



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Λύσεις Φραγμένης Κύμανσης σε Συστήματα Νόμων Διατήρησης και Ισορροπίας

Με την μέθοδο *Vanishing Viscosity*

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

ΝΙΚΟΛΑΟΥ Μ. ΛΑΔΑ

Επιβλέπων: Χαραλαμπίδης Αντώνιος
Καθηγητής

Για την απόδοση του Μ.Δ.Ε
— Εφαρμοσμένες Μαθηματικές Επιστήμες —

Αθήνα, 2019



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Λύσεις Φραγμένης Κύμανσης
σε Συστήματα Νόμων Διατήρησης και
Ισορροπίας

Με την μέθοδο *Vanishing Viscosity*

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

ΝΙΚΟΛΑΟΥ Μ. ΛΑΔΑ

Επιβλέπων: Χαραλαμπόπουλος Αντώνιος
Καθηγητής

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 21η Ιουνίου 2019.

(Υπογραφή)

(Υπογραφή)

(Υπογραφή)

.....
Χαραλαμπόπουλος Αντώνιος
Καθηγητής

.....
Γκιντίδης Δρόσος
Καθηγητής

.....
Σμυρλής Γεώργιος
Αναπληρωτής Καθηγητής

Αθήνα, 2019



Copyright © – All rights reserved. Με την επιφύλαξη παντός δικαιώματος.
Νικόλαος Λαδάς, 2019.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα.

Το περιεχόμενο αυτής της εργασίας δεν απηχεί απαραίτητα τις απόψεις του Τμήματος, του Επιβλέποντα, ή της επιτροπής που την ενέκρινε.

ΔΗΛΩΣΗ ΜΗ ΛΟΓΟΚΛΟΠΗΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΗΨΗΣ ΠΡΟΣΩΠΙΚΗΣ ΕΥΘΥΝΗΣ

Με πλήρη επίγνωση των συνεπειών του νόμου περί πνευματικών δικαιωμάτων, δηλώνω ενυπογράφως ότι είμαι αποκλειστικός συγγραφέας της παρούσας Πτυχιακής Εργασίας, για την ολοκλήρωση της οποίας κάθε βοήθεια είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται λεπτομερώς στην εργασία αυτή. Έχω αναφέρει πλήρως και με σαφείς αναφορές, όλες τις πηγές χρήσης δεδομένων, απόψεων, θέσεων και προτάσεων, ιδεών και λεκτικών αναφορών, είτε κατά κυριολεξία είτε βάσει επιστημονικής παράφρασης. Αναλαμβάνω την προσωπική και ατομική ευθύνη ότι σε περίπτωση αποτυχίας στην υλοποίηση των ανωτέρω δηλωθέντων στοιχείων, είμαι υπόλογος έναντι λογοκλοπής, γεγονός που σημαίνει αποτυχία στην Πτυχιακή μου Εργασία και κατά συνέπεια αποτυχία απόκτησης του Τίτλου Σπουδών, πέραν των λοιπών συνεπειών του νόμου περί πνευματικών δικαιωμάτων. Δηλώνω, συνεπώς, ότι αυτή η Πτυχιακή Εργασία προετοιμάστηκε και ολοκληρώθηκε από εμένα προσωπικά και αποκλειστικά και ότι, αναλαμβάνω πλήρως όλες τις συνέπειες του νόμου στην περίπτωση κατά την οποία αποδειχθεί, διαχρονικά, ότι η εργασία αυτή ή τμήμα της δεν μου ανήκει διότι είναι προϊόν λογοκλοπής άλλης πνευματικής ιδιοκτησίας.

(Υπογραφή)

.....
Νικόλαος Λαδάς

Αθήνα 2019

Περίληψη

Σε αυτή την εργασία θα δείξουμε ότι τα υπερβολικά συστήματα νόμων διατήρησης $u_t + (f(u))_x = 0$ και νόμων ισορροπίας $u_t + (f(u))_x = g(u)$, όπου $u \in \mathbb{R}^n$, με αρχικά δεδομένα Cauchy επιδέχονται ολική ασθενή λύση που ανήκει στον χώρο BV υπο την προϋπόθεση ότι τα αρχικά δεδομένα έχουν αρκούντως μικρή ολική κύμανση και $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι αρκούντως ομαλές. Αυτό θα το επιτύχουμε με την μέθοδο vanishing viscosity θεωρώντας τα συστήματα $u_t + A(u)u_x = \varepsilon u_{xx}$ και $u_t + A(u)u_x + g(u) = \varepsilon u_{xx}$ αντίστοιχα και δείχνοντας ότι οι λύσεις αυτών προσεγγίζουν τις λύσεις των υπερβολικών προβλημάτων. Επιπρόσθετα, θα δείξουμε ότι οι λύσεις αυτές είναι ευσταθείς και μοναδικές εαν απαιτήσουμε συγκεκριμένες admissibility conditions.

Για να το επιτύχουμε αυτό βασιζόμαστε στις εργασίες των S.Bianchini και A.Bressan (για τους νόμους διατήρησης) και στις εργασίες της C.Christoforou (για τους νόμους ισορροπίας).

Keywords

Hyperbolic Systems, PDES, Balance Laws, Conservation Laws, Vanishing Viscosity, Riemann Problem, Cauchy Problem

Abstract

In this piece of work we will show how the hyperbolic systems of conservation laws $u_t + (f(u))_x = 0$ and balance laws $u_t + (f(u))_x = g(u)$, $u \in \mathbb{R}^n$ with Cauchy data admit a global weak solution that is an element of BV when the initial data are of small variation and $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ are sufficiently smooth via the vanishing viscosity method. These viscous approximation solutions of the Cauchy problems $u_t + A(u)u_x = \varepsilon u_{xx}$ and $u_t + A(u)u_x + g(u) = \varepsilon u_{xx}$ respectively, are proved to be stable under suitable norms, and unique when admissibility conditions are taken into account.

In order to prove this result for conservation laws we follow closely the works S.Bianchini and A.Bressan. Concerning balance laws we follow the works of C.Christoforou.

Keywords

Hyperbolic Systems, PDES, Balance Laws, Conservation Laws, Vanishing Viscosity, Riemann Problem, Cauchy Problem

στον Μιχάλη και την Φωτεινή

Ευχαριστίες

Θέλω πρώτα από όλους να ευχαριστήσω τους γονείς μου που έχουν σταθεί στο πλάι μου σε κάθε μου εγχείρημα και που χωρίς την βοήθεια τους δεν θα είχα πετύχει κανένα. Τον Αντώνη που καθ' όλη την διάρκεια της συνεργασίας μας με βοήθησε σε κάθε δυσκολία που αντιμετώπισα ενώ παράλληλα μου έδωσε απόλυτη ελευθερία στην εκπόνηση αυτής της εργασίας. Τέλος, ένα μεγάλο ευχαριστώ σε όλους όσους διάβασαν τις αρχικές εκδόσεις τις εργασίας και με βοήθησαν να εντοπίσω λάθη και παραλείψεις.

Νικόλαος Λαδάς

Περιεχόμενα

Περίληψη	1
Abstract	3
Ευχαριστίες	7
1 Περί των νόμων διατήρησης και ισορροπίας	13
1.1 Πρόλογος	13
1.2 Μαθηματικά προκαταρκτικά	15
1.2.1 Θεωρία μέτρου και ο χώρος συναρτήσεων φραγμένης κύμανσης	15
1.2.2 Περί λύσεων υπερβολικών συστημάτων	19
1.2.3 Ημιομάδες	21
1.2.4 Center Manifold Theorem	21
1.3 Κίνητρο: Εξίσωση Burgers & το Πρόβλημα Riemann	23
1.3.1 Η Inviscid Εξίσωση Burgers	25
I Νόμοι Διατήρησης	29
2 Η Μέθοδος Vanishing Viscosity για Νόμους Διατήρησης	31
2.1 Το βασικό αποτέλεσμα για νόμους διατήρησης	32
3 A-priori Εκτιμήσεις για το Total Variation της Λύσης	35
3.1 Παραβολικές εκτιμήσεις	35
3.2 Συμπεριφορά φραγμάτων για μεγάλους χρόνους	38
3.2.1 Κατασκευή του Center Manifold	39
3.2.2 Wave Decomposition	42
4 Αλληλεπίδραση των Viscous Waves	45
4.1 Εγκάρσιες Αλληλεπιδράσεις κυμάτων	47
4.2 Κύματα ίδιων οικογενειών	49
4.3 Φράγματα για την συνάρτηση αποκοπής	52
4.4 Ολοκλήρωση της απόδειξης των BV εκτιμήσεων	54
5 Ευστάθεια των Viscous Solutions και η Οριακή συμπεριφορά τους	57
5.1 Ευστάθεια	57
5.2 Χρονική εξάρτηση	58

5.3	Ταχύτητα διάδοσης	59
5.4	Το όριο όταν εξαλείφουμε το ιξώδες	59
5.4.1	Συνεχής εξάρτηση	61
5.4.2	Πεπερασμένη ταχύτητα διάδοσης	61
5.4.3	Η λύση ως ημιομάδα	62
5.5	Συνθήκες για την μοναδικότητα της ασθενούς λύσης	62
5.5.1	Tame oscillation	63
5.5.2	Προσεγγιστικά άλματα και συνθήκες για shocks	64
5.5.3	Μοναδικότητα	65
II	Νόμοι Ισορροπίας	67
6	Η Μέθοδος Vanishing Viscosity για Νόμους Ισορροπίας	69
6.1	Το βασικό αποτέλεσμα για νόμους ισορροπίας	69
6.2	Παραβολικές εκτιμήσεις	71
6.3	BV εκτιμήσεις	73
6.3.1	Διάσπαση των παραγώγων	74
6.3.2	Αλληλεπιδράσεις κυμάτων	75
6.3.3	A priori BV φράγματα και επέκταση της λύσης για οσοδήποτε μεγά- λους χρόνους	76
7	Συμπεριφορά των λύσεων	79
7.1	Ευστάθεια των λύσεων	79
7.2	Εξάλειψη του ιξώδους	80
	Παράρτημα	83
	A' Αποδείξεις επιλεγμένων θεωρημάτων	85
A'.1	Απόδειξη του Θεωρήματος 1.1	85
A'.2	Απόδειξη του Θεωρήματος 1.2	86
A'.3	Απόδειξη της Πρότασης 3.2	87
	Βιβλιογραφία	90

Κατάλογος Σχημάτων

1.1	Οπτική αναπαράσταση του center manifold theorem.	23
1.2	Προφίλ των λύσεων για την viscous Burgers' equation για $u_R = 0, u_L = 1$, και ν ίσο με 0.25, 0.1, και 0.02. Βλέπουμε πως η $w(y)$ τείνει σε step function όταν $\nu \rightarrow 0$	25
1.3	Οι χαρακτηριστικές για το shock wave.	27
1.4	Αριστερά: Ένα rarefaction fan (οι φυσικά αποδεκτές λύσεις που λαμβάνουμε απο την vanishing viscosity method). Δεξιά: Ένα rarefaction shock (μη αποδεκτό λόγω entropy conditions).	28
3.1	38
3.2	Οπτική αναπαράσταση του Center Manifold \mathcal{M} και του Center Subspace \mathcal{N}	40
3.3	43
5.1	Οπτική αναπαράσταση του homotopy argument.	57

Κεφάλαιο 1

Περί των νόμων διατήρησης και ισορροπίας

1.1 Πρόλογος

Σε αυτή την εργασία σκοπός μας είναι να αποδείξουμε ότι το υπερβολικό πρόβλημα Cauchy

$$\begin{aligned}u_t + (f(u))_x + g(u) &= 0 \\ u(0, x) &= u_0(x)\end{aligned}\tag{1.1}$$

όπου $x \in \mathbb{R}$, $t \in [0, +\infty)$ και $u \in \mathbb{R}^n$ επιδέχεται λύση. Η παραπάνω εξίσωση είναι ένα Σύστημα Νόμων Ισορροπίας (ή, στην περίπτωση που η g είναι απύσασ, ένα Σύστημα Νόμων Διατήρησης) και έχει μεγάλη και πλούσια ιστορία. Η μελέτη των συστημάτων αυτών ξεκίνησε από τα μέσα του 18^{ου} αιώνα από μεγάλους μαθηματικούς όπως τον Euler, τους Bernoulli και τον Riemann και ακόμη και σήμερα είναι κομμάτι ενεργής έρευνας τόσο στα μαθηματικά όσο και στη φυσική.

Ιστορικά, έχουν υπάρξει τέσσερις τρόποι για την λύση ενός προβλήματος σαν το (1.1): η στοχαστική αριθμητική μέθοδος του Glimm, η μέθοδος front tracking, η μέθοδος compensated compactness και η μέθοδος vanishing viscosity. Εμείς θα ασχοληθούμε με την τελευταία.

Όπως είναι δοσμένη η (1.1), για αυθαίρετες συναρτήσεις u_0, f και g δεν περιμένουμε κάποιου είδους λύση ακόμη και με την πιο ασθνή έννοια της λέξης. Συνεπώς, πρέπει να γίνουν ορισμένες υποθέσεις για τις συναρτήσεις αυτές που με τη σειρά τους θα δώσουν αρκετή δομή στο πρόβλημα ώστε να γίνει επιλύσιμο. Ορισμένες ερωτήσεις που θα μας απασχολήσουν στη πορεία είναι οι ακόλουθες:

- Ποιοι είναι οι φυσιολογικοί χώροι συναρτήσεων των οποίων στοιχεία πρέπει να είναι οι u_0, f, g έτσι ώστε το σύστημα (1.1) να είναι καλώς τοποθετημένο;
- Δοθέντων των παραπάνω, ποιος είναι ο φυσιολογικός χώρος στον οποίο θα αναζητήσουμε την u ;
- Δεδομένης της φυσικής του προβλήματος, πρέπει να απαιτήσουμε κάποια συγκεκριμένη συμπεριφορά από την λύση του;
- Θέλοντας να σεβαστούμε τη φυσική του προβλήματος, πρέπει να απαιτήσουμε παραπάνω από τις u_0, f και g ;

Στις ενότητες που ακολουθούν θα απαντήσουμε σε αυτές καθώς και σε περισσότερες ερωτήσεις που θα προκύψουν φυσικά από την ανάλυσή μας. Επιπροσθέτως, θα παραθέσουμε τους απαραίτητους ορισμούς και εργαλεία για την περάτωση της ανάλυσης αυτής.

Ακολουθεί ο σκελετός αυτής της εργασίας. Στο υπόλοιπο αυτού του κεφαλαίου θα κάνουμε αναφορές στα μαθηματικά προαπαιτούμενα που θα χρησιμοποιήσουμε στα επόμενα κεφάλαια. Θα γίνουν αναφορές στον χώρο BV των συναρτήσεων φραγμένης κύμανσης, στο πώς μπορούμε να επεκτείνουμε την έννοια της λύσης μίας ΜΔΕ σε ασθενή λύση, θα παραθέσουμε μια εισαγωγή των μεθόδων ημιομάδων που θα χρησιμοποιήσουμε στο κεφάλαιο 5 και θα παραθέσουμε το Center Manifold Theorem το οποίο θα φανεί ως ένα από τα βασικότερα εργαλεία στη διαθεσή μας για την κατασκευή φραγμάτων ώστε να επεκτείνουμε την λύση του (1.1) σε οσοδήποτε μεγάλους χρόνους. Κλείνουμε αυτό το κεφάλαιο κάνοντας μία εκτενή ανάλυση της μεθόδου vanishing viscosity στην πιο απλή περίπτωση στην οποία μπορεί να εμφανιστεί με την εξίσωση του Burgers.

Στο Μέρος I επιλύουμε το πρόβλημα Cauchy για νόμους διατήρησης

$$u_t + (f(u))_x = 0, \quad u(0, x) = \bar{u}(x) \quad (1.2)$$

με τη μέθοδο vanishing viscosity. Με πολύ λίγα λόγια, αυτό επιτυγχάνεται θεωρώντας το σύστημα

$$u_t + A(u)u_x = \varepsilon u_{xx}, \quad u(0, x) = \bar{u}(x) \quad (1.3)$$

και δείχνοντας πως η λύση της άνω εξίσωσης τείνει στην λύση της (1.2) καθώς $\varepsilon \rightarrow 0$ ανεξάρτητα από τον τρόπο που επιλέγουμε να το εξαλείψουμε.

Στό Μέρος II επεκτείνουμε την μελέτη μας με τη μέθοδο vanishing viscosity για νόμους ισορροπίας μελετώντας το πρόβλημα Cauchy

$$u_t + f(u)_x + g(u) = 0, \quad u(0, x) = u_0(x) \quad (1.4)$$

υποθέτοντας πάλι το σύστημα

$$u_t + A(u)u_x + g(u) = \varepsilon u_{xx}, \quad u(0, x) = u_0(x) \quad (1.5)$$

και δείχνουμε πως η λύση της άνω εξίσωσης τείνει στην λύση της (1.4) καθώς $\varepsilon \rightarrow 0$ ανεξάρτητα από τον τρόπο που επιλέγουμε να το εξαλείψουμε. Σε αυτό το σημείο υπογραμμίζουμε πως η ανάλυση για το δεύτερο πρόβλημα βασίζεται αποκλειστικά στους τρόπους επίλυσης που εμφανίζονται στο πρώτο μέρος και έτσι μας δίνεται η ευκαιρία να αποδείξουμε (σχεδόν) το ίδιο αποτέλεσμα σε αρκετά μικρότερη έκταση.

Τέλος, αναφέρουμε ότι οι αποδείξεις για ορισμένα λήμματα, προτάσεις και πορίσματα έχουν ηθελημένα παραλειφθεί είτε κατά μέρος είτε εξ ολοκλήρου. Αυτό συμβαίνει είτε διότι είναι εξαιρετικά τεχνικές είτε επειδή εμπεριέχουν ιδέες από παλαιότερες δουλειές που δεν σχετίζονται με την παρούσα εργασία. Σε κάθε περίπτωση, όλες οι λεπτομέρειες αυτές αναλύονται εκτενώς στις αναφορές που κάνουμε καθ' όλη την έκταση του κειμένου και ελπίζουμε πως οι παραθέσεις μας δεν θα αφήσουν χώρο για θολά σημεία.

1.2 Μαθηματικά προκαταρκτικά

1.2.1 Θεωρία μέτρου και ο χώρος συναρτήσεων φραγμένης κύμανσης

Σε αυτό το μέρος θα αναφέρουμε ορισμούς και αποτελέσματα από τη θεωρία μέτρου και τον χώρο συναρτήσεων φραγμένης κύμανσης (BV) που θα χρησιμοποιήσουμε στην παρούσα εργασία βασιζόμενοι κυρίως στα [1] και [2].

Ορισμός 1.1 (Διανυσματικά μέτρα). Έστω X μη-κενό σύνολο και \mathcal{F} μία σ -άλγεβρα επί του X . Το $\mu : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}^m$ λέγεται διανυσματικό μέτρο αν

- $\mu(\emptyset) = 0$,
- για κάθε $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ξένων ανα δύο στοιχείων του \mathcal{F} ισχύει

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

Αν $m = 1$, το μ θα λέγεται προσημασμένο μέτρο, ενώ όποτε αναφερόμαστε απλώς σε κάποιο μέτρο χωρίς περαιτέρω εξήγηση, θα εννοούμε πάντα διανυσματικό. Σε ό,τι ακολουθεί, θεωρούμε ότι $X = \mathbb{R}^N$, \mathcal{F} είναι η σ -άλγεβρα που παράγεται από τα σύνολα Borel του \mathbb{R}^N και το μ είναι μέτρο Radon.

Με $|\mu|$ θα συμβολίζουμε την **ολική κύμανση** του μ . Αναλυτικότερα, για κάθε $E \in \mathcal{F}$, έχουμε

$$|\mu|(E) = \sup \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\mu(E_n)| : E_n \in \mathcal{F} \text{ ξένα ανα δύο με } E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right\}.$$

Αν $|\mu|(X) < \infty$, θα λέμε ότι μ έχει φραγμένη κύμανση.

Ο λόγος που πρώτα απ' όλα αναφερόμαστε σε διανυσματικά μέτρα είναι γιατί όταν κανείς μιλάει για μια συνάρτηση $u \in BV$, ένα βασικό πλεονέκτημα είναι πως η Du (η ασθενής παράγωγος της u) μπορεί να θεωρηθεί ως ένα διανυσματικό μέτρο¹. Για να το δούμε αυτό, δίνουμε τον ορισμό την παραγώγου Radon-Nikodym όπως μας εξυπηρετεί καλύτερα για την ανάλυσή μας.

Ορισμός 1.2 (Παράγωγος Radon-Nikodym). Έστω μ ένα φραγμένο, θετικό μέτρο και ν ένα μέτρο. Για $B(x, r) \subset \mathbb{R}^n$, ορίζουμε

$$\Delta(x, r) \doteq \begin{cases} \frac{\nu(B(x, r))}{\mu(B(x, r))} & , \text{ αν } \mu(B(x, r)) > 0 \\ 0 & , \text{ αν } \mu(B(x, r)) = 0. \end{cases}$$

Επίσης, θα γράφουμε

$$\overline{D}_\mu \nu(x) \doteq \limsup_{r \rightarrow 0} \Delta(x, r) \quad \underline{D}_\mu \nu(x) \doteq \liminf_{r \rightarrow 0} \Delta(x, r).$$

¹Ειδικότερα, μια τέτοια θεώρηση μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε επιχειρήματα συμπάγειας (μέσω weak* σύγκλισης) τα οποία υπό άλλες συνθήκες δεν θα ήταν δυνατά (λόγω της μη-ανακλαστικότητας του L^1).

Αν $\overline{D}_\mu \nu(x) = \underline{D}_\mu \nu(x) < \infty$, θα λέμε ότι το μετρο ν είναι παραγωγίσιμο ως προς μ και θα συμβολίζουμε με

$$\frac{d\nu}{d\mu}(x) = \overline{D}_\mu \nu(x) = \underline{D}_\mu \nu(x)$$

την Radon-Nikodym παράγωγο του ν ως προς μ . Όταν δεν υπάρχει φόβος σύγχυσης, θα γράφουμε $D\nu(x)$ ή πιο απλά $D\nu$.

Ο χώρος $BV(\Omega)$

Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ και $u \in L^1(\Omega; \mathbb{R}^n) \doteq L^1(\Omega)$. Τότε θα γράφουμε

$$\int_\Omega |Du| = \sup \left\{ \int_\Omega u \operatorname{div} \varphi dx : \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N) \in C_c^1(\Omega)^N, |\varphi|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1 \right\},$$

όπου $|\varphi|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_x \sqrt{\sum_i \varphi_i^2(x)}$.

Ορισμός 1.3. Ο υπόχωρος του $L^1(\Omega)$ για τον οποίο ισχύει $\int_\Omega |Du| < \infty$ θα ονομάζεται **χώρο συναρτήσεων φραγμένης κύμανσης**. Με άλλα λόγια,

$$BV(\Omega) = \left\{ u \in L^1(\Omega) : \int_\Omega |Du| < \infty \right\}.$$

Θα γράφουμε $\operatorname{Tot. Var.}\{u\}$ ή $\|Du\|$ στη θέση του $\int_\Omega |Du|$

Σημείωση 1.1. Αν θεωρήσουμε το συνεχές συναρτησιακό $L : C_c^1(\Omega)^N \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$L(\varphi) \doteq \int_\Omega u \operatorname{div} \varphi dx$$

τότε, από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz, υπάρχουν ένα μέτρο Radon μ και μία μ -μετρήσιμη συνάρτηση σ τέτοια ώστε

$$|\sigma(x)| = 1 \quad \mu - a.e.$$

$$\int_\Omega u \operatorname{div} \varphi dx = - \int_\Omega \sigma \cdot \varphi d\mu \quad \text{για κάθε } \varphi \in C_c^1(\Omega)^N.$$

Με άλλα λόγια μπορούμε να ταυτίσουμε το Du με ένα μέτρο Radon.

Ορισμός 1.4. Έστω ένα διάστημα $J \subset \mathbb{R}$ και $u : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ μια L^1 συνάρτηση. Η **ολική κύμανση (total variation)** της u ορίζεται ως

$$\operatorname{Tot. Var.}\{u\} \doteq \sup \left\{ \sum_{j=1}^N |u(x_j) - u(x_{j-1})| \right\} \quad (1.6)$$

όπου το *supremum* είναι υπεράνω όλων των διαμερίσεων του J . Αν $\operatorname{Tot. Var.}\{u\} < \infty$, η u ανήκει στον $BV(J)$ που, όταν δεν υπάρχει φόβος σύγχυσης, θα συμβολίζεται παρακάτω απλώς ως BV .

Από τον ορισμό του ολοκληρώματος Lebesgue είναι σαφές ότι ο Ορισμός 1.4 είναι ειδική

περίπτωση του 1.3². Ο λόγος που περιλαμβάνουμε και τους δύο είναι πως, ενώ για λόγους πληρότητας θα παραθέσουμε αποτελέσματα για αμφότερους τους ορισμούς, στην πράξη θα βασίσουμε την μελέτη μας στα υπόλοιπα κεφάλαια στον 1.4. Όταν $u \in J \subset \mathbb{R}$, θα γράφουμε την ολική κύμανσή της σχεδόν αποκλειστικά ως $\text{Tot. Var.}\{u\}$.

Ο χώρος $BV(\Omega)$ εφοδιασμένος με τη νόρμα $\|u\|_{BV} = \|u\|_{L^1} + \|Du\|$ είναι ένας μη-διαχωρίσιμος χώρος Banach. Μάλιστα, ο $W^{1,1}(\Omega)$ είναι γνήσιος υπόχωρος του. Έστω $u \in W^{1,1}(\Omega)$. Τότε για κάθε $\varphi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ με $|\varphi| \leq 1$ έχουμε

$$\int_{\Omega} u \operatorname{div} \varphi dx = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \varphi dx \leq \int_{\Omega} |\nabla u| dx < \infty,$$

άρα $u \in BV(\Omega)$.

Ιδιότητες του $BV(\Omega)$:

- (κάτω ημισυνέχεια του $\text{Tot. Var.}\{\cdot\}$) Έστω $u_n \in BV(\Omega)$ και $u_n \rightarrow u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Τότε

$$\|Du\| \leq \liminf \|Du_n\|.$$

- (προσέγγιση απο ομαλές συναρτήσεις) Έστω $u \in BV(\Omega)$. Τότε υπάρχει $u_n \in BV(\Omega) \cap C_c^\infty(\Omega)$ έτσι ώστε $u_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{BV}} u$.
- (*weak** τοπολογία) Έστω $u_n, u \in BV(\Omega)$. Θα λέμε ότι η u_n συγκλίνει w^* στη u (και θα γράφουμε $u_n \xrightarrow{w^*} u$) αν

1. $u_n \rightarrow u$ στον $L^1_{loc}(\Omega)$,
2. $Du_n \xrightarrow{w^*} Du$, δηλαδή, $\int_{\Omega} \varphi Du_n \rightarrow \int_{\Omega} \varphi Du$ για κάθε $\varphi \in C_c^1(\Omega)$.

Ός χαρακτηρισμό της w^* σύγκλισης έχουμε ότι $u_n \xrightarrow{w^*} u$ αν και μόνο αν $\|u_n\|_{BV} \leq M$ και $u_n \rightarrow u$ στον $L^1_{loc}(\Omega)$.

- (συμπάγεια) Έστω $u_n \in BV(\Omega)$ με Ω ανοικτό, φραγμένο και $\partial\Omega$ Lipschitz. Αν ισχύει ότι $\|u_n\|_{BV} \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε υπάρχει υποακολουθία u_{k_n} της u_n και $u \in BV(\Omega)$ έτσι ώστε $u_{k_n} \rightarrow u$ στον $L^1(\Omega)$.

Παραθέτουμε ορισμένα ακόμη αποτελέσματα (που εκμεταλλεύονται την διάταξη του \mathbb{R}) μιλώντας για τον $BV(J)$.

- (αριστερή/δεξιά συνέχεια) Έστω $u : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$. Τότε για κάθε $x \in (a, b)$ τα όρια

$$u(x^-) \doteq \lim_{y \rightarrow x^-} u(y), \quad u(x^+) \doteq \lim_{y \rightarrow x^+} u(y)$$

είναι καλώς ορισμένα και η u έχει το πολύ αριθμήσιμες ασυνέχειες.

- (προσέγγιση από κατά τμήματα σταθερή συνάρτηση) Έστω $u \in BV(\mathbb{R})$. Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $v \in BV(\mathbb{R})$ κατά τμήματα σταθερή έτσι ώστε

1. $\text{Tot. Var.}\{v\} \leq \text{Tot. Var.}\{u\}$ και $\|v - u\|_{L^\infty} \leq \varepsilon$.

²Αυτό φαίνεται με περισσότερη ευκολία αν υποθέσουμε ότι η u' είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

2. Αν επιπροσθέτως $\int_{-\infty}^0 |u(x) - u(-\infty)|dx + \int_0^{\infty} |u(x) - u(\infty)|dx < \infty$, έχουμε $\|v - u\|_{L^1} < \varepsilon$

• Έστω $u \in BV(\mathbb{R})$. Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x + \varepsilon) - u(x)|dx \leq \text{Tot. Var.}\{u\}.$$

Εξαιρετικά σημαντικό αποτέλεσμα που θα χρησιμοποιήσουμε είναι το παρακάτω θεώρημα που εκμεταλλεύεται την w^* συμπίεση στον BV από τον Helly.

Θεώρημα 1.1 (Helly). Έστω $u_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ μία ακολουθία συναρτήσεων για την οποία ισχύουν

$$\text{Tot. Var.}\{u_n\} \leq C, \quad |u_n(x)| \leq M \quad \forall n, x$$

για κάποιες σταθερές C, M . Τότε, υπάρχουν $u_{k_\nu}, u \in BV$ έτσι ώστε, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$\lim u_{k_\nu}(x) = u(x),$$

$$\text{Tot. Var.}\{u\} \leq C, \quad |u(x)| \leq M.$$

Απόδειξη. Στο παράρτημα. □

Παρόμοια αποτελέσματα έχουμε και όταν η μπαίνει ο χρόνος ως δεύτερη μεταβλητή.

