



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Έλεγχος Αποθεμάτων – Ανάλυση ABC – Το Πρόβλημα της Μεταφοράς

Μελέτη περίπτωσης: Αλευροβιομηχανία Μύλοι Θράκης

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

Γεώργιου Σ. Μισαηλίδη-Ουζουνόπουλου

Επιβλέπων: Κολέτσος Ιωάννης, Αναπληρωτής Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Ιούνιος 2019

National Technical University of Athens

School of Applied Mathematical and Physical Sciences

Inventory Theory -ABC Analysis - The transportation problem
Case study: Flourmills Thrakis

Diploma thesis

of

George S. Misailidis-Ouzounopoulos

Supervisor: Mr. John Coletsos , Assistant Professor

Athens, June 2019

Περίληψη

Στην παρούσα διπλωματική εργασία εξετάζεται το αντικείμενο της θεωρίας του ελέγχου των αποθεμάτων, ενός πολύ σημαντικού κλάδου της Επιχειρησιακής Έρευνας, καθώς επηρεάζει σε μεγάλο βαθμό την εύρυθμη λειτουργία κάθε επιχείρησης. Η εργασία βασίζεται στην εφαρμογή της θεωρίας στον πραγματικό κόσμο των επιχειρήσεων μέσω της μελέτης της περίπτωσης της αλευροβιομηχανίας Μύλοι Θράκης. Αρχικά, παρουσιάζονται ορισμένα χρήσιμα στοιχεία της θεωρίας και στη συνέχεια πραγματοποιούνται ενδιαφέρουσες πρακτικές εφαρμογές. Πιο συγκεκριμένα, εφαρμόστηκε η ABC ανάλυση προκειμένου να πραγματοποιηθεί μια κατάταξη των αποθεμάτων της εταιρίας. Επιπρόσθετα, με τη βοήθεια του υπολογιστικού πακέτου του Excel επιλύθηκε ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης του κόστους παραγωγής τριών προϊόντων της βιομηχανίας μέσω του βέλτιστου τρόπου ανάμειξης της πρώτης ύλης. Στη συνέχεια, εφαρμόστηκε η θεωρία του προβλήματος μεταφοράς των αποθεμάτων προκειμένου να εντοπιστεί το βέλτιστο πλάνο μεταφοράς των προϊόντων της επιχείρησης από τις αποθήκες στους εκάστοτε προορισμούς. Μέσω των παραπάνω εφαρμογών αναγνωρίστηκε η έντονη συσχέτιση που υπάρχει ανάμεσα στον επιστημονικό κόσμο και τον κόσμο των επιχειρήσεων.

Λέξεις κλειδιά: Επιχειρησιακή Έρευνα, Θεωρία Ελέγχου Αποθεμάτων, ABC Ανάλυση, Το πρόβλημα της ανάμειξης, Solver, Το πρόβλημα της μεταφοράς, Μέθοδος Vogel (VAM), Μέθοδος ανακατανομής των εκχωρήσεων (MODI).

Abstract

This diploma thesis deals with the subject of inventory control theory, a very important branch of operational research, as it greatly affects the proper operation of each business. The work is based on the application of theory to the real world of businesses through the case study of the industry of Flourmills Thrakis. Initially, some useful elements of the theory are presented, and then interesting practical applications are made. In particular, we applied the ABC analysis in order to make a classification of the company's inventories. Additionally, by using the Excel package, we solved a problem of minimizing the cost of manufacturing three products of the industry through the optimal way of mixing the raw material. Finally, we applied the transportation problem theory in order to find an optimal plan for transferring the company's products from the warehouses to the respective destinations all over Greece. Through these applications, the strong correlation between the scientific and the business world was identified.

Keywords: Operational Research, Inventory Control Theory, ABC Analysis, Mixing problem, Solver, The Transportation Problem, Vogel's Approximation Method - VAM, Modified Distribution Method - MODI.

Περιεχόμενα

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΕΙΚΟΝΩΝ.....	6
ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ	7
1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	8
1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ	8
1.2 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ.....	9
1.3 ΤΑ ΣΤΑΔΙΑ ΤΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ	10
1.3.1 Ορισμός του προβλήματος και συλλογή δεδομένων	11
1.3.2 Δημιουργία ενός μαθηματικού μοντέλου	12
1.3.3 Επίλυση του προβλήματος.....	14
1.3.4 Έλεγχος του μοντέλου.....	14
1.3.5 Ανάπτυξη διαδικασιών για μια ολοκληρωμένη επίλυση.....	16
1.3.6 Εφαρμογή.....	17
1.4 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	17
2. ΕΛΕΓΧΟΣ ΑΠΟΘΕΜΑΤΩΝ.....	18
2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	18
2.2 ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΑΠΟΘΕΜΑΤΩΝ.....	19
2.3 ΛΟΓΟΙ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΧΑΜΗΛΩΝ ΑΠΟΘΕΜΑΤΩΝ	20
2.4 ΛΟΓΟΙ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΥΨΗΛΩΝ ΑΠΟΘΕΜΑΤΩΝ	21
2.5 ΕΙΔΗ ΑΠΟΘΕΜΑΤΩΝ.....	22
2.6 ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΑΠΟΘΕΜΑΤΩΝ-ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ.....	24
3. ABC ΑΝΑΛΥΣΗ	26
3.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	26
3.2 ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ	26
3.3 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ABC ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΣΤΗΝ ΑΛΕΥΡΟΒΙΟΜΗΧΑΝΙΑ ΜΥΛΟΙ ΘΡΑΚΗΣ.....	27
3.4 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	29
4. ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΑΝΑΜΕΙΞΗΣ	30
4.1 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΑΝΑΜΕΙΞΗΣ ΣΤΗΝ ΑΛΕΥΡΟΒΙΟΜΗΧΑΝΙΑ ΜΥΛΟΙ ΘΡΑΚΗΣ	30
4.1.1 Ορισμός του προβλήματος και καταγραφή δεδομένων.....	30
4.1.2 Μοντελοποίηση του προβλήματος.....	31
4.1.3 Επίλυση του προβλήματος.....	35
4.1.4 Αποτελέσματα - Συμπεράσματα.....	42
5. ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ.....	44
5.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	44
5.2 ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ.....	44
5.3 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΣΤΗΝ ΑΛΕΥΡΟΒΙΟΜΗΧΑΝΙΑ ΜΥΛΟΙ ΘΡΑΚΗΣ	46
5.3.1 Ορισμός του προβλήματος.....	46
5.3.2 Μοντελοποίηση του προβλήματος.....	48
5.3.3 Επίλυση του προβλήματος - Ο αλγόριθμος του προβλήματος της μεταφοράς. 49	
5.3.3.1 Εύρεση αρχικής λύσης μέσω της μεθόδου Vogel	50
5.3.3.2 Το κύριο μέρος της μεθόδου της μεταφοράς.....	54
5.3.4 Συμπεράσματα.....	58
6. ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ-ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	59

