



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΜΗΧΑΝΩΝ

**Ανάπτυξη υπολογιστικού μοντέλου για τον προσδιορισμό των
γεωμετρικών αποκλίσεων οδοντωτών τροχών με χρήση της μεθόδου
διπλής κατατομής**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

Χρίστου Καλλίγερου

Επιβλέπων: Βασίλειος Σπιτάς
Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούλιος 2019

Περίληψη

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι ο προσδιορισμός γεωμετρικών αποκλίσεων σε οδοντωτούς τροχούς χρησιμοποιώντας αποτελέσματα από τη μέθοδο διπλής κατατομής. Για το σκοπό αυτό, αναλύεται αρχικά θεωρητικά η αρχή λειτουργίας της μεθόδου και τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την εφαρμογή της. Η ανάλυση αυτή οδηγεί στην ανάπτυξη ενός αναλυτικού μοντέλου προσομοίωσης της μεθόδου, το οποίο δέχεται ως είσοδο την γεωμετρία του πρότυπου και του εξεταζόμενου τροχού που συνεργάζονται κατά την εκτέλεση της μεθόδου και προσδιορίζει το διάγραμμα μεταβολής της αξονικής απόστασης. Τα προβλήματα πολυπλοκότητας και υπολογιστικού κόστους, όμως, που συνεπάγεται η αναλυτική μοντελοποίηση της μεθόδου, οδηγούν στην ανάπτυξη ενός νέου μοντέλου προσομοίωσης, βασισμένου σε αριθμητικές μεθόδους. Το μοντέλο αυτό καταλήγει στα ίδια αποτελέσματα με το αναλυτικό, υπολογίζοντας το διάγραμμα της αξονικής απόστασης για κατατομές οποιαδήποτε μορφής και καταναλώνοντας σαφώς λιγότερους υπολογιστικούς πόρους. Στη συνέχεια, διεξάγονται μία σειρά πειραματικών μετρήσεων οδοντωτών τροχών στη μηχανή ελέγχου Goulder Mikron του Εργαστηρίου Στοιχείων Μηχανών. Ωστόσο, οι οδοντωτοί τροχοί του εργαστηρίου, προτού λάβουν μέρος στη διαδικασία των μετρήσεων έπρεπε να καθαριστούν από την οξείδωση που είχαν υποστεί οι επιφάνειες των κατατομών τους. Η απομάκρυνση της επιφανειακής οξείδωσης έγινε με χημικό τρόπο χρησιμοποιώντας διάλυμα οξέος, αφού ελέγχθηκε πειραματικά ότι το οξύ δεν θα αλλοιώσει τις διαστάσεις και την επιφανειακή σύσταση των κατατομών. Τέλος, αναπτύχθηκε ένα ολοκληρωμένο μοντέλο πρόβλεψης των γεωμετρικών παραμέτρων οδοντωτών τροχών χρησιμοποιώντας το διάγραμμα αξονικής απόστασης από την μέτρησή τους με την μέθοδο διπλής κατατομής και υπό την θεώρηση ομοιόμορφων σφαλμάτων στην επιφάνεια των κατατομών τους. Το μοντέλο είναι ικανό να εκτιμά με ακρίβεια τις γεωμετρικές παραμέτρους, όπως η γωνία πίεσης της εξειλιγμένης ή το βήμα στον βασικό κύκλο, ακόμα και στην περίπτωση που οι τιμές του διαγράμματος αξονικής απόστασης περιέχουν σφάλματα.

Abstract

The purpose of this thesis is to determine geometric variations on gears using results from the double flank method. For this purpose, the principle of operation of the method and the results resulting from its application are analyzed theoretically. This analysis leads to the development of an analytical simulation model of the method, which accepts as input the geometry of the master and the testing gear that cooperate in the execution of the method and determines the axial distance displacement diagram. However, complexity and computational cost problems resulting from the analytical modeling of the method, lead to the development of a new simulation model, based on numerical methods. This model provides in the same results as the analytical, calculating the axial distance diagram for profiles of any form and clearly consuming fewer computational resources. A series of experimental gears are then run on the Goulter Mikron Control Engine of the Machine Design Laboratory. However, the gears of the laboratory had to be cleaned by the oxidation that had suffered their profile surfaces, before taking part in the measurement process. The removal of surface oxidation was done chemically using an acid solution, after experimentally testing that the acid would not alter the dimensions and the surface composition of the profiles. Finally, an integrated predictive model of the gear geometric parameters was developed using the axial distance diagram from their measurement by the double flank method and the hypothesis of uniform errors on the surface of their profiles. The model is capable of accurately estimating geometric parameters, such as the pressure angle of the involute or the step in the base circle, even if the values of the axial distance diagram contain errors.

Ευχαριστίες

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους ανθρώπους που με βοήθησαν στην εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας, αλλά και γενικότερα σε όλη την πορεία των προπτυχιακών μου σπουδών. Ευχαριστώ όλο το διδακτικό προσωπικό του ΕΜΠ που με την εργασία του συνέβαλε στην ανάπτυξη του γνωστικού μου πεδίου και την καλλιέργεια του τρόπου σκέψης μου και τους συμφοιτητές μου με τους οποίους πορευτήκαμε μαζί στα όμορφα χρόνια των σπουδών μας.

Ιδιαίτερα, όμως, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή της διπλωματικής μου εργασίας, τον κύριο Βασίλειο Σπιτά, όχι μόνο για την ανεκτίμητη συνεισφορά του στην εκπόνησή της, αλλά, κυρίως, για την βοήθεια του καθόλη την διάρκεια των σπουδών μου. Η βοήθεια αυτή, που έδινε, δίνει και είμαι σίγουρος ότι θα δίνει και στο μέλλον άκοπα σε κάθε φοιτητή, χωρίς καμία διάκριση και από πραγματικό ενδιαφέρον, αποτελεί ένα πρότυπο προς μίμηση για μένα και πηγή μεγάλης ευγνωμοσύνης. Εύχομαι να του δίνει ο Θεός δύναμη να συνεχίζει ακούραστα το έργο του και να μου δώσει την ευκαιρία να ανταποδώσω ένα μέρος τουλάχιστον από εκείνα που χωρίς καμία ιδιοτέλεια μου προσέφερε.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω την Καθηγήτρια κυρία Παναγιώτα Βασιλείου και τον τεχνικό υπεύθυνο του Μετροτεχνικού Εργαστηρίου της Σχολής κύριο Γιώργο Χατζηστέλιο για την πολύτιμη βοήθειά τους στην διεξαγωγή των πειραμάτων που έγιναν στα πλαίσια της διπλωματικής. Ακόμα, θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον Άγγελο Σκούρα για την βοήθειά του στη διαδικασία λήψης των πειραματικών μετρήσεων, μια διαδικασία που διήρκησε αρκετό χρόνο και την ολοκληρώσαμε μαζί.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους εκείνους τους ανθρώπους που με αγάπη φροντίζουν για την εξέλιξη και τη βελτίωσή μου όχι μόνο ως μηχανικό, αλλά και ως άνθρωπο. Η οικογένειά μου, ο πνευματικός μου πατέρας, οι αδελφικοί μου φίλοι με τις συμβουλές και την καθοδήγησή τους με έχουν βοηθήσει όσο κανείς άλλος και εύχομαι ο Θεός να τους χαρίσει όσο εγώ δεν είμαι ικανός να τους ανταποδώσω.

Περιεχόμενα

Περίληψη.....	3
Abstract.....	5
Ευχαριστίες.....	7
1. Εισαγωγή.....	10
2. Προσομοίωση μεθόδου διπλής κατατομής.....	12
2.1. Η μέθοδος διπλής κατατομής.....	12
2.2. Αναλυτική προσομοίωση μεθόδου διπλής κατατομής.....	15
2.2.1. Μαθηματική περιγραφή κατατομών.....	16
2.2.2. Μοντέλο συνεργασίας τροχών.....	19
2.2.3. Αποτελέσματα αναλυτικού μοντέλου.....	27
2.3. Αριθμητική προσομοίωση μεθόδου διπλής κατατομής.....	29
2.3.1. Περιγραφή κατατομών.....	29
2.3.2. Προσδιορισμός σημείου επαφής στις εργαζόμενες κατατομές.....	31
2.3.3. Υπολογισμός αξονικής απόστασης.....	35
2.3.4. Αποτελέσματα αριθμητικού μοντέλου.....	44
3. Πειραματικές μετρήσεις.....	48
3.1. Η μηχανή ελέγχου διπλής κατατομής Goulder Mikron.....	49
3.2. Οδοντωτοί τροχοί.....	50
3.2.1. Χημικός καθαρισμός οδοντωτών τροχών.....	51
3.2.2. Πειραματικός έλεγχος διάβρωσης.....	53
3.3. Μετρήσεις οδοντωτών τροχών στην μηχανή Goulder Mikron.....	60
4. Προσδιορισμός γεωμετρικών αποκλίσεων με τη μέθοδο της διπλής κατατομής.....	66
4.1. Αριθμητικό μοντέλο πρόβλεψης γεωμετρικών αποκλίσεων.....	66
4.2. Αποτελέσματα μοντέλου πρόβλεψης.....	73
4.3. Σφάλματα στο διάγραμμα αξονικής μετατόπισης.....	77
5. Συμπεράσματα.....	83
6. Βιβλιογραφία.....	85
Παράρτημα.....	87
Κώδικας αριθμητικής προσομοίωσης μεθόδου διπλής κατατομής.....	87
Κώδικας αριθμητικής επίλυσης αντίστροφου προβλήματος.....	97
Κώδικας αναλυτικής προσομοίωσης μεθόδου διπλής κατατομής.....	104

1. Εισαγωγή

Οι οδοντωτοί τροχοί αποτελούν ένα από τα πλέον διαδεδομένα στοιχεία μηχανών που χρησιμοποιούνται στη σύγχρονη βιομηχανία. Αν και η χρήση τους είναι γνωστή από την αρχαιότητα, η ευρεία διάδοση τους επιτεύχθηκε μετά την βελτίωση των μηχανών κατασκευής τους, οι οποίες πλέον μπορούσαν να παράγουν τροχούς υψηλής ακρίβειας και ποιότητας κατατομών και να αποδίδουν μορφές κατάλληλες για συνθετότερες μορφές μετάδοσης κίνησης. Η ικανότητά τους να επιτρέπουν τη σταθερή μετάδοση κίνησης και τη μεταφορά μεγάλης ισχύος σε υψηλούς βαθμούς απόδοσης έχει καταστήσει την εφαρμογή τους πολύτιμη ή και απαραίτητη σε ένα ευρύ φάσμα εφαρμογών και έχει επιτρέψει την τοποθέτησή τους σε μηχανές και μηχανισμούς μεγάλης σημασίας, σε κρίσιμες θέσεις. Για το λόγο αυτό, η παραγωγή τους σήμερα γίνεται μαζικά και η ποιότητά τους ενδιαφέρει έντονα τη βιομηχανία.

Η μετρολογία των οδοντωτών τροχών είναι μια επιστήμη που γεννήθηκε από την ανάγκη που περιγράφηκε παραπάνω και βρίσκει τις ρίζες της στη δεκαετία του 1920, όταν και κατασκευάστηκε η πρώτη μηχανή επιθεώρησης οδοντωτών τροχών, που βασιζόταν στην εξέταση του προφίλ της εξειλιγμένης κάθε κατατομής συγκριτικά με την κατατομή αναφοράς που ορίζεται από τον βασικό της κύκλο [3]. Από τότε, έχουν αναπτυχθεί πολλές διαφορετικές μέθοδοι επιθεώρησης των γραναζιών, οι οποίες μπορούν να ενταχθούν γενικότερα σε δύο μεγάλες κατηγορίες: στις αναλυτικές γεωμετρικές μετρήσεις, κατά τις οποίες με χρήση ειδικού εξοπλισμού (CMMs) συγκρίνονται οι εξεταζόμενες γεωμετρικές με τις επιθυμητές, και στις λειτουργικές δοκιμές, κατά τις οποίες ο εξεταζόμενος τροχός συνεργάζεται σε εξειδικευμένες μηχανές με έναν δεύτερο «πρότυπο» τροχό ως προς τις διαστάσεις και την ακρίβεια κατασκευής του, κατά τον τρόπο που θα λειτουργήσει και στο μέλλον στην εφαρμογή για την οποία προορίζεται. Οι μέθοδοι που εντάσσονται στην πρώτη κατηγορία χαρακτηρίζονται περισσότερο ως ποσοτικές, ενώ εκείνες που ανήκουν στη δεύτερη ως ποιοτικές. Το κόστος του εξοπλισμού και η βραδύτητα της διαδικασίας επιθεώρησης που συνοδεύει τις αναλυτικές μετρήσεις, έχει απομακρύνει την εφαρμογή τους από τη βιομηχανία και τις έχει περιορίσει στο περιβάλλον των εργαστηρίων. Αντ' αυτών, έχει προτιμηθεί ο λειτουργικός έλεγχος, που προσφέρει μια γρήγορη και αξιόπιστη εικόνα για την ποιότητα του εξεταζόμενου τροχού.

Ο λειτουργικός έλεγχος ενός οδοντωτού τροχού συνίσταται στην σύγκριση του με ένα πρότυπο τροχό καθώς βρίσκονται σε συνεργασία. Έτσι είναι δυνατόν να προσδιοριστεί ο βαθμός ακρίβειας του τροχού, ενώ ταυτόχρονα μπορούν να εξαχθούν χρήσιμα συμπεράσματα για τη γεωμετρία του. Ο λειτουργικός έλεγχος των τροχών ονομάζεται στη διεθνή βιβλιογραφία ως *Δοκιμή κυλίσεως (Rolling Gear Testing)* και χαρακτηρίζεται ως *σύνθετος*, καθώς τα αποτελέσματα που παρέχονται από αυτά δεν μπορούν να αποδομηθούν και να αποδοθούν σε συγκεκριμένες γεωμετρικές παρατηρήσεις, αλλά, στον αντίποδα, εκφράζουν το άθροισμα πολλών διαφορετικών παραγόντων που δρουν ταυτόχρονα. Το κύριο πλεονέκτημά του, πέρα από το οικονομικό, είναι ότι μπορεί να αξιολογήσει την απόδοση των τροχών ενώ εκείνα λειτουργούν, με τα αποτελέσματα να είναι ενδεικτικά της συμπεριφοράς του τροχού κατά την μελλοντική λειτουργία του.

Η πιο κοινή μέθοδος λειτουργικού ελέγχου οδοντωτών τροχών είναι η *Μέθοδος διπλής κατατομής (Double-Flank Method ή Dual-Flank Method)*. Σύμφωνα με αυτή τη μέθοδο, ο εξεταζόμενος τροχός υπόκειται σε σφικτή συνεργασία με έναν πρότυπο τροχό, με αποτέλεσμα να προκύπτει επαφή σε δύο ζεύγη κατατομών, σε ένα ζεύγος εργαζόμενων και σε ένα ζεύγος μη εργαζόμενων. Κατ' αυτόν τον τρόπο επιτυγχάνεται συνεργασία των τροχών χωρίς χάρη κατατομών. Κατά τη διάρκεια του ελέγχου ο άξονας του ενός τροχού παραμένει σταθερός, ενώ στον άξονα του δεύτερου επιτρέπεται η μετατόπισή του κατά την διεύθυνση της αξονικής απόστασης. Οποιαδήποτε γεωμετρική απόκλιση

των θεωρητικών κατατομών του εξεταζόμενου τροχού από την ιδανική θα έχει ως αποτέλεσμα την μεταβολή της απόστασης αξόνων, η οποία καταγράφεται από κάποιο μετρητικό σύστημα σε ένα διάγραμμα. Αυτό είναι και το ποσοτικό αποτέλεσμα της μεθόδου. Ο τύπος αυτός λειτουργικού ελέγχου είναι πρακτικός, γρήγορος και αποτελεσματικός, για αυτό και είναι τόσο διαδεδομένος· ωστόσο, υστερεί στο γεγονός πως δεν υπάρχει καταγεγραμμένη κάποια μέθοδος, η οποία να μπορεί να μεταφράσει τα μοτίβα που προκύπτουν στο διάγραμμα μεταβολής της απόστασης των αξόνων σε στοιχειώδη σφάλματα του προφίλ της κατατομής των τροχών [4].

Μια δεύτερη μέθοδος λειτουργικού ελέγχου είναι η *Μέθοδος μονής κατατομής (Single-Flank Method)*. Το όνομά της προκύπτει από το γεγονός πως οι δύο οδοντωτοί τροχοί, ο πρότυπος και ο εξεταζόμενος, σε αντίθεση με την μέθοδο διπλής κατατομής, συνεργάζονται με χάρη κατατομών στην ονομαστική απόσταση αξόνων, η οποία παραμένει σταθερή με αποτέλεσμα την επαφή μόνο στις εργαζόμενες κατατομές. Σε αυτό τον τύπο ελέγχου, το μετρήσιμο μέγεθος είναι το transmission error του συστήματος των τροχών, που προκύπτει από την μέτρηση των γωνιών περιστροφής τους από κατάλληλα μετρητικά όργανα. Σε αντιδιαστολή και πάλι με την μέθοδο διπλής κατατομής, σε αυτή την περίπτωση είναι δυνατόν να προσδιοριστούν τα σφάλματα στην μορφή των κατατομών από τα αποτελέσματα της μεθόδου [5]. Το γεγονός, όμως, πως ο εξοπλισμός που απαιτεί είναι πιο σύνθετος και ακριβός, έχει περιορίσει την εφαρμογή της στη βιομηχανία, ακόμα κι αν οι πληροφορίες που μπορεί να προσφέρει είναι πιο πλούσιες [3,4].

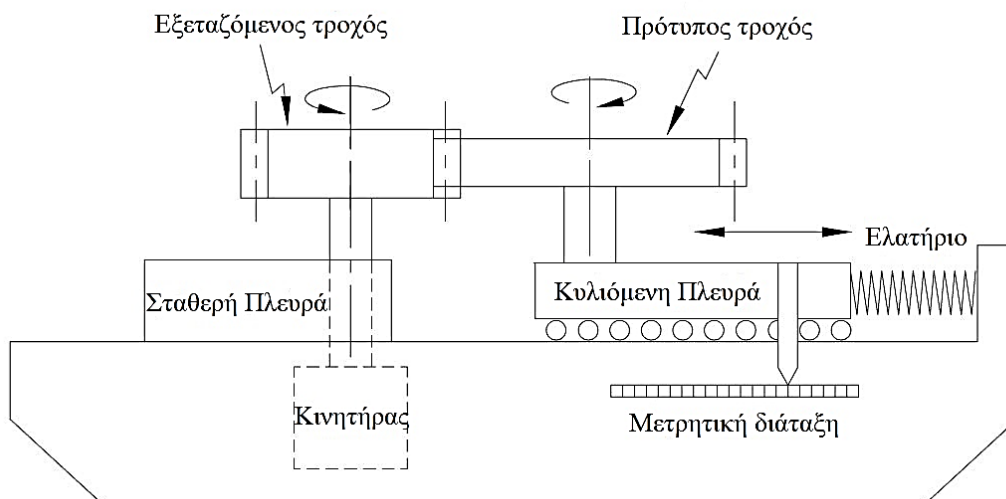
Η παρούσα εργασία ασχολείται με την μελέτη και την ανάλυση της μεθόδου διπλής κατατομής, όπως αυτή εφαρμόζεται στην εξέταση μετωπικών τροχών εξειλιγμένης. Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, η μέθοδος αυτή είναι ο πιο διαδεδομένος τρόπος επιθεώρησης γραναζιών, ιδίως στη βιομηχανία, για λόγους τεχνοοικονομικούς. Η αδυναμία του όμως να αποδίδει το σύνθετο σφάλμα που καταγράφεται σε συγκεκριμένα στοιχειώδη σφάλματα, προσφέρει στους χρήστες της περιορισμένη πληροφορία, ενώ καθιστά αδύνατη την χρήση της σε εξειδικευμένες και απαιτητικές εφαρμογές. Αντικειμενικός σκοπός αυτής της εργασίας είναι η ανάπτυξη τεχνικών και μεθοδολογιών που θα πετυχαίνουν τη σύνδεση των αποτελεσμάτων της μεθόδου με τα στοιχειώδη σφάλματα που τα προκαλούν, όπως είναι η απόκλιση στην γωνία πίεσης της εξειλιγμένης, στο βήμα της στον βασικό κύκλο, στο προφίλ της κατατομής και η εκκεντρότητα του τροχού. Κατ' αυτόν τον τρόπο, η επιθεώρηση των τροχών δεν θα περιορίζεται στη διαπίστωση της λειτουργικότητας του εξεταζόμενου τροχού και τον έλεγχο του βαθμού ποιότητάς του, αλλά πλέον θα επιτρέπει την δυνατότητα εντοπισμού των αιτιών των αποκλίσεων που καταγράφονται και θα μπορεί να αποκαλύπτει συστηματικά σφάλματα που υπάρχουν στις γραμμές παραγωγής. Επίσης, θα μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε χώρους και εφαρμογές όπου η επιθεώρηση των τροχών απαιτείται να συνοδεύεται από μετρήσεις με γεωμετρική ερμηνεία, όπως σε περιβάλλοντα εργαστηρίων και ποιοτικού ελέγχου υψηλών προδιαγραφών, μειώνοντας το κόστος της επιθεώρησης και του ελέγχου.

2. Προσομοίωση μεθόδου διπλής κατατομής

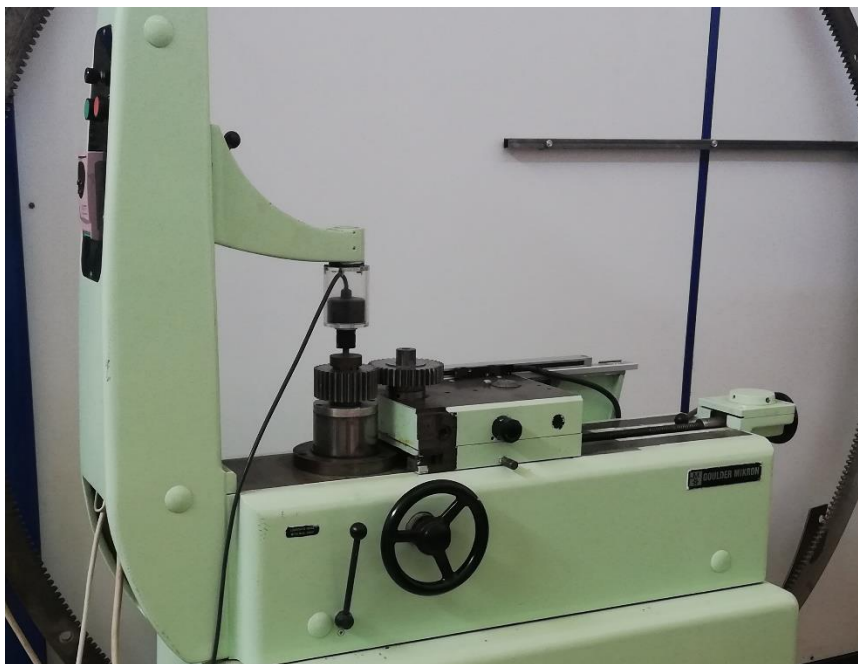
Το πρώτο βήμα στην προσπάθεια της ερμηνείας των αποτελεσμάτων της μεθόδου διπλής κατατομής είναι η λεπτομερής μελέτη του τρόπου με τον οποίον αυτά παράγονται. Η κατανόηση των αρχών λειτουργίας της μεθόδου είναι απαραίτητη για την προσπάθεια διαχωρισμού του σύνθετου σφάλματος στα επιμέρους αίτια που το προκαλούν. Για το λόγο αυτό, το πρώτο μέρος του παρόντος Κεφαλαίου αφιερώνεται στην αναλυτική παρουσίαση της μεθόδου. Περιγράφεται ο τρόπος με τον οποίο επιτυγχάνεται, η μηχανή στην οποία πραγματοποιείται, ο ειδικός εξοπλισμός που απαιτείται και το είδος των αποτελεσμάτων που λαμβάνονται. Με βάση αυτά τα δεδομένα, το υπόλοιπο κεφάλαιο αφιερώνεται στην παρουσίαση των μοντέλων που αναπτύχθηκαν και που σκοπό έχουν την προσομοίωση της μεθόδου. Η ύπαρξη αυτών των προσομοιώσεων έχει ιδιαίτερη σημασία στην προσπάθεια για τον προσδιορισμό της αιτιώδους σχέσης σφάλματος-μέτρησης. Τα μοντέλα αποδεικνύονται ένα χρήσιμο εποπτικό εργαλείο για την δοκιμή σε περιβάλλον υπολογιστή διαφόρων γεωμετριών οδοντωτών τροχών και αποτελούν τη βάση για τις υπολογιστικές μεθόδους που παρουσιάζονται στα επόμενα Κεφάλαια.

2.1. Η μέθοδος διπλής κατατομής

Η επιθεώρηση οδοντωτών τροχών σύμφωνα με τη μέθοδο διπλής κατατομής επιτυγχάνεται με τη σφικτή συνεργασία του τροχού που υπόκειται σε εξέταση και ενός δεύτερου τροχού πρότυπων διαστάσεων. Οι δύο τροχοί τοποθετούνται σε μία εξειδικευμένη μηχανή, της οποίας η γενική διάταξη φαίνεται στο Σχήμα 2.1, ενώ μια πρακτική της εφαρμογή φαίνεται στο Σχήμα 2.2. Ο εξεταζόμενος τροχός εδράζεται σε ένα σταθερό άξονα με μόνο έναν περιστροφικό βαθμό ελευθερίας. Αντίθετα, ο πρότυπος τροχός εδράζεται σε ένα φορείο, στο οποίο επιτρέπεται η μετατόπιση κατά την διεύθυνση της απόστασης των αξόνων των δύο τροχών.



Σχήμα 2.1 Γενική διάταξη της μηχανής ελέγχου διπλής κατατομής



Σχήμα 2.2 Η μηχανή ελέγχου διπλής κατατομής Gouder Mikron του Εργαστηρίου Στοιχείων Μηχανών ΕΜΠ

Καθώς ο εξεταζόμενος τροχός τίθεται σε κίνηση (συνήθως μέσω κινητήρα) οι δύο τροχοί ξεκινούν τη συνεργασία τους. Η διατήρηση της σφικτής συνεργασίας μεταξύ των τροχών κάθε στιγμή εξασφαλίζεται με την επιβολή προέντασης μέσω ενός ελατηρίου, το οποίο ωθεί το φορείο και κατ' επέκταση τον πρότυπο τροχό σε συνεχή επαφή με τον εξεταζόμενο. Σε περίπτωση που ο εξεταζόμενος τροχός δεν έχει καμία κατασκευαστική ατέλεια και το προφίλ των κατατομών του δεν αποκλίνει καθόλου από το ιδανικό, η απόσταση των αξόνων παραμένει σταθερή. Καθώς όμως αυτό είναι πρακτικά αδύνατο να συμβαίνει, πάντα παρατηρείται μεταβολή στην αξονική απόσταση, η οποία καταγράφεται από κάποιο ενδεικτικό ή μετρητικό όργανο. Εάν αυτή η μεταβολή ξεπερνά κάποια όρια που ορίζονται σε διάφορα πρότυπα ανάλογα με τους τύπους των τροχών (μετωπικοί, κωνικοί κλπ.) τότε ο τροχός κρίνεται ως ελλειμματικός [6-11].

Ένα κρίσιμο σημείο για την αποτελεσματικότητα της μεθόδου είναι η εξασφάλιση της σφικτής συνεργασίας των δύο τροχών κάθε στιγμή που καταγράφονται δεδομένα. Τυχόν απώλεια επαφής σε κάποια κατατομή εισάγει θόρυβο στις μετρήσεις μειώνοντας την αξιοπιστία τους. Για να αποφευχθεί ένα τέτοιο σενάριο, πρέπει να επιλεγούν κατάλληλα η δύναμη προέντασης του ελατηρίου και η ταχύτητα περιστροφής των τροχών [12]. Η δύναμη προέντασης που θα επιλεγεί κάθε φορά, εξαρτάται από το ζεύγος των τροχών που συμμετέχουν στον έλεγχο και τον βαθμό που παραμορφώνονται υπό την επίδραση φορτίου. Θα πρέπει να είναι η ελάχιστη δυνατή που εξασφαλίζει σφικτή συνεργασία και συνήθως δίνεται από πίνακες των κατασκευαστών των μηχανών που πραγματοποιούν τον έλεγχο. Όσον αφορά την ταχύτητα περιστροφής, επιβάλλεται να είναι χαμηλή, για την αποφυγή εμφάνισης δυναμικών φαινομένων που θα έκαναν την επεξεργασία των δεδομένων συνθετότερη.

Ένα άλλο συστατικό στοιχείο της μεθόδου που είναι κρίσιμο για την επιτυχία της είναι οι πρότυποι τροχοί. Οι πρότυποι τροχοί που χρησιμοποιούνται είναι υψηλής ακριβείας και πρέπει να φυλάσσονται με ιδιαίτερη προσοχή, ώστε να μην αποκτήσουν ελαττώματα και κατά συνέπεια τα σφάλματα που καταγράφονται από τη συνεργασία τους να μπορούν να αποδοθούν ολοκληρωτικά στους χαμηλότερης ποιότητας τροχούς. Οι τροχοί αυτοί μπορεί να είναι μετωπικοί, κωνικοί, ατέρμονες κοχλίες κλπ., ανάλογα με τον είδος το τροχού που εξετάζεται. Ιδανικά, ο πρότυπος τροχός θα πρέπει

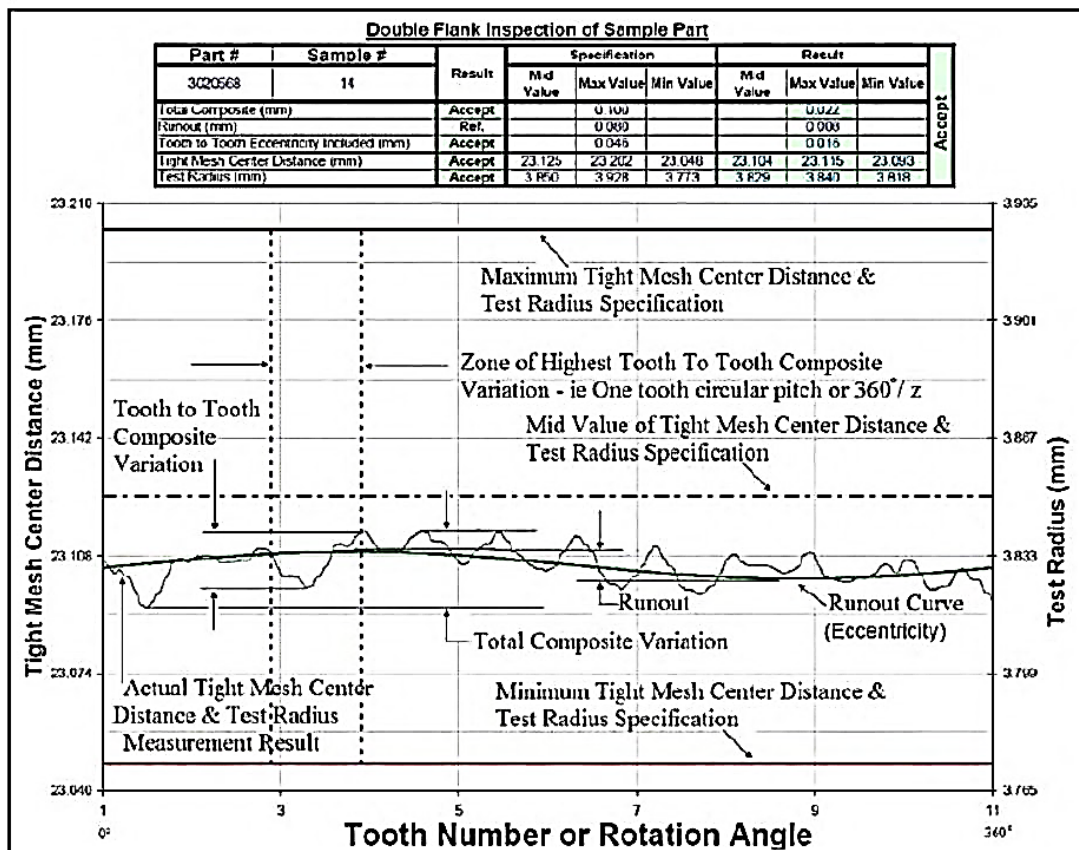
να είναι ακριβώς ίδιου μεγέθους με τον μετρούμενο. Η πρακτική αυτή όμως δεν βρίσκει εφαρμογή στην βιομηχανία, καθώς το κόστος των πρότυπων τροχών είναι αρκετά υψηλό λόγω της μεγάλης τους ακρίβειας, και έτσι περιορίζονται στην πραγματοποίηση ελέγχων με έναν πρότυπο τροχό για κάθε module.

Όπως αναφέρθηκε και στην Εισαγωγή, το σφάλμα που καταγράφεται από τη μέθοδο διπλής κατατομής χαρακτηρίζεται ως *σύνθετο*, καθώς εμπεριέχει τις επιδράσεις πολλών διαφορετικών παραγόντων που δρουν ταυτόχρονα. Το σφάλμα αυτό καταγράφεται σε ένα διάγραμμα συναρτήσεως της γωνίας περιστροφής του κινητήριου τροχού ή του αύξοντα αριθμού των οδόντων και έχει τη μορφή που παρουσιάζεται ενδεικτικά στο Σχήμα 2.3. Τα είδη των σφαλμάτων που είναι δυνατόν να παρατηρηθούν από ένα τέτοιο διάγραμμα είναι τρία: το συνολικό σύνθετο σφάλμα, το σύνθετο σφάλμα από οδόντα σε οδόντα και την εκκεντρότητα του τροχού [12].

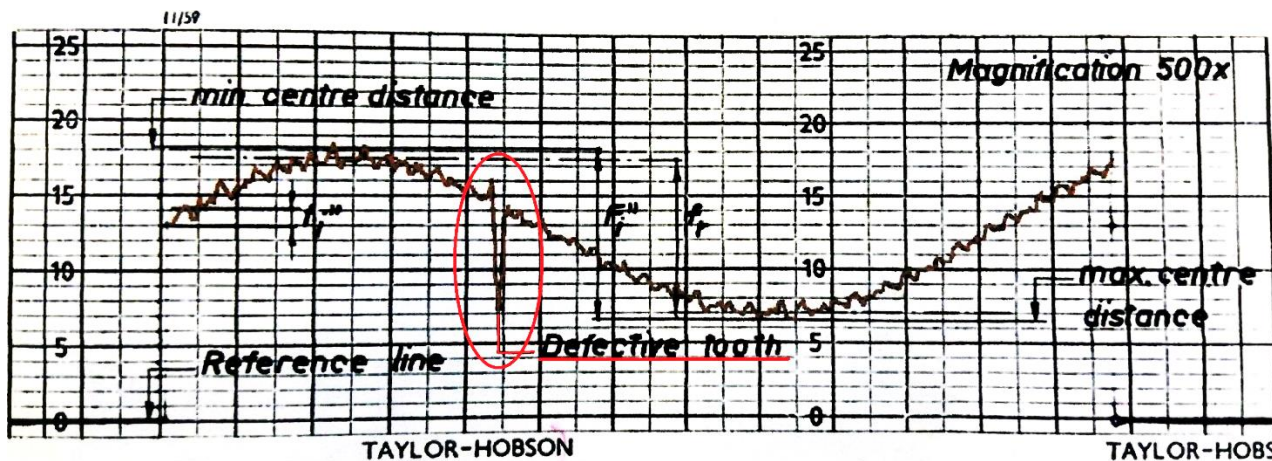
Το *Συνολικό σύνθετο σφάλμα (Total Composite Variation/Error)* εκφράζει την διαφορά μεταξύ της μέγιστης και της ελάχιστης τιμής της απόστασης των αξόνων που προκύπτει από το διάγραμμα. Ο τύπος αυτός σφάλματος εμπεριέχει επιδράσεις από την εκκεντρότητα του τροχού και τις γεωμετρικές αποκλίσεις των κατατομών του. Αναφέρει, επίσης, τη μέγιστη μεταβολή της αξονικής απόστασης που παρατηρήθηκε. Είναι ενδεικτικό μετρικό για την πορεία της παραγωγής αλλά δεν μπορεί να αποδομηθεί ώστε να αποκαλύψει τα επιμέρους σφάλματα που το προκάλεσαν.

Το *Σύνθετο σφάλμα μεταξύ οδόντων (Tooth-to-tooth Composite Variation/Error)* ορίζεται ως η μέγιστη διαφορά που καταγράφεται στην αξονική απόσταση σε κάθε βήμα οδόντος του τροχού. Η μεγαλύτερη από αυτές συγκρίνεται με το μέγιστο επιτρεπόμενο όριο που ορίζεται ανάλογα με την εφαρμογή και το είδος του τροχού και διαπιστώνεται αν ο τροχός βρίσκεται εντός ορίων. Στο Σχήμα 2.3 το μέγιστο σύνθετο σφάλμα τέτοιου είδους παρατηρείται στον οδόντα με αύξοντα αριθμό 3. Όσο ο αριθμός των οδόντων γίνεται μικρότερος, ο λόγος του σύνθετου σφάλματος οδόντα προς οδόντα προς το συνολικό γίνεται γενικά μεγαλύτερος. Στην ακραία περίπτωση ενός ατέρμονα κοχλία μονής αρχής τα δύο σφάλματα θα ταυτίζονταν. Αντίθετα, όσο ο αριθμός των δοντιών αυξάνεται, το σύνθετο σφάλμα από οδόντα σε οδόντα θεωρείται όλο και πιο ενδεικτικό των γεωμετρικών αποκλίσεων των κατατομών του τροχού. Ένα τέτοιο σφάλμα είναι και η απόκλιση της γωνίας πίεσης, η οποία καταγράφεται ως ένα επαναλαμβανόμενο μοτίβο από τόξα παρόμοιων με αυτά που φαίνονται στο Σχήμα 2.3 μεταξύ των οδόντων 5 και 7. Τα όρια που τίθενται στο σύνθετο σφάλμα από οδόντα σε οδόντα βοηθούν στην διαπίστωση μόνιμων παραμορφώσεων και εγκοπών (nicks and burrs) που μπορεί να υπάρχουν και μπορεί να μην μετρηθούν από κάποια αναλυτική μέθοδο ελέγχου. Μια τέτοια ατέλεια καταγράφεται και στο διάγραμμα που παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.4.

Η *εκκεντρότητα (runout)* του εξεταζόμενου τροχού προκύπτει υπολογίζοντας την μέση τιμή των επιμέρους μεταβολών που παρατηρούνται στο διάγραμμα της αξονικής απόστασης, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.3 και αφαιρώντας τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή που προκύπτουν. Το μέγεθος της εκκεντρότητας του τροχού επηρεάζει σημαντικά την απόδοση του τροχού, διότι, ιδιαίτερα σε εφαρμογές υψηλών στροφών, θα αποτελέσει την πηγή κραδασμών και θορύβου.



Σχήμα 2.3 Αναφορά επιθεώρησης σφαλμάτων οδοντωτών τροχών με τη μέθοδο διπλής κατατομής [12]



Σχήμα 2.4 Διαπίστωση ελαττωματικού οδόντα με τη μέθοδο διπλής κατατομής [13, σελ. B.25]

2.2. Αναλυτική προσομοίωση μεθόδου διπλής κατατομής

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται ένα μαθηματικό μοντέλο που προσομοιώνει τον λειτουργικό έλεγχο που επιτελείται μέσω της μεθόδου διπλής κατατομής. Από την ανάλυση της μεθόδου που προηγήθηκε γίνεται κατανοητό πως για την διεκπεραίωση του ελέγχου απαιτούνται τα παρακάτω στοιχεία: δύο οδοντωτοί τροχοί, ο εξεταζόμενος και ο αντίστοιχος πρότυπος, μια εξειδικευμένη μηχανή που θα εξασφαλίζει την σφικτή συνεργασία τους και ο μετρητικός εξοπλισμός για την αποτύπωση της μεταβολής της αξονικής τους απόστασης. Η μορφή των κατατομών των οδόντων και

η επιβολή σφικτής συνεργασίας καθορίζουν ποια θα είναι κάθε στιγμή τα σημεία επαφής των τροχών, η γωνία περιστροφής του κινούμενου τροχού και τελικά τη μεταβολή της αξονικής απόστασης.

Ένα μοντέλο που θα προσομοιώνει τη μέθοδο διπλής κατατομής, θα πρέπει να δέχεται ως είσοδο τις γεωμετρικές του πρότυπου και του εξεταζόμενου τροχού, να υπολογίζει για κάθε γωνία περιστροφής του δεύτερου τις μετακινήσεις του πρώτου ώστε να εξασφαλίζεται η σφικτή συνεργασία τους και να δίνει σαν αποτέλεσμα το διάγραμμα με τη μεταβολή της απόστασης των αξόνων. Ο υπολογισμός αυτός θα γίνεται μετά την κατάστροψη και την επίλυση των μαθηματικών εξισώσεων που διέπουν τη σφικτή συνεργασία των τροχών και εξαρτώνται άμεσα από τις κατατομές των οδόντων τους. Στη συνέχεια, παρουσιάζεται ο τρόπος με τον οποίον καθορίζονται οι εξισώσεις αυτές, οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για την επίλυσή τους και τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την εφαρμογή τους σε γεωμετρικές οδοντωτών τροχών.

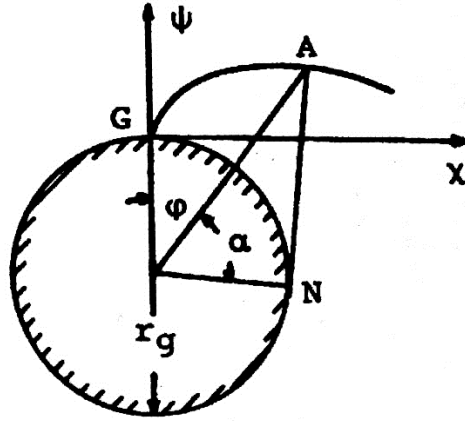
2.2.1. Μαθηματική περιγραφή κατατομών

Παρά την ευρεία διάδοση της μεθόδου ελέγχου διπλής κατατομής στην επιθεώρηση σφαλμάτων οδοντωτών τροχών, λίγες είναι οι έρευνες που έχουν γίνει για τον καθορισμό ενός μαθηματικού μοντέλου που περιγράφει την λειτουργία της. Οι Liu και Lin το 2009 [1], θεωρώντας τις συνεργαζόμενες κατατομές των τροχών ως εξειλιγμένες, οι οποίες στην περίπτωση του εξεταζόμενου τροχού παρουσιάζουν αποκλίσεις σε διάφορες παραμέτρους της -π.χ. απόκλιση στη γωνία πίεσης της εξειλιγμένης- προσδιορίζουν τα σημεία επαφής και την απόσταση των αξόνων για κάθε γωνία εφαρμόζοντας τη διαδικασία της ανάλυσης επαφής των οδόντων (Tooth Contact Analysis). Ο Tang et al. το 2018 [2], θεωρώντας παρόμοιες κατατομές και χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις συμπλοκής των οδόντων και την διαφορική μέθοδο, υπολογίζουν την απόκλιση της κατατομής κάθε οδόντος από την ιδανική στην ακτινική και εφαπτομενική διεύθυνση δεδομένων των σφαλμάτων στα οποία αυτή υπόκειται, προσδιορίζοντας έτσι και την απόσταση των αξόνων κάθε φορά.

Η μέθοδος που εφαρμόζεται στην παρούσα ενότητα ακολουθεί κατά βάση την προσέγγιση των Liu και Lin. Θεωρώντας πως οι κατατομές του εξεταζόμενου τροχού παρουσιάζουν αποκλίσεις, αλλά το προφίλ τους εξακολουθεί να είναι προφίλ εξειλιγμένης, υπολογίζονται για κάθε γωνία περιστροφής του κινητήριου τροχού τα σημεία επαφής των δύο τροχών, η γωνία περιστροφής του κινούμενου και η απόσταση των αξόνων τους.

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.5, η εξειλιγμένη καμπύλη παράγεται μέσω της κύλισης χωρίς ολίσθηση της ευθείας Gx επί της περιφέρειας του βασικού κύκλου ακτίνας r_g . Οι εξισώσεις που την περιγράφουν είναι οι ακόλουθες [14]:

$$\begin{aligned}x &= r_g (\sin \omega - \omega \cos \omega) \\y &= r_g (\cos \omega - 1 + \omega \sin \omega) \\ \frac{dy}{dx} &= \cot \omega\end{aligned}\tag{2.1}$$



Σχήμα 2.5 Εξειλιγμένη καμπύλη [14]

Κάθε οδόντας των τροχών που εξετάζονται αποτελείται από δύο τέτοιες καμπύλες, μία στην εργαζόμενη (*working*) και μία στην μη εργαζόμενη (*coasting*) κατατομή του. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρείται πως η δεξιά πλευρά των τροχών είναι η εργαζόμενη και η αριστερή η μη εργαζόμενη. Συγκεντρωτικά, οι δεξιές κατατομές κάθε οδόντος του πρότυπου (*master*) τροχού περιγράφονται από τις παρακάτω σχέσεις [1]

$$\mathbf{R}_M^{(MR)} = \begin{bmatrix} x_M^{(MR)} \\ y_M^{(MR)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{bM} \sin \theta_{M_R} - r_{bM} \xi_{M_R} \cos \theta_{M_R} \\ r_{bM} \cos \theta_{M_R} + r_{bM} \xi_{M_R} \sin \theta_{M_R} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$\theta_{M_R} = \xi_{M_R} + q_M + \frac{2\pi}{N_M} i \quad (2.3)$$

$$q_M = \frac{\pi}{2N_M} - \text{inv } a_M \quad (2.4)$$

όπου η αρχή του συστήματος συντεταγμένων βρίσκεται στο κέντρο του τροχού, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.6, r_{bM} είναι η ακτίνα του βασικού κύκλου στον πρότυπο τροχό, ξ_{M_L} είναι η γωνία εξειλιγμένης σε κάθε σημείο της κατατομής, q_M είναι το μισό του πλάτους μεταξύ δύο κατατομών στον βασικό κύκλο, N_M είναι ο αριθμός των οδόντων, a_M είναι η γωνία πίεσης, θ_{M_L} είναι η γωνία κάθε σημείου ως προς τον κατακόρυφο άξονα Y_{Mi} και i είναι ο αύξαν αριθμός του εκάστοτε δοντιού.

Τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα των κατατομών που θα χρειαστούν για την κατάστρωση των εξισώσεων επαφής παρακάτω υπολογίζονται ως εξής [15]:

$$\mathbf{n}_M^{(MR)} = \begin{bmatrix} n_{xM}^{(MR)} \\ n_{yM}^{(MR)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_x / |N| \\ N_y / |N| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{M_R} \\ -\sin \theta_{M_R} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

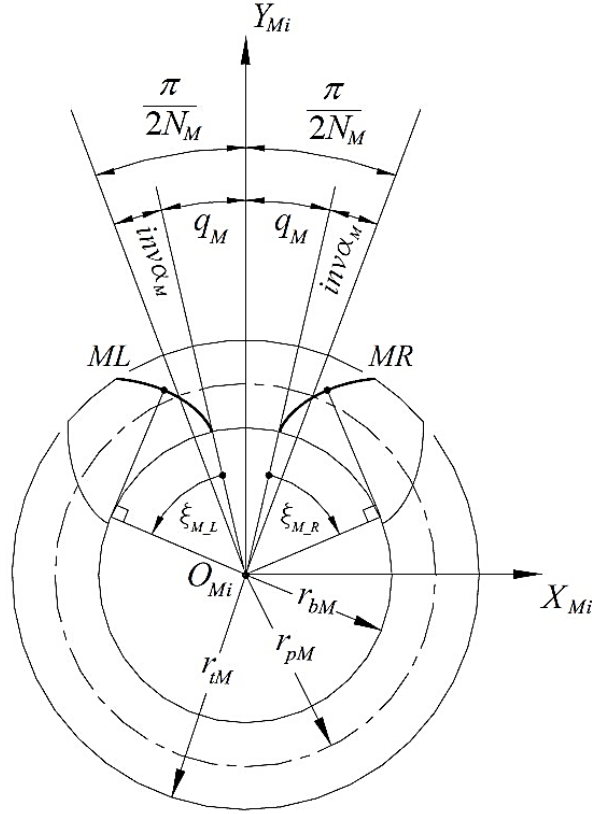
$$N_x = \frac{\partial N}{\partial y}, N_y = -\frac{\partial N}{\partial x}, N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2}$$

Αντίστοιχα ορίζονται και οι κατατομές της αριστερής πλευράς του πρότυπου τροχού:

$$\mathbf{R}_M^{(ML)} = \begin{bmatrix} x_M^{(ML)} \\ y_M^{(ML)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(r_{bM} \sin \theta_{M_L} - r_{bM} \xi_{M_L} \cos \theta_{M_L}) \\ r_{bM} \cos \theta_{M_L} + r_{bM} \xi_{M_L} \sin \theta_{M_L} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

$$\theta_{M_L} = \xi_{M_L} + q_M - \frac{2\pi}{N_M} i \quad (2.7)$$

$$\mathbf{n}_M^{(ML)} = \begin{bmatrix} n_{xM}^{(ML)} \\ n_{yM}^{(ML)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \theta_{M_L} \\ -\sin \theta_{M_L} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$



Σχήμα 2.6 Γεωμετρία κατατομών πρότυπου τροχού [1]

Οι εξισώσεις της γεωμετρίας του πρότυπου τροχού που παρουσιάστηκαν παραπάνω χρησιμοποιούν τις ίδιες παραμέτρους της εξειλιγμένης (γωνία πίεσης και βήμα στο βασικό κύκλο) και για τις δύο κατατομές κάθε οδόντος. Στον εξεταζόμενο τροχό, όμως, οι παράμετροι αυτοί ορίζονται ξεχωριστά για κάθε κατατομή, ώστε να μπορούν να προσομοιωθούν διαφορές αποκλίσεις στις δεξιές και αριστερές κατατομές του τροχού. Έτσι, οι εξισώσεις που περιγράφουν τις κατατομές του εξεταζόμενου τροχού προκύπτουν ως εξής (Σχήμα 2.7):

Δεξιές κατατομές (εργαζόμενες):

$$\mathbf{R}_T^{(TR)} = \begin{bmatrix} x_T^{(TR)} \\ y_T^{(TR)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{bT_R} \sin \theta_{T_R} - r_{bT_R} \xi_{T_R} \cos \theta_{T_R} \\ r_{bT_R} \cos \theta_{T_R} + r_{bT_R} \xi_{T_R} \sin \theta_{T_R} + E \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

$$\mathbf{n}_T^{(TR)} = \begin{bmatrix} n_{xT}^{(TR)} \\ n_{yT}^{(TR)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{T_R} \\ -\sin \theta_{T_R} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

$$\theta_{T_R} = \xi_{T_R} - q_{T_R} + \frac{2\pi}{N_T} i \quad (2.11)$$

$$q_{T_R} = \frac{\pi}{2N_T} + \text{inv } a_{T_R} \quad (2.12)$$

Αριστερές κατατομές (μη εργαζόμενες):

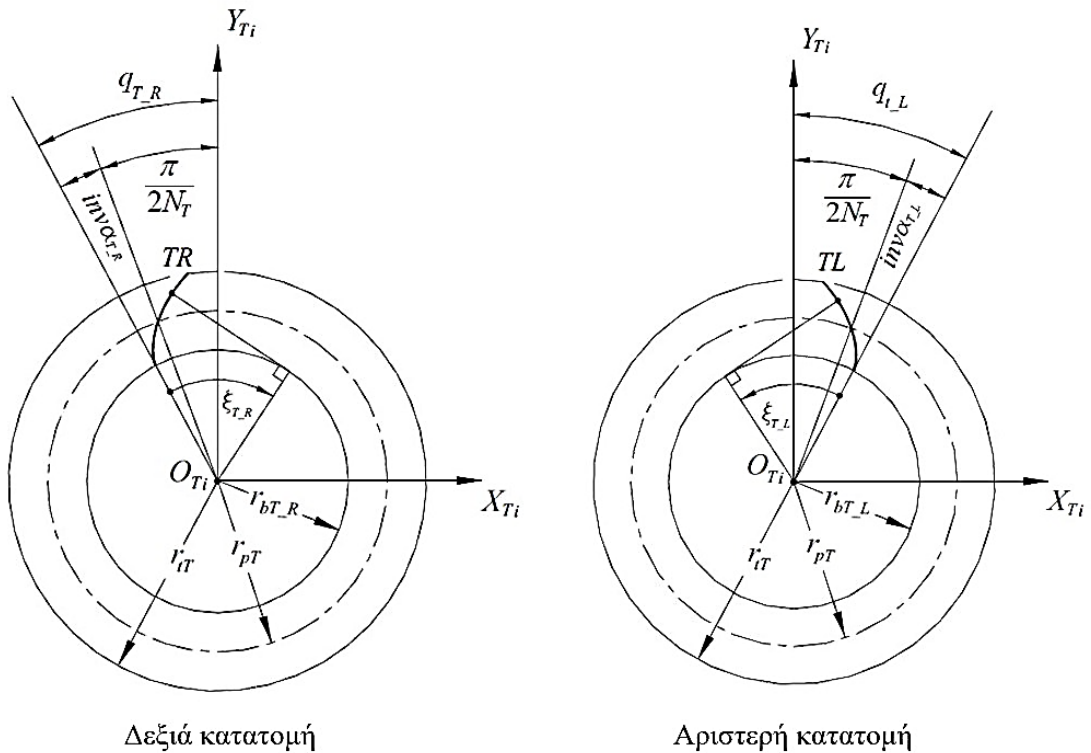
$$\mathbf{R}_T^{(TL)} = \begin{bmatrix} x_T^{(TL)} \\ y_T^{(TL)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(r_{bT_L} \sin \theta_{T_L} - r_{bT_L} \xi_{T_L} \cos \theta_{T_L}) \\ r_{bT_L} \cos \theta_{T_L} + r_{bT_L} \xi_{T_L} \sin \theta_{T_L} + E \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

$$\mathbf{n}_T^{(TL)} = \begin{bmatrix} n_{xT}^{(TL)} \\ n_{yT}^{(TL)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \theta_{T_L} \\ -\sin \theta_{T_L} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

$$\theta_{T_L} = \xi_{T_L} - q_{T_L} - \frac{2\pi}{N_T} i \quad (2.15)$$

$$q_{T_L} = \frac{\pi}{2N_T} + \text{inv } a_{T_L} \quad (2.16)$$

όπου E είναι η εκκεντρότητα του εξεταζόμενου τροχού.

