



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ

ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΛΙΚΩΝ

**Πρόβλημα διάδοσης των ηλεκτρομαγνητικών (ΗΜ)
κυμάτων πάνω από επίπεδο έδαφος με απώλειες:
αριθμητικές μέθοδοι υπολογισμού στον φασματικό
χώρο**

ΔΙΑΤΡΙΒΗ

της

ΥΠΟΨΗΦΙΑΣ ΔΙΔΑΚΤΟΡΟΣ

ΑΡΙΑΔΝΗΣ ΧΡΥΣΟΣΤΟΜΟΥ

Επιβλέπων: Παναγιώτης Φράγκος
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Νοέμβριος 2019



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΛΙΚΩΝ

**Πρόβλημα διάδοσης των ηλεκτρομαγνητικών (ΗΜ) κυμάτων πάνω από
επίπεδο έδαφος με απώλειες: αριθμητικές μέθοδοι υπολογισμού στον
φασματικό χώρο**

ΔΙΑΤΡΙΒΗ
της
ΥΠΟΨΗΦΙΑΣ ΔΙΔΑΚΤΟΡΟΣ

ΑΡΙΑΔΝΗΣ ΧΡΥΣΟΣΤΟΜΟΥ

Τριμελής Συμβουλευτική Επιτροπή: Π. Φράγκος, Καθηγητής Ε.Μ.Π.
Αθ. Παναγόπουλος, Καθηγητής Ε.Μ.Π.
Ν. Ουζούνογλου, Ομ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την επταμελή εξεταστική επιτροπή την:

.....
Π. Φράγκος
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Αθ. Παναγόπουλος
Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Π. Στεφανέας
Επικ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Γ. Φικιώρης
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Σ. Παπαβασιλείου
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Κ. Νικήτα
Καθηγήτρια Ε.Μ.Π.

.....
Δ. Φραντζεσκάκης
Καθηγητής Ε.Κ.Π.Α.

Αθήνα, Νοέμβριος 2019

.....

ΑΡΙΑΔΝΗ ΧΡ. ΧΡΥΣΟΣΤΟΜΟΥ

Υποψήφια Διδάκτωρ Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Copyright © Αριάδνη Χρ. Χρυσοστόμου, 2019

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Αφιερώνεται στον σύζυγό μου και στα παιδιά μου

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα	5
Κατάλογος Εικόνων	7
Κατάλογος Πινάκων	8
Περίληψη Διδακτορικής Διατριβής	9
Λέξεις Κλειδιά	9
Abstract	10
Key words	10
Ευχαριστίες	11
Δομή Διατριβής	12
1 Εισαγωγή	13
1.1 Εξισώσεις Maxwell	13
1.2 Διάνυσμα Hertz	16
1.3 Δίπολο Hertz	16
1.4 Μηχανισμοί Διάδοσης	17
1.5 Βιβλιογραφική ανασκόπηση του προβλήματος Sommerfeld (Sommerfeld half-space antenna radiation problem)	20
1.6 Ασυμπτωτικές μέθοδοι υπολογισμού ολοκληρωμάτων	29
1.6.1 Μέθοδος Στάσιμης Φάσης (Stationary Phase Method – SPM)	30
1.6.2 Μέθοδος ‘Απότομης Κατάβασης’ (Steepest Descent Method)	34
1.7 Μέθοδος των Ροπών (Method of Moments)	37
1.8 Βιβλιογραφία παρόντος κεφαλαίου	38
2 Ανάλυση του προβλήματος στο φασματικό χώρο και αριθμητικά αποτελέσματα με βάση την μέθοδο αριθμητικής ολοκλήρωσης	43
2.1 Εισαγωγή	43
2.2 Γεωμετρία του προβλήματος	43
2.3 Ολοκληρωτικές εκφράσεις λαμβανόμενου ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου συναρτήσει πυκνοτήτων ρεύματος στο φασματικό χώρο	44
2.3.1 Μεθοδολογία	44
2.3.2 Απευθείας ηλεκτρομαγνητικό πεδίο διπόλου Hertz	48
2.3.3 Εφαρμογή θεωρήματος ολοκληρωτικών υπολοίπων	49
2.3.4 Χρήση των οριακών συνθηκών για υπολογισμό των πυκνοτήτων ρεύματος στην επιφάνεια του εδάφους	51
2.3.5 Ανακλώμενο και μεταδιδόμενο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο σε μορφή απλού ολοκληρώματος	52
2.4 Αναλυτική κλειστής-μορφής έκφραση για το σκεδαζόμενο πεδίο με εφαρμογή της SPM	53
2.5 Αριθμητικά Αποτελέσματα με βάση την μέθοδο αριθμητικής ολοκλήρωσης – σύγκριση αυτών με αριθμητικά αποτελέσματα με βάση την μέθοδο SPM	53
2.6 Βιβλιογραφία παρόντος κεφαλαίου	62
3 Υπολογισμός του ηλεκτρομαγνητικού (HM) πεδίου στον δέκτη με μετασχηματισμό μεταβλητής (μετασχηματισμός ως προς την γωνία πρόσπτωσης) και χρήση της ‘μεθόδου στάσιμου σημείου’	64
3.1 Εισαγωγή	64

3.2	Ολοκληρωτική αναπαράσταση για το λαμβανόμενο Ηλεκτρικό Πεδίο στο φασματικό πεδίο και κλειστού-τύπου αναλυτικές εκφράσεις στο πεδίο υψηλών συχνοτήτων.....	64
3.3	Νέες ολοκληρωτικές σχέσεις και σχετική αναλυτική λύση SPM για το λαμβανόμενο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο ('ως προς την γωνία πρόσπτωσης').....	66
3.4	Εναλλακτική μορφή ολοκληρωμάτων με νέα αλλαγή μεταβλητής ως προς τη γωνία πρόσπτωσης.....	69
3.5	Αριθμητικά αποτελέσματα: Σύγκριση της μεθόδου στάσιμης φάσης ως προς την γωνία πρόσπτωσης με τεχνικές αριθμητικής ολοκλήρωσης	72
3.6	Βιβλιογραφία παρόντος κεφαλαίου	86
4	Συμπεράσματα διδακτορικής διατριβής - Μελλοντικές επεκτάσεις επί της παρούσας έρευνας	88
4.1	Χρήση της 'μεθόδου απότομης κατάβασης' για τον υπολογισμό του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου.....	88
4.1.1	Απευθείας πεδίο.....	89
4.1.2	Σκεδαζόμενο πεδίο	90
4.1.3	Ασυμπτωτική αναλυτική έκφραση του ΗΜ πεδίου	91
4.2	Συμπεράσματα διδακτορικής διατριβής	101
4.3	Μελλοντικές Επεκτάσεις διδακτορικής διατριβής	103
4.4	Βιβλιογραφία Κεφαλαίου	104

Κατάλογος Εικόνων

Εικόνα 1-1 Εγκάρσιο ηλεκτρομαγνητικό κύμα	13
Εικόνα 1-2 Το δίπολο Hertz και το ισοδύναμο κύκλωμα	17
Εικόνα 1-3 Γεωμετρία – Δίπολο Hertz στο κέντρο του συστήματος συντεταγμένων ...	17
Εικόνα 1-4 Μηχανισμοί διάδοσης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων	19
Εικόνα 1-5: Πρόβλημα Sommerfeld - Μέθοδος των ειδώλων (Κάθετο & Οριζόντιο Δίπολο)	21
Εικόνα 1-6: Γεωμετρία του προβλήματος (Banos - Wesley, 1953)	25
Εικόνα 1-7: Γεωμετρία του προβλήματος (King, 1969)	27
Εικόνα 1-8: Μονοπάτι ολοκλήρωσης στο μιγαδικό επίπεδο \mathbf{kr} . Μεταξύ του 0 και του α το μονοπάτι μεταφέρεται από τον άξονα των πραγματικών αριθμών ώστε να αποφευχθούν τα ανώμαλα σημεία της ολοκληρωτέας συνάρτησης. Οι μέθοδοι υπολογισμού (partition-extrapolation methods) εφαρμόζονται στο κομμάτι της ουράς πάνω στον πραγματικό άξονα (α, ∞).	28
Εικόνα 1-9 Μέθοδος Steepest Descent: Καμπύλη ολοκλήρωσης C στο μιγαδικό επίπεδο z.	35
Εικόνα 2-1 Γεωμετρία του προβλήματος ακτινοβολίας. Το δίπολο ακτινοβολεί από τη θέση $(x_0, 0, 0)$ πάνω από το άπειρο, επίπεδο έδαφος με απώλειες.....	43
Εικόνα 2-2 Διανύσματα \mathbf{k} και \mathbf{r} σε κυλινδρικές συντεταγμένες	46
Εικόνα 2-3 Διάταξη πηγής-δέκτη όταν (α) η κεραία της πηγής είναι σε υψηλότερο σημείο από την κεραία του δέκτη ($x_0 > x$), (β) η κεραία της πηγής είναι σε χαμηλότερο σημείο από την κεραία του δέκτη ($x_0 < x$).....	48
Εικόνα 2-4 – Λογικό διάγραμμα αλγορίθμου προσομοίωσης.....	55
Εικόνα 2-5 Σκεδαζόμενο ηλεκτρικό πεδίο σε συνάρτηση με την απόσταση ρ μεταξύ του πομπού και του δέκτη με χρήση της μεθόδου SPM και μεθόδου αριθμητικής ολοκλήρωσης Συχνότητες (a) $f = 1\text{GHz}$, (b) $f=100\text{ MHz}$	57
Εικόνα 2-6 Σκεδαζόμενο ηλεκτρικό πεδίο σε συνάρτηση με την απόσταση ρ μεταξύ του πομπού και του δέκτη με χρήση της μεθόδου SPM και μεθόδου αριθμητικής ολοκλήρωσης (Συχνότητες 10 MHz, 1MHz, 100 kHz, 10kHz).....	60
Εικόνα 3-1 Μετασχηματισμός μεταβλητής.....	70
Εικόνα 3-2 Σύγκριση του απευθείας ηλεκτρομαγνητικού πεδίου (Line of sight - LOS) – Χρήση ακριβούς εξίσωσης και προσέγγισης μακρινού πεδίου.....	74

Εικόνα 3-3 Σύγκριση μεθόδων SPM και αριθμητικής ολοκλήρωσης για τον υπολογισμό του σκεδαζόμενου HM πεδίου	78
Εικόνα 3-4 Συστατικά του HM Πεδίου (LOS, Συνολικό πεδίο και Σκεδαζόμενο πεδίο με χρήση Αριθμητικής Ολοκλήρωσης και SPM).....	82
Εικόνα 3-5 Συμπεριφορά του απευθείας, σκεδαζόμενου και συνολικού πεδίου σε υψηλές συχνότητες & επίδραση γωνίας Brewster	84
Εικόνα 4-1 – Το «επεκταμένο» τοπικό σύστημα σφαιρικών συντεταγμένων (α) της πηγής του δίπολου και (β) του ειδώλου του δίπολου. Η γωνία ανύψωσης ξ είναι μιγαδική στη φύση της, παρόλαυτά μόνο το εύρος $\xi \in [-\pi, \pi]$ μπορεί να αναπαρασταθεί γραφικά (σε ένα τυπικό σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων όμως το $\xi \in [0, \pi]$). Στην εικόνα, μία ωρολογιακή περιστροφή από την θετική κατεύθυνση x δίνει θετική γωνία ανύψωσης (+), ενώ μία στροφή αντιωρολογιακής φοράς δίνει αρνητική γωνία ανύψωσης (-).	92
Εικόνα 4-2 – Η καμπύλη ολοκλήρωσης: (α) SZ η αρχική καμπύλη για το E_R στο μιγαδικό επίπεδο ξ (αριστερή καμπύλη) και η αντιστοίχιση στο επίπεδο ζ (δεξιά καμπύλη) (b) S: Καμπύλη ολοκλήρωσης “Etalon integral” στο επίπεδο ζ (δεξιά καμπύλη) και η αντιστοίχισή της στο ξ -επίπεδο (αριστερή καμπύλη) (c) ξ_p : σχετική θέση του πόλου στο ξ -επίπεδο (d) ζ_p : σχετική θέση του πόλου στο ζ -επίπεδο	95

Κατάλογος Πινάκων

Πίνακας 2-1 Παράμετροι Προσομοίωσης.....	55
Πίνακας 2-2. Επιλογή μεθόδου υπολογισμού του HM πεδίου με βάση το εύρος συχνοτήτων (SPM vs. NI)	61
Πίνακας 3-1 Παράμετροι προσομοίωσης.....	72
Πίνακας 4-1. Συμπεράσματα για επιλογή μεθόδου υπολογισμού του HM πεδίου (SPM vs. NI).....	102

Περίληψη Διδακτορικής Διατριβής

Στη παρούσα διατριβή αναλύεται το πρόβλημα της διάδοσης πάνω από επίπεδη επιφάνεια. Η κλασική λύση του Sommerfeld στο πρόβλημα διάδοσης της ακτινοβολίας, που εκπέμπεται από ένα κατακόρυφο μικρό δίπολο (δίπολο Hertz) πάνω από επίπεδο έδαφος με απώλειες, παρουσιάζεται στο φυσικό χώρο με τη χρήση των δυναμικών Hertz και δεν καταλήγει σε κλειστούς αναλυτικούς τύπους. Έχουν υπάρξει αρκετές προσπάθειες ανάλυσης του προβλήματος για εξαγωγή αναλυτικών τύπων με εφαρμογή πολλαπλών μεθόδων, τόσο αριθμητικών όσο και ασυμπτωτικών.

Ο στόχος της παρούσας διατριβής είναι διττός. Πρώτον, εξάγουμε μία νέα κλειστού-τύπου αναλυτική λύση για το λαμβανόμενο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Η ανάλυση γίνεται στο φασματικό πεδίο, όπου εφαρμόζουμε κατάλληλους μετασχηματισμούς μεταβλητών προκειμένου να καταλήξουμε σε νέες εκφράσεις του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Δεύτερον, υλοποιούμε αλγόριθμο Matlab προκειμένου να αναπαραστήσουμε γραφικά το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο και να συγκρίνουμε την ακρίβεια και καταλληλότητα των μεθόδων αριθμητικής ολοκλήρωσης και μεθόδου στάσιμης φάσης. Τα αποτελέσματα προσομοίωσης σε διάφορες συχνότητες υποδεικνύουν τα κατάλληλα εύρη συχνοτήτων για εφαρμογή της κάθε μεθόδου ανάλογα με την συχνότητα, αλλά καταδεικνύουν επίσης ότι το καταλληλότερο κριτήριο επιλογής μεθόδου αποτελεί η ηλεκτρική απόσταση $k \cdot r$ μεταξύ πομπού και δέκτη.

Λέξεις Κλειδιά

Πρόβλημα ακτινοβολίας του Sommerfeld, Ακτινοβολία διπόλου Hertz, Μέθοδος Στάσιμης Φάσης.

Abstract

In this thesis we analyze the problem of radiation above flat surface. The classical solution of Sommerfeld for the radiation of Hertz dipole above flat lossy ground is represented with the usage of the Hertz vector potentials and does not conclude in analytical forms. There have been many attempts to solve the problem through the application of several methods, both numerical and asymptotic, in order to complete in analytical solution.

The purpose of this thesis is two - fold. First, we extract new closed-form analytical solution for the received electromagnetic fields. The analysis is made in the spectral domain, where we apply variable transformations, we provide new expressions for the electromagnetic field. Second, we implement Matlab algorithm in order to graphically represent the electromagnetic field and compare the accuracy of numerical calculation versus the stationary phase method. The simulation results allow for the selection of calculation technique depending on the operating frequency, but also indicate that the suitable criteria for selection of calculation method is the electrical distance $k \cdot r$ between the transmitter and the receiver.

Key words

Sommerfeld antenna radiation problem, Hertz dipole radiation, Stationary Phase Method.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Καθηγητή Ε.Μ.Π. κ. Παναγιώτη Φράγκο για την πολύχρονη συνεργασία μας, για την εμπιστοσύνη του και την καθοδήγησή του στην διάρκεια της διδακτορικής μου έρευνας.

Ιδιαίτερος θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Υποψήφιο Διδάκτορα Ε.Μ.Π κ. Σωτήρη Μπουργιώτη, για την πολύτιμη συνεργασία στην διάρκεια της έρευνάς μας και την συμβολή του στις δημοσιεύσεις μας σχετικά με την έρευνά μας στο πρόβλημα Sommerfeld.

Δομή Διατριβής

Το πρώτο κεφάλαιο της διατριβής αποτελεί μία εισαγωγή και περιλαμβάνει την περιγραφή των εξισώσεων του Maxwell, μία σύντομη βιβλιογραφική ανασκόπηση του προβλήματος Sommerfeld και σύντομη περιγραφή δύο βασικών ασυμπτωτικών μεθόδων για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων, της μεθόδου στάσιμης φάσης και της μεθόδου απότομης κατάβασης.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι ολοκληρωτικές εκφράσεις του λαμβανόμενου πεδίου στο φασματικό χώρο και η αναλυτική κλειστού-τύπου έκφραση που προκύπτει κατόπιν εφαρμογής της μεθόδου στάσιμης φάσης. Επιπλέον, μέσω προσομοίωσης στο προγραμματιστικό περιβάλλον Matlab συγκρίνονται τα αποτελέσματα αριθμητικής ολοκλήρωσης των αρχικών ολοκληρωτικών εκφράσεων με τα αντίστοιχα που προκύπτουν από την αναλυτική λύση της μεθόδου στάσιμης φάσης.

Στο τρίτο κεφάλαιο οι ολοκληρωτικές εκφράσεις του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου μετατρέπονται σε ολοκληρώματα επί της γωνίας πρόσπτωσης ('grazing angle') μέσω κατάλληλου μετασχηματισμού μεταβλητών. Στην συνέχεια εφαρμόζουμε την μέθοδο στάσιμη φάσης προκειμένου να εξάγουμε νέα αναλυτική λύση για το λαμβανόμενο πεδίο. Τέλος, συγκρίνουμε μέσω προσομοιώσεων στο Matlab το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο όπως αυτό προκύπτει από την αριθμητική ολοκλήρωση της αρχικής έκφρασης του ηλεκτρικού πεδίου με τα αποτελέσματα της αριθμητικής ολοκλήρωσης της νέας αναλυτικής λύσης.

Στο τέταρτο κεφάλαιο συνοψίζονται τα συμπεράσματα της παρούσας έρευνας και παρουσιάζονται πιθανές μελλοντικές επεκτάσεις.

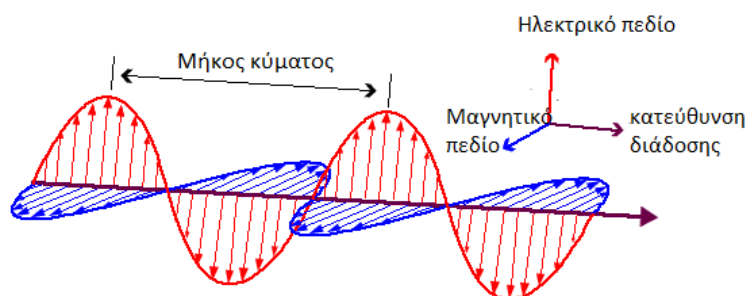
1 Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο θα γίνει παρουσίαση εισαγωγικών στοιχείων σχετικά με το δίπολο Hertz, τους μηχανισμούς διάδοσης, καθώς επίσης και βιβλιογραφική ανασκόπηση το γνωστό στην βιβλιογραφία ως ‘πρόβλημα Sommerfeld’, το οποίο αποτελεί το αντικείμενο της παρούσας διατριβής.

1.1 Εξισώσεις Maxwell

Οι εξισώσεις Maxwell διατυπώθηκαν από τον James Clerk Maxwell το 1873. Ο Maxwell συνδύασε τις εξισώσεις που είχαν διατυπωθεί από τους Faraday, Ampere και Gauss, με βασική συνεισφορά του την προσθήκη ενός επιπλέον όρου στον νόμο του Ampere, του ρεύματος μετατόπισης (displacement current). Αυτό συνέβαλε σημαντικά και στην απόδειξη της αρχής ότι το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο μπορεί να υπάρξει ως κύματα.

Ο Heinrich Hertz απέδειξε την κυματική φύση των εξισώσεων Maxwell με πειράματα το 1886 - 1889. Συγκεκριμένα, παρήγαγε και μελέτησε ηλεκτρομαγνητικά κύματα και κατέδειξε ότι αυτά είναι μακρά, εγκάρσια κύματα που ταξιδεύουν με την ταχύτητα του φωτός και μπορούν να απεικονιστούν, να διαθλαστούν, και να πολωθούν όπως το φως.



Εικόνα 1-1 Εγκάρσιο ηλεκτρομαγνητικό κύμα

Οι εξισώσεις του Maxwell είναι οι εξής:

$$\text{Νόμος του Faraday} \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.1)$$

$$\text{Νόμος του Gauss για ηλεκτρική ροή} \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (1.2)$$

$$\text{Νόμος του Gauss για μαγνητική ροή} \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.3)$$

$$\text{Νόμος του Ampere – Maxwell} \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (1.4)$$

όπου

$E(r,t)$: ένταση ηλεκτρικού πεδίου (Volts/m)

$H(r,t)$:	ένταση μαγνητικού πεδίου	(Amperes/m)
$D(r,t)$:	πυκνότητα ηλεκτρικής ροής	(Coulombs/m ²)
$B(r,t)$:	πυκνότητα μαγνητικής ροής	(Webers/m ²)
$J(r,t)$:	πυκνότητα ηλεκτρικού ρεύματος	(Amperes/m ²)
$\rho(r,t)$:	πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου	(Coulombs/m ³)

Οι εξισώσεις του Maxwell μπορούν να γραφούν και με ολοκληρωτική μορφή ως εξής:

$$\text{Νόμος του Gauss για ηλεκτρική ροή} \quad \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \oint_V dQ \quad (1.5)$$

$$\text{Νόμος του Gauss για μαγνητική ροή} \quad \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (1.6)$$

$$\text{Νόμος του Faraday} \quad \oint_l \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d}{dt} \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (1.7)$$

$$\text{Νόμος του Ampere – Maxwell} \quad \oint_l \vec{H} \cdot d\vec{r} = \oint_S dI + \frac{d}{dt} \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} \quad (1.8)$$

Η εξίσωση (1.5) δείχνει ότι η ηλεκτρική ροή εξερχόμενη από μία επιφάνεια Gauss (μία κλειστή επιφάνεια με προσανατολισμό στοιχειώδους επιφάνειας $d\vec{S}$) είναι ίση με το περιεχόμενο ηλεκτρικό φορτίο. Η εξίσωση (1.6) δείχνει ότι η μαγνητική ροή εξερχόμενη από μία επιφάνεια Gauss είναι ίση με μηδέν.

Η εξίσωση (1.7) δηλώνει ότι η Ηλεκτρεγερτική δύναμη $\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{r}$ σε ένα βρόχο είναι ίση με την αρνητική χρονική μεταβολή της μαγνητικής ροής που διέρχεται από επιφάνεια τερματιζόμενη στο βρόχο. Η εξίσωση (1.8) αποτελείται από δύο όρους: Ο πρώτος όρος $\oint_S dI$ αποτελεί τον νόμο του Ampere που δηλώνει ότι η Μαγνητεγερτική δύναμη $\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{r}$ σε κλειστή καμπύλη είναι ίση με το ρεύμα που διέρχεται από την επιφάνεια S. Ο δεύτερος όρος είναι η συμβολή του Maxwell που περιγράφει ότι στη μαγνητεγερτική δύναμη συνεισφέρει και το λεγόμενο «ρεύμα μετατόπισης», δηλαδή η χρονική μεταβολή της ηλεκτρικής ροής.

Από τις εξισώσεις του Maxwell έχουμε ότι θα ισχύουν:

$$\nabla \times \vec{E} = i\omega\mu\vec{H} \quad (1.9)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (1.10)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} - i\omega\epsilon\vec{E} \quad (1.11)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \quad (1.12)$$

Από αυτές συνδυάζοντας κατάλληλα και χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των εξωτερικών και εσωτερικών γινομένων της διανυσματικής ανάλυσης προκύπτουν οι εξισώσεις ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου:

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = i\omega\mu\vec{J} + \frac{1}{\varepsilon}\nabla\rho \quad (1.13)$$

$$\nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = -\nabla \times \vec{J} \quad (1.14)$$

όπου k είναι ο κυματικός αριθμός στο μέσο διάδοσης: $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \omega/c$.

Από τις εξισώσεις του Maxwell $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ και $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ παίρνουμε τις εξισώσεις που ισχύουν για το διανυσματικό δυναμικό \vec{A} και το βαθμωτό δυναμικό φ :

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (1.15)$$

$$\vec{E} - i\omega\vec{A} = -\nabla\varphi \quad (1.16)$$

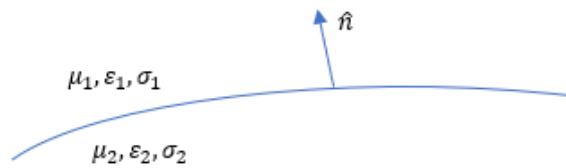
Οι Κυματικές Εξισώσεις (Helmholtz) για τα διανυσματικά δυναμικά συνοψίζονται στις σχέσεις:

$$\nabla^2 \vec{A} + k^2 \vec{A} = -\mu\vec{J} \quad (1.17)$$

$$\nabla^2 \varphi + k^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (1.18)$$

Οι παραπάνω σχέσεις δείχνουν ότι το διανυσματικό δυναμικό εξαρτάται από την κατανομή των πηγών ρεύματος, ενώ το βαθμωτό δυναμικό εξαρτάται από την κατανομή των πηγών φορτίου. Αυτό είναι λογικό δεδομένου ότι για τα \vec{J} και ρ ισχύει η σχέση $\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ (συνθήκη συνέχειας του φορτίου), ενώ για τα \vec{A} και φ ισχύει η συνθήκη Lorentz $\nabla \cdot \vec{A} = i\omega\mu\varepsilon\varphi$.

Οι εξισώσεις του Maxwell χρησιμεύουν σε πολυάριθμες φυσικές και τεχνολογικές εφαρμογές της θεωρίας μικροκυμάτων και κεραιών, των ασυρμάτων και οπτικών τηλεπικοινωνιών, radar καθώς επίσης και σε πολλές εφαρμογές ευθέων και αντιστρόφων προβλημάτων σκέδασης.



Οι εξισώσεις Maxwell μαζί με τις σχετικές οριακές συνθήκες, περιγράφουν πλήρως οποιοδήποτε χρονικά μεταβαλλόμενο πεδίο (χρονική εξάρτηση $e^{-j\omega t}$ ή $e^{+j\omega t}$). Οι οριακές συνθήκες που ικανοποιούν τα μεγέθη του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου στη διαχωριστική επιφάνεια δύο μέσων 1 και 2 με διαφορετικά ηλεκτρικά χαρακτηριστικά είναι:

$$\hat{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_s \quad (1.19)$$

$$\hat{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \quad (1.20)$$

$$\hat{n} \cdot (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_s \quad (1.21)$$

$$\hat{n} \cdot (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \quad (1.22)$$

όπου ο δείκτης s υποδηλώνει μέγεθος εφαπτομενικό στη διαχωριστική επιφάνεια.

1.2 Διάνυσμα Hertz

Η περιγραφή του πεδίου μπορεί να γίνει και με την εισαγωγή ενός μόνο δυναμικού $\vec{\Pi}$, το οποίο ονομάζεται διάνυσμα Hertz ή δυναμικό πόλωσης και συνδέεται με τα \vec{A} και φ με τις σχέσεις:

$$\vec{A} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial \vec{\Pi}}{\partial t} \quad (1.23)$$

$$\varphi = -\nabla \cdot \vec{\Pi} \quad (1.24)$$

Οπότε οι κυματικές εξισώσεις (1.17) και (1.18) γράφονται ως εξής:

$$\frac{1}{v^2} \nabla^2 \left(\frac{\partial \vec{\Pi}}{\partial t} \right) - \frac{1}{v^4} \frac{\partial^3 \vec{\Pi}}{\partial t^3} = -\mu \vec{J} \quad (1.25)$$

$$\nabla^2 (\nabla \cdot \vec{\Pi}) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla \cdot \vec{\Pi} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (1.26)$$

Επομένως τα διανύσματα \vec{E} και \vec{B} δίνονται από τις σχέσεις:

$$\vec{E} = \nabla (\nabla \cdot \vec{\Pi}) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{\Pi}}{\partial t^2} \quad (1.27)$$

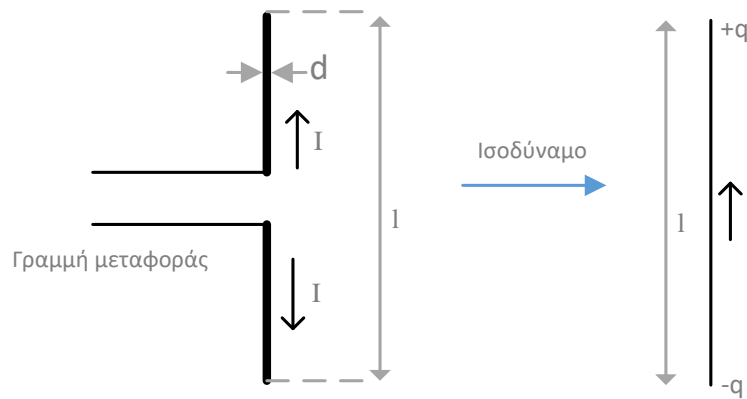
$$\vec{B} = \frac{1}{v^2} \nabla \times \frac{\partial \vec{\Pi}}{\partial t} \quad (1.28)$$

1.3 Δίπολο Hertz

Το δίπολο Hertz (ή βραχύ δίπολο) είναι ο ευθύγραμμος ακτινοβολητής με μήκος l κατά πολύ μικρότερο του μήκους κύματος λειτουργίας λ και σταθερή κατανομή ρεύματος ($l \ll \lambda$). Σε πολλές τηλεπικοινωνιακές εφαρμογές όπου οι χρησιμοποιούμενες κεραιές έχουν μικρό ηλεκτρικό μήκος σε σχέση με το μήκος κύματος, η ανάλυση του διπόλου Hertz μπορεί να εφαρμοσθεί με ικανοποιητική ακρίβεια. Η στοιχειώδης αυτή κεραία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ανάλυση πολυπλοκότερων κεραιών μέσω της υπέρθεσης.

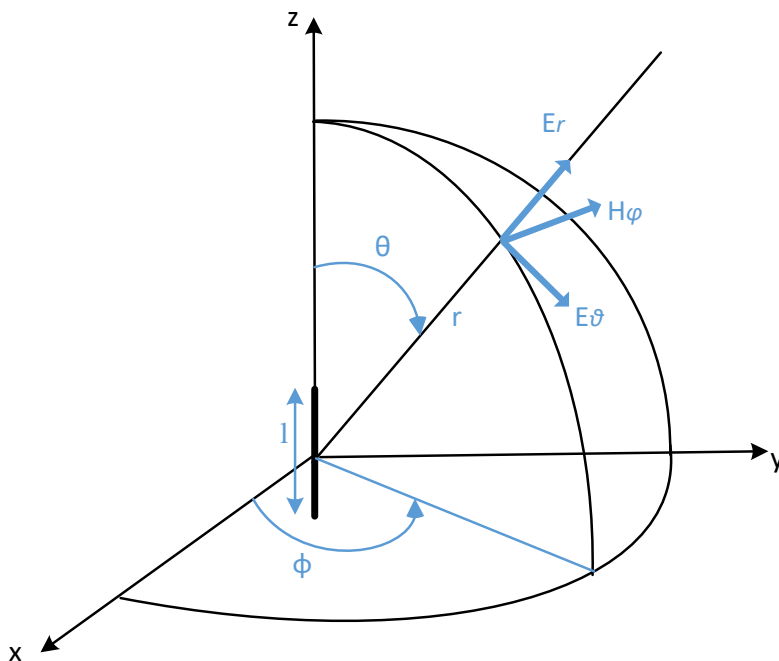
Στην παρακάτω εικόνα απεικονίζεται το δίπολο Hertz και το ισοδύναμο κύκλωμα, το οποίο αποτελείται από αγωγό μηδενικού πάχους, μήκους l και σημειακά φορτία $+q$ και $-$

q στα άκρα, όπου $dq/dt=I$.



Εικόνα 1-2 Το δίπολο Hertz και το ισοδύναμο κύκλωμα

Το παρακάτω διάγραμμα δείχνει ένα δίπολο Hertz τοποθετημένο στην αρχή των αξόνων:



Εικόνα 1-3 Γεωμετρία – Δίπολο Hertz στο κέντρο του συστήματος συντεταγμένων

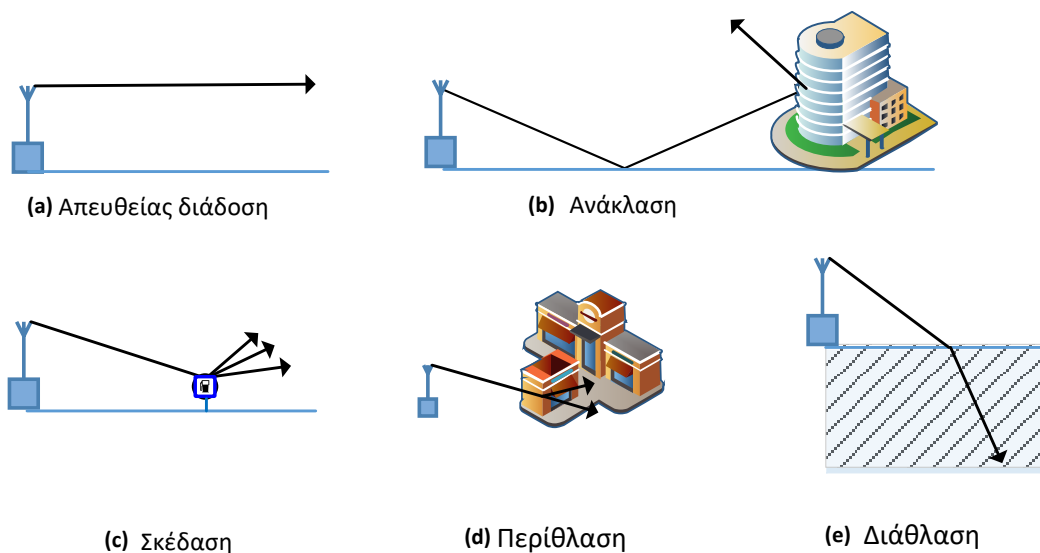
1.4 Μηχανισμοί Διάδοσης

Οι βασικοί μηχανισμοί διάδοσης του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου είναι οι εξής [1.3] (βλ. Εικόνα 1-2):

- Διάδοση ελευθέρου χώρου (Απευθείας διάδοση, Line Of Sight – LOS): Στην διάδοση

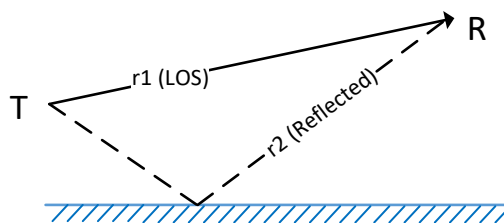
ελευθέρου χώρου τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα διαδίδονται ομοιόμορφα προς όλες τις κατευθύνσεις ως σφαιρικά κύματα. Η ισχύς του ραδιοσήματος είναι συνήθως αντιστρόφως ανάλογη με το τετράγωνο της απόστασης από την κεραία εκπομπής. Στην περίπτωση που υπάρχει οπτική επαφή μεταξύ πομπού-δέκτη, το απ' ευθείας διαδιδόμενο κύμα είναι συνήθως αυτό που καθορίζει το πεδίο λήψης και τα περιθλώμενα και ανακλώμενα πεδία ενδέχεται να μην επηρεάζουν σημαντικά τη διάδοση. Αντίθετα σε περίπτωση μη οπτικής επαφής πομπού-δέκτη, η περίθλαση, η σκέδαση καθώς και τα φαινόμενα ανώτερης τάξης κυριαρχούν στη διάδοση.

- **Ανάκλαση (Reflection):** Ανάκλαση έχουμε όταν ένα διαδιδόμενο ηλεκτρομαγνητικό κύμα προσπίπτει σε εμπόδιο με διαστάσεις πολύ μεγαλύτερες συγκριτικά με το μήκος κύματος.
- **Σκέδαση (Scattering):** Στην περίπτωση όπου στη διαδρομή του ραδιοκύματος παρεμβάλλονται αντικείμενα με διαστάσεις ίσες ή μικρότερες από το μήκος κύματος έχουμε το μηχανισμό της σκέδασης. Η σκέδαση ακολουθεί τους ίδιους νόμους με τη διάχυση και έχει ως αποτέλεσμα την επανεκπομπή του σήματος προς πολλές διαφορετικές κατευθύνσεις.
- **Διάθλαση (Refraction):** η διάθλαση λαμβάνει χώρα όταν το ηλεκτρομαγνητικό κύμα περάσει από ένα μέσο διάδοσης σε ένα άλλο με διαφορετική πυκνότητα. Ως αποτέλεσμα το κύμα να ακολουθεί μια άλλη κατεύθυνση στο δεύτερο μέσο και ταυτόχρονα η ταχύτητα του μεταβάλλεται. Η ταχύτητα διάδοσης ηλεκτρομαγνητικού κύματος σε διηλεκτρικό ισούται με $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} < \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = c$. Ο δείκτης διάθλασης ηλεκτρομαγνητικού κύματος σε διηλεκτρικό ορίζεται ως ο λόγος ταχυτήτων κυμάτων: $n = \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}} > 1$.
- **Περίθλαση (Diffraction):** Περίθλαση εμφανίζεται όταν παρεμβάλλεται ένα αδιαπέραστο σώμα, με διαστάσεις μεγαλύτερες από το μήκος κύματος του ραδιοκύματος, στη διαδρομή του σήματος από τον πομπό στο δέκτη. Με βάση την αρχή του Huygens παράγονται δευτερογενή κύματα πίσω από το εμπόδιο, τα οποία φτάνουν στο δέκτη. Η περίθλαση συμβαίνει στις γωνίες του εμποδίου, όπου το κύμα σκεδάζεται, με συνέπεια η ισχύς του σήματος να ελαττώνεται. Με βάση την περίθλαση εξηγείται η διάδοση RF ενέργειας σε περιοχές όπου δεν υπάρχει οπτική επαφή μεταξύ πομπού και δέκτη.



Εικόνα 1-4 Μηχανισμοί διάδοσης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων

Όταν δύο κύματα φθάνουν στο ίδιο σημείο, διανύοντας διαφορετικές διαδρομές από την πηγή εκπομπής μέχρι το σημείο αυτό έχουμε το φαινόμενο της συμβολής των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων (interference). Η απόσταση που διανύει το ανακλώμενο ΗΜ κύμα (βλ. απόσταση r_2 στο παρακάτω σχήμα) είναι μεγαλύτερη από τη διαδρομή που διανύει το απευθείας. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα το λαμβανόμενο κύμα να αλλάζει ανάλογα με την ανακλαστική ικανότητα του εδάφους και τη διαδρομή που ακολουθεί το κύμα. Αν για παράδειγμα η διαφορά απόστασης του ανακλώμενου με το απευθείας ($r_2 - r_1$) είναι ακριβώς μισό μήκος κύματος και θεωρήσουμε το έδαφος ως τέλειο ανακλαστήρα, τότε στο σημείο λήψης θα έχουμε πλήρη εξουδετέρωση του λαμβανόμενου κύματος (στην περίπτωση που δεν έχουμε τέλειο ανακλαστήρα, υπάρχει μερική εξουδετέρωση). Αν αντίστοιχα η διαφορά είναι ίση με ένα μήκος κύματος, το ανακλώμενο κύμα ενισχύει το απευθείας. Η εναλλαγή τέτοιων σημείων δημιουργεί ένα διάγραμμα συμβολής, αποτελούμενο από εναλλασσόμενες ενισχύσεις (constructive interference) και εξουδετερώσεις (destructive interference) του ηλεκτρομαγνητικού κύματος.



Για συχνότητες στην περιοχή VHF η συμβολή των κυμάτων είναι ασήμαντη, επειδή

στις συχνότητες αυτές τα μήκη κύματος είναι πολύ μεγάλα. Στις UHF και άνω συχνότητες, η συμβολή των κυμάτων είναι αρκετά σημαντική και πρέπει να λαμβάνεται υπ' όψιν. Το φαινόμενο αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό στα radar και σε άλλα μικροκυματικά συστήματα.

1.5 Βιβλιογραφική ανασκόπηση του προβλήματος Sommerfeld (Sommerfeld half-space antenna radiation problem)

Στην παρούσα παράγραφο θα παρουσιάσουμε συνοπτικά την σχετική βιβλιογραφία με το πρόβλημα του Sommerfeld και θα αναφερθούμε στις μεθόδους που έχουν χρησιμοποιηθεί από τους ερευνητές για την επίλυση του προβλήματος και γενικότερα των λεγόμενων ολοκληρωμάτων Sommerfeld. Το πρόβλημα αφορά στον υπολογισμό του λαμβανόμενου πεδίου για την περίπτωση ενός κατακόρυφου δίπολου ακτινοβολούντος πάνω από αγώγιμο ομογενές μέσο.

Το πρόβλημα επιλύθηκε για πρώτη φορά από τον Sommerfeld το 1909 [1.4], και άλλες μορφές δίπολου αντιμετωπίστηκαν σε επόμενες δημοσιεύσεις του [1.5] - [1.7]. Ο Sommerfeld αρχικά τοποθέτησε το δίπολο στην διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ των δύο μέσων, το οποίο προκάλεσε κάποιες αχρείαστες μαθηματικές δυσκολίες, και για το λόγο αυτό οι περισσότεροι συγγραφείς, συμπεριλαμβανομένου του ίδιου του Sommerfeld στο [1.7], το τοποθετούν πάνω από τον ημιχώρο.

Ο Sommerfeld παρουσίασε τη λύση του προβλήματος με όρους γενικευμένων ολοκληρωμάτων με συναρτήσεις Bessel (γνωστών πλέον στην βιβλιογραφία ως ολοκληρώματα Sommerfeld¹ ή ως Fourier-Bessel Transforms) τα οποία δεν μπορούν να υπολογιστούν σε κλειστή μορφή. Στη συνέχεια μετασημάτισε το μονοπάτι ολοκλήρωσης από τον πραγματικό άξονα στο φανταστικό επίπεδο, παίρνοντας δύο

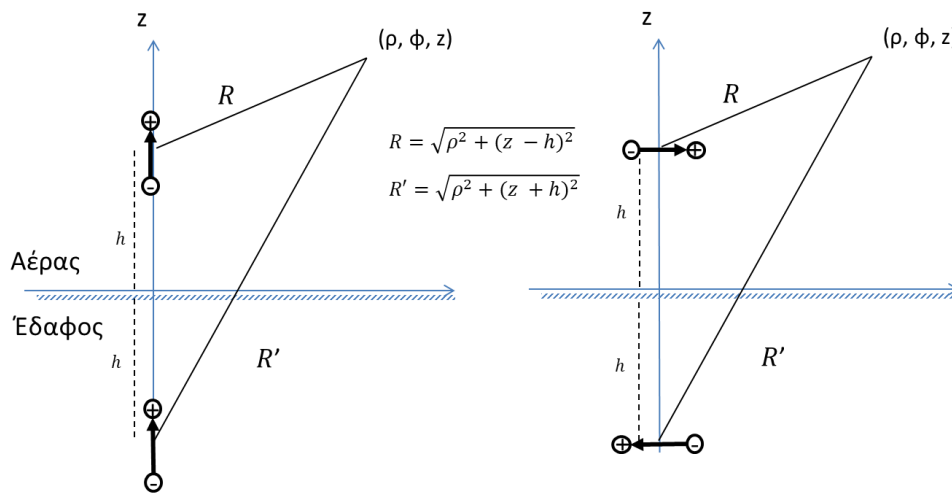
¹ Τα ολοκληρώματα 'τύπου Sommerfeld' έχουν την παρακάτω μορφή:

$$\int_0^{\infty} \tilde{G}(k_{\rho}; z|z') J_{\nu}(k_{\rho}\rho) k_{\rho} dk_{\rho} \quad , \quad \nu = 0,1,2$$

όπου η μήτρα \tilde{G} αποτελεί την κατάλληλη συνάρτηση Green στο φασματικό πεδίο, τα z, z' είναι οι κάθετες συντεταγμένες του πεδίου και της πηγής αντίστοιχα, ρ είναι η απόσταση μεταξύ των σημείων, και η J_{ν} είναι η συνάρτηση Bessel πρώτου είδους και βαθμού ν . Για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων 'τύπου Sommerfeld' υφίστανται οι εξής δυσκολίες, λόγος για τον οποίο έχουν ασχοληθεί αρκετοί ερευνητές προκειμένου να βελτιστοποιηθεί ο τρόπος υπολογισμού:

- Η συνάρτηση Green $\tilde{G}(k_{\rho}; z|z')$ παρουσιάζει πόλους και κλαδικά σημεία απειρισμού πάνω ή/και κοντά στο μονοπάτι ολοκλήρωσης.
- Η ολοκλήρωση εκτείνεται έως το άπειρο.
- Η ολοκληρωτέα συνάρτηση έχει ταλαντευόμενη συμπεριφορά λόγω της συνάρτησης Bessel.

