



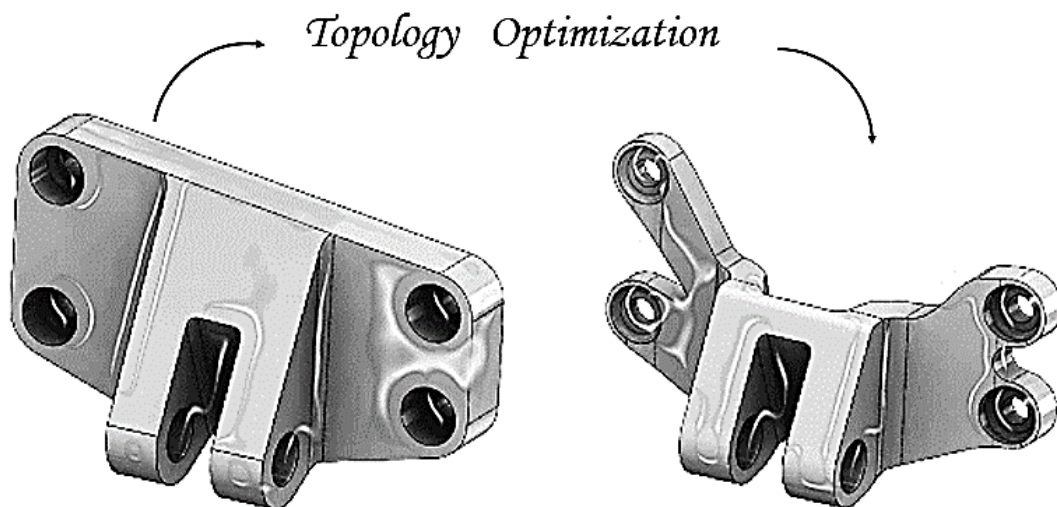
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Δ.Π.Μ.Σ. « Υπολογιστική Μηχανική »



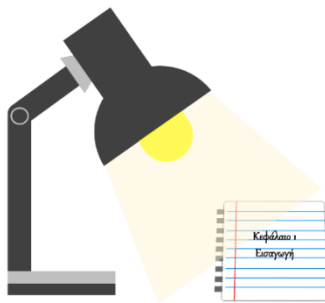
Μεταπτυχιακή Διατριβή

Η Μέθοδος της Ομογενοποίησης στο Πρόβλημα
Βελτιστοποίησης Τοπολογίας

Κωνσταντίνος – Ιάσων Υψηλάντης



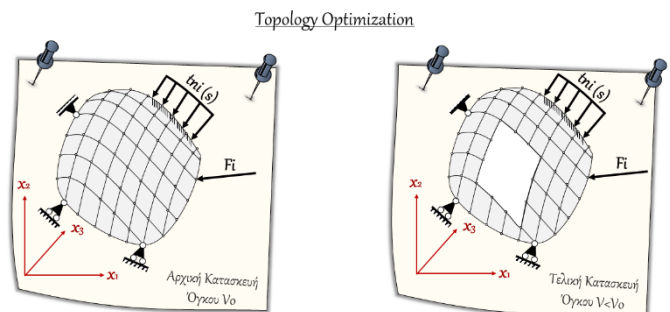
Κεφάλαιο 1



| | | |
|-----|--|----|
| 1.1 | Η Φιλοσοφία πίσω από το Σχεδιασμό μιας Κατασκευής..... | 9 |
| 1.2 | Αντικείμενο Μελέτης του Προβλήματος Βελτιστοποίησης..... | 10 |
| 1.3 | Δομή της παρούσης Διατριβής..... | 11 |

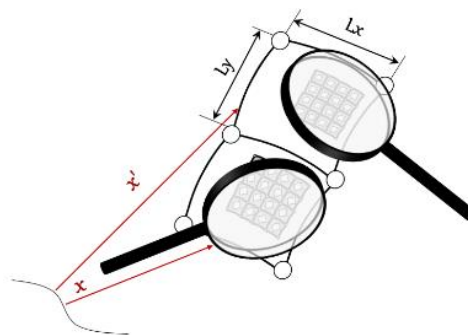
Κεφάλαιο 2

| | | |
|--|--|----|
| 2.1 | Ανασκόπηση στη Μηχανική του Ελαστικού Μέσου..... | 13 |
| 2.2 | Ανασκόπηση στη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων..... | 16 |
| 2.3 | Εισαγωγή στη Βελτιστοποίηση Τοπολογίας – Παρουσίαση της Μεθόδου SIMP..... | 17 |
| 2.4 | Μέθοδοι Επίλυσης του Προβλήματος Βελτιστοποίησης (Περιγραφή των μεθόδων OC & MMA)..... | 19 |
| 2.4.1 | Περιγραφή της Μεθόδου OC..... | 20 |
| 2.4.2 | Περιγραφή της Μεθόδου MMA..... | 23 |
| 2.4.3 | Εισαγωγικό Παράδειγμα στη Βελτιστοποίηση Τοπολογίας..... | 24 |
| 2.5 | Εφαρμογή Φίλτρων στη Βελτιστοποίηση Τοπολογίας..... | 26 |
| ▪ Παράρτημα Κεφαλαίου 2 [Περιγραφή Κώδικα και Αποτελέσματα]..... | | 28 |



Κεφάλαιο 3

| | | |
|-----|--|----|
| 3.1 | Εισαγωγή Κεφαλαίου..... | 34 |
| 3.2 | Περιοδικότητα του Συνεχούς Μέσου – Η Θεωρία της Ομογενοποίησης..... | 35 |
| 3.3 | Επίλυση του Προβλήματος Βελτιστοποίησης με τη Μέθοδο της Ομογενοποίησης..... | 41 |
| | ▪ [3.3.1] Εξαγωγή του Ισοδύναμου Μητρώου Ελαστικότητας CH..... | 42 |
| | ▪ [3.3.2] Εξαγωγή του Μητρώου Δυσκαμφίας του Στοιχείου Ke..... | 43 |
| | ▪ [3.3.3] Ελαστική Ενέργεια του Στοιχείου..... | 44 |
| 3.4 | Περιγραφή των Βημάτων της Μεθόδου Ομογενοποίησης..... | 51 |
| | ▪ Παράρτημα Κεφαλαίου 3 [Περιγραφή Κώδικα και Αποτελέσματα]..... | 52 |



Κεφάλαιο 4

| | | |
|-----|--|----|
| 4.1 | Η Τρισδιάστατη Εντατική Κατάσταση..... | 58 |
| 4.2 | Η Μέθοδος SIMP για τη Μελέτη 3D Προβλημάτων..... | 60 |
| | ▪ [4.2.1] Μεθοδολογία της Μεθόδου SIMP..... | 60 |
| | ▪ [4.2.2] Παρουσίαση του Κώδικα Βελτιστοποίησης για τη Μέθοδο SIMP..... | 63 |
| | ▪ [4.2.3] Αποτελέσματα Μεθόδου SIMP..... | 64 |
| 4.3 | Η Μέθοδος Ομογενοποίησης για Τρισδιάστατα Προβλήματα..... | 66 |
| | ▪ [4.3.1] Εξαγωγή του Ισοδύναμου Μητρώου Ελαστικότητας..... | 66 |
| | ▪ [4.3.2] Δομή του Κώδικα Βελτιστοποίησης για τη Μέθοδο Ομογενοποίησης..... | 67 |
| | ▪ [4.3.3] Αποτελέσματα της Μεθόδου Ομογενοποίησης..... | 76 |
| 4.4 | Σύγκριση Αποτελεσμάτων των Μεθόδων SIMP & Ομογενοποίησης Παρατηρήσεις | |
| | ▪ Παράρτημα Κεφαλαίου 4[Αποτελέσματα για Διάφορους Τύπους Unit Cell]..... | 79 |

- Βιβλιογραφία

Κατάλογος Πινάκων

Κεφάλαιο 2

Πίνακας 2.01 Είσοδοι στη συνάρτηση βελτιστοποίησης τοπολογίας. | Αρχείο `problem.m`

Κεφάλαιο 3

Πίνακας 3.1 Οι σχέσεις που προκύπτουν από την εξίσωση των όρων ίδιας τάξης ως προς το παράγοντα κλίμακας ϵ των σχέσεων [3] & [4].

Παράρτημα Κεφαλαίου 3

Πίνακας 3.01 Είσοδοι υποσυνάρτησης 2.

Πίνακας 3.02 Είσοδοι υποσυνάρτησης 6 (Επίλυση του προβλήματος βελτιστοποίησης).

Κεφάλαιο 4

Πίνακας 4.1 Μητρώο ελαστικότητας γραμμικού, ελαστικού ισότροπου υλικού για τη περίπτωση τριδιάστατης εντατικής κατάστασης.

Πίνακας 4.2 Έκφραση του μητρώου ελαστικότητας του στοιχείου, ως συνάρτηση της σχετικής του πυκνότητας.

Πίνακας 4.3 Τελικές γεωμετρίες για διάφορες περιπτώσεις διακριτοποίησης και κλάσματος όγκου του προβλήματος 1.

Πίνακας 4.4 Τελικές γεωμετρίες για διάφορες περιπτώσεις διακριτοποίησης του προβλήματος 2.

Πίνακας 4.5 Τελικές γεωμετρίες για δύο περιπτώσεις του σφάλματος σύγκλισης για το πρόβλημα 2. Στη δεύτερη γραμμή παρουσιάζεται η σύγκλιση και η τελική τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης για περίπτωση σφάλματος ίσο με $1e-2$ και $1e-3$ αντίστοιχα | Πίνακες A & B .

Πίνακας 4.6 Η τελική γεωμετρία και η μεταβολή της ελαστικής ενέργειας συναρτήσει του αριθμού των επαναλήψεων για τη περίπτωση μελέτης του προβλήματος 1. Οι παράμετροι εισόδου αναγράφονται στο πίνακα δίπλα | Πίνακας C .

Πίνακας 4.7 Η τελική γεωμετρία και η μεταβολή της ελαστικής ενέργειας συναρτήσει του αριθμού των επαναλήψεων για τη περίπτωση μελέτης του προβλήματος 1. Οι παράμετροι εισόδου αναγράφονται στο πίνακα δίπλα | Πίνακας D .

Κατάλογος Εικόνων

Κεφάλαιο 1

Εικόνα 1.1 Διαδικασία σχεδιασμού κατασκευής με βασικό κριτήριο το βάρος αυτής.

Εικόνα 1.2 Οι τρεις κατηγορίες της διαδικασίας βελτιστοποίησης. A) βελτιστοποίηση μεγέθους (*sizing optimization*) για τη περίπτωση δικτύωματος, B) βελτιστοποίηση σχήματος, T) βελτιστοποίηση τοπολογίας. Οι κατασκευές παρουσιάζονται στα αριστερά της εικόνας στην αρχική τους μορφή και στα δεξιά, στη τελική τους μορφή αναλόγως του προβλήματος βελτιστοποίησης.

Κεφάλαιο 2

Εικόνα 2.1 Τύποι φόρτισης ενός σώματος όγκου V : A) Κατανομή μαζικών δυνάμεων F_{vi} , B) Κατανομή επιφανειακών φορτίων $t_{ni}(x_i)$ στο σύνορο S_σ , T) Συγκεντρώμενη φόρτιση σε σημείο A .

Εικόνα 2.2 Ανάπτυγμα Taylor των τάσεων σε ένα διαφορικό στοιχείο όγκου.

Εικόνα 2.3 Διακριτοποίηση του συνεχούς μέσου σε πεπερασμένα στοιχεία.

Εικόνα 2.4 Μεταβολή του μέτρου ελαστικότητας συναρτήσει της σχετικής πυκνότητας χ_e του στοιχείου (Προσέγγιση από *power law* εξίσωση).

Εικόνα 2.5 Μετασχηματισμός του μητρώου παραγώγων των συναρτήσεων μορφής από το καθολικό σύστημα (x, y) στο φυσικό σύστημα συντεταγμένων (ξ, η) , μέσω του ιακωβιανού μητρώου.

Εικόνα 2.6 Έκφραση του μητρώου δυσκαμψίας συναρτήσει της σχετικής πυκνότητας του στοιχείου. Για τιμή σχετικής πυκνότητας ίση με το μηδέν, είναι μηδενικό, για τιμές στο εύρος $(0, 1)$ εκφράζεται από μια *power law* συνάρτηση ενώ για τιμές ίσες με τη μονάδα ισούται με αυτό του συμπαγούς υλικού.

Εικόνα 2.7 Κάθε πεπερασμένο στοιχείο έχει δική του σχετική πυκνότητα και, συνεπώς μητρώο δυσκαμψίας.

Εικόνα 2.8 Τοποθέτηση του προβλήματος βελτιστοποίησης τοπολογίας με τους αντίστοιχους περιορισμούς.

Εικόνα 2.8a Διάγραμμα ροής της μεθόδου SIMP.

Εικόνα 2.8b Αλγόριθμος εκτέλεσης της OC μεθόδου στο Matlab.

Εικόνα 2.9 Παράδειγμα 1: Φόρτιση σώματος που διακριτοποιείται σε τέσσερα πεπερασμένα στοιχεία και το πρόβλημα βελτιστοποίησης τοπολογίας που μελετάται με τους αντίστοιχους περιορισμούς.

Εικόνα 2.10 Μεταβολή του πεδίου των σχετικών πυκνοτήτων της κατασκευής συναρτήσει των επαναλήψεων. Στην επανάληψη v , θεωρείται πως έχει επιτευχθεί σύγκλιση.

Εικόνα 2.11 Μεταβολή της αντικειμενικής συνάρτησης συναρτήσει του αριθμού των επαναλήψεων. Όταν η μεταβολή τείνει στο μηδέν (πλατά) η αντικειμενική συνάρτηση ελαχιστοποιείται και τερματίζεται η διαδικασία (επίτευξη σύγκλισης).

Εικόνα 2.12 Απτόμετα μεταβολές της σχετικής πυκνότητας ανάμεσα σε γειτονικά στοιχεία-*Checkerboard pattern*-

Εικόνα 2.13 Αναζήτηση του κέντρου βάρους r_{cm} ενός συστήματος μαζών. r_i το διάνυσμα θέσης της κάθε μάζας m_i από ένα σταθερό σύστημα αναφοράς.

Εικόνα 2.14 Αρχή λειτουργίας του φίλτρου: Μόνο τα στοιχεία εντός της ακτίνας R του κύκλου (βλέπε Εικόνα πάνω δεξιά – προβολή σε 2D) συμβάλλουν στη τελική τιμή του προς μελέτη στοιχείου i (που αποτελεί το κέντρο του κύκλου). Ο βαθμός στον οποίο συμβάλλουν τα γειτονικά στοιχεία εξαρτάται από το μέτρο της σχετικής απόστασης $R - r_j$ καθώς και τη τιμή της συνάρτησης του καθενός. Στην τρίτη εικόνα (ιστόγραμμα όρων $\chi_i \frac{dc_i}{dx_i}$) αναπαρίστανται ο τρόπος εξαγωγής του φιλτραρισμένου όρου $\widehat{\frac{dc_i}{dx_i}}$, ο οποίος είναι ίδιος με το τρόπο εξαγωγής του κέντρου βάρους μιας διακριτής κατανομής.

Παράρτημα Κεφαλαίου 2

Εικόνα 2.01 Οι είσοδοι της συνάρτησης *problem.m* και απεικόνιση του προβλήματος που επιλύεται κάθε φορά.

Εικόνα 2.02 Μόλις ο χρήστης τρέξει το αρχείο, εμφανίζεται το είδος ανάλυσης που επιθυμεί να κάνει για το δοσμένο πρόβλημα.

Εικόνα 2.03 Αποτελέσματα βελτιστοποίησης τοπολογίας για τη περίπτωση 3, για διάφορες περιπτώσεις διακριτοποίησης. Παρατηρείται πως όσο περισσότερα τα στοιχεία, τόσο υψηλότερη η ακρίβεια, με μικρό κόστος χρόνου. [OC Method]

Εικόνα 2.04 Μεταβολή της αντικειμενικής συνάρτησης συναρτήσει του αριθμού των επαναλήψεων. Ο οριζόντιος άξονας δίνεται σε λογαριθμική κλίμακα. Σε κάθε διάγραμμα αναγράφεται και η τελική, ελάχιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.

Εικόνα 2.05 Σύγκριση των τιμών της ελαστικής ενέργειας για τις διάφορες περιπτώσεις διακριτοποίησης.

Εικόνα 2.06 Αποτελέσματα βελτιστοποίησης τοπολογίας για τη περίπτωση 3, για διάφορες περιπτώσεις διακριτοποίησης με χρήση της ΜΜΑ μεθόδου. Παρατηρείται πως είναι πολύ πιο αργή μέθοδος συγκριτικά με την OC μέθοδο, της οποίας οι αντίστοιχοι χρόνοι αποτυπώνονται στην Εικόνα 2.03.

Εικόνα 2.07 Μεταβολή της αντικειμενικής συνάρτησης συναρτήσει του αριθμού των επαναλήψεων με χρήση της μεθόδου ΜΜΑ. Ο οριζόντιος άξονας δίνεται πάλι σε λογαριθμική κλίμακα.

Εικόνα 2.08 Ο χρήστης επιλέγει «p» για να τρέξει την ανάλυση για διάφορες τιμές του παράγοντα σφάλματος p .

Εικόνα 2.09 Αποτελέσματα βελτιστοποίησης τοπολογίας για τη περίπτωση 3, για τιμές του p από 1 έως 5 με χρήση της OC μεθόδου. Mesh: [20, 60], VolFrac: 0.5.

Εικόνα 2.10 Σύγκριση των τιμών της ελαστικής ενέργειας για τις διάφορες τιμές του παράγοντα σφάλματος p . Παρατηρείται πλήρης ταύτιση των τιμών της αντικειμενικής συνάρτησης από έναν αριθμό επαναλήψεων και μετά.

Εικόνα 2.011 Ο χρήστης επιλέγει «volfrac» για να τρέξει την ανάλυση για διάφορες τιμές του λόγου όγκου.

Εικόνα 2.012 Αποτελέσματα του προβλήματος 2 για διάφορα κλάσματα όγκων. Στη μεσαία στήλη αναπαρίστανται η τελική κατασκευή, ενώ στη τελευταία η μεταβολή της αντικειμενικής συνάρτησης με τον αριθμό επαναλήψεων.

Κεφάλαιο 3

Εικόνα 3.1 Βασικοί μηχανισμοί αποτοχίας των συνθέτων υλικών: Α] Διαστρωματική αποκόλληση, Β] Θραύση της ίνας, C] Φηγμάτωση της στρώσης.

Εικόνα 3.2 Περιοδική συνάρτηση με περίοδο T_0 .

- Εικόνα 3.3** Η έννοια της περιοδικότητας του υλικού. Στα πράσινα σημεία η συνάρτηση λαμβάνει ίδιες τιμές.
- Εικόνα 3.4** Το υλικό σε επίπεδο μικροδομής του, εμφανίζει περιοδικότητα. Οι συνεταγμένες ενός σημείου σε επίπεδο μακροκλίμακας ορίζονται από το διάνυσμα x , ενώ σε επίπεδο μικροκλίμακας για το δοσμένο σημείο από το διάνυσμα y .
- Εικόνα 3.5** Από μια διακριτοποιημένη κατασκευή απομονώνεται ένα πεπερασμένο στοιχείο, το οποίο σε επίπεδο μικροκλίμακας εμφανίζει περιοδικότητα στη δομή του.
- Εικόνα 3.6** Η περιοδικότητα του υλικού σε επίπεδο μικροδομής αντιπροσωπεύεται από ένα στοιχείο το οποίο ονομάζεται *unit cell*.
- Εικόνα 3.7** Συνοριακές συνθήκες για ένα *unit cell*. Ταύτιση των συνοριακών συνθηκών για το πάνω με το κάτω άκρο και αντίστοιχα του δεξιού με το αριστερό.
- Εικόνα 3.8** Οι συναρτήσεις $u^i_{(x,y)}$ του πολυωνυμικού αναπτύγματος είναι περιοδικές στη μικροκλίμακα, με περίοδο ίση με το μήκος του στοιχείου του *unit cell* Y .
- Εικόνα 3.9** Παράδειγμα δοκού η οποία παρουσιάζει περιοδικότητα στη μικροδομή της.
- Εικόνα 3.10** Στα αριστερά αναπαριστάται το πραγματικό *unit cell* με διαστάσεις οπής α_1 , α_2 ενώ στα δεξιά το αντίστοιχο *unit cell* με τις ισοδύναμες ιδιότητες.
- Εικόνα 3.11** Τα πεπερασμένα στοιχεία στα οποία διακριτοποιείται η κατασκευή παρουσιάζουν διαφορετική περιοδικότητα στη μικροδομή τους.
- Εικόνα 3.12** Αντιστοιχία των μεθόδων Ομογενοποίησης και SIMP. Το ισοδύναμο μητρώο ελαστικότητας για τη μέθοδο της Ομογενοποίησης είναι συνάρτηση των διαστάσεων της οπής του *unit cell*, ενώ για τη μέθοδο SIMP είναι συνάρτηση της σχετικής πυκνότητας του στοιχείου.
- Εικόνα 3.13** Σε κάθε ζεύγος διαστάσεων της οπής α_1 , α_2 εντός του *unit cell*, αντιστοιχεί και ένα ισοδύναμο μητρώο ελαστικότητας C_H
- Εικόνα 3.14** Οι όροι του μητρώου C_{Hij} που προκύπτουν για κάθε ζεύγος τιμών (α_1, α_2) , προσεγγίζονται από κατάλληλη επιφάνεια. Δείκτης της ακρίβειας της προσέγγισης είναι ο Rsq .
- Εικόνα 3.15** Κάθε όρος του μητρώου ελαστικότητας είναι μια συνεχής συνάρτηση των διαστάσεων της οπής (α_1, α_2) .
- Εικόνα 3.16** Κάθε πεπερασμένο στοιχείο παρουσιάζει διαφορετική περιοδικότητα στη μικροδομή του (διαφορετικές διαστάσεις της οπής). Συνεπώς τα στοιχεία που διακριτοποιούν τη κατασκευή παρουσιάζουν διαφορετικά μητρώα δυσκαμψίας.
- Εικόνα 3.17** Η αντικειμενική συνάρτηση της κατασκευής (ελαστική ενέργεια του σώματος) είναι συνάρτηση (2^* Αριθμός Στοιχείων) μεταβλητών. Για τη περίπτωση έξι στοιχείων οι μεταβλητές σχεδιασμού είναι δώδεκα.
- Εικόνα 3.18** Κάθε στοιχείο εμφανίζει τη δική του περιοδικότητα στη μικροδομή του. Διαβάζοντας ανά γραμμή τη παραπάνω εικόνα, υπολογίζονται για κάθε στοιχείο i οι μερικές παράγωγοι της ελαστικής του ενέργειας $[\frac{dC}{da_{i1}}, \frac{dC}{da_{i2}}] \dots i = 1, \dots 6$.
- Εικόνα 3.19** Αποθήκευση των μερικών παραγώγων της ελαστικής ενέργειας $[\frac{dC}{da_{i1}}, \frac{dC}{da_{i2}}] \dots i = 1, \dots nele$ σε διάνυσμα διαστάσεων $[2 * nele, 1]$. Στις γραμμές του διανύσματος $[1: nele]$ αποθηκεύονται οι μερικές παράγωγοι ως προς την οριζόντια διάσταση της οπής α_1 , ενώ από τη γραμμή $[nele + 1, 2 * nele]$ οι μερικές παράγωγοι ως προς την εγκάρσια διάσταση της οπής α_2 .
- Εικόνα 3.20** Διάγραμμα ροής της μεθόδου SIMP για τη περίπτωση 2D προβλημάτων.

Παράρτημα Κεφαλαίου 3

- Εικόνα 3.01** Διάφοροι τύποι *unit cells* για διάφορες διαστάσεις οπών. Μέσω της εντολής *imagesc* (πίνακας από $[0,1]$ στοιχεία) στο MATLAB, οπτικοποιείται το *unit cell*
- Εικόνα 3.02** Για κάθε τύπο *unit cell*, εξάγεται το αντίστοιχο ισοδύναμο μητρώο ελαστικότητας C_H . Τα μητρώα ελαστικότητας συγκεντρώνονται σε ένα κελί c .
- Εικόνα 3.03** Οι όροι του ισοδύναμου μητρώου ελαστικότητας προσεγγίζονται από πολυώνυμα δευτέρας τάξης ως προς τις διαστάσεις της οπής.
- Εικόνα 3.04** Γραμμική προσέγγιση των όρων του ισοδύναμου μητρώου ελαστικότητας συναρτήσει των διαστάσεων της οπής.
- Εικόνα 3.05** Το αρχείο το οποίο τρέχει τη βασική συνάρτηση SCRIPT. Με κόκκινο χρώμα παριστάνονται οι υποσυναρτήσεις της *main* συνάρτησης SCRIPT.
- Εικόνα 3.06** Αποτελέσματα της μεθόδου ομογενοποίησης για τη περίπτωση μελέτης του προβλήματος 3. Σύγκριση των τελικών γεωμετριών με αυτές που εξάγονται με χρήση της μεθόδου SIMP.
- Εικόνα 3.07** Αποτελέσματα της μεθόδου ομογενοποίησης για τη περίπτωση μελέτης του προβλήματος 2. Σύγκριση της τελικής γεωμετρίας με αυτή που εξάγεται με χρήση της μεθόδου SIMP.

Κεφάλαιο 4

- Εικόνα 4.1** Φυσικό σύστημα συντεταγμένων $[\xi, \eta, \zeta]$ για τη περίπτωση τρισδιάστατου γραμμικού ορθογωνίου στοιχείου.
- Εικόνα 4.2** Η μέθοδος SIMP για τη τρισδιάστατη εντατική κατάσταση: Το μέτρο ελαστικότητας είναι πολωνυμική συνάρτηση της σχετικής πυκνότητας του στοιχείου.
- Εικόνα 4.3** Διάγραμμα ροής της μεθόδου SIMP για τη περίπτωση 3D προβλημάτων.
- Εικόνα 4.4** Είσοδος στον κώδικα είναι ένα structure το οποίο καλείται έπειτα στη συνάρτηση `top3d`. Ο χρήστης ορίζει τις εισόδους. Στο `command window` παρουσιάζονται οι προεπιλεγμένες τιμές του structure
- Εικόνα 4.5** Τα είδη των προβλημάτων που μελετώνται για τη 3D περίπτωση. Ο χρήστης εισάγει το είδος του προβλήματος που επιθυμεί να επιλύσει μέσω της εντολής `simp.Problem` (Τελευταία είσοδος της structure `simp`).
- Εικόνα 4.6** Έξοδος του κώδικα αποτελεί ένα structure το οποίο έχει ονομασθεί `Simp`.
- Εικόνα 4.8** Ένα σημείο A του σώματος παρουσιάζει περιοδικότητα στη μικροδομή του. Το επαναλαμβανόμενο στοιχείο της μικροδομής του αποτελεί το `unit cell` του σημείου αυτού.
- Εικόνα 4.9** Αναπαράσταση της δομής του κώδικα βελτιστοποίησης ως σύστημα αυτομάτου ελέγχου. Η έξοδος του κάθε υποσυστήματος αποτελεί την είσοδο του επόμενου.
- Εικόνα 4.10** Είσοδος στον κώδικα είναι ένα structure το οποίο ονομάζεται `Homog`. Ο χρήστης ορίζει τις εισόδους. Στο `command window` παρουσιάζονται οι προεπιλεγμένες εισοδοί του structure.
- Εικόνα 4.11** Για κάθε τιμή της ακτίνας r λαμβάνεται η αντίστοιχη σχετική πυκνότητα του υλικού, η οποία σε κάθε επανάληψη αποθηκεύεται σε ένα κελί $\text{dens}\{1,i\} = \text{Density Unit Cell}$ επανάληψη i . Το διάλυμα r , περιλαμβάνει τις τιμές της ακτίνας και λαμβάνει τιμές από μηδέν (απουσία υλικού) μέχρι 0.65 (συμπαγές υλικό).
- Εικόνα 4.12** Οπτικοποίηση των `unit cells` για διάφορες τιμές της ακτίνας. Στο πάνω μέρος αυτών αναγράφεται η σχετική τους πυκνότητα. Τα `unit cells` έχουν διακριτοποιηθεί σε $10 \times 10 \times 10$ πεπερασμένα στοιχεία.
- Εικόνα 4.13** Για κάθε τιμή της ακτίνας, λαμβάνεται το ισοδύναμο μητρώο ελαστικότητας του `unit cell`. Το μητρώο ελαστικότητας για κάθε τρέχουσα τιμή της ακτίνας αποθηκεύεται σε ένα κελί που ονομάζεται $\text{ch}\{1,i\} = \text{CH}_{\text{eff. Unit Cell}}$ επανάληψη i .
- Εικόνα 4.14** Για τις διάφορες τιμές της ακτίνας λαμβάνονται τα αντίστοιχα ισοδύναμα μητρώα ελαστικότητας.
- Εικόνα 4.15** Πολυωνυμική προσέγγιση των όρων του μητρώου CH_{ij} .
- Εικόνα 4.16** Γραμμική προσέγγιση του όγκου του `unit cell` συναρτήσει της ακτίνας του.
- Εικόνα 4.17** Έξοδος υποσυνάρτησης Νο 2.
- Εικόνα 4.18** Έξοδος υποσυνάρτησης Νο 3.
- Εικόνα 4.19** Έξοδος υποσυνάρτησης Νο 4.
- Εικόνα 4.20** Διάγραμμα ροής της μεθόδου Ομογενοποίησης για τη περίπτωση 3D προβλημάτων.
- Εικόνα 4.21** Ο χρήστης επιλέγει τη μέθοδο επίλυσης για το πρόβλημα βελτιστοποίησης τοπολογίας.
- Εικόνα 4.22** Τελική γεωμετρία για τη περίπτωση μελέτης του προβλήματος 2. Οι παράμετροι εισόδου αναγράφονται πάνω αριστερά.
- Εικόνα 4.23** Τελική γεωμετρία για τη περίπτωση μελέτης του προβλήματος 2 και η μεταβολή ελαστικής ενέργειας συναρτήσει του αριθμού επαναλήψεων. Οι παράμετροι εισόδου αναγράφονται στο πίνακα πάνω αριστερά.

Παράρτημα Κεφαλαίου 4

- Εικόνα 4.01** Οι διάφοροι τύποι `unit cells` που θεωρούνται για τη διαδικασία της ομογενοποίησης.
- Εικόνα 4.02** Η ροή του κώδικα για τη περίπτωση που ο χρήστης επιλέγει το επιθυμητό `unit cell`.
- Εικόνα 4.03** Αποτελέσματα της βελτιστοποίησης τοπολογίας για διάφορους τύπους `unit cell`.

***Ε**υχαριστίες*

Είναι μεγάλη η χαρά και η ικανοποίηση ενός ανθρώπου, όταν καταφέρνει να ολοκληρώσει ένα τόσο σημαντικό στόχο. Φτάνοντας σε αυτό το σημείο, ξεχνιούνται όλες οι δυσκολίες και τα εμπόδια που παρουσιάστηκαν τόσο κατά την διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών, όσο και κατά την εκπόνηση της μεταπτυχιακής μου εργασίας και ως κατάλοιπο απομένει μια γλυκιά ανάμνηση.

Σε αυτό το σημείο θέλω να αποδώσω τη πρέπουσα αναγνώριση στον επιβλέποντα καθηγητή μου, Δρ. Νικόλαο Λαγαρό, ο οποίος καθόλη τη διάρκεια συνεργασίας μας με στήριξε και με κατεύθυνε σε τυχούσες δυσκολίες που συνάντησα. Μέχρι και την έσχατη στιγμή, προσπάθησε να μου μεταδώσει όσες γνώσεις είχε, επιστημονικές, σε θέματα που με απασχόλησαν κατά τη διάρκεια εκπόνησης της διατριβής μου, αλλά και κοινωνικές σε ό,τι αφορά την ακαδημαϊκή παρουσία ενός μηχανικού. Μου μετέδωσε το τρόπο σκέψης που οφείλει να έχει ένας μηχανικός, ώστε να μπορεί να συνεισφέρει στην επιστημονική κοινότητα, παράγοντας έργο και προσφέροντας καινοτόμες ιδέες.

Ένα μεγάλο ευχαριστώ οφείλω να απονέμω στον Γεώργιο Κραζάκη, ο οποίος από τη πρώτη μέρα με καθοδήγησε, με συμβούλεψε και μου παρείχε άμεσα λύσεις σε οποιαδήποτε κωλύματα που συνάντησα κατά την εκπόνηση της μεταπτυχιακής μου εργασίας.

Κάθε σύστημα τείνει να ειδικεύεται στη κατάσταση ευσταδούς ισορροπίας του, τη κατάσταση στην οποία η εσωτερική του ενέργεια γίνεται ελάχιστη.

Να ιδεοπλάσετε στη γηή σας από ανδρώνους ίσου σας φέρνουν στη κατάσταση αυτή.

~ Αγνωστος ~

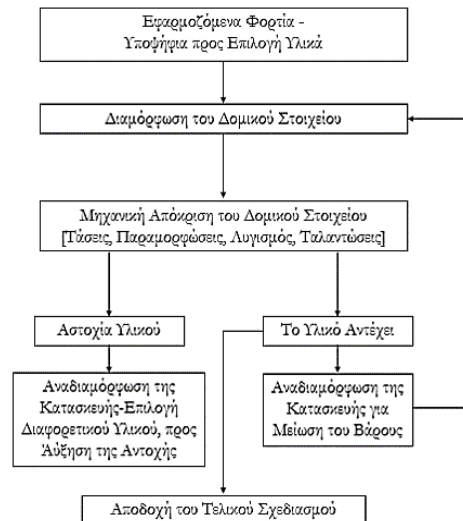
Acknowledgements

This research has been supported by the OptArch project: “Optimization Driven Architectural Design of Structures” (No: 689983) belonging to the Marie Skłodowska-Curie Actions (MSCA) Research and Innovation Staff Exchange (RISE) H2020-MSCA-RISE-2015.

Κεφάλαιο 1 - Εισαγωγή

[1.1] Η φιλοσοφία πίσω από το σχεδιασμό μιας κατασκευής

Βασικό κριτήριο για το σχεδιασμό μιας οποιασδήποτε κατασκευής είναι η ικανότητα της να φέρει με ασφάλεια τα εφαρμοζόμενα φορτία υπό τα οποία καλείται να λειτουργήσει. Προκειμένου ένας μηχανικός να καταλήξει στην προτίμηση του βέλτιστου, για τους σκοπούς της κατασκευής, υλικού καλείται να επιλύσει μια επαναληπτική διαδικασία δοκιμής και απόρριψης αυτών. Προτού ο μηχανικός προβεί στον αναλυτικό σχεδιασμό της κατασκευής και στην αναζήτηση των αντίστοιχων παραμέτρων αυτού, καλείται να απαντήσει ερωτήματα όπως: ποιός ο βασικός σκοπός της κατασκευής; ποιός ο βασικός σχεδιαστικός της παράγοντας: αντέχει τα επιβαλλόμενα φορτία και, αν ναι, υπό ποιό κόστος; το κόστος αυτό μεταφράζεται σε επιπρόσθετο βάρος; βασική σχεδιαστική προϋπόθεση αποτελεί η αντοχή της κατασκευής υπό οποιαδήποτε κόστος παραμόρφωσης ή μήπως το αντίθετο; υπό ποιές συνθήκες περιβάλλοντος καλείται να λειτουργήσει, κ.α. Όλα τα ανωτέρω αποτελούν ερωτήματα ειδικής βαρύτητας το καθένα και οφείλεται να συνυπολογίζονται προκειμένου ο μηχανικός να προβεί στην επιλογή του πιο αξιόπιστου υλικού. Στην Εικόνα 1.1 παρουσιάζεται στη πρόχειρη εκδοχή της μια διαδικασία σχεδιασμού κατασκευής με βασικό κριτήριο το βάρος της.



Εικόνα 1.1 Διαδικασία σχεδιασμού κατασκευής με βασικό κριτήριο το βάρος αυτής.

Μια κατασκευή κατά τη διάρκεια της λειτουργίας της καταπονείται σε φορτία στοχαστικής φύσεως. Διαφορετική συμπεριφορά θα επιδείξει ένα υλικό σε στατική φόρτιση σε σχέση με αυτή που θα παρουσίαζε σε περίπτωση που διεγείρόταν κοπωτικά. Στη τελευταία δε περίπτωση, εισέρχεται η παράμετρος του χρόνου, παράμετρος η οποία ευθύνεται για τη μεταβολή τόσο των μηχανικών όσο και των φυσικών ιδιοτήτων του υλικού κατά τη διάρκεια υπηρεσίας του. Το φαινόμενο αυτό δυσχαιρένει τόσο τη φυσική ερμηνεία της συμπεριφοράς του υλικού όσο και τη μαθηματική μοντελοποίηση αυτής, καθώς πέραν της χρονικής εξάρτησης που παρουσιάζει η ίδια η μηχανική φόρτιση, οφείλεται να συνυπολογίζονται παράλληλα φυσικά, χρονικά εξαρτώμενα φαινόμενα, όπως είναι ο ερπυσμός, χαλάρωση κλπ. Προφανώς, η ύπαρξη μοντέλων ικανών να προβλέπουν επακριβώς την απόκριση οποιουδήποτε υλικού κάτω από οποιαδήποτε χρονικά εξαρτώμενη διέγερση (μηχανική, υδροθερμική, κ.α) φαντάζει ιδανικό και μέχρι την μελλοντική θεμελίωση κάποιου από αυτά προβλέπεται να έχει αυξηθεί σημαντικά ο όγκος αυτών στη συνιστώμενη βιβλιογραφία.

Παράμετρος με υψηλό συντελεστή βαρύτητας για την επιλογή του κατάλληλου υλικού κατά το σχεδιασμό μιας κατασκευής, αποτελεί το βάρος αυτής. Εύστοχη επιλογή υλικού δεν μπορεί να θεωρηθεί η επιλογή αυτή όπου το υλικό μπορεί απλά να φέρει τα επιβαλλόμενα φορτία. Πρέπει να συνυπολογίζεται και « πόσο » υλικό απαιτήθηκε για το σκοπό αυτό. Ένα πλέον κατάλληλο μέτρο αξιολόγησης ενός υλικού θεωρούνται οι ειδικές του ιδιότητες. Ειδική ιδιότητα ενός υλικού, είναι η ιδιότητα του υλικού ανά μονάδα πυκνότητας αυτού. Ειδική αντοχή ενός υλικού, για παράδειγμα, είναι η αντοχή του υλικού ανά μονάδα βάρους. Με λίγα λόγια η λέξη « ειδικός » αποτελεί ένα δείκτη ο οποίος παρέχει τη πληροφορία του σε τί ποσοστό συμβάλλει το υλικό ανά μονάδα βάρους του.

Το βάρος μιας κατασκευής συνδέεται άρρητα με το κόστος αυτής. Όσο πιο ογκώδης μια κατασκευή, τόσο περισσότερο υλικό απαιτείται για το σχεδιασμό της. Περισσότερο υλικό συνεπάγεται υψηλότερο κόστος. Η διαδικασία εξαγωγής του συνολικού κόστους επιμερίζεται σε τέσσερις υποκατηγορίες: α) τον υπολογισμό του κόστους που απαιτείται για τη παρασκευή του

υλικού - πρώτη ύλη (raw material cost), β) τον υπολογισμό του κόστους που απαιτείται για το κατάλληλο σχεδιασμό και επεξεργασία των μελών που απαρτίζουν τη κατασκευή, γ) τον υπολογισμό του κόστους συναρμολόγησης αυτών και τέλος δ) το κόστος συντήρησης της κατασκευής κατά τη διάρκεια υπηρεσίας της. Είναι προφανές, πως το κόστος μιας κατασκευής δεν αποτελεί στατική μεταβλητή, καθώς, πέραν του αρχικού κόστους που απαιτείται για την ίδια τη κατασκευή πρέπει να συνυπολογίζεται επίσης και το κόστος συντήρησης κατά τη διάρκεια υπηρεσίας αυτής. Ένα άλλο βασικό προτέρημα ελαχιστοποίησης του βάρους μιας κατασκευής, είναι πώς το βάρος που εξοικονομείται μπορεί να διανεμηθεί για τη κατάλληλη ενίσχυση άλλων αναγκών αυτής. Για παράδειγμα, το επιπλέον αυτό βάρος που εξοικονομείται σε ένα αεροσκάφος μπορεί να μεταφραστεί σε επιπλέον βάρος καυσίμων ή σε μεγαλύτερη χωρητικότητα αυτού.

Υλικά τα οποία συνδυάζουν υψηλές μηχανικές ιδιότητες με χαμηλό βάρος (υψηλές ειδικές ιδιότητες δηλαδή) αποτελούν τα σύνθετα υλικά. Τα τελευταία δε χρόνια γίνεται ευρεία χρήση αυτών κυρίως στην αεροβιομηχανία, όπου και η απαίτηση υλικών με υψηλές σχετικές ιδιότητες είναι υψηλή. Το πλεονέκτημα που εμφανίζουν σε σχέση με τα συμβατικά υλικά είναι, πως όταν συνδυάζονται κατάλληλα μπορούμε να εκμεταλλευτούμε το βέλτιστο των ιδιοτήτων των υλικών που τα αποτελούν. Ωστόσο, περιορίζεται η χρήση αυτών σε μεγάλης κλίμακας προβλήματα λόγω της πολυπλοκότητας των μηχανισμών αστοχίας που εμφανίζουν, μηχανισμοί οι οποίοι δρουν είτε αυτόνομα είτε συνεργατικά εντός του υλικού, με αποτέλεσμα τη δυσκολία ανάπτυξης ντετερμινιστικών μοντέλων που να ερμηνεύουν τη μηχανική συμπεριφορά τους.

[1.2] Αντικείμενο Μελέτης του Προβλήματος Βελτιστοποίησης

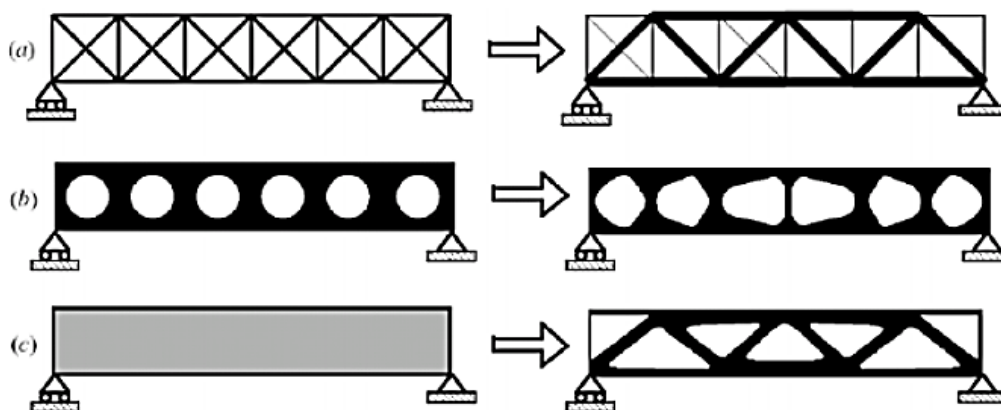
Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζεται μια γενική εικόνα των βασικών συστατικών που περιλαμβάνει η έννοια της βελτιστοποίησης. Μια ελεύθερη ερμηνεία του όρου βελτιστοποίηση αποτελεί ο βέλτιστος τρόπος με τον οποίο δύνανται να κατανεμηθεί το υλικό εντός του σώματος, προκειμένου αυτό να αντέχει τις σχεδιαστικές του προδιαγραφές.

