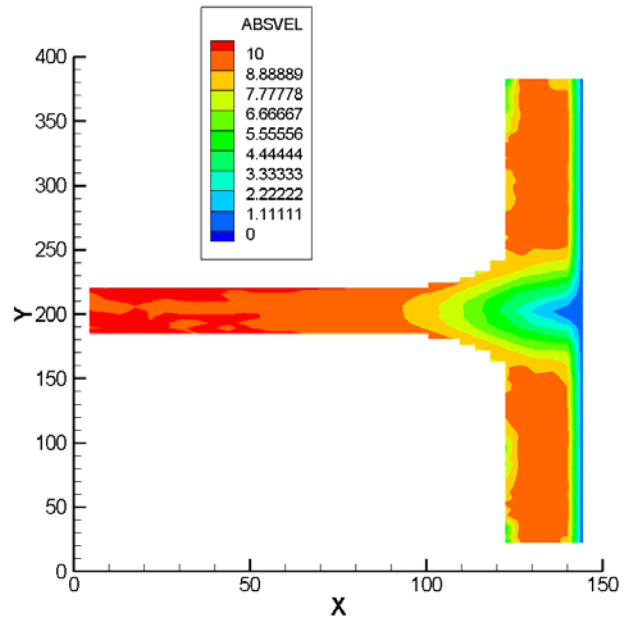
Σχήμα 35 (β)



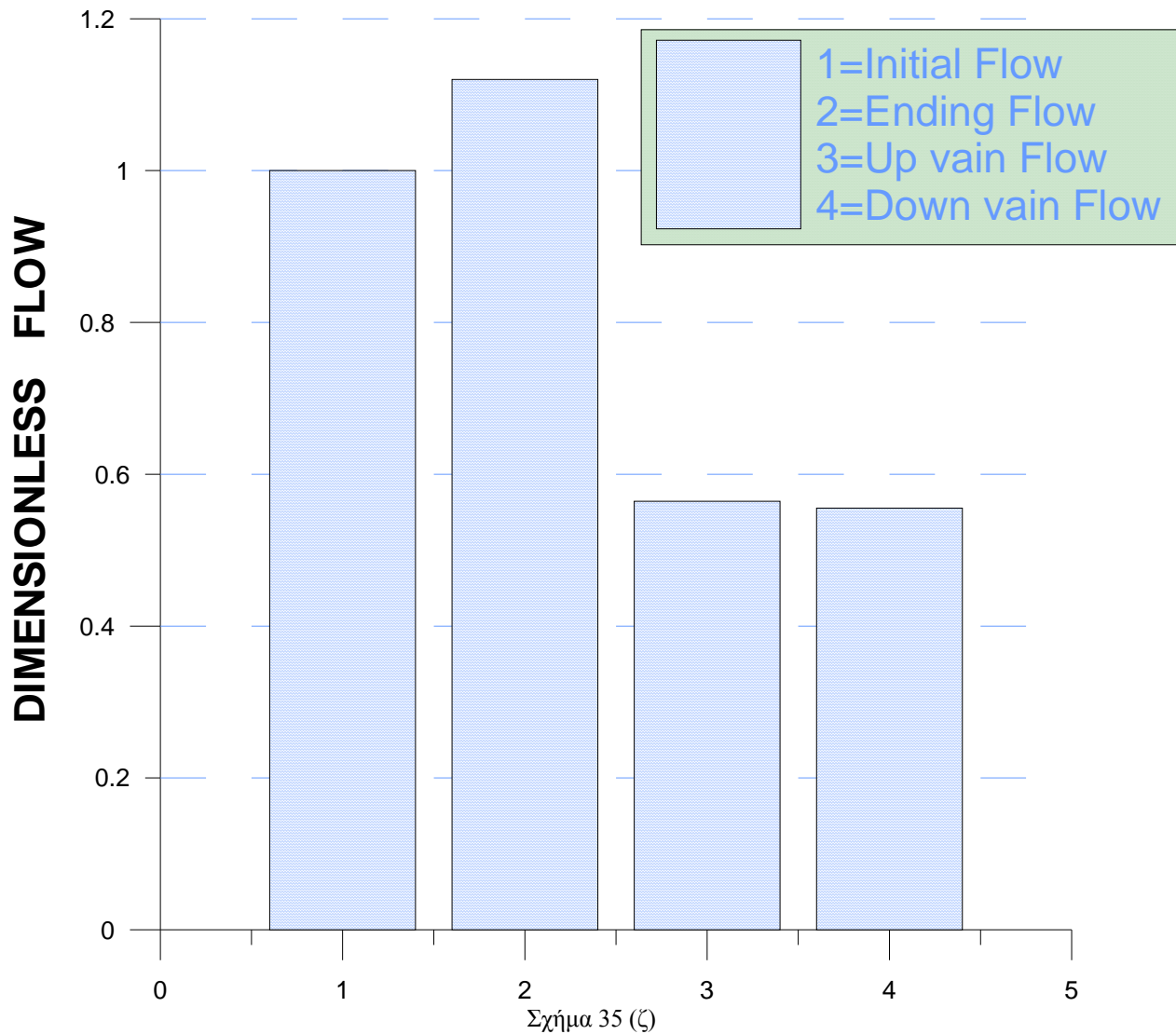
Σχήμα 35 (γ)



Σχήμα 35 (δ)

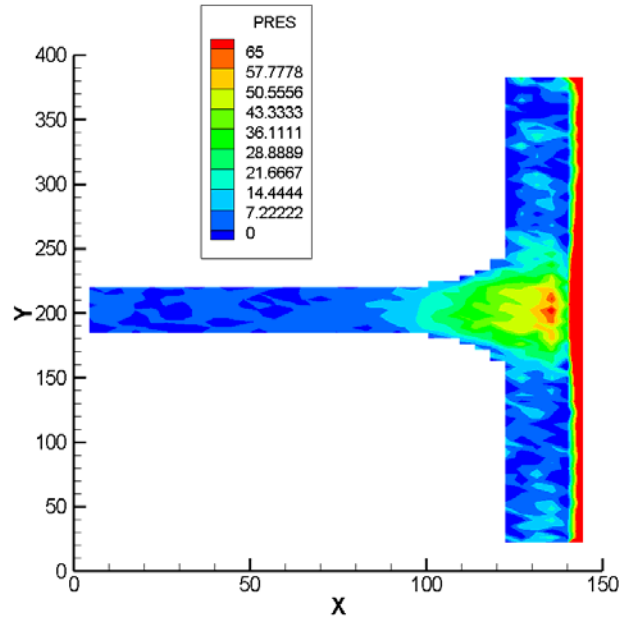
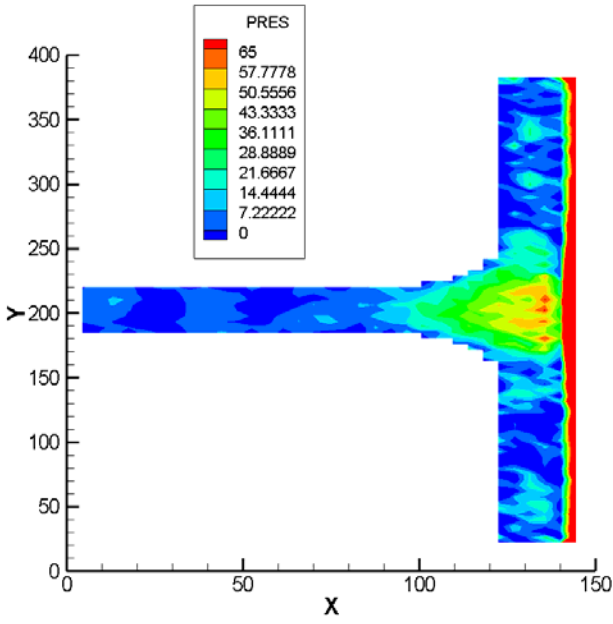
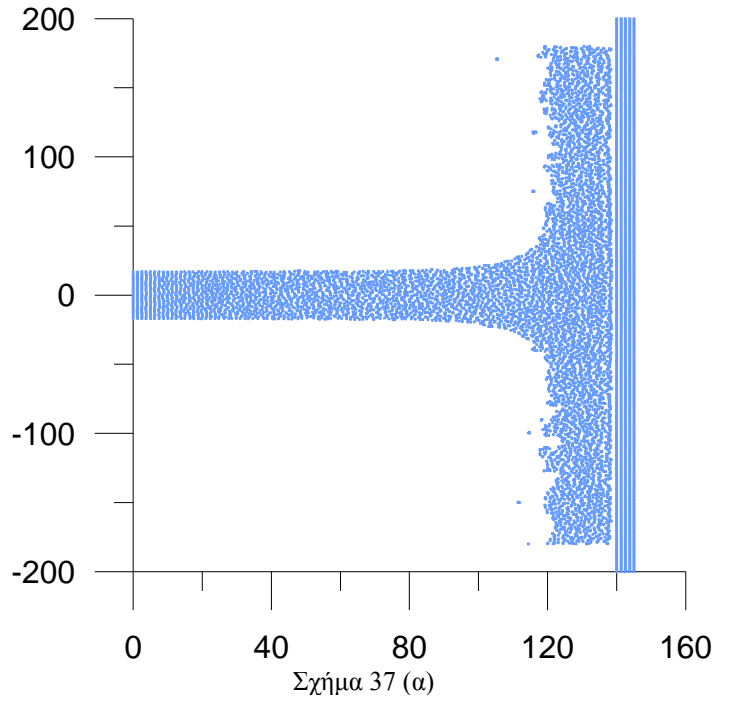
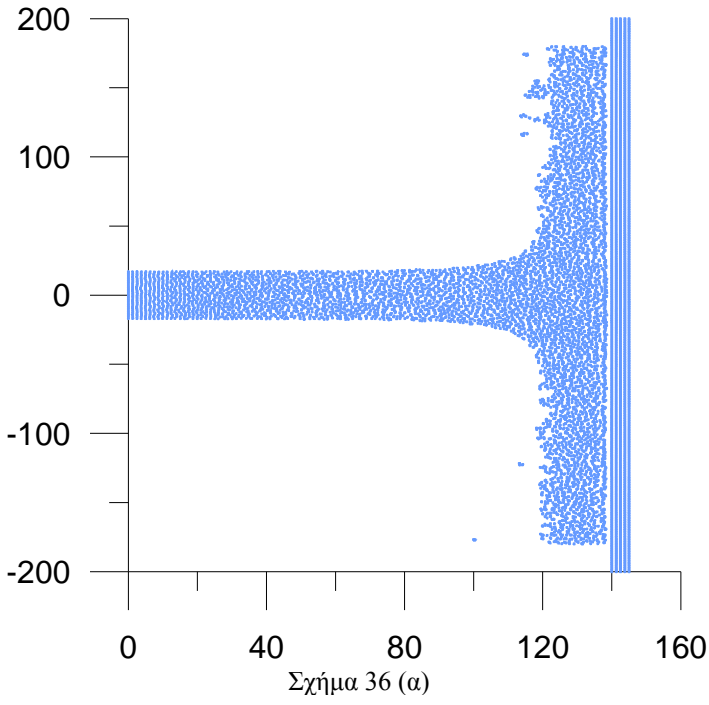


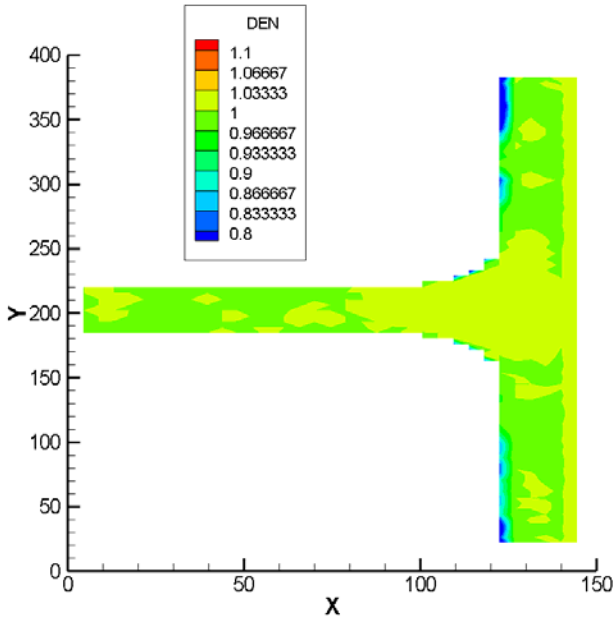
Σχήμα 35 (ε)



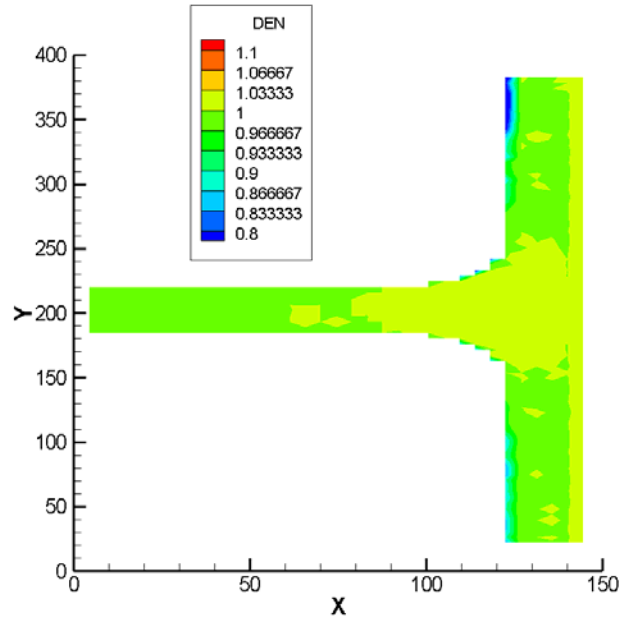
Σχήμα 35-Περίπτωση Fine, για $\Delta t=5$ sec: (α) Η χρονική εξέλιξη του φαινομένου για $t=35$ sec, (β) Το contour της πίεσης, (γ) Το contour της πυκνότητας, (δ) Το contour της V-ταχύτητας, (ε) Το contour της απόλυτης τιμής της ταχύτητας, (ζ) Η παροχή σε διάφορες θέσεις.

$\Delta t = 10 \text{ sec}$

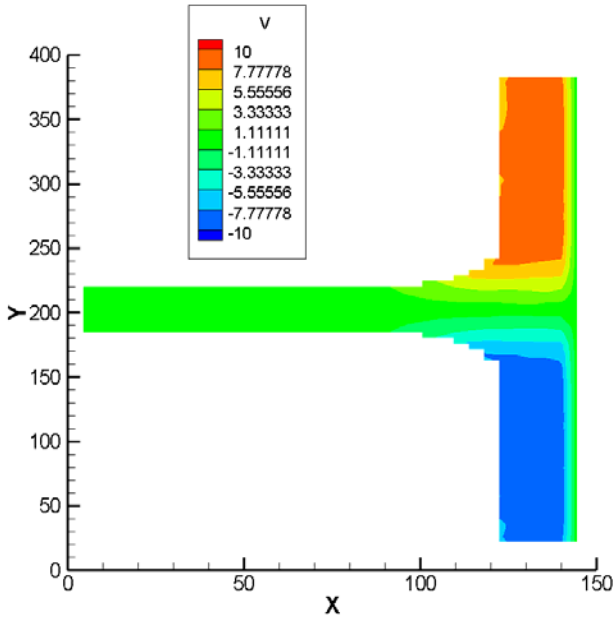




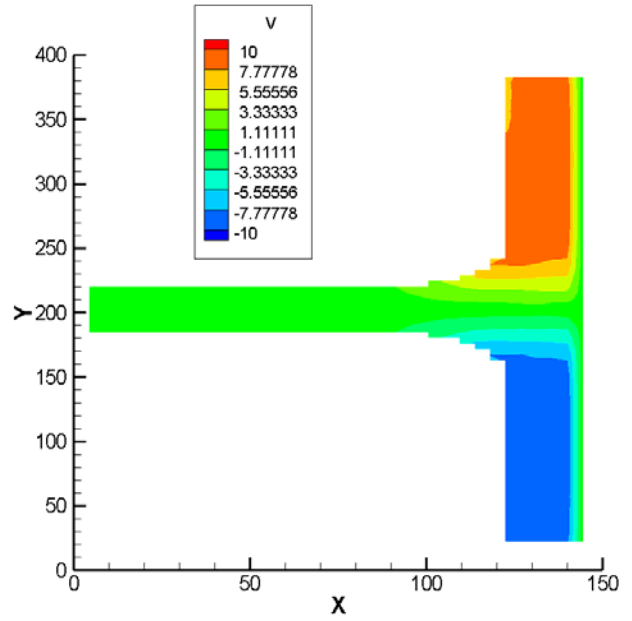
Σχήμα 36 (γ)



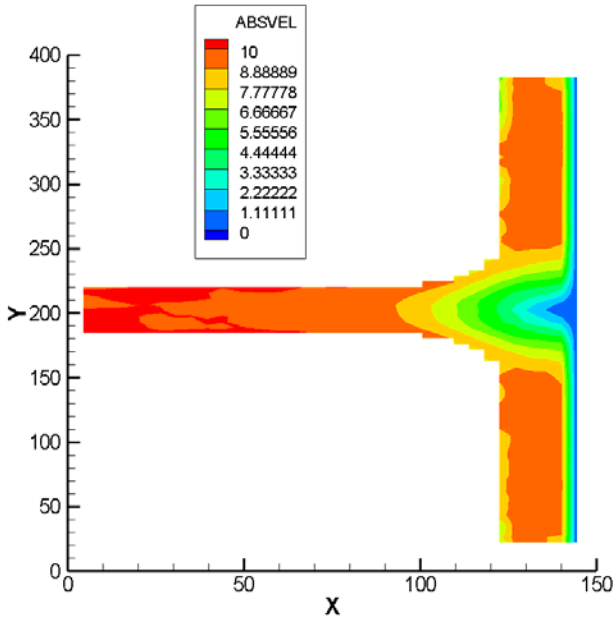
Σχήμα 37 (γ)



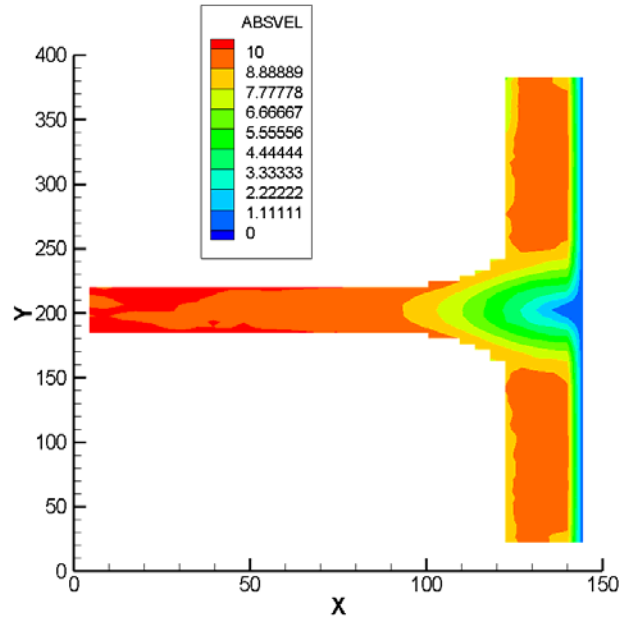
Σχήμα 36 (δ)



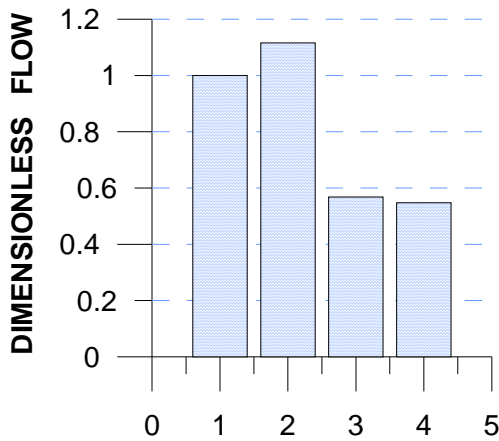
Σχήμα 37 (δ)



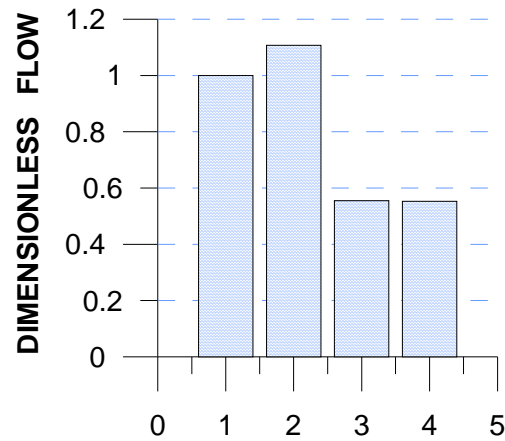
Σχήμα 36 (ε)
 1=Initial Flow
 2=Ending Flow
 3=Up vain Flow
 4=Down vain Flow



Σχήμα 37 (ε)
 1=Initial Flow
 2=Ending Flow
 3=Up vain Flow
 4=Down vain Flow



Σχήμα 36 (ζ)

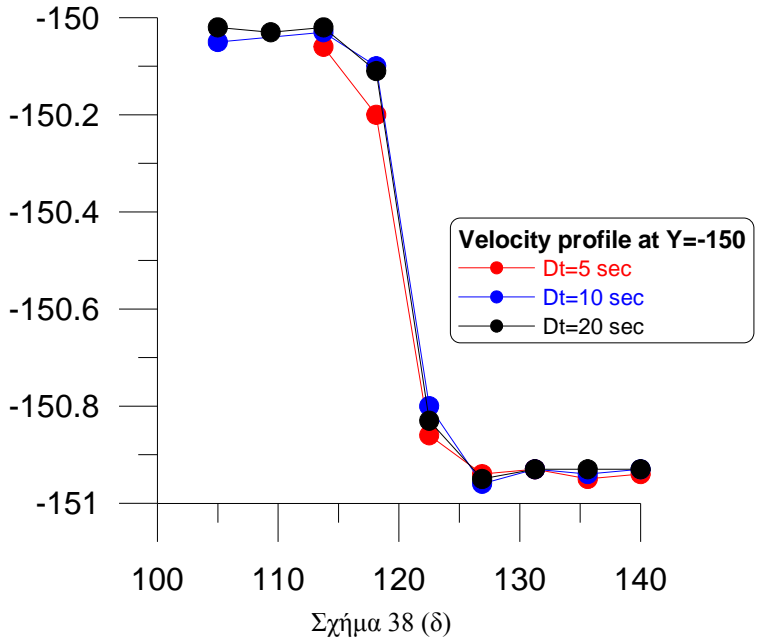
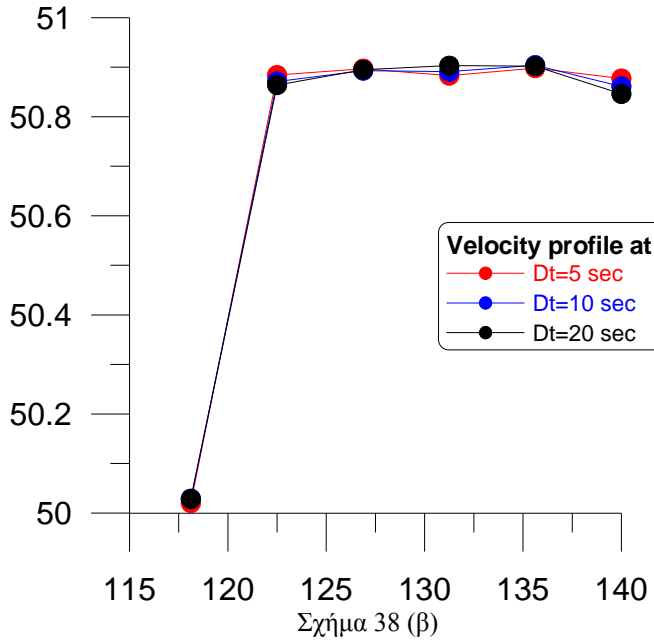
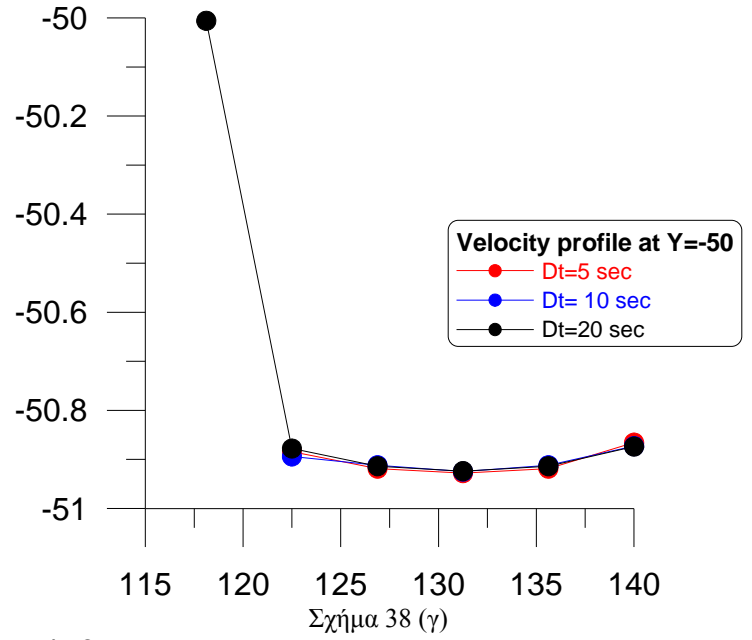
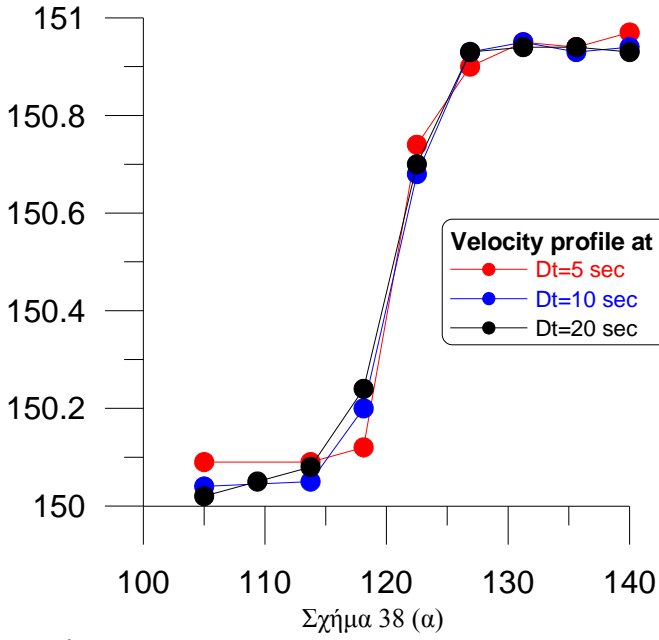


Σχήμα 37 (ζ)

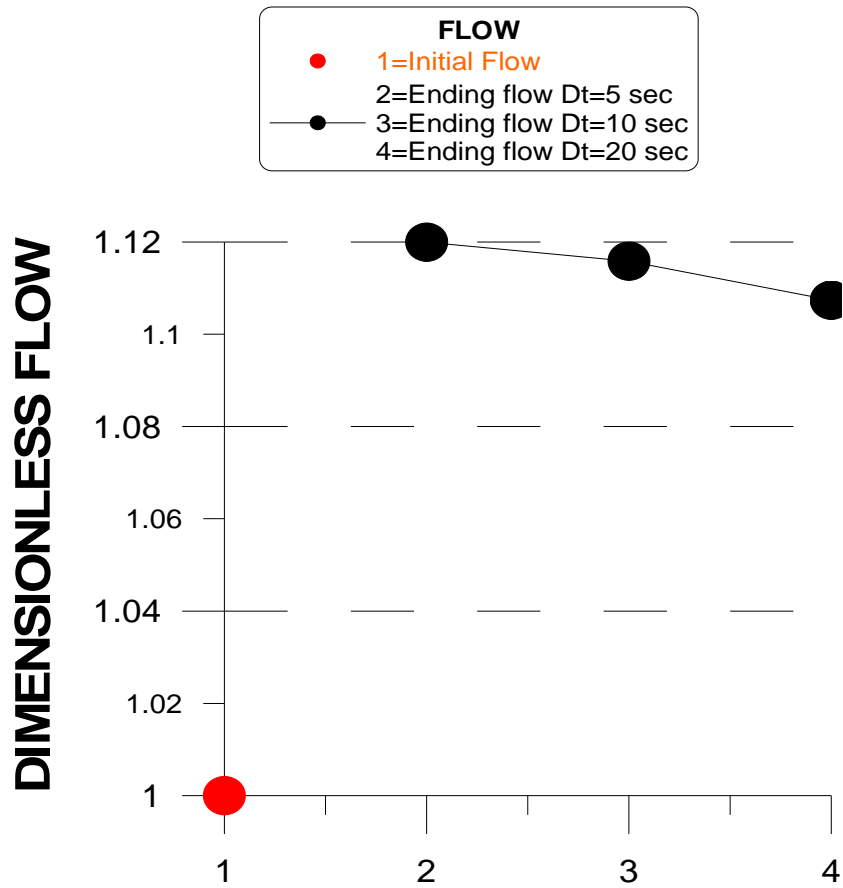
Σχήμα 36-Περίπτωση Fine, $t=30-40$ sec. Βλέπε σχήμα 35.