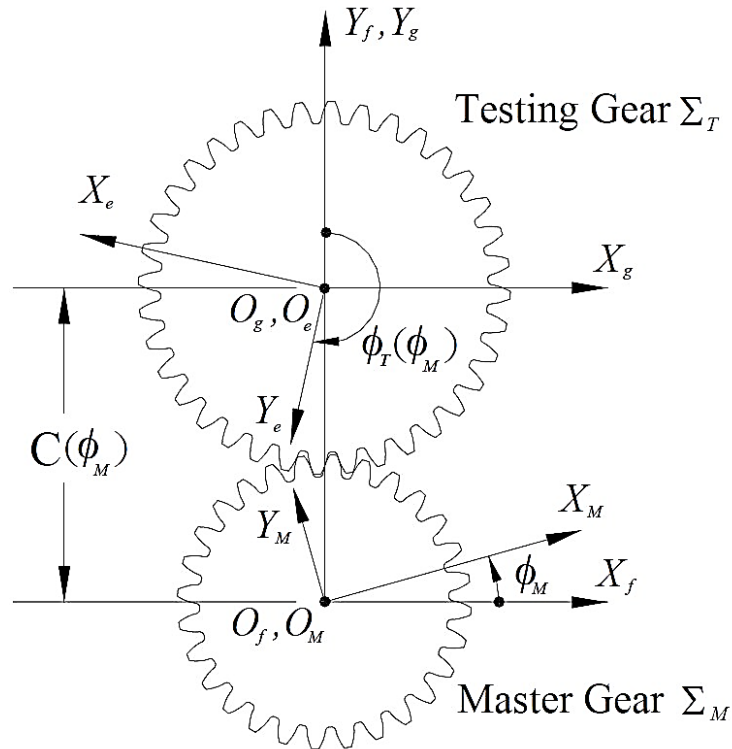


Σχήμα 2.7 Γεωμετρία κατατομών εξεταζόμενου τροχού [1]

2.2.2. Μοντέλο συνεργασίας τροχών

Οι συντεταγμένες των σημείων κάθε κατατομής που παρουσιάστηκαν παραπάνω αναφέρονται σε ένα σύστημα συντεταγμένων του οποίου η αρχή βρίσκεται στο κέντρο του τροχού που ανήκουν. Για την εξαγωγή των εξισώσεων που περιγράφουν τη συνεργασία των τροχών όλες οι συντεταγμένες θα πρέπει να εκφραστούν ως προς ένα κοινό, απόλυτο σύστημα συντεταγμένων. Θεωρώντας την τοπολογία των τροχών όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.8, το απόλυτο σύστημα συντεταγμένων επιλέγεται να είναι το $\Sigma_f(X_f, Y_f)$, η αρχή του οποίου τοποθετείται στο κέντρο του πρότυπου τροχού.

Τα σωματόδετα συστήματα συνταγμένων $\Sigma_M(X_M, Y_M)$ και $\Sigma_e(X_e, Y_e)$ περιστρέφονται κατά τις γωνίες φ_M και φ_T , που είναι οι γωνίες περιστροφής του πρότυπου και του εξεταζόμενου τροχού αντίστοιχα.



Σχήμα 2.8 Μοντέλο συνεργασίας τροχών και συστήματα συντεταγμένων [1]

Οι ομογενείς μετασχηματισμοί που εκφράζουν τις συντεταγμένες των κατατομών ως προς το απόλυτο σύστημα συντεταγμένων $\Sigma_f(X_f, Y_f)$ είναι:

$$\mathbf{R}_f^{(ML,R)} = \begin{bmatrix} x_f^{(ML,R)} \\ y_f^{(ML,R)} \end{bmatrix} = [M_{fM}] \mathbf{R}_M^{(ML,R)} \quad (2.17)$$

$$\mathbf{n}_f^{(ML,R)} = \begin{bmatrix} n_{xf}^{(ML,R)} \\ n_{yf}^{(ML,R)} \end{bmatrix} = [L_{fM}] \mathbf{n}_M^{(ML,R)} \quad (2.18)$$

$$\mathbf{R}_f^{(TL,R)} = \begin{bmatrix} x_f^{(TL,R)} \\ y_f^{(TL,R)} \end{bmatrix} = [M_{fT}] \mathbf{R}_T^{(TL,R)} \quad (2.19)$$

$$\mathbf{n}_f^{(TL,R)} = \begin{bmatrix} n_{xf}^{(TL,R)} \\ n_{yf}^{(TL,R)} \end{bmatrix} = [L_{fT}] \mathbf{n}_T^{(TL,R)} \quad (2.20)$$

όπου

$$[M_{fM}] = \begin{bmatrix} \cos \varphi_M & -\sin \varphi_M & 0 \\ \sin \varphi_M & \cos \varphi_M & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

$$\begin{bmatrix} L_{fM} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_M & -\sin \varphi_M \\ \sin \varphi_M & \cos \varphi_M \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

$$\begin{bmatrix} M_{fe} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \varphi_T & \sin \varphi_T & 0 \\ -\sin \varphi_T & -\cos \varphi_T & C \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

$$\begin{bmatrix} L_{fe} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_T & \sin \varphi_T \\ -\sin \varphi_T & \cos \varphi_T \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

και C η απόσταση των αξόνων κάθε στιγμή, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.8.

Κατά την συνεργασία του πρότυπου και του εξεταζόμενου τροχού μπορούν να προκύψουν μεταξύ των κατατομών τους δύο τύποι επαφών. Στον πρώτο τύπο η επαφή εντοπίζεται μεταξύ των επιφανειών των κατατομών, ενώ στον δεύτερο πραγματοποιείται μεταξύ μιας κορυφής (*tip*) της κατατομής και την επιφάνεια της άλλης. Κάθε τύπος επαφής μπορεί να προκύψει σε κάθε υποψήφιο προς συνεργασία ζεύγος κατατομών και απαιτεί ξεχωριστή διαχείριση ως προς την μαθηματική του μοντελοποίηση.

Ο πιο κοινός τύπος επαφής μεταξύ δύο κατατομών κατά τη συνεργασία δύο οδοντωτών τροχών είναι επιφάνεια με επιφάνεια, κατά τον τρόπο που φαίνεται στο Σχήμα 2.9. Εφόσον οι τροχοί υπόκεινται σε σφικτή συνεργασία, αναμένεται να υπάρχει επαφή μεταξύ δύο ζευγών κατατομών. Τα σημεία από κάθε κατατομή που έρχονται σε επαφή θα πρέπει σύμφωνα με τη θεωρία επαφών να έχουν τις ίδιες συντεταγμένες ως προς το απόλυτο σύστημα συντεταγμένων και ταυτόχρονα τα κάθετα διανύσματα (ή ομοίως οι εφαπτομένες) που ορίζονται σε αυτά να βρίσκονται στην ίδια διεύθυνση. Επομένως, θα πρέπει να επαληθεύονται οι παρακάτω εξισώσεις:

$$\mathbf{R}_f^{(TL)} = \mathbf{R}_f^{(ML)} \quad (2.25)$$

$$\mathbf{R}_f^{(TR)} = \mathbf{R}_f^{(MR)} \quad (2.26)$$

$$\mathbf{n}_f^{(TL)} = \lambda \mathbf{n}_f^{(ML)} \quad (2.27)$$

$$\mathbf{n}_f^{(TR)} = \lambda \mathbf{n}_f^{(MR)} \quad (2.28)$$

Οι εξισώσεις (2.25) και (2.26) απαιτούν την ταύτιση των συντεταγμένων, ενώ οι εξισώσεις (2.27) και (2.28), όπου λ ισούται με -1 ή 1, την ταύτιση των διευθύνσεων των κάθετων διανυσμάτων. Οι εξισώσεις (2.25)-(2.28) διαμορφώνουν ένα σύστημα 6 εξισώσεων με 7 αγνώστους: τις 4 γωνίες εξειλιγμένης των σημείων επαφής, τις γωνίες περιστροφής των τροχών και την απόσταση των αξόνων. Το σύστημα των εξισώσεων παρουσιάζεται πλήρως διαμορφωμένο στις εξισώσεις (2.29)-(2.34).

$$x_f^{(MR)} - x_f^{(TR)} = 0 \quad (2.29)$$

$$y_f^{(MR)} - y_f^{(TR)} = 0 \quad (2.30)$$

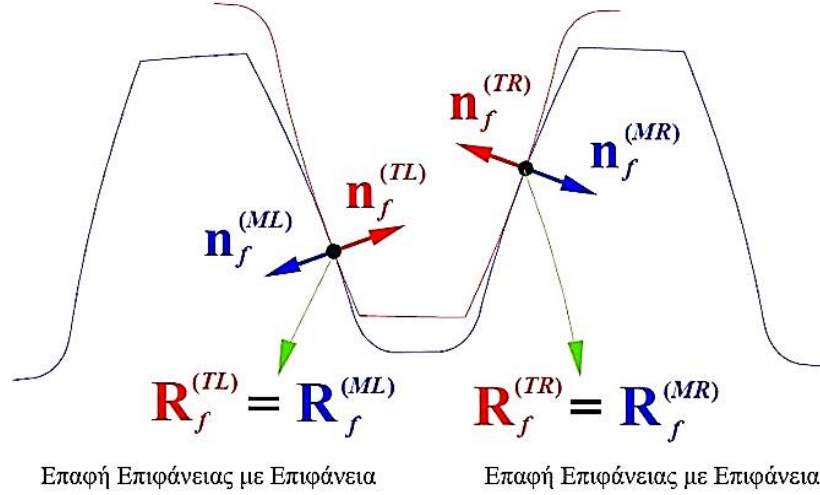
$$x_f^{(ML)} - x_f^{(TL)} = 0 \quad (2.31)$$

$$y_f^{(ML)} - y_f^{(TL)} = 0 \quad (2.32)$$

$$n_{xf}^{(TR)} n_{yf}^{(MR)} - n_{xf}^{(MR)} n_{yf}^{(TR)} = 0 \quad (2.33)$$

$$n_{xf}^{(TL)} n_{yf}^{(ML)} - n_{xf}^{(ML)} n_{yf}^{(TL)} = 0 \quad (2.34)$$

Επιλέγοντας κάθε φορά τη γωνία περιστροφής του ενός τροχού, οι άγνωστοι μειώνονται στους 6, όσες και οι διαθέσιμες εξισώσεις. Η επίλυση αυτού του μη γραμμικού συστήματος θα προσδιορίσει και την ζητούμενη απόσταση αξόνων κάθε στιγμή.



Σχήμα 2.9 Επαφή μεταξύ επιφανειών και στα δύο ζεύγη κατατομών [1]

Στην περίπτωση που σε ένα ζεύγος κατατομών προκύψει επαφή μεταξύ μιας εκ των κορυφών τους και της επιφάνειας της άλλης κατατομής, οι εξισώσεις (2.29)-(2.34) δεν είναι πλέον ικανές να προβλέψουν τα σημεία της επαφής, μιας και στις κορυφές των κατατομών δεν υπάρχει μονοσήμαντος ορισμός του καθέτου διανύσματος. Για παράδειγμα, εάν κάποια στιγμή κατά τη συνεργασία των δύο τροχών υπάρξει επαφή της κορυφής της αριστερής κατατομής του εξεταζόμενου με την επιφάνεια της αντίστοιχης κατατομής του πρότυπου, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.10, τότε πλέον δεν μπορεί να οριστεί μονοσήμαντα το διάνυσμα $n_f^{(TL)}$ και η εξίσωση (2.34) δεν είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση του συστήματος, το οποίο πλέον αποτελείται από 5 εξισώσεις. Ταυτόχρονα, όμως, έχουν μειωθεί και οι άγνωστοι σε 5, αφού η γωνία εξελεγμένης της κορυφής κατατομής προσδιορίζεται από τον κύκλο κεφαλής του τροχού που είναι γνωστός. Έτσι, προκύπτει ένα νέο σύστημα 5 εξισώσεων με 5 αγνώστους, που για το παράδειγμα που παρουσιάστηκε παραπάνω έχει την ακόλουθη μορφή:

$$x_f^{(MR)} - x_f^{(TR)} = 0 \quad (2.35)$$

$$y_f^{(MR)} - y_f^{(TR)} = 0 \quad (2.36)$$

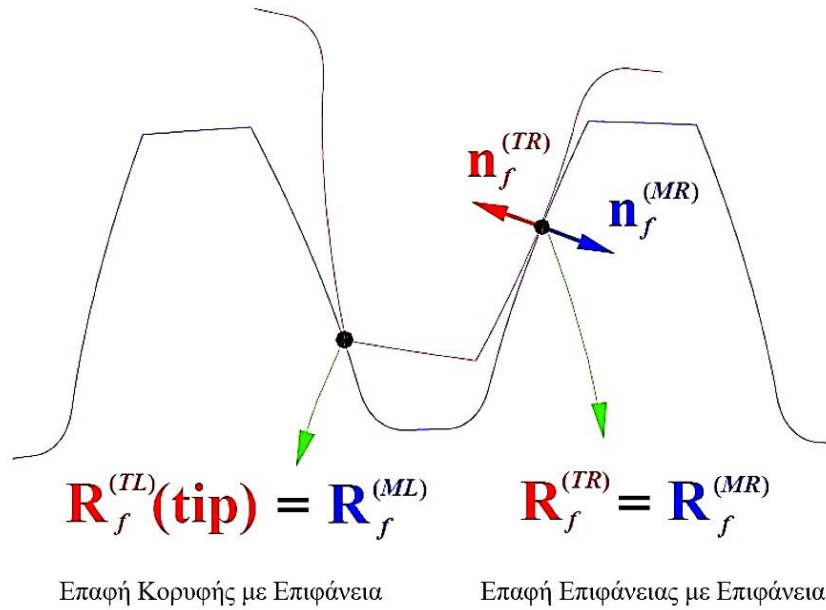
$$x_f^{(ML)} - x_f^{(TL)}(tip) = 0 \quad (2.37)$$

$$y_f^{(ML)} - y_f^{(TL)}(tip) = 0 \quad (2.38)$$

$$n_{xf}^{(TR)} n_{yf}^{(MR)} - n_{xf}^{(MR)} n_{yf}^{(TR)} = 0 \quad (2.39)$$

Αντίστοιχα καταστρώνονται και τα συστήματα που αφορούν την επαφή των άλλων 3 κορυφών των κατατομών. Η επίλυση του συστήματος γίνεται και εδώ με επιλογή μια γωνίας περιστροφής ενός

τροχού.



Σχήμα 2.10 Επαφή κορυφής με επιφάνεια σε ένα ζεύγος κατατομών [1]

Μία ακόμα περίπτωση συνεργασίας των κατατομών των δύο τροχών παρουσιάζεται όταν πλέον δεν παρατηρείται επαφή μεταξύ των επιφανειών, αλλά επαφή κορυφής με επιφάνεια και στα δύο ζεύγη των κατατομών. Σε αυτή την περίπτωση, δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί καμία εξίσωση που περιλαμβάνει τον προσδιορισμό των κάθετων διανυσμάτων, μειώνοντας τον αριθμό των διαθέσιμων εξισώσεων σε 4. Ταυτόχρονα, όμως, κατά τρόπο αντίστοιχο με την προηγούμενη περίπτωση επαφής, οι δύο γωνίες εξελιγμένης μου αντιστοιχούν στις κορυφές των κατατομών που έρχονται σε επαφή είναι γνωστές, περιορίζοντας τον αριθμό των αγνώστων σε 4, γεγονός που επιτρέπει την επίλυση του συστήματος. Μια τέτοια περίπτωση επαφής παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.11 και το αντίστοιχο σύστημα των εξισώσεων παρατίθεται στην συνέχεια:

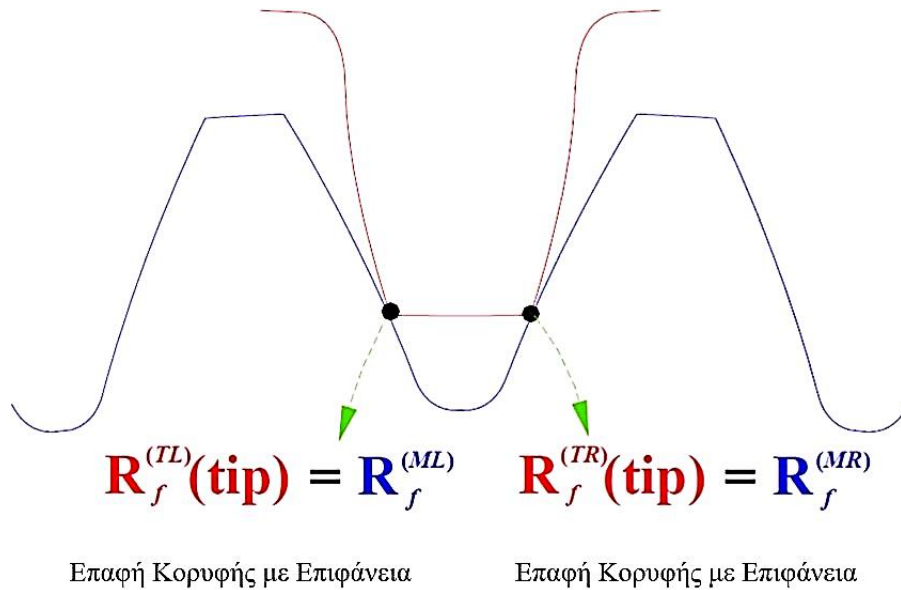
$$x_f^{(MR)} - x_f^{(TR)}(\text{tip}) = 0 \quad (2.40)$$

$$y_f^{(MR)} - y_f^{(TR)}(\text{tip}) = 0 \quad (2.41)$$

$$x_f^{(ML)} - x_f^{(TL)}(\text{tip}) = 0 \quad (2.42)$$

$$y_f^{(ML)} - y_f^{(TL)}(\text{tip}) = 0 \quad (2.43)$$

Όπως και προηγουμένως, υπάρχουν συνολικά 4 διαφορετικοί συνδυασμοί επαφής κορυφής με επιφάνεια που μπορεί να προκύψουν και καταλήγουν σε 4 διαφορετικά συστήματα που επιλύονται με την επιλογή μιας γωνίας περιστροφής.



Σχήμα 2.11 Επαφή κορυφής με επιφάνεια και στα δύο ζεύγη κατατομών [1]

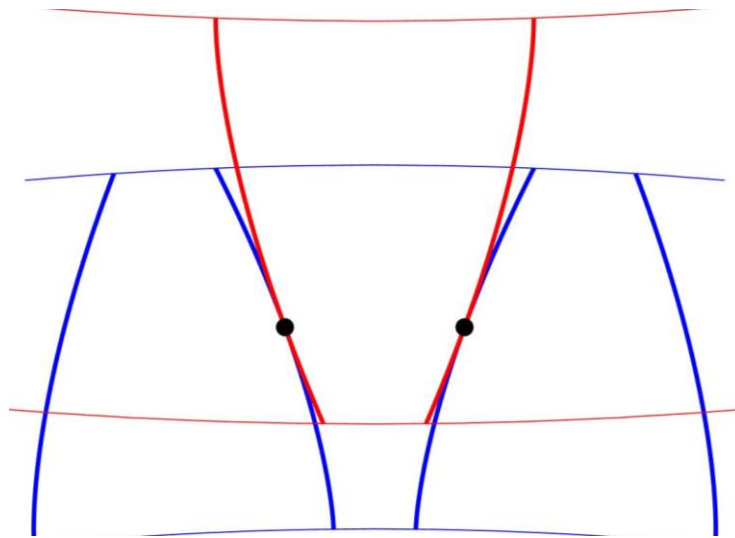
Κατά την συνεργασία του πρότυπου και του εξεταζόμενου τροχού, σε κάθε γωνία περιστροφής είναι δυνατόν να προκύψει οποιοσδήποτε από τους συνδυασμούς περιπτώσεων που παρουσιάστηκαν παραπάνω. Ο συνδυασμός που αντιστοιχεί στην πραγματικότητα κάθε φορά εξαρτάται από την μορφή των κατατομών και δεν είναι δυνατόν να προσδιοριστεί εκ των προτέρων. Ο προσδιορισμός του γίνεται μετά την επίλυση των συστημάτων και των 9 περιπτώσεων επαφής που μπορεί να προκύψουν. Η επίλυσή τους θα δώσει 9 διαφορετικές τιμές για την απόσταση των αξόνων των τροχών. Η μεγαλύτερη από αυτές τις τιμές θα είναι και η πραγματική, αφού στις υπόλοιπες περιπτώσεις θα παρατηρούνταν διείσδυση της μιας κατατομής μέσα στην άλλη σε κάποια τμήματά τους.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της διαδικασίας ελέγχου των συνδυασμών επαφής για τη συνεργασία ενός πρότυπου τροχού 60 οδόντων, γωνίας πίεσης 20° και module ίσου με 1, με έναν εξεταζόμενο τροχό ίδιων χαρακτηριστικών και 70 οδόντων, για μηδενική γωνία περιστροφής του πρότυπου τροχού. Ο αριθμός των οδόντων επιλέγεται να είναι σχετικά μεγάλος για λόγους καλύτερης εμπορείας της διαδικασίας. Στον Πίνακα 2.1 παρατίθενται οι αποστάσεις αξόνων που υπολογίζονται για κάθε περίπτωση επαφής. Η μεγαλύτερη από αυτές εντοπίζεται στην περίπτωση επαφής μεταξύ επιφανειών και στα δυο ζεύγη κατατομών των τροχών. Στα Σχήματα 2.12-2.14 παρατίθενται ενδεικτικά ορισμένες περιπτώσεις επαφής που υπολογίστηκαν και φαίνεται η διείσδυση των κατατομών στις περιπτώσεις που δεν ανταποκρίνονται στον πραγματικό τύπο επαφής.

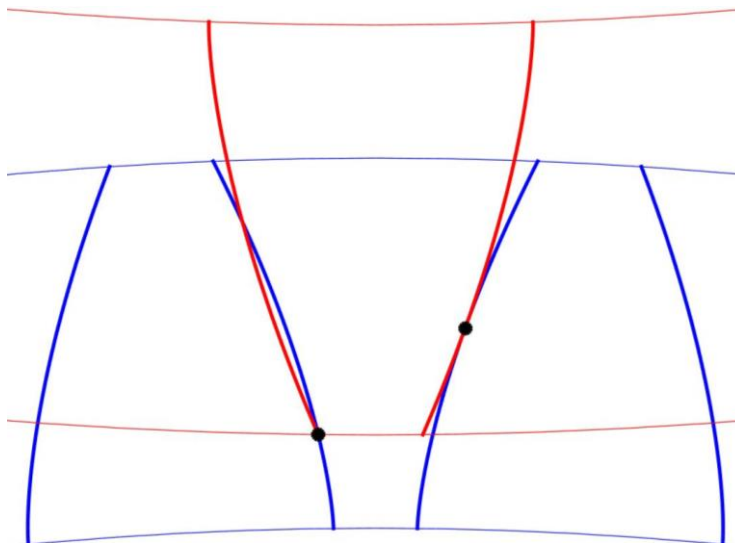
Δεξιές κατατομές	Αριστερές κατατομές	Απόσταση αξόνων (mm)
<u>Επιφάνεια με επιφάνεια</u>	<u>Επιφάνεια με επιφάνεια</u>	<u>65.000</u>
Κορυφή πρότυπου με επιφάνεια	Επιφάνεια με επιφάνεια	64.702
Κορυφή εξεταζόμενου με επιφάνεια	Επιφάνεια με επιφάνεια	64.898
Επιφάνεια με επιφάνεια	Κορυφή πρότυπου με επιφάνεια	64.702
Επιφάνεια με επιφάνεια	Κορυφή εξεταζόμενου με επιφάνεια	64.898

Κορυφή πρότυπου με επιφάνεια	Κορυφή πρότυπου με επιφάνεια	63.873
Κορυφή πρότυπου με επιφάνεια	Κορυφή εξεταζόμενου με επιφάνεια	64.416
Κορυφή εξεταζόμενου με επιφάνεια	Κορυφή πρότυπου με επιφάνεια	64.416
Κορυφή εξεταζόμενου με επιφάνεια	Κορυφή εξεταζόμενου με επιφάνεια	64.733

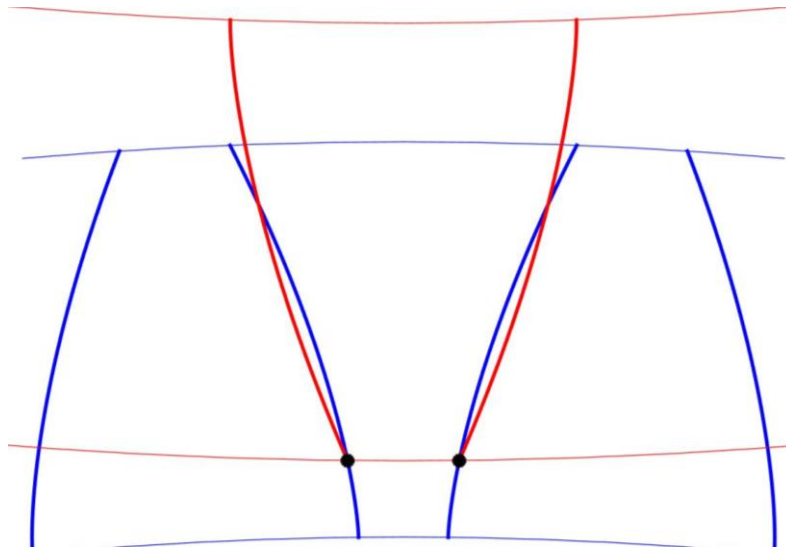
Πίνακας 2.1 Υπολογισμός αποστάσεων αξόνων για κάθε περίπτωση επαφής δύο τροχών για μία δεδομένη γωνία περιστροφής του πρότυπου τροχού



Σχήμα 2.12 Επαφή επιφανειών και στα δύο ζεύγη κατατομών (καμία διείσδυση)

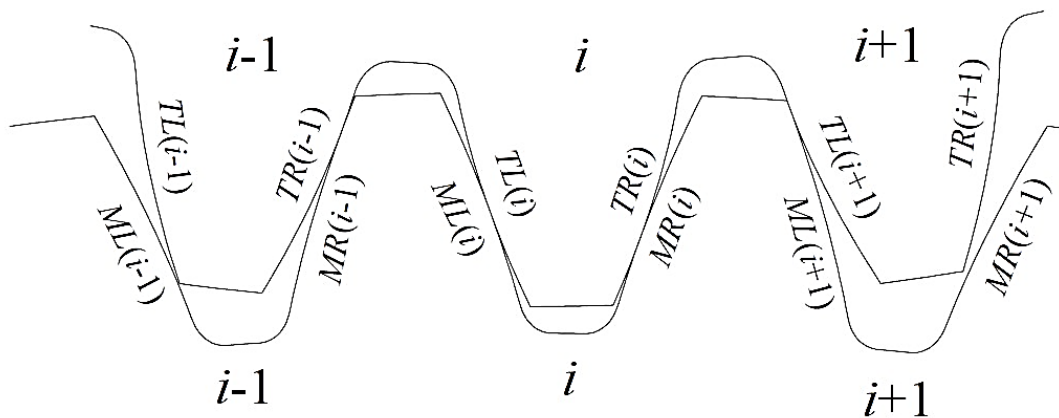


Σχήμα 2.13 Επαφή της κορυφής της αριστερής κατατομής του εξεταζόμενου τροχού (διείσδυση)



Σχήμα 2.14 Επαφή των κορυφών και των δύο κατατομών του εξεταζόμενου τροχού (δειξάση)

Η παραπάνω διαδικασία προσδιορισμού του τρόπου επαφής των τροχών εξετάζει όλους εκείνους τους συνδυασμούς επαφών που είναι δυνατόν να εμφανιστούν μεταξύ δύο διαδοχικών ζευγών κατατομών. Κατά την σφικτή συνεργασία όμως των τροχών είναι δυνατόν να έρθουν σε επαφή ζεύγη κατατομών διαφορετικών οδόντων, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.15. Οι περισσότεροι οδοντωτοί τροχοί έχουν βαθμό επικάλυψης 1 έως 3, για αυτό και επιλέγεται ένα μοντέλο συνεργασίας τριών οδόντων. Όπως θα φανεί όμως και στη συνέχεια, το μοντέλο μπορεί να επεκταθεί και για περισσότερους οδόντες. Οποιαδήποτε από τα ζεύγη κατατομών που φαίνονται στο Σχήμα 2.15 μπορεί κάθε στιγμή να βρίσκεται σε επαφή. Συνολικά μπορούν να προκύψουν 9 διαφορετικές περιπτώσεις επαφών, όπως παρουσιάζονται στον Πίνακα 2.2. Λαμβάνοντας υπόψιν πως για κάθε μία από αυτές τις περιπτώσεις μπορεί να υπάρχουν άλλοι 9 συνδυασμοί επαφής (επιφάνεια με επιφάνεια, κορυφή με επιφάνεια κλπ.) θα πρέπει να ελεγχθούν 81 διαφορετικές περιπτώσεις επαφής, να επιλυθούν τα αντίστοιχα συστήματα και να υπολογιστούν οι αποστάσεις αξόνων σε κάθε περίπτωση, ώστε να επιλεγεί η μεγαλύτερη, που θα είναι και η πραγματική για τους λόγους που παρουσιάστηκαν παραπάνω.



Σχήμα 2.15 Μοντέλο συνεργασίας τριών οδόντων

	Αύξων αριθμός ζεύγους κατατομών	
	Αριστερή Πλευρά	Δεξιά Πλευρά
Περίπτωση 1	$i-1$	$i-1$
Περίπτωση 2	$i-1$	i
Περίπτωση 3	$i-1$	$i+1$
Περίπτωση 4	i	$i-1$
Περίπτωση 5	i	i
Περίπτωση 6	i	$i+1$
Περίπτωση 7	$i+1$	$i-1$
Περίπτωση 8	$i+1$	i
Περίπτωση 9	$i+1$	$i+1$

Πίνακας 2.2 Περιπτώσεις επαφής κατατομών σε μοντέλο συνεργασίας 3 οδόντων

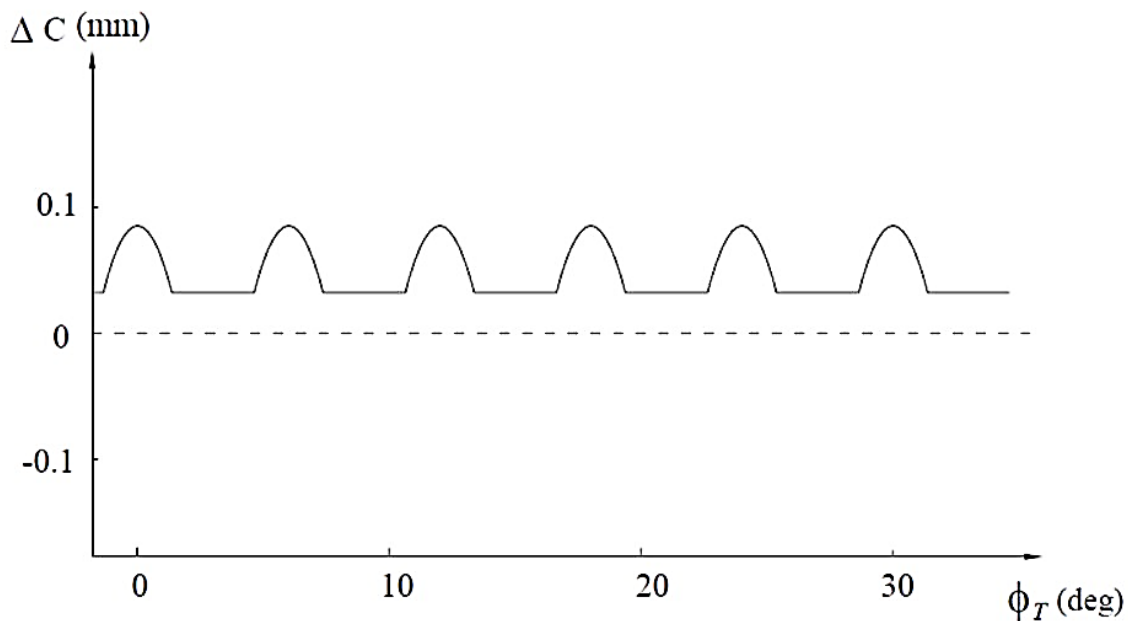
2.2.3. Αποτελέσματα αναλυτικού μοντέλου

Με όσα έχουν παρουσιαστεί έως τώρα στο Κεφάλαιο 2, είναι δυνατόν να καταστρωθεί ένα πλήρες μοντέλο προσομοίωσης της μεθόδου διπλής κατατομής, στο οποίο θα ορίζονται με τον τρόπο που περιεγράφηκε παραπάνω η γεωμετρία των συνεργαζόμενων οδοντωτών τροχών και θα αποδίδεται το αναμενόμενο διάγραμμα της μεταβολής της απόστασης των αξόνων. Το μοντέλο βασίστηκε στην επίλυση συστημάτων μαθηματικών εξισώσεων που εκφράζουν τους διαφορετικούς συνδυασμούς επαφής που μπορεί να προκύψουν και παρουσιάζεται αναλυτικά από τους Liu και Lin στο [1]. Η μόνη διαφορά με την μελέτη αυτή είναι ότι στα πλαίσια εκείνης θεωρήθηκαν μόνο 36 εναλλακτικοί τρόποι επαφής (από 81 που υπολογίστηκαν στην παρούσα μελέτη) καθώς αμελήθηκαν οι περιπτώσεις επαφής των κορυφών του πρότυπου τροχού με τις κατατομές του εξεταζόμενου. Τέτοιες περιπτώσεις επαφής όμως είναι δυνατόν να προκύψουν, όταν για παράδειγμα η γωνία πίεσης του εξεταζόμενου τροχού είναι μικρότερη από την αναμενόμενη.

Τα συστήματα των εξισώσεων που περιγράφουν την συνεργασία των τροχών και παρουσιάστηκαν αναλυτικά παραπάνω είναι μη γραμμικά και η επίλυσή τους απαιτεί την χρήση αριθμητικής μεθόδου. Η αριθμητική μέθοδος που χρησιμοποιείται στην παρούσα μελέτη είναι η *Newton-Raphson*, όπως αυτή χρησιμοποιείται για την επίλυση συστημάτων [16, σελ. 3.3-3.6]. Η κατάστρωση του μοντέλου γίνεται στο υπολογιστικό περιβάλλον *Matlab*.

Στο Σχήμα 2.16 παρουσιάζεται ένα διάγραμμα μεταβολής της αξονικής απόστασης που παρουσιάζεται από τους Liu και Lin [1]. Πρόκειται για διάγραμμα που έχει προέλθει από την συνεργασία ένα πρότυπου τροχού 55 οδόντων, γωνίας εξελιγμένης 20° και module ίσου με 2 με έναν εξεταζόμενο τροχό ίδιου module, 60 οδόντων και γωνίας πίεσης 21°, τόσο στις δεξιές όσο και στις αριστερές κατατομές.

Το αναλυτικό μοντέλο προσομοίωσης που παρουσιάστηκε παραπάνω είναι πλήρες και πετυχαίνει το σκοπό του, δίνοντας το διάγραμμα μεταβολής της αξονικής απόστασης, όπως γίνεται και κατά την πρακτική εφαρμογή της μεθόδου. Τα αποτελέσματά του συμφωνούν με τα ευρήματα άλλων ερευνητών για την επίδραση που έχει η μεταβολή των χαρακτηριστικών μεγεθών της εξελιγμένης στο διάγραμμα της αξονικής απόστασης [4, 2]. Ωστόσο, παρουσιάζει μια σειρά μειονεκτημάτων που δεν το καθιστούν ελκυστικό για την ευρύτερη χρησιμοποίησή του και συνοψίζονται στα ακόλουθα:



Σχήμα 2.16 Διάγραμμα μεταβολής απόστασης αξόνων από την αναλυτική προσομοίωση της μεθόδου διπλής κατατομής [1]

Αρχικά, όπως έγινε φανερό στο Κεφάλαιο 2.2.1, οι κατατομές του εξεταζόμενου τροχού ορίζονται ως εξειλιγμένες, στις οποίες επιτρέπεται η απόκλιση μόνο κάποιων γεωμετρικών χαρακτηριστικών τους (όπως η γωνία πίεσης και το βήμα στον βασικό κύκλο), ομοιόμορφα για όλα τα δόντια. Στην πραγματικότητα όμως, το προφίλ των κατατομών των τροχών προς εξέταση δεν είναι ιδανικές εξειλιγμένες, αλλά αντίθετα περιέχουν ατέλειες μορφής οι οποίες είναι διαφορετικές για τις δύο κατατομές κάθε οδόντα. Το πρόβλημα που δημιουργείται από αυτή την αναντιστοιχία μπορεί να λυθεί μόνο εάν υιοθετηθεί ένας διαφορετικός τρόπος προσδιορισμού των κατατομών. Για κάθε οδόντα θα πρέπει να δίνεται μία αναλυτική έκφραση της γεωμετρίας των κατατομών του και των κάθετων διανυσμάτων τους για να αντικαταστήσει την θεώρησή τους από την μέθοδο ως τέλειες εξειλιγμένες. Ένας τέτοιος τρόπος προσδιορισμού, ωστόσο, θα μετέβαλε και τα συστήματα των εξισώσεων που παρουσιάστηκαν παραπάνω, αφού τόσο οι εξισώσεις όσο και οι άγνωστοί τους θα είναι διαφορετικά. Μάλιστα, εφόσον οι άγνωστοι κάθε φορά θα εξαρτώνται από το είδος και τις αποκλίσεις της κάθε κατατομής, τα συστήματα των εξισώσεων θα πρέπει να καταστρώνονται και να επιλύονται ξεχωριστά για κάθε εφαρμογή, ενδεχομένως και για κάθε τροχό που ελέγχεται. Όλα τα παραπάνω καθιστούν τη μέθοδο δύσχρηστη και δυσεφάρμοστη.

Επιπλέον, η μέθοδος απαιτεί για την εύρεση της απόστασης αξόνων σε κάθε γωνία περιστροφής την επίλυση 81 διαφορετικών συστημάτων μη γραμμικών εξισώσεων. Οι υπολογισμοί αυτοί αυξάνουν πολύ το υπολογιστικό κόστος της μεθόδου, ειδικότερα όταν απαιτείται μικρό βήμα υπολογισμού. Το γεγονός πως η αναλυτική μέθοδος αποδεικνύεται αργή είναι αρνητικό από μόνο του, αλλά μετατρέπεται σε μεγαλύτερο πρόβλημα κατά την χρήση του μοντέλου σε άλλες εφαρμογές, όπως θα γίνει φανερό στα επόμενα κεφάλαια.

Τέλος, για την επίλυση των συστημάτων χρησιμοποιείται, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, η ανοιχτή μέθοδος της *Newton-Raphson*. Όσο οι γεωμετρίες γίνονται συνθετότερες και ο αριθμός των οδόντων μειώνεται, ορισμένοι από τους συνδυασμούς επαφής που παρουσιάστηκαν μπορεί να μην είναι δυνατόν να επιτευχθούν, με αποτέλεσμα σε κάποιες περιπτώσεις η αριθμητική μέθοδος να αποκλίνει ή να συγκλίνει σε κάποιο τοπικό ελάχιστο υπολογίζοντας λανθασμένη απόσταση αξόνων. Το γεγονός αυτό καθιστά την μέθοδο αναξιόπιστη.

2.3. Αριθμητική προσομοίωση μεθόδου διπλής κατατομής

Για την επίλυση όλων των παραπάνω προβλημάτων που παρουσιάζει η εφαρμογή της αναλυτικής προσομοίωσης της μεθόδου διπλής κατατομής, αναπτύχθηκε ένα νέο μοντέλο, που πετυχαίνει τον υπολογισμό όλων των παραμέτρων που υπολογίζονται και με την αναλυτική μέθοδο, προσδιορίζοντας, όμως, τον τρόπο της επαφής με μία πρωτότυπη αριθμητική μέθοδο. Στόχος της μεθόδου αυτής είναι να μπορεί να δέχεται ως είσοδο ένα νέφος σημείων που προέρχεται από τροχούς οποιονδήποτε κατατομών, να προσδιορίζει τα σημεία της επαφής αριθμητικά και να παρέχει μία αξιόπιστη πρόβλεψη της απόστασης των αξόνων. Το υπολογιστικό κόστος που θα συνοδεύει αυτόν τον υπολογισμό θα πρέπει να είναι σημαντικά μικρότερο από αυτόν απαιτεί το αναλυτικό μοντέλο προσομοίωσης.

2.3.1. Περιγραφή κατατομών

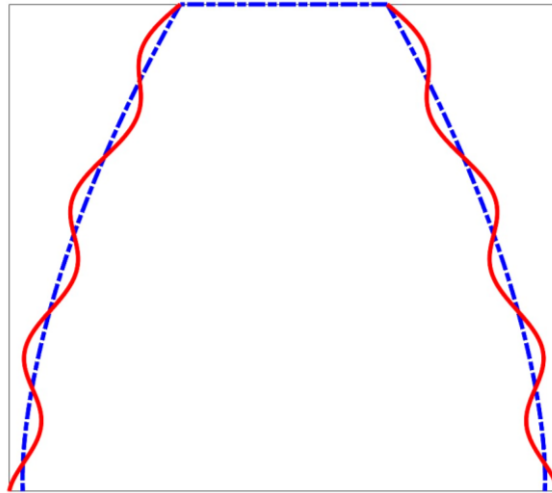
Ένα από τα μειονεκτήματα της αναλυτικής μεθόδου προσομοίωσης που παρουσιάστηκε παραπάνω είναι ότι για να υπολογίσει την απόσταση αξόνων σε κάθε γωνία περιστροφής απαιτεί μεγάλο υπολογιστικό κόστος. Το κόστος αυτό προέρχεται από την ανάγκη για επίλυση ενός μεγάλου αριθμού διαφορετικών μη γραμμικών συστημάτων, που εκφράζουν διαφορετικούς τρόπους επαφής κάθε φορά. Η επαφή των δύο συνεργαζόμενων τροχών είναι απαραίτητο να περιγραφεί με διαφορετικούς τρόπους, μιας και στις κορυφές των κατατομών δεν ορίζονται μονοσήμαντα κάθετα διανύσματα στην κατατομή. Η ιδιομορφία αυτών των σημείων απαιτεί την ξεχωριστή μεταχείρισή τους κατά την μαθηματική μοντελοποίηση του συστήματος αυξάνοντας εξαιρετικά το υπολογιστικό κόστος.

Το αριθμητικό μοντέλο προσομοίωσης της μεθόδου διπλής κατατομής χτίζεται γύρω από τη φιλοσοφία της διαχείρισης κάθε σημείου της κατατομής (ιδιόμορφου ή μη) με τον ίδιο τρόπο. Για την εύρεση των σημείων των κατατομών που έρχονται σε επαφή δεν λαμβάνονται υπόψιν τα κάθετα διανύσματα, αλλά μέσα από έναν αλγόριθμο επιλέγεται αυτή η απόσταση αξόνων και αυτή η γωνία περιστροφής του κινούμενου τροχού, έτσι ώστε να μην υπάρχει διείσδυση κάποιας κατατομής μέσα στην συνεργαζόμενη της, αλλά να εξασφαλίζεται ένα κενό ανάμεσα στις κατατομές, με εξαίρεση τα σημεία που προκύπτει η επαφή και το κενό είναι μηδενικό. Η αποφυγή της χρήσης των κάθετων διανυσμάτων στον προσδιορισμό των σημείων επαφής επιτρέπει το μοντέλο να μην μεταχειρίζεται ξεχωριστά τα ιδιόμορφα σημεία.

Το αριθμητικό μοντέλο δέχεται ως είσοδο ένα νέφος σημείων που παριστούν τις κατατομές του πρότυπου και του εξεταζόμενου τροχού. Ο χρήστης θα πρέπει να ορίζει ξεχωριστά τα σημεία που ανήκουν στις δεξιές ή τις αριστερές κατατομές και να δίνει τον αύξοντα αριθμό του οδόντα στον οποίο ανήκει η κάθε κατατομή. Οι κατατομές των οδόντων που επιλέγονται για την επίδειξη της λειτουργίας του μοντέλου παρακάτω φαίνονται στο Σχήμα 2.17. Πρόκειται για κατατομές εξειλιγμένης (μπλε γραμμή) διαμορφωμένες κατά πλάτος με μία ημιτονοειδή καμπύλη. Οι κατατομές αυτές χρησιμοποιούνται για την διαμόρφωση του εξεταζόμενου πρότυπου τροχού έτσι ώστε να φανεί η γενικότητα της μεθόδου και να επιτευχθεί καλύτερη εποπτεία των επιμέρους βημάτων της.

Κάθε ένα σημείο των κατατομών των τροχών που εισάγεται στο μοντέλο περιγράφεται από ένα ζεύγος καρτεσιανών συντεταγμένων (x, y) οι οποίες αναφέρονται σε ένα σύστημα συντεταγμένων του οποίου η αρχή εντοπίζεται στο κέντρο του κινητήριου τροχού. Για την απλοποίηση των αλγεβρικών υπολογισμών και δεδομένου ότι η ανάπτυξη του αλγορίθμου θα γίνει στο υπολογιστικό περιβάλλον *Matlab*, που διαθέτει εξειδικευμένες βιβλιοθήκες, επιλέγεται η παράσταση κάθε σημείου να γίνεται με έναν μιγαδικό αριθμό όπως φαίνεται στη σχέση (2.44):

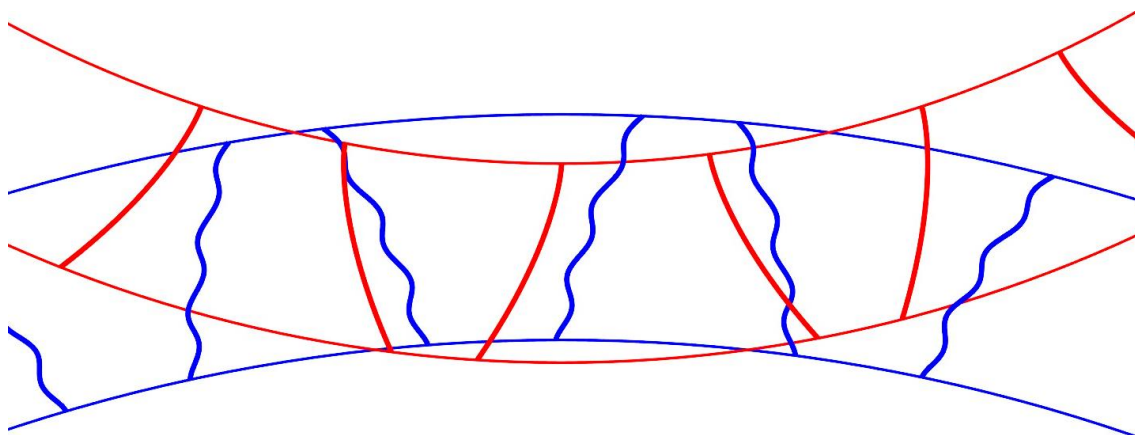
$$\mathbf{r} = x + yi \quad (2.44)$$



Σχήμα 2.17 Τροποποιημένες κατατομές εξειλιγμένης

Αφού έχουν οριστεί οι γεωμετρίες των δύο τροχών στο μοντέλο, ξεκινάει η διαδικασία υπολογισμού του τρόπου συνεργασίας τους και τελικά της εκτίμησης του διαγράμματος της αποστάσεως των αξόνων. Αρχικά, το μοντέλο επιλέγει μία απόσταση αξόνων αυθαίρετα, για να εκκινήσει ο αλγόριθμος. Φυσικά, η επιλογή αυτή δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη από το άθροισμα των ακτίνων κεφαλής των δύο τροχών, διότι σε τέτοια περίπτωση δεν θα υπήρχε συνεργασία μεταξύ των τροχών, ούτε μικρότερη του αθροίσματος της ακτίνας του κύκλου ποδός του ενός και του κύκλου κεφαλής του άλλου, διότι τότε θα παρατηρούνταν διείσδυση του οδόντα του ενός τροχού στο κύριο σώμα του άλλου.