Θεώρημα 1.2. Έστω $u_\nu : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ μία ακολουθία συναρτήσεων για την οποία ισχύουν

$$\begin{aligned} \text{Tot. Var.}\{u_\nu(t, \cdot)\} &\leq C, & |u_\nu(t, x)| &\leq M \quad \forall \nu, x, t \\ \int_{-\infty}^{\infty} |u_\nu(t, x) - u_\nu(s, x)|dx &\leq L|t - s| \quad \forall t, s \geq 0 \end{aligned}$$

για κάποιες σταθερές C, M, L . Τότε, υπάρχει υπακολουθία u_{k_ν} που συγκλίνει σε μια $u \in L^1_{loc}([0, \infty) \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$. Επιπροσθέτως, η u ικανοποιεί τα ακόλουθα:

$$\text{Tot. Var.}\{u(t, \cdot)\} \leq C, \quad |u(t, x)| \leq M \quad \forall x, t \tag{1.7}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(t, x) - u(s, x)|dx \leq L|t - s| \quad \forall t, s \geq 0 \tag{1.8}$$

Οι τιμές του ορίου ορίζονται μονοσήμαντα από την απαίτηση

$$u(t, x) = u(t, x^+) = \lim_{y \rightarrow x^+} u(t, y) \tag{1.9}$$

Απόδειξη. Στο παράρτημα. □

Θεώρημα 1.3. Έστω $u \in BV((a, b) \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ για την οποία ισχύουν

$$\text{Tot. Var.}\{u(t, \cdot)\} \leq M \quad \forall t \in (a, b)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(t, x) - u(s, x)|dx \leq L|t - s| \quad \forall t, s \in (a, b)$$

για κάποιες σταθερές M, L . Τότε, υπάρχει ένα $Z \subset (a, b)$ μέτρου 0 τέτοιο ώστε, για κάθε $(\tau, \xi) \in \{(a, b) \setminus Z\} \times \mathbb{R}$ υπάρχει $\lambda > 0$ ³ για το οποίο η συνάρτηση

$$U(t, x) \doteq \begin{cases} u^- & \text{αν } x < \lambda t, \\ u^+ & \text{αν } x > \lambda t \end{cases}$$

με $u^- \doteq \lim_{x \rightarrow \xi^-} u(\tau, x)$ και $u^+ \doteq \lim_{x \rightarrow \xi^+} u(\tau, x)$ ικανοποιεί

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{r^2} \int_{-r}^r \int_{-\lambda^* r}^{\lambda^* r} |u(\tau + t, \xi + x) - U(t, x)| dx dt &= 0, \\ \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{r} \int_{-\lambda^* r}^{\lambda^* r} |u(\tau + t, \xi + x) - U(t, x)| dx &= 0, \end{aligned}$$

για κάθε $\lambda^* > 0$.

1.2.2 Περί λύσεων υπερβολικών συστημάτων

Για αρχή αγνοούμε πιθανές αρχικές συνθήκες μιας και δε τις χρειαζόμαστε για τις επεξηγήσεις μας. Ένας νόμος διατήρησης μίας χωρικής διάστασης είναι η παρακάτω μερική διαφορική εξίσωση:

$$u_t + (f(u))_x = 0. \quad (1.10)$$

Εδώ, $u : \mathbb{R} \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι η διατηρητέα ποσότητα και f είναι η ροή (flux). Ολοκληρώνοντας την (1.10) στο διάστημα $[a, b]$ έχουμε

$$\begin{aligned} \partial_t \int_a^b u(x, t) dx &= \int_a^b \partial_t u(x, t) dx \\ &= - \int_a^b \partial_x f(u(x, t)) dx \\ &= f(u(a, t)) - f(u(b, t)), \end{aligned} \quad (1.11)$$

που είναι η εισροή στο a μείον την εκροή στο b . Με άλλα λόγια, η ποσότητα u δε δημιουργείται ούτε καταστρέφεται ή, εναλλακτικά, η u αλλάζει μόνο λόγω της ροής τα άκρα του διαστήματος.

Από τον κανόνα της αλυσίδας και θέτοντας $f' = a$, η εξίσωση (1.10) μπορεί να γραφεί στην ημιγραμμική μορφή

$$u_t + a(u)u_x = 0. \quad (1.12)$$

Με πλαίσιο αναφοράς μόνο τις ομαλές συναρτήσεις, οι εξισώσεις (1.10) και (1.12) είναι πλήρως ισοδύναμες, ωστόσο, αν η u έχει άλματα, η (1.12) δεν είναι γενικά καλώς ορισμένη μιας και περιέχει το γινόμενο της ασυνεχούς $a(u)$ με την παράγωγο -με την έννοια των κατανομών- u_x . Έτσι, οδηγούμαστε στον ορισμό της ασθενούς λύσης για την (1.10), δηλαδή η u είναι ασθενής λύση της (1.10) αν και μόνο αν

$$\int \int (u\varphi_t + f(u)\varphi_x) dx dt = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^1. \quad (1.13)$$

Για το υπόλοιπο κεφάλαιο, η φ θα καλείται test function⁴.

³το λ το βλέπουμε ως κάποια πεπερασμένη ταχύτητα.

⁴Η κατανομή, όσο αφορά την ανάλυσή μας οι δύο όροι είναι ισοδύναμοι.

Όλα τα παραπάνω γενικεύονται φυσιολογικά για συστήματα $n \times n$ νόμων διατήρησης:

$$\begin{cases} \partial_t u_1 + \partial_x f_1(u_1, \dots, u_n) = 0 \\ \vdots \\ \partial_t u_n + \partial_x f_n(u_1, \dots, u_n) = 0 \end{cases} \quad (1.14)$$

το οποίο χάριν ευκολίας θα γράφουμε πάλι ως (1.10), όπου πλέον $u \doteq (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ και $f \doteq (f_1, \dots, f_n)$ είναι μία απεικόνιση από τον \mathbb{R}^n στον \mathbb{R}^n . Παρατηρούμε ότι για την (1.14) μπορούμε να θεωρούμε ασθενείς λύσεις $u \in L^1_{loc}$ (με την έννοια των κατανομών). Επιπροσθέτως, αν $A(u) = Df(u)$ είναι ο $n \times n$ Ιακωβιανός πίνακας της f στο διάνυσμα u τότε η (1.14) μπορεί να γραφεί στην ημιγραμμική μορφή

$$u_t + A(u)u_x = 0. \quad (1.15)$$

Πιο αυστηρά:

Ορισμός 1.5. Έστω $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ένα ομαλό διανυσματικό πεδίο. Η συνάρτηση $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι **ασθενής λύση** τους συστήματος νόμων διατήρησης (1.10) αν για κάθε $\varphi \in C^1_c(\Omega; \mathbb{R})$ έχουμε

$$\int \int_{\Omega} (u\varphi_t + f(u)\varphi_x) dx dt = 0$$

.

Πλέον όλες οι υποθέσεις συνέχειας για την u έχουν αρθεί και το μόνο που απαιτούμε είναι τοπική ολοκληρωσιμότητα για τις u και $f(u)$ στο Ω .

Συνέπεια του άνω ορισμού είναι το ακόλουθο.

Λήμμα 1.1. Έστω $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ ομοιόμορφα φραγμένη ακολουθία ασθενών λύσεων της (1.10) έτσι ώστε $u_m \rightarrow u$ και $f(u_m) \rightarrow f(u)$ στον L^1_{loc} . Τότε η u είναι επίσης ασθενής λύση της (1.10).

Απόδειξη. Για κάθε $\varphi \in C^1_c(\Omega; \mathbb{R})$ έχουμε

$$0 = \lim_{m \rightarrow \infty} \int \int_{\Omega} (u_m \varphi_t + f(u_m) \varphi_x) dx dt = \int \int_{\Omega} (u \varphi_t + f(u) \varphi_x) dx dt.$$

□

Επιστρέφουμε τώρα στην (1.10) και την εξοπλίζουμε με αρχικές συνθήκες της μορφής

$$u(x, 0) = u_0(x) \in L^1_{loc}.$$

Έτσι, καταλήγουμε στο πρόβλημα Cauchy

$$\begin{aligned} u_t + (f(u))_x &= 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x) \end{aligned} \quad (1.16)$$

και θα καλούμε την u ασθενή λύση του προβλήματος Cauchy (1.16) αν και μόνο αν η u είναι ασθενής λύση της (1.10) τέτοια ώστε οι αρχικές συνθήκες να ικανοποιούνται.

Ο επόμενος ορισμός μάς δίνει επιπλέον έλεγχο στο πρόβλημά μας.

Ορισμός 1.6. Το σύστημα (1.15) λέγεται **αυστηρά υπερβολικό** (*strictly hyperbolic*) αν, για κάθε u , ο Ιακωβιανός πίνακας $A(u)$ έχει n πραγματικές διακεκριμένες ιδιοτιμές

$$\lambda_1(u) < \dots < \lambda_n(u).$$

Σημείωση 1.2. Η παραπάνω ιδιότητα θα παίζει ουσιαστικό ρόλο στην μετέπειτα ανάλυσή μας διότι απο την μία θα μας επιτρέψει να μετρήσουμε την δύναμη κυμάτων που θα αλληλεπιδράσουν (δημιουργώντας ασυνέχειες που θέλουμε να ελέγξουμε) και απο την άλλη θα μας δώσει μία συνθήκη επιτρεψιμότητας (*admissibility condition*) για τις ασθενείς λύσεις του προβλήματος.

1.2.3 Ημιομάδες

Τα εξελικτικά προβλήματα προσφέρουν ένα πρόσφορο έδαφος για την χρήση «μεθόδων ημιομάδων» («semigroup methods»)⁵. Από χρηστική σκοπιά μας επιτρέπουν να δούμε πώς θα εξελιχθεί η λύση του προβλήματος αν στις αρχικές συνθήκες, τις οποίες γνωρίζουμε, δράσει ένας τελεστής. Στοιχειώδες παράδειγμα ενός semigroup είναι η απεικόνιση e^{At} για A πίνακα και $t \geq 0$. Εδώ θα παραθέσουμε τον ορισμό του semigroup που θα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω στην ανάλυσή μας καθώς και μία πρόταση που δείχνει άμεσα την χρησιμότητά τους. Αργότερα στο κείμενο (όταν η ανάγκη το επιτάσσει) θα παραθέσουμε περαιτέρω πληροφορίες για αυτά. Τα παρακάτω είναι βασισμένα στα [3] και [4].

Ορισμός 1.7. Έστω X χώρος Banach και \mathcal{D} κλειστό υποσύνολό του. Θεωρούμε τη συνεχή ροή $S : \mathcal{D} \times [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{D}$ με τις παρακάτω ιδιότητες:

1. $S_0 u = u, \quad S_s S_t u = S_{s+t} u,$
2. $\|S_t u - S_s u\|_X \leq L \|u - v\|_X + L' |t - s|$ για κάποια $L, L' > 0$.

Τότε, θα λέμε την S Lipschitz συνεχή ημιομάδα.

Για το σφάλμα που μπορεί να έχουμε όταν μελετάμε μια Lipschitz συνεχή συνάρτηση $u : [0, t] \rightarrow \mathcal{D}$ μέσω ενός semigroup, έχουμε το ακόλουθο φράγμα.

Πρόταση 1.1. Έστω $S : \mathcal{D} \times [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{D}$ ένα Lipschitz semigroup και $u : [0, T] \rightarrow \mathcal{D}$ μία Lipschitz συνεχής συνάρτηση. Τότε, για κάποιο $L > 0$,

$$\|u(T) - S_T u(0)\|_X \leq L \int_0^T \liminf_{h \rightarrow 0^+} \frac{\|u(t+h) - S_h u(t)\|_X}{h} dx. \quad (1.17)$$

1.2.4 Center Manifold Theorem

Ολοκληρώνουμε τη συζήτηση για τα μαθηματικά προαπαιτούμενα μιλώντας για το center manifold theorem (CMT) ([5],[6]). Αρχικά, για τη γραμμική περίπτωση, η βασική ιδέα του CMT είναι η ακόλουθη.

⁵Ονομάζονται έτσι διότι έχουν δομή ομάδας εκτός τις ύπαρξης αντιστρόφων στοιχείων.

Δοθέντος ενός προβλήματος Cauchy

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = \bar{x}, \quad (1.18)$$

όπου $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, με λύση

$$x(t) = e^{tA}\bar{x}, \quad e^{tA} \doteq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!},$$

μπορούμε να διασπάσουμε τον \mathbb{R}^n σε τρεις υποχώρους: Έναν ευσταθή (*stable*) V^s , έναν ασταθή (*unstable*) V^u και έναν κεντρικό (*center*) V^c , όπου ο καθένας τους αναφέρεται στο πρόσημο των ιδιοτιμών του A (αρνητικές, θετικές και μηδενικές ιδιοτιμές αντίστοιχα) έτσι ώστε οι υπόχωροι αυτοί να είναι αναλλοίωτοι της ροής (1.18) και να ισχύουν τα ακόλουθα:

1. $\mathbb{R}^n = V^s \oplus V^u \oplus V^c$ για τις συνεχείς προβολές

$$\pi_s : \mathbb{R}^n \mapsto V^s, \quad \pi_u : \mathbb{R}^n \mapsto V^u, \quad \pi_c : \mathbb{R}^n \mapsto V^c$$

$$\text{με } x = \pi_s x + \pi_c x + \pi_u x,$$

2. οι προβολές αυτές αντιμετατίθενται με τον A και συνεπώς με το e^{At} ⁶.

Τώρα, στη μη-γραμμική περίπτωση, έχουμε το σύστημα

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = \bar{x}. \quad (1.19)$$

Αν υποθέσουμε ότι $f(0)$ και $Df(0) = A$, τότε η παραπάνω ανάλυση μάς καλύπτει ως πρωτοτάξια εκτίμηση Taylor για το (1.19). Σύμφωνα με το CMT, υπάρχει αναλλοίωτο manifold \mathcal{M} για το σύστημα (1.19) εφαπτόμενο στο V^c στο 0.

Σημείωση 1.3. Στην περίπτωση που η f είναι αρκούντως ομαλή και ο $A \doteq Df(0)$ δεν έχει μηδενικές ιδιοτιμές, οι Hartman και Grobman έδειξαν πως υπάρχει ομοιομορφισμός φ που ορίζεται κοντά στο 0 ο οποίος μας επιτρέπει (τοπικά έστω) να μελετάμε μόνο τη γραμμική περίπτωση και να εξάγουμε συμπεράσματα για τη μη-γραμμική.

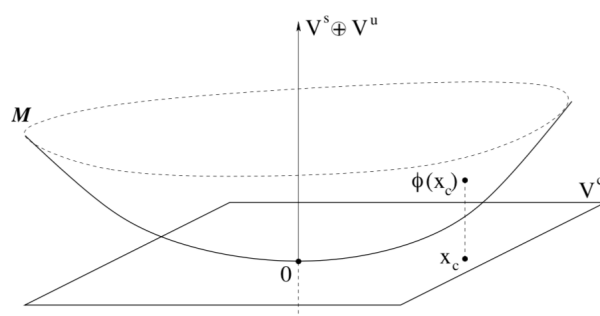
Θεώρημα 1.4 (Υπαρξη και ιδιότητες του center manifold). Έστω $f \in C^{k+1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, όπου $k \geq 1$, με $f(0) = 0$. Θεωρούμε τον πίνακα $A \doteq Df(0)$ και V^s, V^u, V^c τους ευσταθείς, ασταθείς και κεντρικούς υπόχωρους όπως πάνω. Τότε υπάρχει $\delta > 0$ και τοπικό, center manifold \mathcal{M} με τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. Υπάρχει $\varphi \in C^k(V^c, \mathbb{R}^n)$ με $\pi_c \varphi(x_c) = x_c$ έτσι ώστε

$$\mathcal{M} = \{\varphi(x_c); \quad x_c \in V^c, \quad |x_c| < \delta\}.$$

2. Το manifold \mathcal{M} είναι τοπικά αναλλοίωτο για την ροή (1.19), δηλαδή, για $x_0 \in \mathcal{M}$, έχουμε $x(t, x_0) \in \mathcal{M}$ για όλα τα t κοντά στο μηδέν.

⁶ $\pi_s e^{At} = e^{At} \pi_s, \quad \pi_u e^{At} = e^{At} \pi_u, \quad \pi_c e^{At} = e^{At} \pi_c$



Σχήμα 1.1: Οπτική αναπαράσταση του center manifold theorem.

3. Το \mathcal{M} εφάπτεται στο V^c στο 0 .
4. Κάθε ολικά φραγμένη τροχιά που είναι αρκούντως κοντά στο 0 παραμένει εξ' ολοκλήρου εντός του \mathcal{M} .
5. Για κάθε τροχιά για την οποία $x(t) \rightarrow 0$ καθώς $t \rightarrow \infty$ υπάρχει $\eta > 0$ και τροχιά $t \mapsto y(t) \in \mathcal{M}$ έτσι ώστε

$$e^{\eta t} |x(t) - y(t)| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

1.3 Κίνητρο: Εξίσωση Burgers & το Πρόβλημα Riemann

Θα δώσουμε ένα κίνητρο για τα προβλήματά μας παρουσιάζοντας το (μαλλον ευκολότερο) πρόβλημα που συναντά κανείς σε μορφή μη-γραμμικής υπερβολικής εξίσωσης. Ο λόγος για αυτό είναι ότι οι βασικές ιδέες που θα αναφέρουμε εδώ μεταφέρονται στις γενικότερες περιπτώσεις.

Η Εξίσωση Burgers με Ιξώδες

Η μονοδιάστατη εξίσωση Burgers για συμπιεστό αέριο με ιξώδες είναι η

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx}, \quad (1.20)$$

όπου u η ταχύτητα του αερίου και $\nu > 0$ η σταθερά κινηματικού ιξώδους (kinematic viscosity). Σε ό,τι ακολουθεί, υποθέτουμε ότι $x \in \mathbb{R}$ και $t \in [0, +\infty)$. Εφοδιάζουμε το παραπάνω με την αρχική συνθήκη $u(x, 0) = w(x)$ και έχουμε ένα πρόβλημα Cauchy.

Ο λόγος που ξεκινάμε με αυτό το (παραβολικό) πρόβλημα και όχι με την inviscid Burgers (όπου $\nu = 0$) είναι διότι έτσι θα φανεί με σαφήνεια πώς το ιξώδες μας επιτρέπει να ψάξουμε αναλυτική λύση για την (1.20) που, καθώς το $\nu \rightarrow 0$, τείνει να γίνει step function (Σχ. 1.2)

Λαμβάνοντας υπ' όψιν την φυσική του προβλήματος, περιμένουμε λύσεις τύπου travelling wave, δηλαδή, για $u(x, t)$, $x \in \mathbb{R}$ και $t \in [0, +\infty)$, περιμένουμε την $w(x - st) \doteq w(y)$ να είναι λύση της (1.20) όπου $s = \text{const.}$ είναι η ταχύτητα του κύματος. Σύμφωνα με τα παραπάνω,

$$u_t = -sw', \quad u_x = w', \quad u_{xx} = w''$$

και η (1.20) μπορεί να γραφεί ως

$$-sw' + ww' = \nu w''$$

ή, ισοδύναμα,

$$-sw + \frac{w^2}{2} = \nu w' + C. \quad (1.21)$$

Απαιτώντας $w(-\infty) = u_L$, $w(+\infty) = u_R$ έτσι ώστε $u_L > u_R$ ⁷ και $w'(\pm\infty) = 0$, και αντικαθιστώντας, έχουμε:

$$s = \frac{u_L + u_R}{2} \quad C = \frac{-u_L u_R}{2}.$$

Συνεπώς, η (1.21) γίνεται

$$\nu \frac{dw}{dy} = \frac{w^2}{2} - \frac{u_L + u_R}{2} w - \frac{u_L u_R}{2}.$$

Ολοκληρώνοντας,⁸ παίρνουμε την

$$\frac{y}{2} + C = \frac{1}{u_L - u_R} \ln \frac{u_L - w}{w - u_R}$$

που με την σειρά της μας δίνει την

$$\begin{aligned} w &= \frac{u_L + u_R e^A}{e^A + 1} \\ &= u_R + \frac{u_L - u_R}{2} \frac{2}{e^A + 1}, \end{aligned} \quad (1.22)$$

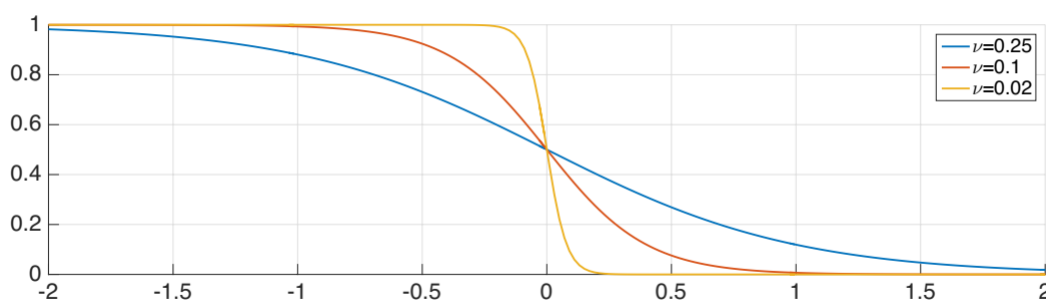
όπου $A = y \frac{u_L - u_R}{2\nu} + C = \frac{(x-st)(u_L - u_R)}{2\nu} + C$. Τέλος, χρησιμοποιώντας το $\frac{2e^{-A/2}}{e^{A/2} + e^{-A/2}} = 1 - \tanh A/2$, καταλήγουμε στην λύση της (1.20), δηλαδή:

$$\begin{aligned} w(y) &= \frac{u_R + u_L}{2} - \frac{u_L - u_R}{2} \tanh \left(\frac{y(u_L - u_R)}{4\nu} + C \right) \\ u(x, t) &= \frac{u_R + u_L}{2} - \frac{u_L - u_R}{2} \tanh \left(\frac{(x - \frac{u_L + u_R}{2}t)(u_L - u_R)}{4\nu} \right), \end{aligned} \quad (1.23)$$

όπου η συμπεριφορά της λύσης για διάφορες τιμές του ν φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

⁷Για να αποφύγουμε τα shocks.

⁸Με χρήση του $\int \frac{dw}{(w-a)^2 - b^2} = \frac{1}{2b} \ln \left| \frac{w-a-b}{w-a+b} \right|$.



Σχήμα 1.2: Προφίλ των λύσεων για την viscous Burgers' equation για $u_R = 0, u_L = 1$, και ν ίσο με 0.25, 0.1, και 0.02. Βλέπουμε πως η $w(y)$ τείνει σε step function όταν $\nu \rightarrow 0$.

1.3.1 Η Inviscid Εξίσωση Burgers

Υποθέτουμε τώρα ότι το ιξώδες είναι είτε αμελητέο είτε μηδέν. Έτσι, η (1.20) γίνεται

$$u_t + uu_x = 0, \quad (1.24)$$

η οποία είναι πιο εύκολο να μελετηθεί τόσο θεωρητικά όσο και αριθμητικά απο την (1.20). Αυτό ωστόσο έχει το κόστος ότι ακόμη και με $u(x, 0) = u_0(x) \in C^\infty$ για αρχικές συνθήκες, μπορεί να έχουμε ασυνεχείς λύσεις. Παίρνοντας ιδέες απο το [7] (για μικρούς γενικά χρόνους) η λύση του παραπάνω προβλήματος κατασκευάζεται ακολουθώντας τις χαρακτηριστικές εως $T_b \doteq \{\text{break time}\} \in (0, \infty]$.

Πράγματι, για $x'(t) = u(x, t)$ και για χαρακτηριστική $(x(t), t)$, έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u(x, t) &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt}u + \frac{1}{2} \frac{d}{dt}u = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} \\ &= \frac{1}{2} (u_t + u_x u) = 0. \end{aligned}$$

Συνεπώς, $x''(t) = 0$ που υποδηλώνει ότι για δοθέν $x \in \mathbb{R}$, για κάθε t μικρότερο του T_b , η χαρακτηριστική που άγεται απο το x θα έχει την μορφή $x(t) = u(x(0), 0)t + x(0)$ ή, απλούστερα,

$$x(t) = u_0(x_0)t + x_0. \quad (1.25)$$

Η εξίσωση (1.25) δείχνει ότι:

- οι χαρακτηριστικές είναι ευθείες,
- μπορεί να τέμνονται,
- δεν καλύπτουν απαραίτητα το (x, t) επίπεδο.

Για να βρούμε τον ακριβή χρόνο τομής δύο χαρακτηριστικών λειτουργούμε ως εξής: έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ και έστω $x^{\flat}(t) = u_0(x_1)t + x_1$ και $x^{\sharp}(t) = u_0(x_2)t + x_2$. Εξισώνουμε και έχουμε

$$t = -\frac{x_2 - x_1}{u_0(x_2) - u_0(x_1)}.$$

Για να βρούμε το T_b ελαχιστοποιούμε την παραπάνω ποσότητα:

$$\begin{aligned} T_b &= \min_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}} \left\{ -\frac{x_2 - x_1}{u_0(x_2) - u_0(x_1)} \right\} = \min_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{-1}{\frac{u_0(x_2) - u_0(x_1)}{x_2 - x_1}} \right\} \\ &= \min_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{-1}{\frac{1}{x_2 - x_1} (u_0(x_2) - u_0(x_1))} \right\} = \min_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{-1}{\frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} u_0'(x) dx} \right\} \\ &= \min_{x \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{-1}{u_0'(x)} \right\}. \end{aligned}$$

Με άλλα λόγια, την πρώτη στιγμή που η κλίση των αρχικών δεδομένων γίνεται αρνητική θα δημιουργηθούν shocks. Από φυσικής πλευράς, αυτό δε βγάζει νόημα. Για να υπερβούμε αυτό το εμπόδιο παρατηρούμε πως η (1.24) μοιάζει με εξίσωση μεταφοράς που η ταχύτητα u ισούται με τη ποσότητα που μεταφέρεται. Υιοθετώντας την μεθοδολογία vanishing viscosity μπορούμε να επανακτήσουμε την σωστή φυσική συμπεριφορά.

Έστω το *Riemann Problem* της μορφής

$$u_t + uu_x = 0 \quad (1.26)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} u_L, & x < 0 \\ u_R, & x > 0. \end{cases} \quad (1.27)$$

Από «αυστηρή σκοπιά» δε περιμένουμε κλασικές λύσεις για το (1.26)-(1.27) (αυτό φαίνεται απο το Σχ. 1.2). Συνεπώς, θα ψάξουμε για ασθενείς λύσεις.

Ορισμός 1.8. Θα ονομάζουμε την $u(x, t)$ ασθενή λύση των (1.26)-(1.27) αν και μόνο αν, για κάθε $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times [0, +\infty); \mathbb{R})$, ισχύει η ισότητα

$$\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_t u + \varphi_x f(u) dx dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, 0) u(x, 0) dx. \quad (1.28)$$

Σημείωση 1.4. Το να εστιάσουμε (αποκλειστικά) σε ασθενείς λύσεις δεν είναι ουσιαστικός συμβιβασμός μιας και, όπως αναφέραμε, ακόμη και με αναλυτικές αρχικές συνθήκες περιμένουμε ασυνέχιες στις υποψήφιες λύσεις μας.

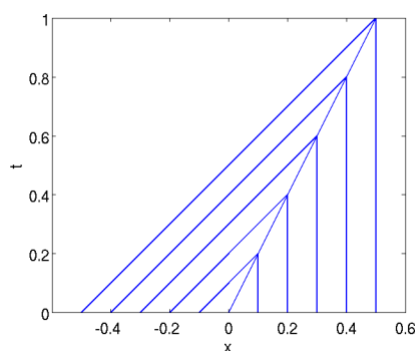
Η μορφή των λύσεών μας εξαρτάται απο το εάν η u_L είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη της u_R .

Περίπτωση 1: Έστω $u_L > u_R$. Βάσει της φυσικής του προβλήματος, περιμένουμε λύσεις της μορφής travelling waves, συγκεκριμένα της μορφής

$$u(x, t) = u_0(x - st) \doteq U(y),$$

όπου η U είναι step function της μορφής:

$$U(y) = \begin{cases} u_L, & y < 0 \\ u_R, & y > 0. \end{cases} = \begin{cases} u_L, & x < st \\ u_R, & x > st. \end{cases} \quad (1.29)$$



Σχήμα 1.3: Οι χαρακτηριστικές για το shock wave.

Αυτό θα ονομάζεται *shock wave* και είναι αποδεκτή λύση για τις (1.26)-(1.27). Η σταθερά s που εμφανίζεται στη U είναι το *speed of propagation* και για να το υπολοσίσουμε θεωρούμε έναν αρκούντως μεγάλο θετικό αριθμό M και παρατηρούμε πως απο την μία έχουμε

$$\begin{aligned} \partial_t \int_{-M}^M u(x, t) dx &= - \int_{-M}^M \partial_t u(x, t) dx \\ &= - \int_{-M}^M u(x, t) \partial_x u(x, t) dx \\ &= - \left[\frac{u^2}{2} \right]_{-M}^M = \frac{u_L^2 - u_R^2}{2}, \end{aligned}$$

και απο την άλλη

$$\begin{aligned} \int_{-M}^M u(x, t) dx &= \int_{-M-st}^{M-st} U(y) dy \\ &= \int_{-M-st}^0 U(y) dy + \int_0^{M-st} U(y) dy \\ &= u_L(M + st) + u_R(M - st). \end{aligned}$$

Παραγωγίζοντας ως προς t έχουμε $\partial_t \int_{-M}^M u(x, t) dx = s(u_L - u_R)$, που μας δίνει

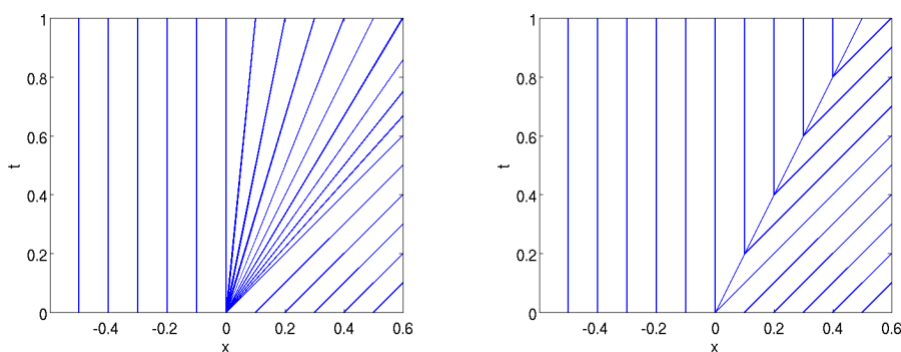
$$s = \frac{u_L + u_R}{2}. \quad (1.30)$$

Σημείωση 1.5. Όλα τα παραπάνω έρχονται σε πλήρη συμφωνία με τη συνθήκη Rankine-Hugoniot που στη γενική (βαθμωτή) περίπτωση είναι $s = \frac{f(u_L) - f(u_R)}{u_L - u_R}$.