Σχήμα 37-Περίπτωση Fine, $t=30-50$ sec: . Βλέπε σχήμα 35.

Όπως βλέπουμε στα πιο πάνω σχήματα οι διαφορές μεταξύ του $\Delta t=5$ sec και του $\Delta t=10$ sec δεν είναι τόσο έντονες. Για ακόμη μεγαλύτερη ακρίβεια κάναμε τις συγκρίσεις μεταξύ του $\Delta t=10$ sec και $\Delta t=20$ sec Σχ 36-37, όπου είναι εμφανές, ότι τα contour όλων των μεγεθών είναι παρόμοια. Στα σχήματα γ με τα contour της πυκνότητας οι μέγιστες τιμές τους συμπίπτουν στη τιμή 1,05 ενώ στα σχήματα δ εμφανής είναι η ομοιότητα των τιμών της ταχύτητας V στην πάνω φλέβα και στη κάτω φλέβα.



Στο σχήμα 38 βλέπουμε πως για $\Delta t=10$ sec και $\Delta t=20$ sec τα τέσσερα προφίλ ταχυτήτων συμπίπτουν..

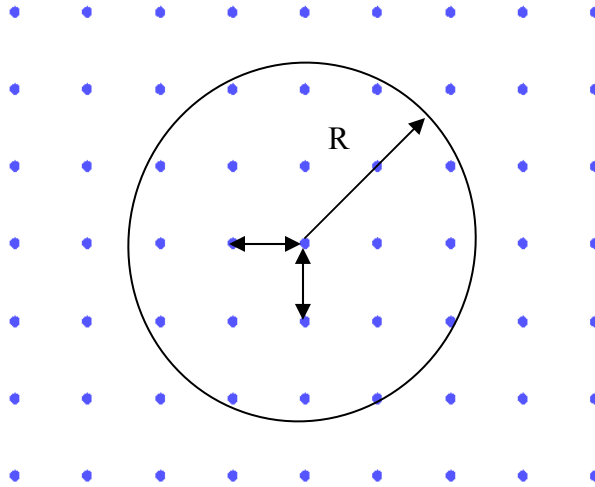


Σχήμα 39:

Από τις τρεις πιο πάνω περιπτώσεις είναι πλέον εμφανές πως από στατιστικής πλευράς είναι ικανοποιητική η ακρίβεια των αποτελεσμάτων δια $\Delta t=20$ sec. Έτσι το χρονικό αυτό διάστημα θα χρησιμοποιηθεί και στην επόμενη παραμετρική μελέτη.

(5.3) ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΑΡΙΘΜΟ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ.

Ο δεύτερος έλεγχος αφορούσε των αριθμό των σωματιδίων που χρησιμοποιούνται, δηλαδή πόσο πυκνά πρέπει να διαταχθούν τα σωματίδια, ώστε τα αριθμητικά αποτελέσματα των μέσων χρονικά τιμών να μην αλλάζουν.



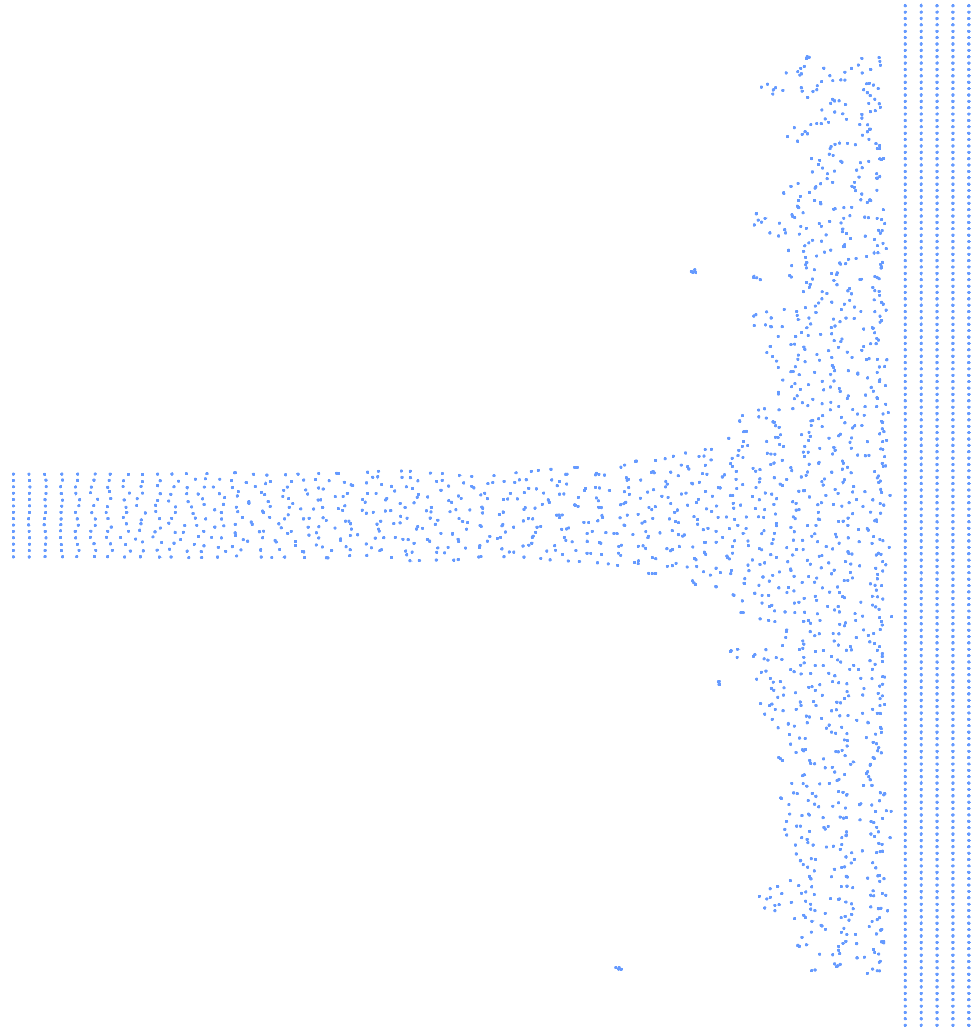
Σχήμα 40: $R=2.5h$

Στον Πίνακα 1 δίνονται οι τρεις διαφορετικές περιπτώσεις που δοκιμάστηκαν: Μια αρχική διάταξη σωματιδίων (DENS), μια διπλάσιας πυκνώσης (FINE) και μια τετραπλάσιας πυκνώσης (FINER).

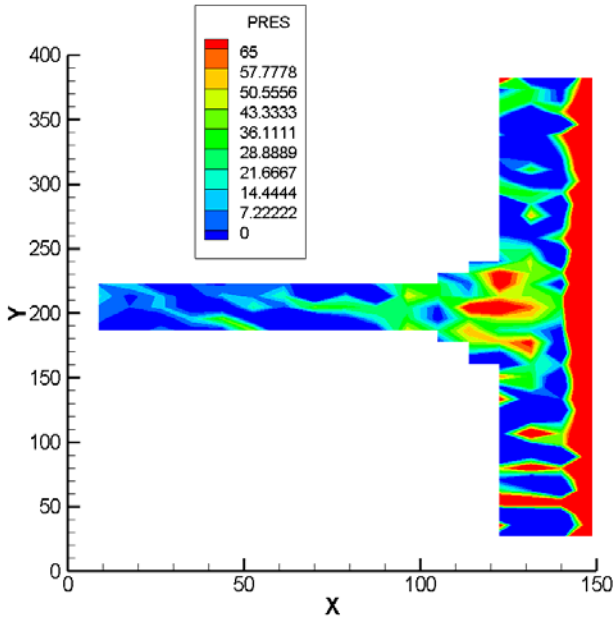
Το χρονικό σε κάθε περίπτωση εξασφαλίζει ευστάθεια του αλγόριθμου επίλυσης.

	DENS	FINE	FINER
Αριθμός σωματιδίων.	1491	4321	14013
Χρονικό βήμα Δt .	0.002	0.005	0.0025
Μάζα ενός σωματιδίου.	3.5	1.75	0.9
Το μήκος αλληλεπίδρασης σωματιδίων (H).	0.633	0.156	0.039

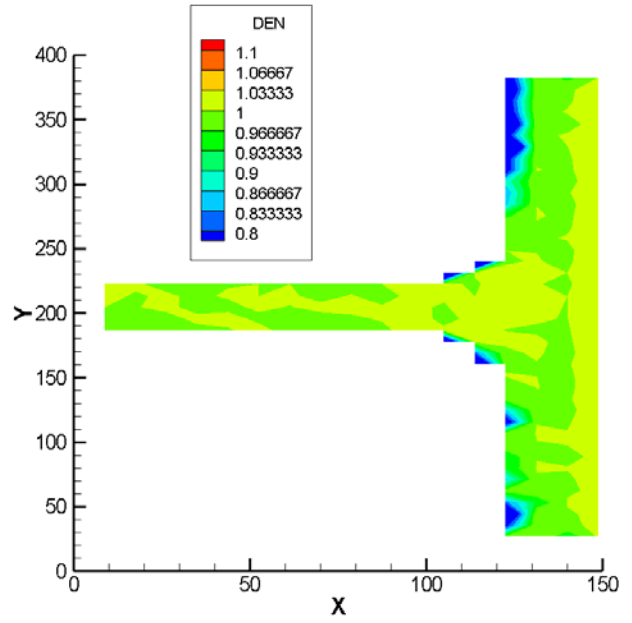
Πίνακας 1:



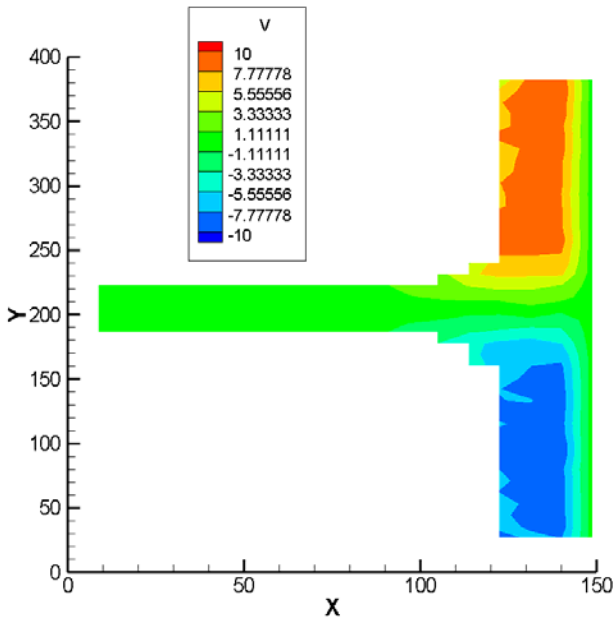
Σχήμα 41 (α)



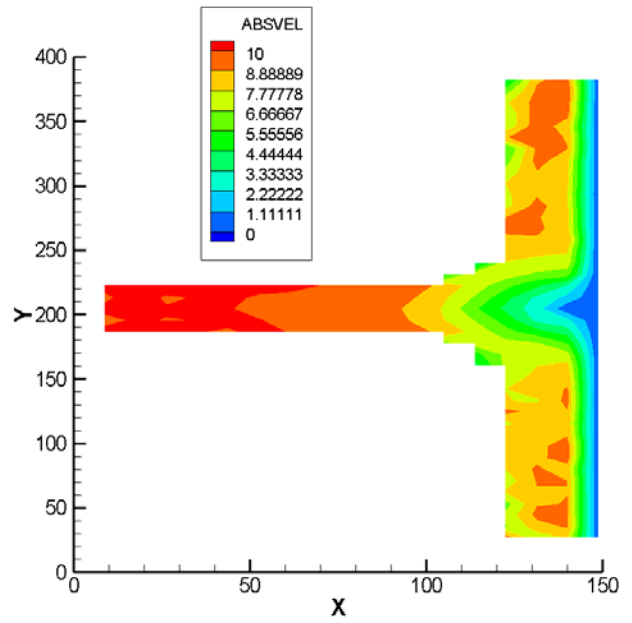
Σχήμα 41 (β)



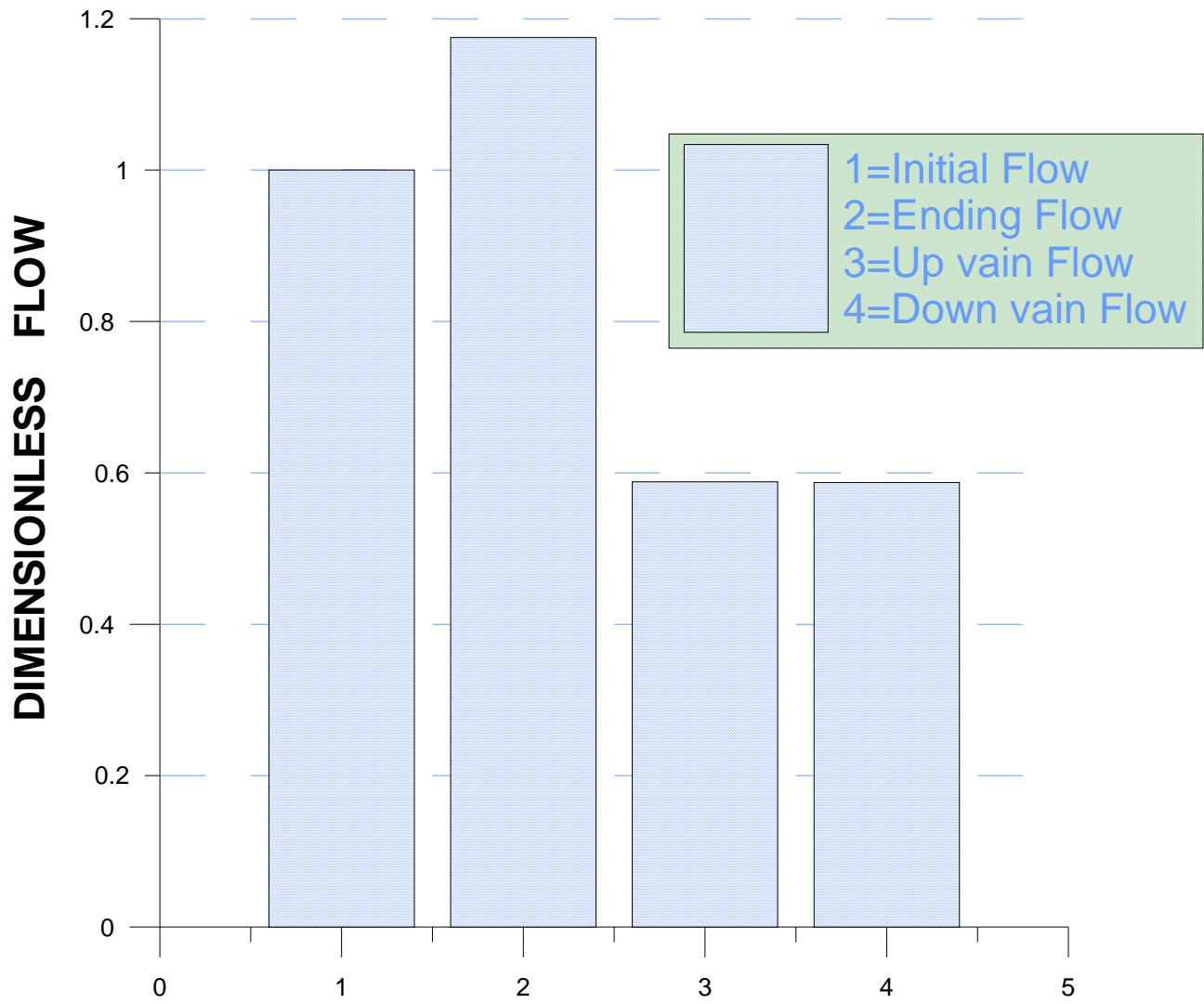
Σχήμα 41 (γ)



Σχήμα 41 (δ)

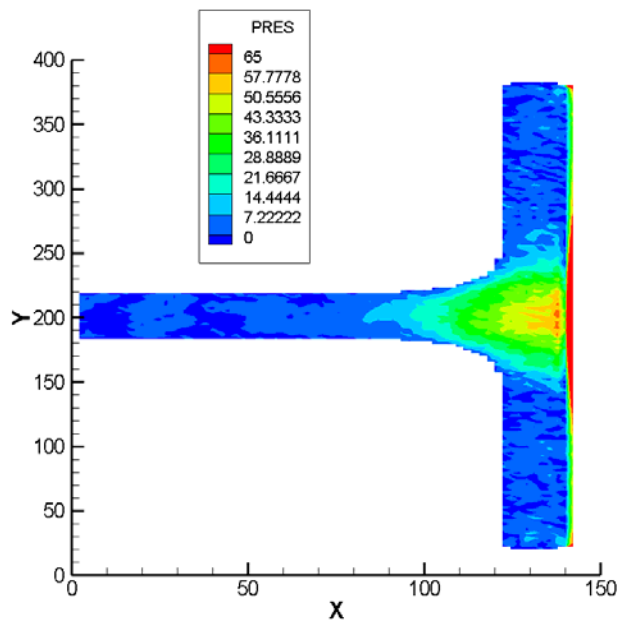
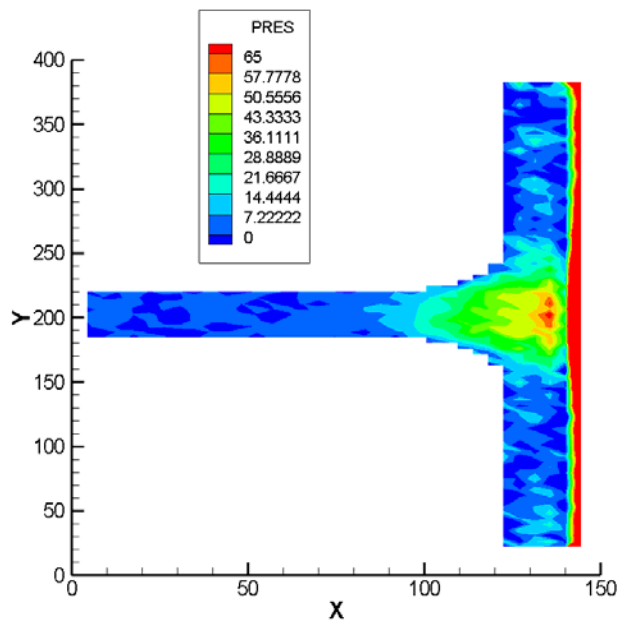
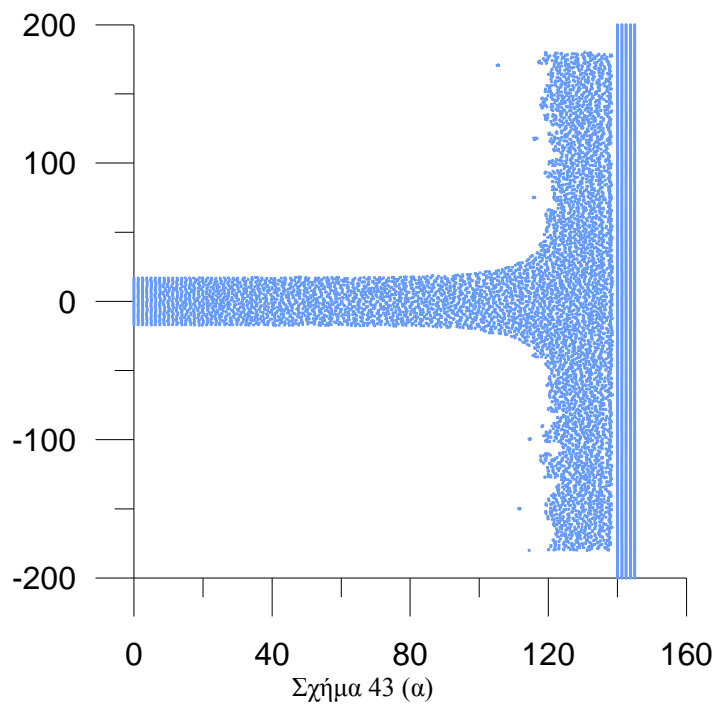
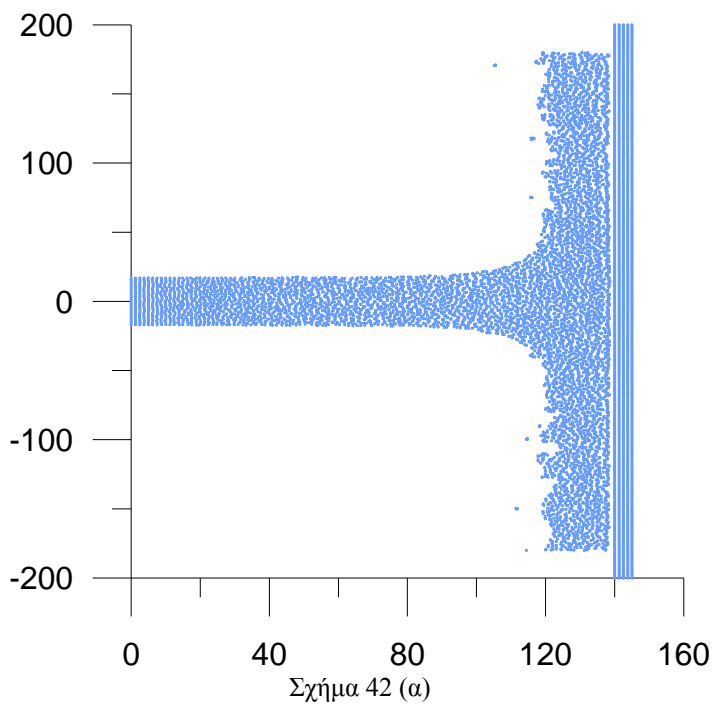


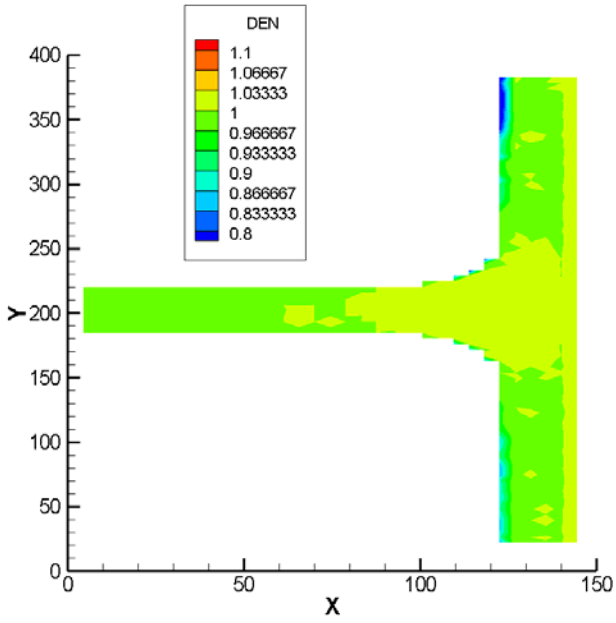
Σχήμα 41 (ε)



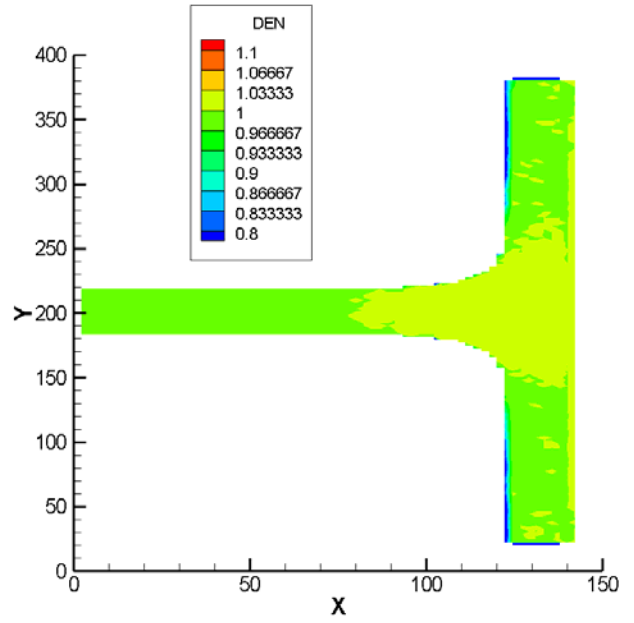
Σχήμα 41 (ζ)

Σχήμα 41-Περίπτωση Dens: (α) Η χρονική εξέλιξη του φαινομένου για $t=25'$, (β) Το contour της πίεσης, (γ) Το contour της πυκνότητας, (δ) Το contour της V-ταχύτητας, (ε) Το contour της απόλυτης τιμής της ταχύτητας, (ζ) Η παροχή στην αρχή στο τέλος καθώς στις πάνω και κάτω φλέβες.