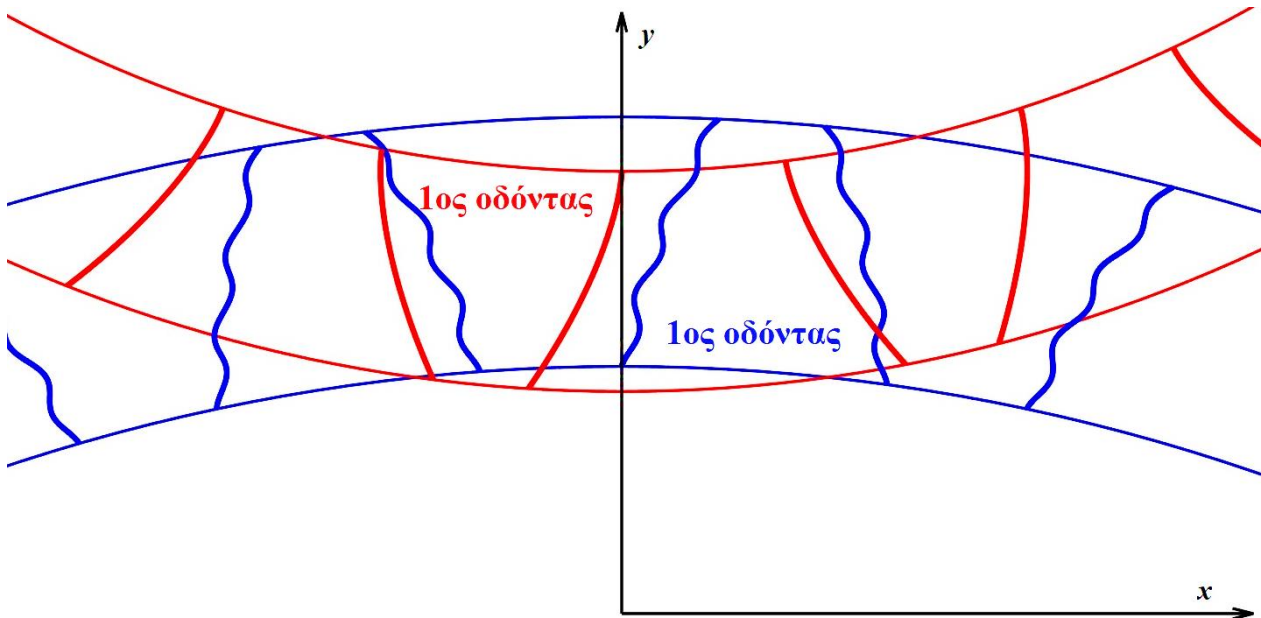
Στο Σχήμα 2.18 φαίνεται η θέση των κατατομών των τροχών κατά την εκκίνηση του αλγορίθμου στην περιοχή που συνεργάζονται. Οι κατατομές του εξεταζόμενου τροχού έχουν κατασκευαστεί από διαμορφωμένες κατατομές εξειλιγμένης γωνίας πίεσης 20° και module ίσου με 1. Ο εξεταζόμενος τροχός αποτελείται από 30 οδόντες, ενώ ο πρότυπος, του οποίου τα χαρακτηριστικά της εξειλιγμένης των κατατομών του ταυτίζονται με αυτά του εξεταζόμενου, αποτελείται από 20 οδόντες. Με το μπλε χρώμα απεικονίζεται ο εξεταζόμενος τροχός, ενώ με το κόκκινο ο πρότυπος. Στην βιβλιογραφία, τόσο ο πρότυπος όσο και ο εξεταζόμενος τροχός έχουν χρησιμοποιηθεί ως κινητήριος κατά την πρακτική εφαρμογή της μεθόδου διπλής κατατομής [2]. Στην παρούσα εργασία ορίζεται ως κινητήριος τροχός ο εξεταζόμενος, καθώς αυτός είναι και ο κινητήριος τροχός στη μηχανή διπλής κατατομής που διαθέτει το Εργαστήριο Στοιχείων Μηχανών και χρησιμοποιείται για τη διεξαγωγή πειραμάτων που παρουσιάζονται σε επόμενο Κεφάλαιο.



Σχήμα 2.18 Αρχική θέση κατατομών

Από την στιγμή που έχει οριστεί μια αρχική απόσταση αξόνων και οι κατατομές των τροχών έχουν

λάβει την αρχική τους θέση, περιστρέφονται ο πρότυπος και ο εξεταζόμενος τροχός κατά τέτοιο τρόπο, έτσι ώστε το κατώτερο σημείο της αριστερής κατατομής του 1^{ου} σε αύξοντα αριθμό δοντιού να έρθει στη θέση $\theta=0$, όπου θ η γωνία με τον κατακόρυφο άξονα (Σχήμα 2.19). Με αυτόν τον τρόπο εξασφαλίζεται ότι η συνεργασία θα ξεκινήσει από την «γειτονιά» των πρώτων οδόντων των τροχών.



Σχήμα 2.19 Αρχικοποίηση γωνίας περιστροφής τροχών

2.3.2. Προσδιορισμός σημείου επαφής στις εργαζόμενες κατατομές

Για να υπολογιστεί η απόσταση αξόνων των τροχών πρέπει να οριστεί μια γωνία περιστροφής ενός τροχού στην οποία αντιστοιχεί. Η γωνία αυτή επιλέγεται να είναι η γωνία περιστροφής του κινητήριου τροχού, όπου στην παρούσα ανάλυση αντιστοιχεί με τον εξεταζόμενο. Η επιλογή αυτή έγινε και πάλι με γνώμονα τις πειραματικές διατάξεις, στις οποίες συμπεριλαμβάνεται μετρητικό όργανο καταγραφής της γωνίας περιστροφής του εξεταζόμενου τροχού.

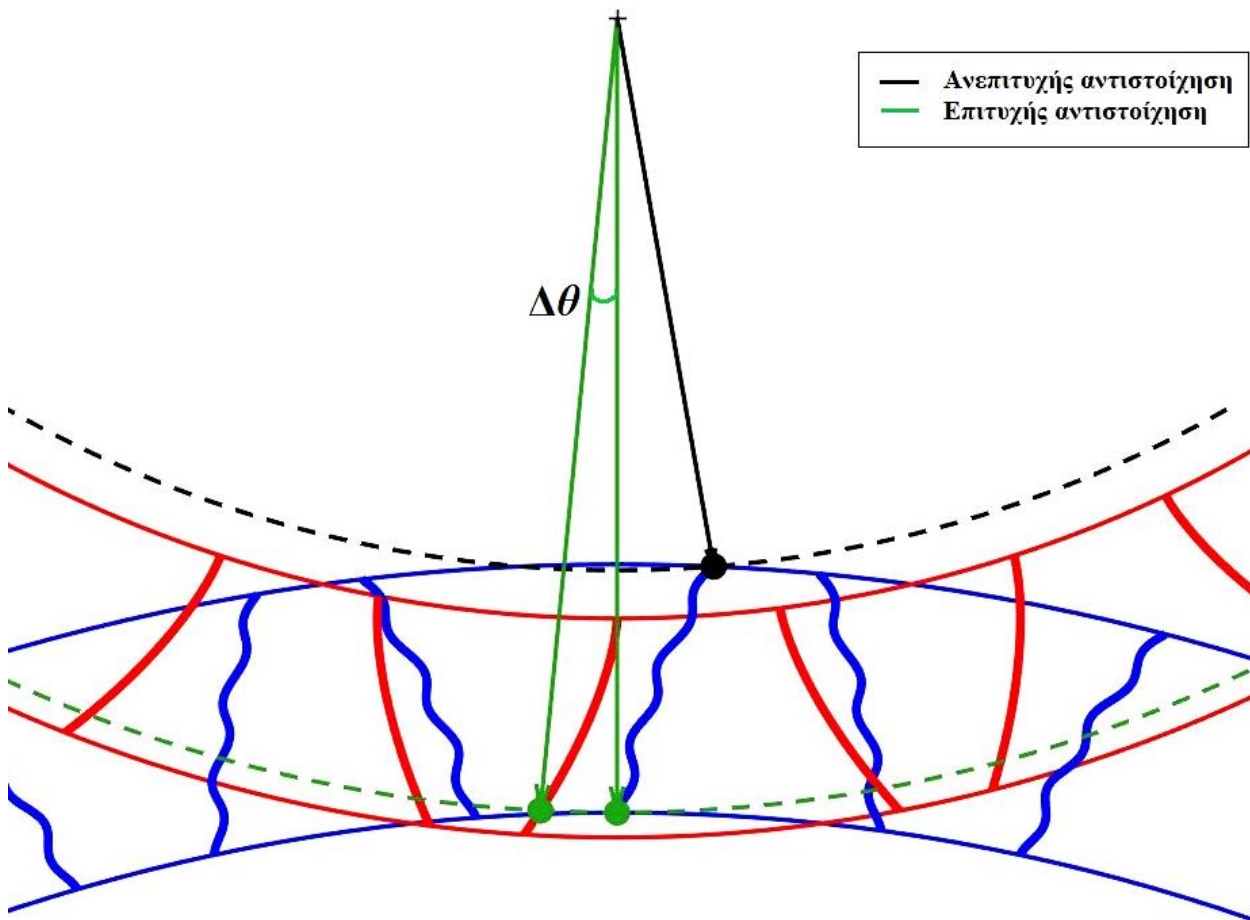
Θεωρώντας μηδενική γωνία περιστροφής του εξεταζόμενου τροχού, το μοντέλο ξεκινά την προσπάθεια εύρεσης της γωνίας περιστροφής του πρότυπου, έτσι ώστε να βρεθεί ένα σημείο επαφής αρχικά στις αριστερές κατατομές των τροχών, που ορίζονται ως οι εργαζόμενες (ανθρωλογιακή φορά περιστροφής). Η εύρεση του σημείου επαφής των αριστερών κατατομών των τροχών συνεπάγεται τον προσδιορισμό ενός ζεύγους σημείων που όταν έρχονται σε επαφή δεν παρατηρείται σε κανένα άλλο τμήμα των αριστερών κατατομών αλληλοδιείσδυση μεταξύ των σημείων τους. Προς το παρόν δεν εξετάζεται τι συμβαίνει στις δεξιές κατατομές.

Ωστόσο, χρειάζεται να εξασφαλιστεί εκ των προτέρων ένα σημείο επαφής μεταξύ των κατατομών, ακόμα κι αν αυτό συνεπάγεται την διείσδυση των κατατομών σε κάποια άλλα σημεία. Η νέα θέση των κατατομών που θα προκύψει από την περιστροφή του πρότυπου τροχού έτσι ώστε να τα σημεία που έχουν επιλεγεί να έρθουν σε επαφή, θα επιτρέψει τη διενέργεια ελέγχων του αλγορίθμου σε μία σειρά άλλων σημείων των κατατομών για το εάν και κατά πόσο υπάρχει διείσδυση της μίας κατατομής στην άλλη.

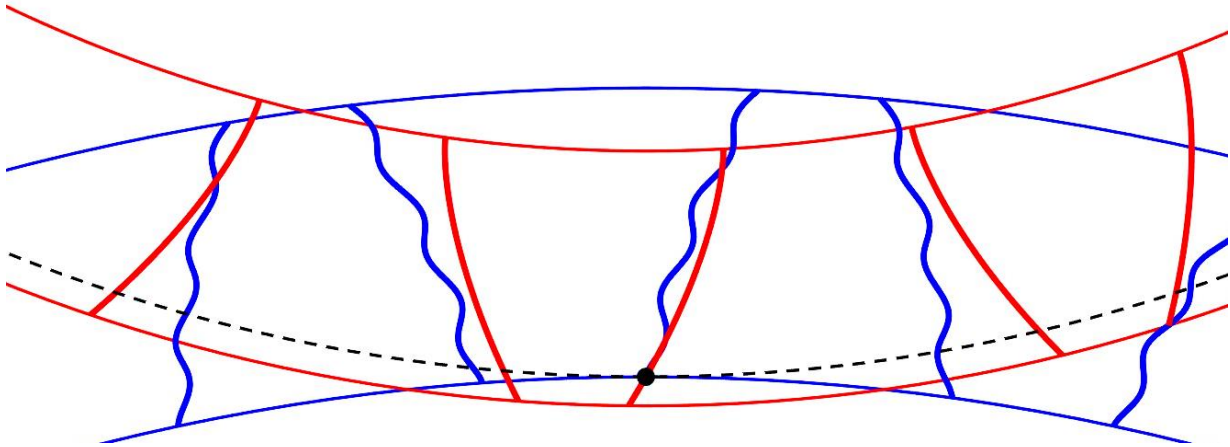
Αρχικά, μεταφέρεται το σύστημα συντεταγμένων από το κέντρο του κινητήριου τροχού στο κέντρο του κινούμενου. Από την αριστερή κατατομή του πρότυπου τροχού η οποία βρίσκεται σε γωνία $\pm\pi/Z$ από τον κατακόρυφο άξονα επιλέγεται αυθαίρετα ένα σημείο, στο οποίο εκτιμάται ότι θα πραγματοποιηθεί η επαφή με την αντίστοιχη κατατομή του πρότυπου τροχού. Αφού υπολογιστεί η απόσταση αυτού του σημείου από το κέντρο του νέου συστήματος συντεταγμένων, υπολογίζεται το

σημείο της αντίστοιχης κατατομής του πρότυπου τροχού που έχει την ίδια απόσταση με αυτό. Φυσικά, επειδή η κάθε κατατομή απαρτίζεται από ένα πεπερασμένο αριθμό σημείων κάθε φορά, επιλέγεται το σημείο εκείνο το μέτρο του οποίου απέχει λιγότερο από το ζητούμενο (τα σημεία έχουν παρασταθεί με μιγαδικούς αριθμούς). Αν όμως ένα τέτοιο αντίστοιχο σημείο δεν υπάρχει στον πρότυπο τροχό, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.20, επιλέγεται ένα νέο σημείο στον εξεταζόμενο, μέχρις ότου γίνει δυνατή η ζητούμενη αντιστοίχιση.

Εφόσον επιτευχθεί αυτή η αντιστοίχιση, στη συνέχεια υπολογίζεται η γωνία $\Delta\theta$ μεταξύ των διανυσμάτων θέσης των δύο σημείων (Σχήμα 2.20). Εάν ο πρότυπος τροχός περιστραφεί ανθρωπολογικά κατά $\Delta\theta$ τότε τα δύο σημεία του εξεταζόμενου και του πρότυπου τροχού που έχουν προσδιοριστεί θα έρθουν σε επαφή, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.21. Στο σημείο αυτό γίνεται κατανοητό γιατί έγινε μεταφορά το συστήματος συντεταγμένων στο κέντρο του πρότυπου τροχού. Μιας και αυτός ο τροχός πρόκειται να περιστραφεί, οι υπολογισμοί διευκολύνονται αν τα διανύσματα και οι γωνίες εκφράζονται προς το σύστημα συντεταγμένων που έχει αρχή το κέντρο του.

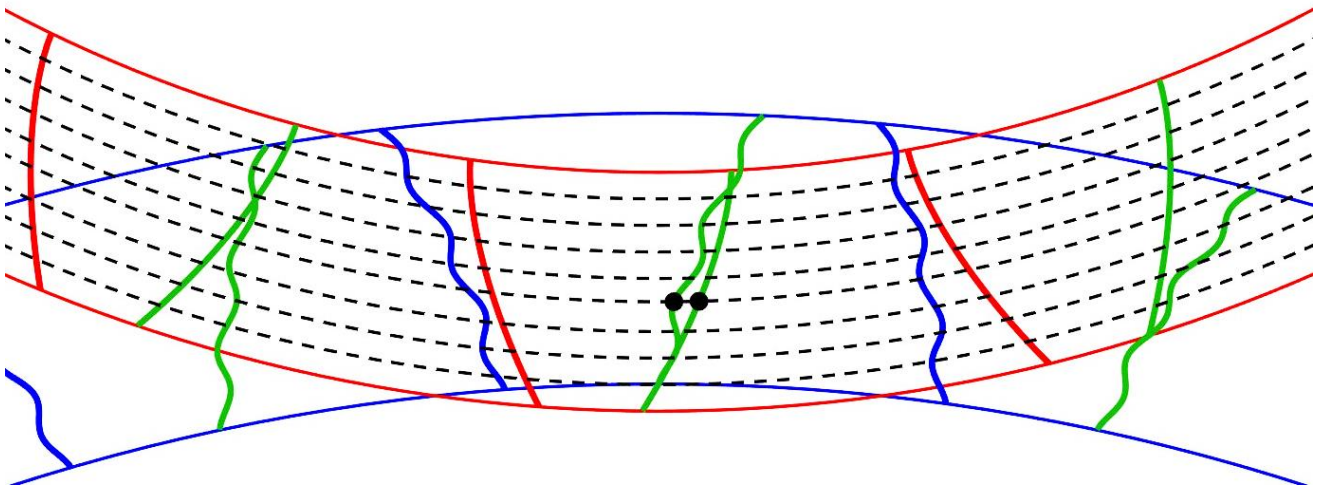


Σχήμα 2.20 Εκτίμηση πρώτου ζεύγους σημείων για εξασφάλιση αρχικής επαφής

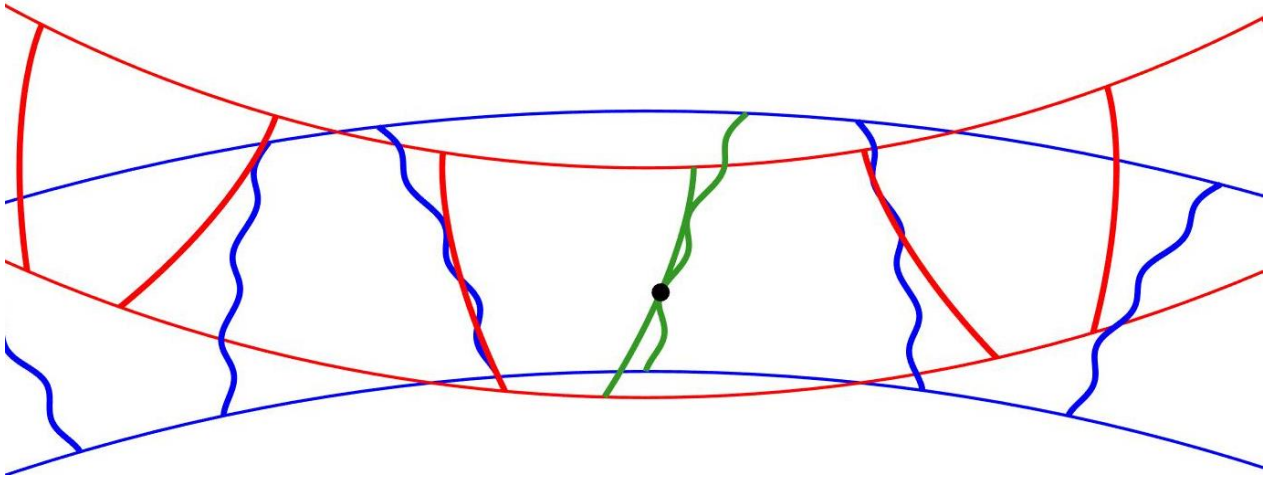


Σχήμα 2.21 Αρχική εκτίμηση σημείου επαφής αριστερών-εργαζόμενων κατατομών

Το σημείο που προσδιορίστηκε από την παραπάνω διαδικασία δεν μπορεί να είναι το σημείο επαφής των αριστερών κατατομών, μιας και παρατηρείται διείσδυση τόσο μεταξύ σημείων σε άλλα τμήματα της κατατομής, όσο και μεταξύ αριστερών κατατομών γειτονικών οδόντων. Το σημείο επαφής των κατατομών θα πρέπει να είναι τέτοιο που θα καθιστά αδύνατη τη διείσδυση μεταξύ άλλων τμημάτων των κατατομών. Θεωρώντας ένα μοντέλο συνεργασίας 3 οδόντων, όπως χρησιμοποιήθηκε και στο αναλυτικό μοντέλο προσομοίωσης που παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 2.2, το σημείο επαφής αναζητείται μεταξύ των αριστερών κατατομών των οδόντων που βρίσκονται σε γωνία $\pm\pi/Z$ από τον κατακόρυφο άξονα και των αριστερών κατατομών των οδόντων εκατέρωθεν αυτών, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.22. Επιλέγοντας μία σειρά σημείων από τις αριστερές κατατομές του εξεταζόμενου τροχού σε διάφορες αποστάσεις από την αρχή των αξόνων, υπολογίζεται η θέση των αντίστοιχων σημείων του πρότυπου τροχού και καταγράφεται η γωνία $\Delta\theta$ μεταξύ των διανυσμάτων θέσης τους, όπως αναλύθηκε παραπάνω. Η γωνία αυτή ορίζεται κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να είναι θετική όταν υπάρχει κενό μεταξύ αντίστοιχων σημείων των κατατομών και αρνητική όταν υπάρχει διείσδυση και στην ουσία εκφράζει πόσο πρέπει να περιστραφεί ο πρότυπος τροχός έτσι ώστε τα διανύσματα αρχής των σημείων να συμπέσουν. Η ελάχιστη αλγεβρικά γωνία, λοιπόν, που υπολογίζεται από την διαδικασία που περιγράφηκε αντιστοιχεί στο ζεύγος των σημείων που εντοπίζεται η επαφή των αριστερών κατατομών και πραγματοποιείται με την στροφή του πρότυπου τροχού κατά $\Delta\theta$. Στο Σχήμα 2.23 παρουσιάζονται οι νέες θέσεις των δύο τροχών, μετά την περιστροφή του πρότυπου ώστε να εξασφαλίζεται ορθός τρόπος επαφής μεταξύ των αριστερών κατατομών (οι αλληλοκαλύψεις των αριστερών κατατομών που παρατηρείται σε κάποια σημεία του Σχήματος 2.23 οφείλεται στο πάχος με το οποίο σχεδιάζονται οι κατατομές και όχι σε πραγματικές αλληλοδιεισδύσεις των κατατομών).



Σχήμα 2.22 Έλεγχος σημείων αριστερών κατατομών για εντοπισμό μέγιστης διείσδυσης

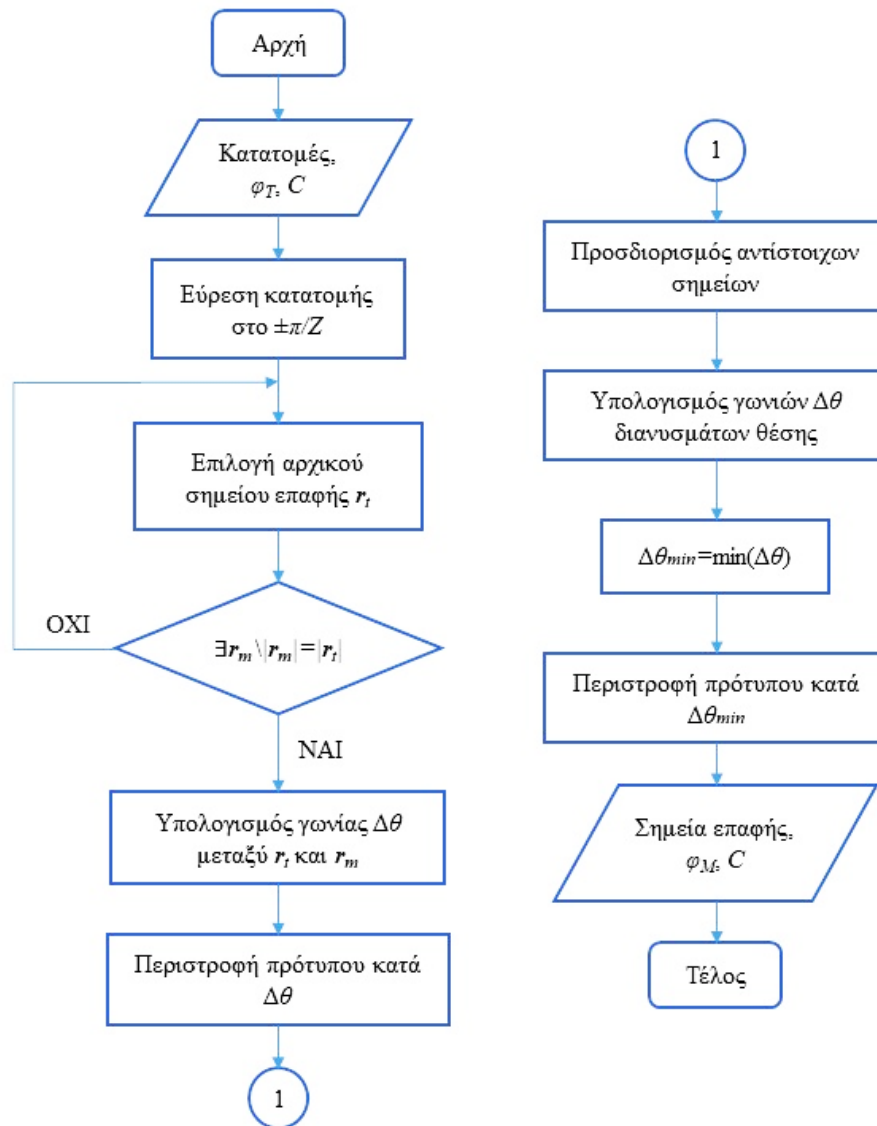


Σχήμα 2.23 Νέες θέσεις τροχών μετά τον προσδιορισμό της επαφής στις αριστερές κατατομές

Όπως γίνεται φανερό από την παραπάνω διαδικασία, για τον εντοπισμό του σημείου επαφής των αριστερών κατατομών δεν είναι απαραίτητη η διαδικασία που περιγράφηκε παραπάνω για την εξασφάλιση ενός αρχικού σημείου επαφής των κατατομών. Η αρχική θέση των κατατομών που φαίνεται στο Σχήμα 2.19 αρκεί για την πραγματοποίηση των υπολογισμών και τον προσδιορισμό των γωνιών $\Delta\theta$ που θα οδηγήσουν στον εντοπισμό του σημείου επαφής. Ο ορισμός, λοιπόν, ενός αρχικού σημείου επαφής δεν είναι απαραίτητος για λειτουργία του μοντέλου, ωστόσο μπορεί να συμπεριληφθεί για λόγους υπολογιστικού κόστους της διαδικασίας. Δεδομένου, ότι έχει εξασφαλιστεί ένα σημείο επαφής των κατατομών, από τις γωνίες $\Delta\theta$ που υπολογίζονται αποθηκεύονται μόνο εκείνες που έχουν αρνητικό πρόσημο και αφορούν επομένως σημεία όπου παρατηρείται αλληλοδιείσδυση. Με αυτόν τον τρόπο μειώνονται οι ανάγκες σε μνήμη, μιας και τα σημεία που πρέπει να αποθηκεύονται κάθε φορά μπορεί να μειωθούν μέχρι και 90% (ή ακόμα και περισσότερο αν γίνεται καλή επιλογή του πρώτου σημείου επαφής) και επιταχύνεται η διαδικασία υπολογισμού.

Κρίσιμο σημείο για την ακριβή προσδιορισμό του σημείου επαφής στις αριστερές κατατομές είναι η επιλογή του αριθμού των σημείων που θα εξετάζονται σε κάθε κατατομή. Όσο πυκνότερη είναι η διακριτοποίηση των κατατομών τόσο πιο ακριβές θα είναι το σημείο που θα υπολογιστεί αλλά τόσο ανάλογα θα αυξηθεί και το υπολογιστικό κόστος. Θα πρέπει λοιπόν να γίνει ένας συμβιβασμός μεταξύ ακρίβειας και ταχύτητας υπολογισμού που εξαρτάται κάθε φορά από την εφαρμογή για την οποία χρησιμοποιείται η μέθοδος.

Στο Σχήμα 2.24 παρουσιάζεται το διάγραμμα ροής του αλγορίθμου υπολογισμού του σημείου επαφής στις αριστερές κατατομές των τροχών, όπως παρουσιάστηκε παραπάνω. Στο διάγραμμα φαίνονται συνοπτικά οι είσοδοι που πρέπει να δίνονται στο μοντέλο, οι επιμέρους υπολογισμοί που γίνονται και οι αποφάσεις που παίρνονται για τον επιτυχή προσδιορισμό του σημείου επαφής. Ο δείκτης t αναφέρεται στον εξεταζόμενο τροχό, ενώ ο δείκτης m στον πρότυπο.



Σχήμα 2.24 Διάγραμμα ροής αλγορίθμου υπολογισμού σημείων επαφής στις αριστερές κατατομές

2.3.3. Υπολογισμός αξονικής απόστασης

Εάν ο σκοπός του παρόντος μοντέλου ήταν η προσομοίωση της συνεργασίας δύο οδοντωτών τροχών σε συνθήκες λειτουργίας με μη μηδενική χάρη κατατομών ή, ακόμα και η προσομοίωση της συγγενούς μεθόδου επιθεώρησης οδοντωτών τροχών μονής κατατομής, η ανάλυση θα σταματούσε σε αυτό το σημείο, κατά το οποίο έχουν προσδιοριστεί τα σημεία επαφής των τροχών στις εργαζόμενες κατατομές. Μιας και όμως κατά την μέθοδο της διπλής κατατομής οι τροχοί υπόκεινται σε σφικτή συνεργασία, θα πρέπει να προσδιοριστεί αντίστοιχα ένα σημείο επαφής και στις δεξιές κατατομές των τροχών. Από το Σχήμα 2.24 γίνεται σαφές πως κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει στο παράδειγμα το οποίο επιλύεται παράλληλα με την παρουσίαση της μεθόδου. Θα πρέπει, λοιπόν, να επαναπροσδιοριστεί η θέση των τροχών στο επίπεδο, έτσι ώστε να προσδιοριστεί ένα σημείο επαφής δεξιές κατατομές, αντίστοιχο με εκείνων των αριστερών. Ωστόσο, η θέση των δύο τροχών είναι πλέον κλειδωμένη στο χώρο, καθώς έχουν περιοριστεί και οι τρεις βαθμοί ελευθερίας του συστήματος των τροχών, δύο περιστροφικοί και ένας μεταφορικός. Η γωνία περιστροφής του εξεταζόμενου τροχού είναι σταθερή και αποτελεί είσοδο για τη διαδικασία, η απόσταση αξόνων επιλέγεται στην αρχή, ενώ η γωνία περιστροφής του πρότυπου επιλέχθηκε έτσι ώστε να επιτυγχάνεται ο σωστός τύπος επαφής στις αριστερές κατατομές. Για να βρεθεί λοιπόν ο τρόπος επαφής των δύο τροχών θα πρέπει να

επιλεγούν μια σειρά διαφορετικών τιμών της απόστασης των αξόνων και να επαναληφθεί η παραπάνω διαδικασία για κάθε μία από αυτές, μέχρις ότου να μην υπάρχει διείσδυση στις δεξιές κατατομές, αλλά να εξασφαλίζεται κενό μεταξύ όλων των σημείων τους εκτός από εκείνων που έρχονται σε επαφή.

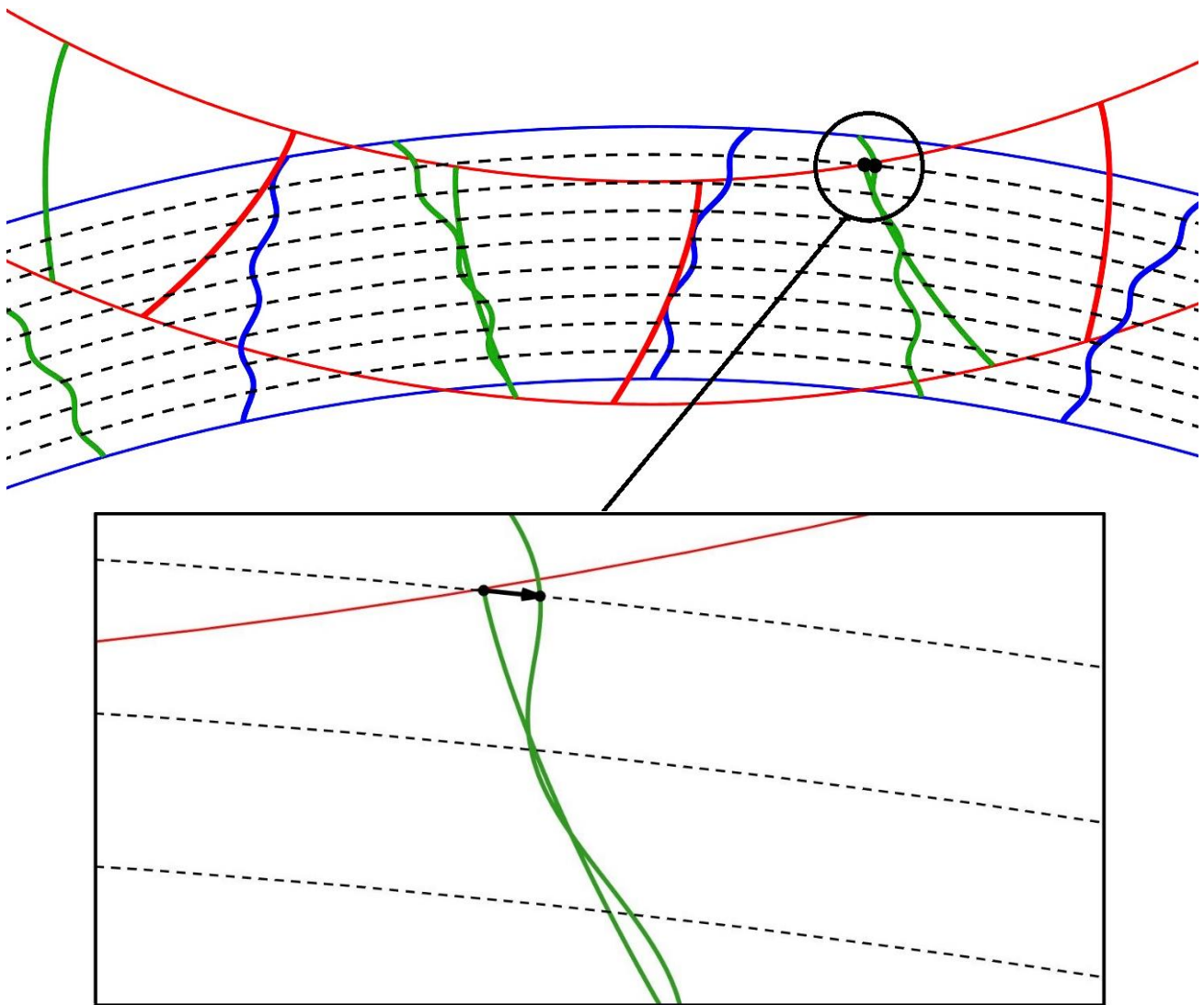
Η επιλογή της απόστασης αξόνων των δύο τροχών για την οποία επαναλαμβάνεται κάθε φορά η παραπάνω διαδικασία γίνεται μέσω κάποιου αριθμητικού αλγορίθμου σύγκλισης. Η χρήση ενός αλγορίθμου σύγκλισης απαιτεί ταυτόχρονα και τον ορισμό μιας αντικειμενικής συνάρτησης, που θα την χρησιμοποιεί ως κριτήριο για την εύρεση της πραγματικής απόστασης αξόνων. Μια τέτοια αντικειμενική συνάρτηση θα πρέπει να εκφράζει με ποσοτικό τρόπο τη διείσδυση ή το κενό που παρατηρείται κάθε φορά στις δεξιές κατατομές των τροχών, έτσι ώστε ο αλγόριθμος να μεγαλώνει ή να μικραίνει αντίστοιχα την τιμή της τρέχουσας αξονικής απόστασης. Η εύρεση μιας αναλυτικής σχέσης που θα εξασφάλιζε την τιμή της ποσότητας αυτής προϋποθέτει και ένα ολοκληρωμένο αναλυτικό μοντέλο του μηχανισμού της επαφής των οδόντων, όπως εκείνο που παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 2.2. Όπως έγινε φανερό, όμως, η χρήση του αναλυτικού μοντέλου συνοδεύεται από έναν αριθμό προβλημάτων και σε κάθε περίπτωση η εφαρμογή του καθιστά περιττή την παραπάνω διαδικασία, αφού είναι ικανό από μόνο του να προσδιορίσει τα σημεία επαφής. Η αντικειμενική, λοιπόν, συνάρτηση δεν μπορεί να έχει αναλυτική έκφραση αλλά η τιμή της θα προκύπτει από μια αριθμητική διαδικασία υπολογισμού. Ως αντικειμενική συνάρτηση ορίζεται η μέγιστη τιμή της διείσδυσης ή, αν δεν υπάρχει διείσδυση, η ελάχιστη τιμή του κενού που παρατηρείται μεταξύ των δεξιών κατατομών των τροχών. Η διαδικασία υπολογισμού της γίνεται με τρόπο αντίστοιχο του προσδιορισμού της γωνίας $\Delta\theta$ στις αριστερές κατατομές των τροχών. Με το σύστημα συντεταγμένων να επανέρχεται στο κέντρο του εξεταζόμενου τροχού, σαρώνονται οι κατατομές των τροχών σε διάφορες αποστάσεις από την αρχή των αξόνων και προσδιορίζονται τα αντίστοιχα σημεία των κατατομών. Στη συνέχεια, γίνεται αφαίρεση των διανυσμάτων των διανυσμάτων θέσης των αντίστοιχων σημείων και επιλέγεται ως τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης η διαφορά που κάθε φορά έχει το μικρότερο προσημασμένο μέτρο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.25. Φυσικά, ο προσδιορισμός του σημείου επαφής στις δεξιές κατατομές συνεπάγεται το μηδενισμό της αντικειμενικής συνάρτησης.

Η αντικειμενική συνάρτηση που περιγράφηκε παραπάνω εισήχθει σε έναν αριθμό διαφορετικών αλγορίθμων σύγκλισης, έτσι ώστε να επιλεγεί ο καταλληλότερος. Οι πρώτοι αλγόριθμοι που εφαρμόστηκαν χρησιμοποιούν κλειστές μεθόδους προσέγγισης της τιμής της απόστασης των αξόνων. Οι κλειστές μέθοδοι προσέγγισης ριζών, αν και γενικότερα οδηγούν σε πιο αργές διαδικασίες σύγκλισης, εξασφαλίζουν την εύρεση ρίζας, εφόσον αυτή υπάρχει στο διάστημα που έχει οριστεί από τον χρήστη. Δεδομένου ότι το πρόβλημα που εξετάζεται έχει άμεση γεωμετρική ερμηνεία, είναι εκ των προτέρων γνωστό πως έχει λύση στο διάστημα των τιμών των αποστάσεων αξόνων μεταξύ του αθροίσματος των ακτίνων κεφαλής των δύο τροχών και του αθροίσματος της ακτίνας του κύκλου ποδός του ενός και του κύκλου κεφαλής του άλλου ως εξής:

$$\begin{aligned} C_{\min} &= r_{k,testing} + r_{h,master} \\ C_{\max} &= r_{h,testing} + r_{h,master} \end{aligned} \quad (2.45)$$

Η πλέον γνωστή μέθοδος σύγκλισης κλειστού τύπου είναι η μέθοδος της διχοτόμησης [16, σελ. 2.6-2.7]. Η μέθοδος αυτή δέχεται ως είσοδο δύο τιμές που αντιστοιχούν στα άκρα του διαστήματος που αναμένεται να βρίσκεται η ρίζα της αντικειμενικής συνάρτησης, έστω f , που εξετάζεται, έτσι ώστε

$$f(C_{\min})f(C_{\max}) < 0 \quad (2.46)$$



Σχήμα 2.25 Προσδιορισμός μέγιστης αλληλοδιείσδυσης στις δεξιές κατατομές

Αρνητική τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης συνεπάγεται διείσδυση των δεξιών κατατομών σε κάποιο τμήμα τους, ενώ θετική τιμή σημαίνει ύπαρξη διακένου (backlash). Στη συνέχεια, αφού έχει προσδιοριστεί η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης στα άκρα του διαστήματος, υπολογίζεται ο μέσος όρος C_{mean} του οποίου το πρόσημο θα συμπίπτει με κάποιο εκ των δύο παραπάνων τιμών της συνάρτησης. Αν ο μέσος όρος έχει ίδιο πρόσημο με την $f(C_{max})$ τότε στην επόμενη επανάληψη η ρίζα θα αναζητηθεί στο διάστημα (C_{min}, C_{mean}) , ενώ σε αντίθετη περίπτωση στο διάστημα (C_{mean}, C_{max}) , όπως φαίνεται και στο Σχήμα 2.26. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρις ότου η ρίζα προσεγγισθεί με την προκαθορισμένη ακρίβεια. Ο αλγόριθμος, λοιπόν, τερματίζει όταν

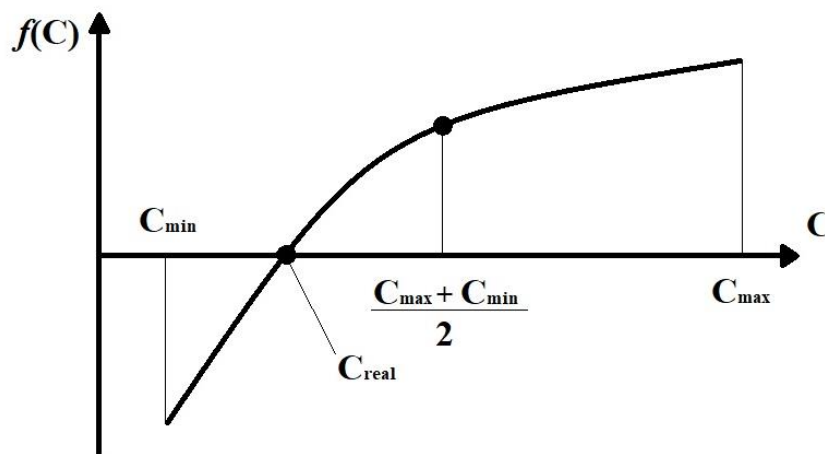
$$|C_i - C_{i-1}| < \varepsilon \quad (2.47)$$

Το σφάλμα ε έχει μονάδες μήκους εκφράζει στην πραγματικότητα πόση διείσδυση ή κενό επιτρέπει ο αλγόριθμος να παραμείνει στις δεξιές κατατομές στην τελική θέση των τροχών για κάθε επανάληψη. Δεδομένου ότι οι τιμές του σύνθετου σφάλματος που καταγράφεται από την μέθοδο διπλής κατατομής είναι κάποιες δεκάδες ή εκατοντάδες μικρόμετρα, το σφάλμα ε θα πρέπει να επιλεγεί κάτω από $1e-6$ m ή $1\mu\text{m}$. Ένα περιθώριο σφάλματος $1\mu\text{m}$ θα σημαίνει ότι το σφάλμα εύρεσης της απόστασης αξόνων θα είναι της τάξης του $\pm 1\mu\text{m}$ (για την ακριβή τιμή του τελικού σφάλματος θα πρέπει να ληφθεί υπόψιν κάθε φορά η γεωμετρία των κατατομών).

Η παραπάνω διαδικασία σύγκλισης επαναλαμβάνεται για κάθε γωνία περιστροφής του εξεταζόμενου τροχού. Κάθε φορά θα πρέπει να οριστούν εκ νέου τα άκρα του αρχικού διαστήματος (C_{min} , C_{max}) για τον προσδιορισμό της ρίζας. Εφόσον το διάγραμμα μεταβολής της απόστασης των αξόνων είναι συνεχές, μιας και εξαρτάται από την μεταφορική κίνηση που εκτελεί ο πρότυπος τροχός και αυτή δεν μπορεί παρά να είναι συνεχής, η τιμή της απόστασης των αξόνων για κάθε γωνία περιστροφής θα πρέπει να είναι αρκετά κοντά στην προηγούμενη, ιδιαίτερα όταν το βήμα της γωνίας περιστροφής δεν είναι μεγάλο. Για το λόγο αυτό, τα όρια του αρχικού διαστήματος που ορίζονται από τη σχέση (2.45) εφαρμόζονται στην πρώτη γωνία περιστροφής, ενώ για όλες τις υπόλοιπες τα όρια τοποθετούνται εκατέρωθεν τις προηγούμενης προσέγγισης της απόστασης των αξόνων (π.χ. $\pm 15\mu\text{m}$). Με αυτόν τον τρόπο μειώνεται σημαντικά ο απαιτούμενος αριθμός επαναλήψεων για κάθε γωνία. Στον Πίνακα 2.3 παρουσιάζεται τα αποτελέσματα της διαδικασίας σύγκλισης για την πρώτη γωνία περιστροφής και στη συνέχεια για την δεύτερη, με την τροποποίηση των αρχικού διαστήματος αναζήτησης για το παράδειγμα το οποίο εξετάζεται, για επιτρεπόμενο σφάλμα $\varepsilon = 0.5 \mu\text{m}$. Οι στήλες του σφάλματος περιέχουν τις εκάστοτε τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης.

Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, αν και η μέθοδος της διχοτόμησης είναι αρκετά αξιόπιστη ως προς την εύρεση της ζητούμενης ρίζας της αντικειμενικής συνάρτησης, αποδεικνύεται τελικά αργή και συνεπάγεται, επομένως, μεγάλο υπολογιστικό κόστος. Το χαρακτηριστικό αυτό είναι από μόνο του αρνητικό, αλλά έχει μεγαλύτερο αντίκτυπο στην επίτευξη του γενικότερου σκοπού της παρούσας εργασίας, όπως θα φανεί στο Κεφάλαιο 4. Για το λόγο αυτό, μένοντας ακόμα στον τομέα των κλειστών μεθόδων σύγκλισης, παρουσιάζονται δύο εναλλακτικοί αλγόριθμοι κλειστού τύπου για τον προσδιορισμό της απόστασης αξόνων για κάθε γωνία περιστροφής που στόχο έχουν να κάνουν τη σύγκλιση της μεθόδου ταχύτερη.

Η πρώτη εναλλακτική κλειστή μέθοδος προσέγγισης της ζητούμενης αξονικής απόστασης χρησιμοποιεί τη φιλοσοφία του αλγορίθμου της διχοτόμησης, ορίζοντας όμως με διαφορετικό τρόπο την αντικειμενική συνάρτηση καταφέρνει να εξοικονομήσει υπολογιστικό κόστος και να κάνει δυνητικά ταχύτερη τη διαδικασία σύγκλισης. Κατά την εκτέλεση του αλγορίθμου διχοτόμησης που παρουσιάστηκε παραπάνω απαιτούνταν ο υπολογισμός των αντίστοιχων σημείων τόσο στις αριστερές, όσο και στις δεξιές κατατομές, ώστε για τις μεν πρώτες να προσδιοριστεί ένα ρεαλιστικό σημείο επαφής μεταξύ των κατατομών και για τις δε δεύτερες να προσδιοριστεί ποσοτικά η διείδυση ή το κενό που παρατηρείται μεταξύ των κατατομών, η μέγιστη τιμή του οποίου αποτελούσε και την αντικειμενική συνάρτηση. Για τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στον Πίνακα 2.3, σε κάθε κατατομή υπολογίστηκαν 400 αντίστοιχα σημεία, ενώ συνολικά για αριστερές και δεξιές κατατομές ελέγχθηκαν 6 ζεύγη κατατομών.



Σχήμα 2.26 Μέθοδος Διχοτόμησης

Αριθμός Επαναλήψεων	Αρχική τιμή (γωνία περιστροφής 0°)				Πρώτη επανάληψη (+ 0.5°)			
	C_{min} (mm)	C_{max} (mm)	C (mm)	Σφάλμα (μm)	C_{min} (mm)	C_{max} (mm)	C (mm)	Σφάλμα (μm)
1	23,4923	27,0000	23,4923	-840,29	25,0775	25,1476	25,0775	-28,49
2	23,4923	27,0000	27,0000	1896,23	25,0775	25,1476	25,1476	18,69
3	23,4923	27,0000	25,2462	94,29	25,0775	25,1476	25,1126	-5,23
4	23,4923	25,2462	24,3692	-469,32	25,1126	25,1476	25,1301	6,64
5	24,3692	25,2462	24,8077	-216,50	25,1126	25,1301	25,1213	0,66
6	24,8077	25,2462	25,0269	-57,39	25,1126	25,1213	25,1169	-2,29
7	25,0269	25,2462	25,1365	15,88	25,1169	25,1213	25,1191	-0,83
8	25,0269	25,1365	25,0817	-20,79	25,1191	25,1213	25,1202	-0,14
9	25,0817	25,1365	25,1091	-2,66				
10	25,1091	25,1365	25,1228	6,56				
11	25,1091	25,1228	25,1160	1,93				
12	25,1091	25,1160	25,1126	-0,38				

Πίνακας 2.3 Αποτελέσματα σύγκλισης αλγορίθμου διχοτόμησης

Στην εναλλακτική μέθοδο διχοτόμησης ως αντικειμενική συνάρτηση ορίζεται η διαφορά της μέγιστης από την ελάχιστη απόσταση αξόνων που εξετάζεται και πρέπει να γίνει μικρότερη από ένα προκαθορισμένο σφάλμα ε :

$$|C_{\max} - C_{\min}| < \varepsilon \quad (2.48)$$

Εξασφαλίζοντας το αρχικό διάστημα (C_{min} , C_{max}), λόγω της ιδιαιτερότητας της αντικειμενικής συνάρτησης ο αλγόριθμος δεν χρειάζεται να υπολογίσει την τιμή της στα άκρα του διαστήματος (ξεπερνώντας ένα βασικό μειονέκτημα της μεθόδου διχοτόμησης που απαιτεί επιπλέον επαναλήψεις για την εκκίνησή της) και ξεκινάει κατευθείαν την εκτέλεση του αλγορίθμου προσδιορισμού των σημείων επαφής για το μέσο όρο της των ακραίων αξονικών αποστάσεων, όπως περιγράφηκε προηγουμένως. Αφού προσδιοριστεί κανονικά ένα σημείο επαφής στις αριστερές κατατομές, ξεκινούν οι έλεγχοι για διεύθυνση στις δεξιές κατατομές. Όταν βρεθεί ένα ζεύγος σημείων που αλληλοδιεισδύουν, τότε η επανάληψη τερματίζεται και ορίζεται η τρέχουσα απόσταση αξόνων ως ελάχιστη, αφού πραγματική απόσταση αξόνων πρέπει να είναι μεγαλύτερη για να αποτρέπεται η διεύθυνση μεταξύ των κατατομών. Αν δεν υπολογιστεί καμία διεύθυνση στις δεξιές κατατομές παρά μόνο κενά, τότε η τρέχουσα απόσταση αξόνων ορίζεται ως το άνω άκρο του διαστήματος που αναμένεται η εύρεση της ρίζας. Με αυτόν, λοιπόν, τον τρόπο είναι δυνατόν να αποτραπεί ο υπολογισμός εκατοντάδων αντίστοιχων σημείων στις δεξιές κατατομές σε κάθε επανάληψη. Δεν αναμένεται μείωση του αριθμού των απαιτούμενων επαναλήψεων αλλά ο χρόνος εκτέλεσης κάθε επανάληψης. Φυσικά, αν υπάρχει μόνο κενό μεταξύ των δεξιών κατατομών, ο αριθμός των υπολογισμών παραμένει ο ίδιος με προηγουμένως.

