ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΝΑΥΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΘΑΛΑΣΣΙΑΣ ΥΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΑΝΤΙΣΤΑΣΗΣ ΚΑΙ ΑΥΤΟΠΡΟΩΣΗΣ ΔΕΞΑΜΕΝΟΠΛΟΙΟΥ

Φοιτητής:

ΤΣΕΡΠΕΣ ΗΡΑΚΛΗΣ

Επιβλέπων καθηγητής:

Δρ. ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΤΖΑΜΠΙΡΑΣ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΝΑΤΥΙΚΗΣ ΚΑΙ ΘΑΛΑΣΣΙΑΣ ΥΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ

ΑΘΗΝΑ, 05/09/2018

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες 3

Εισαγωγή 4

Κεφάλαιο 1ο : Γεωμετρική αναπαράσταση της γάστρας του πλοίου.....7

Κεφάλαιο 2ο : Σύμμορφος μετασχηματισμός της γάστρας του πλοίου 11

2.1 Σύμμορφος Μετασχηματισμός.....11

2.2 Γεωμετρική αναπαράσταση της γάστρας του πλοίου μέσω του σύμμορφου μετασχηματισμού.....12

2.2.1 Παρεμβολή των νομέων.....16

Κεφάλαιο 3ο: Υπολογισμός της ελεύθερης επιφάνειας με τη θεωρία δυναμικού 17

3.1 Η Θεωρία Δυναμικού και οι εφαρμογές της 17

3.2 Αριθμητική Μορφοποίηση της Θεωρίας Δυναμικού 20

3.3 Η Αριθμητική Μέθοδος της Λύσης 22

3.4 Υπολογισμός της ελεύθερης επιφάνειας 28

3.5 Αριθμητική μέθοδος προσομοίωσης της τύρβης κάτω από την ελεύθερη επιφάνεια του δυναμικού 33

Κεφάλαιο 4ο : Αριθμητική επίλυση του προβλήματος με την θεωρία της συνεκτικής ροής.....40

4.1 Εισαγωγή στην αριθμητική επίλυση με την θεωρία της συνεκτικής ροής.....40

4.2 Δημιουργία του υπολογιστικού πλέγματος και των εξισώσεων τύρβης.....41

4.3 Υπολογισμός της ελεύθερης επιφάνειας με την συνεκτική ροή.....47

Κεφάλαιο 5ο : Περιγραφή συμπληρωματικών θεωριών που εφαρμόστηκαν και στις δύο αριθμητικές μεθόδους.....49

5.1 Συναρτήσεις Τοίχου.....49

5.2 Η προσομοίωση του δίσκου ορμής.....51

5.3 Η Θεωρία της φέρουσας γραμμής (Lifting Line).....54

5.4 Αλγόριθμος SIMPLE.....55

Κεφάλαιο 6ο : Αποτελέσματα και συμπεράσματα.....58

6.1 Αποτελέσματα Αριθμητικών υπολογισμών ρυμούλκησης.....58

6.2 Αποτελέσματα Αριθμητικών υπολογισμών Αυτοπρόωσης.....63

6.3 Σύγκριση αποτελεσμάτων με τα sea trials του πλοίου.....70

7. Επίλογος.....72

Παράρτημα: Σχήματα από τους υπολογισμούς 73

Βιβλιογραφία.....86

Ευχαριστίες

Για την ολοκλήρωση της εργασίας αυτής θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου κύριο Γεώργιο Τζαμπίρα της σχολής Ναυπηγών Μηχανολόγων Μηχανικών Ε.Μ.Π. για τη βοήθειά του και τη συνεργασία μας κατά την περίοδο αυτή, καθώς ήταν καθοριστική στην εκπόνηση του θέματος.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τους συναδέλφους τόσο στον χώρο εργασίας όσο και στην σχολή για την πολύτιμη βοήθεια που μου παρείχαν κατά την διάρκεια εκπόνησης της συγκεκριμένης εργασίας. Τέλος, ευχαριστώ την οικογένεια μού για την βοήθεια και την στήριξη που μου παρείχαν καθ' όλη την διάρκεια των σπουδών μού.

Εισαγωγή

Το πρόβλημα της προσομοίωσης της ροής γύρω από ένα αυτοπροωθούμενο πλοίο είναι ίσως ένα από τα δυσκολότερα προβλήματα για έναν Ναυπηγό Μηχανολόγο ερευνητή. Οι ιδιαιτερότητες της παραπάνω προσπάθειας οφείλονται από την μία στην ύπαρξη της ελεύθερης επιφάνειας του νερού και από την άλλη στους υψηλούς αριθμούς Reynolds που χαρακτηρίζουν την τυρβώδη ροή γύρω από το πλοίο. Επιπλέον, η λειτουργία της έλικας προσθέτει ένα επιπρόσθετο πρόβλημα στην όλη διαδικασία καθώς τα στερεά σύνορα μεταβάλλονται συνεχώς εξαιτίας της χρονικά εξαρτώμενης θέσης της έλικας σε σχέση με την γάστρα και την ελεύθερη επιφάνεια.

Η παρούσα εργασία πραγματεύεται τους αριθμητικούς υπολογισμούς για τις παραμέτρους αντίστασης και αυτοπρόωσης για ένα δεξαμενόπλοιο 75000 DWT μέσω εργαλείων CFD (Computational Fluid Dynamics) που αναπτύχθηκαν από τον τομέα ναυτικής και θαλάσσιας υδροδυναμικής του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου για την πραγματική κλίμακα. Η μελέτη περιλαμβάνει δύο διαφορετικές αριθμητικές προσεγγίσεις της ροής του νερού γύρω από την γάστρα. Στην πρώτη περίπτωση, γίνεται υπολογισμός της ελεύθερης επιφάνειας μέσω της θεωρίας του δυναμικού και στην συνέχεια λύνονται οι RANS εξισώσεις κάτω από την καθορισμένη από τη θεωρία δυναμικού ελεύθερη επιφάνεια. Στην δεύτερη προσέγγιση, οι εξισώσεις RANS επιλύονται κάτω από την πραγματική ελεύθερη επιφάνεια του νερού σε συνδυασμό με ένα κ-ω μοντέλο τύρβης.

Όλα τα στοιχεία του υπό εξέταση πλοίου (αρχείο Offset για την παραγωγή ναυπηγικών γραμμών, σχέδια έλικας και υδροστατικοί πίνακες), προέρχονται από την ναυτιλιακή εταιρεία Prime Marine στην οποία εργάζομαι το τελευταίο έτος.

Η εργασία ξεκινάει με την παραγωγή της γεωμετρίας του υπό μελέτη πλοίου μέσω του προγράμματος Tribon M3 Marine Lines έτσι ώστε να εξάγουμε τα απαραίτητα txt αρχεία συντεταγμένων των σημείων των νομέων, ώστε να είναι δυνατή η ανάγνωσή τους από τους κώδικες που θα χρησιμοποιηθούν.

Στη συνέχεια, γίνεται περιγραφή του σύμμορφου μετασχηματισμού, με τον οποίο επιτυγχάνεται η σύμμορφη απεικόνιση των δισδιάστατων νομέων του πλοίου σε μοναδιαίο κύκλο. Επίσης

παρουσιάζεται η διαδικασία παρεμβολής των νομέων ώστε να έχουμε πιο αναλυτική γεωμετρική αναπαράσταση της γάστρας του πλοίου με μικρότερο υπολογιστικό κόστος.

Ακολουθεί η περιγραφή της διαδικασίας υπολογισμού της ελεύθερης επιφάνειας μέσω της θεωρίας δυναμικού. Αρχικά, γίνεται μία εισαγωγή στη θεωρία δυναμικού, παρουσιάζονται οι εξισώσεις και οι οριακές συνθήκες που τη διέπουν καθώς και η κατασκευή του αριθμητικού πλέγματος πάνω στο οποίο επιλύεται η δυναμική ροή και διεξάγεται η επαναληπτική διαδικασία υπολογισμού της ελεύθερης επιφάνειας.

Στο αμέσως επόμενο κεφάλαιο, παρουσιάζεται η μεθοδολογία υπολογισμού της πραγματικής ελεύθερης επιφάνειας με την θεωρία της συνεκτικής ροής. Γίνεται αναλυτική περιγραφή της δημιουργίας του αριθμητικού πλέγματος, καθώς επίσης και περιγραφή της επίλυσης των εξισώσεων RANS με τις κατάλληλές συνοριακές συνθήκες που διέπουν το πρόβλημα.

Στη συνέχεια, στο κεφάλαιο πέντε γίνεται περιγραφή των συναρτήσεων τοίχου που εφαρμόζονται στο σύνορο S (κύτος της γάστρας), καθώς επίσης και ο αλγόριθμος SIMPLE που εφαρμόζεται για την επίλυση του πεδίου της ροής τόσο στην περίπτωση του δυναμικού όσο και στην επίλυση με την συνεκτική ροή. Επίσης, παρουσιάζεται η προσομοίωση της έλικας μέσω του δίσκου ορμής. Επιπλέον, περιγράφονται η θεωρία φέρουσας γραμμής καθώς και τα πολυώνυμα βελτιστοποίησης μέσω των σειρών Wagenigen, μέσω των οποίων υπολογίζεται η κυκλοφορία πάνω στο δίσκο ορμής.

Στο τελευταίο κεφαλαίο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των δύο μεθόδου για τον υπολογισμό των παραμέτρων αντίστασης και αυτοπρόωσης του πλοίου καθώς επίσης και η σύγκριση μεταξύ των δύο παραγόμενων ελευθέρων επιφανειών. Ταυτόχρονα γίνεται σχολιασμός των αποτελεσμάτων και διατυπώνονται τα βασικά συμπεράσματα για κάθε αριθμητική μέθοδο. Τέλος, γίνεται σύγκριση κάθε αριθμητικής μεθόδου με τα δεδομένα από τα sea trials του συγκεκριμένου πλοίου και εξάγονται συμπεράσματα για την ακρίβεια κάθε αριθμητικής μεθόδου που εξετάστηκε στην εργασία.

Κεφάλαιο 1ο : Γεωμετρική αναπαράσταση της γάστρας του πλοίου

Το πρώτο μέρος της παρούσας εργασίας περιλαμβάνει την γεωμετρική αναπαράσταση της γάστρας του υπό μελέτη δεξαμενόπλοιου τα στοιχεία του οποίου προέρχονται από την ναυτιλιακή εταιρεία Prime Marine. Η διαδικασία για την παραγωγή της γεωμετρίας της γάστρας του υπό σχεδίαση πλοίου έγινε μέσω του προγράμματος «Tribon Marine Lines». Το αρχείο Offset (*παράρτημα Ι)*, του ναυπηγείου καθέλκυσης του δεξαμενοπλοίου, περιείχε αναλυτικά όλα τα απαραίτητα δεδομένα για την περιγραφή της γάστρας. Πιο συγκεκριμένα, περιλαμβάνει 128 εγκάρσιους νομείς με ισαπόσταση 0,6m (600mm) κατά το διάμηκες μήκος, ενώ οι ίσαλοι τέμνουν τους νομείς σύμφωνα με το waterlines spacing (*Σχήμα 1.1).*

2.1 WATERLINES SPACING

! VODNA ! LINIJA	VISINA Z (MM)	! VODNA ! LINIJA	VISINA Z (MM)	! VODNA ! LINIJA	VISINA Z (MM)
Z =	0,0	Z =	5000,0	Z =	12000,0
Z =	250,0	Z =	5500,0	Z =	12500,0
Z =	500,0	Z =	6000,0	Z =	13000,0
Z =	750,0	Z =	6500,0	Z =	13500,0
Z =	1000,0	Z =	7000,0	Z =	14000,0
Z =	1250,0	Z =	7500,0	Z =	15000,0
Z =	1500,0	Z =	8000,0	Z =	16000,0
Z =	1750,0	Z =	8500,0	Z =	17000,0
Z =	2000,0	Z =	9000,0	Z =	18000,0
Z =	2500,0	Z =	9500,0	Z =	19000,0
Z =	3000,0	Z =	10000,0	Z =	20000,0
Z =	3500,0	Z =	10500,0	Z =	20450,0
Z =	4000,0	Z =	11000,0		
Z =	4500,0	Z =	11500,0		

Σχήμα 1. Waterlines Spacing

Τα βασικά στοιχεία του πλοίου παρουσιάζονται στον παρακάτω *πίνακα 1.1*

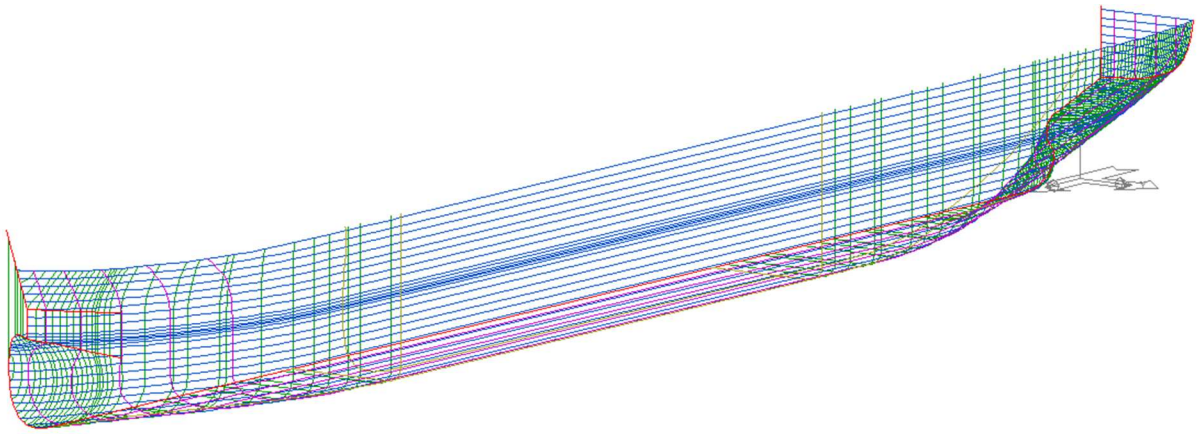
75000 DWT ICE CLASS 1A OIL CARRIER	
LENGTH OVERALL	228,48 m
LENGTH BETWEEN PERPENDICULARS	220 m
BREADTH, MLD	32,24 m
DEPTH, MLD	20,45 m
DRAUGHT, DESIGN	12,2 m
DRAUGHT, SUMMER	14,18 m
DEADWEIGHT AT DESIGN DRAUGHT	60079 t
DEADWEIGHT AT SCANTLING DRAUGHT	74829 t

Πίνακας 1.1

Μετά την εισαγωγή του αρχείου OFFSET στο πρόγραμμα ναυπηγικών γραμμών Tribon M3, έγινε εξομάλυνση των ισάλων έτσι ώστε οι νομείς που θα παρεμβάλουμε με το πρόγραμμα να ακολουθούν την μορφή της γάστρας από το αρχείο OFFSET. Μετά από κάθε εξομάλυνση γίνεται πάντα έλεγχος των υδροστατικών στοιχείων. Την δυνατότητα αυτή μας την δίνει το πρόγραμμα Tribon M3 Marine Lines, και με αυτόν τον τρόπο πιστοποιούμε ότι η γεωμετρία που παράχθηκε προσεγγίζει ικανοποιητικά την πραγματική γεωμετρία του πλοίου μας. Μετά από λίγες επεμβάσεις στην περιοχή της πλώρης και της πρύμνης, καταλήγουμε στην τελική γεωμετρία του πλοίου. Τα αποτελέσματα της σύγκρισης στο βύθισμα σχεδίασης με τα υδροστατικά στοιχεία του πλοίου παρουσιάζονται στον παρακάτω *πίνακα 1.2.*

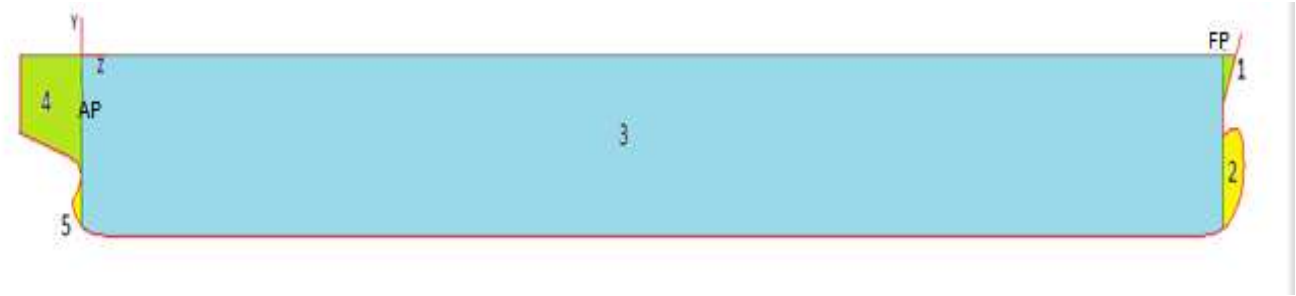
	HYDROSTATIC TABLES	TRIBON M3	Deviation
Displacement [m^3]	74413	74383	0,04%
LCB from Midship [m]	3,434	3,55	3,38%
KMT [m]	13,628	13,627	0,01%
VCB [m]	6,35	6,34	0,16%
WSA [m^2]	11235	11239	0,04%
Mid area Coeff.	0,9965	0,9965	0,00%
Cb	0,8603	0,8596	0,08%
Cp	0,8633	0,8626	0,08%

Πίνακας 1.2



Σχήμα 1.2. Body Lines Plan Tribon M3

Επειδή η πολυπλοκότητα της γεωμετρίας της γάστρας του πλοίου διαφέρει από περιοχή σε περιοχή, το πλοίο χωρίζεται σε πέντε περιοχές όπως φαίνεται στο σχήμα 1.3. Η αρχή του συστήματος των αξόνων τέθηκε στην πρυμναία φρακτή (AP) στο ύψος του κοίλου. Η πρώτη περιοχή είναι το τμήμα της γάστρας πρώραθεν της πρωραίας φρακτής (FP) και πάνω από το βολβό. Η πρωραία φρακτή εδώ ορίζεται ως η κάθετη ευθεία γραμμή εφαπτόμενη στην centerline του πλοίου κοντά στην τομή της centerline με την waterline όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Η δεύτερη περιοχή είναι η περιοχή του βολβού της πλώρης, όπως ορίζεται πρώραθεν της πρωραίας φρακτής και κάτω από την περιοχή ένα. Η τέταρτη περιοχή περιέχει την πρύμνη και είναι το τμήμα της γάστρας πάνω από τον βολβό της πρύμνης. Η πρυμναία φρακτή ορίζεται ως η κάθετη ευθεία γραμμή εφαπτόμενη στη centerline του πλοίου, κοντά στην πρύμνη του πλοίου, στην τομή της centerline με τη waterline. Η πέμπτη περιοχή είναι ο βολβός της πρύμνης πρύμνηθεν της πρυμναίας φρακτής και κάτω από την περιοχή τέσσερα. Τέλος, η περιοχή τρία είναι το τμήμα της γάστρας πρύμνηθεν της πρωραίας φρακτής και πρώραθεν της πρυμναίας φρακτής.



Σχήμα 1.3 Ορισμός των υποπεριοχών της γάστρας

Με βάση την παραπάνω υποδιαίρεση της γάστρας του πλοίου, με την εντολή EXPORT από το πρόγραμμα παράγουμε το αρχείο TXT, έχοντας την δυνατότητα να ορίσουμε τον αριθμό των σημείων που θέλουμε να έχουν οι νομείς στο παραγόμενο αρχείο. Ανάλογα με την πολυπλοκότητα της γεωμετρίας κάθε περιοχής εκλέγουμε το πλήθος των σημείων με το οποίο επιθυμούμε να περιγράψουμε τους νομείς κάθε περιοχής.

Για την κατάλληλη ταξινόμηση των σημείων που προέκυψαν ώστε να είναι αναγνώσιμα από τους κώδικες, δημιουργήθηκαν δύο TXT αρχεία με συγκεκριμένο Format. Το πρώτο αρχείο (hull 1-2-3) περιέχει τα σημεία των νομέων των περιοχών 1-3-4, όπως ορίστηκαν παραπάνω, ενώ το δεύτερο αρχείο (hull 2-5) τα σημεία των νομέων 2-5. Τα σημεία δίνονται υπό μορφή συντεταγμένων x, y, z όπου οι τιμές κάθε διάστασης έχουν συγκεκριμένο Format και χωρίζονται με κενά. Οι νομείς δίνονται κατά αυξανόμενο z. Για κάθε νομέα δίνεται σε μία γραμμή η διαμήκης θέση του z, στην επόμενη το πλήθος των σημείων που τον περιγράφουν και στη συνέχεια ακολουθούν γραμμές στις οποίες δίνονται οι x και y συντεταγμένες των σημείων. Τα σημεία κάθε νομέα δίνονται και αυτά διατεταγμένα με πρώτο εκείνο που έχει το μέγιστο y(=0) και τελευταίο εκείνο με το ελάχιστο y (=-DEPTH).

Κεφάλαιο 2ο: Σύμμορφος μετασχηματισμός της γάστρας του πλοίου

2.1 Σύμμορφος Μετασχηματισμός

Η γεωμετρική κατασκευή των επιφανειακών στοιχείων (panels) αποτελεί ένα βασικό υπολογιστικό βήμα στην όλη διαδικασία, γιατί η επίλυση του μη γραμμικού προβλήματος απαιτεί συνεχή ανανέωση της ελεύθερης επιφάνειας και ως εκ τούτου ένα γρήγορο και ακριβή τρόπο επαναπροσδιορισμού τους. Στη μεθοδολογία που παρουσιάζεται ακολουθείται η αναπαράσταση των εγκαρσίων τομών του πλοίου με την μέθοδο του σύμμορφου μετασχηματισμού.

Ο σύμμορφος μετασχηματισμός, απεικονίζει τα σημεία του επιπέδου z=x+yi στα σημεία του επιπέδου ζ=ξ+ηi μέσω μία αναλυτικής συνάρτησης ζ=ζ(z). Η συνάρτηση είναι ένα προς ένα αν η παράγωγος dζ/dz είναι μη μηδενική, ενώ οι θέσεις όπου dζ/dz=0 λέγονται κρίσιμα σημεία . Αν θεωρήσουμε κάποιο σημείο P στο επίπεδο z και τυχαία καμπύλη C διερχόμενη από το σημείο P που σχηματίζει με τον άξονα χ γωνία α, τότε έστω η διαφορική μεταβλητή πάνω στη C dz, σε πολική μορφή γράφεται dz=|dz|$e^{i\alpha}$.

Ένας καθορισμένος μετασχηματισμός ζ(z) απεικονίζει το P στο σημείο P' στο επίπεδο ζ και την μεταβολή dz στο στοιχειώδες dζ: dζ=|dζ|$e^{i\beta}$. Διαιρώντας τις δύο εκφράσεις και επειδή τόσο το μέτρο όσο και το όρισμα της συνάρτησης dζ/dz είναι σταθερά για τη συγκριμένη θέση z dζ/dz =|$\rho e^{i\theta}$ προκύπτει ότι (β-α) = θ.

Επομένως τα μήκη συστέλλονται – διαστέλλονται με σταθερό συντελεστή ρ και σταθερή γωνία στροφής θ. Αυτό σημαίνει ότι αν δύο καμπύλες στο επίπεδο z σχηματίζουν γωνία α μεταξύ τους τότε και οι μετασχηματισμένες καμπύλες στο ζ θα σχηματίζουν μεταξύ τους την ίδια γωνία.

Αν επίσης θεωρήσουμε στο επίπεδο z μία αστρόβιλη ροή προκύπτει ότι οι ισοδυναμικές γραμμές και οι γραμμές ροής μετασχηματίζονται ως τέτοιες και στο επίπεδο ζ. Αντίστοιχα μετασχηματίζονται και οι ταχύτητες με αποτέλεσμα στο μετασχηματισμένο επίπεδο να ικανοποιείται η εξίσωση Laplace όπως επίσης και οι οριακές συνθήκες τύπου Dirichlet (Ψ=const) και Neumann (Θφ/θn=0 ή Θφ/θn=Ub).

Η χρησιμότητα του σύμμορφου μετασχηματισμού έγκειται στον μετασχηματισμό πολύπλοκης γεωμετρίας σε απλούστερη, επίλυση του πεδίου στην απλούστερη και μέσω του αντίστροφου μετασχηματισμού επιστροφή στο επίπεδο της πολύπλοκης γεωμετρίας.

2.2 Γεωμετρική αναπαράσταση της γάστρας του πλοίου μέσω του σύμμορφου Μετασχηματισμού

Η εξωτερική επιφάνεια του πλοίου, συμπεριλαμβανομένου και του βολβού, περιγράφεται από τις συντεταγμένες σημείων σε συγκεκριμένες εγκάρσιες τομές. Ειδικότερα η σύμμορφη απεικόνιση δισδιάστατων τυχαίων τομών στο μοναδιαίο κύκλο, εφαρμόστηκε για την αναλυτική αναπαράσταση του κάθε νομέα.

Ο γενικός σύμμορφος μετασχηματισμός για την αναπαράσταση των νομέων έχει τη μορφή:

$$z = c_0 + c_{-1}\zeta + \sum_1^N c_n \zeta^{-n} \quad (2.1)$$

Όπου ζ είναι το μετασχηματισμένο επίπεδο μοναδιαίου κύκλου και z είναι το επίπεδο του νομέα. Αν η καμπύλη είναι συμμετρική σε σχέση με τον άξονα y, οι συντελεστές cn μειώνονται στους πραγματικούς an και το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της (2.1)αναπτύσσονται ως εξής:

$$x = a_{n-1}\cos\varphi + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(-\mathrm{n}\varphi)$$

$$y = a_0 + a_{n-1}\sin\varphi + \sum_{n=1}^{N} a_n \sin(-\mathrm{n}\varphi) \quad (2.2)$$

Στην εξίσωση (2.2), το φ παριστάνει την κλίση του σημείου (x, y) στο επίπεδο του κύκλου, ενώ οι συντελεστές an μπορούν να υπολογισθούν έπειτα μέσω των παρακάτω ολοκληρωμάτων:

$$a_0^{(1)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \chi(\varphi) d\varphi$$

$$\alpha_{-1}^{(1)} + \alpha_1^{(1)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \chi(\varphi)\cos(\varphi) d\varphi$$

$$\alpha_n^{(1)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \chi(\varphi)\cos(\varphi) d\varphi\,, \quad n > 2$$

Ή από τα ολοκληρώματα:

$$a_0^{(2)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} y(\varphi) d\varphi$$

$$\alpha_{-1}^{(2)} + \alpha_1^{(2)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y(\varphi)\sin(\varphi) d\varphi$$

$$\alpha_n^{(2)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y(\varphi)\sin(\varphi) d\varphi\,, \quad n > 2$$

Οι παραπάνω εκφράσεις δείχνουν ότι οι συντελεστές an μπορούν να υπολογισθούν αναλυτικά με δύο τρόπους, οι οποίοι για N→∞ δίνουν μηδενικές τιμές ως αποτέλεσμα. Ωστόσο, από τη στιγμή που χρησιμοποιείται άπειρο πλήθος N στις πραγματικές εφαρμογές, οι εξισώσεις δίνουν διαφορετικά αποτελέσματα για τις τιμές των $\alpha_n^{(1)}$ και $\alpha_n^{(2)}$ και οι επιδράσεις τους εξαρτώνται από το σχήμα του νομέα. Για να βρούμε τη βέλτιστη αναπαράσταση ενός δισδιάστατου νομέα, θεωρείται μία γραμμική σχέση μεταξύ των δύο:

$$a_n = r a_n^{(1)} + (1-r) a_n^{(2)}\,, \text{ n} \geq 1 \qquad (2.3)$$

Το r ονομάζεται παράγοντας βάρους και ορίζεται ελαχιστοποιώντας το ολικό σφάλμα:

$$E_i = \sum\nolimits_P [\chi_P - \chi_{aP}]^2 + [y_P - y_{aP}]^2$$

Όπου το P είναι ο αριθμός των σημείων (x_p, y_p) που περιγράφουν το περίγραμμα του νομέα και ($x_{\alpha P}$,y_{aP}) είναι οι αντίστοιχες αναλυτικές εκφράσεις μέσω της εξίσωσης (2.2). Εισάγοντας τον όρο r, αυτές οι εκφράσεις αναλύονται ως εξής:

$$x_{aP} = \left[ra_{-1}^{(1)} + (1-r)a_{-1}^{(2)}\right]\cos(\varphi_P) + \sum_{n=1}^{N}\left[ra_{n}^{(1)} + (1-r)a_{n}^{(2)}\right]\cos(-n\varphi_P)$$

$$y_{aP} = \left[ra_{0}^{(1)} + (1-r)a_{0}^{(2)}\right] + \left[ra_{-1}^{(1)} + (1-r)a_{-1}^{(2)}\right]\sin(\varphi_P) + \sum_{n=1}^{N}\left[ra_{n}^{(1)} + (1-r)a_{n}^{(2)}\right]sin(-n\varphi_P) \qquad (2.4)$$

Τότε το r προσδιορίζεται λύνοντας τη γραμμική εξίσωση:

$$\frac{\partial E_t}{\partial r} = 0$$

Πρέπει να σημειώσουμε ότι οι συντελεστές $\alpha 1$ και $\alpha{-}1$ είναι μοναδικά ορισμένοι από το γραμμικό σύστημα που προκύπτει από τα δεύτερα ολοκληρώματα που αναφέρθηκαν παραπάνω. Όπως ο αριθμός των συντελεστών αυξάνεται, ο παράγοντας βάρους αλλάζει. Η γενική τάση είναι ότι για H >> B το r->0, ενώ για B>>H το r-> 1, όπου B είναι το πλάτος και H το βύθισμα του νομέα.