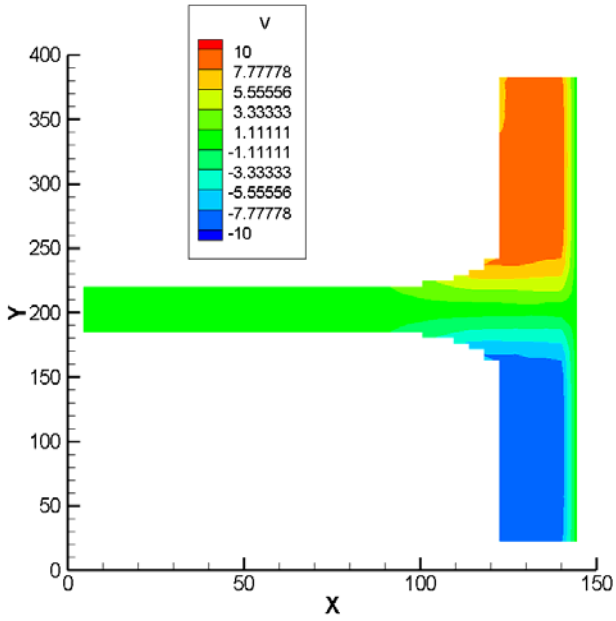




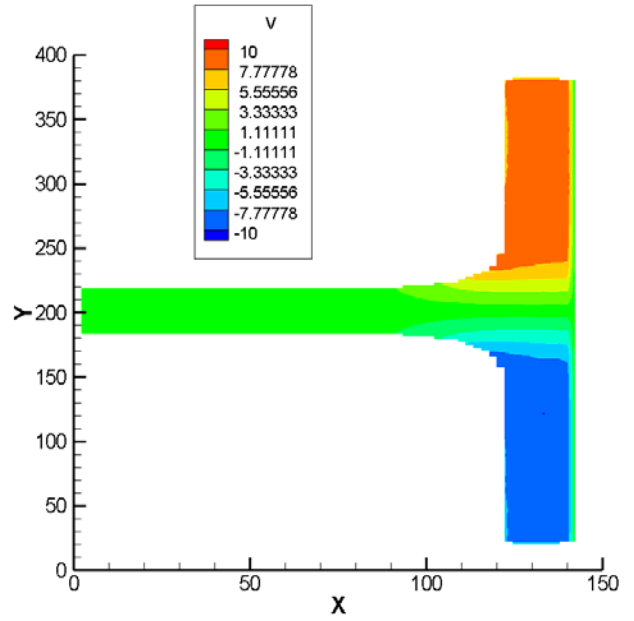
Σχήμα 42 (γ)



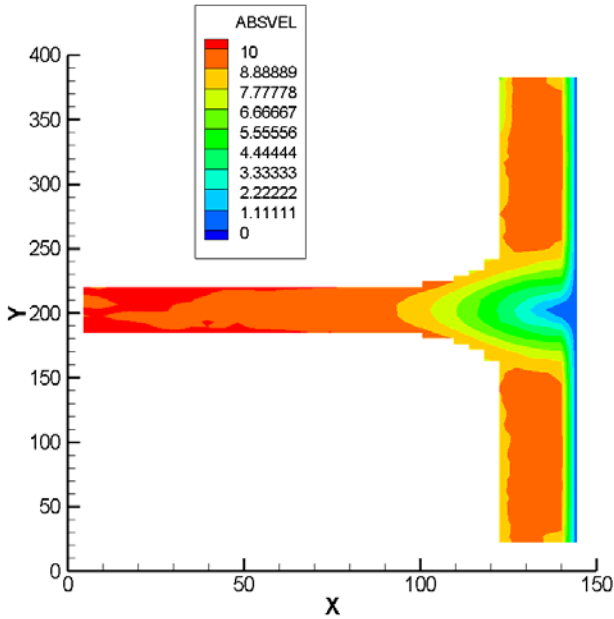
Σχήμα 43 (γ)



Σχήμα 42 (δ)

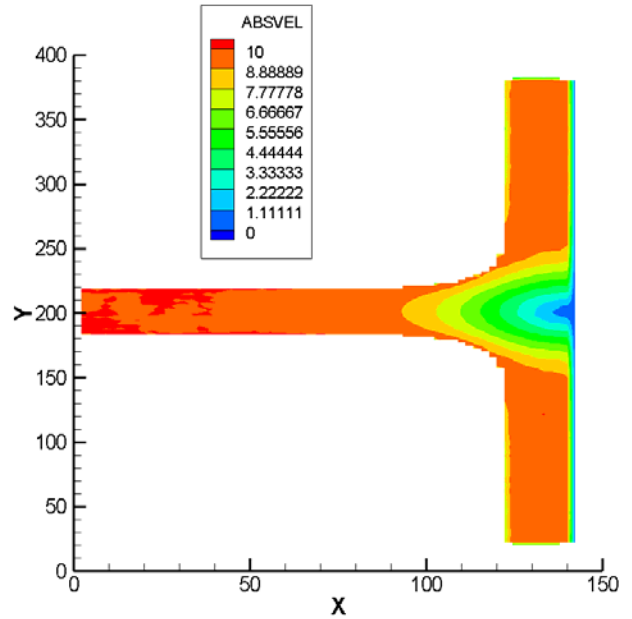


Σχήμα 43 (δ)



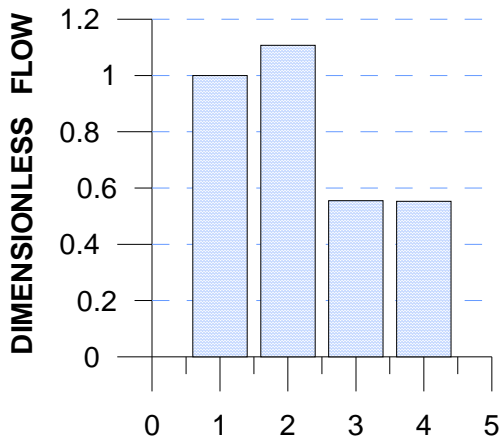
Σχήμα 42 (ε)

1=Initial Flow
2=Ending Flow
3=Up vain Flow
4=Down vain Flow

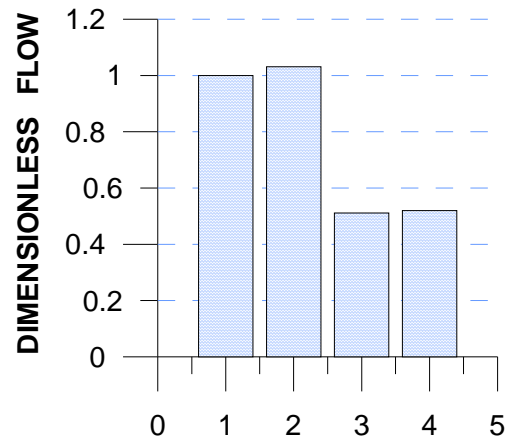


Σχήμα 43 (ε)

1=Initial Flow
2=Ending Flow
3=Up vain Flow
4=Down vain Flow

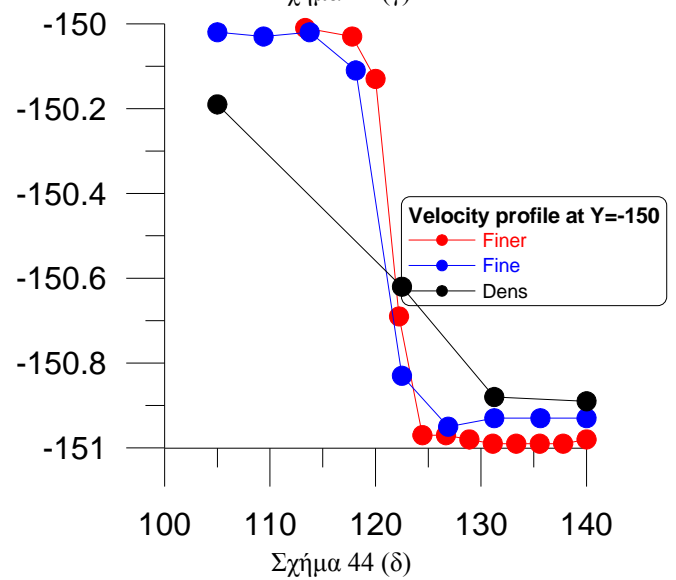
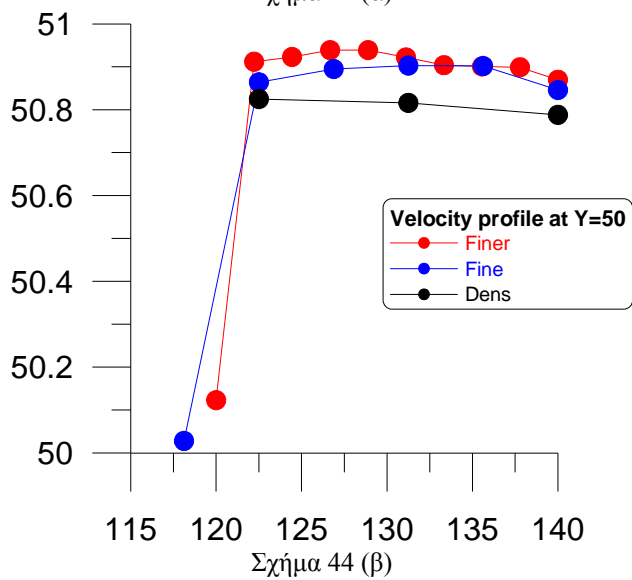
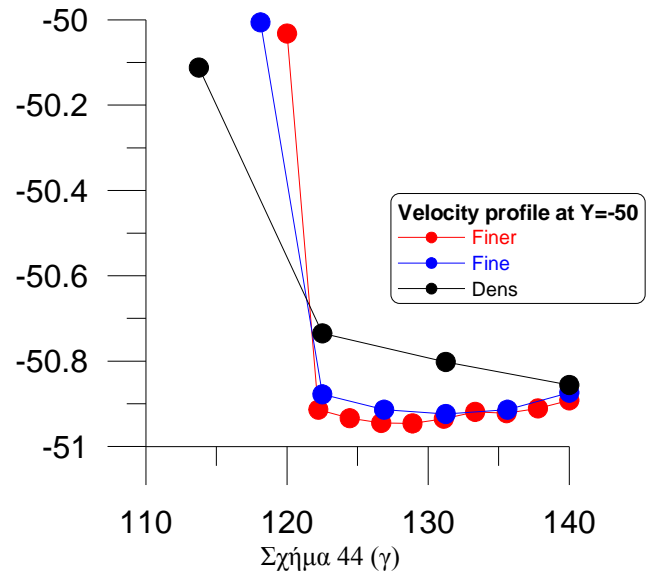
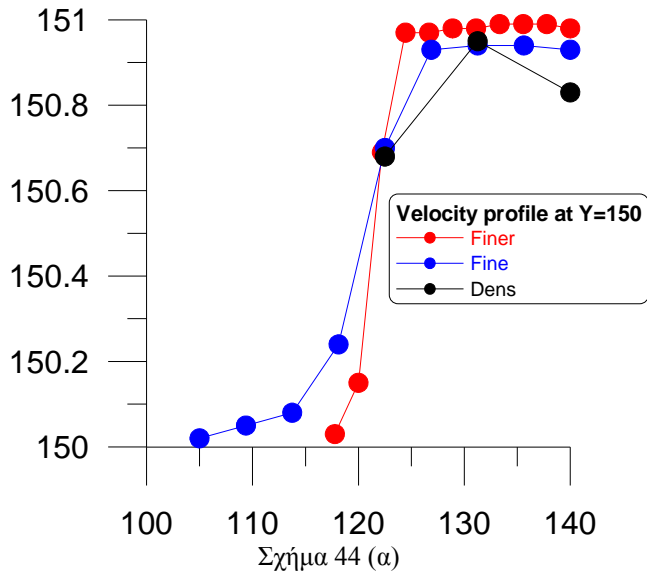


Σχήμα 42-Περίπτωση Fine: Βλέπε σχήμα 41.

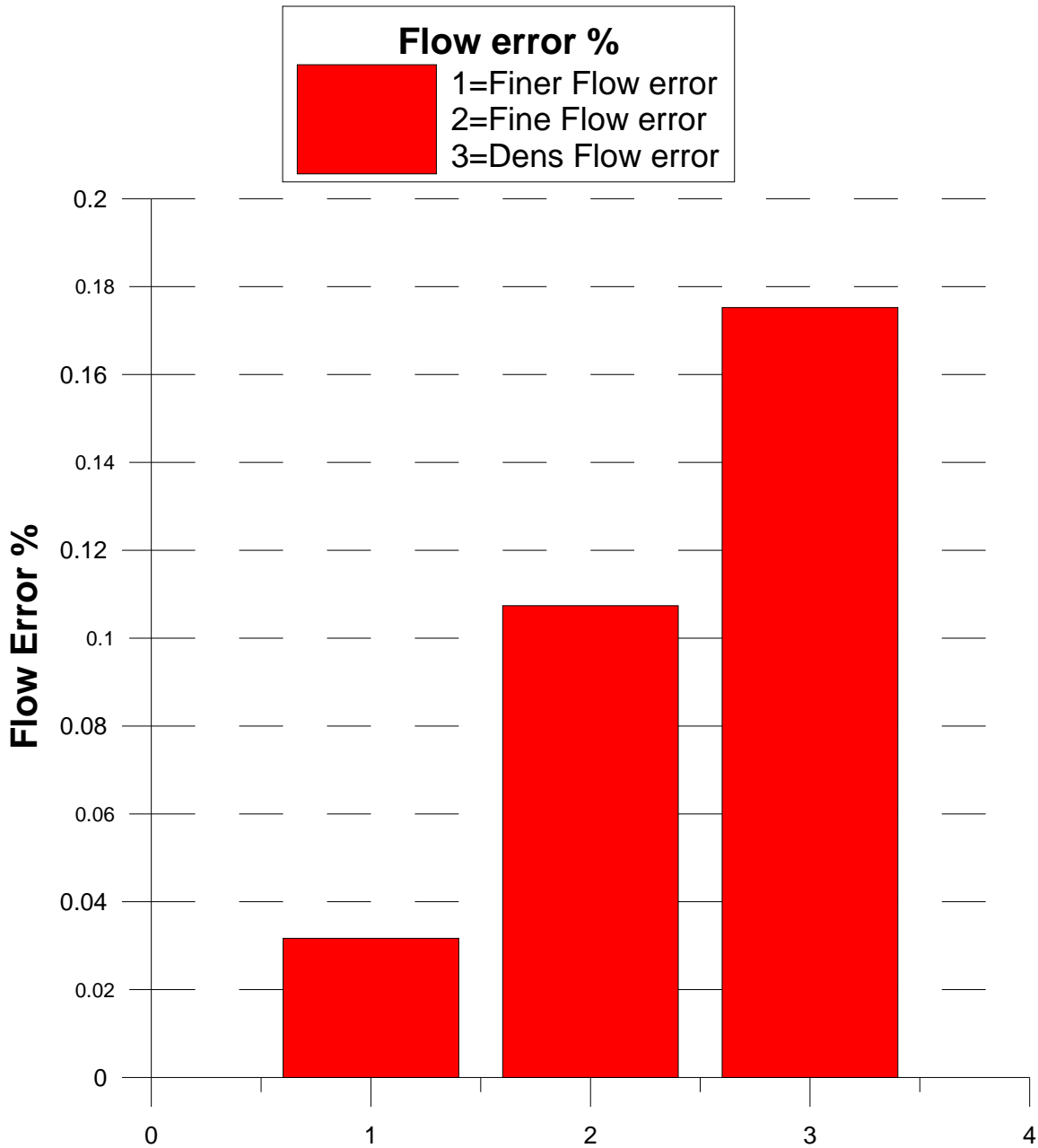


Σχήμα 43-Περίπτωση Finer: Βλέπε σχήμα 42.

Όπως φαίνεται και από τα Σχ. 42-43 η περίπτωση Fine είναι περίπου ίδια με την περίπτωση Finer.



Στο σχήμα 44 βλέπουμε πως για τις περιπτώσεις Finer και Fine τα προφίλ ταχυτήτων σχεδόν συμπίπτουν, ενώ στην περίπτωση των αραιών σωματιδίων (Dens) υπάρχει αισθητή απόκλιση.



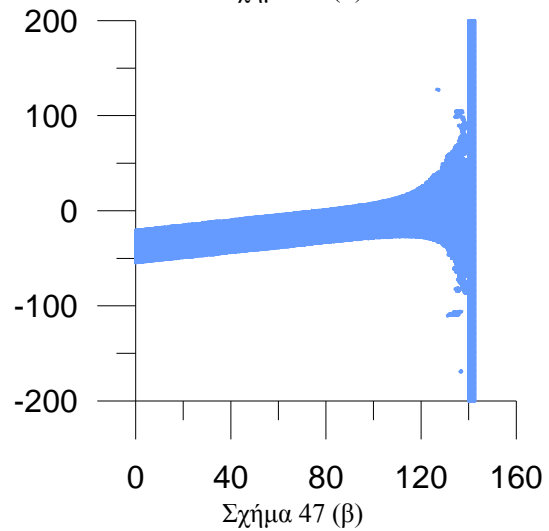
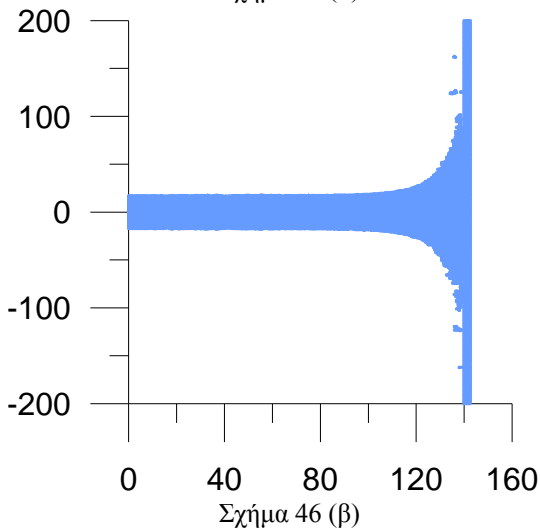
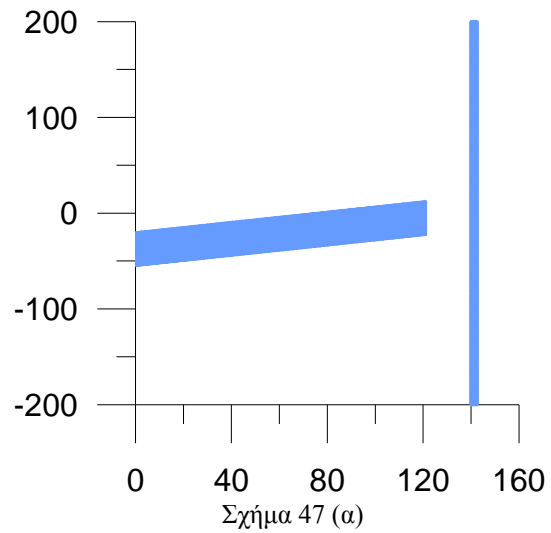
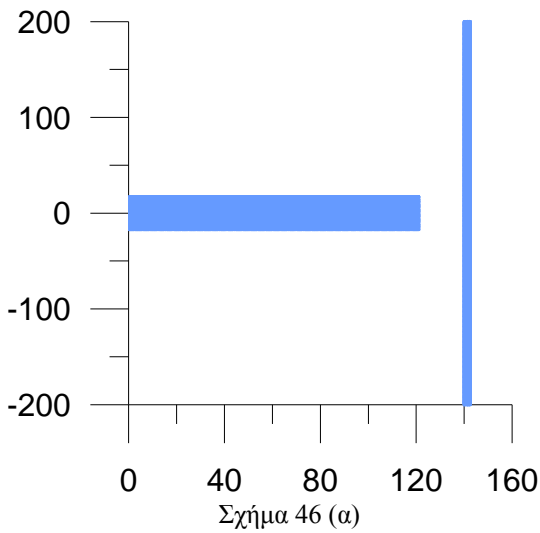
Σχήμα 45: Σύγκριση του σφάλματος παροχών για τα Dens, Fine και Finer.

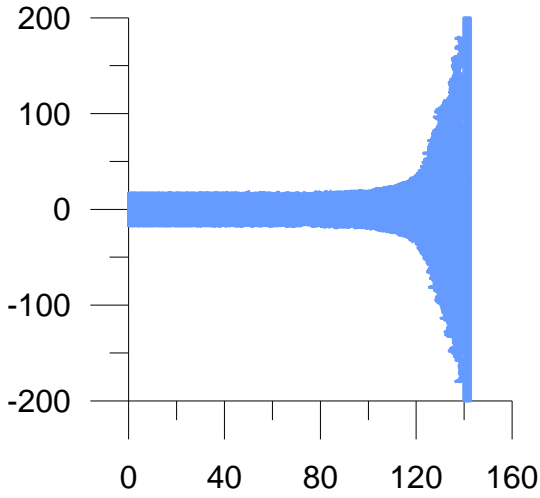
Στο σχήμα 45 βλέπουμε πόσο είναι το σφάλμα των παροχών εξόδου στις τρεις διαφορετικές περιπτώσεις. Όπως γίνεται φανερό από το Σχ. 45 βέλτιστη είναι η περίπτωση Finer όπου έχουμε πολύ μικρό σφάλμα περίπου ίσο με 3%.

6. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΚΩΔΙΚΑ-ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΕΣ ΜΕΛΕΤΕΣ.

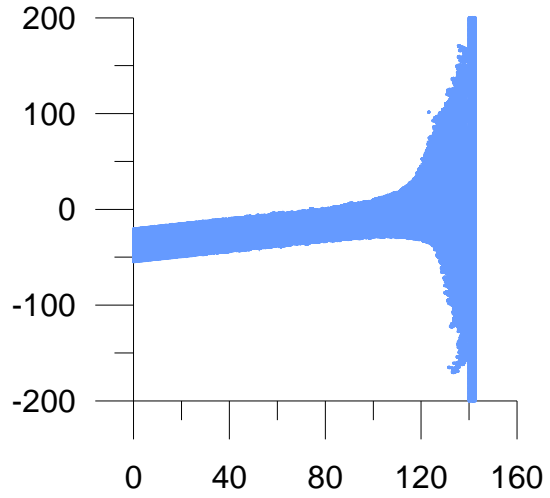
(6.1) ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΗΣ ΓΩΝΙΑΣ ΠΡΟΣΠΤΩΣΗΣ.

Τα πρώτα αποτελέσματα αφορούσαν την μελέτη της γωνίας πρόσπτωσης του ρευστού. Η παραμετροποίηση ξεκινά από τις 0 μοίρες και φθάνει τις 45, με βήμα 15 μοιρών. Χρησιμοποιήθηκε η περίπτωση FINER μια κι' αυτή αποδείχθηκε η πιο ακριβής (παράγραφος 5.3).

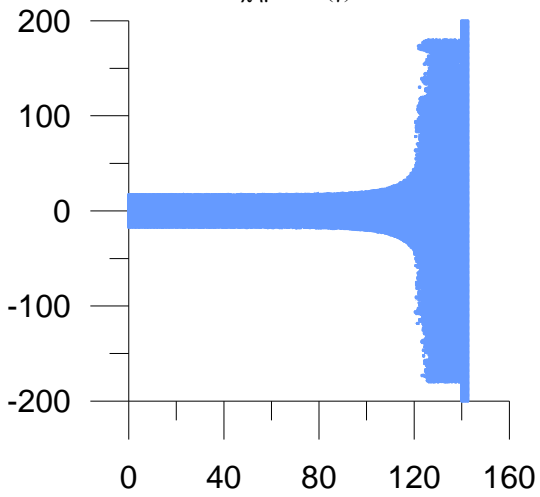




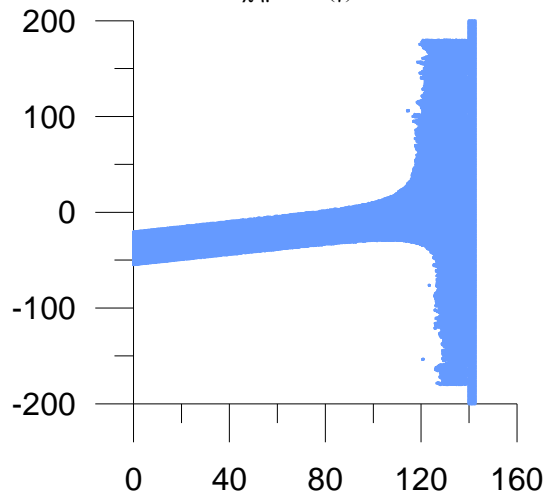
Σχήμα 46 (α)



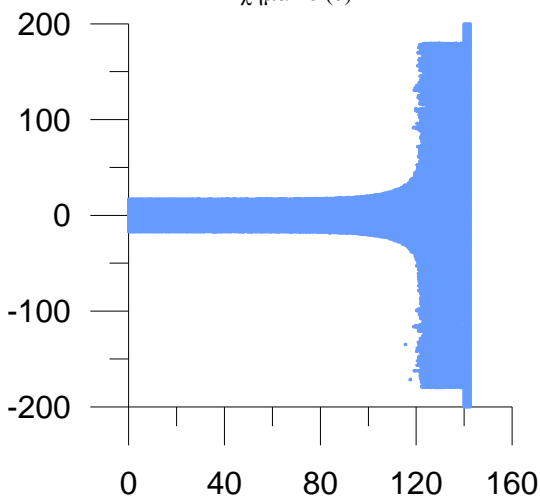
Σχήμα 47 (α)



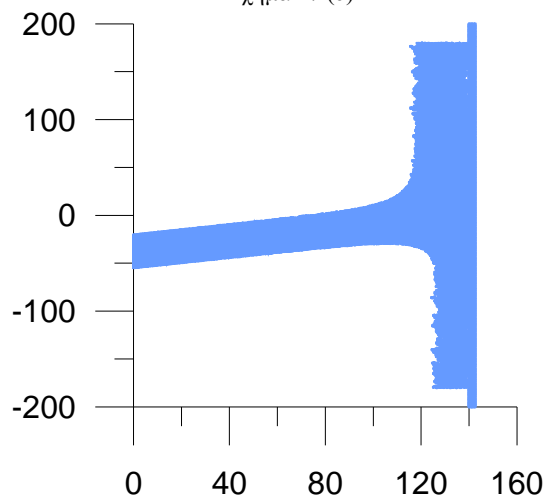
Σχήμα 46 (β)



Σχήμα 47 (β)



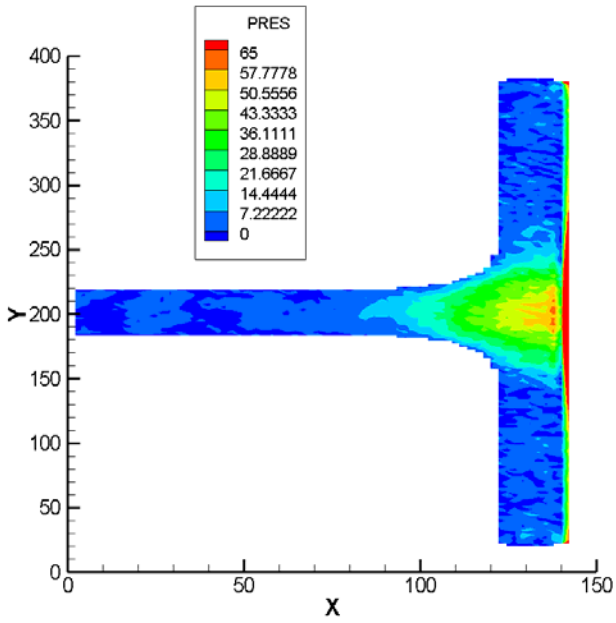
Σχήμα 46 (γ)



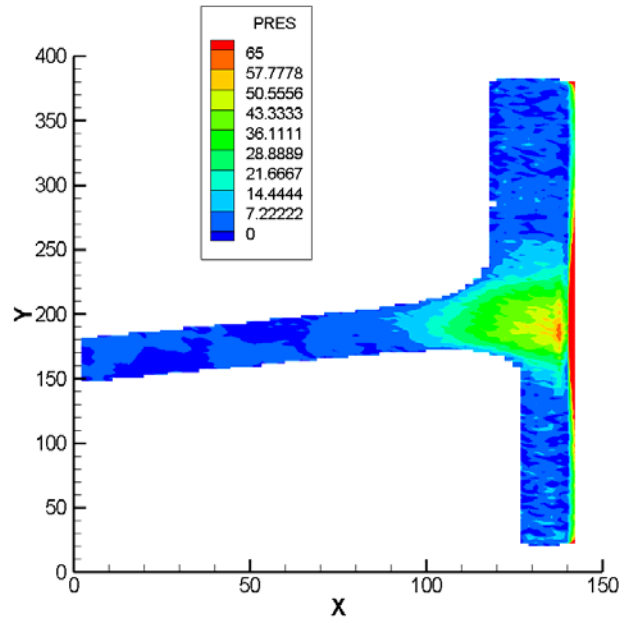
Σχήμα 47 (γ)

Σχήμα 46- Η χρονική εξέλιξη του φαινομένου, στην περίπτωση Finer, με γωνία 0: (α) $t=0$ sec, (β) $t=6.5$ sec, (γ) $t=12.5$ sec, (δ) $t=25$ sec, (ε) $t=46$ sec.

