

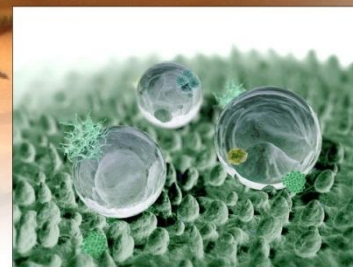
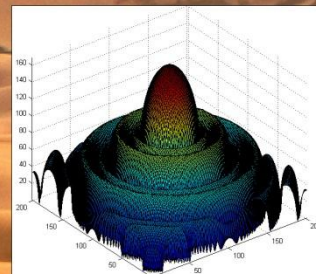
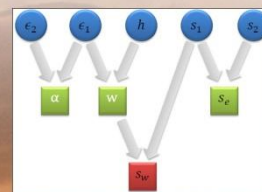
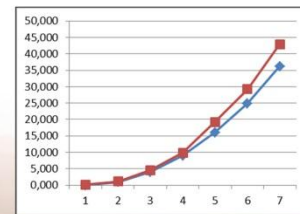
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Δ.Π.Μ.Σ. : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΡΟΤΥΠΟΠΟΙΗΣΗ
ΣΤΙΣ ΣΥΓΧΡΟΝΕΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΕΣ & ΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑ



ΚΟΡΥΦΟΚΕΝΤΡΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΟΡΓΑΝΩΣΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ



ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ζέρβας Δημήτρης, Ηλεκτρολόγος Μηχανικός & Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ:

Μπουντουβής Α., Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούλιος 2011

ΚΟΡΥΦΟΚΕΝΤΡΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΟΡΓΑΝΩΣΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η μορφολογία των επιφανειών των αντικειμένων ή δομών επηρεάζει αποφασιστικά σχεδόν όλες τις φυσικοχημικές ιδιότητές τους (προσρόφηση ατόμων και μορίων, διαβροχή, σκέδαση ακτινοβολίας, τριβή, ηλεκτρική και μαγνητική αγωγιμότητα κ.λπ.). Η επίδραση αυτή γίνεται πιο έντονη όσο μικραίνουν οι διαστάσεις των αντικειμένων και πλησιάζουμε τη νανοκλίμακα λόγω της αύξησης του λόγου επιφάνειας προς όγκο. Επιπλέον, σε αυτές τις διαστάσεις συχνά παρατηρούνται φαινόμενα αυτο-οργάνωσης που οδηγούν σε επιφάνειες με σχετικά υψηλό βαθμό οργάνωσης της μορφολογίας τους. Ωστόσο, παρά την προφανή σημασία και χρησιμότητά αυτών των επιφανειών, ο χαρακτηρισμός του βαθμού οργάνωσης τους δεν έχει μελετηθεί συστηματικά και εν πολλοίς παραμένει ανοικτό θέμα.

Στην εργασία αυτή, αφού πρώτα συζητήσουμε τα μειονεκτήματα των παραδοσιακών μεθόδων ανίχνευσης περιοδικοτήτων στην επιφάνεια και άρα χαρακτηρισμού του βαθμού οργάνωσης τους (ανάλυση Fourier και συναρτήσεις (αυτο)συσχέτισης υψών), προτείνουμε μία εναλλακτική προσέγγιση με βασική ιδέα την ενσωμάτωση της παρουσίας ευδιάκριτων κορυφών στην επιφάνεια, στους ορισμούς των συναρτήσεων που χρησιμοποιούνται σε αυτή. Πιο συγκεκριμένα, εισάγουμε δύο νέες συναρτήσεις για τον προσδιορισμό της ποιότητας δομής μιας επιφάνειας, την *κορυφοκεντρική συνάρτηση μέσου ύψους επιφάνειας* $P(r)$ και την *κορυφοκεντρική συνάρτηση διασποράς ύψους επιφάνειας* $Q(r)$. Η $P(r)$ προσδιορίζει, σε πρώτη φάση, τη μορφή και τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του μέσου υψώματος και σε δεύτερη φάση τη δομή της επιφάνειας, δηλαδή το πόσο τακτοποιημένα επαναλαμβάνονται τα υψώματα στο χώρο και αν τυχόν υπάρχουν περιοχές όπου απουσιάζουν. Η $Q(r)$ προσδιορίζει το βαθμό απόκλισης μεταξύ των υψωμάτων, καθώς και τη διακύμανση της τοπικής δομής της επιφάνειας.

Οι βασικές ιδιότητες αυτών των συναρτήσεων διερευνώνται τόσο αναλυτικά όσο και αριθμητικά με τη βοήθεια προσομοιώσεων επιφανειών με ελεγχόμενο βαθμό οργάνωσης. Δείχνεται ότι από τα χαρακτηριστικά των προτεινόμενων συναρτήσεων μπορούν να ανιχνευτούν διαφορετικά είδη αποκλίσεων από την πλήρη οργάνωση/περιοδικότητα της επιφάνειας, σε αντίθεση με τις παραδοσιακές μεθόδους.

Προϋπόθεση εφαρμογής της νέας μεθόδου είναι η ύπαρξη ευδιάκριτων κορυφών και η δυνατότητα προσδιορισμού της διαφοράς του ύψους της τελικής επιφάνειας από την αρχική. Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι αυτές οι προϋποθέσεις πληρούνται σε επιφάνειες που δημιουργούνται στα πρώτα στάδια εναπόθεσης από εξάχνωση υλικού, ή από εναπόθεση νανοσωματιδίων ή από εγγάραξη με πλάσμα ώστε να σχηματισθούν ευδιάκριτες και καλώς ορισμένες περιοχές νησίδων με υλικό.

ABSTRACT

The morphology of the surfaces of the objects or the structures strongly influences almost all their physical and chemical characteristics (adhesion of atoms and molecules, wetting, wave scattering, friction, electromagnetic conductivity etc.). This effect is intensified as the dimensions of the objects are minimized and the surface to volume ratio increases in nanoscale. Moreover, in these dimensions, phenomena of self-organizing are observed, which lead to surfaces with relatively high degree of order in their morphology. However, although the importance and usefulness of these surfaces are obvious, the characterization of their degree of order has not yet been studied in a systematic way and thus remains open to discussion.

In this dissertation, after discussing the shortcomings of the traditional techniques of detection of periodicity in surfaces and their degree of order (*Fourier analysis* and *auto-correlation* functions of height), an alternative approach is suggested, centering on the idea of incorporating the presence of distinct peaks of the surface in the definitions of the functions that are used. More particularly, two new functions are introduced, that determine the quality of the surfaces structure, the *peak centered mean height function* $P(r)$ and the *peak centered height variance function* $Q(r)$. The *peak centered mean height function* $P(r)$ primarily determines the form and the geometric characteristics of the mean mound and secondarily the structure of the surface, i.e. the way the mounds are distributed in space and if there are areas with lack of mounds. The *peak centered height variance function* $Q(r)$ determines the degree of deviation between the mounds, as well as the variance of the localized structure of the surface.

The basic characteristics of these functions are investigated analytically and numerically, using simulations of surfaces with a controlled degree of order. It is shown that from the characteristics of the proposed functions, different types of deviation from the complete order/periodicity of the surface can be detected, as opposed to the traditional methods.

In order for the new method to be applicable, there needs to be a distinct presence of peaks and the possibility of determining the difference in height of the final surface from the original. Indicatively, it is mentioned that these prerequisites are met in surfaces that are formed in the early stages of vapor deposition, from the deposit of nanoparticles or from plasma etching, in order to create more distinct and well-defined areas of material islands.

ΣΥΜΒΟΛΑ

M	αριθμός υψωμάτων τοποθετημένων σε μια επιφάνεια
$f_m(x)$	ύψος υψώματος m στο σημείο x (συνεχής μορφή) όπου $m=0,1,\dots,M$
f_{mn}	ύψος υψώματος m στο σημείο n (διακριτή μορφή)
h_m	ύψος κορυφής γκαουσσιανού υψώματος m
s_h^2	διασπορά ύψους της κορυφής των γκαουσσιανών υψωμάτων
w_m	πλάτος γκαουσσιανού υψώματος m
s_w^2	διασπορά πλάτους των γκαουσσιανών υψωμάτων
μ_e	μέση απόσταση υψωμάτων
s_e^2	διασπορά θορύβου τοποθέτησης των υψωμάτων γύρω από την ιδανική περιοδική θέση
E_m	εμβαδόν μονοδιάστατου υψώματος m
V_m	όγκος δισδιάστατου υψώματος m
x_m	κέντρο βάρους υψώματος m
σ_m	εύρος υψώματος m (για γκαουσσιανά υψώματα $\sigma_m = w_m$)
R	ακτίνα αδράνειας των 2 ημίσειων λοβών της P
$P(r)$	μέσο ύψος επιφάνειας σε απόσταση r από τις κορυφές των υψωμάτων
$Q(r)$	διασπορά ύψους επιφάνειας σε απόσταση r από τις κορυφές των υψωμάτων
h	μέσο ύψος των γκαουσσιανών υψωμάτων
w	μέσο πλάτος των γκαουσσιανών υψωμάτων
s_1	εύρος του πρώτου λοβού της P
s_2	εύρος του δεύτερου λοβού της P
μ_1	κέντρο βάρους του πρώτου λοβού της P
μ_2	κέντρο βάρους του δεύτερου λοβού της P
ϵ_1	εμβαδόν του πρώτου λοβού της P
ϵ_2	εμβαδόν του δεύτερου λοβού της P
ϵ	ημίσειο άθροισμα του εμβαδού των 2 λοβών της P
ϵ_x	εμβαδόν μονοδιάστατης επιφάνειας
V_1	εμβαδόν του πρώτου λοβού της Q
V_2	εμβαδόν του δεύτερου λοβού της Q
V_x	όγκος του υλικού που έχει τοποθετηθεί σε δισδιάστατη επιφάνεια
$P_{2,max}$	κορυφή του δεύτερου λοβού της P
α	ποσοστό απουσίας γειτονικών υψωμάτων
$1-\alpha$	βαθμός πλήρωσης της δομής της επιφάνειας
θ	παράμετρος πλήρωσης της δομής της επιφάνειας
M_1	συντελεστής μεταβλητότητας των υψωμάτων
M_2	συντελεστής μεταβλητότητας της δομής της επιφάνειας

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

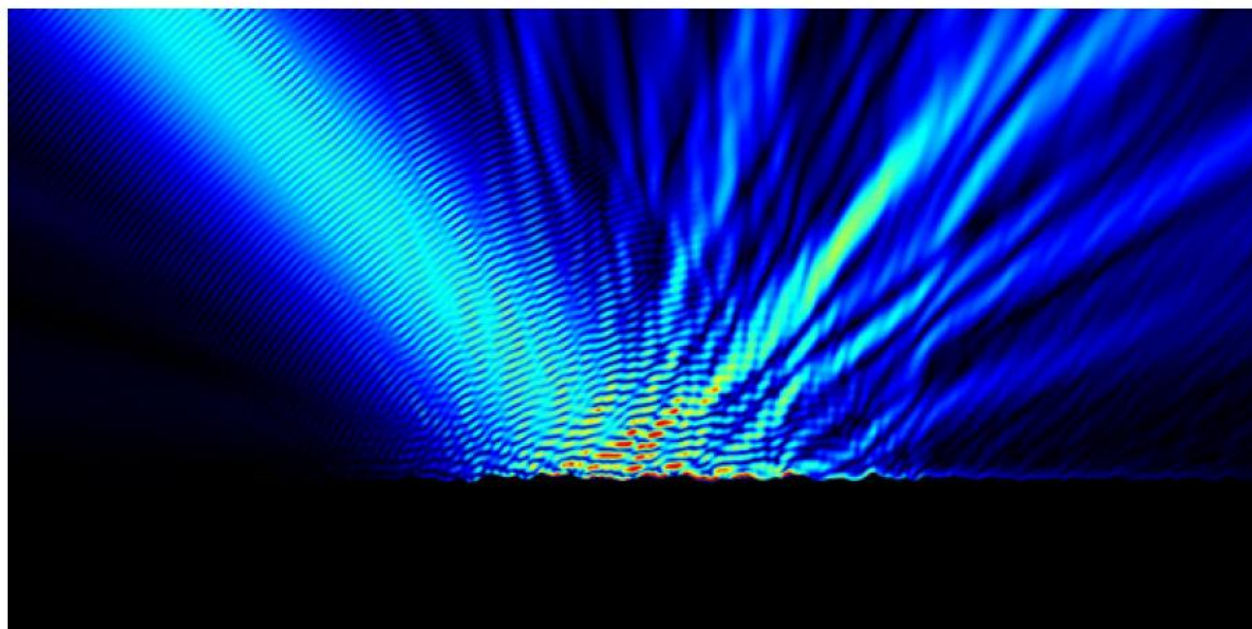
ΠΕΡΙΛΗΨΗ	2
ΣΥΜΒΟΛΑ	4
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ	5
1.ΕΙΣΑΓΩΓΗ	7
1.1 Τα κίνητρα της εργασίας: Επιφάνειες και ο βαθμός οργάνωσής τους	7
1.2 Περιοδικές επιφάνειες και αποκλίσεις	8
1.3 Περιοδικότητα και συμμετρία	10
2. ΚΛΑΣΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗΣ ΤΗΣ ΜΟΡΦΟΛΟΓΙΑΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ	13
2.1 Φάσμα ισχύος	13
2.2 Παράμετρος τάξης της επιφάνειας	16
2.3 Μειονεκτήματα του φάσματος ισχύος	17
2.4 Συνάρτηση αυτοσυσχέτισης	26
2.5 Συνάρτηση συσχέτισης διαφοράς υψών	28
2.6 Παραλλαγές των συναρτήσεων συσχέτισης	28
3. ΚΟΡΥΦΟΚΕΝΤΡΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΣΟΥ ΥΨΟΥΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ ΜΙΑΣ ΔΙΑΣΤΑΣΗΣ	32
3.1 Διάφοροι ορισμοί	32
3.2 Περιγραφή της κορυφοκεντρικής συνάρτησης μέσου ύψους επιφάνειας	35
3.3 Μέσο ύψωμα	37
3.4 Μέση διαμόρφωση γειτονικών υψωμάτων	41
3.5 Σύνοψη της κορυφοκεντρικής συνάρτησης μέσου ύψους επιφάνειας, όταν οι λοβοί είναι διακριτοί	48
3.6 Μη διακριτοί λοβοί	51
3.7 Σύνοψη της κορυφοκεντρικής συνάρτησης μέσου ύψους επιφάνειας, όταν οι λοβοί δεν είναι διακριτοί	56

4. ΚΟΡΥΦΟΚΕΝΤΡΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ ΥΨΟΥΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ ΜΙΑΣ ΔΙΑΣΤΑΣΗΣ	61
4.1 Περιγραφή της κορυφοκεντρικής συνάρτησης διασποράς ύψους επιφάνειας	61
4.2 Μεταβλητότητα υψώματος	62
4.3 Μεταβλητότητα δομής	65
5. ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΔΥΟ ΔΙΑΣΤΑΣΕΩΝ	68
5.1 Εισαγωγή	68
5.2 Η εγγενής ελλειμματικότητα των επιφανειών δύο διαστάσεων	68
5.2 Αξιολόγηση δισδιάστατων επιφανειών	71
5.3 Η κορυφοκεντρική συνάρτηση μέσου ύψους επιφάνειας	71
5.5 Σύνοψη της κορυφοκεντρικής συνάρτησης μέσου ύψους επιφάνειας, όταν οι λοβοί είναι διακριτοί	76
6. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ	82
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	83

1.ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Τα κίνητρα της εργασίας: Επιφάνειες και ο βαθμός οργάνωσής τους

Στη φύση δεν υπάρχουν απόλυτα όμοιες επιφάνειες. Ακόμα και αν ένα κομμάτι χαρτιού μας φαίνεται λείο, εντούτοις σε πολύ μικρή κλίμακα είναι γεμάτο από κοιλάδες και βουνά. Αυτή η μορφολογία των επιφανειών επηρεάζει σημαντικά τις φυσικές και χημικές ιδιότητές τους, π.χ. τον τρόπο που ανακλώνται οι ακτίνες του φωτός και γενικότερα τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα όταν προσπίπτουν σε αντικείμενα [Simonsen, 2010], την ηλεκτρική και θερμική αγωγιμότητα [Palasantzas 2005, Liu 2010], τη διαβροχή από σταγόνες νερού και άλλων υγρών [Quere 2008], στη ροή ρευστών μέσα από κανάλια [Yang 2006], την τριβή με άλλες επιφάνειες [Bhushan1998], την προσρόφηση μορίων, πρωτεϊνών ή και κυττάρων [Curtis 2004] κ.λπ.



Σχήμα 1.1.1: Σκέδαση ηλεκτρομαγνητικού κύματος από επιφάνεια τυχαίας τραχύτητας [Simonsen, 2010]

Τα τελευταία χρόνια με τη σμίκρυνση των τεχνολογικών διατάξεων στην κλίμακα των νανομέτρων, ο λόγος του εμβαδού της επιφάνειας προς τον όγκο της προς μελέτη δομής αυξάνεται, με αποτέλεσμα τα επιφανειακά φαινόμενα και κατά συνέπεια και η επιφανειακή μορφολογία να παίζουν αποφασιστικό ρόλο στη λειτουργία των διατάξεων. Για παράδειγμα, έχει δειχθεί ότι η πλευρική τραχύτητα της πύλης ενός τρανζίστορ γίνεται κρίσιμο μέγεθος και αναμένεται να επηρεάσει σημαντικά τα ηλεκτρικά χαρακτηριστικά της λειτουργίας του τρανζίστορ τα επόμενα χρόνια [Gogolides – Constantoudis 2006, Asenov 2003]. Επομένως το πρώτο κίνητρο για τη μελέτη της επιφανειακής μορφολογίας είναι η σημαντική επίδραση που αυτή έχει στη φυσικοχημική συμπεριφορά των επιφανειών ιδιαίτερα στη νανοκλίμακα.

Ένα άλλο κίνητρο είναι ότι η μορφολογία μιας επιφάνειας διαμορφώνεται από τις διεργασίες που την έχουν δημιουργήσει. Συνεπώς, διερευνώντας τα χαρακτηριστικά και τις ιδιότητές της μπορούμε να αποκομίσουμε πληροφορίες για τη φύση και τα χαρακτηριστικά αυτών των διεργασιών.

Για την κατανόηση τόσο της επίδρασης της μορφολογίας στις ιδιότητες μιας επιφάνειας όσο και των χαρακτηριστικών των διεργασιών που την δημιουργήσαν είναι απαραίτητος ένας όσο το δυνατόν πληρέστερος χαρακτηρισμός της μορφολογίας των επιφανειών.

Η μορφολογία των επιφανειών που συναντούμε στη φύση, ή κατασκευάζουμε στο εργαστήριο, έχει συνήθως έντονα χαρακτηριστικά τυχαιότητας και γι' αυτό περιγράφεται με τον όρο τραχύτητα. Τις τελευταίες δεκαετίες, έχει διαπιστωθεί ότι πίσω από τη φαινομενική τυχαιότητα συχνά μπορεί να κρύβεται μία συμμετρία αυτο-ομοιότητας (*self-similarity* or *self-affinity*) που μπορεί να περιγραφεί με τη βοήθεια της γεωμετρίας *φράκταλ* [Barabasi, 1995]. Μπορεί όμως να εμφανίζει περιοδικότητα και οργάνωση και τότε συνήθως μιλάμε για την τοπογραφία της επιφάνειας, ή για δομημένες επιφάνειες. Η οργάνωση σε μία επιφάνεια μπορεί είτε να αναδύεται από διεργασίες αυτοοργάνωσης είτε να επιβάλλεται από διάφορες λιθογραφικές τεχνικές. Και στις δύο περιπτώσεις, αλλά κυρίως στην πρώτη, οι επιφάνειες δεν είναι τελείως περιοδικές με οργάνωση άπειρης εμβέλειας, αλλά εμφανίζουν αποκλίσεις, οι οποίες μπορεί να είναι κρίσιμες για τις ιδιότητες της επιφάνειας και τη λειτουργία της διάταξης που θα ενσωματωθούν. Παρά την προφανή σπουδαιότητα αυτών των αποκλίσεων, ο χαρακτηρισμός τους δεν έχει αποτελέσει ακόμα αντικείμενο συστηματικής έρευνας.

Η παρούσα εργασία έχει ως στόχο τη διαπραγμάτευση αυτού του θέματος με τα παρακάτω βήματα: Αρχικά και στο υπόλοιπο αυτού του κεφαλαίου θα ορισθεί η πλήρης περιοδικότητα μιας επιφάνειας και θα κατηγοριοποιηθούν οι τρόποι απόκλισης από αυτή. Επιπλέον θα συζητηθεί η σημασία της περιοδικότητας με τη συμμετρία μιας επιφάνειας, όπως και του σπασίματός της. Στο επόμενο κεφάλαιο 2, θα αναφερθούμε στις κλασικές μεθόδους ανίχνευσης και χαρακτηρισμού της περιοδικότητας μιας επιφάνειας και θα συζητήσουμε τα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματά τους. Στα κεφ. 3 και 4 θα εισαγάγουμε τις κορυφοκεντρικές συναρτήσεις μέσου ύψους και διασποράς ύψους επιφάνειας μίας διάστασης αντίστοιχα. Θα δοθούν οι σχετικοί ορισμοί, θα συζητηθούν οι ιδιότητες των συναρτήσεων αυτών και στη συνέχεια με αναλυτικό τρόπο, όπου είναι δυνατό, αλλά και αριθμητικό, όπου χρειάζεται, θα συνδεθούν τα βασικά χαρακτηριστικά αυτών των συναρτήσεων με τα χαρακτηριστικά της μορφολογίας των επιφανειών και των αποκλίσεών τους από την πλήρη οργάνωση και περιοδικότητα. Στο κεφ. 5, η μελέτη θα επεκταθεί στις 2 διαστάσεις και θα εξετασθεί η εφαρμογή των σχέσεων και αντιστοιχίσεων των προηγούμενων κεφαλαίων σε επιφάνειες δύο διαστάσεων.

1.2 Περιοδικές επιφάνειες και αποκλίσεις

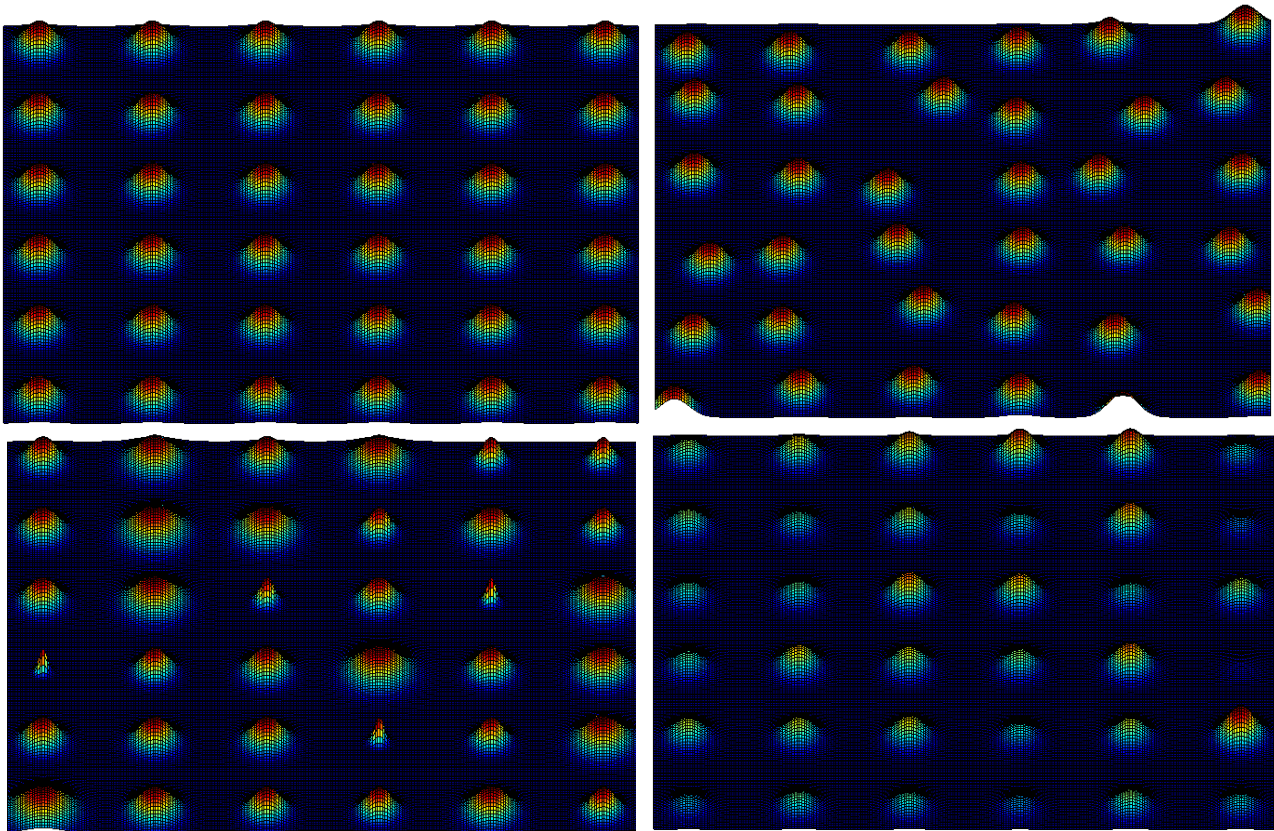
Έστω μια δισδιάστατη επιφάνεια το ύψος της οποίας στο σημείο (x,y) είναι $h(x,y)$. Θα θεωρούμε ότι η επιφάνεια διαθέτει περιοδική δομή, αν υπάρχουν $d_x, d_y \in R$ τέτοια ώστε [Καραγιάννης, 1988]:

$$h(x + d_x, y + d_y) = h(x, y) \text{ για κάθε } x, y$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί να ισχύει για περισσότερες της μιας τιμές των d_x και d_y . Το ζεύγος εκείνο τιμών με τις ελάχιστες μη μηδενικές τιμές λέγεται θεμελιώδης περίοδος.

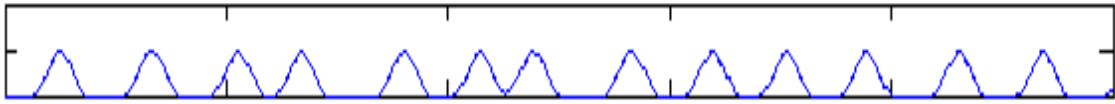
Αναλόγως των d_x και d_y έχουμε τα διάφορα κρυσταλλικά πλέγματα: τριγωνικό, τετραγωνικό, εξαγωνικό κ.τ.λ. Το επαναλαμβανόμενο μόρφωμα μπορεί να έχει διάφορες δομές. Μπορεί δηλαδή να είναι μια απλή κορυφή, όπως γκαουσιανή, κωνοειδής κ.τ.λ., είτε να έχει πιο πολύπλοκη δομή, δημιουργημένη από πολλές κορυφές σε κάποιο σχηματισμό.

Επιφάνειες στις οποίες να τηρείται απόλυτα ο τελευταίος τύπος δεν υπάρχουν. Αποκλίσεις από την απόλυτη περιοδικότητα μπορούμε να έχουμε είτε λόγω διακυμάνσεων στη θέση των υψωμάτων, είτε λόγω διαφορετικών γεωμετρικών χαρακτηριστικών (σχήμα 1.2.1). Όσο πιο λίγες διαφορές έχουν μεταξύ τους τα υψώματα ως προς το ύψος τους, το πλάτος τους ή και τη μορφή τους, και όσο πιο τακτοποιημένα επαναλαμβάνονται στο χώρο και χωρίς απουσίες, τόσο πιο μεγάλος θα λέμε ότι είναι ο βαθμός οργάνωσης της επιφάνειας [Ball Philip, 2009].

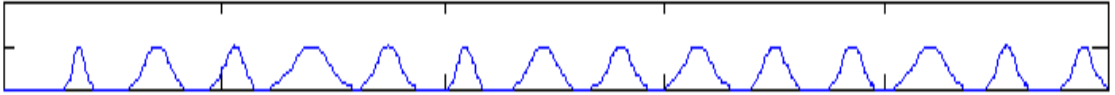


Σχήμα 1.2.1: Πάνω αριστερά είναι ένα τετραγωνικό πλέγμα. Σε αυτό το πλέγμα προστέθηκε θόρυβος στη θέση των υψωμάτων(πάνω δεξιά), διακύμανση στο πλάτος τους (κάτω αριστερά) και διακύμανση στο ύψος τους (κάτω δεξιά)

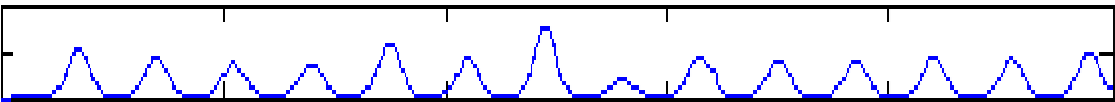
Οι αποκλίσεις από την απόλυτη περιοδικότητα για επιφάνειες μιας διάστασης φαίνονται στο σχήμα 1.2.2 έως 1.2.5.



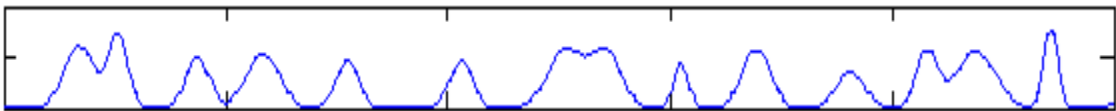
Σχήμα 1.2.2: Επιφάνεια με θόρυβο στη θέση των υψωμάτων



Σχήμα 1.2.3: Επιφάνεια από υψώματα με διακύμανση στο πλάτος τους



Σχήμα 1.2.4: Επιφάνεια από υψώματα με διακύμανση στο ύψος τους



Σχήμα 1.2.5: Επιφάνεια από υψώματα με όλες τις αποκλίσεις από την απόλυτη περιοδικότητα

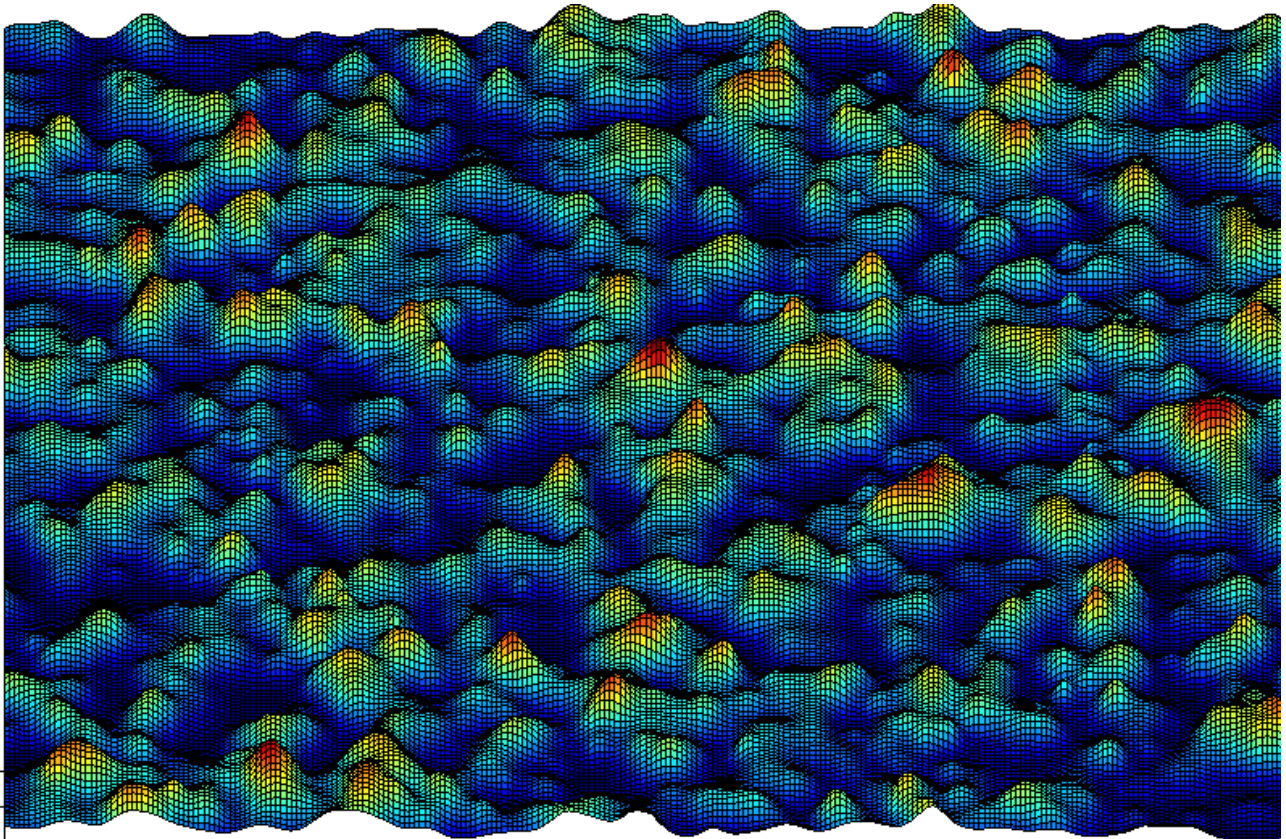
1.3 Περιοδικότητα και συμμετρία

Ας υποθέσουμε, πως σε διάφορα τυχαία σημεία ενός λείου επίπεδου τετραγωνικού πλαισίου, εναποθέτουμε κάποιο είδος υλικού με τη μορφή υψωμάτων (σχήμα 1.3.1). Επειδή τα υψώματα δεν έχουν κάποια συγκεκριμένη διάταξη μεταξύ τους, η επιφάνεια στις λεπτομέρειες της είναι απροσδόκητη. Κοιτώντας όμως, ολόκληρα τμήματα της επιφάνειας, αυτά δεν δείχνουν ξεχωριστά, γιατί διακρίνονται από απουσία χαρακτηριστικών. Όποια περιστροφή, ή κατοπτρισμό και αν επιβάλλουμε στην επιφάνεια, αυτή μένει ως έχει.

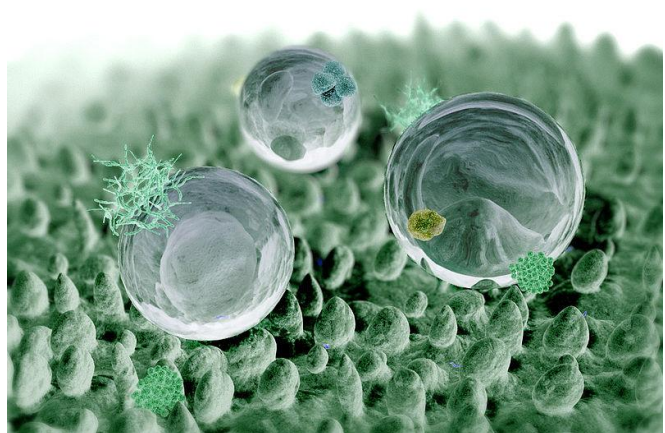
Οι έννοιες της συμμετρίας και της δομής, αν και από πρώτης άποψης μοιάζουν, εντούτοις είναι διαφορετικές. Μια επιφάνεια με τυχαία τοποθετημένα υψώματα, όπως και μια εντελώς λεία, είναι και οι δύο ομοιογενείς και άρα απολύτως συμμετρικές, μα χωρίς δομή. Όταν με κάποιο τρόπο χαθεί ένα μέρος της συμμετρίας τους, αναδύεται μια δομή ελαττωμένης μεν συμμετρίας, αλλά πιο πλούσιας σε χαρακτηριστικά και άρα πιο ενδιαφέρουσας [Field, Golubitsky, 2009].

Η εμφάνιση μορφωμάτων με δομή, είναι πολύ συνηθισμένη στη φύση και πολλές φορές υπαίτια για τις φυσικοχημικές, οπτικές κ.τ.λ. ιδιότητες που έχουν τα αντικείμενα, π.χ. οι συμμετρίες ενός κρυστάλλου καθορίζουν πολλές από τις ιδιότητες του, ενώ η περιοδική δομή μιας επιφάνειας μπορεί να της προσδώσει μαγνητικές ικανότητες [Fassbender, 2009].

Η επιφάνεια των φύλλων του λωτού έχει υπερευδροφοβικές ιδιότητες. Είναι επενδυμένη με κρύσταλλα κεριού διαμέτρου 1nm που αποθούν το νερό, μειώνοντας την επιφάνεια επαφής μαζί



Σχήμα 1.3.1: Τμήμα επιφάνειας με τυχαία τοποθετημένα υψώματα

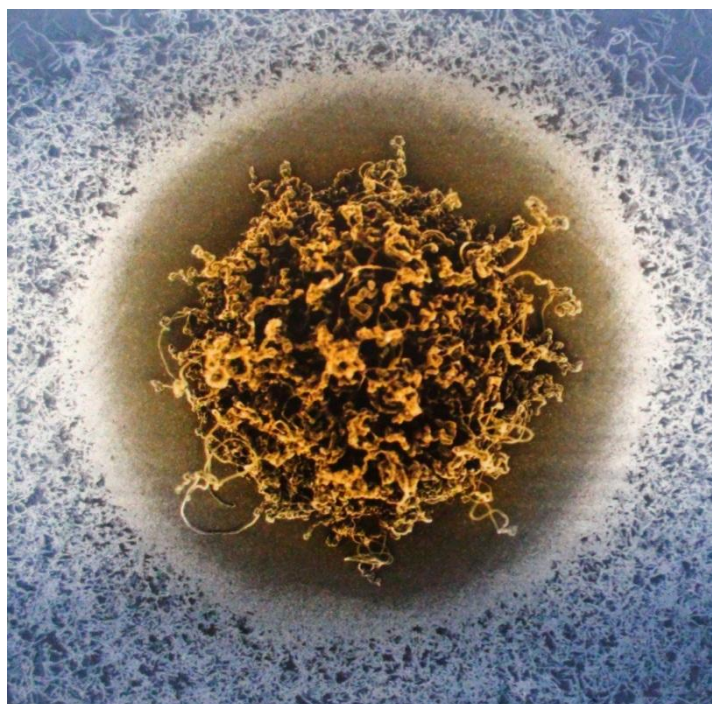


Σχήμα 1.3.2: Οι υπερυδροφοβικές ιδιότητες των φύλλων του λωτού οφείλονται στο υλικό και τη μορφολογία της επιφάνειας τους. Αριστερά φαίνεται μια φωτογραφία τους με σταγονίδια νερού, ενώ δεξιά μια φανταστική εικόνα τους σε μικρή κλίμακα, δημιουργημένη από Η/Υ (Wikipedia).

τους. Έτσι το νερό παίρνει τη μορφή σφαιρικών σταγονιδίων, που καθώς κυλούν πάνω στα φύλλα, τα καθαρίζουν μαζεύοντας τα ξένα σωματίδια που είναι προσκολλημένα σε αυτά (σχήμα 1.3.2, *Wikipedia*).

Οι διαδικασίες που συντελούνται στα κύτταρα επηρεάζονται από την τοπογραφία του τοπικού τους περιβάλλοντος. Επιφάνειες που διαθέτουν τάξη και συμμετρία, διευκολύνουν τα κύτταρα ή τις πρωτεΐνες να προσκολληθούν σε αυτές και να προκληθούν βιολογικές αντιδράσεις [Curtis, 2004].

Σε άλλες περιπτώσεις, μόρια άνθρακα χάρη της συμμετρίας τους, μπορούν να δημιουργήσουν μικροσκοπικούς σωλήνες μεγάλης σκληρότητας (σχήμα 1.3.3) [Mainzer, 2005].



