



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**

**Εύρεση & Μελέτη Ομοκλινικών Τροχιών στην
Εξίσωση FitzHugh-Nagumo & Εφαρμογή στη
Φυσιολογία των Νευρώνων**

[Μεταπτυχιακή Εργασία]

Κωνσταντίνος Ε. Παπαδόπουλος

Επιβλέπων καθηγητής
Βασίλειος Ρόθος

ΑΘΗΝΑ 2019

*Στην μνήμη της γιαγιάς μου
Σταματίας*

Ευχαριστίες

Με την παρούσα διπλωματική εργασία ολοκληρώνεται ένας ακόμα ακαδημαϊκός μου στόχος, αυτός της απόκτησης μεταπτυχιακού διπλώματος μέσα από το διατμηματικό πρόγραμμα "Εφαρμοσμένες Μαθηματικές Επιστήμες" του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου. Σε αυτό λοιπόν το τελευταίο βήμα, θα ήθελα πρωταρχικώς να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου Βασίλειο Ρόθο, ο οποίος εξ αρχής με εμπιστεύτηκε, διαθέτοντας οποτεδήποτε τον χρόνο που απαιτούνταν για την αποπεράτωση της εργασίας με τις καλύτερες πάντοτε οδηγίες και συμβουλές του. Για τη σημαντική για μένα συνδρομή τού σε εξωακαδημαϊκά θέματα, του οφείλω ακόμα ένα μεγάλο ευχαριστώ.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τους γονείς μου, Ανδριάνα και Ευάγγελο, αλλά και ολόκληρη την οικογένεια και τους φίλους μου, που στάθηκαν δίπλα μου. Ιδιαίτερως την αδελφή μου Λίνα και τον αγαπημένο μου θείο Γιώργο, για την ατέρμονη στήριξη και εμπύχωση τους όλους αυτούς τους μήνες.

Ακόμα, για την τεχνική βοήθεια που χρειάστηκα, οφείλω να ευχαριστήσω τον αγαπητό μου φίλο Χαράλαμπο Δρίβα (υποψήφιος διδάκτωρ Πανεπιστημίου Πατρών) όπου του εύχομαι μία λαμπρή σταδιοδρομία σε οτίδηποτε επιλέξει. Τέλος, ένα μεγάλο ευχαριστώ στον Κωνσταντίνο Μαμή (υποψήφιος διδάκτωρ Ε.Μ.Π.) που μου συμπαραστάθηκε παραπάνω από συνεργάτης, από φίλος, από οικογένεια. Η αρωγή του σε κάθε μου βήμα για νέες ακαδημαϊκές και όχι μόνον κατευθύνσεις και εμπειρίες ήταν πάντοτε παρούσα και εύχομαι η ζωή να του προσφέρει κάθε καλό.

Κωνσταντίνος Ε. Παπαδόπουλος

Αθήνα, 2019

Περίληψη

Η εξίσωση FitzHugh-Nagumo (FN), αποτελεί ένα από τα πλέον χαρακτηριστικότερα παραδείγματα που ανήκουν στην οικογένεια των διεγερσιμων δυναμικών συστημάτων με την επιπλέον ιδιότητα του διαχωρισμού χρονικών κλιμάκων. Η σπουδαιότητα και η χρησιμότητά της δεν έγκειται μονάχα στο γεγονός πως βρίσκει ευθεία εφαρμογή στο χώρο της μαθηματικής Βιολογίας, από τον οποίο φυσικά και προήλθε, αλλά η μελέτη τής παρουσιάζει καθαρά μαθηματικό ενδιαφέρον συνδυάζοντας σημαντικά συμπεράσματα από διάφορους κλάδους των Μαθηματικών όπως Ανάλυση, Θεωρία Δυναμικών Συστημάτων και υπολογιστικές μεθόδους, ανοίγοντας συνεχώς νέους δρόμους για έρευνα.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία θα ασχοληθούμε με τη μελέτη και την εύρεση κυματικών λύσεων της εξίσωσης FN οι οποίες αντιστοιχούν σε ομοκλινικές τροχιές στο χώρο φάσεων.

Συγκεκριμένα, αφού διατυπώσουμε στο πρώτο κεφάλαιο τη φυσική ερμηνεία της εξίσωσης FN κάνοντας κάποιους ποιοτικούς σχολιασμούς για τη δομή της ομοκλινικής τροχιάς, θα μελετήσουμε στο δεύτερο, τις κυματικές λύσεις που προκύπτουν από την εξίσωση FN στην καθαρά ιδιόμορφη περίπτωση και θα κατασκευάσουμε μία ομοκλινική τροχιά μελετώντας την εξίσωση σε δύο διαφορετικές χρονικές κλίμακες.

Στη συνέχεια, στο κεφάλαιο τρία, θα διατυπώσουμε όλα εκείνα τα στοιχεία που προκύπτουν από τη γεωμετρική θεωρία των ιδιόμορφων διαταραχών και χρησιμοποιώντας τα συμπεράσματα του Fenichel, θα είμαστε βέβαιοι πως μία, μη ιδιόμορφη αυτήν τη φορά, ομοκλινική τροχιά υπάρχει πολύ κοντά στην αντίστοιχη ιδιόμορφη.

Τέλος, στο τέταρτο κεφάλαιο, με τη βοήθεια του MATCONT υπολογίζουμε αριθμητικώς την ύπαρξη και τη μορφή των ομοκλινικών διακλαδώσεων της εξίσωσης FN στη μη ιδιόμορφη περίπτωση και αλγεβρικώς στην ιδιόμορφη. Ακόμα, κάποια θεωρητικά συμπεράσματα αναφέρονται στο τέλος του κεφαλαίου.

Abstract

The FitzHugh-Nagumo (FN) equation is one of the most descriptive examples of a family of excitable dynamical systems with the extra property of different time scale propagation. Its importance and usefulness lies not only in the fact that it finds a direct application in the field of mathematical Biology, of which it came, but its study has purely mathematical interest, combining important issues from various disciplines of Mathematics such as Analysis, Dynamical Systems Theory and computational methods, continuously opening new paths for research.

In this diploma thesis we will deal with the study of wave solutions of the FN equation corresponding to homoclinic orbits in phase space.

Specifically, after the formulation of the physical interpretation of the FN equation in the first chapter, we study in the second chapter, the wave solutions resulting from the FN equation in the purely singular case and construct a homoclinic orbit by studying the equation at two different time scales.

Then, in chapter three, we will formulate all those elements that result from the geometric singular perturbation theory and using Fenichel's theorems, we will be certain that a non-singular homoclinic orbit is very close to the singular one.

Finally, in the fourth chapter using MATCONT, we study numerically the homoclinic bifurcation diagram of the FN equation in the non-singular case and algebraically in the singular case. Furthermore, some theoretical conclusions are mentioned at the end of the chapter.

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες	i
Περίληψη	ii
Abstract	v
Κατάλογος σχημάτων	ix
1 Το πρότυπο FitzHugh-Nagumo (FN)	1
1.1 Βασική δομή και λειτουργία των νευρώνων	1
1.2 Το πρότυπο FN & η δομή του παλμικού κύματος	4
2 Εισαγωγή - Η ιδιόμορφη εξίσωση FitzHugh-Nagumo	9
2.1 Μία εισαγωγή στα οδεύοντα κύματα	9
2.2 Η εξίσωση FitzHugh-Nagumo	11
2.3 Μέτωπη λύση της εξίσωσης FN	15
2.4 Οδεύων παλμός ως λύση της εξίσωσης FN	19
3 Γεωμετρική ιδιόμορφη θεωρία διαταραχών	23
3.1 Εισαγωγή – Βασικές Έννοιες	23
3.2 Τρία Χρήσιμα Θεωρήματα	26
3.3 Εφαρμογή στην εξίσωση FN & το Λήμμα της Ανταλλαγής	31
4 Μελέτη ομοκλινικών διακλαδώσεων	39
4.1 Καμπύλες Ομοκλινικών Διακλαδώσεων	39
4.2 Θεωρητικά Αποτελέσματα – Ταχεία & Βραδέα Κύματα	47
Επίλογος	51
Βιβλιογραφία	53

Κατάλογος σχημάτων

1.1.1: Τα βασικά μέρη ενός νευρωνικού κυττάρου.	2
1.1.2: Μεταβολή του δυναμικού ενέργειας της μεμβράνης κατά τη διάρκεια ενός ερεθίσματος.	3
1.2.1: Ποιοτική αναπαράσταση των λύσεων για τις μεταβλητές ανάκτησης και διαφοράς δυναμικού ως προς τη μεταβλητή ξ .	6
1.2.2: Η ομοκλινική τροχιά στο χώρο φάσεων, με τις αντίστοιχες περιοχές της προηγούμενης εικόνας να σημειώνονται.	6
2.1.1: Μορφές οδεύοντων κυμάτων. Διαδοχικά απεικονίζονται το μέτωπο οδεύον κύμα, ο παλμός και ο περιοδικός κυματισμός.	10
2.2.1: Το τμήμα της γαλάζιας καμπύλης, από το σημείο με τεταγμένη W^* και αριστερά αποτελεί αυτό της $V-(w)$, από το σημείο με τεταγμένη W^{**} και δεξιά αποτελεί αυτό της $V+(w)$, ενώ το ενδιάμεσο σε αυτά τα σημεία, το τμήμα της $V0(w)$.	12
2.2.2: Χώρος φάσεων για πέντε διαφορετικές αρχικές συνθήκες του συστήματος, οι τροχιές των οποίων προσεγγίζουν την αρχή των αξόνων.	13
2.2.3: Η τροχιά διανύει αρκετό δρόμο έως ότου φθάσει στο σημείο ισορροπίας με τον τρόπο που περιγράφηκε στο κυρίως κείμενο.	14
2.3.1: Η ευστάθεια των σημείων ισορροπίας γίνεται με βάση το πρόσημο της f .	15
2.3.2: Χώροι φάσεων για διάφορες τιμές της ταχύτητας.	16
2.3.3: Μέτωπη λύση της εξίσωσης (2.3).	17
2.3.4: Πορτρέτο της ομοκλινικής τροχιάς. Η τροχιά ξεκινά από την αρχή των αξόνων κινούμενη προς τα δεξιά. Έπειτα ανέρχεται στην $V+$ έως ότου φθάσει στο σημείο W , όπου τότε θα κινηθεί προς τα αριστερά και μέσω της $V-$ θα καταλήξει από όπου ξεκίνησε.	20

- 3.2.1:** Σχηματική αναπαράσταση της πολλαπλότητας M με τις αντίστοιχες ευσταθής και ασταθής πολλαπλοτήτες της. 28
- 3.2.2:** Σχηματική αναπαράσταση των πολλαπλοτήτων που αντιστοιχούν στο σημείο u_0 . 29
- 3.3.1:** Η τομή των μηδενοκλινών καμπυλών $f=0$ και $g=0$, αντιστοιχούν στα σημεία ισοροπίας του συστήματος (στην περίπτωση μας, η αρχή των αξόνων). 32
- 3.3.2:** Προβολή των γραφικών παραστάσεων της εικόνας 2.3.1 στο $V-W$ επίπεδο. Η κυανή (συνεχόμενη και διακεκομμένη) γραμμή, αποτελεί την κρίσιμη πολλαπλότητα. Ποιοτικά σημειώνονται και τα σημεία $\rho_{1,2}$ όπως τα ορίσαμε ακριβώς παραπάνω. 34
- 3.3.3:** Όπως και στην εικόνα 2.3.4, εδώ αναπαρίσταται με περισσότερη λεπτομέρεια η ιδιόμορφη ομοκλινική τροχιά που κατασκευάσαμε με τον τρόπο που εξηγήσαμε στο κυρίως κείμενο. Αναφέρουμε επίσης πως με διπλό βέλος εννοούμε την ταχεία εξέλιξη του συστήματος, ενώ με μονό την βραδεία εξέλιξη αυτού. 34
- 3.3.4:** Γεωμετρική αναπαράσταση του λήμματος της ανταλλαγής. 36
- 3.3.5:** Σχηματική αναπαράσταση της διαταραγμένης ομοκλινικής τροχιάς. 36
- 3.3.6:** Αναπαράσταση ομοκλινικής τροχιάς του συστήματος (3.9) για $\epsilon=0.005$. Το χάσμα μεταξύ του αρχικού τμήματος της καμπύλης (θέση μηδέν) και του τελικού, είναι της τάξης 0.01 και αποτελεί την απόσταση που εμείς θέσαμε προκειμένου να διακόψει το MATCONT την σχεδίαση της ομοκλινικής τροχιάς. 37
- 4.1.1:** Μορφές ομοκλινικών τροχιών στην περίπτωση σαγματικού σημείου ισοροπίας (αριστερά) και στην περίπτωση σαγματικής εστιάς (δεξιά). 40
- 4.1.2:** Καμπύλη ομοκλινικής διακλάδωσης στο επίπεδο $a-c$ (στο διάγραμμα, $aa-cc$ αντίστοιχα), στην περίπτωση όπου $\epsilon=0,005$. 41
- 4.1.3:** Σύνολο ομοκλινικών τροχιών του συστήματος (4.1), στην περίπτωση $\epsilon=0,005$. Κάθε τέτοια τροχιά θα αντιστοιχεί σε ένα σημείο του από πάνω διαγράμματος διακλάδωσης, με τις ερυθρές τροχιές να αντιστοιχούν στα ερυθρά σημεία. 41

- 4.1.4:** Ομοκλινικές καμπύλες διακλάδωσης για δύο διαφορετικές τιμές της παραμέτρου ε . 42
- 4.1.5:** Τα σημεία ακροτάτων για τη συνάρτηση $U(V)$, (επάνω σχήμα), καθορίζουν την ευστάθεια των αντίστοιχων σημείων ισορροπίας για το σύστημα (4.3) για $a=0.4$ (κάτω σχήμα). Καθαρά φαίνεται η ύπαρξη μίας ομοκλινικής τροχιάς στην αρχή των αξόνων (καφέ καμπύλη). 44
- 4.1.6:** Μορφή της ομοκλινικής καμπύλης στην ιδιόμορφη περίπτωση (ερυθρή καμπύλη), και σε δύο τυχαίες τιμές της παραμέτρου ε . 45
- 4.1.7:** Μορφή της ομοκλινικής καμπύλης διακλάδωσης, στο επίπεδο $c-\varepsilon$ όπως υπολογίστηκε με χρήση του MATCONT, στην περίπτωση όπου $a=0.15$. 46
- 4.1.8:** Συγκεντρωτικός πίνακας. Στην πρώτη στήλη φαίνονται οι τιμές των παραμέτρων ε, c, a , με τις αντίστοιχες θέσεις τους στο επίπεδο a, c (δεύτερη στήλη). Τέλος στην τρίτη στήλη απεικονίζεται η κατά περίπτωση διαμόρφωση του χώρου φάσεων με έμφαση κυρίως στην σχεδίαση των ομοκλικών τροχιών. 48
- 4.1.9:** Ποιοτική μορφή της επιφάνειας \mathcal{H} . Κάποιες ισοσταθμικές καμπύλες αυτής, φαίνονται στις εικόνες 4.1.6 και 4.1.7. 49

Κεφάλαιο 1

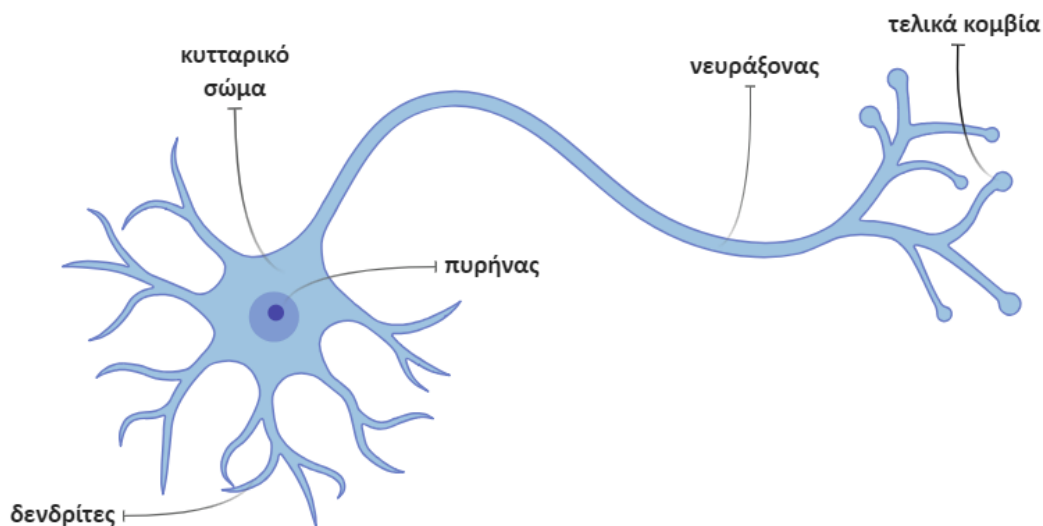
Το πρότυπο FitzHugh-Nagumo (FN)

1.1 Βασική δομή και λειτουργία των νευρώνων

Το νευρικό σύστημα παίζει σημαντικό ρόλο στη λειτουργία και στον έλεγχο ολόκληρου του οργανισμού. Σε κάθε μεταβολή του περιβάλλοντος, ο οργανισμός πρέπει να αντιδρά, προκειμένου να εξασφαλίσει την επιβίωσή του. Οι πληροφορίες για τις μεταβολές αυτές συλλέγονται καταλλήλως και μεταβιβάζονται στο κεντρικό νευρικό σύστημα, όπου αυτό με τη σειρά του δίνει τις κατάλληλες εντολές στα υπόλοιπα συστήματα του οργανισμού. Έτσι ο οργανισμός προσαρμόζει τις λειτουργίες του στην εκάστοτε μεταβολή του περιβάλλοντος (θερμοκρασία, πίεση, ένταση του φωτός κλπ). Τα όργανα του νευρικού συστήματος είναι ο εγκέφαλος και ο νωτιαίος μυελός, (κεντρικό νευρικό σύστημα), και τα νεύρα (περιφερικό νευρικό σύστημα). Τα όργανα του νευρικού συστήματος αποτελούνται από νευρικό ιστό, τα κύτταρα του οποίου είναι δύο κατηγοριών: τα νευρικά κύτταρα ή νευρώνες και τα νευρογλοιακά κύτταρα. Οι νευρώνες αποτελούν τη δομική και λειτουργική μονάδα του νευρικού συστήματος και έχουν την ιδιότητα να αντιδρούν σε μεταβολές του περιβάλλοντος, ενώ τα νευρογλοιακά κύτταρα έχουν κυρίως συμπληρωματικό ρόλο.

Τα κύρια μέρη ενός νευρώνα είναι το κυτταρικό σώμα και οι αποφυάδες. Το κυτταρικό σώμα περιέχει τον πυρήνα και τα οργανίδια του κυττάρου. Οι αποφυάδες διακρίνονται στους δενδρίτες και στο νευράξονα. Οι δενδρίτες είναι συνήθως μικρότερες αποφυάδες με πολλές διακλαδώσεις. Ο νευράξονας διακλαδίζεται και αυτός σε πολλές μικρές απολήξεις, καταλήγοντας σε συγκεκριμένα άκρα, που ονομάζονται τελικά κομβία (Εικόνα 1.1.1).

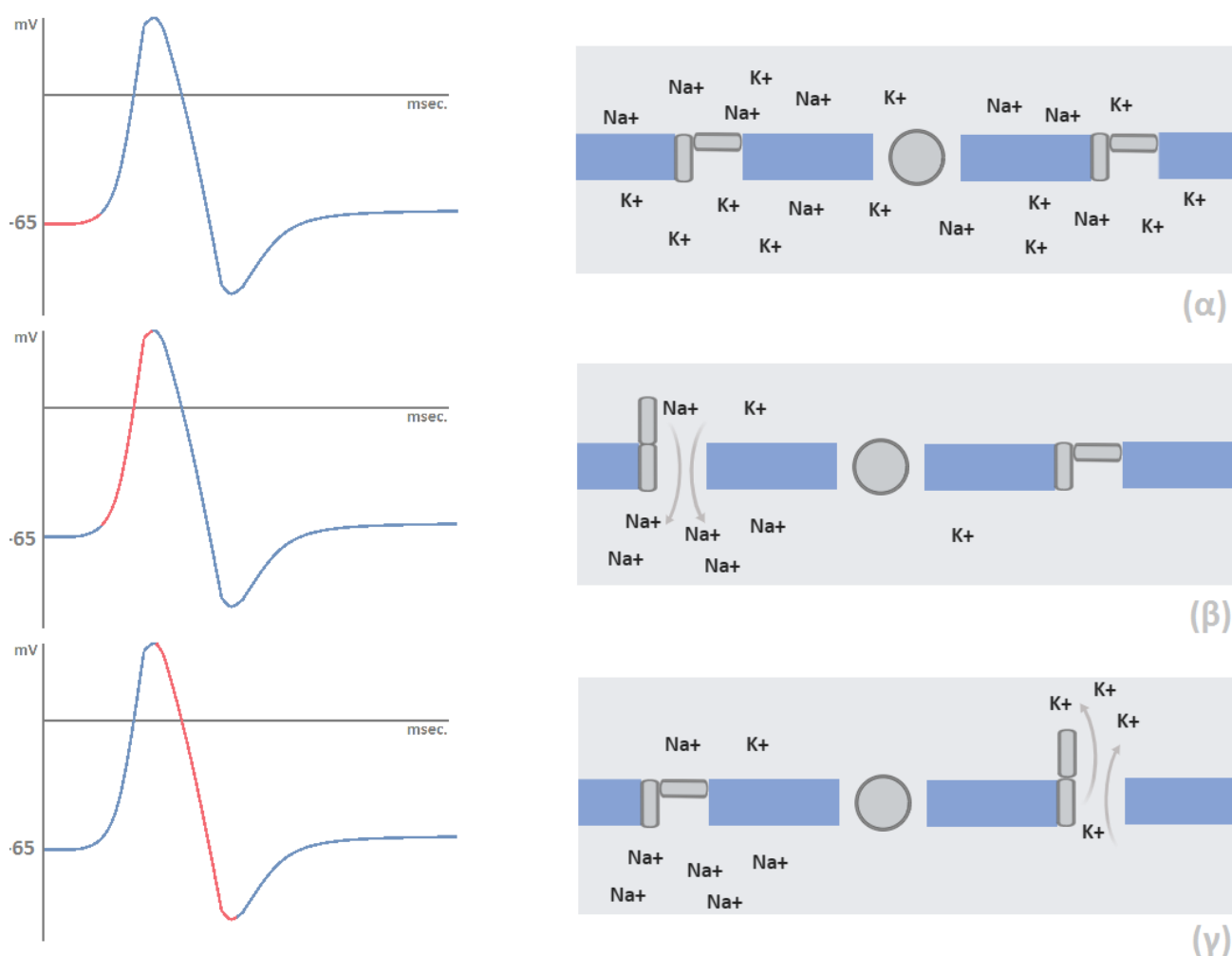
Οι νευρώνες διακρίνονται, ανάλογα με το ρόλο που έχουν να επιτελέσουν στη λειτουργία του οργανισμού. Μία σημαντική κατηγορία είναι οι αισθητικοί νευρώνες όπου μεταφέρουν μηνύματα από τις διάφορες περιοχές του σώματος στο νωτιαίο μυελό και στον εγκέφαλο.



