ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ ΦΥΣΙΚΟΥ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ

Η Δυναμική του κενού
Το φαινόμενο Schwinger

Διπλωματική Εργασία

Κανάρη Λήδα

Επιβλέπων Καθηγητής : Κεχαγιάς Αλέξανδρος
Αθήνα, Ιούλιος 2011

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ ΦΥΣΙΚΟΥ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ

Η Δυναμική του κενού
Το φαινόμενο Schwinger

Διπλωματική Εργασία

Κανάρη Λήδα

Επιβλέπων Καθηγητής : Κεχαγιάς Αλέξανδρος

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή, την Τετάρτη 20 Ιουλίου 2011

....	....	....
Κεχαγιάς Αλέξανδρος	Τράκας Νικόλαος	Κουτσούμπας Γεώργιος

Αθήνα, 2011

....

Κανάρη Λήδα

Διπλωματούχος Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών Ε.Μ.Π.

Νοιώθω την ανάγκη να ευχαριστήσω όλους όσους συντέλεσαν στην υλοποίηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Ευχαριστώ όσους ήταν κοντά μου και συνέβαλαν με κάθε τρόπο για την ολοκλήρωσή της.

Πρωτίστως, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή κ. Αλέξανδρο Κεχαγιά για την ανάθεση του θέματος, την υπομονή και τη στήριξή του, καθ΄ όλη τη διάρκεια της διεξαγωγής της. Επίσης, οφείλω ένα μεγάλο ευχαριστώ στον διδακτορικό φοιτητή Φώτη Φαράκο για όλες τις ώρες που αφιέρωσε στην επίλυση των αποριών μου. Δε θα μπορούσα όμως να παραλείψω να ευχαριστήσω τους γονείς μου για την στήριξη και την εμπιστοσύνη που μου έδειξαν καθ΄ όλα τα χρόνια των σπουδών μου και όλων των προηγούμενων.

Ευχαριστώ, επίσης ολόθερμα τον Ζήση Ελευθέριο για τη στήριξή του και ιδιαίτερα για την πολύτιμη και αναντικατάστατη συμβολή του στις αριθμητικές μεθόδους επίλυσης που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα διπλωματική. Και τέλος, ένα ευχαριστώ στην Εύη Βούλγαρη για την αμέριστη συμπαράσταση της.

Λίστα σταθερών που θα χρησιμοποιηθούν :

$m_e = 0.51099892811 \frac{MeV}{c^2}$

$m_p = 938.27204621 \frac{MeV}{c^2}$

$e = -1.60217656535 * 10^{-19} C$

$\hbar = 6.5821192815 * 10^{-16} eV s$

$\hbar = 1.05457172647 * 10^{-34} J s$

$\pi = 3.14159265358$

$c = 299, 792, 458 \frac{m}{s}$

$\alpha = \frac{e^2}{(4\pi\epsilon_0)\hbar c} = \frac{1}{137.035999679}$

$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.987551787368 * 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}$

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Μόνο ένα μικρό ποσοστό του σύμπαντος, γύρω στο 4%, αποτελείται από τη γνωστή μας ύλη. Το υπόλοιπο 96% του χώρου μπορεί να χαρακτηριστεί ως κενό. Ο γερμανός φιλόσοφος Hegel ταύτιζε τόσο τη "Μονάδα"όσο και το "Μηδέν" με το "Απόλυτο", καταλήγοντας στο συμπέρασμα ότι η ύπαρξη και η ανυπαρξία αποτελούν διαφορετικές εκφάνσεις της ίδιας κατάστασης. Πράγματι, σύμφωνα με την κβαντομηχανική θεώρηση, το κενό μπορεί να ταυτιστεί με τα ζεύγη σωματιδίων - αντισωματιδίων, που συνεχώς δημιουργούνται και καταστρέφονται. Το χρονικό διάστημα της ύπαρξής τους είναι απειροελάχιστα μικρό, με αποτέλεσμα να μην προλαβαίνουν να καταστούν παρατηρήσιμα. Επομένως, κάθε σημείο του χώρου, ακόμη κι αν δεν περιέχει υλικά σωματίδια, αποτελείται από ζεύγη δυνητικών σωματιδίων.

Στην παρούσα εργασία μελετάται η απόκριση του δυναμικού αυτού κενού, στην εφαρμογή ενός εξωτερικού ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Το μαγνητικό πεδίο προσανατολίζει τα σωματίδια, καθορίζοντας τις περιστροφικές τους κινήσεις, χωρίς όμως να είναι σε θέση να διαχωρίσει τα ζεύγη. Το ηλεκτρικό πεδίο, όμως, ωθεί τα θετικά φορτισμένα σωματίδια να κινηθούν παράλληλα με τη διεύθυνσή του, ενώ τα αρνητικά φορτισμένα σωματίδια προς την αντίθετη κατεύθυνση. Επομένως, πολώνει τα δυνητικά μόρια του κενού, παραμορφώνοντας τη σφαιρικά συμμετρική δομή τους, σε ελλειψοειδή. Όταν η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου ξεπεράσει μια κατώτερη τιμή, αναμένεται η θραύση των δεσμών που κρατάνε ένα σωματίδιο δεσμευμένο με το αντισωματίδιό του. Αναζητείται, λοιπόν, η τιμή του ηλεκτρικού πεδίου, για την οποία θα αρχίσει να παρατηρείται η δημιουργία σωματιδίων.

Εξ΄ αιτίας της κβαντομηχανικής φύσης του μηχανισμού παραγωγής ζευγών σωματιδίων ύλης - αντιύλης, το παραπάνω φαινόμενο έχει μη ντετερμινιστικό χαρακτήρα. Επομένως δεν είναι δυνατός ο υπολογισμός μιας μονοσήμαντης τιμής για το κατώφλι του ηλεκτρικού πεδίου. Στην πραγματικότητα, ο υπολογισμός αφορά στην εύρεση της πιθανότητας εμφάνισης σωματιδίων συναρτήσει της τιμής

του πεδίου, που θα ασκηθεί στον κενό από ύλη χώρο. Το παραπάνω φαινόμενο και ο υπολογισμός της πιθανότητας μελετήθηκαν από τον Αμερικανό φυσικό Julian Seymour Schwinger , στο άρθρο που δημοσίευσε το 1951 "On Gauge Invariance and Vacuum Polarization", στο πανεπιστήμιο του Cambridge.

Στην παρούσα διπλωματική θα επιχειρηθεί η επαλήθευση της φόρμουλας του Schwinger , με τον υπολογισμό της πιθανότητας παραγωγής ενός ζεύγους ηλεκτρονίου - ποζιτρονίου συναρτήσει της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου.

Αρχικά θα αναλυθούν τα βασικά στοιχεία της Θεωρίας της Σχετικότητας και της Κβαντομηχανικής, οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν για την εύρεση της εξίσωσης του Dirac, που περιγράφει σωματίδια με σπιν $\frac{1}{2}$. Στο επόμενο κεφάλαιο, θα μελετηθεί η φύση της αλληλεπίδρασης των QED σωματιδίων με ένα εξωτερικό βαθμωτό πεδίο. Από την εξίσωση αλληλεπίδρασης που θα προκύψει, μπορεί να υπολογιστεί ο πίνακας μετάβασης S από μια αρχική κατάσταση με μηδενικό αριθμό σωματιδίων, που περιγράφει το κενό, σε μια τελική κατάσταση όπου θα δημιουργηθεί τουλάχιστον ένα ζεύγος σωματιδίων. Μ΄ αυτό τον τρόπο μπορεί να υπολογιστεί η ζητούμενη πιθανότητα ως το τετράγωνο του πίνακα μετάβασης. Η εργασία θα ολοκληρωθεί με τις παρατηρήσεις που θα εξαχθούν όσον αφορά στη μορφή της υπολογισμένης πιθανότητας. Θα επιχειρηθεί επίσης να τεκμηριωθεί η έλλειψη πειραματικών δεδομένων, παρόλη τη σπουδαιότητα του φαινομένου.

Λέξεις Κλειδιά : φαινόμενο Schwinger , παραγωγή ζεύγους, ηλεκτρόνιο - ποζιτρόνιο, ηλεκτρικό πεδίο, δυναμική του κενού, πιθανότητα μετάβασης

ABSTRACT

The universe is filled with particles only in 4% of its space. The rest 96% of space can be considered as empty. The german philosopher Hegel claimed that " The Absolute is Unity " and "The Absolute is Nothing" reaching the conclusion that being and not being could be considered as different states of the same situation. Indeed, according to the Theory of Quantum Mechanics, the vacuum can be identified to a pair of a particle and an antiparticle, which are formed and destroyed continuously. The period of their existence is so infinitesimally small that they can't be observed. Therefore, every point in space, even if it is devoid of particles, contains pairs of potential particles.

In the current essay, the response of this potential vacuum is examined, if an external electric field is applied. The magnetic field orientates the particles causing their rotation, but it cannot cause the separation of the particle from the antiparticle. On the other hand, the electric field, urges the positive particles to move at the direction of the field and the negative particles to move at the opposite direction. As a result, the electric field causes the polarization of those potential molecules, deforming their spherically symmetric shape, in an elliptic shape. When the intensity of the electric field overcomes a threshold, it is expected to observe the fracture of those bonds and thus the creation of particles and antiparticles, moving in opposite directions.

Because of the Quantum Mechanical nature of pair production process, the phenomenon cannot be described deterministically. Therefore, it is not possible to calculate unambiguously the threshold of the elctric field mentioned. Indeed, the calculation refers to the determination of the possibility of producing pairs of particles as a function of the intensity of the electric field. The phenomenon described and the number of this possibility were first studied by the American physicist Julian Seymour Schwinger in the article published in 1951 "On Gauge Invariance and Vacuum Polarization" at the university of Cambridge.

In the current thesis, it will be attempted to extract the Schwinger formula by calculating the number of the possibility for the creation of an electron - positron pair as a function of the intensity of the electric field.

At first, the basic principles of the Theory of Relativity and of Quantum Mechanics will be analyzed. This study will lead to the Dirac equation, which describes spin $\frac{1}{2}$ particles. In the next section, the interaction between QED particles and an external scalar field will be studied. From the equation of the interaction, it is possible to measure the transition matrix S from the vacuum, which contains zero pairs of particles, to the situation where at least a single pair of particles can be observed. The requested possibility can then be measured from the square of the transition matrix. The essay will be completed with the observations made over the calculated possibility.

Key Words : Schwinger formula, pair production, electron - positron, electric field, vacuum dynamics, transition possibility

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

1.1 Μετασχηματισμοί Lorentz

Το πρώτο ζήτημα που απασχόλησε την επιστημονική κοινότητα και οδήγησε αργότερα στην ανάγκη θεμελίωσης της θεωρίας της Σχετικότητας ήταν η περιγραφή ενός συστήματος που κινείται με ταχύτητα u από έναν παρατηρητή ο οποίος βρίσκεται σε ένα ακίνητο σύστημα. Το σχετικό μήκος των αντικειμένων στο σύστημα παρατήρησης εμφανιζόταν διαφοροποιημένο όταν μετρούνταν από ένα εξωτερικό παρατηρητή που βρισκόταν στο ακίνητο σύστημα. Εμφανίστηκε λοιπόν η ανάγκη για τη θεμελίωση ενός μετασχηματισμού που θα μπορούσε να περιγράψει αυτές τις χωρικές διαφοροποιήσεις.

Οι πρώτοι μετασχηματισμοί που εισήχθησαν για την περιγραφή του παραπάνω φαινομένου ήταν οι μετασχηματισμοί του Γαλιλαίου. Οι εξισώσεις αυτές περιέγραφαν τα παρατηρούμενα μεγέθη αντιστοιχίζοντας τις συντεταγμένες των δύο συστημάτων. Έτσι οποιαδήποτε μέτρηση σε κάποιο απ΄ τα δύο συστήματα μπορούσε να αναχθεί με τη βοήθεια των μετασχηματισμών του Γαλιλαίου στην μετρούμενη τιμή για το αντίστοιχο επιθυμητό σύστημα. Προκύπτουν, λοιπόν, για ένα κινούμενο σύστημα ταχύτητας v που περιγράφεται από τις συντεταγμένες (x',y',z',t') σχετικά με το ακίνητο σύστημα στις συντεταγμένες (x,y,z,t) , οι εξισώσεις:

$$\begin{cases} x' = x - v * t \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \tag{1.1}$$

Όμως, οι παραπάνω μετασχηματισμοί εμφανίζουν ασυμβατότητα με τις βασικές αρχές της θεωρίας της Σχετικότητας. Το πρόβλημα εντοπίζεται κατά τον υπολογισμό ποσοτήτων που θα έπρεπε να παραμένουν αναλλοίωτες υπό τους μετασχηματισμούς από το κινούμενο στο ακίνητο σύστημα. Οι μετασχηματισμοί του Γαλιλαίου μετέβαλαν θεμελιώδεις ποσότητες όπως ο ιδιόχρονος. Υπήρχε, επομένως,η ανάγκη θεσμοθέτησης ενός νέου μετασχηματισμού που θα ήταν συμβατός με τις βασικές αρχές της σχετικιστικής φυσικής. Ο Einstein χρησιμοποίησε για το σκοπό αυτό τους μετασχηματισμούς Lorentz , που δίνονται παρακάτω :

Μετασχηματισμός Lorentz :

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + v * t') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma(t' + \frac{v}{c^2} * x') \end{cases} \tag{1.2}$$

Αντίστροφος Μετασχηματισμός Lorentz :

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - v * t) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2} * x) \end{cases} \tag{1.3}$$

Οι τιμές των γ και β ορίζονται ως εξής :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{1.4}$$

$$\beta = \frac{v}{c} \tag{1.5}$$

Ο μετασχηματισμός Lorentz μπορεί να αναπαρασταθεί με τον πίνακα Λ :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

1.2 Μαθηματικός Φορμαλισμός

Παρακάτω θα οριστούν οι χρήσιμοι μαθηματικοί συμβολισμοί που θα χρησιμοποιηθούν για την ανάπτυξη της θεωρίας της Σχετικότητας. Τα μαθηματικά αυτά σύμβολα χρησιμοποιούνταν ήδη από τα πρώτα χρόνια της ανάπτυξης της Σχετικότητας διευκολύνοντας τις σύνθετες πράξεις που έπρεπε να επιτελεστούν.

1.2.1 Μετασχηματισμοί Lorentz

Ο πρώτος συμβολισμός αφορά τον τετραδιάστατο μετασχηματισμό Lorentz, που ορίστηκε παραπάνω. Στο χώρο των τετραδιανυσμάτων, για το μετασχηματισμό αυτό, χρησιμοποιούμε το συμβολισμό: $\Lambda^{\alpha}{}_{\beta}$

Ένα παράδειγμα μετασχηματισμού Lorentz αποτελεί ο πίνακας των στροφών κατά το $x-y$ επίπεδο. Η στροφή κατά γωνία ϑ αποτελεί περιοδικό μετασχηματισμό και μπορεί να δωθεί συμβολικά από τον παρακάτω πίνακα :

$$\Lambda^{\alpha}{}_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

1.2.2 Τετραδιανύσματα και διαφορικοί τελεστές

Για να κατανοηθεί όμως πληρέστερα η δράση του μετασχηματισμού πρέπει να οριστεί αρχικά η έννοια του τετραδιανύσματος. Για να ονομάσουμε ένα διάνυσμα τεσσάρων διαστάσεων τετραδιάνυσμα x^{α} οφείλει να μετασχηματίζεται σύμφωνα με τον μετασχηματισμό Lorentz , δηλαδή να ικανοποιεί τη σχέση :

$$x'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}{}_{\beta} * x^{\beta} \tag{1.8}$$

Αντίστοιχα το διάνυσμα x_{α} που μετασχηματίζεται σύμφωνα με τον αντίστροφο μετασχηματισμό Lorentz ορίζεται απ΄ την σχέση :

$$x'_{\alpha} = (\Lambda^{-1})^{\alpha}{}_{\beta} * x_{\beta} = \Lambda_{\alpha}{}^{\beta} * x_{\beta} \tag{1.9}$$

Αν το τετραδιάνυσμα x^α μπορεί να απεικονιστεί στη γενικότερη μορφή του ως :

$$x^\alpha = (t, -\overrightarrow{x}) \tag{1.10}$$

Τότε το x_α δίνεται αντίστοιχα ως $x_\alpha = (t, \overrightarrow{x})$. Επομένως, το εσωτερικό τους γινόμενο προκύπτει :

$$x^\alpha x_\alpha = t^2 - x^2 \tag{1.11}$$

Για έναν χώρο διανυσμάτων, βάση του οποίου αποτελεί το διάνυσμα των θέσεων x^i, ορίζεται ο στοιχειώδης διαφορικός τελεστής ∂_i ως εξής :

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{1.12}$$

Χρησιμοποιώντας τον γνωστό κανόνα της αλυσίδας της άλγεβρας για τον μετασχηματισμό ενός διανύσματος από το σύστημα συντεταγμένων x'^i στο σύστημα x^i ισχύει η γενικευμένη μορφή του μετασχηματισμού :

$$x'^\beta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\beta} x^\alpha \tag{1.13}$$

Η δράση του τελεστή $\Lambda^\alpha{}_\beta$ μπορεί επομένως να περιγραφεί από την έκφραση:

$$\Lambda^\alpha{}_\beta = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\beta} \tag{1.14}$$

Σύμφωνα με τις σχέσεις (1.8) και (1.13). Η γενικότερη έκφραση του μετασχηματισμού του τετραδιανύσματος θέσης από ένα σύστημα συντεταγμένων x^α στο x'^α, αν προσθέσουμε την αυθαίρετη σταθερά της μετατόπισης, είναι :

$$x'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta * x^\beta + a^\alpha \tag{1.15}$$

Επομένως ο μετασχηματισμός του διαφορικού τελεστής dx^α λαμβάνεται διαφορίζοντας την παραπάνω γενικευμένη έκφραση ως εξής:

$$dx'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\gamma * dx^\gamma \tag{1.16}$$

Αντίστοιχη συμπεριφορά εμφανίζει το διάνυσμα x_α, για το οποίο ο μετασχηματισμός ορίζεται :

$$x'_\alpha = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} x_\beta \tag{1.17}$$

Επομένως, η δράση του τελεστή $\Lambda_\alpha^{\ \beta}$ δίνεται από την έκφραση :

$$\Lambda_\alpha^{\ \beta} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} \tag{1.18}$$

Από τους παραπάνω ορισμούς μπορεί να εξαχθεί η δράση του γινομένου των τελεστών $\Lambda^\alpha_{\ \beta}$ και $\Lambda_\alpha^{\ \beta}$:

$$\Lambda^\alpha_{\ \beta} * \Lambda_\gamma^{\ \beta} = \delta^\alpha_\gamma \tag{1.19}$$

1.2.3 Συνδιανύσματα

Σημαντικός είναι επίσης ο ορισμός των συνδιανυσμάτων (covectors). Ως συνδιάνυσμα ορίζεται η απεικόνιση τάξης (0,1) που αντιστοιχεί με μια γραμμική συνάρτηση, κάθε διάνυσμα σε έναν πραγματικό αριθμό. Το συνδιάνυσμα υπακούει στον αντίστροφο μετασχηματισμό Lorentz , σε αντίθεση με τα διανύσματα που είναι αναλλοίωτα. Μπορεί, λοιπόν, να ονομαστεί ισοδύναμα συναλλοίωτο διάνυσμα. Για κάθε διάνυσμα του χώρου x^α μπορεί να οριστεί το συνδιάνυσμα ω_α

Έστω η βάση στον χώρο των διανυσμάτων e_i και αντίστοιχα των συνδιανυσμάτων $e_i{}^*$:

$$\begin{cases} e_1,\ e_2, \ldots,\ e_n \\ e_1{}^*, e_2{}^*, \ldots, e_n{}^* \end{cases} \tag{1.20}$$

Οπότε οι μετασχηματισμοί που μετατρέπουν τις συντεταγμένες e_i στις $e_i{}'$ συσχετίζοντας δύο τυχαίες διαφορετικές βάσεις δίνονται απ΄ τις σχέσεις :

$$\begin{cases} e^\alpha \rightarrow e^{\alpha\prime} = \Lambda^\alpha_{\ \beta} * e^\beta \\ e_\alpha{}^* \rightarrow e_\alpha{}^{*\prime} = \Lambda_\alpha^{\ \beta} * e_\beta{}^* \end{cases} \tag{1.21}$$

1.2.4 Τανυστές

Ο τανυστής ορίζεται ως τον πολλαπλά γραμμικό πίνακα που αντιστοιχίζει ένα σύνολο διανυσμάτων και συνδιανυσμάτων σε έναν πραγματικό αριθμό. Αν η βάση του χώρου των διανυσμάτων είναι τάξεως κ και η βάση των συνδιανυσμάτων τάξεως λ τότε ο τανυστής T αντιστοιχεί έναν πραγματικό αριθμό σε κάθε σύνολο κ διανυσμάτων και λ συνδιανυσμάτων.

Χρησιμοποιείται ο συμβολισμός :

$$T : e^* * \cdots * e^* * e * \cdots * e \to \mathbb{R} \tag{1.22}$$

Ορίζονται οι βασικές πράξεις:

• Συστολή (Contraction):

$$CT = \sum_{\sigma=1}^{n} T(e^i*, \ldots, e^\sigma*, \ldots, e^j*, e^i, \ldots, e^\sigma, \ldots, e^j) \tag{1.23}$$

$$\Rightarrow x_l^k = T^i k_i l = \sum_{\sigma=1}^{n} T^i k_i l \tag{1.24}$$

• Εξωτερικό γινόμενο(Outer product):

$$T = \sum_{\mu_1,\ldots,n_i=1}^{n} T^{\mu_1\ldots\mu_k}{}_{\nu_1\ldots\nu_l} e_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes e^{\nu_1{}^*} \tag{1.25}$$

$$\Rightarrow w_j^i = e^i e^*{}_j \tag{1.26}$$

• Εσωτερικό γινόμενο(Inner product):

$$< e|e^* >= e_i e^{*i} = w_i^i = e^*{}_i e^i \tag{1.27}$$

1.2.5 Μετρικές και ιδιόχρονος

Η μετρική ενός χώρου είναι ο τανυστής που ορίζει την απόσταση ds στο χώρο αυτό. Η απόσταση ανάμεσα σε δύο θέσεις dx^μ και dx^ν αντιστοιχεί έναν πραγματικό αριθμό σε κάθε ζευγάρι διανυσμάτων του χώρου και δίνεται από τη σχέση :

$$ds^2 = \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu} * dx^\mu * dx^\nu \tag{1.28}$$

Όπου η $g_{\mu\nu}$ ονομάζεται μετρική του χώρου. Για παράδειγμα, στον ευκλείδειο χώρο η απόσταση ds δίνεται :

$$ds^2 = dx^2 - dt^2 \tag{1.29}$$

Επομένως, ορίζεται η μετρική του ευκλείδειου χώρου ως εξής :

$$\eta^\alpha{}_\beta = \begin{cases} +1, \alpha = \beta = 1, 2, 3 \\ -1, \alpha = \beta = 0 \\ \ \ 0, \alpha \neq \beta \end{cases} \tag{1.30}$$

Οι τελεστές του μετασχηματισμού Lorentz πρέπει να πληρούν την σχέση :

$$\Lambda^\alpha{}_\gamma * \Lambda^\beta{}_\delta * \eta^\alpha{}_\beta = \eta^\gamma{}_\delta \tag{1.31}$$

Ο ιδιοχρόνος (proper time) dτ , ο οποίος σύμφωνα με τη θεωρία της Σχετικότητας οφείλει να παραμένει αναλλοίωτος υπό μετασχηματισμούς Lorentz , ορίζεται με την έκφραση :

$$d\tau^2 = -\eta^\alpha{}_\beta * dx^\alpha * dx^\beta \tag{1.32}$$

$$\Rightarrow d\tau^2 = dt^2 - dx^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{1.33}$$

Λόγω της εξίσωσης (1.16) ο μετασχηματισμός του ιδιόχρονου προκύπτει ως εξής :

$$\begin{aligned} d\tau'^2 &= -\eta^{\alpha}{}_{\beta} * dx'^{\alpha} * dx'^{\beta} \\ &= -\eta^{\alpha}{}_{\beta} * \Lambda^{\alpha}{}_{\gamma} * dx^{\gamma} * \Lambda^{\beta}{}_{\delta} * dx^{\delta} \\ &= -\eta^{\alpha}{}_{\beta} * \Lambda^{\alpha}{}_{\gamma} * \Lambda^{\beta}{}_{\delta} * dx^{\gamma} * dx^{\delta} \\ &= -\eta^{\alpha}{}_{\beta} * dx^{\gamma} * dx^{\delta} \\ &\Rightarrow d\tau'^2 = d\tau^2 \end{aligned} \tag{1.34}$$

Αποδείχτηκε, λοιπόν, ότι ο ιδιόχρονος παραμένει αμετάβλητος υπό μετασχηματισμούς Lorentz όπως αναμενόταν.