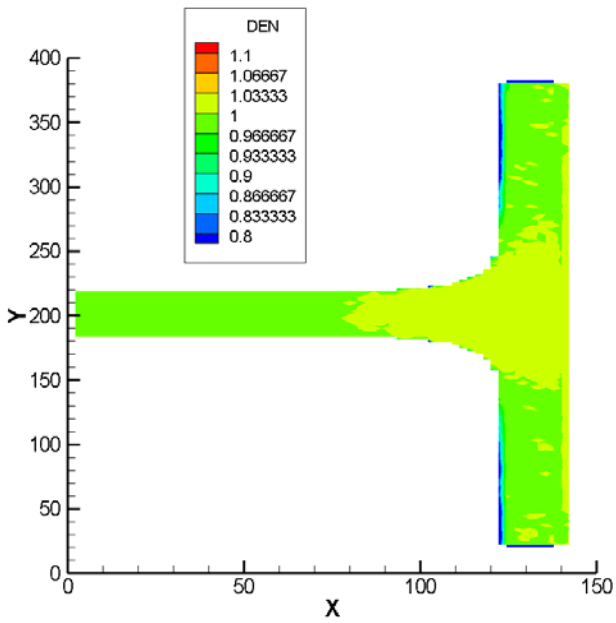
Σχήμα 47- Η χρονική εξέλιξη του φαινομένου, στην περίπτωση Finer, με γωνία 15: (α) $t=0$ sec, (β) $t=6.5$ sec, (γ) $t=12.5$ sec, (δ) $t=25$ sec, (ε) $t=50$ sec.



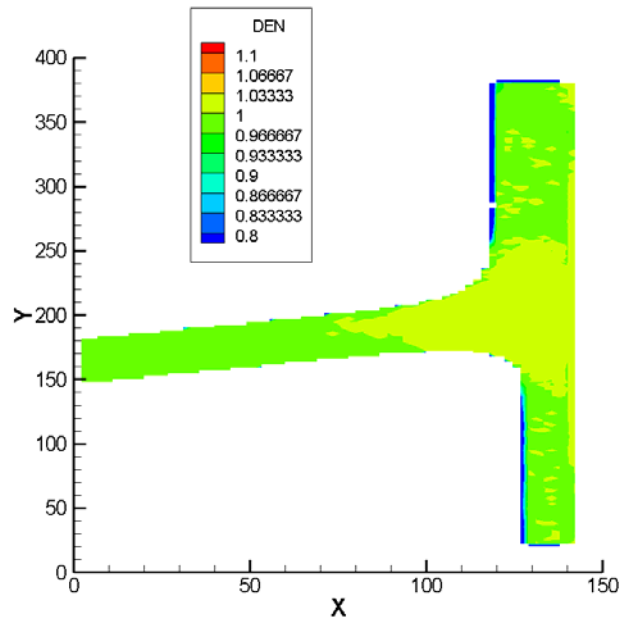
Σχήμα 48 (α)



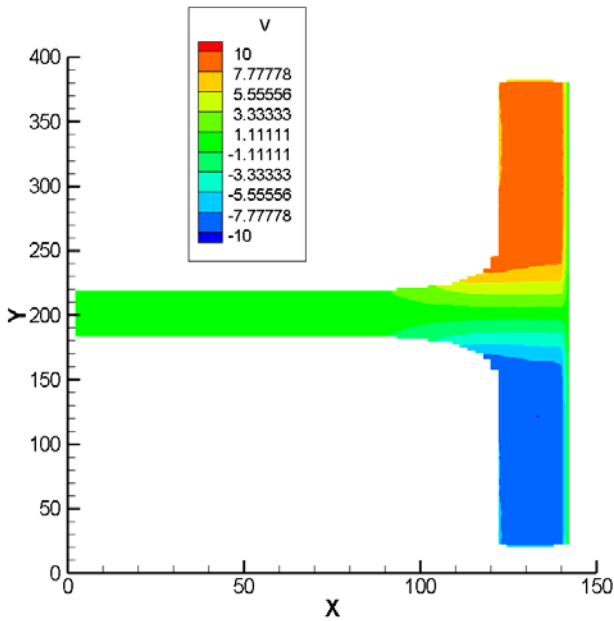
Σχήμα 49 (α)



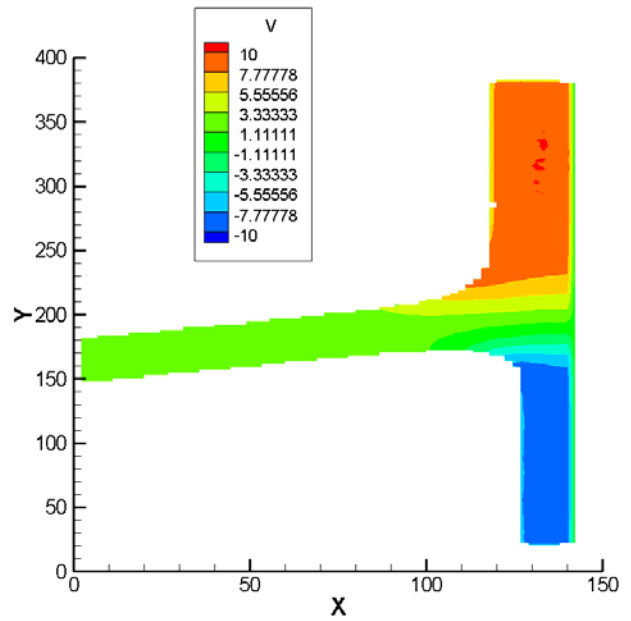
Σχήμα 48 (β)



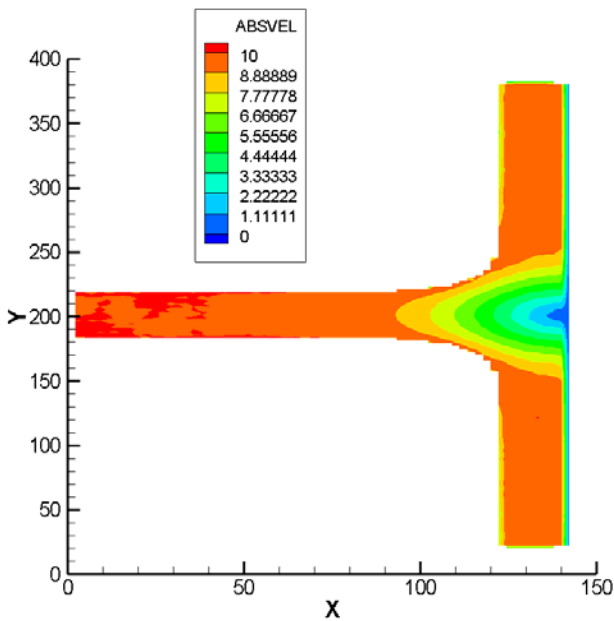
Σχήμα 49 (β)



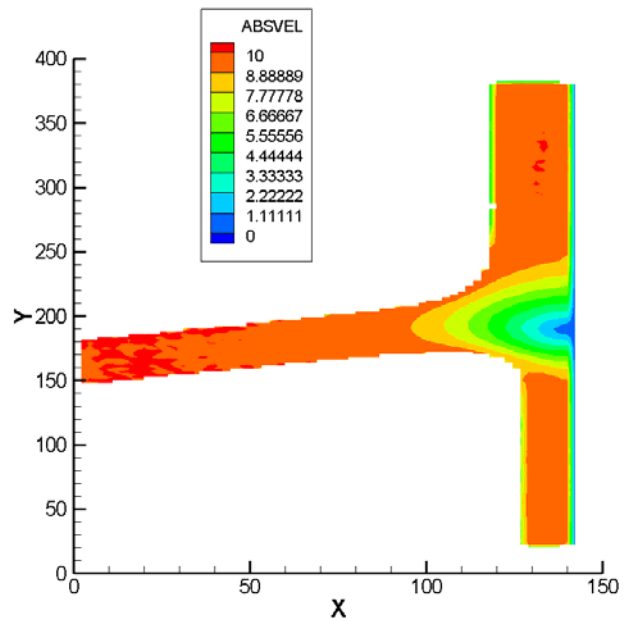
Σχήμα 48 (γ)



Σχήμα 49 (γ)



Σχήμα 48 (δ)



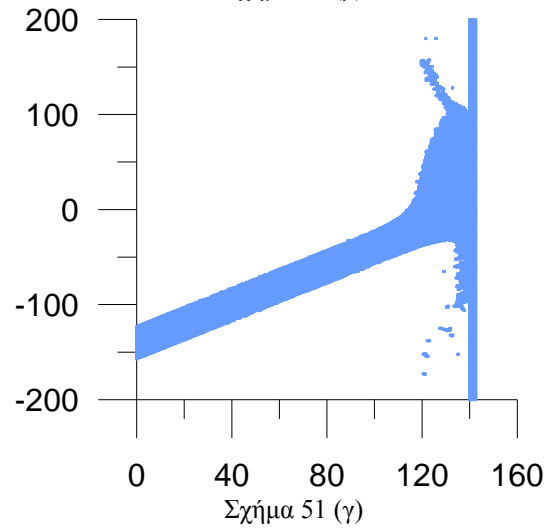
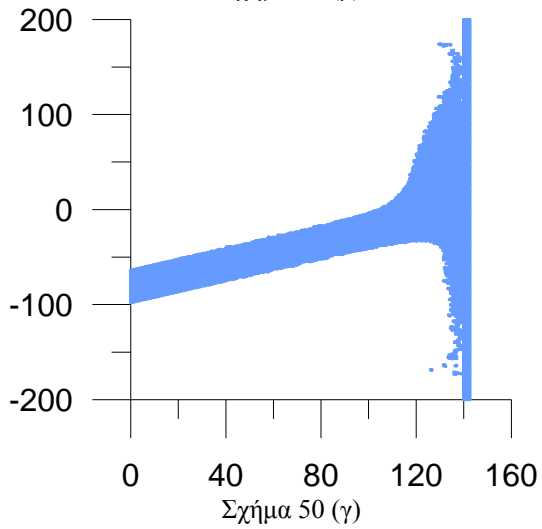
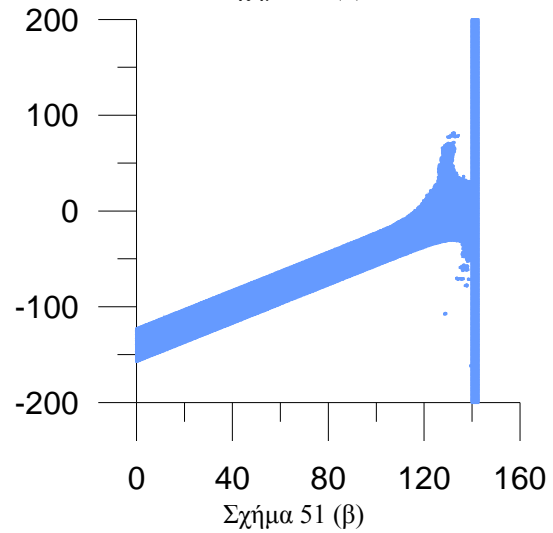
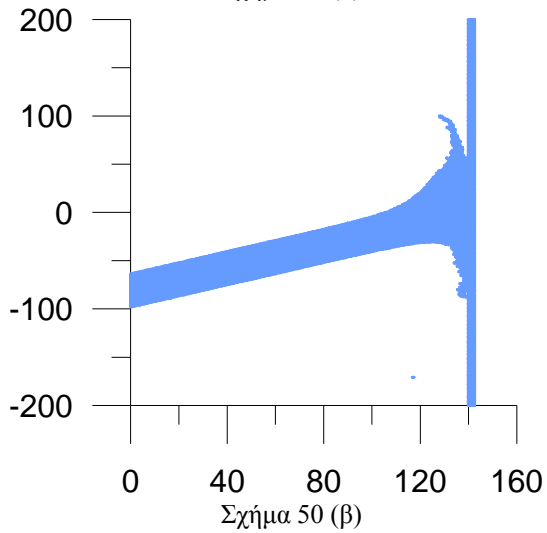
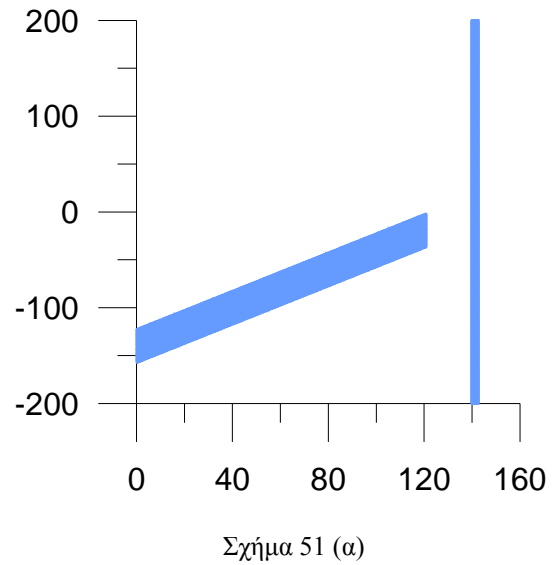
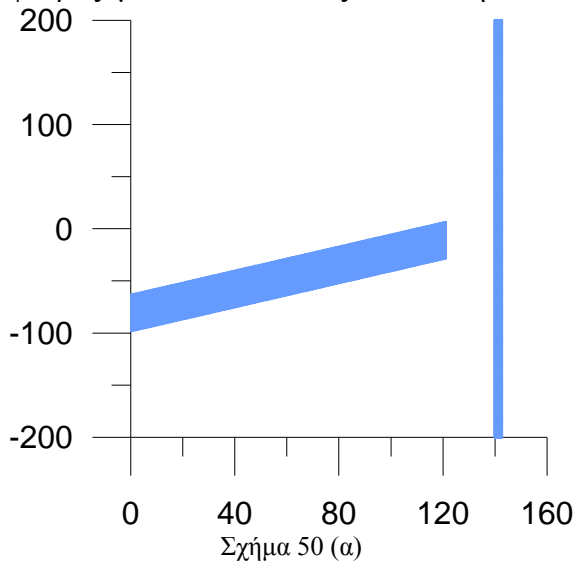
Σχήμα 49 (δ)

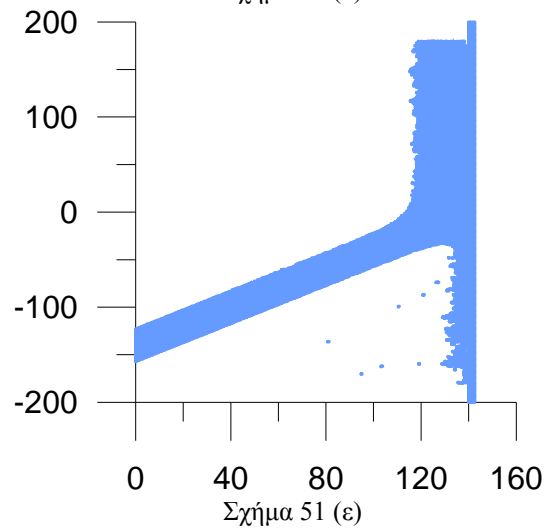
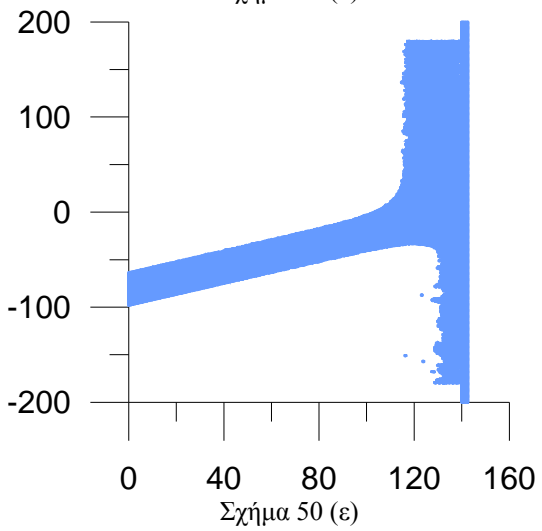
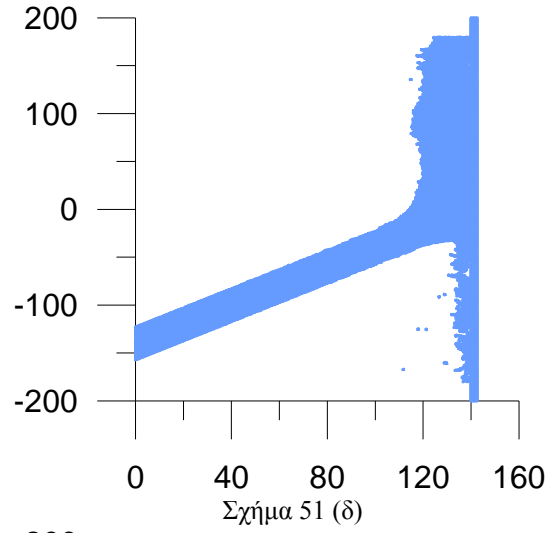
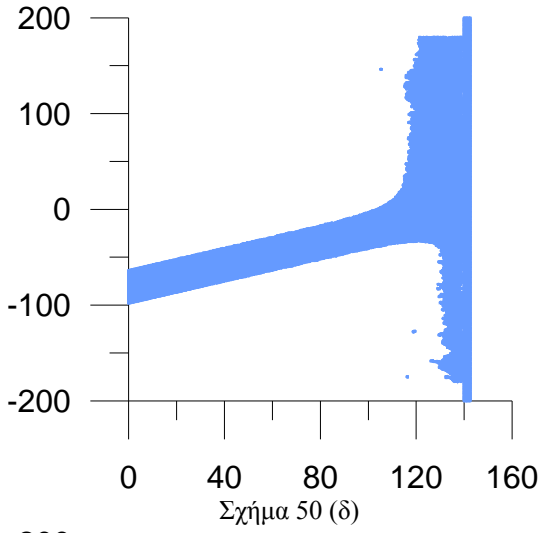
Σχήμα 48-Περίπτωση *Finer*, Ταχύτητα 10, γωνία 0 (α) Το contour της πίεσης, (β) Το contour της πυκνότητας, (γ) Το contour της V-ταχύτητας, (δ) Το contour της απόλυτης τιμής της ταχύτητας,

Σχήμα 49-Περίπτωση *Finer*, Ταχύτητα 10, γωνία 15 (α) Το contour της πίεσης, (β) Το contour της πυκνότητας, (γ) Το contour της V-ταχύτητας, (δ) Το contour της απόλυτης τιμής της ταχύτητας,

Στα Σχ. 46-47 και 48-49 αντιστοίχως, βλέπουμε την σύγκριση μεταξύ των γωνιών 0 και 15. Παρατηρούμε πως καθώς η γωνία μεταβάλλεται, έντονη είναι και η διαφορά στα σχήματα των contours, τα οποία μας δείχνουν τις μέσες χρονικές τιμές.

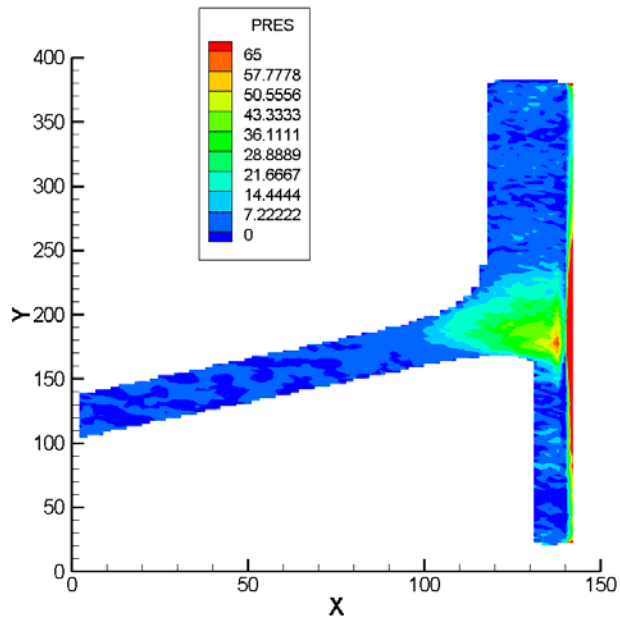
Αξιοπρόσεκτο επίσης είναι το γεγονός πως καθώς αυξάνεται η γωνία το πάχος της κάτω φλέβας μειώνεται και αυξάνεται στην πάνω.



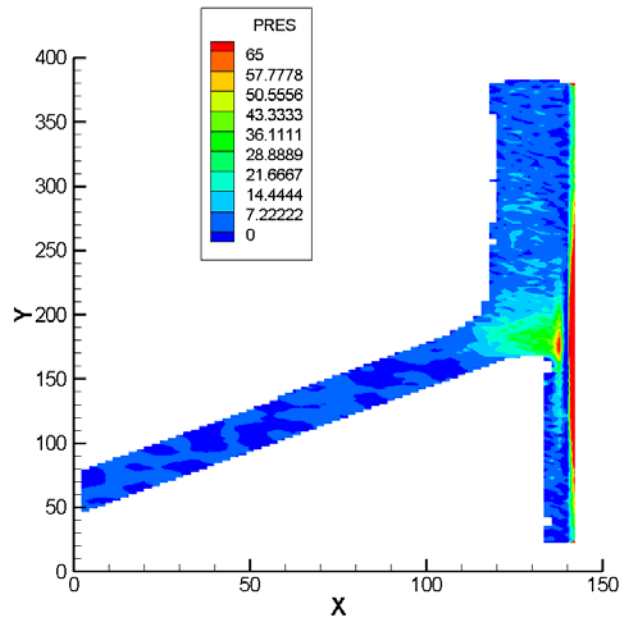


Σχήμα 50- Η χρονική εξέλιξη του φαινομένου, στην περίπτωση Finer, με γωνία 30: Βλέπε σχήμα 46.

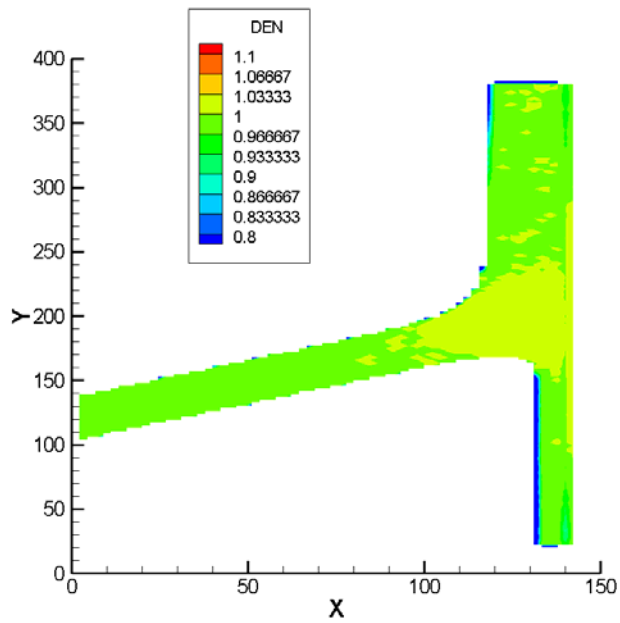
Σχήμα 51- Η χρονική εξέλιξη του φαινομένου, στην περίπτωση Finer, με γωνία 45: Βλέπε σχήμα 47



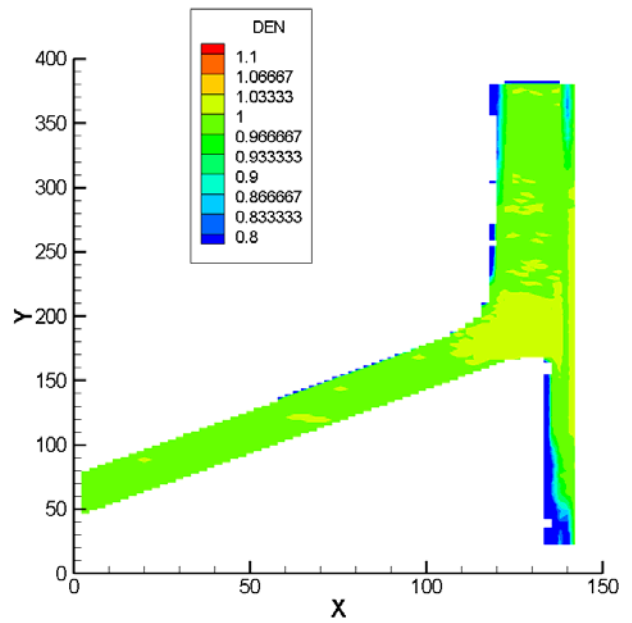
Σχήμα 52 (α)



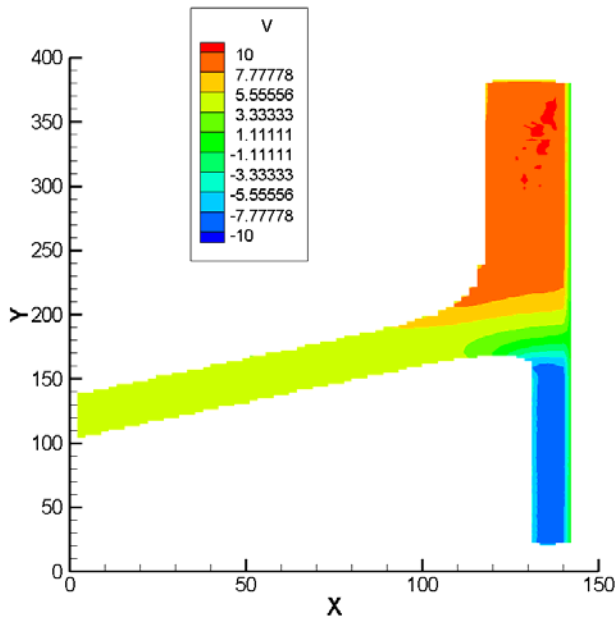
Σχήμα 53 (α)



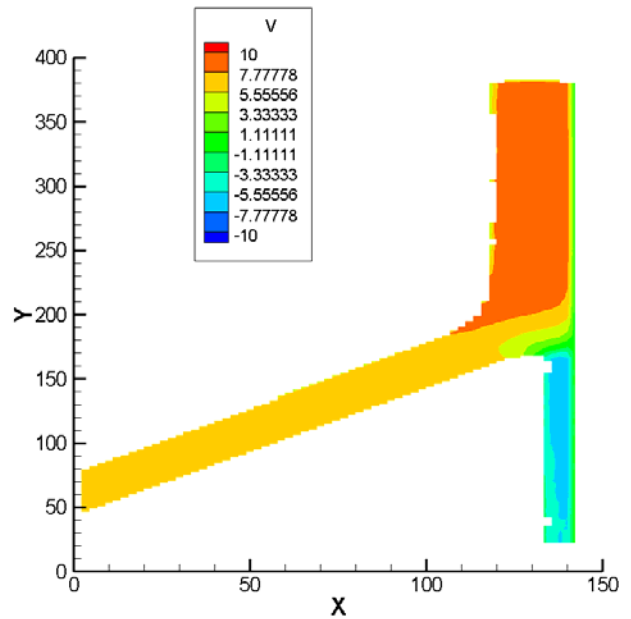
Σχήμα 52 (β)



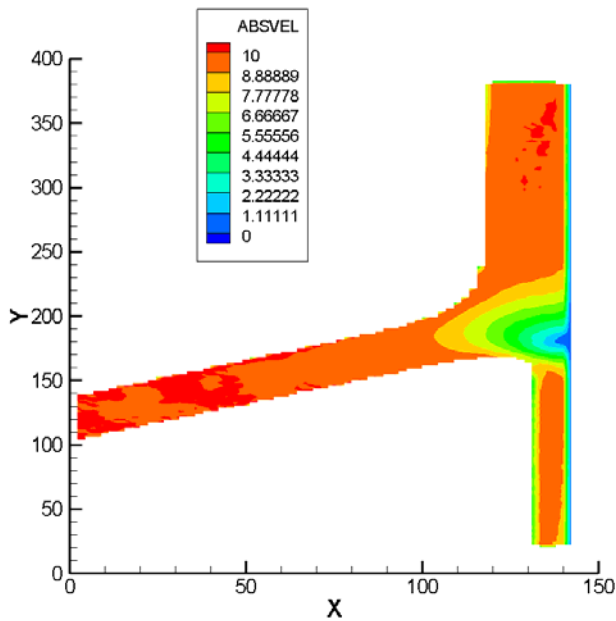
Σχήμα 53 (β)