Για ένα συγκεκριμένο νομέα, ακολουθείται η επαναληπτική διαδικασία του Kerczek (1969). Αναλυτικότερα η διαδικασία εκκινεί με τέσσερις συντελεστές και συνεχίζει αυξάνοντας το πλήθος τους σε έναν αρχικά ορισμένο αριθμό N ή μέχρις ότου το ολικό σφάλμα γίνει μικρότερο από ένα όριο. Σε κάθε περίπτωση ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων απαιτεί τον υπολογισμό των γωνιών φ_P, δηλαδή τις κλίσεις των σημείων P στο επίπεδο του κύκλου. Στην αρχική μέθοδο η γωνία φ_P οριζόταν από την ελάχιστη απόσταση μεταξύ ενός συγκεκριμένου σημείου και της αναλυτικής αναπαράστασης, αυξάνοντας το φ μονοτονικά. Αυτή η διαδικασία επιτυγχάνει στην αναπαράσταση ομαλών και συμμετρικών τομών, ωστόσο, σε σύνθετους νομείς που παρουσιάζουν ασυμμετρίες ή ακόμα και σε συμμετρικούς νομείς που έχουν περιγράμματα με μεγάλες μεταβολές στην καμπυλότητα δίνει ως αποτέλεσμα περίεργες αναπαραστάσεις. Για να υπερβούμε αυτή τη δυσκολία, εισάχθηκε μία βελτίωση που υπολογίζει τις γωνίες φ_P σε δύο βήματα. Αρχικά θεωρείται ότι η φ_P είναι συνάρτηση του S_P, όπου S είναι το ολοκλήρωμα του περιγράμματος του νομέα υπολογισμένο από την έκφραση:

$$S_P = S_{P-1} + \sqrt{(x_P - x_{P-1})^2 + (y_P - y_{P-1})^2} \quad (2.5)$$

Στη συνέχεια εισάγοντας ένα ζεύγος των γνωστών γωνιών φ_i, οι τιμές των S_i υπολογίζονται αναλυτικά μέσω του σύμμορφου μετασχηματισμού. Έπειτα, οι γωνίες φ_P ορίζονται μέσω γραμμικής ή κυβικής spline παρεμβολής των αντίστοιχων μηκών του S_i (Τζαμπίρας 1996). Η κατανομή των φi εξαρτάται από τις μεταβολές των καμπυλών γύρω από το περίγραμμα του νομέα. Αυτή η μέθοδος αποδείχθηκε ευσταθής και σχετικά γρήγορη, αλλά από τη στιγμή που είναι βασισμένη στην προσομοίωση του S_P μέσω σημείων ενδεχομένως να παράγει μη ακριβείς αναπαραστάσεις στις περιοχές μεγάλης καμπυλότητας. Για αυτό το λόγο εφαρμόζεται μόνο στα ενδιάμεσα βήματα, ενώ παράλληλα στην τελευταία επανάληψη (δηλ. στο μέγιστο N) ακολουθείται μία δεύτερη διαδικασία που υπολογίζει τις φ_P βρίσκοντας την ελάχιστη απόσταση μεταξύ του P από την αναλυτική αναπαράσταση του νομέα στο διάστημα $[\varphi_P - \delta\varphi, \varphi_P + \delta\varphi]$, δηλαδή όχι μονοτονικά, όπου $\delta\varphi \cong 0.1\pi$

Η ανωτέρω διαδικασία ακολουθείται τόσο για νομείς του βολβού της πλώρης όσο και για τους γενικούς νομείς που είναι συμμετρικοί μόνο κατά τον άξονα y. Για τους συνήθεις νομείς του πλοίου που είναι συμμετρικοί και κατά τον άξονα χ, ο γενικός μετασχηματισμός έχει τη μορφή:

$$z = \sum_{n=1}^{N} a_n \zeta^{3-2n}$$

Ωστόσο στους συνηθισμένους νομείς του πλοίου το περίγραμμα του νομέα συνήθως τέμνει τον άξονα χ σε μη ορθογωνικές γωνίες. Συνεπώς, πρέπει να εφαρμοστεί ένας μετασχηματισμός σε δύο βήματα. Παρότι αυτή η μέθοδος έχει δοκιμαστεί με επιτυχία, ενδεχομένως να παράγει μη κανονικές αναπαραστάσεις όταν οι νομείς παρεμβάλλονται επειδή είναι πολύ ευαίσθητη στον υπολογισμό των γωνιών των τομών.

2.2.1 Παρεμβολή των νομέων

Το γεγονός ότι η γάστρα του πλοίου περιγράφεται από έναν σχετικά μικρό αριθμό νομέων, ενώ οι υπολογισμοί του υδροδυναμικού πεδίου απαιτούν πολύ πυκνή διακριτοποίηση κατά το διάμηκες, οδηγεί στην αναγκαιότητα ύπαρξης μιας αποτελεσματικής και χρονικά συμφέρουσας παρεμβολής ενδιάμεσων εγκάρσιων νομέων. Με αυτόν τον τρόπο δημιουργούνται αναλυτικότερα πλέγματα για την αποτελεσματική εφαρμογή των υπολογισμών. Η μέθοδος του σύμμορφου μετασχηματισμού που περιγράφεται παραπάνω εφαρμόζεται στους δεδομένους νομείς και υπολογίζονται οι συντελεστές στους δεδομένους (αρχικούς) νομείς. Στην συνέχεια, οι συντελεστές αυτοί χρησιμοποιούνται σαν βάση για τον υπολογισμό των συντελεστών σε οποιοδήποτε ενδιάμεσο νομέα μέσω της κυβικής παρεμβολής.

Όμως η μέθοδος αυτή αποτυγχάνει στις απότομες γεωμετρικές μεταβολές όπως είναι οι βολβοειδείς πλώρες ή πρύμνες, όπου οποιαδήποτε παρεμβολή ανάμεσα στους αρχικά δεδομένους νομείς παράγουν μη φυσιολογικές απεικονίσεις. Αρχικά το πρόγραμμα παράγει σημεία στα επιθυμητά εγκάρσια επίπεδα χρησιμοποιώντας κυβική παρεμβολή μεταξύ τεσσάρων γειτονικών νομέων. Οι τελευταίοι υπολογίζονται μέσω του μετασχηματισμού των σημείων που ορίζονται μέσω μίας γωνίας στο μοναδιαίο κύκλο. Τότε το περίγραμμα που παράγεται, μετασχηματίζεται σύμφωνα με το σύμμορφο μετασχηματισμό όπως περιγράφεται παραπάνω και οι συντελεστές αποθηκεύονται ως νέα δεδομένα. Η όλη διαδικασία είναι αυτοματοποιημένη, δηλαδή ένα σύστημα διαμήκων σημείων σε ευαίσθητες περιοχές και οι αντίστοιχοι συντελεστές υπολογίζονται και αποθηκεύονται μετά την ολοκλήρωση των υπολογισμών για τους αρχικούς νομείς.

Κεφάλαιο 3ο : Υπολογισμός της ελεύθερης επιφάνειας με τη θεωρία δυναμικού

3.1 Η Θεωρία Δυναμικού και οι εφαρμογές της

Στην περίπτωση της δυναμικής ροής, το ρευστό θεωρείται ασυμπίεστο, ατριβές και αστρόβιλο. Ορίζουμε ως U το διάνυσμα της ταχύτητας, p την πίεση, ρ την πυκνότητα, μ το δυναμικό ιξώδες και ν το κινηματικό ιξώδες. Με βάση την παραδοχή μας, για ένα ασυμπίεστο και ατριβές πεδίο το ρ είναι σταθερό και μ=ν=0, επομένως οι εξισώσεις Navier-Stokes παίρνουν την απλή μορφή εξισώσεων Euler.

$$\text{Navier Stokes} \quad \begin{cases} \frac{\partial \rho u_x}{\partial t} + div(\rho u_x U) = -\frac{\partial p}{\partial x} + div(\mu\, grad u_x) + S_{M_x} \\ \frac{\partial \rho u_y}{\partial t} + div(\rho u_y U) = -\frac{\partial p}{\partial y} + div(\mu\, grad u_y) + S_{M_y} \\ \frac{\partial \rho u_z}{\partial t} + div(\rho u_z U) = -\frac{\partial p}{\partial z} + div(\mu\, grad u_z) + S_{M_z} \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\text{Euler} \quad \begin{cases} \frac{\partial u_x}{\partial t} + div(u_x U) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial t} + div(u_y U) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + div(u_z U) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} \end{cases} \quad (3.2)$$

Καθώς επίσης και η εξίσωση συνέχειας $\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho U) = 0$, παίρνει την μορφή $div(U) = 0$ (3.3)

Στις εξισώσεις (3.1) και (3.2) όλες οι δυνάμεις (όπως η βαρύτητα) θεωρούνται συντηρητικές και το δυναμικό τους ενσωματώνεται στην πίεση. Για την επίλυση των εξισώσεων Euler και της απλοποιημένης εξίσωσης συνέχειας απαιτούνται οριακές συνθήκες σε όλο το σύνορο S του πεδίου:

$$U\, n|_s = F \quad (3.4)$$

Όπου n είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα σε κάποιο σημείο του S και F=F(x,t) είναι μία γνωστή συνάρτηση της θέσης πάνω στο S και του χρόνου. Στο πρόβλημά μας τα σύνορα θεωρούνται ακίνητα, συνεπώς:

$$U\, n|_s = 0 \quad (3.5)$$

Επιπλέον απαιτείται και κατάλληλη συνθήκη στο άπειρο.

Οι παραπάνω εξισώσεις ορίζουν ένα ασυμπίεστο και ατριβές πεδίο. Σε ένα πεδίο δυναμικής ροής, το άνυσμα της ταχύτητας ισούται με την αρνητική κλίση μίας βαθμωτής συνάρτησης δυναμικού φ.

$$U = -\nabla\varphi \quad (3.6)$$

Σύμφωνα με τη διανυσματική ανάλυση η στροβιλότητα ενός πεδίου δυναμικού, ισούται με μηδέν: $\nabla \times U = 0$ (3.7) Και άρα ένα πεδίο δυναμικού είναι ένα αστρόβιλο πεδίο. Σύμφωνα με τη θεώρηση του Hess (1996) θεωρούμε ότι το άνυσμα της ταχύτητας U εκφράζεται ως το άθροισμα της επ' άπειρο ταχύτητας του πεδίου και της διαταραχής λόγω της παρουσίας του συνόρου:

$$U = U_\infty + u \quad (3.8)$$

Θεωρούμε πως η διαταραχή της ταχύτητας είναι δυναμικό πεδίο:

$$u = -grad\varphi \quad (3.9)$$

Οπότε η u ικανοποιεί την απλοποιημένη εξίσωση συνέχειας:

$$div(u) = 0 \quad (3.10)$$

Συνεπώς το δυναμικό φ της διαταραχής ικανοποιεί την εξίσωση Laplace :

$$\nabla^2\varphi = 0 \quad (3.11)$$

Οι οριακές συνθήκες για το φ γράφονται ως εξής:

$$grad\varphi \cdot n|_s = \frac{\partial\varphi}{\partial n}|_s = U_\infty \cdot n|_s \quad (3.12)$$

$$|grad\varphi| \rightarrow 0 \quad (3.13)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις αποτελούν ένα καλώς τεθειμένο πρόβλημα για το δυναμικό φ, το οποίο επιθυμούμε να λύσουμε.

Η μεγάλη διευκόλυνση της θεωρίας δυναμικού είναι πως δεν απαιτείται η επίλυση των εξισώσεων μεταφοράς για τον υπολογισμό της ταχύτητας, η οποία συνεπώς υπολογίζεται ανεξάρτητα από την πίεση.

Για τον υπολογισμό της πίεσης μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ολοκληρωμένη μορφή της εξίσωσης μεταφοράς, δηλαδή την εξίσωση Bernoulli:

$$p - p_\infty = \frac{1}{2}\rho(|U_\infty|^2 - |U|^2) \quad (3.14)$$

$\acute{o}\pi o\upsilon\ p_\infty (= 0)$ είναι η πίεση στο άπειρο.

Με βάση την εξίσωση Bernouli, υπολογίζεται ο συντελεστής πίεσης C_P:

$$C_P = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho|U|^2} = 1 - \frac{|U|^2}{|U_\infty|^2} \quad (3.15)$$

Η θεωρία δυναμικού μπορεί να περιγράψει ροές όπου η συνεκτικότητα και η στροβιλότητα δεν είναι σημαντικές με αποτέλεσμα να αποτυγχάνει σε οριακά στρώματα και στην περιοχή του όμορου. Στην περίπτωση μας, όπου επιδιώκουμε αρχικά να υπολογίσουμε τη μορφή της ελεύθερης επιφάνειας, αναμένουμε καλά αποτελέσματα εκτός από την περιοχή της πρύμνης και τον ομόρου του πλοίου.

3.2 Αριθμητική Μορφοποίηση της Θεωρίας Δυναμικού

Η παρούσα μέθοδος είναι βασισμένη σε μία ολοκληρωτική εξίσωση για την κατανομή έντασης δυναμικού στην επιφάνεια της γάστρας και του νερού, όπου η ροή υπολογίζεται.

Το πρόβλημα μπορεί να θεωρηθεί ότι ορίζεται από την εξίσωση Laplace, τις οριακές συνθήκες και τη συνθήκη στο άπειρο όπως έχουν περιγραφεί στην ενότητα 3.1. Θεωρούμε ένα σημείο πηγής τοποθετημένο σε ένα σημείο q του οποίου οι καρτεσιανές συντεταγμένες είναι x_q,y_q,z_q. Στο σημείο P, οι συντεταγμένες αυτές είναι οι x, y, z, το δυναμικό σύμφωνα με την πηγή είναι:

$$\varphi = \frac{1}{r(P,q)} \quad (3.16)$$

Με $r(P,q)$ συμβολίζουμε την απόσταση μεταξύ P και q

$$r(P,q) = \sqrt{\left(x - x_q\right)^2 + \left(y - y_q\right)^2 + \left(z - z_q\right)^2} \quad (3.17)$$

Σύμφωνα με την παρούσα μέθοδο, η λύση δομείται πάνω στα στοιχειώδη δυναμικά της μορφής $\varphi = \frac{1}{r(P,q)}$. Κάθε δυναμικό ικανοποιεί την εξίσωση Laplace και τις οριακές συνθήκες σε όλα τα σημείο εκτός του σημείου q. Λόγω της γραμμικότητας του προβλήματος, το δυναμικό σε κάθε τέτοιο στοιχείο πηγής ή σε κάθε συνεχή κατανομή αυτών που βρίσκονται πάνω στην επιφάνεια S ικανοποιεί τις εξισώσεις (3.11) και (3.13) όπως και στην περιοχή εξωτερικά της S.

Θεωρούμε μία συνεχή κατανομή πηγής πάνω στην επιφάνεια S. Αν η τοπική ένταση της κατανομής είναι σ(q), όπου το σημείο πηγής q είναι ένα σημείο της επιφάνειας S, τότε το δυναμικό της κατανομής είναι:

$$\varphi = \oiint_S \frac{\sigma(q)}{r(P,q)} ds \quad (3.18)$$

Ανεξάρτητα της φύσης της συνάρτησης σ(q), η κατανομή του δυναμικού όπως δίνεται από την παραπάνω εξίσωση ικανοποιεί δύο από τις τρεις εξισώσεις του ευθέως προβλήματος της θεωρίας δυναμικού. Τότε η συνάρτηση σ(q) καθορίζεται από την απαίτηση ότι το δυναμικό

πρέπει επίσης να ικανοποιεί την τρίτη εξίσωση που εκφράζει την οριακή συνθήκη για την ταχύτητα στην επιφάνεια S.

Η κατανομή δυναμικού που δίνεται από την (3.18) είναι διαφορική και η οριακή συνθήκη επιβάλλεται σε αυτή μέσω της δυνατότητας του σημείου P να προσεγγίζει ένα σημείο p στην επιφάνεια S. Το αποτέλεσμα είναι μία ολοκληρωτική εξίσωση για την κατανομή έντασης πηγής σ(p):

$$2\pi\sigma(q) - \oiint_S \frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r(p,q)}\sigma(q)dS = n(p)\cdot U_\infty \quad (3.19)$$

Σε αυτή την εξίσωση (3.19) το ∂/∂n δηλώνει τη διαφορικότητα στην κατεύθυνση εξωτερικά της επιφάνειας S στο σημείο p και το μοναδιαίο εξωτερικό διάνυσμα έχει γραφεί n(p) για να δειχθεί η εξάρτησή του από τη θέση του. Η λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι το βασικό διακύβευμα της παρούσας μεθόδου.

Η εξίσωση αυτή είναι μία ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm πάνω στην επιφάνεια S. Ο όρος 2πσ(q) προκύπτει από τη συνάρτηση που εισάγεται μέσω της διαδικασίας προσέγγισης της επιφάνειας του συνόρου. Ο πυρήνας της ολοκληρωτικής εξίσωσης είναι το εξωτερικό διάνυσμα της ταχύτητας στο σημείο p λόγω ενός μοναδιαίου σημείου πηγής q. Ο πυρήνας εξαρτάται μόνο από τη γεωμετρία της επιφάνειας S. Οι συγκεκριμένες οριακές συνθήκες εισάγονται μόνο στο δεξί μέλος της παραπάνω εξίσωσης (3.19).

Για μια δεδομένη επιφάνεια S, ο πυρήνας της εξίσωσης μπορεί να επιλυθεί με απλό τρόπο και η εξίσωση είναι γραμμική για μία άγνωστη συνάρτηση της μορφής (3.18).

Η εξίσωση (3.19) είναι ολοκληρωτική δευτέρου βαθμού, όπου η άγνωστη συνάρτηση εμφανίζεται τόσο μέσα όσο και έξω από το ολοκλήρωμα. Αριθμητικά οι ολοκληρωτικές εξισώσεις δευτέρου βαθμού μπορούν εύκολα να προσδιορισθούν καθώς η ολοκληρωτική εξίσωση προσομοιώνεται μέσω ενός συστήματος γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων και η παρουσία του όρου έξω από το ολοκλήρωμα διασφαλίζει ότι γενικά οι διαγώνιες καταχωρήσεις του πίνακα του συντελεστή θα είναι πολύ μεγαλύτερες των μη διαγώνιων καταχωρήσεων.

Αυτό είναι πολύ σημαντικό αριθμητικά καθώς διασφαλίζει τη σταθερότητα της επαναληπτικής διαδικασίας επίλυσης των πινάκων.

Οι δύο όροι στο αριστερό μέλος της ολοκληρωτικής εξίσωσης (3.19) έχουν απλή ερμηνεία. Ο όρος 2πσ(q) είναι η συνεισφορά στην εξωτερική ταχύτητα στο σημείο p στο σύνορο της πυκνότητας της πηγής στην άμεση γειτονιά του p. Ο Ολοκληρωτικός όρος αντιπροσωπεύει τη συνεισφορά της πυκνότητας της πηγής στην υπόλοιπη επιφάνεια στην εξωτερική ταχύτητα στο p.

3.3 Η Αριθμητική Μέθοδος της Λύσης

Η προσέγγιση που έχει υιοθετηθεί προσομοιώνει την ολοκληρωτική εξίσωση μέσω ενός συστήματος γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων. Αναλυτικότερα, το σύνορο της επιφάνειας S (γάστρα και επιφάνεια του νερού) στο οποίο θα υπολογισθεί η ροή προσομοιώνεται από έναν αριθμό επιφανειακών στοιχείων των οποίων οι χαρακτηριστικές τους διαστάσεις είναι μικρές συγκρινόμενες με αυτές της S. Προφανώς η επιφάνεια του νερού πρέπει να εκτείνεται ως το άπειρο. Από τη στιγμή που αυτό είναι αδύνατο στην παρούσα μέθοδο, μόνο ένα τμήμα της ελεύθερης επιφάνειας γύρω από τη γάστρα είναι μοντελοποιημένο. Πρέπει ακόμα να αναφερθεί ότι από τη στιγμή που είναι συμμετρικό ως προς τον άξονα x, μόνο η μισή γάστρα και η αντίστοιχη ελεύθερη επιφάνεια έχει νόημα να μοντελοποιηθούν. Πάνω από κάθε επιφανειακό στοιχείο η τιμή της επιφανειακής πυκνότητας της πηγής θεωρείται σταθερή. Αυτό μειώνει το πρόβλημα καθορισμού της συνεχούς συνάρτησης πυκνότητας της πηγής στο πρόβλημα καθορισμού ενός πεπερασμένου αριθμού των τιμών της σ, μίας για κάθε επιφανειακό στοιχείο.

Η συνεισφορά του κάθε στοιχείου στο ολοκλήρωμα της εξίσωσης μπορεί να παραχθεί παίρνοντας την σταθερή αλλά άγνωστη τιμή της σ σε αυτό το στοιχείο έξω από το ολοκλήρωμα και έπειτα εκτελώντας την ολοκλήρωση των γνωστών γεωμετρικά μεγεθών στο στοιχείο. Απαιτώντας η εξίσωση (3.19) να παραμείνει σε ένα σημείο της επιφάνειας του σώματος, δηλαδή, απαιτώντας την κάθετη ταχύτητα να πάρει την καθορισμένη τιμή σε ένα σημείο, δίνεται μία γραμμική σχέση μεταξύ των τιμών σ στα στοιχεία. Σε κάθε στοιχείο επιλέγεται ένα σημείο ελέγχου όπου η (3.19) απαιτείται να παραμένει. Αυτό δίνει ένα πλήθος γραμμικών εξισώσεων ίσο με το πλήθος των άγνωστων τιμών της σ. Ο πίνακας συντελεστών αποτελείται από τις κάθετες ταχύτητες επαγόμενες των στοιχείων μεταξύ των σημείων ελέγχου τους για μοναδιαίες τιμές της πυκνότητας της πηγής. Από τη στιγμή που οι γραμμικές εξισώσεις έχουν λυθεί, οι

ταχύτητες και το δυναμικό της ροής μπορεί να επιλυθεί σε οποιοδήποτε σημείο αθροίζοντας τις συνεισφορές του κάθε επιφανειακού στοιχείου και αυτό της εκκίνησης της ροής.

Συνήθως, οι ταχύτητες και οι πιέσεις στην επιφάνεια έχουν το μεγαλύτερο ενδιαφέρον. Λόγω του τρόπου με τον οποίο έχει μορφοποιηθεί η λύση, αυτές πρέπει να αξιολογηθούν στα σημεία ελέγχου, τα οποία είναι τα ίδια σημεία στα οποία οι κάθετες ταχύτητες παίρνουν τις καθορισμένες τιμές. Το βασικό αρχείο εισόδου στο πρόγραμμα αποτελείται από τον προσδιορισμό της επιφάνειας της γάστρας πάνω στην οποία η ροή θα υπολογισθεί, η ελεύθερη επιφάνεια γύρω από τη γάστρα και η εκκίνηση της ροής. Η γάστρα και η ελεύθερη επιφάνεια προσδιορίζονται μέσω των συντεταγμένων σημείων κατανεμημένων πάνω και από τις δύο. Επειδή τα σημεία εισόδου χρησιμοποιούνται για την προσέγγιση των επιφανειακών στοιχείων, η κατανομή τους καθορίζει την ακρίβεια των αποτελεσμάτων των υπολογισμών. Τα σημεία εισόδου είναι οργανωμένα σε ομάδες των τεσσάρων και διαμορφώνουν τετράπλευρα στοιχεία. Το επίπεδο του στοιχείου είναι ισοδύναμο με τα τέσσερα σημεία εισόδου που το διαμορφώνουν και του μοναδιαίου διανύσματος της κάθετης ταχύτητας που είναι η κανονικοποιημένη συνισταμένη των δύο «εφαπτομενικών» διανυσμάτων τα οποία αποκτώνται αφαιρώντας τις συντεταγμένες δύο εκ των τεσσάρων σημείων εισόδου. Οι γωνίες των τετράπλευρων είναι προβολές των τεσσάρων σημείων εισόδου στο επίπεδο του στοιχείου. Προκειμένου να μοντελοποιηθούν οι επιφάνειες που καταλήγουν σε ένα σημείο (βολβός, πλήμνη κτλ), το πρόγραμμα χρησιμοποιεί τριγωνικά στοιχεία ενώνοντας δύο από τα τέσσερα γωνιακά σημεία. Αυτό είναι απαραίτητο μόνο για την τελευταία σειρά των στοιχείων.

Σε κάθε στοιχείο, ένα σημείο ελέγχου έχει επιλεγεί στο οποίο η οριακή κινηματική συνθήκη πρέπει να ικανοποιείται. Η κατάλληλη επιλογή του σημείου ελέγχου δεν είναι καθόλου προφανής. Στο πλαίσιο αυτής της διερεύνησης, η θέση του σημείου ελέγχου συμπίπτει με το σημείο όπου η κάθετη στο στοιχείο ταχύτητα γίνεται μηδενική. Πρέπει να τονισθεί ότι για όλες τις γεωμετρίες τα επιφανειακά στοιχεία είναι απλώς εργαλεία για την αριθμητική επίλυση της ολοκληρωτικής εξίσωσης. Ουσιαστικά καθορίζουν τα βήματα ενσωμάτωσης και τις κάθετες κατευθύνσεις στα σημεία της επιφάνειας και δεν έχουν καμία φυσική σημασία. Μόνο στα σημεία ελέγχου η κάθετη ταχύτητα παίρνει την καθορισμένη τιμή της. Για παράδειγμα αν η κάθετη ταχύτητα είναι καθορισμένη ως μηδέν, τότε γενικά είναι μη μηδενική στα σημεία του στοιχείου εκτός του σημείου ελέγχου. Στα όρια του στοιχείου η ταχύτητα προσεγγίζει το άπειρο

εξ αιτίας της μη συνέχειας της πυκνότητας της πηγής. Η υπολογισμένη ροή έχει σημασία μόνο στα ίδια τα σημεία ελέγχου και στα σημεία έξω από την επιφάνεια του σώματος. Η ακρίβεια των αποτελεσμάτων καθορίζεται από το πλήθος και την κατανομή των στοιχείων.

Στην προσπάθεια να μειώσουμε το υπολογιστικό κόστος, η επίλυση μπορεί να αρχίσει με ένα πλέγμα το οποίο διαδοχικά βελτιστοποιείται στον μέγιστο αριθμό panels σύμφωνα με τη σειρά που έχει καθοριστεί στα δεδομένα εισόδου. Πέρα από τις γεωμετρικές παρεμβολές, δεν υπάρχει δυσκολία μετάβασης από την ανάλυση ενός πλέγματος σε αυτή ενός άλλου λόγω του σταθερού χαρακτήρα της διαδικασίας αποσύνθεσης που ακολουθείται. Μόλις η γάστρα και οι επιφάνειες του νερού έχουν προσομοιωθεί από στοιχεία κατάλληλου τύπου, τα τελευταία διατάσσονται διαδοχικά και αριθμούνται από 1 έως N, όπου N είναι το συνολικό πλήθος των στοιχείων. Η ακριβής σειρά είναι άνευ σημασίας. Αποτελεί απλώς ένα λογικό εργαλείο για τον εντοπισμό των στοιχείων κατά τη διάρκεια της υπολογιστικής διαδικασίας.

Για να αναφερθούμε στα ith και jth στοιχεία, όπου οι ακέραιοι i και j δείχνουν τις θέσεις των στοιχείων στη προαναφερθείσα σειρά, θα θεωρήσουμε αρχικά ότι επιφανειακή πυκνότητα της πηγής στο στοιχείο jth έχει σταθερή μοναδιαία τιμή. Οι Φ_{ij} και U_{ij} υποδηλώνουν το δυναμικό και την ταχύτητα αντίστοιχα, που επάγονται από το σημείο ελέγχου του στοιχείου ith μέσω μίας μοναδιαίας πυκνότητας της πηγής στο στοιχείο jth. Οι τύποι για την επαγόμενη ταχύτητα και δυναμικό διαμορφώνουν τη βάση της παρούσας μεθόδου υπολογισμού της ροής. Αυτό επιτυγχάνεται ολοκληρώνοντας πάνω στο στοιχείο τους εν λόγω τύπους για την επαγόμενη από μία μοναδιαία πηγή ταχύτητα και δυναμικό και κατά συνέπεια εξαρτώνται από τη θέση του σημείου όπου το δυναμικό και η ταχύτητα αξιολογούνται και από τη γεωμετρία του στοιχείου. Καθώς δεν υπάρχει περιορισμός για τη θέση του σημείου ελέγχου του στοιχείου ith κατά αναλογία με το στοιχείο jth, οι τύποι για τα Φ_{ij} και U_{ij} είναι αυτοί για το δυναμικό και την ταχύτητα που επάγονται από ένα στοιχείο σε ένα αυθαίρετο στο διάστημα.

Για το επίπεδο χρησιμοποιούνται τετράπλευρα στοιχεία, οι τύποι του σημείου μοναδιαίας πηγής για το δυναμικό και την ταχύτητα μπορούν να ολοκληρωθούν αναλυτικά πάνω σε ένα στοιχείο. Αυτό επιτυγχάνεται πιο εύκολα χρησιμοποιώντας ένα σύστημα συντεταγμένων στο οποίο κάθε στοιχείο κείται σε ένα τοπικό επίπεδο συντεταγμένων και άρα οι συντεταγμένες των σημείων και των συνιστωσών των διανυσμάτων πρέπει να μετασχηματίζονται μεταξύ του συστήματος συντεταγμένων που αναφέρεται το η επιφάνεια και του συστήματος συντεταγμένων του υπό

εξέταση στοιχείου. Η αναλυτική ολοκλήρωση στα στοιχεία παράγει μακροσκελείς τύπους των οποίων ο υπολογισμός είναι χρονοβόρος. Για να εξοικονομήσουμε υπολογιστική ισχύ, η επίδραση ενός στοιχείου σε σημεία σημαντικά μακριά από το στοιχείο, υπολογίζεται προσεγγιστικά. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω της πολυπολικής επέκτασης. Συγκεκριμένα, αν το υπό εξέταση σημείο είναι πιο μακριά από το κέντρο του στοιχείου από ότι τέσσερις φορές τη διάσταση του στοιχείου, τότε το τετράπλευρο στοιχείο πηγής μπορεί να αντικατασταθεί από ένα σημείο πηγής της ίδιας συνολικής έντασης τοποθετημένη στο κέντρο. Έχοντας εφαρμόσει τα κριτήρια ακρίβειας, τα λάθη που προκύπτουν λόγω της πολυπολικής επέκτασης είναι πολύ μικρά σε σχέση με αυτά που προκύπτουν από τη βασική προσέγγιση της στερεής επιφάνειας μέσω επίπεδων στοιχείων που έχουν σταθερές τιμές πυκνότητας πηγής. Επομένως η χρησιμοποίηση αυτών των εναλλακτικών τύπων δεν προκαλεί απώλεια ακρίβειας στον γενικό υπολογισμό.