Ολοκληρώνουμε την ανάλυση μας για τη περίπτωση όπου $u_L > u_R$ σημειώνοντας πως η U είναι η μοναδική ασθενής λύση του προβλήματος (1.26)-(1.27).

Περίπτωση 2: Έστω $u_L < u_R$. Εδώ οι χαρακτηριστικές δεν τέμνονται και δεν καλύπτουν όλο το χώρο (x, t) . Σε αυτή τη περίπτωση, δυνητικά, έχουμε πληθώρα ασθενών λύσεων.

Αριστερά στο Σχ. 1.4 έχουμε ένα rarefaction fan ή αλλιώς transonic rarefaction που



Σχήμα 1.4: Αριστερά: Ένα rarefaction fan (οι φυσικά αποδεκτές λύσεις που λαμβάνουμε από την vanishing viscosity method). Δεξιά: Ένα rarefaction shock (μη αποδεκτό λόγω entropy conditions).

δίνεται από την

$$u(x, t) = \begin{cases} u_L & x < u_L t \\ \frac{x}{t} & u_L t \leq x \leq u_R t \\ u_R & x > u_R t. \end{cases} \quad (1.31)$$

Η άλλη λύση, δεξιά στο Σχ.1.4, ονομάζεται rarefaction shock. Παρόλο που υπάρχουν πολλές ασθενείς λύσεις, μονάχα μία από αυτές είναι φυσικά αποδεκτή, η vanishing viscosity solution, αλλιώς η rarefaction wave solution. Μπορούμε να απορρίψουμε όλες τις αφύσικες ασθενείς λύσεις με τον έναν ή τον άλλο τρόπο. Ιστορικά, ο πιο συνηθισμένος είναι με διαφόρων τύπων entropy conditions όπως, για παράδειγμα, ο ακόλουθος.

Παράδειγμα Entropy Condition: Μια ασυνέχεια που μεταφέρεται με ταχύτητα $s = \frac{f(u_L) - f(u_R)}{u_L - u_R}$ έτσι ώστε $f'(u_L) > s > f'(u_R)$ μας δίνει αποδεκτές λύσεις για το Riemann Problem (1.26)-(1.27).

Μέρος **I**

Νόμοι Διατήρησης

Κεφάλαιο 2

Η Μέθοδος Vanishing Viscosity για Νόμους Διατήρησης

Εισαγωγικά

Εδώ θεωρούμε σύστημα $n \times n$ μονοδιάστατων νόμων διατήρησης όπου τα αρχικά δεδομένα έχουν μικρή κύμανση:

$$\begin{aligned}u_t + (f(u))_x &= 0 \\ u(x, 0) &= \bar{u}(x).\end{aligned}\tag{2.1}$$

Θα δείξουμε ότι οι λύσεις των viscous approximations $u_t + A(u)u_x = \varepsilon u_{xx}$ ¹ ορίζονται ολικά στον χρόνο και ικανοποιούν ομοιόμορφα BV estimates ανεξάρτητα του ε , εξαρτώνται συνεχώς από τα αρχικά δεδομένα στην L^1 νόρμα και, για $\varepsilon \rightarrow 0$, αυτές οι viscous solutions συγκλίνουν σε ένα μοναδικό όριο: την λύση της (2.1).

Έστω ότι η $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι ομαλή και το σύστημα strictly hyperbolic, δηλαδή, για όλα τα $u \in \mathbb{R}^n$, ο Ιακωβιανός πίνακας $A(u) = Df(u)$ έχει n πραγματικές διακεκριμένες ιδιοτιμές

$$\lambda_1(u) < \dots < \lambda_n(u)\tag{2.2}$$

και συνεπώς μπορούμε να επιλέξουμε βάσεις απο αριστερά και δεξιά ιδιοδιανύσματα $l_i(u), r_i(u)$, κανονικοποιημένα, έτσι ώστε:

$$|r_i| \equiv 1, \quad l_i \cdot r_j = \begin{cases} 1, & \text{αν } i = j \\ 0, & \text{αν } i \neq j \end{cases}.\tag{2.3}$$

Εν γένει, ακόμη και με ομαλά δεδομένα, περιμένουμε απώλεια ομαλότητας. Συνεπώς αντιλαμβανόμαστε την (2.1) με την έννοια των κατανομών και ψάχνουμε ασθενείς λύσεις u που ικανοποιούν την

$$\iint (u\varphi_t + f(u)\varphi_x) dx dt = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^1.\tag{2.4}$$

Δεδομένου ότι οι ασθενείς λύσεις δεν είναι κατ' ανάγκη μοναδικές, για να απομονώσουμε τις «καλές» λύσεις, εισάγουμε την έννοια των *entropy conditions*. Συνήθως, αυτό σημαί-

¹Εδώ $A(u) = Df(u)$ είναι ο Ιακωβιανός πίνακας της f

νει πως πρέπει να ασχοληθούμε με υπερβολικά συστήματα που ικανοποιούν την παρακάτω υπόθεση, που πρώτος εισήγαγε ο P. Lax, και απλοποιεί την ανάλυση του προβλήματος.

(♠) Για κάθε $i = 1, \dots, n$, το i -στο πεδίο είναι είτε γνησίως μη-γραμμικό, έτσι ώστε $D\lambda_i(u) \cdot r_i(u) > 0$ για κάθε u , είτε γραμμικά εκφυλισμένο, δηλαδή $D\lambda_i(u) \cdot r_i(u) = 0$ για κάθε u .

Παρατηρούμε πως στην γνησίως μη-γραμμική περίπτωση, η i -στη ιδιοτιμή λ_i είναι γνησίως άξουσα επί των ολοκληρωτικών καμπυλών που αντιστοιχούν στα ιδιοδιανύσματα r_i . Από την άλλη, στη γραμμικά εκφυλισμένη περίπτωση, η ιδιοτιμή λ_i είναι σταθερή επί των καμπυλών αυτών. Άρα, επί της ουσίας, με την παραπάνω υπόθεση εξασφαλίζουμε πως επί των ολοκληρωτικών καμπυλών που ορίζονται από τα r_i , οι αντίστοιχες ιδιοτιμές λ_i δεν μπορούν ποτέ να αυξάνονται και ποτέ να μειώνονται. Συνεπώς, δεν υπάρχουν πολλά τοπικά μέγιστα ή ελάχιστα.

Σημείωση 2.6. Η υπόθεση (♠) έγινε πιο ασθενής με τα έργα των Liu και Yang ([8],[9]) και εν τέλει καταλύθηκε στο [10] με κόστος μεγάλες τεχνικότητες. Ο λόγος που εμφανίζονται αυτές οι τεχνικότητες είναι ο εξής: σε όλα τα έργα που βασίζονται στο σχήμα του Glimm (ή στον αλγόριθμο *front-tracking*), οι προσεγγιστικές λύσεις βασίζονται σε *BV estimates* και στην προσεκτική ανάλυση προβλημάτων *Riemann*. Σε αυτό το πλαίσιο, η υπόθεση (♠) απλοποιεί τα πράγματα διότι κάθε πρόβλημα *Riemann* επιλύεται μέσω n στοιχειωδών κυμάτων (δηλαδή *shocks*, *centered rarefactions* ή *contact discontinuities*), ένα για κάθε χαρακτηριστικό πεδίο για $i = 1, \dots, n$. Όταν αυτή η υπόθεση καταρρέει, η κατασκευή λύσεων για τα προβλήματα *Riemann*, αν και δυνατή, είναι εξαιρετικά πιο πολύπλοκη λόγω δυσκολιών στην εύρεση *BV* εκτιμήσεων.

Αργότερα θα δούμε πώς με την μέθοδο *vanishing viscosity*, και δεδομένης της (♠), αποκτούμε ομοιόμορφα *BV* φράγματα χωρίς αναφορές σε προβλήματα *Riemann*.

2.1 Το βασικό αποτέλεσμα για νόμους διατήρησης

Σκοπός αυτής της ενότητας είναι η παράθεση του βασικού αποτελέσματος για τους νόμους διατήρησης όπως αυτό εμφανίζεται στο [11]. Επίσης, θα δοθεί η στρατηγική με την οποία θα κινηθούμε έτσι ώστε να επιβεβαιώσουμε την ορθότητά του ισχυρισμού.

Θεώρημα 2.5. Θεωρούμε το πρόβλημα *Cauchy* για το υπερβολικό σύστημα με ιξώδες:

$$u_t + A(u)u_x = \varepsilon u_{xx}, \quad u(0, x) = \bar{u}(x). \quad (2.5)$$

Υποθέτουμε πως ο πίνακας $A(u)$ είναι *strictly hyperbolic* και εξαρτάται ομαλώς από το u σε μια περιοχή ενός συμπαγούς $K \subset \mathbb{R}^n$. Τότε υπάρχουν θετικές σταθερές C, L, L' και δ έτσι ώστε να ισχύουν τα ακόλουθα. Αν

$$\text{Tot. Var.}\{\bar{u}\} < \delta, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \bar{u}(x) \in K \quad (2.6)$$

τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$, το πρόβλημα *Cauchy* (2.5) έχει μοναδική λύση u^ε , που ορίζεται για κάθε $t \geq 0$. Χρησιμοποιώντας συμβολισμό ημιομάδων γράφουμε $t \mapsto u^\varepsilon(t, \cdot) \doteq S_t^\varepsilon \bar{u}$.

Επιπροσθέτως,

$$BV \text{ φράγμα: } \quad \text{Tot. Var.}\{S_t^\varepsilon \bar{u}\} \leq C \text{Tot. Var.}\{\bar{u}\}, \quad (2.7)$$

$$L^1 \text{ ευστάθεια: } \quad \|S_t^\varepsilon \bar{u} - S_t^\varepsilon \bar{v}\|_{L^1} \leq L \|\bar{u} - \bar{v}\|_{L^1}, \quad (2.8)$$

$$\|S_t^\varepsilon \bar{u} - S_s^\varepsilon \bar{u}\|_{L^1} \leq L' \left(|t - s| + \left| \sqrt{\varepsilon t} - \sqrt{\varepsilon s} \right| \right). \quad (2.9)$$

Περί συγκλίσεων: καθώς $\varepsilon \rightarrow 0^+$, η λύση u^ε συγκλίνει στις τροχιές της ημιομάδας S έτσι ώστε

$$\|S_t \bar{u} - S_s \bar{v}\|_{L^1} \leq L \|\bar{u} - \bar{v}\|_{L^1} + L' |t - s|. \quad (2.10)$$

Αυτά θα ονομάζονται *vanishing viscosity limits* και μπορούν να θεωρηθούν τα μοναδικά *vanishing viscosity solutions* του υπερβολικού προβλήματος *Cauchy*

$$u_t + A(u)u_x = 0, \quad u(0, x) = \bar{u}(x). \quad (2.11)$$

Στην συντηρητική περίπτωση $A(u) = Df(u)$, κάθε *vanishing viscosity solution* είναι ασθενής λύση της

$$u_t + (f(u))_x = 0, \quad u(0, x) = \bar{u}(x) \quad (2.12)$$

και ικανοποιεί την *Liu admissibility condition*².

Αν επιπλέον υποθέσουμε πως κάθε πεδίο είναι *genuinely nonlinear* ή *linearly degenerate*, οι *vanishing viscosity solutions* ταυτίζονται με τα μοναδικά όρια των μεθόδων *Glimm* και *front-tracking*.

Παρατηρούμε πως στο παραπάνω θεώρημα οι μόνες ουσιαστικές υπόθεσεις είναι το *strict hyperbolicity* του συστήματος και η μικρή ολική κύμανση των αρχικών δεδομένων.

Σημείωση 2.7. Η θεώρηση *vanishing viscosity* βασίζεται στα *viscous travelling waves*. Σε σύγκριση με τις μεθόδους του *Glimm* ή τον αλγόριθμο *Front-tracking* είναι πιο θεμελιώδης και αποφέρει γενικότερα αποτελέσματα. Ωστόσο, η αρχική μεθοδολογία με προσεγγίσεις από κατά τμήματα σταθερές συναρτήσεις και η ανάλυση προβλημάτων *Riemann* έχει τα πλεονεκτήματά της. Πιο συγκεκριμένα, αναδεικνύει τις ιδιαιτερότητες της γεωμετρίας του προβλήματος και δίνει επιπλέον αποτελέσματα τόσο για τα ποιοτικά χαρακτηριστικά της δομής του προβλήματος όσο και για την ασυμπτωτική συμπεριφορά των λύσεων.

Σημείωση 2.8. Σε αυτή την εργασία θα ασχοληθούμε μόνο με την περίπτωση που τα αρχικά δεδομένα έχουν μικρή κύμανση. Πέρα από βολικό, αυτό είναι και κοινώς αποδεκτό στην σύγχρονη βιβλιογραφία μιας και εξασφαλίζει την ύπαρξη καθολικών *BV* λύσεων για την (2.1) και αποδίδει όλα τα βασικά χαρακτηριστικά του προβλήματος. Ένα παράδειγμα του *Jenssen* [13] δείχνει πως για αρχικά δεδομένα με μεγάλη ολική κύμανση, η λύση μπορεί να εκραγεί σε πεπερασμένο χρόνο. Σε αυτό το γενικότερο σενάριο, περιμένει κανείς πως η ύπαρξη και η

²Λέμε ότι ένα shock με αριστερές και δεξιές καταστάσεις u^-, u^+ ικανοποιεί την *Liu admissibility condition* αν κάθε i -shock που ενώνει την u^- με κάποια ενδιάμεση κατάσταση $S_i(s)(u^-)$ ταξιδεύει με ταχύτητα μεγαλύτερη ή ίση της ταχύτητας του shock (u^-, u^+) (βλπ [12] για λεπτομέρειες)

μοναδικότητα μίας ασθενούς λύσης, καθώς και η σύγκλιση των *vanishing viscosity approximations*, θα στέκουν τοπικά στον χρόνο όσο η κύμανη των δεδομένων παραμένει φραγμένη. Για αρχικά δεδομένα στον L^∞ δεν περιμένουμε κανένα γενικό θεώρημα για μοναδικότητα ή ευστάθεια των *viscosity solutions*.

Ο τρόπος με τον οποίο θα κινηθούμε για να αποδείξουμε το παραπάνω αποτέλεσμα είναι ο ακόλουθος. Στο επόμενο Κεφάλαιο εξάγουμε παραβολικές εκτιμήσεις. Αυτό θα το καταφέρουμε θεωρώντας το πρόβλημα μοναδιαίου ιξώδους ως μια σχεδόν γραμμική εξίσωση θερμότητας με διαταραχή. Στη συνέχεια θα διασπάσουμε τις παραγώγους της u και με χρήση του center manifold theorem και μίας κατάλληλα επιλεγμένης βάσης απο ιδιοδιανύσματα θα δείξουμε ότι η διάσπαση αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να ελέγξουμε την ολική κύμανση της u .

Στο Κεφάλαιο 4 μελετάμε πως η αλληλεπίδραση των κυμάτων που συνιστούν την λύση u μπορεί να ελεγχεί επιβάλλοντας φράγματα στους όρους που δημιουργούν τις διαταραχές που μπορεί να έχει η u . Αποτέλεσμα αυτής της ανάλυσης είναι το γεγονός ότι η u είναι καλώς ορισμένη για κάθε θετικό χρόνο.

Στο Κεφάλαιο 5 μελετάμε την ευστάθεια των *viscous solutions* και εξάγουμε συμπεράσματα για την γενικότερη συμπεριφορά τους. Έτσι καταλήγουμε, χρησιμοποιώντας τεχνικές ημιομάδων, να εξαλείψουμε το ιξώδες και δείχνουμε ότι η λύση που κατασκευάσαμε είναι μοναδική.

Κεφάλαιο 3

A-priori Εκτιμήσεις για το Total Variation της Λύσης

Σε αυτό το κεφάλαιο θα εξάγουμε εκτιμήσεις για το σύστημα (2.1) βασιζόμενοι στη θεωρία παραβολικών εξισώσεων και θα μελετήσουμε την συμπεριφορά τους για μεγάλους χρόνους.

3.1 Παραβολικές εκτιμήσεις

Ξεκινάμε την ανάλυσή μας απο την εξίσωση

$$u_t + A(u)u_x = \varepsilon u_{xx}, \quad (3.1)$$

που με την αλλαγή μεταβλητών $s = t/\varepsilon$ και $y = x/\varepsilon$ ισοδυναμεί με την

$$u_s + A(u)u_y = u_{yy}, \quad u(y, 0) = \bar{u}^\varepsilon(y) = \bar{u}(\varepsilon y), \quad (3.2)$$

η οποία όχι μόνο είναι πιο εύκολη στην ανάλυσή της αλλά έχει και ίδιο Tot. Var. {·} με την (2.1). Συνεπώς, τόσο για τα a-priori BV φράγματα όσο και για την ανάλυση της ευστάθειας, θα ασχοληθούμε με το παραβολικό σύστημα

$$u_t + A(u)u_x = u_{xx}. \quad (3.3^*)$$

Θεωρούμε το παραπάνω σύστημα ως μία διαταραχή πρώτης τάξης της εξίσωσης της θερμότητας¹. Τέτοιες εξισώσεις έχουν mild solutions της μορφής

$$u(t) = G(t) * u(0) - \int_0^t G(t-s) * A(u(s))u_x(s)ds,$$

όπου G είναι ο συνήθης πυρήνας θερμότητας.

Για την συλλογή όλων των σχετικών φραγμάτων με αυτή τη προσέγγιση, υποθέτουμε πως η $u(x, t) \in BV$ είναι μια λύση του (3.3*) και θεωρούμε την κατάσταση

$$u^* = \lim_{x \rightarrow -\infty} u(x, t) \quad (3.4)$$

που είναι ανεξάρτητη του χρόνου (μιας και οποιαδήποτε διαταραχή έρχεται απο το $-\infty$ δεν έχει

¹Με διαταραχή $A(u)u_x$.

φτάσει ακόμη). Έτσι, ορίζουμε τον πίνακα $A^* \doteq A(u^*)$ με $\lambda_i^*, r_i^*, l_i^*$ να είναι οι αντίστοιχες ιδιοτιμές και δεξιά και αριστερά ιδιοδιανύσματα (κανονικοποιημένα). Είναι βολικό επίσης να χρησιμοποιούμε το « \bullet » για τη κατευθυνόμενη παράγωγο. Έτσι, η έκφραση $z \bullet A(u) \doteq DA(u) \cdot z$ υποδηλώνει την παράγωγο της matrix-valued συνάρτησης $u \mapsto A(u)$ στην κατεύθυνση του διανύσματος z . Το z ικανοποιεί την μεταβολική εξίσωση

$$z_t + z \bullet A(u)u_x + A(u)z_x = z_{xx} \quad (3.5^*)$$

που περιγράφει την εξέλιξη της πρωτοτάξιας διαταραχής της λύσης u του παραβολικού συστήματος.

Τώρα, ξαναγράφοντας τις (3.3*) και (3.5*), έχουμε

$$u_t + A^*u_x - u_{xx} = (A^* - A(u))u_x \quad (3.6)$$

$$z_t + A^*z_x - z_{xx} = (A^* - A(u))z_x - (z \bullet A(u))u_x, \quad (3.7)$$

όπου τα δεξιά μέλη τα αντιλαμβάνομαστε ως διαταραχές του γραμμικού παραβολικού συστήματος με σταθερούς συντελεστές

$$w_t + A^*w_x - w_{xx} = 0 \quad (3.8)$$

που έχει λύσεις της μορφής:

$$\int G^*(x-y, t)w(y, 0)dy.$$

Η συνάρτηση πίνακας G^* υπολογίζεται εύκολα στο i -στο στοιχείο $w_i \doteq l_i^* \cdot w$ δίνοντας

$$G_i^*(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left\{-\frac{(x - \lambda_i^*t)^2}{4t}\right\}$$

από όπου παίρνουμε τα φράγματα

$$\|G^*(t)\|_{L^1} \leq \kappa, \quad \|G_x^*(t)\|_{L^1} \leq \frac{\kappa}{\sqrt{t}}, \quad \|G_{xx}^*(t)\|_{L^1} \leq \frac{\kappa}{t}, \quad (3.9)$$

για κάποια σταθερά κ για όλους τους χρόνους $t > 0$. Παρατηρούμε επίσης ότι αν η u είναι λύση της (3.6), τότε η $z = u_x$ είναι ειδική λύση της (3.7). Συνεπώς, τα φράγματα για τα z z_x στέκουν για τα u_x και u_{xx} αντίστοιχα. Λαμβάνοντας υπ'οψιν πως το $\text{Tot. Var.}\{\bar{u}\}$ είναι πάντα μικρό, μπορούμε να εκτιμήσουμε φράγματα και για ανώτερες παραγώγους.

Πρόταση 3.2. Έστω u, v λύσεις των συστημάτων (3.6)-(3.7) έτσι ώστε

$$\|u_x(t)\|_{L^1}, \|z(t)\|_{L^1} \leq \delta_0, \quad (3.10)$$

για κάποια σταθερά $\delta_0 < 1$, για όλους τους χρόνους $t \in [0, \hat{t}]$ όπου

$$\hat{t} \doteq \left(\frac{1}{400\kappa\kappa_A\delta_0}\right)^2, \quad \kappa_A \doteq \sup_u (\|DA\| + \|D^2A\|)$$

με κ όπως στην (3.9). Τότε, για κάθε $t \in [0, \hat{t}]$, ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\|u_{xx}(t)\|_{L^1}, \|z_x(t)\|_{L^1} \leq \frac{2\kappa\delta_0}{\sqrt{t}}, \quad (3.11)$$

$$\|u_{xxx}(t)\|_{L^1}, \|z_{xx}(t)\|_{L^1} \leq \frac{5\kappa^2\delta_0}{t}, \quad (3.12)$$

$$\|u_{xxx}(t)\|_{L^\infty}, \|z_{xx}(t)\|_{L^\infty} \leq \frac{16\kappa^3\delta_0}{t\sqrt{t}}. \quad (3.13)$$

Απόδειξη. Μπορεί να βρεθεί στο Παράρτημα. \square

Αν τα φράγματα της (3.10) στέκουν για το μεγαλύτερο διάστημα $[0, T]$, εφαρμόζοντας την παραπάνω πρόταση για $[t - \hat{t}, t]$ και χρησιμοποιώντας το ότι $\hat{t} \approx \delta_0^{-2}$, έχουμε το ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 3.1. Με υποθέσεις ίδιες με την Πρόταση 3.2 και αν τα φράγματα της (3.10) στέκουν για $t \in [0, T]$, συμπεραίνουμε πως, για κάθε $t \in [\hat{t}, T]$, ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\|u_{xx}(t)\|_{L^1}, \|u_x(t)\|_{L^\infty}, \|z_x(t)\|_{L^1} = \mathcal{O}(1)\delta_0^2, \quad (3.14)$$

$$\|u_{xxx}(t)\|_{L^1}, \|u_{xx}(t)\|_{L^\infty}, \|z_{xx}(t)\|_{L^1} = \mathcal{O}(1)\delta_0^3, \quad (3.15)$$

$$\|u_{xxx}(t)\|_{L^\infty}, \|z_{xx}(t)\|_{L^\infty} = \mathcal{O}(1)\delta_0^4. \quad (3.16)$$

Τώρα στρέφουμε την προσοχή μας στα αρχικά δεδομένα των λύσεων των (3.6) και (3.7) για τα οποία συμπεραίνουμε τα εξής:

Πρόταση 3.3. Έστω $u = u(x, t)$ και $z = (x, t)$ λύσεις των (3.6) και (3.7) αντίστοιχα, με

$$\text{Tot. Var.}\{u(\cdot, 0)\} \leq \frac{\delta_0}{4\kappa}, \quad \|z(0)\|_{L^1} \leq \frac{\delta_0}{4\kappa}. \quad (3.17)$$

Τότε, οι u, z είναι καλώς ορισμένες για $t \in [0, \hat{t}]$ και ικανοποιούν τα

$$\|u_x(t)\|_{L^1} \leq \frac{\delta_0}{2}, \quad \|z(t)\|_{L^1} \leq \frac{\delta_0}{2}, \quad \forall t \in [0, \hat{t}]. \quad (3.18)$$

Απόδειξη. Μπορεί να βρεθεί στο [11] σσ. 236-237. \square

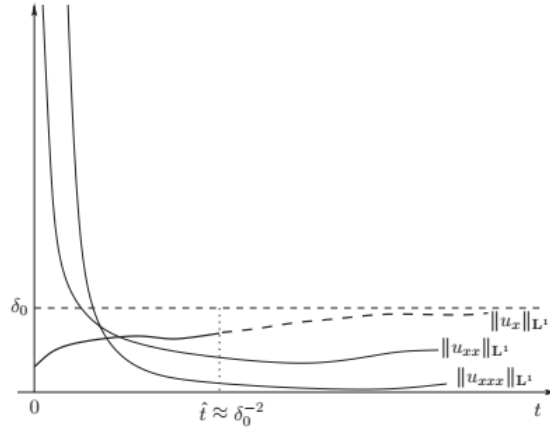
Δεδομένου ότι η z είναι λύση γραμμικής εξίσωσης, δεν υπάρχει λόγος για περιορισμούς στην $\|z(0)\|_{L^1}$. Παρ' όλα αυτά, χρησιμοποιούμε τις ίδιες υποθέσεις για τις u_x και z προς αποφυγήν τεχνικών δυσκολιών.

Με αυτά κατά νου, έχουμε τα ακόλουθα.

Πόρισμα 3.2. Έστω $u = u(x, t)$ και $z = (x, t)$ λύσεις των (3.6) και (3.7) αντίστοιχα, με $\|u_x(0)\|_{L^1} \leq \delta_0/4\kappa$. Τότε, οι u, z είναι καλώς ορισμένες για $t \in [0, \hat{t}]$ και ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\|u_x(t)\|_{L^1} \leq 2\kappa\|u_x(0)\|_{L^1}, \quad \|z(t)\|_{L^1} \leq 2\kappa\|z(0)\|_{L^1}, \quad \forall t \in [0, \hat{t}]. \quad (3.19)$$

Το ακόλουθο σχήμα μας δίνει μια οπτική της κατάστασης.



Σχήμα 3.1

Αρχικά, στο διάστημα $t \in [0, \hat{t}]$, με $\hat{t} \approx \delta_0^2$ έχουμε

$$\|u_x(t)\|_{L^1} \leq \delta_0, \quad (3.20)$$

ενώ οι νόρμες υψηλότερων παραγώγων φθίνουν κατά τρόπο

$$\|u_{xx}\|_{L^1} = \mathcal{O}(1) \frac{\delta_0}{\sqrt{t}}, \quad \|u_{xxx}\|_{L^1} = \mathcal{O}(1) \frac{\delta_0}{t}.$$

Από την άλλη, για $t \geq \hat{t}$, και όσο η (3.20) στέκει, έχουμε

$$\|u_{xx}\|_{L^1} = \mathcal{O}(1)\delta_0^2, \quad \|u_{xxx}\|_{L^1} = \mathcal{O}(1)\delta_0^3.$$

Αυτά τα φράγματα (οι κανονικές γραμμές στο Σχ. 3.1) τα λαμβάνουμε ακολουθώντας τυπικές μεθόδους για παραβολικού τύπου εκτιμήσεις. Για την διατήρηση των εκτιμήσεων (3.20) για μεγάλους χρόνους $t \in [\hat{t}, \infty)$ (η διακεκομμένη γραμμή στο Σχ. 3.1) θα χρειαστούμε υπερβολικού τύπου εκτιμήσεις που βασίζονται στο τοπικό gradient decomposition του u_x σαν άθροισμα travelling waves και στην ανάλυση των όρων που αλληλεπιδρούν.

3.2 Συμπεριφορά φραγμάτων για μεγάλους χρόνους

Ακολουθώντας το [5], το «βασικό συστατικό» για την ανάλυσή μας σε αυτό το σημείο θα είναι τα Viscous Traveling Profiles, δηλαδή λύσεις της μορφής

$$u(x, t) = U(x - \lambda t),$$

όπου η U πρέπει να ικανοποιεί το σύστημα

$$U'' = (A(U) - \lambda)U'. \quad (3.21)$$

Για την ακρίβεια, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και για $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ θεωρούμε τον δεύτερης τάξης πίδακα

(jet) (u, u_x, u_{xx}) και ψάχνουμε traveling profiles U_1, \dots, U_n έτσι ώστε

$$U_i'' = (A(U_i) - \sigma_i)U_i', \quad U_i(x) = u(x) \quad (3.22)$$

με σ_i κοντά στην χαρακτηριστική ταχύτητα λ_i και, ειδικότερα,

$$\begin{aligned} U_i(x) &= u(x) & i &= 1, \dots, n \\ \sum_i U_i'(x) &= u_x(x), & \sum_i U_i''(x) &= u_{xx}(x). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Ο λόγος που θεωρούμε ότι $U_i(x) = u(x)$ για κάθε i εγκλιεται στο ότι κατασκευάζουμε τα viscous traveling waves ώστε να «περνάνε μέσα από τη u ». Για την αναλύση που θα κάνουμε, υποθέτουμε πως, ως συνήθως, το $\text{Tot. Var.}\{u\}$ είναι αρκούντως μικρό αλλά και πως οι παράγωγοι είναι ομοιόμορφα μικροί.

Η ιδέα είναι πως θέλουμε να κάνουμε gradient decomposition στο u , δηλαδή να το φέρουμε στη μορφή

$$u_x(x) = \sum_i v_i \tilde{r}_i = \sum_i U_i'(x), \quad (3.24)$$

όπου $\tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_n$ είναι μια βάση από διανύσματα έξυπνα επιλεγμένα ώστε να αντιμετωπίσουμε τα εζής δύο βασικά προβλήματα.

Πρώτον, το σύστημα (3.23) είναι υποκαθορισμένο. Πράγματι, το (3.22), όντας 2ης τάξης, μας επιτρέπει αυθαίρετη επιλογή $U'(x) \in \mathbb{R}^n$ καθώς και αυθαίρετες επιλογές σ_i για συνολικά $(1+n)$ βαθμωτές παραμέτρους. Αθροίζοντας και στις n οικογένειες κυμάτων, έχουμε $n(n+1)$ ελεύθερες παραμέτρους. Από την άλλη, το (3.23) έχει $n+n$ εξισώσεις. Συνεπώς, για $n \geq 2$ δεν έχουμε αρκετές πληροφορίες για μοναδική επιλογή των U_1, \dots, U_n .