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΕΙΚΟΝΩΝ

Εικόνα 1: Βέλτιστες ποσότητες σιτηρών	35
Εικόνα 2: Ενσωματωμένες συναρτήσεις του Excel για τον υπολογισμό του περιορισμού της διαθέσιμης ποσότητας σιτηρών	36
Εικόνα 3: Συνολικό κόστος παραγωγής των 3 προϊόντων	36
Εικόνα 4: Ενσωματωμένες συναρτήσεις του Solver για την εύρεση του ελάχιστου συνολικού κόστους.....	37
Εικόνα 5: Ποσότητες αλεύρων.....	37
Εικόνα 6: Ενσωματωμένες συναρτήσεις του Excel για τον υπολογισμό των ποσοτήτων των αλεύρων	38
Εικόνα 7: Συνταγές προϊόντων και ποσότητες συνταγών.....	39
Εικόνα 8: Ποσότητες υγρής γλουτένης.....	40
Εικόνα 9: Υπολογισμός υγρής γλουτένης	40
Εικόνα 10: Υπολογισμός περιορισμών ελάχιστης απαιτούμενης γλουτένης και ζητούμενης ποσότητας προϊόντων.....	41
Εικόνα 11: Ενσωματωμένες συναρτήσεις στο Excel για την ικανοποίηση των περιορισμών ελάχιστης απαιτούμενης γλουτένης και ζητούμενης ποσότητας προϊόντων.....	41
Εικόνα 12: Ο επιλυτής Solver του Excel για το πρόβλημά μας.....	42
Εικόνα 13: Αρχικός πίνακας διαφορών μεθόδου Vogel	51
Εικόνα 14: Πίνακας νέων διαφορών μεθόδου Vogel	52
Εικόνα 15: Πίνακας με το σύνολο των διαφορών της μεθόδου Vogel	52
Εικόνα 16: Αρχική βασική λύση	53

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Πίνακας 1: Κατηγοριοποίηση προϊόντων.....	29
Πίνακας 2: Προϊόντα κατηγορίας A.....	29
Πίνακας 3: Συνταγές προϊόντων.....	30
Πίνακας 4: Δεδομένα ανά σιτηρό (πρώτη ύλη).....	31
Πίνακας 5: Τα κόστη μεταφοράς των προϊόντων.....	47
Πίνακας 6: Πίνακας με τα u_i, v_j και τα κόστη ευκαιρίας e_{ij} της μεθόδου MODI ...	55
Πίνακας 7: Πίνακας εντοπισμού του κλειστού μονοπατιού της μεθόδου MODI	56
Πίνακας 8: Νέα τρέχουσα λύση.....	57
Πίνακας 9: Πίνακας με τα νέα u_i, v_j και e_{ij}	57
Πίνακας 10: Τελική λύση του προβλήματος.....	58

1. Εισαγωγή

1.1 Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα

Η βιομηχανική επανάσταση του 18ου αιώνα είχε καθοριστικό ρόλο στην ανάπτυξη των επιχειρήσεων, καθώς επίσης και στην πολυπλοκότητα τους, δημιουργώντας καινούριες ευκαιρίες και τομείς εξειδίκευσης. Ωστόσο, παράλληλα με τα θετικά, η συνεχής εξειδίκευση δημιούργησε μία τάση ανεξαρτητοποίησης πολλών επιμέρους τμημάτων ενός οργανισμού, τα οποία θέτουν ξεχωριστούς στόχους και σκοπούς παραβλέποντας τις συνολικές δραστηριότητες της εταιρίας. Λαμβάνοντας επίσης υπόψιν πως κάτι ωφέλιμο για το ένα τμήμα μπορεί να θεωρηθεί επιζήμιο για κάποιο άλλο, μπορούμε να καταλάβουμε πόσο αναγκαία είναι η εύρεση μίας λύσης που σαν κοινό στόχο να έχει την ομαλή συνεργασία κάθε επιμέρους τομέα αλλά και την γενικότερη ανάπτυξη του οργανισμού. Η επιστήμη που ασχολείται με την αναζήτηση της βέλτιστης απόφασης, καθώς και της εφαρμογής της, ονομάζεται Επιχειρησιακή Έρευνα (ΕΕ).

Οι ρίζες της ΕΕ μπορούν να αναζητηθούν πολλές δεκαετίες πριν, όταν έγιναν οι πρώτες προσπάθειες να χρησιμοποιηθεί μια επιστημονική προσέγγιση για τη διαχείριση οργανισμών. Παρόλα αυτά, σαν διαδικασία χρονολογείται από τις αρχές του Β' Παγκοσμίου Πολέμου και έχει αποδοθεί στις στρατιωτικές υπηρεσίες. Λόγω του πολέμου, υπήρχε μία γενικότερη έλλειψη πόρων, οπότε ήταν υψίστης σημασίας η βέλτιστη και αποτελεσματική διάθεσή τους στα διάφορα στρατιωτικά τμήματα. Ως εκ τούτου, η βρετανική και στη συνέχεια η αμερικάνικη αρμόδια υπηρεσία κάλεσαν έναν μεγάλο αριθμό επιστημόνων να αντιμετωπίσουν αυτό και άλλα στρατηγικά προβλήματα χρησιμοποιώντας μια πιο επιστημονική προσέγγιση. Στην πραγματικότητα τους ζητήθηκε να κάνουν έρευνα σχετικά με τις στρατιωτικές επιχειρήσεις. Αυτές οι ομάδες ουσιαστικά ήταν οι πρώτες ομάδες ΕΕ και είχαν καθοριστικό ρόλο για πολλές από τις νίκες της Βρετανίας.