υπερβολικές κλαδικές τομές, των οποίων τη συνεισφορά την αναγνώρισε ως κύματα χώρου, και έναν πόλο του οποίου το υπόλοιπο (residue) αναγνώρισε ως μία ακτινική-κυλινδρική μορφή του επίπεδου κύματος Zenneck. Ο Sommerfeld εξήγαγε μία ασυμπτωτική έκφραση του επιφανειακού πεδίου, με παραδοχές τη μεγάλη αντίθεση των μέσων και μεγάλη οριζόντια απόσταση. Η έκφραση αποτελείται από έναν όρο πολλαπλασιασμένο επί ενός παράγοντα απόσβεσης (*Sommerfeld attenuation function*), ο οποίος αντιπροσωπεύει την επιρροή του εδάφους μέσω μίας μιγαδικής παραμέτρου (την αριθμητική απόσταση Sommerfeld – *Sommerfeld numerical distance*). Η αρχική έκφραση που δόθηκε για το επιφανειακό κύμα ήταν λανθασμένη, και διορθώθηκε από τον Sommerfeld σε επόμενη δημοσίευσή του το 1926.



(α) Τοποθέτηση κατακόρυφου διπόλου πάνω από το έδαφος

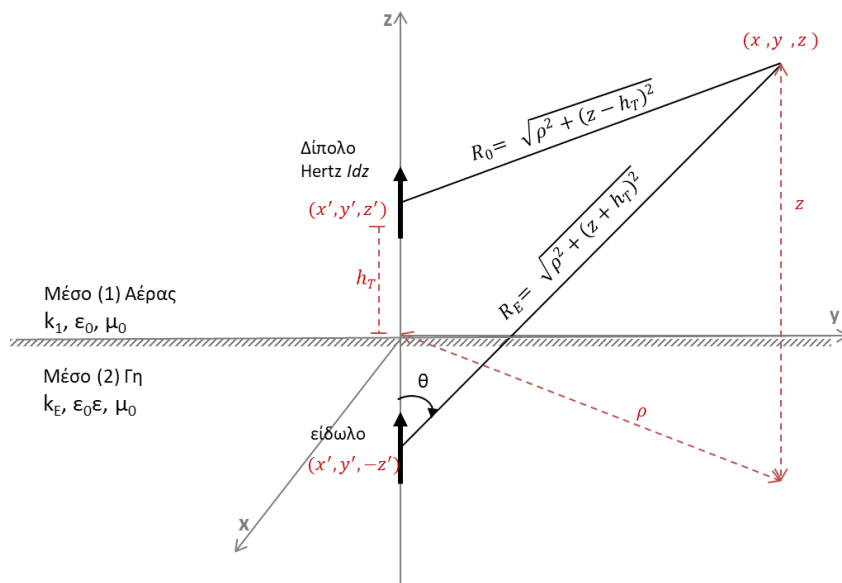
(β) Τοποθέτηση οριζόντιου διπόλου πάνω από το έδαφος

Εικόνα 1-5: Πρόβλημα Sommerfeld - Μέθοδος των ειδώλων (Κάθετο & Οριζόντιο Δίπολο)

Αξίζει να σημειωθεί ότι κατόπιν πειραματικών μετρήσεων (Burrows, πείραμα στη Senecal Lake, 1936) θεωρήθηκε (λανθασμένα) ότι δεν υπάρχει το κύμα Zenneck. Πολλοί ερευνητές (Norton, Niessen) θεώρησαν ότι υπήρχε λάθος πρόσημο στην έκφραση του συντελεστή εξασθένησης του Sommerfeld. Το 2004 ο R.F. Collin αποδεικνύει ότι η ολοκληρωτική μορφή της λύσης του Sommerfeld είναι σωστή. Ο βασικός περιορισμός για την ύπαρξη του κύματος Zenneck στην συνολική λύση είναι ότι ο πόλος πρέπει να είναι επαρκώς διαχωρισμένος από το brunch point. Για μεγάλη ηλεκτρική απόσταση kr , τα $\lambda = \lambda_s$ και $\lambda = k_0$ ταυτίζονται. Συνεπώς, ο όρος του surface wave που προκύπτει από τον πόλο απαλείφεται από ένα ίσο και αντίθετο όρο στο υπόλοιπο ολοκλήρωμα.

Λύση του Sommerfeld

Ο Sommerfeld ανέλυσε τόσο την περίπτωση του κατακόρυφου διπόλου όσο και την περίπτωση του οριζοντίου διπόλου. Εδώ παρουσιάζουμε την λύση του Sommerfeld για την περίπτωση του κατακόρυφου διπόλου. Η επίπτωση των οριακών συνθηκών αναπαριστάται μέσω της μεθόδου των ειδώλων. Το είδωλο του κατακόρυφου διπόλου έχει πόλωση με ίδια διεύθυνση όπως το πραγματικό δίπολο. Το δυναμικό Hertz έχει μόνο z-συνιστώσα. Θεωρούμε $n^2 = (\epsilon + i\frac{\sigma}{\omega})/\epsilon_0$ τον μιγαδικό δείκτη διάθλασης (complex refractive index) και ο κυματαριθμός του εδάφους είναι $k_E = nk_0$.



Ο Sommerfeld απέδειξε ότι ισχύει η παρακάτω σχέση (γνωστή και ως ‘ταυτότητα Sommerfeld’ [1.7]) η οποία μετασχηματίζει την συνάρτηση σφαιρικού κύματος σε ολοκληρωτική μορφή ενός συνεχούς φάσματος επίπεδων κυμάτων. Το αριστερό μέρος της σχέσης αντιπροσωπεύει την συνάρτηση Green για μία πηγή σε ομοιογενές μέσο του οποίου η σταθερά διάδοσης είναι k_0 (όπου $k_0^2 = k_\rho^2 + k_z^2 = \lambda^2 + k_z^2$, δηλ. το λ είναι η σταθερά διάδοσης στην κατεύθυνση ρ):

$$\frac{e^{ik_0 R}}{R} = \int_0^\infty J_0(\lambda \rho) \frac{\lambda}{\mu} e^{-\mu(z+h_T)} d\lambda \quad (1.29)$$

όπου $\mu = \sqrt{\lambda^2 - k_0^2}$ (Σημειώνεται, ότι το μ δεν αναφέρεται στην μαγνητική σταθερά). Χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση, ο Sommerfeld καταλλήλει στις παρακάτω λύσεις για το πρόβλημα [1.7]:

1. Περιοχή $z > h$:

Το λαμβανόμενο πεδίο αποτελείται από δύο μέρη: τη συνεισφορά του απευθείας

Λύση του Sommerfeld

πεδίου Π_{prim} και την δευτερεύουσα συνεισφορά του εδάφους-ειδώλου Π_{sec} :

$$\Pi_z(z > h) = \Pi_{prim} + \Pi_{sec}$$

$$\Pi_z(z > h) = \int_0^\infty J_0(\lambda\rho) \frac{\lambda}{\mu} e^{-\mu(z+h_T)} d\lambda + \int_0^\infty F(\lambda) J_0(\lambda\rho) \frac{\lambda}{\mu} e^{-\mu(z+h_T)} d\lambda \quad (1.30)$$

όπου J_0 η συνάρτηση Bessel μηδενικού βαθμού και $\mu = \sqrt{\lambda^2 - k_0^2}$

2. Περιοχή $0 < z < h$:

$$\Pi_z(0 < z < h) = \Pi_{prim} + \Pi_{sec}$$

$$\Pi_z(0 < z < h) = \int_0^\infty J_0(\lambda\rho) \frac{\lambda}{\mu} e^{+\mu(z+h_T)} d\lambda + \int_0^\infty F(\lambda) J_0(\lambda\rho) \frac{\lambda}{\mu} e^{-\mu(z+h_T)} d\lambda \quad (1.31)$$

Όπου μεταξύ των εξισώσεων $\Pi_z(z > h)$ και $\Pi_z(0 < z < h)$ πρέπει να υπάρχει συνέχεια στο σύνορο.

3. Περιοχή $0 < z < -\infty$

Υπάρχει μόνο η συνεισφορά του ειδώλου, και το πεδίο δίνεται από την σχέση:

$$\Pi_E(z < 0) = \int_0^\infty F_E(\lambda) J_0(\lambda\rho) e^{\mu_E z - \mu h_T} \lambda d\lambda \quad (1.32)$$

όπου $\mu_E = \sqrt{\lambda^2 - k_E^2}$.

Υπολογισμός των $F(\lambda)$, $F_E(\lambda)$ μέσω των οριακών συνθηκών

Το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο σχετίζονται με το διάνυσμα Hertz μέσω των παρακάτω εξισώσεων:

$$E_r = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial \Pi}{\partial z}, \quad H_\varphi = \frac{-k^2}{\mu_0 i \omega} \frac{\partial \Pi}{\partial z}, \quad \text{για } z > 0$$

$$E_r = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial \Pi_E}{\partial z}, \quad H_\varphi = \frac{-k_E^2}{\mu_0 i \omega} \frac{\partial \Pi_E}{\partial z}, \quad \text{για } z > 0$$

Οι οριακές συνθήκες είναι:

$$\frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial \Pi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial \Pi_E}{\partial z} \quad \text{και} \quad \frac{-k^2}{\mu_0 i \omega} \frac{\partial \Pi}{\partial z} = \frac{-k_E^2}{\mu_0 i \omega} \frac{\partial \Pi_E}{\partial z}$$

Εφαρμόζοντας τις οριακές συνθήκες στο $z=0$, προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις για τα $F(\lambda)$, $F_E(\lambda)$:

$$F(\lambda) = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}} \frac{k_E^2 \sqrt{\lambda^2 - k_0^2} - k_0^2 \sqrt{\lambda^2 - k_E^2}}{k_E^2 \sqrt{\lambda^2 - k_0^2} + k_0^2 \sqrt{\lambda^2 - k_E^2}} \quad \text{και} \quad F_E(\lambda) = \frac{2\lambda k_0^2}{k_E^2 \sqrt{\lambda^2 - k_0^2} + k_0^2 \sqrt{\lambda^2 - k_E^2}}$$

Επομένως η τελική λύση του προβλήματος για τις περιοχές $z > 0$, $z < 0$ δίνεται ως:

Λύση του Sommerfeld

$$P_z = \frac{e^{ik_0 R_0}}{R_0} + \frac{e^{ik_0 R_E}}{R_E} - 2 \int_0^\infty J_0(\lambda \rho) e^{-\mu(z+h_T)} \frac{\mu_E}{n^2 \mu + \mu_E} \frac{\lambda d\lambda}{\mu}, \text{ για } z > 0 \quad (1.33)$$

$$P_E = 2 \int_0^\infty J_0(\lambda \rho) e^{-\mu_E z - \mu h_T} \frac{\lambda d\lambda}{n^2 \mu + \mu_E}, \text{ για } z < 0$$

Από τις παραπάνω σχέσεις, εύκολα παρατηρούμε ότι στην περίπτωση του $h = 0$ (πομπός πάνω στην επιφάνεια)

$$\begin{aligned} P_z &= \frac{e^{ik_0 R_0}}{R_0} + \frac{e^{ik_0 R_E}}{R_E} - 2 \int_0^\infty J_0(\lambda \rho) e^{-\mu(z+h_T)} \frac{\mu_E}{n^2 \mu + \mu_E} \frac{\lambda d\lambda}{\mu} = \\ &= 2 \int_0^\infty J_0(\lambda \rho) \frac{\lambda}{\mu} e^{-\mu z} d\lambda - 2 \int_0^\infty J_0(\lambda \rho) e^{-\mu z} \frac{\mu_E}{n^2 \mu + \mu_E} \frac{\lambda d\lambda}{\mu} \\ &= \int_0^\infty J_0(\lambda \rho) e^{-\mu z} \frac{2n^2}{n^2 \mu + \mu_E} \frac{\lambda d\lambda}{\mu} \\ P_E &= 2 \int_0^\infty J_0(\lambda \rho) e^{-\mu_E z} \frac{\lambda d\lambda}{n^2 \mu + \mu_E} \end{aligned}$$

Η πιο καθιερωμένη μορφή λύσης του προβλήματος διατυπώθηκε από τον Norton [1.13, 1935] - [1.19, 1941] ο οποίος κατέληξε σε μία έκφραση όπου διαχωρίζεται το κύμα χώρου και το κύμα επιφανείας.

Λύση του Norton - Εξισώσεις κύματος χώρου και κύματος επιφανείας [1.13, 1935]-[1.19, 1941]

$$E_{\chi\omega\rho\upsilon}^{\text{κατ.διπολ.}} = 30j\beta I dl \cos \Psi \left(\frac{e^{-j\beta r_1}}{r_1} + R_v \frac{e^{-j\beta r_2}}{r_2} \right)$$

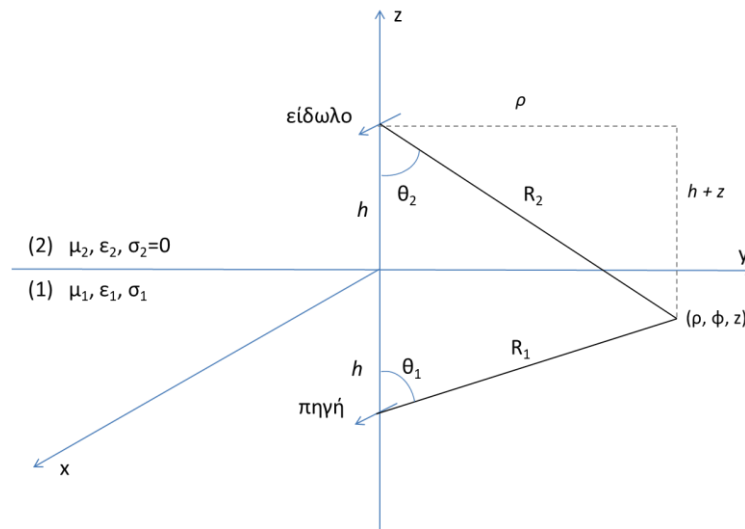
$$E_{\text{επιφανείας}}^{\text{κατ.διπολ.}} = 30j\beta I dl (1 - R_v) F \frac{e^{-j\beta r_2}}{r_2} \sqrt{1 - 2u^2 + (\cos^2 \Psi) u^2 \left(1 + \frac{\sin^2 \Psi}{2} \right)^2}$$

Όπου

- Ψ είναι η γωνία πρόσπτωσης, R_v ο συντελεστής ανάκλασης
- $u^2 = \frac{1}{\epsilon_r - jx}$ με $\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$, που είναι η σχετική διηλεκτρική σταθερά του εδάφους, ϵ_0 σταθερά ελευθέρου χώρου και το $x = \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} = \frac{18 \cdot 10^9 \cdot \sigma}{f} = \frac{18 \cdot 10^3 \cdot \sigma}{f_{\text{MHz}}}$ εκφράζεται συναρτήσει της αγωγιμότητας σ του εδάφους και της συχνότητας f
- $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$ είναι ο κυματικός αριθμός ελευθέρου χώρου

Στη συνέχεια, οι Banos και Wesley το [1.20, 1953], [1.21, 1954] ανέλυσαν το πρόβλημα οριζοντίου διπόλου τοποθετημένου εντός αγωγίμου μέσου και παρήγαγαν προσεγγιστικές λύσεις για διάφορες αποστάσεις από την πηγή. Ξεκινώντας από τις εξισώσεις για το διάνυσμα Hertz ($\vec{E} = \nabla \nabla \cdot \vec{P} + k^2 \vec{P}$, $\vec{H} = -k\eta \nabla \times \vec{P}$, όπου η είναι η αγωγιμότητα), και εφαρμόζοντας τις οριακές συνθήκες σε συνδυασμό με τις εξισώσεις Helmholtz, εξάγουν τις εξισώσεις του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου σε κυλινδρικές

συντεταγμένες. Οι ολοκληρωτικές εκφράσεις που προκύπτουν περιέχουν όρους που αποτελούν ένα συνδυασμό της λύσης για το ηλεκτρικό κατακόρυφο δίπολο και το μαγνητικό κατακόρυφο δίπολο. Επιπλέον, εφαρμόζουν την μέθοδο απότομης κατάβασης για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων.



Εικόνα 1-6: Γεωμετρία του προβλήματος (Banos - Wesley, 1953)

Ο Wait [1.11, 1957] επιλύει το πρόβλημα χρησιμοποιώντας την μέθοδο ‘Steepest Descent’.

Λύση του Wait [1.11, 1957]

Ορίζοντας το πρόβλημα σε κυλινδρικές συντεταγμένες, με το κατακόρυφο δίπολο τοποθετημένο στο $(0,0,h)$ και το έδαφος στο $z=0$, αρχικά εκφράζει το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο σε συναρτήσεις βάσει του δυναμικού Hertz ως εξής:

$$E_\rho = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \rho \partial z}, E_\phi = 0, E_z = \left(\beta^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Pi$$

$$H_\rho = 0, H_\phi = \frac{\beta^2}{i\mu\omega} \frac{\partial \Pi}{\partial \rho}, H_z = 0$$

όπου $\beta = 2\pi/\mu\lambda$ μήκος κύματος ελευθέρου χώρου, $\mu = 4\pi \times 10^{-7}$, και το δυναμικό Hertz εκφράζεται ως το άθροισμα $\Pi = \Pi_\rho + \Pi_r$, όπου το Π_r αντιπροσωπεύει την συνεισφορά του εδάφους με:

$$\Pi_\rho = \bar{c} e^{-i\beta r_1} / r_1, \text{ όπου } \bar{c} = \frac{I ds}{4\pi i \omega \epsilon} \text{ και } r_1 = [(z-h)^2 + \rho^2]^{1/2}$$

$$\Pi_r = \bar{c} e^{-i\beta r_2} / r_2, \text{ όπου } r_2 = [(z+h)^2 + \rho^2]^{1/2} \text{ (στην απλή περίπτωση PEC όπου } Z=0)$$

Στην συνέχεια εκφράζει το Π_r με την μορφή ολοκληρώματος Sommerfeld:

$$\Pi_r = \bar{c} \int_0^\infty \frac{J_0(\lambda \rho) e^{-u(z+h)} R(\lambda) \lambda d\lambda}{u}$$

Λύση του Wait [1.11, 1957]

όπου $u = (\lambda^2 - \beta^2)^{1/2}$, $J(\lambda\rho)$ συνάρτηση Bessel μηδενικού βαθμού με όρισμα $\lambda\rho$, και $R(\lambda)$ είναι συντελεστής ανάκλασης για επίπεδο προσπίπτον κύμα στο έδαφος με γωνία πρόσπτωσης $\theta = \sin^{-1} \lambda/\beta$ που δίνεται από τη σχέση:

$$R(\lambda) = \frac{u - i\beta\Delta}{u + i\beta\Delta}, \Delta = \frac{Z\beta}{\mu\omega} = \frac{Z}{120\pi} \rightarrow \text{Για PEC όπου } Z=0, R(\lambda)=1$$

Τελικώς, το δυναμικό Π εκφράζεται ως:

$$\Pi = \bar{c} \left[\frac{e^{-i\beta r_1}}{r_1} + \frac{e^{-i\beta r_2}}{r_2} - 2P \right], \text{ όπου } P = \int_0^\infty \frac{(i\beta\lambda\Delta)e^{-u(z+h)}}{u(u+i\beta\Delta)} J_0(\lambda\rho) d\lambda$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος, εφαρμόζει τον μετασχηματισμό $\lambda = \beta \cos\alpha$ και $\Delta = \sin\alpha$, καθώς επίσης και την συσχέτιση μεταξύ συναρτήσεων Bessel και Hankel και την συνάρτηση μεγάλου ορίσματος της Hankel. Κατ' αυτό τον τρόπο μετατρέπει το ολοκλήρωμα σε τέτοια μορφή που να επιτρέπει την εφαρμογή της μεθόδου Steepest Descent:

$$P = e^{-i\pi/4} \frac{\Delta}{2} \left(\frac{\beta}{2\pi\rho} \right)^{1/2} \int_{-i\infty}^{\pi+i\infty} \frac{(\cos\alpha)^{1/2} e^{-i\beta R \cos(\theta-\alpha)}}{\sin \frac{\alpha+\alpha_0}{2} \cos \frac{\alpha-\alpha_0}{2}} d\alpha$$

όπου τα R και θ ορίζονται ως: $z + h = R \sin\theta, \rho = -R \cos\theta$.

Μέσω της εφαρμογής της μεθόδου Steepest Descent, καταλήγει στην παρακάτω έκφραση για το ολοκλήρωμα:

$$P \cong i(\pi\rho)^{1/2} e^{-w} \operatorname{erfc}(iw^{1/2}) e^{-i\beta r_2}/r_2,$$

όπου $w \cong p \left(1 + \frac{(z+h)}{\Delta r_2} \right)^2$ και $p = -\frac{i\beta r_2}{2} \Delta^2 = |p| e^{ib}$.

Επομένως, το δυναμικό Hertz, δίνεται από την σχέση:

$$\Pi = 2\bar{c} e^{-i\beta\rho} F(p), F(p) = 1 - i(\pi\rho)^{1/2} e^{-p} \operatorname{erfc}(ip^{1/2}).$$

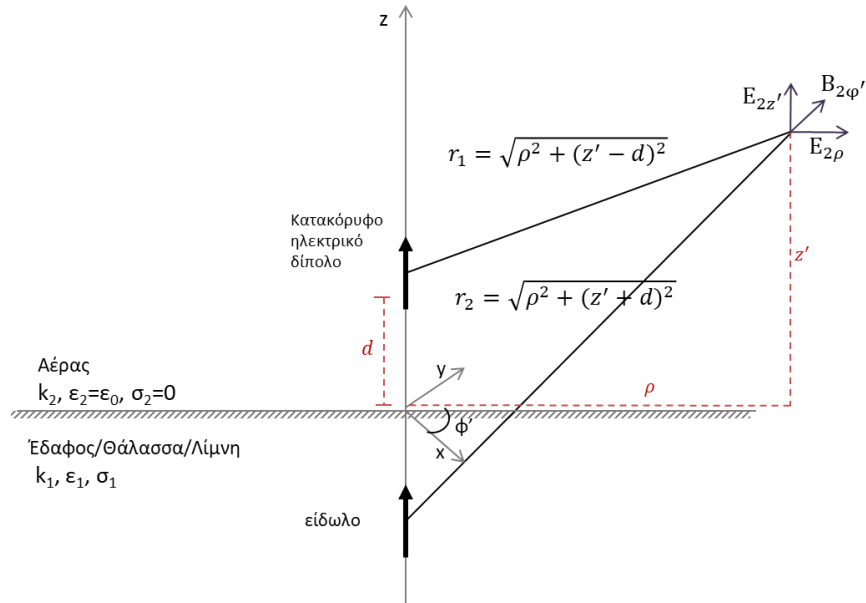
Σε μετέπειτα δημοσιεύσεις του, ο Wait συνεχίζει την ανάλυση της διάδοσης των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων, λαμβάνοντας υπόψη και την καμπυλότητα της γης. Στο τελευταίο του άρθρο [1.50, 1998], κάνει μία ανασκόπηση του προβλήματος του Sommerfeld καθώς επίσης και τις προσεγγίσεις άλλων γνωστών ερευνητών (Van der Pol, Norton, Millington).

Ο Moore [1.8, 1961] ασχολήθηκε με τον καθορισμό των εκπεμπόμενων πεδίων κάτω από τη γη, για κεραίες τοποθετημένες κάτω από την επιφάνεια.

Ο King [1.12, 1969] επιλύει τις ολοκληρωτικές σχέσεις των πεδίων χρησιμοποιώντας σειρές Taylor, το γνωστό ολοκλήρωμα Fresnel, τη μέθοδο στάσιμης φάσης και τις οριακές συνθήκες.

Λύση του King [1.12, 1969]

Η παρακάτω εικόνα παρουσιάζει την γεωμετρία του προβλήματος



Εικόνα 1-7: Γεωμετρία του προβλήματος (King, 1969)

Ο King εξάγει τις παρακάτω εκφράσεις για το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο στη μακρινή περιοχή σε σφαιρικές συντεταγμένες (r, Θ, Φ):

$$B_{2\phi}^r(r_0, \Theta) = -\frac{\mu_0}{2\pi} e^{ik_2 r_0} \left\{ \frac{ik_2 r_0}{r_0} \left[\sin\Theta - \frac{\sin\Theta}{1+(k_1/k_2)\cos\Theta} \right] - \frac{k_1^2 \sin^3\Theta}{k_2^2 r_0^2 [1+(k_1/k_2)\cos\Theta]^3} \right\}$$

$$E_{2r}^r(r_0, \Theta) = \frac{\omega\mu_0}{2\pi k_2} e^{ik_2 r_0} \left[\frac{2}{r_0^2} \cos\Theta - \frac{k_1 \sin^4\Theta}{k_2 r_0^2 [1+(k_1/k_2)\cos\Theta]^2} \right]$$

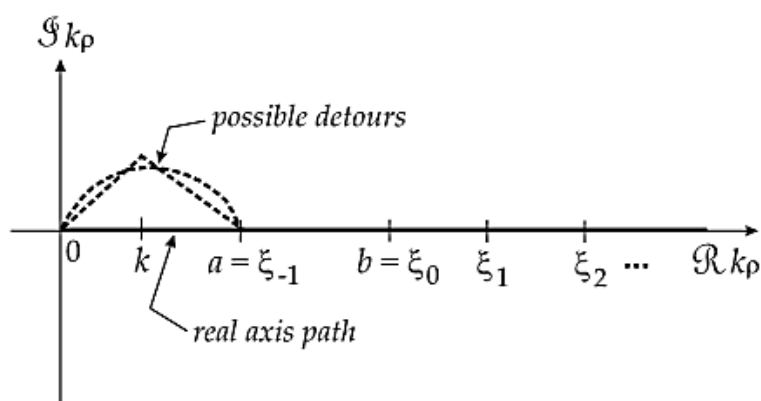
$$E_{2\theta}^r(r_0, \Theta) = -\frac{\omega\mu_0}{2\pi k_2} e^{ik_2 r_0} \left[\frac{ik_2}{r_0} \left(\frac{k_1 \sin\Theta \cos\Theta}{k_2 + k_1 \cos\Theta} \right) - \frac{k_1^2 [\sin^2\Theta - (k_1/k_2)\cos\Theta] \sin^3\Theta}{k_2^2 r_0^2 [1+(k_1/k_2)\cos\Theta]^3} \right]$$

Ο T. Sarkar et al. έχει ασχοληθεί με το πρόβλημα του Sommerfeld σε πολλές δημοσιεύσεις. Το 1975 [1.43] χρησιμοποίησε την “Matrix Pencil Method-MPM” για τον αναλυτικό υπολογισμό του ολοκληρώματος τύπου Sommerfeld. Οι συγγραφείς συγκρίνουν την μέθοδο MPM με τις extrapolation methods και συμπεραίνουν ότι είναι καταλληλότερη ειδικά για την περίπτωση πολυστρωματικών μέσων. Επιπρόσθετα, χρησιμοποιούν τη μέθοδο των ολοκληρωτικών υπολοίπων για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων στα ανώμαλα σημεία. Σε επόμενη δημοσίευσή τους το 2014 [1.47] ασχολούνται με το πρόβλημα του Sommerfeld εξάγοντας μία νέα μορφή της συνάρτησης Green η οποία περιέχει ολοκληρώματα Schelkunoff. Σύμφωνα με τους συγγραφείς, με αυτή η μορφή ολοκληρωμάτων το πρόβλημα Sommerfeld δεν υφίσταται σε περιπτώσεις που οι κεραίες είναι κοντά στην επιφάνεια του εδάφους και με μεγάλη οριζόντια

απόσταση μεταξύ πομπού-δέκτη.

Οι Rahmat-Samii et al. [1.29, 1980] διαμορφώνουν το μονοπάτι ολοκλήρωσης σε μονοπάτι απότομης καθόδου (SPD-Steepest Descent Path) το οποίο περνάει από το σημείο σέλας (saddle point).

Ο K. A. Michalski [1.38, 1985] περιγράφει μία αποτελεσματικότερη παραλλαγή της μεθόδου των Rahmat-Samii et al. υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα Sommerfeld αριθμητικά ως συνδυασμό των ολοκληρωμάτων στο SDP και στο BCP (Branch Cut Point). Πρέπει να σημειωθεί ότι η εξελιγμένη μέθοδος των Rahmat-Samii, που εφαρμόζει ο Michalski, είναι αποτελεσματικότερη μόνο όταν το BCP ολοκλήρωμα δεν είναι αμελητέο σε σχέση με το SDP ολοκλήρωμα (λίγες απώλειες), καθώς και όταν ο πόλος Zenneck βρίσκεται κοντά στο SDP, δηλαδή όταν υπάρχει μεγάλη αντίθεση μεταξύ των δύο μέσων και όταν τα σημεία πηγής και παρατήρησης βρίσκονται πολύ κοντά στη διαχωριστική επιφάνεια. Ο Michalsky το 1988 [1.39] κάνει μία ανασκόπηση στις μεθόδους υπολογισμού του ολοκληρώματος της μορφής Sommerfeld. Συγκεκριμένα ασχολείται με τις 'μεθόδους παρέκτασης' ('extrapolation methods') για την επιτάχυνση της σύγκλισης του ολοκληρώματος, οι οποίες υπολογίζουν το εν λόγω ολοκλήρωμα ως άθροισμα μιας σειράς μερικών ολοκληρωμάτων πάνω σε πεπερασμένα υποδιαστήματα. Η εκάστοτε μέθοδος εφαρμόζεται στην ουρά του ολοκληρώματος $(\int_a^\infty \tilde{G}(k_\rho; z|z') J_\nu(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho)$, δηλαδή στο διάστημα (a, ∞) του μονοπατιού ολοκλήρωσης, ενώ το διάστημα $(0, a)$ αφαιρείται διότι περιλαμβάνει τα κλαδικά σημεία και πόλους, όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα.



Εικόνα 1-8: Μονοπάτι ολοκλήρωσης στο μιγαδικό επίπεδο k_ρ .

Μεταξύ του 0 και του a το μονοπάτι μεταφέρεται από τον άξονα των πραγματικών αριθμών ώστε να αποφευχθούν τα ανώμαλα σημεία της ολοκληρωτέας συνάρτησης. Οι μέθοδοι υπολογισμού (partition-extrapolation methods) εφαρμόζονται στο κομμάτι της ουράς πάνω στον πραγματικό άξονα (a, ∞) .

Σε επόμενη δημοσίευσή του [1.40, 2015], ο Michalsky αναλύει εκ νέου διάφορες μεθόδους για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων Sommerfeld που προκύπτουν σε συναρτήσεις Green για πολυστρωματικά μέσα, καθώς επίσης και αντίστοιχους αλγορίθμους σε μορφή ψευδοκώδικα. Οι μέθοδοι αυτοί είναι οι εξής:

- τεχνική Διπλού Εκθετικού (Double-exponential DE rules) των Takasi και Mori ,
- Επιτάχυνση σύγκλισης με μεθόδους παρεκβολής (extrapolation methods)
- Συνδυασμός τεχνικών DE rule με μεθόδους παρεκβολής
- τεχνική Διπλού Εκθετικού των Ogata–Sugihara

Οι μέθοδοι που περιγράφει εφαρμόζουν γενικότερα, αλλά δεν προτείνονται σε περιπτώσεις όπου η απόσταση ρ ξεπερνά περίπου τα εκατό μήκη κύματος (όπου η συνάρτηση Bessel έχει υπερβολικό αριθμό διακυμάνσεων (oscillations) στο διάστημα $(0, \alpha)$). Επομένως, σε περιπτώσεις όπου ενδιαφερόμαστε για το μακρινό πεδίο, προτιμούνται άλλες μέθοδοι όπως η αριθμητική ολοκλήρωση επί του μονοπατιού απότομης κατάβασης (Steepest Descent Path) ή κατά μήκος των κάθετων branch cuts.

Ο S. L. Dvorak το 1992 εφάρμοσε τον Three – dimensional (3D) Fourier Transform (FFT) με σκοπό τον υπολογισμό του ολοκληρώματος Sommerfeld για κατακόρυφο δίπολο υπεράνω της επιφάνειας της γης.

Οι Golubovic et al. [1.48, 2012] χρησιμοποιούν την αριθμητική ολοκλήρωσης με την τεχνική Διπλού Εκθετικού (DE-Double Exponential-type quadrature) για τον υπολογισμό των ουρών των SI (Sommerfeld Integrals). Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα της μεθόδου αυτής με την μέθοδο των ροπών (MoM-Method of Moments) και την μέθοδο βαρών (WA - Weighted Averages), συμπεραίνουν ότι η μέθοδος αυτή υπερτερεί ως προς την ακρίβεια και το υπολογιστικό κόστος.

1.6 Ασυμπτωτικές μέθοδοι υπολογισμού ολοκληρωμάτων

Δύο βασικές μαθηματικοί μέθοδοι ασυμπτωτικών υπολογισμών ολοκληρωμάτων με άμεση εφαρμογή στον ηλεκτρομαγνητισμό είναι οι παρακάτω:

- Ολοκληρώματα πραγματικών μεταβλητών: Ασυμπτωτική Μαθηματική Μέθοδος Στάσιμης Φάσης (Stationary Phase Method - SPM). Η μέθοδος αυτή παρουσιάζεται λεπτομερώς στην παράγραφο 1.6.1.
- Ολοκληρώματα μιγαδικών μεταβλητών: Ασυμπτωτική Μαθηματική Μέθοδος Απότομης Κατάβασης (Steepest Descent Path method - SDP). Η μέθοδος αυτή μετασχηματίζει το μονοπάτι ολοκλήρωσης στα λεγόμενα μονοπάτια απότομης

κατάβασης τα οποία διασχίζουν τα σημεία «saddle points». Η μέθοδος αυτή παρουσιάζεται λεπτομερώς στην παράγραφο 1.6.2.

Οι μέθοδοι αυτοί χρησιμοποιούνται για υπολογισμό του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου στην μακρινή περιοχή προκειμένου να μειωθεί η πολυπλοκότητα καθώς και ο χρόνος και οι πόροι υπολογισμού που απαιτούνται για την αριθμητική ολοκλήρωση. Στα πλαίσια της παρούσας διατριβής, τα αποτελέσματά μας θα συγκριθούν σε σχέση με αντίστοιχα αποτελέσματα της μεθόδου στάσιμης φάσης². Στην βιβλιογραφία γίνεται μεγάλη χρήση της μεθόδου απότομης κατάβασης, και για το λόγο αυτό παρουσιάζονται συνοπτικά οι δύο αυτές μέθοδοι.

1.6.1 Μέθοδος Στάσιμης Φάσης (Stationary Phase Method – SPM)

Η μέθοδος στάσιμης φάσης (Stationary Phase Method - SPM) χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της παρακάτω μορφής ορισμένου διπλού ολοκληρώματος:

$$I(k) = \int_a^b \int_c^d F(x, y) \cdot e^{j \cdot k \cdot f(x, y)} dx \cdot dy \quad (1.34)$$

όπου k πραγματικός αριθμός, $f(x, y)$ η συνάρτηση φάσης, πραγματική, μη γραμμική συνάρτηση, ανεξάρτητη του k , και $F(x, y)$ η συνάρτηση πλάτους, μπορεί να είναι μιγαδική, μη γραμμική συνάρτηση, ανεξάρτητη του k .

Η Μέθοδος Στάσιμης Φάσης βασίζεται στην εναλλάξ ακύρωση διαδοχικών συνημιτονοειδών όρων, των οποίων η φάση μεταβάλλεται ταχύτατα. (Όταν οι ίδιοι συνημιτονοειδείς όροι προστεθούν, έχοντας διαφορετική και ταχύτατα μεταβαλλόμενη φάση η οποία μεταβάλλεται με την συχνότητα, το αποτέλεσμα της πρόσθεσης θα είναι «ακυρωτικό», αφού ο ένας όρος θα ακυρώνει τον άλλον με ίδια, ή παραπλήσια κατ' απόλυτη τιμή φάση). Η SPM, δίνει μια προσεγγιστική έκφραση του παραπάνω ολοκληρώματος για μεγάλες τιμές του k . Η ασυμπτωτική προσέγγιση στηρίζεται στο γεγονός ότι η $f(x, y)$ πρέπει να συμπεριφέρεται ομαλά (η τιμή της πρέπει να μεταβάλλεται αργά, εντός της περιοχής των στάσιμων σημείων x_s, y_s). Τα στάσιμα σημεία της f είναι τα σημεία για τα οποία οι μερικές παράγωγοι της f ως προς x και y μηδενίζονται:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_s, y=y_s} \equiv f'_x(x_s, y_s) = 0, \quad \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{x=x_s, y=y_s} \equiv f'_y(x_s, y_s) = 0 \quad (1.35)$$

Έξω από την περιοχή των στάσιμων σημείων, η συνάρτηση f μπορεί να μεταβάλλεται ταχέως με τέτοιο τρόπο ώστε ο εκθετικός παράγοντας $e^{j \cdot k \cdot f(x, y)}$ να κυμαίνεται μεταξύ των

² Η μέθοδος της στάσιμης φάσης χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά από τον Stokes για να εκτιμήσει την ασυμπτωτική συμπεριφορά του ολοκληρώματος: $z(t) = \int_0^\infty \cos(t[\omega^3 - \omega]) d\omega$.

τιμών +1 και -1 για μεγάλες τιμές του k . Θεωρώντας ότι η συνάρτηση f είναι μια συνάρτηση χωρίς απότομες μεταβολές στην τιμή της, οι διαδοχικές ολοκληρώσεις εκτός της περιοχής των στάσιμων σημείων αλληλοαναιρούνται. Επομένως η τιμή του ολοκληρώματος θα καθοριστεί από τις συμβολές των στοιχειωδών ολοκληρώσεων που γίνονται εντός της περιοχής των στάσιμων σημείων. Προσεγγιστικά τα όρια των ολοκληρωμάτων a, b και c, d μπορούν να επεκταθούν στο άπειρο αφού οι συμβολές από την ολοκλήρωση στην περιοχή εκτός των στάσιμων σημείων αλληλοαναιρούνται:

$$I(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x_s, y_s) \cdot e^{j \cdot k \cdot f(x, y)} dx \cdot dy \quad (1.36)$$

$$I(k) = F(x_s, y_s) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j \cdot k \cdot f(x, y)} dx \cdot dy \quad (1.37)$$

Από το πολυώνυμο Taylor της $f(x, y)$ μπορούμε να ισχυριστούμε ότι κοντά στην περιοχή των στάσιμων σημείων η συνάρτηση προσεγγίζεται από την παρακάτω σχέση (σημειώνεται ότι στην σχέση αυτή δεν υπάρχουν οι πρώτες μερικές παράγωγοι, διότι όπως αναφέρθηκε παραπάνω είναι μηδενικές για τα στάσιμα σημεία) :

$$f(x, y) \cong f(x_s, y_s) + \frac{1}{2} \cdot (x - x_s)^2 \cdot f''_{xx}(x_s, y_s) + \frac{1}{2} \cdot (y - y_s)^2 \cdot f''_{yy}(x_s, y_s) + (x - x_s) \cdot (y - y_s) \cdot f''_{xy}(x_s, y_s) \quad (1.38)$$

Οι δεύτερες μερικές παράγωγοι της σχέσης (1.38) ορίζονται από τις σχέσεις:

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{\substack{x=x_s \\ y=y_s}} \equiv f''_{xx}(x_s, y_s) \quad (1.39)$$

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right|_{\substack{x=x_s \\ y=y_s}} \equiv f''_{yy}(x_s, y_s) \quad (1.40)$$

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|_{\substack{x=x_s \\ y=y_s}} \equiv f''_{xy}(x_s, y_s) \quad (1.41)$$

Συνοπτικά η σχέση (1.38) γράφεται :

$$f(x, y) \cong f(x_s, y_s) + A \cdot \xi^2 + B \cdot \eta^2 + C \cdot \xi \cdot \eta \quad (1.42)$$

όπου

$$\xi = x - x_s \quad (1.43)$$

$$\eta = y - y_s \quad (1.44)$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot f''_{xx}(x_s, y_s) \quad (1.45)$$

$$B = \frac{1}{2} \cdot f''_{yy}(x_s, y_s) \quad (1.46)$$

$$C = f''_{xy}(x_s, y_s) \quad (1.47)$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (1.37) έχουμε :

$$I(k) \cong F(x_s, y_s) \cdot e^{j \cdot k \cdot f(x_s, y_s)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j \cdot k \cdot (A \cdot \xi^2 + B \cdot \eta^2 + C \cdot \xi \cdot \eta)} d\xi \cdot d\eta \quad (1.48)$$

Και με τον παρακάτω μετασχηματισμό:

$$A \cdot \xi^2 + B \cdot \eta^2 + C \cdot \xi \cdot \eta = A' \cdot \mu^2 + B' \cdot \lambda^2 \quad (1.49)$$

με

$$A' = \frac{1}{2} \left[(A + B) + \sqrt{(A + B)^2 - (4AB - C^2)} \right] \quad (1.50)$$

$$B' = \frac{1}{2} \left[(A + B) - \sqrt{(A + B)^2 - (4AB - C^2)} \right] \quad (1.51)$$

Οι τιμές των A, B, C προκύπτουν από τον μηδενισμό της ορίζουσας :

$$\begin{vmatrix} (A - \zeta) & \frac{C}{2} \\ \frac{C}{2} & (B - \zeta) \end{vmatrix} = 0 \quad (1.52)$$

όπου $\zeta_1 = A'$ και $\zeta_2 = B'$.

Με τις παραπάνω αντικαταστάσεις έχουμε :

$$I(k) \cong F(x_s, y_s) \cdot e^{j \cdot k \cdot f(x_s, y_s)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j \cdot k \cdot (A' \cdot \mu^2 + B' \cdot \lambda^2)} d\mu \cdot d\lambda \quad (1.53)$$

$$I(k) \cong F(x_s, y_s) \cdot e^{j \cdot k \cdot f(x_s, y_s)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm j \cdot k \cdot |A'| \cdot \mu^2} d\mu \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm j \cdot k \cdot |B'| \cdot \lambda^2} d\lambda \quad (1.54)$$

όπου τα πρόσημα των εκθετών προσδιορίζονται από τα πρόσημα των A' και B' και δίνονται από τις σχέσεις (1.50) και (1.51).

Τα δύο ολοκληρώματα στη σχέση (1.52) μπορούν να υπολογιστούν με βάση το ολοκλήρωμα:

$$I''(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm j \cdot k \cdot |a| \cdot t^2} dt = 2 \cdot \int_0^{+\infty} e^{\pm j \cdot k \cdot |a| \cdot t^2} dt \quad (1.55)$$

όπου η παράμετρος a αντιστοιχεί είτε στο A' είτε στο B' .