Εικόνα 1.1.1: Τα βασικά μέρη ενός νευρωνικού κυττάρου.

Θα μεταφερθούμε τώρα στη μελέτη της κυτταρικής μεμβράνης ενός νευρώνα και στο ρόλο αυτής στην μετάδοση ερεθισμάτων σε μορφή νευρικών ώσεων. Στην εξωτερική επιφάνεια της κυτταρικής μεμβράνης ενός νευρώνα που βρίσκεται σε ηρεμία, είναι δηλαδή ανερέθιστος, υπάρχει υψηλή συγκέντρωση ιόντων νατρίου ενώ αντίθετα, στην εσωτερική επιφάνεια υπάρχει μεγάλη συγκέντρωση ιόντων καλίου καθώς και κάποιων αρνητικών ιόντων. Η μεμβράνη διατηρεί την άνιση αυτή κατανομή των ιόντων με τη βοήθεια ενός μηχανισμού ενεργητικής μεταφοράς, της βαλβίδας ιόντων καλίου- νατρίου που βρίσκεται στη μεμβράνη του νευρικού κυττάρου. Η βαλβίδα αυτή για κάθε τρία ιόντα νατρίου που απομακρύνει από το εσωτερικό του κυττάρου, μεταφέρει ταυτόχρονα στο εσωτερικό τού δύο ιόντα καλίου με τα αρνητικά ιόντα να μεταφέρονται ελάχιστα. Αυτή η διαφορετική συγκέντρωση θετικών ιόντων στην εξωτερική και αρνητικών ιόντων στην εσωτερική επιφάνεια της μεμβράνης δημιουργούν διαφορά δυναμικού το οποίο ονομάζεται δυναμικό ηρεμίας και είναι περίπου ίσο με -65 mV . Το δυναμικό ηρεμίας διατηρείται για όσο διάστημα δε δέχεται κάποιο ερέθισμα ο νευρώνας. (Εικόνα 1.1.2.α)

Όταν ένας νευρώνας ερεθιστεί σε κάποιο σημείο της μεμβράνης του, τότε αυξάνεται, για 1 msec, περίπου, η διαπερατότητα της μεμβράνης σε ιόντα νατρίου. Τα ιόντα νατρίου εισέρχονται μαζικά στο κύτταρο, με αποτέλεσμα η εσωτερική επιφάνεια της μεμβράνης να φορτίζεται θετικά σε σχέση με την εξωτερική και η διαφορά του δυναμικού να αποκτά θετικές τιμές (Εικόνα 1.1.2.β). Στη συνέχεια, αυξάνεται, για μικρό διάστημα, η διαπερατότητα στα ιόντα καλίου, τα οποία και εξέρχονται μαζικά από το κύτταρο και το δυναμικό της μεμβράνης φτάνει σε τιμές μικρότερες των -65 mV (Εικόνα 1.1.2.γ).



Εικόνα 1.1.2: Μεταβολή του δυναμικού ενέργειας της μεμβράνης κατά τη διάρκεια ενός ερεθίσματος.

Τέλος, με τη βοήθεια της βαλβίδας ιόντων καλίου- νατρίου η διαπερατότητα της μεμβράνης επιστρέφει στα επίπεδα που βρισκόταν πριν από την επίδραση του ερεθίσματος, και το δυναμικό ενέργειας επανέρχεται στα -65 mV. Οι αλλαγές στο

δυναμικό της μεμβράνης αντιστοιχεί σε ερέθισμα για τις διπλανές περιοχές αυτής. Κατ' αυτόν τον τρόπο, το δυναμικό ενεργείας μεταδίδεται κατά μήκος του νευράξονα και αποτελεί τη νευρική ώση. Είναι πολύ σημαντικό πως ο νευρώνας μπορεί να αντιδράσει σε ένα νέο ερέθισμα μόνο μετά την παρέλευση κάποιων msec από τη δημιουργία νευρικής ώσης. Το διάστημα αυτό ονομάζεται απόλυτη ανερέθιστη περίοδος.

1.2 Το πρότυπο FN & η δομή του παλμικού κύματος

Όπως είδαμε παραπάνω, μόλις ένα τμήμα της μεμβράνης ερεθιστεί, τότε η πληροφορία θα μεταδοθεί κατά μήκος όλου του νευράξονα. Είναι επόμενο λοιπόν να ορίσουμε ένα αξιόπιστο μοντέλο το οποίο θα περιγράφει τις μεταβολές του δυναμικού ενέργειας (ή δράσης), από τη τιμή του δυναμικού ηρεμίας (στιγμή όπου ο νευρώνας ερεθίζεται), πίσω πάλι σε αυτήν (στιγμή όπου ο νευρώνας ηρεμεί εκ νέου και επιστρέφει στην ανερέθιστη κατάσταση). Το μοντέλο αυτό θα αντιστοιχεί σε ένα μη γραμμικό σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων (αντίδρασης και διάχυσης) κυματικής διάδοσης σε διεργέσιμο μέσο (μέσο δηλαδή όπου κανένα νέο κύμα δεν μπορεί να διαδοθεί εφόσον δεν έχει απέλθει κάποιος χρόνος από τότε που μεταδόθηκε το προηγούμενο κύμα). Με βάση τη φυσιολογία των νευρώνων που περιγράψαμε και το εκάστοτε μοντέλο που χρησιμοποιούμε, ενδιαφερόμαστε για την εύρεση κυματικών παλμικών λύσεων.

Με σκοπό τη μελέτη των βασικών αρχών μετάδοσης κυμάτων σε νευρωνικά μέσα, το πρότυπο που θα χρησιμοποιήσουμε θα είναι προφανώς η εξίσωση FN (1.1), μία παραλλαγή, της εξίσωσης Hodgkin-Huxley:

$$\begin{aligned}v_t &= v_{xx} + f(v) - w \\w_t &= \varepsilon(v + \gamma - bw)\end{aligned}\tag{1.1}$$

όπου η μεταβλητή v αντιστοιχεί στη διαφορά δυναμικού (προσαυξημένη κατά 65 mV) στη μεμβράνη του κυττάρου και η μεταβλητή w παίζει ρόλο ανάκτησης. Με την έννοια ανάκτηση εννοούμε την επιστροφή του παλμού μετά το πέρας κάποιων χιλιοστών του δευτερολέπτου και την ικανότητα του νεύρου να μπορεί

να επαναερεθιστεί. Η ποσότητα γ παριστάνει την χωρητικότητα της μεμβράνης ανά μονάδα μήκους του νευράξονα, ενώ η ποσότητα $f(v)$ ισούται με το κυβικό πολυώνυμο $f(v) = v(v - a)(1 - v)$, $0 < a < 1/2$. Τέλος ισχύουν οι ακόλουθες προσεγγίσεις $\varepsilon b \approx \frac{\kappa}{\tau_n}$ και $\varepsilon \approx \kappa$, όπου τ_n η χρονική σταθερά ερεθισμού των ιόντων καλίου στους $6,3^\circ\text{C}$ και $\kappa = 3^{(\text{Temperature}-6.3)}$ (γι'αυτό πολλές φορές το ε αποκαλείται και θερμοκρασιακή παράμετρος).

Βασική ιδέα του μοντέλου FN είναι πως σε περίπτωση θετικής διαφοράς δυναμικού, συνεπάγεται αύξηση της μεταβλητής w όπως ορίζεται από τη δεύτερη εξίσωση της (1.1), ενώ μία αύξηση της μεταβλητής w , επαναφέρει τη διαφορά δυναμικού πίσω στο δυναμικό ηρεμίας.

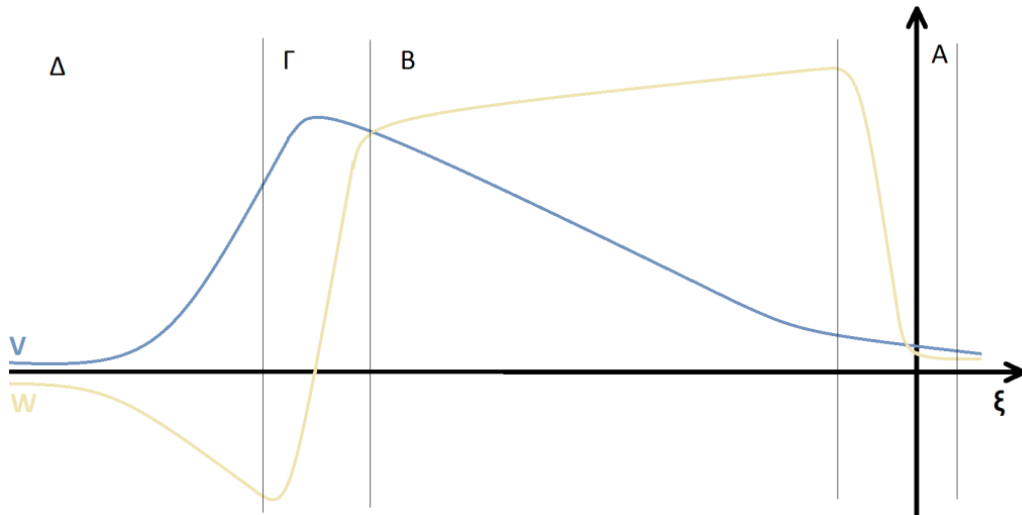
Επειδή ενδιαφερόμαστε για κυματικές λύσεις της (1.1), θα χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό $\xi = x - ct$, όπου $c > 0$ η ταχύτητα του κύματος, και όπως θα δούμε αναλυτικά στα επόμενα κεφάλαια μπορούμε να μετατρέψουμε το σύστημα (1.1) σε ένα σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων:

$$\begin{aligned} V' &= Z \\ Z' &= -cZ - V(V - a)(1 - V) + W \\ W' &= \frac{\varepsilon}{c}(bW - V - \gamma) \end{aligned} \tag{1.2}$$

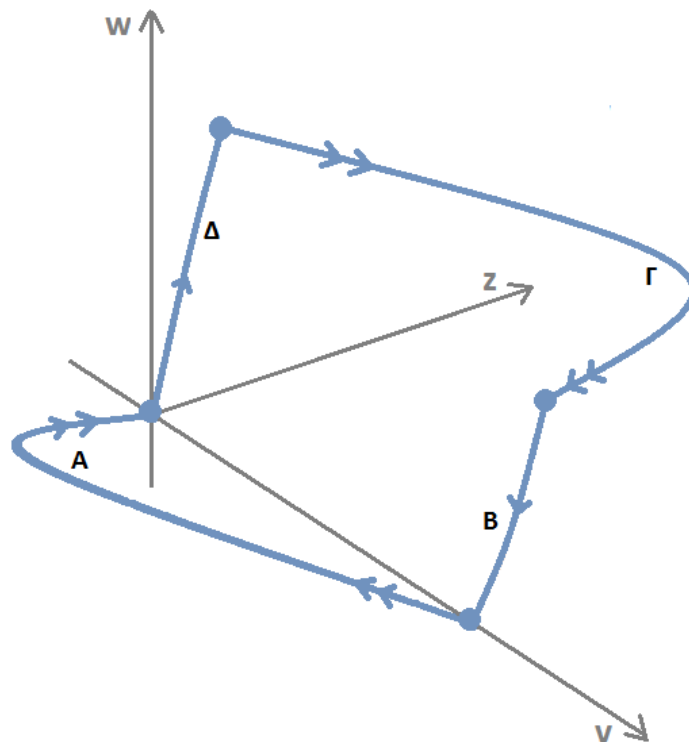
Παρ' όλα αυτά όπως αναφέραμε και στην αρχή της παραγράφου, δεν ενδιαφερόμαστε για οποιαδήποτε μορφή κυματικών λύσεων αλλά για μία συγκεκριμένη κατηγορία, αυτών των κυματικών παλμών. Οι παλμοί αυτοί θα συνθέτουν μία ομοκλινική τροχιά στο χώρο φάσεων του συστήματος (1.2).

Παρακάτω, (Εικόνα 1.3.1) βλέπουμε μία ποιοτική αναπαράσταση των μεταβλητών V, W στην περίπτωση παλμικού κύματος, ενώ στη συνέχεια (Εικόνα 1.3.2) βλέπουμε σε πλήρη αντιστοιχία τη μορφή της ομοκλινικής καμπύλης. Η υπαρξή και η μορφή της ομοκλινικής αυτής καμπύλης θα επεξηγηθεί πλήρως στα κεφάλαια που ακολουθούν.

Ας μελετήσουμε τις παρακάτω εικόνες ξεκινώντας από το πρώτο διάγραμμα προς την κατεύθυνση των αρνητικών ξ , σχολιάζοντας κάθε οριοθετημένη περιοχή με την αντίστοιχη στη δεύτερη εικόνα.



Εικόνα 1.2.1: Ποιοτική αναπαράσταση των λύσεων για τις μεταβλητές ανάκτησης και διαφοράς δυναμικού ως προς τη μεταβλητή ξ .



Εικόνα 1.2.2: Η ομοκλινική τροχιά στο χώρο φάσεων, με τις αντίστοιχες περιοχές της προηγούμενης εικόνας να σημειώνονται.

Στην περιοχή A, η μεταβλητή ανάκτησης ισούται περίπου με μηδέν, με τη διαφορά δυναμικού από τη θέση μηδέν (δηλαδή το δυναμικό ηρεμίας), να μεταβαίνει ταχέως προς το μέγιστό της. Έπειτα, στην περιοχή B, η μεταβλητή Z ισούται περίπου με μηδέν, ενώ η μεταβλητή ανάκτησης αυξάνει αργά. Στην περιοχή Γ, η μεταβλητή ανάκτησης έχει πάρει τη μέγιστη τιμή της με την διαφορά δυναμικού να μειώνεται βιαίως και να αποκτά τιμές μικρότερες αυτής της ηρεμίας. Τέλος, στην Δ περιοχή, η μεταβλητή Z επανέρχεται σε μηδενικά επίπεδα, η μεταβλητή ανάκτησης επανέρχεται στη θέση μηδέν και μαζί της και η διαφορά δυναμικού.

Βλέπουμε λοιπόν μία έντονη δυναμική που κυριαρχεί στο πρότυπο της εξίσωσης FN, της οποίας οι βασικές αρχές και λειτουργίες έχουν βαθύ νόημα να ερευνηθούν. Στα επομένα κεφάλαια θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με την ομοκλινική τροχιά που παρουσιάζεται στην εικόνα 1.2.2, η φυσική σπουδαιότητα της οποίας διαπιστώθηκε μόλις.

Κεφάλαιο 2

Εισαγωγή - Η ιδιόμορφη εξίσωση FitzHugh-Nagumo

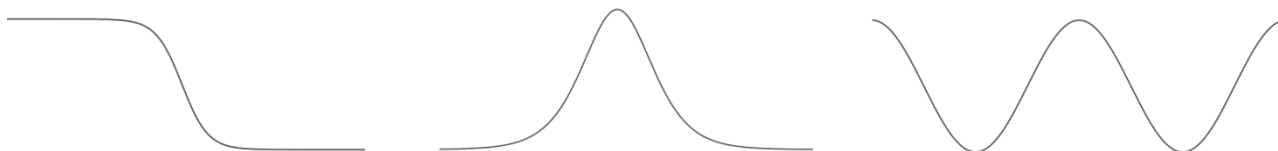
2.1 Μία εισαγωγή στα οδεύοντα κύματα

Μία σημαντική κατηγορία των μηχανικών κυμάτων είναι τα λεγόμενα οδεύοντα κύματα (*travelling waves*), κύματα δηλαδή όπου διαδίδονται θεωρητικά σε ένα απείρου μήκους μέσο χωρίς αυτά να ανακλώνται πουθενά. Για παράδειγμα, αν διεγείρουμε το άκρο μίας άπειρης χορδής, τότε τα κύματα θα διαδίδονται κατά μήκος αυτής χωρίς να ανακλώνται, εν αντιθέσει όπως θα συνέβαινε σε μία χορδή σταθερών άκρων όπου τότε θα είχαμε την εμφάνιση στάσιμων κυμάτων.

Τα τρία βασικότερα χαρακτηριστικά των οδεύοντων κυμάτων είναι πως διαδίδονται σταθερά προς μία συγκεκριμένη κατεύθυνση και ταχύτητα και επιπλέον διατηρούν το σχήμα τους σχεδόν αναλλοίωτο κατά τη διάδοση. Βρίσκουν πληθώρα εφαρμογών σε πολλά πεδία της επιστήμης και της μηχανικής, όπως στα φαινόμενα καύσης αλλά και σε διάφορα προβλήματα της μαθηματικής βιολογίας. Ένα στοχευμένο παράδειγμα, όπως είδαμε είναι αυτό της διάδοσης κυμάτων στους νευρώνες, δηλαδή τη διάδοση ενός δυναμικού δράσης ή νευρικής ώσης, σε μορφή ηλεκτρικής διέγερσης κατά μήκος του νευράξονα.

Τα πρότυπα που εμφανίζουν κυματικές λύσεις προέρχονται γενικά από προβλήματα που στη μαθηματική έκφρασή τους παίρνουν τη μορφή μερικών διαφορικών εξισώσεων (μ.δ.ε.). Τέτοιες κυματικές λύσεις παριστάνονται σαν κυματοσυναρτήσεις της μορφής $u(x, t) = U(z)$, όπου $z = x \pm ct$, και με x παριστάνεται η χωρική μεταβλητή, με t η χρονική μεταβλητή και με c η ταχύτητα του κύματος. Αναλόγως των ιδιοτήτων που αποδίδονται, μπορούμε να κατηγοριοποιήσουμε τα οδεύοντα κύματα στις ακόλουθες τρεις συνηθέστερες μορφές: *i)* Οδεύον κύμα το οποίο προσεγγίζει σταθερές μα διαφορετικές θέσεις-καταστάσεις κατά το παρελθόν και το μέλλον της διάδοσης, δηλαδή

$U(-\infty) = a$ & $U(\infty) = b$, όπου $a \neq b$, θα ονομάζεται μέτωπο οδεύον κύμα (*wave front*) ii) Αν όμως συμβαίνει $a = b$ τότε θα ονομάζεται παλμικό ή πιο απλά παλμός (*pulse*) iii) Τέλος, αν η λύση ικανοποιεί την συνθήκη $U(z + T) = U(z)$, όπου $T > 0$ το κύμα θα ονομάζεται χωρικά περιοδικό (*spatially periodic*) (Εικόνα 2.1.1).



Εικόνα 2.1.1: Μορφές οδεύοντων κυμάτων. Διαδοχικά απεικονίζονται το μέτωπο οδεύον κύμα, ο παλμός και ο περιοδικός κυματισμός.

Όπως είναι γνωστό, κατά τη διάρκεια μελετών για την εύρεση αναλυτικής λύσης μίας μ.δ.ε. (συνεπώς και την εύρεση κυματικής λύσης) έχουν εφαρμοσθεί πολλές τεχνικές που δίνουν την αναλυτική λύση για μία μονάχα μικρή κατηγορία μ.δ.ε., οι οποίες δυστυχώς αποτυγχάνουν στο να αποδώσουν ικανοποιητικά αποτελέσματα σε άλλες κατηγορίες τέτοιων εξισώσεων. Χρειάζεται επομένως μία εναλλακτική, όσο γενικότερη δύναται, μέθοδος μελέτης της δυναμικής μίας μ.δ.ε. Η μελέτη του χώρου φάσεων του προκύπτοντος από τη διαφορική εξίσωση συστήματος, θα βοηθούσε πολύ προς αυτήν την κατεύθυνση. Πράγματι, κατά την μελέτη του χώρου φάσεων μπορούμε να εξάγουμε άριστα αποτελέσματα για την ποιοτική συμπεριφορά των λύσεων, την ευστάθειά τους αλλά και την ύπαρξή τους. Στην περίπτωση των κυματικών λύσεων μία ετεροκλιτική, μία ομοκλιτική τροχιά ή ένας οριακός κύκλος στο χώρο φάσεων θα μας έβαζαν σε υποψίες για την ύπαρξη μέτωπου κύματος, παλμού ή περιοδικού κύματος αντίστοιχα, χωρίς φυσικά αυτές οι υποψίες να επαληθεύονται πάντα για κάθε τέτοια τροχιά που συναντάμε.

Στις επόμενες ενότητες θα ασχοληθούμε αρκετά με τεχνικές εύρεσης κυματικών λύσεων που προκύπτουν από την εξίσωση FitzHugh-Nagumo.