Η τεράστια επιτυχία που είχε ο τομέας της ΕΕ κατά την διάρκεια του πολέμου, καθώς και οι αρνητικές συνέπειες της βιομηχανικής ανάπτυξης, συνέβαλαν στην εφαρμογή της για επιχειρησιακούς σκοπούς. Είχε γίνει φανερό,

πως πολλοί οργανισμοί ερχόντουσαν αντιμέτωποι με παρόμοιας φύσης προβλήματα και στις αρχές του 1950, προτάθηκε η χρήση της Επιχειρησιακής Έρευνας σε επιχειρήσεις, καθώς και για βιομηχανικούς και κυβερνητικούς σκοπούς.

Ένας ακόμη σημαντικός παράγοντας για την ταχεία πρόοδο της Επιχειρησιακής Έρευνας ήταν η άμεση ανάπτυξη μεθόδων από τις αρχές της εξέλιξής της. Πολλοί επιστήμονες ενδιαφέρθηκαν να ασχοληθούν και να βελτιώσουν τις τεχνικές που χρησιμοποιούνταν ως τότε και να ερευνήσουν σε μεγαλύτερο βάθος αυτή την επιστήμη. Το μεγάλο ενδιαφέρον φαίνεται επίσης από το πόσο άμεσα αναπτύχθηκαν πολλές από τις μεθόδους που χρησιμοποιούμε ακόμη και σήμερα. Για παράδειγμα η θεωρία των ουρών αναμονής και η θεωρία αποθεμάτων υπήρχαν ήδη από τα τέλη του 1950. Ένας δεύτερος βασικός λόγος που συντέλεσε στην ανάπτυξη του πεδίου ήταν οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές. Δεδομένου ότι συχνά πολύπλοκοι υπολογισμοί απαιτούνται για την επίλυση προβλημάτων, η χρήση των υπολογιστών και η συνεχής εξέλιξη τους έπαιξε καθοριστικό ρόλο στην βέλτιστη και ταχύτερη επίλυση τους.

1.2 Η έννοια της Επιχειρησιακής Έρευνας

Όπως αναδεικνύει το όνομά της, η επιχειρησιακή έρευνα αφορά προβλήματα σχετικά με τη διεξαγωγή (λειτουργεία) των επιχειρήσεων μέσα σε έναν οργανισμό. Η φύση του οργανισμού δεν είναι δεσμευτικός παράγοντας, καθώς εφαρμογές της ΕΕ μπορούμε να συναντήσουμε σε διαφορετικούς τομείς όπως για παράδειγμα τις τηλεπικοινωνίες, τα χρηματοοικονομικά, τις μεταφορές και το στρατό.

Ο όρος έρευνα που χρησιμοποιείται οφείλεται στη διαδικασία προσέγγισης των προβλημάτων. Ουσιαστικά, ως αφετηρία μπορεί να θεωρηθεί η προσεκτική μελέτη και ανάλυση του εκάστοτε θέματος, συμπεριλαμβάνοντας την αναζήτηση παραπάνω πληροφοριών. Το δεύτερο βήμα είναι η κατασκευή κατάλληλου μοντέλου, με στόχο την καλύτερη μαθηματική, και όσο δυνατόν ρεαλιστική αναπαράσταση του προβλήματος καθώς ορισμένες φορές η μοντελοποίηση ενός προβλήματος απαιτεί υποθέσεις που προσεγγίζουν το πρόβλημα αλλά μπορεί να

μην αντανακλούν την πλήρη πραγματικότητα. Με αυτόν τον τρόπο, τα αποτελέσματα που θα λάβουμε μετά την επίλυσή του, θεωρούνται επίσης έγκυρα για την επίλυση του πραγματικού προβλήματος και όχι μόνο της υποθετικής αναπαράστασης του. Στη συνέχεια, μέσω κατάλληλων πειραμάτων ελέγχουμε την ευαισθησία του μοντέλου καθώς και την ασφαλή εκτέλεσή του. Ωστόσο, η ΕΕ, πέρα από την επίλυση ενός προβλήματος, περιλαμβάνει επίσης και την πλευρά της πρακτικής διαχείρισης ενός οργανισμού. Επομένως, για την επιτυχή ολοκλήρωση της διαδικασίας πρέπει να λάβουμε υπόψιν τον τρόπο επικοινωνίας και παρουσίασης των αποτελεσμάτων στα άτομα που είναι υπεύθυνα για την τελική λήψη της απόφασης. Η ΕΕ αφορά δηλαδή μια σφαιρική προσέγγιση ενός προβλήματος στοχεύοντας ταυτόχρονα στην εύρεση της σωστής λύσης, αλλά και στο πώς αυτή θα χρησιμοποιηθεί για επαγγελματικούς σκοπούς.

Ένα ακόμη από τα χαρακτηριστικά της ΕΕ είναι η ευρεία εφαρμογή της σε διάφορα αντικείμενα. Έτσι, συνδυάζοντας διαφορετικούς τομείς στοχεύει στην εξέλιξη του οργανισμού συνολικά, και όχι μονάχα ενός μέρους του, που σημαίνει ότι όλες οι πλευρές πρέπει να ικανοποιηθούν με κατάλληλους περιορισμούς. Παράλληλα, παρέχει τις βέλτιστες δυνατές λύσεις που μπορούν να επιτευχθούν από μαθηματικής απόψεως. Η μετέπειτα επιλογή εξαρτάται εξ ολοκλήρου από τα διευθυντικά στελέχη μιας εταιρείας. Ο συνδυασμός όλων των παραπάνω οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η συνεργασία επαγγελματιών με διαφορετικά υπόβαθρα και δεξιότητες είναι απαραίτητη. Ως εκ τούτου, είναι υψίστης σημασίας η στελέχωση μιας ομάδας για να βεβαιώσουμε την σωστή εκτέλεση των μοντέλων αλλά και την ολοκληρωμένη προσέγγιση για την επιλογή της καλύτερης δυνατής απόφασης.