Κάνοντας τον παρακάτω μετασχηματισμό μεταβλητής:

$$k \cdot |\alpha| \cdot t^2 = \frac{\pi}{2} \cdot \tau^2, dt = \sqrt{\frac{\pi}{2 \cdot k |\alpha|}} d\tau \quad (1.56)$$

το ολοκλήρωμα τις σχέσης (1.55) γράφεται ως εξής:

$$I''(k) = 2 \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2 \cdot k \cdot |\alpha|}} \int_0^{+\infty} e^{\pm j \frac{\pi}{2} \tau^2} d\tau \quad (1.57)$$

Το ολοκλήρωμα της τελευταίας σχέσης αποτελεί το μιγαδικό ολοκλήρωμα Fresnel και υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\int_0^{+\infty} e^{\pm j \frac{\pi}{2} \tau^2} d\tau = \frac{1}{2} \cdot (1 \pm j) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{\pm j \frac{\pi}{4}} \quad (1.58)$$

Επομένως, το ολοκλήρωμα $I(k)$ δίνεται από τη σχέση :

$$I(k) \cong F(x_s, y_s) \cdot e^{j \cdot k \cdot f(x_s, y_s)} \cdot \frac{\pi}{k \cdot \sqrt{|A'| \cdot |B'|}} \cdot e^{\pm j \frac{\pi}{4}} \cdot e^{\pm j \frac{\pi}{4}} \quad (1.59)$$

Για το γινόμενο $e^{\pm j \frac{\pi}{4}} \cdot e^{\pm j \frac{\pi}{4}}$ ισχύει ότι:

$$e^{\pm j \frac{\pi}{4}} \cdot e^{\pm j \frac{\pi}{4}} = \begin{cases} +j, & A' > 0, B' > 0 \\ -j, & A' < 0, B' < 0 \\ 1, & A' \cdot B' < 0 \end{cases}$$

Με βάση τα παραπάνω το ολοκλήρωμα μπορεί να γραφτεί :

$$I(k) \cong F(x_s, y_s) \cdot e^{j \cdot k \cdot f(x_s, y_s)} \cdot \frac{j \cdot \pi \cdot \delta}{k \cdot \sqrt{|A'| \cdot |B'|}} \quad (1.60)$$

όπου το δ ορίζεται από:

$$\delta = \begin{cases} +1, & A' > 0, B' > 0 \\ -1, & A' < 0, B' < 0 \\ -j, & A' \cdot B' < 0 \end{cases} \quad (1.61)$$

Από τις ανωτέρω σχέσεις προκύπτει ότι οι παράμετροι A' και B' είναι πραγματικοί αριθμοί, και επιπλέον $A' + B' = A + B$ και $A' \cdot B' = \frac{(4A \cdot B - C^2)}{4}$. Επομένως, από την (1.60) παίρνουμε:

$$I(k) \cong F(x_s, y_s) \cdot e^{j \cdot k \cdot f(x_s, y_s)} \cdot \frac{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot \delta}{k \cdot \sqrt{|4A \cdot B - C^2|}} \quad (1.62)$$

όπου ο προσδιορισμός των πρόσημων των A' , B' γίνεται ως εξής :

- Εάν $4A \cdot B > C^2$, τότε τα A και B έχουν ίδιο πρόσημο οπότε $A' \cdot B' > 0$. Οπότε και τα A' και B' έχουν το ίδιο πρόσημο:

- Εάν $A > 0 \rightarrow B > 0$ και $A' > 0$ και $B' < 0$
- Εάν $A < 0 \rightarrow B < 0$ και $A' < 0$ και $B' < 0$
- Εάν $4A \cdot B < C^2 \rightarrow$ τα A και B είναι ετερόσημα, οπότε $A' \cdot B' < 0$. Οπότε και τα A' και B' είναι ετερόσημα.

Κατά συνέπεια, από όλα τα παραπάνω, προκύπτει ότι συνολικά έχουμε τρεις περιπτώσεις :

- Εάν $4A \cdot B > C^2$ και $A > 0$, τότε $A' > 0$ και $B' > 0$
- Εάν $4A \cdot B > C^2$ και $A < 0$, τότε $A' < 0$ και $B' < 0$
- Εάν $4A \cdot B < C^2$, τότε $A' \cdot B' < 0$ (ετερόσημα)

Και οι τύποι υπολογισμού του ολοκληρώματος $I(k)$ δίνονται από :

$$I(k) \cong F(x_s, y_s) \cdot e^{j \cdot k \cdot f(x_s, y_s)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j \cdot k \cdot (A \cdot \xi^2 + B \cdot \eta^2 + C \cdot \xi \cdot \eta)} d\xi \cdot d\eta \quad (1.63)$$

$$I(k) \cong F(x_s, y_s) \cdot e^{j \cdot k \cdot f(x_s, y_s)} \cdot \frac{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot \delta}{k \cdot \sqrt{|4A \cdot B - C^2|}} \quad (1.64)$$

όπου:

$$\delta = \begin{cases} +1, & 4A \cdot B > C^2, A > 0 \\ -1, & 4A \cdot B > C^2, A < 0 \\ -j, & 4A \cdot B < C^2 \end{cases}$$

1.6.2 Μέθοδος 'Απότομης Κατάβασης' (Steepest Descent Method)

Η μέθοδος Απότομης Κατάβασης ('Steepest Descent', SDP) χρησιμοποιείται για την επίλυση ολοκληρωμάτων όπου οι μεταβλητές των συναρτήσεων εντός του ολοκληρώματος λαμβάνουν τιμές μιγαδικών αριθμών ($\in \mathbb{C}$). Ακολουθείται παρόμοια διαδικασία υπολογισμού με την SPM, το στάσιμο σημείο όμως ονομάζεται saddle point, και η δυσκολία της μεθόδου έγκειται στον ορισμό της νέας καμπύλης SDP, η οποία θα πρέπει να επιλεγθεί, έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy-Riemann (θεώρημα καθετότητας). Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως (βλ. βιβλιογραφική ανασκόπηση), η συγκεκριμένη μέθοδος έχει εφαρμοσθεί πολλές φορές για την επίλυση του προβλήματος Sommerfeld.

Θεωρούμε το ολοκλήρωμα :

$$I = \int_C f(z) \exp\{jkg(z)\} dz \quad (1.65)$$

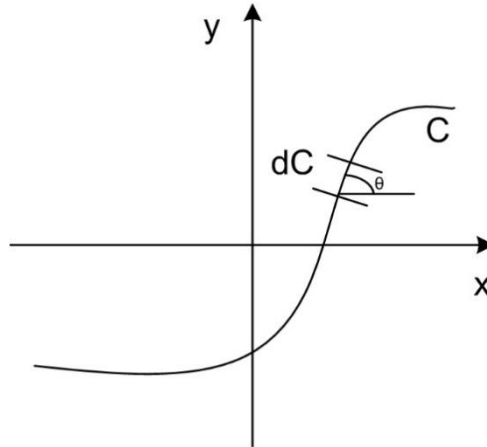
Όπου $f(z)$ και $g(z)$ είναι μιγαδικές συναρτήσεις και ορίζονται για την μιγαδική μεταβλητή z κατά μήκος της καμπύλης ολοκλήρωσης C , της οποίας τα άκρα εκτείνονται μέχρι το άπειρο και στην οποία θεωρούμε ότι $\arg k \cong 0$.

Ο όρος φάσης στην εξίσωση (1.65) μπορεί να γραφτεί ως:

$$g(z) = u(x, y) + jv(x, y) \quad (1.66)$$

όπου $z=x+iy$ και u, v πραγματικές συναρτήσεις που ικανοποιούν τις εξισώσεις Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ και } \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.67)$$



Εικόνα 1-9 Μέθοδος Steepest Descent:
Καμπύλη ολοκλήρωσης C στο μιγαδικό επίπεδο z.

$$(1.65) \xrightarrow{(1.66)} I = \int_C f(z) e^{jku} e^{-kv} dz \quad (1.68)$$

Το μέτρο του παραπάνω ολοκληρώματος θα μεταβληθεί γρήγορα πάνω στην καμπύλη όπου ο όρος κλίσης $\frac{\partial v}{\partial C}$ μεγιστοποιείται. Ομοίως, η φάση θα μεταβληθεί γρήγορα πάνω στην καμπύλη όπου ο όρος κλίσης $\frac{\partial u}{\partial C}$ μεγιστοποιείται. Από την Εικόνα 1-9 έχουμε ότι:

$$\frac{\partial v}{\partial C} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial C} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial C} = \frac{\partial v}{\partial x} \cos \vartheta + \frac{\partial v}{\partial y} \sin \vartheta \quad (1.69)$$

$$\frac{\partial u}{\partial C} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \vartheta + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \vartheta \quad (1.70)$$

Οι τιμές της γωνίας θ που αντιστοιχούν στο μέγιστο αυτών των συναρτήσεων, ορίζονται από:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial v}{\partial C} \right) = -\frac{\partial v}{\partial x} \sin \vartheta + \frac{\partial v}{\partial y} \cos \vartheta = -\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial C} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial C} = 0 \quad (1.71)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial u}{\partial C} \right) = -\frac{\partial u}{\partial x} \sin \vartheta + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \vartheta = -\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial C} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial C} = 0 \quad (1.72)$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Cauchy-Riemann (1.67) έχουμε ότι $\frac{\partial u}{\partial C} = 0$ για μέγιστη αλλαγή στην μεταβλητή v και $\frac{\partial v}{\partial C} = 0$ για μέγιστη αλλαγή στην μεταβλητή u . Συνεπώς, κατά μήκος των καμπύλων όπου έχουμε σταθερή φάση, το μέτρο του όρου $e^{jkg(z)}$

αλλάζει πολύ γρήγορα, ενώ κατά μήκος των καμπύλων όπου έχουμε σταθερό μέτρο, η φάση του όρου $e^{jkg(z)}$ αλλάζει πολύ γρήγορα.

Επομένως, ο κύριος όρος συνεισφοράς στο ολοκλήρωμα της σχέσης (1.65) για μεγάλο k θα εμφανίζεται στην περιοχή κατάλληλων σημείων «ράχης» (saddle points) όπου ο μηδενίζεται ο όρος $g'(z_0) = 0$. Η μέθοδος SDP ουσιαστικά προσπαθεί να μετασχηματίσει την αρχική καμπύλη ολοκλήρωσης της (1.65) σε μία άλλη η οποία ενώ τέμνει τα κατάλληλα σημεία «ράχης», δίνει την πιο γρήγορη μεταβολή στο μέτρο του όρου $e^{jkg(z)}$. Επομένως οι απαιτήσεις για μία καμπύλη steepest descent μέσα από ένα σημείο «ράχης» για $z=z_0$ είναι να ισχύει κατά μήκος της καμπύλης ότι:

$$u(x, y) = \text{σταθ.}, v(x, y) \geq v(x_0, y_0) \quad (1.73)$$

Η δυσκολία της μεθόδου εντοπίζεται στον καθορισμό της καμπύλης απότομης κατάβασης. Συνήθως ο όρος φάσης $g(z)$ γράφεται με την μορφή πολωνύμου Taylor, γύρω από τα σημεία «ράχης» z_0 ούτως ώστε να γίνει ο ασυμπτωτικός υπολογισμός του ολοκληρώματος. Αν το σημείο «ράχης» επιλεγεί έτσι ώστε να είναι $v(x, y) = \text{σταθ.}$, τότε η μέθοδος Steepest Descent αποτελεί ταυτόσημη περίπτωση της μεθόδου στάσιμης φάσης.

Ας υποθεθεί ότι έχουμε να υπολογίσουμε το άπειρο ολοκλήρωμα:

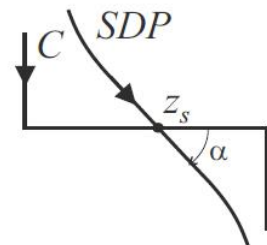
$$I(k) = \int_C f(z)e^{kq(z)} dz, k \gg 1 \quad (1.74)$$

όπου C αποτελεί μία κλειστή καμπύλη που ορίζεται στο μιγαδικό επίπεδο z . Τα άκρα εντοπίζονται και πάλι στα σημεία $z = a$ και $z = b$, και οι συναρτήσεις $f(z)$ και $q(z)$ ορίζονται πλήρως πάνω στην μιγαδική καμπύλη C . Οι συναρτήσεις $f(z)$ και $q(z)$ ορίζονται σε ολόκληρο το μιγαδικό επίπεδο z , αλλά μπορούν να έχουν και απομονωμένες τιμές ή σημεία ή κλάδους ασυνέχειας. Η έκφραση στο μιγαδικό επίπεδο z για την συνάρτηση q είναι η εξής:

$$z = x + iy, \quad q(z) = u(x, y) + v(x, y) \quad (1.75)$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Cauchy μπορούμε να αναμορφώσουμε την κλειστή καμπύλη C σε μία νέα κλειστή καμπύλη που ονομάζουμε SDP. Η SDP αναφέρεται στο σημείο z_s , το οποίο αποκαλείται σημείο 'saddle point' και για το οποίο ισχύει ότι $q'(z_s) = 0$ και $q''(z_s) \neq 0$. Επίσης η $u(z)$ έχει μέγιστο στο σημείο z_s . Ισχύουν ακόμα τα εξής:

$$f(z) = f(z_s) \quad (1.76)$$



$$q(z) \sim q(z_s) + \frac{1}{2}q''(z_s)(z - z_s)^2 \quad (1.77)$$

Η διαδρομή Steepest Descent επιλέγεται με κριτήριο την καθετότητα των εξισώσεων Cauchy-Riemann: $\nabla u \perp \nabla v$. Επίσης, η συνάρτηση $u(z)$ μειώνεται περισσότερο κατά μήκος της $v(z)=\text{σταθ}$. Επιπλέον, ισχύει η παρακάτω ιδιότητα:

$$v(z) = \text{σταθ} \rightarrow q''(z_s)(z - z_s)^2 \in \mathfrak{R} \quad (1.78)$$

$$q(z) \sim q(z_s) + \frac{1}{2}q''(z_s)(z - z_s)^2 \quad (1.79)$$

$$q(z) - q(z_s) = u(z) - u(z_s) = \frac{1}{2}q''(z_s)(z - z_s)^2 \in \mathfrak{R} \quad (1.80)$$

Εκτελώντας την παρακάτω αλλαγή μεταβλητής $t^2 = -\frac{k}{2}q''(z_s)(z - z_s)^2$ και γνωρίζοντας ότι ισχύουν:

$$z - z_s = \delta e^{ia} \quad (1.81)$$

$$t^2 = -k\delta^2 e^{i2a} q''(z_s) \quad (1.82)$$

$$t = \pm \delta \sqrt{k|q''(z_s)|} \quad (1.83)$$

$$\frac{dt}{dz} = \frac{dt}{d\delta} \frac{d\delta}{dz} = \sqrt{k|q''(z_s)|} e^{-ia}, \frac{dt}{da} = 0 \quad (1.84)$$

Το a πρέπει να είναι σύμφωνο με την κατεύθυνση ενός περάσματος μέσα από το SP. Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος γίνεται πλέον στην καμπύλη SDP, οπότε το αποτέλεσμα θα προκύπτει διαδοχικά από την παρακάτω σχέση:

$$I(k) = \int_{SDP} f(z) e^{kq(z)} dz \sim f(z_s) e^{kq(z_s)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{k}{2}q''(z_s)(z-z_s)^2} dz = \dots = f(z_s) e^{kq(z_s)} \sqrt{\frac{2\pi}{k|q''(z_s)|}} e^{ia} \quad (1.85)$$

1.7 Μέθοδος των Ροπών (Method of Moments)

Η μέθοδος των ροπών (Method of Moment - MoM) είναι μία από τις μεθόδους που εφαρμόζεται συχνά σε προβλήματα σκέδασης. Γενικά, χρησιμοποιείται κυρίως σε περιπτώσεις όπου οι υπολογισμοί αφορούν πολυστρωματικά μέσα, περιπτώσεις στις οποίες πάλι πρέπει να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα τύπου Sommerfeld [1.52], [1.53]. Η μέθοδος των ροπών εφαρμόζεται στην ολοκληρωτική εξίσωση του ηλεκτρικού/μαγνητικού πεδίου κατόπιν εφαρμογής των εκάστοτε οριακών συνθηκών (ή στην εξίσωση μικτών δυναμικών αντίστοιχα εάν χρησιμοποιούνται τα δυναμικά αντί των πεδίων) για τον αριθμητικό υπολογισμό των άγνωστων μεγεθών. Η συγκεκριμένη τεχνική βασίζεται στην μετατροπή των εξισώσεων του προβλήματος σε ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων σε μορφή πίνακα. Κατά την συμπλήρωση του πίνακα για προβλήματα σκέδασης, προκύπτουν ολοκληρώματα της μορφής Sommerfeld για τον

υπολογισμό των συναρτήσεων Green. Τα άγνωστα ηλεκτρομαγνητικά μεγέθη εκφράζονται αρχικά μέσω κατάλληλων συναρτήσεων βάσης. Συγκεκριμένα, διαμερίζοντας κατάλληλα τον σκεδαστή (π.χ. χρησιμοποιώντας κυβικά ή σφαιρικά κελιά), οι άγνωστες ρευματικές κατανομές προσεγγίζονται από γραμμικούς συνδυασμούς επιλεγμένων συναρτήσεων βάσης. Με αυτήν την διαδικασία, η ολοκληρωτική εξίσωση μετατρέπεται σε ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων. Οι άγνωστοι συντελεστές των συναρτήσεων βάσης υπολογίζονται επιβάλλοντας τις οριακές συνθήκες και αξιοποιώντας κατάλληλες συναρτήσεις δοκιμής. Σημειώνεται, ότι στην Μέθοδο των Ροπών ικανοποιείται αυτόματα η συνθήκη ακτινοβολίας, ενώ οι υπολογισμοί περιορίζονται στον όγκο του σκεδαστή, σε αντίθεση με τις κυριότερες μεθόδους πεπερασμένων διαφορών.

1.8 Βιβλιογραφία παρόντος κεφαλαίου

- [1.1] Κεραίες Ασύρματες Ζεύξεις, Χ. Καψάλης, Π. Κωττής, Εκδ. Τζιόλα, 2005
- [1.2] Διάδοση Ηλεκτρομαγνητικών Κυμάτων σε γήινο περιβάλλον, Ι.Δ Κανελλόπουλος, Εκδ. Τζιόλα, 2003
- [1.3] Chrysostomou A. , I. Zorbas, E. Papkelis, P. Frangos, ‘Radio Coverage Simulation for Three - Dimensional Urban Environment using Physical Optics, Physical Theory of Diffraction and the Near-to-Far-Field Transformation Method’ , Days of Diffraction 2010, St. Petersburg, Russia, 8-11/06/2010
- [1.4] Sommerfeld A. ‘Über die Ausbreitung der Wellen in der drahtlosen Telegraphie’ [On the propagation of waves in wireless telegraphy]. Ann. Phys. 1909;28:665–736
- [1.5] Sommerfeld A. ‘Über die Ausbreitung der Wellen in der drahtlosen Telegraphie’ [On the propagation of waves in wireless telegraphy]. Ann. Phys. 1926;81:1135–1153
- [1.6] Sommerfeld A. ‘Drahtlose Telegraphie’ [Wireless telegraphy]. In: Frank P, von Mises R, editors. Die Differential- and Integralgleichungen der Mechanik und Physik, part II [Differential and integral equations of mechanics and physics]. 2nd ed. Chapter 23, NewYork (NY): Rosenberg; 1943. p. 918–977
- [1.7] Sommerfeld A. ‘Partial differential equations in physics’, Academic Press; New York (NY), 1949, p. 236-279, (<https://archive.org/details/in.ernet.dli.2015.469819/page/n251>)

- [1.8] R. K. Moore, W. E. Blair 'Dipole Radiation in a Conducting Half Space', Journal of Research of the National Bureau of Standards – Radio Propagation Vol. 65D, No 6, November-December 1961
- [1.9] Van der Pol, Niessen KF. Über die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen über eine ebene Erde [On the propagation of electromagnetic waves over flat earth]. Ann. Phys., 5 Folge. 1930;6:585–596
- [1.10] Van der Pol B. Theory of the reflection of the light from a point source by a finitely conducting flat mirror, with an application to radiotelegraphy. Physica. 1935; 2:843-853
- [1.11] Wait J.R. Excitation of surface waves on conducting, stratified, dielectric-clad, and corrugated surfaces. J. Res. Nat. Bureau Stand. 1957; 59:365–377
- [1.12] King R.J. Electromagnetic wave propagation over a constant impedance plane. Radio Sci. 1969; 4:225–268
- [1.13] K. A. Norton, 'Propagation of radio waves over a plane earth', Nature 135, pp. 954 – 955, 1935
- [1.14] K. A. Norton, 'The Propagation of Radio Waves Over the Surface of the Earth', Proceedings of the IRE, 24, pp. 1367 – 1387, 1936
- [1.15] K. A. Norton, 'The physical reality of space and surface waves on the radiation field of radio antennas', Proceedings of the IRE, 25, pp. 1192 – 1202, 1937
- [1.16] K. A. Norton, 'The Propagation of Radio Waves Over the Surface of the Earth', Proceedings of the IRE, 25, pp. 1203 – 1236, 1937
- [1.17] K. A. Norton, 'Space and surface waves in radio propagation', Phys. Rev. 52, pp. 132 – 133, 1937
- [1.18] K. A. Norton, Corrections to 'The physical reality of space and surface waves on the radiation field of radio antennas and the propagation of radio waves', Proceedings of the IRE, 25, pp. 1366, 1937
- [1.19] K. A. Norton, 'The calculations of ground-wave field intensity over a finitely conducting spherical earth', Proceedings of the IRE, 29, pp. 623 – 639, 1941
- [1.20] Banos, A., & Wesley, J. P. 'The Horizontal Electric Dipole in a Conducting Half-Space' UC San Diego: Scripps Institution of Oceanography, 1953, <https://escholarship.org/uc/item/5d5419sv>

- [1.21] Banos, A., & Wesley, J. P. 'The Horizontal Electric Dipole in a Conducting Half-Space II' UC San Diego: Scripps Institution of Oceanography, 1954, <https://escholarship.org/uc/item/2rg5b301>
- [1.22] J. Zenneck, 'Propagation of Plane EM Waves along a Plane Conducting Surface', Ann. Phys. (Leipzig), 23, pp. 846-866, 1907
- [1.23] A.Jr. Banos, 'Dipole Radiation in the Presence of a Conducting Half-Space', Pergamon, New York, 1966
- [1.24] G. Tyras, 'Radiation and Propagation of Electromagnetic Waves', Academic Press, 1969
- [1.25] Y. Rahmat-Samii, P. Parhami and R. Mittra, 'Transient response of a loaded horizontal antenna over lossy ground with application to EMP simulators', Electromagnetics Lab. Univ., Illinois, Urbana-Champaign, Tech. Rep. 77-26, Dec. 1977.
- [1.26] Y. Rahmat-Samii and R. Mittra, 'Spectral analysis of high frequency diffraction of an arbitrary incident field by a half-plane-Comparison with four asymptotic techniques', Rad. Sci., vol. 13. Pp.31-48, Jan./ Feb. 1978
- [1.27] Y. Rahmat-Samii, P. Parhami and R. Mittra, 'Loaded horizontal antenna over an imperfect ground', IEEE Transactions in Antennas and Propagation, Vol. AP-26, pp. 789– 796, Nov 1978.
- [1.28] P. Parhami, Y. Rahmat-Samii, R. Mittra, 'An Efficient Approach for Evaluating Sommerfeld Integrals Encountered in the Problem of a Current Element Radiating over Lossy Ground', IEEE Transactions in Antennas and Propagation, Vol. Ap-28, No. 1, pp. 100 – 104, January 1980.
- [1.29] Y. Rahmat-Samii, R. Mittra, and P. Parhami, 'Evaluation of Sommerfeld integrals for lossy half-space problems', Electromagn., vol. 1, pp. 1-28, 1981.
- [1.30] R. J. King, 'EM Wave Propagation over a Constant Impedance Plane', Radio Science, Vol. 4, pp. 225-268, 1969
- [1.31] R. King, 'New formulas for the electromagnetic field of a vertical electric dipole in a dielectric or conducting half-space near its horizontal interface', J.Appl. Phys., 53, 8476-8482, 1982. (Erratum, J.Appl. Phys., 56, 3366, 1984)
- [1.32] T.T. Wu and R.W.P. King, 'Lateral electromagnetic pulses generated by a vertical dipole on the boundary between two dielectrics', J. Appl. Phys., 62, 4345-4355, 1987.
- [1.33] R. King, 'Lateral electromagnetic pulses generated by a vertical dipole on a plane boundary between dielectrics', J. Electromagn. Waves Appl., 2, 225-243, 1988

- [1.34] R. King, 'Lateral electromagnetic pulses generated on a plane boundary between dielectrics by vertical and horizontal dipole sources with Gaussian pulse excitation', *J. Electromagn. Waves Appl.*, 3, 589-597, 1989.
- [1.35] R. King, 'Electromagnetic field of a vertical dipole over an imperfectly conducting half space', *Radio Science*, Vol. 25, No. 2, pp. 149 – 160, March - April 1990.
- [1.36] W. C. Chew, S. Y. Chen, 'Response of a Point Source Embedded in a Layered Medium', 2003
- [1.37] W. C. Chew, 'Waves and Fields in Inhomogenous Media' IEEE PRESS Series on Electromagnetic Waves, 1995
- [1.38] K. A. Michalski, 'On the efficient evaluation of the integrals arising in the Sommerfeld half-space problem', *Inst. Elect. Eng. Proc. Part H-Microwave, Antennas Propagat.*, vol. 132, No 5, pp. 312-318, August 1985.
- [1.39] K. A. Michalski, 'Extrapolation Methods for Sommerfeld Integral Tails', *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 46, No. 10, pp. 1405-1417, October 1998
- [1.40] K. A. Michalski & Juan R. Mosig, 'Efficient computation of Sommerfeld integral tails – methods and algorithms', *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, 30:3, 281-317, 2016, <https://doi.org/10.1080/09205071.2015.1129915>
- [1.41] K. A. Michalski & Juan R. Mosig, 'Multilayered Media Green's Functions in Integral Equation Formulations', *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 45, No. 3, March 1997
- [1.42] K.A. Michalski & J.R. Mosig (2016) The Sommerfeld half-space problem revisited: from radio frequencies and Zenneck waves to visible light and Fano modes, *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, 30:1, 1-42, DOI: 10.1080/09205071.2015.1093964
- [1.43] T. K. Sarkar and B.J. Strait, 'Analysis of arbitrary oriented thin wire antenna arrays over imperfect ground planes', *Syracuse Univ., Syracuse, NY, Sci. Rep. 9 on Contract F19628-73-C-0047, AFCRL-TR-75-0641*, Dec. 1975
- [1.44] M. Yuan, T. K. Sarkar, M. Salazar-Palma, A Direct Discrete Complex Image Method From the Closed-Form Green's Functions in Multilayered Media, *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 54 No 3, March 2006
- [1.45] A. De, T. K. Sarkar and Magdalena Salazar-Palma, 'Characterization of the Far-Field Environment of Antennas Located Over a Ground Plane and Implications for Cellular Communication Systems', *IEEE Transactions in Antennas and Propagation*, Vol. 52, No. 6, pp. 19 – 40, Dec 2010

- [1.46] T. K. Sarkar et. al., ‘Electromagnetic Macro Modeling of Propagation in Mobile Wireless Communication: Theory and Experiment’, IEEE Antennas and Propagation Magazine, Vol. 54, No. 6, pp. 17 – 43, Dec. 2012
- [1.47] T. K. Sarkar, W. M. Dyab, M. N. Abdallah, M. Salazar-Palma, M. V. S. N. Prasad, and S-W. Ting, ‘Application of the Schelkunoff Formulation to the Sommerfeld Problem of a Vertical Electric Dipole Radiating Over an Imperfect Ground’, IEEE Antennas and Propagation Magazine, Vol. 62, No. 8, pp. 4162 – 4170, Aug. 2014
- [1.48] Golubovic R, Polimeridis AG, Mosig JR. ‘Efficient algorithms for computing Sommerfeld integral tails’, IEEE Trans. Antennas Propagat. 2012; 60:2409–2417
- [1.49] Z. H. Firouzeh and G. A. E. Vandenbosch, R. Moini and S. H. H. Sadeghi, R. Faraji-Dana, Efficient evaluation of Green’s functions for lossy half-space problems, Progress In Electromagnetics Research, Vol. 109, 139–157, 2010
- [1.50] J. R. Wait, ‘The Ancient and Modern History of EM Ground Wave Propagation’, IEEE Antennas and Propagation Magazine, Vol. 40, No. 5, pp. 7-24, October 1998.
- [1.51] Steven H Schot, ‘Eighty years of Sommerfeld’s radiation condition’, Historia Mathematica, Volume 19, Issue 4, 1992, Pages 385-401, ISSN 0315-0860, [https://doi.org/10.1016/0315-0860\(92\)90004-U](https://doi.org/10.1016/0315-0860(92)90004-U)
- [1.52] M. Yuan, T. K. Sarkar, ‘Computation of the Sommerfeld Integral Tails Using the Matrix Pencil Method’, IEEE Transactions in Antennas and Propagation, Vol. 54, No. 4, April 2006
- [1.53] R. Golubovic, A. Polimeridis, J. Mosig, ‘Fast Computation of Sommerfeld Integral Tails via Direct Integration Based on Double Exponential-Type Quadrature Formulas’, IEEE Transactions in Antennas and Propagation, Vol. 59, No. 2, February 2011
- [1.54] Mosig, Weighted Averages and Double-exponential algorithms, IEICE Trans. Commun., vol. E96-B, No.10, October 2013

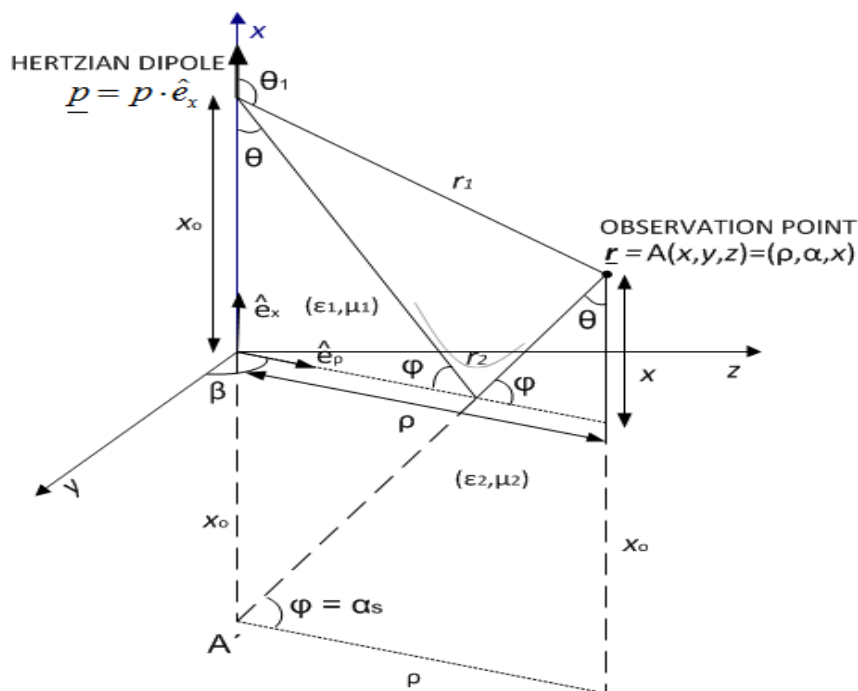
2 Ανάλυση του προβλήματος στο φασματικό χώρο και αριθμητικά αποτελέσματα με βάση την μέθοδο αριθμητικής ολοκλήρωσης

2.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται αρχικά παρουσίαση των εκφράσεων του λαμβανόμενου ηλεκτρομαγνητικού πεδίου για το πρόβλημα του Sommerfeld (εκπομπή δίπολου Hertz πάνω από επίπεδο έδαφος με απώλειες) στο φασματικό πεδίο. Στόχος του κεφαλαίου αυτού είναι η εκτέλεση προσομοιώσεων για τη σύγκριση της μεθόδου στάσιμης φάσης με την αριθμητική ολοκλήρωση και την εξαγωγή συμπερασμάτων για την καταλληλότητα των μεθόδων αυτών για τον υπολογισμό των ολοκληρωτικών σχέσεων του πεδίου.

2.2 Γεωμετρία του προβλήματος

Η γεωμετρία του προβλήματος φαίνεται στην παρακάτω εικόνα. Θεωρούμε σημειακό δίπολο Hertz με διπολική ροπή \underline{p} η οποία έχει κατεύθυνση στο θετικό άξονα x . Αυτό βρίσκεται σε ύψος x_0 πάνω από άπειρο, επίπεδο έδαφος με απώλειες και ακτινοβολεί χρονικά μεταβαλλόμενα ηλεκτρομαγνητικά κύματα με γωνιακή συχνότητα $\omega = 2\pi f$. Επιπλέον θεωρούμε χρονική εξάρτηση $e^{-i\omega t}$.



Εικόνα 2-1 Γεωμετρία του προβλήματος ακτινοβολίας.

Το δίπολο ακτινοβολεί από τη θέση $(x_0, 0, 0)$ πάνω από το άπειρο, επίπεδο έδαφος με απώλειες

Οι βασικές παράμετροι που θα χρησιμοποιηθούν για την επίλυση του προβλήματος είναι οι εξής:

- η σχετική διηλεκτρική σταθερά του εδάφους (μέσο 2): $\epsilon'_r = \epsilon'/\epsilon_0 = \epsilon_r + i\sigma/\omega\epsilon_0$
- η διηλεκτρική σταθερά του κενού ή του αέρα: $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} F/m$,
- $x = \frac{\sigma}{\omega\epsilon_0} = \frac{18 \cdot 10^9 \cdot \sigma}{f}$ (όπου σ η αγωγιμότητα εδάφους και f η συχνότητα ακτινοβολίας)
- ο κυματάρθρωτος της διάδοσης των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στον αέρα (μέσο 1): $k_{01} = \frac{\omega}{c_1} = \omega\sqrt{\epsilon_1\mu_1} = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0\epsilon_{r1}\mu_{r1}} = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0} = k_0$
- ο κυματάρθρωτος της διάδοσης των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στο έδαφος (μέσο 2): $k_{02} = \omega/c_2 = \omega\sqrt{\epsilon_2\mu_2} = \omega\sqrt{\epsilon_{r2}\mu_{r2}\epsilon_0\mu_0} = k_{01}\sqrt{\epsilon_r - ix}$

Το συνολικό ηλεκτρομαγνητικό πεδίο στις περιοχές πάνω ($x>0$) και κάτω ($x<0$) από το επίπεδο του εδάφους, δίνεται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\underline{H}(r) = \begin{cases} \underline{H}^{LOS}(r) + \underline{H}^R(r), & x > 0 \\ \underline{H}^T(r), & x < 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\underline{E}(r) = \begin{cases} \underline{E}^{LOS}(r) + \underline{E}^R(r), & x > 0 \\ \underline{E}^T(r), & x < 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

όπου τα \underline{H}^{LOS} , \underline{E}^{LOS} αφορούν στο απευθείας, τα \underline{H}^R , \underline{E}^R στο ανακλώμενο, και τα \underline{H}^T , \underline{E}^T , στο διαδιδόμενο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο.

Οι παρακάτω σχέσεις παρουσιάζουν τις οριακές συνθήκες για τις εφαπτομενικές συνιστώσες των πεδίων στην επιφάνεια του εδάφους ($x=0$):

$$H_\alpha^{LOS} + H_\alpha^R = H_\alpha^T \quad (2.3)$$

$$E_\rho^{LOS} + E_\rho^R = E_\rho^T \quad (2.4)$$

2.3 Ολοκληρωτικές εκφράσεις λαμβανόμενου ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου συναρτήσει πυκνοτήτων ρεύματος στο φασματικό χώρο

2.3.1 Μεθοδολογία

Η μεθοδολογία για την εξαγωγή των εκφράσεων του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου που θα ακολουθηθεί είναι η εξής:

- Ξεκινώντας από την έκφραση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου που προκύπτει από την μέθοδο των γενικευμένων λύσεων, και εφαρμόζοντας τις σχέσης μετατροπής των

συναρτήσεων Bessel σε Hankel, καταλήγουμε σε μία αρχική έκφραση του προβλήματος στη φασματική περιοχή.

- Στις εξισώσεις που προκύπτουν, θα εφαρμόσουμε την θεωρία ολοκληρωτικών υπολοίπων για την εξαγωγή των εκφράσεων του ανακλώμενου και διαδιδόμενου πεδίου.
- Στην συνέχεια, θα εφαρμόσουμε τις οριακές συνθήκες του προβλήματος, προκειμένου να εξάγουμε την έκφραση υπολογισμού των πυκνοτήτων ρεύματος.
- Τέλος, θα αντικαταστήσουμε τις εκφράσεις των πυκνοτήτων ρεύματος στις αντίστοιχες εκφράσεις του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου προκειμένου να καταλήξουμε στην τελική μορφή τους για την εκτέλεση των προσομοιώσεων υπολογισμού με την αριθμητική ολοκλήρωση.

Σύμφωνα με τη μέθοδο των γενικευμένων λύσεων το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο στο χώρο μπορεί να εκφραστεί στη φασματική περιοχή, μέσω του αντίστροφου τρισδιάστατου (3D) μετασχηματισμού Fourier, όπως φαίνεται στις ακόλουθες εκφράσεις για το μαγνητικό και το ηλεκτρικό πεδίο [2.1] :

$$\underline{H} = -i F^{-1} [\tilde{\psi} \cdot (\underline{k} \times \underline{\tilde{J}})] \quad (2.5)$$

$$\underline{E} = -\frac{i}{\omega \epsilon_r \epsilon_0} F^{-1} \left\{ \tilde{\psi} \left[\epsilon_r \mu_r k_0^2 \underline{\tilde{J}} - \langle \underline{k}, \underline{\tilde{J}} \rangle \underline{k} \right] \right\} \quad (2.6)$$

όπου το σύμβολο $\langle \rangle$ δείχνει το εσωτερικό γινόμενο, F^{-1} είναι ο αντίστροφος τρισδιάστατος μετασχηματισμός Fourier, $\tilde{\psi}$ είναι η τρισδιάστατη συνάρτηση Green στη φασματική περιοχή, \mathcal{J} η πυκνότητα ρεύματος στη φασματική περιοχή. Σε κυλινδρικές συντεταγμένες, η συνάρτηση Green δίνεται από:

$$\tilde{\psi} = F[\psi] = \frac{1}{k_{01}^2 - k^2} \xrightarrow{k^2 = k_\rho^2 + k_x^2} \tilde{\Psi} = \frac{1}{k_{01}^2 - k_\rho^2 - k_x^2} \quad (2.7)$$

Για το πρόβλημα που εξετάζουμε, η πυκνότητα ρεύματος έχει μόνο το ρ-συνιστώσα, ενώ το κυματοδιάνυσμα δεν περιέχει την αξιμουθιακή συνιστώσα α ($\underline{\tilde{J}} = [\tilde{J}(k_\rho), 0, 0]$, $k = (k_\rho, k_\alpha = 0, k_x)$). Επιλύοντας το εξωτερικό γινόμενο και εφαρμόζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier των (2.5), (2.6), προκύπτουν οι εξής εκφράσεις για το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο:

$$\underline{H}(\underline{r}) = -\frac{i}{(2\pi)^3} \hat{e}_a \int_{k_\rho=0}^{\infty} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{k_x=-\infty}^{\infty} k_x \tilde{J}(k_\rho) \tilde{\psi} k_\rho \cdot \exp(i \underline{k} \cdot \underline{r}) \cdot dk_\rho d\alpha dk_x \quad (2.8)$$

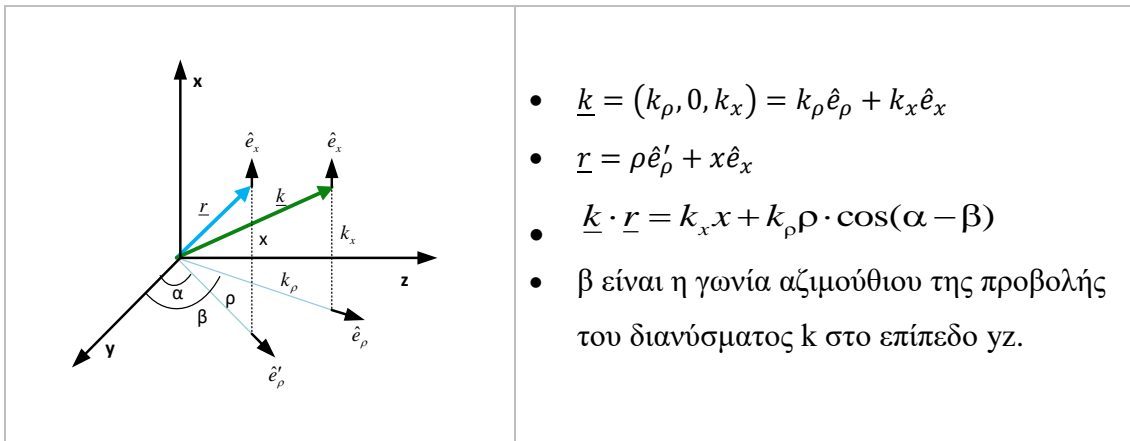
$$\underline{E}(\underline{r}) = -\frac{i}{(2\pi)^3 \epsilon_r \epsilon_0 \omega} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\epsilon_r \mu_r k_0^2 \hat{e}_\rho - k_\rho \underline{k}) \cdot \tilde{J}(k_\rho) \tilde{\psi} k_\rho \cdot \exp(i \underline{k} \cdot \underline{r}) dk_\rho d\alpha dk_x \quad (2.9)$$

Με αντικατάσταση του κυματοδιανύσματος $\underline{k} = (k_\rho, 0, k_x) = k_\rho \hat{e}_\rho + k_x \hat{e}_x$, στην εξίσωση (2.9), το λαμβανόμενο ηλεκτρικό πεδίο δίνεται ως:

$$\underline{E}(\underline{r}) = -\frac{i}{(2\pi)^3 \epsilon_r \epsilon_0 \omega} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\epsilon_r \mu_r k_0^2 - k_\rho^2) \hat{e}_\rho - k_\rho k_x \hat{e}_x \cdot \tilde{J}(k_\rho) \tilde{\psi} k_\rho \exp(i \underline{k} \cdot \underline{r}) dk_\rho d\alpha dk_x \quad (2.10)$$

Για να επιτευχθεί η ολοκλήρωση των εκφράσεων (2.8) και (2.10) ως προς την αζιμουθιακή γωνία α , χρησιμοποιούμε το ακόλουθο γινόμενο διανυσμάτων:

$$\underline{k} \cdot \underline{r} = k_x x + k_\rho \rho \cdot \cos(\alpha - \beta)$$



Εικόνα 2-2 Διανύσματα \underline{k} και \underline{r} σε κυλινδρικές συντεταγμένες

Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε τις ακόλουθες ταυτότητες για τις συναρτήσεις Bessel:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(ik_\rho \rho \cos \alpha) d\alpha = J_0(k_\rho \rho) \quad (2.11)$$

$$\int_0^\infty J_0(k_\rho \rho) dk_\rho = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty H_0^{(1)}(k_\rho \rho) dk_\rho \quad (2.12)$$

όπου J_0 είναι η συνάρτηση Bessel πρώτου είδους και μηδενικής τάξης, και $H_0^{(1)}$ η συνάρτηση Hankel πρώτου είδους και μηδενικής τάξης.

Από τις εξισώσεις αυτές προκύπτει:

$$\int_{a=0}^{2\pi} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) da = \int_{a=0}^{2\pi} \exp\left(i(k_x x + k_\rho \rho \cos(a - \beta))\right) da = \quad (2.13)$$

$$= \exp(ik_x x) \cdot \int_{a=0}^{2\pi} \exp(ik_\rho \rho \cos(a - \beta)) da = \exp(ik_x x) \cdot 2\pi J_0(k_\rho \rho)$$

και:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(ik_x x) \cdot 2\pi J_0(k_\rho \rho) dk_\rho = \pi \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ik_x x) H_0^{(1)}(k_\rho \rho) dk_\rho \quad (2.14)$$

Συνεπώς, απαλείφεται η αζιμουθιακή συνιστώσα a και εξάγονται οι κάτωθι εκφράσεις για το μαγνητικό και το ηλεκτρικό πεδίο αντίστοιχα, οι οποίες περιλαμβάνουν διπλή ολοκλήρωση ως προς k_ρ και ως προς k_x :

$$\underline{H}(\mathbf{r}) = -\frac{i}{8\pi^2} \hat{e}_a \int_{k_\rho=-\infty}^{\infty} \int_{k_x=-\infty}^{\infty} k_x \tilde{J}(k_\rho) \tilde{\psi} k_\rho \cdot H_0^{(1)}(k_\rho \rho) \exp(ik_x x) dk_\rho dk_x \quad (2.15)$$

$$\underline{E}(\mathbf{r}) = -\frac{i}{8\pi^2 \omega \varepsilon_r \varepsilon_0} \int_{k_\rho=-\infty}^{\infty} \int_{k_x=-\infty}^{\infty} ((\varepsilon_r \mu_r k_0^2 - k_\rho^2) \hat{e}_\rho - k_\rho k_x \hat{e}_x) \cdot \tilde{J}(k_\rho) \tilde{\psi} k_\rho H_0^{(1)}(k_\rho \rho) \exp(ik_x x) dk_\rho dk_x \quad (2.16)$$

Εν συνεχεία από τις παραπάνω εξισώσεις εξάγουμε τις ακόλουθες εκφράσεις για το ανακλώμενο (Δείκτης «R» - Reflected) και το διαδιδόμενο (Δείκτης «T» - Transmitted) ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο:

$$\underline{H}^R(\mathbf{r}) = -\frac{i}{8\pi^2} \hat{e}_a \int_{k_\rho=-\infty}^{\infty} \int_{k_x=-\infty}^{\infty} k_x \tilde{J}_R(k_\rho) \tilde{\psi}_1 k_\rho H_0^{(1)}(k_\rho \rho) \exp(ik_x x) dk_\rho dk_x \quad (2.17)$$

$$\underline{E}^R(\mathbf{r}) = -\frac{i}{8\pi^2 \omega \varepsilon_{r1} \varepsilon_0} \int_{k_\rho=-\infty}^{\infty} \int_{k_x=-\infty}^{\infty} ((\varepsilon_{r1} \mu_{r1} k_{01}^2 - k_\rho^2) \hat{e}_\rho - k_\rho k_x \hat{e}_x) \tilde{J}_R(k_\rho) \tilde{\psi}_1 k_\rho \cdot H_0^{(1)}(k_\rho \rho) \exp(ik_x x) dk_\rho dk_x \quad (2.18)$$

$$\underline{H}^T(\mathbf{r}) = -\frac{i}{8\pi^2} \hat{e}_a \int_{k_\rho=-\infty}^{\infty} \int_{k_x=-\infty}^{\infty} k_x \tilde{J}_T(k_\rho) \tilde{\psi}_2 k_\rho \cdot H_0^{(1)}(k_\rho \rho) \exp(ik_x x) dk_\rho dk_x \quad (2.19)$$

$$\underline{E}^T(\mathbf{r}) = -\frac{i}{8\pi^2 \omega \varepsilon_{r2} \varepsilon_0} \int_{k_\rho=-\infty}^{\infty} \int_{k_x=-\infty}^{\infty} ((\varepsilon_{r2} \mu_{r2} k_{02}^2 - k_\rho^2) \hat{e}_\rho - k_\rho k_x \hat{e}_x) \tilde{J}_T(k_\rho) \tilde{\psi}_2 k_\rho \cdot H_0^{(1)}(k_\rho \rho) \exp(ik_x x) dk_\rho dk_x \quad (2.20)$$

όπου τα k_{01} και k_{02} δίνονται από τις εξισώσεις (2.7) και (2.8), $\tilde{J}_R = [\tilde{J}_R(k_\rho), 0, 0] = \tilde{J}_R(k_\rho) \hat{e}_\rho$, $\tilde{J}_T = [\tilde{J}_T(k_\rho), 0, 0] = \tilde{J}_T(k_\rho) \hat{e}_\rho$ είναι οι κατά Fourier συνιστώσες της πυκνότητας του ρεύματος στην επιφάνεια του εδάφους και οι συναρτήσεις Green στο φασματικό χώρο από τις:

$$\tilde{\psi}_1 = \frac{1}{k_{01}^2 - k_\rho^2 - k_x^2}, \quad \tilde{\psi}_2 = \frac{1}{k_{02}^2 - k_\rho^2 - k_x^2} \quad (2.21)$$

Το $(\epsilon_{r1}\mu_{r1}k_{01}^2 - k_\rho^2)\hat{e}_\rho - k_\rho k_x \hat{e}_x$ μπορεί να χαρακτηριστεί και ως διάνυσμα πόλωσης.