Διακρίνονται τρία είδη βελτιστοποίησης, 1) η βελτιστοποίηση μεγέθους (sizing optimization), 2) η βελτιστοποίηση σχήματος (shape optimization) και, τέλος, 3) η βελτιστοποίηση τοπολογίας (topology optimization) - η οποία αποτελεί και το αντικείμενο της παρούσης διατριβής-. Για κάθε μια από αυτές, το πρόβλημα βελτιστοποίησης τοποθετείται διαφορετικά, ο σκοπός της λειτουργίας της κατασκευής αλλάζει και οι μεταβλητές σχεδιασμού διαφέρουν.

Σε ένα τυπικό πρόβλημα βελτιστοποίησης μεγέθους, στόχος αποτελεί η εύρεση του βέλτιστου πάχους μιας πλάκας ή η βέλτιστη διατομή ενός δικτύωματος. Τις μεταβλητές σχεδιασμού του προβλήματος αποτελούν δηλαδή οι γεωμετρικές διαστάσεις της διατομής αυτών. Διαφορετική διατομή συνεπάγεται διαφορετική δυσκαμψία του σώματος, διαφορετικές τάσεις και συνεπώς διαφορετική αντοχή αυτού υπό κάποια δοσμένη φόρτιση. Συνεπώς, μέσα από μια επαναληπτική διαδικασία, αναζητείται η ελάχιστη δυνατή διατομή (ή πάχος της πλάκας), ώστε ο φορέας να αντέχει τις επιβαλλόμενες φορτίσεις. Σε κάθε επανάληψη που πραγματοποιείται, λαμβάνεται μια κατανομή των μεταβλητών σχεδιασμού κατά το φορέα, λαμβάνεται, δηλαδή, μια χωρική κατανομή των μεταβλητών σχεδιασμού, π.χ οι μεταβλητές σχεδιασμού σε κρίσιμα σημεία όπως είναι οι στηρίξεις είτε τα σημεία επιβολής της δύναμης, λαμβάνουν υψηλότερες τιμές σε σχέση με άλλα λιγότερο κρίσιμα σημεία. Σε κάθε επανάληψη, οι τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού που υπολογίζονται είτε ελαχιστοποιούν, είτε μεγιστοποιούν μια φυσική ποσότητα ενώ παράλληλα ικανοποιούνται οι συνθήκες ισορροπίας και οι περιορισμοί που διέπουν το πρόβλημα. Σε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης σχήματος, στόχος αποτελεί η εύρεση του βέλτιστου σχήματος της ίδιας της κατασκευής. Μεταβλητή σχεδιασμού αποτελεί δηλαδή το χωρίο της ίδιας της κατασκευής. Τέλος σε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης τοπολογίας, μεταβλητή σχεδιασμού αποτελεί η πυκνότητα της κατασκευής. Στόχος αποτελεί η ελαχιστοποίηση του βάρους της κατασκευής ή ισοδύναμα, η αναζήτηση της βέλτιστης κατανομής της πυκνότητας εντός της προκειμένου να αντέχει τις επιβαλλόμενες φορτίσεις.

Η βελτιστοποίηση τοπολογίας έχει αποτελέσει τα τελευταία χρόνια ένα από τα πιο ενδιαφέροντα και εξελισσόμενα επιστημονικά πεδία μελέτης, με πολλές μεθοδολογίες, αλγόριθμους ακόμα και

στοιχεία από μεθόδους επεξεργασίας εικόνων να προτείνονται συνεχώς στη βιβλιογραφία και να συμβάλλουν διαρκώς στην περαιτέρω επέκταση της.



Εικόνα 1.2 Οι τρεις κατηγορίες της διαδικασίας βελτιστοποίησης. Α) βελτιστοποίηση μεγέθους (sizing optimization) για τη περίπτωση δικτύωματος, Β) βελτιστοποίηση σχήματος, Γ) βελτιστοποίηση τοπολογίας. Οι κατασκευές παρουσιάζονται στα αριστερά της εικόνας στην αρχική τους μορφή και στα δεξιά, στη τελική τους μορφή αναλόγως του προβλήματος βελτιστοποίησης.

[1.3] Δομή της Παρούσης Διατριβής

Η παρούσα διατριβή μελετά το τρίτο είδος βελτιστοποίησης, τη βελτιστοποίηση τοπολογίας. Η βελτιστοποίηση τοπολογίας, όπως παρουσιάστηκε και στη προηγούμενη ενότητα, θεωρεί ως μεταβλητή σχεδιασμού τη πυκνότητα του υλικού. Σκοπός αποτελεί η εύρεση του βέλτιστου τρόπου κατανομής του υλικού προκειμένου η κατασκευή να φέρει με ασφάλεια τα επιβαλλόμενα φορτία. Η έννοια βελτιστοποίηση υποδηλώνει την ύπαρξη μιας συνάρτησης της οποίας αναζητείται το κατάλληλο ζεύγος μεταβλητών που είτε την ελαχιστοποιούν είτε τη μεγιστοποιούν. Η συνάρτηση αυτή είναι μια φυσική ποσότητα, όπως η ελαστική ενέργεια που αποθηκεύει το σώμα και ονομάζεται αντικειμενική συνάρτηση. Ένα σωστά τοποθετημένο πρόβλημα βελτιστοποίησης υπακούει σε αριθμό περιορισμών, οι οποίοι με τη σειρά τους εκφράζονται συναρτήσει των μεταβλητών σχεδιασμού. Συνεπώς, το βέλτιστο αυτό ζεύγος τιμών που αναζητείται πρέπει να ικανοποιεί παράλληλα και τους περιορισμούς που διέπουν το πρόβλημα.

Η παρούσα διατριβή αποτελείται από 4 κεφάλαια. Στο 2^ο κεφάλαιο υπενθυμίζονται εν συντομία βασικές έννοιες και καταστατικοί νόμοι της μηχανικής, αναδρομή απαραίτητη για τη κατανόηση λοιπών εννοιών που ορίζονται στη πορεία. Εν συνεχεία, περιγράφεται η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων και υπενθυμίζονται βασικές έννοιες όπως το μητρώο δυσκαμψίας κ.α. Το τέλος του 2^{ου} κεφαλαίου χωρίζεται σε δύο υποενότητες, στη πρώτη περιγράφεται η μέθοδος SIMP και παρουσιάζονται οι μεθοδολογίες επίλυσης του προβλήματος βελτιστοποίησης τοπολογίας (MMA , OC), ενώ στη δεύτερη παρουσιάζονται αποτελέσματα για τη περίπτωση μελέτης διαφόρων διδιάστατων προβλημάτων υπό διάφορες συνθήκες φόρτισης και στήριξης. Ο κώδικας που επιλύει τα διάφορα προβλήματα παρουσιάζεται και εξηγείται αναλυτικά στο Παράρτημα του 2^{ου} κεφαλαίου.

Στο 3^ο κεφάλαιο μελετάται η μέθοδος της ομογενοποίησης. Σε πρώτο στάδιο υπενθυμίζονται και εξηγούνται έννοιες όπως είναι η περιοδικότητα (και πως αυτή αναπαρίσταται σε μητρωική μορφή) κ.α, απαραίτητες για τη κατανόηση του πεδίου παραδοχών που πραγματοποιεί η μέθοδος της ομογενοποίησης. Σε δεύτερο στάδιο περιγράφεται η θεωρία στην οποία βασίζεται η μέθοδος της ομογενοποίησης. Σε επόμενο στάδιο, περιγράφεται η μεθοδολογία που ακολουθείται για την επίλυση ενός προβλήματος βελτιστοποίησης με τη μέθοδο της ομογενοποίησης. Τα αποτελέσματα της μεθόδου καθώς και σύγκριση αυτών με τα αντίστοιχα που δίνει η μέθοδος SIMP παρουσιάζονται στο τέλος του Κεφαλαίου 3, μαζί με τον κώδικα που επιλύει τα υπό μελέτη προβλήματα.

Το 4^ο Κεφάλαιο μελετάει τη περίπτωση τρισδιάστατων προβλημάτων. Στο τρέχον Κεφάλαιο παρουσιάζεται η μέθοδος SIMP για 3D προβλήματα και παρατίθενται τα αποτελέσματα για το ελάχιστο πρόβλημα που μελετάται. Στη δεύτερη υποενότητα του Κεφαλαίου, παρουσιάζεται η μέθοδος της ομογενοποίησης για τη τρισδιάστατη εντατική κατάσταση. Η θεωρία στην οποία βασίζεται η μέθοδος επεξηγείται αναλυτικά και τα αποτελέσματα που δίνει συγκρίνονται με αυτά της –state of the art- μεθόδου SIMP. Ο κώδικας που επιλύει τα υπό μελέτη 3D προβλήματα παρουσιάζεται και επεξηγείται στο Παράρτημα του 4^{ου} κεφαλαίου, ενώ παράλληλα η μέθοδος της ομογενοποίησης αξιολογείται και για διάφορα είδη unit cell.

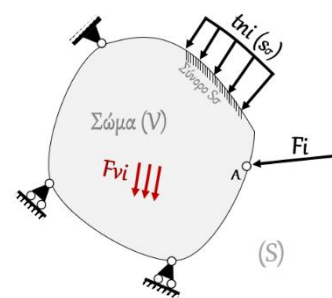
Κεφάλαιο 2

Στο παρόν κεφάλαιο πραγματοποιείται μια σύντομη και περιεκτική αναφορά σε βασικές έννοιες και εξισώσεις της μηχανικής, πάνω στις οποίες βασίζεται η διαδικασία βελτιστοποίησης τοπολογίας. Σε πρώτο στάδιο υπενθυμίζονται οι καταστατικοί νόμοι της μηχανικής του συνεχούς μέσου για τη περίπτωση ισότροπων, ομογενών υλικών νόμοι και οι εξισώσεις ισορροπίας του. Παρουσιάζεται, επίσης, η αναλυτική έκφραση του ισοζυγίου ενέργειας ενός ελαστικού σώματος και υπενθυμίζεται η αρχή των δυνατών έργων.

Σε δεύτερο στάδιο περιγράφεται συνοπτικά η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων και υπογραμμίζονται σημεία-κλειδιά της θεωρίας τα οποία έχουν χρησιμοποιούνται εκτεταμένα στους παρατιθέμενους κώδικες.

[2.1] Ανασκόπηση στη Μηχανική του Συνεχούς Μέσου

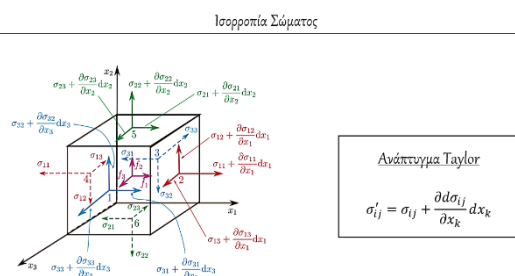
Παρουσίαση Γενικού Προβλήματος: Έστω ένα ελαστικό σώμα B με όγκο V που περικλείεται από την επιφάνεια S και υποθέτουμε ότι φορτίζεται από μια κατανομή μαζικών δυνάμεων F_{vi} (με συνιστώσες (F_{v1}, F_{v2}, F_{v3})) στο καθολικό σύστημα συντεταγμένων $Ox_1x_2x_3$. Η F_{vi} υποτίθεται πως είναι μια γνωστή συνάρτηση των συντεταγμένων x_i των σημείων του σώματος και του χρόνου t . Υποθέτουμε ακόμα ότι, το τμήμα S_σ της συνολικής επιφάνειας φορτίζεται με δοσμένη κατανομή επιφανειακών φορτίων $t_{ni}(x_i)$ ενώ στο υπόλοιπο τμήμα s_u ($S_\sigma \cup s_u = S$) οι μετατοπίσεις $u_i(x_i, t)$ των σημείων της επιφάνειας είναι γνωστές συναρτήσεις $g_i(x_i, t)$, δηλαδή, $g_i = u_i ; x \in S_u$.



Εικόνα 2.1 Τύποι φόρτισης ενός σώματος όγκου V : **A)** Κατανομή μαζικών δυνάμεων F_{vi} , **B)** Κατανομή επιφανειακών φορτίων $t_{ni}(x_i)$ στο σύνορο S_σ , **Γ)** Συγκεντρώμενη φόρτιση σε σημείο Λ .

Εξισώσεις Ισορροπίας σώματος: Σε ένα στερεό στο οποίο εξασκείται ένα σύστημα εξωτερικών δυνάμεων (καθολικών, επιφανειακών), η εντατική κατάσταση στο εσωτερικό του σώματος μεταβάλλεται από σημείο σε σημείο (υπάρχει χωρική μεταβολή του τασιακού πεδίου και του πεδίου των καθολικών δυνάμεων) με τέτοιο τρόπο ώστε να διατηρείται όχι μόνον η ισορροπία του σώματος αλλά και η ισορροπία του στοιχειώδους τμήματος του.

Θεωρούμε ένα στοιχειώδες παραλληλεπίπεδο σε μια γειτονιά ενός σημείου Λ του συνεχούς μέσου. Το πεδίο τάσεων στις πλευρές του παραλληλεπιπέδου έχει συνεχή μεταβολή εντός του σώματος, συνεπώς μπορούμε να μεταβούμε και να υπολογίσουμε το πεδίο τάσεων από τη μια πλευρά στην άλλη με τη χρήση του αναπτύγματος Taylor:



Εικόνα 2.2 Ανάπτυγμα Taylor των τάσεων σε ένα διαφορικό στοιχείο όγκου.

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_k} dx_k \dots \dots i, j, k = 1, 2, 3.$$

Εξετάζοντας την ισορροπία του σώματος στις 3 διευθύνσεις εξάγονται οι τρεις διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας:

$$d_j \sigma_{jk} + F_{vk} = 0$$

Ο επαναλαμβανόμενος δείκτης j σε περίπτωση διαφορίσης υποδηλώνει, άθροιση (σύμβαση Einstein). Ο ελεύθερος δείκτης k λαμβάνει τιμές 1, 2, 3 (κάθε τιμή του δίνει τις διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας στη κάθε διεύθυνση, οι οποίες πρέπει να ικανοποιούνται σε κάθε σημείο του σώματος).

Στη περίπτωση όπου αγνοούνται οι μαζικές δυνάμεις ($F_{vk} = 0$), η εξίσωση ισορροπίας λαμβάνει τη μορφή:

$$d_j \sigma_{jk} = 0$$

Παραμορφωσιακό Πεδίο εντός του Σώματος και Καταστατικός Νόμος

Το πεδίο μετατοπίσεων είναι μια διανυσματική συνάρτηση των αρχικών συντεταγμένων x_i και

$$\text{γράφεται στη διανυσματική του μορφή: } \mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} u_1(x_1, x_2, x_3) \\ u_2(x_1, x_2, x_3) \\ u_3(x_1, x_2, x_3) \end{bmatrix}$$

Οι συνιστώσες του πεδίου μετατοπίσεων καθώς και οι κλίσεις τους, αποτελούν συνεχείς συναρτήσεις των (x_1, x_2, x_3) . Το πεδίο παραμορφώσεων που αναπτύσσεται εντός του ελαστικού σώματος ορίζεται ως:

$$\varepsilon_{ij}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} * (d_j u_i + d_i u_j),$$

Όπου, i, j ελεύθεροι δείκτες και $d_j u_i$ οι κλίσεις των μετατοπίσεων (τανυστής 3×3).

Οι τάσεις συνδέονται με τις παραμορφώσεις μέσω του καταστατικού νόμου: $\sigma_{ij} = C_{ijkl} * \varepsilon_{kl}$,

Όπου, ο συμμετρικός τανυστής C_{ijkl} αποτελεί το μητρώο ελαστικών σταθερών του υλικού (stiffness matrix). Συνήθως, λόγω απλότητας των όρων, χρησιμοποιείται το μητρώο ενδόσεως S_{ijkl} , το αντίστροφο του μητρώου C_{ijkl} , [$S_{ijkl} = C_{ijkl}^{-1}$], το οποίο συνδέει τις παραμορφώσεις με τις τάσεις:

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} * \sigma_{kl}$$

Για ένα ισότροπο, ομογενές και ελαστικό σώμα ο καταστατικός νόμος δίνεται από τη σχέση:

$$\sigma_{ij} = 2 * \mu * \varepsilon_{ij} + \lambda * \theta * \delta_{ij}$$

Όπου, λ, μ οι σταθερές Lamé οι οποίες συνδέονται με το μέτρο ελαστικότητας και το λόγο Poisson μέσω των σχέσεων:

$$\mu = \frac{E}{2 * (v + 1)} = G, \quad \lambda = \frac{E * v}{(v + 1) * (1 - 2 * v)}$$

Ο όρος θ στη παραπάνω εξίσωση ονομάζεται *αηγημένη διόγκωση*, είναι μία βαθμωτή, χωρικά εξαρτώμενη συνάρτηση και ισούται με το ίχνος του τανυστή των παραμορφώσεων:

$$\theta = \text{tr}(\varepsilon_{ij}) = \varepsilon_{ii} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \text{div}(\mathbf{u}_i) \text{ ή } d_i u_i$$

Τέλος, ο πίνακας δ_{ij} είναι ο γνωστός μοναδιαίος πίνακας I (μητρώο 3×3).

Συνεπώς, σε ένα πρόβλημα ελαστικότητας αν είναι γνωστό το πεδίο των μετατοπίσεων μπορούμε να βρούμε το πεδίο των παραμορφώσεων και εν τέλει, μέσω του καταστατικού νόμου να υπολογίσουμε το πεδίο των τάσεων. Σε περιπτώσεις, όπου το πεδίο μετατοπίσεων είναι άγνωστο, θεωρούμε ένα αυθαίρετο πεδίο μετατοπίσεων (αυθαίρετες συναρτήσεις του \mathbf{x} με συνεχείς παραγώγους) με άγνωστους προσδιοριστέους συντελεστές. Στόχος αποτελεί ο προσδιορισμός των συντελεστών του

αυθαίρετου αυτού πεδίου μετατοπίσεων. Σε τέτοιες περιπτώσεις προχωράμε στη χρήση ενεργειακών μεθόδων.

Ελαστική Ενέργεια Σώματος: Η ενέργεια ανά μονάδα όγκου που αποθηκεύει ένα ελαστικό σώμα, ονομάζεται πυκνότητα τροπικής ενέργειας και δίνεται από το γινόμενο του τασικού πεδίου με το πεδίο παραμόρφωσης σε ένα τυχαίο σημείο \mathbf{x} εντός του σώματος. Ολοκληρώνοντας τη πυκνότητα τροπικής ενέργειας στον όγκο του σώματος, λαμβάνεται η ολική ελαστική ενέργεια που αποθηκεύει το σώμα:

$$U_{el} = \int \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV$$

Ισοζύγιο ενέργειας: Επειδή το σώμα είναι γραμμικά ελαστικό, δεν υπάρχουν απώλειες ενέργειας (για παράδειγμα με τη μορφή θερμότητας, όπως συμβαίνει σε ένα πλαστικό ή βιαιοελαστικό υλικό – όπου το υλικό ρέει με το χρόνο). Συνεπώς, το έργο που παράγεται από τα επιφανειακά φορτία, αποθηκεύεται πλήρως εντός του σώματος.

Το έργο των εξωτερικών δυνάμεων ισούται με το άθροισμα των έργων των επιφανειακών και των μαζικών δυνάμεων:

$$W_{ext} = \int t_{ni} * u_i * ds + F_i * u_i + \int F_{vi} * u_i * dV$$

- ✓ $\int t_{ni} * u_i * ds$, το έργο των κατανεμημένων δυνάμεων στο σύνορο S_s του σώματος
- ✓ $F_i * u_i$, το έργο των συγκεντρωμένων δυνάμεων σε τυχαίο σημείο A του σώματος
- ✓ $\int F_{vi} * u_i * dV$, το έργο των μαζικών δυνάμεων. (F_{vi} σε $[\frac{Nt}{m^3}]$)

Από το ισοζύγιο ενέργειας λαμβάνεται η σχέση:

$$\int t_{ni} * u_i * ds + F_i * u_i + \int F_{vi} * u_i * dV = \int \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV$$

Αρχή Δυνατών έργων: Η έννοια της αρχής των δυνατών έργων εισάγεται στη Μηχανική του απολύτως στερεού σώματος για να μελετήσουμε κυρίως τη στατική του ισορροπία. Δυνατό έργο είναι το έργο που πραγματοποιείται από πραγματικές δυνάμεις, όταν στο σώμα επιβάλλονται αυθαίρετες δυνατές μετατοπίσεις. Ο όρος δυνατή μετατόπιση σημαίνει, πως η μετατόπιση είναι μικρή, αυθαίρετη, φανταστική που υπακούει όμως στις εξισώσεις συνδέσμων. Η δυνατή μετατόπιση συμβολίζεται με \mathbf{u}^* , όπου ο αστερίσκος υποδηλώνει πως η μετατόπιση είναι δυνατή και όχι πραγματική. Επιβάλλοντας σε ένα φορέα μια κινηματικά αποδεκτή μεταβολή των μετατοπίσεων \mathbf{u}^* , η οποία δεν προκαλεί μεταβολή των τάσεων σ_{ij} , προκαλούνται οι δυνατές τροπές $\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^*$. Το δυνατό έργο που παράγεται από τις πραγματικές δυνάμεις $W^* = \int t_{ni} * u_i^* * ds + F_i * u_i^*$, ισούται με τη δυνατή τροπική ενέργεια που αναπτύσσεται εντός του υλικού: $U^* = \int \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* dV$.

Ένα σώμα, λέμε πως βρίσκεται σε ευσταθή ισορροπία αν μετά την επιβολή μιας δυνατής μετατόπισης έχει τη τάση να επανέλθει στην αρχική του κατάσταση. Στη κατάσταση αυτή η δυναμική ενέργεια του σώματος παρουσιάζει ελάχιστο και σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση έχουμε ασταθή ισορροπία. Συνεπώς, κριτήριο ευστάθειας της ισορροπίας ενός σώματος είναι η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας, λόγω μιας πρόσθετης κινηματικής παραδεκτής μετατόπισης, να είναι θετική.

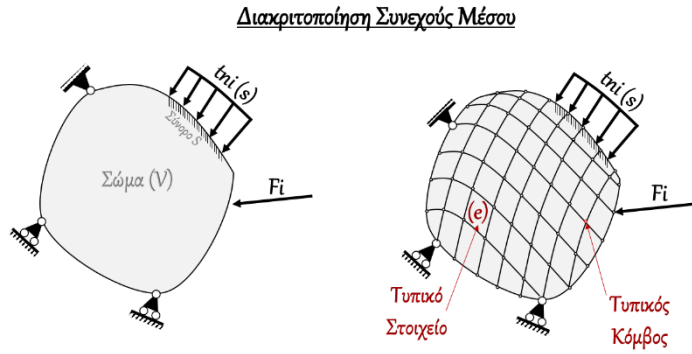
[2.2]

Ανασκόπηση στη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων

Με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, η κατασκευή υποδιαιρείται με τη βοήθεια ιδεατών γραμμών ή επιφανειών σε έναν αριθμό στοιχείων. Τα στοιχεία συνδέονται μεταξύ τους με διακριτά σημεία τους κόμβους. Σε κάθε κόμβο του κάθε στοιχείου αντιστοιχεί ένας αριθμός κομβικών παραμέτρων. Οι κομβικές παράμετροι είναι γενικευμένες μετατοπίσεις (μετατοπίσεις και οι παράγωγοι τους).

Για τη περίπτωση ενός 2D προβλήματος, σε κάθε κόμβο του κάθε πεπερασμένου στοιχείου, αντιστοιχούν δύο βαθμοί ελευθερίας, η οριζόντια και η κατακόρυφη μετατόπιση αυτού. (Στη περίπτωση στοιχείων δοκού αντιστοιχεί και ένας ακόμα βαθμός ελευθερίας, η στροφή του κόμβου περί τον άξονα κάθετα στο επίπεδο που ορίζεται το πρόβλημα.)

Συνεπώς, σε κάθε στοιχείο οι βαθμοί ελευθερίας του, είναι ίσοι με το διπλάσιο του αριθμού των κόμβων του. Οι δυνάμεις που ασκούνται στους κόμβους του στοιχείου (διάνυσμα στήλη 2*αριθμό κόμβων – αμελούνται οι ροπές) συνδέονται με τις αντίστοιχες μετατοπίσεις αυτών μέσω του μητρώου δυσκαμψίας του στοιχείου K_e .



Εικόνα 2.3 Διακριτοποίηση του συνεχούς μέσου σε πεπερασμένα στοιχεία.

$$[K_e] * [U_e] = [F_e]$$

Ο υπολογισμός του μητρώου ακαμψίας του στοιχείου βασίζεται στην εφαρμογή της αρχής των δυνατών έργων και για ένα επίπεδο στοιχείο δίνεται από τη σχέση:

$$K_e = t \iint B e_{(x,y)}^T * D * B e_{(x,y)} dx dy$$

Όπου,

✓ $D = \frac{E}{1-\nu^2} * \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$, το σταθερό μητρώο ελαστικότητας του στοιχείου (συνδέει τις

τάσεις με τις αντίστοιχες παραμορφώσεις)

✓ $B e_{(x,y)}$, το μητρώο των παραγώγων των συναρτήσεων μορφής του στοιχείου, διαστάσεων [3, 2*αριθμός κόμβων στοιχείου].

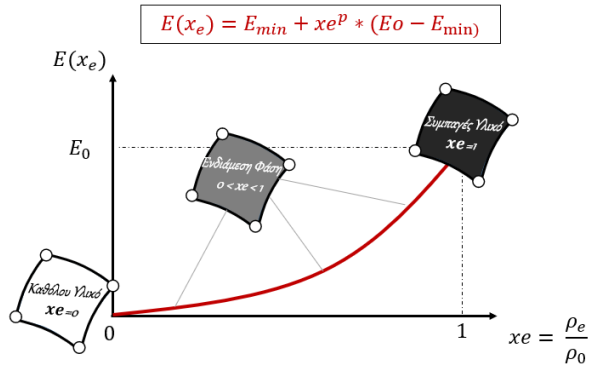
Υπομιμίζεται πως το μητρώο δυσκαμψίας του στοιχείου, υπολογίζεται στο καθολικό σύστημα συντεταγμένων (x, y). Το παραπάνω ολοκλήρωμα, μέσω κατάλληλου μετασχηματισμού των συντεταγμένων, από το καθολικό σύστημα στο φυσικό σύστημα (αδιάστατο σύστημα συντεταγμένων στο μέσον του στοιχείου), υπολογίζεται με χρήση των σημείων Gauss.

[2.3] Εισαγωγή στη Βελτιστοποίηση Τοπολογίας – Παρουσίαση της Μεθόδου SIMP

Σκοπός της διαδικασίας βελτιστοποίησης τοπολογίας, αποτελεί η εύρεση του βέλτιστου όγκου της κατασκευής προκειμένου αυτή να φέρει με ασφάλεια τις επιβαλλόμενες φορτίσεις. Αναζητείται δηλαδή, ο ελάχιστος δυνατός όγκος που δύναται να λάβει η κατασκευή χωρίς να υπάρξει αστοχία αυτής. Συνεπώς, μεταβλητή σχεδιασμού του προβλήματος αποτελεί η πυκνότητα της κατασκευής ή διαφορετικά, η πυκνότητα των πεπερασμένων στοιχείων στα οποία διακριτοποιείται.

Στη παρούσα μέθοδο θεωρείται πως το μέτρο ελαστικότητας του σώματος είναι μια συνεχής συνάρτηση μιας αδιάστατης ποσότητας που ονομάζεται σχετική πυκνότητα x_e . Το x_e ορίζεται ως ο λόγος της υπάρχουσας πυκνότητας του στοιχείου ως προς τη πυκνότητα αυτού όταν είναι συμπαγές, και λαμβάνει τιμές από 0 (όταν απουσιάζει υλικό) έως 1 (όταν η πυκνότητα του στοιχείου ταυτίζεται με αυτή του συμπαγούς υλικού).

Η σχέση μεταβολής του μέτρου ελαστικότητας συναρτήσει της σχετικής πυκνότητας του στοιχείου δίνεται στην Εικόνα 2.4.



Εικόνα 2.4 Μεταβολή του μέτρου ελαστικότητας συναρτήσει της σχετικής πυκνότητας x_e του στοιχείου (Προσέγγιση από power law εξίσωση).

Η παράμετρος p θεωρείται σταθερά στο πρόβλημα και λαμβάνει τιμές $p \geq 3$. Για τιμή του $p = 1$, το μέτρο ελαστικότητας μεταβάλλεται γραμμικά με το x_e και επειδή το x_e λαμβάνει τιμές στο εύρος $[0, 1]$ οι μεταβολές που παρουσιάζει είναι πιο απότομες σε σχέση με αυτές που θα παρουσίαζε για υψηλότερες τιμές του p . Υπογραμμίζεται επίσης πως για $x_e \cong 0$ η τιμή του μέτρου ελαστικότητας δεν ισούται με μηδέν αλλά, προς αποφυγή προβλημάτων απειρισμού στο κώδικα, λαμβάνει τιμές της τάξης του 10^{-9} . Για $x_e = 1$, το μέτρο ελαστικότητας ισούται με το μέτρο ελαστικότητας του συμπαγούς υλικού, E_0 .

Πλέον, το μητρώο δυσκαμψίας του στοιχείου εκφράζεται συναρτήσει της σχετικής του πυκνότητας:

$$Ke(x_e) = t * \iint Be^T * D(x_e) * Be * |J| * d\xi * d\eta$$

Όπου,

$$Be(x, y) = \begin{bmatrix} dN_1/dx & 0 & dN_2/dx & 0 & dN_4/dx & 0 \\ 0 & dN_1/dy & 0 & dN_2/dy & \dots & 0 & dN_4/dy \\ dN_1/dy & dN_1/dx & dN_2/dy & dN_2/dx & dN_4/dy & dN_4/dx \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} d/d\xi \\ d/d\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dx/d\xi & dy/d\xi \\ dx/d\eta & dy/d\eta \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} d/dx \\ d/dy \end{bmatrix}$$

Ιακωβιανή J

$$\begin{bmatrix} d/dx \\ d/dy \end{bmatrix} = Inv(J) * \begin{bmatrix} d/d\xi \\ d/d\eta \end{bmatrix}$$

$$Inv(J) * \begin{bmatrix} dN_1/dx & dN_2/dx & dN_3/dx & dN_4/dx \\ dN_1/dy & dN_2/dy & dN_3/dy & dN_4/dy \end{bmatrix}$$

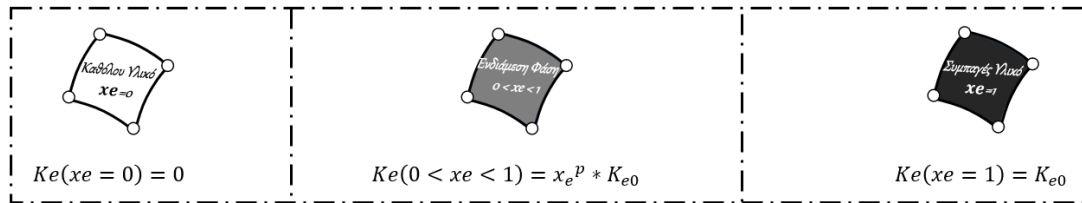
Εικόνα 2.5 Μετασχηματισμός του μητρώου παραγώγων των συναρτήσεων μορφής από το καθολικό σύστημα (x, y) στο φυσικό σύστημα συντεταγμένων (ξ, η) , μέσω του ιακωβιανού μητρώου.

✓ $D(x_e) = x_e^p * \frac{E_0}{1-\nu^2} * \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$, το μητρώο ελαστικών σταθερών για την επίπεδη εντατική

κατάσταση συναρτήσει της σχετικής πυκνότητας του στοιχείου.

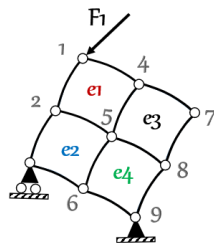
- ✓ $Be(\xi, \eta)$, το μητρώο παραγώγων των συναρτήσεων μορφής του γραμμικού στοιχείου (γραμμικές συναρτήσεις μορφής ως προς x, y). Το μητρώο Be εκφράζεται στο φυσικό σύστημα συντεταγμένων (ξ, η) στο κέντρο του στοιχείου. Η διαδικασία μετασχηματισμού του μητρώου από το καθολικό σύστημα συντεταγμένων (x, y) στο φυσικό σύστημα συντεταγμένων (ξ, η) , παρουσιάζεται στην Εικόνα 2.5. Το ιακωβιανό μητρώο J αντιστοιχεί τις παραγώγους εκφρασμένες ως προς το φυσικό σύστημα συντεταγμένων με τις αντίστοιχες ως προς το καθολικό σύστημα συντεταγμένων.

Συνοπώς το μητρώο ακαμψίας του κάθε στοιχείου είναι συνάρτηση της σχετικής πυκνότητας αυτού. Όταν δεν υπάρχει υλικό ($x_e = 0$), το στοιχείο δεν συμβάλλει στη δυσκαμψία της κατασκευής και το $K_e = 0$. Όταν το στοιχείο είναι συμπαγές τότε η σχετική πυκνότητα ισούται με μονάδα και $K_e = K_{e0}$, ενώ σε ενδιάμεσες τιμές η ακαμψία του στοιχείου δίνεται από τη σχέση $Ke(x_e) = x_e^p * K_{e0}$.



Εικόνα 2.6 Έκφραση του μητρώου δυσκαμψίας συναρτήσει της σχετικής πυκνότητας του στοιχείου. Για τιμή σχετικής πυκνότητας ίση με το μηδέν, είναι μηδενικό, για τιμές στο εύρος (0, 1) εκφράζεται από μια power law συνάρτηση ενώ για τιμές ίσες με τη μονάδα ισούται με αυτό του συμπαγούς υλικού.

Η σχετική πυκνότητα x_{ei} διαφέρει από στοιχείο σε στοιχείο. Άλλη σχετική πυκνότητα θα εμφανίζει ένα στοιχείο (e_1) - x_{e1} - και άλλη θα εμφανίζει ένα στοιχείο (e_2) - x_{e2} -. Στην Εικόνα 2.7, τα τέσσερα



$Ke(x_{e1}) = x_{e1}^p * K_{e0}$
 $Ke(x_{e2}) = x_{e2}^p * K_{e0}$
 $Ke(x_{e3}) = x_{e3}^p * K_{e0}$
 $Ke(x_{e4}) = x_{e4}^p * K_{e0}$

στοιχεία έχουν διαφορετική σχετική πυκνότητα το καθένα με αποτέλεσμα να συμβάλλουν διαφορετικά το καθένα στη δυσκαμψία της κατασκευής. Οι σχετικές πυκνότητες των στοιχείων είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους μεταβλητές και δύνανται να παρουσιαστούν ως ένα διάνυσμα στήλη διαστάσεων: [Αριθμός στοιχείων κατασκευής, 1] ή

$$x_e = [x_{e1}, x_{e2}, \dots, x_{en}]^T$$

Εικόνα 2.7 Κάθε πεπερασμένο στοιχείο έχει δική του σχετική πυκνότητα και, συνεπώς μητρώο δυσκαμψίας.

Στο κάθε στοιχείο η ελαστική ενέργεια που αποθηκεύεται ισούται με:

$$C_e = U_e^T * Ke(x_e) * U_e = x_e^p * U_e^T * K_{e0} * U_e.$$

Συνοπώς, η ολική ελαστική ενέργεια που αποθηκεύει η κατασκευή ισούται με το άθροισμα των ενεργειών που αποθηκεύει το κάθε στοιχείο:

$$C(x_{e1}, x_{e2}, \dots, x_{en}) = \sum_{i=1}^n U_{ei}^T * Ke(x_{ei}) * U_{ei}$$

Όπου n ο αριθμός των πεπερασμένων στοιχείων της κατασκευής.

Σκοπός της διαδικασίας βελτιστοποίησης τοπολογίας αποτελεί η εύρεση των κατάλληλων τιμών x_{ei} τα οποία ελαχιστοποιούν την αντικειμενική συνάρτηση $C(x_{e1}, x_{e2}, \dots, x_{en})$. Το πρόβλημα βελτιστοποίησης τοπολογίας της αντικειμενικής συνάρτησης τοποθετείται ως εξής:

$$\min \int \sigma_{ij} * \varepsilon_{ij} * dV \quad \text{ή} \quad \min \sum_{i=1}^n U_{ei}^T * Ke(x_{ei}) * U_{ei}$$

Τη μεταβλητή σχεδιασμού αποτελεί το διάνυσμα των σχετικών πυκνοτήτων των στοιχείων της κατασκευής x_e .

Περιορισμοί Προβλήματος Βελτιστοποίησης:

- Συνθήκη ισορροπίας σώματος: $[K] * [U] = [F]$
- Κριτήριο όγκου: $\frac{\text{Επιθυμητός Τελικός Όγκος}}{\text{Αρχικός Όγκος}} = \text{volfrac}$
- Εύρος Μεταβλητών Σχεδιασμού: Η ελάχιστη τιμή που λαμβάνει το διάνυσμα σχετικών πυκνοτήτων ισούται με μηδέν. Ωστόσο, προκειμένου να αποφευχθούν προβλήματα απειρισμού ως ελάχιστη τιμή θεωρείται ένας πολύ μικρός αριθμός π.χ 10^{-6} . Η μέγιστη τιμή που μπορεί να λάβει η σχετική πυκνότητα του στοιχείου ισούται με μονάδα, όποτε και το υλικό είναι πλέον συμπαγές.

$$\begin{array}{l} \text{Περιορισμοί} \left\{ \begin{array}{l} \min C(x_{e1}, x_{e2}, \dots, x_{en}) = \min \sum_{i=1}^n U_{ei}^T * Ke(x_{ei}) * U_{ei} \\ \text{A]} \quad \square [K] * [u] = [F] \\ \text{B]} \quad \square \frac{V_{new}}{V_o} = \text{volfrac} \\ \text{C]} \quad \square \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right) \\ x_{emin} = 1e-3 \leq \left(\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right) x_e \leq \left(\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right) x_{emax} = 1 \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array}$$

Εικόνα 2.8 Τοποθέτηση του προβλήματος βελτιστοποίησης τοπολογίας με τους αντίστοιχους περιορισμούς.

Η διαδικασία προσδιορισμού των μεταβλητών σχεδιασμού x_e οι οποίες ελαχιστοποιούν την αντικειμενική συνάρτηση, είναι μια επαναληπτική διαδικασία, η οποία τερματίζεται μέχρι το σφάλμα προσέγγισης ανάμεσα σε δύο διαδοχικές επαναλήψεις να γίνει μικρότερο ή ίσο μιας επιτρεπτής τιμής (tolerance) $\varepsilon_k = \max(|x_{e_{k+1}} - x_{e_k}|)$, όπου k ο αριθμός επανάληψης. Το x_{e_k} , υπενθυμίζεται πως είναι διάνυσμα στήλη, ενώ το ε_k απλός αριθμός.

[2.4] Μέθοδοι Επίλυσης του Προβλήματος Βελτιστοποίησης (Περιγραφή των Μεθόδων OC & MMA)

Από όλους τους διαθέσιμους αλγορίθμους που υπάρχουν στη βιβλιογραφία, πιο ευρεία χρήση παρουσιάζει η OC method (Optimality Criteria). Το στοιχείο που κάνει ελκυστική τη συγκεκριμένη μέθοδο είναι η απλότητα, η ταχύτητα και η ακρίβεια στη λύση που παρουσιάζει καθώς και η δυνατότητα εφαρμογής της όχι μόνο σε προβλήματα βελτιστοποίησης τοπολογίας αλλά και σε πολλούς άλλους κλάδους της μηχανικής.

[2.4.1] Περιγραφή της Μεθόδου OC

Σε αρχικό στάδιο κατασκευάζεται η Lagrangian συνάρτηση του προβλήματος:

$$L = C(x_{e1}, x_{e2}, \dots, x_{en}) + \lambda * (V - \text{volfrac} * V_0) + \lambda_1^T * (K * u - F) + \sum_{e=1}^N \lambda_{2e} * (x_{min} - x_e) + \sum_{e=1}^N \lambda_{3e} * (x_e - x_{max}) \dots \dots \dots [1]$$

Όπου λ, λ_1^T οι πολλαπλασιαστές Lagrange των περιορισμών του όγκου και ισορροπίας του σώματος αντίστοιχα. Παρατηρείστε πως ο πολλαπλασιαστής Lagrange του περιορισμού της ισορροπίας του σώματος λ_1^T είναι διάνυσμα διαστάσεων όσοι οι βαθμοί ελευθερίας του σώματος. $\lambda_{2e}, \lambda_{3e}$ είναι οι πολλαπλασιαστές Lagrange των κατώτατων και ανώτατων ορίων των μεταβλητών σχεδιασμού αντίστοιχα.

Οι βέλτιστες τιμές της συνάρτησης Lagrange εντοπίζονται όταν οι παράγωγος αυτής ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού γίνει ίση με μηδέν:

$$\frac{dL}{dx_e} = 0, \quad \text{για } e = 1, \dots, N \dots \dots \dots [2]$$

ή

$$\frac{dL}{dx_e} = \frac{dC}{dx_e} + \lambda * \frac{dV}{dx_e} + \lambda_1^T * \frac{d(K * u)}{dx_e} + \lambda_{3e} - \lambda_{2e} = 0 \dots \dots \dots [3]$$

Κάνοντας τη παραδοχή πως οι περιορισμοί των ανώτατων και κατώτατων ορίων των μεταβλητών σχεδιασμού δεν είναι ενεργοί, ($\lambda_{3e} = \lambda_{2e} = 0$) και πως οι εξωτερικές φορτίσεις είναι ανεξάρτητες των μεταβλητών σχεδιασμού ($\frac{dF}{dx_e} = 0$), η σχέση [3] γίνεται:

$$\frac{dL}{dx_e} = \frac{dC}{dx_e} + \lambda * \frac{dV}{dx_e} + \lambda_1^T * \frac{d(K * u)}{dx_e} = 0 \dots \dots \dots [4]$$

Όπου, $\frac{dC}{dx_e} = \frac{d(u^T * K * u)}{dx_e} = \frac{d(u^T)}{dx_e} * K * u + u^T * \frac{dK}{dx_e} * u + u^T * K * \frac{du}{dx_e} \dots \dots \dots [5]$

$$\frac{d(K * U)}{dx_e} = K * \frac{du}{dx_e} + \frac{d(K)}{dx_e} * u \dots \dots \dots [6]$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις [5] και [6] στη σχέση [4], αυτή λαμβάνει τη μορφή:

$$\frac{dL}{dx_e} = u^T \frac{dK}{dx_e} u + \lambda \frac{dV}{dx_e} + \lambda_1^T * \frac{dK}{dx_e} + \frac{du}{dx_e} (2u^T K + \lambda_1^T K) \dots \dots \dots [7]$$

Επειδή ο πολλαπλασιαστής λ_1^T είναι αυθαίρετος, επιλέγεται κατάλληλα ώστε η παραπάνω σχέση να απλοποιείται σημαντικά. Θέτοντας $\lambda_1^T = -2u^T$ οι όροι που πολλαπλασιάζουν οι παράγωγοι των μετατοπίσεων του στοιχείου μηδενίζονται ($(2u^T K + \lambda_1^T K) = 0$). Τελικά, η παράγωγος της συνάρτησης Lagrange απλοποιείται στη τελική μορφή:

$$\frac{dL}{dx_e} = -u^T \frac{dK}{dx_e} u + \lambda \frac{dV}{dx_e} = 0 \dots \dots \dots [8]$$

✓ Παράγωγος Μητρώου Δυσκαμψίας $\frac{dK}{dx_e}$: Το μητρώο δυσκαμψίας K_e εκφράζεται

συναρτήσει της σχετικής πυκνότητας του στοιχείου μέσω του μητρώου ελαστικότητας $D(x_e)$. Ο όρος x_e^p που πολλαπλασιάζει το μητρώο ελαστικότητας βγαίνει εκτός του διπλού ολοκληρώματος, εφόσον είναι ανεξάρτητος των φυσικών συντεταγμένων ξ, η του στοιχείου και το μητρώο δυσκαμψίας γράφεται στη μορφή:

$$K_e(x_e) = x_e^p * \iint B e^T * D * B e * |J| * d\xi * d\eta = x_e^p * K_{e0}$$

Όπου, K_{e0} το μητρώο δυσκαμψίας του στοιχείου όταν αυτό είναι συμπαγές ($x_e = 1$). Δηλαδή, στην ίδια power law μορφή που εκφράζεται το μητρώο ελαστικότητας του στοιχείου εκφράζεται και το μητρώο δυσκαμψίας του.

