



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Το Αντίστροφο Πρόβλημα της Εύρεσης
του Σχήματος Κοιλοτήτων και
Εγκλεισμάτων στη Στατική και
Δυναμική Γραμμική Ελαστικότητα

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΤΟΥ

ΛΕΩΝΙΔΑ Ι. ΜΗΝΔΡΙΝΟΥ

Μαθηματικού

Αθήνα, Ιούλιος 2011



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Το Αντίστροφο Πρόβλημα της Εύρεσης του
Σχήματος Κοιλοτήτων και Εγκλεισμάτων στη
Στατική και Δυναμική Γραμμική Ελαστικότητα

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

του

ΛΕΩΝΙΔΑ Ι. ΜΗΝΔΡΙΝΟΥ

Μαθηματικού

Συμβουλευτική Επιτροπή: Δ. Γκιντίδης (Επιβλέπων)
Κ. Κυριάκη
Α. Χαραλαμπίδης

Εγκρίθηκε από την επταμελή εξεταστική επιτροπή την 4^η Ιουλίου 2011.

Δ. Γκιντίδης

Κ. Κυριάκη

Α. Χαραλαμπίδης

Επικ. Καθηγητής Ε.Μ.Π. Καθηγήτρια Ε.Μ.Π.

Καθηγητής Παν. Ιωαννίνων

Επιβλέπων

Μέλος Τριμελούς

Μέλος Τριμελούς

Χ. Αθανασιάδης

Β. Παπανικολάου

Δ. Τζανετής

Καθηγητής Ε.Κ.Π.Α.

Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Κ. Χρυσάφινος

Επικ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

ΛΕΩΝΙΔΑΣ Ι. ΜΗΝΔΡΙΝΟΣ

Διδάκτωρ Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών Ε.Μ.Π.

© 2011 - All rights reserved

Περίληψη

Στην παρούσα διατριβή εξετάζουμε το αντίστροφο πρόβλημα εύρεσης της θέσης και του σχήματος ενός εμποδίου στη στατική και δυναμική γραμμική ελαστικότητα. Το πρόβλημα θεωρείται στον \mathbb{R}^2 και το εμπόδιο επιλέγεται να είναι σκληρό (άκαμπτο), κοιλότητα ή έγκλεισμα τοποθετημένο σε ένα ισότροπο και ομογενές ελαστικό μέσο. Το αντίστροφο πρόβλημα επιλύεται, για όλες τις περιπτώσεις εμποδίων, με τη μέθοδο των μη γραμμικών ολοκληρωτικών εξισώσεων που προτάθηκε από τους Kress και Rundell [56] για την εξίσωση του Laplace. Η μέθοδος βασίζεται στην ολοκληρωτική αναπαράσταση των πεδίων. Το πρόβλημα μετατρέπεται σε ένα ισοδύναμο σύστημα ολοκληρωτικών εξισώσεων το οποίο είναι μη γραμμικό ως προς το παραμετροποιημένο σύνορο του εμποδίου και μη καλά τοποθετημένο. Η γραμμικοποίηση των εξισώσεων γίνεται με τη χρήση Fréchet παραγώγων των ολοκληρωτικών τελεστών. Για να αντιμετωπίσουμε τη μη καλή τοποθέτηση του συστήματος, το επιλύουμε προσεγγιστικά μέσω της μεθόδου ομαλοποίησης Tikhonov. Οι ασθενώς ιδιόμορφοι, ιδιόμορφοι και ισχυρά ιδιόμορφοι ολοκληρωτικοί τελεστές υπολογίζονται αριθμητικά με τη βοήθεια ειδικών μεθόδων συνδιάταξης και κανόνων τετραγωνισμού. Η αριθμητική λύση επιτυγχάνεται μέσω επαναληπτικής διαδικασίας και η σύγκλιση της μεθόδου εξαρτάται από την αρχική πρόβλεψη για τη θέση και το σχήμα του εμποδίου. Τα αριθμητικά αποτελέσματα καθώς και οι ανακατασκευές του συνόρου αποδεικνύουν την αποτελεσματικότητα της μεθόδου.

Abstract

In this thesis, the inverse problem of determining the position and the shape of an obstacle in static and dynamic linear elasticity is considered. The problem is stated in \mathbb{R}^2 and the obstacle is a rigid body, a cavity or an inclusion in a homogeneous and isotropic elastic medium. The inverse problem is solved, for all types of obstacles, using the method of non linear integral equations proposed by Kress and Rundell [56] for Laplace equation. This method is derived from the integral representation of the fields. The problem is equivalently transformed into a system of integral equations which is non linear with respect to the parametrized boundary and ill-posed. The linearization of the equations is performed using Fréchet derivatives of the integral operators. To overcome the ill-posedness of the system we approximately solve it via Tikhonov regularization. The weakly singular, singular and strongly singular integral operators are computed using special collocation and quadrature rules. The numerical solution is achieved via an iterative algorithm based on an initial guess for the boundary. Numerical examples and reconstructions are given to illustrate the applicability of the method.

*Στους γονείς μου, Γιάννη και Ελένη
και στον αδελφό μου Αλέξανδρο.*

Ευχαριστίες

Σ' αυτό το σημείο θα ήθελα να ευχαριστήσω όσους με βοήθησαν στην παρούσα εργασία αλλά και κατά τη διάρκεια των σπουδών μου.

Αρχικά θέλω να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον κ. Δρόσο Γκιντίδη, Επίκουρο Καθηγητή Ε.Μ.Π., για τη σημαντική βοήθεια που μου παρείχε καθ' όλη τη διάρκεια των μεταπτυχιακών σπουδών μου. Η ολοκλήρωση της εργασίας οφείλεται κατά μεγάλο βαθμό στην ουσιαστική και συνεχή καθοδήγηση του, στις συμβουλές και στις εύστοχες παρατηρήσεις του. Ευχαριστώ για την άψογη και παράλληλα ευχάριστη συνεργασία μας.

Θα ήθελα ακόμη να ευχαριστήσω την κ. Κυριακή Κυριάκη, Καθηγήτρια Ε.Μ.Π., που με παρότρυνε να ασχοληθώ με τα αντίστροφα προβλήματα και για τη βοήθεια που μου παρείχε όποτε αυτή της ζητήθηκε. Οι συμβουλές της ήταν σημαντικές και ιδιαίτερα χρήσιμες.

Επιπλέον θέλω να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στον κ. Αντώνη Χαραλαμπίδου, Καθηγητή στο Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, για τις συμβουλές που μου παρείχε.

Επίσης ευχαριστώ θερμά τον κ. Σωτήρη Καρανάσιο, Καθηγητή Ε.Μ.Π., διότι μου έδωσε το έναυσμα να ασχοληθώ με την επιστήμη των μαθηματικών και για τη συνεχή ενθάρρυνση κατά τη διάρκεια των σπουδών μου.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου Γιάννη και Ελένη και τον αδελφό μου Αλέξανδρο για την αμέριστη συμπαράσταση και την αγάπη που μου δείχνουν.

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	7
2	Ευθέα προβλήματα	17
2.1	Η φασματική εξίσωση Navier	18
2.2	Τανυστές Green ελεύθερου χώρου	20
2.3	Δυναμικά απλού και διπλού στρώματος	24
2.4	Ολοκληρωτικές εξισώσεις	26
2.4.1	Σκληρό εμπόδιο	30
2.4.2	Κοιλότητα	32
2.4.3	Έγκλεισμα	35
2.5	Πλάτη σκέδασης για το δυναμικό πρόβλημα	38
3	Αντίστροφα προβλήματα	41
3.1	Σκληρό εμπόδιο	43
3.2	Κοιλότητα	52
3.3	Έγκλεισμα	57
4	Επαναληπτική αριθμητική μέθοδος	61
4.1	Σκληρό εμπόδιο	63
4.2	Κοιλότητα	68
4.3	Έγκλεισμα	69
4.4	Μέθοδος ομαλοποίησης Tikhonov	71
4.5	Η μέθοδος Newton για το δυναμικό πρόβλημα	72

5	Αριθμητική επίλυση ευθέων και αντίστροφων προβλημάτων	83
5.1	Ευθέα προβλήματα	85
5.1.1	Σκληρό εμπόδιο	86
5.1.2	Κοιλότητα	87
5.1.3	Έγκλεισμα	88
5.1.4	Έλεγχος δεδομένων από τα ευθέα προβλήματα	89
5.2	Αντίστροφα προβλήματα	91
5.2.1	Σκληρό εμπόδιο	93
5.2.2	Κοιλότητα	99
5.2.3	Έγκλεισμα	102
6	Συμπεράσματα και προοπτικές για μελλοντική έρευνα	107
A'	Υπολογισμός πυρήνων ολοκληρωτικών τελεστών	117
A'.1	Τελεστής ($S\varphi$)	117
A'.2	Τελεστής ($K\varphi$)	118
A'.3	Τελεστής τάσης ($L\varphi$)	123

Κατάλογος Σχημάτων

2.1	Σκληρός σχεδαστής	30
2.2	Σκληρό εμπόδιο	32
2.3	Έγκλεισμα	35
3.1	Χωρίο D_2^*	44
5.1	Σύγκριση πλατών σκέδασης για σκληρό σχεδαστή.	91
5.2	Ανακατασκευή συνόρου σκληρού σχεδαστή, χωρίς θόρυβο (αριστερά) και 5% (δεξιά).	94
5.3	Ανακατασκευή συνόρου σκληρού σχεδαστή, χωρίς θόρυβο (αριστερά) και 4% (δεξιά).	95
5.4	Μεταβολή παραμέτρων Lamé : $\lambda (1\alpha) - (1\gamma)$ και $\mu (2\alpha) - (2\gamma)$	96
5.5	Εφαρμογή συνθήκης τοπικής μοναδικότητας.	97
5.6	Ανακατασκευή συνόρου σκληρού εμποδίου, χωρίς θόρυβο (αριστερά) και 6% (δεξιά).	98
5.7	Ανακατασκευή συνόρου κοιλότητας (δυναμικό), χωρίς θόρυβο (αριστερά) και 6% (δεξιά).	100
5.8	Ανακατασκευή συνόρου κοιλότητας (δυναμικό), χωρίς θόρυβο (αριστερά) και 4% (δεξιά).	101
5.9	Ανακατασκευή συνόρου κοιλότητας (στατικό), χωρίς θόρυβο (αριστερά) και 5% (δεξιά).	102
5.10	Ανακατασκευή συνόρου εγκλείσματος, χωρίς θόρυβο (αριστερά) και 6% (δεξιά).	104

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Το αντίστροφο πρόβλημα που επιλύουμε στην παρούσα εργασία αφορά στην εύρεση του σχήματος και της θέσης ενός εμποδίου δεδομένης της γνώσης του πεδίου μετατοπίσεων κοντά ή μακριά από το εμπόδιο. Στη στατική γραμμική ελαστικότητα, δεδομένα κοντά στο εμπόδιο θεωρούνται οι τιμές του πεδίου μετατοπίσεων στο εξωτερικό σύνορο του εμποδίου. Αντίθετα στη δυναμική γραμμική ελαστικότητα, δεδομένα μακριά από το εμπόδιο - σχεδαστή χαρακτηρίζουμε τα πλάτη σκέδασης του σκεδαζόμενου πεδίου.

Το εμπόδιο είναι τοποθετημένο μέσα σε ένα ισότροπο και ομογενές ελαστικό μέσο στον χώρο \mathbb{R}^2 , το οποίο καθορίζεται από τις σταθερές Lamé λ και μ που ικανοποιούν τις συνθήκες $\mu > 0$ και $\lambda + \mu > 0$. Στο εξής το εμπόδιο συμβολίζεται με D και το σύνορο του με Γ . Σ' αυτή την εργασία εξετάζουμε το αντίστροφο πρόβλημα για τρεις περιπτώσεις εμποδίων, αυτές είναι

- **Σκληρό εμπόδιο.** Στο σύνορο του είναι αδύνατες οι τοπικές μετατοπίσεις και για να εξασφαλιστεί η συνέχεια του πεδίου μετατοπίσεων πρέπει η συνοριακή συνθήκη να εξασφαλίζει τον μηδενισμό του πεδίου πάνω στο σύνορο.
- **Κοιλότητα.** Μια περιοχή μέσα στο ελαστικό μέσο όπου δεν μηδενίζεται το πεδίο αλλά η επιφανειακή τάση στο σύνορό της.
- **Έγκλεισμα.** Εξετάζεται μόνο στο δυναμικό πρόβλημα και σ' αυτή την περίπτωση έχουμε κυματική διάδοση και μέσα στον σχεδαστή. Οι συνοριακές συν-

θήκες που πρέπει να ικανοποιούνται είναι η συνεχής μεταβολή του πεδίου των μετατοπίσεων και του πεδίου των τάσεων διαμέσου του συνόρου του διαπερατού σκεδαστή.

Όσον αφορά στην ομαλότητα του συνόρου δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.0.1. Ένα φραγμένο και συνεκτικό χωρίο $D \subset \mathbb{R}^2$ με σύνορο Γ καλείται C^m -τάξης (ή το σύνορο του C^m -τάξης), $m \in \mathbb{N}$, αν για κάθε $x \in \Gamma$ υπάρχει μια περιοχή V_x του x ώστε να ισχύουν [17]

1. Το σύνολο $V_x \cap \bar{D}$ μπορεί να απεικονιστεί “1-1” και επί στο μισό δίσκο $\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, x_2 \geq 0\}$ και η απεικόνιση αυτή και η αντίστροφη της είναι m φορές συνεχώς παραγωγίσιμες και
2. το σύνολο $V_x \cap \Gamma$ απεικονίζεται στο διάστημα $\{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, x_2 = 0\}$.

Για τη διερεύνηση του αντίστροφου προβλήματος πρέπει πρώτα να εξετάσουμε το αντίστοιχο ευθύ πρόβλημα. Η καλή τοποθέτηση των ευθέων προβλημάτων κατά Hadamard απαιτεί

- ύπαρξη λύσης,
- μοναδικότητα λύσης,
- ευστάθεια λύσης, δηλαδή μικρές διαταραχές στις συνοριακές συνθήκες επιφέρουν μικρές διαταραχές στη λύση.

Για το δυναμικό πρόβλημα, θεωρούμε ότι το D είναι απλά συνεκτικό χωρίο στον \mathbb{R}^2 με C^2 -τάξης σύνορο Γ . Το εμπόδιο - σκεδαστής βρίσκεται μέσα στον χώρο διάδοσης και προκαλεί ασυνέχειες στο διαδιδόμενο κύμα. Ελαστικό κύμα είναι ένα διανυσματικό πεδίο u που εκφράζει την τοπική μετατόπιση του σημείου από τη θέση ισορροπίας. Συμβολίζουμε με u_p^{inc} το κυματικό ελαστικό πεδίο μετατοπίσεων (προσπίπτον κύμα) που προσπίπτει πάνω στον σκεδαστή, το οποίο παριστάνει ένα διαμήκες κύμα της μορφής

$$u_p^{inc}(x) = d e^{ik_p x \cdot d}, \quad (1.1)$$

όπου d είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κατά τη διεύθυνση διάδοσης ή παριστάνει ένα εγκάρσιο κύμα της μορφής

$$u_s^{inc}(x) = -Qd e^{ik_s x \cdot d}, \quad (1.2)$$

όπου Q ο μοναδιαίος πίνακας

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Επίσης οι κυματάρθρωμοι k_p και k_s δίνονται από τις σχέσεις

$$k_p^2 := \frac{\rho\omega^2}{\lambda + 2\mu}, \quad k_s^2 := \frac{\rho\omega^2}{\mu}, \quad (1.4)$$

όπου ρ η πυκνότητα του μέσου και ω η κυκλική συχνότητα. Σκεδαζόμενο κύμα είναι το πεδίο που δημιουργείται από την πρόσπτωση του u^{inc} στο D και συμβολίζεται με u^{sc} . Το κύμα αυτό διαδίδεται προς όλες τις κατευθύνσεις και αναλύεται κατά Helmholtz σε

$$u^{sc} = u_p^{sc} + u_s^{sc}, \quad (1.5)$$

όπου

$$\nabla \times u_p^{sc} = 0, \quad \nabla \cdot u_s^{sc} = 0. \quad (1.6)$$

Το πεδίο u_p ορίζει τα διαμήκη κύματα (P -κύματα) με κυματάρθρωμο k_p , ενώ το πεδίο u_s ορίζει τα εγκάρσια κύματα (S -κύματα) με κυματάρθρωμο k_s . Επίσης ορίζουμε το συνολικό πεδίο μετατοπίσεων u^{tot} ως

$$u^{tot} = u^{inc} + u^{sc}. \quad (1.7)$$

Το ευθύ πρόβλημα ορίζεται ως η εύρεση του u^{sc} από τη γνώση του D , θέσης και συνοριακές συνθήκες, και του u^{inc} . Τα ευθέα προβλήματα σκέδασης ελαστικού κύματος από σκληρό σκεδαστή ή κοιλότητα είναι εξωτερικά προβλήματα της φασματικής εξίσωσης Navier

$$(\Delta^* + \rho\omega^2) u = 0, \quad (1.8)$$

όπου Δ^* είναι ο τελεστής Navier και δίνεται από τη σχέση

$$\Delta^* = \mu\Delta + (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot). \quad (1.9)$$

Για το πρόβλημα σκέδασης από σκληρό σκεδαστή πρέπει να ικανοποιούνται Dirichlet συνοριακές συνθήκες

$$u^{tot} = 0, \text{ στο } \Gamma, \quad (1.10)$$

ενώ για κοιλότητα, Neumann συνοριακές συνθήκες

$$Tu^{tot} = 0, \text{ στο } \Gamma. \quad (1.11)$$

Με T συμβολίζουμε τον τελεστή επιφανειακών τάσεων

$$Tu := \lambda(\nabla \cdot u)\nu + 2\mu(\nu \cdot \nabla u) + \mu(\nabla \cdot (Qu))Q\nu, \quad (1.12)$$

όπου ν το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο σύνορο Γ με κατεύθυνση προς το εξωτερικό του D . Λόγω πολυπλοκότητας, το ευθύ πρόβλημα σκέδασης από έγκλεισμα αναλύεται στο επόμενο κεφάλαιο. Η καλή τοποθέτηση των ευθέων προβλημάτων σκέδασης εξασφαλίζεται από την ομαλότητα του συνόρου και τη συμπεριφορά του u^{sc} μακριά από τον σκεδαστή. Για την ασυμπτωτική συμπεριφορά του u^{sc} στο άπειρο πρέπει να αποκλείσουμε την ύπαρξη στάσιμων κυμάτων. Αυτό προκύπτει θεωρώντας αναγκαία την ικανοποίηση των συνθηκών ακτινοβολίας του Kupradze [59]

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u_j^{sc} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial u_j^{sc}}{\partial r} - ik_j u_j^{sc} \right) = 0, \quad \text{για } j = p, s \quad (1.13)$$

όπου $r = |x|$ και τα όρια θεωρούνται ομοιόμορφα προς όλες τις διευθύνσεις. Απ' αυτές τις συνθήκες εξασφαλίζεται η ασυμπτωτική συμπεριφορά ενός σφαιρικά εκτεινόμενου κύματος

$$u_j^{sc}(x) = \frac{e^{ik_j|x|}}{\sqrt{|x|}} \left\{ u_j^\infty(\hat{x}) + O\left(\frac{1}{|x|}\right) \right\}, \quad \text{για } j = p, s \quad (1.14)$$

καθώς το $|x| \rightarrow \infty$ ομοιόμορφα προς όλες τις διευθύνσεις $\hat{x} = x/|x|$. Τα διανυσματικά πεδία u_j^∞ ορίζονται στον μοναδιαίο κύκλο Ω και καλούνται πλάτη σκέδασης του u^{sc} . Επιπλέον, από το Λήμμα του Rellich 2.5.1 [17], προσδιορίζουν μοναδικά το u^{sc} . Στο εξής συμβολίζουμε με u^∞ το ζεύγος των πλατών σκέδασης $(u_p^\infty(\hat{x}), u_s^\infty(\hat{x}))$.

Για το στατικό πρόβλημα, οριακή περίπτωση του δυναμικού για $\omega = 0$, θεωρούμε ότι το D είναι διπλά συνεκτικό χωρίο στον \mathbb{R}^2 με ομαλό σύνορο Γ το οποίο αποτελείται από δύο κλειστές καμπύλες Γ_1 και Γ_2 , τέτοιες ώστε: $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ και η

Γ_1 να είναι εσωτερική της Γ_2 . Το ευθύ πρόβλημα συνίσταται στην εύρεση του πεδίου μετατοπίσεων u , το οποίο ικανοποιεί την ελαστοστατική εξίσωση Navier

$$\Delta^* u = 0 \quad (1.15)$$

και συνοριακές συνθήκες ανάλογα με το εμπόδιο. Για σκληρό εμπόδιο πρέπει να ικανοποιούνται Dirichlet συνοριακές συνθήκες

$$u = 0, \text{ στο } \Gamma_1, \quad (1.16)$$

$$u = f, \text{ στο } \Gamma_2, \quad (1.17)$$

ενώ για κοιλότητα, Neumann συνοριακές συνθήκες

$$Tu = 0, \text{ στο } \Gamma_1, \quad (1.18)$$

$$Tu = g, \text{ στο } \Gamma_2. \quad (1.19)$$

Οι συναρτήσεις f, g θεωρούνται γνωστές. Τα αντίστροφα προβλήματα που εξετάζουμε ορίζονται ως εξής:

- **Δυναμικό πρόβλημα.** Δεδομένου των πλατών σκέδασης u^∞ για ένα προσπίπτον κύμα u^{inc} και των συνοριακών συνθηκών του D , αναζητούμε τη θέση και το σχήμα του σκεδαστή, δηλαδή να ανακατασκευάσουμε το σύνορο Γ .
- **Στατικό πρόβλημα.** Δοσμένων των δεδομένων Cauchy, πεδία μετατοπίσεων και τάσεων στο σύνορο Γ_2 (γνωστών ή μετρήσιμων), αναζητούμε το σχήμα του συνόρου Γ_1 .

Αυτά τα προβλήματα είναι μη γραμμικά λόγω της μη γραμμικής εξάρτησης των πεδίων από το σύνορο Γ , καθώς επίσης και μη καλά τοποθετημένα γιατί μικρές διαταραχές στα δεδομένα προκαλούν μεγάλα σφάλματα στη λύση τους. Για να αντιμετωπίσουμε τη μη γραμμικότητα κάνουμε χρήση Fréchet παραγώγων των ολοκληρωτικών τελεστών. Όσον αφορά στη μη καλή τοποθέτηση των αντίστροφων προβλημάτων αναζητούμε προσεγγιστική λύση μέσω της μεθόδου ομαλοποίησης Tikhonov ώστε να εξασφαλιστεί η ευστάθεια της λύσης. Για την αριθμητική επίλυση αυτών των προβλημάτων υπάρχουν αρκετές αριθμητικές μέθοδοι. Αυτές χωρίζονται κυρίως σε τρεις κατηγορίες:

- **Επαναληπτικές μέθοδοι.** Βασίζονται στη μέθοδο Newton και μετατρέπουν το αντίστροφο πρόβλημα σε μια μη καλά τοποθετημένη ολοκληρωτική εξίσωση η οποία γραμμικοποιείται και επιλύεται με μεθόδους ομαλοποίησης. Ενδεικτικά αναφέρουμε το βιβλίο [17] και την εργασία [52].
- **Μέθοδοι αποσύνθεσης (decomposition).** Διαχωρίζουν το αντίστροφο πρόβλημα σε ένα μη καλά τοποθετημένο γραμμικό πρόβλημα εύρεσης του πεδίου και στη συνέχεια από τις συνοριακές συνθήκες υπολογίζεται το άγνωστο σύνορο του εμποδίου. Χαρακτηριστικά αναφέρουμε τη μέθοδο των Kirsch και Kress [47, 48].
- **Μέθοδοι δειγματοληψίας (sampling).** Βασίζονται στον ορισμό μιας δείκτης συνάρτησης που ελέγχει πότε ένα σημείο βρίσκεται μέσα ή έξω από το εμπόδιο. Τέτοιες μέθοδοι είναι: η απλή δειγματική μέθοδος (linear sampling) των Colton και Kirsch [15], η μέθοδος παραγοντοποίησης (factorization) του Kirsch [46] και η μέθοδος βολιδοσκόπησης (probe) του Ikehata [36]. Οι μέθοδοι αυτές απαιτούν πλήρη γνώση των πεδίων για όλες τις δυνατές προσπτώσεις ή διεγέρσεις.

Πρόσφατα εμφανίστηκαν δύο νέες μέθοδοι που συνδυάζουν στοιχεία από τις δύο πρώτες κατηγορίες που προαναφέραμε. Το πλεονέκτημα τους είναι ότι δεν χρειάζεται η επίλυση του ευθέως προβλήματος σε κάθε βήμα της επαναληπτικής διαδικασίας. Η πρώτη προτάθηκε από τον Kress [55] και καλείται υβριδική (hybrid) καθώς συνδυάζει στοιχεία από δύο κατηγορίες μεθόδων. Αυτή η μέθοδος αναλύθηκε περαιτέρω και εφαρμόστηκε σε αντίστροφα προβλήματα σκέδασης από ρωγμές και σκεδαστές σε ακουστικά μέσα από τους Kress και Serranho [57, 58, 68].

Η δεύτερη μέθοδος παρουσιάστηκε από τους Kress και Rundell [56] και εφαρμόστηκε για τον εντοπισμό ενός διπλά συνεκτικού χωρίου μέσα σε ένα τέλεια αγωγίμο ομογενές μέσο. Ακολούθησε η εργασία του Rundell [67] που επαλήθευσε τα ικανοποιητικά αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν στην πρώτη εργασία των δύο. Η μέθοδος βασίζεται στην επίλυση μη γραμμικών ολοκληρωτικών εξισώσεων, οι οποίες

προκύπτουν από τους τύπους του Green. Ένα ακόμη πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου σε σχέση με τις επαναληπτικές μεθόδους τύπου Newton είναι ότι οι παράγωγοι των ολοκληρωτικών τελεστών ως προς το άγνωστο σύνορο είναι και αυτές ολοκληρωτικοί τελεστές και υπολογίζονται αναλυτικά. Αυτή η μέθοδος έχει εφαρμοστεί από τους Ivanyshyn και Kress [38, 39] για την επίλυση του αντίστροφου προβλήματος εύρεσης εγκλεισμάτων και επίπεδων ρωγμών σε ακουστικά μέσα. Επίσης, από τους Eckel και Kress [21, 22] σε αντίστροφα προβλήματα ηλεκτρικής αντίστασης, για την εξίσωση Stokes στον \mathbb{R}^2 [2] και στον εντοπισμό μη προσβάσιμου συνόρου απλά συνεκτικού χωρίου από την εφαρμογή ρεύματος στο προσβάσιμο σύνορο [8].

Στη γραμμική ελαστικότητα, τα αντίστροφα προβλήματα εύρεσης του σχήματος και της θέσης ενός εμποδίου έχουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον λόγω του ότι μοντελοποιούν πολλά γεωμετρικά και φυσικά προβλήματα προσδιορισμού ελαστικών αντικειμένων. Για μια εκτεταμένη αναφορά των αντίστροφων προβλημάτων στην ελαστικότητα αναφέρουμε την εργασία [6]. Το αντίστροφο πρόβλημα εύρεσης ρωγμής σε ελαστικό μέσο έχει λυθεί με την μέθοδο Newton [51]. Για τον εντοπισμό σκληρού σχεδαστή και κοιλότητας έχει εφαρμοστεί η απλή δειγματική μέθοδος στον \mathbb{R}^2 από τον Arens [5] και στον \mathbb{R}^3 από τους Γκιντιδή και Κυριάκη [25]. Επίσης έχει εφαρμοστεί και σε αντίστροφα προβλήματα σκέδασης από έγκλεισμα και μη διαπερατό σχεδαστή στον \mathbb{R}^3 [12, 13]. Η μέθοδος παραγοντοποίησης εφαρμόστηκε επίσης για την επίλυση του αντίστροφου προβλήματος σκέδασης από έγκλεισμα [14].

Σκοπός αυτής της διατριβής είναι να εφαρμόσουμε τη μέθοδο των μη γραμμικών ολοκληρωτικών εξισώσεων στη στατική και δυναμική γραμμική ελαστικότητα. Παρουσιάζουμε θεωρητικά αλλά και αριθμητικά αποτελέσματα που αποδεικνύουν την αποτελεσματικότητα της μεθόδου. Η μετάβαση από τη στατική στη δυναμική ελαστικότητα δεν είναι τετριμμένη καθώς όχι μόνο αυξάνεται σημαντικά η πολυπλοκότητα των ολοκληρωτικών τελεστών που εμφανίζονται στις εξισώσεις αλλά προκύπτουν και ερωτήματα σχετικά με τη μοναδική επιλυσιμότητα των αντίστροφων προβλημάτων. Λόγω αυτού, ιδιαίτερο βάρος δίνεται στην εφαρμογή της μεθόδου στο δυναμικό πρόβλημα αλλά σε κάθε περίπτωση αναλύεται και το αντίστοιχο στατικό. Όπου η ανάλυση για

τη στατική περίπτωση είναι ανάλογη και βασίζεται σε ίδιες τεχνικές με τη δυναμική, παραλείπεται.

Η βασική ιδέα της μεθόδου των Kress και Rundell είναι να μετατραπεί το αντίστροφο πρόβλημα σε ένα ισοδύναμο σύστημα μη γραμμικών ολοκληρωτικών εξισώσεων. Αποδεικνύεται ότι η λύση του συστήματος είναι και η λύση του προβλήματος. Οι ολοκληρωτικές εξισώσεις προκύπτουν από την εφαρμογή των τύπων του Green. Στην ελαστικότητα, οι ολοκληρωτικές εξισώσεις προκύπτουν από την εφαρμογή του τρίτου τύπου του Betti σε συνδυασμό με τις συνοριακές συνθήκες και τις σχέσεις διαπήδησης. Για το δυναμικό πρόβλημα, η δεύτερη εξίσωση προκύπτει από την ολοκληρωτική αναπαράσταση του πεδίου μετατοπίσεων και αφορά στα πλάτη σκέδασης. Άγνωστοι είναι το σύνορο (μη γραμμική εξάρτηση) και η πυκνότητα (γραμμική εξάρτηση) που αναπαριστά το πεδίο μετατοπίσεων ή το πεδίο των τάσεων, ανάλογα με το σχεδιαστή, στο άγνωστο σύνορο. Στην περίπτωση σκέδασης από έγκλεισμα έχουμε δυο πυκνότητες και καταλήγουμε σε ένα σύστημα με τρεις αγνώστους.

Αφού καταστρώσουμε το σύστημα των μη γραμμικών ολοκληρωτικών εξισώσεων προχωρούμε στην επίλυση του. Η γραμμικοποίηση του συστήματος είναι το επόμενο βήμα. Οι Kress και Rundell πρότειναν δύο μεθόδους γραμμικοποίησης. Στην πρώτη, η γραμμικοποίηση γίνεται και στις δύο εξισώσεις ως προς το Γ και την πυκνότητα. Αυτή η μέθοδος όμως καταλήγει σε ένα πολύπλοκο σύστημα με αρκετούς ολοκληρωτικούς τελεστές και η αλγοριθμική επίλυση του είναι ιδιαίτερα χρονοβόρα. Η δεύτερη μέθοδος διαχωρίζει το σύστημα σε δύο μη καλά τοποθετημένα προβλήματα, το πρώτο γραμμικό και το δεύτερο μη γραμμικό. Πιο συγκεκριμένα, δεδομένης μιας αρχικής πρόβλεψης για το σύνορο Γ επιλύουμε τη δεύτερη εξίσωση ως προς την πυκνότητα και στη συνέχεια, δεδομένης της πυκνότητας, επιλύουμε τη πρώτη εξίσωση αφού πρώτα την έχουμε γραμμικοποιήσει. Το πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι ότι η επίλυση δυο μικρών γραμμικών συστημάτων είναι πιο γρήγορη από την επίλυση ενός μεγάλου (διπλάσιοι άγνωστοι). Μια παρόμοια μέθοδο παρουσίασαν οι Johansson και Sleeman [41], όπου επιλύεται η πρώτη εξίσωση και μετά γραμμικοποιείται η δεύτερη για να προκύψει το άγνωστο σύνορο. Τη συγκεκριμένη μέθοδο εφαρμόζουμε για την επίλυση των αν-

τίστροφων προβλημάτων για κοιλότητα και έγκλεισμα για την αποφυγή πολυάριθμων υπολογισμών.

Η γραμμικοποίηση των ολοκληρωτικών εξισώσεων γίνεται με τη χρήση Fréchet παραγώγων των ολοκληρωτικών τελεστών. Από την εργασία [11] έχουμε την Fréchet παραγωγισιμότητα των ολοκληρωτικών τελεστών στον \mathbb{R}^3 , η μετάβαση στον \mathbb{R}^2 είναι αντίστοιχη. Η γραμμικοποίηση του συστήματος αλλά και η φύση του προβλήματος οδηγούν στη μη καλή τοποθέτηση του. Γι' αυτό τον λόγο χρησιμοποιούμε τη μέθοδο ομαλοποίησης Tikhonov.

Η εργασία έχει την ακόλουθη δομή. Στο Κεφάλαιο 2 αρχικά παρουσιάζουμε τη φασματική εξίσωση Navier και τους ταυιστές Green που είναι αναγκαίοι για την ολοκληρωτική αναπαράσταση των λύσεων. Ορίζουμε τα ελαστικά δυναμικά και αναφέρουμε τις ιδιότητες που είναι απαραίτητες για τη μελέτη των ευθέων αλλά και των αντίστροφων προβλημάτων. Στη συνέχεια επιλύουμε τα ευθέα προβλήματα βασιζόμενοι σε εργασίες που έχουν παρουσιαστεί προγενέστερα. Στο τέλος του κεφαλαίου δίνονται τα πλάτη σκέδασης και για τα τρία προβλήματα, των οποίων η γνώση απαιτείται για την επίλυση των αντίστροφων προβλημάτων στη δυναμική ελαστικότητα.

Το κεφάλαιο 3 ουσιαστικά χωρίζεται σε τρία μέρη. Κάθε ένα από αυτά αφορά και σε ένα αντίστροφο πρόβλημα ανάλογα με το είδος του εμποδίου που εξετάζουμε. Το ερώτημα για την μοναδικότητα της λύσης των αντίστροφων προβλημάτων στη γραμμική δυναμική ελαστικότητα δεν έχει απαντηθεί ακόμα. Για την περίπτωση όμως σκέδασης από σκληρό σχεδαστή παρουσιάζουμε ένα αποτέλεσμα [26] που εξασφαλίζει μοναδικότητα δεδομένης μιας συνθήκης που πρέπει να ικανοποιεί ο σχεδαστής. Με τη μέθοδο που προτείνουμε το αντίστροφο πρόβλημα μετατρέπεται σε ένα σύστημα μη γραμμικών ολοκληρωτικών εξισώσεων του οποίου η λύση αποδεικνύουμε ότι είναι και η λύση του προβλήματος.

Η αριθμητική μελέτη και των τριών συστημάτων πραγματοποιείται στο κεφάλαιο 4. Γραμμικοποιούμε τις ολοκληρωτικές εξισώσεις με τη χρήση Fréchet παραγώγων των ολοκληρωτικών τελεστών και προκύπτουν τρία διαφορετικά επαναληπτικά σχήματα. Η επιλογή της επαναληπτικής διαδικασίας για την επίλυση των συστημάτων

έγινε με κριτήριο τον ελάχιστο υπολογιστικό χρόνο. Η μοναδικότητα επίλυσης του γραμμικοποιημένου συστήματος επίσης αποδεικνύεται. Στη συνέχεια παρουσιάζεται περιληπτικά η μέθοδος ομαλοποίησης Tikhonov, η οποία εφαρμόζεται σε όλα τα παραδείγματα. Επίσης αναλύουμε τη σχέση της μεθόδου Newton με το σύστημα των εξισώσεων που προκύπτει στο δυναμικό πρόβλημα για σκληρό σχεδιαστή και κοιλότητα.

Στο κεφάλαιο 5 παρουσιάζουμε τα αριθμητικά αποτελέσματα για τις επαναληπτικές διαδικασίες που ορίσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Προσεγγίζουμε τα ολοκληρώματα μέσω κανόνων τριγωνομετρικής παρεμβολής και εφαρμόζουμε ειδικούς προσεγγιστικούς τύπους για τα ολοκληρώματα που παρουσιάζουν ιδιομορφίες στους πυρήνες τους. Με εισαγωγή θορύβου στα δεδομένα εξετάζουμε και την ευστάθεια της προσεγγιστικής λύσης. Στα αριθμητικά αποτελέσματα χρησιμοποιούμε εμπόδια με διαφορετικά γεωμετρικά σχήματα και διαφορετικές αρχικές προβλέψεις του άγνωστου συνόρου ώστε να δείξουμε την αποτελεσματικότητα της μεθόδου κάτω από διαφορετικές συνθήκες. Παρουσιάζουμε ανακατασκευές συνόρων για σκληρό εμπόδιο και κοιλότητα στο στατικό και δυναμικό πρόβλημα και για έγκλεισμα στο δυναμικό.

Στο τελευταίο κεφάλαιο εξετάζουμε τη δυνατότητα βελτίωσης των αριθμητικών ανακατασκευών του άγνωστου συνόρου καθώς και μελλοντικές προοπτικές των αντίστροφων προβλημάτων στη γραμμική ελαστικότητα. Μελλοντική προοπτική για τα αριθμητικά αποτελέσματα θα ήταν ο έλεγχος της ευστάθειας των ανακατασκευών για λιγότερη πληροφορία από τα δεδομένα και η εισαγωγή θορύβου στα αποτελέσματα των επαναληπτικών μεθόδων που αναπτύσσονται σε δύο στάδια. Ενδιαφέρον θα παρουσίαζε και η αριθμητική επίλυση των αντίστοιχων προβλημάτων στην περίπτωση πολλαπλής σκέδασης.

Κεφάλαιο 2

Ευθέα προβλήματα

Σ' αυτό το κεφάλαιο μελετάμε τα ευθέα προβλήματα στη δυναμική και στατική γραμμική ελαστικότητα. Στη δυναμική περίπτωση, το ελαστικό κύμα προσπίπτει σε ένα σκληρό εμπόδιο, μια κοιλότητα ή ένα έγκλεισμα και σκεδάζεται προς όλες τις κατευθύνσεις. Το σκεδαζόμενο κύμα αποσυντίθεται σε διαμήκες και εγκάρσιο, το καθένα από αυτά με διαφορετικούς κυματάριθμους. Μακριά από τον σκεδαστή τα δύο κύματα συμπεριφέρονται ως σφαιρικά εκτεινόμενα κύματα. Το ευθύ πρόβλημα που εξετάζουμε αφορά στην εύρεση του σκεδαζόμενου πεδίου και των πλατών σκέδασης από τη γνώση του σκεδαστή και του προσπίπτοντος κύματος. Η γνώση των δύο πεδίων είναι αρκετή για να περιγράψει την παραπάνω διαδικασία σκέδασης. Στη στατική περίπτωση, θεωρούμε ένα διπλά συνεκτικό χωρίο και αναζητούμε τις συνοριακές τιμές του πεδίου επιφανειακών τάσεων (σκληρό εμπόδιο) ή του πεδίου μετατοπίσεων (κοιλότητα) στο εξωτερικό προσβάσιμο σύνορο. Το συγκεκριμένο πρόβλημα για ομαλά χωρία είναι μοναδικά επιλύσιμο.

Η θεωρία σκέδασης στη γραμμική ελαστικότητα παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον για τους επιστήμονες τις τελευταίες δεκαετίες, καθώς περιγράφει αρκετές φυσικές εφαρμογές προσδιορισμού ατελειών, ρωγμών, κοιλοτήτων ή εγκλεισμάτων σε παραμορφώσιμα μέσα. Αντίστοιχα, η στατική περίπτωση παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον στην επιστημονική κοινότητα καθώς μοντελοποιεί προβλήματα μηχανικής στερεών.

Στη γραμμική ελαστικότητα, το ευθύ πρόβλημα είναι γραμμικό και καλά τοποθετη-

μένο για εμπόδια με ομαλό σύνορο. Αρχικά παρουσιάζουμε τη φασματική εξίσωση Navier που μοντελοποιεί το πρόβλημα καθώς και τη θεμελιώδη λύση της. Καθώς η λύση δίνεται σε ολοκληρωτική μορφή, ορίζουμε τα ελαστικά δυναμικά και τις ιδιότητες τους. Στο τέλος του κεφαλαίου παρουσιάζονται τα ευθέα προβλήματα για το δυναμικό και στατικό πρόβλημα. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στην ανάλυση των ευθέων προβλημάτων για τη δυναμική περίπτωση, ενώ τα αντίστοιχα στατικά προβλήματα παρουσιάζονται περιληπτικά λόγω ανάλογης θεώρησης.

2.1 Η φασματική εξίσωση Navier

Στο δυναμικό πρόβλημα, η διάδοση ενός ελαστικού κύματος μέσα σε ένα ισότροπο και ομογενές ελαστικό μέσο στον \mathbb{R}^3 με σταθερές Lamé λ και μ περιγράφεται από ένα διανυσματικό πεδίο $u(x, t)$ που εκφράζει την τοπική μετατόπιση του σημείου $x \in \mathbb{R}^3$ του μέσου τη χρονική στιγμή $t \in [0, +\infty)$ από τη θέση ισορροπίας. Οι σταθερές Lamé λ και μ πρέπει να ικανοποιούν τις συνθήκες

$$\mu > 0 \text{ και } 3\lambda + 2\mu > 0. \quad (2.1)$$

Η πρώτη σχέση απαιτεί η παραμόρφωση του ελαστικού μέσου να είναι στην διεύθυνση της δεδομένης τάσης που ασκείται στο μέσο και η δεύτερη ότι όταν το υλικό συμπιέζεται από παντού τότε συρρικνώνεται [19].