1.3 Τα στάδια της Επιχειρησιακής Έρευνας

Η ΕΕ συνέβαλε σημαντικά στην βελτίωση των διαδικασιών και στην αύξηση της παραγωγικότητας των εταιρειών αλλά και στις οικονομίες πολλών περιοχών. Κοινότητες και ενώσεις ΕΕ έχουν δημιουργηθεί σε πολλές χώρες, ειδικότερα στην Ελλάδα υπάρχει η «Ελληνική Εταιρεία Επιχειρησιακών Ερευνών». Επίσης, διεθνή

συνέδρια διεξάγονται σε παγκόσμιο επίπεδο και περιοδικά εκδίδονται αφιερωμένα για την επιστήμη της ΕΕ.

Η διαρκής εξέλιξη της ΕΕ πρόκειται να συνεχίσει με τους ίδιους ρυθμούς στο μέλλον, καθώς θεωρείται ένας από τους πιο εξελισσόμενους τομείς. Ωστόσο, δεν αφορά απλά την μοντελοποίηση και την επίλυση προβλημάτων αλλά περιλαμβάνει και πολλά επιμέρους βήματα που λαμβάνουν μέρος στο παρασκήνιο. Για την καλύτερη κατανόηση των διαδικασιών, στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε τα στάδια που συνήθως ακολουθούνται:

- Ορισμός του προβλήματος και η συλλογή των απαραίτητων δεδομένων
- Δημιουργία ενός μαθηματικού μοντέλου που να αναπαριστά πιστά το πρόβλημα
- Επίλυση του προβλήματος
- Έλεγχος του μοντέλου και επαναπροσδιορισμός του, εάν αυτό απαιτείται
- Ανάπτυξη κατάλληλων διαδικασιών
- Εφαρμογή

1.3.1 Ορισμός του προβλήματος και συλλογή δεδομένων

Σε πολλές περιπτώσεις, τα προβλήματα που καλούμαστε να αντιμετωπίσουμε είναι ασαφή και η σωστή μελέτη και ορισμός τους είναι απαραίτητος. Ειδικότερα όταν αυτά δεν έχουν ξαναεμφανιστεί στο παρελθόν, η σωστή προσέγγισή τους είναι υψίστης σημασίας. Σε αυτήν περιλαμβάνεται ο καθορισμός των κατάλληλων αντικειμενικών στόχων, περιορισμών και χρονικών περιθωρίων καθώς και οι σχέσεις που πρέπει να τηρηθούν ανάμεσα στα επιμέρους τμήματα μιας εταιρείας. Το πρώτο στάδιο είναι πολύ σημαντικό καθώς μπορεί να καθορίσει τα τελικά συμπεράσματα αφού μία λάθος αρχική υπόθεση είναι πιθανό να οδηγήσει σε εσφαλμένα αποτελέσματα.

Η ομάδα της ΕΕ κατά κύριο λόγο λειτουργεί συμβουλευτικά για την αντιμετώπιση ενός προβλήματος. Μετά την ανάλυση και τη μοντελοποίηση, ακολουθεί η παρουσίαση των αποτελεσμάτων στη διεύθυνση ενός οργανισμού. Συνήθως, προτείνονται διάφορες εναλλακτικές για διαφορετικά σενάρια η κάθε μία

με κατάλληλους ελέγχους και επιχειρηματολογία. Στη συνέχεια ανώτερα στελέχη αξιολογούν τα δεδομένα και καταλήγουν στην τελική τους απόφαση, έχοντας λάβει υπόψιν και επιχειρηματικούς παράγοντες.

Εξ ορισμού, η ΕΕ στοχεύει στην καλή λειτουργία ενός οργανισμού ως σύνολο και όχι μονάχα ενός τμήματος του. Αναζητά, επίσης, τις βέλτιστες λύσεις συνολικά και ως εκ τούτου, οι στόχοι που θα οριστούν στην αρχή πρέπει να αντιπροσωπεύουν ολόκληρη την εταιρεία. Ωστόσο αυτό δεν είναι πάντοτε εφικτό, διότι σε πολλές περιπτώσεις υπάρχουν προβλήματα που μπορεί να αφορούν μόνο ένα κομμάτι της. Επομένως η μοντελοποίηση και ο ορισμός των επιμέρους χαρακτηριστικών του προβλήματος χρειάζεται να ικανοποιούν πρωτίστως αυτό το κομμάτι, διατηρώντας όμως τη συνοχή με τους στόχους που θέτει συνολικά ο οργανισμός.

Ένα πολύ σημαντικό μέρος της διαδικασίας είναι η συλλογή των απαραίτητων δεδομένων. Πολλά από αυτά είναι απαραίτητα για την κατανόηση του προβλήματος αρχικά αλλά και για τη μοντελοποίησή του στη συνέχεια. Σε ορισμένες περιπτώσεις, είναι δυνατόν να υπάρχει έλλειψη πληροφοριών στην αρχή της έρευνας, είτε επειδή ήταν σε λάθος μορφή, είτε επειδή δεν είχαν συλλεχθεί προηγουμένως. Ωστόσο, η κατοχή των κατάλληλων δεδομένων είναι υψίστης σημασίας, καθώς ελλιπή ή λανθασμένες πληροφορίες μπορούν να δημιουργήσουν πολλά εμπόδια στη διαδικασία επίλυσης. Τα υπεύθυνα τμήματα πρέπει να είναι αναλόγως εξοπλισμένα με απαραίτητο εξοπλισμό και γνώσεις για να διασφαλίσουν την ακεραιότητα, συνοχή και κατοχή τους, ενώ παράλληλα πρέπει να διαθέτουν την απαιτούμενη εμπειρία για τη σωστή ανάλυσή τους.

