ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Συνεχή Κλάσματα

Θεωρία και Εφαρμογές

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Σάλιακας Ευστράτιος

Επιβλέπουσα: Σοφία Λαμπροπούλου - Καθηγήτρια Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2019

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία αναλύουμε την θεωρία των συνεχών κλασμάτων και παρουσιάζουμε εφαρμογές τους σε άλλους τομείς των μαθηματικών. Ξεκινάμε αναφέροντας βασικούς όρους και αποδεικνύοντας ιδιότητες απαραίτητες για τη συνέχεια. Έπειτα εξετάζουμε την σχέση μεταξύ συνεχών κλασμάτων και πραγματικών αριθμών, αποδεικνύουμε την ύπαρξη μοναδικού αναπτύγματος σε απλό συνεχές κλάσμα για κάθε πραγματικό και μελετάμε την σύγκλιση των αναπτυγμάτων αυτών. Κλείνουμε το πρώτο μέρος δίνοντας τα αναπτύγματα σημαντικών πραγματικών αριθμών. Στο δεύτερο μέρος ασχολούμαστε με δύο εφαρμογές των συνεχών κλασμάτων. Στο Κεφάλαιο 5 χρησιμοποιούμε τα συνεχή κλάσματα για να υπολογίσουμε την γενική λύση των Διοφαντικών Εξισώσεων. Τέλος, στο Κεφάλαιο 6, αφού μελετήσουμε βασικά στοιχεία της Θεωρίας Κόμβων, ορίζουμε αντιστοιχία μεταξύ ρητών κόμβων και απλών συνεχών κλασμάτων και την χρησιμοποιούμε για να ταξινομήσουμε τις ρητές εμπλοκές σε κλάσεις ισοτοπίας.

Λέξεις Κλειδιά— συνεχή κλάσματα, αναπτύγματα, σύγκλιση, διοφαντικές εξισώσεις, θεωρία κόμβων, ρητές εμπλοκές

Abstract

In this thesis we analyze the theory of continued fractions and present some of their applications in other fields of mathematics. We begin by defining basic terms and proving properties necessary for the following chapters. Then we examine the relationship between continuous fractions and real numbers, prove the existence of a unique continued fraction expansion for all real numbers and we study the convergence of these expansions. Closing the first part we give some examples of significant expansions. In the second part we deal with two applications of continued fractions. In Chapter 5, we use continued fractions to calculate the general solution of Diophantine Equations. Finally, in Chapter 6, after an introduction to Knot Theory, we define an association between rational tangles and continued fractions which we use for the classification of rational tangles.

Keywords— continued fractions, expansions, convergence, diophantine equations, knot theory, rational tangles

Περιεχόμενα

Μέρος I

Θεωρία Συνεχών Κλασμάτων

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Βασικοί Ορισμοί

Μία έκφραση της μορφής

$$a_0 + \cfrac{b_0}{a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \cfrac{b_2}{a_3 + ...}}}$$

ονομάζεται συνεχές κλάσμα. Τα a_i και b_i μπορεί να είναι πραγματικοί ή μιγαδικοί αριθμοί.

Αντί της παραπάνω μορφής συχνά θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό

$$a_0 + \frac{b_0}{a_1 +} \frac{b_1}{a_2 +} \frac{b_2}{a_3 +} \cdots$$

Για $b_i = 1$ έχουμε το *απλό συνεχές κλάσμα*

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + ...}}}$$

το οποίο συμβολίζεται και ως $[a_0; a_1, a_2, a_3, ...]$. Τα a_i καλούνται όροι του απλού συνεχούς κλάσματα. Ανάλογα με το πλήθος των όρων τους τα συνεχή κλάσματα διακρίνονται σε πεπερασμένα και άπειρα. Ένα πεπερασμένο συνεχές κλάσμα με n όρους ονομάζεται n βαθμού.

Θα ασχοληθούμε κυρίως με απλά συνεχή κλάσματα με θετικούς ακέραιους όρους αφήνοντας όμως το a_0 να παίρνει τιμές σε όλο το σύνολο των ακεραίων.

Ορισμός 1.1. Αρχικά Τμήματα
Έστω συνεχές κλάσμα a με τουλάχιστον n όρους a_i και $0 \leq k \leq n$. Ονομάζουμε τα συνεχή κλάσματα $s_k = [a_0; a_1, ..., a_k]$ *αρχικά τμήματα* του a.

Όλα τα αρχικά τμήματα είναι πεπερασμένα συνεχή κλάσματα.

Ορισμός 1.2. Υπόλοιπα
Έστω πεπερασμένο συνεχές κλάσμα $a = [a_0; a_1, a_2, ..., a_n]$ και $0 \leq k \leq n$. Ονομάζουμε τα πεπερασμένα συνεχή κλάσματα $r_k = [a_k; a_{k+1}, ..., a_n]$ *υπόλοιπα* του a. Αντίστοιχα για άπειρο συνεχές κλάσμα $a = [a_0; a_1, a_2, ...]$ τα *υπόλοιπα* του a είναι τα άπειρα συνεχή κλάσματα $r_k = [a_k; a_{k+1}, a_{k+2}, ...]$.

Για πεπερασμένα συνεχή κλάσματα ισχύει $[a_0; a_1, a_2, ..., a_n] = [a_0; a_1, a_2, ..., a_{k-1}, r_k]$. Για άπειρα συνεχή κλάσματα η ισότητα αυτή χρησιμοποιείται συμβολικά καθώς έχει νόημα μόνο αν το r_k συγκλίνει.

Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι τα πεπερασμένα συνεχή κλάσματα $a = [a_0; a_1, a_2, ..., a_n + 1]$ και $a' = [a_0; a_1, a_2, ..., a_n, 1]$ είναι ίσα αφού έχουν κοινούς τους n πρώτους όρους και για τα αντίστοιχα υπόλοιπα $r_n = [a_n + 1]$ και $r'_n = [a_n; 1]$ ισχύει $r'_n = a_n + \frac{1}{1} = a_n + 1 = r_n$. Στη συνέχεια, λόγω αυτής της ιδιότητας, όπου αναφερόμαστε σε πεπερασμένα απλά συνεχή κλάσματα θα θεωρούμε τον τελευταίο όρο διαφορετικό της μονάδας.

1.2 Σημαντικές Ιδιότητες

Κάθε πεπερασμένο συνεχές κλάσμα $a = [a_0; a_1, a_2, ..., a_n]$ ισούται με το αποτέλεσμα πεπερασμένου πλήθους πράξεων μεταξύ των όρων του και άρα μπορεί να πάρει τη μορφή

$$\frac{p}{q} = \frac{P(a_0, a_1, a_2, ..., a_n)}{Q(a_0, a_1, a_2, ..., a_n)}$$

όπου P, Q πολυώνυμα. Ο λόγος $a = \frac{p}{q}$ ονομάζεται κανονική μορφή του a. Την κανονική μορφή του $s_k = \frac{p_k}{q_k}$ για $0 \leq k \leq n$ την ονομάζουμε *συγκλίνον* k βαθμού του a το οποίο συμβολίζουμε ως c_k.

Θεώρημα 1.1. [1] Για τα συκλίνοντα $c_k = \frac{p_k}{q_k}$ του συνεχούς κλάσματος $a = [a_0; a_1, a_2, ..., a_n]$ ισχύουν
$p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}$
$q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}$ για $2 \leq k \leq n$
με αρχικές συνθήκες $p_0 = a_0$, $q_0 = 1$, $p_1 = a_1 a_0 + 1$, $q_1 = a_1$.

Απόδειξη.
Αποδεικνύουμε πρώτα τις αρχικές συνθήκες
$c_0 = a_0 = \frac{a_0}{1} \Rightarrow p_0 = a_0$ και $q_0 = 1$
$c_1 = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_1 a_0 + 1}{a_1} \Rightarrow p_1 = a_1 a_0 + 1$ και $q_1 = a_1$
Υποθέτουμε τώρα ότι το θεώρημα ισχύει για κάθε j με $2 \leq j \leq k$ για κάποιο $k < n$ και πρέπει να δείξουμε ότι ισχύει για $k + 1$.
Παρατηρούμε ότι το c_{k+1} προκύπτει με αντικατάσταση του όρου a_k από τον $a_k + \frac{1}{a_{k+1}}$ στο c_k και $c_k = \frac{a_k p_{k-1} + p_{k-2}}{a_k q_{k-1} + q_{k-2}}$ όπου τα p_{k-1}, p_{k-2}, q_{k-1}, q_{k-2} δεν επηρεάζονται από την αντικατάσταση καθώς από υπόθεση εξαρτώνται μόνο από τις τιμές των a_j, p_j, q_j για $j < k$ άρα

$$c_{k+1} = \frac{(a_k + \frac{1}{a_{k+1}})p_{k-1} + p_{k-2}}{(a_k + \frac{1}{a_{k+1}})q_{k-1} + q_{k-2}} = \frac{(a_k a_{k+1} + 1)p_{k-1} + a_{k+1} p_{k-2}}{(a_k a_{k+1} + 1)q_{k-1} + a_{k+1} q_{k-2}} = \frac{a_{k+1}(a_k p_{k-1} + p_{k-2}) + p_{k-1}}{a_{k+1}(a_k q_{k-1} + q_{k-2}) + q_{k-1}}$$

Όμως από υπόθεση $p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}$ και $q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow c_{k+1} = \frac{a_{k+1} p_k + p_{k-1}}{a_{k+1} q_k + q_{k-1}}$$

[1] [1], σελίδα 4

δηλαδή $p_{k+1} = a_{k+1}p_k + p_{k-1}$ και $q_{k+1} = a_{k+1}q_k + q_{k-1}$ και άρα το θεώρημα ισχύει για κάθε k με $2 \leq k \leq n$. □

Πόρισμα 1.1.1. Για $1 \leq k \leq n$

$$[a_0; a_1, a_2, ..., a_n] = \frac{p_{k-1}r_k + p_{k-2}}{q_{k-1}r_k + q_{k-2}}$$

Απόδειξη.

Ισχύει γενικά

$$[a_0; a_1, a_2, ..., a_n] = [a_0; a_1, a_2, ..., a_{k-1}, r_k]$$

για το συνεχές κλάσμα στο δεύτερο μέρος το συκλίνον c_k ισούται με το ίδιο το κλάσμα και

$$p_k = p_{k-1}r_k + p_{k-2}$$

$$q_k = q_{k-1}r_k + q_{k-2}$$

□

Στο Κεφάλαιο 3 θα δούμε ότι η σχέση αυτή ισχύει και για άπειρα συνεχή κλάσματα.

Θεώρημα 1.2. [2] Για κάθε $k \geq 1$

$$q_k p_{k-1} - p_k q_{k-1} = (-1)^k$$

Απόδειξη.

Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη σχέση του θεωρήματος **1.1** με q_{k-1} και τη δεύτερη με p_{k-1} και αφαιρώντας την πρώτη από τη δεύτερη παίρνουμε

$$q_k p_{k-1} - p_k q_{k-1} = -(q_{k-1}p_{k-2} - p_{k-1}q_{k-2})$$

και για τις αρχικές συνθήκες έχουμε

$$q_1 p_0 - p_1 q_0 = -1$$

οπότε

$$q_k p_{k-1} - p_k q_{k-1} = (-1)^k$$

□

[2] [1], σελίδα 5

Κεφάλαιο 2

Ανάπτυγμα Πραγματικού σε Απλό Συνεχές Κλάσμα

Θεώρημα 2.1. [1] Για κάθε πραγματικό αριθμό a υπάρχει μοναδικό απλό συνεχές κλάσμα το οποίο ισούται με a. Το κλάσμα αυτό είναι πεπερασμένα αν ο a είναι ρητός και άπειρο αν είναι άρρητος.

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη είναι χρήσιμο να δούμε ένα παράδειγμα. Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το ανάπτυγμα σε απλό συνεχές κλάσμα του ρητού $\frac{67}{29}$. Αρχικά διαιρούμε το 67 με το 29 παίρνοντας πηλίκο 2 και υπόλοιπο 9 δηλαδή $\frac{67}{29} = 2 + \frac{9}{29}$.
Στη συνέχεια αντικαθιστούμε το $\frac{9}{29}$ με τον αντίστροφό του $\frac{29}{9}$ ώστε ο αριθμητής του κλάσματος να είναι μονάδα

$$\frac{67}{29} = 2 + \frac{1}{\frac{29}{9}}$$

Επαναλαμβάνοντας για $\frac{29}{9}$ και συνεχίζοντας έως να καταλήξουμε σε ακέραιο έχουμε

$$\frac{29}{9} = 3 + \frac{2}{9} = 3 + \frac{1}{\frac{9}{2}}$$

$$\frac{9}{2} = 4 + \frac{1}{2}$$

[1] [1], σελίδα 16

Άρα καταλήγουμε

$$\frac{67}{29} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2}}}$$

Απόδειξη.

Ονομάζουμε a_0 τον μεγαλύτερο ακέραιο που δεν είναι μεγαλύτερος από a. Αν a δεν είναι ακέραιος τότε ορίζουμε r_1 τέτοιο ώστε

$$a = a_0 + \frac{1}{r_1}$$

και $r_1 > 1$ αφού

$$\frac{1}{r_1} = a - a_0 < 1$$

Γενικά αν r_n δεν είναι ακέραιος ονομάζουμε a_n τον μεγαλύτερο ακέραιο που δεν ξεπερνά το r_n και θέτουμε

$$r_n = a_n + \frac{1}{r_{n+1}}$$

με $r_{n+1} > 1$.

Αν ο a είναι ρητός τότε και όλοι οι r_n είναι ρητοί αφού κάθε $\frac{1}{r_n}$ είναι διαφορά δύο ρητών. Μπορούμε τότε να θέσουμε $r_n = \frac{k}{l}$ (k, l φυσικοί αριθμοί) και υποθέτοντας ότι δεν είναι ακέραιος έχουμε

$$1 > r_n - a_n = \frac{k - la_n}{l} = \frac{m}{l} \Rightarrow r_{n+1} = \frac{l}{m}$$

Παρατηρούμε ότι ο παρονομαστής το r_{n+1} είναι μικρότερος από τον παρονομαστή του r_n και άρα μετά από πεπερασμένου πλήθους βήματα θα καταλήξουμε σε ακέραιο $r_N = a_N$. Ο a τότε ισούται με το πεπερασμένο συνεχές κλάσμα $[a_0; a_1, a_2, ..., a_{N-1}, a_N]$.

Αν ο a είναι άρρητος τότε όλοι οι r_n είναι άρρητοι οπότε η διαδικασία συνεχίζετε για άπειρους r_n. Θέτοντας $[a_0; a_1, a_2, ..., a_n] = \frac{p_n}{q_n}$ έχουμε

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{p_{n-1}a_n + p_{n-2}}{q_{n-1}a_n + q_{n-2}}$$

Ακόμα αν $a = [a_0; a_1, a_2, ..., r_n]$ ισχύει

$$a = \frac{p_{n-1}r_n + p_{n-2}}{q_{n-1}r_n + q_{n-2}}$$

$$a - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(p_{n-1}q_{n-2} - q_{n-1}p_{n-2})(r_n - a_n)}{(q_{n-1}r_n + q_{n-2})(q_{n-1}a_n + q_{n-2})}$$

και επειδή $p_{n-1}q_{n-2} - q_{n-1}p_{n-2} = (-1)^{n-1}$

$$\left| a - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{(q_{n-1}r_n + q_{n-2})(q_{n-1}a_n + q_{n-2})} < \frac{1}{q_n^2}$$

Όμως $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$ και q_n ακέραιος άρα όταν $n \to \infty$

$$q_n \to \infty \Rightarrow \frac{p_n}{q_n} \to a$$

Μένει να αποδείξουμε τη μοναδικότητα. Συμβολίζουμε με $[x]$ τον μεγαλύτερο ακέραιο που δεν είναι μεγαλύτερος του x και θέτουμε

$$a = [a_0; a_1, a_2, ...] = [a_0'; a_1', a_2', ...]$$

Από τον ορισμό των απλών συνεχών κλασμάτων $a_0 = [a] = a_0'$. Αν υποθέσουμε ότι για $0 \leq k \leq n$ γνωρίζουμε ότι $a_k = a_k'$ τότε $p_k = p_k'$ και $q_k = q_k'$. Έτσι έχουμε

$$\frac{p_n r_{n+1} + p_{n-1}}{q_n r_{n+1} + q_{n-1}} = a = \frac{p_n' r_{n+1}' + p_{n-1}'}{q_n' r_{n+1}' + q_{n-1}'} = \frac{p_n r_{n+1}' + p_{n-1}}{q_n r_{n+1}' + q_{n-1}} \Rightarrow r_{n+1} = r_{n+1}'$$

και επειδή $a_{n+1} = [r_{n+1}]$ και $a_{n+1}' = [r_{n+1}']$ (όπως τα ορίσαμε στην αρχή της απόδειξης) καταλήγουμε ότι $a_{n+1} = a_{n+1}'$ και έχουμε αποδείξει επαγωγικά ότι $a_n = a_n'$ για κάθε $n \geq 0$. Άρα η απεικόνιση του a ως συνεχές κλάσμα είναι μοναδική.

$\square$

Θεώρημα 2.2. [2] Κάθε περιοδικό απλό συνεχές κλάσμα ισούται με ένα τετραγωνικό άρρητο και το ανάπτυγμα κάθε τετραγωνικού άρρητου σε απλό συνεχές κλάσμα είναι περιοδικό.

Απόδειξη.

Έστω περιοδικό απλό συνεχές κλάσμα a τότε υπάρχει φυσικός αριθμός $h \geq 1$ ώστε για τα όλα υπόλοιπα του a να ισχύει $r_{k+h} = r_k$ οπότε

$$a = \frac{p_{k-1}r_k + p_{k-2}}{q_{k-1}r_k + q_{k-2}} = \frac{p_{k+h-1}r_{k+h} + p_{k+h-2}}{q_{k+h-1}r_{k+h} + q_{k+h-2}} = \frac{p_{k+h-1}r_k + p_{k+h-2}}{q_{k+h-1}r_k + q_{k+h-2}}$$

[2] [1], σελίδα 48

άρα ο r_k είναι τετραγωνικός άρρητος αφού είναι ρίζα της δευτεροβάθμιας εξίσωσης

$$\frac{p_{k-1}r_k + p_{k-2}}{q_{k-1}r_k + q_{k-2}} = \frac{p_{k+h-1}r_k + p_{k+h-2}}{q_{k+h-1}r_k + q_{k+h-2}}$$

και αφού

$$a = \frac{p_{k-1}r_k + p_{k-2}}{q_{k-1}r_k + q_{k-2}}$$

ο a είναι επίσης τετραγωνικός άρρητος.

Για να αποδείξουμε το δεύτερο μέρος του θεωρήματος υποθέτουμε ότι a είναι ρίζα της εξίσωσης $ba^2 + ca + d = 0$ με b, c, d ακέραιους και γράφουμε

$$a = \frac{p_{n-1}r_n + p_{n-2}}{q_{n-1}r_n + q_{n-2}}$$

Το r_n ικανοποιεί την εξίσωση

$$B_n r_n^2 + C_n r_n + D_n = 0$$

όπου

$$B_n = bp_{n-1}^2 + cp_{n-1}q_{n-1} + dq_{n-1}^2$$

$$C_n = 2bp_{n-1}p_{n-2} + c(p_{n-1}q_{n-2} + p_{n-2}q_{n-1}) + 2dq_{n-1}q_{n-2}$$

$$D_n = bp_{n-2}^2 + cp_{n-2}q_{n-2} + dq_{n-2}^2$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στη διακρίνουσα $C_n^2 - 4B_nD_n$ βλέπουμε ότι $C_n^2 - 4B_nD_n = c^2 - 4bd$ δηλαδή η διακρίνουσα είναι σταθερή για όλα τα n. Επιπλέον επειδή

$$\left|a - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| < \frac{1}{q_{n-1}^2}$$

έχουμε

$$p_{n-1} = aq_{n-1} + \frac{\delta_{n-1}}{q_{n-1}}$$

με $|\delta_{n-1}| < 1$ και αντικαθιστώντας στη σχέση για το B_n

$$\begin{aligned} B_n &= b(aq_{n-1} + \frac{\delta_{n-1}}{q_{n-1}})^2 + c(aq_{n-1} + \frac{\delta_{n-1}}{q_{n-1}})q_{n-1} + cq_{n-1}^2 \\ &= (ba^2 + ca + d)q_{n-1}^2 + 2ba\delta_{n-1} + b\frac{\delta_{n-1}^2}{q_{n-1}^2} + c\delta_{n-1} \end{aligned}$$

άρα $|B_n| < 2\,|ba| + |b| + |c|$ και $|D_n| < 2\,|ba| + |b| + |c|$ αφού $D_n = B_{n-1}$. Τα B_n, D_n είναι ακέραιοι και παίρνουν τιμές σε φραγμένο διάστημα άρα μπορούν να πάρουν πεπερασμένο πλήθος διαφορετικών τιμών και το ίδιο ισχύει και για τα C_n αφού $C_n^2 - 4B_nD_n = c^2 - 4bd$. Άρα τα r_n παίρνουν πεπερασμένο πλήθος διαφορετικών τιμών οπότε υπάρχουν φυσικοί h, k τέτοιοι ώστε $r_{k+h} = r_k$ και άρα το ανάπτυγμα σε συνεχές κλάσμα του a είναι περιοδικό. $\square$

Κεφάλαιο 3

Θεωρία Σύγκλισης

Έστω άπειρο συνεχές κλάσμα $[a_0; a_1, a_2, ...]$ και η αντίστοιχη ακολουθία συγκλινόντων $c_0, c_1, ...$ Αν η ακολουθία συκλίνει με όριο $a \in \mathbb{R}$ τότε λέμε ότι το συνεχές κλάσμα συγκλίνει και ισούται με a.