Όταν ολοκληρωθεί αυτή η φάση υπολογισμών, τα αποτελέσματα αποτελούνται από πίνακες μεγέθους NxN για τα μεγέθη Φ_{ij} και U_{ij}. Ο πίνακας U_{ij} έχει ως εξής:

$$U_{ij} = X_{ij} \cdot \vec{\imath} + Y_{ij} \cdot \vec{\jmath} + Z_{ij} \cdot \vec{k} \quad (3.20)$$

Όπου i, j, k είναι οι δείκτες σύμφωνα με τους άξονες του συστήματος συντεταγμένων στο οποίο έχει εισαχθεί η επιφάνεια του σώματος και οι κλιμακωτοί πίνακες X_{ij}, Y_{ij}, Z_{ij} είναι απλώς τα μέρη του U_{ij}. Η κάθετη ταχύτητα που επάγεται στο σημείο ελέγχου του στοιχείου ith από μία μοναδιαία πυκνότητα πηγής στο στοιχείο jth είναι:

$$A_{ij} = n_i \cdot U_{ij} \quad (3.21)$$

Όπου το ni είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στο στοιχείο ith. Οι πέντε πίνακες Φ_{ij}, X_{ij}, Y_{ij}, Z_{ij} *και* A_{ij} δεν έχουν απαραίτητα κάποια μηδενική είσοδο. Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, ο αριθμός των στοιχείων που χρησιμοποιείται είναι αρκετά μεγάλος για τον χειρισμό της ποσότητας των αριθμητικών δεδομένων που παρουσιάζονται σε αυτούς του πίνακες.

Πρέπει να αναφερθεί ότι στην περίπτωση που i=j δεν απαιτείται ειδικός χειρισμός. Επειδή η ολοκλήρωση σε ένα στοιχείο γίνεται αναλυτικά, προβλήματα άπειρων ολοκληρώσεων αδυνατούν να υλοποιηθούν. Η ταχύτητα που επάγεται από ένα στοιχείο στο σημείο ελέγχου του έχει μέγεθος της τάξης 2π και κατεύθυνση ανάλογη του κάθετου διανύσματος του στοιχείου.

Παραπάνω υπολογίσαμε τον πίνακα A_{ij}, του οποίου οι είσοδοι είναι οι κάθετες που επάγονται από τα στοιχεία σε κάθε σημείο ελέγχου για μοναδιαίας τιμής πυκνότητας πηγής. Για να αποκτήσουμε τις πραγματικές κάθετες ταχύτητες, οι είσοδοι του A_{ij} πρέπει να πολλαπλασιαστούν με τις κατάλληλες τιμές της πυκνότητας της πηγής σ. Πρακτικά η ποσότητα

$$\sum_{j=1}^{N} A_{ij} \cdot \boldsymbol{\sigma_j} \quad (3.22)$$

Είναι η κάθετη ταχύτητα στο σημείο ελέγχου κάθε στοιχείου ith εξ' αιτίας του ολοκληρωμένου συστήματος των επιφανειακών στοιχείων. Προφανώς, η παραπάνω εξίσωση αποτελεί την προσομοίωση της κάθετης ταχύτητας συσχετισμένη με την διαταραχή του δυναμικού από την επιφάνεια του σώματος. Για να αποκτήσουμε τις κάθετες ταχύτητες σε όλα τα σημεία ελέγχου, η παραπάνω εξίσωση πρέπει να τεθεί ίση με τις κατάλληλες τιμές όπως δίνονται από τις οριακές συνθήκες για κάθε τιμή της μεταβλητής i. Το αποτέλεσμα είναι:

$$\sum_{j=1}^{N} A_{ij} \cdot \boldsymbol{\sigma_j} = -\boldsymbol{n_i} \cdot U_{\infty,i} \qquad i = 1,2,\dots,N \quad (3.23)$$

Αυτή η εξίσωση είναι ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων για τις τιμές της πυκνότητας της πηγής στην επιφάνεια των στοιχείων. Αυτό το σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων είναι η επιθυμητή προσέγγιση της ολοκληρωτικής συνάρτησης $2\pi\sigma(q) - \oiint_S \frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r(p,q)}\sigma(q)dS = n(p) \cdot U_\infty$. Η επαναληπτική μέθοδος Gauss- Seidel υιοθετείται για την επίλυση της ολοκληρωτικής εξίσωσης. Μόλις αποκτηθούν οι τιμές $\boldsymbol{\sigma_j}$ ως λύσεις της παραπάνω εξίσωσης, όλα τα άλλα μεγέθη της ροής που μας ενδιαφέρουν μπορούν να αποκτηθούν από έναν σχετικά γρήγορο άμεσο υπολογισμό. Τα μεγέθη της ροής στη γάστρα και στην επιφάνεια του νερού υπολογίζονται μόνο στα σημεία ελέγχου των στοιχείων. Συγκεκριμένα, το δυναμικό και η ταχύτητα σε ένα σημείο ελέγχου στην επιφάνεια υπολογίζεται από:

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^{N} \Phi_{IJ} \cdot \boldsymbol{\sigma_i} \qquad (3.24)$$

$$U_i = \sum_{j=1}^{N} V_{ij} \cdot \boldsymbol{\sigma_j} + U_{\infty,i}$$ Όπου i = 1, 2, … ,N

Η ταχύτητα $U\iota$ σε κάθε σημείο ελέγχου δίνεται σε σχέση με τις συνιστώσες της σύμφωνα με τους άξονες του συστήματος αναφοράς στο οποίο στο σώμα έχει εισαχθεί.

$$u_{x,i} = \sum_{j=1}^{N} X_{i,j} \cdot \boldsymbol{\sigma_j} + u_{\infty,x,i}$$

$$u_{y,i} = \sum_{j=1}^{N} Y_{i,j} \cdot \boldsymbol{\sigma_j} + u_{\infty,y,i} \qquad (3.25)$$

$$u_{z,i} = \sum_{j=1}^{N} Z_{i,j} \cdot \boldsymbol{\sigma_j} + u_{\infty,z,i}$$

Πρέπει να σημειώσουμε πως σ είναι η διαταραχή στην επιφάνεια του σώματος και U_i, είναι η συνολική ταχύτητα, συμπεριλαμβανομένων των επιδράσεων της εκκίνησης της ροής. Οι συνιστώσες της U_i χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των μεγεθών της ταχύτητας και στη συνέχεια του συντελεστή πίεσης

$$C_P = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho|U|^2} = 1 - \frac{|U|^2}{|U_\infty|^2} \qquad (3.26).$$

Τότε η πίεση σε κάθε σημείο ελέγχου μπορεί να υπολογισθεί από την εξίσωση Bernoulli που διατυπώθηκε παραπάνω, ενώ η τοπική τιμή του συντελεστή πίεσης μπορεί να υπολογισθεί από τον ακριβώς από πάνω τύπο (3.26).

3.4 Υπολογισμός της ελεύθερης επιφάνειας

Η επίλυση με τη θεωρία δυναμικού που χρησιμοποιείται στην παρούσα μέθοδο μπορεί να ανταποκριθεί μόνο στο ευθύ πρόβλημα της δυναμικής των ρευστών καθώς όλα τα σύνορα της επιφάνειας θεωρούνται γνωστά. Στην περίπτωσή μας, δεν είναι γνωστά από τα πριν όλα τα όρια όπως άγνωστη είναι επίσης και η ελεύθερη επιφάνεια. Για να υπερβούμε την παραπάνω δυσκολία υιοθετούμε μία επαναληπτική διαδικασία.

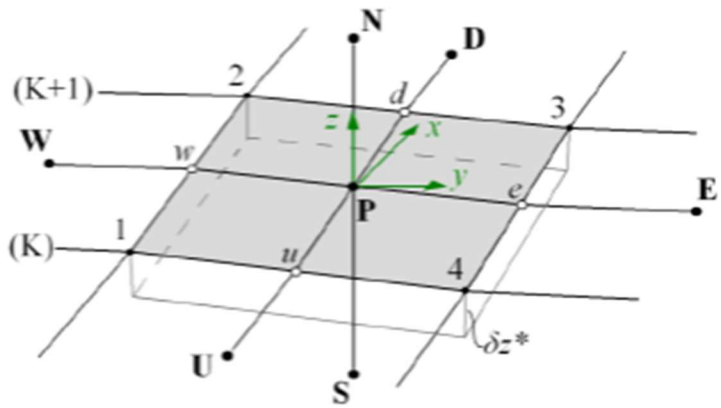
Αν θεωρήσουμε γνωστή τη γεωμετρία της ελεύθερης επιφάνειας σε κάποιο ενδιάμεσο βήμα, τα επίπεδα στοιχεία πάνω στο βρυχώμενο μέρος της γάστρας και στην επιφάνεια του νερού κατασκευάζονται αμέσως βρίσκοντας αναλυτικά τα σημεία τομής της ελεύθερης επιφάνειας με τους εγκάρσιους νομείς. Τα σημεία σε μία εγκάρσια τομή της ελεύθερης επιφάνειας βρίσκονται μέσω παρεμβολής (γραμμικής ή spline) ακολουθώντας μία εκθετική κατανομή. Τότε, το ευθύ πρόβλημα της θεωρίας δυναμικού επιλύεται θεωρώντας την ένταση της πηγής σταθερή σε κάθε στοιχείο και θέτοντας την κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας ίση με μηδέν στο σημείο ελέγχου κάθε επίπεδου στοιχείου, επιβάλλοντας δηλαδή την κινηματική οριακή συνθήκη. Μετά τον υπολογισμό της έντασης των πηγών, οι συνιστώσες της ταχύτητας u_x, u_y, u_z υπολογίζονται στα σημεία ελέγχου κάθε επίπεδου στοιχείου και η πίεση p^* προκύπτει από την εξίσωση Bernoulli .

Σε κάθε ενδιάμεσο βήμα η δυναμική συνθήκη δεν ικανοποιείται, δηλαδή η πίεση p^* είναι διάφορη του αθροίσματος της στατικής πίεσης p_s και της υδροστατικής πίεσης ρgz. Η διαφορά εισάγεται σαν όρος πηγής στην ατριβή εξίσωση μεταφοράς για την κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας u_z^* :

$$\rho\left[\frac{\partial u_x u_z^*}{\partial x}+\frac{\partial u_y u_z^*}{\partial y}+\frac{\partial u_z u_z^*}{\partial z}\right]=-\frac{\partial p^*}{\partial z} \qquad (3.27)$$

$$\rho div(u_z^* U)=-\frac{\partial p^*}{\partial z} \qquad (3.28)$$

Οι εξισώσεις αυτές επιλύονται αριθμητικά εφαρμόζοντας τη μέθοδο των πεπερασμένων όγκων. Οι όγκοι ελέγχου ορίζονται από την επιφάνεια του κάθε στοιχείου (1234) και ένα κατάλληλα επιλεγμένο ύψος δz^* το οποίο εισάγει ο χρήστης και επιδρά στη σύγκλιση της μεθόδου.



Σχήμα 3.1 Όγκος ελέγχου ελεύθερης επιφάνειας

Η εξίσωση (3.28) ολοκληρώνεται στον όγκο ελέγχου εφαρμόζοντας το θεώρημα του Gauss.

$$\int_{CV} div(a)dV = \int_{A} n \cdot adA$$

$$\int_{CV} \rho div(u_z^* U)\, dV = -\int_{CV} \frac{\partial p^*}{\partial z}\, dV \Rightarrow \rho \int_A n \cdot (u_z^* U)\, dA = -\int_{CV} \frac{\partial p^*}{\partial z}\, dV \qquad (3.29)$$

Όπου A είναι η επιφάνεια του όγκου ελέγχου CV και n είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα σε ένα σημείο της A.

Θέτοντας το δεξί μέλος της (3.29) με I και το αριστερό μέλος με II έχουμε:

$$\rho \int_A n \cdot (u_z^* U)\, dA$$

$$= \rho \int_e n \cdot (u_z^* U)\, dA + \rho \int_w n \cdot (u_z^* U)\, dA + \rho \int_n n \cdot (u_z^* U)\, dA + \rho \int_s n \cdot (u_z^* U)\, dA$$

$$+ \rho \int_u n \cdot (u_z^* U)\, dA + \rho \int_d n \cdot (u_z^* U)\, dA \;\Rightarrow I$$

$$= I_e + I_w + I_n + I_s + I_u + I_d (3.30)$$

Όπου e, w, n, s, u, d είναι το ανατολική, δυτική, βόρεια, νότια, ανάντι και κατάντι όψη της A αντίστοιχα.

Θεωρώντας ότι τα μεγέθη U, n και u_{z^*} είναι σταθερά πάνω από κάθε όψη καθώς επίσης θεωρώντας ως E(1234) την προβολή της επιφάνειας του επίπεδου στοιχείου πάνω στο xy (οριζόντιο) επίπεδο όπως φαίνεται στο Σχήματος 3.1, τα παραπάνω ολοκληρώματα απλοποιούνται ως εξής:

$$I_e = \rho \cdot (34)_{pr} \cdot \delta z^* \cdot u_{ye} \cdot u_{ze}^*$$

$$I_w = -\rho \cdot (12)_{pr} \cdot \delta z^* \cdot u_{yw} \cdot u_{zw}^*$$

$$I_d = \rho \cdot (23)_{pr} \cdot \delta z^* \cdot u_{xd} \cdot u_{zd}^*$$

$$I_u = -\rho \cdot (14)_{pr} \cdot \delta z^* \cdot u_{xu} \cdot u_{zu}^*$$

$$I_n = \rho \cdot (E1234)_{pr} \cdot \delta z^* \cdot u_{zP} \cdot u_{zP}^*$$

$$I_s = -\rho \cdot (E1234)_{pr} \cdot \delta z^* \cdot u_{zP} \cdot u_{zP}^* = -I_n$$

(3.31)

Ομοίως για την II:

$$II = -\int_{CV} \frac{\partial p^*}{\partial z}\, dV = -(E1234) \cdot (p_P^* - \rho g z_P) \qquad (3.32)$$

Τα $(12)_{pr}$,$(34)_{pr}$,$(23)_{pr}$,$(14)_{pr}$, είναι τα μήκη των προβολών των αντίστοιχων όψεων του $(1234)_{pr}$ στον x και τον y άξονα, ενώ οι δείκτες e, w, n, s, u, d δηλώνουν τιμές στο μέσο των αντίστοιχων όψεων του επίπεδου στοιχείου.

Στις εξισώσεις (3.31) οι u_{xd}, u_{xu}, u_{ye}, u_{yw} είναι οι υπολογισμένες με βάση την θεωρία δυναμικού ταχύτητες στο μέσο των αντίστοιχων όψεων των επίπεδων στοιχείων και u_{zP} είναι η κατακόρυφη ταχύτητα στο σημείο ελέγχου του επίπεδου στοιχείου επίσης γνωστή από τους υπολογισμούς με τη θεωρία δυναμικού. Τελικά οι u_{zd^*} ,u_{zu^*} ,u_{ze^*}, u_{zw^*} είναι οι άγνωστες τιμές της ταχύτητας u_{z^*} στο μέσο των αντίστοιχων όψεων του επίπεδου στοιχείου και υπολογίζονται με βάση το πρωτοτάξιο άνατες σχήμα:

$$(3.33)\begin{cases} u_{zd}^* = u_{zP}^* \\ u_{zu}^* = u_{zU}^* \\ u_{ye} > 0,\ \ u_{ze}^* = u_{zP}^* \\ u_{ye} < 0,\ \ u_{ze}^* = u_{zE}^* \\ u_{yw} > 0,\ \ u_{zw}^* = u_{zW}^* \\ u_{yw} < 0,\ \ u_{ze}^* = u_{zP}^* \end{cases}$$

Όπου U,D,E,W δηλώνουν τα γειτονικά σημεία ελέγχου.

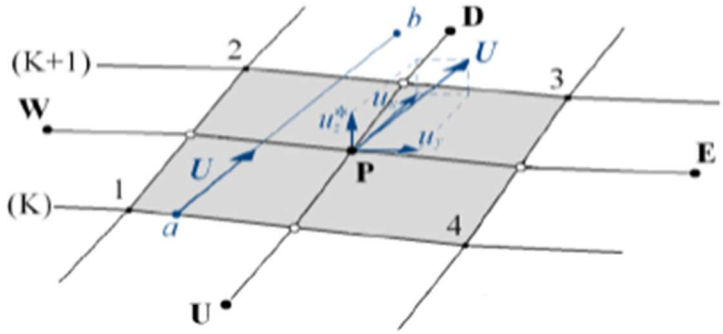
Λόγω της φύσης του προβλήματος οι u_{xd}, u_{xu} είναι πάντα θετικές, και άρα δεν υπάρχει η ανάγκη να ελεγχθούν οι τιμές τους. Με βάση το πρωτοτάξιο άναντες σχήμα οι (3.31) και (3.32) παίρνουν τη συνήθη μορφή ελλειπτικού χαρακτήρα:

$$A_P u_{zP}^* = A_D u_{zD}^* + A_U u_{zU}^* + A_E u_{zE}^* + A_W u_{zW}^* + (E1234) \cdot (p_P^* - \rho g z_P) \quad (3.34)$$

Όπως αναφέρθηκε το $\delta z*$ είναι το ύψος του όγκου ελέγχου και επιδρά καταλυτικά στη σύγκλιση της μεθόδου. Συμμετέχει στους όρους A_ι της παραπάνω εξίσωσης, αλλά ουσιαστικά καθορίζει την επίδραση της κλίσης της πίεσης.

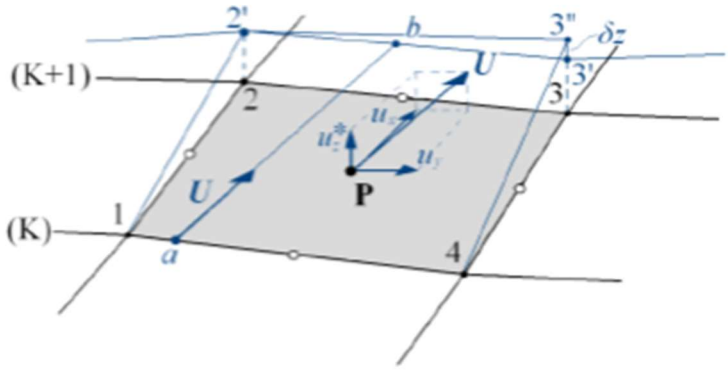
Από τη στιγμή που οι συντελεστές συναγωγής A_ι υπολογίζονται με το πρωτοτάξιο άναντες σχήμα, μόνο μία σάρωση του υπολογιστικού πεδίου είναι απαραίτητη να εκτελεστεί για να βρεθεί η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας.

Παρότι η αντίστοιχη λύση σχετίζεται μόνο με την ανανέωση της ελεύθερης επιφάνειας, τα μειονεκτήματα του πρωτοτάξιου σχήματος απαιτούν πολύ καλή διακριτοποίηση (μεγάλος αριθμός στοιχείων) για να αποκτηθούν ικανοποιητικά αποτελέσματα. Οι συνιστώσες της κάθετης ταχύτητας που έχουν υπολογισθεί χρησιμοποιούνται για να υπολογίσουμε τη νέα επιφάνεια εισάγοντας δύο διορθωτικά βήματα (Tzabiras, 2004). Πρώτα, ακολουθώντας τις τοπικές γραμμές ροής, τα σημεία α στην εγκάρσια καμπύλη (K) οδηγούν σε σημεία b στην (K+1) όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα και μία νέα εγκάρσια τομή δημιουργείται κατάντι.



Σχήμα 3.2 Πρώτο διορθωτικό βήμα με τις τοπικές γραμμές ροής

Στη συνέχεια αυτή η νέα τομή διορθώνεται κατά δz ώστε η παροχή μέσω της επιφάνειας του στοιχείου να μηδενιστεί. Η διαδικασία σταθεροποιείται με την εφαρμογή μίας εξωτερικής παραμέτρου που περιορίζει τη μεταβολή της επιφάνειας με συνέπεια και την επιβράδυνση της σύγκλισης.



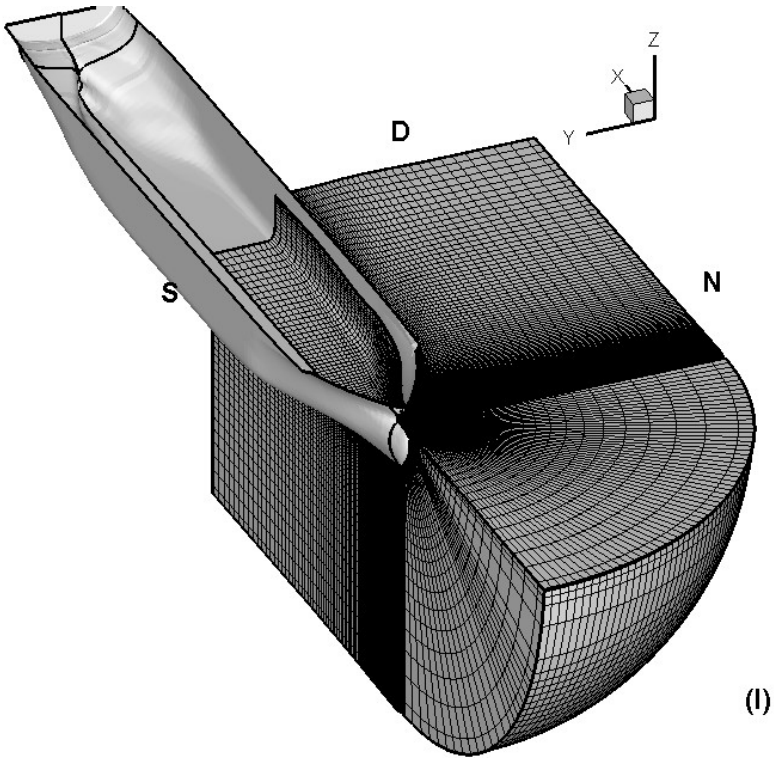
Σχήμα 3.3 Δεύτερο διορθωτικό βήμα κατά δz

Μετά την ανανέωση της επιφάνειας, το πρόβλημα του δυναμικού επιλύεται ξανά και η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι να συγκλίνει η δυναμική οριακή συνθήκη. Η ικανοποίηση της συνθήκης ελέγχεται μέσω της μεταβλητής $|\delta z|$ η οποία ισούται με τη μέση τιμή, των απόλυτων τιμών, της διαφοράς της υπολογιζόμενης πίεσης από την θεωρητική, στα σημεία ελέγχου των στοιχείων. Λόγω της φύσης της μεθόδου το $|\delta z|$ παρουσιάζει μία οριακή τιμή. Εξ' ορισμού όσο χαμηλότερη είναι η οριακή αυτή τιμή, τόσο πιο ακριβής είναι η λύση.

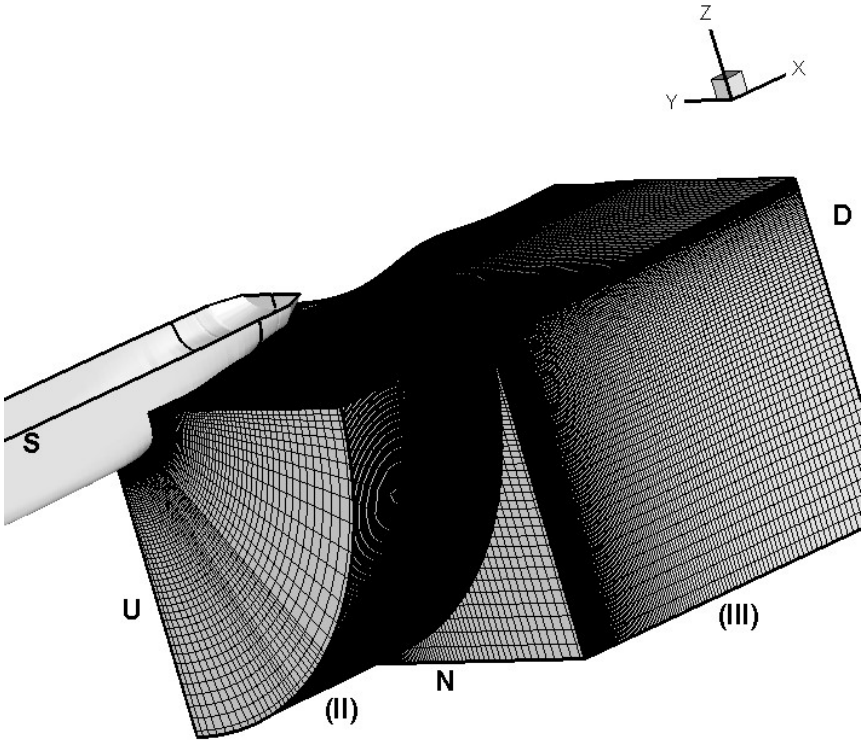
3.5 Αριθμητική μέθοδος προσομοίωσης της τύρβης κάτω από την ελεύθερη επιφάνεια του δυναμικού

Η παρούσα μέθοδος λύνει τις RANS εξισώσεις που περιγράφονται παρακάτω κάτω από την καθορισμένη από τη θεωρία δυναμικού ελεύθερη επιφάνεια υιοθετώντας μία διάταξη πλέγματος που επιτρέπει την εφαρμογή πολύ αναλυτικών πλεγμάτων ώστε να παραχθούν όσο το δυνατό πιο ακριβή αποτελέσματα. Για να περιγραφεί η τυρβώδης ροή γύρω από το υπό εξέταση πλοίο, χρησιμοποιείται η μέθοδος πεπερασμένων όγκων. Το πεδίο υπολογισμών καλύπτεται από ένα τρισδιάστατο πλέγμα το οποίο είναι ορθογώνιο καμπυλόγραμμο κατά τη διεύθυνση των εγκάρσιων νομέων και μη ορθογώνιο κατά την τρίτη διεύθυνση χ_1, η οποία είναι παράλληλη του άξονα συμμετρίας. Σε κάθε εγκάρσιο νομέα ορίζεται ένα τοπικό ορθογώνιο καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων (χ_1, χ_2, χ_3), όπου χ_2 και χ_3 είναι γραμμές του πλέγματος παράλληλες στο περίγραμμα του νομέα. Αντίστοιχα ορίζονται οι μέσες τιμές των ταχυτήτων u_1, u_2, u_3 στις διευθύνσεις χ_1, χ_2, χ_3. Η παραγωγή του ορθογώνιου πλέγματος σε έναν εγκάρσιο νομέα επιτυγχάνεται με την εφαρμογή μίας συμπαγούς τεχνικής σάρωσης.

Στην περίπτωσή μας, που το υπό εξέταση δεξαμενόπλοιο έχει βολβοειδή πλώρη, δημιουργείται ένα πλέγμα τύπου C όπου ορίζει το πεδίο του τμήματος I όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα 3.4. Επίσης το δεξαμενόπλοιο φέρει πρύμνη καθρέφτη, δημιουργούνται δύο ακόμη τμήματα τα οποία καλύπτουν την περιοχή της πρύμνης και του όμορου του υπολογιστικού πεδίου. Αυτού του H-O τύπου πλέγματα φαίνονται ως II και III στο κάτωθι σχήμα 3.5.



Σχήμα 3.4 Πλέγμα τύπου C για βολβοειδή πλώρη (I)



Σχήμα 3.5 Πλέγμα τύπου H-O (II) & (III)

Οι εξισώσεις RANS λύνονται σε ένα ορθογώνιο καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων στον χώρο (x_1,x_2,x_3) με μετρικές (h_1,h_2,h_3) και (u_1,u_2,u_3) οι μέσες τιμές των συνισταμένων της ταχύτητας. Οι εξισώσεις ορμής μετασχηματίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned} C(u_1) = &-\frac{1}{h_1}\frac{\partial p}{\partial x_1} + \rho u_2^2 K_{21} + \rho u_3^2 K_{31} - \rho u_1 u_2 K_{12} - \rho u_1 u_3 K_{13} + (\sigma_{11} - \sigma_{22}) K_{21} + (\sigma_{11} - \sigma_{33}) K_{li} \\ &+ \sigma_{12}(2K_{12} + K_{32}) + \sigma_{13}(2K_{13} + K_{23}) + \frac{1}{h_1}\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{1}{h_2}\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{1}{h_3}\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Όπου p είναι η πίεση, ρ η πυκνότητα του νερού και K_{ij} ο τανυστής καμπυλότητας ορισμένος ως:

$$K_{ij} = \frac{1}{h_i h_j}\frac{\partial h_i}{\partial x_j},\ i \neq j \quad (3.36)$$

Με κυκλική εναλλαγή των συντελεστών προκύπτουν αντίστοιχα οι εξισώσεις ορμής $C(u_2)$, $C(u_3)$ για τις διευθύνσεις χ_2 και χ_3.