Ορίζουμε ως σ το ταυσιτικό πεδίο που χαρακτηρίζει την τάση στο σημείο x . Από τον νόμο του Hooke προκύπτει η ακόλουθη σχέση [19]

$$\sigma = \lambda(\nabla \cdot u)I + \mu [\nabla u + (\nabla u)^T] \quad (2.2)$$

για το πεδίο μετατοπίσεων u . Το I είναι το ταυτοτικό δυαδικό και με $(\nabla u)^T$ συμβολίζουμε τον ανάστροφο του (∇u) . Στη συνέχεια θεωρώντας μηδενική την εξωτερική επιβαλλόμενη δύναμη η εξίσωση του Cauchy παίρνει την ακόλουθη μορφή

$$\nabla \cdot \sigma - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (2.3)$$

όπου ρ η πυκνότητα του μέσου διάδοσης. Καθώς το μέσο θεωρείται ισότροπο και ομογενές η τιμή της πυκνότητας παραμένει σταθερή σε όλα τα σημεία του και λόγω

της αρμονικής εξάρτησης του πεδίου από τον χρόνο

$$u(x, t) = u(x)e^{-i\omega t}, \quad (2.4)$$

όπου ω η κυκλική συχνότητα, η εξίσωση (2.3) γίνεται

$$\nabla \cdot \sigma + \rho\omega^2 u = 0. \quad (2.5)$$

Από την παραπάνω σχέση λόγω της (2.2) προκύπτει η φασματική εξίσωση Navier

$$(\Delta^* + \rho\omega^2) u = 0, \quad (2.6)$$

όπου Δ^* είναι ο τελεστής Navier και δίνεται από τη σχέση

$$\Delta^* = \mu\Delta + (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot). \quad (2.7)$$

Τα προβλήματα που αντιμετωπίζουμε στην παρούσα εργασία αφορούν τον διδιάστατο χώρο \mathbb{R}^2 και η μετάβαση πραγματοποιείται θεωρώντας αμελητέα την επιρροή των πεδίων των παραμορφώσεων στην τρίτη διάσταση. Οπότε τα πεδία δεν εξαρτώνται από τον z - άξονα και η εξίσωση Navier (2.6) θεωρείται για $u = (u_1, u_2)^T$. Στον \mathbb{R}^2 , οι συνθήκες (2.1) γίνονται

$$\mu > 0 \text{ και } \lambda + \mu > 0. \quad (2.8)$$

Διαιρούμε την εξίσωση (2.6) με ρ και κάνοντας χρήση της ταυτότητας

$$\nabla \times (\nabla \times u) = \nabla(\nabla \cdot u) - \Delta u \quad (2.9)$$

προκύπτει η εξίσωση

$$c_p^2 \nabla(\nabla \cdot u) - c_s^2 \nabla \times (\nabla \times u) + \omega^2 u = 0, \quad (2.10)$$

όπου οι σταθερές c_p και c_s δίνονται από τους τύπους

$$c_p^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad c_s^2 = \frac{\mu}{\rho}. \quad (2.11)$$

Από την εξίσωση (2.10) λαμβάνουμε την ακόλουθη μορφή για το πεδίο μετατοπίσεων

$$u = \frac{c_s^2}{\omega^2} \nabla \times (\nabla \times u) - \frac{c_p^2}{\omega^2} \nabla(\nabla \cdot u), \quad (2.12)$$

η οποία ορίζει την ανάλυση κατά Helmholtz του $u \in C^2$, δηλαδή:

$$u = u_p + u_s, \quad (2.13)$$

όπου

$$u_p = -\frac{c_p^2}{\omega^2} \nabla(\nabla \cdot u), \quad u_s = \frac{c_s^2}{\omega^2} \nabla \times (\nabla \times u) \quad (2.14)$$

και ισχύουν

$$\nabla \times u_p = 0 \quad \text{και} \quad \nabla \cdot u_s = 0. \quad (2.15)$$

Οπότε προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις για την αστρόβιλη u_p και την σωληνοειδή u_s συνιστώσα του u

$$\Delta u_p + k_p^2 u_p = 0, \quad \Delta u_s + k_s^2 u_s = 0, \quad (2.16)$$

όπου οι κυματάριθμοι k_p και k_s δίνονται από τους τύπους

$$k_p = \frac{\omega}{c_p} \quad \text{και} \quad k_s = \frac{\omega}{c_s}. \quad (2.17)$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι το πεδίο μετατοπίσεων u αποτελείται από δύο διαφορετικά κύματα, τα οποία είναι λύσεις της εξίσωσης Helmholtz. Το πεδίο u_p ορίζει τα διαμήκη κύματα (P-κύματα) με κυματάριθμο k_p και ταχύτητα διάδοσης c_p και το πεδίο u_s ορίζει τα εγκάρσια κύματα (S-κύματα) με κυματάριθμο k_s και ταχύτητα διάδοσης c_s .

Στο στατικό πρόβλημα, δηλαδή για $\omega = 0$, το πεδίο μετατοπίσεων ικανοποιεί την ελαστοστατική εξίσωση Navier

$$\Delta^* u = 0. \quad (2.18)$$

2.2 Τανυστές Green ελεύθερου χώρου

Στην περίπτωση της εξίσωσης Navier (2.6) η θεμελιώδης λύση είναι ένας πίνακας \mathcal{D} όπου η k -οστή στήλη ικανοποιεί την εξίσωση

$$(\Delta_x^* + \rho\omega^2) \mathcal{D}_{\cdot k}(x, y) = -\delta(x - y)e_k, \quad \text{για } k = 1, 2 \quad (2.19)$$

και $x, y \in D \subset \mathbb{R}^2$, όπου δ η συνάρτηση Dirac και e_k το k -οστό μοναδιαίο διάνυσμα στις καρτεσιανές συντεταγμένες. Η λύση που προκύπτει από τη χρήση πολικών συντεταγμένων είναι

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &:= \frac{i}{4\mu} H_0^{(1)}(k_s |x - y|) I \\ &+ \frac{i}{4\rho\omega^2} \nabla_x \nabla_x^T \left[H_0^{(1)}(k_s |x - y|) - H_0^{(1)}(k_p |x - y|) \right] \end{aligned} \quad (2.20)$$

για $x, y \in \mathbb{R}^2$ με $x \neq y$, όπου $H_0^{(1)}$ είναι η συνάρτηση Hankel πρώτου είδους και μηδενικής τάξης. Οι συναρτήσεις Hankel ορίζονται ως

$$H_n^{(1)} := J_n + iY_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.21)$$

όπου οι συναρτήσεις Bessel n -τάξης δίνονται από τον τύπο

$$J_n(t) := \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!(n+p)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{n+2p} \quad (2.22)$$

και οι συναρτήσεις Neumann n -τάξης

$$\begin{aligned} Y_n(t) &:= \frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{t}{2} + C_E \right) J_n(t) - \frac{1}{\pi} J_n(t) (\psi(p+n) + \psi(p)) \\ &- \frac{1}{\pi} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(n-1-p)!}{p!} \left(\frac{2}{t}\right)^{n-2p}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

όπου $C_E \approx 0,57721$ είναι η σταθερά Euler και

$$\psi(p) := \begin{cases} 0, & p = 0 \\ \sum_{m=1}^p \frac{1}{m}, & p \in \mathbb{N}^*. \end{cases} \quad (2.24)$$

Από τις σειρές (2.22)-(2.23) προκύπτουν οι ακόλουθες ασυμπτωτικές μορφές

$$J_n(t) = \frac{t^n}{2^n n!} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right), \quad \text{για } n \rightarrow \infty, \quad (2.25)$$

ομοίωμορφα σε συμπαγή υποσύνολα του \mathbb{R} και

$$H_n^{(1)}(t) = \frac{2^n (n-1)!}{\pi i t^n} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right), \quad \text{για } n \rightarrow \infty, \quad (2.26)$$

ομοιόμορφα σε συμπαγή υποσύνολα του $(0, +\infty)$. Συνεπώς, οι συναρτήσεις Hankel έχουν την ακόλουθη ασυμπτωτική συμπεριφορά

$$H_n^{(1)}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} e^{\pm i(t - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right) \right), \text{ για } t \rightarrow \infty. \quad (2.27)$$

Από τους ορισμούς των συναρτήσεων Bessel (2.22) και Neumann (2.23) προκύπτει η ακόλουθη ιδιόμορφη συμπεριφορά της συνάρτησης $H_0^{(1)}$

$$H_0^{(1)}(t) = \frac{2i}{\pi} \left(\log \frac{t}{2} + C_E \right) + 1 + O(t^2 \log t), \text{ για } t \rightarrow 0. \quad (2.28)$$

Όπως παρουσίασε ο Kress στην εργασία [51], κάνοντας χρήση της διαφορικής εξίσωσης Bessel καταλήγουμε στον τύπο

$$\Phi(x, y) = \Phi_1(|x - y|)I + \Phi_2(|x - y|)J(x - y), \quad (2.29)$$

όπου οι συναρτήσεις Φ_1 και Φ_2 δίνονται από τις σχέσεις

$$\Phi_1(t) = \frac{i}{4\mu} H_0^{(1)}(k_s t) - \frac{i}{4\rho\omega^2 t} \left[k_s H_1^{(1)}(k_s t) - k_p H_1^{(1)}(k_p t) \right], \quad (2.30)$$

$$\Phi_2(t) = \frac{i}{4\rho\omega^2} \left[\frac{2k_s}{t} H_1^{(1)}(k_s t) - k_s^2 H_0^{(1)}(k_s t) - \frac{2k_p}{t} H_1^{(1)}(k_p t) + k_p^2 H_0^{(1)}(k_p t) \right], \quad (2.31)$$

με τη συνάρτηση Hankel πρώτης τάξης $H_1^{(1)} = -H_0^{(1)'}$. Επίσης I είναι ο ταυτοτικός πίνακας και ο πίνακας J ορίζεται ως

$$J(x) = \frac{x x^T}{|x|^2}, \quad (2.32)$$

όπου το T εκφράζει το τανυστικό γινόμενο του $x \in R^2$ με $x \neq 0$.

Στο στατικό πρόβλημα, η θεμελιώδης λύση της εξίσωσης Navier (2.18) δίνεται από τον τύπο

$$\Phi_0(x, y) := \frac{\lambda + 3\mu}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \Psi(x, y) I + \frac{\lambda + \mu}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)} J(x - y), \quad (2.33)$$

όπου

$$\Psi(x, y) := \ln \frac{1}{|x - y|}, \text{ για } x \neq y. \quad (2.34)$$

Η παραπάνω μορφή προκύπτει ασυμπτωτικά και από την Φ θεωρώντας μηδενική τη συχνότητα $\omega \rightarrow 0$ [59]. Εφαρμόζοντας τον τελεστή τάσεων T (1.12) στους ταυυστές Green ορίζουμε τις ακόλουθες μορφές

$$[T_y \Phi(x, y)]^T, T_x \Phi(x, y) \quad (2.35)$$

και

$$[T_y \Phi_0(x, y)]^T, T_x \Phi_0(x, y), \quad (2.36)$$

για το δυναμικό και στατικό πρόβλημα, αντίστοιχα. Ο αναλυτικός υπολογισμός αυτών των πινάκων όπως και των ταυυστών Green, καθώς και η ιδιόμορφη συμπεριφορά τους καθώς $|x - y| \rightarrow 0$, παρουσιάζεται στο παράρτημα. Στα ακόλουθα θεωρήματα συγκεντρώνουμε τις γνωστές ιδιότητες της θεμελιώδους λύσης Φ και των πινάκων $T \Phi$ [4].

Θεώρημα 2.2.1. *Για τη θεμελιώδη λύση Φ ισχύουν:*

1. *Είναι αναλυτική για $x \neq y$.*
2. *Είναι συμμετρική και οι στήλες και οι γραμμές της είναι λύσεις της εξίσωσης Navier (2.6) για $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{y\}$ και $y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{x\}$, αντίστοιχα.*
3. *Για $C > 0$ σταθερά και $x \neq y$ ικανοποιεί την ανίσωση*

$$\|\Phi(x, y)\|_{max} \leq C (1 + |\log(|x - y|)|). \quad (2.37)$$

Απόδειξη. Η ανισότητα προκύπτει από την εφαρμογή της ιδιόμορφης συμπεριφοράς (2.28) στον τύπο (2.29). Συνεπώς, ο ταυυστής Green έχει την ίδια ιδιομορφία (λογαριθμική) με τη θεμελιώδη λύση της εξίσωσης Laplace. \square

Θεώρημα 2.2.2.

1. *Για $y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{x\}$, οι στήλες του πίνακα $[T_y \Phi(x, y)]^T$ είναι λύσεις της (2.6).*
2. *Για $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{y\}$, οι γραμμές του πίνακα $T_x \Phi(x, y)$ είναι λύσεις της (2.6).*
3. *Για $x, y \in \mathbb{R}^2$ με $x \neq y$ ισχύει $[T_y \Phi(x, y)]^T = [T_x \Phi(y, x)]^T$.*

4. Για $C > 0$ σταθερά και $x \neq y$ ισχύει η ανίσωση

$$\|T\Phi(x, y)\|_{max} \leq \frac{C}{|x - y|}. \quad (2.38)$$

Απόδειξη. Προκύπτουν από τον ορισμό των πινάκων και το προηγούμενο θεώρημα. \square

Τα παραπάνω θεωρήματα ισχύουν και για τον ταυιστή Φ_0 καθώς εμφανίζει την ίδια ιδιομορφία με την λύση Φ .

Θεώρημα 2.2.3. Έστω $B \in \mathbb{R}^2$ ένα χωρίο στο οποίο ισχύει το θεώρημα απόκλισης του Gauss. Τότε, για τα διανυσματικά πεδία $u, v \in [C^2(\bar{B})]^2$ ισχύουν:

Ο πρώτος γενικευμένος τύπος του Betti:

$$\int_B u \Delta^* v \, dx = \int_{\partial B} v T u \, ds - \int_B \mathcal{E}(u, v) \, dx, \quad (2.39)$$

όπου

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(u, v) &:= \mu \sum_{i=1}^2 \nabla u_i \nabla v_i + \lambda \operatorname{div} u \operatorname{div} v \\ &+ \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right). \end{aligned} \quad (2.40)$$

Ο δεύτερος γενικευμένος τύπος του Betti:

$$\int_B u \Delta^* u \, dx = \int_{\partial B} u T u \, ds - \int_B \mathcal{E}(u, u) \, dx \quad (2.41)$$

και ο τρίτος γενικευμένος τύπος του Betti:

$$\int_B (u \Delta^* v - v \Delta^* u) \, dx = \int_{\partial B} (u T v - v T u) \, ds. \quad (2.42)$$

Απόδειξη. Όμοια με του Kupradze [59] στον \mathbb{R}^3 . Για τον πρώτο τύπο αρκεί $u \in [C^1(\bar{B})]^2$. \square

2.3 Δυναμικά απλού και διπλού στρώματος

Με βάση τους ταυιστές Green, ορίζουμε τα δυναμικά απλού και διπλού στρώματος.

Στο εξής θεωρούμε ότι οι πυκνότητες ανήκουν στον χώρο Hilbert $[L^2(\Gamma)]^2$.

Ορισμός 2.3.1. Για $\varphi \in [L^2(\Gamma)]^2$, ορίζουμε το ελαστικό δυναμικό απλού στρώματος ως

$$(S\varphi)(x) := \int_{\Gamma} \Phi(x, y) \varphi(y) ds(y), \quad x \in R^2 \setminus \Gamma \quad (2.43)$$

και το ελαστικό δυναμικό διπλού στρώματος ως

$$(\mathcal{D}\varphi)(x) := \int_{\Gamma} [T_y \Phi(x, y)]^T \varphi(y) ds(y), \quad x \in R^2 \setminus \Gamma. \quad (2.44)$$

Τα ελαστικά δυναμικά που ορίσαμε παραπάνω είναι λύσεις της εξίσωσης Navier (2.6) και επιπλέον ικανοποιούν τις συνθήκες ακτινοβολίας του Kupradze (1.13).

Ορισμός 2.3.2. Για $\varphi \in [L^2(\Gamma)]^2$, ορίζουμε το στατικό δυναμικό απλού στρώματος ως

$$(S_{0,\alpha}\varphi)(x) := \int_{\Gamma_\alpha} \Phi_0(x, y) \varphi(y) ds(y), \quad x \in R^2 \setminus \Gamma_\alpha, \quad \text{για } \alpha = 1, 2 \quad (2.45)$$

και το στατικό δυναμικό διπλού στρώματος ως

$$(\mathcal{D}_{0,\alpha}\varphi)(x) := \int_{\Gamma_\alpha} [T_y \Phi_0(x, y)]^T \varphi(y) ds(y), \quad x \in R^2 \setminus \Gamma_\alpha, \quad \text{για } \alpha = 1, 2. \quad (2.46)$$

Τα ελαστικά δυναμικά που ορίσαμε παραπάνω είναι λύσεις της εξίσωσης Navier (2.18). Από τους τύπους του Betti αποδεικνύεται ότι κάθε λύση της εξίσωσης Navier μπορεί να αναπαρασταθεί ως συνδυασμός των δυναμικών απλού και διπλού στρώματος. Επίσης ορίζουμε τα πεδία των τάσεων των ελαστικών δυναμικών

$$(TS\varphi)(x) := \int_{\Gamma} T_x \Phi(x, y) \varphi(y) ds(y), \quad x \in R^2 \setminus \Gamma, \quad (2.47)$$

$$(L\varphi)(x) := T_x \int_{\Gamma} [T_y \Phi(x, y)]^T \varphi(y) ds(y), \quad x \in R^2 \setminus \Gamma. \quad (2.48)$$

Αντίστοιχα, για το στατικό πρόβλημα ορίζουμε

$$(TS_{0,\alpha}\varphi)(x) := \int_{\Gamma_\alpha} T_x \Phi_0(x, y) \varphi(y) ds(y), \quad x \in R^2 \setminus \Gamma_\alpha \quad (2.49)$$

και

$$(L_{0,\alpha}\varphi)(x) := T_x \int_{\Gamma_\alpha} [T_y \Phi_0(x, y)]^T \varphi(y) ds(y), \quad x \in R^2 \setminus \Gamma_\alpha. \quad (2.50)$$

Καθώς το σημείο x προσεγγίζει το σύνορο Γ από το εξωτερικό χωρίο του D , τα ελαστικά δυναμικά και τα πεδία των τάσεων ικανοποιούν τις ακόλουθες σχέσεις συνέχειας και διαπήδησης.

Θεώρημα 2.3.1. Το απλό δυναμικό $(S\varphi)$ (2.43) και το $(L\varphi)$ (2.48) είναι συνεχή σε όλο το \mathbb{R}^2 . Στο σύνορο Γ ισχύουν

$$(\mathcal{D}\varphi)(x) = \left(\frac{1}{2}I + K\right)\varphi(x) \quad (2.51)$$

και

$$(TS\varphi)(x) = \left(-\frac{1}{2}I + K^*\right)\varphi(x), \quad (2.52)$$

όπου οι ολοκληρωτικοί τελεστές $(K\varphi)$ και $(K^*\varphi)$ ορίζονται για $x \in \Gamma$ ως

$$(K\varphi)(x) := \int_{\Gamma} [T_y\Phi(x, y)]^T \varphi(y) ds(y) \quad (2.53)$$

και

$$(K^*\varphi)(x) := \int_{\Gamma} T_x\Phi(x, y)\varphi(y) ds(y). \quad (2.54)$$

Απόδειξη. Ανάλογη με του Kupradze [60] για τον \mathbb{R}^3 . \square

Τα ολοκληρώματα που εμφανίζονται στους τελεστές $(S\varphi)$ για $x \in \Gamma$, $(K\varphi)$ (2.53) και $(K^*\varphi)$ (2.54) θεωρούνται με την έννοια των αρχικών τιμών του Cauchy (Cauchy principal values). Ο ολοκληρωτικός τελεστής $(S\varphi)$ είναι ασθενώς ιδιόμορφος λόγω της σχέσης (2.37) που ικανοποιεί ο πυρήνας του, ενώ οι τελεστές $(K\varphi)$, $(K^*\varphi)$ είναι ιδιόμορφοι λόγω της σχέσης (2.38). Ο ολοκληρωτικός τελεστής $(L\varphi)$ για $x \in \Gamma$ έχει ισχυρά ιδιόμορφο πυρήνα. Μπορεί να εκφραστεί όμως απαιτώντας μεγαλύτερη ομαλότητα των πυκνοτήτων, κάνοντας χρήση του τύπου του Maue (Maue's type formula), μέσω ενός τελεστή που εμφανίζει την ίδια ιδιομορφία με τον S [10]. Ο αναλυτικός υπολογισμός των ολοκληρωτικών τελεστών πραγματοποιείται στο παράρτημα.

Στη στατική περίπτωση, τα ολοκληρώματα που εμφανίζονται στους τελεστές θεωρούνται με την ίδια λογική. Οι σχέσεις συνέχειας και διαπήδησης είναι ίδιες για τα αντίστοιχα δυναμικά και για αυτό παραλείπονται [60].

2.4 Ολοκληρωτικές εξισώσεις

Το ευθύ πρόβλημα όπως αναφέρθηκε και στην εισαγωγή είναι καλά τοποθετημένο και έγκειται στην εύρεση του πεδίου κοντά ή μακριά από τον σχεδιαστή D , δεδομένης της

θέσης του και των συνοριακών συνθηκών. Τα ευθέα προβλήματα πέραν του ερευνητικού ενδιαφέροντος που παρουσιάζουν είναι απαραίτητα και για την επίλυση των αντίστροφων. Πιο συγκεκριμένα, μέσω της επίλυσης του ευθέος προβλήματος υπολογίζουμε τις τιμές των πλατών σκέδασης στο δυναμικό πρόβλημα και τα δεδομένα στο εξωτερικό σύνορο στο στατικό. Αυτά τα δεδομένα είναι απαραίτητα για την αντιμετώπιση του αντίστροφου προβλήματος.

Η επίλυση του ευθέος προβλήματος αντιστοιχεί στην επίλυση μιας ολοκληρωτικής εξίσωσης που προκύπτει λόγω της αναπαράστασης του πεδίου ως συνδυασμό δυναμικών απλού και διπλού στρώματος. Για τον λόγο αυτό πριν προχωρήσουμε στην διατύπωση των ευθέων προβλημάτων για τις τρεις περιπτώσεις εμποδίων παρουσιάζουμε συνοπτικά την θεωρία επίλυσης ολοκληρωτικών εξισώσεων δευτέρου είδους. Στα παρακάτω θεωρήματα οι αποδείξεις παραλείπονται καθώς παρουσιάζονται στα βιβλία [53, 61].

Έστω η ολοκληρωτική εξίσωση δευτέρου είδους

$$B\varphi = f \quad (2.55)$$

όπου $B = I - A$, I ο ταυτοτικός τελεστής, $A : X \rightarrow X$ γραμμικός τελεστής και X χώρος με νόρμα. Αν ο τελεστής A είναι συμπαγής τότε ισχύει η θεωρία Riesz - Fredholm που εξασφαλίζει την ύπαρξη της λύσης.

Θεώρημα 2.4.1 (Πρώτο θεώρημα Riesz). Ο πυρήνας του τελεστή B

$$N(B) := \{\varphi \in X : B\varphi = 0\} \quad (2.56)$$

είναι πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος.

Θεώρημα 2.4.2 (Δεύτερο θεώρημα Riesz). Το σύνολο τιμών του τελεστή B

$$B(X) := \{B\varphi : \varphi \in X\} \quad (2.57)$$

είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος.

Θεώρημα 2.4.3 (Τρίτο θεώρημα Riesz). Υπάρχει μοναδικός μη αρνητικός ακέραιος αριθμός r , ο οποίος καλείται αριθμός Riesz του τελεστή A , τέτοιος ώστε να

ισχύει

$$0 = N(B^0) \subsetneq N(B^1) \subsetneq \dots \subsetneq N(B^r) = N(B^{r+1}) = \dots, \quad (2.58)$$

$$X = B^0(X) \supsetneq B^1(X) \supsetneq \dots \supsetneq B^r(X) = B^{r+1}(X) = \dots \quad (2.59)$$

Επιπλέον ισχύει

$$X = N(B^r) \oplus B^r(X). \quad (2.60)$$

Το σύμβολο \oplus δηλώνει το ευθύ άθροισμα των γραμμικών χώρων και με B^r συμβολίζουμε τον συμπαγή επαναληπτικό τελεστή $(I - A)^r$.

Από τα τρία θεμελιώδη θεωρήματα προκύπτουν άμεσα τα επόμενα αποτελέσματα που εξασφαλίζουν την ύπαρξη λύσης της εξίσωσης (2.55).

Θεώρημα 2.4.4. Έστω A ο τελεστής όπως ορίστηκε προηγούμενα. Τότε ο τελεστής B είναι “1-1” αν και μόνο αν είναι επί. Επίσης αν ο τελεστής B είναι “1-1” τότε υπάρχει ο αντίστροφος τελεστής B^{-1} και είναι φραγμένος.

Πόρισμα 2.4.1. Έστω A ο τελεστής όπως ορίστηκε προηγούμενα. Αν η ομογενής εξίσωση

$$B\varphi = 0 \quad (2.61)$$

έχει μόνο την τετριμμένη λύση $\varphi = 0$, τότε για κάθε $f \in X$ η μη ομογενής εξίσωση (2.55) έχει μοναδική λύση η οποία εξαρτάται συνεχώς από το δεξί μέλος.

Η παραπάνω θεωρία εφαρμόζεται για τελεστές με συνεχείς ή ασθενώς ιδιόμορφους πυρήνες και το πλεονέκτημα που παρέχει είναι ότι η ύπαρξη λύσης της εξίσωσης (2.55) σχετίζεται με το πιο απλό πρόβλημα απόδειξης ότι η εξίσωση (2.61) έχει μόνο την μηδενική λύση. Όμως στην γραμμική ελαστικότητα, όπως θα δούμε παρακάτω, οι εξισώσεις εμφανίζουν ολοκληρώματα με ιδιόμορφους και ισχυρά ιδιόμορφους πυρήνες και λόγω της μη ύπαρξης συμπαγών τελεστών ακολουθούμε διαφορετική θεωρία για την επίλυση τους. Πριν προχωρήσουμε, απαραίτητοι είναι οι ακόλουθοι ορισμοί

Ορισμός 2.4.1. Ορίζουμε τον τελεστή της ιδιόμορφης ολοκλήρωσης

$$(K\varphi)(t) := a(t)\varphi(t) + \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{k(t, \tau)}{\tau - t} \varphi(\tau) d\tau, \quad \text{για } t \in \Gamma, \quad (2.62)$$

όπου το ολοκλήρωμα θεωρείται με την έννοια των αρχικών τιμών του Cauchy (Cauchy principal values). Οι συναρτήσεις a και k θεωρούνται Hölder συνεχείς. Ο τελεστής $K : C^{0,\alpha}(\Gamma) \rightarrow C^{0,\alpha}(\Gamma)$ με $0 < \alpha \leq 1$ είναι φραγμένος.

Ορισμός 2.4.2. Έστω $K : X \rightarrow Y$ γραμμικός τελεστής, τότε ο αριθμός

$$\text{ind } K := \dim N(K) - \text{codim } K(X) \quad (2.63)$$

καλείται δείκτης (index) του τελεστή K . Ισχύει $\text{codim } U := \dim V$ αν υπάρχει πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος V τέτοιος ώστε $X = U \oplus V$, αλλιώς $\text{codim } U = \infty$.

Αποδεικνύεται ότι αν ο τελεστής A είναι συμπαγής τότε ο τελεστής B έχει δείκτη μηδέν. Τότε ισχύουν τα παρακάτω

Θεώρημα 2.4.5 (Πρώτο θεώρημα Noether). Ο πυρήνας του τελεστή K είναι πεπερασμένης διάστασης.

Θεώρημα 2.4.6 (Δεύτερο θεώρημα Noether). Για τον δείκτη του ιδιόμορφου τελεστή K ισχύει

$$\text{ind } K = \text{ind } \frac{a-b}{a+b}. \quad (2.64)$$

Στο δεξί μέλος της ισότητας ο δείκτης της μιγαδικής συνάρτησης δίνεται από τον τύπο

$$\text{ind } f = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} d(\arg f). \quad (2.65)$$

Θεώρημα 2.4.7 (Τρίτο θεώρημα Noether). Η ιδιόμορφη ολοκληρωτική εξίσωση

$$K\varphi = f \quad (2.66)$$

είναι επιλύσιμη αν και μόνο αν ικανοποιείται η συνθήκη

$$\int_{\Gamma} f(\tau)\psi(\tau)d\tau = 0 \quad (2.67)$$

για κάθε $\psi \in N(K')$, όπου K' ο συζυγής τελεστής του K με τύπο

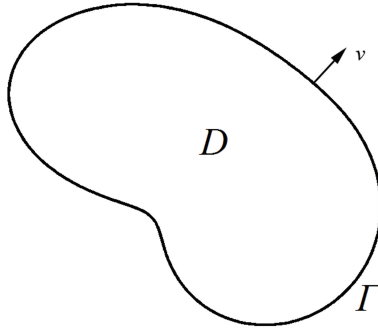
$$(K'\psi)(t) := a(t)\psi(t) - \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{k(\tau, t)}{\tau - t} \psi(\tau) d\tau, \quad \text{για } t \in \Gamma. \quad (2.68)$$

Στην περίπτωση ολοκληρωτικής εξίσωσης πρώτου είδους, $a = 0$, ο ιδιόμορφος τελεστής έχει δείκτη (index) μηδέν, είναι “1-1” και επί και έχει φραγμένο αντίστροφο.

Η ίδια θεωρία, με αντίστοιχη λογική, ισχύει και στην περίπτωση μας όπου οι συναρτήσεις a και k είναι πίνακες και οι πυκνότητες διανύσματα [60].

2.4.1 Σκληρό εμπόδιο

Για το δυναμικό πρόβλημα, θεωρούμε έναν σκληρό σκεδαστή D μέσα σε ένα ισότροπο και ομογενές ελαστικό μέσο στον \mathbb{R}^2 . Ο σκεδαστής έχει ομαλό σύνορο Γ C^2 -τάξης. Το ελαστικό μέσο καθορίζεται από τις σταθερές Lamé λ, μ και την πυκνότητα ρ . Με ν συμβολίζουμε το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα πάνω στο σύνορο Γ με κατεύθυνση προς το εξωτερικό του D .



Σχήμα 2.1: Σκληρός σκεδαστής

Το ευθύ πρόβλημα σκέδασης από σκληρό σκεδαστή συνίσταται στην εύρεση του σκεδαζόμενου πεδίου u^{sc} από τη γνώση του σχήματος και της θέσης του D για δοσμένο προσπίπτον κύμα u^{inc} . Πιο συγκεκριμένα: Δεδομένου του u^{inc} που ικανοποιεί την εξίσωση Navier (2.6), αναζητούμε το πεδίο $u^{sc} \in [C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}) \cap C(\mathbb{R}^2 \setminus D)]^2$ που ικανοποιεί

- την εξίσωση Navier

$$(\Delta^* + \rho\omega^2) u^{sc} = 0, \quad \text{στο } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}, \quad (2.69)$$

- Dirichlet συνοριακή συνθήκη

$$u^{sc} + u^{inc} = 0 \quad \text{στο } \Gamma, \quad (2.70)$$

- και τις συνθήκες ακτινοβολίας του Kupradze

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial u_j^{sc}}{\partial r} - ik_j u_j^{sc} \right) = 0, \quad \text{όπου } r = |x|, \quad \text{για } j = p, s \quad (2.71)$$

όπου τα όρια θεωρούνται ομοιόμορφα προς όλες τις διευθύνσεις.

Η λύση του παραπάνω προβλήματος δίνεται σε ολοκληρωτική μορφή και το πρόβλημα τελικά περιγράφεται από μια ολοκληρωτική εξίσωση. Έτσι η λύση που αναζητούμε είναι της μορφής

$$u^{sc}(x) = (\mathcal{D}\varphi)(x) - i\eta(S\varphi)(x), \text{ για } x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}, \quad (2.72)$$

όπου το η είναι θετικός πραγματικός αριθμός.

Θεώρημα 2.4.8. Έστω ότι το σκεδαζόμενο κύμα u^{sc} με ολοκληρωτική αναπαράσταση (2.72) για $\varphi \in [L^2(\Gamma)]^2$ είναι λύση του ευθέως προβλήματος σκέδασης από σκληρό σκεδαστή. Τότε η πυκνότητα φ επιλύει την ολοκληρωτική εξίσωση

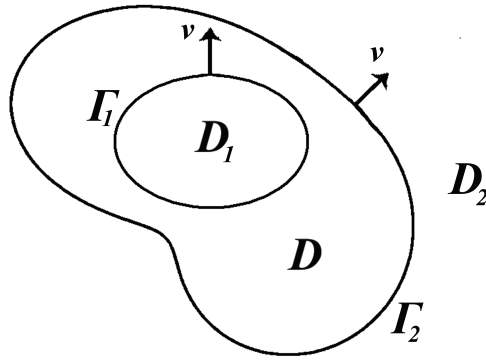
$$\frac{1}{2}\varphi(x) + (K\varphi)(x) - i\eta(S\varphi)(x) = -u^{inc}(x), \text{ για } x \in \Gamma. \quad (2.73)$$

Απόδειξη. Προσεγγίζουμε οριακά το σύνορο Γ από το εξωτερικό του D . Λαμβάνοντας υπόψιν τη σχέση διαπήδησης (2.51) καθώς και τη συνοριακή συνθήκη (2.70) καταλήγουμε στην ολοκληρωτική εξίσωση (2.73) για $x \in \Gamma$. \square

Θεώρημα 2.4.9. Η ολοκληρωτική εξίσωση (2.73) έχει μοναδική λύση και επιπλέον η λύση εξαρτάται συνεχώς από τα δεδομένα (δεξί μέλος).

Απόδειξη. Ο τελεστής $(\frac{1}{2}I + K - i\eta S) : [L^2(\Gamma)]^2 \rightarrow [L^2(\Gamma)]^2$ είναι “1-1” και ισχύει $\text{ind}(\frac{1}{2}I + K - i\eta S) = 0$ [60]. Οπότε είναι αντιστρέψιμος και λόγω της μορφής του εφαρμόζονται τα θεωρήματα του Noether. Η αντίστοιχη ομογενής εξίσωση αντιστοιχεί σε ένα Dirichlet εξωτερικό πρόβλημα και με εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών (2.70) και των σχέσεων διαπήδησης (2.51) προκύπτει ότι ο μηδενισμός του πεδίου και της τάσης στο σύνορο Γ αντιστοιχεί στον μηδενισμό της πυκνότητας φ σχεδόν παντού στο Γ . Η πλήρης απόδειξη παρουσιάζεται στην εργασία [20] για $\eta = -1$ στον \mathbb{R}^3 . Η γενίκευση στον \mathbb{R}^2 για κάθε $\eta > 0$ είναι παρόμοια. \square

Για το στατικό πρόβλημα, θεωρούμε το D ως ένα διπλά συνεκτικό χωρίο στον \mathbb{R}^2 με C^3 -τάξης σύνορο Γ το οποίο αποτελείται από δύο κλειστές καμπύλες Γ_1 και Γ_2 , τέτοιες ώστε: $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ και η Γ_1 να είναι εσωτερική της Γ_2 . Με D_1 συμβολίζουμε το φραγμένο απλά συνεκτικό χωρίο με σύνορο Γ_1 και με D_2 το μη φραγμένο χωρίο με σύνορο Γ_2 .



Σχήμα 2.2: Σκληρό εμπόδιο

Το ευθύ πρόβλημα αντιστοιχεί στην επίλυση του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$\Delta^* u = 0, \text{ στο } D, \quad (2.74)$$

με Dirichlet συνοριακές συνθήκες

$$u = 0, \text{ στο } \Gamma_1, \quad (2.75)$$

$$u = f, \text{ στο } \Gamma_2, \quad (2.76)$$

όπου f γνωστή συνάρτηση.

Θεώρημα 2.4.10. Το πρόβλημα (2.74)-(2.76) έχει το πολύ μια κλασική λύση.

Απόδειξη. Βασίζεται σε γνωστά αποτελέσματα [59]. \square

2.4.2 Κοιλότητα

Το ευθύ πρόβλημα σκέδασης από κοιλότητα συνίσταται στην εύρεση του σχεδαζόμενου πεδίου $u^{sc} \in [C^2(R^2 \setminus \bar{D}) \cap C^1(R^2 \setminus D)]^2$ από τη γνώση του σχήματος και της θέσης του D για δοσμένο προσπίπτον κύμα u^{inc} , το οποίο επιλύει την εξίσωση Navier (2.6).

Το u^{sc} ικανοποιεί

- την εξίσωση Navier

$$(\Delta^* + \rho\omega^2) u^{sc} = 0, \text{ στο } R^2 \setminus \bar{D}, \quad (2.77)$$

- Neumann συνοριακή συνθήκη

$$T(u^{sc} + u^{inc}) = 0 \text{ στο } \Gamma, \quad (2.78)$$

όπου T ο τελεστής τάσεων με τύπο (1.12)

- και τις συνθήκες ακτινοβολίας του Kupradze

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial u_j^{sc}}{\partial r} - ik_j u_j^{sc} \right) = 0, \text{ όπου } r = |x|, \text{ για } j = p, s \quad (2.79)$$

όπου τα όρια θεωρούνται ομοιόμορφα προς όλες τις διευθύνσεις.

Αντίστοιχα με το ευθύ πρόβλημα σκέδασης από σκληρό σκεδαστή, αναζητούμε τη λύση του παραπάνω προβλήματος σε ολοκληρωτική μορφή. Κατά συνέπεια η λύση του ευθέως προβλήματος προκύπτει από το ισοδύναμο πρόβλημα επίλυσης ολοκληρωτικής εξίσωσης. Η λύση περιγράφεται από την ακόλουθη μορφή

$$u^{sc}(x) = (S\varphi)(x) + i\eta(\mathcal{D}\varphi)(x), \text{ για } x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}, \quad (2.80)$$

όπου το η είναι θετικός πραγματικός αριθμός.

Θεώρημα 2.4.11. Έστω ότι το σκεδαζόμενο κύμα u^{sc} με ολοκληρωτική αναπαράσταση (2.80) για $\varphi \in [L^2(\Gamma)]^2$ είναι λύση του ευθέως προβλήματος σκέδασης από κοιλότητα. Τότε η πυκνότητα φ επιλύει την ολοκληρωτική εξίσωση

$$\frac{1}{2}\varphi(x) - (K^*\varphi)(x) - i\eta(L\varphi)(x) = (Tu^{inc})(x), \text{ για } x \in \Gamma. \quad (2.81)$$

Απόδειξη. Προσεγγίζουμε οριακά το σύνορο Γ από το εξωτερικό του D . Λαμβάνοντας υπόψιν τη σχέση διαπήδησης (2.52) καθώς και τη συνοριακή συνθήκη (2.78) καταλήγουμε στην ολοκληρωτική εξίσωση (2.81) για $x \in \Gamma$. \square

Θεώρημα 2.4.12. Η ολοκληρωτική εξίσωση (2.81) έχει μοναδική λύση και επιπλέον η λύση εξαρτάται συνεχώς από τα δεδομένα (δεξί μέλος).

Απόδειξη. Η μοναδική επιλυσιμότητα της εξίσωσης (2.81) προκύπτει με ανάλογα επιχειρήματα όπως για την αντίστοιχη ολοκληρωτική εξίσωση (2.73) για το ευθύ πρόβλημα

σκέδασης από σκληρό σκεδαστή. Η ομογενής εξίσωση αντιστοιχεί στην επίλυση του Neumann εξωτερικού προβλήματος και λόγω των συνοριακών συνθηκών (2.78) και των σχέσεων διαπήδησης (2.52) προκύπτει με εφαρμογή του δεύτερου τύπου του Betti (2.41) ότι ο μηδενισμός του πεδίου και της τάσης στο σύνορο Γ αντιστοιχεί στον μηδενισμό της πυκνότητας φ σχεδόν παντού στο Γ . Λόγω της ύπαρξης του ισχυρά ιδιόμορφου τελεστή L δεν μπορεί να εφαρμοστεί η θεωρία επίλυσης ολοκληρωτικών εξισώσεων και γίνεται χρήση ενός τελεστή ομαλοποίησης. Πιο συγκεκριμένα, για τον τελεστή L_0 , όπως ορίστηκε προηγούμενα, αποδεικνύεται ότι υπάρχει ο αντίστροφος τελεστής L_0^{-1} και ότι ο τελεστής $L - L_0$ είναι συμπαγής. Η εξίσωση (2.81) δέχεται τη μορφή

$$L_0^{-1} \left[\frac{1}{2}I - K^* - i\eta(L - L_0) \right] \varphi - i\eta\varphi = L_0^{-1}f, \quad (2.82)$$

όπου ο τελεστής $L_0^{-1} \left[\frac{1}{2}I - K^* - i\eta(L - L_0) \right]$ είναι συμπαγής και μπορεί να εφαρμοστεί η θεωρία Riesz. Η απόδειξη παρουσιάστηκε από την Κυριάκη [44] για $\eta \neq 0$ στον \mathbb{R}^3 . \square

Για το στατικό πρόβλημα, αναζητούμε το πεδίο μετατοπίσεων u ως λύση της εξίσωσης

$$\Delta^*u = 0, \quad \text{στο } D, \quad (2.83)$$

με Neumann συνοριακές συνθήκες

$$Tu = 0, \quad \text{στο } \Gamma_1, \quad (2.84)$$

$$Tu = g, \quad \text{στο } \Gamma_2, \quad (2.85)$$

όπου g γνωστή συνάρτηση. Το ευθύ πρόβλημα έχει μοναδική λύση αν και μόνον αν ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες συμβατότητας

$$\int_{\Gamma_2} g ds = 0 \quad (2.86)$$

και

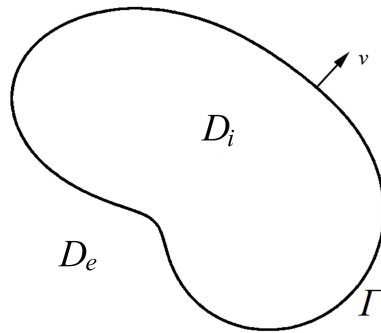
$$\int_{\Gamma_2} (x \times g) ds = 0. \quad (2.87)$$

Θεώρημα 2.4.13. Το πρόβλημα (2.83)-(2.85) έχει το πολύ μια κλασική λύση.

Απόδειξη. Βασίζεται σε γνωστά αποτελέσματα [59]. \square

2.4.3 Έγκλεισμα

Θεωρούμε D_i ένα φραγμένο χωρίο με σύνορο Γ μια C^2 -τάξης φραγμένη καμπύλη. Το χωρίο D_i αποτελείται από ένα ισότροπο και ομογενές ελαστικό μέσο που περιγράφεται από τις σταθερές Lamé λ_i, μ_i και τη πυκνότητα ρ_i . Το εξωτερικό του D_i θα καλείται D_e και είναι ένα απλά συνεκτικό μη φραγμένο χωρίο. Το D_e είναι επίσης ένα ισότροπο και ομογενές ελαστικό μέσο με σταθερές Lamé λ_e, μ_e και πυκνότητα ρ_e . Με ν συμβολίζουμε το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα πάνω στο σύνορο Γ με κατεύθυνση προς το D_e .