Θεώρημα 3.1. [1] Έστω άπειρο συνεχές κλάσμα $a = [a_0; a_1, a_2, ...]$. Αν το a συγκλίνει τότε όλα τα υπόλοιπά του συγκλίνουν. Επιπλέον, αν τουλάχιστον ένα υπόλοιπο του a συκλίνει τότε το a συκλίνει.

Απόδειξη.
Συμβολίζουμε $\frac{p_k}{q_k}$ τα συγκλίνοντα το a και $\frac{p'_k}{q'_k}$ τα συγκλίνοντα του τυχαίου υπολοίπου r_n. Από προηγούμενο πόρισμα για $k = 0, 1, \ldots$

$$\frac{p_{n+k}}{q_{n+k}} = [a_0; a_1, a_2, ..., a_{n+k}] = \frac{p_{n-1}\frac{p'_k}{q'_k} + p_{n-2}}{q_{n-1}\frac{p'_k}{q'_k} + q_{n-2}}$$

Αν το a συγκλίνει τότε το $\frac{p_{n+k}}{q_{n+k}}$ συγκλίνει για $k \to \infty$ και λύνοντας ως προς $\frac{p'_k}{q'_k}$ καταλήγουμε ότι τα r_n συγκλίνουν.
Αντίστοιχα αν το τυχαίο υπόλοιπο r_n συγκλίνει δηλαδή το $\frac{p'_k}{q'_k}$ συγκλίνει για $k \to \infty$ τότε και το

[1] [1], σελίδα 8

$\frac{p_{n+k}}{q_{n+k}}$ συγκλίνει στο a με

$$a = \frac{p_{n-1}r_n + p_{n-2}}{q_{n-1}r_n + q_{n-2}}$$

□

Θεώρημα 3.2. [2] Θεωρούμε άπειρο απλό συνεχές κλάσμα $a = [a_0; a_1, a_2, ...]$ με συγκλίνοντα $c_n (n = 0, 1, ...)$. Τα άρτια συγκλίνοντα του a σχηματίζουν αύξουσα ακολουθία και τα περιττά σχηματίζουν φθίνουσα ακολουθία. Επιπλέον κάθε συγκλίνον c_n με $n \geq 2$ βρίσκεται μεταξύ των δύο προηγούμενων.

Απόδειξη.

Δείχνουμε πρώτα ότι

$$c_n - c_{n-2} = \frac{a_n(-1)^n}{q_n q_{n-2}}$$

Ισχύει

$$c_n - c_{n-2} = \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} = \frac{p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n}{q_n q_{n-2}}$$

Αντικαθιστώντας τα p_n και q_n σύμφωνα με το Θεώρημα **1.1**

$$p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n = (a_n p_{n-1} + p_{n-2}) q_{n-2} - p_{n-2}(a_n q_{n-1} + q_{n-2}) = -a_n(q_{n-1} p_{n-2} - p_{n-1} q_{n-2})$$

και από το Θεώρημα **1.2** για $k = n - 1$

$$p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n = a_n(-1)^n \Rightarrow c_n - c_{n-2} = \frac{a_n(-1)^n}{q_n q_{n-2}}$$

Έχουμε υποθέσει $a_n > 0$ για $n \neq 0$ άρα για άρτιο $n \geq 2$ έχουμε $c_n - c_{n-2} > 0$ ενώ για περιττό $n \geq 3$ $c_n - c_{n-2} < 0$ και άρα έχουμε αποδείξει το πρώτο μέρος του θεωρήματος.

Για το δεύτερο μέρος του θεωρήματος χρησιμοποιούμε την ισότητα

$$c_{n-1} - c_n = \frac{(-1)^n}{q_{n-1} q_n}$$

η οποία προκύπτει από το Θεώρημα **1.2** αν διαιρέσουμε με $q_{n-1} q_n$

Η ισότητα αυτή μας δείνει $c_n < c_{n-1}$ για άρτιο n και $c_n > c_{n-1}$ για περιττό. Συνδυάζοντας με τα προηγούμενα έχουμε για άρτιο n $c_{n-2} < c_n < c_{n-1}$ και για περιττό $c_{n-2} > c_n > c_{n-1}$ και έτσι έχουμε αποδείξει και το δεύτερο μέρος του θεωρήματος. □

[2] [2], σελίδα 63

Πόρισμα 3.2.1. Κάθε άρτιο συγκλίνον είναι μικρότερο από κάθε περιττό.

Απόδειξη.

Έστω $n \geq 2$ τυχαίος άρτιος. Δείξαμε παραπάνω ότι $c_n < c_{n-1}$ και άρα $c_n < c_k$ για κάθε περιττό $k \leq n-1$ αφού τα περιττά συγκλίνοντα σχηματίζουν φθίνουσα ακολουθία. Επιπλέον, επειδή τα άρτια συγκλίνοντα σχηματίζουν αύξουσα ακολουθία $c_n < c_{n+l}$ για κάθε άρτιο $l \geq 2$. Όμως $c_{n+l} < c_{n+l-1} \Rightarrow c_n < c_{n+l-1} \Rightarrow c_n < c_k$ για κάθε περιττό $k > n-1$. Άρα $c_n < c_k$ για κάθε k περιττό. □

Θεώρημα 3.3. [3] Κάθε άπειρο απλό συνεχές κλάσμα συγκλίνει και η τιμή του είναι μεγαλύτερη από κάθε άρτιο συγκλίνον και μικρότερη από κάθε περιττό.

Απόδειξη.

Από τα προηγούμενα θεωρήματα έχουμε ότι τα άρτια συγκλίνοντα σχηματίζουν αύξουσα ακολουθία η οποία έχει ως φράγμα κάθε περιττό συγκλίνον και άρα συγκλίνει με όριο έστω l_1. Αντίστοιχα τα περιττά συγκλίνοντα σχηματίζουν φθίνουσα φραγμένη ακολουθία η οποία επίσης συγκλίνει και έστω l_2 το όριο.

Για $k = 1, 2, ...$ ισχύει $c_{2k} < l_1 \leq l_2 < c_{2k-1}$ όμως
$c_{2k-1} - c_{2k} = \frac{(-1)^{2k}}{q_{2k-1}q_{2k}} \to 0$ για $k \to \infty$
Άρα $l_1 = l_2 = a$ δηλαδή το συνεχές κλάσμα συγκλίνει στην τιμή a και $c_{2k} < a < c_{2k-1}$. □

Θεώρημα 3.4. [4] Κάθε συγκλίνον ενός απλού συνεχούς κλάσματος βρίσκεται πιο κοντά στην τιμή του κλάσματος από το προηγούμενο.

Απόδειξη.

Έστω συνεχές κλάσμα $a = [a_0; a_1, a_2, ..., a_n, r_{n+1}]$ όπου το r_{n+1} είναι υπόλοιπο του a. Όπως

[3] [2], σελίδα 67
[4] [2], σελίδα 72

είδαμε στην απόδειξη του θεωρήματος **3.1**

$$a = \frac{p_n r_{n+1} + p_{n-1}}{q_n r_{n+1} + q_{n-1}}$$

το οποίο μας δίνει

$$a(q_n r_{n+1} + q_{n-1}) = p_n r_{n+1} + p_{n-1}$$

$$r_{n+1}(a q_n - p_n) = -(a q_{n-1} - p_{n-1})$$

$$r_{n+1} q_n (a - \frac{p_n}{q_n}) = -q_{n-1}(a - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}})$$

Διαιρώντας με $r_{n+1}q_n$ παίρνουμε

$$a - c_n = -\frac{q_{n-1}}{r_{n+1}q_n}(a - c_{n-1})$$

και άρα

$$|a - c_n| = \left|\frac{q_{n-1}}{r_{n+1}q_n}\right| |a - c_{n-1}|$$

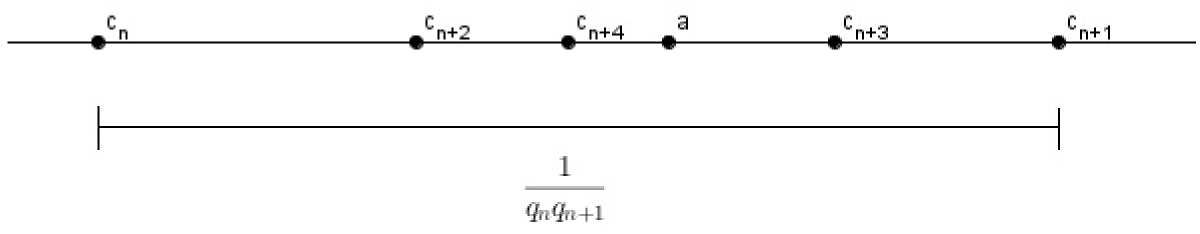
Όμως $r_{n+1} \geq a_{n+1} \geq 1$ και $q_n > q_{n-1} > 0$ άρα

$$0 < \left|\frac{q_{n-1}}{r_{n+1}q_n}\right| < 1$$

και έτσι προκύπτει ότι

$$|a - c_n| < |a - c_{n-1}|$$

δηλαδή το c_n βρίσκεται πιο κοντά στο a από ότι το c_{n-1}. $\square$



Σχήμα 3.1: Απεικόνιση της προσέγγισης της τιμής συνεχούς κλάσματος a από διαδοχικά συγκλίνοντα αυτού

Από το δύο τελευταία θεωρήματα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η τιμή ενός συνεχούς κλάσματος a βρίσκεται μεταξύ δύο διαδοχικών συγκλινόντων αφού κάθε συγκλίνον βρίσκεται μεταξύ των δύο προηγούμενων και πιο κοντά στο a από αυτά. Συνδυάζοντας το συμπέρασμα αυτό με την ισότητα $c_n - c_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{q_n q_{n+1}}$ έχουμε ότι

$$|a - c_{n+1}| + |a - c_n| = \frac{1}{q_n q_{n+1}}$$

και επειδή $0 < |a - c_{n+1}| < |a - c_n|$ καταλήγουμε

$$\frac{1}{2q_n q_{n+1}} < |a - c_n| < \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2}$$

Το οποίο μας δείνει φράγματα για το σφάλμα της εκτίμησης του a από το συγκλίνον c_n.