Σχήμα 1.3.3: Νανοσωλήνες άνθρακα στην επιφάνεια ενός τσιπ σιλικόνης (εικόνα από ηλεκτρονικό μικροσκόπιο σάρωσης) [scientifica]

2. ΚΛΑΣΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗΣ ΤΗΣ ΜΟΡΦΟΛΟΓΙΑΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

2.1 Φάσμα ισχύος

Το *φάσμα ισχύος* μιας επιφάνειας είναι ο κλασικός τρόπος ανάδειξης σχεδίων που επαναλαμβάνονται στο χώρο. Έστω ότι θέλουμε να αναπαραστήσουμε μια επιφάνεια $f(x, y)$ από μια σειρά *Fourier*. Ο *μετασχηματισμός Fourier* αποσυνθέτει την επιφάνεια σε ένα σταθμισμένο άθροισμα τριγωνομετρικών συναρτήσεων [Osgood, 2008]:

$$g(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} a_{ik} \left[\cos \left(\frac{2\pi}{N} (ix + ky) \right) - j \sin \left(\frac{2\pi}{N} (ix + ky) \right) \right]$$

ή αλλιώς:

$$g(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} a_{ik} e^{-j \frac{2\pi}{N} (ix + ky)}$$

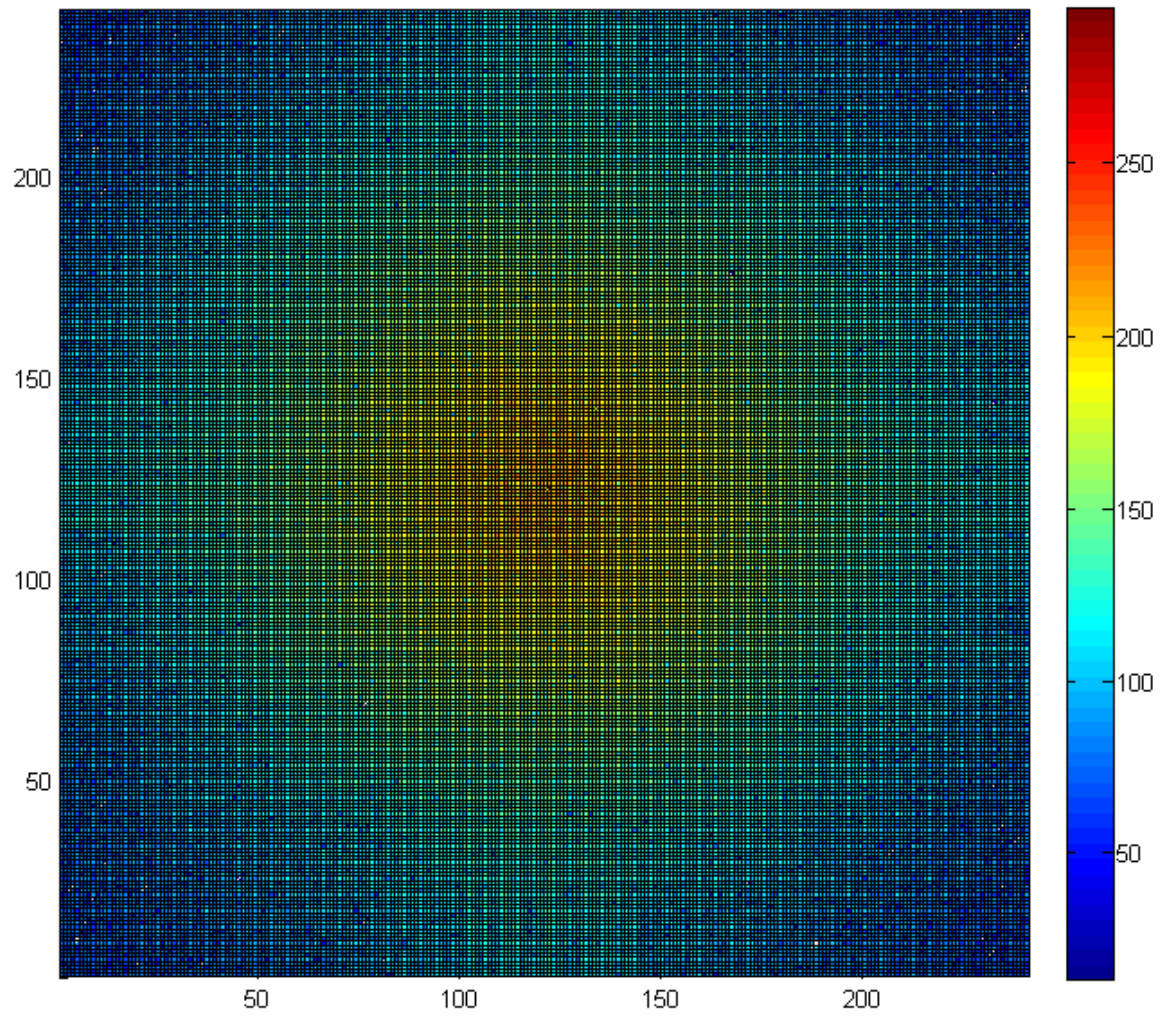
Ο *συντελεστής Fourier* a_{ik} μας δείχνει πόσο όμοια είναι η επιφάνεια μας με τις αντίστοιχες τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Όσο πιο μεγάλος είναι ο συντελεστής, τόσο πιο μεγάλη η ομοιότητα. Ο τρόπος υπολογισμού της δίνεται από τον τύπο:

$$a_{ik} = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} a_{ik} e^{-j \frac{2\pi}{N} (ix + ky)}$$

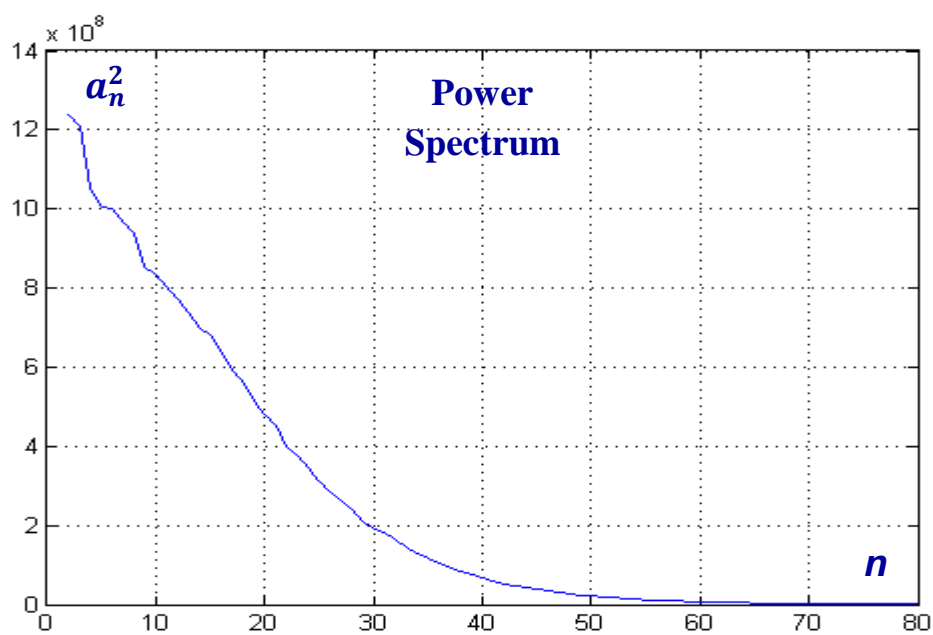
Όλες οι συχνότητες που είναι παρούσες στην επιφάνεια, αποτελούν το *φάσμα της*. Το σύνολο των τετραγώνων των συντελεστών συνιστά την *ενέργεια των συχνοτήτων* και ονομάζεται *φάσμα ισχύος* (*power spectrum*). Σχεδίαση του *power spectrum* της επιφάνειας του σχήματος 1.3.1, μας δίνει μια ιδέα για το πώς κυμαίνονται τα μεγέθη των *συντελεστών Fourier* (σχήμα 2.1.1). Για να είναι πιο ευανάγνωστο το διάγραμμα, τοποθετήσαμε στο κέντρο του τη DC συνιστώσα, δηλαδή το σταθερό όρο a_{00} της σειράς *Fourier*.

Όπως παρατηρούμε, το *δυσδιάστατο φάσμα ισχύος* είναι *ισοτροπικό*, γιατί *ισοτροπική* είναι και η επιφάνεια, αφού εμφανίζεται ίδια ανεξαρτήτως της διεύθυνσης που την παρατηρούμε. Οπότε, μπορούμε να προσδιορίσουμε το μέσο όρο του μεγέθους των *συντελεστών Fourier* εκείνων των συχνοτήτων i, k που απέχουν απόσταση n από το κέντρο, δηλαδή $n - 0.5 \leq \sqrt{i^2 + k^2} < n + 0.5$, μετατρέποντας έτσι το *δυσδιάστατο φάσμα ισχύος* σε *μονοδιάστατο* (σχήμα 2.1.2):

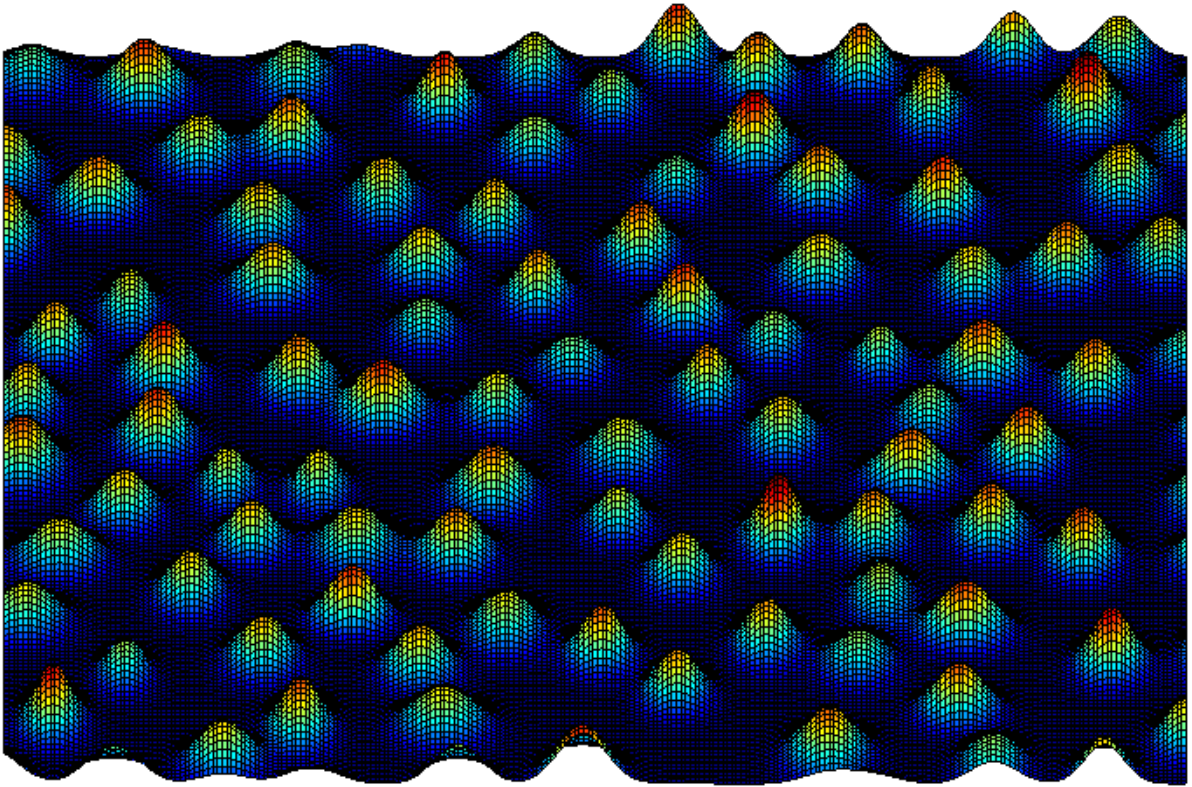
$$g(c) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{-j \frac{2\pi}{N} nc}$$



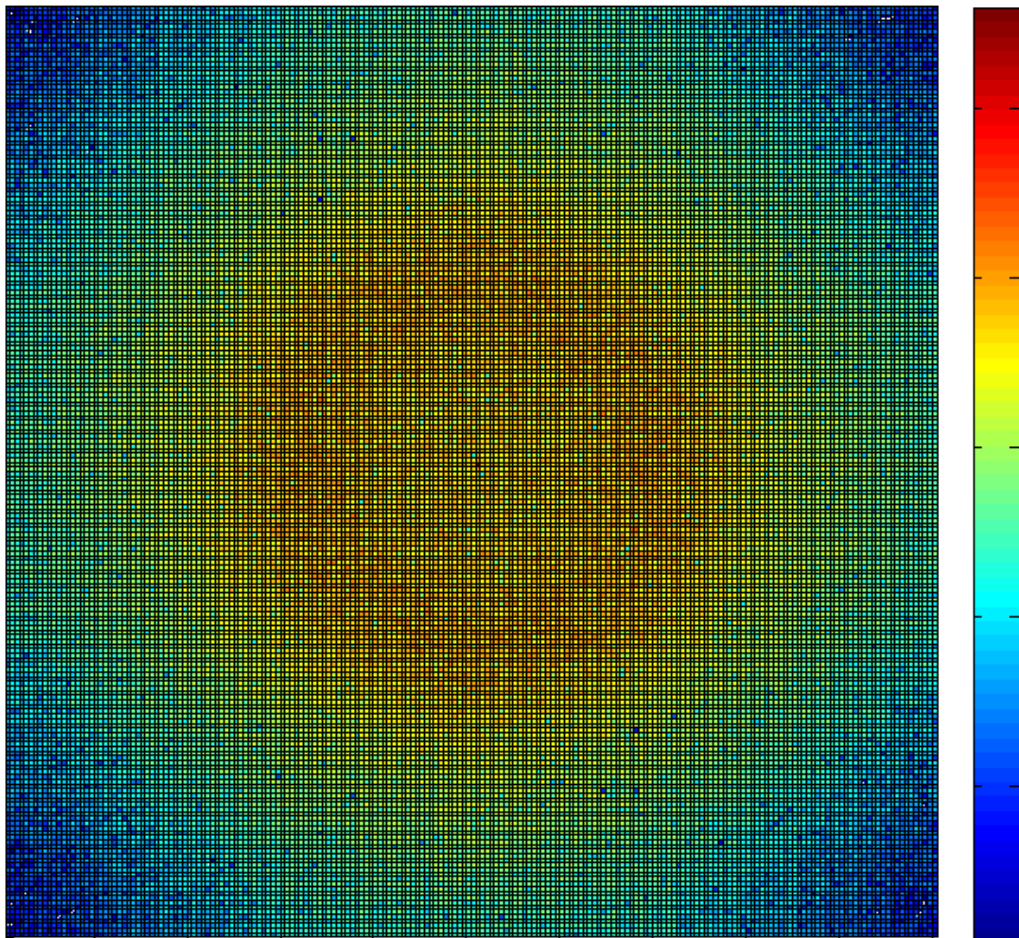
Σχήμα 2.1.1: Το δυοδιάστατο φάσμα ισχύος σε db της ισοτροπικής περιοδικής επιφάνειας του σχήματος 1.3.1



Σχήμα 2.1.2: Το μονοδιάστατο φάσμα ισχύος της ισοτροπικής επιφάνειας του σχήματος 1.3.1



Σχήμα 2.1.3: Τμήμα επιφάνειας με υψόμετα που επαναλαμβάνονται στο χώρο



Σχήμα 2.1.4: Το δυσδιάστατο φάσμα ισχύος σε db της περιοδικής επιφάνειας του σχήματος 2.1.3

Παρόμοια, το φάσμα ισχύος της περιοδικής επιφάνειας του σχήματος 2.1.3 φαίνεται στο σχήμα 2.1.4 που δείχνει μια έξαρση περίπου στη συχνότητα 40 και η οποία ονομάζεται *θεμελιώδης συχνότητα*. Αυτό σημαίνει ότι το ύψωμα επαναλαμβάνεται 40 φορές από τη μια άκρη της επιφάνειας στην άλλη. Με άλλα λόγια οι αποστάσεις μεταξύ των υψωμάτων είναι κατά μέσο όρο το ένα σαρακοστό της μιας διάστασης του τετραγωνικού πλαισίου. Όσο πιο μικρές είναι οι αποστάσεις μεταξύ των υψωμάτων, τόσο και πιο μεγάλη η συχνότητα της δομής και αντίστροφα.

Το φάσμα ισχύος έχει και άλλες συχνότητες με υψηλό *συντελεστή Fourier* γύρω από τη *θεμελιώδη συχνότητα*. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι αποστάσεις μεταξύ γειτονικών υψωμάτων δεν είναι σταθερές αλλά υπόκεινται σε κάποια μεταβλητότητα. Όσο πιο οξύτερη είναι η καμπύλη τόσο λιγότερο θορυβώδης είναι η δομή. Για να προσδιορίσουμε την ποιότητα της δομής, χρησιμοποιούμε παράλληλα με το φάσμα ισχύος και έναν άλλο δείκτη που ονομάζεται *παράμετρος τάξης s* της επιφάνειας.

2.2 Παράμετρος τάξης της επιφάνειας

Η *θεμελιώδης συχνότητα* της επιφάνειας του σχήματος 2.1.3 που έχει διαστάσεις $L \times L$, είναι $f_p = 38$ και κατά συνέπεια η μέση απόσταση (περίοδος) λ μεταξύ γειτονικών κορυφών είναι:

$$\lambda = \frac{L}{f_p}$$

Έστω, ότι οι συχνότητες που αντιστοιχούν σε *συντελεστές Fourier* μισού μεγέθους του συντελεστή της *θεμελιώδης συχνότητας* είναι f_1 και f_2 (σχήμα 2.2.1). Η διαφορά των συχνοτήτων αυτών $f_2 - f_1$ μας δείχνει πόσο μεγάλο είναι το εύρος του φάσματος ισχύος. Όσο μεγαλύτερο, τόσο πιο πολύ κυμαίνονται οι αποστάσεις μεταξύ γειτονικών υψωμάτων.

Όταν η τοποθέτηση των υψωμάτων δεν είναι ανεξάρτητη, αλλά καθορίζεται από τα διπλανά τους, τα παραγειτονικά υψώματα απέχουν αποστάσεις διπλάσιας διακύμανσης από όση τα γειτονικά. Κάτι παρόμοιο συμβαίνει για αποστάσεις ακόμα πιο μακρινών υψωμάτων. Η διάσταση της επιφάνειας L προς το εύρος του φάσματος ισχύος είναι L_s , δηλαδή:

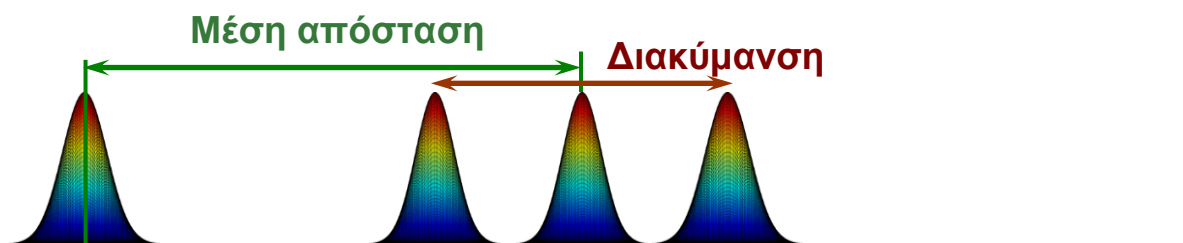
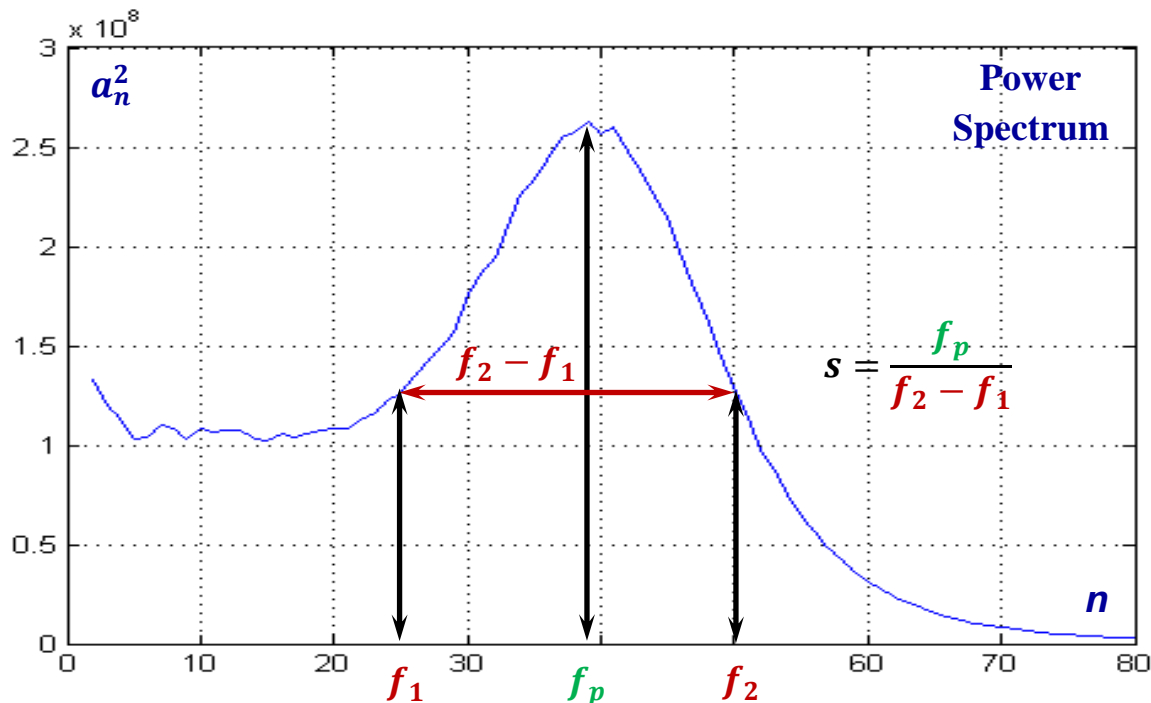
$$L_s = \frac{L}{f_2 - f_1}$$

και μας δείχνει την έκταση μέσα στην οποία η περιοδικότητα μπορεί να θεωρηθεί πολύ καλή. Ο λόγος αυτής της έκτασης L_s προς τη περίοδο λ της επιφάνειας ονομάζεται *παράμετρος τάξης s* της επιφάνειας:

$$s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{f_p}{f_2 - f_1}$$

και χαρακτηρίζει τον αριθμό των υψωμάτων που περιλαμβάνονται στην περιοχή που μπορεί να θεωρηθεί σχεδόν κρυσταλλική. Με άλλα λόγια, δείχνει πόσο πιο μεγάλη είναι η απόσταση

κατά μέσο όρο μεταξύ γειτονικών υψωμάτων, σε σχέση με τη διακύμανση των αποστάσεων αυτών. Η παράμετρος τάξης s δεν έχει διαστάσεις και μας προσφέρει έναν τρόπο σύγκρισης επιφανειών με διαφορετική δομή.



Σχήμα 2.2.1: Το μονοδιάστατο φάσμα ισχύος της ισοτροπικής περιοδικής επιφάνειας του σχήματος 2.1.3. Η παράμετρος τάξης s δείχνει τον αριθμό των υψωμάτων που περιλαμβάνονται στην περιοχή που μπορεί να θεωρηθεί σχεδόν κρυσταλλική

2.3 Μειονεκτήματα του φάσματος ισχύος

Το φάσμα ισχύος μιας επιφάνειας μας πληροφορεί για το κατά πόσο αυτή μοιάζει με ημιτονοειδή συναρτήσεις διαφόρων συχνοτήτων. Η ομοιότητα αυτή εξαρτάται τόσο από το είδος των υψωμάτων που έχουν τοποθετηθεί στην επιφάνεια, όσο και από τη διάταξη τους.

Το βασικό μειονέκτημα της μεθόδου έχει να κάνει, με το ότι πολλά διαφορετικά χαρακτηριστικά της επιφάνειας επηρεάζουν με παρόμοιο τρόπο το *φάσμα ισχύος*, με αποτέλεσμα να υπάρχει σύγχυση στην ερμηνεία της καμπύλης του *φάσματος ισχύος*.

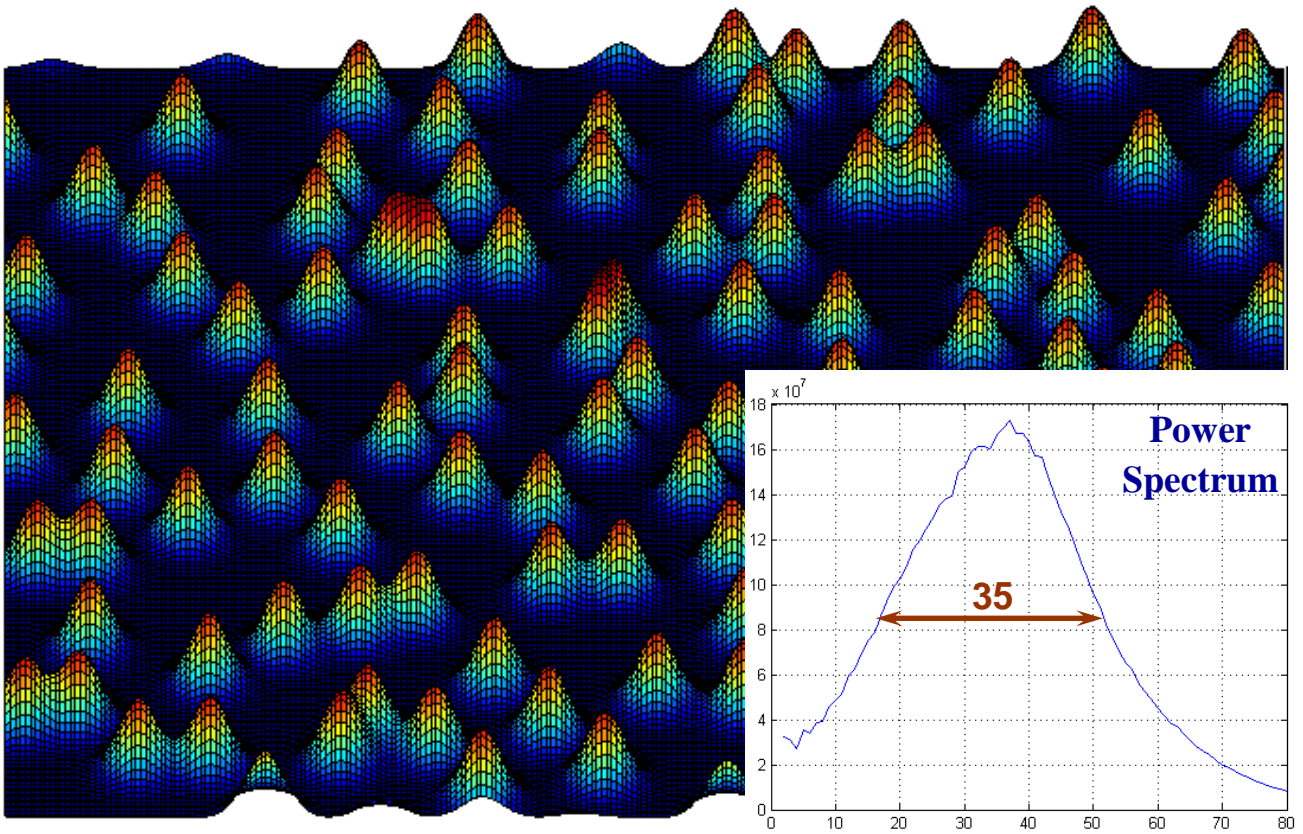
Στα σχήματα 2.3.1 και 2.3.2 φαίνονται 2 διαφορετικές επιφάνειες με ακριβώς ίδιο εύρος *φάσματος ισχύος* 35Hz. Στη πρώτη επιφάνεια, τα πανομοιότυπα υψώματα δεν είναι πολύ καλά τακτοποιημένα. Στη δεύτερη επιφάνεια, τα επίσης πανομοιότυπα υψώματα έχουν καλή τακτοποίηση, είναι όμως πιο λίγα από ότι πριν, γι' αυτό υπάρχουν πολλές περιοχές που είναι κενές. Με άλλα λόγια, τα εκλιπόντα υψώματα, ή η μέτρια τακτοποίηση τους στο χώρο, επιφέρουν τα ίδια αποτελέσματα στη *παράμετρο τάξης s* της επιφάνειας.

Στα επόμενα 3 σχήματα, φαίνονται 3 διαφορετικές επιφάνειες με ακριβώς ίδια *π παράμετρο τάξης s*, εύρος *φάσματος ισχύος* και θεμελιώδη συχνότητα. Στο σχήμα 2.3.3 τα υψώματα έχουν υψηλό βαθμό οργάνωσης, σταθερό πλάτος, αλλά το ύψος τους διαφέρει. Στο σχήμα 2.3.4 τα υψώματα τοποθετημένα στο ίδιο σημείο με πριν, έχουν σταθερό ύψος, αλλά το πλάτος είναι μεγαλύτερο και μάλιστα έχει διακυμάνσεις. Στο σχήμα 2.3.5 τα υψώματα επίσης είναι τοποθετημένα στο ίδιο σημείο, είναι πανομοιότυπα, αλλά το πλάτος τους είναι μεγαλύτερο σε σχέση με τις δύο προηγούμενες περιπτώσεις. Η διάκριση των τριών επιφανειών μόνο από τη *παράμετρο τάξης s* ή το εύρος του *φάσματος ισχύος*, δεν μπορεί να γίνει.

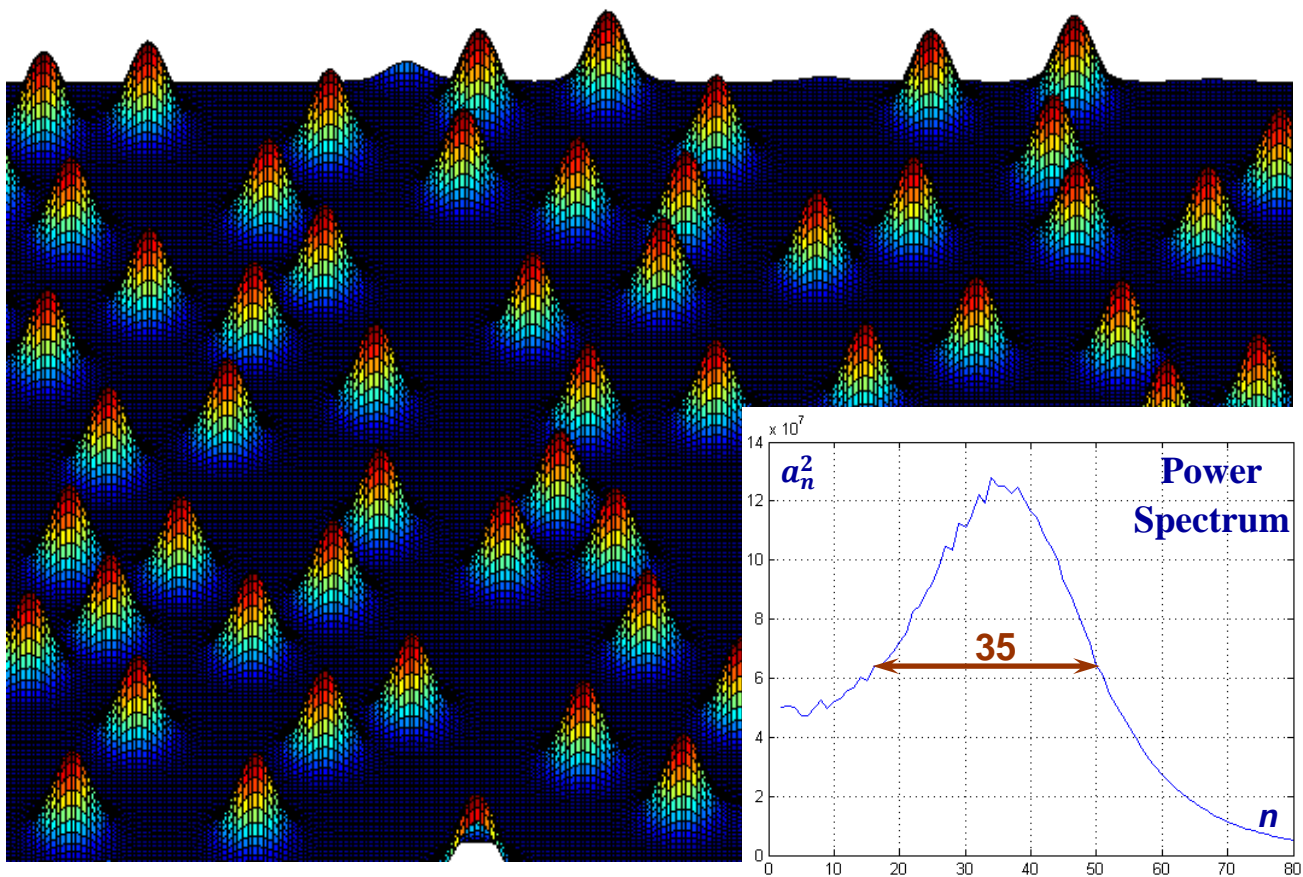
Το *φάσμα ισχύος* επηρεάζεται έντονα και από το είδος των υψωμάτων (σχήματα 2.3.7, 2.3.10). Αν τα υψώματα έχουν γωνίες ή ασυνέχειες, το *φάσμα ισχύος* της επιφάνειας δείχνει να αποτελείται από υψηλές συχνότητες, οι οποίες είναι πλασματικές (σχήματα 2.3.8 και 2.3.11). Όταν η επιφάνεια είναι συνεχής και ομαλή, η σειρά *Fourier* συγκλίνει στην επιφάνεια. Τοποθετώντας αντί για γκαουσιανά υψώματα, μυτερούς κώνους, ή παραλληλεπίπεδα, η επιφάνεια παύει να είναι ομαλή, ή συνεχής αντίστοιχα. Στην προσπάθεια της η σειρά *Fourier* να συγκλίνει στην επιφάνεια, χρησιμοποιεί υψηλές συχνότητες. Στα σχήματα 2.3.9 και 2.3.12 δείχνουμε τα πολύπλοκα *φάσματα ισχύος* ενός και μόνο κώνου και ενός μόνο παραλληλεπίπεδου αντίστοιχα, που έρχονται σε αντιδιαστολή με το *φάσμα ισχύος* ενός γκαουσιανού υψώματος (σχήμα 2.3.6).

Στα πλέγματα που έχουν δομή σχεδόν περιοδική, το εύρος της καμπύλης του *φάσματος ισχύος* είναι πολύ μικρό. Οι μεταβολές των διαφόρων παραμέτρων της επιφάνειας επηρεάζουν τη συνολική καμπύλη του *φάσματος ισχύος* αλλά όχι και το εύρος της. Έτσι υπάρχει αδυναμία σύγκρισης των επιφανειών, όταν η ποιότητα της περιοδικής μορφής τους είναι πάρα πολύ καλή. Στα σχήματα 2.3.13 και 2.3.14 έχουμε τριγωνικό πλέγμα από υψώματα με *παράμετρο τάξης s* ακριβώς ίδια. Στο πρώτο όμως δεν υπάρχει καθόλου θόρυβος στην τοποθέτηση των υψωμάτων, ενώ στο δεύτερο υπάρχει. Η *παράμετρος τάξης s* δεν μπορεί να πιάσει τις διαφορές που υπάρχουν στο *φάσμα ισχύος* των 2 επιφανειών, αν και καθώς αυξάνει ο θόρυβος, το μέγεθος του συντελεστή *Fourier* της *θεμελιώδης συχνότητας* μειώνεται, ενώ αυξάνει το μέγεθος των υπολοίπων.

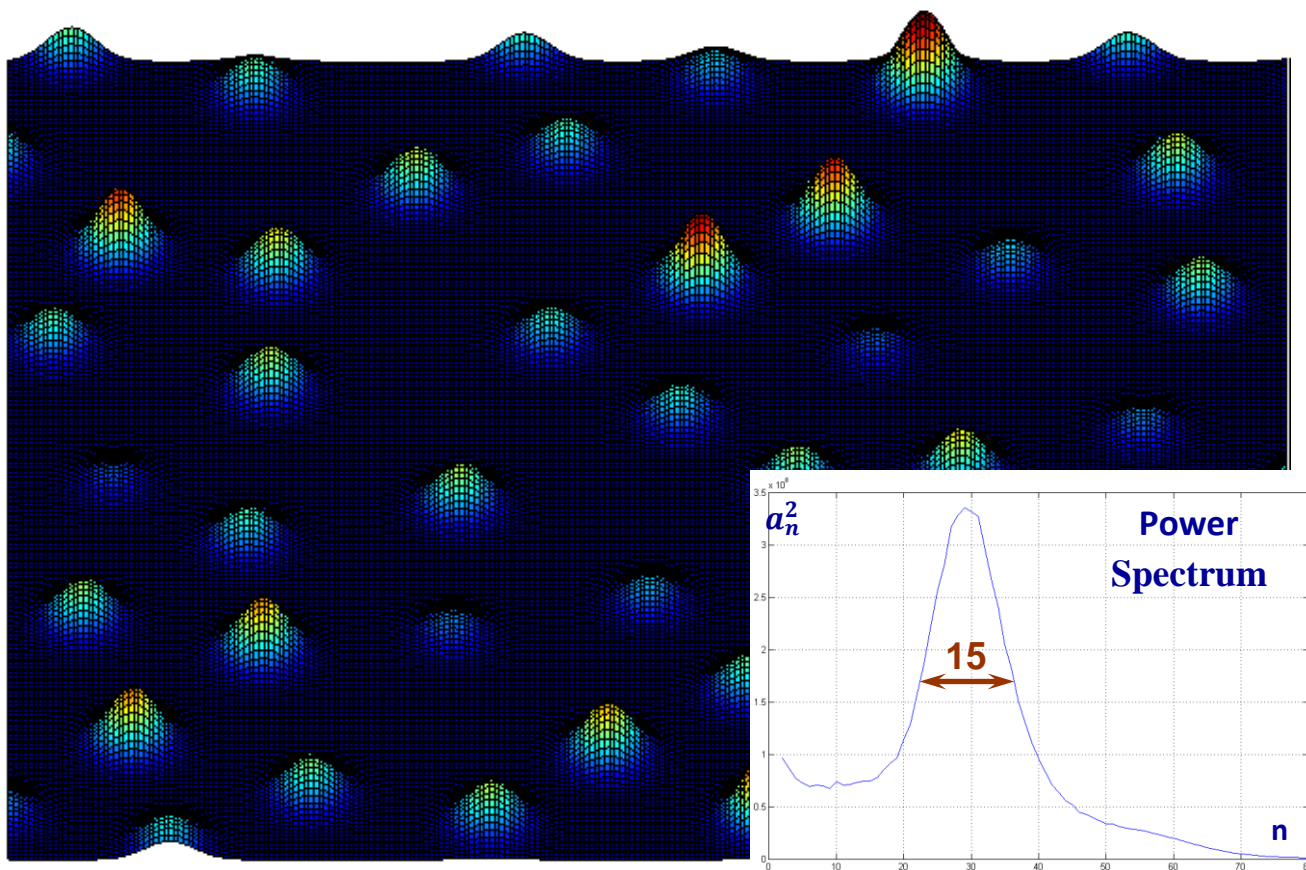
Τέλος, αξίζει να παρατηρήσει κανείς, ότι η *παράμετρος τάξης s* δεν ορίζεται στις επιφάνειες όπου η ποιότητα της περιοδικής μορφής δεν είναι πολύ καλή.