1.3.2 Δημιουργία ενός μαθηματικού μοντέλου

Μετά τον ορισμό του προβλήματος, το επόμενο στάδιο αφορά τον προσδιορισμό του σε μία μορφή κατάλληλη για ανάλυση. Η προσέγγιση που ακολουθείται είναι η μετατροπή σε ένα μαθηματικό μοντέλο που να αναπαριστά την ουσία του προβλήματος.

Η κατασκευή ενός μοντέλου έχει πολλές εφαρμογές στην καθημερινότητα σε διάφορους τομείς, από την τέχνη έως τη φυσική και τα μαθηματικά. Για

παράδειγμα, κάθε φυσικός νόμος έχει μια αντίστοιχη μαθηματική εξίσωση που τον αναπαριστά, επιτρέποντας τη χρήση του για τη μελέτη ενός προβλήματος. Αναλόγως, οι μαθηματικές εκφράσεις χρησιμοποιούνται και στο επιχειρησιακό περιβάλλον με παρόμοιο τρόπο, περιγράφοντας ένα πρόβλημα και διευκολύνοντας την επίλυση του. Ως εκ τούτου, υπάρχουν οι **μεταβλητές απόφασης** (decision variables), οι οποίες αντιστοιχούν στον αριθμό των αποφάσεων που θέλουμε να πάρουμε, και στόχος είναι ο προσδιορισμός των τιμών τους. Το μέτρο που θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε εκφράζεται ως μία εξίσωση αυτών των μεταβλητών (π.χ: $P = 3x_1 + 2x_2 + \dots + 5x_n$), η οποία ορίζεται ως «**αντικειμενική συνάρτηση**» (objective function). Οποιοιδήποτε περιορισμοί που αφορούν το εν λόγω πρόβλημα εκφράζονται επίσης ως μαθηματικές εξισώσεις είτε ανισώσεις των μεταβλητών, αναλόγως τη φύση τους (π.χ $x_1 - 3x_1x_2 + 2x_2 \leq 10$). Οι μεταβλητές που έχουν οριστεί, η αντικειμενική εξίσωση και οι περιορισμοί που έχουν δημιουργηθεί ονομάζονται **παράμετροι του μοντέλου**. Σκοπός είναι η εύρεση της λύσης η οποία θα θεωρείται βέλτιστη για τη αντικειμενική εξίσωση που έχει οριστεί, αντιπροσωπεύοντας έτσι την “καλύτερη” λύση του προβλήματος δεδομένων των ισχύοντων περιορισμών.

Ωστόσο, ακόμη και όταν καταλήγουμε στις τιμές των μεταβλητών που επιλύουν το πρόβλημά μας, η επιλογή τους χρειάζεται πρώτα να εξεταστεί, καθώς, σε πολλές περιπτώσεις λόγω έλλειψης επαρκών δεδομένων, ίσως το αποτέλεσμα να βασίζεται σε εκτιμήσεις και υποθέσεις. Επομένως, η αβεβαιότητα για την αξιοπιστία της λύσης, είναι σημαντικό να αναλύσουμε εκ των προτέρων πόσο ευαίσθητο είναι το μοντέλο σε διάφορες αλλαγές των μεταβλητών που θα κάνουμε. Αυτή η διαδικασία ορίζεται ως «**ανάλυση ευαισθησίας**» (sensitivity analysis). Ειδικότερα για ένα επιχειρησιακό πρόβλημα, περισσότερα από ένα μοντέλο μπορούν να κατασκευαστούν. Σε αυτό μπορεί να συμβάλει και το sensitivity analysis που είναι αναγκαίο να πραγματοποιείται μετά από την κατασκευή ενός μοντέλου, καθώς οι βελτιώσεις που προκύπτουν μπορούν να οδηγήσουν σε περισσότερες προτάσεις και εναλλακτικές.

Η μαθηματική αναπαράσταση προσφέρει πολλά πλεονεκτήματα συγκριτικά με τη λεκτική περιγραφή. Αρχικά, μία εξίσωση είναι συχνά πιο ακριβής και καθιστά ένα πρόβλημα πιο εύκολα κατανοητό και με πιο ξεκάθαρη ερμηνεία. Επιπλέον,

αποκαλύπτει τις σχέσεις ανάμεσα στις μεταβλητές, την αντικειμενική εξίσωση και τους περιορισμούς. Παράλληλα, η επίλυση καθίσταται πιο εύκολη μέσω της χρήσης κατάλληλων υπολογιστικών μεθόδων, η τελική λύση είναι αντιπροσωπευτική ενώ μειώνεται η περίπτωση του ανθρωπίνου λάθους. Ωστόσο, η σωστή χρήση των μοντέλων είναι απαραίτητη για την εγγύηση των σωστών αποτελεσμάτων. Δεδομένου ότι πολλές φορές γίνονται απλοποιήσεις και υποθέσεις, πρέπει να είμαστε σίγουροι ότι δεν χάνεται ο αντικειμενικός σκοπός του προβλήματος και πως μοντέλο συνεχίζει να είναι μία πιστή αναπαράσταση της πραγματικότητας.

1.3.3 Επίλυση του προβλήματος

Μετά την κατασκευή του μαθηματικού μοντέλου, το επόμενο στάδιο είναι η ανάπτυξη κατάλληλων υπολογιστικών μεθόδων για την εύρεση της βέλτιστης λύσης. Αν και πρόκειται για το βασικό στόχο των προβλημάτων της ΕΕ, συνήθως είναι εύκολη η επίτευξή του λόγω των ήδη υπαρχών αλγορίθμων που χρησιμοποιούνται μέσω υπολογιστών.