Κεφάλαιο 4

Χαρακτηριστικά Συνεχή Κλάσματα

Το τελευταίο συμπέρασμα του προηγούμενου κεφαλαίου μας προτρέπει να εξετάσουμε τι γίνεται αν προσπαθήσουμε να ελαχιστοποιήσουμε τα q_n ενός άπειρου συνεχούς κλάσματος. Γνωρίζουμε ότι

$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$ για $n \geq 2$

$q_0 = 1$, $q_1 = a_1$ και $a_n \geq 1$

οπότε για να ελαχιστοποιηθούν τα q_n θέτουμε $a_n = 1 \; \forall n \geq 0$ [1] και καταλήγουμε στο συνεχές κλάσμα $[1; 1, 1, ...]$. Το κλάσμα αυτό προκύπτει από την εξίσωση $x = 1 + \frac{1}{x}$ με διαδοχικές αντικαταστάσεις του x στο δεύτερο μέρος. Η θετική ρίζα της εξίσωσης είναι ο αριθμός φ= $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (χρυσή τομή). Άρα το ανάπτυγμα του φ σε συνεχές κλάσμα είναι φ= $[1; 1, 1, ...]$. Για να δούμε πόσο αργή είναι η σύγκλιση του φ ως συνεχούς κλάσματος αρκεί να αναφέρουμε ότι χρειάζεται να φτάσουμε στο συγκλίνον c_{18} για να επιτύχουμε καλύτερη προσέγγιση από ότι παίρνουμε σε δεκαδική μορφή με 6 δεκαδικά ψηφία. Ως σύγκριση σημειώνεται ότι για το π (το οποίο θα αναλυθεί στη συνέχεια) αρκεί να πάρουμε το c_3 για να επιτύχουμε αντίστοιχη ακρίβεια [2].

[1] Η τιμή του a_0 δεν επηρεάζει τα q_n οπότε μπορεί να επιλεχτεί αυθαίρετα

[2] [3], σελίδα 427

4.1 Μετατροπή Σειρών σε Συνεχή Κλάσματα

Για a_1, a_2 μη μηδενικούς πραγματικούς με $a_1 \neq a_2$ παρατηρούμε ότι

$$\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} = \frac{a_2 - a_1}{a_1 a_2} = \frac{1}{\frac{a_1 a_2}{a_2 - a_1}}$$

και

$$\frac{a_1 a_2}{a_2 - a_1} = \frac{a_1(a_2 - a_1) - a_1^2}{a_2 - a_1} = a_1 + \frac{a_1^2}{a_2 - a_1}$$

οπότε

$$\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} = \frac{1}{a_1 + \frac{a_1^2}{a_2 - a_1}}$$

Για a_1, a_2 πραγματικούς διάφορους του 0 και του 1 ισχύει

$$\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1 a_2} = \frac{a_2 - 1}{a_1 a_2} = \frac{1}{\frac{a_1 a_2}{a_2 - 1}}$$

και

$$\frac{a_1 a_2}{a_2 - 1} = \frac{a_1(a_2 - 1) + a_1}{a_2 - 1} = a_1 + \frac{a_1}{a_2 - 1}$$

άρα

$$\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1 a_2} = \frac{1}{a_1 + \frac{a_1}{a_2 - 1}}$$

Γενικεύοντας τις δύο σχέσεις που προέκυψαν καταλήγουμε στα δύο παρακάτω θεωρήματα τα οποία αποδεικνύονται με μαθηματική επαγωγή.

Θεώρημα 4.1. [3] Έστω $a_1, a_2, ...$ μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί με $a_k \neq a_{k-1}$ για κάθε k τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{a_k} = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{a_1^2}{a_2 - a_1 + \cfrac{a_2^2}{\ddots + \cfrac{a_{n-1}^2}{a_n - a_{n-1}}}}}$$

Θεώρημα 4.2. [4] Έστω $a_1, a_2, ...$ πραγματικοί με $0 \neq a_k \neq 1$ για κάθε k τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{a_1 ... a_k} = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{a_1}{a_2 - 1 + \cfrac{a_2}{\ddots + \cfrac{a_{n-2}}{a_{n-1} - 1 + \cfrac{a_{n-1}}{a_n - 1}}}}}$$

Τα παραπάνω θεωρήματα ισχύουν και για $n \to \infty$ όταν η αντίστοιχη σειρά συγκλίνει.

4.2 Αναπτύγματα σχετικά με το π

4.2.1 *arctanx* και $\frac{\pi}{4}$

Γνωρίζουμε ότι $arctanx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^{2k-1}}{2k-1}$ (σειρά Leibniz). Εφαρμόζοντας το Θεώρημα **4.1** για $a_k = \frac{2k-1}{x^{2k-1}}$ έχουμε

[3] [3], σελίδα 357

[4] [3], σελίδα 359

$$arctanx = \cfrac{1}{\frac{1}{x} + \cfrac{\frac{1}{x^2}}{\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x} + \cfrac{(\frac{3}{x^3})^2}{\frac{5}{x^5} - \frac{3}{x^3} + \cfrac{(\frac{5}{x^5})^2}{\ddots + \cfrac{(\frac{2n-3}{x^{2n-3}})^2}{\frac{2n-1}{x^{2n-1}} - \frac{2n-3}{x^{2n-3}} + \ddots}}}}}$$

και για $x = 1$

$$\frac{\pi}{4} = arctan1 = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{\ddots + \cfrac{(2n-1)^2}{2 + \ddots}}}}}$$

4.2.2 $\frac{\pi^2}{6}$

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα **4.1** στο ανάπτυγμα $\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots$ για $a_k = (-1)^{k-1}k^2$

$$\frac{\pi^2}{6} = \cfrac{1}{1^2 + \cfrac{1^4}{-2^2 - 1^2 + \cfrac{2^4}{3^2 + 2^2 + \cfrac{3^4}{-4^2 - 3^2 + \ddots}}}}$$

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα μετατροπής (αποδεικνύεται με επαγωγή)

$$\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \frac{b_3}{a_3} + \cdots + \frac{b_n}{a_n} + \cdots = \frac{p_1 b_1}{p_1 a_1} + \frac{p_1 p_2 b_2}{p_2 a_2} + \frac{p_2 p_3 b_3}{p_3 a_3} + \cdots + \frac{p_{n-1} p_n b_n}{p_n a_n} + \cdots$$

με $p_k = (-1)^{k-1}$ καταλήγουμε στο ανάπτυγμα

$$\frac{\pi^2}{6} = \cfrac{1}{1^2 - \cfrac{1^4}{2^2 + 1^2 - \cfrac{2^4}{3^2 + 2^2 - \cfrac{3^4}{4^2 + 3^2 - \ddots}}}}$$

4.2.3 π

Για να υπολογίσουμε το ανάπτυγμα του π θα χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}) = 1$ και $\frac{\pi}{4} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1}$

Πολλαπλασιάζουμε τη δεύτερη με 4 και έχουμε

$$\pi = 4 - 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1} = 3 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}) - 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1} =$$

$$3 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{4}{2n+1}) = 3 + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n(2n+1)(2n+2)}$$

Για $a_n = 2n(2n+1)(2n+2)$

$$a_n - a_{n-1} = 2n(2n+1)(2n+2) - 2(n-1)(2n-1)(2n) = 4n[(2n+1)(n+1) - (n-1)(2n-1)] =$$

$$= 4n[(2n^2 + 2n + n + 1 - (2n^2 - n - 2n + 1)] = 4n(6n) = 24n^2$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα **4.2**

$$4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n(2n+1)(2n+2)} = \cfrac{1}{2 \cdot 3 + \cfrac{(2 \cdot 3 \cdot 4)^2}{24 \cdot 2^2 + \cfrac{(4 \cdot 5 \cdot 6)}{24 \cdot 3^2 + \cdots}}}$$

και

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{(2 \cdot 3 \cdot 4)^2}{24 \cdot 2^2 + \cfrac{(4 \cdot 5 \cdot 6)}{24 \cdot 3^2 + \cdots + \cfrac{(2(n-1)(2n-1)(2n))^2}{24 \cdot n^2 + \cdots}}}}$$

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα μετατροπής με $p_1 = 1$ και $p_n = \frac{1}{4n^2}$ για $n \geq 2$

$$\frac{(2(n-1)(2n-1)(2n))^2}{24 \cdot n^2} \to \frac{\frac{1}{4((n-1)^2} \cdot \frac{1}{4n^2} \cdot (2(n-1)(2n-1)(2n))^2}{\frac{1}{4n^2} \cdot 24 \cdot n^2} = \frac{(2n-1)^2}{6}$$

Άρα

$$\pi = 3 + \frac{1^2}{6 +} \frac{3^2}{6 +} \frac{5^2}{6 +} \cdots + \frac{(2n-1)^2}{6} + \cdots$$

Όλα τα παραπάνω αναπτύγματα μας έδωσαν μη απλά συνεχή κλάσματα. Αν θέλουμε να υπολογίσουμε πεπερασμένο πλήθος όρων του απλού συνεχούς κλάσματος που αντιστοιχεί στο π αρκεί να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο που παρουσιάσαμε στην απόδειξη του θεωρήματος **2.1** η οποία για 15 όρους μας δίνει

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, ...]$$

Δυστυχώς οι όροι δεν ακολουθούν κάποιο γνωστό μοτίβο[5].

4.3 Αναπτύγματα του e

Για να υπολογίσουμε το πρώτο ανάπτυγμα το e ξεκινάμε από το ανάπτυγμα σε σειρά

$$e^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!}$$

άρα

$$\frac{e-1}{e} = 1 - \frac{1}{e} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!}$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα **4.2** για $a_k = k$ έχουμε

$$\frac{e-1}{e} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 - 1 + \cfrac{2}{3 - 1 + \cfrac{3}{4 - 1 + \ddots}}}}$$

[5] [3], σελίδα 419

Αντιστρέφοντας και αφαιρώντας 1 και από τα δύο μέρη παίρνουμε

$$\frac{1}{e-1} = \cfrac{1}{1+\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3+\ddots}}}$$

Αντιστρέφοντας ξανά την τελευταία σχέση και προσθέτοντας 1 καταλήγουμε

$$e = 2 + \frac{2}{2+}\frac{3}{3+}\frac{4}{4+}\frac{5}{5+}\cdots$$

Το παραπάνω συνεχές κλάσμα δεν είναι απλό. Για τον υπολογισμό του απλού συνεχούς κλάσματος του e χρησιμοποιούμε την ίδια μέθοδο που εφαρμόσαμε για το π και για τους πρώτους 13 όρους έχουμε

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, ...]$$

Φαίνεται ότι οι όροι ακολουθούν τη μορφή $a_{3n-1} = 2n, a_{3n} = a_{3n+1} = 1$ για $n \geq 1$ με $a_0 = 2$. Θέτουμε ως $a = [a_0; a_1, a_2, ...]$ το απλό συνεχές κλάσμα που ακολουθεί την παραπάνω μορφή και $c_k = \frac{r_k}{s_k}$ τα συγκλίνοντα αυτού. Θα δείξουμε ότι $a = e$.