Σχήμα 2.3: Έγκλεισμα

Η σκέδαση του προσπίπτοντος κύματος u^{inc} από το σύνορο Γ του εγκλείσματος πέραν του σχεδάζομενου κύματος u^e δημιουργεί πεδίο και στο εσωτερικό του σχεδαστή. Το εσωτερικό πεδίο μετατοπίσεων θα καλείται u^i . Το ευθύ πρόβλημα σκέδασης από έγκλεισμα συνίσταται στην εύρεση των πεδίων $u^e \in [C^2(D_e) \cap C^1(\bar{D}_e)]^2$ και $u^i \in [C^2(D_i) \cap C^1(\bar{D}_i)]^2$ τα οποία ικανοποιούν

- τις εξισώσεις Navier

$$(\Delta_e^* + \rho_e \omega^2) u^e = 0, \quad \text{στο } D_e \quad (2.88)$$

$$(\Delta_i^* + \rho_i \omega^2) u^i = 0, \quad \text{στο } D_i \quad (2.89)$$

- τις συνοριακές συνθήκες

$$u^i = u^e + u^{inc}, \quad \text{στο } \Gamma \quad (2.90)$$

$$T^i u^i = T^e (u^e + u^{inc}), \quad \text{στο } \Gamma \quad (2.91)$$

- και το u^e πρέπει να ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες ακτινοβολίας του Kupradze

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial u_j^e}{\partial r} - ik_j u_j^e \right) = 0, \quad r = |x|, \quad \text{για } j = p, s \quad (2.92)$$

όπου τα όρια θεωρούνται ομοιόμορφα προς όλες τις διευθύνσεις.

Στο εξής η παράμετρος $\alpha = i, e$ θα δηλώνει την εξάρτηση των τελεστών από τις σταθερές του εσωτερικού και του εξωτερικού χωρίου, αντίστοιχα. Οι τελεστές Navier Δ_α^* και επιφανειακών τάσεων T_α δίνονται από τους τύπους

$$\Delta_\alpha^* u := \mu_\alpha \Delta u + (\lambda_\alpha + \mu_\alpha) \nabla (\nabla \cdot u) \quad (2.93)$$

και

$$T^\alpha u := \lambda_\alpha (\nabla \cdot u) \nu + 2\mu_\alpha (\nu \cdot \nabla u) + \mu_\alpha (\nabla \cdot (Qu)) Q \nu. \quad (2.94)$$

Αντίστοιχα, ο ταυσιτής Green Φ_α έχει την ακόλουθη μορφή

$$\begin{aligned} \Phi_\alpha(x, y) &:= \frac{i}{4\mu_\alpha} H_0^{(1)}(k_{s,\alpha} |x - y|) I \\ &+ \frac{i}{4\rho_\alpha \omega^2} \nabla_x \nabla_x^T \left[H_0^{(1)}(k_{s,\alpha} |x - y|) - H_0^{(1)}(k_{p,\alpha} |x - y|) \right] \end{aligned} \quad (2.95)$$

όπου

$$k_{p,\alpha}^2 := \frac{\rho_\alpha \omega^2}{\lambda_\alpha + 2\mu_\alpha} \quad \text{και} \quad k_{s,\alpha}^2 := \frac{\rho_\alpha \omega^2}{\mu_\alpha}. \quad (2.96)$$

Με βάση τον παραπάνω ταυσιτή ορίζουμε ξανά τα ελαστικά δυναμικά

$$(S_\alpha \varphi)(x) := \int_\Gamma \Phi_\alpha(x, y) \varphi(y) ds(y), \quad \text{για } x \in D_\alpha \quad (2.97)$$

$$(\mathcal{D}_\alpha \varphi)(x) := \int_\Gamma [T_y^\alpha \Phi_\alpha(x, y)]^T \varphi(y) ds(y), \quad \text{για } x \in D_\alpha \quad (2.98)$$

απλού και διπλού στρώματος, αντίστοιχα. Λόγω της κατεύθυνσης του μοναδιαίου κάθετου διανύσματος οι σχέσεις διαπήδησης διαφέρουν καθώς το x προσεγγίζει το σύνορο Γ από το εξωτερικό χωρίο D_e ή από το εσωτερικό χωρίο D_i . Πιο συγκεκριμένα, ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις διαπήδησης [60] όπου η σύγκλιση στο σύνορο Γ από το D_e δίνει το πάνω πρόσημο και από το D_i το κάτω πρόσημο

$$\mathcal{D}_\alpha \varphi = \left(\pm \frac{1}{2} I + K_\alpha \right) \varphi, \quad (2.99)$$

$$T^\alpha S_\alpha \varphi = \left(\mp \frac{1}{2} I + K_\alpha^* \right) \varphi, \quad (2.100)$$

όπου οι τελεστές K_α και K_α^* ορίζονται για $x \in \Gamma$ ως εξής

$$(K_\alpha \varphi)(x) := \int_\Gamma [T_y^\alpha \Phi_\alpha(x, y)]^T \varphi(y) ds(y) \quad (2.101)$$

και

$$(K_\alpha^* \varphi)(x) := \int_\Gamma T_x^\alpha \Phi_\alpha(x, y) \varphi(y) ds(y). \quad (2.102)$$

Οι λύσεις του ευθέως προβλήματος έχουν την ακόλουθη μορφή

$$u^\alpha(x) = \tau_\alpha (\mathcal{D}_\alpha \varphi)(x) + (S_\alpha \psi)(x), \quad \text{για } x \in D_\alpha, \quad (2.103)$$

όπου η σταθερά τ_α δίνεται από τον τύπο

$$\tau_\alpha = \frac{\lambda_\alpha + 2\mu_\alpha}{\mu_\alpha(\lambda_\alpha + \mu_\alpha)}. \quad (2.104)$$

Κάνοντας χρήση των συνοριακών συνθηκών (2.90)-(2.91) και των σχέσεων διαπήδησης (2.99)-(2.100) καταλήγουμε στο ακόλουθο σύστημα ολοκληρωτικών εξισώσεων για τις πυκνότητες $\varphi \in [L^2(\Gamma)]^2$ και $\psi \in [L^2(\Gamma)]^2$:

$$\begin{pmatrix} S_i - S_e & A \\ -I - K_i^* + K_e^* & \tau_e L_e - \tau_i L_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^{inc} \\ -T^e u^{inc} \end{pmatrix} \quad (2.105)$$

όπου οι τελεστές L_α και A για $x \in \Gamma$ δίνονται από τους τύπους

$$(L_\alpha \varphi)(x) := T_x^\alpha \int_\Gamma [T_y^\alpha \Phi_\alpha(x, y)]^T \varphi(y) ds(y) \quad (2.106)$$

και

$$A = -\frac{\tau_i + \tau_e}{2} I + \tau_i K_i - \tau_e K_e. \quad (2.107)$$

Θεώρημα 2.4.14. Το σύστημα των ολοκληρωτικών εξισώσεων (2.105) έχει μοναδική λύση (ψ, φ) . Επιπλέον, τα πεδία μετατοπίσεων u^α (2.103) επιλύουν το ευθύ πρόβλημα σκέδασης από έγκλεισμα.

Απόδειξη. Το παραπάνω σύστημα αποδεικνύεται ότι έχει δείκτη μηδέν, δηλαδή αν και είναι ένα σύστημα με ιδιόμορφους τελεστές αντιμετωπίζεται ως ένα σύστημα ολοκληρω-

τικών εξισώσεων δευτέρου είδους με ασθενώς ιδιόμορφους τελεστές. Οπότε, εφαρμόζεται η θεωρία Fredholm για την απόδειξη ύπαρξης λύσης. Ανάλογα με τις εξισώσεις των δύο άλλων ευθέων προβλημάτων εξετάζουμε το αντίστοιχο ομογενές σύστημα το οποίο καταλήγει να έχει μόνο τη μηδενική λύση. Η αναλυτική απόδειξη του θεωρήματος παρουσιάστηκε από τον P. A. Martin στην εργασία [62]. \square

2.5 Πλάτη σκέδασης για το δυναμικό πρόβλημα

Για την επίλυση του αντίστροφου προβλήματος στη δυναμική ελαστικότητα είναι απαραίτητη η γνώση των πλατών σκέδασης του σχεδιαζόμενου πεδίου. Από τους τύπους του Betti κάθε λύση u της μορφής (2.13) της εξίσωσης Navier (2.6) που ικανοποιεί και τις συνθήκες ακτινοβολίας του Kupradze (1.13) δέχεται την ακόλουθη ασυμπτωτική συμπεριφορά

$$u_j(x) = \frac{e^{ik_j|x|}}{\sqrt{|x|}} \left\{ u_j^\infty(\hat{x}) + O\left(\frac{1}{|x|}\right) \right\}, \quad \text{για } j = p, s \quad (2.108)$$

καθώς το $|x| \rightarrow \infty$ ομοιόμορφα προς όλες τις διευθύνσεις $\hat{x} = x/|x|$. Τα διανυσματικά πεδία u_p^∞ και u_s^∞ ορίζονται στον μοναδιαίο κύκλο Ω στον \mathbb{R}^2 και καλούνται τα πλάτη σκέδασης του διαμήκους κύματος u_p και του εγκάρσιου κύματος u_s , αντίστοιχα. Το ζεύγος των πλατών σκέδασης (u_p^∞, u_s^∞) ανήκει στον χώρο $[L^2(\Omega)]^2 \times [L^2(\Omega)]^2$. Από την ασυμπτωτική συμπεριφορά των συναρτήσεων Hankel (2.27) λαμβάνουμε τις ακόλουθες ασυμπτωτικές μορφές για το ελαστικό δυναμικό απλού στρώματος

$$S_j^\infty(\hat{x}) = \gamma_{1,j} \int_{\Gamma} J^*(\hat{x}) e^{-ik_j \hat{x} \cdot y} \varphi(y) ds(y), \quad \text{για } j = p, s \quad (2.109)$$

και διπλού στρώματος

$$D_j^\infty(\hat{x}) = \gamma_{2,j} \int_{\Gamma} J^*(\hat{x}) F(\hat{x}, y) e^{-ik_j \hat{x} \cdot y} \varphi(y) ds(y), \quad \text{για } j = p, s \quad (2.110)$$

όπου οι σταθερές

$$\gamma_{1,j} = \begin{cases} \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{(\lambda+2\mu)\sqrt{8\pi k_p}}, & \text{αν } j = p \\ \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\mu\sqrt{8\pi k_s}}, & \text{αν } j = s, \end{cases} \quad (2.111)$$

$$\gamma_{2,j} = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\lambda+2\mu} \sqrt{\frac{k_p}{8\pi}}, & \text{αν } j = p \\ \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\mu} \sqrt{\frac{k_s}{8\pi}}, & \text{αν } j = s, \end{cases} \quad (2.112)$$

και οι πίνακες J^* και F ορίζονται ως

$$J^*(\hat{x}) = \begin{cases} J(\hat{x}), & \text{αν } j = p \\ I - J(\hat{x}), & \text{αν } j = s, \end{cases} \quad (2.113)$$

$$F(\hat{x}, y) = \lambda \hat{x} \nu(y)^T + \mu \nu(y) \hat{x}^T + \mu \nu(y) \cdot \hat{x} I. \quad (2.114)$$

Για το ευθύ πρόβλημα σκέδασης από σκληρό σκεδαστή (2.69)-(2.71), χρησιμοποιώντας τους παραπάνω τύπους (2.109) και (2.110) στην ολοκληρωτική αναπαράσταση της λύσης (2.72) προκύπτει το ακόλουθο ζεύγος των πλατών σκέδασης

$$u_j^\infty(\hat{x}) = \int_{\Gamma} J^*(\hat{x}) (\gamma_{2,j} F(\hat{x}, y) - i \eta \gamma_{1,j} I) e^{-ik_j \hat{x} \cdot y} \varphi(y) ds(y), \text{ για } j = p, s. \quad (2.115)$$

Αντίστοιχα για το ευθύ πρόβλημα σκέδασης από κοιλότητα (2.77)-(2.79) λόγω της αναπαράστασης της λύσης (2.80) καταλήγουμε στην ακόλουθη μορφή των πλατών σκέδασης

$$u_j^\infty(\hat{x}) = \int_{\Gamma} J^*(\hat{x}) (i \eta \gamma_{2,j} F(\hat{x}, y) + \gamma_{1,j} I) e^{-ik_j \hat{x} \cdot y} \varphi(y) ds(y), \text{ για } j = p, s. \quad (2.116)$$

Για τη σκέδαση ελαστικού κύματος από έγκλεισμα, πρόβλημα (2.88)-(2.92), καταλήγουμε στην ακόλουθη αναπαράσταση για τα πλάτη σκέδασης

$$u_j^\infty(\hat{x}) = \int_{\Gamma} J^*(\hat{x}) (\tau_e \gamma_{2,j}^e F_e(\hat{x}, y) \varphi(y) + \gamma_{1,j}^e I \psi(y)) e^{-ik_{j,e} \hat{x} \cdot y} ds(y), \text{ για } j = p, s. \quad (2.117)$$

Στην παραπάνω σχέση οι σταθερές $\gamma_{1,j}^e$ και $\gamma_{2,j}^e$ δίνονται από τους τύπους

$$\gamma_{1,j}^e = \begin{cases} \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{(\lambda_e + 2\mu_e) \sqrt{8\pi k_{p,e}}}, & \text{αν } j = p \\ \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\mu_e \sqrt{8\pi k_{s,e}}}, & \text{αν } j = s, \end{cases} \quad (2.118)$$

$$\gamma_{2,j}^e = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\lambda_e + 2\mu_e} \sqrt{\frac{k_{p,e}}{8\pi}}, & \text{αν } j = p \\ \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\mu_e} \sqrt{\frac{k_{s,e}}{8\pi}}, & \text{αν } j = s, \end{cases} \quad (2.119)$$

και ο πίνακας F_e ορίζεται ως

$$F_e(\hat{x}, y) = \lambda_e \hat{x} \nu(y)^T + \mu_e \nu(y) \hat{x}^T + \mu_e \nu(y) \cdot \hat{x} I. \quad (2.120)$$

Τα επόμενα δύο θεωρήματα απαντούν στο ερώτημα αν το ζεύγος των πλατών σκέδασης u^∞ προσδιορίζει μοναδικά το σκεδαζόμενο πεδίο u^{sc} .

Λήμμα 2.5.1 (Rellich). Έστω D ένα φραγμένο χωρίο, το οποίο είναι το ανοιχτό συμπλήρωμα ενός μη φραγμένου χωρίου, και έστω ότι $u \in [C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D})]^2$ είναι μία λύση της εξίσωσης Helmholtz η οποία ικανοποιεί την παρακάτω σχέση

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{|x|=r} |u(x)|^2 ds = 0. \quad (2.121)$$

Τότε $u = 0$ στο $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$.

Το λήμμα του Rellich ισχύει και στην ελαστικότητα καθώς οι συνιστώσες του πεδίου μετατοπίσεων u , u_p και u_s , ικανοποιούν τις εξισώσεις (2.16).

Πόρισμα 2.5.1.1. Έστω D και u όπως στο προηγούμενο λήμμα. Επιπλέον έστω ότι το u ικανοποιεί τις συνθήκες ακτινοβολίας του Kupradze και το ζεύγος των πλατών σκέδασης u^∞ είναι ταυτοτικά μηδέν. Τότε $u = 0$ στο $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$.

Απόδειξη. Είναι συνέπεια του λήμματος του Rellich και της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς (2.108). □

Κεφάλαιο 3

Αντίστροφα προβλήματα

Το αντίστροφο πρόβλημα, στη δυναμική γραμμική ελαστικότητα, επιλύεται και για τις τρεις περιπτώσεις σχεδαστών: σκληρός σχεδαστής, κοιλότητα και έγκλεισμα. Η μοναδικότητα επίλυσης του αντίστροφου προβλήματος για ένα προσπίπτον κύμα και χωρίς εκ των προτέρων γνώση για τη θέση και τη γεωμετρία του σχεδαστή παραμένει ανοικτό πρόβλημα. Η μέθοδος επίλυσης εφαρμόζεται επίσης και για σκληρό εμπόδιο και κοιλότητα στη στατική ελαστικότητα.

Στην ακουστική, τα πρώτα αποτελέσματα σχετικά με τη μοναδική επιλυσιμότητα του αντίστροφου προβλήματος απαιτούσαν τη γνώση των πλατών σκέδασης για άπειρο πλήθος προσπιπτόντων κυμάτων. Χαρακτηριστικά αναφέρουμε τη μέθοδο του Schiffer [17] που εφαρμόστηκε για σχεδαστή με Dirichlet συνοριακές συνθήκες και τη μέθοδο του Isakov με εφαρμογή σε διαπερατό σχεδαστή [37]. Μετέπειτα, η μέθοδος του Isakov επεκτάθηκε και σε προβλήματα με διαφορετικές συνοριακές συνθήκες από τους Kirsch και Kress [49]. Μια διαφορετική μέθοδος προτάθηκε από τους Colton και Sleeman [18] δεδομένης της γνώσης ότι ο σχεδαστής βρίσκεται μέσα σε μία σφαίρα. Το πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι ότι απαιτεί πεπερασμένο πλήθος προσπιπτόντων κυμάτων. Αν επιπλέον η ακτίνα της σφαίρας ικανοποιεί μια συνθήκη φραξίματος τότε αρκεί ένα μόνο προσπίπτον κύμα. Η βελτίωση αυτής της συνθήκης πραγματοποιήθηκε από τον Γκιντίδη [23] με χρήση της ανισότητας Faber - Krahn.

Στην δυναμική ελαστικότητα, με εφαρμογή της μεθόδου του Isakov οι Hähner

και Hsiao [30] απέδειξαν ότι τα πλάτη σκέδασης για διαφορετικές συχνότητες, με ένα προσπίπτον κύμα με δεδομένη κατεύθυνση και πόλωση, προσδιορίζουν μοναδικά τον σκεδαστή. Επέκταση της μεθόδου έγινε από τον Kress [51] για το αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης από ρωγμή στον \mathbb{R}^2 . Ανάλογο αποτέλεσμα τοπικής μοναδικότητας με την ακουστική, για σκέδαση από σκληρό σκεδαστή, παρουσιάστηκε από τον Γκιντίδη και βασίζεται σε εκτιμήσεις με βάση την πρώτη ιδιοτιμή του τελεστή Navier. Η απόδειξη βρίσκεται στην εργασία [26]. Για σκέδαση ελαστικού κύματος από σκληρό σκεδαστή, Dirichlet συνοριακές συνθήκες, παρουσιάζουμε ένα αποτέλεσμα μοναδικής επιλυσιμότητας του αντίστροφου προβλήματος δεδομένης μιας αρχικής πρόβλεψης για τη θέση του σκεδαστή. Για το στατικό πρόβλημα, η μοναδικότητα επίλυσης των αντίστροφων προβλημάτων για Dirichlet και Neumann συνοριακές συνθήκες έχει αποδειχθεί από τον Γκιντίδη [24].

Τα αντίστροφα προβλήματα επιλύονται με τη μέθοδο των μη γραμμικών ολοκληρωτικών εξισώσεων. Η μέθοδος προτάθηκε από τους Kress και Rundell [56] για την επίλυση του αντίστροφου προβλήματος για την εξίσωση του Laplace. Το σύστημα των ολοκληρωτικών εξισώσεων προκύπτει από την εφαρμογή των τύπων του Betti. Ανάλογα προκύπτει και από την εφαρμογή του συναρτησιακού αμοιβαιότητας (Reciprocity gap functional) που προτάθηκε από τους Andrieux και Ben Abda [3]. Στο πρόβλημα μας, το συναρτησιακό ορίζεται ουσιαστικά ως το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα που εμφανίζεται στον τρίτο τύπο του Betti.

Η μέθοδος των Kress και Rundell αντιστοιχεί το αντίστροφο πρόβλημα σε ένα ισοδύναμο σύστημα δύο μη γραμμικών ολοκληρωτικών εξισώσεων. Οι εξισώσεις προκύπτουν εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες και τις σχέσεις διαπήδησης που ικανοποιούνται στο σύνορο του εμποδίου. Στο δυναμικό πρόβλημα η δεύτερη εξίσωση προκύπτει από την ολοκληρωτική αναπαράσταση του πεδίου μετατοπίσεων και την ασυμπτωτική συμπεριφορά του μακριά από τον σκεδαστή, δηλαδή τα πλάτη σκέδασης. Στην περίπτωση σκέδασης από έγκλεισμα καταλήγουμε σε τρεις εξισώσεις.

3.1 Σκληρό εμπόδιο

Στη δυναμική γραμμική ελαστικότητα, όπως αναφέρθηκε και προηγούμενα, παραμένει ανοικτό πρόβλημα η απόδειξη ύπαρξης μοναδικής λύσης του αντίστροφου προβλήματος. Όσον αφορά όμως το αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης από σκληρό σκεδαστή αποδεικνύουμε μοναδική επιλυσιμότητα του προϋποθέτοντας ότι ο σκεδαστής ανήκει σε μια κλάση χωρίων. Πιο συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι οι σκεδαστές ανήκουν σε ένα σύνολο χωρίων \mathcal{S} , τέτοιο ώστε αν $D_1, D_2 \in \mathcal{S}$, τότε

$$0 < E(D^*) < \frac{\mu \pi k_{01}^2}{\rho \omega^2} \quad (3.1)$$

και το σύνολο $\mathbb{R}^2 \setminus (D_1 \cup D_2)$ είναι συνεκτικό. Στην παραπάνω ανισότητα ορίζουμε ως $D^* := (D_1 \cup D_2) \setminus (\overline{D_1} \cap \overline{D_2})$, $E(D^*)$ είναι το εμβαδόν του D^* και k_{01} είναι η πρώτη λύση της συνάρτησης Bessel $J_0(k)$. Το πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε διατυπώνεται ως εξής:

Αντίστροφο πρόβλημα 3.1.1 (Δυναμικό). Δεδομένης της γνώσης των πλατών σκέδασης u^∞ για ένα προσπίπτον κύμα u^{inc} με γωνία πρόσπτωσης d αναζητούμε το σχήμα και τη θέση του σκληρού σκεδαστή $D \in \mathcal{S}$.

Η μοναδικότητα επίλυσης του παραπάνω προβλήματος παρουσιάζεται στο ακόλουθο θεώρημα

Θεώρημα 3.1.1. Έστω D_1 και D_2 δύο σκληροί σκεδαστές με $D_1, D_2 \in \mathcal{S}$ τέτοιοι ώστε τα αντίστοιχα πλάτη σκέδασης u_1^∞ και u_2^∞ να ταυτίζονται για κάθε $\hat{x} \in \Omega$, για ένα προσπίπτον κύμα με κατεύθυνση d , και για δεδομένους κυματάριθμους. Τότε $D_1 = D_2$.

Το παραπάνω αποτέλεσμα παρουσιάστηκε για πρώτη φορά από τον Γκιντίδη το 2008 στο συνέδριο “International Conference on Inverse Scattering Problems Honoring D. Colton and R. Kress” και η πλήρης διατύπωση βρίσκεται στην εργασία [26]. Για την απόδειξη του θεωρήματος χρειάζεται να αναφέρουμε πρώτα τα ακόλουθα λήμματα.

Λήμμα 3.1.1. Διαιρούμε τον τελεστή Navier (2.7) με τη σταθερά Lamé μ και προκύπτει

$$\Delta^* := \Delta + \alpha \nabla(\nabla \cdot), \quad (3.2)$$

όπου $\alpha = (\lambda + \mu)/\mu > 0$. Θεωρούμε το πρόβλημα ιδιοτιμών

$$\Delta^* u(x) = \Lambda(D)u(x), \quad x \in D, \quad (3.3)$$

τότε η πρώτη ιδιοτιμή μπορεί να υπολογιστεί με βάση το πηλίκο του Rayleigh (Rayleigh quotient) ως εξής

$$\Lambda_1(D) = \min_{u \neq 0, u \in [H_0^1(D)]^2} R(u), \quad (3.4)$$

όπου

$$R(u) = \frac{\int_D |\nabla u(x)|^2 dx + \alpha \int_D |\nabla \cdot u(x)|^2 dx}{\int_D u(x)^2 dx}. \quad (3.5)$$

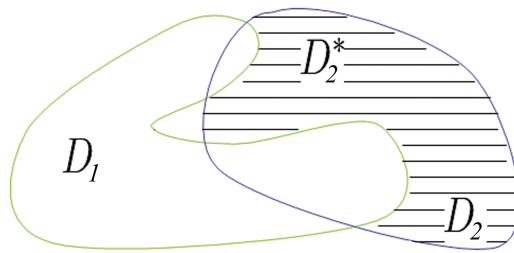
Θεώρημα 3.1.2 (Faber-Krahn). Έστω $c > 0$ και B ο δίσκος με εμβαδόν c . Τότε,

$$\lambda_1(B) = \min \{ \lambda_1(\Omega), \text{όπου } \Omega \text{ ανοικτό υποσύνολο του } \mathbb{R}^2 \text{ εμβαδού } c \}. \quad (3.6)$$

όπου λ_1 είναι η πρώτη ιδιοτιμή του τελεστή $-\Delta$.

Απόδειξη. Βασίζεται στην αναδιάταξη κατά Schwarz και στην ανισότητα του Pólya. Η αναλυτική απόδειξη βρίσκεται στο βιβλίο [31]. \square

Απόδειξη. (του Θεωρήματος 3.1.1). Έστω $u_1^\infty = u_2^\infty$ και $D_1 \neq D_2$. Από το Λήμμα του Rellich (2.5.1) θα ισχύει και $u_1^{sc} = u_2^{sc}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^2 \setminus (D_1 \cup D_2)$. Από αναλυτικότητα ισχύει ότι $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$ [17]. Ορίζουμε $D_i^* = D_i \setminus (\overline{D_1 \cap D_2})$ για $i = 1, 2$ και το συνολικό



Σχήμα 3.1: Χωρίο D_2^*

πεδίο μετατοπίσεων u^{tot} ως

$$u^{tot} = \begin{cases} u_1^{tot}(x, d) & \text{στο } D_2^* \\ u_2^{tot}(x, d) & \text{στο } D_1^*. \end{cases} \quad (3.7)$$

Παρατηρούμε ότι το u^{tot} είναι ιδιοσυνάρτηση του $-\Delta^*$ (3.2) στο D^* και ισχύει $u^{tot} \in [H_0^1(D^*)]^2$. Επίσης το $\rho\omega^2/\mu$ είναι ιδιοτιμή, οπότε ισχύει

$$\Lambda_1(D^*) \leq \frac{\rho\omega^2}{\mu}. \quad (3.8)$$

Αν λ_1 είναι η πρώτη ιδιοτιμή του $-\Delta$ στο D^* τότε ισχύει $\lambda_1(D^*) \leq \Lambda_1(D^*)$ λόγω του τύπου (3.5) [43]. Από την ανισότητα Faber-Krahn (Θεώρημα 3.1.2) ισχύει ότι ο δίσκος έχει τη μικρότερη πρώτη ιδιοτιμή από όλα τα χωρία με ίδιο εμβαδόν, δηλαδή

$$\frac{\pi k_{01}^2}{E(D^*)} \leq \lambda_1, \quad (3.9)$$

όπου $E(D^*)$ είναι το εμβαδόν του D^* και k_{01} είναι η πρώτη λύση της συνάρτησης Bessel $J_0(k)$. Από τις παραπάνω σχέσεις καταλήγουμε ότι

$$\frac{\pi k_{01}^2}{E(D^*)} \leq \lambda_1 \leq \Lambda_1(D^*) \leq \frac{\rho\omega^2}{\mu} \Rightarrow \frac{\mu\pi k_{01}^2}{\rho\omega^2} \leq E(D^*). \quad (3.10)$$

Όμως ισχύει η ανίσωση (3.1) γιατί έχουμε υποθέσει ότι $D_1, D_2 \in \mathcal{S}$, οπότε καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα $D_1 = D_2$. \square

Η ολοκληρωτική αναπαράσταση της λύσης προκύπτει από την εφαρμογή του τρίτου τύπου του Betti (2.42) για τη θεμελιώδη λύση Φ (2.20) και μια ομαλή λύση u της εξίσωσης Navier (2.6). Κάνοντας χρήση της ανάλυσης κατά Helmholtz, των ασυμπτωτικών συμπεριφορών που προκύπτουν από τις συνθήκες ακτινοβολίας για το πεδίο μετατοπίσεων u και για τον ταυστή Green καταλήγουμε στην ακόλουθη ολοκληρωτική αναπαράσταση της λύσης (τύπος Somigliana) [59]

$$\delta(x)u(x) = \int_{\Gamma} \left\{ [T_y\Phi(x, y)]^T u(y) - \Phi(x, y)(Tu)(y) \right\} ds(y), \quad (3.11)$$

όπου

$$\delta(x) = \begin{cases} 1, & \text{για } x \in R^2 \setminus \bar{D} \\ \frac{1}{2}, & \text{για } x \in \Gamma \\ 0, & \text{για } x \in D. \end{cases} \quad (3.12)$$

Οπότε το σκεδαζόμενο πεδίο u^{sc} δέχεται την ακόλουθη αναπαράσταση

$$u^{sc}(x) = \int_{\Gamma} \left\{ [T_y\Phi(x, y)]^T u^{sc}(y) - \Phi(x, y)(Tu^{sc})(y) \right\} ds(y), \quad x \in R^2 \setminus \bar{D}. \quad (3.13)$$

Με εφαρμογή του τρίτου γενικευμένου τύπου του Betti για το προσπίπτον κύμα u^{inc} και για τον ταυοστή $\Phi(x, \cdot)$ προκύπτει η σχέση

$$\int_{\Gamma} \left\{ [T_y \Phi(x, y)]^T u^{inc}(y) - \Phi(x, y)(Tu^{inc})(y) \right\} ds(y) = 0, \quad x \in R^2 \setminus \bar{D}. \quad (3.14)$$

Προσθέτοντας τις σχέσεις (3.13), (3.14) και λαμβάνοντας υπόψιν τη Dirichlet συνοριακή συνθήκη (2.70) μπορούμε να διατυπώσουμε το ακόλουθο θεώρημα

Θεώρημα 3.1.3. Για τη σκέδαση προσπίπτοντος κύματος u^{inc} από σκληρό σκεδαστή D ισχύει

$$u^{tot}(x) = u^{inc}(x) - \int_{\Gamma} \Phi(x, y)(Tu^{tot})(y) ds(y), \quad x \in R^2 \setminus \bar{D} \quad (3.15)$$

και τα πλάτη σκέδασης για το σκεδαζόμενο κύμα u^{sc} δίνονται από τη σχέση

$$u_j^{\infty}(\hat{x}) = -\gamma_{1,j} \int_{\Gamma} J^*(\hat{x}) e^{-ik_j \hat{x} \cdot y} (Tu^{tot})(y) ds(y), \quad \text{για } j = p, s. \quad (3.16)$$

Για να διατυπώσουμε το σύστημα των μη γραμμικών ολοκληρωτικών εξισώσεων θέτουμε $h = -Tu^{tot}|_{\Gamma}$ και με πυκνότητα το h ορίζουμε ξανά τους τελεστές δυναμικού απλού στρώματος $S : [L^2(\Gamma)]^2 \rightarrow [L^2(\Gamma)]^2$ και του πλάτους σκέδασης $S_j^{\infty} : [L^2(\Gamma)]^2 \rightarrow [L^2(\Omega)]^2$ ως εξής

$$(Sh)(x) = \int_{\Gamma} \Phi(x, y)h(y) ds(y), \quad x \in \Gamma, \quad (3.17)$$

$$(S_j^{\infty}h)(x) = \gamma_{1,j} \int_{\Gamma} J^*(\hat{x}) e^{-ik_j \hat{x} \cdot y} h(y) ds(y), \quad \text{για } j = p, s. \quad (3.18)$$

Στο εξής θα χρησιμοποιούμε τους ακόλουθους συμβολισμούς για τα πλάτη σκέδασης

$$S^{\infty} = \begin{pmatrix} S_p^{\infty} \\ S_s^{\infty} \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad u^{\infty} = \begin{pmatrix} u_p^{\infty} \\ u_s^{\infty} \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Οπότε από τις σχέσεις (3.15) και (3.16) προκύπτει ότι το άγνωστο σύνορο Γ και η άγνωστη πυκνότητα h , η τάση της αντίστοιχης λύσης u στο σύνορο, ικανοποιούν το 2×2 σύστημα ολοκληρωτικών εξισώσεων

$$Sh = -u^{inc}|_{\Gamma} \quad (3.20)$$

και

$$S^{\infty}h = u^{\infty}. \quad (3.21)$$

Με το επόμενο θεώρημα αποδεικνύουμε την ισοδυναμία μεταξύ του αντίστροφου προβλήματος και του παραπάνω συστήματος.

Θεώρημα 3.1.4. Έστω ότι το ω^2 δεν είναι ιδιοσυχνότητα του εσωτερικού προβλήματος Dirichlet, τότε το αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης 3.1.1 και το 2×2 σύστημα των ολοκληρωτικών εξισώσεων (3.20) και (3.21) είναι ισοδύναμα.

Απόδειξη. Η ανάλυση που έχει προηγηθεί εξασφαλίζει ότι το άγνωστο σύνορο Γ και η πυκνότητα h ικανοποιούν τις δύο ολοκληρωτικές εξισώσεις (3.20) και (3.21).

Αντιστρόφως, αν το σύνορο Γ και η πυκνότητα h ικανοποιούν το σύστημα (3.20) και (3.21) τότε το Γ επιλύει το αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης 3.1.1. Πράγματι, αν ορίσουμε με v το ελαστικό δυναμικό απλού στρώματος με πυκνότητα h τότε το v ικανοποιεί την εξίσωση Navier στο $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ και τις συνθήκες ακτινοβολίας του Kupradze. Από τη δεύτερη εξίσωση (3.21) με εφαρμογή του Λήμματος του Rellich 2.5.1 προκύπτει ότι

$$v = u^{sc}, \text{ στο } \Gamma. \quad (3.22)$$

Συνδυάζοντας τη σχέση (3.22) με την πρώτη εξίσωση του συστήματος (3.20) λαμβάνουμε $v = 0$ στο Γ . Τότε, λόγω μοναδικής επιλυσιμότητας του εσωτερικού προβλήματος Dirichlet, ισχύει και $v = 0$ στο D . Άρα το σύνορο Γ επιλύει το αντίστροφο πρόβλημα. \square

Από την ολοκληρωτική αναπαράσταση της λύσης (3.13) και την ασυμπτωτική συμπεριφορά (2.108) προκύπτει η ακόλουθη μορφή για το ζεύγος των πλατών σκέδασης

$$u_j^\infty(\hat{x}) = \gamma_j \int_{\Gamma} \left\{ [T_y (J^*(\hat{x})e^{-ik_j \hat{x} \cdot y})]^T u(y) - J^*(\hat{x})e^{-ik_j \hat{x} \cdot y} T u(y) \right\} ds(y), \quad (3.23)$$

όπου η σταθερά γ_j δίνεται από τον τύπο

$$\gamma_j = \frac{e^{\frac{i\pi}{4}} k_j^2}{\sqrt{8\pi k_j} \rho \omega^2}, \text{ για } j = p, s. \quad (3.24)$$

Ορίζουμε το συναρτησιακό αμοιβαιότητας ως εξής

$$\mathcal{G}(U) := \int_{\Gamma} \{ [TU]^T u - U(Tu) \} ds. \quad (3.25)$$

Το συναρτησιακό \mathcal{G} ορίζεται ως ένα ολοκλήρωμα πάνω στο άγνωστο σύνορο Γ για ολοκληρώσιμες συναρτήσεις U στον $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$, ομαλές στο σύνορο, έχοντας το πολύ λογαριθμική ιδιομορφία. Από την παραπάνω σχέση για το ζεύγος των πλατών σκέδασης προκύπτει

$$u_j^\infty(\hat{x}) = \gamma_j \mathcal{G}(J^*(\hat{x})v(x, -k_j \hat{x})), \quad \text{για } \hat{x} \in \Omega \text{ και } j = p, s \quad (3.26)$$

όπου $v(x, y) = e^{ix \cdot y}$. Από αυτή την ισότητα προκύπτει η μη γραμμική εξίσωση των πλατών σκέδασης για το άγνωστο σύνορο Γ και την πυκνότητα $h = -Tu^{tot}|_\Gamma$. Αντίστοιχα αν στη θέση της συνάρτησης U επιλέξουμε τη θεμελιώδη λύση Φ στον τύπο (3.25) προκύπτει

$$\mathcal{G}(\Phi(\cdot, x)) = -u^{inc}(x), \quad \text{για } x \in \Gamma. \quad (3.27)$$

Η παραπάνω σχέση ταυτίζεται με την εξίσωση (3.20) και το σύστημα των μη γραμμικών ολοκληρωτικών εξισώσεων προκύπτει ισοδύναμα με του τύπους του Betti.

Για το στατικό πρόβλημα δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Αντίστροφο πρόβλημα 3.1.2 (Στατικό). Δεδομένης της γνώσης των πεδίων μετατοπίσεων f (γνωστών) και τάσεων g (μετρήσιμων) στο σύνορο Γ_2 αναζητούμε το σχήμα της άγνωστης κλειστής καμπύλης Γ_1 .

Η μοναδική επιλυσιμότητα του παραπάνω προβλήματος εξασφαλίζεται από το ακόλουθο θεώρημα

Θεώρημα 3.1.5. Έστω ότι Γ_1 και $\tilde{\Gamma}_1$ είναι δύο κλειστές καμπύλες που περιέχονται στο εσωτερικό της Γ_2 , ορίζουμε με u και \tilde{u} τις λύσεις των προβλημάτων *Dirichlet* για τα χωρία με εσωτερικά σύνορα Γ_1 και $\tilde{\Gamma}_1$, αντίστοιχα. Έστω ότι το δεδομένο πεδίο μετατοπίσεων δεν είναι μηδενικό $f \neq 0$ και τα αντίστοιχα πεδία επιφανειακών τάσεων είναι ίσα, δηλ. $Tu = T\tilde{u}$ σε ένα ανοικτό υποσύνολο της Γ_2 . Τότε $\Gamma_1 = \tilde{\Gamma}_1$.

Απόδειξη. Βρίσκεται στην εργασία [24]. □

Για να καταστρώσουμε το σύστημα των ολοκληρωτικών εξισώσεων κάνουμε χρήση του συναρτησιακού αμοιβαιότητας. Το οποίο ορίζεται, με διαφορετικό τρόπο σε σχέση

με το δυναμικό πρόβλημα, ως εξής

$$\mathcal{G}(U) := \int_{\Gamma_2} \{[TU]^T f - Ug\} ds, \quad (3.28)$$

όπου $g = Tu$ στο Γ_2 , μετρήσιμα δεδομένα από το ευθύ πρόβλημα. Ορίζουμε $h = -Tu|_{\Gamma_1}$ και με πυκνότητα το h ορίζουμε τους τελεστές $S_{0,\alpha}, \tilde{S}_{0,\alpha} : [L^2(\Gamma_1)]^2 \rightarrow [L^2(\Gamma_\alpha)]^2$ για $\alpha = 1, 2$ ως εξής

$$(S_{0,\alpha}h)(x) = \int_{\Gamma_1} \Phi_0(x, y)h(y)ds(y), \quad x \in \Gamma_\alpha \quad (3.29)$$

και

$$\left(\tilde{S}_{0,\alpha}h\right)(x) := (S_{0,\alpha}h)(x) + (I - \Phi_0(x, 0)) \int_{\Gamma_1} h(y) ds(y), \quad x \in \Gamma_\alpha. \quad (3.30)$$

Για τις γνωστές συναρτήσεις f και g στο Γ_2 , ορίζουμε τον συνδυασμό των δυναμικών

$$w(x) := \int_{\Gamma_2} \left\{ [T_y \Phi_0(x, y)]^T f(y) - \Phi_0(x, y) g(y) \right\} ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma_2 \quad (3.31)$$

και την τροποποίηση αυτού

$$\tilde{w}(x) := w(x) - (I - \Phi_0(x, 0)) \int_{\Gamma_2} g(y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\Gamma_2 \cup \{0\}\}. \quad (3.32)$$

Επίσης ορίζουμε το δυναμικό απλού στρώματος

$$v(x) := \int_{\Gamma_1} \Phi_0(x, y) h(y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma_1 \quad (3.33)$$

και την τροποποίηση αυτού

$$\tilde{v}(x) := v(x) + (I - \Phi_0(x, 0)) \int_{\Gamma_1} h(y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\Gamma_1 \cup \{0\}\}. \quad (3.34)$$

Σκοπός αυτών των τροποποιήσεων είναι η εξασφάλιση ότι τα \tilde{w} και \tilde{v} είναι φραγμένα στο μη φραγμένο χωρίο D_2 [24]. Από τον τύπο του συναρτησιακού αμοιβαιότητας \mathcal{G} (3.28) για $U = \Phi(x, \cdot)$ και $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ προκύπτει

$$v = w, \quad \text{για } x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D} \quad (3.35)$$

Ομοίως, θέτοντας $U = I$, το ταυτικό δυαδικό, συμπεραίνουμε ότι

$$\int_{\Gamma_1} h(y) ds(y) + \int_{\Gamma_2} g(y) ds(y) = 0 \quad (3.36)$$

και ισοδύναμα

$$\tilde{v} = \tilde{w} \quad \text{για } x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{D} \cup \{0\}\} \quad (3.37)$$

Από τις σχέσεις (3.35) και (3.37) με εφαρμογή των σχέσεων συνέχειας και διαπρήδησης των δυναμικών απλού και διπλού στρώματος καταλήγουμε ότι το άγνωστο σύνορο Γ_1 και το άγνωστο πεδίο των τάσεων h ικανοποιούν το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων

$$S_{0,1}h = w|_{\Gamma_1} \quad (3.38)$$

και

$$\tilde{S}_{0,2}h = \tilde{w}|_{\Gamma_2}. \quad (3.39)$$

Στη δεύτερη εξίσωση το $w|_{\Gamma_1}$ προέκυψε προσεγγίζοντας οριακά το Γ_2 από το εσωτερικό του D_2 . Όμοια με το δυναμικό πρόβλημα, αν το σύνορο Γ_1 και η πυκνότητα h ικανοποιούν το σύστημα (3.38) - (3.39) τότε το σύνορο Γ_1 επιλύει το αντίστροφο πρόβλημα για σκληρό εμπόδιο.