Σύμφωνα με τα πειραματικά δεδομένα, που έχουν ληφθεί από πολλαπλές πηγές παρατηρήσεων, έχει εξαχθεί το συμπέρασμα ότι η ταχύτητα του φωτός παραμένει σταθερή ανεξάρτητα από το σύστημα στο οποίο μετράται. Η ταχύτητα οποιουδήποτε μετώπου φωτός ισούται με την σταθερή ταχύτητα c και δίνεται από την σχέση :

$$\left|\frac{dx}{dt}\right| = c \tag{1.35}$$

Έστω οτι ταχύτητα του φωτός για ένα σύστημα συντεταγμένων που περιγράφεται από τον ιδιόχρονο dτ είναι ίση με τη μονάδα. Σ' αυτή την περίπτωση, εφόσον η παραπάνω σχέση γίνεται :

$$\left|\frac{dx}{dt}\right| = 1 \tag{1.36}$$

$$\Rightarrow dx^2 = dt^2 \tag{1.37}$$

$$\Rightarrow d\tau^2 = dx^2 - dt^2 = 0 \tag{1.38}$$

$$\Rightarrow d\tau = 0 \tag{1.39}$$

Από την σχέση (1.34) και εφόσον ο ιδιόχρονος είναι αναλλοίωτος υπό οποιονδήποτε μετασχηματισμό Lorentz συνεπάγεται:

$$\begin{aligned} d\tau'^2 &= d\tau^2 \\ \Rightarrow d\tau' &= 0 \end{aligned} \tag{1.40}$$

Από όπου προκύπτει κατ' αντιστοιχία με την ανωτέρα διαδικασία ότι η ταχύτητα στο νέο σύστημα αναφοράς είναι :

$$\begin{aligned} \left|\frac{dx'}{dt'}\right| &= 1 \\ \Rightarrow \left|\frac{dx'}{dt'}\right| &= \left|\frac{dx}{dt}\right| \end{aligned} \tag{1.41}$$

Συνεπώς μπορεί να εξαχθεί το συμπέρασμα ότι η σχέση (1.31) είναι ισοδύναμη με την συνθήκη η ταχύτητα να παραμένει αναλλοίωτη για οποιοδήποτε σύστημα αναφοράς.

Θα αποδειχτεί, στη συνέχεια, ότι ο μετασχηματισμός Lorentz αποτελεί τον μοναδικό μη ιδιάζων μετασχηματισμό, ο οποίος αφήνει αναλλοίωτο τον ιδιόχρονο. Με τον όρο μη ιδιάζων περιγράφεται ο πίνακας $\frac{dx'^\alpha}{dx^\beta}$ του οποίου ο αντίστροφος πίνακας $\frac{dx^\beta}{dx'^\alpha}$ είναι καλά ορισμένος.

Έστω ο τυχαίος μετασχηματισμός $x \to x' : \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\beta}$. Τότε ο ιδιόχρονος μετασχηματίζεται σύμφωνα με την πράξη :

$$\begin{aligned} d\tau'^2 &= -\eta^\alpha{}_\beta * dx'^\alpha * dx'^\beta \\ &= -\eta^\alpha{}_\beta * \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\gamma} * dx^\gamma * \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\delta} * dx^\delta \end{aligned} \tag{1.42}$$

Σύμφωνα με τη συνθήκη (1.34) απαιτείται:

$$d\tau'^2 = d\tau^2 \tag{1.43}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} d\tau'^2 &= -\eta^\alpha{}_\beta * \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\gamma} * \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\delta} * dx^\gamma * dx^\delta \\ &= d\tau^2 = -\eta^\gamma{}_\delta * dx^\gamma * dx^\delta \end{aligned} \tag{1.44}$$

Για να ισχύει ως ισότητα η παραπάνω σχέση πρέπει :

$$\eta^{\gamma}{}_{\delta} = \eta^{\alpha}{}_{\beta} * \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\gamma}} * \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\delta}} \tag{1.45}$$

Με παραγώγιση της παραπάνω σχέσης :

$$0 = \eta^{\alpha}{}_{\beta} * \frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x'^{\gamma}\partial x^{\epsilon}} * \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\delta}} + \eta^{\alpha}{}_{\beta} * \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\gamma}} * \frac{\partial^2 x^{\beta}}{\partial x'^{\delta}\partial x^{\epsilon}} \tag{1.46}$$

Με εναλλαγή των δεικτών γ, δ, ε λόγω συμμετρίας της (1.46) και αθροίζοντας τις τρεις εξισώσεις που προκύπτουν καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$\begin{aligned} 0 = \eta^{\alpha}{}_{\beta} * \{ & \frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x'^{\gamma}\partial x^{\epsilon}} * \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\delta}} + \frac{\partial^2 x^{\beta}}{\partial x'^{\delta}\partial x^{\epsilon}} * \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\gamma}} + \frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x^{\epsilon}\partial x'^{\gamma}} * \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\delta}} + \\ & \frac{\partial^2 x^{\beta}}{\partial x'^{\delta}\partial x'^{\gamma}} * \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\epsilon}} - \frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x'^{\gamma}\partial x'^{\delta}} * \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\epsilon}} - \frac{\partial^2 x^{\beta}}{\partial x^{\epsilon}\partial x'^{\delta}} * \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\gamma}} \} \end{aligned} \tag{1.47}$$

$$0 = 2\eta^{\alpha}{}_{\beta} * \frac{\partial^2 x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}\partial x^{\epsilon}} * \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x'^{\delta}} \tag{1.48}$$

Εφόσον όμως $\eta^{\alpha}{}_{\beta} \neq 0$ και $\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\delta}} \neq 0$ πρέπει να μηδενίζεται ο δεύτερος όρος του γινομένου. Δηλαδή :

$$0 = \frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x'^{\gamma}\partial x^{\epsilon}} \tag{1.49}$$

Εξάγεται, λοιπόν, η εξίσωση (1.15) που είχαμε αυθαίρετα ορίσει για την περιγραφή ενός οποιουδήποτε γενικευμένου μετασχηματισμού Lorentz .

$$x'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}{}_{\beta} * x^{\beta} + a^{\alpha} \tag{1.50}$$

ή ισοδύναμα

$$\Lambda^{\alpha}{}_{\beta} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\beta}} \tag{1.51}$$

Την οποία αν εισάγουμε στη σχέση (1.45)προκύπτει η συνθήκη (1.31) :

$$\eta^{\gamma}{}_{\delta} = \eta^{\alpha}{}_{\beta} * \Lambda^{\alpha}{}_{\gamma} * \Lambda^{\beta}{}_{\delta} \tag{1.52}$$

Η ομάδα των μετασχηματισμών που γεννάται από τους παραπάνω περιορισμούς, με τα χαρακτηριστικά που περιγράφηκαν ονομάζεται μη ομογενής ομάδα Lorentz ή ομάδα Poincare . Η ομάδα Poincare είναι καλά ορισμένη και όπως αποδείξαμε παραπάνω είναι μοναδική. Για $\alpha^{\alpha} = 0$ γεννάται η ομογενής ομάδα Lorentz , της οποίας η χρήση είναι ευρύτερα διαδεδομένη.

1.2.6 Ο διαφορικός τελεστής της Καμπυλότητας και το σύμβολο Christoffel

Ορίζουμε τον διαφορικό τελεστή ∇ ο οποίος πρέπει να πληρεί τις παρακάτω ιδιότητες :

1. Γραμμικότητα

$$\nabla_c(\alpha * A^{a_1 \ldots a_k}{}_{b_1 \ldots b_l} + \beta * B^{a_1 \ldots a_k}{}_{b_1 \ldots b_l}) = \alpha * \nabla_c A^{a_1 \ldots a_k}{}_{b_1 \ldots b_l} + \beta * \nabla_c B^{a_1 \ldots a_k}{}_{b_1 \ldots b_l}$$

2. Κανόνας του Leibnitz

$$\nabla_e A^{a_1 \ldots a_k}{}_{b_1 \ldots b_l} B^{c_1 \ldots c'_k}{}_{d_1 \ldots d'_l} = [\nabla_e A^{a_1 \ldots a_k}{}_{b_1 \ldots b_l}] B^{c_1 \ldots c'_k}{}_{d_1 \ldots d'_l} + A^{a_1 \ldots a_k}{}_{b_1 \ldots b_l} [\nabla_e B^{c_1 \ldots c'_k}{}_{d_1 \ldots d'_l}]$$

3. Αντιμετάθεση κατά τη συστολή

$$\nabla_c(A^{a_1 \ldots c \ldots a_k}{}_{b_1 \ldots c \ldots b_l}) = \nabla_c A^{a_1 \ldots c \ldots a_k}{}_{b_1 \ldots c \ldots b_l}$$

4. Συνέπεια ως προς τη έννοια των εφαπτόμενων διανυσμάτων ως κατευθυνόμενη παράγωγος βαθμωτού πεδίου

$$t(f) = t^{\alpha} \nabla_{\alpha} f$$

5. Είναι ελεύθερος συστροφής

$$\begin{aligned} \nabla_a \nabla_b f &= \nabla_b \nabla_a f \\ \Rightarrow [u, w]^b &= u^a \nabla_a w^b - w^a \nabla_a u^b \end{aligned}$$

Ανάμεσα σε δύο οποιουσδήποτε τελεστές παραγώγισης ∇_a , $\widetilde{\nabla_a}$ μπορεί ν' αποδειχτεί (κεφάλαιο 3.1 Wald, General Relativity) ότι υπάρχει ένας τανυστής πεδίου έτσι ώστε να ισχύει η παρακάτω σχέση :

$$\nabla_a \omega_b = \widetilde{\nabla_a}\omega_b - C^c{}_{ab}\omega_c \tag{1.53}$$

Για $\omega_b = \nabla_b f = \widetilde{\nabla_b} f$:

$$\nabla_a \nabla_b f = \widetilde{\nabla_a}\widetilde{\nabla_b} f - C^c{}_{ab}\nabla_c f \tag{1.54}$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι συμμετρική ως προς a, b. Με εναλλαγή, λοιπόν, των δεικτών πρέπει ο τανυστής πεδίου $C^c{}_{ab}$ να πληρεί την συνθήκη συμμετρίας:

$$C^c{}_{ab} = C^c{}_{ba} \tag{1.55}$$

Από την ιδιότητα 4 συνεπάγεται ότι :

$$(\widetilde{\nabla_a} - \nabla_a)(\omega_b t^b) = 0 \tag{1.56}$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα του Leibnitz και την σχέση (1.53) προκύπτει:

$$(\widetilde{\nabla_a} - \nabla_a)(\omega_b t^b) = C^c{}_{ab}\omega_b t^b + \omega_b(\widetilde{\nabla_a} - \nabla_a)t^b = 0 \tag{1.57}$$

Από την οποία συνεπάγεται υποκαθιστώντας τους δείκτες του πρώτου μέλους:

$$\omega_b[(\widetilde{\nabla_a} - \nabla_a)t^b + C^b{}_{ac}t^c] = 0 \tag{1.58}$$

Εφόσον η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε ω_b η παρένθεση πρέπει να μηδενίζεται. Επομένως, για το t^b ισχύει αντίστοιχα :

$$\nabla_a t^b = \widetilde{\nabla_a} t^b + C^b{}_{ac}t^c \tag{1.59}$$

Η γενικευμένη σχέση που περιγράφει τη δράση του ∇_a πάνω σε έναν τυχαίο τανυστή είναι :

$$\begin{aligned} \nabla_a T^{b_1 \ldots b_k}{}_{c_1 \ldots c_l} = \widetilde{\nabla}_a T^{b_1 \ldots b_k}{}_{c_1 \ldots c_l} + \sum_i C^{b_i}{}_{ad} T^{b_1 \ldots d \ldots b_k}{}_{c_1 \ldots c_l} \\ - \sum_j C^{d}{}_{ac_j} T^{b_1 \ldots b_k}{}_{c_1 \ldots d \ldots c_l} \end{aligned} \tag{1.60}$$

Στην περίπτωση του διαφορικού τελεστή $\widetilde{\nabla}_a = \partial_a$ ο τανυστής του πεδίου ονομάζεται σύμβολο Christoffel και συμβολίζεται Γ^b_{ac}. Επομένως, στην ειδική περίπτωση όπου ο διαφορικός τελεστής είναι ο στοιχειώδης διαφορικός τελεστής η (1.59) γίνεται:

$$\nabla_a t^b = \partial_a t^b + \Gamma^b{}_{ac} t^c \tag{1.61}$$

Δεδομένου του διαφορικού τελεστή ∇_a είναι δυνατόν να οριστεί η έννοια της παράλληλης μετατόπισης ενός διανύσματος v^a κατά μήκος μιας καμπύλης C με το εφαπτόμενο διάνυσμα t^a. Το διάνυσμα v^a μετατοπίζεται παράλληλα κατά μήκος μιας καμπύλης αν ικανοποιεί τη σχέση :

$$t^a \nabla_a v^b = 0 \tag{1.62}$$

κατά μήκος της καμπύλης. Σ' αυτή την περίπτωση προκύπτει :

$$\Rightarrow \quad t^a \partial_a v^b + t^a \Gamma^b_{ac} v^c = 0 \tag{1.63}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv^\nu}{dt} + \sum_{\mu,\nu} t^\mu \Gamma^\nu_{\mu\lambda} v^\lambda = 0 \tag{1.64}$$

Γενικότερα η παράλληλη μετατόπιση κατά μήκος μιας καμπύλης ορίζεται ως εξής :

$$t^a \nabla_a T^{b_1 \ldots b_k}{}_{c_1 \ldots c_l} = 0 \tag{1.65}$$

Όπως φαίνεται από τα παραπάνω είναι δυνατή η ύπαρξη πολλαπλών διαφορετικών διαφορικών τελεστών και δεν υπάρχει κάποιος τρόπος να επιλεγεί κάποιος εξ' αυτών ως προτιμόμενος. Στην περίπτωση όμως που θα δοθεί η μετρική ενός χώρου, υπάρχει μοναδική επιλογή του διαφορικού τελεστή. Αυτό συμβαίνει εξ' αιτίας του καθορισμού φυσικών προϋποθέσεων που επιβάλονται στην έννοια της παράλληλης μετατόπισης, σύμφωνα με την δοσμένη μετρική. Έστω ότι δίνονται τα διανύσματα v^a και w^a. Για παράλληλη μετατόπιση κατά μήκος οποιασδήποτε καμπύλης, απαιτείται το εσωτερικό τους γινόμενο $g_{ab}v^a w^b$ να παραμένει αναλλοίωτο. Επομένως, απαιτείται :

$$t^a \nabla_a (g_{bc} v^b w^c) = 0 \tag{1.66}$$

Εφόσον τα διανύσματα v^a και w^a ικανοποιούν την (1.62) και εφαρμόζοντας στην παραπάνω σχέση τον κανόνα του Leibnitz λαμβάνεται :

$$t^a v^b w^c \nabla_a (g_{bc}) = 0 \tag{1.67}$$

Εφόσον η παραπάνω ισότητα πρέπει να ισχύει για κάθε τιμή των t^a v^b και w^c η σχέση (1.67) ικανοποιείται αν και μόνο αν :

$$\nabla_a (g_{bc}) = 0 \tag{1.68}$$

Η σχέση (1.68) είναι η επιπλέον συνθήκη που ζητάμε για τον μονοσήμαντο προσδιορισμό του διαφορικού τελεστή ∇_a. Θα αποδειχτεί με το επόμενο θεώρημα ότι η σχέση (1.68) επαρκεί για τον καθορισμό του διαφορικού τελεστή, από όπου προκύπτει και ο ορισμός του ${C^c}_{ab}$ συναρτήσει της δοσμένης μετρικής g_{ab}.

Έστω $\widetilde{\nabla_a}$ ένας τυχαίος διαφορικός τελεστής. Θα υπολογιστεί η τιμή του ${C^c}_{ab}$ έτσι ώστε να ικανοποιείται η παραπάνω συνθήκη. Το θεώρημα θα αποδειχτεί βρίσκοντας την μονοσήμαντη τιμή του ${C^c}_{ab}$ για την οποία ικανοποιούνται όλες οι ανωτέρω προϋποθέσεις. Από την εξίσωση (1.60) πρέπει να ισχύει για τον ${C^c}_{ab}$:

$$0 = \nabla_a (g_{bc}) = \widetilde{\nabla_a}(g_{bc}) - {C^d}_{ab} g_{dc} - {C^d}_{ac} g_{bd} \tag{1.69}$$

Δηλαδή,

$$C_{cab} + C_{bac} = \widetilde{\nabla}_a(g_{bc}) \tag{1.70}$$

Με εναλλαγή των δεικτών λαμβάνουμε επίσης,

$$C_{cba} + C_{abc} = \widetilde{\nabla}_b(g_{ac}) \tag{1.71}$$

$$C_{bca} + C_{acb} = \widetilde{\nabla}_c(g_{ab}) \tag{1.72}$$

Προσθέτοντας τις (1.70),(1.71) και αφαιρώντας την (1.72) προκύπτει :

$$C_{cab} + C_{bac} + C_{cba} + C_{abc} - C_{bca} - C_{acb} = \widetilde{\nabla}_a(g_{bc}) + \widetilde{\nabla}_b(g_{ac}) - \widetilde{\nabla}_c(g_{ab}) \tag{1.73}$$

Η οποία με βάση τη συμμετρία της (1.55) απλοποιείται στην :

$$2C_{cab} = \widetilde{\nabla}_a(g_{bc}) + \widetilde{\nabla}_b(g_{ac}) - \widetilde{\nabla}_c(g_{ab}) \tag{1.74}$$

Επιστρέφοντας τώρα στην ζητούμενη ${C^c}_{ab}$ μέσω της μετρικής g^{cd} :

$${C^c}_{ab} = \frac{1}{2} g^{cd} \left\{ \widetilde{\nabla}_a(g_{bd}) + \widetilde{\nabla}_b(g_{ad}) - \widetilde{\nabla}_d(g_{ab}) \right\} \tag{1.75}$$

Αυτή η έκφραση για τον τανυστή του πεδίου ${C^c}_{ab}$ λύνει μονοσήμαντα την εξίσωση (1.68) για δεδομένο διαφορικό τελεστή $\widetilde{\nabla}_a$. Επομένως η επιλογή της μετρικής του χώρου καθορίζει μονοσήμαντα και τον διαφορικό τελεστή ∇_a ή αλλιώς καθορίζει την παράλληλη μετατόπιση στον χώρο αυτό. Συγκεκριμένα για τον ∂_a μπορούμε να υπολογίζουμε το σύμβολο Christoffel : ${\Gamma^b}_{ac}$.

$${\Gamma^c}_{ab} = \frac{1}{2} g^{cd} \left\{ \partial_a(g_{bd}) + \partial_b(g_{ad}) - \partial_d(g_{ab}) \right\} \tag{1.76}$$

Οπότε το σύμβολο Christoffel αναλύεται στις συνιστώσες της βάσης των συντεταγμένων του χώρου:

$${\Gamma^\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_\sigma g^{\rho\sigma} \left\{ \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \right\} \tag{1.77}$$

Επομένως, το σύμβολο Christoffel μπορεί να βρεθεί λαμβάνοντας τις μερικές παραγώγους των συντελεστών της βάσης συντεταγμένων όπως προκύπτουν από την έκφραση της μετρικής. Με τον ίδιο τρόπο μπορεί έπειτα να υπολογιστεί ο διαφορικός τελεστής ∇_a για δεδομένη μετρική.

1.2.7 Ο τανυστής Riemann

Από την δράση ενός διαφορικού τελεστή ∇_a πάνω σε ένα συνδιάνυσμα μπορεί να δειχτεί ότι δύο διαφορικοί τελεστές δεν μετατίθονται όταν ασκηθούν πάνω σε ένα συνδιάνυσμα και μάλιστα η δράση τους μπορεί να περιγραφεί από έναν (1,3) τανυστή, δηλαδή από έναν τανυστή που αντιστοιχεί την τετραπλέτα ενός συνδιανύσματος και τριών διανυσμάτων σε έναν πραγματικό αριθμό. Τα παραπάνω μπορούν να συμβολιστούν με την χρήση του τανυστή ${R_{abc}}^d$ ο οποίος ονομάζεται Riemann τανυστής της καμπύλωσης. Η δράση του δίνεται από τη σχέση :

$$\nabla_a \nabla_b \omega_c - \nabla_b \nabla_a \omega_c = {R_{abc}}^d \omega_d \tag{1.78}$$

Από την ιδιότητα 5 των διαφορικών τελεστών ισχύει :

$$0 = (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) t^c \omega_c \tag{1.79}$$

Εφαρμόζοντας τον κανόνα του Leibnitz η παραπάνω σχέση αναπτύσσεται :

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_a(\omega_c \nabla_b t^c + t^c \nabla_b \omega_c) - \nabla_b(\omega_c \nabla_a t^c + t^c \nabla_a \omega_c) \\ &= \omega_c(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) t^c + t^c(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)\omega_c \end{aligned} \tag{1.80}$$

Και χρησιμοποιώντας τον τανυστή Riemann :

$$\begin{aligned} 0 &= \omega_c(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) t^c + t^c {R_{abc}}^d \omega_c \\ &= \omega_c(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) t^c + t^c \omega_d {R_{abc}}^d \end{aligned} \tag{1.81}$$

Λαμβάνουμε τελικά την δράση του τανυστή πάνω σε ένα διάνυσμα :

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) t^c = -{R_{abd}}^c t^d \tag{1.82}$$

Γενικά η εφαρμογή του μεταθέτη των διαφορικών τελεστών πάνω σε έναν τανυστή δίνει :

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) T^{c_1 \ldots c_k}{}_{d_1 \ldots d_l} = -\sum_{i=1}^{k} R_{abe}{}^{c_i} T^{c_1 \ldots e \ldots c_k}{}_{d_1 \ldots d_l} + \sum_{j=1}^{l} R_{abd_j}{}^{e} T^{c_1 \ldots c_k}{}_{d_1 \ldots e \ldots d_l} \tag{1.83}$$

Για τον τανυστή Riemann προκύπτουν οι παρακάτω ιδιότητες σύμφωνα με τον ορισμό του:

1. $R_{abc}{}^{d} = -R_{bac}{}^{d}$
2. $R_{abc}{}^{d} - R_{acb}{}^{d} - R_{bac}{}^{d} + R_{bca}{}^{d} = 0$

$$R_{[abc]}{}^{d} = 0$$

3. Για τον διαφορικό τελεστή ∇_a που σχετίζεται με την μετρική g_{bc} ισχύει :

$$R_{abcd} = -R_{badc}$$

4. Η ταυτότητα Bianchi : $\nabla[_a R_{bc}]_d{}^{e} = 0$

$$\nabla_a R_{bcd}{}^{e} - \nabla_a R_{cbd}{}^{e} - \nabla_b R_{acd}{}^{e} + \nabla_b R_{cad}{}^{e} = 0$$

Υπολογίζοντας τη συστολή της ταυτότητας Bianchi λαμβάνεται η εξίσωση :

$$\nabla_a R_{bcd}{}^{a} + \nabla_b R_{cd} - \nabla_c R_{bd} = 0 \tag{1.84}$$

Ανεβάζοντας τον δείκτη d με την μετρική και εφαρμόζοντας συστολή πάνω στους δείκτες b, d λαμβάνεται η σχέση :

$$\nabla_a R_c{}^{a} + \nabla_b R_c{}^{b} - \nabla_c R = 0 \tag{1.85}$$

Ορίζοντας, λοιπόν, τον τανυστή Einstein ως εξής :

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} \tag{1.86}$$

Η σχέση (1.85) μπορεί να γραφεί ισοδύναμα :

$$\nabla^a G_{ab} = 0 \tag{1.87}$$

Εφόσον εφαρμόζοντας τον διαφορικό τελεστή στον τανυστή Einstein λαμβάνεται σύμφωνα με τον κανόνα του Leibnitz η σχέση:

$$\nabla^a G_{ab} = \nabla^a R_c{}^a + \nabla_b R_c{}^b - \frac{1}{2}\left\{g_{ac}\nabla^a R + R\nabla^a g_{ac}\right\} \tag{1.88}$$

η οποία ισοδυναμεί με την σχέση (1.85) και επομένως μηδενίζεται .