Δεύτερον, για τυχαίες τιμές των u_x, u_{xx} , το (3.23) μπορεί να είναι μη-επιλύσιμο. Λόγου χάρη, στην μονοδιάστατη περίπτωση όπου η μοναδική επιλογή για το σ είναι $\sigma = \lambda(u(x)) - \frac{u_{xx}}{u_x}$ αν $u_x = 0$ και $u_{xx} \neq 0$ δεν υπάρχει λύση².

Το πρώτο πρόβλημα θα το λύσουμε εισάγοντας την χρήση ενός Central Manifold και θα απαιτούμε τα traveling profiles να ανήκουν μόνο σε αυτό (και επομένως το decomposition μας να βασίζεται μόνο σε αυτά). Το δεύτερο πρόβλημα θα λυθεί με την εισαγωγή μιας cut-off function που στις ειδικές περιπτώσεις που θα είναι ενεργή (δηλαδή θα αντιμετωπίζουμε προβλήματα με τις τιμές των u_x και u_{xx}) θα ικανοποιείται μόνο το $\sum_i U_i'(x) = u_x(x)$ δίνοντάς μας χώρο για σφάλμα στο $\sum_i U_i''(x) = u_{xx}(x)$.

3.2.1 Κατασκευή του Center Manifold

Ξεκινούμε παρατηρώντας πως για να έχουμε μοναδική λύση στο πρόβλημα μας χρειαζόμαστε $n+n$ εξισώσεις. Συνεπώς, για κάθε δοσμένη κατάσταση u θα χρειαστεί να κατασκευάσουμε n οικογένειες traveling wave profiles U_i που το καθένα να εξαρτάται από δύο βαθμωτές παραμέτρους. Για την κατασκευή αυτή θα χρησιμοποιήσουμε το Center manifold Theorem και εργαζόμαστε ως εξής.

²Γενικά οπουδήποτε έχουμε μέγιστα ή ελάχιστα έχουμε αυτό το πρόβλημα.

Τα traveling waves του (3.3*) είναι οι (πιθανώς μη-φραγμένες) λύσεις του

$$(A(U) - \sigma)U' = U'' \quad (3.25)$$

που μπορούμε να γράψουμε ως πρωτοτάξιο σύστημα στον $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ ως:

$$\begin{cases} \dot{u} = v, \\ \dot{v} = (A(u) - \sigma)v, \\ \dot{\sigma} = 0. \end{cases} \quad (3.26)$$

Υποθέτουμε τώρα πως έχουμε μια δοσμένη κατάσταση u^* και σταθεροποιούμε ένα $i \in \{1, \dots, n\}$. Γραμμικοποιώντας το άνω σύστημα στο σημείο ισορροπίας $P^* \doteq (u^*, 0, \lambda_i(u^*))$ έχουμε το γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} \dot{u} = v, \\ \dot{v} = (A(u^*) - \lambda_i(u^*))v, \\ \dot{\sigma} = 0. \end{cases} \quad (3.27)$$

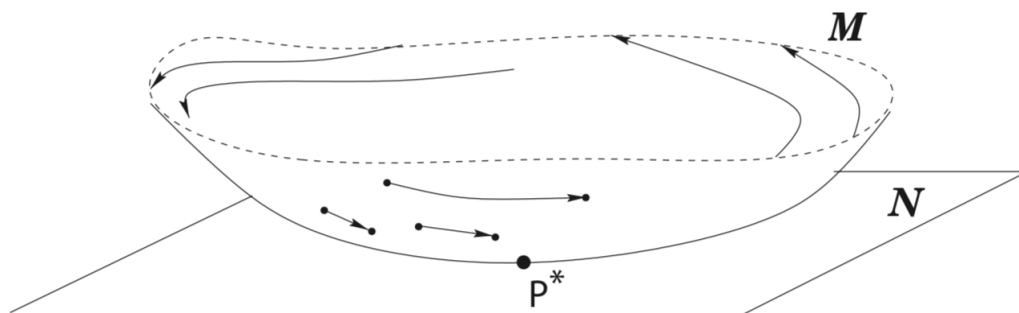
Άρα, για τις αριστερές και δεξιές κανονικοποιημένες βάσεις των ιδιοδιανυσμάτων του $A(u^*)$, $\{l_1^*, \dots, l_n^*\}$ και $\{r_1^*, \dots, r_n^*\}$, μπορούμε να γράψουμε κάθε v ως $(V_1, \dots, V_n \in \mathbb{R}^n$ και έτσι έχουμε

$$|r_i^*| = 1, \quad v = \sum_j V_j r_j^*, \quad V_j \doteq l_j^* \cdot v.$$

Τώρα θεωρούμε έναν γραμμικό χώρο που ονομάζουμε \mathcal{N} και περιέχει όλα τα $(u, v, \sigma) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ για τον οποίο ισχύει

$$V_j = 0 \quad \text{για κάθε } j \neq i \quad (3.28)$$

και έτσι, απο κατασκευή του, έχει διάσταση $n+2$. Συνεπώς χρησιμοποιώντας Center Manifold Theorem υπάρχει smooth manifold $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^{n+n+1}$ εφαπτόμενο στο \mathcal{N} στο στάσιμο σημείο P^* τοπικά αναλλοίωτο στις 'ροές' του (3.26).



Σχήμα 3.2: Οπτική αναπαράσταση του Center Manifold \mathcal{M} και του Center Subspace \mathcal{N}

Το manifold \mathcal{M} είναι διάστασης $n+2$ και περιγράφεται τοπικά απο τις $n-1$ εξισώσεις

$$V_j = \varphi_j(u, V_i, \sigma) \quad j \neq i. \quad (3.29)$$

Ψάχνοντας λοιπόν $n+2$ ελεύθερες παραμέτρους παρατηρούμε αρχικά πως το τυχαίο σημείο του \mathcal{M} μπορεί να περιγραφεί ως

$$P = (u, v, \sigma) = (u, v_i r_i^*, \sigma).$$

Συνεπώς, επιτρέπεται να αντιμετωπίσουμε κάθε $(u, v_i, \sigma) \in \mathbb{R}^{n+2}$ ως συντεταγμένη του σημείου P . Για να συνεχίσουμε, σε αυτό το σημείο, κάνουμε την παρατήρηση ότι $v_i = \pm|v|$ είναι η προσημασμένη δύναμη του διανύσματος v και το σ είναι η ταχύτητα του κύματος. Ακολουθώντας το [5] έχουμε πως, το γενικό σημείο του center manifold \mathcal{M} γράφεται ως

$$P = (u, v, \sigma) = (u, v_i \tilde{r}_i, \sigma),$$

όπου πάλι το v_i είναι η προσημασμένη δύναμη του v και το \tilde{r}_i είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα παράλληλο στο v .

Γενικά δεν περιμένουμε το \tilde{r}_i να είναι σταθερό (αυτό συμβαίνει πάντα στη γραμμική περίπτωση), όμως εξαρτάται εξ' ολοκλήρου από τα u, v_i, σ . Επομένως, όλη η πληροφορία του center manifold είναι κωδικοποιημένη στην απεικόνιση $(u, v_i, \sigma) \mapsto \tilde{r}_i(u, v_i, \sigma)$.

Ειδικότερα, με τις μεθόδους που αναφέρονται στο [5] μπορούμε να κατασκευάσουμε n το πλήθος center manifolds $\mathcal{M}_i \subset \mathbb{R}^{n+n+1}$ καθώς και n το πλήθος συναρτήσεις $\tilde{r}_i = \tilde{r}_i(u, v_i, \sigma_i)$ έτσι ώστε

$$\begin{aligned} |\tilde{r}_i| &\equiv 1 \\ \mathcal{M}_i &= \{(u, v, \sigma_i); \quad v = v_i \tilde{r}_i(u, v_i, \sigma_i)\} \end{aligned}$$

για $(u, v_i, \sigma_i) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ στην περιοχή του $(u^*, 0, \lambda_i(u^*))$.

Επιπρόσθετα ισχύει η ισότητα

$$\tilde{r}_i(u, 0, \sigma_i) = r_i(u) \tag{3.30}$$

για κάθε u, σ_i .

Τέλος αναφέρουμε πως οι τροχιές στο center manifold ικανοποιούν την σχέση

$$-\sigma_i v_{i,x} + \left(\tilde{\lambda}_i v_i \right)_x - v_{i,xx} = 0$$

Όπου $\tilde{\lambda}_i$ είναι οι γενικευμένες ιδιοτιμές του $A(u)$ που ορίζονται από το εσωτερικό γινόμενο

$$\tilde{\lambda}_i \doteq \langle \tilde{r}_i, A(u) \tilde{r}_i \rangle \tag{3.31}$$

και ικανοποιούν την ταυτότητα³

$$\left(A(u) - \tilde{\lambda}_i \right) \tilde{r}_i = v_i \left(\tilde{r}_{i,u} \tilde{r}_i + \tilde{r}_{i,v} \left(\tilde{\lambda}_i - \sigma_i \right) \right) \tag{3.32}$$

που είναι το ανάλογο της συνηθισμένης

$$\left(A(u) - \lambda_i \right) r_i = 0. \tag{3.33}$$

³ $\tilde{r}_{i,u} \doteq \frac{\partial}{\partial u} \tilde{r}_i$, $\tilde{r}_{i,v} \doteq \frac{\partial}{\partial v_i} \tilde{r}_i$, $\tilde{r}_{i,\sigma} \doteq \frac{\partial}{\partial \sigma_i} \tilde{r}_i$

3.2.2 Wave Decomposition

Έστω $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ μια ομαλή συνάρτηση με μικρό total variation. Σε κάθε σημείο x ψάχνουμε ένα decomposition του gradient u_x της μορφής

$$u_x(x) = \sum_i v_i \tilde{r}_i = \sum_i U'_i(x), \quad (3.34)$$

όπου $\tilde{r}_i = \tilde{r}_i(u, v_i, \sigma_i)$ είναι τα διανύσματα που ορίζουν το center manifold \mathcal{M} . Για να ορίσουμε μονοσήμαντα τα \tilde{r}_i πρέπει να πρώτα να χαρακτηρίσουμε τα v_i και σ_i συναρτήσει των u, u_x, u_{xx} .

Αρχικά, αναλογιζόμαστε την περίπτωση όπου η u είναι το προφίλ ενός viscous traveling wave (της j -στης οικογένειας που βρίσκεται στο center manifold \mathcal{M}_j). Σε αυτή την περίπτωση, το decomposition μας περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο, το

$$u_x = v_j \tilde{r}_j(u, v_j, \sigma_j), \quad (3.35)$$

όπου για να μαντέψουμε τα v_j, σ_j χρησιμοποιούμε ότι $|\tilde{r}_j| = 1$ και επομένως $v_j = \pm |u_x|$. Επίσης, ισχύει πως τα u_x και u_t είναι παράλληλα⁴, άρα μπορούμε να γράψουμε

$$u_t = u_{xx} - A(u)u_x = \omega_j \tilde{r}_j(u, v_j, \sigma_j) \quad (3.36)$$

για κάποιο $\omega_j \in \mathbb{R}$ καταλήγοντας στο ότι $\sigma_j = \frac{-\omega_j}{v_j}$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, είναι λογικό να ορίσουμε

$$u_t \doteq u_{xx} - A(u)u_x \quad (3.37)$$

και να ψάξουμε τα βαθμωτά v_i, ω_i έτσι ώστε

$$\begin{cases} u_x = \sum_i v_i \tilde{r}_i(u, v_i, \sigma_i), \\ u_t = \sum_i \omega_i \tilde{r}_i(u, v_i, \sigma_i), \end{cases} \quad \sigma_i = -\frac{\omega_i}{v_i}. \quad (3.38)$$

Το πρόβλημα με αυτό είναι πως τα \tilde{r}_i ορίζονται μόνο για σ_i κοντά στην i -χαρακτηριστική ταχύτητα $\lambda_i^* \doteq \lambda_i(u^*)$ και για $u_x \approx 0$ έχουμε $v_i \approx 0$ συνεπώς $\left| \frac{-\omega_j}{v_j} \right|$ μπορεί να γίνει αυθαίρετα μεγάλο.

Για να υπερβούμε αυτό το εμπόδιο εισάγουμε την cutoff function $\theta : \mathbb{R} \rightarrow [-2\delta_1, 2\delta_2]$ με

$$\theta(s) = \begin{cases} s & \text{if } |s| \leq \delta_1 \\ 0 & \text{if } |s| \geq 3\delta_1 \end{cases} \quad |\theta'| \leq 1, \quad |\theta''| \leq 4/\delta_1 \quad (3.39)$$

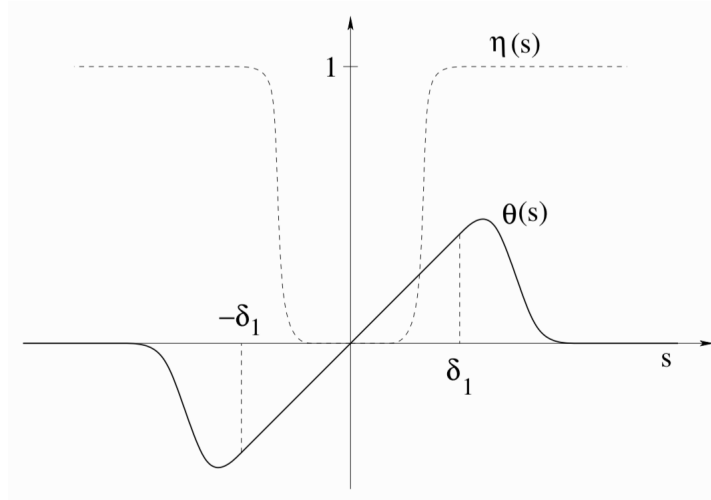
που μας επιτρέπει να γράψουμε την (3.38) ως

$$\begin{cases} u_x = \sum_i v_i \tilde{r}_i(u, v_i, \sigma_i) \\ u_t = \sum_i (\omega_i - \lambda_i^* v_i) \tilde{r}_i(u, v_i, \sigma_i), \end{cases} \quad (3.40)$$

⁴ $u_t = -\sigma_j u_x$

όπου

$$u_t = u_{xx} - A(u)u_x, \quad \sigma_i = \lambda_i^* - \theta \left(\frac{w_i}{v_i} \right). \quad (3.41)$$



Σχήμα 3.3

Αν και το σ_i δεν ορίζεται για $v_i = w_i = 0$, γνωρίζουμε από την (3.30) πως $\tilde{r}_i = r_i(u)$ (ανεξάρτητο του σ_i) οπότε σε κάθε περίπτωση οι παραπάνω εξισώσεις έχουν νόημα και στέκονται.

Για τον μονοσήμαντο ορισμό των v_i, w_i στις (3.40)-(3.41) επικαλούμαστε το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 3.2. Για $|u - u^*|, |u_x|, |u_{xx}|$ αρκούντως μικρά, το σύστημα $2n$ εξισώσεων (3.40) έχει μοναδική λύση $(v, w) = (v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n)$. Η απεικόνιση $(u, u_x, u_{xx}) \mapsto (v, w)$ είναι ομαλή εκτός των n manifolds $\mathcal{Z}_i \doteq \{(v, w); v_i = w_i = 0\}$ και ειδικότερα είναι $C^{1,1}$ ⁵ στην περιοχή του σημείου $(u^*, 0, 0)$.

Σημείωση 3.9. Έπειτα από κάποιον γραμμικό μετασχηματισμό, μπορούμε να υποθέσουμε πως ο $A(u^*)$ είναι διαγώνιος. Ως συνέπεια, τα $r_1^*, r_2^*, \dots, r_n^*$ σχηματίζουν ορθοκανονική βάση

$$\langle r_i^*, r_j^* \rangle = \delta_{ij}$$

και επίσης ισχύει

$$|\tilde{r}_i(u, v_i, \sigma_i) - r_i^*| = \mathcal{O}(1) \cdot (|u - u^*| + |v_i|).$$

Λόγω της (3.30) μπορούμε να συμπεράνουμε ότι

$$\langle \tilde{r}_i, A(u)\tilde{r}_j \rangle = \mathcal{O}(1) \cdot \delta_0 \quad j \neq i. \quad (3.42)$$

⁵Συνεχώς παραγωγίσιμη με Lipschitz συνεχείς παραγώγους

Από τα παραπάνω εξάγουμε τα φράγματα

$$|u_x| \leq \sum_i |v_i| \leq 2\sqrt{n} |u_x| \quad (3.43)$$

για το decomposition (3.24).

Φράγματα για τις Παραγώγους Κατά Συντεταγμένη

Εδώ, βασιζόμενοι στο Πρόσμμα 3.1 αναφέρουμε ορισμένες εκτιμήσεις για τα v_i, w_i .

Λήμμα 3.3. Με τις ίδιες υποθέσεις όπως στη Πρόταση 3.3 και υποθέτοντας επιπλέον ότι

$$\|u_x(t)\|_{\mathbf{L}^1} \leq \delta_0$$

για $t \in [0, T]$, έχουμε ότι για $t \in [\hat{t}, T]$ το decomposition (3.40) είναι καλώς ορισμένο και ισχύουν οι παρακάτω εκτιμήσεις:

$$\|v_i(t)\|_{\mathbf{L}^1}, \|w_i(t)\|_{\mathbf{L}^1} = \mathcal{O}(1) \cdot \delta_0, \quad (3.44)$$

$$\|v_i(t)\|_{\mathbf{L}^\infty}, \|w_i(t)\|_{\mathbf{L}^\infty}, \|v_{i,x}(t)\|_{\mathbf{L}^1}, \|w_{i,x}(t)\|_{\mathbf{L}^1} = \mathcal{O}(1) \cdot \delta_0^2, \quad (3.45)$$

$$\|v_{i,x}(t)\|_{\mathbf{L}^\infty}, \|w_{i,x}(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} = \mathcal{O}(1) \cdot \delta_0^3 \quad (3.46)$$

Πρόσμμα 3.3. Με τις ίδιες υποθέσεις όπως στο Λήμμα 3.2, έχουμε

$$\|\tilde{r}_{i,x}(t)\|_{\mathbf{L}^1}, \|\tilde{\lambda}_{i,x}(t)\|_{\mathbf{L}^1} = \mathcal{O}(1) \cdot \delta_0, \quad (3.47)$$

$$\|\tilde{r}_{i,x}(t)\|_{\mathbf{L}^\infty}, \|\tilde{\lambda}_{i,x}(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} = \mathcal{O}(1) \cdot \delta_0^2 \quad (3.48)$$

Τέλος, αναφέρουμε μία σχέση που συνδέει γενικώς τα v_i και w_i λαμβάνοντας πάντα υπ'οψιν πως

$$0 < \delta_0 \ll \delta_1 \ll 1.$$

Λήμμα 3.4. Έστω ότι $|w_i/v_i| \geq 3\delta_1/5$. Τότε ισχύει

$$|w_i| \leq 2|v_{i,x}| + \mathcal{O}(1) \cdot \delta_0 \sum_{j \neq i} |v_j|, \quad |v_i| \leq \frac{5}{2\delta_1} |v_{i,x}| + \mathcal{O}(1) \cdot \delta_0 \sum_{j \neq i} |v_j|. \quad (3.49)$$

Απο την άλλη, για $|w_i/v_i| \leq 4\delta_1/5$ ισχύει

$$|v_{i,x}| \leq \delta_1 |v_i| + \mathcal{O}(1) \cdot \delta_0 \sum_{j \neq i} |v_j|. \quad (3.50)$$

Κεφάλαιο 4

Αλληλεπίδραση των Viscous Waves

Έστω $u \doteq u(t, x)$ η λύση του συστήματος

$$u_t + A(u)u_x = u_{xx}. \quad (4.1)$$

Βάσει της ανάλυσης του προηγούμενου κεφαλαίου, έχουμε το decomposition του u_x σε viscous traveling waves. Επίσης, υποθέτοντας ότι τα u_x, u_{xx} παραμένουν αρκούντως μικρά, τα components v_i, w_i είναι καλώς ορισμένα και για αυτά ισχύει

$$\begin{cases} v_{i,t} + (\tilde{\lambda}_i v_i)_x - v_{i,xx} = \varphi_i \\ w_{i,t} + (\tilde{\lambda}_i w_i)_x - w_{i,xx} = \psi_i \end{cases} \quad (4.2)$$

με $\tilde{\lambda}_i \doteq \langle \tilde{r}_i, A(u)\tilde{r}_i \rangle$ και φ_i, ψ_i (source terms) που υπολογίζονται συναρτήσει των u, v, w και των πρώτων παραγώγων τους.

Αρχικά, θα στρέψουμε την προσοχή μας στα φ_i και ψ_i και θα παραθέσουμε τον τρόπο με τον οποίο εξάγουμε φράγματα για αυτά. Η σημασία τους θα αναδειχθεί ιδιαίτερα στη συνέχεια, όταν με την χρήση τους θα εξασφαλίσουμε φράγματα για τις αλληλεπιδράσεις των viscous traveling waves. Επιπροσθέτως, οι εκτιμήσεις αυτές θα μας επιτρέψουν να επεκτείνουμε τις τοπικές λύσεις του (2.1) επ' άριστον.

Παραγωγίζοντας την (4.1) έχουμε ότι το $(u_x, u_t) = \Lambda(u, v, w)$ ικανοποιεί την εξελικτική εξίσωση

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_x \\ u_t \end{pmatrix}_t + \left(\begin{bmatrix} A(u) & 0 \\ 0 & A(u) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_t \end{pmatrix} \right)_x - \begin{pmatrix} u_x \\ u_t \end{pmatrix}_{xx} \\ = \begin{pmatrix} 0 \\ (u_x \bullet A(u)) u_t - (u_t \bullet A(u)) u_x \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Παρατηρούμε πως η παραπάνω εξίσωση, αν $A(u) = Df(u)$, έχει μηδενικό το δεύτερο μέλος αφού

$$(u_x \bullet A(u)) u_t = (u_t \bullet A(u)) u_x = D^2 f(u) (u_x \otimes u_t).$$

Χάρην συμβολισμού, ορίζουμε

$$z \doteq (v, w), \quad \tilde{\lambda} \doteq \begin{pmatrix} \text{diag}(\tilde{\lambda}_i) & 0 \\ 0 & \text{diag}(\tilde{\lambda}_i) \end{pmatrix}.$$

Έτσι, η (4.3) γίνεται

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Lambda}{\partial u} u_t + \frac{\partial \Lambda}{\partial z} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}_t + \left(\begin{bmatrix} A(u) & 0 \\ 0 & A(u) \end{bmatrix} \Lambda \right)_x - \frac{\partial \Lambda}{\partial z} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}_{xx} - \frac{\partial \Lambda}{\partial u} u_{xx} \\ & - \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial u^2} (u_x \otimes u_x) - \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial z^2} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ w_x \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} v_x \\ w_x \end{pmatrix} - 2 \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial u \partial z} u_x \otimes \begin{pmatrix} v_x \\ w_x \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} 0 \\ (u_x \bullet A(u)) u_t - (u_t \bullet A(u)) u_x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Κάνοντας κάποιες τροποποιήσεις, έχουμε:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Lambda}{\partial z} \left[\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}_t + \left(\tilde{\lambda} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \right)_x - \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}_{xx} \right] \\ & = \frac{\partial \Lambda}{\partial z} \left(\tilde{\lambda} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \right)_x - \left(\begin{bmatrix} A(u) & 0 \\ 0 & A(u) \end{bmatrix} \Lambda \right)_x \\ & + \frac{\partial \Lambda}{\partial u} A(u) u_x + \begin{pmatrix} 0 \\ (u_x \bullet A(u)) u_t - (u_t \bullet A(u)) u_x \end{pmatrix} \tag{4.4} \\ & + \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial u^2} (u_x \otimes u_x) + \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial z^2} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ w_x \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} v_x \\ w_x \end{pmatrix} + 2 \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial u \partial z} u_x \otimes \begin{pmatrix} v_x \\ w_x \end{pmatrix} \\ & \doteq E \end{aligned}$$

Αν θέλαμε εκφράσεις για τα φ_i, ψ_i , πολλαπλασιάζοντας την (4.4) με τον αντίστροφο πίνακα του $\partial \Lambda / \partial z$ θα τις αποκτούσαμε. Μας αρκούν ωστόσο απλώς φράγματα για τα φ_i, ψ_i . Λόγω του ότι ο $(\partial \Lambda / \partial z)^{-1}$ αποδεικνύεται πως είναι ομοιόμορφα φραγμένος, έχουμε:

$$\varphi_i = \mathcal{O}(1) \cdot |E|, \quad \psi_i = \mathcal{O}(1) \cdot |E|, \quad i = 1, \dots, n. \tag{4.5}$$

Ειδικότερα, στο [11] (σελ. 250-260) αποδεικνύεται το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 4.5. Για τα source terms της (4.2) ισχύουν τα παρακάτω φράγματα:

$$\begin{aligned} \varphi_i, \psi_i &= \mathcal{O}(1) \cdot \sum_j (|v_{j,x}| + |w_{j,x}|) \cdot |w_j - \theta_j v_j| \quad \text{σφάλμα λόγο της cut-off} \\ & + \mathcal{O}(1) \cdot \sum_j |v_{j,x} w_j - v_j w_{j,x}| \quad \text{αλλαγή ταχύτητας, γραμμικοί όροι} \\ & + \mathcal{O}(1) \cdot \sum_j \left| v_j \left(\frac{w_j}{v_j} \right)_x \right|^2 \cdot \chi_{\{|w_j/v_j| < 3\delta_1\}} \\ & \quad \text{αλλαγή ταχύτητας, δευτεροβάθμιοι όροι} \\ & + \mathcal{O}(1) \cdot \sum_{j \neq k} (|v_j v_k| + |v_{j,x} v_k| + |v_j w_k| + |v_{j,x} w_k| + |v_j w_{k,x}| + |w_j w_k|) \\ & \quad \text{αλληλεπίδραση κυμάτων διαφορετικών οικογενειών} \end{aligned} \tag{4.6}$$

Λίγα λόγια για τα δύο τελευταία αθροίσματα. Σε κάποιο x , μπορεί να συναντηθούν κύματα

απο τις οικογένειες j και k , για $j \neq k$. Η αλληλεπίδρασή τους υπολογίζεται μέσω των τετραγωνικών όρων και η δύναμή τους απο τα μέτρα των γινομένων των διαφορετικών components $|v_j v_k|, |v_j w_k|, |v_{j,x} w_k|, \dots$

4.1 Εγκάρσιες Αλληλεπιδράσεις κυμάτων

Σε αυτή την υποενότητα θα εξάγουμε φράγματα για τις αλληλεπιδράσεις των διαφορετικών οικογενειών κυμάτων. Με άλλα λόγια, θα φράξουμε την L^1 νόρμα του τελευταίου αθροίσματος του λήμματος 4.5. Ειδικότερα, θα δείξουμε ότι για

$$\int_{\hat{t}}^T \int \{|\varphi_i(t, x)| + |\psi_i(t, x)|\} dx dt \leq \delta_0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.7)$$

έχουμε το αρκετά ακριέστερο φράγμα

$$\int_{\hat{t}}^T \int_{j \neq k} (|v_j v_k| + |v_{j,x} v_k| + |v_j w_k| + |v_{j,x} w_k| + |v_j w_{k,x}| + |w_j w_k|) dx dt = \mathcal{O}(1) \cdot \delta_0^2. \quad (4.8)$$

Αρχικά θα εδραιώσουμε φράγματα για παραβολικές εξισώσεις με διαφορετικά ρεύματα (drifts).

Λήμμα 4.6. Έστω $z, z^\#$ οι αντίστοιχες λύσεις των

$$\begin{cases} z_t + (\lambda(t, x)z)_x - z_{xx} = \varphi(t, x) \\ z^\#_t + (\lambda^\#(t, x)z^\#)_x - z^\#_{xx} = \varphi^\#(t, x) \end{cases} \quad (4.9)$$

για $t \in [0, T]$ υπό την υπόθεση

$$\inf_{t,x} \lambda^\#(t, x) - \sup_{t,x} \lambda(t, x) \geq c > 0. \quad (4.10)$$

Τότε ισχύει

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int |z(t, x)| |z^\#(t, x)| dx dt \leq \\ & \frac{1}{c} \left(\int |z(0, x)| dx + \int_0^T \int |\varphi(t, x)| dx dt \right) \left(\int |z^\#(0, x)| dx + \int_0^T \int |\varphi^\#(t, x)| dx dt \right). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Απόδειξη. Έστω η ομογενής περίπτωση όπου $\varphi, \varphi^\# = 0$. Ορίζουμε το Δυναμικό Αλληλεπιδράσεων (interaction potential) ως

$$Q(z, z^\#) \doteq \iint K(x-y) |z(x)| |z^\#(y)| dx dy \quad (4.12)$$

με

$$K(s) \doteq \begin{cases} 1/c & \text{αν } s \geq 0, \\ 1/c \cdot e^{cs/2} & \text{αν } s < 0. \end{cases} \quad (4.13)$$

Παρατηρούμε πως η $cK - K''$ είναι η *Dirac* στο 0 (όπου οι παράγωγοι υπολογίζονται με την έννοια των κατανομών).

Συνεπώς, έχουμε τα ακόλουθα:

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dt} Q(z(t), z^\#(t)) \\
 &= \frac{d}{dt} \iint K(x-y) |z(x)| |z^\#(y)| dx dy \\
 &= \iint K(x-y) \left\{ (z_{xx} - (\lambda z)_x) \operatorname{sgn} z(x) |z^\#(y)| \right. \\
 &\quad \left. + |z(x)| \left(z_{yy}^\# - (\lambda^\# z^\#)_y \right) \operatorname{sgn} z^\#(y) \right\} dx dy \\
 &= \iint K'(x-y) \left\{ \lambda |z(x)| |z^\#(y)| - \lambda^\# |z(x)| |z^\#(y)| \right\} dx dy \\
 &\quad + \iint K''(x-y) \left\{ |z(x)| |z^\#(y)| + |z(x)| |z^\#(y)| \right\} dx dy \\
 &\leq - \iint (cK' - 2K'') |z(x)| |z^\#(y)| dx dy \\
 &= - \int |z(x)| |z^\#(x)| dx.
 \end{aligned}$$

Έτσι, καταλήγουμε στο

$$\int_0^T \int |z(t, x)| |z^\#(t, x)| dx dt \leq Q(z(0), z^\#(0)) \leq \frac{1}{c} \|z(0)\|_{\mathbf{L}^1} \|z^\#(0)\|_{\mathbf{L}^1}, \quad (4.14)$$

που αποδεικνύει το λήμμα για την ομογενή περίπτωση.