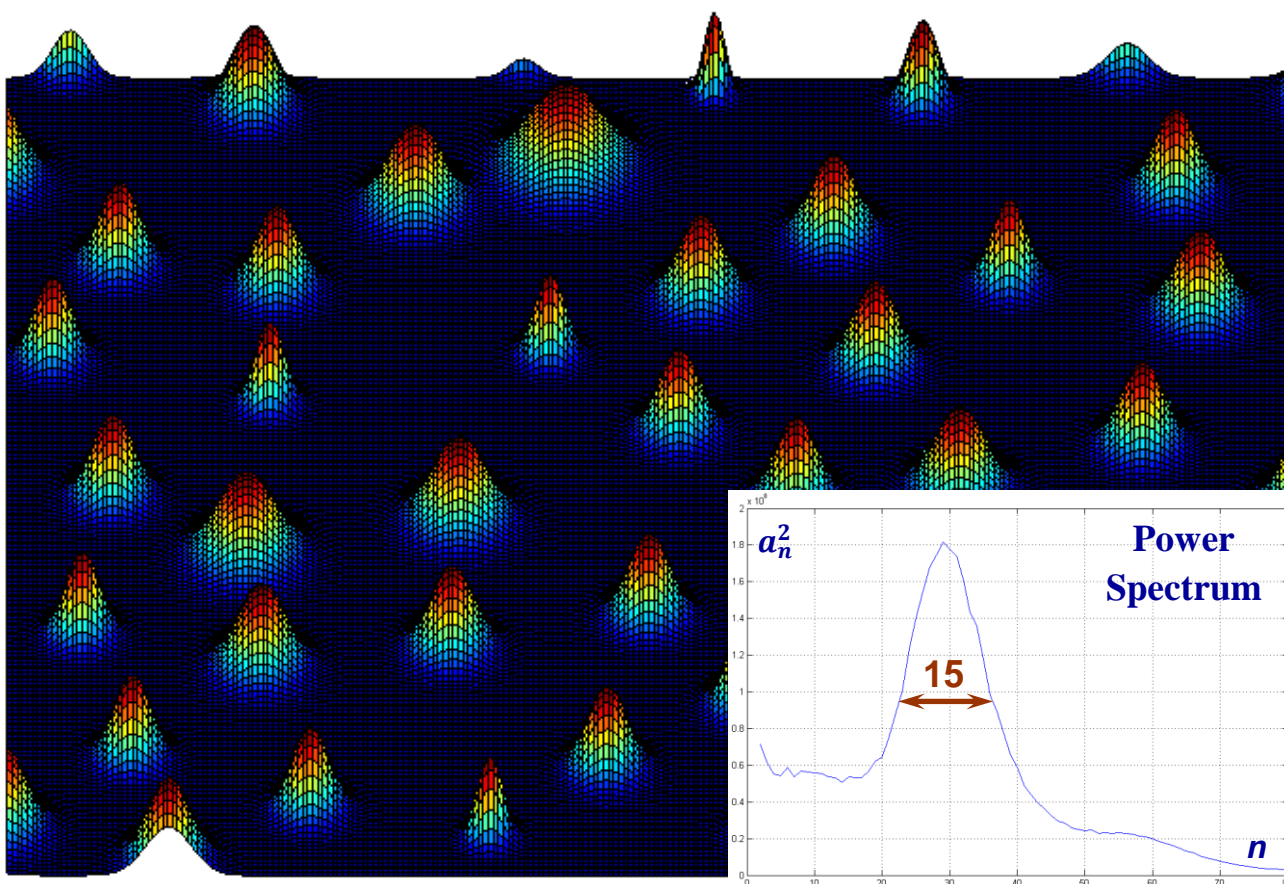
Σχήμα 2.3.1: Επιφάνεια από πανομοιότυπα υψώματα που έχουν μικρό βαθμό οργάνωσης



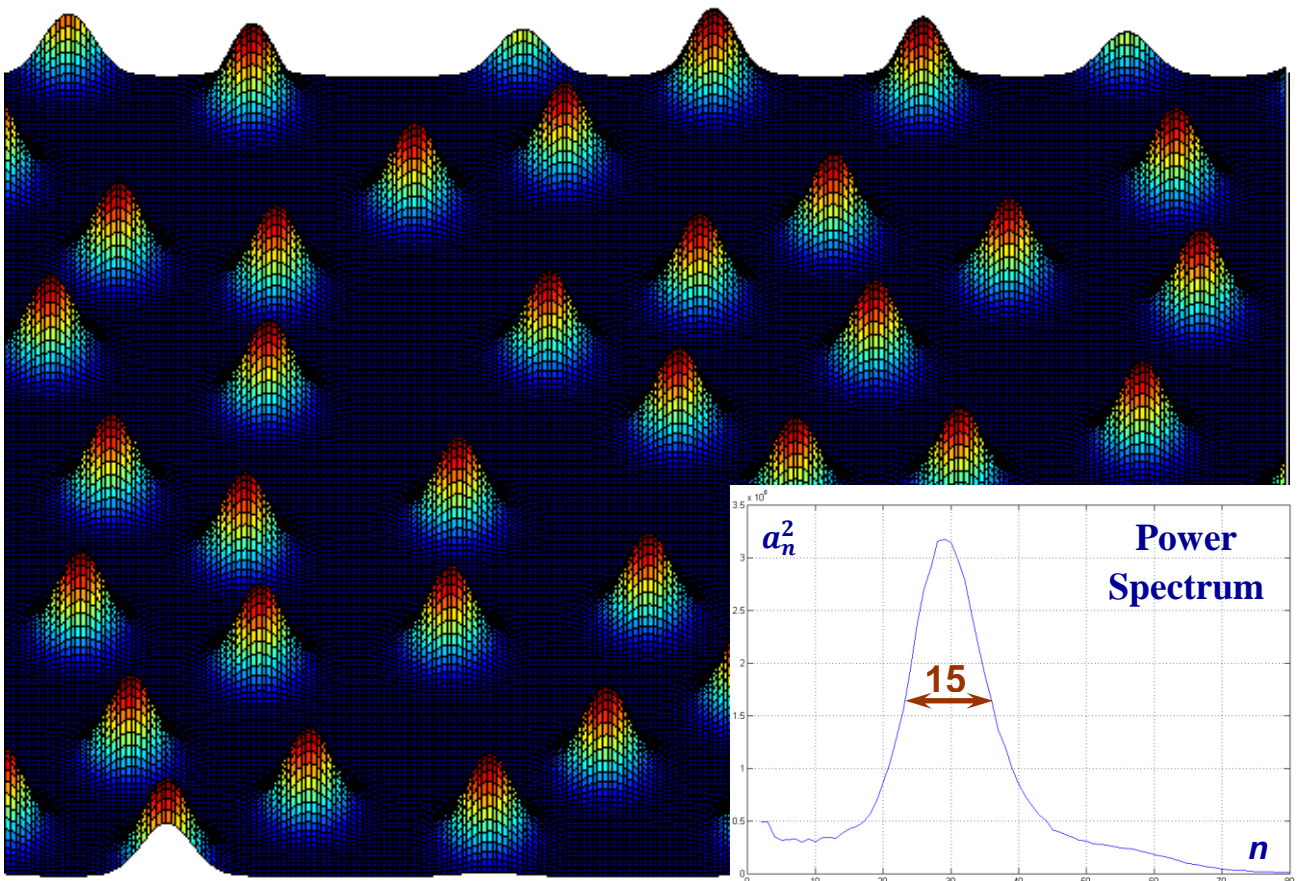
Σχήμα 2.3.2: Επιφάνεια από πανομοιότυπα υψώματα χωρίς επαρκή αριθμό



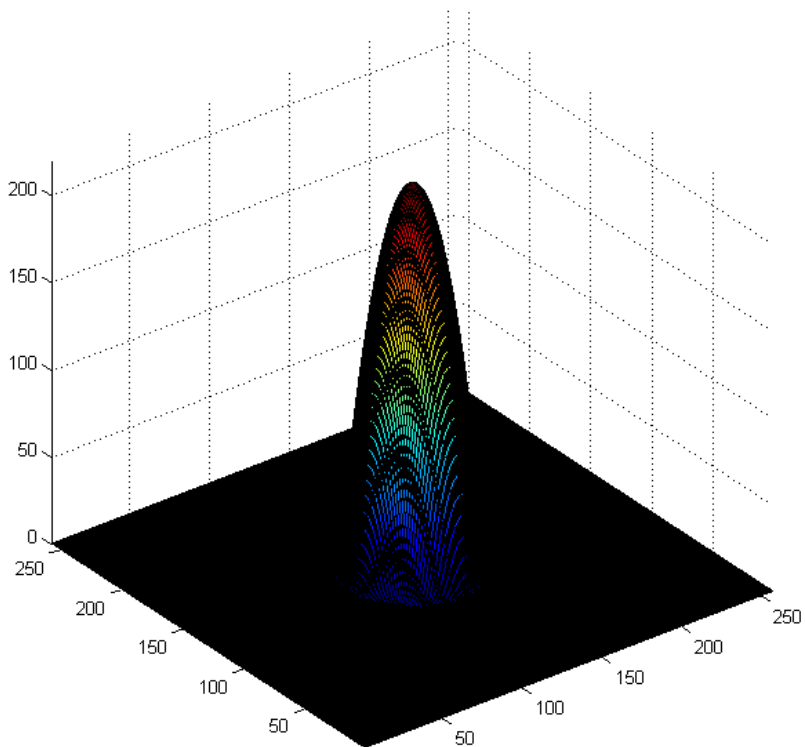
Σχήμα 2.3.3: Επιφάνεια από υψώματα με διακύμανση στο ύψος τους



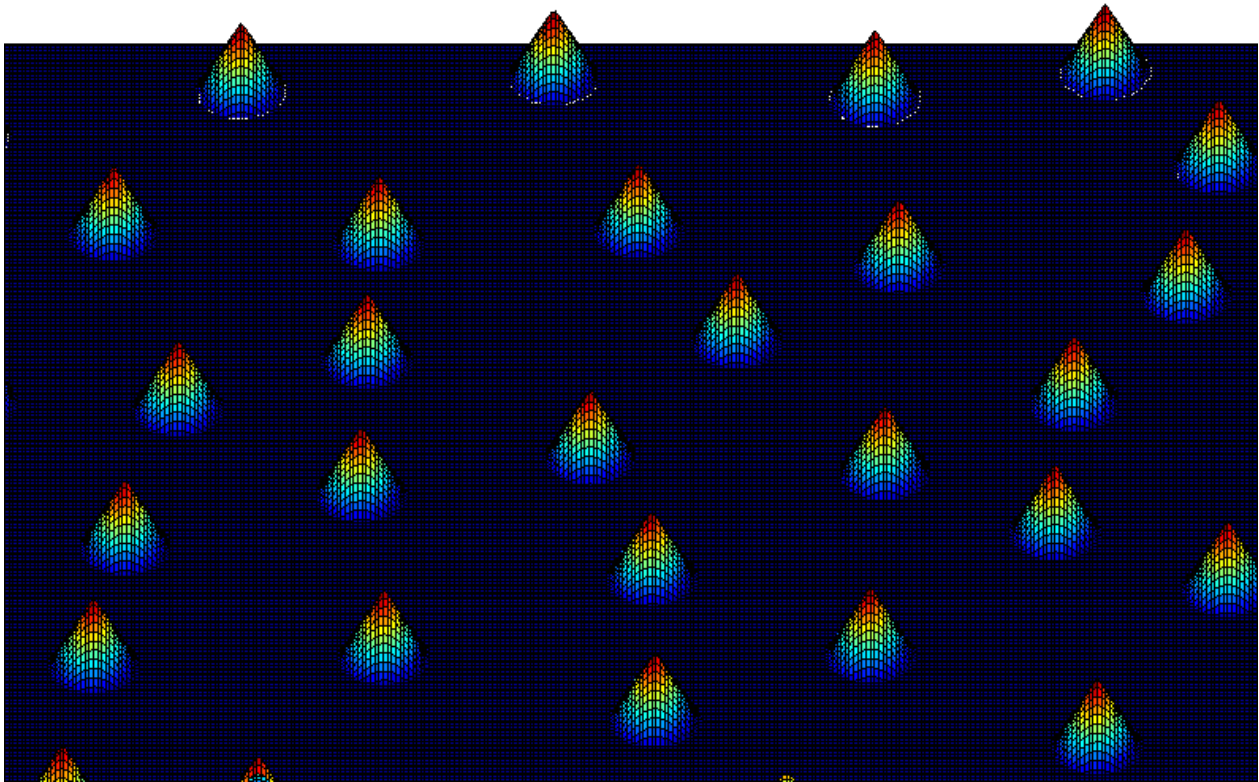
Σχήμα 2.3.4: Επιφάνεια από υψώματα με μεγαλύτερο πλάτος από ότι πριν και μικρή διακύμανση



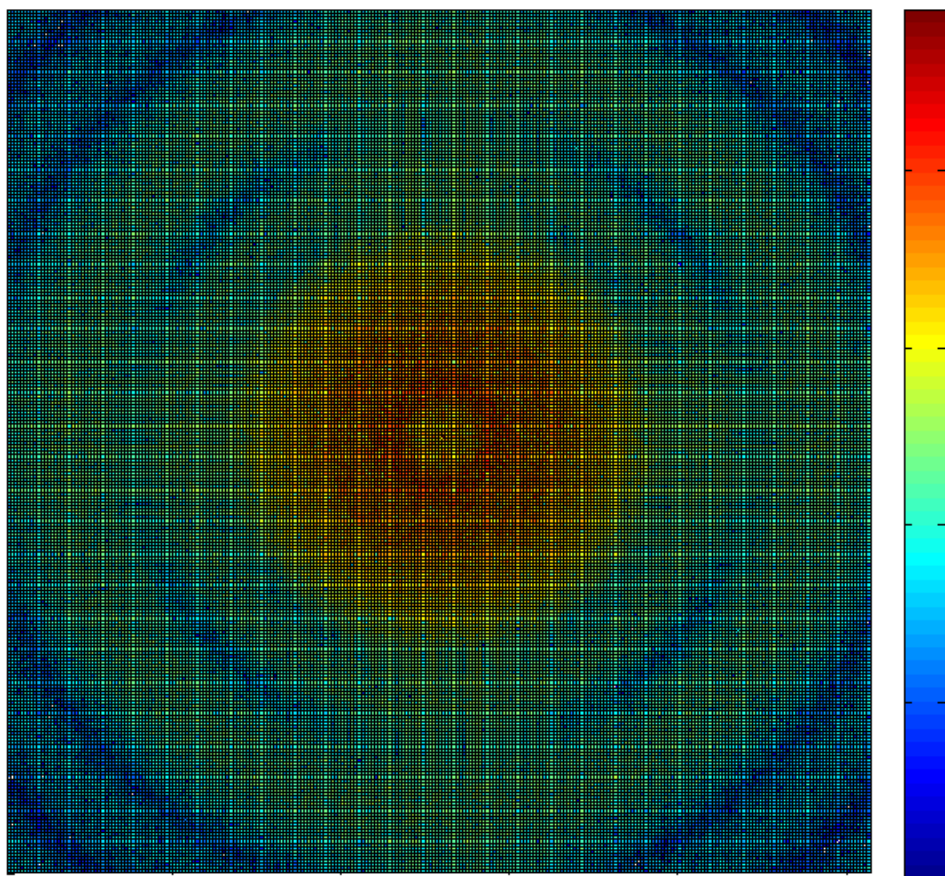
Σχήμα 2.3.5: Επιφάνεια από υψόμενα με μεγάλο πλάτος σε σχέση με τις μεταξύ τους αποστάσεις



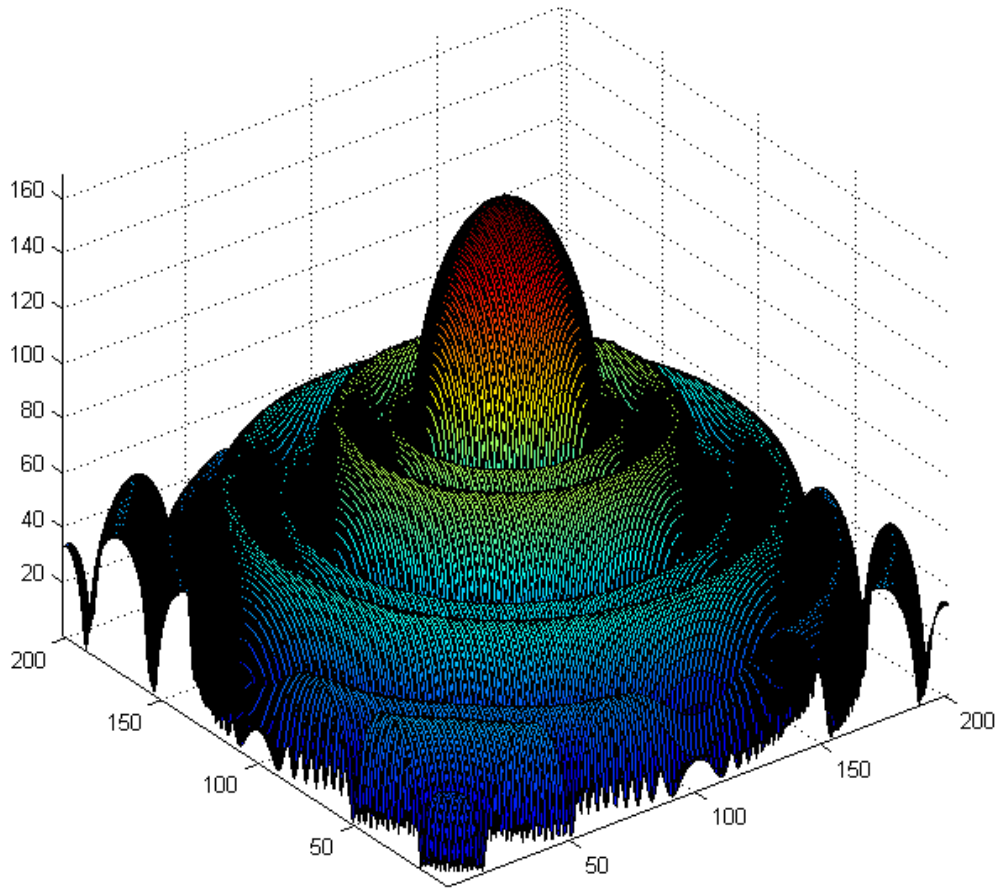
Σχήμα 2.3.6: Φάσμα ισχύος ενός μόνο κόνου



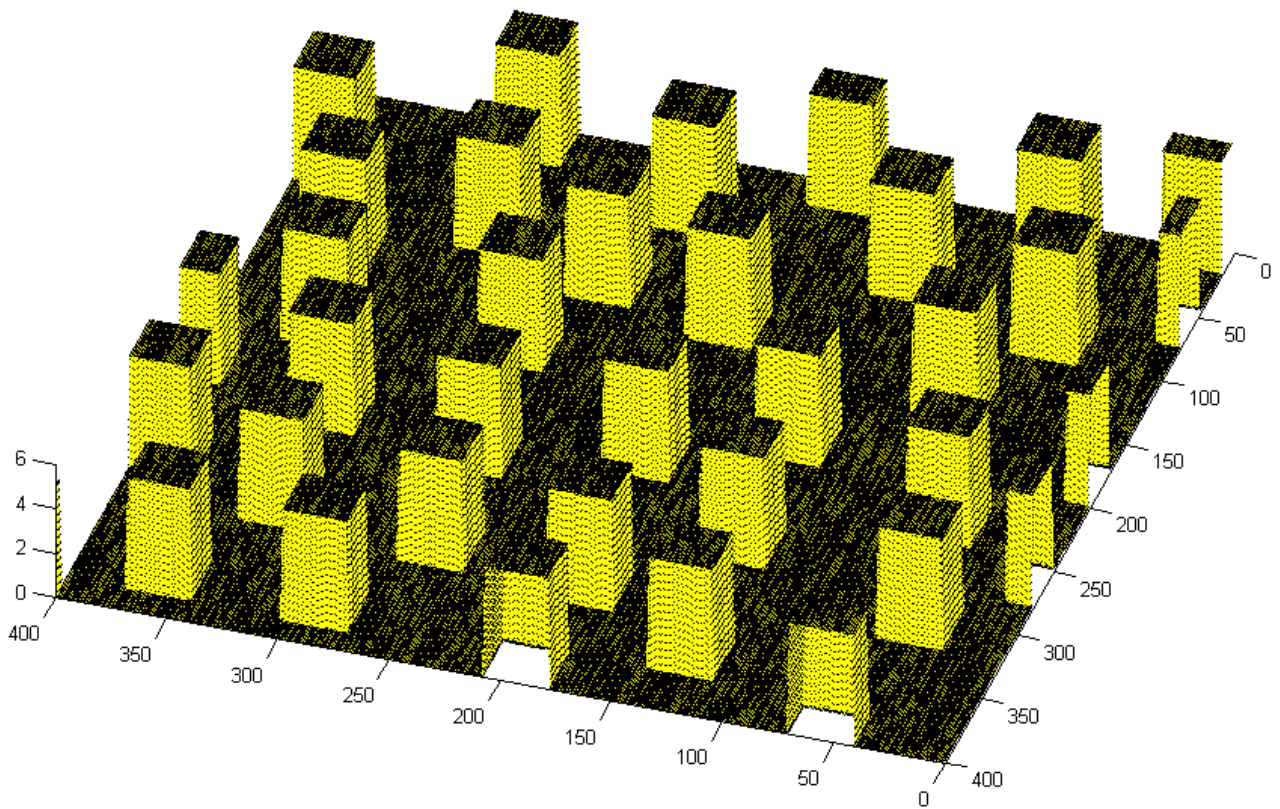
Σχήμα 2.3.7: Επιφάνεια από κώνους



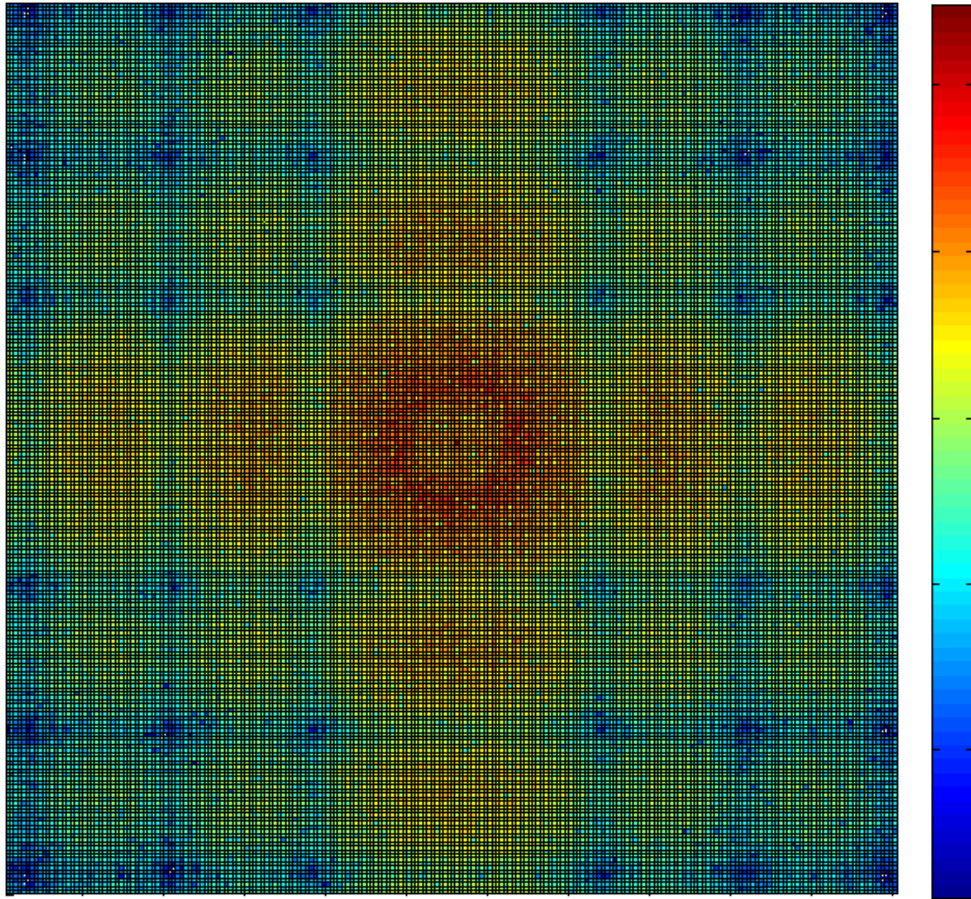
Σχήμα 2.3.8: Φάσμα ισχύος επιφάνειας από κώνους



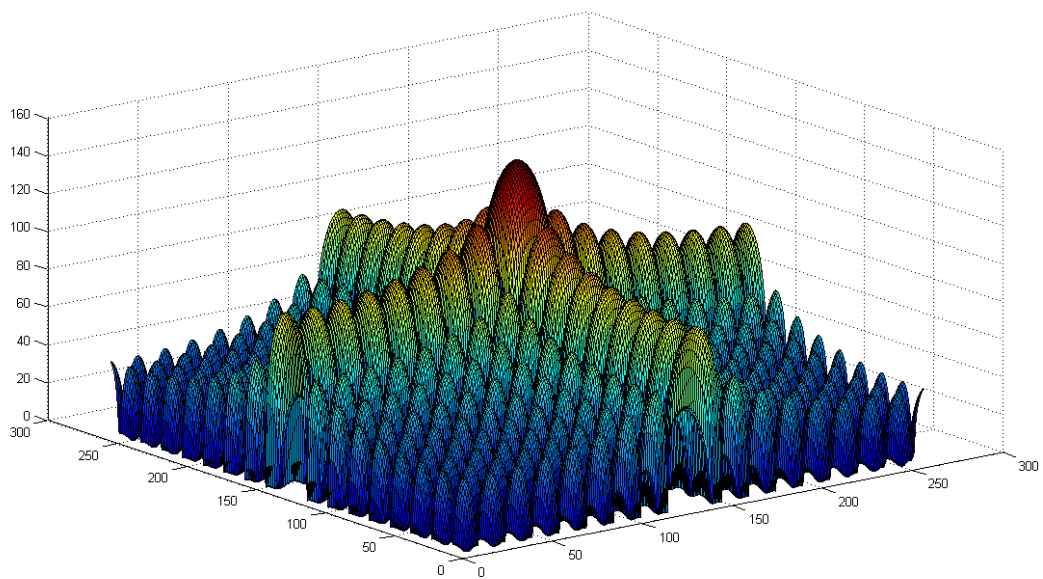
Σχήμα 2.3.9: Φάσμα ισχύος ενός μόνο κώνου



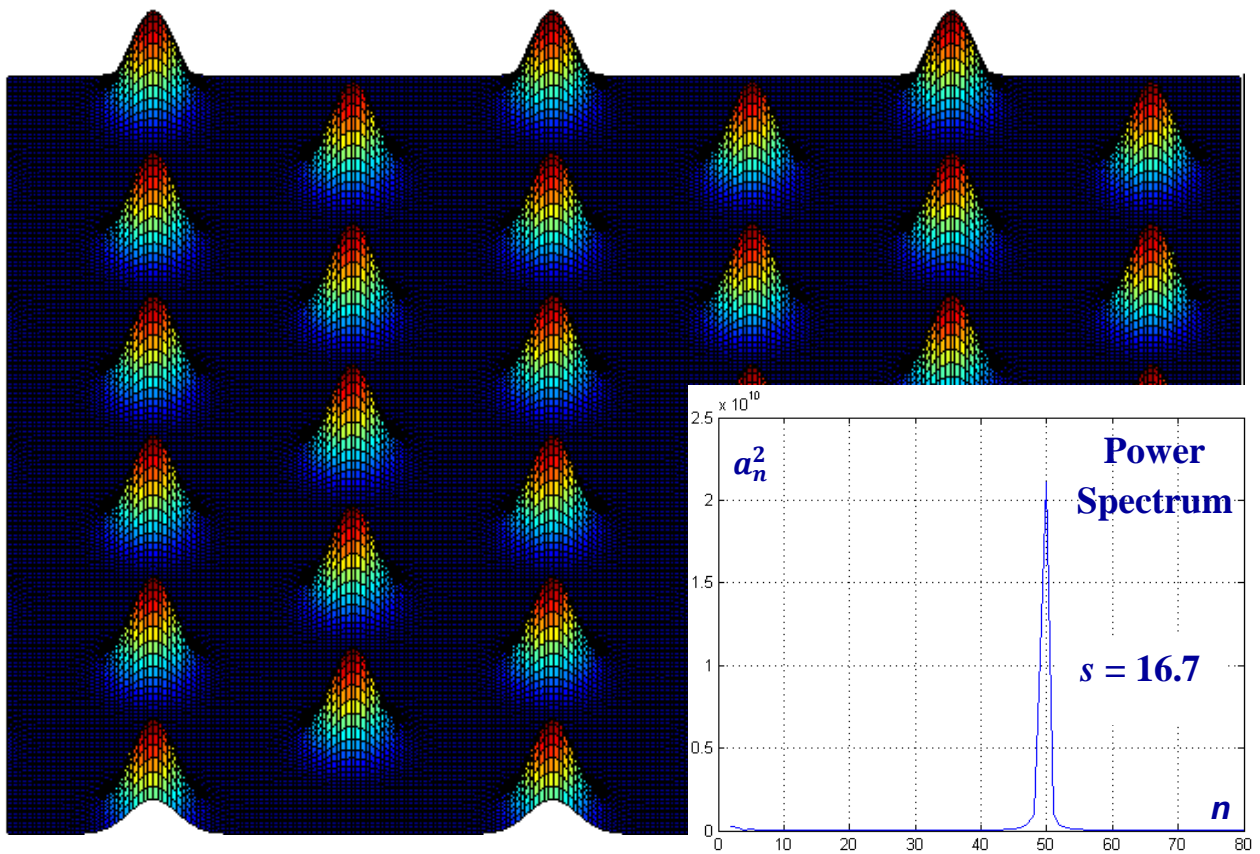
Σχήμα 2.3.10: Επιφάνεια από παραλληλεπίπεδα



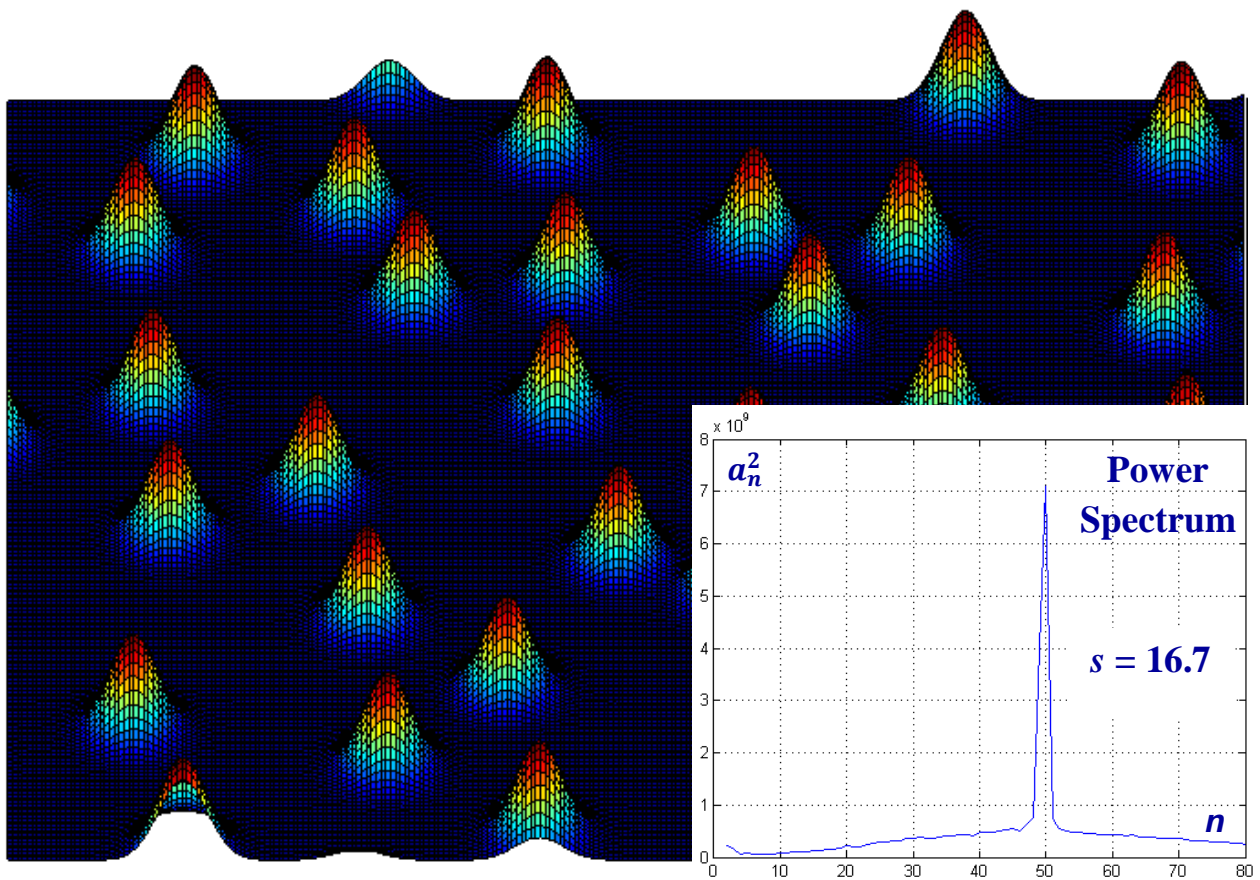
Σχήμα 2.3.11: Φάσμα ισχύος επιφάνειας από παραλληλεπίπεδα



Σχήμα 2.3.12: Φάσμα ισχύος ενός μόνο παραλληλεπίπεδου



Σχήμα 2.3.13: Τριγωνικό πλέγμα από υψώματα χωρίς θόρυβο κατά την τοποθέτησή τους



Σχήμα 2.3.14: Τριγωνικό πλέγμα από υψώματα με θόρυβο κατά την τοποθέτησή τους

2.4 Συνάρτηση αυτοσυσχέτισης

Ένας ακόμα τρόπος ανίχνευσης κάποιου επαναλαμβανόμενου σχεδίου σε μια επιφάνεια, μπορεί να πραγματοποιηθεί χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση *αυτοσυσχέτισης* $R_{\vec{r}}$, η οποία προσδιορίζει το βαθμό συσχέτισης του ύψους της επιφάνειας στα σημεία που διαχωρίζονται από το διάνυσμα $\vec{r} = (r_x, r_y)$. Αν η επιφάνεια είναι διακριτοποιημένη σε ένα πλέγμα σημείων $N \times N$, τότε [Pelliccione, 2008]:

$$R(\vec{r}) = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} (h_{nk} - \bar{h}) (h_{n+r_x, k+r_y} - \bar{h})}{\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} (h_{nk} - \bar{h})^2}$$

όπου με \bar{h} συμβολίζουμε τη μέση τιμή του ύψους της επιφάνειας. Η $R(\vec{r})$ είναι συνάρτηση 2 μεταβλητών, έχει υψηλό κόστος υπολογισμού και η γραφική της παράσταση είναι τρισδιάστατη και άρα δύσκολα ερμηνεύσιμη. Στην περίπτωση όμως που οι στατιστικές ιδιότητες της επιφάνειας δεν εξαρτώνται από την κατεύθυνση από την οποία την παρατηρούμε, τότε η επιφάνεια είναι *ισοτροπική* και η συνάρτηση *αυτοσυσχέτισης* εξαρτάται μόνο από την απόσταση $|\vec{r}| = r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2}$:

$$R(r) = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \langle (h_{nk} - \bar{h}) (h_{n+r_x, k+r_y} - \bar{h}) \rangle_{r=\sqrt{r_x+r_y}}}{\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} (h_{nk} - \bar{h})^2}$$

Με $\langle \dots \rangle_{r=\sqrt{r_x+r_y}}$ συμβολίσαμε το μέσο όρο του γινομένου για όλες τις τιμές r_x και r_y όπου ισχύει $r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2}$. Παρακάτω, αναφέρουμε κάποιες ιδιότητες της $R(r)$:

- $R(r) \in [-1, 1]$
- $R(r) = 1$ για $r = 0$
- $R(r) \cong 0$ για $r \rightarrow \infty$

Η κανονικοποιημένη μορφή της *συνάρτησης αυτοσυσχέτισης*, σημαίνει ότι η τιμή της για κάποιο r δεν εξαρτάται από τις μονάδες μέτρησης του ύψους της επιφάνειας. Μεγάλη θετική τιμή της $R(r)$ κοντά στο 1, σημαίνει πως υπάρχει υψηλή θετική συσχέτιση μεταξύ των υψών. Το αντίστροφο ισχύει, όταν παίρνει αρνητική τιμή κοντά στο -1. Επίσης για μεγάλα r τα ύψη είναι ασυσχέτιστα, γι' αυτό και η $R(r)$ είναι μηδενική. Στην πράξη, για να έχουν νόημα τ' αποτελέσματα μας, η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει το r είναι το 1/4 της μιας διάστασης του τετραγωνικού πλαισίου [Davis, 1986].

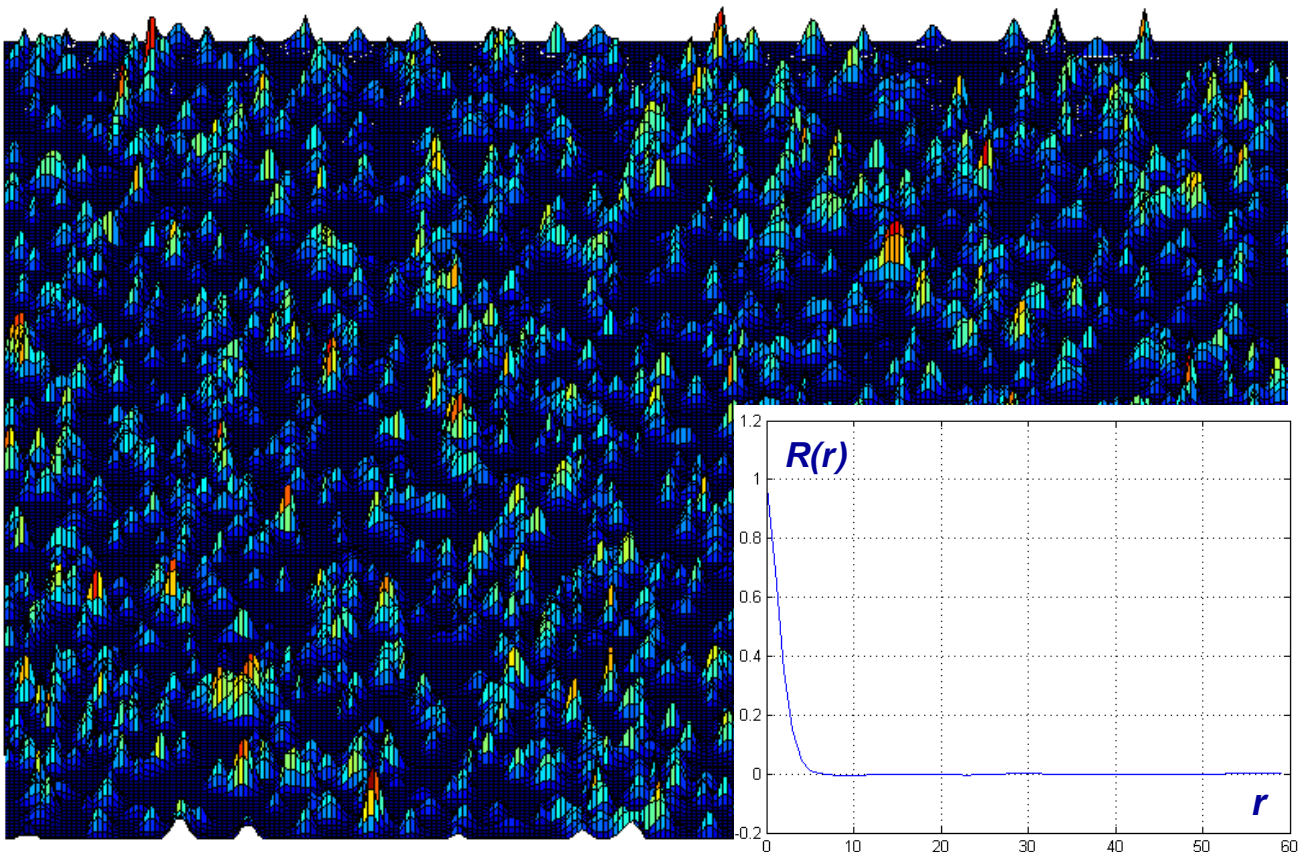
Σχεδιάζοντας τη συνάρτηση *αυτοσυσχέτισης* για διάφορα r προκύπτει το *correlogram*, το οποίο συνοψίζει το είδος της κανονικότητας που ενυπάρχει στο ύψος της επιφάνειας. Αν τα ύψη στα διάφορα σημεία της επιφάνειας είναι ασυσχέτιστα, τότε η $R(r)$ είναι παντού σχεδόν μηδενική, εκτός για $r = 0$ (σχήμα 2.4.1). Για περιοδικές επιφάνειες, η $R(r)$ μειώνεται συνεχώς ως προς r και μάλιστα ταλαντευόμενη (σχήμα 2.6.1) [Pelliccione, 2008].

Αξίζει να σημειωθεί ότι το *φάσμα ισχύος* $F(k)$ μιας επιφάνειας, είναι ο μετασχηματισμός *Fourier* της συνάρτησης *αυτοσυσχέτισης* [Pelliccione, 2008]:

$$F(k) = \frac{w^2}{4\pi^2} \int R(r) e^{ikr} dr$$

όπου

$$w^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} (h_{nk} - \bar{h})^2$$



Σχήμα 2.4.1: Το correlogram μιας τυχαίας επιφάνειας

Όπως αναφέραμε και πριν, η $R(\vec{r})$ είναι συνάρτηση 2 μεταβλητών, με αποτέλεσμα να έχει υψηλό κόστος υπολογισμού, αλλά και δυσκολία στην ερμηνεία της. Η τυχόν μετατροπή της σε συνάρτηση μιας μεταβλητής, όταν έχουμε ισοτροπικές επιφάνειες, μπορεί να επιφέρει κάποια αλλοίωση στα αποτελέσματα της.

Το σημαντικότερο όμως πρόβλημα της, είναι ότι δεν έχει μελετηθεί συστηματικά και η εξέταση της γίνεται μόνο οπτικά. Στην περίπτωση που η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης περιγράφει μια περιοδική επιφάνεια, δεν έχει προταθεί κάποιος ποσοτικός δείκτης που να προσδιορίζει το βαθμό οργάνωσης της επιφάνειας.

Στην περίπτωση που η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης περιγράφει μια χρονοσειρά δημιουργημένη από κάποια στοχαστική διαδικασία, έχει αποδειχτεί πως δεν μπορεί ν' αναγνωριστεί η διαδικασία αυτή με μοναδικό τρόπο. Συγκεκριμένα, μια στοχαστική διαδικασία δημιουργεί στη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης συγκεκριμένη δομή, αλλά δεν ισχύει πάντα το αντίθετο [Chatfield C. 2004]. Παρόμοια, είναι πιθανόν, διαφορετικές επιφάνειες να έχουν την ίδια συνάρτηση αυτοσυσχέτισης.