2.2 Η εξίσωση FitzHugh-Nagumo

Η εξίσωση FitzHugh-Nagumo (FN) είναι ένα σύστημα μ.δ.ε. με όρους διάχυσης, το οποίο συνηθέστερα εκφράζεται ως εξής:

$$v_t = v_{xx} + f(v) - w \tag{2.1}$$

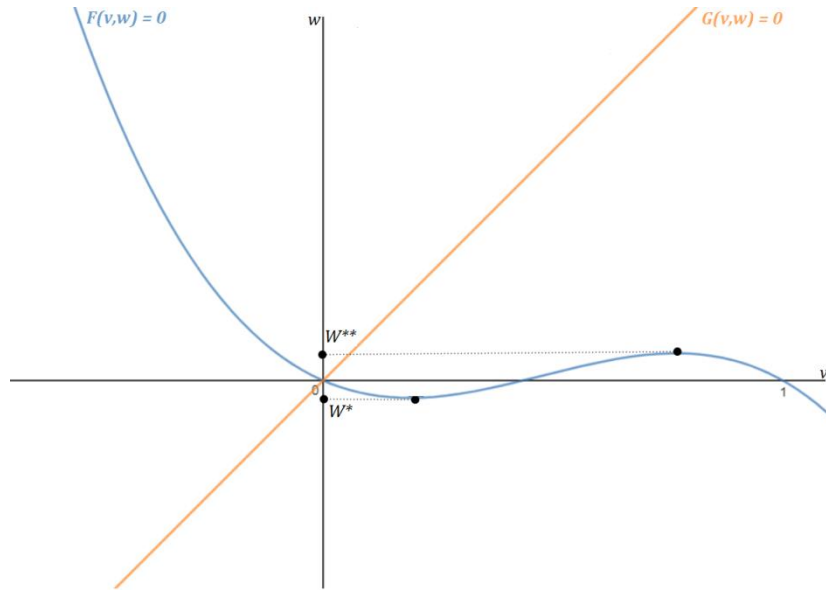
$$w_t = \varepsilon(v - w)$$

όπου, $f(v) = v(v - a)(1 - v)$, $0 < a < 1/2$, $0 < \varepsilon \ll 1$. Αποτελεί μία απλούστερη εκδοχή του αντίστοιχου Hodgkin-Huxley προτύπου για την εξέλιξη παλμικών κυμάτων στους άξονες των νευρώνων ενός καλαμαριού. Το σύστημα (2.1) εδώ και χρόνια παρουσιάζει ιδιαίτερο ερευνητικό ενδιαφέρον καθώς έχει αποδειχθεί πως μπορεί να εμφανίσει και τους τρεις τύπους κυματικών λύσεων που αναπτύξαμε στην παραπάνω ενότητα και όχι μόνο. Προτού όμως μελετήσουμε τις κυματικές λύσεις του (1.1) ας δούμε ποιοτικά τη συμπεριφορά του αντίστοιχου χωροανεξάρτητου (*space-clamped*) συστήματος:

$$\dot{v} = F(v, w) \tag{2.2}$$

$$\dot{w} = \varepsilon G(v, w)$$

όπου με άνω τελεία νοείται η συνήθης παραγωγή ως προς τον χρόνο και $F(v, w) = f(v) - w$, $G(v, w) = v - w$. Είναι εύκολο να παρατηρήσουμε πως οι αντίστοιχες μηδενοκλινείς καμπύλες (*nullclines*) των δύο μεταβλητών v, w τέμνονται σε ένα μονάχα σημείο, το οποίο αποτελεί και το σημείο ισορροπίας του συστήματος. Για ένα πεπερασμένο εύρος τιμών της w , η εξίσωση $F(v, w) = 0$, έχει ακριβώς τρεις λύσεις $v = v(w)$ τις οποίες και συμβολίζουμε $V_-(w)$, $V_0(w)$, $V_+(w)$. Στην περίπτωση δε που και οι τρεις λύσεις υπάρχουν, τότε θα ικανοποιείται η ανισότητα $V_-(w) \leq V_0(w) \leq V_+(w)$. Τέλος με W^* συμβολίζουμε την ελάχιστη τιμή της w για την οποία υπάρχει η $V_-(w)$ και με W^{**} την ελάχιστη τιμή της w για την οποία υπάρχει η $V_+(w)$ (Εικόνα 2.2.1).



Εικόνα 2.2.1: Το τμήμα της γαλάζιας καμπύλης, από το σημείο με τεταγμένη W^* και αριστερά αποτελεί αυτό της $V_-(w)$, από το σημείο με τεταγμένη W^{**} και δεξιά αποτελεί αυτό της $V_+(w)$, ενώ το ενδιάμεσο σε αυτά τα σημεία, το τμήμα της $V_0(w)$.

Ας υπολογίσουμε τώρα την ευστάθεια του σημείου ισορροπίας. Ο Ιακωβιανός πίνακας του συστήματος, υπολογιζόμενος στο σημείο ισορροπίας μηδέν θα είναι:

$$J = \begin{bmatrix} 2(1+a)v - 3v^2 - a & -1 \\ \varepsilon & -\varepsilon \end{bmatrix} \Big|_{(0,0)} = \begin{bmatrix} -a & -1 \\ \varepsilon & -\varepsilon \end{bmatrix},$$

και οι αντίστοιχες ιδιοτιμές, θα προκύψουν από την επίλυση της εξίσωσης:

$$\lambda^2 + (a + \varepsilon)\lambda + \varepsilon(a + 1) = 0$$

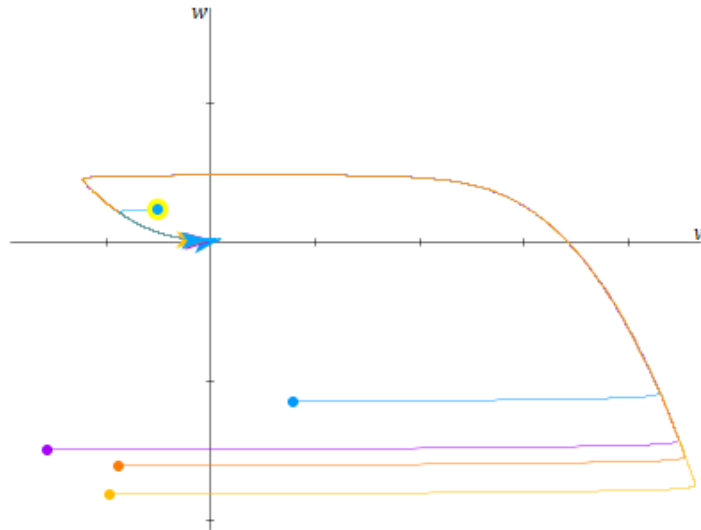
Σε κάθε μία από τις δύο περιπτώσεις που αφορούν το μηδενισμό ή την θετική τιμή της διακρύνουσας $\Delta = (a + \varepsilon)^2 - 4\varepsilon(a + 1)$, με μία προσεκτική ματιά καταλαβαίνουμε ότι οι ιδιοτιμές έχουν αρνητικό πρόσημο:

$$\Delta > 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{-a-\varepsilon+\sqrt{\Delta}}{2} \\ \lambda_2 = \frac{-a-\varepsilon-\sqrt{\Delta}}{2} \end{cases} \quad \text{και} \quad \Delta = 0 \rightarrow \lambda = \frac{-a-\varepsilon}{2}$$

Ακόμα πιο εύκολα γίνεται αντιληπτό πως και στην τρίτη περίπτωση, το πραγματικό μέρος των ιδιοτιμών θα είναι αρνητικό:

$$\Delta < 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-a-\varepsilon \pm i\sqrt{\Delta}}{2}.$$

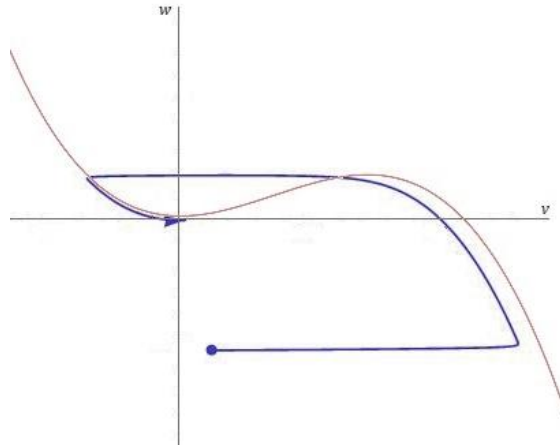
Έτσι λοιπόν, η αρχή των αξόνων θα αποτελεί σε κάθε περίπτωση ευσταθές σημείο ισοροπίας για το σύστημα (2.2). Πράγματι, κάτι τέτοιο ισχύει όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε και στην παρακάτω εικόνα (Εικόνα 2.2.2).



Εικόνα 2.2.2: Χώρος φάσεων για πέντε διαφορετικές αρχικές συνθήκες του συστήματος, οι τροχιές των οποίων προσεγγίζουν την αρχή των αξόνων.

Ας αναφέρουμε σε αυτό το σημείο μία πολύ βασική παρατήρηση που προκύπτει από την παραπάνω εικόνα. Το σύστημα (2.2) ανήκει στην οικογένεια των διεγέρσιμων ή των αψέων, όπως θα μπορούσαμε να τα ονομάσουμε, δυναμικών συστημάτων (*excitable systems*). Κάτι τέτοιο σημαίνει ότι για "μικρές" διαταραχές, η τροχιά θα επιστρέψει σύντομα στη θέση ισοροπίας, ενώ για αρχικές συνθήκες αρκετά "μακριά" από το σημείο ισοροπίας η τροχιά θα περιηγηθεί για αρκετό χρόνο στο επίπεδο φάσης έως ότου καταλήξει και αυτή στην αρχή των αξόνων. Για μία τροχιά της δεύτερης κατηγορίας διαπιστώνουμε ότι ταχέως κινείται προς το τμήμα $V_+(w)$ όπου τότε ανέρχεται αργά έως το σημείο W^{**} . Έπειτα, ταχέως εισέρχεται σε μία γειτονιά του τμήματος $V_-(w)$ ώσπου τελικά κατέρχεται αργά στην αρχή των αξόνων. Κάτι τέτοιο φαίνεται καλύτερα στην ακόλουθη εικόνα (Εικόνα 2.2.3).

Πόσο ασφαλής είναι όμως η παραπάνω παρατήρηση και πως μπορεί να δικαιολογηθεί με μεγαλύτερη μαθηματική αυστηρότητα; Για την απάντηση θα μελετήσουμε το σύστημα (2.2) στην περίπτωση όπου $\varepsilon \rightarrow 0$ (δηλαδή στην ιδιόμορφη περίπτωση):



Εικόνα 2.2.3: Η τροχιά διανύει αρκετό δρόμο έως ότου φθάσει στο σημείο ισορροπίας με τον τρόπο που περιγράφηκε στο κυρίως κείμενο.

Τότε θα προκύψει αντίστοιχα το εξής:

$$\dot{v} = F(v, w) \quad , \quad \dot{w} = 0$$

Εδώ το w είναι σταθερό και η v θα προσεγγίσει την σταθερή κατάσταση οριζόμενη από την $F(v, w) = 0$. Όλα αυτά αφορούν τον τρόπο με τον οποίο γίνεται η μεταπίδηση μεταξύ των τμημάτων $V_{\pm}(w)$.

Με μία αλλαγή στην χρονική κλίμακα εις τρόπον ώστε $\tau = \varepsilon t$, το (1.2) παίρνει τη μορφή:

$$\varepsilon \frac{dv}{d\tau} = F(v, w) \quad , \quad \frac{dw}{dt} = G(v, w)$$

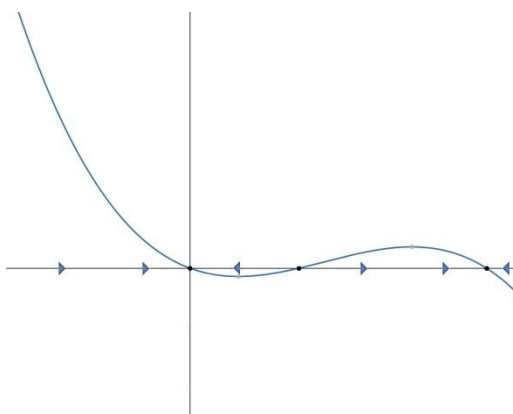
όπου κατά την οριακή διαδικασία $\varepsilon \rightarrow 0$ θα έχουμε:

$$F(v, w) = 0 \quad , \quad \frac{dw}{dt} = G(v, w)$$

Έτσι όλη η δυναμική θα συμβαίνει πάνω στην καμπύλη F . Συνδιάζοντας τις τροχιές για τις δύο διαφορετικές χρονικές κλίμακες βρίσκουμε την ολική τροχιά στο χώρο φάσεων. Στο Κεφάλαιο 3 θα εξηγηθούν τα παραπάνω αρκετά αναλυτικά και θα διαπιστώσουμε αυστηρά πως στην περίπτωση όπου $0 < \varepsilon \ll 1$ οι τροχιές κείνται σε μία γειτονιά των αντίστοιχων τροχιών για $\varepsilon \rightarrow 0$.

2.3 Μέτωπη λύση της εξίσωσης FN

Αντικείμενο μελέτης της παραγράφου αυτής είναι η αναζήτηση μέτωπου οδεύοντος κύματος, ως λύση του συστήματος (2.1), στην περίπτωση όπου $\varepsilon \rightarrow 0$. Θα ασχοληθούμε λοιπόν με την εξίσωση $v_t = v_{xx} + f(v)$ (2.3), όπου χάριν απλότητας έχουμε υποθέσει πως $w = 0$. Η αντίστοιχη συνήθης διαφορική εξίσωση (σ.δ.ε) είναι $\frac{dv}{dt} = f(v)$, με σημεία ισορροπίας $v = 0, 1, a$ από τα οποία τα δύο πρώτα, είναι ευσταθή και ασταθές το τρίτο, όπως πολύ εύκολα προκύπτει από τη θεωρία δυναμικής σε μία διάσταση (Εικόνα 2.3.1).



Εικόνα 2.3.1: Η ευστάθεια των σημείων ισορροπίας γίνεται με βάση το πρόσημο της f .

Μία λύση μέτωπου οδεύοντος κύματος ορίζεται ως εξής : $v(x, t) = v(x - ct) = V(\xi)$, όπου $\xi = x - ct$, και $c > 0$ η ταχύτητα του κύματος, με τις αντίστοιχες συνθήκες $V(\xi) \rightarrow 1, \xi \rightarrow -\infty$ & $V(\xi) \rightarrow 0, \xi \rightarrow \infty$. Με στοιχειώδεις κανόνες παραγωγίσις, εύκολα θα έχουμε $v_x = V', v_{xx} = V'', v_t = -cV'$, και η εξίσωση (2.3) θα πάρει τώρα τη μορφή μίας δευτεροβάθμιας σ.δ.ε.:

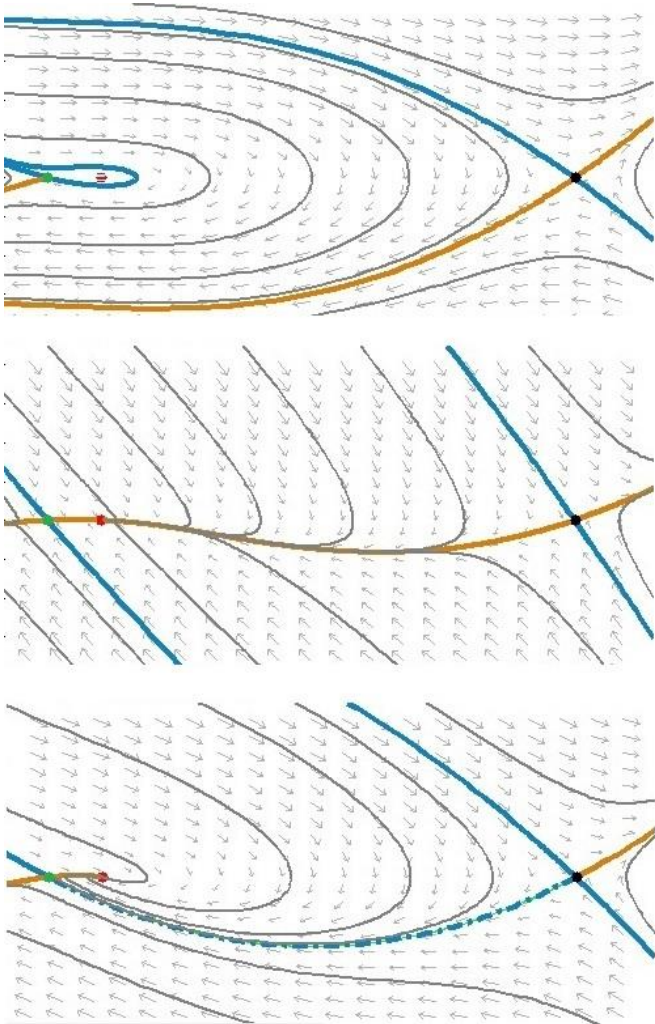
$$V'' + cV' + f(V) = 0 \quad (2.4)$$

όπου με τον τόνο νοείται η συνήθης παραγωγή ως προς ξ . Η εξίσωση (2.4) γράφεται ισοδύναμα στο ακόλουθο δυναμικό σύστημα:

$$V' = L \quad (2.5)$$

$$L' = -cL - f(V)$$

Παρακάτω, (Εικόνα 2.3.2) παρουσιάζονται τρεις χώροι φάσεων που αντιστοιχούν σε κάποιον συγκεκριμένο περιορισμό για την ταχύτητα του κύματος: $c \ll 1$, $c \gg 1$, $c = c^*$, για κάθε εικόνα από πάνω προς τα κάτω αντίστοιχα. Αρχικά, παρατηρούμε πως ανεξάρτητα από την τιμή της ταχύτητας,



τα σημεία ισορροπίας $(0,0)$ (πράσινη τελεία) και $(1,0)$ (μαύρη τελεία) είναι σάγματα. Στην πρώτη περίπτωση, η ασταθής πολλαπλότητα του σημείου $(1,0)$ (ωχρώδης καμπύλη) εκτείνεται εκατέρωθεν της ευσταθούς πολλαπλότητας του $(0,0)$ (κυανή καμπύλη). Αντιστρόφως, στη δεύτερη περίπτωση, όπου $c \gg 1$, η ασταθής πολλαπλότητα του σημείου $(1,0)$ εκτείνεται άνωθεν της ευσταθούς πολλαπλότητας του $(0,0)$. Από την στιγμή όμως που οι πολλαπλότητες εξαρτώνται συνεχώς από το c , θα υπάρχει μία τουλάχιστον τιμή $c = c^*$ (τρίτη περίπτωση) για την οποία αυτές οι δύο πολλαπλότητες θα τέμνουν η μία την άλλη και θα σχηματίζουν μία ετεροκλινική τροχιά μεταξύ των σημείων $(0,0)$, $(1,0)$ (διακεκομμένη καμπύλη).

Εικόνα 2.3.2: Χώροι φάσεων για διάφορες τιμές της ταχύτητας.

Αυτή η τροχιά θα αναπαριστά και το αντίστοιχο μέτωπο κύμα που ψάχνουμε (θυμίζουμε πως θέλουμε να συνδέει τα ευσταθή σημεία ισορροπίας που βρήκαμε στην αρχή της παραγράφου 2.3 και πως $0 < v < 1$).

Επιστρέφοντας στην εξίσωση (2.4) ας υποθέσουμε πως η σ.δ.ε. $V' = kV(1 - V)$ (2.6.), όπου ο συντελεστής είναι πραγματικός αριθμός, την ικανοποιεί. Έτσι λοιπόν, μετά από παραγωγή της προηγούμενης και ευθεία αντικατάσταση στην (2.4) θα προκύψει:

$$(-2k^2 + 1)V^3 + (ck + 3k^2 - a - 1)V^2 + (-ck - k^2 + a)V = 0$$

Απ' όπου καταλήγουμε στο ακόλουθο σύστημα:

$$\begin{cases} -2k^2 + 1 = 0 \\ ck + 3k^2 - a - 1 = 0 \\ -ck - k^2 + a = 0 \end{cases}$$

του οποίου οι λύσεις είναι $k = \pm 1/\sqrt{2}$ & $c = k(2a - 1)$. Άρα, η (2.6) με βάση τις λύσεις που βρήκαμε από την επίλυση του συστήματος, είναι "συμβατή" με την (2.4). Ισοδύναμα επομένως θα επιλυθεί η (2.6).

$$V' = kV(1 - V)$$

$$\frac{1}{V(1 - V)} dV = kd\xi$$

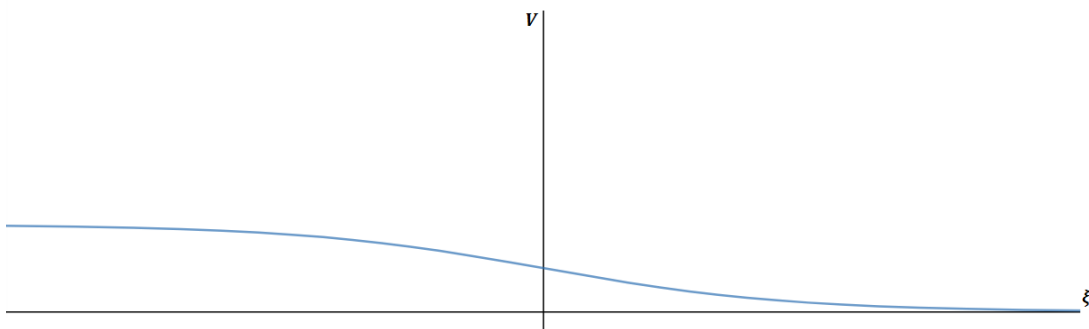
$$\ln|V| - \ln|1 - V| = k\xi + c_1$$

$$V(\xi) = 1 - \frac{1}{1 + e^{k\xi + c_1}}$$

ή ισοδύναμα

$$v(x, t) = 1 - \frac{1}{1 + e^{k(x-ct) + c_1}}$$

Τέλος, προκειμένου η λύση να έρχεται σε συμφωνία με τις οριακές συνθήκες που θέσαμε πιο πάνω, επιλέγουμε $k = -1/\sqrt{2}$. Κάτι τέτοιο δικαιολογεί πλήρως τον περιορισμό $0 < a < 1/2$ αφού απαραίτητα από τη λύση του συστήματος απαιτείται $c(a) = c^*(a) = -1/\sqrt{2}(2a - 1) > 0$. Καταλήξαμε λοιπόν με το παραπάνω τέχνασμα, στο να βρούμε ένα μέτωπο οδεύον κύμα για την (2.3), που ξεκινά από τη θέση 1 και καταλήγει στη θέση 0 κινούμενο προς τα δεξιά (Εικόνα 2.3.3).



Εικόνα 2.3.3: Μέτωπη λύση της εξίσωσης (2.3).

