



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗΣ &
ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΕΙΚΟΝΑΣ ΚΑΙ ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ ΠΡΟΤΥΠΩΝ ΣΕ ΠΡΟΪΣΤΟΡΙΚΕΣ ΤΟΙΧΟΓΡΑΦΙΕΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Αθανασίου Ραφαήλ Ε. Μαματσή

Επιβλέπων: Κωσταντίνος Ν. Παπαοδυσσεύς

Αθήνα Ιούνιος 2019



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗΣ &
ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΕΙΚΟΝΑΣ ΚΑΙ ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ ΠΡΟΤΥΠΩΝ ΣΕ ΠΡΟΪΣΤΟΡΙΚΕΣ ΤΟΙΧΟΓΡΑΦΙΕΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Αθανασίου Ραφαήλ Ε. Μαματσή

Τριμελής Επιτροπή : Κωσταντίνος Ν. Παπαοδυσσεύς

Ηλίας Β. Κουκούτσης

Γεώργιος Γ. Φικιώρης

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 19^η Ιουνίου 2019

.....

.....

.....

Κ. Παπαοδυσσεύς

Η. Κουκούτσης

Γ. Φικιώρης

Καθ. ΣΗΜΜΥ ΕΜΠ

Επικ.Καθ. ΣΗΜΜΥ ΕΜΠ

Καθ. ΣΗΜΜΥ ΕΜΠ

.....
Αθανάσιος Ραφαήλ Ε. Μαματσής

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Copyright © Αθανάσιος Ραφαήλ Ε. Μαματσής

Copyright © Κωσταντίνος Ν. Παπαοδυσσεύς

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν στη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς το συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν το συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

*Στον κ. Παπαοδυσσέα,
στην οικογένεια μου,
στον κ. Σταύρο,
στην κ. Φιλία, στην κ. Ιωάννα
στη Τζένη, στο Γιάννη,
σε όλους όσους με στήριξαν.*

Περίληψη

Ο στόχος της διπλωματικής εργασίας είναι ο εντοπισμός του τρόπου κατασκευής και σχεδίασης δύο φημισμένων τοιχογραφιών της Ύστερης εποχής του Χαλκού (περί τα 1620 προ Χριστού), αίτινες έχουν ανασκαφεί στο Ακρωτήρι Θήρας. Η διπλωματική πραγματοποιείται σε συνέχεια και επί τη βάση των δύο προηγούμενων διατριβών [1], [2] και των δημοσιεύσεων της ερευνητικής ομάδας σε αυτό το πεδίο ([3] έως [11]). Τα στάδια της παρούσας εργασίας είναι τα εξής:

1. Μελέτη θεμελιωδών μαθηματικών εννοιών της μαθηματικής ανάλυσης και των κωνικών τομών.
2. Ψηφιακή επεξεργασία των εικόνων των προς μελέτη τοιχογραφιών, με σκοπό την εξαγωγή του περιγράμματος των θεματικών μορφών κάθε τοιχογραφίας σε κατάλληλη μορφή, καθώς και της ανάλυσης τους σε pixels ανά cm.
3. Διατύπωση της ουσιώδους υποθέσεως περί χρήσεως γεωμετρικών καμπυλογράφων στη σχεδίαση των δύο αυτών τοιχογραφιών.
4. Επιλογή πιθανών γεωμετρικών προτύπων που παρήγαγαν τους καμπυλογράφους, με κριτήρια αρχαιολογικής και ιστορικής φύσεως, σε πλήρη συμφωνία με τις προηγούμενες δημοσιεύσεις.
5. Ανάλυση μίας εξαντλητικής μεθόδου προσαρμογής καμπυλών, που προσφέρει την αδιαμφισβήτητα βέλτιστη σχετική θέση τους, κατά την έννοια των ελαχίστων τετραγώνων.
6. Βάσει όλων των προηγούμενων, επιβεβαίωση/προσδιορισμός των ακριβών παραμέτρων των καμπυλογράφων.
7. Θεμελίωση της υπόθεσης περί χρήσεως καμπυλογράφων, με έμμεση αναπαραγωγή του τρόπου σχεδίασης των περιγραμμάτων των θεματικών ενοτήτων των τοιχογραφιών αυτών. Είναι αξιοσημείωτο ότι αυτοί οι γεωμετρικοί οδηγοί ήταν πολύ προηγμένοι για την εποχή τους, αφού τα γεωμετρικά πρότυπα στα οποία αντιστοιχούν, αποδίδονταν μέχρι σήμερα σε μαθηματικούς της κλασικής εποχής, μια χιλιετία μετά τον πολιτισμό του Ακρωτηρίου. Επίσης, προσδιορίζονται και τα ακριβή όρια των μονοκονδυλιών επί των ζωγραφισμένων θεματικών ενοτήτων, καθώς και των ορίων των καμπυλογράφων που τα παρήγαγαν. Τα σχετικά αποτελέσματα μαζί με οπτική απόδοση τους επί των εικόνων των τοιχογραφιών παρουσιάζονται στο κεφάλαιο 6.3.

Λέξεις κλειδιά: Αναγνώριση προτύπων, αρχαιομετρία, καμπυλογράφοι, ψηφιακή επεξεργασία εικόνας, προσαρμογή καμπυλών, εφαρμογές πληροφορικής σε προϊστορική αρχαιολογία

Abstract

The main purpose of this dissertation is to find the method of drawing of two celebrated frescoes during the Late Bronze Age, which have been excavated at Akrotiri, Thera. The dissertation is based on two PhDs [1], [2] and nine publications in international scientific Journals of the research team in this field ([3] to [11]). The present work consists of the following parts:

- 1) Introduction to fundamental notions and results from Calculus and analytic geometry.
- 2) Digital image processing of the frescoes' images, in order to extract the contour of all figures appearing in these paintings, in an appropriate digital form. Determination of the resolution of every studied image, in pixels per cm.
- 3) Formulation of the hypothesis that the artists had used stencils /guides to draw these frescoes.
- 4) Selection of possible geometric prototypes–guides, according to historical and archaeological criteria.
- 5) An in–depth explanation of an exhaustive curve fitting method, which ensures that two curves are optimally fitted, in the least square sense.
- 6) After all these steps, the parameters of the stencils are confirmed and/or computed.
- 7) The hypothesis that geometric stencils have been used for the drawing of these wall paintings is justified. It is worthwhile noticing that these geometric guides were highly advanced for the era and correspond to geometric entities, which till now were attributed to famous mathematicians of the classical era, more than 1000 years later than the Akrotiri civilization.

Additionally, the exact limits of these guides are determined, along with the corresponding limits of the drawn contours with which they were drawn. All these results are depicted on the images of the frescoes in Chapter 6.3.

Keywords: Pattern recognition, archaeometry, stencils, digital image processing, curve fitting, applications of computer engineering in prehistoric archaeology

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους όσους με στήριξαν σε αυτήν την προσπάθεια και με βοήθησαν να ολοκληρώσω την εργασία αυτή.

Αρχικά και πάνω από όλα θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή κύριο Κωσταντίνο Παπαοδυσσέα. Είναι ο άνθρωπος ο οποίος με προέτρεψε να ασχοληθώ με αυτό το θέμα, ενώ αρχικά είχα μια διαφορετική άποψη και μου ξύπνησε όλη αυτή την αγάπη για την ιστορία και την αρχαιολογία, που είχε μείνει ξεχασμένη σε κάποιο σημείο του εσωτέρου εγώ μετά την εισαγωγή μου στη σχολή. Σε όλη τη διάρκεια του έτους στάθηκε δίπλα μου και με στήριξε σε όλη την προσπάθεια, προσφέροντας απλόχερα πολύτιμες συμβουλές τόσο σε ακαδημαϊκό όσο και στα υπόλοιπα επίπεδα, για τις οποίες τον ευχαριστώ πάρα πολύ. Επίσης τον ευχαριστώ εκ βάθους καρδιάς για την καθημερινή συνεργασία που είχαμε, για τις άπειρες στιγμές γέλιου που είχαμε εκείνα τα ατελείωτα βράδια που περνούσαμε, ψάχνοντας την έμπνευση των καλλιτεχνών 3650 χρόνων πριν στις τοιχογραφίες του Ακρωτηρίου. Η συμπόρευση μαζί του έχει μόνο οφέλη για μένα τόσο επιστημονικά, ψυχικά και πνευματικά.

Σε αυτό το σημείο θα ήθελα να ευχαριστήσω και τους άλλους δύο επιβλέποντες της εργασίας, τον κ. Κουκούτση και τον κ. Φικιώρη. Όποτε τους χρειάστηκα ήταν δίπλα μου και οι συμβουλές τους με οδηγούσαν στην σωστή κατεύθυνση.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου, την μητέρα μου και τον πατέρα μου για τα πάντα. Ειδικότερα στα πλαίσια αυτής της εργασίας, τους ευχαριστώ για την υπομονή που έκαναν όλον αυτόν τον καιρό όταν επέστρεφα ξημερώματα και πάντα είχαν στο νου τους να δουν αν είμαι καλά και αν χρειαζόμουν κάτι. Ουσιώδης ήταν η συμπαράσταση και η στήριξη τους για να ξεπεράσω όλα τα τέλματα που συναντούσα κατά τη διάρκεια αυτής της προσπάθειας. Επίσης τα αδέρφια μου, Ειρήνη, Αντιγόνη και Ιγνάτιο για όλη τους τη στήριξη προς το μέρος μου και την υπομονή που έκαναν.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Σταύρο, την κ. Φιλία, την κ. Ιωάννα, την Τζένη και τον Γιάννη. Οι ίδιοι γνωρίζουν το γιατί και ξέρουν ότι τους οφείλω πολλά.

Περιεχόμενα

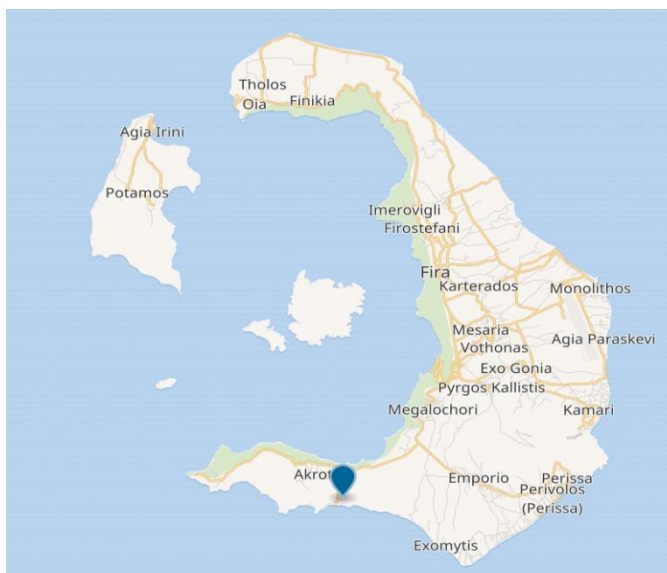
Κεφάλαιο 1:Εισαγωγή	1
1.1 Ο προϊστορικός οικισμός του Ακρωτηρίου Θήρας την Ύστερη Εποχή του Χαλκού	1
1.2 Οι φημισμένες τοιχογραφίες της ανασκαφής στο Ακρωτήρι Θήρας	2
1.3 Η σημασία του εντοπισμού του τρόπου κατασκευής των όλων τοιχογραφιών του Ακρωτηρίου Θήρας	7
Κεφάλαιο 2: Περί καμπυλών και κωνικών τομών.....	9
2.1 Περί καμπυλών.....	9
Ορισμός καμπύλης στο \mathbb{R}^n και επιβατική ακτίνα τυχόντος σημείου αυτής	9
Ορισμός συνεχούς και ομαλής καμπύλης	10
Εφαπτόμενο διάνυσμα καμπύλης C^1 στο \mathbb{R}^n	11
Απόδειξη της εφαπτομένης καμπύλης στο \mathbb{R}^2 : Σχέση μοναδιαίου διανύσματος l και $r'(t)$	12
Μήκος ομαλής καμπύλης και τόξου της στο \mathbb{R}^2	14
Παραμετρική παράσταση ομαλής καμπύλης C στο \mathbb{R}^2 , με ανεξάρτητη μεταβλητή το μήκος της, έστω s	15
Η περίπτωση τυχούσας καμπύλης: Ο εγγύτατος κύκλος σε	19
τυχόν σημείο της	19
Η καμπυλότητα τυχούσας καμπύλης συναρτήσσει οποιασδήποτε ανεξάρτητης μεταβλητής t	25
2.2 Περί κωνικών τομών.....	29
Περί ελλείψεως	29
Περί υπερβολής.....	31
Περί παραβολής	34
Κεφάλαιο 3: Ψηφιακή επεξεργασία των φωτογραφιών των προς μελέτη τοιχογραφιών	37
3.1.Εύρεση αναλύσεως της κάθε εικόνας σε pixels ανά cm.....	37
Περιγραφή βημάτων	37
Αναλυτική περιγραφή βήματος 4.....	38

Κεφάλαιο 4: Πρώτος χωρισμός των περιγραμμάτων των θεματικών ενοτήτων των τοιχογραφιών σε τμήματα	42
4.1 Ορισμός του αντικειμένου περιγράμματος	42
4.2 Ορισμός του τμήματος αντικειμένου περιγράμματος	45
4.3 Μια πρώτη εκτίμηση των σημείων αλλαγής τμημάτων αντικειμένου	50
Κεφάλαιο 5: Επιλογή ενός συνόλου stencils που πιθανώς χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή των τοιχογραφιών του Ακρωτηρίου	62
5.1 Αρχική επιλογή ενός συνόλου γεωμετρικών προτύπων στα οποία αντιστοιχούν οι οδηγοί, βάσει ιστορικής και αρχαιολογικής σκοπιάς...62	
5.2 Σύντομη παρουσίαση κωνικών τομών και γραμμικής σπείρας	64
5.3 Συνοπτική ιστορική ανασκόπηση σχετικά με τα επιλεγέντα γεωμετρικά πρότυπα.....	70
Κεφάλαιο 6: Ακριβής εντοπισμός των γεωμετρικών καμπυλογράφων- stencils καθώς και των τμημάτων αντικειμένων που αντιστοιχούν σε αυτούς.....	72
6.1 Μια εξαντλητική μέθοδος προσαρμογής καμπυλών	72
6.2 Ακριβής Προσδιορισμός των καμπυλογράφων που χρησιμοποιήθηκαν για το σχεδιασμό των τοιχογραφιών.....	86
6.3 Ακριβής προσδιορισμός των τμημάτων αντικειμένων που αντιστοιχούν στους ευρεθέντες καμπυλογράφους	90
Βιβλιογραφία	103

Κεφάλαιο 1:Εισαγωγή

1.1 Ο προϊστορικός οικισμός του Ακρωτηρίου Θήρας την Ύστερη Εποχή του Χαλκού

Ο οικισμός του Ακρωτηρίου της Θήρας (ιδε εικόνα 1.1), όστις ήκμασε στα μέσα του 17^{ου} προ Χριστού αιώνα, θάφτηκε κάτω από ένα παχύ στρώμα ηφαιστειακής τέφρας άνω των 15 μέτρων, εξαιτίας μιας τεράστιας έκρηξης που συνέβη στο νησί στο διάστημα από το 1630 έως το 1600 προ Χριστού, μετά από νεότερες μελέτες [5]. Αυτό το κολοσσιαίο μεγέθους γεωλογικό συμβάν και ο τρόπος με τον οποίο έγινε, παγίδεψε στον ερειπωμένο οικισμό υλικό και στοιχεία που σήμερα δίδουν τη δυνατότητα να σχηματιστεί μια σχετικά ακριβής εικόνα της κοινωνίας στο Αιγαίο, κατά την περίοδο της Ύστερης Εποχής του Χαλκού (1600–1100 προ Χριστού). Οι ανασκαφές αποκάλυψαν τον οικισμό, ο οποίος αναπτύχθηκε εκεί από τα μέσα της 5^{ης} χιλιετίας προ Χριστού, στο τέλος της Νεολιθικής εποχής, έχοντας μια ιστορία 4000 χρόνων, μέχρι την έκρηξη του ηφαιστείου περίπου το 1600 προ Χριστού. Τα ευρήματα έχουν προσελκύσει το διεθνές ενδιαφέρον πολλών επιστημονικών κλάδων [12,13]. Από τα πιο σημαντικά ευρήματα είναι οι καλά διατηρημένες τοιχογραφίες, οι οποίες εκτός από τη μεγάλη διαχρονική καλλιτεχνική τους αξία, παρέχουν πληροφορίες για το επίπεδο της πολιτισμικής, πνευματικής και κοινωνικής ζωής στο Αιγαίο της Ύστερης Εποχής του Χαλκού.



Εικόνα 1.1.Τοποθεσία Ακρωτηρίου στο νησί της Θήρας.

1.2 Οι φημισμένες τοιχογραφίες της ανασκαφής στο Ακρωτήρι Θήρας

Οι τοιχογραφίες του Ακρωτηρίου που έχουν αποκατασταθεί μέχρι σήμερα, αποκαλύπτουν πολυποίκιλα θέματα όπως αφηρημένα σχέδια, γεωμετρικά σχήματα, άψυχα αντικείμενα και κατασκευές, φυτά, ζώα και ανθρώπινες μορφές. Μάλιστα, η ευρεία διάδοση των τοιχογραφιών στα κτήρια του Ακρωτηρίου, μαρτυρά ότι η τέχνη στη Θήρα ήταν μέρος της ζωής μιας ευρείας και εύπορης κοινωνικής ομάδας.

Ο καλλιτέχνης χρησιμοποιούσε χρώματα για να εκφράσει τις ιδέες του και να τις αποτυπώσει πάνω στο ασβεστοκονίαμα. Η επιλογή του θέματος κάθε τοιχογραφίας εξαρτιόταν από το κτήριο, τους ανθρώπους στους οποίους απευθυνόταν και από το χρόνο που είχε ζωγραφισθεί ή κατά τον οποίο έμελλε να παρουσιαστεί. Η άριστη διατήρηση και η πειστική αποκατάσταση των τοιχογραφιών της Θήρας, έδωσε το έναυσμα σε πολλούς επιστήμονες, πολλών διαφορετικών κλάδων να ερευνήσουν τις τοιχογραφίες, αναζητώντας και άλλες πληροφορίες πέραν των καλλιτεχνικών που αφορούν τόσο στο πολιτιστικό όσο και στο τεχνολογικό και γνωσιολογικό επίπεδο των κατοίκων του Ακρωτηρίου εκείνης της εποχής.

Ο οικισμός της Ύστερης εποχής του Χαλκού του Ακρωτηρίου που έχει ανασκαφεί έως σήμερα, περιλαμβάνει μεταξύ άλλων και τα εξής κτήρια: την Οικία των Γυναικών, τη Δυτική Οικία, το Συγκρότημα Δ, το Κτήριο Β, την Ξεστή 3 και την Ξεστή 4. Οι τοιχογραφίες που μελετήθηκαν στην παρούσα εργασία, ανήκουν στην Οικία των Γυναικών και στην Ξεστή 3 και είναι τα «Παγκράτια» (ίδε εικόνες 1.2 και 1.3 αντίστοιχα για τις τοποθεσίες) και η δεύτερη/μεσαία μορφή των «Λατρευτριών». Ακολουθεί σύντομη παρουσίαση τους, παραπέμποντας τους αναγνώστες στα [12,13] για εκτενή ανάλυση.



Εικόνα 1.2. Κάτοψη της ανασκαφής του οικισμού του Ακρωτηρίου όπου διακρίνεται το «Σπίτι των Γυναικών», στα βόρεια και εστιασμένο άνω αριστερά.



Εικόνα 1.3. Κάτοψη της ανασκαφής του οικισμού του Ακρωτηρίου, όπου φαίνεται η «Ξεστή 3» στα νότια και δυτικά και σε εστίαση άνω αριστερά.

1) «Παγκράτια»



Είναι μια σύνθεση που βρέθηκε στο νότιο τοίχο του δυτικού τμήματος της Οικίας των Γυναικών. Αναπαριστά σε υπερφυσικό μέγεθος το φυτό Παγκράτιο που είναι πολύ γνωστό ως «Κρινάκι της θάλασσας». Φύεται ακόμα και σήμερα σε πολλές παραλίες της Θήρας, της Σύρου, των Κυκλάδων και άλλων νησιών του Αιγαίου, όπως της Λέσβου.

2) «Λατρεύτριες»



Είναι μια σύνθεση που αποτελείται από τρεις γυναίκες. Εντοπίζεται στο ισόγειο της Ξεστής 3, στο δωμάτιο των Καθαρμών στο βόρειο τοίχο. Το ένα της χέρι υποστηρίζει το κεφάλι, που γέρνει προς τα εμπρός, ενώ το άλλο της χέρι δείχνει προς το πόδι της και συγκεκριμένα το δάχτυλο της που αιμορραγεί. Η όλη της στάση υποδηλώνει λύπη και πόνο για το τραυματισμένο ακροδάχτυλο [12].

Στην αρχή αυτής της προσπάθειας παρατηρήθηκε αξιοσημείωτη σταθερότητα σε πολλές γραμμές, κυρίως περιγράμματα, με ιδιαίτερη ομαλότητα να τις χαρακτηρίζει. Επιπλέον εντοπίστηκε σημαντική επαναληψιμότητα σε πολλά από αυτά τα ζωγραφισμένα περιγράμματα. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αυτής της επαναληψιμότητας αποτελεί ο πρώτος από αριστερά μίσχος της πρώτης συστάδας φυτών των Παγκρατίων με τον πρώτο από αριστερά μίσχο της δεύτερης συστάδας φυτών, ο δεύτερος και τρίτος μίσχος των δύο συστάδων καθώς και οι μπούκλες των μαλλιών στη «μεσαία Λατρεύτρια». Η ομοιότητα σε αυτά τα έξι περιγράμματα για τα Παγκράτια και στα τρία της «μεσαίας Λατρεύτριας» οδήγησαν στην έρευνα της πιθανότητας να έχουν κατασκευαστεί και αυτά από οδηγούς, όπως και άλλες τοιχογραφίες που αναλύονται στις διατριβές [1,2] και στις δημοσιεύσεις ([3] έως [11]).

1.3 Η σημασία του εντοπισμού του τρόπου κατασκευής των όλων τοιχογραφιών του Ακρωτηρίου Θήρας

Ένας από τους σκοπούς της παρούσας εργασίας είναι η συμβολή της στην εύρεση του τρόπου κατασκευής των ανωτέρω τοιχογραφιών. Ο εντοπισμός της μεθόδου σχεδίασης των τοιχογραφιών δύναται να συνεπικουρήσει στην κατανόηση εξαιρετικά σημαντικών πτυχών του πολιτισμικού, πρωτοεπιστημονικού και τεχνολογικού επιπέδου αυτού του λαμπρού πολιτισμού της Ύστερης Εποχής του Χαλκού που ήκμασε στο Αιγαίο. Στην παρούσα εργασία, ενισχύονται τα αποδεικτικά στοιχεία για την ύπαρξη λίαν σημαντικής γεωμετρικής αίσθησης στον οικισμό και η γνώση πολλών γεωμετρικών σχημάτων. Τα γεωμετρικά σχήματα αυτά θεωρούταν ότι είχαν ανακαλυφθεί έως και 1300 χρόνια αργότερα [15,16,17,18,19,20,21]. Δηλαδή αποδεικνύεται ξανά, μετά τις διατριβές [1], [2], ότι για την κατασκευή ακόμα δύο τοιχογραφιών του Ακρωτηρίου έχουν χρησιμοποιηθεί καμπυλογράφοι οι οποίοι αντιστοιχούν σε αυτά τα γεωμετρικά σχήματα.

Ο εντοπισμός του τρόπου σχεδίασης των τοιχογραφιών αυτών είναι κεφαλιώδους σημασίας για την Ιστορία του πολιτισμού που ήκμασε στο Αρχιπέλαγος, αφού δύναται να συμβάλει:

- 1) Στην αύξηση των γνώσεων του πολιτισμικού και τεχνολογικού επιπέδου του πολιτισμού στο Αρχιπέλαγος, στη Μεσόγειο, αλλά και στην ευρύτερη περιοχή, κατά την Ύστερη Εποχή του Χαλκού.
- 2) Στην κατανόηση της γένεσης των μαθηματικών και των επιστημών, στο χώρο που κατοικούσαν οι Έλληνες, κατά τους Ιστορικούς χρόνους.
- 3) Στην ανακατασκευή των τοιχογραφιών, ακόμη και στις περιπτώσεις όπου δεν έχουν διασωθεί σημαντικού μεγέθους τμήματα μεταξύ γειτονικών θραυσμάτων, κάτι γενικά δύσκολο ή και αδύνατο, ακόμη και για ειδήμονες στο πεδίο της ανακατασκευής αρχαιολόγους και συντηρητές.

Επιπλέον, με αυτόν τον τρόπο ενισχύεται με σημαντικά επιχειρήματα η άποψη της ερευνητικής ομάδας, του γράφοντος και του επιβλέποντος Κωσταντίνου Παπαοδυσσέα ότι «το μαθηματικό υπόβαθρο του σύγχρονου δυτικού πολιτισμού κείται στο Αιγαίο».

Κεφάλαιο 2: Περί καμπυλών και κωνικών τομών

2.1 Περί καμπυλών

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναλυθούν θεμελιώδεις μαθηματικές έννοιες, μέρος των διατριβών [1], [2] και [24], προκειμένου να κατανοηθεί ευκολότερα η μέθοδος της διδακτορικής διατριβής [2] που αναλύεται στα επόμενα κεφάλαια για την θεμελίωση της χρήσης οδηγών στον οικισμό του Ακρωτηρίου Θήρας.

Ορισμός καμπύλης στο \mathbb{R}^n και επιβατική ακτίνα τυχόντος σημείου αυτής

Καμπύλη στον χώρο \mathbb{R}^n , με $n \in \mathbb{N}$, ονομάζεται το σύνολο των διατεταγμένων n -άδων $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$, κάθε συνιστώσα της οποίας είναι συνάρτηση μόνο μιας ανεξάρτητης μεταβλητής ή παραμέτρου t , η οποία λαμβάνει τιμές σε ένα υποσύνολο του \mathbb{R} , έστω I , με $I \subseteq \mathbb{R}$. Για τις τμηματικώς συνεχείς καμπύλες στο \mathbb{R}^n , το I αποτελεί διάστημα ή ένωση διαστημάτων του \mathbb{R} . Ισοδύναμα, η καμπύλη ορίζεται ως το σύνολο των σημείων που συναποτελούν το πεδίο τιμών μιας απεικόνισης του υποσυνόλου I στο \mathbb{R}^n .

Για τον χώρο \mathbb{R}^2 , όστις θα μας απασχολήσει στην παρούσα εργασία, η καμπύλη είναι το σύνολο των διατεταγμένων δυάδων $(x_1(t), x_2(t)) = (x(t), y(t))$, όπου τα $x(t)$ και $y(t)$ είναι συναρτήσεις με πεδίο ορισμού ένα υποσύνολο του \mathbb{R} , έστω I και πεδίο τιμών την απεικόνιση του υποσυνόλου I στο \mathbb{R}^2 , μέσω των $x(t)$ και $y(t)$.

Για μια τυχούσα καμπύλη $C \subset \mathbb{R}^n$ και για τυχόν σημείο M , με συντεταγμένες $(x_1(t_M), x_2(t_M), \dots, x_n(t_M))$, όπου t_M η ανεξάρτητη παράμετρος της καμπύλης στο σημείο M , ορίζεται η επιβατική ακτίνα της καμπύλης σε αυτό το σημείο, ως εξής:

$$\vec{r}(t_M) = \overrightarrow{OM} = x_1(t_M)\hat{e}_1 + x_2(t_M)\hat{e}_2 + \dots + x_n(t_M)\hat{e}_n$$

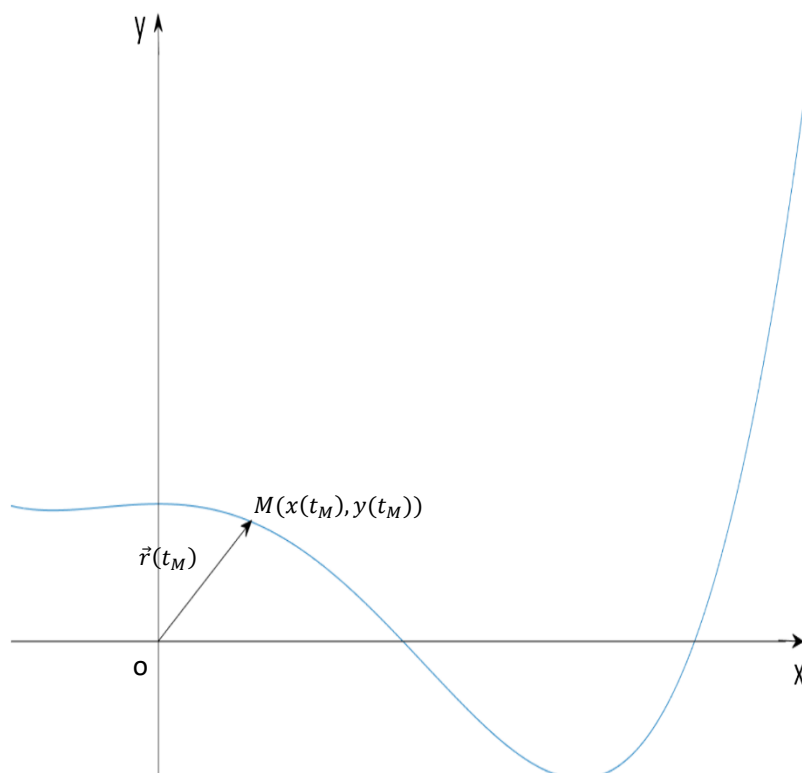
όπου $O(0,0)$ η αρχή των αξόνων του συστήματος συντεταγμένων και $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \dots, \hat{e}_n$ μια ορθοκανονική βάση του χώρου \mathbb{R}^n .

Στο \mathbb{R}^2 αναλυτικότερα, η επιβατική ακτίνα στο τυχόν σημείο M που αντιστοιχεί στην τιμή $t = t_M, t \in I$, είναι

$$\vec{r}(t_M) = \overline{OM} = x(t_M)\hat{i} + y(t_M)\hat{j}$$

όπου έχει χρησιμοποιηθεί ο εναλλακτικός συμβολισμός $\hat{i} = \hat{e}_1$ και $\hat{j} = \hat{e}_2$, για τα μοναδιαία διανύσματα του ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων του \mathbb{R}^2 που επιλέχθηκε. Γενικά το σύμβολο \hat{j} δεσμεύεται ως σύμβολο μοναδιαίου διανύσματος, ενώ το \vec{j} υποδηλοί απλώς διάνυσμα.

Σημειώνεται επίσης ότι για αυτήν την περιγραφή μιας καμπύλης υπάρχει και ο όρος **παραμετρική παράσταση της καμπύλης C** .



Σχήμα 2.1. Καμπύλη στο \mathbb{R}^2 και επιβατική ακτίνα αυτής $\vec{r}(t_M)$

Ορισμός συνεχούς και ομαλής καμπύλης

Έστω καμπύλη $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ ορισμένη σε ένα διάστημα ή σε μια ένωση διαστημάτων $I \in \mathbb{R}$. Η καμπύλη αυτή λέγεται συνεχής στο διάστημα I , όταν όλες οι συνιστώσες της $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις της παραμέτρου t στο I . Μία τέτοια καμπύλη συμβολίζεται

και σαν C_0 . Αν μια καμπύλη είναι ένωση ξένων καμπυλών C_0 , η προκύπτουσα καμπύλη ονομάζεται τμηματικώς συνεχής και συμβολίζεται με C_0^t .

Όταν όλες οι συναρτήσεις $x_i(t), i = 1, 2, \dots, n$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμες στο I , η καμπύλη ονομάζεται ομαλή και συμβολίζεται με C_1 . Η ένωση ξένων, τμηματικά ομαλών καμπυλών C_1 συνιστά μια τμηματικώς ομαλή καμπύλη, η οποία συμβολίζεται συχνά με C_1^t .

Σε ευθύγραμμη επέκταση, εάν όλες οι συντεταγμένες μίας καμπύλης είναι συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο I , τότε η καμπύλη ονομάζεται C_n ομαλή. Η ένωση ξένων C_n καμπυλών λέγεται τμηματικώς ομαλή και συμβολίζεται με C_n^t .

Εφαπτόμενο διάνυσμα καμπύλης C_1 στο \mathbb{R}^n

Ας θεωρηθεί η ομαλή (C_1) καμπύλη C του \mathbb{R}^n με παράμετρο t και $M(x_1(t_M), x_2(t_M), \dots, x_n(t_M)), t_M \in I$ τυχόν σημείο της C .

Τότε το διάνυσμα

$$\vec{r}'(t_M) = \overrightarrow{OM} = x_1'(t_M)\hat{e}_1 + x_2'(t_M)\hat{e}_2 + \dots + x_n'(t_M)\hat{e}_n$$

είναι εφαπτόμενο στην καμπύλη στο σημείο M , όπου $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \dots, \hat{e}_n$ τα μοναδιαία διανύσματα κάποιας ορθοκανονικής βάσης του χώρου \mathbb{R}^n . Θα αποδειχθεί η ορθότητα του ορισμού εν συνεχεία για καμπύλες που κείνται επί του \mathbb{R}^2 .

Αν οι συναρτήσεις $x_i(t), i = 1, 2, \dots, n$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο υποσύνολο I του \mathbb{R} , δύναται να οριστεί η δεύτερη παράγωγος της επιβατικής ακτίνας, μέσω της σχέσεως

$$\vec{r}''(t_M) = x_1''(t_M)\hat{e}_1 + x_2''(t_M)\hat{e}_2 + \dots + x_n''(t_M)\hat{e}_n$$

Με άμεση επέκταση των ανωτέρω ορίζονται οι παράγωγοι ανώτερης τάξης του διανύσματος της επιβατικής ακτίνας.

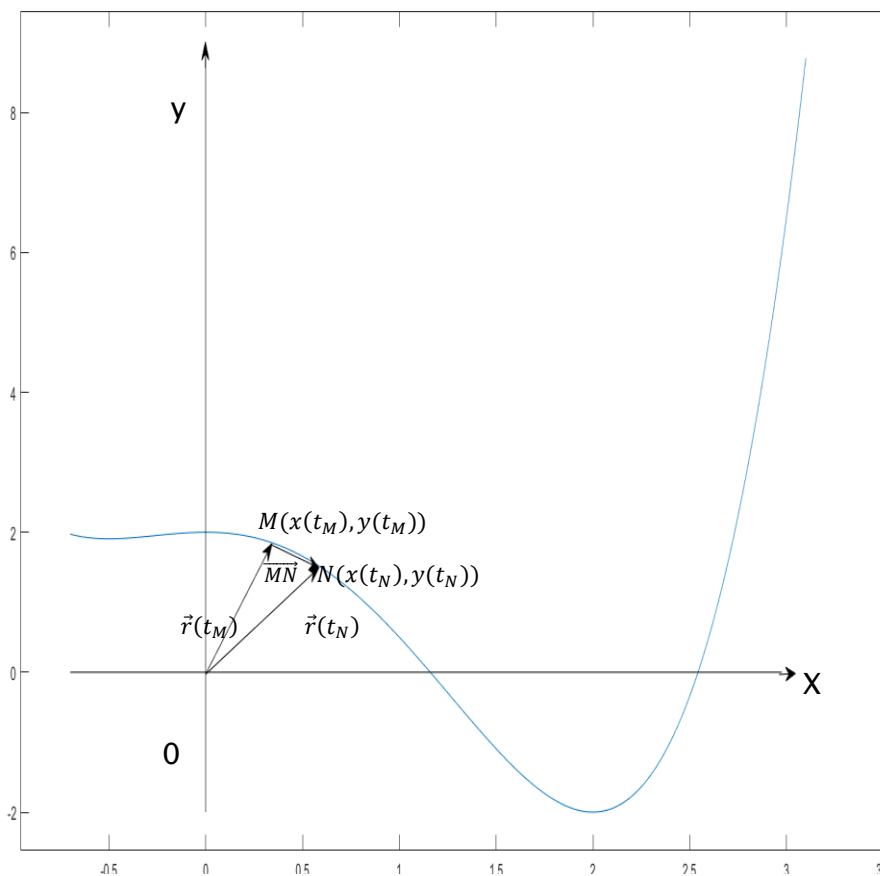
Απόδειξη της εφαπτομένης καμπύλης στο \mathbb{R}^2 : Σχέση μοναδιαίου διανύσματος \hat{l} και $\vec{r}'(t)$

Έστω μία ομαλή διδιάστατη καμπύλη C . Υποτεθήσθω επίσης τα σημεία $M(x(t_M), y(t_M))$ και $N(x(t_N), y(t_N))$ της καμπύλης και τις διανυσματικές ακτίνες τους

$$\vec{r}(t_M) = \overline{OM} = x(t_M)\hat{i} + y(t_M)\hat{j}$$

$$\vec{r}(t_N) = \overline{ON} = x(t_N)\hat{i} + y(t_N)\hat{j}$$

Θα αποδειχθεί ότι καθώς το σημείο N τείνει να συμπίπτει με το M , το διάνυσμα \overline{MN} προσεγγίζει την εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο M , η οποία επίσης προσεγγίζει την καμπύλη C τοπικά περί το σημείο M .



Σχήμα 2.2. Καμπύλη στο \mathbb{R}^2 , επιβατικές ακτίνες δύο σημείων της $\vec{r}(t_M)$ και $\vec{r}(t_N)$, καθώς και το διάνυσμα \overline{MN} .

Το διάνυσμα \overline{MN} προκύπτει με αφαίρεση διανυσμάτων ως εξής :

$$\overline{MN} = \overline{ON} - \overline{OM} = (x(t_N) - x(t_M))\hat{i} + (y(t_N) - y(t_M))\hat{j}$$

Υποτεθήσθω ότι τα σημεία M και N απέχουν στοιχειωδώς ως προς την παράμετρο t, τόσο ώστε να ισχύει $M(x(t_M), y(t_M))$ και $N(x(t_M + dt), y(t_M + dt))$. Η μεταβολή κάθε συνιστώσας του διανύσματος \overline{MN} ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή t δίνεται από τις κάτωθι σχέσεις:

$$\frac{(x(t_M + dt) - x(t_M))}{dt}$$

για την x συντεταγμένη ή τετμημένη και

$$\frac{(y(t_M + dt) - y(t_M))}{dt}$$

για την y-συντεταγμένη ή τεταγμένη.

Όταν η διαφορά dt μεταξύ των τιμών των παραμέτρων στα M και N, δηλαδή t_M και t_N αντιστοίχως, τείνει στο μηδέν τότε οι άνωθεν σχέσεις γράφονται ως εξής:

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{(x(t_M + dt) - x(t_M))}{dt}$$

Και

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{(y(t_M + dt) - y(t_M))}{dt}$$

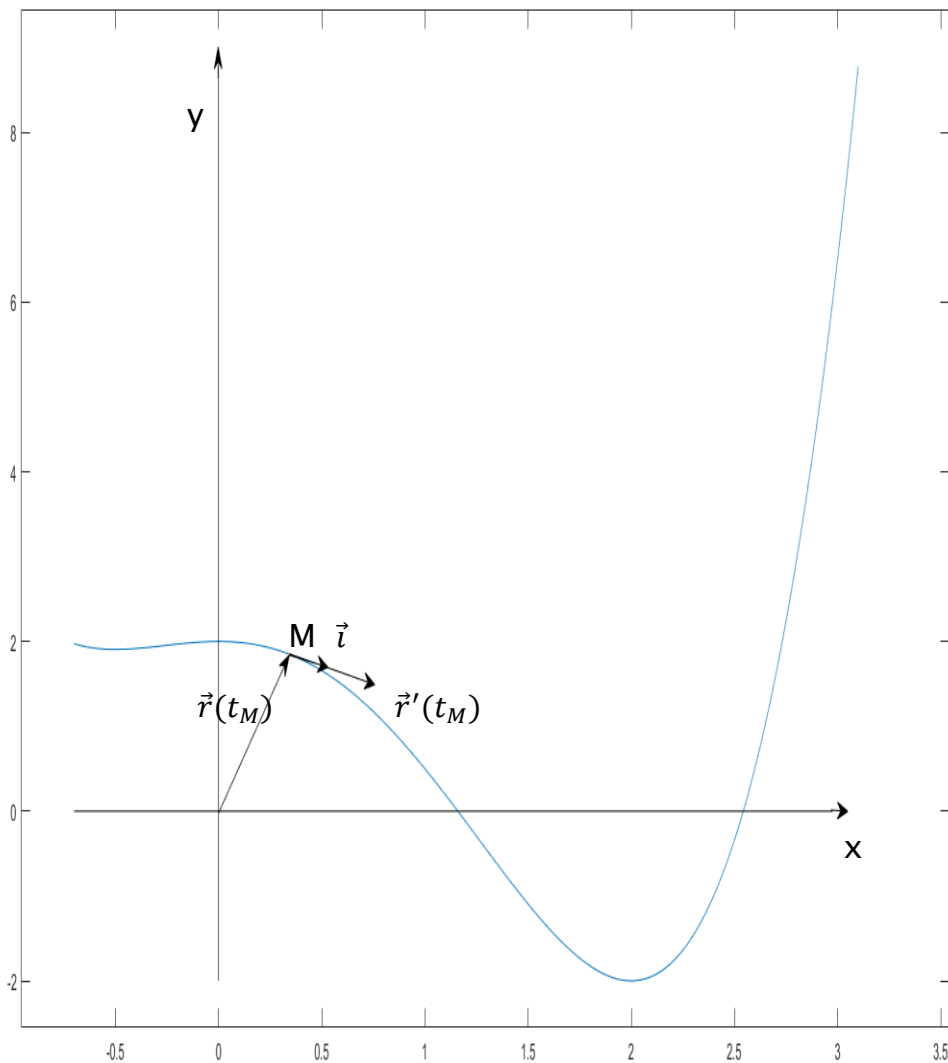
Αυτές οι σχέσεις όμως είναι οι παράγωγοι των συναρτήσεων των συντεταγμένων του διανύσματος $\vec{r}(t_M)$ ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή, το t. Άρα το εφαπτόμενο διάνυσμα στην καμπύλη στο σημείο M είναι το

$$\vec{r}'(t_M) = x'(t_M)\hat{i} + y'(t_M)\hat{j}$$

Όταν η παράμετρος t συμβολίζει το χρόνο, τότε το διάνυσμα $\vec{r}'(t)$ είναι η ταχύτητα ενός κινητού που έχει ως νοητή τροχιά τη συγκεκριμένη καμπύλη C.