2.3.2 Απευθείας ηλεκτρομαγνητικό πεδίο διπόλου Hertz

Τα απευθείας ηλεκτρομαγνητικά πεδία του δίπολου Hertz στη μακρινή περιοχή είναι [2.2]:

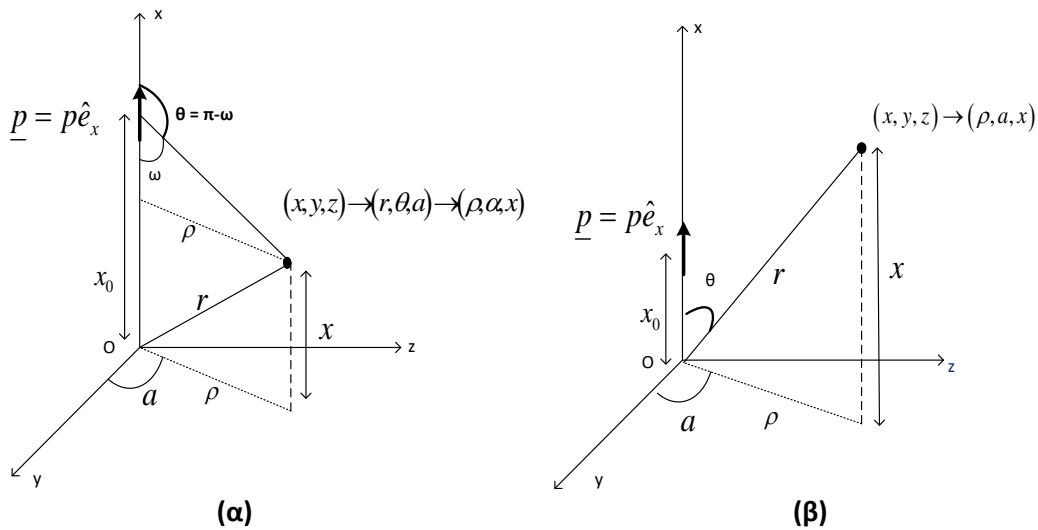
$$E_\theta^{LOS}(r, \theta) = \frac{i\omega\mu_0 I(2h)}{4\pi r} \exp(-ikr) \sin \theta = ZH_\phi \quad (2.22)$$

$$H_\phi^{LOS}(r, \theta) = \frac{ikI(2h)}{4\pi r} \exp(-ikr) \sin \theta \quad (2.23)$$

όπου $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c} = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$, $Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$, και $r = [x^2 + y^2 + (z - z_0)^2]^{\frac{1}{2}}$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $I(2h) = i\omega p$, $k \cdot \omega = \omega^2\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ και και $\varphi = a$ το απευθείας (LOS) μαγνητικό πεδίο του δίπολου Hertz στο μακρινό πεδίο προκύπτει ως εξής:

$$H_\alpha^{LOS}(r, \theta) = \frac{\omega^2 p}{4\pi} \sqrt{\epsilon_0\mu_0} \frac{\exp(ikr)}{r} \sin \theta = \frac{\omega k_{01} p}{4\pi} \frac{\exp(ikr)}{r} \sin \theta = H_\alpha^{LOS}(\rho, x, x_0) \quad (2.24)$$



Εικόνα 2-3 Διάταξη πηγής-δέκτη όταν

- (α) η κεραία της πηγής είναι σε υψηλότερο σημείο από την κεραία του δέκτη ($x_0 > x$),
- (β) η κεραία της πηγής είναι σε χαμηλότερο σημείο από την κεραία του δέκτη ($x_0 < x$)

Από την Εικόνα 2-3 και για $\rho \gg (x_0 + x)$, δηλαδή η απόσταση της πηγής από το σημείο παρατήρησης να είναι πολύ μεγαλύτερη από το άθροισμα του ύψους της από το έδαφος και του ύψους του δέκτη από το έδαφος, εξάγουμε τις κάτωθι εκφράσεις ώστε να μετατρέψουμε τις σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ) , σε κυλινδρικές (ρ, x) :

$$r = [\rho^2 + (x - x_0)^2]^{\frac{1}{2}} = \rho \left[1 + \frac{(x-x_0)^2}{\rho^2} \right]^{\frac{1}{2}} \stackrel{\rho \gg (x-x_0)}{=} \rho \left[1 + \frac{1}{2} \frac{(x-x_0)^2}{\rho^2} \right]$$

$$\Rightarrow r \approx \rho + \frac{(x-x_0)^2}{2\rho}$$
(2.25)

Για $x_0 > x$:

$$\tan \omega = \frac{\rho}{(x_0-x)} \Rightarrow \omega = \tan^{-1} \left[\frac{\rho}{(x_0-x)} \right]$$
(2.26)

$$\theta = \pi - \tan^{-1} \left[\frac{\rho}{(x_0-x)} \right]$$
(2.27)

ενώ για $x_0 < x$:

$$\tan \theta = \frac{\rho}{(x_0-x)} \Rightarrow \theta = \tan^{-1} \left[\frac{\rho}{(x_0-x)} \right]$$
(2.28)

Η σχέση μεταξύ ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου είναι η εξής:

$$E_{\theta}^{LOS} = ZH_{\alpha}^{LOS}(\rho, x, x_0)$$
(2.29)

Επομένως οι συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου μπορούν να γραφούν ως εξής:

$$E_x^{LOS} = -E_{\theta}^{LOS} \sin \theta$$
(2.30)

$$E_{\rho}^{LOS} = E_{\theta}^{LOS} \cos \theta$$
(2.31)

Κατά συνέπεια, για το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο παρατήρησης ισχύει ότι:

$$\underline{E}^{LOS}(r, \theta) = E_{\theta}^{LOS} \hat{e}_{\theta} = E_{\rho}^{LOS} \hat{e}_{\rho} + E_x^{LOS} \hat{e}_x = ZH_{\alpha}^{LOS} \cos \theta \hat{e}_{\rho} - ZH_{\alpha}^{LOS} \sin \theta \hat{e}_x$$
(2.32)

όπου H_{α}^{LOS} δίνεται από τη σχέση (2.24) ανωτέρω.

2.3.3 Εφαρμογή θεωρήματος ολοκληρωτικών υπολοίπων

Το συνολικό ηλεκτρομαγνητικό πεδίο στις περιοχές πάνω ($x > 0$) και κάτω ($x < 0$) από το επίπεδο του εδάφους, δίνεται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\underline{H}(\underline{r}) = \begin{cases} \underline{H}^{LOS}(\underline{r}) + \underline{H}^R(\underline{r}), & x > 0 \\ \underline{H}^T(\underline{r}), & x < 0 \end{cases}$$
(2.33)

$$\underline{E}(\underline{r}) = \begin{cases} \underline{E}^{LOS}(\underline{r}) + \underline{E}^R(\underline{r}), & x > 0 \\ \underline{E}^T(\underline{r}), & x < 0 \end{cases}$$
(2.34)

όπου τα \underline{H}^{LOS} , \underline{E}^{LOS} δίνονται από τις σχέσεις (2.24) και (2.32) αντίστοιχα, τα \underline{H}^R , \underline{E}^R από τις (2.17) και (2.18) και τα \underline{H}^T , \underline{E}^T από τις (2.19) και (2.20).

Η συνάρτηση Green στο φασματικό χώρο είναι:

$$\tilde{\psi} = \frac{1}{\epsilon_r \mu_r k_0^2 - k_{\rho}^2 - k_x^2}$$
(2.35)

Για το επίπεδο πάνω από τη γη ($x > 0$) η συνάρτηση Green μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\tilde{\psi}_1 = \frac{1}{k_{01}^2 - k_\rho^2 - k_x^2} = \frac{1}{\left(\sqrt{k_{01}^2 - k_\rho^2}\right)^2 - k_x^2} = \frac{1}{\left(\left(\sqrt{k_{01}^2 - k_\rho^2}\right) - k_x\right)\left(\left(\sqrt{k_{01}^2 - k_\rho^2}\right) + k_x\right)} \quad (2.36)$$

Για να επιλύσουμε το ολοκλήρωμα της $\underline{H}^R(\underline{r})$ (2.17) ως προς k_x ενεργούμε ως εξής:

$$\int_{k_x=-\infty}^{\infty} k_x \tilde{\psi}_1 \exp(ik_x x) dk_x = \int_{k_x=-\infty}^{\infty} \frac{k_x \exp(ik_x x)}{\left(\left(\sqrt{k_{01}^2 - k_\rho^2}\right) - k_x\right)\left(\left(\sqrt{k_{01}^2 - k_\rho^2}\right) + k_x\right)} dk_x \quad (2.37)$$

Σύμφωνα με το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων, ισχύει:

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=z_0} (f(z)), \text{ όπου } z_0 \text{ είναι ο πόλος της } f(z) \quad (2.38)$$

Στην περίπτωση της συνάρτησης του μαγνητικού πεδίου (2.17) ο πόλος της $f(k_x)$ είναι $k_x = \left(\sqrt{k_{01}^2 - k_\rho^2}\right) = \kappa_1$. Επομένως, αν εφαρμόσουμε το θεώρημα για το ολοκλήρωμα της (2.17) έχουμε:

$$\int_{k_x=-\infty}^{\infty} \frac{k_x \exp(ik_x x)}{\left(\left(\sqrt{k_{01}^2 - k_\rho^2}\right) - k_x\right)\left(\left(\sqrt{k_{01}^2 - k_\rho^2}\right) + k_x\right)} dk_x = 2\pi i \cdot \frac{\kappa_1 \exp(i\kappa_1 x)}{2\sqrt{k_{01}^2 - k_\rho^2}} = \pi i \cdot \exp(i\kappa_1 x) \quad (2.39)$$

Συνεπώς η σχέση (2.17) για το $\underline{H}^R(\underline{r})$ απλοποιείται και περιέχει πια μόνο ένα ολοκλήρωμα ως προς dk_ρ :

$$\underline{H}^R(\underline{r}) = \frac{\hat{e}_a}{8\pi} \int_{k_\rho=-\infty}^{\infty} \tilde{J}_R(k_\rho) k_\rho H_0^{(1)}(k_\rho \rho) \exp(i\kappa_1 x) dk_\rho \quad (2.40)$$

όπου

$$\kappa_1 = \sqrt{k_{01}^2 - k_\rho^2} \quad (2.41)$$

Στην συνάρτησης (2.18) του ηλεκτρικού πεδίου $\underline{E}^R(\underline{r})$, ο πόλος της $f(k_x)$ είναι ο ίδιος με του μαγνητικού πεδίου, αφού προέρχεται από τη συνάρτηση Green στο φασματικό χώρο. Εφαρμόζοντας το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων για το ολοκλήρωμα ως προς dk_x έχουμε:

$$\begin{aligned} & \int_{k_x=-\infty}^{\infty} \left((\varepsilon_{r1} \mu_{r1} k_{01}^2 - k_\rho^2) \hat{e}_\rho - k_\rho k_x \hat{e}_x dk_x \right) \tilde{\psi}_1 \exp(ik_x x) dk_x = \\ & = 2\pi i \cdot \frac{\kappa_1^2 \exp(i\kappa_1 x)}{2\sqrt{k_{01}^2 - k_\rho^2}} \hat{e}_\rho - 2\pi i \cdot \frac{k_\rho \kappa_1 \exp(i\kappa_1 x)}{2\sqrt{k_{01}^2 - k_\rho^2}} \hat{e}_x \end{aligned}$$

και επομένως:

$$\oint_C f(k_x) dk_x = 2\pi i \operatorname{Res}_{k_x=\kappa_1} (f(k_x)) = \kappa_1 \pi i \cdot \exp(i\kappa_1 x) \hat{e}_\rho - k_\rho \pi i \cdot \exp(i\kappa_1 x) \hat{e}_x \quad (2.42)$$

Η σχέση για το $\underline{E}^R(\underline{r})$ απλοποιείται και περιέχει πια μόνο ένα ολοκλήρωμα ως προς dk_ρ :

$$\underline{E}^R(\underline{r}) = \frac{1}{8\pi\omega\varepsilon_{r1}\varepsilon_0} \left(\hat{e}_\rho \int_{-\infty}^{\infty} \kappa_1 k_\rho \tilde{J}_R(k_\rho) \cdot H_0^{(1)}(k_\rho \rho) e^{i\kappa_1 x} dk_\rho - \hat{e}_x \int_{-\infty}^{\infty} k_\rho^2 \tilde{J}_R(k_\rho) H_0^{(1)}(k_\rho \rho) e^{i\kappa_1 x} dk_\rho \right) \quad (2.43)$$

Κατά συνέπεια στο επίπεδο υπεράνω της γης ($x>0$) το συνολικό μαγνητικό και το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο αντίστοιχα είναι:

$$\underline{H}(\underline{r}) = \underline{H}^{LOS}(\underline{r}) + \frac{\hat{e}_\alpha}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k_\rho \tilde{J}_R(k_\rho) H_0^{(1)}(k_\rho \rho) e^{i\kappa_1 x} dk_\rho \quad (2.44)$$

$$\underline{E}(\underline{r}) = \underline{E}^{LOS}(\underline{r}) + \frac{1}{8\pi\omega\varepsilon_{r1}\varepsilon_0} \hat{e}_\rho \int_{-\infty}^{\infty} \kappa_1 k_\rho \tilde{J}_R(k_\rho) \cdot H_0^{(1)}(k_\rho \rho) e^{i\kappa_1 x} dk_\rho - \frac{1}{8\pi\omega\varepsilon_{r1}\varepsilon_0} \hat{e}_x \int_{-\infty}^{\infty} k_\rho^2 \tilde{J}_R(k_\rho) \cdot H_0^{(1)}(k_\rho \rho) e^{i\kappa_1 x} dk_\rho \quad (2.45)$$

Με την ίδια διαδικασία κάτω από το επίπεδο της γης ($x<0$) προκύπτουν οι κάτωθι σχέσεις για το μαγνητικό και ηλεκτρικό πεδίο αντίστοιχα:

$$\underline{H}^T(\underline{r}) = -\frac{\hat{e}_a}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k_\rho \tilde{J}_T(k_\rho) H_0^{(1)}(k_\rho \rho) e^{-i\kappa_2 x} dk_\rho \quad (2.46)$$

$$\underline{E}^T(\underline{r}) = \frac{1}{8\pi\omega\varepsilon_{r2}\varepsilon_0} \hat{e}_\rho \int_{-\infty}^{\infty} \kappa_2 k_\rho \tilde{J}_T(k_\rho) \cdot H_0^{(1)}(k_\rho \rho) e^{-i\kappa_2 x} dk_\rho - \frac{1}{8\pi\omega\varepsilon_{r2}\varepsilon_0} \hat{e}_x \int_{-\infty}^{\infty} k_\rho^2 \tilde{J}_T(k_\rho) \cdot H_0^{(1)}(k_\rho \rho) e^{-i\kappa_2 x} dk_\rho \quad (2.47)$$

$$\text{όπου } \kappa_1 = \sqrt{k_{01}^2 - k_\rho^2}, \kappa_2 = \sqrt{k_{02}^2 - k_\rho^2}$$

2.3.4 Χρήση των οριακών συνθηκών για υπολογισμό των πυκνοτήτων ρεύματος στην επιφάνεια του εδάφους

Στις ανωτέρω σχέσεις των οριακών συνθηκών εφαρμόζουμε τις εκφράσεις για το απευθείας κύμα, το ανακλώμενο και το διαθλώμενο κύμα, οι οποίες προκύπτουν από για $x=0$. Από την αντικατάσταση των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων (2.44), (2.45), (2.46) και (2.47) για $x=0$, στις εξισώσεις των οριακών συνθηκών προκύπτουν οι ακόλουθες εκφράσεις :

$$\begin{aligned} H_\alpha^{LOS} + H_\alpha^R &= H_\alpha^T \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{i\omega p k_\rho e^{i\kappa_1 x_0}}{\kappa_1} + \tilde{J}_R(k_\rho) \right) H_0^{(1)}(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho &= \\ -\frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{J}_T(k_\rho) H_0^{(1)}(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho & \end{aligned} \quad (2.48)$$

και

$$E_\rho^{LOS} + E_\rho^R = E_\rho^T \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8\pi\varepsilon_{r1}\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \left(-i\omega\rho k_{\rho} e^{i\kappa_1 x_0} + \mathcal{Y}'_1(k_{\rho})\kappa_1 \right) \cdot H_0^{(1)}(k_{\rho}\rho) k_{\rho} dk_{\rho} = \\ & = \frac{1}{8\pi\varepsilon_{r2}\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{Y}'_2(k_{\rho})\kappa_2 H_0^{(1)}(k_{\rho}\rho) k_{\rho} dk_{\rho} \end{aligned} \quad (2.49)$$

Από τις εξισώσεις (2.48) και (2.49) λαμβάνουμε το ακόλουθο σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων:

$$\begin{cases} \frac{i\omega\rho k_{\rho} e^{i\kappa_1 x_0}}{\kappa_1} + \tilde{J}_R(k_{\rho}) = -\tilde{J}_T(k_{\rho}) \\ -i\omega\rho k_{\rho} e^{i\kappa_1 x_0} + \tilde{J}_R(k_{\rho})\kappa_1 = \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} \tilde{J}_T(k_{\rho})\kappa_2 \end{cases} \quad (2.50)$$

Τέλος, από την επίλυση του συστήματος εξισώσεων εξάγουμε τις παρακάτω εκφράσεις για τις πυκνότητες ρεύματος $\tilde{J}_R(k_{\rho})$ και $\tilde{J}_T(k_{\rho})$:

$$\tilde{J}_R(k_{\rho}) = i\omega\rho k_{\rho} e^{i\kappa_1 x_0} \frac{\varepsilon_{r2}\kappa_1 - \varepsilon_{r1}\kappa_2}{\kappa_1(\varepsilon_{r2}\kappa_1 + \varepsilon_{r1}\kappa_2)} \quad (2.51)$$

$$\tilde{J}_T(k_{\rho}) = -i\omega\rho k_{\rho} e^{i\kappa_1 x_0} \frac{2\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r2}\kappa_1 + \varepsilon_{r1}\kappa_2} \quad (2.52)$$

2.3.5 Ανακλώμενο και μεταδιδόμενο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο σε μορφή απλού ολοκληρώματος

Με αντικατάσταση των εκφράσεων των πυκνοτήτων ρεύματος (2.51) και (2.52) στις εξισώσεις (2.44) και (2.45), για τον χώρο υπεράνω της γης ($x>0$), προκύπτει το μαγνητικό και ηλεκτρικό κύμα χώρου αντίστοιχα, ως ακολούθως:

$$\underline{H}(\underline{r}) = \underline{H}^{LOS} + \frac{i\omega\rho\hat{e}_a}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon_{r2}\kappa_1 - \varepsilon_{r1}\kappa_2}{\kappa_1(\varepsilon_{r2}\kappa_1 + \varepsilon_{r1}\kappa_2)} k_{\rho}^2 \cdot H_0^{(1)}(k_{\rho}\rho) e^{i\kappa_1(x_0+x)} dk_{\rho} \quad (2.53)$$

$$\underline{E}(\underline{r}) = \underline{E}^{LOS}(\underline{r}) - \frac{ip}{8\pi\varepsilon_{r1}\varepsilon_0} \times \left\{ \hat{e}_{\rho} \int_{-\infty}^{\infty} k_{\rho}^2 \frac{\varepsilon_{r2}\kappa_1 - \varepsilon_{r1}\kappa_2}{\varepsilon_{r2}\kappa_1 + \varepsilon_{r1}\kappa_2} e^{i\kappa_1(x+x_0)} \cdot H_0^{(1)}(k_{\rho}\rho) dk_{\rho} - \right. \quad (2.54)$$

$$\left. -\hat{e}_x \int_{-\infty}^{\infty} k_{\rho}^3 \frac{\varepsilon_{r2}\kappa_1 - \varepsilon_{r1}\kappa_2}{\kappa_1(\varepsilon_{r2}\kappa_1 + \varepsilon_{r1}\kappa_2)} e^{i\kappa_1(x+x_0)} \cdot H_0^{(1)}(k_{\rho}\rho) dk_{\rho} \right\}$$

$$\text{όπου } \kappa_1 = \sqrt{k_{01}^2 - k_{\rho}^2} \quad \text{και} \quad \kappa_2 = \sqrt{k_{02}^2 - k_{\rho}^2}$$

Οι αντίστοιχες εκφράσεις κάτω από το επίπεδο του εδάφους ($x<0$) είναι οι ακόλουθες:

$$\underline{H}^T(\underline{r}) = \frac{i\omega\rho}{4\pi} \hat{e}_a \int_{-\infty}^{\infty} k_{\rho}^2 \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r2}\kappa_1 + \varepsilon_{r1}\kappa_2} e^{i(\kappa_1 x_0 - \kappa_2 x)} \cdot H_0^{(1)}(k_{\rho}\rho) dk_{\rho} \quad (2.55)$$

$$\underline{E}^T(\underline{r}) = -\frac{ip}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} (\kappa_2 \hat{e}_{\rho} - k_{\rho} \hat{e}_x) \frac{k_{\rho}^2}{\varepsilon_{r2}\kappa_1 + \varepsilon_{r1}\kappa_2} \cdot e^{i(\kappa_1 x_0 - \kappa_2 x)} H_0^{(1)}(k_{\rho}\rho) dk_{\rho} \quad (2.56)$$

Σημειώνεται ότι η ε_{r2} είναι μιγαδική ποσότητα, λόγω των απωλειών του εδάφους.

2.4 Αναλυτική κλειστής-μορφής έκφραση για το σκεδαζόμενο πεδίο με εφαρμογή της SPM

Η εφαρμογή της μεθόδου στάσιμης φάσης στην (2.53) οδηγεί στις παρακάτω αναλυτικές εκφράσεις για το ηλεκτρικό πεδίο στον άνω ημιχώρο ($x > 0$) [2.4], [2.12]:

$$\underline{E}_{x>0}^{SC} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0\epsilon_{r1}\rho^{\frac{1}{2}}(x+x_0)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\kappa_{1s}^{\frac{1}{2}}\kappa_{\rho s}^{\frac{3}{2}}}{k_{01}} \cdot \frac{\epsilon_2\kappa_{1s} - \epsilon_1\kappa_{2s}}{\epsilon_2\kappa_{1s} + \epsilon_1\kappa_{2s}} \cdot e^{ik_{\rho s}\rho} \cdot e^{i\kappa_{1s}(x+x_0)} \cdot (\kappa_{1s}\hat{e}_\rho + k_{\rho s}\hat{e}_x)$$

$$\underline{E}_{x>0}^{SC} = \frac{pk_{01}\cos\varphi}{4\pi\epsilon_0\epsilon_{r1}(A'A)} \cdot \frac{\epsilon_2\kappa_{1s} - \epsilon_1\kappa_{2s}}{\epsilon_2\kappa_{1s} + \epsilon_1\kappa_{2s}} \cdot e^{ik_{\rho s}\rho} \cdot e^{i\kappa_{1s}(x+x_0)} \cdot (\kappa_{1s}\hat{e}_\rho + k_{\rho s}\hat{e}_x) \quad (2.57)$$

όπου (A'A) είναι η απόσταση μεταξύ του ειδώλου και του σημείου παρατήρησης. Επιπλέον, στην σχέση (2.57) ισχύουν οι παρακάτω εξισώσεις:

$$k_{\rho s} = \frac{k_{01}\rho}{\sqrt{(x+x_0)^2 + \rho^2}} = \frac{k_{01}}{\sqrt{1 + \left(\frac{x+x_0}{\rho}\right)^2}} = k_{01}\cos\varphi \quad (2.58)$$

$$\kappa_{1s} = \sqrt{k_{01}^2 - k_{\rho s}^2} = k_{01}\sin\varphi \quad (2.59)$$

$$\kappa_{2s} = \sqrt{k_{02}^2 - k_{\rho s}^2} \quad (2.60)$$

όπου $k_{\rho s}$ είναι το στάσιμο σημείο από την μέθοδο και φ η γωνία που φαίνεται στην Εικόνα 2-1 (η αναφερόμενη στην διεθνή βιβλιογραφία ως ‘grazing angle’ [2.2]).

2.5 Αριθμητικά Αποτελέσματα με βάση την μέθοδο αριθμητικής ολοκλήρωσης – σύγκριση αυτών με αριθμητικά αποτελέσματα με βάση την μέθοδο SPM

Σε αυτή την παράγραφο συγκρίνονται τα αποτελέσματα που προκύπτουν χρησιμοποιώντας τις αναλυτικές εκφράσεις κλειστού τύπου της μεθόδου SPM όπως αυτές προκύπτουν στην προηγούμενη παράγραφο (εξίσωση (2.57)) με αντίστοιχα αποτελέσματα που προκύπτουν από αριθμητική ολοκλήρωση της εξίσωσης (2.54). Στόχος της σύγκρισης αυτής είναι να ανιχνεύσουμε τα εύρη συχνοτήτων όπου η SPM μπορεί να εφαρμοσθεί επιτυχώς. Να σημειωθεί ότι οι προσομοιώσεις έγιναν για τις εκφράσεις του σκεδαζόμενου ηλεκτρικού πεδίου (αντίστοιχα αποτελέσματα για το μαγνητικό πεδίο είναι παρόμοια).

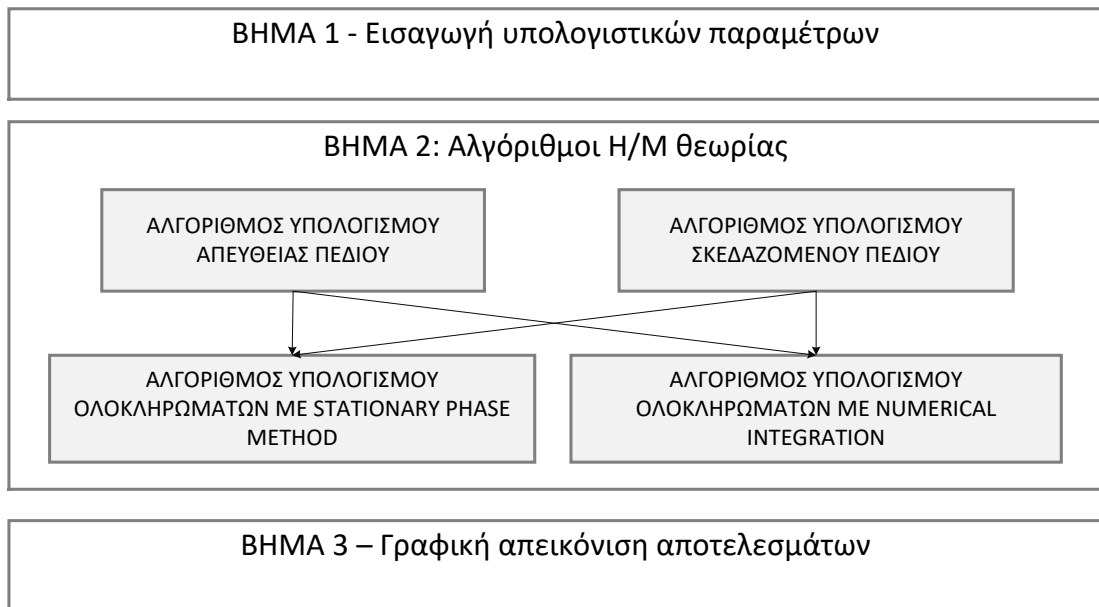
Ο υπολογισμός της ολοκληρωτικής έκφρασης (2.54) έγινε με τον αλγόριθμο Adaptive Simpson³ [2.14]. Η ανοχή σφάλματος ορίστηκε στο 10^{-6} . Επίσης, εφαρμόζεται μία τριών σημείων εξομάλυνση (μέσος όρος) όπου απαιτείτο, προκειμένου να αποφευχθεί η «μικρής κλίμακας» ταλάντωση των γραφημάτων η οποία προέρχεται από το γεγονός ότι οι ολοκληρωθείσες εκφράσεις αποτελούνται από μιγαδικούς αριθμούς από γρήγορα μεταβαλλόμενες φάσεις.

Η ανάπτυξη του προγράμματος έγινε σε περιβάλλον προγραμματισμού MATLAB. Το συγκεκριμένο λογισμικό πακέτο επιλέχθηκε για την υλοποίηση του αλγορίθμου διότι διαθέτει μεγάλη βιβλιοθήκη πακέτων συναρτήσεων, όπως συναρτήσεις γραμμικής άλγεβρας, αριθμητικής ανάλυσης κ.α., γεγονός που το καθιστά κατάλληλο για την προσομοίωση προβλημάτων ηλεκτρομαγνητισμού που απαιτούν πολύπλοκους αριθμητικούς υπολογισμούς. Επιπλέον, το Matlab υποστηρίζει δυνατότητες εύκολης διασύνδεσης των συναρτήσεων που επικοινωνούν μεταξύ τους και διαθέτει αλγορίθμους για την παραγωγή διαγραμμάτων για την γραφική απεικόνιση των αποτελεσμάτων.

Το υπολογιστικό πρόγραμμα που αναπτύχθηκε περιλαμβάνει τρία μέρη όπως φαίνεται και στο παρακάτω λογικό διάγραμμα:

- Αρχικά εισάγονται οι γνωστοί παράμετροι του προβλήματος σκέδασης (οι παράμετροι αυτοί εισάγονται από τον χρήστη κατά την εκτέλεση του προγράμματος)
- Στην συνέχεια υπάρχουν τρεις αλγόριθμοι για τον υπολογισμό του απευθείας και του σκεδαζόμενου πεδίου με την χρήση της μεθόδου στάσιμης φάσης και της αριθμητικής ολοκλήρωσης.
- Τέλος, εκτελείται ο αλγόριθμος για την γραφική απεικόνιση των αποτελεσμάτων σε γραφήματα τα οποία περιέχουν τις παραμέτρους που έχουν χρησιμοποιηθεί καθώς επίσης και υπόμνημα για την αντιστοίχιση των γραφημάτων με τις μεθόδους.

³ Ο κανόνας αυτός επιχειρεί τον προσεγγιστικό υπολογισμό του ολοκληρώματος $\int_a^b f(x) dx$, προσεγγίζοντας την f μέσω πολυωνύμων δευτέρου βαθμού. Δηλαδή προσεγγίζει τη γραφική παράσταση με παραβολικά τόξα.



Εικόνα 2-4 – Λογικό διάγραμμα αλγορίθμου προσομοίωσης

Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει τις παραμέτρους της προσομοίωσης:

Σύμβολο	Περιγραφή	Τιμή
f_{min}	Ελάχιστη Συχνότητα	10 KHz
f_{max}	Μέγιστη Συχνότητα	1 GHz
x_0	Ύψος πομπού	60 m
X	Ύψος σημείου παρατήρησης (δέκτης)	15 m
I	Ρεύμα του δίπολου Hertz ¹	1 A
$2h$	Μήκος του δίπολου Hertz ¹²	0.1 m
ϵ_r	Σχετική διηλεκτρική σταθερά του εδάφους	20
Σ	Αγωγιμότητα εδάφους	0.01 S/m

Σημείωση:
¹ Σχέση μεταξύ του ρεύματος I και της διπολικής ροπής p : $I(2h)=i\omega p$
 Όπου $\omega=2\pi f$ και i είναι ο μοναδιαίος φανταστικός αριθμός
² πολύ μικρότερο από το μήκος κύματος $\lambda=c/f$ και στις δύο περιπτώσεις

Πίνακας 2-1 Παράμετροι Προσομοίωσης

Στην συνέχεια, εκτελούνται οι αλγόριθμοι για τον υπολογισμό του απευθείας και του σκεδαζόμενου ηλεκτρομαγνητικού πεδίου με την μέθοδο στάσιμης φάσης και την μέθοδο αριθμητικής ολοκλήρωσης.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΣΤΑΣΙΜΗΣ ΦΑΣΗΣ - Εξίσωση (2.57)

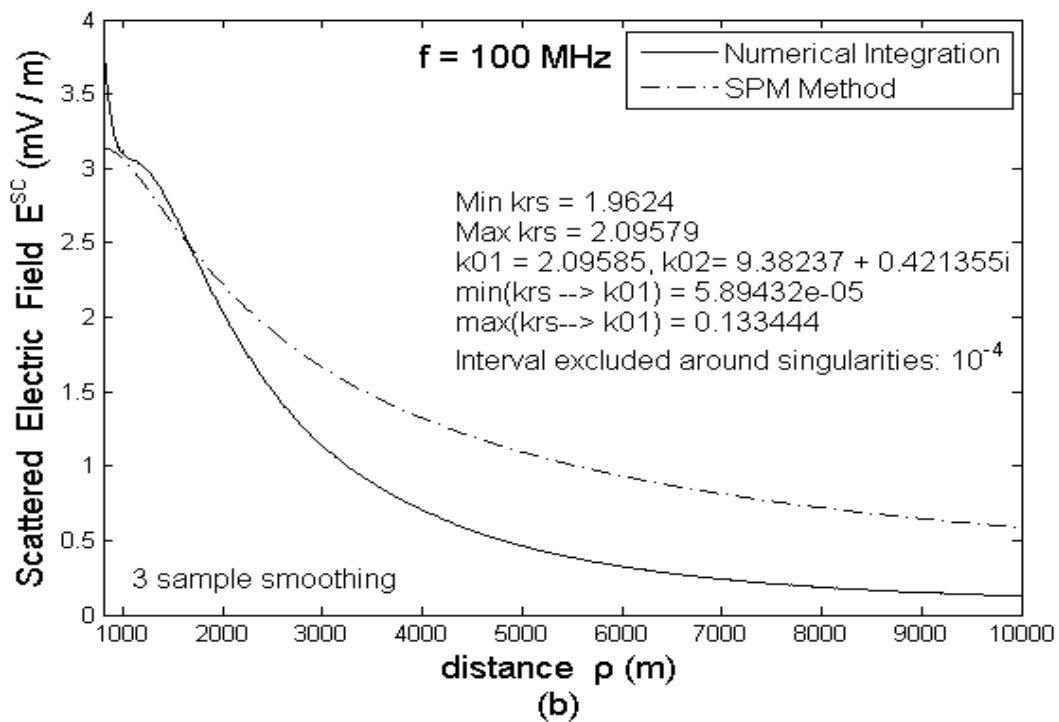
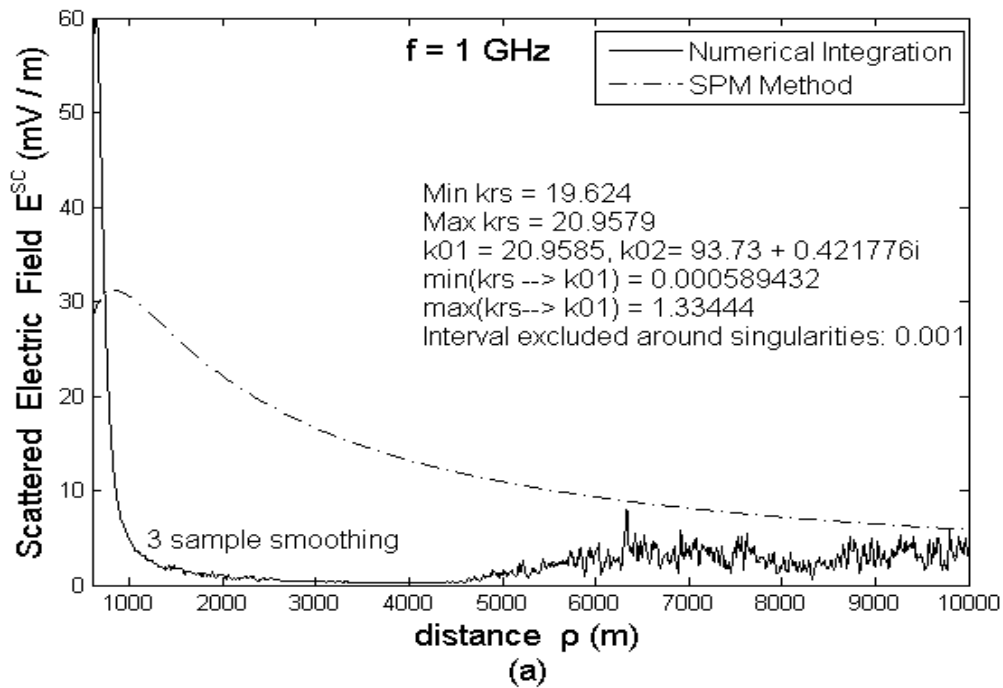
$$\underline{E}_{x>0}^{SC} = \frac{pk_{01} \cos \varphi}{4\pi\epsilon_0\epsilon_{r1}(A'A)} \cdot \frac{\epsilon_2\kappa_{1s} - \epsilon_1\kappa_{2s}}{\epsilon_2\kappa_{1s} + \epsilon_1\kappa_{2s}} \cdot e^{ik_{ps}\rho} \cdot e^{i\kappa_{1s}(x+x_0)} \cdot (\kappa_{1s}\hat{e}_\rho + k_{ps}\hat{e}_x)$$

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ – Εξίσωση (2.54)*(Αλγόριθμος Adaptive Simpson)*

$$\underline{E}(\underline{r}) = \underline{E}^{LOS}(\underline{r}) - \frac{ip}{8\pi\epsilon_{r1}\epsilon_0} \times \left\{ \hat{e}_\rho \int_{-\infty}^{\infty} k_\rho^2 \frac{\epsilon_{r2}\kappa_1 - \epsilon_{r1}\kappa_2}{\epsilon_{r2}\kappa_1 + \epsilon_{r1}\kappa_2} e^{i\kappa_1(x+x_0)} \cdot H_0^{(1)}(k_\rho\rho) dk_\rho - \right. \\ \left. - \hat{e}_x \int_{-\infty}^{\infty} k_\rho^3 \frac{\epsilon_{r2}\kappa_1 - \epsilon_{r1}\kappa_2}{\kappa_1(\epsilon_{r2}\kappa_1 + \epsilon_{r1}\kappa_2)} e^{i\kappa_1(x+x_0)} \cdot H_0^{(1)}(k_\rho\rho) dk_\rho \right\}$$

Από προσεκτική παρατήρηση της εξίσωσης (2.54) βλέπουμε ότι υπάρχει ένα άπειρο σημείο στο $\kappa_1 = 0$, το οποίο βρίσκεται στο $k_\rho = k_{01}$ και επομένως πρέπει να εξαιρεθεί ένα επαρκές εύρος γύρω από το k_{01} για να υπάρχει σύγκλιση του αλγόριθμου αριθμητικής ολοκλήρωσης. Οι δοκιμές δείχνουν ότι αυτό το εύρος πρέπει να είναι τουλάχιστον 5×10^{-5} φορές την τιμή του k_{ps} , το οποίο είναι το k_{01} [σύμφωνα με την (2.58) $k_{ps} < k_{01}$]. Αυτό όμως σημαίνει ότι εξαιρείται από τον υπολογισμό και ένα τμήμα γύρω από το στάσιμο σημείο. Σημειώνεται ότι παρόλο που το σημείο $k_\rho = 0$ φαίνεται να είναι άλλο ένα πιθανό σημείο απειρισμού της εξίσωσης (2.54) (καθώς είναι το σημείο μηδενικού ορίσματος της συνάρτησης Hankel), στην πραγματικότητα αυτό δεν ισχύει λόγω της παρουσίας των παραγόντων k_ρ^2 και k_ρ^3 στις προς ολοκλήρωση παραστάσεις. Πράγματι, είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι: $k_\rho^2 \cdot H_0^{(1)}(k_\rho\rho) \rightarrow 0$ καθώς $k_\rho \rightarrow 0$.

Βάσει των παραπάνω παρατηρήσεων, στις εικόνες των αποτελεσμάτων (Εικόνα 2-5, Εικόνα 2-6) δείχνουμε το εύρος ολοκλήρωσης γύρω από το k_{01} το οποίο εξαιρείται από την προσομοίωση (“interval excluded around singularities”). Οι τιμές $min(krs \rightarrow k_{01})$ και $max(krs \rightarrow k_{01})$ αντιστοιχούν στην ελάχιστη και μέγιστη απόσταση μεταξύ k_{ps} και k_{01} αντιστοίχως. Επιπλέον, στις εικόνες δίνονται και οι τιμές k_{ps} , οι οποίες εξαρτώνται από την οριζόντια απόσταση ρ (βλ. εξίσωση (2.58)). Ο λόγος που συμπεριλαμβανουμε αυτή την πληροφορία είναι ώστε να δοθεί μία ένδειξη ως προς το εύρος το οποίο εξαιρείται γύρω από το στάσιμο σημείο k_{ps} .