2.5 Συνάρτηση συσχέτισης διαφοράς υψών

Μια παραλλαγή της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης, είναι η συνάρτηση συσχέτισης διαφοράς υψών $H(r)$:

$$H(r) = \frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \langle (h_{n+r_x, k+r_y} - h_{nk})^2 \rangle_{r=\sqrt{r_x+r_y}}$$

Επειδή:

$$(h_{n+r_x, k+r_y} - h_{nk})^2 = [(h_{n+r_x, k+r_y} - \bar{h}) - (h_{nk} - \bar{h})]^2$$

βρίσκουμε:

$$H(r) = \frac{1}{N^2} \sum_{n,k} \langle (h_{n+r_x, k+r_y} - \bar{h})^2 \rangle_{r=\sqrt{r_x+r_y}} + \frac{1}{N^2} \sum_{n,k} \langle (h_{nk} - \bar{h})^2 \rangle_{r=\sqrt{r_x+r_y}} - \frac{2}{N^2} \sum_{n,k} \langle (h_{n+r_x, k+r_y} - \bar{h})(h_{nk} - \bar{h}) \rangle_{r=\sqrt{r_x+r_y}}$$

από όπου παίρνουμε τελικά τη σχέση μεταξύ $R(r)$ και $H(r)$ (σχήμα 2.6.1):

$$H(r) = 2w^2(1 - R(r))$$

2.6 Παραλλαγές των συναρτήσεων συσχέτισης

Οι συναρτήσεις $R(r)$ και $H(r)$ καθώς και το φάσμα ισχύος εφαρμόζονται σε όλων των ειδών τις επιφάνειες. Είναι αρκετά όμως πολύπλοκες ώστε να μπορούν εύκολα να συσχετιστούν με τα χαρακτηριστικά της επιφάνειας και επίσης οι συναρτήσεις συσχέτισης είναι χρονοβόρες υπολογιστικά, όταν μελετάμε επιφάνειες δύο ή παραπάνω διαστάσεων. Ενδεχομένως όμως, σε επιφάνειες με ειδικά χαρακτηριστικά, κάποιες παραλλαγές τους να έχουν πλεονεκτήματα.

Σε ισοτροπικές επιφάνειες με ευδιάκριτες κορυφές υψωμάτων, μπορούμε να μειώσουμε το χρόνο υπολογισμού των παραπάνω συναρτήσεων, αν βρούμε τη συσχέτιση μόνο του ύψους των

κορυφών των υψωμάτων, με το ύψος της υπόλοιπης επιφάνειας σε διάφορες αποστάσεις r από τις κορυφές. Αν λοιπόν, έχουμε M υψώματα και το ύψωμα m είναι τοποθετημένο στο σημείο (x_m, y_m) της επιφάνειας ($m = 1, 2, \dots, M$), τότε παίρνουμε την κορυφοκεντρική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $R'(r)$:

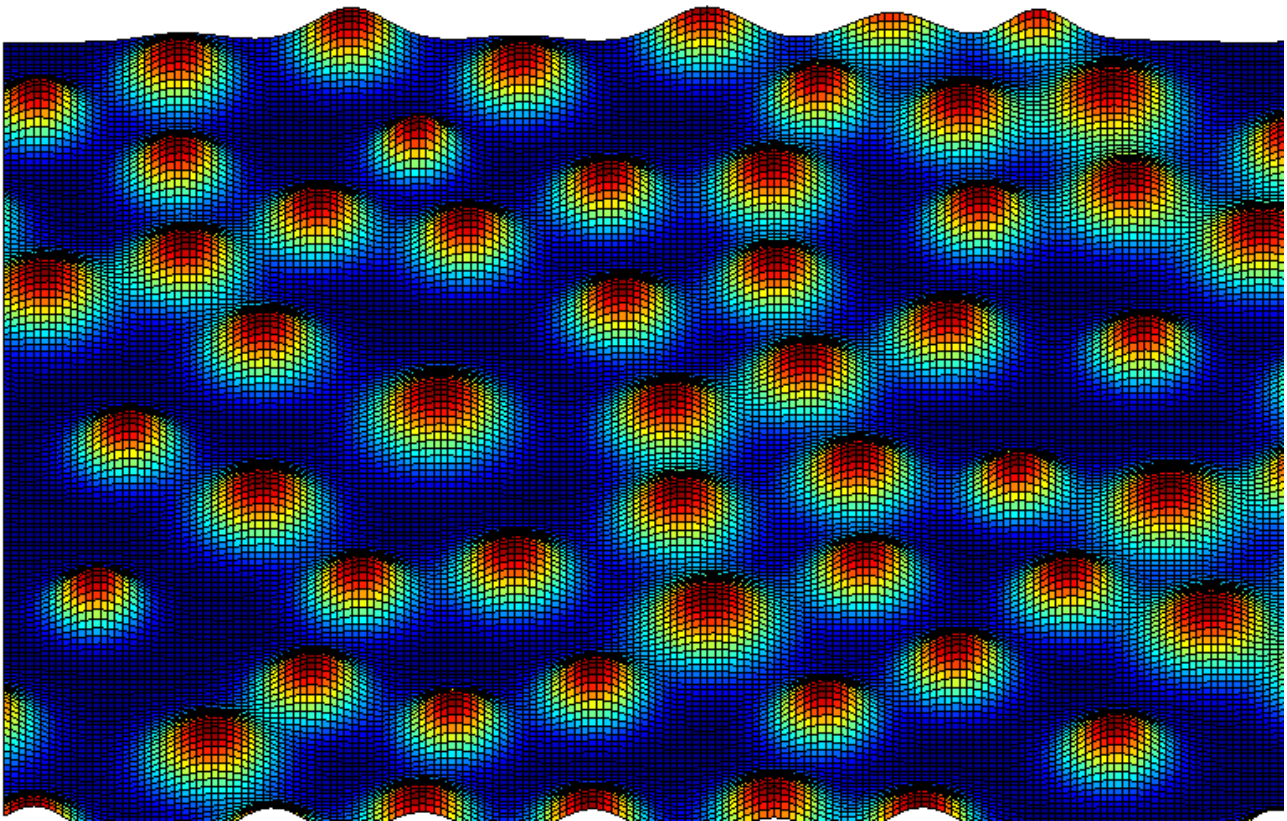
$$R'(r) = \frac{\sum_{m=1}^M \langle (h_{x_m y_m} - \bar{h}) (h_{x_m+r_x, y_m+r_y} - \bar{h}) \rangle_{r=\sqrt{r_x+r_y}}}{\sum_{m=1}^M (h_{x_m y_m} - \bar{h})^2}$$

και την κορυφοκεντρική συνάρτηση συσχέτισης διαφοράς υψών H'_r :

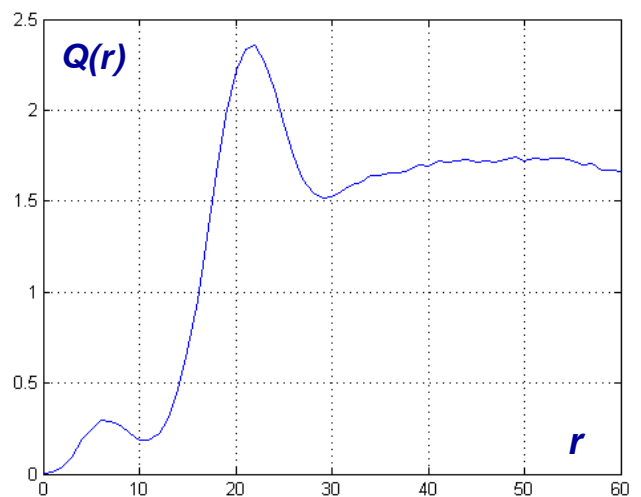
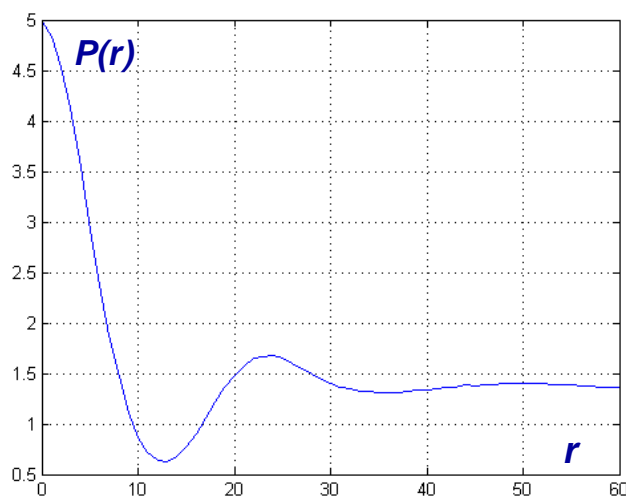
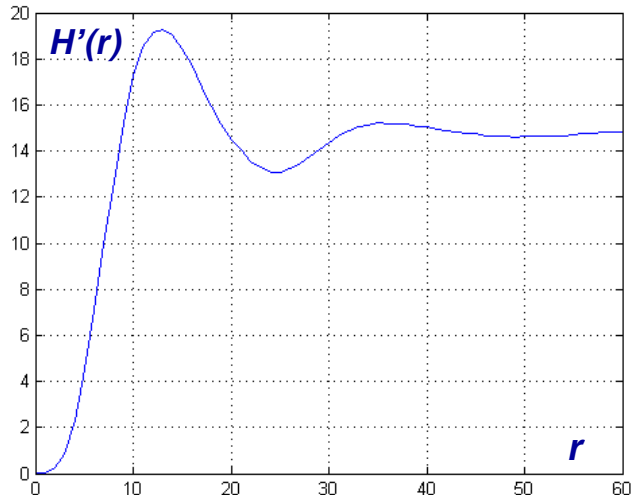
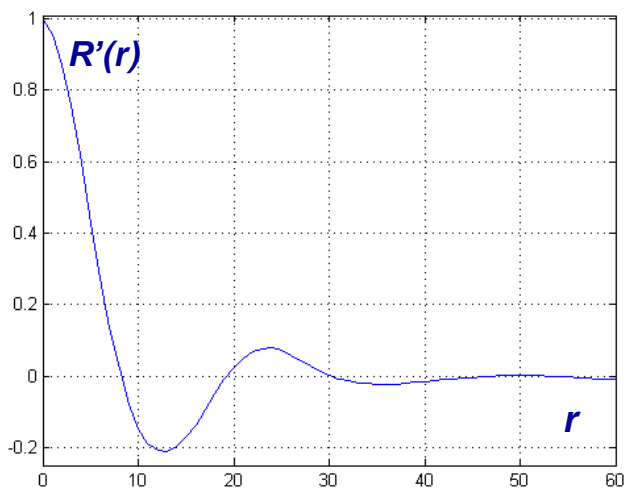
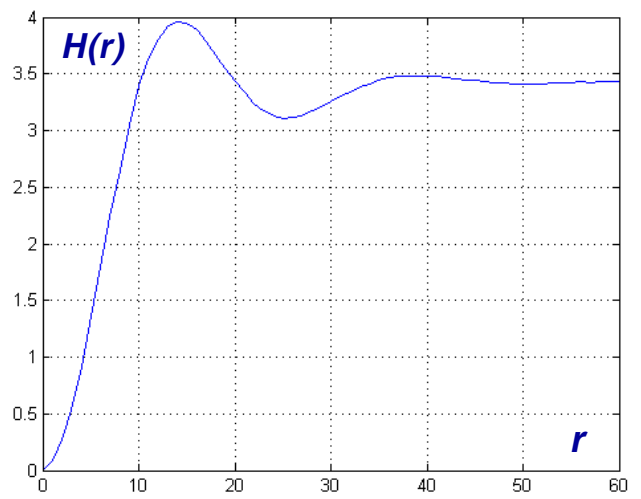
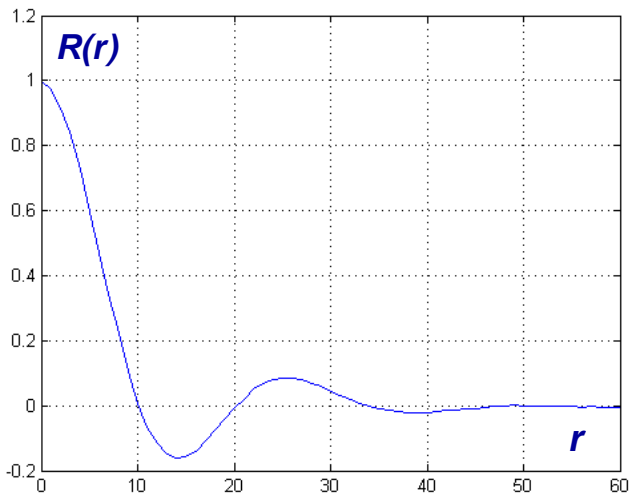
$$H'(r) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \langle (h_{x_m+r_x, y_m+r_y} - h_{x_m y_m})^2 \rangle_{r=\sqrt{r_x+r_y}}$$

Στο σχήμα 2.6.1 σχεδιάζουμε τις $R'(r)$ και $H'(r)$, από όπου φαίνεται πόσο πολύ μοιάζουν με τις $R(r)$ και $H(r)$ αντίστοιχα.

Μια ακόμα απλούστερη περίπτωση θα είχαμε, αν υπολογίζαμε το μέσο ύψος της επιφάνειας $P(r)$ σε διάφορες αποστάσεις r από τις κορυφές των υψωμάτων:



Σχήμα 2.6.1: (Συνεχίζεται)



Σχήμα 2.6.1: Οι συναρτήσεις $R(r)$, $H(r)$, $R'(r)$, $H'(r)$, $P(r)$ και $Q(r)$ για επιφάνεια με καλά οργανωμένα υψώματα

$$P(r) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \langle h_{x_m+r_x, y_m+r_y} \rangle_{r=\sqrt{r_x+r_y}}$$

Επίσης, η διασπορά του ύψους της επιφάνειας $Q(r)$ γύρω από τη μέση της τιμή, σε διάφορες αποστάσεις r από τις κορυφές των υψωμάτων, έχει ως εξής:

$$\begin{aligned} Q(r) &= \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \langle (h_{x_m+r_x, y_m+r_y} - P(r))^2 \rangle_{r=\sqrt{r_x+r_y}} \\ &= \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \langle h_{x_m+r_x, y_m+r_y}^2 \rangle_{r=\sqrt{r_x+r_y}} - P(r)^2 \end{aligned}$$

Ονομάζουμε την $P(r)$ ως *κορυφοκεντρική συνάρτηση μέσου ύψους επιφάνειας* (*peak-centered mean height function*) και την $Q(r)$ ως *κορυφοκεντρική συνάρτηση διασποράς ύψους επιφάνειας* (*peak-centered height variance function*). Από το σχήμα 2.6.1, παρατηρούμε πόσο πολύ μοιάζουν οι $R(r)$, $R'(r)$ και $P(r)$.

Για τον προσδιορισμό της $R(r)$, για συγκεκριμένο r , χρειάζονται $\sim L^2 r$ πολλαπλασιασμοί, όπου L θυμίζουμε ότι είναι η διάσταση του πλαισίου. Για την $R'(r)$ χρειάζονται $\sim Mr$ πολλαπλασιασμοί, για την $P(r) \sim Mr$ προσθέσεις και για την $Q(r) \sim Mr$ πολλαπλασιασμοί. Η υπεροχή λοιπόν της $P(r)$ είναι φανερή. Πιο σημαντική όμως είναι η απλότητα της, η οποία θα επιτρέψει την ερμηνεία της από τα χαρακτηριστικά της επιφάνειας.

Αυτό που μας ενδιαφέρει να βρούμε σε σχέση με τα υψώματα, είναι:

- Ποια η τυπική μορφή ενός υψώματος;
- Ποια τα χαρακτηριστικά του τυπικού υψώματος, δηλαδή ποιο το ύψος και ποιο το πλάτος του;
- Πόσο αποκλίνουν τα υψώματα από την τυπική τους μορφή και συγκεκριμένα πόσο αποκλίνουν τα ύψη και πλάτη τους από τη μέση τους τιμή;

Σε σχέση με τον τρόπο διάταξης τους, μας ενδιαφέρει:

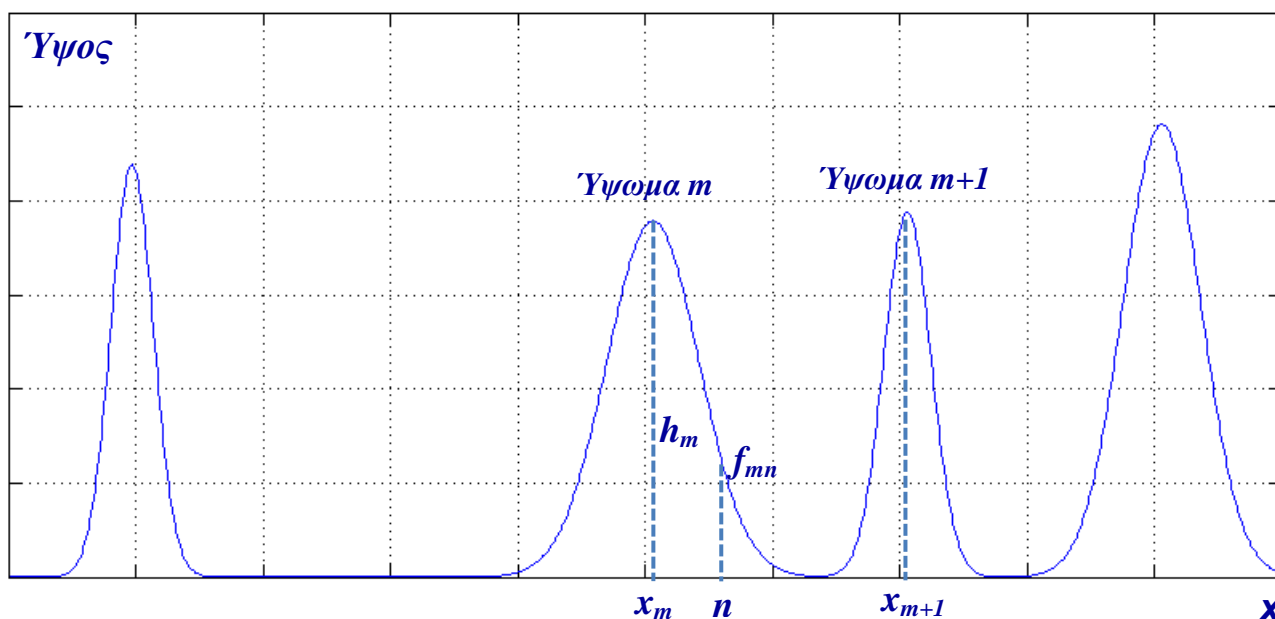
- Ποια υψώματα θεωρούνται γειτονικά ενός υψώματος και πόσο απέχουν κατά μέσο όρο από αυτό;
- Πόσο τακτοποιημένα έχουν τοποθετηθεί τα υψώματα, δηλαδή πόσο κυμαίνεται η απόσταση του κάθε υψώματος από τα γειτονικά του;
- Υπάρχουν τμήματα της επιφάνειας στα οποία δεν έχει πραγματοποιηθεί τοποθέτηση υψωμάτων;

3. ΚΟΡΥΦΟΚΕΝΤΡΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΣΟΥ ΥΨΟΥΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ ΜΙΑΣ ΔΙΑΣΤΑΣΗΣ

3.1 Διάφοροι ορισμοί

Θα ξεκινήσουμε δίνοντας διάφορους ορισμούς που αφορούν τα χαρακτηριστικά ενός υψώματος και γενικά μιας επιφάνειας. Θα περιγράψουμε στη συνέχεια τον τρόπο υπολογισμού της κορυφοκεντρικής συνάρτησης μέσου ύψους επιφάνειας (*peak-centered mean height function*) και θα αναλύσουμε τ' αποτελέσματα της. Για ευκολία σ' αυτό το κεφάλαιο θα περιοριστούμε σε επιφάνειες και υψώματα μιας διάστασης. Σε επόμενο κεφάλαιο θα αναπροσαρμόσουμε τ' αποτελέσματα μας στις 2 διαστάσεις.

Ας θεωρήσουμε λοιπόν, πως πάνω σε ένα τμήμα μήκους L του άξονα x , έχουν τοποθετηθεί M μονοδιάστατα υψώματα (σχήμα 3.1.1). Τα υψώματα διαφοροποιούνται από το σημείο που τοποθετήθηκαν και τα γεωμετρικά τους χαρακτηριστικά. Θα χρειαστεί να ορίσουμε διάφορα μεγέθη, που θα μας διευκολύνουν στον χαρακτηρισμό των υψωμάτων και τη διαφοροποίησή τους.



Σχήμα 3.1.1: Τμήμα επιφάνειας από M υψώματα

Το πρώτο μέγεθος έχει να κάνει με τη ποσότητα του υλικού από την οποία αποτελούνται. Έστω, λοιπόν ότι το ύψωμα m έχει ύψος που καθορίζεται από τη συνάρτηση $f_m(x)$. Ορίζουμε ως **εμβαδόν** E_m του υψώματος m , το ολοκλήρωμα της $f_m(x)$ ως προς x στο διάστημα $[0, L]$:

$$E_m = \int_0^L f_m(x) dx \quad (3.1.1)$$

Αν η επιφάνεια είναι διακριτή αντί για συνεχής, μπορούμε ν' αντικαταστήσουμε το ολοκλήρωμα με ένα άθροισμα σε όλα τα σημεία της επιφάνειας:

$$E_m = \sum_{n=0}^{N-1} f_{mn} \quad (3.1.2)$$

όπου για ευκολία επιλέξαμε ως διαμέλιση της επιφάνειας το σύνολο $\{0,1,2,\dots,L\}$, με το f_{mn} να υποδηλώνει το ύψος του υψώματος m στο σημείο $n = 0,1,\dots, L$ και το $L = N-1$.

Ένα π.χ. γκαουσιανό ύψωμα πλάτους w_m και ύψους h_m τοποθετημένο στο σημείο x_m , περιγράφεται από τη συνάρτηση:

$$f_m(x) = h_m e^{-\frac{(x-x_m)^2}{2w_m^2}} \quad (3.1.3)$$

ή σε διακριτή μορφή:

$$f_{mn} = h_m e^{-\frac{(n-x_m)^2}{2w_m^2}} \quad (3.1.4)$$

και έχει συνολικό εμβαδόν

$$E_m = h_m \int_0^L e^{-\frac{(x-x_m)^2}{2w_m^2}} dx = \sqrt{2\pi} h_m w_m \quad (3.1.5)$$

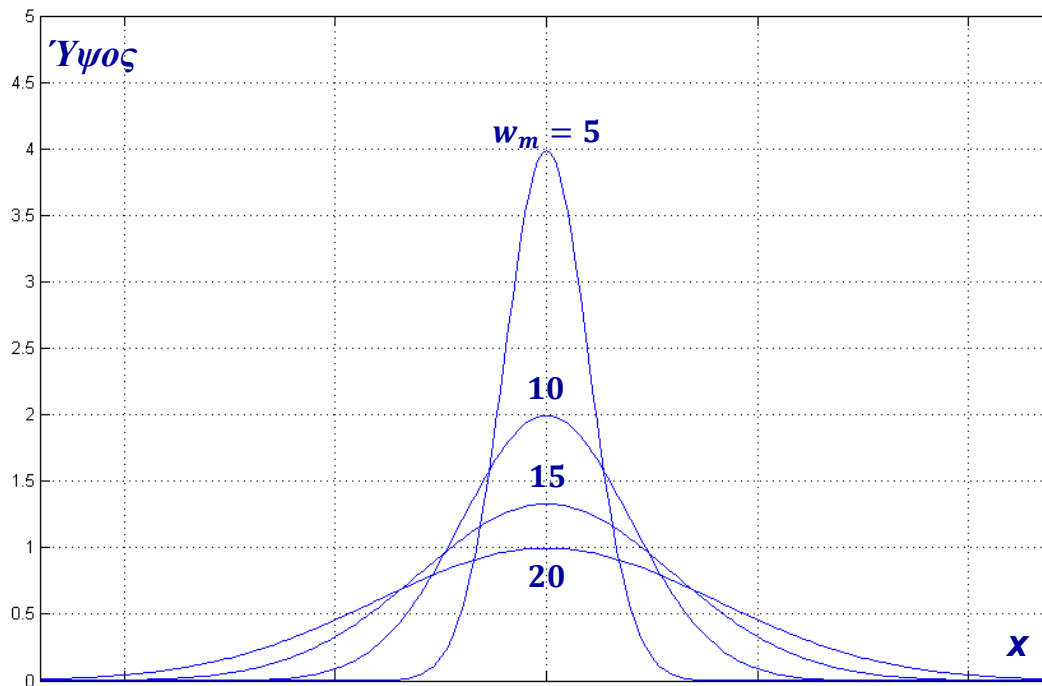
Στο σχήμα 3.1.2 εικονίζονται υψώματα τα οποία έχουν το ίδιο εμβαδόν.

Το x_m ονομάζεται **κέντρο βάρους** του υψώματος και είναι χαρακτηριστικό μέγεθος του γεωμετρικού σχήματος του υψώματος. Εκφράζει τη θέση στην οποία αν τοποθετούσαμε ένα υπομόχλιο, το ύψωμα θα ισορροπούσε. Υπολογίζεται από τη σχέση:

$$x_m = \frac{\int_0^L x f_m(x) dx}{\int_0^L f_m(x) dx} = \frac{\int_0^L x f_m(x) dx}{E_m} \quad (3.1.6)$$

ή σε διακριτή μορφή:

$$x_m = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} n f_{mn}}{\sum_{n=0}^{N-1} f_{mn}} = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} n f_{mn}}{E_m} \quad (3.1.7)$$



Σχήμα 3.1.2: Γκαουσιανά υψώματα ίδιου μεγέθους αλλά διαφορετικού πλάτους

Στη σχέση (3.1.7) η ροπή πρώτης τάξης μας πληροφορεί για τη τάση που έχει ένα ύψωμα να περιστραφεί γύρω από την αρχή των αξόνων. Όμοια αν πάρουμε τη ροπή δεύτερης τάξης ως προς x_m , θα μας δείξει πως κατανέμεται το ύψωμα γύρω από το κέντρο βάρους του. Ορίζουμε ως **εύρος** σ_m του υψώματος m την ποσότητα που υπολογίζεται ως εξής:

$$\sigma_m^2 = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} (n - x_m)^2 f_{mn}}{\sum_{n=0}^{N-1} f_{mn}} \quad (3.1.8)$$

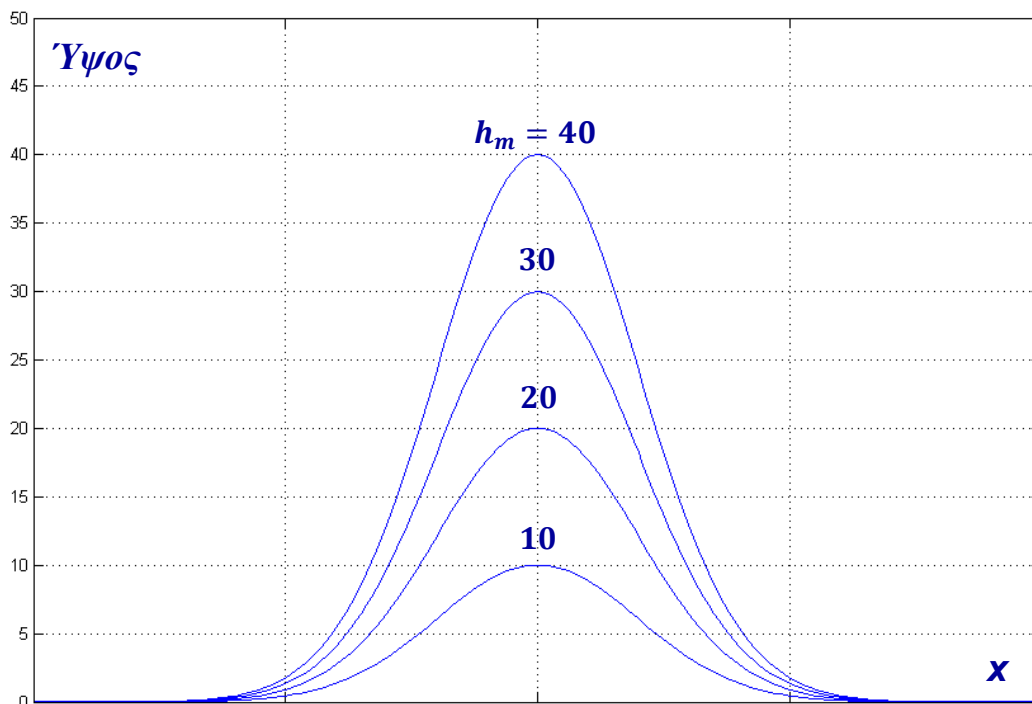
Όσο αυξάνονται τα f_{mn} καθώς απομακρυνόμαστε από το κέντρο βάρους x_m , τόσο πλατύτερο γίνεται ένα ύψωμα. Εύκολα βρίσκουμε ότι:

$$\begin{aligned} \sigma_m^2 &= \frac{\sum n^2 f_{mn}}{\sum f_{mn}} - 2x_m \frac{\sum n f_{mn}}{\sum f_{mn}} + x_m^2 \\ \sigma_m^2 &= \frac{\sum n^2 f_{mn}}{\sum f_{mn}} - x_m^2 \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

Τον προηγούμενο τύπο θα τον χρησιμοποιήσουμε πολλές φορές παρακάτω. Ο όρος $\frac{\sum n^2 f_{mn}}{\sum f_{mn}}$ είναι το τετράγωνο της **ακτίνας αδράνειας** R του υψώματος. Το εύρος σ_m σε συνεχή μορφή γράφεται:

$$\sigma_m^2 = \frac{\int_0^L (x - x_m)^2 f_m(x) dx}{\int_0^L f_m(x) dx} \quad (3.1.10)$$

Σημειώνουμε, ότι σε ένα γκαουσσιανό ύψωμα το εύρος σ_m συμπίπτει με το πλάτος του w_m . Στο σχήμα 3.1.2 φαίνεται πως επηρεάζεται ένα ύψωμα καθώς μεταβάλλεται το πλάτος, ενώ το εμβαδόν του παραμένει ως έχει. Στο σχήμα 3.1.3 τα υψώματα αν και διαφέρουν στο ύψος, έχουν όλα το ίδιο εύρος.



Σχήμα 3.1.3: Γκαουσσιανά υψώματα ίδιου πλάτους αλλά διαφορετικού ύψους

3.2 Περιγραφή της κορυφοκεντρικής συνάρτησης μέσου ύψους επιφάνειας

Ας υποθέσουμε ότι έχει δημιουργηθεί μια επιφάνεια από M μονοδιάστατα υψώματα (σχήμα 3.1.1) και ότι υπάρχει δυνατότητα να μετρήσουμε το ύψος της και ακόμα να προσδιορίσουμε τις κορυφές των υψωμάτων.

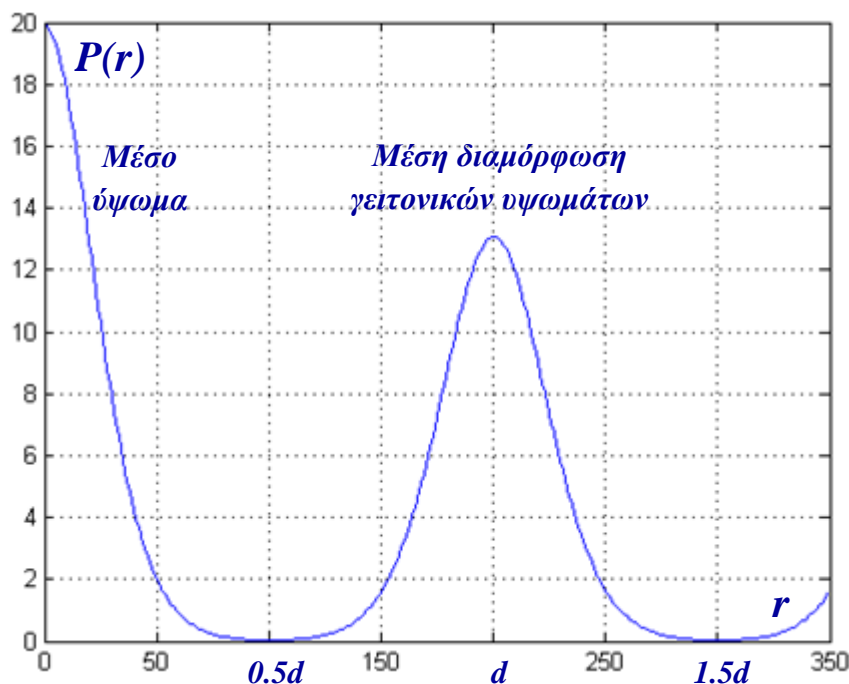
Διαλέγουμε ένα ύψωμα m και ξεκινώντας από την κορυφή του x_m , υπολογίζουμε το ύψος της μονοδιάστατης επιφάνειας εκατέρωθεν, σε διάφορες αποστάσεις. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία ξεκινώντας από τις κορυφές και των υπόλοιπων υψωμάτων και τέλος προσδιορίζουμε τη μέση τιμή $P(r)$ των υψών όλων των σημείων που βρίσκονται σε απόσταση r από κάθε κορυφή:

$$P(r) = \frac{1}{2M} \sum_{m=1}^M (f_{m,x_m+r} + f_{m,x_m-r}) \quad (3.2.1)$$

Παίρνουμε έτσι την καμπύλη του σχήματος 3.2.1. Για απόσταση $r = 0$, η $P(r)$ γίνεται όσο και το μέσο ύψος των υψωμάτων. Όταν η επιφάνεια έχει περιοδική δομή διακρίνονται καθαρά δύο ή περισσότεροι λοβοί. Ο δεύτερος λοβός είναι ανάλογος της κορυφής που υπάρχει στο φάσμα ισχύος ή στη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης. Καθώς το r τείνει στο άπειρο, όταν τα ύψη είναι ασυσχέτιστα, η $P(r)$ σταθεροποιείται και παίρνει τη μέση τιμή του ύψους της επιφάνειας (σχήμα 2.6.1).

Πιο αναλυτικά στο σχήμα 3.2.1, ο πρώτος λοβός από αριστερά είναι μισός και διπλασιαζόμενος μας αποκαλύπτει τη μορφή που έχει ένα τυπικό ύψωμα, καθώς και ποιο είναι το ύψος και πλάτος του.

Ο δεύτερος λοβός μας πληροφορεί, για το πώς διαμορφώνεται κατά μέσο όρο η επιφάνεια από τα γειτονικά υψώματα γύρω από την κορυφή ενός τυχαίου υψώματος. Επηρεάζεται από τα χαρακτηριστικά των υψωμάτων, αλλά και από τον τρόπο διάταξης τους. Η σύγκριση του με το μέσο ύψωμα θ' αναδείξει το πόσο καλά οργανωμένα έχουν τοποθετηθεί τα υψώματα. Η θέση της κορυφής του δεύτερου λοβού μας δίνει πληροφορίες για την απόσταση μεταξύ γειτονικών υψωμάτων. Το εμβαδόν του λοβού αυτού, αν είναι μικρότερο του πρώτου λοβού μετά τον διπλασιασμό του, σημαίνει όπως θα δούμε παρακάτω, ότι σε κάποιες περιοχές τα υψώματα απουσιάζουν εντελώς. Επίσης, ο δεύτερος λοβός είναι πιο πεπλατυσμένος του πρώτου, λόγω του θορύβου κατά την τοποθέτηση των υψωμάτων.



Σχήμα 3.2.1: Μέσο ύψος επιφάνειας σε διάφορες αποστάσεις από τις κορυφές των υψωμάτων. Ο πρώτος λοβός από αριστερά μας αποκαλύπτει τη μορφή που έχει ένα τυπικό ύψωμα και ο δεύτερος λοβός τον τρόπο διάταξης των υψωμάτων

Παρατηρούμε, ότι οι 2 λοβοί της *κορυφοκεντρικής συνάρτησης μέσου ύψους επιφάνειας* $P(r)$ διακρίνονται καθαρά μεταξύ τους, γιατί τυχαίνει και τα υψώματα να ξεχωρίζουν μεταξύ τους. Θα μελετήσουμε αργότερα τη γενική περίπτωση όπου οι 2 λοβοί έχουν συγχωνευτεί. Στις παραγράφους που ακολουθούν θα μελετηθεί, πως τα χαρακτηριστικά των υψωμάτων και η διάταξη τους επηρεάζουν την $P(r)$.

3.3 Μέσο ύψωμα

Τα χαρακτηριστικά του πρώτου λοβού επηρεάζονται από τα χαρακτηριστικά των υψωμάτων και μόνο αυτών και έτσι αναδεικνύεται το μέσο ύψωμα. Ας θεωρήσουμε λοιπόν, πως πάνω σε κάποιο τμήμα $[0, N-1]$ του άξονα x , έχουν τοποθετηθεί M μονοδιάστατα υψώματα διαφόρων πλατών $w+v_m$ και υψών $h+u_m$ ($m = 1, 2, \dots, M$), όπου τα v_m και u_m ακολουθούν κανονική κατανομή $N(0, s_w^2)$ και $N(0, s_h^2)$ αντίστοιχα. Τα υψώματα είναι γκαουσιανά, που όπως έχουμε πει, περιγράφονται από την συνάρτηση:

$$f_{mn} = (h + u_m) e^{-\frac{(n-x_m)^2}{2(w+v_m)^2}}$$

και τα οποία προγραμματίστηκε να τοποθετηθούν στους κόμβους ενός ομοιόμορφου πλέγματος με σταθερά d αλλά με μικρές διαταραχές στη θέση τους από την απόλυτη περιοδικότητα.. Έτσι, το ύψωμα m αποκλίνει d_m απόσταση από τη σωστή του θέση, όπου τα d_m ακολουθούν κανονική κατανομή με παράμετρο θέσης $\mu_d=0$ και παράμετρο μεταβλητότητας σ_d^2 . Ας υποθέσουμε ότι τα σημεία του πλέγματος απέχουν απόσταση d . Τότε η μέση απόσταση μεταξύ 2 γειτονικών υψωμάτων m και $m+1$ είναι (σχήμα 3.1.1):

$$E[x_{m+1} - x_m] = E[d + d_m + d_{m+1}]$$

Όμως η μέση τιμή των d_m και d_{m+1} είναι 0, άρα:

$$E[x_{m+1} - x_m] = d \tag{3.2.2}$$

Αντίστοιχα, η διασπορά της απόστασης μεταξύ 2 γειτονικών υψωμάτων είναι:

$$V[x_{m+1} - x_m] = V[d + d_m + d_{m+1}]$$

Αλλά η διασπορά μιας σταθερής ποσότητας είναι 0 και επειδή $V[d_m] = V[d_{m+1}] = \sigma_d^2$ έχουμε:

$$V[x_{m+1} - x_m] = 2\sigma_d^2 \tag{3.2.3}$$

Κέντρο βάρους

Ο πρώτος ημίσειος λοβός εκτείνεται από $0-d/2$, όπου d είναι το σημείο τοποθέτησης της κορυφής του δεύτερου λοβού (σχήμα 3.2.1). Το κέντρο βάρους μ_1 ολόκληρου του λοβού που νοητικά εκτείνεται από $-d/2$ έως $d/2$, είναι 0, αφού στο σημείο αυτό τοποθετήθηκαν όλα τα υψώματα από τα οποία σχηματίστηκε ο λοβός. Πράγματι:

$$\mu_1 = \frac{\sum_{r=-d/2}^{d/2} rP(r)}{\sum_{r=-d/2}^{d/2} P(r)}$$

και από τον ορισμό της P_r :

$$\mu_1 = \frac{\sum_{r,m} r(f_{m,x_m+r} + f_{m,x_m-r})}{\sum_{r,m} (f_{m,x_m+r} + f_{m,x_m-r})}$$

Αν το κέντρο βάρους του υψώματος που περιγράφεται από την f_{mn} είναι x_m , το ίδιο ύψωμα μετακινημένο στο σημείο 0 περιγράφεται από την f_{m,x_m+r} και το κέντρο βάρους του είναι 0, όπως και σε εκείνο που αντιστοιχεί στην f_{m,x_m-r} , οπότε $rf_{m,x_m+r} = rf_{m,x_m-r} = 0$, άρα:

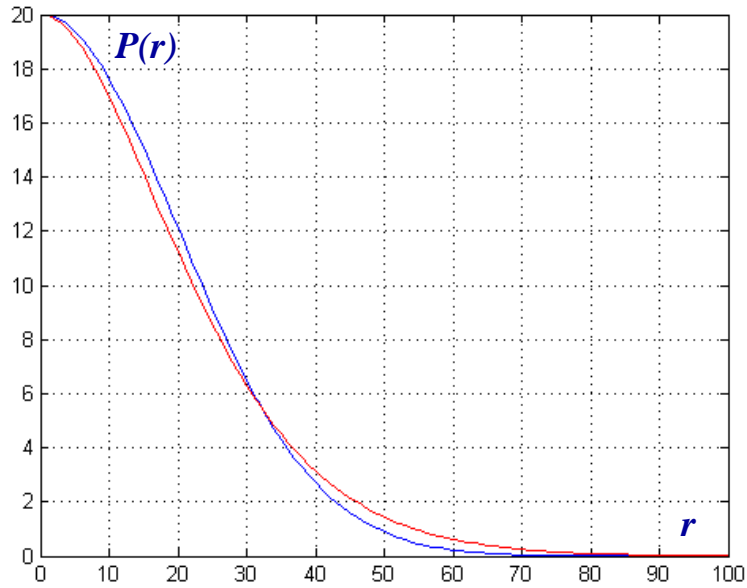
$$\mu_1 = 0 \quad (3.2.4)$$

Μορφή

Από τον ορισμό της $P(r)$, ο πρώτος λοβός όταν σχηματίζεται από γκαουσσισιανά υψώματα με διάφορα ύψη $h+u_l$ και πλάτη $w+v_m$, λόγω της συμμετρίας τους δίνεται από τον τύπο:

$$\begin{aligned} P(r) &= \frac{1}{M} \sum_{l=1}^M \sum_{m=1}^M (h + u_l) e^{-\frac{r^2}{2(w+v_m)^2}} \\ &= h \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M e^{-\frac{r^2}{2(w+v_m)^2}} \quad \text{για } r \in [0, 0.5d] \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Στην περίπτωση που δεν είχαμε μεταβολές στο πλάτος των υψωμάτων, τότε ο πρώτος λοβός θα ήταν γκαουσσισιανός πλάτους w και ύψους h . Στη γενική όμως περίπτωση, διαφέρει. Στο σχήμα 3.3.1, η μπλε καμπύλη είναι μια ημίσεια γκαουσσισιανή, πλάτους 20 και ύψους 20, ενώ η κόκκινη καμπύλη προέρχεται από τη μέσο όρο γκαουσσισιανών υψωμάτων ύψους 20 και μεταβαλλόμενου πλάτους $20+v_m$, όπου η διασπορά των v_m είναι $s_w^2 = 25$. Το εύρος της κόκκινης καμπύλης έχει ελαφρά μεγαλύτερο εύρος από τη γκαουσσισιανή μπλε, όπως θα δούμε παρακάτω αν και το εμβαδόν τους είναι ίδιο.