Ουσιαστικό συμπέρασμα: Σε μια ομαλή καμπύλη C του \mathbb{R}^2 το εφαπτόμενο διάνυσμα σε ένα σημείο της καμπύλης M είναι το $\vec{r}'(t)$ και το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα δίνεται από τη σχέση :

$$\hat{i} = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|} \quad (2.1)$$



Σχήμα 2.3. Καμπύλη στο \mathbb{R}^2 , επιβατική ακτίνα στο σημείο M , $\vec{r}(t_M)$, και $\vec{r}(t_N)$, ως και το εφαπτόμενο και μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα στο M , $\vec{r}'(t_M)$ και \hat{i} αντίστοιχα.

Μήκος ομαλής καμπύλης και τόξου της στο \mathbb{R}^2

Επεκτείνοντας τον προηγούμενο συλλογισμό, είναι φανερό ότι καθώς το διάνυσμα \overline{MN} τείνει στην εφαπτομένη, τοπικά συμπίπτει και με την καμπύλη. Συνεπώς σε μια περιοχή πολύ κοντά περί το σημείο M , η καμπύλη ταυτίζεται με την εφαπτομένη της. Επομένως το στοιχειώδες μήκος ds της καμπύλης τοπικά στο M συμπίπτει με το $\lim_{dt \rightarrow 0} \|\overline{MN}\|$.

Μολαταύτα, οι απειροστές μεταβολές dx και dy δίνονται :

$$dx = \lim_{dt \rightarrow 0} x(t_M + dt) - x(t_M) = x'(t_M)dt$$

$$dy = \lim_{dt \rightarrow 0} y(t_M + dt) - y(t_M) = y'(t_M)dt$$

Άρα

$$ds = \|\overrightarrow{MN}\|_{dt \rightarrow 0} = \sqrt{((x'(t)dt)^2 + (y'(t)dt)^2)} = \sqrt{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)dt^2} \Leftrightarrow$$

$$ds = \sqrt{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)} dt$$

Παραμετρική παράσταση ομαλής καμπύλης C στο \mathbb{R}^2 , με ανεξάρτητη μεταβλητή το μήκος της, έστω s

Ας θεωρηθεί ομαλή καμπύλη C στο \mathbb{R}^2 και το σημείο A της με συντεταγμένες $A(x(t_0), y(t_0))$, το οποίο επιλέγεται ως αρχή της. Βάσει αυτού μπορούμε να ορίσουμε το επικαμπύλιο μήκος κάθε σημείου $M(x(t_M), y(t_M))$ αυτής ως την επικαμπύλια απόσταση του M από το A, δηλαδή :

$$s(t_M) = \int_{t_0}^{t_M} ds = \int_{t_0}^{t_M} \sqrt{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)} dt \quad (2.2)$$

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, κάθε σημείο M μιας ομαλής καμπύλης έχει ένα μονοσήμαντα ορισμένο μήκος s, που δίνεται από την (3.2). Συνεπώς, μια ομαλή καμπύλη δύναται να περιγραφεί πλήρως με ανεξάρτητη μεταβλητή το s, αντί του t που ήταν η αρχική ανεξάρτητη μεταβλητή. Στην περίπτωση αυτή οι παραμετρικές εξισώσεις ή αλλιώς επιβατική ακτίνα της καμπύλης συμβολίζεται ως

$$\vec{r}(s) = x(s)\hat{i} + y(s)\hat{j}$$

Όπου s το μήκος του τυχόντος σημείου της C.

Για το μοναδιαίο εφαπτόμενο και το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα σε κάθε σημείο μιας ομαλής καμπύλης, ισχύει το εξής:

Λήμμα 2.1: *Μοναδιαίο εφαπτόμενο και μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα σε ομαλή καμπύλη στο \mathbb{R}^2*

Έστω καμπύλη C, ήτις διαγράφεται ανθρωπολογικά και έχει μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα $\vec{l} = l_x\hat{i} + l_y\hat{j}$ στο τυχόν σημείο M της. Τότε

A) Αν εκφραστεί η C με παράμετρο το μήκος της s ισχύει

$$\hat{l} = \frac{d\vec{r}(s)}{ds} = \vec{r}'(s) \quad (2.3)$$

B) Το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην καμπύλη είναι το $\hat{n} = n_x\hat{i} + n_y\hat{j}$, όττις ισούται με

$$\hat{n} = l_y \hat{i} - l_x \hat{j} = \frac{dy(s)}{ds} \hat{i} - \frac{dx(s)}{ds} \hat{j}$$

Απόδειξη:

A) Για κάθε παράμετρο t μιας ομαλής καμπύλης C έχει θεμελιωθεί προηγουμένως ότι το στοιχειώδες μήκος της C σε τυχόν σημείο δίνεται από τη σχέση:

$$ds = \|d\vec{r}(t)\| = \sqrt{((x'(t))^2 + (y'(t))^2) dt}$$

Αν όμως επιλεγεί το μήκος της C ως παράμετρο, τότε ισχύει $t = s \Rightarrow dt = ds$ οπότε η ανωτέρω δίνει:

$$ds = \|d\vec{r}(s)\| = \|d\vec{s}\| = \sqrt{((x'(s))^2 + (y'(s))^2) ds}$$

ή

$$1 = \sqrt{((x'(s))^2 + (y'(s))^2)} \Leftrightarrow \|\vec{r}'(s)\| = 1$$

Άρα $\hat{l} = \vec{r}'(s)$

B) Το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην καμπύλη C είναι εξ ορισμού κάθετο στο μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης. Επομένως, προκύπτει από το μοναδιαίο διάνυσμα \hat{l} με στροφή κατά γωνία $-\frac{\pi}{2}$, ώστε με σύμβαση, στα σημεία στα οποία η καμπύλη στρέφει τα κοίλα μέσα, το \vec{n} να δείχνει προς τα έξω.

Επομένως για στροφή κατά $-\frac{\pi}{2}$ και τα κοίλα μέσα, το διάνυσμα έχει συντεταγμένες:

$$\begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_x \\ l_y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} n_x = 0l_x + l_y \\ n_y = -l_x + 0l_y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n_x = l_y \\ n_y = -l_x \end{cases}$$

Για να επιβεβαιωθεί η κάθετότητα των \hat{l} και \vec{n} εφαρμόζεται το εσωτερικό γινόμενο:

$$\hat{l} \cdot \hat{n} = l_x l_y - l_x l_y = 0$$

Άρα τα \hat{l} και \hat{n} είναι κάθετα μεταξύ τους.

Ακολουθεί ένα απλό αλλά θεμελιώδες παράδειγμα για την κατανόηση των ανωτέρω, ο κύκλος.

Στον κύκλο με κέντρο (x_0, y_0) και ακτίνας a ισχύει ότι:

$$\vec{r}(t) = (x_0 + a \cdot \cos(t))\hat{i} + (y_0 + a \cdot \sin(t))\hat{j}, t \in [0, 2\pi)$$

Άρα

$$\vec{r}'(t) = -a \cdot \sin(t)\hat{i} + a \cdot \cos(t)\hat{j}$$

Το μέτρο του εφαπτόμενου διανύσματος $\vec{r}'(t)$ είναι

$$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{a^2 \cdot \sin^2(t) + a^2 \cdot \cos^2(t)} = a, \forall t$$

Το μήκος του κύκλου ορίζεται ως

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{((x'(\tau))^2 + (y'(\tau))^2)} d\tau = at$$

ή σε μια πιο «φιλική» μορφή, $S = R\theta$, που είναι τύπος που είχε βρει ο μέγιστος των μαθηματικών Αρχιμήδης τον 3^ο π.Χ. αιώνα.

Εάν επιλεγεί η ανεξάρτητη μεταβλητή να είναι το s αντί του t , τότε

$$\begin{aligned}\vec{r}(s) &= \left(x_0 + a \cdot \cos\left(\frac{s}{a}\right)\right)\hat{i} + \left(y_0 + a \cdot \sin\left(\frac{s}{a}\right)\right)\hat{j} \\ \vec{r}'(s) &= -\sin\left(\frac{s}{a}\right)\hat{i} + \cos\left(\frac{s}{a}\right)\hat{j} \quad (2.4)\end{aligned}$$

Επομένως θα ισχύει $\|\vec{r}'(s)\| = 1$, πλήρως συμβατό με το λήμμα 2.1(A).

Αν το διάνυσμα \hat{l} είναι το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα σε ένα οποιοδήποτε σημείο του κύκλου τότε ισχύει

$$\hat{l} = \vec{r}'(s), \text{ με } \hat{l} = l_x\hat{i} + l_y\hat{j}$$

Όμως

$$\vec{r}'(s) = x'(s)\hat{i} + y'(s)\hat{j}$$

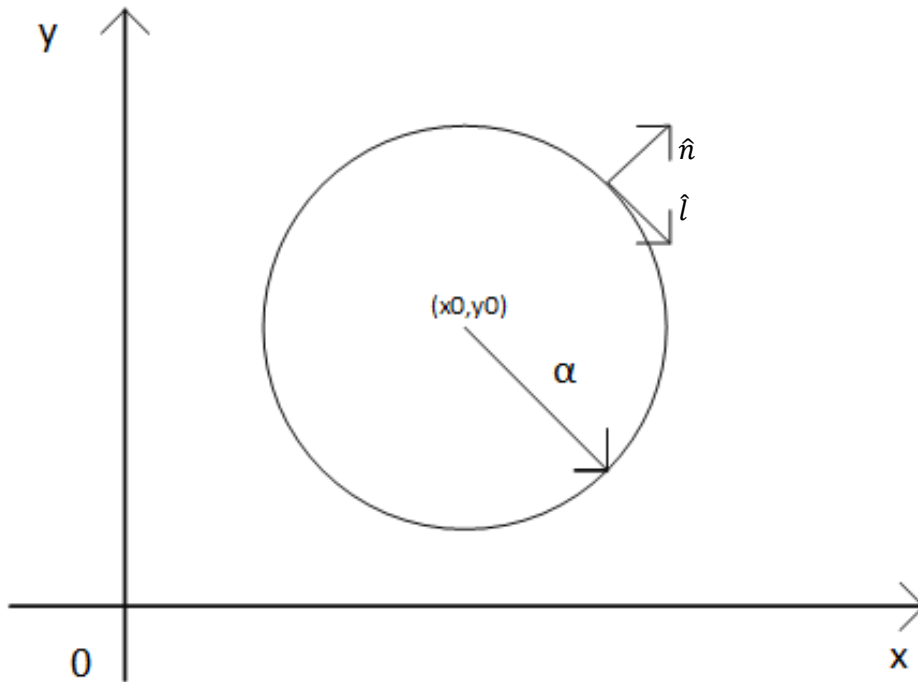
Άρα

$$\begin{cases} l_x = x'(s) \\ l_y = y'(s) \end{cases}$$

Ο κύκλος διαγράφεται ανθρωπολογικά δεδομένου ότι $t \in [0, 2\pi)$, άρα ισχύει το Λήμμα 2.1(B) και προκύπτει ότι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα $\hat{n} = n_x\hat{i} + n_y\hat{j}$ στον κύκλο είναι

$$\hat{n} = l_y\hat{i} - l_x\hat{j} = \frac{dy(s)}{ds}\hat{i} - \frac{dx(s)}{ds}\hat{j} \Rightarrow$$

$$\hat{n} = \cos\left(\frac{s}{a}\right)\hat{i} + \sin\left(\frac{s}{a}\right)\hat{j} \quad (2.5)$$



Σχήμα 2.4. Κύκλος κέντρου $K(x_0, y_0)$ και ακτίνας a , σε τυχόν σημείο M του οποίου σημειώνονται το μοναδιαίο εφαπτόμενο και το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα \hat{i} και \hat{n} αντίστοιχα. Το \hat{n} είναι συγγραμμικό με το διάνυσμα \overrightarrow{KM} και επομένως είναι επί της ακτίνας.

Αν εξεταστεί η δεύτερη παράγωγος της διανυσματικής ακτίνας $\vec{r}(s)$ του κύκλου, τότε προκύπτει ένα ενδιαφέρον συμπέρασμα. Πράγματι,

$$\vec{r}''(s) = -\frac{1}{a}\cos\left(\frac{s}{a}\right)\hat{i} - \frac{1}{a}\sin\left(\frac{s}{a}\right)\hat{j} \quad (2.6)$$

$$\Leftrightarrow \vec{r}''(s) = -\frac{1}{a^2}\left[a \cdot \cos\left(\frac{s}{a}\right)\hat{i} + a \cdot \sin\left(\frac{s}{a}\right)\hat{j} + x_0\hat{i} + y_0\hat{j} - (x_0\hat{i} + y_0\hat{j})\right]$$

$$\Leftrightarrow \vec{r}''(s) = -\frac{1}{a^2}\left[\left[a \cdot \cos\left(\frac{s}{a}\right)\hat{i} + a \cdot \sin\left(\frac{s}{a}\right)\hat{j} + x_0\hat{i} + y_0\hat{j}\right] - (x_0\hat{i} + y_0\hat{j})\right]$$

Όμως από την (2.6) $\|\vec{r}''(s)\| = \frac{1}{a}$, άρα η ανωτέρω γίνεται

$$x_0\hat{i} + y_0\hat{j} = \vec{r}(s) + a^2 \vec{r}''(s) = \vec{r}(s) + \frac{\vec{r}''(s)}{\|\vec{r}''(s)\|^2} \quad (2.7)$$

Η περίπτωση τυχούσας καμπύλης: Ο εγγύτατος κύκλος σε τυχόν σημείο της

Έστω δισδιάστατη καμπύλη εκπεφρασμένη με ανεξάρτητη μεταβλητή t ως εξής:

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}, t \in \mathbb{R}$$

Η ίδια καμπύλη αν εκφραστεί μέσω του μήκους της s , περιγράφεται από τη σχέση

$$\vec{r}(s) = x(s)\hat{i} + y(s)\hat{j}$$

Τονίζεται ότι οι συναρτήσεις $x(s)$, $y(s)$ είναι εν γένει διαφορετικές από τις $x(t)$, $y(t)$, όπως και το πεδίο ορισμού τους που είναι διαφορετικό στη γενική περίπτωση. Το πεδίο τιμών όμως των $x(t), y(t)$ αλλά και των $x(s)$, $y(s)$ είναι ακριβώς το ίδιο, ώστε και οι δύο παραστάσεις σε διατεταγμένα ζεύγη $(x(s), y(s))$ να συνιστούν την ίδια καμπύλη C .

Σύμφωνα με το Λήμμα 2.1 (A), το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα $\vec{l}(s)$ στην C είναι

$$\hat{l}(s) = \vec{r}'(s) = x'(s)\hat{i} + y'(s)\hat{j}, \forall s$$

Έστω ότι η $\vec{r}(s)$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, οπότε ορίζουμε το σημείο O_k με διανυσματική ακτίνα $\vec{r}_{O_k}(s) \equiv x(s)\hat{i} + y(s)\hat{j} + \frac{x''(s)\hat{i} + y''(s)\hat{j}}{\|\vec{r}''(s)\|^2}$

Ας θεωρηθεί ο κύκλος (K) με κέντρο το O_k και ακτίνα $\frac{1}{\|\vec{r}''(s)\|}$. Τότε το σημείο A με διανυσματική ακτίνα $\vec{r}(s) = x(s)\hat{i} + y(s)\hat{j}$ ανήκει στον (K) εκ κατασκευής, αφού

$$\begin{aligned} \|\vec{r}(s) - \vec{r}_{O_k}(s)\| &= \left\| x(s)\hat{i} + y(s)\hat{j} - \left(x(s)\hat{i} + y(s)\hat{j} + \frac{x''(s)\hat{i} + y''(s)\hat{j}}{\|\vec{r}''(s)\|^2} \right) \right\| \\ &= \left\| -\frac{x''(s)\hat{i} + y''(s)\hat{j}}{\|\vec{r}''(s)\|^2} \right\| = \frac{\|x''(s)\hat{i} + y''(s)\hat{j}\|}{\|\vec{r}''(s)\|^2} = \frac{1}{\|\vec{r}''(s)\|} \end{aligned}$$

ήτις είναι η ακτίνα του κύκλου. Άρα το σημείο A με συντεταγμένες $(x(s), y(s))$ ανήκει στον (K) με κέντρο το O_k και ακτίνα $\frac{1}{\|\vec{r}''(s)\|}$. Επιπλέον ο κύκλος (K) και η καμπύλη $\vec{r}(s)$ έχουν κοινό μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα στο $A(x(s), y(s))$. Όντως,

$$\overrightarrow{O_k A} = \vec{r}(s) - \vec{r}_{O_k}(s) = - \frac{x''(s)\hat{i} + y''(s)\hat{j}}{\|\vec{r}''(s)\|^2}$$

Για να αποδειχτεί ότι έχουν το ίδιο μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα, αρκεί να δείχτεί ότι

$$\overrightarrow{O_k A} \cdot \vec{l}(s) = 0$$

$$\text{Όμως } \overrightarrow{O_k A} \cdot \vec{l}(s) = \left(- \frac{x''(s)\hat{i} + y''(s)\hat{j}}{\|\vec{r}''(s)\|^2} \right) (x'(s)\hat{i} + y'(s)\hat{j}) = - \frac{x''(s)x'(s) + y''(s)y'(s)}{\|\vec{r}''(s)\|^2}$$

Επιπλέον $\|\vec{l}(s)\|^2 = 1, \forall s$ ταυτοτικά πάνω στην καμπύλη, οπότε

$$\begin{aligned} (x'(s))^2 + (y'(s))^2 &= 1 \Leftrightarrow \frac{d}{ds} \\ 2x'(s)x''(s) + 2y'(s)y''(s) &= 0 \Leftrightarrow \\ x'(s)x''(s) + y'(s)y''(s) &= 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Άρα $\overrightarrow{O_k A} \cdot \vec{l}(s) = 0$ ταυτοτικά πάνω στην καμπύλη, δηλαδή το $\vec{l}(s)$ είναι κάθετο στο διάνυσμα της ακτίνας του κύκλου, $\overrightarrow{O_k A}$ και εφαπτόμενο στον κύκλο Κ στο σημείο Α και επομένως το ζητούμενο αποδείχτηκε.

Στη συνέχεια θα αποδειχτεί ότι και το σημείο Β της καμπύλης με διανυσματική ακτίνα $\vec{r}(s + ds) = x(s + ds)\hat{i} + y(s + ds)\hat{j}$ ανήκει στον ίδιο κύκλο.

Με $O(0,0)$ την αρχή των αξόνων, ως θεωρηθεί το διάνυσμα

$$\overrightarrow{O_k B} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OO_k} = \vec{r}(s + ds) - \left(\vec{r}(s) + \frac{\vec{r}''(s)}{\|\vec{r}''(s)\|^2} \right)$$

Αναπτύσσοντας σε σειρά Taylor το $\vec{r}(s + ds)$ ως προς ds :

$$\vec{r}(s + ds) = \vec{r}(s) + \vec{r}'(s)ds + \frac{1}{2}\vec{r}''(s)ds^2 + \dots$$

Επειδή το $ds \rightarrow 0$ οι όροι ανωτέρας τάξης αμελούνται και το διάνυσμα παίρνει τη μορφή

$$\overrightarrow{O_k B} = \vec{r}(s) + \vec{r}'(s)ds - \left(\vec{r}(s) + \frac{\vec{r}''(s)}{\|\vec{r}''(s)\|^2} \right) = \vec{r}'(s)ds - \frac{\vec{r}''(s)}{\|\vec{r}''(s)\|^2} \quad (2.9)$$

$$\text{Για το } \|\overrightarrow{O_k B}\|^2 = \overrightarrow{O_k B} \cdot \overrightarrow{O_k B} = \left(\vec{r}'(s)ds - \frac{\vec{r}''(s)}{\|\vec{r}''(s)\|^2} \right)^2 =$$

$$= \vec{r}'^2(s)ds^2 - 2\vec{r}'(s) \frac{\vec{r}''(s)}{\|\vec{r}''(s)\|^2} ds + \frac{\vec{r}''^2(s)}{\|\vec{r}''(s)\|^4}$$

Όμως από την (2.8) $\vec{r}'(s) \cdot \vec{r}''(s) = 0$ και θεωρώντας το ds^2 αμελητέο ως προς ds και τον $\frac{\vec{r}''^2(s)}{\|\vec{r}''(s)\|^4}$ η ανωτέρω σχέση γίνεται

$$\|\overrightarrow{O_{\kappa}B}\|^2 = \frac{\vec{r}''^2(s)}{\|\vec{r}''(s)\|^4} = \frac{\|\vec{r}''(s)\|^2}{\|\vec{r}''(s)\|^4} \stackrel{\vee}{\Leftrightarrow}$$

$$\|\overrightarrow{O_{\kappa}B}\| = \frac{1}{\|\vec{r}''(s)\|}$$

Από τη σχέση αυτή συνάγεται ότι το σημείο $B \in$ στον κύκλο (K) , καθώς απέχει από το σημείο O_{κ} απόσταση ίση με την ακτίνα του κύκλου (K) .

Έπειτα, θα αποδειχθεί ότι η εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο $B(x(s+ds), y(s+ds))$ και η εφαπτομένη του κύκλου στο B ταυτίζονται.

Αρκεί ναδειχτεί ότι το εφαπτόμενο διάνυσμα στην καμπύλη στο B , $\vec{r}'(s+ds)$ και το $\overrightarrow{O_{\kappa}B}$ είναι κάθετα μεταξύ τους.

Γι' αυτό, αρκεί να υπολογιστεί το εσωτερικό τους γινόμενο ίσο με μηδέν. Οπότε

$$\vec{r}'(s+ds) \cdot \overrightarrow{O_{\kappa}B} = [\vec{r}'(s) + \vec{r}''(s)ds] \left[\vec{r}'(s)ds - \frac{\vec{r}''(s)}{\|\vec{r}''(s)\|^2} \right]$$

Όπου το $\vec{r}'(s+ds)$ έχει αναπτυχθεί σε σειρά Taylor αμελώντας τους όρους δεύτερης τάξης (ds^2) και άνω και το $\overrightarrow{O_{\kappa}B}$ με την έκφρασή του στην (2.9) και λαμβάνεται :

$$\vec{r}'(s+ds) \cdot \overrightarrow{O_{\kappa}B} = \vec{r}'(s) \cdot \vec{r}'(s)ds - \frac{\vec{r}'(s) \cdot \vec{r}''(s)}{\|\vec{r}''(s)\|^2} + \vec{r}'(s) \cdot \vec{r}''(s)ds - \frac{\vec{r}''(s) \cdot \vec{r}''(s)ds}{\|\vec{r}''(s)\|^2}$$

Με $\vec{r}'(s) \cdot \vec{r}'(s) = \vec{r}'^2(s) = \|\vec{r}'(s)\|^2 = 1$, $\vec{r}'(s) \cdot \vec{r}''(s) = 0$ από (3.10) η ανωτέρω γίνεται

$$\vec{r}'(s+ds) \cdot \overrightarrow{O_{\kappa}B} = ds - ds = 0$$

Καταλήγοντας, με την ανωτέρω απεδείχθη ότι το $\overrightarrow{O_{\kappa}B}$ είναι κάθετο στο εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης αλλά και του κύκλου (K) στο σημείο $B(x(s+ds), y(s+ds))$. Άρα, το σημείο B ανήκει στον κύκλο (K) όπως και στην καμπύλη και η εφαπτομένη στο B τόσο στον κύκλο αλλά και στην καμπύλη ταυτίζονται.

Παρομοίως, θα αποδειχθεί ότι και το σημείο $B'(x(s-ds), y(s-ds))$ ανήκει στον κύκλο (K) αλλά και ότι η εφαπτομένη του κύκλου και της καμπύλης σε αυτό ταυτίζονται. Για το πρώτο ζητούμενο:

Με $O(0,0)$ την αρχή των αξόνων, το διάνυσμα $\overrightarrow{O_{\kappa}B'}$ είναι:

$$\overrightarrow{O_{\kappa}B'} = \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OO_{\kappa}} = \vec{r}(s-ds) - \left(\vec{r}(s) + \frac{\vec{r}''(s)}{\|\vec{r}''(s)\|^2} \right)$$

Αναπτύσσοντας σε σειρά Taylor το $\vec{r}(s-ds)$ ως προς $-ds$:

$$\vec{r}(s + ds) = \vec{r}(s) - \vec{r}'(s)ds + \vec{r}''(s)ds^2 + \dots$$

Επειδή το $ds \rightarrow 0$ οι όροι ανωτέρας τάξης αμελούνται και το διάνυσμα παίρνει τη μορφή

$$\overrightarrow{O_{\kappa}B'} = \vec{r}(s) - \vec{r}'(s)ds - \left(\vec{r}(s) + \frac{\vec{r}''(s)}{\|\vec{r}''(s)\|^2} \right) = -\vec{r}'(s)ds - \frac{\vec{r}''(s)}{\|\vec{r}''(s)\|^2}$$

Για το

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{O_{\kappa}B'}\|^2 &= \overrightarrow{O_{\kappa}B} \cdot \overrightarrow{O_{\kappa}B} = \left(-\vec{r}'(s)ds - \frac{\vec{r}''(s)}{\|\vec{r}''(s)\|^2} \right)^2 = \\ &= \vec{r}'^2(s)ds^2 + 2\vec{r}'(s) \frac{\vec{r}''(s)}{\|\vec{r}''(s)\|^2} ds + \frac{\vec{r}''^2(s)}{\|\vec{r}''(s)\|^4} \end{aligned}$$

Όμως από την (2.8) $\vec{r}'(s) \cdot \vec{r}''(s) = 0$ και θεωρώντας το ds^2 αμελητέο ως προς ds και τον $\frac{\vec{r}''^2(s)}{\|\vec{r}''(s)\|^4}$ η ανωτέρω σχέση γίνεται

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{O_{\kappa}B'}\|^2 &= \frac{\vec{r}''^2(s)}{\|\vec{r}''(s)\|^4} = \frac{\|\vec{r}''(s)\|^2}{\|\vec{r}''(s)\|^4} \stackrel{\vee}{\Leftrightarrow} \\ \|\overrightarrow{O_{\kappa}B'}\| &= \frac{1}{\|\vec{r}''(s)\|} \end{aligned}$$

Από τη σχέση αυτή συνάγεται ότι το σημείο $B' \in$ στον κύκλο K , καθώς απέχει από το σημείο O_{κ} απόσταση ίση με την ακτίνα του κύκλου K .

Έπειτα, θα αποδειχθεί ότι η εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο $B'(x(s - ds), y(s - ds))$ και η εφαπτομένη του κύκλου στο B ταυτίζονται.

Αρκεί να δειχτεί ότι το εφαπτόμενο διάνυσμα στην καμπύλη στο B , $\vec{r}'(s - ds)$ και το $\overrightarrow{O_{\kappa}B'}$ είναι κάθετα μεταξύ τους.

Γι' αυτό, αρκεί να υπολογιστεί το εσωτερικό τους γινόμενο ίσο με μηδέν. Οπότε

$$\vec{r}'(s - ds) \cdot \overrightarrow{O_{\kappa}B'} = [\vec{r}'(s) - \vec{r}''(s)ds] \left[-\vec{r}'(s)ds - \frac{\vec{r}''(s)}{\|\vec{r}''(s)\|^2} \right]$$

Όπου το $\vec{r}'(s - ds)$ έχει αναπτυχθεί σε σειρά Taylor αμελώντας τους όρους δεύτερης τάξης (ds^2) και άνω και το $\overrightarrow{O_{\kappa}B'}$ με την έκφρασή του στην (2.9) και λαμβάνεται :

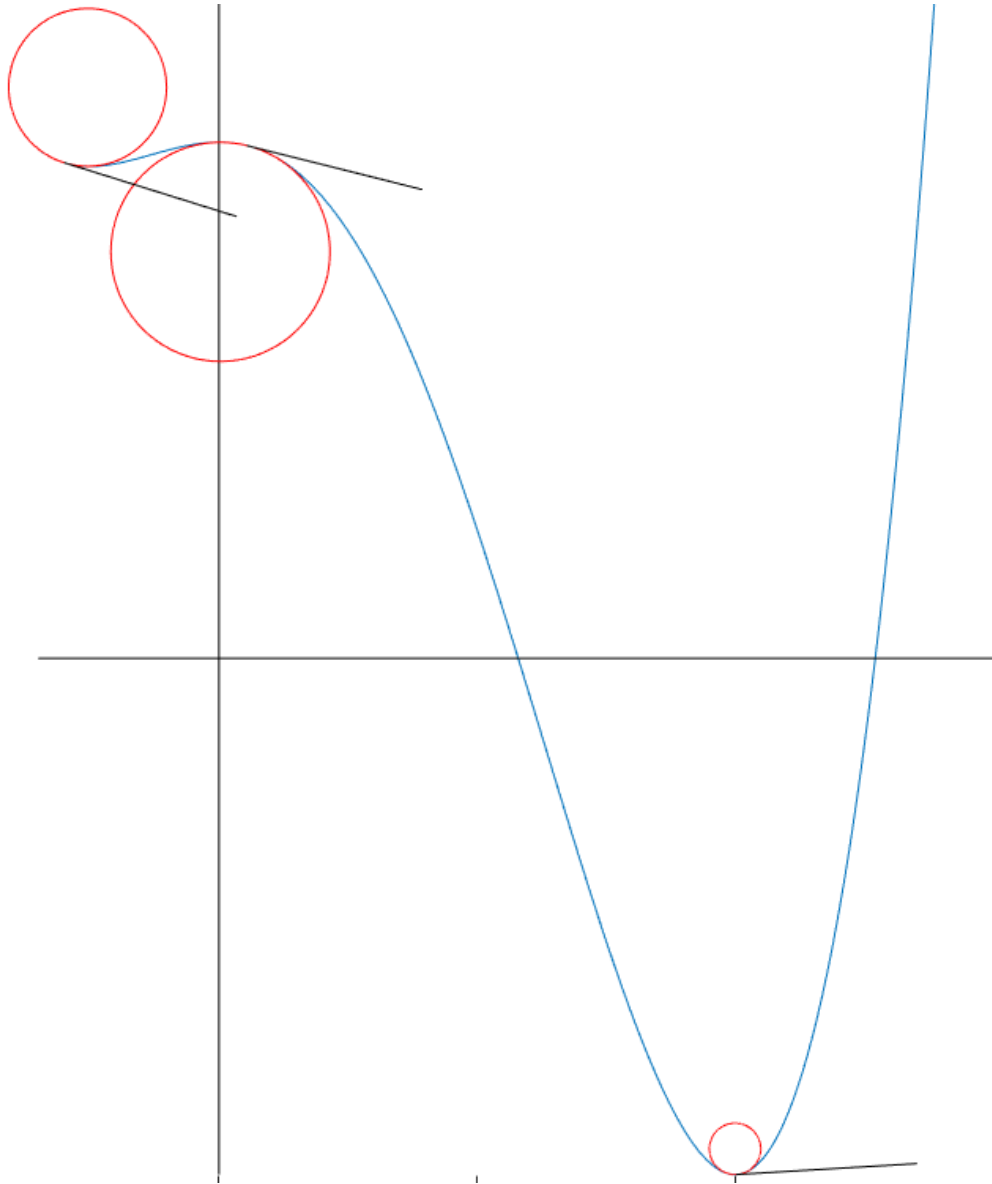
$$\vec{r}'(s - ds) \cdot \overrightarrow{O_{\kappa}B'} = -\vec{r}'(s) \cdot \vec{r}'(s)ds - \frac{\vec{r}'(s) \cdot \vec{r}''(s)}{\|\vec{r}''(s)\|^2} - \vec{r}'(s) \cdot \vec{r}''(s)ds + \frac{\vec{r}''(s) \cdot \vec{r}''(s)ds}{\|\vec{r}''(s)\|^2}$$

Με $\vec{r}'(s) \cdot \vec{r}'(s) = \vec{r}'^2(s) = \|\vec{r}'(s)\|^2 = 1$, $\vec{r}'(s) \cdot \vec{r}''(s) = 0$ από (3.10) η ανωτέρω γίνεται

$$\vec{r}'(s + ds) \cdot \overrightarrow{O_{\kappa}B'} = -ds + ds = 0$$

Συμπερασματικά, αποδείχθη ότι και το $\overline{O_K B'}$ είναι κάθετο στο εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης αλλά και του κύκλου K στο σημείο $B'(x(s-ds), y(s-ds))$. Άρα, το σημείο B' ανήκει στον κύκλο (K) όπως και στην καμπύλη και η εφαπτομένη στο B' , τόσο στον κύκλο όσο και στην καμπύλη ταυτίζονται.

Από την Ευκλείδεια γεωμετρία είναι γνωστό ότι από τρία μη συνευθειακά σημεία στο επίπεδο διέρχεται μοναδικός κύκλος. Άρα ο κύκλος (O_K, ρ) με κέντρο το $O_K \left(x(s) + \frac{x''(s)}{\|r''(s)\|^2}, y(s) + \frac{y''(s)}{\|r''(s)\|^2} \right)$ και ακτίνα $\rho = \frac{1}{\|r''(s)\|}$ είναι ο μοναδικός που διέρχεται από τα σημεία $A(x(s), y(s))$, $B(x(s+ds), y(s+ds))$, $B'(x(s-ds), y(s-ds))$. Εξαιτίας αυτού, ο κύκλος αυτός (K) ονομάζεται εγγύτατος κύκλος της καμπύλης C στο τυχαίο σημείο της $A(x(s), y(s))$. Ακολουθούν παραδείγματα εγγυτάτων κύκλων σε διάφορα σημεία μιας τυχούσας καμπύλης, μαζί με τα εφαπτόμενά διανύσματα στα σημεία αυτά.



Σχήμα 2.5. Τυχούσα καμπύλη σε χαρακτηριστικά σημεία της οποίας σημειώνονται οι εγγύτατοι κύκλοι και τα εφαπτόμενα μοναδιαία διανύσματα τους.

Ορισμός 2.1: Ορίζεται η καμπυλότητα της καμπύλης στο σημείο αυτής $A(\vec{r}(s))$ ως η καμπυλότητα του εγγυτάτου κύκλου (K), η οποία ισούται με την ακτίνας του εγγυτάτου κύκλου (K).

Ακολούθως θα αποδειχτεί μια πολύ χρήσιμη σχέση που ισχύει μεταξύ της ακτίνας του εγγυτάτου κύκλου και του μοναδιαίου κάθετου διανύσματος στο σημείο $A(\vec{r}(s))$ της καμπύλης.

Πρόταση 2.1. Έστω η καμπύλη με διανυσματική ακτίνα $\vec{r}(s)$ και τυχόν σημείο A αυτής. Τότε ισχύει ότι

$$\vec{r}''(s) = \hat{n}(\hat{n} \cdot \vec{r}''(s))$$

Όπου \hat{n} το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στο σημείο $A(\vec{r}(s))$ της καμπύλης.

Απόδειξη:

Από την (2.8) είναι γνωστό ότι $\vec{r}'(s) \cdot \vec{r}''(s) = 0$, δηλαδή τα $\vec{r}'(s), \vec{r}''(s)$ είναι κάθετα μεταξύ τους.

Επίσης από το Λήμμα 2.1(B), ισχύει ότι το μοναδιαίο διάνυσμα \hat{n} είναι εκ κατασκευής κάθετο στο μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα $\vec{r}'(s)$. Επομένως τα $\vec{r}''(s)$ και \hat{n} είναι παράλληλα και το εσωτερικό τους γινόμενο δίνει:

$$\hat{n} \cdot \vec{r}''(s) = |\vec{n}| |\vec{r}''(s)| \cos \theta$$

Το $\theta = \pi$, επειδή εκ κατασκευής το $\vec{r}''(s)$ πάντα έχει φορά προς τα κοίλα της καμπύλης ενώ το \hat{n} με σύμβαση έχει φορά πάντα αντίθετη από τη φορά των κοίλων, δηλαδή αν η καμπύλη στρέφει τα κοίλα μέσα αυτό είναι προς τα έξω. Επίσης $|\hat{n}| = 1$ εκ κατασκευής.

Συνεπώς, $\hat{n} \cdot \vec{r}''(s) = \|\vec{r}''(s)\| \cos(\pi) = -\|\vec{r}''(s)\|$

Το $\vec{r}''(s)$ συναρτήσει του \hat{n} όμως γράφεται:

$$\vec{r}''(s) = -\hat{n} \|\vec{r}''(s)\| = \hat{n}(\hat{n} \cdot \vec{r}''(s))$$

Ο.ε.δ.