Ένα ακόμα πλεονέκτημα της μεθόδου είναι η άμεση συσχέτιση του σφάλματος του αλγορίθμου

σύγκλισης με αυτό της προσέγγισης της απόστασης των αξόνων. Με την προηγούμενη μέθοδο το σφάλμα που υπολογιζόταν αφορούσε τη διείδυση των δεξιών κατατομών των τροχών και δεν μπορούσε άμεσα ποσοτικά να προκύψει το σφάλμα προσδιορισμού της αξονικής απόστασης. Αντίθετα, με την εναλλακτική μέθοδο τα σφάλματα αυτά ταυτίζονται και επιτρέπεται ο καλύτερος έλεγχός του.

Στον Πίνακα 2.4 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της εναλλακτικής μεθόδου διχοτόμησης χρησιμοποιώντας της ίδιες ακριβώς παραμέτρους με προηγουμένως (Πίνακας 2.3) ώστε να μπορούν να αντιπαραβληθούν οι δύο μέθοδοι διχοτόμησης. Από τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στους δύο πίνακες γίνεται φανερό πως ο απαιτούμενος αριθμός των επαναλήψεων είναι αντίστοιχος. Επίσης, οι εκτιμώμενες τιμές των αποστάσεων των αξόνων είναι πολύ κοντά, κάτω από τα όρια του επιτρεπόμενου σφάλματος. Το πλεονέκτημα της μεθόδου φαίνεται στον Πίνακα 2.5, όπου παρατίθενται οι χρόνοι σύγκλισης του κάθε αλγόριθμου κατά την εκτέλεσή τους στον ίδιο υπολογιστή, μνήμης RAM 8 GB και επεξεργαστή Intel Core i7. Από τα στοιχεία του Πίνακα 2.3 υπολογίζεται ότι σε 7 από τις 12 επαναλήψεις έχει υπολογιστεί διείδυση μεταξύ των κατατομών. Άλλωστε, από την κατασκευή της μεθόδου της διχοτόμησης αναμένονται οι περιπτώσεις διείδυσης να κυμαίνονται κοντά στο 50%. Επομένως, στις μισές περίπου επαναλήψεις το υπολογιστικό κόστος μειώνεται. Η διαφορά για μία επανάληψη μπορεί να φαίνεται μικρή, εντούτοις κατά την εκτέλεση του αλγορίθμου για πολλές διαφορετικές γωνίες περιστροφής ο χρόνος που εξοικονομείται πολλαπλασιάζεται.

Αριθμός Επαναλήψεων	Αρχική τιμή (γωνία περιστροφής 0°)				Πρώτη επανάληψη (+ 0.5°)			
	C_{min} (mm)	C_{max} (mm)	C (mm)	Σφάλμα (μm)	C_{min} (mm)	C_{max} (mm)	C (mm)	Σφάλμα (μm)
1	27,0000	23,4923	25,2462	1753,84	25,1468	25,0766	25,1117	35,08
2	25,2462	23,4923	24,3692	876,92	25,1468	25,1117	25,1292	17,54
3	25,2462	24,3692	24,8077	438,46	25,1292	25,1117	25,1205	8,77
4	25,2462	24,8077	25,0269	219,23	25,1205	25,1117	25,1161	4,38
5	25,2462	25,0269	25,1365	109,62	25,1205	25,1161	25,1183	2,19
6	25,1365	25,0269	25,0817	54,81	25,1205	25,1183	25,1194	1,10
7	25,1365	25,0817	25,1091	27,40	25,1205	25,1194	25,1199	0,55
8	25,1365	25,1091	25,1228	13,70				
9	25,1228	25,1091	25,1160	6,85				
10	25,1160	25,1091	25,1126	3,43				
11	25,1126	25,1091	25,1109	1,71				
12	25,1126	25,1109	25,1117	0,86				

Πίνακας 2.4 Αποτελέσματα σύγκλισης εναλλακτικού αλγορίθμου διχοτόμησης

Ένας δεύτερος εναλλακτικός τρόπος για τον προσδιορισμό της απόστασης αξόνων μέσα από ένα διάστημα πιθανών τιμών επιτυγχάνεται με τη χρήση της μεθόδου Εσφαλμένης Θέσης ή Regula Falsi [16 σελ. 2.9]. Η μέθοδος αυτή έχει ακριβώς την ίδια δομή με αυτήν της μεθόδου της διχοτόμησης έτσι όπως αυτή παρουσιάστηκε αρχικά, με τη διαφορά ότι για κάθε νέα εκτίμηση της ρίζας της αντικειμενικής συνάρτησης δεν λαμβάνεται ο μέσος όρος των άκρων του διαστήματος (C_{min} , C_{max}),

αλλά προκύπτει από την παρακάτω σχέση:

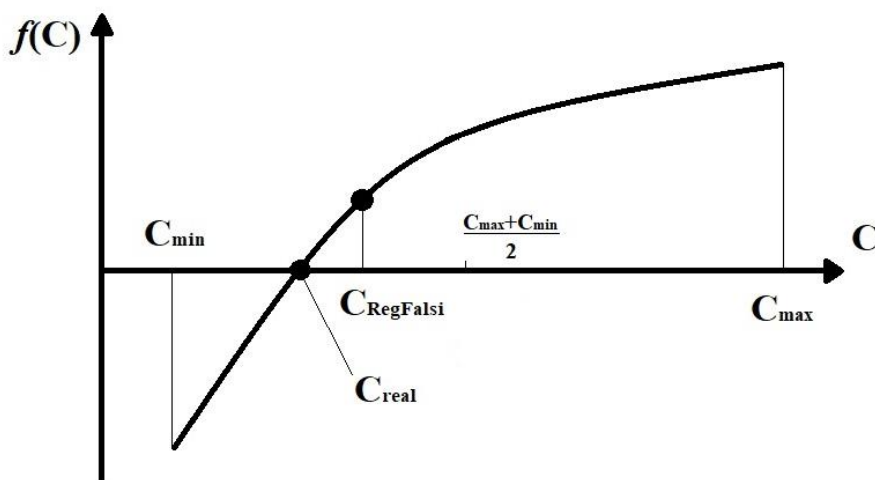
$$C = C_{\min} - \frac{f(C_{\min})(C_{\max} - C_{\min})}{f(C_{\max}) - f(C_{\min})} \quad (2.49)$$

Αλγόριθμος σύγκλισης	Χρόνος υπολογισμού για την αρχική τιμή (γωνία περιστροφής θ^0) (sec)
Κλαστικός αλγόριθμος διχοτόμησης	4.1
Εναλλακτικός αλγόριθμος διχοτόμησης	4.8

Πίνακας 2.5 Σύγκριση χρόνων υπολογισμού αλγορίθμων διχοτόμησης

Αν και η σχέση (2.49) απαιτεί περισσότερες πράξεις για τον υπολογισμό της νέας απόστασης αξόνων, επειδή λαμβάνει υπόψιν και τις τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης στα άκρα του διαστήματος, είναι δυνατόν να οδηγεί ταχύτερα σε σύγκλιση από τη μέθοδο της διχοτόμησης, όσο πιο γραμμική είναι η αντικειμενική συνάρτηση στην περιοχή της ρίζας, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.27. Το πρόβλημα της επαφής στις δεξιές κατατομές, που εκφράζει η αντικειμενική συνάρτηση στην εξεταζόμενη εφαρμογή, είναι γραμμικό στην περιοχή της ρίζας, καθώς αν π.χ. παρατηρείται διείσδυση στις κατατομές, όσο αυξάνεται η απόσταση αξόνων και απομακρύνονται οι τροχοί, τόσο η διείσδυση θα μειώνεται και τελικά οι κατατομές θα έχουν μεταξύ τους κενό.

Στον Πίνακα 2.6 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα του αλγορίθμου σύγκλισης, όπως έγινε και με τις προηγούμενες μεθόδους χρησιμοποιώντας τις ίδιες παραμέτρους. Παρατηρείται μία δραματική μείωση του αριθμού των επαναλήψεων, ιδιαίτερα μετά την πρώτη γωνία περιστροφής, όταν και τα όρια του αρχικού διαστήματος έρχονται πιο κοντά. Η τελική εκτίμηση της απόστασης των αξόνων συμφωνεί και εδώ με τις προηγούμενες μεθόδους. Ο χρόνος εκτέλεσης τις πρώτης επανάληψης είναι περίπου 4s, όπως και της εναλλακτικής μεθόδου διχοτόμησης. Το γεγονός όμως πως από την δεύτερη γωνία και μετά ο απαιτούμενος αριθμός των επαναλήψεων γίνεται τουλάχιστον ο μισός, καθιστά την μέθοδο εσφαλμένης θέσης ταχύτερο.



Σχήμα 2.27 Μέθοδος Εσφαλμένης Θέσης (Regula Falsi)

Αριθμός Επαναλήψεων	Αρχική τιμή (γωνία περιστροφής 0°)				Πρώτη επανάληψη (+ 0.5°)			
	C_{min} (mm)	C_{max} (mm)	C (mm)	Σφάλμα (μm)	C_{min} (mm)	C_{max} (mm)	C (mm)	Σφάλμα (μm)
1	27,0000	23,4923	23,4923	-840,29	25,1477	25,0776	25,0776	-28,43
2	27,0000	23,4923	27,0000	1896,23	25,1477	25,0776	25,1477	18,74
3	27,0000	23,4923	24,5694	-396,54	25,1477	25,0776	25,1199	-0,38
4	27,0000	24,5694	24,9898	-86,01				
5	27,0000	24,9898	25,0770	-23,90				
6	27,0000	25,0770	25,1009	-8,15				
7	27,0000	25,1009	25,1091	-2,70				
8	27,0000	25,1091	25,1117	-0,91				
9	27,0000	25,1117	25,1127	-0,31				

Πίνακας 2.6 Αποτελέσματα σύγκλισης αλγορίθμου Εσφαλμένης Θέσης (Regula Falsi)

Μια διαφορετική κατηγορία αλγορίθμων σύγκλισης συμπεριλαμβάνει τις μεθόδους ανοιχτής μορφής, οι οποίες δεν αναζητούν τη λύση σε ένα εκ των προτέρων ορισμένο διάστημα δυνατών λύσεων, αλλά δέχονται ως είσοδο μια αρχική εκτίμηση της τιμής της ζητούμενης ρίζας, εκτελούν μία σαφώς ορισμένη διαδικασία που οδηγεί δυνητικά στον προσδιορισμό της πραγματικής της τιμής. Η χρήση τέτοιων αλγορίθμων δεν είναι πάντα επιθυμητή, διότι εάν η αρχική εκτίμηση δεν είναι καλή ή αν αντικειμενική συνάρτηση παρουσιάζει ιδιομορφίες είναι πιθανό να αποκλίνουν ή να συγκλίνουν σε κάποιο τοπικό ελάχιστο. Τέτοιας φύσης προβλήματα παρουσιάστηκαν, άλλωστε, και κατά την υλοποίηση του αναλυτικού μοντέλου προσομοίωσης της μεθόδου διπλής κατατομής, όπως αναφέρθηκε στο Κεφάλαιο 2.2. Ωστόσο, επιχειρείται η εφαρμογή μιας τέτοιας μεθόδου και στο αριθμητικό μοντέλο, καθώς σε περίπτωση που αποφευχθούν τα προβλήματα που περιγράφηκαν παραπάνω, έχει την δυναμική να είναι πολύ γρήγορη.

Η ανοιχτή μέθοδος που χρησιμοποιείται για την σύγκλιση του αλγορίθμου είναι η μέθοδος της Τέμνουσας (Secant) ή τροποποιημένη μέθοδος Newton-Raphson [16, σελ. 2.17-2.18]. Σε αντίθεση με την κλασική Newton-Raphson, η μέθοδος της Τέμνουσας δεν είναι απαραίτητη η γνώση της παραγώγου της αντικειμενικής συνάρτησης, μιας και υπολογίζεται αριθμητικά από τη σχέση:

$$f'(x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad (2.50)$$

όπου x_1 και x_2 δύο κοντινά σημεία του πεδίου ορισμού της. Η μέθοδος αυτή έχει εφαρμογή στο πρόβλημα που εξετάζεται μιας και δεν είναι διαθέσιμη η αναλυτική έκφραση της αντικειμενικής συνάρτησης. Κάθε νέα εκτίμηση της απόστασης αξόνων προκύπτει από την αναδρομική σχέση:

$$C_i = C_{i-1} - \frac{f(C_{i-1})(C_{i-1} - C_{i-2})}{f(C_{i-1}) - f(C_{i-2})} \quad i > 2, i \in \mathbb{Z} \quad (2.51)$$

Στον Πίνακα 2.7 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της σύγκλισης του αλγορίθμου του παραδείγματος που εξετάζεται, όπως έγινε και με τις άλλες μεθόδους. Ο απαιτούμενος αριθμός των επαναλήψεων κι

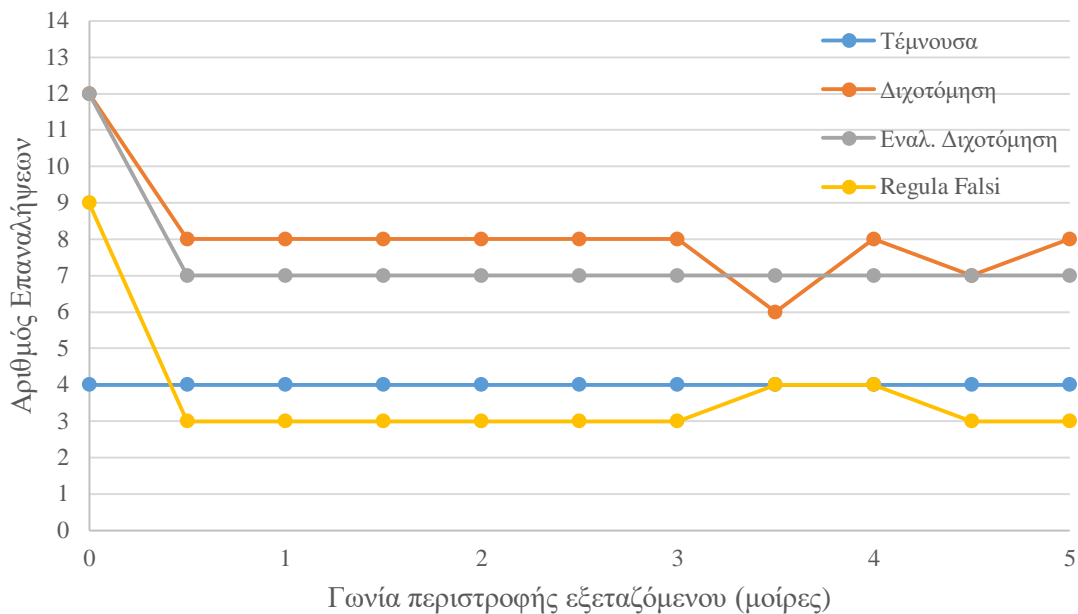
εδώ, όπως και στη μέθοδο της Εσφαλμένης Θέσης, είναι αρκετά μικρότερος από τις μεθόδους της διχοτόμησης και μάλιστα από την πρώτη κιάλας επανάληψη. Όπως αναμενόταν η μέθοδος είναι γρήγορη, ενώ ταυτόχρονα δεν παρουσιάζει κανένα από τα προβλήματα που συχνά συνοδεύουν την εφαρμογή της. Έπειτα από χιλιάδες εκτελέσεις του αλγορίθμου σύγκλισης (Κεφάλαιο 4) η μέθοδος αποδείχθηκε απόλυτα αξιόπιστη, χωρίς να παρουσιαστούν ούτε αποκλίσεις ούτε παγίδευση σε τοπικά ελάχιστα. Επομένως, κρίνεται κατάλληλη για την χρησιμοποίησή της στο μοντέλο.

Αριθμός Επαναλήψεων	Αρχική τιμή (γωνία περιστροφής 0°)		Πρώτη επανάληψη (+ 0.5°)	
	C (mm)	Σφάλμα (μm)	C (mm)	Σφάλμα (μm)
1	25,0000	-78,19	25,0000	-77,35
2	25,0100	-70,55	25,0100	-71,29
3	25,1023	-7,23	25,1274	4,83
4	25,1129	-0,19	25,1200	-0,25

Πίνακας 2.7 Αποτελέσματα σύγκλισης αλγορίθμου Τέμνουσας

Συμπερασματικά, και οι τέσσερις μέθοδοι σύγκλισης αποδείχθηκαν ικανές να αποδώσουν με αξιοπιστία την ζητούμενη απόσταση αξόνων για κάθε γωνία περιστροφής του εξεταζόμενου τροχού. Όπως φαίνεται και στο Σχήμα 2.28, οι μέθοδοι της διχοτόμησης απαιτούν μεγαλύτερο αριθμό επαναλήψεων για τη σύγκλισή τους από ότι οι μέθοδοι της Τέμνουσας και της Εσφαλμένης Θέσης. Η διαφορά είναι αρκετά μεγάλη (διπλάσιος αριθμός επαναλήψεων) και αυτό ερμηνεύεται από το γεγονός ότι οι μέθοδοι της Τέμνουσας και της Εσφαλμένης Θέσης λαμβάνουν υπόψιν την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης για την ανανέωση της εκτίμησης της απόστασης αξόνων. Στον Πίνακα 2.8 φαίνεται ο χρόνος εκτέλεσης μιας προσομοίωσης της μεθόδου διπλής κατατομής για 11 γωνίες περιστροφής του εξεταζόμενου τροχού. Από τα αποτελέσματα γίνεται σαφές ότι οι μέθοδοι Τέμνουσας και της Εσφαλμένης Θέσης υπερτερούν σαφώς των μεθόδων διχοτόμησης. Ο εναλλακτικός αλγόριθμος διχοτόμησης πράγματι καταφέρνει να είναι ταχύτερος από τον κλασικό, όχι αρκετά όμως για να είναι ανταγωνιστικός σε σχέση με τις άλλες μεθόδους. Οι άλλες δύο μέθοδοι είναι αρκετά κοντά στον χρόνο προσομοίωσης που απαιτούν. Όσο οι γωνίες περιστροφής αυξάνονται, τόσο ταχύτερη θα γίνεται η μέθοδος Εσφαλμένης Θέσης, αφού χρειάζεται λιγότερες επαναλήψεις συνήθως από τη μέθοδο της Τέμνουσας και θα έχει αποσβέσει πλέον τον μεγάλο αριθμό επαναλήψεων στην πρώτη γωνία περιστροφής.

Όπως έγινε φανερό από την προηγούμενη ανάλυση, ο αλγόριθμος σύγκλισης που προσαρμόζεται στο αριθμητικό μοντέλο ακολουθεί τη μέθοδο Εσφαλμένης Θέσης (Regula Falsi), αφού συνδυάζει κλειστή μέθοδο σύγκλισης και ταχύτητα υπολογισμού. Σε αυτό το σημείο πρέπει να αναφερθεί πως την ταχύτητα της σύγκλισης την επηρεάζουν σημαντικά οι διάφοροι παράμετροι του μοντέλου. Από αυτές, την μεγαλύτερη επίδραση έχουν η διακριτοποίηση των κατατομών και το επιτρεπόμενο σφάλμα. Ταυτόχρονα όμως είναι και οι βασικοί παράγοντες που καθορίζουν και την ακρίβεια του μοντέλου, για αυτό πρέπει να βρεθεί για κάθε εφαρμογή η χρυσή τομή μεταξύ της επιθυμητής ακρίβειας και της ταχύτητας υπολογισμού. Επίσης, ένα άλλο κρίσιμο μέγεθος είναι το αρχικό διάστημα που εισάγεται στις κλειστές μεθόδους και η αρχική εκτίμηση στη μέθοδο της Τέμνουσας. Όσο πιο κοντά είναι αυτά στην πραγματική λύση, τόσο πιο γρήγορα συγκλίνει και ο αλγόριθμος σε αυτήν.



Σχήμα 2.28 Απαιτούμενος αριθμός επαναλήψεων σε κάθε γωνία περιστροφής

Αλγόριθμος Σύγκλισης	Χρόνος προσομοίωσης (sec)
Διχοτόμησης	30,5
Εναλλακτικής Διχοτόμησης	26,6
Εσφαλμένης Θέσης	12,1
Τέμνουσας	12,7

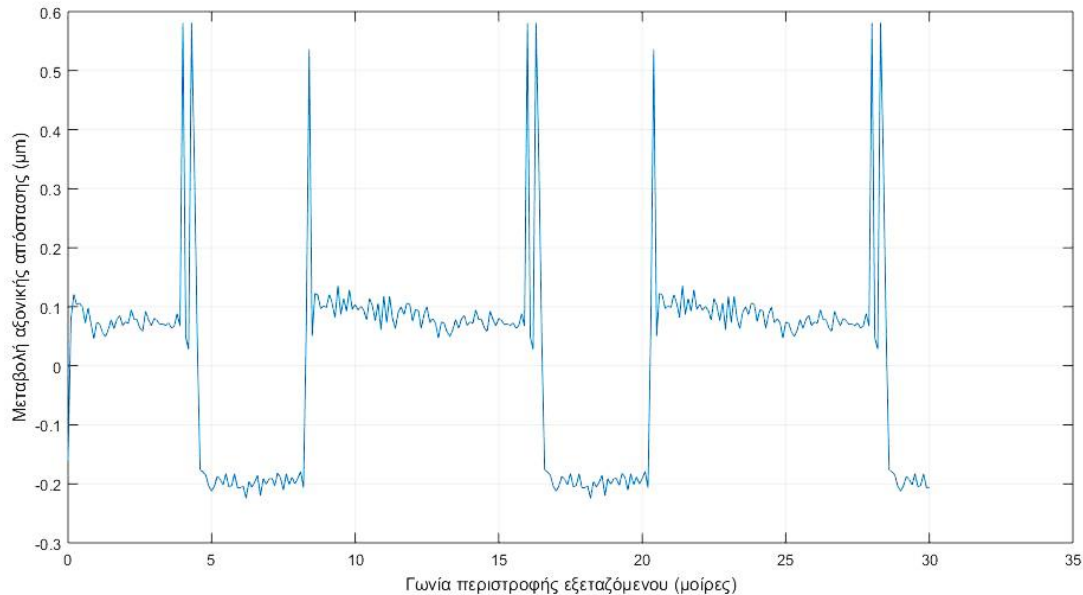
Πίνακας 2.8 Σύγκριση αλγορίθμων σύγκλισης ως προς τον χρόνο προσομοίωσης για 11 γωνίες περιστροφής

2.3.4. Αποτελέσματα αριθμητικού μοντέλου

Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από την προσομοίωση της συνεργασίας ενός πρότυπου και ενός εξεταζόμενου τροχού 20 και 30 οδόντων αντίστοιχα, για διάφορες τιμές των γεωμετρικών τους παραμέτρων. Με αυτό τον τρόπο θα διευκολυνθεί ο έλεγχος της ακρίβειας του μοντέλου μετά τη σύγκριση των αποτελεσμάτων του με αντίστοιχα άλλων ερευνητών και θα γίνουν κατανοητά θέματα που αφορούν τον τρόπο που επιτυγχάνεται η συνεργασία των τροχών και τον τρόπο που δουλεύει ο αλγόριθμος.

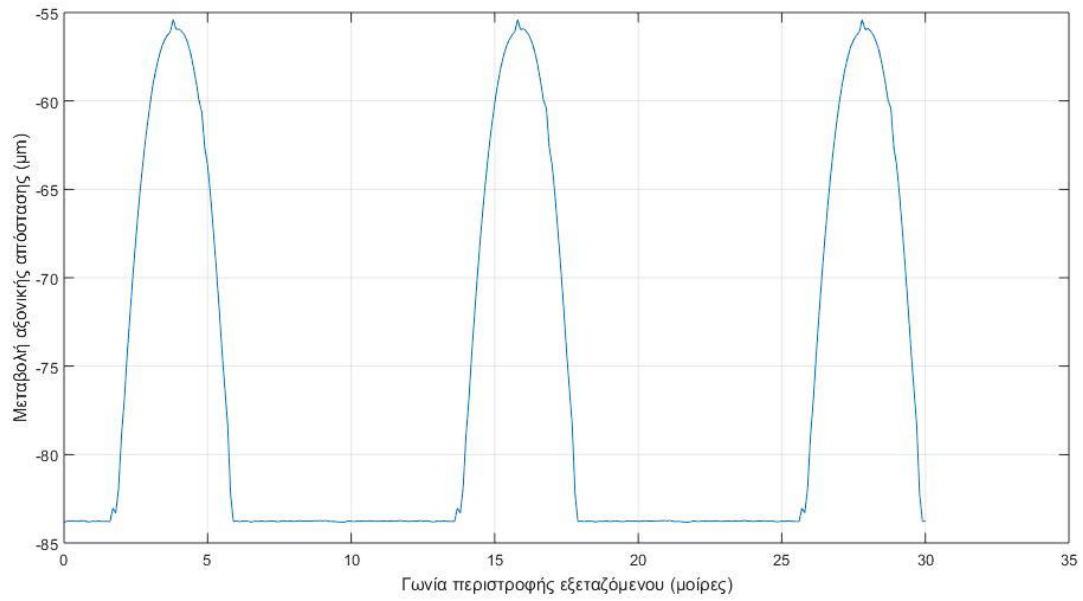
Στο Σχήμα 2.29 φαίνεται το διάγραμμα μεταβολής της αξονικής απόστασης στην περίπτωση που οι τροχοί δεν παρουσιάζουν αποκλίσεις στις κατατομές τους. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, σε περίπτωση που οι εξειλιγμένες των κατατομών διατηρούν την ιδανική θεωρητική μορφή τους, τότε το διάγραμμα της αξονικής απόστασης θα έπρεπε να ήταν μία συνεχής οριζόντια γραμμή στο 0 του κατακόρυφου άξονα. Το φαινόμενο αυτό φαίνεται και στο Σχήμα 2.29, ενώ οι αποκλίσεις που παρατηρούνται αποδίδονται στον αριθμητικό χαρακτήρα του μοντέλου προσομοίωσης, ο οποίος μπορεί μόνο με ένα ορισμένο σφάλμα να προσεγγίσει την πραγματική μεταβολή της απόστασης των αξόνων, που σε αυτή την περίπτωση πρέπει να είναι μηδενική. Το επιτρεπόμενο σφάλμα της προσομοίωσης έχει οριστεί στα 0.5 μm . Παρότι τα περισσότερα σημεία βρίσκονται κάτω από αυτό το όριο, υπάρχει ένας μικρός αριθμός που το ξεπερνάει για λίγο ($<0.1 \mu\text{m}$). Η ασυνέπεια αυτή οφείλεται στο γεγονός πως στον

αλγόριθμο σύγκλισης που χρησιμοποιείται το επιτρεπόμενο σφάλμα εκφράζει την αλληλοδιείσδυση των κατατομών και όχι την ακρίβεια εκτίμησης του πραγματικού διαγράμματος της απόστασης των αξόνων. Επίσης, στο διάγραμμα εμφανίζεται μια περιοδικότητα στις μικρομεταβολές των αποστάσεων ανά κάποια γωνία περιστροφής. Αυτό είναι αναμενόμενο μιας και οι κατατομές των τροχών έχουν οριστεί ενιαία από τον αλγόριθμο, επομένως ανά μία γωνία περιστροφής παρατηρείται η ίδια εικόνα συνεργασίας των τροχών.

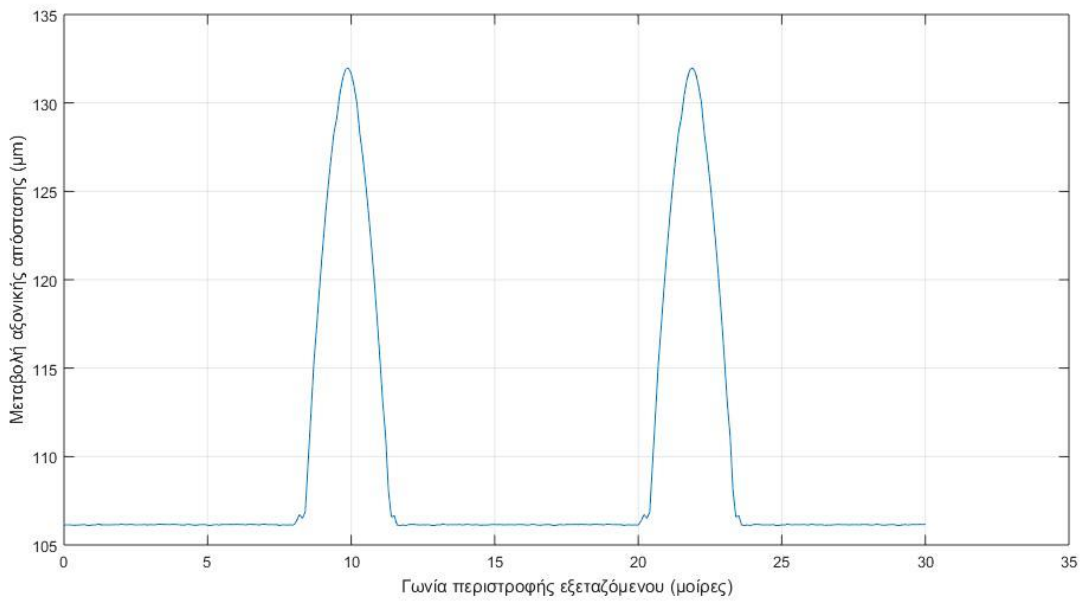


Σχήμα 2.29 Διάγραμμα μεταβολής της αξονικής απόστασης για εξεταζόμενο τροχό δίχως ελαττώματα

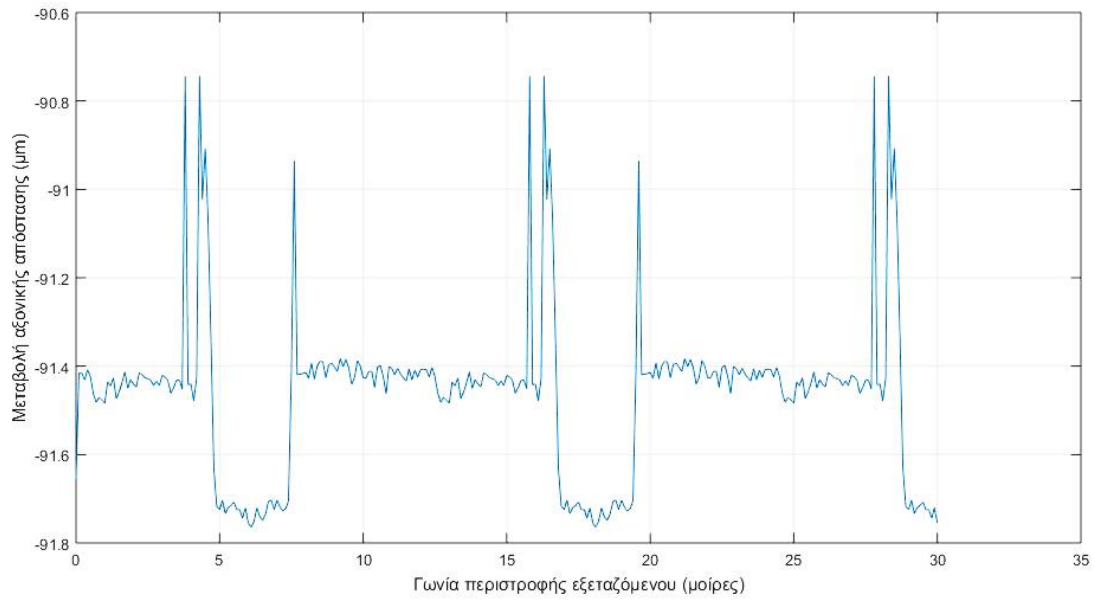
Στα Σχήματα 2.30-2.33 παρουσιάζονται τα διαγράμματα μεταβολής της αξονικής απόστασης με την μεταβολή της γωνίας πίεσης και του βήματος στον βασικό κύκλο στις κατατομές του εξεταζόμενου τροχού. Ζητείται να προσδιοριστεί η επίδραση που έχει η απόκλιση της κάθε παραμέτρου στην συνεργασία των τροχών για την καλύτερη κατανόηση της αρχής λειτουργίας της. Η μορφή των διαγραμμάτων ταυτίζεται με αντίστοιχα διαγράμματα άλλων ερευνητών [1,2,4], αποδεικνύοντας την πιστότητα της αριθμητικής μεθόδου που παρουσιάστηκε παραπάνω. Τέλος στο Σχήμα 2.34 παρουσιάζεται το διάγραμμα της μεταβολής της αξονικής απόστασης για το παράδειγμα που εξετάστηκε έως τώρα στο Κεφάλαιο αυτό.



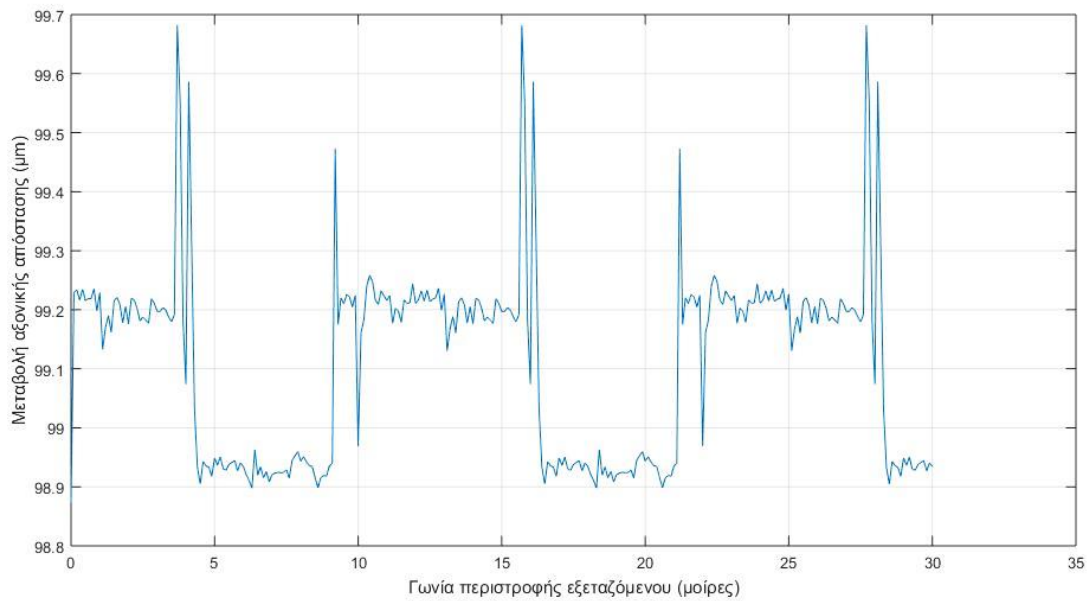
Σχήμα 2.30 Διάγραμμα μεταβολής της αξονικής απόστασης για εξεταζόμενο τροχό με γωνία πίεσης 21° (αντί για 20°)



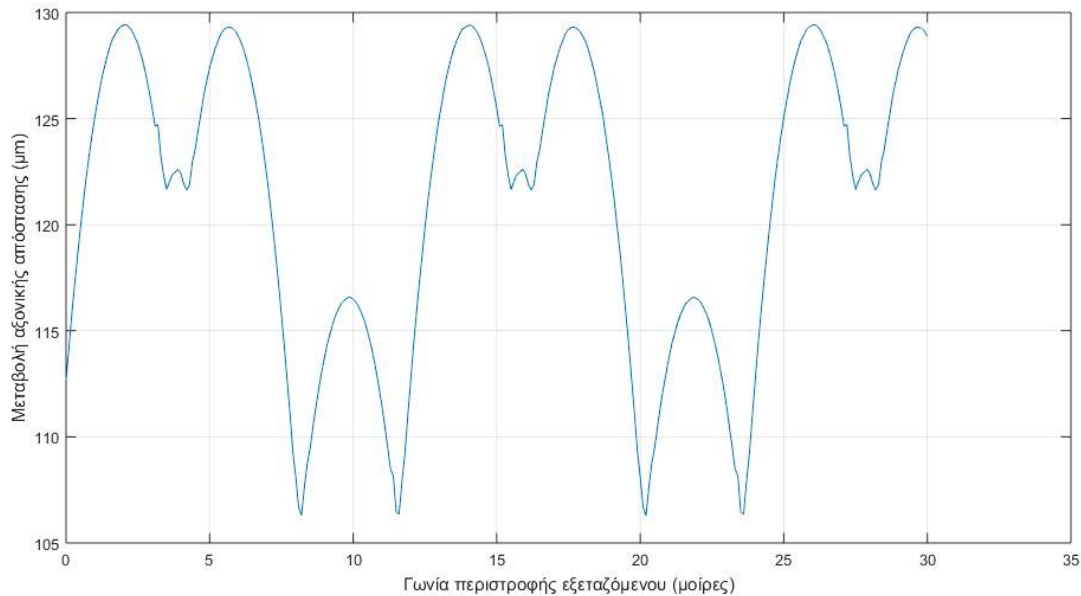
Σχήμα 2.31 Διάγραμμα μεταβολής της αξονικής απόστασης για εξεταζόμενο τροχό με γωνία πίεσης 19° (αντί για 20°)



Σχήμα 2.32 Διάγραμμα μεταβολής της αξονικής απόστασης για εξεταζόμενο τροχό με μεταβολή στο βήμα στον βασικό κύκλο -0.3°



Σχήμα 2.33 Διάγραμμα μεταβολής της αξονικής απόστασης για εξεταζόμενο τροχό με μεταβολή στο βήμα στον βασικό κύκλο $+0.3^\circ$



Σχήμα 2.34 Διάγραμμα μεταβολής της αξονικής απόστασης για το παράδειγμα του παρόντος κεφαλαίου

3. Πειραματικές μετρήσεις

Τα αποτελέσματα του αριθμητικού μοντέλου προσομοίωσης της μεθόδου διπλής κατατομής έδειξαν πως συμφωνούν με τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται σε μελέτες σχετικά με την μορφή του διαγράμματος μεταβολής της αξονικής απόστασης συναρτήσεως αποκλίσεων των παραμέτρων της εξειλιγμένης καμπύλης. Για την περαιτέρω διακρίβωση της πιστότητας του μοντέλου, αποφασίστηκε να διεξαχθούν πειραματικές μετρήσεις οι οποίες θα καταδείξουν την ικανότητα του μοντέλου να προβλέπει το διάγραμμα της αξονικής απόστασης σε περιπτώσεις τροχών με ανομοιόμορφα και σύνθετα σφάλματα σε κάθε οδόντα. Ο πειραματικός έλεγχος της λειτουργίας του μοντέλου πραγματοποιείται σε δύο στάδια. Αρχικά, επιλέγονται μετωπικοί οδοντωτοί τροχοί για να ελεγχθούν με τη μέθοδο διπλής κατατομής σε εξειδικευμένη μηχανή που υλοποιεί τέτοιους ελέγχους. Παράλληλα, οι τροχοί αυτοί μετρούνται αναλυτικά σε μία μηχανή CMM και εξάγεται η γεωμετρία τους εκφρασμένη σε ένα νέφος σημείων. Το νέφος αυτό των σημείων εισάγεται στο αριθμητικό μοντέλο που αναπτύχθηκε, υπολογίζεται το διάγραμμα της μεταβολής της απόστασης των αξόνων και συγκρίνεται με αυτό που προέκυψε από την πραγματική δοκιμή του τροχού στη μηχανή ελέγχου. Αν τα διαγράμματα αυτά συμπίπτουν, αποδεικνύεται και πειραματικά η προβλεπτική ικανότητα του μοντέλου.

Επιπλέον, η πρακτική εφαρμογή της μεθόδου, μαζί με την θεωρητική της ανάλυση που έγινε παραπάνω, μπορεί να δώσει μια πιο ολοκληρωμένη εικόνα για τον τρόπο και τις αρχές λειτουργίας της μεθόδου διπλής κατατομής. Η εμπειρία και οι γνώσεις που θα αποκομιστούν από την διαδικασία των πειραμάτων μπορεί να έχει θετική επίδραση στην προσπάθεια σχεδιασμού μιας μεθοδολογίας που θα μπορέσει να συσχετίσει τα σύνθετα σφάλματα που υπολογίζονται από τον έλεγχο διπλής κατατομής με τα επιμέρους γεωμετρικά σφάλματα που τα προκαλούν. Για το λόγο αυτό, τα πειράματα μελετώνται και σχεδιάζονται με προσοχή, έτσι ώστε αφενός να διαμορφωθούν οι συνθήκες που θα εξασφαλίσουν αξιόπιστες μετρήσεις υψηλής ακρίβειας και αφετέρου να μελετηθεί βαθύτερα η λειτουργία της μεθόδου.

3.1. Η μηχανή ελέγχου διπλής κατατομής Goulde Mikron

Οι πειραματικές μετρήσεις ελέγχου οδοντωτών τροχών με τη μέθοδο της διπλής κατατομής εκτελούνται στη μηχανή μέτρησης οδοντώσεων Goulde Mikron 3R. Η μηχανή αυτή αποτελεί μέρος του εξοπλισμού του εργαστηρίου Στοιχείων Μηχανών από το 1965, όταν και αποκτήθηκε από την εταιρεία J. Goulde Mikron & Sons. Παρά την μεγάλη ηλικία της, η μηχανή είναι πολύ καλά συντηρημένη, και μάλιστα υποβλήθηκε σε μία αναβάθμιση το 2005, κατά την οποία φθαρμένα από τη χρήση εξαρτήματα αντικαταστάθηκαν με καινούργια και προστέθηκε σύγχρονος μετρητικός εξοπλισμός για την εξαγωγή των αποτελεσμάτων [13, 17]. Με αυτόν τον τρόπο, η μηχανή καθίσταται σήμερα πλήρως λειτουργική και έχει την δυνατότητα να επιτελέσει τους ζητούμενους ελέγχους.

Η μηχανή δοκιμών Goulde Mikron, που φαίνεται στο Σχήμα 3.1, προσφέρει τη δυνατότητα ελέγχου οδοντωτών τροχών με module 0.6 έως 8.5 mm, ενώ επιτρέπει αξονική μετατόπιση του άξονα του πρότυπου τροχού εντός του διαστήματος 82 με 405 mm. Στα πλαίσια της αναβάθμισής της μηχανής, προμηθεύτηκε και εγκαταστάθηκε με επιτυχία ηλεκτροκινητήρας τριφασικού ρεύματος και ισχύος 0.12 HP ή 0.09 kW, ο οποίος οδηγείται από το ηλεκτρονικό inverter OptiDrive-E της Invertek για τον ακριβή προσδιορισμό των στροφών λειτουργίας του. Τον ηλεκτροκινητήρα ακολουθεί ένα μειωτήρας ο οποίος έχει σχέση μετάδοσης $i=25$. Δεδομένου ότι ο ηλεκτροκινητήρας δεν συστήνεται να δουλεύει κάτω από τα 300 rpm, έτσι ώστε να μπορεί να ψύχεται επαρκώς από τον δικό του ανεμιστήρα, η ελάχιστη ταχύτητα περιστροφής του κινητήριου τροχού προκύπτει 12 rpm. Η ταχύτητα αυτή κρίνεται αρκετά χαμηλή για την αποφυγή εμφάνισης δυναμικών φαινομένων που θα επηρεάσουν αρνητικά τα αποτελέσματα της διαδικασίας.



Σχήμα 3.1 Η μηχανή Goulde Mikron του Εργαστηρίου Στοιχείων Μηχανών

Η μηχανή περιλαμβάνει επιπλέον δύο μετρητικά όργανα για την καταγραφή της αξονικής απόστασης και τη γωνία περιστροφής του κινητήριου-εξεταζόμενου τροχού. Και τα δύο όργανα είναι κατασκευασμένα από την γερμανική εταιρία Heidenhain S.A. και προσαρμίζονται στη μηχανή μέσω κατάλληλα διαμορφωμένων εξαρτημάτων που παρουσιάζονται αναλυτικά στο [13]. Το πρώτο όργανο είναι ένας μετρητικός κανόνας LF 401 με μέγιστο μήκος μέτρησης 401 mm. Προσδιορίζει με οπτικές μεθόδους την αξονική μετατόπιση και το μέγιστο σφάλμα των μετρήσεων του υπολογίζεται ως 0.08 μm ανά 4 μm, μία πολύ ικανοποιητική ακρίβεια μέτρησης για την εξεταζόμενη εφαρμογή. Το δεύτερο όργανο είναι ένα ψηφιακό γωνιόμετρο μοντέλου ROD 450,000-5,000. Το μετρητικό αυτό συνδέεται μέσω ενός ελαστικού συνδέσμου με τον άξονα του κινητήριου τροχού και καταγράφει τη γωνία περιστροφής του με διακριτική ικανότητα 0.072°, που είναι και πάλι πλήρως ικανοποιητική για την εφαρμογή.

Για την εξαγωγή των μετρήσεων από τα όργανα και την εισαγωγή τους σε ηλεκτρονικό υπολογιστή για περαιτέρω επεξεργασία αναπτύσσεται και υλοποιείται μια αυτοσχέδια μετρητική κάρτα. Η κάρτα αυτή δέχεται ως είσοδο τα 4 καλώδια που περιέχουν την πληροφορία της μέτρησης του μετρητικού κανόνα σε μορφή ημιτονοειδούς σήματος. Το σήμα αυτό ενισχύεται, μετατρέπεται σε τετραγωνικούς παλμούς και οδηγείται σε έναν ελεγκτή τύπου ATmega 328, το οποίο μετράει τον αριθμό των τετραγωνικών παλμών που καταφτάνει σε αυτόν σε κάθε περίοδο. Καθώς κάθε παλμός αντιστοιχεί σε μια μονάδα μήκους, η πρόσθεσή τους δίνει έναν αριθμό που εκφράζει τη μετατόπιση της απόστασης αξόνων σε μονάδες που ορίζονται κάθε φορά από το μετρητικό όργανο. Για τον μετρητικό κανόνα LF 401 της μηχανής, ο αριθμός αυτός πρέπει να πολλαπλασιαστεί επί 4 για να αναχθεί σε μm. Στη συνέχεια, ο αριθμός αποστέλλεται σε έναν ελεγκτή τύπου ATmega 1281, όπου και μετατρέπεται σε χαρακτήρα ASCII. Από εκεί μεταφέρεται σειριακά στην πλακέτα CP2102 USB 2.0 όπου και μετατρέπεται σε USB σήμα και διαβάζεται από τον υπολογιστή. Η τελική συλλογή όλων των μετρήσεων και η αποθήκευσή τους σε αρχείο .txt για περαιτέρω επεξεργασία πραγματοποιείται μέσω του τερματικού ZOC 7, κατάλληλου για εφαρμογή σε περιβάλλοντα Windows και Mac.

Το συνολικό σφάλμα μέτρησης της μηχανής προκύπτει από τη σύνθεση ποικίλων σφαλμάτων που εισάγονται κατά την πειραματική διαδικασία. Τα κυριότερα από αυτά τα σφάλματα είναι το σφάλμα μέτρησης των μετρητικών οργάνων και τα σφάλματα λόγω της εκκεντρότητας των αξόνων περιστροφής. Το συνολικό σφάλμα μέτρησης της αξονικής απόστασης υπολογίζεται στο [13] και προσδιορίζεται ως το γεωμετρικό άθροισμα του σφάλματος μέτρησης του μετρητικού κανόνα και της εκκεντρότητας της κύριας ατράκτου, η οποία από μετρήσεις που έγιναν στα πλαίσια της μελέτης εκείνης προσδιορίστηκε ως $\pm 10\mu\text{m}$. Όπως αναφέρθηκε παραπάνω το σφάλμα του μετρητικού οργάνου ακολουθεί τον κανόνα του πολλαπλασιασμού σύμφωνα με τη σχέση

$$\sigma_{\text{οργ}} = ku \quad (3.1)$$

όπου u το μετρούμενο μήκος και $k=0.08/4$ σταθερά που προκύπτει από τον ορισμό του σφάλματος του οργάνου ως 0.08 μm ανά 4 μm. Έτσι, το συνολικό σφάλμα μέτρησης προκύπτει από τη σχέση

$$\sigma_{\text{ολ}} = \sqrt{(\sigma_{\text{οργ}})^2 + (\sigma_{\text{εκκ}})^2} = \sqrt{(ku)^2 + (10)^2} \quad (3.2)$$

3.2. Οδοντωτοί τροχοί

Για την διεξαγωγή ενός ελέγχου στη μηχανή δοκιμών διπλής κατατομής είναι απαραίτητη η παρουσία δύο οδοντωτών τροχών. Ενός τροχού του οποίου επιδιώκεται ο έλεγχος και ενός τροχού πρότυπων διαστάσεων με τον οποίο θα υποβληθεί σε συνεργασία. Οι πρότυποι τροχοί που χρησιμοποιούνται πρέπει να είναι υψηλής ποιότητας και ακρίβειας, γεγονός που τους καθιστά εξαιρετικά ακριβούς στην αγορά. Οι εξεταζόμενοι τροχοί μπορεί να είναι οποιασδήποτε ποιότητας και προδιαγραφών, καθώς η μέθοδος δεν θέτει περιορισμούς ως προς τους τροχούς που μπορούν να ελέγχονται. Απαιτείται, όμως, η ύπαρξη αντίστοιχου πρότυπου τροχού για να συνεργαστούν.