Σχήμα 3.3.1: Σύγκριση της μορφής του μέσου υψώματος στη γενική περίπτωση (κόκκινη γραμμή), με μια γκαουσιανή καμπύλη (μπλε γραμμή)

Εμβαδόν

Το εμβαδόν ϵ_1 ολόκληρου του πρώτου λοβού είναι η μέση τιμή του εμβαδού όλων των υψωμάτων. Πράγματι:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \sum_{r=-d/2}^{d/2} P(r) = \frac{1}{2M} \sum_{r=-d/2}^{d/2} \sum_{m=1}^M (f_{m,x_m+r} + f_{m,x_m-r}) \\ &= \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M E_m \end{aligned}$$

Το εμβαδόν ενός γκαουσιανού υψώματος πλάτους $w+v_m$ και ύψους $h+u_l$ είναι $\sqrt{2\pi}(w+v_m)(h+u_l)$, επομένως:

$$\epsilon_1 = \frac{1}{M} \sum_{l=1}^M \sum_{m=1}^M \sqrt{2\pi}(w+v_m)(h+u_l)$$

και τελικά:

$$\epsilon_1 = \sqrt{2\pi}wh \quad (3.2.6)$$

Εύρος

Το εύρος s_1 του πρώτου λοβού, μπορεί να βρεθεί είτε από ολόκληρο, είτε από το δεξί ημίσειο μέρος του, δηλαδή:

$$s_1^2 = \frac{\sum_{r=-d/2}^{d/2} (r - \mu_1)^2 P(r)}{\sum_{r=-d/2}^{d/2} P(r)} = \frac{\sum_{r=0}^{d/2} (r - \mu_1)^2 P(r)}{\sum_{r=0}^{d/2} P(r)}$$

Γνωρίζουμε ότι $\mu_1 = 0$, επομένως από τον ορισμό της $P(r)$:

$$s_1^2 = \frac{\sum_m \sum_{r=0}^{d/2} r^2 (f_{m,x_m+r} + f_{m,x_m-r})}{\sum_m \sum_{r=0}^{d/2} (f_{m,x_m+r} + f_{m,x_m-r})}$$

Σύμφωνα με τη σχέση (3.1.8) το εύρος ενός υψώματος m είναι:

$$\sigma_m^2 = \frac{\sum_n (n - x_m)^2 f_{mn}}{E_m} = \frac{\sum_r r^2 f_{m,x_m+r}}{E_m} = \frac{\sum_r r^2 f_{m,x_m-r}}{E_m}$$

άρα

$$s_1^2 = \frac{\sum_m E_m \sigma_m^2}{\sum_m E_m} \quad (3.2.7)$$

δηλαδή, **το τετράγωνο του εύρους του πρώτου λοβού, είναι η σταθμισμένη μέση τιμή των τετραγώνων του πλάτους των υψωμάτων, με βάρη το εμβαδόν τους.** Κάθε ύψωμα λοιπόν, επηρεάζει το τετράγωνο του εύρους του λοβού αναλόγως του τετραγώνου του πλάτους του, αλλά και αναλόγως του μεγέθους του.

Ο προηγούμενος τύπος ισχύει για οποιαδήποτε είδη υψωμάτων. Στη περίπτωση που είναι γκαουσιανά πλάτους $w+v_m$ και ύψους $h+u_l$, το εμβαδόν τους E_m είναι $\sqrt{2\pi}(w+v_m)(h+u_l)$ και το τετράγωνο του εύρους τους σ_m^2 είναι $(w+v_m)^2$, επομένως:

$$\begin{aligned} s_1^2 &= \frac{\sum_l \sum_m \sqrt{2\pi}(w+v_m)(h+u_l) (w+v_m)^2}{\sum_l \sum_m \sqrt{2\pi}(w+v_m)(h+u_l)} \\ &= \frac{\sqrt{2\pi} \sum_l (h+u_l) \sum_m (w+v_m)^3}{\sqrt{2\pi} \sum_l (h+u_l) \sum_m (w+v_m)} \\ &= \frac{\sum_m (w+v_m)^3}{w} \end{aligned}$$

Όπως έχουμε πει, η κατανομή του πλάτους είναι κανονική, με μέση τιμή 0 και διασπορά σ_w^2 , οπότε ισχύει $\sum_m v_m^3 = 0$ και έτσι:

$$s_1^2 = w^2 + 3\sigma_w^2 \quad (3.2.8)$$

Στην περίπτωση λοιπόν γκαουσιανών υψωμάτων, το τετράγωνο του εύρους του πρώτου λοβού, είναι ίσο με το τετράγωνο του μέσου πλάτους των γκαουσιανών υψωμάτων, προσαυξημένο με το τριπλάσιο της διασποράς του πλάτους των υψωμάτων.

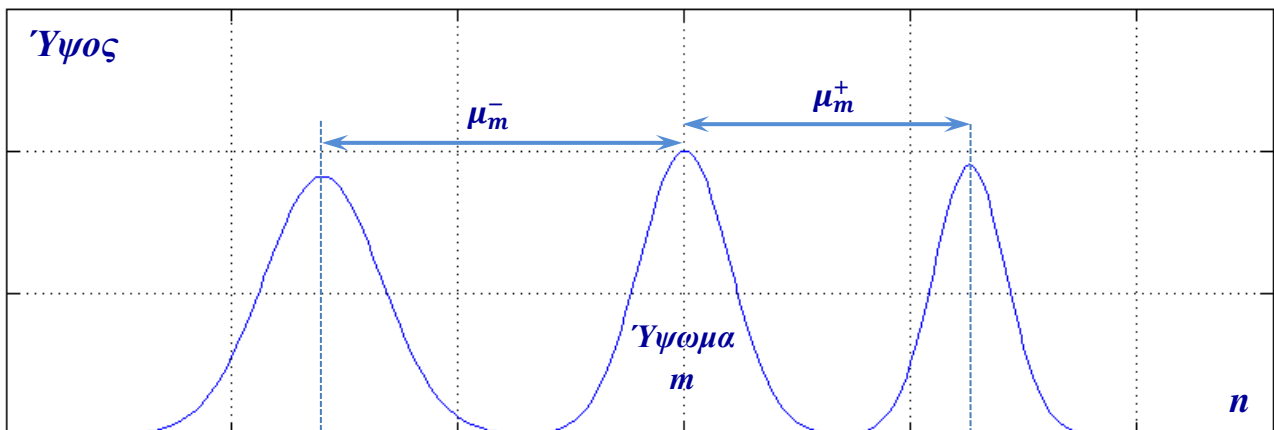
3.4 Μέση διαμόρφωση γειτονικών υψωμάτων

Ο δεύτερος λοβός που εκτείνεται από $0.5d-1.5d$ σχηματίζεται από τα υψώματα που γειτονεύουν άμεσα με ένα ύψωμα (σχήμα 3.2.1). Μάλιστα, στην περίπτωση που δεν λείπουν υψώματα, το κάθε ένα συμμετέχει στον σχηματισμό του δεύτερου λοβού 2 φορές (εκτός από τα 2 ακριανά, κάτι που μπορεί ν' αγνοηθεί). Έτσι, ο δεύτερος λοβός επηρεάζεται και από τη μορφή των υψωμάτων και από το γεγονός ότι οι αποστάσεις μεταξύ γειτονικών υψωμάτων δεν είναι πάντα σταθερές.

Κέντρο βάρους

Για το κέντρο βάρους του μ_2 , έχουμε:

$$\mu_2 = \frac{\sum_{r=0.5d}^{1.5d} rP(r)}{\sum_{r=0.5d}^{1.5d} P(r)}$$



Σχήμα 3.4.1: Κάθε ύψωμα m έχει διαφορετική απόσταση από το αριστερό του ύψωμα και διαφορετική από το δεξιό του και συμμετέχει στο σχήμα του δεύτερου λοβού δύο φορές

Κάθε ύψωμα m έχει διαφορετική απόσταση από το αριστερό του ύψωμα και διαφορετική από το δεξιό του (σχήμα 3.4.1). Έστω ότι είναι μ_m^- και μ_m^+ αντίστοιχα. Στη μια περίπτωση, επηρεάζει το δεύτερο λοβό στο σημείο $r \in [0.5d, 1.5d]$ ως $f_{m, x_m - \mu_m^- + r}$ και στην άλλη ως $f_{m, x_m + \mu_m^+ - r}$, ή $f_{m, x_m - \mu_m^+ + r}$ αν είναι συμμετρικό όπως τα γκαουσιανά που εξετάζουμε, οπότε:

$$P(r) = \frac{1}{2M} \sum_{m=1}^M (f_{m, x_m - \mu_m^- + r} + f_{m, x_m - \mu_m^+ + r}) \quad \text{για } r \in [0.5d, 1.5d] \quad (3.4.1)$$

και έτσι:

$$\mu_2 = \frac{\sum_{r,m} r (f_{m, x_m - \mu_m^- + r} + f_{m, x_m - \mu_m^+ + r})}{\sum_{r,m} (f_{m, x_m - \mu_m^- + r} + f_{m, x_m - \mu_m^+ + r})}$$

Από τον ορισμό του κέντρου βάρους (σχέση 3.1.7) και εμβαδού (σχέση 3.1.5) ενός υψώματος, παίρνουμε:

$$\mu_2 = \frac{\sum_m E_m (\mu_m^- + \mu_m^+)}{2 \sum_m E_m} \quad (3.4.2)$$

Σημειώνουμε, πως αν κάποιο ύψωμα λείπει από τη θέση του, τότε δεν εμφανίζεται καθόλου στον τελευταίο τύπο, ενώ και τα διπλανά του εμφανίζονται το πολύ μια φορά.

Μπορούμε λοιπόν να πούμε, ότι **το κέντρο βάρους του δεύτερου λοβού, είναι η σταθμισμένη μέση τιμή των αποστάσεων των υψωμάτων από τα γειτονικά τους, με βάρη το εμβαδόν τους**. Ο λόγος της διάστασης του πλαισίου N προς το κέντρο βάρους μ_2 του δεύτερου λοβού είναι ίσος με τη θεμελιώδη συχνότητα του φάσματος ισχύος και μας πληροφορεί για το πόσες φορές τα υψώματα επαναλαμβάνονται από τη μια άκρη της επιφάνειας στην άλλη. Για μεγάλες επιφάνειες το μ_2 τείνει να γίνει όσο και η απόσταση d μεταξύ των σημείων του πλέγματος (βλ. σχέση 3.2.2).

Μορφή

Θα διευκολύνει παρακάτω, αν χρησιμοποιούμε την ακολουθία $\{P(r): r=d/2, d/2+1, \dots, 1.5d\}$ με έναν συμπαγή τρόπο, μέσω π.χ. της γεννήτριας συνάρτησης:

$$G_2(z) = \sum_{r=d/2}^{3d/2} P_r e^{izr}, \quad z \in R$$

όπου $e^{izr} = \cos(zr) + i \sin(zr)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες συναρτήσεις και $i = \sqrt{-1}$. Η παραπάνω σειρά είναι μια σειρά *Fourier* και η σύγκλιση της είναι πάντα εξασφαλισμένη. Με άλλα λόγια η $G_2(z)$ είναι ο διακριτός μετασχηματισμός *Fourier* του δεύτερου λοβού.

Έστω, πως όλα τα υψώματα είναι γκαουσιανά, σταθερού πλάτους w και ύψους h . Θεωρούμε για απλότητα, πως για το σχηματισμό του δεύτερου λοβού χρησιμοποιήθηκαν $2M-2$ διαφορετικά υψώματα, όπου το m -ιοστό συνεισφέρει στο δεύτερο λοβό έχοντας τοποθετηθεί στο σημείο μ_m . Η πιθανότητα το σημείο αυτό να έχει απόσταση λ από τη μέση τιμή μ_2 του λοβού είναι p_λ (σχήμα 3.4.2). Για τα p_λ ισχύει $\sum_\lambda p_\lambda = 1$ και ότι έχουν πιθανογεννήτρια:

$$G_e(z) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} p_\lambda e^{iz\lambda}, \quad z \in R$$

Η απόσταση λ είναι μια στοχαστική μεταβλητή που ακολουθά κανονική κατανομή $N(0, s_e^2)$ και ο μετασχηματισμός της κατά *Fourier*, δίνει:

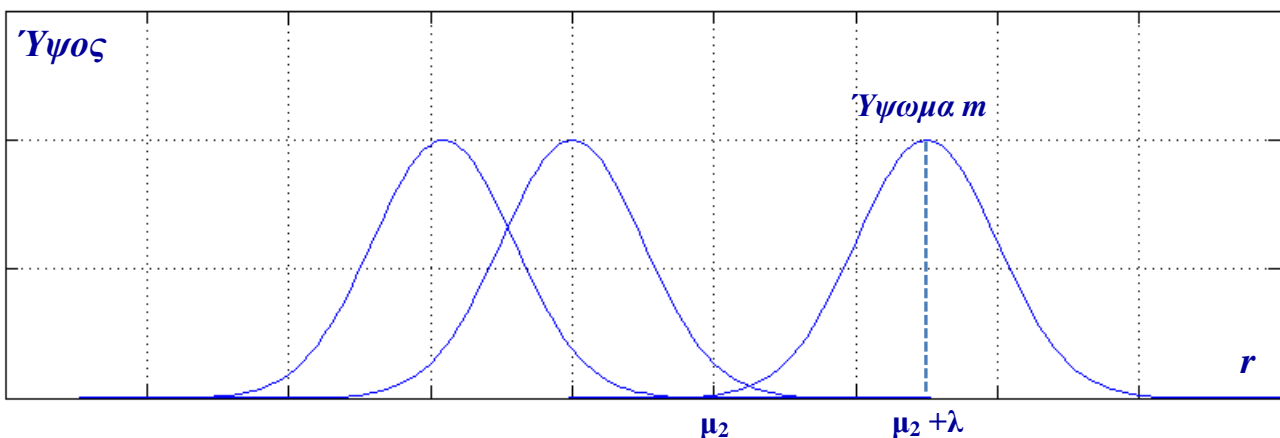
$$G_e(z) = e^{-0.5s_e^2 z^2}$$

Ένα ύψωμα πλάτους w και ύψους h τοποθετημένο στο σημείο μ_2 περιγράφεται από τη συνάρτηση:

$$f_r = h e^{-\frac{(r-\mu_2)^2}{2w^2}}$$

και η γεννήτρια συνάρτηση του $G_{\mu_2}(z)$, είναι:

$$G_{\mu_2}(z) = \sum_{r=d/2}^{3d/2} f_r e^{izr}$$



Σχήμα 3.4.2: Γκαουσιανά υψώματα σε διάφορα σημεία τοποθέτησης γύρω από το μ_2

Γράφοντας:

$$f_r = h e^{-\frac{(r-\mu_2)^2}{2w^2}} = \sqrt{2\pi}hw \frac{1}{\sqrt{2\pi}w} e^{-\frac{(r-\mu_2)^2}{2w^2}}$$

βρίσκουμε:

$$G_{\mu_2}(z) = \sqrt{2\pi}hwe^{i\mu_2 z - 0.5w^2 z^2}$$

Για την $P(r)$, έχουμε:

$$P(r) = \sum_{r=0.5d}^{1.5d} p_\lambda f_{r-\lambda}$$

οπότε η γεννήτρια συνάρτηση της, είναι:

$$\begin{aligned} G_2(z) &= \sum_{r,\lambda} p_\lambda f_{r-\lambda} e^{izr} \\ &= \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} p_\lambda e^{iz\lambda} \sum_{r=0.5d}^{1.5d} f_{r-\lambda} e^{iz(r-\lambda)} \end{aligned}$$

δηλαδή

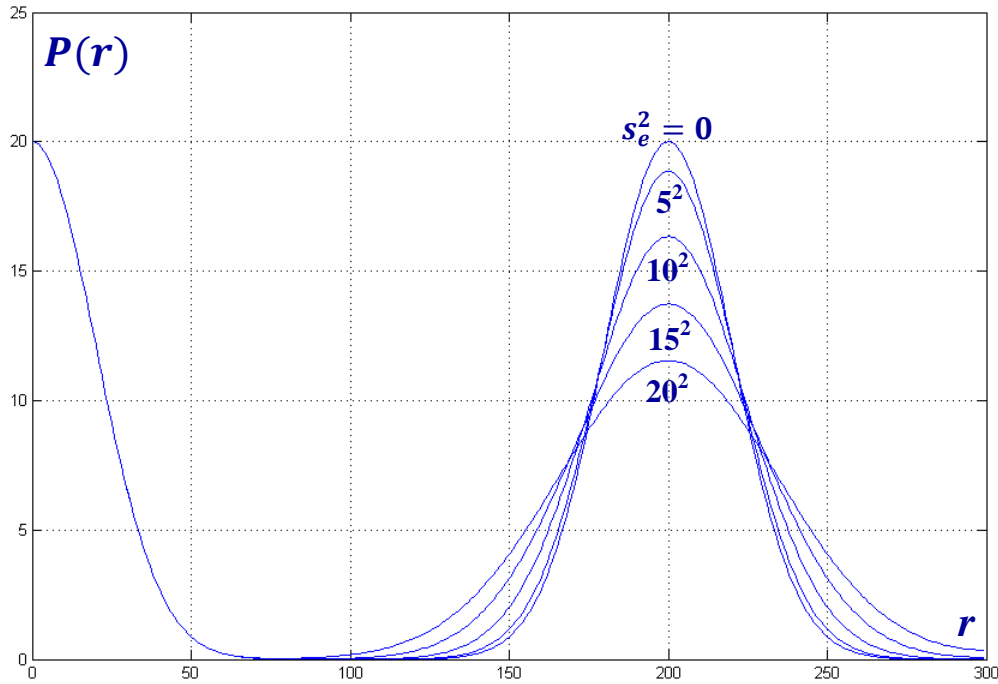
$$\begin{aligned} G_2(z) &= G_e(z)G_{\mu_2}(z) \\ &= \sqrt{2\pi}hwe^{i\mu_2 z - 0.5(w^2 + s_e^2)z^2} \end{aligned}$$

και ο αντίστροφος μετασχηματισμός *Fourier* της $G_2(z)$, δίνει:

$$P(r) = h \frac{w}{\sqrt{w^2 + s_e^2}} e^{-\frac{(r-\mu_2)^2}{2(w^2 + s_e^2)}} \quad \text{για } r \in [0.5d, 1.5d] \quad (3.4.3)$$

Ο τρόπος που επηρεάζει τη μορφή του δεύτερου λοβού η διασπορά του θορύβου s_e^2 φαίνεται στο σχήμα 3.4.3.

Αν έχουμε μεγάλη επιφάνεια και τα υψώματα είναι γκαουσιανά με κυμαινόμενο τώρα ύψος, όσα είναι τοποθετημένα στο σημείο $\mu_2 + \lambda$ κατά μέσο όρο σχηματίζουν ένα γκαουσιανό ύψωμα ύψους h , όπως ξέρουμε από την παράγραφο 3.3, οπότε **όταν τα υψώματα είναι γκαουσιανά σταθερού πλάτους και ο θόρυβος στο σημείο τοποθέτησης επίσης γκαουσιανός, τότε και ο δεύτερος λοβός είναι γκαουσιανός.**



Σχήμα 3.4.3: Επίδραση της διασποράς θορύβου s_e^2 στη μορφή του δεύτερου λοβού, δημιουργημένου από πανομοιότυπα γκαουσιανά υψώματα ($w = h = 20, s_h = s_w = 0$)

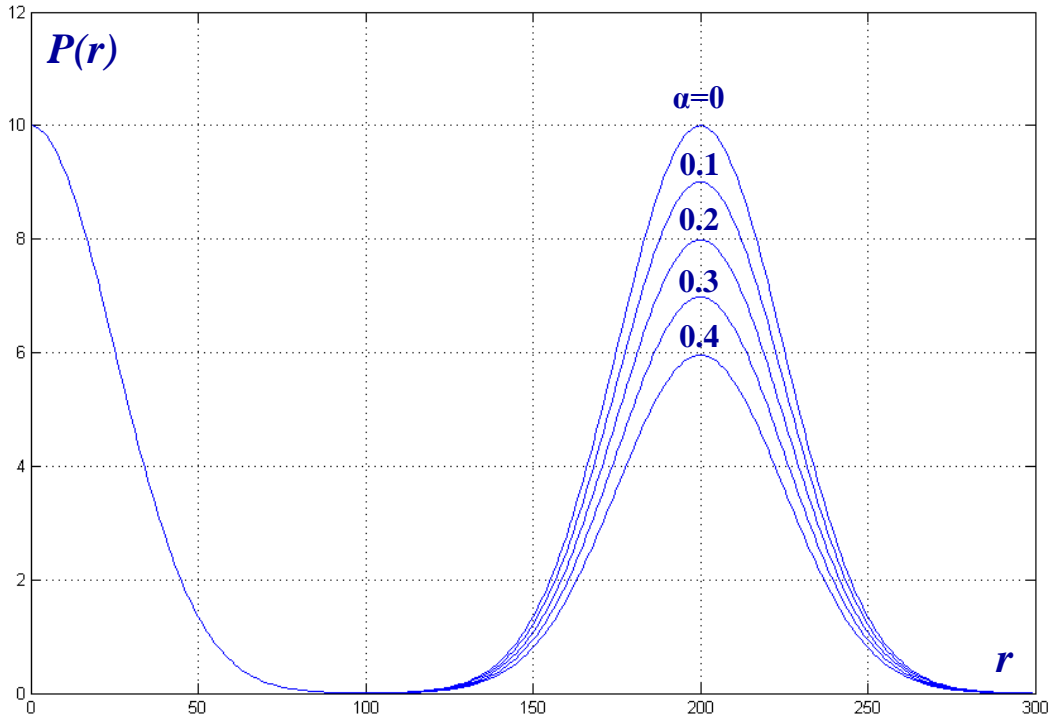
Εμβαδόν

Για τον σχηματισμό του δεύτερου λοβού κάθε ύψωμα συμμετέχει 2 φορές, όταν δεν απουσιάζει κανένα από αυτά και δεν είναι ακραίο - κάτι που μπορεί να αγνοηθεί για μεγάλες επιφάνειες. Σε μια τέτοια περίπτωση το εμβαδόν του ϵ_2 , είναι:

$$\begin{aligned} \epsilon_2 &= \sum_{r=0.5d}^{1.5d} P(r) = \frac{1}{2M} \sum_{r=0.5d}^{1.5d} (f_{m,x_m-\mu_m^-+r} + f_{m,x_m-\mu_m^++r}) \\ &= \frac{1}{M} \sum_{l=1}^M \sum_{m=1}^M \sqrt{2\pi}(w + v_m)(h + u_l) \end{aligned}$$

δηλαδή

$$\epsilon_2 = \epsilon_1$$



Σχήμα 3.4.4: Επίδραση του ποσοστού απουσίας α των γειτονικών υψωμάτων στο δεύτερο λοβό

Αν $\alpha\%$ είναι το ποσοστό απουσίας των γειτονικών υψωμάτων, τότε ακριβώς τόσο θα είναι μειωμένο το εμβαδόν ϵ_2 του δεύτερου λοβού ως προς το εμβαδόν ϵ_1 του πρώτου.

$$\epsilon_2 = (1 - \alpha)\epsilon_1 \quad (3.4.4)$$

Ονομάζουμε το μέγεθος $1-\alpha$ **βαθμό πλήρωσης της δομής** μιας επιφάνειας, το οποίο υπολογίζεται από το λόγο του εμβαδού ϵ_2 του δεύτερου λοβού, ως προς το εμβαδό ϵ_1 του πρώτου λοβού ϵ_2/ϵ_1 . Στο σχήμα 3.4.4 φαίνεται η επίδραση του α στην $P(r)$.

Στη γενική περίπτωση, δεν ισχύει πως το ποσοστό απουσίας α των γειτονικών υψωμάτων, ισούται με το ποσοστό των υψωμάτων που δεν τοποθετήθηκαν στην επιφάνεια, παρά μόνο όταν τα υψώματα δεν απουσιάζουν από συνεχόμενες θέσεις του πλέγματος δηλαδή κυρίως για μικρά α . Μπορούμε πάντως να βρούμε την πυκνότητα των υψωμάτων στο πλαίσιο, από το λόγο του αριθμού των υψωμάτων προς τη διάσταση του πλαισίου L .

Σημειώνουμε, πως όταν **βαθμό πλήρωσης της δομής** $1-\alpha$ δεν είναι 100%, η 3.4.3 γίνεται:

$$P(r) = (1 - \alpha)h \frac{w}{\sqrt{w^2 + s_e^2}} e^{-\frac{(r-\mu_2)^2}{2(w^2 + s_e^2)}} \quad \text{για } r \in [0.5d, 1.5d] \quad (3.4.3\alpha)$$

Εύρος

Το εύρος s_2 του δεύτερου λοβού, μπορεί να βρεθεί και από το αριστερό μόνο ημίσειο μέρος του, δηλαδή:

$$s_2^2 = \frac{\sum_{r=0.5d}^{1.5d} (r - \mu_2)^2 P(r)}{\sum_{r=0.5d}^{1.5d} P(r)} = \frac{\sum_{r=0.5d}^d (r - \mu_2)^2 P(r)}{\sum_{r=0.5d}^d P(r)}$$

Για το σχηματισμό του δεύτερου λοβού χρησιμοποιούνται M υψώματα από 2 φορές, εκτός από τα ακριανά. Για απλότητα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι υπάρχουν $2M-2$ διαφορετικά υψώματα οπότε η $P(r)$ στο διάστημα $[0.5d, 1.5d]$ αντί της σχέσης (3.4.1) γράφεται:

$$P(r) = \frac{1}{2M-2} \sum_{m=1}^{2M-2} f_{m, x_m - \mu_m + r} \quad \text{για } r \in [0.5d, 1.5d]$$

και η s_2 γίνεται:

$$s_2^2 = \frac{\sum_m \sum_{n=d/2}^d (r - \mu_2)^2 f_{m, x_m - \mu_m + r}}{\sum_m \sum_{r=d/2}^d f_{m, x_m - \mu_m + r}}$$

Επειδή $r - \mu_2 = (r - \mu_m) + (\mu_m - \mu_2)$ ο παρανομαστής του κλάσματος γίνεται:

$$\begin{aligned} & \sum_{m,r} (r - \mu_m)^2 f_{m, x_m - \mu_m + r} + 2 \sum_m (\mu_m - \mu_2) \sum_r (r - \mu_m) f_{m, x_m - \mu_m + r} \\ & + \sum_{m,r} (\mu_m - \mu_2)^2 f_{m, x_m - \mu_m + r} \end{aligned}$$

Ο δεύτερος όρος όμως είναι 0 από τον τρόπο υπολογισμού του μ_m . Γνωρίζοντας ότι:

$$\sigma_m^2 = \frac{\sum_r (r - x_m)^2 f_{mr}}{E_m} = \frac{\sum_r (r - \mu_m)^2 f_{m, x_m - \mu_m + r}}{E_m}$$

βρίσκουμε

$$s_2^2 = \frac{\sum_m E_m \sigma_m^2}{\sum_m E_m} + \frac{\sum_m E_m (\mu_m - \mu_2)^2}{\sum_m E_m}$$

Ο πρώτος όρος του δεξιού μέλους της εξίσωσης είναι το τετράγωνο του εύρους s_1^2 του πρώτου λοβού, ενώ ο δεύτερος όρος είναι η διασπορά του θορύβου σ_e^2 :

$$\sigma_e^2 = \frac{\sum_m E_m (\mu_m - \mu_2)^2}{\sum_m E_m} \quad (3.4.5)$$

δηλαδή, η διασπορά του θορύβου είναι η σταθμισμένη διασπορά των αποστάσεων των υψωμάτων από τα γειτονικά τους, με βάρη το εμβαδόν τους. Για μεγάλες επιφάνειες το σ_e^2 τείνει να γίνει $2\sigma_d^2$ (βλ. σχέση 3.2.3). Τέλος:

$$s_2^2 = s_1^2 + \sigma_e^2 \quad (3.4.6)$$

δηλαδή, το τετράγωνο του εύρους του δεύτερου λοβού, είναι ίσο με το τετράγωνο του εύρους του πρώτου, προσυζητημένο με τη διασπορά του θορύβου. Ο τρόπος που επηρεάζει το εύρος του δεύτερου λοβού η διασπορά του θορύβου s_e^2 φαίνεται στο σχήμα 3.4.3.

3.5 Σύνοψη της κορυφοκεντρικής συνάρτησης μέσου ύψους επιφάνειας, όταν οι λοβοί είναι διακριτοί

Συνοψίζουμε εδώ τον τρόπο υπολογισμού των χαρακτηριστικών μιας επιφάνειας στην οποία έχουν τοποθετηθεί γκαουσιανά υψώματα, χρησιμοποιώντας τη κορυφοκεντρική συνάρτηση μέσου ύψους επιφάνειας $P(r)$, όταν οι λοβοί είναι διακριτοί:

Βήμα 1: Προσδιορίζουμε τη μέσο ύψος h των υψωμάτων από την $P(r)$ για $r = 0$:

$$h = P(0)$$

Βήμα 2: Προσδιορίζουμε το εμβαδόν ϵ_1 του πρώτου λοβού και εκτιμούμε το μέσο πλάτος w των υψωμάτων:

$$w = \frac{\epsilon_1}{\sqrt{2\pi h}}$$

Βήμα 3: Προσδιορίζουμε το εύρος s_1 του πρώτου λοβού και εκτιμούμε τη διακύμανση s_w^2 του πλάτους των υψωμάτων:

$$s_w^2 = \frac{1}{3}(s_1^2 - w^2)$$

Βήμα 4: Προσδιορίζουμε το εμβαδόν ϵ_2 του δεύτερου λοβού και εκτιμούμε το ποσοστό έλλειψης α των υψωμάτων:

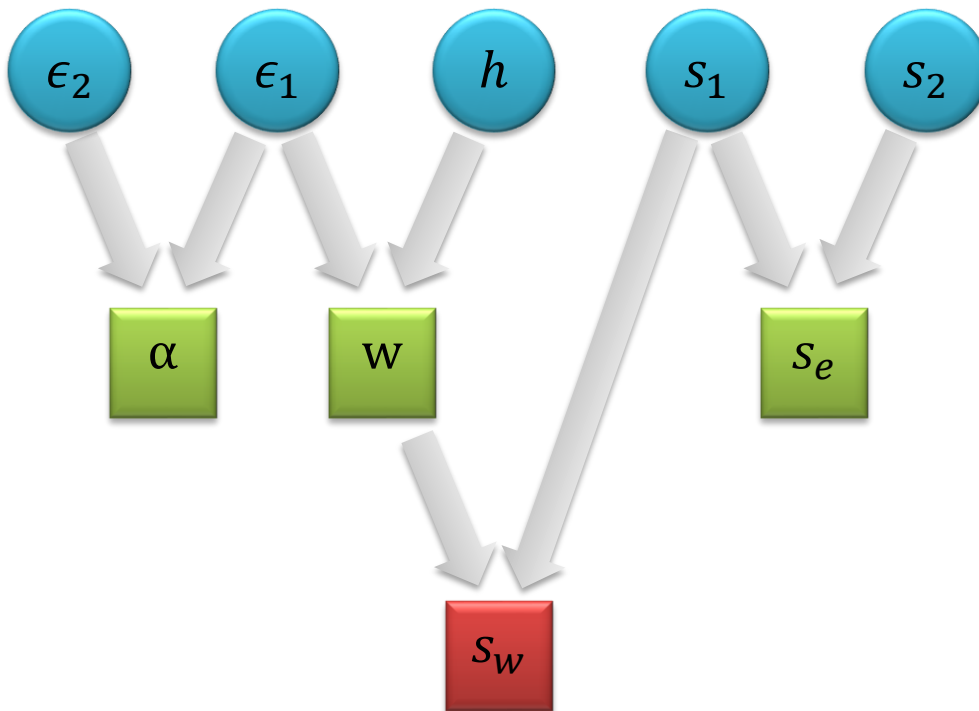
$$\alpha = 1 - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$$

Βήμα 5: Προσδιορίζουμε το εύρος s_2 του δεύτερου λοβού και εκτιμούμε τη διασπορά του θορύβου s_e^2 :

$$s_e^2 = s_2^2 - s_1^2$$

Η διασπορά του ύψους των υψωμάτων δεν επηρεάζει καθόλου την $P(r)$. Παρόλο που μπορεί να βρεθεί εύκολα από τη στιγμή που είναι γνωστά τα ύψη των κορυφών των υψωμάτων, εντούτοις για τις αποκλίσεις μεταξύ των υψωμάτων είναι πιο κατάλληλη η *κορυφοκεντρική συνάρτηση διασποράς ύψους επιφάνειας* $Q(r)$.

Στο σχήμα 3.5.1 εξηγείται η σειρά προσδιορισμού των παραμέτρων. Με μπλε κύκλο φαίνονται οι παράμετροι που προσδιορίζονται απευθείας από τη *κορυφοκεντρική* συνάρτηση, σε τετράγωνο πλαίσιο φαίνονται οι παράμετροι που προσδιορίζονται από άλλες παραμέτρους με τη βοήθεια κάποιου τύπου. Η s_w υπολογίζεται τελευταία, στο τρίτο και τελευταίο στάδιο.



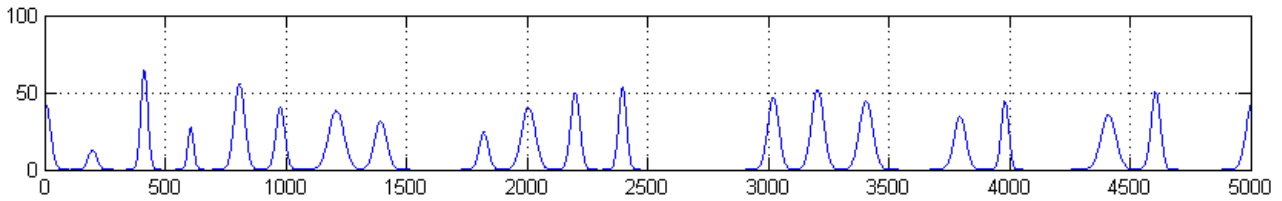
Σχήμα 3.5.1: Σειρά προσδιορισμού των παραμέτρων όταν οι λοβοί είναι διακριτοί

Αριθμητικό παράδειγμα

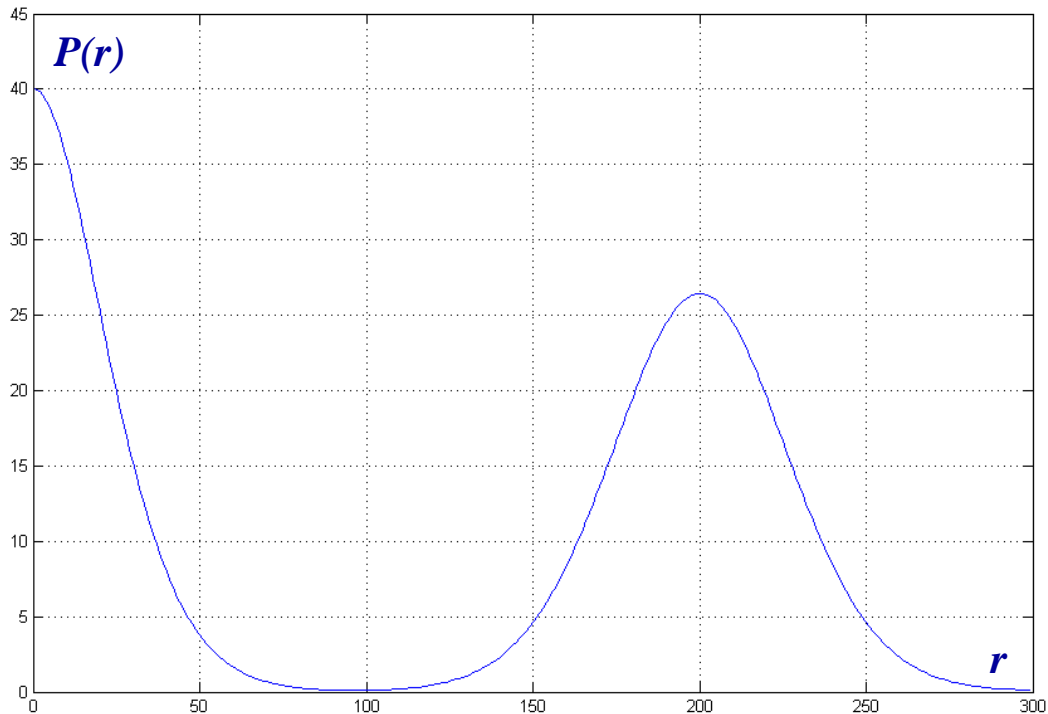
Παραθέτουμε παρακάτω ένα αριθμητικό παράδειγμα που αφορά επιφάνεια δημιουργημένη από γκαουσιανά υψώματα κυμαινόμενου πλάτους και ύψους, τα οποία τοποθετήθηκαν με θόρυβο και απουσίες πάνω σε ένα πλέγμα (σχήμα 3.5.1). Τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των υψωμάτων

και ο τρόπος διάταξης τους είναι ελεγχόμενα, οπότε τα χαρακτηριστικά της επιφάνειας είναι γνωστά. Οι τιμές των χαρακτηριστικών είτε πραγματικές, είτε όπως υπολογίστηκαν από την $P(r)$ φαίνονται στον πίνακα 3.5.1. Σημειώνουμε, ότι η διασπορά του ύψους των υψωμάτων έγινε χωρίς χρήση της $P(r)$, δηλαδή από τα ύψη των κορυφών των υψωμάτων.

Η μέση τιμή h και διασπορά του ύψους s_h^2 υπολογίστηκαν ελαφρά μικρότερα από την κανονική τους τιμή λόγω της διακριτοποίησης της επιφάνειας. Η μικρή αυτή υποεκτίμηση επιφέρει μικρή υπερεκτίμηση στο μέσο πλάτος w . Γενικά, οι εκτιμήσεις των παραμέτρων είναι πολύ καλές.