Στο αριστερό μέλος της εξίσωσης (3.35) οι όροι σύγκλισης $C(\Phi)$, $\Phi=u_1,u_2,u_3$ εκφράζονται ως:

$$C(\Phi) = \frac{\rho}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial(h_2 h_3 u_1 \Phi)}{\partial x_1} + \frac{\partial(h_1 h_3 u_2 \Phi)}{\partial x_2} + \frac{\partial(h_1 h_2 u_3 \Phi)}{\partial x_3}\right] \quad (3.37)$$

Οι τανυστές των τάσεων υιοθετώντας ισοτροπικό μοντέλο δίνης στρεβλότητας, εκφράζονται ως εξής:

$$\begin{aligned} \sigma_{ii} &= 2\mu_e e_{ii} = 2\mu_e\left[\frac{1}{h_i}\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + u_j K_{ij} + u_l K_{il}\right] \\ \sigma_{ij} &= \mu_e e_{ij} = \mu_e\left[\frac{h_j}{h_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{u_j}{h_j}\right) + \frac{h_i}{h_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{u_i}{h_i}\right)\right] \end{aligned} \quad (3.38)$$

Στις εξισώσεις (3.38), η τυρβώδης συνεκτικότητα μ_e υπολογίζεται σύμφωνα με το μοντέλο τύρβης SST-k-ω του Mender (1993) λύνοντας δύο επιπλέον διαφορικές εξισώσεις , μία για την κινητική ενέργεια της τύρβης k και μία για τον ρυθμό καταστροφής τύρβης ω:

$$C(k) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\sigma_k \mu_t \frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial k}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\sigma_k \mu_t \frac{h_1 h_3}{h_2}\frac{\partial k}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\sigma_k \mu_t \frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial k}{\partial x_3}\right)\right] + G - \beta^* \rho \omega k \qquad (3.39a)$$

$$C(\omega) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\sigma_\omega \mu_t \frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial \omega}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\sigma_\omega \mu_t \frac{h_1 h_3}{h_2}\frac{\partial \omega}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\sigma_\omega \mu_t \frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial \omega}{\partial x_3}\right)\right] + \frac{\gamma}{\nu_t} G - \beta \rho \omega^2 + 2\rho(1 - F_1)\frac{\sigma_\omega}{\omega}\frac{1}{h_2^2}\frac{\partial k}{\partial x_2}\frac{\partial \omega}{\partial x_2} \qquad (3.39b)$$

Και ο όρος G εκφράζεται ως εξής:

$$G = 2\mu_t\left[e_{11}^2 + e_{22}^2 + e_{33}^2 + \tfrac{1}{2}\left(e_{12}^2 + e_{13}^2 + e_{23}^2\right)\right] \qquad (3.40)$$

Η αριθμητική μέθοδος για την επίλυση των εξισώσεων (3.35) και (3.39) βασίζεται στην ολοκλήρωση των συγκεκριμένων εξισώσεων τους όγκους ελέγχου σύμφωνα με μία δομημένη και κλιμακούμενη διάταξη κόμβων. Οι ολοκληρωμένες εξισώσεις μετασχηματίζονται σε αλγεβρική μορφή ως εξής:

$$A_P \Phi_P = \sum_1^6 A_i \Phi_i + S_\Phi \qquad (3.41)$$

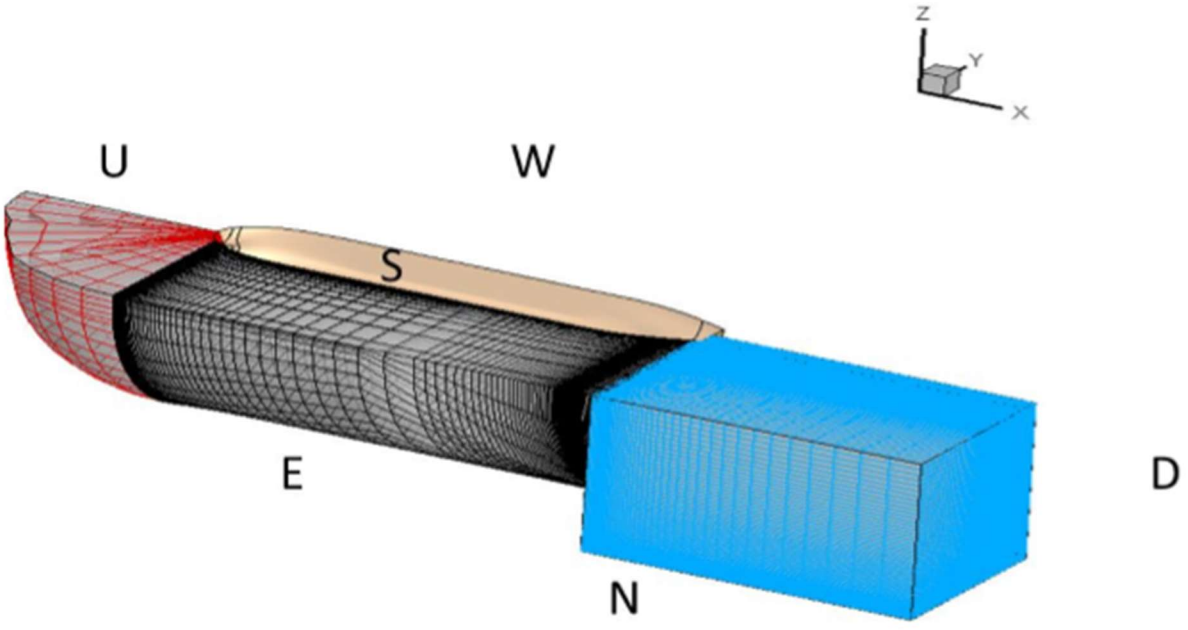
Όπου Φ_P, είναι η τιμή της $\Phi = u_1, u_2, u_3$ στον κεντρικό κόμβο του όγκου ελέγχου και οι τιμές Φ_i είναι αντίστοιχα οι τιμές της Φ στους έξι γειτονικούς κόμβους. Οι συντελεστές A_i εμπεριέχουν τις τάσεις σύγκλισης και διάχυσης των αρχικών διαφορικών εξισώσεων και αποτελούν γενικώς συναρτήσεις της Φ.

Εξαιτίας της μη γραμμικότητας του συστήματος (3.41), μια επαρκής συνθήκη για να είναι φραγμένο το σύστημα που υπολογίζει τους συντελεστές A_i και η μέθοδος να συγκλίνει είναι η:

$$A_P \geq \sum A_i \qquad (3.42)$$

Για να ικανοποιηθεί η παραπάνω συνθήκη εφαρμόζεται ένα υβριδικό σύστημα πεπερασμένων διαφορών για να προσομοιώσουμε τους όρους σύγκλισης με άναντι παραγώγιση ώστε ο $A\iota$ να είναι πάντοτε θετικός. Οι όροι διάχυσης μοντελοποιούνται με κεντρική παραγώγιση αφού έχουν μόνο θετική συνεισφορά στον A_ι. Η παραπάνω προσέγγιση ενδεχομένως να απαιτεί πολύ λεπτομερή διακριτοποίηση για τη μείωση της αριθμητικής διάχυσης, παρέχοντας αξιοσημείωτα πλεονεκτήματα στην προσπάθεια να αποκτήσουμε αποτελεσματικά συγκλίνουσες λύσεις όταν μελετάμε σύνθετα πεδία ροής.

Ο ελλειπτικός χαρακτήρας των εξισώσεων (3.41) απαιτεί ορισμό οριακών συνθηκών σε όλα τα σύνορα του συγκεκριμένου υπολογιστικού πεδίου, στο εξωτερικό σύνορο N, στην επιφάνεια του στερεού συνόρου S, στο επίπεδο εισόδου U, εξόδου D και στα δύο επίπεδα συμμετρίας W και E, όπως φαίνονται στο σχήμα 3.6.



Σχήμα 3.6 Αριθμητικό πλέγμα και σύνορα του υπολογιστικού πεδίου

Δεδομένου ότι η ελεύθερη επιφάνεια αντιμετωπίζεται ως ένα σταθερό όριο, οι ταχύτητες και οι πιέσεις στο επίπεδο εισόδου U και στο εξωτερικό σύνορο N υπολογίζονται μέσω της θεωρίας δυναμικού γύρω από το στερεό σώμα με τις μεταβλητές κ και ω να έχουν μηδενική τιμή. Η επίδραση αυτής της μεθόδου στην υπολογισμένη αντίσταση μπορεί να αξιολογηθεί μόνο μέσω αριθμητικών πειραμάτων μετακινώντας τα σύνορα μακριά από το στερεό σώμα μέχρις ότου η τυρβώδης λύση κοντά στο στερεό σώμα να γίνει πρακτικά ανεπηρέαστη. Αυτή η μέθοδος μας δίνει το πλεονέκτημα να χρησιμοποιηθούν σημαντικά μικρότεροι αριθμοί υπολογιστικών κόμβων Κοντά στο σύνορο S του στερεού σώματος, για να μοντελοποιηθεί η τυρβώδης ροή, εφαρμόζονται οι συναρτήσεις τοίχου οι οποίες θα αναλυθούν σε επόμενο κεφάλαιο.

Η τιμή της ταχύτητας και των τυρβωδών στοιχείων στο επίπεδο εξόδου D θεωρούνται ίσες με αυτές του ακριβώς προηγούμενου εγκάρσιου επιπέδου, δηλαδή εφαρμόζεται η συνθήκη Neumann. Οι τιμές των πιέσεων σε αυτό το επίπεδο εμφανίζονται στην χ_1 εξίσωση ορμής και υπολογίζονται μέσω γραμμικής παρεμβολής. Επίσης και στα δύο επίπεδα συμμετρίας εφαρμόζεται η συνθήκη Neumann για όλες τις μεταβλητές εκτός της u_3 ταχύτητας που είναι ίση με μηδέν.

Για να αποκτήσουμε όσο το δυνατό ακριβέστερα αποτελέσματα, το υπολογιστικό πεδίο γύρω από το πλοίο, υποδιαιρείται σε δύο διαμερίσματα, στο πρωραίο (I) και στο πρυμναίο (II+III) τμήμα όπως φαίνεται στα Σχήματα 3.4, 3.5 και 3.6. Οι οριακές συνθήκες για όλες τις μεταβλητές στο επίπεδο εισόδου της περιοχής (II) υπολογίζονται μέσω γραμμικής παρεμβολής στις αντίστοιχες τιμές που έχουν παραχθεί από την ολοκλήρωση της λύσης στην περιοχή (I). Με ορισμένες τις οριακές συνθήκες σε κάθε περιοχή, η λύση του μοντέλου ορμής και τύρβης των εξισώσεων (3.41) ακολουθεί μία διαδικασία σάρωσης παρόμοια με αυτή του παραβολικού αλγορίθμου των Pratap και Spalding. Για ένα εγκάρσιο νομέα, αρχικά λύνονται οι u_1, u_2, u_3 εξισώσεις ορμής. Στη συνέχεια το πεδίο πιέσεων ανανεώνεται λύνοντας μία παρόμοια με την (3.41) εξίσωση για τη μεταβολή της πίεσης και οι ταχύτητες διορθώνονται μέχρις ότου να ικανοποιηθεί η εξίσωση συνέχειας. Στη συνέχεια λύνονται οι κ-ω εξισώσεις και υπολογίζεται η κινηματική συνεκτικότητα. Κατά τη διάρκεια αυτής της τοπικής λύσης οι άναντι και κατάντι τιμές όλων των μεταβλητών Φ θεωρούνται σταθερές. Τα ίδια υπολογιστικά βήματα επαναλαμβάνονται για τους επόμενους νομείς μέχρι να ολοκληρωθεί η σάρωση όλου του υπολογιστικού πεδίου και επαναλαμβάνεται η διαδικασία μέχρις ότου να επιτευχθεί η σύγκλιση

του πεδίου ταχυτήτων και πιέσεων. Η αντίσταση τριβής R_F και η αντίσταση συνεκτικότητας R_P υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$R_F = \int_S \tau_w \, (\vec{s}\vec{\kappa}) ds$$

$$R_P = -\int_S p_w \, (\vec{n}\vec{\kappa}) ds \tag{3.43}$$

Όπου S είναι η επιφάνεια του στερεού σώματος που καλύπτεται από το υπολογιστικό πεδίο, τ_w είναι η διατμητική δύναμη, p_w η πίεση, $\vec{s}$ το εφαπτομενικό διάνυσμα στο περίγραμμα του στερεού σώματος, $\vec{n}$ το κάθετο διάνυσμα και $\vec{\kappa}$ το μοναδιαίο διάνυσμα παράλληλο στη διεύθυνση x_1. Οι διατμητικές τάσεις υπολογίζονται μέσω της μεθόδου των συναρτήσεων τοίχου.

Για να επιταχυνθεί η σύγκλιση της αριθμητικής επίλυσης ακολουθείται η διαδικασία των λεπτομερώς ανανεωμένων πλεγμάτων. Σύμφωνα με αυτή τη διαδικασία η αρχική εκτίμηση για τις τιμές των μεταβλητών της ροής για ένα δεδομένο πλέγμα είναι βασισμένη σε προηγούμενη λύση με λιγότερο λεπτομερές πλέγμα. Οι προαναφερθείσες αρχικές τιμές υπολογίζονται μέσω γραμμικής παρεμβολής μεταξύ των κόμβων του λιγότερου λεπτομερούς πλέγματος. Αυτή η διαδικασία έχει αποδειχθεί πολύ αποτελεσματική για την επίτευξη μεγάλων ρυθμών σύγκλισης και επιδεικνύει την εξάρτηση της αριθμητικής λύσης από την ανάλυση του πλέγματος.

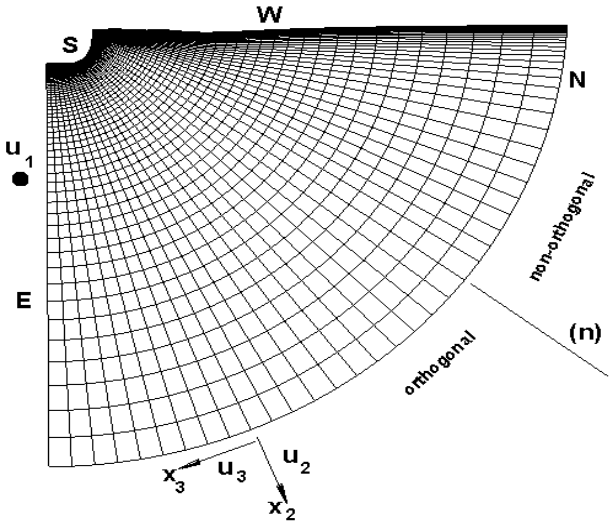
Κεφάλαιο 4ο : Αριθμητική επίλυση του προβλήματος με την θεωρία της συνεκτικής ροής

4.1 Εισαγωγή στην αριθμητική επίλυση με την θεωρία της συνεκτικής ροής

Στην συγκεκριμένη μέθοδο η διαφοροποίηση με την θεωρία της δυναμικής ροής είναι ότι οι εξισώσεις RANS δεν επιλύονται κάτω από τη καθορισμένη ελεύθερη επιφάνεια του δυναμικού αλλά κάτω από την πραγματική ελεύθερη επιφάνεια του νερού. Η μέθοδος των πεπερασμένων όγκων, που αναπτύχθηκε στο ΕΜΠ για την επίλυση των εξισώσεων RANS, σε συνδυασμό με το μοντέλο τύρβης SST-k-ω του Mender (1993) χρησιμοποιήθηκαν για την επίλυση του πεδίου ροής κάτω από την πραγματική ελεύθερη επιφάνεια. Η ελεύθερη επιφάνεια υπολογίζεται μέσω ενός επαναληπτικού αλγόριθμου σταθερού βήματος ενώ ένας δίσκος ορμής χρησιμοποιείται για να μοντελοποιήσει τη λειτουργία της έλικας με βάση την θεωρία της φέρουσας γραμμής και των σειρών Wagenigen B series. Επιπλέον, εξαιτίας της απουσίας της προκαθορισμένης από την θεωρία του δυναμικού ελεύθερης επιφάνειας, η συγκεκριμένη αριθμητική μέθοδος είναι σημαντικά χρονοβόρα. Για τον λόγο αυτό, θεωρούμε την ελεύθερη επιφάνεια γνωστή από την δυναμική προσέγγιση από το μέσον του υπολογιστικού πεδίου και πρώραθεν αυτού, ενώ στο δεύτερο μισό η ελεύθερη επιφάνεια υπολογίζεται με την συνεκτική προσέγγιση που θα περιγράψουμε παρακάτω. Αυτή η παραδοχή γίνεται καθώς η θεωρία του δυναμικού δίνει πολύ καλά αποτελέσματα όσο αφορά την ροή γύρω από την γάστρα εκτός από την περιοχή ανακυκλοφορίας της ροής στον καθρέπτη της πρύμνης, όπου τα φαινόμενα στροβιλότητας της ροής είναι πολύ έντονα.

4.2 Δημιουργία του υπολογιστικού πλέγματος και των εξισώσεων τύρβης

Το υπολογιστικό πεδίο στο πρυμναίο τμήμα καλύπτεται από ένα πλέγμα τύπου H-O. Το 3D πλέγμα περιλαμβάνει ύπο-επίπεδα καμπυλόγραμμα πλέγματα που δημιουργούνται σε εγκάρσιες τομές. Κάθε τομή, αναπαρίσταται μέσω του σύμμορφου μετασχηματισμού που περιεγράφηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο. Δεδομένου ότι η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας δεν είναι γνωστή εκ των προτέρων, τα τμήματα επεκτείνονται μέχρι το κοίλο του πλοίου. Στη συνέχεια, τα εγκάρσια πλέγματα δημιουργούνται μετασχηματίζοντας σημεία σε ομοκεντρικούς κύκλους στο επίπεδο w μέσω του σύμμορφου μετασχηματισμού. Οι ακτίνες αυτών των κύκλων είναι σταθερές και, συνεπώς, το ένα σύνολο των γραμμών x_3 του πλέγματος που είναι "παράλληλες" με το περίγραμμα του τμήματος παραμένει αμετάβλητο, Σχήμα 4.1. Για να δημιουργηθεί το άλλο σύνολο "κανονικών" χ_2 γραμμών, ο υπολογιστικός τομέας χωρίζεται σε δύο περιοχές που χωρίζονται από τη γραμμή (n) Σχήμα 4.1 , που αντιστοιχεί σε μια σταθερή γωνία στον μοναδιαίο κύκλο. Η κάτω περιοχή αντιστοιχεί σε ένα ορθογώνιο καμπυλόγραμμο πλέγμα και η άνω περιοχή σε ένα μη ορθογώνιο πλέγμα, των οποίων οι χ_2 γραμμές μετασχηματίζονται κατάλληλα κοντά στην ελεύθερη επιφάνεια σύμφωνα με οποιαδήποτε επιθυμητή κατανομή, εφαρμόζοντας την αντίστροφη αναλυτική αναπαράσταση.



Σχήμα 4.1 Το πλέγμα σε μια εγκάρσια τομή

Συνεπώς, το πλέγμα είναι μη ορθογώνιο ως προς τις τρεις διαστάσεις αλλά διατηρεί δύο πλεονεκτήματα που συνδέονται με τα τοπικά ορθογώνια καμπυλόγραμμα συστήματα αναφοράς σε εγκάρσια τμήματα, των οποίων οι γραμμές χ_3 συμπίπτουν πάντοτε με τις αντίστοιχες γραμμές του υπολογιστικού πλέγματος. Η πρώτη ιδιότητα αναφέρεται στις απλοποιημένες εκφράσεις που συνδέουν την συνιστώσα της ταχύτητας u_3 με τις αντίστοιχες μεταβαλλόμενες πιέσεις (ταχέως μεταβαλλόμενες περιμετρικά), καθώς και με τους όρους διάχυσης στην x_3 κατεύθυνση. Η δεύτερη σχετίζεται με τα ίδια πλεονεκτήματα και στις δύο κατευθύνσεις x_2 και x_3 του ορθογώνιου τμήματος του πλέγματος που καλύπτει περιοχές με υψηλή καμπυλότητα, όπου συμβαίνουν έντονες αλλαγές στην ροή. Αξίζει να σημειωθεί εδώ ότι αυτός ο τύπος δημιουργίας πλέγματος είναι αρκετά γρήγορος και απαιτεί αμελητέο χρόνο CPU σε σχέση με το χρόνο που απαιτείται για την επίλυση των εξισώσεων Navier-Stokes κάτω από μια καθορισμένη ελεύθερη επιφάνεια. Το χρονοβόρο κομμάτι, είναι η πραγματοποίηση ενός αρχικού μετασχηματισμού συγκεκριμένων τμημάτων, που απαιτείται για τον υπολογισμό και την τυποποίηση των αντίστοιχων συντεταγμένων συντελεστών χαρτογράφησης. Στη συνέχεια, κάθε ενδιάμεσο τμήμα δημιουργείται αμέσως με κυβική παρεμβολή μεταξύ των ήδη υπολογισμένων συντελεστών.

Οι εξισώσεις (RANS) επιλύονται αριθμητικά επί του φυσικού χώρου (δηλαδή δεν μετασχηματίζονται) χρησιμοποιώντας την περιγραφείσα αλληλουχία τοπικών ορθογώνιων καμπυλόγραμμων συστημάτων. Από αναφορά σε προηγούμενο κεφάλαιο, οι εξισώσεις έχουν την μορφή:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\rho}{h_i h_j h_l}\left[\frac{\partial\left(h_j h_l u_i u_i\right)}{\partial x_i}+\frac{\partial\left(h_i h_l u_j u_i\right)}{\partial x_j}+\frac{\partial\left(h_i h_j u_l u_i\right)}{\partial x_l}\right] = \\
&-\frac{1}{h_i}\frac{\partial p^*}{\partial x_i}+\rho u_j^2 K_{ji}+\rho u_l^2 K_{li}-\rho u_i u_j K_{ij}-\rho u_i u_l K_{il}+ \\
&\left(\sigma_{ii}-\sigma_{jj}\right)K_{ji}+\left(\sigma_{ii}-\sigma_{ll}\right)K_{li}+\sigma_{ij}\left(2K_{ij}+K_{lj}\right) \\
&+\sigma_{il}\left(2K_{il}+K_{jl}\right)+\frac{1}{h_i}\frac{\partial\sigma_{ii}}{\partial x_i}+\frac{1}{h_j}\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}+\frac{1}{h_l}\frac{\partial\sigma_{il}}{\partial x_l}
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

Οι ποσότητες u_i, u_j και u_l αντιπροσωπεύουν τις μέσες τιμές των συνιστωσών ταχύτητας (u_1, u_2, u_3), το K_{ij} συμβολίζει τον τάσης καμπυλότητας, ενώ η πίεση p* περιλαμβάνει τόσο τους στατικούς όσο και τους υδροστατικούς όρου:

$$p^* = p + \rho g h \qquad (4.2)$$

Στην (4.2) το ρ συμβολίζει την πυκνότητα του ρευστού και το h είναι η κατακόρυφη απόσταση από τη μη διαταραγμένη στάθμη νερού.

Οι τανυστές των τάσεων υιοθετώντας ισοτροπικό μοντέλο δίνης στρεβλότητας, εκφράζονται ως εξής:

$$\begin{aligned} \sigma_{ii} &= 2\mu_e e_{ii} = 2\mu_e \left[\frac{1}{h_i}\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + u_j K_{ij} + u_l K_{il} \right] \\ \sigma_{ij} &= \mu_e e_{ij} = \mu_e \left[\frac{h_j}{h_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{u_j}{h_j}\right) + \frac{h_i}{h_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{u_i}{h_i}\right) \right] \end{aligned} \qquad (4.3)$$

Στις εξισώσεις (4.3), η τυρβώδης συνεκτικότητα μ_e υπολογίζεται σύμφωνα με το μοντέλο τύρβης SST-k-ω του Mender (1993) λύνοντας δύο επιπλέον διαφορικές εξισώσεις , μία για την κινητική ενέργεια της τύρβης k και μία για τον ρυθμό καταστροφής τύρβης ω:

$$\begin{aligned} &C(k) = \\ &\frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\sigma_k \mu_t \frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial k}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\sigma_k \mu_t \frac{h_1 h_3}{h_2}\frac{\partial k}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\sigma_k \mu_t \frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial k}{\partial x_3}\right) \right] \\ &+ G - \beta^* \rho \omega k \end{aligned} \qquad (4.4a)$$

$$\begin{aligned} &C(\omega) = \\ &\frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\sigma_\omega \mu_t \frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial \omega}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\sigma_\omega \mu_t \frac{h_1 h_3}{h_2}\frac{\partial \omega}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\sigma_\omega \mu_t \frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial \omega}{\partial x_3}\right) \right] \\ &+ \frac{\gamma}{v_t} G - \beta \rho \omega^2 + 2\rho(1 - F_1)\frac{\sigma_\omega}{\omega}\frac{1}{h_2^2}\frac{\partial k}{\partial x_2}\frac{\partial \omega}{\partial x_2} \end{aligned} \qquad (4.4b)$$

Και ο όρος G εκφράζεται ως εξής:

$$G=2\mu_t\left[e_{11}^2+e_{22}^2+e_{33}^2+\tfrac{1}{2}\left(e_{12}^2+e_{13}^2+e_{23}^2\right)\right] \qquad (4.5)$$

Οι αρχικές διαφορικές εξισώσεις ενσωματώνονται στους κλιμακωτούς όγκους ελέγχου και η διακριτοποίησή τους οδηγεί στο ακόλουθο σύστημα μη γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων:

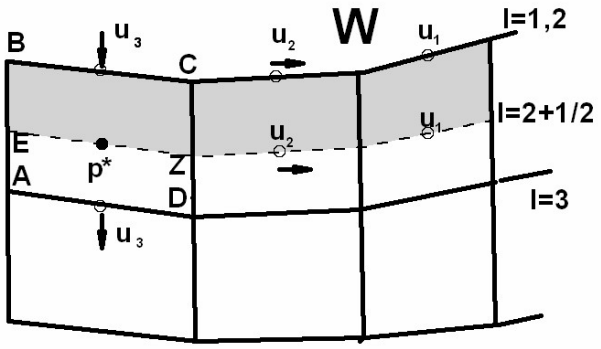
$$A_P\Phi_P = \sum_1^6 A_i\,\Phi_i + S_\Phi \qquad (4.6)$$

Όπου Φ_P, είναι η τιμή της $\Phi=u_1,u_2,u_3$ στον κεντρικό κόμβο του όγκου ελέγχου και οι τιμές Φ_i είναι αντίστοιχα οι τιμές της Φ στους έξι γειτονικούς κόμβους. Οι συντελεστές A_i εμπεριέχουν τις τάσεις σύγκλισης και διάχυσης των αρχικών διαφορικών εξισώσεων και αποτελούν γενικώς συναρτήσεις της Φ. Η διακριτοποίηση βασίζεται σε ένα σχήμα υβριδικών διαφορών: χρησιμοποιούνται πεπερασμένες διαφορές δεύτερης τάξης για τους όρους διάχυσης και πηγής , ενώ η πρώτη ή η δεύτερη τάξη εφαρμόζεται για τους όρους μεταφοράς, έτσι ώστε οι παραγόμενοι συντελεστές A_i να είναι πάντα θετικοί .

Το πεδίο πίεσης υπολογίζεται ακολουθώντας μια μέθοδο αλγορίθμου SIMPLE, η οποία επιλύει ένα παρόμοιο σύστημα με το (4.6) όπου Φ δηλώνει τη διόρθωση πίεσης και το SΦ την παραμένουσα μάζα στους όγκους ελέγχου πίεσης. Σε αυτή τη διαδικασία οι μεταβολές της ταχύτητας συνδέονται άμεσα με τις αντίστοιχες μεταβολές πίεσης μεταξύ των κύριων κόμβων.

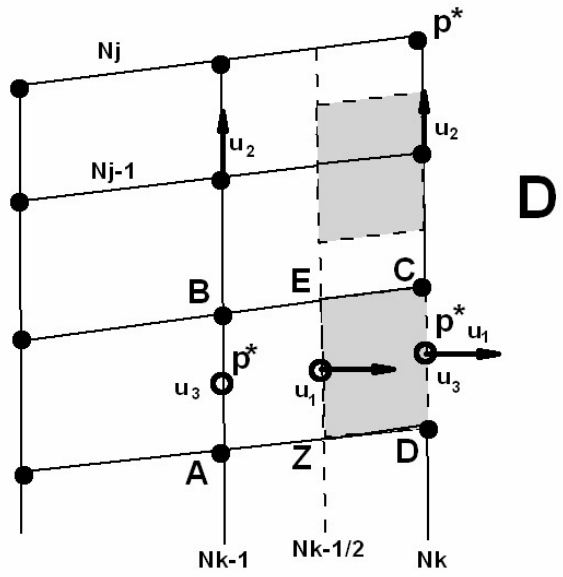
Οι πλήρως ελλειπτικές εξισώσεις (4.6) απαιτούν οριακές συνθήκες γύρω από τον τομέα υπολογισμού. Στο επίπεδο εισόδου U καθώς και στο εξωτερικό όριο N, σχήμα 4.1, εφαρμόζονται οι συνθήκες Dirichlet, με βάση την αδιατάρακτη ροή στο άπειρο: η u_1 συνιστώσα ορίζεται ίση με $U\infty$, ενώ όλες οι άλλες μεταβλητές είναι ίσες με μηδέν (π.χ. u2 = u3 = p * = k = ε = 0). Στο επίπεδο συμμετρίας E: $u_3 = 0$ και κάθε παράγωγη μεταβλητή σε σχέση με το x_3 είναι ίση με το μηδέν. Η τυπική προσέγγιση των συναρτήσεων τοίχου, Patankar και Spalding (1972), εφαρμόζεται στο στέρεο όριο S, κατάλληλα τροποποιημένο ώστε να λαμβάνει υπόψη μη ορθογωνικούς όρους.

Αγνοώντας την επιφανειακή τάση στο σύνορο W της ελεύθερης επιφάνειας και θέτοντας την στατική ατμοσφαιρική πίεση ίσης με το μηδέν, η δυναμική συνοριακή συνθήκη μετατρέπεται σε γνωστές τιμές πίεσης p* = ρgh ενώ όλες οι άλλες τάσεις εξαφανίζονται. Αν υποθέσουμε ότι η κινηματική συνοριακή συνθήκη επίσης διατηρείται πάνω σε αυτό το σύνορο, δηλ. Ο ρυθμός ροής μέσω του W είναι μηδέν, τότε η συνθήκη Aw = 0 ισχύει στην (4.6) για τους κλιμακωτούς όγκους ελέγχου δίπλα στο W. Αυτό ισχύει για τους όγκους ελέγχου με τις όψεις (ABCD) που αντιστοιχούν στις μεταβλητές u_1, u_2, k και ε, Σχήμα 4.2. Δεδομένου ότι η ελεύθερη επιφάνεια δεν είναι γνωστή εκ των προτέρων , η u_3 συνιστώσα σε αυτό το όριο (I = 2) υπολογίζεται από την εξίσωση της ορμής u_3 στον όγκο ελέγχου (EBCZ), που ορίζεται μεταξύ I = 2 και I = 2 + 1/2. Οι τιμές u_1 και u_2 στο W υπολογίζονται επίσης από τις αντίστοιχες εξισώσεις ορμής στους όγκους (EBCZ). Σε μια απλοποιημένη εκδοχή της μεθόδου η τελευταία μπορεί επίσης να προσδιοριστεί όπως τα χαρακτηριστικά του στροβιλισμού, δηλαδή με την εφαρμογή της συνθήκης Neumann Φ (I = 1) = Φ (I = 2) όπου Φ συμβολίζει τις μεταβλητές u_1, u_2, k και ε. Οι τιμές των συνιστωσών ταχύτητας στο W χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό της γεωμετρίας της νέας ελεύθερης επιφάνειας, όπως περιγράφεται στη συνέχεια.



Σχήμα 4.2 Σημεία του υπολογιστικού πλέγματος στην ελεύθερη επιφάνεια

Τέλος, χρησιμοποιούνται ανοικτές οριακές συνθήκες στο επίπεδο εξόδου D, το οποίο ορίζεται ως το επίπεδο N_k στο Σχήμα 4.3. Η άγνωστη ελεύθερη επιφάνεια (N_j), η οποία πρέπει να υπολογιστεί επαναληπτικά, απαιτεί προσέγγιση υψηλότερης τάξης στο D από ότι οι συνηθισμένες συνθήκες Neumann που εφαρμόζονται σε πλήρως ανεπτυγμένες ροές με σταθερά εξωτερικά όρια. Η βασική ιδέα είναι να επιλύσουμε τις εξισώσεις μεταφοράς μέχρι το D (ή N_k-plane) και να απλοποιήσουμε αυτούς τους όρους που δεν μπορούν να υπολογιστούν με ακρίβεια. Σύμφωνα με αυτή την προσέγγιση, αν εξαιρούνται οι μερικές παράγωγοι στην x_1 κατεύθυνση (κατά μήκος του άξονα συμμετρίας), οι εξισώσεις μεταφοράς (4.6) καθώς και η εξίσωση διόρθωσης πίεσης του αλγορίθμου SIMPLE μπορούν να λυθούν στο επίπεδο N_k χρησιμοποιώντας τους όγκους ελέγχου (ZECD), μεταξύ των εγκάρσιων τμημάτων $N_{k-1/2}$ και N_k. Είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι ο συντελεστής A_D εξαφανίζεται στις εξισώσεις διόρθωσης πίεσης και επομένως δεν απαιτείται καμία πληροφορία για την N_k. Συνεπώς, όλες οι μεταβλητές (u_1, u_2, u_3, p*, k και ε) υπολογίζονται στο D όπως σε οποιοδήποτε άλλο επίπεδο K του υπολογιστικού πεδίου.