Το Εργαστήριο Στοιχείων Μηχανών διαθέτει τρεις πρότυπους τροχούς τριών τιμών module, δηλαδή τροχούς με module 3, 5 και 6 mm, με 38, 24 και 24 οδόντες αντίστοιχα. Επίσης, διαθέτει έναν ικανό αριθμό οδοντωτών τροχών σε αυτά τα module, τα οποία μπορεί να χρησιμοποιηθούν ως εξεταζόμενοι τροχοί κατά τις πειραματικές μετρήσεις. Ωστόσο, τόσο οι πρότυποι όσο και οι εν δυνάμει εξεταζόμενοι τροχοί, λόγω της έκθεσής τους στις ατμοσφαιρικές συνθήκες επί σειρά ετών, έχουν εμφανή τα αποτελέσματα της οξείδωσης στο κύριο σώμα τους, αλλά και, κυρίως, στις επιφάνειες των κατατομών τους, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.2.



Σχήμα 3.2 Επίδραση οξείδωσης στις κατατομές των τροχών

Το πρόβλημα της οξείδωσης των κατατομών είναι αρκετά σημαντικό, καθώς αναμένεται να επηρεάσει αρνητικά την ακρίβεια και, κατά συνέπεια, την αξιοπιστία των μετρήσεων που θα προκύψουν από την εξέταση των επιλεγθέντων οδοντωτών τροχών στη μηχανή ελέγχου διπλής κατατομής. Αν και στους εξεταζόμενους τροχούς μπορεί η ανομοιόμορφη επικάλυψη των κατατομών με τα οξείδια του σιδήρου να θεωρηθεί ως μετρήσιμη απόκλιση από την ιδανική μορφή της επιφάνειας, η ίδια θεώρηση δεν μπορεί να γίνει και για τους πρότυπους τροχούς. Για την επιτυχία της μεθόδου, οι κατατομές του πρότυπου τροχού θα πρέπει να είναι τάξης ανώτερης διαστασιολογικής και γεωμετρικής ακρίβειας, έτσι ώστε τα σύνθετα σφάλματα που καταγράφονται να μπορούν να αποδοθούν εξ ολοκλήρου στον εξεταζόμενο τροχό. Έτσι, για την διεξαγωγή των πειραμάτων είναι απαραίτητος ο καθαρισμός των πρότυπων, κυρίως, τροχών, για να απομακρυνθούν τα αποτελέσματα της οξείδωσης και να μείνουν οι καθαρές κατατομές των τροχών για να συνεργαστούν.

3.2.1. Χημικός καθαρισμός οδοντωτών τροχών

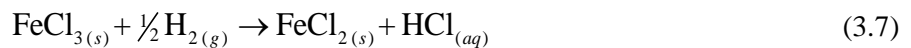
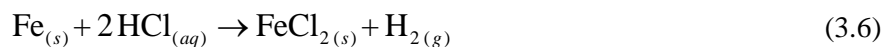
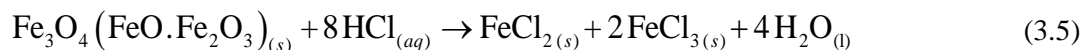
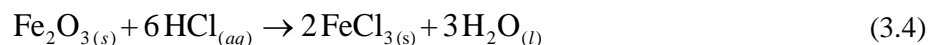
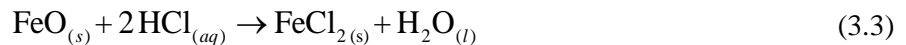
Για την απομάκρυνση των οξειδίων από την επιφάνεια των κατατομών των τροχών δεν αρκεί η εμβάπτισή τους σε κάποιο λουτρό αλκοόλης ή ελαίου, που χρησιμοποιούνται για τον καθαρισμό των τροχών από διάφορα λίπη και ακαθαρσίες. Αντί αυτών, θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν κατάλληλες διαβρωτικές ουσίες, οι οποίες θα είναι ικανές να διαλύσουν τα οξείδια του σιδήρου που έχουν επικαθήσει πάνω στους τροχούς, απομακρύνοντάς τα οριστικά από τις επιφάνειές τους. Στη βιομηχανική πρακτική, τα πιο ευρέως χρησιμοποιούμενα διαβρωτικά μέσα σε παρόμοιες εφαρμογές είναι τα διαλύματα οξέων, και πιο συγκεκριμένα τα διαλύματα υδροχλωρικού οξέος, νιτρικού οξέος και θεικού οξέος. Και τα τρία αυτά διαλύματα είναι ικανά να απομακρύνουν επιτυχώς την σκουριά από τις επιφάνειες των κατατομών των τροχών.

Ταυτόχρονα όμως με την απομάκρυνση των οξειδίων από την επιφάνεια των τροχών, τα διαλύματα των οξέων διαβρώνουν την ίδια την επιφάνεια, αλλοιώνοντας την σύσταση και την διαστασιολογική της ακρίβεια. Το φαινόμενο αυτό, αν και σε ορισμένες εφαρμογές είναι χρήσιμο, στην εξεταζόμενη περίπτωση είναι εξαιρετικά επιζήμιο, καθώς συνεπάγεται την αλλοίωση των διαστάσεων και της

γεωμετρίας του πρότυπου τροχού. Προτού, λοιπόν, γίνει οποιαδήποτε απόπειρα καθαρισμού του, θα πρέπει να διασφαλισθεί πως η διαβρωτική επίδραση του διαλύματος των οξέων στην επιφάνειά του οδηγεί σε αμελητέες διαστασιολογικές και γεωμετρικές αποκλίσεις από την πρωτότυπη μορφή των κατατομών του.

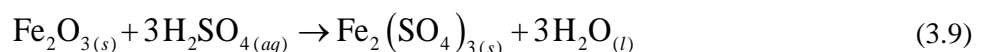
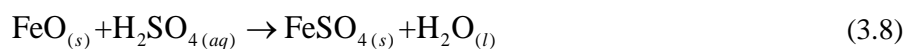
Από τα τρία διαλύματα οξέων που αναφέρθηκαν προηγουμένως και αποτελούν τα υποψήφια διαβρωτικά μέσα για την απομάκρυνση των οξειδίων του σιδήρου, το νιτρικό οξύ αποκλείεται εξ αρχής, δεδομένου ότι παρουσιάζει έντονη διαβρωτική δράση σε υλικά όπως ο χάλυβας [18]. Οι δράση των δύο άλλων διαλυμάτων εξετάζεται αναλυτικά παρακάτω για τη διαπίστωση αρχικά της δυνατότητας απομάκρυνσης της σκουριάς χωρίς την αλλοίωση των επιφανειών των τροχών και στη συνέχεια την επιλογή του πλέον κατάλληλου διαλύματος για την πραγματοποίηση του καθαρισμού.

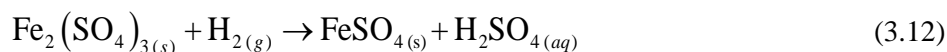
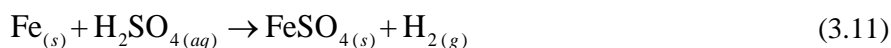
Τα διαλύματα υδροχλωρικού οξέος είναι πολύ κοινά στον καθαρισμό οδοντωτών τροχών από επιφανειακή οξείδωση. Είναι ικανά να απομακρύνουν αποτελεσματικά και σε σύντομο σχετικά χρονικό διάστημα όλα τα οξείδια του σιδήρου που συνθέτουν την επιφανειακή αυτή οξείδωση των τροχών, οι οποίοι στην παρούσα εφαρμογή είναι κατασκευασμένοι από χάλυβα. Τα οξείδια του σιδήρου που παρατηρούνται είναι τα FeO , Fe_2O_3 και Fe_3O_4 και μπορεί να είναι παρόντα με ποικίλες αναλογίες στην οξειδωμένη επιφάνεια των τροχών. Το υδροχλωρικό οξύ αντιδρά με τα οξείδια, αλλά και με το κύριο υλικό των τροχών σύμφωνα με τις παρακάτω εξισώσεις [19]:



Όπως γίνεται φανερό από την εξίσωση (3.6), πέρα από τις αντιδράσεις με τα οξείδιά του, το υδροχλωρικό οξύ διαβρώνει και τον ίδιο το σίδηρο με έναν ρυθμό που εξαρτάται από διάφορους παράγοντες, με έναν από τους βασικότερους να είναι η συγκέντρωση του οξέος μέσα στο διάλυμα. Στα διαλύματα που χρησιμοποιούνται το υδροχλωρικό οξύ βρίσκεται συνήθως σε συγκέντρωση 15% και ο καθαρισμός πραγματοποιείται σε συνθήκες περιβάλλοντος [20].

Μια δεύτερη ευρέως χρησιμοποιούμενη εναλλακτική για τον καθαρισμό των τροχών είναι η χρήση διαλυμάτων θεικού οξέος. Το θεικό οξύ έχει γενικά μικρότερους ρυθμούς διάβρωσης του χάλυβα από το υδροχλωρικό οξύ [19], ενώ έχει την ικανότητα να απομακρύνει τη σκουριά από τις επιφάνειές του. Το θεικό οξύ έχει κατά κύριο λόγο αντικατασταθεί στη βιομηχανία από το υδροχλωρικό οξύ, ωστόσο τόσο το γεγονός ότι είναι λιγότερο επιθετικό απέναντι στον χάλυβα, όσο και το ότι υπήρχε ήδη στην αποθήκη του εργαστηρίου διαθέσιμη ποσότητα, ενώ στην περίπτωση του υδροχλωρικού οξέος θα έπρεπε να αγοραστεί από την αρχή η απαιτούμενη ποσότητα, καθιστά χρήσιμη την εξέταση της δυνατότητας χρησιμοποίησής του στην παρούσα εφαρμογή. Κατ' αναλογία με την περίπτωση του διαλύματος υδροχλωρικού οξέος οι χημικές αντιδράσεις που λαμβάνουν χώρα κατά τον καθαρισμό είναι:





Αν και σύμφωνα με τη σχέση (3.11) προκύπτει και εδώ ότι το θειικό οξύ προσβάλλει το υλικό των τροχών, η διάβρωση που προκύπτει γίνεται ομοιόμορφα στην επιφάνειά τους [21]. Το στοιχείο αυτό αποτελεί πλεονέκτημα της χρησιμοποίησής του καθώς η μικρή διάβρωση που θα προκύψει από τη χρήση οποιαδήποτε διαλύματος οξέος θα γίνει τουλάχιστον ομοιόμορφα στην επιφάνεια των κατατομών του υλικού. Τα διαλύματα θειικού οξέος που χρησιμοποιούνται έχουν συγκέντρωση που κυμαίνεται από 10 έως 20% και οι θερμοκρασίες καθαρισμού μπορεί να είναι από εκείνες του περιβάλλοντος έως και 50 °C [20].

3.2.2. Πειραματικός έλεγχος διάβρωσης

Οι ομάδες των εξισώσεων (3.3)-(3.7) και (3.8)-(3.12) περιγράφουν τις χημικές αντιδράσεις που λαμβάνουν χώρα στο λουτρό καθαρισμού των οδοντωτών τροχών σε διάλυμα υδροχλωρικού και θειικού οξέος αντίστοιχα. Όπως γίνεται φανερό από τις εξισώσεις αυτές, τα οξέα δεν επιδρούν μόνο στα οξειδία του σιδήρου που επικαλύπτουν σε ορισμένα μόνο σημεία την επιφάνεια των τροχών, αλλά και στο κύριο σώμα τους, επηρεάζοντας την επιφανειακή τους σύσταση και τις διαστάσεις τους. Στόχος της ανάλυσης που έγινε παραπάνω είναι να προσδιοριστεί η δυνατότητα απομάκρυνσης της σκουριάς από την επιφάνεια των τροχών πριν προλάβει το οξύ να επιδράσει σημαντικά στην επιφάνεια των κατατομών. Για να γίνει αυτό δυνατό, πρέπει να είναι γνωστοί οι ρυθμοί διάβρωσης ή οι ταχύτητες των επιμέρους αντιδράσεων, έτσι ώστε να γίνουν οι απαραίτητοι υπολογισμοί με παράμετρο τον χρόνο έκθεσης. Οι τιμές των μεγεθών αυτών, ωστόσο, δεν είναι γνωστές με ακρίβεια, καθώς εξαρτώνται σημαντικά από πολλές παραμέτρους της εκάστοτε αντίδρασης, καθιστώντας αδύνατο τον αναλυτικό υπολογισμό της δυνατότητας καθαρισμού των τροχών με τα διαλύματα των οξέων.

Η εξέταση αυτής της δυνατότητας γίνεται μέσα από την κατάστρωση μιας πειραματικής διαδικασίας κατά την οποία προσδιορίζεται ταυτόχρονα η διάβρωση του χάλυβα στα διαλύματα των εξεταζόμενων οξέων και η ικανότητα των τελευταίων να αφαιρούν επιφανειακά στρώματα σκουριάς. Για τον λόγο αυτό επιλέγεται από τα ρετάλια του μηχανουργείου του Εργαστηρίου Στοιχείων Μηχανών ένα κυλινδρικό χαλύβδινο κομμάτι, του οποίου η εξωτερική επιφάνεια έχει υποστεί έντονη οξείδωση, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.3. Το κομμάτι αυτό θα αποτελέσει το δοκίμιο της πειραματικής διαδικασίας, πάνω στο οποίο θα πραγματοποιηθούν μετρήσεις για τον προσδιορισμό των μεγεθών που αναφέρθηκαν παραπάνω.



Σχήμα 3.3 Δοκίμιο ελέγχου διάβρωσης

Κατά την προετοιμασία του δοκιμίου, καθαρίζονται τα δύο του πρόσωπα στον τόρνο, έτσι ώστε να απομακρυνθεί η οξειδωμένη επίστρωσή του και να αποκαλυφθεί το αναλλοίωτο υλικό που υπάρχει στο εσωτερικό του. Το δοκίμιο εμβαπτίζεται σε ένα λουτρό που συνίσταται από το διάλυμα του οξέος που εξετάζεται κάθε φορά και διατηρείται εκεί για ορισμένο χρονικό διάστημα. Όσο χρόνο το δοκίμιο είναι εκτεθειμένο στο διάλυμα, το οξύ αντιδρά τόσο με την οξειδωμένη επιφάνεια στην περιφέρειά του, όσο και με το υλικό του αυτό καθαυτό στα καθαρισμένα του πρόσωπα. Με αυτόν τον τρόπο, γίνεται αρχικά δυνατό να ελέγχεται οπτικά η πρόοδος της απομάκρυνσης της σκουριάς από την επιφάνεια του δοκιμίου. Επίσης, με τη μέτρηση του ύψους του δοκιμίου πριν και μετά την εμβάπτισή του στο διάλυμα του οξέος μπορεί να υπολογιστεί ποσοτικά ο ρυθμός διάβρωσης του καθαρού χάλυβα από το συγκεκριμένο οξύ. Το όριο που τίθεται για την διάβρωση του υλικού του τροχού είναι της τάξης των 1~2μm ομοιόμορφα κατανομημένων στην επιφάνεια των κατατομών, έτσι ώστε η μεταβολή της μορφής τους να είναι σχεδόν αμελητέα.

Συνδυαστικά, εξετάζεται η απομάκρυνση του σκουριάς όταν η διάβρωση ξεπεράσει κάποιο όριο, και αν αυτή είναι ικανοποιητική, τότε το διάλυμα του οξέος κρίνεται κατάλληλο για την εφαρμογή του στον καθαρισμό του πρότυπου τροχού. Το δοκίμιο διατηρείται μέσα στο διάλυμα για συγκεκριμένα χρονικά διαστήματα και ενδιάμεσα ανασύρεται για να μετρηθεί το μήκος του και να εξεταστεί η πορεία της διάβρωσης συναρτήσει του χρόνου. Η τιμή της διαφοράς του μετρούμενου κάθε φορά μήκους με το αρχικό, διαιρεμένη με το 2, εφόσον διαβρώνονται και τα δύο πρόσωπα του δοκιμίου ταυτόχρονα, εκφράζει τη διάβρωση του υλικού για τον συγκεκριμένο χρόνο έκθεσης κάθε φορά.

Η μέτρηση του ύψους του δοκιμίου μετά την έκθεσή του κάθε φορά στο διάλυμα του οξέος απαιτεί ένα όργανο μέτρησης με μεγάλη διακριτική ικανότητα, διότι η μεταβολή του ύψους αναμένεται να είναι της τάξης των μm. Για το λόγο αυτό συμβατικά ή ηλεκτρονικά παχύμετρα, και κυρίως μικρόμετρα ή μετρητικά ρολόγια οριακά καλύπτουν αυτές τις ανάγκες σε διακριτική ικανότητα. Οι μετρήσεις, όμως με τα όργανα αυτά συνοδεύονται από σφάλματα που εισάγονται από την αδυναμία συνέπειας στην επιλογή της θέσης μέτρησης κάθε φορά και την κακή επαναληψιμότητα των μετρήσεων που αυτή συνεπάγεται. Οι αβεβαιότητες που προκύπτει με αυτόν τον τρόπο δεν καθιστά δυνατή την μέτρηση του ύψους του δοκιμίου από τα παραπάνω όργανα με την απαραίτητη ακρίβεια.

Οι μετρήσεις του ύψους του δοκιμίου πραγματοποιούνται τελικά στην μετρητική διάταξη Mahr ULM OPAL 600 που διεκπεραιώνει μετρήσεις μήκους και αποτελεί μέρος του εξοπλισμού του Μετροτεχνικού Εργαστηρίου. Η διάταξη αυτή, που παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.4, έχει τη δυνατότητα μέτρησης με διακριτική ικανότητα 0.01μm. Για να πετύχει μια τόσο υψηλή διακριτική ικανότητα συνδυάζει τη χρήση μετρητικών οργάνων υψηλής ακριβείας και αλγορίθμων αντιστάθμισης της αλλαγής των περιβαλλοντικών συνθηκών κατά τη διάρκεια των μετρήσεων. Με αυτόν τον τρόπο μπορεί να πετύχει μετρήσεις τόσο υψηλής ακριβείας, όσο και μεγάλης επαναληψιμότητας. Η μηχανή διαθέτει ειδικά χειριστήρια με τα οποία η τράπεζα στην οποία τοποθετείται το δοκίμιο να μπορεί να μεταφερθεί κατά τις έννοιες του ύψους και του βάθους, ώστε να μετρηθεί το ύψος του δοκιμίου σε οποιαδήποτε σημείο της κυκλικής του διατομής χρειάζεται κάθε φορά.

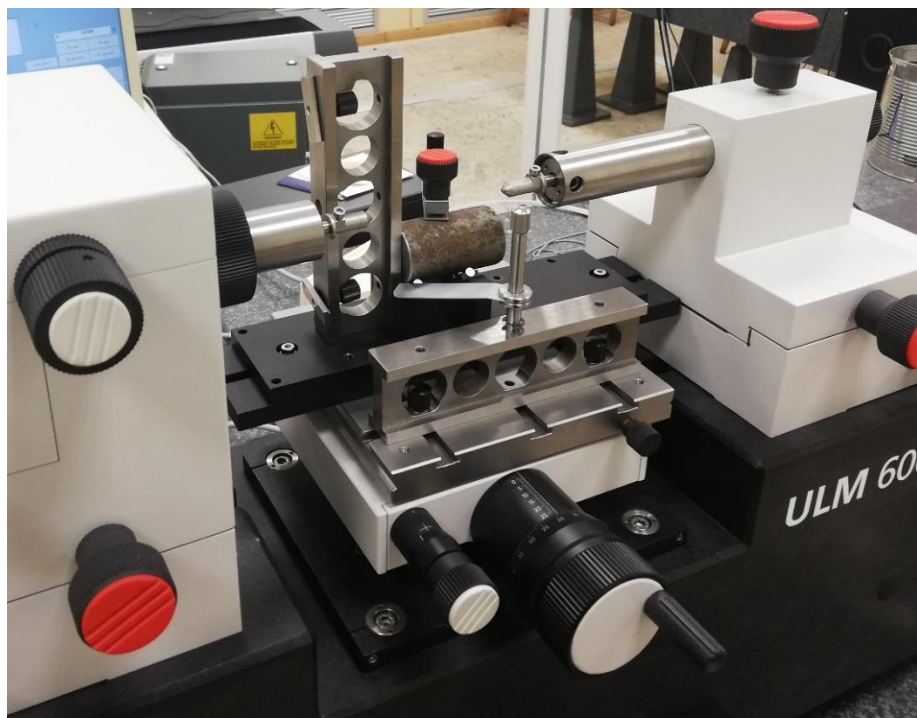


Σχήμα 3.4 Μετρητική διάταξη μήκους Mahr ULM OPAL 600

Μετά την απομάκρυνση του δοκιμίου κάθε φορά από το λουτρό του διαλύματος των οξέων, ακολουθεί η τοποθέτησή του στη μετρητική διάταξη για την πραγματοποίηση της μέτρησης του ύψους του. Η τοποθέτηση του δοκιμίου στην διάταξη έχει μεγάλη σημασία για την επίτευξη υψηλής ακρίβειας στην μέτρηση. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.5, το δοκίμιο εναποθέτεται πάνω σε δύο στηρίγματα με διαμόρφωση V, τα οποία του επιτρέπουν την κίνηση στη διεύθυνση του άξονά του και την περιστροφή περί αυτόν. Για να περιοριστούν και αυτοί οι βαθμοί ελευθερίας τοποθετείται ένας σφιγκτήρας που συγκρατεί το δοκίμιο στην θέση που τοποθετήθηκε αρχικά. Το πρόβλημα που δημιουργείται από αυτόν τον τρόπο τοποθέτησης του δοκιμίου, είναι η δυσκολία μέτρησης του ίδιου σημείου της διατομής του δοκιμίου κάθε φορά, καθώς αυτό λύνεται και επανατοποθετείται από τη διάταξη κάθε φορά που εκτίθεται ξανά στο διάλυμα του οξέος. Το ύψος του δοκιμίου ποικίλει σημαντικά από σημείο σε σημείο καθώς τα πρόσωπά του έχουν επιπεδότητα τάξης μεγαλύτερης από την ακρίβεια που ζητείται να επιτευχθεί ($>10\mu\text{m}$) και η τραχύτητα των επιφανειών που άφησε η κατεργασία των προσώπων στον τόρνο είναι μεγαλύτερη από την επιθυμητή. Επίσης, ο τρόπος στήριξης του δοκιμίου δεν εξασφαλίζει την τοποθέτησή του στην ίδια γωνία κάθε φορά ώστε δεδομένου του ύψους και του βάθους που μετρούνται, να ορίζεται πλήρως το σημείο μέτρησης. Για το λόγο αυτό, αναπτύσσεται μια ιδιοκατασκευή για την επίτευξη της τοποθέτησης του δοκιμίου στην ίδια θέση κάθε φορά, και η οποία φαίνεται στο Σχήμα 3.6. Αρχικά, το δοκίμιο σημαδεύεται στην ακμή ενός εκ των προσώπων του, αρκετά βαθιά έτσι ώστε να μην εξαφανιστεί εξαιτίας της διάβρωσης. Αφού το δοκίμιο έρθει πρόσωπο με το πρώτο στήριγμα της τράπεζας που το συγκρατεί, περιστρέφεται περί τον άξονά του έτσι ώστε το σημάδι αυτό να συναντήσει το έλασμα που φαίνεται στο Σχήμα 3.6 και δείχνει στην ίδια θέση κάθε φορά.



Σχήμα 3.5 Μέτρηση ύψους του δοκιμίου στην μετρητική διάταξη



Σχήμα 3.6 Διαδικασία τοποθέτησης δοκιμίου στην μετρητική διάταξη

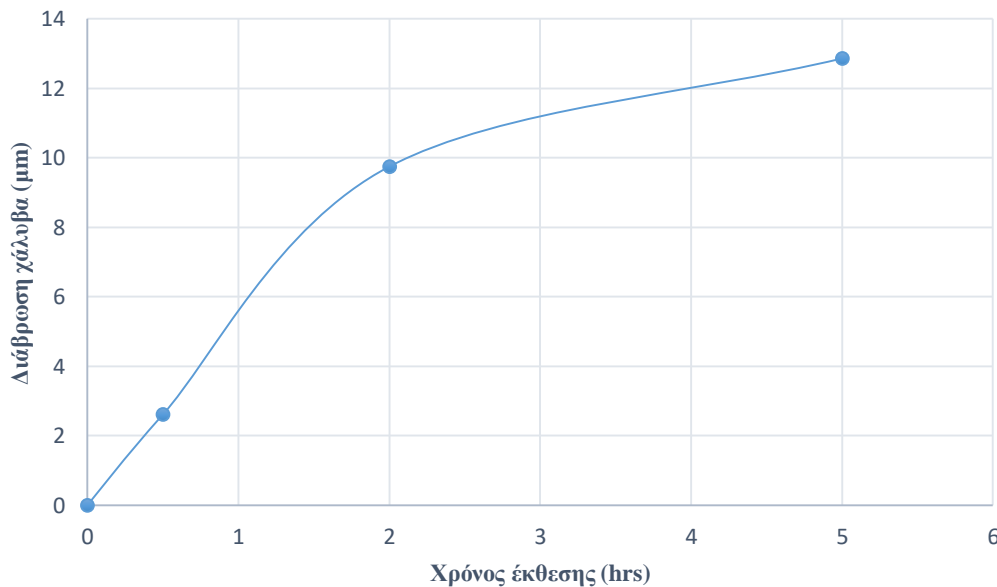
Η παραπάνω διαδικασία τοποθέτησης του δοκιμίου, αν και περιορίζει σημαντική την αβεβαιότητα στο σημείο μέτρησης, δεν εξασφαλίζει ικανοποιητικά για τις απαιτήσεις ακρίβειας της εφαρμογής την απαραίτητη επαναληψιμότητα στην επιλογή του σημείου μέτρησης. Για το λόγο αυτό, επιλέγεται να μετρηθούν παραπάνω σημεία σε μια περιοχή γύρω από το αρχικό σημείο μέτρησης, ώστε να λαμβάνεται μια καλύτερη στατιστικά εικόνα για την πορεία της διάβρωσης στο υλικό.

Στη διεξαγωγή των πειραμάτων επιλέχθηκε να προηγηθεί η εξέταση του θεικού οξέος, που το εργαστήριο Στοιχείων Μηχανών διέθετε ήδη στην αποθήκη των υλικών του. Το θεικό οξύ αποθηκεύεται στη μορφή που είναι περισσότερο σταθερό, σε συγκέντρωση 98.3% (*Concentrated Sulfuric Acid*). Για τη δημιουργία του διαλύματος αραιώνεται σε νερό, έτσι ώστε το τελικό διάλυμα να έχει συγκέντρωση θεικού οξέος 20%, που είναι η πιο κοινή συγκέντρωση διαλύματος που χρησιμοποιείται για τον καθαρισμό μετάλλων από σκουριά. Το δοκίμιο εμβαπτίζεται στο παραπάνω διάλυμα σε ορισμένους χρόνους. Οι χρόνοι αυτοί επιλέγονται με βάση την οπτική εξέταση της πορείας

απομάκρυνσης της σκουριάς από την επιφάνεια του δοκιμίου και παρουσιάζονται μαζί με τα αποτελέσματα των μετρήσεων στην Mahr ULM OPAL 600 στον Πίνακα 3.1. Η διάβρωση του θεικού οξέος στον χάλυβα υπολογίζεται ως το μισό του μέσου όρου των μετρήσεων που παρατίθενται στον Πίνακα 3.1 και παρουσιάζεται διαγραμματικά στο Σχήμα 3.7.

Χρόνος έκθεσης		Αρχή	30 min	120 min	300 min
Ύψος (mm)	Βάθος (mm)	Μήκος δοκιμίου (mm)	Απόκλιση από το αρχικό ύψος (μm)		
4,00	17,500	55,73116	-3,29	-12,81	-14,63
4,00	19,500	55,75195	-7,38	-23,60	-32,40
4,00	18,500	55,72279	-4,34	-19,67	-12,86
4,00	14,500	55,76980	-4,15	-20,72	-28,97
4,00	11,500	55,79952	-6,11	-17,99	-26,05
4,00	8,500	55,84237	-7,18	-18,76	-26,55
4,00	5,500	55,87547	-6,95	-18,49	-25,49
2,00	17,500	55,80052	-8,51	-19,14	-38,60
0,00	17,500	55,78138	-5,16	-23,60	-33,41
7,00	17,500	55,76973	-3,48	-19,43	-28,18
10,00	17,500	55,84281	-2,58	-26,59	-20,67
13,00	17,500	55,83137	-3,52	-13,14	-20,87
Μέσος Όρος (μm)			-5,22	-19,49	-25,72
Διάβρωση χάλυβα (μm)			-2,61	-9,75	-12,86

Πίνακας 3.1 Μεταβολή του μήκους του χαλύβδινου δοκιμίου κατά την έκθεσή του σε διάλυμα θεικού οξέος 20% w/w



Σχήμα 3.7 Διάβρωση χάλυβα κατά την έκθεσή του σε διάλυμα θεικού οξέος συγκέντρωσης 20% w/w

Στο Σχήμα 3.8 παρουσιάζεται το δοκίμιο μετά το πέρας της έκθεσής του στο διάλυμα του θεικού οξέος. Η επιφανειακή οξειδωση του δοκιμίου φαίνεται ότι έχει υποχωρήσει τμηματικά, αλλά

παραμένει στη μεγαλύτερη επιφάνειά του σε σημαντική ποσότητα. Ταυτόχρονα, παρατηρείται ότι τα πρόσωπα του δοκιμίου, αλλά και τα τμήματα της περιφέρειάς του που έχουν καθαριστεί δεν εμφανίζουν την γυαλάδα που χαρακτηρίζει τις επιφάνειες του χάλυβα. Η παρατήρηση αυτή ερμηνεύεται από την εξίσωση (3.11) και η οποία περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο αντιδρά το οξύ με τον σίδηρο του χάλυβα. Ο μεγάλος χρόνος έκθεσης έχει ως συνέπεια την δημιουργία ενός εξωτερικού στρώματος θεικού σιδήρου στην επιφάνεια του δοκιμίου, το οποίο μάλιστα δρα ως ένα προστατευτικό σώμα που δυσχεραίνει τη διάβρωση του χάλυβα από το οξύ, και έτσι εξηγείται γιατί στο διάγραμμα του Σχήματος 3.7 ο ρυθμός της διάβρωσης μειώνεται με την αύξηση του χρόνου έκθεσης [22].



Σχήμα 3.8 Κατάσταση δοκιμίου μετά την έκθεσή του σε διάλυμα θεικού οξέος συγκέντρωσης 20% w/w για 5 ώρες

Από τα αποτελέσματα των πειραμάτων που παρουσιάζονται παραπάνω γίνεται κατανοητό πως το θεικό οξύ δεν είναι κατάλληλο για την εφαρμογή του στον καθαρισμό των τροχών οδοντωτών τροχών που πρόκειται να συμμετέχουν στις μετρήσεις με τη μέθοδο διπλής κατατομής. Παρά τον ικανότατο χρόνο έκθεσης του χαλύβδινου δοκιμίου στο διάλυμα, το οξύ δεν κατάφερε να απομακρύνει ικανοποιητικά τη σκουριά από την επιφάνειά του, ενώ πρόλαβε να διαβρώσει σημαντικά το καθαρό υλικό του, αλλοιώνοντας τόσο τις διαστάσεις όσο και τη σύστασή του. Για τους λόγους αυτούς η χρήση του για τον καθαρισμό των εξεταζόμενων τροχών κρίνεται αναποτελεσματική, ενώ για την περίπτωση των πρότυπων τροχών απαγορευτική.

Η δεύτερη εναλλακτική για τον καθαρισμό των τροχών από την επιφανειακή οξείδωση είναι η χρήση διαλύματος υδροχλωρικού οξέος. Το διάλυμα που επιλέγεται έχει συγκέντρωση 33% και πάλι με γνώμονα την βιομηχανική πρακτική. Ως δοκίμιο χρησιμοποιείται το ίδιο με προηγουμένως, για να υπάρχει μια άμεση σύγκριση της δράσης των δύο διαλυμάτων, μετά όμως από τον καθαρισμό των προσώπων του στον τόρνο με σκοπό την απομάκρυνση του θεικού σιδήρου που είχε σχηματιστεί από την έκθεσή του στο διάλυμα θεικού οξέος και την αποκάλυψη του καθαρού χάλυβα που βρίσκεται ανεπηρέαστος στο εσωτερικό του.

Το υδροχλωρικό οξύ είναι πιο επιθετικό από το θεικό, ως προς τη διάβρωση που προκαλεί στον χάλυβα, για αυτό και οι μετρήσεις του μήκους του δοκιμίου αναμένεται να γίνουν σε σαφώς μικρότερα χρονικά διαστήματα. Τα αποτελέσματα των μετρήσεων παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.2, κατ' αντιστοιχία με τα αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν για το θεικό οξύ στον Πίνακα 3.1. Στο Σχήμα 3.9 φαίνεται η κατάσταση του δοκιμίου μετά την έκθεσή του στο διάλυμα του θεικού οξέος.

Χρόνος έκθεσης		Αρχή	2 min	10 min
Ύψος (mm)	Βάθος (mm)	Μήκος δοκιμίου (mm)	Απόκλιση από το αρχικό ύψος (μm)	
4,00	17,500	55,34914	-3,39	-1,58
4,00	19,500	55,34480	-2,14	-1,05
4,00	18,500	55,34420	-3,15	-1,99
4,00	14,500	55,35096	-1,33	-0,59
4,00	11,500	55,35445	-2,25	-1,15
4,00	8,500	55,35904	-2,02	-5,83
4,00	5,500	55,36486	-1,27	-3,40
2,00	17,500	55,34535	-1,57	-2,72
0,00	17,500	55,34283	-1,66	-1,67
7,00	17,500	55,34930	-1,70	-1,09
10,00	17,500	55,35265	-1,34	-0,79
13,00	17,500	55,35871	-1,87	-1,45
Μέσος Όρος (μm)			-1,97	-1,94
Διάβρωση χάλυβα (μm)			-0,99	-0,97

Πίνακας 3.2 Μεταβολή του μήκους του χαλύβδινου δοκιμίου κατά την έκθεσή του σε διάλυμα υδροχλωρικού οξέος 33%



Σχήμα 3.9 Κατάσταση δοκιμίου μετά την έκθεσή του σε διάλυμα υδροχλωρικού οξέος συγκέντρωσης 33% για 10 λεπτά

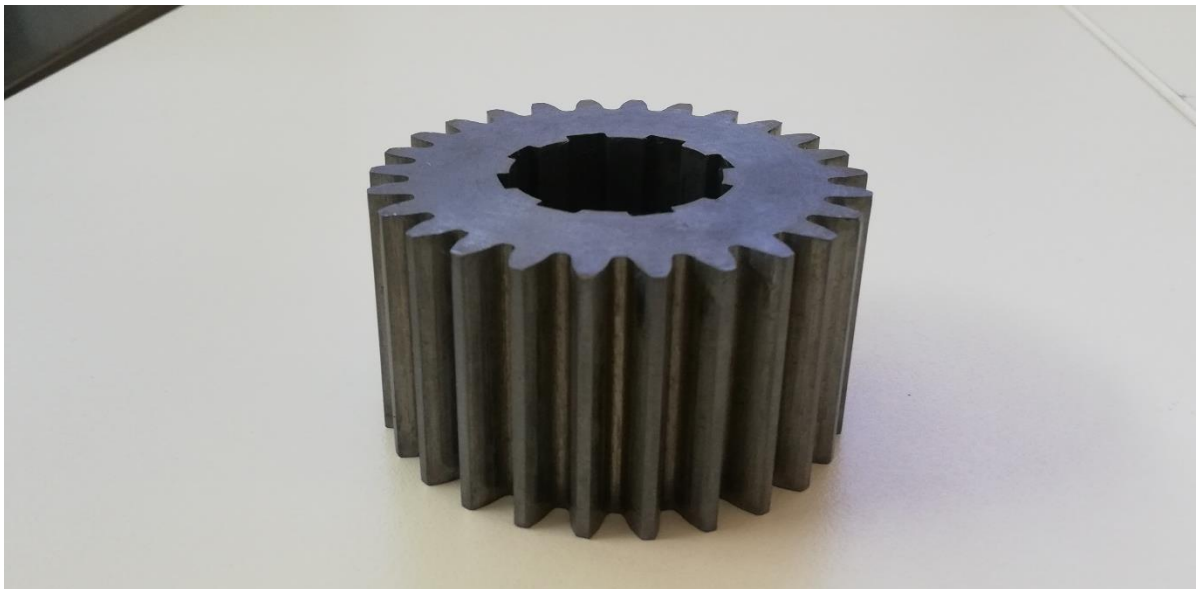
Στο Σχήμα 3.9 φαίνεται πόσο πιο δραστικά έχει απομακρύνει την επιφανειακή οξείδωση το υδροχλωρικό οξύ σε σχέση με το θειικό οξύ, η επίδραση του οποίου φαίνεται στο Σχήμα 3.8. Μέσα σε 10 λεπτά έκθεσης έχει απομακρυνθεί ήδη το μεγαλύτερο μέρος σκουριάς, ενώ από τον Πίνακα 3.2 γίνεται εμφανές πως η διάβρωση δεν ξεπερνάει το 1μm. Μάλιστα, αν ληφθεί υπόψιν ότι η ακρίβεια που αποδίδεται στην μέτρηση είναι της τάξης των 0,5 μm (λόγω αβεβαιοτήτων στις συνθήκες του περιβάλλοντος και στον τρόπο στήριξης) και ότι το στρώμα σκόνης και ακαθαρσιών που έχουν προσκολληθεί στα πρόσωπα του δοκιμίου συνεισφέρει στην μέτρηση του αρχικού μήκους του δοκιμίου μια ποσότητα της τάξης των δεκάτων του μm, ενώ στη συνέχεια αφαιρείται με τη δράση του οξέος, μπορεί να θεωρηθεί η διαφορά που παρατηρείται στις μετρήσεις στατιστικά και πρακτικά

ασήμαντη.

Από τα παραπάνω συμπεράσματα γίνεται σαφές πως το υδροχλωρικό οξύ κρίνεται κατάλληλο για τον καθαρισμό των εξεταζόμενων αλλά και του πρότυπου τροχού. Λαμβάνοντας υπόψιν τη γενική διαδικασία καθαρισμού οδοντωτών τροχών και με γνώμονα τη διευκόλυνση της διαδικασίας απομάκρυνσης της σκουριάς, τα τελικά βήματα καθαρισμού των τροχών είναι:

1. Καθαρισμός τροχού με οινόπνευμα και ακετόνη για την απομάκρυνση σκόνης και ακαθαρσιών.
2. Περαιτέρω καθαρισμός τους με σαπούνι ή απορρυπαντικό για την απομάκρυνση παραμενουσών λιπών, η παρουσία των οποίων θα εμποδίσει τη δράση των οξέων στις επιφάνειες που καλύπτουν.
3. Προετοιμασία λουτρού από διάλυμα υδροχλωρικού οξέος με αναστολέα σε αναλογία 1/3 κατ' όγκο.
4. Εμβάπτιση των πρότυπων τροχών στο λουτρό για χρονικό διάστημα έως 2 λεπτά, ενώ για τους υπόλοιπους τροχούς έως 5 λεπτά.
5. Καθαρισμός τροχού σε νερό και τρίψιμο με μαλακή βούρτσα (π.χ. οδοντόβουρτσα) για την απομάκρυνση διαλυμένων οξειδίων που έχουν παραμείνει στις επιφάνειές του.
6. Επικάλυψη του τροχού με λεπτό στρώμα οινόπνευματος ή λαδιού μηχανής και αποθήκευσή του σε κλειστό περιβάλλον με αφυγραντικά μέσα (π.χ. Silicon Gel) για την αποφυγή μελλοντικής εκ νέου οξείδωσης.

Στο Σχήμα 3.10 παρουσιάζεται η κατάσταση ενός τροχού μετά την διαδικασία καθαρισμού τους. Οι κατάσταση στις κατατομές τους, όσον αφορά την οξείδωση, είναι σαφώς βελτιωμένη από την αρχική, στο βαθμό που επιτρεπόταν από την απαίτηση μη αλλοίωσης των διαστάσεων και της σύνθεσής τους. Να σημειωθεί ότι μετά την εμβάπτισή τους στο διάλυμα υδροχλωρικού οξέος, οι διαδικασίες συντήρησης που ξεκινούν με την επικάλυψη των τροχών με λάδι μηχανής πρέπει να αρχίσουν αμέσως, καθώς εντός λίγων λεπτών μετά την απομάκρυνση των τροχών από το λουτρό, αρχίζει εκ νέου ο σχηματισμός επιφανειακής οξείδωσης.



Σχήμα 3.10 Κατάσταση οδοντωτού τροχού μετά τον καθαρισμό του σε διάλυμα υδροχλωρικού οξέος

3.3. Μετρήσεις οδοντωτών τροχών στην μηχανή Goulder Mikron

Από τους πρότυπους τροχούς που έχει στον εξοπλισμό του το εργαστήριο Στοιχείων Μηχανών, χρησιμοποιείται ο τροχός με module ίσο με 3 mm και 38 δόντια, καθώς είναι γενικότερα σε καλύτερη

κατάσταση από τους υπόλοιπους και, κυρίως, συναρμόζεται ιδανικά με τον άξονα της μηχανής Goulder Mikron, ενώ στους άλλους τροχούς η συναρμογή είναι πιο ελεύθερη από το επιθυμητό, με αποτέλεσμα να παρατηρούνται ταλαντώσεις κατά τη λήψη των μετρήσεων. Για τη διεξαγωγή των μετρήσεων επιλέγονται τρεις οδοντωτοί τροχοί που έχουν και εκείνοι module ίσο με 3 mm, και επιπλέον έχουν κατασκευαστεί με μηδενική μετατόπιση του κοπτικού κανόνα και αριθμό δοντιών 31, 25 και πάλι 25. Οι τροχοί αυτοί έχουν υποβληθεί και πάλι σε μέτρηση με αυτή τη μηχανή, και τα αποτελέσματα που προέκυψαν παρουσιάζονται στο [13]. Τα δεδομένα αυτά θα συγκριθούν με τα αποτελέσματα που θα προκύψουν από τις μετρήσεις της παρούσας εργασίας ως επιπλέον διακρίβωση της αξιοπιστίας των τελευταίων.

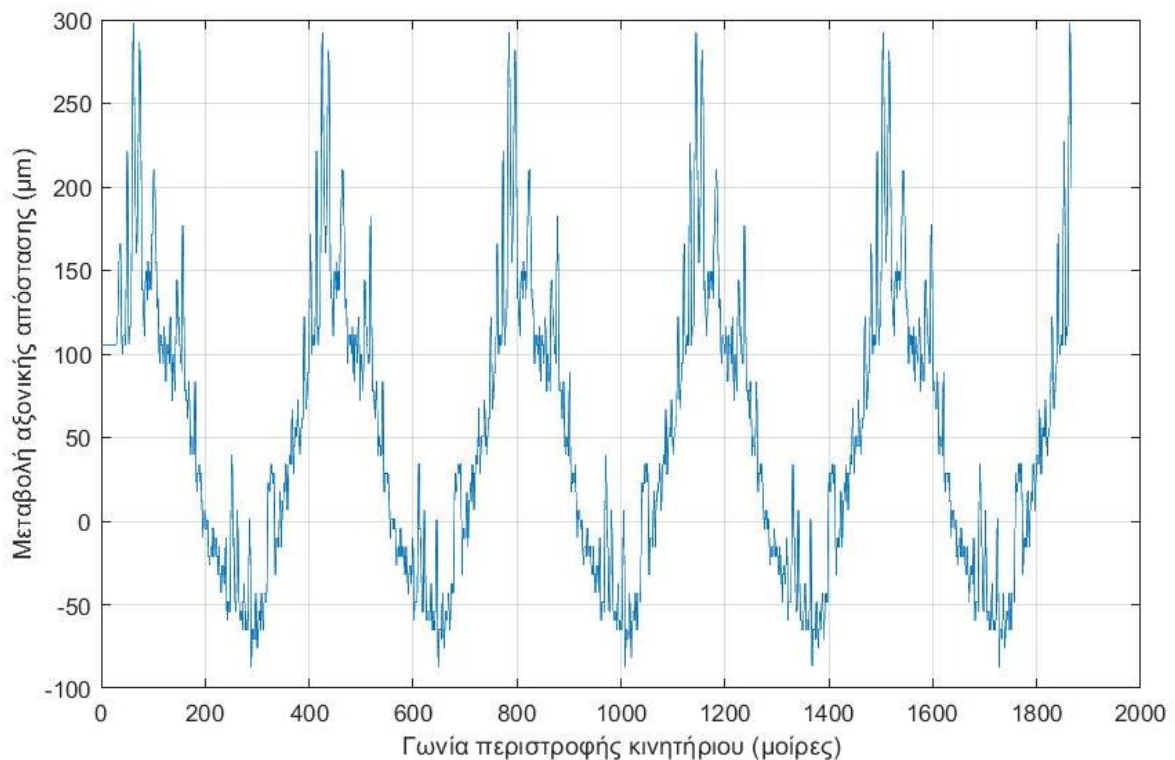
Στο Σχήμα 3.12 παρουσιάζεται το διάγραμμα μεταβολής της απόστασης των αξόνων για πέντε κύκλους λειτουργίας. Ο εξεταζόμενος τροχός φαίνεται στο Σχήμα 3.11, ενώ τα χαρακτηριστικά παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.3. Μιας και το πλάτος του εξεταζόμενου τροχού είναι μεγαλύτερο από εκείνο του πρότυπου, για την πλήρη μέτρηση του πρώτου απαιτείται η επανάληψη της μέτρησης για διάφορα ύψη συνεργασίας των δύο τροχών, έτσι ώστε να προκύψουν διαγράμματα που καλύπτουν όλο το πλάτος του. Μιας και όμως στην παρούσα μελέτη η προσομοίωση θεωρεί ένα δισδιάστατο γεωμετρικό μοντέλο των τροχών, αρκεί η μέτρηση σε ένα ύψος. Για το Σχήμα 3.12 οι τροχοί τοποθετήθηκαν έτσι ώστε οι πάνω επιφάνειές τους να βρίσκονται στο ίδιο ύψος. Το διάγραμμα μεταβολής της αξονικής απόστασης παρουσιάζει περιοδικότητα, γεγονός που διαπιστώνει την καλή επαναληψιμότητα των μετρήσεων και συμφωνεί με τα αποτελέσματα της μέτρησης του ίδιου τροχού που παρουσιάζονται στο [13].

Module (mm)	3
Γωνία πίεσης (°)	20
Αριθμός οδόντων	31
Μετατόπιση κοπτικού κανόνα (mm)	0
Πλάτος (mm)	45
Αρχικός κύκλος (mm)	93
Κύκλος κεφαλής (mm)	99

Πίνακας 3.3 Χαρακτηριστικά εξεταζόμενου τροχού 31 οδόντων



Σχήμα 3.11 Εξεταζόμενος τροχός 31 οδόντων



Σχήμα 3.12 Διάγραμμα μεταβολής αξονικής απόστασης για τον εξεταζόμενο τροχό 31 οδόντων

Ομοίως παρουσιάζονται παρακάτω τα αποτελέσματα της μέτρησης των τροχών 25 οδόντων. Και πάλι οι μετρήσεις εμφανίζουν επαναληψιμότητα και συνέπεια με τις μετρήσεις που παρουσιάζονται στο [13]. Γενικότερα, η μορφή των διαγραμμάτων που παρουσιάζεται στα Σχήματα 3.12, 3.14 και 3.16 δείχνει ότι οι οδοντωτοί τροχοί παρουσιάζουν μεγάλες αποκλίσεις από την ιδανική μορφή του διαγράμματος (ευθεία γραμμή στο 0), τόσο γενικότερα, όσο και εντονότερα σε κάποια τμήματα που εμφανίζονται κάποιες κορυφές. Και όλα αυτά ενώ ο οπτικός τους έλεγχος δεν εντοπίζει κάποιες ατέλειες. Αυτό το γεγονός είναι ενδεικτικό της αξίας της μεθόδου, αλλά ταυτόχρονα καταδεικνύει και

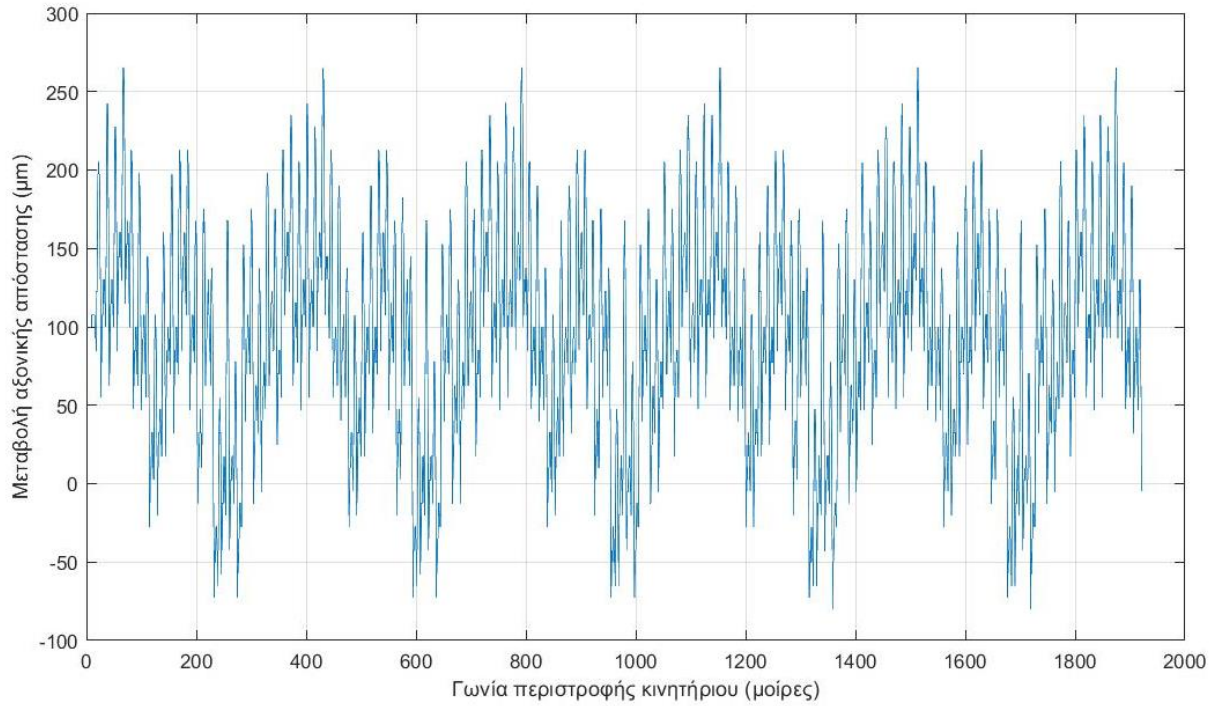
την βασική αδυναμία της: ενώ έχει διαπιστωθεί η απόκλιση των κατατομών του τροχού από την πραγματική, καμία πληροφορία δεν μπορεί να εξαχθεί για τα γεωμετρικά σφάλματα που την προκαλούν.