Σχήμα 3.5.1: Τμήμα επιφάνειας από γκαουσιανά υψώματα κυμαινόμενου πλάτους και ύψους, τοποθετημένα με θόρυβο και απουσίες πάνω σε ένα πλέγμα



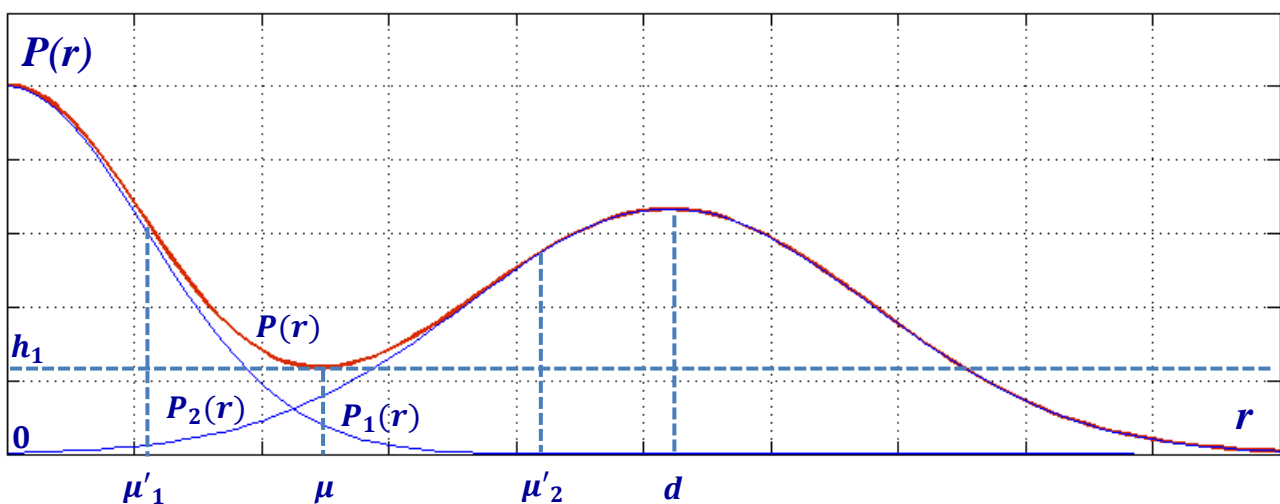
Σχήμα 3.5.2 Η κορυφοκεντρική συνάρτηση $P(r)$ μέσου ύψους της επιφάνειας του σχήματος 3.5.1

Σύμβολο	Παράμετρος	Πραγμ.τιμή	Υπολογισθ.	Σφάλμα(%)
a	Έλλειψη υψωμάτων	0,201	0,202	0,25
h	Μέσο ύψος υψωμάτων	40,035	40,031	-0,01
s_h^2	Διασπορά ύψους	100,497	100,496	0
w	Μέσο πλάτος υψωμάτων	22,008	22,011	0,01
s₁	Εύρος 1ου λοβού	23,637	23,614	-0,1
s₂	Εύρος 2ου λοβού	27,084	27,5	1,54
s_w^2	Διασπορά πλάτους	24,797	24,378	-1,69
μ_e	Μέση απόσταση υψωμάτων	200,01	200	0
s_e^2	Διασπορά αποστάσεων	199,693	198,644	-0,53

Πίνακας 3.5.1

3.6 Μη διακριτοί λοβοί

Τα προηγούμενα ισχύουν όταν οι 2 λοβοί δεν εισέρχονται ο ένας μέσα στον άλλο. Στη γενική περίπτωση, θα πρέπει ν' ακολουθήσουμε διαφορετικά βήματα. Τονίζουμε, ότι θα πρέπει να



Σχήμα 3.6.1: Η κορυφοκεντρική συνάρτηση μέσου ύψους επιφάνειας όταν τα υψώματα είναι πολύ κοντά το ένα στο άλλο σε σχέση με το πλάτος τους.

είναι γνωστή η αρχική επιφάνεια, ώστε να υπολογιστεί σωστά η συνάρτηση $P(r)$. Αλλιώς, αν στο σχήμα 3.6.1, παίρναμε σαν σημείο αναφοράς το σημείο h_1 αντί του 0, τότε οι 2 λοβοί θα ήταν διακριτοί. Ακολουθώντας τη διαδικασία της προηγούμενης παραγράφου, θα προσδιορίζαμε μια λανθασμένη μορφή για το μέσο ύψωμα, καθώς και λάθος αποτελέσματα για τις παραμέτρους της επιφάνειας.

Εμβαδόν των 2 ημίσειων λοβών

Το εμβαδόν ϵ της $P(r)$ στο διάστημα $[0,d]$ είναι το ημίσειο άθροισμα του εμβαδού των 2 λοβών. Πράγματι, αν θεωρήσουμε ότι ο πρώτος λοβός περιγράφεται από τη καμπύλη $P_1(r)$ και ότι δεν εκτείνεται πέρα από $r=d$, ενώ ο δεύτερος λοβός περιγράφεται από τη $P_2(r)$ και ότι δεν εκτείνεται πριν από $r=0$, έχουμε (σχήμα 3.6.1):

$$\epsilon = \sum_{r=0}^d P(r) = \sum_{r=0}^d (P_1(r) + P_2(r)) = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2} \quad (3.6.1)$$

Το ϵ_1 μπορεί να βρεθεί χωρίς χρήση της $P(r)$, προσδιορίζοντας το εμβαδόν ϵ_x όλης τη επιφάνειας και διαιρώντας το με τον αριθμό M των κορυφών:

$$\epsilon_1 = \frac{\epsilon_x}{M} \quad (3.6.2)$$

οπότε:

$$\epsilon_2 = 2\epsilon - \frac{\epsilon_x}{M} \quad (3.6.3)$$

Κέντρο βάρους των 2 ημίσειων λοβών

Το κέντρο βάρους μ της $P(r)$ στο διάστημα $[0,d]$ είναι το σταθμισμένο άθροισμα του κέντρου βάρους των 2 ημίσειων λοβών, με βάρη το εμβαδόν τους (σχήμα 3.6.1). Πράγματι:

$$\mu = \frac{\sum_{r=0}^d rP(r)}{\sum_{r=0}^d P(r)} = \frac{\sum_{r=0}^d r(P_1(r) + P_2(r))}{\epsilon}$$

Αν συμβολίσουμε με μ'_1 και μ'_2 το κέντρο βάρους των 2 ημίσειων λοβών, τότε:

$$\mu'_1 = \frac{\sum_{r=0}^d rP_1(r)}{\sum_{r=0}^d P_1(r)} = \frac{\sum_{r=0}^d rP_1(r)}{\epsilon_1}$$

$$\mu'_2 = \frac{\sum_{r=0}^d r P_2(r)}{\sum_{r=0}^d P_2(r)} = \frac{\sum_{r=0}^d r P_2(r)}{\epsilon_2}$$

οπότε παίρνουμε:

$$\mu = \frac{\epsilon_1 \mu'_1 + \epsilon_2 \mu'_2}{2\epsilon} \quad (3.6.4)$$

Για γκαουσιανά υψώματα ισχύει, ότι:

$$\mu'_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi} (w^2 + 2s_w^2)} \quad (3.6.5)$$

$$\mu'_2 = d - \sqrt{\frac{2}{\pi} (w^2 + 2s_w^2 + s_e^2)} \quad (3.6.6)$$

Παρατηρούμε ότι το κέντρο βάρους μ των 2 ημίσειων λοβών μεταφέρεται σε μικρότερα r , καθώς αυξάνει ο θόρυβος, γιατί πλαταίνει ο δεύτερος λοβός. Η διασπορά όμως του πλάτους s_w^2 επιδρά με τον ίδιο τρόπο στους 2 λοβούς και έτσι έχει μικρό αντίκτυπο στο μ (βλ. σχέσεις 3.6.4-3.6.6). Αποφεύγουμε λοιπόν, να χρησιμοποιήσουμε το μ για τον προσδιορισμό του s_w^2 , αφού μια λάθος εκτίμηση του π.χ. λόγω διακριτοποίησης, είναι πολύ πιθανή.

Ύψος του δεύτερου λοβού

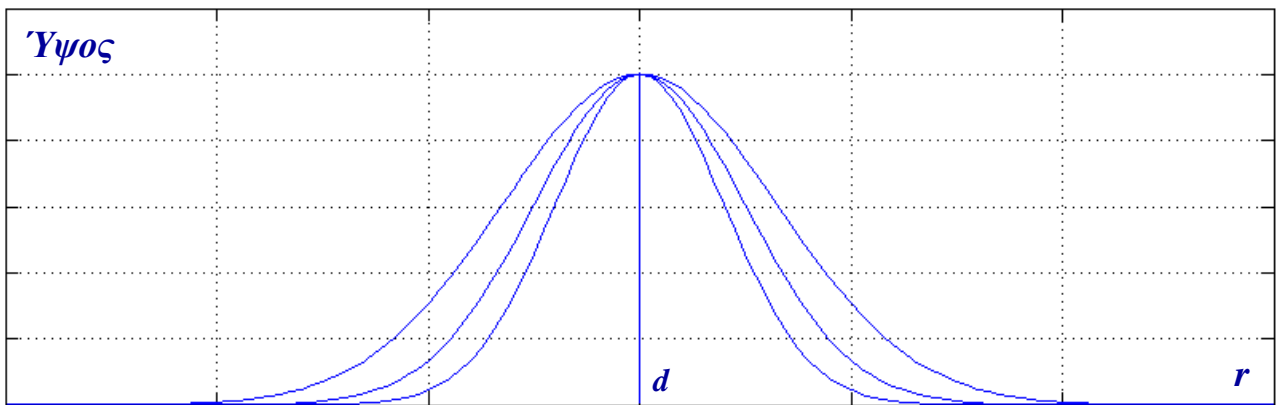
Γνωρίζουμε από τη σχέση (3.4.6) πως όσο πιο μεγάλη είναι η διασπορά του θορύβου, τόσο πιο πεπλατυσμένος είναι ο δεύτερος λοβός και ανάλογα μικραίνει και το ύψος της κορυφής του. Όταν η επιφάνεια έχει δημιουργηθεί από γκαουσιανά υψώματα, με σταθερό πλάτος, τότε σύμφωνα με τη σχέση 3.4.3α ο δεύτερος λοβός είναι γκαουσιανός. Υποθέτουμε ότι οι 2 λοβοί δεν έχουν εισχωρήσει αρκετά ο ένας μέσα στον άλλο, ώστε να έχουν επηρεαστεί οι κορυφές τους, κάτι που όμως αν συνέβαινε, θα σήμαινε ότι δεν υπάρχει σαφής περιοδικότητα σύμφωνα με το φάσμα ισχύος. Τότε η κορυφή $P_{2,max}$ του δεύτερου λοβού είναι:

$$P_{2,max} = (1 - a)h \frac{w^2}{\sqrt{w^2 + s_e^2}} \quad (3.6.7)$$

Στην περίπτωση που το πλάτος των υψωμάτων κυμαίνεται λίγο, ισχύει εξίσου καλά η τελευταία σχέση. Για μεγάλες διακυμάνσεις του πλάτους, από πειραματικά αποτελέσματα βρέθηκε ότι:

$$P_{2,max} \approx (1 - a)h \frac{w}{\sqrt{w^2 + s_e^2 \left(1 + \frac{s_w^2}{w^2 + s_e^2}\right)}} \quad (3.6.8)$$

από όπου βλέπουμε πως αν δεν υπάρχει θόρυβος $s_e^2 = 0$, το ύψος της κορυφής του δεύτερου λοβού $P_{2,max}$ παραμένει σταθερό παρά τη διακύμανση του πλάτους, όπως περιμέναμε (σχήμα 3.6.2), κάτι που δεν ισχύει όταν $s_e^2 > 0$ (σχήμα 3.6.3).



Σχήμα 3.6.2: Υψώματα με διαφορετικό πλάτος και ίδιο ύψος, δεν επηρεάζουν το ύψος της κορυφής του δεύτερου λοβού, όταν δεν υπάρχει θόρυβος στο σημείο τοποθέτησης τους

Ακτίνα αδράνειας των 2 ημίσειων λοβών

Η ακτίνα αδράνειας R των 2 ημίσειων λοβών επηρεάζεται από το s_w^2 . Συγκεκριμένα μειώνεται καθώς το s_w^2 αυξάνει, γιατί η $P(r)$ στο διάστημα $[0,d]$ συγκεντρώνεται γύρω από το κέντρο βάρους της (σχήμα 3.6.3).

Για τον προσδιορισμό της R έχουμε:

$$R^2 = \frac{\sum_{r=0}^d r^2 P(r)}{\sum_{r=0}^d P(r)} = \frac{\sum_{r=0}^d r^2 P_1(r)}{\epsilon} + \frac{\sum_{r=0}^d r^2 P_2(r)}{\epsilon}$$

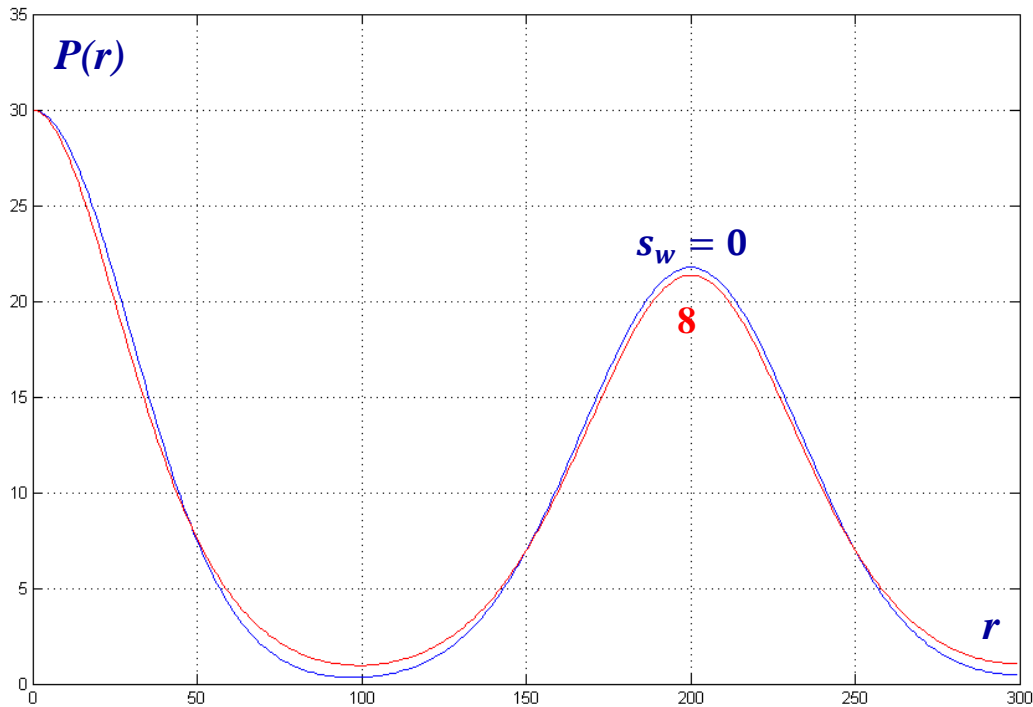
Όμως:

$$\sum_{r=0}^d r^2 P_1(r) = \epsilon_1 s_1^2$$

$$s_2^2 = \frac{\sum_{r=0}^d (r-d)^2 P_2(r)}{\epsilon_2} = \frac{\sum_{r=0}^d r^2 P_2(r)}{\epsilon_2} + d^2 - 2d\mu'_2$$

και χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.6.4) βρίσκουμε:

$$R^2 = \frac{1}{\epsilon} (\epsilon_1 s_1^2 + \epsilon_2 (s_2^2 - d^2) + 2d(2\mu\epsilon - \mu'_1 \epsilon_1))$$



Σχήμα 3.6.3: Το ύψος της κορυφής του δεύτερου λοβού επηρεάζεται ελαφρά από τις διακυμάνσεις του πλάτους των υψωμάτων, όταν υπάρχει θόρυβος στο σημείο τοποθέτησης τους ($w = h = 30, s_h = 0, s_e = 10$)

Από (3.2.8), (3.4.6) και (3.6.5), έχουμε:

$$az^2 + \beta z + \gamma = 0 \quad (3.6.9)$$

όπου:

$$z = \sqrt{(w^2 + 2s_w^2)}$$

$$\alpha = 1.5(\epsilon_1 + \epsilon_2)$$

$$\beta = -2\epsilon_1 d \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$\gamma = -0.5(\epsilon_1 + \epsilon_2)w^2 + \epsilon_2(s_e^2 - d^2) + \epsilon(2d\mu - R^2)$$

3.7 Σύνοψη της κορυφοκεντρικής συνάρτησης μέσου ύψους επιφάνειας, όταν οι λοβοί δεν είναι διακριτοί

Συνοψίζουμε εδώ τον τρόπο υπολογισμού των χαρακτηριστικών μιας επιφάνειας στην οποία έχουν τοποθετηθεί γκαουσιανά υψώματα, χρησιμοποιώντας τη *κορυφοκεντρική συνάρτηση μέσου ύψους επιφάνειας* όταν οι λοβοί δεν διακρίνονται μεταξύ τους, με τις κορυφές τους όμως να παραμένουν ανεπηρέαστες:

Βήμα 1: Προσδιορίζουμε τη μέσο ύψος h των υψωμάτων από την $P(r)$ για $r = 0$:

$$h = P(0)$$

Βήμα 2: Προσδιορίζουμε το εμβαδόν ϵ_1 διαιρώντας το εμβαδόν ϵ_x όλης τη επιφάνειας με τον αριθμό M των κορυφών, δηλαδή $\epsilon_1 = \epsilon_x/M$ και στη συνέχεια εκτιμούμε το μέσο πλάτος w των υψωμάτων από:

$$w = \frac{\epsilon_1}{\sqrt{2\pi}h}$$

Βήμα 3: Προσδιορίζουμε το εμβαδόν ϵ_2 του δεύτερου λοβού από το εμβαδόν ϵ των 2 ημίσειων λοβών ως $\epsilon_2 = 2\epsilon - \epsilon_1$ και εκτιμούμε το ποσοστό έλλειψης α των υψωμάτων:

$$\alpha = 1 - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

Βήμα 4: Προσδιορίζουμε το ύψος της κορυφής $P_{2,max}$ του δεύτερου λοβού και θεωρώντας ότι δεν υπάρχει μεγάλη διακύμανση στα πλάτη, εκτιμούμε τη διασπορά του θορύβου s_e^2 :

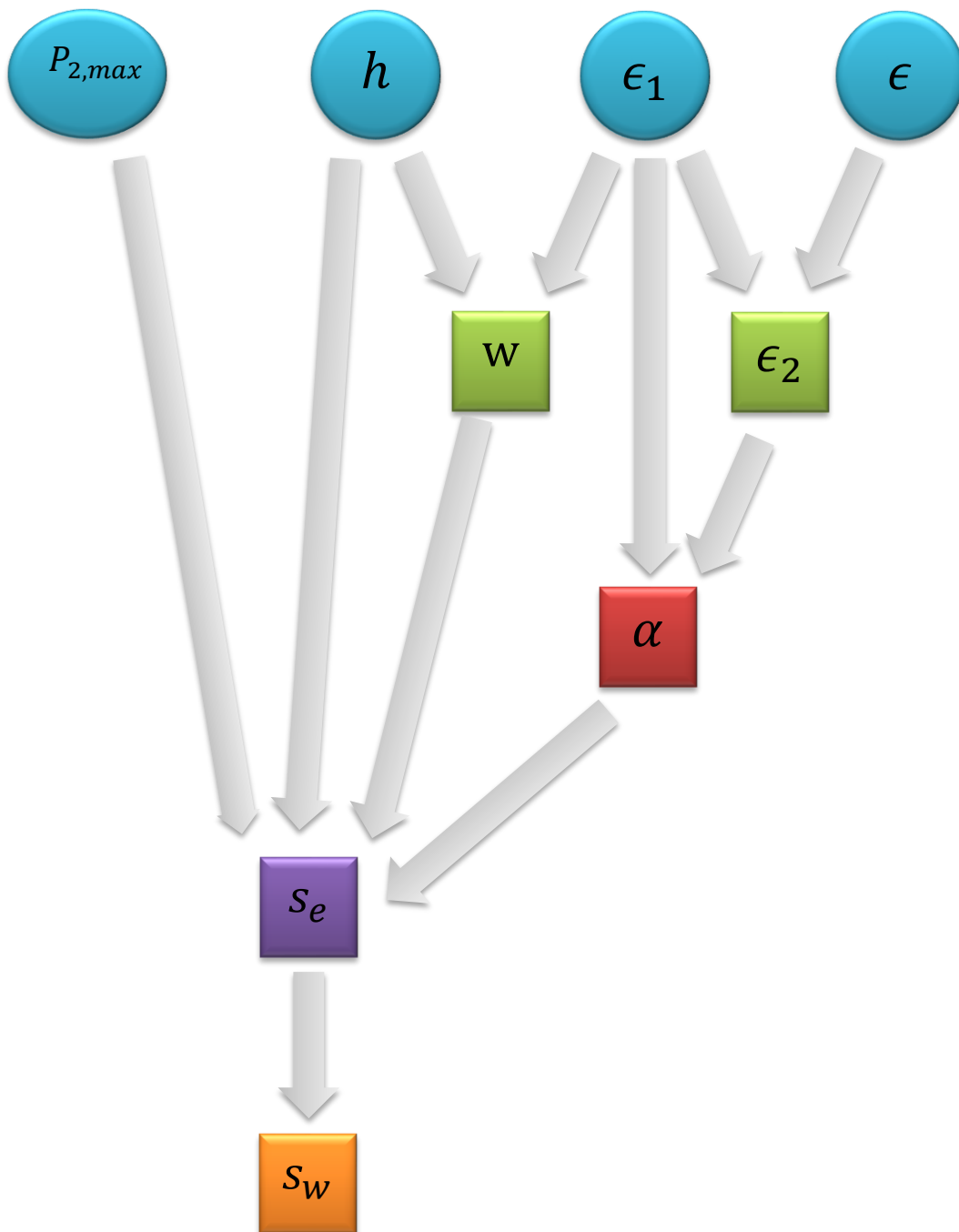
$$s_e^2 = w^2 \left[\left(\frac{(1-\alpha)h}{P_{2,max}} \right)^2 - 1 \right]$$

Βήμα 5: Προσδιορίζουμε την ακτίνα αδράνειας R των 2 ημίσειων λοβών και εκτιμούμε τη διακύμανση s_w^2 του πλάτους των υψωμάτων από τη λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης (3.6.9).

Στην περίπτωση που το s_w^2 είναι μεγάλο αντικαθιστούμε τα βήματα 4 και 5 από τα επόμενα:

Βήμα 4-5: Εκτιμούμε τα s_e^2 και s_w^2 από τη λύση του μη γραμμικού συστήματος εξισώσεων (3.6.8) και (3.6.9).

Στο σχήμα 3.7.1 εξηγείται η σειρά προσδιορισμού των παραμέτρων. Η s_w υπολογίζεται τελευταία και έχει το μεγαλύτερο ποσοστό λάθους.



Σχήμα 3.7.1: Σειρά προσδιορισμού των παραμέτρων όταν οι λοβοί δεν είναι διακριτοί

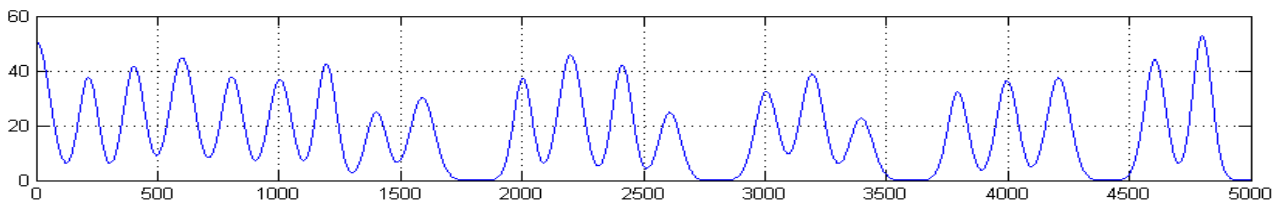
Αριθμητικό παράδειγμα

Παραθέτουμε παρακάτω ένα αριθμητικό παράδειγμα που αφορά επιφάνεια δημιουργημένη από γκαουσιανά υψώματα αρκετά κοντά το ένα με το άλλο (σχήμα 3.7.1), ώστε οι 2 λοβοί της $P(r)$ να αλληλεπικαλύπτονται (σχήμα 3.7.2). Τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των υψωμάτων και ο τρόπος διάταξης τους είναι ελεγχόμενα, οπότε τα χαρακτηριστικά της επιφάνειας είναι γνωστά. Οι τιμές των χαρακτηριστικών είτε πραγματικές, είτε όπως υπολογίστηκαν από την $P(r)$ φαίνονται στον πίνακα 3.7.1. Σημειώνουμε, ότι η διασπορά του ύψους των υψωμάτων έγινε χωρίς χρήση της $P(r)$, δηλαδή από τα ύψη των κορυφών των υψωμάτων.

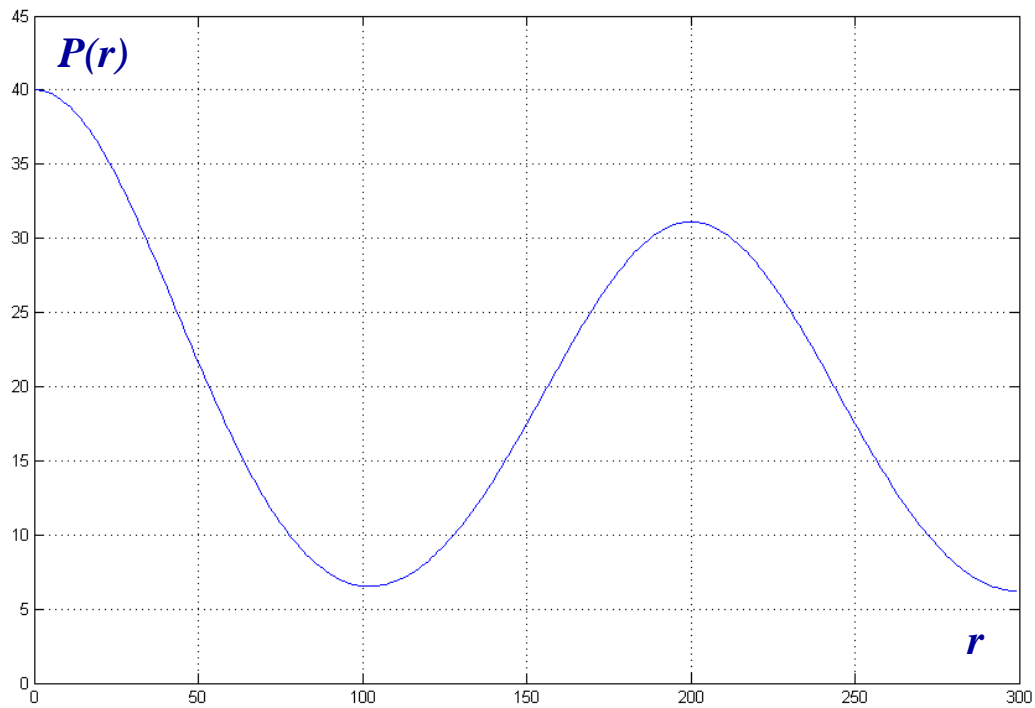
Σε αντίθεση με την περίπτωση των διακριτών λοβών, η μέση τιμή h και διασπορά του ύψους s_h^2 υπολογίστηκαν ελαφρά μεγαλύτερα από την κανονική τους τιμή, λόγω της μικρής επιρροής του ενός λοβού στο ύψος του άλλου. Η μικρή αυτή υπερεκτίμηση επιφέρει μικρή υποεκτίμηση στο μέσο πλάτος w . Η διασπορά του πλάτους s_w^2 θεωρήθηκε μηδαμινή και γι' αυτό η διασπορά του θορύβου s_e^2 υπερεκτιμήθηκε ελαφρώς (+1,52%). Η υπερεκτίμηση όμως αυτή οδήγησε στην συνέχεια στην υπερεκτίμηση του s_w^2 (+16,35%).

Στο σχήμα 3.7.3 φαίνεται το μέγεθος της λάθος εκτίμησης του s_w^2 για διάφορες τιμές του s_e^2 . Όσο πιο μεγάλη είναι η πραγματική τιμή του s_w^2 τόσο πιο πολύ υπερεκτιμάται το s_e^2 και τόσο πιο πολύ υπερεκτιμάται και το s_w^2 . Αν αυξηθεί η πραγματική τιμή του s_e^2 , το σφάλμα εκτίμησης του s_w^2 αυξάνει ελαφρά.

Για καλύτερη προσέγγιση των s_e^2 και s_w^2 , όταν αυτά δεν είναι μηδαμινά, πρέπει να επιλυθεί το μη γραμμικό σύστημα εξισώσεων (3.6.8) και (3.6.9).



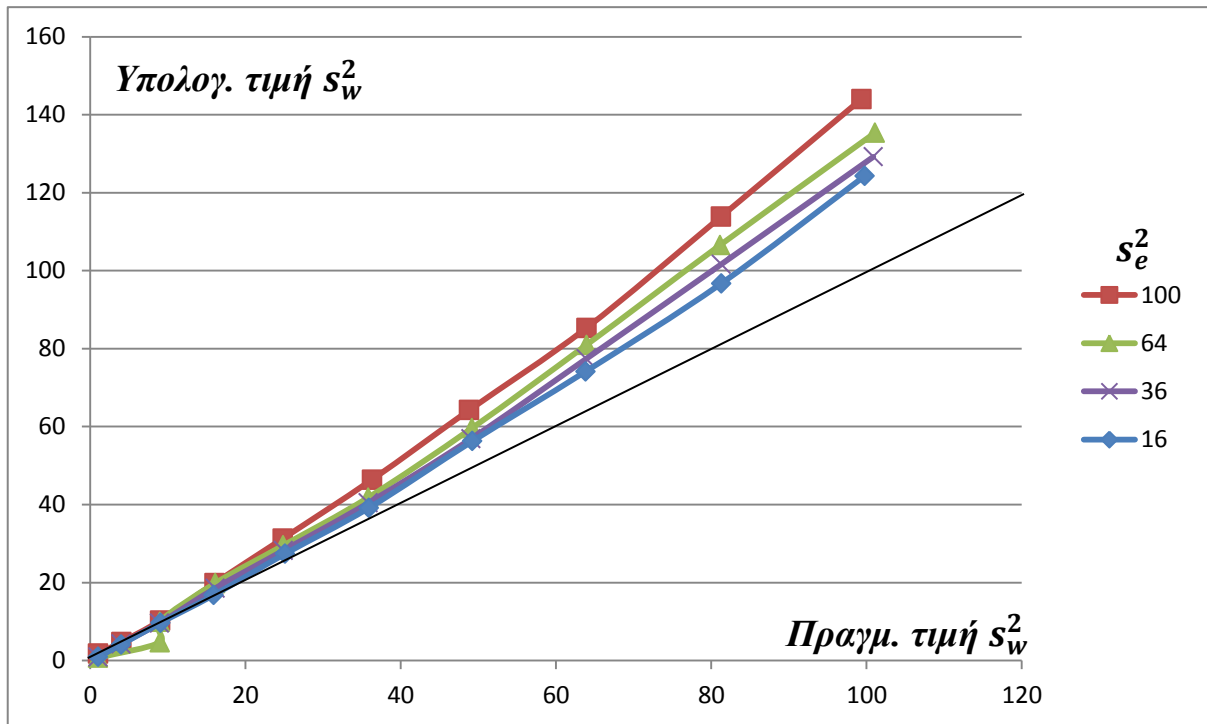
Σχήμα 3.7.1: Τμήμα επιφάνειας από γκαουσιανά υψώματα κυμαινόμενου πλάτους και ύψους, τοποθετημένα με θόρυβο και απουσίες πάνω σε ένα πλέγμα και σε κοντινές αποστάσεις μεταξύ τους



Σχήμα 3.7.2 Η κορυφοκεντρική συνάρτηση $P(r)$ μέσου ύψους της επιφάνειας του σχήματος 3.7.1

Σύμβολο	Παράμετρος	Πραγμ.τιμή	Υπολογισθ.	ω
a	Έλλειψη υψωμάτων	0,199	0,199	0,06
h	Μέσο ύψος υψωμάτων	40,01	40,018	0,02
s_h^2	Διασπορά ύψους	100,745	100,74	-0,01
w	Μέσο πλάτος υψωμάτων	44,988	44,977	-0,02
s_1	Εύρος 1ου λοβού	45,29	45,328	0,08
s_2	Εύρος 2ου λοβού	46,57	46,722	0,33
s_w^2	Διασπορά πλάτους	9,083	10,568	16,35
μ_e	Μέση απόσταση υψωμάτων	200,005	200	0
s_e^2	Διασπορά θορύβου	126,355	128,281	1,52

Πίνακας 3.7.1



Σχήμα 3.7.3: Διαφορά της πραγματικής τιμής του s_w^2 από την υπολογισθείσα, για διάφορα s_e^2 ($h = 40, s_h^2 = 100, w = 45, a = 0.2$)

4. ΚΟΡΥΦΟΚΕΝΤΡΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ ΎψΟΥΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ ΜΙΑΣ ΔΙΑΣΤΑΣΗΣ

4.1 Περιγραφή της κορυφοκεντρικής συνάρτησης διασποράς ύψους επιφάνειας

Στο προηγούμενο κεφάλαιο μελετήσαμε τον τρόπο προσδιορισμού των χαρακτηριστικών μιας επιφάνειας από τη *κορυφοκεντρική συνάρτηση μέσου ύψους* $P(r)$. Αξίζει να σημειωθεί, πως η διακύμανση του ύψους των υψωμάτων δεν έχει καμιά επίδραση στη συνάρτηση αυτή. Αντίθετα, οι αποκλίσεις μεταξύ των υψωμάτων μελετώνται καλύτερα από τη δεύτερη *κορυφοκεντρική συνάρτηση*.

Στόχος της χρησιμοποίησης της δεύτερης *κορυφοκεντρικής συνάρτησης διασποράς ύψους* $Q(r)$ (*peak-centered height variance function*) δεν είναι να δώσουμε εναλλακτικούς τρόπους προσδιορισμού των χαρακτηριστικών της επιφάνειας, αλλά να προστεθεί νέα πληροφορία για τα υψώματα και τη δομή της επιφάνειας. Ξεκινάμε πρώτα με μια σύντομη περιγραφή της.

Διαλέγουμε ένα ύψωμα m και βρίσκουμε όλα τα σημεία που απέχουν απόσταση r από το x_m (στις μονοδιάστατες επιφάνειες είναι δύο). Επαναλαμβάνουμε για όλες τις κορυφές. Η $Q(r)$ είναι η διασπορά των υψών όλων αυτών των σημείων που απέχουν απόσταση r από τουλάχιστον μία κορυφή::

$$\begin{aligned} Q(r) &= \frac{1}{2M} \sum_{m=1}^M [(f_{m,x_m+r} - P(r))^2 + (f_{m,x_m-r} - P(r))^2] \\ &= \frac{1}{2M} \sum_{m=1}^M (f_{m,x_m+r}^2 + f_{m,x_m-r}^2) - P^2(r) \quad \text{για } r \in [0, 1.5d] \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

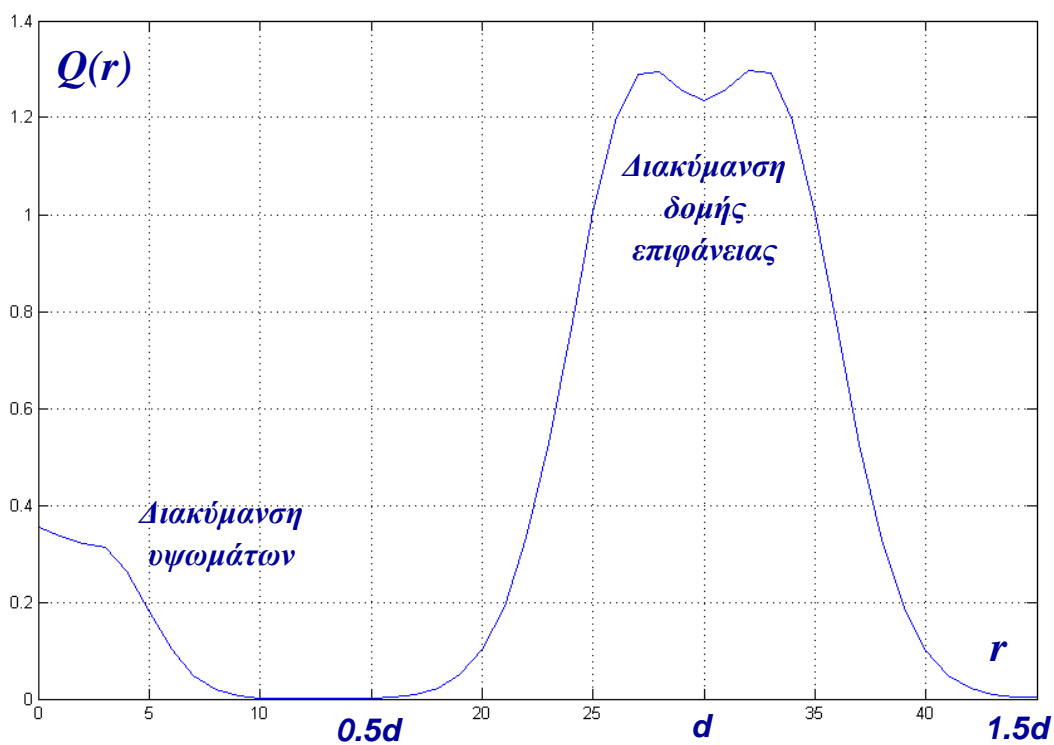
Παίρνουμε έτσι την καμπύλη του σχήματος 4.1.1, η οποία αποτελείται και αυτή από 2 λοβούς. Ο πρώτος από αριστερά ημίσειος λοβός, διπλασιαζόμενος μας αποκαλύπτει το μέγεθος της απόκλισης των υψωμάτων από το μέσο ύψωμα. Η κορυφή του στο σημείο 0, έχει τιμή όσο και η διασπορά του ύψους των υψωμάτων. Όλος ο λοβός επηρεάζεται τόσο από τη διασπορά του ύψους των υψωμάτων, όσο και από τη διασπορά του πλάτους τους. Ο δεύτερος λοβός του σχήματος 4.1.1 μας πληροφορεί, για το πόση μεγάλη είναι η διακύμανση της δομής της επιφάνειας, η οποία επηρεάζεται από τις παραμέτρους που επηρεάζουν και τον πρώτο λοβό και επιπλέον από τη διασπορά του θορύβου κατά την τοποθέτηση των υψωμάτων.

Παρατηρούμε, ότι οι 2 λοβοί της $Q(r)$ στο σχήμα 4.1.1 διακρίνονται καθαρά μεταξύ τους, αλλά στη γενική περίπτωση, αλληλεπικαλύπτονται.