Η καμπυλότητα τυχούσας καμπύλης συναρτήσει οποιασδήποτε ανεξάρτητης μεταβλητής t

Η προηγούμενη ανάλυση οδήγησε στον ορισμό της καμπυλότητας στην περίπτωση που η ανεξάρτητη μεταβλητή της επιβατικής ακτίνας της καμπύλης είναι το μήκος αυτής s. Γενικεύοντας, θα δοθεί ο τύπος της καμπυλότητας μιας C_2 καμπύλης, όταν η επιβατική της ακτίνα είναι συνάρτηση μας τυχούσας ανεξάρτητης μεταβλητής t που λαμβάνει τιμές σε ένα διάστημα $I \subset \mathbb{R}$, δηλαδή η επιβατική ακτίνα είναι της μορφής $\vec{r}(t)$. Ισχύει το κάτωθι:

Λήμμα 2.2. Έστω τυχούσα καμπύλη C του \mathbb{R}^2 με διανυσματική ακτίνα $\vec{r}(t)$ ορισμένη σε ένα διάστημα ή ένωση διαστημάτων $I \subset \mathbb{R}$. Ας υποθεθεί ότι η $\vec{r}(t)$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη ως προς t , με $t \in I$. Τότε η καμπυλότητα $K(t)$ στο τυχόν σημείο της C δίνεται από τον τύπο:

$$K(t) = \frac{|[y'(t)\hat{i} - x'(t)\hat{j}] \cdot \vec{r}''(t)|}{\|\vec{r}'(t)\|^3}$$

Απόδειξη:

Από την πρόταση (2.1), η $\vec{r}''(s)$ δίνεται ως :

$$\vec{r}''(s) = \hat{n}(\hat{n} \cdot \vec{r}''(s))$$

Όπου \hat{n} το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην καμπύλη στο σημείο $A(\vec{r}(s))$. Από το Λήμμα (2.1)(B) το κάθετο διάνυσμα στο σημείο $A(\vec{r}(t))$ της καμπύλης είναι, εκπεφρασμένο ως προς t :

$$\vec{n} = y'(t)\vec{i} - x'(t)\vec{j}$$

Και για να γίνει μοναδιαίο αρκεί να διαιρεθεί με το μέτρο του, οπότε

$$\hat{n} = \frac{y'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} \hat{i} - \frac{x'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} \hat{j}$$

Όσον αφορά το $\vec{r}''(s)$:

$$\vec{r}''(s) = \frac{d\vec{r}'(s)}{ds} = \frac{d\vec{r}'(t)}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{d\vec{r}'(t)}{dt} \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{d\vec{r}'(t)}{dt} \frac{1}{\|\vec{r}'(t)\|} = \frac{\vec{r}''(t)}{\|\vec{r}'(t)\|}$$

Παραγωγίζοντας ξανά :

$$\vec{r}'''(s) = \frac{d}{ds} \frac{d\vec{r}'(s)}{ds} = \frac{d}{ds} \frac{\vec{r}''(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} = \frac{d}{dt} \frac{\vec{r}''(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} \frac{dt}{ds}$$

Όμως $\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\|\vec{r}'(t)\|}$ και

$$\frac{d}{dt} \frac{\vec{r}''(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} = \frac{\vec{r}'''(t)\|\vec{r}'(t)\| - \vec{r}''(t) \frac{d}{dt} \|\vec{r}'(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|^2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\vec{r}''(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} = \frac{\vec{r}'''(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} - \frac{\vec{r}''(t) \frac{d}{dt} \|\vec{r}'(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|^2}$$

Επομένως

$$\hat{n} \cdot \vec{r}'''(s) = \hat{n} \cdot \frac{1}{\|\vec{r}'(t)\|} \cdot \left[\frac{\vec{r}'''(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} - \frac{\vec{r}''(t) \frac{d}{dt} \|\vec{r}'(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|^2} \right]$$

Αλλά το γινόμενο $\hat{n} \cdot \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} = \hat{n} \cdot \vec{r}'(s) = 0$, αφού το $\frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|}$ είναι το μοναδιαίο εφαπτομενικό διάνυσμα στο σημείο $A(\vec{r}(t))$ της καμπύλης και το \hat{n} το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο ίδιο σημείο. Επομένως, όλος ο τελευταίος όρος της παρένθεσης μηδενίζεται και μένει μόνο ο πρώτος όρος, μετά το εσωτερικό γινόμενο με το \hat{n} και η καμπυλότητα είναι:

$$\vec{r}''(s) = \hat{n}(\hat{n} \cdot \vec{r}''(s))$$

Αντικαθιστώντας το $\hat{n} = \frac{y'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} \hat{i} - \frac{x'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} \hat{j}$ με τον τύπο του βγαίνει ότι:

$$\begin{aligned} \vec{r}''(s) &= \hat{n} \left\{ \frac{\left[\frac{y'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} \hat{i} - \frac{x'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} \hat{j} \right] \cdot \vec{r}''(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} \right\} \Rightarrow \\ \vec{r}''(s) &= \frac{\left[\frac{y'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} \hat{i} - \frac{x'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} \hat{j} \right] \{ [y'(t)\hat{i} - x'(t)\hat{j}] \cdot \vec{r}''(t) \}}{\|\vec{r}'(t)\|^3} \Rightarrow \\ \vec{r}''(s) &= \frac{[y'(t)\hat{i} - x'(t)\hat{j}] \{ [y'(t)\hat{i} - x'(t)\hat{j}] \cdot \vec{r}''(t) \}}{\|\vec{r}'(t)\|^4} \end{aligned}$$

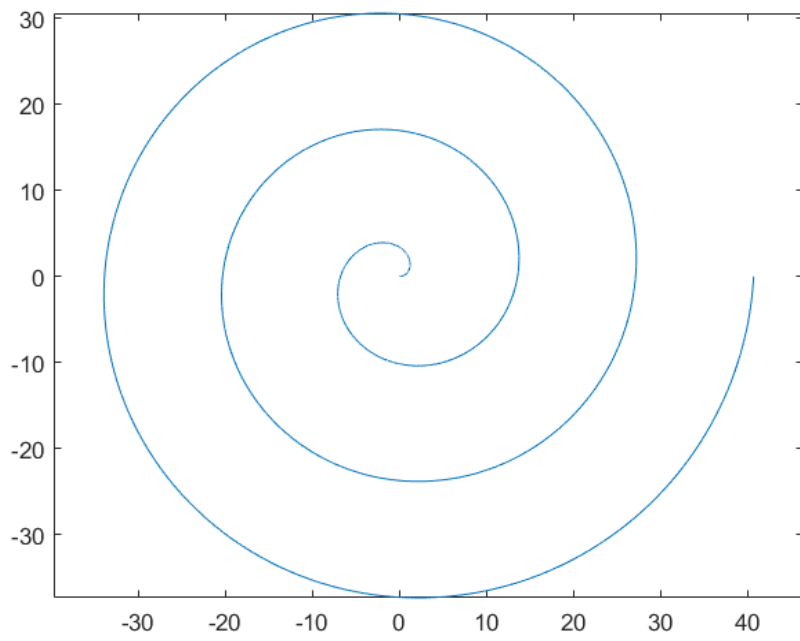
Το μέτρο της ανωτέρω σχέσης δίνει την καμπυλότητα, που είναι:

$$\begin{aligned} K(t) &= \frac{\| [y'(t)\hat{i} - x'(t)\hat{j}] \| | [y'(t)\hat{i} - x'(t)\hat{j}] \cdot \vec{r}''(t) |}{\|\vec{r}'(t)\|^4} \Rightarrow \\ K(t) &= \frac{\|\vec{r}'(t)\| | [y'(t)\hat{i} - x'(t)\hat{j}] \cdot \vec{r}''(t) |}{\|\vec{r}'(t)\|^4} \Rightarrow \\ K(t) &= \frac{| [y'(t)\hat{i} - x'(t)\hat{j}] \cdot \vec{r}''(t) |}{\|\vec{r}'(t)\|^3} \end{aligned}$$

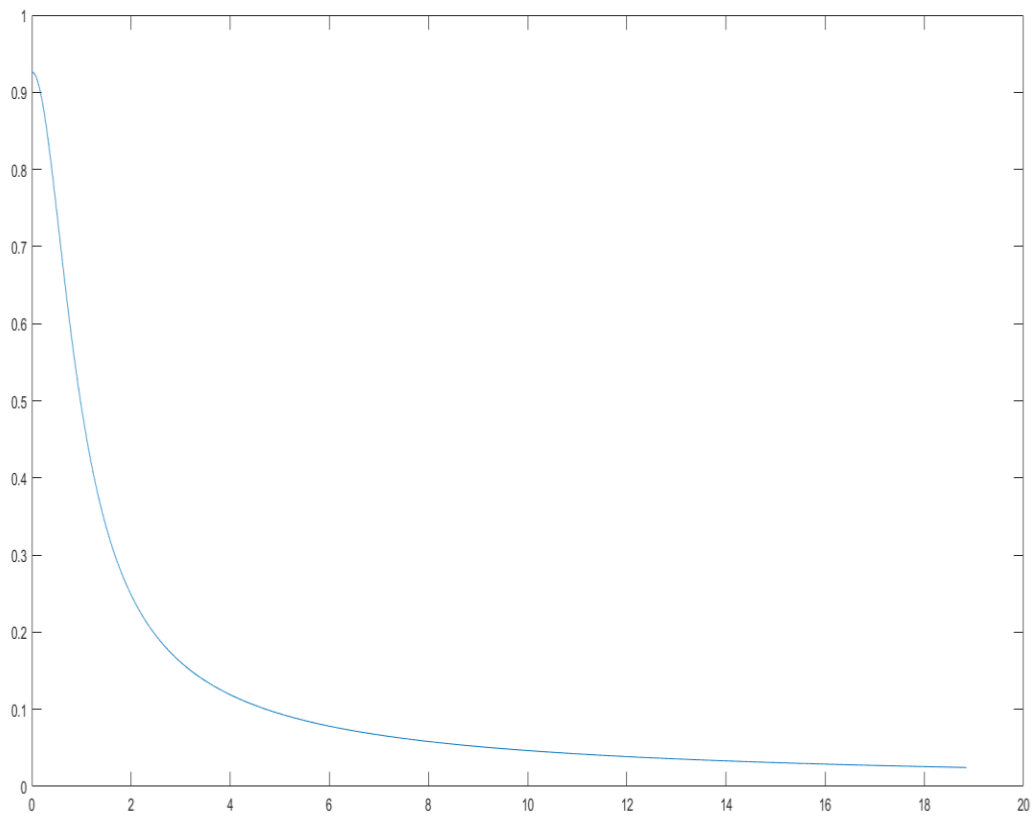
Ο.ε.δ.

Παρακάτω παρουσιάζεται η καμπυλότητα για τη σπείρα του Αρχιμήδους, με παραμετρικές εξισώσεις:

$$(x(\theta), y(\theta)) = (K\theta \cdot \cos(\theta), K\theta \cdot \sin(\theta)), \quad \theta \in [0, 6\pi)$$



Σχήμα 2.6. Σπείρα του Αρχιμήδους ή γραμμική σπείρα με πεδίο ορισμού το $[0,6\pi)$.



Σχήμα 2.7. Καμπυλότητα της σπείρας του Αρχιμήδους βάσει του γενικού τύπου.

2.2 Περί κωνικών τομών

Περί ελλείψεως

Έστωσαν δύο σημεία στο επίπεδο, οι εστίες, κείμενες επί του άξονος x , χωρίς βλάβη της γενικότητας, δηλαδή $E(c, 0), E'(-c, 0)$ με το $O(0, 0)$ να είναι το μέσο τους. Ζητείται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που έχουν σταθερό άθροισμα αποστάσεων από τις δύο εστίες.

Εάν $2a, c < a$ είναι το σταθερό άθροισμα και $M(x, y)$ είναι το τυχόν σημείο, τότε πρέπει να ισχύει:

$$\begin{aligned}2a &= \|\overrightarrow{ME}\| + \|\overrightarrow{ME'}\| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\4a^2 &= (x-c)^2 + y^2 + (x+c)^2 + y^2 + 2\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\2a^2 &= x^2 + c^2 + y^2 + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\2a^2 - x^2 - c^2 - y^2 &= \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\end{aligned}$$

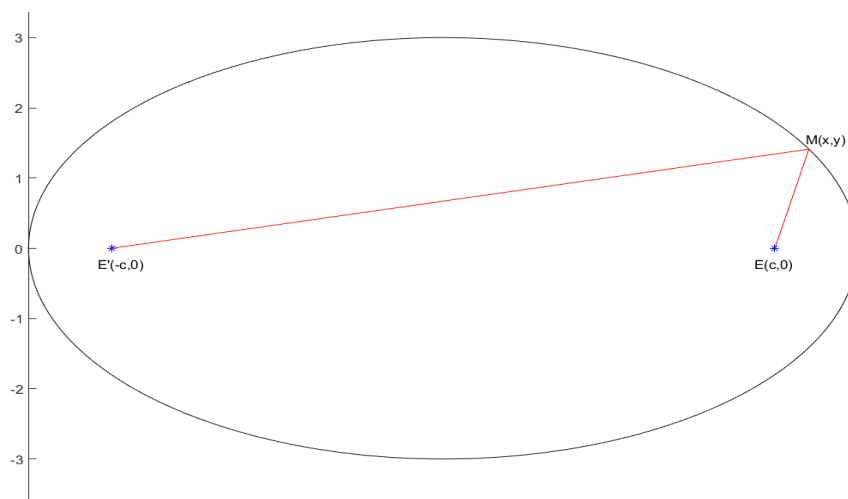
Υψώνοντας στο τετράγωνο και απλοποιώντας, η σχέση γίνεται:

$$\begin{aligned}a^4 + x^2c^2 - a^2x^2 - a^2c^2 - a^2y^2 &= 0 \\a^4 - x^2(a^2 - c^2) - a^2y^2 &= 0\end{aligned}$$

Θέτοντας $a^2 - c^2 = b^2$ τελικά η σχέση είναι:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ικανοποιούν την άνω σχέση λέγεται έλλειψη, με άξονες συμμετρίας τους x και y .



Σχήμα 2.8. Η έλλειψη κατασκευασμένη με τον τρόπο που περιγράφεται ανωτέρω.

Πολική εξίσωση της έλλειψης

Η καμπύλη αυτή προκύπτει με προβολή κύκλου που σχηματίζει γωνία $\arccos\left(\frac{a}{b}\right)$, $b < a$ με το επίπεδο του κύκλου. Η πολική γωνία θ_κ του κύκλου αυτού είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή της ελλείψεως στην ανωτέρω μορφή.

Πράγματι, έστω ένα σύστημα αξόνων στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων και ένα επίπεδο όπου διέρχεται από τον άξονα x και σχηματίζει διεδρη γωνία γ με το οριζόντιο επίπεδο. Έστω κύκλος που κείται επί του κεκλιμένου επιπέδου κέντρου (K) και ακτίνας a . Τότε η προβολή του (K, a) στο οριζόντιο επίπεδο είναι έλλειψη, με εξίσωση την ανωτέρω. Ας θεωρηθούν οι συντεταγμένες (x, v) επί του κεκλιμένου επιπέδου, τότε η εξίσωση του κύκλου με ανεξάρτητη μεταβλητή την πολική γωνία θ για αυτό το επίπεδο είναι

$$x = a \cos \theta$$

$$v = a \sin \theta, \theta \in [0, 2\pi)$$

Η προβολή του κύκλου και ο κύκλος έχουν κοινή συντεταγμένη x στα σημεία τους, αλλά η προβολή τυχόντος σημείου του κύκλου στο οριζόντιο επίπεδο έχει τεταγμένη y με

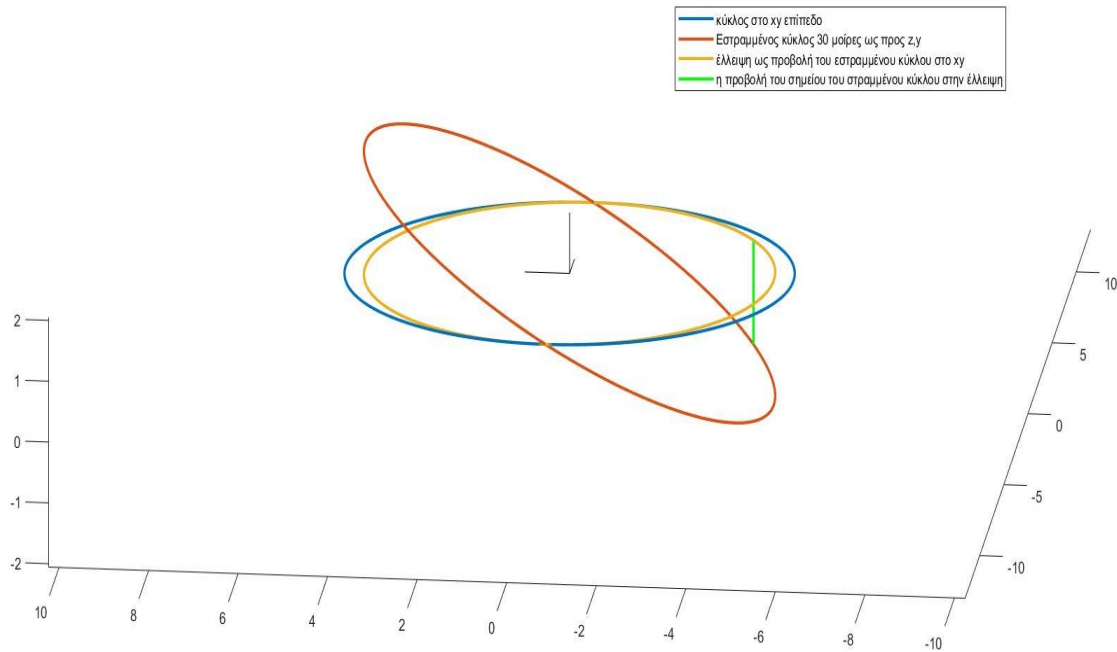
$$y = v \cos \gamma = (a \cos \gamma) \cos \theta$$

Θέτοντας $b = a \cos \gamma$ προκύπτει για τις εξισώσεις του τυχόντος προβαλλομένου σημείου στο xy επίπεδο

$$x = a \cos \theta$$

$$y = b \sin \theta, \theta \in [0, 2\pi)$$

Όμως οι εξισώσεις αυτές ικανοποιούν την πεπλεγμένη εξίσωση της έλλειψης. Άρα οι εξισώσεις αυτές είναι οι πολικές εξισώσεις της έλλειψης, με την ανεξάρτητη μεταβλητή θ να είναι η πολική γωνία του κύκλου που «γέννησε» την έλλειψη.



Σχήμα 2.9. Ο κύκλος επί οριζοντίου επιπέδου, ο εστραμμένος κύκλος κατά 30 μοίρες με την x συντεταγμένη σταθερή και η προβολή του εστραμμένου κύκλου στο xy επίπεδο, που δίνει έλλειψη. Για καλύτερη εποπτεία φαίνονται και οι άξονες του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων.

Περί υπερβολής

Έστωσαν δύο σημεία επί του οριζοντίου επιπέδου, χωρίς βλάβη της γενικότητας, τα $E(0, c), E'(0, -c)$ με το $O(0,0)$ να είναι το μέσο τους, που λέγονται και εστίες. Ζητείται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M η διαφορά των αποστάσεων των οποίων έχει σταθερή απόλυτη τιμή, $2a$.

Για $c > a$, το τυχόν σημείο $M(x, y)$ πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση:

$$2a = \left| \|\overline{ME}\| - \|\overline{ME'}\| \right| = \left| \sqrt{x^2 + (y - c)^2} - \sqrt{x^2 + (y + c)^2} \right|$$

$$4a^2 = x^2 + (y - c)^2 - 2\sqrt{x^2 + (y - c)^2}\sqrt{x^2 + (y + c)^2} + x^2 + (y + c)^2$$

$$2a^2 = x^2 + c^2 + y^2 - \sqrt{x^2 + (y - c)^2}\sqrt{x^2 + (y + c)^2}$$

$$2a^2 - x^2 - c^2 - y^2 = -\sqrt{x^2 + (y - c)^2}\sqrt{x^2 + (y + c)^2}$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο και απλοποιώντας η σχέση γίνεται:

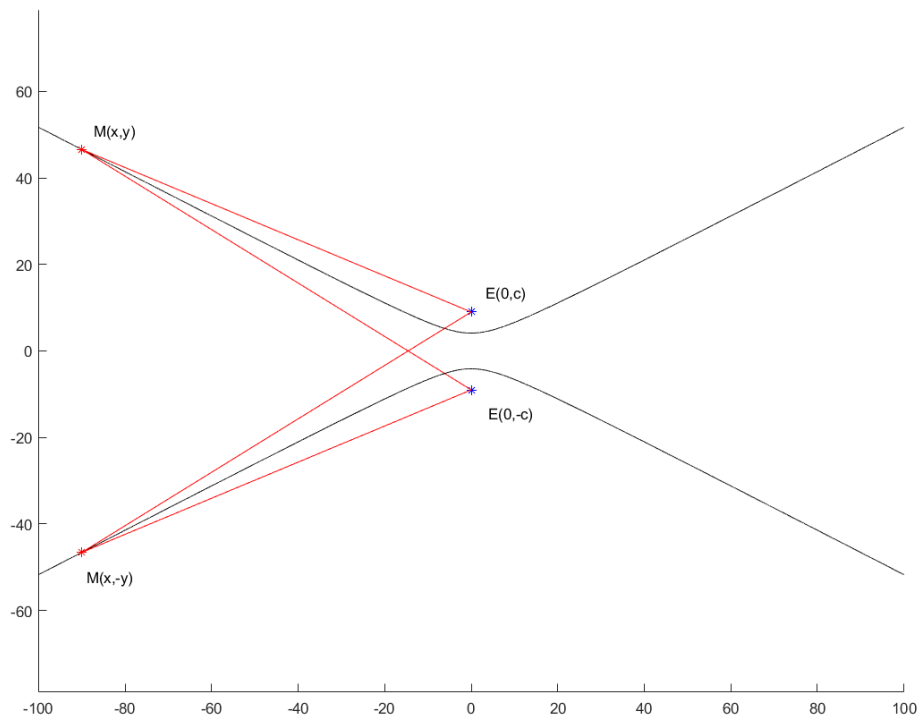
$$a^4 + y^2c^2 - a^2y^2 - a^2c^2 - a^2x^2 = 0$$

$$a^4 + y^2(c^2 - a^2) - a^2c^2 - a^2x^2 = 0$$

Θέτοντας $c^2 - a^2 = b^2$ και απλοποιώντας η σχέση γίνεται:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ικανοποιούν την άνω εξίσωση καλείται υπερβολή. Έχει άξονες συμμετρίας τους x και y και δεν τέμνει ποτέ τον άξονα $x'x$.



Σχήμα 2.10. Η υπερβολή (μαύρο χρώμα) με εστίες τις $E(0, c), E'(0, -c)$ (μπλε κουκκίδες), και δύο τυχαία σημεία $M(x, y)$ και $M(x, -y)$ που είναι στους δύο κλάδους της υπερβολής.

Εξίσωση της υπερβολής με παράμετρο το t αντί της τετμημένης x

Η άνω εξίσωση μπορεί να πάρει μια εναλλακτική μορφή, όχι τόσο βολική για τις υπολογιστικές πράξεις, βάσει των υπερβολικών συναρτήσεων, που οφείλουν το όνομα τους σε αυτήν. Οι συναρτήσεις

$$\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

$$\sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

με $t \in \mathbb{R}$ ονομάζονται υπερβολικό συνημίτονο και ημίτονο αντίστοιχα και ορίζονται μέσω αυτών των σχέσεων.

Μέσω πράξεων αποδεικνύεται η κάτωθι ιδιότητα:

$$\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$$

Αντικαθιστώντας $y = k_1 \cosh(t), x = k_2 \sinh(t)$ με k_1, k_2 προσδιοριστέες σταθερές στην εξίσωση της υπερβολής λαμβάνεται:

$$\frac{(k_1 \cosh(t))^2}{a^2} - \frac{(k_2 \sinh(t))^2}{b^2} = 1$$

Μια προφανής τιμή για την k_2 είναι $k_2 = b$ ενώ για να λαμβάνονται και οι δύο κλάδοι της υπερβολής ως λύση πρέπει $k_1 = a$ για τον θετικό κλάδο ώστε $y > 0$ ενώ $k_1 = -a$ για τον αρνητικό κλάδο ώστε $y < 0$. Οπότε οι παραμετρικές εξισώσεις της έλλειψης με ανεξάρτητη μεταβλητή το $t \in \mathbb{R}$ είναι οι

$$x(t) = b \cdot \sinh(t)$$

$$y(t) = \pm a \cosh(t)$$

Ασύμπτωτες της υπερβολής

Αν αναζητηθεί τι γίνεται για τις τιμές της υπερβολής για $t \rightarrow +\infty$ ή στο $t \rightarrow -\infty$ αντίστοιχα, τότε προκύπτει ένα πολύ ενδιαφέρον συμπέρασμα. Πράγματι, για $t \rightarrow +\infty$

$$x(t) \rightarrow \frac{be^t}{2}$$

Αφού το $\sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \rightarrow \frac{e^t}{2}$ για μεγάλα t και

$$y(t) \rightarrow \frac{ae^t}{2}$$

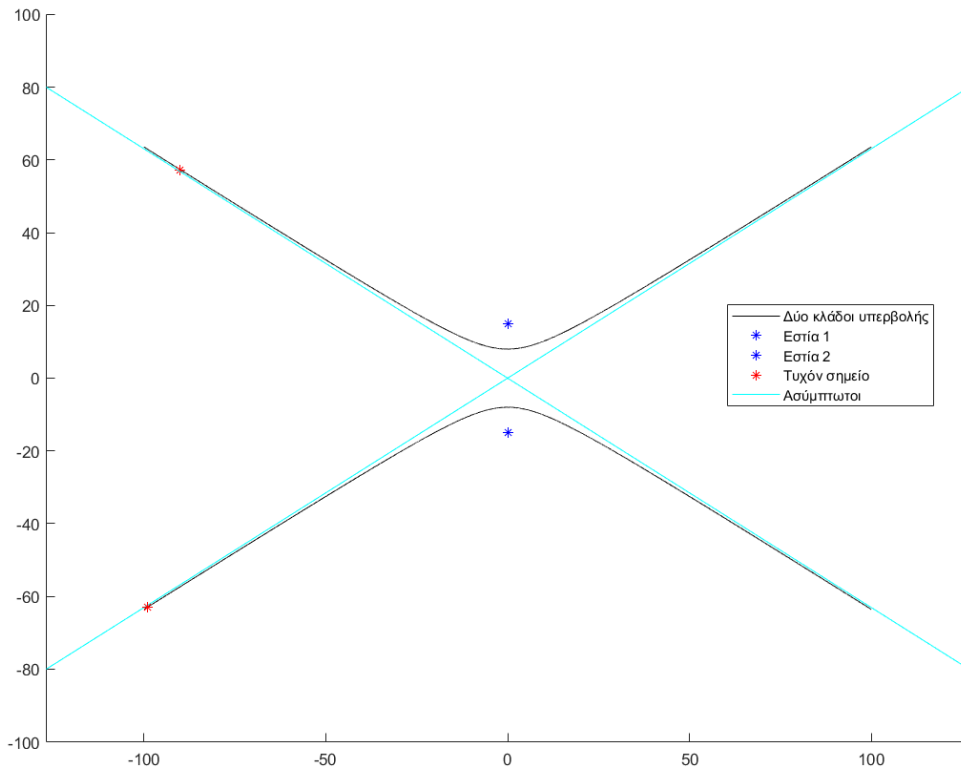
Θέτοντας $u = \frac{e^t}{2}$ οι παραμετρικές εξισώσεις της υπερβολής γίνονται:

$$x(u) = bu$$

$$y(u) = au$$

Όμως αυτές είναι εξισώσεις ευθείας που εκκινεί από το σημείο $O(0,0)$ και έχει κλίση $\frac{a}{b}$. Εντελώς όμοια αποδεικνύεται ότι για $t \rightarrow -\infty$ η κλίση είναι $-\frac{a}{b}$.

Αυτό είναι αρκετά ενδιαφέρον, επειδή αν κατασκευαστεί η καμπύλη είναι δυνατή η σχεδίαση τόσο καμπύλων τμημάτων όσο και εξαιρετικά ευθύγραμμων, χωρίς πρακτικά χρήση κανόνα.



Σχήμα 2.11. Η υπερβολή με τις ασυμπτώτους της, όπου φαίνεται πρακτικά η ταύτιση για πολύ μεγάλα και πολύ μικρά t με τις ασυμπτώτους.

Περί παραβολής

Ζητείται η εύρεση του γεωμετρικού τόπου των σημείων $M(x, y)$ ισαπέχοντα από μια ευθεία δ , ονομαζόμενη διευθετούσα και από μια εστία E .

Πάλι, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ας θεωρηθεί ως διευθετούσα ο άξονας των x και ως εστία επί του άξονος y το σημείο $E(0, y_0)$. Τότε η απόσταση του σημείου $M(x, y)$ του γεωμετρικού τόπου από τη διευθετούσα είναι y ενώ για το $\|\overline{ME}\| = \sqrt{x^2 + (y - y_0)^2}$.

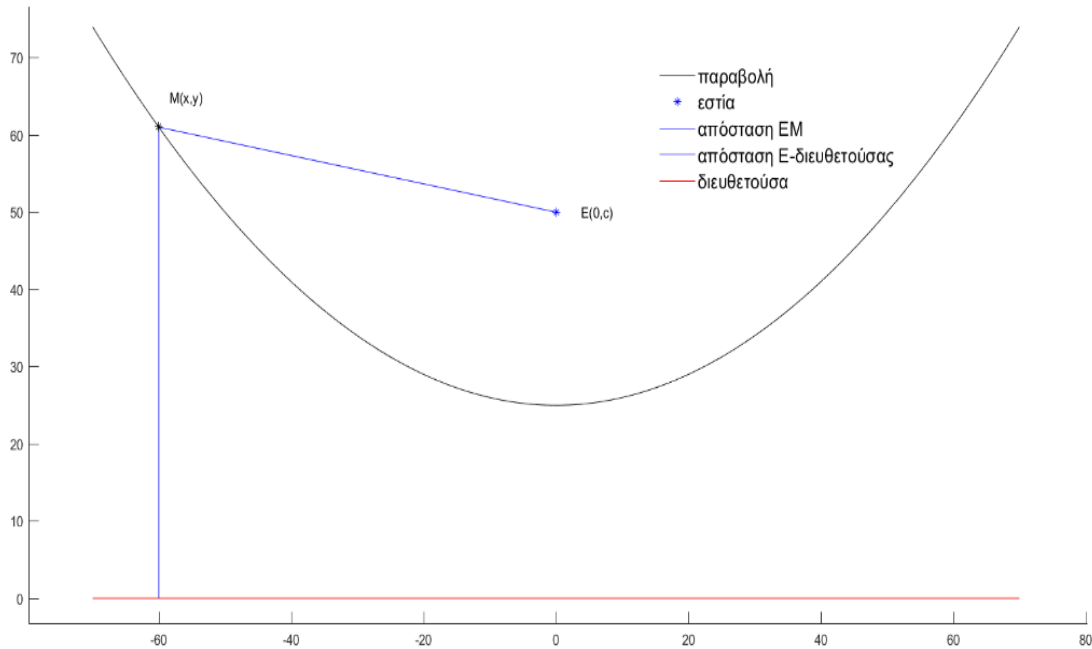
Άρα με ισότητα των δύο αποστάσεων και ύψωση στο τετράγωνο προκύπτει ότι

$$y^2 = x^2 + (y - y_0)^2$$

$$y^2 = x^2 + y^2 - 2yy_0 + y_0^2$$

$$y = \frac{x^2}{2y_0} + \frac{y_0}{2}$$

Η ανεξάρτητη μεταβλητή της καμπύλης είναι το x .



Σχήμα 2.12. Η παραβολή με την εστία, τη διευθετούσα, τυχόν σημείο M και η απόσταση του από το E και την διευθετούσα.

Γενική εξίσωση κωνικών τομών

Όλες οι σχέσεις με ανεξάρτητη μεταβλητή το x που παράγουν κωνικές τομές, αν αυτές υποστούν στροφή και παράλληλη μετατόπιση, αποδεικνύεται στα [1],[2] ότι έρχονται στη μορφή

$$AX^2 + BY^2 + CXY + DX + EY + F = 0$$

Η γωνία στροφής δίνεται από τον τύπο

$$\tan 2\varphi = \frac{C}{A - B}$$

Ενώ η αναγνώριση της κωνικής τομής γίνεται μέσω της σχέσης

$$\Delta = 4AB - C^2$$

Όπου αν $\Delta > 0$, η εξίσωση παριστάνει έλλειψη, αν $\Delta = 0$ παραβολή και αν $\Delta < 0$ υπερβολή.

Αν περιστραφούν κατάλληλα οι άξονες κατά γωνία φ μετακινούνται σε ένα νέο ζεύγος συντεταγμένων (X', Y') όπου ο συντελεστής C , του όρου

Υ μηδενίζεται και έτσι λαμβάνονται οι γνωστές «κανονικές» εξισώσεις των τριών τύπων των κωνικών, δηλαδή σε πεπλεγμένη μορφή

- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, για την έλλειψη
- $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$, για την υπερβολή με άξονα εστιών τον γ'γ
- $y = ax_p^2 + bx_p + c$ για την παραβολή

Οι παραπάνω σχέσεις υπενθυμίζεται ότι ισχύουν όταν οι άξονες των κωνικών είναι παράλληλοι προς τους καρτεσιανούς άξονες. Οι παράμετροι a, b της έλλειψης και της υπερβολής καθορίζουν πλήρως το αντίστοιχο σχήμα, οπότε θα ονομάζονται πρωταρχικές παράμετροι της έλλειψης και της υπερβολής αντίστοιχα. Όμοια ισχύει και για τις παραμέτρους a, b, c της παραβολής. Αντίστοιχα, η πρωταρχική παράμετρος της γραμμικής σπείρας είναι το k .

Κεφάλαιο 3: Ψηφιακή επεξεργασία των φωτογραφιών των προς μελέτη τοιχογραφιών

3.1.Εύρεση αναλύσεως της κάθε εικόνας σε pixels ανά cm

Περιγραφή βημάτων

Για τις δύο φωτογραφίες των τοιχογραφιών που παρουσιάστηκαν ανωτέρω, είναι επιβεβλημένο να μπορεί να εκφραστεί κάθε απόσταση ή μήκος καμπύλης σε φυσικές μονάδες μήκους. Αυτό συμβαίνει διότι μόνο με κριτήριο το μήκος δύνανται να προσδιοριστούν οι πιθανοί γεωμετρικοί οδηγοί με τους οποίους σχεδιάστηκαν κατά το πλείστον οι τοιχογραφίες.

Η εύρεση της ανάλυσης μιας τυχούσας εικόνας σε pixels/cm για την οποία δεν δίνονται οι ακριβείς της διαστάσεις, αλλά μόνο κάποιες προσεγγιστικές, μπορεί να γίνει ως εξής:

- 1) Βρίσκονται όσον το δυνατόν περισσότερες προσεγγιστικές τιμές των φυσικών διαστάσεων της τοιχογραφίας σε μορφή *μήκοςΧπλάτος* ή *πλάτοςΧμήκος*. Αν υπάρχει διαφωνία ως προς αυτό σε διάφορα συγγράμματα, λαμβάνονται όλες οι πιθανές υπόψιν.
- 2) Στη συνέχεια, καθορίζονται προγραμματιστικά τα όρια της τοιχογραφίας ή όλα τα πιθανά όρια από τα οποία προέκυψαν οι διαστάσεις αυτής. Παραστατικά, η τοιχογραφία εντέλει θα είναι ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο που συνιστά την περιβάλλουσα του άνω ορίου, του κάτω ορίου και μετά του αριστερά ορίου και του δεξιά ορίου αυτής.
- 3) Πραγματοποιείται πυκνή δειγματοληψία σε κάθε πιθανό όριο της τοιχογραφίας, ανά τρία με τέσσερα pixels ώστε να προκύψει η περιβάλλουσα κάθε ορίου. Αυτό γίνεται μέσω ανάδρασης του αναπτυσχθέντος προγράμματος με το χρήστη, επειδή μπορεί να υπάρχουν φθορές ή και ανωμαλίες, που ωστόσο βάσει αυτών να προέκυψαν οι διαστάσεις που αναφέρονται στη βιβλιογραφία.

Σε αυτό το στάδιο, υπάρχουν 4 σύνολα σημείων τα οποία δεν είναι κατ' ανάγκην ισοπληθή, έστω τα

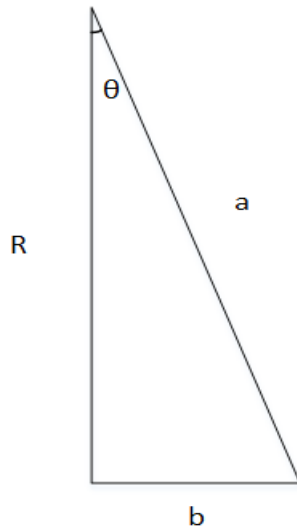
- $\Sigma_{\acute{\alpha}\nu\omega}^{\text{οριζ}}$, με πλήθος $N_{\acute{\alpha}\nu\omega}^{\text{οριζ}}$ για το άνω οριζόντιο όριο,
 - $\Sigma_{\acute{\kappa}\acute{\alpha}\tau\omega}^{\text{οριζ}}$, με $N_{\acute{\kappa}\acute{\alpha}\tau\omega}^{\text{οριζ}}$ το πλήθος σημείων του κάτω οριζοντίου ορίου,
 - $\Sigma_{\acute{\alpha}\rho\iota\sigma\tau}^{\text{καθ}}$, με $N_{\acute{\alpha}\rho\iota\sigma\tau}^{\text{καθ}}$ το πλήθος σημείων του αριστερά καθέτου ορίου και
 - $\Sigma_{\delta\epsilon\chi\iota\acute{\alpha}}^{\text{καθ}}$, με $N_{\delta\epsilon\chi\iota\acute{\alpha}}^{\text{καθ}}$ το πλήθος σημείων του δεξιά καθέτου ορίου.
- 4) Καθορίζεται ο λόγος $\lambda_{\text{διαστάσεων}} = \frac{\text{μήκος}}{\text{πλάτος}}$ από τις δεδομένες από την βιβλιογραφία διαστάσεις. Εντελώς ανάλογα, θα καθοριστεί ο λόγος μήκος/πλάτος βάσει των σημείων των ορίων της τοιχογραφίας που εντοπίστηκαν στα βήματα 2 και 3. Από το σύνολο των λόγων, θα επιλεγεί εκείνος που έχει τη μέγιστη πιθανοφάνεια. Η ανάλυση σε pixels/cm θα είναι η μέση τιμή των μεγεθών:

$$\text{Ανάλυση} \left(\frac{px}{cm} \right) = \frac{\text{πιθανότερο} \left(\frac{\text{μήκος}_{\text{πραγματικό}}}{\text{μήκος}_{\text{σε pixels}}} \right) + \text{πιθανότερο} \left(\frac{\text{πλάτος}_{\text{πραγματ}}}{\text{πλάτος}_{\text{σε pixels}}} \right)}{2}$$

Αναλυτική περιγραφή βήματος 4

Υπάρχουν τα 4 σύνολα σημείων από τα οποία θα προκύψουν οι λόγοι $\frac{\text{μήκος}}{\text{πλάτος}}$, τα $\Sigma_{\acute{\alpha}\nu\omega}^{\text{οριζ}}$ και $\Sigma_{\acute{\kappa}\acute{\alpha}\tau\omega}^{\text{οριζ}}$ για τις οριζόντιες περιβάλλουσες και τα $\Sigma_{\acute{\alpha}\rho\iota\sigma\tau}^{\text{καθ}}$ και $\Sigma_{\delta\epsilon\chi\iota\acute{\alpha}}^{\text{καθ}}$ για τις δύο κάθετες περιβάλλουσες. Ο σκοπός είναι να βρεθεί η απόσταση μεταξύ των δύο οριζοντίων περιβαλλουσών, ήτοι το πλάτος και η απόσταση μεταξύ των δύο καθέτων περιβαλλουσών, ήτοι το μήκος, σε pixels. Τα βήματα είναι τα εξής:

A) Για κάθε σημείο στο $\Sigma_{\acute{\alpha}\nu\omega}^{\text{οριζ}}$, έστω το $A_{\acute{\alpha}\nu\omega}^{\text{οριζ}}(i)$, υπολογίζεται η απόσταση από όλα τα σημεία του συνόλου $\Sigma_{\acute{\kappa}\acute{\alpha}\tau\omega}^{\text{οριζ}}$. Επομένως, υπολογίζονται $N_{\acute{\kappa}\acute{\alpha}\tau\omega}^{\text{οριζ}}$ το πλήθος αποστάσεις. Επειδή ο αρχαιολόγος ή ο συντηρητής υποτίθεται ότι προσδιόρισε την απόσταση βάσει μιας κάθετης γραμμής, από κάποιο σημείο του άνω ορίου σε κάποιο σημείο του κάτω ορίου, με μέτρο την ώρα της συντήρησης της τοιχογραφίας, από το πλήθος των αποστάσεων επιλέγεται η ελάχιστη, που είναι πιο κοντά στην κατακόρυφη απόσταση μεταξύ του σημείου $A_{\acute{\alpha}\nu\omega}^{\text{οριζ}}(i)$ και του κάτω ορίου. Εξάλλου, από την τριγωνομετρία είναι γνωστό ότι, σε ορθογώνιο τρίγωνο ισχύει:



Έστω b η απόκλιση από την κάθετη R και a η απόσταση του σημείου $A_{\acute{\alpha}\nu\omega}^{\text{οριζ}}(i)$ και $A_{\acute{\kappa}\acute{\alpha}\tau\omega}^{\text{οριζ}}(j)$, ϵ με $i \leq N_{\acute{\alpha}\nu\omega}^{\text{οριζ}}, j \leq N_{\acute{\kappa}\acute{\alpha}\tau\omega}^{\text{οριζ}}$. Τότε ισχύει:

$$\alpha = \frac{R}{\cos\theta}$$

Και $\alpha = R$ ισχύει μόνο όταν $\theta \rightarrow 0$ και $\cos\theta \rightarrow 1$. Επειδή $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ και το \cos είναι φθίνουσα συνάρτηση σε αυτό το διάστημα, στο $\theta = 0$ πιάνει μέγιστο και άρα το $\alpha=R$ ισχύει μόνο για αυτή την τιμή.