Συνεπώς, η παράγωγος του μητρώου δυσκαμψίας ισούται με: $\frac{dK}{dx_e} = p * x_e^{p-1} * K_{e0}$

✓ Παράγωγος Περιορισμού Όγκου $\frac{dF}{dx_e}$: Προκειμένου να εξεταστεί ο όρος $\frac{dV}{dx_e}$, αναλύουμε

το περιορισμό όγκου. Σκοπός της βελτιστοποίησης τοπολογίας είναι ο τελικός όγκος του σώματος να ισούται με ποσοστό του αρχικού. Το κλάσμα αυτό συμβολίζεται με τη σταθερά $volfrac$. Επειδή το πάχος της κατασκευής δεν αποτελεί μεταβλητή σχεδιασμού (πρόβλημα επίπεδης έντασης), ο παραπάνω περιορισμός μπορεί να εκφραστεί σε όρους εμβαδών, δηλαδή $A = volfrac * A_0$. Συνυπολιζοντας παραδοχές όπως το γεγονός ότι οι διαστάσεις των στοιχείων δεν αλλάζουν καθόλη τη διαδικασία, ο περιορισμός του όγκου λαμβάνει την απλοποιημένη μορφή:

$$\frac{x_{e1} + x_{e2} + x_{e3} + \dots + x_{eN} (= V_{\epsilonπιθυμητό})}{N (= V_{\alpha\rho\chiικό})} = volfrac \Rightarrow$$

$$F = x_{e1} + x_{e2} + x_{e3} + \dots + x_{eN} - N * volfrac = \sum_{i=1}^N x_{ei} - N * volfrac \dots \dots [9]$$

Δηλαδή, στη συνάρτηση Lagrange, παραγωγίζεται ως προς κάθε ανεξάρτητη μεταβλητή x_e η σχέση $\frac{dF}{dx_e} = \frac{d(\sum_{i=1}^N x_{ei} - V_0 * volfrac)}{dx_e}$. Όμως, ο αρχικός όγκος του σώματος είναι σταθερός και συνεπώς κάθε

όρος $\frac{dF}{dx_{ei}}$ ισούται με $\frac{dx_{ej}}{dx_{ei}} = \delta_{ij}$.

Τελικά, η παράγωγος της συνάρτησης Lagrange γράφεται στη μορφή:

$$\frac{dL}{dx_e} = -u^T \frac{dK}{dx_e} u + \lambda \frac{dV}{dx_e} = 0 \Leftrightarrow \frac{dL}{dx_e} = -p * x_e^{p-1} * u_e^T * K_{e0} * u_e + \lambda = 0 \dots \dots [10]$$

Η ανανέωση των μεταβλητών σχεδιασμού γίνεται βάσει της μεθόδου OC:

$$x_e^{k+1} = x_e^k * \left(\frac{p * x_e^{p-1} * u_e^T * K_{e0} * u_e}{\lambda} \right)^\zeta = x_e^k * (B_e^k)^\zeta \dots \dots [11]$$

Όπου ζ είναι μια σταθερά απόσβεσης η οποία λαμβάνει τιμές στο εύρος 0 έως 1 (Συνήθως επιλέγεται ίσο με 0.5). Εισάγεται επίσης ένα θετικός όρος μετακίνησης m , προκειμένου να

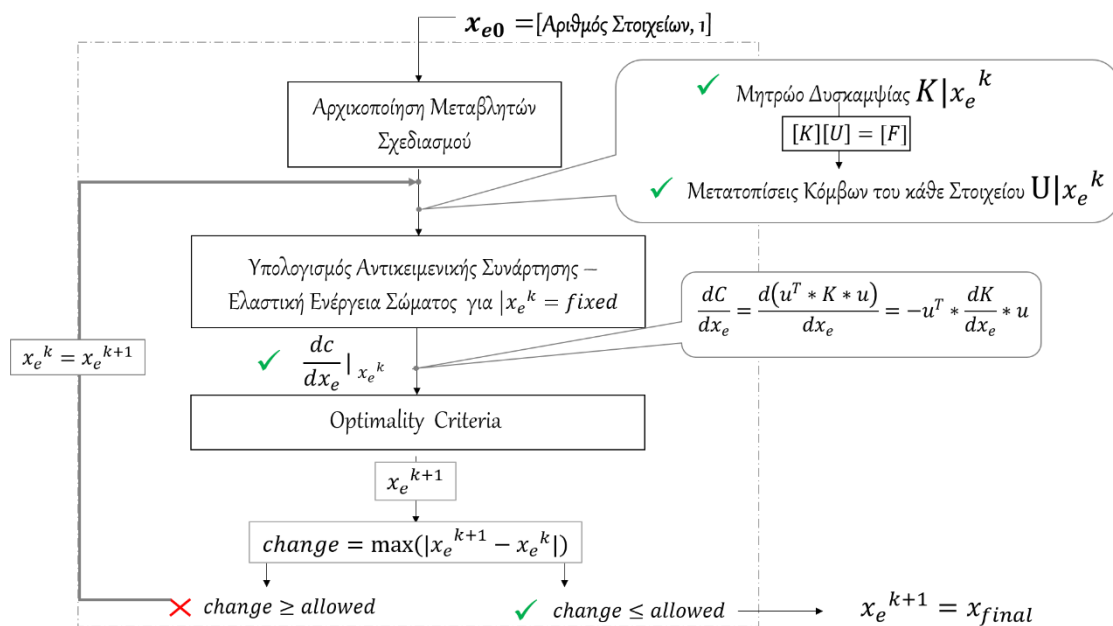
σταθεροποιείται η επανάληψη (εξασφαλίζεται δηλαδή πως δεν θα παρουσιάζονται απότομες μεταβολές στη τιμή της σχετική πυκνότητα ανάμεσα σε δύο διαδοχικές επαναλήψεις – π.χ το στοιχείο δεν θα μεταπίπτει από συμπαγές σε κενό).

Η επαναληπτική μέθοδος εκφράζεται μαθηματικά ως εξής:

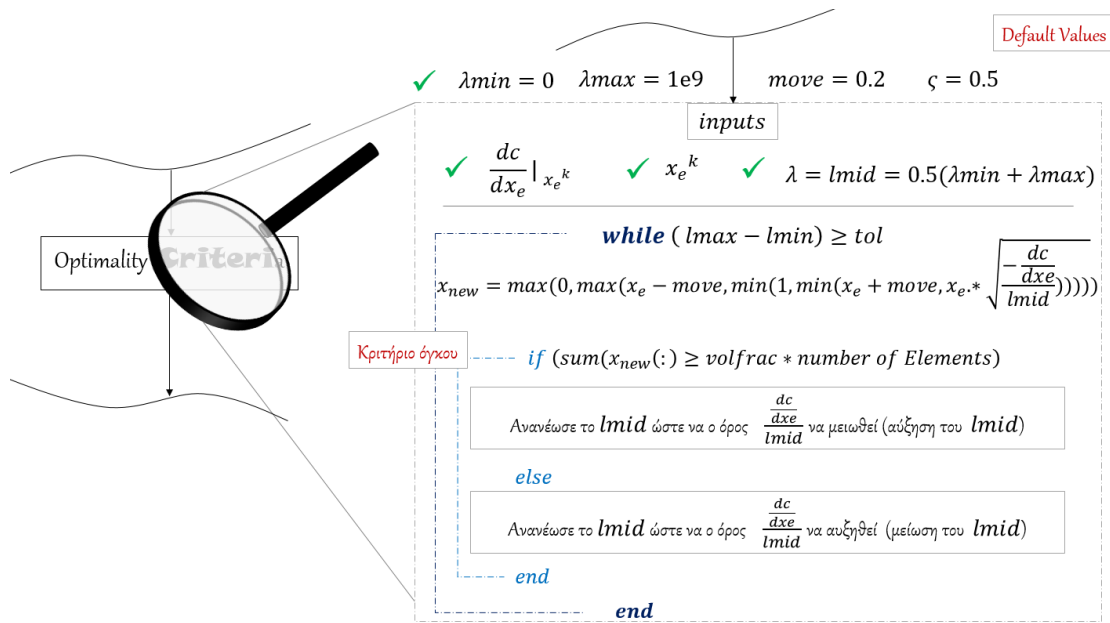
$$x_e^{k+1} = \begin{cases} \max(x_{min}, x_e^k - m) & \text{if } x_e^k (B_e^k)^\varsigma \leq \max(x_{min}, x_e^k - m) \\ x_e^k (B_e^k)^\varsigma & \text{if } \max(x_{min}, x_e^k - m) < x_e^k (B_e^k)^\varsigma < \min(1, x_e^k + m) \dots \dots [12] \\ \min(1, x_e^k + m) & \text{if } x_e^k (B_e^k)^\varsigma \geq \min(1, x_e^k + m) \end{cases}$$

Επισημαίνεται πως μεταβλητή στο παραπάνω πρόβλημα αποτελεί ο πολλαπλασιαστής Lagrange λ , ο οποίος μέσα σε ένα εσωτερικό βρογχο αναενώνεται συνεχώς ώστε να ικανοποιείται το κριτήριο του όγκου (με χρήση της μεθόδου διχοτόμησης). Οι προεπιλεγμένες τιμές που έχουν επιλεγεί ως είσοδο για την OC μέθοδο είναι η παράμετρος κίνησης m (move limit = 0.2), η παράμετρος απόσβεσης ($\varsigma = 0.5$, δηλαδή, $\sqrt{(B_e^k)}$) και οι ακραίες τιμές της παραμέτρου λ .

Το διάγραμμα ροής της μεθόδου OC παρουσιάζεται στην Εικόνα 2.8b.



Εικόνα 2.8a Διάγραμμα ροής της μεθόδου SIMP.



Εικόνα 2.8b Αλγόριθμος εκτέλεσης της OC μεθόδου στο Matlab.

[2.4.2] Περιγραφή της Μεθόδου MMA

Για απλά προβλήματα βελτιστοποίησης, με μικρό αριθμό μεταβλητών σχεδιασμού, η μέθοδος OC αποτελεί τη πιο γρήγορη, εύκολη και υψηλής ακριβείας λύση. Ωστόσο, στη περίπτωση πιο σύνθετων προβλημάτων, δεν επαρκεί και υστερείται ακριβείας των αποτελεσμάτων.

Το κενό αυτό έρχεται να καλύψει η Μέθοδος των Κινούμενων Ασυμπτώτων (Svanberg, 1987), γνωστή και ως MMA, η οποία έχει αποδειχθεί ως πλέον κατάλληλη για προβλήματα βελτιστοποίησης μεγάλης κλίμακας. Σε περιπτώσεις προβλημάτων πολλών μεταβλητών, η μέθοδος MMA παρουσιάζει υψηλή ακριβεία, υστερείται ωστόσο αρκετά σε θέμα ταχύτητας. Στη Μέθοδο των Κινούμενων Ασυμπτώτων, η προσέγγιση μιας αντικειμενικής συνάρτησης F , n μεταβλητών ($\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$) γύρω από δοσμένο σημείο \mathbf{x}_0 ($x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}$) δίνεται από τη σχέση:

$$F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{r_i}{U_i - x_i} + \frac{s_i}{x_i - L_i} \right)$$

Όπου οι τιμές r_i και s_i επιλέγονται ως εξής:

- Αν $\frac{dF}{dx_i}(\mathbf{x}_0) > 0$, τότε $r_i = (U_i - x_{0i})^2 * \frac{dF}{dx_i}(\mathbf{x}_0)$ & $s_i = 0$

$$\Rightarrow F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^n \frac{(U_i - x_{0i})^2}{U_i - x_i} * \frac{dF}{dx_i}(\mathbf{x}_0)$$

- Αν $\frac{dF}{dx_i}(\mathbf{x}_0) < 0$, τότε $s_i = -(x_{0i} - L_i)^2 * \frac{dF}{dx_i}(\mathbf{x}_0)$ & $r_i = 0$

$$\Rightarrow F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}_0) - \sum_{i=1}^n \frac{(x_{0i} - L_i)^2}{x_i - L_i} * \frac{dF}{dx_i}(\mathbf{x}_0)$$

Όπου, U_i και L_i είναι τα ανώτερα και κατώτερα όρια των μεταβλητών σχεδιασμού: $L_i \leq x_i \leq U_i$.

Σκοπός της παρούσης ενότητας δεν αποτελεί η παρουσίαση της θεωρίας στην οποία βασίζεται η μέθοδος MMA, αλλά το πως αυτή μεταφράζεται υπολογιστικά, δηλαδή, ποιά μεγέθη απαιτούνται για την εφαρμογή της στο πρόβλημα βελτιστοποίησης. Για πιο λεπτομερή ανάλυση της μεθόδου ο αναγνώστης προτρέπεται να μελετήσει την [9].

Η μέθοδος MMA επιλύει το παρακάτω πρόβλημα βελτιστοποίησης:

$$\begin{aligned} \min \quad & f_0(\mathbf{x}) + a_0(z) + \sum_{i=1}^m c_i y_i + \frac{1}{2} d_i y_i^2 \\ \text{s.t} \quad & f_i(\mathbf{x}) - a_i z - y_i \leq 0 \quad i = 1 \dots m \\ & x_j^{\min} \leq x_j \leq x_j^{\max} \quad j = 1 \dots n \\ & y_i \geq 0 \\ & z \geq 0 \end{aligned}$$

Στη παραπάνω σχέση, η συνάρτηση $f_0(\mathbf{x})$ αποτελεί την αντικειμενική συνάρτηση, η συνάρτηση $f_i(\mathbf{x})$ αντιπροσωπεύει τις m συναρτήσεις περιορισμού που δεσμεύουν το πρόβλημα. Το διάνυσμα των μεταβλητών σχεδιασμού \mathbf{x} ανανεώνεται, χρησιμοποιώντας τις θετικές μεταβλητές βελτιστοποίησης \mathbf{y}, \mathbf{z} . Οι παράμετροι a_0, a_i, c_i και d του προβλήματος, ονομάζονται μαγικοί αριθμοί (magic numbers) και αναλόγως του προβλήματος βελτιστοποίησης που μελετάται, λαμβάνουν προκαθορισμένες τιμές. Για τη περίπτωση προβλημάτων βελτιστοποίησης, ο συγγραφέας προτείνει τιμές των παραμέτρων: $a_0 = 1, a_i = 0, c_i = 1000, d = 0$.

Τελικά, το πρόβλημα βελτιστοποίησης απλοποιείται στην εξής μορφή:

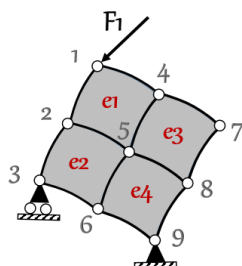
$$\begin{aligned} \min \quad & c(\mathbf{x}) \\ \text{s.t} \quad & f_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1 \dots m \\ & x_j^{\min} \leq x_j \leq x_j^{\max}, \quad j = 1 \dots n \end{aligned}$$

Αξίζει να σημειωθεί πως η μέθοδος MMA κάνει χρήση των δευτέρων παραγώγων της αντικειμενικής συνάρτησης και του περιορισμού ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού. Συνεπώς, υπολογίζονται τα διανύσματα $\frac{d^2(u^T * K * u)}{dx_{ei}^2}, \frac{d^2(\sum_{i=1}^N x_{ei} - V_o * volfrac)}{dx_{ei}^2}$.

[2.4.3] Εισαγωγικό Παράδειγμα Βελτιστοποίησης Τοπολογίας

Έστω σώμα το οποίο διακριτοποιείται σε τέσσερα πεπερασμένα στοιχεία. Στον κόμβο 1, εφαρμόζεται τυχαία δύναμη F_1 . Σκοπός αποτελεί ο υπολογισμός των απαραίτητων σχετικών πυκνοτήτων των στοιχείων που απαιτούνται, προκειμένου το σώμα να αντέξει την επιβαλλόμενη

Παράδειγμα



$$\begin{cases} x_{e1} = ? \\ x_{e2} = ? \\ x_{e3} = ? \\ x_{e4} = ? \end{cases}$$

Αντικειμενική Συνάρτηση

$$\min c(x_{e1}, x_{e2}, x_{e3}, x_{e4}) = \min \sum_{i=1}^4 U_{ei}^T * Ke(x_{ei}) * U_{ei}$$

Περιορισμοί

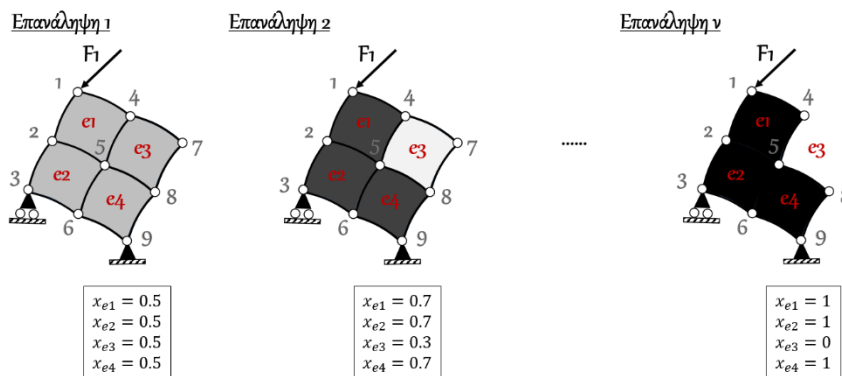
$$\left. \begin{aligned} \text{A)} \quad & [K] * [U] = [F] \\ \text{B)} \quad & \frac{V_{new}}{V_o} = volfrac = \text{γνωστό} \\ \text{C)} \quad & \begin{pmatrix} 1e-3 \\ 1e-3 \\ 1e-3 \\ 1e-3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} x_{e1} \\ x_{e2} \\ x_{e3} \\ x_{e4} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\}$$

Εικόνα 2.9 Παράδειγμα 1: Φόρτιση σώματος που διακριτοποιείται σε τέσσερα πεπερασμένα στοιχεία και το πρόβλημα βελτιστοποίησης τοπολογίας που μελετάται με τους αντίστοιχους περιορισμούς.

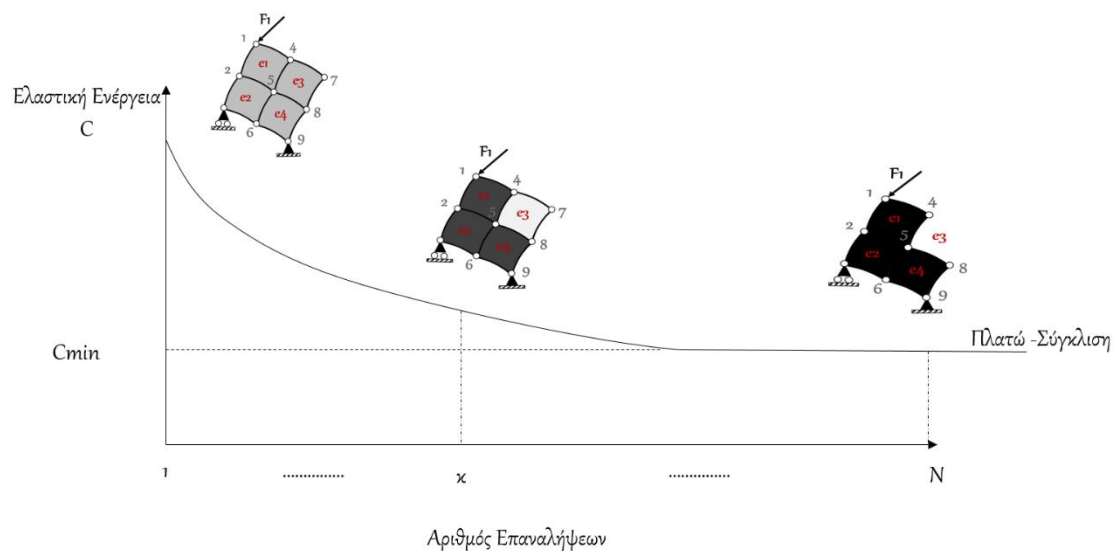
φόρτιση. Η διαδικασία της επαναληπτικής μεθόδου περιγράφεται στην Εικόνα 2.8α, όπου αναζητούνται οι σχετικές πυκνότητες των τεσσάρων πεπερασμένα στοιχεία που ελαχιστοποιούν την ελαστική ενέργεια του σώματος. Το συγκεκριμένο πρόβλημα τοποθετείται ως εξής:

Στη πρώτη επανάληψη, αρχικοποιούνται οι μεταβλητές σχεδιασμού του προβλήματος.

Μια λογική αρχική προσέγγιση είναι να δοθούν τιμές ίσες με το ποσοστό του τελικού όγκου που επιθυμούμε, δηλαδή $x_{ei} = \text{volfrac}$, έστω 0.75 για το παρόν πρόβλημα. Για τις συγκεκριμένες σχετικές πυκνότητες υπολογίζονται οι ελαστική ενέργεια του σώματος και οι παράγωγοι των ελαστικών ενεργειών κάθε στοιχείου, δηλαδή οι όροι: $\frac{dC}{dx_e}$ οι οποίοι αποτελούν εισόδο στην OC μέθοδο. Τέλος, έξοδος της OC μεθόδου είναι οι ανανεωμένες τιμές των σχετικών πυκνότητων των στοιχείων. Η διαδικασία της βελτιστοποίησης επαναλαμβάνεται μέχρι να ικανοποιηθεί το κριτήριο σφάλματος.



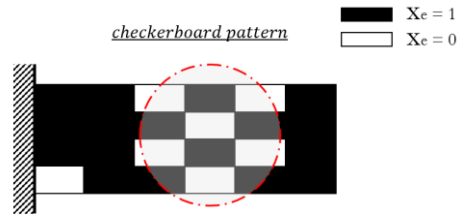
Εικόνα 2.10 Μεταβολή του πεδίου των σχετικών πυκνότητων της κατασκευής συναρτήσει των επαναλήψεων. Στην επανάληψη n, θεωρείται πως έχει επιτευχθεί σύγκλιση.



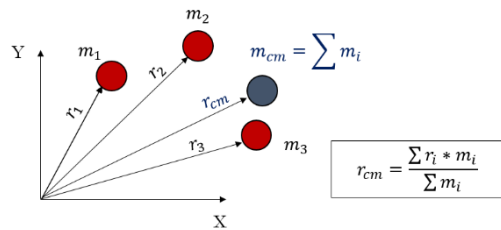
Εικόνα 2.11 Μεταβολή της αντικειμενικής συνάρτησης συναρτήσει του αριθμού των επαναλήψεων. Όταν η μεταβολή τείνει στο μηδέν (πλατώ) η αντικειμενική συνάρτηση ελαχιστοποιείται και τερματίζεται η διαδικασία (επίτευξη σύγκλισης).

[2.5] Εφαρμογή Φίλτρων στη Βελτιστοποίηση Τοπολογίας

Ένα σύνθημα πρόβλημα που συναντάται συνήθως στο πρόβλημα βελτιστοποίησης, είναι ότι πολλές φορές οι σχετικές πυκνότητες που προκύπτουν, διαφέρουν σημαντικά ανάμεσα στα γειτονικά στοιχεία (Υπενθυμίζεται πως οι σχετικές πυκνότητες των στοιχείων είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους μεταβλητές και συνεπώς δεν εμφανίζουν κάποια αλληλεξάρτηση). Εμφανίζονται, δηλαδή, απότομες μεταβολές της σχετικής πυκνότητας από στοιχείο σε στοιχείο εντός της κατασκευής. Για παράδειγμα ένα τυχαίο στοιχείο (e) μπορεί να έχει σχετική πυκνότητα ίση με μονάδα, ενώ ένα γειτονικό του να έχει μηδενική σχετική

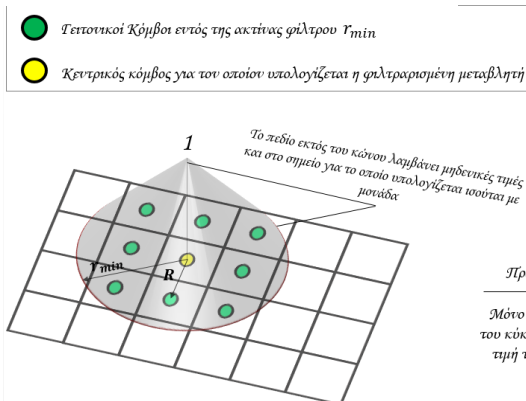


Εικόνα 2.12 Απότομες μεταβολές της σχετικής πυκνότητας ανάμεσα σε γειτονικά στοιχεία-Checkerboard pattern-

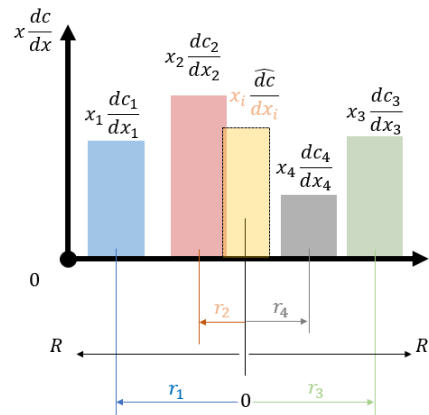


Εικόνα 2.13 Αναζήτηση του κέντρου βάρους r_{cm} ενός συστήματος μαζών m_i . r_i το διάνυσμα θέσης της κάθε μάζας m_i ως προς ένα σταθερό σύστημα αναφοράς.

πυκνότητα (Βλέπε Εικόνα 2.12). Το φαινόμενο αυτό μπορεί να λαμβάνει χώρα σε διαφορετικά σημεία εντός της κατασκευής. Με το τρόπο αυτό, δημιουργείται ένα ασπρόμαυρο μοτίβο -που θυμίζει σκακιέρα (**checkerboard pattern**)- από γειτονικά στοιχεία των οποίων οι σχετικές πυκνότητες διαφέρουν σημαντικά μεταξύ τους. Προφανώς, ο σχεδιασμός μιας τέτοιας κατασκευής καθίσταται πολύ δύσκολος έως αδύνατος.



Εικόνα 2.14 Αρχή λειτουργίας του φίλτρου: Μόνο τα στοιχεία εντός της ακτίνας R του κύκλου (Βλέπε Εικόνα πάνω δεξιά – προβολή σε 2D) συμβάλλουν στη τελική τιμή της φυσικής ποσότητας του υπό μελέτη στοιχείου i (που αποτελεί το κέντρο του κύκλου). Ο βαθμός στον οποίον συμβάλλουν τα γειτονικά στοιχεία εξαρτάται από το μέτρο της σχετικής απόστασης $R - r_j$ καθώς και τη τιμή της συνάρτησης του καθενός (το βαθμό που συμβάλλει δηλαδή). Στην τρίτη εικόνα (ιστόγραμμα όρων $x_i \frac{dc_i}{dx_i}$) αναπαρίσταται ο τρόπος εξαγωγής του φιλτραρισμένου όρου $\frac{dc_i}{dx_i}$, ο οποίος είναι ίδιος με το τρόπο εξαγωγής του κέντρου βάρους μιας διακριτής κατανομής.



$$x_i \frac{dc}{dx_i} = \frac{\sum \frac{dc_j}{dx_j} * x_j * (R - r_j)}{\sum (R - r_j)}$$

Ένας τρόπος να αποφευχθεί το φαινόμενο αυτό αποτελεί η εφαρμογή φίλτρων. Σκοπός αυτών είναι η εξομάλυνση των απότομων μεταβολών των σχετικών πυκνοτήτων ανάμεσα στα γειτονικά στοιχεία και η δημιουργία ενός πιο ομογενούς προφίλ κατανομής αυτών. Αυτό επιτυγχάνεται υπολογίζοντας τη προκύπτουσα σχετική πυκνότητα του υπό μελέτη στοιχείου και λαμβάνοντας υπόψιν τις σχετικές πυκνότητες των γειτονικών στοιχείων που βρίσκονται εντός ακτίνας r από αυτό, λαμβάνεται μια μέση τελική τιμή αυτής. Η λογική που εφαρμόζεται είναι όμοια με αυτή της αναζήτησης του κέντρου βάρους ενός συστήματος σωματιδίων μάζας m_i το καθένα, ως προς ένα σταθερό σύστημα αναφοράς. Στη προκειμένη περίπτωση συνάρτηση βάρους αποτελεί η ακτινική απόσταση των γειτονικών στοιχείων από το στοιχείο για το οποίο αναζητείται η τελική φιλτραρισμένη τιμή. Ας φανταστούμε έναν κώνο με κέντρο το μέσο ενός στοιχείου i (του οποίου και αναζητείται η φιλτραρισμένη τιμή) στο οποίο λαμβάνει μοναδιαία τιμή, ενώ για τιμές ακτίνας μεγαλύτερες μιας προκαθορισμένης τιμής R , λαμβάνει μηδενικές τιμές. Τα στοιχεία εντός της ακτίνας R επηρεάζουν τη τιμή του στοιχείου i . Ο βαθμός στον οποίο συμβάλλουν εξαρτάται από την απόσταση $R - r_j$, όπου r_j η ακτινική απόσταση του κέντρου των στοιχείων (Βλέπε Εικόνα 2.14). Με το τρόπο αυτό κάθε γειτονικό στοιχείο εντός πεδίου της ακτίνας R του στοιχείου i συμβάλλει στη τελική φιλτραρισμένη τιμή του. Η ποσότητα που φιλτράρεται συνήθως είναι η κλίση της αντικειμενικής συνάρτησης (sensitivity analysis) ως προς τη σχετική πυκνότητα του στοιχείου i . (Βλέπε Εικόνα 2.14)

Επεξήγηση του Κώδικα και Παρουσίαση Αποτελεσμάτων

Στη παρούσα παράγραφο μελετώνται τρία διαφορετικά προβλήματα. Για κάθε πρόβλημα που επιλέγει ο χρήστης, μπορεί να πραγματοποιηθεί παραμετρική μελέτη μεταβάλλοντας τις κατάλληλες εισόδους του κώδικα, μπορεί δηλαδή να μελετηθεί η επίδραση που έχουν στα αποτελέσματα η παράμετρος p , ο αριθμός των στοιχείων στα οποία διακριτοποιείται η κατασκευή, το κλάσμα όγκου volfrac κλπ. Στον Πίνακα 2.01 παρουσιάζονται οι εισοδοί της συνάρτησης (αρχείο: problem.m) του βασικού script που καλεί ο χρήστης.

Είσοδοι Κώδικα

nelx: ο αριθμός των στοιχείων στον άξονα y

nely: ο αριθμός των στοιχείων στον άξονα x

p: η δύναμη της power law προσέγγισης του μέτρου ελαστικότητας ($E \sim x_e^p$)

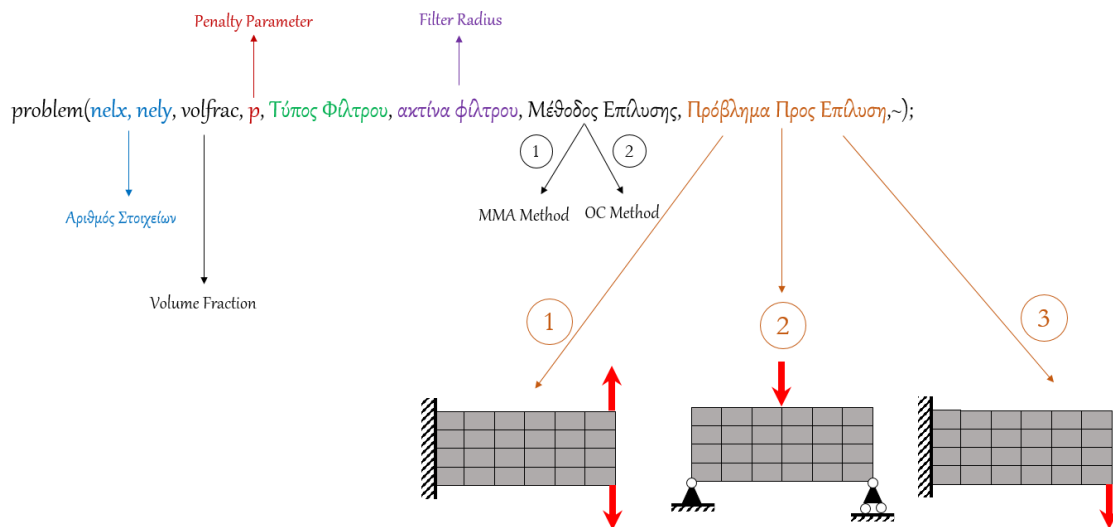
Τύπος φίλτρου: By default έχει επιλεγθεί sensitivity analysis filter

Ακτίνα Φίλτρου: Η ακτίνα φίλτρου θεωρείται by default ίση με 1.5 φορές το μήκος στοιχείου

Μέθοδος Επίλυσης: MMA method και OC method (2 μέθοδοι μελετώνται, προς σύγκριση της μεταξύ τους ταχύτητας και ακρίβειας των αποτελεσμάτων)

Πρόβλημα Προς Επίλυση: Μελετώνται τρία σε αριθμό παραδείγματα. Ο χρήστης επιλέγει ποιά από αυτά επιθυμεί να επιλύσει. Τα είδη των προβλημάτων παρουσιάζονται στην Εικόνα 2.01.

Πίνακας 2.01 Είσοδοι της συνάρτησης βελτιστοποίησης τοπολογίας. | Αρχείο problem.m



Εικόνα 2.01 Οι εισοδοί της συνάρτησης problem.m και απεικόνιση του προβλήματος που επιλύεται κάθε φορά (τελευταία είσοδος της συνάρτησης).

Εκτέλεση Κώδικα

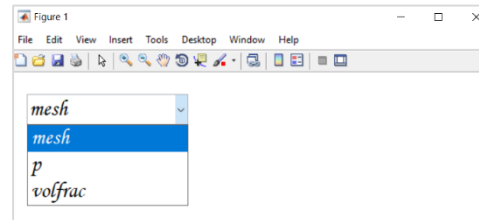
Μόλις ο χρήστης τρέξει το αρχείο problem.m, εμφανίζεται το μήνυμα της Εικόνας 2.02, το οποίο ρωτά το χρήστη τι είδους μελέτη θέλει να κάνει για το δοσμένο πρόβλημα. Αναλόγως του είδους της παραμετρικής μελέτης που επιθυμεί να κάνει ο χρήστης, επιλέγει και την αντίστοιχη κατηγορία (mesh, p, volfrac).

Έξοδος Κώδικα

Μόλις ο χρήστης τρέξει το αρχείο, παρουσιάζεται η τελική γεωμετρία της κατασκευής καθώς και το γράφημα μεταβολής της ελαστικής ενέργειας συναρτήσει του αριθμού των απαιτούμενων επαναλήψεων. Σε ένα κελί (όνομα στο κώδικα: res) αποθηκεύονται οι τελικές σχετικές πυκνότητες του προβλήματος με τις αντίστοιχες τιμές της ελαστικής ενέργειας. Εν συνεχεία παρατίθενται μερικά αποτελέσματα για διάφορες περιπτώσεις προβλημάτων.

Επίλυση του Προβλήματος 3 για Διάφορες Διακριτοποιήσεις του Μέσου

- ✓ Για διάφορα meshings: Το πρόβλημα 3 (πρόβολος φορτισμένος στο άκρο του) επιλύεται για τέσσερις περιπτώσεις meshing, όπως απεικονίζεται στην Εικόνα 2.03.

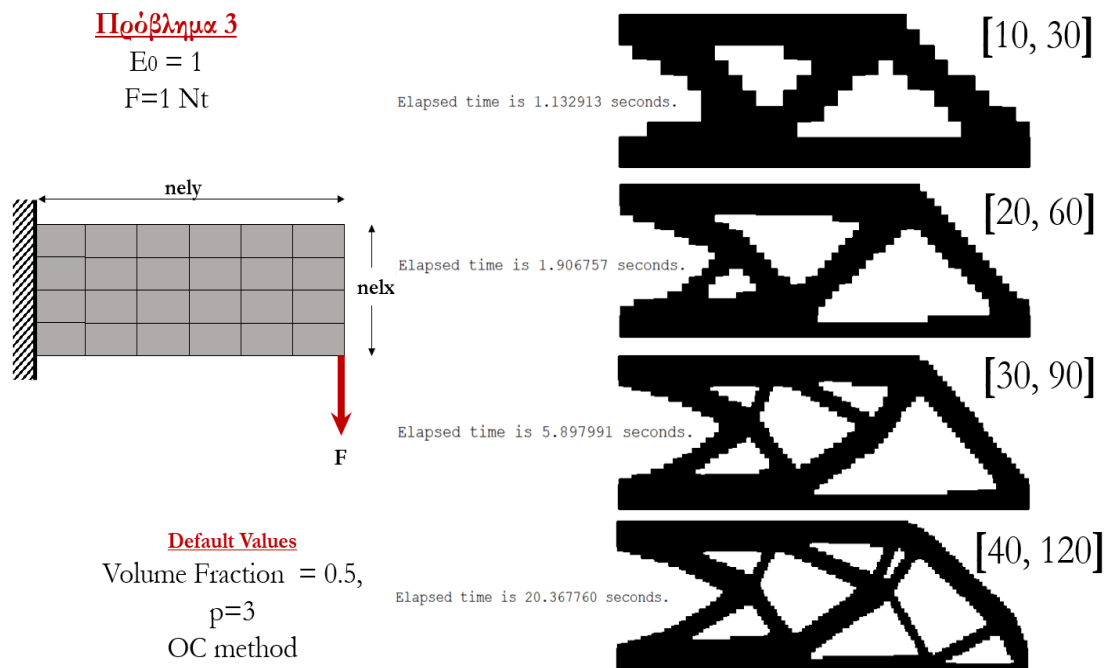


Εικόνα 2.02 Μόλις ο χρήστης τρέξει το αρχείο, εμφανίζεται το είδος ανάλυσης που επιθυμεί να κάνει για το δοσμένο πρόβλημα.

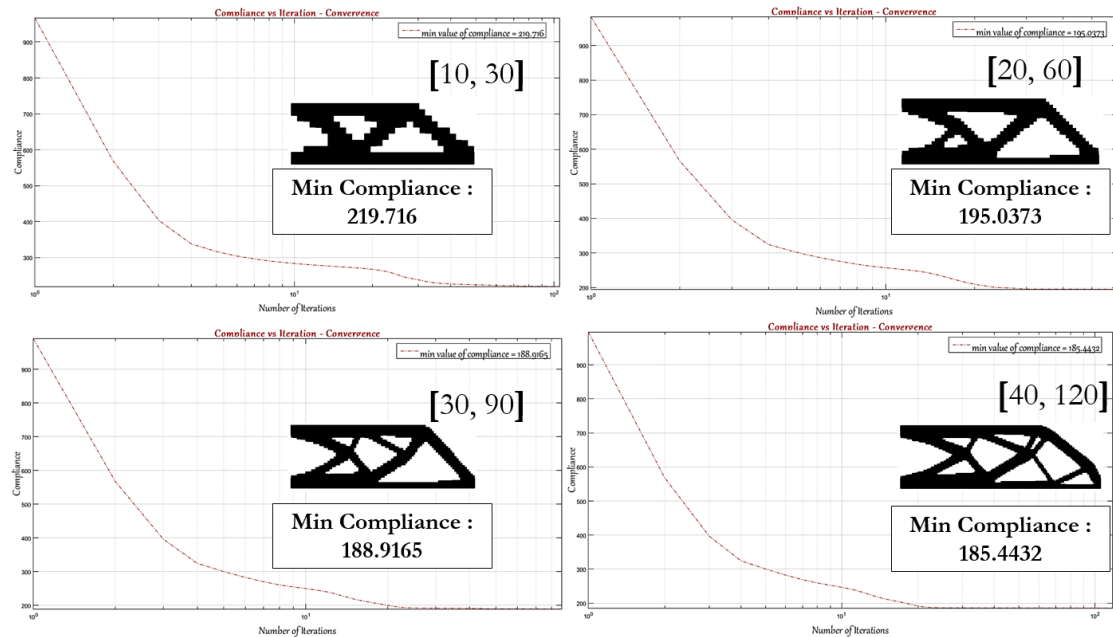
Οι by default τιμές των παραμέτρων p και $volfrac$, όταν το πρόβλημα μελετάται για διάφορα meshings, είναι 3 και 0.5 αντίστοιχα.

Η επίλυση του προβλήματος βελτιστοποίησης έχει γίνει με την OC μέθοδο. Ο χρόνος επίλυσης αναγράφεται δίπλα από τα τελικά σχήματα στην Εικόνα 2.03.