Σχήμα 4.3 Συνθήκες ανοιχτού τύπου

4.3 Υπολογισμός της ελεύθερης επιφάνειας με την συνεκτική ροή

Η γεωμετρία της ελεύθερης επιφάνειας υπολογίζεται ακολουθώντας μια επαναληπτική διαδικασία που βασίζεται σε διαδοχικά βήματα σταθερής κατάστασης, διατηρώντας σταθερή την ταχύτητα του πλοίου. Σε αυτή τη διαδικασία, η δυναμική οριακή συνθήκη ικανοποιείται πάντοτε από την άποψη της γνωστής πίεσης στην επιφάνεια, ενώ η κινηματική κατάσταση ικανοποιείται όταν επιτευχθεί σύγκλιση. Στα ενδιάμεσα βήματα η ελεύθερη επιφάνεια ενημερώνεται σύμφωνα με μια προσέγγιση Lagrangian-Eulerian. Υποθέτοντας ότι, κάτω από ένα γνωστό ενδιάμεσο σύνορο, έχει ολοκληρωθεί η λύση των εξισώσεων μεταφοράς, προσδιορίζοντας έτσι τις συνιστώσες της ταχύτητας πάνω σε αυτό. Για να υπολογίσουμε μια νέα προσέγγιση της ελεύθερης επιφάνειας, τα καμπύλα στοιχεία μετατρέπονται στο καρτεσιανό σύστημα (x, y, z), Σχήμα 4.4. Στη συνέχεια, η διόρθωση γίνεται σε δύο στάδια:

(1) Το σωματίδιο του υγρού (σημείο πλέγματος) A στο εγκάρσιο επίπεδο K μεταφέρεται στο B στο επίπεδο K + 1 με την Lagrangian προσέγγιση, Σχήμα 4.4. Το σημείο B αντιπροσωπεύει το άκρο του διανύσματος ταχύτητας που διέρχεται από το σημείο M, όπου το M βρίσκεται στο επίπεδο K + 1/2. Οι συνιστώσες της ταχύτητας υπολογίζονται επί του M με μια επαναληπτική διαδικασία έτσι ώστε ο διάνυσμα ταχύτητας να διέρχεται επίσης μέσω A. Τα σημεία B σχηματίζουν μια νέα εγκάρσια τομή της ελεύθερης επιφάνειας επί του K + 1. Στη συνέχεια, οι νέοι κόμβοι στο K + 1, που αντιστοιχούν στις σταθερές συντεταγμένες x_3-γραμμές, Σχήμα 4.1, βρίσκονται με γραμμική παρεμβολή μεταξύ των σημείων B.

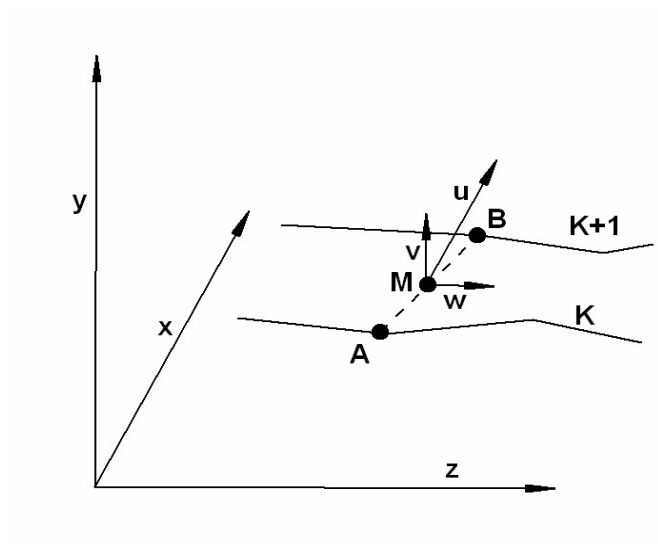
(2) Η δεύτερη διόρθωση εφαρμόζεται για να ικανοποιηθεί τοπικά η κινηματική συνθήκη. Στην ολοκληρωμένη μορφή της εξίσωσης συνέχειας, αυτή η συνθήκη ικανοποιείται όταν η ροή μέσω του εξεταζόμενου πάνελ γίνεται ίση με μηδέν. Κατά προσέγγιση, αυτό μπορεί να επιτευχθεί μετακινώντας τη γραμμή BC του τετράπλευρου (ABCD) κάθετα κατά δy (B → E) Σχήμα 4.5. Για να είναι συμβατή με τη σύγκλιση της

εξίσωσης συνέχειας, το ABCD συμπίπτει με τη βόρεια όψη του όγκου ελέγχου της ελεύθερης επιφάνειας. Η απόσταση δy υπολογίζεται από την εξίσωση:

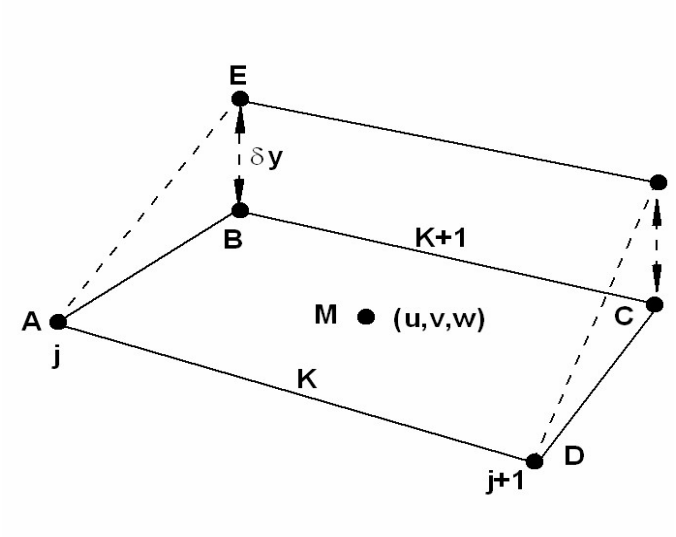
$$uA_X(\delta y) + vA_Y + wA_Z = 0 \qquad (4.7)$$

όπου AX, AY και AZ είναι οι προβολές των (ABCD) στους αντίστοιχους άξονες.

Τα σημεία του πλέγματος στο κύτος υπολογίζονται εφαρμόζοντας γραμμική προέκταση.



Σχήμα 4.4 Πρώτη διόρθωση της ελεύθερης επιφάνειας (Lagrangian)



Σχήμα 4.5 Δεύτερη διόρθωση της ελεύθερης επιφάνειας (Κινηματική συνθήκη)

Κεφάλαιο 5ο : Περιγραφή συμπληρωματικών θεωριών που εφαρμόστηκαν και στις δύο αριθμητικές μεθόδους

5.1 Συναρτήσεις Τοίχου

Η επίλυση των εξισώσεων Navier-Stokes μέχρι την επιφάνεια του στερεού συνόρου S, όπου ισχύουν οι συνθήκες Dirichlet ($u_1=u_2=u_3=u=\varepsilon=0$), απαιτεί πολύ πυκνά αριθμητικά πλέγματα ώστε η επίλυση του προβλήματος να καθίσταται χρονικά ασύμφορη ή ακόμα και υπολογιστικά αδύνατη σε περιπτώσεις σύνθετων ροών. Για ροές υψηλών αριθμών Reynold, όπως αυτή γύρω από την γάστρα ενός πλοίου, έχει επικρατήσει η χρήση απλών μοντέλων κοντά στο στερεό σύνορο. Έτσι, οι οριακές συνθήκες κοντά στην επιφάνεια του συνόρου αντικαθίστανται από την εφαρμογή των συναρτήσεων τοίχου των Patankar και Spalding σύμφωνα με τις οποίες το πεδίο διακρίνεται σε τρείς περιοχές:

1. Το στρωτό οριακό υπόστρωμμα ($y+<3$)
2. Το ενδιάμεσο στρώμα όπου οι τάσεις της στρωτής ροής και οι τάσεις Reynolds είναι της ίδιας τάξεως ($3<y+<40$)
3. Την περιοχή ισχύος του λογαριθμικού νόμου όπου οι τάσεις Reynolds είναι πολύ μεγαλύτερες από τις τάσεις στρωτής ροής ($200>y+>40$)

Με την μέθοδο των συναρτήσεων τοίχου ο πρώτος υπολογιστικός κόμβος θεωρείται ότι βρίσκεται στην περιοχή 3 όπου ισχύει προσεγγιστικά

$$u^+ = \frac{1}{K}\ln E_y^+ \qquad (5.1)$$

Όπου:

$$y^+ = \frac{y_R}{\nu}\left(\frac{\tau_w}{\rho}\right)^{1/2} \qquad (5.2.1)$$

$$u^+ = \frac{u}{\left(\tau_w/\rho\right)^{1/2}} \qquad (5.2.2)$$

Και τ_w η διατμητική τάση στο σύνορο, y_R η απόσταση κάθετα προς το σύνορο, u παράλληλη ταχύτητα στο σύνορο, κ=0,42 (σταθερά von Karman), E=9.79.

Υποθέτοντας ότι η διατμητική τάση είναι σταθερή κατά το ύψος, προκύπτει ότι για μονοδιάστατη ροή, η κινητική ενέργεια τύρβης σχετίζεται με την τ_w ως εξής:

$$k = C_\mu^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\tau_w}{\rho}\right), \quad C_\mu = 0.09 \qquad (5.3)$$

Ενώ η απορρόφηση της k

$$\epsilon = \frac{\left(\tau_w/\rho\right)^{1.5}}{0.42\ \ _R} \qquad (5.4)$$

Οι παραπάνω σχέσεις μαζί με τις εκφράσεις:

$$\frac{\tau_w}{\rho} = \nu_t \frac{\partial u}{\partial y_R}, \ \frac{\partial u}{\partial y_R} = \frac{\left(\tau_w/\rho\right)^{0,5}}{0.42 y_R} \qquad (5.5)$$

Χρησιμοποιούνται στον ορισμό των οριακών συνθηκών των διάφορων μεταβλητών κοντά στο στερεό σύνορο S.

5.2 Η προσομοίωση του δίσκου ορμής

Τα απλοποιημένα μοντέλα ελίκων που χρησιμοποιούνται ως τώρα σε υπολογισμούς με τυρβώδη ροή γύρω από την πρύμνη βασίζονται στην προσέγγιση των αδρανειακών (πεδιακών) δυνάμεων. Υποθέτοντας ότι το μέσο πρόωσης έχει άπειρο αριθμό πτερυγίων (δίσκος ορμής) η ολοκληρωμένη επίδραση των πεδιακών δυνάμεων εμφανίζεται ως μία εξωτερική δύναμη η οποία συμπεριλαμβάνεται στην πηγή τού όρου S_φ της διακριτοποιημένης εξίσωσης $A_P\Phi_P = \sum_1^6 A_i\,\Phi_i + S_\Phi$. Οι δυνάμεις $F_{1,2,3}$ που προκύπτουν ως αποτέλεσμα μπορούν να εκφραστούν ως εξής:

$$F_1 = C_1 E\Gamma(r) \qquad (5.6)$$

$$F_{2,3} = C_{2,3} E\frac{\Gamma(r)}{r} \qquad (5.7)$$

Όπου Ε είναι η περιοχή της τομής του δίσκου ορμής με τους αντίστοιχους όγκους ελέγχου και $\Gamma(r)$ είναι η κατανομή της κυκλοφορίας σε ένα πτερύγιο σύμφωνα με την κλασική θεωρία φέρουσας γραμμής. Η σταθερά για την διαμήκη συνιστώσα της ταχύτητας C_1 υπολογίζεται από τη σχέση:

$$T = C_1 \int_{r_t}^{r_h} \Gamma(r) r dr \qquad (5.8)$$

Όπου Τ είναι η ώση της έλικας, ενώ r_h και r_t είναι η ακτίνα της πλήμνης και του ακροπτερυγίου αντίστοιχα.

Οι σταθερές C_2 και C_3 είναι ανάλογες της ροπής της έλικας Q που προσεγγίζεται ως εξής:

$$Q = C_Q \int_{r_t}^{r_h} \Gamma(r) r dr \qquad (5.9)$$

και ενσωματώνουν την οριοθέτηση των συνιστωσών της ταχύτητας που εξετάζονται, δηλαδή κατά μήκος των καμπυλόγραμμων διευθύνσεων x_2,x_3. Τελικά για δεδομένα Τ, Q και $\Gamma(r)$, μπορούν να υπολογισθούν οι σταθερές $C_{1,2,3}$ και άρα και οι πεδιακές δυνάμεις από τις παραπάνω εξισώσεις.

Για γνωστή συνάρτηση κυκλοφορίας $\Gamma(r)$ όπως προκύπτει από τη θεωρία φέρουσας γραμμής, το πρόβλημα της αυτοπρόωσης επιλύεται χρησιμοποιώντας μία επαναληπτική διαδικασία που με συγκεκριμένες οριακές συνθήκες μας δίνει μία αριθμητική λύση, οπότε καταλήγουμε στον υπολογισμό της αντίστασης $R_T = R_F + R_P$ και η ώση της προπέλας T τίθεται ίση με την υπολογισμένη αντίσταση. Τότε υπολογίζεται η σταθερά C_1 και οι πεδιακές δυνάμεις στη x_1 κατεύθυνση. Αν ληφθούν υπόψη και οι περιφερειακές δυνάμεις θα πρέπει να είναι γνωστή η ροπή Q ώστε να υπολογίσουμε τον συντελεστή C_Q από την παραπάνω εξίσωση. Στην παρούσα μελέτη η τιμής της ροπής εκτιμάται συνδυάζοντας τα αποτελέσματα της τυρβώδους ροής με πειραματικά δεδομένα από πειράματα ελεύθερης ροής της έλικας. Όπως περιγράφεται παρακάτω για συγκεκριμένη διάμετρο D, ώση T και συνάρτηση κυκλοφορίας $\Gamma(r)$ η βέλτιστη έλικα μπορεί να προσδιοριστεί αν έχουμε την ταχύτητα στο άπειρο u_A. Αν u_p είναι η μέση αξονική ταχύτητα στον δίσκο της έλικας τότε είναι εύκολο να δειχθεί ότι η u_A είναι συνάρτηση της μορφής:

$$u_A = f(u_p, D, \Gamma(r), T, l, \nu, \rho) \quad (5.10)$$

όπου l είναι το μήκος του δίσκου ορμής. Πρέπει να αναφερθεί ότι η up αποτελεί χαρακτηριστική παράμετρο της προσομοίωσης του δίσκου ορμής και υπολογίζεται από την τυρβώδη ροή γύρω από την πρύμνη. Η ταχύτητα u_A υπολογίζεται επαναληπτικά, εφαρμόζοντας έναν επιλυτή τυρβώδους ροής με συμμετρικό σύστημα αξόνων σε ένα υπολογιστικό πλέγμα με παράλληλες και κάθετες γραμμές στον άξονα της έλικας. Οι συνοριακές συνθήκες σε αυτό το πρόβλημα είναι: στο επίπεδο εισόδου U, η ταχύτητα u έχει μία συγκεκριμένη (αρχικά εκτιμώμενη) τιμή u_A, ενώ η ακτινική συνιστώσα v είναι μηδέν. Στο όριο N, το v όπως και η κάθετη παράγωγος της u είναι μηδέν. Στο επίπεδο εξόδου οι κάθετες παράγωγοι των u και v είναι μηδέν. Στο δίσκο της έλικας και εντός του μήκους l, οι πεδιακές δυνάμεις στην εξίσωση ορμής καθορίζονται από το T και την $\Gamma(r)$ μέσω της (5.6). Ο αλγόριθμος SIMPLE επιστρατεύεται για να λυθούν οι πλήρως ελλειπτικές εξισώσεις ορμής και συνέχειας. Υποθέτοντας ότι η σύγκλιση της μεθόδου επιτυγχάνεται σε κάποιο βήμα n με καθορισμένο u_A, η επόμενη προσέγγιση (n+1) βασίζεται στη μέθοδο Newton-Raphson:

$$u_A^{n+1} = \frac{u_P - u_P^n}{\left(\frac{\partial u_P}{\partial u_A}\right)_n} + u_A^n \qquad (5.11)$$

$$\left({\partial u_P}/{\partial u_A}\right)_n = \frac{u_P^n - u_P^{n-1}}{u_A^n - u_A^{n-1}} \quad (5.12)$$

και η u_p δηλώνει τη μέση τιμή της αντίστοιχης ταχύτητας u_A στο δίσκο της έλικας.

Αφού προσδιοριστεί με την ανωτέρω διαδικασία η ταχύτητα προχώρησης, μπορούμε να υπολογίσουμε από τα πολυώνυμα βελτιστοποίησης τις στροφές (RPM) τον βαθμό απόδοσης της έλικας και την ροπή Q της προπέλας με την οποία θα υπολογίσουμε τις περιφερειακές δυνάμεις $F_{2,3}$.

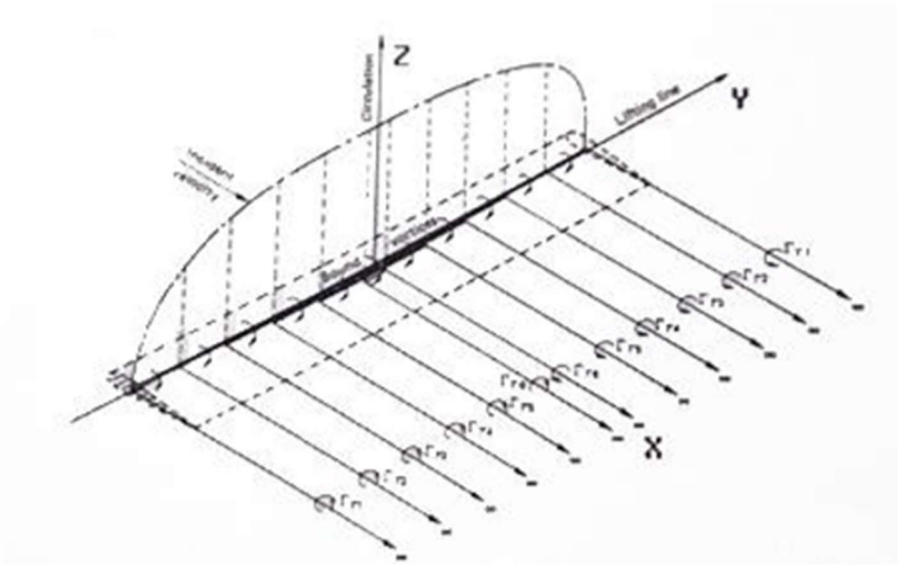
$$\frac{K_T}{J^2} = \frac{T}{\rho u_A^2 D^2} \qquad (5.13)$$

Με τις ανανεωμένες τιμές των πεδιακών δυνάμεων προς όλες τις κατευθύνσεις, μία νέα επίλυση διεξάγεται στο υπολογιστικό πεδίο με το πιο ευκρινές πλέγμα του πρυμναίου τμήματος και υπολογίζεται μία νέα τιμή της αντίστασης R_T. Η νέα τιμή της αντίστασης τίθεται και πάλι ίση με την ώση T και η ίδια διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι το παρακάτω κριτήριο να ικανοποιείται:

$$|R_T^N - R_T^{N-1}| \leq 0.001|R_T^{N-1}| \quad (5.14)$$

5.3 Η Θεωρία της φέρουσας γραμμής (Lifting Line)

Το μοντέλο της θεωρίας φέρουσας γραμμής (Prandl) χρησιμοποιείται για την αναπαράσταση της ροής γύρω από πτέρυγα, θεωρώντας ότι ο λόγος της χορδής του πτερυγίου προς το άνοιγμα του πτερυγίου τείνει στο μηδέν. Η διαδικασία αντικατάστασης του πτερυγίου από φέρουσα γραμμή φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



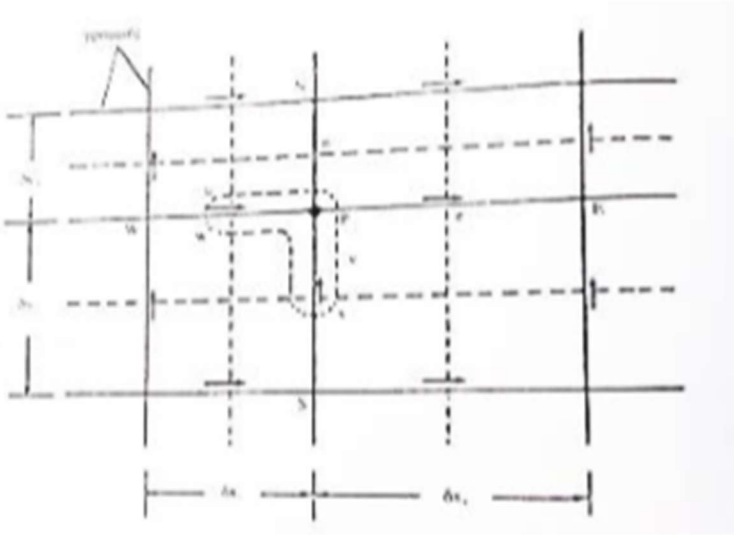
Σχήμα 5.1 Μοντέλο θεωρίας φέρουσας γραμμής κατά Prandl για τη δράση του πτερυγίου

Η θεωρία φέρουσας γραμμής προσομοιάζει τη ροή γύρω από μία ναυτική έλικα χωρίς περιορισμούς σχετικά με τις συνθήκες της εισερχόμενης ροής και την επιλογή των παραμέτρων μορφής της. Ως αποτέλεσμα ο σχεδιαστής μπορεί να υπολογίσει την ακτινική κατανομή του βήματος και την ακτινική και χορδική κατανομή κυρτότητας που ελαχιστοποιούν την ισχύ που απορροφά η έλικα σε ένα ακτινικά μεταβαλλόμενο πεδίο πραγματικού όμορου. (wake adopted optimum propeller).

Η θεωρία φέρουσας γραμμής υποθέτει ότι η χορδή του πτερυγίου είναι μικρή σχετικά με το άνοιγμα του πτερυγίου. Έτσι το πτερύγιο εκφυλίζεται σε μία φέρουσα γραμμή. Η ακτινική κατανομή φόρτισης μοντελοποιείται χρησιμοποιώντας προσδεμένη στροβιλότητα με ακτινικά μεταβαλλόμενη ένταση $\Gamma(r)$. Για την ικανοποίηση του πρώτου νόμου του Helmholtz (συνέχεια στροβιλότητας) ένα ακολουθούν φύλλο στροβιλότητας ξεκινά από το χείλος εκφυγής κάθε πτερυγίου. Για μία ευρηματική ικανοποίηση των άλλων δύο νόμων του Helmholtz (δυναμική της στροβιλότητας), χρησιμοποιείται συνήθως μία προαποφασισμένη γεωμετρία για το ακολουθούν φύλλο στροβιλότητας ή χρησιμοποιείται μία «wake relaxation» μέθοδος με αυξημένο υπολογιστικό κόστος ή παραλλαγές της όπως η θεωρία του Lerbs σύμφωνα με την οποία οι δυναμικοί νόμοι του Helmholtz ικανοποιούνται μόνο στα σημεία της φέρουσας γραμμής. Η μη γραμμική αυτή εκδοχή της θεωρίας φέρουσας γραμμής συνήθως δίνει καλές προβλέψεις για την υδροδυναμική συμπεριφορά της έλικας.

5.4 Αλγόριθμος SIMPLE

Παρακάτω περιγράφεται ο αλγόριθμος SIMPLE των Patankar και Spalding για την επίλυση των εξισώσεων RANS. Ο αλγόριθμος αυτός είναι ένας γενικός αλγόριθμος που μπορεί να χρησιμοποιηθεί μεταξύ άλλων και σε ελλειπτικού τύπου πεδία ροής. Με τη μέθοδο SIMPLE στους κόμβους του αριθμητικού πλέγματος αποθηκεύονται βαθμωτά μεγέθη όπως η πυκνότητα, η πίεση κτλ. Οι ταχύτητες αποθηκεύονται μεταξύ των κόμβων. Στον κόμβο δηλαδή (I,J,K) τα μεγέθη P(I,J,K) και ρ(I,J,K), ενώ η ταχύτητα U(I,J,K) βρίσκεται στο μέσο των δύο κόμβων (I,J,K) και (I1,J,K), αντίστοιχα και για τις ταχύτητες στις άλλες δύο διευθύνσεις. Ο λόγος για τον οποίο συμβαίνει αυτό βρίσκεται στο φυσικό σύνδεσμο μεταξύ ταχύτητας και κλίσης πίεσης, δηλαδή η ταχύτητα U(I,J,K) να επηρεάζεται όχι από την πίεση P(I,J,K) αλλά από τη διαφορά των πιέσεων P(I,J,K) και P(I-1,J,K). Η διάταξη αυτή αποθήκευσης των ταχυτήτων καλείται μετατοπισμένη διάταξη πλέγματος.



Σχήμα 5.2 Το μετατοπισμένο πλέγμα και οι θέσεις των ταχυτήτων και των βαθμωτών μεγεθών

Οι εξισώσεις ορμής και τύρβης ολοκληρώνονται στους όγκους ελέγχου και λαμβάνοντας υπόψη την εξίσωση συνέχειας καταλήγουμε στην παρακάτω μορφή:

$C_P\Phi_P = C_E\Phi_E + C_W\Phi_W + C_N\Phi_N + C_S\Phi_S + C_D\Phi_D + C_U\Phi_U + S_\Phi\, \Delta\chi\, \Delta y\, \Delta z$ (5.15)

Όπου N, S, E, W είναι οι γειτονικοί κόμβοι του κεντρικού P. Με την παραπάνω εξίσωση πεπερασμένων διαφορών η τιμή της Φ στο σημείο P συνδέεται με τις τιμές του Φ σε όλα τα γύρω σημεία, δηλαδή η εξίσωση είναι ελλειπτικού χαρακτήρα. Οι συντελεστές Ci, i= N, S, E, W, D, U αντιπροσωπεύουν την ολοκληρωτική επίδραση των όρων μεταφοράς και διάχυσης οι οποίοι υπάρχουν στις αρχικές διαφορικές εξισώσεις. Με τη μεθοδολογία που ακολουθήσαμε για το βαθμωτό μέγεθος Φ, εξισώνουμε τις διαφορικές εξισώσεις ορμής σε επιφάνεια περιβάλλουσα τη θέση των ταχυτήτων και βρίσκουμε τις εξισώσεις πεπερασμένων διαφορών για τις ταχύτητες U, V, W.

$$(C_P^u - b^u)U_P = \sum_i C_i^u U_i - \Delta y \Delta z (P_W - P_P) + c^u \quad (5.16)$$

$$(C_P^v - b^v)V_P = \sum_i C_i^v V_i - \Delta x \Delta z (P_P - P_S) + c^v \quad (5.17)$$

$$(C_P^w - b^w)W_P = \sum_i C_i^w W_i - \Delta y \Delta y (P_P - P_U) + c^w \quad (5.18)$$

Όπου i= N, S, E, W, D, U

Για την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων πεπερασμένων διαφορών για τις ταχύτητες απαιτείται η γνώση των πιέσεων. Ο υπολογισμός των πιέσεων γίνεται ως ακολούθως:

Αν υποθέσουμε ότι οι πιέσεις είναι γνωστές, έστω P^*, τότε το σύστημα εξισώσεων θα μπορούσε να λυθεί και να δώσει τις τιμές ταχύτητας του πεδίου ροής U_{P^*}, V_{P^*}, W_{P^*}. Αλλά το πεδίο ροής που υπολογίσθηκε δεν ικανοποιεί κατ' ανάγκη την εξίσωση συνέχειας γιατί οι ταχύτητες υπολογίσθηκαν με βάση την πίεση P^*, επομένως θα υπάρχουν στον όγκο ελέγχου μη μηδενικά ισοζύγια μάζας τα οποία όμως θα έπρεπε να είναι μηδέν αν το πεδίο πιέσεων είναι σωστό. Η μέθοδος εύρεσης των πιέσεων βασίζεται ακριβώς στην ιδέα ότι οι πιέσεις πάνω στις οποίες βασίσθηκε ο υπολογισμός των ταχυτήτων U_{P^*}, V_{P^*}, W_{P^*} διορθώνονται ώστε να επιτύχουμε τελικά μηδενικά ισοζύγια μάζας στον όγκο ελέγχου.

Υποθέτουμε ότι η ταχύτητα U είναι μόνο συνάρτηση του ΔP δηλαδή:

$$U = U_P^* + \frac{\partial U}{\partial(\Delta P)}\delta(\Delta P) \quad (5.19)$$

Άρα

$$U_P = U_P^* + \frac{\partial U}{\partial(\Delta P)}(P_P' - P_W') \qquad (5.20)$$

Όπου P_P' και P_W' είναι οι διορθώσεις στις πιέσεις P_P^* P_W^* ώστε U_P να είναι μία ακριβέστερη ταχύτητα.

Από την εξίσωση πεπερασμένων διαφορών για την ταχύτητα U έχουμε προσεγγιστικά ότι:

$$\frac{\partial U}{\partial(\Delta P)} = -\frac{\Delta_y \Delta_z}{(C_P^u - b^u)} = -DU_W \qquad (5.21)$$

Οπότε

$$U_P = U_P^* - DU_W(P_P' - P_W') \qquad (5.22)$$

Ομοίως και για τις ταχύτητες στις άλλες διευθύνσεις.