Λήμμα 4.3. Για κάθε $n \geq 2$ ισχύει

$$r_{3n+1} = 2(2n+1)r_{3(n-1)+1} + r_{3(n-2)+1}$$
$$s_{3n+1} = 2(2n+1)s_{3(n-1)+1} + s_{3(n-2)+1}$$

Απόδειξη.

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα **1.1** πρώτα για το r_{3n+1}, στη συνέχεια για τα $r_{3n}, r_{3n-1}, r_{3n-3}$ και τέλος για το r_{3n-2} έχουμε

$$\begin{aligned} r_{3n+1} &= 1 \cdot r_{3n} + r_{3n-1} = (1 \cdot r_{3n-1} + r_{3n-2}) + r_{3n-1} \\ &= 2r_{3n-1} + r_{3n-2} \\ &= 2(2n \cdot r_{3n-2} + r_{3n-3}) + r_{3n-2} \\ &= (2(2n)+1)r_{3n-2} + 2r_{3n-3} \\ &= (2(2n)+1)r_{3n-2} + r_{3n-3} + (1 \cdot r_{3n-4} + r_{3n-5}) \\ &= (2(2n)+1)r_{3n-2} + (1 \cdot r_{3n-3} + r_{3n-4}) + r_{3n-5} \\ &= (2(2n)+2)r_{3n-2} + r_{3n-5} \\ &= 2(2n+1)r_{3(n-1)+1} + r_{3(n-2)+1} \end{aligned}$$

Αντίστοιχα αποδεικνύουμε τη σχέση για s_{3n+1}. □

Θέτουμε $x = 2$ στην σχέση $\frac{e^{2/x}+1}{e^{2/x}-1} = [x; 3x, 5x, 7x, ...]$[6] και έχουμε

$$\frac{e+1}{e-1} = [2; 6, 10, 14, 18, ...] = b$$

Αν b_n οι όροι του b και $\frac{p_n}{q_n}$ τα συγκλίνοντά του τότε για $n = 0, 1, 2, ...$

$$b_n = 2(2n+1)$$

$$p_n = 2(2n+1)p_{n-1} + p_{n-2}$$

$$q_n = 2(2n+1)q_{n-1} + q_{n-2}$$

Λήμμα 4.4. Για κάθε $n = 0, 1, 2, ...$ ισχύει $r_{3n+1} = p_n + q_n$ και $s_{3n+1} = p_n - q_n$.

Απόδειξη.
Για $n = 0$: $r_1 = a_0 a_1 + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3, p_0 = 2$ και $q_0 = 1$ άρα $r_{3\cdot 0+1} = p_0 + q_0$.
Για $n = 1$: χρησιμοποιούμε τη σχέση $r_{3n+1} = (2(2n)+1)r_{3n-2} + 2r_{3n-3}$[7] και έχουμε $r_{3\cdot 1+1} = (2(2)+1)r_1 + 2r_0 = 5 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 19$. Ακόμα $p_1 = a_0 a_1 + 1 = 2 \cdot 6 + 1 = 13$ και $q_1 = a_1 = 6$ άρα $r_{3\cdot 1+1} = p_1 + q_1$.
Έστω τώρα ότι $r_{3k+1} = p_k + q_k$ ισχύει για κάθε $0 \leq k \leq n-1$ με $n \geq 2$ αρκεί να δείξουμε ότι

[6] Προκύπτει από το ανάπτυγμα $cothx = \frac{1}{x} + \frac{\frac{x}{3}}{+}\frac{\frac{x^2}{5}}{+}\frac{\frac{x^2}{7}}{+}\frac{\frac{x^2}{9}}{+} \cdots$ αντικαθιστώντας το x με $\frac{1}{x}$

[7] Ενδιάμεσο στάδιο στην απόδειξη του λήμματος **4.3**

ισχύει και για $k = n$.

Από το λήμμα **4.3** έχουμε

$$\begin{aligned} r_{3n+1} &= 2(2n+1)r_{3(n-1)+1} + r_{3(n-2)+1} \\ &= 2(2n+1)(p_{n-1} + q_{n-1}) + (p_{n-2} + q_{n-2}) \\ &= 2(2n+1)p_{n-1} + p_{n-2} + 2(2n+1)q_{n-1} + q_{n-2} \\ &= p_n + q_n \end{aligned}$$

Η απόδειξη του $s_{3n+1} = p_n - q_n$ προκύπτει με αντίστοιχο τρόπο. □

Με όλα τα παράπάνω καταλήγουμε

$$a = lim\frac{r_n}{s_n} = lim\frac{r_{3n+1}}{s_{3n+1}} = lim\frac{p_n + q_n}{p_n - q_n} = lim\frac{\frac{p_n}{q_n} + 1}{\frac{p_n}{q_n} - 1} = \frac{\frac{e+1}{e-1} + 1}{\frac{e+1}{e-1} - 1} = \frac{\frac{2e}{e-1}}{\frac{2}{e-1}} = e$$

Μέρος **II**

Εφαρμογές των Συνεχών Κλασμάτων

Κεφάλαιο 5

Επίλυση Διοφαντικών Εξισώσεων

Διοφαντικές εξισώσεις ονομάζονται οι εξισώσεις της μορφής $ax+by=c$ όπου οι άγνωστοι x και y και οι σταθερές a,b και c είναι ακέραιοι. Θα αναλύσουμε αρχικά την επίλυση εξισώσεων της μορφής $ax-by=1$ όπου a,b θετικοί ακέραιοι με $(a,b)=1$ [1] και σταδιακά θα προχωρήσουμε στην επίλυση της γενικής περίπτωσης.

Ο περιορισμός $(a,b)=1$ επιβάλλεται επειδή κάθε ακέραιος που διαιρεί τους a και b πρέπει να διαιρεί και το 1.

5.1 Γενική Λύση Εξίσωσης $ax-by=1$

Ο αριθμός $\frac{b}{a}$ είναι ρητός και άρα υπάρχει πεπερασμένο απλό συνεχές κλάσμα $d=[d_0;d_1,d_2,...,d_n]=\frac{b}{a}$. Έστω $c_i=\frac{p_i}{q_i}$ με $i=0,1,...,n$ τα συγκλίνοντα του d τότε $c_n=\frac{p_n}{q_n}=\frac{b}{a}$ και

$$ap_{n-1}-bq_{n-1}=(-1)^n$$

αν n είναι άρτιος τότε (p_{n-1},q_{n-1}) είναι λύση της εξίσωσης.

Αν n είναι περιττός τότε γράφουμε το d ως $[d_0;d_1,d_2,...,d_n-1,1]$ με συγκλίνοντα $c'_i=\frac{p'_i}{q'_i}$ για

[1] με (a,b) συμβολίζουμε το μέγιστο κοινό διαιρέτη των a και b

$i = 0, 1, ..., n+1$. Έτσι έχουμε $c'_{n+1} = \frac{p'_{n+1}}{q'_{n+1}} = \frac{b}{a}$ και $ap'_n - bq'_n = (-1)^{n+1} = 1$ αφού $n+1$ είναι άρτιος και άρα (p'_n, q'_n) είναι λύση της εξίσωσης.

Με την παραπάνω διαδικασία βρίσκουμε μία λύση της $ax - by = 1$ την οποία συμβολίζουμε (x_0, y_0). Αν (x, y) μία τυχαία λύση της $ax - by = 1$ τότε

$$ax - by = ax_0 - by_0$$

$$a(x - x_0) = b(y - y_0)$$

$y - y_0$ είναι ακέραιος άρα b διαιρεί το $a(x - x_0)$ όμως $(a, b) = 1$ άρα b διαιρεί το $x - x_0$ δηλαδή $x - x_0 = tb \Rightarrow x = x_0 + tb$ όπου t ακέραιος. Αντικαθιστώντας έχουμε

$$a(tb) = b(y - y_0)$$

$$at = y - y_0$$

$$y = y_0 + at$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι κάθε λύση είναι της μορφής $(x_0 + bt, y_0 + at)$. Μένει να ελέγξουμε αν υπάρχει κάποιος περιορισμός για το t.
$ax - by = a(x_0 + bt) - b(y_0 + at) = ax_0 + abt - by_0 - abt = ax_0 - by_0 = 1$ ανεξάρτητα από την τιμή του t.
Άρα η γενική λύση της $ax - by = 1$ είναι $(x_0 + bt, y_0 + at)$ $\forall t \in \mathbb{Z}$.

Για την εξίσωση $ax - by = -1$ χρησιμοποιούμε την ίδια μέθοδο γράφοντας το d στην κατάλληλη μορφή ώστε για το συγκλίνον $c_n = \frac{b}{a}$ το n να είναι περιττό.

5.2 Γενική Λύση των Εξισώσεων $ax \pm by = c$, $(a, b) = 1$, $c \in \mathbb{Z} - \{0\}$

Έστω (x_0, y_0) μία λύση της $ax - by = 1$ τότε $acx_0 - bcy_0 = c$ και ακολουθώντας την ίδια μέθοδο που χρησιμοποιήσαμε για τη $ax - by = 1$ μπορούμε να αποδείξουμε ότι η γενική λύση της $ax - by = c$ είναι $(cx_0 + bt, cy_0 + at)$ $\forall t \in \mathbb{Z}$.

Για να λύσουμε την $ax + by = c$ αναπτύσουμε το $\frac{b}{a}$ σε απλό συνεχές κλάσμα έτσι ώστε για το συγκλίνον $c_n = \frac{b}{a}$ το n να είναι άρτιο. Έτσι αν $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = c_{n-1}$ έχουμε

$$ap_{n-1} - bq_{n-1} = 1$$

$$ax + by = c(ap_{n-1} - bq_{n-1})$$

$$a(cp_{n-1} - x) = b(cq_{n-1} + y)$$

$cq_{n-1} + y$ είναι ακέραιος άρα το b διαιρεί το $a(cp_{n-1} - x)$ και αφού $(a, b) = 1$ το b διαιρεί το $cp_{n-1} - x$ δηλαδή $x = cp_{n-1} - bt$ για κάποιο ακέραιο t. Αντικαθιστώντας παίρνουμε

$$abt = b(cq_{n-1} + y)$$

$$y = at - cq_{n-1}$$

Άρα κάθε λύση είναι της μορφής $(x, y) = (cp_{n-1} - bt, at - cq_{n-1})$ με t ακέραιο. Ακόμα η $(cp_{n-1} - bt, at - cq_{n-1})$ ικανοποιεί την $ax + by = c$ για κάθε ακέραιο t.
Άρα η γενική λύση της $ax + by = c$ είναι $(cp_{n-1} - bt, at - cq_{n-1})$ $\forall t \in \mathbb{Z}$.