Για την γενική περίπτωση, έστω $\Gamma, \Gamma^\#$ οι συναρτήσεις Green για τα γραμμικά ομογενή συστήματα. Τότε οι γενικές λύσεις των (4.9) γράφονται ως

$$\begin{cases} z(t, x) = \int \Gamma(t, x, 0, y) z(0, y) dy + \int_0^t \int \Gamma(t, x, s, y) \varphi(s, y) dy ds \\ z^\#(t, x) = \int \Gamma^\#(t, x, 0, y) z^\#(0, y) dy + \int_0^t \int \Gamma^\#(t, x, s, y) \varphi^\#(s, y) dy ds. \end{cases} \quad (4.15)$$

Αντικαθιστώντας στην (4.14), έχουμε

$$\int_{\max\{s, s'\}}^T \int \Gamma(t, x, s, y) \cdot \Gamma^\#(t, x, s', y') dx dt \leq \frac{1}{c} \quad (4.16)$$

για κάθε (s, y) και (s', y') . Η (4.11) προκύπτει τώρα απο την (4.16) χάρη στην αναπαράσταση (4.15). \square

Το παραπάνω λήμμα μάς επιτρέπει να κοντρολάρουμε τους όρους $|v_j v_k|$, $|v_j w_k|$ και $|w_j w_k|$ της (4.8).

Για τους υπόλοιπους όρους (που περιέχουν παραγώγους του x) επικαλούμαστε το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 4.7. Έστω $z, z^\#$ οι λύσεις του (4.9) έτσι ώστε η (4.10) να ισχύει ταυτόχρονα με τις

$$\int_0^T \int |\varphi(t, x)| dx dt \leq \delta_0, \quad \int_0^T \int |\varphi^\#(t, x)| dx dt \leq \delta_0 \quad (4.17)$$

$$\|z(t)\|_{\mathbf{L}^1}, \|z^\#(t)\|_{\mathbf{L}^1} \leq \delta_0, \quad \|z_x(t)\|_{\mathbf{L}^1}, \|z^\#(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C^* \delta_0^2 \quad (4.18)$$

$$\|\lambda_x(t)\|_{\mathbf{L}^\infty}, \|\lambda_x(t)\|_{\mathbf{L}^1} \leq C^* \delta_0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \lambda(t, x) = 0 \quad (4.19)$$

για κάθε $t \in [0, T]$. Τότε έχουμε

$$\int_0^T \int |z_x(t, x)| |z^\#(t, x)| dx dt = \mathcal{O}(1) \cdot \delta_0^2. \quad (4.20)$$

Σημείωση 4.10. Τώρα, για $z \doteq v_j, z^\# \doteq v_k, \lambda \doteq \tilde{\lambda}_j$ και $\lambda^\# \doteq \tilde{\lambda}_k$ από το Λήμμα 4.6 έχουμε τα απαιτούμενα φράγματα για την (4.8) για τους όρους της μορφής $|v_j v_k|$ και από 4.7 για τους όρους της μορφής $|v_{j,x} v_k|$. Την υπόθεση $\lambda(t, -\infty) = 0$ την λαμβάνουμε με την αλλαγή μεταβλητής $x' \doteq x - \lambda_j^* t$.

4.2 Κύματα ίδιων οικογενειών

Εδώ, με τις ίδιες υποθέσεις όπως στην προηγούμενη ενότητα, θα εξάγουμε τα φράγματα

$$\int_{\hat{t}}^T \int |w_{i,x} v_i - w_i v_{i,x}| dx dt = \mathcal{O}(1) \cdot \delta_0^2, \quad (4.21)$$

$$\int_{\hat{t}}^T \int_{|w_i/v_i| < 3\delta_1} |v_i|^2 \left| \left(\frac{w_i}{v_i} \right)_x \right|^2 dx dt = \mathcal{O}(1) \cdot \delta_0^3 \quad (4.22)$$

για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$.

Για να το καταφέρουμε αυτό θα χρησιμοποιήσουμε δύο συναρτησιακά για να αποφύγουμε διπλομετρήσεις που μπορεί να προκύψουν από την δημιουργία shocks. Η βασική ιδέα που θα εκμεταλλευτούμε ακολουθεί.

Έστω $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ μία παραμετροποιημένη καμπύλη επαρκούς ομαλότητας. Το μήκος της γ δίνεται από την

$$\mathcal{L}(\gamma) \doteq \int |\gamma_x(x)| dx.$$

Ορίζουμε το εμβαδόν της κυρτής θήκης της γ ως

$$\mathcal{A}(\gamma) \doteq \frac{1}{2} \iint_{x < y} |\gamma_x(x) \wedge \gamma_x(y)| dx dy.$$

Έστω τώρα $\gamma = \gamma(t, x)$ είναι μια επίπεδη καμπύλη που ικανοποιεί την εξίσωση

$$\gamma_t + \lambda \gamma_x = \gamma_{xx} \quad (4.23)$$

με λ αρκούτως ομαλό. Λόγω διάχυσης, τα $\mathcal{L}(\gamma(t))$ και $\mathcal{A}(\gamma(t))$ φθίνουν με τον χρόνο. Στη γενίκευση αυτής της παρατήρησης βασιζόμαστε για την απόδειξη των εκτιμήσεων (4.21)-(4.22).

Έστω v, w πραγματικές συναρτήσεις που ικανοποιούν την

$$\begin{aligned} v_t + (\lambda v)_x - v_{xx} &= \varphi \\ w_t + (\lambda w)_x - w_{xx} &= \psi \end{aligned} \quad (4.24)$$

Ορίζουμε γ να είναι

$$\gamma(t, x) \doteq \left(\int_{-\infty}^x v(t, y) dy, \int_{-\infty}^x w(t, y) dy \right) \quad (4.25)$$

και ολοκληρώνοντας ως προς x την (4.23) η (4.24) μετατρέπεται στην ισοδύναμη

$$\gamma_t + \lambda \gamma_x - \gamma_{xx} = \Phi(t, x) \doteq \left(\int_{-\infty}^x \varphi(t, y) dy, \int_{-\infty}^x \psi(t, y) dy \right). \quad (4.26)$$

Τώρα, για δοσμένο t ορίζουμε το **συναρτησιακό μήκος**

$$\mathcal{L}(t) = \mathcal{L}(\gamma(t)) = \int \sqrt{v^2(t, x) + w^2(t, x)} dx \quad (4.27)$$

και το **συναρτησιακό εμβαδού**

$$\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}(\gamma(t)) = \frac{1}{2} \iint_{x < y} |v(t, x)w(t, y) - v(t, y)w(t, x)| dx dy \quad (4.28)$$

για τα οποία ισχύουν τα παρακάτω.

Λήμμα 4.8. Έστω v, w οι λύσεις του συστήματος (4.2) για $t \in [0, T]$. Για κάθε t υποθέτουμε ότι οι $x \mapsto v(t, x), x \mapsto w(t, x)$ και $x \mapsto \lambda(t, x)$ είναι $C^{1,1}$. Τότε, για το **συναρτησιακό εμβαδού** έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{A}(t) &\leq - \int |v_x(t, x)w(t, x) - v(t, x)w_x(t, x)| dx \\ &\quad + \|v(t)\|_{L^1} \|\psi(t)\|_{L^1} + \|w(t)\|_{L^1} \|\varphi(t)\|_{L^1} \end{aligned} \quad (4.29)$$

και, όσο $\gamma_x(t, x) \neq 0$, για το **συναρτησιακό μήκος** έχουμε

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) \leq - \frac{1}{(1 + 9\delta_1^2)^{3/2}} \int_{|w/v| \leq 3\delta_1} |v| \left| \left(\frac{w}{v} \right)_x \right|^2 dx + \|\varphi(t)\|_{L^1} + \|\psi(t)\|_{L^1} \quad (4.30)$$

Σημείωση 4.11. Έστω $u(t, x)$ λύση της

$$u_t + (f(u))_x - u_{xx} = 0$$

και έστω $\gamma \doteq (u, f(u) - u_x)$. Για $\lambda \doteq f'$, τα $v \doteq u_x, w \doteq -u_t$ εξελίσσονται βάσει της (4.23). Αν ορίσουμε ταχύτητα $s(x) \doteq -u_t(x)/u_x(x)$, έχουμε τα ακόλουθα για το $\mathcal{A}(\gamma)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\gamma) &= \frac{1}{2} \iint_{x < y} |u_x(x)u_t(y) - u_t(x)u_x(y)| dx dy \\
&= \frac{1}{2} \iint_{x < y} |u_x(x)dx| \cdot |u_x(y)dy| \cdot |s(x) - s(y)| \\
&= \frac{1}{2} \iint_{x < y} [\text{το κύμα στο } x] \times [\text{το κύμα στο } y] \times [\text{διαφορά στις ταχύτητες}],
\end{aligned}$$

που δείχνει πως το \mathcal{A} μπορεί να θεωρηθεί ως *interaction potential* για κύματα ίδιων οικογενειών το οποίο βρίσκεται σε συμφωνία με το συναρτησιακό αλληλεπιδράσεων που εισήγαγε ο Liu στο [14] για γενικότερα υπερβολικά συστήματα.

Σημείωση 4.12. Ισως 6.8 απο [5].

Συνεχίζοντας λοιπόν την απόδειξη των (4.21)-(4.22), για $v \doteq v_i, w \doteq w_i, \lambda \doteq \lambda_i \psi \doteq \psi_i$ και για κάθε $i = 1, \dots, n$, θεωρώντας τα \mathcal{L}_i και \mathcal{A}_i απο το Λήμμα 3.3 ισχύει

$$\mathcal{A}_i(t) \leq \|v_i(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} \cdot \|w_i(t)\|_{\mathbf{L}^1} = \mathcal{O}(1) \cdot \delta_0^3 \quad (4.31)$$

και

$$\mathcal{L}_i(t) \leq \|v_i(t)\|_{\mathbf{L}^1} + \|w_i(t)\|_{\mathbf{L}^1} = \mathcal{O}(1) \cdot \delta_0. \quad (4.32)$$

Τώρα, απο την (4.29) έχουμε

$$\begin{aligned}
&\int_{\hat{t}}^T \int |w_{i,x}v_i - w_iv_{i,x}| dx dt \\
&\leq \int_{\hat{t}}^T \left| \frac{d}{dt} \mathcal{A}_i(t) \right| dt + \int_{\hat{t}}^T (\|v_i(t)\|_{L^1} \|\psi_i(t)\|_{L^1} + \|w_i(t)\|_{L^1} \|\varphi_i(t)\|_{L^1}) dt \\
&\leq \mathcal{A}_i(\hat{t}) + \sup_{t \in [\hat{t}, T]} (\|v_i(t)\|_{\mathbf{L}^1} + \|w_i(t)\|_{\mathbf{L}^1}) \cdot \int_{\hat{t}}^T \int (|\varphi_i(t, x)| + |\psi_i(t, x)|) dx dt \\
&= \mathcal{O}(1) \cdot \delta_0^2,
\end{aligned} \quad (4.33)$$

που αποδεικνύει την (4.21). Για την απόδειξη της (4.22) παρατηρούμε πρώτα πως μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα (t, x) σημεία για τα οποία $v_{i,x}(t, x) = w_{i,x}(t, x) = 0$ είναι αριθμησίμα (διότι σε κάθε άλλη περίπτωση βλέπουμε τις $v_{i,x}, w_{i,x}$ ως όρια συναρτήσεων που έχουν αριθμησίμα μηδενικά και οι παρακάτω υπολογισμοί στέκουν). Έτσι, για σχεδόν όλα τα $t \in [\hat{t}, T]$ η (4.30) ισχύει

$$\begin{aligned}
&\int_{\hat{t}}^T \int_{|w_i/v_i| < 3\delta_1} |v_i| \left| \left(\frac{w_i}{v_i} \right)_x \right|^2 dx dt \\
&\leq \int_{\hat{t}}^T \left| \frac{d}{dt} \mathcal{L}_i(t) \right| dt + \int_{\hat{t}}^T (\|\varphi_i(t)\|_{L^1} + \|\psi_i(t)\|_{L^1}) dt \\
&\leq \mathcal{L}_i(\hat{t}) + \int_{\hat{t}}^T \int (|\varphi_i(t, x)| + |\psi_i(t, x)|) dx dt \\
&= \mathcal{O}(1) \cdot \delta_0.
\end{aligned} \quad (4.34)$$

Δεδομένου ότι $\|v_i(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} = \mathcal{O}(1) \cdot \delta_0^2$, έχουμε και την (4.22).

4.3 Φράγματα για την συνάρτηση αποκοπής

Εδώ επιστρέφουμε στην συνάρτηση αποκοπής θ και θα εξάγουμε φράγματα για τα sources όταν τα ελέγχουμε μέσω της θ . Ειδικότερα, θα δείξουμε ότι η ανισότητα

$$\int_{\hat{t}}^T \int (|v_{i,x}| + |w_{i,x}|) |w_i - \theta_i v_i| dx dt = \mathcal{O}(1) \cdot \delta_0^2 \quad (4.35)$$

στέκει. Υπενθυμίζουμε ότι $\theta_i \doteq \theta(w_i/v_i)$ και η θ δίνεται απο την (3.39). Επίσης παρατηρούμε ότι η ολοκληρωτέα ποσότητα στην (4.35) είναι μη-μηδενική μόνο για $|w_i/v_i| > \delta_1$.

Έστω μια ακόμη ομαλή συνάρτηση αποκοπής $\eta : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ με

$$\eta(s) = \begin{cases} 0 & \text{if } |s| \leq 3\delta_1/5 \\ 1 & \text{if } |s| \geq 4\delta_1/5 \end{cases} \quad (4.36)$$

για την οποία επίσης απαιτούμε

$$|\eta'| \leq 21/\delta_1, \quad |\eta''| \leq 101/\delta_1^2.$$

Όπως και για την θ , θα γράφουμε η_i για $\eta(w_i/v_i)$.

Εξόρισμού της θ , για $|w_i/v_i| > \delta_1$ έχουμε πάντα το φράγμα

$$|w_i - \theta_i v_i| \leq |\eta_i w_i| \leq \eta_i \left(2|v_{i,x}| + \mathcal{O}(1) \cdot \delta_0 \sum_{j \neq i} |v_j| \right).$$

Βασιζόμενοι σε αυτό, έχουμε

$$\begin{aligned} & (|v_{i,x}| + |w_{i,x}|) \cdot |w_i - \theta_i v_i| \\ & \leq (|v_{i,x}| + |w_{i,x}|) \eta_i \left(2|v_{i,x}| + \mathcal{O}(1) \cdot \delta_0 \sum_{j \neq i} |v_j| \right) \\ & \leq 2\eta_i v_{i,x}^2 + 2\eta_i |v_{i,x} w_{i,x}| + \sum_{j \neq i} (|v_j v_{i,x}| + |v_j w_{i,x}|) \\ & \leq 3\eta_i v_{i,x}^2 + \eta_i w_{i,x}^2 + \sum_{j \neq i} (|v_j v_{i,x}| + |v_j w_{i,x}|), \end{aligned} \quad (4.37)$$

όπου για το τελευταίο άθροισμα έχουμε φράγμα απο (4.8). Συνεπώς, αρκεί να εκτιμήσουμε τα $v_{i,x}^2$ και $w_{i,x}^2$ στην περιοχή που $\eta_i \neq 0$. Θα ασχοληθούμε μόνο με τον όρο $v_{i,x}^2$ μιας και ο άλλος εκτιμάται αναλόγως.

Επιστρέφουμε στην (4.2) την οποία πολλαπλασιάζουμε με $\eta_i v_i$ και ολοκληρώνουμε κατα μέρη. Αυτό μας δίνει

$$\begin{aligned}
\int \eta_i v_i \varphi_i dx &= \int \left\{ \eta_i v_i v_{i,t} + \eta_i v_i \left(\tilde{\lambda}_i v_i \right)_x - \eta_i v_i v_{i,xx} \right\} dx \\
&= \int \left\{ \eta_i (v_i^2/2)_t - \eta_i \tilde{\lambda}_i v_i v_{i,x} - \eta_{i,x} \tilde{\lambda}_i v_i^2 + \eta_i v_{i,x}^2 + \eta_{i,x} v_i v_{i,x} \right\} dx \\
&= \int \left\{ (\eta_i v_i^2/2)_t + \left(\tilde{\lambda}_i \eta_i \right)_x (v_i^2/2) - \left(\eta_{i,t} + 2\tilde{\lambda}_i \eta_{i,x} - \eta_{i,xx} \right) (v_i^2/2) \right. \\
&\quad \left. + \eta_i v_{i,x}^2 + 2\eta_{i,x} v_i v_{i,x} \right\} dx.
\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
\int \eta_i v_{i,x}^2 dx &= -\frac{d}{dt} \left[\int \eta_i v_i^2/2 dx \right] + \int \left(\eta_{i,t} + \tilde{\lambda}_i \eta_{i,x} - \eta_{i,xx} \right) (v_i^2/2) dx \\
&\quad - \int \tilde{\lambda}_{i,x} \eta_i (v_i^2/2) dx - 2 \int \eta_{i,x} v_i v_{i,x} dx + \int \eta_i v_i \varphi_i dx.
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Για το δεύτερο ολοκλήρωμα, μπορούμε να εξάγουμε

$$\begin{aligned}
&\eta_{i,t} + \tilde{\lambda}_i \eta_{i,x} - \eta_{i,xx} \\
&= \eta'_i \left(\frac{w_{i,t}}{v_i} - \frac{v_{i,t} w_i}{v_i^2} \right) + \tilde{\lambda}_i \eta'_i \left(\frac{w_{i,x}}{v_i} - \frac{v_{i,x} w_i}{v_i^2} \right) \\
&\quad - \eta''_i \left(\frac{w_i}{v_i} \right)_x - \eta'_i \left(\frac{w_{i,xx}}{v_i} - \frac{v_{i,xx} w_i}{v_i^2} - 2 \frac{v_{i,x} w_{i,x}}{v_i^2} + 2 \frac{v_{i,x}^2 w_i}{v_i^3} \right) \\
&= \left[\eta'_i \left(w_{i,t} + \left(\tilde{\lambda}_i w_i \right)_x - w_{i,xx} \right) / v_i - \eta'_i w_i \left(v_{i,t} + \left(\tilde{\lambda}_i v_i \right)_x - v_{i,xx} \right) / v_i^2 \right] \\
&\quad + 2v_{i,x} \eta'_i / v_i \cdot (w_i / v_i)_x - \eta''_i (w_i / v_i)_x^2 \\
&= \eta'_i \left(\frac{\psi_i}{v_i} - \frac{w_i \varphi_i}{v_i v_i} \right) + 2\eta'_i \frac{v_{i,x}}{v_i} \left(\frac{w_i}{v_i} \right)_x - \eta''_i \left(\frac{w_i}{v_i} \right)_x^2.
\end{aligned} \tag{4.39}$$

Αφου $\tilde{\lambda}_{i,x} = \left(\tilde{\lambda}_i - \lambda_i^* \right)_x$, ολοκληρώνοντας ξανά κατά μέρη (και με χρήση της (3.49)) παίρνουμε¹

$$\begin{aligned}
&\left| \int \tilde{\lambda}_{i,x} \eta_i (v_i^2/2) dx \right| \\
&= \left| \int \left(\tilde{\lambda}_i - \lambda_i^* \right) \left(\eta_{i,x} v_i^2/2 + \eta_i v_i v_{i,x} \right) dx \right| \\
&\leq \left\| \tilde{\lambda}_i - \lambda_i^* \right\|_{\mathbf{L}^\infty} \left\{ \frac{1}{2} \int |\eta_i| |w_{i,x} v_i - v_{i,x} w_i| dx + \frac{5}{2\delta_1} \int \eta_i v_{i,x}^2 dx \right. \\
&\quad \left. + \mathcal{O}(1) \cdot \delta_0 \int \sum_{j \neq i} |v_{i,x} v_j| dx \right\} \\
&\leq \int |w_{i,x} v_i - v_{i,x} w_i| dx + \frac{1}{2} \int \eta_i v_{i,x}^2 dx + \delta_0 \int \sum_{j \neq i} |v_{i,x} v_j| dx.
\end{aligned} \tag{4.40}$$

Εισάγοντας τις (4.39)-(4.40) στην (4.38), έχουμε

¹κάνοντας χρήση της εκτίμησης $\left| \tilde{\lambda}_i - \lambda_i^* \right| = \mathcal{O}(1) \cdot \delta_0 \ll \delta_1$.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \int \eta_i v_{i,x}^2 dx &\leq -\frac{d}{dt} \left[\int \frac{\eta_i v_i^2}{2} dx \right] + \frac{1}{2} \int |\eta_i'| (|v_i \psi_i| + |w_i \varphi_i|) dx \\
 &+ \int \left| \eta_i' v_i v_{i,x} \left(\frac{w_i}{v_i} \right)_x \right| dx + \frac{1}{2} \int \left| \eta_i'' v_i^2 \left(\frac{w_i}{v_i} \right)_x^2 \right| dx \\
 &+ \int |w_{i,x} v_i - w_i v_{i,x}| dx + \delta_0 \int \sum_{j \neq i} |v_{i,x} v_j| dx \\
 &+ 2 \int |\eta_{i,x} v_i v_{i,x}| dx + \int |v_i \varphi_i| dx.
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

Εξ ορισμού των η_i , έχουμε $|w_i/v_i| < \delta_1$ οπουδήποτε $\eta_i \neq 0$, έτσι η (3.50) του Λήμματος 3.4 στέχει. Κατά συνέπεια,

$$\begin{aligned}
 |\eta_{i,x} v_i v_{i,x}| &= \left| \eta_i' v_i v_{i,x} \left(\frac{w_i}{v_i} \right)_x \right| \\
 &\leq 2 \left| \delta_1 \eta_i' v_i^2 \left(\frac{w_i}{v_i} \right)_x \right| + \mathcal{O}(1) \cdot \delta_0 \sum_{j \neq i} \left| \eta_i' v_i v_j \left(\frac{w_i}{v_i} \right)_x \right| \\
 &\leq 2 |\delta_1 \eta_i'| |w_{i,x} v_i - w_i v_{i,x}| + \mathcal{O}(1) \cdot \delta_0 |\eta_i'| \sum_{j \neq i} \left(|v_j w_{i,x}| + |v_j v_{i,x}| \left| \frac{w_i}{v_i} \right| \right).
 \end{aligned} \tag{4.42}$$

Τώρα, μέσω του Λήμματος 3.3, των (4.7)-(4.8) και των (4.21)-(4.22), από την (4.41) καταλήγουμε

$$\begin{aligned}
 \int_{\hat{t}}^T \int \eta_i v_{i,x}^2 dx dt &\leq \int \eta_i v_i^2(\hat{t}, x) dx + \mathcal{O}(1) \cdot \int_{\hat{t}}^T \int (|v_i \psi_i| + |w_i \varphi_i|) dx dt \\
 &+ \mathcal{O}(1) \cdot \int_{\hat{t}}^T \int |w_{i,x} v_i - w_i v_{i,x}| dx dt \\
 &+ \mathcal{O}(1) \cdot \delta_0 \int_{\hat{t}}^T \int \sum_{j \neq i} (|v_j w_{i,x}| + |v_j v_{i,x}|) dx dt \\
 &+ \mathcal{O}(1) \cdot \int_{\hat{t}}^T \int_{|w_i/v_i| < \delta_1} |v_i (w_i/v_i)_x|^2 dx dt \\
 &+ 2\delta_0 \int_{\hat{t}}^T \int \sum_{j \neq i} |v_{i,x} v_j| dx dt + 2 \int_{\hat{t}}^T \int |v_i \varphi_i| dx dt \\
 &= \mathcal{O}(1) \cdot \delta_0^2.
 \end{aligned} \tag{4.43}$$

Με παρόμοια επιχειρήματα, καταλήγουμε στη σχέση

$$\int_{\hat{t}}^T \int \eta_i w_{i,x}^2 dx dt = \mathcal{O}(1) \cdot \delta_0^2. \tag{4.44}$$

4.4 Ολοκλήρωση της απόδειξης των BV εκτιμήσεων

Είμαστε πλέον σε θέση να ολοκληρώσουμε την απόδειξη των (a priori) BV φραγμάτων για το πρόβλημα Cauchy

$$u_t + A(u)u_x = u_{xx}, \quad u(0, x) = \bar{u}(x). \tag{4.45}$$

Υποθέτουμε ότι τα αρχικά δεδομένα $\bar{u} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ικανοποιούν τα ακόλουθα:

$$\text{Tot. Var.} \{ \bar{u} \} \leq \frac{\delta_0}{8\sqrt{n\kappa}}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \bar{u}(x) = u^*, \quad (4.46)$$

όπου κ η σταθερά² που εμφανίστηκε μέσω του πυρήνα Green G^* στη γραμμικοποιημένη εξίσωση (3.8).

Με χρήση της Πρότασης 3.3 έχουμε ύπαρξη της λύσης του προβλήματος Cauchy (4.45) για κάθε $t \in [0, \hat{t}]$ η οποία ικανοποιεί την σχέση

$$\|u_x(\hat{t})\|_{\mathbf{L}^1} \leq \frac{\delta_0}{4\sqrt{n}}. \quad (4.47)$$

Αυτή η λύση μπορεί να επεκταθεί για οποιονδήποτε χρόνο υπό την προϋπόθεση ότι η ολική κύμανση παραμένει αρκούντως μικρή. Πράγματι, από την έως τώρα ανάλυσή μας, για $t \geq \hat{t}$ μπορούμε να διασπάσουμε τα διανύσματα u_x, u_t με την βοήθεια της βάσης \tilde{r}_i (όπως στην (3.40)) έως κάποιον χρόνο T που θα δίνεται απο

$$T \doteq \sup \left\{ \tau; \quad \sum_i \int_{\hat{t}}^{\tau} \int |\varphi_i(t, x)| + |\psi_i(t, x)| dx dt \leq \frac{\delta_0}{2} \right\}. \quad (4.48)$$

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $T < \infty$ έτσι ώστε να επιτυγχάνεται το παραπάνω supremum. Από τις (3.43) και (4.47), για κάθε $t \in [\hat{t}, T]$ έχουμε

$$\begin{aligned} \|u_x(t)\|_{\mathbf{L}^1} &\leq \sum_i \|v_i(t)\|_{\mathbf{L}^1} \\ &\leq \sum_i \left(\|v_i(\hat{t})\|_{\mathbf{L}^1} + \int_{\hat{t}}^T \int |\varphi_i(t, x)| dx dt \right) \\ &\leq 2\sqrt{n} \|u_x(\hat{t})\|_{\mathbf{L}^1} + \frac{\delta_0}{2} \leq \delta_0. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Τότε, από το Λήμμα 4.5 και τα φράγματα (4.7), (4.21), (4.22) και (4.35) έχουμε

$$\sum_i \int_{\hat{t}}^T \int |\varphi_i(t, x)| + |\psi_i(t, x)| dx dt = \mathcal{O}(1) \cdot \delta_0^2 < \frac{\delta_0}{2}, \quad (4.50)$$

που είναι άτοπο με κατάλληλη επιλογή του δ_0 .

Τέλος, βάσει των παραπάνω έχουμε ότι η ολική κύμανση παραμένει μικρότερη του δ_0 για όλα τα $t \in [\hat{t}, +\infty]$. Με άλλα λόγια, η λύση u ορίζεται ολικά.

²Για την ακρίβεια, το κ εξαρτάται από τον πίνακα $A(u^*)$ αλλά, δεδομένης της υπόθεσης ότι η u^* βρίσκεται σε κάποιο συμπαγές υποσύνολο του \mathbb{R}^n , έχουμε ότι το κ είναι ομοιόμορφα φραγμένο και έτσι θα το αντιμετωπίσουμε ως σταθερά.

Κεφάλαιο 5

Ευστάθεια των Viscous Solutions και η Οριακή συμπεριφορά τους

5.1 Ευστάθεια

Για να δείξουμε την ευστάθεια κάθε BV λύσης με μικρή ολική κύμανση, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\|z(t, \cdot)\|_{\mathbf{L}^1} \leq L \|z(0, \cdot)\|_{\mathbf{L}^1} \quad (5.1)$$

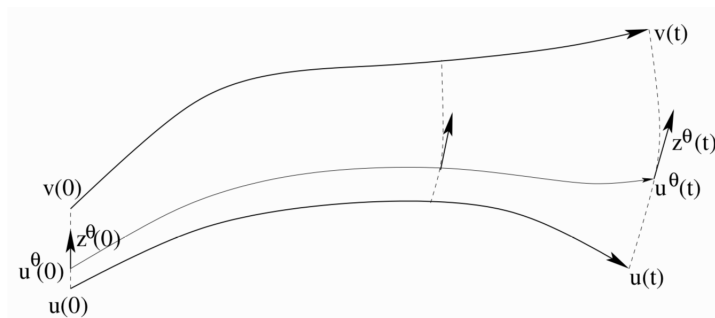
για τις πρωτοτάξιες διαταραχές.

Σημείωση 5.13. Ο παραπάνω ισχυρισμός στηρίζεται σε ένα επιχείρημα συνεχούς παραμόρφωσης (*homotopy argument*). Έστω u, v δύο λύσεις της 3.3*. Τότε μπορούμε να τις ενώσουμε με ένα συνεχές μονοπάτι λύσεων u^θ του οποίου οι αρχικές συνθήκες είναι

$$u^\theta(0, x) \doteq \theta u(0, x) + (1 - \theta)v(0, x).$$

Η απόσταση $\|u(t, \cdot) - v(t, \cdot)\|_{\mathbf{L}^1}$ για κάθε χρόνο $t > 0$ φράσσεται από το μήκος του μονοπατιού $\theta \mapsto u^\theta(t)$ το οποίο μπορούμε να υπολογίσουμε ολοκληρώνοντας την νόρμα του εφαπτόμενου διανύσματός του (Σχ. 5.1). Με άλλα λόγια, ισχύει

$$\|u(t, \cdot) - v(t, \cdot)\|_{\mathbf{L}^1} \leq \int_0^1 \left\| \frac{d}{d\theta} u^\theta(t) \right\|_{\mathbf{L}^1} d\theta \leq L \|u(0, \cdot) - v(0, \cdot)\|_{\mathbf{L}^1}. \quad (5.2)$$



Σχήμα 5.1: Οπτική αναπαράσταση του *homotopy argument*.