1.2.8 Γεωδαισικές

Οι γεωδαισικές είναι γραμμές που καμπυλώνονται όσο το δυνατόν λιγότερο. Δηλαδή, οι γεωδαισικές ορίζονται έτσι ώστε οποιαδήποτε διαδρομή κατά μήκος τους, να είναι η μικρότερη δυνατή. Δεδομένου ένος διαφορικού τελεστή ∇_a ορίζουμε μια γεωδαισική ως την καμπύλη της οποίας το εφαπτόμενο διάνυσμα παραμένει παράλληλο ως προς τον εαυτό του κατά μήκος της καμπύλης. Είναι δηλαδή η καμπύλη της οποίας το κέθετο διάνυσμα ικανοποιεί την εξίσωση :

$$T^a \nabla_a T^b = 0 \tag{1.89}$$

Γράφοντας τους συντελεστές της εξίσωσης για μια βάση συντεταγμένων, ως προς την καμπύλη $x^\mu(t)$ που παραμετροποιείται με την t, προκύπτει :

$$\frac{dT^\mu}{dt} + \sum_{\sigma\nu} \Gamma^\mu{}_{\sigma\nu} T^\sigma T^\nu = 0 \tag{1.90}$$

Λαμβάνοντας υπ΄ όψιν οτι οι συντελεστές του διανύσματος T^μ ως εφαπτόμενο στην καμπύλη C με βάση συντεταγμένων το $x^\mu(t)$ δίνονται από την εξίσωση :

$$T^\mu = \frac{dx^\mu}{dt} \tag{1.91}$$

η (1.91) γράφεται :

$$\frac{d^2x^\mu}{dt^2} + \sum_{\sigma\nu} \Gamma^\mu{}_{\sigma\nu} \frac{dx^\sigma}{dt}\frac{dx^\nu}{dt} = 0 \tag{1.92}$$

Η εξίσωση (1.92) αποτελεί ένα σύστημα από n δεύτερης τάξης συνήθεις διαφορικές εξισώσεις για τις n συναρτήσεις $x^\mu(t)$. Από τη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων είναι γνωστό ότι υπάρχει μοναδική λύση για το παραπάνω σύστημα, αν δωθούν οι αρχικές συνθήκες, δηλαδή οι αρχικές τιμές x^μ, dx^μ/dt. Επομένως, αν δωθεί ένα σημείο του χώρου p και ένα διάνυσμα T^a, υπάρχει πάντα μια μοναδικλη γεωδαισική που διέρχεται από το p και έχει ως εφαπτόμενο διάνυσμα το T^a, η οποία μπορεί να προσδιοριστεί από την παραπάνω σχέση.

Ένα ακόμη χαρακτηριστικό των γεωδαισικών, ενός διαφορικού τελεστή που προκύπτει από την μετρική g_{ab}, είναι ότι ελαχιστοποιούν το μήκος της καμπύλης που ενώνει δύο οποιαδήποτε σημεία του χώρου όπως υπολογίζεται με βάση την δεδομένη μετρική. Το μήκος της ομαλής καμπύλης C ορίζεται με βάση την μετρική g_{ab} :

$$l = \int (g_{ab}T^aT^b)^{1/2}dt \tag{1.93}$$

Μια καμπύλη μπορεί να ονομαστεί σύμφωνα με το πρόσημο του γινομένου $g_{ab}T^aT^b$:

- Χρονοειδής : $g_{ab}T^aT^b < 0$
- Φωτοειδής : $g_{ab}T^aT^b = 0$
- Χωροειδής : $g_{ab}T^aT^b > 0$

Το μήκος μιας χωροειδούς καμπύλης ορίζεται όπως παραπάνω ως l, το μήκος μια φωτοειδούς καμπύλης μηδενίζεται ενώ το μήκος μια χρονοειδούς καμπύλης ορίζεται σύμφωνα με τον ιδιόχρονο τ εναλλάσσοντας το αρνητικό πρόσημο που υπεισέρχεται στη σχέση (1.93) :

$$\tau = \int (-g_{ab}T^aT^b)^{1/2}dt \tag{1.94}$$

Το μήκος μια καμπύλης μπορεί να γραφεί ισοδύναμα αντικαθιστώντας το διάνυσμα T^μ με την ισοδύναμη έκφραση των διαφορικών :

$$l = \int \left[\sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} \right]^{1/2} dt \tag{1.95}$$

Για να ικανοποιείται η συνθήκη ελαχίστου μήκους, που οφείλει να πληροί κάθε γεωδαισική, πρέπει να ισχύει ελαχιστοποιηθεί το μήκος που ορίζεται για κάθε ζεύγος σημείων του χώρου. Η διακύμανση του μήκους είναι :

$$\delta\lambda = \int_b^a \left[\sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} \right]^{-1/2} \sum_{\alpha,\beta} \left\{ g_{ab} \frac{dx^a}{dt} \frac{d(\delta x^b)}{dt} + \frac{1}{2} \sum_\sigma \frac{\partial g_{ab}}{\partial x^\sigma} \delta x^\sigma \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} \right\} dt \tag{1.96}$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε την κανονικοποίηση:

$$g_{ab} T^a T^b = 1 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} \tag{1.97}$$

Με την παραπάνω συνθήκη η συνθήκη ελαχιστοποίησης (1.96) γίνεται:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_b^a \sum_{a,b} \left\{ g_{ab} \frac{dx^a}{dt} \frac{d(\delta x^b)}{dt} + \frac{1}{2} \sum_\sigma \frac{\partial g_{ab}}{\partial x^\sigma} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} \delta x^\sigma \right\} dt \\ &= \int_b^a \sum_{a,b} \left\{ -\frac{d}{dt} \left(g_{ab} \frac{dx^a}{dt} \right) + \frac{1}{2} \sum_\lambda \frac{\partial g_{ab}}{\partial x^b} \frac{dx^a}{dt} \frac{dx^\lambda}{dt} \right\} \delta x^b dt \end{aligned} \tag{1.98}$$

Η εξίσωση (1.98) ισχύει για κάθε τυχαία διανυσματική μεταβολή δx^b αν και μόνο αν:

$$-\sum_a g_{ab} \frac{d^2 x^a}{dt^2} - \sum_{\alpha,\lambda} \frac{\partial g_{ab}}{\partial x^\lambda} \frac{dx^\lambda}{dt} \frac{dx^a}{dt} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\lambda} \frac{\partial g_{ab}}{\partial x^b} \frac{dx^a}{dt} \frac{dx^\lambda}{dt} = 0 \tag{1.99}$$

Η συνθήκη αυτή είναι ισοδύναμη με την σχέση (1.89) την οποία έχουμε θεωρήσει ως θεμελιώδη εξίσωση από την οποία προσδιορίζεται μια γεωδαισική καμπύλη. Επομένως, μια καμπύλη ελαχιστοποιεί το μήκος κάθε διαδρομής, αν και μόνο αν είναι γεωδαισική. Η συνθήκη κανονικοποίησης δεν επιβάλει επιπλέον περιορισμούς στο σύστημα. Επιλέγει όμως την χρησιμότερη μορφή της καμπύλης, η οποία οδηγεί σε μαθηματικές απλοποιήσεις, που είναι όμως ισοδύναμη με όλες τις υπόλοιπες.

1.3 Η εξίσωση του Einstein

1.3.1 Η γεωμετρία του χώρου στην Ειδική θεωρία της Σχετικότητας

Για την περιγραφή του χωροχρόνου στη φυσική πριν την εμφάνιση της Σχετικότητας, χρησιμοποιείται το διάνυσμα της απόστασης l ανάμεσα σε δύο θέσεις x^a ,x'^a στον τρισδιάστατο χώρο ορίζεται ως εξής:

$$D = (x^1 - x'^1)^2 + (x^2 - x'^2)^2 + (x^3 - x'^3)^2 \tag{1.100}$$

Η παραπάνω σχέση είναι ανεξάρτητη του συστήματος συντεταγμένων του καρτεσιανού χώρου και μπορεί επομένως να θεωρηθεί ως ενδογενές χαρακτηριστικό του χώρου. Από τον παραπάνω ορισμό, μπορεί να προκύψει ο ορισμός της μετρικής του χώρου μέσω των απειροστών μεταβολών :

$$h_{ab} = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} h_{\mu\nu}(dx^\mu)_a(dx^\nu)_b \tag{1.101}$$

Εφόσον οι συντελεστές της μετρικής της βάσης του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων είναι σταθεροί, η διαφορική εξίσωση

$$\partial_a h_{bc} = 0 \tag{1.102}$$

μηδενίζεται. Κατά συνέπεια, το σύμβολο Christoffel Γ^a_{bc} που εξαρτάται άμεσα από την παραπάνω παραγώγιση, επίσης μηδενίζεται. Εφόσον οι συνήθεις διαφορικοί τελεστές μετατίθενται σε κάθε περίπτωση μεταξύ τους, όταν ασκηθούν πάνω σε οποιονδήποτε τανυστή, η καμπύλωση εξαφανίζεται όπως γίνεται αντιληπτό και από την σχέση (1.78). Η μετρική του χώρου, ορίζεται ως επίπεδη. Στην παραπάνω γεωμετρία, οι γεωδαισικές καμπύλες συμπίπτουν με τις ευθείες γραμμές του καρτεσιανού χώρου. Σε αυτή την περίπτωση, η απόσταση ανάμεσα σε δύο σημεία είναι σταθερή και ελάχιστη και δίνεται από τον τύπο (1.101).

Στην Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας, η απόσταση ορίζεται αντίστοιχα στον τετραδιάστατο πλέον χώρο :

$$l = -(x^0 - x'^0)^2 + (x^1 - x'^1)^2 + (x^2 - x'^2)^2 + (x^3 - x'^3)^2 \tag{1.103}$$

Η παραπάνω σχέση καθορίζει αντίστοιχα την μετρική του χωροχρόνου:

$$n_{ab} = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} n_{\mu\nu}(dx^\mu)_a(dx^\nu)_b \tag{1.104}$$

Όπου η μετρική δίνεται :

$$n_{ab} = diag(-1, 1, 1, 1) \tag{1.105}$$

Εφόσον το πεδίο είναι και πάλι ανεξάρτητο από την επιλογή της βάσης του συστήματος συντεταγμένων, ισχύει για τον διαφορικό τελεστή που ασκείται πάνω στην μετρική :

$$\partial_a n_{bc} = 0 \tag{1.106}$$

Ακολουθώντας την παραπάνω συλογιστική μπορεί να εξαχθεί το συμπέρασμα ότι οι γεωδαισικές είναι και πάλι οι ευθείες γραμμές που ενώνουν δυό σημεία του χώρου, καθώς η καμπυλότητα εξαφανίζεται. Έτσι η Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας υποστηρίζει ότι ο χώρος είναι ο $\mathbb{R}^4$ χώρος με την επίπεδη μετρική Lorentz .

Σύμφωνα με την αρχή της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας τίποτα δεν μπορεί να ταξιδέψει ταχύτερα από την ταχύτητα του φωτός. Αυτή η αρχή περιγράφεται από την υπόθεση της Ειδικής Σχετικότητας, ότι κάθε μονοπάτι στο χωρόχρονο των πραγματικών σωματιδίων αποτελεί χρονοειδή καμπύλη. Επομένως, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η παραμετροποίηση των χρονοειδών καμπύλων μέσω του ιδιόχρονου:

$$\tau = \int (-n_{ab}T^aT^b)dt \tag{1.107}$$

Το εφαπτόμενο διάνυσμα u^a σε μια χρονοειδή καμπύλη, που περιγράφει την τετραδιανυσματική ταχύτητα προκύπτει εξ' ορισμού από την (1.107) ότι έχει μοναδιαίο μήκος

$$u^a u_a = -1 \tag{1.108}$$

Επίσης, εφόσον ένα σωματίδιο ελεύθερο από εξωτερικές δυνάμεις θα ταξιδεύει πάνω στις γεωδαισικές, το τετραδιάνυσμα της ταχύτητας πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση της κίνησης :

$$u^a \partial_a u_b = 0 \tag{1.109}$$

Η τετραορμή ενός σωματιδίου στον χώρο που περιγράφηκε παραπάνω, ορίζεται σύμφωνα με την τετραταχύτητα :

$$p^a = mu^a \tag{1.110}$$

Και αντίστοιχα η ενέργεια :

$$E = -p_a u^a \tag{1.111}$$

Στην Ειδική Σχετικότητα, το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο συνδυάζονται σε έναν χωροχρονικό τανυστή πεδίου F_{ab}, με την αντισυμμετρική ιδιότητα $F_{ab} = -F_{ba}$. Για έναν παρατηρητή που κινείται με ταχύτητα u^a το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο προκύπτουν ως συνάρτηση του F_{ab} :

$$\begin{aligned} E_a &= F_{ab} * u^b \\ B_a &= -{\epsilon_{ab}}^{cd} * F_{cd} * u^b \end{aligned} \tag{1.112}$$

Οι εξισώσεις του Maxwell γράφονται επομένως, σύμφωνα με το σχετικιστικό φορμαλισμό:

$$\partial^a F_{ab} = -4\pi j_b \tag{1.113}$$
$$\partial[_a F_{bc}] = 0 \tag{1.114}$$

Όπου j_b είναι το τετραδιάνυσμα του ρεύματος πυκνότητας πιθανότητας του ηλεκτρικού φορτίου. Λόγω της αντισυμμετρικής ιδιότητας του F_{ab}:

$$0 = \partial^a \partial^b F_{ab} = -4\pi \partial^b j_b \tag{1.115}$$

Επομένως, από τις εξισώσεις του Maxwell προκύπτει επίσης η σχέση διατήρησης του ρεύματος :

$$\partial^b j_b = 0 \tag{1.116}$$

Από την οποία μπορεί να εξαχθεί άμεσα η διατήρηση του φορτίου.

Αντίστοιχα η εξίσωση κίνησης για ένα σωματίδιο φορτίου q που κινείται στο εσωτερικό ηλεκτρομαγνητικού πεδίου F_{ab} είναι :

$$u^a \partial_a u^b = \frac{q}{m} F^b{}_c u^c \tag{1.117}$$

Με τον τανυστή της τάσης να λαμβάνει για το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, την μορφή :

$$T_{ab} = \frac{1}{4\pi}[F_{ac}F_b{}^c - \frac{1}{4} n_{ab} F_{de} F^{de}] \tag{1.118}$$

1.3.2 Η γεωμετρία του χώρου στη Γένική θεωρία της Σχετικότητας

Η θεωρία του Maxwell μέσα στο πλαίσιο της Ειδικής Σχετικότητας, περιγράφει ικανοποιητικά την ενοποιημένη θεωρία για τον ηλεκτρισμό, τον μαγνητισμό και το φως. Θα ήταν, λοιπόν, αναμένόμενο να αναζητηθεί μια ανάλογη γενίκευση της θεωρίας του Newton που να περιγράφει τις ιδιότητες της βαρυτικής δύναμης υπό το πρίσμα της Ειδικής Σχετικότητας. Παρόλ΄ αυτά, ο

Einstein αναζήτησε μια καθολικά καινούρια λύση εισάγοντας μια νέα θεώρηση για την βαρύτητα και το χωρόχρονο, αναπτύσσοντας την Γενική Θεωρία της Σχετικότητας.

Βασική διαφοροποίηση αποτελεί η αντικατάσταση της μερικής παραγώγισης ∂_a, με τον γενικευμένο διαφορικό τελεστή ∇_a. Ο διαφορικός τελεστής ∇_a προκύπτει από την μετρική g_{ab} του χωροχρόνου, όπως περιγράφηκε παραπάνω. Έτσι ένα ελεύθερο σωματίδιο ικανοποιεί την γεωδαισική εξίσωση της κίνησης :

$$a^b = u^a \nabla_a u^b = 0 \tag{1.119}$$

Αντίστοιχα για ένα επιταχυνόμενο σωματίδιο πάνω στο οποίο ασκείται δύναμη f ορίζεται το τετραδιάνυσμα της δύναμης:

$$f^b = ma^b \tag{1.120}$$

όπου m είναι η μάζα ηρεμίας. Η ορμή και η ενέργεια ορίζονται όπως και στην περίπτωση της Ειδικής Σχετικότητας από τις σχέσεις :

$$\begin{aligned} p^a &= mu^a \\ E &= -p_a u^a \end{aligned} \tag{1.121}$$

Αντίστοιχα, οι εξισώσεις του Maxwell γράφονται σύμφωνα με το φορμαλισμό της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας:

$$\nabla^a F_{ab} = -4\pi j_b \tag{1.122}$$

$$\nabla[_a F_{bc}] = 0 \tag{1.123}$$

Και ο τανυστής ενέργειας - ορμής προκύπτει απ΄ την αντικατάσταση της μετρικής n_{ab} με την έκφραση της γενικευμένης μετρικής g_{ab} :

$$T_{ab} = \frac{1}{4\pi}[F_{ac}F_b{}^c - \frac{1}{4}g_{ab}F_{de}F^{de}] \tag{1.124}$$

1.3.3 Η εξίσωση του Einstein

Ο βασικός στόχος της συλλογιστικής που θα ακολουθηθεί είναι η εύρεση μιας καθολικής εξίσωσης που θα σχετίζει την κατανομή της ύλης στο χώρο με την γεωμετρία του χωρόχρονου.

Από την εξίσωση Poisson προκύπτει η σχέση που σχετίζει το πεδίο του δυναμικού σ΄ έναν χώρο με την πυκνότητα του:

$$\nabla^2\Phi = 4\pi\rho \tag{1.125}$$

Από την μελέτη των κυματικών εξισώσεων, με την μηχανική του Newton και με την Γενική Σχετικότητα μπορεί να προκύψει η αντιστοιχία του βαρυτικού δυναμικού ϕ με τον τανυστή Riemann :

$$R_{cbd}{}^{a}u^c u^d \leftrightarrow \partial_b\partial^a\phi \tag{1.126}$$

Επίσης, η πυκνότητα της ύλης στο χώρο μπορεί να συσχετιστεί με τον τανυστή ενέργειας - τάσης που περιγράφει την ενεργειακή κατανομή με την αντίστοιχη πυκνότητα :

$$T_{ab}u^a u^b \leftrightarrow \rho \tag{1.127}$$

Επομένως, αντικαθιστώντας τις παραπάνω αντιστοιχίες στην εξίσωση του Poisson προκύπτει :

$$\begin{aligned} &R_{cbd}{}^{a}u^c u^d = 4\pi T_{ab}u^a u^b \\ &\Rightarrow R_{cbd}{}^{a} = 4\pi T_{ab} \end{aligned} \tag{1.128}$$

Η παραπάνω μορφή της εξίσωσης ήταν η πρώτη που προτάθηκε από τον Einstein . Όμως, η διαφόριση της εξίσωσης αυτής εισάγει μια σοβαρή αντίφαση. Για τον τανυστή της τάσης έχει αποδειχτεί παραπάνω :

$$\nabla^c T_{cd} = 0 \tag{1.129}$$

Επίσης έχει αντίστοιχα δειχτεί στην εξίσωση (1.87) οτι ο τανυστής Einstein είναι αυτός που μηδενίζεται. Επομένως, για τον τανυστή Riemann η διαφόριση της παραπάνω εξίσωσης θα υπονοούσε την παρακάτω συλλογιστική :

$$\begin{aligned}
\nabla^c T_{cd} &= 0 \\
\Rightarrow \nabla^c R_{cbd}{}^{a} &= 0 \\
\text{εφόσον } \nabla^c G_{cd} &= \nabla^c \left\{ R_{cd} - \frac{1}{2} g_{cd} R \right\} = 0 \\
\nabla^c \left\{ R_{cd} - \frac{1}{2} g_{cd} R \right\} &= \nabla^c \left\{ R_{cd} \right\} - \frac{1}{2} g_{cd} \nabla^c R = 0 \\
\Rightarrow \nabla_d R &= 0
\end{aligned} \tag{1.130}$$

Που θα οδηγούσε στην λανθασμένη υπόθεση ότι η $\nabla_d R$ θα πρέπει να μηδενίζεται. Εφόσον αυτή η υπόθεση δεν μπορεί να είναι αληθής, ο τανυστής ενέργειας - ορμής θα πρέπει να εξισωθεί με τον τανυστή Einstein αντί για τον τανυστή Riemann . Θα προκύψει με αυτό τον τρόπο η διορθωμένη εξίσωση που σχετίζει το πεδίο της βαρύτητας G_{ab} με τον τανυστή που περιγράφει την ενεργειακή κατανομή του τετραδιάστατου χωρόχρονου. Η εξίσωση αυτή ονομάζεται εξίσωση Einstein .

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = 8\pi T_{ab} \tag{1.131}$$

Λαμβάνοντας το ίχνος της παραπάνω :

$$R = 8\pi T \tag{1.132}$$

Οπότε αντικαθιστώντας στην εξίσωση του Einstein :

$$R_{ab} = 8\pi (T_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} T) \tag{1.133}$$

2. ΚΒΑΝΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ

2.1 Κλασική Κβαντομηχανική

Στην προσπάθειά του να εξηγήσει την σχέση της φασματικής έντασης της ακτινοβολίας που εκπέμπεται από ένα μέλαν σώμα, ο Planck κατέληξε στην ανάγκη της κβάντωσης του φωτός, πραγματοποιώντας την πρώτη επαφή με τον φορέα αλληλεπίδρασης της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας, το φωτόνιο. Κατέληξε στο συμπέρασμα ότι η ενέργεια που απορροφάται ή εκπέμπεται από ένα μέλαν σώμα είναι κβαντισμένη και μάλιστα είναι ανάλογη με την συχνότητα του φωτονίου. Η σχέση Planck, που συνδέει την ενέργεια με την συχνότητα, είναι:

$$E = h\nu \tag{2.1}$$

και αντίστοιχα για την γωνιακή ταχύτητα που ορίζεται από τη σχέση $\omega = 2\pi\nu$:

$$E = \hbar\omega \tag{2.2}$$

Ο Einstein στην προσπάθειά του να εξηγήσει το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο είναι ο πρώτος που εισήγαγε την έννοια των φωτονίων για την περιγραφή της φύσης της οπτικής ακτινοβολίας. Πραγματοποιήθηκαν, λοιπόν, τα πρώτα βήματα για την περιγραφή της διπλής φύσης της ύλης, που φέρει ταυτόχρονα χαρακτηριστικά σωματιδίου και ως κύματος. Όμως, μέχρι τώρς είχε παρατηρηθεί μόνο η σωματιδιακή φύση της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας. Η τελική επιβεβαίωση της παραπάνω παραδοχής συντελέστηκε από την απόδειξη του De Broglie , ο οποίος συνέδεσε την ορμή με το μήκος κύματος, επιβεβαιώνοντας και την κυματική φύση των σωματιδίων που φέρουν ορμή.