Αφού θεμελιώθηκε ότι η είναι ορθή η επιλογή της ελάχιστης τιμής από το πλήθος των $N_{\acute{\kappa}\acute{\alpha}\tau\omega}^{\text{οριζ}}$ αποστάσεων από το $A_{\acute{\alpha}\nu\omega}^{\text{οριζ}}(i)$, η ίδια διαδικασία επαναλαμβάνεται για όλα τα σημεία στο $\Sigma_{\acute{\alpha}\nu\omega}^{\text{οριζ}}$ σύνολο και στο τέλος υπάρχουν $N_{\acute{\alpha}\nu\omega}^{\text{οριζ}}$ «προσεγγιστικά» κατακόρυφες αποστάσεις από το άνω στο κάτω όριο, έστω οι $d_{\acute{\alpha}\nu\omega-\acute{\kappa}\acute{\alpha}\tau\omega}$. Πραγματοποιείται η ίδια ακριβώς διαδικασία για την εύρεση των «προσεγγιστικά» κατακόρυφων αποστάσεων από το κάτω στο άνω όριο, οπότε στο τέλος υπάρχουν $N_{\acute{\kappa}\acute{\alpha}\tau\omega}^{\text{οριζ}}$ «προσεγγιστικά» κατακόρυφες αποστάσεις, έστω οι $d_{\acute{\kappa}\acute{\alpha}\tau\omega-\acute{\alpha}\nu\omega}$. Εντελώς όμοια, επαναλαμβάνεται ο αλγόριθμος για τις δύο κατακόρυφες περιβάλλουσες και τελικά υπάρχουν $N_{\acute{\alpha}\rho\iota\sigma\tau}^{\text{καθ}}$ «προσεγγιστικά» κατακόρυφες αποστάσεις, οι $d_{\acute{\alpha}\rho\iota\sigma\tau\acute{\epsilon}\rho\acute{\alpha}-\delta\epsilon\chi\acute{\iota}\acute{\alpha}}$ και $N_{\delta\epsilon\chi\acute{\iota}\acute{\alpha}}^{\text{καθ}}$ «προσεγγιστικά» κατακόρυφες αποστάσεις, οι $d_{\delta\epsilon\chi\acute{\iota}\acute{\alpha}-\acute{\alpha}\rho\iota\sigma\tau\acute{\epsilon}\rho\acute{\alpha}}$.

Από τα τέσσερα διακριτά σύνολα, $d_{\acute{\alpha}\nu\omega-\acute{\kappa}\acute{\alpha}\tau\omega}$, $d_{\acute{\kappa}\acute{\alpha}\tau\omega-\acute{\alpha}\nu\omega}$, $d_{\acute{\alpha}\rho\iota\sigma\tau\acute{\epsilon}\rho\acute{\alpha}-\delta\epsilon\chi\acute{\iota}\acute{\alpha}}$, $d_{\delta\epsilon\chi\acute{\iota}\acute{\alpha}-\acute{\alpha}\rho\iota\sigma\tau\acute{\epsilon}\rho\acute{\alpha}}$ λαμβάνονται τρεις μετρικές για κάθε σύνολο, η μέση τιμή, η μέγιστη τιμή και η ελάχιστη τιμή, οπότε συνολικά υπάρχουν 4 τριάδες με διατεταγμένες τιμές, οι:

$$D_{12\text{κάθετα}} = \{mean(d_{\acute{\alpha}\nu\omega-\acute{\kappa}\acute{\alpha}\tau\omega}), \max(d_{\acute{\alpha}\nu\omega-\acute{\kappa}\acute{\alpha}\tau\omega}), \min(d_{\acute{\alpha}\nu\omega-\acute{\kappa}\acute{\alpha}\tau\omega})\}$$

$$D_{21\text{κάθετα}} = \{mean(d_{\acute{\kappa}\acute{\alpha}\tau\omega-\acute{\alpha}\nu\omega}), \max(d_{\acute{\kappa}\acute{\alpha}\tau\omega-\acute{\alpha}\nu\omega}), \min(d_{\acute{\kappa}\acute{\alpha}\tau\omega-\acute{\alpha}\nu\omega})\}$$

$$D_{12\text{οριζόντια}} = \{mean(d_{\alpha\rho\iota\sigma\tau\epsilon\rho\acute{\alpha}-\delta\epsilon\zeta\iota\acute{\alpha}}), \max(d_{\alpha\rho\iota\sigma\tau\epsilon\rho\acute{\alpha}-\delta\epsilon\zeta\iota\acute{\alpha}}), \min(d_{\alpha\rho\iota\sigma\tau\epsilon\rho\acute{\alpha}-\delta\epsilon\zeta\iota\acute{\alpha}})\}$$

$$D_{21\text{οριζόντια}} = \{mean(d_{\delta\epsilon\zeta\iota\acute{\alpha}-\alpha\rho\iota\sigma\tau\epsilon\rho\acute{\alpha}}), \max(d_{\delta\epsilon\zeta\iota\acute{\alpha}-\alpha\rho\iota\sigma\tau\epsilon\rho\acute{\alpha}}), \min(d_{\delta\epsilon\zeta\iota\acute{\alpha}-\alpha\rho\iota\sigma\tau\epsilon\rho\acute{\alpha}})\}$$

Προτιμήθηκαν οι 3 μετρικές γιατί δεν είναι δεδομένες οι συνθήκες της μέτρησης, οπότε εξασφαλίζεται σε κάθε περίπτωση με αυτά τα τρία μεγέθη οποιαδήποτε περίπτωση.

Εν συνεχεία, σχηματίζονται οι λόγοι των κάθετων/οριζόντιων διαστάσεων σε pixels ως εξής:

$$\lambda_{12\kappa\alpha\theta-12\omicron\rho}(i) = \frac{D_{12\text{κάθετα}}(i)}{D_{12\text{οριζόντια}}(i)}, i = 1 \dots 3$$

$$\lambda_{12\kappa\alpha\theta-21\omicron\rho}(i) = \frac{D_{12\text{κάθετα}}(i)}{D_{21\text{οριζόντια}}(i)}, i = 1 \dots 3$$

$$\lambda_{21\kappa\alpha\theta-12\omicron\rho}(i) = \frac{D_{21\text{κάθετα}}(i)}{D_{12\text{οριζόντια}}(i)}, i = 1 \dots 3$$

$$\lambda_{21\kappa\alpha\theta-21\omicron\rho}(i) = \frac{D_{21\text{κάθετα}}(i)}{D_{21\text{οριζόντια}}(i)}, i = 1 \dots 3$$

Από όλες αυτές τις τιμές των λόγων, επιλέγεται αυτή για την οποία ισχύουν ταυτόχρονα τα εξής:

$$|\lambda(j) - \lambda_{\text{διαστάσεων}}| < 0.1 \pm \varepsilon, \varepsilon \text{ μικρή απόκλιση στο δεύτερο δεκαδικό}$$

$$|\lambda(j) - \lambda_{\text{διαστάσεων}}| = \min$$

$$j = 1 \dots 12 \text{ αφού οι τιμές του } \lambda \text{ είναι 12 στο πλήθος}$$

Το κατώφλι της πρώτης συνθήκης μπορεί να αυξηθεί λίγο αν δεν είναι τόσο πυκνά τα σημεία σε κάθε σύνολο, αλλά και στις δύο τοιχογραφίες η διαφορά κυμαινόταν σε αυτά τα πλαίσια.

Μετά την εφαρμογή της μεθόδου, από το $\lambda(j), j \in \{1,12\}$ που βρέθηκε αντιστοιχίζεται μονοσήμαντα σε ένα λόγο $\frac{D_{\text{κάθετα}}}{D_{\text{οριζόντια}}}$ εκ κατασκευής του συνόλου οπότε έτσι βρέθηκαν με μέγιστη πιθανοφάνεια της τοιχογραφίας σε pixels. Επανερχόμενοι στο τελευταίο βήμα, η ανάλυση σε pixels/cm θα είναι, όπως προαναφέρθηκε:

$$\text{Ανάλυση} \left(\frac{px}{cm} \right) = \frac{\text{πιθανότερο} \left(\frac{\text{μ\acute{\eta}\kappa\omicron\varsigma\text{πραγμ}}}{D_{\text{κάθετα}}} \right) + \text{πιθανότερο} \left(\frac{\text{πλ\acute{\alpha}\tau\omicron\varsigma\text{πραγμ}}}{D_{\text{οριζόντια}}} \right)}{2}$$

Ακολουθεί παράδειγμα της τοιχογραφίας των «Λατρευτριών» για να γίνει κατανοητή η μεθοδολογία.



Εδώ φαίνεται καθαρά ότι η τοιχογραφία δεν έχει ισοπληθή σύνολα σημείων για κάθε περιβάλλουσα, επειδή υπάρχουν φθορές στα συνοριακά σημεία της. Μετά από την επεξεργασία, προέκυψε ότι η ανάλυση είναι, λαμβάνοντας υπόψιν όλες τις αναφορές της βιβλιογραφίας:

Ανάλυση_{Λατρεύτριας} = 54.64 pixels/cm

Η ίδια ακριβώς διαδικασία ακολουθήθηκε και για την τοιχογραφία των κρίνων και εκεί η ανάλυση προέκυψε:

Ανάλυση_{Παγκρατίων} = 62.93 px/cm

Κεφάλαιο 4: Πρώτος χωρισμός των περιγραμμάτων των θεματικών ενοτήτων των τοιχογραφιών σε τμήματα

4.1 Ορισμός του αντικειμένου περιγράμματος

Σύμφωνα με τον τρόπο που περιγράφεται στις δημοσιεύσεις [8], [9], [10] και [11] εξήχθησαν τα περιγράμματα των βασικών θεματικών μορφών της κάθε τοιχογραφίας. Ας θεωρηθεί επομένως, ότι το περίγραμμα μιας θεματικής ενότητας είναι μια διανυσματική καμπύλη $\vec{r}(t)$. Ένα υποσύνολο αυτού του περιγράμματος ονομάζεται αντικείμενο περιγράμματος ή απλώς «αντικείμενο» εφόσον αυτό είναι ομαλό και η αρχή και το τέλος του υποσυνόλου αυτού είναι ασυνέχειες του περιγράμματος ή ασυνέχειες του μοναδιαίου εφαπτόμενου διανύσματος του περιγράμματος. Ως ασυνέχεια του περιγράμματος λαμβάνεται η αρχή μιας φθοράς ή το πέρας ενός τμήματος, μετά το οποίο υπάρχει κομμάτι που έχει χαθεί ή εκεί όπου η γραμμή παύει να είναι ομαλή και υπάρχει μια ακίδα είτε ασυνέχεια του περιγράμματος, σαν «σπάσιμο».



Εικόνα 4.1: Λεπτομέρεια της «μεσαιάς Λατρεύτιας» όπου φαίνονται διάφορα περιγράμματα θεματικών εντοτήτων.



Εικόνα 4.2: Λεπτομέρεια των «Παγκρατίων» όπου φαίνονται διάφορα περιγράμματα θεματικών εντοτήτων

Κάποιος εξετάζοντας ενδελεχώς διάφορα αντικείμενα παρατηρεί ότι κατά πάσα πιθανότητα αποτελούνται από μια ένωση διαδοχικών καμπυλών πολλαπλώς παραγωγίσιμων, σε καθεμιά εκ των οποίων αντιστοιχεί ένα τμήμα αντικειμένου περιγράμματος, όπως αυτό θα ορισθεί εν συνεχεία.

Μια αυστηρή διατύπωση της βασικής υπόθεσης της εργασίας

Η βασική υπόθεση που γίνεται στην παρούσα εργασία προέρχεται από τον εξής συλλογισμό. Για να φτιάξει ο καλλιτέχνης γύρω στο 1650 προ Χριστού το περίγραμμα μιας θεματικής ενότητας, χρησιμοποίησε διαδοχικώς οδηγούς (είτε καμπυλογράφους είτε μηχανισμούς παραγωγής των καμπυλών). Με άλλα λόγια, ο καλλιτέχνης μετακινούσε για ένα διάστημα το πινέλο με χρήση του οδηγού και με αυτό τον τρόπο παρήγαγε μια καμπύλη πρακτικά απείρως παραγωγίσιμη. Έπειτα, επανατοποθετούσε τον ίδιο ή άλλο οδηγό και σχεδίαζε το επόμενο τμήμα του περιγράμματος της θεματικής ενότητας. Πρόσεχε επιμελώς να εξασφαλίζει, για αισθητικούς λόγους, την ομαλότητα στο σημείο επαφής ή/και να μην δημιουργηθεί ακίδα στο σημείο αλλαγής οδηγού ούτε «βαθούλωμα». Εν γένει απέφευγε οτιδήποτε μπορούσε να δημιουργήσει την αίσθηση «σπασίματος του περιγράμματος» μιας οποιασδήποτε θεματικής μορφής.

Αυτό, σε μαθηματική ορολογία εκφράζεται, με τη συνέχεια της εφαπτομένης στο σημείο ένωσης των δύο καμπυλών. Στα σημεία όμως αλλαγής καμπυλογράφου/οδηγού, ο καλλιτέχνης δε μπορούσε εκ των πραγμάτων να εξασφαλίσει τη συνέχεια των παραγώγων ανωτέρας τάξεως, η οποία αισθητικά δεν παρέχει κάποιο αποτέλεσμα, όπως η συνέχεια της πρώτης παραγώγου. Επίσης κάτι τέτοιο ήταν εντελώς έξω από τις γνώσεις του αλλά ενδεχομένως και από τη φαντασία του.

Συνοψίζοντας, σε μαθηματική ορολογία, κάθε αντικείμενο είναι μια καμπύλη C_{2-} , δηλαδή μια καμπύλη που έχει συνεχείς παραγώγους πρώτης τάξεως και τμηματικώς συνεχή δεύτερη παράγωγο, με πεπερασμένο πλήθος σημείων ασυνέχειας σε αυτήν, που είναι τα σημεία αλλαγής οδηγού ή μετατοπίσεως του ίδιου ώστε να παραχθεί νέο τμήμα. Δηλαδή κάθε αντικείμενο είναι μια ένωση μικρού πλήθους απείρως παραγωγίσιμων $C_{n-}, n > 2$ καμπυλών. Κάθε τέτοια απείρως παραγωγίσιμη καμπύλη θα θεωρείται ότι αντιστοιχεί σε μια μονοκονδυλιά.

4.2 Ορισμός του τμήματος αντικειμένου περιγράμματος

Υποτεθήσθω ότι μια τοιχογραφία που εξετάζεται δεν έχει υποστεί φθορές και έτσι όλα τα περιγράμματα των αντικειμένων είναι συνεχή και περιγράφονται από την τμηματικά δύο φορές παραγωγίσιμη καμπύλη με επιβατική ακτίνα $\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$. Ορίζεται ως τμήμα αντικειμένου περιγράμματος ένα υποσύνολο σημείων της καμπύλης, τα άκρα του οποίου είναι ένα από τα κάτωθι:

- 1) Η αρχή ή το τέλος ενός αντικειμένου,
 - 2) ένα σημείο στο οποίο η δεύτερη παράγωγος είναι ασυνεχής, δηλαδή υπάρχει άλμα στην καμπυλότητα,
 - 3) Ένα σημείο καμπής, δηλαδή σημείο που συμβαίνει αλλαγή κοίλων.
- Για το (3) η μαθηματική διατύπωση ισοδυναμεί με αλλαγή προσήμου της οριζουσας:

$$C^k = \begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) \\ x''(t) & y''(t) \end{vmatrix} \quad (4.1)$$

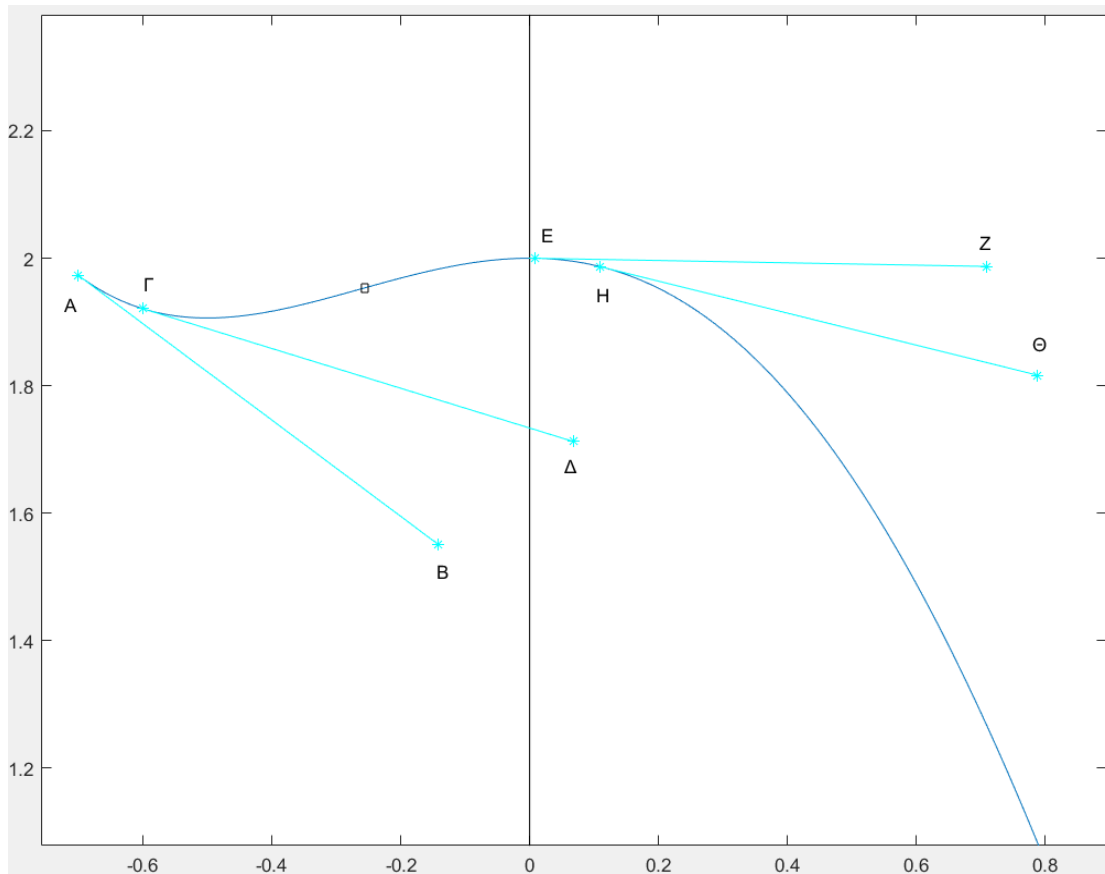
Στην περίπτωση αυτή, η καμπύλη που περιγράφει το αντικείμενο αλλάζει τον τρόπο με τον οποίο στρέφει τα κοίλα εκατέρωθεν του σημείου που η μήτρα μηδενίζεται. Ποιο ποιοτικά, αν ένα κινητό κινείται επί της καμπύλης με ανθρωπολογιακή φορά, τότε όταν τα κοίλα είναι στα αριστερά του η οριζουσα είναι θετική ενώ όταν τα κοίλα είναι στα δεξιά του, η οριζουσα C^k είναι αρνητική.

Άνωθεν παρουσιάζονται τέσσερα εφαπτόμενα διανύσματα σε μια καμπύλη που διαγράφεται ανθρωπολογιακά. Τα \overline{AB} και \overline{EZ} είναι δύο εφαπτόμενες σε δύο διαφορετικά σημεία της καμπύλης, δηλαδή δύο τιμές της συνάρτησης $\vec{r}'(t)$, για t_1, t_2 που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της παραγώγου. Τα $\overline{\Gamma\Delta}$ και $\overline{H\Theta}$ είναι οι αντίστοιχες τιμές για μια μικρή μεταβολή της παραγώγου, δηλαδή για το $\vec{r}'(t + \Delta t)$. Για $\Delta t \rightarrow 0$, τα σημεία A, Γ σχεδόν ταυτίζονται άρα το διάνυσμα

$$\overline{B\Delta} = \overline{\Gamma\Delta} - \overline{AB} = \vec{r}'(t + dt) - \vec{r}'(t) = \vec{r}''(t)dt$$

Όμοια για $\Delta t \rightarrow 0$, τα σημεία E, H σχεδόν ταυτίζονται άρα το διάνυσμα

$$\vec{Z\Theta} = \vec{H\Theta} - \vec{EZ} = \vec{r}'(t + dt) - \vec{r}'(t) = \vec{r}''(t)dt$$



Εικόνα 4.3

Στο πρώτο στιγμιότυπο το εξωτερικό γινόμενο $\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)$ έχει ανθρωλογιακή φορά, είναι θετικό δηλαδή επί του άξονος του z στον \mathbb{R}^3 ενώ στο δεύτερο έχει ωρολογιακή, δηλαδή αρνητικό επί του z άξονος στον \mathbb{R}^3 . Αλλά

$$\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x'(t) & y'(t) & 0 \\ x''(t) & y''(t) & 0 \end{vmatrix} = \hat{k} \begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) \\ x''(t) & y''(t) \end{vmatrix} = \hat{k}C^k$$

Άρα τα σημεία αλλαγής προσήμου της C^k είναι σημεία αλλαγής κοίλων.

Στην ειδική περίπτωση που όπου η καμπύλη περιγράφεται από μία συνάρτηση της μορφής $y = f(x)$, η ανεξάρτητη μεταβλητή της καμπύλης είναι το x και η επιβατική ακτίνα της καμπύλης είναι η $\vec{r}(t) = x\hat{i} + f(x)\hat{j}$. Τότε

$$C^k = \begin{vmatrix} 1 & y'(t) \\ 0 & y''(t) \end{vmatrix} = f''(x)$$

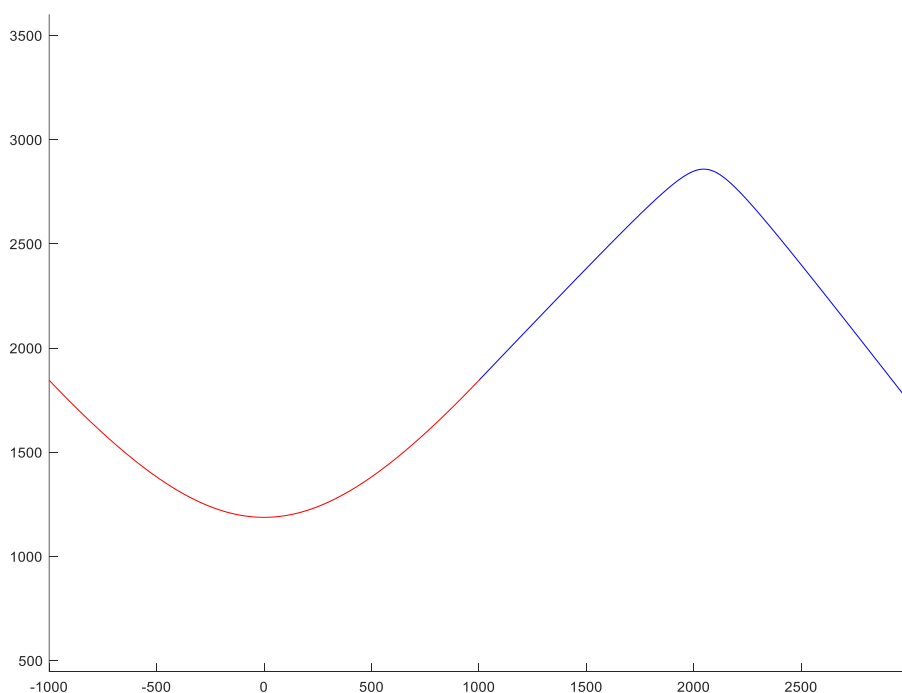
οπότε προκύπτει η γνωστή σύνδεση των κοίλων με τη δεύτερη παράγωγο.

Ο εντοπισμός του εκάστοτε αντικειμένου περιγράμματος είναι κολοσσιαίας σημασίας, αφού αν πράγματι ο καλλιτέχνης χρησιμοποιούσε καμπυλογράφους ως εργαλεία ζωγραφικής, τότε κάθε φορά που τοποθετούσε επί του τοίχου το εργαλείο για να ζωγραφίσει μια γραμμή, παρήγαγε ένα τμήμα αντικειμένου περιγράμματος. Δηλαδή, κάθε ζωγραφισμένη γραμμή που γινόταν με μία συνεχή κίνηση του πινέλου ενώ αυτό καθοδηγείτο από τον καμπυλογράφο, αντιστοιχίζεται σε ένα τμήμα αντικειμένου. Γι' αυτό εναλλακτικά θα αναφέρεται και ο όρος «συνεχής μονοκονδυλιά» για αυτό το τμήμα.

Συνεπώς, θα διατυπωθεί και θα θεμελιωθεί η υπόθεση ότι κάθε αντικείμενο περιγράμματος είναι μια καμπύλη C_{2-} , ενώ κάθε τμήμα αντικειμένου περιγράμματος είναι μια καμπύλη C_{∞} , δηλαδή μια απείρως παραγωγίσιμη καμπύλη.

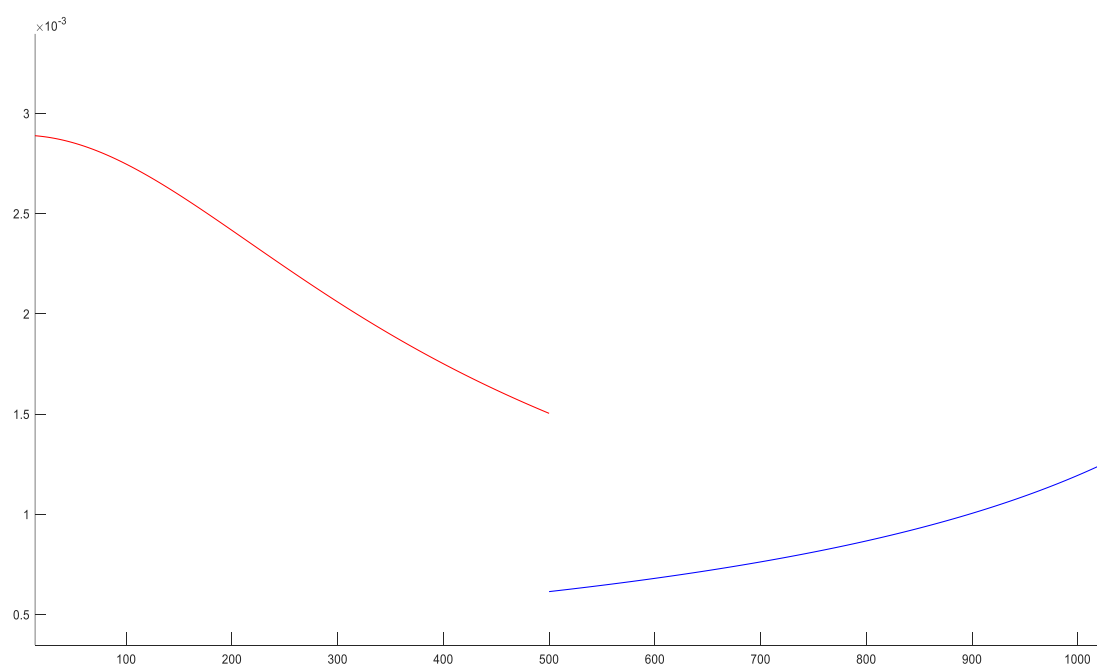
Ένα υποθετικό παράδειγμα

Στο παρακάτω σχήμα έχουν παρασταθεί δύο διαφορετικές υπερβολές τοποθετημένες κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να εξασφαλίζεται στο σημείο επαφής η συνέχεια της διανυσματικής ακτίνας και του μοναδιαίου εφαπτόμενου διανύσματος.



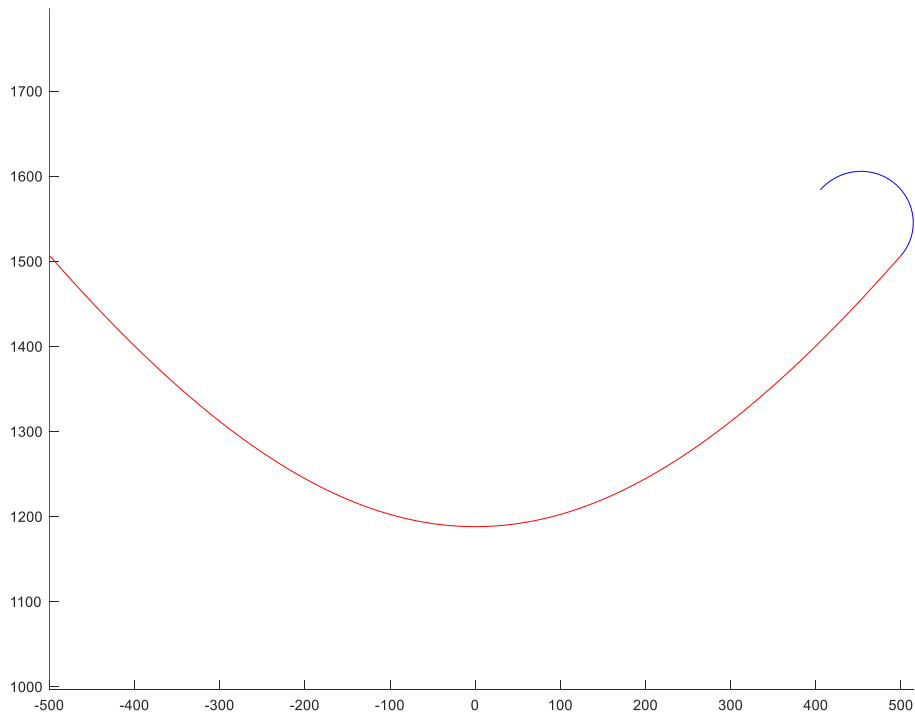
Εικόνα 4.4. Δύο υπερβολές με παραμέτρους $(\alpha, b) = (641, 1188)$ για την κόκκινη και $(\alpha, b) = (149, 123)$ για τη μπλε. Τα α, b είναι σε pixels.

Το παράδειγμα αυτό συνιστά μια τεχνητή προσομοίωση πιθανής προσπάθειας του καλλιτέχνη να δημιουργήσει μια συνεχή γραμμή με κατάλληλη διαδοχική τοποθέτηση δύο καμπυλογράφων, εδώ υπερβολών. Όταν δηλαδή ο καλλιτέχνης δημιουργεί μια ομαλή καμπύλη με δύο ή περισσότερους καμπυλογράφους προσπαθεί, σε σύγχρονη μαθηματική ορολογία, να εξασφαλίσει τη συνέχεια της εφαιπτομένης στο σημείο ένωσης των δύο καμπυλών, οπότε και τη συνέχεια των τιμών των συναρτήσεων στο σημείο επαφής, αφού κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση είναι και συνεχής. Η αλλαγή ωστόσο στις τιμές της καμπυλότητας (της $\tilde{r}''(s)$) είναι αυτή που αναδεικνύει τη χρήση διαφορετικών καμπυλογράφων ή διαφορετικών τμημάτων του ίδιου οδηγού.

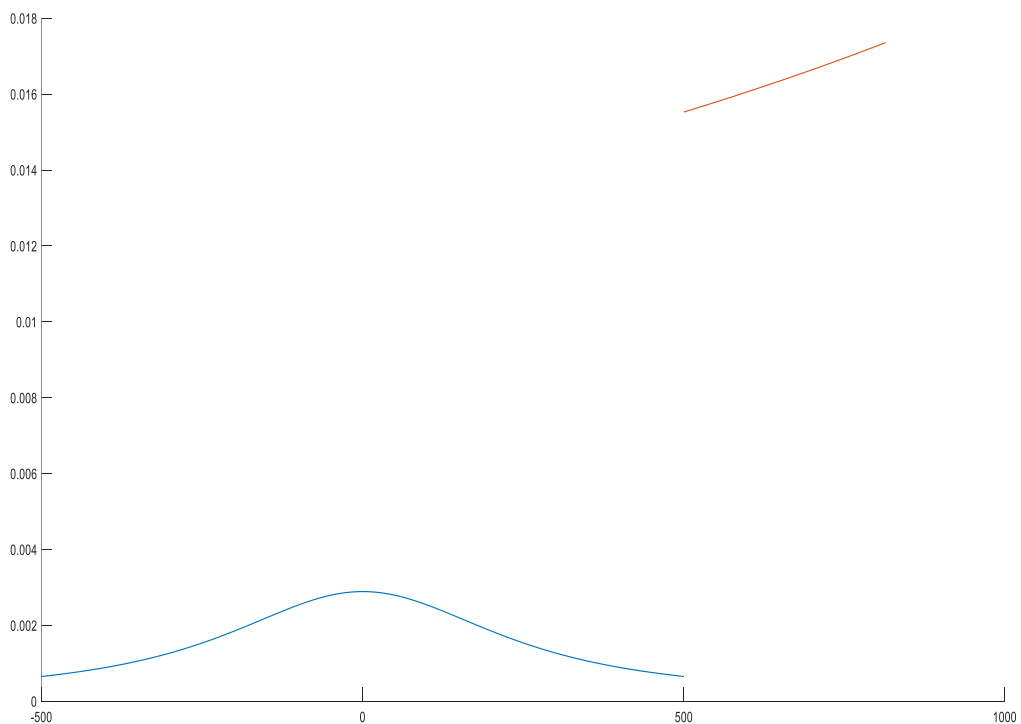


Εικόνα 4.5: Το άλμα στην καμπυλότητα στο σημείο επαφής των δύο υπερβολών. Ο χρωματικός κώδικας παραμένει ίδιος.

Στην εικόνα από κάτω φαίνεται ένα άλλο αποτέλεσμα αλλαγής καμπυλογράφου και στην άλλη εικόνα το άλμα στην καμπυλότητα στο σημείο αλλαγής καμπυλογράφου. Η καμπύλη με το κόκκινο χρώμα αναπαριστά υπερβολή, ενώ αυτή με το κυανό τμήμα γραμμικής σπείρας.



Εικόνα 4.6: Υπερβολή και τμήμα γραμμικής σπείρας ταιριασμένες τεχνητά.



Εικόνα 4.7: Είναι φανερό το άλμα στην καμπυλότητα των δύο καμπυλών στο σημείο επαφής.

4.3 Μια πρώτη εκτίμηση των σημείων αλλαγής τμημάτων αντικειμένου

Όπως ήδη αναφέρθηκε, τα σημεία αλλαγής καμπυλογράφου χαρακτηρίζονται είτε από αλλαγή των κοίλων είτε από αλλαγή της καμπυλότητας διαφορικά εκατέρωθεν του εκάστοτε σημείου. Άρα μία πρώτη εκτίμηση των σημείων αλλαγής καμπυλογράφου καθίσταται δυνατή μέσω του προσδιορισμού σημείων όπου συμβαίνει τουλάχιστον ένα εκ των δύο αυτών γεγονότων.

Όντως, έστω ένα αντικείμενο $C_{Avτ}$ του περιγράμματος μιας μορφής, που απεικονίζεται σε μια τοιχογραφία. Έστω επίσης, ότι το αντικείμενο αυτό αποτελείται από L_0 σημεία, με απόσταση μεταξύ τους ανάλογα με την ανάλυση της εικόνας, συνήθως ανά δύο με τρία εικονοστοιχεία. Θα αναλυθούν οι δύο διαφορετικές μέθοδοι αρχικής εκτίμησης των πιθανών σημείων αλλαγής καμπυλογράφων.

Προσδιορισμός των σημείων του αντικειμένου περιγράμματος $C_{Avτ}$ όπου συμβαίνει σημαντική αλλαγή κοίλων.

Έστω ένας αριθμός σημείων L_s , μικρό ποσοστό του L_0 . Προκειμένου να εντοπιστούν τα σημεία του $C_{Avτ}$ όπου συμβαίνει αλλαγή κοίλων, ακολουθείται η εξής διαδικασία: Διαιρείται το $C_{Avτ}$ σε υποσύνολα διαδοχικών σημείων, όπου τα υποσύνολα αυτά έχουν μήκος L_s και είναι ελαφρώς επικαλυπτόμενα μεταξύ τους, έστω L_{ov} , σημεία. Υπολογίζεται το πολυώνυμο τρίτου βαθμού το οποίο ταιριάζει βέλτιστα υπό την έννοια των ελαχίστων τετραγώνων σε κάθε τέτοιο υποσύνολο. Έτσι στο τέλος υπάρχει ένα σύνολο διαδοχικών, ελαφρά επικαλυπτόμενων πολυωνυμικών καμπυλών τρίτου βαθμού, έστω $S_i, i = 1, 2, \dots, N_s$, με N_s το οποίο καλύπτει όλα τα σημεία που αποτελούν το $C_{Avτ}$.



Εικόνα 4.8: Τμήμα της χειρός και του βραχίονα της εικόνας 3.1 όπου φαίνονται τρεις πολυωνυμικές καμπύλες, κάθε μια τρίτου βαθμού και πλήθους L_s , που βέλτιστα προσεγγίζουν τα σημεία του αντικειμένου περιγράμματος υπό την έννοια των ελαχίστων τετραγώνων, με μια μικρή επικάλυψη.

Καλές τιμές για τα μεγέθη L_s και L_{ov} είναι οι κάτωθι:

$$L_s = \begin{cases} [0.15L_0] , L_0 \geq 400 \text{ σημεία} \\ [0.33L_0] , L_0 < 400 \text{ σημεία} \end{cases} \quad L_{ov} = \begin{cases} [0.09L_s] , L_0 \geq 400 \text{ σημεία} \\ [0.18L_s] , L_0 < 400 \text{ σημεία} \end{cases}$$

όπου για $x \in \mathbb{R}$, $[x]$ είναι το ακέραιο μέρος του x . Γειτονικές τιμές των L_s και L_{ov} δίνουν πολύ παρόμοια αποτελέσματα. Στη συνέχεια υπολογίζονται τα πιθανά σημεία καμπής των πολυωνυμικών καμπυλών τρίτου βαθμού S_i και αυτά είναι πιθανά σημεία χωρισμού για τις διάφορες μονοκονδυλίες. Τα σημεία καμπής ορίζονται μέσω της μεθόδου που περιγράφεται στο 4.2. Από αυτά τα σημεία καμπής λαμβάνονται ως πιθανά σημεία αλλαγής καμπυλογράφου εκείνα τόσο αριστερά όσο και δεξιά των οποίων η οριζουσα (4.1) διατηρεί σταθερό πρόσημο για ικανό αριθμό σημείων. Φυσικά το πρόσημο των αριστερά επί το πρόσημο των δεξιά σημείων πρέπει να δίνει -1 ώστε να είναι ετερόσημη η τιμή της οριζουσας (4.1). Ο αριθμός των σημείων επιλέγεται να είναι $\frac{L_{ov}}{2}$.

Η απαίτηση η οριζουσα (4.1) να διατηρεί σταθερό πρόσημο για ικανό αριθμό σημείων αριστερά του υποψηφίου σημείου καμπής αλλά σταθερά το αντίθετο πρόσημο δεξιά αυτού, εξασφαλίζει την αποφυγή λανθασμένης επιλογής σημείων λόγω τυχαίων διακυμάνσεων των κοίλων, οι οποίες οφείλονται στη φθορά, στις ενδογενείς ατέλειες της πινελιάς αλλά και στην πολυωνυμική προσέγγιση.

Προσδιορισμός των σημείων του αντικειμένου περιγράμματος εκατέρωθεν των οποίων η καμπυλότητα αλλάζει σημαντικά

Έστω L_k ένα μικρό σύνολο σημείων, πολύ μικρότερο του L_0 , των συνολικών σημείων του αντικειμένου περιγράμματος. Παραδείγματος χάρη, αν το $C_{αντ}$ αποτελείται από περίπου 400 σημεία, όχι τόσο συνηθισμένο, μια καλή τιμή για την ανάλυση που θα γίνει είναι $L_k = 10$. Όλα τα σημεία, από τον τρόπο που εξάγονται, έχουν προκύψει σε φυσική αρίθμηση, επομένως λαμβάνεται ένα υποσύνολο του $C_{αντ}$, έστω $C_{αντ}^{Υπ}$, με σημεία σε φυσική αρίθμηση από $L_k + 1$ ως $L_0 - L_k + 1$. Το υποσύνολο $C_{αντ}^{Υπ}$ έχει επιλεγεί με τέτοιο τρόπο, ώστε κάθε σημείο να είναι εν δυνάμει κέντρο μίας περιοχής ακτίνας L_k σημείων, ανήκουσα εξ ολοκλήρου στο $C_{αντ}$. Έστω τυχόν σημείο $P \in C_{αντ}^{Υπ}$ το οποίο είναι το υπ' αριθμόν i σημείο του $C_{αντ}$. Προσεγγίζεται το σύνολο των σημείων του $C_{αντ}(i - L_k + 1, i)$ με δύο πολυώνυμα τρίτου βαθμού ως προς το μήκος του υποσυνόλου αυτού. Αν $m = i - L_k + 1$, ορίζεται η εξής ακολουθία μηκών επ' αυτού του συνόλου σημείων:

- $\xi_0 = 0$
- Εάν $d(P_{m+1}, P_m)$ είναι η απόσταση του $(m + 1)$ σημείου από το κέντρο του m σημείου τότε $\xi_1 = d(P_{m+1}, P_m)$.
- Εάν $d(P_{m+2}, P_{m+1})$ είναι η απόσταση του $(m + 2)$ σημείου από το κέντρο του $(m + 1)$ σημείου τότε $\xi_2 = d(P_{m+2}, P_{m+1}) + \xi_1$ και συνεχίζεται αναδρομικά έως το υπ' αριθμόν i σημείο.