4.2 Μεταβλητότητα υψώματος

Τα χαρακτηριστικά του πρώτου λοβού επηρεάζονται από τη διασπορά του πλάτους και ύψους των υψωμάτων. Ας θεωρήσουμε, πως πάνω σε κάποιο τμήμα $[0,L]$ του άξονα x , έχουν τοποθετηθεί M γκαουσιανά υψώματα σταθερού πλάτους και κυμαινόμενου ύψους $h+u_l$ ($l = 1,2, \dots, M$), όπου τα u_l ακολουθούν κανονική κατανομή $N(0, s_h^2)$. Η συνάρτηση $Q(r)$ στη σχέση (4.1.1) για $r \in [0, 0.5d]$ μετασχηματίζεται ως εξής:

$$Q(r) = \frac{1}{2M} \sum_{l=1}^M 2(h + u_l)^2 e^{-\frac{r^2}{w^2}} - h^2 e^{-\frac{r^2}{w^2}} \quad \text{για } r \in [0, 0.5d] \quad (4.2.1)$$

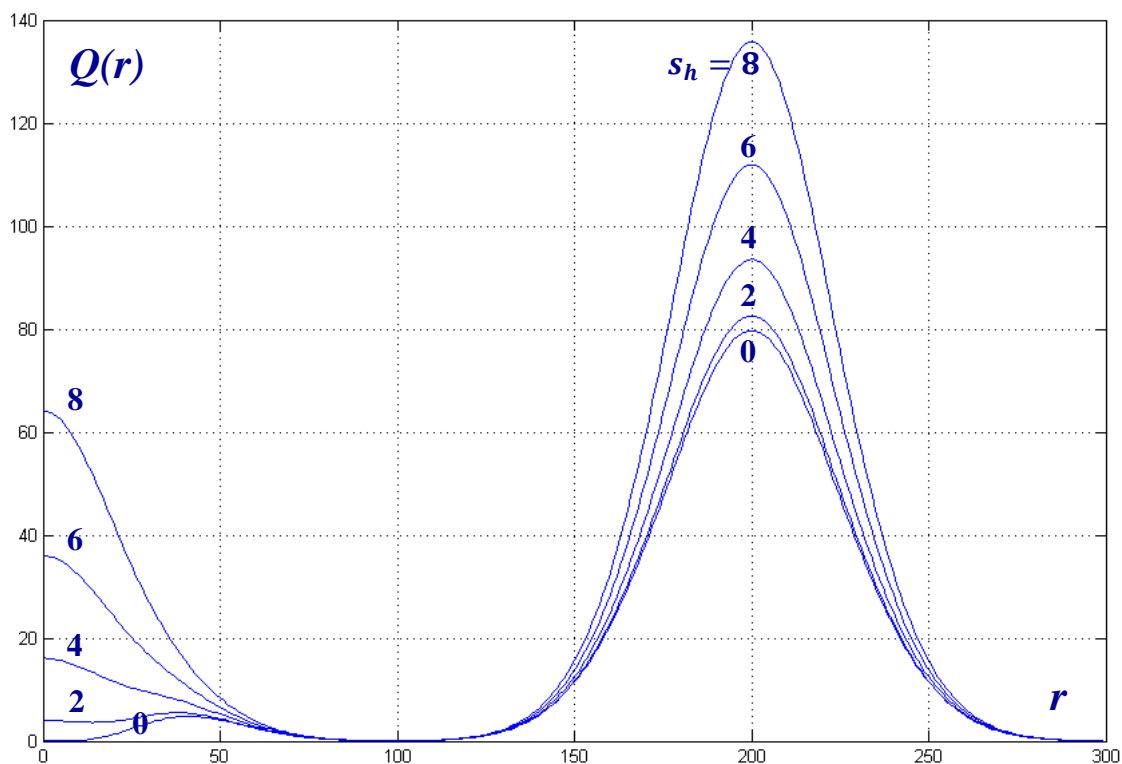


Σχήμα 4.1.1: Η κορυφοκεντρική συνάρτηση διασποράς ύψους $Q(r)$ της επιφάνειας

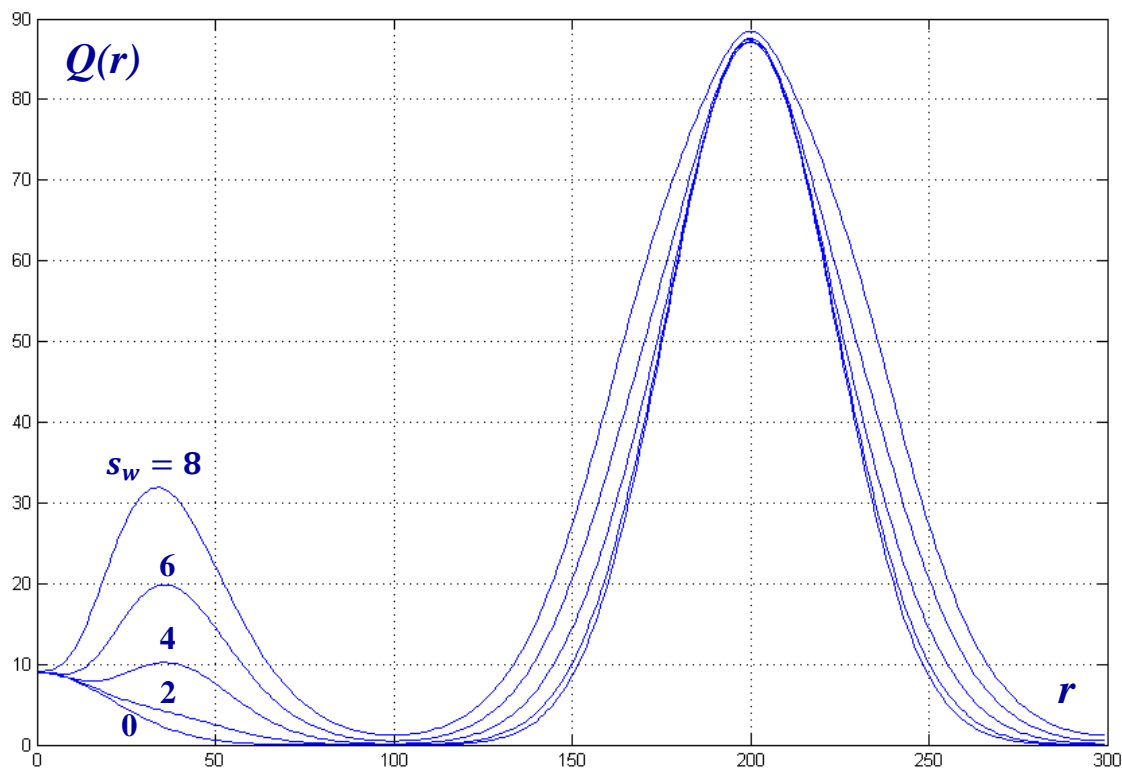
Όμως

$$\frac{1}{M} \sum_{l=1}^M (h + u_l)^2 e^{-\frac{r^2}{w^2}} = (h^2 + s_h^2) e^{-\frac{r^2}{w^2}}$$

άρα



Σχήμα 4.2.1: Εξάρτηση της $Q(r)$ από μεταβολές του ύψους των υψωμάτων ($w = h = 30, s_w = 3, s_e = 3$)



Σχήμα 4.2.2: Εξάρτηση της $Q(r)$ από μεταβολές του πλάτους των υψωμάτων ($w = h = 30, s_h = 3, s_e = 3$)

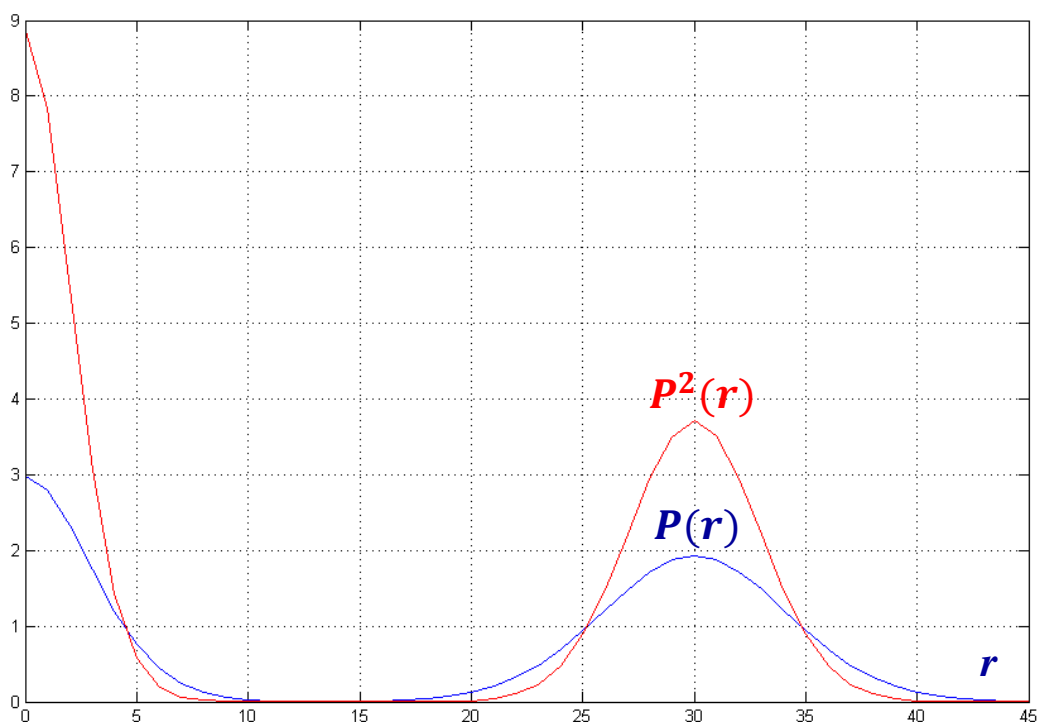
$$Q(r) = s_h^2 e^{-\frac{r^2}{w^2}} \quad \text{για } r \in [0, 0.5d]$$

Επειδή $\sum_r e^{-\frac{r^2}{w^2}} = \sqrt{\pi}w$, το εμβαδόν V_1 του πρώτου λοβού είναι:

$$V_1 = \sqrt{\pi} s_h^2 w$$

Στην περίπτωση που τα υψώματα έχουν διαφορετικά πλάτη $w+v_m$ ($m=1,2,\dots,M$) με τα v_m να ακολουθούν κανονική κατανομή $N(0, s_w^2)$, η $Q(r)$ δεν έχει γνωστή αναλυτική έκφραση. Από προσομοιώσεις βρέθηκε, ότι:

$$V_1 = \sqrt{\pi} s_h^2 w + \sqrt{\frac{\pi}{2}} h^2 \frac{s_w^2}{w} \quad (4.2.2)$$



Σχήμα 4.2.3: Χρησιμοποίηση του εμβαδού των λοβών της $P^2(r)$ αντί της $P(r)$, για τη σύγκριση του εμβαδού των λοβών της $Q(r)$

Στα σχήματα 4.2.1 και 4.2.2 σχεδιάζουμε την εξάρτηση της $Q(r)$ από τη διασπορά του ύψους s_h^2 και πλάτους s_w^2 αντίστοιχα.

Το εμβαδόν V_1 εξαρτάται και από το μέγεθος του μέσου υψώματος. Έτσι για να αποκτήσουμε ένα κριτήριο σύγκρισης της απόκλισης των υψωμάτων από την τυπική τους μορφή, συγκρίνουμε το V_1 με το εμβαδόν ϵ_1 του πρώτου λοβού της $P(r)$. Όμως εκεί είχαμε ύψη, ενώ εδώ

τετράγωνα υψών. Άρα πρέπει να πάρουμε το λόγο του V_1 με το εμβαδόν του $P^2(r)$ στο διάστημα $[0, d/2]$:

$$M_1^2 = \frac{V_1}{\sum_{r=0}^{d/2} P_1^2(r)} = \frac{\sqrt{\pi} s_h^2 w + \sqrt{\frac{\pi}{2}} h^2 \frac{s_w^2}{w}}{\sqrt{\pi} h^2 w}$$

$$M_1^2 = \frac{s_h^2}{h^2} + \frac{s_w^2}{\sqrt{2} w^2} \quad (4.2.3)$$

Οι όροι s_h^2/h^2 και s_w^2/w^2 είναι τα τετράγωνα των *συντελεστών μεταβλητότητας* του ύψους και πλάτους αντίστοιχα. Έτσι παρόμοια, ονομάζουμε το M_1 **συντελεστή μεταβλητότητας των υψωμάτων**. Το τετράγωνο του M_1^2 οφείλεται κατά ένα μέρος στο τετράγωνο του *συντελεστή μεταβλητότητας* του ύψους και το υπόλοιπο στο τετράγωνο του *συντελεστή μεταβλητότητας* του πλάτους. Ο **συντελεστής μεταβλητότητας M_1 των υψωμάτων δείχνει πόσο αποκλίνουν τα υψώματα από το μέσο ύψωμα και είναι μια χρήσιμη παράμετρος για τη σύγκριση του πόσο κυμαίνονται τα υψώματα σε διαφορετικές επιφάνειες.**

4.3 Μεταβλητότητα δομής

Αναζητούμε τώρα το εμβαδόν V_2 του δεύτερου λοβού. Το εμβαδόν που προέρχεται από το άθροισμα της σχέσης (4.1.1) στο διάστημα $[0.5d, 1.5d]$ είναι όπως και πριν $\sqrt{\pi}(s_h^2 + h^2)w + \sqrt{\frac{\pi}{2}} h^2 \frac{s_w^2}{w}$, αφού το μόνο που αλλάζει είναι το σημείο τοποθέτησης των υψωμάτων. Η $P^2(r)$ όμως είναι διαφορετική για $r \in [0.5d, 1.5d]$. Αν αγνοήσουμε την επίδραση του s_w^2 που είναι αμελητέα, η $P^2(r)$ με τη βοήθεια της σχέσης (3.4.3), γίνεται:

$$P_2^2(r) = h^2 \frac{w^2}{w^2 + s_e^2} e^{-\frac{(r-\mu_2)^2}{w^2 + s_e^2}}$$

και επειδή το εμβαδόν $\sum_r P_2^2(r)$ είναι $\sqrt{\pi} h^2 \frac{w^2}{\sqrt{w^2 + s_e^2}}$, έχουμε:

$$V_2 = \sqrt{\pi}(s_h^2 + h^2)w + \sqrt{\frac{\pi}{2}} h^2 \frac{s_w^2}{w} - \sqrt{\pi} h^2 \frac{w^2}{\sqrt{w^2 + s_e^2}} \quad (4.3.1)$$

Συγκρίνοντας το V_2 με το $\sum_r P_2^2(r)$, βρίσκουμε το **συντελεστή μεταβλητότητας της δομής M_2** :

$$M_2^2 = \frac{V_2}{\sum_{r=d/2}^d P_2^2(r)} = \left(1 + \frac{s_h^2}{h^2} + \frac{s_w^2}{\sqrt{2} w^2}\right) \sqrt{1 + \frac{s_e^2}{w^2}} - 1 \quad (4.3.2)$$

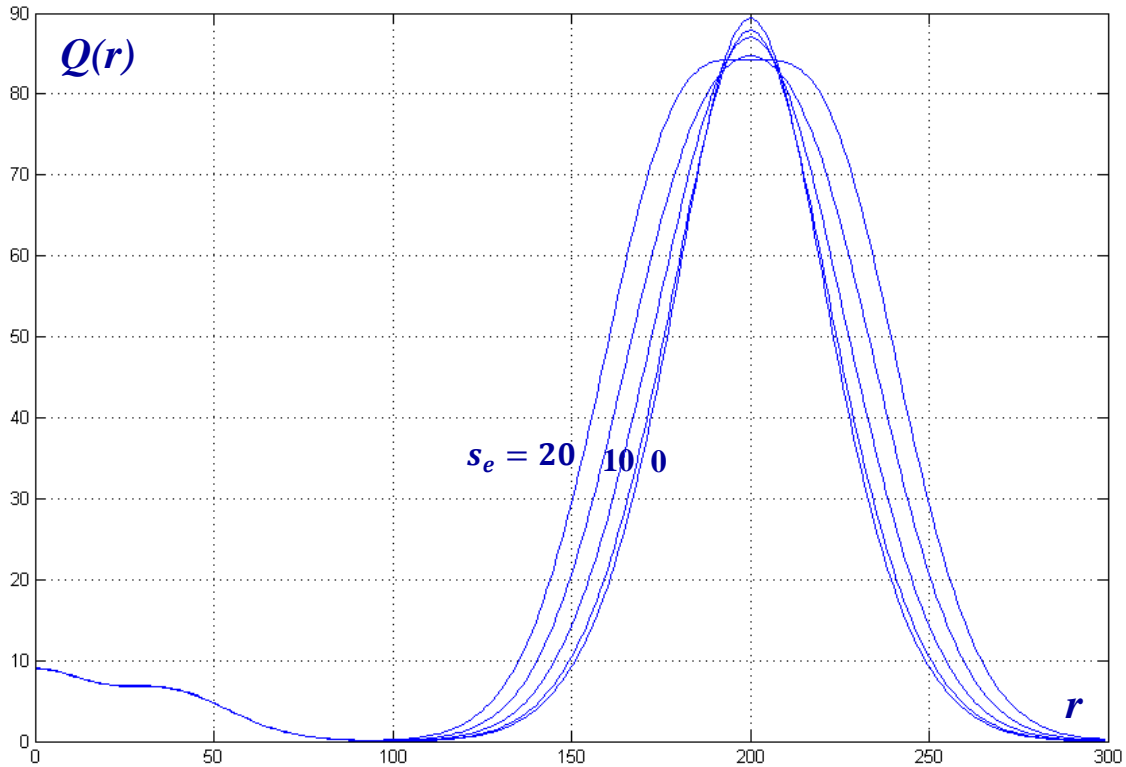
Αν $s_e^2 \ll w^2$ τότε $\sqrt{1 + s_e^2/w^2} \cong 1 + s_e^2/2w^2$, $s_h^2 s_e^2/h^2 w^2 \cong 0$ και $s_w^2 s_e^2/w^4 \cong 0$, οπότε:

$$M_2^2 \cong \frac{s_h^2}{h^2} + \frac{s_w^2}{\sqrt{2}w^2} + \frac{s_e^2}{2w^2}$$

άρα:

$$M_2^2 \cong M_1^2 + \frac{s_e^2}{2w^2} \quad (4.3.3)$$

Η εξάρτηση της $Q(r)$ από τη διασπορά του ύψους s_h^2 και πλάτους s_w^2 φαίνεται στα σχήματα 4.2.1 και 4.2.2, ενώ από το θόρυβο στο σχήμα 4.3.1.



Σχήμα 4.3.1: Εξάρτηση της $Q(r)$ από το s_e για τιμές 0,5,10,15 και 20
($w = h = 20, s_h = s_w = 3$)

Μπορούμε να ορίσουμε τον όρο s_e^2/w^2 ως **συντελεστή μεταβλητότητας του θορύβου**.

Ο **συντελεστής μεταβλητότητας της δομής M_2** είναι μια χρήσιμη παράμετρος για τη σύγκριση του πόσο κυμαίνεται η δομή διαφορετικών επιφανειών και το τετράγωνο του

ισούται με το τετράγωνο του συντελεστή μεταβλητότητας των υψωμάτων M_1^2 , προσαυξημένο με το μισό του τετραγώνου του συντελεστή μεταβλητότητας του θορύβου.

Στην περίπτωση που οι λοβοί είναι ξεχωριστοί, τα M_1 και M_2 μπορούν να υπολογιστούν απευθείας μέσω της συνάρτησης $Q(r)$, αλλιώς μπορεί να πραγματοποιηθεί μέσω της $P(r)$ και τον προσδιορισμό των χαρακτηριστικών της επιφάνειας, ή να γίνει αποσύζευξη των δύο λοβών, αλλά οι τύποι που προκύπτουν είναι πολύπλοκοι και μακροσκελείς.

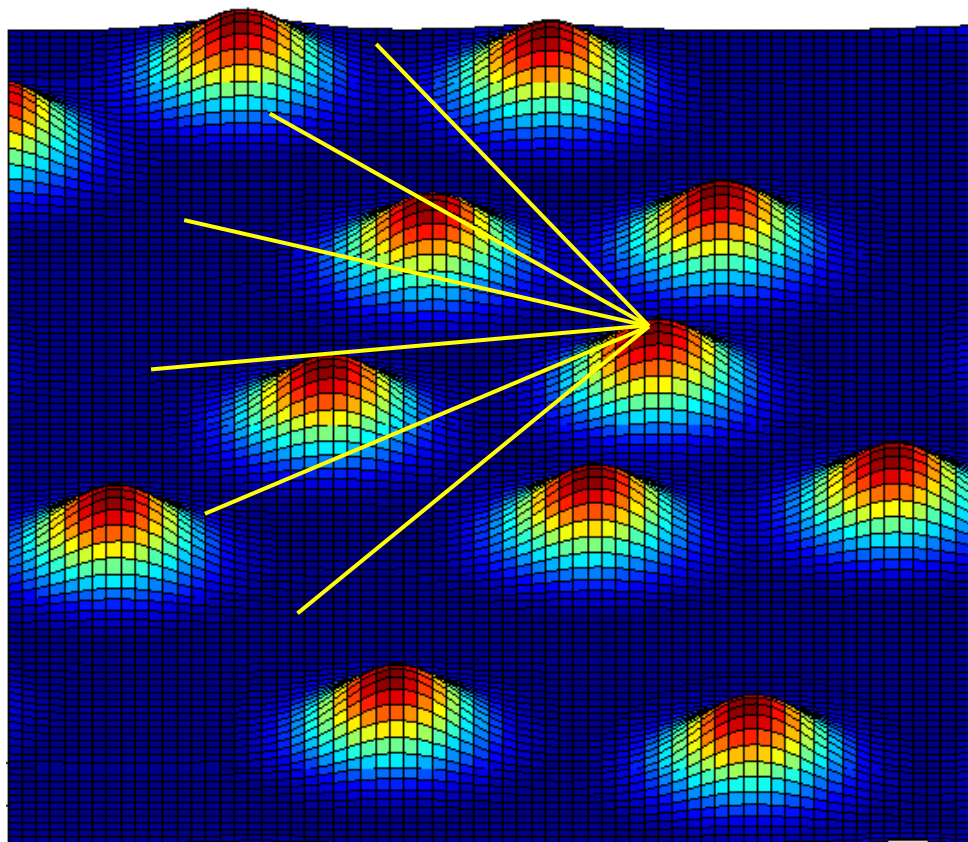
5. ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΔΥΟ ΔΙΑΣΤΑΣΕΩΝ

5.1 Εισαγωγή

Στα προηγούμενα κεφάλαια εξετάσαμε τον τρόπο χρήσης των *κορυφοκεντρικών συναρτήσεων* $P(r)$ και $Q(r)$ για να αναδειχθούν τα χαρακτηριστικά των υψωμάτων και ο βαθμός οργάνωσης μιας μονοδιάστατης επιφάνειας. Σε αυτό το κεφάλαιο θα επεκτείνουμε τα αποτελέσματά μας στις επιφάνειες δύο διαστάσεων, οι οποίες έχουν κάποιες ιδιομορφίες με τις αντίστοιχες μιας διάστασης.

5.2 Η εγγενής ελλειμματικότητα των επιφανειών δύο διαστάσεων

Στις δισδιάστατες επιφάνειες, υπάρχουν περιοχές όπου δεν συναντά κανείς γειτονικά υψώματα, ξεκινώντας από την κορυφή κάποιου υψώματος, ακόμα και αν ο βαθμός οργάνωσης της επιφάνειας είναι άριστος, όπως στα πλέγματα. Στο σχήμα 5.1.1 φαίνονται κάποιες ακτίνες να ξεκινούν από την κορυφή ενός υψώματος. Μερικές από αυτές συναντούν την κορυφή γειτονικών υψωμάτων, άλλες περνούν από τις παρυφές τους και άλλες διέρχονται από κενές περιοχές.



Σχήμα 5.1.1: Οι ακτίνες που ξεκινούν από την κορυφή ενός υψώματος δεν συναντούν οπωσδήποτε κάποιο από τα γειτονικά του υψώματα

Η ελλειμματικότητα λοιπόν σε υψώματα που συναντά κανείς σε μια δισδιάστατη επιφάνεια, δεν οφείλεται αποκλειστικά στη τυχόν απουσία τους, αλλά και στη φύση των επιφανειών αυτών. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα το εμβαδόν του δεύτερου λοβού της κορυφοκεντρικής συνάρτησης μέσου ύψους επιφάνειας $P(r)$, να είναι πάντα μικρότερο του πρώτου.

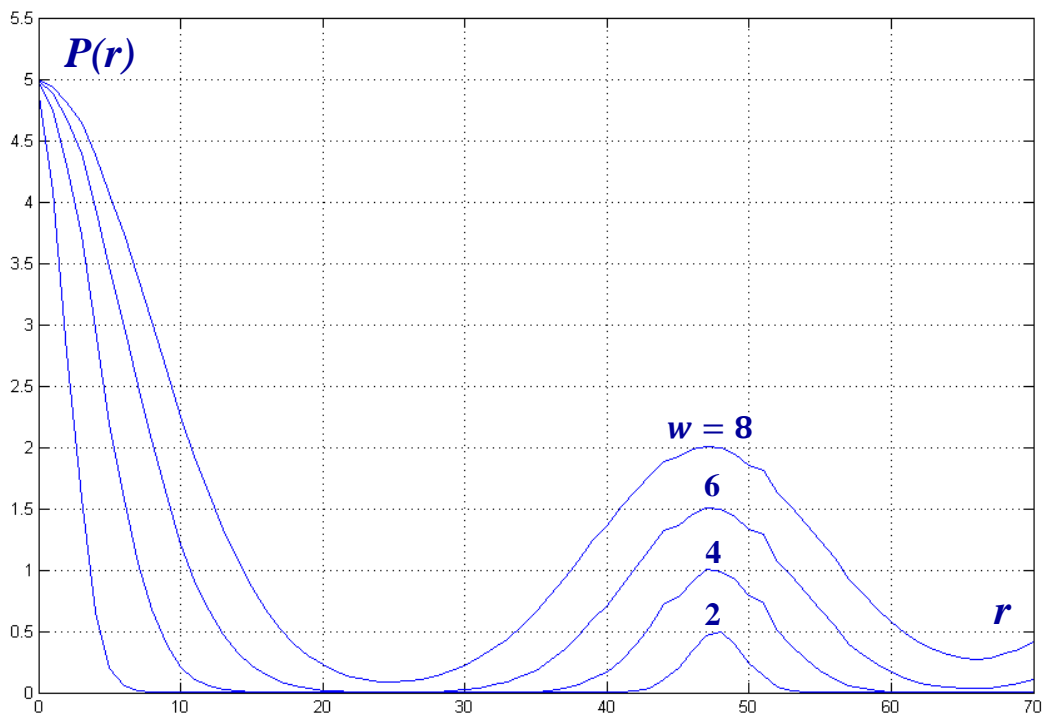
Παράμετρος πλήρωσης δομής

Αξίζει να σημειωθεί, ότι η εγγενής ελλειμματικότητα των δισδιάστατων επιφανειών επηρεάζεται από το πλάτος w των υψωμάτων. Καθώς το πλάτος των υψωμάτων αυξάνει, το εμβαδόν του πρώτου λοβού μεγαλώνει, όπως και του δεύτερου και μάλιστα σε μεγαλύτερο ποσοστό. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα και ο βαθμός πλήρωσης της δομής $1 - \alpha = \epsilon_2/\epsilon_1$ να μεγαλώνει τόσο, όση είναι η αύξηση του πλάτους (σχήμα 5.1.2 και 5.1.3). Πράγματι, ένα ύψωμα πλάτους w και ύψους h συνεισφέρει στο εμβαδόν του πρώτου λοβού ως $\sqrt{2\pi}hw$ μέσω της κορυφογραμμής του, ενώ στο δεύτερο λοβό με ολόκληρο τον όγκο του, δηλαδή $2\pi hw^2$, ή $\sqrt{2\pi}w$ περισσότερο.

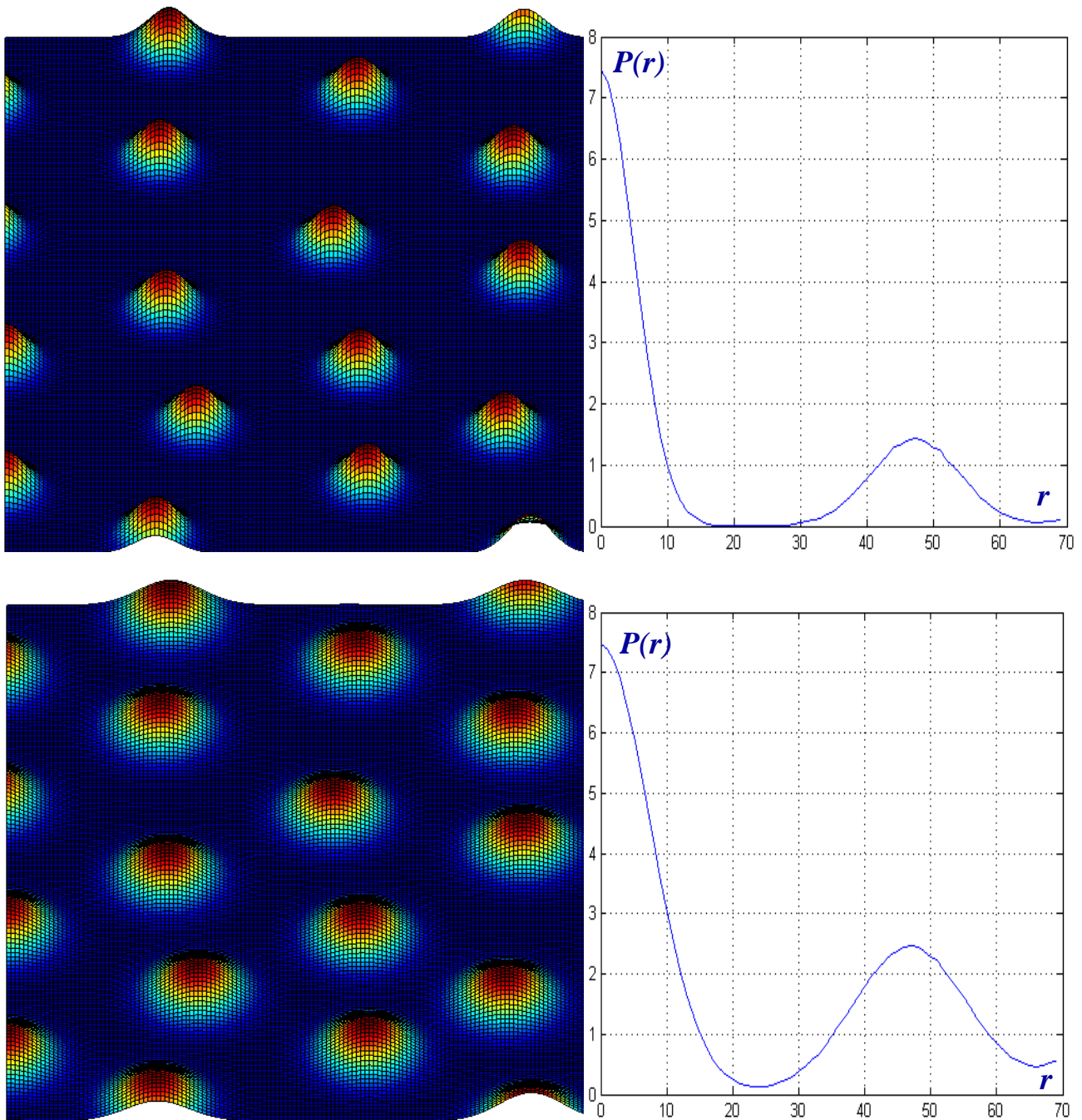
Για τον ίδιο λόγο, όταν μειωθούν αναλογικά στον ίδιο βαθμό όλες οι αποστάσεις μεταξύ των υψωμάτων, χωρίς μεταβολή των χαρακτηριστικών τους, το $1-\alpha$ επίσης αυξάνει.

Αν η μονάδα μέτρησης μιας επιφάνειας είναι το μέσο πλάτος w των υψωμάτων, τότε ο βαθμός πλήρωσης της δομής $1-\alpha$ μεταβάλλεται αντιστρόφως ανάλογα με την μέση απόσταση μ_e μεταξύ γειτονικών υψωμάτων:

$$1 - \alpha = \theta \frac{1}{\mu_e/w}$$



Σχήμα 5.1.2: Μεταβολή της $P(r)$ από το πλάτος των υψωμάτων, διατεταγμένων σε τριγωνικό πλέγμα ($h = 5, s_w = 0, s_e^2 = 32$)



Σχήμα 5.1.3: Η αύξηση του πλάτους των υψωμάτων επιφέρει ανάλογη αύξηση στο βαθμό πλήρωσης $I-\alpha$ της δομής της επιφάνειας. Η κάτω επιφάνεια έχει υψώματα διπλάσιου πλάτους από την πάνω, άρα και διπλάσιο $I-\alpha$

Η παράμετρος θ που την ονομάζουμε **παράμετρο πλήρωσης της δομής της επιφάνειας**, είναι χαρακτηριστική της επιφάνειας και **δείχνει πόσο μεγάλος είναι ο βαθμός πλήρωσης της δομής της $I-\alpha$ για συγκεκριμένο λόγο μέσης απόστασης μεταξύ γειτονικών υψωμάτων προς μέσο πλάτος υψωμάτων.**

Θα πρέπει να παρατηρήσουμε πάντως, ότι η εκτίμηση της παραμέτρου θ μπορεί να μην είναι ακριβής, αν τα υψώματα είναι μικρού πλάτους και η διακριτοποίηση χαμηλή.

5.2 Αξιολόγηση δισδιάστατων επιφανειών

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την παράμετρο πλήρωσης της δομής θ για να συγκρίνουμε διάφορα πλέγματα μεταξύ τους. Για το μεν τετραγωνικό, υπό οποιαδήποτε γωνία είναι στραμμένο, η τιμή της παραμέτρου θ είναι 1.5, για το τριγωνικό 2.5 και το εξαγωνικό 1.3 (σχήμα 5.2.1). Τα αποτελέσματα αυτά δικαιολογούνται από το γεγονός ότι, σε ένα τετραγωνικό πλέγμα τα υψώματα που ανήκουν στη διαγώνιο ενός τετραγώνου δεν είναι γειτονικά, γι' αυτό και δεν συμμετέχουν στο σχηματισμό του δεύτερου λοβού, αλλά δημιουργούν έναν τρίτο. Το εξαγωνικό πλέγμα μπορεί να θεωρηθεί ότι προέρχεται από ένα τριγωνικό με αφαίρεση κάποιων υψωμάτων. Η υπεροχή δηλαδή του τριγωνικού πλέγματος, ως προς το πόσο πλήρης είναι η δομή του σε υψώματα, είναι εμφανής.

Η παραδοσιακή αξιολόγηση με χρήση του φάσματος ισχύος έχει προβλήματα, γιατί το εύρος της καμπύλης είναι ίδιο σε όλες τις περιπτώσεις, όπως έχουμε αναφέρει στην παράγραφο 2.3 (σχήμα 5.2.2).

5.3 Η κορυφοκεντρική συνάρτηση μέσου ύψους επιφάνειας

Ας θεωρήσουμε, πως πάνω σε ένα πλαίσιο $L \times L$ έχουν τοποθετηθεί M δισδιάστατα υψώματα (σχήμα 5.3.1). Στη μελέτη αυτή ασχολούμαστε με γκαουσιανά ισοτροπικά υψώματα, όπου το m -ιοστό από αυτά ($m = 1, 2, \dots, M$) περιγράφεται από τον τύπο:

$$f_{mnk} = (h + u_m) e^{-\frac{(n-x_m)^2}{2(w+v_m)^2}} e^{-\frac{(k-y_m)^2}{2(w+v_m)^2}} \quad (5.3.1)$$

ενώ (x_m, y_m) είναι το σημείο τοποθέτησης του, $w+v_m$ το πλάτος του, $h+u_m$ το ύψος του και τα v_m, u_m ακολουθούν κανονική κατανομή $N(0, s_w^2)$ και $N(0, s_h^2)$ αντίστοιχα.

Το μέσο ύψος της επιφάνειας σε απόσταση r από τις κορυφές των υψωμάτων δίνεται από:

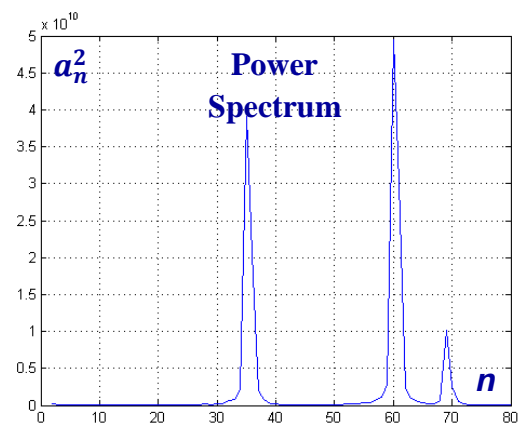
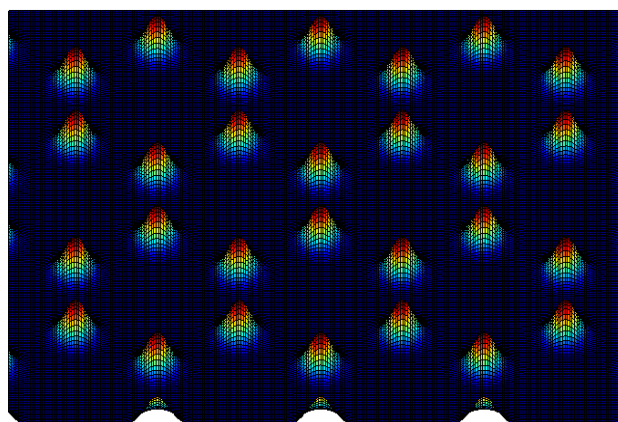
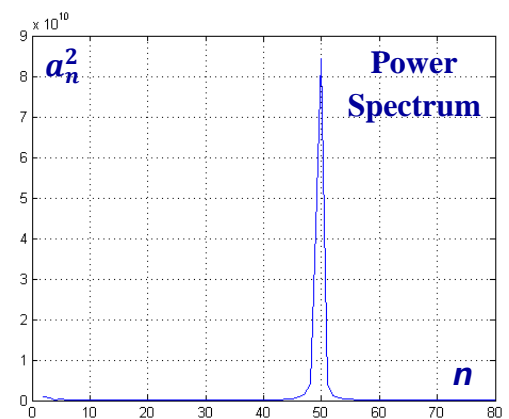
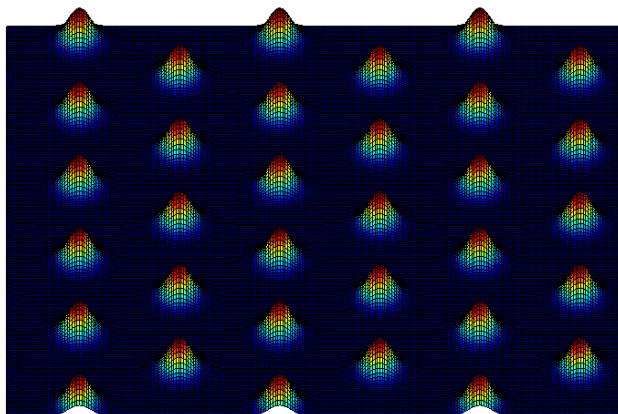
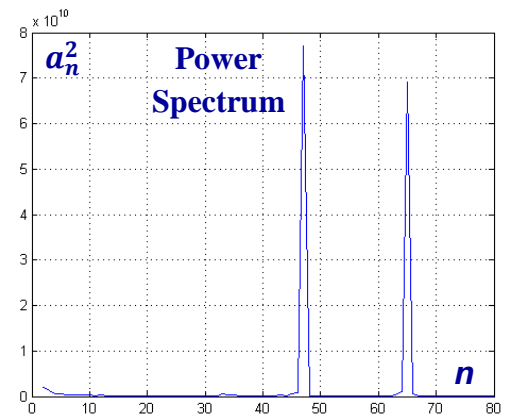
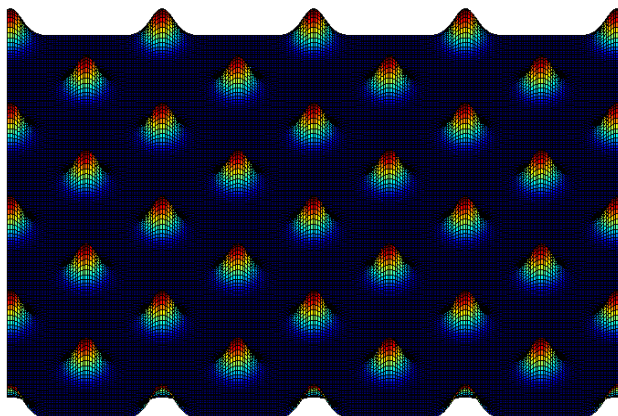
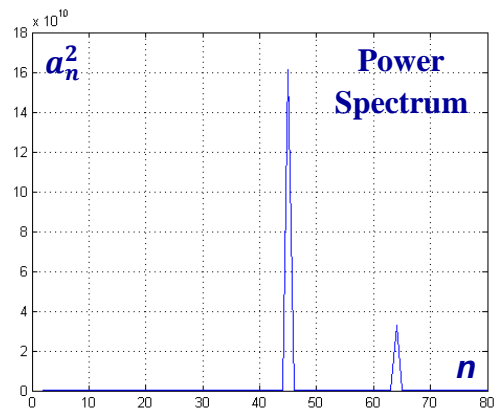
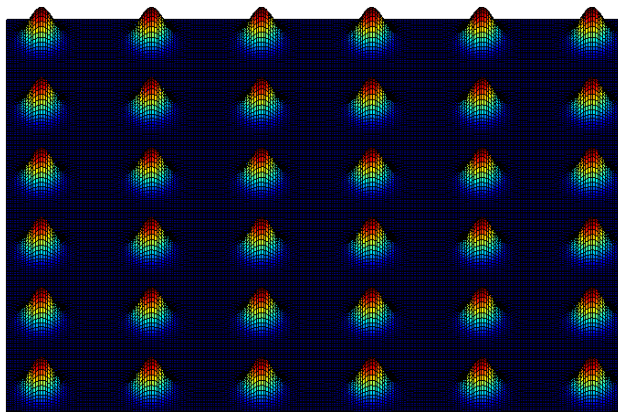
$$P(r) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \langle f_{m, x_m+r_x, y_m+r_y} \rangle_{r=\sqrt{r_x^2+r_y^2}} \quad (5.3.2)$$

και η αντίστοιχη διακύμανση του ύψους της επιφάνειας:

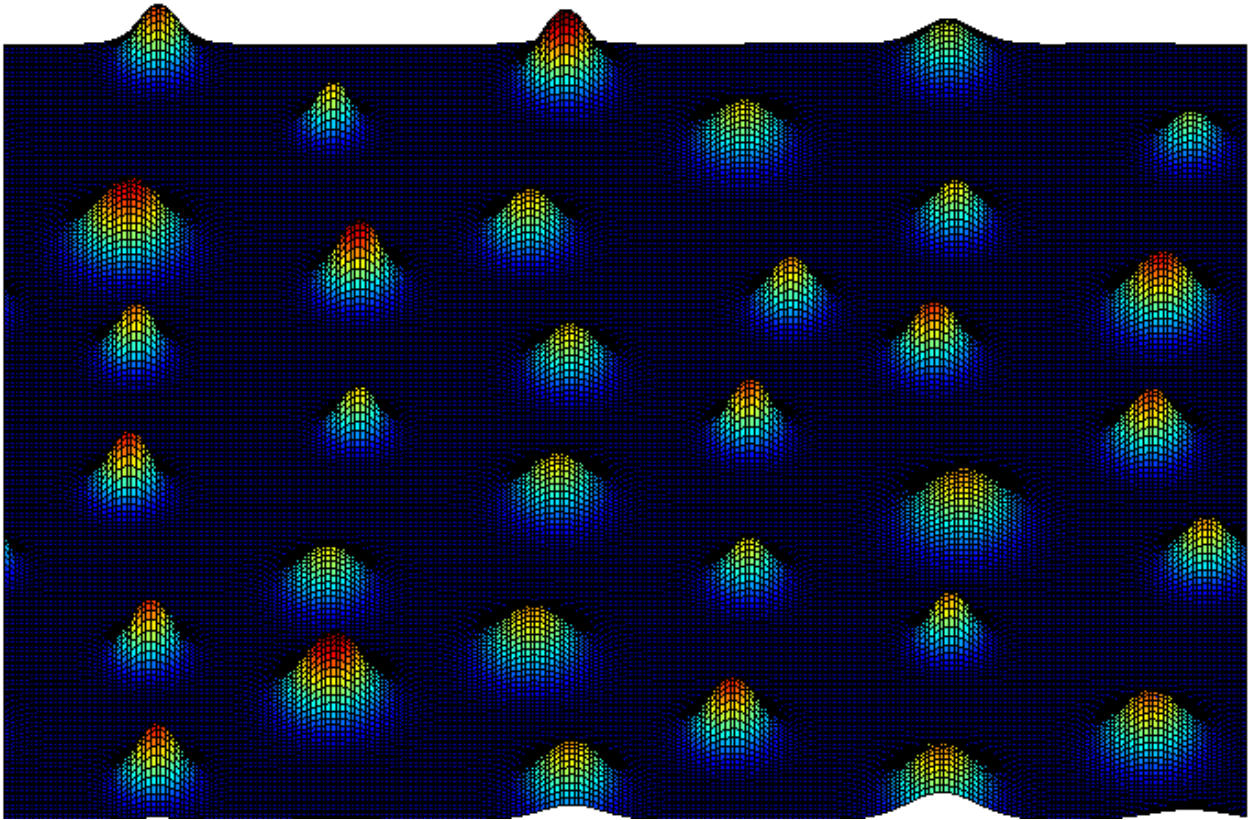
$$\begin{aligned} Q(r) &= \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \langle (f_{m, x_m+r_x, y_m+r_y} - P(r))^2 \rangle_{r=\sqrt{r_x^2+r_y^2}} \\ &= \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \langle f_{m, x_m+r_x, y_m+r_y} \rangle_{r=\sqrt{r_x^2+r_y^2}} - P^2(r) \end{aligned} \quad (5.3.3)$$



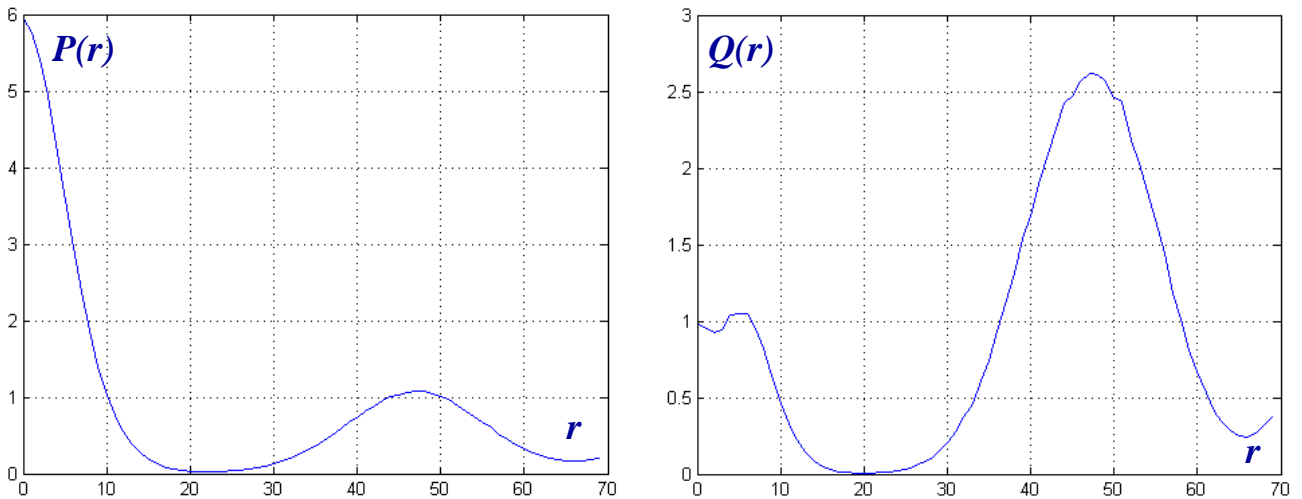
Σχήμα 5.2.1: Η κορυφοκεντρική συνάρτηση μέσου ύψους $P(r)$ για τετραγωνικό (στραμμένο υπό οποιαδήποτε γωνία), τριγωνικό και εξαγωνικό πλέγμα. Η παράμετρος πλήρωσης της δομής θ των πλεγμάτων είναι 1.5, 2.5 και 1.3 αντίστοιχα.