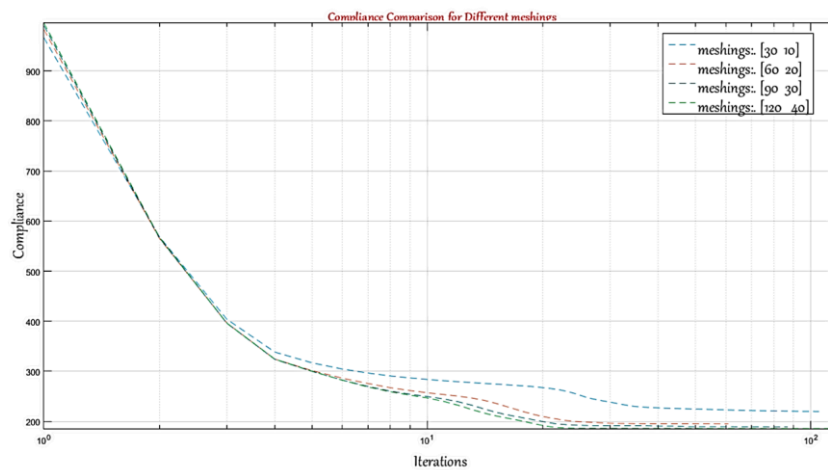
Αποτελέσματα



Εικόνα 2.03 Αποτελέσματα βελτιστοποίησης τοπολογίας για τη περίπτωση 3, για διάφορες περιπτώσεις διακριτοποίησης. Παρατηρείται πως όσο περισσότερα τα στοιχεία, τόσο υψηλότερη η ακρίβεια, με μικρό κόστος χρόνου. [OC Method]



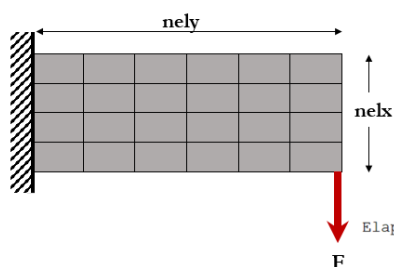
Εικόνα 2.04 Μεταβολή της αντικειμενικής συνάρτησης συναρτήσει του αριθμού των επαναλήψεων. Ο οριζόντιος άξονας δίνεται σε λογαριθμική κλίμακα. Σε κάθε διάγραμμα αναγράφεται και η τελική, ελάχιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.



Εικόνα 2.05 Σύγκριση των τιμών της ελαστικής ενέργειας για τις διάφορες περιπτώσεις διακριτοποίησης.

Πρόβλημα 3

$E_0 = 1$
 $F = 1 \text{ Nt}$

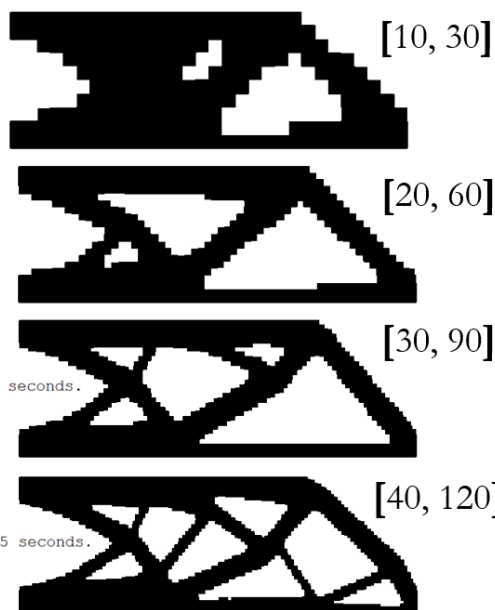


Elapsed time is 127.855658 seconds.

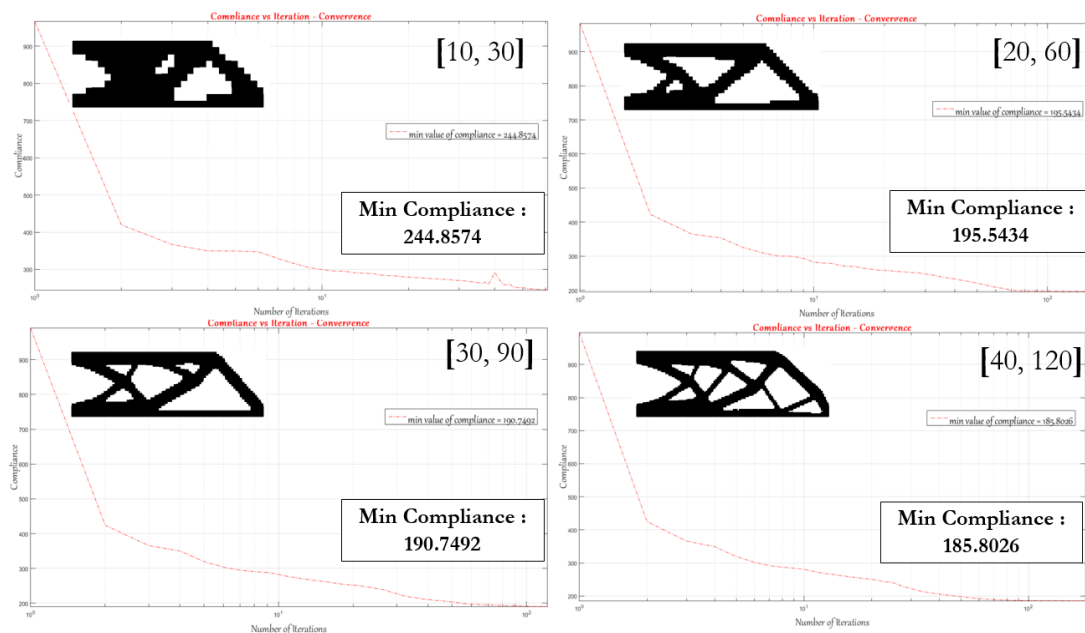
Default Values

Volume Fraction = 0.5,
 $p=3$
 MMA method

Elapsed time is 222.825805 seconds.



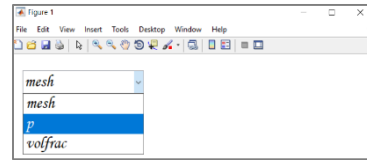
Εικόνα 2.06 Αποτελέσματα βελτιστοποίησης τοπολογίας για τη περίπτωση 3, για διάφορες περιπτώσεις διακριτοποίησης με χρήση της MMA μεθόδου. Παρατηρείται πως είναι πολύ πιο αργή μέθοδος συγκριτικά με την OC μέθοδο, της οποίας οι αντίστοιχοι χρόνοι αποτυπώνονται στην Εικόνα 2.03.



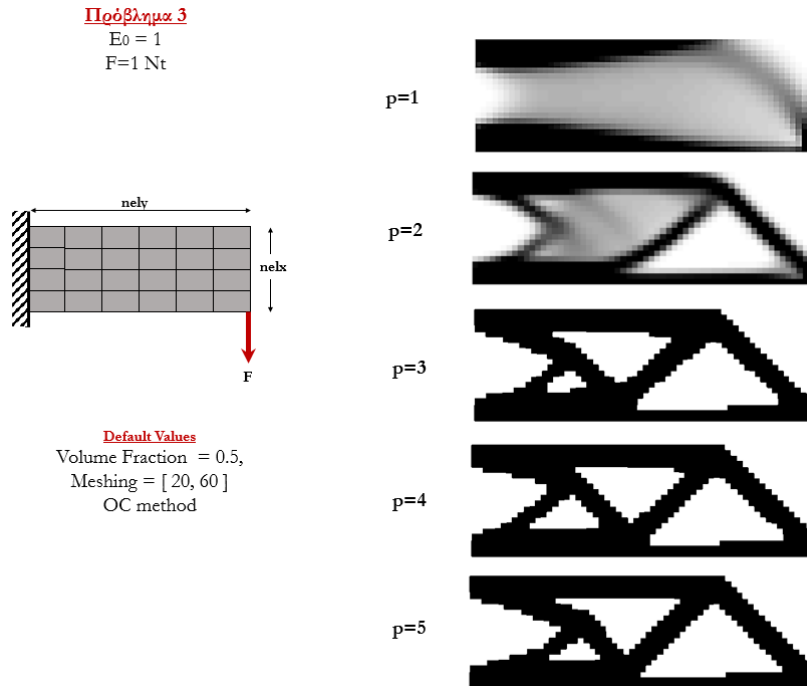
Εικόνα 2.07 Μεταβολή της αντικειμενικής συνάρτησης συναρτήσει του αριθμού των επαναλήψεων με χρήση της μεθόδου MMA. Ο οριζόντιος άξονας δίνεται πάλι σε λογαριθμική κλίμακα.

✓ Για διάφορες τιμές της παραμέτρου p :

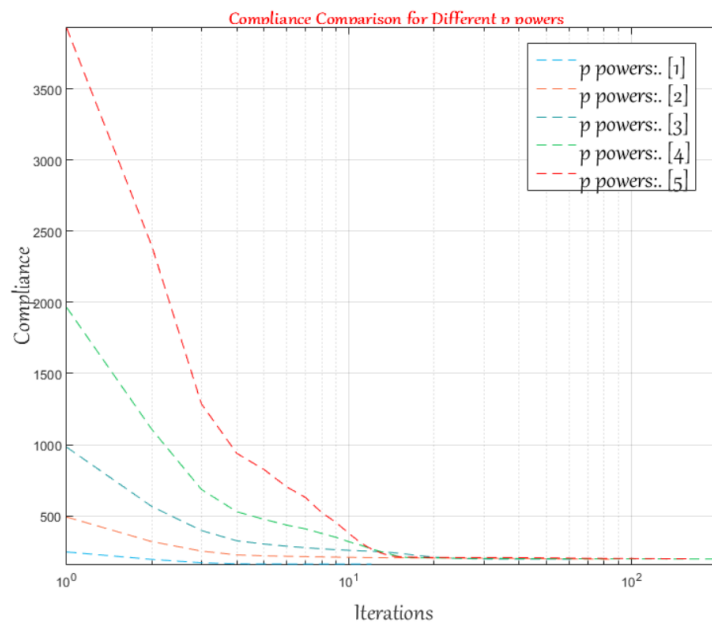
By default τιμές: Το p λαμβάνει ακέραιες τιμές από 1:5, η διακριτοποίηση του μέσου είναι [20, 60] και ο λόγος όγκου ίσος με 0.5



Εικόνα 2.08 Ο χρήστης επιλέγει «p» για να τρέξει την ανάλυση για διάφορες τιμές του παράγοντα σφάλματος p .



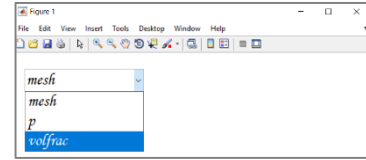
Εικόνα 2.09 Αποτελέσματα βελτιστοποίησης τοπολογίας για τη περίπτωση 3, για τιμές του p από 1 έως 5 με χρήση της OC μεθόδου. Mesh: [20, 60], VolFrac: 0.5.



Εικόνα 2.10 Σύγκριση των τιμών της ελαστικής ενέργειας για τις διάφορες τιμές του παράγοντα σφάλματος p . Παρατηρείται πλήρης ταύτιση των τιμών της αντικειμενικής συνάρτησης από έναν αριθμό επαναλήψεων και μετά.

✓ Για διάφορους λόγους $volfrac = \frac{V_{wanted}}{V_0}$.

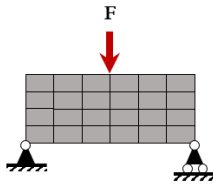
Για το συγκεκριμένο παράδειγμα θα μελετηθεί το πρόβλημα 2, όπου επιλέγονται οι λόγοι $volfrac = 0.3$ & 0.5 .



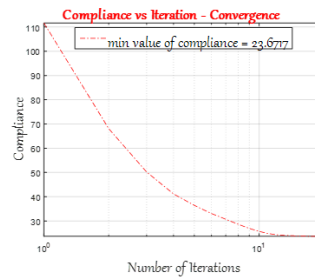
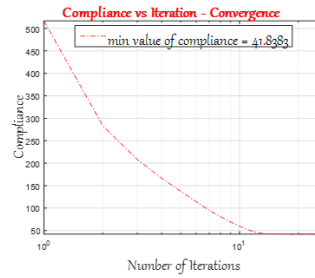
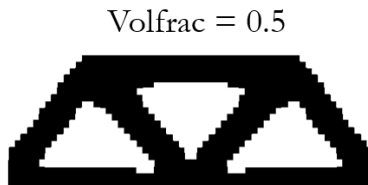
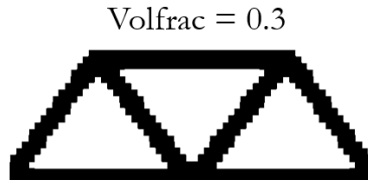
Εικόνα 2.011 Ο χρήστης επιλέγει «volfrac» για να τρέξει την ανάλυση για διάφορες τιμές του λόγου όγκου.

Πρόβλημα 2

$E_0 = 1$
 $F = 1 \text{ Nt}$
 Volume Fraction = [0.3, 0.5]



Default Values
 Meshing = [20, 60]
 $p = 3$



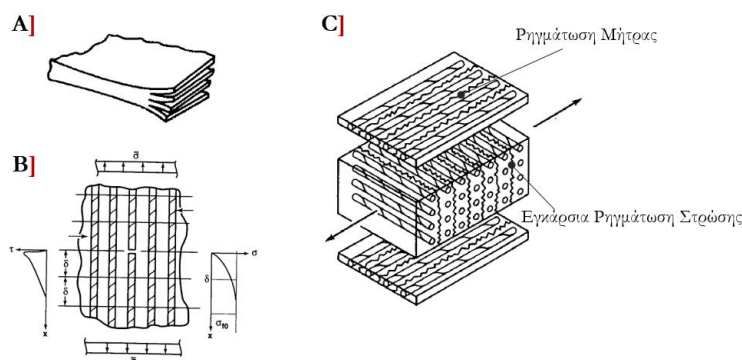
Εικόνα 2.012 Αποτελέσματα του προβλήματος 2 για διάφορα κλάσματα όγκων $volfrac$. Στη μεσαία στήλη αναπαρίστανται η τελική κατασκευή, ενώ στη τελευταία η μεταβολή της αντικειμενικής συνάρτησης με τον αριθμό επαναλήψεων.

Κεφάλαιο 3

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζεται η μέθοδος της ομογενοποίησης και πως αυτή αξιοποιείται στο πρόβλημα βελτιστοποίησης τοπολογίας. Επειδή, η διαδικασία εξαγωγής των εξισώσεων που διέπουν της συγκεκριμένη μέθοδο χαρακτηρίζεται από υψηλή πολυπλοκότητα και συνδυάζει έννοιες όπως η περιοδικότητα μιας συνάρτησης με καταστατικούς νόμους της μηχανικής, πραγματοποιείται μια σύντομη αναφορά σε έννοιες απαραίτητες για τη καλύτερη κατανόηση της. Σε επόμενο βήμα παρουσιάζεται η θεωρία στην οποία βασίζεται η μέθοδος και πως αυτή μεταφράζεται υπολογιστικά στο MATLAB. Τέλος, τα αποτελέσματα που εξάγονται συγκρίνονται με αυτά που προκύπτουν από τη μέθοδο SIMP.

[3.1] Εισαγωγή

Ένα μέσο ονομάζεται ομογενές όταν οι ιδιότητες αυτού δεν μεταβάλλονται από σημείο σε σημείο εντός του. Αν μετρήσουμε, δηλαδή τη τιμή μιας φυσικής ποσότητας (όπως π.χ πυκνότητα ή συντελεστή θερμικής αγωγιμότητας) σε δύο τυχαία σημεία, τότε αυτές οι τιμές θα ταυτίζονται. Στη πραγματικότητα, δεν υπάρχουν στη φύση πλήρως ομογενή υλικά, ακόμα και στο επίπεδο μικροδομής τους τα υλικά εμφανίζουν ετερογένειες, οι οποίες μπορεί να οφείλονται σε πολλές παραμέτρους, όπως για παράδειγμα, ατέλειες που σχηματίστηκαν κατά τη διαδικασία παρασκευής του ίδιου του υλικού. Ωστόσο, επειδή μακροσκοπικά οι μεταβολές αυτές είναι αμελητέες και οι ιδιότητες τους προσεγγίζονται με σχετική ακρίβεια, θεωρούνται ομογενή. Χαρακτηριστικό παράδειγμα ετερογενών υλικών αποτελούν τα σύνθετα υλικά, όπου οι ιδιότητες αυτών μεταβάλλονται εντός του σώματος -σε άλλα σημεία τα υλικά φέρει τις ιδιότητες της μήτρας (περιβάλλον υλικό), ενώ σε άλλα σημεία φέρει τις ιδιότητες του ενισχυτικού υλικού (ίνες, κόκκοι, νιφάδες (flakes)) -. Το πλεονέκτημα που εμφανίζουν τα σύνθετα υλικά είναι πως, παντρεύοντας κατάλληλα τις αναλογίες των συνιστωσών τους, μπορούμε προσαρμόσουμε το υλικό στις απαιτήσεις της κατασκευής.



Εικόνα 3.1 Βασικοί μηχανισμοί αποτυχίας των συνθέτων υλικών: Α] Διαστρωματική αποκόλληση, Β] Θραύση της ίνας, C] Ρηγμάτωση της στρώσης.

μηχανισμοί, οι οποίοι ενίοτε δρουν συνεργατικά. Μεταξύ αυτών, οι συνηθέστεροι μηχανισμοί βλάβης είναι: θραύση των ινών, ρηγμάτωση της μήτρας, διαστρωματική αποκόλληση, εγκάρσια ρηγμάτωση της στρώσης (Εικόνα 3.1). Το ποιός μηχανισμός θα υπερισχύσει σε σχέση με τους υπόλοιπους, είναι συνάρτηση εξαρτώμενη τόσο από τη φύση των συνιστωσών που απαρτίζουν το υλικό όσο και από τις συνθήκες φόρτισης.

Η απρόβλεπτη αυτή συμπεριφορά που εμφανίζουν τα σύνθετα υλικά δυσχαιρένει το έργο των μηχανικών να προσδιορίσουν με ασφάλεια επιτρεπτές τιμές σχεδιασμού τους. Συνέπεια του γεγονότος αυτού, είναι η αδυναμία προσδιορισμού ενός κατάλληλου μεγέθους που να προβλέπει με ικανοποιητική ακρίβεια και αξιοπιστία την εναπομένουσα ζωή του υλικού. Επομένως, στα σύνθετα υλικά ακολουθείται η φιλοσοφία σχεδιασμού *safe life*, κατά την οποία χρησιμοποιούνται μεγάλοι

Ωστόσο, ένα έντονο πρόβλημα που δυσχεραίνει την ανάπτυξη μαθηματικών μοντέλων, ικανά να προβλέψουν τη μηχανική συμπεριφορά των συνθέτων υλικών είναι η έντονη ετερογένεια που εμφανίζουν στη δομή τους. Προϊόν αυτής της ετερογένειας αποτελούν οι ποικίλοι μηχανισμοί συσώρευσης βλάβης που εμφανίζουν εντός της μικροδομής τους,

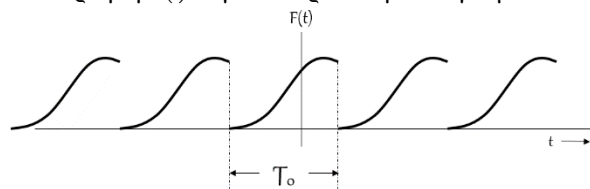
συντελεστές ασφάλειας προικισμένοι να αντέξει η κατασκευή τα εφαρμοζόμενα φορτία για το χρονικό διάστημα για το οποίο είναι σχεδιασμένη. Ο συντηρητικός χαρακτήρας της μεθόδου αυτής, τη καθιστά κοστοβόρα και η φιλοσοφία πάνω στην οποία βασίζεται δεν επιτρέπει την εικμετάλλευση των συνθέτων υλικών στο μέγιστο των δυνατοτήτων τους.

Η γνώση της συμπεριφοράς των υλικών σε όλες τις διευθύνσεις φόρτισης και η δυνατότητα αναγνώρισης των διαφόρων τύπων αστοχιών, οδηγεί σιγά-σιγά στην ανάπτυξη μιας νέας φιλοσοφίας σχεδιασμού, στον σχεδιασμό με ανοχή βλάβης, κατά την οποία ύπαρξη ρωγμών εντός του υλικού θεωρείται ως ένα βαθμό επιτρεπτή. Είναι γνωστή, δηλαδή, η ύπαρξη βλάβης εντός του υλικού, ωστόσο αν και εφόσον το μέγεθος της βρίσκεται σε επιτρεπτά όρια, δεν αποσύρεται το υλικό. Αντιθέτως, πραγματοποιούνται τακτικοί έλεγχοι για τη πρόβλεψη της αστοχίας και τη μέλετη εξέλιξης της. Η εφαρμογή της σχεδιαστικής αυτής αντίληψης, **της ανοχής στη βλάβη**, οδηγεί σε πολύ πιο οικονομικές κατασκευές σε σχέση με αυτές που κατασκευάζονται ως safe life.

Σκοπός της μεθόδου της ομογενοποίησης αποτελεί η εύρεση των ιδιοτήτων ενός ισοδύναμου ομογενούς μέσου (ονομάζονται μέσες ή ισοδύναμες ιδιότητες του ετερογενούς μέσου – effective properties). Σημειώνεται πως η θεωρία της ομογενοποίησης έχει εφαρμογή σε πολλούς τομείς της μηχανικής και της φυσικής, όπου μελετάται η συμπεριφορά ετερογενών συνεχών μέσων.

[3.2] Περιοδικότητα του Συνεχούς Μέσου – Θεωρία της Ομογενοποίησης

Τι είναι η περιοδικότητα μιας συνάρτησης; Μια συνάρτηση $x(t)$ λέγεται περιοδική όταν για μια σταθερά T_0 ισχύει η σχέση: $x(t) = x(t + T_0)$. (t η μεταβλητή). Η μικρότερη τιμή του T_0 που ικανοποιεί την παραπάνω σχέση ονομάζεται περίοδος του σήματος (η έννοια σήμα δηλώνει πως μεταβλητή είναι ο χρόνος). Εξ' ορισμού, ένα περιοδικό σήμα παραμένει αμετάβλητο όταν μετακινηθεί στον χρόνο κατά T_0 . Γι' αυτό, ένα περιοδικό σήμα πάντα να ξεκινάει από το $-\infty$ και συνεχίζεται για πάντα.



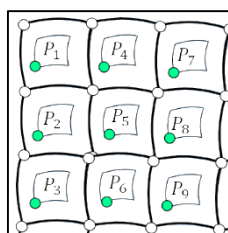
Εικόνα 3.2 Περιοδική συνάρτηση με περίοδο T_0 .

Μια συνάρτηση μπορεί να εμφανίζει περιοδικότητα και ως προς το χώρο. Στη περίπτωση αυτή, η περίοδος της T_0 έχει μονάδες διαστάσεων. Ένα ετερογενές μέσο θεωρείται πως παρουσιάζει περιοδικότητα αν η συνάρτηση F που περιγράφει κάποια φυσική ιδιότητα του, γράφεται στη μορφή:

$$F(\mathbf{x} + \mathbf{N}\mathbf{Y}) = F(\mathbf{x})$$

Όπου \mathbf{x} είναι το διάνυσμα θέσης ενός τυχαίου σημείου, \mathbf{N} είναι ένας διαγώνιος πίνακας της μορφής:

$$N = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 \end{bmatrix}$$



Εικόνα 3.3 Η έννοια της περιοδικότητας του υλικού.

Στα πράσινα σημεία η περιοδική συνάρτηση λαμβάνει ίδιες τιμές.

Οι αριθμοί n_1, n_2, n_3 , είναι αυθαίρετοι ακέραιοι αριθμοί και $\mathbf{Y} = [Y_1, Y_2, Y_3]^T$ είναι ένα σταθερό διάνυσμα του οποίου κάθε συνιστώσα προσδιορίζει τη περίοδο στην αντίστοιχη διεύθυνση. Η συνάρτηση F μπορεί να είναι βαθμωτό, διανυσματικό είτε ακόμη και ταυυστικό μέγεθος. Για παράδειγμα, αν ο ταυυστής ελαστικότητας ενός σώματος είναι χωρικά μεταβαλλόμενο μέγεθος, η περιοδικότητα του ως προς τις χωρικές συνταταγμένες εκφράζεται υπό τη μορφή: $C_{ijkl}(\mathbf{x}) = C_{ijkl}(\mathbf{x} + \mathbf{N}\mathbf{Y})$ ή

$$C_{ijkl}(x_1, x_2, x_3) = C_{ijkl}(x_1 + n_1 * Y_1, x_2 + n_2 * Y_2, x_3 + n_3 * Y_3)$$

Το μητρώο C_{ijkl} , καλείται \mathbf{Y} περιοδικό.

Στις επόμενες παραγράφους γίνεται εφαρμογή βασικών ιδιοτήτων των περιοδικών συναρτήσεων, για το λόγο αυτό, στη παράγραφο αυτή υπενθυμίζονται μερικές από αυτές.

Ορθογώνιες Συναρτήσεις:

Υποθέτουμε πως οι συναρτήσεις $f(x)$, $g(x)$ είναι ορισμένες και συνεχείς στο διάστημα $[a, b]$. Το εσωτερικό γινόμενο αυτών ορίζεται από τη σχέση:

$$\int_a^b r(x) f(x) * g(x) dx$$

Όπου $r(x)$ μια δοσμένη συνάρτηση που ονομάζεται συνάρτηση βάρους. Αν το ολοκλήρωμα της παραπάνω σχέσης είναι μηδενικό στο διάστημα $[a, b]$, τότε οι συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ είναι ορθογώνιες μεταξύ τους. Για παράδειγμα, για $m \neq n$ και για συνάρτηση βάρους $r(x) = 1$, οι παρακάτω ημιτονικές συναρτήσεις, είναι ορθογώνιες στο διάστημα $[0, 2L]$:

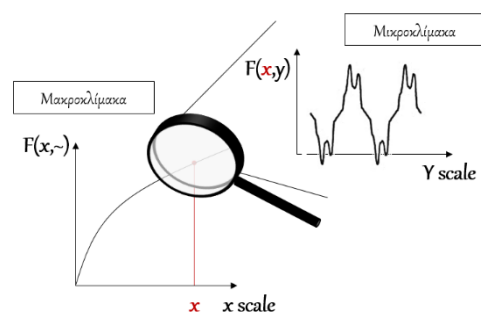
$$\int_0^{2L} \sin\left(\frac{n * \pi * x}{L}\right) * \sin\left(\frac{m * \pi * x}{L}\right) dx = 0$$

$$\int_0^{2L} \cos\left(\frac{n * \pi * x}{L}\right) * \cos\left(\frac{m * \pi * x}{L}\right) dx = 0$$

$$\int_0^{2L} \sin\left(\frac{n * \pi * x}{L}\right) * \cos\left(\frac{m * \pi * x}{L}\right) dx = 0$$

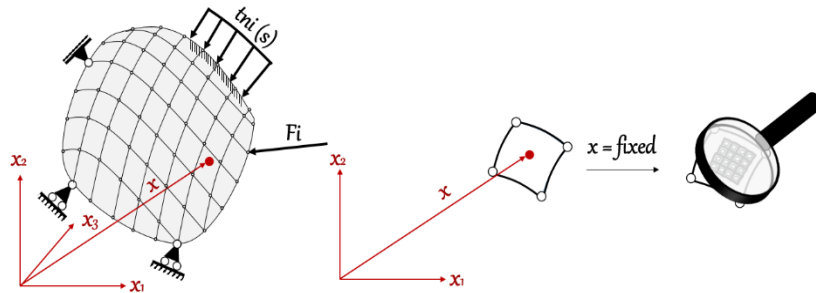
Η θεωρία της ομογενοποίησης κάνει τη παραδοχή πως το υλικό παρουσιάζει περιοδικότητα σε επίπεδο μικροδομής. Δηλαδή, περιοδικότητα εμφανίζεται αποκλειστικά στη μικροδομή του υλικού. Συνεπώς, η περίοδος Y , συγκρινόμενη με τις υπόλοιπες μακρο-διαστάσεις του σώματος, είναι πολύ μικρή. Συνέπεια της παραδοχής αυτής είναι πως μια τυχαία συνάρτηση F που περιγράφει μια φυσική ποσότητα, θα εμφανίζει απότομες μεταβολές σε επίπεδο μικροδομής και πιο ομαλές μεταβολές στη μακρο-κλίμακα. Δηλαδή, στο μακροσκοπικό (ή καθολικό) χώρο x , παρατηρούνται μικρές και ομαλές μεταβολές ενώ στο μικροσκοπικό (ή τοπικό) επίπεδο έχουμε απότομες μεταβολές της συνάρτησης.

Ο λόγος του μήκους του μοναδιαίου διανύσματος στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων (μικροκλίμακα) ως προς το μήκος του μοναδιαίου διανύσματος στο καθολικό σύστημα συντεταγμένων είναι μια πολύ μικρή παράμετρος, η οποία ονομάζεται παράγοντας κλίμακας και συμβολίζεται με ϵ . Εξ'ορισμού ισχύει: $y = \frac{x}{\epsilon}$. Οπότε, γενικά μια συνάρτηση g , δύναται να γραφεί στη μορφή $g(x, y)$ ή $g(x, \frac{x}{\epsilon})$, ως συνάρτηση δηλαδή των δύο κλιμάκων. Υπενθυμίζεται πως οι δύο κλιμακικές συνδέονται μεταξύ τους μέσω της παραμέτρου ϵ και δεν είναι ανεξάρτητες, παραδοχή που εφαρμόζεται στις επόμενες σχέσεις. Γνωρίζοντας τη τιμή της παραμέτρου ϵ , άμεσα γίνεται γνωστός και ο βαθμός περιοδικότητας.

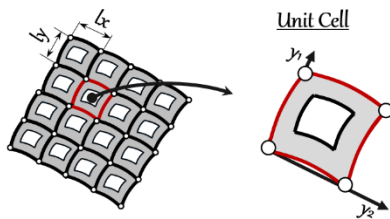


Εικόνα 3.4 Το υλικό σε επίπεδο μικροδομής του, εμφανίζει περιοδικότητα. Οι συντεταγμένες ενός σημείου σε επίπεδο μακροκλιμακας ορίζονται από το διάνυσμα x , ενώ σε επίπεδο μικροκλιμακας για το δοσμένο σημείο από το διάνυσμα y .

Στη σημείο αυτό ορίζεται η έννοια του unit cell. Το μικρότερο επαναλαμβανόμενο στοιχείο απαραίτητο για να περιγράψει πλήρως τη περιοδικότητα της μικροδομής του υλικού ονομάζεται unit cell. Βάσει των διαστάσεων αυτού και μόνο



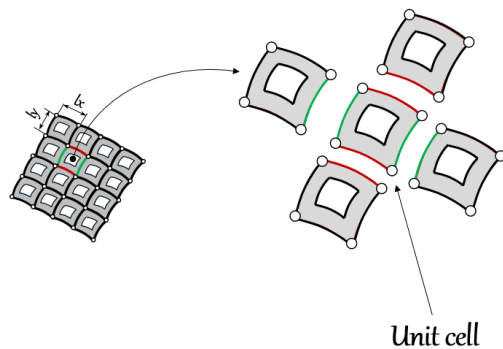
Εικόνα 3.5 Από μια διακριτοποιημένη κατασκευή απομονώνεται ένα πεπερασμένο στοιχείο, το οποίο σε επίπεδο μικροκλίμακας εμφανίζει περιοδικότητα στη δομή του.



Εικόνα 3.6 Η περιοδικότητα του υλικού σε επίπεδο μικροδομής αντιπροσωπεύεται από ένα στοιχείο το οποίο ονομάζεται unit cell.

προσδιορίζεται το διάνυσμα $\mathbf{Y} = [Y_1, Y_2, Y_3]^T$, όπου Y_i οι διαστάσεις του κελιού (Υπενθυμίζεται πως $Y_i \ll$ διαστάσεων στη μακροκλίμακα κατά τον παράγοντα κλίμακας ϵ). Συνεπώς, το τοπικό σύστημα συντεταγμένων λαμβάνεται εντός του unit cell και, εφόσον το unit cell αποτελεί το μικρότερο αντιπροσωπευτικό στοιχείο της μικροδομής του υλικού, η περίοδος της περιοδικής στη μικροκλίμακα συνάρτησης που μελετάται θα ισούται με το μήκος αυτού.

Συνοριακές Συνθήκες:



Εικόνα 3.7 Συνοριακές συνθήκες για ένα unit cell. Ταύτιση των συνοριακών συνθηκών για το πάνω με το κάτω άκρο και αντίστοιχα του δεξιού με το αριστερό.

Στη παραπάνω παράγραφο επεξηγήθηκε η έννοια της περιοδικότητας και ορίστηκε η έννοια του unit cell. Ωστόσο, η έννοια της περιοδικότητας μιας συνάρτησης πρέπει να ικανοποιεί και μερικές συνθήκες. Εντός του unit cell η περιοδική συνάρτηση λαμβάνει ένα πεδίο τιμών, στα σύνορα όμως του στοιχείου πρέπει οι τιμές αυτής να ταυτίζονται με τις αντίστοιχες των γειτονικών unit cells. Όπως παρουσιάζεται στην Εικόνα 3.7, οι τιμές της περιοδικής συνάρτησης στο πάνω και στο κάτω όριο του unit cell (κόκκινο χρώμα) πρέπει να ισούνται μεταξύ τους όπως και οι τιμές της συνάρτησης στο δεξί και αριστερό σύνορο του (πράσινο χρώμα). Επιβάλλοντας τη συνθήκη αυτή τηρείται η περιοδικότητα της συνάρτησης (π.χ συνάρτηση μετατόπισης) στα σύνορα του unit cell.

Η εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών υπολογιστικά είναι πολύ απλή. Διακριτοποιώντας το unit cell σε έναν πίνακα διαστάσεων [Αριθμός στοιχείων στη x διεύθυνση (N_{elx}), Αριθμός στοιχείων στη y διεύθυνση (N_{ely})], απαιτείται η πρώτη σειρά του πίνακα να ισούται με τη τελευταία σειρά του πίνακα και η πρώτη στήλη με τη τελευταία.

Το Ασυμπτωτικό Ανάπτυγμα Συνάρτησης

Θεωρείται πως η τιμή της συνάρτησης $F(x^\epsilon)$ (μακροσκοπική κλίμακα) σε ένα σταθερό σημείο x του συνεχούς σώματος, προσεγγίζεται από τη σχέση:

$$F(x^\epsilon) = F_{(x,y)}^0 + \epsilon * F_{(x,y)}^1 + \epsilon^2 * F_{(x,y)}^2 + \dots + \epsilon^v * F_{(x,y)}^v$$

Δηλαδή, η τιμή της συνάρτησης σε ένα τυχαίο σημείο x του συνεχούς μέσου - $F_{(x)}^\varepsilon | x = \text{fixed}$ - αναπτύσσεται σε πολυωνυμικό ανάπτυγμα ως προς τη παράμετρο κλίμακας ε ($\varepsilon \rightarrow 0$). Οι συναρτήσεις $F_{(x,y)}^i, i \geq 0$ του αναπτύγματος θεωρούνται περιοδικές στη μικροκλίμακα (δηλ. Είναι Υ περιοδικές συναρτήσεις στο σύστημα \mathbf{y}).

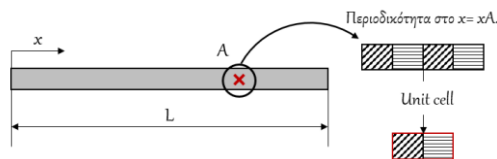
Συνεπώς, η τιμή της συνάρτησης σε κάποιο σταθερό σημείο $x = x_0$ του μέσου- $F_{(x_0)}^\varepsilon$ -, αναπτύσσεται σε πολυωνυμικές δυνάμεις του ε :

$$F_{(x_0)}^\varepsilon = F_{(x_0,y)}^0 + \varepsilon * F_{(x_0,y)}^1 + \varepsilon^2 * F_{(x_0,y)}^2 + \dots + \varepsilon^v * F_{(x_0,y)}^v.$$

Ο δείκτης ε στην αριστερή πλευρά της εξίσωσης, δηλώνει την εξάρτηση της συνάρτησης από το λόγο των δύο κλιμάκων ε .

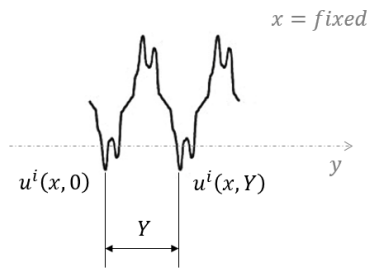
Παράδειγμα – Εύρεση του Ομογενούς Μέτρου Ελαστικότητας

Προκειμένου να γίνει πλήρως κατανοητή η μέθοδος της ομογενοποίησης, μελετάται το πρόβλημα υπολογισμού της παραμόρφωσης κατά τη διαμήκη διεύθυνση μιας ανομοιογενούς ράβδου.



Εικόνα 3.9 Παράδειγμα δοκού η οποία παρουσιάζει περιοδικότητα στη μικροδομή της.

Τυχαία Συνάρτηση $u^i(x,y), i = 0, \dots, n$



$Y =$ Θεμελιώδης Περίοδος της Συνάρτησης

Εικόνα 3.8 Οι συναρτήσεις $u_{(x,y)}^i$ του πολυωνυμικού αναπτύγματος είναι περιοδικές στη μικροκλίμακα, με περίοδο ίση με το μήκος του στοιχείου του unit cell Y .

Βάσει των παραπάνω υποθέσεων, το συνεχές μέσο παρουσιάζει περιοδικότητα στη μικροδομή του. Η περιοδικότητα εντοπίζεται αν απομονώσουμε και μελετήσουμε τη μικροδομή του φορέα σε ένα τυχαία σημείο $x = x_A$, όπως φαίνεται στην Εικόνα 3.9.

Οι νόμοι που διέπουν το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι:

- 1) Καταστατικός Νόμος: $\sigma^\varepsilon = E^\varepsilon \frac{du^\varepsilon}{dx}$[1]
- 2) Ισορροπία Σώματος: $\frac{d\sigma^\varepsilon}{dx} + \gamma^\varepsilon = 0$,[2]

όπου γ οι μαζικές δυνάμεις του σώματος σε $\frac{Nt}{m^3}$.

Η εξάρτηση των φυσικών μεγεθών από τις διαστάσεις του unit cell, εκφράζεται μέσω του δείκτη ε .

Θεωρείται πως τα μεγέθη E^ε και γ^ε είναι μακροσκοπικά σταθερά, δηλαδή δεν μεταβάλλονται ως προς το καθολικό σύστημα και, επομένως εκφράζονται στη μορφή:

$$E_{(x,y)}^\varepsilon = E_{(x,\frac{x}{\varepsilon})}^\varepsilon = E_{(\frac{x}{\varepsilon})}^\varepsilon = E_{(y)}^\varepsilon \quad \& \quad \gamma_{(x,y)}^\varepsilon = \gamma_{(x,\frac{x}{\varepsilon})}^\varepsilon = \gamma_{(\frac{x}{\varepsilon})}^\varepsilon = \gamma_{(y)}^\varepsilon$$

Αναπτύσσοντας το πεδίο μετατοπίσεων και το τασικό πεδίο σε πολυωνυμικό ανάπτυγμα ως προς τη παράμετρο κλίμακας ε , έχουμε:

$$u_{(x)}^\varepsilon = u_{(x,y)}^0 + \varepsilon * u_{(x,y)}^1 + \varepsilon^2 * u_{(x,y)}^2 + \dots + \varepsilon^v * u_{(x,y)}^v \dots \dots \dots [3]$$

Και,

$$\sigma_{(x)}^\varepsilon = \sigma_{(x,y)}^0 + \varepsilon * \sigma_{(x,y)}^1 + \varepsilon^2 * \sigma_{(x,y)}^2 + \dots + \varepsilon^v * \sigma_{(x,y)}^v \dots \dots \dots [4]$$

Υπενθυμίζεται πως οι συναρτήσεις $u_{(x,y)}^i$ και $\sigma_{(x,y)}^i$ για $i \geq 0$ θεωρούνται Υ περιοδικές.

Βασικές Παρατηρήσεις

- Παράγωγος ως προς τη μεταβλητή x: Η παράγωγος μιας περιοδικής συνάρτησης είναι και αυτή περιοδική συνάρτηση με την ίδια περίοδο.
- Κανόνας αλυσίδας: Αν $F = F(x, y)$ και $y = y(x)$, τότε:

$$\frac{dF(x, y)}{dx} = \frac{dF(x, y)}{dx} + \frac{dF(x, y)}{dy} * \frac{dy}{dx} \Leftrightarrow$$

$$\left[\frac{dF(x, y)}{dx} = \frac{dF(x, y)}{dx} + \frac{1}{\varepsilon} * \frac{dF(x, y)}{dy} \right] \dots \dots \dots [5]$$

Συνεπώς, οι παράγωγοι $\frac{d\sigma^\varepsilon}{dx}$ και $\frac{du^\varepsilon}{dx}$ των σχέσεων [1], [2], βάσει της [5] αναπτύσσονται στη μορφή:

$$\left[\frac{d\sigma^\varepsilon}{dx} = \frac{d\sigma^\varepsilon}{dx} + \frac{1}{\varepsilon} * \frac{d\sigma^\varepsilon}{dy} \right] \dots \dots \dots [6] \quad \text{και} \quad \left[\frac{du^\varepsilon}{dx} = \frac{du^\varepsilon}{dx} + \frac{1}{\varepsilon} * \frac{du^\varepsilon}{dy} \right] \dots \dots \dots [7]$$

Δρά, ουσιαστικά ο τελεστής $\left(\frac{d}{dx} + \frac{1}{\varepsilon} * \frac{d}{dy} \right)$ στα ασυμπτωτικά αναπτύγματα

$$u_{(x,y)}^\varepsilon = u_{(x,y)}^0 + \varepsilon * u_{(x,y)}^1 + \varepsilon^2 * u_{(x,y)}^2 + \dots \varepsilon^v * u_{(x,y)}^v$$

&

$$\sigma_{(x,y)}^\varepsilon = \sigma_{(x,y)}^0 + \varepsilon * \sigma_{(x,y)}^1 + \varepsilon^2 * \sigma_{(x,y)}^2 + \dots \varepsilon^v * \sigma_{(x,y)}^v.$$

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω αναπτύγματα στις σχέσεις [1] & [2], και αξιοποιώντας τη σχέση [7] έχουμε:

$$\sigma^\varepsilon = E^\varepsilon \frac{du^\varepsilon}{dx} \Leftrightarrow$$

$$\sigma_{(x,y)}^0 + \varepsilon * \sigma_{(x,y)}^1 + \varepsilon^2 * \sigma_{(x,y)}^2 + \dots \varepsilon^v * \sigma_{(x,y)}^v = E(y) \left[\left(\frac{du_{(x,y)}^0}{dx} + \frac{1}{\varepsilon} * \frac{du_{(x,y)}^0}{dy} \right) + \left(\varepsilon \frac{du_{(x,y)}^1}{dx} + \frac{du_{(x,y)}^1}{dy} \right) + \left(\varepsilon^2 \frac{du_{(x,y)}^2}{dx} + \varepsilon \frac{du_{(x,y)}^2}{dy} \right) + \dots \right] \dots \dots \dots [8]$$

Αντίστοιχα, για τη σχέση [2] έχουμε:

$$\left(\frac{d\sigma_{(x,y)}^0}{dx} + \frac{1}{\varepsilon} * \frac{d\sigma_{(x,y)}^0}{dy} \right) + \left(\varepsilon \frac{d\sigma_{(x,y)}^1}{dx} + \frac{d\sigma_{(x,y)}^1}{dy} \right) + \dots + \gamma(y) = 0 \dots \dots \dots [9]$$

Εξισώνοντας στις σχέσεις [8] και [9] τους όρους ίδιας τάξης ως προς ε λαμβάνουμε:

| Σχέση [8] | Σχέση [9] |
|---|--|
| $E(y) \frac{du_{(x,y)}^0}{dy} = 0 \dots \dots [10]$ | $\frac{d\sigma_{(x,y)}^0}{dy} = 0 \dots \dots [13]$ |
| $\sigma_{(x,y)}^0 = E(y) \left(\frac{du_{(x,y)}^0}{dx} + \frac{du_{(x,y)}^1}{dy} \right) \dots [11]$ | $\frac{d\sigma_{(x,y)}^0}{dx} + \frac{d\sigma_{(x,y)}^1}{dy} + \gamma(y) = 0 \dots \dots [14]$ |
| $\sigma_{(x,y)}^1 = E(y) \left(\frac{du_{(x,y)}^1}{dx} + \frac{du_{(x,y)}^2}{dy} \right) \dots [12]$ | |

Πίνακας 3.1 Οι σχέσεις που προκύπτουν από την εξίσωση των όρων ίδιας τάξης ως προς το παράγοντα κλίμακας ε των σχέσεων [8] & [9].