Αντικαθιστώντας τις ακριβείς τιμές ταχυτήτων στην εξίσωση συνέχειας και με αντικατάσταση των τιμών U,V,W από τις εκφράσεις (5.22) καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$C_P^p P_P^p = \sum_i C_i^p \, P_i' + m_p^* \qquad (5.23)$$

Η εξίσωση αυτή είναι μορφολογικά ίδια με τις εξισώσεις πεπερασμένων διαφορών για τις ταχύτητες (5.16), (5.17), (5.18) και επιλυόμενη μας δίνει τις διορθώσεις που πρέπει να γίνουν στις πιέσεις ώστε να ικανοποιείται η εξίσωση της συνέχειας. Συνεπώς το γενικό πρόγραμμα του ηλεκτρονικού υπολογιστή για την επίλυση των τεσσάρων εξισώσεων πεπερασμένων διαφορών που εκφράζουν το πεδίο ροής έχει την εξής μορφή:

1. Υποθέτουμε ότι έχουμε μία πρώτη λύση του πεδίου ροής U, V, W, P^*.

2. Επιλύουμε τις εξισώσεις διαφορών για τις ταχύτητες U, V, W βασιζόμενοι στο πεδίο πιέσεων P^* και άρα βρίσκουμε U^*, V^*, W^*.

3. Υπολογίζουμε τις ποσότητες $mp*$ και επιλύουμε την εξίσωση (5.23) για τις διορθώσεις στις πιέσεις P_P'.

4. Λαμβάνουμε νέες τιμές πίεσης και νέες τιμές ταχυτήτων και επαναλαμβάνουμε τα βήματα 2 και 4 μέχρι την επίτευξη της σύγκλισης των τιμών των ταχυτήτων.

Κεφάλαιο 6ο : Αποτελέσματα και συμπεράσματα

6.1 Αποτελέσματα Αριθμητικών υπολογισμών ρυμούλκησης

Σε αυτό το σημείο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που προέκυψαν για το ρυμουλκούμενου πλοίο, δηλαδή χωρίς τη διαταραχή που προκαλείται από τη δράση της έλικας στην περιοχή της. Οι υπολογισμοί έγιναν κάτω από την ελεύθερη επιφάνεια που προέκυψε τόσο από τη θεωρία δυναμικού όσο και από την θεωρία της συνεκτικής ροής για το design draft (12.20m) σε ισοβύθιστη κατάσταση (trim=0). Στους παρακάτω πίνακες ο C_F είναι ο συντελεστής της συνιστώσας της αντίστασης που παράγεται με ολοκλήρωση στην επιφάνεια της γάστρας του πλοίου των εφαπτομενικών τάσεων (τάσεις συνεκτικότητας) και προβολή κατά τη διεύθυνση της ροής, ο C_P είναι ο αντίστοιχος της συνιστώσας της αντίστασης που παράγεται με ολοκλήρωση στην επιφάνεια της γάστρας του πλοίου των κάθετων τάσεων (δυνάμεις πίεσης) και προβολή κατά τη διεύθυνση της ροής.

$$C_F = \frac{F}{\frac{1}{2}\rho\, S\, u_a^2}, \qquad C_P = \frac{P}{\frac{1}{2}\rho\, S\, u_a^2},\ C_T = C_F + C_P \qquad (6.1)$$

Όπου F, P είναι οι ολοκληρωμένες δυνάμεις τριβής και πίεσης.

REYNOLD NUMBER	$1.33\ 10^{9}$
FROUDE NUMBER	$1.7862\ 10^{-1}$
FLUID VELOCITY [m/s]	8.414
SHIP LWL [m]	226.2
FLUID VISCOCITY [m^2/s]	$1.431\ 10^{-6}$
YREF [m]	-7.8
TRIM [m]	0.0

Πίνακας 6.1 Δεδομένα εισαγωγής για το νερό και το πλοίο

	Potential Free Surface	Viscous Free Surface
C_T	2,6004E-03	2,4157E-03
C_F	1,4973E-03	1,5003E-03
C_P	1,1031E-03	9,1539E-04
C_F-ITTC	1,4779E-03	1,4779E-03
C_F-ATTC	1,4785E-03	1,4785E-03
κ-ITTC	7,5960E-01	6,3459E-01
κ-ATTC	7,5884E-01	6,3388E-01
$1-w_n$	7,2541E-01	7,2633E-01
Wet. Surface [m^2]	11325,255	11312,163
Resistance [kp]	1,0893E+05	1,0107E+05
Resistance [Nt]	1,0686E+06	9,9153E+05
EHP [kW]	8,9913E+03	8,3429E+03
Ptransom [Nt]	-3,6275E+05	-1,3913E+05
Wet Area Transom [m^2]	3,6255E+01	1,3662E+01

Πίνακας 6.2 Αποτελέσματα ρυμουλκούμενου πλοίου

Ο k είναι συντελεστής μορφής που ορίζεται μέσω του $C_F=(1+\kappa)\ C_{F1}$ (6.2), όπου ο C_{F1} είναι ο συντελεστής αντίστασης τριβής της επίπεδης πλάκας της ITTC και ATTC αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι για την περίπτωση της δυναμικής ροής τόσο η ITTC όσο και η ATTC υποεκτιμούν τον συντελεστή αντίστασης τριβής κατά 1,3%. Επίσης, το ίδιο συμβαίνει και στην περίπτωση της συνεκτικής ροής κατά 1,5%.

Αξιοσημείωτη επίσης είναι η διαφορά όσο αφορά την αντίσταση της γάστρας μεταξύ των δύο μεθόδων. Όπως φαίνεται στον πίνακα 6.3, στην περίπτωση όπου έγινε προσέγγιση της ελεύθερης επιφάνειας με την θεωρία του δυναμικού, ο συντελεστής αντίστασης και κατά συνέπεια ο συντελεστής αντίστασης ρυμούλκησης C_T είναι 7,1% μεγαλύτερος από την περίπτωση της πραγματικής ελεύθερης επιφάνειας. Με βάση την διαίρεση της αντίστασης (σχέση 6.1) $C_T = C_F + C_P$, και δεδομένου ότι η διαφορά στον συντελεστή τριβής C_F είναι της τάξεως του 0,2% και η διαφορά στον συντελεστή πίεσης C_P της τάξεως του 17,02%, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι η διαφορά στην ολική αντίσταση έγκειται κυρίως στο τρόπο

εκτίμησης των κάθετων δυνάμεων που ασκεί το νερό στην γάστρα της κάθε μεθόδου. Τα παραπάνω μας οδηγούν στην διαφορά του 7,21% μεταξύ των δύο υπολογιζόμενων αντιστάσεων.

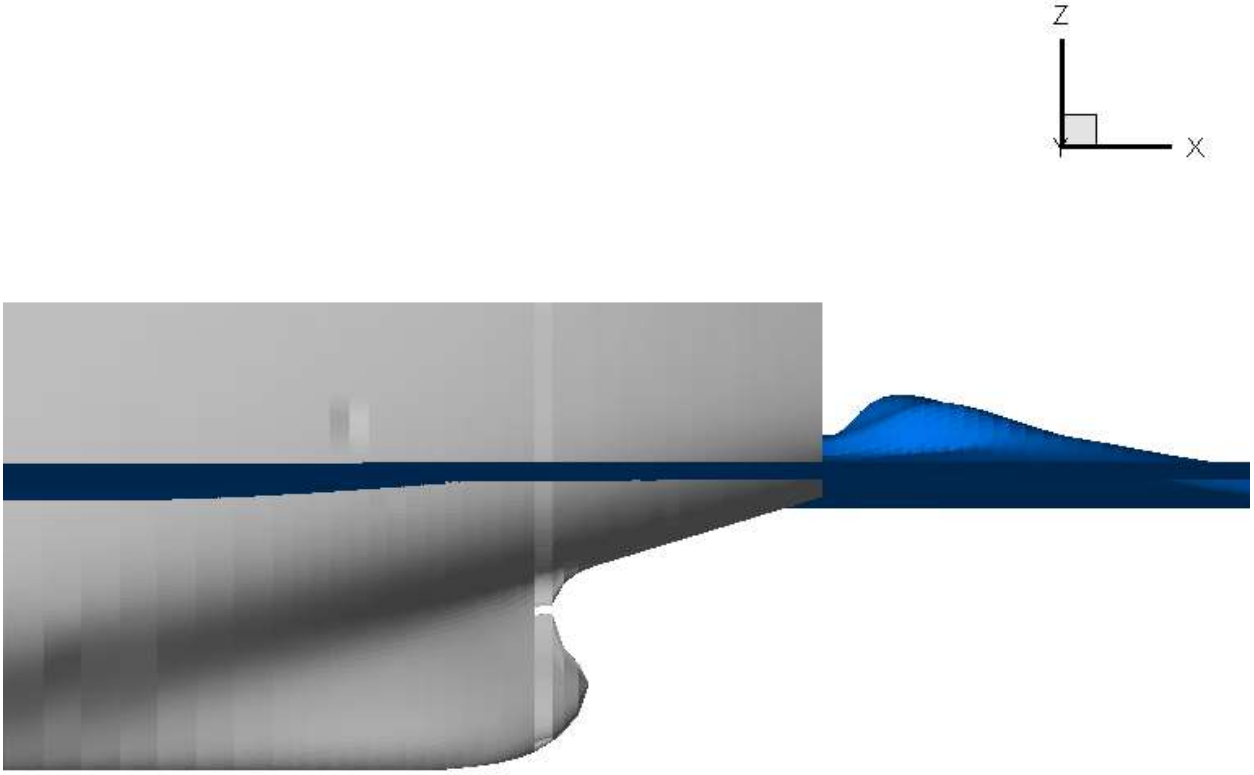
	Potential Free Surface	Viscous Free Surface	Deviation
C_T	2,6004E-03	2,4157E-03	7,10%
C_F	1,4973E-03	1,5003E-03	0.20%
C_P	1,1031E-03	9,1539E-04	17,02%
Resistance [N]	1,0686E+06	9,9153E+05	7.21%

Πίνακας 6.3 Σύγκριση συντελεστών αντίστασης ρυμουλκούμενου πλοίου

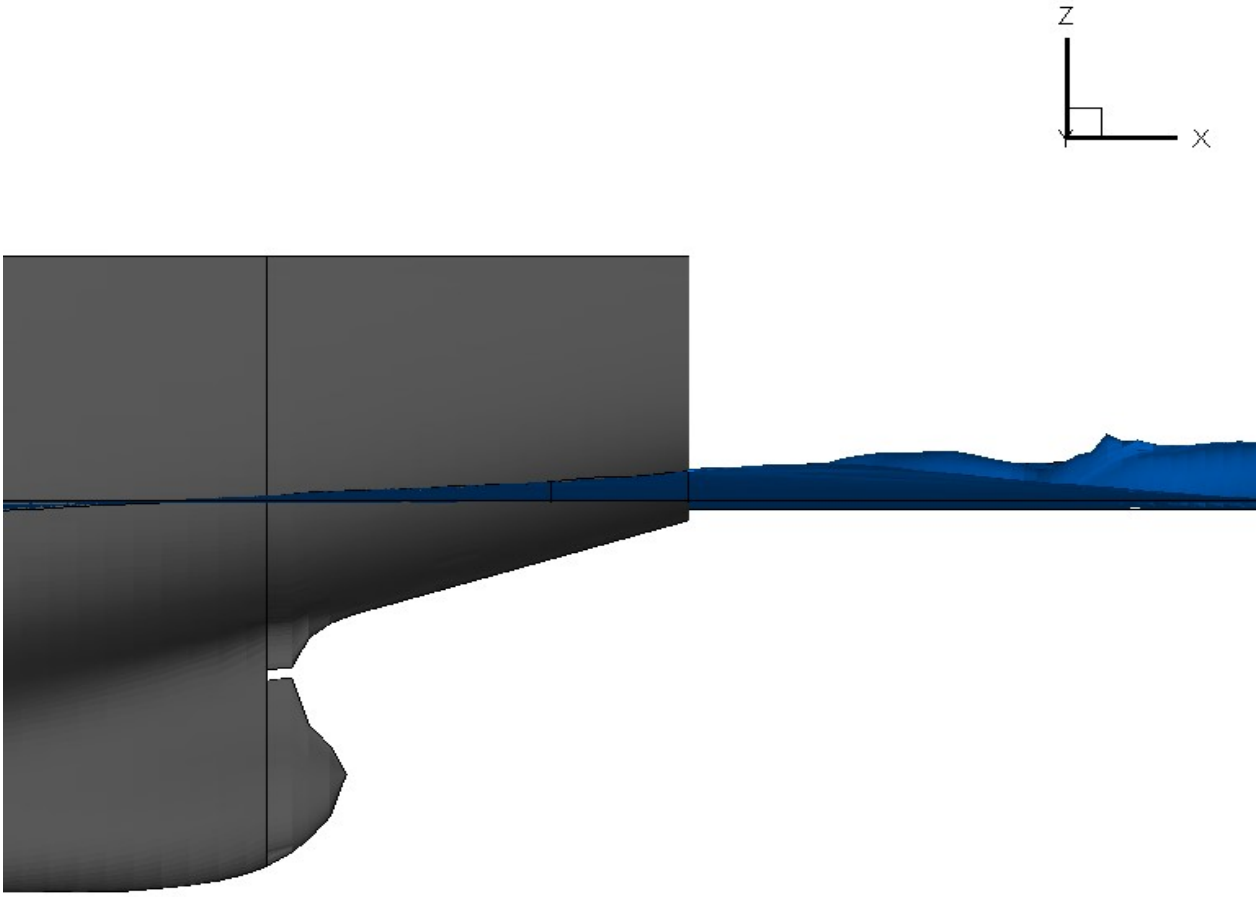
Η διαφορά στο συντελεστή πίεσης μεταξύ των δύο περιπτώσεων που εξετάστηκαν, οφείλεται κυρίως στο γεγονός ότι η μορφολογία της ελεύθερης επιφάνειας του νερού είναι αρκετά διαφορετική στην περιοχή της πρύμνης και πιο συγκεκριμένα στον καθρέπτη (transom) που διαθέτει το συγκεκριμένο πλοίο. Στον παρακάτω πίνακα εμφανίζονται τα αποτελέσματα για τα βρεχάμενα στην περιοχή του καθρέπτη. Η διαφορά φαίνεται τόσο οπτικά από τα σχήματα 6.1 και 6.2 όσο και από τους αριθμητικούς υπολογισμούς όπου στην περίπτωση του δυναμικού είναι 62,32% μεγαλύτερη από την περίπτωση της συνεκτικής ροής και κατά συνέπεια οι πιέσεις που αναπτύσσονται στην περιοχή αυτή είναι και αυτές μεγαλύτερες κατά 61,65%, όπως φαίνεται και στον πίνακα 6.4.

	Potential Free Surface	Viscous Free Surface	Deviation
Ptransom [Nt]	-3,6275E+05	-1,3913E+05	61.65%
Wet Area Transom [m^2]	3,6255E+01	1,3662E+01	62.32%

Πίνακας 6.4 Σύγκριση δεδομένων της περιοχής του καθρέπτη



Σχήμα 6.1 Μορφή ελεύθερης επιφάνειας του καθρέπτη με την θεωρία του δυναμικού



Σχήμα 6.2 Μορφή ελεύθερης επιφάνειας του καθρέπτη με βάση την συνεκτική ροή

Αναφορικά με τον ονομαστικό συντελεστή ομόρου ($1-w_n$) που προέκυψε από τις δύο περιπτώσεις, παρατηρείται μια αμελητέα διαφορά της τάξεως του 0,13% όπως φαίνεται στον πίνακα 6.5.

	Potential Free Surface	Viscous Free Surface	Deviation
$1-w_n$	0.72541	0.72633	0.13%

Πίνακας 6.5 Ονομαστικός συντελεστής ομόρου

6.2 Αποτελέσματα Αριθμητικών υπολογισμών Αυτοπρόωσης

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, κύριος σκοπός της συγκεκριμένης εργασίας είναι η σύγκριση των δύο αριθμητικών μεθόδων που εφαρμόστηκαν για τους αριθμητικούς υπολογισμούς της αυτοπρόωσης. Η πρώτη αριθμητική διαδικασία όπως περιεγράφηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο περιλαμβάνει την επίλυση των εξισώσεων RANS κάτω από την καθορισμένη από την θεωρεία του δυναμικού ελεύθερη επιφάνεια ενώ η δεύτερη αριθμητική μεθοδολογία επιλύει τις συγκεκριμένες εξισώσεις με την πραγματική ελεύθερη επιφάνεια του νερού όπως υπολογίστηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο. Η παρουσίαση και σύγκριση των δύο μεθόδων, τόσο μεταξύ τους όσο και με τα δεδομένα από τα sea trials του πλοίου, θα εξεταστεί παρακάτω. Για κάθε αριθμητική μέθοδο, παρουσιάζονται δύο εκδοχές προσομοίωσης της προπέλας μέσω του δίσκου ορμής, μια εκδοχή με την θεωρία φέρουσας γραμμής (lifting line) και άλλη μία με βάση τα πολυώνυμα βελτιστοποίησης των σειρών Wagenigen.

Έτσι δημιουργούνται τέσσερα αρχεία προσομοίωσης του αυτοπροωθούμενο προβλήματος όπως φαίνεται στους παρακάτω πίνακες.

REYNOLD NUMBER	$1.33\ 10^{9}$
FROUDE NUMBER	$1.7862\ 10^{-1}$
FLUID VELOCITY [m/s]	8.414
SHIP LWL [m]	226.2
FLUID VISCOCITY [m^2/s]	$1.431\ 10^{-6}$
YREF [m]	-7.8
TRIM [m]	0.0

Πίνακας 6.6 Χαρακτηριστικά στοιχεία της ροής και του πλοίου

P/D	0,8
AE/A0	0,525
Z	4

Πίνακας 6.7 Χαρακτηριστικά στοιχεία της έλικας

	POTENTIAL / LIFTING LINE	POTENTIAL / WAGENIGEN	VISCOUS / LIFTING LINE	VISCOUS / WAGENIGEN
$1-W_{NOM}$	0,725429	0,725429	0,726338	0,726338
$1-W_{EFF}$	0,720796	0,686859	0,722987	0,688319
1-T	0,90247	0,904901	0,852738	0,855544
K_T	0,165207	0,176935	0,163791	0,175444
K_Q	0,022485	0,024288	0,022314	0,024137
RPM	108,547478	104,75206	108,001114	104,188095
J	0,493000	0,48681	0,497000	0,490485
PE	0,585343	0,564419	0,589108	0,56742
DHP	12467,00	12103,00	12186,44	11834,57
THRUST	1,1850E+06	1,1818E+06	1,1631E+06	1,1593E+06
TORQUE	1,0967E+06	1,1033E+06	1,0774E+06	1,0846E+06
H_{PROP}	0,73288	0,74359	0,69483	0,70527
WET. SURFACE	11325,225	11325,225	11312,163	11312,163
RESISTANCE	1,1850E+06	1,1818E+06	1,1631E+06	1,1593E+06
CT	2,8838E-03	2,8760E-03	2,8330E-03	2,8243E-03
CF	1,5065E-03	1,5065E-03	1,5090E-03	1,5096E-03
CP	1,3772E-03	1,3695E-03	1,3240E-03	1,3147E-03

Πίνακας 6.8 Συγκεντρωτικός Πίνακας στοιχείων των τεσσάρων αριθμητικών μεθόδων

Σε αυτό το σημείο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα μεταξύ των μεθόδων που εφαρμόστηκαν όσο αφορά το αυτοπροωθούμενο πλοίο. Αρχικά, γίνεται μια σύγκριση μεταξύ των συντελεστών τριβής C_F, πίεσης C_P και ολικής αντίστασης C_T όπως και έγινε προηγουμένως για το ρυμουλκούμενο πλοίο.

Το αυτοπροωθούμενο πλοίο κινείται με τη βοήθεια της έλικας κοντά στην ελεύθερη επιφάνεια του περιβάλλοντος νερού, συνεπώς σχετικά με την κατανόηση του φαινομένου της ροής του ρευστού γύρω από το αυτοπροωθούμενο πλοίο εξακολουθούν να ισχύουν τα όσα συμβαίνουν στην περίπτωση του ρυμουλκούμενου πλοίου, λαμβάνοντας υπόψη την τοπική τροποποίηση της ροής στην πρύμνη λόγω της λειτουργίας της έλικας και λαμβάνοντας υπόψη ότι η έλικα πλέον δεν λειτουργεί σε παράλληλη ροή ταχύτητας V αλλά σε μία ροή που δημιουργεί το πλοίο λόγω του οριακού στρώματός του, όπως τροποποιείται από τη δράση της έλικας, με αυτή την έννοια ορίζεται και η πραγματική ταχύτητα ομόρου. Το οριακό στρώμα του πλοίου, αναδιαμορφωμένο και από τη δράση της έλικας, «μπλοκάρει» τη ροή προς την έλικα λόγω της συνθήκης μη

ολίσθησης στη γάστρα, στον άξονα της έλικας κ.τ.λ., με αποτέλεσμα η έλικα να βλέπει ανομοιόμορφο πεδίο ταχύτητας ρευστού και στις τρεις διευθύνσεις (αξονική, γωνιακή, ακτινική).

Στους παρακάτω πίνακες γίνεται μια σύγκριση των συντελεστών αντίστασης μεταξύ των μεθόδων της δυναμικής ροής και της συνεκτικής, με την ίδια μεθοδολογία όσο αφορά την προπέλα. Οπότε προκύπτουν τα εξής:

	Potential / Lifting Line	Viscous / Lifting Line	Deviation
CT	2.8838E-03	2.8330E-03	1.79%
CF	1.5065E-03	1.5090E-03	0.21%
CP	1.3772E-03	1.3240E-03	4.02%
Resistance [N]	1.1850E+06	1.1631E+06	1.85%

Πίνακας 6.9 Σύγκριση Δυναμικής και Συνεκτικής Ροής με Προπέλα Lifting Line

	Potential / Wagenigen	Viscous / Wagenigen	Deviation
CT	2.8760E-03	2.8243E-03	1.83%
CF	1.5065E-03	1.5096E-03	0.21%
CP	1.3695E-03	1.3147E-03	4.17%
Resistance [N]	1.1818E+06	1.1593E+06	1.90%

Πίνακας 6.10 Σύγκριση Δυναμικής και Συνεκτικής Ροής με Προπέλα Wagenigen

Όπως φαίνεται στους παραπάνω πίνακες, μεταξύ των δύο αριθμητικών μεθόδων ο συντελεστής τριβής C_F είναι περίπου αμετάβλητος μεταξύ των δύο μεθόδων (της τάξεως του 0,15~0.2%). Ενώ ο συντελεστής πίεσης C_P είναι μεγαλύτερος όσο αφορά την προσέγγιση με την θεωρεία του δυναμικού (της τάξεως του 4~4,1%). Αυτή η διαφορά έγκειται στο γεγονός της διαφοροποίησης της ελεύθερης επιφάνειας στην περιοχή της πρύμνης. Στην περιοχή του transom στην περίπτωση της ελεύθερης επιφάνειας με την θεωρεία του δυναμικού, η βρεχόμενη επιφάνεια του καθρέπτη είναι πολύ μεγαλύτερη από αυτήν της περίπτωσης της πραγματικής ελεύθερης επιφάνειας υπολογιζόμενη με την συνεκτική ροή, εξαιτίας της μορφής των κυματισμών που παράγονται.

Πιο συγκεκριμένα το πρόγραμμα υπολογίζει τα βρεχάμενα και την ολοκλήρωση των κάθετων πιέσεων στον καθρέπτη και παρουσιάζονται στον πίνακα 6.11.

	Potential free Surface	Viscous free Surface	Deviation
Ptransom [Nt]	-4.1657E+05	-1.4805E+05	64.46%
Wet Area Transom [m^2]	36.255	13.662	62.32%

Πίνακας 6.11 Βρεχάμενα και Πίεση στην περιοχή του καθρέπτη

Στους παρακάτω πίνακες γίνεται μια σύγκριση των συντελεστών αντίστασης με την ίδια μεθοδολογία όσο αφορά τον υπολογισμό της ελεύθερης επιφάνειας αλλά με διαφορετική προσέγγιση για την προπέλα. Οπότε προκύπτουν τα εξής:

	Potential / Lifting Line	Potential / Wagenigen	Deviation
CT	2.8838E-03	2.8760E-03	0.27%
CF	1.5065E-03	1.5065E-03	0.00%
CP	1.3772E-03	1.3695E-03	0.56%

Πίνακας 6.12 Σύγκριση Μεθόδου lifting line και Wagenigen με δυναμική ροή

	Viscous / Lifting Line	Viscous / Wagenigen	Deviation
CT	2.8330E-03	2.8243E-03	0.31%
CF	1.5096E-03	1.5096E-03	0.00%
CP	1.3240E-03	1.3147E-03	0.71%

Πίνακας 6.13 Σύγκριση Μεθόδου lifting line και Wageningen με συνεκτική ροή

Όπως φαίνεται παραπάνω, η επιλογή της μεθοδολογίας της προπέλας έχει μικρή διαφορά μόνο στον συντελεστή C_P, ενώ ο συντελεστής τριβής C_F παραμένει αμετάβλητός. Το γεγονός αυτό οφείλεται στο ότι η λειτουργία της προπέλας επηρεάζει αποκλειστικά και μόνο το πεδίο πίεσης στην περιοχή της πρύμνης. Μεταξύ των δύο προσεγγίσεων της ροής παρατηρούμε την ίδια τάση όσο αφορά τον συντελεστή C_P να είναι ελάχιστα μεγαλύτερος (0,56~0,71%) στην περίπτωση της θεωρίας φέρουσας γραμμής (Lifting Line).

Λαμβάνοντας υπόψη την τοπική τροποποίηση της ροής στην πρύμνη λόγω της λειτουργίας της έλικας και ότι η έλικα πλέον δεν λειτουργεί σε παράλληλη ροή ταχύτητας V αλλά σε μία ροή που δημιουργεί το πλοίο λόγω του οριακού στρώματός του, όπως τροποποιείται από τη δράση της έλικας, με αυτή την έννοια ορίζεται και η πραγματική ταχύτητα ομόρου. Το οριακό στρώμα του πλοίου, αναδιαμορφωμένο και από τη δράση της έλικας, «μπλοκάρει» τη ροή προς την έλικα λόγω της συνθήκης μη ολίσθησης στη γάστρα, στον άξονα της έλικας κ.τ.λ., με αποτέλεσμα η έλικα να βλέπει ανομοιόμορφο πεδίο ταχύτητας ρευστού και στις τρεις διευθύνσεις (αξονική, γωνιακή, ακτινική). Σύμφωνα με τα παραπάνω, ακολουθεί μια σύγκριση μεταξύ των υπολογισμένων ποσοστών πραγματικού ομόρου από τα αριθμητικά μοντέλα που χρησιμοποιήθηκαν.

Βασιζόμενοι στα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στους πίνακες 6.14 και 6.15, το ποσοστό πραγματικού ομόρου έχει μικρή απόκλιση μεταξύ της επίλυσης με την θεωρία του δυναμικού και την συνεκτική ροή για ίδια μεθοδολογία προσομοίωσης της έλικας.

	Potential / Lifting Line	Viscous / Lifting Line	Deviation
$1-w_{eff}$	0.720796	0.722987	0.30%

Πίνακας 6.14 Σύγκριση πραγματικού ομόρου δυναμικής και συνεκτικής λύσης με Lifting line

	Potential / Wagenigen	Viscous / Wagenigen	Deviation
$1-w_{eff}$	0.686859	0.688319	0.21%

Πίνακας 6.15 Σύγκριση πραγματικού ομόρου δυναμικής και συνεκτικής λύσης με Wagenigen

Ενώ, σύμφωνα με τους πίνακες 6.16 και 6.17, το ποσοστό πραγματικού ομόρου έχει αρκετή απόκλιση μεταξύ της επίλυσης με την θεωρία της φέρουσας γραμμής και των σειρών Wagenigen για την ίδια μεθοδολογία προσομοίωσης της ελεύθερης επιφάνειας.

	Potential / Lifting Line	Potential / Wagenigen	Deviation
$1\text{-}w_{eff}$	0.720796	0.686859	4.71%

Πίνακας 6.16 Σύγκριση πραγματικού ομόρου Lifting Line και Wagenigen έλικας με δυναμική ροή

	Viscous /Lifting Line	Viscous / Wagenigen	Deviation
$1\text{-}w_{eff}$	0.722987	0.688319	4.80%

Πίνακας 6.17 Σύγκριση πραγματικού ομόρου Lifting Line και Wagenigen έλικας με συνεκτική ροή

Αναφορικά με το ποσοστό μείωσης ώσης $1 - t = \frac{R_0}{R}$, όπου R_0 είναι η αντίσταση ρυμούλκησης και R είναι η αντίσταση του αυτοπροωθούμενου πλοίου, παρατηρούμε ότι στην περίπτωση της λύσης με την δυναμική ροή είναι μεγαλύτερο (πίνακας 6.18). Το συγκεκριμένο αποτέλεσμα είναι άμεση συνέπεια της διαφοράς στην αντίσταση ρυμούλκησης R_0 μεταξύ των δύο μεθόδων όπως αναφέραμε παραπάνω.

	Potential / Lifting Line	Potential / Wagenigen	Viscous /Lifting Line	Viscous / Wagenigen
1-t	0.90247	0.904901	0,852738	0,855544

Πίνακας 6.18 Ποσοστό μείωσης της ώσης για όλες τις αριθμητικές προσεγγίσεις

Αξιοσημείωτη είναι επίσης η συγκριτική αύξηση της αντίστασης από το ρυμουλκούμενο στο αυτοπροωθούμενο πρόβλημα μεταξύ της δυναμικής και της συνεκτικής επίλυσης. Όπως αναφέρθηκε παραπάνω η αντίσταση του αυτοπροωθούμενου πλοίου είναι μεγαλύτερη σε σχέση με το ρυμουλκούμενο πλοίο εξαιτίας της αντίστασης των παρελκόμενων (στην συγκεκριμένη περίπτωση η έλικα). Η τροποποίηση λόγω της δράσης της έλικας όμως αυξάνει με διαφορετική τάση την αντίσταση στην περίπτωση των δύο εξεταζόμενων αριθμητικών προσεγγίσεων. Στους Πίνακα 6.19 και 6.20 παρουσιάζονται οι τάσεις αύξησης της αντίστασης στο αυτοπροωθούμενο πλοίο για τις δύο μεθόδους.