Γενικά, υπάρχει ένας χρήσιμος τρόπος για να υπολογίζουμε το πρόσημο της ταχύτητας του κύματος. Πολλαπλασιάζοντας την (2.4) με V' , θα έχουμε:

$$V'V'' + c(V')^2 + V'f(V) = 0$$

και ολοκληρώνοντας ως προς ξ :

$$\begin{aligned} c \int_{-\infty}^{+\infty} (V')^2 d\xi &= - \int_{-\infty}^{+\infty} V'f(V)d\xi - \int_{-\infty}^{+\infty} V'V'' d\xi \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} V'f(V)d\xi - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\left(\frac{(V')^2}{2}\right)}{d\xi} d\xi \end{aligned}$$

Στο δεύτερο μέλος, το δεύτερο γενικευμένο ολοκλήρωμα ισούται με το μηδέν.

Επίσης, επειδή όπως είπαμε $V(\xi) \rightarrow 1$, $\xi \rightarrow -\infty$ & $V(\xi) \rightarrow 0$, $\xi \rightarrow \infty$, τότε θα έχουμε ισοδύναμα:

$$c \int_{-\infty}^{+\infty} (V')^2 d\xi = \int_0^1 f(V)dV$$

Το ολοκλήρωμα του πρώτου μέλους προφανώς θα είναι πάντοτε θετικό. Το πρόσημο λοιπόν της ταχύτητας θα εξαρτάται από το δεύτερο ολοκλήρωμα ή αλλιώς από το πρόσημο της συνάρτησης $f(V)$, μεταξύ των σημείων 0, 1. Άρα, στην γνωστή μας περίπτωση όπου $0 < a < 1/2$, το δεύτερο ολοκλήρωμα θα είναι θετικό (αφού μεταξύ των διαστημάτων $(0, a)$ & $(a, 1)$, η f έχει χωριστεί σε δύο χωρία με το αντίστοιχο θετικό να είναι μεγαλύτερο από το αντίστοιχο αρνητικό, όπως πολύ εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί από την γραφική παράστασή της) συμπαρασύροντας και την ταχύτητα στο να είναι θετική με το κύμα να κινείται προς τα δεξιά. Αξίζει να αναφέρουμε πως για $a > 1/2$ το κύμα θα κινείται προς τα αριστερά, ενώ στην περίπτωση όπου $a = 1/2$, το δεύτερο ολοκλήρωμα θα ισούται με μηδέν (αφού μεταξύ των διαστημάτων $(0, \frac{1}{2})$ & $(\frac{1}{2}, 1)$, η f έχει χωριστεί σε δύο πλήρως ισοδύναμα χωρία) με το προκύπτον κύμα να είναι στάσιμο.

Τέλος, αναφέρουμε πως η (2.3) πέραν από μέτωπο οδεύον κύμα, δεν μπορεί να παρουσιάσει παλμική λύση καθώς στερείται μεταβλητής ανάκτησης (*recovery variable*), σε αντίθεση, όπως θα δούμε, από το πλήρες σύστημα (2.1).

2.4 Οδεύων παλμός ως λύση της εξίσωσης FN

Πηγαίνοντας ένα βήμα παραπέρα, θα ασχοληθούμε εδώ με την εύρεση ενός παλμικού κύματος, σα λύση του συστήματος (2.1). Ακριβώς όπως και στην προηγούμενη παράγραφο, αναζητούμε λύση της μορφής $v(x, t) = v(x - ct) = V(\xi)$, $w(x, t) = w(x - ct) = W(\xi)$, όπου και πάλι $\xi = x - ct$, και $c > 0$. Η μεταβλητή w μπορεί να θεωρηθεί ως μεταβλητή ανάκτησης. Αυτές οι λύσεις θα πρέπει πλέον να ικανοποιούν την απαίτηση $V(\xi), W(\xi) \rightarrow 0$, $\xi \rightarrow \pm\infty$, όπως εύλογα προκύπτει από το αντίστοιχο σύστημα (2.2). Κατόπιν αυτών των αλλαγών, το (2.1) γάφεται στη μορφή:

$$\begin{aligned} V'' + cV' + F(V, W) &= 0 \\ cW' + \varepsilon G(V, W) &= 0 \end{aligned} \tag{2.7}$$

ή ισόδυναμα

$$\begin{aligned} V' &= Z \\ Z' &= -cZ - F(V, W) \\ W' &= -\varepsilon G(V, W)/c \end{aligned} \tag{2.8}$$

Σε πλήρη αναλογία με την παράγραφο 1.3, ενδιαφερόμαστε για την εύρεση μίας ομοκλινικής τροχιάς στο χώρο φάσεων του (2.8) που να ξεκινά και να καταλήγει στο σημείο ισορροπίας $(0, 0, 0)$. Στην ειδική περίπτωση όπου $\varepsilon \rightarrow 0$, το σύστημα θα γίνει:

$$\begin{aligned} V' &= Z \\ Z' &= -cZ - F(V, W) \\ W' &= 0 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Έτσι, η μεταβλητή W είναι σταθερή και μπορεί να θεωρηθεί σα μία παράμετρος των τροχιών. Αν θεωρήσουμε πως $W = 0$, τότε επιστρέφουμε στο σύστημα (2.5) όπου ήδη έχουμε δείξει την ύπαρξη μίας ετεροκλινικής τροχιάς. Για την τροχιά αυτή ισχύει πως $V \rightarrow V_-(0)$ καθώς $\xi \rightarrow \infty$, και $V \rightarrow V_+(0)$ καθώς $\xi \rightarrow -\infty$.

Στη συνέχεια, με μία αλλαγή στην χρονική κλίμακα $\tau = \varepsilon t$, έχουμε:

$$\varepsilon^2 \ddot{V} + c\varepsilon \dot{V} + F(V, W) = 0 \quad (2.10)$$

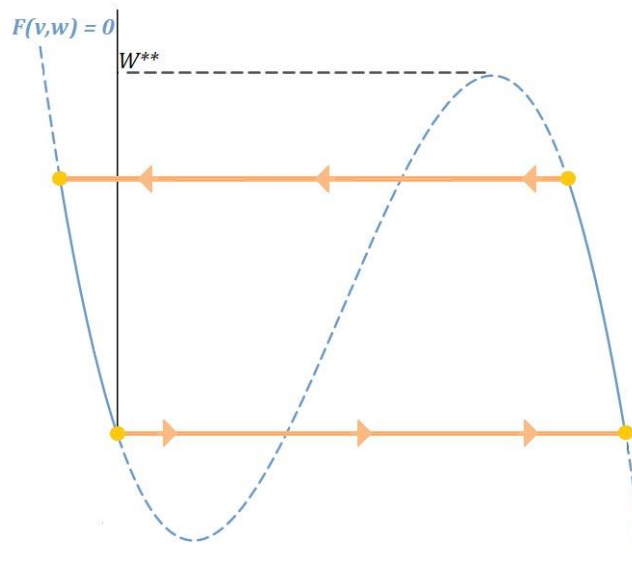
$$c\dot{W} + G(V, W) = 0$$

όπου με τελεία νοείται η συνήθης παραγώγιση ως προς τη μεταβλητή τ . Για $\varepsilon \rightarrow 0$, θα έχουμε αντίστοιχα:

$$F(V, W) = 0 \quad (2.11)$$

$$\dot{W} = -G(V, W)/c$$

Αν θεωρήσουμε τη λύση $V = V_+(W)$ της $F(V, W) = 0$, τότε η τροχιά καθορίζεται από τον κανόνα $-G(V_+(W), W)/c$. Ας υποθέσουμε επίσης πως καθώς η τροχιά ανέρχεται στο V_+ , φθάνει σε ένα σημείο $\tilde{W} < W^{**}$ όπου ξεφεύγει από αυτήν. Αφού λοιπόν και πάλι έχουμε σταθερό $W = \tilde{W}$, θα εμφανιστεί ξανά μία ετεροκλιτική τροχιά από το $V_+(\tilde{W})$, στο $V_-(\tilde{W})$ με ίση και αντίθετη ταχύτητα αυτήν τη φορά. Τέλος η τροχιά καταλήγει στο $(0,0)$ κατερχόμενη της V_- με τον κανόνα $-G(V_-(W), W)/c$.



Εικόνα 2.3.4: Πορτρέτο της ομοκλιτικής τροχιάς. Η τροχιά ξεκινά από την αρχή των αξόνων κινούμενη προς τα δεξιά. Έπειτα ανέρχεται στην V_+ έως ότου φθάσει στο σημείο \tilde{W} , όπου τότε θα κινηθεί προς τα αριστερά και μέσω της V_- θα καταλήξει από όπου ξεκίνησε.

Συνδυάζοντας λοιπόν τις παραπάνω πληροφορίες που προκύπτουν από τα δύο συστήματα, κατασκευάσαμε την αντίστοιχη ομοκλινική τροχιά στην ιδιόμορφη περίπτωση όπου $\varepsilon \rightarrow 0$ (Εικόνα 2.3.4).

Ανακεφαλαιώνοντας, έχουμε δείξει πως η εξίσωση FN μπορεί να παρουσιάσει κυματικές λύσεις μορφών μέτωπων κυμάτων και παλμών, πάντα όμως κατά την οριακή διαδικασία όπου το ε τείνει στο μηδέν. Στο επόμενο κεφάλαιο θα αναπτύξουμε τη μαθηματική θεωρία που αφορά την ιδιόμορφη θεωρία διαταραχών. Με αυτό το εργαλείο στα χέρια μας θα αποσαφηνιστούν κάποιες τεχνικές που χρησιμοποιήσαμε στο παρόν κεφάλαιο και θα είμαστε πλέον σε θέση να υπερασπιστούμε την ύπαρξη τέτοιων κυματικών λύσεων και σε περιπτώσεις όπου το ε δεν είναι οριακά ίσο με το μηδέν. Πιο συγκεκριμένα η βασική ιδέα της ιδιόμορφης θεωρίας διαταραχών, είναι πως μπορούμε να εξάγουμε αποτελέσματα για $\varepsilon > 0$ συνδυάζοντας οτιδήποτε πληροφορία μας έχει δώσει το αντίστοιχο σύστημα για $\varepsilon \rightarrow 0$ μελετώντας τό σε δύο διαφορετικές χρονικές κλίμακες. Έπειτα, μέσω των θεωρημάτων του Fenichel που θα διατυπώσουμε, θα μπορούμε με βεβαιότητα να μιλάμε για διατήρηση των τροχιών του διαταραγμένου συστήματος (δηλαδή αυτού όπου $\varepsilon > 0$) σε μία γειτονιά των ιδιόμορφων τροχιών (δηλαδή αυτού όπου $\varepsilon \rightarrow 0$).

Κεφάλαιο 3

Γεωμετρική ιδιόμορφη θεωρία διαταραχών

3.1 Εισαγωγή – Βασικές Έννοιες

Πολλά φυσικά και όχι μόνον, προβλήματα της καθημερινής ζωής, εκφράζονται όπως είναι γνωστό, μέσω μαθηματικών προτύπων συστημάτων συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Κάποια εξ αυτών, έχουν την ιδιότητα να εξελίσσονται σε διαφορετικές χρονικές κλίμακες. Στην προσπάθεια μελέτης τέτοιας κατηγορίας συστημάτων, απλοποιούμε αρχικά κάποιες υποθέσεις μας ώστε τουλάχιστον να ανακαλύψουμε τις βασικές αρχές συμπεριφοράς τών, αντί να κατανοήσουμε ευθύς εξαρχής την όλη δομή τους. Ποιό είναι όμως το βασικό εργαλείο που θα μας επιτρέψει μία τέτοιου είδους μελέτη;

Γύρω στο 1980 αναπτύχτηκε η γεωμετρική ιδιόμορφη θεωρία διαταραχών (*geometric singular perturbation theory*). Αποτελεί μία γεωμετρική προσέγγιση προβλημάτων με την παραπάνω ιδιότητα σαφούς διαχωρισμού χρονικών κλιμάκων. Χρησιμοποιεί τις ιδιότητες των αναλλοίωτων πολλαπλοτήτων στο χώρο φάσεων με σκοπό όχι μόνον την κατανόηση της δομής του συστήματος αλλά πολλές φορές και την κατασκευή συγκεκριμένων τροχιών με τις εκάστοτε επιθυμητές ιδιότητες.

Πιο συγκεκριμένα στο πλαίσιο της μελέτης μας θα ασχοληθούμε με συστήματα της μορφής:

$$\begin{aligned}x' &= f(x, y, \varepsilon) \\ y' &= \varepsilon g(x, y, \varepsilon)\end{aligned}\tag{3.1}$$

όπου με τον τόνο νοείται η συνήθης παραγωγή ως προς τον χρόνο, $x \in \mathbb{R}^k$, $y \in \mathbb{R}^l$, $k, l \geq 1$ και τέλος $0 < \varepsilon \leq 1$. Η παράμετρος ε είναι το μέγεθος που προσδίδει στο σύστημα ιδιόμορφη συμπεριφορά.

Σημειώνουμε πως η παρουσίαση της βασικής θεωρίας, υιοθετεί πιστά τρόπους και συμβολισμούς που εμφανίζονται στη διεθνή βιβλιογραφία, η οποία παρατίθεται στο τέλος της εργασίας.

Συνεχίζοντας με μία αλλαγή στην χρονική κλίμακα, του συστήματος (3.1), της μορφής $\tau = \varepsilon t$ έχουμε αντίστοιχα:

$$\varepsilon \dot{x} = f(x, y, \varepsilon) \tag{3.2}$$

$$\dot{y} = g(x, y, \varepsilon)$$

όπου με τελεία νοείται η συνήθης παραγωγή ως προς τη μεταβλητή τ .

Την χρονική κλίμακα τ στο εξής θα την αποκαλούμε βραδεία χρονική κλίμακα (*slow time scale*) ενώ την κλίμακα t ταχεία χρονική κλίμακα (*fast time scale*). Επίσης για $\varepsilon \neq 0$ τα δύο συστήματα είναι πλήρως ισοδύναμα και έτσι σε πλήρη αντιστοιχία θα αποκαλούμε το σύστημα (3.1) ως ταχύ σύστημα και το σύστημα (3.2) ως βραδύ σύστημα.

Η βασική ιδέα της ιδιόμορφης θεωρίας διαταραχών είναι να εξάγουμε συμπεράσματα για το σύστημα, συνδυάζοντας πληροφορίες που προκύπτουν από την ταυτόχρονη μελέτη των (3.1) και (3.2) στην ιδιόμορφη περίπτωση όπου $\varepsilon \rightarrow 0$.

Έτσι λοιπόν, ξεκινάμε τη μελέτη μας από τα συστήματα (3.1) και (3.2) κατά την ιδιόμορφη οριακή διαδικασία όπου $\varepsilon \rightarrow 0$. Το σύστημα (3.1) σε αυτήν την περίπτωση θα μετατραπεί στο:

$$x' = f(x, y, 0) \tag{3.3}$$

$$y' = 0$$

Με βάση το από πάνω, η μεταβλητή x θα μεταβάλλεται καθώς η μεταβλητή y θα παραμένει σταθερή και γι' αυτό θα την ονομάζουμε ταχέα μεταβλητή. Αντιστοίχως, το σύστημα (3.2) μετατρέπεται στο:

$$0 = f(x, y, 0) \tag{3.4}$$

$$\dot{y} = g(x, y, 0)$$

Εδώ η εξέλιξη του συστήματος καθορίζεται από τον κανόνα (3.4b) κείτοντας στο χώρο που καθορίζεται από την εξίσωση (3.4a). Είναι αρκετά εύκολο να παρατηρήσουμε πως το σύνολο $0 = f(x, y, 0)$ αποτελεί σύνολο των υποψήφιων σημείων ισορροπίας για το σύστημα (3.3) μα για το (3.4) αποτελεί σύνολο με καθόλου τετριμμένη συμπεριφορά.

Ας κάνουμε σε αυτό το σημείο την πρώτη μας υπόθεση για το σύστημα (3.1) προς απλούστευση της διαδικασίας. Από εδώ και στο εξής θα θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g \in C^\infty$ στο σύνολο $U \times I$, όπου $U \subset \mathbb{R}^N$, ανοικτό με $N = k + l$ και I ανοικτό διάστημα που περιέχει το μηδέν (υπόθεση 1).

Εν συνεχεία, παραθέτουμε δύο σημαντικούς ορισμούς συνόλων σημείων που έχουν ξεχωριστή σημασία, (πέραν των ήδη γνωστών συνόλων, π.χ. σημείων ισορροπίας, περιοδικών τροχιών κλπ), για τη δυναμική συστημάτων.

Ορισμός 3.1

Ένα σύνολο V θα ονομάζεται **αναλλοίωτο σύνολο** (*invariant set*) για την εξίσωση $y' = h(y)$, αν για $t_0 \in \mathbb{R}$ με $y(t_0) \in V$, να συνεπάγεται πως $y(t) \in V$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Τα πιο απλά παραδείγματα αναλλοίωτων συνόλων είναι προφανώς τα σημεία ισορροπίας και οι περιοδικές τροχιές.

Ορισμός 3.2

Ένα ανοικτό σύνολο V θα ονομάζεται **τοπικά αναλλοίωτο** (*locally invariant*) ως προς ένα ανοικτό σύνολο W , για την εξίσωση $y' = h(y)$, αν το V είναι υποσύνολο του W και αν οποιαδήποτε τροχιά αφήνοντας το V , ταυτοχρόνως αφήνει το W .

Τα αναλλοίωτα σύνολα αποτελούν σύνολα που πολλές φορές αντιστοιχούν σε πολλαπλότητες.

Το σύνολο των σημείων ισορροπίας $f(x, y, 0) = 0$ σχηματίζεται επιλύοντας τις n στο πλήθος εξισώσεις στο χώρο \mathbb{R}^N . Έτσι αναμένουμε να είναι, τουλάχιστον τοπικά, μια l -διάστατη πολλαπλότητα. Ας υποθέσουμε λοιπόν ακριβώς αυτό,

πως έχουμε δηλαδή μια l -διάστατη πολλαπλότητα \mathcal{M}_0 , πιθανώς φραγμένη, ώστε $\mathcal{M}_0 \subset \{f(x, y, 0) = 0\}$.

Ας συνεχίσουμε τώρα με έναν ακόμα βασικό ορισμό.

Ορισμός 3.3

Δοθέντων δύο πολλαπλοτήτων \mathcal{M} , \mathcal{N} , μία διαφορίσιμη απεικόνιση $F: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$, θα ονομάζεται **διαφορομορφισμός** (*diffeomorphism*) αν είναι αμφιμονοσήμαντη και η αντίστροφη της $F^{-1}: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ είναι επίσης διαφορίσιμη. Αν αυτές οι συναρτήσεις είναι C^r τότε η απεικόνιση F θα καλείται C^r -διαφορομορφισμός.

Από τον παραπάνω ορισμό, δύο πολλαπλότητες \mathcal{M} , \mathcal{N} θα λέμε ότι είναι διαφορόμορφες (αντίστοιχα C^r -διαφορόμορφες) αν υπάρχει διαφορομορφισμός F , από την \mathcal{M} στην \mathcal{N} (αντίστοιχα αν υπάρχει C^r -διαφορομορφισμός).

3.2 Τρία Χρήσιμα Θεωρήματα

Έχοντας κάνει μία απλή εισαγωγή στα θέματα που θα μας απασχολήσουν και έχοντας δώσει και τους απαραίτητους ορισμούς, θα εισάγουμε σε αυτήν την παράγραφο τα βασικά αποτελέσματα της ιδιόμορφης θεωρίας διαταραχών, όπως αυτά προέκυψαν από τη μελέτη του Fenichel.

Όπως είδαμε προηγουμένως, έχουμε υποθέσει την ύπαρξη μιας l -διάστατης πολλαπλότητας \mathcal{M}_0 , πιθανώς φραγμένης, ώστε $\mathcal{M}_0 \subset \{f(x, y, 0) = 0\}$. Επιπλέον, υποθέτουμε πως είναι συμπαγές σύνολο καθώς επίσης και κανονικά υπερβολική, αναφερόμενη προφανώς ως προς το σύστημα (3.3) (υπόθεση 2). Η τελευταία έννοια ορίζεται ως ακολούθως:

Ορισμός 3.4

Η πολλαπλότητα \mathcal{M}_0 θα λέγεται **κανονικά υπερβολική** (*normally hyperbolic*) αν κάθε σημείο της έχει κατά την γραμμικοποίηση του (3.1), ακριβώς l στο πλήθος ιδιοτίμες, επί του φανταστικού άξονα.

Από εδώ και στο εξής, την πολλαπλότητα \mathcal{M}_0 θα την ονομάζουμε κρίσιμη πολλαπλότητα (*critical manifold*) καθώς η δομή της και γενικά τα χαρακτηριστικά της, θα καθορίζουν αποφασιστικά την εξέλιξη της μελέτης μας,

όπως θα διαπιστώσουμε παρακάτω. Έχοντας λοιπόν στο μυαλό μας πάντα την υπόθεση 1 και την υπόθεση 2, είμαστε πλέον σε θέση να διατυπώσουμε το πρώτο θεώρημα του Fenichel για την ιδιόμορφη θεωρία διαταραχών.

Θεώρημα 3.1 (Θεώρημα Αναλλοίωτων Πολλαπλοτήτων): Αν $\varepsilon > 0$, μα αρκετά μικρό, θα υπάρχει πολλαπλότητα \mathcal{M}_ε η οποία κείται κατά $\mathcal{O}(\varepsilon)$ της \mathcal{M}_0 και θα είναι διαφορόμορφη αυτής. Επιπλέον είναι τοπικά αναλλοίωτη και C^r κάτω από τη ροή του (3.1) για κάθε $r < \infty$.

Την πολλαπλότητα \mathcal{M}_ε θα την ονομάζουμε βραδεία πολλαπλότητα. Το γεγονός πως η \mathcal{M}_ε είναι τοπικά αναλλοίωτη, στην πράξη σημαίνει πως οι τροχιές μπορούν να διαφύγουν αυτής κατά την βραδεία κατεύθυνση μέσω του συνόρου της και όχι μέσω κάθετων κατευθύνσεων στην \mathcal{M}_ε .