5.3 Γενική Περίπτωση, Εξίσωση $Ax \pm By = C$

Κάθε διοφαντική εξίσωση προκύπτει από την εξίσωση $Ax \pm By = C$, όπου A, B φυσικοί, πολλαπλασιάζοντας με -1 αν ο συντελεστής του x είναι αρνητικός.

Έστω $d = (A, B)$ τότε το d διαιρεί το αριστερό μέρος της εξίσωσης $Ax \pm By = C$ οπότε η εξίσωση έχει λύση μόνο αν το d διαιρεί το C. Στην περίπτωση αυτή διαιρούμε την εξίσωση με d και προκύπτει $ax \pm by = c$ όπου $ad = A, bd = B, cd = C$ και $(a, b) = 1$. Η λύση της τελευταίας εξίσωσης έχει ήδη υπολογιστεί οπότε η επίλυση κάθε διοφαντικής εξίσωσης ανάγεται στην επίλυση της $ax \pm by = c$ με $(a, b) = 1$ και $c \in \mathbb{Z} - \{0\}$.

Κεφάλαιο 6

Σύνδεση με Θεωρία Κόμβων

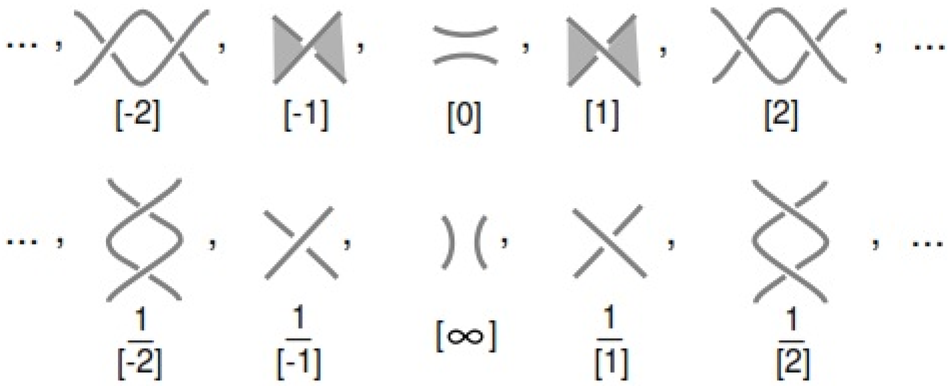
Μία καμπύλη K ονομάζεται κόμβος αν στον χώρο $\mathbb{R}^3$ υπάρχει ομοιομορφισμός του κύκλου C τέτοιος ώστε K να είναι η εικόνα του C. Κύκλο C ονομάζουμε το σύνολο των σημείων (x, y) του $\mathbb{R}^2$ που ικανοποιούν την εξίσωση $x^2 + y^2 = a^2$ με $a \in \mathbb{R}$.

Έστω σφαίρα B^3 στο $\mathbb{R}^3$ και δύο ευθύγραμμα τμήματα l_1, l_2. Αν περιορίσουμε τα l_1, l_2 να κινούνται στο εσωτερικό της σφαίρας με τα άκρα τους στην επιφάνια αυτής τότε ονομάζουμε κάθε εμφύτευση που προκύπτει ρητή εμπλοκή. Επιπλέον ενώνοντας τα άκρα των l_1, l_2 κατασκευάζουμε ένα ρητό κόμβο.

Οι ρητές εμπλοκές αποτελούν υποκατηγορία των 2-εμπλοκών οι οποίες προκύπτουν από την ενσωμάτωση δύο τόξων και πεπερασμένου πλήθους κύκλων στο εσωτερικό σφαίρας του $\mathbb{R}^3$.

Ονομάζουμε [0] εμπλοκή τη εμπλοκή της οποίας η προβολή στο επίπεδο αποτελείται από δύο μη τεμνόμενα οριζόντια σκέλη και αντίστοιχα $[\infty]$ εμπλοκή για κατακόρυφα σκέλη.

Παίρνοντας την προβολή της [0] εμπλοκής και συστρέφοντας τα σκέλη n φορές ($n \in \mathbb{N}$) έτσι ώστε σε κάθε διασταύρωση το σκέλος που έρχεται από πάνω αριστερά να περνάει μπροστά από το άλλο κατασκευάζουμε την $[n]$ ρητή εμπλοκή($[-n]$ αν τα σκέλη συστραφούν κατά την αντίθετη φορά). Αντίστοιχα, ξεκινώντας από την $[\infty]$ εμπλοκή και συστρέφοντας τα σκέλη με τον ίδιο τρόπο κατασκευάζουμε την $\frac{1}{[n]}$ ρητή εμπλοκή ($\frac{1}{[-n]}$ αν τα σκέλη συστραφούν κατά την αντίθετη φορά). Ονομάζουμε τις εμπλοκές $[n]$ ακέραιες και τις $\frac{1}{[n]}$ κατακόρυφες.



Σχήμα 6.1: Ακέραιες και Κατακόρυφες Εμπλοκές

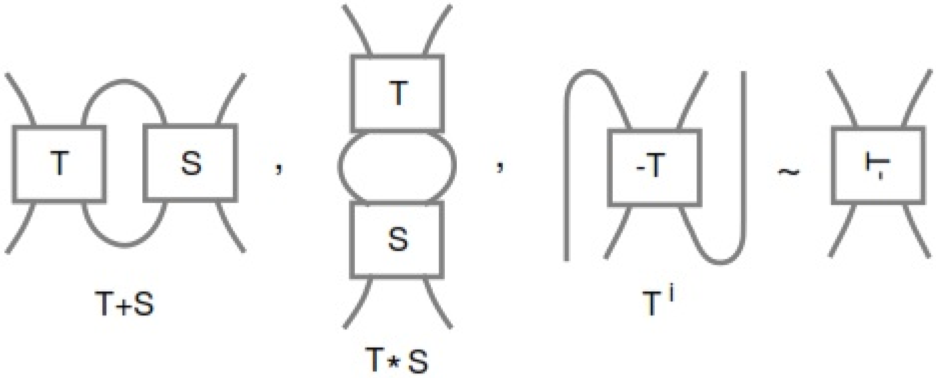
6.1 Πράξεις και Κινήσεις Εμπλοκών

Μεταξύ δύο ρητών εμπλοκών ορίζονται η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός. Επιπλέον κάθε ρητή εμπλοκή μπορεί να αντιστραφεί, περιστραφεί και αναστραφεί.

Έστω δύο ρητές εμπλοκές T και S ορίζουμε ως άθροισμά τους τη εμπλοκή που προκύπτει αν ενώσουμε τα δεξιά ελεύθερα άκρα της T με τα αριστερά ελεύθερα άκρα της S και τη συμβολίζουμε $T + S$. Ορίζουμε επίσης ως γινόμενο τη εμπλοκή που προκύπτει αν ενώσουμε τα κάτω ελεύθερα άκρα της T με τα άνω ελεύθερα άκρα της S και συμβολίζουμε $T * S$. Ο πολλαπλασιασμός δύο εμπλοκών συχνά ονομάζεται και κατακόρυφη πρόσθεση και αντί του $*$ χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $+'$.

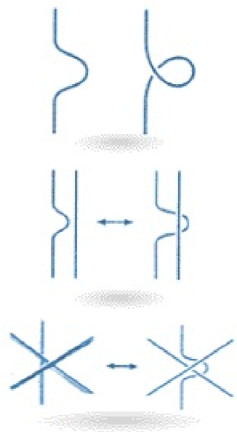
Εύκολα παρατηρούμε ότι η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός ρητών εμπλοκών δεν είναι αντιμεταθετικές πράξεις και δεν διατηρούν την κλάση των ρητών εμπλοκών αφού η εμπλοκές $\frac{1}{[2]} + \frac{1}{[2]}$ και $[2] * [2]$ δεν είναι ρητές.

Αλλάζοντας όλες τις διασταυρώσεις της T κατασκευάζουμε την ανεστραμμένη T την οποία συμβολίζουμε $-T$. Περιστρέφοντας την T κατά 90 μοίρες προς τα δεξιά κατασκευάζουμε την περιστραμμένη T και συμβολίζουμε T^r. Η αντίστροφη της T ορίζεται ως $-T^r$ και συμβολίζεται T^i. Για την αναστροφή ισχύουν $(-T) + (-S) = -(T + S)$ και $(-T) * (-S) = -(T * S)$[1]. Τέλος λόγω προηγούμενου ορισμού ισχύουν $-[n] = [-n]$, $-\frac{1}{[n]} = \frac{1}{[-n]}$ και $[n]^i = \frac{1}{[n]}$.



Σχήμα 6.2: Πρόσθεση, πολλαπλασιασμός και αντιστροφή εμπλοκών

Ονομάζουμε τις κινήσεις του σχήματος 6.3 κινήσεις Reidemeister. Δύο εμπλοκές είναι ισοτοπικές αν και μόνο αν για κάθε προβολή τους έχουν την ίδια διάταξη των άκρων στο σύνορο του δίσκου προβολής και διαφέρουν κατά πεπερασμένη ακολουθία γνωστών κινήσεων Reidemeister στο εσωτερικό του δίσκου.

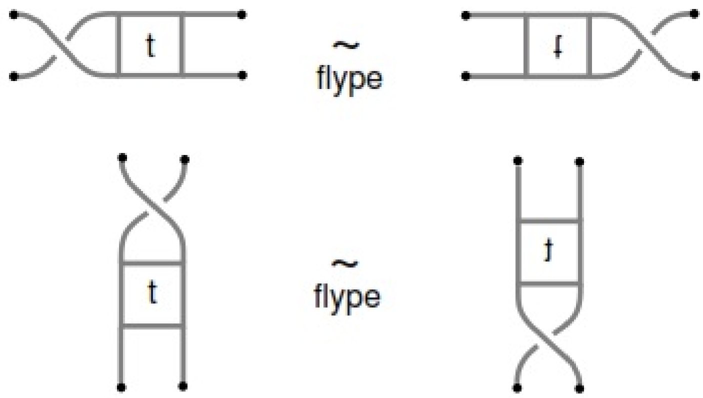


Σχήμα 6.3: Κινήσεις Reidemeister

Λέμε ότι μία ρητή εμπλοκή είναι σε *πεπλεγμένη (twist) μορφή* αν κατασκευάζεται με διαδοχικές προσθέσεις και πολλαπλασιασμούς των εμπλοκών $[\pm 1]$ ξεκινώντας από τη εμπλοκή $[0]$ ή $[\infty]$.