Οι σχετικές πολυωνυμικές προσεγγίσεις ορίζονται από τις σχέσεις

$$x^l(\xi) = \alpha_0 \xi^3 + \alpha_1 \xi^2 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \quad (4.2)$$

$$y^l(\xi) = \beta_0 \xi^3 + \beta_1 \xi^2 + \beta_2 \xi + \beta_3 \quad (4.3)$$

Ας θεωρηθεί το σύνολο των σημείων του $C_{αντ}(i, i + L_k - 1)$. Και αναλόγως ορίζεται η ακολουθία μηκών s_j ως εξής

- $s_0 = 0$
- Εάν $d(P_{i+1}, P_i)$ είναι η απόσταση του $(i + 1)$ σημείου από το κέντρο του i σημείου τότε $s_1 = d(P_{i+1}, P_i)$.
- Εάν $d(P_{i+2}, P_{i+1})$ είναι η απόσταση του $(i + 2)$ σημείου από το κέντρο του $(i + 1)$ σημείου τότε $s_2 = d(P_{i+2}, P_{i+1}) + s_1$ και συνεχίζεται αναδρομικά έως το υπ' αριθμόν $i + L_k - 1$ σημείο.

Το σύνολο των σημείων του $C_{αντ}(i, i + L_k - 1)$ προσεγγίζονται με δύο πολυώνυμα πέμπτου βαθμού, έστωσαν τα κάτωθι

$$x^r(s) = \gamma_0 s^5 + \gamma_1 s^4 + \gamma_2 s^3 + \gamma_3 s^2 + \gamma_4 s + \gamma_5 \quad (4.4)$$

$$y^r(s) = \delta_0 s^5 + \delta_1 s^4 + \delta_2 s^3 + \delta_3 s^2 + \delta_4 s + \delta_5 \quad (4.5)$$

Η απαίτηση βέλτιστης προσαρμογής υπό την έννοια των ελαχίστων τετραγώνων του συνόλου των σημείων $(i - L_k + 1, i)$ και $(i, i + L_k - 1)$ από τα πολυώνυμα $x^l(\xi), y^l(\xi)$ και $x^r(s), y^r(s)$ αντίστοιχα ισοδυναμεί με ελαχιστοποίηση των ποσοτήτων:

$$E_x = \sum_{j=m}^i (x_j - x^l(\xi_{j-m}))^2 + \sum_{j=i}^{i+L_k-1} (x_j - x^r(s_{j-i}))^2 = \min \quad (4.6)$$

$$E_y = \sum_{j=m}^i (y_j - y^l(\xi_{j-m}))^2 + \sum_{j=i}^{i+L_k-1} (y_j - y^r(s_{j-i}))^2 = \min \quad (4.7)$$

Υπό του κάτωθι περιορισμούς π1) και π2)

Π1)Επειδή ο καλλιτέχνης εξασφάλιζε συνέχεια της γραμμής που σχεδίαζε, πρέπει οι τιμές της τετμημένης και της τεταγμένης να είναι ίσες επί του κέντρου του σημείου i . Ισοδύναμα ,

$$x^l(\xi_{i-m}) = x^r(s_0) \quad (4.8)$$

$$y^l(\xi_{i-m}) = y^r(s_0) \quad (4.9)$$

Π2)Επειδή στη βασική υπόθεση διατυπώνεται ότι ο καλλιτέχνης φρόντιζε να εξασφαλίζει όχι μόνο τη συνέχεια, αλλά και την ομαλότητα στο περίγραμμα, δηλαδή σε σύγχρονη μαθηματική ορολογία την ισότητα των μοναδιαίων εφαπτόμενων διανυσμάτων εκατέρωθεν κάθε σημείου, πρέπει

$$\frac{d}{d\xi} x^l(\xi_{i-m}) = \frac{d}{ds} x^r(s_0) \quad (4.10)$$

$$\frac{d}{d\xi} y^l(\xi_{i-m}) = \frac{d}{ds} y^r(s_0) \quad (4.11)$$

Υπενθυμίζεται ότι επειδή η ανεξάρτητη μεταβλητή των καμπυλών είναι το μήκος τους s , τα εφαπτόμενα διανύσματα είναι εξ ορισμού μοναδιαία.

Λύνοντας κάθε ένα από τα ανωτέρω προβλήματα ελαχιστοποίησης, μία φορά για την τετμημένη και μια φορά για την τεταγμένη με χρήση δύο πολλαπλασιαστών Lagrange σε κάθε περίπτωση, λαμβάνονται οι συντελεστές των τεσσάρων πολυωνύμων $x^l(\xi), y^l(\xi)$ και $x^r(s), y^r(s)$ ως εξής:

Ορίζεται η Lagrangian προς ελαχιστοποίηση:

$$L_x(a_\zeta, \gamma_\eta, \mu_1, \mu_2) = E_x + \mu_1 \pi_1 + \mu_2 \pi_2 \quad (4.12)$$

με $\zeta = 0, \dots, 3$ και $\eta = 0, \dots, 5$

όπου

$$\pi_1 = \alpha_0 \xi_{i-m}^3 + \alpha_1 \xi_{i-m}^2 + \alpha_2 \xi_{i-m} + \alpha_3 - \gamma_5 \quad (4.13)$$

$$\pi_2 = 3\alpha_0 \xi_{i-m}^2 + 2\alpha_1 \xi_{i-m} + \alpha_2 - \gamma_4 \quad (4.14)$$

Στο σημείο ελαχίστου όλες οι μερικές παράγωγοι ισούνται με μηδέν οπότε δημιουργείται το εξής γραμμικό σύστημα:

$$\frac{\partial L_x}{\partial a_\zeta} = 0, \zeta = 0, \dots, 3 \Leftrightarrow \frac{\partial E_x}{\partial a_\zeta} + \frac{\partial \mu_1 \pi_1}{\partial a_\zeta} + \frac{\partial \mu_2 \pi_2}{\partial a_\zeta} = 0$$

Αλλά για $\zeta = 0, \dots, 3$ οι παραγωγίσεις δίνουν:

$$\frac{\partial E_x}{\partial a_\zeta} = -2 \sum_{j=m}^i x_j \xi_{j-m}^{3-\zeta} + 2 \sum_{\kappa=0}^3 \alpha_\kappa \sum_{j=m}^i \xi_{j-m}^{3-\kappa} \xi_{j-m}^{3-\zeta}$$

$$\frac{\partial \mu_1 \pi_1}{\partial a_\zeta} = \mu_1 \xi_{i-m}^{3-\zeta}$$

$$\frac{\partial \mu_2 \pi_2}{\partial a_\zeta} = \mu_2 (3 - \zeta) \xi_{i-m}^{2-\zeta}$$

Αντιστοίχως για όλα τα $\eta = 0, \dots, 5$ ισχύει

$$\frac{\partial L_x}{\partial \gamma_\eta} = 0, \eta = 0, \dots, 5 \Leftrightarrow \frac{\partial E_x}{\partial \gamma_\eta} + \frac{\partial \mu_1 \pi_1}{\partial \gamma_\eta} + \frac{\partial \mu_2 \pi_2}{\partial \gamma_\eta} = 0$$

Και

$$\frac{\partial E_x}{\partial \gamma_\eta} = -2 \sum_{j=i}^{i+L_k-1} x_j s_{j-i}^{5-\eta} + 2 \sum_{\kappa=0}^5 \gamma_\kappa \sum_{j=i}^{i+L_k-1} s_{j-i}^{5-\kappa} s_{j-i}^{5-\eta}$$

Ενώ για $\eta = 0, \dots, 3$

$$\frac{\partial \mu_1 \pi_1}{\partial \gamma_\eta} = 0$$

$$\frac{\partial \mu_2 \pi_2}{\partial \gamma_\eta} = 0$$

Για $\eta=4$

$$\frac{\partial \mu_1 \pi_1}{\partial \gamma_\eta} = 0$$

$$\frac{\partial \mu_2 \pi_2}{\partial \gamma_\eta} = -\mu_2$$

Και για $\eta=5$

$$\frac{\partial \mu_1 \pi_1}{\partial \gamma_\eta} = -\mu_1$$

$$\frac{\partial \mu_2 \pi_2}{\partial \gamma_\eta} = 0$$

Για το μ_1

$$\frac{\partial \mu_1 \pi_1}{\partial \mu_1} = \alpha_0 \xi_{i-m}^3 + \alpha_1 \xi_{i-m}^2 + \alpha_2 \xi_{i-m} + \alpha_3 - \gamma_5$$

Για το μ_2

$$\frac{\partial \mu_2 \pi_2}{\partial \mu_2} = 3\alpha_0 \xi_{i-m}^2 + 2\alpha_1 \xi_{i-m} + \alpha_2 - \gamma_4$$

Τα σύστημα είναι:

Για $\zeta = 0, \dots, 3$

$$2 \sum_{\kappa=0}^3 \alpha_\kappa \sum_{j=m}^i \xi_{j-m}^{3-\kappa} \xi_{j-m}^{3-\zeta} + \mu_1 \xi_{i-m}^{3-\zeta} + \mu_2 (3-\zeta) \xi_{i-m}^{2-\zeta} = 2 \sum_{j=m}^i x_j \xi_{j-m}^{3-\zeta} \quad (4.15)$$

Για $\eta = 0, \dots, 3$

$$2 \sum_{\kappa=0}^5 \gamma_\kappa \sum_{j=i}^{i+L_k-1} s_{j-i}^{5-\kappa} s_{j-i}^{5-\eta} = 2 \sum_{j=i}^{i+L_k-1} x_j s_{j-i}^{5-\eta} \quad (4.16)$$

Για $\eta = 4$

$$2 \sum_{\kappa=0}^5 \gamma_\kappa \sum_{j=i}^{i+L_k-1} s_{j-i}^{5-\kappa} s_{j-i} - \mu_1 = 2 \sum_{j=i}^{i+L_k-1} x_j s_{j-i} \quad (4.17)$$

Για $\eta = 5$

$$2 \sum_{\kappa=0}^5 \gamma_\kappa \sum_{j=i}^{i+L_k-1} s_{j-i}^{5-\kappa} - \mu_2 = 2 \sum_{j=i}^{i+L_k-1} x_j \quad (4.18)$$

Για τα μ_1, μ_2

$$\alpha_0 \xi_{i-m}^3 + \alpha_1 \xi_{i-m}^2 + \alpha_2 \xi_{i-m} + \alpha_3 - \gamma_5 = 0 \quad (4.19)$$

$$3\alpha_0 \xi_{i-m}^2 + 2\alpha_1 \xi_{i-m} + \alpha_2 - \gamma_4 = 0 \quad (4.20)$$

Πρέπει να επισημανθούν τα εξής. Όλο το αριστερό μέλος των σχέσεων (4.15) – (4.20) είναι ανεξάρτητο από τις τιμές των x και αυτό είναι χαρακτηριστικό της μεθόδου Lagrange με τους δύο περιορισμούς. Εξαρτάται μόνο από τις τιμές των ξ, s . Το δεξί μέλος είναι «η ειδική λύση», που εξαρτάται από τις πραγματικές τιμές των x και θα δώσει τελικά τις τιμές των συντελεστών $a_0, \dots, a_3, \gamma_0, \dots, \gamma_5$ και μ_1, μ_2 . Το σύστημα είναι 12×12 και η λύση του δίνει τους δώδεκα συντελεστές για τις πολυωνυμικές προσεγγίσεις της τετμημένης του συνόλου σημείων $(i - L_k + 1, i + L_k - 1)$ του $C_{αντ}$. Ομοίως για την προσέγγιση της τεταγμένης κάθε σημείου του ίδιου συνόλου ορίζεται η Lagrangian:

$$L_y(\beta_\zeta, \delta_\eta, \mu_3, \mu_4) = E_y + \mu_3 \pi_3 + \mu_4 \pi_4 \quad (4.21)$$

Όπου το E_y δίνεται από την (3.7) και αυτές των π_3, π_4 από τις

$$\pi_3 = \beta_0 \xi_{i-m}^3 + \beta_1 \xi_{i-m}^2 + \beta_2 \xi_{i-m} + \beta_3 - \delta_5 \quad (4.22)$$

$$\pi_4 = 3\beta_0 \xi_{i-m}^2 + 2\beta_1 \xi_{i-m} + \beta_2 - \delta_4 \quad (4.23)$$

Η ελαχιστοποίηση της $L_y(\beta_\zeta, \delta_\eta, \mu_3, \mu_4)$ δίνει ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων εντελώς όμοιων με αυτό της ελαχιστοποίησης $L_x(a_\zeta, \gamma_\eta, \mu_1, \mu_2)$. Συγκεκριμένα το μόνο που αλλάζει είναι το δεξί μέλος των σχέσεων (4.15) – (4.20), εξαρτώμενο εκ των τεταγμένων y_j και δίνει «την ειδική λύση».

Η λύση των δύο ανωτέρω γραμμικών συστημάτων παρέχει τους πολλαπλασιαστές Lagrange αλλά και τους συντελεστές των πολυωνύμων (4.2) – (4.5). Τελικά, με αυτή τη μέθοδο ευρέθησαν οι βέλτιστες πολυωνυμικές προσεγγίσεις εκατέρωθεν του τυχόντος i -οστού σημείου του αντικειμένου $C_{αντ}$.

Εφόσον το κεντρικό σημείο i αλλά και οι περιοχές $(i - L_k + 1, i)$ και $(i, i + L_k - 1)$ ευρίσκονται εξ' ολοκλήρου εντός ενός υποσυνόλου του $C_{αντ}$, που υποτίθεται ότι έχει σχεδιαστεί με τη χρήση ενός καμπυλογράφου, τότε οι καμπυλότητες στο κεντρικό σημείο i που υπολογίζονται τόσο εκ της δεξιάς όσο και εκ της αριστερής πολυωνυμικής προσεγγίσεως, αναμένεται να είναι πολύ παραπλήσιας τιμής, δηλαδή η απόλυτη τιμή τους να είναι κάτω από ένα κατώφλι. Αντίθετα, στα σημεία που βρίσκονται κοντά σε αλλαγή καμπυλογράφου, αναμένεται ότι πιθανώς θα υπάρξει μια σημαντική διαφορά αριστερά και δεξιά του σημείου. Άρα αν οριστεί η ποσότητα

$$\Delta\kappa(i) = \left\| \left\| \frac{d^2}{d\xi^2} \vec{r}^l(\xi_{i-m}) \right\| - \left\| \frac{d^2}{ds^2} \vec{r}^r(0) \right\| \right\|$$

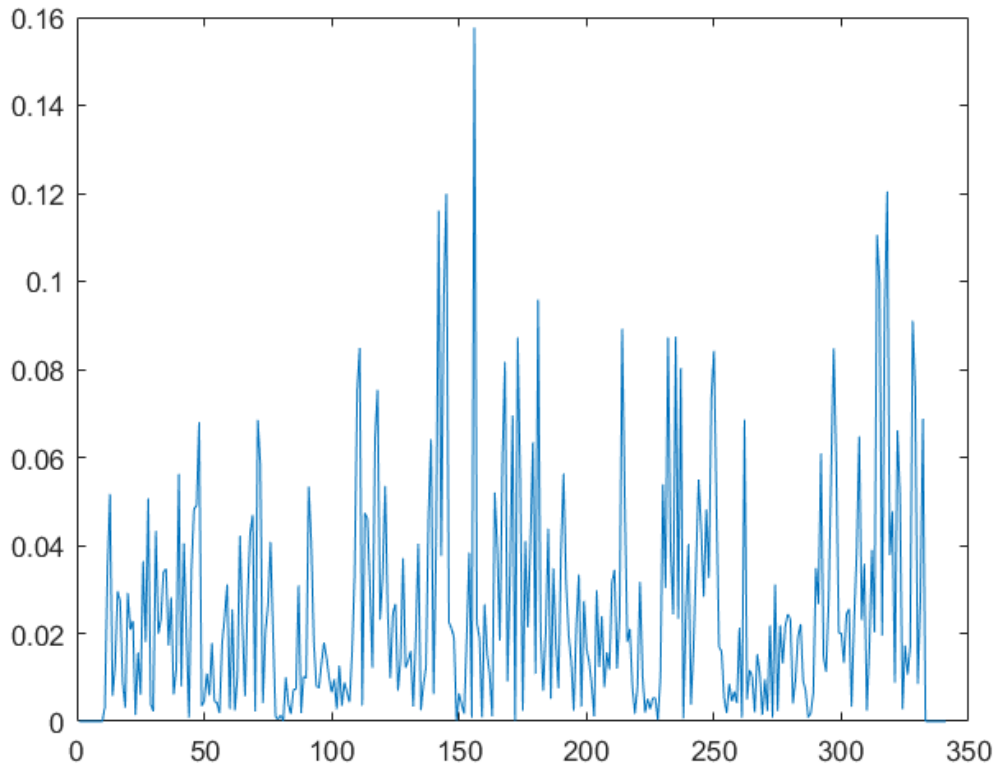
$$\Delta\kappa(i) = \left| \sqrt{\left(\frac{d^2}{d\xi^2} x^l(\xi_{i-m})\right)^2 + \left(\frac{d^2}{d\xi^2} y^l(\xi_{i-m})\right)^2} - \sqrt{\left(\frac{d^2}{ds^2} x^r(0)\right)^2 + \left(\frac{d^2}{ds^2} y^r(0)\right)^2} \right| \quad (4.24)$$

Η γραφική παράσταση του $\Delta\kappa(i)$, $\forall i \in C_{\text{αντ}}^{\gamma\pi}$ είναι πιθανό ότι θα παρουσιάζει λίαν σημαντικές κορυφές περί των σημείων αλλαγής καμπυλογράφων.

Στις εικόνες 4.9 και 4.10 αναδεικνύεται η ύπαρξις σημαντικών κορυφών στη διαφορά των καμπυλοτήτων όπως εκφράζεται στη σχέση (4.24). Επιπρόσθετα στις εικόνες 4.11 ως 4.14 φαίνονται οι σχετικές πολυωνυμικές προσεγγίσεις επί ενός αντικειμένου της τοιχογραφίας.



Εικόνα 4.9. Με μωβ αστερίσκους απεικονίζονται τα σημεία με μέγιστη αλλαγή στην τιμή της καμπυλότητας της πολυωνυμικής προσέγγισης.



Εικόνα 4.10. Γραφική παράσταση των τιμών της διαφοράς της προσέγγισης της καμπυλότητας από σημείο σε σημείο. Οι κορυφές με τιμή μεγαλύτερη από το άθροισμα της μέσης τιμής της καμπυλότητας συν το τριπλάσιο της τυπικής απόκλισης φαίνονται άνωθεν.

Στην εικόνα παρατηρείται μια μεγάλη διακύμανση στη διαφορά της καμπυλότητας και αυτό οφείλεται σε πολλούς, αστάθμητους παράγοντες. Το κατώφλι επελέγη να είναι :

$$\Delta\kappa_{thres} = mean(\Delta\kappa) + 3std(\Delta\kappa)$$

που έχει δώσει ικανοποιητικά αποτελέσματα.



Εικόνες 4.11 έως 4.14. Με πράσινους αστερίσκους απεικονίζονται οι πολυωνυμικές προσεγγίσεις τρίτου βαθμού του υποσυνόλου σημείων αριστερά του εκάστοτε σημείου του περιγράμματος, που φαίνονται με κίτρινους αστερίσκους και με μπλε οι πολυωνυμικές προσεγγίσεις πέμπτου βαθμού.

Είναι εύλογο να υποτεθεί λοιπόν ότι τα σημεία αλλαγής καμπυλογράφου ανήκουν στο σύνολο των σημείων που παρουσιάζουν σημαντικό άλμα στην καμπυλότητα, δηλαδή σημαντική τιμή του $\Delta\kappa(i)$. Το αντίθετο, όμως, δεν ισχύει κατ' ανάγκη. Δηλαδή μπορεί ένα σημείο αλλαγής καμπυλογράφου να μην έχει τόσο μεγάλο άλμα στην καμπυλότητα. Σε κάθε περίπτωση, τονίζεται ότι οι άνω δύο μέθοδοι είναι επικουρικές ως προς την επιλογή των υποψήφιων μονοκονδυλιών. Το τελικό κριτήριο επιλογής τους παρουσιάζεται σε επόμενο κεφάλαιο.

Μια ουσιώδης εικασία

Διατυπώνεται η εικασία, ήτις θα υποστηριχθεί εκτενώς, ότι κάθε υποσύνολο σημείων που εντοπίζονται μεταξύ δύο διαδοχικών σημαντικών κορυφών του $\Delta\kappa$, ή μεταξύ δύο διαδοχικών σημείων αλλαγής κοίλων, ή μεταξύ μεγίστου διαφοράς της καμπυλότητας και ενός σημείου αλλαγής κοίλων ή έναν συνδυασμό κάποιων εκ των ανωτέρω, κατά κανόνα συνιστά μία αρχική εκτίμηση ενός τμήματος αντικειμένου περιγράμματος, δηλαδή ενός τμήματος περιγράμματος της εικονιζόμενης θεματικής ενότητας, που σχεδιάσθηκε με μονοκονδυλιά.

Έστωσαν δύο διαδοχικά σημεία πιθανής αλλαγής stencil, απέχοντα μικρή επικαμπύλια απόσταση ενός ή δύο cm οπότε αυτό θα είναι το μήκος της υποψήφιας μονοκονδυλιάς. Όμως μια καμπύλη τόσο μικρού μήκους μπορεί να προσαρμοστεί ικανοποιητικά σε μεγάλο πλήθος πρότυπων καμπυλών. Για να έχει νόημα η ανάλυση που θα ακολουθήσει, είναι απαραίτητο και λογικό να υποτεθεί ότι οι υποψήφιας μονοκονδυλιές θα έχουν μήκος πέραν ενός κατωφλίου. Η ακριβής τιμή αυτού του κατωφλίου επελέγη με δοκιμές, αλλά και με ποιοτική ανάλυση της διαδικασίας σχεδίασης.

Συγκεκριμένα, όσο το μήκος του τμήματος αυξάνεται, η πιθανότητα βέλτιστης προσαρμογής με μικρό λάθος συνεχώς μειώνεται. Ο ακριβής υπολογισμός της πιθανότητας δεν είναι εφικτός διότι δεν είναι γνωστό τι επιθυμούσε να ζωγραφίσει ο καλλιτέχνης. Από την άλλη, εύλογη υπόθεση για τη σχεδίαση είναι ότι: α) δεν ήθελε να παράξει γραμμές με τοπική κυμάτωση, β) επιζητούσε γραμμές σταθερής κυρτότητας για σημαντικό μήκος, γ) επιθυμούσε να δημιουργήσει στο θεατή τη μέγιστη αίσθηση ομαλότητας και λοιπά. Και πάλι όμως είναι αδύνατος ο προσδιορισμός του δειγματικού χώρου, επειδή άπειρες καμπύλες ικανοποιούν αυτά τα κριτήρια.

Επομένως ακολουθήθηκε η αντίστροφη πορεία. Δεδομένου ότι οι διαστάσεις των τοιχογραφιών είναι το πολύ 1.7m με 2.5m, είναι λογικό να υποθεθεί με βάσει τα κριτήρια μιας καλής και αποδοτικής σχεδίασης, ότι οι καλλιτέχνες της εποχής θα παρήγαγαν μονοκονδυλιές με μέσο μήκος από 7 έως 25 cm. Πάνω από αυτό, παύει να υπάρχει φυσικότητα στις μορφές που εικονίζονται, δεδομένου ότι δεν είναι απλά μοτίβα αλλά μίμηση της πραγματικότητας. Τα ανωτέρω, δείχνουν ότι ένα κατώφλι μήκους 6.5 cm είναι εύλογο.

Πειραματικά, η μέθοδος που εφαρμόστηκε, έδειξε ότι μόνο μια πρότυπος καμπύλη έδινε λάθος βέλτιστης προσαρμογής αισθητά μικρότερο σε σχέση με το λάθος προσαρμογής όλων των άλλων, για μήκος άνω των 6.5 cm. Η επαναληψιμότητα της εξαιρετικής προσαρμογής της ίδιας θεωρητικής καμπύλης σε τμήματα αντικειμένου μεγάλου μήκους, σημαντικού αριθμού και τυχαίου προσανατολισμού φαίνεται να δικαιώνει αυτή την προσέγγιση. Ακόμη, η κάλυψη των περιγραμμάτων όλων των θεματικών μορφών ήταν εξαιρετικά ομαλή και πλήρης, οπότε αυτό επιβεβαιώνει την ορθότητα επιλογής του κατωφλίου.

Συνοψίζοντας, για κάθε τμήμα περιγράμματος ενός ζωγραφικού στοιχείου που περατούται σε δύο υποψήφια σημεία αλλαγής καμπυλογράφου και είναι μεγαλύτερο από 6.5 cm, θα γίνεται χρήση του όρου «αρχική εκτίμηση αντικειμένου περιγράμματος» ή «αρχική εκτίμηση μονοκονδυλιάς». Το αντίστοιχο σύμβολο θα είναι το $C_{\text{άντ}}^{\text{εκτ}}$ ή $T_{\text{άντ}}^{\text{εκτ}}$ όπου ο άνω δείκτης «εκτ» είναι για τη φράση «αρχική εκτίμηση αντικειμένου περιγράμματος».

Κεφάλαιο 5: Επιλογή ενός συνόλου stencils που πιθανώς χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή των τοιχογραφιών του Ακρωτηρίου

5.1 Αρχική επιλογή ενός συνόλου γεωμετρικών προτύπων στα οποία αντιστοιχούν οι οδηγοί, βάσει ιστορικής και αρχαιολογικής σκοπιάς

Όπως προαναφέρθηκε, απαρχή αυτής της προσπάθειας μελέτης των τοιχογραφιών ήταν οι παρατηρήσεις που έγιναν σύμφωνα με τις οποίες διακρινόταν μια εντυπωσιακή σταθερότητα στις ζωγραφισμένες γραμμές καθώς και μια αξιοσημείωτη επαναληψιμότητα σε κάποιες εξ αυτών. Οι εν λόγω παρατηρήσεις έδωσαν την ιδέα ότι υπήρχε συστηματικός τρόπος σχεδίασης των τοιχογραφιών, με χρήση οδηγών του πινέλου είτε καμπυλογράφων. Οι καμπυλογράφοι όμως έπρεπε να είχαν κατασκευαστεί με μέσα συμβατά με την εποχή. Η σύλληψη της κατασκευής τους έπρεπε να σύναδε με το πολιτιστικό, γνωσιολογικό και τεχνολογικό επίπεδο των τότε κατοίκων του Αρχιπελάγους. Οι μέχρι σήμερα αρχαιολογικές ανακαλύψεις και η επεξεργασία των ευρημάτων καταδεικνύουν την ύπαρξη ενός πολιτισμού στο Ακρωτήρι, με πολύ προηγμένες γνώσεις σε διάφορους τομείς, όπως στη ναυσιπλοΐα, στην αγγειοπλαστική, στην αρχιτεκτονική και στη μεταλλουργία.

Ειδικότερα, η ανάγκη των τότε κατοίκων του Ακρωτηρίου να ταξιδεύουν στις δύσκολες και συχνά κυματώδεις θάλασσες του Αιγαίου αλλά και τις Μεσογείου, τους ώθησε να διευρύνουν τις εμπειρικές τους γνώσεις σε τομείς όπως η μελέτη των θαλασσιών ρευμάτων, η μετεωρολογία και η αστρονομία. Επίσης, υπάρχουν σαφείς ενδείξεις, ότι γύρω στα 1650 προ Χριστού είχαν εφαρμοστεί πρωτόλειες επιστημονικές μέθοδοι για την προφύλαξη κτηρίων από τους σεισμούς. Κάποια κτήρια του Ακρωτηρίου είχαν χτιστεί με δύο ή τρεις ορόφους και είχαν πολύ υψηλή αισθητική. Έχει επιβεβαιωθεί ακόμη, ότι διάφορα ορυκτά της Θήρας χρησιμοποιήθηκαν για τη δημιουργία των χρωστικών ουσιών με τις οποίες σχεδιάστηκαν οι τοιχογραφίες. Τέλος, τα θέματα που

παρουσιάζονται στις τοιχογραφίες υποδεικνύουν ένα πολύ υψηλό για την εποχή πολιτισμικό επίπεδο ([12], [13]).

Όλα αυτά υποδηλώνουν ότι με κανένα τρόπο δεν μπορεί να αποκλειστεί η πιθανότητα, να είχε αναπτυχθεί στο Ακρωτήριο, την Ύστερη Εποχή του Χαλκού, η κατάλληλη υψηλή τεχνογνωσία, ήτις επέτρεπε χρήση οδηγών είτε καμπυλογράφων μεγάλης ακριβείας, καθώς και τη χρήση τους για την σχεδίαση των τοιχογραφιών. Επειδή τα περιγράμματα αρκετών μορφών θυμίζουν γεωμετρικά σχήματα, διατυπώνεται η υπόθεση ότι οι οδηγοί/καμπυλογράφοι ήταν γεωμετρικά πρότυπα.

Το επόμενο βήμα είναι η επιλογή ενός συνόλου σχημάτων συμβατών με την εποχή. Βάσει αρχαιολογικών και ιστορικών μελετών, σχήματα σπειρών, έστω και σε πρωτόλεια μορφή απαντώνται σε πολλούς πολιτισμούς ακόμα και χιλιάδες χρόνια πριν την άνθηση του πολιτισμού του Ακρωτηρίου [16]. Η παραγωγή των προτύπων αυτών, σίγουρα απαιτούσε κολοσσιαία έμπνευση για την εποχή, αλλά όχι σε απαγορευτικό βαθμό ([16],[17]). Επιπλέον, είναι λογικό το σύνολο των προτύπων αυτών να είναι μέρος των γεωμετρικών σχημάτων που μελετήθηκαν στους ιστορικούς και κλασσικούς χρόνους. Για να δοθεί ένα αντιπαράδειγμα, η γεωμετρική δημιουργία του κανονικού επταγώνου έγινε για πρώτη φορά από τον Carl Friedrich Gauss τον 18^ο αιώνα μετά Χριστόν, ενώ ο Leonard Euler είχε ανακαλύψει την αντίστοιχη εποχή ένα σύνολο πρότυπων καμπυλών. Δεν υπάρχει περίπτωση να εξεταστούν τέτοιες καμπύλες που απαιτούν τόσο μεγάλο βαθμό συσσωρευμένης γνώσης και συνεπακόλουθης έμπνευσης.

Επομένως, είναι εύλογο να αναζητηθεί ο τόπος και ο χρόνος της πρωτογενούς σύλληψης των καμπυλών των κλασσικών χρόνων, ακόμα και σε περιόδους που δεν έχει βρεθεί καμία ένδειξη για ύπαρξη μαθηματικής επιστήμης. Συνεπώς, διατυπώνεται η υπόθεση ότι προηγήθηκε η σύλληψη και η εμπειρική κατασκευή πολλών γεωμετρικών σχημάτων, όπως του κύκλου, της έλλειψης, της υπερβολής, της γραμμικής σπείρας, κάποιων κανονικών πολυγώνων και άλλων κανονικών σχημάτων και επακολούθησε η αυστηρή μαθηματική τους θεμελίωση και μελέτη πολλούς αιώνες μετά. Σημειώνεται ότι το γνωσιολογικό και τεχνολογικό υπόβαθρο που αναφέρθηκε στις προηγούμενες παραγράφους, όχι απλώς δεν αποκλείουν, αλλά και υποδεικνύουν υψιπετείς αναζητήσεις, πειραματισμούς και σημαντικές εμπνεύσεις των κατοίκων του Ακρωτηρίου.

Τα γεωμετρικά πρότυπα που επελέγησαν ως υποψήφια έχουν τα εξής χαρακτηριστικά: κατασκευάζονται με σχετικά απλά μέσα, συμβατά με την εποχή, παρά την υψηλή γεωμετρική αίσθηση που απαιτείται για την υλοποίησή τους. Επιπρόσθετα σε καμία περίπτωση δεν απαιτούν τη μαθηματική θεμελίωση και συστηματική μελέτη που έγινε στους κλασσικούς και ελληνιστικούς χρόνους. Έχοντας υπόψιν όλα τα ανωτέρω, καθώς και τη συστηματική μελέτη των δύο προηγούμενων διδακτορικών διατριβών [1] και [2] αλλά και των δημοσιεύσεων της ίδιας ερευνητικής ομάδας [3] έως [11] σε αυτό το πεδίο, υιοθετούνται σαν πιθανοί γεωμετρικοί οδηγοί οι κωνικές τομές και η γραμμική σπείρα.

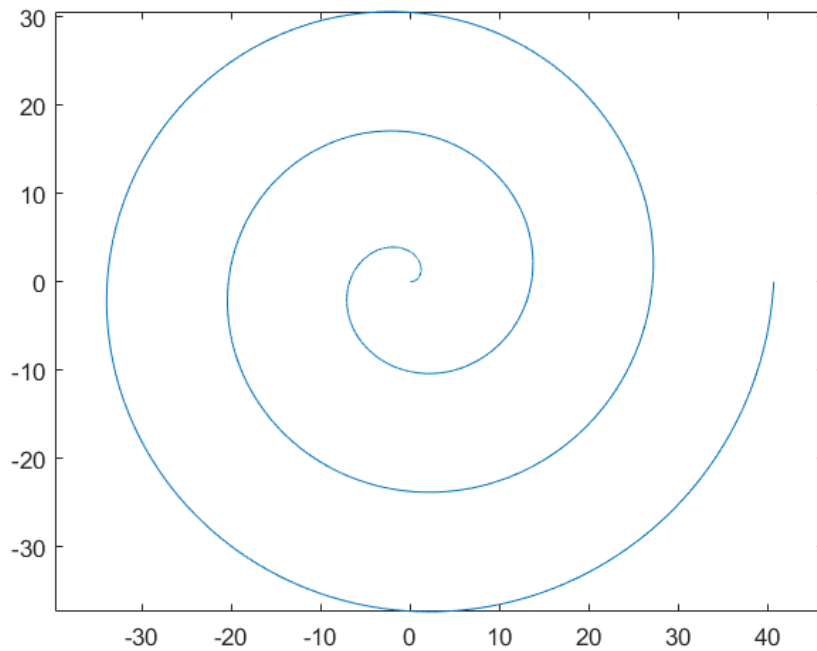
5.2 Σύντομη παρουσίαση κωνικών τομών και γραμμικής σπείρας

Γραμμική σπείρα

Η γραμμική σπείρα είναι μια καμπύλη που απαιτεί ιδιαίτερα υψηλή γεωμετρική αίσθηση για να κατασκευαστεί. Ο δε συναρτησιακός της τύπος σε διανυσματική μορφή δίνεται από τη σχέση:

$$\vec{r}(\theta - \theta_0) = (x_0 + K(\theta - \theta_0) \cdot \cos(\theta - \theta_0))\hat{i} + (y_0 + K(\theta - \theta_0) \cdot \sin(\theta - \theta_0))\hat{j} \quad (5.1)$$

όπου x_0, y_0 το κέντρο της σπείρας, θ_0 η αρχική τιμή της πολικής γωνίας, αν η σπείρα δεν ξεκινά από το $\theta=0$, K σταθερά και $\theta \in \mathbb{R}$ η ανεξάρτητη μεταβλητή της, η οποία είναι η πολική γωνία του αντίστοιχου σημείου της. Είναι βαρύνουσας σημασίας ότι η σπείρα αυτή δεν απαντάται στη φύση.

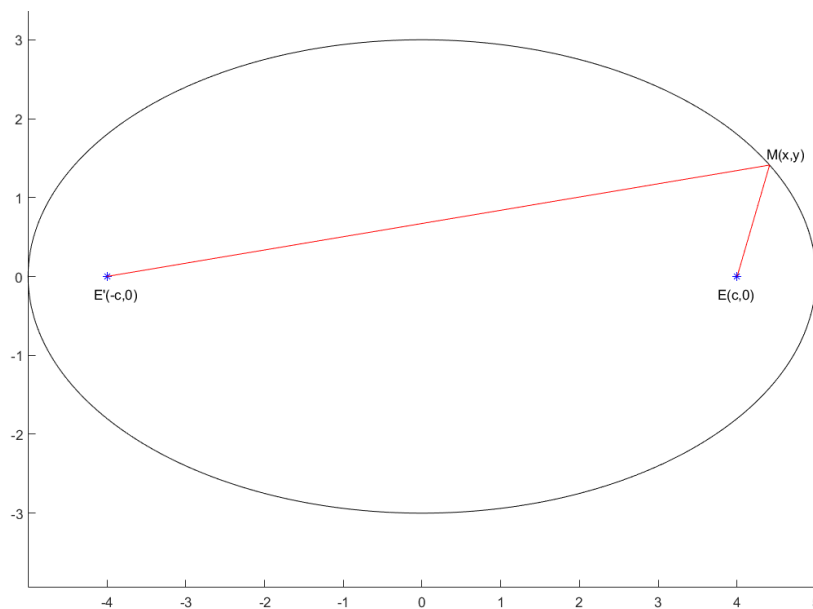


Εικόνα 5.1: Σπείρα του Αρχιμήδους με $K=2.159$, $x_0 = 0, y_0 = 0, \theta_0 = 0$

Έλλειψη/Κύκλος

Το γεωμετρικό σχήμα αυτό είναι κλειστό και έχει δύο άξονες, τον μικρό και τον μεγάλο. Εάν αυτοί είναι παράλληλοι προς τους $x - y$ άξονες και το κέντρο της έλλειψης είναι το (x_0, y_0) τότε η εξίσωση της έλλειψης είναι

$$\vec{r}(\theta_\kappa) = (x_0 + a \cdot \cos(\theta_\kappa))\hat{i} + (y_0 + b \cdot \sin(\theta_\kappa))\hat{j} \quad (5.2)$$



Εικόνα 5.2. Έλλειψη

Η έλλειψη προκύπτει από την τομή ενός κώνου (όχι απαραίτητα ορθού, όπως απέδειξε στα Κωνικά ο Απολλώνιος) με ένα επίπεδο που τέμνει όλες τις γενέτειρες του. Εάν το επίπεδο αυτό είναι κάθετο στον άξονα του κώνου, τότε $a = b$ και η έλλειψη εκφυλίζεται σε κύκλο. Ισοδύναμα, η έλλειψη είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων το άθροισμα των αποστάσεων των οποίων από δύο δεδομένα σημεία, τις εστίες, είναι σταθερό.

Η καμπύλη αυτή προκύπτει με προβολή κύκλου που σχηματίζει γωνία $\arccos\left(\frac{a}{b}\right)$, $b < a$ με το επίπεδο του κύκλου. Η πολική γωνία θ_k του κύκλου αυτού είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή της ελλείψεως στην ανωτέρω μορφή (βλ. Περί κωνικών τομών).