Παρατηρούμε καταρχάς πως αν η $u \doteq u(t, x)$ είναι μια λύση της (3.3*), τότε η γραμμικοποιημένη εξελικτική εξίσωση (3.5*) για πρωτοτάξιες διαταραχές μπορεί να γραφεί ως

$$z_t + (A(u)z)_x - z_{xx} = (u_x \bullet A(u))z_x - (z \bullet A(u))u_x. \quad (5.3)$$

Ορίζουμε $\Upsilon \doteq z_x - A(u)z$ και έτσι, παραγωγίζοντας την (3.3*), αποκτούμε την εξής εξελικτική εξίσωση για το Υ :

$$\begin{aligned} \Upsilon_t + (A(u)\Upsilon)_x - \Upsilon_{xx} &= [(u_x \bullet A(u))z - (z \bullet A(u))u_x]_x \\ &\quad - A(u)[(u_x \bullet A(u))z - (z \bullet A(u))u_x] \\ &\quad + (u_x \bullet A(u))\Upsilon - (u_t \bullet A(u))z. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Ακολουθώντας τα ίδια βήματα ανάλυσης έως τώρα θα οδηγούμασταν σε όρους z_i που δεν είναι κατ' ανάγκη ολοκληρώσιμοι. Αυτό το πρόβλημα το ξεπερνάμε διαλέγοντας μία διαφορετική βάση¹ των $\tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_n$ που θα βασίζεται τόσο στην u όσο και στην z . Αυτό μας οδηγεί στο decomposition

$$\begin{cases} z = \sum_i h_i \tilde{r}_i(u, v_i, \lambda_i^* - \theta(g_i/h_i)) \\ \Upsilon = \sum_i (g_i - \lambda_i^* h_i) \tilde{r}_i(u, v_i, \lambda_i^* - \theta(g_i/h_i)) \end{cases} \quad (5.5)$$

για το οποίο έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα (ανάλογο του Λήμματος 3.2).

Λήμμα 5.9. Έστω $|u - u^*|, |v|$ αρκούντως μικρά. Τότε, για όλα τα $z, \Upsilon \in \mathbb{R}^n$, το σύστημα των $2n$ εξισώσεων με αγνώστους τα h_i και g_i έχει μοναδική λύση. Η απεικόνιση $(z, \Upsilon) \mapsto (h, g)$ είναι Lipschitz κοντά στη λύση u , ομαλή σε n το πλήθος manifolds $\hat{\mathcal{N}}_i \doteq \{h_i = g_i = 0\}$.

Παραγωγίζοντας τώρα τις (5.3)-(5.4) και χρησιμοποιώντας την (5.5) για τα βαθμωτά h_i, g_i , έχουμε

$$\begin{cases} h_{i,t} + \left(\tilde{\lambda}_i h_i\right)_x - h_{i,xx} = \hat{\varphi}_i \\ g_{i,t} + \left(\tilde{\lambda}_i g_i\right)_x - g_{i,xx} = \hat{\psi}_i, \end{cases} \quad (5.6)$$

απο το οποίο μπορούμε να καταλήξουμε στην εκτίμηση:

$$\|z(t, \cdot)\|_{\mathbf{L}^1} \leq \sum_i \|h_i(t)\|_{\mathbf{L}^1} \leq \sum_i \left(\|h_i(\hat{t})\| + \int_{\hat{t}}^t \int |\hat{\varphi}_i(s, x)| dx ds \right). \quad (5.7)$$

Χρησιμοποιώντας τεχνικές παρόμοιες με αυτές του προηγούμενου κεφαλαίου για τις πηγές $\hat{\varphi}_i, \hat{\psi}_i$, καταλήγουμε στο φράγμα (5.1).

5.2 Χρονική εξάρτηση

Για να δείξουμε την συνέχεια ως προς τον χρόνο για το σύστημα με ιξώδες (3.3*) «νορμά-
ρουμε» την εξίσωση και χρησιμοποιούμε τα φράγματα της Πρότασης 3.2 και το Πόρισμα 3.1.

¹Την οποία χάριν συμβολισμού θα γράφουμε επίσης $\tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_n$.

Έτσι, έχουμε

$$\begin{aligned} \|u_t(t)\|_{\mathbf{L}^1} &\leq \mathcal{O}(1) \cdot \|u_x(t)\|_{\mathbf{L}^1} + \|u_{xx}(t)\|_{\mathbf{L}^1} \\ &= \mathcal{O}(1) \cdot \delta_0 + \mathcal{O}(1) \cdot \max \left\{ \frac{\delta_0}{\sqrt{t}}, \delta_0^2 \right\} \end{aligned}$$

Επιλέγοντας για $L' = \mathcal{O}(1) \cdot \text{Tot. Var.}\{u(0, \cdot)\}$, έχουμε

$$\|u(t) - u(s)\|_{\mathbf{L}^1} = \left\| \int_s^t u_\tau(\tau) d\tau \right\|_{\mathbf{L}^1} \leq \int_s^t \|u_\tau(\tau)\|_{\mathbf{L}^1} d\tau \leq L'(|t - s| + |\sqrt{t} - \sqrt{s}|) \quad (5.8)$$

5.3 Ταχύτητα διάδοσης

Ουσιαστική διαφορά μεταξύ ενός παραβολικού και ενός υπερβολικού προβλήματος είναι ότι στα παραβολικά προβλήματα κάθε διαταραχή διαδίδεται στιγμιαία σε ολόκληρο το προς μελέτη χωρίο, ενώ σε ένα υπερβολικό πρόβλημα κάθε διαταραχή έχει (πεπερασμένη) ταχύτητα διάδοσης. Δεδομένου ότι το πρόβλημά μας βρίσκεται στο μεταίχμιο αυτών των δύο καταστάσεων, θα δείξουμε πως το μέγεθος της διαταραχής που μεταφέρεται με μεγάλη ταχύτητα είναι πολύ μικρό.

Λήμμα 5.10. Έστω u, v λύσεις του (3.3*) με μικρές ολικές κυμάνσεις έτσι ώστε για τα αρχικά δεδομένα να ισχύει

$$u(0, x) = v(0, x) \quad (5.9)$$

για κάθε x σε κάποιο διάστημα $[a, b]$. Τότε υπάρχουν $\alpha, \beta > 0$ τέτοια ώστε

$$|u(t, x) - v(t, x)| \leq \|u(0) - v(0)\|_{\mathbf{L}^\infty} \cdot \left(\alpha e^{\beta t - (x-a)} + \alpha e^{\beta t + (x-b)} \right). \quad (5.10)$$

5.4 Το όριο όταν εξαλείφουμε το ιξώδες

Μέχρι στιγμής, όλη η ανάλυσή μας αφορούσε το παραβολικό πρόβλημα «μοναδιαίου ιξώδους» (3.3*). Αρχικά παρατηρούμε πως για κάθε $\varepsilon > 0$, η

$$u^\varepsilon(t, x) = u(t/\varepsilon, x/\varepsilon), \quad (5.11)$$

όπου η u είναι λύση του

$$u_t + A(u)u_x = u_{xx}, \quad u(0, x) = \bar{u}(\varepsilon x), \quad (5.12)$$

μας δίνει την u^ε ως λύση του προβλήματος Cauchy

$$u_t^\varepsilon + A(u^\varepsilon)u_x^\varepsilon = \varepsilon u_{xx}^\varepsilon, \quad u^\varepsilon(0, x) = \bar{u}(x). \quad (5.13)$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι οι αλλαγές κλίμακας δεν μεταβάλλουν την ολική κύμανση, έχουμε ολοκληρώσει το πρώτο κομμάτι του Θεωρήματος 2.5.

Για να αποδείξουμε το υπόλοιπο κομμάτι του θεωρήματος αρχικά υιοθετούμε συμβολισμούς semigroups και θέτουμε την απεικόνιση $t \mapsto u^\varepsilon(t, \cdot) \doteq S_t^\varepsilon \bar{u}$. Για $\text{Tot. Var.}\{\bar{u}\}$ αρκούντως

μικρό, η παραπάνω απεικόνιση (και κατά συνέπεια το semigroup) είναι καλώς ορισμένη για κάθε $t \geq 0$.

Απο τις (5.2) και (5.8), λαμβανουμε τα φράγματα (2.7)-(2.9) του Θεωρήματος 2.5 ως εξής:

$$\text{Tot. Var.}\{u^\varepsilon(t)\} = \text{Tot. Var.}\{u(t/\varepsilon)\} \leq C \text{Tot. Var.}\{\bar{u}\}, \quad (5.14)$$

$$\|u^\varepsilon(t) - v^\varepsilon(t)\|_{\mathbf{L}^1} = \varepsilon \|u(t) - v(t)\|_{\mathbf{L}^1} \leq \varepsilon L \|u(0) - v(0)\|_{\mathbf{L}^1} = \varepsilon L \frac{1}{\varepsilon} \|\bar{u} - \bar{v}\|_{\mathbf{L}^1}, \quad (5.15)$$

$$\|u^\varepsilon(t) - u^\varepsilon(s)\|_{\mathbf{L}^1} \leq \varepsilon \|u(t/\varepsilon) - u(s/\varepsilon)\|_{\mathbf{L}^1} \leq \varepsilon L' \left(\left| \frac{t}{\varepsilon} - \frac{s}{\varepsilon} \right| + \left| \sqrt{\frac{t}{\varepsilon}} - \sqrt{\frac{s}{\varepsilon}} \right| \right). \quad (5.16)$$

Επιπροσθέτως, για $\bar{u}(x) = \bar{v}(x)$ σε κάποιο $[a, b]$ από την (5.10) για τις $u^\varepsilon, v^\varepsilon$ λύσεις της (5.13), έχουμε²

$$\begin{aligned} & |u^\varepsilon(t, x) - v^\varepsilon(t, x)| \\ & \leq \|\bar{u} - \bar{v}\|_{\mathbf{L}^\infty} \cdot \left\{ \alpha \exp\left(\frac{\beta t - (x-a)}{\varepsilon}\right) + \alpha \exp\left(\frac{\beta t + (x-b)}{\varepsilon}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Τώρα θα ασχοληθούμε με το vanishing viscosity limit. Ονομάζουμε $\mathcal{U} \subset \mathbf{L}_{loc}^1$ το σύνολο όλων των συναρτήσεων $\bar{u} \in BV(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ που ικανοποιούν την υπόθεση του Θεωρήματος 2.5. Για κάθε $u \in \mathcal{U}$ θα γράφουμε ως $S_t^\varepsilon \bar{u} \doteq u^\varepsilon(t, \cdot)$ τις λύσεις της (5.13). Χάρη στο ομοιόμορφο BV φράγμα (5.14) μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα του Helly και να εξάγουμε ακολουθία $\varepsilon_\nu \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} 0$ έτσι ώστε

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} u^{\varepsilon_\nu}(t, \cdot) = u(t, \cdot) \quad \text{στον } \mathbf{L}_{loc}^1 \quad (5.18)$$

για κάποια $u \in BV$. Ειδικότερα, με ένα διαγώνιο επιχείρημα, αυτό μπορούμε να το κάνουμε για κάθε $t_q \in \mathbb{Q}_+$ παίρνοντας για κάθε t_q μία υπακολουθία της ε_ν που να συγκλίνει για αυτό. Έτσι, για ένα πυκνό, αριθμήσιμο $\mathcal{U}^* \subset \mathcal{U}$ θέτουμε

$$S_t \bar{u} \doteq \lim_{m \rightarrow \infty} S_t^{\varepsilon_m} \bar{u} \quad \text{στον } \mathbf{L}_{loc}^1 \quad (5.19)$$

για κάποια $\varepsilon_m \rightarrow 0$. Ως συνέπεια των (5.15)-(5.16) έχουμε ότι η απεικόνιση $(t, \bar{u}) \mapsto u^\varepsilon(t, \cdot) \doteq S_t^\varepsilon \bar{u}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής και έτσι το σύνολο των δυάδων (t, \bar{u}) για τις οποίες το όριο (5.19) υπάρχει είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{U}$.

Συνεπώς, το όριο (5.19) είναι καλώς ορισμένο για κάθε $\bar{u} \in \mathcal{U}$ και $t \geq 0$. Τέλος, από τα (5.14) και (5.19) αποκτούμε το ομοιόμορφο BV φράγμα

$$\text{Tot. Var.}\{S_t \bar{u}\} \leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \text{Tot. Var.}\{u^{\varepsilon_m}(t)\} \leq C \text{Tot. Var.}\{\bar{u}\}. \quad (5.20)$$

Για την ολοκλήρωση της απόδειξης του Θεωρήματος 2.5 πρέπει να δείξουμε ότι η απεικόνιση S είναι πράγματι semigroup και ότι ικανοποιεί την ανίσοτητα (2.10) και δεν εξαρτάται απο την επιλογή της υπακολουθίας ε_m .

²Λεπτομέρειες στο [11].

5.4.1 Συνεχής εξάρτηση

Έστω S η απεικόνιση που ορίστηκε στην (5.19). Τότε ισχύει

$$\|S_t \bar{u} - S_t \bar{v}\|_{\mathbf{L}^1} = \sup_{r>0} \int_{-r}^r |(S_t \bar{u})(x) - (S_t \bar{v})(x)| dx.$$

Για κάθε $r > 0$ η \mathbf{L}_{loc}^1 σύγκλιση συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned} & \int_{-r}^r |(S_t \bar{u})(x) - (S_t \bar{v})(x)| dx \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-r}^r |(S_t^{\varepsilon_m} \bar{u})(x) - (S_t^{\varepsilon_m} \bar{v})(x)| dx \leq L \|\bar{u} - \bar{v}\|_{\mathbf{L}^1}. \end{aligned}$$

Με άλλα λόγια, η S είναι Lipschitz συνεχής ως προς τα αρχικά δεδομένα

$$\|S_t \bar{u} - S_t \bar{v}\|_{\mathbf{L}^1} \leq L \|\bar{u} - \bar{v}\|_{\mathbf{L}^1}. \quad (5.21)$$

Για την συνέχεια ως προς τον χρόνο, από την (5.16) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} & \int_{-r}^r |(S_t \bar{v})(x) - (S_s \bar{v})(x)| dx \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-r}^r |(S_t^{\varepsilon_m} \bar{v})(x) - (S_s^{\varepsilon_m} \bar{v})(x)| dx \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \varepsilon_m L' \left(\left| \frac{t}{\varepsilon_m} - \frac{s}{\varepsilon_m} \right| + \left| \sqrt{\frac{t}{\varepsilon_m}} - \sqrt{\frac{s}{\varepsilon_m}} \right| \right) \\ &= L' |t - s|, \end{aligned}$$

άρα

$$\|S_t \bar{v} - S_s \bar{v}\|_{\mathbf{L}^1} \leq L' |t - s|. \quad (5.22)$$

Έτσι, δείξαμε την (2.10) του Θεωρήματος 2.5.

5.4.2 Πεπερασμένη ταχύτητα διάδοσης

Για κάθε $[a, b] \subset \mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει $\bar{u}(x) = \bar{v}(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$, έχουμε από την (5.17) ότι για κάθε $t \geq 0$ και $x \in (a + \beta t, b - \beta t)$

$$\begin{aligned} & |(S_t \bar{u})(x) - (S_t \bar{v})(x)| \\ & \leq \limsup_{m \rightarrow \infty} |(S_t^{\varepsilon_m} \bar{u})(x) - (S_t^{\varepsilon_m} \bar{v})(x)| \\ & \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \|\bar{u} - \bar{v}\|_{\mathbf{L}^\infty} \cdot \left\{ \alpha \exp\left(\frac{\beta t - (x - a)}{\varepsilon_m}\right) + \alpha \exp\left(\frac{\beta t + (x - b)}{\varepsilon_m}\right) \right\} \\ & = 0 \end{aligned} \quad (5.23)$$

για κάποιο $\beta > 0$. Με άλλα λόγια, αν περιορίσουμε την $S_t \bar{u} \in \mathbf{L}_{loc}^1$ σε δοθέν διάστημα $[a', b']$, τότε η $S_t \bar{u} \in \mathbf{L}_{loc}^1$ εξαρτάται μόνο από τις τιμές της \bar{u} στο διάστημα $[a' - \beta t, b' + \beta t]$, δηλαδή έχουμε πράγματι πεπερασμένη ταχύτητα διάδοσης. Με χρήση της (5.23) μπορούμε να

βελτιώσουμε την (5.21). Αρχικά, θεωρούμε την βοηθητική συνάρτηση \bar{w} με

$$\bar{w}(x) = \begin{cases} \bar{u}(x) & \text{όταν } x \in [a - \beta t, b + \beta t] \\ \bar{v}(x) & \text{όταν } x \notin [a - \beta t, b + \beta t]. \end{cases}$$

Λόγω της πεπερασμένης ταχύτητας διάδοσης, ισχύει

$$\begin{aligned} \int_a^b |(S_t \bar{u})(x) - (S_t \bar{v})(x)| dx &= \int_a^b |(S_t \bar{w})(x) - (S_t \bar{v})(x)| dx \\ &\leq L \|\bar{w} - \bar{v}\|_{\mathbf{L}^1} = L \cdot \int_{a-\beta t}^{b+\beta t} |\bar{u}(x) - \bar{v}(x)| dx. \end{aligned} \quad (5.24)$$

5.4.3 Η λύση ως ημιομάδα

Εδώ θα δείξουμε ότι η απεικόνιση $(t, \bar{u}) \mapsto S_t \bar{u}$ είναι semigroup, δηλαδή

$$S_0 \bar{u} = \bar{u}, \quad S_s S_t \bar{u} = S_{s+t} \bar{u}. \quad (5.25)$$

Η πρώτη ιδιότητα ισχύει εξ ορισμού (διότι το $S_t^\varepsilon \bar{u}$ είναι semigroup για κάθε $\varepsilon > 0$). Για την δεύτερη, παρατηρούμε ότι

$$S_{s+t} \bar{u} = \lim_{m \rightarrow \infty} S_s^{\varepsilon_m} S_t^{\varepsilon_m} \bar{u}, \quad S_s S_t \bar{u} = \lim_{m \rightarrow \infty} S_s^{\varepsilon_m} S_t \bar{u}, \quad (5.26)$$

όπου φυσικά μπορούμε να υποθέσουμε ότι $s > 0$. Σταθεροποιούμε ένα $r > 0$ και ορίζουμε $u_m^\# : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ με

$$u_m^\#(x) \doteq \begin{cases} (S_t \bar{u})(x) & \text{αν } |x| > r + 2\beta s, \\ (S_t^{\varepsilon_m} \bar{u})(x) & \text{αν } |x| < r + 2\beta s. \end{cases}$$

Καθώς $S_t^{\varepsilon_m} \bar{u} \rightarrow S_t \bar{u}$ στον \mathbf{L}_{loc}^1 , έπεται ότι $u_m^\# \rightarrow S_t \bar{u}$ στον \mathbf{L}_{loc}^1 . Με χρήση των (5.17) και (5.19) έχουμε

$$\begin{aligned} &\limsup_{m \rightarrow \infty} \int_{-r}^r |(S_s^{\varepsilon_m} S_t^{\varepsilon_m} \bar{u})(x) - (S_s^{\varepsilon_m} S_t \bar{u})(x)| dx \\ &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} 2r \cdot \sup_{|x| < r} |(S_s^{\varepsilon_m} S_t^{\varepsilon_m} \bar{u})(x) - (S_s^{\varepsilon_m} u_m^\#)(x)| + \lim_{m \rightarrow \infty} \|S_s^{\varepsilon_m} u_m^\# - S_s^{\varepsilon_m} S_t \bar{u}\|_{\mathbf{L}^1} \\ &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} 2r \|S_t^{\varepsilon_m} \bar{u} - u_m^\#\|_{\mathbf{L}^\infty} \cdot 2\alpha e^{-\beta s/\varepsilon_m} + \lim_{m \rightarrow \infty} L \cdot \|u_m^\# - S_t \bar{u}\|_{\mathbf{L}^1} \\ &= 0, \end{aligned}$$

που από την (5.26) μας δίνει την (5.25).

5.5 Συνθήκες για την μοναδικότητα της ασθενούς λύσης

Σε αυτό το σημείο, θα χρησιμοποιήσουμε ουσιαδώς την υπόθεση (\spadesuit) καθώς και την υπόθεση ότι το σύστημα (5.13) είναι συντηρητικό.

Βάσει του Θεωρήματος 5.6, η (\spadesuit) μας επιτρέπει να δείξουμε ότι οι vanishing viscosity solutions $S_t \bar{u}$ είναι ασθενείς λύσεις του προβλήματος Cauchy και, εάν ικανοποιούν τις συνθή-

κες tame oscillation και Liu admissibility condition, είναι μοναδικές και ταυτίζονται με τις λύσεις που παίρνουμε απο τις μεθόδους front tracking approximation και Glimm³.

Θεώρημα 5.6. Έστω το $n \times n$ strictly hyperbolic πρόβλημα Cauchy για τους νόμους διατήρησης

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad u(0, x) = \bar{u}, \quad (5.27)$$

για το οποίο θεωρούμε ότι ικανοποιεί την υπόθεση (\spadesuit) και ότι η f είναι ομαλή. Τότε, για δ αρκούντως μικρό και για κάθε \bar{u} που ικανοποιεί

$$\|\bar{u}\|_{\mathbf{L}^\infty} < \delta, \quad \text{Tot. Var.}\{\bar{u}\} < \delta,$$

το (5.27) επιδέχεται ασθενή λύση η οποία ορίζεται για κάθε $t \geq 0$ και

1. είναι όριο απο front tracking approximations,
2. αν u η ασθενής λύση, τότε, μπορεί να γραφει ως ομοίμορφα Lipschitz συνεχές semi-group (ως προς χρόνο και αρχικές συνθήκες) $S_t \bar{u}$ με $S : \mathcal{D} \times [0, \infty) \rightarrow \mathcal{D}$ και D κλειστό υποσύνολο του \mathbf{L}_{loc}^1 ,
3. αν u ικανοποιεί τις συνθήκες tame oscillation και Liu admissibility τότε είναι μοναδική.

Η συντηρητική μορφή για το σύστημα Cauchy μας επιτρέπει να δείξουμε ότι κάθε vanishing viscosity solution είναι ασθενής λύση. Ειδικότερα,

$$\begin{aligned} \iint [u\varphi_t + f(u)\varphi_x] dxdt &= \lim_{m \rightarrow \infty} \iint [u^{\varepsilon_m}\varphi_t + f(u^{\varepsilon_m})\varphi_x] dxdt \\ &= - \lim_{m \rightarrow \infty} \iint [u_t^{\varepsilon_m}\varphi + f(u^{\varepsilon_m})_x\varphi] dxdt = - \lim_{m \rightarrow \infty} \iint \varepsilon_m u_{xx}^{\varepsilon_m} \varphi dxdt \\ &= - \lim_{m \rightarrow \infty} \iint \varepsilon_m u^{\varepsilon_m} \varphi_{xx} dxdt = 0, \end{aligned}$$

όπου, αν και γράψαμε φ_{xx} υπονοώντας ότι ανήκει στον C_c^2 , στην πράξη μπορούμε να την προσεγγίσουμε με C_c^1 συναρτήσεις και έτσι να είμαστε συνεπείς με τους έως τώρα ορίσμούς ασθενών λύσεων που έχουμε δώσει.

5.5.1 Tame oscillation

Θα δείξουμε ότι κάθε $u(t, x) = (S_t \bar{u})(x)$ ικανοποιεί την συνθήκη tame oscillation, δηλαδή, σε κάθε τρίγωνο

$$\Delta_{a,b}^\tau \doteq \{(s, y); s \geq t, \quad a + \beta(s - \tau) < y < b - \beta(s - \tau)\},$$

με $\tau > 0$ και $a < b$ ικανοποιεί τη συνθήκη

$$\text{Osc.}\{u; \Delta_{a,b}^\tau\} \leq C' \cdot \text{Tot. Var.}\{u(\tau, \cdot); (a, b)\}, \quad (5.28)$$

³Οι λόγοι για τους οποίους ισχύουν τα παραπάνω, καθώς και το ακόλουθο θεώρημα, αναλύονται στα [3],[15],[16],[17],[18],[19]

όπου

$$\text{Osc.}\{u; \Delta\} \doteq \sup_{(s,y),(s',y') \in \Delta} |u(s,y) - u(s',y')|.$$

Έστω a, b, τ, \bar{u} δοθέντα. Καθώς η u δίνεται μέσω κάποιου semigroup, μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να υποθέσουμε ότι $\tau = 0$ και να ορίσουμε την βοηθητική συνάρτηση

$$\bar{v}(x) \doteq \begin{cases} \bar{u}(x) & \text{αν } a < x < b \\ \bar{u}(a+) & \text{αν } x \leq a \\ \bar{u}(b-) & \text{αν } x \geq b \end{cases}$$

και την τροχιά της \bar{v} την $v(t, x) \doteq (S_t \bar{v})(x)$. Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} v(t, x) = \bar{u}(a+) \quad \forall t \geq 0.$$

Από την (5.14) και την ιδιότητα πεπερασμένης ταχύτητας διάδοσης της u , έχουμε

$$\begin{aligned} \text{Osc.}\{u; \Delta_{a,b}^\tau\} &= \text{Osc.}\{v; \Delta_{a,b}^\tau\} \leq 2 \sup_t (\text{Tot. Var.}\{S_t \bar{v}\}) \\ &\leq 2C \cdot \text{Tot. Var.}\{\bar{v}\} = 2C \cdot \text{Tot. Var.}\{u(\tau); (a, b)\}, \end{aligned}$$

δηλαδή, για $C' = 2C$, έχουμε την απαιτούμενη συνθήκη.

5.5.2 Προσεγγιστικά άλματα και συνθήκες για shocks

Από τα ομοιόμορφα Lipschitz φράγματα ως προς τον χρόνο, για την $u(t, x) = (S_t \bar{u})(x)$, με χρήση του Θεωρήματος 1.3 έχουμε ότι υπάρχει $\lambda < \infty$ έτσι ώστε για τη συνάρτηση

$$U(t, x) \doteq \begin{cases} u^- & \text{για } x < \lambda t \\ u^+ & \text{για } x > \lambda t, \end{cases}$$

όπου $u^- \doteq \lim_{x \rightarrow \xi^-} u(\tau, x)$ και $u^+ \doteq \lim_{x \rightarrow \xi^+} u(\tau, x)$, να ισχύει

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{r^2} \int_{-r}^r \int_{-\kappa r}^{\kappa r} |u(\tau + t, \xi + x) - U(t, x)| dx dt = 0,$$

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{r} \int_{-\kappa r}^{\kappa r} |u(\tau + r, \xi + x) - U(r, x)| dx = 0.$$

Στην περίπτωση που $u^- \neq u^+$, λέμε ότι το (τ, ξ) είναι ένα προσεγγιστικό άλμα (approximate jump) για την u . Στην περίπτωση που $u^- = u^+$ (δηλαδή μπορούμε να επιλέξουμε το λ αυθαίρετα), λέμε ότι η u είναι προσεγγιστικά συνεχής (approximately continuous) στο (τ, ξ) . Με άλλα λόγια, με εξαίρεση ένα υποσύνολο Z μέτρου μηδέν (που θα βρίσκονται οι στιγμές που θα έχουμε τα interactions των κυμάτων), για κάθε (τ, ξ) η λύση u είναι είτε approximately continuous είτε έχει approximate jumps, και αυτό θα είναι το μοναδικό είδος ασυνέχειας σε αυτό το σύνολο. Επιπροσθέτως, όταν το σύστημα είναι σε συντηρητική μορφή, αν u είναι μία ασθενής λύση, τα u^-, u^+ και λ πρέπει να ικανοποιούν τις συνθήκες Rankine-Hugoniot⁴ και, όπως αποδεικνύεται στο [15], ικανοποιούν την συνθήκη του Liu.

⁴ $\lambda(u^+ - u^-) = f(u^+) - f(u^-)$

5.5.3 Μοναδικότητα

Συνοψίζοντας τα αποτελέσματα μας έως τώρα, υπό την υπόθεση ότι το σύστημα (2.12) είναι συντηρητικό και ικανοποιεί την (\spadesuit), το semigroup $S_t \bar{u}$ που ορίζεται μέσω του viscosity problem ικανοποιεί τις συνθήκες tame oscillation και Liu. Έτσι, σύμφωνα με το Θεώρημα 5.6, είναι η μοναδική (ασθενής) λύση του προβλήματος Cauchy (2.12) και ταυτίζεται με το όριο των μεθόδων front tracking approximation και Glimm. Ειδικότερα, η επιλογή υπακολουθίας δεν έχει σημασία, δηλαδή,

$$S_t \bar{u} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} S_t^\varepsilon \bar{u}$$

για κάθε $\varepsilon > 0$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του Θεωρήματος 2.5 στο πλαίσιο που εξετάζουμε.

Κλείνουμε την κουβέντα για τα συστήματα νόμων διατήρησης δείχνοντας ένα αποτέλεσμα για το πόσο εξαρτώνται οι viscosity solutions από τους πίνακες $A(u)$.