	Potential / Plain Hull	Potential / Lifting Line [1]	Potential / Wagenigen [2]	Deviation [1]	Deviation [2]
Resistance [N]	1.0686E+06	1.1850E+06	1.1850E+06	10.89%	10.59%

Πίνακας 6.19 Τάσεις αύξησης της αντίστασης ρυμούλκησης για την δυναμική ροή

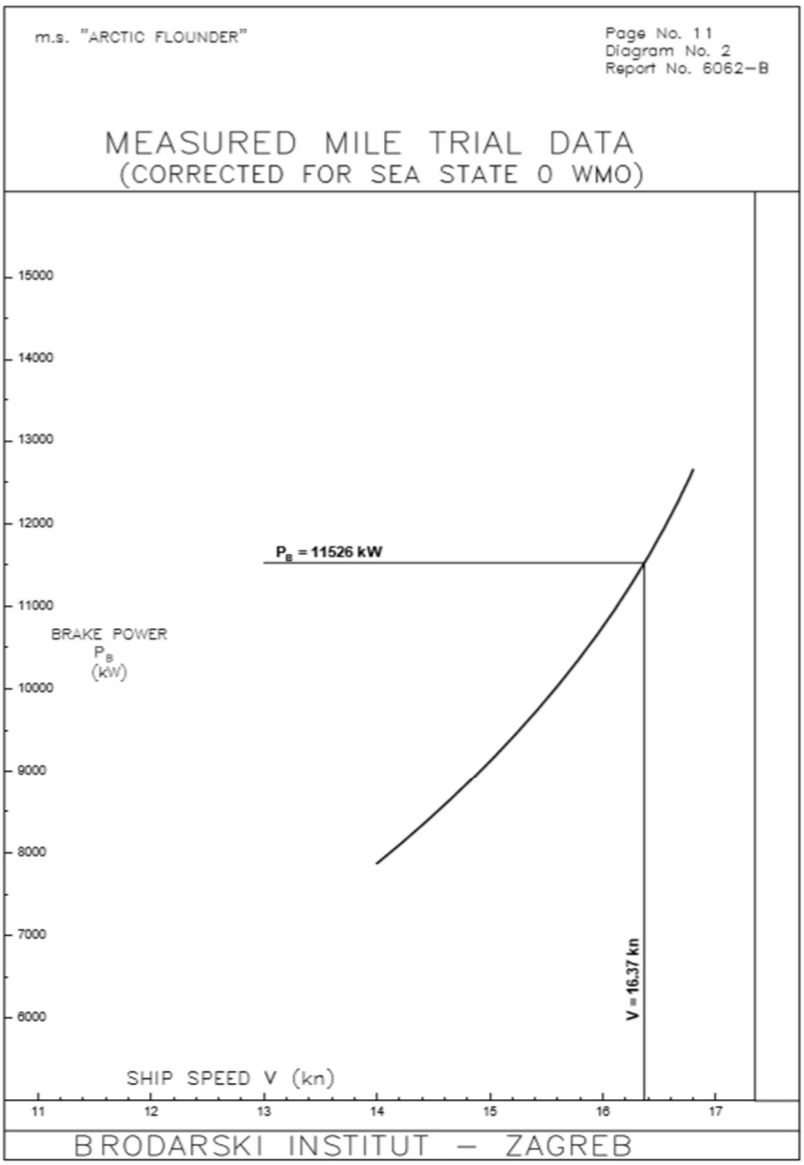
	Viscous / Plain Hull	Viscous / Lifting Line [1]	Viscous / Wagenigen [2]	Deviation [1]	Deviation [2]
Resistance [N]	9.9153E+05	1.11631E+06	1.1593E+06	17.30%	16.92%

Πίνακας 6.20 Τάσεις αύξησης της αντίστασης ρυμούλκησης για την συνεκτική ροή

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η ποσοστιαία αύξηση της αντίστασης για το αυτοπροωθούμενο πλοίο είναι σχετικά μεγαλύτερη στην επίλυση της συνεκτικής ροής (16.92-17.30%) σε σχέση με την δυναμική (10.59-10.89%).

6.3 Σύγκριση αποτελεσμάτων με τα sea trials του πλοίου.

Στο συγκεκριμένο εδάφιο της εργασίας έχουμε την δυνατότητα να αξιολογήσουμε τα αποτελέσματα των αριθμητικών υπολογισμών που πραγματοποιήθηκαν με πραγματικά δεδομένα από τα sea trilas του πλοίου. Τα δεδομένα από τα sea trials είναι η ταχύτητα του πλοίου στα 16,37 kn, η ισχύς στην συγκεκριμένη ταχύτητα P_B= 11526 kW, καθώς επίσης και οι στροφές στον άξονα της έλικας RPM=104.9. Στο σχήμα 6.3 φαίνεται η καμπύλη της ισχύς σε σχέση με την ταχύτητα καθώς επίσης και το σημείο της μέτρησης.



Σχήμα 6.3 Καμπύλη των sea trials (Ισχύς-Ταχύτητα)

Στον παρακάτω πίνακα γίνεται συσχέτιση μεταξύ των αριθμητικών μεθόδων που παρουσιάστηκαν παραπάνω και των sea trial για τα τρία δεδομένα που διαθέτουμε.

	Potential / Lifting Line [1]	Potential / Wagenigen [2]	Viscous / Lifting Line [3]	Viscous / Wagenigen [4]	Sea Trials
RPM	108.55	104.75	108.00	104.19	104.9
DHP [kW]	12467	12103	12186	11834	11526

Πίνακας 6.21 Σύγκριση της ισχύς και των στροφών με τα sea trials

Με βάση τον Πίνακα 6.21 η αριθμητική μέθοδος που προσεγγίζει ακριβέστερα τα δεδομένα των sea trials είναι η [4] (Viscous Flow with Wagenigen Propeller). Ακόμα και η μέθοδος της συνεκτικής ροής με την έλικα από την θεωρία της φέρουσας γραμμής, προσεγγίζει ικανοποιητικότερα την πραγματικότητα σε σχέση με τις άλλες δύο μεθόδους της δυναμικής ροής. Στον επόμενο πίνακα παρουσιάζονται οι ποσοστιαίες διαφορές των παραπάνω μεθόδων με τα sea trials.

	Potential / Lifting Line [1]	Potential / Wagenigen [2]	Viscous / Lifting Line [3]	Viscous / Wagenigen [4]
RPM	3.48%	-0.14%	2.96%	-0.68%
DHP [kW]	8.16%	5.01%	5.73%	2.68%

Πίνακας 6.22 Ποσοστιαία σύγκριση της ισχύς και των στροφών με τα sea trials

Ο παραπάνω πίνακας μας δείχνει την ακρίβεια κάθε αριθμητικής εκτίμησης σχετικά με τα πραγματικά μετρημένα δεδομένα από τις δοκιμές του πλοίου μετά την έξοδό του από το ναυπηγείο. Το ποσοστό του 2.18% της απόκλισης της μεθόδου [4] μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η συνεκτική ροή με προσομοίωση της έλικας από τις σειρές Wagenigen, δίνουν με μεγάλη ακρίβεια αποτελέσματα.

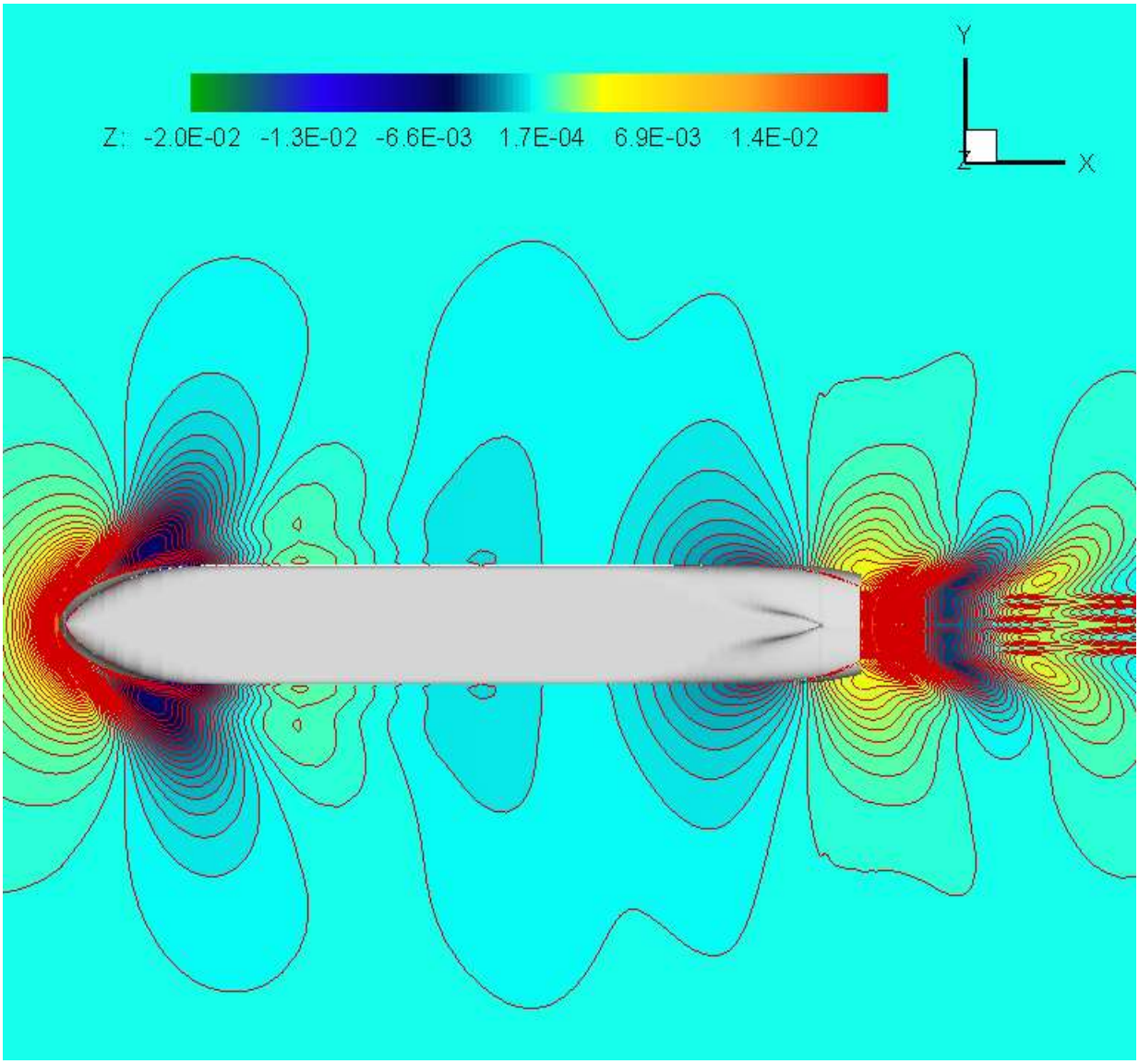
7. Επίλογος

Συνοψίζοντας, από τα αποτελέσματα της συγκεκριμένης διπλωματικής εργασίας είναι φανερό ότι οι αριθμητικές μέθοδοι που εφαρμόστηκαν προσεγγίζουν σε ικανοποιητικό βαθμό τα πραγματικά μετρούμενα μεγέθη από τις δοκιμές που πραγματοποιήθηκαν για το συγκεκριμένο τύπο δεξαμενοπλοίου. Πιο συγκεκριμένα:

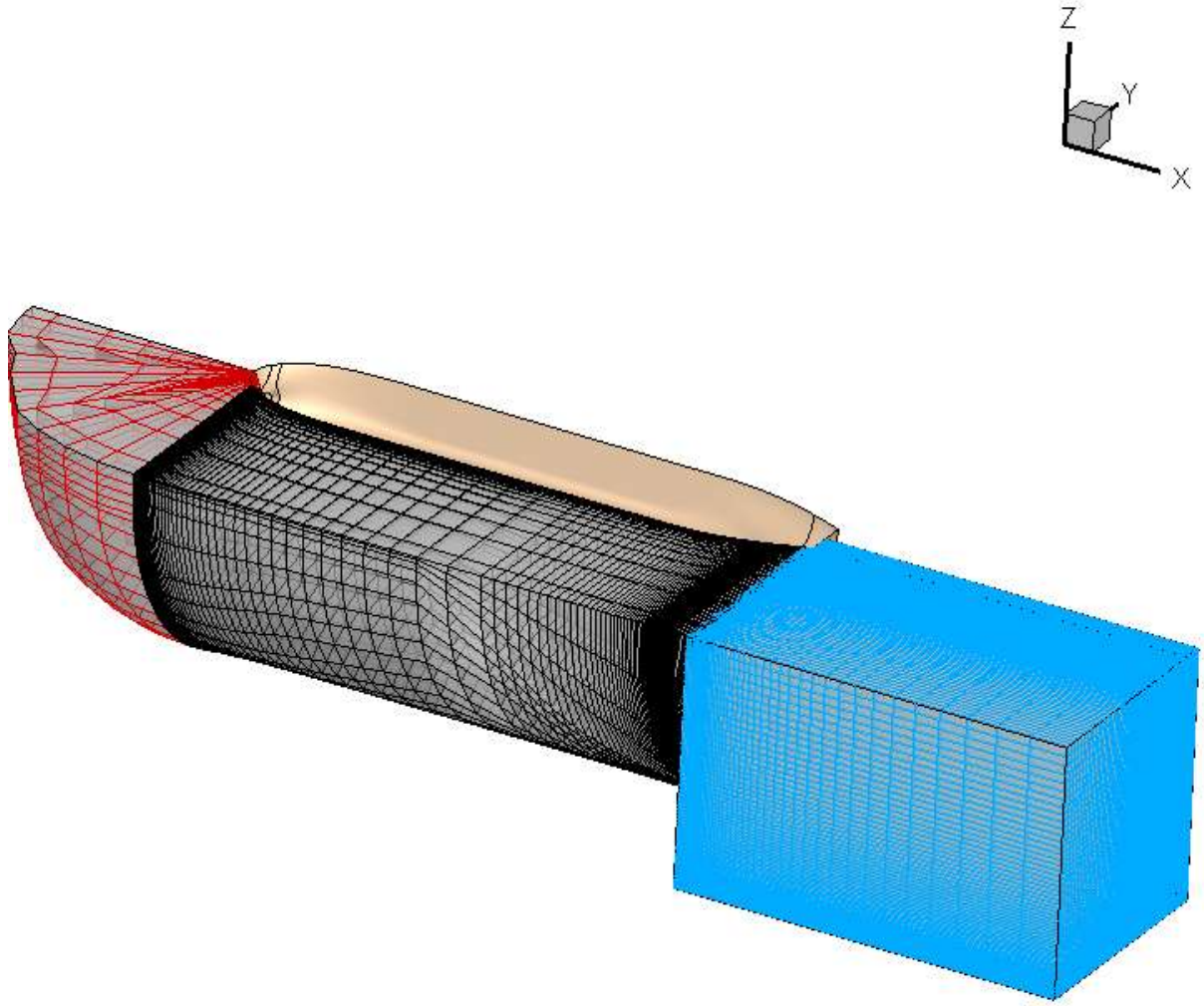
1. Τα αποτελέσματα αποδεικνύουν ότι η επίλυση με την θεωρία της συνεκτικής ροής δίνουν ακριβέστερα αποτελέσματα σε σχέση με την επίλυση με την θεωρία του δυναμικού.
2. Η παραδοχή στην μεθοδολογία της συνεκτικής ροής αναφορικά με την ελεύθερη επιφάνεια να θεωρείται γνωστή από την δυναμική ροή στο πρωραίο τμήμα του υπολογιστικού πεδίου, είναι αφενός υπολογιστικά συμφέρουσα και αφετέρου δεν επηρεάζει την ακρίβεια των αποτελεσμάτων.
3. Όσο αφορά την μορφή της ελεύθερης επιφάνειας, έγινε φανερό ότι αν και η δυναμική προσέγγιση δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα, στην περιοχή του transom όπου τα φαινόμενα ανακυκλοφορίας της ροής είναι έντονα, η προσέγγιση με την θεωρία της συνεκτικής ροής δίνει ακριβέστερη μορφή της ελεύθερης επιφάνειας.
4. Εξαιτίας του υπολογιστικού κόστους της συνεκτικής επίλυσης σε σχέση με την δυναμική, αλλά και της σχετικά μικρής απόκλισης των αποτελεσμάτων του δυναμικού σε σχέση με τα πραγματικά δεδομένα, καθιστά την δυναμική προσέγγιση μια γρήγορη και αποτελεσματική μέθοδο αναφορικά με την προσομοίωση της πραγματικής ροής γύρο από ένα πλοίο.
5. Η μεθοδολογία προσομοίωσης λειτουργίας της έλικας με τις σειρές Wagenigen, δίνει εμφανώς καλύτερες εκτιμήσεις σε σχέση με την θεωρία της φέρουσας γραμμής (Lifting Line).

Τα παραπάνω μας οδηγούν στο να αναγνωρίσουμε την αναγκαιότητα των μεθόδων υπολογιστικής ρευστομηχανικής (CFD) στην προσπάθεια να προσεγγίσουμε την πραγματική ροή γύρω από το αυτοπροωθούμενο πλοίο και να κάνουμε μία ασφαλή εκτίμηση για την ισχύ της προωστήριας εγκατάστασης.

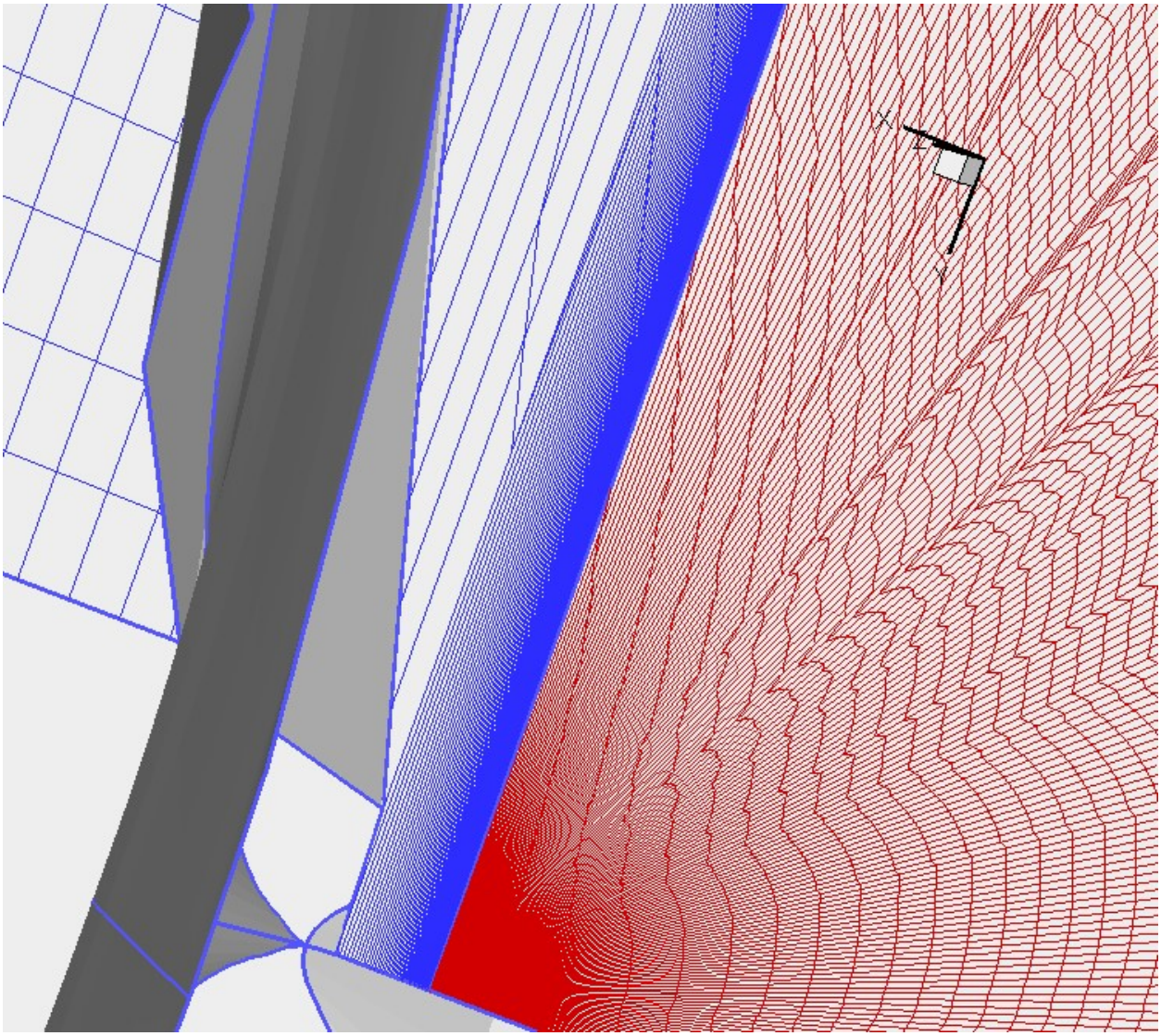
Παράρτημα: Σχήματα από τους υπολογισμούς



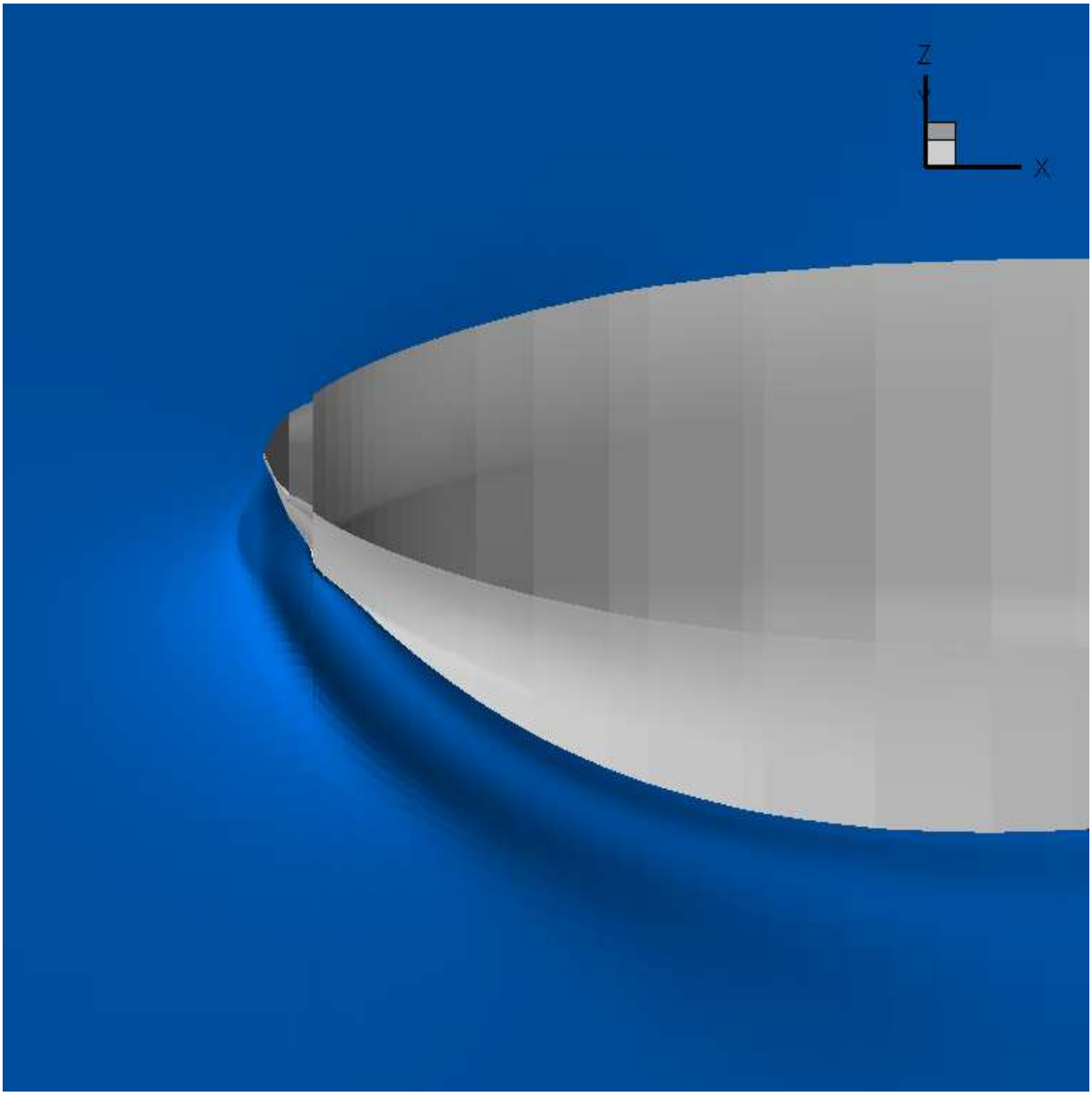
Σχήμα Π.1 Ύψος κυμάτων στην περίπτωση της δυναμικής επίλυσης



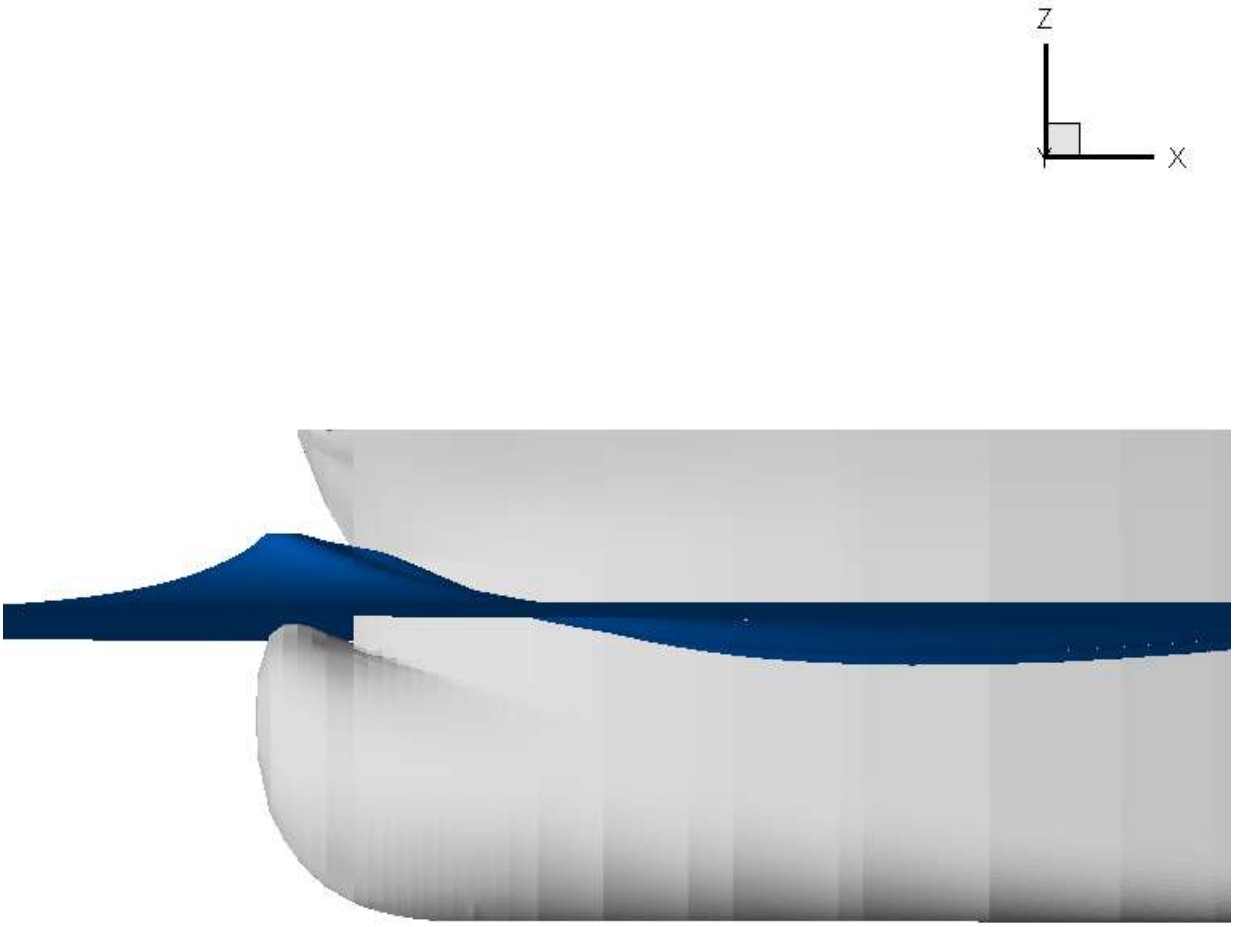
Σχήμα Π.2 Οι περιοχές με διαφορετικού τύπου αριθμητικά πλέγματα



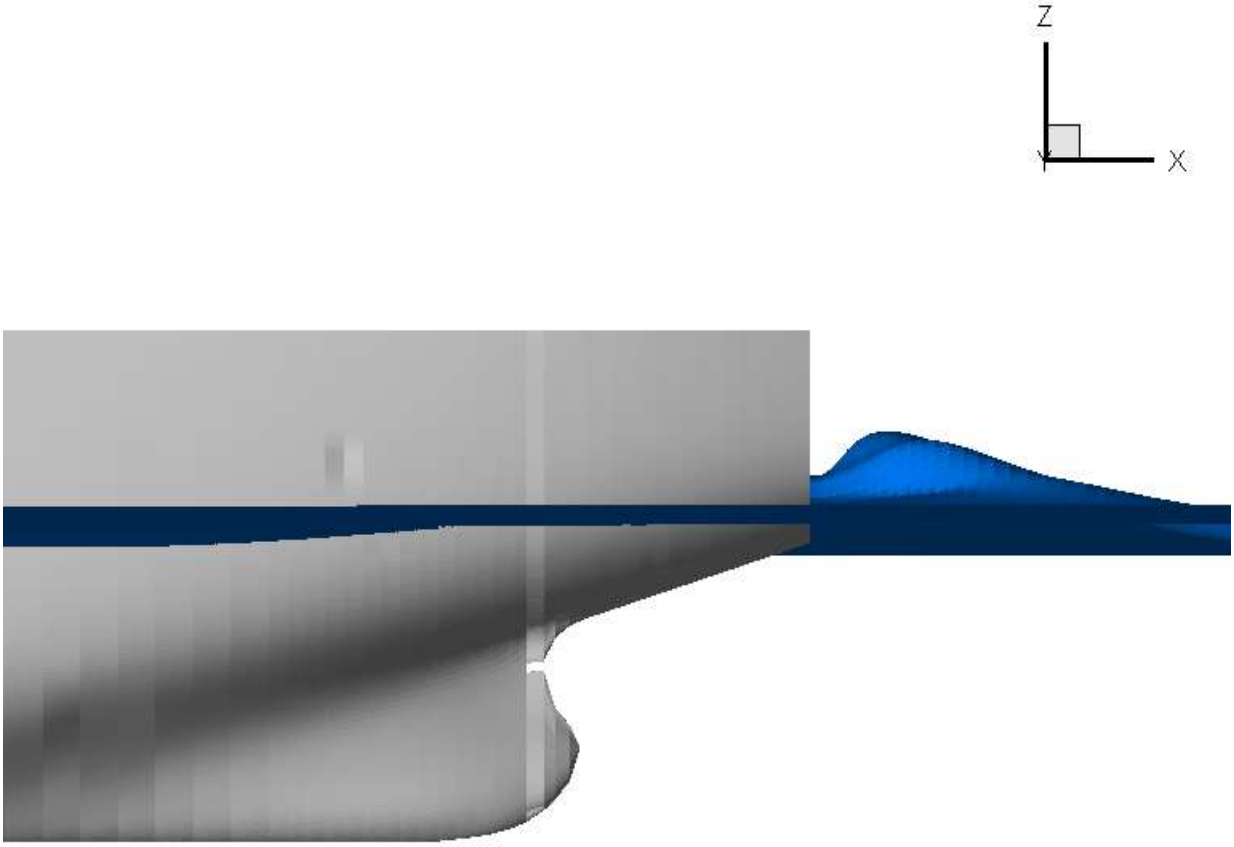
Σχήμα Π.3 Η τομή του αριθμητικού πλέγματος με τη γάστρα του πλοίου στην περιοχή της πλώρης