Η σχέση De Broglie δίνεται :

$$p = \frac{h}{\lambda} \tag{2.3}$$

και αντίστοιχα για τον κυματαριθμό που ορίζεται από τη σχέση $k = \frac{2\pi}{\lambda}$:

$$p = \hbar k \tag{2.4}$$

2.1.1 Η εξίσωση Schrodinger

Ο Schrodinger επιχείρησε να δημιουργήσει μια θεωρία που να περιγράφει το μεγαλύτερο μέρος των παρατηρούμενων φαινομένων, προσπαθώντας να ενοποιήσει τις υπάρχουσες περιγραφές για την φύση, που μελετούσαν όλα τα φυσικά φαινόμενα ως ανεξάρτητα μεταξύ τους. Κατέληξε, λοιπόν, στην δημιουργία μιας καθολικής εξίσωσης, ακολουθώντας τον επόμενο συλλογισμό.

Η ενέργεια ενός σωματιδίου δίνεται κλασικά από την σχέση :

$$E = K + V = \frac{1}{2}mu^2 + V = \frac{p^2}{2m} + V \tag{2.5}$$

Από την παραγώγιση της κυματικής εξίσωσης, μπορούν να προκύψουν οι αντιστοιχίες για τους τελεστές της ενέργειας και της ορμής, δηλαδή η δράση των τελεστών πάνω σε μια τυχαία κυματοσυνάρτηση. Έστω η γενική μορφή της κυματικής εξίσωσης :

$$\Psi(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)} \tag{2.6}$$

Από τις σχέσεις De Broglie και Planck :

$$\begin{aligned} k &= \frac{p}{\hbar} \\ \omega &= \frac{E}{\hbar} \end{aligned} \tag{2.7}$$

Οπότε η κυματική εξίσωση γίνεται :

$$\Psi(x,t) = Ae^{i\frac{(px-Et)}{\hbar}} \tag{2.8}$$

Από την παραγώγιση της παραπάνω συνάρτησης ως προς x μπορεί να οριστεί ο τελεστής της ορμής :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial x} &= +i\frac{p}{\hbar}\Psi \\ \hat{p}\Psi &= (-i\hbar\frac{\partial}{\partial x})\Psi \end{aligned} \tag{2.9}$$

Και αντίστοιχα από την παραγώγιση της παραπάνω συνάρτησης ως προς t μπορεί να οριστεί ο τελεστής της ενέργειας :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= -i\frac{E}{\hbar}\Psi \\ \hat{E}\Psi &= (i\hbar\frac{\partial}{\partial t})\Psi \end{aligned} \tag{2.10}$$

Οπότε προκύπτουν οι τελεστές της ορμής και της ενέργειας :

$$\begin{aligned} \hat{p} &\to (-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}) \\ \hat{E} &\to (i\hbar\frac{\partial}{\partial t}) \end{aligned} \tag{2.11}$$

Η εξίσωση του Schrodinger προκύπτει από την εισαγωγή των παραπάνω τελεστών στην εξίσωση της ολικής ενέργειας () :

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(x,t) + V(x)\Psi(x,t) \tag{2.12}$$

Ο ρυθμός ελάττωσης του αριθμού των σωματιδίων που διέρχονται από έναν δεδομένο όγκο ισούται με την ολική ροή σωματιδίων που βγαίνουν από αυτό τον όγκο :

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho \cdot dV = \int_S j \cdot n \cdot dS \tag{2.13}$$

Από το θεώρημα του Gauss:

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho \cdot dV = \int \nabla \cdot j \cdot dV \tag{2.14}$$

Για να ισχύει η παραπάνω ισότητα για κάθε τιμή του όγκου V πρέπει να ισχύει η επονομαζόμενη εξίσωση της συνέχειας :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot j = 0 \tag{2.15}$$

Η πυκνότητα πιθανότητας για τις συναρτήσεις που υπακούουν στην εξίσωση του Schrodinger ορίζεται ως το τετράγωνο του μέτρου της κυματοσυνάρτησης. Δηλαδή :

$$\rho = \Psi^* \Psi = |\Psi|^2 \tag{2.16}$$

Η μιγαδική συζηγής εξίσωση του Schrodinger δίνεται από τη σχέση :

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi^*(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi^*(x,t) + V(x)\Psi^*(x,t) \tag{2.17}$$

Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση του Schrodinger με Ψ^* και τη μιγαδική συζηγή εξίσωση με Ψ και προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει :

$$\begin{aligned} i\hbar \left(\frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \Psi + \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) &= \frac{\hbar^2}{2m} \left(\Psi \nabla^2 \Psi^* - \Psi^* \nabla^2 \Psi \right) + V(x)\Psi^*\Psi - V(x)\Psi\Psi^* \\ \Rightarrow \frac{\partial (\Psi^*\Psi)}{\partial t} &= \frac{\hbar}{2im} \nabla \left(\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^* \right) \end{aligned} \tag{2.18}$$

Προϋπόθεση για την ισχύ της παραπάνω σχέσης είναι το δυναμικό να είναι πραγματική συνάρτηση. Στην περίπτωση μιγαδικού δυναμικού η πυκνότητα πιθανότητας δεν διατηρείται. Το ρεύμα πυκνότητας - πιθανότητας ορίζεται σύμφωνα με την παραπάνω σχέση, έτσι ώστε να ισχύει η εξίσωση της συνέχειας ως εξής :

$$j = -\frac{i\hbar}{2m} \left(\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^* \right) \tag{2.19}$$

2.1.2 Κβαντομηχανικός Φορμαλισμός

Για να λυθεί η εξίσωση του Schrodinger αρκεί να επιβληθεί το κατάλληλο δυναμικό πεδίο, που θα εισαχθεί στην εξίσωση, ανάλογα με την φυσική του φαινομένου που μελετάται. Η λύση της εξίσωσης οδηγεί στην εύρεση μιας συνάρτησης του χώρου και του χρόνου $\Psi(x,t)$. Το σύνολο των κυματοσυναρτήσεων που είναι λύσεις της εξίσωσης του Schrodinger αποτελούν έναν γραμμικό χώρο. Δηλαδή, αν οριστεί το εσωτερικό γινόμενο δύο κυματοσυναρτήσεων Φ και Ψ ως εξής :

$$< \Phi, \Psi >= \int \Phi^* \Psi dx \tag{2.20}$$

Οι κυματοσυναρτήσεις οφείλουν να ικανοποιούν τις παρακάτω ιδιότητες :

- $< \Phi, \Psi_1 + \Psi_2 >=< \Phi, \Psi_1 > + < \Phi, \Psi_2 >$
- $< \Phi, a\Psi >= a < \Phi, \Psi >$
  και αντίστοιχα $\quad a < \Phi, \Psi >= a^* < \Phi, \Psi >$
- $< \Phi, \Phi > \quad \geq 0$
- Αν $< \Phi, \Phi >= 0$ συνεπάγεται ότι $\Phi = 0$

Επίσης οι κυματοσυναρτήσεις, που αποτελούν λύσεις, ανήκουν στο χώρο των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων. Ισχύει δηλαδή :

$$\int \Phi^* \Phi dx < \infty \tag{2.21}$$

Ως τελεστής $\hat{A}$, ορίζεται γενικά μια απεικόνιση $S \to S$. Στην κβαντομηχανική, οι τελεστές που δρούν πάνω στις κυματοσυναρτήσεις και αντιστοιχούν σε φυσικές ποσότητες είναι γραμμικοί και ερμιτιανοί.

Η γραμμικότητα ενός τελεστή μπορεί να αποδοθεί με την παρακάτω συνθήκη, η οποία ικανοποιείται για τους τελεστές της κβαντομηχανικής :

$$\hat{A}(c_1\Phi_1 + c_2\Phi_2 + \cdots + c_n\Phi_n) = c_1\hat{A}\Phi_1 + c_2\hat{A}\Phi_2 + \cdots + c_n\hat{A}\Phi_n \tag{2.22}$$

Ένας τελεστής είναι ερμιτιανός αν ικανοποιεί τη σχέση :

$$\int \Phi^*(A\Psi)dx = \int (A^*\Phi)^*\Psi dx \tag{2.23}$$

Ή ισοδύναμα,

$$A^\dagger = A \tag{2.24}$$

Επίσης, ορίζεται ο μεταθέτης δύο τελεστών :

$$\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \tag{2.25}$$

και ο αντιμεταθέτης :

$$\left\{\hat{A}, \hat{B}\right\} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A} \tag{2.26}$$

Η δράση ενός τελεστή πάνω σε μια συνάρτηση αποδίδεται με τη σχέση :

$$\hat{A}\Phi = \alpha\Phi \tag{2.27}$$

Η συνάρτηση Φ ονομάζεται ιδιοσυνάρτηση και ο αριθμός α ιδιοτιμή του τελεστή. Στην περίπτωση που ο τελεστής $\hat{A}$ είναι ερμιτιανός, οι ιδιοτιμές του είναι πραγματικοί αριθμοί. Επομένως, στην κβαντομηχανική που έχουμε ερμιτιανούς τελεστές, οι ιδιοτιμές των ιδιοσυναρτήσεων αποτελούν μετρήσιμα μεγέθη και είναι πραγματικοί αριθμοί.

Αν για κάθε δύο ιδιοτιμές, δύο διαφορετικών ιδιοσυναρτήσεων

$$\begin{aligned} \hat{A}\Phi_n &= \alpha_n\Phi_n \\ \hat{A}\Phi_m &= \alpha_m\Phi_m \end{aligned} \tag{2.28}$$

ισχύει $\alpha_n \neq \alpha_m$, τότε δεν παρατηρείται εκφυλισμός, δηλαδή κάθε ιδιοτιμή ορίζει μονοσήμαντα μια συγκεκριμένη ιδιοσυνάρτηση. Σ' αυτή την περίπτωση το σύστημα των ιδιοσυναρτήσεων είναι ορθογώνιο και αν οι κυματοσυναρτήσεις είναι κανονικοποιημένες το σύστημα είναι ορθοκανονικό.

Για $m \neq n$ ισχύει :

$$< \Phi_n, \Phi_m >= 0 \tag{2.29}$$

Η παραπάνω υπόθεση αποδεικνύεται ως εξής. Έστω Φ_n σύστημα ιδιοσυναρτήσεων που αποτελούν λύσεις της (2.27). Επίσης, έστω ότι ισχύει $\alpha_n \neq \alpha_m$.

$$< \Phi_n, \Phi_m >= \int \Phi_n^* \Phi_m dx \tag{2.30}$$

Εφαρμόζοντας τον τελεστή $\hat{A}$:

$$< \Phi_n, \hat{A}\Phi_m >= \int \Phi_n^* \hat{A} \Phi_m dx = \alpha_m \int \Phi_n^* \Phi_m dx \tag{2.31}$$

Εφόσον όμως ο $\hat{A}$ είναι ερμιτιανός :

$$< \Phi_n, \hat{A}\Phi_m >=< \hat{A}\Phi_n, \Phi_m >= \int (\hat{A}\Phi_n)^* \Phi_m dx = \alpha_n \int \Phi_n^* \Phi_m dx \tag{2.32}$$

Επομένως, εξισώνοντας τα δύο μέλη,

$$\alpha_m \int \Phi_n^* \Phi_m dx = \alpha_n \int \Phi_n^* \Phi_m dx \tag{2.33}$$

$$(\alpha_m - \alpha_n) \int \Phi_n^* \Phi_m dx = 0 \tag{2.34}$$

Εφόσον η παρένθεση είναι διάφορη του μηδενός από την υπόθεση, πρέπει να μηδενίζεται το εσωτερικό γινόμενο. Ισχύει δηλαδή :

$$< \Phi_m, \Phi_n >= 0 \tag{2.35}$$

Εφόσον πρέπει να ισχύει η προϋπόθεση των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων κυματοσυναρτήσεων, ο αριθμός

$$< \Phi_n, \Phi_n >= a \tag{2.36}$$

πρέπει να είναι πραγματικός αριθμός. Επομένως, διαιρώντας με τον a μπορούμε να ορίσουμε ένα κανονικοποιημένο σύστημα κυματοσυναρτήσεων, όπου

$$< \Phi_m, \Phi_n >= \delta_{mn} \tag{2.37}$$

Αν το σύστημα των ιδιοσυναρτήσεων αποτελείται από διακριτές τιμές των ιδιοτιμών και επομένως από διακριτές τιμές των n κάθε συνάρτηση του χώρου, μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των ιδιοσυναρτήσεων :

$$\Phi = \sum_n C_n \Phi_n \tag{2.38}$$

Αν το σύστημα των ιδιοσυναρτήσεων αποτελείται από διακριτές τιμές των ιδιοτιμών και επομένως από διακριτές τιμές των n κάθε συνάρτηση του χώρου, μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των ιδιοσυναρτήσεων :

$$\Phi = \sum_n C_n \Phi_n \tag{2.39}$$

Αντίστοιχα, αν το σύστημα των ιδιοσυναρτήσεων είναι συνεχές κάθε κυματοσυνάρτηση του χώρου μπορεί να γραφεί :

$$\Phi = \int C_a \Phi_a da \tag{2.40}$$

Η τιμή των σταθερών C_n μπορεί να προσδιοριστεί ως εξής :

$$\begin{aligned} \int \Phi_k^* \Phi dx &= \int \Phi_k^* \sum_n C_n \Phi_n dx \\ = \sum_n C_n \int \Phi_k^* \Phi_n dx &= \sum_n C_n \delta_k n = C_k \end{aligned} \tag{2.41}$$

Επομένως οι πολλαπλασιαστικές σταθερές δίνονται από τον τύπο :

$$C_k = \int \Phi_k^* \Phi dx \tag{2.42}$$

Η μέση τιμή μιας ποσότητας a στην περίπτωση των διακριτών κυματοσυναρτήσεων προκύπτει :

$$< \hat{A} >= \sum_k \alpha_k P_k \tag{2.43}$$

Όπου P_k συμβολίζει την πιθανότητα εμφάνισης μια τιμής α_k και για τις οποίες ισχύει :

$$\sum_k P_k = 1 \tag{2.44}$$

Αντίστοιχα, για την περίπτωση συνεχών κυματοσυναρτήσεων η μέση τιμή μιας ποσότητας a υπολογίζεται μέσω του εσωτερικού γινομένου του αντίστοιχου τελεστή :

$$< \hat{A} >=< \Psi \hat{A} \Psi >= \int \Psi^*(A\Psi)dx \tag{2.45}$$

Ή γενικότερα, με τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας :

$$< \hat{A} >= \int_{\infty}^{\infty} aP(a)da \tag{2.46}$$

Αντίστοιχα, ορίζεται η διασπορά μιας ποσότητας a, που αποτελεί μέτρο της απόκλισης των τιμών της από τη μέση τιμή, ως εξής :

$$(\Delta\hat{A})^2 =< (\hat{A}- < \hat{A} >)^2 > \tag{2.47}$$

Η οποία δίνεται ισοδύναμα :

$$(\Delta\hat{A})^2 =< \hat{A}^2 > - < \hat{A} >^2 \tag{2.48}$$

2.1.3 Η αρχή της αβεβαιότητας του Heisenberg

Η ποσότητα $(\Delta\hat{A})^2$ προσδιορίζεται μονοσήμαντα από την κυματοσυνάρτηση $\Psi(x)$, που αποτελεί λύση της εξίσωσης Schrodinger και περιγράφει το δεδομένο φυσικό σύστημα που μελετάται. Για οποιαδήποτε, όμως, κυματοσυνάρτηση, το γινόμενο των αβεβαιοτήτων ορισμένων ποσοτήτων παρουσιάζει ένα ελάχιστο όριο. Το όριο αυτό σχετίζεται με την φύση της Κβοντομηχανικής. Από την Κβαντομηχανική Θεωρία, προκύπτουν εν γένει λύσεις που περιγράφουν την στατιστική φύση των φυσικών φαινομένων. Είναι λοιπόν αναμενόμενο η συμπεριφορά αυτών των κυματοσυναρτήσεων να υπακούει σε δεδομένους νόμους στατιστικής φύσεως.

Σύμφωνα με την αρχή της αβεβαιότητας, όπως διατυπώθηκε από τον Heisenberg , το γινόμενο της αβεβαιότητας της θέσης επί την αβεβαιότητα της ορμής δεν μπορεί να γίνει μικρότερο από την σταθερά $\hbar$:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar/2 \tag{2.49}$$

Μπορεί, λοιπόν, να θεωρηθεί ότι το γινόμενο των αβεβαιοτήτων θέσης - ορμής λαμβάνει προσεγγιστικά την τιμή $\hbar$:

$$\Delta x \cdot \Delta p \simeq \hbar \tag{2.50}$$

Η αρχή της αβεβαιότητας περιλαμβάνει, όμως και το γινόμενο της απροσδιοριστίας χρόνου - ενέργειας, που οφείλει να υπακούει στην παραπάνω ανισότητα.

$$\Delta t \cdot \Delta E \geq \hbar \tag{2.51}$$

Επειδή η έννοια του χρόνου είναι σχετική και μπορεί να καθοριστεί από το μετρούμενο σύστημα, στην παραπάνω ανισότητα ο χρόνος λαμβάνει την έννοια της χρονικής διάρκειας κατά την οποία παρατηρείται ένα φαινόμενο. Για παράδειγμα, στην περίπτωση της αποδιέγερσης πυρήνων, ως χρόνος λαμβάνεται η χρονική διάρκεια μέχρι την παρατήρηση της αποδιέγερσης. Επομένως, μπορούμε να αντικαταστήσουμε την χρονική αβεβαιότητα με τον μέσο χρόνο τ. Προκύπτει, λοιπόν, η αντίστοιχη προσεγγιστική σχέση :

$$\Delta E \cdot \tau \simeq \hbar \tag{2.52}$$

2.1.4 Φορμαλισμός Dirac

Ο Dirac στην προσπάθειά του να φτιάξει έναν συνοπτικό και καθολικό τρόπο απεικόνισης των κυματοσυναρτήσεων , δημιούργησε τον επονομαζόμενο φορμαλισμό Dirac , που είναι γνωστός και ως φορμαλισμός ' bra-ket ' . Αντιστοίχισε την κυματοσυνάρτηση Ψ με το σύμβολο που ονόμασε ' ket ' και την συζηγή της Ψ^* με το ' bra ' :

$$\begin{aligned} \Psi(x) \rightarrow & \quad |\Psi > \\ \Psi(x)^* \rightarrow & \quad <\Psi| \end{aligned} \tag{2.53}$$

Το εσωτερικό γινόμενο των παραπάνω συμβολίζεται $<\Psi|\Psi>$ και δίνεται από τη γνωστή ισοδυναμία :

$$<\Psi|\Psi>= \int \Psi^* \Psi d^3x \tag{2.54}$$

Σ' αυτή την περίπτωση η μέση τιμή ενός τελεστή μπορεί να γραφεί ως εξής :

$$<\Psi|\hat{A}|\Psi>= \int \Psi^* (\hat{A}\Psi) d^3x \tag{2.55}$$

Ενώ μια τυχαία συνάρτηση Ψ στο χώρο των κυματοσυναρτήσεων δίνεται ως γραμμικός συνδυασμός τους, σύμφωνα με τον συμβολισμό :

$$|\Psi>= \sum_{\nu} <\Psi_\nu|\Psi> |\Psi_\nu> \tag{2.56}$$

Όπου οι συντελεστές δίνονται από το εσωτερικό γινόμενο $<\Psi_\nu|\Psi>$ όπως αποδείχτηκε παραπάνω. Μπορεί επίσης να οριστεί ο προβολικός τελεστής P_k που προβάλει μια τυχαία κυματοσυνάρτηση Ψ πάνω στο σύστημα Ψ_k :

$$P_k = |\Psi_k><\Psi_k| \tag{2.57}$$

Επομένως η δράση του δίνεται :

$$P_k|\Psi>= |\Psi_k><\Psi_k|\Psi> \tag{2.58}$$

Με το άθροισμα όλων των συντελεστών να δίνει μονάδα :

$$\sum_k |\Psi_k >< \Psi_k| = 1 \tag{2.59}$$

2.2 Σχετικιστική Κβαντομηχανική

Οι Θεωρίες που μελετήθηκαν παραπάνω περιγράφουν ικανοποιητικά φαινόμενα που παρατηρούνται κατά τις φυσικές διεργασίες. Όμως, κατά την πειραματική μελέτη σύνθετων διεργασιών, και ειδικά σε φαινόμενα μικροσκοπικής κλίμακας, προκύπτουν πολλές ανακρίβειες που οφείλουν να διερευνηθούν. Η Θεωρία της Κβαντομηχανικής και η Θεωρία της Σχετικότητας μπορούν να συνδυαστούν για την πληρέστερη περιγραφή του συνόλου των φυσικών φαινομένων. Στο κεφάλαιο που ακολουθεί, εξάγονται οι βασικές κβαντομηχανικές εξισώσεις, όπως μετασχηματίζονται αν ληφθούν υπ΄ όψιν οι βασικές αρχές της Σχετικότητας.

2.2.1 Η εξίσωση Klein-Gordon

Η εξίσωση της ολικής ενέργειας, όπως προκύπτει από τη Θεωρία της Σχετικότητας δίνεται από τη σχέση:

$$E^2 = p^2 + m^2 \tag{2.60}$$

Αντικαθιστώντας τους τελεστές της ορμής και της ενέργειας προκύπτει η αντίστοιχη με την Schrondiger σχετικιστική εξίσωση που ονομάζεται εξίσωση Klein - Gordon :

$$-\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \nabla^2 \Phi = m^2 \Phi \tag{2.61}$$

Και ορίζοντας τον τελεστή Laplace $\Box = \nabla^2 - \partial^2/\partial t^2$ η εξίσωση Klein - Gordon μπορεί να γραφεί στη μορφή :

$$(\Box + m^2)\Phi = 0 \tag{2.62}$$

Χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό της Σχετικότητας η εξίσωση Klein-Gordon γράφεται :

$$\nabla^a \nabla_a \Phi - m^2 \Phi = 0 \tag{2.63}$$

Ή ισοδύναμα για $\nabla^\mu = \partial^\mu$:

$$\partial^a \partial_a \Phi + m^2 \Phi = 0 \tag{2.64}$$

Ο τανυστής της τάσης για το παραπάνω πεδίο είναι :

$$T_{ab} = \nabla^a \Phi \nabla_b \Phi - \frac{1}{2} g_{ab} (\nabla_c \Phi \nabla^c \Phi + m^2 \Phi^2) \tag{2.65}$$

Για τον οποίο ισχύει:

$$\nabla^a T_{ab} = 0 \tag{2.66}$$

Η συζηγής μιγαδική εξίσωση εξίσωση Klein - Gordon είναι αντίστοιχα:

$$-\frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial t^2} + \nabla^2 \Phi^* = m^2 \Phi^* \tag{2.67}$$

Για να βρούμε το ρεύμα της πυκνότητας πιθανότητας πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση Klein - Gordon με Φ^* και την μιγαδική συζηγή της με Φ και τις προσθέτουμε. Οπότε :

$$i \left(\Phi^* \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \Phi \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial t^2} \right) - i \left(\Phi^* \nabla^2 \Phi - \Phi \nabla^2 \Phi^* \right) = 0 \tag{2.68}$$

Επομένως,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[i \left(\Phi^* \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \Phi \frac{\partial \Phi^*}{\partial t} \right) \right] + \nabla \left[-i \left(\Phi^* \nabla \Phi - \Phi \nabla \Phi^* \right) \right] = 0 \tag{2.69}$$

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας προκύπτει :

$$\rho = i\left(\Phi^* \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \Phi \frac{\partial \Phi^*}{\partial t}\right) \tag{2.70}$$

Και το ρεύμα πυκνότητας πιθανότητας αντίστοιχα :

$$\overrightarrow{J} = i\left(\Phi^* \nabla \Phi - \Phi \nabla \Phi^*\right) \tag{2.71}$$

Στην κλασική ηλεκτροδυναμική, η κίνηση ενός σωματιδίου σε ένα ηλεκτρομαγνητικό πεδίο προκύπτει από την αντικατάσταση του τελεστή της ορμής με τον τελεστή που περιλαμβάνει και τη δράση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου πάνω στο σωματίδιο. Δηλαδή χρησιμοποιείται ο μετασχηματισμός :

$$p^\mu \to p^\mu - qA^\mu \tag{2.72}$$

όπου $A^\mu = (A^0, A) = (V, A)$ είναι το τετραδιάνυσμα του δυναμικού του πεδίου και q το φορτίο του σωματιδίου.