Πόρισμα 5.4. Έστω δύο υπερβολικά συστήματα

$$\begin{aligned} u_t + A(u)u_x &= 0 \\ u_t + \hat{A}(u)u_x &= 0 \end{aligned}$$

τα οποία ικανοποιούν τις υποθέσεις του Θεωρήματος 2.5. Έστω επίσης S, \hat{S} τα αντίστοιχα semigroups των viscosity solutions. Τότε, για \bar{u} αρχικά δεδομένα με μικρή ολική κύμανση, έχουμε

$$\|S_t \bar{u} - \hat{S}_t \bar{u}\|_{\mathbf{L}^1} = \mathcal{O}(1) \cdot t \left(\sup_u |\hat{A}(u) - A(u)| \right) \cdot \text{Tot. Var.}\{\bar{u}\}. \quad (5.29)$$

Απόδειξη. Έστω $S^\varepsilon, \hat{S}^\varepsilon$ τα semigroups των λύσεων των συστημάτων

$$u_t + A(u)u_x = \varepsilon u_{xx}, \quad u_t + \hat{A}(u)u_x = \varepsilon u_{xx}.$$

Για την Lipschitz σταθερά L του Θεωρήματος 2.5, θέτουμε $w^\varepsilon(t) \doteq \hat{S}_t^\varepsilon \bar{u}$ και έτσι, για κάθε $t \geq 0$, έχουμε από 1.1

$$\begin{aligned} \|\hat{S}_t^\varepsilon \bar{u} - S_t^\varepsilon \bar{u}\|_{\mathbf{L}^1} &= \|w^\varepsilon(t) - S_t^\varepsilon \bar{u}\|_{\mathbf{L}^1} \\ &\leq L \cdot \int_0^t \left\{ \liminf_{h \rightarrow 0^+} \frac{\|w^\varepsilon(s+h) - S_h^\varepsilon w^\varepsilon(s)\|_{\mathbf{L}^1}}{h} \right\} ds \\ &\leq L \cdot \int_0^t \int \left| \hat{A}(w^\varepsilon(s, x)) - A(w^\varepsilon(s, x)) \right| |w_x^\varepsilon(s, x)| dx ds \\ &\leq L \left(\sup_u |\hat{A}(u) - A(u)| \right) \int_0^t \|w_x^\varepsilon(s)\|_{\mathbf{L}^1} ds \\ &= \mathcal{O}(1) \cdot t \left(\sup_u |\hat{A}(u) - A(u)| \right) \text{Tot. Var.}\{\bar{u}\} \end{aligned}$$

□

Μέρος **II**

Νόμοι Ισορροπίας

Κεφάλαιο 6

Η Μέθοδος Vanishing Viscosity για Νόμους Ισορροπίας

6.1 Το βασικό αποτέλεσμα για νόμους ισορροπίας

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε τον τρόπο με τον οποίο δείχνουμε πως το υπερβολικό σύστημα Cauchy για νόμους ισορροπίας

$$u_t + f(u)_x + g(u) = 0 \quad u(0, x) = u_0(x) \quad (6.1)$$

με $x \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}^n$ και $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ έχει ολική ασθενή λύση όταν $u_0 \in BV$ με αρκούντως μικρή ολική κύμανση. Για να το δείξουμε αυτό, υποθέτουμε ότι το σύστημα είναι αυστηρώς υπερβολικό (όπως και στο προηγούμενο μέρος) και ότι η πηγή g λειτουργεί ως μηχανισμός απόσβεσης. Πιο ειδικά, απαιτούμε για u^* μια σταθερή λύση της (6.1) (δηλαδή έχουμε $g(u^*) = 0$) γύρω από την οποία γραμμικοποιούμε το (6.1) και το διασπάμε με τα δεξιά ιδιοδιανύσματα του $A(u^*)$ στο νέο σύστημα

$$v_{i,t} + \lambda_i(u^*) v_{i,x} + \sum_{j=1}^n B_{ij}(u^*) v_j = 0, \quad (6.2)$$

όπου ο $n \times n$ πίνακας B_{ij} που δίνεται από τη σχέση

$$B(u) = [r_1(u), \dots, r_n(u)]^{-1} Dg(u) [r_1(u), \dots, r_n(u)] \quad (6.3)$$

είναι «αυστηρώς διαγώνια κυριαρχούν επί των στηλών» (strictly column diagonally dominant-s.c.d.d.), δηλαδή,

$$B_{ii}(u^*) - \sum_{j \neq i} |B_{ji}(u^*)| \geq \mu > 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (6.4)$$

Θα παρουσιάσουμε τώρα το βασικό αποτέλεσμα για τους νόμους ισορροπίας.

Θεώρημα 6.7. Έστω το πρόβλημα Cauchy

$$u_t^\varepsilon + A(u^\varepsilon) u_x^\varepsilon + g(u^\varepsilon) = \varepsilon u_{xx}^\varepsilon, \quad (6.5)$$

$$u^\varepsilon(0, x) = u_0(x). \quad (6.6)$$

Υποθέτουμε ότι το $A(u)$ έχει n το πλήθος διακεκριμένες ιδιοτιμές $\lambda_1(u) < \dots < \lambda_n(u)$ και συνεπώς n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα $r_1(u) < \dots < r_n(u)$. Υπό τις υποθέσεις ότι ο $B(u^*)$, ορισμένος από την (6.3), είναι *s.c.d.d.*, οι g και $u_0 - u^* \in L^1$ και ότι για κάποιο $\delta_0 > 0$ ισχύει

$$\text{Tot. Var.}\{u_0\} < \delta_0, \quad (6.7)$$

έχουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ το πρόβλημα (6.5)-(6.6) έχει μοναδική λύση $u^\varepsilon \in BV$ που ορίζεται για κάθε $t \geq 0$. Επιπροσθέτως,

$$\text{Tot. Var.}\{u^\varepsilon(t, \cdot)\} \leq Ce^{-\mu t} \text{Tot. Var.}\{u_0\}, \quad (6.8)$$

όπου μ είναι μία θετική σταθερά που εξαρτάται από τον $B(u^*)$.

Περί ευστάθειας, αν v^ε είναι κάποια άλλη λύση της (6.5), τότε

$$\|u^\varepsilon(t) - v^\varepsilon(t)\|_{L^1} \leq Le^{-\mu t} \|u_0 - v_0\|_{L^1}. \quad (6.9)$$

Τέλος, καθώς $\varepsilon \rightarrow 0$ ισχύει ότι $u^\varepsilon \rightarrow u \in L^1_{loc}$ και αν το πρόβλημα

$$u_t + A(u)u_x + g(u) = 0, \quad u(0, x) = u_0(x) \quad (6.10)$$

είναι συντηρητικό (δηλ. $A = Df$), τότε η u είναι επιτρεπτή ασθενής λύση την οποία καλούμε *vanishing viscosity solution*.

Σημείωση 6.14. Θα συμπύξουμε τα αποτελέσματα που αποδεικνύονται στο [20] και είναι παρόμοια με αυτά που υπάρχουν στο [11] και εξετάσαμε σε προηγούμενες ενότητες κάνοντας αντιστοιχίες όποτε αυτό είναι αναγκαίο. Αναφέρουμε πως σε πρακτικό επίπεδο, όπως θα δούμε, σε όλα τα φράγματα που αποκτώνται από την ανάλυση εμφανίζεται ένας εκθετικός όρος απόσβεσης λόγω της $g(u)$ και, ειδικότερα, της υπόθεσης (6.4), που με τη σειρά της βασίζεται στην επιλογή των ιδιοδιανυσμάτων του $A(u)$.

Ο τρόπος με τον οποίο θα κινηθούμε για να αποδείξουμε το παραπάνω αποτέλεσμα είναι ο ακόλουθος. Στο υπόλοιπο του Κεφαλαίου εξάγουμε παραβολικές εκτιμήσεις καθώς και BV εκτιμήσεις μέσω της διάσπασης των παραγώγων της u . Έπειτα δείχνουμε ότι τα φράγματα αυτά στέχουν για οσοδήποτε μεγάλους χρόνους επιγρέποντάς μας να ορίσουμε την λύση ολικά. Αυτό το επιτυγχάνουμε με τεχνικές παρόμοιες με αυτές που παρουσιάζονται στα Κεφάλαια 3 και 4.

Στο Κεφάλαιο 7 δείχνουμε ότι οι viscous solutions είναι ευσταθείς και τέλος εξαλείφουμε το ιξώδες και δείχνοντας ότι το vanishing viscosity limit είναι λύση της (6.10).

6.2 Παραβολικές εκτιμήσεις

Ξεκινάμε αναφέροντας πως με τις αλλαγές κλίμακας $t \sim t/\varepsilon, x \sim x/\varepsilon$, το σύστημα (6.5)-(6.6) μετασχηματίζεται στο

$$\begin{aligned} u_t + A(u)u_x - u_{xx} + \varepsilon g(u) &= 0, \\ u(0, x) &= u_0^\varepsilon(x) = u_0(\varepsilon x), \end{aligned} \quad (6.11)$$

που για να μπορέσουμε να το μελετήσουμε θεωρούμε την γραμμικοποιημένη εξελικτική εξίσωση για μια απειροστή διαταραχή z της u

$$z_t + A(u)z_x + \varepsilon Dg(u)z - z_{xx} + (z \bullet A(u))u_x = 0 \quad (6.12)$$

. Προσθαφαιρώντας όρους μπορούμε να γράψουμε την παραπάνω ως

$$\begin{aligned} z_t + A^*z_x + \varepsilon Dg(u^*)z - z_{xx} &= (A^* - A(u))z_x - (z \bullet A(u))u_x \\ &+ \varepsilon (Dg(u^*) - Dg(u))z \end{aligned} \quad (6.13)$$

με το A^* να είναι $A(u^*)$. Σε αναλογία με το προηγούμενο μέρος, έχουμε το ακόλουθο Λήμμα.

Λήμμα 6.11. Υπό την υπόθεση (6.4), για κάθε $t > 0$ ο πυρήνας Green G του παραβολικού συστήματος

$$w_t + A^*w_x - w_{xx} + \varepsilon Dg(u^*)w = 0 \quad (6.14)$$

ικανοποιεί τα φράγματα

$$\|G(t)\|_{L^1} \leq \kappa e^{-\varepsilon\mu t}, \quad \|G_x(t)\|_{L^1} \leq \frac{\kappa}{\sqrt{t}} e^{-\varepsilon\mu t}, \quad \|G_{xx}(t)\|_{L^1} \leq \frac{\kappa}{t} e^{-\varepsilon\mu t} \quad (6.15)$$

για κάποια θετική σταθερά κ .

Βάσει της σταθεράς του παραπάνω λήμματος, ορίζουμε τις σταθερές

$$\hat{t} \doteq \left(\frac{1}{400\kappa\alpha\delta_0} \right)^2, \quad \varepsilon_0 \doteq \kappa^2\alpha\delta_0, \quad \alpha \doteq \sup_u (\|DA\| + \|D^2A\| + \|D^2g\|) \quad (6.16)$$

και, σε αναλογία με τη Πρόταση 3.2, έχουμε τη παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 6.4. Έστω u, z οι λύσεις των συστημάτων (6.11)-(6.12) αντίστοιχα, έτσι ώστε να ισχύουν τα φράγματα

$$\|u_x(t)\|_{L^1} \leq \delta_0 e^{-\varepsilon\mu t}, \quad \|z(t)\|_{L^1} \leq \delta_0 e^{-\varepsilon\mu t} \quad (6.17)$$

για $\delta_0 < 1$, για όλα τα $t \in [0, \hat{t}]$ και $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$. Τότε, για όλα τα $t \in [0, \hat{t}]$ ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\begin{aligned} \|u_{xx}(t)\|_{L^1}, \|z_x(t)\|_{L^1} &\leq \frac{2\kappa\delta_0}{t^{1/2}} e^{-\varepsilon\mu t}, \\ \|u_{xxx}(t)\|_{L^1}, \|z_{xx}(t)\|_{L^1} &\leq \frac{5\kappa^2\delta_0}{t} e^{-\varepsilon\mu t}, \\ \|u_{xxx}(t)\|_{L^\infty}, \|z_{xx}(t)\|_{L^\infty} &\leq \frac{16\kappa^3\delta_0}{t^{3/2}} e^{-\varepsilon\mu t}, \end{aligned} \quad (6.18)$$

όπου τα κ και μ είναι όπως στις (6.15) και (6.4).

Το επόμενο αποτέλεσμα (ανάλογο της Πρότασης 3.3) βασίζεται στα φράγματα για τη G και μας δείχνει ότι οι u, z είναι καλώς ορισμένες έως τον χρόνο \hat{t} .

Πρόταση 6.5. Έστω $u \doteq u(t, x), z \doteq z(t, x)$ λύσεις των (6.11) και (6.12) αντίστοιχα έτσι ώστε να ικανοποιούν τα φράγματα

$$\text{Tot. Var.}\{u(0, \cdot)\} \leq \frac{\delta_0}{4\kappa}, \quad \|z(0)\|_{L^1} \leq \frac{\delta_0}{4\kappa}. \quad (6.19)$$

Τότε, οι u, z είναι καλώς ορισμένες σε όλο το διάστημα $[0, \hat{t}]$ και ικανοποιούν τις εκτιμήσεις

$$\|u_x(t)\|_{L^1} \leq \frac{\delta_0}{2} e^{-\varepsilon\mu t}, \quad \|z(t)\|_{L^1} \leq \frac{\delta_0}{2} e^{-\varepsilon\mu t}, \quad t \in [0, \hat{t}]. \quad (6.20)$$

Απόδειξη. Γράφοντας την λύση z με χρήση του πυρήνα Green G , έχουμε:

$$\begin{aligned} z(t, x) = & G(t) * z(0) + \int_0^t G(t-s) * [(A^* - A(u)) z_x(s) - (z \bullet A(u)) u_x(s)] ds \\ & + \varepsilon \int_0^t G(t-s) * (Dg(u^*) - Dg(u)) z(s) ds. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Υποθέτουμε ότι $\tau < \hat{t}$ είναι ο πρώτος χρόνος για τον οποίο η (6.20) ισχύει ως ισότητα. Τότε,

$$\begin{aligned} \|z(\tau)\|_{L^1} \leq & \kappa e^{-\varepsilon\mu\tau} \|z(0)\|_{L^1} + \int_0^\tau \kappa e^{-\varepsilon\mu(\tau-s)} [\|u_x(s)\|_{L^1} \|DA\|_{L^\infty} \|z_x(s)\|_{L^1} \\ & + \|z(s)\|_{L^\infty} \|DA\|_{L^\infty} \|u_x(s)\|_{L^1} \\ & + \varepsilon \|u_x(s)\|_{L^1} \|D^2g\|_{L^\infty} \|z(s)\|_{L^1}] ds. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Αν αντικαταστήσουμε το z με το u_x και υποθέσουμε ότι δεν ισχύει η (6.20)₁, η παραπάνω ανισότητα μας δίνει αντίφαση, αποδεικνύοντας έτσι το πρώτο φράγμα της (6.20). Εισάγοντας τις (6.17)₂, (6.19) και (6.20)₁, η (6.22) γίνεται

$$\begin{aligned} \|z(\tau)\|_{L^1} \leq & \frac{\delta_0}{4} e^{-\varepsilon\mu\tau} + \int_0^\tau e^{-\varepsilon\mu\tau} 2 \left(\frac{\delta_0}{2} \|DA\|_{L^\infty} \frac{2\kappa\delta_0}{2\sqrt{s}} e^{-\varepsilon\mu s} \right) ds \\ & + \varepsilon \int_0^\tau e^{-\varepsilon\mu\tau} \frac{\delta_0^2}{4} \|D^2g\|_{L^\infty} e^{-\varepsilon\mu s} ds \\ \leq & \frac{\delta_0}{4} e^{-\varepsilon\mu\tau} + 2\kappa\delta_0^2 \|DA\|_{L^\infty} e^{-\varepsilon\mu\tau} \sqrt{\tau} + \varepsilon \frac{\delta_0^2}{4} \|D^2g\|_{L^\infty} \tau e^{-\varepsilon\mu\tau}. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Δηλαδή, για κάθε $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, έχουμε ότι $\|z(\tau)\|_{L^1} < \frac{\delta_0}{2} e^{-\varepsilon\mu\tau}$, άτοπο λόγω της επιλογής του τ . \square

Το ακόλουθο πόρισμα είναι ανάλογο του Πορίσματος 3.1.

Πόρισμα 6.5. Αν τα φράγματα (6.17) στέκουν στο μεγαλύτερο διάστημα $[0, T]$, τότε για

$t \in [\hat{t}, T]$ ισχύουν τα

$$\begin{aligned} \|u_{xx}(t)\|_{L^1}, \|u_x(t)\|_{L^\infty}, \|z_x(t)\|_{L^1} &= \mathcal{O}(1)\delta_0^2 e^{-\varepsilon\mu t} \\ \|u_{xxx}(t)\|_{L^1}, \|u_{xx}(t)\|_{L^\infty}, \|z_{xx}(t)\|_{L^1} &= \mathcal{O}(1)\delta_0^3 e^{-\varepsilon\mu t} \\ \|u_{xxx}(t)\|_{L^\infty}, \|z_{xx}(t)\|_{L^\infty} &= \mathcal{O}(1)\delta_0^4 e^{-\varepsilon\mu t}. \end{aligned} \quad (6.24)$$

6.3 BV εκτιμήσεις

Έχοντας πλέον φράγματα για τους χρόνους έως \hat{t} , σκοπός μας τώρα είναι να τα επεκτείνουμε στο $[\hat{t}, \infty)$. Για να το καταφέρουμε αυτό θα διασπάσουμε τη χωρική παράγωγο ως

$$u_x = \sum_{i=1}^n v_i \tilde{r}_i \quad (6.25)$$

και τη χρονική παράγωγο ως

$$u_t + \varepsilon g(u) = \sum_{i=1}^n (w_i - \lambda_i^* v_i) \tilde{r}_i. \quad (6.26)$$

Έπειτα, θα μελετήσουμε το $2n \times 2n$ σύστημα νόμων ισορροπίας με ιξώδες

$$\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}_t + \left[\begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \right]_x - \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}_{xx} + \varepsilon \begin{pmatrix} B^\# & H \\ K & B^b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi \\ \Psi \end{pmatrix} \quad (6.27)$$

όπου Λ είναι η διαγώνιος, ο $\begin{pmatrix} B^\# & H \\ K & B^b \end{pmatrix}$ ¹ είναι s.c.d.² και οι $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ ονομάζονται πηγές. Για να έχουμε έλεγχο στις L^1 νόρμες των $v(t, \cdot)$ και $w(t, \cdot)$ για κάθε $t > \hat{t}$, πρέπει να δείξουμε ότι οι $e^{\varepsilon\mu t}|\Phi|$ και $e^{\varepsilon\mu t}|\Psi|$ είναι ολοκληρώσιμες στο ημιεπίπεδο $\{t > \hat{t}, x \in \mathbb{R}\}$. Ειδικότερα, θέλουμε να ισχύει

$$\int_{\hat{t}}^T \int e^{\varepsilon\mu t} \sum_{i=1}^n (|\varphi_i(t, x)| + |\psi_i(t, x)|) dx dt = \mathcal{O}(1)\delta_0^2 \quad (6.28)$$

για να έχουμε αρκετά καλό a priori φράγμα στη $\|u_x(t, \cdot)\|_{L^1}$ που να εξασφαλίζει την εκθετική μείωση της ολικής κύμανσης της $u(t, \cdot)$.

Ορισμός 6.9. Έστω $\xi(t, x)$ μία βαθμωτή συνάρτηση. Θα λέμε ότι η ξ είναι *ελέγξιμη (controllable)* αν, όποτε

$$\int_{\hat{t}}^T \int e^{\varepsilon\mu t} \xi(t, x) dx dt \leq \delta_0, \quad (6.29)$$

¹Οι πίνακες $B^\#, B^b, H$ και K ορίζονται έμμεσα έτσι ώστε να ισχύει η (6.27) και αναλύονται με σαφήνεια στο Παράρτημα Α του [20].

²Εδώ γίνεται ουσιωδώς χρήση της υπόθεσης (6.4).

ισχύει

$$\int_{\hat{t}}^T \int e^{\varepsilon\mu t} \xi(t, x) dx dt = \mathcal{O}(1)\delta_0^2. \quad (6.30)$$

Το βασικό αποτέλεσμα που θέλουμε είναι το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 6.12. Έστω u λύση της (6.11) έτσι ώστε για κάθε $t \in [\hat{t}, T]$ να ισχύει

$$\|u_x(t)\| \leq \delta_0 e^{-\varepsilon\mu t}. \quad (6.31)$$

Τότε, το άθροισμα

$$\sum_{i=1}^n (|\varphi_i(t, x)| + |\psi_i(t, x)|) \quad (6.32)$$

είναι ελέγξιμο.

Στο υπόλοιπο της ενότητας θα δείξουμε πως αυτό το λήμμα πράγματι ισχύει. Όπως και στο προηγούμενο μέρος, θέλοντας να χρησιμοποιήσουμε το CMT, θεωρούμε τις τροχιές viscous traveling i -waves της μορφής $U(x - \sigma_i t)$ όταν δεν υπάρχει η πηγή g (δηλ. $g \equiv 0$) και $\sigma_i \approx \lambda_i(u^*)$. Όλες αυτές οι τροχιές βρίσκονται σε ένα (center) manifold $\mathcal{C}_i \subset \mathbb{R}^{n+n+1}$ με

$$\mathcal{C}_i = \{(u, v, \sigma_i) : v = v_i \tilde{r}_i, |u - u^*| < \delta, |v_i| < \delta, |\sigma_i - \lambda_i^*| < \delta\}, \quad (6.33)$$

όπου το $\tilde{r} \doteq \tilde{r}_i(u, v_i, \sigma_i)$ ορίζεται σε μία μικρή περιοχή του $(u^*, 0, \lambda_i^*)$ και $\tilde{r}_i \rightarrow r_i^* \doteq r_i(u^*)$ καθώς $(u, v_i, \sigma_i) \rightarrow (u^*, 0, \lambda_i^*)$. Απώτερος σκοπός της χρήσης του CMT είναι να φράξουμε τις πηγές φ_i, ψ_i . Δεδομένου ότι υποθέσαμε ότι $g \equiv 0$, η ανάλυση σε αυτό το σημείο είναι ίδια με το Κεφάλαιο 3.2.1.

6.3.1 Διάσπαση των παραγώγων

Επιλέγοντας τα \tilde{r}_i μέσω του CMT, για μία ομαλή λύση της (6.11) u , θέλουμε να διασπάσουμε τα u_x και u_t μέσω κάποιων $(v, w) \in \mathbb{R}^{2n}$ έτσι ώστε

$$\begin{aligned} u_x &= \sum_{i=1}^n v_i \tilde{r}_i(u, v_i, \sigma_i) \\ u_t + \varepsilon g(u) &= \sum_{i=1}^n (w_i - \lambda_i^* v_i) \tilde{r}_i(u, v_i, \sigma_i), \end{aligned} \quad (6.34)$$

όπου το σ_i θα δίνεται από τη σχέση

$$\sigma_i = \lambda_i^* - \theta \left(\frac{w_i}{v_i} \right) \quad (6.35)$$

με $\theta(\frac{w_i}{v_i}) \doteq \theta_i$ να είναι η συνηθισμένη συνάρτηση αποκοπής (για να έχουμε έλεγχο στο σ_i όταν το v_i είναι κοντά στο 0).

Λέμε τώρα ότι η σχέση (6.34) είναι decomposition βάσει των viscous traveling waves

$U_i = U(x - \sigma_i t)$ και ισχύει

$$U_i(x) = u(x), \quad U_i'(x) = v_i \tilde{r}_i, \quad U_i'' = (A(u) - \sigma_i) U_i.$$

Έτσι, έπεται ότι $u_x(x) = \sum_i U_i'(x)$ και, όπως στο προηγούμενο μέρος, αν η θ είναι ταυτοτική τότε για u_{xx} έχουμε

$$\begin{aligned} u_{xx}(x) &= u_t + \varepsilon g(u) + A(u)u_x = \sum_i (w_i - \lambda_i^* v_i) \tilde{r}_i + A(u) \sum_i v_i \tilde{r}_i \\ &= \sum_i (A(u) - \sigma_i I) v_i \tilde{r}_i = \sum_i U_i''(x). \end{aligned} \quad (6.36)$$

Χάρη στο CMT έχουμε το ακόλουθο λήμμα, ανάλογο του Λήμματος 3.2 για τη διάσπαση.

Λήμμα 6.13. Για $|u - u^*|, |u_x|, |u_{xx}|$ αρκούντως μικρά, το σύστημα $2n$ εξισώσεων (6.34) έχει μοναδική λύση $(v, w) = (v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n)$. Η απεικόνιση $(u, u_x, u_{xx}) \mapsto (v, w)$ είναι ομαλή εκτός των n manifolds $\mathcal{Z}_i \doteq \{(v, w); v_i = w_i = 0\}$ και, ειδικότερα, είναι $C^{1,1}$ στην περιοχή του σημείου $(u^*, 0, 0)$.

Στο πνεύμα του Πορίσματος 6.5 και του Λήμματος 3.3 έχουμε το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 6.14. Δεδομένης της ισχύος των φραγμάτων (6.17) έως κάποιο χρόνο $T > \hat{t}$, ισχύουν τα ακόλουθα φράγματα

$$\begin{aligned} \|v_i(t)\|_{L^1}, \|w_i(t)\|_{L^1} &= \mathcal{O}(1)\delta_0 e^{-\varepsilon\mu t} \\ \|v_i(t)\|_{L^\infty}, \|w_i(t)\|_{L^\infty}, \|v_{i,x}(t)\|_{L^1}, \|w_{i,x}(t)\|_{L^1} &= \mathcal{O}(1)\delta_0^2 e^{-\varepsilon\mu t} \\ \|v_{i,x}(t)\|_{L^\infty}, \|w_{i,x}(t)\|_{L^\infty} &= \mathcal{O}(1)\delta_0^3 e^{-\varepsilon\mu t}, \end{aligned} \quad (6.37)$$

για κάθε $t \in [\hat{t}, T]$

6.3.2 Αλληλεπιδράσεις κυμάτων

Σε αυτό το σημείο θα θέλαμε ένα αποτέλεσμα παρόμοιο του Λήμματος 4.5 ώστε τα φ_i και ψ_i να είναι controllable. Το Λήμμα 6.15 που ακολουθεί καλύπτει αυτόν το ρόλο.

Λήμμα 6.15. Οι μοναδικές λύσεις (v, w) της διάσπασης του συστήματος (6.34) ικανοποιούν το $2n \times 2n$ σύστημα νόμων ισορροπίας με πηγές της μορφής

$$\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}_t + \left[\begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \right]_x - \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}_{xx} + \varepsilon \begin{pmatrix} B^\# & H \\ K & B^b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi \\ \Psi \end{pmatrix}, \quad (6.38)$$

όπου Λ είναι η διαγώνιος με στοιχεία της διαγωνίου τα $\{\tilde{\lambda}_i\}$ και ο πίνακας $\begin{pmatrix} B^\# & H \\ K & B^b \end{pmatrix}$ είναι s.c.d.d. Ειδικότερα, ισχύουν τα φράγματα

$$\left| B_{ij}^\# - B_{ij}^b \right| = \mathcal{O}(|u - u^*|, |v|, |w|), \quad |H_{ij}|, |K_{ij}| = \mathcal{O}(|u - u^*|, |v|, |w|).$$

Επιπροσθέτως, αν $(u, v, w) = (u^*, 0, 0)$ τότε

$$B^\# = B^b = B(u^*) = [r_1(u^*), \dots, r_n(u^*)]^{-1} Dg(u^*) [r_1(u^*), \dots, r_n(u^*)].$$

Τέλος, για τις πηγές έχουμε τα παρακάτω

$$\begin{aligned} \varphi_i, \psi_i &= \mathcal{O}(1) \cdot \sum_j (|v_{j,x}| + |w_{j,x}|) \cdot |w_j - \theta_j v_j| && \text{σφάλμα λόγο της cut-off} \\ &+ \mathcal{O}(1) \cdot \sum_j |v_{j,x} w_j - v_j w_{j,x}| && \text{αλλαγή ταχύτητας, γραμμικοί όροι} \\ &+ \mathcal{O}(1) \cdot \sum_j \left| v_j \left(\frac{w_j}{v_j} \right)_x \right|^2 \cdot \chi_{\{|w_j/v_j| < 3\delta_1\}} \\ &&& \text{αλλαγή ταχύτητας, δευτεροβάθμιοι όροι} \\ &+ \mathcal{O}(1) \cdot \sum_{j \neq k} (|v_j v_k| + |v_{j,x} v_k| + |v_j w_k| + |v_{j,x} w_k| + |v_j w_{k,x}| + |w_j w_k| \\ &&& + |v_{j,x} v_{k,x}| + |v_{j,x} w_{k,x}| + |w_j w_{k,x}| + |w_{j,x} w_{k,x}|) \\ &&& \text{αλληλεπίδραση κυμάτων διαφορετικών οικογενειών} \end{aligned} \quad (6.39)$$

Σημείωση 6.15. Στο άθροισμα που μελετάται η αλληλεπίδραση των κυμάτων διαφορετικών οικογενειών εμφανίζονται οι τέσσερις καινούργιοι όροι $|v_{j,x} v_{k,x}|, |v_{j,x} w_{k,x}|, |w_j w_{k,x}|$ και $|w_{j,x} w_{k,x}|$ (κατά τα άλλα, η (4.4) είναι ίδια με την εξίσωση του Λήμματος 4.5). Αυτοί προκύπτουν από την ύπαρξη της g (και πιο ειδικά με τον όρο που πολλαπλασιάζεται με το ε στην (6.38)). Οι μέθοδοι με τις οποίες δείχνουμε ότι όλα τα παραπάνω αθροίσματα είναι το πολύ τάξης $\delta_0^2 e^{-\varepsilon \mu t}$ είναι παρόμοιοι με τους τρόπους που παρουσιάζονται στο Κεφάλαιο 4 και τα ενδιάμεσα αποτελέσματα όμοια (με μόνη διαφορά την συνεχή ύπαρξη του όρου $e^{-\varepsilon \mu t}$), και έτσι παραλείπονται.³

6.3.3 A priori BV φράγματα και επέκταση της λύσης για οσοδήποτε μεγάλους χρόνους

Δεδομένου του Λήμματος 6.12, μπορούμε να εκτιμήσουμε τα a priori BV φράγματα της λύσης της (6.11) ως εξής.

Έστω $u_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ αρχικά δεδομένα για τα οποία να ισχύει

$$\text{Tot. Var. } \{u_0\} \leq \frac{\delta_0}{8\sqrt{n\kappa}}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} u_0(x) = u^* \in K, \quad (6.40)$$

όπου το κ δίνεται από τη σχέση (6.15). Από την Πρόταση 6.5 υπάρχει λύση της (6.11) καλώς ορισμένη στο διάστημα $[0, \hat{t}]$ για την οποία ισχύει

$$\|u_x(\hat{t})\|_{L^1} \leq \frac{\delta_0}{4\sqrt{n}} e^{-\varepsilon \mu \hat{t}}. \quad (6.41)$$

Μέσω της Πρότασης 6.4, αυτή η λύση μπορεί να επεκταθεί για οσοδήποτε μεγάλους

³Οι λεπτομέρειες υπάρχουν στη Παράγραφο 6 και το Παράρτημα A του [20].

χρόνους υπό την προϋπόθεση ότι η ολική κύμανση παραμένει αρκούντως μικρή.