Module (mm)	3
Γωνία πίεσης (°)	20
Αριθμός οδόντων	25
Μετατόπιση κοπτικού κανόνα (mm)	0
Πλάτος (mm)	45
Αρχικός κύκλος (mm)	75
Κύκλος κεφαλής (mm)	81

Πίνακας 3.4 Χαρακτηριστικά πρώτου εξεταζόμενου τροχού 25 οδόντων



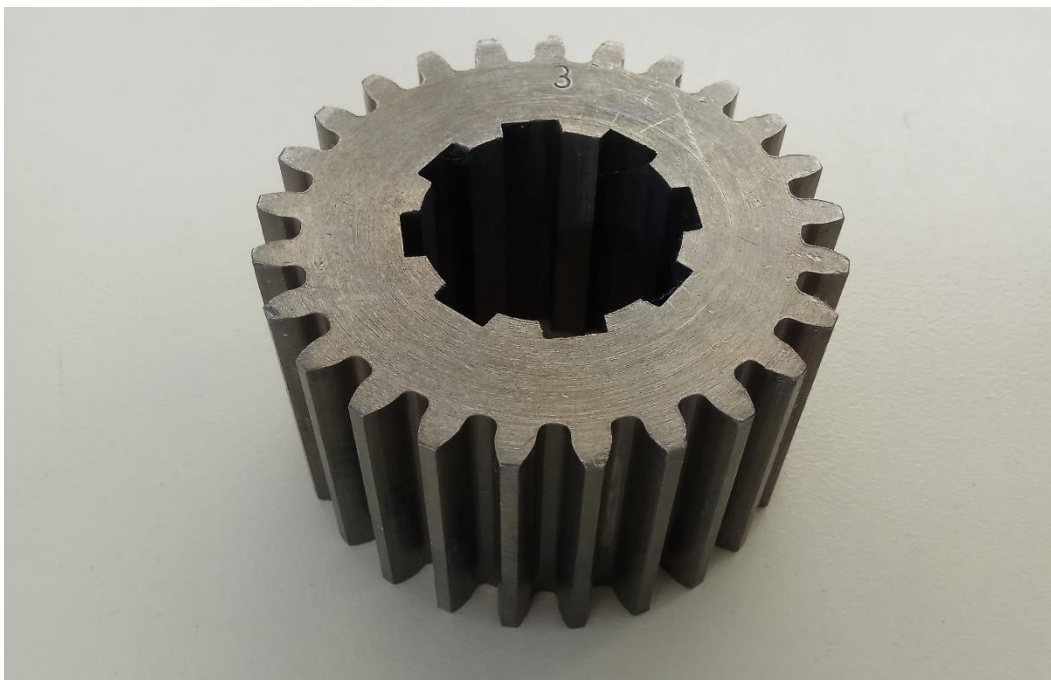
Σχήμα 3.13 Πρώτος εξεταζόμενος τροχός 25 οδόντων



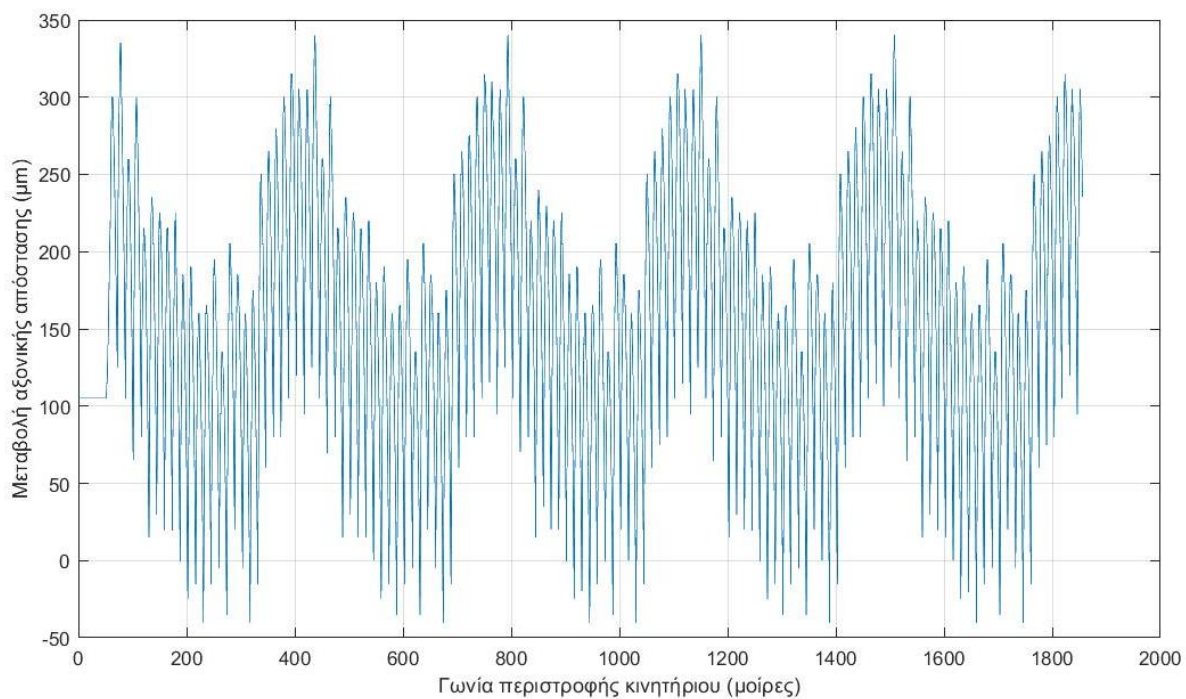
Σχήμα 3.14 Διάγραμμα μεταβολής αξονικής απόστασης για τον πρώτο εξεταζόμενο τροχό 25 οδόντων

Module (mm)	3
Γωνία πίεσης (°)	20
Αριθμός οδόντων	25
Μετατόπιση κοπτικού κανόνα (mm)	0
Πλάτος (mm)	45
Αρχικός κύκλος (mm)	75
Κύκλος κεφαλής (mm)	81

Πίνακας 3.5 Χαρακτηριστικά δευτέρου εξεταζόμενου τροχού 25 οδόντων



Σχήμα 3.15 Δεύτερος εξεταζόμενος τροχός 25 οδόντων



Σχήμα 3.16 Διάγραμμα μεταβολής αξονικής απόστασης για τον δεύτερο εξεταζόμενο τροχό 25 οδόντων

4. Προσδιορισμός γεωμετρικών αποκλίσεων με τη μέθοδο της διπλής κατατομής

Στα παραπάνω Κεφάλαια παρουσιάστηκε από διάφορες οπτικές γωνίες η μέθοδος της διπλής κατατομής. Πιο συγκεκριμένα, παρουσιάστηκαν η αρχή λειτουργίας και τα αποτελέσματα που προσφέρει μέχρι τώρα η μέθοδος, η ανάπτυξη αναλυτικού και αριθμητικού μοντέλου που προσομοιώνει τη λειτουργία της και τα αποτελέσματα των μετρήσεων που έγιναν κατά την πρακτική εφαρμογή της μεθόδου. Όλα τα παραπάνω αποτελούν εργαλεία για την περαιτέρω κατανόηση του τρόπου με τον οποίο τα διάφορα γεωμετρικά σφάλματα των κατατομών των τροχών επιδρούν στο διάγραμμα της μεταβολής της αξονικής απόστασης. Ο προσδιορισμός των γεωμετρικών σφαλμάτων, που αποτελεί και τον τελικό σκοπό της εργασίας αυτής, μέσω του διαγράμματος αυτού θα αποτελέσει το αντικείμενο του παρόντος Κεφαλαίου.

Κατά τον έλεγχο οδοντωτών τροχών με τη μέθοδο της διπλής κατατομής, τα δεδομένα που έχει στα χέρια του ο μελετητής είναι η γεωμετρία του πρότυπου τροχού, η οποία θεωρείται ότι αποτελείται από ιδανικής μορφής κατατομές, και το διάγραμμα μεταβολής της αξονικής απόστασης που προκύπτει από τη συνεργασία των τροχών. Χρησιμοποιώντας, λοιπόν, ως είσοδο τις δύο αυτές ομάδες δεδομένων, στόχος είναι η ανάπτυξη μιας υπολογιστικής διαδικασίας προσδιορισμού των γεωμετρικών σφαλμάτων των κατατομών των εξεταζόμενων τροχών, που θα οδηγήσει νομοτελειακά, εφόσον η ιδανική γεωμετρία του εξεταζόμενου είναι επίσης γνωστή, στον προσδιορισμό της πραγματικής γεωμετρίας του εξεταζόμενου τροχού.

Το πρόβλημα που παρουσιάζεται κατά την ανάπτυξη μιας τέτοια διαδικασίας και έχει εμποδίσει την υλοποίησή της μέχρι σήμερα, είναι ότι δεν υπάρχει μονοσήμαντος τρόπος σύνδεσης του σύνθετου σφάλματος που παρέχει η μέθοδος διπλής κατατομής με τα επιμέρους γεωμετρικά σφάλματα που τα προκαλούν. Όπως αναφέρει και ο Munro [4], το σύνθετο σφάλμα που καταγράφεται στο διάγραμμα της αξονικής απόστασης δεν μπορεί μονοσήμαντα να αποσυντεθεί, ώστε να αποδοθούν τα επιμέρους σφάλματα στα δύο ζεύγη κατατομών που έρχονται σε επαφή. Επίσης, έχει παρατηρηθεί ότι διαφορετικές γεωμετρικές αποκλίσεις των κατατομών μπορεί να οδηγήσουν σε ταυτόσημα διαγράμματα μεταβολής της απόστασης των αξόνων. Τα χαρακτηριστικά αυτά καθιστούν αδύνατο τον προσδιορισμό των σφαλμάτων των κατατομών του εξεταζόμενου τροχού.

Μια απλούστευση που πιθανώς μπορεί να αναιρέσει το πρόβλημα του μη μονοσήμαντου τρόπου απόδοσης του σύνθετου σφάλματος στα επιμέρους ζεύγη κατατομών είναι η θεώρηση ομοιόμορφων σφαλμάτων στις κατατομές των οδόντων του εξεταζόμενου τροχού. Η απλούστευση αυτή δεν επιχειρείται εδώ για πρώτη φορά, μιας και αποτελεί μια συνήθη πρακτική για την περιγραφή σφαλμάτων σε οδοντωτούς τροχούς. Ιδιαίτερα, οι αποκλίσεις στις γεωμετρικές παραμέτρους της εξειλιγμένης, όπως είναι η γωνία πίεσης ή το βήμα στον βασικό κύκλο, παρουσιάζουν έχουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον στο χώρο των οδοντώσεων και έχουν το χαρακτηριστικό ότι απλώνονται ομοιόμορφα σε όλες τις κατατομές. Η έκφραση, λοιπόν, των σφαλμάτων των κατατομών συναρτήσεως των παραμέτρων αυτών είναι διαδεδομένη και χρήσιμη για τους μελετητές των σφαλμάτων των οδοντωτών τροχών.

4.1. Αριθμητικό μοντέλο πρόβλεψης γεωμετρικών αποκλίσεων

Το μοντέλο πρόβλεψης των σφαλμάτων του εξεταζόμενου τροχού αναπτύσσεται γύρω από την θεώρηση των ομοιόμορφων σφαλμάτων. Αναζητά να προσδιορίσει την απόκλιση των γεωμετρικών παραμέτρων που σχηματίζουν το προφίλ των κατατομών του εξεταζόμενου τροχού, χρησιμοποιώντας ως αναφορά το διάγραμμα μεταβολής της αξονικής απόστασης. Επιχειρεί, λοιπόν, να επιλύσει του αντίστροφο πρόβλημα της μεθόδου της διπλής κατατομής, το οποίο σε αντίθεση με το ευθύ πρόβλημα, κατά το οποίο δίνεται ο εξεταζόμενος τροχός με όλα τα χαρακτηριστικά του δεδομένα και ζητείται το διάγραμμα της μεταβολής της αξονικής απόστασης κατά τη συνεργασία του με τον

αντίστοιχο πρότυπο τροχό, προσπαθεί με βάση αυτό το διάγραμμα να προσδιορίσει τη γεωμετρία του εξεταζόμενου τροχού.

Η στρατηγική επίλυσης που υιοθετεί το μοντέλο για την αντιμετώπιση του αντίστροφου προβλήματος συνίσταται από τα παρακάτω κύρια σημεία:

1. Ορισμός ομάδας γεωμετρικών παραμέτρων προς εξέταση (π.χ. γωνία πίεσης εξειλιγμένης, βήμα εξειλιγμένης στον βασικό κύκλο, μετατόπιση κοπτικού εργαλείου κλπ.).
2. Επίλυση του ευθέως προβλήματος για διάφορους συνδυασμούς τιμών αυτών των παραμέτρων.
3. Σύγκριση του διαγράμματος μεταβολής της αξονικής απόστασης που παράγεται κάθε φορά με το πραγματικό.
4. Εφαρμογή αλγορίθμου για τη σύγκλιση της παραπάνω διαδικασίας.

Η παραπάνω στρατηγική δείχνει να έχει την προοπτική να αντιμετωπίσει το αντίστροφο πρόβλημα, ωστόσο έχει ένα μεγάλο μειονέκτημα. Για κάθε συνδυασμό παραμέτρων προς εξέταση θα πρέπει να επιλύεται το ευθύ πρόβλημα με τη χρήση του αριθμητικού μοντέλου προσομοίωσης που παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 2.3, για έναν μεγάλο αριθμό γωνιών περιστροφής του κινητήριου τροχού, έτσι ώστε να γίνει δυνατή η σύγκρισή του διαγράμματος μεταβολής της αξονικής απόστασης με το πραγματικό. Δεδομένου ότι αυτό πρέπει να συμβεί για κάθε συνδυασμό παραμέτρων μέχρι ο αλγόριθμος σύγκλισης να είναι σε θέση να αποφανθεί για τη βέλτιστη ομάδα παραμέτρων που ικανοποιούν το αντίστροφο πρόβλημα, το συνεπαγόμενο υπολογιστικό κόστος προκύπτει υπερβολικά μεγάλο, καθιστώντας το μοντέλο δυσλειτουργικό. Ακόμα και σε υπολογιστές με μεγάλη ισχύ ο χρόνος υπολογισμού θα ήταν αρκετά μεγάλος, αφού το ευθύ πρόβλημα που καλείται να επιλυθεί χιλιάδες φορές είναι από μόνο του σχετικά αργό.

Το πρόβλημα του υπέρμετρου υπολογιστικού κόστους, ωστόσο, είναι δυνατόν να επιλυθεί με μια παρατήρηση. Όπως έγινε κατανοητό κατά την παρουσίαση του αναλυτικού μοντέλου προσομοίωσης στο Κεφάλαιο 2.2, κάθε τύπος επαφής που είναι δυνατόν να εμφανιστεί μεταξύ δύο ζευγών κατατομών σε μια συγκεκριμένη γωνία περιστροφής του κινητήριου τροχού περιγράφεται από ένα σύστημα εξισώσεων $n \times n$, όπου ανεξάρτητα από τον τύπο της επαφής, οι άγνωστοι αυτού του συστήματος είναι οι θέσεις των σημείων επαφής (εκφρασμένες καρτεσιανές συντεταγμένες, με την γωνία εξειλιγμένης που τους αντιστοιχεί ή κάπως αλλιώς), η γωνία περιστροφής του κινούμενου τροχού και η απόσταση των αξόνων των τροχών. Επομένως, δοθείσης της γωνία περιστροφής του κινητήριου τροχού, μπορούν να υπολογιστούν όλα τα χαρακτηριστικά της επαφής και η απόσταση των αξόνων.

Κατά την επίλυση του αντίστροφου προβλήματος, αυτή η απόσταση αξόνων είναι γνωστή για κάθε γωνία περιστροφής. Επομένως, εάν οριστεί μία παράμετρος προς εξέταση, π.χ. η γωνία πίεσης της εξειλιγμένης, για την οποία γίνεται η υπόθεση πως αποτελεί τη μοναδική απόκλιση του εξεταζόμενου τροχού και η οποία ζητείται να προσδιοριστεί, τότε το σύστημα εξισώσεων που περιγράφει τον τύπο της επαφής είναι και πάλι της μορφής $n \times n$, καθώς αφαιρέθηκε ένας άγνωστος (η απόσταση των αξόνων), αλλά προστέθηκε ένας άλλος (η γωνία πίεσης), και επομένως είναι επιλύσιμο, δίνοντας την δυνατότητα υπολογισμού της άγνωστης παραμέτρου που ζητείται κάθε φορά, χρησιμοποιώντας μόνο ένα σημείο του διαγράμματος της αξονικής απόστασης κάθε φορά.

Μετά την παραπάνω διαπίστωση, επιζητείται να διερευνηθεί η περίπτωση εξέτασης περισσότερων παραμέτρων για τη διαμόρφωση των σφαλμάτων του εξεταζόμενου τροχού, χρησιμοποιώντας ένα περιορισμένο τμήμα του διαγράμματος αξονικής απόστασης και εξοικονομώντας, κατά συνέπεια, σημαντικό κομμάτι του αρχικού υπολογιστικού κόστους. Έστω ότι επιζητείται ο προσδιορισμός δύο γεωμετρικών παραμέτρων των κατατομών του εξεταζόμενου τροχού, π.χ. γωνία πίεσης και βήμα στον βασικό κύκλο. Τότε το σύστημα των εξισώσεων που περιγράφει τον τύπο της επαφής σε μία συγκεκριμένη γωνία περιστροφής του κινητήριου τροχού δεν είναι πλέον της μορφής $n \times n$, καθώς τον έναν άγνωστο που απαλείφεται με την γνώση της απόστασης των αξόνων στη γωνία αυτή, τον

αντικαθιστούν άλλοι δύο, οι ζητούμενες παράμετροι. Οι $n+1$ άγνωστοι που προκύπτουν αποτελούνται από τις συντεταγμένες των σημείων επαφής, τη γωνία περιστροφής του κινούμενου τροχού, τη γωνία πίεσης και το βήμα στον βασικό κύκλο στο παράδειγμα που εξετάζεται. Εάν τώρα επιλεγεί μία δεύτερη γωνία περιστροφής και γραφούν το σύστημα των εξισώσεων που περιγράφει τον τύπο της επαφής που προκύπτει εκεί, τότε ομοίως με προηγουμένως θα προκύψει ένα σύστημα $n'+1$ αγνώστων και n' εξισώσεων. Οι άγνωστοι αυτοί θα είναι οι νέες θέσεις των σημείων περιστροφής, η νέα γωνία περιστροφής του κινούμενου, αλλά η ίδια γωνία πίεσης και το ίδιο βήμα στον βασικό κύκλο. Συνδυάζοντας, λοιπόν τα συστήματα των εξισώσεων στις δύο γωνίες περιστροφής προκύπτει ένα επιλύσιμο σύστημα $(n+n') \times (n+n')$.

Το συμπέρασμα από την παραπάνω ανάλυση είναι ότι απαιτούνται τόσα σημεία του διαγράμματος μεταβολής της απόστασης των αξόνων για τον υπολογισμό των γεωμετρικών αποκλίσεων του εξεταζόμενου τροχού, όσες και οι γεωμετρικές παράμετροι που εξετάζονται. Η διαπίστωση αυτή μειώνει δραματικά το υπολογιστικό κόστος της διαδικασίας και επιτρέπει την περαιτέρω διερεύνησή της για τον τελικό προσδιορισμό των επιθυμητών γεωμετρικών αποκλίσεων.

Αν και η χρήση των συστημάτων των εξισώσεων για την κατανόηση του παραπάνω συμπεράσματος ήταν χρήσιμη, εντούτοις δεν μπορεί να επεκταθεί και στην επίλυση του αντίστροφου προβλήματος αυτή καθαυτή, διότι η επίλυσή τους δεν αρκεί για τον προσδιορισμό των πραγματικών τιμών των ζητούμενων γεωμετρικών παραμέτρων. Όπως αποδείχθηκε στο Κεφάλαιο 2.2, για κάθε γωνία περιστροφής υπάρχουν 81 υποψήφια συστήματα εξισώσεων που αντιστοιχούν σε κάθε τύπο επαφής που μπορεί να προκύψει. Επομένως θα πρέπει να επιλυθούν όλα αυτά τα συστήματα ξεχωριστά και να οριστεί κάποιο κριτήριο που θα επιλέγει κάθε φορά ποια από τις 81 τιμές τις παραμέτρων που υπολογίστηκαν αντιστοιχεί στην πραγματική. Επίσης, εάν οι άγνωστοι παράμετροι είναι δύο, τότε οι πιθανοί συνδυασμοί των συστημάτων των εξισώσεων που πρέπει να γίνουν για τον προσδιορισμό τους είναι $81 \times 81 = 6531$. Γενικότερα, για τον προσδιορισμό n αγνώστων απαιτείται η επίλυση 81^n διαφορετικών μη γραμμικών συστημάτων έως και 12 μεταβλητών. Δεδομένου ότι κάτι τέτοιο θα εκτόξευε και πάλι το υπολογιστικό κόστος που με αυτή τη διαδικασία επιχειρείται να μειωθεί και ότι απόλυτα ξεκάθαρο κριτήριο για την επιλογή των τιμών των παραμέτρων από το σύνολο των πιθανών λύσεων δεν υπάρχει, η αναλυτική αντιμετώπιση του αντίστροφου προβλήματος κρίνεται ότι πρέπει να εγκαταλειφθεί.

Αντίθετα, το μοντέλο εξακολουθεί να αναπτύσσεται γύρω από την στρατηγική που παρουσιάστηκε παραπάνω, με τη διαφορά πλέον πως η καταλληλότητα των επιλεγθέντων κάθε φορά παραμέτρων δεν ελέγχεται από τη σύγκριση όλου του διαγράμματος της αξονικής απόστασης αλλά ορισμένων σημείων που βρίσκονται σε αυτό. Το επόμενο βήμα στην κατάσταση του μοντέλου είναι η εφαρμογή ενός αλγορίθμου που θα επιλέγει κάθε φορά τις τιμές της ομάδας των παραμέτρων που κάθε φορά εξετάζεται, με γνώμονα τη σύγκλιση της διαδικασίας για την εύρεση των πραγματικών τους τιμών. Για να γίνει, όμως, αυτό ο αλγόριθμος σύγκλισης θα πρέπει να εφοδιαστεί με μία κατάλληλη αντικειμενική συνάρτηση, την οποία θα προσπαθήσει να ελαχιστοποιήσει με την μεταβολή των τιμών των γεωμετρικών παραμέτρων. Οι γεωμετρικές παράμετροι που επιλέγονται κάθε φορά θα πρέπει να οδηγούν σε γεωμετρία του εξεταζόμενου τροχού τέτοια, έτσι ώστε η απόσταση των αξόνων κατά τη συνεργασία του με τον πρότυπο τροχό στις εξεταζόμενες γωνίες περιστροφής να είναι ίδια με την πραγματική. Κατά συνέπεια, η αντικειμενική συνάρτηση του αλγορίθμου σύγκλισης θα είναι πλέον βαθμωτή, αλλά διανυσματική.

Η παραπάνω διαπίστωση οδηγεί στην ανάγκη υλοποίησης ενός πολυκριτηριακού αλγορίθμου βελτιστοποίησης για την σύγκλιση του μοντέλου στις πραγματικές τιμές των γεωμετρικών παραμέτρων. Σε ένα πρόβλημα πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης ζητείται η εύρεση ενός διανύσματος $\mathbf{x}^* = [x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*]^T$ το οποίο να βελτιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση

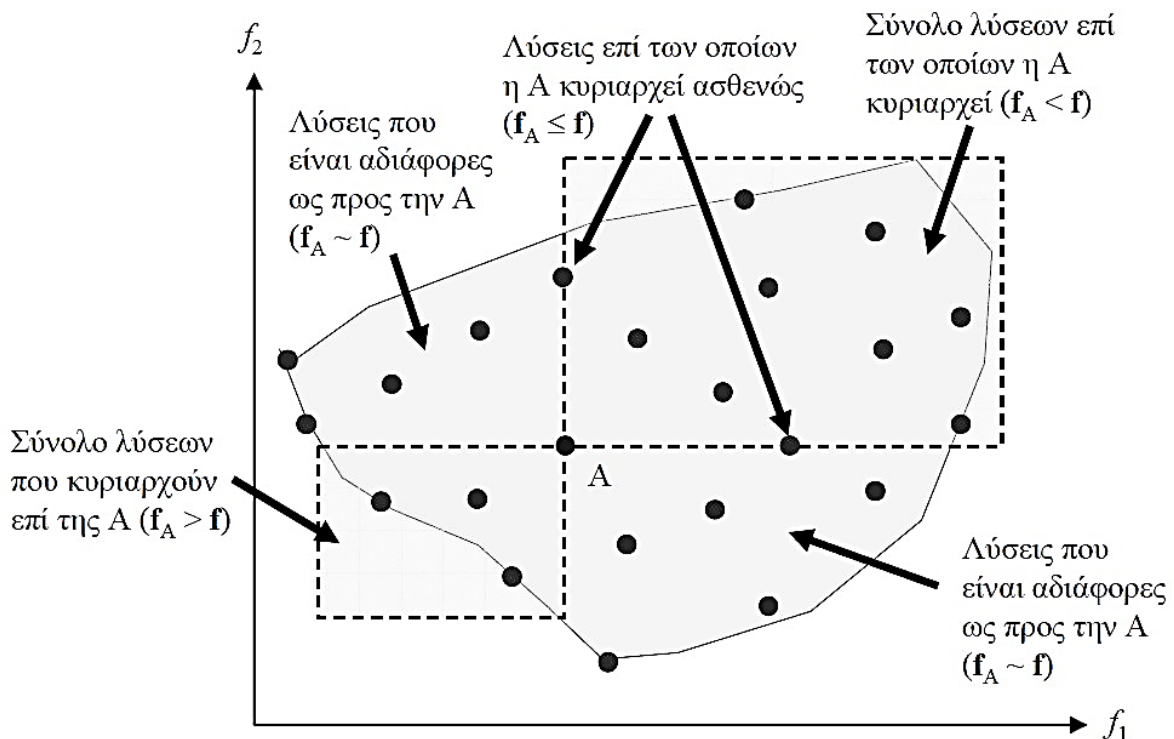
$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})]^T \quad (4.1)$$

όπου $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ το διάνυσμα των μεταβλητών ελέγχου και $f_i(\mathbf{x})$ τα κριτήρια λήψης αποφάσεων του προβλήματος. Το πρόβλημα που εγείρει η διανυσματική μορφή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι αδυναμία άμεσης αντικειμενικής αξιολόγησης δύο εφικτών λύσεων $\mathbf{f}(\mathbf{x}_1)$ και $\mathbf{f}(\mathbf{x}_2)$ του πεδίου ορισμού, κατά τον τρόπο που γίνεται σε ένα βαθμωτό πρόβλημα βελτιστοποίησης στο οποίο το πεδίο τιμών της αντικειμενικής συνάρτησης είναι πλήρως διατεταγμένο. Χρειάζεται, λοιπόν, η εισαγωγή μιας διαδικασίας αντικειμενικής αξιολόγησης των διανυσματικών λύσεων, έτσι ώστε να προκύψει η λύση αυτή που ικανοποιεί κατά τον καλύτερο τρόπο τα αντικρουόμενα κριτήρια που περιέχονται στην έκφραση της αντικειμενικής συνάρτησης [25].

Για την περίπτωση των διανυσματικών πεδίων τιμών, ο Pareto (1986) εισήγαγε την έννοια της μερικής διάταξης (*partial ordering*), γενικεύοντας την έννοια των τελεστών σύγκρισης σε διανύσματα ως εξής:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{b}, \text{ αν } a_i = b_i \forall i \\ \mathbf{a} < \mathbf{b}, \text{ αν } a_i < b_i \forall i \\ \mathbf{a} \leq \mathbf{b}, \text{ αν } a_i \leq b_i \forall i \text{ και } a_i &= b_i \text{ για ένα τουλάχιστον } i \end{aligned} \tag{4.2}$$

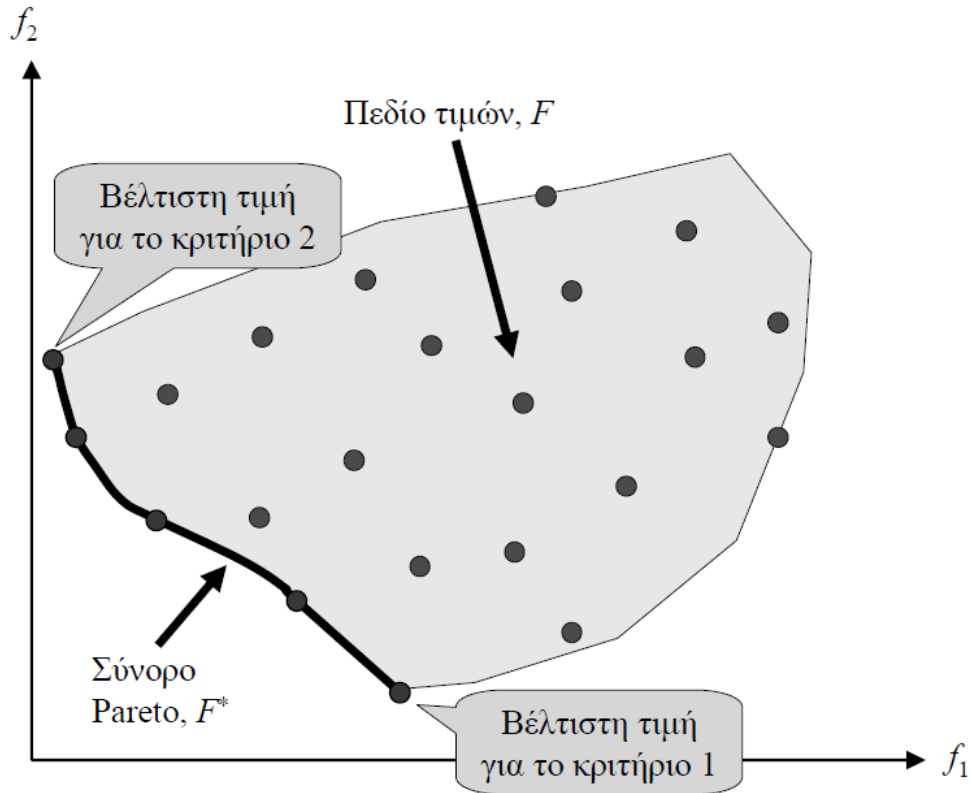
Με βάση την παραπάνω διάταξη στο διανυσματικό πεδίο τιμών εισάγεται επιπλέον και η έννοια της κυριαρχίας (*Dominance*). Σε ένα πολυκριτηριακό πρόβλημα βελτιστοποίησης, αν για δύο εφικτές λύσεις \mathbf{x}_1 και \mathbf{x}_2 ισχύει $\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) < \mathbf{f}(\mathbf{x}_2)$, η λύση 1 *κυριαρχεί ισχυρώς* έναντι της λύσης 2, ενώ αν ισχύει $\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) \leq \mathbf{f}(\mathbf{x}_2)$ η λύση 1 λέγεται ότι *κυριαρχεί ασθενώς* έναντι της λύσης 2. Στην περίπτωση που ισχύει $\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) \leq \mathbf{f}(\mathbf{x}_2)$ για ορισμένα κριτήρια και $\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) > \mathbf{f}(\mathbf{x}_2)$ για τα υπόλοιπα, τότε οι επιλογές $\mathbf{f}(\mathbf{x}_1)$ και $\mathbf{f}(\mathbf{x}_2)$ θεωρούνται αδιάφορες (*indifferent*) μεταξύ τους, σχέση που συμβολίζεται ως $\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) \sim \mathbf{f}(\mathbf{x}_2)$. Η γεωμετρική ερμηνεία της κυριαρχίας για ένα δισδιάστατο πεδίο τιμών της αντικειμενικής συνάρτησης παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.1.



Σχήμα 4.1 Γεωμετρική ερμηνεία της κυριαρχίας σε ένα πολυκριτηριακό πρόβλημα βελτιστοποίησης [25]

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό για την κυριαρχία, ένα εφικτό σημείο \mathbf{x}^* που ανήκει στο πεδίο ορισμού της αντικειμενικής συνάρτησης είναι βέλτιστο αν και μόνο αν δεν κυριαρχείται από κανένα

άλλο σημείο του εφικτού χώρου, δηλαδή δεν υπάρχει άλλο εφικτό σημείο \mathbf{x} του πεδίου ορισμού τέτοιο ώστε $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) \leq \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Με άλλα λόγια, ένα εφικτό σημείο \mathbf{x}^* είναι βέλτιστο εφόσον δεν υπάρχει εφικτό διάνυσμα \mathbf{x} που να μπορεί να βελτιώσει κάποιο κριτήριο, χωρίς να χειροτερέψει τουλάχιστον ένα άλλο. Ο παραπάνω ορισμός οδηγεί σε ένα σύνολο εφικτών λύσεων \mathbf{x}^* που καλούνται *Pareto βέλτιστες* ή *μη κατώτερες* (*non-inferior*) ή *μη κυριαρχούμενες* (*non-dominated*). Το σύνολο αυτό των λύσεων ονομάζεται *σύνολο Pareto* (*Pareto set*), ενώ η απεικόνισή του στο πεδίο τιμών της αντικειμενικής συνάρτησης ορίζει ένα σύνολο που καλείται *σύνολο Pareto* (*Pareto front*) ή *καμπύλη αντιστάθμισης* (*trade-off curve*). Το σύνολο Pareto απεικονίζεται για ένα δισδιάστατο πρόβλημα βελτιστοποίησης στο Σχήμα 4.2.



Σχήμα 4.2 Γεωμετρική απεικόνιση του συνόρου Pareto (Pareto front) [25]

Στην βιβλιογραφία υπάρχει ένας μεγάλος αριθμός μεθόδων για επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης πολλαπλών κριτηρίων [23]. Οι μέθοδοι αυτοί χωρίζονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες: σε αυτές που χρησιμοποιούν κλασικούς αλγορίθμους σύγκλισης και αυτές που εφαρμόζουν γενετικούς αλγορίθμους. Ο πιο γνωστός και απλός αλγόριθμος πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης είναι αυτός που εφαρμόζει τη μέθοδο των σταθμισμένων βαρών (*Weighted Sum Method*). Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή η διανυσματική αντικειμενική συνάρτηση αντιστοιχίζεται σε μία βαθμωτή που εκφράζει τον γραμμικό συνδυασμό των επιμέρους κριτηρίων της, με χρήση προεπιλεγμένων συντελεστών βάρους που εκφράζουν τη σχετική σημασία του κάθε κριτηρίου όπως φαίνεται στην παρακάτω σχέση

$$\min f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m w_i f_i(\mathbf{x}) \quad (4.3)$$

έτσι ώστε

$$\sum_{i=1}^m w_i = 1 \quad (4.4)$$

Μια επέκταση της παραπάνω μεθόδου είναι η μέθοδος προγραμματισμού στόχων (*Goal programming* ή *Weighted metric sum*). Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή ορίζονται τιμές στόχοι T_i για κάθε κριτήριο i , οι οποίοι εισάγονται στο πρόβλημα υπό τη μορφή συναρτήσεων ποινής. Η βαθμωτή συνάρτηση που διαμορφώνεται στοχεύει στην ελαχιστοποίηση της τιμής κάθε κριτηρίου από τον αντίστοιχο στόχο του και εκφράζεται από την παρακάτω σχέση:

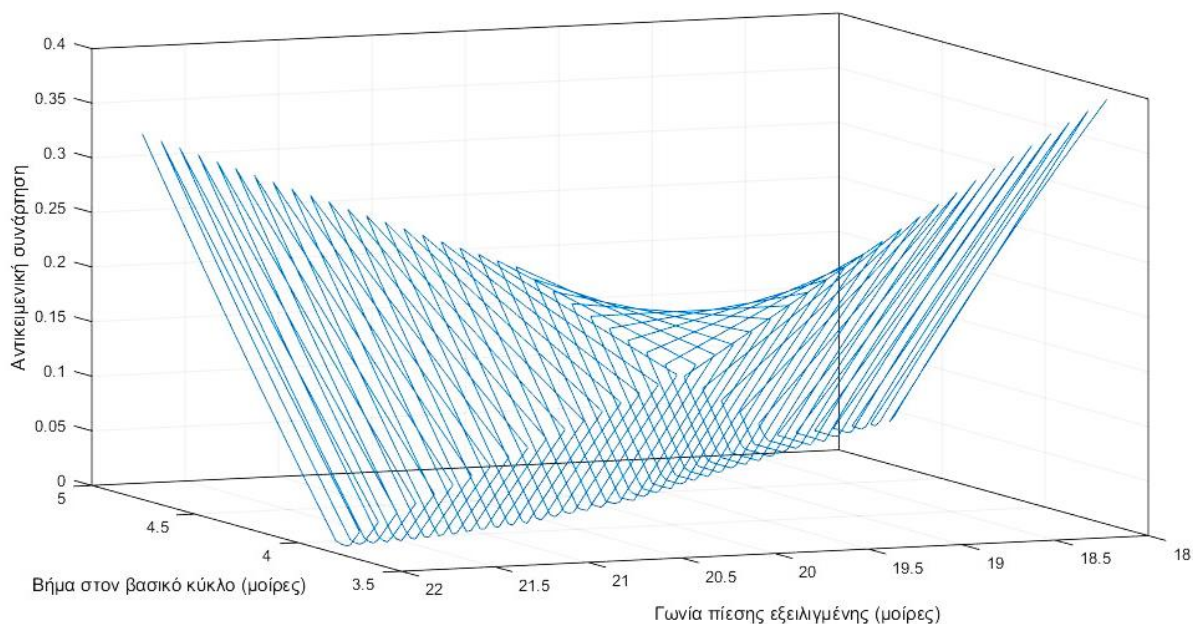
$$\min f(\mathbf{x}) = \left(\sum_{i=1}^m w_i |f_i(\mathbf{x}) - T_i|^p \right)^{1/p} \quad (4.5)$$

όπου p παράμετρος κλίμακας (για $p = 2$ και $w_i = 1$, η αντικειμενική συνάρτηση εκφράζει την ευκλείδεια απόσταση των κριτηρίων από τις τιμές-στόχους).

Μία τρίτη κλασική μέθοδος πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης είναι η μέθοδος ε -περιορισμών (ε -Constraint). Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, βελτιστοποιείται ένα πρωτεύων κριτήριο της αντικειμενικής συνάρτησης, θεωρώντας τα υπόλοιπα ως μαθηματικούς περιορισμούς που φράσσονται από επιτρεπόμενα όρια ε_i . Διαμορφώνεται, έτσι ένα βαθμωτό πρόβλημα βελτιστοποίησης με $m-1$ επιπλέον περιορισμούς της μορφής:

$$f_i(\mathbf{x}) \leq \varepsilon_i \quad (4.6)$$

Όπως φάνηκε από τα παραπάνω χαρακτηριστικά παραδείγματα κλασικών πολυκριτηριακών αλγορίθμων βελτιστοποίησης, αυτό που επιχειρούν να πετύχουν, με διαφορετικό τρόπο ο καθένας, είναι η αναγωγή το πολυκριτηριακού προβλήματος βελτιστοποίησης σε ένα βαθμωτό πρόβλημα, ώστε να μπορούν να εφαρμοστούν στη συνέχεια οι γνωστοί αλγόριθμοι βελτιστοποίησης για βαθμωτή αντικειμενική συνάρτηση (*Steepest descent*, *Powell* κλπ.) [24]. Το πρόβλημα με την εφαρμογή τέτοιων μεθόδων στην εξεταζόμενη εφαρμογή προκύπτει από το γεγονός πως η αντικειμενική συνάρτηση παρουσιάζει πολλά τοπικά ελάχιστα στο πεδίο τιμών της. Στο Σχήμα 4.3 φαίνονται οι τιμές μιας αντικειμενικής συνάρτησης που έχει κατασκευαστεί σύμφωνα με τη μέθοδο σταθμισμένων βαρών και το πεδίο ορισμού της είναι δύο διαστάσεων. Ο μεγάλος αριθμός τοπικών ελαχίστων καθιστά τις παραπάνω μεθόδους βελτιστοποίησης εξαιρετικά ευαίσθητες στο τυχαίο σημείο του πεδίου ορισμού που παρέχεται από τον χρήστη για την εκκίνηση κάθε φορά της μεθόδου. Επειδή η ακριβής γνώση της «γειτονιάς» της βέλτιστης λύσης δεν είναι στην γενική περίπτωση γνωστή, δεν είναι δυνατή η εφαρμογή των κλασικών μεθόδων πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης για την αντιμετώπιση του αντίστροφου προβλήματος της μεθόδου διπλής κατατομής.

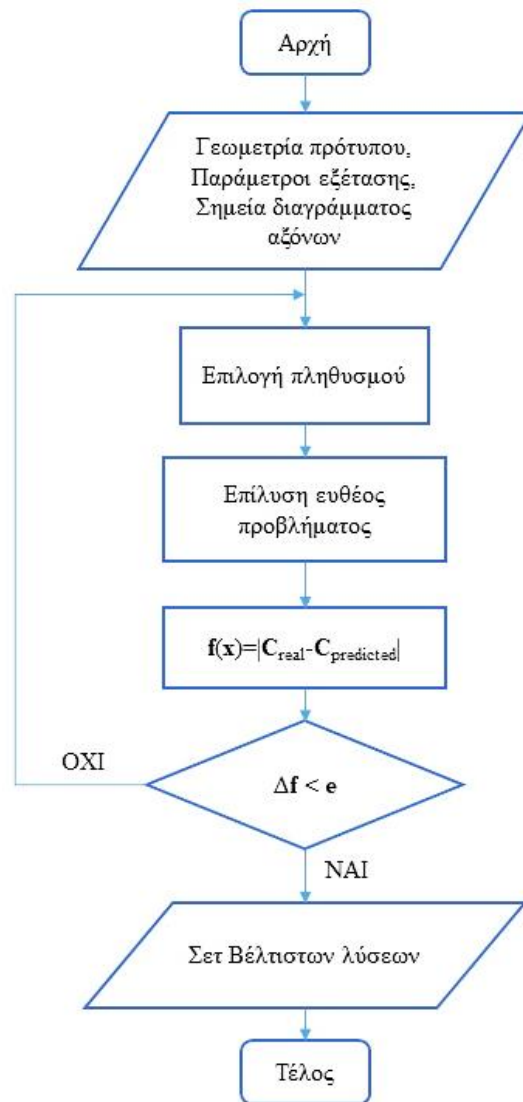


Σχήμα 4.3 Τοπικά ελάχιστα στην αντικειμενική συνάρτηση κλασικού πολυκριτηριακού αλγορίθμου βελτιστοποίησης

Η δεύτερη μεγάλη κατηγορία μεθόδων πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης περιλαμβάνει τους εξελικτικούς αλγόριθμους. Οι εξελικτικοί αλγόριθμοι βελτιστοποίησης διανυσματικών αντικειμενικών συναρτήσεων διατηρούν τις υπολογιστικές διαδικασίες που αναφέρονται στη γέννηση του αρχικού πληθυσμού, την κωδικοποίηση των μεταβλητών και την παραγωγή νέων λύσεων (διασταύρωση, μετάλλαξη), ενώ τροποποιείται η διαδικασία της επιλογής, έτσι ώστε να ελέγχεται για κάθε σημείο η κυριαρχία του κατά Pareto έναντι των ανταγωνιστικών του, έτσι ώστε η μέθοδος να συγκλίνει γενιά με τη γενιά όλο και πιο κοντά στο σύνορο Pareto.

Ένας από τους πλέον γνωστούς και ευρέως χρησιμοποιούμενους εξελικτικούς αλγορίθμους πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης είναι ο NSGA-II. Ο ελιτιστικός αυτός γενετικός αλγόριθμος βελτιστοποίησης ευνοεί τα άτομα του πληθυσμού με την καλύτερη κατάταξη, έτσι όπως αυτή ορίζεται χρησιμοποιώντας την έννοια της κυριαρχίας κατά Pareto. Ταυτόχρονα, όμως, ευνοεί και τα άτομα που βοηθούν στην αύξηση της ποικιλότητας του πληθυσμού ακόμα και αν η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης στα σημεία αυτά δεν ανήκει στην ομάδα των βέλτιστων του πληθυσμού. Με αυτόν τον τρόπο ο αλγόριθμος αποφεύγει τον κίνδυνο παγίδευσης της διαδικασίας σύγκλισης σε κάποιο τοπικό ελάχιστο του πεδίου ορισμού.

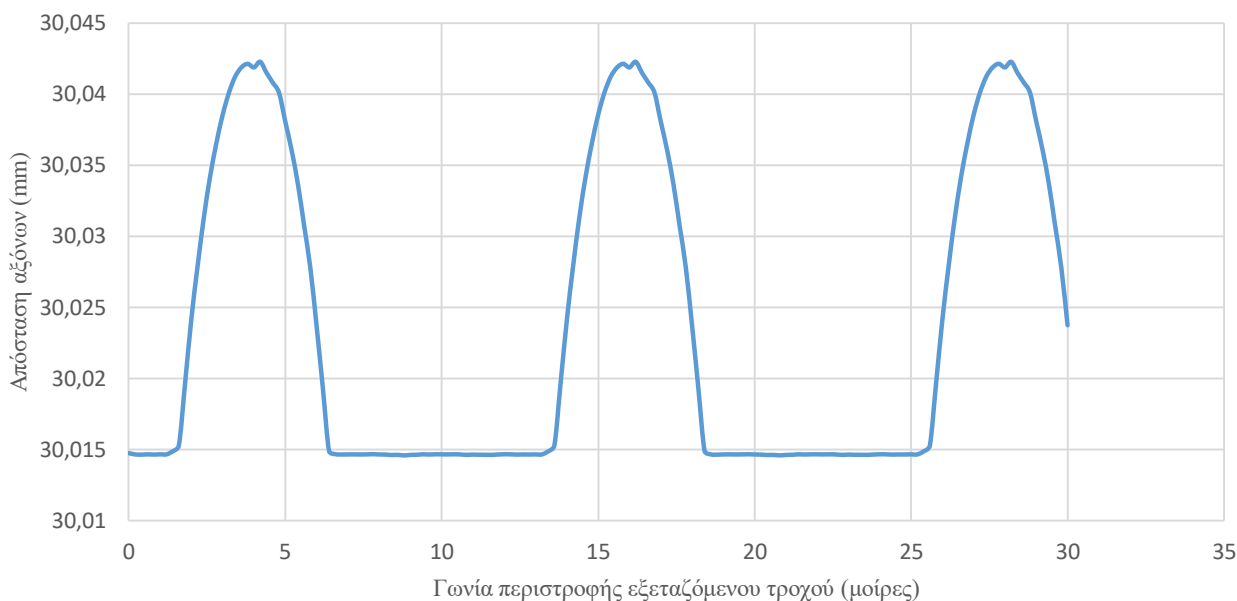
Το υπολογιστικό πακέτο της *Matlab* διαθέτει ενσωματωμένο τον *gamultiobj*, έναν πολυκριτηριακό εξελικτικό αλγόριθμο που αποτελεί μια παραλλαγή του αλγορίθμου NSGA-II [26]. Ο αλγόριθμος αυτός έχει δοκιμαστεί σε παρόμοιες εφαρμογές βελτιστοποίησης στο παρελθόν και τα αποτελέσματα της χρήσης του κρίθηκαν επιτυχημένα. Όπως κάθε γενετικός αλγόριθμος, οι παράμετροι που αφορούν τον πληθυσμό και τον μηχανισμό επιλογής των ατόμων που θα στελεχώσουν τον πληθυσμό της νέας γενιάς παίζουν σημαντικό ρόλο στη σύγκλιση της μεθόδου βελτιστοποίησης και έχουν αποτελέσει αντικείμενο έρευνας από τους μελετητές [27]. Ο προσδιορισμός των κατάλληλων τιμών αυτών των παραμέτρων του αλγορίθμου για το εξεταζόμενο πρόβλημα είναι απαραίτητος ώστε ο *gamultiobj* να μπορέσει να ενσωματωθεί στο μοντέλο πρόβλεψης των γεωμετρικών αποκλίσεων που αναπτύσσεται στο παρών Κεφάλαιο. Το συνολικό μοντέλο του αλγορίθμου πρόβλεψης με τον αλγόριθμο πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης φαίνεται στο διάγραμμα ροής του Σχήματος 4.4.



Σχήμα 4.4 Διάγραμμα ροής μοντέλου πρόβλεψης γεωμετρικών αποκλίσεων με τη μέθοδο διπλής κατατομής και χρήσης εξελικτικού αλγορίθμου

4.2. Αποτελέσματα μοντέλου πρόβλεψης

Για την εξέταση του μοντέλου που αναπτύχθηκε παραπάνω καταστρώνεται ένας αριθμός εικονικών πειραμάτων με τη βοήθεια του αριθμητικού μοντέλου προσομοίωσης της διπλής κατατομής, έτσι ώστε να διαπιστωθεί η ικανότητα της μεθόδου να προβλέπει με ακρίβεια τις γεωμετρικές αποκλίσεις του εξεταζόμενου τροχού. Για τα πειράματα αυτά θεωρούνται τροχοί 30 οδόντων, module 1 mm, με γωνία πίεσης και διάκενο μεταξύ οδόντων στον βασικό κύκλο 20° και 4.292° αντίστοιχα, όσον αφορά τον πρότυπο τροχό, ενώ για τον εξεταζόμενο οι ίδιες παράμετροι έχουν τις τιμές 21° και 4.012°. Το διάγραμμα της απόστασης των αξόνων που προκύπτει κατά τη συνεργασία των δύο αυτών με τη μέθοδο διπλής κατατομής παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.5. Οι δύο παράμετροι που επιλέχθηκαν να είναι διαφορετικές για τους δύο τροχούς αποτελούν τις κύριες συνιστώσες της εξειλιγμένης καμπύλης των κατατομών και επηρεάζουν περισσότερο από οποιαδήποτε άλλη τη μορφή τους. Το μοντέλο προσομοίωσης της μεθόδου διπλής κατατομής θα προσπαθήσει, λοιπόν, να προσδιορίσει τις τιμές αυτών των παραμέτρων χρησιμοποιώντας κάποια από τα σημεία του διαγράμματος απόστασης των αξόνων που παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.5. Από το διάγραμμα της απόστασης των αξόνων επιλέγονται δύο σημεία, όσες και οι παράμετροι που πρόκειται να εξεταστούν. Τα σημεία αυτά επιλέγονται τυχαία και παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.1.