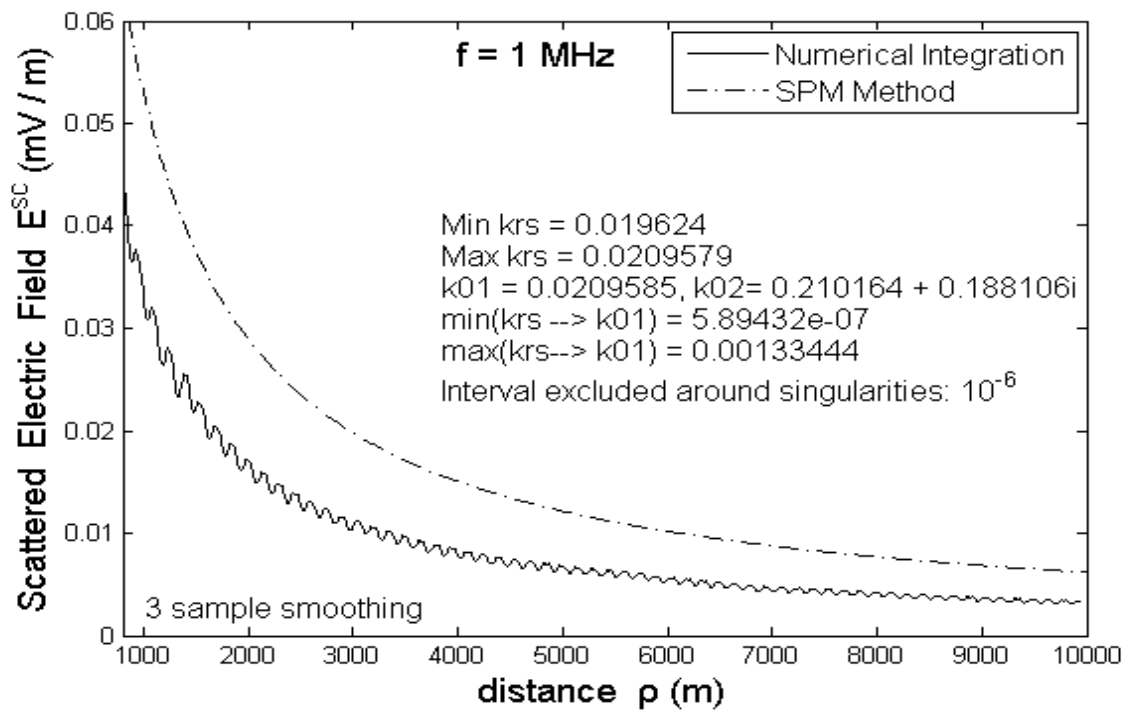
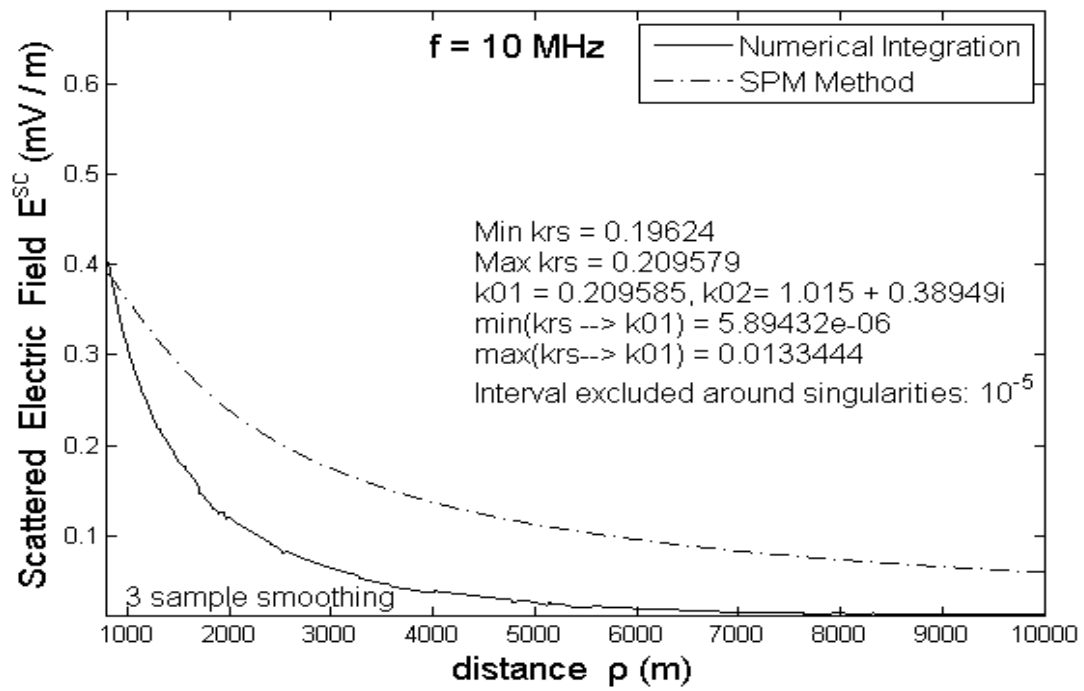
Εικόνα 2-5 Σκεδαζόμενο ηλεκτρικό πεδίο σε συνάρτηση με την απόσταση ρ μεταξύ του πομπού και του δέκτη με χρήση της μεθόδου SPM και μεθόδου αριθμητικής ολοκλήρωσης
 Συχνότητες (a) $f = 1\text{GHz}$, (b) $f = 100\text{ MHz}$

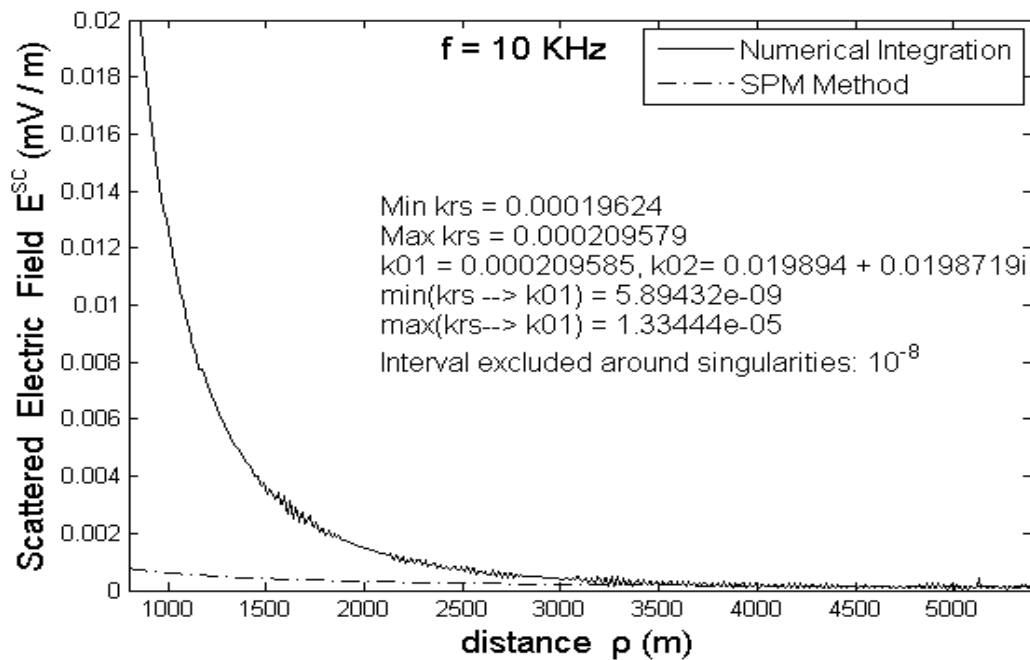
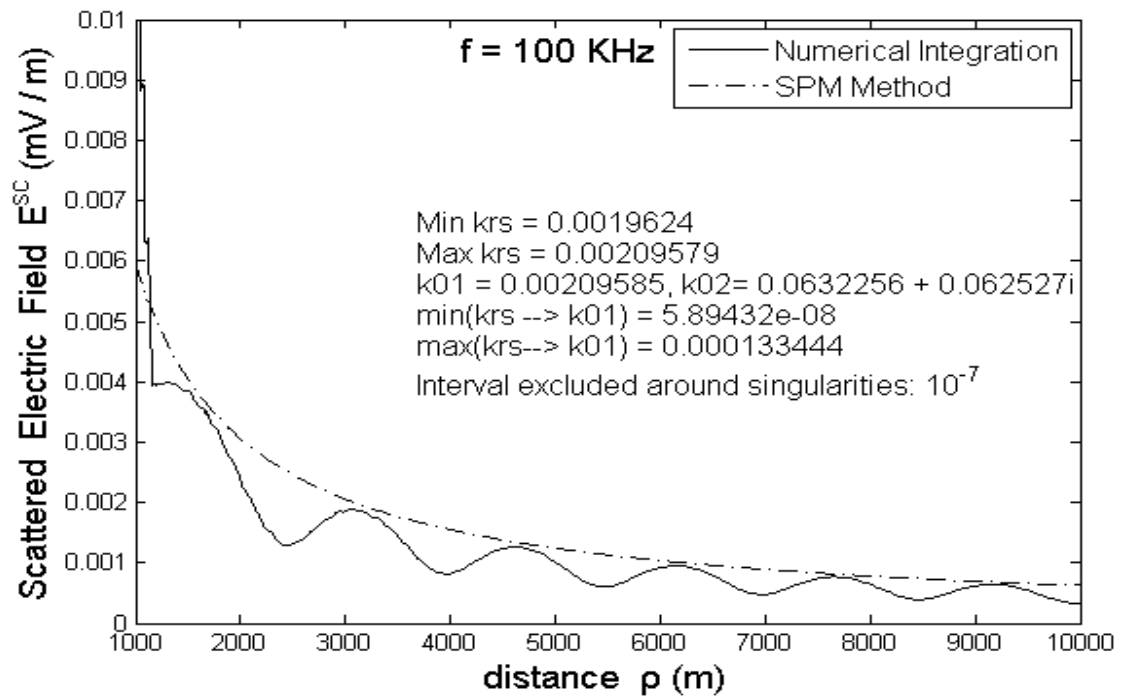
Επεξήγηση λεζάντας διαγραμμάτων:

<i>interval excluded around singularities</i>	Το εύρος ολοκλήρωσης γύρω από το k_{01} το οποίο εξαιρείται από την προσομοίωση
<i>min(krs-->k01)</i>	Ελάχιστη απόσταση μεταξύ k_{ps} και k_{01}
<i>max(krs-->k01)</i>	Μέγιστη απόσταση μεταξύ k_{ps} και k_{01}
<i>Min krs</i> <i>Max krs</i>	Ελάχιστη και μέγιστη τιμή στάσιμου σημείου (Το στάσιμο σημείο εξαρτάται από την απόσταση ρ) $k_{ps} = \frac{k_{01} \rho}{\sqrt{(x + x_0)^2 + \rho^2}} = \frac{k_{01}}{\sqrt{1 + \left(\frac{x + x_0}{\rho}\right)^2}} = k_{01} \cos \varphi$

Εξετάζοντας τα γραφήματα στην Εικόνα 2-5, βλέπουμε ότι για συχνότητες περίπου από 100 KHz και πάνω, τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την αριθμητική ολοκλήρωση υποτιμούν το λαμβανόμενο επίπεδο σήματος σε σχέση με την μέθοδο SPM. Αυτό σχετίζεται με την φύση της μεθόδου στάσιμης φάσης, η οποία για μεγάλες συχνότητες προσεγγίζει την ολοκληρωτική έκφραση λαμβάνοντας υπόψη μόνο τις συνεισφορές γύρω από το στάσιμο σημείο [2.13].

Ωστόσο, όπως αναφέραμε παραπάνω, όταν υπολογίζουμε αριθμητικά την ολοκληρωτική έκφραση της εξίσωσης (2.54), πρέπει να εξαιρεθεί ένα επαρκώς μεγάλο διάστημα γύρω από το k_{01} . Στις περισσότερες περιπτώσεις, αυτό το διάστημα συμπεριλαμβάνει το στάσιμο σημείο, το οποίο σημαίνει πως παραλείπεται ένα διάστημα που συνεισφέρει πολύ σημαντικά στον υπολογισμό του ολοκληρώματος.





Εικόνα 2-6 Σκεδαζόμενο ηλεκτρικό πεδίο σε συνάρτηση με την απόσταση ρ μεταξύ του πομπού και του δέκτη με χρήση της μεθόδου SPM και μεθόδου αριθμητικής ολοκλήρωσης (Συχνότητες 10 MHz, 1MHz, 100 kHz, 10kHz)

Αντίθετα, παρατηρώντας το τελευταίο γράφημα στην Εικόνα 2-6 ($f = 10$ KHz), βλέπουμε ότι σε αυτή την περίπτωση η μέθοδος SPM φαίνεται να υπολογίζει λανθασμένα τις τιμές ΗΜ πεδίου (παρέχει μικρότερες τιμές). Παρόμοιο συμπέρασμα προκύπτει και για $f < 30$ KHz. Πράγματι, σε τόσο χαμηλές συχνότητες, δεν ισχύει η προσέγγιση

μεγάλου ορίσματος της μεθόδου SPM, και οι εξισώσεις (2.57) - (2.60) δεν είναι καθόλου ακριβείς. Είναι και πάλι απαραίτητο να εξαιρεθεί ένα εύρος γύρω από το σημείο $k_p = k_{01}$ προκειμένου να συγκλίνει ο αλγόριθμος αριθμητικής ολοκλήρωσης, όμως αυτή τη φορά το εύρος το οποίο παραλείπεται δεν συνεισφέρει σημαντικά στο τελικό αποτέλεσμα.

Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει τα παραπάνω συμπεράσματα σε σχέση με την καταλληλότητα χρήσης της κάθε μεθόδου ανάλογα με το εύρος συχνοτήτων που χρησιμοποιείται (VLF, LF MF).

Καταλληλότητα Μεθόδου <i>Μέθοδος Στάσιμης Φάσης (Stationary Phase Method - SPM) – Αριθμητική Ολοκλήρωση (Numerical Integration - NI)</i>	
Εύρος Συχνοτήτων ([2.2])	Κατάλληλη μέθοδος
Εύρος Μεσαίων Συχνοτήτων (Medium Frequency - MF) και άνω (>300 KHz)	SPM
Low Frequency (LF) range (30 – 300 KHz)	SPM και NI
Very Low Frequency (VLF) range (<30 KHz)	NI

Πίνακας 2-2. Επιλογή μεθόδου υπολογισμού του HM πεδίου με βάση το εύρος συχνοτήτων (SPM vs. NI)

2.6 Βιβλιογραφία παρόντος κεφαλαίου

[2.1] S. Sautbekov, ‘The Generalized Solutions of a System of Maxwell’s Equations for the Uniaxial Anisotropic Media’, Chapter 1 in book *Electromagnetic Waves Propagation in Complex Matter*, edited by A. A. Kishk, Croatia, pp. 3 – 24, June 2011.

[2.2] Ι.Γ. Φικιώρης, ‘Εισαγωγή εις την Θεωρίαν των Κεραίων και την Διάδοσιν Ηλεκτρομαγνητικών Κυμάτων’, Ε.Μ.Π., Αθήνα 1982

[2.3] Ch. Christakis, K. Ioannidi, S. Sautbekov, P. Frangos, S. K. Atanov, “The radiation problem from a vertical short dipole antenna above flat and lossy ground: novel formulation in the spectral domain with closed-form analytical solution in the high frequency regime”, *Electronics and Electrical Engineering Journal*, vol. 20, no. 9, pp. 35–38, 2014
<http://dx.doi.org/10.5755/j01.eee.20.9.8710>

[2.4] K. Ioannidi, Ch. Christakis, S. Sautbekov, P. Frangos, S. K. Atanov, “The radiation problem from a vertical Hertzian dipole antenna above flat and lossy ground: novel formulation in the spectral domain with closed-form analytical solution in the high frequency regime”, *Int. Journal Antennas and Propagation (IJAP)*, Hindawi Ed. Co., Special Issue ‘Propagation of electromagnetic (EM) waves over terrain’ (PEWT), vol. 2014
<http://dx.doi.org/10.1155/2014/989348>

[2.5] A. N. Sommerfeld, “Propagation of Waves in Wireless Telegraphy”, *Ann. Phys.*, 28, pp. 665–736, March 1909; and 81, pp. 1135–1153, December 1926.

[2.6] J. R. Wait, “The Ancient and Modern History of EM Ground Wave Propagation”, *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, Vol. 40, No. 5, pp. 7–24, October 1998.

[2.7] R. J. King, “EM Wave Propagation over a Constant Impedance Plane”, *Radio Science*, Vol. 4, pp. 225–268, 1969.

[2.8] J. Zenneck, “Propagation of Plane EM Waves along a Plane Conducting Surface”, *Ann. Phys. (Leipzig)*, 23, pp. 846–866, 1907.

[2.9] T. K. Sarkar et. al., “Electromagnetic Macro Modelling of Propagation in Mobile Wireless Communication: Theory and Experiment”, *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, Vol. 54, No. 6, pp. 17–43, Dec. 2012.

[2.10] K. A. Norton, “The Propagation of Radio Waves Over the Surface of the Earth”, *Proceedings of the IRE*, 24, pp. 1367–1387, 1936; and 25, pp. 1203–1236, 1937.

[2.11] S. Sautbekov, R. Kasimkhanova and P. Frangos, “Modified solution of Sommerfeld’s problem”, in *CEMA’10 International Conference*, Athens, Greece, October 2010, pp. 5–8.

- [2.12] S. Bourgiotis, K. Ioannidi, Ch. Christakis, S.Sautbekov and P. Frangos, “The radiation problem from a vertical short dipole antenna above flat and lossy ground: Novel formulation in the spectral domain with numerical solution and closed-form analytical solution in the high frequency regime”, in CEMA’14, 9th International Conference, Sofia, Bulgaria, October 2014, pp. 12–18.
- [2.13] C. A. Balanis, *Antenna Theory: Analysis and Design*, New York: J. Wiley and Sons Inc., 1997, Appendix VIII: Method of Stationary Phase, pp. 922–927,
- [2.14] George B. Thomas , Maurice D. Weir, Joel R. Hass, Frank Giordano, *Thomas’ Calculus*, Pearson, 12th Edition, 2010.
- [2.15] G.Arflen, *Mathematical Methods for Physicists*, 3rd Edition, Orlando, Florida, USA: Academic Press Inc., 1985, pp. 400–414.
- [2.16] A. Hrovat et. al., “An Open-Source Radio Coverage Prediction Tool”, in ICCOM’10 Proceedings of the 14th WSEAS International Conference on Communications, pp. 135–140, 2010.

3 Υπολογισμός του ηλεκτρομαγνητικού (HM) πεδίου στον δέκτη με μετασχηματισμό μεταβλητής (μετασχηματισμός ως προς την γωνία πρόσπτωσης) και χρήση της ‘μεθόδου στάσιμου σημείου’.

3.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό επανεξετάζουμε το πρόβλημα της ακτινοβολίας του διπόλου Hertz πάνω από επίπεδη γη στο φασματικό πεδίο (‘spectral domain’) προκειμένου να καταλήξουμε σε απλά μονοδιάστατα ολοκληρώματα για το λαμβανόμενο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, τα οποία αντιπροσωπεύουν την ακριβή λύση του προβλήματος. Τα ολοκληρώματα του λαμβανόμενου ηλεκτρομαγνητικού πεδίου παρουσιάζονται επίσης μαθηματικά σαν ολοκληρώματα επί της γωνίας πρόσπτωσης (‘grazing angle’). Αυτή η μορφή επιτρέπει ακριβέστερο υπολογισμό διότι ξεπερνάει τα προβλήματα των απειρισμών της ολοκληρωτικής έκφρασης. Παρουσιάζεται επιπλέον μία προσεγγιστική λύση με χρήση της μεθόδου στάσιμης φάσης, η οποία είναι εφαρμόσιμη στις υψηλές συχνότητες με αρκετή ακρίβεια, και επιτρέπει ταχύτερο υπολογισμό.

3.2 Ολοκληρωτική αναπαράσταση για το λαμβανόμενο Ηλεκτρικό Πεδίο στο φασματικό πεδίο και κλειστού-τύπου αναλυτικές εκφράσεις στο πεδίο υψηλών συχνοτήτων

Η γεωμετρία του προβλήματος παρουσιάζεται στην Εικόνα 2-1. Στο προηγούμενο κεφάλαιο πήραμε την παρακάτω ολοκληρωτική έκφραση για το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο του δέκτη πάνω από το έδαφος ($x > 0$) [3.13] [3.14]:

$$\begin{aligned} \underline{E}(\underline{r}) = & \underline{E}^{LOS}(\underline{r}) - \frac{i\rho}{8\pi\epsilon_{r1}\epsilon_0} \\ & \times \left\{ \hat{e}_\rho \int_{-\infty}^{\infty} k_\rho^2 \frac{\epsilon'_{r2}\kappa_1 - \epsilon_{r1}\kappa_2}{\epsilon'_{r2}\kappa_1 + \epsilon_{r1}\kappa_2} e^{i\kappa_1(x+x_0)} \times H_0^{(1)}(k_\rho\rho) dk_\rho - \right. \\ & \left. - \hat{e}_x \int_{-\infty}^{\infty} k_\rho^3 \frac{\epsilon'_{r2}\kappa_1 - \epsilon_{r1}\kappa_2}{\kappa_1(\epsilon'_{r2}\kappa_1 + \epsilon_{r1}\kappa_2)} e^{i\kappa_1(x+x_0)} \times H_0^{(1)}(k_\rho\rho) dk_\rho \right\} \end{aligned} \quad (3.1)$$

όπου:

$$\kappa_1 = \sqrt{k_{01}^2 - k_\rho^2}, \kappa_2 = \sqrt{k_{02}^2 - k_\rho^2} \quad (3.2)$$

και $H_0^{(1)}$ είναι η συνάρτηση Hankel πρώτου είδους και μηδενικής τάξης. Επίσης, στην (3.1), η ϵ'_{r2} είναι μία μιγαδική ποσότητα, λόγω των απωλειών του εδάφους. Παρόμοιες εκφράσεις προκύπτουν για το μαγνητικό πεδίο, παρόλο που μόνο η αξιμουθιακή συνιστώσα είναι παρούσα στο μαγνητικό διάνυσμα \underline{H} . Επιπρόσθετα, στην (3.1) το \underline{E}^{LOS}

είναι το διάνυσμα απευθείας ηλεκτρικού πεδίου (Line of Sight - LOS), του οποίου η έκφραση μπορεί να δοθεί είτε σε ολοκληρωτική μορφή [3.12] είτε μέσω των παρακάτω εκφράσεων σε κυλινδρικές συντεταγμένες [3.14], [3.19]:

$$\begin{aligned} \underline{E}^{LOS}(\rho, x) = & -\frac{i\omega \cdot p}{4\pi} \cdot e^{ik_{01}r_1} \times \left\{ \left(\frac{-i\omega\mu_1}{2r_1} + \frac{3\zeta}{2r_1^2} - \frac{3}{2i\omega\varepsilon_1r_1^3} \right) \sin 2\theta_1 \times \hat{e}_\rho + \right. \\ & \left. + \left[\frac{i\omega\mu_1}{r_1} \sin^2 \theta_1 + \left(\frac{\zeta}{r_1^2} - \frac{2}{i\omega\varepsilon_1r_1^3} \right) \times (\cos 2\theta_1 + \cos^2 \theta_1) \right] \times \hat{e}_x \right\} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Στην (3.3), το $\zeta = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} = 377\Omega$ είναι η αντίσταση ελευθέρου χώρου και οι παράμετροι

r_1, θ_1 φαίνονται στην Εικόνα 2-1. Να σημειωθεί ότι οι παράμετροι αυτοί σχετίζονται με τις κυλινδρικές συντεταγμένες του σημείου παρατήρησης (ρ, x) μέσω των παρακάτω εξισώσεων:

$$r_1 = \sqrt{\rho^2 + (x - x_0)^2}, \quad (3.4)$$

$$\begin{cases} \theta_1 = \pi - \arctan\left(\frac{\rho}{x_0 - x}\right), & x < x_0, \\ \theta_1 = \arctan\left(\frac{\rho}{x - x_0}\right), & x > x_0. \end{cases} \quad (3.5)$$

Να σημειωθεί ότι η (3.3) ισχύει για κάθε απόσταση r_1 (δηλ. είτε μεγάλη είτε μικρή απόσταση, με τη μοναδική παραδοχή ότι η r_1 είναι πολύ μεγαλύτερη από το μήκος του δίπολου Hertz) μεταξύ του πομπού και του δέκτη. Για τη συνήθη περίπτωση μεγάλων αποστάσεων, μόνο οι όροι $1/r_1$ κυριαρχούν, οδηγώντας στις γνωστές εκφράσεις μακρινού πεδίου για το ηλεκτρικό πεδίο ενός δίπολου Hertz στον ελεύθερο χώρο [3.19].

Η εφαρμογή της μεθόδου στάσιμου σημείου στην (3.1) οδηγεί στην παρακάτω αναλυτική εξίσωση για το διάνυσμα του σκεδαζόμενου από επίπεδο έδαφος ηλεκτρικού πεδίου στη μακρινή περιοχή και για υψηλές συχνότητες (για $x > 0$) [3.17], [3.18]

$$\underline{E}_{x>0}^{SC} = \frac{pk_{01} \cos \varphi}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}(A'A)} \times \frac{\varepsilon'_{r2}k_{1s} - \varepsilon_{r1}k_{2s}}{\varepsilon'_{r2}k_{1s} + \varepsilon_{r1}k_{2s}} \times e^{ik_{\rho s}\rho} \times e^{ik_{1s}(x+x_0)} \times (-k_{1s}\hat{e}_\rho + k_{\rho s}\hat{e}_x) \quad (3.6)$$

Στην (3.6), οι παρακάτω σχέσεις ισχύουν [17], [18]:

$$k_{\rho s} = \frac{k_{01}\rho}{\sqrt{(x+x_0)^2 + \rho^2}} = \frac{k_{01}}{\sqrt{1 + \left(\frac{x+x_0}{\rho}\right)^2}} = k_{01} \cos \varphi \quad (3.7)$$

$$\begin{cases} k_{1s} = \sqrt{k_{01}^2 - k_{\rho s}^2} = k_{01} \sin \varphi \\ k_{2s} = \sqrt{k_{02}^2 - k_{\rho s}^2} \end{cases} \quad (3.8)$$

όπου $k_{\rho s}$ είναι το στάσιμο σημείο που προκύπτει από την μέθοδο SPM.

3.3 Νέες ολοκληρωτικές σχέσεις και σχετική αναλυτική λύση SPM για το λαμβανόμενο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο (‘ως προς την γωνία πρόσπτωσης’)

Η εξίσωση (3.1) μπορεί να γραφεί με την παρακάτω μορφή:

$$\underline{E}(r) = \underline{E}^{LOS}(r) - \frac{ip}{8\pi\epsilon_{r1}\epsilon_0} \times \left\{ \int_{-\infty}^{-k_{01}} \underline{g}(k_\rho) dk_\rho + \int_{-k_{01}}^{+k_{01}} \underline{g}(k_\rho) dk_\rho + \int_{k_{01}}^{\infty} \underline{g}(k_\rho) dk_\rho \right\} \quad (3.9)$$

όπου $g(k_\rho)$ είναι οι ολοκληρωτέες ποσότητες της (3.1):

$$\underline{g}(k_\rho) = (\kappa_1 \hat{e}_\rho - |k_\rho| \hat{e}_x) k_\rho |k_\rho| \cdot \frac{\epsilon_2 \kappa_1 - \epsilon_1 \kappa_2}{\kappa_1 (\epsilon_2 \kappa_1 + \epsilon_1 \kappa_2)} H_0^{(1)}(k_\rho \rho) e^{i\kappa_1(x+x_0)} \quad (3.10)$$

και

$$\kappa_1 = \sqrt{k_{01}^2 - k_\rho^2} \quad , \quad \kappa_2 = \sqrt{k_{02}^2 - k_\rho^2} \quad (3.11)$$

Ορίζουμε τα ολοκληρώματα:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-k_{01}}^{+k_{01}} \underline{g}(k_\rho) dk_\rho \\ I_2 &= \int_{k_{01}}^{+\infty} \underline{g}(k_\rho) dk_\rho \\ I_3 &= \int_{-\infty}^{-k_{01}} \underline{g}(k_\rho) dk_\rho \end{aligned} \quad (3.12)$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος I_1 , κάνουμε τον μετασχηματισμό μεταβλητής:

$$k_\rho = k_{01} \cos \alpha \quad (3.13)$$

Με τον παραπάνω μετασχηματισμό, το εύρος ολοκλήρωσης $[-k_{01}, +k_{01}]$ στο πεδίο k_ρ μετασχηματίζεται στο εύρος $[0, \pi]$ της γωνίας α .

Σύμφωνα με τις εξισώσεις (3.2) και (3.13) ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{cases} \kappa_1 = k_{01} \sin \alpha \\ \kappa_2 = \sqrt{k_{02}^2 - k_{01}^2 \cos^2 \alpha} \end{cases} \quad (3.14)$$

Αντικαθιστώντας στην (3.1) παίρνουμε την παρακάτω σχέση για το διάνυσμα λαμβανόμενου ηλεκτρικού πεδίου:

$$\underline{E}(r) = \underline{E}^{LOS}(r) - \frac{ipk_{01}^3}{8\pi\epsilon_{r1}\epsilon_0} \times \int_0^\pi \left\{ \begin{aligned} &\cos^2 \alpha \frac{\epsilon'_{r2} k_{01} \sin \alpha - \epsilon_{r1} \sqrt{k_{02}^2 - k_{01}^2 \cos^2 \alpha}}{\epsilon'_{r2} k_{01} \sin \alpha + \epsilon_{r1} \sqrt{k_{02}^2 - k_{01}^2 \cos^2 \alpha}} \times \\ &\times e^{ik_{01}(x+x_0) \sin \alpha} \times \\ &\times (\hat{e}_\rho \sin \alpha - \hat{e}_x \cos \alpha) \cdot H_0^{(1)}(k_{01} \rho \cos \alpha) d\alpha \end{aligned} \right\} + \Delta \quad (3.15)$$

όπου Δ είναι το σφάλμα που προκύπτει από το γεγονός ότι μόνο το διάστημα $(-k_{01}, k_{01})$ λαμβάνουμε υπόψη στην παραπάνω ολοκλήρωση, αφού σύμφωνα με την (3.13),

χρησιμοποιώντας την επιλεγμένη μετατροπή μεταβλητής θεωρείται ότι $|k_\rho| \leq k_{01}$. Επομένως η Δ μπορεί να εκφραστεί ως:

$$\Delta = \int_{-\infty}^{-k_{01}} \underline{g}(k_\rho) dk_\rho + \int_{k_{01}}^{\infty} \underline{g}(k_\rho) dk_\rho \quad (3.16)$$

Εξετάζοντας την (3.15) παρατηρούμε ότι με την εισαγωγή της μεταβλητής α ως μεταβλητή ολοκλήρωσης, αντί της k_ρ , δεν υπάρχει απειρισμός για την ολοκληρωτέα ποσότητα στο διάστημα $(0, \pi)$ της μεταβλητής α . Αντιθέτως, στη εξίσωση (3.1) υπήρχαν απειρισμοί στα σημεία $k_\rho = \pm k_{01}$, οι οποίοι οδηγούσαν μεγάλο πρόβλημα στην εφαρμογή της αριθμητικής ολοκλήρωσης [3.18].

Προκειμένου να εφαρμόσουμε την μέθοδο SPM, χρησιμοποιούμε την προσέγγιση μεγάλου ορίσματος για την συνάρτηση Hankel [3.14], η οποία στην περίπτωσή μας γράφεται ως:

$$H_0^{(1)}(k_{01} \times \cos \alpha \times \rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi k_{01} \rho \cos \alpha}} \times e^{-i\frac{\pi}{4}} \times e^{ik_{01} \times \rho \times \cos \alpha} \quad (3.17)$$

Αντικαθιστώντας τις (3.14) και (3.17) στην (3.15), παίρνουμε την παρακάτω εξίσωση:

$$\underline{E}(\underline{r}) = \underline{E}^{LOS}(\underline{r}) - k_{01}^3 \frac{ip}{8\pi \epsilon_{r1} \epsilon_0} \sqrt{\frac{2}{\pi k_{01} \rho}} \times e^{-i\frac{\pi}{4}} \times I \quad (3.18)$$

όπου

$$I = \int_0^\pi \left\{ \frac{(\cos \alpha)^{\frac{3}{2}} \epsilon'_{r2} k_{01} \sin \alpha - \epsilon_{r1} \sqrt{k_{02}^2 - k_{01}^2 \cos^2 \alpha}}{\epsilon'_{r2} k_{01} \sin \alpha + \epsilon_{r1} \sqrt{k_{02}^2 - k_{01}^2 \cos^2 \alpha}} \times e^{ik_{01} r_2 \cos(\alpha - \varphi)} \right. \\ \left. \times (\hat{e}_\rho \sin \alpha - \hat{e}_x \cos \alpha) \times d\alpha \right\} \quad (3.19)$$

Στην (3.19), η γωνία φ και απόσταση r_2 φαίνονται στην Εικόνα 2-1. Είναι επίσης εμφανές ότι ισχύουν οι παρακάτω γεωμετρικές σχέσεις:

$$r_2 = \sqrt{\rho^2 + (x + x_0)^2}, \rho = r_2 \cos \varphi, (x + x_0) = r_2 \sin \varphi \quad (3.20)$$

Να σημειωθεί ότι οι εξισώσεις (3.18)-(3.19) δεν περιλαμβάνουν τον παράγοντα σφάλματος Δ των εξισώσεων (3.15)-(3.16). Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι σύμφωνα με την μέθοδο SPM, η οποία θα εφαρμοστεί παρακάτω, μόνο μία μικρή περιοχή γύρω από το 'στάσιμο σημείο' συνεισφέρει στον συνολικό υπολογισμό της ολοκλήρωσης [3.15], [3.16]. Σύμφωνα με την (3.7), το στάσιμο σημείο βρίσκεται στο διάστημα $(-k_{01}, k_{01})$ του k_ρ , το οποίο με τον μετασχηματισμό (3.13) αντιστοιχεί στο διάστημα $(0, \pi)$ της

μεταβλητής α . Με άλλα λόγια στην περίπτωση υψηλών συχνοτήτων και για μία grazing angle φ (Εικόνα 2-1) όχι πολύ κοντά στο μηδέν (ώστε το στάσιμο σημείο να μην είναι κοντά στην οριακή τιμή της ολοκλήρωσης $\alpha = 0$), το σφάλμα Δ των (3.15) και (3.16) είναι σχεδόν μηδενικό ($\Delta \approx 0$).

Τώρα, σύμφωνα με την μέθοδο στάσιμης φάσης [3.15], [3.16] ορίζουμε την φάση $k_{01} \cdot r_2$ στην (3.19) ως ‘μεγάλη παράμετρο’, και η φάση και το πλάτος της συνάρτησης για την (3.19) είναι:

$$f(\alpha) = \cos(\alpha - \varphi) \quad (3.21)$$

$$F(\alpha) = (\cos \alpha)^{\frac{3}{2}} \frac{\varepsilon'_{r2} k_{01} \sin \alpha - \varepsilon_{r1} \sqrt{k_{02}^2 - k_{01}^2 \cos^2 \alpha}}{\varepsilon'_{r2} k_{01} \sin \alpha + \varepsilon_{r1} \sqrt{k_{02}^2 - k_{01}^2 \cos^2 \alpha}} \times (\hat{e}_\rho \sin \alpha - \hat{e}_x \cos \alpha) \quad (3.22)$$

Το στάσιμο σημείο προκύπτει στο σημείο όπου η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης φάσης μηδενίζεται [3.15], [3.16]. Επιλύοντας λοιπόν την εξίσωση $f'(\alpha) = \frac{df}{d\alpha} = 0$, από την (3.21) παίρνουμε:

$$\alpha_s = \varphi, \quad (3.23)$$

Ενώ η δεύτερη παράγωγος στο α_s είναι: $f''(\alpha_s) = -1 < 0$

Στη συνέχεια, σύμφωνα με την μέθοδο SPM, το ολοκλήρωμα (3.19) υπολογίζεται ως:

$$I = F(\alpha_s) \times e^{ik_{01}r_2f(\alpha_s)} \times \sqrt{\frac{2\pi}{k_{01}r_2f''(\alpha_s)}} \times e^{i\frac{\pi}{4}\text{sgn}[f''(\alpha_s)]} \quad (3.24)$$

Συνεπώς, χρησιμοποιώντας την (3.24) για τον υπολογισμό SPM των (3.18)-(3.19) παίρνουμε τελικά την παρακάτω έκφραση για το συνολικό λαμβανόμενο ηλεκτρικό πεδίο:

$$\underline{E}(\underline{r}) = \underline{E}^{LOS}(\underline{r}) - \hat{e}_\theta \times k_{01}^2 \frac{p}{4\pi\varepsilon_{r1}\varepsilon_0} \times \frac{\varepsilon'_{r2} k_{01} \sin \varphi - \varepsilon_{r1} \sqrt{k_{02}^2 - k_{01}^2 \cos^2 \varphi}}{\varepsilon'_{r2} k_{01} \sin \varphi + \varepsilon_{r1} \sqrt{k_{02}^2 - k_{01}^2 \cos^2 \varphi}} \times \sin \theta \times \frac{e^{ik_{01}r_2}}{r_2} \quad (3.25)$$

όπου (βλ. Εικόνα 2-1), $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$ και

$$\hat{e}_\theta = \hat{e}_\rho \cos \theta - \hat{e}_x \sin \theta \quad (3.26)$$

Το παραπάνω κλειστού-τύπου αναλυτικό αποτέλεσμα προέκυψε υπό την υπόθεση «προσέγγισης υψηλής συχνότητας», καθώς και την υπόθεση ότι η γωνία ‘grazing angle’ φ δεν είναι πολύ κοντά στο μηδέν. Υπό αυτές τις υποθέσεις, η (3.25) απλά αναπαριστά το άθροισμα του απευθείας πεδίου και του πεδίου που ανακλάται από το ‘κατοπτρικό σημείο’. Σημειώνεται ότι το κλάσμα στην (3.25) απλά αναπαριστά τον συνήθη συντελεστή ανάκλασης Fresnel [3.14], [3.18]).

3.4 Εναλλακτική μορφή ολοκληρωμάτων με νέα αλλαγή μεταβλητής ως προς τη γωνία πρόσπτωσης

Σε αυτή την παράγραφο θα εφαρμόσουμε μία διαφορετική αλλαγή μεταβλητής για τον μετασχηματισμό των ολοκληρωμάτων του ηλεκτρικού πεδίου, προκειμένου να καταλήξουμε σε νέες αναλυτικές λύσεις. Επιπλέον, θα κάνουμε κατάλληλο μετασχηματισμό μεταβλητής σε όλο το εύρος ολοκλήρωσης (προηγουμένως είχαμε λάβει υπόψη την κύρια συνεισφορά στο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο που προέρχεται από το εύρος ολοκλήρωσης $-k_{01}$ έως k_{01}).

Όπως δείξαμε στην παράγραφο 3.3, το ολοκλήρωμα (3.1) μπορεί να γραφεί ως:

$$\underline{E}^R = -\frac{ip}{8\pi\epsilon_0\epsilon_1} (I_1 + I_2 + I_3) \quad (3.27)$$

όπου

$$I_1 = \int_{-k_{01}}^{+k_{01}} \underline{g}(k_\rho) dk_\rho, I_2 = \int_{k_{01}}^{+\infty} \underline{g}(k_\rho) dk_\rho, I_3 = \int_{-k_{01}}^{-\infty} \underline{g}(k_\rho) dk_\rho \quad (3.28)$$

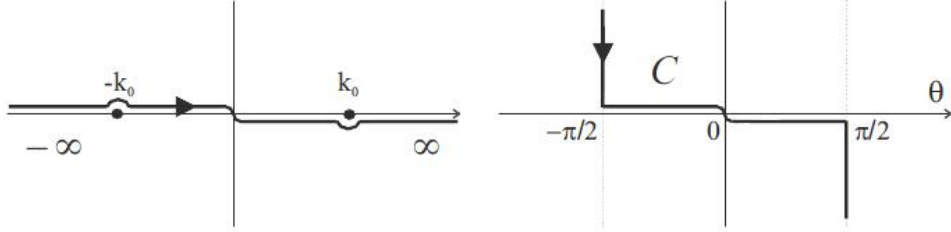
Στα αποτελέσματα προσομοίωσης λάβαμε υπόψη το διάστημα $(-k_{01}, k_{01})$ (ολοκλήρωμα I_1) δεδομένου ότι περιέχει τους πόλους της συνάρτησης και συνεισφέρει σε μεγάλο βαθμό στο λαμβανόμενο πεδίο. Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος κάναμε τον μετασχηματισμό μεταβλητής $k_\rho = k_{01} \cos \alpha$, με τον οποίο μετασχηματίστηκε το διάστημα ολοκλήρωσης από $(-k_{01}, k_{01})$ ως προς k_ρ , σε $(0, \pi)$ ως προς την γωνία πρόσπτωσης α .

Στην παρούσα παράγραφο θα εφαρμόσουμε έναν διαφορετικό μετασχηματισμό μεταβλητής για το ολοκλήρωμα I_1 , και επιπλέον κατάλληλους μετασχηματισμούς για τα ολοκληρώματα I_2, I_3 προκειμένου να απεικονίσουμε στο σύνολό της την τελική μορφή του λαμβανόμενου πεδίου. Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει τον μετασχηματισμό που κάνουμε για κάθε ολοκλήρωμα:

Ολοκλήρωμα	Μετασχηματισμός μεταβλητής	Νέο εύρος ολοκλήρωσης
$I_1 = \int_{-k_{01}}^{+k_{01}} \underline{g}(k_\rho) dk_\rho$	$k_\rho = k_{01} \sin \alpha$	$[-\pi/2, +\pi/2]$
$I_2 = \int_{k_{01}}^{+\infty} \underline{g}(k_\rho) dk_\rho$	$k_\rho = k_{01} \cosh \alpha$	$[0, +\infty]$
$I_3 = \int_{-k_{01}}^{-\infty} \underline{g}(k_\rho) dk_\rho$	$k_\rho = -k_{01} \cosh \alpha$	$[0, +\infty]$

Πίνακας 3-1 – Μετασχηματισμός μεταβλητών για υπολογισμό ολοκληρωμάτων και αλλαγή ορίων των ολοκληρωμάτων

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος I_1 , κάνουμε τον μετασχηματισμό μεταβλητής $k_\rho = k_{01} \sin \alpha$, το οποίο μετασχηματίζει το εύρος ολοκλήρωσης $[-k_{01}, +k_{01}]$ στο πεδίο k_ρ στο εύρος $[-\pi/2, \pi/2]$ της γωνίας α .



Εικόνα 3-1 Μετασχηματισμός μεταβλητής

Με αυτό τον μετασχηματισμό, ισχύει:

$$k_1 = k_{01} \cos \alpha, k_2 = \sqrt{k_{02}^2 - k_{01}^2 \sin^2 \alpha} \quad (3.29)$$

Εφαρμόζοντας τον παραπάνω μετασχηματισμό μεταβλητής στο ολοκλήρωμα I_1 και με τη χρήση των (3.10) και (3.29), η εξίσωση του I_1 γίνεται:

$$I_1 = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} (\cos \alpha \hat{e}_\rho - |\sin \alpha| \hat{e}_x) \sin \alpha |\sin \alpha| \cdot R_{||}(\alpha) \cdot H_0^{(1)}(\rho k_{01} \sin \alpha) e^{i k_{01}(x+x_0)\cos \alpha} d\alpha \quad (3.30)$$

όπου:

$$R_{||}(\alpha) = \frac{\varepsilon_2 k_{01} \cos \alpha - \varepsilon_1 \sqrt{k_{02}^2 - k_{01}^2 \sin^2 \alpha}}{\varepsilon_2 k_{01} \cos \alpha + \varepsilon_1 \sqrt{k_{02}^2 - k_{01}^2 \sin^2 \alpha}} \quad (3.31)$$

Η εξίσωση (3.30) μπορεί να χωριστεί περαιτέρω σε δύο ολοκληρώματα:

$$I_1 = \int_0^{+\pi/2} [(\cos \alpha \hat{e}_\rho - \sin \alpha \hat{e}_x) \sin^2 \alpha \cdot R_{||}(\alpha) \cdot H_0^{(1)}(\rho k_{01} \sin \alpha) e^{i k_{01}(x+x_0)\cos \alpha}] \cdot d\alpha \quad (3.32)$$

$$- \int_{-\pi/2}^0 [(\cos \alpha \hat{e}_\rho + \sin \alpha \hat{e}_x) \sin^2 \alpha \cdot R_{||}(\alpha) \cdot H_0^{(1)}(\rho k_{01} \sin \alpha) e^{i k_{01}(x+x_0)\cos \alpha}] \cdot d\alpha$$

Τέλος, παρατηρώντας από την εξίσωση (3.31) ότι $R_{||}(-\alpha) = R_{||}(\alpha)$ και χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της συνάρτησης Hankel:

$$H_0^{(1)}(z) + H_0^{(2)}(z) = 2J_0(z) \quad (3.33)$$

$$H_0^{(1)}(z \cdot e^{i\pi}) = -H_0^{(2)}(z) \quad (3.34)$$

Είναι εύκολο να δείξουμε ότι:

$$I_1 = 2 \int_0^{+\pi/2} [(\cos \alpha \hat{e}_\rho - \sin \alpha \hat{e}_x) \cdot \sin^2 \alpha \cdot R_{||}(\alpha) \cdot J_0(\rho k_{01} \sin \alpha) \cdot e^{i k_{01}(x+x_0)\cos \alpha}] d\alpha \quad (3.35)$$

όπου J_0 είναι η συνάρτηση Bessel μηδενικής τάξης.