Χρησιμοποιείται, λοιπόν, αντίστοιχα στην σχετικιστική κβαντομηχανική ο μετασχηματισμός :

$$\begin{aligned} i\partial^\mu &\to i\partial^\mu + eA^\mu \\ \partial^\mu &\to \partial^\mu - ieA^\mu \end{aligned} \tag{2.73}$$

Η εξίσωση Klein - Gordon μετασχηματίζεται, έτσι ώστε να περιλαμβάνει τη δράση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου στο ελεύθερο σωματίδιο :

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu - ie\partial_\mu A^\mu - ieA^\mu \partial_\mu + e^2 A_\mu A^\mu\right)\Phi + m^2 \Phi = 0 \tag{2.74}$$

Θέτοντας επομένως,το ηλεκτρομαγνητικό δυναμικό :

$$V = -ie\left(\partial_\mu A^\mu + A^\mu \partial_\mu\right) + e^2 A^2 \tag{2.75}$$

Επομένως,η εξίσωση Klein - Gordon μπορεί να γραφεί, έτσι ώστε να συμπεριλάβει και τη δράση του ηλεκτρικού δυναμικού :

$$\left(\partial_{\mu}\partial^{\mu}\right)\Phi + m^2\Phi + V\Phi = 0 \tag{2.76}$$

2.2.2 Η εξίσωση Dirac

Ο Dirac με σκοπό να λύσει το πρόβλημα της αρνητικής πιθανότητας που εισάγονταν με την λύση της εξίσωσης Klein-Gordon απαίτησε την γενικευμένη μορφή της εξίσωσης :

$$\left(i\gamma^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - a\right)\Psi(x) = 0 \tag{2.77}$$

Θέτοντας στη θέση του a την μάζα m του σωματιδίου, μπορούμε να καταλήξουμε στην εξίσωση Klein-Gordon ως εξής :

$$\left(i\gamma^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - m\right)\Psi(x) = 0 \tag{2.78}$$

Η συζηγής μιγαδική της εξίσωσης Dirac για $a = m$ είναι:

$$\left(-i\gamma^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - m\right)\Psi(x) = 0 \tag{2.79}$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη την δράση των τελεστών πάνω στην $\Psi(x)$ προκύπτει :

$$\begin{aligned}\left(-i\gamma^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - m\right)\left(i\gamma^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - m\right)\Psi(x) = 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} + \gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^{\mu}\partial x^{\nu}}\Psi(x) + m^2\Psi(x) = 0\end{aligned} \tag{2.80}$$

Και για να ισχύει η εξίσωση Klein- Gordon πρέπει να ισχύει η συνθήκη:

$$\left(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} + \gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\right) = 2g^{\mu\nu} \tag{2.81}$$

Σ' αυτή την περίπτωση :

$$\frac{1}{2}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu\right)\frac{\partial^2}{\partial x^\mu\partial x^\nu}\Psi(x)+m^2\Psi(x)=\Box\Psi(x)+m^2\Psi(x)=0 \tag{2.82}$$

Επομένως, οι πίνακες γ^μ που προκύπτουν από την εξίσωση του Dirac πρέπει να πληρούν τις παρακάτω ιδιότητες :

$$\begin{cases}\gamma^0\gamma^0=1\\ \gamma^i\gamma^i=-1, \quad i=1,2,3\\ \gamma^0\gamma^i=-\gamma^i\gamma^0\end{cases} \tag{2.83}$$

Και επίσης,

$$\begin{cases}(\gamma^0)^\dagger=\gamma^0\\ (\gamma^i)^\dagger=-\gamma^i\\ (\gamma^0)^2=I\\ (\gamma^i)^2=-I\end{cases} \tag{2.84}$$

Όπου I ο μοναδιαίος πίνακας.Μπορεί να αποδειχτεί ότι οι πίνακες που ικανοποιούν αυτές τις ιδιότητες είναι 4×4 και προκύπτουν από τους πίνακες του Pauli :

$$\begin{aligned}\sigma_1&=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\\ \sigma_2&=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\\ \sigma_3&=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{2.85}$$

Επομένως οι γ-πίνακες ορίζονται ως εξής :

$$\begin{aligned}\gamma^0&=\begin{pmatrix}I&0\\0&-I\end{pmatrix}\\ \gamma^j&=\begin{pmatrix}0&\sigma^j\\-\sigma^i&0\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{2.86}$$

Η εξίσωση Dirac μπορεί να γραφεί στην αναλυτικότερη μορφή :

$$i\gamma^0\frac{\partial\Psi}{\partial t}+i\gamma^j\frac{\partial\Psi}{\partial x^j}-m\Psi=0 \tag{2.87}$$

Η συζηγής μιγαδική εξίσωση Dirac γίνεται :

$$-i\frac{\partial\Psi^\dagger}{\partial t}\gamma^0-i\frac{\partial\Psi^\dagger}{\partial x^j}(-\gamma^j)-m\Psi^\dagger=0 \tag{2.88}$$

Μπορούμε να ορίσουμε :

$$\overline{\Psi}=\Psi^\dagger\gamma^0 \tag{2.89}$$

Οπότε εισάγοντας την $\overline{\Psi}$ στην εξίσωση Dirac :

$$\begin{aligned} i\partial_\mu\overline{\Psi}\gamma^\mu-m\overline{\Psi}=0\\ i\partial_0\overline{\Psi}\gamma^0+i\partial_j\overline{\Psi}\gamma^j-m\overline{\Psi}=0 \end{aligned} \tag{2.90}$$

Και η συζηγής μιγαδική της :

$$-i\partial_0\Psi^\dagger\gamma^0\gamma^0-i\partial_j\Psi^\dagger(-\gamma^j\gamma^0)-m\Psi^\dagger\gamma^0=0 \tag{2.91}$$

Εφόσον όμως $\gamma^0\gamma^j=-\gamma^j\gamma^0$:

$$-i\partial_0\overline{\Psi}\gamma^0-i\partial_j\overline{\Psi}\gamma^j-m\overline{\Psi}=0 \tag{2.92}$$

Δηλαδή,

$$-i\partial_\mu\overline{\Psi}\gamma^\mu-m\overline{\Psi}=0 \tag{2.93}$$

Επομένως, ακολουθώντας τη διαδικασία που περιγράφηκε παραπάνω για την εξίσωση Klein - Gordon , δηλαδή πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση Dirac με $\overline{\Psi}$ και την συζηγή μιγαδική με Ψ και προσθέτοντας, προκύπτει:

$$\overline{\Psi}\gamma^\mu(\partial_\mu\Psi)+(\partial_\mu\overline{\Psi})\gamma^\mu\Psi=0 \tag{2.94}$$

$$\Rightarrow \partial_\mu(\overline{\Psi}\gamma^\mu\Psi) = 0 \tag{2.95}$$

Ορίζεται λοιπόν το ρεύμα :

$$j^\mu = (p, \overrightarrow{j}) = \overline{\Psi}\gamma^\mu\Psi \tag{2.96}$$

Επομένως η πυκνότητα πιθανότητας είναι:

$$p = \overline{\Psi}\gamma^0\Psi \tag{2.97}$$

Και το ρεύμα πυκνότητας πιθανότητας :

$$\overrightarrow{j} = \overline{\Psi}\gamma^j\Psi \tag{2.98}$$

Η εξίσωση Dirac οφείλει να παραμείνει αναλλοίωτη στο τονούμενο σύστημα συντεταγμένων :

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\Psi'(x') - m\Psi'(x') = 0 \tag{2.99}$$

Αναζητάται, λοιπόν, η S για την οποία :

$$\Psi'(x') = S\Psi(x) \tag{2.100}$$

Η εξίσωση Dirac μπορεί να γραφεί αναλυτικότερα :

$$\left[i\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu} - m\right]\Psi(x) = 0 \tag{2.101}$$

Πολλαπλασιάζοντας με S από δεξιά :

$$\begin{aligned} S\left[i\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu} - m\right]S^{-1}S\Psi(x) = 0 \\ S\left[i\gamma^\mu\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x'^\nu} - m\right]S^{-1}\Psi'(x') = 0 \\ \left[iS\gamma^\mu\Lambda^\nu{}_\mu S^{-1}S\frac{\partial}{\partial x'^\nu}S^{-1} - SmS^{-1}\right]\Psi'(x') = 0 \end{aligned} \tag{2.102}$$

$$\left[iS\gamma^{\mu}\Lambda^{\nu}{}_{\mu}S^{-1}\frac{\partial}{\partial x'^{\nu}} - m\right]\Psi'(x') = 0 \tag{2.103}$$

Και για να είναι συνεπής με την τονούμενη εξίσωση Dirac , πρέπει :

$$S\gamma^{\mu}\Lambda^{\nu}{}_{\mu}S^{-1} = \gamma^{\nu} \tag{2.104}$$

2.2.3 Αλληλεπίδραση εξίσωσης Dirac με ηλεκτρομαγνητικό πεδίο

Για σωματίδιο που κινείται μέσα σε μαγνητικό πεδίο πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το μετασχηματισμό του τελεστή της ορμής :

$$\widehat{p} \to \widehat{p} - qA_{\mu} \tag{2.105}$$

Δηλαδή στην περίπτωση που το σωματίδιο είναι ηλεκτρόνιο, με φορτίο $q = -e$:

$$\partial_{\mu} \to \partial_{\mu} + ieA_{\mu} \tag{2.106}$$

Η εξίσωση Dirac μετασχηματίζεται λοιπόν, έτσι ώστε να συμπεριλάβει τη δράση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου :

$$\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - e\gamma^{\mu}A_{\mu} - m\right)\Psi(x) = 0 \tag{2.107}$$

Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση Dirac με $(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - e\gamma^{\mu}A_{\mu} - m)$ προκύπτει:

$$\begin{aligned} \left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - e\gamma^{\mu}A_{\mu} - m\right)\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - e\gamma^{\mu}A_{\mu} - m\right)\Psi(x) = 0 \\ \Rightarrow \left(\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - e\gamma^{\mu}A_{\mu}\right)^{2} - m^{2}\right)\Psi(x) = 0 \end{aligned} \tag{2.108}$$

$$\left((i\partial - eA)^{2} + \frac{1}{4}\left[\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}\right]\left[i\partial_{\mu} - eA_{\mu}, i\partial_{\nu} - eA_{\nu}\right] - m^{2}\right)\Psi(x) = 0 \tag{2.109}$$

Ορίζεται ο πίνακας $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\left[\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\right]$.Επίσης,

$$\begin{aligned}[i\partial_\mu - eA_\mu, i\partial_\nu - eA_\nu] &= i[\partial_\mu, \partial_\nu - ie[\partial_\mu, A_\nu] - ie[A_\mu, \partial_\nu] + e^2[A_\mu, A_\nu] \\ &= -ie[\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu]\end{aligned} \tag{2.110}$$

Επίσης, ορίζεται :

$$F_{\mu\nu} = [\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu] \tag{2.111}$$

Επομένως η (2.102) είναι ισοδύναμη με :

$$\left((i\partial - eA)^2 + \frac{e}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - m^2\right)\Psi(x) = 0 \tag{2.112}$$

2.2.4 Σύζευξη της εξίσωσης Dirac με το φορτίο

Αναζητείται ο μετασχηματισμός του οποίου η δράση στην εξίσωση Dirac θα επιφέρει αντιστροφή του φορτίου, ως εξής :

$$\begin{aligned}\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - m\right)\Psi = 0 \\ \left(i\gamma^\mu\partial_\mu + e\gamma^\mu A_\mu - m\right)\Psi^c = 0\end{aligned} \tag{2.113}$$

Ενώ η λύση της πρώτης περιγράφει σωματίδια με σπιν 1/2 και αρνητικό φορτίο, η δεύτερη περιγράφει το αντίστοιχο σωματίδιο με θετικό φορτίο. Επομένως, η πρώτη εξίσωση αναφέρεται σε ηλεκτρόνια και η δεύτερη σε ποζιτρόνια. Το αντίστοιχο ρεύμα πυκνότητας πιθανότητας για τις δύο περιπτώσεις είναι :

$$\begin{aligned}j^\mu_{e^-} &= (-e)\overline{\Psi}\gamma^\mu\Psi \\ j^\mu_{e^+} &= (+e)\overline{\Psi}\gamma^\mu\Psi\end{aligned} \tag{2.114}$$

Για το ποζιτρόνιο, μπορεί να γραφεί ισοδύναμα :

$$j^\mu_{e^+} = (-e)\overline{\Psi}^c\gamma^\mu\Psi^c \tag{2.115}$$

Για να βρεθεί η ζητούμενη αντιστοιχία, πρέπει να οριστεί ο μετασχηματισμός C. Για κάθε αναπαράσταση της γ-άλγεβρας υπάρχει τουλάχιστον ένας πίνακας C που να ικανοποιεί τη σχέση :

$$\begin{aligned} C(\gamma^\mu)^\tau C^{-1} &= -\gamma^\mu \\ C\gamma^\mu C^{-1} &= -(\gamma^\mu)^\tau \end{aligned} \tag{2.116}$$

Και μάλιστα μπορεί να αποδειχτεί ότι ο πίνακας :

$$C = -\gamma^2\gamma^0 \tag{2.117}$$

ικανοποιεί την παραπάνω σχέση. Αν εισαχθεί ο παραπάνω πίνακας στη σχέση του ρεύματος του ποζιτρονίου :

$$j^\mu_{e^-} = (+e)\overline{\Psi}C^{-1}C\gamma^\mu C^{-1}C\Psi \tag{2.118}$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας την ισοδυναμία (2.116) :

$$j^\mu_{e^-} = (+e)\overline{\Psi}C^{-1}(-\gamma^\mu)^\tau C\Psi \tag{2.119}$$

Εφόσον ο υπολογισμός του ρεύματος δίνει έναν σταθερό αριθμό η παραπάνω σχέση είναι ισοδύναμη με την ανάστροφή της :

$$j^\mu_{e^-} = (+e)(C\Psi)^\tau((-\gamma^\mu)^\tau)^\tau(\overline{\Psi}C^{-1})^\tau \tag{2.120}$$

Επομένως,

$$j^\mu_{e^-} = (+e)(\Psi)^\tau C^{-1}(-\gamma^\mu)C\Psi^* \tag{2.121}$$

Και αν οριστεί $\Psi^c = C\Psi^*$, οπότε αντίστοιχα $\overline{\Psi^c} = (\Psi)^\tau C^{-1}$ τότε μπορεί να ληφθεί ο ζητούμενος μετασχηματισμός για την εξίσωση του ρεύματος. Δηλαδή, η παραπάνω εξίσωση γράφεται :

$$j^\mu_{e^-} = (-e)\overline{\Psi^c}(\gamma^\mu)\Psi^c \tag{2.122}$$

Ο πίνακας C αντικατοπτρίζει τον μετασχηματισμό του φορτίου. Όταν δράσει πάνω σε μια κυματοσυνάρτηση που αποτελεί λύση της εξίσωσης Dirac, προκύπτει η αντίστοιχη εξίσωση που περιγράφει το αντισωματίδιο.

3. ΔΡΑΣΕΙΣ

3.1 Βασικές ιδιότητες της Δράσης

Οι νόμοι της κλασικής φυσικής μπορούν να κατανοηθούν με τη βοήθεια του μαθηματικού φορμαλισμού της ποσότητας που ονομάζουμε Δράση. Όπως ορίζεται στην θεωρία της Κβαντομηχανικής, η Δράση προκύπτει ως το γινόμενο της ενέργειας επί το χρόνο. Όπως απέδειξαν οι Dirac και Feynman η ποσότητα της Δράσης παίζει καθοριστικό ρόλο στην περιγραφή της φυσικής, μέσω της κβαντομηχανικής σκοπιάς. Οι κλασικές εξισώσεις κίνησης και η ανάλυση των νόμων διατήρησης οδηγούν στην εμφάνιση διατηρούμενων ποσοτήτων. Η Δράση μπορεί ν΄ αποτελέσει μια κομψή και κατανοητή έκφραση για τη μετάβαση από την κλασική στην κβαντική φυσική, μέσω της θεωρίας των ολοκληρωμάτων διαδρομών του Feynman (FPI, Feynman Path Integrals) .

Έστω ένα σημειακό σωματίδιο στη θέση $x_i(t)$ σε χρόνο t που κινείται μέσα στο χρονοανεξάρτητο δυναμικό $V(x_i)$. Η Δράση του σωματιδίου υπολογίζεται μέσω του ολοκληρώματος :

$$S([x_i]; t_1, t_2) = \int_{t1}^{t_2} \left\{ \frac{1}{2} m \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_i}{dt} - V(x_i) \right\} dt \tag{3.1}$$

Αν το σωματίδιο αποκλίνει από την αρχική του θέση κατά την απειροστή μεταβολή :

$$x_i(t) \to x_i(t) + \delta x_i(t) \tag{3.2}$$

Τότε η αντίστοιχη μεταβολή της δράσης είναι :

$$S[x_i + \delta x_i] = \int_{t1}^{t_2} \left\{ \frac{1}{2} m \frac{(dx_i + \delta x_i)}{dt} \frac{(dx_i + \delta x_i)}{dt} - V(x_i + \delta x_i) \right\} dt \tag{3.3}$$

Αγνοώντας τους όρους $\mathcal{O}(\delta x^2)$ και σύμφωνα με τον κανόνα της αλυσίδας, λαμβάνουμε :

$$\begin{aligned} \frac{d(x_i+\delta x_i)}{dt}\frac{d(x_i+\delta x_i)}{dt} &= \frac{dx_i}{dt}\frac{dx_i}{dt} + 2\frac{dx_i}{dt}\frac{d(\delta x_i)}{dt} + \frac{d(\delta x_i)}{dt}\frac{d(\delta x_i)}{dt} \\ \Rightarrow \frac{d(x_i+\delta x_i)}{dt}\frac{d(x_i+\delta x_i)}{dt} &= \frac{dx_i}{dt}\frac{dx_i}{dt} + 2\frac{dx_i}{dt}\frac{d(\delta x_i)}{dt} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Όμως ισχύει για την $\frac{dx_i}{dt}\frac{d(\delta x_i)}{dt}$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{dx_i}{dt}\delta x_i\right) &= \frac{d^2x_i}{dt^2}\delta x_i + \frac{dx_i}{dt}\frac{d(\delta x_i)}{dt} \\ \Rightarrow \frac{dx_i}{dt}\frac{d(\delta x_i)}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{dx_i}{dt}\delta x_i\right) - \frac{d^2x_i}{dt^2}\delta x_i \end{aligned} \tag{3.5}$$

Επομένως,

$$\frac{d(x_i+\delta x_i)}{dt}\frac{d(x_i+\delta x_i)}{dt} \simeq \frac{dx_i}{dt}\frac{dx_i}{dt} + 2\frac{d}{dt}\left(\frac{dx_i}{dt}\delta x_i\right) - 2\frac{d^2x_i}{dt^2}\delta x_i \tag{3.6}$$

Επίσης,

$$V(x_i+\delta x_i) = V(x_i) + \delta x_i \partial_i V \tag{3.7}$$

Προκύπτει λοιπόν,

$$S[x_i+\delta x_i] = S[x_i] + \int_{t1}^{t_2}\left(-\partial_i V - m\frac{d^2x_i}{dt^2}\right)\delta x_i dt + m\int_{t1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(\delta x_i\frac{x_i}{dt}\right)dt \tag{3.8}$$

Ο τελευταίος όρος μπορεί να εξαλειφθεί με κατάλληλη επιλογή των $\delta x_i(t_1)$ $\delta x_i(t_2)$ έτσι ώστε $\delta x_i(t_1) = \delta x_i(t_2) = 0$. Έτσι, θέτοντας :

$$\frac{\delta S}{\delta x_i} = -(m\frac{d_i^x}{dt^2} + \partial_i V) \tag{3.9}$$

$$
\begin{aligned}
S[x_i + \delta x_i] &= S[x_i] + \int_{t1}^{t_2} \left(-\partial_i V - m\frac{d^2 x_i}{dt^2} \right) \delta x_i dt \\
&= S[x_i] + \int_{t1}^{t_2} \left(\frac{\delta S}{\delta x_i} \delta x_i \right) dt
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ταυτοποίηση των εξισώσεων κίνησης με την ελαχιστοποίηση της δράσης. Παρόλ΄ αυτά, πρέπει να σημειωθεί ότι ο μηδενισμός της παραγώγου της δράσης οδηγεί στην εύρεση μιας κλάσης πιθανών διαδρομών και όχι σε μια μονοσήμαντη λύση. Η ακριβής περιγραφή της διαδρομής θα προκύψει από της επιβολή των συνοριακών συνθηκών και των αρχικών τιμών των x_i, $\frac{dx_i}{dt}$.

Ένα σημαντικό σημείο που οφείλει να επισημανθεί είναι η συσχέτιση των συμμετριών της S με την ύπαρξη διατηρούμενων ποσοτήτων στο πλαίσιο της κίνησης του συστήματος. Ως επεξήγηση θα αναπτυχθεί το παρακάτω παράδειγμα:

Έστω $V(x_i)$ συνάρτηση του μήκους της διαδρομής $x_i : r = (x_i x_i)^{1/2}$.

Τότε η S αναμένεται να είναι αναλλοίωτη υπό μετασχηματισμούς στροφής των x_i εφόσον εξαρτάται μόνο από το μήκος r. Υπό την τυχαία απειροστή στροφή :

$$\delta x_i = \epsilon_{ij} x_i \tag{3.11}$$

$$\epsilon_{ij} = -\epsilon_{ji} \tag{3.12}$$

Εφόσον η S είναι αναλλοίωτη:

$$\delta S = 0 \tag{3.13}$$

Όμως η S αποτελείται από δύο τμήματα : τη συναρτησιακή παράγωγο που εξαλείφεται για κλασικές διαδρομές και τον επιφανειακό όρο.