Θεώρημα 3.1.6. *Το αντίστροφο πρόβλημα 3.1.2 και το 2×2 σύστημα των ολοκληρωτικών εξισώσεων (3.38) - (3.39) είναι ισοδύναμα.*

Τα συστήματα των μη γραμμικών ολοκληρωτικών εξισώσεων (3.20) - (3.21) και (3.38) - (3.39) μπορούν να αναπαρασταθούν σε ενιαία γραφή ως εξής

$$A_1h = b_1 \quad (3.40)$$

και

$$A_2h = b_2, \quad (3.41)$$

όπου

$$h = \begin{cases} -Tu^{tot}|_{\Gamma} & \text{για το δυναμικό} \\ -Tu|_{\Gamma_1} & \text{για το στατικό,} \end{cases} \quad (3.42)$$

$$A_1 = \begin{cases} S & \text{για το δυναμικό} \\ S_{0,1} & \text{για το στατικό,} \end{cases} \quad (3.43)$$

$$b_1 = \begin{cases} -u^{inc}|_{\Gamma} & \text{για το δυναμικό} \\ w|_{\Gamma_1} & \text{για το στατικό,} \end{cases} \quad (3.44)$$

$$A_2 = \begin{cases} S^\infty & \text{για το δυναμικό} \\ \tilde{S}_{0,2} & \text{για το στατικό,} \end{cases} \quad (3.45)$$

και

$$b_2 = \begin{cases} u^\infty & \text{για το δυναμικό} \\ \tilde{w}|_{\Gamma_2} & \text{για το στατικό.} \end{cases} \quad (3.46)$$

Για περαιτέρω ανάλυση του συστήματος των ολοκληρωτικών εξισώσεων (3.40)-(3.41) επιλέγουμε την ακόλουθη αναπαράσταση για το άγνωστο σύνορο

$$x(t) = r(t)(\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi], \quad (3.47)$$

όπου το $x : R \rightarrow R^2$ είναι 2π περιοδική, C^2 ομαλή συνάρτηση και “1-1” στο $[0, 2\pi]$. Ισχύει $x'(t) \neq 0 \quad \forall t \in [0, 2\pi]$. Στο στατικό πρόβλημα, χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ότι το εξωτερικό σύνορο Γ_2 είναι ο μοναδιαίος κύκλος, δηλαδή

$$\Gamma_2 = \{x_2(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi]\}. \quad (3.48)$$

Ορίζουμε

$$\varphi := |x'| (h \circ x) \quad (3.49)$$

και κατά συνέπεια το σύστημα των ολοκληρωτικών εξισώσεων (3.40)-(3.41) μετατρέπεται στο

$$A_1(r, \varphi) = b_1(r) \quad (3.50)$$

και

$$A_2(r, \varphi) = b_2. \quad (3.51)$$

Σ' αυτό το σημείο πρέπει να διευκρινίσουμε ότι οι τελεστές A_1, A_2 δρουν στη δεύτερη μεταβλητή φ και η πρώτη μεταβλητή r δηλώνει την εξάρτηση των τελεστών και του δεξιού μέλους b_1 από το x . Το b_2 δεν εξαρτάται από το παραμετροποιημένο άγνωστο σύνορο γιατί αντιστοιχεί στα πλάτη σκέδασης (δυναμικό πρόβλημα) ή σε ολοκλήρωμα πάνω στο σύνορο Γ_2 (στατικό πρόβλημα).

Για το δυναμικό πρόβλημα, ορίζουμε $b_1(r) = -u^{inc} \circ x$ και $b_2 = u^\infty \circ (\cos t, \sin t)$. Οι τελεστές ορίζονται ως $A_1, A_2 : [L^2[0, 2\pi]]^2 \rightarrow [L^2[0, 2\pi]]^2$ και έχουν τις παρακάτω παραμετρικές μορφές

$$(A_1(r, \varphi))(t) := (S(r, \varphi))(t) = \int_0^{2\pi} \Phi(x(t), x(\tau))\varphi(\tau)d\tau, \quad t \in [0, 2\pi] \quad (3.52)$$

και

$$(A_2(r, \varphi))(t) := (S^\infty(r, \varphi))(t) = \begin{pmatrix} (S_p^\infty(r, \varphi))(t) \\ (S_s^\infty(r, \varphi))(t) \end{pmatrix}, \quad (3.53)$$

όπου

$$(S_j^\infty(r, \varphi))(t) = \gamma_{1,j} \int_0^{2\pi} J^*(\hat{x}(t)) e^{-ik_j \hat{x}(t) \cdot x(\tau)} \varphi(\tau) d\tau, \quad t \in [0, 2\pi] \text{ για } j = p, s. \quad (3.54)$$

Επίσης

$$(b_1(r))(t) := (w(r))(t) = \begin{cases} -d e^{ik_p d \cdot x(t)} & \alpha\text{ν } u^{inc} = u_p^{inc} \\ Qd e^{ik_s d \cdot x(t)} & \alpha\text{ν } u^{inc} = u_s^{inc}, \end{cases} \quad (3.55)$$

όπου d η γωνία πρόσπτωσης.

Για το στατικό πρόβλημα ορίζουμε τους τελεστές $A_1, A_2 : [L^2[0, 2\pi]]^2 \rightarrow [L^2[0, 2\pi]]^2$ με παραμετρικές μορφές

$$(A_1(r, \varphi))(t) := (S_{0,1}(r, \varphi))(x) = \int_0^{2\pi} \Phi_0(x(t), x(\tau)) \varphi(\tau) d\tau, \quad t \in [0, 2\pi] \quad (3.56)$$

και

$$(A_2(r, \varphi))(t) := (\tilde{S}_{0,2}(r, \varphi))(t) = (S_{0,2}(r, \varphi))(x) + (I - \Phi_0(x_2(t), 0)) \int_0^{2\pi} \varphi(\tau) d\tau. \quad (3.57)$$

Ορίζουμε $w_j := w|_{\Gamma_j}$ για $j = 1, 2$, οπότε τα $b_1, b_2 : [L^2[0, 2\pi]]^2 \rightarrow [L^2[0, 2\pi]]^2$ δίνονται από τους τύπους

$$\begin{aligned} (b_1(r, \varphi))(t) &:= (w_1(r, \varphi))(x) = \\ &= \int_0^{2\pi} \left\{ [T_{x_2} \Phi_0(x(t), x_2(\tau))]^T f(x_2(\tau)) - \Phi_0(x(t), x_2(\tau)) g(x_2(\tau)) \right\} d\tau \end{aligned} \quad (3.58)$$

και

$$(b_2(\varphi))(t) := (\tilde{w}_2(\varphi))(x) = w(x_2(t)) + \frac{1}{2} f(t) - (I - \Phi_0(x_2(t), 0)) \int_0^{2\pi} g(\tau) d\tau \quad (3.59)$$

3.2 Κοιλότητα

Αρχικά επιλύουμε το αντίστροφο πρόβλημα στη δυναμική ελαστικότητα. Για το αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης από κοιλότητα, δηλαδή Neumann συνοριακές συν-

θήκες, η επέκταση της μεθόδου για την τοπική μοναδικότητα επίλυσης του αντιστρόφου προβλήματος στην περίπτωση σκληρού σκεδαστή δεν είναι τετριμμένη. Το πρόβλημα έγκειται στην εφαρμογή του θεωρήματος επιλογής Rellich-Kondrachev στον χώρο Sobolev $H^1(D^*)$, χωρίς Dirichlet συνοριακές συνθήκες, καθώς είναι απαραίτητες περαιτέρω προϋποθέσεις ομαλότητας για το σύνορο Γ του σκεδαστή.

Παρ' ολ' αυτά, η εφαρμογή της μεθόδου των μη γραμμικών ολοκληρωτικών εξισώσεων στην περίπτωση σκέδασης από κοιλότητα οδηγεί σε ανακατασκευή του συνόρου. Βέβαια, η αριθμητική επίλυση με τη χρήση μεθόδων ομαλοποίησης δεν εγγυάται και τη μοναδικότητα της λύσης. Το αντίστροφο πρόβλημα που εξετάζουμε έχει την ακόλουθη μορφή

Αντίστροφο πρόβλημα 3.2.1 (Δυναμικό). Δεδομένης της γνώσης των πλατών σκέδασης u^∞ για ένα προσπίπτον κύμα u^{inc} με γωνία πρόσπτωσης d αναζητούμε το σχήμα και τη θέση κοιλότητας D .

Αντίστοιχα με το αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης από σκληρό σκεδαστή διατυπώνουμε το ακόλουθο θεώρημα

Θεώρημα 3.2.1. Για τη σκέδαση προσπίπτοντος κύματος u^{inc} από κοιλότητα D ισχύει

$$u^{tot}(x) = u^{inc}(x) + \int_{\Gamma} [T_y \Phi(x, y)]^T u^{tot}(y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D} \quad (3.60)$$

και τα πλάτη σκέδασης για το σκεδαζόμενο κύμα u^{sc} δίνονται από τη σχέση

$$u_j^\infty(\hat{x}) = \gamma_{2,j} \int_{\Gamma} J^*(\hat{x}) F(\hat{x}, y) e^{-ik_j \hat{x} \cdot y} u^{tot}(y) ds(y), \quad \text{για } j = p, s. \quad (3.61)$$

Απόδειξη. Το θεώρημα προκύπτει από την εφαρμογή των τύπων (3.13), (3.14) και συνυπολογίζοντας την Neumann συνοριακή συνθήκη (2.78). \square

Για να καταστρώσουμε το σύστημα των μη γραμμικών ολοκληρωτικών εξισώσεων θεωρούμε $h = u^{tot}|_{\Gamma}$ και με πυκνότητα το h ορίζουμε ξανά τους τελεστές δυναμικών $\mathcal{D}, L : [L^2(\Gamma)]^2 \rightarrow [L^2(\Gamma)]^2$ και του πλάτους σκέδασης $\mathcal{D}_j^\infty : [L^2(\Gamma)]^2 \rightarrow [L^2(\Omega)]^2$ ως εξής

$$(\mathcal{D}h)(x) := \int_{\Gamma} [T_y \Phi(x, y)]^T h(y) ds(y), \quad x \in \Gamma, \quad (3.62)$$

$$(Lh)(x) = T_x \int_{\Gamma} [T_y \Phi(x, y)]^T h(y) ds(y), \quad x \in \Gamma \quad (3.63)$$

και

$$\mathcal{D}_j^\infty(\hat{x}) = \gamma_{2,j} \int_{\Gamma} J^*(\hat{x}) F(\hat{x}, y) e^{-ik_j \hat{x} \cdot y} h(y) ds(y), \quad \text{για } j = p, s. \quad (3.64)$$

Ορίζουμε $\mathcal{D}^\infty := (\mathcal{D}_p^\infty \ \mathcal{D}_s^\infty)^T$ και από το Θεώρημα 3.2.1 συμπεραίνουμε ότι το άγνωστο σύνορο Γ της κοιλότητας D και η άγνωστη πυκνότητα h , η αντίστοιχη λύση u στο σύνορο, ικανοποιούν το 2×2 σύστημα ολοκληρωτικών εξισώσεων

$$Lh = -Tu^{inc}|_{\Gamma} \quad (3.65)$$

και

$$\mathcal{D}^\infty h = u^\infty. \quad (3.66)$$

Αντιστρόφως, αν το σύνορο Γ και η πυκνότητα h ικανοποιούν τις εξισώσεις (3.65) και (3.66) τότε το σύνορο Γ επιλύει το αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης από κοιλότητα. Η πρώτη εξίσωση (3.65) εξασφαλίζει τη Neumann συννοριακή συνθήκη $Tu^{tot} = 0$ στο Γ . Η δεύτερη εξίσωση (3.66) εγγυάται ότι για το συνολικό πεδίο μετατοπίσεων u^{tot} όπως ορίζεται από την (3.60) το σκεδαζόμενο πεδίο u^{sc} , που δίνεται από τον δεύτερο όρο στο δεξί μέλος, έχει το κατάλληλο πλάτος σκέδασης. Όμοια με το αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης από σκληρό σκεδαστή καταλήγουμε στο ακόλουθο θεώρημα

Θεώρημα 3.2.2. *Το αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης 3.2.1 και το 2×2 σύστημα των ολοκληρωτικών εξισώσεων (3.65) και (3.66) είναι ισοδύναμα.*

Το αντίστροφο πρόβλημα στη στατική γραμμική ελαστικότητα ορίζεται ως εξής

Αντίστροφο πρόβλημα 3.2.2 (Στατικό). *Δεδομένης της γνώσης των πεδίων μετατοπίσεων f (μετρήσιμων) και τάσεων g (γνωστών) στο σύνορο Γ_2 αναζητούμε το σχήμα της άγνωστης κλειστής καμπύλης Γ_1 .*

Το επόμενο θεώρημα εξασφαλίζει ότι το αντίστροφο πρόβλημα έχει μοναδική λύση.

Θεώρημα 3.2.3. *Έστω ότι Γ_1 και $\tilde{\Gamma}_1$ είναι δύο κλειστές καμπύλες που περιέχονται στο εσωτερικό της Γ_2 , ορίζουμε με u και \tilde{u} τις λύσεις των προβλημάτων Neumann για τα χωρία με εσωτερικά σύνορα Γ_1 και $\tilde{\Gamma}_1$, αντίστοιχα. Έστω ότι το δεδομένο πεδίο*

τάσεων δεν είναι μηδενικό $g \neq 0$ και τα αντίστοιχα πεδία επιφανειακών μετατοπίσεων είναι ίσα, δηλ. $u = \tilde{u}$ σε ένα ανοικτό υποσύνολο της Γ_2 . Τότε $\Gamma_1 = \tilde{\Gamma}_1$.

Απόδειξη. Βρίσκεται στην εργασία [24]. □

Ορίζουμε $h = u|_{\Gamma_1}$ και τα στατικά δυναμικά διπλού στρώματος $K_{0,j} : [H^{-1/2}(\Gamma_1)]^2 \rightarrow [H^{1/2}(\Gamma_1)]^2$ για $j = 1, 2$

$$(K_{0,j}h)(x) := \int_{\Gamma_1} [T_y \Phi_0(x, y)]^T h(y) ds(y), \quad x \in \Gamma_j. \quad (3.67)$$

Αντίστοιχα με το αντίστροφο πρόβλημα για σκληρό εμπόδιο, θέτουμε στο \mathcal{G} (3.28) $U = \Phi(x, \cdot)$ για $x \in R^2 \setminus \bar{D}$ και στη συνέχεια όπου U σταθερά και προκύπτουν οι ακόλουθες δύο εξισώσεις

$$\left(\frac{1}{2}I - K_{0,1} \right) h = w|_{\Gamma_1} \quad (3.68)$$

και

$$-K_{0,2}h = w|_{\Gamma_2}. \quad (3.69)$$

Το w δίνεται από τον τύπο (3.31). Η πρώτη εξίσωση προκύπτει από την εφαρμογή των σχέσεων διαπήδησης προσεγγίζοντας το Γ_1 από το D_1 . Στη δεύτερη εξίσωση το δεξί μέλος ορίζεται ως το όριο που προκύπτει προσεγγίζοντας το Γ_2 από το D_2 . Όμοια με τα προηγούμενα προβλήματα αποδεικνύεται και το αντίστροφο, δηλαδή ότι η λύση του παραπάνω συστήματος Γ_1 είναι και η λύση του αντίστροφου προβλήματος.

Θεώρημα 3.2.4. *Το αντίστροφο πρόβλημα 3.2.2 και το 2×2 σύστημα των ολοκληρωτικών εξισώσεων (3.68) - (3.69) είναι ισοδύναμα.*

Με βάση την αναπαράσταση του συνόρου (3.47), ορίζουμε την πυκνότητα φ (3.49) και τα συστήματα των μη γραμμικών ολοκληρωτικών εξισώσεων (3.65) - (3.66) και (3.68) - (3.69) δέχονται την ακόλουθη γενική παραμετροποιημένη μορφή

$$C_1(r, \varphi) = d_1(r) \quad (3.70)$$

και

$$C_2(r, \varphi) = d_2 \quad (3.71)$$

όπου

$$\varphi = \begin{cases} |x'| (u^{tot} \circ x) & \text{για το δυναμικό} \\ |x'| (u \circ x) & \text{για το στατικό,} \end{cases} \quad (3.72)$$

$$C_1 = \begin{cases} L & \text{για το δυναμικό} \\ \frac{1}{2}I - K_{0,1} & \text{για το στατικό,} \end{cases} \quad (3.73)$$

$$d_1 = \begin{cases} -T(u^{inc} \circ x) & \text{για το δυναμικό} \\ w|_{\Gamma_1} & \text{για το στατικό,} \end{cases} \quad (3.74)$$

$$C_2 = \begin{cases} \mathcal{D}^\infty & \text{για το δυναμικό} \\ -K_{0,2} & \text{για το στατικό,} \end{cases} \quad (3.75)$$

και

$$d_2 = \begin{cases} u^\infty \circ (\cos t, \sin t) & \text{για το δυναμικό} \\ w|_{\Gamma_2} & \text{για το στατικό.} \end{cases} \quad (3.76)$$

Οι τελεστές, για το δυναμικό πρόβλημα, ορίζονται ως $\mathcal{D}, L, \mathcal{D}^\infty : [L^2[0, 2\pi]]^2 \rightarrow [L^2[0, 2\pi]]^2$ και έχουν τις παρακάτω παραμετρικές μορφές

$$(\mathcal{D}(r, \varphi))(t) = \int_0^{2\pi} [T_{x(\tau)} \Phi(x(t), x(\tau))]^T \varphi(\tau) d\tau, \quad t \in [0, 2\pi], \quad (3.77)$$

$$(L(r, \varphi))(t) = T_{x(t)} \int_0^{2\pi} [T_{x(\tau)} \Phi(x(t), x(\tau))]^T \varphi(\tau) d\tau, \quad t \in [0, 2\pi] \quad (3.78)$$

και

$$(\mathcal{D}_j^\infty(r, \varphi))(t) = \gamma_{2,j} \int_0^{2\pi} J^*(\hat{x}(t)) F(\hat{x}(t), x(\tau)) e^{-ik_j \hat{x}(t) \cdot x(\tau)} \varphi(\tau) d\tau, \quad t \in [0, 2\pi]. \quad (3.79)$$

Το δεξί μέλος της εξίσωσης (3.70) ορίζεται ως

$$(d_1(r))(t) = \begin{cases} -d T_x(e^{ik_p d \cdot x(t)}) & \text{αν } u^{inc} = u_p^{inc} \\ Qd T_x(e^{ik_s d \cdot x(t)}) & \text{αν } u^{inc} = u_s^{inc}. \end{cases} \quad (3.80)$$

Για το στατικό πρόβλημα, ορίζουμε $K_{0,j} : [H^{-1/2}[0, 2\pi]]^2 \rightarrow [H^{1/2}[0, 2\pi]]^2$ για $j = 1, 2$

$$(K_{0,1}(r, \varphi))(t) = \int_0^{2\pi} [T_{x(\tau)} \Phi_0(x(t), x(\tau))]^T \varphi(\tau) d\tau, \quad \text{για } t \in [0, 2\pi] \quad (3.81)$$

και

$$(K_{0,2}(r, \varphi))(t) = \int_0^{2\pi} [T_{x(\tau)} \Phi_0(x_2(t), x(\tau))]^T \varphi(\tau) d\tau, \quad \text{για } t \in [0, 2\pi]. \quad (3.82)$$

3.3 Έγκλεισμα

Όσον αφορά τη μοναδική επιλυσιμότητα του αντίστροφου προβλήματος σκέδασης από έγκλεισμα παραθέτουμε τα ακόλουθα γνωστά αποτελέσματα. Για διαπερατούς σκεδαστές θεωρητικά αποτελέσματα παρουσίασε πρώτος ο Isakov [37] και στη συνέχεια οι Kirsch και Kress βελτίωσαν τη μέθοδο για το ακουστικό αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης [49]. Λίγους μήνες μετά, ο Hähner μετέφερε την ιδέα της μεθόδου στο αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης στον ηλεκτρομαγνητισμό και απέδειξε μοναδικότητα από τη γνώση των πλατών σκέδασης για όλα τα προσπίπτοντα κύματα [29]. Το πρόβλημα που επιλύουμε είναι το ακόλουθο

Αντίστροφο πρόβλημα 3.3.1. Αναζητούμε το σχήμα και τη θέση εγκλείσματος D_i γνωρίζοντας τα πλάτη σκέδασης u^∞ για ένα προσπίπτον κύμα u^{inc} με γωνία πρόσπτωσης d .

Κάνοντας χρήση του τρίτου γενικευμένου τύπου του Betti (2.42) για το πεδίο μετατοπίσεων u^e και τον ταυιστή Φ_e στο χωρίο D_e ισχύει

$$u^e(x) = (\mathcal{D}_e u^e)(x) - (S_e(T^e u^e))(x), \quad \text{για } x \in D_e. \quad (3.83)$$

Αντίστοιχα με εφαρμογή του ίδιου τύπου για το προσπίπτον κύμα u^{inc} και τον ταυιστή Φ_e στο χωρίο D_e προκύπτει

$$0 = (\mathcal{D}_e u^{inc})(x) - (S_e(T^e u^{inc}))(x), \quad \text{για } x \in D_e. \quad (3.84)$$

Ορίζουμε το συνολικό πεδίο μετατοπίσεων ως

$$u^{tot} = u^e + u^{inc} \quad (3.85)$$

και με πρόσθεση των σχέσεων (3.83) και (3.84) λαμβάνουμε

$$u^e(x) = (\mathcal{D}_e u^{tot})(x) - (S_e(T^e u^{tot}))(x), \quad \text{για } x \in D_e \quad (3.86)$$

Όμοια, εφαρμόζοντας τον τύπο του Betti για το πεδίο u^i και τον ταυιστή Green Φ_i στο χωρίο D_i έχουμε

$$\begin{aligned} -u^i(x) &= (\mathcal{D}_i u^i)(x) - (S_i(T^i u^i))(x) \\ &= (\mathcal{D}_i u^{tot})(x) - (S_i(T^e u^{tot}))(x), \quad \text{για } x \in D_i. \end{aligned} \quad (3.87)$$

Θέτουμε $h = u^{tot}|_{\Gamma}$ και $g = T^e u^{tot}|_{\Gamma}$. Προσεγγίζουμε το σύνορο Γ από το D_e οπότε από τη σχέση (3.85) προκύπτει

$$\left(\frac{1}{2}I - K_e\right) h + S_e g = u^{inc}. \quad (3.88)$$

Όμοια, αν προσεγγίζουμε το σύνορο από το εσωτερικό χωρίο D_i λόγω της συνοριακής συνθήκης (2.91) ισχύει

$$\left(\frac{1}{2}I + K_i\right) h - S_i g = 0. \quad (3.89)$$

Αντίστοιχα, λόγω της συνοριακής συνθήκης (2.100) καταλήγουμε στις ακόλουθες σχέσεις

$$-L_e h + \left(\frac{1}{2}I + K_e^*\right) g = T^e u^{inc} \quad (3.90)$$

και

$$L_i h + \left(\frac{1}{2}I - K_i^*\right) g = 0. \quad (3.91)$$

Παρατηρούμε ότι προκύπτουν τέσσερις ολοκληρωτικές εξισώσεις για τις δύο άγνωστες πυκνότητες h και g . Οπότε, επιλέγουμε δύο εξισώσεις ή γραμμικό συνδυασμό αυτών. Ακολουθώντας τον P. Martin [62], καταλήγουμε στην δεύτερη περίπτωση ώστε να προκύψει τύπου Fredholm σύστημα ολοκληρωτικών εξισώσεων. Πιο συγκεκριμένα, προσθέτουμε κατά μέλη τις εξισώσεις (3.88), (3.89) και τις $\tau_e(3.90)$, $\tau_i(3.91)$, όπου η σταθερά τ_α δίνεται από τον τύπο (2.104) και καταλήγουμε στο ακόλουθο σύστημα

$$\begin{pmatrix} I + K_i - K_e & S_e - S_i \\ \tau_i L_i - \tau_e L_e & \frac{\tau_i + \tau_e}{2} I + \tau_e K_e^* - \tau_i K_i^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^{inc} \\ \tau_e T^e u^{inc} \end{pmatrix}. \quad (3.92)$$

Ορίζουμε τους τελεστές πλατών σκέδασης S_e^∞ , $\mathcal{D}_e^\infty : [L^2(\Gamma)]^2 \rightarrow [L^2(\Omega)]^2$ ως

$$(S_{e,j}^\infty g)(x) = \gamma_{1,j}^e \int_{\Gamma} J^*(\hat{x}) e^{-ik_{e,j}\hat{x}\cdot y} g(y) ds(y), \quad \text{για } j = p, s \quad (3.93)$$

και

$$(\mathcal{D}_{e,j}^\infty h)(x) = \gamma_{2,j}^e \int_{\Gamma} J^*(\hat{x}) F_e(\hat{x}, y) e^{-ik_{e,j}\hat{x}\cdot y} h(y) ds(y), \quad \text{για } j = p, s \quad (3.94)$$

και λόγω της αναπαράστασης του πεδίου u^e (3.86) παρατηρούμε ότι το άγνωστο σύνορο Γ και οι άγνωστες πυκνότητες g και h των αντίστοιχων λύσεων ικανοποιούν και την

ακόλουθη εξίσωση των πλατών σκέδασης

$$\begin{pmatrix} \mathcal{D}_{e,p}^\infty \\ \mathcal{D}_{e,s}^\infty \end{pmatrix} h - \begin{pmatrix} S_{e,p}^\infty \\ S_{e,s}^\infty \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} u_p^\infty \\ u_s^\infty \end{pmatrix}. \quad (3.95)$$

Απλοποιημένη η εξίσωση (3.95) θα έχει τη μορφή

$$\mathcal{D}^\infty h - S^\infty g = u^\infty. \quad (3.96)$$

Συνδυάζοντας το σύστημα (3.92) και την (3.96) καταλήγουμε στο ακόλουθο 3×3 σύστημα ολοκληρωτικών εξισώσεων

$$\begin{pmatrix} I + K_i - K_e & S_e - S_i \\ \tau_i L_i - \tau_e L_e & \frac{\tau_i + \tau_e}{2} I + \tau_e K_e^* - \tau_i K_i^* \\ \mathcal{D}^\infty & -S^\infty \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^{inc} \\ \tau_e T^e u^{inc} \\ u^\infty \end{pmatrix} \quad (3.97)$$

Αντιστρόφως, αν το σύνορο Γ και οι πυκνότητες h και g ικανοποιούν το σύστημα των εξισώσεων (3.97) τότε το σύνορο Γ επιλύει το αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης από έγκλεισμα. Οι δύο πρώτες εξισώσεις εξασφαλίζουν τις συνοριακές συνθήκες $u^i = u^e + u^{inc}$ και $T^i u^i = T^e (u^e + u^{inc})$ στο Γ . Η τρίτη εξίσωση εγγυάται ότι για το συνολικό πεδίο μετατοπίσεων u^{tot} όπως ορίζεται από την (3.85) το σκεδαζόμενο πεδίο u^e έχει το κατάλληλο πλάτος σκέδασης. Όμοια με τα προηγούμενα αντίστροφα προβλήματα καταλήγουμε στο ακόλουθο θεώρημα

Θεώρημα 3.3.1. *Το αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης 3.3.1 και το 3×3 σύστημα των ολοκληρωτικών εξισώσεων (3.97) είναι ισοδύναμα.*

Με βάση την αναπαράσταση του συνόρου Γ (3.47), ορίζουμε αντίστοιχα

$$\varphi = |x'| (h \circ x), \quad \psi = |x'| (g \circ x) \quad (3.98)$$

και το σύστημα των μη γραμμικών ολοκληρωτικών εξισώσεων (3.97) δέχεται την ακόλουθη παραμετρικοποιημένη μορφή

$$\mathcal{A}(r, \varphi) + \mathcal{B}(r, \psi) = \mathcal{C} \quad (3.99)$$

όπου

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_1 \\ \mathcal{A}_2 \\ \mathcal{A}_3 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_1 \\ \mathcal{B}_2 \\ \mathcal{B}_3 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \mathcal{C} = \begin{pmatrix} \mathcal{C}_1(r) \\ \mathcal{C}_2(r) \\ \mathcal{C}_3(\hat{x}) \end{pmatrix}. \quad (3.100)$$

Πιο αναλυτικά, εμφανίζονται οι παρακάτω παραμετρικές μορφές για $t \in [0, 2\pi]$

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}_1(r, \varphi))(t) &= \frac{\varphi(t)}{|x'(t)|} + \int_0^{2\pi} [T_{x(\tau)}^i \Phi_i(x(t), x(\tau))]^T \varphi(\tau) d\tau \\ &\quad - \int_0^{2\pi} [T_{x(\tau)}^e \Phi_e(x(t), x(\tau))]^T \varphi(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (3.101)$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}_2(r, \varphi))(t) &= \tau_i \int_0^{2\pi} T_{x(t)}^i [T_{x(\tau)}^i \Phi_i(x(t), x(\tau))]^T \varphi(\tau) d\tau \\ &\quad - \tau_e \int_0^{2\pi} T_{x(t)}^e [T_{x(\tau)}^e \Phi_e(x(t), x(\tau))]^T \varphi(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (3.102)$$

$$(\mathcal{A}_3(r, \varphi))(t) = \begin{pmatrix} (\mathcal{D}_{e,p}^\infty(r, \varphi))(t) \\ (\mathcal{D}_{e,s}^\infty(r, \varphi))(t) \end{pmatrix} \quad (3.103)$$

όπου

$$(\mathcal{D}_{e,j}^\infty(r, \varphi))(t) = \gamma_{2,j}^e \int_0^{2\pi} J^*(\hat{x}(t)) F_e(\hat{x}(t), x(\tau)) e^{-ik_{e,j} \hat{x}(t) \cdot x(\tau)} \varphi(\tau) d\tau, \quad (3.104)$$

$$(\mathcal{B}_1(r, \psi))(t) = \int_0^{2\pi} \{\Phi_e(x(t), x(\tau)) - \Phi_i(x(t), x(\tau))\} \psi(\tau) d\tau, \quad (3.105)$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{B}_2(r, \psi))(t) &= \frac{\tau_i + \tau_e}{2} \frac{\psi(t)}{|x'(t)|} + \tau_e \int_0^{2\pi} T_{x(t)}^e \Phi_e(x(t), x(\tau)) \psi(\tau) d\tau \\ &\quad - \tau_i \int_0^{2\pi} T_{x(t)}^i \Phi_i(x(t), x(\tau)) \psi(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (3.106)$$

$$(\mathcal{B}_3(r, \psi))(t) = - \begin{pmatrix} (S_{e,p}^\infty(r, \psi))(t) \\ (S_{e,s}^\infty(r, \psi))(t) \end{pmatrix} \quad (3.107)$$

όπου

$$(S_{e,j}^\infty(r, \psi))(t) = \gamma_{1,j}^e \int_0^{2\pi} J^*(\hat{x}(t)) e^{-ik_{e,j} \hat{x}(t) \cdot x(\tau)} \psi(\tau) d\tau \quad (3.108)$$

και

$$\mathcal{C}_1(r) = u^{inc} \circ x, \quad \mathcal{C}_2(r) = \tau_e T^e(u^{inc} \circ x), \quad \mathcal{C}_3(\hat{x}) = u^\infty \circ (\cos t, \sin t). \quad (3.109)$$

Κεφάλαιο 4

Επαναληπτική αριθμητική μέθοδος

Στο προηγούμενο κεφάλαιο δείξαμε την ισοδυναμία μεταξύ των αντίστροφων προβλημάτων και των συστημάτων των μη γραμμικών ολοκληρωτικών εξισώσεων. Επόμενο βήμα είναι η αριθμητική επίλυση των συστημάτων για όλες τις περιπτώσεις εμποδίων.

Τα συστήματα είναι γραμμικά ως προς τις άγνωστες πυκνότητες αλλά μη γραμμικά ως προς το άγνωστο σύνορο. Για τη γραμμικοποίηση των συστημάτων ακολουθείται διαφορετική μέθοδος σε καθένα από τα τρία συστήματα και κάθε μέθοδος οδηγεί σε διαφορετικό τρόπο επίλυσης. Η γραμμικοποίηση των ολοκληρωτικών τελεστών και των δεξιών μελών των εξισώσεων γίνεται με τη χρήση Fréchet παραγώγων ως προς το παραμετροποιημένο σύνορο. Η Fréchet παραγωγιμότητα των ολοκληρωτικών τελεστών εξετάστηκε για την ακουστική σκέδαση από τον Potthast [64, 65] και η μεταφορά στην ελαστικότητα για σκέδαση από σκληρό σκεδαστή στον \mathbb{R}^3 έγινε από τον Χαραλαμπίδου [11].

Αρχικά δίνουμε τον ορισμό και μερικές σημαντικές ιδιότητες της Fréchet παραγώγου.

Ορισμός 4.0.1. Έστω X, Y χώροι με νόρμα και U ανοικτό υποσύνολο του X . Η απεικόνιση $A : U \rightarrow Y$ καλείται Fréchet παραγωγιμή στο $x \in U$ αν υπάρχει

φραγμένος τελεστής $A'(x) : X \rightarrow Y$ τέτοιος ώστε

$$\|A(x+h) - A(x) - A'(x;h)\| = o(\|h\|) \quad (4.1)$$

ομοίωμοφα καθώς $h \rightarrow 0$. Ο τελεστής $A'(x)$ καλείται η *Fréchet παράγωγος* του A στο x και είναι μοναδική.

Στο επόμενο θεώρημα παρουσιάζουμε βασικές ιδιότητες της *Fréchet* παραγώγου που χρησιμοποιούμε για τον υπολογισμό της.

Θεώρημα 4.0.2. Έστω $A : U \subset X \rightarrow Y$ *Fréchet* παραγωγίσιμος τελεστής και W χώρος με νόρμα.

1. Αν $B : U \rightarrow Y$ *Fréchet* παραγωγίσιμος τελεστής τότε και ο τελεστής $\kappa_1 A + \kappa_2 B$ είναι *Fréchet* παραγωγίσιμος για κάθε $\kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{C}$ με τύπο

$$(\kappa_1 A + \kappa_2 B)'(x) = \kappa_1 A'(x) + \kappa_2 B'(x), \quad \text{για } x \in U. \quad (4.2)$$

2. Αν $B : Y \rightarrow W$ *Fréchet* παραγωγίσιμος τελεστής τότε και ο τελεστής $B \circ A : U \rightarrow W$ είναι *Fréchet* παραγωγίσιμος με τύπο

$$(B \circ A)'(x) = B'(A(x))A'(x), \quad \text{για } x \in U. \quad (4.3)$$

Απόδειξη. Βρίσκεται στο βιβλίο [42]. □

Ορίζουμε το διαταραγμένο σύνορο ως $\Gamma_{x+\zeta} = \{x(t) + \zeta(t), t \in [0, 2\pi]\}$ όπου ζ μια ομαλή 2π περιοδική συνάρτηση για την οποία ισχύει $\|\zeta\|_{C^2(\Gamma)} \leq l$, $l \ll 1$. Το σύνορο $\Gamma_{x+\zeta}$ παραμένει C^2 -τάξης και ισχύει

Θεώρημα 4.0.3. Η *Fréchet* παράγωγος ενός φραγμένου τελεστή $A : [C(\Gamma)]^2 \rightarrow [C(\Gamma)]^2$ με ασθενώς ιδιόμορφο πυρήνα K δίνεται από τον τελεστή

$$(A'(x, \varphi; \zeta))(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial K(x, y; \zeta)}{\partial \zeta} \varphi(y) ds(y). \quad (4.4)$$

Απόδειξη. Προκύπτει με εφαρμογή του θεωρήματος Taylor στην ολοκληρωτέα συνάρτηση και ιδιοτήτων παραγωγισιμότητας ολοκληρωμάτων που εξαρτώνται από παραμέτρους. Η αναλυτική απόδειξη βρίσκεται στην εργασία [64]. □

Το παραπάνω θεώρημα ισχύει και για τελεστές με συνεχείς πυρήνες και εξασφαλίζει ότι οι παράγωγοι των ολοκληρωτικών τελεστών ως προς το σύνορο Γ προκύπτουν από την τυπική παραγωγή των πυρήνων τους ως προς το παραμετροποιημένο σύνορο. Στο εξής λόγω της παραμετροποίησης (3.47) οι Fréchet παράγωγοι συμβολίζονται με $A'(r, \varphi; q)$.

Η χρήση όμως της Fréchet παραγωγού για τη γραμμικοποίηση του συστήματος διατηρεί τη μη καλή τοποθέτηση των εξισώσεων. Αυτό συμβαίνει γιατί η Fréchet παράγωγος $A' : X \rightarrow Y$ ενός συνεχούς και συμπαγούς τελεστή $A : U \rightarrow Y$, Y χώρος Banach, είναι συμπαγής τελεστής [17]. Η καλή τοποθέτηση κατά Hadamard διαταράσσεται ουσιαστικά όσον αφορά την ευστάθεια της λύσης και για να αντιμετωπίσουμε αυτό το πρόβλημα χρησιμοποιούμε τη μέθοδο ομαλοποίησης Tikhonov. Η μέθοδος ομαλοποίησης αναλύεται στη συνέχεια.

4.1 Σκληρό εμπόδιο

Για την επίλυση του συστήματος των ολοκληρωτικών εξισώσεων ακολουθούμε τις επαναληπτικές μεθόδους που πρότειναν οι Kress και Rundell [56]. Προτού παρουσιάσουμε τις μεθόδους διατυπώνουμε ξανά το σύστημα των παραμετροποιημένων ολοκληρωτικών εξισώσεων (3.50)-(3.51) της παραγράφου 3.1.

$$A_1(r, \varphi) = b_1(r) \quad (4.5)$$

και

$$A_2(r, \varphi) = b_2 \quad (4.6)$$

Η πρώτη μέθοδος αφορά στην πλήρη γραμμικοποίηση του συστήματος ως προς και τους δύο αγνώστους, την πυκνότητα και την ακτινική συνάρτηση. Η δεύτερη μέθοδος διαχωρίζει το σύστημα σε δυο μη καλά τοποθετημένα προβλήματα. Το πρώτο γραμμικό ως προς την άγνωστη πυκνότητα φ και το δεύτερο μη γραμμικό ως προς το άγνωστο σύνορο. Το πλεονέκτημα της δεύτερης επαναληπτικής διαδικασίας είναι ο μικρότερος υπολογιστικός χρόνος καθώς είναι προτιμότερο να επιλύονται δύο μικρά συστήματα

εξισώσεων παρά ένα με διπλάσιους αγνώστους. Οι δύο αλγόριθμοι έχουν τις ακόλουθες μορφές:

Επαναληπτικό Σχήμα 4.1.1.

- (i) Γραμμικοποιούμε και τις δύο εξισώσεις χρησιμοποιώντας *Fréchet* παραγώγους ως προς r με κατεύθυνση q

$$A_1(r, \varphi) + A_1(r, \psi) + A_1'(r, \varphi; q) = b_1(r) + b_1'(r; q) \quad (4.7)$$

$$A_2(r, \varphi) + A_2(r, \psi) + A_2'(r, \varphi; q) = b_2 \quad (4.8)$$

- (ii) Δεδομένης μιας αρχικής προσέγγισης για τα r και φ , επιλύουμε το γραμμικοποιημένο σύστημα για q και ψ ώστε να προκύψουν οι βελτιώσεις $r + q$ και $\varphi + \psi$.
- (iii) Η επαναληπτική διαδικασία συνεχίζεται μέχρι κάποιο δεδομένο κριτήριο τερματισμού να ικανοποιηθεί.

Επαναληπτικό Σχήμα 4.1.2.

- (i) Δεδομένης μιας αρχικής πρόβλεψης για την ακτινική συνάρτηση r επιλύουμε τη μη καλά τοποθετημένη εξίσωση (4.6) για την άγνωστη πυκνότητα φ .
- (ii) Γραμμικοποιούμε την εξίσωση (4.5) κάνοντας χρήση *Fréchet* παραγώγων ως προς το r στην κατεύθυνση q και προκύπτει η εξίσωση

$$A_1(r, \varphi) + A_1'(r, \varphi; q) = b_1(r) + b_1'(r; q). \quad (4.9)$$

Διατηρώντας το φ σταθερό επιλύουμε τη γραμμικοποιημένη εξίσωση (4.9) για να προκύψει η βελτίωση $r + q$ για την ακτινική συνάρτηση.

- (iii) Το δεύτερο βήμα επαναλαμβάνεται μέχρι να ικανοποιηθεί το κριτήριο τερματισμού.

Για το δυναμικό πρόβλημα, κάνοντας χρήση των ταυτοτήτων

$$H_1^{(1)}(x) = -H_0^{(1)'}(x) \text{ και } H_1^{(1)'}(x) = H_0^{(1)}(x) - \frac{1}{x}H_1^{(1)}(x) \quad (4.10)$$

υπολογίζουμε τις Fréchet παραγώγους του τελεστή $S(r, \varphi)$ και του δεξιού μέλους $w(r)$ που εμφανίζονται στα παραπάνω επαναληπτικά σχήματα. Μετά από πράξεις προκύπτουν οι ακόλουθες μορφές

$$\begin{aligned} (S'(r, \varphi; q))(t) = & \frac{i}{4\rho\omega^2} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\varrho \cdot (\zeta(t) - \zeta(\tau))}{|\varrho|} \left[\left(-k_s^3 H_1^{(1)}(k_s|\varrho|) - \frac{1}{|\varrho|} A_2(\varrho) \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \frac{2}{|\varrho|^2} A_1(\varrho) \right) I + \left(A_3(\varrho) + \frac{2}{|\varrho|} A_2(\varrho) - \frac{4}{|\varrho|^2} A_1(\varrho) \right) J(x(t) - x(\tau)) \right] \right. \\ & - 4\rho\omega^2 i \Phi_2(|\varrho|) \left[\frac{\varrho (\zeta(t) - \zeta(\tau))^T}{|\varrho|^2} + \frac{(\zeta(t) - \zeta(\tau)) \varrho^T}{|\varrho|^2} \right. \\ & \left. \left. - 2 \frac{\varrho \cdot (\zeta(t) - \zeta(\tau))}{|\varrho|^2} J(x(t) - x(\tau)) \right] \right\} \varphi(x(\tau)) d\tau, \quad t \in [0, 2\pi]. \end{aligned} \quad (4.11)$$

όπου

$$A_1(\varrho) = k_s H_1^{(1)}(k_s|\varrho|) - k_p H_1^{(1)}(k_p|\varrho|), \quad (4.12)$$

$$A_2(\varrho) = k_s^2 H_0^{(1)}(k_s|\varrho|) - k_p^2 H_0^{(1)}(k_p|\varrho|), \quad (4.13)$$

και

$$A_3(\varrho) = k_s^3 H_1^{(1)}(k_s|\varrho|) - k_p^3 H_1^{(1)}(k_p|\varrho|). \quad (4.14)$$

Ο πυρήνας του τελεστή είναι ομαλός και για $t = \tau$ έχει την παρακάτω διαγώνια μορφή

$$\frac{1}{4\pi\rho\omega^2} \left\{ - (k_s^2 + k_p^2) \frac{\varrho \zeta'(t)}{|\varrho|^2} I + (k_s^2 - k_p^2) \left(\frac{\varrho \zeta'(t)^T}{|\varrho|^2} + \frac{\zeta'(t) \varrho^T}{|\varrho|^2} - 2 \frac{\varrho \cdot \zeta'(t)}{|\varrho|^2} \frac{\varrho \varrho^T}{|\varrho|^2} \right) \right\}, \quad (4.15)$$

όπου $\zeta(t) = q(t)(\cos t, \sin t)$ και με ϱ συμβολίζουμε

$$\varrho := \varrho(t, \tau) = \begin{cases} x(t) - x(\tau) & \text{αν } t \neq \tau \\ x'(t) & \text{αν } t = \tau. \end{cases} \quad (4.16)$$

Η παράγωγος του $w(r)$ δίνεται από τον τύπο

$$(w'(r; q))(t) = \begin{cases} -d ik_p d \cdot \zeta(t) e^{ik_p d \cdot x(t)} & \text{αν } u^{inc} = u_p^{inc} \\ Qd ik_s d \cdot \zeta(t) e^{ik_s d \cdot x(t)} & \text{αν } u^{inc} = u_s^{inc}. \end{cases} \quad (4.17)$$

Στο στατικό πρόβλημα, οι παράγωγοι που εμφανίζονται στο σύστημα υπολογίζονται με ανάλογο τρόπο και δεν παρουσιάζονται λόγω πολυπλοκότητας. Το θεώρημα που παρουσιάζουμε στη συνέχεια αποδεικνύει τη μοναδική επιλυσιμότητα του γραμμικοποιημένου συστήματος (4.7)-(4.8) για το δυναμικό πρόβλημα. Αυτό το αποτέλεσμα είναι αρκετό για να εξασφαλίσουμε ότι οι τελεστές που εμφανίζονται στα αριστερά μέλη του συστήματος (4.5)-(4.6) είναι “1-1” με πυκνό σύνολο τιμών. Αυτή η πληροφορία είναι απαραίτητη ώστε στη συνέχεια να μπορούμε να εφαρμόσουμε τη θεωρία ομαλοποίησης. Τα επόμενα λήμματα είναι αναγκαία για τη διατύπωση του θεωρήματος. Αντίστοιχο αποτέλεσμα ισχύει και για τη στατική περίπτωση.