Για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων I_2 και I_3 ακολουθούμε παρόμοια προσέγγιση. Αυτή τη φορά χρησιμοποιούμε τους μετασχηματισμούς μεταβλητής $k_\rho = k_{01} \cosh a$ και $k_\rho = -k_{01} \cosh a$ αντίστοιχα, οι οποίοι μετασχηματίζουν τα όρια ολοκλήρωσης από $[k_{01}, +\infty]$ και $[-\infty, -k_{01}]$ ως προς k_ρ σε $[0, +\infty]$ ως προς τη μεταβλητή a . Επιπλέον, και στις δύο περιπτώσεις προκύπτει:

$$\kappa_1 = ik_{01} \sinh a, \kappa_2 = \sqrt{k_{02}^2 - k_{01}^2 \cosh^2 a} \quad (3.36)$$

Συνεπώς, εφαρμόζοντας παρόμοια βήματα με τον υπολογισμό του ολοκληρώματος I_1 και χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (3.33) και (3.34), είναι εύκολο να αθροίσουμε τα αποτελέσματα για τα ολοκληρώματα I_2 και I_3 ως εξής:

$$I_2 + I_3 = \frac{2}{i} \int_0^\infty \left[(i \sinh a \hat{e}_\rho - \cosh a \hat{e}_x) \cdot \cosh^2 a \cdot R'_{||}(\alpha) \cdot J_0(\rho k_{01} \cosh a) \cdot e^{-k_{01}(x+x_0) \sinh a} \right] d\alpha \quad (3.37)$$

όπου:

$$R'_{||}(\alpha) = \frac{i\varepsilon_2 k_{01} \sinh a - \varepsilon_1 \sqrt{k_{02}^2 - k_{01}^2 \cosh^2 a}}{i\varepsilon_2 k_{01} \sinh a + \varepsilon_1 \sqrt{k_{02}^2 - k_{01}^2 \cosh^2 a}} \quad (3.38)$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (3.27), (3.35) και (3.37) η έκφραση για το ανακλώμενο Ηλεκτρικό πεδίο γίνεται:

$$\underline{E}^R = -\frac{ipk_{01}^3}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1} \left\{ \begin{array}{l} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(\cos \alpha \hat{e}_\rho - \sin \alpha \hat{e}_x) \cdot \sin^2 \alpha \cdot R_{||}(\alpha) \cdot J_0(\rho k_{01} \sin \alpha) \cdot e^{i k_{01}(x+x_0) \cos \alpha} \right] d\alpha - \\ -i \int_0^\infty \left[(i \sinh a \hat{e}_\rho - \cosh a \hat{e}_x) \cdot \cosh^2 a \cdot R'_{||}(\alpha) \cdot J_0(\rho k_{01} \cosh a) \cdot e^{-k_{01}(x+x_0) \sinh a} \right] d\alpha \end{array} \right\} \quad (3.39)$$

Κάνοντας αντίστοιχη αλλαγή μεταβλητής για την περίπτωση του μαγνητικού πεδίου (όπως φαίνεται στον Πίνακα 3-1), προκύπτει και η αντίστοιχη σχέση για το μαγνητικό πεδίο:

$$\underline{H}^R = -\frac{i\omega\pi k_{01}^2}{4\pi} \left[\begin{array}{l} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \alpha \cdot R_{||}(\alpha) \cdot J_0(\rho k_{01} \sin \alpha) \cdot e^{i k_{01}(x+x_0) \cos \alpha} d\alpha - \\ -i \int_0^\infty \cosh^2 \alpha R'_{||}(\alpha) \cdot J_0(\rho k_{01} \cosh a) \cdot e^{-k_{01}(x+x_0) \sinh a} d\alpha \end{array} \right] \hat{e}_\alpha \quad (3.40)$$

3.5 Αριθμητικά αποτελέσματα: Σύγκριση της μεθόδου στάσιμης φάσης ως προς την γωνία πρόσπτωσης με τεχνικές αριθμητικής ολοκλήρωσης

Σε αυτή την παράγραφο, επεκτείνουμε τα αποτελέσματα της προσομοίωσης για όλα τα συστατικά του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου (απευθείας, σκεδαζόμενο, συνολικό πεδίο) για πολλαπλές αποστάσεις και συχνότητες.

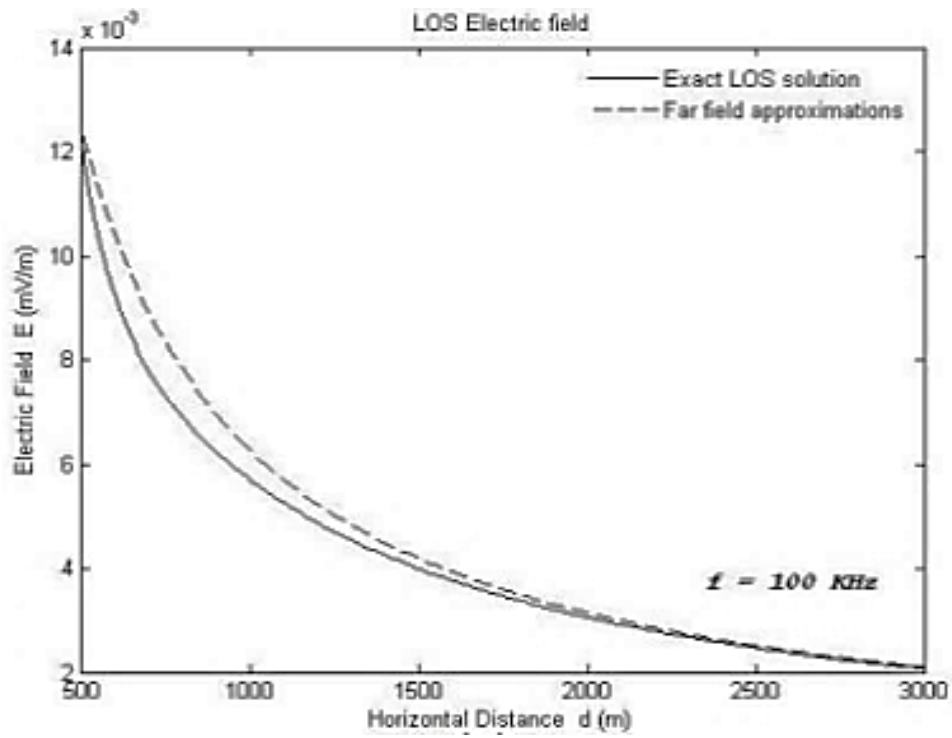
Ο παρακάτω πίνακας συνοψίζει τις βασικές παραμέτρους που έχουν οριστεί για τις προσομοιώσεις. Επίσης, τα αποτελέσματα αριθμητικής ολοκλήρωσης που παρουσιάζονται αναφέρονται στην αρχική ολοκληρωτική μορφή της εξίσωσης (3.1).

Σύμβολο	Περιγραφή	Τιμή
x_0	Ύψος πομπού	60 m
X	Ύψος σημείου παρατήρησης (δέκτης)	15 m
I	Ρεύμα του διπόλου Hertz ¹	1 A
$2h$	Μήκος του διπόλου Hertz ²	0.1 m
ϵ_r	Σχετική διηλεκτρική σταθερά του εδάφους	20
Σ	Αγωγιμότητα εδάφους	0.01 S/m
	Εύρος κοντινής απόστασης	10m – 500m
	Εύρος μακρινής απόστασης	1km – 5km
	Τεχνική αριθμητικής ολοκλήρωσης	Adaptive Simpson
	Εξαιρετέο διάστημα γύρω από τον απειρισμό k_{01}	$0.00001 \cdot k_{01}$
	Ανοχή για τη σύγκλιση του ολοκληρώματος	$10^{-9} - 10^{-6}$
Σημείωση: ¹ Σχέση μεταξύ του ρεύματος I και της διπολικής ροπής p : $I(2h)=i\omega p$ Όπου $\omega=2\pi f$ και i είναι ο μοναδιαίος φανταστικός αριθμός ² πολύ μικρότερο από το μήκος κύματος $\lambda=c/f$		

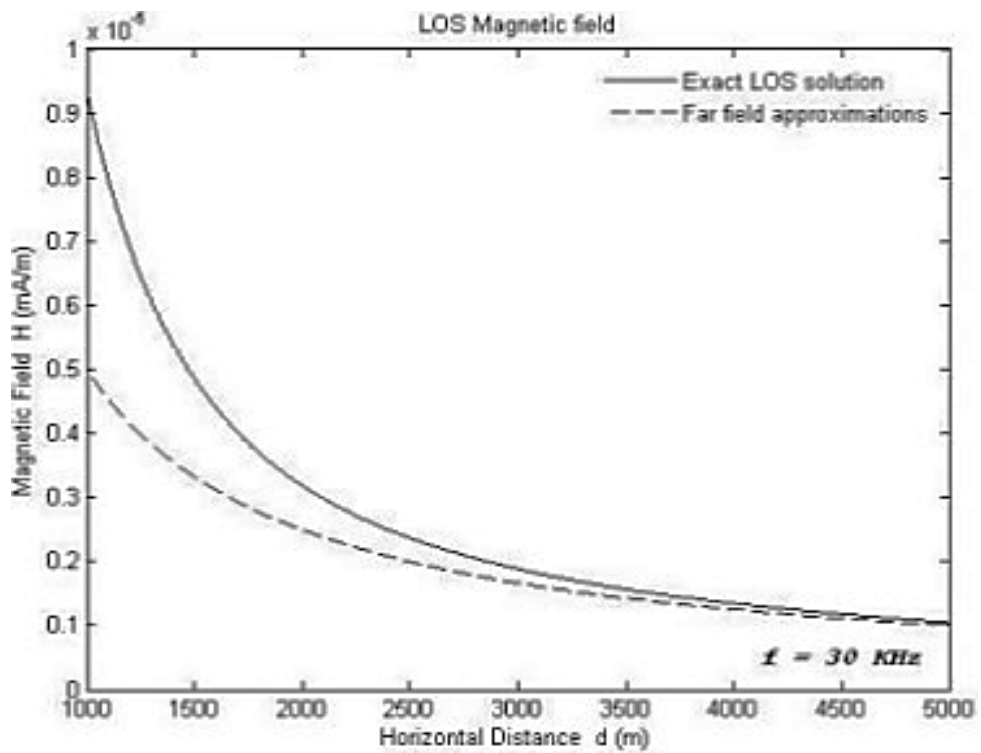
Πίνακας 3-1 Παράμετροι προσομοίωσης

Η Εικόνα 3-2 αφορά στα αποτελέσματα προσομοίωσης του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου στον ελεύθερο χώρο. Συγκεκριμένα, απεικονίζει τη σύγκλιση των ακριβών εκφράσεων (3.3) – (3.5), και των γνωστών από τη βιβλιογραφία προσεγγίσεων μακρινού πεδίου

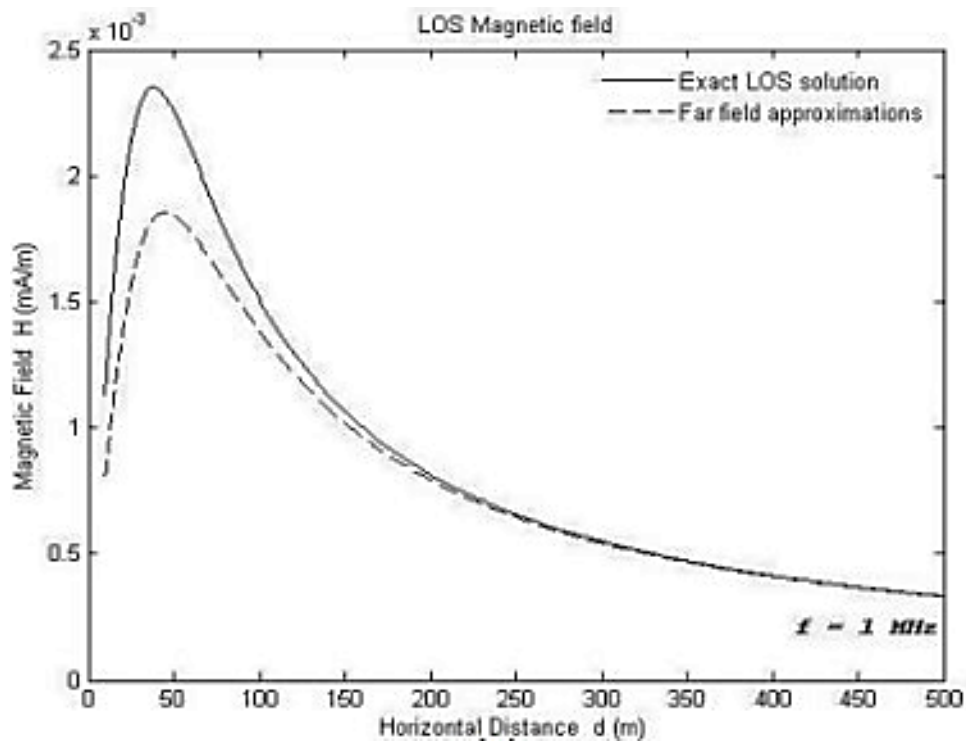
[3.19].



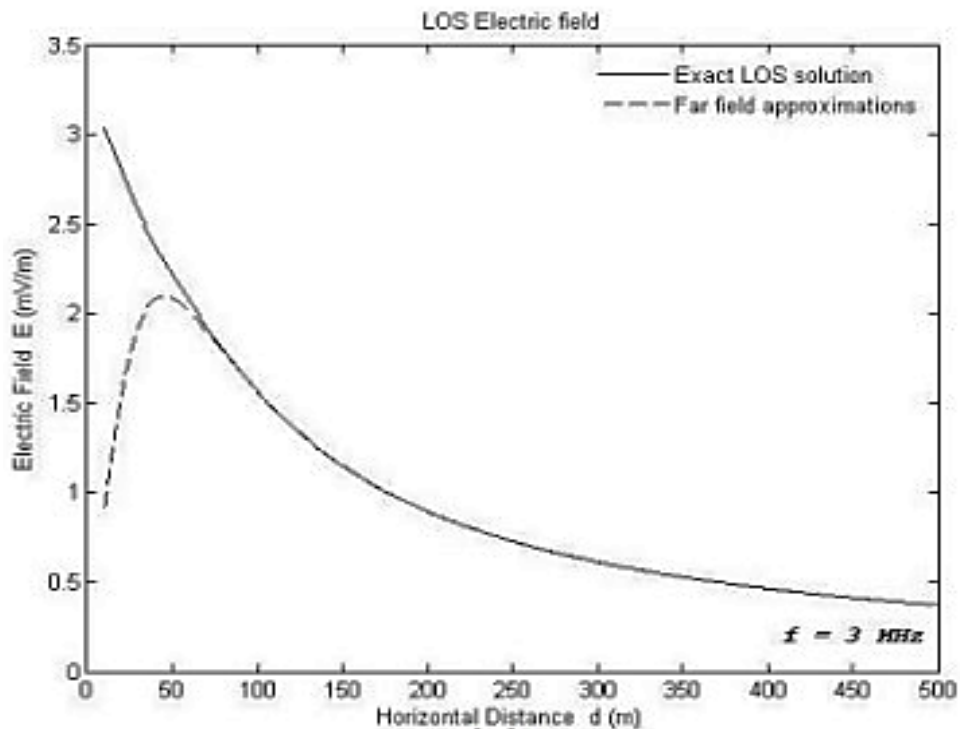
(a) $f = 100 \text{ kHz}$



(b) $f = 30 \text{ kHz}$



(γ) $f = 1 \text{ MHz}$



(δ) $f = 3 \text{ MHz}$

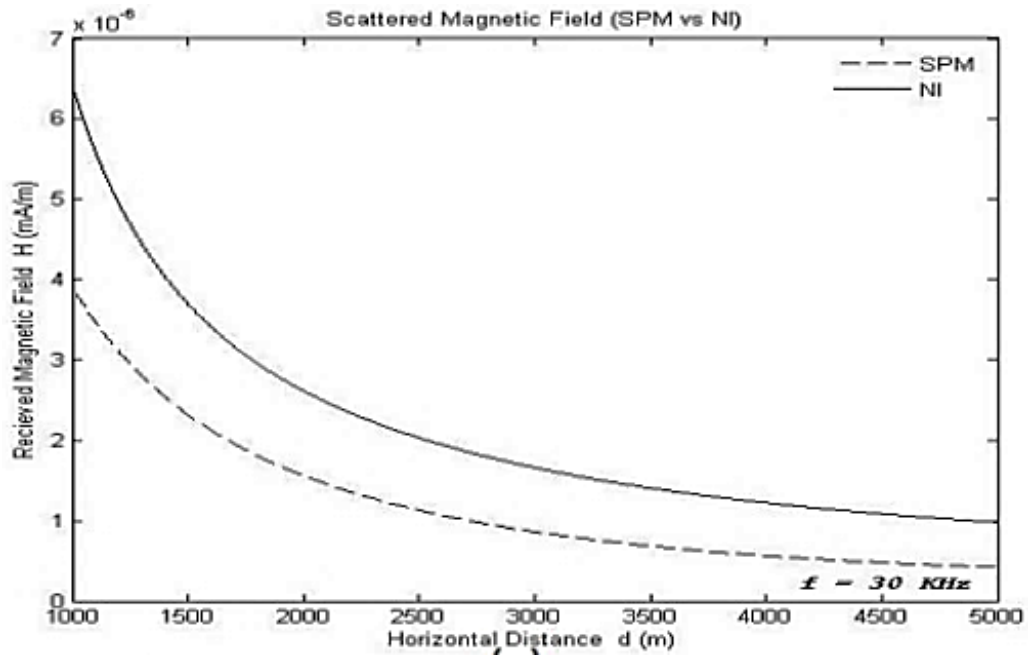
Εικόνα 3-2 Σύγκριση του απευθείας ηλεκτρομαγνητικού πεδίου (Line of sight - LOS) – Χρήση ακριβούς εξίσωσης και προσέγγισης μακρινού πεδίου

Όπως αναμένεται, η σύγκλιση επιτυγχάνεται ταχύτερα στις υψηλές συχνότητες. Για το πρόβλημα που εξετάζεται εδώ, το οποίο καλύπτει αποστάσεις έως 5 km, είναι δυνατό να

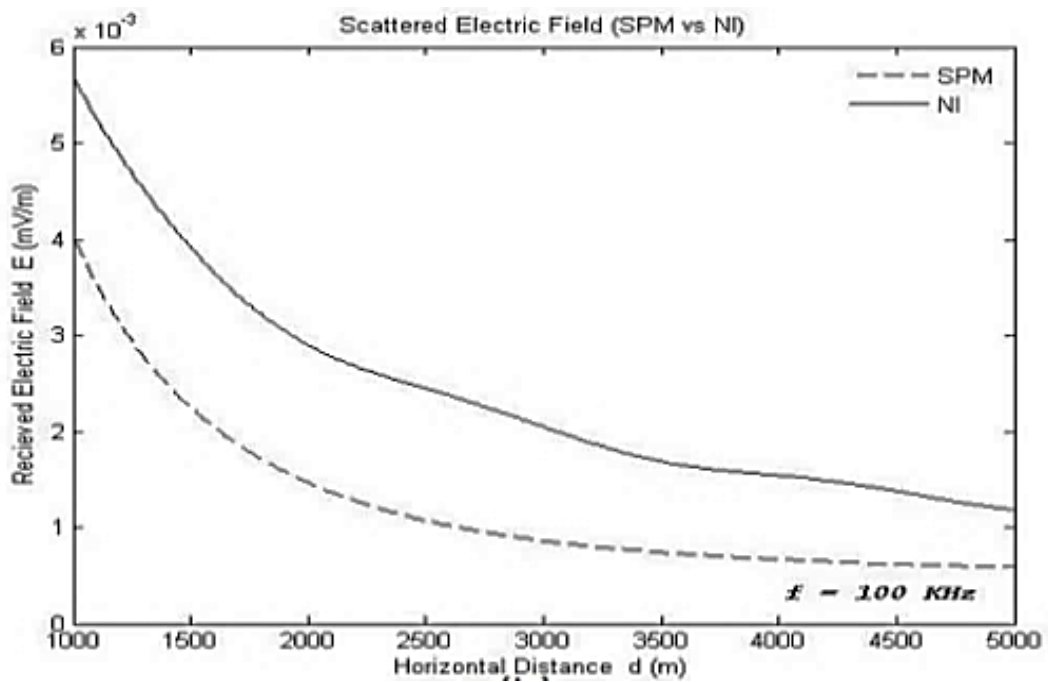
υπάρξουν σημαντικές αποκλίσεις για ακόμα μεγαλύτερες αποστάσεις όπως φαίνεται στην Εικόνα 3-2 (a) και Εικόνα 3-2(b). Συνεπώς, υπό αυτές τις συνθήκες η αναλυτική λύση SPM της εξίσωσης (3.25) δεν είναι ακριβής. Ο λόγος είναι ότι η (3.25) στη ουσία υποδεικνύει εκπομπή σφαιρικών (και για μεγάλες αποστάσεις επίπεδων) κυμάτων, ενώ σύμφωνα με τις (3.3) – (3.5) αυτό δεν ισχύει (εξάρτηση από τις μεγαλύτερου βαθμού $1/r$).

Τα διαγράμματα στην Εικόνα 3-3 σχετίζονται μόνο με το σκεδαζόμενο πεδίο. Συγκεκριμένα, συγκρίνουμε το ανακλώμενο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο όπως υπολογίζεται με την μέθοδο SPM, με τις αντίστοιχες τιμές του πεδίου που προκύπτουν από τον αριθμητικό υπολογισμό των αντίστοιχων ολοκληρωτικών εκφράσεων. Με άλλα λόγια συγκρίνουμε την εξίσωση (3.1) με την εξίσωση (3.6), έχοντας προηγουμένως αφαιρέσει τη συνεισφορά του απευθείας πεδίου από την (3.1).

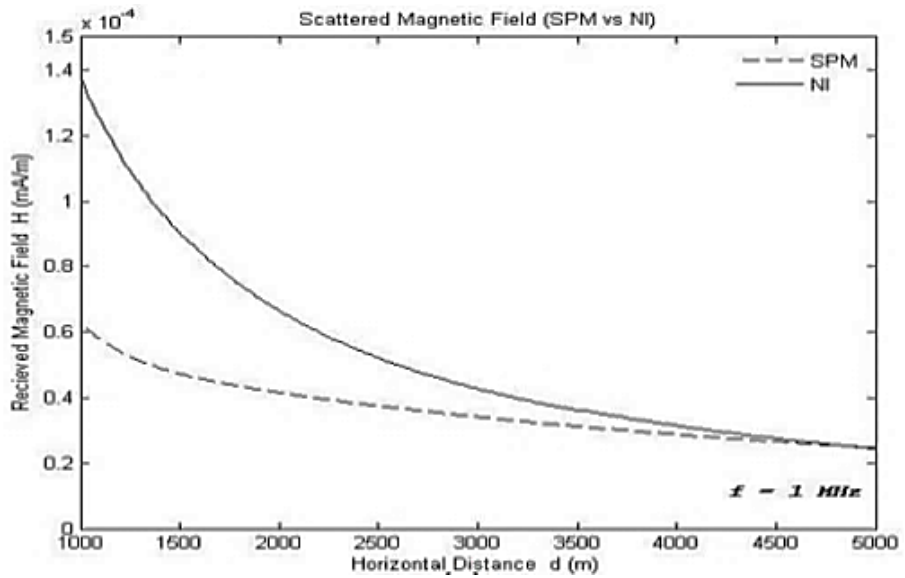
ΑΝΑΚΛΩΜΕΝΟ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ
<p>ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ - Εξίσωση (3.1)</p> $\underline{E}(r) = \underline{E}^{LOS}(r) - \frac{ip}{8\pi\epsilon_{r1}\epsilon_0}$ $\times \left\{ \hat{e}_\rho \int_{-\infty}^{\infty} k_\rho^2 \frac{\epsilon'_{r2}\kappa_1 - \epsilon_{r1}\kappa_2}{\epsilon'_{r2}\kappa_1 + \epsilon_{r1}\kappa_2} e^{ik_1(x+x_0)} \times H_0^{(1)}(k_\rho\rho) dk_\rho - \right.$ $\left. - \hat{e}_x \int_{-\infty}^{\infty} k_\rho^3 \frac{\epsilon'_{r2}\kappa_1 - \epsilon_{r1}\kappa_2}{\kappa_1(\epsilon'_{r2}\kappa_1 + \epsilon_{r1}\kappa_2)} e^{ik_1(x+x_0)} \times H_0^{(1)}(k_\rho\rho) dk_\rho \right\}$ <p><i>*Στην προσομοίωση αφαιρούμε την συνεισφορά του απευθείας πεδίου $\underline{E}^{LOS}(r)$.</i></p>
<p>ΜΕΘΟΔΟΣ ΣΤΑΣΙΜΗΣ ΦΑΣΗΣ – Εξίσωση (3.6)</p> $\underline{E}_{x>0}^{SC} = \frac{pk_{01} \cos \varphi}{4\pi\epsilon_0\epsilon_{r1}(A'A)} \times \frac{\epsilon'_{r2}\kappa_{1s} - \epsilon_{r1}\kappa_{2s}}{\epsilon'_{r2}\kappa_{1s} + \epsilon_{r1}\kappa_{2s}} \times e^{ik_{\rho s}\rho} \times e^{ik_{1s}(x+x_0)} \times (-\kappa_{1s}\hat{e}_\rho + k_{\rho s}\hat{e}_x)$



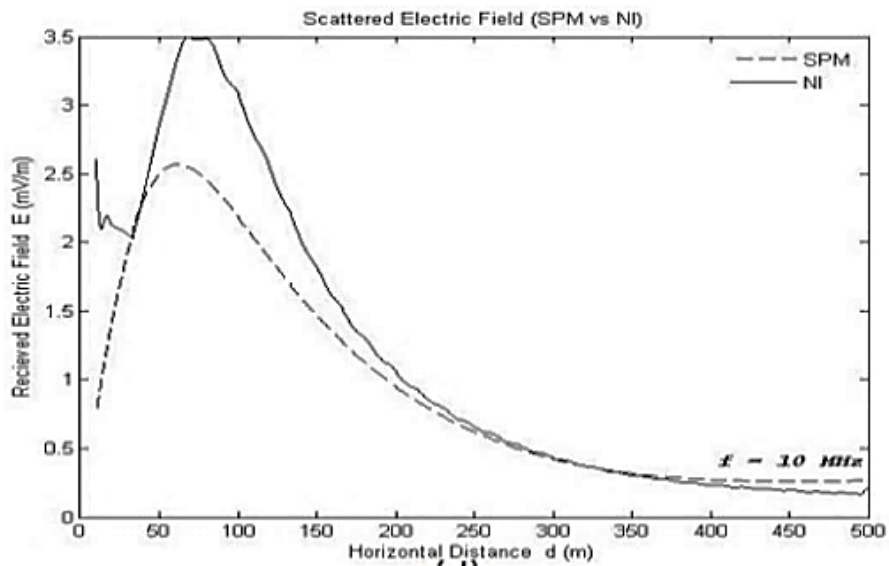
Εικόνα 3-3 (α) $f = 30$ kHz



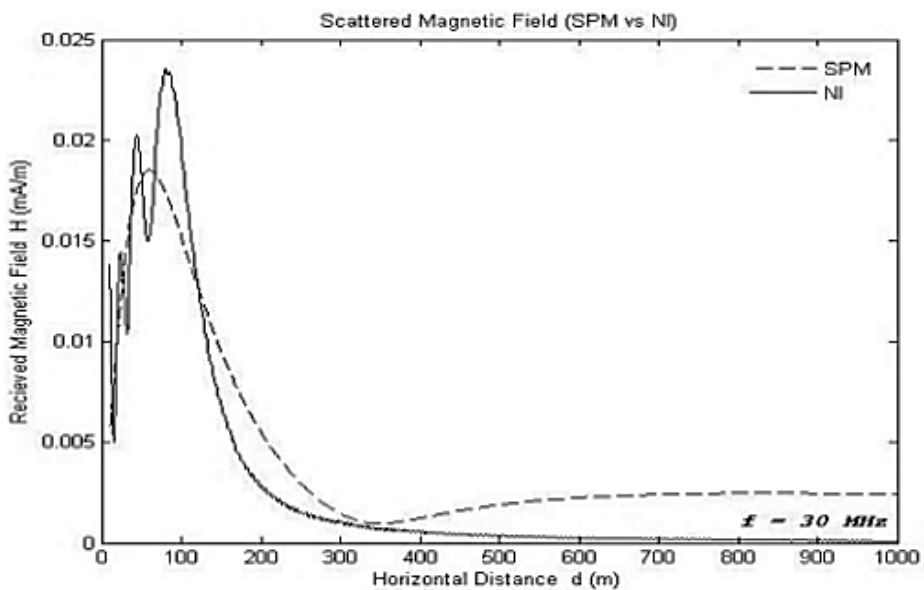
Εικόνα 3-3 (β) $f = 100$ kHz



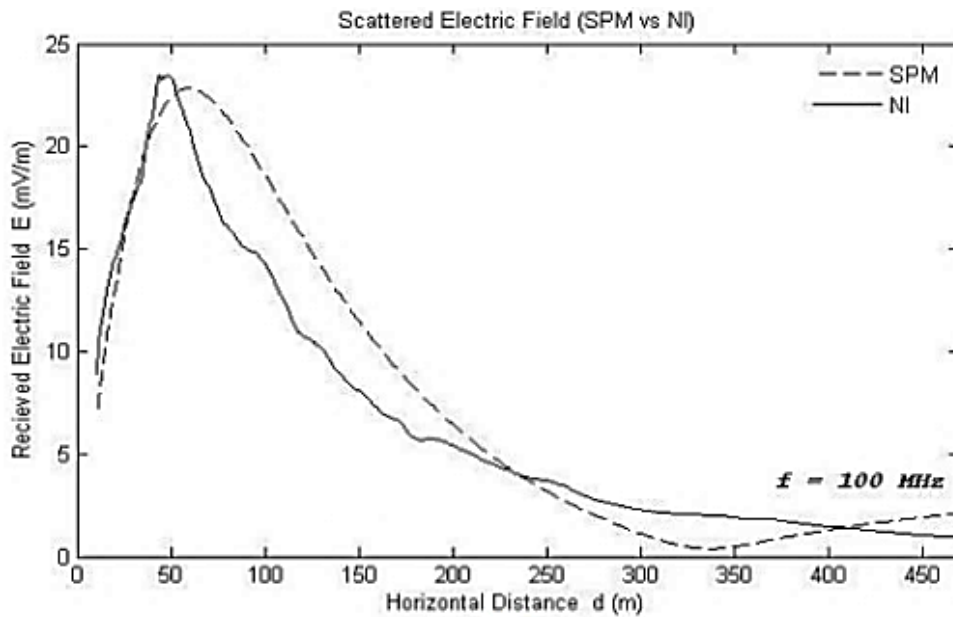
Εικόνα 3-3 (γ) $f = 1 \text{ MHz}$



Εικόνα 3-3 (δ) $f = 10 \text{ MHz}$



Εικόνα 3-3 (ε) $f = 30 \text{ MHz}$



Εικόνα 3-3 (ζ) $f = 100 \text{ MHz}$

Εικόνα 3-3 Σύγκριση μεθόδων SPM και αριθμητικής ολοκλήρωσης για τον υπολογισμό του σκεδαζόμενου ΗΜ πεδίου

Από την Εικόνα 3-3 (α) και (β) είναι εμφανές ότι στις συχνότητες των 30 KHz και 100 KHz η μέθοδος στάσιμης φάσης υποτιμά σημαντικά το επίπεδο του σήματος (το κενό μεταξύ των δύο καμπυλών τείνει να αυξάνει για μικρότερες αποστάσεις) και αυτό ισχύει τόσο για το εύρος αποστάσεων του κοντινού όσο και του μακρινού πεδίου (Πίνακας 3-1).

Παρόμοια συμπεριφορά παρατηρείται για όλες τις συχνότητες μέχρι το 1 MHz. Σε αυτή τη συχνότητα, η Εικόνα 3-3 (γ) δείχνει ότι απαιτούνται περίπου 4.8 km ώσπου να ταιριάξουν τα αποτελέσματα της μεθόδου SPM με την αριθμητική ολοκλήρωση, μία απόσταση η οποία αντιστοιχεί σε 16 μήκη κύματος (16 λ).

Στα 10 MHz (Εικόνα 3-3 (δ)), τα αποτελέσματα της αριθμητικής ολοκλήρωσης υπερβαίνουν τις τιμές της SPM έως τα 350 m (ή εναλλακτικά για απόσταση 13 λ–14 λ) μακριά από τον πομπό. Σε ακόμα μεγαλύτερα εύρη συχνοτήτων αυτή η παρατήρηση ουσιαστικά διατηρείται. Όπως βλέπουμε στην Εικόνα 3-3 (ε), η SPM παρέχει καλύτερες εκτιμήσεις μετά τα 150 m (δηλαδή σε απόσταση 15 λ). Αυτό ισχύει και στα 100 MHz (βλ. Εικόνα 3-3 (ζ)). Η ‘απόσταση αλλαγής συμπεριφοράς’ (breakpoint distance – θα εξηγηθεί παρακάτω η χρήση του όρου), μετά την οποία η SPM συμπεριφέρεται καλύτερα από την αριθμητική ολοκλήρωση, φαίνεται να είναι κοντά στα 55 m ή περίπου 18 μήκη κύματος μακριά από την πηγή.

Συνεπώς, η καταλληλότητα εφαρμογής της μεθόδου SPM καθορίζεται από το

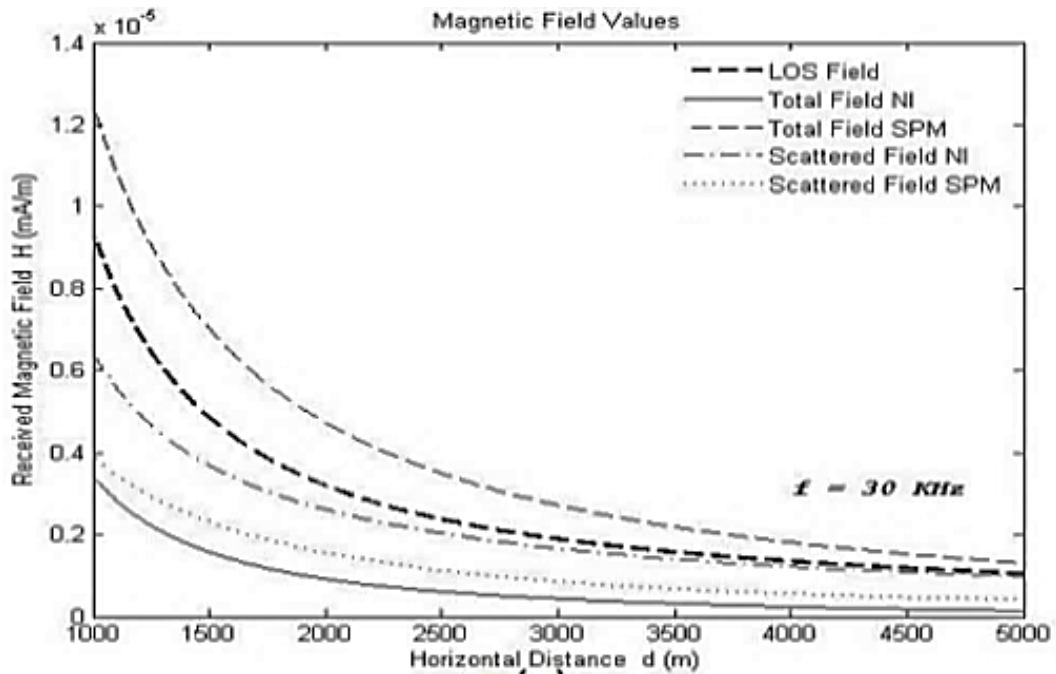
συνδυασμό της συχνότητας λειτουργίας και της απόστασης από τον πομπό. Αυτό μπορεί να εκφραστεί είτε σε όρους μίας απόστασης η οποία σχετίζεται με το μήκος κύματος της ακτινοβολίας, ή ισοδύναμα από την ηλεκτρική απόσταση $k \cdot r$. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της προσομοίωσης, μία κατάλληλη απόσταση αναφοράς στην οποία προκύπτουν ακριβείς τιμές από την εξίσωση (3.24) είναι περίπου τα $\sim 16 \lambda$. Σε όρους ηλεκτρικής απόστασης, αυτό ισοδυναμεί με 32π .

Τέλος, παρατηρώντας την Εικόνα 3-3 (ζ), βλέπουμε ότι πριν την ‘απόσταση αλλαγής συμπεριφοράς’ οι μέθοδοι SPM και NI δίνουν κοντινά αποτελέσματα. Αυτό ουσιαστικά σημαίνει ότι σε συχνότητες μεγαλύτερες των 100 MHz η μέθοδος SPM είναι γενικά εφαρμόσιμη και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για σχεδόν κάθε απόσταση στο πεδίο ενδιαφέροντος (τουλάχιστον μετά τα 10 m το οποίο ήταν το ελάχιστον όριο των υπολογισμών μας). Αυτό συμβαδίζει με τον γενικό χαρακτηρισμό της μεθόδου SPM ως μία μέθοδος υπολογισμού μεγάλων συχνοτήτων.

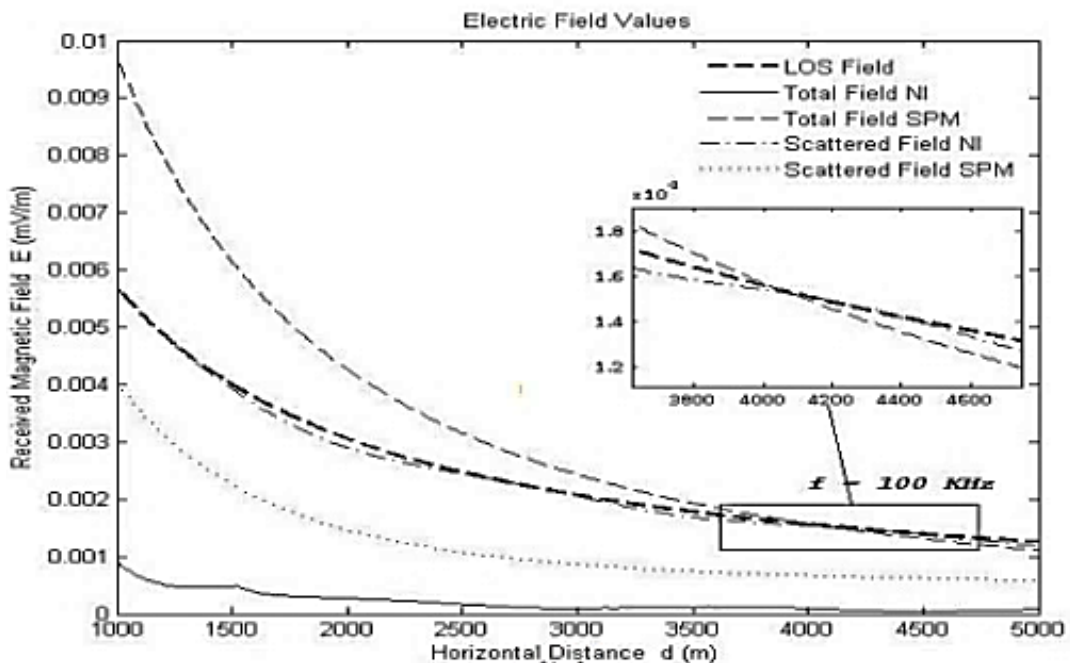
Μία σημαντική παρατήρηση για την ερμηνεία των παραπάνω αποτελεσμάτων είναι ότι η χρησιμοποιούμενη μέθοδος SPM είναι μία ασυμπτωτική μέθοδος για τον υπολογισμό της ολοκληρωτικής εξίσωσης (3.1). Με άλλα λόγια, όταν τηρούνται οι συνθήκες εφαρμογής της SPM, τα αποτελέσματα που προκύπτουν είναι αρκετά κοντά με τα αποτελέσματα της αριθμητικής ολοκλήρωσης της (3.1), με την εγγύτητα να είναι καλύτερη όσο η απόσταση ρ αυξάνεται (αφού και η ηλεκτρική απόσταση αυξάνεται). Αυτό ισχύει για τις χαμηλές συχνότητες όπως φαίνεται στην Εικόνα 3-3 (α) – (γ), ενώ σε υψηλότερες συχνότητες τα αποτελέσματα της αριθμητικής ολοκλήρωσης φαίνεται να χάνουν σημαντικές συνεισφορές. Αυτό οφείλεται στην παρουσία απειρισμού γύρω από το $k_p = k_{01}$, το οποίο απαιτεί να εξαιρεθεί ένα επαρκές εύρος γύρω από το σημείο απειρισμού από το διάστημα ολοκλήρωσης. Αυτό το εύρος φαίνεται να είναι πιο σημαντικό σε υψηλές συχνότητες [3.18]. Συμπερασματικά, η ‘απόσταση αλλαγής συμπεριφοράς’ που αναφέρουμε είναι η απόσταση πέρα από την οποία η SPM ουσιαστικά παρέχει καλύτερη εκτίμηση απ’ ότι οι ακριβείς ολοκληρωτικές εξισώσεις τις οποίες προσπαθεί να υπολογίσει και επομένως σε αυτές τις περιπτώσεις ο υπολογισμός του επιπέδου του σήματος θα πρέπει να βασιστεί μόνο στις τιμές της SPM.

Τέλος, στην Εικόνα 3-4 δείχνουμε την μιγαδική συμβολή του απευθείας και του σκεδαζόμενου πεδίου χρησιμοποιώντας τις μεθόδους στάσιμης φάσης (SPM) και αριθμητικής ολοκλήρωσης. Εφόσον το υπολογιζόμενο απευθείας πεδίο (LOS) είναι κοινό και για τις δύο μεθόδους, η καμπύλη του συνολικού πεδίου ακολουθεί την μορφή

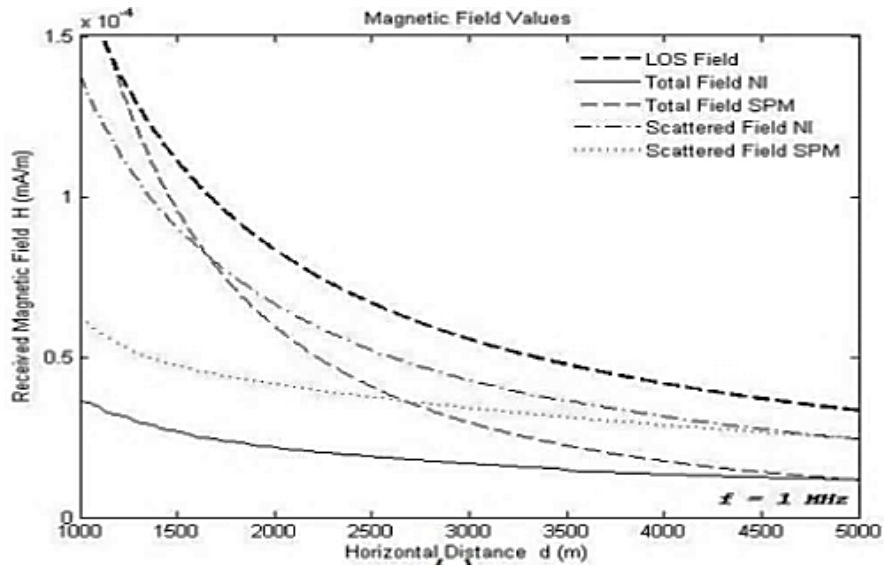
του ανακλώμενου πεδίου. Επομένως, για μία συγκεκριμένη συχνότητα, πρέπει να χρησιμοποιηθεί η αριθμητική ολοκλήρωση μέχρι την ‘απόσταση αλλαγής συμπεριφοράς’, και στη συνέχεια η SPM.