Για τη δεδομένη μεταβολή, δεν μπορούν να επιβληθούν συνοριακές συνθήκες για τις $\delta x_i(t)$. Έτσι η μεταβολή της δράσης S, συνδυασμένη με τις εξισώσεις κίνησης γίνεται:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t1}^{t2} \frac{d}{dt}\left(m\frac{dx_i}{dt}\delta x_i\right) dt \\ &= \epsilon_{ij} m x_j \frac{dx_i}{dt}\Big]_{t_1}^{t_2} \end{aligned} \tag{3.14}$$

Εφόσον ισχύει για κάθε ϵ_{ij} : $\delta S = 0$, η ποσότητα :

$$\ell_{ij}(t) = m\left(x_i\frac{dx_j}{dt} - x_j\frac{dx_i}{dt}\right) \tag{3.15}$$

$$\Leftrightarrow L_{\mu\nu}(t) = m\left(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu\right) \tag{3.16}$$

ικανοποιεί τη σχέση

$$\ell_{ij}(t_1) = \ell_{ij}(t_2) \tag{3.17}$$

Ο παραπάνω όρος εκφράζει στην πραγματικότητα τις συνιστώσες της στροφορμής. Επομένως, εξάγεται το συμπέρασμα ότι η αναλλοιωσιμότητα της S συνεπάγεται την διατήρηση της στροφορμής. Με το παραπάνω παράδειγμα, επαληθεύεται το θεώρημα Noether : ' Σε κάθε αναλλοίωτη ποσότητα αντιστοιχίζεται ένας νόμος διατήρησης ' συσχετίζοντας την αναλλοιωσιμότητα κατά το μετασχηματισμό στροφής με την διατήρηση της στροφορμής.

Γενικές Ιδιότητες της Δράσης :

Οι Συναρτήσεις Δράσης (Action Functions) δίνονται από το ολοκλήρωμα της Λαγκρατζιανής πυκνότητας :

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathcal{L} d^4x \tag{3.18}$$

Η Λαγκρατζιανή ορίζεται ως τη διαφορά της δυναμικής από την κινητική ενέργεια :

$$L = T - V \tag{3.19}$$

Για δεδομένη τιμή του x^μ χρησιμοποιείται η τοπική θεωρία πεδίου. Η ανάπτυξη της θεωρίας των συναρτήσεων Δράσης βασίζεται στις παρακάτω προϋποθέσεις.

1. Υποθέτουμε οτι η τοπική θεωρία πεδίου μπορεί να γενικευτεί και σε μη τοπικά φαινόμενα.

2. Η S πρέπει να είναι πραγματική συνάρτηση, γεγονός που αποτελεί βασική προϋπόθεση για την διατήρηση της ολικής πιθανότητας. Για παράδειγμα, στην κβαντομηχανική, το μιγαδικό δυναμικό οδηγεί σε δημιουργία και καταστροφή σωματιδίων με αποτέλεσμα να μην διατηρείται η ολική πιθανότητα της συνάρτησης.

3. Η S οφείλει να καταλήγει στις κλασικές εξισώσεις κίνησης στο όριο της κλασικής φυσικής, στις οποίες περιλαμβάνονται μέχρι δεύτερης τάξης παράγωγοι. Επομένως, απαιτείται η $\mathcal{L}$ να περιέχει γινόμενα το πολύ δύο τελεστών μερικής παραγώγισης ∂_μ. Δεδομένου της προϋπόθεσης αυτής, οι κλασικές εξισώσεις θα περιέχουν όρους το πολύ $\partial_\mu \partial^\mu$ που δρουν στο υπό μελέτη πεδίο.

4. Η S οφείλει να παραμένει αναλλοίωτη ως προς την ομάδα Poincare. Πρέπει δηλαδή να παραμένει αναλλοίωτη υπό μετασχηματισμούς Lorentz.

5. Υπάρχουν επίσης, περαιτέρω απαιτήσεις που οφείλουν να εφαρμοστούν στην S έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι κλασικοί νόμοι διατήρησης. Για παράδειγμα : η διατήρηση του ηλεκτρικού φορτίου και η διατήρηση του χρώματος.

3.2 Η Δράση μέσω του Λαγκρατζιανού φορμαλισμού

Η Δράση ως συνάρτηση του τοπικού πεδίου Φ και της διαφορικής του $\partial_\mu \Phi$ είναι :

$$S(\tau_1, \tau_2, [\Phi]) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi) d^4x \qquad (3.20)$$

Για τυχαία απειροστική μεταβολή της Φ, $\delta\Phi$ η μεταβολή της Λαγκρατζιανής πυκνότητας γίνεται:

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \delta\Phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \delta(\partial_\mu \Phi) \qquad (3.21)$$

Επομένως η μεταβολή της S γίνεται αντίστοιχα :

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \delta \mathcal{L} d^4x \\ &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \delta \Phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \delta (\partial_\mu \Phi) \right] d^4x \end{aligned} \tag{3.22}$$

Εφόσον η τιμή της x^μ έχει θεωρηθεί σταθερή, ισχύει:

$$\delta(\partial_\mu \Phi) = \partial_\mu(\delta \Phi) \tag{3.23}$$

Με χρήση του κανόνα της αλυσίδας λαμβάνουμε :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \partial_\mu(\delta\Phi) = \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} (\delta\Phi) \right] - \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \right] \delta\Phi \tag{3.24}$$

Αντικαθιστώντας στην S:

$$\delta S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \right) \right] d^4x + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} (\delta\Phi) \right] d^4x \tag{3.25}$$

Ο τελευταίος όρος μπορεί να εξισωθεί με το επιφανειακό ολοκλήρωμα :

$$\oint_\sigma \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} (\delta\Phi) \right] d\sigma_\mu \tag{3.26}$$

Στο όριο της επιφάνειας σ απαιτείται ο μηδενισμός της μεταβολής $\delta\Phi$. Επίσης, προϋπόθεση της θεωρίας πεδίου αποτελεί η Φ να παραμένει στατική υπό οποιαδήποτε τυχαία μεταβολή του πεδίου $\delta\Phi$, η οποία μηδενίζεται στο σύνορο. Προκύπτουν, επομένως, οι εξισώσεις $Euler - Lagrange$:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} = 0 \tag{3.27}$$

Η αντικατάσταση της $\mathcal{L}$ με την $\mathcal{L}'$ χρησιμοποιείται για να συμπεριληφθούν οι συνοριακές συνθήκες στην ποσότητα της Λαγκρατζιανής. Ο μετασχηματισμός που αποτελεί την γενικότερη έκφραση της Λαγκατζιανής δίνεται από την σχέση:

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \partial_\mu \Lambda^\mu \tag{3.28}$$

Για την κλασική μηχανική, ο παραπάνω μετασχηματισμός $\mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ αποτελεί τον επονομαζόμενο κανονικό μετασχηματισμό. Επίσης, η μεταβολή του μέτρου ολοκλήρωσης μέσω της φόρμουλας Jacobi γίνεται:

$$\delta(d^4x) = d^4x \partial_\mu \delta x^\mu \tag{3.29}$$

Από την παραπάνω ισότητα, αντικαθιστώντας στην έκφραση της δράσης προκύπτει :

$$\delta S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[\partial_\mu \delta x^\mu \mathcal{L} + \delta \mathcal{L}\right] d^4x \tag{3.30}$$

Εφόσον η μεταβολή της S μπορεί να δωθεί από τη σχέση :

$$\delta \mathcal{L} = \delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L} + \delta_0 \mathcal{L} \tag{3.31}$$

Χρησιμοποιώντας την έκφραση :

$$\delta = \delta_0 + \delta x^\mu \partial_\mu \tag{3.32}$$

Επομένως, αντικαθιστώντας στην (3.31) :

$$\delta \mathcal{L} = \delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L} + \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \delta_0 \Phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \delta_0 (\partial_\mu \Phi)\right] \tag{3.33}$$

Όμως η δ_0 αποτελεί συναρτησιακή μεταβολή απ΄ την οποία προκύπτει :

$$\begin{aligned} \delta_0 \partial_\mu \Phi &= [\delta_0, \partial_\mu]\Phi + \partial_\mu \delta_0 \Phi \\ &= \partial_\mu \delta_0 \Phi \end{aligned} \tag{3.34}$$

Οπότε χρησιμοποιώντας τα παραπάνω προκύπτει :

$$\delta \mathcal{L} = \delta x^p \partial_p \mathcal{L} + \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)}\right] \delta_0 \Phi + \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \delta_0 \Phi\right] \tag{3.35}$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις $Euler-Lagrange$, μηδενίζεται ο δεύτερος όρος. Η μεταβολή της δράσης, εισάγοντας την παραπάνω ισότητα, γίνεται :

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[\mathcal{L}\partial_\mu \delta x^\mu + \delta x^\mu \partial_\mu \mathcal{L} + \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)}\delta_0 \Phi\right]\right] d^4x \\ &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \partial_\mu \left[\mathcal{L}\delta x^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)}\delta_0 \Phi\right] d^4x\end{aligned} \tag{3.36}$$

Οπότε, εκφράζοντας την δ_0 ως προς τη δ :

$$\delta S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \partial_\mu \left[\left(\mathcal{L}{g_p}^\mu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)}\partial_p \Phi\right)\delta x^p + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)}\delta \Phi\right] d^4x \tag{3.37}$$

Εκφράζοντας επίσης τις μεταβολές των συντεταγμένων και των πεδίων ως προς το καθολικό σύστημα συντεταγμένων (global coordinates) του μετασχηματισμού, δηλαδή των χ- ανεξάρτητων μεταβλητών :

$$\begin{aligned}\delta x^p &= \frac{\delta x^p}{\delta \omega^a}\delta \omega^a \\ \delta \Phi &= \frac{\delta \Phi}{\delta \omega^a}\delta \omega^a\end{aligned} \tag{3.38}$$

Προκύπτει:

$$\delta S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \partial_\mu \left[\left(\mathcal{L}{g_p}^\mu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)}\partial_p \Phi\right)\frac{\delta x^p}{\delta \omega^a} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)}\frac{\delta \Phi}{\delta \omega^a}\right] \delta \omega^a d^4x \tag{3.39}$$

Αν η δράση παραμένει αναλλοίωτη υπό τους παραπάνω μετασχηματισμούς, συνεπάγεται ότι υπάρχει μια διατηρούμενη πυκνότητα ρεύματος η οποία δίνεται από τη σχέση:

$${j^\mu}_\alpha = -\left(\mathcal{L}{g_p}^\mu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)}\partial_p \Phi\right)\frac{\delta x^p}{\delta \omega^a} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)}\frac{\delta \Phi}{\delta \omega^a} \tag{3.40}$$

Για το οποίο ισχύει η διαφορική εξίσωση:

$$\partial_\mu {j^\mu}_\alpha = 0 \tag{3.41}$$

Επομένως, μπορεί να παρατηρηθεί για μια ακόμη φορά η επαλήθευση του θεωρήματος Noether, εφόσον η διατήρηση της δράσης που προκύπτει από τους παραπάνω μετασχηματισμούς, συσχετίζεται με την εξίσωση διατήρησης του ρεύματος. Από την άλλη πλευρά, στην περίπτωση που δεν διατηρείται η δράση, η διατηρητική εξίσωση δεν είναι έγκυρη. Για παράδειγμα,στην περίπτωση που μηδενίζεται η ποσότητα δx^p η διαφορική εξίσωση του ρεύματος γίνεται :

$$\partial_\mu j^\mu{}_\alpha = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega^a} \tag{3.42}$$

Εφόσον ισχύει από τις εξισώσεις $Euler - Lagrange$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \tag{3.43}$$

Κι επομένως,

$$\begin{aligned} j^\mu{}_\alpha &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} \frac{\delta \Phi}{\delta \omega^a} \\ &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \frac{\delta \Phi}{\delta \omega^a} \end{aligned} \tag{3.44}$$

Ολοκληρώνοντας την εξίσωση του ρεύματος (3.41) σε ένα άπειρο χωρίο των χωρικών συντεταγμένων και σε μια πεπερασμένη περιοχή του χρόνου (τ_1, τ_2) προκύπτει :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} dx^0 \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_\mu j^\mu{}_\alpha d^3x \\ &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} dx^0 \frac{\partial}{\partial x^0} \int_{-\infty}^{+\infty} j^0_\alpha d^3x + \int_{\tau_1}^{\tau_2} dx^0 \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_i j^i_\alpha d^3x \end{aligned} \tag{3.45}$$

Ο τελευταίος όρος μπορεί να εξαλειφθεί με κατάλληλη επιλογή των χωρικών συνοριακών συνθηκών. Επομένως :

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} dx^0 \frac{\partial}{\partial x^0} \int_{-\infty}^{+\infty} j^0_\alpha d^3x = 0 \tag{3.46}$$

Αλλάζοντας τη σειρά της ολοκλήρωσης :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} j_\alpha^0(\tau_1, \overrightarrow{x})d^3x - \int_{-\infty}^{+\infty} j_\alpha^0(\tau_2, \overrightarrow{x})d^3x = 0 \tag{3.47}$$

Το φορτίο μπορεί να οριστεί ως η συνολική πυκνότητα ρεύματος που διέρχεται από μια διατομή στη μονάδα του χρόνου. Αν, λοιπόν, οριστούν τα φορτία ως εξής :

$$Q_\alpha(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} j_\alpha^0(\tau, \overrightarrow{x})d^3x \tag{3.48}$$

Ισχύει η διατήρηση του φορτίου

$$\frac{dQ_\alpha}{dt} = 0 \tag{3.49}$$

Παρατηρείται ότι τα φορτία είναι χρονικά ανεξάρτητα καθώς η σχέση (3.48) δεν εξαρτάται από την επιλογή του χρονικού διαστήματος. Επίσης μπορεί να σημειωθεί ότι η ανναλοιωσιμότητα της δράσης οδηγεί σε μια ακόμη σχέση διατήρησης. Η σχέση αυτή είναι ισοδύναμη με την διατήρηση του ρεύματος. Όμως η διατηρούμενη ποσότητα, δηλαδή το φορτίο, αποτελεί πειραματικά μετρήσιμο μέγεθος. Η αναλλοιωσιμότητα της S (3.20) οδηγεί επομένως, στην διατήρηση ενός πραγματικού μεγέθους : του φορτίου.

3.3 Λαγκρατζιανή Βαθμωτού πεδίου

Η γενικότερη μορφή της Λαγκρατζιανής πυκνότητας, που περιλαμβάνει ένα μόνο βαθμωτό πεδίο $\Phi(x)$ είναι :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\Phi(x)\partial^\mu\Phi(x) - V[\Phi(x)] \tag{3.50}$$

Ο συντελεστής $\frac{1}{2}$ χρησιμοποιείται ως σύμβαση εφόσον ο πρώτος όρος αντιστοιχεί στην κινητική ενέργεια και ο δεύτερος στην δυναμική. Για οποιαδήποτε συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας οι εξισώσεις κίνησης μπορούν να εξαχθούν από τη σχέση :

$$\partial_\mu\partial^\mu\Phi(x) = -\frac{dV[\Phi(x)]}{d\Phi} \tag{3.51}$$

Ο κινητικός όρος του παραπάνω πεδίου είναι αναλλοίωτο ως προς τον α-πειροστό μετασχηματισμό $\Phi \to \Phi + \epsilon$:

$$\begin{aligned} \delta x^\mu &= \epsilon^\mu \\ \delta\Phi &= 0 \end{aligned} \tag{3.52}$$

και αντίστοιχα ως προς τον μετασχημασχηματισμό Lorenz :

$$\begin{aligned} \delta x^\mu &= \alpha x^\mu \\ \delta\Phi &= -\alpha\Phi \end{aligned} \tag{3.53}$$

3.4 Λαγκρατζιανή Σπινοριακού πεδίου

Αντίστοιχα, ο κινητικός όρος της δράσης ενός σπινοριακού πεδίου δίνεται αν διαχωριστούν οι δεξιόστροφοι απ΄ τους αριστερόστροφους όρους :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_L &= \frac{1}{2}\Psi_L^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \Psi_L \\ \mathcal{L}_R &= \frac{1}{2}\Psi_R^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \Psi_R \end{aligned} \tag{3.54}$$

Επομένως, η Λαγκρατζιανή του πεδίου Dirac λαμβάνει τη γενικότερη μορφή :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\Psi^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \Psi \tag{3.55}$$

Οι κινητικοί όροι είναι αναλοίωτοι ως προς τον απειροστό μετασχηματισμό $\Psi \to \Psi + \alpha$ κατά αντιστοιχία με τους μετασχηματισμούς του βαθμωτού πεδίου. Όμως, οι κινητικοί όροι του πεδίου Dirac είναι επίσης αναλλοίωτοι υπό τους παρακάτω μετασχηματισμούς στροφής :

Μετασχηματισμός ως προς την ολική φάση :

$$\Psi \to e^{i\alpha}\Psi \tag{3.56}$$

Μετασχηματισμός ως προς την "chirality" :

$$\Psi \to e^{i\beta\gamma_5}\Psi \tag{3.57}$$

Αναζητάται ο μετασχηματισμός του διαφορικού τελεστή, για τον οποίο η Λαγκρατζιανή θα παραμένει αναλλοίωτη υπό τον μετασχηματισμό :

$$\Psi \to e^{i\alpha(x)}\Psi \tag{3.58}$$

Για τον τελεστή D_μ, η Λαγκρατζιανή δίνεται από τη σχέση :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\Psi^\dagger \sigma^\mu D_\mu \Psi \tag{3.59}$$

Η Λαγκρατζιανή διατηρείται αν επιλεγεί κατάλληλα το πεδίο A_μ έτσι ώστε:

$$\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu + iA_\mu \tag{3.60}$$

Όπου A_μ μετασχηματίζεται :

$$A_\mu \to A_\mu - \partial_\mu \alpha(x) \tag{3.61}$$

Ο κινητικός όρος που εισάγει το πεδίο A_μ προκύπτει με τη βοήθεια της έκφρασης :

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{3.62}$$

ως εξής

$$\mathcal{L}_k = -\frac{1}{4g^2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{3.63}$$

Επομένως, η Λαγκρατζιανή που περιγράφει την αλληλεπίδραση ενός σωματιδίου Dirac σπιν $1/2$ με ένα ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, δηλαδή με ένα σωματίδιο σπιν 1 προκύπτει :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4g^2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\Psi^\dagger \sigma^\mu (\partial_\mu + iA_\mu(x))\Psi \tag{3.64}$$

Και στην περίπτωση της QED, όπου ένα ηλεκτρόνιο, που περιγράφεται με την εξίσωση Dirac αλληλεπιδρά με ένα φωτόνιο, η Λαγκρατζιανλη πυκνότητα του φαινομένου δίνεται από την προηγούμενη σχέση.

3.5 Ολοκληρώματα διαδρομών

Τα ολοκληρώματα διαδρομών ορίζουν την πιθανότητα μετάβασης από μια αρχική κατάσταση σε μια άλλη κατάσταση. Ένα ολοκλήρωμα μετάβασης από την κατάσταση q_T στην q'_t δίνεται από τη σχέση :

$$< q'_t|q_T >\sim e^{\frac{i}{\hbar}\int_T^t \mathcal{L}dt} \tag{3.65}$$

Αν το χρονικό διάστημα $[T,t]$ χωριστεί σε N απειροελάχιστα διαστήματα ίσου μήκους, η παραπάνω τιμή ισοδυναμεί με :

$$< q'_t|q_T >= \int dq_1 \dots dq_{N-1} < q'_t|q_1 >< q_1|q_2 > \cdots < q_{N-1}|q_T > \tag{3.66}$$

Αν η (3.58) θεωρηθεί ότι αναπαριστά μια ισότητα, το ολοκλήρωμα του εκθετικού τμήματος μπορεί να χωριστεί στα επιμέρους χρονικά διαστήματα ολοκλήρωσης. Η τιμή που θα βρεθεί διαφέρει από την πραγματική τιμή του ολοκληρώματος κατά το έλλειμα των ενδιάμεσων ολοκληρώσεων, από τη στιγμή που ο χωρισμός του διαστήματος είναι διακριτός. Αν όμως θεωρηθεί ένα μόνο διάστημα ολοκλήρωσης : $[t, t+\delta t]$ η ζητούμενη τιμή δίνεται από τη σχέση:

$$< q'_t|q_t + \delta t >= A \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\delta t \mathcal{L}(q'_t, q_t + \delta t)\right\} \tag{3.67}$$

Αν το διάστημα γίνει $\delta t \to dt$, ορίζεται το ολοκλήρωμα διαδρομών, όπως διατυπώθηκε από τον Feynman . Το ολοκλήρωμα διαδρομών προκύπτει από την εισαγωγή της (3.59) στην (3.60) όπως δίνεται από τη σχέση :

$$< q'_t|q_T >= \lim_{N\to\infty} A^N \int \left(\prod_{i=1}^{N-1} dq_i\right) e^{\frac{i}{\hbar}\int_T^t \mathcal{L}(q,\dot{q})dt} \tag{3.68}$$

Δηλαδή,

$$< q'_t|q_T >= \int Dq e^{\frac{i}{\hbar}S[t,T,[q]]} \tag{3.69}$$

Η παραπάνω έκφραση δίνει την πιθανότητα εύρεσης ενός σωματιδίου στη θέση q' την χρονική στιγμή t δεδομένου ότι την χρονική στιγμή T βρισκόταν στη θέση q και υπολογίζεται από το άθροισμα όλων των πιθανών διαδρομών ανάμεσα στα δύο ακραία σημεία σταθμισμένο από το εκθετικό της δράσης της δεδομένης διαδρομής επί την ποσότητα κανονικοποίησης $i/\hbar$.

Το παραπάνω ολοκλήρωμα ορίζεται, συνεπώς, ως το ολοκλήρωμα διαδρομών του Feynman. Από τον υπολογισμό του μπορεί να ευρεθεί η πιθανότητα μετάβασης από μια αρχική κατάσταση, σε μια τελική κατάσταση στην οποία το σύστημα μπορεί να μεταβεί. Η χρησιμότητά του έγκειται στο γεγονός ότι δεν είναι απαραίτητη η περαιτέρω μελέτη του φαινομένου, αρκεί ο υπολογισμός της ποσότητας της Δράσης, από την οποία μπορεί να ευρεθεί το ολοκλήρωμα διαδρομών για να υπολογιστεί η παραπάνω πιθανότητα. Η σημασία της παραπάνω παρατήρησης, μπορεί να γίνει αντιληπτή μόνο αν λάβουμε υπ΄ όψιν τις δυσκολίες που εισάγονται στον υπολογισμό ποσοτήτων που εκφράζουν πιθανότητα, όπως η ενεργός διατομή, που οδήγησαν στην ανάγκη της ανάπτυξης της Θεωρίας Επακανονικοποίησης. Τα ολοκληρώματα διαδρομών αποτελούν, επομένως, έναν κομψό και εύχρηστο τρόπο υπολογισμού των περίπλοκων πίθανοτήτων μετάβασης.

4. ΤΟ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ SCHWINGER

4.1 Περιγραφή του φαινομένου

Το φαινόμενο Schwinger αναφέρεται στην μη διαταραχτική παραγωγή ζεύγους ηλεκτρονίου - ποζιτρονίου, κατά την εφαρμογή ηλεκτρομαγνητικού πεδίου σε QED κενό. Η ενδογενής αστάθεια του κενού, κατά την εφαρμογή ηλεκτρικού πεδίου ήταν μια απ΄ τις πρώτες μη τετριμένες προβλέψεις της κβαντικής ηλεκτροδυναμικής. Παρόλ΄ αυτά το φαινόμενο παραγωγής ενός ζεύγους ηλεκτρονίου - ποζιτρονίου δεν έχει παρατηρηθεί πειραματικά, λόγω της ασθενής του φύσης. Στο κεφάλαιο αυτό θα αναζητηθεί η τιμή της πιθανότητας παραγωγής τουλάχιστον ενός ζεύγους, συναρτήσει της έντασης του πεδίου που εφαρμόζεται.