Λήμμα 4.1.1. Για κάθε u στον \mathbb{R}^2 ισχύει η ακόλουθη ανάλυση στη κάθετη και την εφαπτόμενη συνιστώσα, ως προς το σύνορο Γ :

$$\nabla u = \nabla_{\Gamma} u + \frac{\partial u}{\partial \nu} \nu \quad (4.18)$$

$$\operatorname{div} u = \operatorname{div}_{\Gamma} u + \operatorname{div} \nu (u \cdot \nu) + \frac{\partial}{\partial \nu} (u \cdot \nu) \quad (4.19)$$

Λήμμα 4.1.2. Αν u είναι το ελαστικό δυναμικό απλού στρώματος και $\varphi \in [C^{0,\alpha}(\Gamma)]^2$ τότε ισχύει

$$\nabla u_{\pm}(x) = \int_{\Gamma} \nabla_x \Phi(x, y) \varphi(y) ds(y) \mp \frac{1}{2} \nu(x) \frac{\varphi(x)}{|x'(t)|}, \quad x \in \Gamma \quad (4.20)$$

όπου το ολοκλήρωμα υπάρχει κατά τη πρωτεύουσα τιμή του *Cauchy* [60].

Στο ακόλουθο θεώρημα αποδεικνύεται ότι το σύστημα (4.7)-(4.8) για το δυναμικό πρόβλημα έχει μοναδική λύση. Με βάση τη θεωρία Riesz, λόγω της ύπαρξης συμπαγών τελεστών, αρκεί να δείξουμε ότι το αντίστοιχο ομογενές σύστημα των ολοκληρωτικών εξισώσεων έχει μόνο τη μηδενική λύση.

Θεώρημα 4.1.1. Έστω ότι το ω^2 δεν είναι ιδιοσυχνότητα του εσωτερικού προβλήματος *Dirichlet*. Αν $q \in C^2[0, 2\pi]$ και $\psi \in [L^2[0, 2\pi]]^2$ είναι λύσεις του ομογενούς συστήματος

$$S(r, \psi) + S'(r, \phi; q) - w'(r; q) = 0 \quad (4.21)$$

και

$$S^{\infty}(r, \psi) + S^{\infty'}(r, \phi; q) = 0, \quad (4.22)$$

τότε $q = 0$ και $\psi = 0$.

Απόδειξη. Η απόδειξη βασίζεται στην ιδέα των Kress και Rundell και εφαρμόστηκε στον τελεστή Laplace [56]. Αρχικά, ορίζουμε το ελαστικό δυναμικό

$$v(z) := \int_0^{2\pi} \Phi(z, x(\tau)) \varphi(\tau) d\tau, \quad \text{για } z \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma \quad (4.23)$$

και $w(z) = u^{inc}(z)$, $z \in \mathbb{R}^2$. Τότε το $u = w - v$ είναι λύση του εξωτερικού προβλήματος Dirichlet για το D . Έστω

$$V(z) := \int_0^{2\pi} \Phi(z, x(\tau)) \psi(\tau) d\tau - \int_0^{2\pi} \nabla_z \Phi(z, x(\tau)) \cdot \zeta(\tau) \varphi(\tau) d\tau, \quad z \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma. \quad (4.24)$$

Παρατηρούμε ότι το V είναι λύση της εξίσωσης Navier και ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας. Το πλάτος σκέδασης του V δίνεται από το τύπο

$$V_j^\infty(\hat{x}) := \int_0^{2\pi} \Phi_j^\infty(\hat{x}, x(\tau)) \psi(\tau) d\tau + \int_0^{2\pi} \nabla_x \Phi_j^\infty(\hat{x}, x(\tau)) \cdot \zeta(\tau) \varphi(\tau) d\tau \quad (4.25)$$

για $j = p, s$, όπου $\Phi_j^\infty(\hat{x}, x) = \gamma_{1,j} e^{-ik_j \hat{x} \cdot x} J^*(\hat{x})$. Παρατηρούμε ότι το V^∞ ταυτίζεται με το αριστερό μέλος της (4.22), οπότε $V^\infty \equiv 0$. Από το Λήμμα του Rellich 2.5.1 έχουμε $V = 0$ για $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$. Προσεγγίζοντας το σύνορο Γ από το εξωτερικό του D και λαμβάνοντας υπόψιν το Λήμμα 4.1.2 έχουμε

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \Phi(z(t), z(\tau)) \psi(\tau) d\tau + \frac{1}{2} \nu(x(t)) \cdot \zeta(t) \frac{\varphi(x)}{|x'(t)|} \\ - \int_0^{2\pi} \nabla_{z(t)} \Phi(z(t), z(\tau)) \cdot \zeta(\tau) \varphi(\tau) d\tau = 0, \quad t \in [0, 2\pi]. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Από τις σχέσεις (4.21) και (4.26) καταλήγουμε ότι

$$\frac{1}{2} \nu(x(t)) \cdot \zeta(t) \frac{\varphi(x)}{|x'(t)|} + \int_0^{2\pi} \nabla_{z(t)} \Phi(z(t), z(\tau)) \cdot \zeta(\tau) \varphi(\tau) d\tau - w'(z(t), \zeta(t)) = 0. \quad (4.27)$$

Η (4.27) γράφεται ως εξής

$$((\nabla [w - v]) \circ x) \cdot \zeta = 0 \Rightarrow \nabla (u \circ x) \cdot \zeta = 0. \quad (4.28)$$

Από το Λήμμα 4.1.1 προκύπτει ότι

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \circ x \right) (\nu \circ x) \cdot \zeta = 0. \quad (4.29)$$

Ισχύει όμως $(\frac{\partial u}{\partial \nu} \circ x) \neq 0$ καθώς το u είναι λύση του προβλήματος και ικανοποιεί και τη συνοριακή συνθήκη $u = 0$ στο Γ και αν $(\frac{\partial u}{\partial \nu} \circ x) = 0 \Rightarrow Tu = 0$ στο Γ από το Λήμμα 4.1.1. Άτοπο, γιατί τότε το u θα ήταν ταυτοτικά μηδέν στο $\mathbb{R}^2 \setminus D$. Οπότε από τη σχέση $(\nu \circ x) \cdot \zeta = 0$ κάνοντας πράξεις καταλήγουμε ότι $q(t)r(t) = 0 \Rightarrow q(t) = 0$. Από τη τελευταία σχέση η (4.21) γίνεται

$$S(r, \psi) = 0. \quad (4.30)$$

Εφόσον το ω^2 δεν είναι ιδιοσυχνότητα του εσωτερικού προβλήματος Dirichlet, καταλήγουμε ότι $\psi = 0$ από την (4.30). \square

4.2 Κοιλότητα

Το παραμετροποιημένο σύστημα των μη γραμμικών ολοκληρωτικών εξισώσεων για το αντίστροφο πρόβλημα είναι το ακόλουθο

$$C_1(r, \varphi) = d_1(r) \quad (4.31)$$

και

$$C_2(r, \varphi) = d_2. \quad (4.32)$$

Για την επίλυση του, η μέθοδος που ακολουθούμε είναι διαφορετική από αυτήν για το αντίστοιχο σύστημα στην περίπτωση του σκληρού εμποδίου και οι βασικοί λόγοι είναι δύο και αφορούν το δυναμικό πρόβλημα. Η πρώτη εξίσωση του συστήματος (4.5)-(4.6) που αντιστοιχεί στις συνοριακές συνθήκες, για σκέδαση από σκληρό σκεδαστή, λόγω της ύπαρξης του ελαστικού δυναμικού απλού στρώματος και της λογαριθμικής ιδιομορφίας του πυρήνα οδηγεί σε μη καλά τοποθετημένη εξίσωση. Αντίθετα η εξίσωση (4.31) λόγω της μορφής του πυρήνα, που αναλύεται στο παράρτημα, κάνοντας χρήση της θεωρίας Riesz καταλήγει σε μοναδικά επιλύσιμη εξίσωση $2^{\text{ου}}$ είδους [50].

Ο δεύτερος λόγος είναι η αποφυγή πολυάριθμων πράξεων και πολύπλοκων μορφών που προκύπτουν με την εφαρμογή της Fréchet παραγώγου στον τελεστή $(L\varphi)$. Οπότε εφαρμόζουμε τη μέθοδο που πρότειναν οι Johansson και Sleeman [41] και αναλυτικά φαίνεται στο παρακάτω επαναληπτικό σχήμα

Επαναληπτικό Σχήμα 4.2.1.

- (i) Δεδομένης μιας αρχικής πρόβλεψης για την ακτινική συνάρτηση r επιλύουμε τη καλά τοποθετημένη εξίσωση (4.31) για την άγνωστη πυκνότητα φ .
- (ii) Γραμμικοποιούμε την εξίσωση (4.32) κάνοντας χρήση Fréchet παραγώγων ως προς το r στην κατεύθυνση q και προκύπτει η εξίσωση

$$C_2(r, \varphi) + C'_2(r, \varphi; q) = d_2, \quad (4.33)$$

διατηρώντας το φ σταθερό επιλύουμε τη γραμμικοποιημένη εξίσωση (4.33) για να προκύψει η βελτίωση $r + q$ για την ακτινική συνάρτηση.

- (iii) Το δεύτερο βήμα επαναλαμβάνεται μέχρι να ικανοποιηθεί το κριτήριο τερματισμού.

Για το δυναμικό πρόβλημα, η Fréchet παράγωγος του τελεστή \mathcal{D}^∞ είναι

$$(\mathcal{D}_j^\infty(r, \varphi; q))(t) = \gamma_{2,j} \int_0^{2\pi} J^*(\hat{x}(t)) B(t, \tau) e^{-ik_j \hat{x}(t) \cdot x(\tau)} \varphi(\tau) d\tau, \quad \text{για } j = p, s \quad (4.34)$$

όπου

$$B(t, \tau) = F'(t, \tau) - ik_j \hat{x}(t) \cdot \zeta(\tau) F(t, \tau) \quad (4.35)$$

με $F(t, \tau) := F(\hat{x}(t), x(\tau))$ και η παράγωγος έχει τη μορφή

$$F'(\hat{x}(t), x(\tau)) = \lambda \hat{x}(t) g(x, \zeta)^T + \mu g(x, \zeta) \hat{x}(t)^T + \mu g(x, \zeta) \cdot \hat{x}(t) I, \quad (4.36)$$

όπου

$$g(x, \zeta) = \frac{1}{|x'(\tau)|} \left(\zeta'_2(\tau), -\zeta'_1(\tau) \right) - \frac{x'(\tau) \cdot \zeta'(\tau)}{|x'(\tau)|^2} \nu(\tau). \quad (4.37)$$

Η παράγωγος του d_2 είναι μηδέν καθώς το ζεύγος των πλατών σκέδασης δεν εξαρτάται από το r .

4.3 Έγκλεισμα

Το ισοδύναμο σύστημα των μη γραμμικών ολοκληρωτικών εξισώσεων με το αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης από έγκλεισμα όπως αυτό προέκυψε στην παράγραφο 3.3 είναι το

ακόλουθο

$$\mathcal{A}(r, \varphi) + \mathcal{B}(r, \psi) = \mathcal{C}. \quad (4.38)$$

Το παραπάνω σύστημα διαφέρει σε σχέση με τα συστήματα για τις δύο προηγούμενες περιπτώσεις εμποδίων. Αυτό οφείλεται στις δύο συνοριακές συνθήκες από τις οποίες προκύπτουν δύο διαφορετικές πυκνότητες. Η επαναληπτική διαδικασία που ακολουθούμε βασίζεται στην ιδέα των Johansson και Sleeman, και χρησιμοποιήθηκε για το σύστημα (4.31)-(4.32). Αρχικά, αναζητούμε τις τιμές των πυκνοτήτων και στη συνέχεια την ακτινική συνάρτηση από την εξίσωση των πλατών σκέδασης. Αναλυτικά η επαναληπτική διαδικασία είναι:

Επαναληπτικό Σχήμα 4.3.1.

- (i) Δεδομένης μιας αρχικής πρόβλεψης για την ακτινική συνάρτηση r αναζητούμε τις άγνωστες πυκνότητες φ, ψ από την επίλυση του συστήματος

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}_1 \\ \mathcal{A}_2 \end{pmatrix} (r, \varphi) + \begin{pmatrix} \mathcal{B}_1 \\ \mathcal{B}_2 \end{pmatrix} (r, \psi) = \begin{pmatrix} \mathcal{C}_1 \\ \mathcal{C}_2 \end{pmatrix} (r) \quad (4.39)$$

- (ii) Γραμμικοποιούμε την εξίσωση $\mathcal{A}_3(r, \varphi) + \mathcal{B}_3(r, \psi) = \mathcal{C}_3(\hat{x})$ και προκύπτει

$$\mathcal{A}_3(r, \varphi) + \mathcal{A}'_3(r, \varphi; q) + \mathcal{B}_3(r, \psi) + \mathcal{B}'_3(r, \psi; q) = \mathcal{C}_3(\hat{x}). \quad (4.40)$$

Διατηρούμε τις πυκνότητες σταθερές και επιλύουμε τη γραμμικοποιημένη εξίσωση ως προς το q για να προκύψει η βελτίωση $r + q$ για την ακτινική συνάρτηση

- (iii) Το δεύτερο βήμα επαναλαμβάνεται μέχρι να ικανοποιηθεί το κριτήριο τερματισμού.

Οι Fréchet παράγωγοι που εμφανίζονται στο παραπάνω επαναληπτικό σχήμα υπολογίζονται ως εξής

$$\mathcal{A}'_3(r, \varphi; q) = \begin{pmatrix} \mathcal{D}_{e,p}^{\infty'}(r, \varphi; q) \\ \mathcal{D}_{e,s}^{\infty'}(r, \varphi; q) \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

όπου

$$(\mathcal{D}_{e,j}^{\infty'}(r, \varphi; q))(t) = \gamma_{2,j}^e \int_0^{2\pi} J^*(\hat{x}(t)) B_e(t, \tau) e^{-ik_{e,j} \hat{x}(t) \cdot x(\tau)} \varphi(\tau) d\tau. \quad (4.42)$$

Ο πίνακας $B_e(t, \tau)$ είναι ο αντίστοιχος πίνακας που προέκυψε και στο αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης από κοιλότητα με τη μόνη διαφορά ότι εμφανίζονται οι συντελεστές Lamé του εξωτερικού χωρίου D_e , δηλαδή

$$B_e(t, \tau) = F_e'(t, \tau) - ik_{e,j}\hat{x}(t) \cdot \zeta(\tau) F_e(t, \tau) \quad (4.43)$$

όπου $F_e(t, \tau) := F_e(\hat{x}(t), x(\tau))$ και αντίστοιχα η παράγωγος είναι

$$F_e'(\hat{x}(t), x(\tau)) = \lambda_e \hat{x}(t) g(x, \zeta)^T + \mu_e g(x, \zeta) \hat{x}(t)^T + \mu_e g(x, \zeta) \cdot \hat{x}(t) I. \quad (4.44)$$

Η συνάρτηση g δίνεται από τον τύπο (4.37). Όμοια υπολογίζουμε και την παράγωγο του \mathcal{B}_3 ως εξής

$$\mathcal{B}'_3(r, \psi; q) = \begin{pmatrix} S_{e,p}^{\infty'}(r, \psi; q) \\ S_{e,s}^{\infty'}(r, \psi; q) \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

όπου

$$(S_{e,j}^{\infty'}(r, \psi; q))(t) = \gamma_{2,j}^e \int_0^{2\pi} ik_{e,j}\hat{x}(t) \cdot \zeta(\tau) e^{-ik_{e,j}\hat{x}(t) \cdot x(\tau)} J^*(\hat{x}(t))\psi(\tau) d\tau. \quad (4.46)$$

4.4 Μέθοδος ομαλοποίησης Tikhonov

Όπως αναφέρθηκε και προηγούμενα, η γραμμικοποίηση των εξισώσεων έχει ως αποτέλεσμα τη μη καλή τοποθέτησή τους. Από τις μεθόδους ομαλοποίησης αυτή που προτιμάται κυρίως είναι η μέθοδος Tikhonov, την οποία και χρησιμοποιούμε στην παρούσα διατριβή. Ακολούθως παρουσιάζουμε τη κεντρική ιδέα της μεθόδου και κάποια βασικά θεωρήματα [7, 17].

Έστω $A : X \rightarrow Y$ γραμμικός και συμπαγής τελεστής και η μη καλά τοποθετημένη εξίσωση

$$A\phi = f. \quad (4.47)$$

Με τη μέθοδο ομαλοποίησης Tikhonov προσεγγίζουμε τον μη φραγμένο τελεστή A^{-1} με έναν γραμμικό και φραγμένο τελεστή R_α . Η λύση της εξίσωσης ισοδυναμεί με τη λύση του εξής προβλήματος ελαχιστοποίησης: Αναζητούμε το $\phi_\alpha \in X$ που ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση Tikhonov

$$J_\alpha := \|A\phi - f\|^2 + \alpha \|\phi\|^2. \quad (4.48)$$

Ισχύουν τα ακόλουθα θεωρήματα

Θεώρημα 4.4.1 (Tikhonov). Έστω X, Y χώροι Hilbert και $\alpha > 0$. Τότε η συνάρτηση Tikhonov έχει μοναδική ελάχιστη λύση ϕ_α . Αυτό το ελάχιστο είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης

$$(\alpha I + A^*A)\phi_\alpha = A^*f \quad (4.49)$$

και εξαρτάται συνεχώς από το f .

Απόδειξη. Βασίζεται στη θεωρία Riesz - Fredholm [17]. □

Θεώρημα 4.4.2. Η λύση ϕ_α της εξίσωσης (4.49) δέχεται την ακόλουθη μορφή $\phi_\alpha = R_\alpha f$ όπου $R_\alpha : Y \rightarrow X$ με τύπο

$$R_\alpha := (\alpha I + A^*A)^{-1} A^* \quad (4.50)$$

και είναι μοναδική. Αν επιπλέον ο τελεστής A είναι “1-1” με πυκνό σύνολο τιμών τότε υπάρχει μοναδικό α τέτοιο ώστε

$$\|AR_\alpha f - f\| = \delta, \quad (4.51)$$

όπου $0 \leq \delta \leq \|f\|$.

Η παράμετρος ομαλοποίησης α επιλέγεται εξ’ αρχής. Προτού ξεκινήσουμε τον υπολογισμό της ομαλοποιημένης λύσης δίνουμε μια τιμή στην παράμετρο και για την καλύτερη σύγκλιση της μεθόδου αυτή εξαρτάται και από τον αριθμητικό αλγόριθμο. Δηλαδή μεταβάλλεται κατά τη διάρκεια των επαναλήψεων του αλγορίθμου.

4.5 Η μέθοδος Newton για το δυναμικό πρόβλημα

Σ’ αυτή την παράγραφο εξετάζουμε τη σχέση της μεθόδου Newton με το επαναληπτικό σχήμα 4.1.1 που προτάθηκε για την επίλυση του συστήματος (4.5)-(4.6) και τη σύγκλιση του επαναληπτικού σχήματος στη δυναμική γραμμική ελαστικότητα. Στο τέλος

της παραγράφου γίνεται αντίστοιχη ανάλυση και για το σύστημα που προκύπτει από το πρόβλημα σκέδασης από κοιλότητα. Το αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης ταυτίζεται με την επίλυση της μη καλά τοποθετημένης εξίσωσης

$$F(\Gamma) = u^\infty \quad (4.52)$$

για το άγνωστο σύνορο, όπου F ο τελεστής που απεικονίζει το σύνορο Γ του σχεδαστή D στο πλάτος σκέδασης u^∞ του σχεδαζόμενου πεδίου u^{sc} . Λόγω της παραμετροποίησης του συνόρου (3.47) ο τελεστής $F(\Gamma)$ γράφεται ως $F(r)$ και ισχύουν

Λήμμα 4.5.1. Η απεικόνιση $F : L^2[0, 2\pi] \rightarrow L^2[0, 2\pi]$ είναι Fréchet παραγωγίσιμη και η παράγωγος $F'(r)\zeta$ ταυτίζεται με το πλάτος σκέδασης της λύσης του εξωτερικού προβλήματος Dirichlet με συνοριακή συνθήκη

$$-\zeta \cdot \nabla(u^{tot}), \quad \text{στο } \Gamma, \quad (4.53)$$

όπου $\zeta(t) = q(t)(\cos t, \sin t)$.

Η απόδειξη του λήμματος στον \mathbb{R}^3 βρίσκεται στην εργασία [11]. Με εφαρμογή της μεθόδου Newton η εξίσωση (4.52) αντικαθίσταται από τη γραμμικοποιημένη εξίσωση

$$F(r) + F'(r; q) = u^\infty. \quad (4.54)$$

Η εξίσωση (4.5) είναι μοναδικά επιλύσιμη δεδομένου ότι το ω^2 δεν είναι ιδιοσυχνότητα του εσωτερικού προβλήματος Dirichlet. Ο τελεστής F με βάση το σύστημα (4.5)-(4.6) δέχεται τη μορφή

$$F(r) = S^\infty(r, \varphi), \quad (4.55)$$

όπου $\varphi = S^{-1}(r, \cdot)w(r)$. Στο εξής θεωρούμε ότι ο σχεδαστής έχει αστεροειδές σχήμα, δηλαδή δέχεται την παραμετροποίηση (3.47). Έστω r_n η ακτινική συνάρτηση της n -οστής προσεγγιστικής λύσης για το σύνορο Γ_n και r_* η ακτινική συνάρτηση της λύσης του αντίστροφου προβλήματος. Αν υποθέσουμε ότι η λύση u_* του ευθέως προβλήματος μπορεί να επεκταθεί αναλυτικά στο σύνορο Γ_n τότε μπορούμε να αναπαραστήσουμε τη λύση ως συνδυασμό ελαστικών δυναμικών απλού και διπλού στρώματος και

να αποφύγουμε την υπόθεση για την εσωτερική ιδιοσυχνότητα ω^2 . Η παραπάνω υπόθεση ικανοποιείται για αναλυτικά χωρία. Θέτουμε $\mathcal{F}(r) := F(r) - u_*^\infty$ και η μέθοδος Newton για τη λύση της εξίσωσης

$$\mathcal{F}(r) = 0 \quad (4.56)$$

συνίσταται στο επαναληπτικό σχήμα

$$r_{n+1} = r_n - (\mathcal{F}'(r_n))^{-1} \mathcal{F}(r_n). \quad (4.57)$$

Από τον ορισμό του \mathcal{F} , το Λήμμα 4.5.1 και δεδομένου ότι για κάθε u στον \mathbb{R}^2 ισχύει η ανάλυση (4.18) καταλήγουμε στο επαναληπτικό σχήμα

$$r_{n+1} = r_n - \operatorname{Re} \left(u_* / \frac{\partial u_n}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma_n} \right). \quad (4.58)$$

Στην παραπάνω σχέση κάνουμε χρήση του πραγματικού μέρους καθώς η ακτινική συνάρτηση είναι πραγματικός αριθμός ενώ η ποσότητα στο δεξί μέλος της ισότητας είναι μιγαδικός αριθμός. Αν υποθέσουμε ότι ισχύει

$$\left| \operatorname{Re} \left(\frac{\partial u_n}{\partial \nu}(x) \right) \right| > 0 \text{ για } x \in U, \quad (4.59)$$

όπου U μικρή κλειστή περιοχή του Γ , τότε η υπερ-γραμμική σύγκλιση της επαναληπτικής μεθόδου προκύπτει με απλούς υπολογισμούς [66].

Παρατήρηση 4.5.1. Η υπόθεση (4.59) ικανοποιείται αν ο σκεδαστής είναι δίσκος ή χωρίο όμοιο με δίσκο. Δεν ισχύει όμως σε πρόβλημα σκέδασης σε υψηλές συχνότητες. Με τη μέθοδο συνδιάταξης (*collocation*) και κατάλληλη επιλογή κομβικών σημείων μπορούμε επίσης να εξαιρέσουμε τα σημεία του συνόρου όπου μηδενίζεται η κάθετη παράγωγος.

Σε περίπτωση που έχουμε εισαγωγή θορύβου στα δεδομένα, πλάτη σκέδασης από το ευθύ πρόβλημα, με μορφή

$$\|u_\delta^\infty - u^\infty\|_{L^2(\Omega)} < \delta, \quad (4.60)$$

τότε η εξίσωση (4.52) γενικά δεν έχει λύση και κάνουμε χρήση της μεθόδου ομαλοποίησης Tikhonov για να καταλήξουμε στο επαναληπτικό σχήμα

$$r_{n+1}^\delta = r_n^\delta - (a_n I + F'(r_n^\delta)^* F'(r_n^\delta))^{-1} (F'(r_n^\delta)^* (F(r_n^\delta) - u_\delta^\infty) + a_n (r_n^\delta - r_0)), \quad (4.61)$$

όπου $F(r)^*$ ο συζυγής τελεστής του $F(r)$, r_0 είναι μια αρχική πρόβλεψη για την ακτινική συνάρτηση του συνόρου Γ και a_n μια ακολουθία παραμέτρων κανονικοποίησης για την οποία ισχύει

$$a_n > 0, \quad 1 \leq \frac{a_n}{a_{n+1}} \leq C \quad \text{και} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad (4.62)$$

για $C > 0$ σταθερά. Η τοπική σύγκλιση της επαναληπτικής μεθόδου προκύπτει από το επόμενο θεώρημα

Θεώρημα 4.5.1. *Εστω Γ αναλυτικό σύνορο, υποθέτουμε ότι ισχύει η συνθήκη (4.59) και επιπλέον*

$$\frac{\delta^2}{a(\delta)} \rightarrow 0 \quad \text{καθώς} \quad \delta \rightarrow 0, \quad (4.63)$$

για τις παραμέτρους κανονικοποίησης. Αν η επαναληπτική διαδικασία τερματίζεται όταν δύο επιτυχείς προσεγγίσεις ικανοποιούν τη συνθήκη

$$\|r_{n+1}^\delta - r_n^\delta\|_{C(\Omega)} \leq E(\delta), \quad (4.64)$$

με $E(\delta) \rightarrow 0$ καθώς $\delta \rightarrow 0$, τότε το επαναληπτικό σχήμα (4.61) συγκλίνει τοπικά, δηλαδή ισχύει

$$\|r_{n+1}^\delta - r_*\|_{C(\Omega)} \leq 0, \quad \text{καθώς} \quad \delta \rightarrow 0. \quad (4.65)$$

Απόδειξη. Ακολουθούμε την ίδια διαδικασία όπως και στις εργασίες [66, 69]. □

Το παραπάνω θεώρημα εξασφαλίζει τη σύγκλιση της μεθόδου μόνο για το αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης από σκληρό σκεδαστή και κάτω από συγκεκριμένες προϋποθέσεις για το σύνορο του. Η επέκταση της παραπάνω ανάλυσης για κοιλότητα και έγκλεισμα δεν είναι τετριμμένη. Το πρόβλημα έχει να κάνει με τα αντίστοιχα αποτελέσματα, όπως του λήμματος (4.5.1), καθώς η Fréchet παράγωγος $F'(r; q)$ ταυτίζεται με πλάτος σκέδασης λύσης εξωτερικού προβλήματος με συνοριακή συνθήκη η οποία δεν

εξαρτάται μόνο από τον όρο q αλλά και από την παράγωγο του στο εφαπτόμενο επίπεδο του συνόρου Γ .

Για βέλτιστη σύγκλιση της κανονικοποιημένης μεθόδου Newton πρέπει να ικανοποιούνται επιπλέον συνθήκες ομαλότητας (source conditions) για τη λύση r_* καθώς και συνθήκες που περιορίζουν τη μη γραμμικότητα του τελεστή $F(r)$. Ενδεικτικά αναφέρουμε τις εργασίες [33, 40]. Ιδιαίτερα σημαντικό ρόλο στην σωστή προσέγγιση της λύσης μέσω της επαναληπτικής διαδικασίας παίζει το κριτήριο τερματισμού. Μια συνθήκη τερματισμού που χρησιμοποιείται συχνά είναι η αρχή της ασυμφωνίας (discrepancy principle)

$$\|F(r_{n_\delta}^\delta) - u_\delta^\infty\| \leq \tau\delta < \|F(r_n^\delta) - u_\delta^\infty\|, \quad \text{για } \tau > 1, 0 \leq n < n_\delta. \quad (4.66)$$

Η παραπάνω a posteriori συνθήκη βασίζεται σε εκτιμήσεις που προκύπτουν κατά τη διάρκεια των υπολογισμών της μεθόδου και δεν απαιτεί εκ των προτέρων γνώση για το άγνωστο σύνορο Γ . Αν επιπλέον ο τελεστής F ικανοποιεί τη συνθήκη

$$F'(r_1) = R(r_1, r_2)F'(r_2) + Q(r_1, r_2) \quad (4.67)$$

για r_k σε μια περιοχή του r_* , όπου οι τελεστές R, Q ικανοποιούν

$$\|I - R(r_1, r_2)\| \leq C_R \|r_1 - r_2\|, \quad \|Q(r_1, r_2)\| \leq C_Q \|F'(r_2)(r_1 - r_2)\| \quad (4.68)$$

με C_R, C_Q θετικές σταθερές και αν ισχύει η λογαριθμική συνθήκη ομαλότητας (logarithmic source condition)

$$r_0 - r_* = f_\rho(F'(r_*)^* F'(r_*)z) \quad (4.69)$$

όπου

$$f_\rho(t) = \begin{cases} \left(-\ln \frac{t}{C_E t_0}\right)^{-\rho} & \text{για } 0 < t \leq t_0 \\ 0 & \text{για } t = 0 \end{cases} \quad (4.70)$$

με $t_0 \geq \|F'(r_*)\|^2$, για κάποιο z και $\rho > 0$, τότε

$$\|r_{n_\delta}^\delta - r_*\| \leq O((- \log \delta)^{-\rho}). \quad (4.71)$$

Η συνθήκη (4.67) ουσιαστικά απαιτεί η μη γραμμικότητα της Fréchet παραγώγου να μην είναι τόσο ισχυρή και δυστυχώς δεν έχει αποδειχθεί ακόμα ότι ισχύει σε αντίστροφα

προβλήματα σκέδασης. Η λογαριθμική συνθήκη ομαλότητας (4.69) έχει αποδειχθεί για αντίστροφα προβλήματα σκέδασης στην ακουστική με Dirichlet ή Neumann συνοριακές συνθήκες καθώς και για έγκλεισμα [33, 34, 35]. Ουσιαστικά αυτή η συνθήκη μπορεί να χαρακτηριστεί ως συνθήκη φραξίματος σε ένα χώρο Sobolev για μια δοσμένη νόρμα. Οι δύο συνθήκες που αναφέραμε παραπάνω έμμεσα σχετίζονται καθώς αν θεωρήσουμε ασθενέστερη συνθήκη για την παράγωγο $F'(r)$, για παράδειγμα Lipschitz συνέχεια, τότε θα πρέπει να υποθέσουμε ισχυρότερη συνθήκη ομαλότητας (Hölder) η οποία όμως δεν ικανοποιείται σε αντίστροφα προβλήματα σκέδασης.

Με το ακόλουθο θεώρημα ερμηνεύουμε τη συνθήκη (4.69) στην περίπτωση που ο σχεδαστής είναι ο μοναδιαίος δίσκος. Η απόδειξη βασίζεται στην θεωρία του Hohage και εφαρμόστηκε για το αντίστροφο πρόβλημα ακουστικής σκέδασης από μαλακό και μη διαπερατό εμπόδιο [33]. Στη συνέχεια, όσον αφορά το σχεδαζόμενο πεδίο u^{sc} θεωρούμε ως αναπαράσταση του το συνδυασμό ελαστικών δυναμικών, όπως αυτή παρουσιάστηκε στο αντίστοιχο ευθύ πρόβλημα (2.4.1), για να αποφύγουμε την απαίτηση το ω^2 να μην είναι ιδιοσυχνότητα του εσωτερικού προβλήματος Dirichlet. Συνδυάζοντας τις σχέσεις (2.73) και (4.52) προκύπτει η ακόλουθη αναπαράσταση για το ζεύγος των πλατών σκέδασης

$$u^\infty = F(I + L)^{-1}(-2u^{inc}), \quad (4.72)$$

όπου $L = 2K - 2iS$. Ορίζουμε τον τελεστή $G : [H^s([0, 2\pi])]^2 \rightarrow [L^2(\Omega)]^2$ που απεικονίζει την ακτινική συνάρτηση r στο ζεύγος πλατών σκέδασης u^∞ με $s > 2.5$. Στο εξής οι τελεστές θα θεωρούνται με την παραμετροποιημένη τους μορφή. Λόγω της συνοριακής συνθήκης (4.53) του λήμματος 4.5.1 ο τελεστής G παίρνει τη μορφή

$$G(r; q) = F(I + L)^{-1}Mq, \quad (4.73)$$

όπου ο τελεστής M καλείται πολλαπλασιαστικός τελεστής.

Θεώρημα 4.5.2. Έστω $r \equiv 1$ και $s \geq 0$. Ορίζουμε τον τελεστή $\tilde{G} := F(I + L)^{-1}$ τότε για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει

$$[H^{s+\rho+\epsilon}]^2 \subset f_\rho(\tilde{G}^*\tilde{G})(H^s) \subset [H^{s+\rho}]^2 \quad (4.74)$$

και οι τελεστές $f_\rho(\tilde{G}^*\tilde{G}) : [H^s]^2 \rightarrow [H^{s+\rho}]^2$, $(f_\rho(\tilde{G}^*\tilde{G}))^{-1} : [H^{s+\rho+\epsilon}]^2 \rightarrow [H^s]^2$ είναι φραγμένοι.

Απόδειξη. Ορίζουμε για $s \in \mathbb{R}$

$$\phi_n(t) := \frac{(1+n^2)^{-\frac{s}{2}}}{2\pi} e^{int}, \quad \psi_n(t) := \frac{1}{2\pi} e^{int} \quad (4.75)$$

και τα (ϕ_n, ψ_n) είναι μια βάση του $[H^s([0, 2\pi])]^2$. Χρησιμοποιούμε πολικές συντεταγμένες και η λύση του προβλήματος, που ικανοποιεί και τη συνθήκη ακτινοβολίας, δέχεται την ακόλουθη αναπαράσταση μέσω των ιδιοδιανυσμάτων Navier [45, 70]

$$u_n(r, t) = \alpha_n \Phi_n(r, t) + \beta_n \Psi_n(r, t) \quad (4.76)$$

όπου

$$\Phi_n(r, t) = k_p H_n^{(1)'}(k_p r) P_n(t) + \frac{in}{r} H_{n,1}^{(1)}(k_p r) B_n(t), \quad (4.77)$$

και

$$\Psi_n(r, t) = \frac{in}{r} H_n^{(1)}(k_s r) P_n(t) - k_s H_n^{(1)'}(k_s r) B_n(t). \quad (4.78)$$

Τα $P_n(t), B_n(t)$ είναι οι διανυσματικές αρμονικές και δίνονται από τους τύπους

$$P_n(t) := (\cos t, \sin t) e^{int} = \hat{u}(t) e^{int}, \quad (4.79)$$

$$B_n(t) := (\sin t, -\cos t) e^{int} = \hat{v}(t) e^{int}. \quad (4.80)$$

Λόγω της συνοριακής συνθήκης προκύπτει η αναπαράσταση

$$u_n = \phi_n(\hat{u}(t) + \hat{v}(t)). \quad (4.81)$$

Από τις μορφές (4.76) και (4.81) μετά από πράξεις καταλήγουμε στους ακόλουθους τύπους για τους συντελεστές α_n και β_n

$$\alpha_n = - \frac{(1+n^2)^{-\frac{s}{2}} \left[k_s H_n^{(1)'}(k_s r) + \frac{in}{r} H_n^{(1)}(k_s r) \right]}{2\pi k_p k_s \left[H_n^{(1)'}(k_p r) H_n^{(1)'}(k_s r) + \left(\frac{n}{r}\right)^2 H_n^{(1)}(k_p r) H_n^{(1)}(k_s r) \right]} \quad (4.82)$$

και

$$\beta_n = \frac{(1+n^2)^{-\frac{s}{2}} \left[k_p H_n^{(1)'}(k_p r) - \frac{in}{r} H_n^{(1)}(k_p r) \right]}{2\pi k_p k_s \left[H_n^{(1)'}(k_p r) H_n^{(1)'}(k_s r) + \left(\frac{n}{r}\right)^2 H_n^{(1)}(k_p r) H_n^{(1)}(k_s r) \right]}. \quad (4.83)$$

Οπότε, το σύστημα $(\phi_n, \frac{\alpha_n}{|\alpha_n|}\psi_n, |\alpha_n|) \times (\phi_n, \frac{\beta_n}{|\beta_n|}\psi_n, |\beta_n|)$ για $n \in \mathbb{Z}$ είναι ένα ιδιάζον σύστημα για τον τελεστή \tilde{G} και ισχύει

$$f_\rho(\tilde{G}^* \tilde{G})\phi_n(\hat{u}(t) + \hat{v}(t)) = f_\rho(|\alpha_n|^2)\phi_n\hat{u}(t) + f_\rho(|\beta_n|^2)\phi_n\hat{v}(t). \quad (4.84)$$

Λόγω της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς των συναρτήσεων Hankel (2.21)

$$H_n^{(1)}(t) = -i\sqrt{\frac{2}{n\pi}} \left(\frac{2n}{et}\right)^n, \quad \text{για } n \rightarrow \infty, \quad (4.85)$$

$$H_n^{(1)'}(t) = \frac{i}{t}\sqrt{\frac{2n}{\pi}} \left(\frac{2n}{et}\right)^n, \quad \text{για } n \rightarrow \infty \quad (4.86)$$

$$H_n^{(1)''}(t) = -\frac{(n+1)i}{t^2}\sqrt{\frac{2n}{\pi}} \left(\frac{2n}{et}\right)^n, \quad \text{για } n \rightarrow \infty \quad (4.87)$$

αποδεικνύεται, για γ_k σταθερές, ότι

$$|\tilde{\alpha}_n|^2 = \gamma_1 n^{-2s-1} \left(\frac{ek_p}{2n}\right)^{2n}, \quad \text{για } n \rightarrow \infty \quad (4.88)$$

$$|\tilde{\beta}_n|^2 = \gamma_2 n^{-2s-1} \left(\frac{ek_s}{2n}\right)^{2n}, \quad \text{για } n \rightarrow \infty. \quad (4.89)$$

Με βάση τα παραπάνω λαμβάνουμε

$$-\ln \left(\frac{|\tilde{\alpha}_n|^2}{e\|A\|^2}\right) = \ln \left(\frac{e\|A\|^2}{\gamma_1}\right) + (2s+1)\ln n + 2n\ln \left(\frac{2n}{ek_p}\right), \quad \text{για } n \rightarrow \infty \quad (4.90)$$

και

$$-\ln \left(\frac{|\tilde{\beta}_n|^2}{e\|B\|^2}\right) = \ln \left(\frac{e\|B\|^2}{\gamma_2}\right) + (2s+1)\ln n + 2n\ln \left(\frac{2n}{ek_s}\right), \quad \text{για } n \rightarrow \infty \quad (4.91)$$

όπου $\|A\| = \max |\alpha_n|$ και $\|B\| = \max |\beta_n|$. Μετά από πράξεις καταλήγουμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν σταθερές $c_k, C_k > 0$ και $N_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιες ώστε

$$c_1\sqrt{1+n^2} \leq -\ln \left(\frac{|\tilde{\alpha}_n|^2}{e\|A\|^2}\right) \leq C_1(1+n^2)^{\frac{1+\epsilon/\rho}{2}}, \quad \text{για } |n| \geq N_0 \quad (4.92)$$

και

$$c_2\sqrt{1+n^2} \leq -\ln \left(\frac{|\tilde{\beta}_n|^2}{e\|B\|^2}\right) \leq C_2(1+n^2)^{\frac{1+\epsilon/\rho}{2}}, \quad \text{για } |n| \geq N_0. \quad (4.93)$$

Οπότε προκύπτουν οι ακόλουθες ανισώσεις

$$C_1^{-\rho} (1 + n^2)^{-\frac{\epsilon+\rho}{2}} \leq f_p(|\tilde{\alpha}_n|^2) \leq c_1^{-\rho} (1 + n^2)^{-\frac{\rho}{2}}, \quad \text{για } n \in \mathbb{Z} \quad (4.94)$$

και

$$C_2^{-\rho} (1 + n^2)^{-\frac{\epsilon+\rho}{2}} \leq f_p\left(|\tilde{\beta}_n|^2\right) \leq c_2^{-\rho} (1 + n^2)^{-\frac{\rho}{2}}, \quad \text{για } n \in \mathbb{Z}. \quad (4.95)$$

Από τις παραπάνω ανισώσεις συνεπάγεται η σχέση (4.74) και οι απεικονίσεις των τελεστών. \square

Το παραπάνω θεώρημα αποδεικνύει τη συνθήκη ομαλότητας για τον τελεστή \tilde{G} . Ο τελεστής που αντιστοιχεί στην Frechét παράγωγο είναι ο $G = \tilde{G}M$ για τον οποίο όμως δεν μπορεί να υπολογιστεί το ιδιάζον σύστημα. Παρ' ολ' αυτά, τα αποτελέσματα του θεωρήματος δεν αλλοιώνονται σημαντικά από την εφαρμογή του πολλαπλασιαστικού τελεστή M [33].

Όσον αφορά στη σύνδεση του πλήρους γραμμικοποιημένου συστήματος με τη μέθοδο Newton για το αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης από κοιλότητα αρχικά παρουσιάζουμε το επόμενο λήμμα το οποίο είναι αντίστοιχο του λήμματος 4.5.1 για την περίπτωση σκέδασης από σκληρό σκεδαστή.