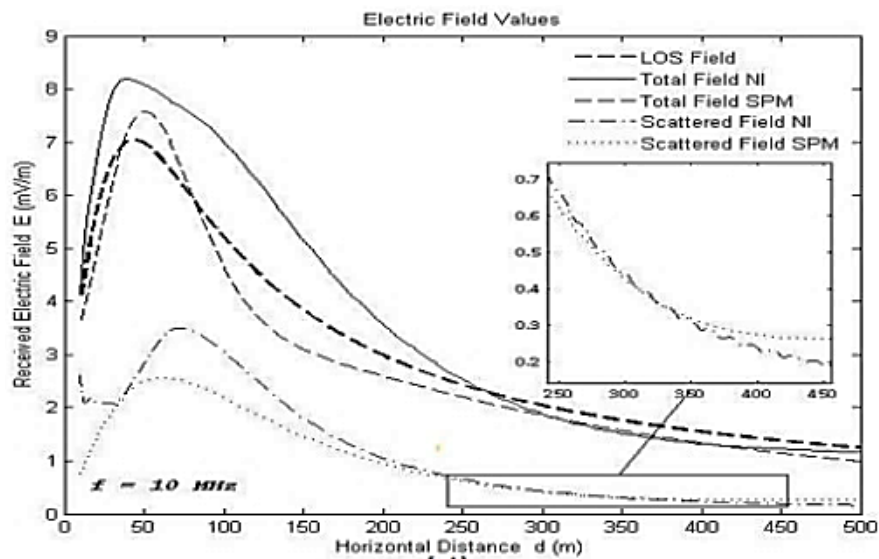
Εικόνα 3-4 (α) $f=30\text{kHz}$



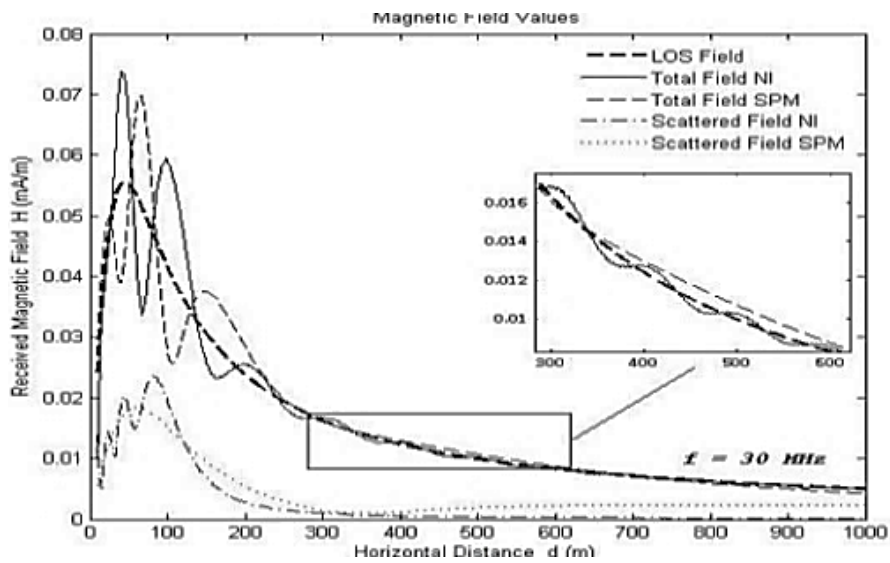
Εικόνα 3-4 (β) $f=100\text{kHz}$



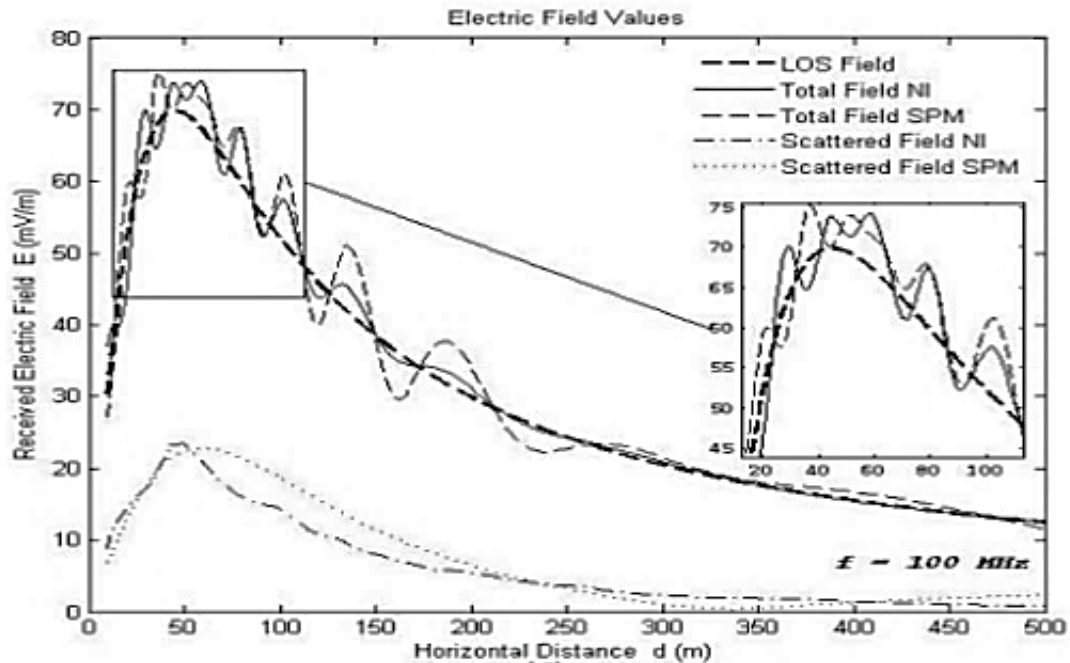
Εικόνα 3-4 (γ) $f=1\text{MHz}$



Εικόνα 3-4 (δ) $f=10\text{MHz}$



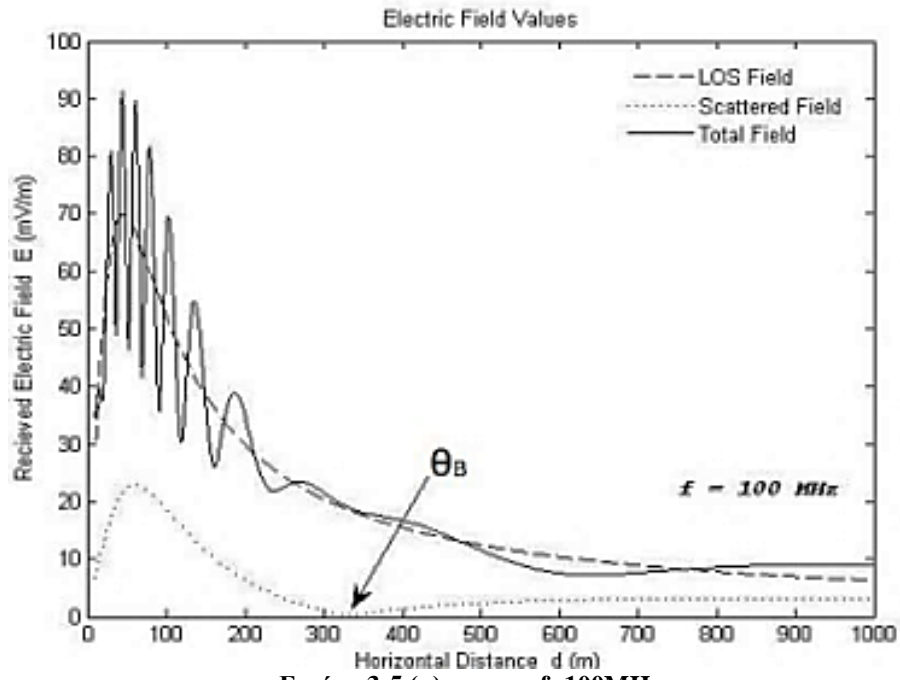
Εικόνα 3-4 (ε) $f=30\text{MHz}$



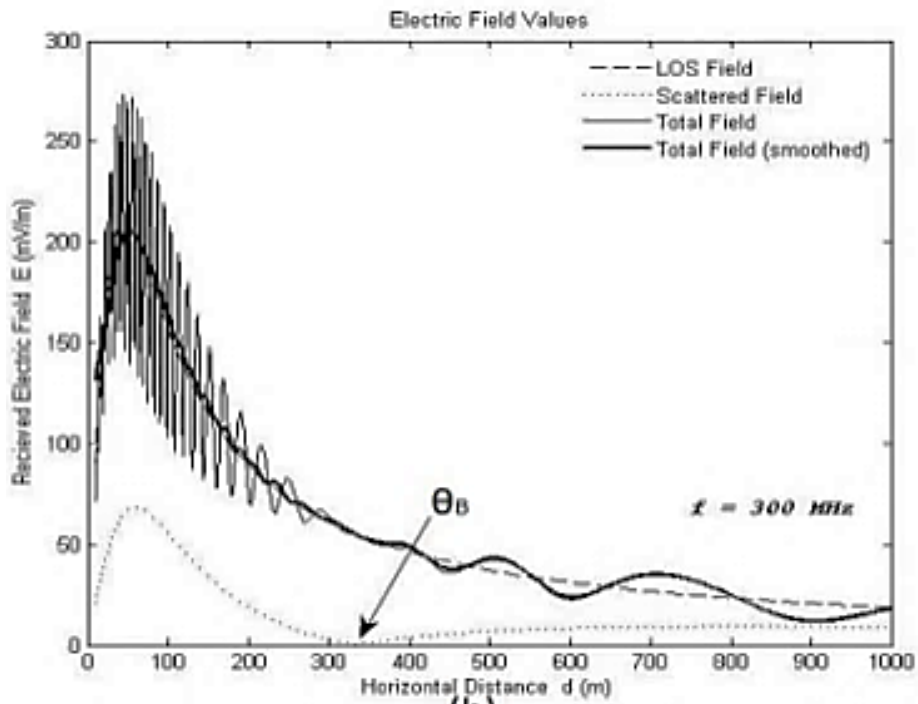
Εικόνα 3-4 (ζ) $f=100\text{MHz}$

Εικόνα 3-4 Συστατικά του ΗΜ Πεδίου (LOS, Συνολικό πεδίο και Σκεδαζόμενο πεδίο με χρήση Αριθμητικής Ολοκλήρωσης και SPM)

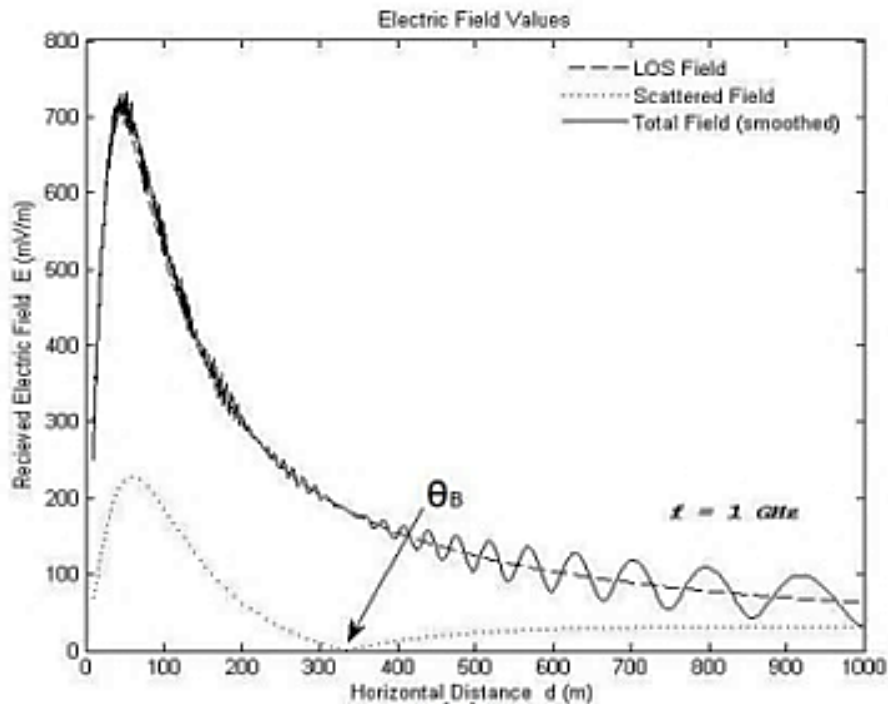
Ειδικότερα για συχνότητες πάνω από 100 MHz, η SPM ίσως είναι πιο κατάλληλη για κάθε απόσταση. Αυτό απεικονίζεται στην Εικόνα 3-5. Σε αυτές τις υψηλές συχνότητες, η σχετική μιγαδική διαπερατότητα γίνεται σχεδόν πραγματική. Ως αποτέλεσμα, εμφανίζεται η επίδραση της γωνίας Brewster (θ_B) (συγκεκριμένα, αυτή είναι η ονομαζόμενη στη βιβλιογραφία γωνία ψευδο-Brewster [3.19]) στην οποία το ανακλώμενο πεδίο σχεδόν εξαφανίζεται. Από την Εικόνα 3-3 (ζ) είναι εμφανές ότι η αριθμητική ολοκλήρωση αποτυγχάνει να περιγράψει αυτό το φαινόμενο, και αυτό αποτελεί έναν επιπλέον λόγο να μην χρησιμοποιείται η μέθοδος αυτή σε αποστάσεις μεγαλύτερες της ‘απόστασης αλλαγής συμπεριφοράς’, και ειδικά σε πολύ μεγάλες συχνότητες.



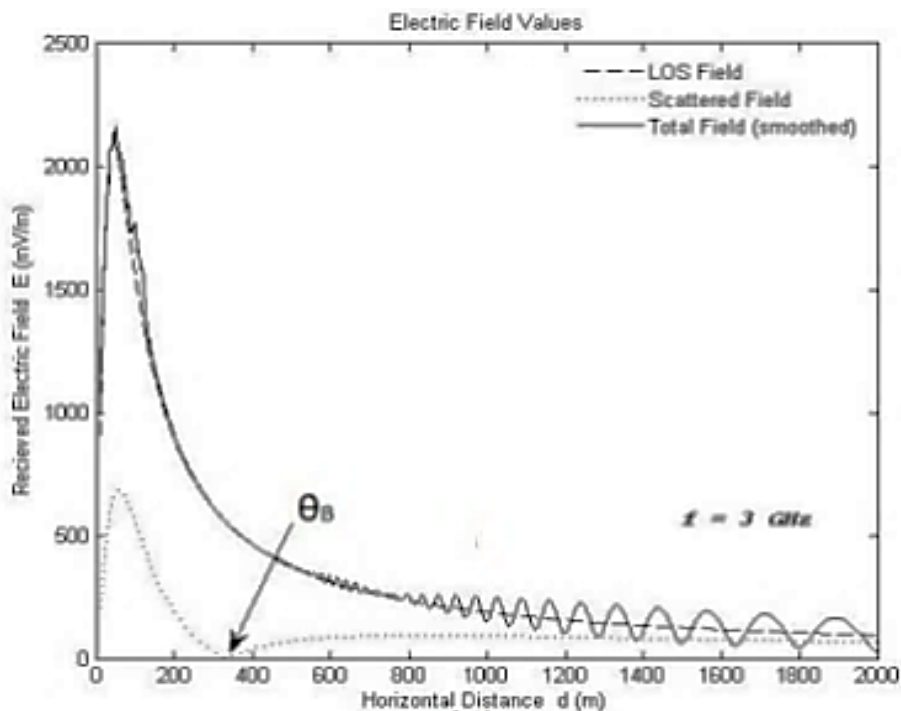
Εικόνα 3-5 (α) $f=100\text{MHz}$



Εικόνα 3-5 (β) $f=300\text{MHz}$



Εικόνα 3-5 (γ) $f=1\text{GHz}$



Εικόνα 3-5 (δ) $f=3\text{GHz}$

Εικόνα 3-5 Συμπεριφορά του απευθείας, σκεδαζόμενου και συνολικού πεδίου σε υψηλές συχνότητες & επίδραση γωνίας Brewster

Συνοπτικά, από τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων σε αυτό το κεφάλαιο, βλέπουμε ότι για επαρκώς μεγάλη απόσταση από τον πομπό σε σχέση με το μήκος κύματος το πρόβλημα μπορεί να επιλυθεί με αναλυτικό τρόπο χρησιμοποιώντας την μέθοδο στάσιμης φάσης. Όταν τηρούνται αυτές οι συνθήκες, ο μηχανισμός διάδοσης ακολουθεί

ουσιαστικά τη θεωρία της γεωμετρικής οπτικής (ray optics theory), αφού σύμφωνα με την εξίσωση (3.25), το συνολικό πεδίο είναι απλώς η άθροιση του απευθείας πεδίου και του πεδίου που ανακλάται από το κατοπτρικό σημείο (specular point). Τα αποτελέσματα προσομοίωσης δείχνουν ότι η απαίτηση για την σχετική απόσταση μπορεί να είναι μικρή όσο τα 16 μήκη κύματος (ή σε όρους ηλεκτρικής απόστασης 32π) κάνοντας την μέθοδο SPM αρκετά κατάλληλη για συνήθεις τηλεπικοινωνιακές εφαρμογές.

Σήμερα υπάρχουν πολλά λογισμικά προσομοίωσης για τον υπολογισμό του επιπέδου σήματος [3.21]–[3.23] τα οποία ουσιαστικά χρησιμοποιούν ένα συνδυασμό θεωρητικών (πχ. μοντέλο δύο ακτίνων) και εμπειρικών προσεγγιστικών μοντέλων (πχ. Hata-Okumura) για την πρόβλεψη της απώλειας σήματος. Με την πρόοδο της τεχνολογίας πληροφορικής σήμερα είναι δυνατό να γίνουν οι υπολογισμοί με χρήση τεχνικών αριθμητικής ολοκλήρωσης, με προσοχή όμως στα σφάλματα που μπορεί να προκύψουν [3.23]. Σε κάθε περίπτωση, τα πλεονεκτήματα της χρήσης ακριβών αναλυτικών μοντέλων είναι εμφανή [3.17], [3.18].

3.6 Βιβλιογραφία παρόντος κεφαλαίου

- [3.1] A. N. Sommerfeld, “Propagation of waves in wireless telegraphy”, *Ann. Phys.*, 28, pp. 665–736, 1909.
- [3.2] J. R. Wait, “The ancient and modern history of EM ground wave propagation”, *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol. 40, no. 5, pp. 7–24, 1998 <http://dx.doi.org/10.1109/74.735961>
- [3.3] R. J. King, “Electromagnetic wave propagation over a constant impedance plane”, *Radio Science*, vol. 4, pp. 225–268, 1969 <http://dx.doi.org/10.1029/RS004i003p00255>
- [3.4] J. Zenneck, “Propagation of plane EM waves along a plane conducting surface”, *Ann. Phys. (Leipzig)*, vol. 23, pp. 846–866, 1907 <http://dx.doi.org/10.5755/j01.eie.22.2.14588>
- [3.5] T. K. Sarkar et. al., “Electromagnetic macro modelling of propagation in mobile wireless communication: theory and experiment”, *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol. 54, no. 6, pp. 17–43, 2012 <http://dx.doi.org/10.1109/MAP.2012.6387779>
- [3.6] A. Jr. Banos, *Dipole Radiation in the Presence of a Conducting Half-Space*. Pergamon: New York, 1966.
- [3.7] G. Tyras, *Radiation and Propagation of Electromagnetic Waves*. Academic Press, 1969.
- [3.8] Y. Rahmat-Samii, R. Mittra, P. Parhami, “Evaluation of Sommerfeld integrals for lossy half-space problems”, *Electromagnetics*, vol. 1, pp. 1–28, 1981 <http://dx.doi.org/10.1080/02726348108915122>
- [3.9] R. E. Collin, “Hertzian dipole radiating over a lossy earth or sea: some early and late 20th-century controversies”, *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol. 46, no. 2, pp. 64–79, 2004 <http://dx.doi.org/10.1109/MAP.2004.1305535>
- [3.10] K. A. Michalski, “On the efficient evaluation of the integrals arising in the Sommerfeld half-space problem”, *Inst. Elect. Eng. Proc. Part H-Microwave, Antennas Propagat.*, vol. 132, no. 5, pp. 312–318, 1985 <http://dx.doi.org/10.1049/ip-h-2.1985.0056>
- [3.11] K. A. Norton, “The propagation of radio waves over the surface of the earth”, in *Proc. IRE*, 24, pp. 1367–1387, 1936 <http://dx.doi.org/10.1109/JRPROC.1936.227360>
- [3.12] S. Sautbekov, R. Kasimkhanova, P. Frangos, “Modified solution of Sommerfeld’s problem”, in *CEMA’10 Int. Conf.*, Athens, Greece, 2010, pp. 5–8.
- [3.13] Ch. Christakis, K. Ioannidi, S. Sautbekov, P. Frangos, S. K. Atanov, “The radiation problem from a vertical short dipole antenna above flat and lossy ground: novel formulation in the spectral domain with closed-form analytical solution in the high frequency regime”,

Electronics and Electrical Engineering Journal, vol. 20, no. 9, pp. 35–38, 2014
<http://dx.doi.org/10.5755/j01.eee.20.9.8710>

[3.14] K. Ioannidi, Ch. Christakis, S. Sautbekov, P. Frangos, S. K. Atanov, “The radiation problem from a vertical Hertzian dipole antenna above flat and lossy ground: novel formulation in the spectral domain with closed-form analytical solution in the high frequency regime”, Int. Journal Antennas and Propagation (IJAP), Hindawi Ed. Co., Special Issue ‘Propagation of electromagnetic (EM) waves over terrain’ (PEWT), vol. 2014
<http://dx.doi.org/10.1155/2014/989348>

[3.15] C. A. Balanis, Antenna Theory: Analysis and Design. New York: J. Wiley and Sons Inc., 1997, Appendix VIII: Method of Stationary Phase, pp. 922–927.

[3.16] H. Moschovitis, ‘Asymptotic methods and High Frequency Techniques for the Calculation of Electromagnetic Scattering by Using the Modified Stationary Phase Method’, Ph.D. dissertation, National Technical University of Athens (NTUA), Athens, Greece, 2010. (in Greek)

[3.17] S. Bourgiotis, K. Ioannidi, Ch. Christakis, S. Sautbekov, P. Frangos, “The radiation problem from a vertical short dipole antenna above flat and lossy ground: Novel formulation in the spectral domain with numerical solution and closed-form analytical solution in the high frequency regime”, in CEMA’14, 9th Int. Conf., Sofia, Bulgaria, 2014, pp. 12–18.

[3.18] S. Bourgiotis, A. Chrysostomou, K. Ioannidi, S. Sautbekov, P. Frangos, “Radiation of a vertical dipole over flat and lossy ground using the spectral domain approach: comparison of stationary phase method analytical solution with numerical integration results”, Elektronika ir Elektrotechnika, vol. 21, no. 3, pp. 38–41, 2015, <http://dx.doi.org/10.5755/j01.eee.21.3.10268>

[3.19] J. Fikioris, Introduction to Antenna Theory and Propagation of Electromagnetic Waves. Athens, Greece: National Technical University of Athens (NTUA), 1982. (in Greek).

[3.20] G. B. Thomas, M. D. Weir, J. R. Hass, F. Giordano, Thomas’ Calculus, Pearson, 2010.

[3.21] A. Hrovat et. al., “An open-source radio coverage prediction tool”, in ICCOM’10 Proc. 14th WSEAS Int. Conf. Communications, pp. 135–140, 2010.

[3.22] Fei Yu, “A survey of Wireless Sensor Network Simulation Tools”, [Online]. Available: <http://www1.cse.wustl.edu/~jain/cse567-11/ftp/sensor/index.html>

[3.23] A. R. Djordjevic et. al., AWAS Version 2.0: Analysis of Wire Antennas and Scatterers, Software and User ‘s Manual. Norwood, MA: Artech House, 2002.

[3.24] G. Arfken, Mathematical Methods for Physicists, 3rd Edition, Orlando, Florida, USA: Academic Press Inc., 1985, pp. 400–414.

4 Συμπεράσματα διδακτορικής διατριβής - Μελλοντικές επεκτάσεις επί της παρούσας έρευνας

4.1 Χρήση της ‘μεθόδου απότομης κατάβασης’ για τον υπολογισμό του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου

Η μέθοδος που εφαρμόσαμε παραπάνω αποτελεί μία κατάλληλη μέθοδο υπολογισμού του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου για το πρόβλημα Sommerfeld. Στην παρούσα παράγραφο, θα δείξουμε μία εναλλακτική αναλυτική μέθοδο υπολογισμού του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, βασισμένη στην μέθοδο απότομης κατάβασης. Όπως αναφέρθηκε και σε προηγούμενα κεφάλαια, η μέθοδος απότομης κατάβασης αποτελεί μία μέθοδο που έχει χρησιμοποιηθεί από πολλούς ερευνητές για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων Sommerfeld, αλλά με διαφοροποιήσεις στην επιλογή της ‘διαδρομής Steepest Descent’, καθώς επίσης με διαφορετικές παραδοχές. Ως εκ τούτου, οι αναλυτικές εκφράσεις που θα δείξουμε σε αυτό το κεφάλαιο μπορούν μελλοντικά να συγκριθούν με άλλες εκφράσεις, καθώς επίσης και με τις εκφράσεις στις οποίες καταλήξαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο (ανάλυση ως προς την γωνία πρόσπτωσης). Επίσης, μπορεί να γίνει μελλοντικά αριθμητική υλοποίηση των κατωτέρω λαμβανομένων αναλυτικών εκφράσεων και σύγκριση των αριθμητικών αποτελεσμάτων που θα προκύψουν με τα αποτελέσματα που εξαγάγαμε στα προηγούμενα κεφάλαια της παρούσας διδακτορικής διατριβής.

Στην Εικόνα 2-1 απεικονίζεται η γεωμετρία του προβλήματος. Συγκεκριμένα δίνεται σημειακό δίπολο Hertz με διπολική ροπή \underline{p} , η οποία έχει κατεύθυνση στο θετικό άξονα x ($\underline{p} = p\hat{e}_x, p = \text{σταθ.}$). Το δίπολο ακτινοβολεί από τη θέση $(x_0, 0, 0)$ πάνω από το άπειρο, επίπεδο έδαφος με απώλειες. Το σημείο A' είναι το είδωλο της πηγής A σε σχέση με το έδαφος (επίπεδο- yz), r_1 είναι η απόσταση μεταξύ της πηγής και του σημείου παρατήρησης, r_2 είναι η απόσταση μεταξύ του ειδώλου της πηγής και του σημείου παρατήρησης, θ_2 είναι η γωνία πρόσπτωσης στο λεγόμενο “κατοπτρικό σημείο” (specular point), το οποίο είναι το σημείο τομής του εδάφους με την γραμμή που ενώνει το είδωλο και σημείο παρατήρησης, και τέλος $\varphi = \pi/2 - \theta_2$ είναι η λεγόμενη “grazing angle” [4.19]. Γενικά, η λύση στις εξισώσεις του Maxwell μπορεί να γραφεί ως [4.14], [4.16]:

$$\underline{E} = -\frac{i}{\epsilon_0 \epsilon_n \omega} (\nabla \nabla \cdot + k_{0n}^2) \psi_n * \underline{j} = \frac{i}{\epsilon_0 \epsilon_n \omega} F^{-1} \left\{ \left[k_{on}^{2j} - (\underline{k} \cdot \underline{j}) \underline{k} \right] \widetilde{\psi}_n \right\} \quad (4.1)$$

$$\underline{\mathbb{H}} = -(\nabla \times \underline{j}) * \psi_n = -iF^{-1} [\widetilde{\psi}_n (\underline{k} \times \underline{j})] \quad (4.2)$$

όπου \underline{j} είναι η πυκνότητα ρεύματος, $*$ είναι το σύμβολο της συνέλιξης επί όλων των συντεταγμένων, ψ_n , $\widetilde{\psi}_n$ είναι η συνάρτηση Green και ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης Green αντίστοιχα, και το k_{0n} , $n = \{1, 2\}$ αντιπροσωπεύει τους κυματικούς αριθμούς του πρώτου ($n = 1$) και του δεύτερου ($n = 2$) μέσου (υλικού). Συγκεκριμένα, ισχύει ότι [4.14], [4.16]:

$$\psi_n = -\frac{e^{ik_{0n}r}}{4\pi r} \mu, \quad \widetilde{\psi}_n = F\{\Psi_n\} = (k_{0n}^2 - k^2)^{-1}, \quad k_{0n} = \omega\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_n\mu_0\mu_n} \quad (4.3)$$

Λόγω της συμμετρίας του προβλήματος ως προς x , το κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων είναι πιο κατάλληλο για την ανάλυση των διαφορών διανυσματικών μεγεθών παραπάνω, και για το λόγο αυτό το κυματοδιάνυσμα γράφεται ως $\underline{k} = (k_\rho, 0, k_x)$.

4.1.1 Απευθείας πεδίο

Η πηγή διπόλου Hertz στην θέση $\underline{r}_0 = (x_0, 0, 0)$ όπως φαίνεται στην Εικόνα 2-1 αντιστοιχεί σε μία πυκνότητα ρεύματος $\underline{j}^e = -i\omega\dot{p}\delta(\underline{r} - \underline{r}_0)$. Λαμβάνοντας υπόψη ότι $\underline{k} \cdot \underline{r} = k_x x + k_\rho \rho \cos(a - k_a)$ καθώς και τις ιδιότητες της συνάρτησης Dirac, ο μετασχηματισμός Fourier είναι:

$$\underline{j}^e = F\{\underline{j}^e\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{j}^e \cdot e^{-i\underline{k} \cdot \underline{r}} dx dy dz = -i\omega p \hat{e}_x e^{-ik_x x_0} \quad (4.4)$$

Στην συνέχεια χρησιμοποιώντας την εξίσωση (4.1), το απευθείας (Line of Site – LOS) πεδίο προκύπτει:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbb{E}}^{\text{LOS}} &= \frac{p}{\varepsilon_0 \varepsilon_1} F^{-1}\{(k_x \underline{k} - k_{01}^2 \hat{e}_x) e^{-ik_x x_0} \cdot \widetilde{\Psi}_1\} = \\ &= \frac{p}{\varepsilon_0 \varepsilon_1} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^\infty (k_x \underline{k} - k_{01}^2 \hat{e}_x) e^{-ik_x x_0} \cdot \widetilde{\Psi}_1 k_\rho dk_\rho dk_a dk_x = \\ &= \frac{p}{\varepsilon_0 \varepsilon_1} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^\infty [(k_x^2 - k_{01}^2) \hat{e}_x + k_\rho k_x \hat{e}_\rho] \widetilde{\Psi}_1 \cdot e^{-ik_x(x-x_0)} e^{-ik_\rho \rho \cos(k_a - \alpha)} k_\rho dk_\rho dk_a dk_x \end{aligned} \quad (4.5)$$

Στην (4.5) και προκειμένου να ολοκληρώσουμε ως προς k_a , χρησιμοποιούμε την ολοκληρωτική αναπαράσταση για την συνάρτηση Bessel [4.20], $J_0(k_\rho \rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ik_\rho \cos k_a} dk_a$. Επιπλέον, στο [4.1], ο Sommerfeld έδειξε ότι τα όρια του k_ρ μπορεί να αλλάξουν από $(0, \infty)$ σε $(-\infty, \infty)$ εάν αποδείξουμε ότι για κάθε συνάρτηση f σχύει $\int_0^\infty J_0(x) f(x) x dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty H_0^{(1)}(x) f(|x|) x dx$, όπου $H_0^{(1)}$ είναι η συνάρτηση Hankel

πρώτου είδους και μηδενικής τάξης ⁴. Ως αποτέλεσμα, και μετά από κάποιους βασικούς αλγεβρικούς υπολογισμούς, προκύπτει η παρακάτω έκφραση [4.16]:

$$\underline{E}^{\text{LOS}} = \frac{p}{8\pi^2 \varepsilon_0 \varepsilon_1} \int_{-\infty}^{\infty} [(k_x^2 - k_{01}^2) \hat{e}_x + |k_\rho| k_x \hat{e}_\rho] \Psi_1 H_0^{(1)}(k_\rho \rho) k_\rho e^{-ik_x(x-x_0)} dk_\rho dk_x \quad (4.6)$$

Η ολοκλήρωση ως προς k_x μπορεί να γίνει μέσω της χρήσης της θεωρίας ολοκληρωτικών υπολοίπων (residue theory). Αυτό έχει ως αποτέλεσμα στην παρακάτω έκφραση μονοδιάστατου ολοκληρώματος για το απευθείας ηλεκτρικό πεδίο:

$$\begin{aligned} \underline{E}^{\text{LOS}} &= \frac{ip}{8\pi \varepsilon_0 \varepsilon_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\hat{e}_x \frac{k_\rho^2}{k_1} - \hat{e}_\rho |k_\rho| \text{sgn}(x - x_0) \right] k_\rho H_0^{(1)}(k_\rho \rho) e^{ik_1|x-x_0|} dk_\rho = \\ &= \frac{ip}{8\pi \varepsilon_0 \varepsilon_1} k_{01} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{e}_{\theta_1} \frac{k_\rho |k_\rho|}{k_1} H_0^{(1)}(k_\rho \rho) e^{ik_1|x-x_0|} dk_\rho \end{aligned} \quad (4.7)$$

Όπου το $\hat{e}_{\theta_1}(k_\rho) = -\hat{e}_x \frac{|k_\rho|}{k_1} + \hat{e}_\rho \frac{k_1}{k_{01}} \text{sgn}(x - x_0)$ αντιπροσωπεύει ένα μοναδιαίο διάνυσμα και

$$k_1 = \sqrt{k_{01}^2 - k_\rho^2}.$$

Ομοίως, το απευθείας μαγνητικό πεδίο δίνεται από τη σχέση :

$$\underline{H}^{\text{LOS}} = -\hat{e}_\alpha \frac{i\omega\rho}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k_\rho |k_\rho|}{k_1} H_0^{(1)}(k_\rho \rho) e^{ik_1|x-x_0|} dk_\rho \quad (4.8)$$

4.1.2 Σκεδαζόμενο πεδίο

Όπως είναι γνωστό, ένα προσπίπτον ηλεκτρομαγνητικό πεδίο το οποίο προσπίπτει σε μία επιφάνεια, προκαλεί μία «διατεταγμένη κίνηση» των φορτίων του υλικού. Αυτές οι ροές, μπορούν να μοντελοποιηθούν από τις επιφανειακές πυκνότητες ρεύματος \underline{j}^{R} και \underline{j}^{T} , ακριβώς επάνω και κάτω από την επιφάνεια και δρουν σαν δευτερεύουσες πηγές του ανακλώμενου ($x > 0$) και διαδιδόμενου ($x < 0$) πεδίου αντίστοιχα. Για την περίπτωση του κατακόρυφου δίπολου, οι πυκνότητες ρεύματος παρουσιάζουν μόνο ακτινική συνιστώσα, δηλ. $\underline{j}^{\text{R}} = \hat{e}_\rho \cdot j^{\text{R}}$ και $\underline{j}^{\text{T}} = \hat{e}_\rho \cdot j^{\text{T}}$

Για τον υπολογισμό του σκεδαζόμενου πεδίου ακολουθούμε την ίδια διαδικασία που με αυτήν του απευθείας πεδίου (§ 4.1.1) με την μοναδική διαφορά ότι οι πηγές ρεύματος \underline{j}^{R} και \underline{j}^{T} είναι άγνωστες ποσότητες και θα χρειαστεί να υπολογιστούν. Αυτό θα γίνει με την επίλυση του προβλήματος οριακών συνθηκών. Επομένως, μετασχηματίζοντας στο πεδίο της συχνότητας και εφαρμόζοντας τις σχέσεις (4.1) και (4.2) καθώς και την ίδια

⁴ Ο Sommerfeld το έδειξε αυτό χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των συναρτήσεων Bessel και Hankel: $J_0(z) = \frac{H_0^{(1)}(z) + H_0^{(2)}(z)}{2}$, $H_0^{(1)}(ze^{i\pi}) = -H_0^{(2)}(z)$

τεχνική όπως και με το απευθείας πεδίο (ολοκλήρωση ως προς k_x και εφαρμογή της θεωρίας ολοκληρωτικών υπολοίπων) προκύπτουν οι παρακάτω εκφράσεις για το Ανακλώμενο ή Σκεδαζόμενο (δείκτης “R”) και το Διαδιδόμενο (δείκτης “T”) Ηλεκτρικό και Μαγνητικό πεδίο αντίστοιχα [4.16], [4.18]:

$$\underline{E}^R = -\frac{k_{01}}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon_1\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{e}_{\theta_2}(k_\rho) k_\rho \tilde{j}^R \cdot H_0^{(1)}(k_\rho \rho) e^{ik_1 x} dk_\rho \quad (4.9)$$

$$\underline{H}^R = -\frac{\hat{e}_\alpha}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} k_\rho \tilde{j}^R(k_\rho) \cdot H_0^{(1)}(k_\rho \rho) e^{ik_1 x} dk_\rho \quad (4.10)$$

$$\underline{E}^T = -\frac{k_{02}}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon_2\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{e}'_{\theta_2}(k_\rho) k_\rho \tilde{j}^T \cdot H_0^{(1)}(k_\rho \rho) e^{ik_2 x} dk_\rho \quad (4.11)$$

$$\underline{H}^T = \frac{\hat{e}_\alpha}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} k_\rho \tilde{j}^T \cdot H_0^{(1)}(k_\rho \rho) e^{ik_2 x} dk_\rho, \quad k_2 = \sqrt{k_{02}^2 - k_\rho^2} \quad (4.12)$$

Στις εξισώσεις (4.9) και (4.11), χρησιμοποιούμε τον ίδιο συμβολισμό με το απευθείας πεδίο. Συγκεκριμένα, κάθε ένα από τα $\hat{e}_{\theta_2}(k_\rho) = 1/k_{01}(k_1 \hat{e}_\rho - |k_\rho| \hat{e}_x)$ και $\hat{e}'_{\theta_2} = 1/k_{02}(k_2 \hat{e}_\rho - |k_\rho| \hat{e}_x)$ αντιπροσωπεύει ένα μοναδιαίο διάνυσμα σε σχέση με την αυθαίρετη μεταβλητή k_ρ , για το ανακλώμενο και διαδιδόμενο πεδίο αντίστοιχα.

Το πρόβλημα οριακών συνθηκών, που αναφέραμε προηγουμένως, ορίζει ότι στην επίπεδη επιφάνεια ($x=0$), οι εφαπτομενικές συνιστώσες του ΗΜ πεδίου πρέπει να είναι συνεχείς. Επομένως:

$$E_\rho^{\text{LOS}}|_{x=0} + E_\rho^{\text{R}}|_{x=0} = E_\rho^{\text{T}}|_{x=0}, \quad H_\alpha^{\text{LOS}}|_{x=0} + H_\alpha^{\text{R}}|_{x=0} = H_\alpha^{\text{T}}|_{x=0} \quad (4.13)$$

Αντικαθιστώντας τις (4.9) - (4.12) στην (4.13), προκύπτει το παρακάτω σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων και οι αντίστοιχες λύσεις για τα \tilde{j}^R και \tilde{j}^T :

$$\begin{cases} i\omega\rho|k_\rho|e^{ik_1 x_0} + k_1 \tilde{j}^R = -k_1 \tilde{j}^T \\ -i\omega\rho|k_\rho|e^{ik_1 x_0} + k_1 \tilde{j}^R = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} k_2 \tilde{j}^T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{j}^R = i\omega\rho|k_\rho|e^{ik_1 x_0} \frac{\varepsilon_1 k_1 - \varepsilon_1 k_2}{k_1(\varepsilon_2 k_1 + \varepsilon_1 k_2)} \\ \tilde{j}^T = -i\omega\rho|k_\rho|e^{ik_1 x_0} \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_2 k_1 + \varepsilon_1 k_2} \end{cases} \quad (4.14)$$

Προφανώς, με απλή αντικατάσταση της (4.14) στις (4.9) – (4.12), προκύπτουν οι εκφράσεις για το ανακλώμενο και διαδιδόμενο πεδίο στην ολοκληρωτική τους μορφή.

4.1.3 Ασυμπτωτική αναλυτική έκφραση του ΗΜ πεδίου

Ξεκινώντας από την (4.7) και ορίζοντας $k_\rho = k_{01} \sin \xi$ έχουμε $dk_\rho = k_{01} \cos \xi d\xi$ και $k_1 = k_{01} \cos \xi$ και χρησιμοποιώντας την προσέγγιση της Hankel για μεγάλα ορίσματα

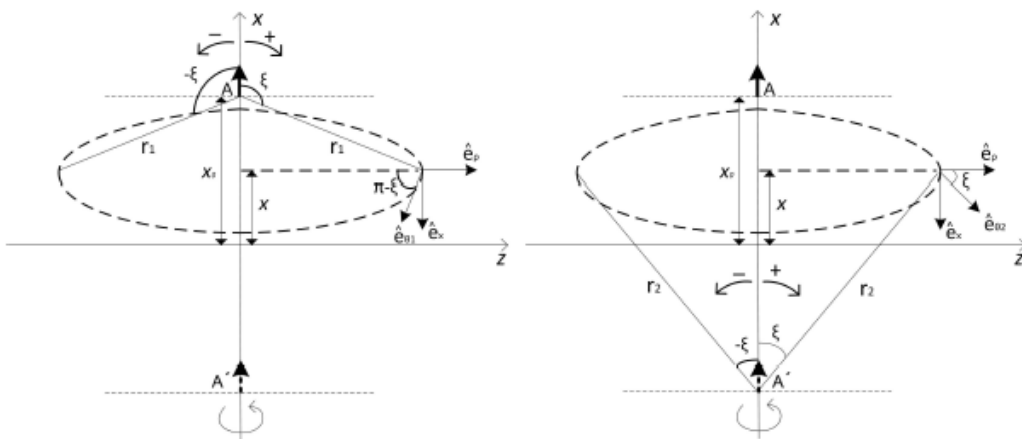
$$H_0^{(1)}(k_\rho \rho) \simeq \sqrt{\frac{-2i}{\pi k_\rho \rho}} e^{ik_\rho \rho}, \quad k_\rho \rho \gg 1 \quad [4.20], [4.22], \text{ παίρνουμε την παρακάτω σχέση:}$$

$$\underline{E}^{LOS} = -\frac{ip}{8\pi\epsilon_0\epsilon_1} \sqrt{\frac{-2i}{\pi k_{01}\rho}} k_{01}^3 \int_{S_z} \hat{e}_{\theta_1}(\xi) \sin^{3/2}\xi e^{ik_{01}(\rho \sin\xi + |x-x_0|\cos\xi)} d\xi \quad (4.15)$$

Από την Εικόνα 2-1 είναι προφανές ότι $\rho = r_1 \sin\theta_1$ και $|x - x_0| = r_1 |\cos\theta_1|$. Έπειτα παίρνοντας για παράδειγμα την περίπτωση όπου $x > x_0$ (το ίδιο προκύπτει και για $x < x_0$) δηλ. την περίπτωση που το σημείο παρατήρησης βρίσκεται ψηλότερα από το εκπέμπον δίπολο, προκύπτει ότι

$$\underline{E}^{LOS} = -\frac{ip}{8\pi\epsilon_0\epsilon_1} \sqrt{\frac{-2i}{\pi k_{01}\rho}} k_{01}^3 \int_{S_z} \hat{e}_{\theta_1}(\xi) \sin^{3/2}\xi e^{ik_{01}r_1 \cos(\xi-\theta_1)} d\xi \quad (4.16)$$

Σημειώστε ότι με τον παραπάνω μετασχηματισμό $k_\rho = k_{01} \sin \xi$, το μοναδιαίο διάνυσμα σε σχέση με το k_ρ της (4.7), μετασχηματίζεται σε $\hat{e}_{\theta_1}(\xi) = \cos\xi \cdot \hat{e}_\rho - |\sin\xi| \cdot \hat{e}_x$. Συνεπώς, το $\hat{e}_{\theta_1}(\xi)$ μπορεί να θεωρηθεί ως ένα ψευδο-μοναδιαίο διάνυσμα κατά μήκος της μιγαδικής γωνίας ανύψωσης (complex elevation angle) ξ^5 . Αυτό αναπαρίσταται γραφικά στην παρακάτω εικόνα, όπου σχεδιάζονται τα «εκτεταμένα» τοπικά συστήματα σφαιρικών συντεταγμένων για την πηγή του δίπολου και το είδωλό της. Ο όρος «εκτεταμένο» χρησιμοποιείται για να σημειωθεί η μιγαδική φύση της γωνίας ανύψωσης ξ κατά μήκος της καμπύλης S_z των εξισώσεων (4.15), (4.16) παραπάνω ή των εξισώσεων (4.19) - (4.21) παρακάτω.



Εικόνα 4-1 – Το «εκτεταμένο» τοπικό σύστημα σφαιρικών συντεταγμένων (α) της πηγής του δίπολου και (β) του ειδώλου του δίπολου. Η γωνία ανύψωσης ξ είναι μιγαδική στη φύση της, παρόλαυτά μόνο το εύρος $\xi \in [-\pi, \pi]$ μπορεί να αναπαρασταθεί γραφικά (σε ένα τυπικό σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων όμως το $\xi \in [0, \pi]$). Στην εικόνα, μία

⁵ Ονομάζεται ψευδο-μοναδιαίο διάνυσμα διότι σχετίζεται με την μιγαδική γωνία ξ και επομένως δεν έχει φυσική σημασία. Όμως, στο $\xi=\theta_1$, γίνεται ίσο με το γεωμετρικό μοναδιαίο διάνυσμα (εφόσον για το σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων ισχύει $O \equiv A : \hat{e}_{\theta_1} = \cos\theta_1 \cdot \hat{e}_\rho - \sin\theta_1 \cdot \hat{e}_x$)

ωρολογιακή περιστροφή από την θετική κατεύθυνση x δίνει θετική γωνία ανύψωσης (+), ενώ μία στροφή αντιωρολογιακής φοράς δίνει αρνητική γωνία ανύψωσης (-).