Οι S πίνακες περιγράφουν κυρίως τις ισχυρές αλληλεπιδράσεις, δίνοντας τη σχέση μετάβασης από τα αρχικά σωματίδια, στα τελικά σωματίδια που προκύπτουν. Η πιθανότητα πραγματοποίησης της αντίδρασης προκύπτει από το τετράγωνο S^2. Η παραγωγική προσέγγιση της θεωρίας των S πινάκων βασίζεται στην ιδέα του άμεσου υπολογισμού, που εισήγαγε ο Heisenberg, χωρίς την χρήση των εξισώσεων της θεωρίας πεδίου.

Κατά την αλληλεπίδραση ενός συστήματος με ένα εξωτερικό πεδίο, ο πίνακας S μπορεί να υπολογιστεί μέσω της Χαμιλτονιανής του συστήματος $H(t)$ από τη σχέση :

$$S = T \exp\left[-i\int_{-\infty}^{\infty} H(t')dt'\right] \tag{4.1}$$

Επειδή όμως η Χαμιλτονιανή μπορεί να δωθεί συναρτήσει της Λαγκρατζιανής πυκνότητας :

$$H(t) = -\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L} d^3x \tag{4.2}$$

Η αλληλεπίδραση προκύπτει :

$$S = T \exp\left[i \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L} d^4 x\right] \tag{4.3}$$

Για τα σωματίδια Dirac με εξίσωση :

$$\left[i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - e\gamma^{\mu}A_{\mu}(x) - m\right]\Psi = 0 \tag{4.4}$$

Όπου $A_{\mu}(x)$ το εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο αλληλεπίδρασης. Η αντίστοιχη Λαγκρατζιανή πυκνότητα δίνεται από τη σχέση (). Οπότε αν ληφθεί υπ΄ όψιν η αλληλεπίδραση με το πεδίο :

$$\mathcal{L}(x) = -e\overline{\Psi}(x)\gamma_{\mu}\Psi(x)A_{\mu}(x) \tag{4.5}$$

Αντικαθιστώντας, λοιπόν, στην (4.3) :

$$S = T \exp\left[-ie \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\Psi}(x)\gamma_{\mu}\Psi(x)A_{\mu}(x) d^4 x\right] \tag{4.6}$$

Αναπτύσσοντας σε δυναμοσειρά την παραπάνω σχέση, και για την τιμή $S_0(A)$, δηλαδή στην περίπτωση που δεν θα δημιουργηθεί κανένα ζεύγος σωματιδίων :

$$\begin{aligned} S_0(A) =< 0|S|0 >= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ie)^n}{n!} \int dx_1 \ldots dx_n < 0|T \\ \left[\overline{\Psi}(x_1)\gamma^{\mu}A_{\mu}(x_1)\Psi(x_1)\ldots\overline{\Psi}(x_n)\gamma^{\mu}A_{\mu}(x_n)\Psi(x_n)\right]|0> \end{aligned} \tag{4.7}$$

Σύμφωνα με το θεώρημα Wick κάθε όρος του παραπάνω γινομένου είναι ένα άθροισμα γινομένων των συστολών που θα συμβολιστούν $C(a_k, x_k, a_l, x_l)$:

$$C(a_k, x_k, a_l, x_l) = -ie \sum_{a} < 0|T\gamma^{a}A_{a}(x_n)\Psi_{a_k}(x_k)\overline{\Psi}_{a_l}(x_l)|0> \tag{4.8}$$

Αν εισαχθεί ο παραπάνω συμβολισμός στο ανάπτυγμα της $S_0(A)$ προκύπτει:

$$S_0(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int dx_1 \dots dx_n \sum_P \epsilon_P \sum_{a_1,\dots,a_n} C(a_1, x_1, a_{P_l}, x_{P_l}) \dots C(a_n, x_n, a_{P_n}, x_{P_n}) \tag{4.9}$$

Αν οριστεί το σύστημα συντεταγμένων $|x, a>$ με τον $bra - ket$ συμβολισμό, η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί ως συνάρτηση του πίνακα Γ :

$$< x, a|\Gamma|y, b >= C(x, a; y, b) \tag{4.10}$$

Η τιμή του $S_0(A)$ υπολογίζεται συναρτήσει του πίνακα Γ, και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα 5. παράρτημα Α′ για την ορίζουσα ενός πίνακα :

$$S_0(A) = \det(1 - \Gamma) = \exp[Tr(\ln(1 - \Gamma)] \tag{4.11}$$

Ο υπολογισμός του πίνακα Γ δίνει :

$$\Gamma = e\gamma^\mu A_\mu \frac{1}{\gamma^\mu p_\mu - m + i\epsilon} \tag{4.12}$$

Όπου $\epsilon \to 0$. Επομένως η $S_0(A)$ δίνεται από τη σχέση :

$$\ln S_0(A) = Tr\ln \left\{ \frac{\gamma^\mu p_\mu - e\gamma^\mu A_\mu(x) - m + i\epsilon}{\gamma^\mu p_\mu - m + i\epsilon} \right\} \tag{4.13}$$

Ορίζουμε τους εξής πίνακες :

$$M = \gamma^\mu p_\mu - e\gamma^\mu A_\mu(x) - m + i\epsilon \tag{4.14}$$

και για μηδενικό ηλεκτρομαγνητικό πεδίο :

$$M_0 = \gamma^\mu p_\mu - m + i\epsilon \tag{4.15}$$

Επομένως, η σχέση

$$\ln S_0(A) = Tr\ln\left\{\frac{\gamma^\mu p_\mu - e\gamma^\mu A_\mu(x) - m + i\epsilon}{\gamma^\mu p_\mu - m + i\epsilon}\right\} \tag{4.16}$$

μπορεί να γραφεί

$$\ln S_0(A) = Tr\ln\frac{M}{M_0} \tag{4.17}$$

4.2 Υπολογισμός της πιθανότητας

Από την παραπάνω εξίσωση προκύπτει επομένως, η πιθανότητα παραγωγής ενός ζεύγους ηλεκτρονίου - ποζιτρονίου, στο κενό χώρο, στον οποίο ασκείται ηλεκτρικό πεδίο έντασης E. Από την ιδιότητα 5. παράρτημα Α′ ισχύει $tr(A^\tau) = tr(A)$. Επομένως λαμβάνοντας τον ανάστροφο προκύπτει :

$$\begin{aligned}\ln S_0(A) &= Tr\ln\left\{\frac{(\gamma^\mu)^\tau(p_\mu)^\tau - e(\gamma^\mu)^\tau(A_\mu)^\tau(x) - m + i\epsilon}{(\gamma^\mu)^\tau(p_\mu)^\tau - m + i\epsilon}\right\}\\ &= Tr\left\{\ln\left[(\gamma^\mu)^\tau(p_\mu)^\tau - e(\gamma^\mu)^\tau(A_\mu)^\tau(x) - m + i\epsilon\right] - \ln\left[(\gamma^\mu)^\tau(p_\mu)^\tau - m + i\epsilon\right]\right\}\end{aligned} \tag{4.18}$$

Επίσης για τον πίνακα C, που μελετήθηκε στο κεφάλαιο 2.2.4 ισχύουν οι ιδιότητες :

$$\begin{aligned}C(\gamma^\mu)^\tau C^{-1} &= -\gamma^\mu\\ C(x^\mu)^\tau C^{-1} &= x^\mu\end{aligned} \tag{4.19}$$

Και λόγω της ιδιότητας 4. $tr(CAC^{-1}) = tr(A)$ μπορούμε να πάρουμε την ισοδύναμη έκφραση :

$$\begin{aligned}\ln S_0(A) =& Tr\ln\left[C(\gamma^\mu)^\tau(p_\mu)^\tau C^{-1} - eC(\gamma^\mu)^\tau(A_\mu)^\tau(x)C^{-1} - CmC^{-1} + iC\epsilon C^{-1}\right]\\ &-Tr\ln\left[C(\gamma^\mu)^\tau(p_\mu)^\tau C^{-1} - CmC^{-1} + iC\epsilon C^{-1}\right]\\ =& Tr\ln\left[C(\gamma^\mu)^\tau C^{-1}C(p_\mu)^\tau C^{-1} - eC(\gamma^\mu)^\tau C^{-1}C(A_\mu)^\tau(x)C^{-1} - m + i\epsilon\right]\\ &-Tr\ln\left[C(\gamma^\mu)^\tau C^{-1}C(p_\mu)^\tau C^{-1} - m + i\epsilon\right]\\ =& Tr\ln\left[-\gamma^\mu p_\mu - e\gamma^\mu A_\mu(x) - m + i\epsilon\right]\\ &-Tr\ln\left[-\gamma^\mu p_\mu - m + i\epsilon\right]\end{aligned} \tag{4.20}$$

Επομένως,

$$\ln S_0(A) = Tr\ln\left\{\frac{\gamma^\mu p_\mu - e\gamma^\mu A_\mu(x) + m - i\epsilon}{\gamma^\mu p_\mu + m - i\epsilon}\right\} \tag{4.21}$$

Προσθέτοντας την παραπάνω σχέση με την αρχική :

$$\begin{aligned} 2\ln S_0(A) &= Tr\ln\left\{\frac{\gamma^\mu p_\mu - e\gamma^\mu A_\mu(x) - m + i\epsilon}{\gamma^\mu p_\mu - m + i\epsilon}\right\} * \left\{\frac{\gamma^\mu p_\mu - e\gamma^\mu A_\mu(x) + m - i\epsilon}{\gamma^\mu p_\mu + m - i\epsilon}\right\} \\ &= Tr\ln\left\{\frac{(\gamma^\mu p_\mu - e\gamma^\mu A_\mu(x))^2 - (m - i\epsilon)^2}{(\gamma^\mu p_\mu)^2 - (m - i\epsilon)^2}\right\} \end{aligned} \tag{4.22}$$

Επειδή όμως $\epsilon \to 0$ ισχύει :

$$\begin{aligned} (m - i\epsilon)^2 &= m^2 - i\epsilon(2mi\epsilon) \\ &= m^2 - i\epsilon \end{aligned} \tag{4.23}$$

Τελικά προκύπτει :

$$2\ln S_0(A) = Tr\ln\left\{\frac{(\gamma^\mu p_\mu - e\gamma^\mu A_\mu(x))^2 - m^2 + i\epsilon}{(p)^2 - m^2 + i\epsilon}\right\} \tag{4.24}$$

Θα αποδειχτεί η ισότητα :

$$I = \int_0^\infty \frac{ds}{s}\left(e^{is(b+i\epsilon)} - e^{is(a+i\epsilon)}\right) = \ln\frac{b}{a} \tag{4.25}$$

Το παρακάτω ολοκλήρωμα γίνεται με παραγοντική ολοκλήρωση :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{ds}{s} e^{ias} &= \int_0^\infty (\ln s)' e^{ias} ds \\ &= \ln s e^{ias}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \ln s (ia) e^{ias} ds \end{aligned} \tag{4.26}$$

Από ένα πίνακα ολοκληρωμάτων - ή με τη βοήθεια του *Mathematica* υπολογίζεται :

$$\int_0^\infty \ln s(ia)e^{ias}ds = \frac{i(\gamma + \ln(-ia))}{a} \tag{4.27}$$

Όπου γ σταθερά, που προκύπτει από το άθροισμα

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left\{(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}) - \ln n\right\} \tag{4.28}$$

Οπότε

$$\int_0^\infty \frac{ds}{s}e^{ias} = \ln se^{ias}\Big|_0^\infty - (ia)\frac{i(\gamma + \ln(-ia))}{a} \tag{4.29}$$

Επομένως εισάγοντας την παραπάνω στο I:

$$I = (\ln se^{i(b+i\epsilon)s} - \ln se^{i(a+i\epsilon)s})\Big|_0^\infty + (\gamma + \ln(-i(b+i\epsilon)) - (\gamma + \ln(-i(a+i\epsilon)) \tag{4.30}$$

$$\begin{aligned} I &= \ln(-i(b+i\epsilon) - \ln(-i(a+i\epsilon) \\ &= \ln\frac{(-i(b+i\epsilon)}{(-i(a+i\epsilon)} \\ &= \ln\frac{(b+i\epsilon)}{(a+i\epsilon)} \end{aligned} \tag{4.31}$$

Όπου $\epsilon \to 0$. Χρησιμοποιώντας λοιπόν το παραπάνω ολοκλήρωμα η ζητούμενη πιθανότητα, η οποία είναι ανάλογη του ${S_0}^2(A)$ δίνεται από την σχέση :

$$\begin{aligned} w(x) = \ln {S_0}^2(A) &= Tr\ln\left\{\frac{(\gamma^\mu p_\mu - e\gamma^\mu A_\mu(x))^2 - m^2 + i\epsilon}{(p)^2 - m^2 + i\epsilon}\right\} \\ &= Tr\int_0^\infty \frac{ds}{s}\left(e^{is((\gamma^\mu p_\mu - e\gamma^\mu A_\mu(x))^2 - m^2 + i\epsilon)} - e^{is((p)^2 - m^2 + i\epsilon)}\right) \end{aligned} \tag{4.32}$$

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες 6. και 2. για το ίχνος των πινάκων :

$$w(x) = \int_0^\infty \mathrm{Re}\,\frac{ds}{s} e^{is(-m^2+i\epsilon)} < x| \left(e^{is((\gamma^\mu p_\mu - e\gamma^\mu A_\mu(x))^2)} - e^{is(p)^2} \right) |x> \tag{4.33}$$

Και αντικαθιστώντας από την (2.106):

$$w(x) = \int_0^\infty \mathrm{Re}\,\frac{ds}{s} e^{is(-m^2+i\epsilon)} < x| \left(e^{is((p-eA(x))^2 + \frac{e}{2}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}(x))} - e^{is(p)^2} \right) |x> \tag{4.34}$$

Εφόσον το πεδίο είναι σταθερό, η πιθανότητα $w(x)$ πρέπει να είναι ανεξάρτητη του x. Επομένως $F^{\mu\nu}$ ανεξάρτητο του x.

Το πεδίο στο οποίο οφείλεται το φαινόμενο Schwinger είναι το ηλεκτρικό πεδίο. Επομένως, η τιμή του μαγνητικού πεδίου μπορεί να ληφθεί ίση με μηδέν. $B = 0$ Επίσης, χωρίς βλάβη της γενικότητας, η δράση του ηλεκτρικού πεδίου μπορεί να θεωρηθεί παράλληλη με τον άξονα των $\hat{z}$. Εφόσον ισχύει :

$$\nabla A = -E \tag{4.35}$$

Το πεδίο δίνεται :

$$A^\mu = (0, 0, 0, -Et) \tag{4.36}$$

Είναι δυνατόν να υπολογιστεί ξεχωριστά η τιμή του εκθετικού παράγοντα $\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, ο οποίος μετατίθεται με τα υπόλοιπα εκθετικά. Ισχύει :

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \tag{4.37}$$

και

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] \tag{4.38}$$

Λαμβάνοντας επομένως, το γινόμενο

$$\begin{aligned}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &= \frac{i}{2}[\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu][\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu] \\ &= \frac{i}{2}[\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu]\partial^\mu A^\nu - \frac{i}{2}[\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu]\partial^\nu A^\mu\end{aligned} \tag{4.39}$$

Εφόσον $A^\mu = (0, 0, 0, -Et)$ όλες οι συνιστώσες μηδενίζονται εκτός από την A^3. Επίσης η διαφόριση της παραπάνω ποσότητας είναι διαφορετική του μηδενός μόνο για ∂^0. Επομένως,

$$\begin{aligned}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &= \frac{i}{2}[\gamma_0\gamma_3 - \gamma_3\gamma_0]\partial^0 A^3 - \frac{i}{2}[\gamma_3\gamma_0 - \gamma_0\gamma_3]\partial^0 A^3 \\ &= \frac{2i}{2}[\gamma_0\gamma_3 - \gamma_3\gamma_0](-E)\end{aligned} \tag{4.40}$$

κι εφόσον $\gamma_0\gamma_i = -\gamma_i\gamma_0$:

$$\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2i\gamma_0\gamma_3(-E) \tag{4.41}$$

Επομένως,

$$\frac{ise\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}{2} = \gamma_0\gamma_3 seE \tag{4.42}$$

Η exp μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά :

$$e^A = \sum_n \frac{(A)^n}{n!} \tag{4.43}$$

Οπότε η ζητούμενη ποσότητα γίνεται :

$$\begin{aligned}e^{\frac{ise\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}{2}} &= e^{\gamma_0\gamma_3 seE} \\ &= \sum_n \frac{(\gamma_0\gamma_3 seE)^n}{n!}\end{aligned} \tag{4.44}$$

Όμως $(\gamma_0\gamma_3)^2 = I$. Έτσι :

$$
\begin{aligned}
e^{\frac{ise\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}{2}} &= \sum_n \frac{(\gamma_0\gamma_3)(seE)^{(2n+1)}}{(2n+1)!} + \sum_n \frac{(\gamma_0\gamma_3)^2(seE)^(2n)}{(2n)!} \\
&= \sum_n \frac{(\gamma_0\gamma_3)(seE)^{(2n+1)}}{(2n+1)!} + \sum_n \frac{I(seE)^{(2n)}}{(2n)!}
\end{aligned}
\tag{4.45}
$$

Επίσης :

$$
\begin{aligned}
tr(\gamma_0\gamma_3) &= 0 \\
tr(I) &= 4
\end{aligned}
\tag{4.46}
$$

Επομένως,

$$
Tr(e^{\frac{ise\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}{2}}) = 0 + 4\sum_n \frac{(seE)^{(2n)}}{(2n)!} \tag{4.47}
$$

Και από τον ορισμό του υπερβολικού συνημιτόνου :

$$
Tr(e^{\frac{ise\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}{2}}) = 4\cosh(seE) \tag{4.48}
$$

Επίσης μπορεί να υπολογιστεί η τιμή του ίχνους e^{isp^2}. Το τετραδιάνυσμα της ορμής δίνεται από τη σχέση :

$$
p^2 = {p_0}^2 - {p_\tau}^2 \tag{4.49}
$$

Επομένως το ίχνος δίνεται :

$$
Tre^{isp^2} = \int d^4x < x|e^{isp^2}|x > \tag{4.50}
$$

Στο χώρο των ορμών, το εσωτερικό γινόμενο υπολογίζεται μέσω του μετασχηματισμού Fourier ως εξής :

$$
< x|e^{isp^2}|x >= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ipx}e^{isp^2}e^{ipx} \tag{4.51}
$$

Και εισάγοντας την παραπάνω σχέση στο ίχνος,

$$\begin{aligned} Tre^{isp^2} &= \int d^4x \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} e^{isp^2} e^{ipx} \\ &= \int d^4x \left(\int \frac{dp_i}{(2\pi)} e^{-isp_i^2} \right)^3 \left(\int \frac{dp_0}{(2\pi)} e^{isp_0^2} \right) \end{aligned} \tag{4.52}$$

Απο γνωστή ισότητα υπολογίζεται :

$$\int e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \tag{4.53}$$

Και εφόσον οι συναρτήσεις είναι κανονικοποιημένες $\int d^4x = 1$, προκύπτει:

$$\begin{aligned} Tre^{isp^2} &= \left(\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{is}} \right)^3 \left(\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{-\pi}{is}} \right) \\ &= -\frac{i}{(4\pi)^2} \frac{1}{s^2} \end{aligned} \tag{4.54}$$

Επίσης, μπορεί να υπολογιστεί η τιμή του εκθετικού όρου $\hat{\Pi}^2 = (p - eA)^2$. Ισχύει :

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}^2 &= (p - eA)(p - eA) \\ &= p^2 - eAp - epA + e^2A^2 \end{aligned} \tag{4.55}$$

Εφόσον $p = i(\partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z)$ και $A = (0, 0, 0, -Et)$:

$$\begin{aligned} pA &= 0 \\ Ap &= 0 \\ A^2 &= -E^2t^2 \end{aligned} \tag{4.56}$$

Προκύπτει

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}^2 &= p^2 - e^2E^2t^2 \\ &= {p_0}^2 - {p_\tau}^2 - e^2E^2t^2 \end{aligned} \tag{4.57}$$

Χρησιμοποιώντας την παρακάτω αντιστοιχία για τις ποσότητες :

$$\begin{cases} P_0 \to P \\ -X_0 \to Q \\ 2ieE \to \omega_0 \\ 2m_0 \to 1 \end{cases} \tag{4.58}$$

Προκύπτει :

$$P_0{}^2 - e^2E^2X_0{}^2 \to \frac{P^2}{2m_0} + \frac{1}{2}m_0\omega_0{}^2Q^2 \tag{4.59}$$

Η ποσότητα αυτή είναι ανάλογη της ολικής ενέργειας ενός ταλαντωτή. Επομένως, μπορούν να υπολογιστούν οι ιδιοτιμές της ενέργειας του παραπάνω συστήματος, σύμφωνα με τις ενεργειακές στάθμες ενός ταλαντωτή, για τις τιμές των ποσοτήτων που αντιστοιχήθηκαν παραπάνω. Εφόσον οι ενεργειακές στάθμες ενός ταλαντωτή δίνονται από τη σχέση :

$$E = \left(n + \frac{1}{2}\right)\omega_0 \tag{4.60}$$

Οι ιδιοτιμές της $P_0{}^2 - e^2E^2X_0{}^2$ προκύπτουν :

$$\xi_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)2ieE = (2n+1)ieE \tag{4.61}$$

Υπολογίζεται το ίχνος :

$$Tre^{-is(\hat{\Pi})^2} =< x|e^{-isp_\tau{}^2}e^{-is(p_0{}^2 - e^2E^2t^2)}|x > \tag{4.62}$$

$$Tre^{-is(\hat{\Pi})^2} = \int e^{-isp_\tau{}^2}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-is\xi_n}d^4x = \int d^4xe^{-isp_\tau{}^2}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-is(2n+1)ieE} \tag{4.63}$$

Έστω N η σταθερά κανονικοποίησης έτσι ώστε στο όριο $E \to 0$ η τιμή του ολοκληρώματος να τείνει στην τιμή του ολοκληρώματος (4.52). Αν $N^* = N\int d^4xe^{-isp_\tau^2}$ τότε η (4.63) γίνεται :

$$\begin{aligned} Tre^{-is(\hat{\Pi})^2} &= N^* e^{seE} \sum_{n=0}^{\infty} e^{s(2n)eE} \\ &= N^* \left(e^{seE} \frac{1}{1-e^{2seE}} \right) \\ &= N^* \left(\frac{e^{seE}}{1-e^{2seE}} \right) \\ &= N^* \left(\frac{1}{e^{-seE}-e^{seE}} \right) \end{aligned} \tag{4.64}$$

Επομένως,

$$Tre^{-is(\hat{\Pi})^2} = \frac{1}{2sinh(seE)} \left(N \int d^4 x e^{-isp_\tau^2} \right) \tag{4.65}$$

Για $E \to 0$ το ολοκλήρωμα πρέπει να παίρνει την τιμή :

$$\lim_{E \to 0} Tre^{-is(\hat{\Pi})^2} = Tre^{-is(P)^2} = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{is^2} \tag{4.66}$$

Εφόσον ισχύει:

$$\lim_{u \to 0} \frac{\sin u}{u} = \lim_{u \to 0} \frac{u}{\sin u} = 1 \tag{4.67}$$

Για

$$N^* = \frac{1}{(4\pi)^2 is^2} (iseE) \tag{4.68}$$

το όριο γίνεται

$$\lim_{E \to 0} \frac{1}{(4\pi)^2 is^2} \frac{iseE}{sin(iseE)} = \frac{1}{(4\pi)^2 is^2} \lim_{iseE \to 0} \frac{iseE}{sin(iseE)} = \frac{1}{(4\pi)^2 is^2} \tag{4.69}$$