Λήμμα 4.5.2. Η απεικόνιση $F : [L^2[0, 2\pi]]^2 \rightarrow [L^2[0, 2\pi]]^2$ είναι Fréchet παραγωγίσιμη και η παράγωγος δίνεται από τον τύπο $F'(r)\zeta = v^\infty$, όπου v^∞ είναι το πλάτος σκέδασης της μοναδικής λύσης του εξωτερικού προβλήματος Neumann με συνοριακή συνθήκη

$$Tv = \rho\omega^2(\zeta \cdot \nu)u + \mathcal{R}(u, v), \quad \text{στο } \Gamma. \quad (4.96)$$

Απόδειξη. Η παραπάνω συνοριακή συνθήκη αποδείχθηκε για την εξίσωση Helmholtz στην εργασία [32]. Ο πρώτος όρος του δεξιού μέλους προκύπτει με ανάλογα επιχειρήματα. Η αναλυτική μορφή του διαφορικού τελεστή \mathcal{R} δεν έχει βρεθεί αλλά για την ανάλυση που ακολουθεί αρκεί το ότι είναι τελεστής πρώτης τάξης. \square

Η συνοριακή συνθήκη (4.96) δέχεται την ακόλουθη απλοποιημένη μορφή

$$Tv = a_1 \cdot \zeta + a_2 \cdot \zeta', \quad (4.97)$$

όπου τα a_k είναι συναρτήσεις και εξαρτώνται από τα $u \circ x, r, r'$ και r'' . Οπότε η Fréchet παράγωγος του F μπορεί να αναπαρασταθεί ως εξής

$$F' = AMH. \quad (4.98)$$

Ο τελεστής H ορίζεται ως $H(\zeta) := (\zeta, \zeta')^T$, ο M είναι ο πολλαπλασιαστικός τελεστής και ο A απεικονίζει την πυκνότητα ϕ στο πλάτος σκέδασης της ακτινοβολούσας λύσης του εξωτερικού προβλήματος Neumann με συνοριακή συνθήκη $Tv = \phi$ στο Γ . Το ακόλουθο θεώρημα ερμηνεύει τη συνθήκη ομαλότητας (4.69) για τον τελεστή A .

Θεώρημα 4.5.3. Έστω $r \in (0, +\infty)$ σταθερό και ο τελεστής A όπως ορίστηκε προηγούμενα, τότε για κάθε $s \geq 0$ και $\epsilon > 0$ ισχύει

$$[H^{s+\rho+\epsilon}]^2 \subset f_\rho(A^*A)(H^s) \subset [H^{s+\rho}]^2 \quad (4.99)$$

και οι τελεστές $f_\rho(A^*A) : [H^s]^2 \rightarrow [H^{s+\rho}]^2$, $(f_\rho(A^*A))^{-1} : [H^{s+\rho+\epsilon}]^2 \rightarrow [H^s]^2$ είναι φραγμένοι.

Απόδειξη. Εφόσον το q είναι σταθερό χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε $q = 1$. Ακολουθούμε την ίδια διαδικασία με την απόδειξη του θεωρήματος 4.5.2. Από τη συνοριακή συνθήκη

$$T u_n = \phi_n(\hat{u}(t) + \hat{v}(t)) \quad (4.100)$$

προκύπτει

$$T u_n = \alpha_n T \Phi_n(r, t) + \beta_n T \Psi_n(r, t), \quad (4.101)$$

όπου

$$T \Phi_n(r, t) = 2\mu k_p^2 H_{n,3}^{(1)}(k_p r) P_n(t) + 2i\mu n k_p^2 H_{n,1}^{(1)}(k_p r) B_n(t) \quad (4.102)$$

και

$$T \Psi_n(r, t) = 2i\mu n k_s^2 H_{n,1}^{(1)}(k_s r) P_n(t) - 2\mu k_s^2 H_{n,2}^{(1)}(k_s r) B_n(t). \quad (4.103)$$

Οι συναρτήσεις $H_{n,k}^{(1)}$ για $k = 1, 2, 3$ δίνονται από τους τύπους

$$H_{n,1}^{(1)}(t) = \frac{H_n^{(1)'}(t)}{t} - \frac{H_n^{(1)}(t)}{t^2}, \quad H_{n,2}^{(1)}(t) = H_n^{(1)''}(t) + \frac{1}{2} H_n^{(1)}(t) \quad (4.104)$$

και

$$H_{n,3}^{(1)}(t) = H_n^{(1)''}(t) - \frac{\lambda}{2\mu} H_n^{(1)}(t). \quad (4.105)$$

Από τη συνθήκη (4.100) μετά από πράξεις καταλήγουμε στις ακόλουθες μορφές για τους συντελεστές α_n και β_n

$$\alpha_n = \frac{(1+n^2)^{-\frac{s}{2}} \left[H_{n,2}^{(1)}(k_s r) + in H_{n,1}^{(1)}(k_s r) \right]}{4\pi\mu k_p^2 \left[H_{n,3}^{(1)}(k_p r) H_{n,2}^{(1)}(k_s r) - n^2 H_{n,1}^{(1)}(k_p r) H_{n,1}^{(1)}(k_s r) \right]} \quad (4.106)$$

και

$$\beta_n = -\frac{(1+n^2)^{-\frac{s}{2}} \left[H_{n,3}^{(1)}(k_p r) - in H_{n,1}^{(1)}(k_p r) \right]}{4\pi\mu k_s^2 \left[H_{n,3}^{(1)}(k_p r) H_{n,2}^{(1)}(k_s r) - n^2 H_{n,1}^{(1)}(k_p r) H_{n,1}^{(1)}(k_s r) \right]}. \quad (4.107)$$

Όμοια με την απόδειξη για τον σκληρό σχεδαστή καταλήγουμε στις ακόλουθες ανισοτικές σχέσεις

$$C_1^{-\rho} (1+n^2)^{-\frac{\epsilon+\rho}{2}} \leq f_p(|\tilde{\alpha}_n|^2) \leq c_1^{-\rho} (1+n^2)^{-\frac{\rho}{2}}, \quad \text{για } n \in \mathbb{Z} \quad (4.108)$$

και

$$C_2^{-\rho} (1+n^2)^{-\frac{\epsilon+\rho}{2}} \leq f_p\left(|\tilde{\beta}_n|^2\right) \leq c_2^{-\rho} (1+n^2)^{-\frac{\rho}{2}}, \quad \text{για } n \in \mathbb{Z}. \quad (4.109)$$

με $c_k, C_k > 0$ σταθερές. Από τις παραπάνω ανισώσεις συνεπάγεται η σχέση (4.99) και οι απεικονίσεις των τελεστών. \square

Με επιχειρήματα που αναλύονται στην εργασία [34] προκύπτει ότι η εφαρμογή των τελεστών M και H δεν αλλοιώνει σημαντικά τις ανισοτικές σχέσεις. Οπότε και οι ιδιότητες του F' ικανοποιούν το παραπάνω θεώρημα. Προς διερεύνηση παραμένει ο πλήρης προσδιορισμός του τελεστή \mathcal{R} καθώς και η εφαρμογή της παραπάνω ανάλυσης για το αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης από έγκλεισμα.

Κεφάλαιο 5

Αριθμητική επίλυση ευθέων και αντίστροφων προβλημάτων

Σ' αυτό το κεφάλαιο πραγματοποιείται η αριθμητική επίλυση των συστημάτων των μη γραμμικών ολοκληρωτικών εξισώσεων για τα τρία αντίστροφα προβλήματα που εξετάσαμε στα προηγούμενα κεφάλαια. Αρχικά αναλύουμε τις κύριες μεθόδους επίλυσης ολοκληρωτικών εξισώσεων δευτέρου είδους της μορφής

$$\varphi - A\varphi = f \quad (5.1)$$

όπου $A : X \rightarrow X$ είναι γραμμικός και φραγμένος τελεστής. Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται ευρέως είναι οι εξής

- **Μέθοδος Nyström.** Επιλέγεται μια συγκλίνουσα ακολουθία A_n κανόνων ολοκλήρωσης για την προσέγγιση του ολοκληρωτικού τελεστή A με συνεχή ή ασθενώς ιδιόμορφο πυρήνα. Η λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης (5.1) δίνεται από την λύση της

$$\varphi_n - A_n\varphi_n = f. \quad (5.2)$$

Η μέθοδος καταλήγει στην επίλυση ενός γραμμικού συστήματος πεπερασμένης διάστασης.

- **Μέθοδος συνδιάταξης (collocation).** Ανήκει στην κατηγορία των μεθόδων

δων προβολής (projection) και η εξίσωση (5.1) δέχεται τη μορφή

$$\varphi_n - P_n A \varphi_n = P_n f \quad (5.3)$$

όπου P_n οι τελεστές προβολής $P_n : X \rightarrow X_n \subset X$. Η προσεγγιστική λύση της (5.3) προέρχεται από την επίλυση της σε πεπερασμένο το πλήθος κομβικά σημεία x_j , δηλ.

$$(I - P_n A) \varphi_n(x_j) = P_n f(x_j), \quad \text{για } j = 1, \dots, n. \quad (5.4)$$

Η μέθοδος συγκλίνει και αν κάνουμε χρήση της βάσης Lagrange για την προσέγγιση του φ_n ταυτίζεται με την μέθοδο Nyström.

- **Μέθοδος Galerkin.** Η λύση της εξίσωσης $A\varphi = f$ ισοδυναμεί με την εύρεση του $\varphi_n \in X_n$ ώστε να ισχύει

$$(A\varphi_n, \psi) = (f, \psi) \quad \text{για κάθε } \psi \in X_n. \quad (5.5)$$

Όπου X_n πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος του X . Η εξίσωση (5.5) αντιστοιχεί στις καλύτερες προσεγγίσεις του $A\varphi_n$, δηλ.

$$P_n A \varphi_n = P_n f. \quad (5.6)$$

Αντίστοιχα με τη μέθοδο συνδιάταξης και αυτή η μέθοδος ανήκει στην κατηγορία των μεθόδων προβολής.

Οι παραπάνω μέθοδοι παρουσιάζονται αναλυτικά στο βιβλίο [54]. Σε αυτή τη διατριβή επιλέγεται η μέθοδος συνδιάταξης καθώς απαιτεί μικρότερο υπολογιστικό χρόνο. Προσεγγίζουμε τα ολοκληρώματα μέσω παρεμβολής της ολοκληρωτέας συνάρτησης και καταλήγουμε στην επίλυση ενός πεπερασμένου γραμμικού συστήματος. Η παρεμβολή γίνεται με χρήση τριγωνομετρικών συναρτήσεων καθώς οι συναρτήσεις είναι περιοδικές και αναλυτικές και η σύγκλιση είναι καλύτερη σε σχέση με προσεγγίσεις μέσω πολυωνύμων (splines).

Αρχικά επιλέγουμε ένα σύνολο σημείων - κόμβων, ισαπέχοντα μεταξύ τους

$$t_j = \frac{j\pi}{n}, \quad \text{για } j = 0, \dots, 2n - 1. \quad (5.7)$$

Για την αριθμητικό υπολογισμό των ολοκληρωτικών τελεστών με ομαλούς πυρήνες χρησιμοποιούμε τον τραπεζοειδή κανόνα

$$\int_0^{2\pi} \varphi(\tau) d\tau \approx \frac{\pi}{n} \sum_{j=0}^{2n-1} \varphi(t_j). \quad (5.8)$$

Για τους ασθενώς ιδιόμορφους και ισχυρά ιδιόμορφους πυρήνες αντικαθιστούμε τον κανόνα του τραπεζίου με συγκλίνοντες κανόνες τετραγωνισμού (quadrature rules) βάση τριγωνομετρικής παρεμβολής, όπως προτείνεται στις εργασίες [9, 10, 50] και στο βιβλίο [53]

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left(4 \sin^2 \frac{t-\tau}{2} \right) \varphi(\tau) d\tau \approx \sum_{j=0}^{2n-1} R_j^{(n)}(t) \varphi(t_j), \quad (5.9)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cot \frac{\tau-t}{2} \varphi'(\tau) d\tau \approx \sum_{j=0}^{2n-1} T_j^{(n)}(t) \varphi(t_j), \quad (5.10)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cot \frac{\tau-t}{2} \varphi(\tau) d\tau \approx \sum_{j=0}^{2n-1} \tilde{T}_j^{(n)}(t) \varphi(t_j), \quad (5.11)$$

με τα τετραγωνικά βάρη να δίνονται από τους τύπους

$$R_j^{(n)}(t) = -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \cos k(t-t_j) - \frac{1}{2n^2} \cos n(t-t_j), \quad (5.12)$$

$$T_j^{(n)}(t) = -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} k \cos k(t-t_j) - \frac{1}{2} \cos n(t-t_j) \quad (5.13)$$

και

$$\tilde{T}_j^{(n)}(t) = -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \sin k(t-t_j) - \frac{1}{2n} \sin n(t-t_j). \quad (5.14)$$

Σημείωση 5.0.1. Στη συνέχεια, ο δείκτης σε κάθε πίνακα δηλώνει τον πυρήνα του ολοκληρωτικού τελεστή από τον οποίο προήλθε, δηλαδή με M_S συμβολίζουμε τον πίνακα που αντιστοιχεί στον πυρήνα του τελεστή που προκύπτει από το ελαστικό δυναμικό απλού στρώματος.

5.1 Ευθέα προβλήματα

Εφαρμόζουμε τη μέθοδο συνδιάταξης και παρουσιάζουμε πως επιλύθηκαν αριθμητικά τα ευθέα προβλήματα ώστε να προκύψουν τα απαραίτητα δεδομένα για τα αντίστροφα

προβλήματα. Οι ολοκληρωτικές εξισώσεις που προκύπτουν από τα ευθέα προβλήματα επιλύονται στα $2n$ ισαπέχοντα σημεία για να προκύψουν οι $2n$ τιμές των πυκνοτήτων και στη συνέχεια οι $2n$ τιμές των πλατών σκέδασης (δυναμικό πρόβλημα) ή των συνοριακών δεδομένων (στατικό πρόβλημα). Παρακάτω αναλύουμε μόνο τα τρία ευθέα προβλήματα για το δυναμικό πρόβλημα καθώς ισχύει η ίδια θεώρηση για το στατικό λόγω του ότι οι πυρήνες των δυναμικών εμφανίζουν την ίδια ιδιομορφία.

5.1.1 Σκληρό εμπόδιο

Η ολοκληρωτική εξίσωση (2.73) σε παραμετρική μορφή γίνεται

$$\varphi(x(t)) + 2 \int_0^{2\pi} M(t, \tau) \varphi(x(\tau)) d\tau = -2u^{inc}(x(t)), \text{ για } t \in [0, 2\pi], \quad (5.15)$$

όπου

$$M(t, \tau) = M_K(t, \tau) - i\eta M_S(t, \tau). \quad (5.16)$$

Ο ασθενώς ιδιόμορφος πυρήνας του τελεστή S με βάση την ανάλυση που πραγματοποιείται στο παράρτημα (Α'.11), δέχεται την ακόλουθη μορφή

$$M_S(t_k, t_j) = R_{|k-j|} M_1(t_k, t_j) + \frac{\pi}{n} M_2(t_k, t_j). \quad (5.17)$$

Αντίστοιχα ο ιδιόμορφος πυρήνας του τελεστή K (Α'.48) είναι

$$M_K(t_k, t_j) = R_{|k-j|} K_1(t_k, t_j) + \frac{\pi}{n} K_2(t_k, t_j) + \frac{c_0}{|x'(t_j)|} \tilde{T}_{|k-j|} Q^T + \frac{\pi}{n} K_3(t_k, t_j). \quad (5.18)$$

Από την παραπάνω ανάλυση για την προσέγγιση των ολοκληρωμάτων η εξίσωση μετατρέπεται στο ακόλουθο γραμμικό σύστημα

$$\varphi(x(t_k)) + 2 \sum_{j=0}^{2n-1} M(t_k, t_j) \varphi(x(t_j)) = -2u^{inc}(x(t_k)), \text{ για } k = 0, \dots, 2n-1. \quad (5.19)$$

Επιλύουμε το γραμμικό σύστημα (5.19) ως προς τα $\varphi_j := \varphi(x(t_j))$, $j = 0, \dots, 2n-1$ που αντιστοιχούν στις τιμές της πυκνότητας φ στα σημεία t_j . Τα πλάτη σκέδασης δίνονται από τη σχέση (2.115) και επειδή οι πυρήνες είναι συνεχείς υπολογίζονται μέσω του τραπεζοειδή κανόνα ως εξής

$$u^\infty \approx \frac{\pi}{n} \sum_{j=0}^{2n-1} M_\infty(\hat{x}(t_k), t_j) \varphi_j, \quad (5.20)$$

όπου

$$M_{j,\infty}(\hat{x}(t_k), t) = J^*(\hat{x}(t_k))(\gamma_{2,j}F(\hat{x}(t_k), x(t)) - i\eta\gamma_{1,j}I)e^{-ik_j\hat{x}(t_k)\cdot x(t)}, \quad \text{για } j = p, s. \quad (5.21)$$

5.1.2 Κοιλότητα

Η παραμετρική μορφή της ολοκληρωτικής εξίσωσης (2.81) είναι η ακόλουθη

$$\varphi(x(t)) - 2 \int_0^{2\pi} M(t, \tau)\varphi(x(\tau))d\tau = 2(Tu^{inc})(x(t)), \quad \text{για } t \in [0, 2\pi], \quad (5.22)$$

όπου

$$M(t, \tau) = M_K^*(t, \tau) + i\eta M_L(t, \tau). \quad (5.23)$$

Ο ισχυρά ιδιόμορφος πυρήνας του τελεστή L με βάση την ανάλυση που πραγματοποιείται στο παράρτημα (Α'.3), λαμβάνει την ακόλουθη μορφή

$$M_L(t_k, t_j) = c_1 T_{|k-j|} + R_{|k-j|} B_1(t_k, t_j) + \frac{1}{2n} B_2(t_k, t_j). \quad (5.24)$$

Ο ιδιόμορφος πυρήνας του K^* δέχεται ανάλογη ανάλυση με τον πυρήνα του τελεστή K (5.18). Η εξίσωση μετατρέπεται στο ακόλουθο γραμμικό σύστημα

$$\varphi(x(t_k)) - 2 \sum_{j=0}^{2n-1} M(t_k, t_j)\varphi(x(t_j)) = 2(Tu^{inc})(x(t_k)), \quad \text{για } k = 0, \dots, 2n-1. \quad (5.25)$$

Το γραμμικό σύστημα (5.25) επιλύεται ως προς τα $\varphi_j := \varphi(x(t_j))$, $j = 0, \dots, 2n-1$ που αντιστοιχούν στις τιμές της πυκνότητας φ στα σημεία t_j . Τα πλάτη σκέδασης δίνονται από τη σχέση (2.116) και υπολογίζονται μέσω του τραπεζοειδή κανόνα ως εξής

$$u^\infty \approx \frac{\pi}{n} \sum_{j=0}^{2n-1} M_\infty(\hat{x}(t_k), t_j)\varphi_j, \quad (5.26)$$

όπου

$$M_{j,\infty}(\hat{x}(t_k), t) = J^*(\hat{x}(t_k))(i\eta\gamma_{2,j}F(\hat{x}(t_k), x(t)) + \gamma_{1,j}I)e^{-ik_j\hat{x}(t_k)\cdot x(t)}, \quad \text{για } j = p, s. \quad (5.27)$$

5.1.3 Έγκλεισμα

Το σύστημα των ολοκληρωτικών εξισώσεων (2.105) μετατρέπεται στο ακόλουθο ζεύγος των παραμετροποιημένων εξισώσεων

$$-\frac{\tau_i + \tau_e}{2} \varphi(x(t)) + \int_0^{2\pi} (M_{S_i}(t, \tau) - M_{S_e}(t, \tau)) \psi(x(\tau)) d\tau + \int_0^{2\pi} (\tau_i M_{K_i}(t, \tau) - \tau_e M_{K_e}(t, \tau)) \varphi(x(\tau)) d\tau = u^{inc}(x(t)) \quad (5.28)$$

και

$$-\psi(x(t)) + \int_0^{2\pi} (M_{K_e^*}(t, \tau) - M_{K_i^*}(t, \tau)) \psi(x(\tau)) d\tau + \int_0^{2\pi} (\tau_e M_{L_e}(t, \tau) - \tau_i M_{L_i}(t, \tau)) \varphi(x(\tau)) d\tau = -(T^e u^{inc})(x(t)), \quad (5.29)$$

για $t \in [0, 2\pi]$. Οι πυρήνες που εμφανίζονται στα παραπάνω ολοκληρώματα έχουν αναλυθεί στα δύο προηγούμενα προβλήματα, οπότε παραθέτουμε το ισοδύναμο ζεύγος των γραμμικών συστημάτων

$$-\frac{\tau_i + \tau_e}{2} \varphi(x(t_k)) + \sum_{j=0}^{2n-1} (M_{S_i}(t_k, t_j) - M_{S_e}(t_k, t_j)) \psi(x(t_j)) + \sum_{j=0}^{2n-1} (\tau_i M_{K_i}(t_k, t_j) - \tau_e M_{K_e}(t_k, t_j)) \varphi(x(t_j)) = u^{inc}(x(t_k)) \quad (5.30)$$

και

$$-\psi(x(t_k)) + \sum_{j=0}^{2n-1} (M_{K_e^*}(t_k, t_j) - M_{K_i^*}(t_k, t_j)) \psi(x(t_j)) + \sum_{j=0}^{2n-1} (\tau_e M_{L_e}(t_k, t_j) - \tau_i M_{L_i}(t_k, t_j)) \varphi(x(t_j)) = -(T^e u^{inc})(x(t_k)), \quad (5.31)$$

για $k = 0, \dots, 2n - 1$. Το ζεύγος των εξισώσεων (5.30)-(5.31) επιλύεται ως προς τα $\psi_j, \varphi_j, j = 0, \dots, 2n - 1$ για να προκύψουν οι τιμές των πυκνοτήτων ψ, φ στα σημεία t_j . Τα πλάτη σχέδασης μέσω της αναπαράστασης (2.117) υπολογίζονται, κάνοντας χρήση του τραπεζοειδή κανόνα λόγω των συνεχών πυρήνων, με βάση τον παρακάτω τύπο

$$u^\infty \approx \frac{\pi}{n} \sum_{j=0}^{2n-1} \{M_{D^\infty}(\hat{x}(t_k), t_j) \varphi_j + M_{S^\infty}(\hat{x}(t_k), t_j) \psi_j\}. \quad (5.32)$$

Οι πίνακες των τελεστών πλατών σκέδασης $M_{\mathcal{D}^\infty}$ και $M_{\mathcal{S}^\infty}$ δίνονται από τους τύπους

$$M_{j,\mathcal{D}^\infty}(\hat{x}(t_k), t) = \tau_e \gamma_{2,j}^e J^*(\hat{x}(t_k)) F_e(\hat{x}(t_k), x(t)) e^{-ik_{j,e} \hat{x}(t_k) \cdot x(t)}, \quad (5.33)$$

$$M_{j,\mathcal{S}^\infty}(\hat{x}(t_k), t) = \gamma_{1,j}^e J^*(\hat{x}(t_k)) e^{-ik_{j,e} \hat{x}(t_k) \cdot x(t)}, \quad \text{για } j = p, s. \quad (5.34)$$

5.1.4 Έλεγχος δεδομένων από τα ευθέα προβλήματα

Τα επόμενα δύο παραδείγματα που παρουσιάζουμε επαληθεύουν την αριθμητική μέθοδο επίλυσης των ευθέων προβλημάτων. Ο έλεγχος γίνεται σε δεδομένα προβλήματα με γνωστές αναλυτικές λύσεις. Για τα ευθέα προβλήματα σκέδασης από σκληρό σκεδαστή και κοιλότητα, εφόσον δεν έχουμε κυματική διάδοση στο εσωτερικό του σκεδαστή, θεωρούμε ένα σημείο (πηγή) $y = (y_1, y_2) \in D$. Για το ευθύ πρόβλημα σκέδασης από σκληρό σκεδαστή θεωρούμε συνοριακή συνθήκη

$$u = f, \quad \text{στο } \Gamma \quad (5.35)$$

με τη συνάρτηση f να αντιστοιχεί στην πρώτη στήλη του τανυστή Green για $x \in \Gamma$ και $y \in D$ δοσμένο. Δηλαδή

$$f := \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_{11}(x, y) \\ \Phi_{21}(x, y) \end{pmatrix}. \quad (5.36)$$

Ορίζουμε $r(t) = ((x_1(t) - y_1)^2 + (x_2(t) - y_2)^2)^{1/2}$ για $t \in [0, 2\pi]$ και οι συνιστώσες της f σε παραμετρικοποιημένη μορφή δίνονται από τους τύπους

$$f_1(t_k) = \Phi_1(r(t_k)) + \Phi_2(r(t_k)) J_{11}(x(t_k) - y) \quad (5.37)$$

και

$$f_2(t_k) = \Phi_2(r(t_k)) J_{12}(x(t_k) - y) \quad (5.38)$$

για $k = 0, \dots, 2n - 1$. Οι συναρτήσεις Φ_1 και Φ_2 δίνονται από τους τύπους (2.30) και (2.31) αντίστοιχα, ενώ τα J_{11} και J_{12} αντιστοιχούν στην πρώτη στήλη του πίνακα J , δηλαδή

$$J_{11}(x(t) - y) = \frac{(x_1(t) - y_1)^2}{r^2}, \quad J_{12}(x(t) - y) = \frac{(x_1(t) - y_1)(x_2(t) - y_2)}{r^2}. \quad (5.39)$$

Η εξίσωση (5.19) μετατρέπεται στην ακόλουθη

$$\varphi(x(t_k)) + 2 \sum_{j=0}^{2n-1} M(t_k, t_j) \varphi(x(t_j)) = 2(f(x(t_k)) - u^{inc}(x(t_k))), \quad (5.40)$$

που επιλύεται ως προς τις τιμές της πυκνότητας φ στα σημεία t_j για να προκύψουν τα πλάτη σκέδασης u^∞ (5.20). Για το ευθύ πρόβλημα σκέδασης από κοιλότητα η συνοριακή συνθήκη είναι

$$T u = g, \quad \text{στο } \Gamma \quad (5.41)$$

με τη συνάρτηση g να αντιστοιχεί στην πρώτη στήλη του πίνακα $T_x \Phi(x, y)$ για $x \in \Gamma$ και $y \in D$ δοσμένο. Δηλαδή

$$g := \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_x \Phi_{11}(x, y) \\ T_x \Phi_{21}(x, y) \end{pmatrix}. \quad (5.42)$$

Με την εφαρμογή του τελεστή επιφανειακών τάσεων T υπολογίζονται οι συνιστώσες της g για να επιλύσουμε την εξίσωση

$$\varphi(x(t_k)) - 2 \sum_{j=0}^{2n-1} M(t_k, t_j) \varphi(x(t_j)) = 2((T u^{inc})(x(t_k)) - g(x(t_k))), \quad (5.43)$$

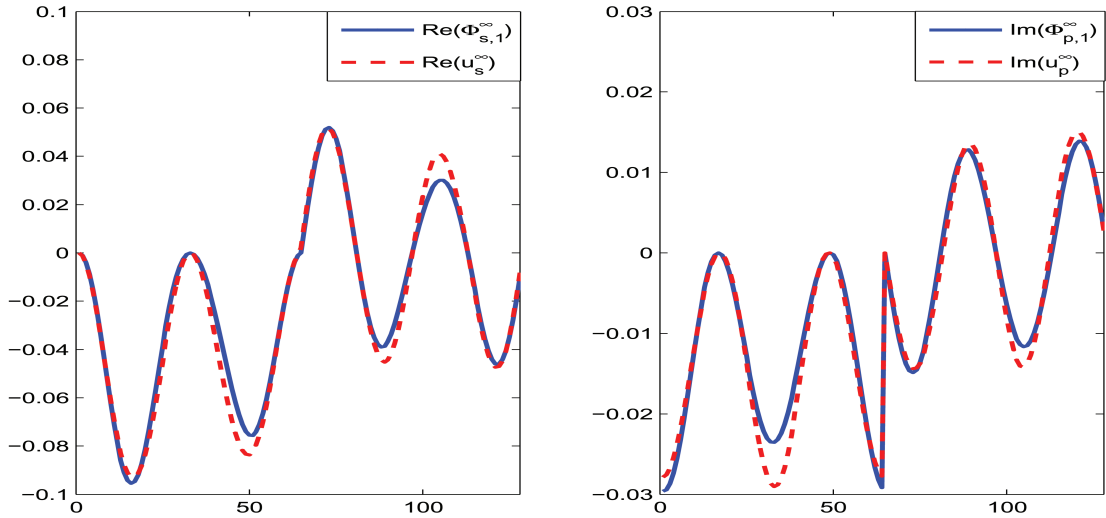
για $k = 0, \dots, 2n - 1$, ως προς την άγνωστη πυκνότητα. Τα πλάτη σκέδασης υπολογίζονται από τον τύπο (5.26).

Όμως η πρώτη στήλη του ταυστή Green αποτελεί λύση του προβλήματος και ικανοποιεί τις νέες συνοριακές συνθήκες. Οπότε λόγω μοναδικότητας επίλυσης των εξωτερικών προβλημάτων θα πρέπει να ταυτίζεται το ζεύγος των πλατών σκέδασης της λύσης με την πρώτη στήλη του ζεύγους των πλατών σκέδασης $\Phi^\infty(\hat{x}, y)$ της σημειακής πηγής, η οποία δίνεται από τους τύπους

$$\Phi_{p,1}^\infty(\hat{x}(t), y) = \gamma_{1,p} e^{-ik_p \hat{x}(t) \cdot y} \begin{pmatrix} \cos^2 t \\ \cos t \sin t \end{pmatrix} \quad (5.44)$$

και

$$\Phi_{s,1}^\infty(\hat{x}(t), y) = \gamma_{1,s} e^{-ik_s \hat{x}(t) \cdot y} \begin{pmatrix} \sin^2 t \\ -\cos t \sin t \end{pmatrix}. \quad (5.45)$$



Σχήμα 5.1: Σύγκριση πλατών σκέδασης για σκληρό σκεδαστή.

Ενδεικτικά παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα για το πρόβλημα με Dirichlet συνοριακή συνθήκη. Το συγκεκριμένο παράδειγμα αφορά τη σκέδαση διαμήκους κύματος u_p^{inc} με γωνία πρόσπτωσης $d = (1, 0)$. Το μέσο D καθορίζεται από τις σταθερές Lamé $\lambda = 4$ και $\mu = 1.5$ και το σύνορο του έχει την ακόλουθη παραμετρικοποιημένη μορφή

$$x(t) = (0.5\cos^2 t + 0.15\sin^2 t)^{\frac{1}{2}} (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi]. \quad (5.46)$$

Η πυκνότητα του μέσου είναι $\rho = 1$. Η κυκλική συχνότητα είναι $\omega = 1.5$ και το σύστημα επιλύθηκε για $n = 32$ κομβικά σημεία με την πηγή να έχει συντεταγμένες $y = (0, 0.5)$. Στο Σχήμα 5.1 συγκρίνουμε τα πραγματικά μέλη των πλατών σκέδασης για τα S -κύματα (αριστερό μέρος) και τα φανταστικά μέλη των πλατών σκέδασης για τα P -κύματα (δεξί μέρος). Η σύγκλιση των δύο είναι αρκετά ικανοποιητική, οπότε ο αλγόριθμος μας παράγει τα σωστά δεδομένα.

5.2 Αντίστροφα προβλήματα

Η μέθοδος συνδιάταξης εφαρμόζεται και για τα συστήματα που προκύπτουν από τα αντίστροφα προβλήματα και η άγνωστη ακτινική συνάρτηση r του παραμετρικοποιημένου

συνόρου προσεγγίζεται μέσω του τριγωνομετρικού πολυωνύμου

$$r(t) \approx \sum_{k=0}^m a_k \cos kt + \sum_{k=1}^m b_k \sin kt, \quad t \in [0, 2\pi]. \quad (5.47)$$

Με εφαρμογή της μεθόδου στα $2n$ ισαπέχοντα σημεία για τα συστήματα που αφορούν σκληρό εμπόδιο και κοιλότητα καταλήγουμε σε ένα $(4n) \times (4n)$ γραμμικό σύστημα με αγνώστους τους $2m + 1$ συντελεστές της προσέγγισης (5.47) για την ακτινική συνάρτηση και τις $2n$ τιμές της πυκνότητας φ . Στην περίπτωση σκέδασης από έγκλεισμα το γραμμικό σύστημα είναι διάστασης $(8n) \times (8n)$ και επιλύεται για τους $2m + 1$ άγνωστους συντελεστές της προσέγγισης (5.47), τις $2n$ τιμές της πυκνότητας φ και τις $2n$ τιμές της πυκνότητας ψ .

Για να ελέγξουμε την ευστάθεια της επαναληπτικής μεθόδου εισάγουμε θόρυβο στα δεδομένα, έστω u , προσθέτοντας διαταραχή με βάση την L^2 νόρμα. Δηλαδή

$$u_\delta = u + \delta \frac{\|u\|_{L^2}}{\|v\|_{L^2}} v, \quad (5.48)$$

όπου $v \in \mathbb{C}$ τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την κανονική κατανομή και το δ εκφράζει το επίπεδο θορύβου. Για την επίλυση των ευθέων προβλημάτων χρησιμοποιούμε διπλάσια σημεία διαμέρισης σε σύγκριση με τα αντίστοιχα αντίστροφα προβλήματα. Στα παρακάτω σχήματα, η αχνή (γαλάζια) διακεκομμένη γραμμή αντιστοιχεί στην αρχική πρόβλεψη για το σύνορο Γ του σκεδαστή, η έντονη (κόκκινη) διακεκομμένη γραμμή αντιστοιχεί στο πραγματικό σύνορο που αναζητούμε και η συνεχής γραμμή (μπλε) αντιπροσωπεύει το ανακατασκευασμένο σύνορο που προκύπτει από την επαναληπτική διαδικασία.

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε την αλγοριθμική μορφή των επαναληπτικών σχημάτων που χρησιμοποιούμε για την επίλυση των συστημάτων των μη γραμμικών ολοκληρωτικών εξισώσεων. Η βελτίωση της ακτινικής συνάρτησης του συνόρου Γ καλείται q και προσεγγίζεται με τριγωνομετρικό πολυώνυμο της μορφής

$$q(t) \approx \sum_{k=0}^m a_k^q \cos kt + \sum_{k=1}^m b_k^q \sin kt, \quad t \in [0, 2\pi]. \quad (5.49)$$

5.2.1 Σκληρό εμπόδιο

Με βάση την παραπάνω ανάλυση για την προσέγγιση των ολοκληρωμάτων οι εξισώσεις μετατρέπονται σε γραμμικά συστήματα. Πιο συγκεκριμένα, για το δυναμικό πρόβλημα, η εξίσωση (4.6) είναι ισοδύναμη με το ακόλουθο γραμμικό σύστημα

$$\frac{\pi}{n} \sum_{j=0}^{2n-1} M_{S^\infty}(t_k, t_j) \varphi_n(t_j) = f_1(t_k), \quad \text{για } k = 0, \dots, 2n-1. \quad (5.50)$$

Η συνάρτηση f_1 είναι τα δεδομένα πλάτη σκέδασης. Το σύστημα σε μορφή πινάκων είναι το ακόλουθο

$$\mathbf{M}_1 \phi = \mathbf{f}_1 \quad (5.51)$$

όπου $\mathbf{M}_1 = \frac{\pi}{n} M_{S^\infty}$. Η γραμμικοποιημένη εξίσωση (4.5)

$$\left(S'(r, \varphi) - w'(r) \right) q = w(r) - S(r, \varphi) \quad (5.52)$$

δέχεται την ακόλουθη μορφή

$$\mathbf{M}_2 q = \mathbf{f}_2, \quad (5.53)$$

όπου

$$\mathbf{M}_2(t_k, t_j) = \frac{\pi}{n} M_{S'}(t_k, t_j) \varphi_n(t_j) - \delta_{kj} b_1(t_k), \quad \text{για } k, j = 0, \dots, 2n-1. \quad (5.54)$$

Η συνάρτηση - στήλη b_1 αντιστοιχεί στην παράγωγο του δεξιού μέλους της (4.5). Με b_2 συμβολίζουμε τη στήλη που αντιστοιχεί στο δεξί μέλος της εξίσωσης (4.5), τότε $\mathbf{f}_2 = b_2 - M_S \varphi$. Τώρα μπορούμε να μετατρέψουμε το επαναληπτικό σχήμα 4.1.2 στην ακόλουθη αλγοριθμική μορφή

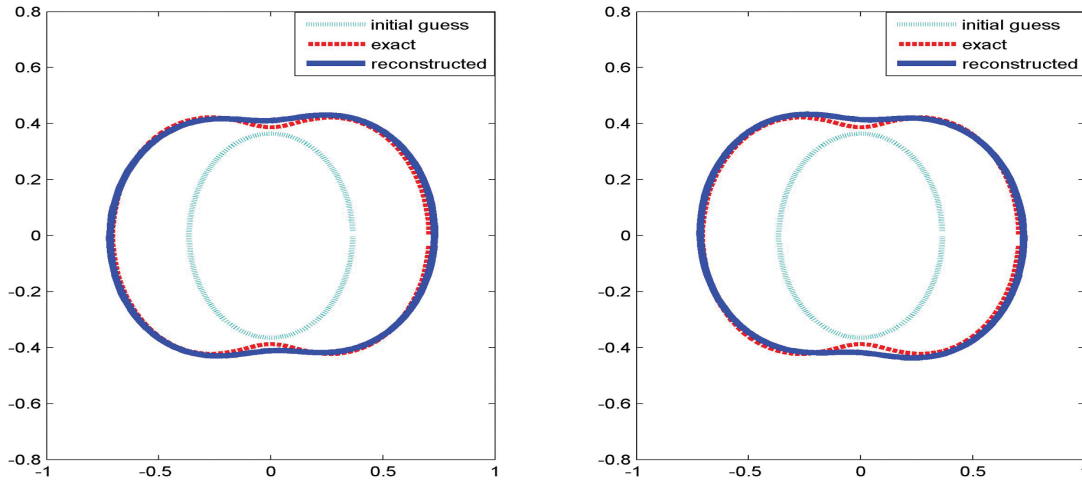
Αλγόριθμος 5.2.1.

(i) Αρχικά δίνουμε μια τιμή στον συντελεστή α_0 του τριγωνομετρικού πολυωνύμου (5.47) και στις παραμέτρους ομαλοποίησης Tikhonov λ_0 και λ_1 .

(ii) Η επαναληπτική διαδικασία ξεκινάει με την επίλυση της εξίσωσης (5.51) με τη μέθοδο ομαλοποίησης Tikhonov. Το σύστημα δέχεται την ακόλουθη μορφή

$$[\mathbf{M}_1^* \mathbf{M}_1 + \lambda_0' I] \varphi_\nu = \mathbf{M}_1^* \mathbf{f}_1 \quad (5.55)$$

και επιλύεται για τις τιμές της πυκνότητας στα κομβικά σημεία t_j .



Σχήμα 5.2: Ανακατασκευή συνόρου σκληρού σχεδαστή, χωρίς θόρυβο (αριστερά) και 5% (δεξιά).

(iii) Η εξίσωση (5.53), με χρήση της μεθόδου Tikhonov, γίνεται

$$[\mathbf{M}_2^* \mathbf{M}_2 + \lambda_1^\nu I_{reg}] q_\nu = \mathbf{M}_2^* \mathbf{f}_2 \quad (5.56)$$

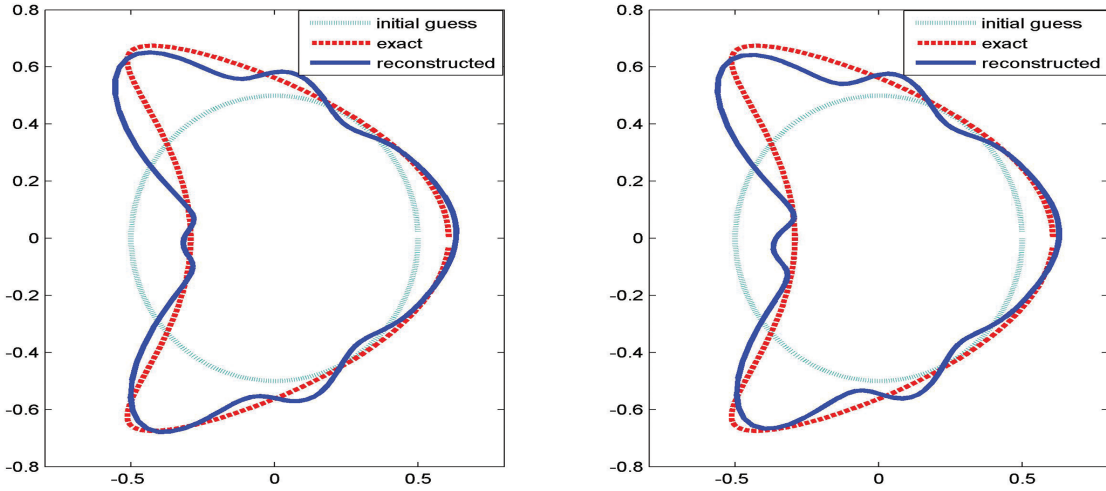
και επιλύεται ως προς το q δεδομένης της πυκνότητας φ . Με I_{reg} συμβολίζουμε τον πίνακα βαρών της μεθόδου ομαλοποίησης.

(iv) Το q προστίθεται στην αρχική πρόβλεψη των συντελεστών της ακτινικής συνάρτησης και η παραπάνω διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι να ικανοποιηθεί το κριτήριο τερματισμού.

Σημείωση 5.2.1. Η αρχική επιλογή του συντελεστή α_0 αντιστοιχεί σε κύκλο ακτίνας α_0 και γίνεται ώστε να ικανοποιείται και η συνθήκη (3.1) που εξασφαλίζει την τοπική μοναδικότητα του αντίστροφου προβλήματος. Οι παράμετροι ομαλοποίησης Tikhonov λ_0 και λ_1 μεταβάλλονται σε κάθε βήμα του αλγορίθμου για καλύτερη σύγκλιση της μεθόδου.

Σημείωση 5.2.2. Το σύστημα (5.56) είναι υπερκαθορισμένο καθώς είναι διάστασης $(4n) \times (4n)$ και επιλύεται για τους $2m + 1$ άγνωστους συντελεστές του q με $m < n$.

Στα ακόλουθα προβλήματα θεωρούμε τη σκέδαση διαμήκους κύματος u_p^{inc} με γωνία πρόσπτωσης $d = (1, 0)$. Το μέσο D καθορίζεται από τις σταθερές Lamé $\lambda = 2.5$ και



Σχήμα 5.3: Ανακατασκευή συνόρου σκληρού σχεδαστή, χωρίς θόρυβο (αριστερά) και 4% (δεξιά).