Σχήμα 5.2.2: Φάσμα ισχύος τετραγωνικού πλέγματος, τετραγωνικού υπό γωνία 45° , τριγωνικού και εξαγωνικού.



Σχήμα 5.3.1: Τμήμα διδιάστατης επιφάνειας με γκαουσιανά ισοτροπικά υψώματα



Σχήμα 5.3.2: Οι συναρτήσεις $P(r)$ και $Q(r)$ της επιφάνειας του σχήματος 5.3.1

Οι γραφικές παραστάσεις των $P(r)$ και $Q(r)$ φαίνονται στο σχήμα 5.3.2. Για $r = 0$, η $P(r)$ μας δίνει το μέσο ύψος h των υψωμάτων και η $Q(r)$ τη διασπορά του ύψους s_h^2 , όπως και πριν.

Ο όγκος του υλικού V_x που έχει τοποθετηθεί στην επιφάνεια, είναι ίσος με το άθροισμα του όγκου όλων των υψωμάτων, δηλαδή:

$$V_x = \sum_{m=1}^M V_m = \sum_{l=1}^M \sum_{m=1}^M 2\pi(h + u_l)(w + v_m)^2$$

και τελικά:

$$V_x = 2\pi h(w^2 + s_w^2) \quad (5.3.4)$$

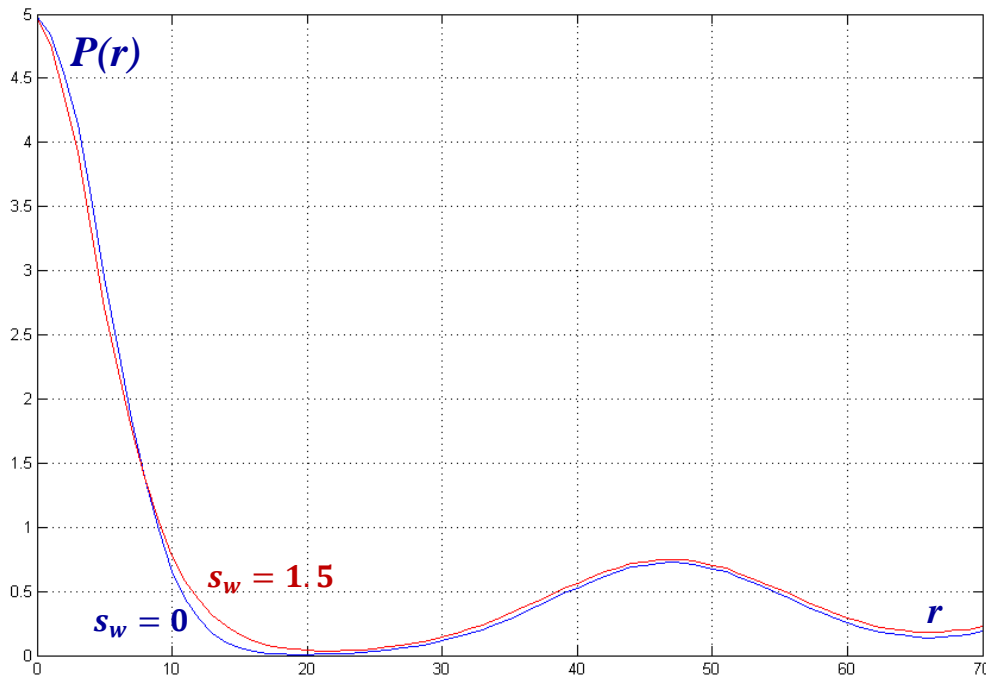
Τα υψώματα μετατρέπόμενα σε μονοδιάστατα, περιγράφονται από τον γνωστό τύπο (3.1.4), δηλαδή για το εμβαδόν ϵ_1 και εύρος s_1 του πρώτου λοβού έχουμε και πάλι:

$$\epsilon_1 = \sqrt{2\pi}wh \quad (5.3.5)$$

$$s_1^2 = w^2 + 3\sigma_w^2 \quad (5.3.6)$$

Το εύρος όμως s_2 του δεύτερου λοβού είναι διαφορετικό, εξαιτίας του γεγονότος ότι οι ακτίνες που ξεκινούν από τις κορυφές των υψωμάτων δεν περνούν πάντα από τις κορυφές των γειτονικών τους, αλλά και από τις παρυφές τους (σχήμα 5.1.1). Από αριθμητικά αποτελέσματα προσεγγιστικά βρέθηκε ότι:

$$s_2^2 \approx w^2 + 6\sigma_w^2 = s_1^2 + 3\sigma_w^2 \quad (5.3.7)$$



Σχήμα 5.3.3: Επίδραση της τυπικής απόκλισης του πλάτους s_w των υψωμάτων στο εύρος των λοβών της $P(r)$. (τριγωνικό πλέγμα, $w = h = s_h = 5$)

Στο σχήμα 5.3.3 απεικονίζεται η εξάρτηση του εύρους των λοβών της $P(r)$ από το s_w .

Το εμβαδόν ϵ_2 του δεύτερου λοβού, εξαρτάται όπως έχουμε πει και από τη μέση απόσταση των γειτονικών υψωμάτων, μια ιδιομορφία που δεν συναντιέται στις μονοδιάστατες επιφάνειες. Ο βαθμός πλήρωσης της δομής 1-α εξακολουθεί να δίνεται από:

$$\alpha = 1 - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \quad (5.3.8)$$

και μπορεί να οφείλεται είτε στη φύση των δισδιάστατων επιφανειών, είτε στην απουσία των υψωμάτων. Παρόμοια με το εμβαδόν ϵ_2 του δεύτερου λοβού, μεταβάλλεται και το ύψος της κορυφής του $P_{2,max}$. Η σχέση (3.6.7) ισχύει προσεγγιστικά για μικρά s_w^2 και s_e^2 :

$$P_{2,max} = (1 - a)h \frac{w^2}{\sqrt{w^2 + s_e^2}}$$

5.4 Σύνοψη της κορυφοκεντρικής συνάρτησης μέσου ύψους επιφάνειας, όταν οι λοβοί είναι διακριτοί

Συνοψίζουμε εδώ τον τρόπο υπολογισμού των χαρακτηριστικών μιας δισδιάστατης επιφάνειας στην οποία έχουν τοποθετηθεί γκαουσιανά υψώματα, όταν οι λοβοί είναι διακριτοί, χρησιμοποιώντας την κορυφοκεντρική συνάρτησης μέσου ύψους επιφάνειας:

Βήμα 1: Προσδιορίζουμε τη μέσο ύψος h των υψωμάτων από την $P(r)$ για $r = 0$:

$$h = P(0)$$

Βήμα 2: Προσδιορίζουμε το εμβαδόν ϵ_1 του πρώτου λοβού και εκτιμούμε το μέσο πλάτος w των υψωμάτων:

$$w = \frac{\epsilon_1}{\sqrt{2\pi h}}$$

Βήμα 3: Προσδιορίζουμε τη διακύμανση s_w^2 του πλάτους των υψωμάτων, είτε από το εύρος s_1 του πρώτου λοβού:

$$s_w^2 = \frac{1}{3}(s_1^2 - w^2)$$

είτε από τον όγκο V_x του υλικού που έχει τοποθετηθεί στην επιφάνεια:

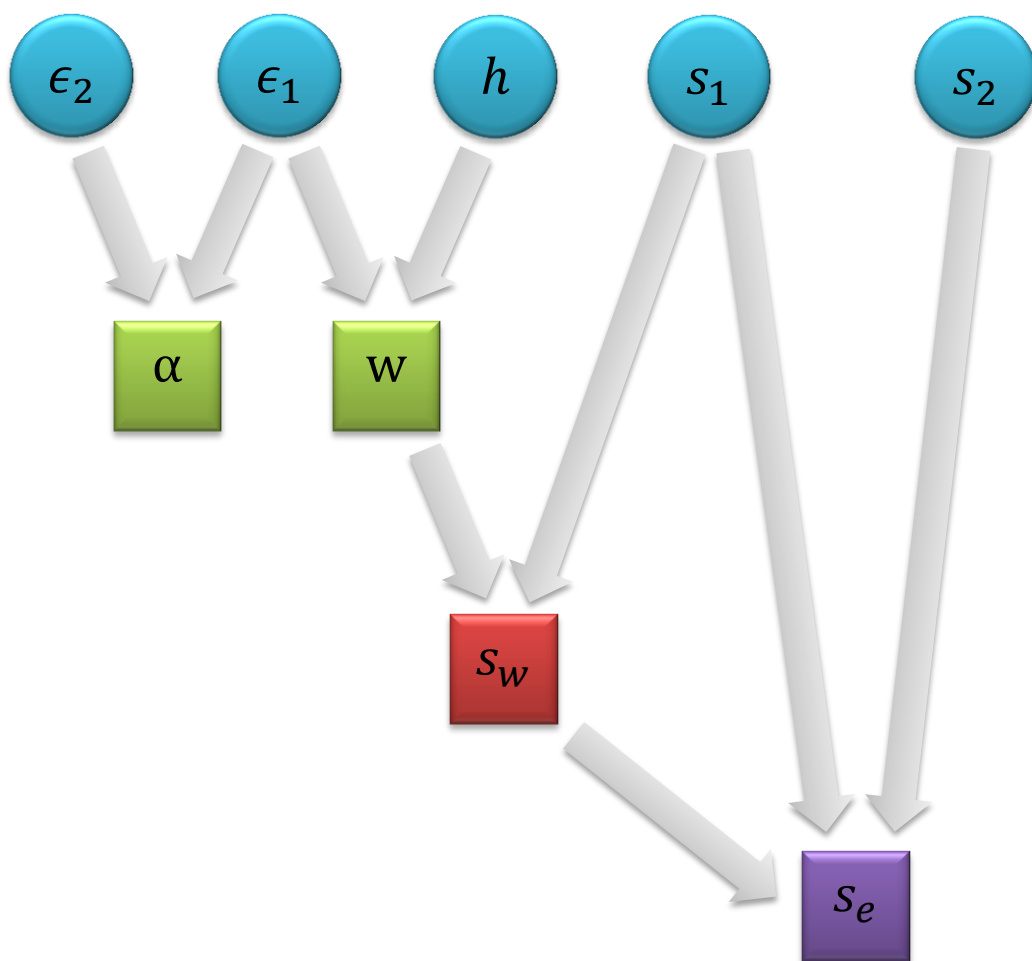
$$s_w^2 = \frac{V_x}{2\pi h} - w^2$$

Βήμα 4: Προσδιορίζουμε το εμβαδόν ϵ_2 του δεύτερου λοβού και εκτιμούμε το βαθμό πλήρωσης της δομής:

$$1 - \alpha = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$$

Βήμα 5: Προσδιορίζουμε το εύρος s_2 του δεύτερου λοβού και εκτιμούμε τη διασπορά του θορύβου s_e^2 :

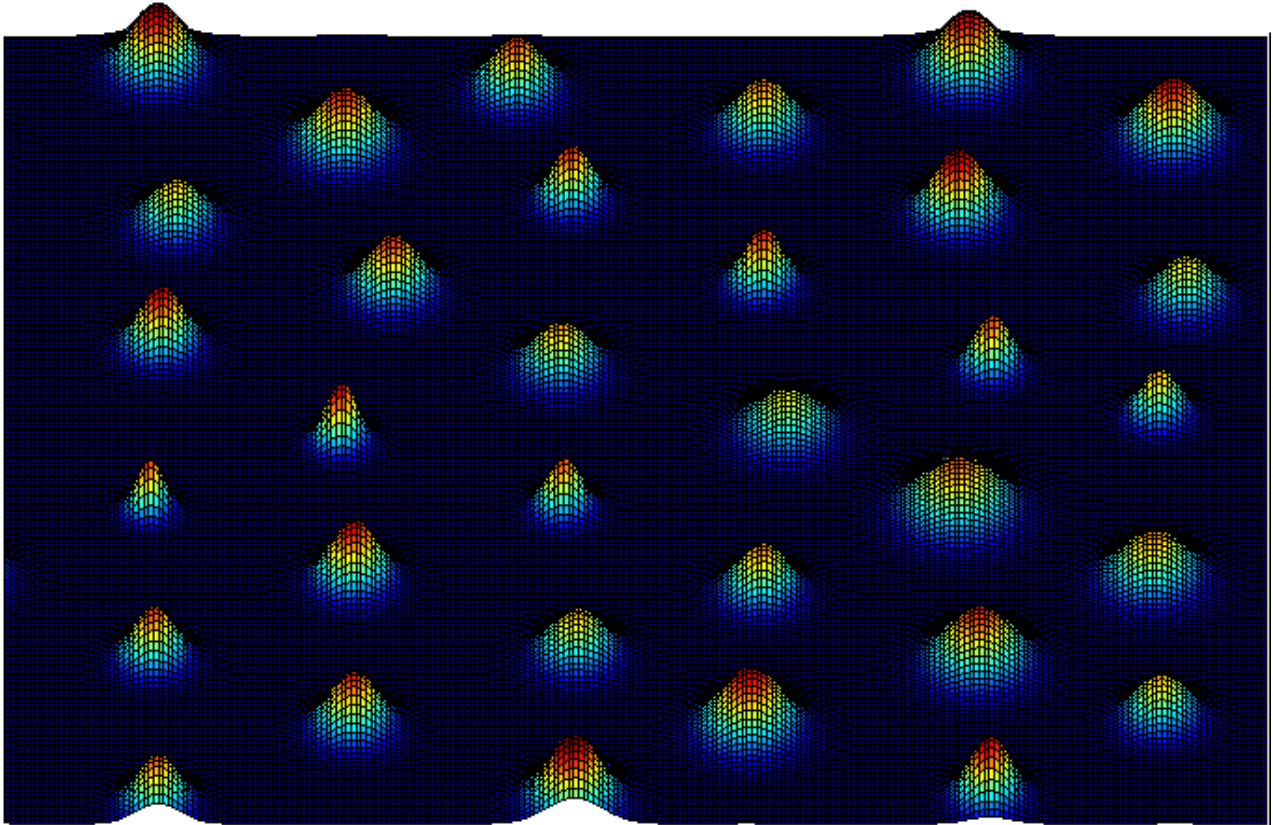
$$s_e^2 = s_2^2 - s_1^2 - 3s_w^2$$



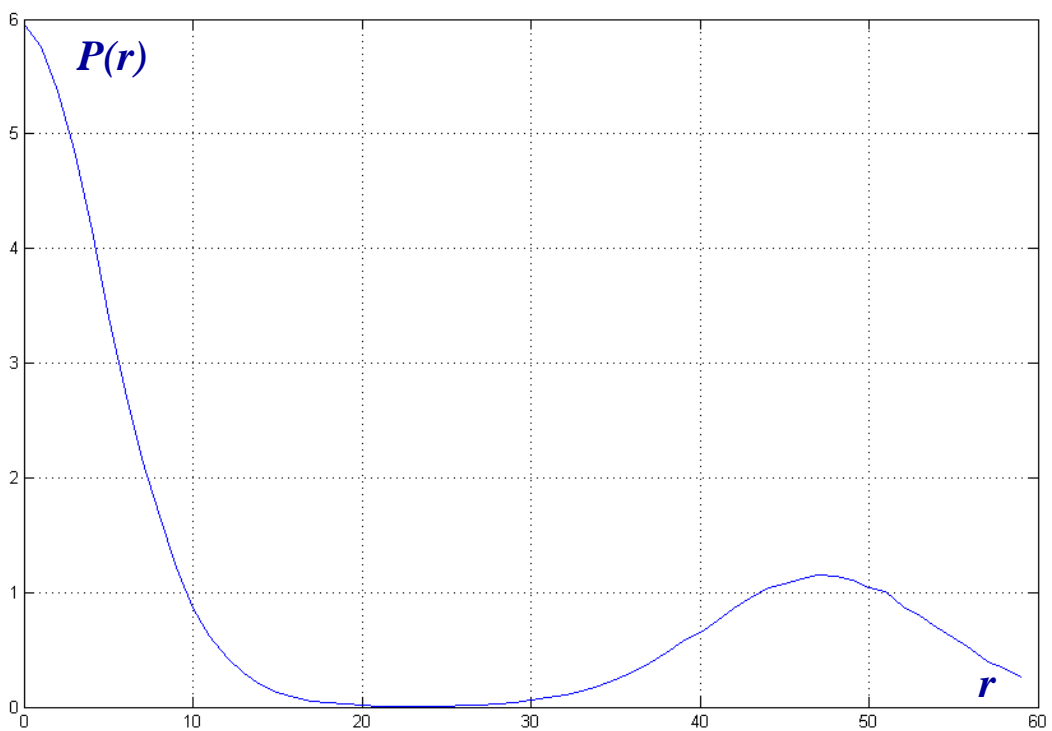
Σχήμα 5.4.1: Σειρά προσδιορισμού των παραμέτρων όταν οι λοβοί είναι διακριτοί

1ο αριθμητικό παράδειγμα

Παραθέτουμε παρακάτω ένα αριθμητικό παράδειγμα που αφορά επιφάνεια δημιουργημένη από γκαουσσισιανά υψώματα κυμαινόμενου πλάτους και ύψους, τα οποία τοποθετήθηκαν με θόρυβο



Σχήμα 5.4.2: Τμήμα επιφάνειας από γκαουσιανά υψώματα κομινόμενου πλάτους και ύψους, τοποθετημένα με θόρυβο και απουσίες πάνω σε ένα πλέγμα



Σχήμα 5.4.3: Η κορυφοκεντρική συνάρτηση $P(r)$ μέσω ύψους της επιφάνειας του σχήματος 5.4.1

Σύμβολο	Παράμετρος	Πραγμ.τιμή	Υπολογισθ.	Σφάλμα(%)
a	Έλλειψη υψωμάτων	-	0,739	-
h	Μέσο ύψος υψωμάτων	5,985	5,963	-0,38
s_h^2	Διασπορά ύψους υψωμάτων	0,977	0,971	-0,68
w	Μέσο πλάτος υψωμάτων	5,022	5,032	0,2
s_1	Εύρος 1ου λοβού	5,310	5,319	0,15
s_2	Εύρος 2ου λοβού	-	6,912	-
s_w^2	Διασπορά πλάτους υψωμάτ.	0,993	0,988	-0,5
μ_e	Μέση απόσταση υψωμάτων	47,700	47,000	-1,47
s_e^2	Διασπορά θορύβου	17,999	16,518	-8,23

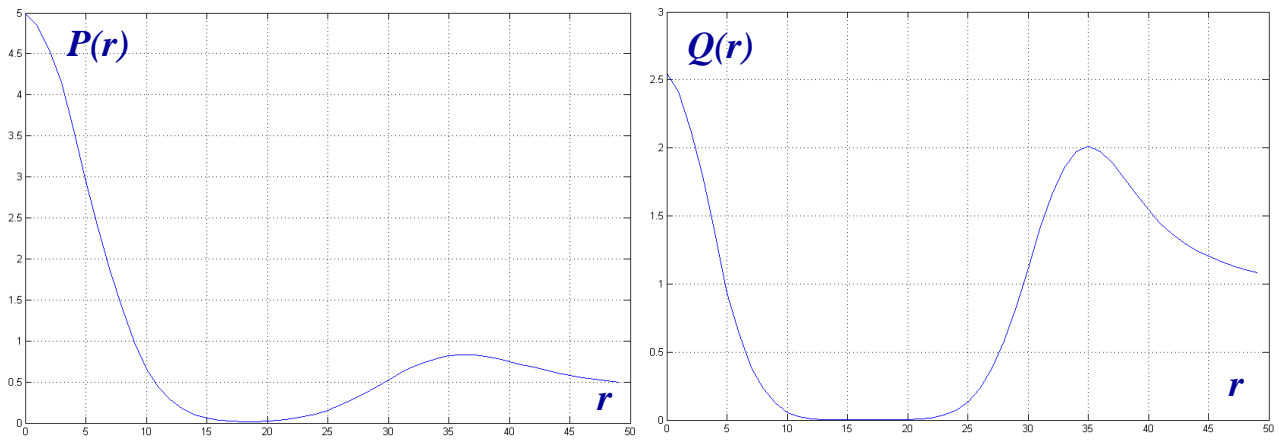
Πίνακας 5.4.1

και απουσίες πάνω σε ένα πλέγμα (σχήμα 5.4.2). Τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των υψωμάτων και ο τρόπος διάταξης τους είναι ελεγχόμενα, οπότε τα χαρακτηριστικά της επιφάνειας είναι γνωστά. Οι τιμές των χαρακτηριστικών είτε οι πραγματικές, είτε οι υπολογισμένες από την $P(r)$, φαίνονται στον πίνακα 5.4.1. Σημειώνουμε, ότι η διασπορά του ύψους των υψωμάτων έγινε χωρίς χρήση της $P(r)$, δηλαδή από τα ύψη των κορυφών των υψωμάτων.

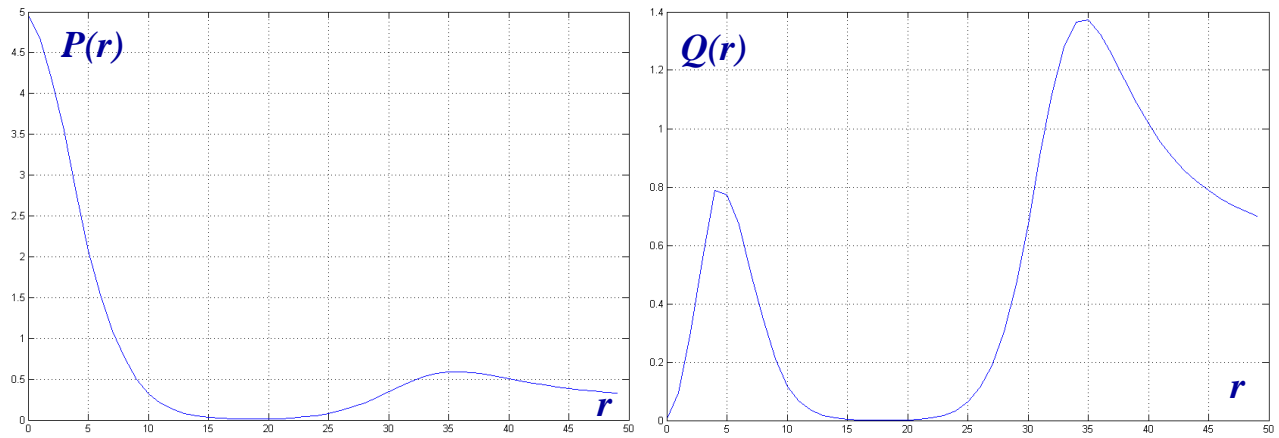
Η μέση τιμή h και διασπορά του ύψους s_h^2 υπολογίστηκαν ελαφρά μικρότερα από την κανονική τους τιμή λόγω της διακριτοποίησης της επιφάνειας. Η μικρή αυτή υποεκτίμηση επιφέρει μικρή υπερεκτίμηση στο μέσο πλάτος w . Οι εκτιμήσεις γενικά των παραμέτρων είναι πολύ καλές.

2ο αριθμητικό παράδειγμα

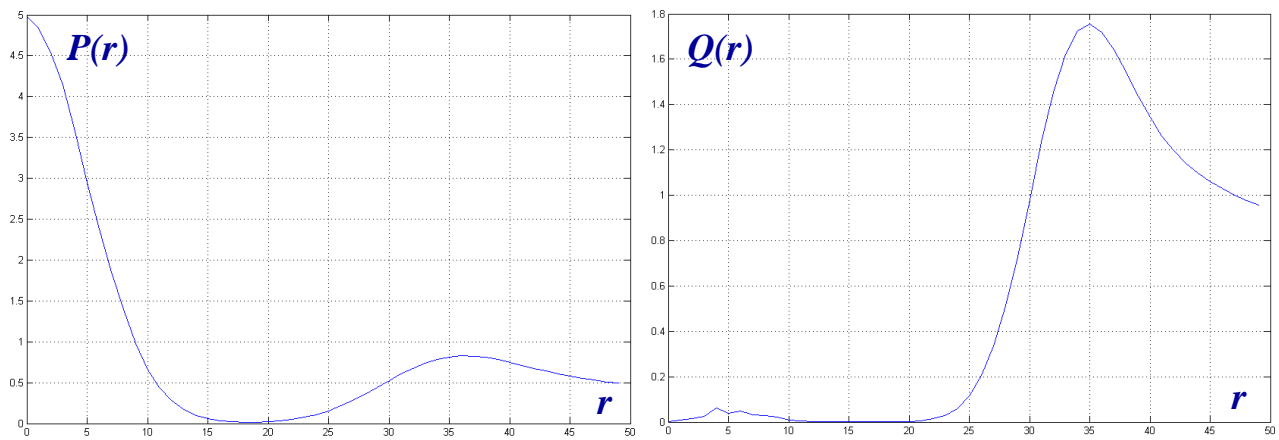
Στο κεφάλαιο 2 είδαμε τα μειονεκτήματα του φάσματος ισχύος, π.χ. στα σχήματα 2.3.3 έως 2.3.5 δείξαμε ότι διαφορετικά γεωμετρικά χαρακτηριστικά στα υψώματα έχουν το ίδιο αντίκτυπο στη παράμετρο τάξης s και το εύρος του φάσματος ισχύος. Τα αποτελέσματα των κορυφοκεντρικών συναρτήσεων των επιφανειών των προηγούμενων σχημάτων, φαίνονται στα σχήματα 5.4.3 έως 5.4.5 και στους πίνακες 5.4.2 έως 5.4.4. Παρατηρούμε ότι η διασπορά του πλάτους των υψωμάτων έχει το μεγαλύτερο σφάλμα υπολογισμού 12.31%.



Σχήμα 5.4.3: Οι κορυφοκεντρικές συναρτήσεις της επιφάνειας του σχήματος 2.3.3



Σχήμα 5.4.4: Οι κορυφοκεντρικές συναρτήσεις της επιφάνειας του σχήματος 2.3.4



Σχήμα 5.4.5: Οι κορυφοκεντρικές συναρτήσεις της επιφάνειας του σχήματος 2.3.5

Σύμβολο	Παράμετρος	Πραγμ.τιμή	Υπολογισθ.	Σφάλμα(%)
h	Μέσο ύψος υψωμάτων	5,007	4,991	-0,330
s_h^2	Διασπορά ύψους υψωμάτ.	2,570	2,553	-0,670
w	Μέσο πλάτος υψωμάτων	5,000	4,935	-1,300
s_w^2	Διασπορά πλάτους υψωμάτ.	0,000	0,223	-

Πίνακας 5.4.2: Αποτελέσματα των κορυφοκεντρικών συναρτήσεων της επιφάνειας του σχήμ. 2.3.3

Σύμβολο	Παράμετρος	Πραγμ.τιμή	Υπολογισθ.	Σφάλμα(%)
h	Μέσο ύψος υψωμάτων	5,000	4,966	-0,690
s_h^2	Διασπορά ύψους υψωμάτ.	0,000	0,004	-
w	Μέσο πλάτος υψωμάτων	3,990	3,948	-1,060
s_w^2	Διασπορά πλάτους υψωμάτ.	1,014	1,139	12,310

Πίνακας 5.4.3: Αποτελέσματα των κορυφοκεντρικών συναρτήσεων της επιφάνειας του σχήμ. 2.3.4

Σύμβολο	Παράμετρος	Πραγμ.τιμή	Υπολογισθ.	Σφάλμα(%)
h	Μέσο ύψος υψωμάτων	5,000	4,983	-0,330
s_h^2	Διασπορά ύψους υψωμάτ.	0,000	0,000	0,000
w	Μέσο πλάτος υψωμάτων	5,000	4,936	-1,290
s_w^2	Διασπορά πλάτους υψωμάτ.	0,000	0,222	-

Πίνακας 5.4.4: Αποτελέσματα των κορυφοκεντρικών συναρτήσεων της επιφάνειας του σχήμ. 2.3.5

6. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Στη παρούσα εργασία, με τη βοήθεια δύο νέων συναρτήσεων, παραλλαγών της συνάρτησης *αυτοσυσχέτισης*, προσδιορίζουμε το βαθμό οργάνωσης επιφανειών στις οποίες έχουν τοποθετηθεί γκαουσιανά υψώματα. Η *κορυφοκεντρική συνάρτηση μέσου ύψους επιφάνειας* $P(r)$, επιτρέπει τον προσδιορισμό της μορφής του μέσου υψώματος, των γεωμετρικών χαρακτηριστικών του και το πως διαμορφώνεται κατά μέσο όρο η επιφάνεια σε κοντινές αποστάσεις γύρω από την κορυφή ενός τυχαίου υψώματος. Η *κορυφοκεντρική συνάρτηση διασποράς ύψους επιφάνειας* $Q(r)$ μας δίνει χρήσιμες πληροφορίες για το βαθμό απόκλισης μεταξύ των υψωμάτων και τη διακύμανση της τοπικής δομής της επιφάνειας.

Προϋπόθεση εφαρμογής των νέων συναρτήσεων, είναι η ύπαρξη ευδιάκριτων κορυφών και η δυνατότητα προσδιορισμού της διαφοράς του ύψους της τελικής επιφάνειας από την αρχική.

Η μελέτη περιορίστηκε μόνο σε γκαουσιανά υψώματα, αλλά με κατάλληλη προσαρμογή των τύπων, θα μπορούσε να ήταν οποιουδήποτε είδους: κωνοειδή, παραλληλεπίπεδα, κ.τ.λ. Επίσης, αντί για εναπόθεση υψωμάτων σε μια επιφάνεια, θα μπορούσαμε να είχαμε αφαίρεση, ή διάβρωση τμημάτων της.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η εφαρμογή της μεθόδου σε περιοδικές χρονοσειρές, π.χ.:

- Η εξέλιξη του πληθυσμού ενός ζώου σε κάποιο οικοσύστημα
- Ο ημερήσιος αριθμός των ανθρώπων που έχουν προσβληθεί από μια ενδημική νόσο
- Η ημερήσια κατανάλωση εποχιακών αγαθών
- Η ένταση των βροχοπτώσεων σε μια περιοχή κατά τη διάρκεια του χρόνου
- Ο αριθμός των κηλίδων στην ηλιακή επιφάνεια σε διαδοχικά έτη
- Επισκεψιμότητα ιστοσελίδας

Σημειώνεται πως, από τις χρονοσειρές πρέπει να έχει αφαιρεθεί η κύρια τάση, ώστε να έχουν απομείνει μόνο οι κυκλικές κινήσεις τους. Στις χασοτικές χρονοσειρές που έχουν *φράκταλ* δομή, δεν μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος, γιατί δεν υπάρχουν ευδιάκριτες κορυφές. Οι μεταβλητές επίσης, των οποίων η εξέλιξη περιγράφεται από τις χρονοσειρές, πρέπει να μετριοούνται ως προς ένα απόλυτο σημείο αναφοράς 0. Η νέα μέθοδος π.χ. δεν εφαρμόζεται όταν η μεταβλητή είναι η θερμοκρασία, γιατί το σημείο αναφοράς των 0°C είναι συμβατικό.

Η ερμηνεία των λοβών των *κορυφοκεντρικών* συναρτήσεων είναι ανάλογη της περίπτωσης. Ο πρώτος λοβός των συναρτήσεων, δίνει πληροφορίες για το βαθμό επίδρασης του φαινομένου στην εξελισσόμενη μεταβλητή, τη διάρκεια ζωής του φαινομένου κ.τ.λ. Ο δεύτερος λοβός προσδιορίζει πόσο τακτικά και σταθερά επανέρχεται το φαινόμενο. Στην περίπτωση π.χ. της ενδημικής νόσου, μπορούμε να προσδιορίσουμε πόσο διαρκεί ο κύκλος της, πόσους ανθρώπους προσβάλλει συνολικά, πως ακριβώς εξελίσσεται, πόσο συχνά και σταθερά εμφανίζεται, κ.τ.λ.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Καραγιάννης Γ. (1988), *Σχήματα και Συστήματα*. Συμμετρία
- [2] Asenov (2003), *Intrinsic Parameter Fluctuations in Decananometer MOSFETs Introduced by Gate Line Edge Roughness*. IEEE TRANSACTIONS ON ELECTRON DEVICES, VOL. 50, NO. 5, MAY 2003
- [3] Ball Philip (2009), *Nature's patterns, Flow*. Oxford University Press
- [4] Ball Philip (2009), *Shapes*. Oxford University Press
- [5] Barabasi A. & Stanley H. (1995), *Fractal Concepts in Surface Growth*. Cambridge University Press
- [6] Bhushan B. (1998), *Tribol. Lett.* 4 1–35.
- [7] Bourguine, P., Lesne A. (2010), *Morphogenesis, Origins of Patterns & Shapes*. Springer
- [8] Brune D., Hellborg R., Whitlow H., Hunderi O. (1997), *Surface Characterization*. John Wiley, VCH
- [9] Chatfield Chris (2004), *The analysis of Time Series – An Introduction*, 6th edn. Chapman & Hall/CRC
- [10] Curtis A. (2004), *Biology of nanotopography* - IEEE TRANSACTIONS ON NANOBIOSCIENCE, VOL. 3, NO. 4, DECEMBER 2004
- [11] Curtis A. (2001), *Substratum nanotopography and the adhesion of biological cells. Are symmetry or regularity of nanotopography important?* Biophysical Chemistry 94 (2001) 275–283
- [12] Czanderna A. (2002), *Beam Effects, Surface Topography, and Depth Profiling in Surface Analysis*. Kluwer Academic Publishers
- [13] Davis J. C. (1986), *Statistics and data analysis in geology*, 2nd edn. New York: John Wiley
- [14] DiNardo J. (1994), *Nanoscale Characterization of Surfaces and Interfaces*. John Wiley
- [15] Fassbender (2009), *Introducing artificial length scales to tailor magnetic properties*. New Journal of Physics **11** (2009) 125002 (19pp)
- [16] Field, Golubitsky (2009), *Symmetry in Chaos*. Society of Industrial and Applied Mathematics
- [17] Gogolides, Constantoudis, Patsis, Tserepi (2006), *A review of line edge roughness and surface nanotexture resulting from patterning processes*. *Microelectronic Engineering Volume 83, Issues 4-9 (2006)*
- [18] Kolasisnski K. (2008), *Surface Science Foundations of Catalysis and Nanoscience*, 2nd edn John Wiley
- [19] Liu L., Chen X. (2010), *J. Appl. Phys.* 107, 033501

- [20] Mainzer K. (2005), *Symmetry And Complexity - The Spirit And Beauty Of Nonlinear Science*. World Scientific Publishing
- [21] Mainzer K. (2007), *Thinking in Complexity - The Computational Dynamics of Matter, Mind and Mankind* 5th edn. Springer
- [22] Maradudin A. (2007), *Light Scattering and Nanoscale Surface Roughness*. Springer
- [23] Nicolis G., Nicolis C. (2007), *Foundations of Complex Systems, Nonlinear Dynamic Statistical Physics Information and Prediction*. World Scientific
- [24] Osgood (2008), *The Fourier Transform and its Applications*. Lecture Notes
- [25] Quere D. (2008), *Wetting and Roughness*. The Annual Review of Materials Research (download from arjournals.annualreviews.org)
- [26] Palasantzas G., Koch, Siete A., Vystavel T. (2005), *Nano-Sized Cobalt Cluster Films: Structure and Functionality*, *Advanced Engineering Materials* 7, 21 (2005)
- [27] Palasantzas G. (2005), *Phys. Rev. B* 71, 205320
- [28] Patsis, Constantoudis, Gogolides, *Integrated Simulation of Line-Edge Roughness (LER) Effects on Sub-65 nm Transistor Operation From Lithography Simulation, to LER Metrology, to Device Operation*
- [29] Pelliccione (2008), *Evolution of Thin Film Morphology Modeling & Simulations*. Springer
- [30] Richard L. (2011), *Optical Measurement of Surface Topography*. Springer
- [31] Riviere J., Myhra S. (2009), *Surface & Interface Analysis* 2nd edn. CRC Press
- [32] Simonsen I. (2010), *Optics of surface disordered system*. The European Physical Journal Topics 181, 1-103 (2010)
- [33] Vattuone L. (2001), *Oxygen interaction with disordered and nanostructured Ag surfaces*. Journal of Chemical Physics VolumeE 115, Number 7
- [34] Vickerman J., Gilmore I. (2009), *Surface Analysis, The Principal Techniques* 2nd edn. John Wiley
- [35] Yang S.C. (2006), *Microfluid Nanofluid* 2: 501–511
- [36] Zhang (2006), *Complex Network from Pseudoperiodic Time Series Topology versus Dynamics*. PHYSICAL REVIEW LETTERS PRL **96**, 238701 (2006)