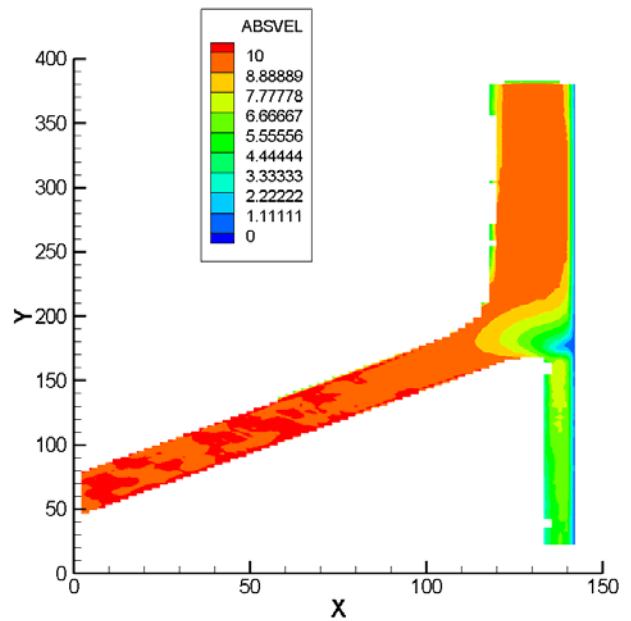
Σχήμα 52 (γ)



Σχήμα 53 (γ)



Σχήμα 52 (δ)

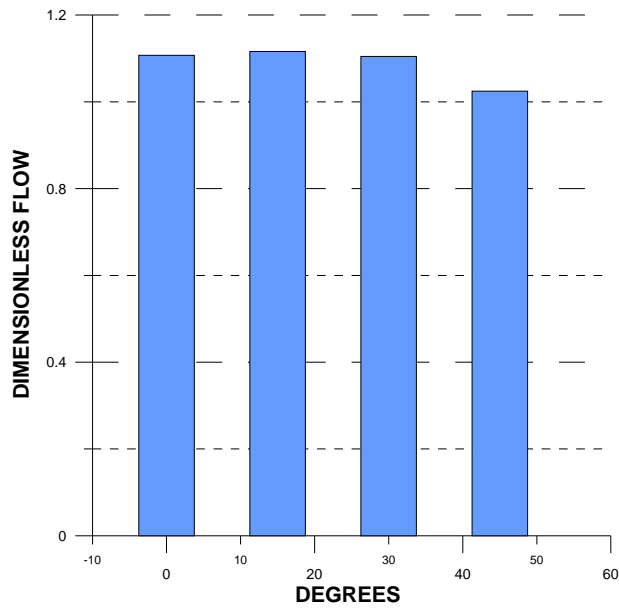


Σχήμα 53 (δ)

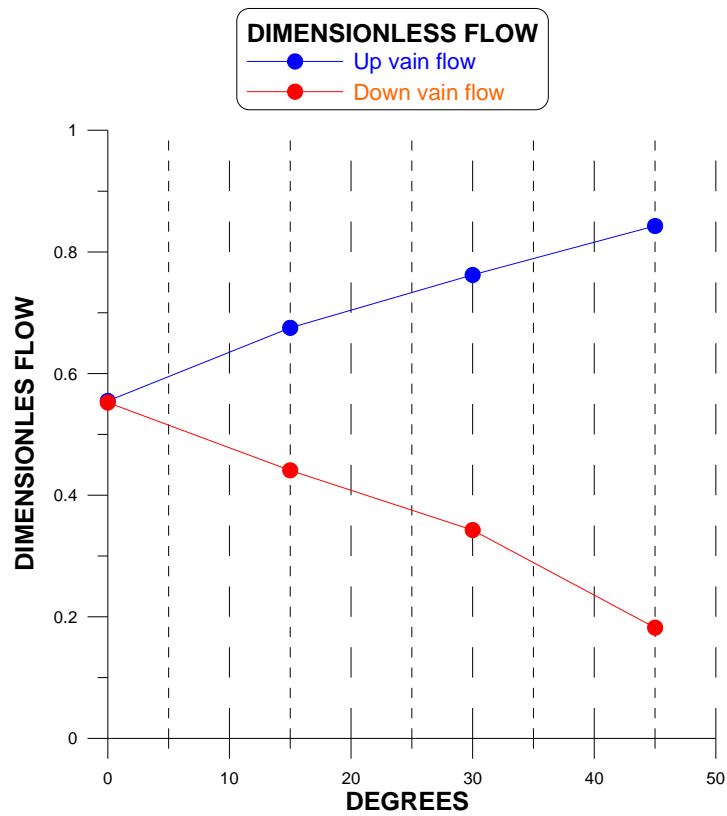
Σχήμα 52-Περίπτωση Finer, Ταχύτητα 10, γωνία 30. Βλέπε σχήμα 48.

Σχήμα 53-Περίπτωση Finer, Ταχύτητα 10, γωνία 45. Βλέπε σχήμα 49.

Στα Σχ. 50-51 και 52-53 βλέπουμε την σύγκριση μεταξύ των γωνιών 30 και 45. Παρατηρούμε πως καθώς η γωνία μεταβάλλεται, η διαφορά στα σχήματα των contours είναι ακόμη πιο έντονη. Αξιοπρόσεκτο επίσης είναι το γεγονός πως καθώς αυξάνεται η γωνία το πάχος των σωματιδίων μειώνεται ακόμη περισσότερο στην κάτω φλέβα και αυξάνεται στην πάνω.



Σχήμα 54: Παροχές στις διάφορες γωνίες.

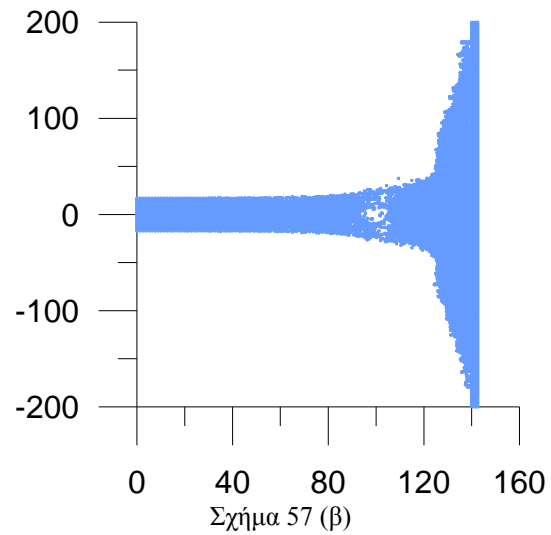
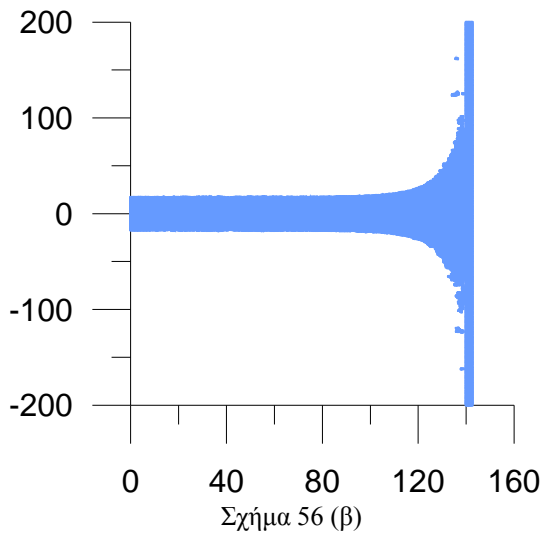
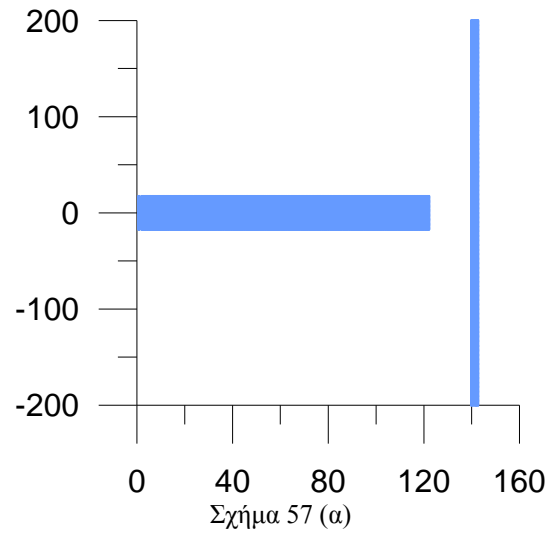
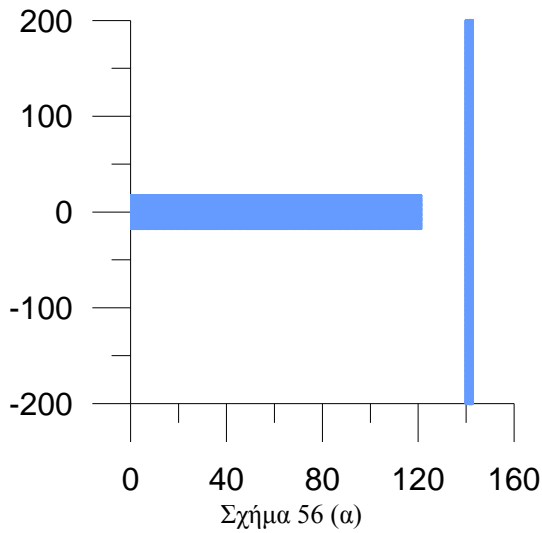


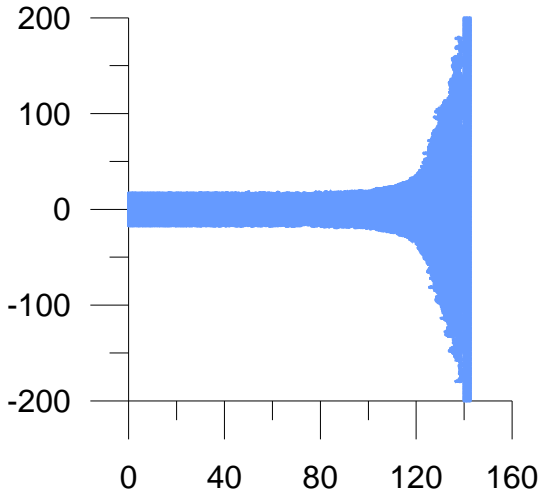
Σχήμα 55: Μεταβολή της παροχής των δύο φλεβών.

Η μεταβολή της παροχής των δύο φλεβών είναι σχεδόν γραμμική συνάρτηση της γωνίας πρόσπτωσης, όπως φαίνεται και στο Σχ. 55.

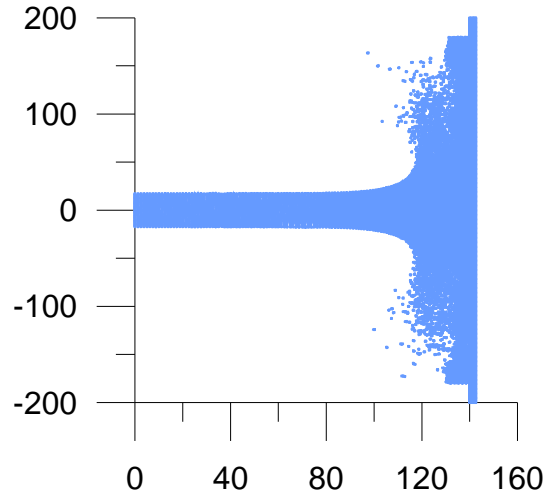
(6.2) ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΗΣ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ ΠΡΟΣΠΤΩΣΗΣ

Μία άλλη μελέτη έχει να κάνει με την αρχική ταχύτητα της δέσμης όπου έχουμε λάβει αποτελέσματα για ταχύτητα 10 και 20 m/s. Και σε αυτή την περίπτωση χρησιμοποιήθηκε ο κώδικας FINER με χρόνο ολοκλήρωσης για τις μέσες τιμές από $t=30$ έως $t=50$ seconds.

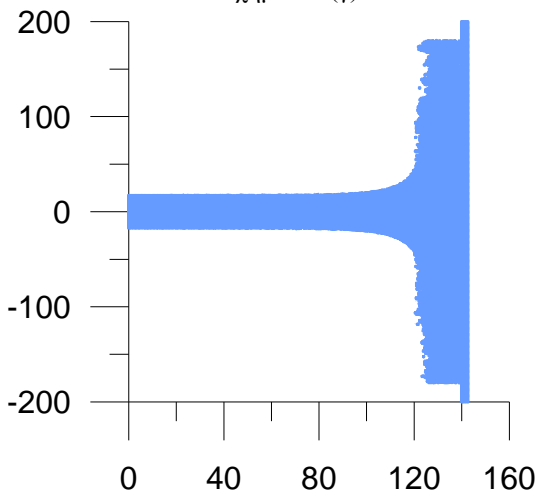




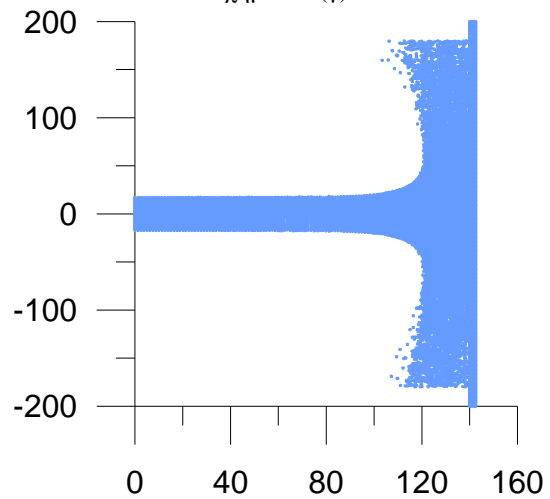
Σχήμα 56 (γ)



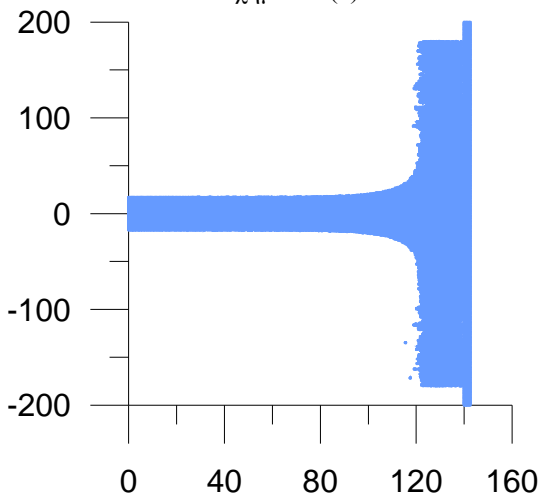
Σχήμα 57 (γ)



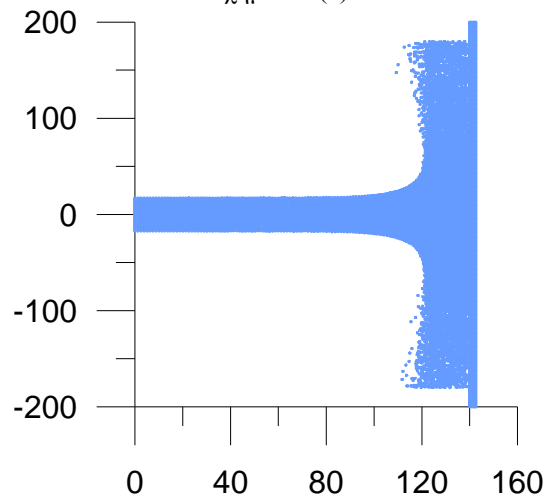
Σχήμα 56 (δ)



Σχήμα 57 (δ)



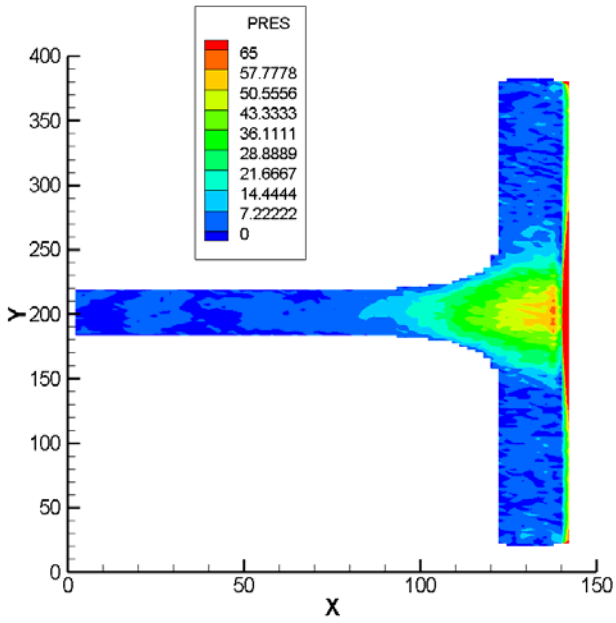
Σχήμα 56 (ε)



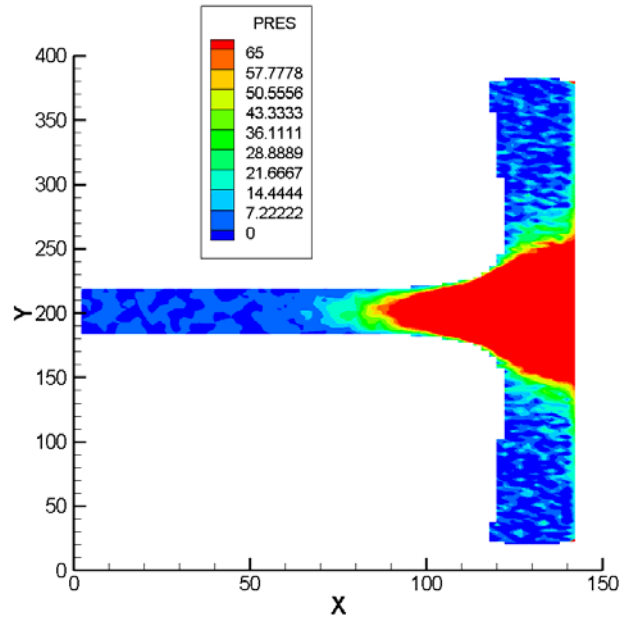
Σχήμα 57 (ε)

Σχήμα 56- Η χρονική εξέλιξη του φαινομένου, στην περίπτωση Finer, με ταχύτητα 10 και με γωνία 0: (α) $t=0$ sec, (β) $t=65$ sec, (γ) $t=125$ sec, (δ) $t=250$ sec, (ε) $t=500$ sec.

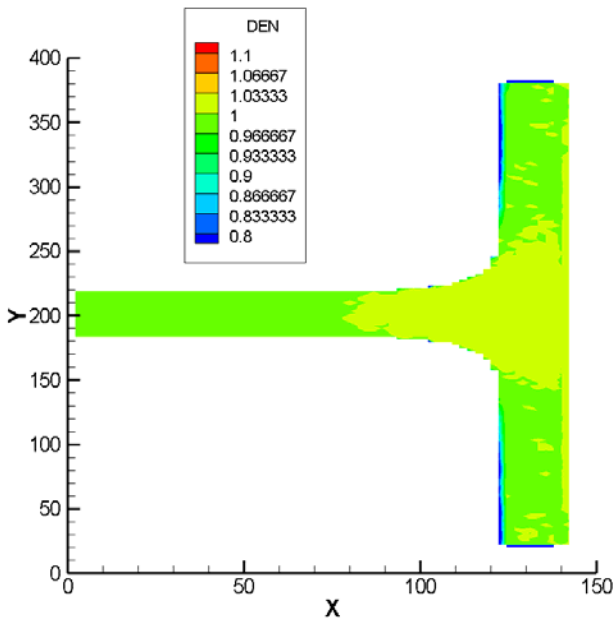
Σχήμα 57- Η χρονική εξέλιξη του φαινομένου, στην περίπτωση Finer, με ταχύτητα 20 και γωνία 0: (α) $t=0$ sec, (β) $t=65$ sec, (γ) $t=125$, (δ) $t=250$, (ε) $t=500$



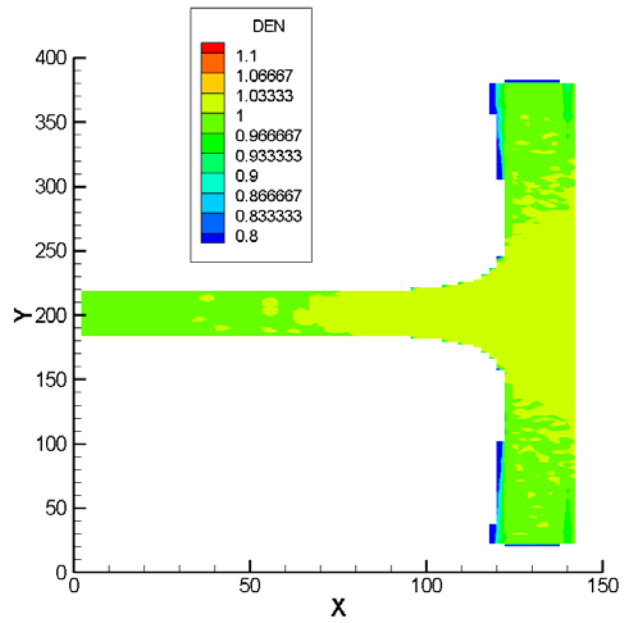
Σχήμα 58 (α)



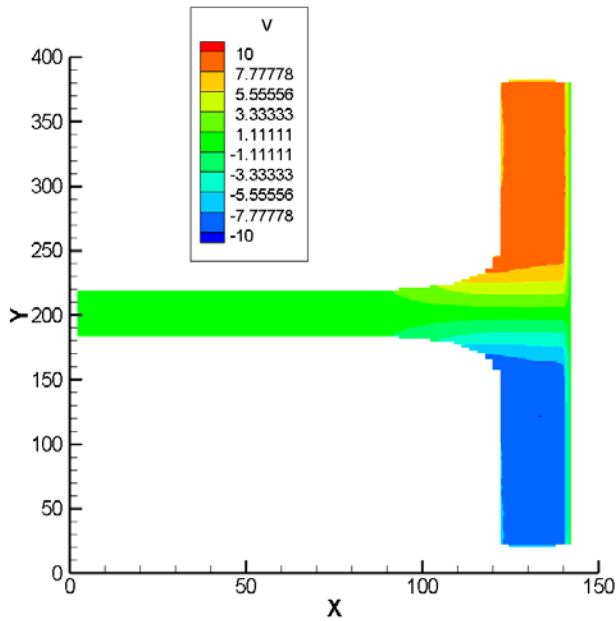
Σχήμα 59 (α)



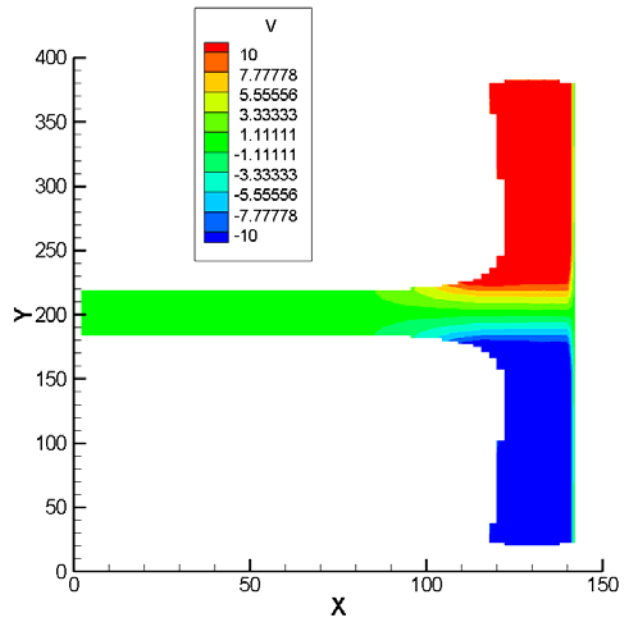
Σχήμα 58 (β)



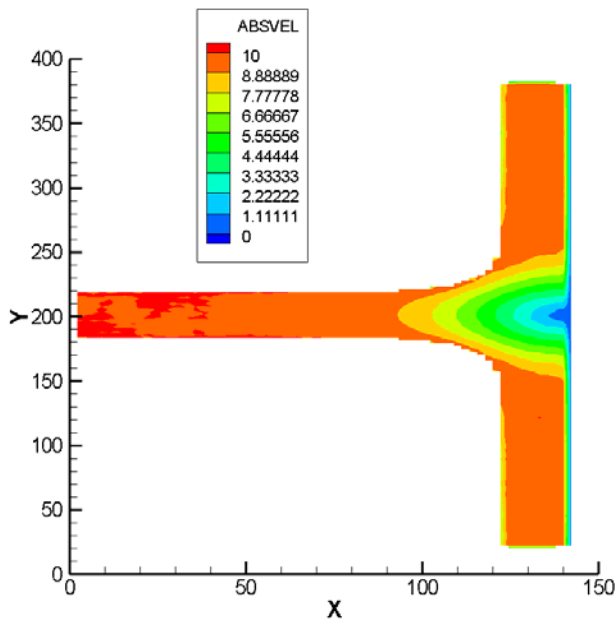
Σχήμα 59 (β)



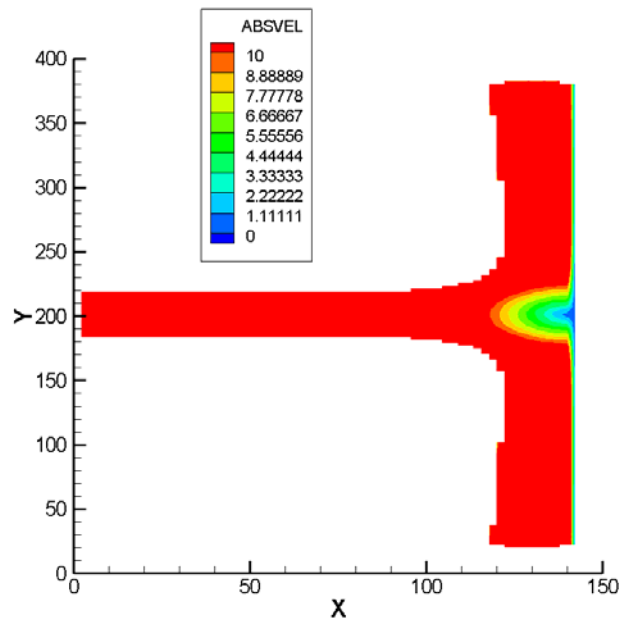
Σχήμα 58 (γ)



Σχήμα 59 (γ)



Σχήμα 58 (δ)