Το θεώρημα 3.1 υποδηλώνει πως ο περιορισμός των τροχιών του (3.1) στην \mathcal{M}_ε , είναι μία μικρή διαταραχή της τροχιάς στο αντίστοιχο ιδιόμορφο πρόβλημα (3.3).

Για την απλοποίηση του θέματος ας υποθέσουμε πως η \mathcal{M}_0 μπορεί να επιλυθεί επακριβώς ως προς την μεταβλητή x . Υποθέτουμε λοιπόν πως υπάρχει μία συνάρτηση $h^0(y)$, ορισμένη σε ένα συμπαγές χωρίο K , υποσύνολο του \mathbb{R}^l έτσι ώστε: $\mathcal{M}_0 = \{(x, y) : x = h^0(y)\}$. Η προηγούμενη πρόταση, μπορεί πάντα να ισχύει τοπικά, καθώς λόγω της κανονικής υπερβολικότητας, ο πίνακας $D_x f(\hat{x}, \hat{y}, 0)$ είναι αντιστρέψιμος για κάθε $(\hat{x}, \hat{y}) \in \mathcal{M}_0$ και έτσι μέσω του θεωρήματος της πεπλεγμένης συνάρτησης, το x μπορεί να επιλυθεί ως προς y . Έστω λοιπόν ότι μία τέτοια επίλυση μπορεί να ισχύσει ολικά στην \mathcal{M}_0 , τότε $\mathcal{M}_\varepsilon = \{(x, y) : x = h^\varepsilon(y)\}$. Κατόπιν και αυτής της υπόθεσης αναδιατυπώνουμε το θεώρημα 3.1 ως εξής:

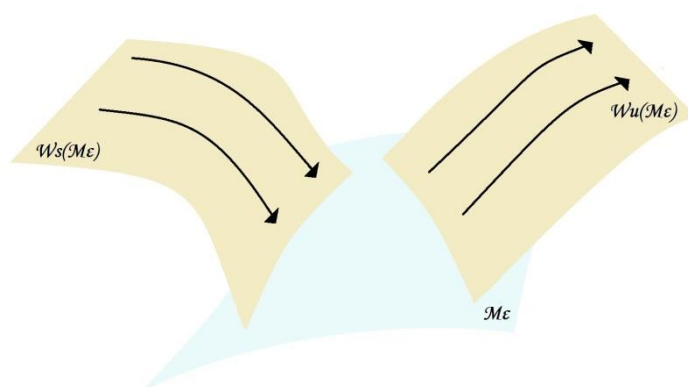
Θεώρημα 3.2: Αν $\varepsilon > 0$, μα αρκετά μικρό, θα υπάρχει συναρτηση $x = h^\varepsilon(y)$, ορισμένη στο K , ώστε το γραφημα $\mathcal{M}_\varepsilon = \{(x, y) : x = h^\varepsilon(y)\}$ να είναι τοπικά αναλλοίωτο κάτω από τη ροή του (3.1). Επίσης, η h^ε είναι C^r για κάθε $r < \infty$.

Τα θεωρήματα 3.1 και 3.2 εγγυώνται, όπως είπαμε, την ύπαρξη βραδείας πολλαπλότητας και προσεγγίζουν την αντίστοιχη σε αυτή τροχιά. Το παραπάνω όμως συμπέρασμα περιορίζει αρκετά την εικόνα που μπορούμε να έχουμε για την μορφολογία του χώρου φάσεων του (3.1). Αν επιθυμούμε λοιπόν να μελετήσουμε εκτενέστερα τροχιές του χώρου φάσεων πέραν των ήδη αναφερθέντων, αυτό θα γίνει μέσω των ευσταθών και ασταθών

πολλαπλοτήτων. Ας υποθέσουμε λοιπόν πως για την εξίσωση (3.3), η κανονικά υπερβολική πολλαπλότητα $\mathcal{M}_0 \subset \{f(x, y, 0) = 0\}$, έχει μία $l + m$ -διάστατη ευσταθή πολλαπλότητα $\mathcal{W}^S(\mathcal{M}_0)$, και μία $l + n$ -διάστατη ασταθή πολλαπλότητα $\mathcal{W}^U(\mathcal{M}_0)$, όπου $m + n = k$. Πιο απλά αυτό σημαίνει πως η αντίστοιχη Ιακωβιανή $\left. \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, 0) \right|_{\mathcal{M}_0}$, έχει m ιδιοτιμές με αρνητικό πραγματικό μέρος και n ιδιοτιμές με θετικό πραγματικό μέρος (υπόθεση 3). Με την παραπάνω υπόθεση έχουμε το δεύτερο σημαντικό θεώρημα του Fenichel:

Θεώρημα 3.3: Έστω $\mathcal{M}_0 \subset \{f(x, y, 0) = 0\}$ πολλαπλότητα συμπαγής, πιθανώς με σύνορο, κανονικά υπερβολική και f, g ομαλές συναρτήσεις. Τότε, για $\varepsilon > 0$, μα αρκετά μικρό, θα υπάρχουν πολλαπλότητες $\mathcal{W}^S(\mathcal{M}_\varepsilon)$, $\mathcal{W}^U(\mathcal{M}_\varepsilon)$ οι οποίες κείνται κατά $\mathcal{O}(\varepsilon)$ των αντίστοιχων $\mathcal{W}^S(\mathcal{M}_0)$, $\mathcal{W}^U(\mathcal{M}_0)$ και είναι αντιστοίχως διαφορόμορφες αυτών. Επιπλέον, είναι τοπικά αναλλοίωτες και C^r κάτω από τη ροή του (3.1) για κάθε $r < \infty$.

Να επισημανθεί πως καθώς η πολλαπλότητα \mathcal{M}_ε έχει πάψει πλέον να αποτελεί σύνολο σταθερών σημείων για το σύστημά μας, οι πολλαπλότητες $\mathcal{W}^S(\mathcal{M}_\varepsilon)$, $\mathcal{W}^U(\mathcal{M}_\varepsilon)$ είναι ευσταθής και ασταθής αντίστοιχα με την εξής έννοια: τροχιές της $\mathcal{W}^S(\mathcal{M}_\varepsilon)$ με την πάροδο του χρόνου προσεγγίζουν την \mathcal{M}_ε ενώ αντιθέτως τροχιές της $\mathcal{W}^U(\mathcal{M}_\varepsilon)$ απομακρύνονται από αυτήν (Εικόνα 3.2.1).



Εικόνα 3.2.1: Σχηματική αναπαράσταση της πολλαπλότητας \mathcal{M}_ε με τις αντίστοιχες ευσταθής και ασταθής πολλαπλότητές της.

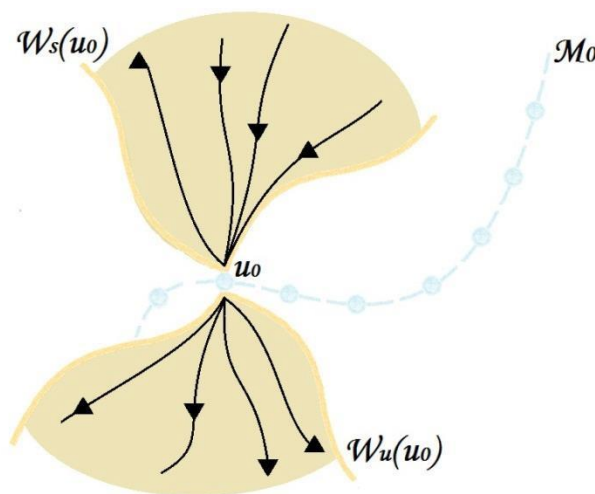
Ακόμα, είναι σημαντικό να αναφέρουμε πως λόγω της ιδιότητας του τοπικά αναλλοίωτου, οι τροχιές θα φθίνουν προς την \mathcal{M}_ε , όσο μένουν σε μία γειτονιά της συμπαγούς, πιθανώς με σύνορο πολλαπλότητας \mathcal{M}_ε .

Με όλες τις υποθέσεις που έχουμε κάνει παραπάνω να ισχύουν κανονικά επαναλαμβάνουμε πως η πολλαπλότητα \mathcal{M}_0 αποτελείται από όλα τα κρίσιμα σημεία του συστήματος (3.3). Σε κάθε τέτοιο σημείο αντιστοιχεί μία ευσταθής πολλαπλότητα $\mathcal{W}^S(u_0)$ και μία ασταθής πολλαπλότητα $\mathcal{W}^U(u_0)$. Με βάση αυτό, οι πολλαπλότητες, ευσταθής και ασταθής, της \mathcal{M}_0 μπορούν να εκφραστούν αντιστοίχως ως εξής:

$$\mathcal{W}^S(\mathcal{M}_0) = \bigcup_{u_0 \in \mathcal{M}_0} \mathcal{W}^S(u_0) \quad \mathcal{W}^U(\mathcal{M}_0) = \bigcup_{u_0 \in \mathcal{M}_0} \mathcal{W}^U(u_0)$$

Προφανώς λοιπόν η $\mathcal{W}^S(\mathcal{M}_0)$ αποτελείται από την ένωση των εκάστοτε συνόλων $\mathcal{W}^S(u_0)$ τροχιών, που οδηγούν στο σημείο u_0 κατά αύξοντα χρόνο (αντίστοιχα κατά φθίνοντα χρόνο στην περίπτωση $\mathcal{W}^U(u_0)$) (Εικόνα 3.2.2).

Στο θεώρημα 3.3 διαπιστώθηκε πως οι πολλαπλότητες $\mathcal{W}^S(\mathcal{M}_\varepsilon)$, $\mathcal{W}^U(\mathcal{M}_\varepsilon)$ διαταράσσονται και έχουν μορφή παρόμοια με τις $\mathcal{W}^S(\mathcal{M}_0)$, $\mathcal{W}^U(\mathcal{M}_0)$. Ένα εύλογο ερώτημα που γεννάται είναι αν οι πολλαπλότητες $\mathcal{W}^S(u_0)$, $\mathcal{W}^U(u_0)$ διαταράσσονται παρομοίως. Όπως θα δούμε στο τρίτο θεώρημα του Fenichel παρακάτω, παρ' όλο που τα κρίσιμα σημεία δεν διαταράσσονται εν γένει σε κρίσιμα σημεία, η απάντηση στο παραπάνω ερώτημα είναι καταφατική.



Εικόνα 3.2.2: Σχηματική αναπαράσταση των πολλαπλοτήτων που αντιστοιχούν στο σημείο u_0 .

Μία σημαντική παρατήρηση είναι πως παρ' όλο που τα σύνολα $\mathcal{W}^S(u_\varepsilon)$, $\mathcal{W}^U(u_\varepsilon)$, δεν είναι αναλλοίωτα, οι οικογένειες $\{\mathcal{W}^S(u_\varepsilon)/u_\varepsilon \in \mathcal{M}_\varepsilon\}$ και $\{\mathcal{W}^U(u_\varepsilon)/u_\varepsilon \in \mathcal{M}_\varepsilon\}$ είναι αναλλοίωτες υπό μία συγκεκριμένη έννοια.

Ας εισάγουμε αρχικά τον συμβολισμό $x \cdot t$, ο οποίος εκφράζει την εξέλιξη της ροής μετά από χρόνο t από την αρχική θέση x . Γενικότερα, με την έκφραση $V \cdot t$, θα εννοούμε την εξέλιξη της ροής μετά από χρόνο t για κάθε αρχική θέση $x \in V$. Τέλος, με $x \cdot [t_1, t_2]$ εννοείται η εξέλιξη της ροής εντός του χρονικού διαστήματος $[t_1, t_2]$ από την αρχική θέση x . Για διευκόλυνση θα περιοριστούμε σε μία γειτονιά Δ της \mathcal{M}_ε , όπου θα μας απασχολήσουν μονάχα τροχιές της $\mathcal{W}^U(u_\varepsilon)$ οι οποίες δεν έχουν ξεφύγει του Δ κατά την μελλοντική εξέλιξη και τροχιές της $\mathcal{W}^S(u_\varepsilon)$ οι οποίες δεν έχουν ξεφύγει του Δ κατά την αντίστροφη εξέλιξη.

Ορισμός 3.5

Η **μελλοντική εξέλιξη ενός συνόλου** $V \subset \Delta$, περιορισμένη στο σύνολο Δ , δίδεται από την σχέση $V_\Delta \cdot t := \{x \cdot t/x \in V \wedge x \cdot [0, t] \subset \Delta\}$.

Παρακάτω διατυπώνεται το τρίτο θεώρημα του Fenichel.

Θεώρημα 3.4: Έστω $\mathcal{M}_0 \subset \{f(x, y, 0) = 0\}$ πολλαπλότητα συμπαγής, πιθανώς με σύνορο, κανονικά υπερβολική και f, g ομαλές συναρτήσεις. Τότε, για κάθε $u_\varepsilon \in \mathcal{M}_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, μα αρκετά μικρό, θα υπάρχουν m -διάστατη πολλαπλότητα $\mathcal{W}^S(u_\varepsilon) \subset \mathcal{W}^S(\mathcal{M}_\varepsilon)$ και n -διάστατη πολλαπλότητα $\mathcal{W}^U(u_\varepsilon) \subset \mathcal{W}^U(\mathcal{M}_\varepsilon)$ οι οποίες κείνται κατά $\mathcal{O}(\varepsilon)$ των αντίστοιχων $\mathcal{W}^S(u_0)$, $\mathcal{W}^U(u_0)$. Οι οικογένειες $\{\mathcal{W}^{U,S}(u_\varepsilon)/u_\varepsilon \in \mathcal{M}_\varepsilon\}$ είναι αναλλοίωτες με την εξής έννοια:

$$\text{Αν } u_\varepsilon \cdot s \in \Delta \forall s \in [0, t] \text{ τότε } \mathcal{W}^S(u_\varepsilon)_\Delta \cdot t \subset \mathcal{W}^S(u_\varepsilon \cdot t)$$

$$\text{Αν } u_\varepsilon \cdot s \in \Delta \forall s \in [t, 0] \text{ τότε } \mathcal{W}^U(u_\varepsilon)_\Delta \cdot t \subset \mathcal{W}^U(u_\varepsilon \cdot t)$$

3.3 Εφαρμογή στην εξίσωση FN & το Λήμμα της Ανταλλαγής

Σε αυτήν, την τελευταία παράγραφο του κεφαλαίου, θα εφαρμόσουμε τη θεωρία που αναπτύξαμε παραπάνω για την εξίσωση FN. Θα αναφέρουμε ακόμα το λήμμα της ανταλλαγής (*exchange lemma*) καθώς και την κατά Fenichel τυπική μορφή (*Fenichel's normal form*). Όλα αυτά θα μας φανούν χρήσιμα προκειμένου να αποδείξουμε την ύπαρξη ομοκλινικής τροχιάς στη μη ιδιόμορφη περίπτωση, εν αντιθέσει δηλαδή με αυτήν της παραγράφου 2.4.

Ας θεωρήσουμε ξανά το σύστημα (2.8):

$$\begin{aligned}V' &= Z \\Z' &= -cZ - F(V, W) \\W' &= -\varepsilon G(V, W)/c\end{aligned}\tag{3.9}$$

Καθώς και το αντίστοιχο σύστημα μετά την αλλαγή στην χρονική κλίμακα $\tau = \varepsilon t$:

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{V} &= Z \\ \varepsilon \dot{Z} &= -cZ - F(V, W) \\ \dot{W} &= -G(V, W)/c\end{aligned}\tag{3.10}$$

Τα συστήματα (3.9) και (3.10) αποτελούν το ταχύ και βραδύ σύστημα αντίστοιχα. Υπενθυμίζουμε πως στη μη ιδιόμορφη περίπτωση, αυτά τα δύο συστήματα είναι απολύτως ισοδύναμα. Τα σημεία ισορροπίας υπολογίζονται από την επίλυση του συστήματος:

$$\begin{aligned}f(V, Z, W, \varepsilon) &= \begin{bmatrix} Z \\ -cZ - F(V, W) \end{bmatrix} = 0 \\ g(V, Z, W, \varepsilon) &= -\frac{G(V, W)}{c} = 0\end{aligned}$$

Όπως βλέπουμε στο ακόλουθο γράφημα (Εικόνα 3.3.1), οι γραφικές παραστάσεις τέμνονται σε ένα μονάχα σημείο (για κάθε επιτρεπόμενη τιμή της παραμέτρου a) όπου και θα αποτελεί το σημείο ισορροπίας. Εμείς ενδιαφερόμαστε για την εύρεση μιας ομοκλιτικής τροχιάς στο σημείο αυτό, δηλαδή στην αρχή των αξόνων.

Στην περίπτωση όπου $\varepsilon \rightarrow 0$, τα συστήματα (3.9) και (3.10) μετατρέπονται στα:

$$V' = Z$$

$$Z' = -cZ - F(V, W) \quad (3.11)$$

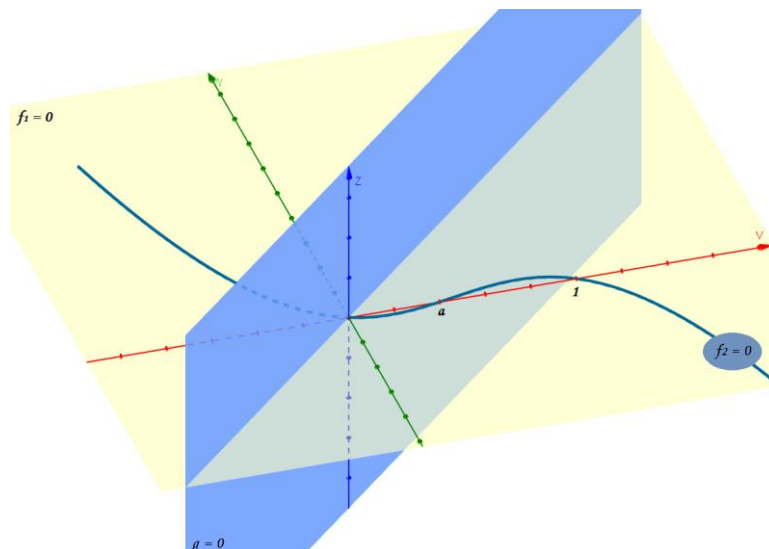
$$W' = 0$$

και

$$0 = Z$$

$$0 = -cZ - F(V, W) \quad (3.12)$$

$$\dot{W} = -G(V, W)/c$$



Εικόνα 3.3.1: Η τομή των μηδενοκλινών καμπυλών $f=0$ και $g=0$, αντιστοιχούν στα σημεία ισορροπίας του συστήματος (στην περίπτωση μας, η αρχή των αξόνων).

Για το ταχύ ιδιόμορφο σύστημα (3.11), η παράμετρος W αποκτά χαρακτήρα παραμέτρου και η κρίσιμη πολλαπλότητα $\mathcal{M}_0 = \{(V, Z, W): Z = 0 \wedge W = f(V)\}$ περιέχει τα σημεία ισορροπίας (Εικόνα 3.3.2). Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $h(V, W) = f(V) - W = V^2 - V^3 - aV + aV^2 - W$. Τότε:

$$\frac{\partial h}{\partial V} = 2(1+a)V - 3V^2 - a$$

Κάνοντας μία απλή ανάλυση προσήμου στην παράσταση $-3V^2 + 2(1+a)V - a$, διαπιστώνουμε ότι η διακρίνουσα θα είναι πάντα θετική (θυμόμαστε ότι $0 < a < 1/2$) και οι τιμές της φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

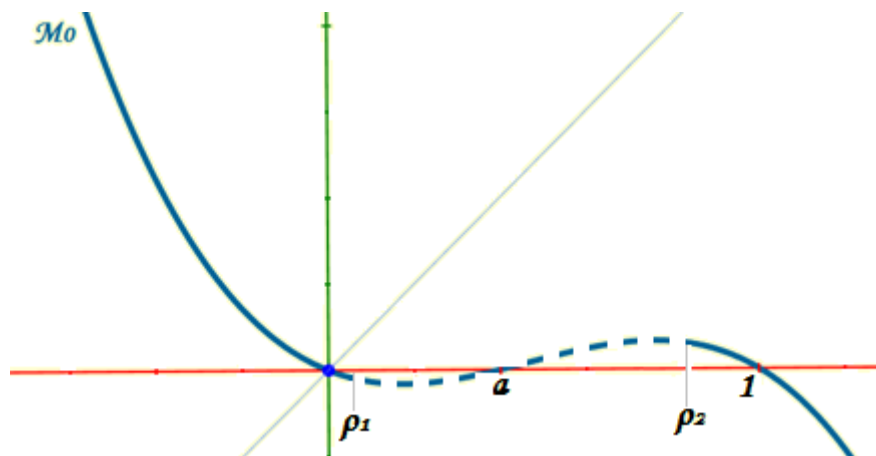
$$\begin{array}{ccccccc} & V & & 0 & & \rho_1 & & \rho_2 \\ \hline -3V^2 + 2(1+a)V - a & & & (-) & & (-) & (+) & (-) \end{array}$$

όπου $\rho_{1,2} = \frac{-(1+a) \pm \sqrt{-2a^2 + 2a + 1}}{-3} > 0$.