Από τη σχέση [10] συμπεραίνεται πως η συνάρτηση $\frac{du_{(x,y)}^0}{dy} = 0 \Leftrightarrow u_{(x,y)}^0 = u_{(x)}^0$. Το ίδιο συμπέρασμα εξάγεται και από τη σχέση [13]: $\frac{d\sigma_{(x,y)}^0}{dy} = 0 \Leftrightarrow \sigma_{(x,y)}^0 = \sigma_{(x)}^0$.

Η σχέση [11] γίνεται: $\sigma_{(x)}^0 = E(y) \left(\frac{du_{(x)}^0}{dx} + \frac{du_{(x,y)}^1}{dy} \right) \dots \dots [15]$

Διαιρώντας τη σχέση με $E(y)$, ολοκληρώνοντας στη περίοδο Y και αξιοποιώντας την ιδιότητα πως το ολοκλήρωμα της παραγώγου μιας περιοδικής συνάρτησης στη περίοδο της ισούται με μηδέν, δηλαδή:

$$\int_0^Y \frac{du_{(x,y)}^1}{dy} dy = 0$$

Προκύπτει η σχέση: $\sigma_{(x)}^0 = \left(\frac{Y}{\int_0^Y \frac{dy}{E(y)}} \right) \left(\frac{du_{(x)}^0}{dx} \right)$

Αντικαθιστώντας τη παραπάνω σχέση στη σχέση [15] έχουμε:

$$\left(\frac{Y}{\int_0^Y \frac{dy}{E(y)}} \right) \left(\frac{du_{(x)}^0}{dx} \right) = E(y) \left(\frac{du_{(x)}^0}{dx} + \frac{du_{(x,y)}^1}{dy} \right) \Rightarrow \left(\frac{Y}{E(y) * \int_0^Y \frac{dy}{E(y)}} - 1 \right) * \frac{du_{(x)}^0}{dx} = \frac{du_{(x,y)}^1}{dy} \xrightarrow{\int_0^y (\cdot) dy}$$

$$u_{(x,y)}^1 = \chi(y) * \frac{du_{(x)}^0}{dx} + \xi(x) \dots \dots [16]$$

Όπου η συνάρτηση $\chi(y)$ είναι και αυτή Y περιοδική - το ολοκλήρωμα της συνάρτησης $\left(\frac{Y}{E(y) * \int_0^Y \frac{dy}{E(y)}} - 1 \right)$ και $\xi(x)$ είναι σταθερά που προκύπτει λόγω ολοκλήρωσης ως προς y .

Συνεπώς, η σχέση [12] γίνεται $\sigma_{(x)}^0 = E(y) \left(1 + \frac{d\chi(y)}{dy} \right) * \frac{du_{(x)}^0}{dx}$.

Ολοκληρώνοντας ως προς τη μεταβλητή y η πάνω σχέση δίνει: $\frac{d}{dy} \left[E(y) \left(1 + \frac{d\chi(y)}{dy} \right) \right] = 0$, δηλαδή η σχέση $E(y) \left(1 + \frac{d\chi(y)}{dy} \right) = \alpha$, (όπου α , τυχαία σταθερά).

Επιλύοντας ως προς $\frac{d\chi(y)}{dy}$, έχουμε:

$$\frac{d\chi(y)}{dy} = \frac{\alpha}{E(y)} - 1 \quad \text{ή} \quad \chi(y) = \int_0^y \left(\frac{\alpha}{E(\eta)} - 1 \right) d\eta + b \dots \dots [17]$$

Όπου b μια σταθερά.

Υπενθυμίζεται πως η $\chi(y)$ συνάρτηση είναι Y περιοδική, συνεπώς, $\chi(0) = \chi(Y)$ στα όρια του unit cell. Ικανοποιώντας τις συνοριακές συνθήκες για τη συνάρτηση $\chi(y)$, η τιμή του α ισούται με:

$$\alpha = \frac{1}{\frac{1}{Y} * \int_0^Y \frac{d\eta}{E(\eta)}} \dots \dots [18]$$

Συνεπώς η [15] γράφεται:

$$\sigma_{(x)}^0 = \alpha \left(\frac{du_{(x)}^0}{dx} \right) \quad \text{ή} \quad \sigma_{(x)}^0 = \left(\frac{1}{\frac{1}{Y} * \int_0^Y \frac{d\eta}{E(\eta)}} \right) \left(\frac{du_{(x)}^0}{dx} \right) \dots \dots [19]$$

Το πρόβλημα, εν τέλει τοποθετείται ως εξής:

$$\sigma_{(x)}^0 = E^H \left(\frac{du_{(x)}^0}{dx} \right) \dots \dots \dots [20] \quad \& \quad \frac{d\sigma_{(x)}^0}{dx} + \frac{1}{Y} * \int_0^Y \gamma(y) dy = 0 \dots \dots \dots [21]$$

Όπου, $E^H = \frac{1}{\frac{1}{Y} * \int_0^Y \frac{d\eta}{E(\eta)}}$, το ομογενοποιημένο/ισοδύναμο μέτρο ελαστικότητας για το πρόβλημα της μονοδιάστατης δοκού.

[3.3] Επίλυση του Προβλήματος Βελτιστοποίησης με τη Μέθοδο Ομογενοποίησης

Παρουσιάστηκε πως ένα σταθερό σημείο της κατασκευής, $x = x_0$, εμφανίζει περιοδικότητα σε επίπεδο μικροκλίμακας η οποία αντιπροσωπεύεται πλήρως από το unit cell. Ο λόγος των δύο κλιμάκων ονομάστηκε παράμετρος κλίμακας και συμβολίστηκε με ϵ .

Θεωρείται πως το unit cell εμφανίζει εντός του ορθογωνική οπή διαστάσεων α_1 , στην οριζόντια διεύθυνση y_1 και α_2 , στην κάθετη διεύθυνση y_2 . Οι διαστάσεις της οπής α_i είναι μικρότερες των

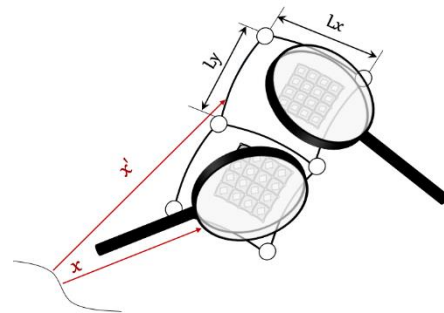


Εικόνα 3.10 Στα αριστερά αναπαρίσταται το πραγματικό unit cell με διαστάσεις οπής α_1, α_2 ενώ στα δεξιά το αντίστοιχο unit cell με τις ισοδύναμες ιδιότητες.

διαστάσεων του κελιού $Y_i = [L_x, L_y]$. Το unit cell που θεωρείται απεικονίζεται στην Εικόνα 3.10. Ανάλογα με τις τιμές των διαστάσεων της οπής α_i , αλλάζει και η ιδιότητα του ισοδύναμου ομογενούς μέσου. Για παράδειγμα, αν η ορθογωνική οπή απλώνεται σε όλο το unit cell ($\alpha_i = L_i$), τότε η ιδιότητα του ισοδύναμου ομογενούς μέσου ταυτίζεται με την

ιδιότητα της οπής. Συνεπώς, η ισοδύναμη ιδιότητα που εξάγεται από τη μελέτη του unit cell είναι συνάρτηση των διαστάσεων της οπής α_1, α_2 . Τονίζεται για ακόμη μια φορά, πως η περιοδικότητα αφορά σταθερό σημείο της μακροκλίμακας. Συνεπώς, διάφορα σημεία του σώματος, με διαφορετικά διανύσματα θέσης, θα παρουσιάζουν διαφορετική η περιοδικότητα (διαφορετικά unit cells).

Στη περίπτωση διακριτοποίησης του συνεχούς μέσου σε πεπερασμένα στοιχεία, θεωρείται πως η περιοδικότητα διαφέρει από στοιχείο σε στοιχείο, δηλαδή κάθε πεπερασμένο στοιχείο εμφανίζει δική του περιοδικότητα η οποία αντιπροσωπεύεται από μοναδικό unit cell, όπως παρουσιάζεται στην Εικόνα 3.11. Συνεπώς, ένα συνεχές μέσο το οποίο έχει διακριτοποιηθεί σε N πεπερασμένα στοιχεία θα εμφανίζει N unit cells. Το κάθε στοιχείο, αναλόγως των διαστάσεων της οπής του unit cell, θα παρουσιάζει και αντίστοιχη ισοδύναμη ιδιότητα.

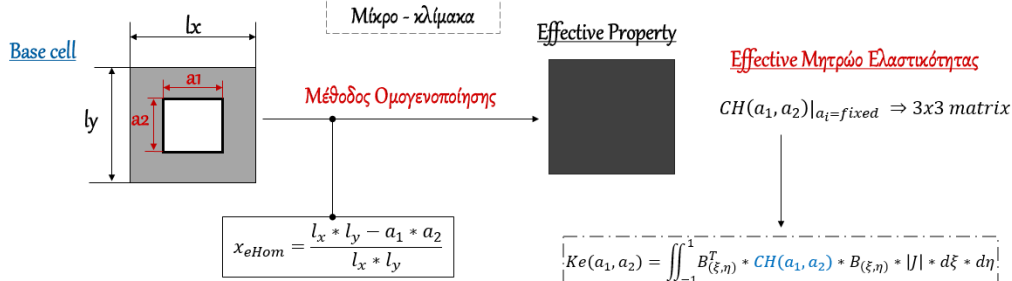


Εικόνα 3.11 Τα πεπερασμένα στοιχεία στα οποία διακριτοποιείται η κατασκευή παρουσιάζουν διαφορετική περιοδικότητα στη μικροδομή τους.

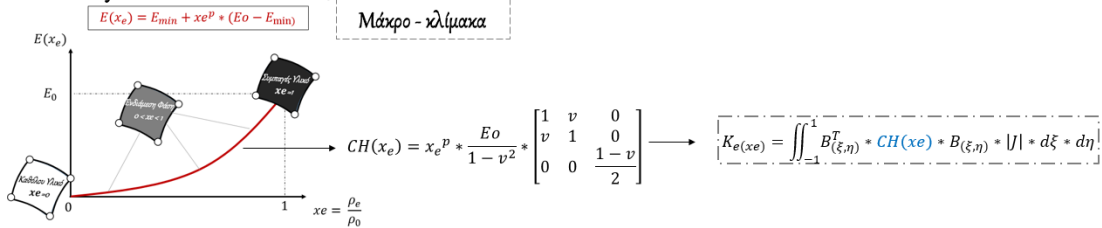
Η αντιστοιχία της μεθόδου ομογενοποίησης με τη μέθοδο SIMP γίνεται εμφανής όταν αναλογιστεί κάποιος πως στη μέθοδο SIMP το αντίστοιχο ισοδύναμο μητρώο ελαστικότητας CH είναι συνάρτηση της σχετικής πυκνότητας του στοιχείου x_e , ενώ με τη μέθοδο της ομογενοποίησης η αντίστοιχη σχετική πυκνότητα του υλικού, x_{eHom} , δίνεται από το λόγο των εμβαδών του υπάρχοντος υλικού εντός του unit cell προς το εμβαδό του. Δηλαδή, η σχετική πυκνότητα του στοιχείου εξάγεται από τη μικροδομή του υλικού.

$$x_{eHom} = \frac{l_x * l_y - a_1 * a_2}{l_x * l_y} \quad \left| \begin{array}{l} \text{('Ογκος Υπάρχοντος Υλικού)} \\ \text{('Ογκος unit cell)} \end{array} \right.$$

Μέθοδος Ομογενοποίησης



Μέθοδος SIMP



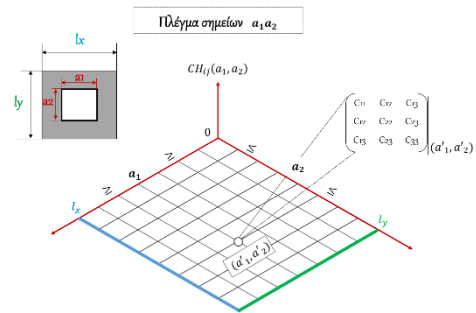
Εικόνα 3.12 Αντιστοιχία των μεθόδων Ομογενοποίησης και SIMP. Το ισοδύναμο μητρώο ελαστικότητας για τη μέθοδο της Ομογενοποίησης είναι συνάρτηση των διαστάσεων της οπής του unit cell, ενώ για τη μέθοδο SIMP είναι συνάρτηση της σχετικής πυκνότητας του στοιχείου.

[3.3.1] Εξαγωγή του Ισοδύναμο Μητρώου Ελαστικότητας CH

Εφόσον το μητρώο ελαστικότητας είναι συνάρτηση των διαστάσεων της οπής εντός του unit cell, αναζητείται για κάθε στοιχείο του μια συνάρτηση η οποία για κάθε ζεύγος διαστάσεων της οπής a_i θα παράγει την αντίστοιχη ισοδύναμη ιδιότητα. Αναζητείται, δηλαδή, για κάθε όρο του μητρώου CH_{ij} η συνάρτηση η οποία περιγράφει τη μεταβολή του όρου ως προς τις διαστάσεις της οπής.

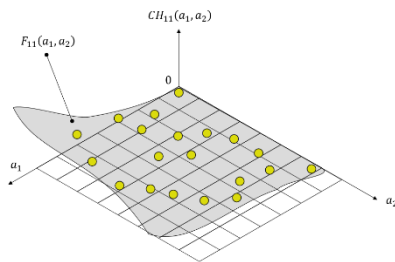
Η διαδικασία υπολογισμού των συναρτήσεων αυτών πραγματοποιείται ως εξής:

Παράγεται ένα πλέγμα διαστάσεων της οπής, όπως παρουσιάζεται στην Εικόνα 3.13. Το μήκος της οπής στη κάθε διεύθυνση πρέπει να είναι μικρότερο απ' το μήκος του unit cell στην ίδια διεύθυνση. Για κάθε ζεύγος σημείων a_i του πλέγματος, υπολογίζεται το ισοδύναμο μητρώο ελαστικότητας του unit cell. Συνεπώς, σε κάθε ζεύγος σημείων a_i αντιστοιχεί ένα μέσο μητρώο ελαστικότητας.



Εικόνα 3.13 Σε κάθε ζεύγος διαστάσεων της οπής a_1, a_2 εντός του unit cell, αντιστοιχεί και ένα ισοδύναμο μητρώο ελαστικότητας CH

Έχοντας πλέον συλλέξει για το κάθε ζεύγος τιμών a_i τα αντίστοιχα μητρώα CH_{ij} , σε επόμενο βήμα, αναζητείται η κατάλληλη συνάρτηση που να περιγράφει τη μεταβολή του κάθε όρου του μητρώου ως προς τις διαστάσεις της οπής. Για παράδειγμα, στην Εικόνα 3.14, αποθηκεύονται σε ένα πίνακα όλες τις τιμές του CH_{11} όρου του μητρώου που προκύπτουν για τα διάφορα ζεύγη τιμών a_1, a_2 και

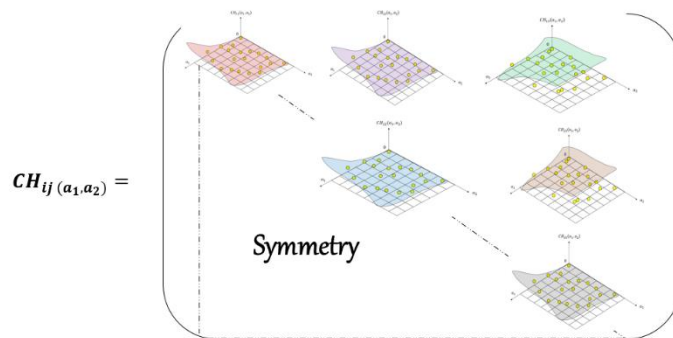


Εικόνα 3.14 Οι όροι του μητρώου CH_{ij} που προκύπτουν για κάθε ζεύγος τιμών (a_1, a_2) , προσεγγίζονται από κατάλληλη επιφάνεια. Δείκτης της ακριβείας της προσέγγισης είναι ο Rsq .

αναζητείται η επιφάνεια $CH_{11}(a_1, a_2)$ που τα προσεγγίζει ικανοποιητικά. Η καταλληλότητα του πολυωνύμου προσέγγισης των σημείων αυτών εκφράζεται από τον δείκτη Rsq . Τιμές του Rsq κοντά στη μονάδα, δηλώνουν πολύ καλή προσέγγιση των σημείων από το πολυώνυμο, ενώ τιμές κάτω του 0.7 δηλώνουν μέτρια προσέγγιση αυτών. Προκειμένου να γίνει όσο το δυνατόν πιο ακριβής η προσέγγιση των σημείων, το πλέγμα των σημείων a_1, a_2 πρέπει να είναι πυκνό. Να ληφθούν, δηλαδή, περισσότερα δείγματα στο χώρο. Σημειώνεται πως αυξάνοντας το βαθμό του πολυωνύμου, αυξάνεται και μεν η ακρίβεια των αποτελεσμάτων, ωστόσο η συνάρτηση γίνεται πιο πολύπλοκη – εφόσον αυξάνεται και ο αριθμός των συντελεστών της- και προσαρμόζεται πολύ καλά

μόνο στο παρόν πρόβλημα, χάνεται δηλαδή η ελαστικότητα στο να περιγράψει κάποιο άλλο πρόβλημα. Συνεπώς, στόχος αποτελεί η εύρεση ενός απλού σχετικά πολυωνύμου (2^{ου} – 3^{ου} βαθμού) ως προς a_i το πολύ που να παρουσιάζει ικανοποιητικό Rsq .

Η διαδικασία εύρεσης του κατάλληλου πολυωνύμου επαναλαμβάνεται για όλους τους όρους του μητρώου CH_{ij} , ώσπου σε τελικό στάδιο λαμβάνεται ένα μητρώο του οποίου ο κάθε όρος περιγράφεται από μοναδική επιφάνεια ως συνάρτηση των διαστάσεων της οπής, όπως παρουσιάζεται στην Εικόνα 3.15.



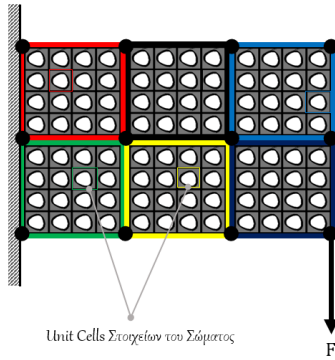
Εικόνα 3.15 Κάθε όρος του μητρώου ελαστικότητας είναι μια συνεχής συνάρτηση των διαστάσεων της οπής (a_1, a_2) .

[3.3.2] Εξαγωγή του Μητρώου Δυσκαμψίας του Στοιχείου

Το μητρώο δυσκαμψίας του στοιχείου δίνεται από τη σχέση:

$$Ke(a_1, a_2) = t * \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B_e^T(\xi, \eta) * CH_{ij}(a_1, a_2) * B_e(\xi, \eta) * ||J|| * d\xi * d\eta$$

Είναι δηλαδή συνάρτηση των διαστάσεων της οπής που εμφανίζει το unit cell.



$$Ke(a_1, a_2) = \iint_{-1}^1 B_{(\xi,\eta)}^T * CH_{ij}(a_1, a_2) * B_{(\xi,\eta)} * |J| * d\xi * d\eta$$

Εικόνα 3.16 Κάθε πεπερασμένο στοιχείο παρουσιάζει διαφορετική περιοδικότητα στη μικροδομή του (διαφορετικές διαστάσεις της οπής). Συνεπώς τα στοιχεία που διακριτοποιούν τη κατασκευή παρουσιάζουν διαφορετικά μητρώα δυσκαμψίας.

Από τη παραπάνω σχέση γίνεται εμφανής η εξάρτηση των δύο κλιμάκων, δηλαδή το πως το ισοδύναμο μητρώο ελαστικότητας, το οποίο εξάγεται σε επίπεδο μικροκλίμακας του στοιχείου, επηρεάζει τη δυσκαμψία του στοιχείου στη μακροκλίμακα.

Στη προηγούμενη παράγραφο αναφέρθηκε πως κάθε πεπερασμένο στοιχείο παρουσιάζει δική του περιοδικότητα στη μικροδομή. Δηλαδή τα πεπερασμένα στοιχεία εμφανίζουν μεταξύ τους διαφορετικές διαστάσεις οπής στη μικροδομή τους, άρα και διαφορετικό μητρώο δυσκαμψίας Ke . Στην Εικόνα 3.16 παρουσιάζεται η περιοδικότητα της μικροδομής των πεπερασμένων στοιχείων που αποτελούν το συνεχές σώμα. Σημειώνεται πως ο υπολογισμός του μητρώου τελεστή $B_{e(\xi,\eta)}$ του στοιχείου υπολογίζεται με τον γνωστό τρόπο που περιγράφηκε στο Κεφάλαιο 2.

Παρατήρηση

Για διαστάσεις οπής $a_i = 0$, (για συμπαγές δηλαδή unit cell), το μητρώο ελαστικότητας του στοιχείου ισούται με αυτό του συμπαγούς υλικού, δηλαδή,

$$CH_{ij}(0,0) \equiv D = \frac{E_0}{1 - \nu^2} * \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix},$$

Το ίδιο θα ισχύει και για το μητρώο δυσκαμψίας:

$$Ke(0,0) = Ke_{solid} = \iint B_e^T * CH_{ij}(0,0) * B_e * |J| * d\xi * d\eta$$

Η μερικές παράγωγοι του μητρώου δυσκαμψίας ως προς τις μεταβλητές a_1, a_2 ισούνται με:

$$\frac{dKe(a_1, a_2)}{da_1} = \iint_{-1}^1 B_{(\xi,\eta)}^T * \frac{dCH_{ij}(a_1, a_2)}{da_1} * B_{(\xi,\eta)} * |J| * d\xi * d\eta$$

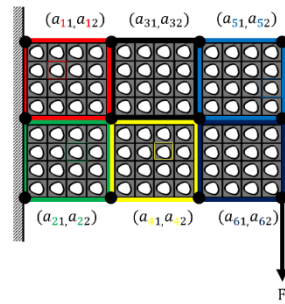
$$\frac{dKe(a_1, a_2)}{da_2} = \iint_{-1}^1 B_{(\xi,\eta)}^T * \frac{dCH_{ij}(a_1, a_2)}{da_2} * B_{(\xi,\eta)} * |J| * d\xi * d\eta$$

[3.3.3] Ελαστική Ενέργεια του Στοιχείου

Στις προηγούμενες παραγράφους είδαμε πως η ελαστική ενέργεια του στοιχείου ισούται με:

$C_e = U_e^T * Ke * U_e$, όπου U_e το διάνυσμα μετατοπίσεων του στοιχείου (διάνυσμα στήλη διαστάσεων: [2*αριθμός κόμβων,1] για το 2-D πρόβλημα) και Ke το μητρώο δυσκαμψίας του στοιχείου.

Συνεπώς, η ελαστική ενέργεια του στοιχείου εκφράζεται και αυτή ως συνάρτηση των διαστάσεων της οπής του unit cell. Η ολική ελαστική ενέργεια της κατασκευής ισούται με το άθροισμα των ελαστικών ενεργειών των πεπερασμένων στοιχείων και επειδή κάθε στοιχείο εμφανίζει ανεξάρτητη περιοδικότητα στη μικροδομή του, θα είναι συνάρτηση 2^* (Αριθμός Στοιχείων) μεταβλητών.



Αντικειμενική Συνάρτηση Προβλήματος

↓

Ελαστική Ενέργεια Σώματος

↓

$$C_{(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, \dots, a_{n_{ele1}}, a_{n_{ele2}})} = \sum_{i=1}^{n_{ele}} U_i^T * K e_{(a_{i1}, a_{i2})} * U_i$$

Εικόνα 3.17 Η αντικειμενική συνάρτηση της κατασκευής (ελαστική ενέργεια του σώματος) είναι συνάρτηση (2^* Αριθμός Στοιχείων) μεταβλητών. Για τη περίπτωση έξι στοιχείων οι μεταβλητές σχεδιασμού είναι δώδεκα.

Η ελαστική ενέργεια του σώματος αποτελεί την αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος βελτιστοποίησης και έχει ως μεταβλητές σχεδιασμού τις διαστάσεις της οπής του κάθε πεπερασμένου στοιχείου στα οποία διακριτοποιείται.

Περιορισμοί Προβλήματος

[1]Περιορισμός Μεταβλητών

Ο πρώτος περιορισμός είναι πως οι διαστάσεις της οπής πρέπει να είναι μικρότερες ή ίσες των αντίστοιχων διαστάσεων του unit cell. Δηλαδή, ισχύει:

$$0 \leq a_1 \leq l_x \text{ και } 0 \leq a_2 \leq l_y \text{ για κάθε στοιχείο. Για λόγους ευκολίας θεωρείται μοναδιαίο unit cell διαστάσεων, δηλ. } l_x = l_y = 1. \text{ Με το τρόπο αυτό, ο λόγος των δύο κλιμάκων ή παράμετρος κλίμακας ισούται με το αντίστροφο του μήκους το στοιχείου στη μακροκλίμακα (} \varepsilon = \frac{1}{L_x (=L_y)} \text{).}$$

[2]Περιορισμός Όγκου

Έστω ο επιθυμητός όγκος της κατασκευής είναι $V_{wanted} = volfrac * V_0$, όπου V_0 ο αρχικός όγκος της κατασκευής και $volfrac$ το ποσοστό αυτού που θέλουμε να κρατήσουμε. (Υπενθυμίζεται πως ο όγκος της κατασκευής ισούται με το γινόμενο των στοιχείων του άξονα x και y).

Το ερώτημα που τίθεται τώρα, είναι πως μπορούμε να εκφράσουμε τον παραπάνω περιορισμό που αφορά τη μακροκλίμακα, συναρτήσει των μεταβλητών σχεδιασμού a_i οι οποίες αναφέρονται στη μικροκλίμακα. Αποδεικνύεται πως ο περιορισμός αυτός είτε εκφράζεται στη μακροκλίμακα είτε στη μικροκλίμακα είναι ίδιος:

Ο όγκος του υλικού που βρίσκεται εντός του unit cell ισούται με:

$$V_{unit_cell} = l_x * l_y - a_1 * a_2.$$

Έστω, L_x, L_y οι μακρο-διαστάσεις του πεπερασμένου στοιχείου του οποίου μελετάται η περιοδικότητα.

Ο συνολικός όγκος του υλικού εντός του στοιχείου δίνεται από τη σχέση:

$$V_{element} = [l_x * l_y - a_1 * a_2] * \frac{L_x}{l_x} * \frac{L_y}{l_y}.$$

Για N πεπερασμένα στοιχεία, ο συνολικός όγκος του υλικού ισούται με:

$$V_{\text{all}} = \sum_{i=1}^N [l_x * l_y - a_{1i} * a_{2i}] * \frac{L_x}{l_x} * \frac{L_y}{l_y} \leq L_x * L_y * N * \text{volfrac}$$

Έπειτα από απλοποιήσεις, ο περιορισμός όγκου εκφράζεται στη μορφή:

$$F = \left[1 - \frac{\sum_{i=1}^N a_{1i} * a_{2i}}{N} \leq \text{volfrac} \right]$$

[3]..... Ισορροπία Σώματος

Ο τελευταίος περιορισμός του προβλήματος είναι η συνθήκη ισορροπίας του σώματος.

$$[K][U] = [F]$$

Όπου οι μετατοπίσεις και το μητρώο δυσκαμψίας του σώματος είναι συναρτήσεις των διαστάσεων της οπής, $K(a_{1i}, a_{2i})$, $U(a_{1i}, a_{2i})$. Οι εξωτερικές δυνάμεις θεωρούνται ανεξάρτητες των διαστάσεων της οπής.

Τελικά, το πρόβλημα βελτιστοποίησης τοποθετείται ως εξής:

$$\min C_{(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, \dots, a_{\text{nele}1}, a_{\text{nele}2})} = \min \sum_{i=1}^{\text{nele}} U_i^T * Ke_{(a_{i1}, a_{i2})} * U_i$$

Περιορισμοί

- ✓ $[K][U] = [F]$
- ✓ $\frac{V_{\text{str}}}{V_0} = \text{volfrac}$
- ✓ $0 \leq a_1, a_2 \leq 1$

[3.3.4] Επίλυση με την Μέθοδο OC

Σε αρχικό βήμα κατασκευάζεται η συνάρτηση Lagrange. Στο προηγούμενο Κεφάλαιο αποδείχθηκε πως, με κατάλληλη επιλογή του διανύσματος- πολλαπλασιαστή λ_1^T , η συνάρτηση Lagrange απλοποιείται ως εξής:

$$L_{(a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{22}, \dots, a_{1N}, a_{2N})} = C_{(a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{22}, \dots, a_{1N}, a_{2N})} + \lambda * (V_{\text{str}} - \text{volfrac} * V_0)$$

Ο περιορισμός όγκου εκφράστηκε συναρτήσει των μεταβλητών σχεδιασμού του προβλήματος από τη σχέση:

$$1 - \frac{\sum_{i=1}^N a_{1i} * a_{2i}}{N} \leq \text{volfrac} \Leftrightarrow$$

$$\frac{(1 - a_{11} * a_{12}) + (1 - a_{21} * a_{22}) + \dots + (1 - a_{N1} * a_{N2})}{N} = \text{volfrac} \Leftrightarrow$$

$$F = \frac{(1 - a_{11} * a_{12}) + (1 - a_{21} * a_{22}) + \dots + (1 - a_{N1} * a_{N2})}{N * \text{volfrac}} - 1 == 0$$

Οι βέλτιστες τιμές της συνάρτησης Lagrange προκύπτουν όταν οι μερικές παράγωγοι αυτής γίνουν ίσες με μηδέν, δηλαδή:

$$\begin{bmatrix} \frac{dL}{da_{1i}} \\ \frac{dL}{da_{2i}} \end{bmatrix} = 0, \dots \dots \dots i = 1, 2 \dots, N.$$

Όπου,

$$\rightarrow \frac{dL}{da_{1i}} = \frac{d}{da_{1i}} (C_{(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1N}, a_{2N})} + \lambda * F) = \frac{dC_{(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1N}, a_{2N})}}{da_{1i}} + \lambda * \frac{dF}{da_{1i}} = 0$$

$$\rightarrow \frac{dL}{da_{2i}} = \frac{d}{da_{2i}} (C_{(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1N}, a_{2N})} + \lambda * F) = \frac{dC_{(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1N}, a_{2N})}}{da_{2i}} + \lambda * \frac{dF}{da_{2i}} = 0$$

Παρατηρήσεις

1] Μερικές Παράγωγοι της Ελαστικής Ενέργειας του στοιχείου, $[\frac{dC}{da_1}, \frac{dC}{da_2}]$:

$$\frac{dC}{da_1} = \frac{d}{da_1} (U^T * KE * U) = \frac{dU^T}{da_1} * KE * U + U^T * \frac{dKE}{da_1} * U + U^T * KE * \frac{dU}{da_1} \dots [1]$$

Αξιοποιώντας τη σχέση ισορροπίας του στοιχείου, έχουμε: $[KE] * [U] = [F] \Rightarrow \frac{dC}{da_1}$

$$\frac{d}{da_1} (KE * U) = 0 \Rightarrow \frac{dKE}{da_1} * U + KE * \frac{dU}{da_1} = 0 \Rightarrow U^T * \frac{dKE}{da_1} * U = -U^T * KE * \frac{dU}{da_1} \dots [2]$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση [2] στη σχέση [1], η παράγωγος της ελαστικής ενέργειας ως προς a_1 απλοποιείται ως εξής:

$$\left[\frac{dC}{da_{1i}} = -U^T * \frac{dKE}{da_{1i}} * U \right]$$

Η ίδια διαδικασία επαναλαμβάνεται και για τη μερική παράγωγο ως προς τη μεταβλητή a_2 :

$$\left[\frac{dC}{da_{2i}} = -U^T * \frac{dKE}{da_{2i}} * U \right]$$

2] Μερικές Παράγωγοι του Περιορισμού του Όγκου της Κατασκευής, $[\frac{dF}{da_1}, \frac{dF}{da_2}]$:

Ο περιορισμός του όγκου εκφράζεται από τη σχέση:

$$F = \frac{(1 - a_{11} * a_{12}) + (1 - a_{21} * a_{22}) + \dots (1 - a_{N1} * a_{N2})}{N * \text{volfrac}} - 1$$

Συνεπώς οι μερικές παράγωγοι της παραπάνω σχέσης ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού a_{1i} , a_{2i} ισούνται με:

$$\left[\frac{dF}{da_{11}} = -\frac{a_{12}}{N * \text{volfrac}} \right] \text{ και } \left[\frac{dF}{da_{12}} = -\frac{a_{11}}{N * \text{volfrac}} \right]$$

Βάσει των παραπάνω παρατηρήσεων, οι μερικές παράγωγοι της Lagrange συνάρτησης γίνονται:

$$\frac{dL}{da_{i1}} = \frac{dC}{da_{i1}} - \lambda * \frac{a_{i2}}{N * \text{volfrac}} = 0 \Rightarrow \frac{\frac{dC}{da_{i1}}}{\lambda * \frac{a_{i2}}{N * \text{volfrac}}} = 1$$

Όπως πραγματοποιήθηκε και με τη μέθοδο SIMP, ο λόγος $\frac{\frac{dC}{da_{i1}}}{\lambda * \frac{a_{i2}}{N * \text{volfrac}}} = (B_{\alpha_1}^k)^\zeta$

Αντίστοιχα πράττεται και για τη μερική παράγωγο της συνάρτησης Lagrange ως προς την a_{i2} μεταβλητή:

$$\frac{dL}{da_{i2}} = \frac{dC}{da_{i2}} - \lambda * \frac{a_{i1}}{N * \text{volfrac}} = 0 \Rightarrow \frac{\frac{dC}{da_{i2}}}{\lambda * \frac{a_{i1}}{N * \text{volfrac}}} = 1$$

Στη προκειμένη περίπτωση θέτουμε το λόγο $\frac{\frac{dC}{da_{i2}}}{\lambda * \frac{a_{i1}}{N * \text{volfrac}}} = (B_{\alpha_2}^k)^\zeta$

Όπου, κ ο δείκτης που δηλώνει τον αριθμό επανάληψης ενώ πάλι για τη σταθερά απόσβεσης ζ επιλέγεται η τιμή 0.5.

Σημειώνεται πως, όπως και στη μέθοδο SIMP οι μερικές παράγωγοι της αντικειμενικής συνάρτησης $\frac{dC}{da_{i2}}, \frac{dC}{da_{i1}}$ υπολογίζονται πάντα στη τρέχουσα επανάληψη κ , ενώ τη μεταβλητή του προβλήματος αποτελεί ο πολλαπλασιαστής Lagrange λ .

Είναι βολικό να θεωρηθεί ένα διάνυσμα στήλη $\mathbf{a}^k = [a_1; a_2]^k$ και ένα διάνυσμα στήλη $\mathbf{B}_a^k = [B_{\alpha_1}^k; B_{\alpha_2}^k]$.

Εν τέλει, η επαναληπτική μέθοδος εκφράζεται μαθηματικά ως εξής:

$$a^{k+1} = \begin{cases} \max(a_{min}, a^k - m) & \text{if } a^k (B_a^k)^\zeta \leq \max(a_{min}, a^k - m) \\ a^k (B_a^k)^\zeta & \text{if } \max(a_{min}, a^k - m) < a^k (B_a^k)^\zeta < \min(1, a^k + m) \\ \min(1, a^k + m) & \text{if } a^k (B_a^k)^\zeta \geq \min(1, a^k + m) \end{cases}$$

Όπου m , ο θετικός όρος μετακίνησης, προκειμένου να σταθεροποιείται η επανάληψη και να εξασφαλίζεται η απουσία απότομων μεταβολών στις διαστάσεις των οπών εντός του unit cell ανάμεσα στις διαδοχικές επαναλήψεις.

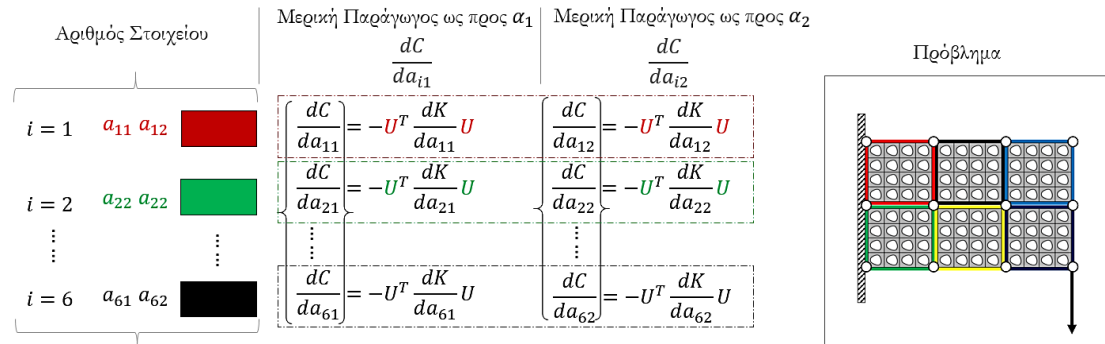
Παράδειγμα

Στο παρόν παράδειγμα μελετάται το πρόβλημα 3- Πρόβολος με μια δύναμη να ασκείται στο κάτω δεξιά άκρο του-. Ο πρόβολος διακριτοποιείται σε έξι πεπερασμένα στοιχεία, συνεπώς υπάρχουν δώδεκα μεταβλητές σχεδιασμού (δύο ανα στοιχείο). Μέσω ενός διαγράμματος ροής επεξηγείται η διαδικασία που ακολουθείται υπολογιστικά για την επίλυση του και ορίζονται τα μητρώα που έχουν οριστεί και στο κώδικα.

Βάσει όσων έχουν ειπωθεί στις προηγούμενες παραγράφους, η συνολική ελαστική ενέργεια του σώματος δίνεται από τη σχέση:

$$C(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, \dots, a_{61}, a_{62}) = \sum_{i=1}^{nele} U_i^T * Ke_{(ai1, ai2)} * U_i$$

ενώ οι μερικές παράγωγοι της ελαστικής ενέργειας της αντικειμενικής συνάρτησης δίνονται στην Εικόνα 3.18:

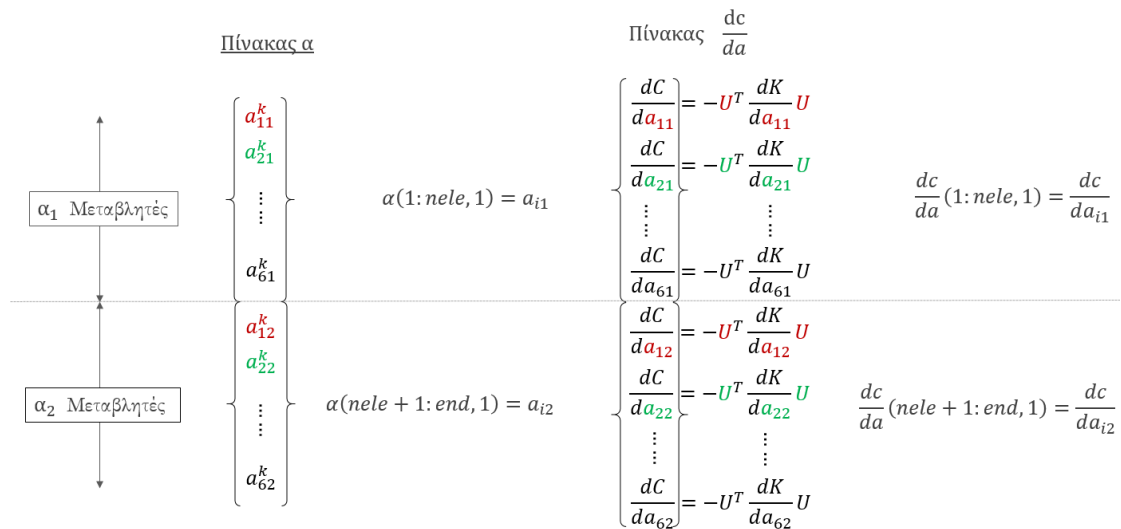


Εικόνα 3.18 Κάθε στοιχείο εμφανίζει τη δική του περιοδικότητα στη μικροδομή του. Διαβάζοντας ανά γραμμή τη παραπάνω εικόνα, υπολογίζονται για κάθε στοιχείο i οι μερικές παράγωγοι της ελαστικής του ενέργειας $[\frac{dC}{da_{i1}}, \frac{dC}{da_{i2}}] \dots i = 1, \dots, 6$.

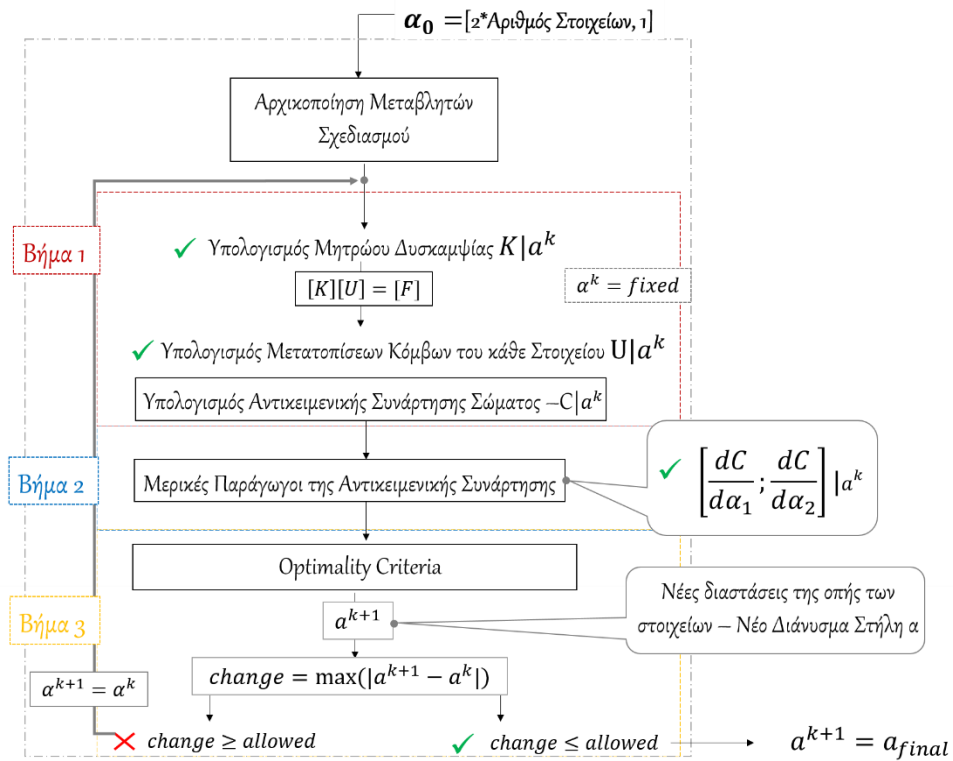
Στο Matlab, μέσω της εντολής rand(διαστάσεις πίνακα), κατασκευάζεται ένας πίνακας που κάθε στοιχείου του λαμβάνει τιμές στο εύρος [0, 1]. Στον πίνακα αποθηκεύονται οι αρχικές τιμές των διαστάσεων της οπής. Ωστόσο, μια λογική αρχικοποίηση των τιμών είναι να θεωρηθούν ίσες με το κλάσμα όγκου volfrac. Στη προκειμένη περίπτωση αξιοποιείται η εντολή repmat(volfrac, [διαστάσεις πίνακα]). Όποιο είδος αρχικοποίησης και αν επιλεγεί, το τελικό αποτέλεσμα παραμένει ίδιο, ωστόσο, παρουσιάζεται αλλαγή στους χρόνους σύγκλισης.