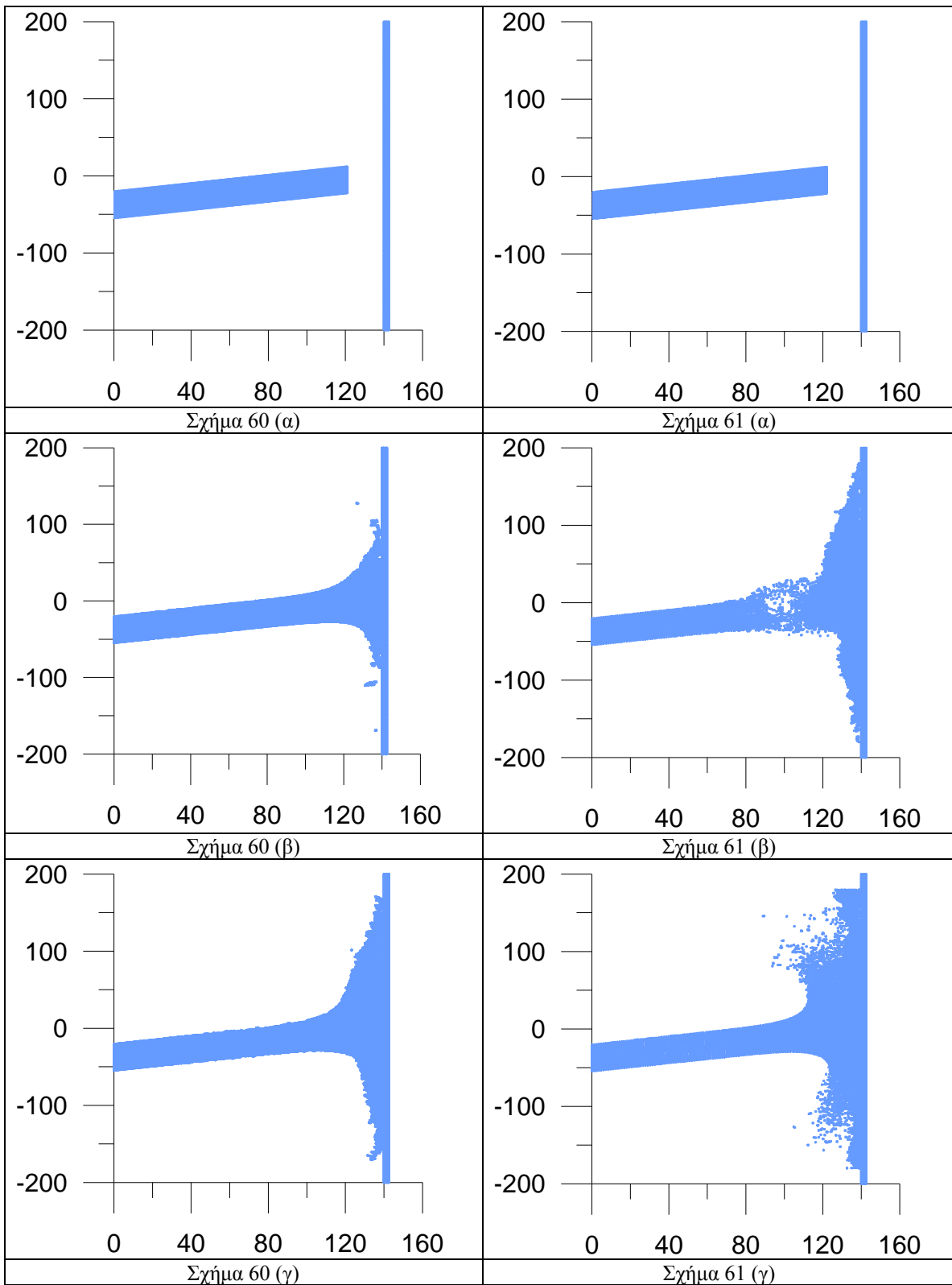


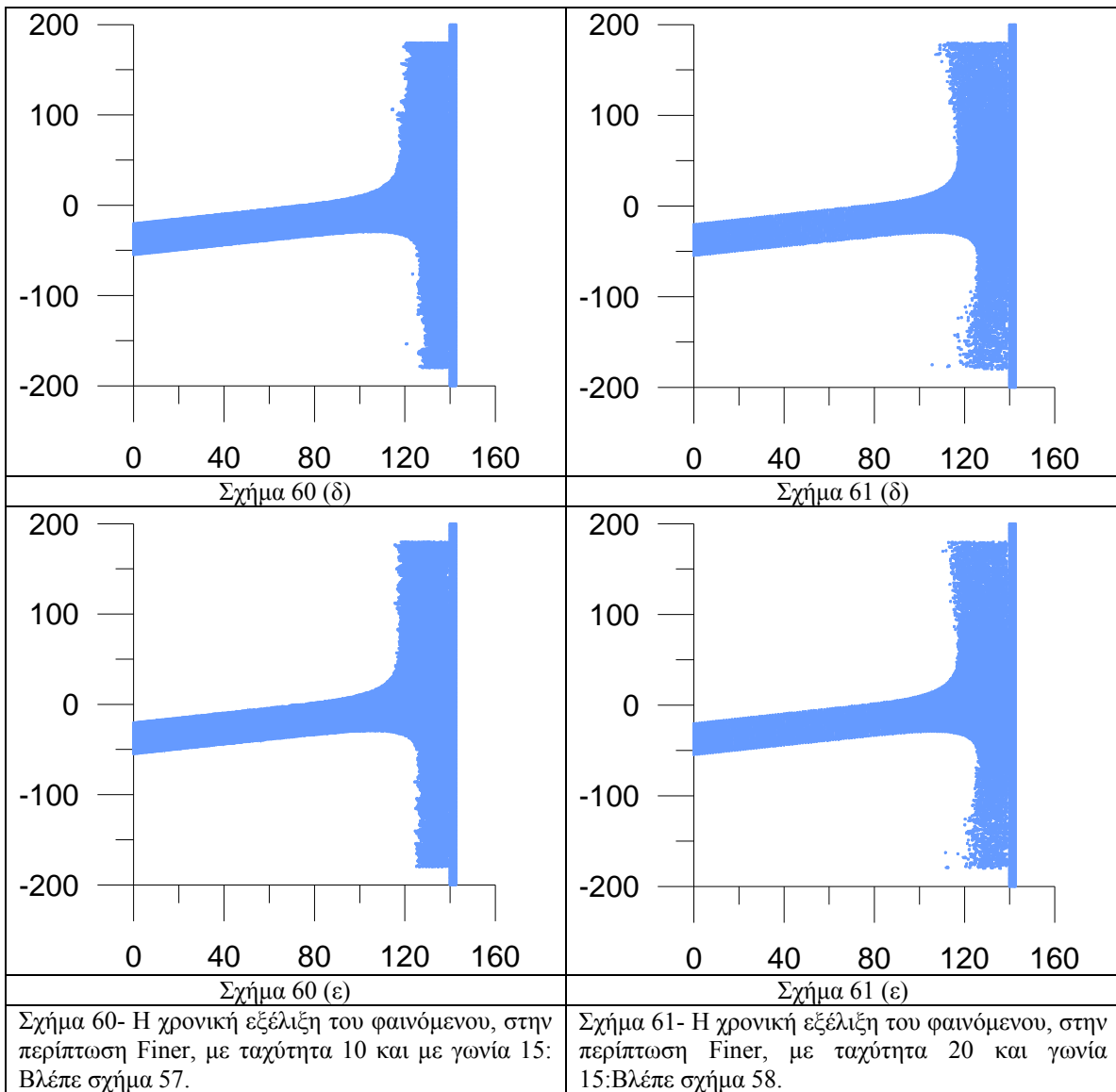
Σχήμα 59 (δ)

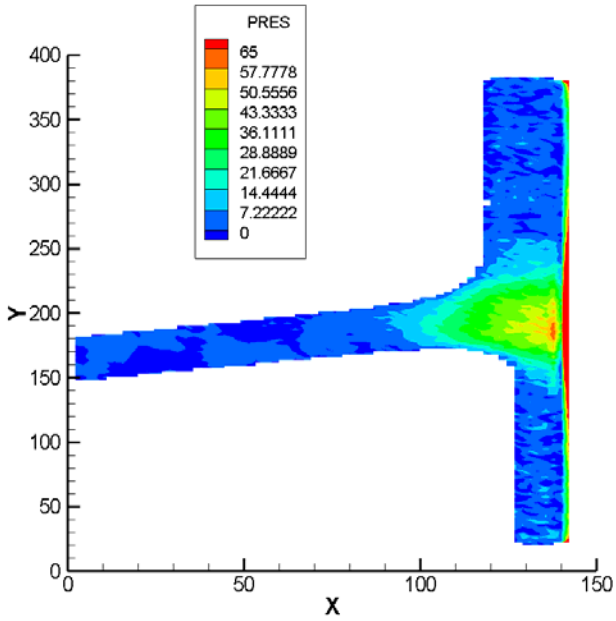
Σχήμα 58-Περίπτωση Finer, Ταχύτητα 10, γωνία 0 (α) Το contour της πίεσης, (β) Το contour της πυκνότητας, (γ) Το contour της V-ταχύτητας, (δ) Το contour της απόλυτης τιμής της ταχύτητας,

Σχήμα 59-Περίπτωση Finer, Ταχύτητα 20, γωνία 0 (α) Το contour της πίεσης, (β) Το contour της πυκνότητας, (γ) Το contour της V-ταχύτητας, (δ) Το contour της απόλυτης τιμής της ταχύτητας,

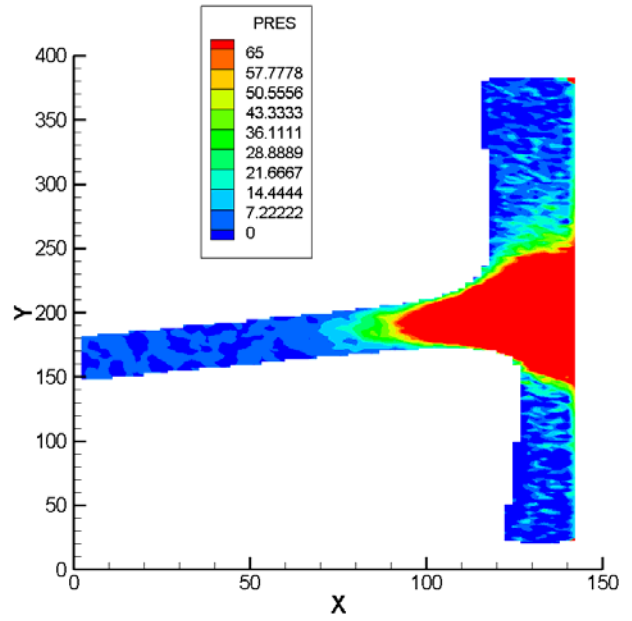
Στα Σχ. 56-57 και 58-59 βλέπουμε την σύγκριση μεταξύ των ταχυτήτων 10 και 20 για γωνία πρόσπτωσης 0. Φανερό είναι στα σχήματα των contours πως καθώς η ταχύτητα αυξάνεται το φαινόμενο εξελίσσεται με πιο έντονο ρυθμό. Αξιοπρόσεκτο επίσης είναι πως για μεγαλύτερη ταχύτητα της δέσμης η ροή χρειάζεται περισσότερο χρόνο για να γίνει μόνιμη.



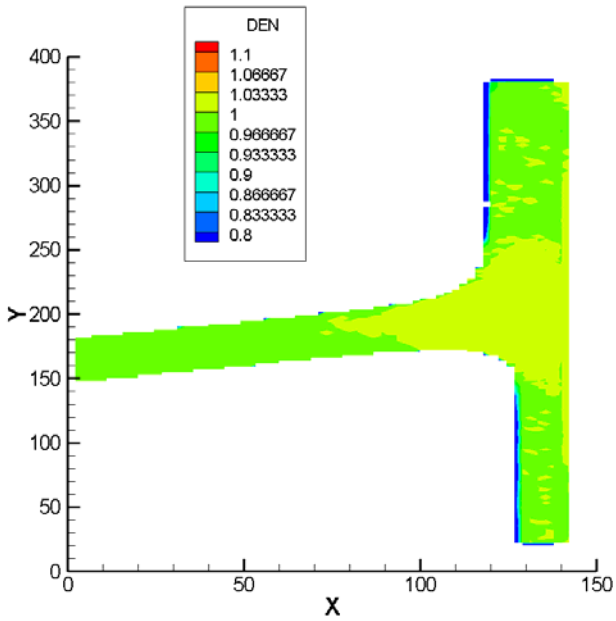




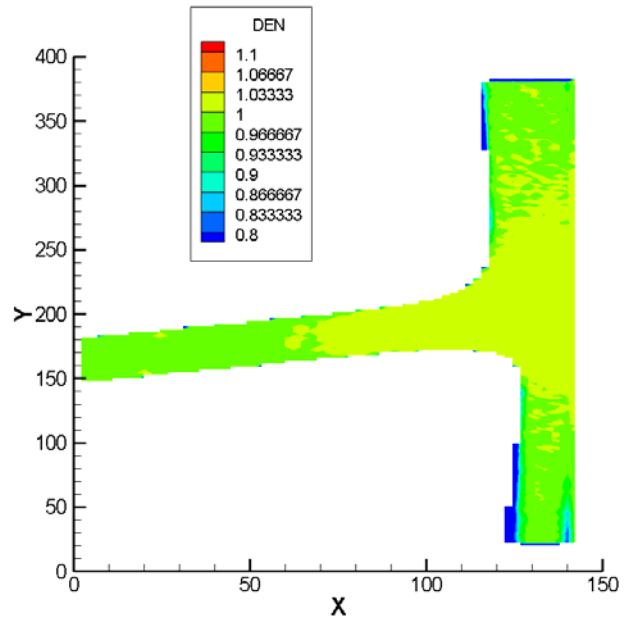
Σχήμα 62 (α)



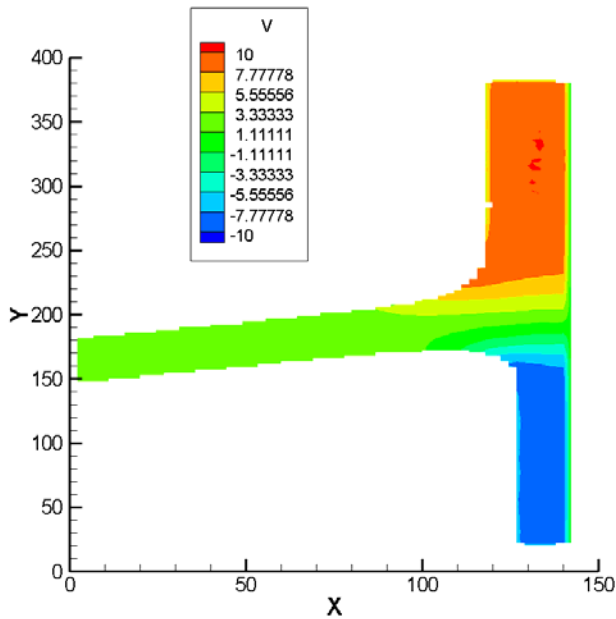
Σχήμα 63 (α)



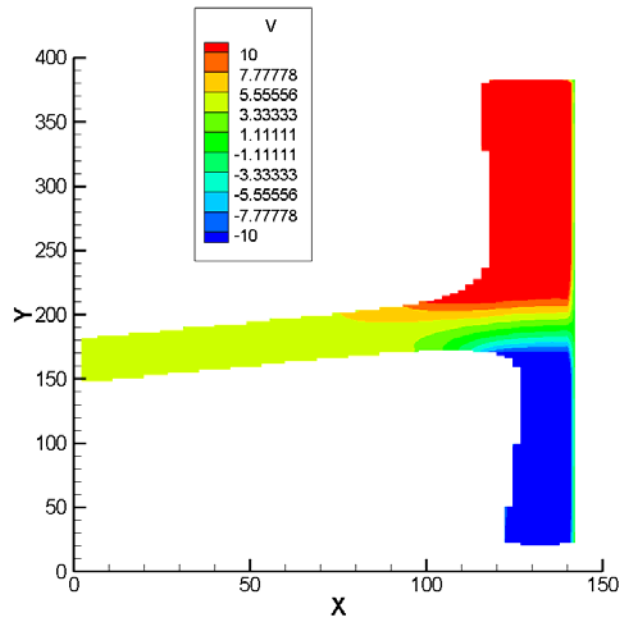
Σχήμα 62 (β)



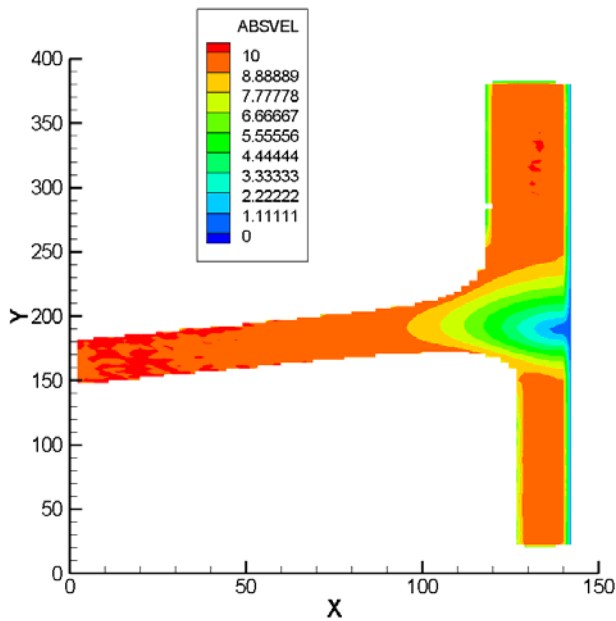
Σχήμα 63 (β)



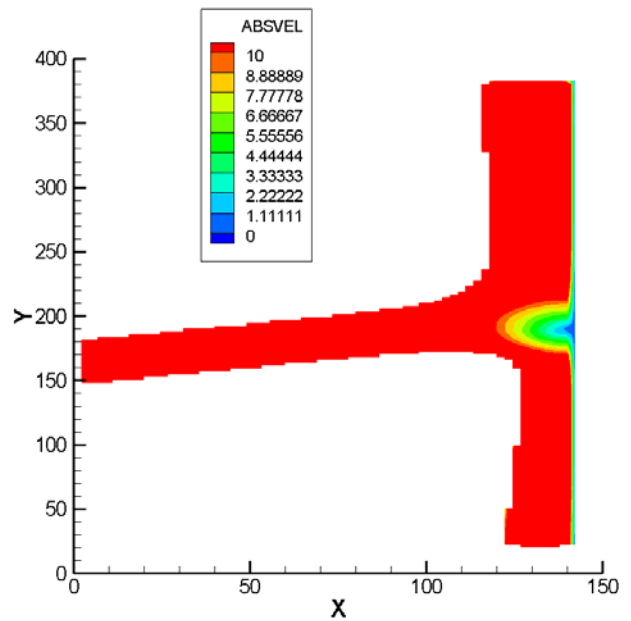
Σχήμα 62 (γ)



Σχήμα 63 (γ)



Σχήμα 62 (δ)

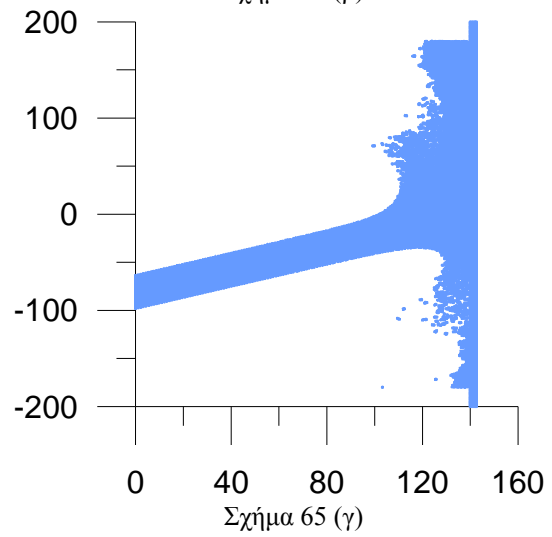
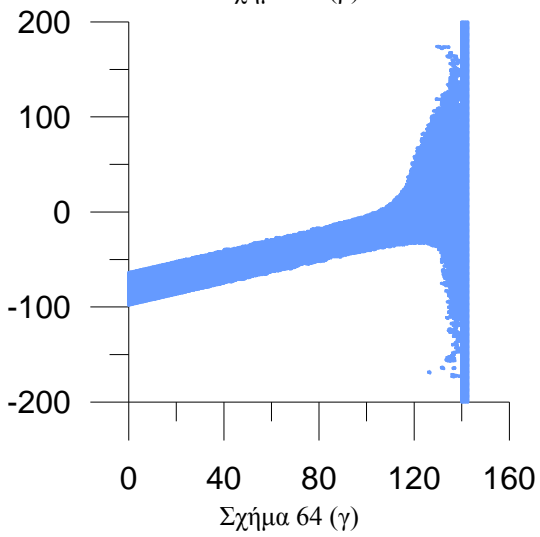
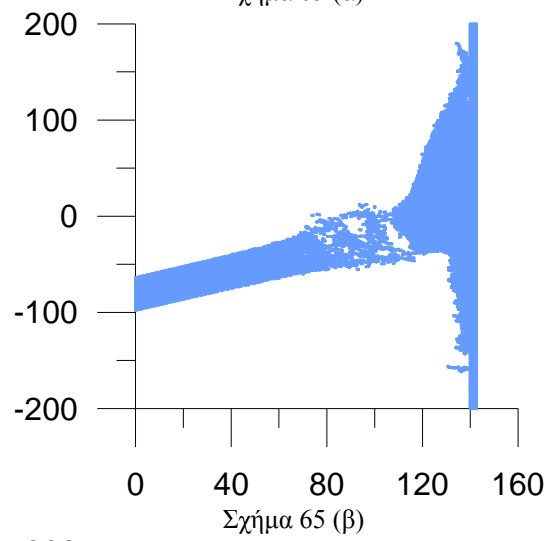
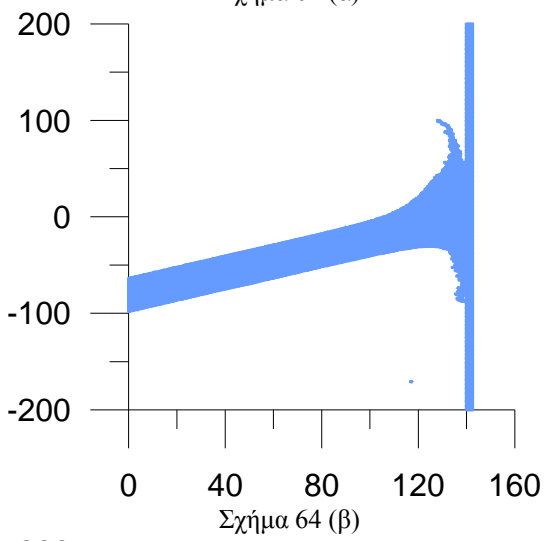
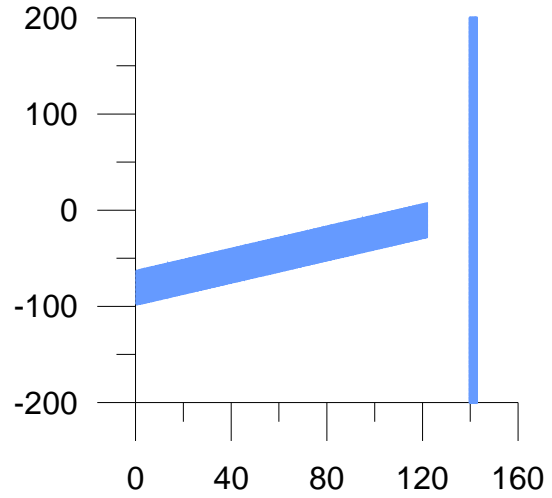
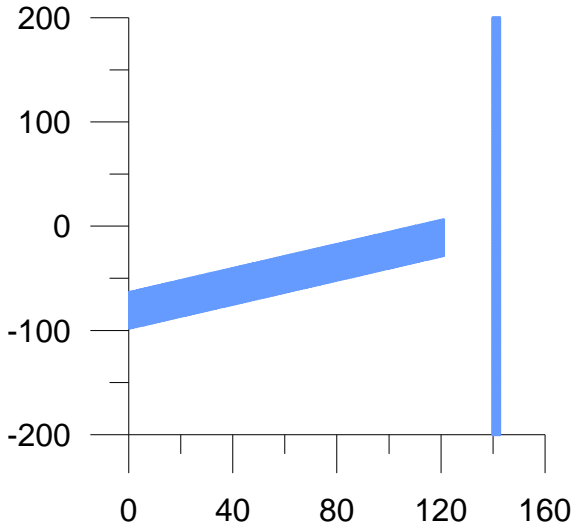


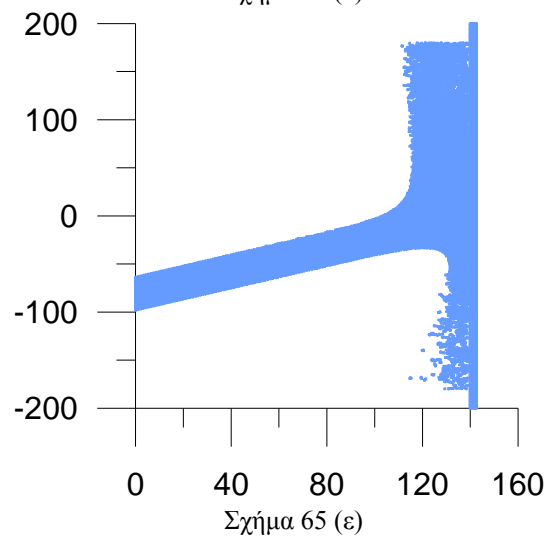
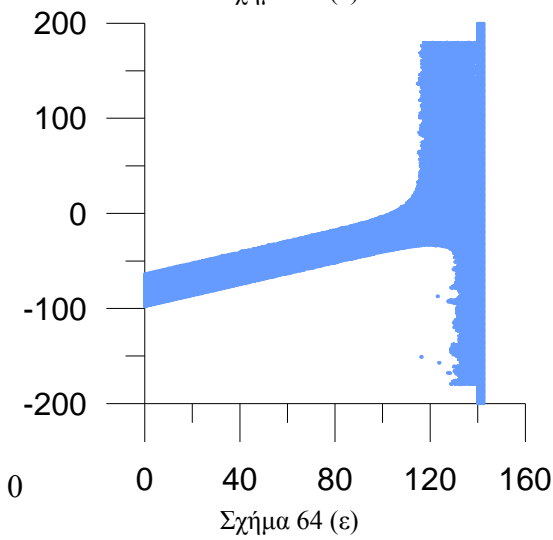
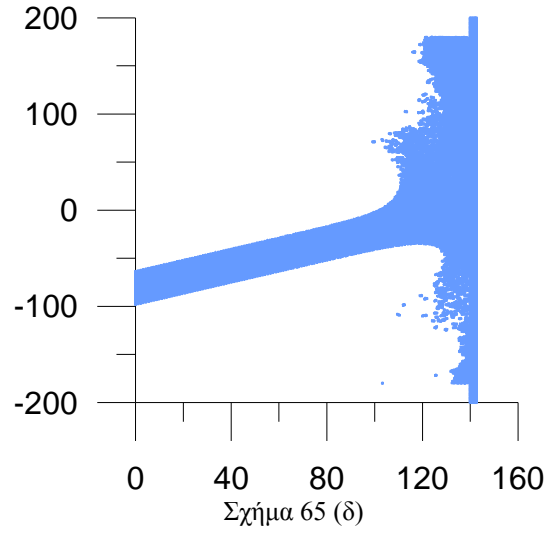
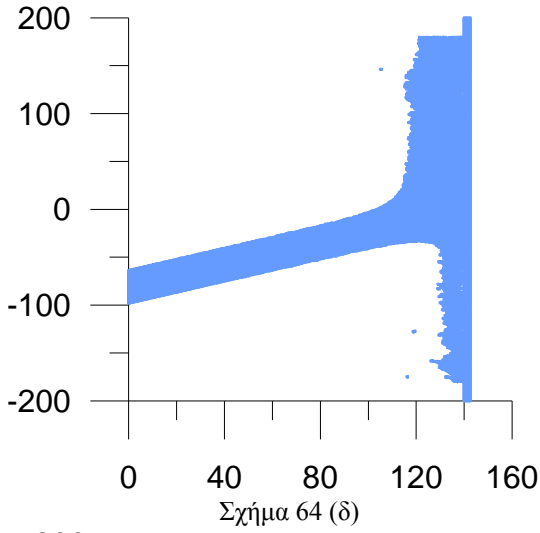
Σχήμα 63 (δ)

Σχήμα 62-Περίπτωση Finer, Ταχύτητα 10, γωνία 15, βλέπε σχήμα 58.

Σχήμα 63-Περίπτωση Finer, Ταχύτητα 20, γωνία 15 βλέπε σχήμα 59.