Σχήμα 4.5 Διάγραμμα αξονικής απόστασης που χρησιμοποιείται ως είσοδος για το μοντέλο επίλυσης του αντίστροφου προβλήματος

Γωνία περιστροφής (°)	Απόσταση αξόνων (mm)
3	30.0385
10	30.0147

Πίνακας 4.1 Επιλογή σημείων του διαγράμματος απόστασης αξόνων

Πριν εισαχθούν τα σημεία του Πίνακα 4.1 στο μοντέλο πρόβλεψης και διαπιστωθεί η απόδοσή του, ορίζονται κάποιιοι περιορισμοί στο πεδίο ορισμού της αντικειμενικής συνάρτησης, ώστε να επιταχυνθεί η διαδικασία σύγκλισης του αλγορίθμου βελτιστοποίησης. Έτσι η πραγματική τιμή της γωνίας πίεσης αναζητείται στο διάστημα $[18^\circ, 22^\circ]$, ενώ του διακένου μεταξύ των οδόντων στον βασικό κύκλο στο διάστημα $[3.7^\circ, 4.7^\circ]$.

Τα αποτελέσματα του μοντέλου πρόβλεψης παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.2. Εκ κατασκευής ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης δεν αναζητά μία μοναδική βέλτιστη λύση του προβλήματος, αλλά πολλά σημεία του χώρου των δυνατών λύσεων που βρίσκονται στο σύνορο Pareto, όπως αναλύθηκε παραπάνω. Τα 18 τέτοια σημεία που υπολόγισε το μοντέλο παρουσιάζονται παρακάτω στον Πίνακα 4.2. Για μία τελική εκτίμηση των γεωμετρικών παραμέτρων υπολογίζεται ο μέσος όρος των τιμών της κάθε παραμέτρου και συγκρίνεται με την πραγματική. Όπως γίνεται φανερό, το μοντέλο καταφέρνει να προσδιορίσει με μεγάλη ακρίβεια τις πραγματικές τιμές των άγνωστων γεωμετρικών παραμέτρων της εξειλιγμένης των κατατομών του εξεταζόμενου τροχού.

πραγματική τιμή των παραμέτρων οδηγούν σε τάξεων μεγέθους μεγαλύτερη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης από εκείνη των ακριβέστερων λύσεων. Παρόλα αυτά, υπάρχει μια πιο ακριβής εκτίμηση στο πεδίο των λύσεων από την τελική, που απορρίπτεται με αντικειμενική συνάρτηση $8,05E-06$. Το γεγονός αυτό αποδίδεται στους αλγορίθμους σύγκλισης και στο επιτρεπόμενο σφάλμα σε κάθε περίπτωση. Μικρότερο επιτρεπόμενο σφάλμα θα οδηγήσει σε μεγαλύτερη ακρίβεια εκτίμησης και αναγκαστικά σε μεγαλύτερο υπολογιστικό κόστος. Το επιτρεπόμενο σφάλμα στην επίλυση του ευθέος προβλήματος για τα παραδείγματα που παρουσιάστηκαν ανέρχεται στα $0.3\mu\text{m}$ και δεν συνίσταται να ξεπεράσει τα $0.5\mu\text{m}$, διότι είναι πιθανό λόγω ανακριβούς επίλυσης του ευθέος προβλήματος η μέθοδος να συγκλίνει σε λανθασμένα αποτελέσματα.

Τέλος, αναφορικά με τα χαρακτηριστικά σύγκλισης του μοντέλου, ο εξελικτικός αλγόριθμος βελτιστοποίησης χρειάζεται 130-140 γενιές για την σύγκλισή του, με έναν πληθυσμό 50 ατόμων σε κάθε γενιά. Αυτό συνεπάγεται τον υπολογισμό 7.000 τιμών της αντικειμενικής συνάρτησης, και καθώς αυτή υπολογίζεται για δύο γωνίες περιστροφής, απαιτεί 14.000 φορές την επίλυση του ευθέος προβλήματος. Σε αυτό το σημείο φαίνεται πια καθαρά και η αξία της μείωσης του υπολογιστικού κόστους της προσομοίωσης της μεθόδου διπλής κατατομής. Όλες οι άλλες παράμετροι του αλγορίθμου *gamultiobj* έμειναν στις default τιμές τους.

	Γωνία Πίεσης	Βήμα στον r_g	Αντικειμενική Συνάρτηση
	20,990	4,015	7,47E-06
	20,990	4,015	7,51E-06
	20,990	4,015	7,52E-06
	20,990	4,015	7,58E-06
	20,990	4,015	7,67E-06
	20,990	4,015	7,83E-06
	20,990	4,015	7,91E-06
	20,990	4,015	7,96E-06
	20,990	4,015	7,96E-06
	20,990	4,015	7,99E-06
	20,990	4,015	7,99E-06
	20,996	4,013	8,05E-05
	20,996	4,013	8,05E-05
	20,974	4,017	3,62E-04
	20,974	4,017	3,62E-04
	20,856	4,039	1,68E-03
	20,856	4,039	1,68E-03
	20,856	4,039	1,68E-03
	20,966	4,019	
Μέσος Όρος	20,966	4,019	
Πραγματική τιμή	21	4,012	
Σφάλμα μέσου όρου	-0,160%	0,172%	
Σφάλμα μοναδικής βέλτιστης λύσης	-0,049%	0,076%	

Πίνακας 4.3 Αποτελέσματα μοντέλου πρόβλεψης για διαφορετικούς αλγορίθμους σύγκλισης ευθέος και αντίστροφου προβλήματος

4.3. Σφάλματα στο διάγραμμα αξονικής μετατόπισης

Στις προηγούμενες ενότητες παρουσιάστηκε ένα ολοκληρωμένο μοντέλο πρόβλεψης των γεωμετρικών παραμέτρων ενός τροχού από τα αποτελέσματα της συνεργασίας του με έναν αντίστοιχο πρότυπο με τη μέθοδο της διπλής κατατομής. Τα αποτελέσματα από την διεξαγωγή ενός εικονικού πειράματος ήταν επιτυχή και απέδειξαν την ικανότητα το μοντέλου να επιλύει το αντίστροφο πρόβλημα της μεθόδου διπλής κατατομής, χρησιμοποιώντας το διάγραμμα της απόστασης των αξόνων που προκύπτει από αυτήν. Στο πείραμα αυτό χρησιμοποιήθηκε το διάγραμμα της αξονικής απόστασης έτσι όπως αυτό προέκυψε από το αριθμητικό μοντέλο προσομοίωσης της μεθόδου διπλής κατατομής και οποίο αποτελεί μια πολύ ακριβή εκτίμηση του πραγματικού διαγράμματος που θα έδινε η πρακτική εφαρμογή της μεθόδου. Το ερώτημα που εγείρεται είναι αν το μοντέλο πρόβλεψης μπορεί να είναι λειτουργικό ακόμα και στην περίπτωση που το διάγραμμα αξονικής απόστασης δεν εξέφραζε με μεγάλη ακρίβεια τι γίνεται στην πραγματικότητα κατά τη συνεργασία των δύο τροχών αλλά περιείχε σφάλματα, όπως κατά πάσα πιθανότητα θα συνέβαινε σε μία πρακτική εφαρμογή.

Για να απαντηθεί το παραπάνω ερώτημα, επαναλαμβάνεται η διαδικασία προσδιορισμού των γεωμετρικών παραμέτρων όπως έγινε στην προηγούμενη ενότητα, με τη διαφορά ότι στις τιμές της αξονικής απόστασης για την γωνίες περιστροφής που δίνονται στον Πίνακα 4.1 προστίθεται ή αφαιρείται μία τιμή σφάλματος. Τα αποτελέσματα της εκτέλεσης του μοντέλου για διάφορα επίπεδα σφάλματος παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.4. Από τα αποτελέσματα αυτά γίνεται σαφές πως ακόμα και για μικρά επίπεδα σφάλματος το μοντέλο αποτυγχάνει να συγκλίνει στην πραγματική λύση του αντίστροφου προβλήματος.

Μέγιστο επίπεδο σφάλματος	Γεωμετρικές παράμετροι		Σφάλμα εκτίμησης	
	Γωνία πίεσης	Βήμα στον r_g	Γωνία πίεσης	Βήμα στον r_g
Πραγματικές τιμές	21	4,012	-	-
$\pm 0.1 \mu\text{m}$	20,999	4,013	-0,005%	0,025%
$\pm 0.6 \mu\text{m}$	20,476	4,141	-2,496%	3,211%
$\pm 6 \mu\text{m}$	21,519	3,893	2,472%	-2,971%

Πίνακας 4.4 Αποτελέσματα μοντέλου πρόβλεψης με σφάλματα στο διάγραμμα αξονικής απόστασης

Η αδυναμία ακριβούς εκτίμησης των γεωμετρικών μοντέλων στην περίπτωση της παρουσίας σφαλμάτων, εξηγείται από το γεγονός πως μιας και στις ίδιες γωνίες περιστροφής προκύπτουν άλλες αποστάσεις αξόνων, τότε ένα άλλο σύνολο παραμέτρων μπορεί να οδηγήσει σε μια γεωμετρία τροχού και ένα διάγραμμα απόστασης αξόνων που να διέρχεται από τα σημεία αυτά, με αποτέλεσμα η μέθοδος να συγκλίνει ορθά στο σετ παραμέτρων αυτό. Έτσι, η ανάλυση που έγινε παραπάνω για το πόσα σημεία χρειάζονται για την επίλυση του αντίστροφου προβλήματος δεν έχει άμεση εφαρμογή εδώ, καθώς μπορεί να εφαρμοστεί μόνο στην ιδανική περίπτωση να υπάρχει διαθέσιμο το ακριβές διάγραμμα της μεταβολής της απόστασης των αξόνων.

Ως λύση του προβλήματος που περιγράφηκε προηγουμένως προτείνεται η εξέταση ενός αριθμού σημείων του διαγράμματος αξονικής απόστασης που είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό των παραμέτρων. Με αυτόν τον τρόπο μειώνεται η πιθανότητα προσαρμογής των σημείων αυτών σε ένα διάγραμμα αξονικής απόστασης διαφορετικών παραμέτρων από το πραγματικό. Οι δοκιμές επαναλήφθηκαν και τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.5. Όπως γίνεται φανερό, όχι μόνο τα αποτελέσματα δεν είναι τα επιθυμητά, αλλά ακόμα και για όμοιες ακριβώς εκτελέσεις του αλγορίθμου εκείνος συγκλίνει σε διαφορετικές εκτιμήσεις για τις γεωμετρικές παραμέτρους.

Αριθμός σημείων	Μέγιστο επίπεδο σφάλματος	Γεωμετρικές παράμετροι		Σφάλμα εκτίμησης	
		Γωνία πίεσης	Βήμα στον r_g	Γωνία πίεσης	Βήμα στον r_g
-	Πραγματικές τιμές	21	4,012	-	-
3	$\pm 2 \mu\text{m}$	20,938	4,021	-0,295%	0,215%
3	$\pm 6 \mu\text{m}$	20,774	4,040	-1,077%	0,697%
3	$\pm 6 \mu\text{m}$ (2)	21,290	3,941	1,380%	-1,784%
4	$\pm 6 \mu\text{m}$	21,285	3,942	1,358%	-1,767%
4	$\pm 6 \mu\text{m}$ (2)	21,594	3,879	2,829%	-3,318%
5	$\pm 6 \mu\text{m}$	20,076	4,239	-4,401%	5,640%

Πίνακας 4.5 Αποτελέσματα μοντέλου πρόβλεψης με σφάλματα για περισσότερα σημεία στο διάγραμμα αξονικής απόστασης

Από τα αποτελέσματα του Πίνακα 4.5 εγείρονται δύο προβλήματα. Πρώτον, γιατί ακόμα και με την αύξηση των χρησιμοποιούμενων σημείων η διαδικασία συνεχίζει να συγκλίνει σε λανθασμένες ομάδες παραμέτρων. Δεύτερον, γιατί για δύο ίδιες εισόδους ο αλγόριθμος αποδίδει διαφορετικές εκτιμήσεις των παραμέτρων. Οι απαντήσεις σε αυτά τα ερωτήματα βρίσκουν απάντηση στον τρόπο λειτουργίας του εξελικτικού αλγορίθμου *gamultiobj* και στην επιλογή των παραμέτρων του.

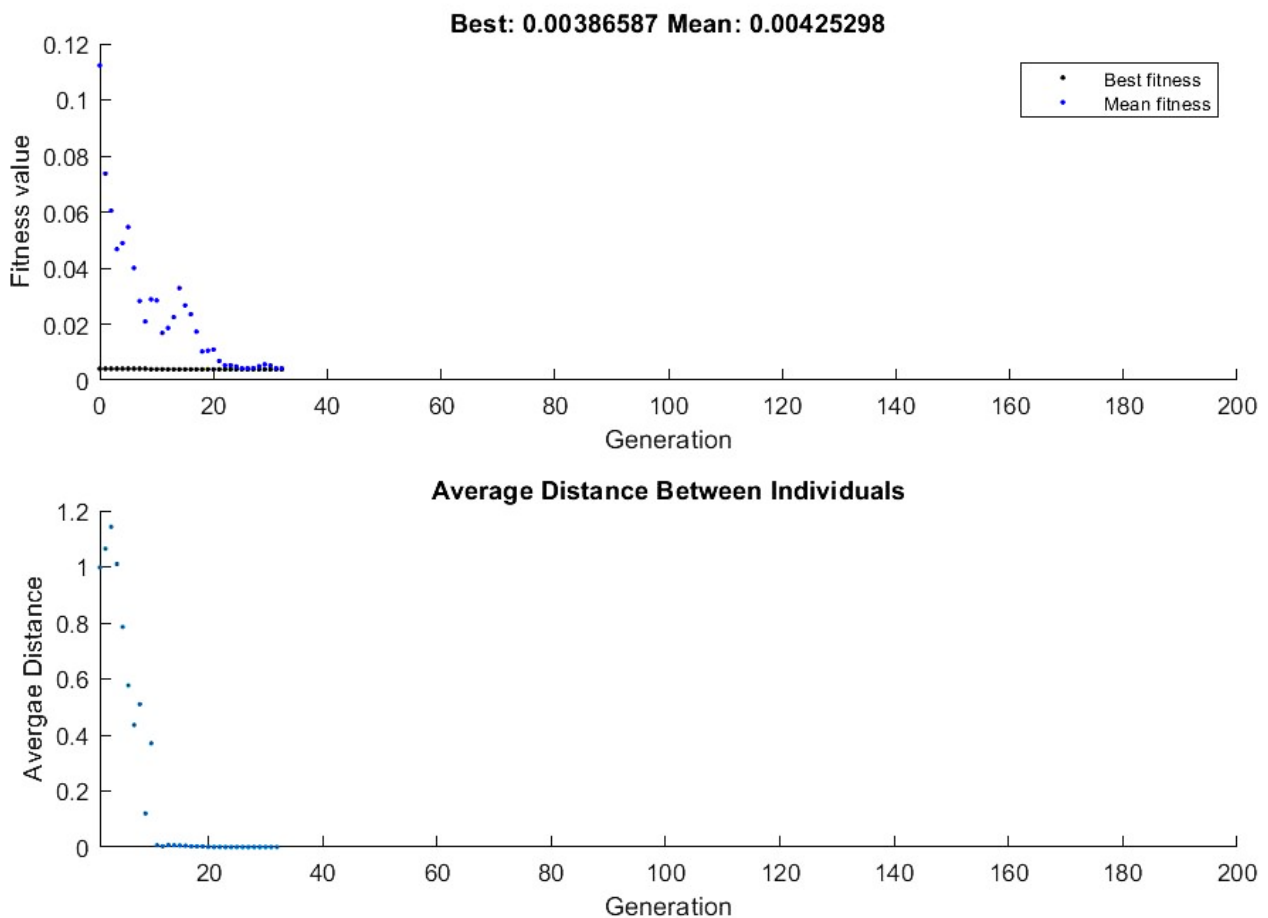
Γωνία Πίεσης	Βήμα στον r_g	Επιμέρους τιμές κριτηρίων			
20,774	4,040	1,59E-03	1,43E-02	2,92E-04	
20,750	4,043	1,14E-03	1,52E-02	1,66E-06	
20,785	4,041	2,31E-03	1,32E-02	1,09E-03	
20,768	4,047	3,38E-03	1,23E-02	2,36E-03	
20,716	4,047	5,17E-04	1,68E-02	9,04E-04	
20,750	4,040	4,03E-06	1,65E-02	1,76E-03	
20,814	4,043	4,87E-03	9,78E-03	3,78E-03	
20,764	4,049	3,85E-03	1,21E-02	2,92E-03	
20,821	4,045	5,86E-03	8,42E-03	5,18E-03	
20,656	4,057	1,63E-05	1,86E-02	8,58E-04	
20,831	4,045	6,61E-03	7,56E-03	5,80E-03	
20,813	4,051	7,00E-03	7,02E-03	6,70E-03	
20,824	4,051	8,15E-03	6,05E-03	7,41E-03	
20,923	4,044	1,12E-02	1,88E-04	1,05E-02	
20,883	4,049	1,09E-02	1,84E-03	9,83E-03	
20,869	4,058	1,25E-02	3,83E-05	1,22E-02	
20,871	4,057	1,29E-02	3,30E-05	1,22E-02	
20,871	4,057	1,29E-02	3,30E-05	1,22E-02	

Πίνακας 4.6 Αναλυτικά αποτελέσματα μοντέλου με επιλογή τριών σημείων

Στον Πίνακα 4.6 παρουσιάζονται αναλυτικά τα αποτελέσματα του μοντέλου πρόβλεψης για την δεύτερη περίπτωση του Πίνακα 4.5, δηλαδή για τη χρήση 3 σημείων του διαγράμματος με μέγιστο σφάλμα $\pm 6 \mu\text{m}$. Στις στήλες των τελικών τιμών των κριτηρίων για τα βέλτιστα αυτά σημεία παρατηρείται η τάση του αλγορίθμου σύγκλισης να επιλέγει σημεία στα οποία το ένα τουλάχιστον από τα τρία κριτήρια ικανοποιείται τάξεις μεγέθους καλύτερα από τα υπόλοιπα. Στην εφαρμογή που

εξετάζεται, ωστόσο, κάτι τέτοιο είναι μάλλον απίθανο να συμβαίνει και σίγουρα τα δεδομένα που εισάγονται στο μοντέλο δεν ικανοποιούν κάποιο κριτήριο πολύ καλά (όλα τα επιλεγμένα σημεία έχουν σφάλμα). Έτσι διαφαίνεται ένα χαρακτηριστικό του αλγορίθμου σύγκλισης που για την συγκεκριμένη εφαρμογή είναι αρνητικό.

Στο Σχήμα 4.6 φαίνεται η μέση τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης σε σχέση με την καλύτερη τιμή της και την μέση απόσταση μεταξύ των ατόμων σε κάθε γενιά. Στο δεύτερο αυτό διάγραμμα γίνεται φανερό πως από την δέκατη κιόλας γενιά ο αλγόριθμος έχει περιορίσει πάρα πολύ την ποικιλία των ατόμων στον πληθυσμό, με αποτέλεσμα να παγιδευτεί σε τοπικά ελάχιστα. Για το λόγο αυτό κρίνεται απαραίτητη η προσαρμογή των παραμέτρων του ώστε να αποφεύγονται τέτοια αποτελέσματα.



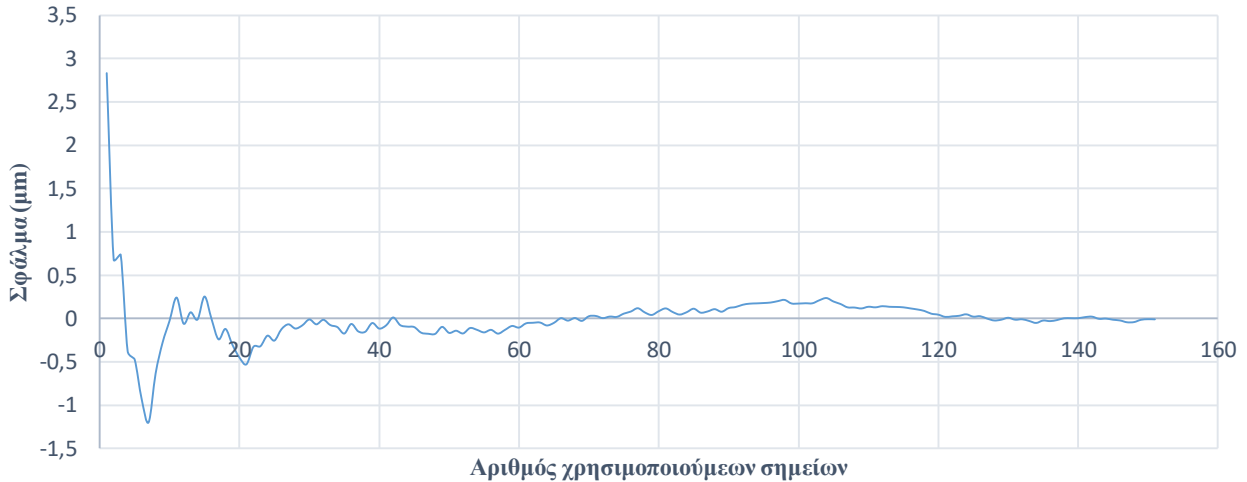
Σχήμα 4.6 Αντικειμενική συνάρτηση και μέση απόσταση ατόμων στον πληθυσμό του εξελικτικού αλγορίθμου για κάθε γενιά

Για την αντιμετώπιση όλων αυτών των προβλημάτων επαναπροσδιορίζεται η διαδικασία επίλυσης του αντίστροφου προβλήματος ως προς την αντικειμενική της συνάρτηση και τις παραμέτρους του αλγορίθμου σύγκλισης. Αρχικά, η αντικειμενική συνάρτηση που μέχρι τώρα ήταν διανυσματική μετατρέπεται σε βαθμωτή με χρήση της μεθόδου σταθμισμένων βαρών, όπως φαίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\min f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m w_i |C_{predicted} - C_{real}| \quad (4.7)$$

Τα βάρη επιλέγονται να είναι ίσα μεταξύ τους μιας και τα κριτήρια είναι ίσης σημαντικότητας για το πρόβλημα. Επειδή τα σημεία του διαγράμματος αξονικής απόστασης που χρησιμοποιούνται

περιέχουν σφάλματα, η αντικειμενική συνάρτηση για το πραγματικό σύνολο γεωμετρικών παραμέτρων δεν θα είναι μηδενική, όπως θα συνέβαινε απουσία σφαλμάτων, αλλά θα έχει κάποιο σφάλμα. Όπως φαίνεται από το Σχήμα 4.7, όσο τα χρησιμοποιούμενα σημεία αυξάνονται, τόσο το σφάλμα αυτό ελαχιστοποιείται. Το ερώτημα που μένει να απαντηθεί είναι πόσα σημεία χρειάζονται κάθε φορά για τη σωστή σύγκλιση του αλγορίθμου.



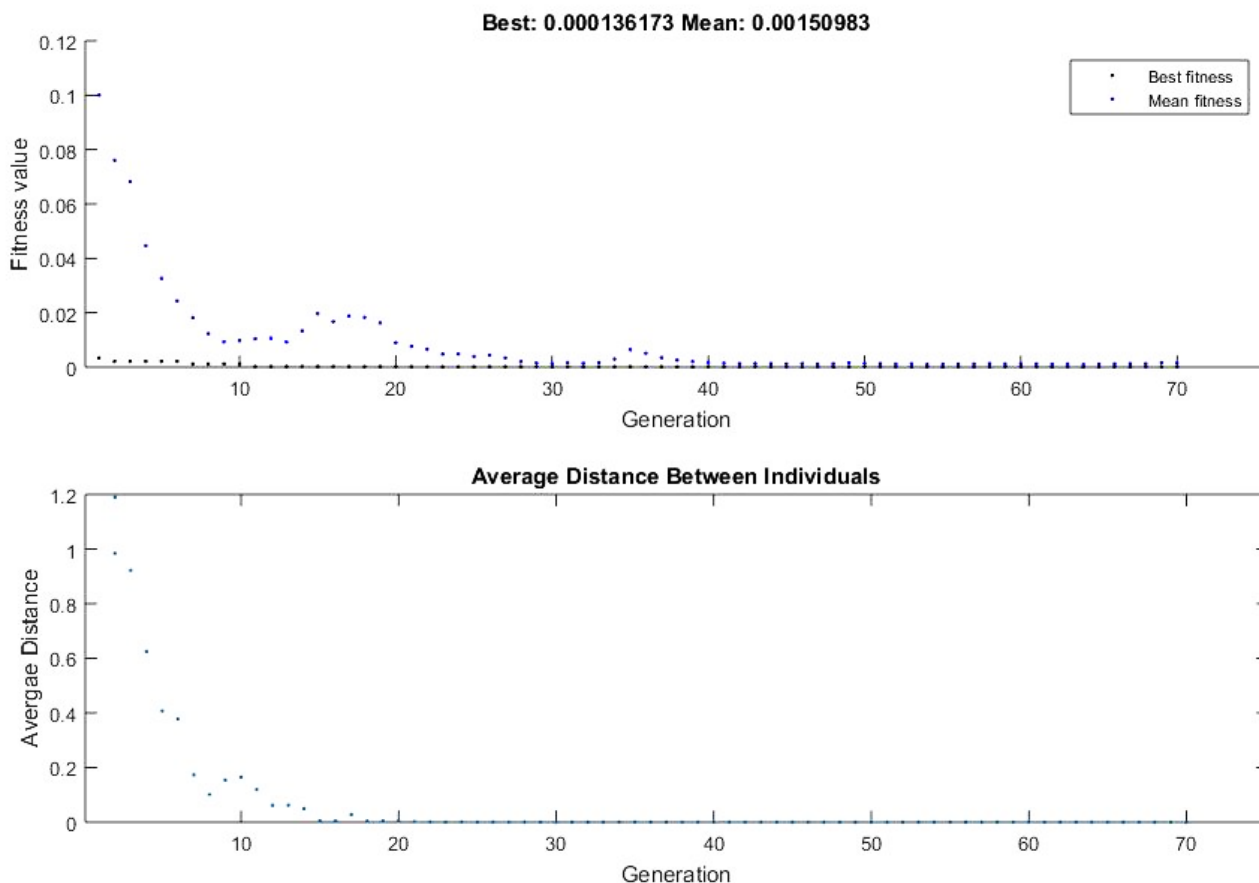
Σχήμα 4.7 Σφάλμα μηδενός της αντικειμενικής συνάρτησης

Εφόσον πλέον η αντικειμενική συνάρτηση είναι βαθμωτή, για την σύγκλιση του μοντέλου χρησιμοποιείται ο βαθμωτός εξελικτικός αλγόριθμος *ga* της *Matlab*, που τα χαρακτηριστικά του είναι ίδια με τον *gamultiobj*, με μόνη διαφορά τον τρόπο διαχείρισης της αντικειμενικής συνάρτησης. Ταυτόχρονα, επιχειρείται να βρεθούν οι κατάλληλες παράμετροι έτσι ώστε ο αλγόριθμος να μην παγιδεύεται σε τοπικά ελάχιστα κατά τη διαδικασία σύγκλισης. Οι παράμετροι που έχουν σημαντική επίδραση στον τρόπο σύγκλισης του αλγορίθμου είναι πολλοί, με πιο βασικούς το μέγεθος του πληθυσμού, τον ρυθμό μετάλλαξης, το ποσοστό διασταύρωσης και το ποσοστό ελιτισμού. Από τις δοκιμές που διεκπεραιώθηκαν διαπιστώθηκε ότι ο πιο βασικός παράγοντας στην παρούσα εφαρμογή είναι το μέγεθος του πληθυσμού, το οποίο πρέπει να τεθεί τουλάχιστον ίσο με 200 για την εξασφάλιση της εύρεση του ολικού ελαχίστου της αντικειμενικής συνάρτησης. Στον Πίνακα 4.7 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της εφαρμογής του μοντέλου πρόβλεψης γεωμετρικών παραμέτρων όπως επαναπροσδιορίστηκε στην παρούσα ενότητα, για δύο σημεία του διαγράμματος αξονικής απόστασης. Γίνεται φανερό πως το μοντέλο υπολογίζει το πραγματικό σύνολο παραμέτρων με καλή ακρίβεια για μεγαλύτερο επιτρεπόμενο σφάλμα και με καλή επαναληψιμότητα, όπως αποδεικνύεται και από το διάγραμμα σύγκλισης του αλγορίθμου που παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.8. Ωστόσο, για την επιτυχία του μοντέλου πρέπει το σφάλμα της αντικειμενικής συνάρτησης να είναι κάτω από 0.5 μm.

Μέγιστο επίπεδο σφάλματος	Γεωμετρικές παράμετροι		Σφάλμα εκτίμησης	
	Γωνία πίεσης	Βήμα στον r_g	Γωνία πίεσης	Βήμα στον r_g
Πραγματικές τιμές	21	4,012	-	-

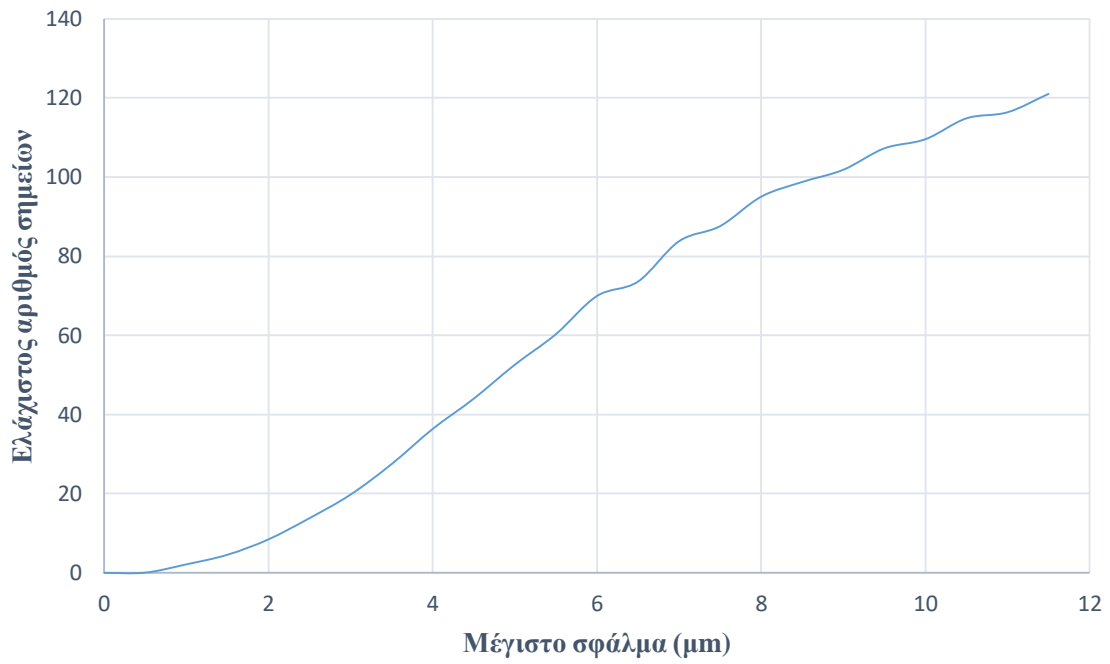
$\pm 0.6 \mu\text{m}$	21,025	4,008	0,120%	-0,112%
$\pm 0.6 \mu\text{m} (2)$	21,028	4,008	0,135%	-0,119%
$\pm 1 \mu\text{m}$	21,120	0,035	0,571%	-0,614%

Πίνακας 4.4 Αποτελέσματα τροποποιημένου μοντέλου πρόβλεψης με σφάλματα στο διάγραμμα αξονικής απόστασης



Σχήμα 4.8 Αντικειμενική συνάρτηση και μέση απόσταση στον πληθυσμό 200 ατόμων του εξελικτικού αλγορίθμου για κάθε γενιά

Για να εξασφαλιστεί το σφάλμα της αντικειμενικής συνάρτησης να μην υπερβαίνει τα $0.5 \mu\text{m}$ πρέπει να οριστεί μια διαδικασία επιλογής αριθμού σημείων του διαγράμματος αξονικής απόστασης συναρτήσει του μεγέθους του σφάλματος που φέρει το διάγραμμα και προκύπτει από τη διαδικασία και τη μηχανή διεξαγωγής των μετρήσεων. Για το λόγο αυτό, τα σημεία του διαγράμματος της αξονικής απόστασης του Σχήματος 4.5 αλλοιώνονται με μία τυχαία συνάρτηση ομοιόμορφης κατανομής, έτσι ώστε να προστεθεί σε αυτές η τιμή ενός σφάλματος, με κάθε φορά μεταβλητή τη μέγιστη τιμή του σφάλματος. Στη συνέχεια υπολογίζεται για ποιο αριθμό σημείων και πάνω το σφάλμα της αντικειμενικής συνάρτησης δεν ξεπερνά τα $0.5 \mu\text{m}$. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο Σχήμα 4.9.



Σχήμα 4.9 Ελάχιστος απαιτούμενος αριθμός σημείων διαγράμματος αξονικής απόστασης συναρτήσει του σφάλματος των μετρήσεων

5. Συμπεράσματα

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας αποτέλεσε η διερεύνηση της δυνατότητας προσδιορισμού γεωμετρικών αποκλίσεων σε οδοντωτούς τροχούς, χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα της μεθόδου ελέγχου διπλής κατατομής. Στα πλαίσια της εργασίας μελετήθηκε αναλυτικά η μέθοδος διπλής κατατομής, αναπτύχθηκαν μοντέλα προσομοίωσης της λειτουργίας της, πραγματοποιήθηκαν μετρήσεις τροχών στη μηχανή ελέγχου διπλής κατατομής Goulder Mikron του εργαστηρίου και, τελικά, παρουσιάστηκε ένα ολοκληρωμένο μοντέλο πρόβλεψης των γεωμετρικών παραμέτρων της μορφής των κατατομών μετωπικών οδοντωτών τροχών. Τα αποτελέσματα που προέκυψαν οδήγησαν στην εξαγωγή κάποιων συμπερασμάτων που παρουσιάζονται συνοπτικά στη συνέχεια.

Για την προσομοίωση της μεθόδου διπλής κατατομής προτάθηκαν δύο μοντέλα, ένα αναλυτικό και ένα αριθμητικό. Η χρήση αναλυτικών μεθόδων για την προσέγγιση του προβλήματος αποδείχθηκε προβληματική, μιας και η ύπαρξη ιδιόμορφων σημείων (κορυφές κλπ.) στις κατατομές των τροχών απαιτεί την ιδιαίτερη μεταχείρισή τους, αυξάνοντας την πολυπλοκότητα και το υπολογιστικό κόστος του μοντέλου. Αντίθετα, η αριθμητική μέθοδος που αναπτύχθηκε είναι ικανή με ακρίβεια να προσομοιώσει τη λειτουργία της μεθόδου με τη δαπάνη σαφώς λιγότερων υπολογιστικών πόρων. Το αριθμητικό μοντέλο είναι σε θέση να περιγράψει τη σφικτή συνεργασία δύο τροχών με οποιαδήποτε μορφή κατατομών και να αποδίδει το διάγραμμα της μεταβολής της αξονικής απόστασης, όπως γίνεται και κατά την πρακτική εφαρμογή της μεθόδου διπλής κατατομής.

Οι πειραματικές μετρήσεις που έγιναν στη μηχανή Goulder Mikron του Εργαστηρίου Στοιχείων Μηχανών έδειξαν την ικανότητα της μεθόδου να προσφέρει έναν σαφή και εποπτικό τρόπο επιθεώρησης της κατάστασης των κατατομών των εξεταζόμενων οδοντωτών τροχών με την αξιολόγηση του διαγράμματος της αξονικής απόστασης που προκύπτει. Παράλληλα, όμως, φανέρωσαν και την αδυναμία της μεθόδου να παρέχει αναλυτικότερα αποτελέσματα για τις αιτίες των σφαλμάτων που καταγράφονται. Η διαδικασία χημικού καθαρισμού των τροχών από επιφανειακή οξείδωση που περιγράφηκε θεωρητικά και επιβεβαιώθηκε πειραματικά μπορεί να διασφαλίσει την απομάκρυνση του μεγαλύτερου μέρους της οξείδωσης από τις κατατομές των τροχών, χωρίς να αλλοιώνονται οι διαστάσεις ή η σύστασή τους. Μπορεί να εφαρμοστεί αυτούσια για τον καθαρισμό οποιονδήποτε οδοντωτών τροχών, αλλά και γενικότερα για την απομάκρυνση σκουριάς από εξαρτήματα που το κύριο συστατικό τους είναι ο χάλυβας.

Τέλος, το μοντέλο πρόβλεψης των γεωμετρικών παραμέτρων των εξεταζόμενων τροχών, βασίζεται στην παραδοχή των ομοιόμορφων σφαλμάτων στις κατατομές των τροχών. Χρησιμοποιώντας το αριθμητικό μοντέλο της μεθόδου διπλής κατατομής και έναν γενετικό αλγόριθμο βελτιστοποίησης, χρησιμοποιεί ως δεδομένο το διάγραμμα της αξονικής απόστασης από τη μέτρηση ενός τροχού για τον προσδιορισμό των γεωμετρικών χαρακτηριστικών του. Αν και η μέθοδος είναι ακριβής και εύρωστη όταν της δίνεται ως είσοδος το ιδανικό διάγραμμα της αξονικής απόστασης για έναν τροχό, είναι δυνατόν να αποκλίνει στην περίπτωση που στο διάγραμμα υπάρχουν σφάλματα στον προσδιορισμό των σημείων του. Σε αυτή την περίπτωση προτείνεται μια τροποποιημένη μέθοδος εκτίμησης των γεωμετρικών παραμέτρων, με σκοπό τον περιορισμό της επίδρασης των σφαλμάτων που οδηγούν τον αλγόριθμο βελτιστοποίησης στην εύρεση διαφορετικής ομάδας λύσεων από την πραγματική. Η νέα μέθοδος καταφέρνει να προσδιορίζει με ακρίβεια τις ζητούμενες παραμέτρους, ακόμα και σε περιπτώσεις όπου το επίπεδο του σφάλματος είναι μεγάλο, με αναπόφευκτη συνέπεια την αύξηση του υπολογιστικού κόστους.

Συμπερασματικά, η διπλωματική αυτή εργασία κατάφερε να δώσει λύσεις στα προβλήματα που κλήθηκε να αντιμετωπίσει, η πιστότητα των οποίων επιβεβαιώθηκε μετά την εκτέλεση πειραμάτων και αριθμητικών δοκιμών. Παρουσίασε ένα πλήρες μοντέλο προσομοίωσης της μεθόδου διπλής κατατομής, όρισε μια ολοκληρωμένη διαδικασία καθαρισμού τροχών από επιφανειακή οξείδωση και

ανέπτυξε για πρώτη φορά μία μέθοδο υπολογισμού των γεωμετρικών παραμέτρων οδοντωτών τροχών χρησιμοποιώντας αποκλειστικά αποτελέσματα από τη μέθοδο διπλής κατατομής. Μια προσθήκη που θα μπορούσε να γίνει σε μία μελλοντική επανεξέταση των θεμάτων που αναπτύσσονται στην εργασία είναι η ολοκλήρωση της λήψης των μετρήσεων των τροχών σε μία μηχανή CMM και η εισαγωγή τους στο αριθμητικό μοντέλο προσομοίωσης της μεθόδου διπλής κατατομής, ώστε να αποδειχθεί και πειραματικά, μετά την σύγκρισή του με τις μετρήσεις που λήφθηκαν στη μηχανή Goulder Mikron, η ακρίβεια και η αξιοπιστία του. Ακόμα, όσον αφορά το μοντέλο πρόβλεψης των γεωμετρικών παραμέτρων, θα μπορούσε να εξεταστεί η πιθανότητα εισαγωγής επιπλέον και αποκλίσεων μορφής στις κατατομές των οδόντων και η χρήση καμπυλών παρεμβολής (B-Splines, Bezier κλπ.) από το μοντέλο για τον προσδιορισμό τους.

6. Βιβλιογραφία

- [1] Liu C., Lin K., *Simulation of Double Flank Gear Rolling Testing*, ASME, International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, August 30 – September 2 2009, pp. 1-8
- [2] Jie Tang, Yu Zhang, Zhaoyao Shi, *Radial and tangential error analysis of double-flank gear measurement*, Precision Engineering, Volume 51, 2018, pp. 552-563
- [3] Pueo M, Santolaria J, Acero R, Gracia A., *A review of tangential composite and radial composite gear inspection*. Precision Engineering, 2017, 50:522–37.
- [4] Munro R. G., *Effect of Geometrical Errors on the Transmission of Motion between Gears*, Proc. Inst. Mech. Eng., vol. 184, pp. 79–84, 1969.
- [5] Spitas, C., Costopoulos, T., Spitas, V., *Calculation of transmission errors, actual path of contact and actual contact ratio of non-conjugate gears*, VDI- Berichte., Vol. 1665, 2002, pp. 981-994.
- [6] ISO 1328-1 *Cylindrical gears ISO system of accuracy Part 1: Definitions and allowable values of deviations relevant to corresponding flanks of gear teeth*, 1995.
- [7] ISO/TR 10064-2, *Cylindrical gears – Code of inspection practice –Part 2: Inspections related to radial composite deviations, runout, tooth thickness and backlash*, 1996.
- [8] ISO 1328-1, *Cylindrical gears-ISO system of flank tolerance classification–Part 1: Definitions and allowable values of deviations relevant to flanks of gear teeth*, 2013.
- [9] ISO 1328-2, *Cylindrical gears-ISO system of accuracy–Part 2: Definitions and allowable values of deviations relevant to radial composite deviations and runout information*, 2013.
- [10] AGMA 116-02 *Composite error tolerances for spur and helical gears*, 1983.
- [11] VDI/VDE 2608, *Tangential composite and radial composite inspection of cylindrical gears, bevel gears, worm and worm wheels*, 2001
- [12] E. Reiter and F. Eberle, *Practical Considerations for the Use of Double-Flank Testing for the Manufacturing Control of Gearing - Part I*, Gear Technol., vol. 31, no. February, pp. 44–51, 2014.
- [13] Κοσμάς Χ., *Ανακατασκευή και αναβάθμιση της μηχανής μέτρησης οδοντώσεων GOULDER MIKRON 3R*, Εργαστήριο Στοιχείων Μηχανών, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών ΕΜΠ, TR0510, Αθήνα, 2005
- [14] Κωστόπουλος Θ., *Οδοντώσεις και μειωτήρες στροφών*, Β' Έκδοση, Εκδόσεις Συμείων, Αθήνα, 2010, σελ. 53
- [15] Litvin F. L., *Theory of Gearing*, NASA Publication RP-1212, Washington D.C., 1989, pp. 51-53
- [16] Γιαννάκογλου Κ.Χ., Αναγνωστόπουλος Ι., Μπεργελές Γ., *Αριθμητική Ανάλυση για Μηχανικούς*, 3^η Έκδοση, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών, Αθήνα 2003
- [17] Kosmas Ch, Costopoulos Th., *Upgrading of the Goulder Mikron 3R rolling gear testing device*, 2nd International Conference From Scientific Computing to Computational Engineering, Athens, 2006
- [18] Revie R. W., Uhlig H. H., *Uhlig's corrosion handbook*. New York: Wiley, 2000
- [19] Kladnig, W. F., *A review of steel pickling and acid regeneration: an environmental contribution*, Int. J. of Materials & Product Technology, Vol. 19, No. 6, 2003, pp. 550-561.
- [20] *Rust Removal with various metals and alloys*, Available in <http://www.kristallikov.net/page35e.html>
- [21] Brunscova H., Niznik S., *Influence of Iron in Pickling Solution of Sulfuric Acid on its Activity*, Chem. Papers, Vol. 46, No. 3, 1992, pp. 170-173

- [22] Panossian Z., de Almeida N. L., de Sousa R. M. F., de Souza G., Marques L. B. S., *Corrosion of carbon steel pipes and tanks by concentrated sulfuric acid: A review*, Corrosion Science, Vol. 58, 2012, pp. 1-11
- [23] Chang K.H., *Chapter 5 - Multiobjective Optimization and Advanced Topics, Design Theory and Methods Using CAD/CAE*, Academic Press, 2015, pp. 325-406
- [24] Προβατίδης Χ. Γ., *Βελτιστοποίηση & Λογισμικό Κατασκευών: Πεπερασμένα Στοιχεία, Ισογεωμετρικά Στοιχεία, Συνοριακά Στοιχεία*, Εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ, 2017, σελ. 805-884
- [25] Ευστρατιάδης Α., Κουτσογιάννης Δ., *Πολυκριτηριακή Βελτιστοποίηση*, Τομέας Υδατικών Πόρων, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, 2017
- [26] *gamultiobj Algorithm*, MathWorks Documentation, Available in:
<https://www.mathworks.com/help/gads/gamultiobj-algorithm.html>
- [27] Saraswat M., Sharma A. K., *Genetic Algorithm for optimization using MATLAB*, International Journal of Advanced Research in Computer Science, Volume 4, No. 3, March 2013, pp. 155-159

Παράρτημα

Κώδικας αριθμητικής προσομοίωσης μεθόδου διπλής κατατομής

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% The algorithm simulates the Double Flank Method by detecting the contact
% points based only on the calculation of penetration and using the
% Regula Falsi method for center distance convergence.
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear
close
tic
%% Testing Gear
% Geometrical Parameters
m = 1; % Module
Z1 = 30; % Tooth number
a01deg = 21; % Pressure angle in degrees
Ck1 = 1; Cf1 = 1.25; Cs1=0.5; Cc1 = 0; % Geometrical Coefficients
a01 = a01deg*pi/180; % Pressure angle in rad

nod=1e4; % Number of nodes

par1 = [m, Z1, a01, Ck1, Cf1, Cs1, Cc1, nod]; % Combined Parameters' Vector

% Function 'profile' calculates flank's nodes
% [d01, dg1, dk1, hideall, hreal1, S1] = [Pitch diameter, Base diameter,
% Addendum diameter, Ideal profile, Modulated profile, Tooth thickness]
[d01, dg1, dk1, hideall, hreal1, S1] = prof(par1);
r01=d01/2; rg1=dg1/2; rk1=dk1/2; % Respective radius

f1 = hideall(:,3) + 1i * hideall(:,4); % Complex representation of ideal
right flank pprofile
% f1 = hreal1(:,3) + 1i * hreal1(:,4); % Complex representation of
modulated right flank pprofile

% f11= hideall(:,1) + 1i * hideall(:,2); % Complex representation of ideal
left flank pprofile

% [fd1] = diff_approx(f1,2); % Derivatives of flank's nodes
l1 = length(f1); % Number of nodes of Testing Gear

%% Master Gear
% Geometrical Parameters
Z2 = 20; % Tooth number
a02deg = 20; % Pressure angle in degrees
Ck2 = 1; Cf2 = 1.25; Cs2=0.5; Cc2 = 0; % Geometrical Coefficients
a02=a02deg*pi/180; % Pressure angle in rad

% nod=1e4; % Number of nodes
i12 = Z2/Z1; % Transmission Ratio

par2 = [m, Z2, a02, Ck2, Cf2, Cs2, Cc2, nod]; % Combined Parameters' Vector

a12exp = 1i * (1/2 * d01 * (1 + i12)); % Expected Center Distance
a12 = 1i * (1/2 * d01 * (1 + i12)); % Initial Center Distance

% Function 'pro' calculates flank's nodes
% [d01, dg1, dk1, hideall, hreal1, S1] = [Pitch diameter, Base diameter,
```

```

% Addendum diameter, Ideal profile, Modulated profile, Tooth thickness]
[d02, dg2, dk2, hideal2, hreal2, S2] = prof(par2); % Combined Parameters' Vector
r02=d02/2; rg2=dg2/2; rk2=dk2/2;
f2 = hideal2(:,3) + 1i * hideal2(:,4); % Complex representation of ideal
right flank pprofile
f2l = hideal2(:,1) + 1i * hideal2(:,2); % Complex representation of
modulated right flank pprofile
% f2 = hreal2(:,3) + 1i * hreal2(:,4); % Complex representation of ideal
left flank pprofile
% f2l = hreal2(:,1) + 1i * hreal2(:,2); % Complex representation of
modulated left flank pprofile

% [fd2] = diff_approx(f2,2); % Derivatives of flank's nodes
l2 = length(f2); % Number of nodes of Master Gear

%% Gears' generation

q1 = pi/2/Z1-(tan(21*pi/180)-21*pi/180); % Displacemnt angle for Gear 1
q2 = pi/2/Z2+(tan(20*pi/180)-20*pi/180); % Displacemnt angle for Gear 2

% Initialization of right and left flanks of first tooth - Gear 1
% Left flank finally positioned at  $\theta_1 = 0$ 
f1=f1*exp(-1i*q1);
f1l=-real(f1) + 1i * imag(f1);
f1=f1*exp(1i*q1);
f1l=f1l*exp(1i*q1);
% Gear 1 flanks generation
f1m = zeros(l1,Z1);
f1lm = zeros(l1,Z1);
for n1=1:Z1
    f1m(:,n1)=f1*exp(-1i * 2*pi/Z1*(n1-1));
    f1lm(:,n1)=f1l*exp(-1i * 2*pi/Z1*(n1-1));
end

% Initialization of right and left flanks of first tooth - Gear 2
% Left flank finally positioned at  $\theta_2 = 0$ 
f2=-f2*exp(1i*(q2));
f2l=-f2l*exp(1i*(-q2));
f2=f2*exp(1i*(-q2));
f2l=f2l*exp(1i*(-q2));
% Gear 2 flanks generation
f2m = zeros(l2,Z2);
f2lm = zeros(l2,Z2);
for n2=1:Z2
    f2m(:,n2)=f2*exp(1i * 2*pi/Z2*(n2-1));
    f2lm(:,n2)=f2l*exp(1i * 2*pi/Z2*(n2-1));
end