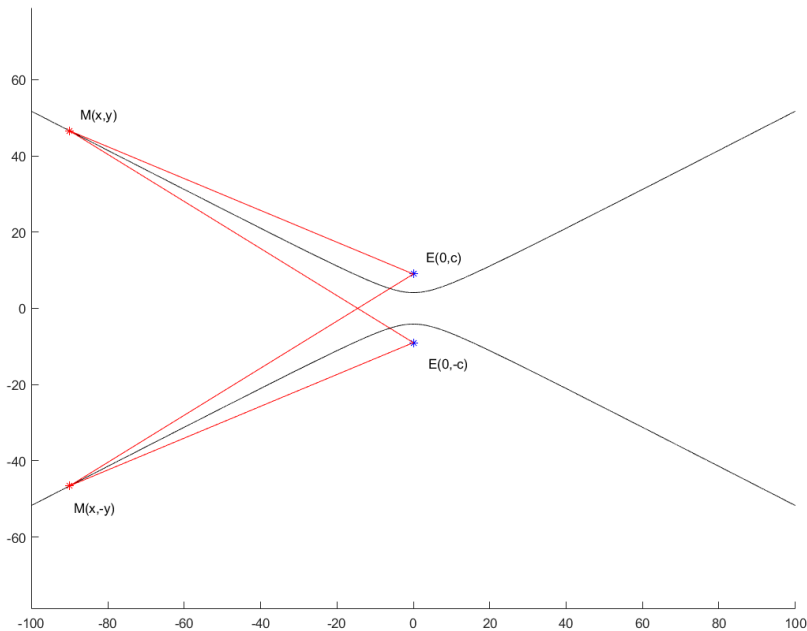
Υπερβολή

Είναι το ένα γεωμετρικό σχήμα με δύο άξονες και δύο σκέλη. Εάν οι άξονες της υπερβολής είναι παράλληλοι προς τους $x - y$ άξονες, το κέντρο είναι το O και οι κορυφές της βρίσκονται επί του άξονος των y , όπως φαίνεται στην εικόνα 2, η εξίσωση με ανεξάρτητη μεταβλητή την τετμημένη x δίνεται από τον τύπο

$$\vec{r}(x) = x\hat{i} \pm a \sqrt{1 + \frac{x^2}{b^2}}\hat{j} \quad (5.3)$$

όπου a, b σταθερές.

Η υπερβολή προκύπτει αν τμηθεί ένας κώνος (όχι απαραίτητα ορθός, όπως απέδειξε στα Κωνικά ο Απολλώνιος) με ένα επίπεδο που είναι παράλληλο προς τον άξονα του κώνου ή και τον κατακορυφήν κώνο. Ισοδύναμα, είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων η διαφορά των αποστάσεων των οποίων από δύο δεδομένα σημεία, τις εστίες, είναι σταθερή.



Εικόνα 5.3. Υπερβολή με τις εστίες της, τους δύο κλάδους και δύο σημεία, το $M(x,y)$ και το συμμετρικό του ως προς τον οριζόντιο άξονα, $M(x,-y)$

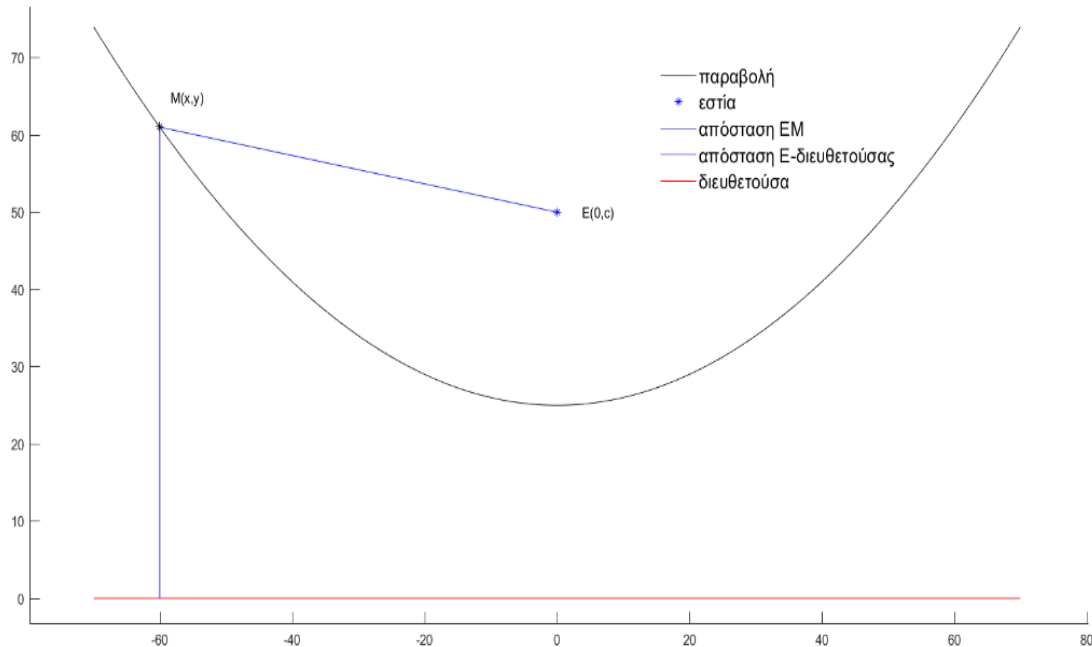
Παραβολή

Η παραβολή είναι ένα σχήμα με ένα σκέλος, προκύπτουν με τμήση ενός κώνου (όχι απαραίτητα ορθός, όπως απέδειξε στα Κωνικά ο Απολλώνιος) με επίπεδο παράλληλο προς μια γενέτειρα του. Εάν ο άξονας συμμετρίας της είναι ο y άξονας, όπως φαίνεται στην εικόνα 4, τότε η εξίσωση της δίνεται από τον τύπο

$$\vec{r}(x) = x\hat{i} + (ax_p^2 + bx_p + c)\hat{j} \quad (5.4)$$

Όπου a, b, c σταθερές.

Η παραβολή ισοδύναμα είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ισαπέχουν από ένα δεδομένο σημείο, την εστία της και από μια ευθεία κάθετη στον άξονα της, τη διευθετούσα.



Εικόνα 5.4. Παραβολή με εστία στον άξονα $y'y$.

Γενική εξίσωση κωνικής

Η γενική εξίσωση της κωνικής τομής είναι

$$AX^2 + BY^2 + CXY + DX + EY + F = 0 \quad (5.5)$$

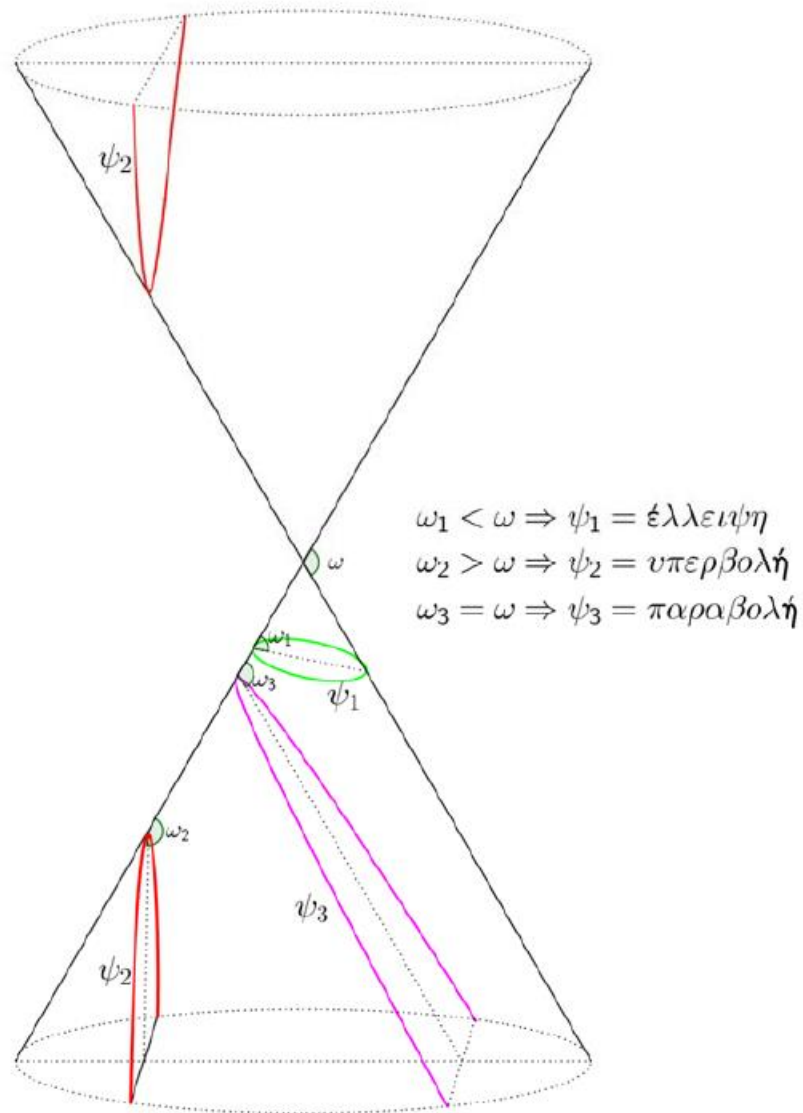
Με $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$, $A^2 + B^2 + C^2 > 0$

Αν οριστεί η διακρίνουσα $\Delta = 4AB - C^2$, τότε:

- Αν $\Delta > 0$, η κωνική είναι έλλειψη
- Αν $\Delta = 0$, η κωνική είναι παραβολή
- Αν $\Delta < 0$, η κωνική είναι υπερβολή

Τέλος, παρουσιάζεται μόνο γραφικά πως οι τομές ενός κώνου με επίπεδα σχηματίζουν τις διάφορες κωνικές τομές. Η απόδειξη των σχέσεων,

ωστόσο, ξεφεύγει από τα όρια της παρούσας εργασίας, απλώς η εικόνα προσφέρεται για καλύτερη εποπτεία.



Εικόνα 5.5. Ο κώνος και οι προκύπτουσες κωνικές τομές, αναλόγως με τη διέδρη γωνία του κώνου μεταξύ της κορυφής και των δύο γενετειρών του.

5.3 Συνοπτική ιστορική ανασκόπηση σχετικά με τα επιλεγέντα γεωμετρικά πρότυπα

Συνοπτική ιστορική αναδρομή περί των κωνικών τομών

Η αφετηρία της συστηματικής μελέτης των κωνικών τομών από τους αρχαίους Έλληνες γεωμέτρους ήταν, σύμφωνα με την κυριαρχούσα άποψη, ένα από τα τρία περίφημα προβλήματα της αρχαιότητας. Το πρόβλημα αυτό συνδέθηκε μάλιστα και με ένα μύθο, έναν χρησμό που λέγεται ότι έδωσε το μαντείο των Δελφών στους Δήλιους. Προκειμένου να απαλλαγούν από τον λιμό που τους μάστιζε, έπρεπε να διπλασιάσουν τον βωμό του Δηλίου Απόλλωνα. Έτσι ονομάστηκε και «Δήλιον πρόβλημα»:

Να κατασκευαστεί, με κανόνα και διαβήτη, ακμή κύβου ο οποίος να έχει όγκο διπλάσιο του όγκου ενός δοσμένου κύβου,

δηλαδή, με σύγχρονο συμβολισμό, αν a η ακμή του δοσμένου κύβου, ζητείται να κατασκευαστεί με κανόνα και διαβήτη τμήμα x ώστε $x^3 = 2a^3$.

Τη λύση αυτού του προβλήματος αναζητούσαν πάρα πολλοί μαθηματικοί για δύο χιλιετίες, ώσπου απεδείχθη τελικά, το 1837 από τον Pierre Laurent Wantzell (1814–1848) ότι είναι αδύνατο να διπλασιαστεί ο όγκος του κύβου με κανόνα και διαβήτη, με χρήση της θεωρίας Galois [21].

Ο *Ιπποκράτης ο Χίος* (~430 προ Χριστού) διεπίστωσε ότι το πρόβλημα ισοδυναμεί με το να παρεμβληθούν δύο μέσες ανάλογοι μεταξύ των τμημάτων α και 2α , δηλαδή να κατασκευαστούν τμήματα κ , λ τέτοια ώστε

$$\frac{\alpha}{\kappa} = \frac{\kappa}{\lambda} = \frac{\lambda}{2\alpha}$$

Τότε προκύπτει ότι $\kappa^3 = 2\alpha^3$, δηλαδή το ζητούμενο τμήμα είναι το κ .

Ο *Μέναιχος*, τον 4^ο προ Χριστού αιώνα είναι ο πρώτος που απέδειξε ότι οι καμπύλες έλλειψη, υπερβολή και παραβολή προκύπτουν από την τομή επιπέδου και ορθού κυκλικού κώνου και μελέτησε τις ιδιότητές τους. Η μελέτη αυτή ήταν η «επίσημη» απαρχή της θεωρίας των κωνικών τομών. Η ανακάλυψη τους οφείλεται στην προσπάθεια του να

λύσει το Δήλιο πρόβλημα. Έτσι συνέδεσε το πρόβλημα της παρεμβολής δυο μέσων αναλόγων με τις τομές ενός κώνου.

Ο Απολλώνιος ο Περγαίος (3^{ος} –4^{ος} προ Χριστού αιώνας), εκ της Πέργης της Παμφυλίας, κοντά στη σημερινή Αττάλεια της Μικράς Ασίας, φαίνεται ότι εμπνεύστηκε από τους όρους του Ευκλείδη «παραβάλλειν», «ελλείπειν» και «υπερβάλλειν», δίνοντας πρώτος την ονομασία των τριών κωνικών τομών που ισχύει και σήμερα, δηλαδή παραβολή, έλλειψη και υπερβολή. Επίσης γενίκευσε την προϋπόθεση για τον ορισμό των κωνικών τομών με την τομή επιπέδου και ενός ορθού κώνου, σε τομή επιπέδου με οποιοδήποτε κώνο, αμβλυγώνιο, ορθογώνιο ή οξυγώνιο. Το πολύ σημαντικό έργο του στις κωνικές τομές του έδωσε την προσωνυμία «Ο Μέγας Γεωμέτρης» από τους μεταγενέστερους επιστήμονες.

Επισημαίνεται ότι ο Ευκλείδης, ο θεμελιωτής της αξιωματικής θεώρησης, αφιέρωσε τμήμα των δοκιμίων του στη μελέτη των κωνικών ([15],[17],[18],[19],[20],[21]). Ο Αρχιμήδης επίσης απέδειξε και χρησιμοποίησε στα έργα του ιδιότητες των κωνικών τομών.

Σύντομη ιστορική αναδρομή περί της γραμμικής σπείρας

Η γραμμική σπείρα είναι ένα σχήμα που εθεωρείτο ότι πρώτος συνέλαβε ο Κόνων ο Σάμιος (3^{ος} προ Χριστού αιώνας). Όμως ο αυστηρός ορισμός εδόθη από τον Αρχιμήδη, τον μέγιστο μαθηματικό, στο βιβλίο «Περί Ελίκων». Ένας εναλλακτικός ορισμός για την καμπύλη αυτή είναι:

Έστω ημιευθεία ΟΑ στρεφόμενη με σταθερή ταχύτητα περί ενός σταθερού σημείου Ο. Στην ημιευθεία ΟΑ ας θεωρηθεί ένα κινητό σημείο Μ που κινείται με σταθερή ταχύτητα από το Ο προς το Α. Την αρχική χρονική στιγμή η ΟΑ συμπίπτει με τον ημιάξονα Οχ, το δε κινητό ευρίσκεται εις το σημείο Ο. Η τροχιά του σημείου Μ σχηματίζει γραμμική σπείρα.

Στο έργο «Περί Ελίκων» ο Αρχιμήδης πραγματοποιεί μια πολύ διεξοδική μελέτη των ιδιοτήτων της καμπύλης αυτής. Σε ένα από τα πιο γοητευτικά θεωρήματα ο Αρχιμήδης κατάφερε με τη βοήθεια της να κατασκευάσει κύκλο ίσου εμβαδού με τρίγωνο που συνεπάγεται επίλυση του προβλήματος τετραγωνισμού του κύκλου ([15], [17] ως [21]).

Κεφάλαιο 6: Ακριβής εντοπισμός των γεωμετρικών καμπυλογράφων–stencils καθώς και των τμημάτων αντικειμένων που αντιστοιχούν σε αυτούς

Στις δύο προηγούμενες διατριβές [1] και [2] και στις δημοσιεύσεις [3] έως [11] βρέθηκαν ένα σύνολο stencils και συγκεκριμένα τέσσερις υπερβολές και μία γραμμική σπείρα, βάσει των οποίων σχεδιάστηκαν τα περιγράμματα των θεματικών ενοτήτων των τοιχογραφιών που μελετήθηκαν. Στην παρούσα εργασία γίνεται η εξής υπόθεση. Έστω ότι όλα τα περιγράμματα των θεματικών ενοτήτων των δύο τοιχογραφιών «Παγκρατίων» και των «Λατρευτριών» έγιναν με χρήση των τεσσάρων υπερβολών και της γραμμικής σπείρας. Τότε κάθε περίγραμμα θα πρέπει να ταιριάζει εντυπωσιακά καλά σε κάποιο από τα 5 stencils με μέσο λάθος μικρότερο από 0.35mm και μέγιστο λάθος μικρότερο του 0.8mm. Αν κάτι τέτοιο δεν ισχύει για ένα σύνολο περιγραμμάτων τότε θα εφαρμοστεί η μεθοδολογία που αναλύθηκε στις διατριβές [1], [2] και τις δημοσιεύσεις [3] έως [11] για να προσδιοριστεί πιθανό νέο stencil, μαζί με τις παραμέτρους του. Για την βέλτιστη προσαρμογή των καμπυλών και τον τελικό προσδιορισμό των τμημάτων αντικειμένου περιγράμματος, ακολουθήθηκε η μέθοδος που περιγράφεται σε αυτό το κεφάλαιο και στις δημοσιεύσεις [3] έως [11].

6.1 Μια εξαντλητική μέθοδος προσαρμογής καμπυλών

Έστωσαν δύο ισοπληθή σύνολα σημείων στο επίπεδο, τα οποία είναι δυνατόν να αποτελούν δύο διακριτές ψηφιακές καμπύλες. Το ζητούμενο είναι ο προσδιορισμός της γωνίας στροφής και της παράλληλης μετατόπισης ως προς x και y την οποία πρέπει να υποστεί το ένα σύνολο σημείων ως στερεό σώμα ώστε να ταιριάζει βέλτιστα στο άλλο σύνολο. Μια πιθανή προσέγγιση θα ήταν η ελαχιστοποίηση μιας κατάλληλης συνάρτησης λάθους, με χρήση αναδρομικών αλγορίθμων ελαχιστοποίησης συνάρτησης (όπως ο Nelder–Mead είτε τα conjugate gradients, κλπ). Όμως αυτή η λύση δεν είναι τόσο ταχεία και κυρίως τόσο ακριβής γιατί όποιος αναδρομικός αλγόριθμος και αν επιλεγεί ποτέ δεν

εγγυάται ότι το σημείο που συνέκλινε είναι το απολύτως ελάχιστο. Επειδή η ακρίβεια είναι καθοριστικής σημασίας για την επιλογή των stencils, διατυπώνεται και αποδεικνύεται μια αναλυτική λύση στο παραπάνω πρόβλημα με το κάτωθι λήμμα που πρωτοδημοσιεύτηκε στο [10]

Λήμμα 5.1

Έστωσαν δύο ομοεπίπεδα, ισοπληθή σύνολα σημείων (x_i, y_i) και (P_i, Q_i) καθένα πλήθους N . Θεωρούμε ότι έκαστο σύνολο μπορεί να στρέφεται και να μετατοπίζεται σαν στερεό σώμα. Ζητείται η γωνία περιστροφής θ και το διάνυσμα μετατόπισης $x_\mu \hat{i} + y_\mu \hat{j}$ για τα οποία η διακριτή καμπύλη (x_i, y_i) μετακινούμενη σαν στερεό σώμα θα προσαρμόζεται βέλτιστα στην (P_i, Q_i) κατά την έννοια των ελαχίστων τετραγώνων.

Τα θ, x_μ και y_μ δίνονται από τους τύπους:

$$\tan\theta = \frac{\sum_{i=1}^N y_i \sum_{i=1}^N P_i - \sum_{i=1}^N Q_i \sum_{i=1}^N x_i - N \sum_{i=1}^N (y_i P_i) + N \sum_{i=1}^N (x_i Q_i)}{-\sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N P_i - \sum_{i=1}^N Q_i \sum_{i=1}^N y_i + \sum_{i=1}^N (x_i P_i) + N \sum_{i=1}^N (y_i Q_i)} \quad (6.1)$$

$$x_\mu = \frac{\sum_{i=1}^N P_i - \cos\theta \sum_{i=1}^N x_i + \sin\theta \sum_{i=1}^N y_i}{N} \quad (6.2)$$

$$y_\mu = \frac{\sum_{i=1}^N Q_i - \sin\theta \sum_{i=1}^N x_i - \cos\theta \sum_{i=1}^N y_i}{N} \quad (6.3)$$

Απόδειξη

Έστω η θ γωνία στροφής και (x_μ, y_μ) το διάνυσμα τυχούσης παράλληλης μετατόπισης των σημείων (x_i, y_i) ως στερεού σώματος. Το αποτέλεσμα τέτοιων μετασχηματισμών επί της καμπύλης (x_i, y_i) είναι μια ψηφιακή καμπύλη έστω (X_i, Y_i) οι συντεταγμένες της οποίας δίνονται από τις σχέσεις:

$$X_i = x_i \cos\theta - y_i \sin\theta + x_\mu \quad (6.4)$$

$$Y_i = x_i \sin\theta + y_i \cos\theta + y_\mu$$

Ορίζεται ως λάθος προσέγγισης της καμπύλης (P_i, Q_i) από την εστραμμένη και μετατοπισμένη καμπύλη (X_i, Y_i) , το άθροισμα των τετραγώνων των ευκλείδειων αποστάσεων των σημείων ένα προς ένα, δηλαδή το

$$E(\theta, x_\mu, y_\mu) = \sum_{i=1}^N ((X_i - P_i)^2 + (Y_i - Q_i)^2)$$

$$E(\theta, x_\mu, y_\mu) = \sum_{i=1}^N \left((x_i \cos\theta - y_i \sin\theta + x_\mu - P_i)^2 + (x_i \sin\theta + y_i \cos\theta + y_\mu - Q_i)^2 \right) \quad (6.5)$$

Η συνάρτηση είναι φραγμένη κάτω από το 0 στο \mathbb{R}^3 . Άρα έχει infimum (μέγιστο κάτω φράγμα) και επειδή είναι συνεχής συνάρτηση των θ και x_μ, y_μ σε όλο το πεδίο ορισμού της το infimum ανήκει στο πεδίο τιμών της και είναι ελάχιστο της. Επιπλέον η συνάρτηση είναι απείρως παραγωγίσιμη και στο σημείο ελαχίστου ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \nabla E(\theta, x_\mu, y_\mu) &= 0 \Leftrightarrow \\ \frac{\partial E}{\partial \theta} = \frac{\partial E}{\partial x_\mu} = \frac{\partial E}{\partial y_\mu} &= 0 \end{aligned}$$

Παραγωγίζοντας ως προς x_μ την (5.5) και εξισώνοντας με το μηδέν έχει ως αποτέλεσμα:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N 2(x_i \cos\theta - y_i \sin\theta + x_\mu - P_i) &= 0 \Leftrightarrow \\ \cos\theta \sum_{i=1}^N x_i - \sin\theta \sum_{i=1}^N y_i + N x_\mu - \sum_{i=1}^N P_i &= 0 \Leftrightarrow \\ x_\mu &= \frac{\sum_{i=1}^N P_i - \cos\theta \sum_{i=1}^N x_i + \sin\theta \sum_{i=1}^N y_i}{N} \end{aligned}$$

Η εξίσωση $\frac{\partial E}{\partial y_\mu} = 0$ δίνει:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N 2(x_i \sin\theta + y_i \cos\theta + y_\mu - Q_i) &= 0 \Leftrightarrow \\ \sin\theta \sum_{i=1}^N x_i + \cos\theta \sum_{i=1}^N y_i + N y_\mu - \sum_{i=1}^N Q_i &= 0 \Leftrightarrow \\ y_\mu &= \frac{\sum_{i=1}^N Q_i - \sin\theta \sum_{i=1}^N x_i - \cos\theta \sum_{i=1}^N y_i}{N} \end{aligned}$$

Αντίστοιχα, η $\frac{\partial E}{\partial \theta} = 0$ δίνει

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N (2(x_i \cos\theta - y_i \sin\theta + x_\mu - P_i)(-x_i \sin\theta - y_i \cos\theta) + 2(x_i \sin\theta + y_i \cos\theta + y_\mu \\ - Q_i)(x_i \cos\theta - y_i \sin\theta)) = 0 \end{aligned}$$

Μετά την εφαρμογή επιμεριστικής ιδιότητας όλοι οι όροι που έχουν $\sin\theta \cos\theta$ απλοποιούνται οπότε η σχέση εξίσωση γίνεται:

$$\sum_{i=1}^N (-x_{\mu} x_i \sin\theta + x_i P_i \sin\theta + y_i P_i \cos\theta - x_{\mu} y_i \cos\theta + y_{\mu} x_i \cos\theta - y_{\mu} y_i \sin\theta - Q_i x_i \cos\theta + Q_i y_i \sin\theta) = 0$$

$$-x_{\mu} \sin\theta \sum_{i=1}^N x_i + \sin\theta \sum_{i=1}^N x_i P_i + \cos\theta \sum_{i=1}^N y_i P_i - x_{\mu} \cos\theta \sum_{i=1}^N y_i + y_{\mu} \cos\theta \sum_{i=1}^N x_i - y_{\mu} \sin\theta \sum_{i=1}^N y_i - \cos\theta \sum_{i=1}^N y_i Q_i + \sin\theta \sum_{i=1}^N y_i Q_i = 0$$

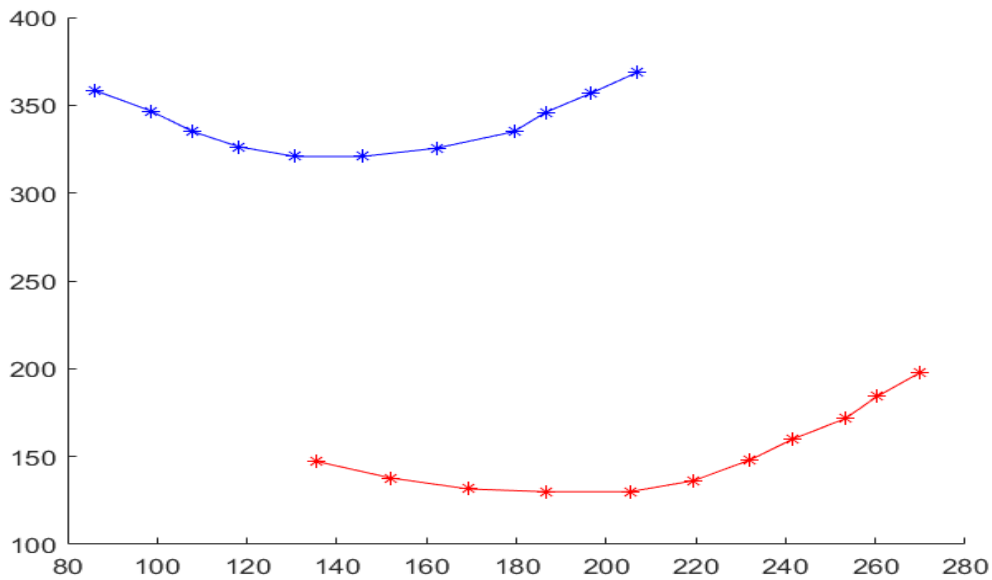
Αντικαθιστώντας τις τιμές των x_{μ}, y_{μ} στην άνω σχέση και μετά από πράξεις η προκύπτουσα σχέση είναι:

$$\tan\theta = \frac{\sum_{i=1}^N y_i \sum_{i=1}^N P_i - \sum_{i=1}^N Q_i \sum_{i=1}^N x_i - N \sum_{i=1}^N (y_i P_i) + N \sum_{i=1}^N (x_i Q_i)}{-\sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N P_i - \sum_{i=1}^N Q_i \sum_{i=1}^N y_i + \sum_{i=1}^N (x_i P_i) + N \sum_{i=1}^N (y_i Q_i)}$$

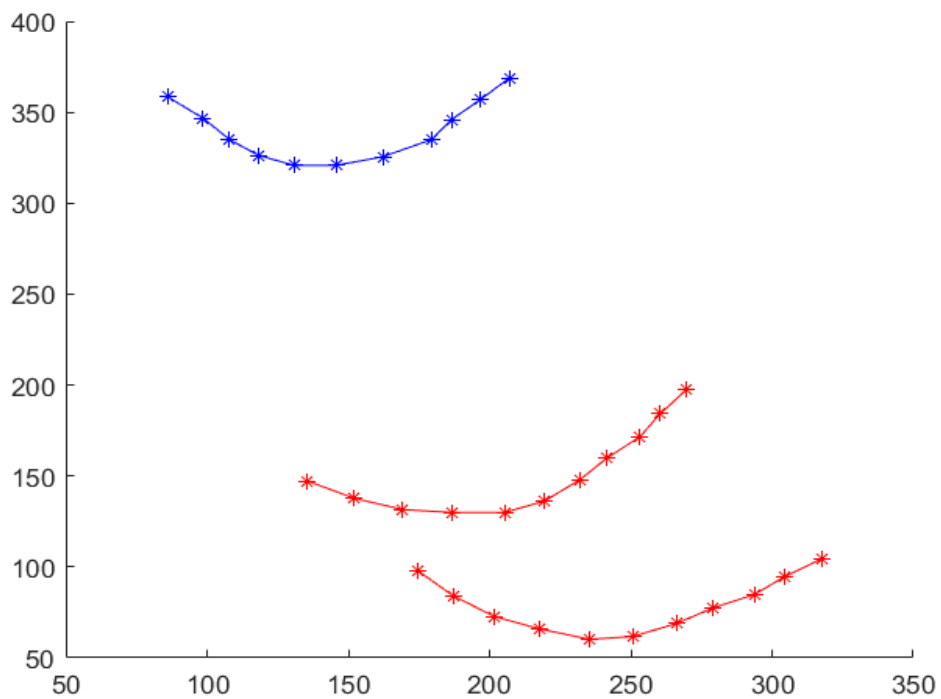
Η εφαπτομένη όμως απειρίζεται θετικά στο σημείο $\frac{\pi}{2}$ και αρνητικά στο $\frac{3\pi}{2}$. Άρα αν ο αριθμητής είναι θετικός και ο παρονομαστής 0^+ ή ο αριθμητής αρνητικός και ο παρονομαστής 0^- τότε $\theta = \frac{\pi}{2}$. Εντελώς όμοια αν ο αριθμητής είναι αρνητικός και ο παρονομαστής 0^+ ή δυϊκά ο αριθμητής είναι θετικός και ο παρονομαστής 0^- τότε $\theta = -\frac{\pi}{2}$ ή $\frac{3\pi}{2}$. Αν ο παρονομαστής της εφαπτομένης είναι διάφορος του μηδενός, τότε η εξίσωση έχει δύο λύσεις που διαφέρουν κατά π . Επειδή η συνάρτηση λάθους είναι περιοδική με περίοδο 2π , αρκεί να μελετηθεί η συμπεριφορά της στο διάστημα $[0, 2\pi)$. Στο διάστημα αυτό υπολογίζονται και οι δύο τριάδες λύσεων, οι $(\theta_1, x_{\mu}, y_{\mu})$ και $(\theta_1 + \pi, x_{\mu}, y_{\mu})$ και κρατιέται αυτή που δίνει το μικρότερο σφάλμα, έστω E . Αφού η συνάρτηση $E(\theta, x_{\mu}, y_{\mu})$ έχει ελάχιστο όπως απεδείχθη άνωθεν, το E είναι το ελάχιστο της.

Ο.ε.δ.

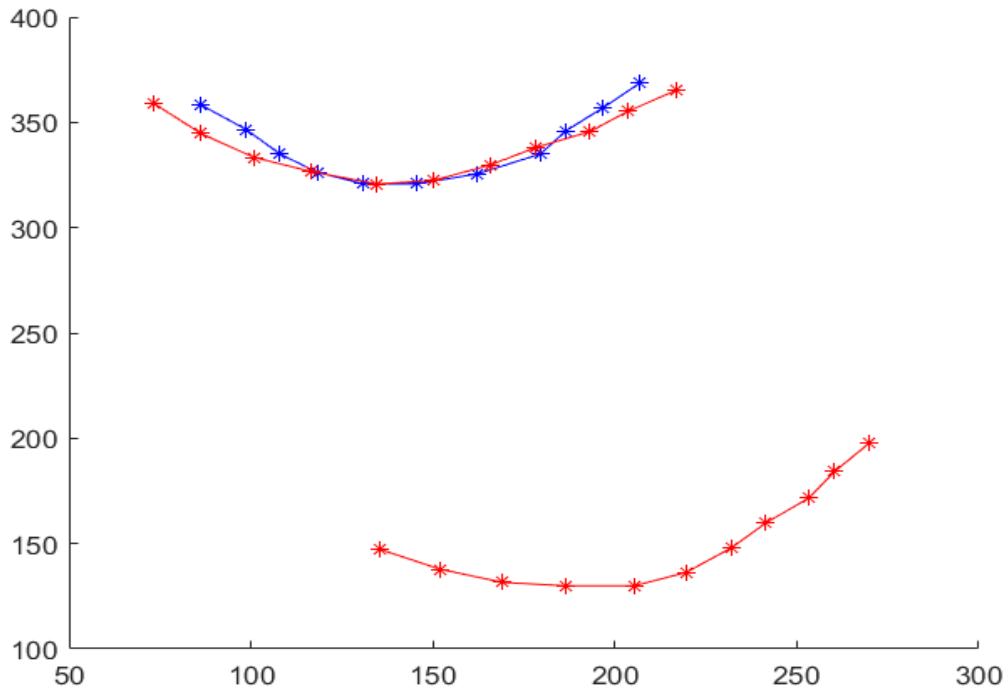
Ακολουθεί ένα παράδειγμα με δύο ψηφιακές καμπύλες ισοπληθείς σε σημεία για να επεξηγηθεί το λήμμα.



Εικόνα 6.3. Δύο ισοπληθείς ψηφιακές καμπύλες 11 σημείων εκάστη, όπου τα σημεία τους έχουν ενωθεί με γραμμική παρεμβολή.



Εικόνα 6.2. Οι ίδιες καμπύλες, όπου με κόκκινο χρώμα και κάτω απεικονίζεται η εστραμμένη κόκκινη καμπύλη με γωνία θ που δίνει μικρότερο σφάλμα σε σχέση με την $\theta+\pi$.



Εικόνα 6.3. Η τελική μετατόπιση της κόκκινης καμπύλης προς την μπλε ώστε να ταιριάζουν βέλτιστα κατά την έννοια των ελαχίστων τετραγώνων.

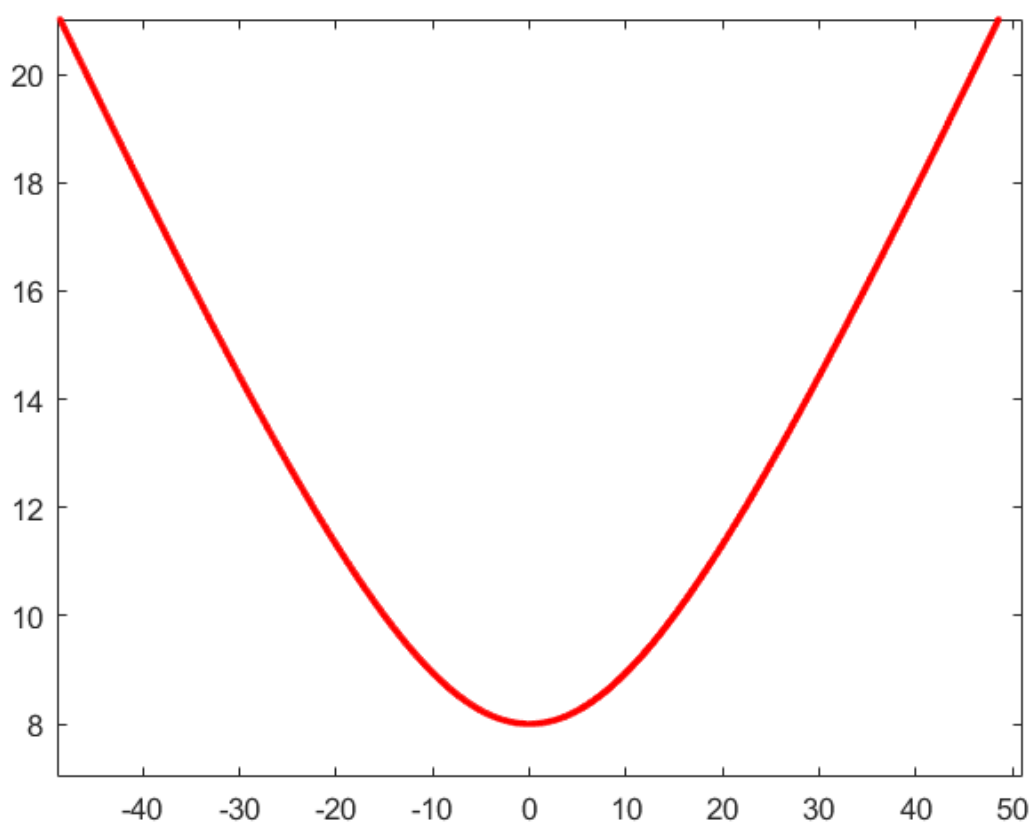
Το ανωτέρω λήμμα θα χρησιμοποιηθεί προκειμένου να παρουσιαστεί ένας αλγόριθμος προσαρμογής θορυβώδους καμπύλης σε πρότυπη (ίδη [8]). Αυτό βρίσκει άμεση εφαρμογή στην εργασία, αφού όλα τα τμήματα αντικειμένων των θεματικών ενοτήτων των τοιχογραφιών θεωρούνται θορυβώδεις υλοποιήσεις μιας πρότυπης καμπύλης.

Διαδικασία 1: Ένα σύνολο βημάτων για μια «καλή» προσαρμογή μιας θορυβώδους καμπύλης σε πρότυπη.

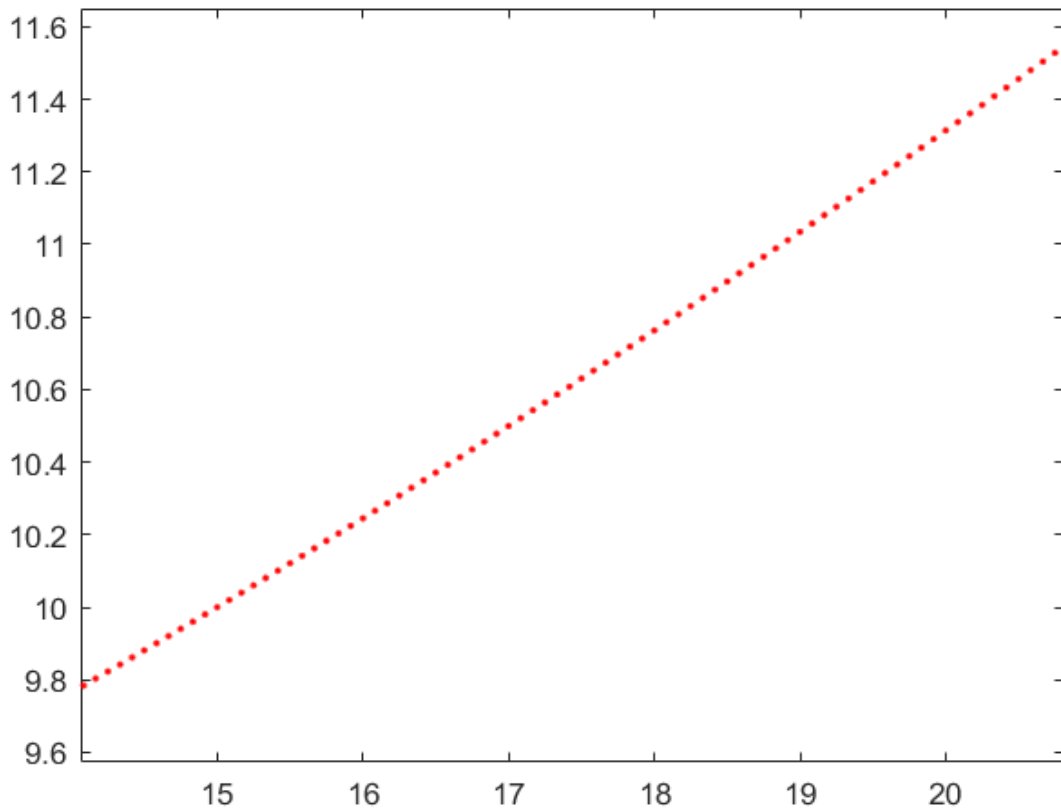
Βήμα Δ1.1

Δημιουργείται μια πυκνή πρότυπος καμπύλη, η οποία θα συμβολίζεται με Π^2 , ως εξής. Εάν η ανεξάρτητη μεταβλητή της είναι $x \in [a, b]$ τότε δημιουργείται μια πυκνή διαμέριση του διαστήματος $[a, b]$ με βήμα διαμέρισης $\frac{1}{12}$ ή $\frac{1}{24}$ του pixel της εικόνας της τοιχογραφίας. Εάν η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι γωνία $\theta \in [a, b]$ η διαμέριση γίνεται με βήμα 10^{-3} ή 10^{-4} rad. Επειδή οι εικόνες έχουν ληφθεί με εξαιρετική ανάλυση, τουλάχιστον 50 pixels/cm, αυτό σημαίνει ότι το επιλεγέν βήμα διαμέρισης αντιστοιχεί σε μήκος καμπύλης περίπου τάξης μεγέθους 0.01mm.