Επομένως, για $A = \frac{1}{2i(2\pi)^2}$, η ζητούμενη πιθανότητα δίνεται από ένα ολοκλήρωμα της μορφής :

$$w(E) = A \int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^2} \left[eE \coth(eEs) - \frac{1}{s} \right] \mathrm{Re}(ie^{-is(m^2 - i\epsilon)}) \tag{4.70}$$

Και αν υπολογιστεί για $\epsilon \to 0$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(ie^{-is(m^2-i\epsilon)}) &= \mathrm{Re}(i\cos(sm^2) - i^2 \sin(sm^2)) \\ &= \sin(sm^2) \end{aligned} \tag{4.71}$$

Όμως, οι συναρτήσεις :

$$\begin{aligned} f_1'(s) = \frac{\coth(eEs)}{s^2} \sin(sm^2) =& \frac{(e^{2eEs} + 1))}{s^2(e^{2eEs} - 1)} \sin(sm^2) \\ f_2'(s) =& \frac{\sin(sm^2)}{s^3} \end{aligned} \tag{4.72}$$

Είναι άρτιες, ως πηλίκα περιττών. Επομένως μπορούμε να επεκτείνουμε το ολοκλήρωμα από το - άπειρο στο + άπειρο :

$$w(E) = \frac{A}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{s^2} \left[eE \coth(eEs) - \frac{1}{s} \right] \sin(sm^2) \tag{4.73}$$

Από το 2ο θεώρημα του παραρτήματος Β′ :

$$A \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{s^2} \left[eE \coth(eEs) - \frac{1}{s} \right] \sin(sm^2) = 2\pi A \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Re}\, Res(f(s), s_i) \tag{4.74}$$

όπου η $f(s)$ ορίζεται :

$$f(s) = f_1(s) + f_2(s) = \frac{1}{s^2} \left[eE \coth(seE) \right] e^{im^2 s} - \frac{1}{s^3} e^{im^2 s} \tag{4.75}$$

Μπορούν να υπολογιστούν ξεχωριστά τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα για τις δύο συναρτήσεις.

$$f_1(s) = \frac{e^{im^2 s} eE}{s^2} \coth(eEs) \tag{4.76}$$

Από το 3ο θεώρημα του παραρτήματος Β΄

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(n) = \sum_{k=1}^{m} Res(h(z), z_k) \tag{4.77}$$

όπου

$$h(z) = \pi g(z) \cot(\pi z) \tag{4.78}$$

Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση :

$$g(z) = \frac{eE}{\pi} \frac{e^{-\frac{im^2 \pi z}{ieE}}}{(\frac{\pi z}{ieE})^2} \tag{4.79}$$

Τότε :

$$h(z) = \frac{e^{-\frac{im^2 \pi z}{ieE}} eE}{(\frac{\pi z}{ieE})^2} \cot(\pi z) \tag{4.80}$$

Και αντικαθιστώντας $z = -iseE/\pi$:

$$\begin{aligned} h(s) &= \frac{e^{-\frac{im^2 \pi(-iseE/\pi)}{ieE}} eE}{(\frac{\pi iseE/\pi}{ieE})^2} \cot(\pi iseE/\pi) \\ &= \frac{e^{ism^2} eE}{(s)^2} \cot(-iseE) \\ &= \frac{e^{ism^2} eE}{(s)^2} \coth(seE) = f_1(s) \end{aligned} \tag{4.81}$$

Αν στο ολοκλήρωμα πραγματοποιηθεί η αλλαγή μεταβλητής $s \to z = \frac{-ieE}{\pi}s$ το ολοκληρωτικό υπόλοιπο που υπολογίζεται, πρέπει να πολλαπλασιαστεί με την σταθερά :

$$\frac{\pi}{-ieE} \tag{4.82}$$

Επομένως μπορεί να υπολογιστεί :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m} Res(h(z), z_k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(n) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{eE}{\pi} \frac{e^{-\frac{m^2 \pi n}{eE}}}{(\frac{\pi n}{ieE})^2} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{-(eE)^3}{\pi^3} \frac{e^{-\frac{m^2 \pi n}{eE}}}{n^2}\end{aligned} \tag{4.83}$$

Εφόσον όμως

$$\sum_{n=-\infty,\neq 0}^{+\infty} \frac{-(eE)^3}{\pi^3} \frac{e^{-\frac{m^2 \pi n}{eE}}}{n^2} = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-(eE)^3}{\pi^3} \frac{e^{-\frac{m^2 \pi n}{eE}}}{n^2} \tag{4.84}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{m} Res(h(z), z_k) = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-(eE)^3}{\pi^3} \frac{e^{-\frac{m^2 \pi n}{eE}}}{n^2} \tag{4.85}$$

Και τελικά

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(s) ds = 2\frac{\pi}{-ieE} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-(eE)^3}{\pi^3} \frac{e^{-\frac{m^2 \pi n}{eE}}}{n^2} = \frac{2(eE)^2}{i\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{m^2 \pi n}{eE}}}{n^2} \tag{4.86}$$

Αντίστοιχα,

$$f_2(s) = \frac{e^{ism^2}}{s^3} \tag{4.87}$$

Οπότε από το 1ο θεώρημα :

$$\begin{aligned} Res(\frac{e^{ism^2}}{s^3},0) &= \frac{1}{2!}\left[\frac{s^3 d^2 e^{ism^2}}{s^3 ds^2}\right]\Bigg|_{s=0} \\ &= \frac{(im^2)^2}{2}\, e^{ism^2}\Big|_{s=0} \\ &= -\frac{(m^2)^2}{2} \end{aligned} \tag{4.88}$$

Και το ολοκλήρωμα γίνεται :

$$\int_c f_2(s)ds = -\pi(-i|A|\frac{m^4}{2}) = \frac{i\pi m^4}{2}|A| \tag{4.89}$$

Όμως, εφόσον η συνάρτηση είναι πολλαπλασιασμένη με $\sin(sm^2)$ από το ολοκλήρωμα απομένει μόνο το πραγματικό μέρος, το οποίο στη δεδομένη περίπτωση μηδενίζεται. Επομένως ο υπολογισμός του ολοκληρώματος της ολικής συνάρτησης $f(s)$ οδηγεί στη λύση :

$$\begin{aligned} w(E) &= \frac{A}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{ds}{s^2}\left[eE\coth(eEs)-\frac{1}{is}\right]\sin(sm^2) \\ &= \pi A\sum_{i=1}^{k}\mathrm{Re}\, Res(f_1(s),s_i) \\ &= 2\pi A\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(eE)^2}{i\pi^2}\frac{e^{-\frac{m^2\pi n}{eE}}}{n^2} \end{aligned} \tag{4.90}$$

Επομένως, η πιθανότητα $w(E)$ δίνεται :

$$w(E) = 2\pi A\frac{(eE)^2}{i\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{m^2\pi n}{eE}}}{n^2} \tag{4.91}$$

Και αντικαθιστώντας την τιμή του Α :

$$w(E) = 2\frac{\pi}{2(2\pi)^2}\frac{-(eE)^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{m^2\pi n}{eE}}}{n^2} \tag{4.92}$$

$$|w(E)| = \left(\frac{e^2}{4\pi}\right)\frac{E^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{m^2\pi n}{eE}}}{n^2} \tag{4.93}$$

Επομένως, η απόλυτη τιμή $w(E)$ συναρτήσει του ηλεκτρικού πεδίου E δίνεται :

$$|w(E)| = \frac{\alpha E^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{m^2\pi n}{eE}}}{n^2} \tag{4.94}$$

Όπου $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ και αν εισαχθούν οι τιμές $c, \hbar, \epsilon_0$, που είχαν θεωρηθεί μοναδιαίες $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}$, έτσι ώστε ο συντελεστής του εκθετικού τμήματος να είναι αδιάστατος :

$$|w(E)| = \frac{\alpha E^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{n\pi m^2c^3}{e\hbar E}}}{n^2} \tag{4.95}$$

Και ισοδύναμα,

$$|w(E)| = \frac{\alpha E^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\exp\left(-\frac{n\pi m^2c^3}{e\hbar E}\right) \tag{4.96}$$

Εφόσον $w(E) = \ln {S_0}^2(A)$ η πιθανότητα παραγωγής μηδενικού ζεύγους σωματιδίων προκύπτει :

$${S_0}^2(A) = e^{-|w(E)|} \tag{4.97}$$

Συνεπώς, η πιθανότητα παραγωγής τουλάχιστον ενός ζεύγους σωματιδίων ανά μονάδα χρόνου και ανά μονάδα όγκου προκύπτει :

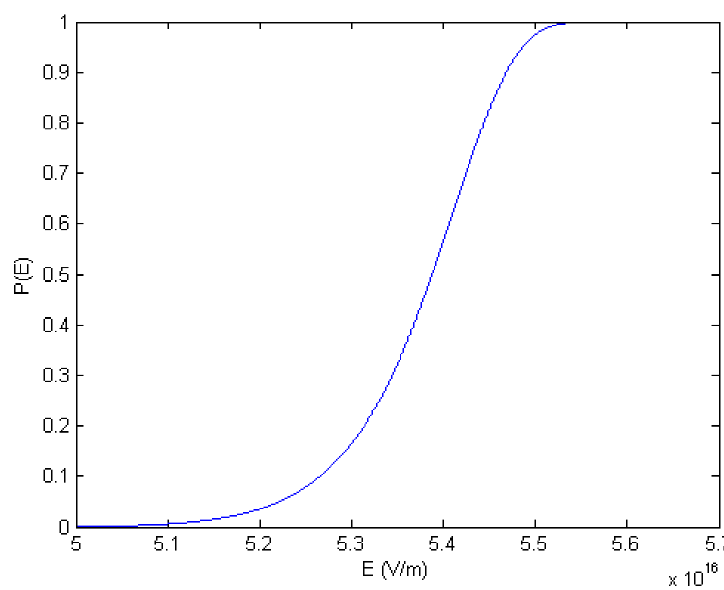
$$P(E) = 1 - {S_0}^2(A) = 1 - e^{-|w(E)|} \tag{4.98}$$

Εφόσον η ολική πιθανότητα πρέπει να αθροίζεται στη μονάδα.

$$P(E) = 1 - \exp\left[-\frac{\alpha E^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\exp\left(-\frac{n\pi m^2c^3}{e\hbar E}\right)\right] \tag{4.99}$$

5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η παραπάνω έκφραση δίνει την πιθανότητα παραγωγής ζευγών σωματιδίων-αντισωματιδίων, κατά την εφαρμογή ηλεκτρικού πεδίου E στο κενό. Όπως αναμενόταν, η πιθανότητα αυτή αυξάνεται, καθώς αυξάνεται η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου. Παρατηρείται επίσης, μια εξάρτηση της πιθανότητας από την τιμή του e^{-m^2}. Λόγω της μικρής μάζας των υπό μελέτη σωματιδίων - ηλεκτρόνια, ποζιτρόνια- αναμένεται η τιμή του ηλεκτρικού πεδίου για την οποία η πιθανότητα καθίσταται υπολογίσιμη, να είναι πολύ μεγάλη. Εξ' αιτίας της δυναμοσειράς, δεν είναι δυνατή η εξαγωγή ενός αναλυτικού τύπου για την τιμή του πεδίου συναρτήσει της ζητούμενης πιθανότητας. Παρ' όλ' αυτά είναι δυνατό να σχεδιαστεί, με τη βοήθεια του προγραμματιστικού μαθηματικού περιβάλλοντος "Matlab",η γραφική αναπαράσταση της πιθανότητας συναρτήσει της τιμής του ηλεκτρικού πεδίου.



Φιγ. 5.1: Η πιθανότητα συναρτήσει του πεδίου

Μπορεί επομένως, να βρεθεί η τάξη μεγέθους του πεδίου, έτσι ώστε η τιμή της πιθανότητας να φτάσει στα επιθυμητά επίπεδα. Το κλάσμα του εκθετικού παράγοντα δίνει την τιμή :

$$\left(\frac{\pi m^2 c}{e\hbar}\right) = \left(\frac{\pi (m_e c^2)^2}{ec\hbar}\right) = 4,15722 * 10^{18}\frac{V}{m} \tag{5.1}$$

Από την γραφική παράσταση και από τον υπολογισμό του παραπάνω λόγου, παρατηρείται ότι για να γίνει σημαντική η πιθανότητα, το πεδίο πρέπει να είναι της τάξης μεγέθους :

$$E \sim 10^{16}\frac{V}{m} \tag{5.2}$$

Συγκεκριμένα, μπορεί να αναζητηθεί αριθμητικά η τιμή σύγκλισης του πεδίου για την οποία η τιμή της πιθανότητας λαμβάνει τις αντίστοιχες τιμές. Για παράδειγμα προκύπτει για τις πιθανότητες :

$$P(E) = 60\% : E = 5.4 * 10^{16}\tfrac{V}{m}$$

$$P(E) = 90\% : E = 5.5 * 10^{16}\tfrac{V}{m}$$

Η μέθοδος σύγκλισης που χρησιμοποιείται, δεν επιτρέπει μεγαλύτερη ακρίβεια στον υπολογισμό της έντασης του πεδίου. Όμως, τα παραπάνω αποτελέσματα είναι αντιπροσωπευτικά. Ένα ηλεκτρικό πεδίο της παραπάνω τάξης δεν είναι επιτεύξιμο με τα σημερινά επιστημονικά μέσα που διατίθονται. Για παράδειγμα, ακόμη και στις πειραματικές διατάξεις των υψηλότερων επιστημονικών δυνατοτήτων, το ηλεκτρικό πεδίο αποτυγχάνει να ξεπεράσει το φράγμα των :

$$E \sim 10\frac{GV}{m} = E \sim 10^{10}\frac{V}{m} \tag{5.3}$$

Είναι επομένως, αναμενόμενο να μην υπάρχουν πειραματικά αποτελέσματα που να επιβεβαιώνουν την θεωρία του Schwinger, καθώς η τιμή του ηλεκτρικού πεδίου, που είναι απαραίτητο να εφαρμοστεί, για να καταστήσει την πιθανότητα εμφάνισης ζευγών υπολογίσιμη, είναι 10^6 φορές μεγαλύτερη των μεγίστων τιμών πεδίου που είναι δυνατόν να επιτευχθούν σύγχρονα πειραματικά μέσα.

Παρόλο που η παραπάνω μελέτη καθιστά εμφανή τη δυσκολία κατασκευής πειραματικών διατάξεων που θα συντελούσαν στην επιβεβαίωση των αποτελεσμάτων που υπολογίστηκαν, οι σύγχρονες πειραματικές διατάξεις laser αποθέτουν νέες ελπίδες. Επιτυγχάνοντας όλο και υψηλότερες ενεργειακές στάθμες, τα laser , και συγκεκριμένα τα laser ελευθέρων ηλεκτρονίων (Free Electron Laser) μπορούν να αποτελέσουν τον βασικότερο υποψήφιο για τον πειραματικό έλεγχο του φαινομένου Schwinger.

Οι σύγχρονες διατάξεις οπτικών και υπερύθρων laser αυξάνουν ολοένα και περισσότερο την ισχύ στην οποία λειτουργούν, κατά πολλές τάξεις μεγέθους. Συγκεκριμένα, τα laser ελευθέρων ηλεκτρονίων που χρησιμοποιούνται σε μεγάλα πειράματα, όπως στον γραμμικό επιταχυντή ηλεκτρονίων - ποζιτρονίων του πειράματος DESY και στον επιταχυντή SLAC του CERN περιέχουν συνεχείς δέσμες φωτονίων, με ενέργειες που ξεπερνούν τα μερικά keV, αποθέτοντας μεγάλα ποσά ισχύος σε μικρά χρονικά διαστήματα. Υπό αυτές τις νέες πειραματικές δυνατότητες, είναι αναγκαία η μελέτη του φαινομένου Schwinger με περισσότερες λεπτομέρειες, που να λαμβάνουν υπ΄ όψιν τα χαρακτηριστικά των παραπάνω διατάξεων.

Η σπουδαιότητα του φαινομένου Schwinger και της πειραματικής του επιβεβαίωσης είναι ουσιαστικότερη από αυτή που διαφαίνεται με την πρώτη εντύπωση. Μέχρι στιγμής, τα πειραματικά δεδομένα έρχονται σε πλήρη συμφωνία με τους θεωρητικούς υπολογισμούς επιβεβαιώνοντας την QED θεωρία, με ακρίβεια που φτάνει μέχρι την τάξη 10^{-12}, όπως για παράδειγμα στον υπολογισμό της ανώμαλης μαγνητικής ροπής του ηλεκτρονίου και του μιονίου. Η πειραματική επιβεβαίωση της εξίσωσης Schwinger, θα οδηγούσε στην άμεση επαλήθευση της εξίσωσης Dirac. Επομένως, οι θεωρητικές μελέτες που στηρίζονται στις παραδοχές των ανωτέρω θεωριών, θα εξασφάλιζαν την ισχύ των αποτελεσμάτων τους. Θα καθίστατο δυνατή η ασφαλής επαλήθευση των αποτελεσμάτων που εξάγονται από τη μη διαταρακτική μελέτη των εξισώσεων της QED , χάρη στη δυνατότητα σύγκρισης με τα νέα πειραματικά δεδομένα. Η σημασία του φαινομένου Schwingerέγκειται στο γεγονός ότι αποτελεί ακριβή απόρροια της εξίσωσης Dirac, χωρίς να απαιτείται η συμμετοχή της θεωρίας διαταραχών για τον υπολογισμό της πιθανότητας. Συνεπώς, το τελικό αποτέλεσμα ανταποκρίνεται στην ακριβή φύση της Σχετισκιστικής Κβαντομηχανικής, αντικατοπτρίζοντας τις φυσικές διεργασίες, χωρίς τη μεσολάβηση προσεγγιστικών απλοποιήσεων, που πλήττουν την ακρίβεια της μεθόδου. Είναι, επομένως ουσιαστικής σημασίας η πειραματική επιβεβαίωση του, από την οποία δεν απέχουμε πολύ, αν η ισχύς των συνεχώς αναπτυσσόμενων laser συνεχίσει να αυξάνεται με τον ίδιο ρυθμό.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Α′. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Ιδιότητες ίχνους πίνακα :

1. $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$
2. $tr(cA) = ctr(A)$,   γραμμικότητα ίχνους
3. $tr(AB) = tr(BA)$,   σχέση μετάθεσης
4. $tr(P^{-1}AP) = tr(A)$
5. $tr(A^{\tau}) = tr(A)$
6. $tr(A) =< x|A|x >$,   για x ορθοκανονικοποιημένο σύστημα συντεταγμένων

Ιδιότητες ορίζουσας πίνακα:

1. $det(AB) = det(A)det(B)$
2. $det(A^{\tau}) = det(A)$
3. $det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$
4. $det(e^{A}) = e^{tr(A)}$
5. $det(A) = e^{tr(\ln A)}$
6. $det(e^{A}) = e^{det(A)}$

Β΄. ΘΕΩΡΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΙΠΩΝ

Το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων αποτελεί γενίκευση του θεωρήματος του Cauchy. Τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα είναι ένα αποτέλεσμα της μιγαδικής ανάλυσης, που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό σύνθετων ολοκληρωμάτων, που συχνά δεν επιδέχονται άλλο τρόπο επίλυσης.

Θεώρημα 1ο :

Έστω f ολόμορφη συνάρτηση σε όλο το $\mathbb{C}$ εκτός του σημείου z_0. Αν το ανάπτυγμα κατά Laurent της f περιέχει πεπερασμένο πλήθος όρων που μηδενίζουν τον παρανομαστή για $z = z_0$ το z_0 ονομάζεται πόλος της f τάξεως k, όπου k το πλήθος των όρων αυτών. Το z_0 ονομάζεται απλός πόλος αν $k = 1$. Αν η f έχει απλό πόλο στο z_0, το ολοκλήρωμά της πάνω σε οποιαδήποτε κλειστή καμπύλη, που περιέχει τον πόλο αυτό, μπορεί να υπολογιστεί ως εξής :

$$\int_c f(z)dz = 2\pi i Res(f, z_0) \tag{Β΄.1}$$

Ο συντελεστής του a_{-1} όρου του αναπτύγματος ονομάζεται ολοκληρωτικό υπόλοιπο της συνάρτησης f. Αν η f έχει παραπάνω από έναν πόλο, το ολοκλήρωμα υπολογίζεται ως το άθροισμα των ολοκληρωτικών υπολοίπων των επιμέρους πόλων :

$$\int_c f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f, z_k) \tag{Β΄.2}$$

Αν η f έχει πόλο k τάξης στο z_0, η τιμή του ολοκληρωτικού υπολοίπου προκύπτει :

$$Res(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[(z - z_0)^k f(z) \right] \tag{Β΄.3}$$

Θεώρημα 2ο :

Έστω $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ ρητή συνάρτηση με βαθμ$Q(x) \geq$ βαθμ$P(x) + 1$. Αν $f(z) = e^{iaz}R(z), a > 0$ τότε τα παρακάτω ολοκληρώματα υπολογίζονται ως εξής :

$$\begin{aligned} \int_{\infty}^{\infty} R(x)\cos(ax)dx &= -2\pi \sum_{i=1}^{k} \operatorname{Im} Res(f, z_i) \\ \int_{\infty}^{\infty} R(x)\sin(ax)dx &= 2\pi \sum_{i=1}^{k} \operatorname{Re} Res(f, z_i) \end{aligned} \tag{Β΄.4}$$

Θεώρημα 3ο :

Έστω f ολόμορφη συνάρτηση στο $\mathbb{C}$ εκτός από τα πεπερασμένου πλήθους σημεία $z_1, \ldots, z_m$ που αποτελούν πόλους της συνάρτησης. Έστω οτι υπάρχουν $m, R > 0$ τέτοιοι ώστε $|z^2 f(z)| \leq m$ για $|z| > R$. Σ΄ αυτή την περίπτωση, αν οριστεί η συνάρτηση :

$$g(z) = \pi f(z)\cot(\pi z) \tag{Β΄.5}$$

Ισχύει η σχέση :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(z) = -\sum_{k=1}^{m} Res(g(z), z_k) \tag{Β΄.6}$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Wald Robert M., *General relativity*, The University of Chicago Press, Chicago, 1984

[2] Pierre Ramond, *Field Theory : A modern Primer*,Physics Department, University of Florida Gainesville, Florida, Second Edition, 1990

[3] J. J. Sakurai, *Advanced Quantum Mechanics*Addison Wesley, First Edition, 1967

[4] V.B.Berestetskii, E.M, Lifshitz, L.P.Pitaevskii *Quantum Electrodynamics*, Pergamon Press Ltd.,Oxford, England, Second Edition, 1982

[5] Thomas Sander, *Charge Conjugation*, University of Washington, 2007

[6] Claude Itzykson, *Quantum Field Theory* , McGraw-Hill Inc., United States of America, 1980

[7] R.J.Eden P.V.Landshoff D.I.Olive J.C.Polkinghorne, *The Analytic S-Matrix*, Cambridge University Press,Cambridge 1966

[8] Rubin H. Landau, *Quantum Mechanics II : A second Course in Quantum Theory*, Department of Physics, Oregon State University, Corvallis, Oregon 1996

[9] Erwin Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, Ohio State University, Colombus, Ohio, Ninth Edition, 2006

[10] Δ. Χ. Κραββαρίτης, *Εφαρμοσμένη Μιγαδική Ανάλυση*, Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα, 2006

[11] W. Greiner,B. Muller, J. Rafelski, *Quantum Electrodynamics of Strong Fields*, Springer- Verlag Berlin Heidelberg, Germany, 1985

[12] V.S.Popov, *Schwinger Mechanism of Electron : Positron Pair Production by the Field of Optical and X-ray Lasers in Vacuum*, Institut of Theoretical and Experimental Physics, Moscow, 2001