%% Main Programm
%%{
iter = 1; % Counter for number of total
iterations
a12MIN=1i*(rg1+rg2); a12MAX=1i*(rk1+rk2); % Initial min and max center
distance
a12min=a12MIN; a12max=a12MAX-0.0i;

th1start=0; % Initial angle  $\theta$  of Gear 1
th1final=30*pi/180; % Last angle  $\theta$  of Gear 1

```

```

thldiv=10; % Number of angle divisions
thlstep=(thlfinal-thlstart)/thldiv; % Angle step of Gear 1
% thlstart=29*thlstep; % Different initial angle  $\theta$  in respect to
step angle
thlstep=0.1*pi/180; % Manual angle step choice

edr = 1e-3; % Acceptable error of radius of contact
points
eright = 5e-4; % Acceptable clearance for penetration at
right flanks
eleft = 5e-4; % Acceptable error of space/penetration at
left flanks
step_right = 25; % Step for penetration detection at right
flanks
step_left1 = 25; % Initial step for penetration detection at
left flanks

% Finding the teeth most likely to contact ( $\pm \pi/Z$  from y axis)
for n1=1:Z1
    flk=f1m*exp(1i*thlstart);
    if angle(flk(l1,n1))>(pi/2-pi/Z1-0.5*pi/180) &&
angle(flk(l1,n1))<(pi/2+pi/Z1+0.5*pi/180)
        break
    end
end
th2start=-thlstart/i12;
for n2=1:Z2
    f2k=f2m*exp(1i*th2start);
    if angle(f2k(l2,n2))>(-pi/2-pi/Z2-0.5*pi/180) && angle(f2k(l2,n2))<(-
pi/2+pi/Z2+0.5*pi/180)
        break
    end
end
set(gcf, 'Units', 'normalized', 'OuterPosition', [0 0 1 1])
for theta1 = thlstart :thlstep: thlfinal
    theta1*180/pi
    % Finding the number of teeth that should contact (as mentioned above)
    for n1c=1:Z1
        flk=f1m*exp(1i*theta1);
        if angle(flk(l1,n1c))>(pi/2-pi/Z1-0.5*pi/180) &&
angle(flk(l1,n1c))<(pi/2+pi/Z1+0.5*pi/180)
            break
        end
    end
    nchange=n1c-n1; % Teeth numbers distance
    % Correct distance at boundary of first and last tooth
    if abs(nchange) > 2
        nchange = nchange - sign(nchange)*Z1;
    end
    n2c=n2+nchange; % Respective tooth at Gear 2
    % Correct distance at boundary of first and last tooth
    if n2c > Z2
        n2c = n2c - Z2;
    elseif n2c < 1
        n2c = n2c +Z2;
    end

    ja12=1; % Number of iteration until convergence for every
angle  $\theta_1$ 

```



```

step_left = step_left1; % Initialization of left flanks' penetration
detector_step
step_left_lev = 0; % Number of decreases of left flanks' penetration
detector_step
flag=false; % Logical variable checking convergence
while flag==false
    % Determine Center Distance for current iteration
    if ja12==1
        a12=a12min;
        ja12a=1; % Position of a12min
    elseif ja12==2
        a12=a12max;
        ja12b=2; % Position of a12max
    else
        a12=a12min-(fobj(ja12a)*(a12max-a12min))/(fobj(ja12b)-fobj(ja12a));
    % Regula Falsi Method
    end
    a12minM(ja12,iter)=imag(a12min);
    a12maxM(ja12,iter)=imag(a12max);
    a12M(ja12,iter)=imag(a12);

    % Find contact point on right flanks
    thetan1=thetal-2*pi/Z1*(n1-1); % Angle to y axis of current tooth
of Gear 1
    r1 = f1k(1,n1); % Position vector of tooth's tip
    r2 = r1 - a12; % Respective position vector for
Gear 2 tooth
    A = abs(f2m(:,n2)); num = abs(r2); % Absolute value of position vectors
    [~,k] = min(abs(A-num)); % Point of contact of Gear 2 left
flank
    % If there is no contact, check position vector of base circle point
    if abs(num-abs(f2m(k,n2)))>edr
        r1 = f1k(11,n1);
        r2 = r1 - a12;
        A = abs(f2m(:,n2)); num = abs(r2);
        [~,k] = min(abs(A-num));
    end
    % If there is no contact still, check the tip of the Gear 1 tooth
expected to contact (+- pi/Z from y axis)
    if abs(num-abs(f2m(k,n2)))>edr
        n1=n1c;
        n2=n2c;
        r1 = f1k(1,n1); % f1(i) -> r1
        r2 = r1 - a12; % U1: r1 -> r2
        A = abs(f2m(:,n2)); num = abs(r2);
        [~,k] = min(abs(A-num));
    end
end

    theta2c = angle(r2/f2m(k,1)); % The angle that current tooth of Gear 2
must turn to contact
    theta2=theta2c-2*pi/Z2*(n2-1); % Total angle of Gear 2 from its initial
position

    % Current position of Gears' flanks
    f1k = f1m*exp(1i*thetal);
    f2k = f2m*exp(1i*theta2) + a12;
    f1lk = f1lm*exp(1i*thetal);
    f2lk = f2lm*exp(1i*theta2) + a12;

    % Check penetration at right flanks

```



```

        jpen=jpen+1;
    end
    % Check for i=11
    r1e = f1k_2(l1,n1p);
    Ae = abs(f2k_2(:,n2p)); nume = abs(r1e);
    [dr,ke] = min(abs(Ae-nume));
    de = r1e - f2k_2(ke,n2p);
    if real(de) < -eright && abs(dr) < edr
        kpen(jpen,pos+2) = ke;
        ipen(jpen,pos+2) = l1;
        rot(jpen,pos+2)=angle((f2k_2(ke,n2p))\r1e);
        jpen=jpen+1;
    end
    if jpen==1
        pencheck(pos+2)=0;
    end
end
if sum(pencheck)~=0
    [maxrot]=max(abs(rot(:))); % Calculate max
neccessary rotation due to penetration
    [maxj,mpos]=find(abs(rot)==max(abs(rot(:)))); % Determine the
point with max penetration
    maxj=maxj(1); % If there is
multiple equal max rotation angles % If there is
    mpos=mpos(1); % If there is
multiple equal max rotation angles
    krp=kpen(maxj,mpos); % Index of point
at Gear 2
    irp=ipen(maxj,mpos); % Index of point
at Gear 1
    theta2=theta2-maxrot; % Correction af
Gear 2 angle  $\theta$ 
    % Determine new current tooth number
    n1=n1+mpos-2;
    n2=n2+mpos-2;
    if n1==0; n1=Z1; end
    if n1==Z1+1; n1=1; end
    if n2==0; n2=Z2; end
    if n2==Z2+1; n2=1; end
end

% Current position of Gears' flanks
f1k = f1m*exp(1i*theta1);
f2k = f2m*exp(1i*theta2) + a12;
f1lk= f1lm*exp(1i*theta1);
f2lk = f2lm*exp(1i*theta2) + a12;

%% Check penetration or space between left flanks
pen=zeros(nod,4)+S1(l1); % Initializing penetration/space at left
flanks (Base tooth thickness)
for pos=-1:2
    % Calculate current tooth number
    n1p=n1+pos;
    if n1p<1; n1p=n1p+Z1; end
    if n1p>Z1; n1p=n1p-Z1; end
    n2p=n2+pos;
    if n2p<1; n2p=n2p+Z2; end
    if n2p>Z2; n2p=n2p-Z2; end

    jpenl=1; % Counter of points that penetrate
    for il = l1:-step_left:1

```

```

        r1le = f1lk(il,n1p);
        Ael = abs(f2lk(:,n2p));  numel = abs(r1le);
        [dr,kl] = min(abs(Ael-numel));
        if abs(dr) < edr
            pen(jpenl,pos+2) = f2lk(kl,n2p) - r1le;
            kpenl(jpenl,pos+2) = kl;
            ipenl(jpenl,pos+2) = il;
            jpenl=jpenl+1;
        end
    end
end

% Calculation of Objective Function (Maximum penetration)
%   fobj(ja12)=min(real(pen(:)));
magpen=sign(real(pen(:, :))).*abs(pen(:, :));
fobj(ja12,:)=min(magpen(:));
%   fobj(ja12)
% Calculation of new boundaries for Center Distance
if ja12~=1 && ja12~=2
    if fobj(ja12)*fobj(ja12a)<0
        ja12b=ja12;
        a12max=a12;
    elseif fobj(ja12)*fobj(ja12b)<0
        ja12a=ja12;
        a12min=a12;
    end
end
% Check for convergence
if abs(fobj(ja12)) < eleft || ja12 > 50
    flag=true;
    error_a12=imag(a12max-a12min);
end
% Decrease step in respect to number of iterations
if ja12>15 && ja12<35 && step_left_lev==0
    step_left=ceil(step_left/2);
    step_left_lev=1;
elseif ja12>=35 && ja12<=50 && step_left_lev==1
    step_left=ceil(step_left/2);
    step_left_lev=2;
elseif ja12>50
    flag=true;
end
ja12=ja12+1;
end
epan(iter)=ja12-1;

% Calculate contact point at left flanks
[maxj1,mpos1]=find(magpen==min(magpen(:)));
maxj1=maxj1(1);
mpos1=mpos1(1);
klp=kpenl(maxj1,mpos1);
ilp=ipenl(maxj1,mpos1);
% Determine tooth pair of contact point
n11=n1+mpos1-2;
if n11<1; n11=n11+Z1; end
if n11>Z1; n11=n11-Z1; end
n21=n2+mpos1-2;
if n21<1; n21=n21+Z2; end
if n21>Z2; n21=n21-Z2; end

% Calculation of new Center Distance boundaries

```

```

a12max1=a12+0.01*(a12MAX-a12MIN);
a12min1=a12-0.01*(a12MAX-a12MIN);
a12max=min(a12max1,a12MAX);
a12min=max(a12min1,a12MIN);

%% Plots

% Current position of Gears' flanks
f1k = f1m*exp(1i*theta1);
f2k = f2m*exp(1i*theta2) + a12;
f11k= f11m*exp(1i*theta1);
f21k = f21m*exp(1i*theta2) + a12;

% Gear Simulation plot

figure(1)

arc_plot=-40:1:40;
% Base cycle
thbs=arc_plot;
thbs=thbs.*pi./180;
ybsm=rg1.*cos(thbs);
xbsm=rg1.*sin(thbs);
% Head cycle
thh=arc_plot;
thh=thh.*pi./180;
yhm=rk1.*cos(thh);
xhm=rk1.*sin(thh);
plot(xbsm,ybsm,'--b')
hold on
plot(xhm,yhm,'--b')

% Base cycle
thbs=arc_plot;
thbs=thbs.*pi./180;
ybstr=-rg2.*cos(thbs)+abs(a12);
xbstr=rg2.*sin(thbs);
% Head cycle
thh=arc_plot;
thh=thh.*pi./180;
yhtr=-rk2.*cos(thh)+abs(a12);
xhtr=rk2.*sin(thh);
plot(xbstr,ybstr,'--r')
plot(xhtr,yhtr,'--r')

axis equal
limits=[xbstr(1) xbstr(length(xbstr)) ybsm(1) ybstr(1)];
axis(limits)

plot(f1k,'b')
plot(f2k,'r')
plot(f11k,'b')
plot(f21k,'r')
plot(f1k(:,n1),'g')
plot(f2k(:,n2),'g')
plot(f11k(:,n11),'g')
plot(f21k(:,n21),'g')
plot(f1k(irp,n1),'og')
plot(f11k(ilp,n11),'og')

```

```

grid on
hold off
F(iter) = getframe(gcf);

% Center Distance plot

Da12p(iter)=imag(a12-a12exp);
theta(iter)=thetal;

figure(2)
plot(theta*180/pi, Da12p*1000)
grid on
xlabel('Pinion angle  $\theta_1$  (deg)')
ylabel('Center distance variance ( $\mu\text{m}$ )')
F2(iter) = getframe(gcf);

iter=iter+1;
end
t=toc;

function [do, dg, dk, hideal, hreal, S] = prof (par)

% this program defines gear geometrical characteristics

%% Gear parameters
m = par(1);           % module
Z = par(2);
a0 = par(3);         % Pressure angle
do = m * Z;          % Pitch diameter
dg = do * cos(a0);   % Base diameter
Ck = par(4);
hk = Ck * m;         % Tip height
dk = (Z + 2*Ck) * m; % Addendum diameter (Cost. pp. 48)
Cf = par(5);
hf = Cf * m;         % Root height
df = (Z - 2*Cf) * m; % Root diameter (Cost. pp. 48)
to = pi * m;         % Circular pitch (Cost. pp. 47)
Cs = par(6);
So = Cs * to;        % Tooth thickness at pitch circle
inva0 = tan(a0) - a0; % Involute function
Cc = par(7);

%% Involute generation
div = par(8);        % number of nodes for involute
% Involute's root at (0,rg)
for i = 1:div
    r = dk/2 - (dk-dg)*(i-1)/(2*(div-1)); % radius from rk to rg
    a = acos(dg / (2 * r)); % angle  $\alpha$  of each involute point
    inva(i) = tan(a) - a; % involute function  $\phi$  for each
involute point

    S(i) = So * (2*r / do) + 2 * (inva0 - inva(i)) * r; % Tooth thickness at
each point

```



```

yg = So/(do/2) + 2*inva0; % page 69
y(i) = yg - inva(i);
ak = acos(dg/dk); % sxhma 1.71 page 70

xp(i)= r * sin(inva(i)); % change from polar coordinates
yp(i)= r * cos(inva(i)); % to cartesian coordinates

end
% Rotation of involute to its symmetrical initial position
Sg = S(div); % Tooth thickness at base circle
phig = Sg/2 / (dg/2); % Angle for half Sg
phig=0;
rot = [ cos(phig) -sin(phig);
        sin(phig) cos(phig)];
inv_rot = rot * [xp; yp];
xp_rot = inv_rot(1,:);
yp_rot = inv_rot(2,:);

%% sxediasmos diametrou kefalhs
% Sk = S(1); % paxos odontos kefalhs
% phik = -Sk/2 / (dk/2); % angle of top involute point
%
% n2 = 4; % # of points for diametro kefalhs
% for i = 1:n2
%     theta=phik*(i-1)/(n2-1);
%     xk(i)=(dk/2)*sin(theta);
%     yk(i)=(dk/2)*cos(theta);
% end

%% sxediasmos katatomhs odontos
% xp_rot = xp_rot(1:p_min); % keep the usefull part of involute and trochoid
% yp_rot = yp_rot(1:p_min);
% div1 = p_min;
%
% x_kat = [xk, xp_rot, xT_rot];
% y_kat = [yk, yp_rot, yT_rot];
%
% kat = [x_kat', y_kat'];
% kat = kat';
%
%% Transformed Involute
% sd = 0.001;
% norm_dist = sd.*randn(2,length(kat));
kat = [xp_rot; yp_rot]; % Need to change if we include TROCHOID !!!
ti = 0:length(kat)-1;
defy = 0*sin(0.0008*ti);
defx = -0.05*sin(0.002*ti);
def = [defx; defy];
real_kat = def + kat;

% real (with defects) involute curve
% xpr = real_kat(1,n2:div1+n2);
% ypr = real_kat(2,n2:div1+n2);
xpr = real_kat(1,:);
ypr = real_kat(2,:);

% figure()

```

```

% plot(xpr,ypr)

%% Final flanks of one tooth profile
% ideal tooth
mirror = [-1 0;0 1]*kat;
% n4 = div1 + n2 + n3;
for i=1:div
    mir(1,i)=mirror(1,div+1-i); %reverse the order of the points, easy for
plotting
    mir(2,i)=mirror(2,div+1-i);
end
h=[mirror;kat]; %the whole tooth profile
hideal=h';

% real tooth (with defects)
mirror = [-1 0;0 1]*real_kat;
% n4 = div1+ n2 + n3;
for i=1:div
    mir(1,i)=mirror(1,div+1-i); %reverse the order of the points, easy for
plotting
    mir(2,i)=mirror(2,div+1-i);
end
h_real = [mirror; real_kat];
hreal=h_real';

```

Κώδικας αριθμητικής επίλυσης αντίστροφου προβλήματος

```

clear
tic
alb=18;
aub=22;
qub = pi/2/30-(tan(alb*pi/180)-alb*pi/180);
qlb = pi/2/30-(tan(aub*pi/180)-aub*pi/180);

% a01=20;
% q1 = pi/2/30-(tan(a01*pi/180)-a01*pi/180);
% test=R_Forward([a01 q1]);
FitnessFunction = @R_Forward_RF;
numberOfVariables = 2;
A = []; b = [];
Aeq = []; beq = [];
lb = [alb qlb]';
ub = [aub qub]';
% options =
optimoptions(@gamultiobj,'DistanceMeasureFcn',{@distancecrowding,'genotype'});
[x,fval,exitflag,output,population,scores] =
gamultiobj(FitnessFunction,numberOfVariables,A,b,Aeq,beq,lb,ub);
tsec=toc

function [y] = R_Forward_RF(x)

%% Variables
x
a01deg = x(1); % Pressure angle in degrees
q1 = x(2); % Displacemnt angle for Gear 2

```

```

%% Testing Gear
% Geometrical Parameters
m = 1; % Module
Z1 = 30; % Tooth number
a01deg = 20; % Pressure angle in degrees
Ck1 = 1; Cf1 = 1.25; Cs1=0.5; Cc1 = 0; % Geometrical Coefficients
a01 = a01deg*pi/180; % Pressure angle in rad

nod=1e4; % Number of nodes

par1 = [m, Z1, a01, Ck1, Cf1, Cs1, Cc1, nod]; % Combined Parameters' Vector

% Function 'profile' calculates flank's nodes
% [d01, dg1, dk1, hideall, hreal1, S1] = [Pitch diameter, Base diameter,
% Addendum diameter, Ideal profile, Modulated profile, Tooth thickness]
[d01, dg1, dk1, hideall, hreal1, S1] = prof(par1);
r01=d01/2; rg1=dg1/2; rk1=dk1/2; % Respective radius

f1 = hideall(:,3) + 1i * hideall(:,4); % Complex representation of ideal
right flank pprofile
f1 = hreal1(:,3) + 1i * hreal1(:,4); % Complex representation of
modulated right flank pprofile

f1l= hideall(:,1) + 1i * hideall(:,2); % Complex representation of ideal
left flank pprofile

l1 = length(f1); % Number of nodes of Testing Gear

%% Master Gear
% Geometrical Parameters
Z2 = 30; % Tooth number
a02deg = 20; % Pressure angle in degrees
Ck2 = 1; Cf2 = 1.25; Cs2=0.5; Cc2 = 0; % Geometrical Coefficients
a02=a02deg*pi/180; % Pressure angle in rad

% nod=1e4; % Number of nodes
i12 = Z2/Z1; % Transmission Ratio

par2 = [m, Z2, a02, Ck2, Cf2, Cs2, Cc2, nod]; % Combined Parameters' Vector

a12exp = 1i * (1/2 * d01 * (1 + i12)); % Expected Center Distance
a12 = 1i * (1/2 * d01 * (1 + i12)); % Initial Center Distance

% Function 'profile' calculates flank's nodes
% [d01, dg1, dk1, hideall, hreal1, S1] = [Pitch diameter, Base diameter,
% Addendum diameter, Ideal profile, Modulated profile, Tooth thickness]
[d02, dg2, dk2, hideal2, hreal2, S2] = prof(par2); % Combined Parameters' Vector
r02=d02/2; rg2=dg2/2; rk2=dk2/2;
f2 = hideal2(:,3) + 1i * hideal2(:,4); % Complex representation of ideal
right flank pprofile
f2l = hideal2(:,1) + 1i * hideal2(:,2); % Complex representation of
modulated right flank pprofile
% f2 = hreal2(:,3) + 1i * hreal2(:,4); % Complex representation of ideal
left flank pprofile
% f2l = hreal2(:,1) + 1i * hreal2(:,2); % Complex representation of
modulated left flank pprofile

```

```

l2 = length(f2); % Number of nodes of Master Gear

%% Gears' generation

% q1 = pi/2/Z1-(tan(a01)-a01); % Displacement angle for Gear 1
q2 = pi/2/Z2+(tan(a02)-a02); % Displacement angle for Gear 2

% Initialization of right and left flanks of first tooth - Gear 1
% Left flank finally positioned at  $\theta_1 = 0$ 
f1=f1*exp(-1i*q1);
f1l=-real(f1) + 1i * imag(f1);
f1=f1*exp(1i*q1);
f1l=f1l*exp(1i*q1);
% Gear 1 flanks generation
f1m = zeros(l1,Z1);
f1lm = zeros(l1,Z1);
for n1=1:Z1
    f1m(:,n1)=f1*exp(-1i * 2*pi/Z1*(n1-1));
    f1lm(:,n1)=f1l*exp(-1i * 2*pi/Z1*(n1-1));
end

% Initialization of right and left flanks of first tooth - Gear 2
% Left flank finally positioned at  $\theta_2 = 0$ 
f2=-f2*exp(1i*(q2));
f2l=-f2l*exp(1i*(-q2));
f2=f2*exp(1i*(-q2));
f2l=f2l*exp(1i*(-q2));
% Gear 2 flanks generation
f2m = zeros(l2,Z2);
f2lm = zeros(l2,Z2);
for n2=1:Z2
    f2m(:,n2)=f2*exp(1i * 2*pi/Z2*(n2-1));
    f2lm(:,n2)=f2l*exp(1i * 2*pi/Z2*(n2-1));
end

%% Main Programm
%%{

thetadeg = [3 10];
theta = deg2rad(thetadeg);
a12real = [30.0385 30.01466];

edr = 5e-4; % Acceptable error of radius of contact
points
eright = 9e-4; % Acceptable clearance for penetration at
right flanks
eleft = 9e-4; % Acceptable error of space/penetration at
left flanks
step_right = 50; % Step for penetration detection at right
flanks
step_left1 = 50; % Initial step for penetration detection at
left flanks

for iter=1:length(x)
    a12MIN=1i*(rg1+rg2); a12MAX=1i*(rk1+rk2); % Initial min and max center
distance
    a12min=a12exp-0.5i; a12max=a12exp+0.5i;

```

```

thetal=theta(iter);

% Finding the teeth most likely to contact (+- pi/Z from y axis)
for n1=1:Z1
    flk=f1m*exp(1i*thetal);
    if angle(f1k(l1,n1))>(pi/2-pi/Z1-0.5*pi/180) &&
angle(f1k(l1,n1))<(pi/2+pi/Z1+0.5*pi/180)
        break
    end
end
th2start=-thetal/i12;
for n2=1:Z2
    f2k=f2m*exp(1i*th2start);
    if angle(f2k(l2,n2))>(-pi/2-pi/Z2-0.5*pi/180) && angle(f2k(l2,n2))<(-
pi/2+pi/Z2+0.5*pi/180)
        break
    end
end

% Finding the number of teeth that should contact (as mentioned above)
for n1c=1:Z1
    flk=f1m*exp(1i*thetal);
    if angle(f1k(l1,n1c))>(pi/2-pi/Z1-0.5*pi/180) &&
angle(f1k(l1,n1c))<(pi/2+pi/Z1+0.5*pi/180)
        break
    end
end
nchange=n1c-n1; % Teeth numbers distance
% Correct distance at boundary of first and last tooth
if abs(nchange) > 2
    nchange = nchange - sign(nchange)*Z1;
end
n2c=n2+nchange; % Respective tooth at Gear 2
% Correct distance at boundary of first and last tooth
if n2c > Z2
    n2c = n2c - Z2;
elseif n2c < 1
    n2c = n2c +Z2;
end

ja12=1; % Number of iteration until convergence for every
angle 01
step_left = step_left1; % Initialization of left flanks' penetration
detector step
step_left_lev = 0; % Number of decreases of left flanks' penetration
detector step
flag=false; % Logical variable checking convergence
while flag==false
    % Determine Center Distance for current iteration
    if ja12==1
        a12=a12min;
        ja12a=1; % Position of a12min
    elseif ja12==2
        a12=a12max;
        ja12b=2; % Position of a12max
    else
        a12=a12min-(fobj(ja12a)*(a12max-a12min))/(fobj(ja12b)-fobj(ja12a));
    % Regula Falsi Method

```

```

end

% Find contact point on right flanks
thetan1=theta1-2*pi/Z1*(n1-1); % Angle to y axis of current tooth
of Gear 1
r1 = f1k(1,n1); % Position vector of tooth's tip
r2 = r1 - a12; % Respective position vector for
Gear 2 tooth
A = abs(f2m(:,n2)); num = abs(r2); % Absolute value of position vectors
[~,k] = min(abs(A-num)); % Point of contact of Gear 2 left
flank
% If there is no contact, check position vector of base circle point
if abs(num-abs(f2m(k,n2)))>edr
    r1 = f1k(11,n1);
    r2 = r1 - a12;
    A = abs(f2m(:,n2)); num = abs(r2);
    [~,k] = min(abs(A-num));
end
% If there is no contact still, check the tip of the Gear 1 tooth
expected to contact (+- pi/Z from y axis)
if abs(num-abs(f2m(k,n2)))>edr
    n1=n1c;
    n2=n2c;
    r1 = f1k(1,n1); % f1(i) -> r1
    r2 = r1 - a12; % U1: r1 -> r2
    A = abs(f2m(:,n2)); num = abs(r2);
    [~,k] = min(abs(A-num));
end

theta2c = angle(r2/f2m(k,1)); % The angle that current tooth of Gear 2
must turn to contact
theta2=theta2c-2*pi/Z2*(n2-1); % Total angle of Gear 2 from its initial
position

% Current position of Gears' flanks
f1k = f1m*exp(1i*theta1);
f2k = f2m*exp(1i*theta2) + a12;
f1lk = f1lm*exp(1i*theta1);
f2lk = f2lm*exp(1i*theta2) + a12;

%% Check penetration at right flanks

f1k_2 = f1m*exp(1i*theta1) - a12; % Transformation to Gear 2
Coordinate System
f2k_2 = f2m*exp(1i*theta2); % Transformation to Gear 2
Coordinate System
rot=zeros(nod,3); % Necessary rotation of Gear 2
to eliminate penetration
ipen=zeros(nod,3); % Gear 1 indexes at which
penetration occurs
kpen=zeros(nod,3); % Gear 2 indexes at which
penetration occurs
pencheck=[1 1 1]; % Initialazation of penetration
detector for each tooth pair

% Check for penetration at previous, current and next tooth pair
for pos=-1:1
    % Calculate current tooth number
    nlp=n1+pos;
    if nlp==0; nlp=Z1; end
    if nlp==Z1+1; nlp=1; end

```

```

n2p=n2+pos;
if n2p==0; n2p=Z2; end
if n2p==Z2+1; n2p=1; end

jpen=1; % Counter of points that penetrate
for ke = 12:-step_right:1
    r2e = f2k_2(ke,n2p); % Position
vector of current point of Gear 2
of position vectors Ae = abs(f1k_2(:,n1p)); nume = abs(r2e); % Absolute value
radius on Gear 1 [dr,ie] = min(abs(Ae-nume)); % Point of same
vector difference de = f1k_2(ie,n1p) - r2e; % Calculate
penetration if real(de) < -eright && abs(dr) < edr % Check for

    kpen(jpen,pos+2) = ke;
    ipen(jpen,pos+2) = ie;
    rot(jpen,pos+2)=angle(r2e\(f1k_2(ie,n1p)));
    jpen=jpen+1;
end
end
% Check for k=1
r2e = f2k_2(1,n2p);
Ae = abs(f1k_2(:,n1p)); nume = abs(r2e);
[dr,ie] = min(abs(Ae-nume));
de = f1k_2(ie,n1p) - r2e;
if real(de) < -eright && abs(dr) < edr
    kpen(jpen,pos+2) = 1;
    ipen(jpen,pos+2) = ie;
    rot(jpen,pos+2)=angle(r2e\(f1k_2(ie,n1p)));
    jpen=jpen+1;
end
% Check for i=1
r1e = f1k_2(1,n1p);
Ae = abs(f2k_2(:,n2p)); nume = abs(r1e);
[dr,ke] = min(abs(Ae-nume));
de = r1e - f2k_2(ke,n2p);
if real(de) < -eright && abs(dr) < edr
    kpen(jpen,pos+2) = ke;
    ipen(jpen,pos+2) = 1;
    rot(jpen,pos+2)=angle((f2k_2(ke,n2p))\r1e);
    jpen=jpen+1;
end
% Check for i=11
r1e = f1k_2(11,n1p);
Ae = abs(f2k_2(:,n2p)); nume = abs(r1e);
[dr,ke] = min(abs(Ae-nume));
de = r1e - f2k_2(ke,n2p);
if real(de) < -eright && abs(dr) < edr
    kpen(jpen,pos+2) = ke;
    ipen(jpen,pos+2) = 11;
    rot(jpen,pos+2)=angle((f2k_2(ke,n2p))\r1e);
    jpen=jpen+1;
end
end
if jpen==1
    pencheck(pos+2)=0;
end
end
if sum(pencheck) ~=0
    [maxrot]=max(abs(rot(:))); % Calculate max
necessary rotation due to penetration

```



```

        [maxj,mpos]=find(abs(rot)==max(abs(rot(:)))); % Determine the
point with max penetration
        maxj=maxj(1); % If there is
multiple equal max rotation angles
        mpos=mpos(1); % If there is
multiple equal max rotation angles
        krp=kpen(maxj,mpos); % Index of point
at Gear 2
        irp=ipen(maxj,mpos); % Index of point
at Gear 1
        theta2=theta2-maxrot; % Correction af
Gear 2 angle  $\theta$ 
        % Determine new current tooth number
        n1=n1+mpos-2;
        n2=n2+mpos-2;
        if n1==0; n1=Z1; end
        if n1==Z1+1; n1=1; end
        if n2==0; n2=Z2; end
        if n2==Z2+1; n2=1; end
    end

    % Current position of Gears' flanks
    f1k = f1m*exp(1i*theta1);
    f2k = f2m*exp(1i*theta2) + a12;
    f1lk= f1lm*exp(1i*theta1);
    f2lk = f2lm*exp(1i*theta2) + a12;

    %% Check penetration or space between left flanks
    pen=zeros(nod,4)+S1(11); % Initializing penetration/space at left
flanks (Base tooth thickness)
    for pos=-1:2
        % Calculate current tooth number
        n1p=n1+pos;
        if n1p<1; n1p=n1p+Z1; end
        if n1p>Z1; n1p=n1p-Z1; end
        n2p=n2+pos;
        if n2p<1; n2p=n2p+Z2; end
        if n2p>Z2; n2p=n2p-Z2; end

        jpenl=1; % Counter of points that penetrate
        for il = 11:-step_left:1
            r1le = f1lk(il,n1p);
            Ael = abs(f2lk(:,n2p)); numel = abs(r1le);
            [dr,kl] = min(abs(Ael-numel));
            if abs(dr) < edr
                pen(jpenl,pos+2) = f2lk(kl,n2p) - r1le;
                kpenl(jpenl,pos+2) = kl;
                ipenl(jpenl,pos+2) = il;
                jpenl=jpenl+1;
            end
        end
    end
end

% Calculation of Objective Function (Maximum penetration)
%     fobj(ja12)=min(real(pen(:)));
magpen=sign(real(pen(:,:)))*abs(pen(:,:));
fobj(ja12,:)=min(magpen(:));
%     fobj(ja12)
% Calculation of new boundaries for Center Distance
if ja12~=1 && ja12~=2
    if fobj(ja12)*fobj(ja12a)<0

```

```

        ja12b=ja12;
        a12max=a12;
    elseif fobj(ja12)*fobj(ja12b)<0
        ja12a=ja12;
        a12min=a12;
    end
end
% Check for convergence
if abs(fobj(ja12)) < eleft || ja12 > 50
    flag=true;
    error_a12=imag(a12max-a12min);
end
% Decrease step in respect to number of iterations
if ja12>15 && ja12<35 && step_left_lev==0
    step_left=ceil(step_left/2);
    step_left_lev=1;
elseif ja12>=35 && ja12<=50 && step_left_lev==1
    step_left=ceil(step_left/2);
    step_left_lev=2;
elseif ja12>50
    flag=true;
end
ja12=ja12+1;
end
epan(iter)=ja12-1;

y(iter)=(a12real(iter)-imag(a12))^2;
imag(a12);
a12p(iter)=imag(a12);
end

a12p

end

```

Κώδικας αναλυτικής προσομοίωσης μεθόδου διπλής κατατομής

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% From Simulation of Double Flank Method paper
%
% The program calculates the contact points of flanks as presented in the
% paper, for all types of contact. The system of equations is solved for
% multiple pinion angle  $\varphi_t$ . The
% non-linear system is solved with Newton-Raphson method.
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear

% Design parameters
a0degm=20; % Pressure angle in degrees - master
a0m=a0degm*pi/180; % Pressure angle in rad - master
m=2; % Gear module
Nm=55; % Master Gear teeth
Nt=60; % Testing Gear teeth
a0degtl=21; % Pressure angle in degrees - testng left flank
a0tl=a0degtl*pi/180; % Pressure angle in rad - testng left flank
a0degtr=21; % Pressure angle in degrees - testng right flank
a0tr=a0degtr*pi/180; % Pressure angle in rad - testng right flank

```

```

r0m=m*Nm/2; % Pitch circle
phi0m=tan(a0m)-a0m; % Involute function at pitch circle
t0m=m*pi; % Reference pitch
rbm=r0m*cos(a0m); % Base circle
qm=pi/2/Nm-phi0m;
rhm=r0m+m;

r0tl=m*Nt/2; % Pitch circle
phi0tl=tan(a0tl)-a0tl; % Involute function at pitch circle
t0tl=m*pi; % Reference pitch
rbtl=r0tl*cos(a0tl); % Base circle
qtl=pi/2/Nt+phi0tl; % Width of space of the master gear on the base circle
rhtl=r0tl+m;

r0tr=m*Nt/2; % Pitch circle
phi0tr=tan(a0tr)-a0tr; % Involute function at pitch circle
t0tr=m*pi; % Reference pitch
rbtr=r0tr*cos(a0tr); % Base circle
qtr=pi/2/Nt+phi0tr; % Width of space of the master gear on the base circle
rhtr=r0tr+m;

phim=0.01*pi/180;

i=0;

nod=1001;
% var=[0.2 0.2 0.2 0.2 0.0 r0m+r0tl]; % var=[ksiml, ksimr, ksitl, ksitr, phit,
C];
% ksiml=0.2; ksimr=0.2; ksitl=0.2; ksitr=0.2; thml=ksiml+qm-2*pi/Nm*i;
thmr=ksimr+qm+2*pi/Nm*i; thtl=ksitl-qtl-2*pi/Nt*i; thtr=ksitr-qtr+2*pi/Nt*i;
phit=0; C=r0m+r0tl;
% var=[ksiml ksimr ksitl ksitr thml thmr thtl thtr phit C];
% par=[rbm rbtl rbtr qm qtl qtr Nm Nt i phim];

syms ksiml ksimr ksitl ksitr phit C

% Master Left
thml=ksiml+qm-(2*pi/Nm)*i;
xml=-(rbm*sin(thml)-rbm*ksiml*cos(thml));
yml=rbm*cos(thml)+rbm*ksiml*sin(thml);
Rml=[xml yml 1]';
Nxml=diff(yml,ksiml);
Nyml=-diff(xml,ksiml);
Nabsml=sqrt(Nxml^2+Nyml^2);
nxml=Nxml/Nabsml;
nyml=Nyml/Nabsml;
nml=[nxml nyml]';

% Master Right
thmr=ksimr+qm+(2*pi/Nm)*i;
xmr=rbm*sin(thmr)-rbm*ksimr*cos(thmr);
ymr=rbm*cos(thmr)+rbm*ksimr*sin(thmr);
Rmr=[xmr ymr 1]';
Nxmr=diff(ymr,ksimr);
Nymr=-diff(xmr,ksimr);
Nabsmr=sqrt(Nxmr^2+Nymr^2);
nxmr=Nxmr/Nabsmr;

```

```

nymr=Nymr/Nabsmr;
nmr=[nxmr nymr]';

% Testing Left
thtl=ksitl-qt1-(2*pi/Nt)*i;
xtl=-(rbtl*sin(thtl)-rbtl*ksitl*cos(thtl));
ytl=rbtl*cos(thtl)+rbtl*ksitl*sin(thtl);
Rtl=[xtl ytl 1]';
% Theory of Gearing, Litvin, pp. 53
Nxtl=diff(ytl,ksitl);
Nytl=-diff(xtl,ksitl);
Nabstl=sqrt(Nxtl^2+Nytl^2);
nxtl=Nxtl/Nabstl;
nytl=Nytl/Nabstl;
ntl=[nxtl nytl]';

% Testing Right
thtr=ksitr-qtr+(2*pi/Nt)*i;
xtr=rbtr*sin(thtr)-rbtr*ksitr*cos(thtr);
ytr=rbtr*cos(thtr)+rbtr*ksitr*sin(thtr);
Rtr=[xtr ytr 1]';
Nxtr=diff(ytr,ksitr);
Nytr=-diff(xtr,ksitr);
Nabstr=sqrt(Nxtr^2+Nytr^2);
nxtr=Nxtr/Nabstr;
nytr=Nytr/Nabstr;
ntr=[nxtr nytr]';

ksistart=0; % Initialization of angle  $\xi$ 
aendtl=acos(rbtl/rhtl); % Angle  $\alpha$  of involute at tooth head
phiendtl=tan(aendtl)-aendtl; % Angle  $\phi$  of involute at tooth head
ksiendtl=aendtl+phiendtl; % Angle  $\xi$  of involute at tooth head
aendtr=acos(rbtr/rhtr); % Angle  $\alpha$  of involute at tooth head
phiendtr=tan(aendtr)-aendtr; % Angle  $\phi$  of involute at tooth head
ksiendtr=aendtr+phiendtr; % Angle  $\xi$  of involute at tooth head

guess = [0.3 0.3 0.2 0.2 phim*r0tl/r0m r0m+r0tl];
set(gcf, 'Units', 'normalized', 'OuterPosition', [0 0 1 1])
iter=1;
for phim=0:0.1*pi/180:10*pi/180
    i=0;
%     clear Mfm Mft Lfm Lft Rfml Rfmr Rftl Rftr nfml nf

%% Surface to surface contact

syms ksiml ksimr ksitl ksitr phit C

Mfm=[cos(phim) -sin(phim) 0;
      sin(phim) cos(phim) 0;
      0 0 1];
Mft=[-cos(phit) sin(phit) 0;
      -sin(phit) -cos(phit) C;
      0 0 1];
Lfm=[cos(phim) -sin(phim);
      sin(phim) cos(phim)];
Lft=[-cos(phit) sin(phit);
      -sin(phit) -cos(phit)];

```

```

Rfml=Mfm*Rml;
Rfmr=Mfm*Rmr;
Rftl=Mft*Rtl;
Rftr=Mft*Rtr;

nfml=Lfm*nml;
nfmr=Lfm*nmr;
nftl=Lft*ntl;
nftr=Lft*ntr;

f =[Rfmr(1)-Rftr(1);
    Rfmr(2)-Rftr(2);
    Rfml(1)-Rftl(1);
    Rfml(2)-Rftl(2);
    nftr(1)*nfmr(2)-nfmr(1)*nftr(2);
    nftl(1)*nfml(2)-nfml(1)*nftl(2)];

var=[ksiml ksimr ksitl ksitr phit C];
for j=1:length(f)
    for k=1:length(var)
        J(j,k)=diff(f(j),var(k));
    end
end

error=1e-6;
S=N_R_simple(guess,f,J,error);

KSIML(1)=double(S(1));
KSIMR(1)=double(S(2));
KSITL(1)=double(S(3));
KSITR(1)=double(S(4));
PHIT(1)=double(S(5));
Cc(1)=double(S(6));
ITERS(iter,1)=S(7);

%% Tip to surface Testing Left
clear f J
isvar=[1 1 0 1 1 1];

Rftl=subs(Rftl,ksitl,ksiendtl);

f =[Rfmr(1)-Rftr(1);
    Rfmr(2)-Rftr(2);
    Rfml(1)-Rftl(1);
    Rfml(2)-Rftl(2);
    nftr(1)*nfmr(2)-nfmr(1)*nftr(2)];

var=[ksiml ksimr ksitr phit C];
for j=1:length(f)
    for k=1:length(var)
        J(j,k)=diff(f(j),var(k));
    end
end

error=1e-6;
S=N_R_2s(guess,f,J,error,isvar);

KSIML(2)=double(S(1));

```

```

KSIMR(2)=double(S(2));
KSITL(2)=ksiendtl;
KSITR(2)=double(S(3));
PHIT(2)=double(S(4));
Cc(2)=double(S(5));
ITERS(iter,2)=S(6);

%% Tip to surface Testing Right
clear f J
isvar=[1 1 1 0 1 1];

Rftr=subs(Rftr,ksitr,ksiendtr);

f =[Rfmr(1)-Rftr(1);
    Rfmr(2)-Rftr(2);
    Rfml(1)-Rftl(1);
    Rfml(2)-Rftl(2);
    nftl(1)*nfml(2)-nfml(1)*nftl(2)];

var=[ksiml ksimr ksitl phit C];
for j=1:length(f)
    for k=1:length(f)
        J(j,k)=diff(f(j),var(k));
    end
end

error=1e-6;
S=N_R_2s(guess,f,J,error,isvar);

KSIML(3)=double(S(1));
KSIMR(3)=double(S(2));
KSITL(3)=double(S(3));
KSITR(3)=ksiendtr;
PHIT(3)=double(S(4));
Cc(3)=double(S(5));
ITERS(iter,3)=S(6);

%% Tip to surface both Testing flanks

clear f J
isvar=[1 1 0 0 1 1];

Rftl=subs(Rftl,ksitl,ksiendtl);
Rftr=subs(Rftr,ksitr,ksiendtr);

f =[Rfmr(1)-Rftr(1);
    Rfmr(2)-Rftr(2);
    Rfml(1)-Rftl(1);
    Rfml(2)-Rftl(2)];

var=[ksiml ksimr phit C];
for j=1:length(f)
    for k=1:length(f)
        J(j,k)=diff(f(j),var(k));
    end
end

error=1e-6;
S=N_R_2s(guess,f,J,error,isvar);

```

```

KSIML(4)=double(S(1));
KSIMR(4)=double(S(2));
KSITL(4)=ksiendtl;
KSITR(4)=ksiendtr;
PHIT(4)=double(S(3));
Cc(4)=double(S(4));
ITERS(iter,4)=S(5);

[C,cm] = max(Cc)
ksiml=KSIML(cm);
ksimr=KSIMR(cm);
ksitl=KSITL(cm);
ksitr=KSITR(cm);
phit=PHIT(cm);

thmls=ksiml+qm-2*pi/Nm*i;
xsl=-(rbm.*sin(thmls)-rbm.*ksiml.*cos(thmls));
ysl=rbm.*cos(thmls)+rbm.*ksiml.*sin(thmls);
xfsl=cos(phim)*xsl-sin(phim)*ysl;
yfsl=sin(phim)*xsl+cos(phim)*ysl;

thmrs=ksimr+qm+2*pi/Nm*i;
xsr=rbm.*sin(thmrs)-rbm.*ksimr.*cos(thmrs);
ysr=rbm.*cos(thmrs)+rbm.*ksimr.*sin(thmrs);
xfsr=cos(phim)*xsr-sin(phim)*ysr;
yfsr=sin(phim)*xsr+cos(phim)*ysr;

ksistart=0; % Initialization of angle ξ
aend=acos(rbm/rhm); % Angle α of involute at tooth head
phiend=tan(aend)-aend; % Angle φ of involute at tooth head
ksiend=aend+phiend; % Angle ξ of involute at tooth head
ksimlp=(linspace(ksistart,ksiend,nod))';
for i=1:Nm
    thmlp(:,i)=ksimlp+qm-2*pi/Nm*i;
    xmlp(:,i)=-(rbm.*sin(thmlp(:,i))-rbm.*ksimlp.*cos(thmlp(:,i)));
    ymlp(:,i)=rbm.*cos(thmlp(:,i))+rbm.*ksimlp.*sin(thmlp(:,i));
    xfmpl(:,i)=cos(phim)*xmlp(:,i)-sin(phim)*ymlp(:,i);
    yfmpl(:,i)=sin(phim)*xmlp(:,i)+cos(phim)*ymlp(:,i);
end
ksimrp=(linspace(ksistart,ksiend,nod))';
for i=1:Nm
    thmrp(:,i)=ksimrp+qm+2*pi/Nm*i;
    xmrp(:,i)=rbm.*sin(thmrp(:,i))-rbm.*ksimrp.*cos(thmrp(:,i));
    ymrp(:,i)=rbm.*cos(thmrp(:,i))+rbm.*ksimrp.*sin(thmrp(:,i));
    xfmrp(:,i)=cos(phim)*xmrp(:,i)-sin(phim)*ymrp(:,i);
    yfmrp(:,i)=sin(phim)*xmrp(:,i)+cos(phim)*ymrp(:,i);
end

ksistart=0; % Initialization of angle ξ
aend=acos(rbtl/rhtl); % Angle α of involute at tooth head
phiend=tan(aend)-aend; % Angle φ of involute at tooth head
ksiend=aend+phiend; % Angle ξ of involute at tooth head
ksitlp=(linspace(ksistart,ksiend,nod))';
for i=1:Nt
    thtlp(:,i)=ksitlp-qt-2*pi/Nt*i;
    xtlp(:,i)=-(rbtl.*sin(thtlp(:,i))-rbtl.*ksitlp.*cos(thtlp(:,i)));
    ytlp(:,i)=rbtl.*cos(thtlp(:,i))+rbtl.*ksitlp.*sin(thtlp(:,i));
    xftlp(:,i)=-cos(phit)*xtlp(:,i)+sin(phit)*ytlp(:,i);
    yftlp(:,i)=-sin(phit)*xtlp(:,i)-cos(phit)*ytlp(:,i)+C;
end

```



```

ksistart=0; % Initialization of angle  $\xi$ 
aend=acos(rbtr/rhtr); % Angle  $\alpha$  of involute at tooth head
phiend=tan(aend)-aend; % Angle  $\varphi$  of involute at tooth head
ksiend=aend+phiend; % Angle  $\xi$  of involute at tooth head
ksitrp=(linspace(ksistart,ksiend,nod))';
for i=1:Nt
    thtrp(:,i)=ksitrp-qtr+2*pi/Nt*i;
    xtrp(:,i)=rbtr.*sin(thtrp(:,i))-rbtr.*ksitrp.*cos(thtrp(:,i));
    ytrp(:,i)=rbtr.*cos(thtrp(:,i))+rbtr.*ksitrp.*sin(thtrp(:,i));
    xftrp(:,i)=-cos(phit)*xtrp(:,i)+sin(phit)*ytrp(:,i);
    yftrp(:,i)=-sin(phit)*xtrp(:,i)-cos(phit)*ytrp(:,i)+C;
end

arc_plot=-30:1:30;
% Base cycle
thbs=arc_plot;
thbs=thbs.*pi./180;
ybsm=rbm.*cos(thbs);
xbsm=rbm.*sin(thbs);
% Head cycle
thh=arc_plot;
thh=thh.*pi./180;
yhm=rhm.*cos(thh);
xhm=rhm.*sin(thh);
figure(1)
plot(xbsm,ybsm,'--b')
hold on
plot(xfmlp,yfmlp,'b')
plot(xfmrp,yfmrp,'b')
plot(xhm,yhm,'--b')
plot(xfmlp(:,Nm),yfmlp(:,Nm),'g')
plot(xfmrp(:,Nm),yfmrp(:,Nm),'g')
axis equal
grid on
% Base cycle
thbs=arc_plot;
thbs=thbs.*pi./180;
ybstr=-rbtr.*cos(thbs)+C;
xbstr=rbtr.*sin(thbs);
% Head cycle
thh=arc_plot;
thh=thh.*pi./180;
yhtr=-rhtr.*cos(thh)+C;
xhtr=rhtr.*sin(thh);
plot(xbstr,ybstr,'--r')
plot(xftlp,yftlp,'r')
plot(xftrp,yftrp,'r')
plot(xhtr,yhtr,'--r')
plot(xftlp(:,Nt),yftlp(:,Nt),'g')
plot(xftrp(:,Nt),yftrp(:,Nt),'g')
plot([xfsl xfsr],[yfsl yfsr],'og')
limits=[xbstr(1) xbstr(length(xbstr)) ybsm(1) ybstr(1)];
axis(limits)

F(iter)=getframe(gcf);
hold off

figure(2)
Da12(iter)=(C-(r0m+r0t1))*1e3;
thetal(iter)=phim;

```

```

plot(theta1, Da12);
F2(iter)=getframe(gcf);

guess=[ksiml ksimr ksitl ksitr phim*r0tl/r0m C];
iter=iter+1
end

ksiendv=ksiend; % Angle  $\xi$  of involute at tooth head
ksimlv=(linspace(ksistart,ksiendv,nod))';
thmlv=ksimlv+qm-2*pi/Nm*i;
xmlv=-(rbm.*sin(thmlv)-rbm.*ksimlv.*cos(thmlv));
ymlv=rbm.*cos(thmlv)+rbm.*ksimlv.*sin(thmlv);
xfmlv=cos(phim)*xmlv-sin(phim)*ymlv;
yfmlv=sin(phim)*xmlv+cos(phim)*ymlv;

ksimrv=(linspace(ksistart,ksiendv,nod))';
thmrv=ksimrv+qm+2*pi/Nm*i;
xmrsv=rbm.*sin(thmrv)-rbm.*ksimrv.*cos(thmrv);
ymrv=rbm.*cos(thmrv)+rbm.*ksimrv.*sin(thmrv);
xfmrv=cos(phim)*xmrsv-sin(phim)*ymrv;
yfmrv=sin(phim)*xmrsv+cos(phim)*ymrv;

ksitlv=(linspace(ksistart,ksiendv,nod))';
thtlv=ksitlv-qt1-2*pi/Nt*i;
xtlv=-(rbtl.*sin(thtlv)-rbtl.*ksitlv.*cos(thtlv));
ytlv=rbtl.*cos(thtlv)+rbtl.*ksitlv.*sin(thtlv);
xftlv=-cos(phit)*xtlv+sin(phit)*ytlv;
yftlv=-sin(phit)*xtlv-cos(phit)*ytlv+C;

ksitrsv=(linspace(ksistart,ksiendv,nod))';
thtrsv=ksitrsv-qt1+2*pi/Nt*i;
xtrsv=rbtr.*sin(thtrsv)-rbtr.*ksitrsv.*cos(thtrsv);
ytrsv=rbtr.*cos(thtrsv)+rbtr.*ksitrsv.*sin(thtrsv);
xftrsv=-cos(phit)*xtrsv+sin(phit)*ytrsv;
yftrsv=-sin(phit)*xtrsv-cos(phit)*ytrsv+C;

```