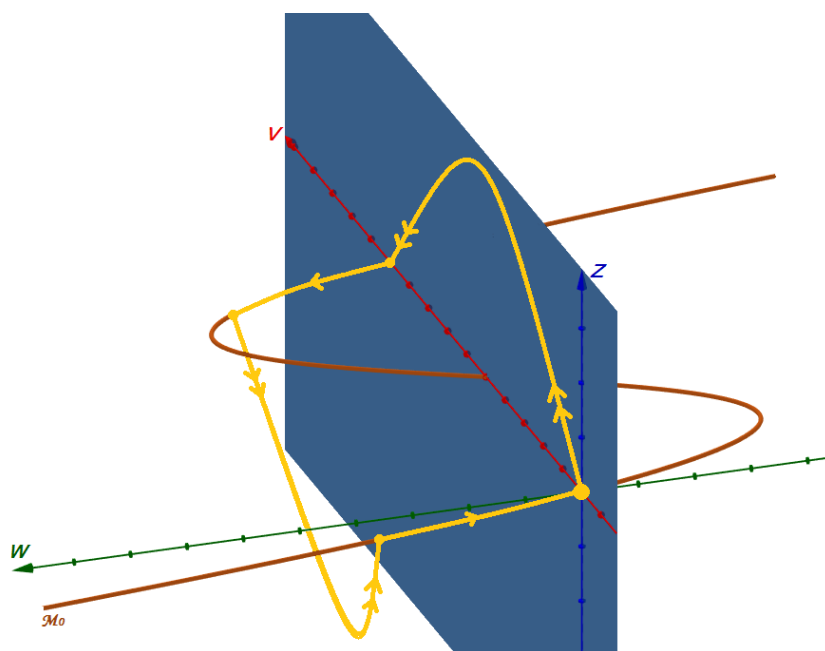
Τα συμπεράσματα από τον πίνακα παραπάνω είναι τα εξής: Το τμήμα της καμπύλης στην εικόνα 3.3.2, για $V \in (-\infty, \rho_1) \cup (\rho_2, +\infty)$, αποτελούν τα ευσταθή μέρη της κρίσιμης πολλαπλότητας \mathcal{M}_0 , του ταχέου συστήματος (3.11), αφού σε αυτό το διάστημα ισχύει $\frac{\partial h}{\partial V} < 0$. Αντιθέτως, το τμήμα της καμπύλης όπου $V \in (\rho_1, \rho_2)$, απαρτίζεται από τα ασταθή σημεία ισορροπίας του συστήματος (3.11), αφού τότε $\frac{\partial h}{\partial V} > 0$.

Όπως εκτενώς αναφέραμε στις παραγράφους 2.3 & 2.4, αν υποθέσουμε πως το σύστημα (3.11) εξελίσσεται στο επίπεδο $W = 0$, ακριβώς δηλαδή όπως και στο ισοδύναμό του σύστημα (2.5), τότε θα εμφανίζεται μία ετεροκλινική τροχιά στο επίπεδο VZ , μεταξύ των σημείων $(V, Z) = (0, 0)$ και $(V, Z) = (1, 0)$ για κάθε $0 < a < 1/2$ και $c = c^* = -1/\sqrt{2}(2a - 1)$. Αυτή η τροχιά συνδέει το αριστερό μέρος της πολλαπλότητας $(\mathcal{M}_0^l(c, a))$, με το δεξί τμήμα αυτής $(\mathcal{M}_0^r(c, a))$. Όμως, ανατρέχοντας και πάλι στην παράγραφο 2.4, θα διαπιστώσουμε πως υπάρχει ακόμη μία ετεροκλινική τροχιά, κατά μέτρο ίσης ταχύτητας με την από πάνω, που να συνδέει τα δύο σκέλη της \mathcal{M}_0 από το δεξί, στο αριστερό αυτήν τη φορά.

Έπειτα, μελετώντας το σύστημα (2.11) ή ισοδύναμα το σύστημα (3.12), διαπιστώσαμε πως η τροχιά εξελίσσεται επί της πολλαπλότητας \mathcal{M}_0 . Συγκεντρωτικά λοιπόν από τα (3.11) & (3.12), κατασκευάσαμε μία ομοκλινική τροχιά (Εικόνα 3.3.3).



Εικόνα 3.3.2: Προβολή των γραφικών παραστάσεων της εικόνας 2.3.1 στο V - W επίπεδο. Η κυανή (συνεχόμενη και διακεκομμένη) γραμμή, αποτελεί την κρίσιμη πολλαπλότητα. Ποιοτικά σημειώνονται και τα σημεία $\rho_{1,2}$ όπως τα ορίσαμε ακριβώς παραπάνω.



Εικόνα 3.3.3: Όπως και στην εικόνα 2.3.4, εδώ αναπαρίσταται με περισσότερη λεπτομέρεια η ιδιόμορφη ομοκλινική τροχιά που κατασκευάσαμε με τον τρόπο που εξηγήσαμε στο κυρίως κείμενο. Αναφέρουμε επίσης πως με διπλό βέλος εννοούμε την ταχεία εξέλιξη του συστήματος, ενώ με μονό την βραδεία εξέλιξη αυτού.

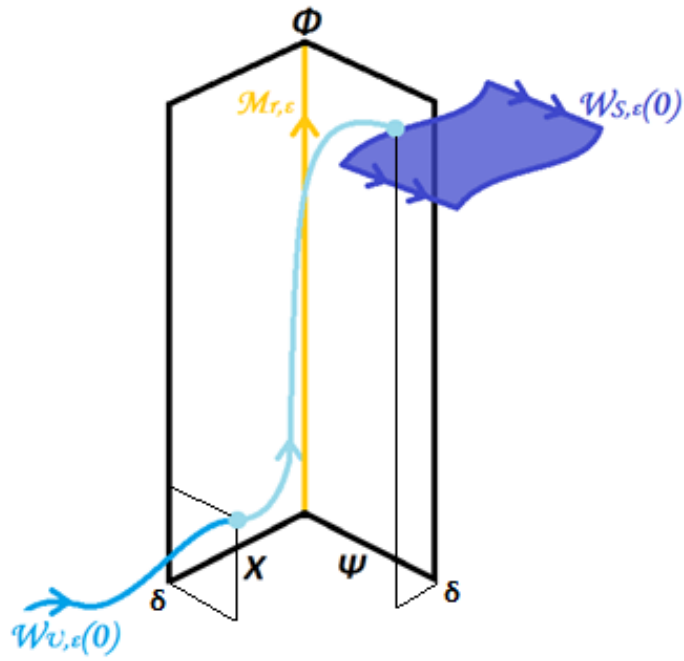
Χρησιμοποιώντας τώρα την θεωρία που αναπτύξαμε στο παρόν κεφάλαιο συν κάποια νέα στοιχεία θεωρίας που θα δούμε παρακάτω, θα κατασκευάσουμε έναν κυματικό παλμό για $\varepsilon > 0$, όπου και θα αποτελεί διαταραχή του αντίστοιχου ιδιόμορφου.

Για αρχή είναι πολύ εύκολο να διαπιστωθεί πως οι πολλαπλότητες $\mathcal{M}_0^l(c, a)$, $\mathcal{M}_0^r(c, a)$ είναι κανονικά υπερβολικές και έτσι τα τμήματα αυτά “διατηρούνται” για $\varepsilon > 0$ ως τοπικά αναλλοίωτες πολλαπλότητες $\mathcal{M}_\varepsilon^l(c, a)$, $\mathcal{M}_\varepsilon^r(c, a)$ αντίστοιχα, όπως ακριβώς μας διαβεβαιώνει το πρώτο θεώρημα του Fenichel. Επίσης η ευσταθής πολλαπλότητα $\mathcal{W}^S(\mathcal{M}_0^l(c, a))$, με βάση το δεύτερο θεώρημα του Fenichel διαταράσσεται στην αντίστοιχη διδιάστατη πολλαπλότητα $\mathcal{W}^S(\mathcal{M}_\varepsilon^l(c, a))$ (ομοίως και η δεξιά πολλαπλότητα). Η αρχή των αξόνων επίσης, έχει μια ασταθή πολλαπλότητα \mathcal{W}_0^U όπου και αυτή θα διαταράσσεται στην $\mathcal{W}_\varepsilon^U$.

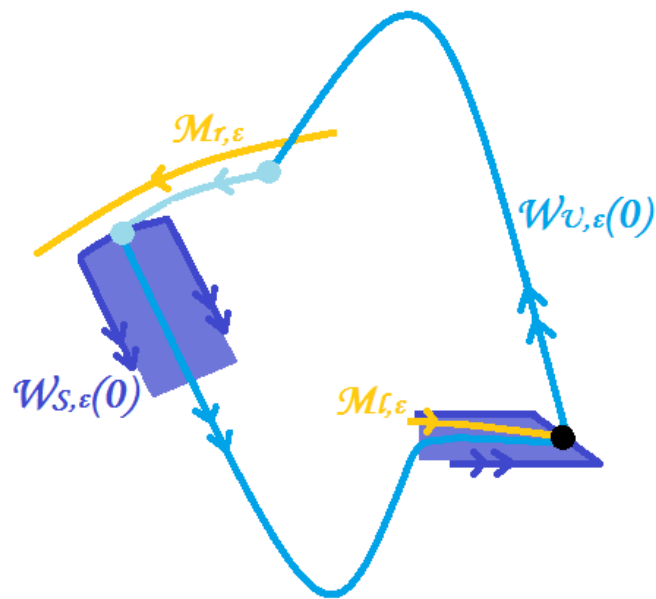
Η βασική ιδέα για την κατασκευή της διαταραγμένης ομοκλινικής τροχιάς προκύπτει από την τομή της ασταθούς πολλαπλότητας \mathcal{W}_0^U , και της πολλαπλότητας $\mathcal{W}^S(\mathcal{M}_\varepsilon^l(c, a))$. Η δυσκολία που προκύπτει εδώ είναι πως η πολλαπλότητα \mathcal{W}_0^U , ξοδεύει χρόνο της τάξεως $\mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$ καθώς διέρχεται αρκετά κοντά της $\mathcal{M}_\varepsilon^r$. Το ζήτημα αυτό μπορεί να ξεπεραστεί χρησιμοποιώντας το λήμμα της ανταλλαγής. Το συγκεκριμένο λήμμα διατυπώνεται πολύ εύκολα αν μετασχηματίσουμε, σε μία γειτονιά της $\mathcal{M}_\varepsilon^r$, το (2.9) ως το σύστημα:

$$\begin{aligned} X' &= -A(X, \Psi, \Phi, c, a, \varepsilon)X \\ \Psi' &= B(X, \Psi, \Phi, c, a, \varepsilon)\Psi \\ \Phi' &= \varepsilon[1 + E(X, \Psi, \Phi, c, a, \varepsilon)X\Psi] \end{aligned} \tag{3.12}$$

όπως μας επιτρέπει η τυπική κατά Fenichel μορφή. Η $\mathcal{M}_\varepsilon^r(c, a)$ ορίζεται ως $X = \Psi = 0$ και οι $\mathcal{W}_\varepsilon^{U,r}$, $\mathcal{W}_\varepsilon^{S,r}$ ορίζονται από τις σχέσεις $X = 0, \Psi = 0$ αντίστοιχα. Επίσης οι συναρτήσεις A, B είναι κάτω φραγμένες για κάποιο $\mu > 0$. Το λήμμα της ανταλλαγής λοιπόν μας διαβεβαιώνει πως: για αρκούντως μικρά $\delta, \varepsilon > 0$, αρκούντως μεγάλο τ και οποιοδήποτε $Z_0 \in \mathbb{R}$, το σύστημα (3.12) έχει λύση που ικανοποιεί τις συνθήκες $X(0) = \delta, \Phi(0) = \Phi_0$ και $\Psi(\tau) = \delta$ (Εικόνα 3.3.4). Επιπλέον, οι στάθμες $\|X(\tau)\|, \|\Psi(0)\|, \|\Phi(\tau) - \Phi_0 - \varepsilon\tau\|$, είναι της τάξεως $e^{-\mu\tau}$, καθώς $\tau \rightarrow \infty$. Με τη βοήθεια της τυπικής μορφής και του λήμματος εναλλαγής μπορούμε εύκολα να συνδέσουμε τα τμήματα $\mathcal{W}_\varepsilon^U(0)$ και $\mathcal{W}_\varepsilon^S(0)$.

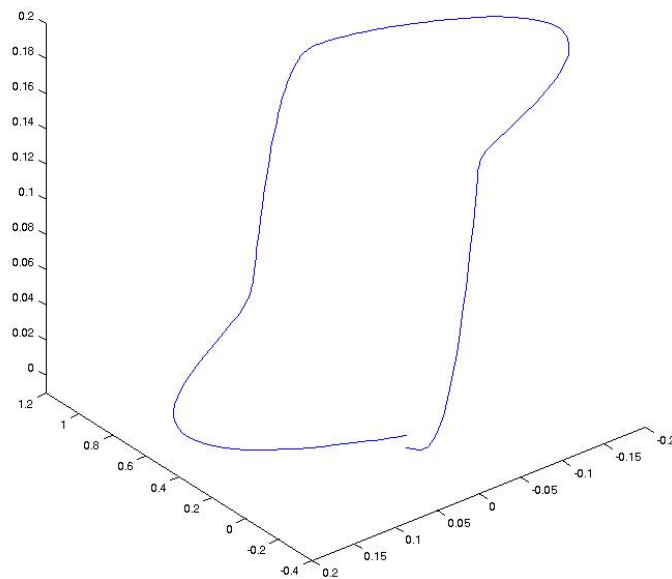


Εικόνα 3.3.4: Γεωμετρική αναπαράσταση του λήμματος της ανταλλαγής.



Εικόνα 3.3.5: Σχηματική αναπαράσταση της διαταραγμένης ομοκλιτικής τροχιάς.

Παρακάτω, (Εικόνα 3.3.6), έχουμε σχεδιάσει με χρήση του MATCONT, την ομοκλινική τροχιά που αντιστοιχεί στο σύστημα (3.9), στην περίπτωση όπου $\varepsilon = 0.005$. Η ομοιότητα της τροχιάς με τις σχηματικές αναπαραστάσεις των εικόνων 3.3.3 και 3.3.5 είναι εμφανής, γεγονός που επαληθεύει πλήρως τα αποτελέσματα και τα θεωρήματα του Fenichel. Όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, η απεικονίζουσα τροχιά είναι μονάχα μία από το σύνολο των ομοκλινικών τροχιών που μπορούν να υπάρξουν για την συγκεκριμένη τιμή της παραμέτρου ε .



Εικόνα 3.3.6: Αναπαράσταση ομοκλινικής τροχιάς του συστήματος (3.9) για $\varepsilon = 0.005$. Το χάσμα μεταξύ του αρχικού τμήματος της καμπύλης (θέση μηδέν) και του τελικού, είναι της τάξης 0.01 και αποτελεί την απόσταση που εμείς θέσαμε προκειμένου να διακόψει το MATCONT την σχεδίαση της ομοκλινικής τροχιάς.

Κεφάλαιο 4

Μελέτη ομοκλινικών διακλαδώσεων

4.1 Καμπύλες Ομοκλινικών Διακλαδώσεων

Η παράγραφος αυτή, αφορά τον εντοπισμό των θέσεων και των μορφών καμπυλών, των οποίων έναστρο σημείο αντιστοιχεί σε μία ομοκλινική τροχιά του ελαφρώς τροποποιημένου συστήματος (3.9), δηλαδή του διπαραμετρικού συστήματος:

$$\begin{aligned}V' &= Z \\Z' &= -cZ - V(V - a)(1 - V) + W \\W' &= -\varepsilon V/c\end{aligned}\tag{4.1}$$

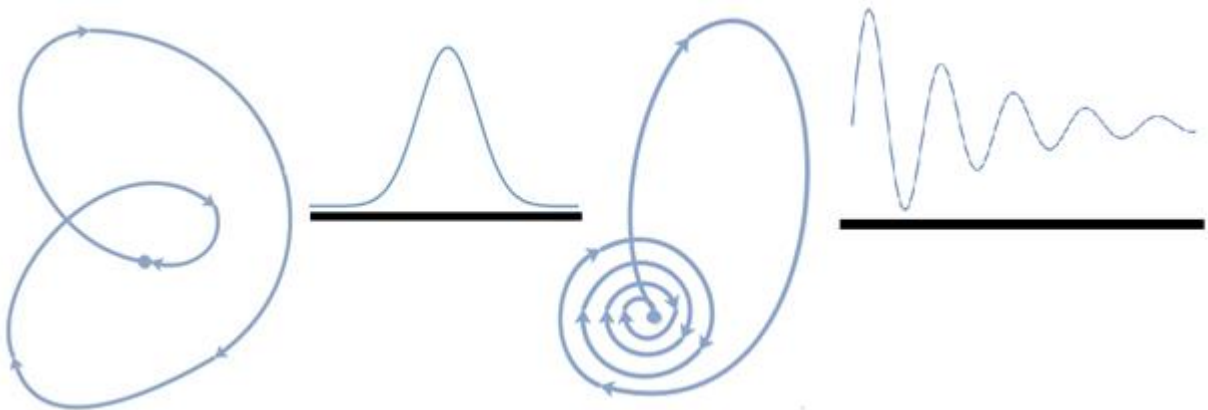
και λέμε διπαραμετρικού καθώς θα θεωρήσουμε πως η παράμετρος ε , είναι ένας σταθερός πραγματικός αριθμός υπό τους γνωστούς περιορισμούς που έχουμε θέσει ήδη από το πρώτο κεφάλαιο.

Υπενθυμίζουμε πως για κάθε τιμή της ταχύτητας c , υπάρχει μοναδικό σημείο ισορροπίας, η αρχή των αξόνων, όπου κατά την γραμμικοποίηση του (4.1) σε αυτό, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι:

$$\Delta(\lambda) = \lambda^3 - c\lambda^2 - a\lambda - \frac{\varepsilon}{c}$$

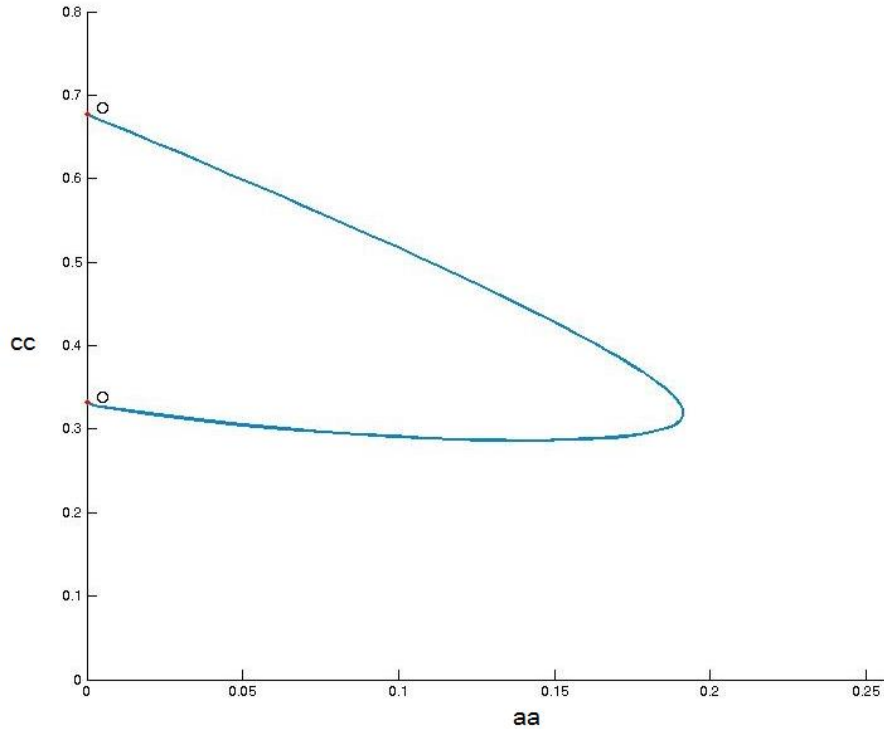
Όπου τότε έχουμε μία θετική ιδιοτιμή λ_1 και επιπλέον δύο με αρνητικό πραγματικό μέρος $\lambda_{2,3}$. Έτσι λοιπόν, το σημείο ισορροπίας θα αποτελεί είτε σαγματικό σημείο, είτε σημείο σαγματικής εστίας (*saddle-focus*). Οι περιπτώσεις εμφάνισης αυτών των δύο τύπων ευστάθειας εξαρτώνται σημαντικώς από την ύπαρξη ή μη διπλής αρνητικής ιδιοτιμής. Σε κάθε περίπτωση όμως, το σημείο ισορροπίας θα έχει μία μονοδιάστατη, αναλλοίωτη, ασταθή πολλαπλότητα και

μία διδιάστατη ευσταθή, αναλλοίωτη πολλαπλότητα. Ένα τμήμα της ασταθούς αυτής πολλαπλότητας, καταφέρει να επιστρέψει στην αρχή των αξόνων σχηματίζοντας όπως είδαμε μία ομοκλινική τροχιά για κάποιες τιμές των παραμέτρων (a, c) . Το σχήμα της ομοκλινικής τροχιάς εξαρτάται από το σημείο ισορροπίας, αφού στην περίπτωση απλού σάγματος η ομοκλινική τροχιά καταλήγει μονότονα στο σημείο ισορροπίας, ενώ στην περίπτωση σαγματικής εστίας καταλήγει σπειροειδώς σε αυτό (Εικόνα 4.1.1). Για κάθε $\varepsilon > 0$, οι τιμές των παραμέτρων αυτών, παίρνουν τη μορφή μίας καμπύλης $H_\varepsilon^{(1)}$ στο επίπεδο (a, c) , η οποία εντοπίζεται αριθμητικώς.

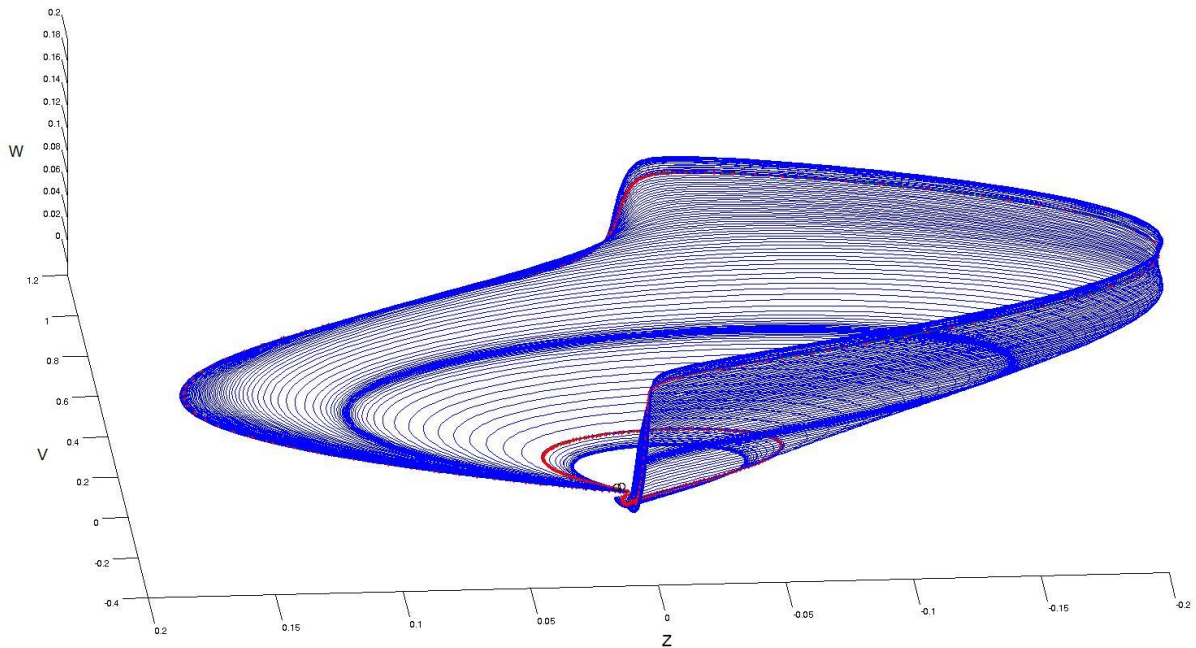


Εικόνα 4.1.1: Μορφές ομοκλινικών τροχιών στην περίπτωση σαγματικού σημείου ισορροπίας (αριστερά) και στην περίπτωση σαγματικής εστίας (δεξιά).