Πράγματι, έστω T ο χρόνος στον οποίο πλέον δεν ορίζεται το decomposition (6.25) για τον οποίο ισχύει

$$T \doteq \sup \left\{ \tau; \sum_i \int_{\hat{t}}^{\tau} \int e^{\varepsilon\mu t} (|\varphi_i(t, x)| + |\psi_i(t, x)|) dx dt \leq \frac{\delta_0}{2} \right\} \quad (6.42)$$

και έστω $T < \infty$. Τότε, για κάθε $t \in [\hat{t}, T]$ έχουμε

$$\begin{aligned} \|u_x(t)\|_{L^1} &\leq \sum_{i=1}^n \|v_i(t)\|_{L^1} \\ &\leq \sum_{i=1}^n e^{-\varepsilon\mu t} \left(e^{\varepsilon\mu\hat{t}} \|v_i(\hat{t})\|_{L^1} + \int_{\hat{t}}^t \int e^{\varepsilon\mu s} |\varphi_i(s, x)| dx ds \right) \\ &\leq e^{-\varepsilon\mu(t-\hat{t})} 2\sqrt{n} \|u_x(\hat{t})\|_{L^1} + e^{-\varepsilon\mu t} \frac{\delta_0}{2} \leq \delta_0 e^{-\varepsilon\mu t}. \end{aligned} \quad (6.43)$$

Όμως, βάσει του Λήμματος 6.12 έχουμε

$$\sum_i \int_{\hat{t}}^T \int e^{\varepsilon\mu t} (|\varphi_i(t, x)| + |\psi_i(t, x)|) dx dt = \mathcal{O}(1)\delta_0^2 < \frac{\delta_0}{2}, \quad (6.44)$$

πράγμα άτοπο για αρκούντως μικρό δ_0 . Συνεπώς, $T = \infty$ και κατα συνέπεια η ολική κύμανση της u είναι ομοιόμορφα φραγμένη και, ειδικότερα, φθίνει ομοιόμορφα ως προς τον χρόνο βάσει της

$$\text{Tot. Var.}\{u(t)\} < \delta_0 e^{-\varepsilon\mu t}, \quad \forall t \in [\hat{t}, \infty). \quad (6.45)$$

Με άλλα λόγια, η λύση μας ορίζεται ολικά με ολική κύμανση

$$\text{Tot. Var.}\{u(t)\} = \mathcal{O}(1)e^{-\varepsilon\mu t} \text{Tot. Var.}\{u_0\}. \quad (6.46)$$

Κεφάλαιο 7

Συμπεριφορά των λύσεων

7.1 Ευστάθεια των λύσεων

Γυρνάμε πάλι στο σύστημα

$$u_t + A(u)u_x + \varepsilon g(u) - u_{xx} = 0 \quad (7.1)$$

$$u(0, x) = \bar{u}(x) \doteq u_0(\varepsilon x) \quad (7.2)$$

νόμων ισορροπίας με ιξώδες, όπου η g είναι αποσβετική. Σκοπός μας είναι να δείξουμε το φράγμα

$$\|u(t) - v(t)\| \leq L e^{-\varepsilon \mu t} \|u(0) - v(0)\|_{L^1}, \quad t > 0 \quad (7.3)$$

για κάθε δύο λύσεις της (7.1). Για να το πετύχουμε αυτό, θεωρούμε μια απειροστή διαταραχή $z \doteq z(t, x)$ του u που ικανοποιεί την εξίσωση

$$z_t + (A(u)z)_x + \varepsilon Dg(u)z - z_{xx} = (u_x \bullet A(u))z - (z \bullet A(u))u_x. \quad (7.4)$$

Με το ίδιο επιχείρημα ομοιοπίας όπως το Κεφάλαιο 5, αρκεί να ισχύει το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Λήμμα 7.16. Έστω ότι η z , ως απειροστή διαταραχή της u , ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος 6.7. Τότε, για κάποιο $L > 0$, ισχύει

$$\|z(t)\|_{L^1} \leq L e^{-\varepsilon \mu t} \|z(0)\|_{L^1}. \quad (7.5)$$

Δεδομένου του παραπάνω Λήμματος, αν τα \bar{u}, \bar{v} είναι αρχικά δεδομένα για λύσεις του (7.1)-(7.2) με μικρή ολική κύμανση για τα οποία ισχύει

$$u^* = \lim_{x \rightarrow -\infty} \bar{u} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \bar{v},$$

ορίζουμε το μονοπάτι

$$\bar{u}^\tau(x) = \tau \bar{u}(x) + (1 - \tau) \bar{v}(x) \quad (7.6)$$

με εφαπτόμενο διάνυσμα

$$z^\tau(t, x) = \frac{du^\tau}{d\tau}(t, x). \quad (7.7)$$

Τώρα, η z^τ είναι λύση της (7.4) με αρχικά δεδομένα

$$z^\tau(0, x) = \bar{u}(x) - \bar{v}(x). \quad (7.8)$$

Από το Λήμμα 7.16, για κάθε $t > 0$ έχουμε

$$\begin{aligned} \|u(t) - v(t)\|_{L^1} &\leq \int_0^1 \left\| \frac{du^\tau}{d\tau}(t) \right\|_{L^1} d\tau \\ &\leq Le^{-\varepsilon\mu t} \int_0^1 \|\bar{u} - \bar{v}\|_{L^1} d\tau = Le^{-\varepsilon\mu t} \|\bar{u} - \bar{v}\|_{L^1}. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Συνεπώς, κάθε λύση μικρής ολικής κύμανσης είναι ευσταθής.

7.2 Εξάλειψη του ιξώδους

Αν u είναι λύση της

$$u_t + A(u)u_x + \varepsilon g(u) = u_{xx} \quad (7.10)$$

$$u(0, x) = \bar{u}(x) = u_0(\varepsilon x), \quad (7.11)$$

ορισμένη για κάθε $t \geq 0$ με ολική κύμανση

$$\text{Tot. Var.}\{u(t)\} = Ce^{-\varepsilon\mu t} \text{Tot. Var.}\{\bar{u}\} = Ce^{-\varepsilon\mu t} \text{Tot. Var.}\{u_0\} \quad (7.12)$$

και ομοιόμορφη ευστάθεια

$$\|u(t) - v(t)\|_{L^1} \leq Le^{-\varepsilon\mu t} \|\bar{u} - \bar{v}\|_{L^1}, \quad (7.13)$$

μπορούμε πρώτα απ' όλα να εξάγουμε τα φράγματα

$$\|u(t) - u^*\|_{L^1} \leq Le^{-\varepsilon\mu t} \|\bar{u} - u^*\|_{L^1} = Le^{-\varepsilon\mu t} \frac{1}{\varepsilon} \|u_0 - u^*\|_{L^1}. \quad (7.14)$$

Από τη συνεχή εξάρτηση της u από τον χρόνο, έχουμε

$$\|u_x(t)\|_{L^1} \leq C\delta_0 e^{-\varepsilon\mu t} \quad \text{για κάθε } t > 0, \quad \|u_{xx}(t)\|_{L^1} \leq \begin{cases} \frac{2\kappa\delta_0}{\sqrt{\hat{t}}} e^{-\varepsilon\mu t} & \text{για } t < \hat{t} \\ \frac{2\kappa\delta_0}{\sqrt{\hat{t}}} e^{-\varepsilon\mu t} & \text{για } t \geq \hat{t} \end{cases} \quad (7.15)$$

και, από την ισότητα $u_t = u_{xx} - A(u)u_x - \varepsilon g(u)$, συνεπάγεται

$$\begin{aligned} \|u_t(t)\|_{L^1} &\leq \|u_{xx}(t)\|_{L^1} + \|A(u)u_x\|_{L^1} + \varepsilon \|g(u)\|_{L^1} \\ &\leq L' \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{t}}\right) e^{-\varepsilon\mu t} \end{aligned} \quad (7.16)$$

για κάποια σταθερά L' . Ολοκληρώνοντας την παραπάνω σχέση για δοσμένους χρόνους $t > s \geq 0$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \|u(t) - u(s)\|_{L^1} &\leq \int_s^t \|u_t(\tau)\|_{L^1} d\tau \leq L' \int_s^t e^{-\varepsilon\mu\tau} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{\tau}}\right) d\tau \\ &\leq L' e^{-\varepsilon\mu s} (|t - s| + |\sqrt{t} - \sqrt{s}|). \end{aligned} \quad (7.17)$$

Θέλοντας τώρα να επιστρέψουμε στο πρόβλημα (6.5)-(6.6) από το (7.10)-(7.11), αντιστρέφουμε την αλλαγή μεταβλητής $u^\varepsilon \doteq u^\varepsilon(t, x) \doteq u(t/\varepsilon, x/\varepsilon)$ παρατηρώντας πως η u είναι λύση του (7.10)-(7.11). Έτσι, το (6.5)-(6.6) έχει ως μοναδική λύση την u^ε ορισμένη για κάθε χρόνο, με $u_0 - u^* \in L^1$ και $\text{Tot. Var.}\{u_0\} < \delta_0$ για την οποία έχουμε

$$\text{Tot. Var.}\{u^\varepsilon(t)\} = \text{Tot. Var.}\{u(t/\varepsilon)\} \leq C e^{-\mu t} \text{Tot. Var.}\{u_0\}. \quad (7.18)$$

Αν v^ε είναι μία άλλη λύση της (6.5) με αρχικά δεδομένα $v_0 \in L^1$, τότε από την (7.13) έχουμε

$$\|u^\varepsilon(t) - v^\varepsilon(t)\|_{L^1} = \varepsilon \|u(t) - v(t)\|_{L^1} \leq L e^{-\mu t} \|u_0 - v_0\|_{L^1}. \quad (7.19)$$

Τέλος, για την συνέχεια ως προς τον χρόνο για τις λύσεις της (6.5), έχουμε

$$\begin{aligned} \|u^\varepsilon(t) - u^\varepsilon(s)\|_{L^1} &= \varepsilon \|u(t/\varepsilon) - u(s/\varepsilon)\|_{L^1} \\ &\leq \varepsilon L' \left(\left| \frac{t}{\varepsilon} - \frac{s}{\varepsilon} \right| + \left| \sqrt{\frac{t}{\varepsilon}} - \sqrt{\frac{s}{\varepsilon}} \right| \right) e^{-\mu s} \\ &= L' (|t - s| + \sqrt{\varepsilon} |\sqrt{t} - \sqrt{s}|) e^{-\mu s}. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Σε αυτό το σημείο, για να εξαλείψουμε το ε , χρησιμοποιούμε το Θεώρημα του Helly 1.1 που μας επιτρέπει να επιλέξουμε μία υπακολουθία $(u^{\varepsilon_m})_m$ για την οποία ισχύει

$$u^{\varepsilon_m}(t) \longrightarrow u(t) \quad \text{στον } L^1_{\text{loc}} \quad (7.21)$$

για κάθε $t > 0$. Το όριο αυτό είναι φραγμένης κύμανσης για την οποία ισχύει

$$\text{Tot. Var.}\{u(t)\} \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \text{Tot. Var.}\{u^{\varepsilon_m}(t)\} \quad (7.22)$$

$$\leq C e^{-\mu t} \text{Tot. Var.}\{u_0\}. \quad (7.23)$$

Για την ολοκλήρωση της ανάλυσής μας και της απόδειξης του Θεωρήματος 6.7, παρατη-

ρούμε ότι η u είναι εκ κατασκευής ασθενής λύση του

$$\begin{aligned}u_t + f(u)_x + g(u) &= 0 \\ u(0, x) &= u_0(x),\end{aligned}\tag{7.24}$$

όποτε είναι σε συντηρητική μορφή.

Σημείωση 7.16. Όπως θα περίμενε κανείς, η κουβέντα για τους νόμους ισορροπίας δεν τελειώνει εδώ. Ενδεικτικά, αναφέρουμε ότι στο [21] η συγγραφέας αποδεικνύει με μεθόδους ημιομάδων πως η λύση του (7.24) είναι η μοναδική ασθενής λύση που συγκλίνει στη λύση του συστήματος για νόμους διατήρησης καθώς η g τείνει να γίνει ταυτοτικά μηδέν. Κλείνουμε αναφέροντας μία εφαρμογή: στις δουλειές των Donatelli-Τριβιζά ([22]) οι μέθοδοι που εμφανίζονται εδώ χρησιμοποιούνται σε μοντέλα για την εξάπλωση του καρκίνου.

Παράρτημα

Παράρτημα **A'**

Αποδείξεις επιλεγμένων θεωρημάτων

A'.1 Απόδειξη του Θεωρήματος 1.1

Για κάθε $\nu \geq 1$, ορίζουμε

$$U_\nu \doteq \sup \left\{ \sum_{j=1}^N |u_\nu(x_j) - u_\nu(x_{j-1})| : N \geq 1, \text{ και } x_0 < x_1 < \dots < x_N = x \right\}$$

το total variation της u_ν στο $(-\infty, x]$. Παρατηρούμε ότι κάθε U_ν είναι μη-φθίνουσα και ικανοποιεί τις σχέσεις

$$0 \leq U_\nu(x) \leq C, \quad |u_\nu(y) - u_\nu(x)| \leq U_\nu(p_2) - U_\nu(p_1) \quad \forall p_1 \leq x \leq y \leq p_2. \quad (\text{A'.1})$$

Μπορούμε να επιλέξουμε την διαγώνια υπακολουθία $U_{\nu'}$ για την οποία, για κάθε $x \in \mathbb{Q}$ ισχύει

$$\lim_{\nu' \rightarrow \infty} U_{\nu'}(x) = U(x).$$

Λόγω της (A'.1), η συνάρτηση U απεικονίζει το \mathbb{Q} στο $[0, C]$ με μη-φθίνοντα τρόπο. Έτσι, για κάθε $n \geq 1$, θεωρούμε το σύνολο των σημείων άλματος

$$J_n \doteq \left\{ x \in \mathbb{R} : \lim_{y \rightarrow x^+} U(y) - \lim_{y \rightarrow x^-} U(y) \geq \frac{1}{n} \right\},$$

όπου $y \in \mathbb{Q}$. Επίσης, λόγω του ορισμού της U , το J_n μπορεί να έχει το πολύ $C \cdot n$ το πλήθος σημεία. Έτσι, για

$$J \doteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n,$$

το σύνολο των $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία τα αριστερα και δεξιά όρια της U δε ταυτίζονται είναι το πολύ αριθμήσιμο.

Θεωρούμε την υπακολουθία u_μ έτσι ώστε το όριο

$$u(x) \doteq \lim_{\mu \rightarrow \infty} u_\mu(x) \quad (\text{A'.2})$$

να υπάρχει για κάθε $x \in \mathbb{Q} \cup J$ και ισχυριζόμαστε πως αυτό το όριο υπάρχει για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Πράγματι, έστω ότι $x \notin J$, δηλαδή για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $x \notin J_n$. Συνεπώς, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχουν $p_1, p_2 \in \mathbb{Q}$ έτσι ώστε $p_1 < x < p_2$ και $U(p_2) - U(p_1) < 2/n$. Τώρα, απο το (A'.1)

έχουμε

$$\begin{aligned} \limsup_{h,k \rightarrow \infty} |u_h(x) - u_k(x)| &\leq \limsup_{h \rightarrow \infty} |u_h(x) - u(p_1)| + \limsup_{k \rightarrow \infty} |u_k(x) - u(p_1)| \\ &= 2 \cdot \limsup_{\mu \rightarrow \infty} |u_\mu(x) - u_\mu(p_1)| \leq 2 \cdot \limsup_{\mu \rightarrow \infty} (U_\mu(p_2) - U_\mu(p_1)) \\ &= 2(U(p_2) - U(p_1)) < \frac{4}{n} \end{aligned}$$

και, δεδομένου ότι το n είναι αυθαίρετο, έπεται το ζητούμενο¹.

Τώρα, για δοθέντα $x_0 < x_1 < \dots < x_N = x$ έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N |u(x_j) - u(x_{j-1})| &= \lim_{\mu \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=1}^N |u_\mu(x_j) - u_\mu(x_{j-1})| \right) \\ &\leq \limsup_{\mu \rightarrow \infty} (\text{Tot. Var. } u_\mu) \leq C. \end{aligned} \tag{A'.3}$$

Συνεπώς, $\text{Tot. Var. } u \leq C$. Το ότι $|U| \leq M$ είναι προφανές. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. \square

A'.2 Απόδειξη του Θεωρήματος 1.2

Από το Θεώρημα 1.1, υπάρχει υπακολουθία u_μ τέτοια ώστε $u_\mu(t, \cdot) \xrightarrow{pw} u(t, \cdot)$ για κάθε $t \in \mathbb{Q}_+$ συνεπώς $u \in \mathbf{L}_{loc}^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ η οποία, για κάθε $t, s \in \mathbb{Q}$, ικανοποιεί την (1.7). Θα δείξουμε ότι επιδέχεται συνεχή επέκταση.

Ορίζουμε

$$u(t, \cdot) \doteq \lim_{m \rightarrow \infty} u(t_m, \cdot)$$

όπου $t_m \in \mathbb{Q}$ και $t_m \rightarrow t$. Το άνω όριο υπάρχει και είναι ανεξάρτητο της ακολουθίας (λόγω του πρώτου φράγματος (1.7)). Παρατηρούμε, επίσης, πως αλλάζοντας αν χρειαστεί τις τιμές της u σε ένα σύνολο μέτρου μήδεν, έχουμε

$$\text{Tot. Var. } u(t_m, \cdot) \leq C, \quad |u(t_m, x)| \leq M \quad \forall m \geq 1, x \in \mathbb{R}.$$

Τέλος, ορίζουμε για $\varepsilon > 0$

$$u^\varepsilon(t, x) \doteq \frac{1}{\varepsilon} \int_x^{x+\varepsilon} u(t, x) dx$$

και παρατηρούμε ότι η u^ε είναι Lipschitz συνεχής ως προς t, x . Πράγματι,

$$\begin{aligned} |u^\varepsilon(t, x) - u^\varepsilon(s, x)| &\leq \frac{1}{\varepsilon} \int_x^{x+\varepsilon} |u(t, x) - u(s, x)| dx \leq \frac{L}{\varepsilon} \cdot |t - s| \\ |u^\varepsilon(t, x) - u^\varepsilon(t, x+h)| &\leq \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_x^{x+h} + \int_{x+\varepsilon}^{x+\varepsilon+h} \right) |u(t, y)| dy \leq \frac{2M}{\varepsilon} \cdot h. \end{aligned}$$

¹και το πρώτο κομμάτι του θεωρήματος

Επιπροσθέτως, για κάθε t, x έχουμε

$$\tilde{u}(t, x) \doteq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} u^\varepsilon(t, x) = u(t, x+), \quad (\text{A'.4})$$

όπου η συνάρτηση \tilde{u} είναι κατά σημείο όριο συνεχών συναρτήσεων και κατά συνέπεια Borel μετρήσιμη. Με άλλα λόγια, η ισότητα $\tilde{u}(t, x) = u(t, x)$ ισχύει για σχεδόν όλα τα x . Αντικαθιστώντας την u με την \tilde{u} , το Θεώρημα αποδείχθηκε. \square

A'.3 Απόδειξη της Πρότασης 3.2

Σκοπός μας είναι να δείξουμε τα ακόλουθα φράγματα

$$\begin{aligned} \|u_{xx}(t)\|_{\mathbf{L}^1}, \|z_x(t)\|_{\mathbf{L}^1} &\leq \frac{2\kappa\delta_0}{\sqrt{t}}, \\ \|u_{xxx}(t)\|_{\mathbf{L}^1}, \|z_{xx}(t)\|_{\mathbf{L}^1} &\leq \frac{5\kappa^2\delta_0}{t}, \\ \|u_{xxx}(t)\|_{\mathbf{L}^\infty}, \|z_{xx}(t)\|_{\mathbf{L}^\infty} &\leq \frac{16\kappa^3\delta_0}{t\sqrt{t}}. \end{aligned} \quad (\text{A'.5})$$

Βάση της έως τώρα ανάλυσης μας η z_x μπορεί να γραφεί ως

$$z_x(t) = G_x^*(t) * z(0) + \int_0^t G_x^*(t-s) * \{(A^* - A(u))z_x(s) - (z \bullet A(u))u_x(s)\} ds. \quad (\text{A'.6})$$

Με χρήση των

$$\|G^*(t)\|_{\mathbf{L}^1} \leq \kappa, \quad \|G_x^*(t)\|_{\mathbf{L}^1} \leq \frac{\kappa}{\sqrt{t}}, \quad \|G_{xx}^*(t)\|_{\mathbf{L}^1} \leq \frac{\kappa}{t} \quad (\text{A'.7})$$

και των υποθέσεών μας έχουμε

$$\begin{aligned} &\left\| \int_0^t G_x^*(t-s) * \{(A^* - A(u))z_x(s) - (z \bullet A(u))u_x(s)\} ds \right\|_{\mathbf{L}^1} \\ &\leq \int_0^t \|G_x^*(t-s)\|_{\mathbf{L}^1} \{ \|u_x(s)\|_{\mathbf{L}^1} \|DA\|_{\mathbf{L}^\infty} \|z_x(s)\|_{\mathbf{L}^1} + \|z(s)\|_{\mathbf{L}^\infty} \|DA\|_{\mathbf{L}^\infty} \|u_x(s)\|_{\mathbf{L}^1} \} ds \\ &\leq 2\delta_0\kappa \|DA\|_{\mathbf{L}^\infty} \cdot \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}} \|z_x(s)\|_{\mathbf{L}^1} ds. \end{aligned}$$

Αρχικά υποθέτουμε ότι έχουμε ομαλά αρχικά δεδομένα. Προς άτοπο υποθέτουμε ότι υπάρχει κάποιος χρόνος $\tau < \hat{t}$ για τον οποίο ισχύει η ισότητα στο (A'.5)₁ και παρατηρούμε ότι

$$\int_0^t \frac{1}{\sqrt{s(t-s)}} ds = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\sigma(1-\sigma)}} d\sigma = \pi < 4.$$

Κάνοντας του υπολογισμούς παίρνουμε

$$\begin{aligned} \|z_x(\tau)\|_{\mathbf{L}^1} &\leq \frac{\kappa}{\sqrt{\tau}}\delta_0 + 2\kappa\delta_0 \|DA\|_{\mathbf{L}^\infty} \cdot \int_0^\tau \frac{1}{\sqrt{\tau-s}} \frac{2\delta_0\kappa}{\sqrt{s}} ds \\ &< \frac{\kappa\delta_0}{\sqrt{\tau}} + 16\kappa^2\kappa_A\delta_0^2 \leq \frac{2\kappa\delta_0}{\sqrt{\tau}}, \end{aligned}$$

πράγμα άτοπο. Συνεπώς η (A'.5)₁ ισχύει ως γνήσια ανίσωση για κάθε $t \in [0, \hat{t}]$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι τα άνω φράγματα εξαρτώνται μόνο από τις \mathbf{L}^1 νόρμες των u_x και z με ένα επιχείρημα προσέγγισης μπορούμε να τα γενικεύσουμε για γενικότερα αρχικά δεδομένα και όχι απλώς ομαλά. Επίσης, δεδομένου ότι $z = u_x$ είναι μία ειδική λύση της:

$$z_t + A^* z_x - z_{xx} = (A^* - A(u)) z_x - (z \bullet A(u)) u_x,$$

το φράγμα (A'.5)₁ ισύει και όταν $z_x = u_{xx}$.

Με παρόμοιες τεχνικές δείχνουμε και το (A'.5)₂. Ειδικότερα για,

$$\begin{aligned} z_{xx}(t) &= G_x^*(t/2) * z_x(t/2) \\ &\quad - \int_{t/2}^t G_x^*(t-s) * \{(z \bullet A(u)) u_x(s) + (A(u) - A^*) z_x(s)\}_x ds \end{aligned} \quad (\text{A'.8})$$

πρώτα δείξουμε το (A'.5)₂ για την περίπτωση που $z_{xx} = u_{xxx}$. Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει κάποιος χρόνος $\tau < \hat{t}$ για τον οποίο ισχύει η ισότητα στο (A'.5)₂ για πρώτη φορά βάσει των υποθέσεων της πρότασης έχουμε

$$\begin{aligned} \|z_{xx}(\tau)\|_{\mathbf{L}^1} &\leq \frac{2\kappa\delta_0}{\sqrt{\tau/2}} \cdot \frac{2\kappa\delta_0}{\sqrt{\tau/2}} \\ &\quad + \int_{\tau/2}^{\tau} \frac{\kappa}{\sqrt{\tau-s}} \cdot \{\|z_x \bullet A(u) u_x(s)\|_{\mathbf{L}^1} + \|z \bullet (u_x \bullet A(u)) u_x(s)\|_{\mathbf{L}^1}\} ds \\ &\quad + \|z \bullet A(u) u_{xx}(s)\|_{\mathbf{L}^1} + \|u_x \bullet A(u) z_x(s)\|_{\mathbf{L}^1} + \|(A(u) - A^*) z_{xx}(s)\|_{\mathbf{L}^1} ds \\ &\leq \frac{4\kappa^2\delta_0}{\tau} + \kappa\delta_0 (4\kappa^2\delta_0^2 \|D^2 A\|_{\mathbf{L}^\infty} + 20\kappa^2\delta_0 \|DA\|_{\mathbf{L}^\infty}) \int_{\tau/2}^{\tau} \frac{1}{s\sqrt{\tau-s}} ds \\ &< \frac{4\kappa^2\delta_0}{\tau} + 20\kappa^3\kappa_A\delta_0^2 \cdot \frac{4}{\sqrt{\tau/2}} < \frac{5\kappa^2\delta_0}{\tau} \end{aligned}$$

πράγμα άτοπο.

Τέλος, από (A'.8) και (A'.5)₁–(A'.5)₂ το φράγμα (A'.5)₃ αποδεικνύεται μέσω της παρακάτω ανισότητας

$$\begin{aligned} \|z_{xx}(\tau)\|_{\mathbf{L}^\infty} &\leq \frac{\kappa}{\sqrt{\tau/2}} \cdot \frac{5\kappa^2\delta_0}{\tau/2} + \int_{\tau/2}^{\tau} \frac{\kappa}{\sqrt{\tau-s}} \\ &\quad \cdot \{\|z_x \bullet A(u) u_x(s)\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|z \bullet (u_x \bullet A(u)) u_x(s)\|_{\mathbf{L}^\infty} \\ &\quad + \|z \bullet A(u) u_{xx}(s)\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|u_x \bullet A(u) z_x(s)\|_{\mathbf{L}^\infty} \\ &\quad + \|(A(u) - A^*) z_{xx}(s)\|_{\mathbf{L}^\infty}\} ds \end{aligned} \quad (\text{A'.9})$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{10\sqrt{2}\kappa^3\delta_0}{\tau\sqrt{\tau}} + (8\kappa^4\delta_0^3 \|D^2 A\| + 46\kappa^4\delta_0^2 \|DA\|) \int_{\tau/2}^{\tau} \frac{1}{s^{3/2}\sqrt{\tau-s}} ds \\ &\leq \frac{15\kappa^3\delta_0}{\tau\sqrt{\tau}} + 46\kappa^4\kappa_A\delta_0^2 \cdot \frac{4}{\tau/2} < \frac{16\kappa^3\delta_0}{\tau\sqrt{\tau}}. \end{aligned}$$

□

Βιβλιογραφία

- [1] Lawrence C. Evans και Ronald F. Gariepy. *Measure Theory and Fine Properties of Functions*. CRC Press, New York, αναθεωρημένη έκδοση, 2015.
- [2] Gilles Aubert και Pierre Kornprobst. *Mathematical Problems in Image Processing*. Springer-Verlag New York, New York, 2η έκδοση, 2006.
- [3] A. Bressan. *Hyperbolic Systems of Conservation Balance laws: The One-dimensional Cauchy Problem*. Oxford University Press, 2000.
- [4] KlausJochen Engel και Rainer Nagel. *A Short Course on Operator Semigroups*. Springer-Verlag New York, New York, 1η έκδοση, 2006.
- [5] Alberto Bressan, Denis Serre, Mark Williams και Kevin Zumbrun. *Hyperbolic Systems of Balance Laws*. Springer, New York, αναθεωρημένη έκδοση, 2007.
- [6] A. Bressan. *Hyperbolic Conservation Laws-An Illustrated Tutorial*. Department of Mathematics, Penn State University, 2009.
- [7] Randall J. LeVeque. *Numerical Methods for Conservation Laws*. Birkhäuser Basel, 1992.
- [8] Tai Ping Liu. *Admissible Solutions of Hyperbolic Conservation Laws*. *Mem. Amer. Math.Soc.*, 240, 1981.
- [9] T. P. Liu και T. Yang. *Weak solutions of general systems of hyperbolic conservation laws*. *Comm. Math. Phys.*, 230:289–327, 2002.
- [10] T. Iguchi και P. G. LeFloch. *Existence theory for hyperbolic systems of conservation laws with general flux-functions*. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 168:165–244, 2003.
- [11] S. Bianchini και A. Bressan. *Vanishing viscosity solutions of nonlinear hyperbolic systems*. *Ann. of Math.*, 161:223–342, 2005.
- [12] Tai Ping Liu. *The entropy condition and the admissibility of shocks*. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 53(1):78–88, 1976.
- [13] H. K. Jenssen. *Blowup for systems of conservation laws*. *SIAM J. Math. Anal.*, 31:894–908, 2000.
- [14] Tai Ping Liu. *Nonlinear stability of shock waves for viscous conservation laws*. *Amer. Math. Soc. Memoir*, 1986.

- [15] C. M. Dafermos. *Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics*. Springer-Verlag, New York, 2010.
- [16] A. Bressan και R.M. Colombo. *The semigroup generated by 2/times2 conservation laws*. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 133:1–75, 1995.
- [17] A. Bressan, R.M. Colombo και B. Piccoli. *Well Posedness of the Cauchy problem of $n \times n$ conservation laws*. *Amer. Math. Soc. Memoir.*, 694, 2000.
- [18] A. Bressan και P. Goatin. *Oleinik type estimates and uniqueness for $n \times n$ conservation laws*. *J. Diff. Equat.*, 156:26–49, 1999.
- [19] A. Bressan, T.P. Liu και T. Yang. *L^1 stability estimates for $n \times n$ conservation laws*. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 149:1–22, 1999.
- [20] C. Christoforou. *Hyperbolic systems of balance laws via vanishing viscosity*. *Journal of Differential Equations*, 221:470–541, 2006.
- [21] C. Christoforou. *Uniqueness and sharp estimates on solutions to hyperbolic systems with dissipative source*. *Commun. Partial Differential Equations*, 31:1825–1839, 2006.
- [22] Donatella Donatelli και Konstantina Triviza. *On the vanishing viscosity approximation of a nonlinear model for tumor growth*. *Preprint*, 2017.