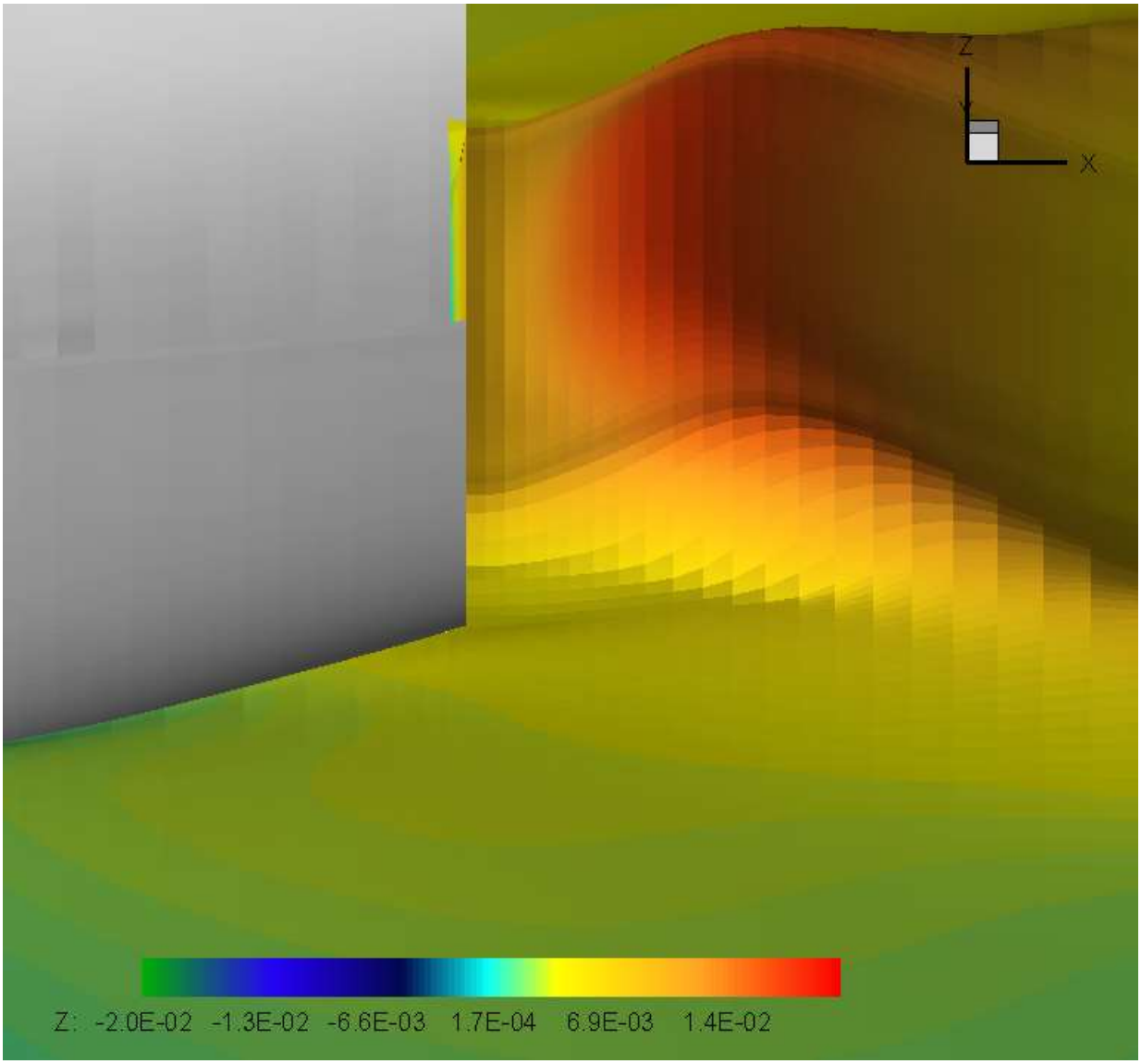
Σχήμα Π.4 3D Μορφή ελεύθερης επιφάνειας στην περιοχή της πλώρης (με την δυναμική ροή)



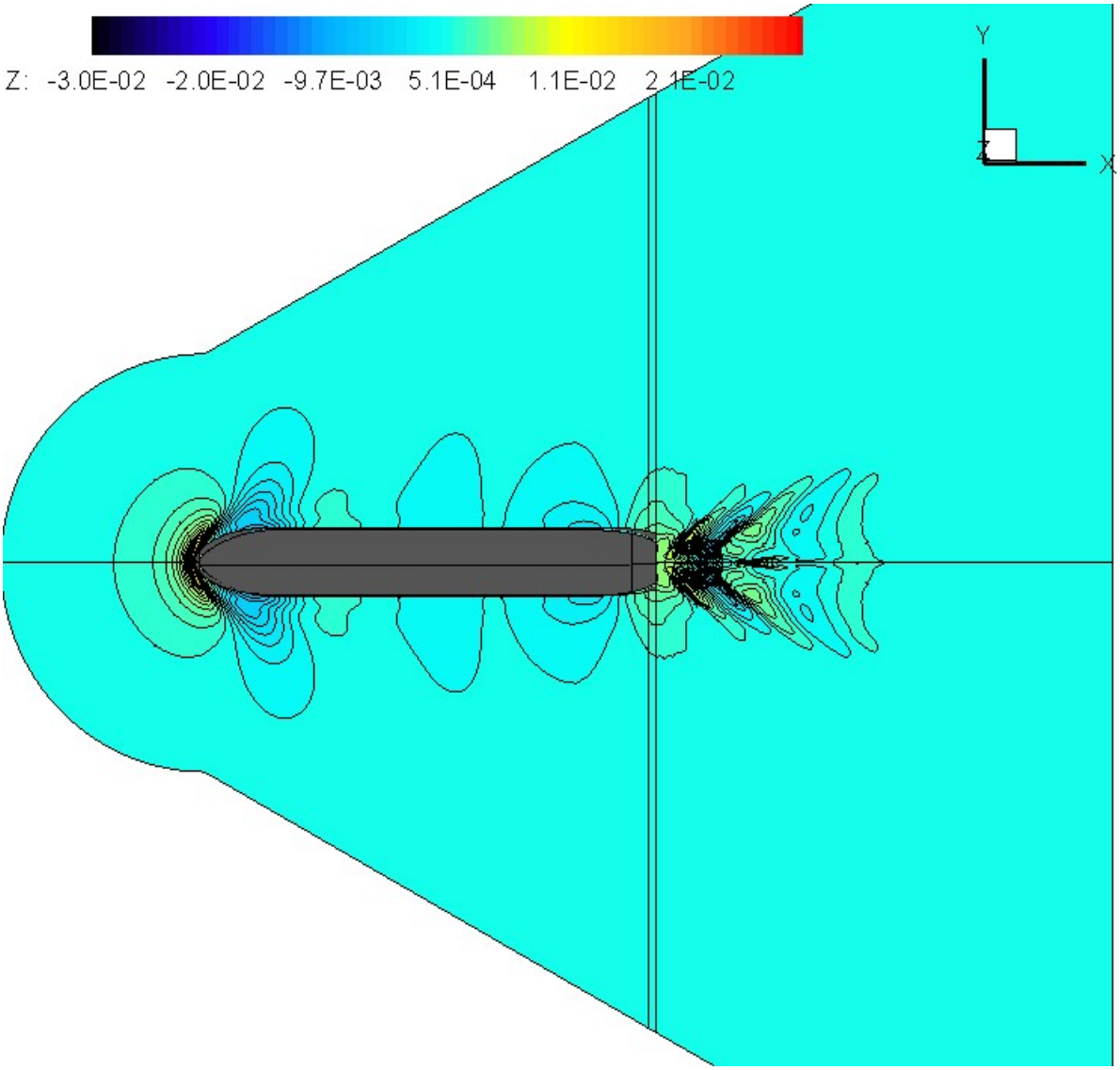
Σχήμα Π.5 3D Μορφή ελεύθερης επιφάνειας στην περιοχή της πλώρης (με την δυναμική ροή) όψη κάτω από την waterline



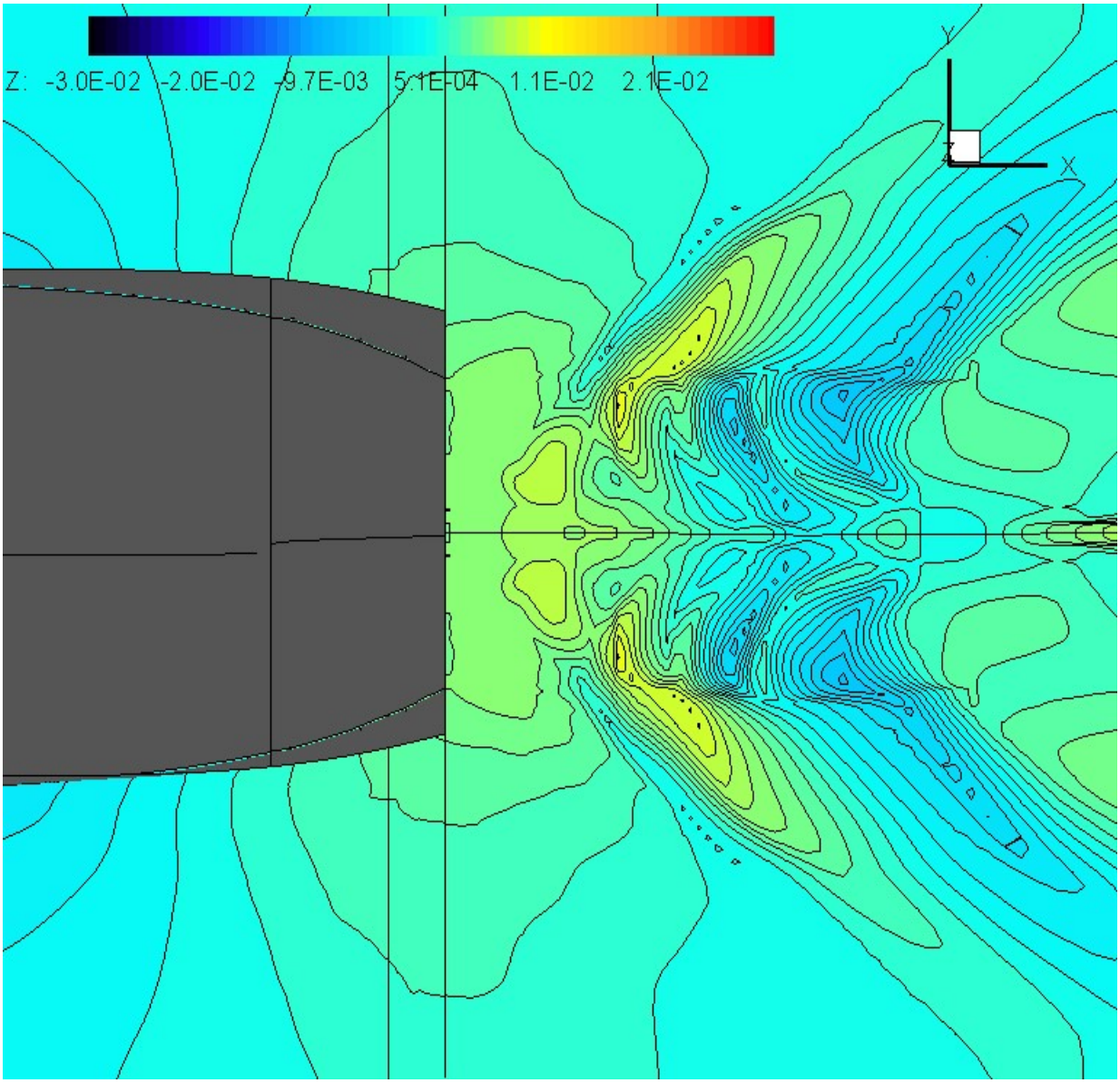
Σχήμα Π.6 3D Μορφή ελεύθερης επιφάνειας στην περιοχή της πρύμνης (με την δυναμική ροή) όψη κάτω από την waterline



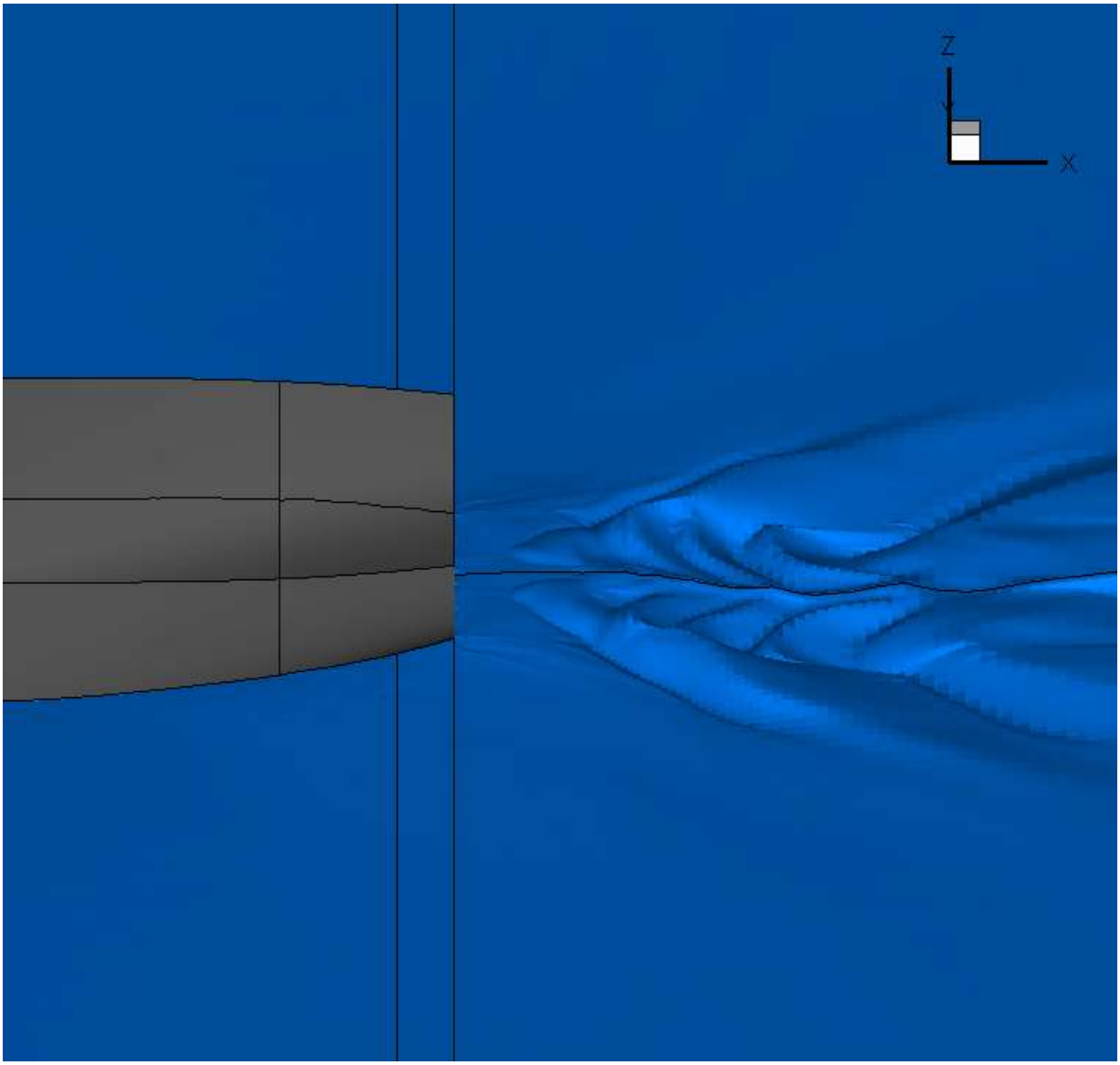
Σχήμα Π.7 3D Μορφή ελεύθερης επιφάνειας στην περιοχή της πρύμνης (με την δυναμική ροή) χρωματική απεικόνιση



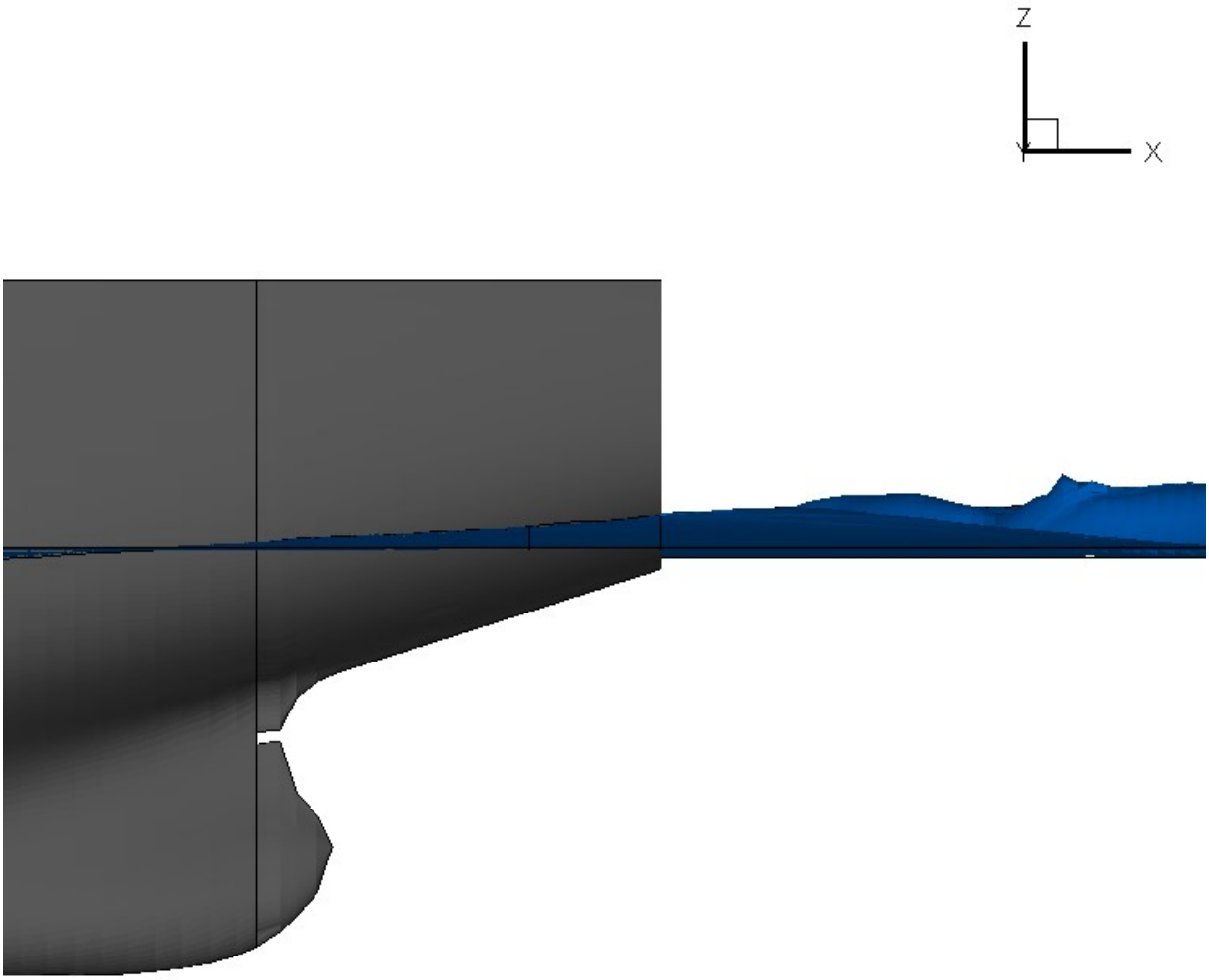
Σχήμα Π.8 Ύψος κυμάτων στην περίπτωση της συνεκτικής επίλυσης



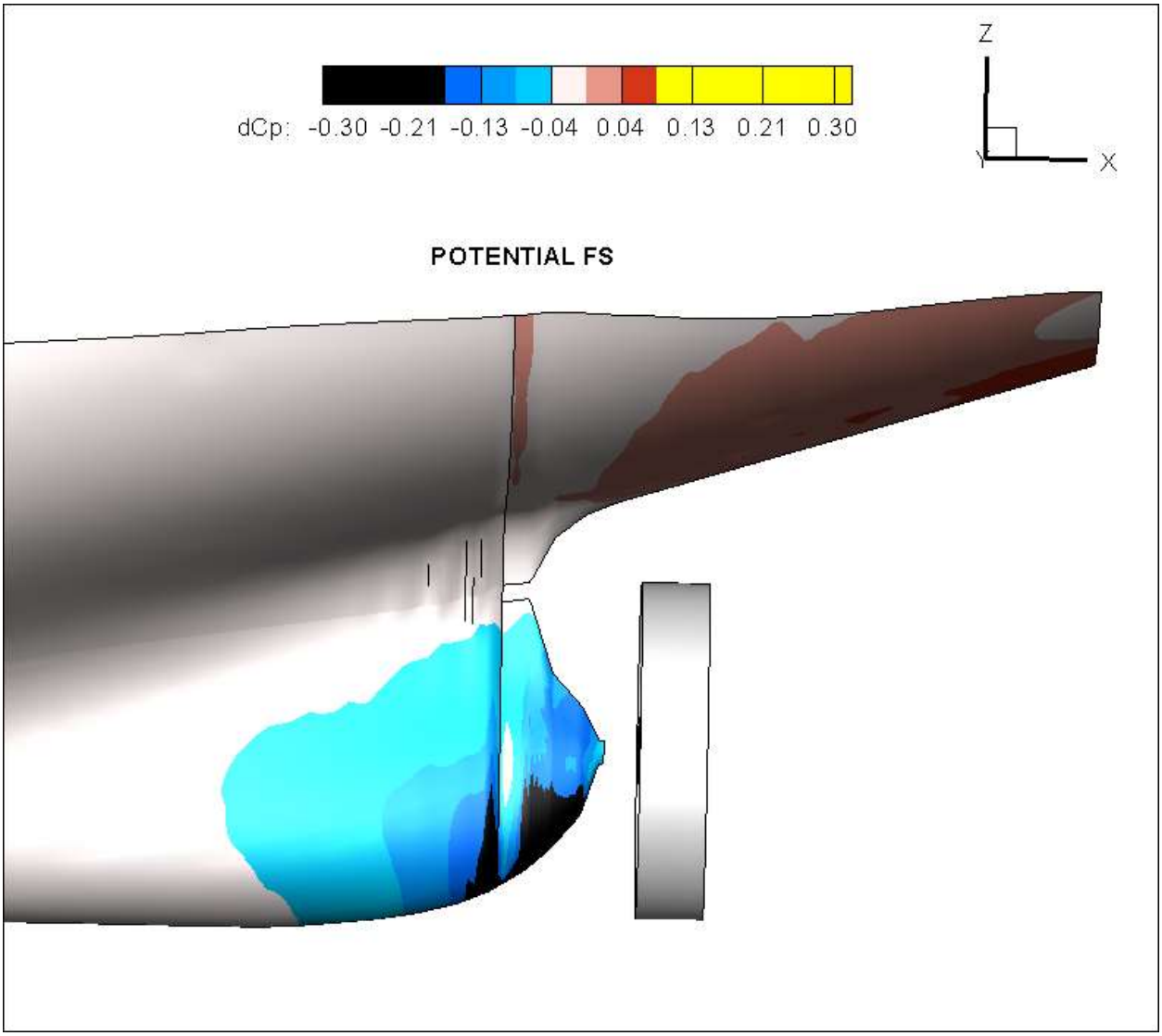
Σχήμα Π.9 Ύψος κυμάτων στην περίπτωση της συνεκτικής επίλυσης στην περιοχή της πρύμνης



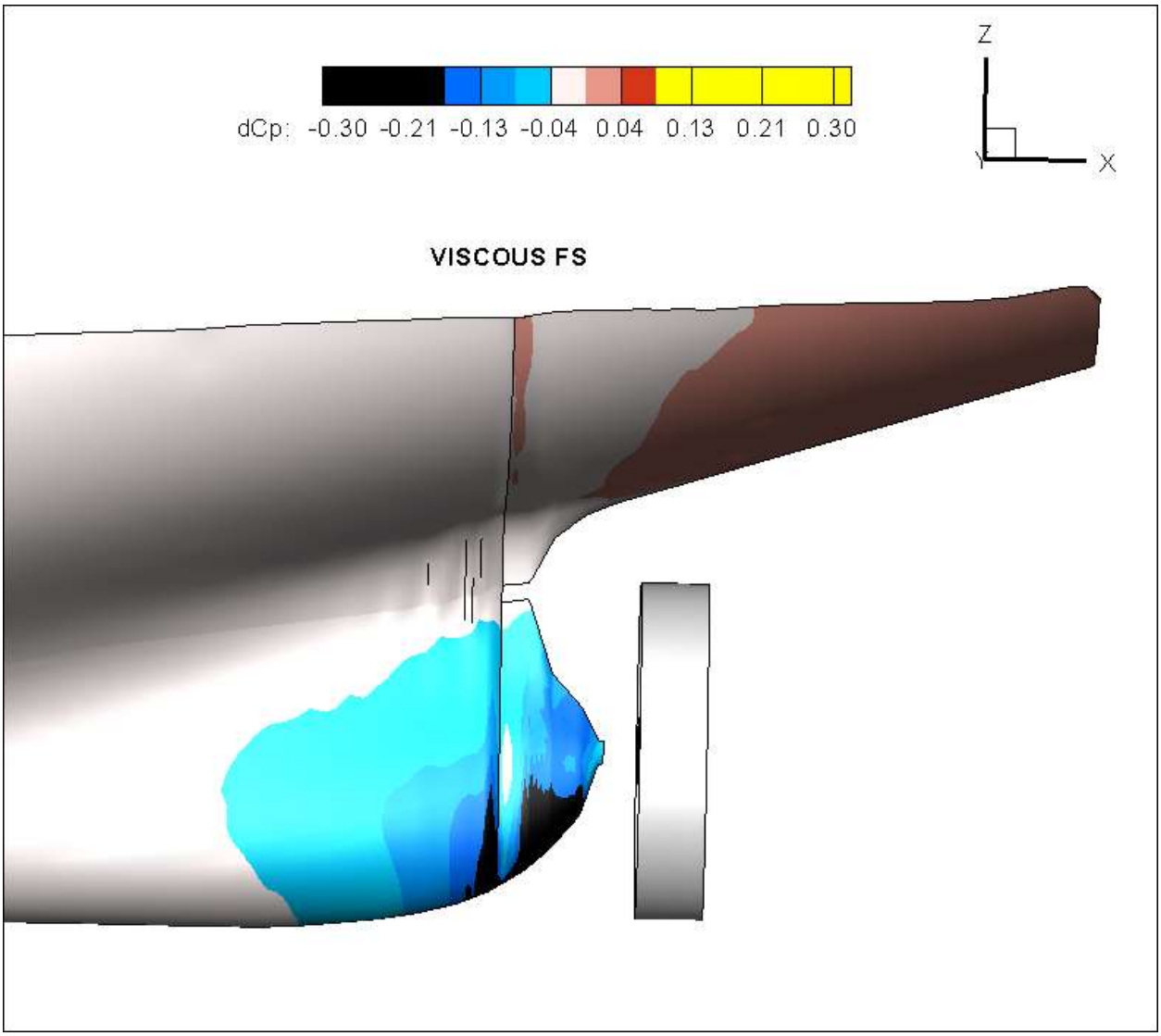
Σχήμα Π.10 3D απεικόνιση της μορφής της ελεύθερης επιφάνειας στην περιοχή της πρύμνης (με την συνεκτική ροή) πραγματική ελεύθερη επιφάνεια



Σχήμα Π.11 3D απεικόνιση της μορφής της ελεύθερης επιφάνειας στην περιοχή της πρύμνης (με την συνεκτική ροή) πραγματική ελεύθερη επιφάνεια προφίλ όψη



Σχήμα Π.12 Διαφορά πιέσεων στην περιοχή της πρύμνης κοντά στην έλικα με την δυναμική ροή



Σχήμα Π.13 Διαφορά πιέσεων στην περιοχή της πρύμνης κοντά στην έλικα με την συνεκτική ροή

Βιβλιογραφία

1. Σωκράτης Τσάγγαρης, « Μηχανική των Ρευστών», Αθήνα (2005)
2. Stylianos P. Polyzos, « Numerical Investigation of the Wave Resistance of Catamaran Ships using Potential Solvers», Athens, July 2010
3. G.D. Tzabiras, Resistance and Self-Propulsion Simulations for a A series-60, Cb=0.60 Hull at model and full scale
4. George D. Tzabiras and Kyriakos G. Psaras, « Numerical Study of Self – Propulsion Tests of a Product – Carrier at various conditions»
5. G.D. Tzabiras, « A Numerical Study of Actuator Disk Parameters affecting the Self – Propulsion of a Tanker», July 1994
6. Γ. Τζαμπίρας, Αριθμητικές Προσομοιώσεις Υδροδυναμικών Ροών, Αθήνα, Δεκέμβριος 1998
7. Γ.Κ. Πολίτης – Γ. Τζαμπίρας, « Πρόωση Πλοίου, Αναλυτική σχεδίαση ελίκων – Εφαρμογές CFD στην Αντίσταση και Πρόωση Πλοίου», Αθήνα, Ιούνιος 2016
8. Γ.Κ. Πολίτης, « Αντίσταση και Πρόωση Πλοίου», 5η Έκδοση, Αθήνα, Μάιος 2018