Η ολοκληρωτική έκφραση (4.16) μπορεί να υπολογιστεί εύκολα με την μέθοδο σημείου σάγματος [4.18], με την προϋπόθεση ότι η παράμετρος “ $k_{01} \cdot r_1$ ” του φασικού παράγοντα της εξίσωσης (4.16) είναι επαρκώς μεγάλη. Εφόσον η ολοκληρωτέα ποσότητα δεν παρουσιάζει απειρισμό, το αποτέλεσμα είναι ίδιο με αυτό που δίνεται από την μέθοδο στάσιμης φάσης [4.17], [4.18], το οποίο είναι [4.23], [4.24]:

$$\underline{E}^{LOS} \cong -\frac{pk_{\delta 1}^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_1 r_1} \sin \theta_1 e^{ik_{01}r_1} (\hat{e}_\rho \cos \theta_1 - \hat{e}_x \sin \theta_1) = -\frac{pk_{\delta 1}^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_1 r_1} \sin \theta_1 e^{ik_{01}r_1} \hat{e}_{\theta_1} \quad (4.17)$$

Με όμοιο τρόπο, και ξεκινώντας από την εξίσωση (4.2), μπορούμε να καταλλήξουμε στην παρακάτω ασυμπτωτική έκφραση του μακρινού μαγνητικού πεδίου γίνεται:

$$\underline{H}^{LOS} = -\hat{e}_\alpha \frac{i\omega\rho}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k_\rho |k_\rho|}{k_1} H_0^{(1)}(k_\rho \rho) e^{ik_1|x-x_0|} dk_\rho \cong \hat{e}_\alpha \frac{pk_{\delta 1}^2 \sin \theta_1 e^{ik_{01}r_1}}{4\pi\sqrt{\epsilon_0\epsilon_1\mu_0\mu_1} \cdot r_1} \quad (4.18)$$

$$\underline{H}^{LOS} = -\hat{e}_\alpha \frac{|\underline{E}^{LOS}|}{Z_1} e^{ik_{01}r_1}$$

όπου $Z_1 = \sqrt{\mu_0\mu_1/\epsilon_0\epsilon_1}$ είναι η κυματική αντίσταση του πρώτου μέσου (αέρας)⁶. Οι σχέσεις (4.17) και (4.18) αντιπροσωπεύουν τις γνωστές από την βιβλιογραφία εκφράσεις μακρινού πεδίου μίας πηγής διπόλου [4.17], [4.19] και επομένως επαληθεύουν την προσέγγιση στο φασματικό πεδίο που παρουσιάζεται έως αυτό το σημείο.

Αντίστοιχα με το απευθείας πεδίο, εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό μεταβλητής $k_\rho = k_{01} \sin \xi_2$ στην εξίσωση (4.9) για τον υπολογισμό του ανακλώμενου πεδίου. Λαμβάνοντας επίσης υπόψη την προσέγγιση μεγάλου ορίσματος για την συνάρτηση Hankel, προκύπτει η παρακάτω ολοκληρωτική έκφραση του ανακλώμενου πεδίου:

$$\underline{E}^R = -\frac{ipk_{\delta 1}^3}{8\pi\epsilon_0\epsilon_1} \sqrt{\frac{-2i}{\pi k_{01}\rho}} \int_{s_z} \hat{e}_{\theta_2}(\xi) \sin^{3/2}\xi \cdot R_{||}(\xi) e^{ik_{01}[\rho \sin \xi + (x+x_0) \cos \xi]} d\xi \quad (4.19)$$

Όπου $R_{||}(\xi)$ είναι ο συντελεστής ανάκλασης Fresnel:

$$R_{||}(\xi) = \frac{k_{01} \epsilon_2 \cos \xi - \epsilon_1 \sqrt{k_{02}^2 - k_{01}^2 \sin^2 \xi}}{k_{01} \epsilon_2 \cos \xi + \epsilon_1 \sqrt{k_{02}^2 - k_{01}^2 \sin^2 \xi}} = \frac{k_{02} Z_1 \cos \xi - Z_2 \sqrt{k_{02}^2 - k_{01}^2 \sin^2 \xi}}{k_{02} Z_1 \cos \xi + Z_2 \sqrt{k_{02}^2 - k_{01}^2 \sin^2 \xi}} \quad (4.20)$$

Στην συνέχεια, παρατηρώντας την γεωμετρία του προβλήματος (Εικόνα 2-1) αναγνωρίζουμε εύκολα ότι $\rho = r_2 \sin \theta_2$ και $x + x_0 = r_2 \cos \theta_2$. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (4.19) η έκφραση για το ανακλώμενο πεδίο γίνεται:

$$\underline{E}^R = -\frac{ipk_{\delta 1}^3}{8\pi\epsilon_0\epsilon_1} \sqrt{\frac{-2i}{\pi k_{01}\rho}} \int_{s_z} \hat{e}_{\theta_2}(\xi) \sin^{3/2}\xi \cdot R_{||}(\xi) e^{ik_{01}r_2 \cos(\xi - \theta_2)} d\xi \quad (4.21)$$

⁶ Ομοίως, η κυματική αντίσταση του δεύτερου μέσου (έδαφος) δίνεται από $Z_2 = \sqrt{\mu_0\mu_2/\epsilon_0\epsilon_2}$.

όπου $\hat{e}_{\theta_2}(\xi) = \cos\xi \cdot \hat{e}_\rho - |\sin\xi| \cdot \hat{e}_x$ ένα ψευδομοναδιαίο διάνυσμα κατά μήκος της μιγαδικής γωνίας ανύψωσης ξ , ενός σφαιρικού συστήματος συντεταγμένων, αυτή τη φορά με το κέντρο να τοποθετείται στο είδωλο του διπόλου A' (βλ. (Εικόνα 2-1)).

Η παρουσία του $R_{||}(\xi)$, προκαλεί ένα πόλο στην παράγωγο της εξίσωσης (4.21) ο οποίος αναγνωρίζεται επιλύοντας τη σχέση $1 / R_{||}(\xi) = 0$:

$$\cos \xi_p = -\frac{\varepsilon_1}{k_{01}} \sqrt{\frac{k_{02}^2 - k_{01}^2}{\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2}} = -\sqrt{\frac{\varepsilon_1(\varepsilon_2\mu_2 - \varepsilon_1\mu_1)}{\mu_1(\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2)}} \quad (4.22)$$

όπου η δεξιά πλευρά της εξίσωσης (4.22) αντιπροσωπεύει τη συνηθισμένη περίπτωση όπου $\mu_1 = \mu_2$. Επιπλέον, για την συνήθη περίπτωση $\sigma \gg \omega\varepsilon_0$, η μιγαδική σχετική διαπερατότητα του δεύτερου μέσου δίνεται από $\varepsilon_2 = \varepsilon_2 + i\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}$ και είναι μία μεγάλη ποσότητα. Να σημειωθεί ότι στην εξίσωση (4.22) και σε όλη την ανάλυση που παρουσιάζεται έως αυτό το σημείο, το ε_2 αναφέρεται σε αυτή την μιγαδική σχετική διαπερατότητα, δηλ. $\varepsilon_2 \equiv \varepsilon_2$. Σαν αποτέλεσμα, η εξίσωση (4.22) δίνει ένα μικρό (μιγαδικό) αριθμό.

Προχωράμε τώρα στον υπολογισμό της θέσης του πόλου. Για $\sigma \gg \omega\varepsilon_0$ η εξίσωση (4.22) μπορεί να γραφεί ως:

$$\cos \xi_p = -\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \xi_p\right) \cong \frac{\pi}{2} - \xi_p \quad (4.23)$$

Όπου η προσέγγιση για το ημίτονο δικαιολογείται από το μικρό μέγεθος του μιγαδικού αριθμού $\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}}$ (και πάλι εδώ κάνουμε την παραδοχή ότι $\varepsilon_2 \equiv \varepsilon_2 = \varepsilon_2 + i\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}$, όπου το τελευταίο ε_2 πραγματικός αριθμός):

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}} \equiv \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + i\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}}} = \sqrt{\frac{\omega\varepsilon_0\varepsilon_1}{\sigma}} \sqrt{\frac{1}{i + \frac{\omega\varepsilon_0(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{\sigma}}} = \sqrt{\frac{\omega\varepsilon_0\varepsilon_1}{\sigma}} \sqrt{\frac{1}{i + x}} \quad (4.24)$$

όπου $x = \frac{\omega\varepsilon_0(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{\sigma} \ll 1$, για $\sigma \gg \omega\varepsilon_0$. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας την επέκταση σειράς MacLaurin για την εξίσωση $f(x) = \sqrt{i + x}$ και διατηρώντας μέχρι και τους όρους πρώτου βαθμού, ισχύει ότι $f(x) = \sqrt{i + x} = f(0) + f'(0)x + o(x^2) \cong \sqrt{i} + \frac{1}{2\sqrt{i}} \cdot x = \frac{i+y}{\sqrt{i}}$, όπου $y = \frac{x}{2} = \frac{\omega\varepsilon_0(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{2\sigma}$. Αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση, παίρνουμε την εξής σχέση:

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}} = \sqrt{\frac{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_1}{\sigma}} \frac{\sqrt{i}}{i + y} = \sqrt{\frac{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_1}{\sigma}} \frac{1 + i}{y + i} \quad (4.25)$$

Τέλος, εκφράζοντας το $\frac{1+i}{y+i}$ στην απλή μορφή $a + ib$, είναι εύκολο να πάρουμε:

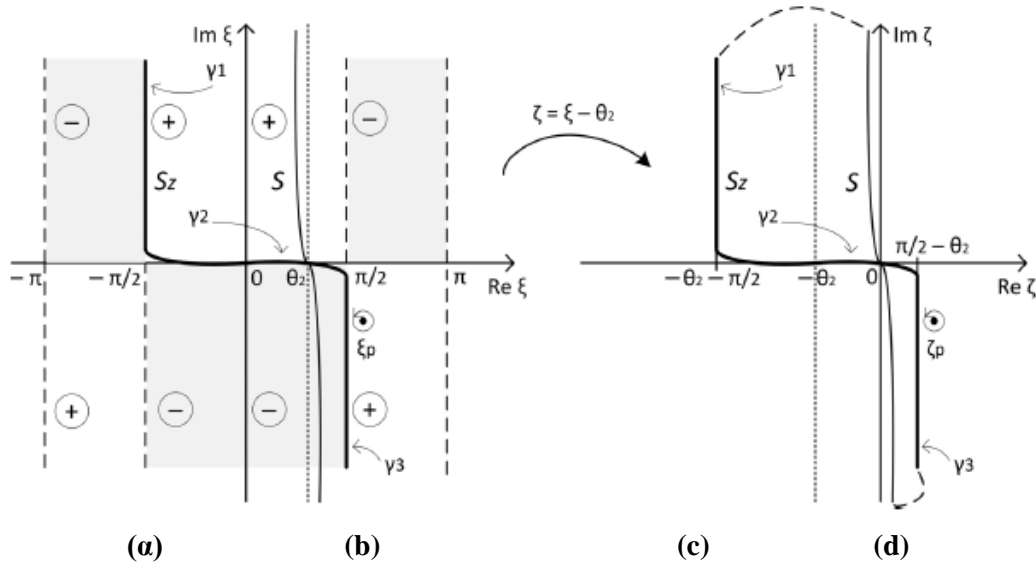
$$\frac{1+i}{y+i} \cong \frac{1+y}{1+y^2} + i \left(\frac{y^2+y}{1+y^2} - 1 \right) \stackrel{y^2 \rightarrow 0}{\cong} 1 + y + i(y-1) = 1 + \frac{\omega \varepsilon_0 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{2\sigma} + i \left[\frac{\omega \varepsilon_0 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{2\sigma} - 1 \right] \quad (4.26)$$

Αντικαθιστώντας την εξ. (4.26) στην (4.25) και χρησιμοποιώντας την εξίσωση (4.23), ο πόλος υπολογίζεται ως:

$$\xi_p \cong \frac{\pi}{2} + \sqrt{\frac{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_1}{2\sigma}} \left\{ 1 + \frac{\omega \varepsilon_0 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{2\sigma} - i \left[1 - \frac{\omega \varepsilon_0 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{2\sigma} \right] \right\} \quad (4.27)$$

Στην περίπτωση αυτή, η ε_2 τώρα αναφέρεται στο σύνηθες πραγματικό μέρος της (σχετικής) διαπερατότητας του δεύτερου μέσου (εδάφους).

Η Εικόνα 4-2 δείχνει την καμπύλη ολοκλήρωσης, S_z , σε συνδυασμό με την θέση του πόλου, ξ_p . Για $\sigma \gg \omega \varepsilon_0$, ο πόλος ξ_p είναι κοντά στην S_z και συγκεκριμένα στα δεξιά του τμήματος γ_3 . Σαν αποτέλεσμα, υπολογίζοντας της εξίσωση (4.19) μέσω της μεθόδου σημείου σάγματος είναι πιθανό να προκύψουν σημαντικά λάθη, αφού η ακρίβεια της μεθόδου βασίζεται στην σχετική θέση του πόλου με το σαγματικό σημείο (saddle point) [4.17], [4.18].



Εικόνα 4-2 – Η καμπύλη ολοκλήρωσης:

- (a) S_z η αρχική καμπύλη για το E_R στο μιγαδικό επίπεδο ξ (αριστερή καμπύλη) και η αντιστοίχιση στο επίπεδο ζ (δεξιά καμπύλη)
- (b) S : Καμπύλη ολοκλήρωσης “Etalon integral” στο επίπεδο ζ (δεξιά καμπύλη) και η αντιστοίχσή της στο ξ -επίπεδο (αριστερή καμπύλη)
- (c) ξ_p : σχετική θέση του πόλου στο ξ -επίπεδο
- (d) ζ_p : σχετική θέση του πόλου στο ζ -επίπεδο

Αυτό είχε αποδειχθεί στα [4.22], [4.23] όπου ο υπολογισμός της εξίσωσης (4.19) είχε ως αποτέλεσμα ένα μοναδικό όρο, ο οποίος αντιπροσωπεύει μόνο τον παράγοντα του κύματος χώρου του πεδίου, και επομένως δεν συμπεριλαμβάνει την συμπεριφορά του επιφανειακού κύματος. Επιπλέον, σε εφαπτομενικές γωνίες παρατήρησης, η μέθοδος απέτυχε απολύτως στην εκτίμηση των τιμών του πεδίου, ως συνέπεια του γνωστού γεγονότος ότι ο παράγοντας του κύματος χώρου σε αυτές τις συνθήκες σχεδόν εξαφανίζεται, καθώς ο συντελεστής ανάκλασης είναι σχεδόν ίσος με μείον ένα [4.19].

Προκειμένου να αυξήσουμε την ακρίβεια ολοκλήρωσης χρησιμοποιούμε το παρακάτω “Etalon Integral” [4.24]–[4.26] το οποίο μειώνει το πρόβλημα της εγγύτητας του πόλου με το σαγματικό σημείο (saddle point):

$$X(k, \alpha) = \frac{1}{4\pi i} \int_S \frac{e^{ik(\cos \zeta - \cos \alpha)}}{\sin \frac{\zeta + \alpha}{2}} d\zeta \quad (4.28)$$

Η καμπύλη ολοκλήρωσης S για το $X(k, \alpha)$, απεικονίζεται στην δεξιά πλευρά της Εικόνα 4-2 και περνάει προς τα κάτω κατά μήκος του φανταστικού άξονα αποκλείοντας ελαφρά από αυτόν προκειμένου να διασφαλιστεί η σύγκλιση. Η ειδική συνάρτηση $X(k, \alpha)$ έχει ενδιαφέρουσες ιδιότητες, χρήσιμες για το πρόβλημα που αναλύεται εδώ. Μπορεί να εκφραστεί σε όρους των ολοκληρωμάτων Fresnel ή ολοκληρωμάτων πιθανοτήτων, τα οποία είναι ειδικές συναρτήσεις με πολλαπλές εφαρμογές. Στο [4.24], η ειδική συνάρτηση $X(k, \alpha)$ δίνεται από:

$$X(k, \alpha) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty \sin \frac{\alpha}{2}}^{2\sqrt{k} \sin \frac{\alpha}{2}} e^{\frac{it^2}{2}} dt \quad (4.29)$$

Για $\alpha \in [-\pi, +\pi]$, ισχύει $\text{sgn}(\alpha) = \text{sgn}(\sin \frac{\alpha}{2})$. Στην περίπτωση όπου $\alpha > 0$, το κάτω όριο της $X(k, \alpha)$ είναι $\infty \sin \frac{\alpha}{2} \rightarrow \infty$. Επομένως, θέτοντας $t = \sqrt{2i}y$ και χρησιμοποιώντας τον ορισμό της συνάρτησης erfc (complementary error function) προκύπτει:

$$X(k, \alpha) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{\sqrt{-2ik} \sin \frac{\alpha}{2}} e^{-y^2} \sqrt{2i} dy = \frac{1}{2} \text{erf} \left[\sqrt{-2ik} \sin \frac{\alpha}{2} \right] \quad (4.30)$$

Ομοίως, για $\alpha < 0$, το κάτω όριο της $X(k, \alpha)$ είναι $\infty \sin \frac{\alpha}{2} \rightarrow -\infty$. Θέτοντας πάλι $t = \sqrt{2i}y$, η $X(k, \alpha)$ γίνεται:

$$X(k, \alpha) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{-2ik} \sin \frac{\alpha}{2}}^{\infty} e^{-y^2} \sqrt{2i} dy = -\frac{1}{2} \text{erf} \left[-\sqrt{-2ik} \sin \frac{\alpha}{2} \right] \quad (4.31)$$

Επομένως,

$$X(k, \alpha) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty \sin \frac{\alpha}{2}}^{2\sqrt{k} \sin \frac{\alpha}{2}} e^{\frac{it^2}{2}} dt = -\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\alpha) \operatorname{erfc} \left[\operatorname{sgn}(\alpha) \sqrt{-2ik} \sin \frac{\alpha}{2} \right] \quad (4.32)$$

Επίσης, υπάρχουν ασυμπτωτικές σχέσεις για μεγάλες τιμές του άνω ορίου και μικρές τιμές του ορίσματος α :

$$X(k, \alpha) \cong -\sqrt{\frac{i}{2\pi}} \frac{e^{[ik(1-\cos\alpha)]}}{2\sqrt{k} \sin \frac{\alpha}{2}}, \quad \sqrt{k} \left| \sin \frac{\alpha}{2} \right| \gg 1 \quad (4.33)$$

$$X(k, \alpha) \cong \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{k}{2\pi i}} \alpha, \quad \alpha \rightarrow 0 \quad (4.34)$$

Σε αυτό το σημείο, είναι βοηθητικό να εισάγουμε την μεταβλητή: $\zeta = \xi - \theta_2$ (βλ. Εικόνα 4-2). Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (4.21), η ολοκληρωτική αναπαράσταση του ανακλώμενου ηλεκτρικού πεδίου παίρνει τη μορφή:

$$\underline{E}^R = \frac{\rho k_{01}^3}{2\varepsilon_0 \varepsilon_1} \sqrt{\frac{-2i}{\pi k_{01} \rho}} e^{ik_{01} r_2 \cos \zeta_p} \cdot \frac{1}{4\pi i} \int_{S_z} Q(\zeta + \theta_2) \cdot \frac{e^{ik_{01} r_2 (\cos \zeta - \cos \zeta_p)}}{\sin \frac{\zeta - \zeta_p}{2}} d\zeta \quad (4.35)$$

με την καμπύλη S_z να είναι τώρα η καμπύλη ολοκλήρωσης στο ζ -επίπεδο (δεξιά καμπύλη της Εικόνα 4-2), ως αποτέλεσμα της παραπάνω αλλαγής μεταβλητής και:

$$Q(\zeta) = \hat{e}_\theta(\zeta) \sin^3 \frac{\zeta}{2} \cdot R_{||}(\xi) \sin \frac{\zeta - \zeta_p}{2} \quad (4.36)$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε την ‘θεωρία ολοκληρωτικών υπολοίπων’ (‘Residue Theorem’) [4.20], σε συνδυασμό με την ‘μέθοδο σαγματικού σημείου’ (‘Saddle Point Method’) για την εξίσωση (4.35).

Αρχικά, σημειωθεί ότι η ολοκληρωτέα ποσότητα στην εξίσωση (4.35) περιλαμβάνει μία φασική συνιστώσα $e^{ik_{01} r_2 (\cos \zeta - \cos \zeta_p)}$. Με την παραδοχή ότι το $k_{01} r_2$ είναι μεγάλη παράμετρος, μπορούν να χρησιμοποιηθούν πολλαπλές ασυμπτωτικές μέθοδοι για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος οι οποίες κάνουν την παραδοχή ότι η κύρια συνεισφορά στην τιμή του ολοκληρώματος προέρχεται από μία μικρή περιοχή, κοντά σε ένα ‘στάσιμο σημείο’ (‘stationary point’). Η μέθοδος σημείου σάγματος την οποία θα χρησιμοποιήσουμε είναι μία τέτοια μέθοδος. Το συμπέρασμα είναι ότι για $k_{01} r_2 \gg 1$, οι καμπύλες S_z και s μπορούν να θεωρηθούν μέρος μίας κλειστής καμπύλης, η οποία απεικονίζεται στην Εικόνα 4-2, και στην οποία η συνεισφορά των τμημάτων με διακεκομμένη γραμμή είναι αμελητέα λόγω του ότι βρίσκονται μακριά από το στάσιμο σημείο (ή «saddle point»), το οποίο θα υπολογίσουμε παρακάτω. Στη συνέχεια, μέσω της θεωρίας ολοκληρωτικών υπολοίπων και εφόσον δεν υπάρχει πόλος μέσα στην

αναφερόμενη κλειστή καμπύλη, ισχύει:

$$\int_{S_z} Q(\zeta + \theta_2) \cdot \frac{e^{ik_{01}r_2(\cos\zeta - \cos\zeta_p)}}{\sin\frac{\zeta - \zeta_p}{2}} d\zeta = \int_S Q(\zeta + \theta_2) \cdot \frac{e^{ik_{01}r_2(\cos\zeta - \cos\zeta_p)}}{\sin\frac{\zeta - \zeta_p}{2}} d\zeta \quad (4.37)$$

Όπως αναφέραμε παραπάνω, προκειμένου να υπολογίσουμε το $\int_S Q(\zeta + \theta_2) \cdot \frac{e^{ik_{01}r_2(\cos\zeta - \cos\zeta_p)}}{\sin\frac{\zeta - \zeta_p}{2}} d\zeta$, χρησιμοποιούμε την μέθοδο στάσιμου σημείου, με την προϋπόθεση

ότι το $k_{01}r_2$ είναι μία μεγάλη παράμετρος. Επιλύοντας την εξίσωση $\frac{\partial}{\partial\zeta}(\cos\zeta - \cos\zeta_p) = 0$, βρίσκουμε ότι το $\zeta=0$ είναι το στάσιμο σημείο. Επομένως, το ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί ως:

$$\int_S Q(\zeta + \theta_2) \cdot \frac{e^{ik_{01}r_2(\cos\zeta - \cos\zeta_p)}}{\sin\frac{\zeta - \zeta_p}{2}} d\zeta = Q(\theta_2) \int_S \frac{e^{ik_{01}r_2(\cos\zeta - \cos\zeta_p)}}{\sin\frac{\zeta - \zeta_p}{2}} d\zeta = Q(\theta_2) \cdot X(k_{01}r_2, -\zeta_p) \quad (4.38)$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (4.35) και χρησιμοποιώντας και την (4.36) για το $Q(\theta_2)$, οδηγούμαστε σε μία εξίσωση για το \underline{E}^R , στην οποία η ειδική συνάρτηση $X(k, a)$ παίζει πολύ σημαντικό ρόλο :

$$\underline{E}^R = -\hat{e}_{\theta_2} \frac{\rho k_{01}^3}{2\varepsilon_0\varepsilon_1} \sqrt{\frac{-2i}{\pi k_{01}\rho}} e^{ik_{01}r_2\cos\zeta_p} \sin^{\frac{3}{2}}\theta_2 \sin\frac{\zeta_p}{2} R_{||}(\theta_2) X(k_{01}r_2, -\zeta_p) \quad (4.39)$$

όπου $\zeta = \zeta_p - \theta_2$ είναι ο ισοδύναμος πόλος στο ζ -επίπεδο.

Η ανάλυση του μαγνητικού πεδίου είναι ανάλογη και προκύπτει από την γνωστή σχέση:

$$\underline{H}^R = -\hat{e}_\alpha \frac{|\underline{E}^R|}{Z_1} \cdot e^{ik_{01}r_2\cos\zeta_p} \quad (4.40)$$

Η εξίσωση (4.40) είναι μία βασική επικύρωση της μαθηματικής προσέγγισης στο φασματικό πεδίο.

4.1.3.1 Ασυμπτωτική έκφραση μακριά από το επίπεδο του εδάφους

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, η εξίσωση (4.39) ισχύει μόνο όταν το $k_{01}r_2$ είναι μεγάλο, δηλαδή περιγράφει τη συμπεριφορά του μακρινού πεδίου (το οποίο εφαρμόζει στην πλειονότητα τηλεπικοινωνιακών εφαρμογών). Ως αποτέλεσμα, εάν επίσης ισχύει ότι το $|\sin\frac{\zeta_p}{2}|$ δεν είναι πολύ μικρό, τότε οι ασυμπτωτικές συνθήκες της εξίσωσης (4.33) τηρούνται και το $X(k_{01}r_2, -\zeta_p)$ μπορεί να γίνει η προσέγγιση: $X(k_{01}r_2, -\zeta_p) \cong \sqrt{\frac{i}{2\pi}} \frac{e^{[ik_{01}r_2(1-\cos\zeta_p)]}}{2\sqrt{k_{01}r_2} \sin\frac{\zeta_p}{2}}$. Εφόσον, $\zeta_p \cong \frac{\pi}{2}$, η συνθήκη για την οποία ικανοποιείται η απαίτηση

το $\sin \frac{\zeta_p}{2}$ να μην πλησιάζει το μηδέν, είναι ίση με $\frac{\pi}{2} - \theta_2 > \varepsilon$, όπου το ε είναι επαρκώς μεγάλο. Για πραγματικά μεγάλες τιμές του $k_{01}r_2$, είναι επαρκές να απαιτήσουμε ότι $\theta_2 \neq \frac{\pi}{2}$, ώστε η συνθήκη εφαρμογής της εξίσωσης (4.33) ($\sqrt{k_{01}r_2} \cdot \left| \sin \left(\frac{\theta_2}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right| \gg 1$) να τηρείται. Το ανακλώμενο πεδίο δίνεται επομένως από⁷:

$$\underline{E}^R \cong -\hat{e}_{\theta_2} R_{||}(\theta_2) \frac{\rho k_{01}^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1 r_2} \sin \theta_2 e^{ik_{01}r_2}, \theta_2 < \frac{\pi}{2} \quad (4.41)$$

το οποίο είναι ουσιαστικά η εξίσωση μακρινού πεδίου για μία πηγή διπόλου που βρίσκεται στο κατοπτρικό σημείο Α', πολλαπλασιασμένης με τον συντελεστή ανάκλασης Fresnel, $R_{||}(\theta_2)$.

4.1.3.2 Ασυμπτωτική έκφραση κοντά στο επίπεδο του εδάφους

Οι ασυμπτωτικές εξισώσεις (4.17) και (4.41) για το απευθείας και το ανακλώμενο πεδίο αντίστοιχα, αντιπροσωπεύουν εξερχόμενα σφαιρικά κύματα. Τώρα θα εξετάσουμε τις συνθήκες για την πρόκληση επιφανειακών κυμάτων (surface waves) [4.1]–[4.6], [4.19]. Τα επιφανειακά κύματα περιορίζονται κοντά στην επιφάνεια, και επομένως είναι λογική επιλογή να εξετάσουμε την συμπεριφορά του πεδίου σε εφαπτομενικές (ως προς την επιφάνεια) γωνίες παρατήρησης (δηλ. στο $\theta_2 \rightarrow \frac{\pi}{2}$). Σε τέτοια περίπτωση μπορούμε να ισχυριστούμε ότι $\hat{e}_{\theta_2} \cong -\hat{e}_x$. Επιπλέον, από την εξίσωση (4.20) μπορούμε να πούμε ότι $R_{||}(\theta_2) \cong -1$ και τελικώς, αφού $\zeta_p \rightarrow 0$, η ειδική συνάρτηση X ('etalon integral') μπορεί να προσεγγιστεί από την εξίσωση (4.34).

Επομένως, ξεκινάμε από την εξίσωση (4.39) στο όριο $\theta_2 \rightarrow \frac{\pi}{2}$ και προκειμένου να διευκολύνουμε την ανάλυση ορίζουμε την μεταβλητή $\theta'_2 = \theta_2 - \delta$.

Για $\delta \rightarrow 0$ το $\theta'_2 \rightarrow \theta_2$. Ως αποτέλεσμα, και παρατηρώντας την Εικόνα 2-1, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις παρακάτω προσεγγίσεις:

$$\rho \sin \theta'_2 \cong \rho, \rho \cos \theta'_2 \cong (x + x_0)$$

Είναι χρήσιμο να θέσουμε μία μικρή μεταβλητή δ ίση με την απειροελάχιστη ποσότητα: $\sqrt{\frac{\omega\varepsilon_0\varepsilon_1}{2\sigma}}$ (το οποίο ισχύει εφόσον $\sigma \gg \omega\varepsilon_0$).

Επομένως, η εξίσωση (4.27) μπορεί να γραφεί ως:

$$\xi_p \cong \frac{\pi}{2} + \delta \left[1 + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_1} \cdot \delta^2 - i \left(1 - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_1} \cdot \delta^2 \right) \right] \stackrel{\delta^2 \rightarrow 0}{\cong} \frac{\pi}{2} + \delta - i\delta \quad (4.42)$$

⁷ Based on the geometry of Fig. 1, $\theta_2 \in [0, \pi/2]$

Ως αποτέλεσμα, ο ισοδύναμος πόλος στο ζ-επίπεδο και το σχετικό συνημίτονό του μπορούν να υπολογιστούν ως:

$$\zeta_p = \xi_p - \theta_2 = \frac{\pi}{2} - \theta'_2 - i\delta \quad (4.43)$$

$$\cos\zeta_p = \sin(\theta'_2 + i\delta) = \sin\theta'_2 \cos i\delta + \cos\theta'_2 \sin i\delta \stackrel{\delta \rightarrow 0}{\cong} \sin\theta'_2 + i\delta \cos\theta'_2 \quad (4.44)$$

Εξετάζουμε τώρα την εξίσωση (4.39):

$$\underline{E}^R = -\hat{e}_{\theta_2} \frac{\rho k_{01}^3}{2\varepsilon_0 \varepsilon_1} \sqrt{\frac{-2i}{\pi k_{01} \rho}} e^{ik_{01} r_2 \cos\zeta_p} \sin^{\frac{3}{2}} \theta_2 \sin \frac{\zeta_p}{2} R_{||}(\theta_2) X(k_{01} r_2, -\zeta_p) \quad (4.45)$$

Εφόσον οι παράγοντες $\sin^{\frac{3}{2}} \theta_2$ και $\sin \frac{\zeta_p}{2}$ εμφανίζονται μόνο στο πλάτος, μπορούν να εκτιμηθούν θέτοντας $\theta_2 \cong \frac{\pi}{2}$. Επομένως, επαρκείς τιμές για το $\frac{\zeta_p}{2}$ και το αντίστοιχο ημίτονό του είναι:

$$\frac{\zeta_p}{2} = \frac{\xi_p - \theta_2}{2} \cong \frac{\pi}{4} + \delta \frac{1-i}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\pi/4} \delta \quad (4.46)$$

$$\sin \frac{\zeta_p}{2} \stackrel{\delta \ll 1}{\cong} \frac{\zeta_p}{2} = \frac{\delta}{\sqrt{2}} \sqrt{-i} \quad (4.47)$$

Τέλος, χρησιμοποιούμε την εξίσωση (4.34)

$$X(k_{01} r_2, -\zeta_p) \cong \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{k_{01} r_2}{2\pi i}} \zeta_p = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{k_{01} r_2}{2\pi i}} \sqrt{-2i} \cdot \delta$$

Επομένως, το \underline{E}^R δίνεται από:

$$\underline{E}^R = -\hat{e}_x \delta \frac{\rho k_{01}^3}{4\varepsilon_0 \varepsilon_1} \frac{1}{\sqrt{\pi k_{01} \rho}} e^{-\delta k_{01} (x+x_0)} e^{i(k_{01} \rho + \pi/2)}, \delta = \sqrt{\frac{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_1}{2\sigma}} \quad (4.48)$$

4.2 Συμπεράσματα διδακτορικής διατριβής

Στα πλαίσια της παρούσας διδακτορικής έρευνας εξετάστηκε το πρόβλημα ακτινοβολίας κατακόρυφου διπόλου πάνω από επίπεδη γη με απώλειες. Ουσιαστικά, το πρόβλημα αφορά στην επίλυση των γνωστών στην βιβλιογραφία ‘ολοκληρωμάτων Sommerfeld’ (‘Sommerfeld Integrals’), η επίλυση των οποίων είναι δύσκολη λόγω της ταλαντούμενης συμπεριφοράς της ολοκληρωτέας συνάρτησης και της αργής σύγκλισης του ολοκληρώματος, καθώς επίσης και των απειρισμών πάνω ή/και κοντά στη διαδρομή ολοκλήρωσης (‘integration path’).

Στην παρούσα διατριβή, αφού έγινε μία συνοπτική περιγραφή της σχετικής βιβλιογραφίας και της έρευνας που έχει γίνει από άλλους ερευνητές, παρουσιάστηκε η ανάλυση του προβλήματος στο φασματικό χώρο και η έκφραση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου με χρήση της μεθόδου στάσιμης φάσης. Στη συνέχεια, έγινε σύγκριση των μεθόδων αριθμητικής ολοκλήρωσης με τη μέθοδο στάσιμης φάσης και εξάχθηκαν συμπεράσματα ως προς την καταλληλότητα εφαρμογής της κάθε μεθόδου. Η σύγκριση έγινε μέσω υλοποίησης αλγορίθμου προσομοίωσης στο υπολογιστικό πρόγραμμα Matlab. Σύμφωνα με τα αποτελέσματά μας, το καταλληλότερο κριτήριο επιλογής μεθόδου αποτελεί η ηλεκτρική απόσταση $k \cdot r$ μεταξύ πομπού και δέκτη (βλ. πίνακα 4-1). Συγκεκριμένα, βλέπουμε ότι για επαρκώς μεγάλη απόσταση από τον πομπό σε σχέση με το μήκος κύματος το πρόβλημα μπορεί να επιλυθεί με αναλυτικό τρόπο χρησιμοποιώντας την μέθοδο στάσιμης φάσης. Επιπρόσθετα, στα αποτελέσματα των προσομοιώσεων των εκφράσεων του πεδίου που προκύπτουν από την SPM, και για μεγάλες συχνότητες, γίνεται εμφανής η επίδραση της γωνίας Brewster. Όπως είναι γνωστό, στις μεγάλες συχνότητες, στις οποίες η σχετική μιγαδική διαπερατότητα γίνεται σχεδόν πραγματική, το ανακλώμενο πεδίο σχεδόν εξαφανίζεται στην γωνία Brewster.

Καταλληλότητα Μεθόδου <i>Μέθοδος Στάσιμης Φάσης (Stationary Phase Method - SPM) – Αριθμητική Ολοκλήρωση (Numerical Integration - NI)</i>	
Εύρος Συχνοτήτων	Κατάλληλη μέθοδος
Συχνότητες > 100 MHz	Από τα 100 MHz και πάνω μπορεί να χρησιμοποιηθεί αποκλειστικά η SPM (για κάθε απόσταση) δεδομένου ότι το NI δεν προβλέπει το φαινόμενο Brewster.
Εύρος Συχνοτήτων 100 kHz έως 100<MHz	Χρήση NI έως την «απόσταση» όπου η SPM είναι κατάλληλη - Συνδυασμός της συχνότητας λειτουργίας και της απόστασης από τον πομπό - απόσταση η οποία σχετίζεται με το μήκος κύματος της ακτινοβολίας, ή ισοδύναμα από την ηλεκτρική απόσταση $k \cdot r$. (Με βάση τα αποτελέσματα της προσομοίωσης περίπου 16 λ)
Συχνότητες <100kHz	Καταλληλότερη η μέθοδος αριθμητικής ολοκλήρωσης

Πίνακας 4-1. Συμπεράσματα για επιλογή μεθόδου υπολογισμού του HM πεδίου (SPM vs. NI)

Τέλος, εξήχθησαν νέες ολοκληρωτικές εκφράσεις για το λαμβανόμενο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο μέσω της μετατροπής μεταβλητών (μετατροπή ως προς την γωνία πρόσπτωσης) και κατόπιν εφαρμογής της μεθόδου στάσιμης φάσης. Μέσω του μετασχηματισμού μεταβλητής επιτυγχάνουμε τον μετασχηματισμό του μονοπατιού ολοκλήρωσης κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να απαλείφονται τα προβλήματα απειρισμών της ολοκληρωτέας συνάρτησης.

4.3 Μελλοντικές Επεκτάσεις διδακτορικής διατριβής

Η παρούσα έρευνα θα μπορούσε να επεκταθεί με τους παρακάτω τρόπους :

- Σύγκριση της ‘μεθόδου μεταβολής μεταβλητών’ όπως αυτή παρουσιάστηκε στην παρούσα διατριβή με την ‘μέθοδο απότομης κατάβασης’ (‘Steepest Descent’) με στόχο να εξαχθούν συμπεράσματα ως προς την ακρίβεια και ταχύτητα των μεθόδων αυτών (βλ. Παράγραφο 4.1 ανωτέρω).
- Χρήση των παραπάνω μεθόδων (μεταβολή μεταβλητών, steepest descent) για την εξαγωγή αντίστοιχων εξισώσεων του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου για την περίπτωση οριζόντιου δίπολου.
- Χρήση των μεθόδων μεταβολής μεταβλητών και Stationary Phase Method για το πρόβλημα ακτινοβολίας διπόλου Hertz το οποίο τοποθετείται κάτω από την επιφάνεια.
- Εφαρμογή των σχέσεων και μεθόδων που παρουσιάστηκαν στην παρούσα διατριβή για ‘πολυστρωματικά μέσα’.

4.4 Βιβλιογραφία Κεφαλαίου

- [4.1] Sommerfeld, A. N., “Propagation of Waves in Wireless Telegraphy”, *Ann. Phys.*, 28, pp. 665-736, March 1909; and 81, pp. 1135–1153, December 1926.
- [4.2] Wait, J. R., “The Ancient and Modern History of EM Ground Wave Propagation”, *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, Vol. 40, No. 5, pp. 7-24, October 1998 <http://dx.doi.org/10.1109/74.735961>
- [4.3] King, R. J., “Electromagnetic Wave Propagation over a Constant Impedance Plane”, *Radio Science*, Vol. 4, pp. 225-268, 1969 <http://dx.doi.org/10.1029/RS004i003p00255>
- [4.4] Zenneck, J., “Propagation of Plane EM Waves along a Plane Conducting Surface”, *Ann. Phys. (Leipzig)*, 23, pp. 846-866, 1907.
- [4.5] Sarkar, T. K. et. al., “Electromagnetic Macro Modelling of Propagation in Mobile Wireless Communication: Theory and Experiment”, *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, Vol. 54, No. 6, pp. 17-43, Dec. 2012 <http://dx.doi.org/10.1109/MAP.2012.6387779>
- [4.6] Bladel, J. G. V., *Electromagnetic Fields*, Section 9.3: The Sommerfeld Dipole Problem, 448–452, J. Wiley and Sons, Inc., Hoboken, 2007.
- [4.7] Banos, A. Jr, “Dipole Radiation in the Presence of a Conducting Half-Space”, Pergamon, New York, 1966.
- [4.8] Tyras, G., “Radiation and Propagation of Electromagnetic Waves”, Academic Press, 1969.
- [4.9] Rahmat-Samii, Y., Mittra, R. and Parhami, P., “Evaluation of Sommerfeld integrals for lossy half-space problems”, *Electromagnetics*, vol. 1, pp. 1-28, 1981 <http://dx.doi.org/10.1080/02726348108915122>
- [4.10] Collin, R. E, “Hertzian Dipole Radiating Over a Lossy Earth or Sea: Some Early and Late 20th- Century Controversies”, *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, Vol. 46, No. 2, pp. 64-79, April 2004 <http://dx.doi.org/10.1109/MAP.2004.1305535>
- [4.11] Michalski, K. A., “On the efficient evaluation of the integrals arising in the Sommerfeld half-space problem”, *Inst. Elect. Eng. Proc. Part H-Microwave, Antennas Propagat.*, vol. 132, No 5, pp. 312-318, August 1985 <http://dx.doi.org/10.1049/ip-h-2.1985.0056>
- [4.12] Pelosi, G. and J. L. Volakis, “The centennial of Sommerfeld’s diffraction problem,” *Special Issue, Electromagnetics*, Vol. 18, No. 2–3, Mar.–Jun. 1998.
- [4.13] Norton, K. A., “The Propagation of Radio Waves Over the Surface of the Earth”, *Proceedings of the IRE*, 24, pp. 1367-1387, 1936; and 25, pp. 1203-1236, 1937 <http://dx.doi.org/10.1109/JRPROC.1936.227360>

- [4.14] Sautbekov, S., Kasimkhanova, R. and Frangos, P. “Modified solution of Sommerfeld's problem”, CEMA'10 International Conference, Athens, Greece, October 2010, pp. 5-8.
- [4.15] Christakis, C., Ioannidi, K., Sautbekov, S. Frangos, P., and Atanov, S. K., “The radiation problem from a vertical short dipole antenna above flat and lossy ground: novel formulation in the spectral domain with closed-form analytical solution in the high frequency regime”, *Electronics and Electrical Engineering Journal*, Vol. 20, No. 9, pp. 35-38, November 2014 <http://dx.doi.org/10.5755/j01.eee.20.9.8710>
- [4.16] Ioannidi, K., Christakis, C., Sautbekov, S., Frangos, P. and Atanov, S. K., “The radiation problem from a vertical Hertzian dipole antenna above flat and lossy ground: novel formulation in the spectral domain with closed-form analytical solution in the high frequency regime”, *International Journal Antennas and Propagation (IJAP)*, Hindawi Ed. Co., Special Issue ‘Propagation of electromagnetic (EM) waves over terrain’ (PEWT), vol. 2014, Article ID 989348, <http://dx.doi.org/10.1155/2014/989348>
- [4.17] Balanis, C. A., *Antenna Theory: Analysis and Design*, New York: J. Wiley and Sons Inc., 1997, Appendix VIII: Method of Stationary Phase, pp. 922-927.
- [4.18] Moschovitis, H., “Asymptotic methods and High Frequency Techniques for the Calculation of Electromagnetic Scattering by Using the Modified Stationary Phase Method”, Doctoral Dissertation, in Greek, National Technical University of Athens (NTUA), Athens, Greece, December 2010.
- [4.19] Fikioris, J., *Introduction to Antenna Theory and Propagation of Electromagnetic Waves*, Book in Greek, Athens, Greece: National Technical University of Athens (NTUA), 1982.
- [4.20] Arfken, G., *Mathematical Methods for Physicists*, 3rd Edition, Orlando, Florida, USA: Academic Press Inc., 1985, pp. 400-414
- [4.21] Bourgiotis, S., Ioannidi, K., Christakis, C., Sautbekov, S. and Frangos, P., “The radiation problem from a vertical short dipole antenna above flat and lossy ground: Novel formulation in the spectral domain with numerical solution and closed-form analytical solution in the high frequency regime”, CEMA'14, 9th International Conference, Sofia, Bulgaria, October 2014, pp. 12-18.
- [4.22] Bourgiotis, S., Chrysostomou, A., Christakis, C., Sautbekov, S. and Frangos, P., “Radiation of a Vertical Dipole over Flat and Lossy Ground using the Spectral Domain Approach: Comparison of Stationary Phase Method Analytical Solution with Numerical Integration Results”, *Electronics and Electrical Engineering Journal*, Vol. 21, No. 3, pp. 38-41, 2015 <http://dx.doi.org/10.5755/j01.eee.21.3.10268>

[4.23] Chrysostomou, A., Bourgiotis, S., Sautbekov, S., Ioannidi, K., Sautbekov, S. and Frangos, P., "Radiation of a Vertical Dipole Antenna over Flat and Lossy Ground : Accurate Electromagnetic Field Calculation using the Spectral Domain Approach along with Redefined Integral Representations and corresponding Novel Analytical Solution", *Electronics and Electrical Engineering Journal*, Vol. 22, No. 2, pp. 54-61, 2016.

[4.24] Weinstein, L. A., *The Theory of Diffraction and the Factorization Method*. Golem Press, Boulder, Colorado, 1969.

[4.25] Fock, V. A., *Diffraction of radio waves around the earth's surface*, Academy of Sciences, U.S.S.R., 1946.

[4.26] Sautbekov, S., "Factorization method for finite fine structures," *Progress In Electromagnetic Research B*, Vol. 25, 1–21, 2010.