Η διάσταση του πίνακα που αποθηκεύονται οι διαστάσεις των οπών είναι: $[2 * \text{Αριθμός Στοιχείων}, 1]$.

Από τη 1^η γραμμή μέχρι τη γραμμή N (=αριθμός στοιχείων) αποθηκεύονται στο πίνακα οι τιμές της a_1 μεταβλητής για κάθε στοιχείο, ενώ από τη γραμμή N+1 μέχρι τη γραμμή 2*N οι τιμές της a_2 μεταβλητής των αντίστοιχων στοιχείων. Με το τρόπο αυτό διαχωρίζονται οι μερικές παράγωγοι της αντικειμενικής συνάρτησης και του περιορισμού του όγκου σε παραγώγους ως προς a_1 και a_2 . Στον πίνακα a, αποθηκεύονται οι τρέχουσες τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού ενώ στον πίνακα dc οι μερικές παράγωγοι της αντικειμενικής συνάρτησης στη τρέχουσα επανάληψη.



Εικόνα 3.20 Αποθήκευση των μερικών παραγώγων της ελαστικής ενέργειας $\{ [\frac{dc}{da_{i1}}, \frac{dc}{da_{i2}}] \dots i = 1, \dots, nele \}$ σε διάνυσμα διαστάσεων $[2 * nele, 1]$. Στις γραμμές του διανύσματος $[1: nele]$ αποθηκεύονται οι μερικές παραγώγοι ως προς την οριζόντια διάσταση της οπής a_1 , ενώ από τη γραμμή $[nele + 1, 2 * nele]$ οι μερικές παραγώγοι ως προς την εγκάρσια διάσταση της οπής a_2 .



Εικόνα 3.19 Διάγραμμα ροής της μεθόδου SIMP για τη περίπτωση 2D προβλημάτων. Τα βήματα επεξηγούνται στην επόμενη παράγραφο.

[3.4] Περιγραφή Βημάτων της Μεθόδου Ομογενοποίησης | Επεξήγηση Διαγράμματος Ροής

Βήμα 1

Αρχικοποίηση των ανεξάρτητων μεταβλητών σχεδιασμού $(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, \dots, a_{61}, a_{62})_0$.

Σε πρώτο βήμα, αρχικοποιούνται οι διαστάσεις των οπών των στοιχείων. Μέσω της εντολής rand(Αριθμός στοιχείων που διακριτοποιείται το σώμα, 1) παράγεται ένα διάνυσμα στήλη με το κάθε στοιχείο του να λαμβάνει τιμές εντός του εύρους [0, 1]. Η εντολή αυτή εκτελείται δύο φορές, μια για τη μεταβλητή α_1 του κάθε στοιχείου και μια για τη μεταβλητή α_2 .

Με γνωστές τις τιμές α_1, α_2 του κάθε στοιχείου υπολογίζονται το ισοδύναμο μητρώο δυσκαμψίας του και οι μερικές παράγωγοι αυτού για τις συγκεκριμένες τιμές, δηλαδή τα μεγέθη: $Ke(a_1, a_2), \frac{dKe}{da_1} |_{(a_1, a_2)}, \frac{dKe}{da_2} |_{(a_1, a_2)}$. Έχοντας εξάγει από τη συνθήκη ισορροπίας του σώματος τις μετατοπίσεις των κόμβων του κάθε στοιχείου, υπολογίζεται η ολική ελαστική ενέργεια του, καθώς και οι μερικές παράγωγοι αυτής ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού.

Βήμα 2

Επόμενο βήμα αποτελεί ο υπολογισμός των παραγώγων της ελαστικής ενέργειας του σώματος και του περιορισμού του όγκου στις τρέχουσες τιμές των μεταβλητών σχεδιασμού:

$$\left[\frac{dC}{da_{1i}} = -U^T * \frac{dKE}{da_{1i}} * U |_{(a_1, a_2)} \right] \& \left[\frac{dC}{da_{2i}} = -U^T * \frac{dKE}{da_{2i}} * U |_{(a_1, a_2)} \right] \dots \dots \dots i = 1, \dots, N$$

&

$$\left[\frac{dF}{da_{1i}} = -\frac{a_{2i}}{N * \text{volfrac}} \right] \text{ και } \left[\frac{dF}{da_{2i}} = -\frac{a_{1i}}{N * \text{volfrac}} \right] \dots \dots \dots i = 1, \dots, N$$

Αντικαθιστώντας τις μερικές παραγώγους της αντικειμενικής συνάρτησης και του περιορισμού όγκου στη συνάρτηση Lagrange, λαμβάνεται:

$$\frac{dL}{da_{1i}} = \frac{dC_{(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1N}, a_{2N})}}{da_{1i}} + \lambda * \frac{dF}{da_{1i}} = 0 \xrightarrow{\div \lambda \frac{dF}{da_{1i}}} \frac{dC_{(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1N}, a_{2N})}}{\lambda \frac{a_{12}}{N * \text{volfrac}}} = 1$$

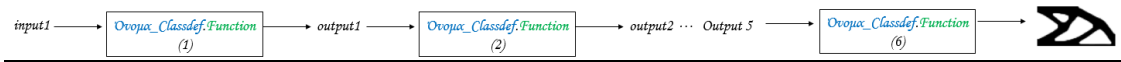
$$\frac{dL}{da_{2i}} = \frac{dC_{(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1N}, a_{2N})}}{da_{2i}} + \lambda * \frac{dF}{da_{2i}} = 0 \xrightarrow{\div \lambda \frac{dF}{da_{2i}}} \frac{dC_{(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1N}, a_{2N})}}{\lambda \frac{a_{11}}{N * \text{volfrac}}} = 1$$

Οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης Lagrange $\left[\frac{dL}{da_{1i}}, \frac{dL}{da_{2i}} \right]$ εισάγονται ως διάνυσμα στήλη στην μέθοδο OC για την εξαγωγή των νέων μεταβλητών σχεδιασμού. Το ίδιο ισχύει και για τις μεταβλητές σχεδιασμού, εισάγονται δηλαδή και αυτές στη μορφή διανύσματος στήλης $[\alpha] = [a_{1i}; a_{2i}]$.

Βήμα 3

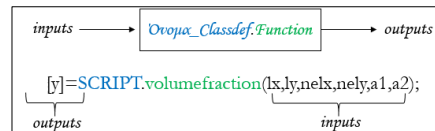
Στο τελευταίο βήμα εφαρμόζεται η μέθοδος Optimality Criteria για την ανανέωση των μεταβλητών σχεδιασμού. Ο αλγόριθμος της μεθόδου OC παρουσιάζεται αναλυτικά στην ενότητα [3.3.4] του Κεφαλαίου. Μόλις επιτευχθεί η επιθυμητή σύγκλιση, η διαδικασία τερματίζεται και εξάγονται οι τελικές σχετικές πυκνότητες της κατασκευής.

Το main script επιμερίζεται σε 5 υπό-συναρτήσεις. Η έξοδος της κάθε μίας υπόσυναρτησης, ορίζεται ως είσοδος στην επόμενη:



Συνάρτηση Νο 1

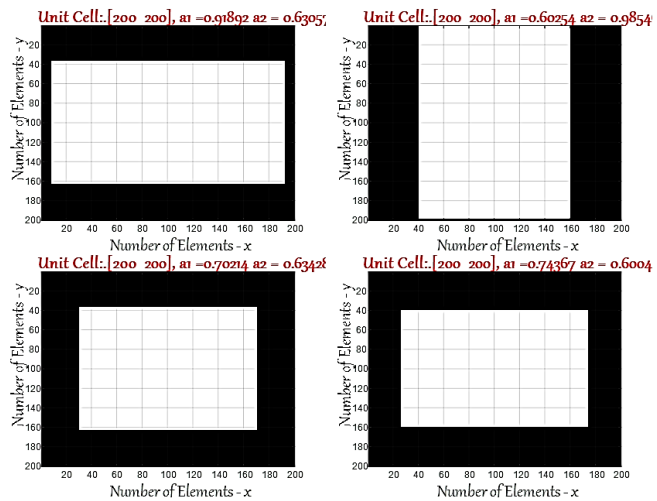
[Παραγωγή τυχαίων Unit Cells (τυχαίες διαστάσεις της οπής εντός τους)]



Input Συνάρτησης:

| | |
|------|-----------------------------------|
| lx | Διάσταση x του Unit CELL |
| ly | Διάσταση y του Unit CELL |
| nelx | Αριθμός Στοιχείων στη Διεύθυνση x |
| nely | Αριθμός Στοιχείων στη Διεύθυνση y |
| a1 | Διάσταση οπής στη διεύθυνση x |
| a2 | Διάσταση οπής στη διεύθυνση y |

Output Συνάρτησης: Από τη συνάρτηση εξάγεται ο πίνακας [y], τα στοιχεία του οποίου λαμβάνουν τις διακριτές τιμές 1, 2 και αποτελούν δείκτες ύπαρξης είτε οπής είτε υλικού εντός του unit cell. Ο δείκτης 2 δηλώνει την ύπαρξη οπής για το συγκεκριμένο στοιχείο, ενώ ο δείκτης 1 την ύπαρξη υλικού. Με την εντολή imagesc([Πίνακας]) οπτικοποιείται το unit cell, όπως παρουσιάζεται στην Εικόνα 3.01.

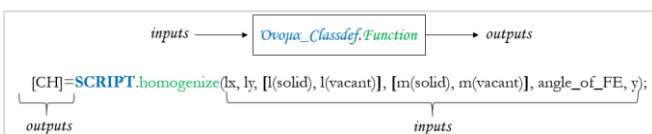


Τα unit cells που απεικονίζονται στην Εικόνα, έχουν μοναδιαίες διαστάσεις και έχουν διακριτοποιηθεί σε πλέγμα [200 x 200] στοιχείων.

Εικόνα 3.01 Διάφοροι τύποι unit cells για διάφορες διαστάσεις οπών. Μέσω της εντολής imagesc (πίνακας από [0,1] στοιχεία) στο MATLAB, οπτικοποιείται το unit cell.

Συνάρτηση Νο 2

[Εξαγωγή του effective μητρικού ελαστικότητας CH του κάθε unit cell]



Input Συνάρτησης:

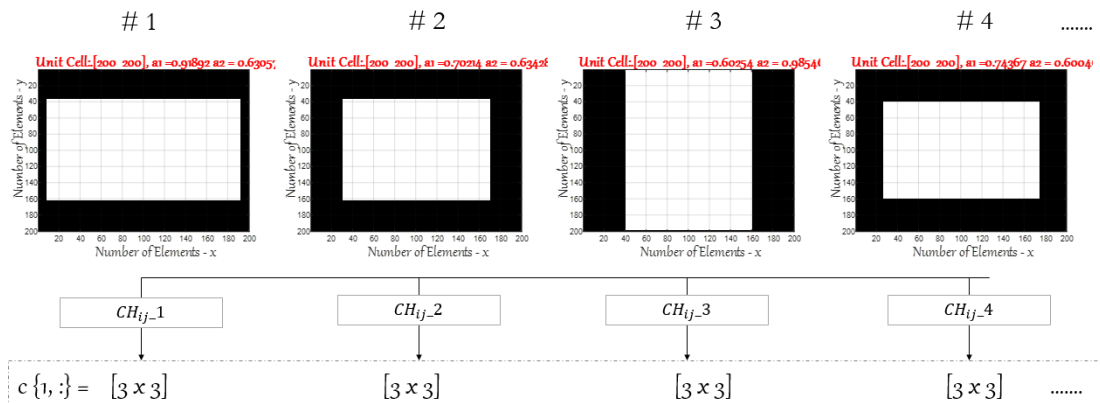
| | |
|-------------|---|
| lx | Διάσταση x του Unit CELL |
| ly | Διάσταση y του Unit CELL |
| l (solid) | Lamé Παράμετρος Υλικού 1 |
| l (vacant) | Lamé Παράμετρος Υλικού 2 [Για κενό l(vacant) ≈ 0 (10^{-9}) στον κώδικα] |
| m(solid) | Μέτρο Διάτμησης Υλικού 1 (m =G) |
| m(vacant) | Μέτρο Διάτμησης Υλικού 2 [Για κενό m(vacant) ≈ 0 (10^{-9}) στον κώδικα] |
| angle_of_FE | 90 ⁰ |
| Y | Πίνακας Unit Cell [Περιλαμβάνει στοιχεία 0 και 1] |

Πίνακας 3.01 Είσοδοι υποσυνάρτησης 2.

Output Συνάρτησης:

Από τον κάθε τυχαίο συνδυασμό α_1, α_2 παράγεται ένα αντίστοιχο effective μητρώο ελαστικότητας CH. Το effective μητρώο ελαστικότητας CH που εξάγεται αποθηκεύεται ως στοιχείο σε ένα κελί c.

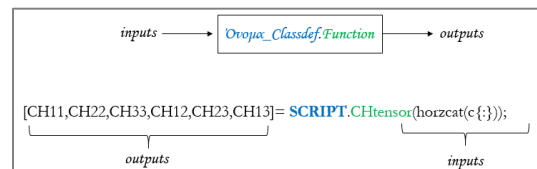
Unit Cells:



Εικόνα 3.02 Για κάθε τύπο unit cell, εξάγεται το αντίστοιχο ισοδύναμο μητρώο ελαστικότητας CH. Τα μητρώα ελαστικότητας συγκεντρώνονται σε ένα κελί c.

Συνάρτηση Νο 3

[Συλλογή των όρων CH_{ij} για τις διάφορες διαστάσεις της σπής]



Input Συνάρτησης:

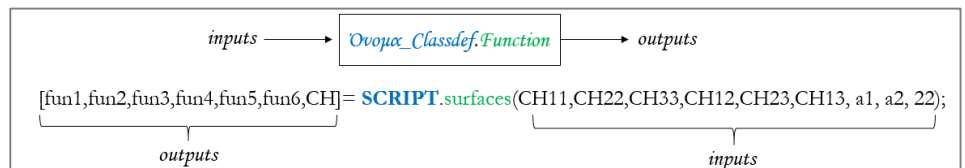
Είσοδος της συνάρτησης αποτελεί το κελί c, το οποίο περιλαμβάνει τα ισοδύναμα μητρώα ελαστικότητας για τις διάφορες διαστάσεις της σπής.

Output Συνάρτησης:

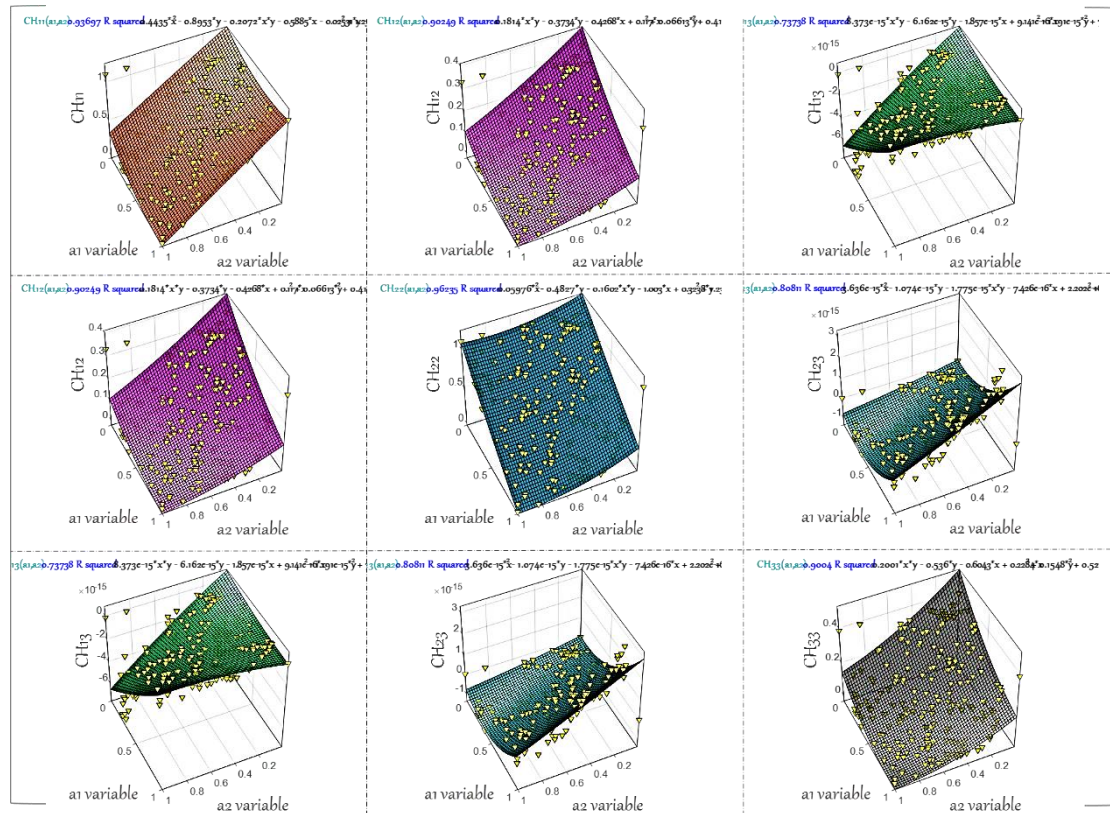
Συλλέγονται οι όροι CH_{ij} για τις διάφορες διαστάσεις της σπής.

Συνάρτηση Νο 4

[Οι όροι του μητρώου CH_{ij} προσεγγίζονται από επιφάνειες πρώτης ή δεύτερης τάξης ως προς τις διαστάσεις της σπής.]



Το μητρώο ελαστικότητας που προκύπτει από τη δευτέρας τάξης πολυωνυμική προσέγγιση των όρων, είναι της μορφής: (Η ακρίβεια προσέγγισης των όρων, αξιολογείται από τον δείκτη Rsq, η τιμή του οποίου αναγράφεται πάνω αριστερά του κάθε όρου – μπλέ χρώμα-.)



Εικόνα 3.03 Οι όροι του ισοδύναμου μητρώου ελαστικότητας προσεγγίζονται από πολώνυμα δευτέρας τάξης ως προς τις διαστάσεις της οπής.

Input Συνάρτησης:

Είσοδοι της συνάρτησης αποτελούν οι όροι CH_{ij} , το πλέγμα των διαστάσεων της οπής και το είδος της επιφάνειας το οποίο θα προσεγγίσει τα σημεία. (Ο τελευταίος όρος της εισόδου .surfaces(~,...,22) ορίζει δευτέρας τάξης προσέγγιση των όρων του μητρώου ως προς τις μεταβλητές α_1, α_2 .)

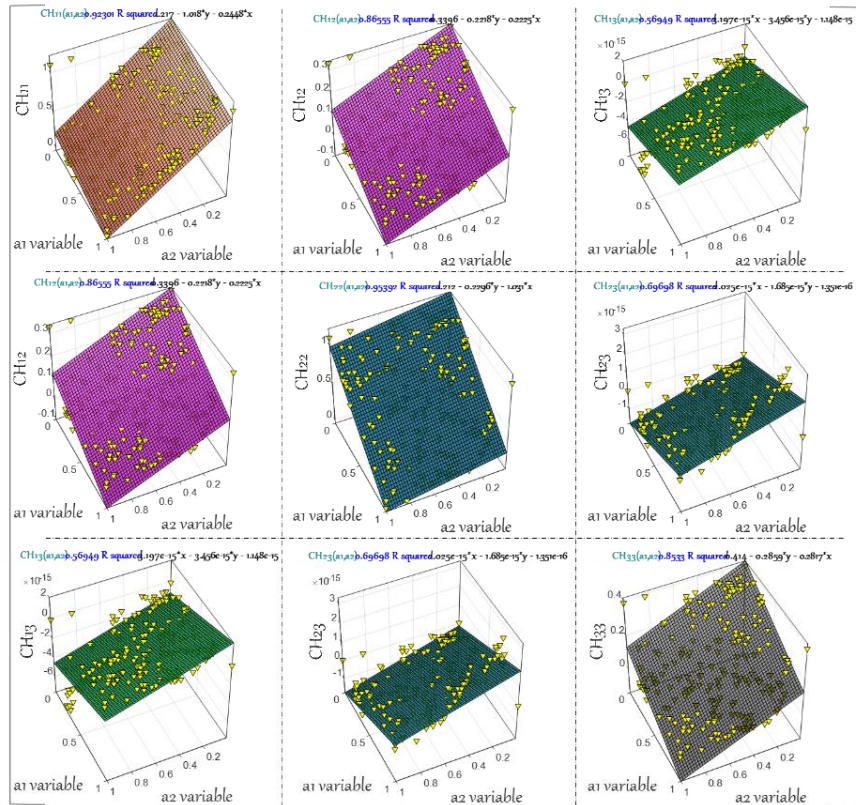
Output Συνάρτησης:

Έξοδοι της συνάρτησης αποτελούν οι επιφάνειες προσέγγισης των όρων του μητρώου καθώς και το μητρώο CH σε συμβολική μορφή.

Σημειώνεται πως στα αποτελέσματα παρουσιάζονται, επιλέγονται πρώτης τάξης πολώνυμα ως προς τις διαστάσεις α_1 και α_2 (προσέγγιση των όρων του μητρώου από επίπεδο). Ο λόγος για τον οποίο πραγματοποιήθηκε η συγκεκριμένη επιλογή προς αποφυγή υπολογισμού των δευτέρας τάξης παραγώνων του μητρώου δυσκαμψίας ως προς τις μεταβλητές α_1, α_2 . Για τη περίπτωση προσέγγισης του μητρώου ελαστικότητας CH από επίπεδες επιφάνειες ισχύει,

$$\frac{d^2 KE}{d^2 \alpha_1} = \frac{d^2 KE}{d^2 \alpha_2} = 0 \quad \& \quad \frac{d KE}{d \alpha_1}, \frac{d KE}{d \alpha_2} = \text{fixed}$$

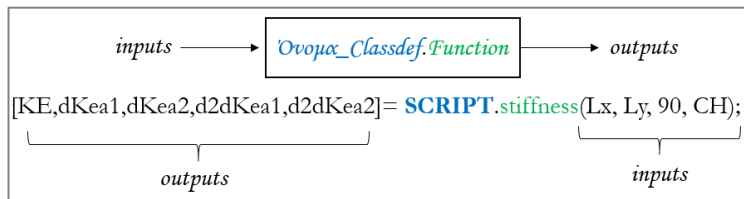
Η έκφραση του μητρώου δυσκαμψίας συναρτήσει του μητρώου ελαστικότητας παρουσιάζεται πιο αναλυτικά στην επόμενη συνάρτηση.



Εικόνα 3.04 Γραμμική προσέγγιση των όρων του ισοδύναμου μητρώου ελαστικότητας συναρτήσει των διαστάσεων της σπής.

Συνάρτηση Νο 5

[Εξαγωγή του μητρώου δυσκαμψίας του στοιχείου Ke και των μερικών παραγώγων αυτού: $\frac{dKE}{da_1}, \frac{dKE}{da_2}$]



Το μητρώο δυσκαμψίας και οι μερικές παράγωγοι αυτού δίνονται από τις σχέσεις:

- $Ke(a_1, a_2) = \iint_{-1}^1 B_{(\xi,\eta)}^T * CH_{ij}(a_1, a_2) * B_{(\xi,\eta)} * |J| * d\xi * d\eta$
- $\frac{dKE}{da_1} = \iint_{-1}^1 B_{(\xi,\eta)}^T * \frac{dCH_{ij}}{da_1} * B_{(\xi,\eta)} * |J| * d\xi * d\eta$
- $\frac{dKE}{da_2} = \iint_{-1}^1 B_{(\xi,\eta)}^T * \frac{dCH_{ij}}{da_2} * B_{(\xi,\eta)} * |J| * d\xi * d\eta$

Input Συνάρτησης:

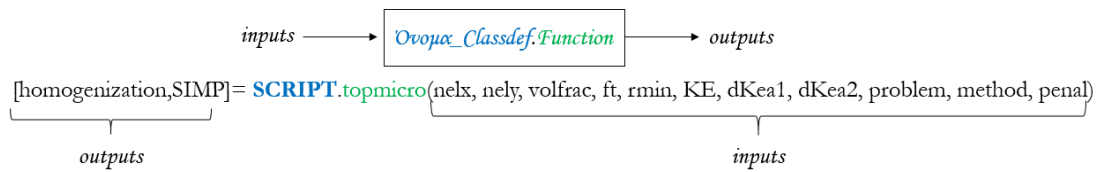
Το μητρώο ελαστικότητας εισάγεται σε συμβολική μορφή μαζί με τις διαστάσεις του στοιχείου στη μακροκλίμακα L_x, L_y .

Output Συνάρτησης:

Εξάγεται το μητρώο δυσκαμψίας του στοιχείου και τα μητρώα των μερικών του παραγώγων συναρτήσει των διαστάσεων της σπής a_1, a_2 :

$[KE, dKea1, dKea2, d2dKea1, d2dKea2]=@ (a_1, a_2)$ Μητρώο[8 x 8],

[Επίλυση του προβλήματος βελτιστοποίησης τοπολογίας.]



nelx: ο αριθμός των στοιχείων του σώματος στον άξονα y
nely: ο αριθμός των στοιχείων του σώματος στον άξονα x
volfrac: Το ποσοστό του αρχικού όγκου της κατασκευής που επιθυμούμε να κρατήσουμε | κλάσμα όγκου
Τύπος φίλτρου ft: By default έχει επιλεγθεί sensitivity analysis filter $\left\{\frac{dc}{da_1}, \frac{dc}{da_2}\right\}$
Ακτίνα Φίλτρου r_{min} : Η ακτίνα φίλτρου θεωρείται by default ίση με 1.5 φορές το μήκος στοιχείου
Μητρώο Δυσκαμψίας Στοιχείου K_e : Το μητρώο δυσκαμψίας του στοιχείου, όπως αυτό εξάγεται από την υποσυνάρτηση Νο 5.
Παράγωγοι Μητρώου Δυσκαμψίας $dK_{e a_1}$ & $dK_{e a_2}$: Οι μερικές παράγωγοι του μητρώου δυσκαμψίας, όπως αυτές εξάγονται από την υποσυνάρτηση Νο 5.
Μέθοδος Επίλυσης: Μέθοδος MMA ή OC (Επιλογή χρήστη)
Πρόβλημα Προς Επίλυση: Μελετώνται τα ίδια προβλήματα με αυτά που παρουσιάστηκαν στο Κεφάλαιο 2. Ο χρήστης επιλέγει ποιο από αυτά επιθυμεί να επιλύσει. Το είδος των προβλημάτων παρουσιάζεται παρακάτω.

p: η δύναμη της power law προσέγγισης του μέτρου ελαστικότητας ($E \sim x_e^p$) | SIMP μέθοδος

Πίνακας 3.02 Είσοδοι υποσυνάρτησης 6 (Επίλυση του προβλήματος βελτιστοποίησης)

Αποτελέσματα

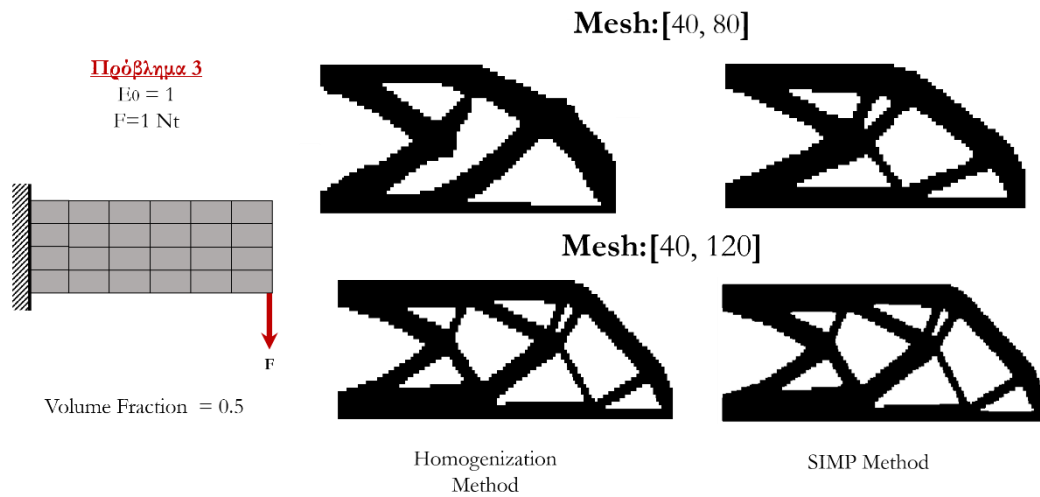
```

a1=rand(200,1); a2=rand(200,1); %200 συνδυασμοί των a1, a2
c=cell(1,length(a1)); %αρχικοποίηση κελιού αποθήκευσης των μητρών ελαστικότητας
lx=1; ly=1; % Διαστάσεις Unit Cell
l=0.5769; m=0.3846; % lame Parameter & Μέτρο Διάτμησης Υλικού (ή E = 1 & ν=0.3)
for i=1:length(a1)
[y]=SCRIPT.volumeFraction(1,1,200,200,a1(i),a2(i)); % Unit Cell
[CH]=SCRIPT.homogenize(1, 1, [2*m*1/(1+2*m), 1e-9 ], [m, 1e-9], 90, y); % effective CH του Unit Cell
c{1,i}=CH; % Αποθήκευση του CH
end
[CH11,CH22,CH33,CH12,CH23,CH13]=SCRIPT.CHtensor(horzcat(c{:})); % Συλλογή των στοιχείων του CH για τον κάθε συνδυασμό a1, a2
[fun1,fun2,fun3,fun4,fun5,fun6,CH]=SCRIPT.surfaces(CH11,CH22,CH33,CH12,CH23,CH13,a1,a2,11); % Προσέγγιση των σημείων από επιφάνεια
[KE,dKea1,dKea2,d2dKea1,d2dKea2,KEsym]= SCRIPT.stiffness(500, 500,90,CH); %Effective Μητρώο Δυσκαμψίας του Στοιχείου
[homogenization,SIMP]=SCRIPT.topmicro(80,40,0.5,1,1.5,KE,dKea1,dKea2,3,1,3,2);% Αποτελέσματα για το Πρόβλημα που επιλέγεται και
σύγκριση των μεθόδων SIMP και HOMOGENIZATION
    
```

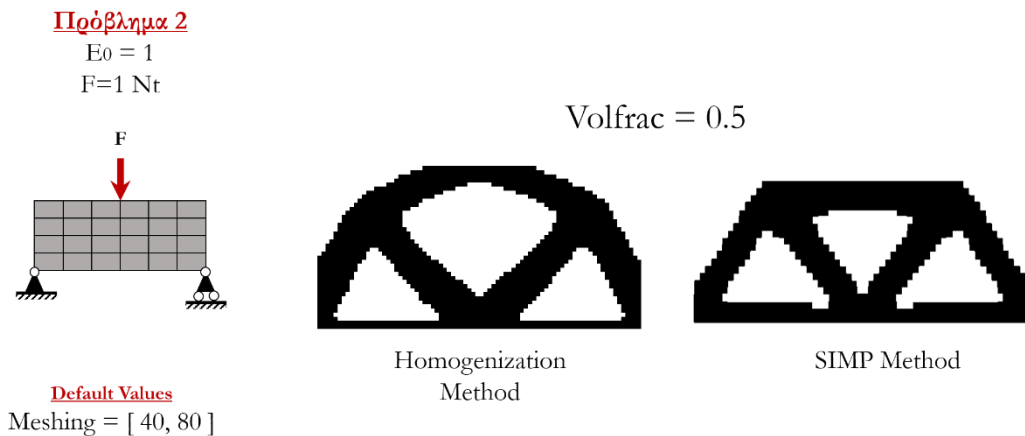
Εικόνα 3.05 Το αρχείο το οποίο τρέχει τη βασική συνάρτηση SCRIPT. Με κόκκινο χρώμα παριστάνονται οι υποσυναρτήσεις της main συνάρτησης SCRIPT.

Προφανώς, μπορούν να πραγματοποιηθούν πολλές παραμετρικές αναλύσεις, όπως και πραγματοποιήθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο με τη μέθοδο SIMP, όπου παρουσιάστηκαν αποτελέσματα για διάφορους τύπους διακριτοποίησης, διάφορα κλάσματα όγκου κλπ. Στη προκειμένη περίπτωση παρουσιάζεται ένα δείγμα αποτελεσμάτων τα οποία συγκρίνονται με τη μέθοδο SIMP. Παρατηρείται μερική διαφορά στα αποτελέσματα με τις τελικές γεωμετρίες να διαφέρουν και τη μέθοδο ομογενοποίησης να παρουσιάζεται αρκετά πιο αργή σε σχέση με τη μέθοδο SIMP, μέχρι (και αν) να επιτευχθεί η επιθυμητή σύγκλιση, κάτι το οποίο ήταν αναμενόμενο, δεδομένου πως έχουμε τις διπλάσιες μεταβλητές σχεδιασμού.

Στα παρακάτω αποτελέσματα η διαδικασία βελτιστοποίησης τερματίζεται μετά τις 100 επαναλήψεις και το σφάλμα (tolerance) σύγκλισης έχει οριστεί ίσο με $1e-3$.



Εικόνα 3.06 Αποτελέσματα της μεθόδου ομογενοποίησης για τη περίπτωση μελέτης του προβλήματος 3. Σύγκριση των τελικών γεωμετριών με αυτές που εξάγονται με χρήση της μεθόδου SIMP.



Εικόνα 3.07 Αποτελέσματα της μεθόδου ομογενοποίησης για τη περίπτωση μελέτης του προβλήματος 2. Σύγκριση της τελικής γεωμετρίας με αυτή που εξάγεται με τη χρήση της μεθόδου SIMP.

Κεφάλαιο 4

Μέχρι τώρα έχει μελετηθεί το πρόβλημα βελτιστοποίησης στις δύο διαστάσεις. Στο παρόν κεφάλαιο επεκτείνονται οι εφαρμογές των μεθόδων SIMP και Ομογενοποίησης στη τρίτη διάσταση. Σε αρχικό στάδιο περιγράφεται εν συντομία η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων για τη τρισδιάστατη εντατική κατάσταση. Σε επόμενο βήμα, ακολουθεί η περιγραφή της μεθόδου SIMP για τη τρισδιάστατη περίπτωση προβλημάτων όπου και εξάγονται τα αποτελέσματα βελτιστοποίησης των προβλημάτων που μελετήθηκαν στο Κεφάλαιο 3. Τέλος, παρουσιάζεται η θεωρία της μεθόδου Ομογενοποίησης και πως αυτή μεταφράζεται υπολογιστικά στο MATLAB. Στο τέλος του Κεφαλαίου αξιολογούνται η ακρίβεια και η αξιοπιστία της μεθόδου ομογενοποίησης και τα αποτελέσματα που εξάγονται συγκρίνονται με τα αντίστοιχα της μεθόδου SIMP.

[4.1] Τρισδιάστατη Εντατική Κατάσταση

Η μέθοδος SIMP για τα διδιάστατα προβλήματα παρουσιάστηκε ενδελεχώς στο Κεφάλαιο 3. Η προσέγγιση των τρισδιάστατων προβλημάτων παραμένει ίδια με αυτή των διδιάστατων. Στα τρισδιάστατα προβλήματα, κάθε κόμβος φέρει τρεις βαθμούς ελευθερίας – τη μετατόπιση στη κάθε διεύθυνση-. Συνεπώς, ένα οχτακομβικό (γραμμικό) στοιχείο φέρει συνολικά 24 βαθμούς ελευθερίας.

Μητρώο Ελαστικότητας για τη Περίπτωση Γραμμικού, Ισότροπου Ελαστικού Υλικού [D]

Στη περίπτωση τρισδιάστατης εντατικής κατάστασης, υπάρχουν μετατοπίσεις και στη τρίτη διεύθυνση, υπάρχει δηλαδή η τρίτη συνιστώσα του διανύσματος των μετατοπίσεων, $u_3(x_1, x_2, x_3)$. Συνεπώς, ο ταυστής των παραμορφώσεων ϵ_{ij} είναι ένα πλήρες μητρώο 3x3 και κάθε όρος του δίνεται από τη σχέση (γραμμένη σε μορφή δεικτών):

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} * (d_i u_j + d_j u_i)$$

Όπως παρουσιάστηκε στις εισαγωγικές παραγράφους του Κεφαλαίου 2, οι παραμορφώσεις συνδέονται με τις αναπτυσσόμενες τάσεις μέσω του μητρώου ελαστικότητας. Γράφοντας σε διανυσματική μορφή τα μητρώα παραμορφώσεων και τάσεων (6x1 διάνυσμα λόγω συμμετρίας), το μητρώο ελαστικότητας για ένα ομογενές ισότροπο υλικό δίνεται από το πίνακα:

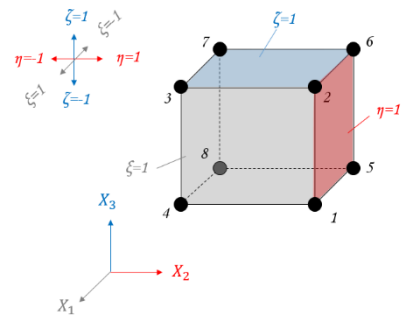
$$[D] = \frac{E*(1-\nu)}{(1+\nu)*(1-2*\nu)} * \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2*\nu}{2*(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2*\nu}{2*(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2*\nu}{2*(1-\nu)} \end{bmatrix}$$

Πίνακας 4.1 Μητρώο ελαστικότητας γραμμικού, ελαστικού ισότροπου υλικού για τη περίπτωση τρισδιάστατης εντατικής κατάστασης.

Οι συναρτήσεις μορφής για ένα πρισματικό ορθογώνιο στοιχείο είναι γραμμικές και δίνονται από τη σχέση:

$$N_{i(\xi,\eta,\zeta)} = \frac{1}{8} (1 + \xi_i) * (1 + \zeta_i) * (1 + \eta_i) \dots \dots i = 1, \dots 8$$

Όπου, οι συνιστώσες του διανύσματος $\{\xi_i, \eta_i, \zeta_i\}$ αποτελούν τις συντεταγμένες του κόμβου i στο φυσικό του σύστημα (αδιάστατες συντεταγμένες). Στην Εικόνα 4.1, απεικονίζεται ένα ορθογώνιο στοιχείο με το φυσικό σύστημα συντεταγμένων στο κέντρο του.



Εικόνα 4.1 Φυσικό σύστημα συντεταγμένων $[\xi, \eta, \zeta]$ για τη περίπτωση τρισδιάστατου γραμμικού ορθογωνίου στοιχείου.

Μητρώο Δυσκαμψίας του Στοιχείου

Προκειμένου να υπολογισθεί το μητρώο δυσκαμψίας του στοιχείου, πρέπει αρχικά να υπολογισθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων μορφής του $d_j N_i$ ως προς το καθολικό σύστημα αξόνων X_i . Μέσω του Ιακωβιανού μητρώου λαμβάνονται οι μερικές παράγωγοι αυτών ως προς το φυσικό σύστημα συντεταγμένων. Το μητρώο παραμορφώσεων, συνδέεται με τις μετατοπίσεις του στοιχείου μέσω του μητρώου – τελεστή B_i . (Ο δείκτης i υποδηλώνει τον κόμβο.)

$$B_i = \begin{bmatrix} \frac{dN_i}{dx} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{dN_i}{dy} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{dN_i}{dz} \\ \frac{dN_i}{dy} & \frac{dN_i}{dx} & 0 \\ 0 & \frac{dN_i}{dz} & \frac{dN_i}{dy} \\ \frac{dN_i}{dz} & 0 & \frac{dN_i}{dx} \end{bmatrix} \dots \dots i = 1, \dots, 8 \quad \text{και} \quad B_e = [B_1, B_2, \dots, B_8]$$

και $\epsilon = B_e * q_e$

Η διαδικασία εξαγωγής του Ιακωβιανού μητρώου του στοιχείου, προς μετασχηματισμό των παραγώγων από το καθολικό στο φυσικό σύστημα συντεταγμένων, έχει παρουσιασθεί στο Κεφάλαιο 2.

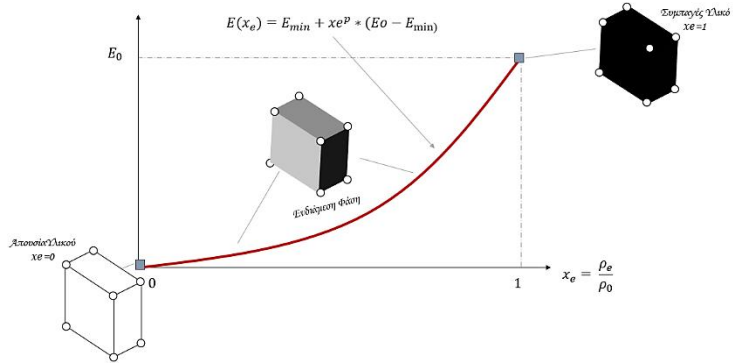
Τελικά, το $[24 \times 24]$ μητρώο δυσκαμψίας του συμπαγούς στοιχείου υπολογίζεται από ολοκλήρωμα όγκου:

$$K_e = \iiint B_e^T * D * B_e * |J| * d\xi * d\eta * dz$$

Κάθε όρος του μητρώου υπολογίζεται με τη χρήση των σημείων Gauss. Αναλόγως του βαθμού πολωνύμου του κάθε όρου του μητρώου, λαμβάνεται και ο ανάλογος αριθμός σημείων Gauss από τα οποία προσεγγίζεται η συνάρτηση, πολλαπλασιασμένα με τον αντίστοιχο συντελεστή βαρύτητας.