Είναι σημαντικό να διευκρινιστεί πως η λύση θεωρείται η καλύτερη δυνατή πάντα όσον αφορά το μοντέλο που έχει οριστεί. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, οι παράμετροι που ορίζονται, είναι μία κατά προσέγγιση αναπαράσταση του πραγματικού προβλήματος και επομένως κάθε συμπέρασμα που καταλήγουμε είναι αντιπροσωπευτικό της συγκεκριμένης περίπτωσης. Ωστόσο, αν έχουν γίνει οι κατάλληλοι έλεγχοι, το τελικό αποτέλεσμα τείνει να είναι μία πολύ καλή και αξιόπιστη εκτίμηση. Άρα, η εξασφάλιση της σωστής λειτουργίας του μοντέλου είναι εξίσου σημαντική όσο και η λύση αυτή καθαυτή και δεν πρέπει να παραλείπεται σε καμία περίπτωση.

1.3.4 Έλεγχος του μοντέλου

Η κατασκευή ενός μοντέλου μπορεί να παρομοιαστεί με την κατασκευή ενός προγράμματος στον υπολογιστή. Μετά την ανάπτυξη ενός προγράμματος είναι

πολύ πιθανό να συναντήσουμε τεχνικά προβλήματα. Τα προβλήματα αυτά χρειάζεται να διορθωθούν όσο το δυνατόν συντομότερα, και τελικά μετά τις διάφορες βελτιωμένες εκδοχές, να καταλήξουμε στην τελική μορφή.

Με έναν αντίστοιχο τρόπο λειτουργεί και ένα μαθηματικό μοντέλο. Στην αρχή μπορεί να υπάρχουν λάθη ή να μην έχουν ληφθεί υπόψιν όλοι οι απαραίτητοι περιορισμοί. Αυτό είναι απολύτως λογικό, δεδομένης της δυσκολίας που υπάρχει να συλλεχθούν τα δεδομένα, να μεταφραστούν όλοι οι παράμετροι σε μαθηματικές εκφράσεις και εξισώσεις, αλλά και της υποκειμενικότητας των χρηστών. Τελικά, με τις κατάλληλες βελτιώσεις, η ομάδα ΕΕ μπορεί να καταλήξει στην καλύτερη και πιο αξιόπιστη εκδοχή του μοντέλου την οποία θα χρησιμοποιεί στο μέλλον. Ωστόσο, αυτό δε σημαίνει ότι οι έλεγχοι θα σταματήσουν, καθώς υπάρχει πάντα περιθώριο βελτίωσης ενώ επίσης πρέπει να εξασφαλίζεται ότι έχουν περιληφθεί όλες οι σχετικές εξελίξεις όσον αφορά τον τομέα της ΕΕ αλλά και της φύσης του οργανισμού ή του μοντέλου γενικότερα.

Δεν είναι εύκολο να προσδιοριστεί πως η διαδικασία ελέγχου μπορεί να πραγματοποιηθεί καθώς αυτή εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τη φύση του κάθε μοντέλου. Το αρχικό στάδιο της κατασκευής του είναι μία χρονοβόρα διαδικασία καθώς είναι πολλές οι λεπτομέρειες που πρέπει να ληφθούν υπόψιν. Μετά την ολοκλήρωσή του, η ομάδα που ασχολήθηκε για την ανάπτυξή του χρειάζεται να εξετάσει συνολικά το μοντέλο και να εκτιμήσει αν και πώς ικανοποιούνται οι αρχικοί στόχοι που είχαν τεθεί. Η εξ αρχής μελέτη του προβλήματος και η σύγκριση του με το τελικό μοντέλο είναι ένας τρόπος μέσω του οποίου μπορούν να γίνουν εμφανείς τυχόν διαφορές ή ελαττώματα. Επιπλέον, μία ακόμη τεχνική είναι ο έλεγχος του μοντέλου από κάποιον επαγγελματία που δεν είχε ασχοληθεί στη διαδικασία ορισμού των παραμέτρων, έτσι ώστε να μπορεί να κρίνει και να αξιολογήσει αντικειμενικά το μοντέλο, χωρίς να επηρεαστεί από τις μεθόδους που έχουν ήδη χρησιμοποιηθεί.

Μία μέθοδος ελέγχου του μοντέλου είναι η χρήση ιστορικών δεδομένων. Με αυτόν τον τρόπο γίνεται μία προσέγγιση παρελθοντικών συμβάντων, τα οποία είναι ήδη γνωστά. Έτσι είναι δυνατόν η σύγκριση της αποτελεσματικότητας της υποθετικής φύσης του μοντέλου και της πραγματικότητας. Δηλαδή, είναι ένα μέτρο ελέγχου για να δούμε εάν η τελική τιμή που λάβαμε, όντως προσεγγίζει το τι

πραγματικά συνέβη ενώ παράλληλα μπορούμε να αξιολογήσουμε εάν χρειάζονται επιπλέον βελτιώσεις ως προς την αποτελεσματικότητά του.

Είναι πολύ σημαντικό, καθ'όλη την ανάπτυξη του μοντέλου αλλά και κατά τον έλεγχο του, να σημειώνεται και να τεκμηριώνεται κάθε αλλαγή που γίνεται με τρόπο κατανοητό και ξεκάθαρο. Έτσι, επιτυγχάνεται ο ολοκληρωμένος ορισμός και δικαιολογείται ο στόχος που θέλουμε να πετύχουμε. Παράλληλα, νέοι χρήστες μπορούν να καταλάβουν τις αλλαγές, γιατί έγιναν αλλά και τη λογική που υπάρχει όσον αφορά την επιλογή των μεταβλητών, των περιορισμών και της αντικειμενικής εξίσωσης.

1.3.5 Ανάπτυξη διαδικασιών για μια ολοκληρωμένη επίλυση

Μετά από την ανάπτυξη του μοντέλου είναι πολύ σημαντικό να καθοριστούν οι διαδικασίες που θα ακολουθούνται κάθε φορά που θα γίνεται χρήση του μοντέλου. Σε αυτές τις διαδικασίες θα περιέχονται οι παράμετροι, η μέθοδος που θα ακολουθείται για την επίλυση και οι λειτουργίες για την εφαρμογή του. Έτσι, ακόμα και στην περίπτωση που το προσωπικό αλλάξει, το ίδιο σύστημα μπορεί να χρησιμοποιηθεί χωρίς διακοπή ή πρόβλημα.