Με τη βοήθεια του MATCONT, μπορούμε να εντοπίσουμε όλα τα σημεία του επιπέδου (a, c) που αντιστοιχούν σε ομοκλινικές τροχιές του συστήματος (4.1) για μία σταθερή τιμή της παραμέτρου $0 < \varepsilon \ll 1$. Στο σχήμα που ακολουθεί (Εικόνα 4.1.2) βλέπουμε την καμπύλη ομοκλινικής διακλάδωσης στην περίπτωση όπου $\varepsilon = 0.005$, όπως αυτή υπολογίστηκε αριθμητικώς. Κάθε σημείο (a, c) αυτής της καμπύλης αντιπροσωπεύει και μία ομοκλινική τροχιά για την τιμή $\varepsilon = 0.005$. Το MATCONT αρκετά εύκολα μπορεί να επαληθεύσει το προηγούμενο συμπέρασμα. Πράγματι, στο διάγραμμα του χώρου φάσεων για το σύστημα (4.1) (Εικόνα 4.1.3), βλέπουμε ένα αντιπροσωπευτικό δείγμα ομοκλινικών τροχιών για διάφορες τιμές των παραμέτρων a, c , με το ε να διατηρεί την τιμή 0.005. Οι ομοκλινικές τροχιές ερυθρού χρώματος αντιστοιχούν στα ερυθρά σημεία της καμπύλης του σχήματος 4.1.2.

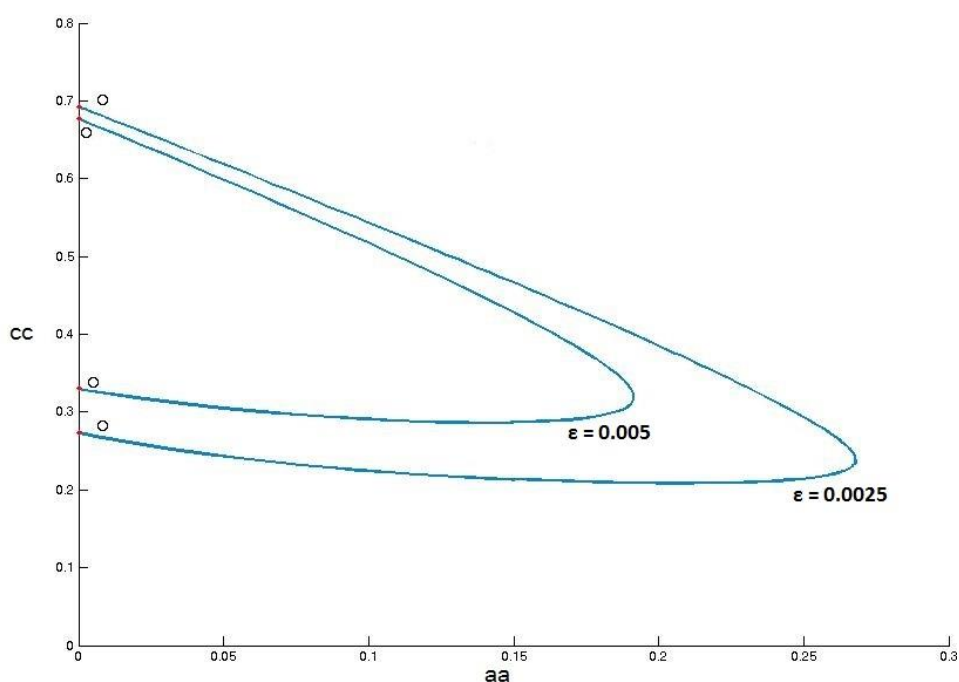


Εικόνα 4.1.2: Καμπύλη ομοκλιτικής διακλάδωσης στο επίπεδο $a - c$ (στο διάγραμμα, $aa-cc$ αντίστοιχα), στην περίπτωση όπου $\varepsilon = 0,005$.



Εικόνα 4.1.3: Σύνολο ομοκλιτικών τροχιών του συστήματος (4.1), στην περίπτωση $\varepsilon = 0,005$. Κάθε τέτοια τροχιά θα αντιστοιχεί σε ένα σημείο του από πάνω διαγράμματος διακλάδωσης, με τις ερυθρές τροχιές να αντιστοιχούν στα ερυθρά σημεία.

Έχοντας εκτελέσει στο MATCONT ακόμα μία φορά την ίδια διαδικασία αλλά αυτήν τη φορά για $\varepsilon = 0.0025$, απεικονίζουμε παρακάτω (Εικόνα 4.1.4), την αντίστοιχη καμπύλη ομοκλιτικής διακλάδωσης στο επίπεδο (a, c) . Στην εικόνα φαίνεται επίσης και η προηγούμενη καμπύλη για $\varepsilon = 0.005$.



Εικόνα 4.1.4: Ομοκλιτικές καμπύλες διακλάδωσης για δύο διαφορετικές τιμές της παραμέτρου ε .

Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε, οι δύο καμπύλες του παραπάνω σχήματος (αλλά και οποιαδήποτε άλλη τέτοια καμπύλη για $0 < \varepsilon \ll 1$) παρουσιάζουν παρόμοια εμφάνιση, διατηρούν δηλαδή μία κοινή D-μορφή. Η μορφή αυτή υποδηλώνει πως παραπάνω από μία ομοκλιτική τροχιά υπάρχει για κάποια τιμή της παραμέτρου a , με διαφορετικές ταχύτητες c . Αξίζει να αναφερθεί ακόμα πως, η δομή αυτή της D-μορφής δεν εμφανίζεται μόνον στην εξίσωση FN, αλλά και σε πολλά άλλα διεγέρσιμα συστήματα όπως το μοντέλο των κυμάτων ασβεστίου (*calcium waves*) και το μοντέλο Hodgkin-Huxley. Γενικώς, αλλά όχι αυστηρώς μπορούμε να πούμε πως κάθε διεγέρσιμο σύστημα με μία μηδενοκλινή καμπύλη N-μορφής και άλλη μία μηδενοκλινή καμπύλη γραμμική ή σχεδόν γραμμική όπως ακριβώς η εξίσωση FN (βλέπε Εικόνα 2.2.1), θα έχει την χαρακτηριστική D-δομή για την καμπύλη ομοκλιτικής διακλάδωσης.

Συνεχίζοντας, ένα αρκετά ενδιαφέρον ερώτημα που γεννάται είναι η μορφή που θα έχει η καμπύλη σαν και αυτές της εικόνας 4.1.4 στην οριακή διαδικασία κατά την οποία η παραμέτρος ε τείνει στο μηδέν. Για τη μελέτη του συγκεκριμένου ερωτήματος θα αναδιατυπώσουμε το σύστημα (4.1) για $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} V' &= Z \\ Z' &= -cZ - V(V - a)(1 - V) + W \\ W' &= 0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

όπου χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε πως $W = w_0 = 0$. Αν επιπλέον θεωρήσουμε πως $c \rightarrow 0$ τότε το (4.2) ισοδυναμεί με το σύστημα (4.3):

$$\begin{aligned} V' &= Z \\ Z' &= -V(V - a)(1 - V) \end{aligned} \tag{4.3}$$

Το σύστημα (4.3) ανήκει σε μία υποκατηγορία Χαμιλτώνειων συστημάτων, αυτών των Νευτώνειων συστημάτων ενός βαθμού ελευθερίας. Είναι δηλαδή της μορφής:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\frac{\partial U}{\partial x}(x) \end{aligned}$$

όπου στην περίπτωση του συστήματος (4.3) θα ισχύει

$$\frac{\partial U}{\partial V} = -V^3 + (1 + a)V^2 - aV$$

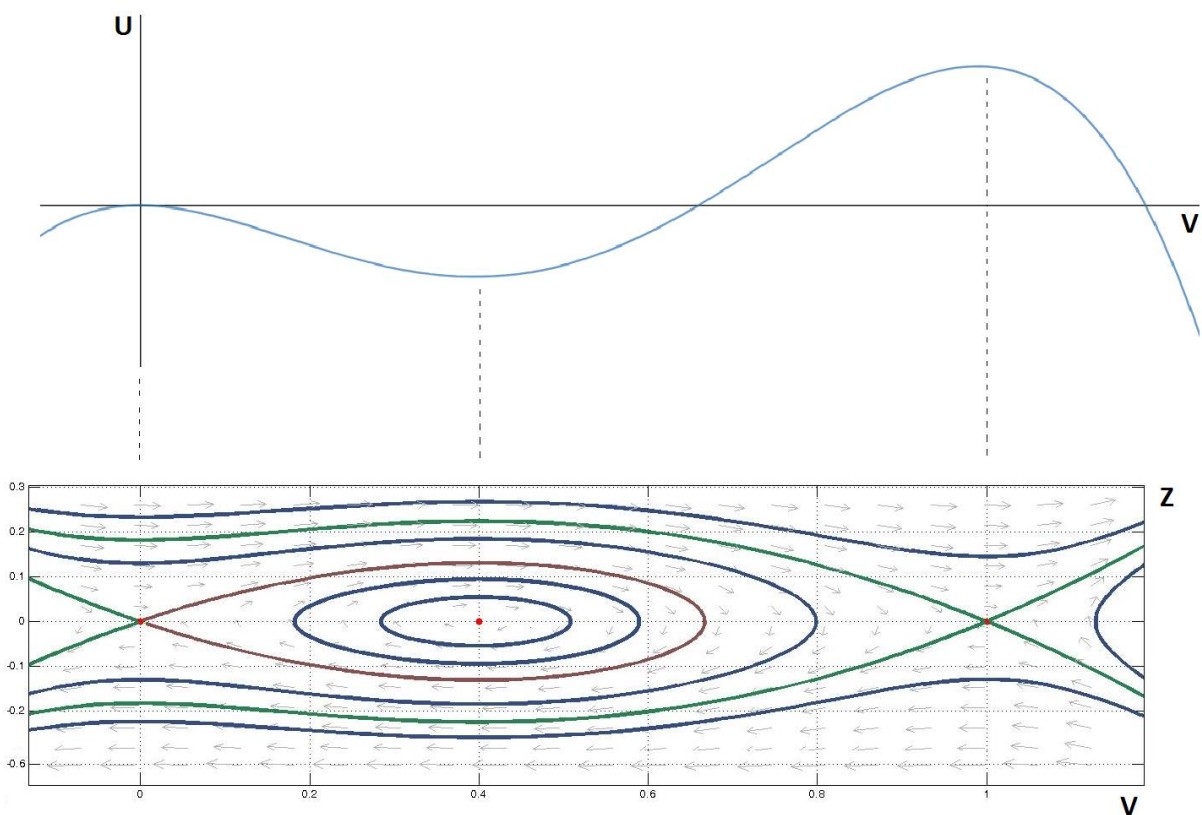
δηλαδή,

$$U(V) = -\frac{V^4}{4} + \frac{(1 + a)V^3}{3} - \frac{aV^2}{2}$$

Είναι γνωστό πως τα κρίσιμα σημεία ενός Νευτώνειου συστήματος κείνται επί του άξονος x (στην περίπτωσή μας επί του άξονος V). Πράγματι, τα σημεία ισοροπίας του συστήματος (4.3) είναι τα εξής: $(0,0)$, $(a,0)$, $(1,0)$. Αν το σημείο ισοροπίας είναι τοπικό μέγιστο της συνάρτησης U , τότε θα αποτελεί σαγματικό σημείο για το Νευτώνειο σύστημα, ενώ αν είναι τοπικό ελάχιστο θα αποτελεί

κέντρο. Τέλος, αν το κρίσιμο σημείο αποτελεί σημείο καμπής της συνάρτησης U , τότε αυτό θα αντιστοιχεί σε σημείο ακμής (*cusp*) για το δυναμικό σύστημα.

Στο σχήμα που ακολουθεί (Εικόνα 4.1.5) απεικονίζεται η συνάρτηση $U(V)$, στην περίπτωση όπου $a = 0.4$, με τον αντίστοιχο χώρο φάσεων, επιβεβαιώνοντας πλήρως τη βασική θεωρία για τα Νευτώνεια συστήματα που περιγράψαμε μόλις προηγουμένως. Στο χώρο φάσεων φαίνεται καθαρά η ύπαρξη μίας ομοκλιτικής τροχιάς (καφέ καμπύλη). Επομένως για $c \rightarrow 0$ και $a = 0.4$, υπάρχει μία ομοκλιτική τροχιά με αρχή και τέλος το σημείο ισορροπίας $(0,0)$.



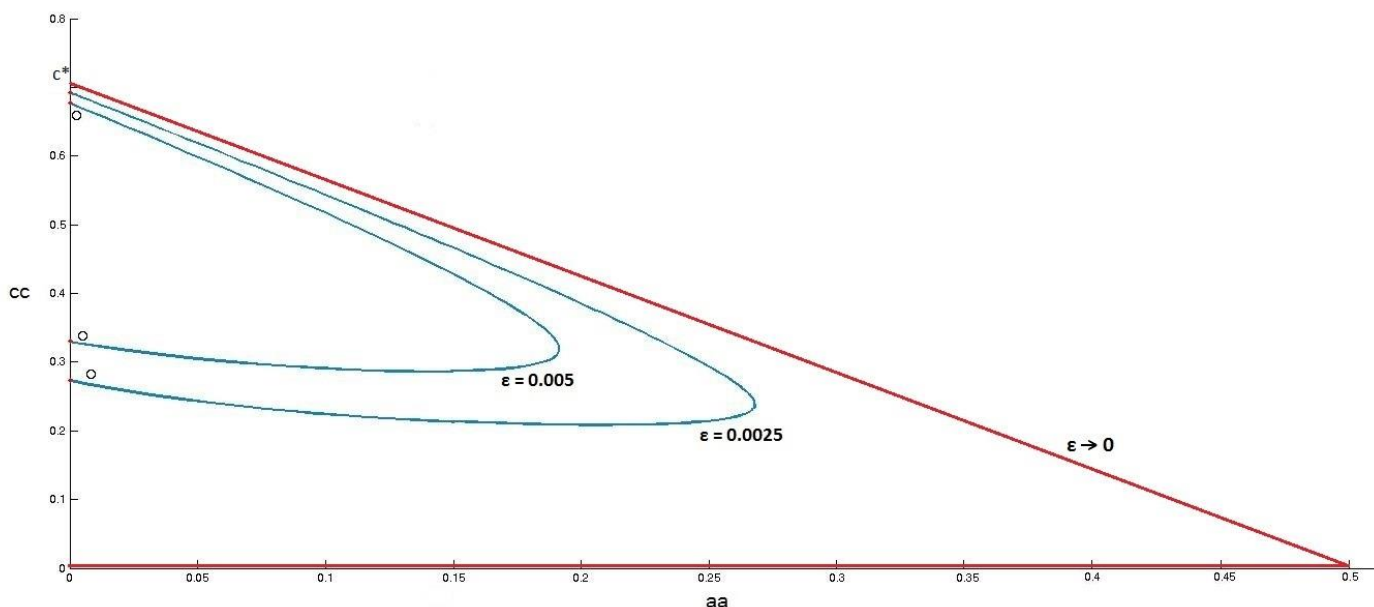
Εικόνα 4.1.5: Τα σημεία ακροτάτων για τη συνάρτηση $U(V)$, (επάνω σχήμα), καθορίζουν την ευστάθεια των αντίστοιχων σημείων ισορροπίας για το σύστημα (4.3) για $a = 0.4$ (κάτω σχήμα). Καθαρά φαίνεται η ύπαρξη μίας ομοκλιτικής τροχιάς στην αρχή των αξόνων (καφέ καμπύλη).

Δεδομένου ότι για οποιαδήποτε επιλογή της παραμέτρου a , (εντός πάντα των ορίων $(0, \frac{1}{2})$) τα ποιοτικά χαρακτηριστικά της συνάρτησης $U(V)$ ως προς το είδος των ακροτάτων στα αντίστοιχα σημεία ισορροπίας του συστήματος (4.3), παραμένουν ίδια με αυτά της εικόνας 4.1.5, συνεπάγεται πως για κάθε a θα

υπάρχει μία ομοκλινική τροχιά στον αντίστοιχο χώρο φάσεων, όπου θα ξεκινά από την αρχή των αξόνων (η οποία πάντοτε θα είναι σημείο ισορροπίας ανεξαρτήτως της τιμής του a) και θα καταλήγει πάλι σε αυτήν.

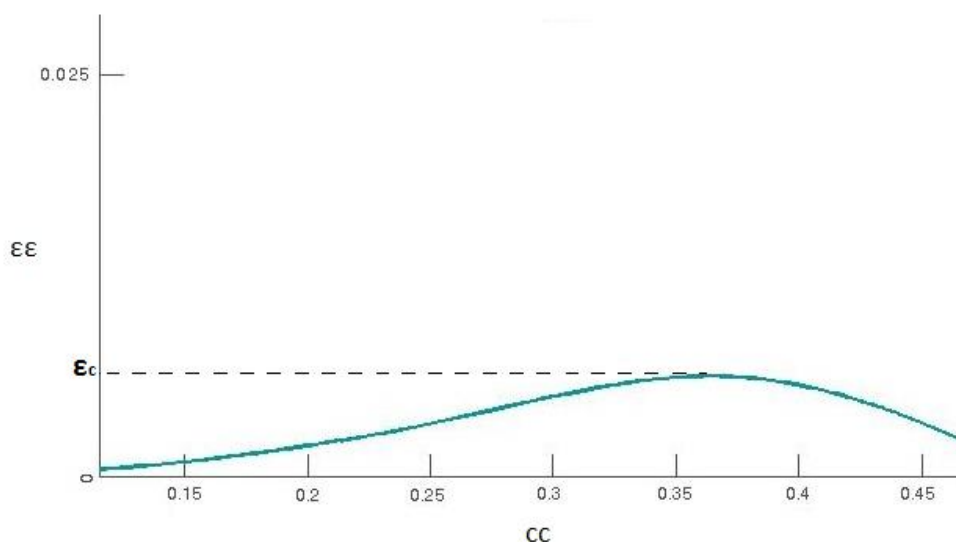
Επιπροσθέτως, στο κεφάλαιο 2, και συγκεκριμένα στις παραγράφους 2.3 και 2.4, δείξαμε πως υπάρχει μία ιδιόμορφη ($\varepsilon \rightarrow 0$) ομοκλινική τροχιά, που θα έχει ταχύτητα c που δίδεται από την σχέση $c = c^*(a) = -1/\sqrt{2}(2a - 1)$ για κάθε επιλογή στην τιμή της παραμέτρου $a \in (0, \frac{1}{2})$. Στην ειδική περίπτωση όπου $a \rightarrow 0$ θα χρησιμοποιούμε για την ταχύτητα $c^*(0) \approx 0.7071$, τον συμβολισμό c^* .

Στο επίπεδο (a, c) λοιπόν, τα σημεία που θα αντιστοιχούν σε ομοκλινική τροχιά (στην ιδιόμορφη περίπτωση όπου $\varepsilon \rightarrow 0$), θα κείνται επί της ευθείας $c = 0$, $\forall a \in (0, \frac{1}{2})$ (όπως ακριβώς είδαμε στην προηγούμενη σελίδα) και επί της ευθείας $c = -1/\sqrt{2}(2a - 1)$ (όπως ακριβώς θυμηθήκαμε στην παραπάνω παράγραφο). Επομένως, στο διάγραμμα που ακολουθεί (Εικόνα 4.1.6), βλέπουμε τη δομή των καμπυλών διακλάδωσης για δύο διαφορετικές τιμές της παραμέτρου $\varepsilon = 0.005, 0.0025$. Για κάθε άλλη τιμή της ε , η αντίστοιχη καμπύλη θα διατηρεί παρόμοια μορφή με τις φαινόμενες, ενώ όλες θα περιέχονται στο χωρίο που ορίζεται από τον θετικό ημιάξονα της ταχύτητας και τα δύο ερυθρά τμήματα, τα σημεία των οποίων αντιστοιχούν σε ομοκλινικές τροχιές στην περίπτωση όπου $\varepsilon \rightarrow 0$.



Εικόνα 4.1.6: Μορφή της ομοκλινικής καμπύλης στην ιδιόμορφη περίπτωση (ερυθρή καμπύλη), και σε δύο τυχαίες τιμές της παραμέτρου ε .

Τέλος, με παρόμοιο τρόπο όπως υπολογίστηκαν οι καμπύλες του σχήματος 4.1.4 μπορούμε να δούμε τη μορφή της ομοκλινικής καμπύλης διακλάδωσης αλλά αυτή την φορά στο επίπεδο (c, ε) (Εικόνα 4.1.7).



Εικόνα 4.1.7: Μορφή της ομοκλινικής καμπύλης διακλάδωσης, στο επίπεδο $c - \varepsilon$ όπως υπολογίστηκε με χρήση του MATCONT, στην περίπτωση όπου $a = 0.15$.