[4.2] Η Μέθοδος SIMP για τη Μελέτη 3D Προβλημάτων

Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάστηκε η λογική στην οποία βασίζεται η μέθοδος SIMP: Θεωρείται πως το μέτρο ελαστικότητας του στοιχείου εκφράζεται μέσα από μια power law συνάρτηση της σχετικής πυκνότητας του υλικού x_e . Για τιμή της σχετικής πυκνότητας ίση με τη μονάδα, λαμβάνεται το μέτρο ελαστικότητας του συμπαγούς στοιχείου E_0 , ενώ για τιμές της σχετικής πυκνότητας εντός του εύρους $[0 (\cong 10^{-4}) < x_e < 1]$ λαμβάνει ενδιάμεσες τιμές. Εκφράζοντας το μέτρο ελαστικότητας ως συνάρτηση της σχετικής πυκνότητας του υλικού, το μητρώο ελαστικότητας του στοιχείου $D(x_e)$, γίνεται:



Εικόνα 4.2 Η μέθοδος SIMP για τη τρισδιάστατη εντατική κατάσταση: Το μέτρο ελαστικότητας είναι πολυωνυμική συνάρτηση της σχετικής πυκνότητας του στοιχείου.

$$D(x_e) = \frac{[E_{min} + x_e^p * (E_0 - E_{min})] * (1-\nu)}{(1+\nu) * (1-2*\nu)} * \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2*\nu}{2*(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2*\nu}{2*(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2*\nu}{2*(1-\nu)} \end{bmatrix}$$

Πίνακας 4.2 Έκφραση του μητρώου ελαστικότητας του στοιχείου, ως συνάρτηση της σχετικής του πυκνότητας.

Αντικαθιστώντας το μητρώο ελαστικότητας $D(x_e)$ στο ολοκλήρωμα όγκου που δίνει το μητρώο δυσκαμψίας του στοιχείου και βγάζοντας τη σχετική πυκνότητα του υλικού x_e^p εκτός του ολοκληρώματος, προκύπτει ο τύπος του τελικού μητρώου δυσκαμψίας του στοιχείου:

$$Ke(x_e) = x_e^p * \iiint Be^T * D * Be * |J| * d\xi * d\eta * d\zeta$$

$$\dot{\eta}$$

$$Ke(x_e) = x_e^p * Ke_0$$

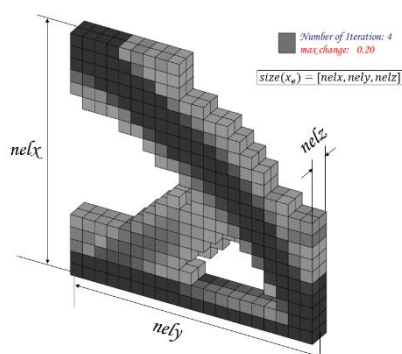
εφόσον το ολοκλήρωμα όγκου δίνει το μητρώο δυσκαμψίας του συμπαγούς στοιχείου (Ke_0).

[4.2.1] Μεθοδολογία της Μεθόδου SIMP

Στο Κεφάλαιο 2 απεικονίζεται, μέσω ενός διαγράμματος ροής, η μέθοδος SIMP για τη διδιάστατη περίπτωση. Το ίδιο διάγραμμα ροής εφαρμόζεται και για τη τρισδιάστατη περίπτωση. Προτού παρουσιαστεί το διάγραμμα ροής για τη περίπτωση τρισδιάστατων προβλημάτων, πραγματοποιείται

ένα σύνολο παρατηρήσεων πάνω στην θεωρία της βελτιστοποίησης, απαραίτητες για τη κατανόηση της δομής του κώδικα:

Παρατήρηση 1 – Μεταβλητές Σχεδιασμού



Σε ένα τριδιάστατο πρόβλημα ο συνολικός αριθμός των στοιχείων, $nele$, -όπως ορίζεται στο κώδικα-, δίνεται από τη σχέση $nele = nelx * nely * nelz$ (ο αριθμός των στοιχείων στη κάθε διεύθυνση). Εφόσον σε κάθε στοιχείο αντιστοιχεί μια μεταβλητή σχεδιασμού, η σχετική του πυκνότητα του x_e , το σύνολο αυτών ισούται με τον αριθμό των συνολικών στοιχείων. Συνεπώς ο αριθμός των μεταβλητών σχεδιασμού ορίζεται άμεσα από τον χρήστη. Όσο περισσότερα τα στοιχεία που διακριτοποιούν τη κατασκευή, τόσο πιο χρονοβόρα η επίλυση της περισσότερων μεταβλητών

αντικειμενικής συνάρτησης, ωστόσο επιτυγχάνονται υψηλότερης ακρίβειας αποτελέσματα.

Παρατήρηση 2 – Ελαστική Ενέργεια Κατασκευής

Η ελαστική ενέργεια που αποθηκεύει ένα στοιχείο (e_i) σχετικής πυκνότητας x_{ei} , υπολογίζεται από τη σχέση: $C_{ei} = U_{ei}^T * K_{ei} * U_{ei}$. Συνεπώς για $nele$ στο σύνολο στοιχεία, η ολική ελαστική ενέργεια της κατασκευής, C_{all} , θα ισούται με:

$$C_{all}(x_{e1}, \dots, x_{enele}) = \sum_{i=1}^{nele} C_{ei} = \sum_{i=1}^{nele} U_e^T * K_{ei} * U_e.$$

Η ελαστική ενέργεια της κατασκευής αποτελεί την αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος.

Παρατήρηση 3 – Περιορισμοί Προβλήματος

Όπως και στη μελέτη των διδιάστατων προβλημάτων, το πρόβλημα υπακούει σε τρεις περιορισμούς.

- 1) Την εξίσωση ισορροπίας της κατασκευής: $[K] * [U] = [F]$
 - ✓ Υπενθυμίζεται πως ο πολλαπλασιαστής Lagrange του περιορισμού είναι διάνυσμα στήλη, αριθμού σειρών ίσο με τους βαθμούς ελευθερίας του προβλήματος: $\lambda_1^T = [1, \text{size}(K, 1)]$. Με κατάλληλες απλοποιήσεις απαλείφεται στη συνάρτηση Lagrange (Βλέπε Κεφάλαιο 2 | Μέθοδος OC)
- 2) Τον περιορισμό του όγκου: $\frac{V_{wanted}}{V_{initial}} = volfrac$. Σημειώνεται πως ο όγκος της κατασκευής δίνεται σε κάθε επανάληψη από το τύπο:

$$V_{wanted} = \sum_{i=1}^{nele} x_{ei} = \text{sum}(xe(:)) | \text{Matlab}$$

Όπου, x_{ei} οι τρέχουσες σχετικές πυκνότητες των στοιχείων στην επανάληψη.

- 3) Τον πεδίο τιμών των μεταβλητών σχεδιασμού: $[0] \leq [x_e] \leq [1]$. Ο περιορισμός αυτός δεν είναι ενεργός και δεν εισάγεται στην συνάρτηση Lagrange. Αντ'αυτού, πραγματοποιείται μετέπειτα έλεγχος των εξαγόμενων τιμών των σχετικών πυκνοτήτων, οι οποίες ανανεώνονται μέσα από έναν εσωτερικό βρόγχο επανάληψης (Βλέπε Κεφάλαιο 2 | Μέθοδος OC).

Παρατήρηση 4 – Κατασκευή της εξίσωσης Lagrange

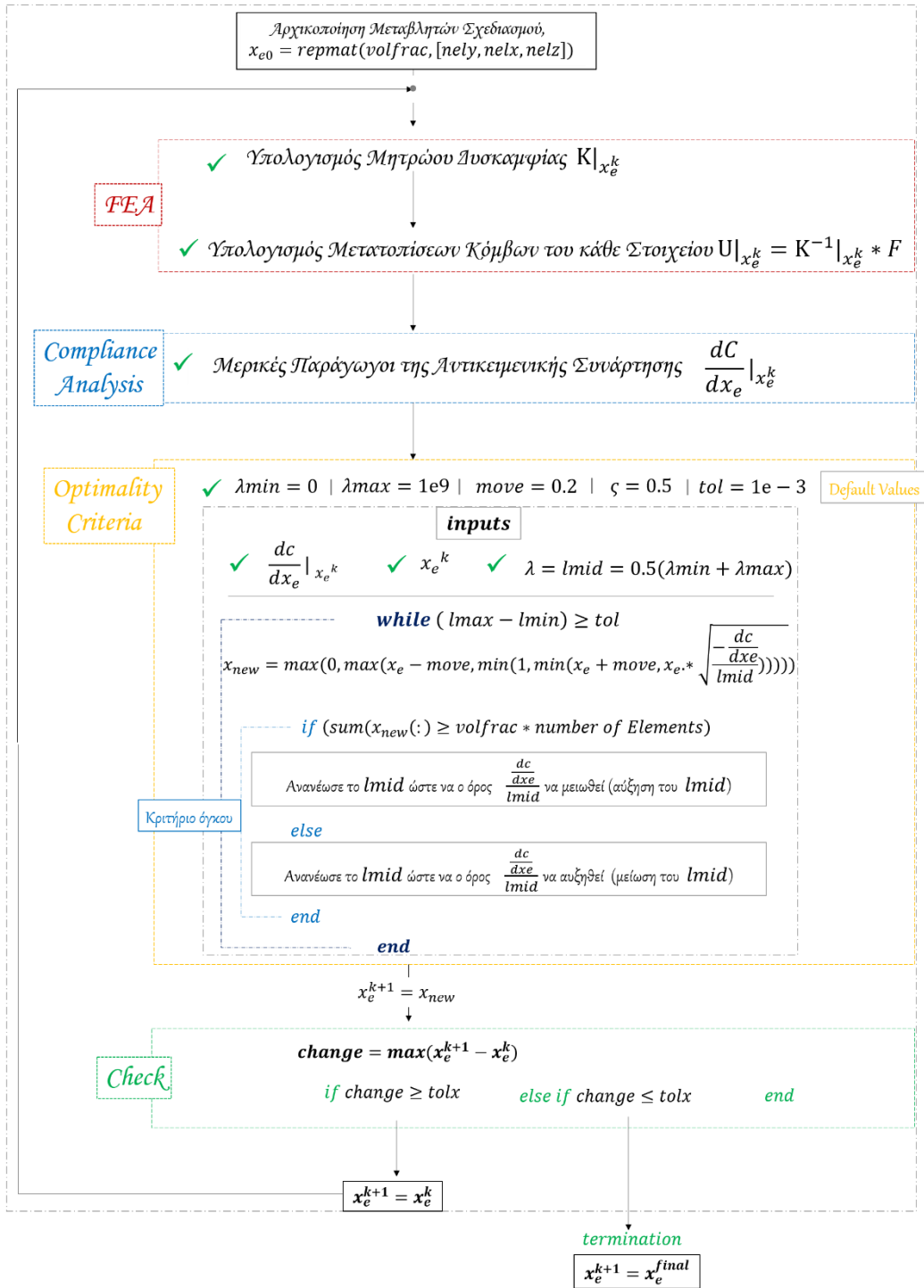
Λαμβάνοντας ως ενεργούς περιορισμούς τους δύο πρώτους από τη Παρατήρηση 3, κατασκευάζεται η συνάρτηση Lagrange:

$$L(x_{e1}, \dots, x_{enele}) = \sum_{i=1}^{nele} C_{ei} + \lambda_1^T * \{[K] * [U] - [F]\} + \lambda * \{V_{wanted} - V_{initial} * volfrac\}$$

Η αναζήτηση βέλτιστων τιμών γίνεται μέσω του μηδενισμού των παραγώνων της Lagrange συνάρτησης.

$$\frac{dL}{dx_{ej}} = d_j L = 0 \dots j = 1, \dots, nele$$

Η διαδικασία εξαγωγής των βέλτιστων μεταβλητών σχεδιασμού είναι πανομοιότυπη με αυτή που πραγματοποιήθηκε στο Κεφάλαιο 3. Παρατίθεται το διάγραμμα ροής για τη Μέθοδο SIMP.



Εικόνα 4.3 Διάγραμμα ροής της μεθόδου SIMP για τη περίπτωση 3D προβλημάτων. Οι μεταβλητές σχεδιασμού αποθηκεύονται στο διάνυσμα x_e .

[4.2.2] Παρουσίαση του Κώδικα Βελτιστοποίησης για τη Μέθοδο SIMP

Ο κώδικας για τη 3D περίπτωση παρουσιάστηκε αρχικά από τους Kai. Liu και Andrés Tovar [15]. Η δομή του κώδικα που παρουσιάζεται στο παρόν κεφάλαιο παραμένει ίδια με τη προσθήκη δύο ακόμα επιλογών: α. Ο χρήστης επιλέγει τη μέθοδο επίλυσης (MMA ή OC –η προεπιλεγμένη μέθοδος είναι η OC-) και β. ποίο από τα δύο τρισδιάστατα προβλήματα επιθυμεί να επιλύσει (Βλέπε Εικόνα 4.5).

Input Συνάρτησης

Οι είσοδοι της συνάρτησης εμπεριέχονται σε ένα structure το οποίο ονομάζεται simp, όπως παρουσιάζεται στην Εικόνα 4.4:



```
simp=struct('Nelx',20,'Nely',20,'Nelz',2,'volfrac',0.5,'penal',3,'Filter_radius',...  
1.5,'Method',2,'Problem',1);
```

Command Window | Default Values

simp =

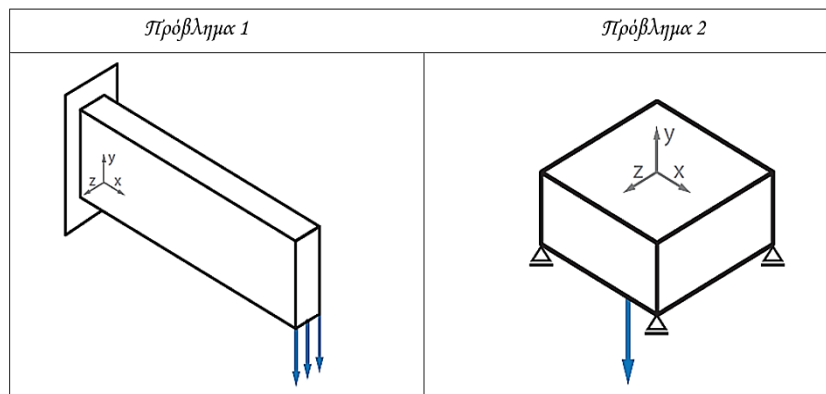
```
Nelx: 20  
Nely: 20  
Nelz: 2  
volfrac: 0.5000  
penal: 3  
Filter_radius: 1.5000  
Method: 2  
Problem: 1
```

Είσοδοι στη συνάρτηση *top3d*.
Ο χρήστης ορίζει τις τιμές των
εισόδων στο *struct*

Run Function *top3d*

```
[Simp]=top3d(simp.Nelx,simp.Nely,simp.Nelz,simp.volfrac,simp.penal,simp.Filter_rad  
ius,simp.Method,simp.Problem);
```

Εικόνα 4.4 Είσοδος στον κώδικα είναι ένα structure το οποίο καλείται στη συνάρτηση *top3d*. Ο χρήστης ορίζει τις εισόδους. Στο command window παρουσιάζονται οι προεπιλεγμένες τιμές του structure.



Εικόνα 4.5 Τα είδη των προβλημάτων που μελετώνται για τη 3D περίπτωση. Ο χρήστης εισάγει το είδος του προβλήματος που επιθυμεί να επιλύσει μέσω της εντολής *simp.Problem* (Τελευταία είσοδος της *simp* structure).

Output Συνάρτησης

Simp =
 Compliance: [50x1 double]
 Number_of_Loops: 50
 Minimum_Value: 87.5791
 Relative_Densities: [20x20x2 double]

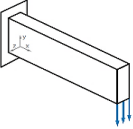
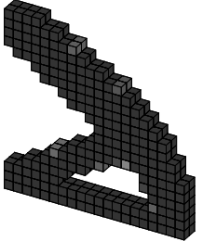
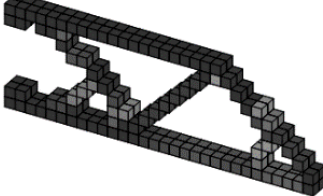
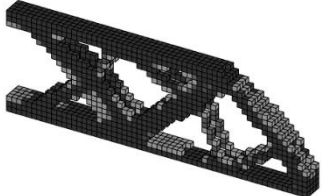
Εικόνα 4.6 Έξοδος του κώδικα αποτελεί ένα structure το οποίο έχει ονομασθεί Simp.

Έξοδος του κώδικα αποτελεί ένα structure το οποίο περιλαμβάνει τις τιμές της ελαστικής ενέργειας σε κάθε επανάληψη, τον αριθμό των επαναλήψεων της μεθόδου μέχρι να ικανοποιηθεί το κριτήριο σύγκλισης, την ελάχιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης καθώς και τις τελικές σχετικές πυκνότητες των στοιχείων.

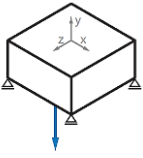
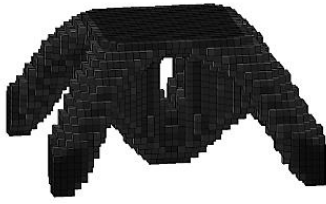
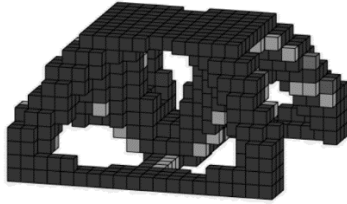
[4.2.3] Αποτελέσματα Μεθόδου SIMP

Τα αποτελέσματα των δυο προβλημάτων βελτιστοποίησης μελετώνται για τη περίπτωση μοναδιαίου μέτρου ελαστικότητας συμπαγούς υλικού, λόγο Poisson ίσο με 0.3 και μοναδιαία φόρτιση στο άκρο ή στο μέσο της κατασκευής (Πρόβλημα 1 & 2 αντίστοιχα). Η διαδικασία βελτιστοποίησης τερματίζεται μόλις ξεπεραστεί η 100^η επανάληψη (maxloop = 100) ή μόλις επιτευχθεί η επιθυμητή σύγκλιση (tolerance $\leq 1e-2$).

Πρόβλημα 1

|  | Input Parameters A | | Input Parameters B | | Input Parameters C | |
|---|---|-------------|--|-------------|---|-------------|
| | Mesh | [20, 20, 2] | Mesh | [30, 10, 2] | Mesh | [60, 40, 4] |
| | volfrac | 0.5 | volfrac | 0.3 | volfrac | 0.3 |
| | Tolerance | 1e-2 | Tolerance | 1e-2 | Tolerance | 1e-2 |
| | Iter/Max Iter. | 100/100 | Iter/Max Iter. | 61/100 | Iter/Max Iter. | 100/100 |
| Τελικές Γεωμετρίες |  | |  | |  | |

Πίνακας 4.3 Τελικές γεωμετρίες για διάφορες περιπτώσεις διακριτοποίησης και κλάσματος όγκου του προβλήματος 1.

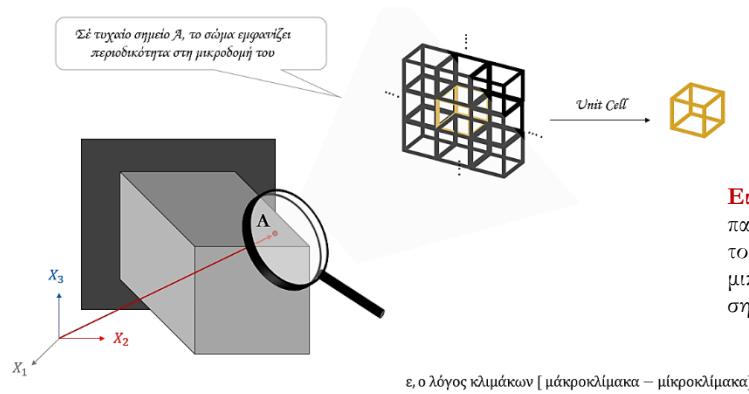
| | | | | |
|---|---|--------------|--|--------------|
|  | Input Parameters A | | Input Parameters B | |
| | Mesh | [40, 20, 40] | Mesh | [20, 10, 20] |
| | volfrac | 0.2 | volfrac | 0.2 |
| | Tolerance | 1e-2 | Tolerance | 1e-2 |
| | Iter/Max Iter | ~/100 | Iter/Max Iter | ~/100 |
| Τελικές Γεωμετρίες |  | |  | |

Πίνακας 4.4 Τελικές γεωμετρίες για διάφορες περιπτώσεις διακριτοποίησης του προβλήματος 2.

[4.3] Η Μέθοδος Ομογενοποίησης για Τρισδιάστατα Προβλήματα

Στο Κεφάλαιο 3, μελετήθηκε η μέθοδος της ομογενοποίησης για τη περίπτωση διδιάστατων προβλημάτων. Στη παρούσα ενότητα, η λογική της επεκτείνεται για τη περίπτωση τρισδιάστατων προβλημάτων.

Η παραδοχή στην οποία στηρίζεται η μέθοδος είναι, πως το υλικό σε επίπεδο μικροκλίμακας παρουσιάζει περιοδικότητα στη δομή του. Δηλαδή, αν με κάποιο μικροσκόπιο μελετούσαμε ένα σταθερό σημείο A της κατασκευής - με σταθερό διάνυσμα θέσης r_A ως προς κάποιο σταθερό σύστημα αναφοράς- το σημείο αυτό σε επίπεδο μικροκλίμακας, θα εμφάνιζε περιοδικότητα στη δομή του. Συνεπώς, όπως και στη περίπτωση των διδιάστατων προβλημάτων, πραγματοποιείται διαχωρισμός των δύο κλιμάκων, της μακροκλίμακας με τη μικροκλίμακα. Ο λόγος των δύο κλιμάκων ορίσθηκε στο Κεφάλαιο 3 ως παράγοντας κλίμακας και συμβολίσθηκε με ε . Η περιοδικότητα της δομής του υλικού σε επίπεδο μικροκλίμακας παρουσιάζεται στην Εικόνα 4.9, όπου το διανυσματικό πεδίο μετατοπίσεων $U_i(x_j)$ σε ένα τυχαίο σημείο A λαμβάνει τις ίδιες τιμές με ένα σημείο B το οποίο απέχει διανυσματικά $[dx_1, dx_2, dx_3] = [L, L, L]$ από το A (L το μήκος τετραγωνικού στοιχείου). Στο Κεφάλαιο 3 παρουσιάζεται ενδελεχώς η έννοια της περιοδικότητας και πως αυτή εκφράζεται μαθηματικά σε μητρωική μορφή.

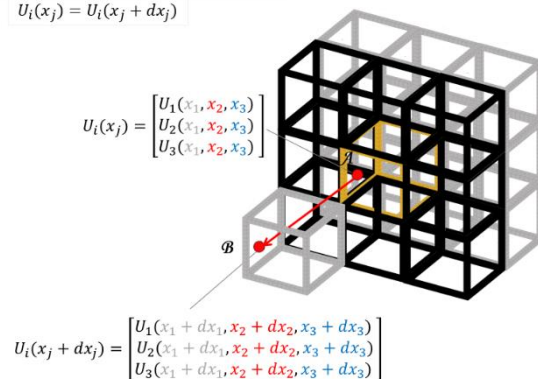


Εικόνα 4.7 Ένα σημείο A του σώματος παρουσιάζει περιοδικότητα στη μικροδομή του. Το επαναλαμβανόμενο στοιχείο της μικροδομής του αποτελεί το unit cell του σημείου αυτού.

● Τίμα Τίμη του Πεδίου Μετατόπισης στα σημεία A, B

$$U_i(x_j) = U_i(x_j + dx_j)$$

Εικόνα 4.8 Η έννοια της περιοδικής συνάρτησης σε επίπεδο μικροκλίμακας: Το διανυσματικό πεδίο μετατόπισης λαμβάνει ίσες τιμές στα σημεία A και B . Υπενθυμίζεται πως η συνάρτηση είναι περιοδική στη μικροκλίμακα (y scale), μελετάται δηλαδή, η μικροδομή ενός σημείου P με σταθερό διάνυσμα θέσης στη μακροκλίμακα (x scale).



$$U_i(x_j) = \begin{bmatrix} U_1(x_1, x_2, x_3) \\ U_2(x_1, x_2, x_3) \\ U_3(x_1, x_2, x_3) \end{bmatrix}$$

$$U_i(x_j + dx_j) = \begin{bmatrix} U_1(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3) \\ U_2(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3) \\ U_3(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3) \end{bmatrix}$$

[4.3.1] Εξαγωγή του Ισοδύναμου Μητρώου Ελαστικότητας

Η διαδικασία εξαγωγής του ισοδύναμου μητρώου ελαστικότητας CH παραμένει ίδια με αυτή που παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 3. Ο κώδικας που δίνει το ισοδύναμο μητρώο ελαστικότητας για τη διδιάστατη περίπτωση δίνεται στην [10], ενώ ο κώδικας που δίνει το ισοδύναμο μητρώο

ελαστικότητας για τη τρισδιάστατη περίπτωση δίνεται στην [12]. Και οι δύο κώδικες μελετούν τη περίπτωση δύο ξεχωριστών υλικών, ωστόσο με κατάλληλη τροποποίηση, η εφαρμογή τους επεκτείνεται και στη μελέτη περισσότερων από δύο υλικών.

Ο κώδικας ομογενοποίησης για τη τρισδιάστατη περίπτωση, θεωρεί ορθογωνικό unit cell με ίσες τις διαστάσεις του στη κάθε διεύθυνση. Ο όγκος του ενός εκ των δύο υλικών προσδιορίζεται μέσω της ακτίνας r του κάθε κόμβου (lattice points). Η μέγιστη τιμή της ακτίνας, στη τιμή της οποίας ο όγκος του unit cell ταυτίζεται με αυτόν του συμπαγούς υλικού, είναι 0.62. Για καλύτερη κατανόηση της λογικής και της δομής του κώδικα, ο αναγνώστης προτρέπεται να μελετήσει την [12].

[4.3.2] Δομή του Κώδικα Βελτιστοποίησης με τη Μέθοδο Ομογενοποίησης

Η βασική συνάρτηση διαιρείται σε τέσσερις υπό-συναρτήσεις, της οποίας η έξοδος αποτελεί είσοδο για την επόμενη συνάρτηση. Η δομή του κώδικα έχει διαμορφωθεί με τρόπο τέτοιο, ώστε να περιγράφει απλά και κατανοητά τα βήματα που εφαρμόζονται.

Κάθε υπό-συνάρτηση μπορεί να οπτικοποιηθεί ως ένα σύστημα αυτόματου ελέγχου, n εισόδων και k εξόδων. Τελική έξοδος των εν σειρά συστημάτων αποτελεί το πρόβλημα βελτιστοποίησης.



Εικόνα 4.9 Αναπαράσταση της δομής του κώδικα βελτιστοποίησης ως σύστημα αυτόματου ελέγχου. Η έξοδος του κάθε υποσυστήματος αποτελεί την είσοδο του επόμενου.

Input Συνάρτησης

Οι εισόδους της συνάρτησης εμπεριέχονται σε ένα structure το οποίο ονομάζεται Homog, όπως παρουσιάζεται στην Εικόνα 4.10:

```
Homog=struct('Voxels',20,'Cell_Radius',r,...
            'Lx',1,'Ly',1,'Lz',1,'Lamda',[0.5769,1e-6],'Mu',[0.3846,1e-6],...
            'Nelx',20,'Nely',20,'Nelz',2,'volfrac',0.5,'Filter_radius',...
            1.5,'Method',2,'Problem',1);
```

Command Window | Default Values

```
Homog =
    Voxels: 20
 Cell_Radius: [1x14 double]
         Lx: 1
         Ly: 1
         Lz: 1
    Lamda: [0.5769 1.0000e-06]
         Mu: [0.3846 1.0000e-06]
         Nelx: 20
         Nely: 20
         Nelz: 2
    volfrac: 0.5000
 Filter_radius: 1.5000
         Method: 2
         Problem: 1
```

Είσοδοι στη συνάρτηση **ΗΟΜΟΓΕΝΙΖΑΤΙΟΝ**. Ο χρήστης ορίζει τις τιμές των εισόδων στο **struct**

Εικόνα 4.10 Είσοδος στον κώδικα είναι ένα structure το οποίο ονομάζεται Homog. Ο χρήστης ορίζει τις εισόδους. Στο command window παρουσιάζονται οι προεπιλεγμένες εισόδους του structure.

Υποσυναρτήσεις Κώδικα

Συνάρτηση No 1 [Παραγωγή Unit Cells & Παραγωγή Μητρώων Ελαστικότητας]

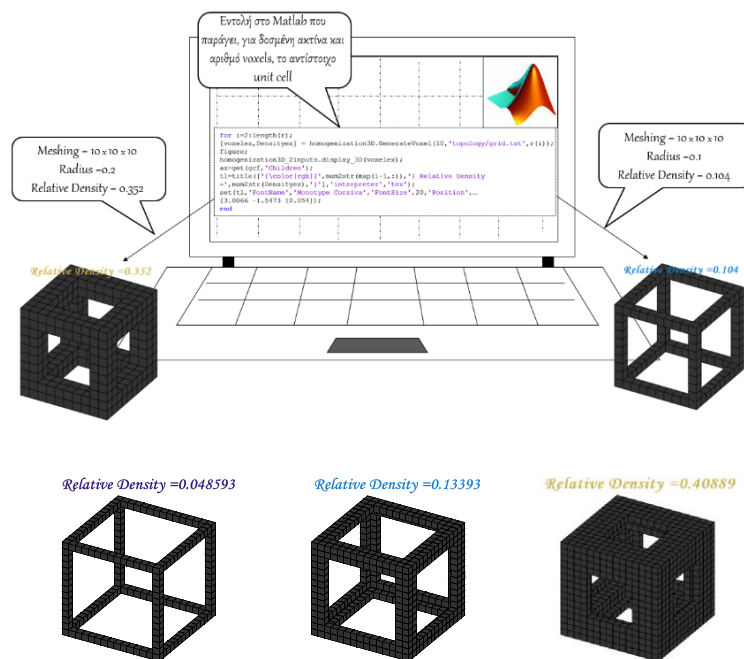
A) Παραγωγή Unit Cells

Ο χρήστης εισάγει τον αριθμό των αριθμών των ορθογωνικών στοιχείων στα οποία διακριτοποιείται το unit cell (voxels) καθώς και τη τιμή της ακτίνας r.

Αναλόγως του αριθμού των voxels, το unit cell διακριτοποιείται σε [nelx, nely, nelz] στοιχεία (Αποθηκεύεται σε μορφή 3D πίνακα) και για κάθε τιμή της ακτίνας που εισάγεται υπολογίζεται η σχετική πυκνότητα του υλικού: $Density = \frac{\text{Όγκος Υλικού εντός Unit Cell}}{\text{Συνολικός Όγκος Unit Cell}}$. Οι τιμές της σχετικής πυκνότητας που λαμβάνονται για κάθε τιμή της ακτίνας αποθηκεύονται σε ένα κελί το οποίο ορίζεται στον κώδικα ως Density.

```
for i=1:length(r)
    [voxel,Density] = HOMOGENIZATION.GenerateVoxel(Homog.Voxels,fullname,...
        Homog.Cell_Radius(i));
    CH = HOMOGENIZATION.homo3D(Homog.Lx, Homog.Ly, Homog.Lz, Homog.Lamda, Homog.Mu, voxel);
    ch{1,i}=CH;
    dens{1,i}=Density;
end
```

Εικόνα 4.11 Για κάθε τιμή της ακτίνας r λαμβάνεται η αντίστοιχη σχετική πυκνότητα του υλικού, η οποία σε κάθε επανάληψη αποθηκεύεται σε ένα κελί dens {1,i}= Density Unit Cell επανάληψη i. Το διάνυσμα r, περιλαμβάνει τις τιμές τις ακτίνας και λαμβάνει τιμές από μηδέν (απουσία υλικού) μέχρι 0.65 (συμπαγές υλικό).



Εικόνα 4.12 Οπτικοποίηση των unit cells για διάφορες τιμές της ακτίνας. Στο πάνω μέρος αυτών αναγράφεται η σχετική τους πυκνότητα. Τα unit cells έχουν διακριτοποιηθεί σε 10x10x10 πεπερασμένα στοιχεία.

B) Παραγωγή Μητρώων Ελαστικότητας

Στη συγκεκριμένη υπό-συνάρτηση, λαμβάνει χώρα η διαδικασία της ομογενοποίησης. Είσοδο του συστήματος αποτελούν οι διαστάσεις του unit cell (τα μήκη στη κάθε διεύθυνση), οι ελαστικές σταθερές των υλικών που συμμετέχουν σε διανυσματική μορφή:

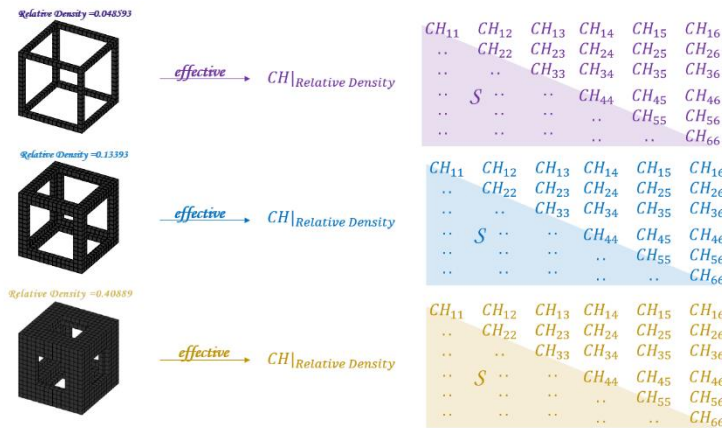
1. **lamda** = [Σταθερά Lamé υλικού 1, Σταθερά Lamé υλικού 2]
2. **mu** = [Σταθερά mu υλικού 1, Σταθερά mu υλικού 2]

και ο αριθμός των στοιχείων στα οποία διακριτοποιείται το unit cell. Έξοδος του συστήματος είναι το ισοδύναμο μητρώο ελαστικότητας CH.

Για κάθε τιμή της ακτίνας r υπολογίζεται και το αντίστοιχο ισοδύναμο μητρώο CH. Τα ισοδύναμα μητρώα ελαστικότητας που λαμβάνονται για τη τρέχουσα τιμή της ακτίνας αποθηκεύονται σε ένα κελί το οποίο έχει οριστεί στον κώδικα ως ch.

```
for i=1:length(r)
    [voxel,Density] = HOMOGENIZATION.GenerateVoxel(Homog.Voxels,fullname,...
        Homog.Cell_Radius(i));
    CH = HOMOGENIZATION.homo3D(Homog.Lx, Homog.Ly, Homog.Lz, Homog.Lamda, Homog.Mu, voxel);
    ch{1,i}=CH;
    dens{1,i}=Density;
end
```

Εικόνα 4.13 Για κάθε τιμή της ακτίνας r λαμβάνεται το ισοδύναμο μητρώο ελαστικότητας του unit cell. Το μητρώο ελαστικότητας για κάθε τρέχουσα τιμή της ακτίνας αποθηκεύεται σε ένα κελί που ονομάζεται ch {1,i} = CH_{eff} . Unit Cell επανάληψη i.



Εικόνα 4.14 Για τις διάφορες τιμές της ακτίνας λαμβάνονται τα αντίστοιχα, ισοδύναμα μητρώα ελαστικότητας.

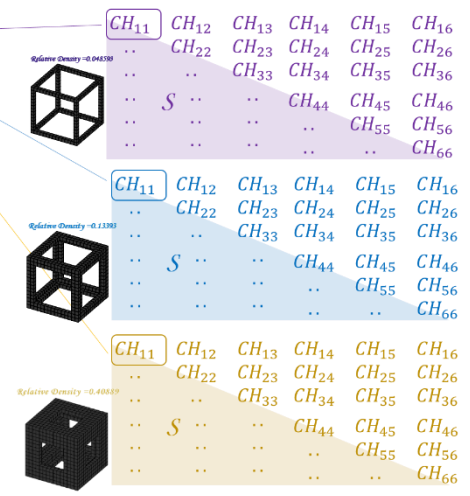
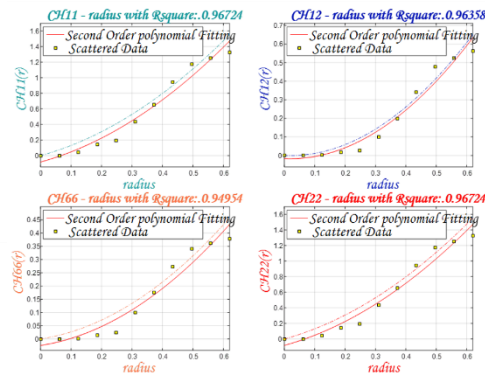
Συνάρτηση No 2 [Πολυωνυμική Προσέγγιση των Όρων του Μητρώου CH]

Οι όροι του μητρώου ελαστικότητας CH που λαμβάνονται για διάφορες τιμές της ακτίνας προσεγγίζονται από πολυώνυμα δευτέρας τάξης. Η πληροφορία για την ακριβεία της προσέγγισης παρέχεται από τον δείκτη Rsq. Όσο πιο κοντά στη μονάδα η τιμή του τόσο πιο ακριβής η προσέγγιση. Στην Εικόνα 4.15 παρουσιάζεται η διαδικασία προσέγγισης των σημείων. Οι όροι του μητρώου CH έχουν προσεγγισθεί από πολυώνυμα δευτέρας τάξης ως προς την ακτίνα του unit cell. Υπογραμμίζεται πως παράγωγοι αυτών, τάξης μεγαλύτερης της δευτέρας, δίνουν μηδενικές τιμές.

2α Συλλογή των CH_{ij} όρων για κάθε ακτίνα r

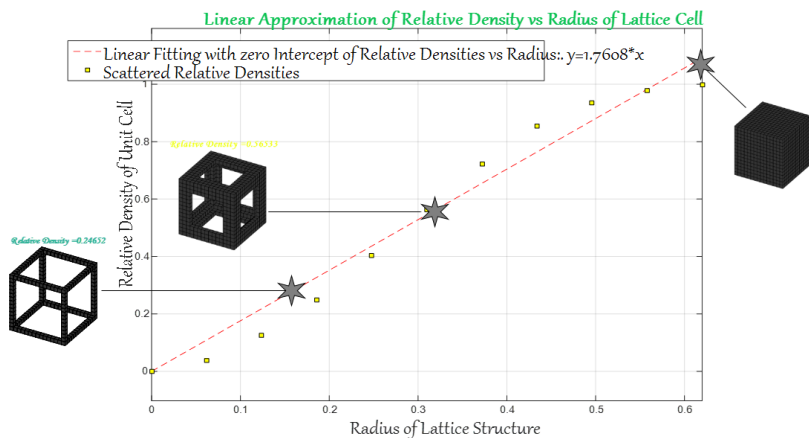
| | | | | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----|
| CH_{11} | CH_{11} | CH_{11} | CH_{11} | ... |
| CH_{12} | CH_{12} | CH_{12} | CH_{12} | ... |
| CH_{22} | CH_{22} | CH_{22} | CH_{22} | ... |
| CH_{66} | CH_{16} | CH_{16} | CH_{16} | ... |

2β Fitting



Εικόνα 4.15 Πολυωνυμική προσέγγιση των όρων CH_{ij}

Σε επόμενο βήμα, προσεγγίζεται γραμμικά η σχέση της σχετικής πυκνότητας του υλικού με την ακτίνα. Η κλίση της ευθείας αποτελεί τη δεύτερη έξοδο της συνάρτησης. Η κλίση της ευθείας προσέγγισης, έχει ονομασθεί στον κώδικα grd (gradient). Στην Εικόνα 4.16 απεικονίζεται η γραμμική προσέγγιση της σχετικής πυκνότητας του unit cell με την ακτίνα. Η προκύπτουσα κλίση για τη περίπτωση ενός unit cell που αποτελείται από υλικό#1 μέτρου ελαστικότητας $E=1$ και λόγο Poisson $\nu=0.3$ και υλικό#2 να είναι το κενό, ισούται με $grd = 1.7608$. Η ακρίβεια προσέγγισης των δεδομένων από την ευθεία, δίνεται από τον δείκτη Rsq .



Εικόνα 4.16 Γραμμική προσέγγιση του όγκου του unit cell συναρτήσει της ακτίνας του.

Έξοδοι της συνάρτησης αποτελούν το μητρώο ελαστικότητας CH σε συμβολική μορφή και η κλίση της ευθείας προσέγγισης πυκνότητας του unit cell - ακτίνας. Οι δύο έξοδοι περιέχονται σε ένα structure το οποίο ορίζεται ως FITTING.

FITTING =
CH: [6x6 sym]
Coefficient: 1.7572

Εικόνα 4.17 Έξοδος υποσυνάρτησης No 2.

Συνάρτηση No 3 ... [Εξαγωγή του Μητρώου Δυσκαμψίας του Στοιχείου και των Παραγώγων Πρώτης & Δευτέρας Τάξης αυτού]

Το μητρώο δυσκαμψίας του στοιχείου είναι συνάρτηση της ακτίνας του unit cell και δίνεται από τη σχέση:

$$\rightarrow Ke(r) = \iiint Be^T * CH(r) * Be * |J| * d\xi * d\eta * dz$$

Οι δε μερικές του παράγωγοι δίνονται από τις σχέσεις:

$$\rightarrow \frac{dKe(r)}{dr} = \iiint Be^T * \frac{dCH(r)}{dr} * Be * |J| * d\xi * d\eta * dz$$

$$\rightarrow \frac{d^2Ke(r)}{dr^2} = \iiint Be^T * \frac{d^2CH(r)}{dr^2} * Be * |J| * d\xi * d\eta * dz$$

Σημειώνεται πως για τιμή ακτίνας ίση με μηδέν, το μητρώο δυσκαμψίας λαμβάνει μηδενικές τιμές, ενώ για τιμή ακτίνας ίση με 1/κλίση ευθείας, το μητρώο δυσκαμψίας ταυτίζεται με αυτό του συμπαγούς υλικού.

Επειδή το μητρώο ελαστικότητας είναι συνάρτηση δευτέρας τάξης ως προς την ακτίνα, το μητρώο $\frac{d^2Ke(r)}{dr^2}$ είναι σταθερό και ανεξάρτητο της ακτίνας.

Είσοδοι της υποσυνάρτησης αποτελούν οι διαστάσεις του στοιχείου στη μακροκλίμακα [L_x, L_y, L_z] και το μητρώο ελαστικότητας CH σε συμβολική μορφή.

STIFFNESS =

KE: [function_handle]

KEx: [function_handle]

Kexx: [function_handle]

Έξοδοι της υποσυνάρτησης είναι το μητρώο δυσκαμψίας του στοιχείου με τις παραγώγους του:

$$[Ke, \frac{dKe(r)}{dr}, \frac{d^2Ke(r)}{dr^2}]$$

Εικόνα 4.18 Έξοδος υποσυνάρτησης No 3.

Οι έξοδοι της συνάρτησης συμπύσσονται σε ένα structure το οποίο ονομάζεται STIFFNESS, όπως παρουσιάζεται στην Εικόνα 4.18.

Συνάρτηση No 4 ... [Επίλυση του Προβλήματος Βελτιστοποίησης Τοπολογίας]

Η συνάρτηση αυτή επιλυεί το πρόβλημα της βελτιστοποίησης. Είσοδοι της συνάρτησης αποτελούν ο αριθμός των στοιχείων στα οποία διακριτοποιείται η κατασκευή: [nely, nelx, nelz] το κλάσμα τελικού όγκου προς τον αρχικό όγκο της κατασκευής volfrac, η ακτίνα φίλτρου, το μητρώο δυσκαμψίας του στοιχείου με τις παραγώγους του, η κλίση grd της ευθείας προσέγγισης του όγκου του unit cell - ακτίνα και, τέλος, το είδος του προβλήματος που μελετάται (πρόβλημα 1 ή πρόβλημα 2).