Η χρήση του υπολογιστή είναι η πλέον πιο διαδεδομένη για την χρήση αυτών των προγραμμάτων. Μάλιστα, τις περισσότερες φορές, συνδυασμός αυτών των προγραμμάτων χρειάζεται, από καθαρά υπολογιστικά έως και βάσεις δεδομένων με όλα τα απαραίτητα δεδομένα. Άλλες επιλογές μπορούν να αφορούν τον τρόπο εφαρμογής του τελικού αποτελέσματος ή την παραγωγή αναφορών που να περιγράφουν τη λύση και τη διαδικασία που ακολουθήθηκε. Στις περισσότερες περιπτώσεις, απαιτείται αρκετός καιρός για την ανάπτυξη ενός ολοκληρωμένου συστήματος αλλά και για την κατάλληλη εκπαίδευση του προσωπικού όσον αφορά τη χρήση του. Ωστόσο, είναι πολύ σημαντικό αυτή η διαδικασία να ακολουθηθεί σωστά, καθώς πρόκειται για ένα από τα βασικότερα στάδια.

1.3.6 Εφαρμογή

Το τελευταίο στάδιο αφορά την εφαρμογή των συστημάτων που αναφέρθηκαν προηγουμένως και περιλαμβάνει επιμέρους φάσεις. Η ομάδα που είναι υπεύθυνη για την επίλυση του προβλήματος πρέπει να βρίσκεται σε συνεχή επαφή με το τμήμα operations και να παρέχει σχόλια όσον αφορά την αποτελεσματικότητα του προγράμματος. Στην περίπτωση νέων υποθέσεων ή αλλαγής των δεδομένων, οι δύο ομάδες πρέπει να συνεργαστούν για να προσαρμόσουν το μοντέλο καταλλήλως και να αναπτύξουν το σύστημα για να αντιπροσωπεύει τους νέους στόχους και σκοπούς.

1.4 Συμπεράσματα

Η ΕΕ είναι ένας μεγάλος κλάδος όσον αφορά τις επιχειρήσεις σήμερα. Εφαρμογές της μπορούμε να συναντήσουμε από κλασικές επιστήμες, όπως η φυσική και τα μαθηματικά, έως και πιο σύγχρονες, όπως είναι ο επιχειρησιακός τομέας. Περιλαμβάνει όλα τα στάδια που οδηγούν στην ανάλυση και στην επίλυση ενός προβλήματος αλλά και στον τρόπο με τον οποίο η τελική λύση θα εφαρμοστεί σε μετέπειτα στάδιο.

2. Έλεγχος αποθεμάτων

2.1 Εισαγωγή

Μία από τις βασικές λειτουργίες μιας επιχείρησης είναι η σωστή διαχείριση των αποθεμάτων της. Με τον όρο αποθέματα εννοούμε τα προϊόντα που δεν πρόκειται να αξιοποιηθούν άμεσα, αλλά χρησιμεύουν για τη κάλυψη μελλοντικής ζήτησης. Δεν αφορά μόνο εμπορικά μαγαζιά αλλά και κάθε είδους επιχείρηση που ασχολείται με προϊόντα, συμπεριλαμβανομένων κατασκευαστικών εταιρειών, χονδρεμπόρων και λιανοπωλητών. Για παράδειγμα οι κατασκευαστές, προκειμένου να δημιουργήσουν το τελικό προϊόν, χρειάζεται να έχουν σε επαρκή απόθεμα τα ενδιάμεσα υλικά που θα χρησιμοποιήσουν για την παραγωγή. Αναλόγως, χρειάζεται να διαθέτουν σε απόθεμα και τα τελικά προϊόντα τους, ώστε να μην αντιμετωπίσουν πρόβλημα έλλειψης όταν αυτά ζητηθούν.

Η συνολική αξία των αποθεμάτων, συμπεριλαμβανομένων των τελικών και ενδιάμεσων προϊόντων, ανέρχεται σε περισσότερο από ένα τρισεκατομμύριο δολάρια. Αντιστοίχως υψηλό είναι το κόστος που οφείλεται στην αποθήκευση τους, καθώς αυτό μπορεί να είναι ίσο με το ένα τέταρτο της συνολικής αξίας του αποθέματος. Επομένως, μειώνοντας το κόστος αποθήκευσης αποφεύγοντας τη διατήρηση μεγάλων αποθεμάτων, μπορεί να ενισχύσει την ανταγωνιστικότητα μιας εταιρείας.

Ο έλεγχος αποθεμάτων (inventory control) αφορά τη διαδικασία κατά την οποία παρακολουθείται το επίπεδο των αποθηκευμένων προϊόντων καθώς και τις αποφάσεις που λαμβάνονται όσον αφορά την ποσότητα του αποθεματικού σε κάθε χρονική στιγμή. Τα αποθέματα μπορούν να διακριθούν ανάλογα το στάδιο τους σε πρώτες ύλες, τελικά προϊόντα, ενδιάμεσα προϊόντα και εφόδια. Ως σύστημα αποθεμάτων ορίζουμε το σύνολο των κανόνων και οδηγιών για την ποσότητα των αποθεμάτων που χρειάζεται να διατηρεί κάθε επιχείρηση, κάθε πότε θα πρέπει να γίνονται καινούριες παραγγελίες, καθώς και το ύψος τους.

Πολλές εταιρείες ανά τον κόσμο έχουν υιοθετήσει, ή σχεδιάζουν να εντάξουν στη λειτουργία τους, μεθόδους σωστής διαχείρισης των αποθεμάτων

τους, με στόχο την εξοικονόμηση πόρων, χρόνου αλλά και χρήματος. Αυτή η τάση έχει δημιουργήσει ένα καινούριο πεδίο στον τομέα της Επιχειρησιακής Έρευνας, καθώς πρόκειται για μία εξελισσόμενη ειδικότητα που μπορεί να αποτελέσει πολύ ισχυρό εργαλείο για την εξέλιξη μιας εταιρείας, καθώς και για την ανταγωνιστικότητά της.