Ονομάζουμε κίνηση *flype* μία ισοτοπία μίας 2-εμπλοκής πάνω σε μία 2-υποεμπλοκή της μορφής $[\pm 1] + t$ ή $[\pm 1] * t$ όπως φαίνεται στο σχήμα 6.4. Η κίνηση flype διατηρεί σταθερά τα άκρα της υποεμπλοκής στην οποία εφαρμόζεται και ονομάζεται ρητή αν η υποεμπλοκή είναι ρητή.

[1] οι εμπλοκές $T + S$ και $T * S$ δεν είναι πάντα ρητές αλλά όλες οι πράξεις που ορίσαμε μπορούν να επεκταθούν στην κλάση 2-εμπλοκών



Σχήμα 6.4: Κίνηση flype

Ονομάζουμε flip την περιστροφή μίας 2-εμπλοκής κατά 180° γύρο από τον οριζόντιο ή τον κατακόρυφο άξονα του επιπέδου προβολής και συμβολίζουμε T^{hflip} (οριζόντιο flip) την περιστροφή γύρο από τον οριζόντιο άξονα και T^{vflip} (κατακόρυφο flip) την περιστροφή γύρο από τον κατακόρυφο άξονα. Μπορούμε τώρα να συμβολίσουμε το αποτέλεσμα μίας κίνησης flype σε μια 2-εμπλοκή της μορφής $[\pm 1] + t$ (αντίσοιχα $[\pm 1] * t$) ως $t^{hflip} + [\pm 1]$ (αντίστοιχα $t^{vlfip} * [\pm 1]$).

6.2 Γενική Θεωρία και Εφαρμογές Συνεχών Κλασμάτων

Ονομάζουμε μια εμπλοκή *εναλλασσόμενη* αν κινούμενοι κατά μήκος κάθε σκέλους εναλλάσσουμε το πέρασμα από διαδοχικές διασταυρώσεις (όπως αυτό φαίνεται σε προβολή της εμπλοκής) από πάνω σε κάτω και αντίστροφα. Αντίστοιχα ορίζουμε έναν εναλλασσόμενο κόμβο. Παρατηρούμε ότι μία εμπλοκή (ή ένας κόμβος) είναι εναλλασσόμενη αν και μόνο αν όλες οι διασταυρώσεις έχουν το ίδιο πρόσημο. Αναφέρουμε χωρίς απόδειξη[2] την παρακάτω υπόθεση.

Θεώρημα 6.1. Tait Flyping Conjecture
Δύο εναλλασσόμενοι κόμβοι είναι ισοτοπικοί αν οι προβολές τους σε δίσκο S^2 διαφέρουν κατά πεπερασμένη ακολουθία κινήσεων flype.

[2]Η απόδειξη αναλύεται στο [6]

Πόρισμα 6.1.1. Δύο εναλλασσόμενες ρητές εμπλοκές στο δίσκο S^2 είναι ισοτοπικές αν διαφέρουν κατά πεπερασμένη ακολουθία ρητών flype.

Λέμε ότι μια ρητή εμπλοκή βρίσκεται σε *απλή (standard) μορφή* αν μπορεί να κατασκευαστεί από διαδοχικές προσθέσεις εμπλοκών $[\pm 1]$ μόνο στα δεξιά (ή μόνο στα αριστερά) και πολλαπλασιασμούς με εμπλοκές $[\pm 1]$ μόνο στο κάτω μέρος (ή μόνο στο πάνω) ξεκινώντας από τη εμπλοκή $[0]$ ή $[\infty]$.

Λήμμα 6.2. Αναφέρουμε δύο λήμματα τα οποία μπορούν να αποδειχθούν με επαγωγή.

1. Αν T ρητή εμπλοκή σε πεπλεγμένη μορφή τότε η T δεν περιέχει καμία μη ρητή 2-υποεμπλοκή.
2. Αν T ρητή εμπλοκή τότε $T \sim T^{hflip}$ και $T \sim T^{vflip}$.

Από το λήμμα 6.2.1 συμπεραίνουμε ότι κάθε flype μιας ρητής εμπλοκής είναι ρητή εμπλοκή. Από το 6.2.2 έχουμε $T \sim (T^i)^i = (T^r)^r$ επειδή $(T^i)^i = (T^r)^r = (T^{hflip})^{vflip}$. Ακόμα βλέπουμε ότι $[\pm 1] + t \sim t + [\pm 1]$ (ή $[\pm 1] * t \sim t * [\pm 1]$) το οποίο μας δίνει $[m] + T + [n] \sim T + [m+n]$ (αντίστοιχα $\frac{1}{[m]} + T + \frac{1}{[n]} \sim T + \frac{1}{[m+n]}$).

Λήμμα 6.3. Για κάθε ρητή εμπλοκή T υπάρχει ισοτοπική εμπλοκή σε απλή μορφή.

Απόδειξη.
Ξεκινώντας από την πεπλεγμένη μορφή της T και εφαρμόζοντας διαδοχικά οριζόντια και κατακόρυφα flypes φέρνουμε όλες τις διασταυρώσεις στο κάτω και στο δεξί άκρο της εμπλοκής. Η εμπλοκή στην οποία καταλήγουμε είναι σε απλή μορφή και σύμφωνα με το συμπέρασμα του 6.2 είναι ισοτοπική με την αρχική εμπλοκή. □

Αν θέλουμε να δούμε αλγεβρικά την παραπάνω απόδειξη γράφουμε την T σε πεπλεγμένη μορφή

$$T = [a_k] + (... + \frac{1}{[b_3]} * ([a_1] + (\frac{1}{[b_1]} * [a_0] * \frac{1}{[b_2]}) + [a_2]) * \frac{1}{[b_4]} + ...) + [a_{k+1}]$$

και εφαρμόζοντας τις σχέσεις $[m]+T+[n] \sim T+[m+n]$ και $\frac{1}{[m]}+T+\frac{1}{[n]} \sim T+\frac{1}{[m+n]}$

$$T \sim (((([a_0] * \frac{1}{[b_1+b_2]}) + [a_1+a_2]) * \frac{1}{[b_3+b_4]}) + ...) + [a_k + a_{k+1}] = T_s$$

και η εμπλοκή T_s είναι σε απλή μορφή.

Ορισμός 6.1. Ονομάζουμε *συνεχές κλάσμα ακέραιων εμπλοκών* την περιγραφή μίας ρητής εμπλοκής T ως απλό συνεχές κλάσμα με όρους ακέραιες εμπλοκές δηλαδή

$$T = [[a_0];[a_1],[a_2],...,[a_n]] = [a_0] + \frac{1}{[a_1] + \frac{1}{[a_2] + \frac{1}{...+\frac{1}{[a_n]}}}}$$

όπου $a_k \in \mathbb{Z} - \{0\}$ για $1 \leq k \leq n$ και $a_0 \in \mathbb{Z}$. Λέμε ότι η T βρίσκεται *σε μορφή συνεχούς κλάσματος*.

Λήμμα 6.4. Για κάθε ρητή εμπλοκή και $n \in \mathbb{Z}$ ισχύουν

$$T * \frac{1}{[n]} = \frac{1}{[n]+\frac{1}{T}} \text{ και } \frac{1}{[n]} * T = \frac{1}{\frac{1}{T}+[n]}$$

Απόδειξη.
$\frac{1}{[n]+\frac{1}{T}} = -([n]+\frac{1}{T})^r =^3 -((\frac{1}{T})^r * [n]^r) = -((-T^r)^r * (\frac{1}{[-n]})) = -((-T) * \frac{1}{[-n]}) = T * \frac{1}{[n]}$
Αντίστοιχα αποδεικνύεται και η δεύτερη σχέση.

□

Θεώρημα 6.5. [4] Κάθε ρητή εμπλοκή γράφεται σε μορφή συνεχούς κλάσματος.

Απόδειξη.
Έστω ρητή εμπλοκή T, από λήμμα 6.3 η T μπορεί να γραφτεί σε απλή μορφή δηλαδή

$$T = ((([a_n] * \frac{1}{[a_{n-1}]}) + [a_{n-2}]) * ... * \frac{1}{[a_1]}) + [a_0]$$

και από λήμμα 6.4

$$T = [a_0] + \cfrac{1}{[a_1] + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{[a_{n-1}] + \cfrac{1}{[a_n]}}}}$$

[3]φαίνεται με σχηματική απεικόνιση

[4][5], σελίδα 17

$\square$

Λέμε ότι η ρητή εμπλοκή $T = [a_0; a_1, ..., a_n]$ είναι σε *κανονική (canonical) μορφή* αν η T είναι εναλλασσόμενη και n είναι περιττός αριθμός και την ονομάζουμε θετική ή αρνητική σύμφωνα με το πρόσημο των όρων της.
Παρατηρούμε ότι αν η T είναι εναλλασσόμενη και n άρτιος μπορούμε να την φέρουμε σε κανονική μορφή χρησιμοποιώντας την ίδια μέθοδο που εφαρμόσαμε στην παράγραφο **1.1** για να δείξουμε ότι $[a_0; a_1, a_2, ..., a_n + 1] = [a_0; a_1, a_2, ..., a_n, 1]$.

Λήμμα 6.6. Για κάθε ρητή εμπλοκή υπάρχει ισοτοπική σε κανονική μορφή[5].

Ορισμός 6.2. Έστω T ρητή εμπλοκή σε πεπλεγμένη μορφή

$$T = [a_k] + (... + \frac{1}{[b_3]} * ([a_1] + (\frac{1}{[b_1]} * [a_0] * \frac{1}{[b_2]}) + [a_2]) * \frac{1}{[b_4]} + ...) + [a_{k+1}] \neq \infty$$

ονομάζουμε *κλάσμα $F(T)$ της T* τον ρητό αριθμό

$$F(T) = a_k + (... + \frac{1}{b_3} * (a_1 + (\frac{1}{b_1} * a_0 * \frac{1}{b_2}) + a_2) * \frac{1}{b_4} + ...) + a_{k+1}$$

όπου $x * y = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$.
Για $T = \infty$ ορίζουμε $F(T) := \infty$.

Σημειώνουμε ότι ακόμα και αν b_i =0 για κάποιο i επιτρέπουμε το συμβολισμό $\frac{1}{0}$ αφού $\frac{1}{0} * x = \frac{1}{0 + \frac{1}{x}}$.
Επίσης παρατηρούμε ότι ο πολλαπλασιασμός $'*'$ που ορίσαμε είναι αντιμεταθετικός και προσεταιριστικός.

Λήμμα 6.7. Έστω T ρητή εμπλοκή σε πεπλεγμένη μορφή και C ισοτοπική εμπλοκή σε μορφή συνεχούς κλάσματος τότε $F(T) = F(C)$.