Για τις καμπύλες που δεν ορίζονται όρια για την ανεξάρτητη μεταβλητή, όπως στις υπερβολές και στις σπείρες, αυτά τέθηκαν με εύλογο αλλά προφανή τρόπο. Κατ' αρχάς, οι τοιχογραφίες έγιναν σε τοίχους με διαστάσεις περίπου 1.70 επί 2.5 μέτρα, οπότε αμέσως καθορίζεται το άνω όριο για την ανεξάρτητη μεταβλητή. Επίσης οι οδηγοί έπρεπε να έχουν μήκος τέτοιο που να διευκόλυνε τους καλλιτέχνες να τους μεταφέρουν στις σκάλες ή στις σκαλωσιές την ώρα που έφτιαχναν τα έργα τους. Επομένως τα όρια που επισημάνθηκαν ισχύουν εν αφθονία. Μια τέτοια πρότυπη πυκνή υπερβολή, με πεδίο ορισμού της το x να είναι από -0.5m έως 0.5m περίπου φαίνεται στο κάτωθι σχήμα.



Εικόνα 6.4. Μια πολύ πυκνή υπερβολή



Εικόνα 6.5. Λεπτομέρεια της άνω καμπύλης όπου διαπιστώνεται ότι είναι ψηφιακή.

Βήμα Δ1.2

Αρχίζοντας από το πρώτο σημείο της πυκνής προτύπου καμπύλης Π^Z δημιουργείται εγγεγραμμένο πολύγωνο σε αυτήν, «αμφιμονοσήμαντα ισόμηκες» με τη θορυβώδη υλοποιημένη-ζωγραφισμένη καμπύλη. Ο όρος «αμφιμονοσήμαντα ισόμηκες» σημαίνει το εξής. Βάσει των σημείων της ζωγραφισμένης καμπύλης δημιουργείται μια ακολουθία ευκλείδειων αποστάσεων μεταξύ των διαδοχικών σημείων του τμήματος αντικειμένου, δηλαδή η ακολουθία

$$\delta s_j = d(P_{j+1}, P_j), j = 0, 1, \dots, N^p - 1$$

όπου P_j είναι το j -οστό σημείο του $C_{\text{αντ}}^{\text{εκτ}}$, το $d(K, L)$ είναι η ευκλείδεια απόσταση μεταξύ δύο τυχόντων σημείων K και L και N^p το πλήθος των σημείων του τμήματος αντικειμένου. Έπειτα, ας ονομασθεί M_1^1 το πρώτο σημείο του Π^Z και ας αναζητηθεί σημείο M_2^1 του Π^Z , με την ιδιότητα η απόσταση του από το M_1^1 να είναι πλησιέστερη στο δs_1 από όλα τα σημεία του Π^Z . Σε ισοδύναμη διατύπωση

$$M_2^1 \in \Pi^Z \text{ και } (t(M_2^1) > t(M_1^1)) : |d(M_2^1, M_1^1) - \delta s_1| = \min$$

όπου t η ανεξάρτητη μεταβλητή της καμπύλης, $t(M)$ η τιμή της στο σημείο M ενώ η ανισωτική σχέση $t(M_2^1) > t(M_1^1)$ εξασφαλίζει ότι η καμπύλη Π^Σ διαγράφεται πάντα κατά την ίδια φορά.

Συνεχίζοντας, ομοίως προσδιορίζεται το σημείο M_3^1 :

$$M_3^1 \in \Pi^\Sigma \text{ και } (t(M_3^1) > t(M_2^1)) : |d(M_3^1, M_2^1) - \delta s_2| = \min$$

και αναδρομικά ο ορισμός του M_j^1 :

$$M_j^1 \in \Pi^\Sigma \text{ και } (t(M_j^1) > t(M_{j-1}^1)) : |d(M_j^1, M_{j-1}^1) - \delta s_{j-1}| = \min$$

όπου η ανισότητα $t(M_j^1) > t(M_{j-1}^1)$ εξασφαλίζει ότι τα σημεία της καμπύλης Π^Σ επιλέγονται πάντοτε με την ίδια φορά. Αφού ολοκληρωθεί η διαδικασία, έχει προσεγγισθεί με μεγάλη ακρίβεια η ισότητα

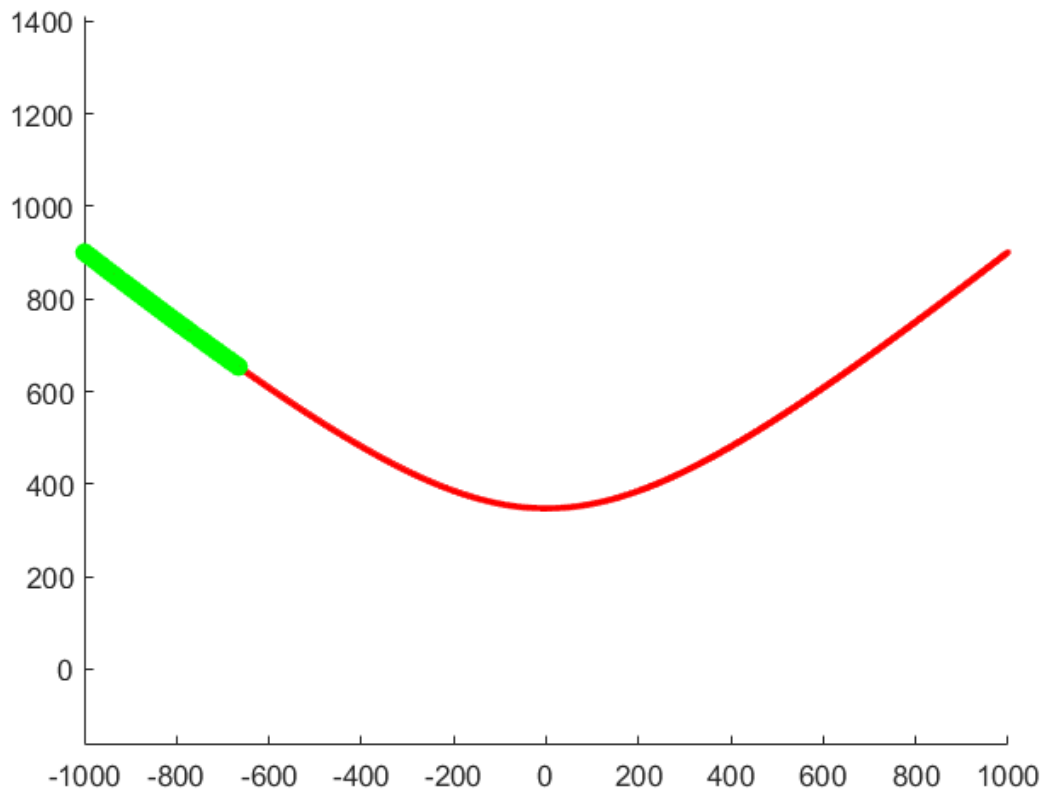
$$d(M_j^1, M_{j-1}^1) \approx \delta s_j, \quad \forall j = 1, \dots, N^P.$$

Λόγω των προηγούμενων, χρησιμοποιήθηκε ο όρος «αμφιμονοσήμαντα ισόμηκες», για το $M_1^1 M_2^1 \dots M_{N^P}^1$.

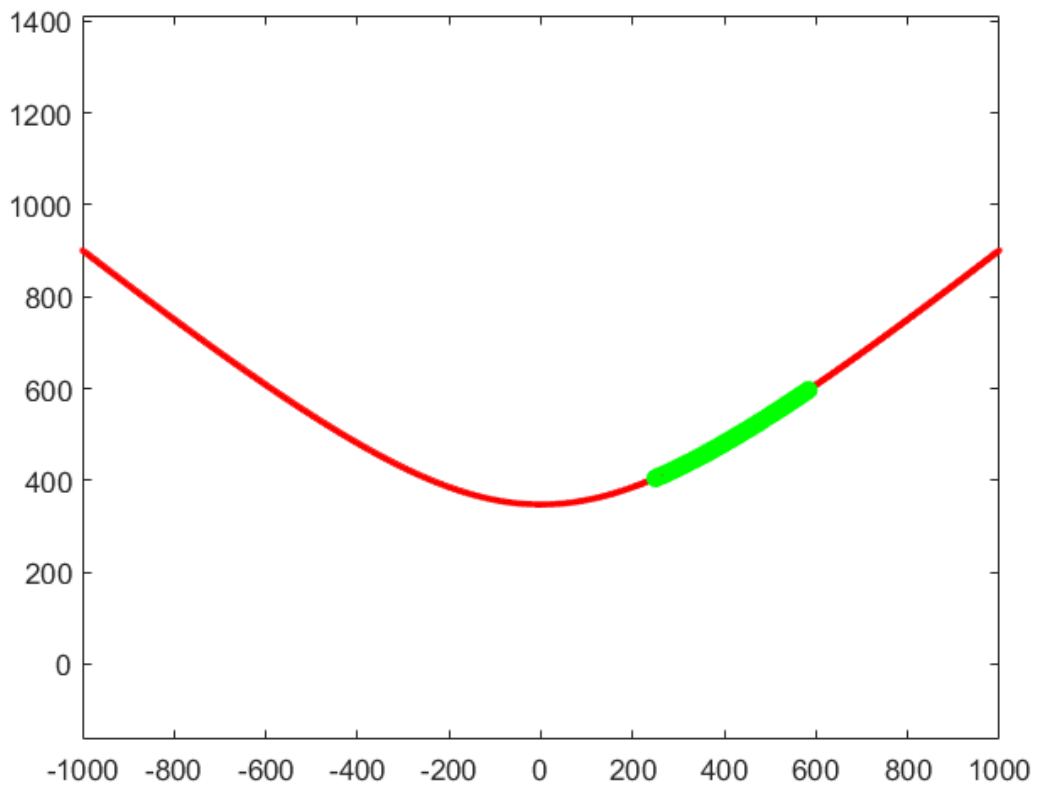
Στην κάτωθι ομάδα εικόνων παρουσιάζεται η δημιουργία μιας κλάσης αμφιμονοσήμαντα ισομήκων πολυγώνων επί μιας υποψηφίου προτύπου καμπύλης, συγκεκριμένα υπερβολής.



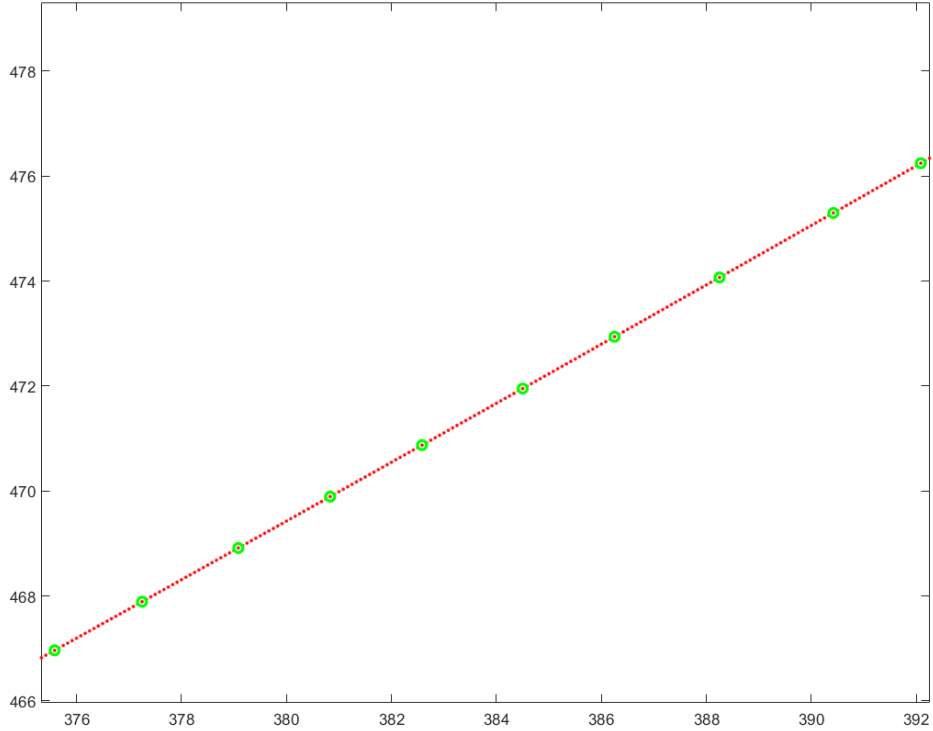
Εικόνα 6.6 Οι πράσινοι αστερίσκοι αποτελούν ένα τμήμα αντικειμένου περιγράμματος $C_{\alpha\beta\gamma}^{\text{ΕΚΤ}}$.



Εικόνα 6.7. Το πρώτο αμφιμονοσήμαντα ισόμηκες πολύγωνο του $C_{\text{άντ}}^{\text{έκτ}}$ στην πρώτη θέση της υποψηφίου καμπύλης.



Εικόνα 6.8. Ένα άλλο αμφιμονοσήμαντα ισόμηκες πολύγωνο, σε άλλη θέση της υπερβολής.



Εικόνα 6.9. Λεπτομέρεια της παραπάνω εικόνας ώστε να φανούν οι κορυφές του αμφιμονοσήμαντα ισομήκους πολυγώνου.

Βήμα Δ1.3

Αφού δημιουργήθηκε το πρώτο «αμφιμονοσήμαντα ισόμηκες» με το $C_{\text{αντ}}^{\text{εκτ}}$ πολύγωνο $M_1^1 M_2^1 \dots M_{N^P}^1$ όλες οι κορυφές του οποίου είναι στοιχεία της Π^Σ , μετακινείται το πρώτο σημείο του και δημιουργείται ένα δεύτερο «αμφιμονοσήμαντα ισόμηκες» πολύγωνο που εκκινεί από το δεύτερο σημείο του Π^Σ . Συνεχίζοντας τη διαδικασία παράγεται όλη η κλάση των αμφιμονοσήμαντα ισομήκων με το $C_{\text{αντ}}^{\text{εκτ}}$ πολυγώνων με κορυφές τα σημεία M_j^n της Π^Σ . Το n δείχνει το σημείο του Π^Σ απ' όπου εκκινεί το πολύγωνο ενώ ο κάτω δείκτης j είναι ο αριθμός της κορυφής του πολυγώνου, $j = 1, \dots, N^P$. Εκτενέστερα, ως εναρκτήριο σημείο του n -οστού πολυγώνου τίθεται το n -οστό σημείο της πυκνής καμπύλης Π^Σ , ενώ οι επόμενες κορυφές του πολυγώνου είναι τα σημεία του Π^Σ οριζόμενα από την αναδρομική συνθήκη

$$M_j^n \in \Pi^\Sigma \text{ και } (t(M_j^n) > t(M_{j-1}^n)) : |d(M_j^n, M_{j-1}^n) - \delta s_{j-1}| = \min, \quad j = 2, \dots, N^P$$

Εννοείται πως τα ανωτέρω πολύγωνα δημιουργούνται στο εύρος των ορίων της προτύπου καμπύλης, δηλαδή μέχρι τον δείκτη πίνακα του σημείου του πεδίου ορισμού που ισχύει ότι:

$$t(i) : t(i + N^P) = t(\text{end})$$

Με τον τρόπο αυτόν δημιουργείται μια πλήρης κλάση πολυγωνικών καμπυλών εγγεγραμμένων στην πρότυπη, κάθε μια εκ των οποίων είναι αμφιμονοσήμαντα ισομήκης με την θορυβώδη καμπύλη, δηλαδή με την αρχική εκτίμηση του τμήματος αντικειμένου περιγράμματος.

Βήμα Δ1.4

Εφαρμόζεται το Λήμμα 5.1 ώστε να προσαρμοστεί η θορυβώδης καμπύλη $C_{\text{αντ}}^{\text{εκτ}}$, με στροφή και μετατόπιση ως στερεό σώμα, σε κάθε αμφιμονοσήμαντα ισομήκης πολύγωνο $M_1^n M_2^n \dots M_{N^P}^n$, εγγεγραμμένο στο Π^Σ . Έτσι λαμβάνεται ένα λάθος προσέγγισης E_n και μια αντίστοιχη τριάδα $(\theta_0^n, x_0^n, y_0^n)$ όπου ο κάτω δείκτης υποδηλοί ότι είναι μια πρώτη εκτίμηση των βέλτιστων τιμών τους. Τώρα πρέπει να γίνει ο εξής συλλογισμός. Ο καλλιτέχνης, πριν 3650 περίπου χρόνια, περιέστρεφε και μετατόπιζε παράλληλα τον οδηγό ώστε να τον τοποθετήσει στο σημείο του τοίχου που επιθυμούσε και προσάρμοζε το πινέλο στον οδηγό προκειμένου να παράξει κάθε φορά κάποιο αντικείμενο περιγράμματος.

Συνεπώς, η καμπύλη που δημιουργείται δεν ήταν εγγεγραμμένη στον οδηγό αλλά ήταν μόνο στη μία μεριά του, οπότε ισχύει σε πολύ ικανοποιητικό βαθμό η προσέγγιση περί εγγεγραμμένης καμπύλης στην πρότυπη. Στην εργασία αυτή υπάρχει η πληροφορία των διαφόρων τμημάτων αντικειμένων $C_{\text{αντ}}^{\text{εκτ}}$ και το καθένα προσαρμόζεται σε πιθανούς οδηγούς, ακολουθώντας την αντίστροφη πορεία. Βέβαια, τα αποτελέσματα δικαιώνουν απόλυτα τον άνω συλλογισμό.

Διαδικασία 2: Τελική βέλτιστη προσαρμογή του εκάστοτε $C_{\text{αντ}}^{\text{Υπ}}$ σε τυχούσα πρότυπο καμπύλη

Βήμα Δ2.1

Για κάθε σημείο εκκίνησης και άρα αμφιμονοσήμαντα ισομήκης πολύγωνο $M_1^n M_2^n \dots M_{N^P}^n$ παραχθέν από τη διαδικασία 1 τοποθετείται το $C_{\text{αντ}}^{\text{εκτ}}$ ώστε να ταιριάζει βέλτιστα στο πολύγωνο αυτό σύμφωνα με το Λήμμα 5.1, δηλαδή με στροφή κατά θ_0^n και παράλληλη μετατόπιση κατά (x_0^n, y_0^n) . Έτσι το $C_{\text{αντ}}^{\text{εκτ}}$ μεταφέρεται ως στερεό σώμα στα σημεία $\Lambda_j (j = 1, \dots, N^P)$ τα οποία σχηματίζουν το πολύγωνο $\Lambda_{\text{αντ}}^{\text{εκτ}}$ που είναι ίσο με το $C_{\text{αντ}}^{\text{εκτ}}$. Στη θέση βέλτιστης προσαρμογής του $C_{\text{αντ}}^{\text{εκτ}}$ στην πρότυπο καμπύλη Π^Σ κάθε ένα εκ των σημείων βρίσκεται πολύ κοντά στο ομόλογο του σημείο του αμφιμονοσήμαντα ισομήκους πολυγώνου δηλαδή το Λ_1 στο M_1^n , το Λ_2 στο M_2^n και λοιπά.

Βήμα Δ2.2

Ορίζεται η μέση απόσταση του $C_{\alpha\nu\tau}^{\text{εκτ}}$ από την πρότυπο καμπύλη Π^{Σ} ως εξής:

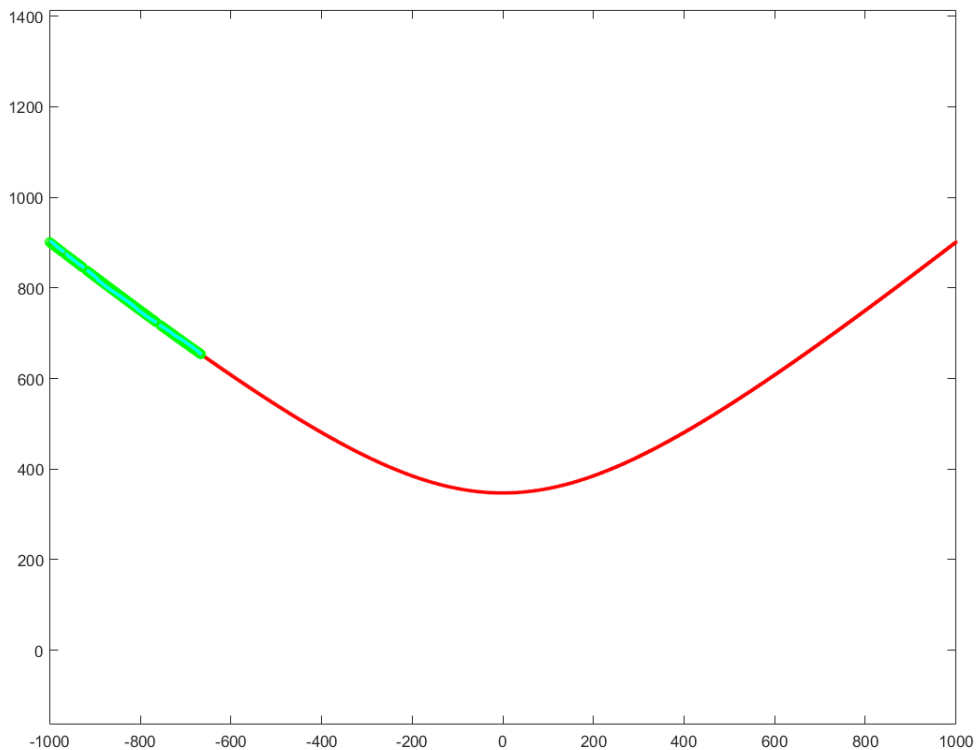
$$d^f(C_{\alpha\nu\tau}^{\text{εκτ}}, \Pi^{\Sigma}) = d^f(\Lambda_{\alpha\nu\tau}^{\text{εκτ}}, \Pi^{\Sigma}) = \sum_{j=1}^{N^P} \frac{d(\Lambda_j, \Pi^{\Sigma})}{N^P}$$

με

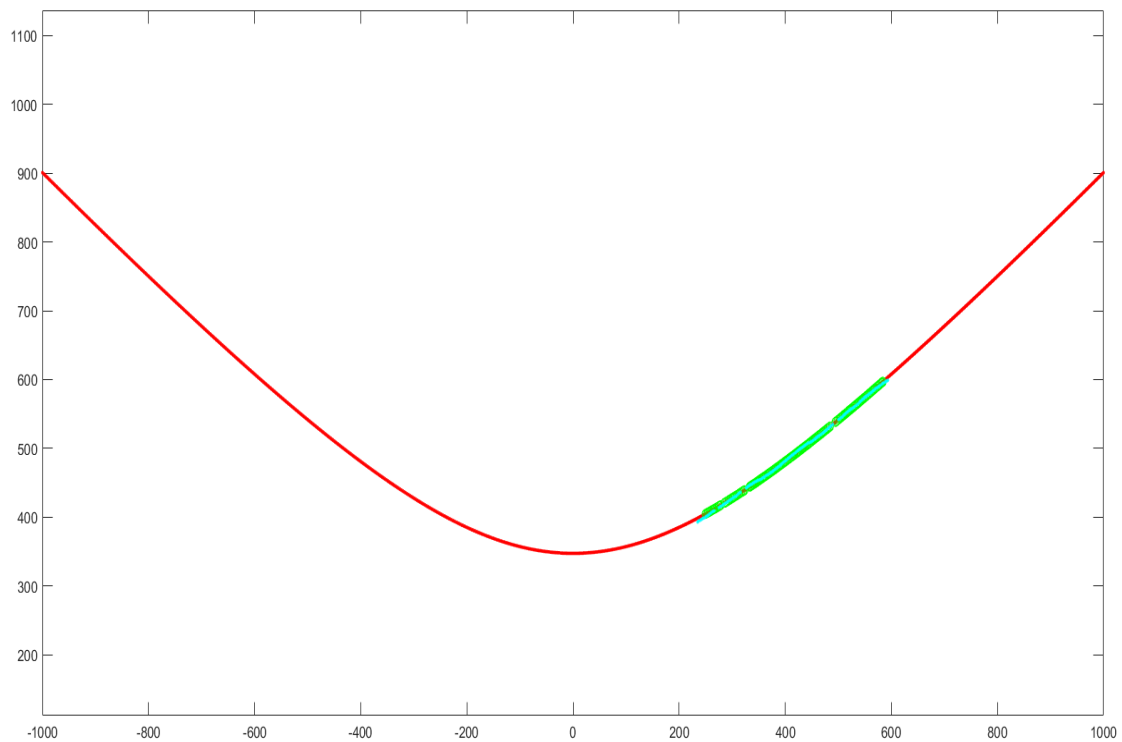
$$d(\Lambda_j, \Pi^{\Sigma}) = \min_{M \in \Pi^{\Sigma}} d(\Lambda_j, M)$$

δηλαδή η απόσταση του $\Lambda_{\alpha\nu\tau}^{\text{εκτ}} - \Pi^{\Sigma}$ είναι ουσιαστικά το μέσο σφάλμα προσαρμογής που δίνει η εφαρμογή του Λήμματος 5.1 για κάθε πολύγωνο που ανήκει στην κλάση των αμφιμονοσήμαντα ισομήκων πολυγώνων.

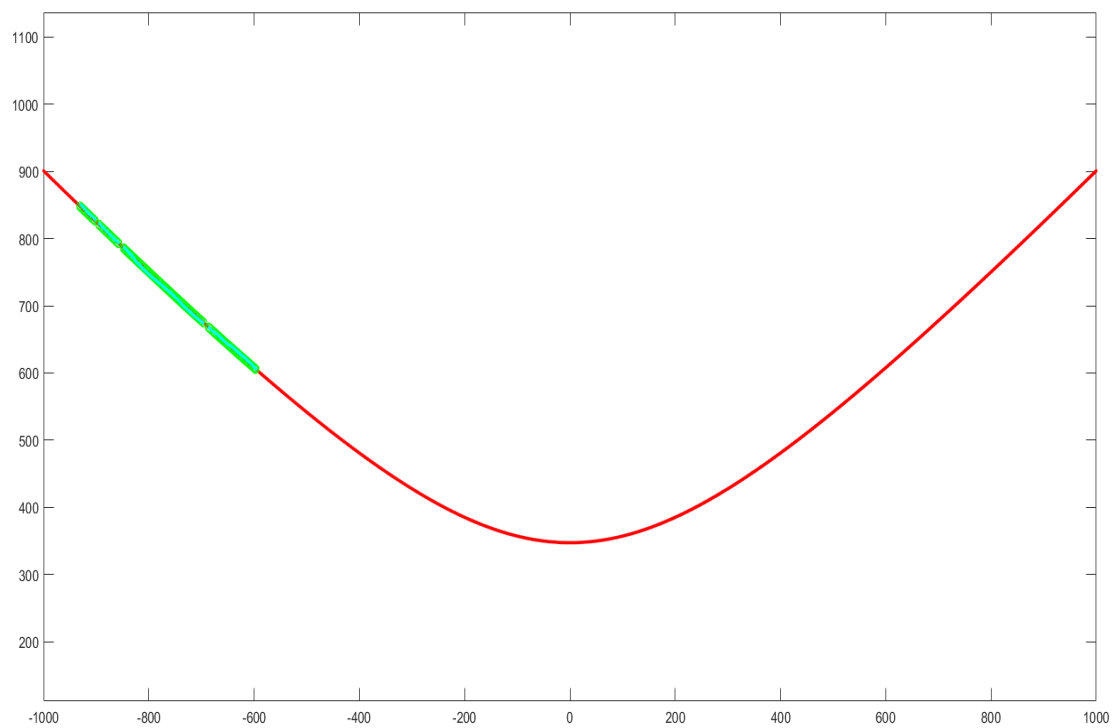
Ακολουθούν οι εικόνες 6.10 α έως γ για να επεξηγηθεί οπτικά η εφαρμογή των διαδικασιών 1 και 2. Στην τελευταία εικόνα είναι η θέση της καμπύλης όπου το λάθος ελαχιστοποιείται.



Εικόνα 6.10.α.Ταίριασμα του $C_{\alpha\nu\tau}^{\text{εκτ}}$ σε ένα κομμάτι της υποψήφιας υπερβολής



Εικόνα 6.10.β. Ταίριασμα του ίδιου τμήματος αντικειμένου σε άλλο τμήμα της υποψήφιας υπερβολής.



Εικόνα 6.10.γ. Ταίριασμα του τμήματος αντικειμένου περιγράμματος σε στο τμήμα της υπερβολής με το ελάχιστο λάθος, σε σχέση με τα υπόλοιπα κομμάτια της υπερβολής.

Κοντολογίς, οι διαδικασίες 1 και 2 περιλαμβάνουν τα εξής βήματα:

1) Δημιουργία του αμφιμονοσήμαντα ισομήκους με το $C_{\alpha\nu\tau}^{EK\tau}$ πολυγώνου και εκκίνηση του από το πρώτο σημείο της πρότυπης καμπύλης P^Z .

2) Εφαρμογή του λήμματος 5.1 ούτως ώστε να προσαρμοστεί βέλτιστα κατά την έννοια των ελαχίστων τετραγώνων το ζωγραφισθέν τμήμα $C_{\alpha\nu\tau}^{EK\tau}$ στο ισόμηκες πολύγωνο, με λάθος έστω E_1 .

3) Επανάληψη των βημάτων 1 και 2 με σημεία εκκίνησης των ισομήκων πολυγώνων τα επόμενα σημεία της P^Z , όπου δίνουν κάθε φορά λάθος E_n . Το αμφιμονοσήμαντα ισόμηκες πολύγωνο του $C_{\alpha\nu\tau}^{EK\tau}$ με το μικρότερο E_n ταιριάζει βέλτιστα στο $L_{\alpha\nu\tau}^{EK\tau}$.

4) Υπολογισμός της μέσης απόστασης του εκάστοτε $L_{\alpha\nu\tau}^{EK\tau}$ από την πρότυπο καμπύλη. Το τμήμα της προτύπου καμπύλης που δίνει τη μικρότερη απόσταση είναι και το αντίστοιχο τμήμα της προτύπου καμπύλης που χρησιμοποιήθηκε για τη σχεδίαση του $C_{\alpha\nu\tau}^{EK\tau}$. Εντέλει, το $C_{\alpha\nu\tau}^{EK\tau}$ αντιστοιχίζεται βέλτιστα σε ένα τμήμα προτύπου μέσω του $L_{\alpha\nu\tau}^{EK\tau}$, που είναι μια εστραμμένη και μετατοπισμένη σαν στερεό σώμα μορφή του $C_{\alpha\nu\tau}^{EK\tau}$, με ένα μέσο λάθος και ένα μέγιστο λάθος προσαρμογής. Το μέγιστο λάθος είναι απλώς το μέγιστο της απόστασης κάποιου σημείου του $L_{\alpha\nu\tau}^{EK\tau}$ από το ομόλογο του στην πρότυπο καμπύλη, στο τμήμα της που ελαχιστοποιεί το μέσο σφάλμα.

6.2 Ακριβής Προσδιορισμός των καμπυλογράφων που χρησιμοποιήθηκαν για το σχεδιασμό των τοιχογραφιών

Όπως επισημάνθηκε στην αρχή του παρόντος κεφαλαίου, διατυπώθηκε η υπόθεση ότι επειδή οι προς μελέτη τοιχογραφίες είναι τοπικά και χρονικά σχετιζόμενες με αυτές που μελετήθηκαν στις προηγούμενες δημοσιεύσεις [3] έως [11] και διδακτορικές διατριβές [1] και [2], θα έχουν χρησιμοποιηθεί οι ίδιοι οδηγοί που εντοπίστηκαν και εις τις προηγούμενες. Αυτοί είναι τέσσερις υπερβολές και μία γραμμική σπείρα και για τον ακριβή προσδιορισμό τους ακολουθήθηκε η εξής διαδικασία.

Βάσει των αρχικών τμημάτων αντικειμένου, προσδιορίστηκε μια πολυωνυμική προσέγγιση της καμπύλης και των συντεταγμένων κάθε τμήματος συναρτήσει του μήκους αυτού s . Εν συνεχεία υπολογίστηκε η

καμπυλότητα του τμήματος προσεγγιστικά με τη δεύτερη παράγωγο της επιβατικής ακτίνας του τμήματος, αφού ανεξάρτητη μεταβλητή είναι το μήκος s . Στη συνέχεια ελαχιστοποιείται κατάλληλη συνάρτηση λάθους για διάφορες επιλεγείσες πρότυπες καμπύλες, ως το άθροισμα των τετραγώνων της διαφοράς της προσεγγιστικής καμπυλότητας από αυτήν της πρότυπου καμπύλης, για κάθε σημείο. Επομένως μια πρώτη εκτίμηση της πρότυπης καμπύλης είναι αυτή που δίνει παραμέτρους με ελάχιστο λάθος, σε σχέση με τα λάθη που προκύπτουν από την ελαχιστοποίηση των υπόλοιπων συναρτήσεων.

Από αυτή τη διαδικασία προκύπτει ένα σύνολο πρωταρχικών παραμέτρων μέσω των οποίων περιγράφεται πλήρως η καμπύλη, όπως για την υπερβολή τα a, b . Αυτοί οι παράμετροι τελικά προσδιορίστηκαν με το κριτήριο της μέγιστης πιθανοφάνειας και με ελαχιστοποίηση των λαθών με συγκεκριμένο τρόπο που η περιγραφή του ξεφεύγει από τα όρια της παρούσης διπλωματικής εργασίας.

Συνεπώς, παρουσιάζονται κάτωθι οι πέντε οδηγοί που εξετάστηκαν στην παρούσα εργασία:

Όνομα οδηγού-χρώμα	Χρώμα	Πρωταρχικές Παράμετροι (cm)	
κυανή	c	a=2.1	b=2.5
Μπλε	b	a=7.86	b=17.6
Πράσινη	g	a=4.1	b=6.3
Ματζέντα	m	a=14.2	b=20.1
Γραμμική σπείρα	r	k=0.169	

Πίνακας 6.1. Επιλεγέντες γεωμετρικοί οδηγοί

Επιπλέον, υπήρξαν αρκετά τμήματα αντικειμένων, τα οποία σύμφωνα με τη μεθοδολογία του κεφαλαίου 4 δεν αντιστοιχήθηκαν οποιαδήποτε καμπύλη εντός των αποδεκτών ορίων λαθών προσαρμογής. Θεωρήθηκε ότι είναι πολύ απίθανο να μην έχουν υλοποιηθεί με οδηγό, αφού αφενός, αρκετά είχαν μήκος από 6.5 έως 12 cm και αφετέρου είχαν εξαιρετική ομαλότητα και μεγάλη καμπυλότητα, που είναι πολύ δύσκολο ακόμα και σήμερα να υλοποιηθούν, χωρίς χρήση οδηγού, σε κονίαμα ίδιου υλικού. Τα προαναφερθέντα, οδήγησαν στο να εφαρμοστεί η διαδικασία

της αρχικής εκτίμησης της πρότυπης καμπύλης, μέσω της ελαχιστοποίησης του σφάλματος της καμπυλότητας [1]. Τα αποτελέσματα απέκλεισαν τις κωνικές τομές αλλά και τα άλλα εξετασθέντα είδη σπειρών (εκτύλιξης, εκθετική) [1] και [2] εκτός της γραμμικής.

Στη συνέχεια για τον προσδιορισμό της πρωταρχικής παραμέτρου k της σπείρας του Αρχιμήδη έγιναν τα εξής βήματα:

- 1) Πραγματοποιήθηκε διαμέριση με πολύ μικρό βήμα της τάξης των 0.01 cm από την ελάχιστη ως τη μέγιστη τιμή του k που προέκυψαν από τις πρώτες εκτιμήσεις των παραμέτρων και της λογικής, έστω $K \in [k_\alpha, k_\tau]$. Τα άκρα k_α, k_τ τέθηκαν ίσα με $k_\alpha = 0.169\text{ cm}$ και $k_\tau = 9\text{ cm}$.
- 2) Για κάθε τμήμα, για όλα τα k στο διάστημα αυτό υπολογίστηκε το μέσο και το μέγιστο σφάλμα προσαρμογής όπως αυτά προκύπτουν από την εφαρμογή των διαδικασιών 1 και 2 του Κεφαλαίου 4. Στη συνέχεια ελήφθησαν για κάθε τμήμα αντικειμένου οι εξής μετρικές:

$$M1_i = \text{meanError}(k_i) \cdot \text{MaxError}(k_i)$$

$$M2_i = 2.5 \cdot \text{meanError}(k_i) + \text{MaxError}(k_i)$$

με $i \in \left[1, \left\lceil \frac{k_1 - k_2}{0.01} \right\rceil + 1\right]$, $[x]$ = ακέραιο μέρος του x και εντοπίστηκε το k που τις ελαχιστοποιεί.

- 3) Για όλα τα τμήματα αντικειμένου ελήφθη ο μέσος όρος κάθε μετρικής, για κάθε τιμή του k στο πεδίο ορισμού του, δηλαδή

$$\text{mean}(M1_i) = \frac{\sum_{j=1}^{N_{\tau\mu}} M1_i^j}{N_{\tau\mu}}$$

$$\text{mean}(M2_i) = \frac{\sum_{j=1}^{N_{\tau\mu}} M2_i^j}{N_{\tau\mu}}$$

με $N_{\tau\mu}$ το πλήθος των τμημάτων για τα οποία το πρότυπο δεν είχε προσδιοριστεί και $i \in \left[1, \left\lceil \frac{k_1 - k_2}{0.01} \right\rceil + 1\right]$.

Έπειτα ελήφθη η ελάχιστη τιμή όλων των μέσων όρων για κάθε μετρική προκειμένου να εντοπιστεί εκείνο το k που ήταν το σημείο ελαχίστου:

$$k_{min1} = \min(\text{mean}(M1))$$

$$k_{min2} = \min(\text{mean}(M2))$$

Για να υπάρχει βεβαιότητα ότι τα k_{min1}, k_{min2} δεν θα καταστρατηγούσαν τα όρια μέσου και μεγίστου λάθους, ελέγχθηκε ότι κάθε τμήμα περιγράμματος μέσω των διαδικασιών 1 και 2 δίνει παραπλήσιες τιμές για το μέσο και μέγιστο λάθος σε σχέση με το k που ήταν σημείο ελαχίστου για το εκάστοτε τμήμα περιγράμματος αλλά και ότι τα k ήταν παραπλήσια. Πράγματι, το σφάλμα στο k ήταν της τάξης του 0.1 cm ενώ για το μέσο λάθος και το μέγιστο πρακτικά αμελητέο, στο δεύτερο σημαντικό ψηφίο και πάντοτε εντός των επιθυμητών ορίων. Στην τελική αξιολόγηση, το οπτικό αποτέλεσμα, στο οποίο εδόθη βαρύνουσα σημασία, ήταν κατά την γνώμη μας, οπότε η τιμή του k ορίστηκε να είναι περίπου :

$$k = 2.7 \text{ cm}$$

Τελικά οι υποψήφιοι οδηγοί έγιναν 6:

Όνομα οδηγού	Χρώμα	Πρωταρχικές Παράμετροι (cm)	
κυανή	Κυανό	a=2.1	b=2.5
Μπλε	Μπλε	a=7.86	b=17.6
Πράσινη	Πράσινο	a=4.1	b=6.3
Ματζέντα	Ματζέντα	a=14.2	b=20.1
Γραμμική σπείρα ΓΣ0	Κόκκινο	k=0.169	
Γραμμική σπείρα ΓΣ2	Μπορντό	k=2.7	

Πίνακας 6.2. Υποψήφιοι οδηγοί με την αντίστοιχη χρωματική επισήμανση

Από αυτούς τους υποψήφιους καμπυλογράφους, τελικά μόνο οι πέντε βρέθηκαν σε αρκετές μάλιστα υλοποιήσεις. Δεν βρέθηκε η ΓΣ0 με $k=0.169$, ωστόσο έχει βρεθεί σε αφθονία στις τοιχογραφίες που παρουσιάζονται στα άρθρα [3] έως [11] και στις διατριβές [1] και [2]. Πρέπει να τονιστεί ότι πρακτικά υπάρχει βεβαιότητα όσον αφορά τη χρήση οδηγών για τη σχεδίαση των οδηγών που μελετήθηκαν. Η μόνη στοχαστικότητα έγκειται στις ακριβείς παραμέτρους των πρότυπων καμπυλών, μέσω του κριτηρίου μέγιστης πιθανοφάνειας, που γέννησαν τους καμπυλογράφους και ακολούθως όλες τις υλοποιήσεις επί των τοιχογραφιών. Κάθε χρώμα στον ανωτέρω πίνακα δεσμεύεται να χρησιμοποιείται για τον συγκεκριμένο οδηγό.