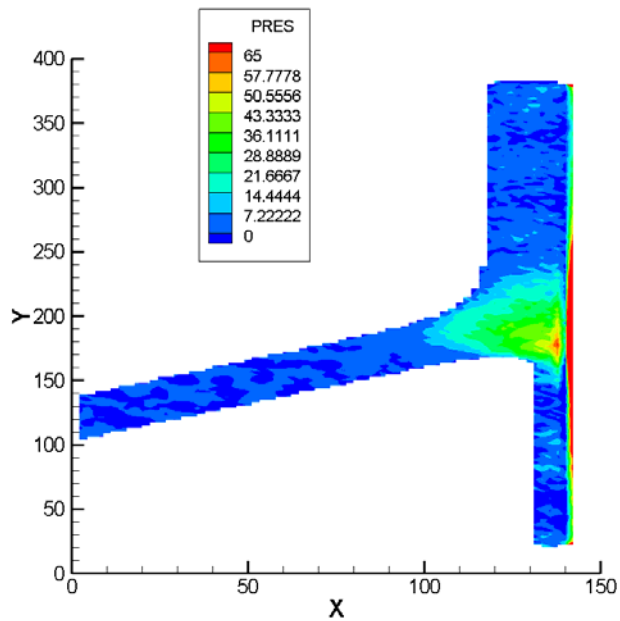
Στα Σχ. 60-61 και 62-62 βλέπουμε την σύγκριση μεταξύ των ταχυτήτων 10 και 20 για γωνία 15. Φανερό είναι στα σχήματα των contours πως καθώς η ταχύτητα αυξάνεται το φαινόμενο εξελίσσεται με πιο έντονο ρυθμό. Αξιοπρόσεκτο επίσης είναι πως για ταχύτητα 20 εμφανίζεται μια έντονη διαταραχή τη στιγμή της πρόσκρουσης, η οποία μεταδίδεται ανάντι (Σχ.61.β), και προκαλεί διαταραχή της δέσμης (Σχ. 61.γ) και καθυστέρηση ανάπτυξης μόνιμης ροής.



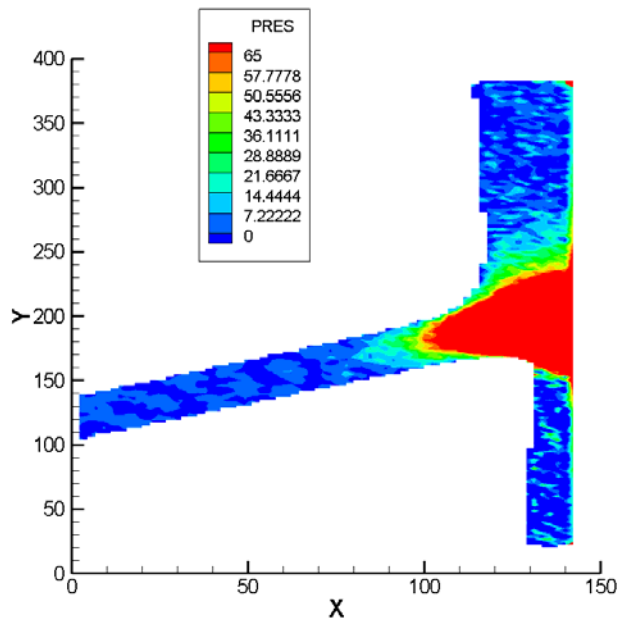


Σχήμα 64- Η χρονική εξέλιξη του φαινομένου, στην περίπτωση *Finer*, με ταχύτητα 10 και με γωνία 30: Βλέπε σχήμα 60.

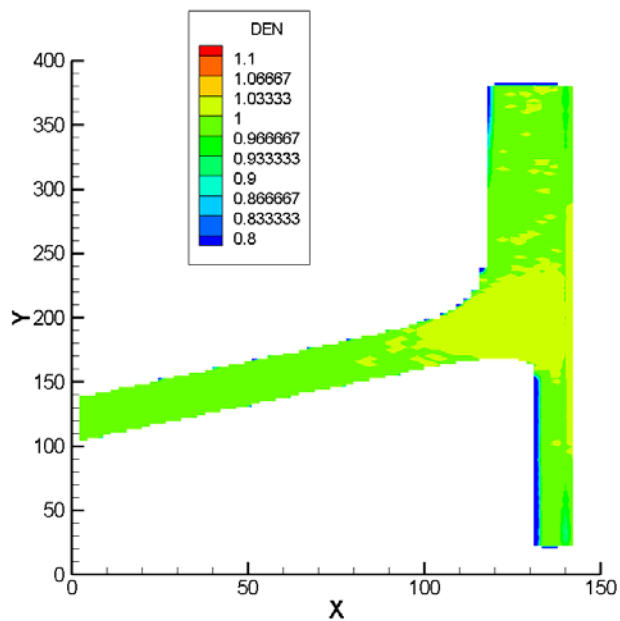
Σχήμα 65- Η χρονική εξέλιξη του φαινομένου, στην περίπτωση *Finer*, με ταχύτητα 20 και γωνία 30: Βλέπε σχήμα 61.



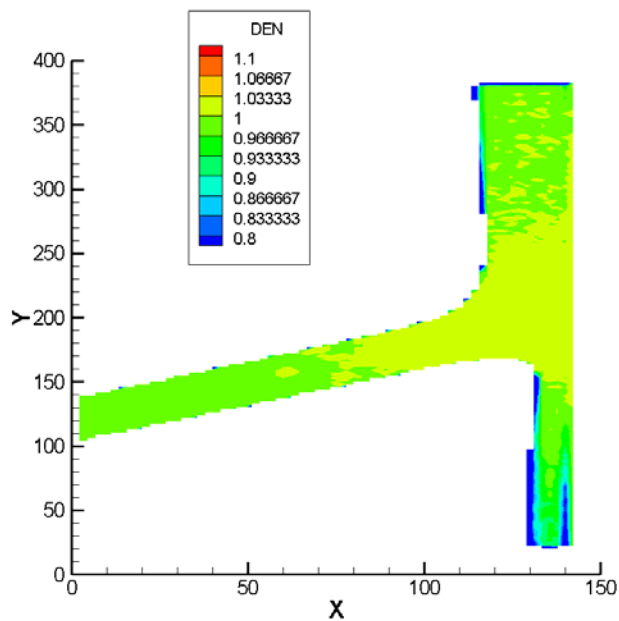
Σχήμα 66 (α)



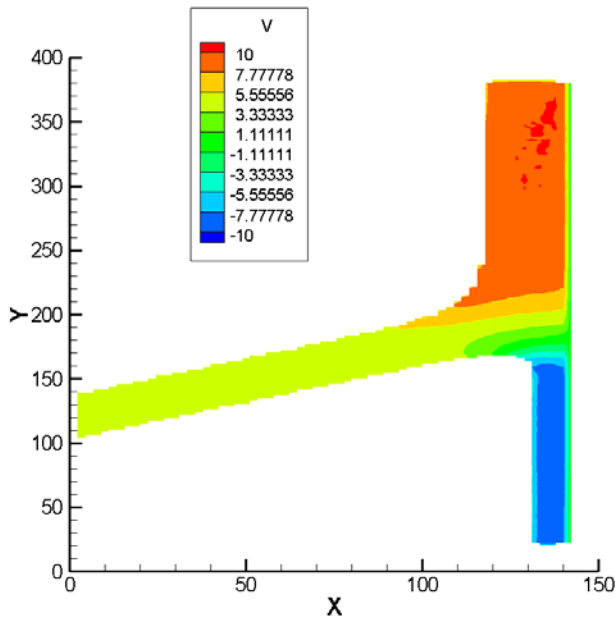
Σχήμα 67 (α)



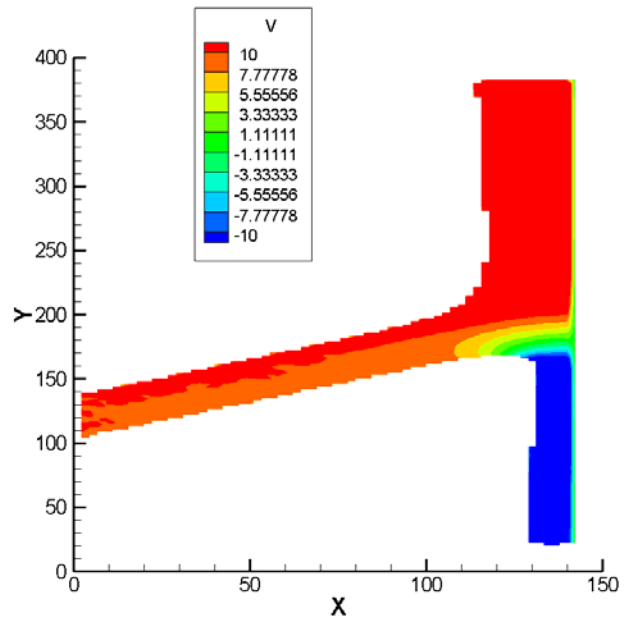
Σχήμα 66 (β)



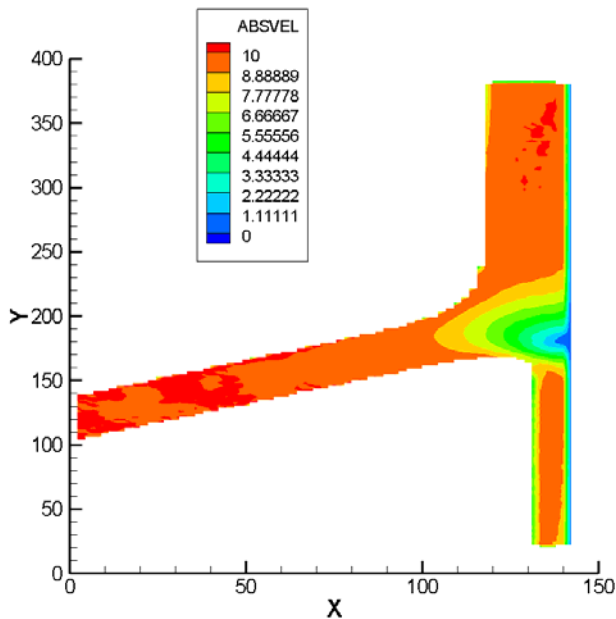
Σχήμα 67 (β)



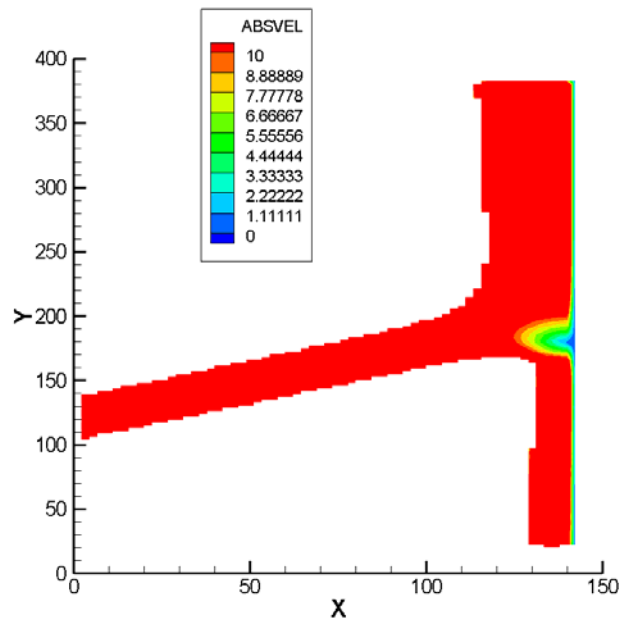
Σχήμα 66 (γ)



Σχήμα 67 (γ)



Σχήμα 66 (δ)

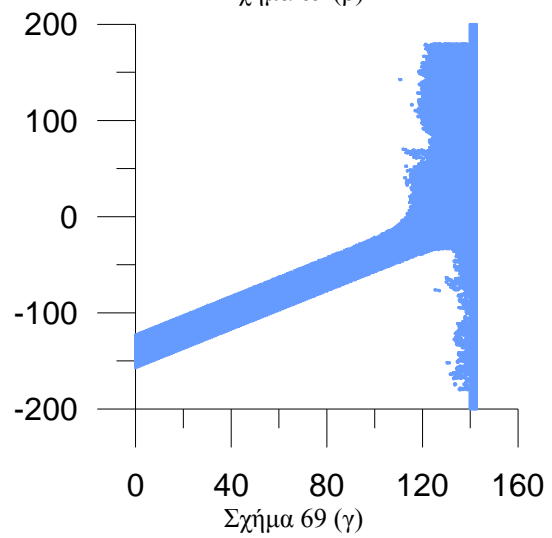
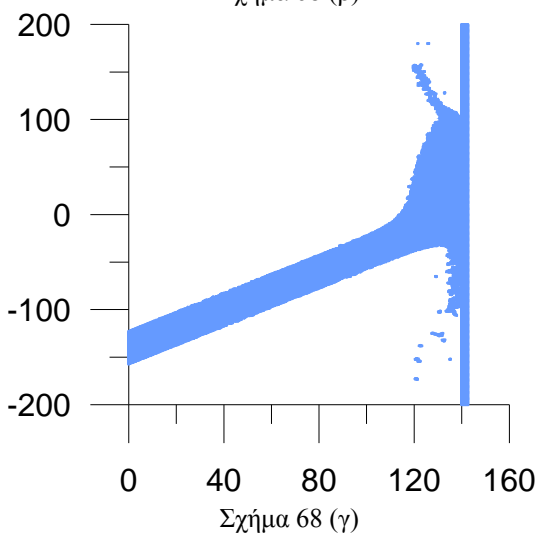
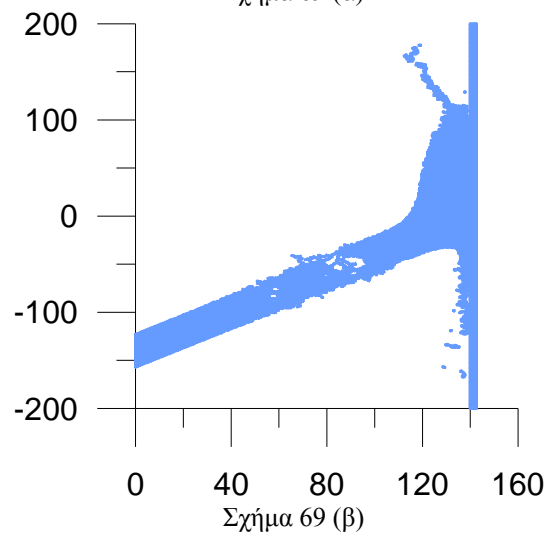
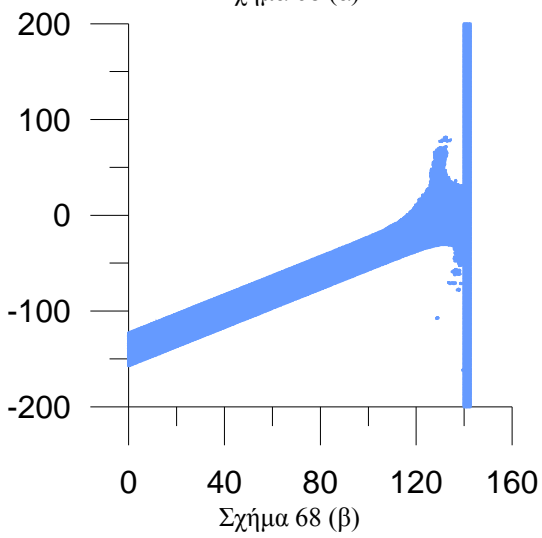
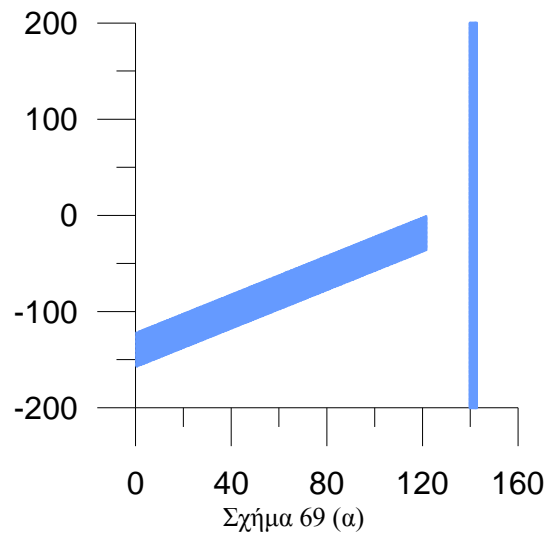
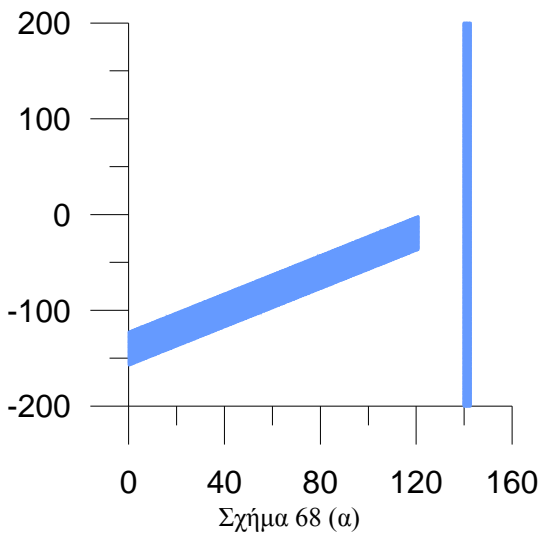


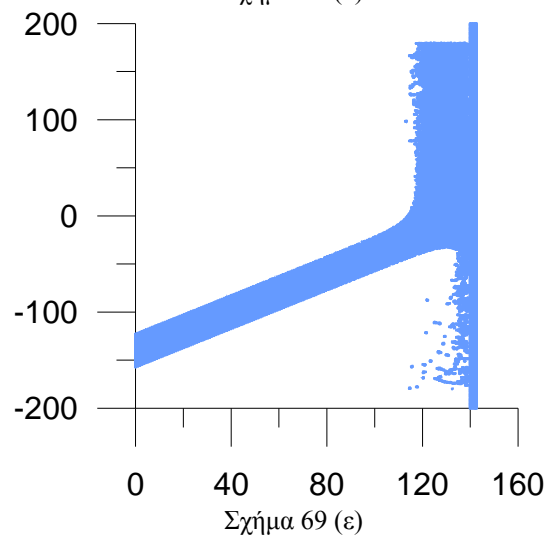
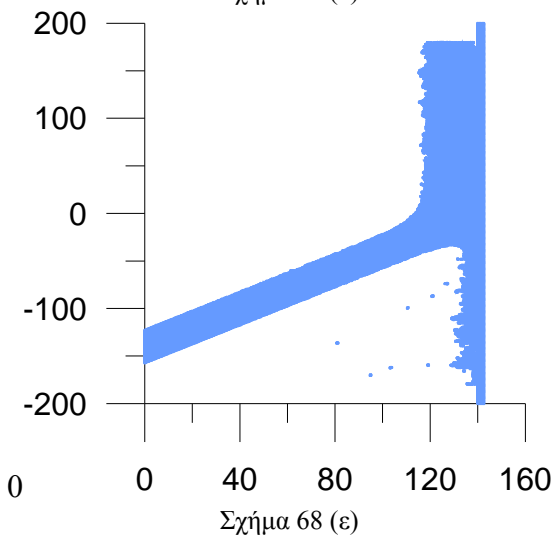
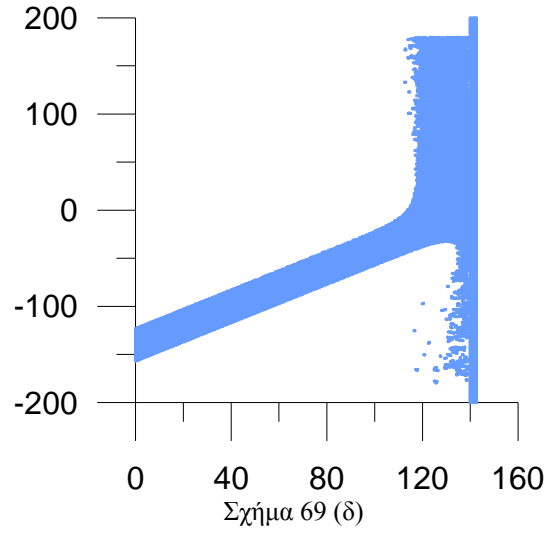
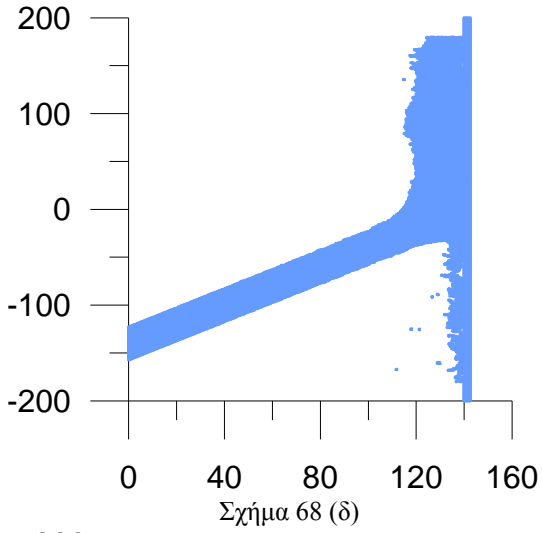
Σχήμα 67 (δ)

Σχήμα 66-Περίπτωση Finer, Ταχύτητα 10, γωνία 30, βλέπε σχήμα 62.

Σχήμα 67-Περίπτωση Finer, Ταχύτητα 20, γωνία 30, βλέπε σχήμα 63.

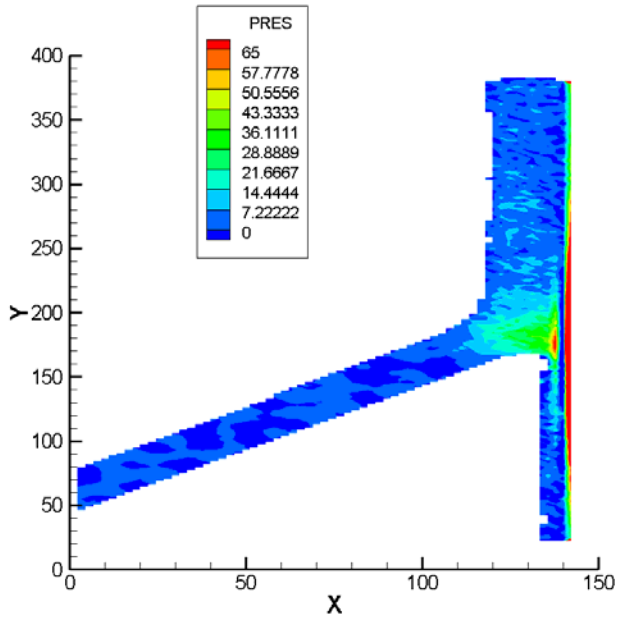
Στα Σχ. 64-65 και 66-67 βλέπουμε την σύγκριση μεταξύ των ταχυτήτων 10 και 20 για γωνία 30. Φανερό είναι στα σχήματα των contours πως καθώς η ταχύτητα αυξάνεται το φαινόμενο εξελίσσεται με πιο έντονο ρυθμό. Η διαταραχή της δέσμης ταχύτητας 20 μεταδίδεται περισσότερο ανάντι, και η μονιμοποίηση της ροής καθυστερεί περισσότερο.



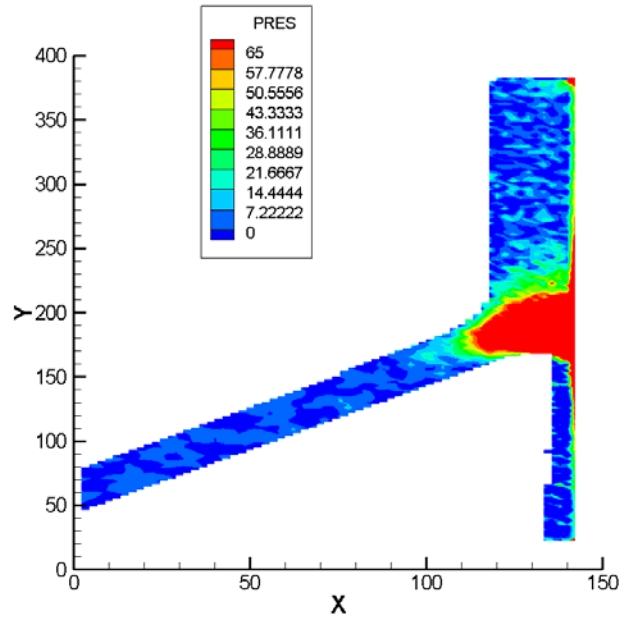


Σχήμα 68- Η χρονική εξέλιξη του φαινομένου, στην περίπτωση Finer, με ταχύτητα 10 και με γωνία 45: Βλέπε σχήμα 64.

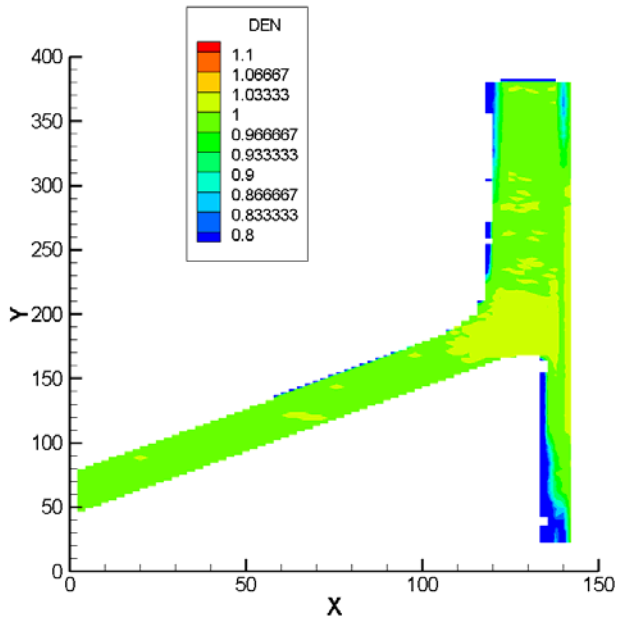
Σχήμα 69- Η χρονική εξέλιξη του φαινομένου, στην περίπτωση Finer, με ταχύτητα 20 και γωνία 45: Βλέπε σχήμα 65.