Έξοδος της συνάρτησης είναι ένα structure το οποίο έχει ονομασθεί Homogenization, και δίνει τις τιμές της ελαστικής ενέργειας της κατασκευής σε όλες τις επαναλήψεις [Homogenization.Compliance], τον αριθμό επαναλήψεων μέχρι να επιτευχθεί η επιθυμητή σύγκλιση [Homogenization.Number_of_Loops], την τελική τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης

```
Homogenization = [Homogenization.Minimum_Value] και
                  τις τελικές σχετικές πυκνότητες των
                  στοιχείων στη τελική επανάληψη
                  [Homogenization.Relative_Densities].
                  Compliance: [10x1 double]
                  Number_of_Loops: 10
                  Minimum_Value: 97.0963
                  Relative_Densities: [20x20x2 double]
```

Εικόνα 4.19 Έξοδος υποσυνάρτησης No 4.

Προτού αξιολογηθεί η αξιοπιστία της μεθόδου ομογενοποίησης για το πρόβλημα βελτιστοποίησης, παρουσιάζονται μερικά θεωρητικά στοιχεία της μεθόδου και πως αυτά μεταφράζονται υπολογιστικά στο Matlab.

Περιγραφή του Προβλήματος Βελτιστοποίησης Τοπολογίας με τη Μέθοδο της Ομογενοποίησης | Αλγόριθμος στο MATLAB

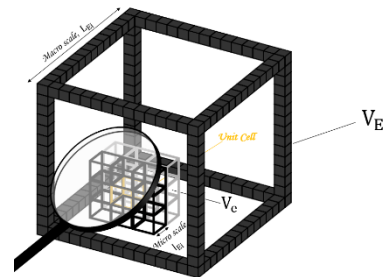
Μεταβλητές Σχεδιασμού

Σε πρώτο στάδιο κατασκευάζεται η αντικειμενική συνάρτηση, την οποία στη προκειμένη περίπτωση αποτελεί η ελαστική ενέργεια της κατασκευής. Σε επίπεδο μικροδομής του, θεωρείται πως το unit cell του κάθε πεπερασμένου στοιχείου παρουσιάζει διαφορετική ακτίνα και συνεπώς διαφορετικό μητρώο ελαστικότητας (άρα και μητρώο δυσκαμψίας στη μακροκλίμακα). Συνεπώς, τις μεταβλητές σχεδιασμού στο παρόν πρόβλημα αποτελούν οι ακτίνες r των unit cells των στοιχείων. Η αποθήκευση αυτών γίνεται σε έναν τριδιάστατο πίνακα διαστάσεων $[nely, nelx, nelz]$.

Περιορισμός Όγκου

- A.** Ο περιορισμός για τον συνολικό όγκο της κατασκευής ανάγεται σε επίπεδο μικροδομής: Ο όγκος ενός στοιχείου i , V_{Ei} , στη μακροκλίμακα δίνεται από τη σχέση:

$$V_{Ei} = V_{ei} * \prod_{j=1}^3 \frac{L_{Ej}}{l_{ej}} = \text{grd} * r_{ei} * \prod_{j=1}^3 \frac{L_{Ej}}{l_{ej} (= 1)}$$



Όπου ο όγκος του περιοδικού unit cell εντός του στοιχείου δίνεται από τη σχέση $V_{ei} = V_{\text{unit cell}} = \text{grd} * r_{ei}$ και grd η σταθερή κλίση της ευθείας σχετικής πυκνότητα - ακτίνα. Η σχέση αυτή ισχύει για όλα τα στοιχεία στα οποία διακριτοποιείται η κατασκευή.

Συνεπώς για $nele = nelx * nely * nelz$ στοιχεία, ο ολικός όγκος δίνεται από τη σχέση:

$$V_{\text{all}} = \sum_{i=1}^{nele} V_{Ei} = L_x * L_y * L_z * \sum_{i=1}^{nele} V_{ei}$$

B. Ο περιορισμός όγκου δίνεται από τη σχέση: $\frac{V_{all}}{V_0} = \text{volfrac}$

ή ισοδύναμα:

$$F_v = \frac{V_{all}}{V_0} - \text{volfrac} == 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{l_x * l_y * l_z * \sum_{i=1}^{nele} V_{ei}}{l_x * l_y * l_z * nele} - \text{volfrac} = \frac{\text{grd} * \sum_{i=1}^{nele} r_i}{\text{volfrac} * nele} - 1 \Leftrightarrow$$

Η παραπάνω σχέση μεταφράζεται στο Matlab ισοδύναμα:

$$F_v = \frac{\text{grd} * \text{sum}(r(:))}{\text{volfrac} * nele} - 1 \quad | \text{Matlab}$$

C. Η παρατήρηση B εκφράζει τον περιορισμό όγκου ως συνάρτηση της ακτίνας r των unit cells των πεπερασμένων στοιχείων στα οποία διακριτοποιείται η κατασκευή.

Συνεπώς, ο περιορισμός του όγκου είναι μια συνάρτηση μεταβλητών ίσων με τον αριθμό των πεπερασμένων στοιχείων. Αναλυτικά γράφεται ως εξής:

$$F_v = \frac{\text{grd} * (r_1 + r_2 + \dots + r_{nele})}{\text{volfrac} * nele} - 1$$

$$\frac{d(\cdot)}{dr_i} \Rightarrow \frac{dF_v}{dr_i} = \frac{\text{grd}}{\text{volfrac} * nele} \dots \dots i = 1, \dots, nele$$

Και,

$$\frac{d^2(\cdot)}{dr_i^2} \Rightarrow \frac{d^2F_v}{dr_i^2} = 0 \dots \dots i = 1, \dots, nele$$

Αποδεικνύεται πως η μερική παράγωγος του περιορισμού του όγκου ως προς τη κάθε μεταβλητή είναι σταθερή και ίση με τη κλίση της ευθείας όγκου – ακτίνα του κάθε unit cell. Η σχέση για τη παράγωγο πρώτης τάξης του περιορισμού όγκου ορίζεται διανυσματικά στο Matlab ως: $dF_v = \text{repmat}\left(\frac{\text{grd}}{\text{volfrac} * nele}, [nele, 1]\right) | \text{Matlab}$, ενώ για τη παράγωγο δευτέρας τάξης ορίζεται ο μηδενικός πίνακας $ddF_v = \text{zeros}(nele, 1) | \text{Matlab}$.

Κατασκευή Συνάρτησης Lagrange

Η συνάρτηση Lagrange ορίζεται ως:

$$L_{(r_1, r_2, \dots, r_{nele})} = C_{(r_1, r_2, \dots, r_{nele})} + \lambda * F_v + \lambda_1^T * (K * U - F) \Leftrightarrow$$

$$L_{(r_1, r_2, \dots, r_{nele})} = \sum_{i=1}^{nele} U_i^T * KE_i * U_i + \lambda * F_v + \lambda_1^T * (K * U - F)$$

Υπολογίζονται οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης Lagrange:

$$\frac{dL}{dr_j} = d_j L = d_j C + \lambda * d_j F_v + \lambda_1^T * d_j \{(K * U)\}$$

Ακολουθώντας τη μεθοδολογία που παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 2 για τη μέθοδο SIMP, ο αυθαίρετος πολλαπλασιαστής (διάνυσμα) λ_1^T λαμβάνει κατάλληλη τιμή προκειμένου να εξαλειφθεί από το πρόβλημα. Ο περιορισμός διαστήματος των μεταβλητών σχεδιασμού ($[1^{-3} \leq r_j \leq \frac{1}{grd}]$) θεωρείται ανενεργός. Η διαδικασία εξαγωγής της τελικής μορφής των μερικών παραγώγων της συνάρτησης Lagrange είναι ίδια με αυτή που παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 2.

Εν τέλει η μερική παράγωγος της συνάρτησης Lagrange γίνεται:

$$\frac{dL}{dr_j} = d_j L = -U_j^T * \frac{dKe}{dr_j} * U_j + \lambda * \frac{grd}{volfrac * nele}$$

Το βέλτιστο σημείο δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{dL}{dr_j} = -U_j^T * \frac{dKe}{dr_j} * U_j + \lambda * \frac{grd}{volfrac * nele} = 0 \dots \dots \dots j = 1, \dots, nele$$

Μέθοδος Optimality Criteria

Με την ίδια μεθοδολογία που περιγράφηκε στο Κεφάλαιο 2, ορίζεται ο όρος B_e^k για τη τρέχουσα επανάληψη k :

$$B_e^k = \frac{U_j^T * \frac{dKe}{dr_j} * U_j}{\lambda * \frac{grd}{volfrac * nele}} = \frac{U_j^T * \frac{dKe}{dr_j} * U_j * volfrac * nele}{\lambda * grd}$$

Η ανανέωση των μεταβλητών σχεδιασμού γίνεται βάσει της σχέσης:

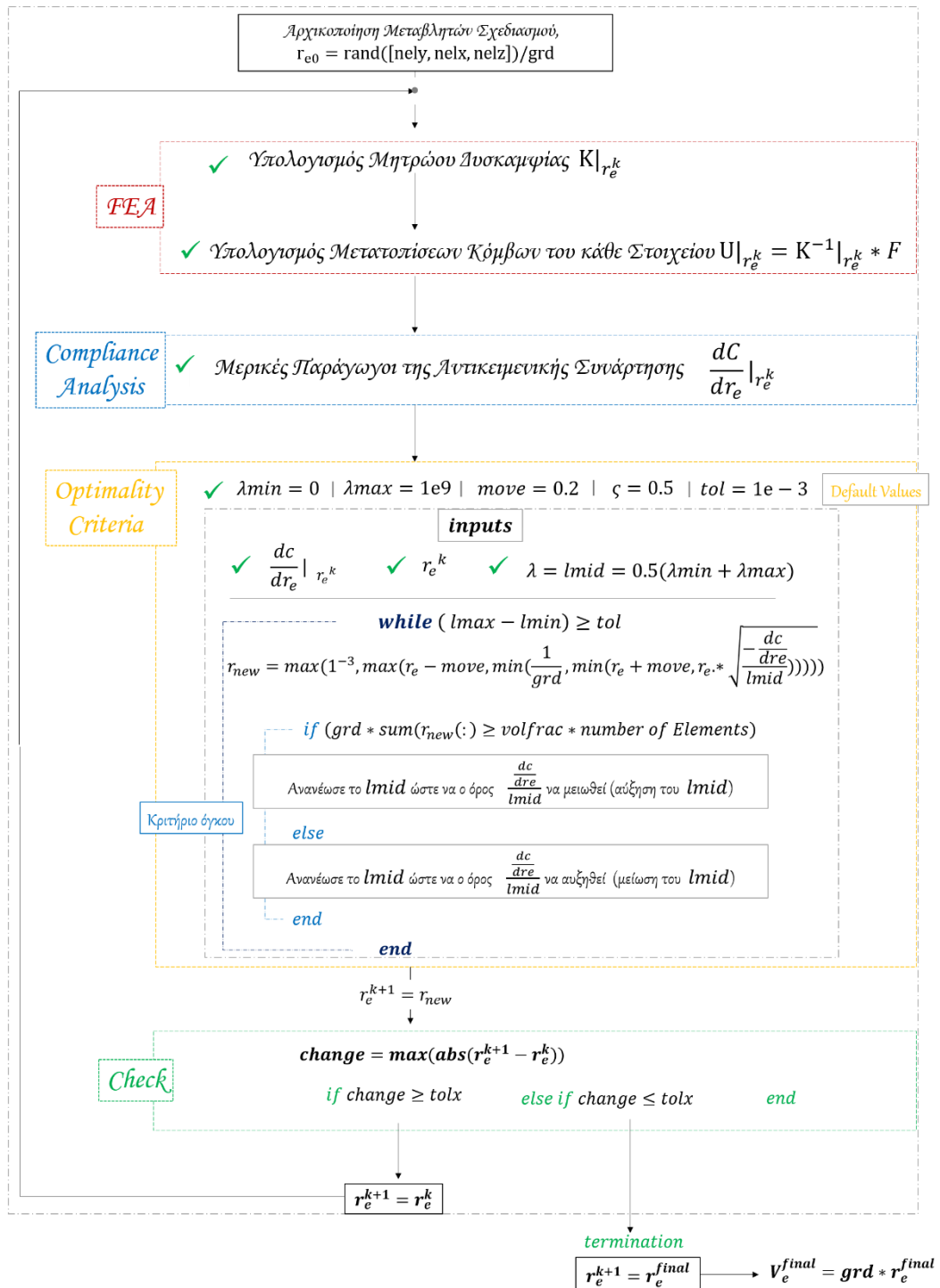
$$r_e^{k+1} = r_e^k * \left(\frac{U_j^T * \frac{dKe}{dr_j} * U_j * volfrac * nele}{\lambda * grd} \right)^\varsigma = r_e^k * (B_e^k)^\varsigma$$

Όπου ς είναι η σταθερά απόσβεσης η οποία λαμβάνει τιμές στο εύρος 0 έως 1. Η επαναληπτική μέθοδος ανανέωσης των μεταβλητών σχεδιασμού, εκφράζεται αλγοριθμικά ως εξής:

$$r_e^{k+1} = \begin{cases} \max(r_{min}, r_e^k - m) & \text{if } r_e^k (B_e^k)^\varsigma \leq \max(r_{min}, r_e^k - m) \\ r_e^k (B_e^k)^\varsigma & \text{if } \max(r_{min}, r_e^k - m) < r_e^k (B_e^k)^\varsigma < \min(\frac{1}{grd}, r_e^k + m) \\ \min(\frac{1}{grd}, r_e^k + m) & \text{if } r_e^k (B_e^k)^\varsigma \geq \min(\frac{1}{grd}, r_e^k + m) \end{cases}$$

Υπενθυμίζεται πως μεταβλητή στο παραπάνω πρόβλημα αποτελεί ο πολλαπλασιαστής Lagrange του περιορισμού όγκου λ , ο οποίος μέσα σε ένα εσωτερικό βρογχο ανανεώνεται συνεχώς ώστε να ικανοποιείται το κριτήριο του όγκου (χρήση της μεθόδου διχοτόμησης). Υπογραμμίζεται επίσης πως η ελάχιστη τιμή που μπορούν να λάβουν οι μεταβλητές σχεδιασμού είναι $r_{min} \cong 0$ ενώ η μέγιστη είναι $r_{max} = \frac{1}{grd}$. Τέλος, η παράμετρος απόσβεσης ς ορίζεται ίση με 0.5, δηλαδή, $(B_e^k)^\varsigma = \sqrt{(B_e^k)}$.

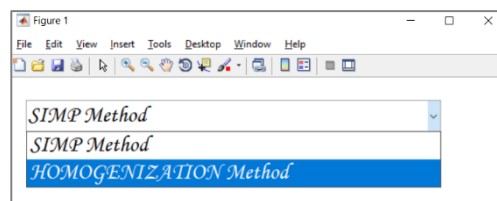
Παρατίθεται το διάγραμμα ροής για τη Μέθοδο Ομογενοποίησης.



Εικόνα 4.20 Διάγραμμα ροής της μεθόδου Ομογενοποίησης για τη περίπτωση 3D προβλημάτων.

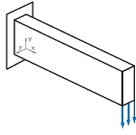
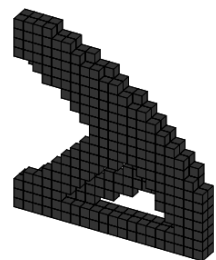
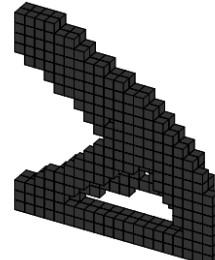
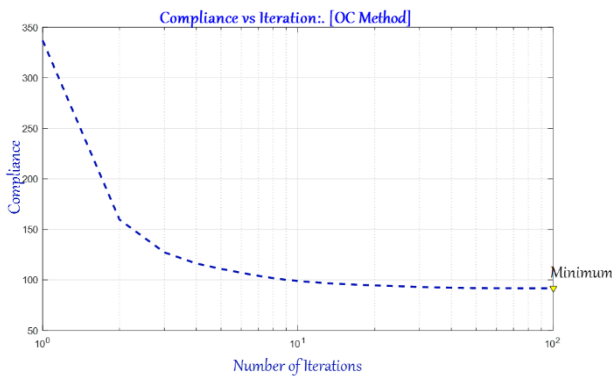
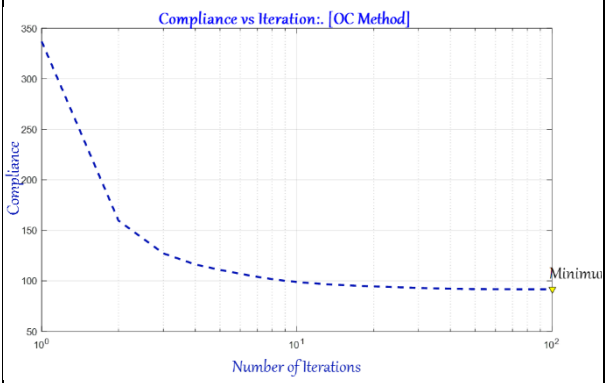
[4.3.3] Αποτελέσματα της Μεθόδου Ομογενοποίησης

Σε πρώτο βήμα, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα βελτιστοποίησης για τη περίπτωση των δύο προβλημάτων που μελετώνται και σε επόμενο βήμα, συγκρίνονται με αυτά που εξάγονται από τη μέθοδο SIMP.

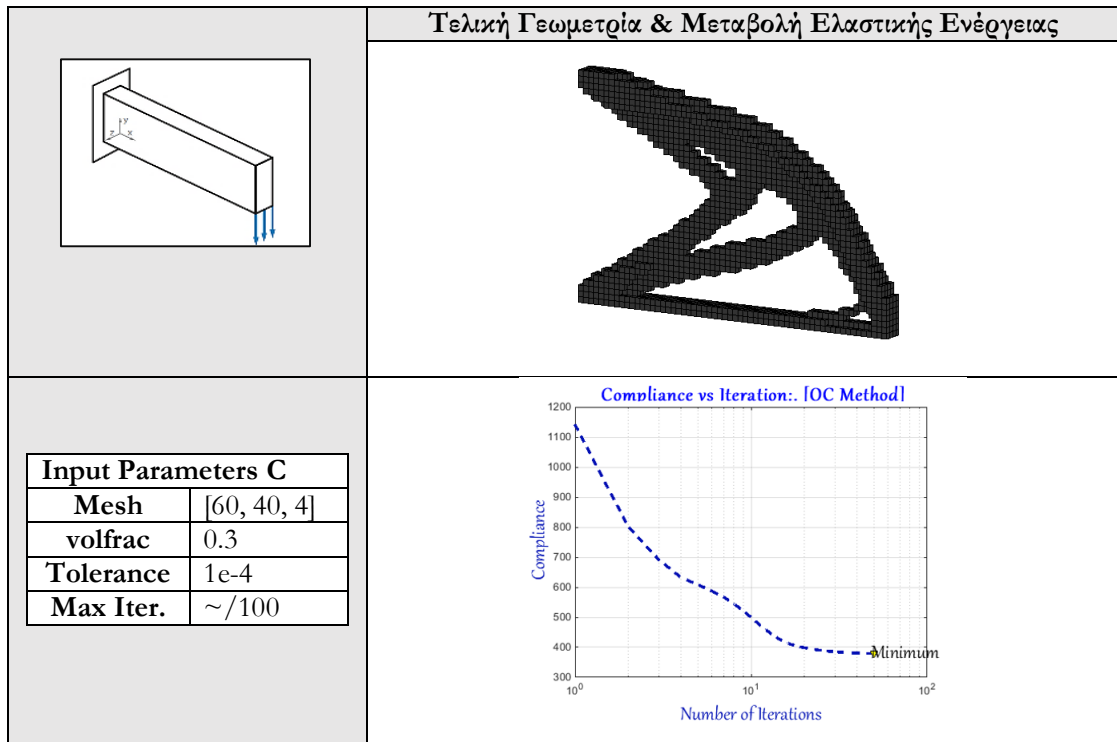


Εικόνα 4.21 Ο χρήστης επιλέγει τη μέθοδο επίλυσης του προβλήματος βελτιστοποίησης τοπολογίας.

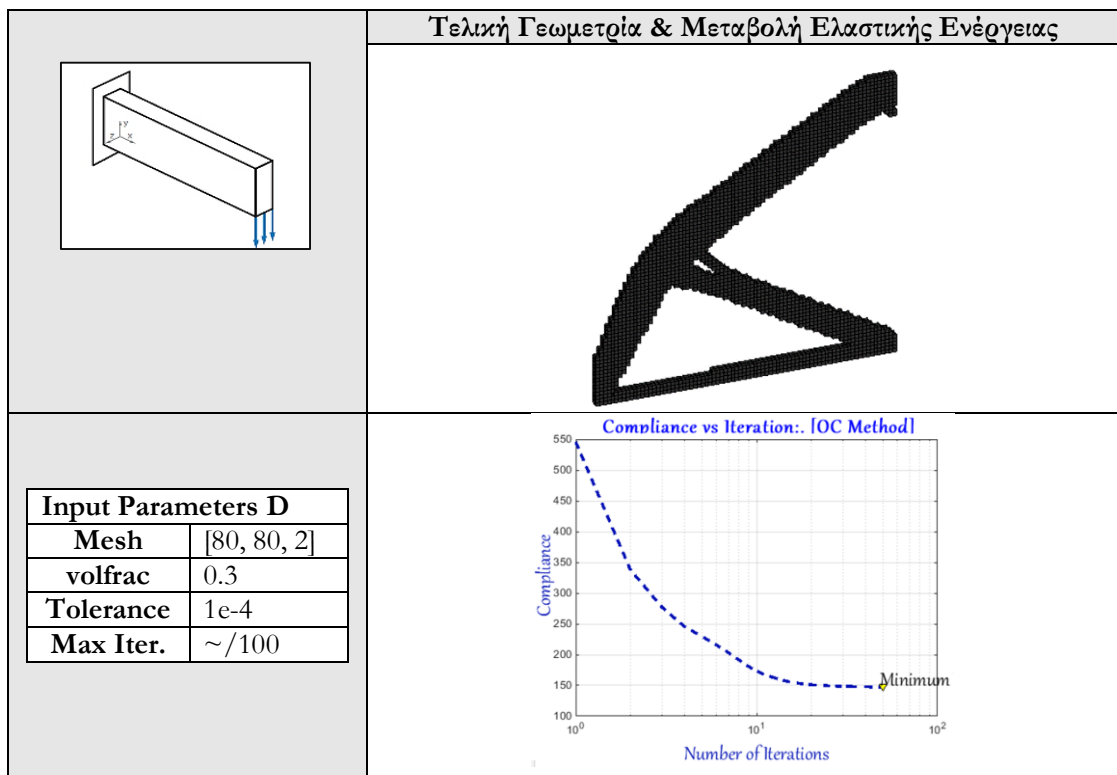
Πρόβλημα 1

|  | Input Parameters A | | Input Parameters B | |
|--|---|-------------|--|-------------|
| | Mesh | [20, 20, 2] | Mesh | [20, 20, 2] |
| | volfrac | 0.5 | volfrac | 0.5 |
| | Tolerance | 1e-3 | Tolerance | 1e-2 |
| | Max Iter. | 100 | Max Iter. | 100 |
| Τελικές Γεωμετρίες |  | |  | |
| Αντικειμενική Συνάρτηση |  <p>Minimum Value: 91.75</p> | |  <p>Minimum Value: 92.87</p> | |

Πίνακας 4.5 Τελικές γεωμετρίες για δύο περιπτώσεις του σφάλματος σύγκλισης για το πρόβλημα 2. Στη δεύτερη γραμμή παρουσιάζεται η σύγκλιση και η τελική τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης για περίπτωση σφάλματος ίσο με 1e-2 και 1e-3 αντίστοιχα.

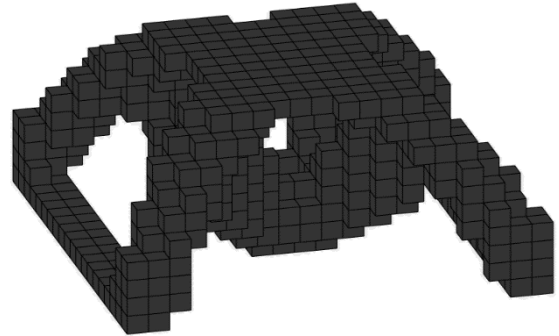
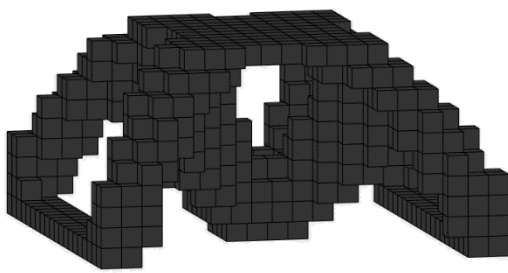
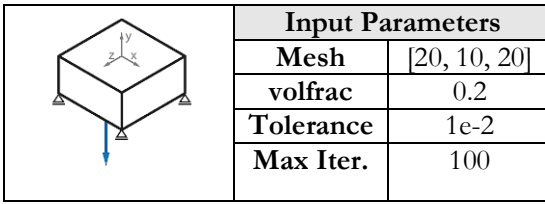


Πίνακας 4.6 Η τελική γεωμετρία και η μεταβολή της ελαστικής ενέργειας συναρτήσει του αριθμού των επαναλήψεων για τη περίπτωση μελέτης του προβλήματος 1. Οι παράμετροι εισόδου αναγράφονται στο πίνακα δίπλα | Πίνακας C.

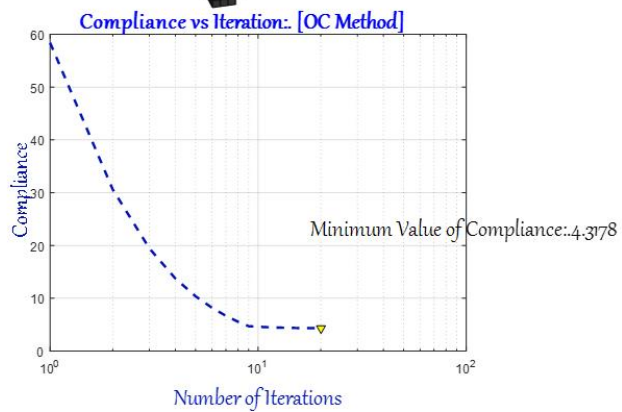
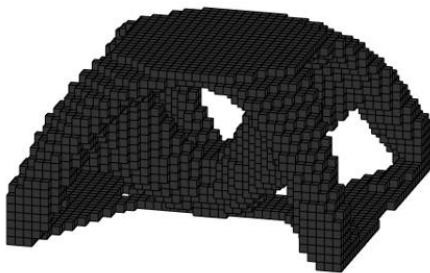
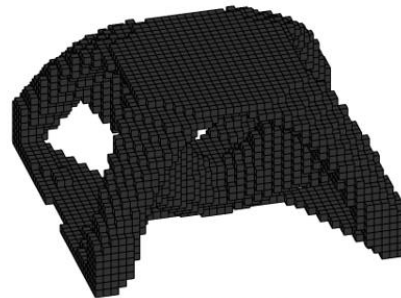
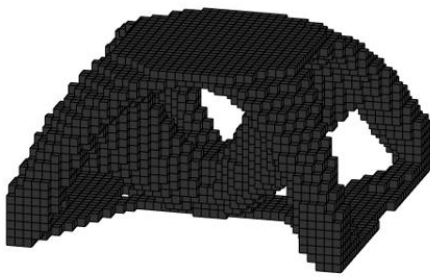
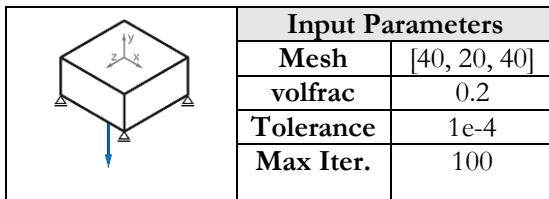


Πίνακας 4.7 Η τελική γεωμετρία και η μεταβολή της ελαστικής ενέργειας συναρτήσει του αριθμού των επαναλήψεων για τη περίπτωση μελέτης του προβλήματος 1. Οι παράμετροι εισόδου αναγράφονται στο πίνακα δίπλα | Πίνακας D.

Πρόβλημα 2



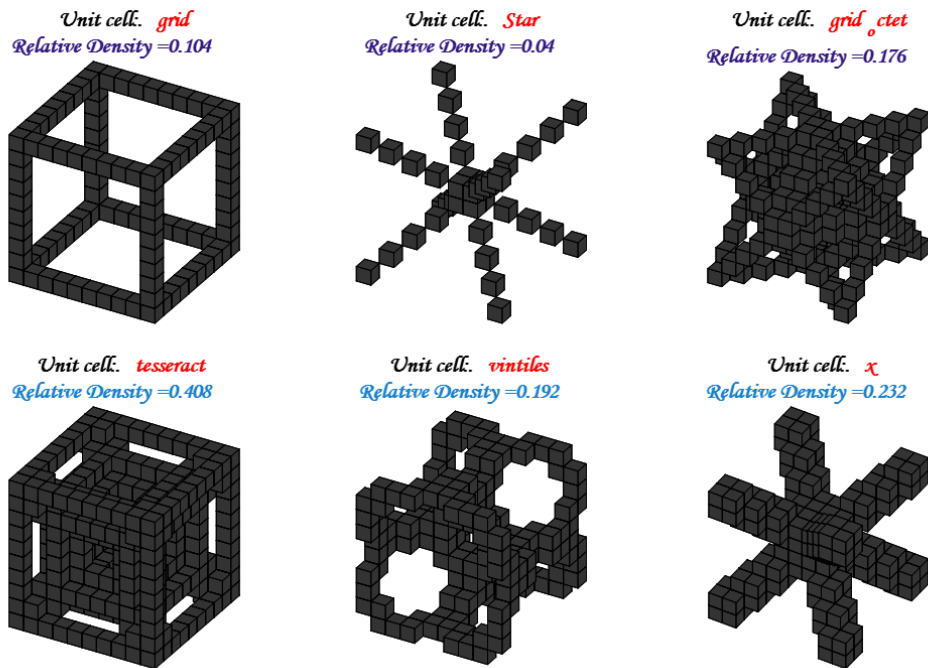
Εικόνα 4.22 Τελική γεωμετρία για τη περίπτωση μελέτης του προβλήματος 2. Οι παράμετροι εισόδου αναγράφονται πάνω αριστερά.



Εικόνα 4.23 Τελική γεωμετρία για τη περίπτωση μελέτης του προβλήματος 2 και η μεταβολή ελαστικής ενέργειας συναρτήσει του αριθμού επαναλήψεων. Οι παράμετροι εισόδου αναγράφονται στο πίνακα πάνω αριστερά.

Στο 4^ο Κεφάλαιο εξετάστηκε η περίπτωση ορθογωνικού unit cell (grid.txt) εντός της περιοδικής μικροδομής του υλικού και τα εξαγόμενα αποτελέσματα για το πρόβλημα βελτιστοποίησης τοπολογίας παρουσιάστηκαν και αξιολογήθηκαν βάσει της μεθόδου SIMP.

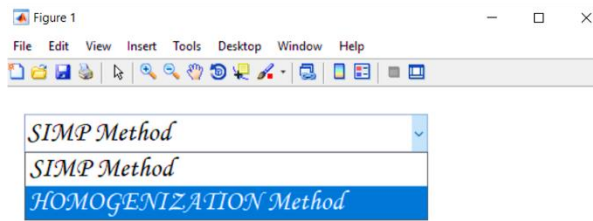
Στη παρούσα ενότητα παρουσιάζονται μερικοί εναλλακτικοί τύποι unit cells των οποίων τα εξαγόμενα αποτελέσματα για το πρόβλημα βελτιστοποίησης τοπολογίας, συγκρίνονται με αυτά που λαμβάνονται από τη περίπτωση θεώρησης ορθογωνικού unit cell. Τα unit cells που μελετώνται απεικονίζονται στην Εικόνα 4.01. Μεταβλητή του προβλήματος αποτελεί και σε αυτή τη περίπτωση η ακτίνα r του unit cell.



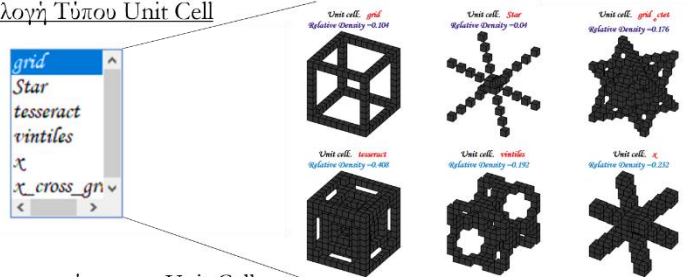
Εικόνα 4.01 Οι διάφοροι τύποι unit cells που θεωρούνται για τη διαδικασία της ομογενοποίησης.

Η διαδικασία που εφαρμόζεται παραμένει ίδια με αυτή που παρουσιάστηκε για τη περίπτωση του ορθογωνικού unit cell. Με παράμετρο την ακτίνα του unit cell, υπολογίζονται οι ισοδύναμες, μακροσκοπικές μηχανικές ιδιότητες του υλικού και πιο συγκεκριμένα το μητρώο ελαστικότητας του. Οι όροι του μητρώου ελαστικότητας προσεγγίζονται από πολυώνυμα δευτέρας τάξης ως προς την ακτίνα ενώ η σχετική πυκνότητα του υλικού μεταβάλλεται γραμμικά ως προς αυτήν. Η διαδικασία που ακολουθείται, παρουσιάζεται βηματικά στην Εικόνα 4.02. Κατά την εκτέλεση του κώδικα ο χρήστης επιλέγει τον τύπο της μεθόδου που θέλει να εφαρμόσει, το τύπο του unit cell κ.α.

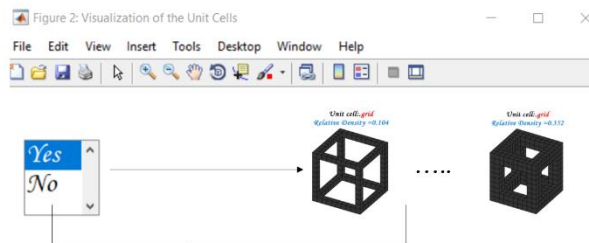
① Επιλογή Μεθόδου Επίλυσης



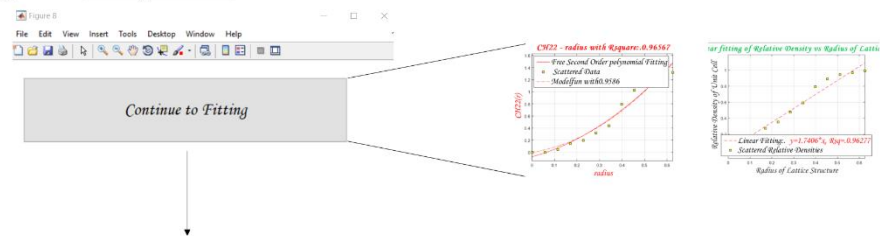
② Επιλογή Τύπου Unit Cell



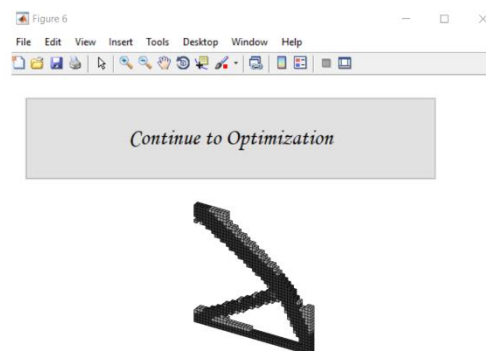
③ Οπτικοποίηση του Unit Cell



④ Fitting Process

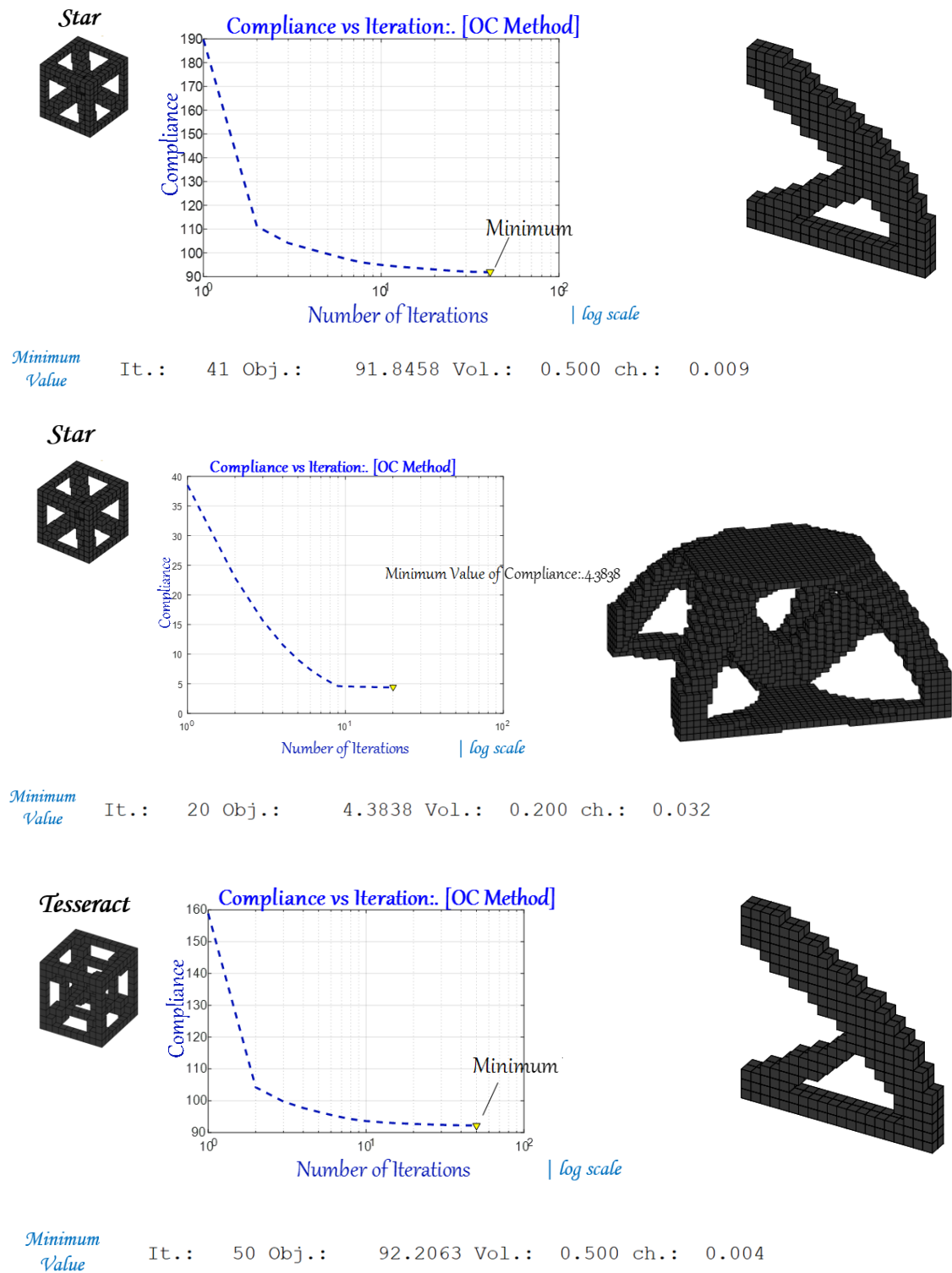


⑤ Βελτιστοποίηση Τοπολογίας



Εικόνα 4.02 Η ροή του κώδικα για τη περίπτωση που ο χρήστης επιλέγει το επιθυμητό unit cell.

Τα αποτελέσματα που λαμβάνονται για τη περίπτωση μελέτης ορισμένων τύπων unit cell παρουσιάζονται στην Εικόνα 4.03.



Εικόνα 4.03 Αποτελέσματα της βελτιστοποίησης τοπολογίας για διάφορους τύπους unit cell.

Bιβλιογραφία

1. Jeroen P. Groen, Ole Sigmund. **Homogenization-based topology optimization for high-resolution manufacturable microstructures**. *Int J Numer Meth Engng.* (2018), 1148–1163.
2. G.I.N Rozvany, N.Olhoff. **Topology Optimization of Structures and Composite Continua**. Kluwer Academic Publishers.
3. Avinash Shukla, Anadi Misra. **Review of optimality criterion approach scope, limitation & development in topology optimization**. *International Journal of Advances in Engineering & Technology* Vol. 6, Issue 4, pp. 1886-1889.
4. Martin Philip BENDSØE, Noboru KIKUCHI. **Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method**. Elsevier Science Publishers B.V (1988), 197-224.
5. O. Sigmund. **A 99 line topology optimization code written in Matlab**. *Struct Multidisc Optim* 21, 120–127.
6. B. Hassani, E. Hinton. **A review of homogenization and topology optimization in homogenization theory for media with periodic Structure, vol I**. *Computers and Structures* 69 (1998), 707-717.
7. B. Hassani, E. Hinton. **A review of homogenization and topology optimization III - Topology Optimization using Optimality Criteria**. *Computers and Structures* 69 (1998), 739-756.
8. Christian Gejl Pedersen, Jeppe Jessen Lund, Lars Damkilde, Anders Schmidt Kristensen. **Topology Optimization – Improved checker-board filtering with sharp contours**. Esbjerg Institute of Technology, Aalborg University, Esbjerg, Denmark
9. Martin Philip BENDSØE, O. Sigmund. **Topology optimization: Theory, Methods and Applications**.
10. Erik Andreassen, Casper Schousboe Andreassen. **How to determine composite material properties using numerical Homogenization**. *Computational Materials Science* 83 (2014) 488–495.
11. Pedersen, C. G., Lund, J. J., Damkilde, L., & A. Kristensen, A. S. (2006). **Topology Optimization – Improved Checker-Board Filtering With Sharp Contours**. In O. Dahlblom, L. Fuchs, K. Persson, M. Ristinmaa, G.Sandberg, & I. Svensson (Eds.), *Proceedings of the 19th Nordic Seminar on Computational Mechanics* (pp. 182-185). Lund University. *Structural Mechanics*.
12. Dong G, Tang Y, Zhao Y. **A 149 Line Homogenization Code for Three-Dimensional Cellular Materials Written in matlab**. *ASME. J. Eng. Mater. Technol.* 2018; 141(1):011005-011005-11. doi:10.1115/1.4040555.
13. Alexandre Monteiro. **Topology Optimization of Microstructures with Constraints on Average Stress and Material Properties**. Instituto Superior Técnico, Universidade de Lisboa.
14. S.Y. Wang, K.M. Lim, B.C.Khoo, M.Y. Wang. **A Hybrid Sensitivity Filtering for Topology Optimization**. *CMES*, vol.24, no.1, pp.21-50, 2008.
15. Kai Liu, Andrés Tovar. **An efficient 3D topology optimization code written in Matlab**.