6.3 Ακριβής προσδιορισμός των τμημάτων αντικειμένων που αντιστοιχούν στους ευρεθέντες καμπυλογράφους

Αναφορικά με την καμπύλη που εντοπίστηκε στην προηγούμενη παράγραφο και τις άλλες που θεωρήθηκαν δεδομένες επιτελέστηκε η εξής διαδικασία. Κάθε αρχική εκτίμηση μονοκονδυλιάς $C_{\alpha\nu\tau}^{EK\tau}$ που προέκυψε με τη μέθοδο του κεφαλαίου 4 προσαρμόστηκε βέλτιστα σε όλες τις υποψήφιες καμπύλες του άνω πίνακα και μόνο σε μία από αυτές το λάθος προσαρμογής ήταν εξαιρετικά μικρό, με το μέσο λάθος να είναι πάντοτε κάτω από τα 0.35mm και το μέγιστο λάθος να είναι κάτω από 0.8mm σε σχέση με την πρότυπο καμπύλη. Οπτικά, το αποτέλεσμα ήταν εξαιρετικά ενδιαφέρον.

Τώρα θα παρουσιαστεί η μέθοδος μέσω της οποίας ορίστηκαν σαφώς τα όρια των τμημάτων αντικειμένου, δηλαδή κάθε μονοκονδυλιάς. Όντως, έστω ένα αντικείμενο περιγράμματος, δηλαδή το περίγραμμα μιας θεματικής ενότητας, το οποίο δεν έχει ικανοποιητικά σε πρότυπο και έστω ένα ακάλυπτο τμήμα $A^{\alpha\kappa}$ αυτού του περιγράμματος. Ας υποθεθεί επίσης ότι σε κάθε άκρο του $A^{\alpha\kappa}$ περατώνεται και ένα τμήμα αντικειμένου, με άκρα τα $C_{\alpha\nu\tau 1}^{EK\tau}$ και $C_{\alpha\nu\tau 2}^{EK\tau}$. Προεκτείνεται το $C_{\alpha\nu\tau 1}^{EK\tau}$ κατά ένα σημείο τη φορά και εφαρμόζεται η μεθοδολογία της 6.1 για να διαπιστωθεί αν το λάθος προσαρμογής παραμένει μικρότερο από 0.35 mm μεσοσταθμικά και 0.8 mm κατά μέγιστο ταυτόχρονα. Όσο τα κατώφλια αυτά δεν παραβιάζονται το $C_{\alpha\nu\tau 1}^{EK\tau}$ θεωρείται ότι επεκτείνεται. Η ίδια διαδικασία ακολουθείται και για το $C_{\alpha\nu\tau 2}^{EK\tau}$ λαμβάνοντας κάθε φορά ένα σημείο από το $A^{\alpha\kappa}$ που είναι δίπλα στο τελευταίο/πρώτο σημείο του $C_{\alpha\nu\tau 2}^{EK\tau}$ και προσθέτοντας το σε αυτό.

Μετά το πέρας των διαδικασιών αυτών, θεωρείται ότι έχουν τελεσιδικώς προσδιοριστεί τα άκρα των $C_{\alpha\nu\tau 1}^{EK\tau}$ και $C_{\alpha\nu\tau 2}^{EK\tau}$, που αρχικά ήταν γειτονικά του $A^{\alpha\kappa}$. Αν τα άκρα των δύο μονοκονδυλιών δεν είναι γειτονικά, τότε υποτίθεται ότι το ακάλυπτο τμήμα του $A^{\alpha\kappa}$ αποτελεί ένα νέο, μικρού μήκους τμήμα αντικειμένου στο οποίο εφαρμόζονται οι διαδικασίες της 6.1 για όλες τις πρότυπες καμπύλες που είναι στον πίνακα. Η πρότυπος καμπύλη με το μικρότερο λάθος προσαρμογής (μέσο και μέγιστο) και εντός ορίων φυσικά, θεωρείται ότι δημιούργησε το ελαττωμένο τμήμα $A^{\alpha\kappa}$. Κατ' αυτόν τον τρόπο έχει επιτευχθεί πλήρης κάλυψη των περιγραμμάτων

όλων των κύριων θεματικών ενοτήτων που εμφανίζονται στις μελετηθείσες τοιχογραφίες.

Είναι αξιοσημείωτο και γοητευτικό ότι το σύνολο των μεθόδων που παρουσιάστηκαν και αναλύθηκαν, προσέφερε μια εξαιρετικά ομαλή κάλυψη των περιγραμμάτων όλων των θεματικών ενοτήτων, όπως φαίνεται από τα σχήματα που παρατίθενται. Από μαθηματικής σκοπιάς, ελέγχθηκε η συνέχεια της καμπύλης και η γωνία του εφαπτομενικού μοναδιαίου διανύσματος εκατέρωθεν του σημείου αλλαγής, για κάθε αλλαγή τμήματος αντικειμένου. Προς τούτο, υπολογίστηκε η ευκλείδεια απόσταση και η διαφορά των γωνιών των εφαπτομενικών μοναδιαίων διανυσμάτων, των βέλτιστα προσαρμοσμένων προτύπων καμπυλών εκατέρωθεν του εκάστοτε σημείου αλλαγής .

Το αποτέλεσμα ήταν ότι ευκλείδεια απόσταση ήταν πάντα μικρότερη από 0.6mm και η διαφορά των γωνιών μικρότερη των 3 μοιρών. Επειδή από αισθητικής απόψεως το αποτέλεσμα είναι εξαιρετικό, θεωρείται ότι εξασφαλίζεται τόσο η συνέχεια της καμπύλης για αυτά τα κατώφλια όσο και η συνέχεια της γωνίας της εφαπτομένης. Αυτό δίνει ακόμα μεγαλύτερο έρεισμα στην ορθότητα των υποθέσεων που διατυπώθηκαν, επειδή οι μέθοδοι στερούνται τέτοιων περιορισμών.

Για το τέλος αφέθηκε η παρουσίαση των τοιχογραφιών μαζί με όλα τα βέλτιστα ταιριασμένα τμήματα των προτύπων καμπυλών επ' αυτών, οι πίνακες με τα όλα τα τμήματα αντικειμένων, το μήκος και τα λάθη προσαρμογής τους και τα πρότυπα που προκύπτουν από τη σύνθεση όλων των μονοκονδυλιών. Με πορτοκαλί χρωματισμό στο μήκος φαίνεται όσα τμήματα αντικειμένου αξιολογήθηκαν αρχικά προκειμένου να θεμελιωθεί η ύπαρξη stencils και όσα μήκη είναι χωρίς χρωματισμό ελήφθησαν κατόπιν για επεξεργασία, όπως περιγράφεται στο παρόν κεφάλαιο. Το κατώφλι των 6.5 cm ήταν ελαττωμένο κατά 1 cm, δηλαδή στα 5.5 cm, για την διερεύνηση της δεύτερης γραμμικής σπείρας, λόγω της μεγάλης καμπυλότητας που παρουσίαζαν οι αρχικές εκτιμήσεις τμημάτων αντικειμένου.

Τοιχογραφία Λατρευτριών, καθισμένη γυναίκα	Μέσο Λάθος(mm)	Μέγιστο Λάθος(mm)	Μήκος (cm)	Είδος Stencil
αρχή κοτσίδας μέχρι κοκαλάκι	0.274529182	0.585662256	9.45	k=2.7
	0.188510039	0.56736031	4.75	c
	0.166547704	0.54722817	4.37	k=2.7
λωρίδα στο σάλι	0.128113618	0.307472684	7.1	c
αυτί μεγάλη σπείρα έσω	0.267208404	0.525265836	6.15	k=2.7
άκρη μαλλιών δεύτερη τούφα άνω	0.232434708	0.737568404	4.38	k=2.7
πρώτη μπούκλα μέχρι πλάτη	0.126283424	0.32577463	5.22	k=2.7
δεύτερη μπούκλα μέχρι πλάτη	0.126283424	0.331265213	6.99	k=2.7
	0.126283424	0.243415875	2.93	k=2.7
σκουλαρίκι εσωτερικό χωρίς την αρχή	0.155566537	0.422774941	3.94	k=2.7
οπίσθια μπεζ λωρίδα	0.269038599	0.796134629	9.72	g
οπισθια μαύρη λωρίδα εξω στο μπεζ	0.164717509	0.475850583	5.86	g
	0.183019455	0.453888248	3.9	g
οπισθια μαύρη λωρίδα εξω στο μπλε	0.237925291	0.733908014	11.98	g
	0.071377587	0.192170428	2.88	g
διακόσμηση δίπλα στο μπράτσο λωρίδα έξω	0.153736342	0.439246692	8.02	g
διακόσμηση δίπλα στο μπράτσο λωρίδα έσω	0.172038288	0.452058054	5.15	g
διακόσμηση δίπλα στον πήχη έξω πλευρά	0.274529182	0.73207782	11.12	g
διακόσμηση δίπλα στον πήχη κυρτό κομμάτι	0.188510039	0.517945058	5.7	k=2.7
	0.102490895	0.252566848	2.56	k=2.7
φτέρνα-πέλμα όλο	0.049415253	0.155566537	3.02	c
	0.042094475	0.113472062	2.3	c
	0.210472373	0.536247003	3.86	k=2.7
	0.08052856	0.353227548	2.26	k=2.7
	0.192170428	0.510624279	4.77	c
κόκκινη λωρίδα έξω όλη	0.219623346	0.786983656	18.98	c
	0.16105712	0.389831439	6.94	c
κόκκινο σάλι έξω λωρίδα α μέρος	0.087849338	0.375189883	9.99	b
κόκκινο σάλι έξω λωρίδα υπόλοιπο	0.24524607	0.653379454	9.88	c
	0.131774008	0.38617105	9.42	c
	0.192170428	0.682662567	4.52	c
κομμάτι γονάτου μέχρι θραύση	0.109811673	0.477680777	2.84	k=2.7
κομμάτι γονάτου από θραύση ως τέλος	0.139094786	0.30564249	4.34	c
Μασχάλη	0.192170428	0.83273852	9.53	c
μέση από μαλλιά ως οπίσθια	0.172038288	0.501473307	4.58	c
	0.051245447	0.148245759	3.91	c
μύτη εσωτερικό περίγραμμα	0.170208093	0.556379143	6.22	c

μύτη εξωτερικό περίγραμμα	0.192170428	0.367869104	5.38	c
άκρη φορεσιάς πάνω από αστράγαλο	0.175698677	0.40630319	8.03	c
πόδι πάνω από φτέρνα	0.089679533	0.258057432	5.74	c
πόδι περίγραμμα δεξιά έως αστράγαλο	0.14092498	0.499643112	5.6	c
	0.146415564	0.616775563	4.77	c
	0.133604202	0.523435641	4.16	c
χέρι μπράτσο έξω	0.124453229	0.309302879	7.84	c
	0.170208093	0.464869416	10.79	c
	0.073207782	0.221453541	3.61	c
χέρι πήχης έως καρπό	0.137264591	0.36603891	7.6	c
χέρι κάτω μέρος	0.150075953	0.36603891	13.38	c
πήχης από αγκώνα ως καρπό	0.128113618	0.347736964	4.41	c
σπείρα έσω 1 αυτί	0.097000311	0.237925291	1.68	k=2.7
σπείρα έσω 2 αυτί	0.280019766	0.603964201	2.98	k=2.7

Πίνακας 6.3. Όλα τα τμήματα αντικειμένων περιγράμματος που επεξεργάστηκαν για την «τοιχογραφία των Λατρευτριών», της καθιστής γυναίκας. Το μήκος δίνεται σε εκατοστά(cm) ενώ τα λάθη, μέγιστο και μέσο, σε χιλιοστά.



Εικόνα 6.11..Η «Τοιχογραφία των Λατρευτριών», μαζί με όλα τα ευρεθέντα τμήματα των καμπυλογράφων.



Εικόνα 6.12. Τα stencils επί της ίδιας τοιχογραφίας, ώστε να φανεί πως οι οδηγοί/καμπυλογράφοι «παράγουν» σχεδόν όλα τα αντικείμενα περιγράμματος των θεματικών ενότητων.

Τοιχογραφία Παγκρατίων	Μέσο λάθος(mm)	Μέγιστο λάθος(mm)	μήκος(cm)	είδος stencil
A1_άνθος_1πλευρά	0.092165899	0.5768314	7.17	g
A1_άνθος_7πλευρά	0.141426982	0.384554267	7.82	g
A1_άνθος_μέσα_1πλευρά	0.103289369	0.402034006	5.37	g
A1_αριστερά_μίσχος	0.257428889	0.646750358	20.31	m
A1_αριστερά_μίσχος	0.232003814	0.765930399	10.84	c
A1_αριστερό_φύλλο_κάτω	0.200222469	0.753217861	6.6	c
A1_αριστερό_φύλλο_πάνω	0.12553631	0.518035913	5.17	c
A1_δεξί_φύλλο_κάτω	0.249483553	0.794533609	5.25	c
A1_δεξί_φύλλο_πάνω	0.265374225	0.794533609	4.44	c
A1_δεξί_βλαστός	0.266963293	0.732559987	20.02	m
A1_δεξί_βλαστός	0.263785158	0.570475131	10.7	c
A2_αριστερά_βλαστός	0.317813444	0.851740029	11.36	c
A2_αριστερά_βλαστός	0.322580645	0.846972827	14.35	c
A2_αριστερά_βλαστός	0.27967583	0.621325282	6.01	c
A2_δεξί_φύλλο_κάτω	0.201811537	0.823136819	5.15	c
A2_δεξί_φύλλο_πάνω	0.12553631	0.438582552	4.44	c
A2_δεξί_πλευρά_άνθος	0.135070713	0.362307326	4.79	g
A2_δεξιά_μίσχος	0.193866201	0.711902113	11.5	c
A2_δεξιά_μίσχος	0.238360083	0.90259018	10.83	c
A2_δεξιά_μίσχος	0.247894486	0.778642937	11.33	c
A2_κοίλο2	0.357540124	0.783410138	4.46	k=2.7
A3_αριστερά_μίσχος	0.263785158	0.656284761	14.51	c
A3_αριστερά_μίσχος	0.287621166	0.543460988	7.99	c
A3_αριστερά_μίσχος	0.301922771	0.773875735	10.42	c
A3_δεξί_φύλλο_κάτω	0.168441125	0.573653266	5.51	c
A3_δεξί_φύλλο_πάνω	0.166852058	0.444938821	4.43	c
A3_δεξί_μίσχος	0.217702209	0.560940728	12.23	c
A3_δεξί_μίσχος	0.220880343	0.594311139	15.94	c
B1_άνθος_1πλευρά	0.328936914	0.79930081	10	g
B1_αριστερά_μίσχος	0.206578738	0.672175433	11.66	c
B1_αριστερά_μίσχος	0.344827586	0.761163197	14.65	c
B1_αριστερό_φύλλο_κάτω	0.30827904	0.66264103	5.54	c
B1_αριστερό_φύλλο_πάνω	0.165262991	0.603845543	5.1	c
B1_δεξί_φύλλο_κάτω	0.12553631	0.378197998	3.67	c
B1_δεξί_φύλλο_πάνω	0.177975528	0.440171619	3.73	c
B1_δεξιά_μίσχος	0.162084856	0.492610837	13.3	m
B1_δεξιά_μίσχος	0.185920864	0.627681551	11.14	m
B1_δεξιά_μίσχος	0.340060385	0.802478945	7.79	m
B1_κοίλο1	0.23994915	0.538693787	2.51	k=2.7
B1_κοίλο2	0.232003814	0.651517559	4.1	k=2.7
B1_κοίλο4	0.190688066	0.446527888	3.4	k=2.7
B1_κοίλο5	0.227236612	0.565707929	3.63	k=2.7
B1_κοίλο6	0.120769109	0.397266804	2.72	k=2.7
B2_άνθος_1πλευρά	0.284443032	0.621325282	8.9	g
B2_άνθος_7πλευρά	0.238360083	0.649928492	7.93	g

B2_αριστερό_φύλλο_κάτω	0.260607024	0.506912442	6.4	c
B2_αριστερό_φύλλο_πάνω	0.157317655	0.39408867	4.92	c
B2_αριστερά_μίσχος	0.18274273	0.441760686	12.08	c
B2_αριστερά_μίσχος	0.266963293	0.746861592	9.7	c
B2_αριστερά_μίσχος	0.300333704	0.764341332	10.3	c
B2_δεξί_φύλλο_κάτω	0.185920864	0.649928492	3.24	c
B2_δεξί_φύλλο_πάνω	0.147783251	0.300333704	3.08	c
B2_δεξιά_μίσχος	0.123947243	0.282853965	8.46	c
B2_δεξιά_μίσχος	0.246305419	0.613379946	13.71	c
B2_δεξιά_μίσχος	0.244716352	0.672175433	15.95	c
B2_κοίλο1	0.117590974	0.270141427	2.47	k=2.7
B2_κοίλο2	0.162084856	0.475131098	3.4	k=2.7
B2_κοίλο3	0.22246941	0.656284761	4.37	k=2.7
B2_κοίλο4	0.209756873	0.533926585	3.78	k=2.7
B2_κοίλο5	0.158906722	0.417924678	3.62	k=2.7
B2_κοίλο6	0.298744637	0.6737645	2.97	k=2.7
B3_άνθος_1πλευρά	0.23994915	0.743683458	6.64	g
B3_άνθος_7πλευρά	0.176386461	0.486254569	8.38	c
B3_αριστερά_μίσχος	0.324169712	0.802478945	11.95	c
B3_αριστερά_μίσχος	0.359129191	0.705545845	13.82	c
B3_αριστερό_φύλλο_πάνω	0.135070713	0.349594788	5.97	c
B3_δεξί_φύλλο_κάτω	0.179564596	0.452884157	4.9	c
B3_δεξί_φύλλο_πάνω	0.168441125	0.465596695	4.19	c
B3_δεξιά_μίσχος	0.340060385	0.684887971	11.54	c
B3_δεξιά_μίσχος	0.106467504	0.42269188	6.5	c
B3_κοίλο3	0.187509932	0.516446846	3.77	k=2.7
B3_κοίλο4	0.112823772	0.464007628	3.34	k=2.7
B3_κοίλο5	0.241538217	0.743683458	4.57	k=2.7
B3_κοίλο6	0.214524074	0.554584459	2.71	k=2.7
αριστερή_βάση_1αριστερά_έξω	0.131892579	0.481487367	8.13	g
αριστερή_βάση_1δεξιά_έξω	0.149372318	0.409979342	11.59	b
αριστερή_βάση_1δεξιά_μέσα	0.257428889	0.64516129	12.2	b
αριστερή_βάση_2αριστερά_μέσα	0.190688066	0.551406324	11.74	g
αριστερή_βάση_2δεξιά_μέσα	0.168441125	0.541871921	7.77	b
αριστερή_βάση_3αριστερά_έξω	0.206578738	0.567296997	9.08	b
δεξιά_βάση_1αριστερά_έξω	0.214524074	0.63403782	11.06	b
δεξιά_βάση_1δεξιά_έξω_2μέσα	0.238360083	0.535515652	15.34	b
δεξιά_βάση_1δεξιά_μέσα	0.263785158	0.75957413	7.87	b
δεξιά_βάση_2αριστερά_έξω	0.117590974	0.50850151	7.08	b
δεξιά_βάση_2αριστερά_μέσα	0.08580963	0.249483553	7.66	b
δεξιά_βάση_2δεξιά_μέσα	0.21134594	0.608612744	8.27	g
δεξιά_βάση_3αριστερά_έξω	0.100111235	0.306689973	7.7	b
δεξιά_βάση_3αριστερά_μέσα	0.259017956	0.518035913	10.63	b
δεξιά_βάση_3αριστερά_μέσα	0.112823772	0.43381535	4.63	b
δεξιά_βάση_3δεξιά_μέσα	0.18274273	0.521214047	5.83	G

Πίνακας 6.4. Όλα τα τμήματα αντικειμένων περιγράμματος που επεξεργάστηκαν για την «τοιχογραφία των Παγκρατίων». Το μήκος δίνεται σε εκατοστά(cm) ενώ τα λάθη, μέγιστο και μέσο, σε χιλιοστά.

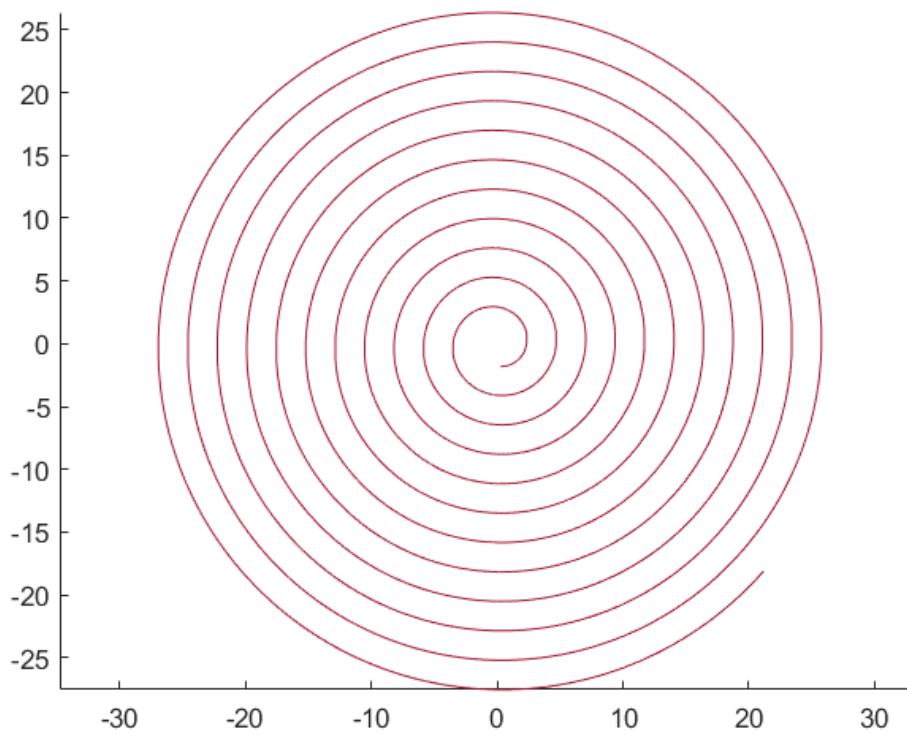


Εικόνα 6.13. .Η «Τοιχογραφία των Παγκρατίων», μαζί με όλα τα ευρεθέντα τμήματα των καμπυλογράφων.

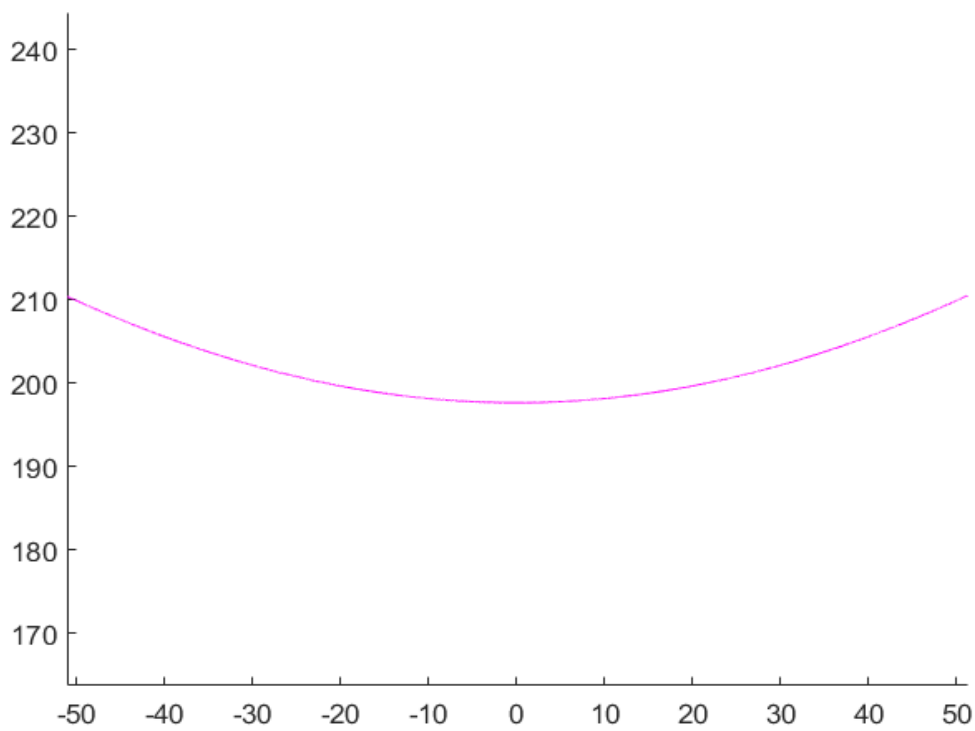


Εικόνα 6.14. Τα stencils επί της ίδιας τοιχογραφίας, ώστε να φανεί πως οι οδηγοί/καμπυλογράφοι «παράγουν» σχεδόν όλα τα αντικείμενα περιγράμματος των θεματικών ενοτήτων.

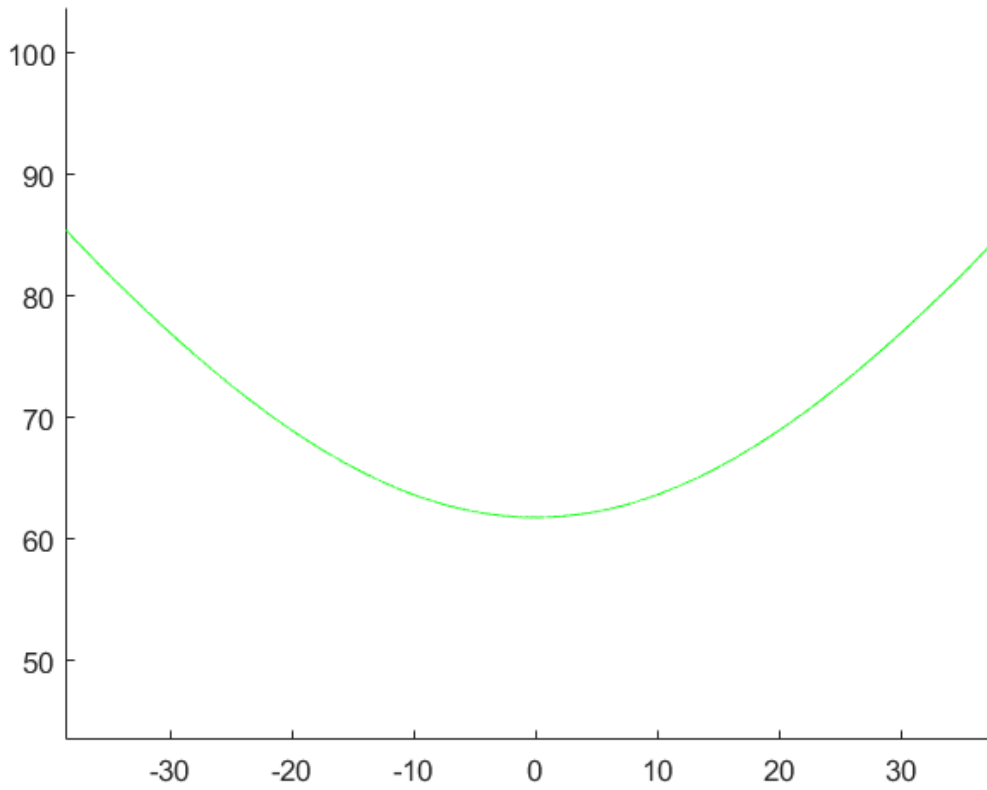
Ευρεθέντα Πρότυπα



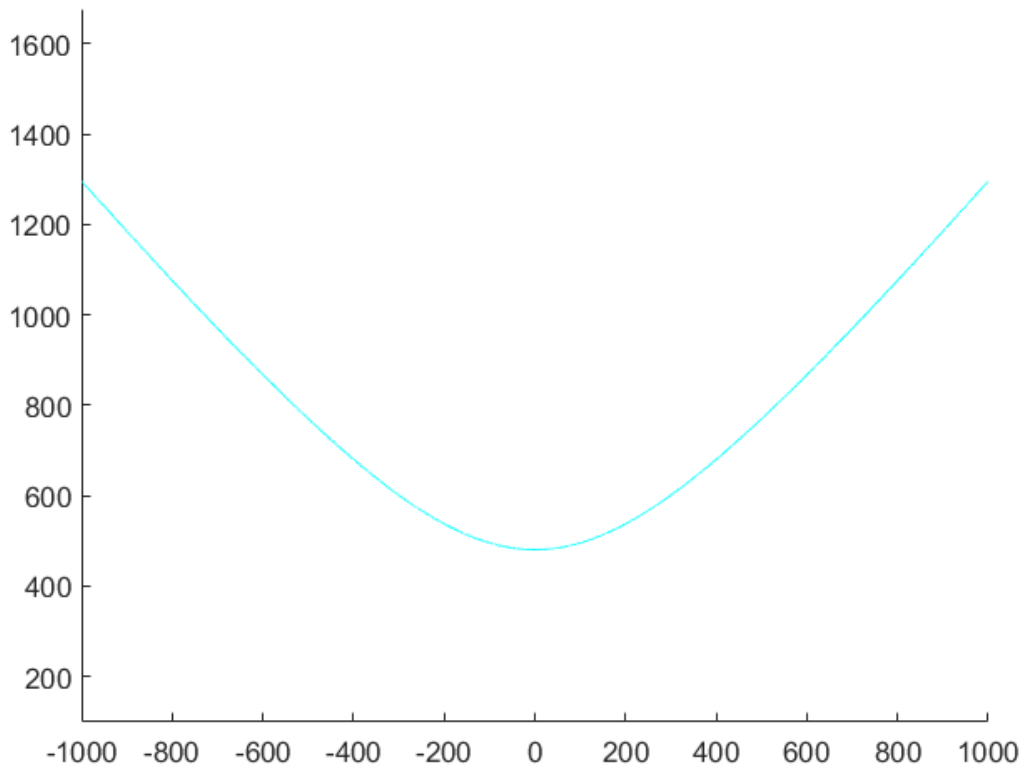
Εικόνα 6.15. Η γραμμική σπείρα. Οι άξονες είναι σε εκατοστά.



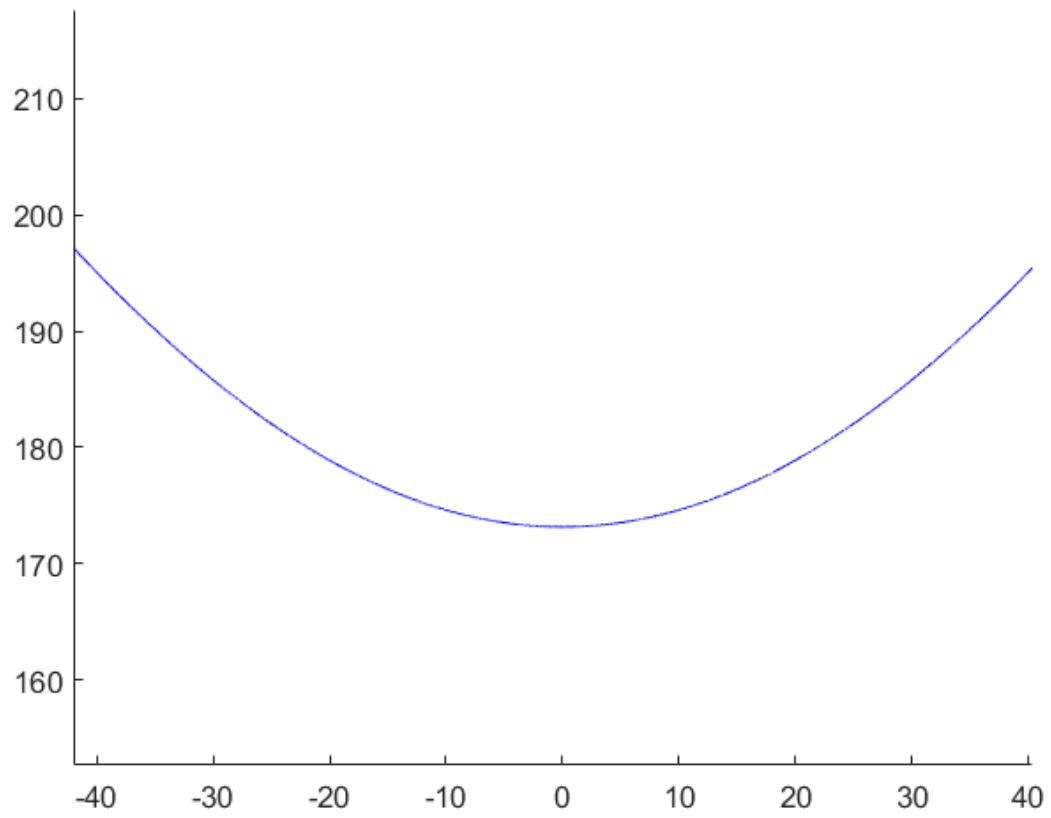
Εικόνα 6.16. Υπερβολή magenta. Οι άξονες είναι σε εκατοστά.



Εικόνα 6.17. Υπερβολή green. Οι άξονες είναι σε εκατοστά.



Εικόνα 6.18. Υπερβολή cyan. Οι άξονες είναι σε εκατοστά.



Εικόνα 6.19. Υπερβολή blue. Οι άξονες είναι σε εκατοστά.

Βιβλιογραφία

- [1] Ρουσόπουλος Π. «Ανάπτυξη προηγμένων μεθόδων αναγνώρισης προτύπων και μαθηματική θεμελίωση για τον εντοπισμό του τρόπου δημιουργίας και της ταυτότητας του δημιουργού σημαντικών αρχαιολογικών ευρημάτων». Διδακτορική Διατριβή, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών, Τομέας Επικοινωνιών Ηλεκτρονικής και Συστημάτων Πληροφορικής, Οκτώβριος 2010.
- [2] Παναγόπουλος Μ. «Ταυτοποίηση χαρακτών αρχαίων επιγραφών και εντοπισμός τεχνοτροπίας αρχαιολογικών ευρημάτων με χρήση πρωτότυπων αλγορίθμων αναγνώρισης προτύπων και επεξεργασίας εικόνας», Διδακτορική Διατριβή, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών, Τομέας Επικοινωνιών Ηλεκτρονικής και Συστημάτων Πληροφορικής, Ιούλιος 2008.
- [3] C. Papaodysseus, M. Panagopoulos, P. Rousopoulos, G. Galanopoulos & C. Doumas “Geometric templates used in the Akrotiri (Thera) wall-paintings”. *Antiquity* 82 (Jan. 2008): 401–408.
- [4] D. Fragoulis, A. Skembris, C. Papaodysseus, P. Rousopoulos, Th. Panagopoulos, M. Panagopoulos, C. Triantafyllou, A. Vlachopoulos and C. Doumas. “Origins and Application of Geometry in the Thera Prehistoric Civilization Ca. 1650 BC”. *Centaurus* 2005: Vol. 47: pp. 316–340.
- [5] Constantin Papaodysseus, Dimitrios K. Fragoulis, Mihalis Panagopoulos, Thanasis Panagopoulos, Panayiotis Rousopoulos, Mihalis Exarhos, and Angelos Skembris “Determination of the Method of Construction of 1650 B.C. Wall Paintings”. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 28, NO. 9, pp 1361-1371. September 2006
- [6] C. Papaodysseus, M. Exarhos, Th. Panagopoulos, C. Triantafyllou, G. Roussopoulos, A. Pantazi, V. Loumos, D. Fragoulis, Chr. Doumas, “Identification of Geometrical Shapes in Paintings and its Application to Demonstrate the Foundations of Geometry in 1650 B.C.”, *IEEE Transactions on Image Processing*, Vol. 14, no 7, pp. 862-873, July 2005.
- [7] C. Papaodysseus, T. Panagopoulos, M. Exarhos, D. Fragoulis, G. Roussopoulos, P. Rousopoulos, G. Galanopoulos, C. Triantafyllou, A. Vlachopoulos, C. Doumas “Distinct, Late Bronze age (c.1650 BC) Wall-Paintings from Akrotiri, Thera, Comprising Advanced Geometrical Patterns” *Archaeometry* 48 , 1 (2006) 97–114.
- [8] Roussopoulos, P., Papaodysseus, C., Arabadjis, D., Exarhos, M., Panagopoulos, M. “Image and pattern analysis for the determination of the method of drawing celebrated Thera wall paintings circa 1650 B.C.” *The ACM Journal on Computing and Cultural Heritage*.
- [9] Constantin Papaodysseus, Mihalis Exarhos, Mihalis Panagopoulos, Panayiotis Rousopoulos, Constantin Triantafyllou, and Thanasis Panagopoulos “Image and Pattern Analysis of 1650 B.C. Wall Paintings and Reconstruction” *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics—part a: Systems and Humans*, vol. 38, no. 4, July 2008 pp 958-965.

- [10] Th. Panagopoulos, C. Papaodysseus, M. Exarhos, C. Triantafyllou, G. Roussopoulos, P. Roussopoulos, "Prehistoric Wall-Paintings Reconstruction Using Image Pattern Analysis And Curve Fitting", *WSEAS Transactions on Electronics 1*, no 1 108-113, 2004.
- [11] C. Papaodysseus, Th. Panagopoulos, M. Exarhos, C. Triantafyllou, D. Fragoulis, "Contour-shape Based Reconstruction of Fragmented, 1600 B.C. Wall Paintings", *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 50, No 6, pp.1277-1288, June 2002.
- [12] Doumas, C. 1991. *The Wall Paintings of Thera*. 2nd Edition Athens 1999: The Thera Foundation.
- [13] Doumas, C., 1990. The Elements at Akrotiri, in Hardy D.A. (ed.), *Thera and the Aegean world III* pp. 24-30.
- [14] Walter L. Friedrich, Bernd Kromer, Michael Friedrich, Jan Heinemeier, Tom Pfeiffer, Sahra Talamo "Santorini Eruption Radiocarbon Dated to 1627-1600 B.C.". *Science* 28 Apr 2006: Vol.312, Issue 5773, pp.548.
- [15] Szabo, A., 1968. *The beginnings of Greek Mathematics*, Dordrecht: Reidel.
- [16] Exarchakos, T., 1997. *History of mathematics: Mathematics in Babylonia and ancient Egypt*. Vol. A.
- [17] Lucas N. H. Bunt, Phillip S. Jones, Jack D. Bedient, *The historical roots of elementary mathematics*, Prentice-Hall, inc Englewood Cliffs, New Jersey, 1981.
- [18] Sir Thomas Heath, *A history of Greek mathematics – Volume 1: From Thales to Euclid*, Dover Publications Inc., New York, 1981
- [19] Ev. Spandagos, R. Spandagou, D. Travlou, *Ancient Greece mathematicians*, Aethra, Athens, June 2000
- [20] Sir Thomas Heath, *A history of Greek mathematics – Volume 2*, Dover Publications Inc., New York, 1981.
- [21] Μπουνάκης Δ. «Ιστορία και Μελέτη με ευκλείδεια μέσα των κωνικών τομών». Μεταπτυχιακή Εργασία, Πανεπιστήμιο Κρήτης, Μαθηματικό Τμήμα, Σεπτέμβριος 2004.
- [22] Γ. Κοκολάκης, Ι.Σπηλιώτης «Θεωρία πιθανοτήτων και Στατιστική με Εφαρμογές» Εκδόσεις Συμεών 2010
- [23] Nelder, J. A. and R. Mead, "A simplex method for function minimization", *Computer Journal*, Vol. 7, pp. 308-313, 1965.
- [24] Γιαννόπουλος Φ. «Πρωτότυπες Μέθοδοι Αυτόματης Αναγνώρισης Γραφέα και Αντιμετώπισης Υπολογιστικών Προβλημάτων Υλοποίησης». Διδακτορική Διατριβή, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών, Τομέας Επικοινωνιών Ηλεκτρονικής και Συστημάτων Πληροφορικής, Ιούνιος 2018.
- [25] Έξαρχος Μ. «Ανάπτυξη πρωτότυπων αλγορίθμων ψηφιακής επεξεργασίας σήματος και αναγνώρισης προτύπων με εφαρμογή στην αρχαιολογία και την αυτόματη αναγνώριση μουσικών οργάνων». Διδακτορική Διατριβή, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών, Τομέας Επικοινωνιών Ηλεκτρονικής και Συστημάτων Πληροφορικής, Μάιος 2004.