Σε αυτό το σημείο μπορούμε να αναλύσουμε τη φυσική ερμηνεία του διαγράμματος στην εικόνα 4.1.7. Ας θυμηθούμε εκ νέου το σύστημα (1.2). Δεδομένου ότι οι παράμετροι b και γ δεν επηρεάζουν τόσο τη φυσική του προβλήματος, μπορούμε να τις θεωρήσουμε ίσες με το μηδέν και έτσι το σύστημα (1.2) απλουστεύεται στο σύστημα (4.1) όπου μελετήσαμε σημαντικά αριθμητικά αποτελέσματα. Η ομοκλινική καμπύλη διακλάδωσης της εικόνας 4.1.7, υποδεικνύει πως δεν υπάρχουν ομοκλινικές τροχιές για σαφείς υψηλές θερμοκρασίες (όταν η θερμοκρασιακή παράμετρος ξεπεράσει την τιμή ε_c). Κάτι τέτοιο έρχεται σε πλήρη συμφωνία με τα εως τώρα πειραματικά δεδομένα. Η κρίσιμη τιμή ε_c είναι ποιοτικά ισοδύναμη με τη μέγιστη θερμοκρασία όπου ο νευρώνας ενός καλαμαριού μπορεί να υποστηρίξει έναν κυματικό παλμό (έτσι όπως τα συμπεράσματα αυτά εξήχθησαν από το Hodgkin-Huxley μοντέλο όπου προτυποποιεί κυρίως την φυσιολογία ενός νευρώνα καλαμαριού). Πράγματι, σε υψηλές θερμοκρασίες η μεταβλητή τ_n γίνεται τόσο μικρή ώστε κανένας παλμός να μην μπορεί να διαδοθεί.

4.2 Θεωρητικά Αποτελέσματα – Ταχεία & Βραδέα Κύματα

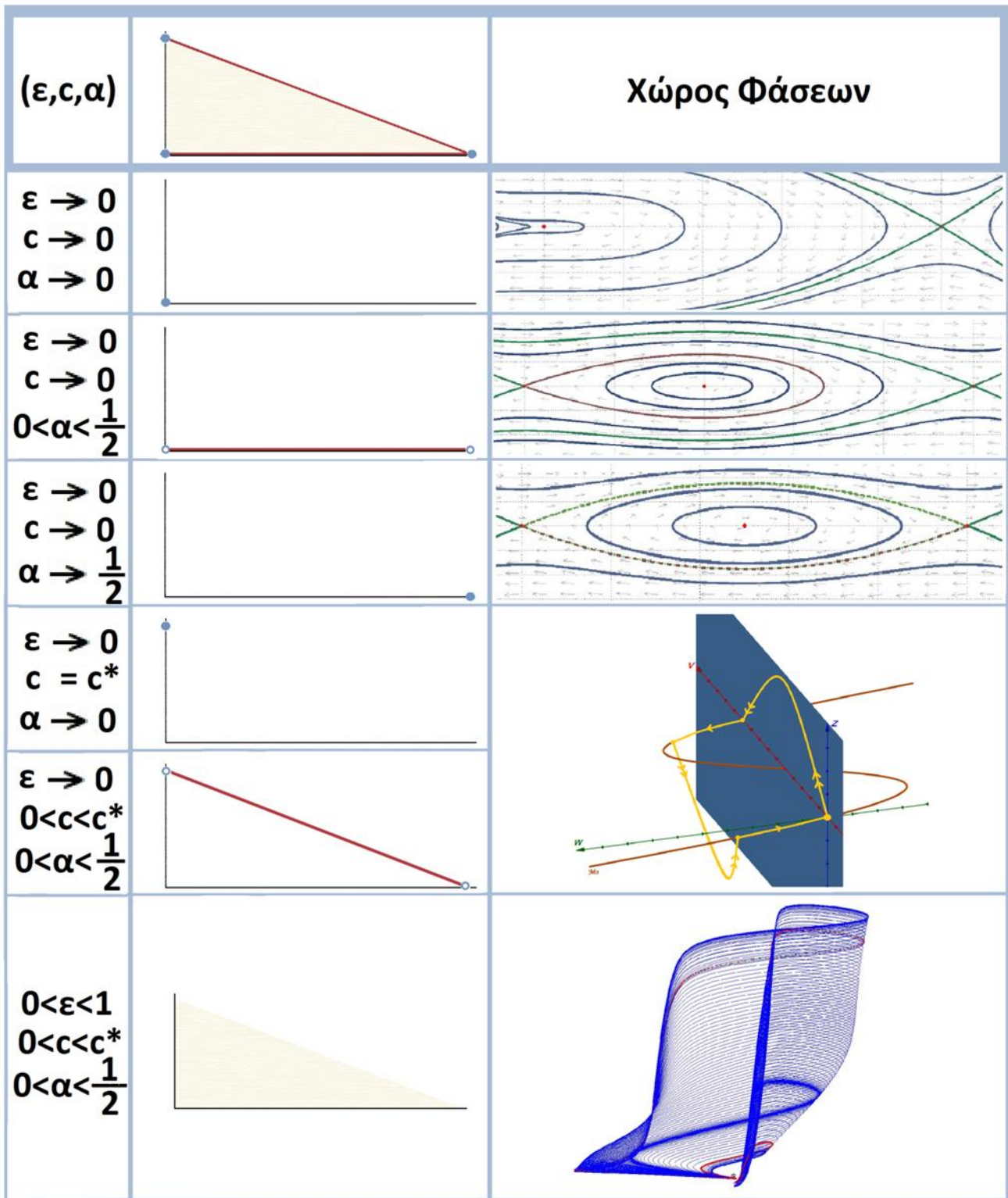
Ας θεωρήσουμε δύο είδη ιδιόμορφων ομοκλινικών τροχιών του συστήματος (4.1) ή χωρίς βλάβη της γενικότητας του αρχικού συστήματος (3.9). Έστω λοιπόν Γ_{f_0} η ιδιόμορφη ομοκλινική τροχιά για $c = c^*(a) \neq 0$ (τέταρτη και πέμπτη περίπτωση της πρώτης στήλης της Εικόνας 4.1.8) και Γ_{s_0} η αντίστοιχη για $c = 0$ (δεύτερη περίπτωση της Εικόνας 4.1.8). Ομοκλινικές τροχιές του συστήματος (4.1) μπορούν να θεωρηθούν ως διαταραχές των τροχιών Γ_{f_0} και Γ_{s_0} . Αυτές που προκύπτουν από διαταραχή της καμπύλης Γ_{f_0} ονομάζονται ταχεία κύματα, ενώ αυτές που προκύπτουν από διαταραχή της Γ_{s_0} ονομάζονται βραδέα κύματα. Ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση όπου $a = \frac{1}{2}$. Τότε, οι ιδιόμορφες καμπύλες συνενώνονται σχηματίζοντας έναν ετεροκλινή κύκλο Γ_0 όπου συνδέει την αρχή των αξόνων με το σημείο ισορροπίας (1,0,0) (περίπτωση τρίτη της Εικόνας 4.1.8).

Για τα ταχεία κύματα (τελευταία περίπτωση της εικόνας 4.1.8) ισχύει το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 4.1: Για σταθερή τιμή της παραμέτρου $a \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, υπάρχει μοναδική καμπύλη στο επίπεδο (ε, c) που αναπαριστά όλες τις ομοκλινικές τροχιές Γ_f που ξεκινούν από το σημείο $(0, c^*(a))$. Οι τροχιές Γ_f κείνται αρκετά κοντά της Γ_{f_0} και συγκλίνουν στην Γ_{f_0} καθώς $c \rightarrow c^*(a)$ και $\varepsilon \rightarrow 0$.

Γενικά, για $a \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, υπάρχει μία επιφάνεια όπου κάθε σημείο της αντιστοιχεί σε μία ομοκλινική τροχιά του συστήματος (3.9). Η επιφάνεια αυτή φράσσεται από το επίπεδο $\varepsilon = 0$ και τα ευθύγραμμα τμήματα $c = 0$, $c = c^*(a)$. (Εικόνα 4.1.9). Οι ομοκλινικές τροχιές κοντά στο τμήμα $c = 0$ αναπαριστούν βραδέα κύματα και αυτές που βρίσκονται κοντά στο τμήμα $c = c^*(a)$ αναπαριστούν ταχεία κύματα.

Ακολουθεί το βασικότερο θεώρημα της παραγράφου αυτής όπου δίνει μία σαφή εικόνα για την ύπαρξη ομοκλινικών τροχιών και την διαμόρφωσή τους καθώς οι τρεις παράμετροι (ε, c, a) μεταβάλλονται.



Εικόνα 4.1.8: Συγκεντρωτικός πίνακας. Στην πρώτη στήλη φαίνονται οι τιμές των παραμέτρων ϵ, c, α , με τις αντίστοιχες θέσεις τους στο επίπεδο a, c (δεύτερη στήλη). Τέλος στην τρίτη στήλη απεικονίζεται η κατά περίπτωση διαμόρφωση του χώρου φάσεων με έμφαση κυρίως στην σχεδίαση των ομοκλικών τροχιών.

Θεώρημα 4.2: Υπάρχει μία επιφάνεια \mathcal{H} στο χώρο (ε, c, a) , οριζόμενη για $\varepsilon > 0$, $c > 0$, $a < \frac{1}{2}$, για την οποία για κάθε σημείο $(\varepsilon, c, a) \in \mathcal{H}$ υπάρχει μία ομοκλινική τροχιά $\Gamma(\varepsilon, c, a)$ κοντά στην τροχιά Γ_0 . Η τροχιά \mathcal{H} και η οικογενεία $\Gamma(\varepsilon, c, a)$ έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες:

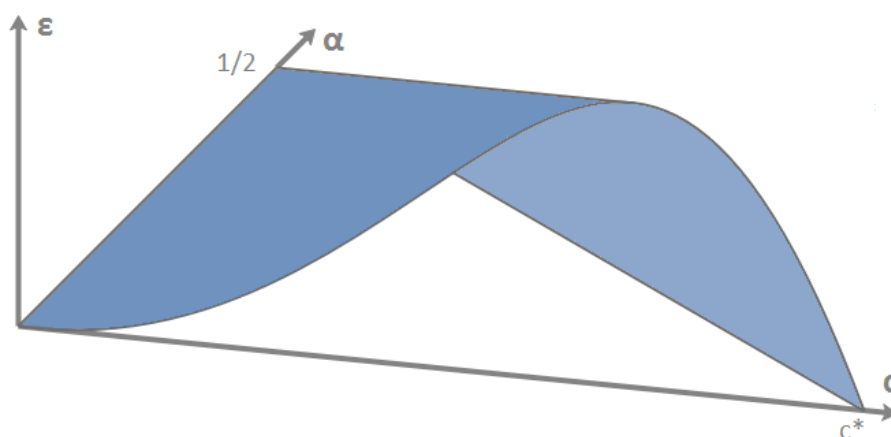
1. Η απεικόνιση $(\varepsilon, c, a) \rightarrow \Gamma(\varepsilon, c, a)$ είναι συνεχής και

$$\lim_{\varepsilon, c \rightarrow 0, a \rightarrow \frac{1}{2}} \Gamma(\varepsilon, c, a) = \Gamma_0$$

2. Για κάποιο $a \approx \frac{1}{2}$, η καμπύλη $\mathcal{H}_a = \{(\varepsilon, c) / (\varepsilon, c, a) \in \mathcal{H}\}$ αποτελείται από τα σημεία $(\varepsilon_a(c), c)$ με $c \in [0, c^*(a)]$, όπου η $\varepsilon_a(c)$ είναι μία C^2 -συνάρτηση.

3. Για κάποιο $a \approx \frac{1}{2}$ και καθώς $c \rightarrow 0$, η τροχιά $\Gamma(\varepsilon, c, a)$ πλησιάζει ολοένα και περισσότερο την επίπεδη ομοκλινική τροχιά Γ_{s0} . Επίσης, καθώς $c \rightarrow c^*(a)$, η τροχιά $\Gamma(\varepsilon, c, a)$ πλησιάζει ολοένα την ιδιόμορφη τροχιά Γ_{f0} .

4. Για κάποιο $a \approx \frac{1}{2}$ και $c \in (0, c^*(a))$, με c αρκετά κοντά στο 0, η ομοκλινική τροχιά $\Gamma(\varepsilon, c, a)$ θα αναφέρεται ως βραδύ κύμα Γ_s , ενώ για c αρκετά κοντά στο $c^*(a)$ θα αναφέρεται αντίστοιχα ως ταχύ κύμα.



Εικόνα 4.1.9: Ποιοτική μορφή της επιφάνειας \mathcal{H} . Κάποιες ισοσταθμικές καμπύλες αυτής, φαίνονται στις εικόνες 4.1.6 και 4.1.7.

Επίλογος

Συγκεντρωτικά λοιπόν, από τη μελέτη μας διαπιστώνουμε τα ακόλουθα: Πέραν του πρώτου κεφαλαίου όπου μιλήσαμε για τη φυσική σημασία της εξίσωσης FN, στο δεύτερο κεφάλαιο δείξαμε ότι η εξίσωση αυτή, στην ιδόμορφη περίπτωση επιδέχεται λύσεις μέτωπων οδεύοντων κυμάτων οι εξισώσεις των οποίων υπολογίσθηκαν αναλυτικά μαζί με τις ταχύτητές τους. Έπειτα, με έναν διαχωρισμό στις χρονικές κλίμακες και χρησιμοποιώντας το παραπάνω συμπέρασμα, συνθέσαμε την ιδόμορφη ομοκλιτική τροχιά.

Εν συνεχεία, στο τρίτο κεφάλαιο διατυπώσαμε τα τρία σπουδαία θεωρήματα του Fenichel, τα οποία μας εγγυώνται την διατήρηση των ευσταθών και ασταθών πολλαπλοτήτων της FN σαν μικρές διαταραχές των αντίστοιχων ιδόμορφων. Ακόμα, το λήμμα της ανταλλαγής μας διαβεβαιώνει πως μπορούμε να συνδέσουμε τμήμα της ευσταθούς πολλαπλότητας με τμήμα της ασταθούς συνθέτοντας με αυτόν τον τρόπο τη ζητούμενη ομοκλιτική τροχιά στη μη ιδόμορφη περίπτωση.

Στο κεφάλαιο τέσσερα, συμπεράναμε αριθμητικώς πως για δοθέν ε , υπάρχουν παραπάνω ομοκλιτικές τροχιές από ό,τι μία, που εξαρτώνται από τις μεταβλητές a, c . Πιο συγκεκριμένα, τα σημεία του επιπέδου $a - c$ που αντιστοιχούν σε ομοκλιτικές τροχιές ως προς το ίδιο πάντα ε , κείνται επί μίας \mathcal{O} -μορφής καμπύλης. Η μορφή αυτή είναι ένα κοινό χαρακτηριστικό πολλών διεγέρσιμων συστημάτων για τις αντίστοιχες δικές τους καμπύλες ομοκλιτικών διακλαδώσεων. Το σύνολο όλων αυτών των καμπυλών για κάθε ε , θα περικλείεται από μία καμπύλη κάθε σημείο της οποίας αντιστοιχεί σε μία ιδόμορφη ομοκλιτική τροχιά. Ακόμα, σχεδιάσαμε ποιοτικά την ολική (για κάθε δηλαδή ε) ομοκλιτική επιφάνεια και κατηγοριοποιήσαμε τις τροχιές σε βραδέα και ταχέα κύματα αναλόγως με τις θέσεις που τους αντιστοιχούν στην επιφάνεια αυτή. Τέλος, ερμηνεύσαμε τη φυσική σημασία των παραχθέντων διαγραμμάτων.

Βιβλιογραφία

Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία

- [1] W. Gao, J. Wang, *Existence of wavefronts and impulses to FitzHugh – Nagumo equations*, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 57 (5-6), (2004) 667–676. doi:10.1016/j.na.2004.03.009.
- [2] C. Hsu, T. Yang, C. Yang, *Diversity of traveling wave solutions in FitzHugh – Nagumo type equations*, *J. Differ. Equ.* 247 (2009) 1185–1205. doi:10.1016/j.jde.2009.03.023.
- [3] P.S. Krupa Martin, B. Sandstede, *Fast and Slow Waves in the FitzHugh Nagumo Equation*, *Journal of Differential Equations*, 97 (1997) 49–97.
- [4] D.C. Bell, B. Deng, *Singular perturbation of N -front travelling waves in the Fitzhugh – Nagumo equations* *Nonlinear Analysis: Real World Applications* 3 (2002) 515 – 541.
- [5] Gerda de Vries, Thomas Hillen, Mark Lewis, Johannes Müller, Birgitt Schönfisch, *A Course in Mathematical Biology*, Society for Industrial and Applied Mathematics Philadelphia, 2006.
- [6] Eugene M. Izhikevich, *Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting*, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, London, England, 2007.
- [7] G. Bard Ermentrout, David H. Terman, *Mathematical Foundations of Neuroscience*, Springer, 2010.
- [8] Elizabeth S. Allman, John A. Rhodes, *Mathematical Models in Biology, an introduction*, Cambridge, 2004.
- [9] Paul C. Bressloff, *Waves in Neural Media, From Single Neurons to Neural Fields*, Springer, 2014.
- [10] J. Guckenheimer, C. Kuehn, *Homoclinic Orbits of the FitzHugh-Nagumo Equation: The Singular-Limit*, *Cornell University, Journal reference: Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series S*, Vol. 2, No. 4, pp. 851-872, 2009.
- [11] Alwyn Scott, *Neuroscience: A Mathematical Primer*, Springer, 2002.
- [12] C. K.R.T. Jones, *Geometric Singular Perturbation Theory*, Brown University.

- [13] C. P. Fall, *Computational Cell Biology*, Springer, 2002.
- [14] J. W. Riley, *Fenichel's Theorems with Applications in Dynamical Systems*, Department of Mathematics, University of Louisville KY, August 2012.
- [15] J. Guckenheimer, C. Kuehn, *Homoclinic Orbits of the FitzHugh – Nagumo Equation : Bifurcations in the Full System*, SIAM Journal on Applied Dynamical Systems 9(1) (2010) 138–153.
- [16] G. Arioli, H. Koch, *Existence and stability of traveling pulse solutions of the FitzHugh-Nagumo equation*, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, volume 113, January 2015, Pages 51-70 (2015) 1–31.
- [17] A. Czechowski, P. Zgliczyński, *Existence of periodic solutions of the Fitzhugh-Nagumo equations for an explicit range of the small parameter*, Cornell University, 2015.
- [18] T. Kostova, R. Ravindran, M. Schonbek, *FitzHugh-Nagumo Revisited: Types of Bifurcations, Periodical Forcing and Stability regions by a Lyapunov Functional*, U.S. Department of Energy, February 6, 2003.
- [19] G. P. N. Garcia, *Numerical simulation of the Nagumo equation by finite difference method*, Texas A&M International University, December 2015.
- [20] S.-K. Tin, N. Kopell, C.K.R.T. Jones, *Invariant Manifolds and Singularly Perturbed Boundary Value Problems*, SIAM J. Numer. Anal., 31(6) (2008) 1558–1576.
- [21] Yu.A. Kuznetsov, *TUTORIAL V: Continuation of homoclinic orbits with MATCONT*, Utrecht University, Department of Mathematics, April 17, 2018.
- [22] J. D. Murray, *Mathematical Biology: I. An Introduction*, Third Edition, Springer, 2002.
- [23] W. J. Beyn, D. Otten, *Wave Solutions of Evolution Equations*, Department of Mathematics, Bielefeld University, Germany, December 20, 2016.
- [24] S. Rinaldi, S. Muratori, *Slow-fast limit cycles in predator-prey models*, *Ecological Modelling*, 61 (1992) 287–308.
- [25] F. Verhulst, T. Bakri, *The dynamics of slow manifolds*, J. Indones. Math. Soc., 13 (2007), 73-90.
- [26] P. Carter, *Fast Pulses with Oscillatory Tails in the FitzHugh-Nagumo System*, Ph.D. Brown University, May 2016.

- [27] P.C. Bressloff, *Traveling fronts and wave propagation failure in an inhomogeneous neural network*, *Physica D*, 155 (2001) 83–100.
- [28] R. Achouri, *Travelling Wave*, School of Mathematics, University of Manchester, 2016.
- [29] A.R. Champneys, V. Kirk, E. Knobloch, B.E. Oldeman, J. Sneyd, *When Shil'nikov Meets Hopf in Excitable Systems*, *SIAM J. Applied Dynamical Systems* 6 (2007) 663–693.
- [30] Yu.A. Kuznetsov, *TUTORIAL I : Using MATCONT for numerical integration of ODEs*, Department of Mathematics, Utrecht University, February, 2018.
- [31] A. Dhooge, W. Govaerts, Yu.A. Kuznetsov, W. Mestrom, A.M. Riet, B. Sautois, *MATCONT and CL_MATCONT: Continuation toolboxes in MATLAB*, Utrecht and Gent Universities, December 2006.

Ελληνική Βιβλιογραφία

- [1] Α. Μπούντης, *Μη γραμμικές συνήθεις διαφορικές εξισώσεις*, Εκδόσεις Γ. Α. Πνευματικού, Αθήνα, 1997.
- [2] S. Lipschutz, M. Lipson, *Γραμμική Άλγεβρα*, Εκδόσεις Τζιόλα, 3^η έκδοση, 2005.
- [3] Δ. Τσουμπελής, *Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις*, Τόμος Α', Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών, Πάτρα 2011.
- [4] Σ. Τραχανάς, *Mathematica και εφαρμογές*, Π.Ε.Κ., 2004.
- [5] Α. Μπούντης, *Δυναμικά Συστήματα και Χάος*, Τόμος Α', Εκδόσεις Παπασωτηρίου, 1995.
- [6] Σ. Τραχανάς, *Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις*, Π.Ε.Κ., 2012.
- [7] Ν. Μ. Σταυρακάκης, *Σημειώσεις Δυναμικών Συστημάτων*, Ε.Μ.Π. Ιανουάριος 2006.
- [8] Δ. Γεωργίου, Σ. Ηλιάδης, Θ. Μεγαρίτης, *Πραγματική Ανάλυση*, Πάτρα 2010.
- [9] Κ. U. Ingard, *Κύματα και Ταλαντώσεις*, Αρχές και Εφαρμογές, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π., 2008.
- [10] J. Marsden, A. Tromba, *Διανυσματικός Λογισμός*, Π.Ε.Κ., 2012.
- [11] Ν. Μ. Σταυρακάκης, *Διαφορικές Εξισώσεις: Συνήθεις και Μερικές*, Εκδόσεις Ν. Μ. Σταυρακάκης, Αθήνα 2015.