Απόδειξη.
Είδαμε ότι αν $T = [a_k] + (... + \frac{1}{[b_3]} * ([a_1] + (\frac{1}{[b_1]} * [a_0] * \frac{1}{[b_2]}) + [a_2]) * \frac{1}{[b_4]} + ...) + [a_{k+1}]$ τότε

[5] Η απόδειξη παρουσιάζεται στο [5], σελίδες 18-21, Proposition 2

$T_s = ((((([a_0] * \frac{1}{[b_1+b_2]}) + [a_1 + a_2]) * \frac{1}{[b_3+b_4]}) + ...) + [a_k + a_{k+1}]$ η απλή μορφή του T και από λημμα 6.4 $T_s = C$. Άρα

$$F(T) = a_k + (... + \frac{1}{b_3} * (a_1 + (\frac{1}{b_1} * a_0 * \frac{1}{b_2}) + a_2) * \frac{1}{b_4} + ...) + a_{k+1}$$
$$= ((((a_0 * \frac{1}{b_1 + b_2}) + a_1 + a_2) * \frac{1}{b_3 + b_4}) + ...) + a_k + a_{k+1} = F(C)$$

□

Λήμμα 6.8. Για κάθε συνεχές κλάσμα $a = [a_0; a_1, ..., a_n]$ υπάρχει μοναδικό συνεχές κλάσμα $b = [b_0; b_1, ..., b_m]$ όπου όλα τα b_j έχουν το ίδιο πρόσημο και m είναι περιττός. Λέμε ότι το b είναι σε κανονική μορφή με πρόσημο το πρόσημο των όρων του.

Απόδειξη.
Έστω a_i, a_{i+1} οι πρώτοι όροι του a με αντίθετο πρόσημο και έστω $a_i >0$ (αποδεικνύεται αντίστοιχα για $a_i <0$). Θέτουμε $r_{i+1} = [a_{i+1} + 1; a_{i+2}, ..., a_n]$ και $b_i = a_i - 1$ έχουμε

$$a = [a_0; a_1, ..., b_i + 1, -1 + r_{i+1}]$$

όμως

$$[b_i+1; -1+r_{i+1}] = b_i+1+\frac{1}{-1 + r_{i+1}} = b_i+\frac{-1 + r_{i+1} + 1}{-1 + r_{i+1}} = b_i+\frac{r_{i+1}}{-1 + r_{i+1}} = b_i+\frac{1}{1 + \frac{1}{-r_{i+1}}} =$$

$$= [b_i; 1, -r_{i+1}] = [b_i; 1, -a_{i+1} - 1, -a_{i+2}, ..., -a_n]$$

Θέτοντας $a' = [a_0; a_1, ..., b_i, 1, -a_{i+1} - 1, -a_{i+2}, ..., -a_n]$ έχουμε ότι οι όροι του a' μέχρι το $-a_{i+1} - 1$ έχουν το ίδιο πρόσημο. Επειδή το a' έχει πεπερασμένο πλήθος όρων μπορούμε να επαναλάβουμε την παραπάνω διαδικασία μέχρι όλοι οι όροι να έχουν το ίδιο πρόσημο. Αν το συνεχές κλάσμα στο οποίο καταλήγουμε έχει περιττό πλήθος όρων τότε είναι το ζητούμενο b αν έχει άρτιο πλήθος όρων το μετασχηματίζουμε σε συνεχές κλάσμα με περιττό πλήθος όρων όπως δείξαμε στο τέλος της παραγράφου **1.1**. Η μοναδικότητα προκύπτει από το Θεώρημα **2.1**.

□

Λήμμα 6.9. Δύο ρητές εμπλοκές που διαφέρουν κατά μία κίνηση flype έχουν το ίδιο κλάσμα.

Απόδειξη.
Έστω ρητές εμπλοκές T, S οι οποίες διαφέρουν μόνο κατά μία κίνηση flype εφαρμοσμένη πάνω

στην υποεμπλοκή t της T δηλαδή $[\pm1]+t \sim t^{hflip}+[\pm1]$ ή $[\pm1]*t \sim t^{vflip}*[\pm1]$. Με επαγωγή παίρνουμε $F(t^{hflip}) = F(t) = F(t^{vflip})$ και από τον ορισμό του κλάσματος εμπλοκής έχουμε $F([\pm1]+t) = F([t+[\pm1])$ και $F([\pm1]*t) = F(t*[\pm1])$. Η εμπλοκή $t' = [\pm1]+t$ (ή $t' = [\pm1]*t$) είναι υποεμπλοκή της T άρα η T μπορεί να παραχθεί με πεπερασμένη ακολουθία προσθέσεων και πολλαπλασιασμών των εμπλοκών $[\pm1]$ στην t'. Εφαρμόζοντας την ίδια ακολουθία πράξεων στην $t'' = t^{hflip}+[\pm1]$ (αντίστοιχα $t'' = t^{vflip}*[\pm1]$) κατασκευάζουμε την S. Οι T και S γράφονται ως

$$T = [a_k] + (... + \frac{1}{[b_3]} * ([a_1] + (\frac{1}{[b_1]} * t' * \frac{1}{[b_2]}) + [a_2]) * \frac{1}{[b_4]} + ...) + [a_{k+1}]$$

$$S = [a_k] + (... + \frac{1}{[b_3]} * ([a_1] + (\frac{1}{[b_1]} * t'' * \frac{1}{[b_2]}) + [a_2]) * \frac{1}{[b_4]} + ...) + [a_{k+1}]$$

και $F(t') = F(t'')$ άρα $F(T) = F(S)$.

□

Οι αλγεβρικές μετατροπές που χρησιμοποιήσαμε στην απόδειξη του λήμματος **6.8** είναι αντίστοιχες των μετατροπών εμπλοκών που εφαρμόζονται για την απόδειξη του λήμματος **6.6** άρα με όσα έχουμε δει σχετικά με τα κλάσματα εμπλοκών μπορούμε να συμπεράνουμε το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 6.10. Αν C εμπλοκή σε μορφή συνεχούς κλάσματος και C_c ισοτοπική της C σε κανονική μορφή τότε $F(C) = F(C_c)$.

Στηριζόμενοι σε όσα αναφέραμε σε αυτό το κεφάλαιο θα αποδείξουμε το παρακάτω θεώρημα το οποίο μας επιτρέπει να ταξινομήσουμε τις ρητές εμπλοκές με βάση το κλάσμα τους.

Θεώρημα 6.11. Conway
Δύο ρητές εμπλοκές είναι ισοτοπικές αν και μόνο αν έχουν το ίδιο κλάσμα.

Απόδειξη.
Έστω ρητές εμπλοκές T, S. Θα δείξουμε πρώτα ότι αν T, S ισοτοπικές τότε $F(T) = F(S)$. Σύμφωνα με το Θεώρημα **6.5** υπάρχουν ρητές εμπλοκές T', S' σε μορφή συνεχούς κλάσματος

ισοτοπικές των T, S αντίστοιχα. Σύμφωνα με το λήμμα **6.6** υπάρχουν ρητές εμπλοκές T'', S'' σε κανονική μορφή ισοτοπικές των T', S' αντίσοιχα. Από λήμματα **6.7** και **6.10** έχουμε $F(T) = F(T') = F(T'')$ και $F(S) = F(S') = F(S'')$. Οι εμπλοκές T'', S'' είναι εναλλασσόμενες και $T'' \sim S''$ άρα από πόρισμα **6.1.1** διαφέρουν κατά πεπερασμένη ακολουθία κινήσεων flype και άρα από λήμμα **6.9** $F(T'') = F(S'') \Rightarrow F(T) = F(S)$.
Μένει να δείξουμε ότι αν $F(T) = F(S)$ τότε $T \sim S$.
Έστω $F(T) = F(S) = \frac{p}{q}$ και T', S' ρητές εμπλοκές σε κανονική μορφή ισοτοπικές των T, S με $T' = [[a_0]; [a_1], ..., [a_m]]$ και $S' = [[b_0]; [b_1], ..., [b_n]]$. Από λήμματα **6.7** και **6.10** έχουμε $F(T) = F(T') = F(S) = F(S') = \frac{p}{q} \Rightarrow F(T') = [a_0; a_1, ..., a_m] = \frac{p}{q} = [b_0; b_1, ..., b_n] = F(S')$. $F(T')$ και $F(S')$ είναι συνεχή κλάσματα σε κανονική μορφή και σύμφωνα με το λήμμα **6.8** το $\frac{p}{q}$ αναλύεται σε συνεχές κλάσμα σε κανονική μορφή με μοναδικό τρόπο άρα $m = n$ και $a_i = b_i$ για κάθε $i = 0, ..., n$ δηλαδή $T' = S'$ και άρα $T \sim S$. $\square$

Έστω ρητή εμπλοκή με κλάσμα $\frac{p}{q}$. Συμβολίζουμε ως $K(\frac{p}{q})$ το ρητό κόμβο που προκύπτει αν ενώσουμε τα πάνω άκρα της εμπλοκής μεταξύ τους και τα κάτω αντίστοιχα. Κλείνοντας αυτό το κεφάλαιο αναφερουμέ το Θεώρημα Schubert που επεκτίνει το Θεώρημα Conway στους ρητούς κόμβους.

Θεώρημα 6.12. Schubert
Έστω δύο ρητές εμπλοκές με κλάσματα $\frac{p}{q}$ και $\frac{p'}{q'}$ όπου p, q πρώτοι μεταξύ τους (αντίστοιχα για p', q'). Οι κόμβοι $K(\frac{p}{q})$ και $K(\frac{p'}{q'})$ είναι ισοτοπικοί αν και μόνο αν

1. $p = p'$ και
2. ή $q \equiv q' mod p$ ή $qq' \equiv 1 mod p$

Βιβλιογραφία

[1] A. Ya. Khinchin. *Continued Fractions.* Dover Publications Inc., Mineola, New York, 1997.

[2] C. D. Olds. *Continued Fractions* Random House Inc., New York, 1963.

[3] Paul Loya *Amazing and Aesthetic Aspects of Analysis*, Chapter 8. http://www.gimnazija-izdijankoveckoga-kc.skole.hr/upload/ gimnazija-izdijankoveckoga-kc/multistatic/387/EleAna.pdf

[4] Jay R. Goldman, Louis H Kauffman "Rational Tangles". In: *Advances in Applied Mathematics 18 (1997), 300-332*, Article No. AM960511

[5] Louis H. Kauffman, Sofia Lambropoulou *On the classification of rational tangles* arXiv:math/0311499v2 [math.GT]

[6] William W. Menasco, Morwen B. Thistlethwaite "The Tait flyping conjecture". In: *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society 25 (1991), no. 2, 403–412.* https://projecteuclid.org/euclid.bams/1183657189

[7] Louis H. Kauffman, Sofia Lambropoulou *On the Classification of Rational Knots* arXiv:math/0212011v2 [math.GT]