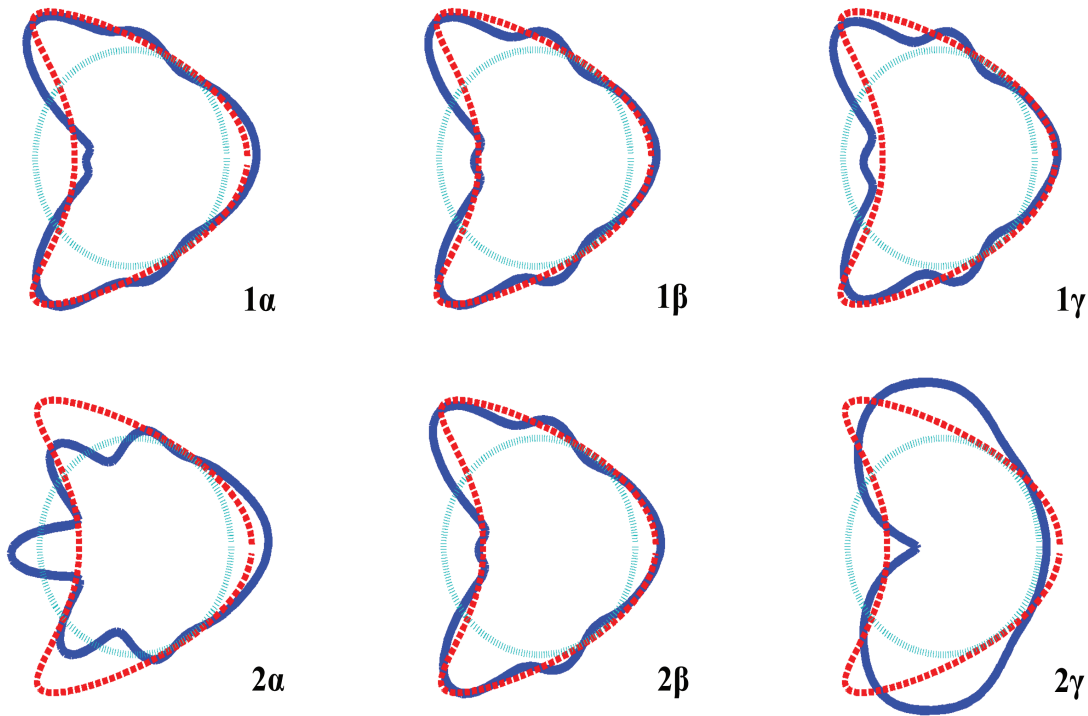
$\mu = 1.5$ και η πυκνότητα του είναι $\rho = 1$. Η σταθερά η που εμφανίζεται στο συνδυασμό των ελαστικών δυναμικών της αναπαράστασης του πεδίου (2.72) για το αντίστοιχο ευθύ πρόβλημα λαμβάνεται ίση με τη μονάδα. Για τις παραμέτρους ομαλοποίησης Tikhonov επιλέγουμε L^2 τάξης σφάλμα για την παράμετρο λ_0 που αντιστοιχεί στην πυκνότητα φ και H^1 τάξης σφάλμα για την παράμετρο λ_1 που αντιστοιχεί στο q . Το πλήθος των κομβικών σημείων είναι $n = 64$ και για τα δύο επόμενα σχήματα.

Στην πρώτη εφαρμογή, το σύνορο του σκληρού σχεδαστή που ανακατασκευάζουμε έχει το σχήμα παραμορφωμένης έλλειψης και η ακτινική συνάρτηση έχει την ακόλουθη παραμετροποιημένη μορφή

$$r(t) = (0.5\cos^2 t + 0.15\sin^2 t)^{\frac{1}{2}}, \quad t \in [0, 2\pi]. \quad (5.57)$$

Η κυκλική συχνότητα είναι $\omega = 1.5$, οπότε οι κυματάριθμοι είναι $k_p \simeq 0.64$ και $k_s \simeq 1.22$. Θεωρούμε $m = 3$ το πλήθος των συντελεστών της προσέγγισης της ακτινικής συνάρτησης. Οι τιμές των παραμέτρων ομαλοποίησης είναι $\lambda_0 = 10^{-3} \cdot 0.8^\nu$ και $\lambda_1 = 10^{-4} \cdot 0.8^\nu$, όπου το $\nu = 0$ αντιστοιχεί στο πρώτο βήμα της μεθόδου και οι τιμές $\nu = 1, 2, \dots$ αντιστοιχούν στα επόμενα βήματα της επαναληπτικής διαδικασίας. Οι ανακατασκευές για τέσσερις επαναλήψεις παρουσιάζονται στο Σχήμα 5.2.

Στη δεύτερη εφαρμογή, το σύνορο του σκληρού σχεδαστή που ανακατασκευάζουμε



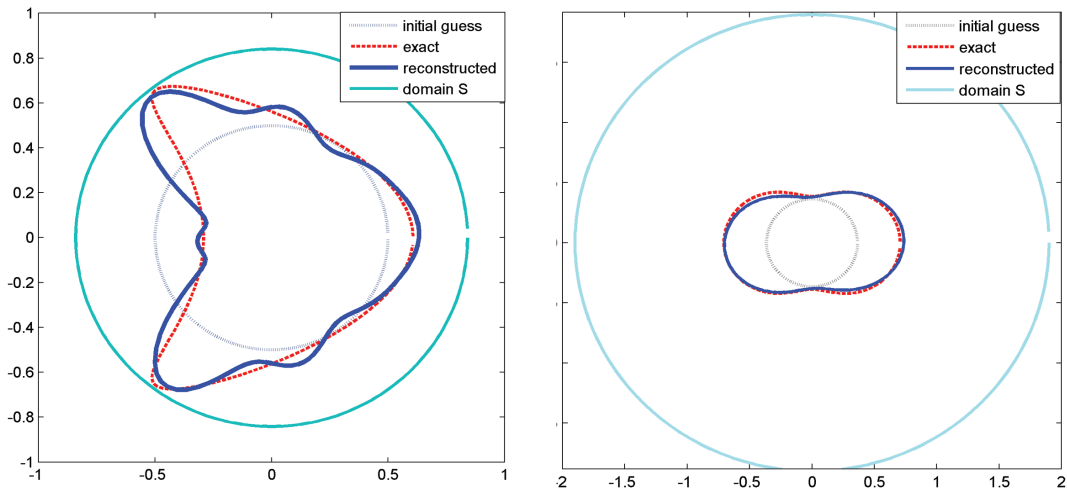
Σχήμα 5.4: Μεταβολή παραμέτρων Lamé : λ (1α) – (1γ) και μ (2α) – (2γ).

έχει το σχήμα “αετού” και δέχεται την ακόλουθη παραμετρικοποίηση

$$x(t) = (0.45 \cos t + 0.3 \cos 2t, 0.7 \sin t), \quad t \in [0, 2\pi]. \quad (5.58)$$

Η κυκλική συχνότητα είναι $\omega = 3.5$ και οι κυματάρημοι για το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι $k_p \simeq 1.49$ και $k_s \simeq 2.85$. Θεωρούμε $m = 9$ το πλήθος των συντελεστών Fourier και οι τιμές των παραμέτρων ομαλοποίησης είναι $\lambda_0 = 10^{-2} \cdot 0.8''$ και $\lambda_1 = 10^{-3} \cdot 0.8''$. Οι ανακατασκευές για έξι επαναλήψεις παρουσιάζονται στο Σχήμα 5.3.

Για να ελέγξουμε πως η ελαστική φύση του προβλήματος επηρεάζει τις ανακατασκευές του συνόρου Γ διατηρούμε στο παραπάνω πρόβλημα όλες τις παραμέτρους σταθερές και μεταβάλλουμε μόνο τις σταθερές Lamé. Αρχικά δίνουμε τις τιμές $\lambda = 2, 2.5, 3$ και οι ανακατασκευές του συνόρου σκληρού σχεδαστή παρουσιάζονται στο Σχήμα 5.4 στις θέσεις (1α) – (1γ) και από τις μεταβολές της σταθεράς $\mu = 1, 1.5, 2$ προκύπτουν οι ανακατασκευές (2α) – (2γ), αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι οι ανακατασκευές του συνόρου δεν επηρεάζονται από την μεταβολή της σταθεράς Lamé λ ενώ αντίθετα η



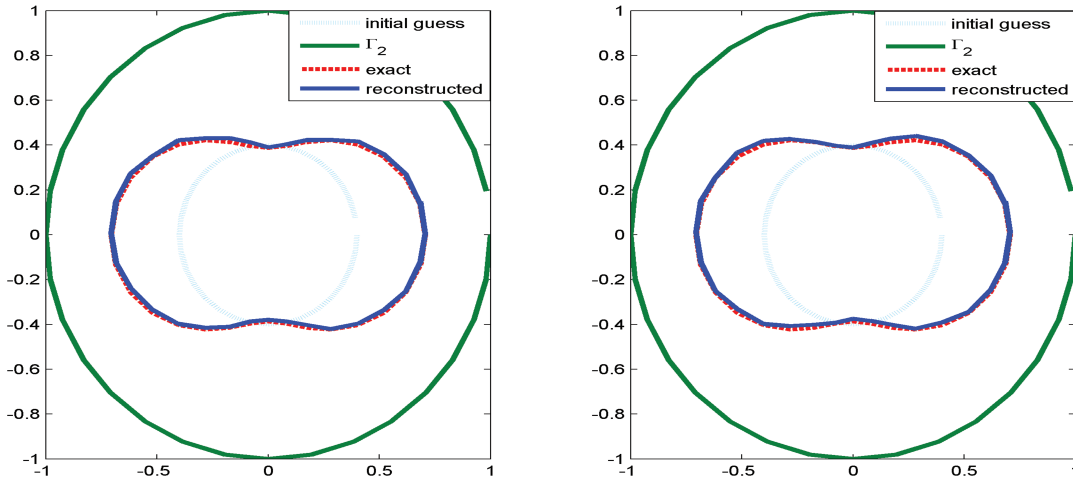
Σχήμα 5.5: Εφαρμογή συνθήκης τοπικής μοναδικότητας.

μεταβολή της σταθεράς μ επιδρά σημαντικά στην ποιότητα των ανακατασκευών.

Αναζητώντας την αιτία για την ευαισθησία του αλγορίθμου από τη μεταβολή της σταθεράς Lamé μ και πως αυτή επηρεάζει την ανακατασκευή του συνόρου εξετάζουμε την ερμηνεία των σταθερών. Από φυσικής άποψης οι δύο σταθερές Lamé αρκούν για την περιγραφή της ελαστικής παραμόρφωσης ενός ισότροπου μέσου αλλά σχετίζονται και με άλλες ελαστικές σταθερές. Η πρώτη σταθερά λ δεν έχει καμία φυσική ερμηνεία και ουσιαστικά συμβάλλει στην απλούστευση του νόμου του Hooke. Αντίθετα, η δεύτερη σταθερά μ σχετίζεται με το μέτρο διάτμησης $\nu = 2\mu$, δηλαδή είναι ένα μέτρο αντίστασης του υλικού στη διάτμηση. Οπότε μεταβολές της σταθεράς μ επιφέρουν διαταραχές στο σύνορο του σχεδαστή και κατά συνέπεια στις προσεγγίσεις του.

Από μαθηματικής πλευράς, η συμπεριφορά των ανακατασκευών δικαιολογείται λόγω της μεγαλύτερης επίδρασης της σταθεράς Lamé μ στους πυρήνες των ολοκληρωτικών τελεστών. Πιο συγκεκριμένα, η σταθερά μ εμφανίζεται και στους δύο κυματάριθμους οπότε η μεταβολή της επηρεάζει περισσότερο τα αποτελέσματα της επαναληπτικής διαδικασίας καθώς είναι ευαίσθητη στις αλλαγές των παραμέτρων του προβλήματος.

Για τη μοναδική επιλυσιμότητα του αντίστροφου προβλήματος σκέδασης από σκληρό



Σχήμα 5.6: Ανακατασκευή συνόρου σκληρού εμποδίου, χωρίς θόρυβο (αριστερά) και 6% (δεξιά).

σχεδιαστή αρκεί να ισχύει η συνθήκη τοπικής μοναδικότητας (3.1). Θεωρούμε το σύνολο χωρίων \mathcal{S} να είναι κύκλοι με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα R . Από τη συνθήκη (3.1) προκύπτει η ακόλουθη ανισότητα για την ακτίνα R

$$R < \frac{\sqrt{\mu} k_{01}}{\sqrt{\rho\omega}}. \quad (5.59)$$

Η παραπάνω συνθήκη ικανοποιείται και στις δύο εφαρμογές. Πιο συγκεκριμένα, οι επιλεγμένοι παράμετροι στην πρώτη εφαρμογή, σχεδιαστής σχήματος παραμορφωμένης έλλειψης, δίνουν $R < 0.84$ και για τη δεύτερη εφαρμογή ισχύει $R < 1.96$. Γραφικά το χωρίο \mathcal{S} και στις δύο περιπτώσεις απεικονίζεται στο Σχήμα 5.5.

Για το σύστημα που προκύπτει από το στατικό πρόβλημα εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο 5.2.1. Οι πίνακες \mathbf{M}_1 , \mathbf{M}_2 και τα δεξιά μέλη \mathbf{f}_1 , \mathbf{f}_2 προκύπτουν με ανάλογη ανάλυση. Για τα αριθμητικά αποτελέσματα, το μέσο D καθορίζεται από τις σταθερές Lamé $\lambda = 2$ και $\mu = 1$. Η συνοριακή συνάρτηση f δίνεται από

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{για } t \in [0, \pi) \\ \sin(2t), & \text{για } t \in [\pi, 2\pi]. \end{cases} \quad (5.60)$$

Το πλήθος των κομβικών σημείων είναι $n = 16$ και $m = 9$ το πλήθος των συντελεστών της προσέγγισης της ακτινικής συνάρτησης. Οι παράμετροι ομαλοποίησης

είναι $\lambda_0 = 10^{-1} \cdot 0.8^\nu$ και $\lambda_1 = 10^{-2} \cdot 0.8^\nu$. Οι ανακατασκευές του συνόρου της παραμορφωμένης έλλειψης με ακτινική συνάρτηση (5.57) για δέκα επαναλήψεις παρουσιάζονται στο Σχήμα 5.6.

5.2.2 Κοιλότητα

Για την επίλυση του συστήματος που αντιστοιχεί στο αντίστροφο πρόβλημα για κοιλότητα, Neumann συνοριακές συνθήκες, η διαδικασία που ακολουθείται είναι παρόμοια. Για το δυναμικό πρόβλημα, η εξίσωση (4.31) είναι ισοδύναμη με το ακόλουθο γραμμικό σύστημα

$$\sum_{j=0}^{2n-1} M_L(t_k, t_j) \varphi_n(t_j) = f(t_k), \text{ για } k = 0, \dots, 2n - 1. \quad (5.61)$$

Ο πίνακας M_L έχει αναλυθεί στο αντίστοιχο ευθύ πρόβλημα, η συνάρτηση $f(t_k) = |x'(t_k)|w(t_k)$ και το w δίνεται από τον τύπο (3.55). Η γραμμικοποιημένη εξίσωση (4.32)

$$\mathcal{D}^{\infty'}(r, \varphi)q = w^\infty - \mathcal{D}^\infty(r, \varphi) \quad (5.62)$$

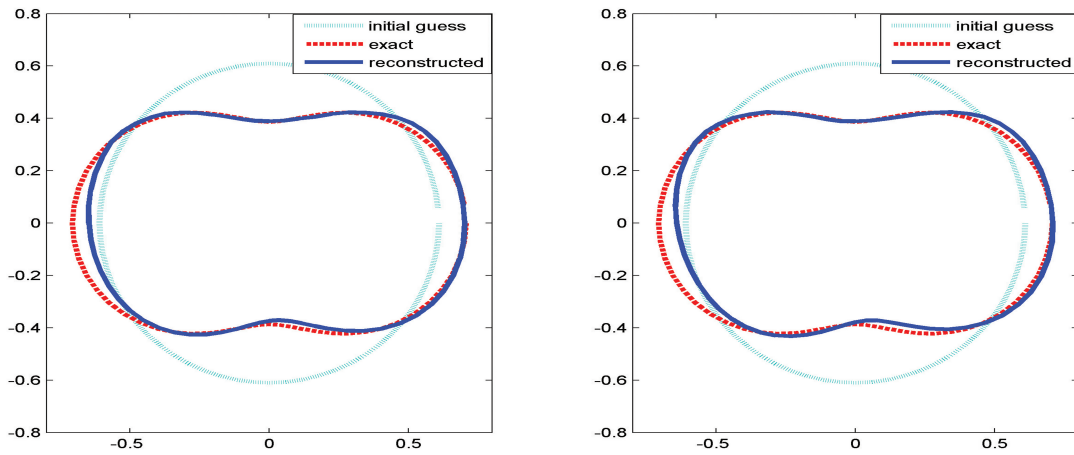
σε μορφή πινάκων είναι

$$\mathbf{N}q = \mathbf{g}, \quad (5.63)$$

όπου ο πίνακας \mathbf{N} αντιστοιχεί στον συνεχή πυρήνα της παραγώγου του \mathcal{D}^∞ (4.34) και το δεξί μέλος $\mathbf{g} = b_3 - M_{\mathcal{D}^\infty} \varphi$. Με b_3 συμβολίζουμε τη συνάρτηση - στήλη που αντιστοιχεί στο δεξί μέλος της εξίσωσης (4.33). Η αλγοριθμική μορφή του επαναληπτικού σχήματος 4.2.1 είναι η ακόλουθη

Αλγόριθμος 5.2.2.

- (i) Αρχικά δίνουμε μια τιμή στον συντελεστή α_0 του τριγωνομετρικού πολυωνύμου (5.47) και στις παραμέτρους ομαλοποίησης Tikhonov λ_0 και λ_1 .
- (ii) Στη συνέχεια, επιλύουμε το σύστημα (5.61) για να προκύψουν οι τιμές της πυκνότητας στα κομβικά σημεία t_j .



Σχήμα 5.7: Ανακατασκευή συνόρου κοιλότητας (δυναμικό), χωρίς θόρυβο (αριστερά) και 6% (δεξιά).

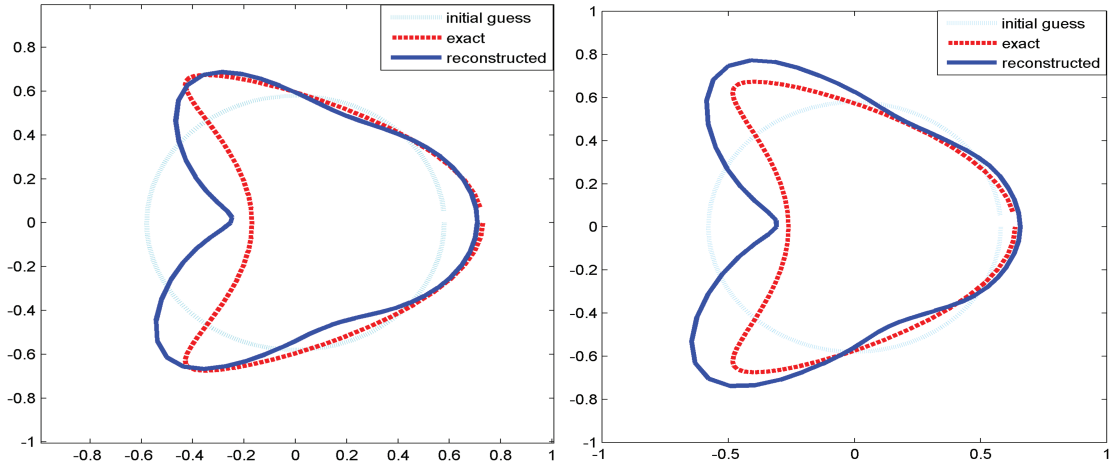
(iii) Δεδομένης της πυκνότητας φ , επιλύουμε την εξίσωση (5.63) με τη μέθοδο ομαλοποίησης Tikhonov

$$[\mathbf{N}^*\mathbf{N} + \lambda_1^{\nu} I_{reg}] q_{\nu} = \mathbf{N}^* \mathbf{g} \quad (5.64)$$

για να προκύψουν οι $2m + 1$ συντελεστές της προσέγγισης του q .

(iv) Το q προστίθεται στην αρχική πρόβλεψη των συντελεστών της ακτινικής συνάρτησης και η παραπάνω διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι να ικανοποιηθεί το κριτήριο τερματισμού.

Για τα αριθμητικά αποτελέσματα θεωρούμε τη σκέδαση εγκάρσιου κύματος u_s^{inc} με γωνία πρόσπτωσης $d = (1, 0)$ για το πρώτο παράδειγμα και $d = (0, 1)$ για το δεύτερο. Η κατεύθυνση του προσπίπτοντος κύματος και η γωνία πρόσπτωσης άλλαξε για να ελέγξουμε την αποτελεσματικότητα της μεθόδου. Το μέσο D έχει πυκνότητα $\rho = 1$ και η σταθερά η λαμβάνεται ίση με τη μονάδα. Για τις παραμέτρους ομαλοποίησης Tikhonov επιλέγουμε L^2 τάξης σφάλμα για την παράμετρο λ_0 που αντιστοιχεί στη πυκνότητα φ και H^1 τάξης σφάλμα για την παράμετρο λ_1 που αντιστοιχεί στο q . Οι παραμετροποιημένες μορφές των συνόρων παραμένουν ίδιες με τα αντίστοιχα αντίστροφα προβλήματα για σκληρό σκεδαστή.



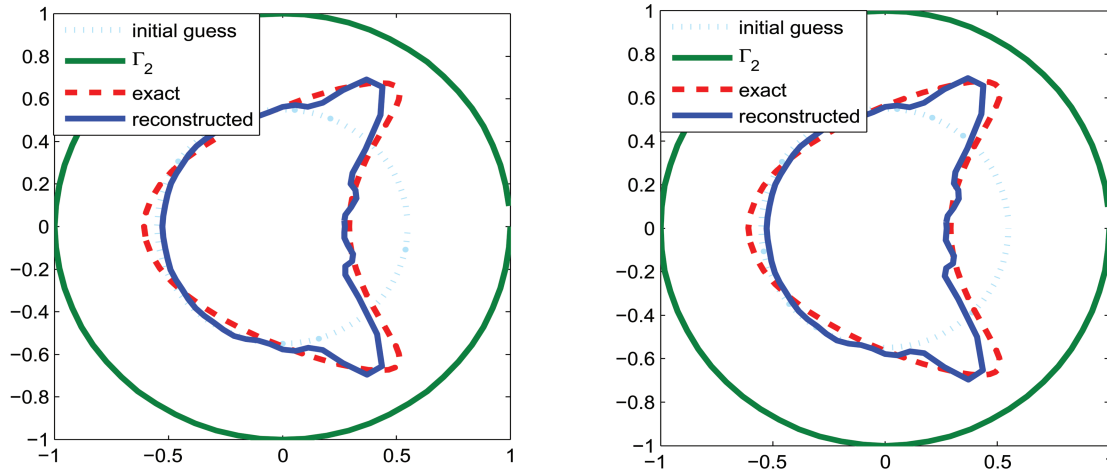
Σχήμα 5.8: Ανακατασκευή συνόρου κοιλότητας (δυναμικό), χωρίς θόρυβο (αριστερά) και 4% (δεξιά).

Στο πρώτο παράδειγμα, σύνορο με παραμετροποίηση (5.57), το χωρίο D καθορίζεται από τις σταθερές Lamé $\mu = 1.5$ και $\lambda = 4$. Η συχνότητα είναι $\omega = 5$ οπότε οι κυματάρθρωμοι έχουν τιμές $k_p \simeq 1.88$, $k_s \simeq 4.08$. Επιλέγουμε $n = 32$ ισαπέχοντα σημεία και $m = 4$ συντελεστές για την προσέγγιση της ακτινικής συνάρτησης. Στο Σχήμα 5.7 παρουσιάζονται οι ανακατασκευές για οκτώ επαναλήψεις της μεθόδου, ενώ οι παράμετροι ομαλοποίησης είναι $\lambda_0 = 10 \cdot 0.8^\nu$ και $\lambda_1 = 10^2 \cdot 0.8^\nu$.

Στο δεύτερο παράδειγμα, το σύνορο της κοιλότητας που ανακατασκευάζουμε έχει το σχήμα “αετού” και δέχεται την παραμετροποίηση (5.58). Η κυκλική συχνότητα είναι $\omega = 2$ και οι κυματάρθρωμοι $k_p \simeq 0.78$ και $k_s = \sqrt{2}$. Το πλήθος των συντελεστών Fourier είναι $m = 9$ και οι παράμετροι ομαλοποίησης λαμβάνονται ως $\lambda_0 = 10 \cdot 0.7^\nu$ και $\lambda_1 = 10^2 \cdot 0.7^\nu$. Οι ανακατασκευές για οκτώ επαναλήψεις παρουσιάζονται στο Σχήμα 5.8.

Για το στατικό πρόβλημα, η αλγοριθμική ανάλυση του συστήματος των ολοκληρωτικών εξισώσεων παραλείπεται καθώς βασίζεται στην ανάλυση που έχει προηγηθεί για το δυναμικό πρόβλημα. Το άγνωστο σύνορό έχει το σχήμα “αετού” με παραμετροποίηση

$$x(t) = -(0.22 \cos t + 0.15 \cos 2t, 0.35 \sin t), \quad t \in [0, 2\pi]. \quad (5.65)$$



Σχήμα 5.9: Ανακατασκευή συνόρου κοιλότητας (στατικό), χωρίς θόρυβο (αριστερά) και 5% (δεξιά).

Επιλέγουμε $n = 32$ ισαπέχοντα σημεία και οι σταθερές Lamé είναι $\mu = 2$ και $\lambda = 1$. Το πλήθος των συντελεστών του q είναι $m = 9$ και οι παράμετροι ομαλοποίησης λαμβάνονται ως $\lambda_0 = 10^{-1} \cdot 0.8^\nu$ και $\lambda_1 = 10^{-2} \cdot 0.8^\nu$. Η συνοριακή συνάρτηση g λαμβάνεται ως

$$g(t) = \begin{cases} 0, & \text{για } t \in [0, \pi) \\ 1, & \text{για } t \in [\pi, 2\pi]. \end{cases} \quad (5.66)$$

Οι ανακατασκευές για δώδεκα επαναλήψεις παρουσιάζονται στο Σχήμα 5.9.

5.2.3 Έγκλεισμα

Αντίστοιχα με τα δύο προηγούμενα συστήματα των ολοκληρωτικών εξισώσεων μετατρέπουμε το σύστημα (4.39) στο ισοδύναμο του γραμμικό σύστημα, το οποίο έχει την ακόλουθη γενική τελεστική μορφή

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \mathbf{b} \quad (5.67)$$

όπου

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \text{ και } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}. \quad (5.68)$$

Οι πίνακες A_{kj} είναι $(2n) \times (2n)$ διάστασης, οι b_k είναι $(2n) \times 1$ διάστασης και δίνονται από τους τύπους

$$A_{11}(t_k, t_j) = \frac{\delta_{kj}}{|x'(t_k)|} + M_{K_i}(t_k, t_j) - M_{K_e}(t_k, t_j), \quad (5.69)$$

$$A_{12}(t_k, t_j) = M_{S_e}(t_k, t_j) - M_{S_i}(t_k, t_j), \quad (5.70)$$

$$A_{21}(t_k, t_j) = \tau_i M_{L_i}(t_k, t_j) - \tau_e M_{L_e}(t_k, t_j), \quad (5.71)$$

$$A_{22}(t_k, t_j) = \frac{\tau_i + \tau_e}{2} \frac{\delta_{kj}}{|x'(t_k)|} + \tau_e M_{K_e^*}(t_k, t_j) - \tau_i M_{K_i^*}(t_k, t_j) \quad (5.72)$$

και

$$b_1(t_k) = \mathcal{C}_1(t_k), \quad b_2(t_k) = \mathcal{C}_2(t_k). \quad (5.73)$$

Η αριθμητική επίλυση των παραπάνω ολοκληρωμάτων έχει ήδη αναλυθεί στα δύο προηγούμενα προβλήματα. Με βάση τα παραπάνω το σύστημα (5.67) καταλήγει στο ακόλουθο γραμμικό σύστημα

$$\sum_{j=0}^{2n-1} \{A_{m,1}(t_k, t_j)\varphi_n(t_j) + A_{m,2}(t_k, t_j)\psi_n(t_j)\} = b_m(t_k), \quad (5.74)$$

για $k = 0, \dots, 2n - 1$, $m = 1, 2$. Η γραμμικοποιημένη εξίσωση (4.40)

$$\left(\mathcal{A}'_3(r, \varphi) + \mathcal{B}'_3(r, \psi) \right) q = \mathcal{C}_3(\hat{x}) - \mathcal{A}_3(r, \varphi) - \mathcal{B}_3(r, \psi) \quad (5.75)$$

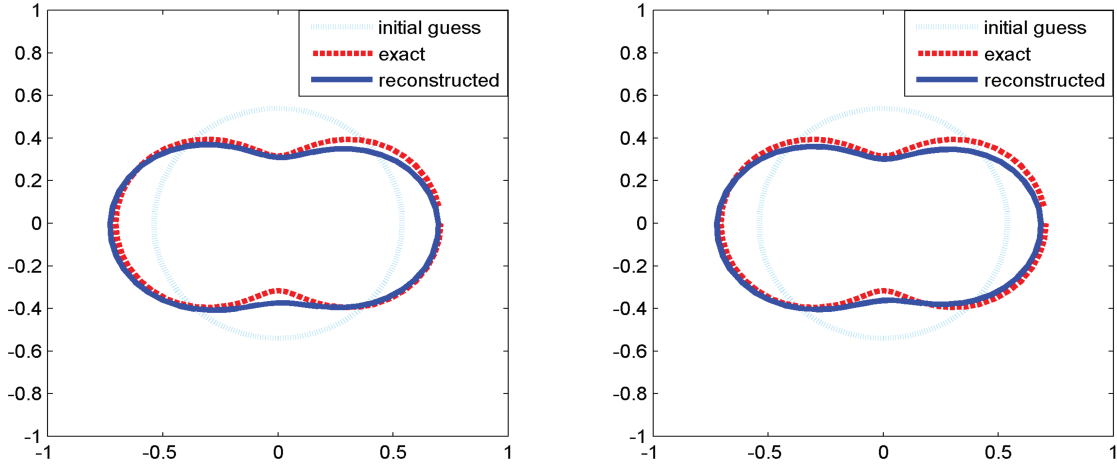
δέχεται την ακόλουθη μορφή

$$\mathbf{F}q = \mathbf{f}_3. \quad (5.76)$$

Στην παραπάνω εξίσωση όλοι οι πυρήνες των ολοκληρωμάτων αντιστοιχούν σε συνεχείς συναρτήσεις οπότε εφαρμόζουμε τον τραπεζοειδή κανόνα (5.8). Για το αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης από έγκλεισμα το σύστημα των μη γραμμικών ολοκληρωτικών εξισώσεων επιλύεται μέσω της επαναληπτικής διαδικασίας (4.3.1). Η αλγοριθμική μορφή του επαναληπτικού σχήματος παρουσιάζεται παρακάτω

Αλγόριθμος 5.2.3.

- (i) Αρχικά δίνουμε μια τιμή στον συντελεστή α_0 του τριγωνομετρικού πολυωνύμου (5.47) και στις παραμέτρους ομαλοποίησης Tikhonov λ_0 και λ_1 .



Σχήμα 5.10: Ανακατασκευή συνόρου εγκλείσματος, χωρίς θόρυβο (αριστερά) και 6% (δεξιά).

(ii) Με εφαρμογή της μεθόδου Tikhonov το σύστημα (5.67) δέχεται τη μορφή

$$[\mathbf{A}^* \mathbf{A} + \lambda_0^\nu \mathbf{I}] \begin{bmatrix} \varphi_\nu \\ \psi_\nu \end{bmatrix} = \mathbf{A}^* \mathbf{b} \quad (5.77)$$

και επιλύεται ως προς τις άγνωστες πυκνότητες στα κομβικά σημεία t_j .

(iii) Με γνωστές τις τιμές των πυκνοτήτων επιλύουμε την εξίσωση (5.76) ως προς το q και με τη μέθοδο Tikhonov για να προκύψει

$$[\mathbf{F}^* \mathbf{F} + \lambda_1^\nu \mathbf{I}_{reg}] q_\nu = \mathbf{F}^* \mathbf{f}_3. \quad (5.78)$$

(iv) Το q προστίθεται στην αρχική πρόβλεψη των συντελεστών της ακτινικής συνάρτησης και η παραπάνω διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι να ικανοποιηθεί το κριτήριο τερματισμού.

Στην ακόλουθη εφαρμογή θεωρούμε τη σκέδαση διαμήκους κύματος u_p^{inc} με γωνία πρόσπτωσης $d = (1, 0)$. Το εξωτερικό χωρίο D_e καθορίζεται από τις σταθερές Lamé $\lambda_e = 3$ και $\mu_e = 10$ και η πυκνότητα είναι $\rho_e = 1.1$. Αντίστοιχα, το εσωτερικό χωρίο D_i καθορίζεται από τις σταθερές Lamé $\lambda_i = 9.5$ και $\mu_i = 5$ και πυκνότητα $\rho_i = 2$. Για τις παραμέτρους ομαλοποίησης Tikhonov επιλέγουμε L^2 τάξης σφάλμα για την

παράμετρο λ_0 που αντιστοιχεί στις πυκνότητες φ και ψ και H^1 τάξης σφάλμα για την παράμετρο λ_1 που αντιστοιχεί στο q . Το πλήθος των κομβικών σημείων είναι $n = 32$.

Το σύνορο του εγκλείσματος έχει το σχήμα παραμορφωμένης έλλειψης και η ακτινική συνάρτηση έχει την ακόλουθη παραμετρικοποιημένη μορφή

$$r(t) = (0.5\cos^2 t + 0.1\sin^2 t)^{\frac{1}{2}}, \quad t \in [0, 2\pi]. \quad (5.79)$$

Η κυκλική συχνότητα είναι $\omega = 10$, επομένως οι κυματάρθρωμοι είναι $k_{p,e} \simeq 2.18$, $k_{s,e} \simeq 3.31$ και $k_{p,i} \simeq 3.2$, $k_{s,i} \simeq 6.32$. Θεωρούμε $m = 3$ το πλήθος των συντελεστών της προσέγγισης της ακτινικής συνάρτησης. Οι τιμές των παραμέτρων ομαλοποίησης είναι $\lambda_0 = 10 \cdot 0.7^\nu$ και $\lambda_1 = 10^2 \cdot 0.3^\nu$. Οι ανακατασκευές για τρεις επαναλήψεις παρουσιάζονται στο Σχήμα 5.10.

Σημείωση 5.2.3. Οι εξισώσεις (5.56), (5.64) και (5.78) που επιλύονται για να προκύψει η βελτίωση q της ακτινικής συνάρτησης για τις τρεις περιπτώσεις σκεδαστών, αντίστοιχα, μπορούν να παρασταθούν σε μία μορφή ως

$$\mathcal{A}q = \mathcal{B}. \quad (5.80)$$

Η παραπάνω εξίσωση παρουσιάζει την ακόλουθη ιδιαιτερότητα. Ο πίνακας \mathcal{A} και το δεξί μέλος μπορεί να είναι μιγαδικής μορφής ενώ το q πρέπει να είναι πραγματικός αριθμός. Οπότε για την αριθμητική επίλυση τροποποιούμε την παραπάνω εξίσωση ως εξής

$$[\operatorname{Re}(\mathcal{A}) \operatorname{Im}(\mathcal{A})]q = [\operatorname{Re}(\mathcal{B}) \operatorname{Im}(\mathcal{B})]. \quad (5.81)$$

Κεφάλαιο 6

Συμπεράσματα και προοπτικές για μελλοντική έρευνα

Σ' αυτή τη διατριβή εξετάσαμε το αντίστροφο πρόβλημα για την εύρεση της θέσης και του σχήματος εμποδίων στη δυναμική και στατική γραμμική ελαστικότητα. Το πρόβλημα επιλύθηκε για τρεις περιπτώσεις εμποδίων, σκληρό (άκαμπτο), κοιλότητα και έγκλεισμα σε δισδιάστατο ισότροπο και ομογενές ελαστικό μέσο. Για την αντιμετώπιση των αντίστροφων προβλημάτων ήταν αναγκαία η γνώση των πλατών σκέδασης του σχεδιαζόμενου πεδίου (δυναμικό πρόβλημα) και των συνοριακών τιμών (στατικό). Για αυτό τον λόγο αρχικά επιλύσαμε τα τρία αντίστοιχα ευθέα προβλήματα. Τα ευθέα προβλήματα αντιστοιχούν στην επίλυση ολοκληρωτικών εξισώσεων και η μοναδικότητα επίλυσης τους έχει αποδειχθεί σε προγενέστερες εργασίες.

Τα αντίστροφα προβλήματα επιλύθηκαν με τη μέθοδο των μη γραμμικών ολοκληρωτικών εξισώσεων. Αποδείχθηκε η ισοδυναμία των αντίστροφων προβλημάτων με τα μη γραμμικά συστήματα των εξισώσεων και παρουσιάστηκαν τόσο θεωρητικά όσο και αριθμητικά αποτελέσματα. Η παραπάνω μέθοδος οδήγησε σε ικανοποιητικές ανακατασκευές. Σχετίζεται με μεθόδους τύπου Newton, που εξασφαλίζουν σύγκλιση και παρέχουν αποτελέσματα για σχετικά λίγες επαναλήψεις. Τα βασικά πλεονεκτήματα της μεθόδου είναι ότι σε κάθε βήμα της επαναληπτικής διαδικασίας δεν χρειάζεται η επίλυση του αντίστοιχου ευθέος προβλήματος και η χρήση Fréchet παραγώγων αντιστοιχεί σε

ολοκληρωτικούς τελεστές και όχι σε επίλυση προβλημάτων συνοριακών τιμών.

Όσον αφορά στη θεωρητική έρευνα των συγκεκριμένων προβλημάτων ανοικτό ερώτημα παραμένει η μοναδική επιλυσιμότητα των αντίστροφων προβλημάτων σκέδασης. Παρόλο που για το αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης από σκληρό σκεδαστή παρουσιάσαμε ένα αποτέλεσμα που εξασφαλίζει τοπική μοναδικότητα, η γενίκευση του και για τις άλλες δύο περιπτώσεις σκεδαστών δεν ισχύει.

Η μελλοντική έρευνα θα επικεντρωθεί στην βελτίωση και την περαιτέρω μελέτη των αριθμητικών αποτελεσμάτων. Πιο συγκεκριμένα, ενδιαφέρον παρουσιάζει η σύγκριση της κανονικοποιημένης μεθόδου Newton και για την περίπτωση σκέδασης από έγκλεισμα καθώς και ο πλήρης προσδιορισμός των συνοριακών συνθηκών των ισοδύναμων προβλημάτων για την ταύτιση της Fréchet παραγώγου με τα πλάτη σκέδασης των λύσεων τους. Μελλοντική προοπτική θα ήταν και ο έλεγχος της ευστάθειας των ανακατασκευών για λιγότερη πληροφορία, δηλαδή αν αρκεί η γνώση ενός εκ' των δύο διαμήκων ή εγκάρσιων κυμάτων από το ζεύγος των πλατών σκέδασης (δυναμικό πρόβλημα) ή η γνώση των συνοριακών δεδομένων σε τμήμα του συνόρου (στατικό πρόβλημα) ώστε να προκύψει συγκλίνον επαναληπτικό σχήμα.

Σημαντική και ενδιαφέρουσα είναι η επέκταση της μεθόδου και σε άλλα ελαστικά μέσα. Όπως είναι τα ανισότροπα ή τα μη ομογενή μέσα καθώς και η μεταφορά των προβλημάτων στον \mathbb{R}^3 . Η διαδικασία εισαγωγής θορύβου μπορεί επίσης να δώσει πληροφορίες για την ευστάθεια του αλγορίθμου. Πέραν από τα πλάτη σκέδασης, ενδιαφέρον θα παρουσίαζε και η εισαγωγή θορύβου στα δεδομένα (αντίστοιχες πυκνότητες) που προκύπτουν από το πρώτο βήμα της επαναληπτικής διαδικασίας.

Τέλος, σημαντική εξέλιξη θα ήταν η επαλήθευση των αριθμητικών αποτελεσμάτων με αντίστοιχα φυσικά πειραματικά δεδομένα ώστε να υπάρχει σύγκριση του μαθηματικού μοντέλου με πραγματικά στοιχεία.

Βιβλιογραφία

- [1] J. F. Ahner and G. C. Hsiao, On the two-dimensional exterior boundary-value problems of elasticity, *SIAM J. Appl. Math.* **31**, 677–685 (1976).
- [2] C. J. S. Alves, R. Kress and A. L. Silvestre, Integral equations for an inverse boundary value problem for the two-dimensional Stokes equations, *J. Inv. Ill-Posed Problems* **15**, 461–481 (2007).
- [3] S. Andrieux and A. Ben Abda, The reciprocity gap: a general concept for flaws identification problems, *Mech. Res. Commun.* **20**, 415–420 (1993).
- [4] T. Arens, The scattering of elastic waves by rough surfaces, *Ph. D. thesis, Brunel University* (2000).
- [5] T. Arens, Linear sampling methods for 2D inverse elastic wave scattering, *Inverse Problems* **17**, 1445–1464 (2001).
- [6] M. Bonnet and A. Constantinescu, Inverse problems in elasticity, *Inverse Problems* **21**, R1–R50 (2005).
- [7] F. Cakoni and D. Colton, *Qualitative Methods in Inverse Scattering Theory*, Springer, Berlin 2006.
- [8] F. Cakoni, R. Kress and C. Schuft, Integral equations for shape and impedance reconstruction in corrosion detection, *Inverse Problems* **26**, 24 (2010).

- [9] R. Chapko, On the numerical solution of a boundary value problem in the plane elasticity for a double-connected domain, *Mathematics and Computers in Simulation* **66**, 425–438 (2004).
- [10] R. Chapko, R. Kress and L. Monch, On the numerical solution of a hypersingular integral equation for elastic scattering from a planar crack, *J. Numer. Anal.* **20(4)**, 601–619 (2000).
- [11] A. Charalambopoulos, On the Fréchet differentiability of boundary integral operators in the inverse elastic scattering problem, *Inverse problems* **11**, 1137–1161 (1995).
- [12] A. Charalambopoulos, D. Gintides and K. Kiriaki, The linear sampling method for the transmission problem in three-dimensional linear elasticity, *Inverse Problems* **12**, 547–558 (2002).
- [13] A. Charalambopoulos, D. Gintides and K. Kiriaki, The linear sampling method for non-absorbing penetrable elastic bodies, *Inverse Problems* **19(3)**, 549–561 (2003).
- [14] A. Charalambopoulos, A. Kirsch, K. A. Anagnostopoulos, D. Gintides and K. Kiriaki, The factorization method in inverse elastic scattering from penetrable bodies, *Inverse problems* **23**, 27–51 (2007).
- [15] D. Colton and A. Kirsch, A simple method for solving inverse scattering problems in the resonance region, *Inverse Problems* **12(4)**, 383–393 (1996).
- [16] D. Colton and R. Kress, *Integral equation method in scattering theory*, John Wiley & Sons Inc., New York 1983.
- [17] D. Colton and R. Kress, *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory*, second ed., vol. 93, Springer-Verlag, Berlin 1998.
- [18] D. Colton and B. D. Sleeman, Uniqueness theorems for the inverse problem of acoustic scattering, *IMA J. Appl. Math.* **31(3)**, 253–259 (1983).