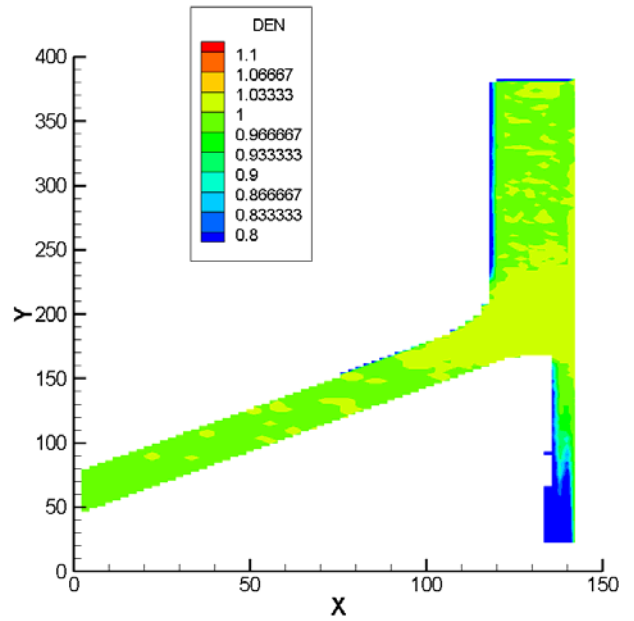
Σχήμα 70 (α)



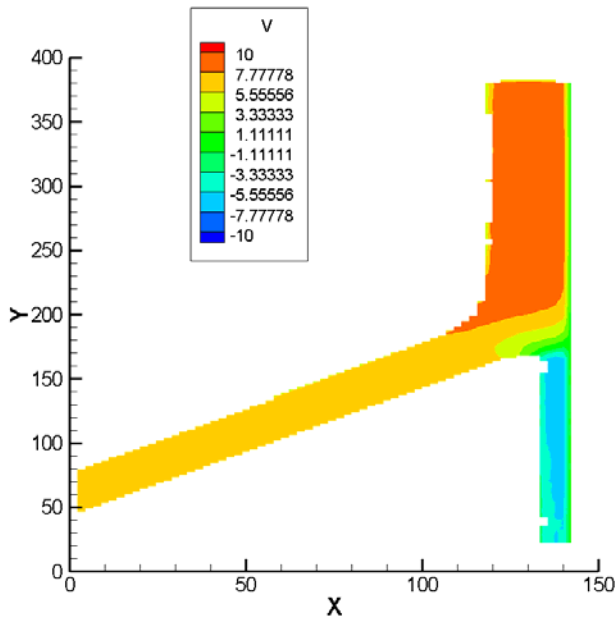
Σχήμα 71 (α)



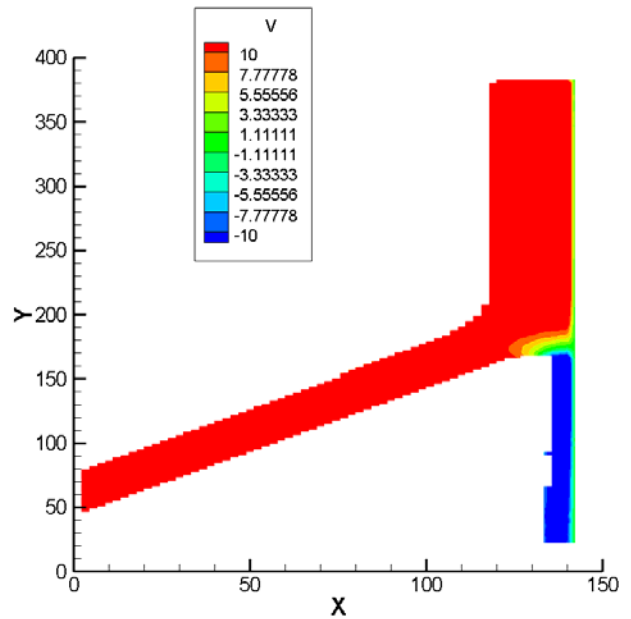
Σχήμα 70 (β)



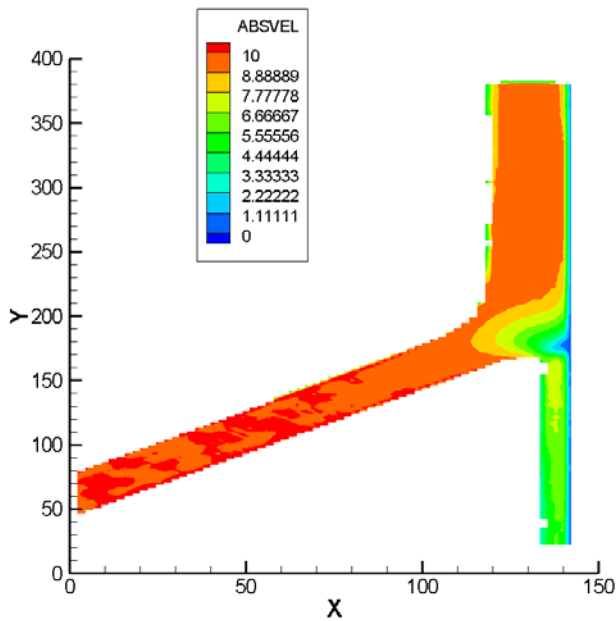
Σχήμα 71 (β)



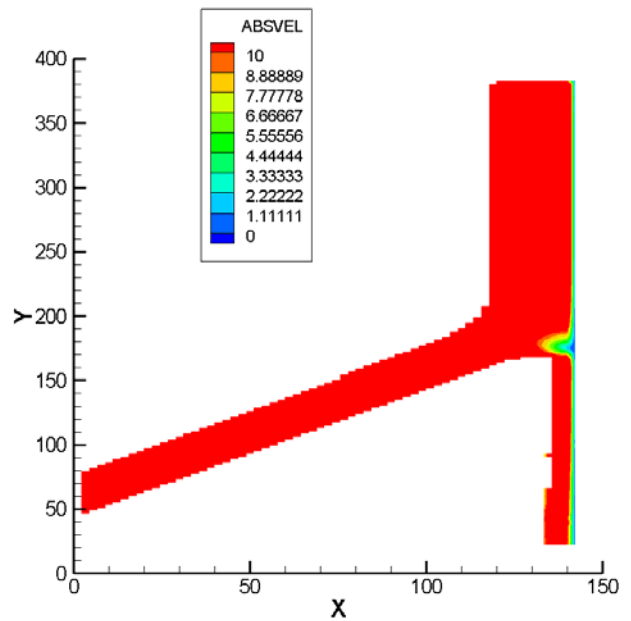
Σχήμα 70 (γ)



Σχήμα 71 (γ)



Σχήμα 70 (δ)



Σχήμα 71 (δ)

Σχήμα 70-Περίπτωση Finer, Ταχύτητα 10, γωνία 45, βλέπε σχήμα 66.

Σχήμα 71-Περίπτωση Finer, Ταχύτητα 20, γωνία 45, βλέπε σχήμα 67.

Στα Σχ. 68-69 και 70 -71 βλέπουμε την σύγκριση μεταξύ των ταχυτήτων 10 και 20 για γωνία 45. Εδώ η διαταραχή κατά την πρόσκρουση της δέσμης είναι ακόμα πιο έντονη, και εμφανίζεται ακόμη και στη μικρή ταχύτητα πρόσκρουσης (Σχ. 68)

(7.) ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΠΕΡΑΙΤΕΡΩ ΕΡΕΥΝΑ

Ο κώδικας που αναπτύχθηκε για την προσομοίωση πρόσκρουσης δέσμης ρευστού λειτουργεί ικανοποιητικά για την προσομοίωση της 2D δέσμης μη-συνεκτικού που προσκρούει σε σταθερή επίπεδη επιφάνεια. Αυτό είναι εμφανές τόσο από τα animations που παράγει ο κώδικας όσο και από τους διάφορους ελέγχους που έγιναν. Τα διαγράμματα παροχής και προφίλ ταχυτήτων αποδείχτηκαν πολύ χρήσιμα εργαλεία, για την εξακρίβωση της χρονικής στιγμής όπου η ροή πλέον μονιμοποιείται. Επίσης ιδιαίτερα χρήσιμα αποδείχτηκαν τα διαγράμματα των contours αφού εκεί μπορούν να παρατηρηθούν οι λεπτομέρειες του ροϊκού πεδίου.

Στην παραμετρική μελέτη που έγινε παρατηρήσαμε πως καθώς η γωνία πρόσκρουσης μεταβάλλεται, έντονη είναι και η διαφορά στο μέσο χρονικά πεδίο ροής που διαμορφώνεται. Αξιοπρόσεκτο επίσης είναι το γεγονός πως καθώς αυξάνεται η γωνία το πάχος της κάτω φλέβας μειώνεται και αυξάνεται στην πάνω. Από άποψη χρόνου η πιο αξιόπιστη περίπτωση (Finer) χρειάζεται αρκετό υπολογιστικό χρόνο (12 ώρες) για να δώσει αποτελέσματα σε έναν P4 PC, άρα είναι αρκετά ακριβή υπολογιστικά.

Μελλοντικά ο κώδικας πρέπει να αναπτυχθεί περαιτέρω, έτσι ώστε να μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την προσομοίωση πρόσκρουση δέσμης νερού σε πτερύγια υδροστροβίλων δράσης.. Πρέπει να εισαχθούν οι όροι του ιξώδους αφού στον συγκεκριμένο κώδικα θεωρήθηκε ατριβής ροή. Επίσης πρέπει να μοντελοποιηθεί η τύρβη και να γίνει επέκταση του αλγόριθμου σε 3 διαστάσεις.

Τέλος, πρέπει να δοκιμαστούν διάφορες οριακές συνθήκες, και να μειωθούν οι υπολογιστικές απαιτήσεις, κυρίως σε υπολογιστικό χρόνο.

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.

- 1.) Monaghan JJ (1985), Particle methods for hydrodynamics, *Comput. Phys. Rep.* 3,71–124.
- 2.) Feldneier H and Schnack J (2000). Molecular dynamics for fermions. Technical report, Gesellschaft fur Schwerionenforschung mbH.
- 3.) Kobrak MN, and Bittner ER (2000), Quantum molecular dynamics study of polaron recombination in conjugated polymers, *Phys. Rev. B* 62, 11473–11486.
- 4.) Krumrine JR, Jang S, Alexander MH, and Voth GA (2000), Quantum molecular dynamics and spectral simulation of a boron impurity in solid para-hydrogen, *J. Chem. Phys.* 113, 9079–9089.
- 5.) Kihe C, Yildirim T, Mehrez H, and Ciraci S (2000), A first-principles study of the structure and dynamics of $C8H8$, $Si8H8$, and $Ge8H8$ moleculars, *J. Phys. Chem. A* 104, 2724–2728.
- 6.) Hedman F, and Laaksonen A (2000), Parallel aspects of quantum molecular dynamics simulations of liquids, *Comput. Phys. Commun.* 128, 284–294.
- 7.) Hong J and Zhao XS (2000), New propagators for quantum-classical molecular dynamics simulations, *J. Chem. Phys.* 113, 930–935.
- 8.) Rapaport DC (1995), *The Art of Molecular Dynamics Simulation*, Cambridge Univ Press, Cambridge, UK.
- 9.) Allen MP and Tildesley DJ (1987), *Computer Simulation of Liquids*, Oxford Univ Press, Oxford, UK.
- 10.) Allen MP and Tildesley DJ ed, (1993) *Computer Simulation of Chemical Physics*, Kluwer Academic Pub, Dordrecht.
- 11.) Catlow CRA, Parker SC, and Allen MP ed, (1990), *Computer Modelling of Fluids Polymers and Solids*, Kluwer Academic Pub, Dordrecht.
- 12.) Ciccotti G and Hoover WG (eds) (1986), *Molecular Dynamics Simulation of Statistical Mechanical Systems*, North-Holland, Amsterdam.
- 13.) Ciccotti G, Frenkel D, and McDonald IR (eds) (1987), *Simulation of Liquids and Solids. Molecular Dynamics and Monte Carlo Methods in Statistical Mechanics*, North-Holland, Amsterdam. 2.) Benz W (1990), Smooth particle hydrodynamics: a review. In: *Numerical Modeling of Non-linear Stellar Pulsation: Problems and Prospects*, Kluwer Academic, Boston.

- 14.) Bird GA (ed) (1994), *Molecular Gas Dynamics and the Direct Simulation of Gas Flow*, Oxford Univ Press, Oxford, UK.
- 15.) Oran ES, Oh CK, and Cybyk BZ (1998), Direct simulation Monte Carlo: Recent advances and applications, *Annu. Rev. Fluid Mech.* 30, 403–441.
- 16.) Tunon I, Martins-Costa MTC, Millot C, Ruiz-Lopez MF, and Rivail JL (1996), A coupled density functional-molecular mechanics Monte Carlo simulation: the water molecule in liquid water, *J. Comput. Chem.* 17, 19–29.
- 17.) Gross WJ, Vasileska D, and Ferry DK (1999), A novel approach for introducing the electron-electron and electron-impurity interactions in particle-based simulations, *IEEE Electron Device Lett.* 20, 453–455.
- 18.) Drovetsky BY, Chu JC, and Mak CH (1998), Computer simulations of self-avoiding polymerized membranes, *J. Chem. Phys.* 108, 6554–6557.
- 19.) Acioli PH (1997), Review of quantum monte carlo methods and their applications, *J. Mol. Struct.* 394, 75–85.
- 20.) Binder K (ed) (1988), *The Monte Carlo Method in Condensed Matter Physics*, Springer, Berlin, Heidelberg.
- 21.) Binder K (ed) (1992), *The Monte Carlo Simulation in Statistical Physics*, Springer, Berlin, Heidelberg.
- 22.) Baer R (2000), Ab-initio molecular deformation barriers using auxiliary-field quantum Monte Carlo with application to the inversion barrier of water, *Chem. Phys. Lett.* 324, 101–107.3.) Monaghan JJ (1992), Smoothed particle hydrodynamics, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* 30, 543–574.
- 23.) Frisch U, Hasslacher B, and Pomeau Y (1986), Lattice gas cellular automata for the Navier-Stokes equations, *Phys. Rev. Lett.* 56, 1505.
- 24.) Kadanoff L (1986), On two levels, *Phys. Today* 39, 7–9.
- 25.) Kadanoff L, McNamara GR, and Zanetti G (1987), A Poiseuille viscometer for lattice gas automata, *Complex Syst.* 1, 791.
- 26.) Kadanoff L, McNamara GR, and Zanetti G (1989), From automata to fluid flow: comparisons of simulation and theory, *Phys. Rev. A* 40, 4527.
- 27.) Henon M (1987), Viscosity of a lattice gas, *Complex Syst.* 1, 763.

- 28.) Nayroles B, Touzot G, and Villon P (1992), Generalizing the finite element method: Diffuse approximation and diffuse elements, *Computational Mech., Berlin* 10, 307–318.
- 29.) Breitkopf P, Touzot G, and Villon P (1998), Consistency approach and diffuse derivation in element free methods based on moving least squares approximation, *Comp. Assist. Mech. Eng. Sci.* 5, 479–501 ISSN:1232-308X.
- 30.) Breitkopf P, Touzot G, and Villon P (2000), Double grid diffuse collocation method. *Computational Mech., Berlin* 25, 199–206.
- 31.) Breitkopf P, Rassineux A, Touzot G, and Villon P (2000), Explicit form and efficient computation of MLS shape function and their derivatives, *Int. J. Numer. Methods Eng.* 48, 451–456.
- 32.) Belytschko T, Lu YY, and Gu L (1994), Element free galerkin methods. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 37, 229–256.
- 33.) Belytschko T, Krongauz Y, Organ D, Fleming M, and Krysl P (1996), Meshless methods: An overview and recent developments, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 139, 3–48.
- 34.) Belytschko T, Krongauz Y, Dolbow J, and Gerlach C (1998), On the completeness of meshfree particle methods, *Int. J. Numer. Methods Eng.* 43, 785–819.
- 35.) Belytschko T, Organ D, and Gerlach C (2000), Element-free Galerkin methods for dynamic fracture in concrete, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 187, 385–399.
- 36.) Lu YY, Belytschko T, and Tabbara M (1995), Element-free Galerkin method for wave propagation and dynamic fracture, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 126, 131–153.
- 37.) Liu WK, Adee J, and Jun S (1993), Reproducing kernel and wavelets particle methods for elastic and plastic problems, In: *Advanced Computational Methods for Material Modeling*, AMD 180/PVP 268 ASME, 175–190.
- 38.) Liu WK and Oberste-Brandenburg C (1993), Reproducing kernel and wavelets particle methods, In: *Aerospace Structures: Nonlinear Dynamics and System Response*, AD 33 ASME, 39–56.
- 39.) Liu WK, Jun S, and Zhang YF (1995), Reproducing kernel particle methods, *Int. J. Numer. Methods Eng.* 20, 1081–1106.
- 40.) Liu WK, Jun S, Li S, Adee J, and Belytschko T (1995), Reproducing kernel particle methods for structural dynamics, *Int. J. Numer. Methods Eng.* 38, 1655–1679.

- 41.) Liu WK, Chen Y, Chang CT, and Belytschko T (1996), Advances in multiple scale kernel particle methods, *Computational Mech., Berlin* 18, 73–111.
- 42.) Liu WK, Chen Y, Jun S, Chen JS, Belytschko T, Uras RA, and Chang CT (1996), Overview and applications of the reproducing kernel particle methods, *Arch. Comput. Mech. Eng.: State of Rev.* 3, 3–80.
- 43.) Liu WK, Li S, and Belytschko T (1997), Moving least square reproducing kernel method Part I: Methodology and convergence, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 143, 422–453.
- 44.) Chen JS, Pan C, Wu CT, and Liu WK (1996), Reproducing kernel particle methods for large deformation analysis of nonlinear structures, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 139, 195–227.
- 45.) Chen JS, Wu CT, Yoon S, and You Y (2001), A stabilized conforming nodal integration for Galerkin meshfree methods, *Int. J. Numer. Methods Eng.* 50, 435–456.
- 46.) Duarte CA, and Oden JT (1996), hp Clouds—an hp meshless method, *Numer. Methods Partial Diff. Eqs.* 12, 673–705.
- 47.) Duarte CA, and Oden JT (1996), An hp adaptive method using clouds, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 139, 237–262.
- 48.) Liszka T, Duarte CAM, and Tworzydło WW (1996), hp-meshless cloud method, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 139, 263–288.
- 49.) Oden JT, Duarte CAM, and Zienkiewicz OC (1998), A new Cloudbased hp finite element method, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 153, 117–126.
- 50.) Babuška I and Melenk JM (1997), The partition of unity method, *Int. J. Numer. Methods Eng.* 40, 727–758.
- 51.) Babuška I and Zhang Z (1998), The partition of unity method for the elastically supported beam, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 152, 1–18.
- 52.) Melenk JM and Babuška I (1996), The partition of unity finite element method: Basic theory and applications, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 139, 289–314.
- 53.) Atluri SN, and Zhu T (1998), A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach to nonlinear problems in computer modeling and simulation, *Comput. Model. Simul. Eng.* 3, 187–196.
- 54.) Atluri SN, Kim HG, and Cho JY (1999), A critical assessment of the truly meshless local Petrov-Galerkin ~MLPG! and local boundary integral equation ~LBIE! methods, *Computational Mech., Berlin* 24, 348–372.

- 55.) Atluri SN, Cho JY, and Kim HG (1990), Analysis of thin beams, using the meshless local Petrov-Galerkin method, with generalized moving least square interpolations, *Computational Mech., Berlin* **24**, 334–347.
- 56.) Atluri SN and Zhu T (2000), The meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach for solving problems in elasto-statics, *Computational Mech., Berlin* **25**, 169–179.
- 57.) Furukawa T, Yang C, Yagawa G, and Wu CC (2000), Quadrilateral approaches for accurate free mesh method, *Int. J. Numer. Methods Eng.* **47**, 1445–1452.
- 58.) Shirazaki M and Yagawa G (1999), Large-scale parallel flow analysis based on free mesh method: A virtually meshless method, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* **174**, 419–431.
- 59.) Yagawa G and Yamada T (1996), Free mesh method: A new meshless finite element method, *Computational Mech., Berlin* **18**, 383–386.
- 60.) Yagawa G and Yamada T (1998), Meshless method on massively parallel processors with application to fracture mechanics, *Key Eng. Mater.* **145–149**, 201–210.
- 61.) Yagawa G and Furukawa T (2000), Recent development of free mesh method, *Int. J. Numer. Methods Eng.* **47**, 1419–1417.
- 62.) Cushman-Roisin B, Esenkov OE, and Mathias BJ (2000), A particle-in-cell method for the solution of two-layer shallow-water equations, *Int. J. Numer. Methods Fluids* **32**, 515–543.
- 63.) Munz CD, Schneider R, Sonnendrücker E, Stein E, Voss U, and Westermann (1999), A finite-volume particle-in-cell method for the numerical treatment of Maxwell-Lorentz equations on boundary-fitted meshes, *Int. J. Numer. Methods Eng.* **44**, 451–487.
- 64.) Munz CD, Schneider R, and Voss U (1999), A finite-volume particle-in-cell method for the numerical simulation of devices in pulsed power technology, *Surv. Math. Ind.* **8**, 243–257.
- 65.) Benz W and Asphaug E 1994 Impact simulations with fracture: I. Method and tests *Icarus* **123** 98–116.
- 66.) Gingold RA and Monaghan JJ (1977), Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **181**, 375–389.
- 67.) Rosenblatt M 1956 Remarks on some nonparametric estimates of a density function *Ann. Math. Stat.* **27** 832–7.

- 68.) Parzen E 1962 On estimations of a probability density and mode *Ann. Math. Stat.* 33 1065–76.
- 69.) Boneva L I, Kendall D and Stepanov I 1971 Spline transformations: three new diagnostic aids for statistical data analysis *J. R. Stat. Soc. B* 33 1–37.
- 70.) Gingold R A and Monaghan J J 1978 Binary fission in damped rotating polytropes *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 184 481–99.
- 71.) D. Violeau and R. Issa, Numerical modeling of complex turbulent free-surface flows with the SPH method: an overview, *Int. J. Numer. Meth. Fluids* (2007) 53: pp. 277-304.
- 72.) Hoover W G 1998 Isomorphism linking smooth particles and embedded atoms *Physica A* 260 244–54.
- 73.) HooverWG, HooverCCand MerrittEC2004 Smooth particle applied mechanics: conservation of angular momentum with tensile stability and velocity averaging *Phys. Rev. E* 69 016702-1-10.
- 74.) Gingold R A and Monaghan J J 1979 A numerical study of the Roche and Darwin problems for polytropic stars *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 188 45–58.
- 75.) Gingold R A and Monaghan J J 1980 The Roche problem for polytropes in central orbits *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 191 897–924.
- 76.) Springel V and Hernquist L 2002 Cosmological smoothed particle hydrodynamics simulations: the entropy equation *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 333 649–64.
- 77.) Monaghan J J 2002 SPH compressible turbulence *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 335 843–52.
- 78.) Monaghan J J and Price D J 2001 Variational principles for relativistic smoothed particle hydrodynamics *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 328 381–92.
- 79.) PriceDJ and Monaghan J J 2004a Smoothed particle magnetohydrodynamics: I. Algorithms and tests in one dimension *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 348 123–38.
- 80.) Price D J and Monaghan J J 2004b Smoothed particle magnetohydrodynamics: II. Variational principles and variable smoothing length terms *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 348 139–52.
- 81.) Bonet J and Lok T-S L 1999 Variational and momentum preservation aspects of smooth particle hydrodynamic formulations *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 180 97–115.

- 82.) Bonet J and Kulasegaram S 2000 Correction and stabilization of smooth particle hydrodynamics methods with applications in metal forming simulations *Int. J. Numer. Methods Eng.* 47 1189–214.
- 83.) Bonet J and Kulasegaram S 2001 Remarks on tension instability of Eulerian and Lagrangian corrected smooth particle hydrodynamics (CSPH) methods *Int. J. Numer. Methods Eng.* 52 1203–20.
- 84.) Benz W, Slattery W L and Cameron A G W 1986 The origin of the moon and the single impact hypothesis *Icarus* 66 515–35.
- 85.) Bate M R, Bonnell I A and Price N M 1995 Modelling accretion in protobinary systems *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 277 362–76.
- 86.) BateMR, Bonnell I A and Bromm V 2003 The formation of a star cluster predicting the properties of stars and Brown Dwarfs *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 399 577–99.
- 87.) Hernquist L and Katz N 1989 TREESPH—A unification of SPH with the hierarchical tree method *Astrophys. J. (Suppl.)* 70 419–45.
- 88.) Couchman H M P, Thomas P A and Pearce F R 1995 HYDRA: an adaptive mesh implementation of P3M—SPH *Astrophys. J.* 452 797–813.
- 89.) Springel V and Hernquist L 2002 Cosmological smoothed particle hydrodynamics simulations: the entropy equation *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 333 649–64.
- 90.) Marri S and White S D M 2003 Smoothed particle hydrodynamics for galaxy-formation simulations: improved treatments of multiphase gas, of star formation and of supernovae feedback *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 345 561–74.
- 91.) Monaghan J J 1994 Simulating free surface flows with SPH *J. Comput. Phys.* 110 399–406.
- 92.) Monaghan J J and Price D J 2004 Toy stars in one dimension *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 350 1449–56.
- 93.) Colagrossi A, Lugni C, Douset V, Bertram V and Faltinsen O 2003 Numerical and experimental study of sloshing in partially filled rectangular tanks 6th Numerical Towing Tank Symp. (Rome, Italy).
- 94.) J.C. Marongiu, F. Leboeuf Jean M. Favre E. Parkinson Numerical simulation of the flow in a Pelton turbine using the meshless method SPH.
- 95.) Monaghan J J and Kos A 1999 Solitary waves on a Cretan beach *J. Waterways Port Coastal Ocean Eng.* 1111 145–54.

- 96.) Colagrossi A 2004 Dottorato di Ricerca in Meccanica Teorica ed Applicata XVI CICLO A meshless Lagrangian method for free-surface and interface flows with fragmentation PhD Thesis Universita di Roma, La Sapienza.
- 97.) Cleary P W and Ha J, Modelling the High Pressure Die Casting Process Using SPH.
- 98.) Libersky L and Petschek A G 1991 Smooth particle hydrodynamics with strength of materials Advances in Free Lagrange Methods ed H E Trease and M J Fritts (Springer).
- 99.) Benz W and Asphaug E 1994 Impact simulations with fracture: I. Method and tests Icarus 1233 98–116.
- 100.) Benz W and Asphaug E 1995 Simulations of brittle solids using smoothed particle hydrodynamics Comput. Phys. Commun. 87 253–65.
- 101.) Michel P, Benz W and Richardson D 2004 Catastrophic disruption of asteroids and family formation: a review of numerical simulations, including both fragmentation and gravitational reaccumulation Planet. Space Sci. 52 1109–17.
- 102.) Gray J, Monaghan J J and Swift R P 2001 SPH elastic dynamics Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 190 41–62.
- 103.) Gray J A and Monaghan J J 2004 Numerical modelling of stress fields and fracture around magma chambers Volcanology Geothermal Res. 135 259–83.
- 104.) Dilts G A 1999 Moving least squares hydrodynamics: consistency and stability Int. J. Numer. Methods 44 1115–55.
- 105.) Cleary P W and Monaghan J J 1999 Conduction modelling using smoothed particle hydrodynamics J. Comput. Phys. 148 227–64.
- 106.) Gordon R. Johnson, Robert A. Stryk, Stephen R. Beissel, SPH for high velocity impact computations, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 139 (1996) 347-373.
- 107.) P. Cleary, J. Ha, V. Alguine and T. Nguyen, Flow modeling in casting processes, Applied Mathematical Modelling 26 (2002) pp. 171-190.
- 108.) Morris JP, Fox PJ, Zhu Y. Modelling low Reynolds number incompressible flows using SPH. *Journal of Computational Physics* 1997; **136**:214–226.
- 109.) Issa R. Numerical assessment of the smoothed particle hydrodynamics gridless method for incompressible flows and its extension to turbulent flows. *Ph.D. Thesis Report*, Department of Mechanical, Aerospace and Manufacturing Engineering, University of Manchester, U.K., 2005.

- 110.) Shao S, Gotoh H. Simulating coupled motion of progressive wave and floating curtain wall by SPH-LES model. *Coastal Engineering Journal* 2004; **45**:171–202.
- 111.) P. Reichl, P. Morris, K. Hourigan, M. Thompson and S. Stoneman, Smooth particle hydrodynamic simulation of surface coating, *Applied Mathematical Modelling* 22 (1998) pp. 1037-1045.
- 112.) Colagrossi and M. Landrini, Numerical simulation of interfacial flows by smoothed particle hydrodynamics, *Journal Of Computational Physics* 191 (2003) pp. 448-475.
- 113.) G. Oger, M. Doring, B. Alessandrini and P. Ferrant, Two-dimensional SPH simulations of wedge water entries, *Journal of Computational Physics* 213 (2006) pp. 803-822.
- 114.) F. Jiang, M. Oliveira and A. Sousa, SPH simulation of low Reynolds number planar shear flow and heat convection.
- 115.) J. Morris, P. Fox and Y. Zhu, Modelling low Reynolds number incompressible flows using SPH, *Journam Of Computational Physics* 136 (1997) pp. 214-226.
- 116.) J. Marongiu, F. Leboeuf and E. Parkinson, Numerical simulation of the flow in a Pelton turbine using the meshless method SPH. A new simple solid boundary treatment.
- 126.) J.C. Marongiu – F. Leboeuf – E. Parkinson NUMERICAL SIMULATION OF THE FLOW IN A PELTON TURBINE USING THE MESHLESS METHOD SPH
A NEW SIMPLE SOLID BOUNDARY TREATMENT