-
- [19] G. Dassios and R. Kleinman, *Low Frequency Scattering*, Oxford Mathematical Monographs, 2000.
- [20] G. Dassios and Z. Rigou, On the density of traction traces in scattering of elastic waves, *SIAM J. Appl. Math.* **53**, 141–153 (1993).
- [21] H. Eckel and R. Kress, Nonlinear integral equations for the inverse electrical impedance problem, *Inverse Problems* **23(2)**, 475–491 (2007).
- [22] H. Eckel and R. Kress, Non-linear integral equations for the complete electrode model in inverse impedance tomography, *Applicable Analysis* **87(10&11)**, 1267–1288 (2008).
- [23] D. Gintides, Local uniqueness for the inverse scattering problem in acoustics via the Faber Krahn inequality, *Inverse Problems* **17**, 1445–1464 (2005).
- [24] D. Gintides, Inverse boundary value problems in linear elasticity, In: International Conference on Inverse Scattering Problems, Italy 2008.
- [25] D. Gintides and K. Kiriaki, The far-field equations in linear elasticity - an inversion scheme, *J. of Appl. Math. and Mech. (ZAMM)* **81(5)**, 305–316 (2001).
- [26] D. Gintides and L. Midrinos, Inverse scattering problem for a rigid scatterer or a cavity in elastodynamics, *J. of Appl. Math. and Mech. (ZAMM)* **91(4)**, 276–287 (2011).
- [27] D. Gintides and L. Midrinos, The inverse scattering problem in linear elasticity for few incident waves using nonlinear integral equations, *Proceedings Book of the Fifth International Conference on Inverse Problems, Control and Shape Optimization*, 167–173 (2010).
- [28] D. Gintides and L. Midrinos, The inverse scattering problem in linear elasticity via a pair of non linear integral equations, *Advanced Topics in Scattering and Biomedical Engineering*, 12–19 (2010).

- [29] P. Hähner, A uniqueness theorem for a transmission problem in inverse electromagnetic scattering, *Inverse Problems* **9**, 667–678 (1993).
- [30] P. Hähner and G. Hsiao, Uniqueness theorems in inverse obstacle scattering of elastic waves, *Inverse Problems* **9**, 525–534 (1993).
- [31] A. Henrot, *Extremum problems for eigenvalues of elliptic operators*, Birkhäuser Verlag, Basel 2006.
- [32] F. Hettlich, Fréchet derivatives in inverse obstacle scattering, *Inverse Problems* **11**, 371–382 (1995).
- [33] T. Hohage, Logarithmic convergence rates of the iteratively regularized Gauss-Newton method for an inverse potential and an inverse scattering problem, *Inverse Problems* **13**, 1279–1299 (1997).
- [34] T. Hohage, Convergence rates of a regularized Newton method in sound-hard inverse scattering, *SIAM J. Numer. Anal.* **36(1)**, 125–142 (1998).
- [35] T. Hohage and C. Schormann, A Newton-type method for a transmission problem in inverse scattering, *Inverse Problems* **14**, 1207–1227 (1998).
- [36] M. Ikehata, Reconstruction of an obstacle from the scattering amplitude at a fixed frequency, *Inverse Problems* **14(4)**, 949–954 (1998).
- [37] V. Isakov, On uniqueness in the inverse transmission scattering problem, *Commun. Part. Diff. Eq.* **15**, 1565–1587 (1990).
- [38] O. Ivanyshyn and R. Kress, Inverse scattering for planar cracks via nonlinear integral equations, *Math. Meth. Appl. Sciences* **31(10)**, 1221–1232 (2008).
- [39] O. Ivanyshyn and R. Kress, Nonlinear integral equations for solving inverse boundary value problems for inclusions and cracks, *Jour. Integral Equations and Appl.*, **18**, 13–38 (2006).

-
- [40] Q. Jin and U. Tautenhahn, On the discrepancy principle for some Newton type methods for solving nonlinear inverse problems, *Numer. Math.* **111**, 509–558 (2009).
- [41] T. Johansson and B. D. Sleeman, Reconstruction of an acoustically sound-soft obstacle from one incident field and the far field pattern, *IMA J. of Appl. Math.* **72(1)**, 96–112 (2007).
- [42] J. Jost, *Post Modern Analysis*, 3rd ed., Springer, 2005.
- [43] B. Kawohl, Remarks on eigenvalues and eigenfunctions of a special elliptic system, *J. of Appl. Math. and Phys. (ZAMP)* **38**, 730–740 (1987).
- [44] K. Kiriaki, A uniquely solvable integral equation for the neumann problem in linear elasticity, *Applicable Analysis* **73(3&4)**, 379–392 (1999).
- [45] K. Kiriaki and V. Sevroglou, On Herglotz functions in two dimensional linear elasticity, *Scattering Theory and Biomedical Technology Modelling and Applications*, 151–158 (1999).
- [46] A. Kirsch, Characterization of the shape of a scattering obstacle using the spectral of the far field operator, *Inverse Problems* **14(6)**, 1489–1512 (1998).
- [47] A. Kirsch and R. Kress, On an integral equation of the first kind in inverse acoustic scattering, *Inverse Problems* (Cannon and Hornung, eds.), ISNM **77**, 93–102 (1986).
- [48] A. Kirsch and R. Kress, A numerical method for an inverse scattering problem, *Inverse Problems* (Engl and Groetsch, eds.), Academic Press, 279–290 (1987).
- [49] A. Kirsch and R. Kress, Uniqueness in inverse obstacle scattering, *Inverse Problems* **9**, 285–299 (1993).
- [50] R. Kress, On the numerical solution of a hypersingular integral equation in scattering theory, *J. Comput. Appl. Math.* **61**, 345–360 (1995).

- [51] R. Kress, Inverse elastic scattering from a crack, *Inverse Problems* **12**, 667–684 (1996).
- [52] R. Kress, Integral equation methods in inverse acoustic and electromagnetic scattering, *Boundary integral formulations for inverse analysis*, Adv. Bound. Elem. Ser. Comput. Mech., 67–92 (1997).
- [53] R. Kress, *Linear Integral Equations*, Springer-Verlag, New York 1998.
- [54] R. Kress, *Numerical Analysis*, Springer-Verlag, New York 1998.
- [55] R. Kress, Newton’s method for inverse obstacle scattering meets the method of least squares, *Inverse Problems* **19**, 91–104 (2003).
- [56] R. Kress and W. Rundell, Nonlinear integral equations and the iterative solution for an inverse boundary value problem, *Inverse Problems* **21**, 1207–1223 (2005).
- [57] R. Kress and P. Serranho, A hybrid method for two-dimensional crack reconstruction, *Inverse Problems* **21(2)**, 773–784 (2005).
- [58] R. Kress and P. Serranho, A hybrid method for sound-hard obstacle reconstruction, *J. Comput. Appl. Math.* **204(2)**, 418–427 (2007).
- [59] V. D. Kupradze, *Potential methods in the theory of elasticity*, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem 1965.
- [60] V. D. Kupradze, *Three-Dimensional problems of the mathematical theory of elasticity and thermoelasticity*, North-Holland Publishing Co., New York 1979.
- [61] G. S. Litvinchuk, *Solvability theory of boundary value problems and singular integral equations with Shift*, Springer-Verlag, 2000.
- [62] P. A. Martin, On the scattering of elastic waves by an elastic inclusion in two dimensions, *Quart. J. Mech. and Appl. Math.* **43(3)**, 275–291 (1990).

-
- [63] W. Mclean, *Strongly elliptic systems and boundary integral equations*, Cambridge University Press, Cambridge 2000.
- [64] R. Potthast, Fréchet differentiability of boundary integral operators in inverse acoustic scattering, *Inverse Problems* **10(2)**, 431–447 (1994).
- [65] R. Potthast, Fréchet differentiability of the solution to the acoustic Neumann scattering problem with respect to the domain, *J. Inverse Ill-Posed Problems* **4(1)**, 67–84 (1996).
- [66] R. Potthast, On the convergence of a new Newton-type method in inverse scattering, *Inverse Problems* **17**, 1419–1434 (2001).
- [67] W. Rundell, Recovering an obstacle using integral equations, *Inverse Problems and Imaging* **3(2)**, 319–332 (2009).
- [68] P. Serranho, A hybrid method for inverse scattering for shape and impedance, *Inverse Problems* **22(2)**, 663–680 (2006).
- [69] P. Serranho, A hybrid method for inverse scattering for Sound-soft obstacles in R^3 , *Inverse Problems and Imaging* **1(4)**, 691–712 (2007).
- [70] V. Sevroglou and G. Pelekanos, Two-dimensional elastic herglotz functions and their applications in inverse scattering, *Journal of Elasticity* **68(1-3)**, 123–144 (2002).

Παράρτημα Α'

Υπολογισμός πυρήνων ολοκληρωτικών τελεστών

Α'.1 Τελεστής ($S\varphi$)

Λόγω της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς των συναρτήσεων Hankel προκύπτει ότι ο ταυνοστής Green εμφανίζει λογαριθμική ιδιομορφία. Η παραμετροποιημένη μορφή του ολοκληρωτικού τελεστή $S : [L^2[0, 2\pi]]^2 \rightarrow [L^2[0, 2\pi]]^2$ (3.52) είναι η ακόλουθη

$$(S\varphi)(t) = \int_0^{2\pi} \{\Phi_1(t, \tau)I + \Phi_2(t, \tau)J(x(t) - x(\tau))\} \varphi(\tau) d\tau, \quad t \in [0, 2\pi]. \quad (A'.1)$$

Οι συναρτήσεις $\Phi_k(t, \tau) := \Phi_k(|x(t) - x(\tau)|)$ για $k = 1, 2$ δίνονται από τους τύπους (2.30) και (2.31). Ο πυρήνας του τελεστή που προκύπτει από το ελαστικό δυναμικό καλείται ασθενώς ιδιόμορφος λόγω της λογαριθμικής ιδιομορφίας των συναρτήσεων $\Phi_k(t, \tau)$ για $t = \tau$. Στο εξής με r συμβολίζουμε $r := |x(t) - x(\tau)|$. Οπότε για την αριθμητική μεταχείριση του πυρήνα, διασπάμε τις συναρτήσεις ως εξής

$$\Phi_k(r) = \frac{1}{2\pi} M_k^1(r) \ln \left(4 \sin^2 \frac{t - \tau}{2} \right) + M_k^2(r), \quad \text{για } k = 1, 2 \quad (A'.2)$$

όπου οι συναρτήσεις $M_k^j(t, \tau)$ για $k, j = 1, 2$ δίνονται από τους τύπους

$$M_1^1(r) = -\frac{1}{4\mu} J_0(k_s r) + \frac{1}{4\rho\omega^2 r} (k_s J_1(k_s r) - k_p J_1(k_p r)), \quad (A'.3)$$

$$M_1^2(r) = \Phi_1(r) - \frac{1}{2\pi} M_1^1(r) \ln \left(4 \sin^2 \frac{t - \tau}{2} \right), \quad (A'.4)$$

$$M_2^1(r) = -\frac{1}{4\rho\omega^2} \left(\frac{2k_s}{r} J_1(k_s r) - k_s^2 J_0(k_s r) - \frac{2k_p}{r} J_1(k_p r) + k_p^2 J_0(k_p r) \right), \quad (\text{A'.5})$$

$$M_2^2(r) = \Phi_2(r) - \frac{1}{2\pi} M_2^1(r) \ln \left(4 \sin^2 \frac{t - \tau}{2} \right). \quad (\text{A'.6})$$

Στις παραπάνω μορφές εμφανίζονται οι συναρτήσεις Bessel J_0 και J_1 . Από την ανάλυση των συναρτήσεων Bessel και Hankel όπως παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο 2 προκύπτει ότι οι συναρτήσεις M_k^j είναι άρτιες και αναλυτικές στο \mathbb{R} . Πιο συγκεκριμένα, μπορούμε να εκφράσουμε τους διαγώνιους όρους ($r \rightarrow 0$) ως εξής

$$M_1^1(0) = -\frac{1}{8\rho\omega^2} (k_s^2 + k_p^2) + O(r^2), \quad (\text{A'.7})$$

$$M_1^2(0) = -\frac{1}{4\pi\rho\omega^2} \left[k_s^2 \ln \frac{k_s}{2} + k_p^2 \ln \frac{k_p}{2} + \frac{1}{2} (k_s^2 - k_p^2) + \left(C_E - \frac{i\pi}{2} \right) (k_s^2 + k_p^2) \right], \quad (\text{A'.8})$$

$$M_2^1(0) = 0, \quad (\text{A'.9})$$

$$M_2^2(0) = \frac{1}{4\pi\rho\omega^2} (k_s^2 - k_p^2). \quad (\text{A'.10})$$

Με βάση την παραπάνω ανάλυση ο ολοκληρωτικός τελεστής S δέχεται την ακόλουθη μορφή

$$(S\varphi)(t) = \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{2\pi} M_1(t, \tau) \ln \left(4 \sin^2 \frac{t - \tau}{2} \right) + M_2(t, \tau) \right\} \varphi(\tau) d\tau, \quad t \in [0, 2\pi] \quad (\text{A'.11})$$

με τις συνεχείς συναρτήσεις M_j να δίνονται από τους τύπους

$$M_j(t, \tau) = M_1^j(t, \tau)I + M_2^j(t, \tau)J(x(t) - x(\tau)), \quad \text{για } j = 1, 2. \quad (\text{A'.12})$$

Αντίστοιχη ανάλυση δέχεται και ο τελεστής S_0 του στατικού προβλήματος.

A'.2 Τελεστής ($K\varphi$)

Για τον υπολογισμό του πυρήνα $[T_{x(\tau)}\Phi(x(t), x(\tau))]^T$ του τελεστή που προκύπτει από το ελαστικό δυναμικό διπλού στρώματος ακολουθούμε τη μέθοδο που παρουσιάστηκε στην εργασία [10] και αφορούσε την ελαστική σκέδαση από επίπεδη ρωγμή. Όμοια υπολογίζεται και ο πυρήνας $T_{x(t)}\Phi$ του πεδίου των τάσεων $(TS\varphi)(t)$. Επίσης αυτή

η μέθοδος υπολογισμού του πυρήνα αξιοποιείται και στη μεταχείριση της ισχυρής ιδιομορφίας που παρουσιάζει ο τελεστής των τάσεων του ελαστικού δυναμικού διπλού στρώματος.

Ο πυρήνας του τελεστή που προκύπτει από το στατικό δυναμικό διπλού στρώματος είναι

$$\begin{aligned} [T_{x(\tau)}\Phi_0(t, \tau)]^T &= \frac{1}{2\pi(\lambda + 2\mu)} \left[(\mu I + 2(\lambda + \mu)J(x(t) - x(\tau))) \frac{\partial \Psi(t, \tau)}{\partial \eta_{x(\tau)}} \right. \\ &\quad \left. + \mu Q \frac{\partial \Psi(t, \tau)}{\partial \theta_{x(\tau)}} \right]^T, \end{aligned} \quad (A'.13)$$

όπου θ είναι το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα στο σύνορο Γ . Με βάση τα παραπάνω κάνουμε την ακόλουθη ανάλυση του πυρήνα για τη περίπτωση της δυναμικής ελαστικότητας

$$[T_{x(\tau)}\Phi(t, \tau)]^T = [T_{x(\tau)}\{\Phi(t, \tau) - \Phi_0(t, \tau)\}]^T + [T_{x(\tau)}\Phi_0(t, \tau)]^T. \quad (A'.14)$$

Θεωρούμε ως $N(t, \tau)$ τον πρώτο πυρήνα στο δεξί μέλος της παραπάνω ισότητας, ο οποίος έχει την ακόλουθη μορφή

$$N(t, \tau) = \Phi_1^{(1)}(r)U_1(\tau, t)^T + \Phi_2^{(1)}(r)J(x(t) - x(\tau))U_1(\tau, t)^T + \Phi_2^{(0)}(r)U_2(\tau, t)^T. \quad (A'.15)$$

Οι συναρτήσεις $\Phi_1^{(1)}$, $\Phi_2^{(1)}$ και $\Phi_2^{(0)}$ είναι οι εξής

$$\begin{aligned} \Phi_1^{(1)}(r) &= -\frac{ik_s^3}{4\rho\omega^2r}H_1^{(1)}(k_s r) - \frac{i}{4\rho\omega^2} \left\{ \frac{1}{r^2} \left[k_s^2 H_0^{(1)}(k_s r) - k_p^2 H_0^{(1)}(k_p r) \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{r^3} \left[k_s H_1^{(1)}(k_s r) - k_p H_1^{(1)}(k_p r) \right] \right\} + \frac{\lambda + 3\mu}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)r^2}, \end{aligned} \quad (A'.16)$$

$$\begin{aligned} \Phi_2^{(1)}(r) &= \frac{i}{4\rho\omega^2r} \left\{ k_s^3 H_1^{(1)}(k_s r) - k_p^3 H_1^{(1)}(k_p r) + \frac{2}{r} \left[k_s^2 H_0^{(1)}(k_s r) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - k_p^2 H_0^{(1)}(k_p r) \right] - \frac{4}{r^2} \left[k_s H_1^{(1)}(k_s r) - k_p H_1^{(1)}(k_p r) \right] \right\} \end{aligned} \quad (A'.17)$$

και

$$\Phi_2^{(0)}(r) = \frac{\Phi_2(r)}{r^2} - \frac{\lambda + \mu}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)r^2}. \quad (A'.18)$$

Λόγω της λογαριθμικής ιδιομορφίας των συναρτήσεων Hankel οι παραπάνω συναρτήσεις δέχονται ανάλογη ανάλυση με τις αντίστοιχες συναρτήσεις που εμφανίζονται στον

πυρήνα του ελαστικού δυναμικού απλού στρώματος. Αναλυτικά προκύπτουν οι ακόλουθες μορφές

$$\Phi_1^{(1)}(r) = \frac{1}{2\pi} \Phi_{1,1}^{(1)}(r) \ln \left(4 \sin^2 \frac{t-\tau}{2} \right) + \Phi_{2,1}^{(1)}(r) \quad (\text{A'.19})$$

$$\Phi_2^{(1)}(r) = \frac{1}{2\pi} \Phi_{1,2}^{(1)}(r) \ln \left(4 \sin^2 \frac{t-\tau}{2} \right) + \Phi_{2,2}^{(1)}(r) \quad (\text{A'.20})$$

$$\Phi_2^{(0)}(r) = \frac{1}{2\pi} \Phi_{1,2}^{(0)}(r) \ln \left(4 \sin^2 \frac{t-\tau}{2} \right) + \Phi_{2,2}^{(0)}(r) \quad (\text{A'.21})$$

όπου

$$\begin{aligned} \Phi_{1,1}^{(1)}(r) = & \frac{k_s^3}{4\rho\omega^2 r} J_1(k_s r) + \frac{1}{4\rho\omega^2} \left\{ \frac{1}{r^2} [k_s^2 J_0(k_s r) - k_p^2 J_0(k_p r)] \right. \\ & \left. - \frac{2}{r^3} [k_s J_1(k_s r) - k_p J_1(k_p r)] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A'.22})$$

$$\begin{aligned} \Phi_{1,2}^{(1)}(r) = & -\frac{1}{4\rho\omega^2 r} \left\{ k_s^3 J_1(k_s r) - k_p^3 J_1(k_p r) + \frac{2}{r} [k_s^2 J_0(k_s r) \right. \\ & \left. - k_p^2 J_0(k_p r)] - \frac{4}{r^2} [k_s J_1(k_s r) - k_p J_1(k_p r)] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A'.23})$$

$$\Phi_{1,2}^{(0)}(r) = -\frac{1}{4\rho\omega^2 r^2} \left[\frac{2k_s}{r} J_1(k_s r) - k_s^2 J_0(k_s r) - \frac{2k_p}{r} J_1(k_p r) + k_p^2 J_0(k_p r) \right] \quad (\text{A'.24})$$

και

$$\Phi_{2,1}^{(1)}(r) = \Phi_1^{(1)}(r) - \frac{1}{2\pi} \Phi_{1,1}^{(1)}(r) \ln \left(4 \sin^2 \frac{t-\tau}{2} \right), \quad (\text{A'.25})$$

$$\Phi_{2,2}^{(1)}(r) = \Phi_2^{(1)}(r) - \frac{1}{2\pi} \Phi_{1,2}^{(1)}(r) \ln \left(4 \sin^2 \frac{t-\tau}{2} \right), \quad (\text{A'.26})$$

$$\Phi_{2,2}^{(0)}(r) = \Phi_2^{(0)}(r) - \frac{1}{2\pi} \Phi_{1,2}^{(0)}(r) \ln \left(4 \sin^2 \frac{t-\tau}{2} \right). \quad (\text{A'.27})$$

Οι παραπάνω συναρτήσεις είναι συνεχείς στο \mathbb{R} και κάνοντας χρήση των σειρών Taylor καταλήγουμε ότι για $r \rightarrow 0$ ισχύουν

$$\Phi_{1,j}^{(1)}(0) = a_j \quad \text{για } j = 1, 2 \quad (\text{A'.28})$$

$$\Phi_{1,2}^{(0)}(0) = \frac{1}{2} a_2, \quad (\text{A'.29})$$

$$\Phi_{2,j}^{(1)}(0) = \frac{1}{\pi} a_j + 2b_j \quad \text{για } j = 1, 2 \quad (\text{A'.30})$$

και

$$\Phi_{2,2}^{(0)}(0) = b_2, \quad (\text{A'.31})$$

όπου

$$a_1 = \frac{1}{32\rho\omega^2} (3k_s^4 + k_p^4), \quad (\text{A'.32})$$

$$a_2 = \frac{1}{16\rho\omega^2} (k_p^4 - k_s^4), \quad (\text{A'.33})$$

$$b_1 = \frac{1}{32\pi\rho\omega^2} \left[3k_s^4 \ln \frac{k_s}{2} + k_p^4 \ln \frac{k_p}{2} - \frac{11}{4}k_s^4 - \frac{5}{4}k_p^4 + \left(C_E - \frac{i\pi}{2} \right) (3k_s^4 + k_p^4) \right] \quad (\text{A'.34})$$

και

$$b_2 = -\frac{1}{16\pi\rho\omega^2} \left[k_s^4 \ln \frac{k_s}{2} - k_p^4 \ln \frac{k_p}{2} + \left(C_E - \frac{3}{4} - \frac{i\pi}{2} \right) (k_s^4 - k_p^4) \right]. \quad (\text{A'.35})$$

Οι πίνακες U_1 και U_2 είναι οι ακόλουθοι

$$\begin{aligned} U_1(t, \tau) &= \lambda\nu(x(t))(x(t) - x(\tau))^T + \mu(x(t) - x(\tau))\nu(x(t))^T \\ &\quad + \mu\nu(x(t)) \cdot (x(t) - x(\tau))I, \end{aligned} \quad (\text{A'.36})$$

$$\begin{aligned} U_2(t, \tau) &= (\lambda + 2\mu)\nu(x(t))(x(t) - x(\tau))^T + \mu(x(t) - x(\tau))\nu(x(t))^T \\ &\quad + \mu\nu(x(t)) \cdot (x(t) - x(\tau)) [I - 4J(x(t) - x(\tau))]. \end{aligned} \quad (\text{A'.37})$$

Όσον αφορά τον δεύτερο πυρήνα στο δεξί μέλος της ισότητας (A'.14) λόγω της μορφής του (A'.13) εμφανίζονται οι εξής όροι

$$\frac{\partial \Psi(t, \tau)}{\partial \eta_{x(\tau)}} = \frac{Qx'(\tau) \cdot (x(t) - x(\tau))}{|x'(\tau)| |x(t) - x(\tau)|^2}, \quad (\text{A'.38})$$

$$\frac{\partial \Psi(t, \tau)}{\partial \theta_{x(\tau)}} = \frac{x'(\tau) \cdot (x(t) - x(\tau))}{|x'(\tau)| |x(t) - x(\tau)|^2}. \quad (\text{A'.39})$$

Οπότε ο πυρήνας δέχεται την ακόλουθη μορφή

$$\begin{aligned} [T_{x(\tau)}\Phi_0(t, \tau)]^T &= \frac{1}{2\pi(\lambda + 2\mu)|x'(\tau)|} [(\mu I + 2(\lambda + \mu)J(x(t) - x(\tau)))N_1(t, \tau) \\ &\quad + \mu QN_2(t, \tau)]^T, \end{aligned} \quad (\text{A'.40})$$

και οι συναρτήσεις

$$N_1(t, \tau) = \frac{Qx'(\tau) \cdot (x(t) - x(\tau))}{|x(t) - x(\tau)|^2}, \quad (\text{A'.41})$$

$$N_2(t, \tau) = \frac{x'(\tau) \cdot (x(t) - x(\tau))}{|x(t) - x(\tau)|^2}. \quad (A'.42)$$

Η συνάρτηση N_1 που προκύπτει από τη μερική παράγωγος της Ψ ως προς το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα (A'.38) είναι συνεχής και για $t = \tau$ έχει τη μορφή

$$\frac{Qx'(t) \cdot x''(t)}{2|x'(t)|^2}. \quad (A'.43)$$

Αντίθετα η συνάρτηση N_2 παρουσιάζει ιδιομορφία της τάξης

$$\frac{1}{t - \tau} \text{ καθώς το } t \rightarrow \tau. \quad (A'.44)$$

Για να απαλείψουμε αυτή την ιδιομορφία προσθαφαιρούμε τον όρο $\frac{1}{2} \cot\left(\frac{\tau-t}{2}\right)$ που εμφανίζει την ίδια ομοιομορφία και καταλήγουμε στην ακόλουθη μορφή του πυρήνα για το στατικό πρόβλημα

$$\begin{aligned} [T_{x(\tau)}\Phi_0(t, \tau)]^T &= \frac{1}{2\pi(\lambda + 2\mu)|x'(\tau)|} [(\mu I + 2(\lambda + \mu)J(x(t) - x(\tau)))N_1(t, \tau) \\ &+ \mu Q \left(\frac{1}{2} \cot\left(\frac{\tau-t}{2}\right) + N_3(t, \tau) \right)]^T, \end{aligned} \quad (A'.45)$$

όπου

$$N_3(t, \tau) = N_2(t, \tau) - \frac{1}{2} \cot\frac{\tau-t}{2} \quad (A'.46)$$

είναι συνεχής συνάρτηση με διαγώνια μορφή

$$-\frac{x'(t) \cdot x''(t)}{2|x'(t)|^2}. \quad (A'.47)$$

Με βάση την παραπάνω ανάλυση ο ολοκληρωτικός τελεστής K δέχεται την ακόλουθη μορφή

$$\begin{aligned} (K\varphi)(t) &= \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{2\pi} K_1(t, \tau) \ln\left(4 \sin^2 \frac{t-\tau}{2}\right) + K_2(t, \tau) \right. \\ &\left. + \frac{c_0}{2\pi|x'(\tau)|} Q^T \cot\left(\frac{\tau-t}{2}\right) + K_3(t, \tau) \right\} \varphi(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (A'.48)$$

με $c_0 = \mu/(2\lambda + 4\mu)$. Οι συναρτήσεις K_1 και K_2 προκύπτουν από το δυναμικό μέρος του πυρήνα και η K_3 από το στατικό.

A'.3 Τελεστής τάσης ($L\varphi$)

Ο υπολογισμός του πυρήνα του τελεστή

$$(L\varphi)(t) = \int_0^{2\pi} T_{x(t)} [T_{x(\tau)} \Phi(x(t), x(\tau))]^T \varphi(\tau) d\tau, \quad t \in [0, 2\pi] \quad (A'.49)$$

παρουσιάζεται αναλυτικά στην εργασία [10] και βασίζεται στην ανάλυση που έχει προηγηθεί για τον πυρήνα του ελαστικού δυναμικού διπλού στρώματος ($D\varphi$). Από την εφαρμογή του τελεστή τάσεων $T_{x(t)}$ στο πυρήνα του τελεστή ($K\varphi$) προκύπτει ισχυρά ιδιόμορφος τελεστής. Η ισχυρή ιδιομορφία οφείλεται στον όρο που προκύπτει από το στατικό πρόβλημα ενώ ο όρος

$$P(t, \tau) := T_{x(t)} [T_{x(\tau)} \{\Phi(t, \tau) - \Phi_0(t, \tau)\}]^T \quad (A'.50)$$

παρουσιάζει λογαριθμική ιδιομορφία και αντιμετωπίζεται αντίστοιχα με τον ταυστή Green. Η αναλυτική του μορφή είναι

$$P(t, \tau) := \sum_{j=1}^2 \sum_{k=0}^2 \Phi_j^{(k)}(r) W_j^{(k)}(t, \tau) \quad (A'.51)$$

όπου οι πίνακες $W_j^{(k)} \in C^\infty(\Gamma) \times C^\infty(\Gamma)$ είναι οι

$$W_1^{(0)}(t, \tau) = 0, \quad (A'.52)$$

$$W_1^{(2)}(t, \tau) = \frac{1}{r^2} U_1(t, \tau) U_1(\tau, t)^T, \quad (A'.53)$$

$$W_1^{(1)}(t, \tau) = T_{x(t)} [U_1(\tau, t)^T] - W_1^{(2)}(t, \tau), \quad (A'.54)$$

$$W_2^{(0)}(t, \tau) = T_{x(t)} [U_2(\tau, t)^T] - \frac{2}{r^2} U_1(t, \tau) U_2(\tau, t)^T, \quad (A'.55)$$

$$W_2^{(2)}(t, \tau) = \frac{1}{r^2} U_1(t, \tau) J(x(t) - x(\tau)) U_1(\tau, t)^T, \quad (A'.56)$$

$$W_2^{(1)}(t, \tau) = T_{x(t)} [J(x(t) - x(\tau)) U_1(\tau, t)^T] - W_2^{(2)}(t, \tau) + \frac{1}{r^2} U_1(t, \tau) U_2(\tau, t)^T. \quad (A'.57)$$

Για τις συναρτήσεις $\Phi_j^{(k)}$ ισχύουν οι σχέσεις

$$\Phi_j^{(0)}(r) := \frac{1}{r^2} \Phi_j(r), \quad \Phi_j^{(1)}(r) := \frac{1}{r} \Phi_j'(r), \quad \Phi_j^{(2)}(r) := \Phi_j''(r), \quad \text{για } j = 1, 2 \quad (A'.58)$$

και προκύπτουν οι μορφές

$$\begin{aligned} \Phi_1^{(1)}(r) = & -\frac{ik_s^3}{4\rho\omega^2r}H_1^{(1)}(k_sr) - \frac{i}{4\rho\omega^2} \left\{ \frac{1}{r^2} [k_s^2H_0^{(1)}(k_sr) - k_p^2H_0^{(1)}(k_pr)] \right. \\ & \left. - \frac{2}{r^3} [k_sH_1^{(1)}(k_sr) - k_pH_1^{(1)}(k_pr)] \right\} + \frac{\lambda + 3\mu}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)r^2} \end{aligned} \quad (A'.59)$$

$$\begin{aligned} \Phi_2^{(1)}(r) = & \frac{i}{4\rho\omega^2r} \left\{ k_s^3H_1^{(1)}(k_sr) - k_p^3H_1^{(1)}(k_pr) + \frac{2}{r} [k_s^2H_0^{(1)}(k_sr) - k_p^2H_0^{(1)}(k_pr)] \right. \\ & \left. - \frac{4}{r^2} [k_sH_1^{(1)}(k_sr) - k_pH_1^{(1)}(k_pr)] \right\} \end{aligned} \quad (A'.60)$$

$$\begin{aligned} \Phi_1^{(2)}(r) = & -\frac{ik_s^4}{4\rho\omega^2}H_0^{(1)}(k_sr) + \frac{i}{4\rho\omega^2} \left\{ \frac{1}{r} [2k_s^3H_1^{(1)}(k_sr) - k_p^3H_1^{(1)}(k_pr)] \right. \\ & \left. + \frac{3}{r^2} [k_s^2H_0^{(1)}(k_sr) - k_p^2H_0^{(1)}(k_pr)] - \frac{6}{r^3} [k_sH_1^{(1)}(k_sr) - k_pH_1^{(1)}(k_pr)] \right\} \\ & - \frac{\lambda + 3\mu}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)r^2} \end{aligned} \quad (A'.61)$$

$$\begin{aligned} \Phi_2^{(2)}(r) = & \frac{i}{4\rho\omega^2} \left\{ k_s^4H_0^{(1)}(k_sr) - k_p^4H_0^{(1)}(k_pr) - \frac{3}{r} [k_s^3H_1^{(1)}(k_sr) - k_p^3H_1^{(1)}(k_pr)] \right. \\ & \left. - \frac{6}{r^2} [k_s^2H_0^{(1)}(k_sr) - k_p^2H_0^{(1)}(k_pr)] + \frac{12}{r^3} [k_sH_1^{(1)}(k_sr) - k_pH_1^{(1)}(k_pr)] \right\} \end{aligned} \quad (A'.62)$$

Λόγω της λογαριθμικής ιδιομορφίας οι συναρτήσεις δέχονται την ακόλουθη ανάλυση

$$\Phi_j^{(k)}(t, \tau) = \frac{1}{2\pi} \Phi_{j,1}^{(k)}(t, \tau) \ln \left(4 \sin^2 \frac{t - \tau}{2} \right) + \Phi_{j,2}^{(k)}(t, \tau), \quad (A'.63)$$

για $j = 1, 2$ και $k = 0, 1, 2$, όπου

$$\begin{aligned} \Psi_1^{(0)}(r) = & -\frac{k_s^2}{4\rho\omega^2r^2}J_0(k_sr) + \frac{1}{4\rho\omega^2r^3} [k_sJ_1(k_sr) - k_pJ_1(k_pr)] \\ & + \frac{\lambda + 3\mu}{4\mu(\lambda + 2\mu)r^2}, \end{aligned} \quad (A'.64)$$

$$\begin{aligned} \Psi_1^{(1)}(r) = & \frac{k_s^3}{4\rho\omega^2r}J_1(k_sr) + \frac{1}{4\rho\omega^2} \left\{ \frac{1}{r^2} [k_s^2J_0(k_sr) - k_p^2J_0(k_pr)] \right. \\ & \left. - \frac{2}{r^3} [k_sJ_1(k_sr) - k_pJ_1(k_pr)] \right\}, \end{aligned} \quad (A'.65)$$

$$\begin{aligned} \Psi_1^{(2)}(r) = & \frac{k_s^4}{4\rho\omega^2}J_0(k_sr) - \frac{1}{4\rho\omega^2} \left\{ \frac{1}{r} [2k_s^3J_1(k_sr) - k_p^3J_1(k_pr)] \right. \\ & \left. + \frac{3}{r^2} [k_s^2J_0(k_sr) - k_p^2J_0(k_pr)] - \frac{6}{r^3} [k_sJ_1(k_sr) - k_pJ_1(k_pr)] \right\}, \end{aligned} \quad (A'.66)$$

$$\Psi_2^{(0)}(r) = \frac{1}{4\rho\omega^2 r^2} \left\{ k_s^2 J_0(k_s r) - k_p^2 J_0(k_p r) - \frac{2}{r} [k_s J_1(k_s r) - k_p J_1(k_p r)] \right\}, \quad (\text{A'.67})$$

$$\begin{aligned} \Psi_2^{(1)}(r) = & -\frac{1}{4\rho\omega^2 r} \left\{ k_s^3 J_1(k_s r) - k_p^3 J_1(k_p r) + \frac{2}{r} [k_s^2 J_0(k_s r) - k_p^2 J_0(k_p r)] \right. \\ & \left. - \frac{4}{r^2} [k_s J_1(k_s r) - k_p J_1(k_p r)] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A'.68})$$

$$\begin{aligned} \Psi_2^{(2)}(r) = & -\frac{1}{4\rho\omega^2} \left\{ k_s^4 J_0(k_s r) - k_p^4 J_0(k_p r) - \frac{3}{r} [k_s^3 J_1(k_s r) - k_p^3 J_1(k_p r)] \right. \\ & \left. - \frac{6}{r^2} [k_s^2 J_0(k_s r) - k_p^2 J_0(k_p r)] + \frac{12}{r^3} [k_s J_1(k_s r) - k_p J_1(k_p r)] \right\} \end{aligned} \quad (\text{A'.69})$$

και

$$\Phi_{j,2}^{(k)}(t, \tau) = \Phi_j^{(k)}(t, \tau) - \frac{1}{2\pi} \Phi_{j,1}^{(k)}(t, \tau) \ln \left(4 \sin^2 \frac{t - \tau}{2} \right). \quad (\text{A'.70})$$

Από την ανάλυση των συναρτήσεων Bessel και Hankel προκύπτει ότι οι συναρτήσεις $\Phi_j^{(k)}$ και $\Psi_j^{(k)}$ είναι αναλυτικές στο \mathbb{R} και μπορούμε να εκφράσουμε τους διαγώνιους όρους ($r \rightarrow 0$) ως εξής

$$\Psi_1^{(0)}(0) = \frac{1}{64\rho\omega^2} (3k_s^4 + k_p^4), \quad \Psi_2^{(0)}(0) = \frac{1}{32\rho\omega^2} (k_p^4 - k_s^4), \quad (\text{A'.71})$$

$$\Psi_j^{(k)}(0) = 2\Psi_j^{(0)}(0), \quad \text{για } j, k = 1, 2 \quad (\text{A'.72})$$

και

$$\Psi_{j,2}^{(k)}(0) = \frac{2k-1}{2\pi} \Psi_j^{(0)}(0) + 2\alpha_j, \quad \text{για } j, k = 1, 2 \quad (\text{A'.73})$$

όπου οι σταθερές α_j δίνονται από τους τύπους

$$\alpha_1 := \frac{1}{32\pi\rho\omega^2} \left\{ 3k_s^4 \ln \frac{k_s}{2} + k_p^4 \ln \frac{k_p}{2} - \frac{11}{4} k_s^4 - \frac{5}{4} k_p^4 + \left(C_E - \frac{i\pi}{2} \right) (3k_s^4 + k_p^4) \right\}, \quad (\text{A'.74})$$

$$\alpha_2 := \Phi_{2,2}^{(k)}(0) = -\frac{1}{16\pi\rho\omega^2} \left\{ k_s^4 \ln \frac{k_s}{2} - k_p^4 \ln \frac{k_p}{2} + \left(C_E - \frac{3}{4} - \frac{i\pi}{2} \right) (k_s^4 - k_p^4) \right\}. \quad (\text{A'.75})$$

Με βάση τα παραπάνω ο πίνακας $P(t, \tau)$ δέχεται την ακόλουθη ανάλυση

$$P(t, \tau) = \frac{1}{2\pi} P_1(t, \tau) \ln \left(4 \sin^2 \frac{t - \tau}{2} \right) + P_2(t, \tau), \quad (\text{A'.76})$$

όπου

$$P_1(t, \tau) := \sum_{j=1}^2 \sum_{k=0}^2 \Psi_j^{(k)}(r) W_j^{(k)}(t, \tau) \quad (\text{A'.77})$$

και

$$P_2(t, \tau) = P(t, \tau) - \frac{1}{2\pi} P_1(t, \tau) \ln \left(4 \sin^2 \frac{t - \tau}{2} \right). \quad (\text{A'.78})$$

Μετά από παραγοντική ολοκλήρωση καταλήγουμε στην τελική μορφή

$$(L\varphi)(t) = \frac{1}{2\pi|x'(t)|} \int_0^{2\pi} \left\{ c_1 \cot \frac{\tau - t}{2} \varphi'(\tau) + B(t, \tau) \varphi(\tau) \right\} d\tau, \quad t \in [0, 2\pi] \quad (\text{A'.79})$$

όπου η σταθερά c_1 δίνεται από τον τύπο

$$c_1 = \frac{\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \quad (\text{A'.80})$$

και

$$B(t, \tau) = B_1(t, \tau) \ln \left(4 \sin^2 \frac{t - \tau}{2} \right) + B_2(t, \tau) \quad (\text{A'.81})$$

όπου οι πυρήνες B_1 και B_2 είναι αναλυτικές μορφές στον \mathbb{R} με τύπους

$$B_1(t, \tau) = |x'(t)| |x'(\tau)| P_1(t, \tau), \quad (\text{A'.82})$$

$$B_2(t, \tau) = 2\pi |x'(t)| |x'(\tau)| P_2(t, \tau) + K_0(t, \tau). \quad (\text{A'.83})$$

Ο πίνακας K_0 , αντιστοιχεί στο στατικό πρόβλημα και έχει μορφή

$$K_0(t, \tau) = c_1 \{ L_1(t, \tau) I + L_2(t, \tau) [I - 2J(t, \tau)] Q + L_3(t, \tau) [I - 2J(t, \tau)] \} \quad (\text{A'.84})$$

όπου

$$L_1(t, \tau) := -\frac{1}{(\tau - t)^2} - \frac{x'(\tau) \cdot x'(t)}{r^2} + 2 \frac{(x(\tau) - x(t)) \cdot x'(t)}{r^2} \frac{(x(\tau) - x(t)) \cdot x'(\tau)}{r^2}, \quad (\text{A'.85})$$

$$L_2(t, \tau) := -\frac{x'(\tau) \cdot Qx'(t)}{r^2} + 2 \frac{(x(\tau) - x(t)) \cdot Qx'(t)}{r^2} \frac{(x(\tau) - x(t)) \cdot x'(\tau)}{r^2} \quad (\text{A'.86})$$

και

$$L_3(t, \tau) := 2 \frac{(x(\tau) - x(t)) \cdot Qx'(t)}{r^2} \frac{(x(\tau) - x(t)) \cdot Qx'(\tau)}{r^2}. \quad (\text{A'.87})$$

Οι παραπάνω συναρτήσεις είναι απείρως φορές παραγωγίσιμες με διαγώνιες μορφές

$$L_1(t, t) = -\frac{[x'(t) \cdot x''(t)]^2}{2|x'(t)|^4} + \frac{x'''(t) \cdot x'(t)}{6|x'(t)|^2} + \frac{|x''(t)|^2}{4|x'(t)|^2}, \quad (\text{A'.88})$$

$$L_2(t, t) = \frac{x'(t) \cdot x''(t) x''(t) \cdot Qx'(t)}{2|x'(t)|^4} - \frac{x'''(t) \cdot Qx'(t)}{6|x'(t)|^2}, \quad (\text{A'.89})$$

$$L_3(t, t) = -\frac{[x''(t) \cdot Qx'(t)]^2}{2|x'(t)|^4}. \quad (\text{A'.90})$$

Παρατήρηση Α'.3.1. Στο σύστημα των μη γραμμικών ολοκληρωτικών εξισώσεων για το ευθύ και το αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης από έγκλεισμα εμφανίζεται ο συνδυασμός των τελεστών $\tau_e L_e - \tau_i L_i$ όπου τα i, e συμβολίζουν την εξάρτηση από το εσωτερικό και το εξωτερικό χωρίο, αντίστοιχα. Λόγω της μορφής των σταθερών c_1 και τ_α παρατηρούμε ότι ο όρος που εμφανίζει την ισχυρή ιδιομορφία απαλείφεται και ο συνδυασμός καταλήγει να είναι ιδιόμορφος τελεστής. Η εκτενής ανάλυση των ιδιομορφιών των πυρήνων των συγκεκριμένων τελεστών παρουσιάζεται στην εργασία [62].