Τα βήματα που ακολουθούνται στη διαχείριση αποθεμάτων είναι αρκετά παρόμοια με αυτά που περιγράφηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο και αφορούν την επίλυση ενός προβλήματος στην Ε.Ε.

1. Δημιουργία ενός μαθηματικού μοντέλου που περιγράφει το σύστημα αποθεμάτων μιας εταιρείας.
2. Επίλυση του προβλήματος και εύρεση της βέλτιστης λύσης.
3. Καταγραφή των τωρινών αποθεμάτων μέσω ενός υπολογιστικού συστήματος και κατάλληλων εφαρμογών.
4. Εφαρμογή της βέλτιστης πολιτικής απογραφής για τη σηματοδότηση της κατάλληλης χρονικής στιγμής για την αναπλήρωση των αποθεμάτων, καθώς και την ποσότητα που απαιτείται.

Τα μαθηματικά μοντέλα αποθεμάτων μπορούν να χωριστούν σε δύο κατηγορίες αναλόγως με το βαθμό προβλεψιμότητας της ζήτησης: στα *στοχαστικά* και στα *ντετερμινιστικά*. Οι δύο αυτές κατηγορίες θα αναλυθούν εκτενώς παρακάτω.

2.2 Παράγοντες διατήρησης αποθεμάτων

Μία από τις πολιτικές που πρέπει να αποφασίσει μία εταιρεία όσον αφορά τη λειτουργία της είναι η ποσότητα των αποθεμάτων που θα διατηρεί. Υπάρχουν πολλοί παράγοντες που επηρεάζουν αυτήν την απόφαση, οι οποίοι είναι:

1. **Κέρδος:** Ένας από τους βασικούς στόχους μιας επιχείρησης είναι η μεγιστοποίηση του κέρδους της. Αυτό είναι εφικτό με τη διατήρηση αποθεμάτων, καθώς η εταιρεία μπορεί να επωφεληθεί από τυχόν άνοδο των τιμών των προϊόντων που διατηρεί ή από εκπτώσεις τη στιγμή της αγοράς τους από τους προμηθευτές. Επιπλέον, με αυτόν τον τρόπο γίνεται εξοικονόμηση χρόνου και πόρων που συνεπάγεται επίσης αύξηση κέρδους.

2. **Ανταγωνισμός:** Ο ανταγωνισμός επιβάλλει στις εταιρείες να αναζητούν συνεχώς τρόπους για να βελτιώσουν την ποιότητα εξυπηρέτησης. Ως εκ τούτου, έχοντας προϊόντα σε απόθεμα μπορούν να επιτύχουν την άμεση παράδοσή τους, ικανοποιώντας έτσι άμεσα τις ανάγκες των πελατών.
3. **Αβεβαιότητα:** Υπάρχουν περιπτώσεις που ένα προϊόν μπορεί να είναι σε έλλειψη, δημιουργώντας σοβαρό πρόβλημα σε μία επιχείρηση. Ως εκ τούτου, διατηρώντας κάποια αποθέματα είναι δυνατόν να μειωθεί η εμφάνιση αυτών των περιστατικών.

Επομένως, μία επιχείρηση έχει πολλούς λόγους για τους οποίους μπορεί να διατηρεί περισσότερα προϊόντα από αυτά που άμεσα καταναλώνει. Ωστόσο, το επίπεδο αυτών των αποθεμάτων εξαρτάται εξίσου από διάφορους παράγοντες που θα δούμε παρακάτω.

2.3 Λόγοι διατήρησης χαμηλών αποθεμάτων

Κάθε επιχείρηση, που στοχεύει στην μακροπρόθεσμη λειτουργία της, οφείλει να διατηρεί μία επιπλέον ποσότητα από τα προϊόντα που προμηθεύει, για να μπορεί να καλύψει μελλοντική ζήτηση. Ωστόσο, αυτή η ποσότητα δεν είναι καθορισμένη, αλλά εξαρτάται από πολλούς παράγοντες, με κυριότερο το κόστος. Ως εκ τούτου, τα αποθέματα μπορούν να διατηρούνται σε χαμηλά ή υψηλά επίπεδα, αναλόγως τους στόχους της εταιρείας.

Η αποθήκευση των προϊόντων επιφέρει κάποια κόστη διατήρησης, τα οποία σε ορισμένα είδη (π.χ. τρόφιμα) μπορεί να είναι ιδιαίτερος υψηλά. Το κόστος διατήρησης μπορεί να περιλαμβάνει το κόστος αποθήκευσης, μεταφοράς, ασφάλισης, τυχόν φόρους, καθώς και το κόστος ευκαιρίας. Αναλυτικότερα:

1. **Κόστος ευκαιρίας (Opportunity cost):** Ως κόστος ευκαιρίας εννοούμε το χρηματικό ποσό που 'θυσιάζουμε' για την παραγωγή ενός αγαθού, το οποίο θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για άλλους σκοπούς (π.χ. επενδύσεις)
2. **Κόστος αποθήκευσης (Storage cost):** Κάθε προϊόν που πρόκειται να πωληθεί στο μέλλον πρέπει να διατηρείται σε κατάλληλες συνθήκες έτσι

ώστε να μην αλλοιωθεί η ποιότητα του. Το κόστος που προκύπτει από αυτό ορίζεται ως κόστος αποθήκευσης και μπορεί να είναι αρκετά υψηλό για ευαίσθητες κατηγορίες φαγητών, όπως για παράδειγμα τα τρόφιμα. Επιπλέον σε αυτήν την κατηγορία ανήκουν και οι πληρωμές ενοικίου, εφόσον αυτές υπάρχουν, καθώς και η συντήρηση και φύλαξη του χώρου.

3. **Κόστος μεταφοράς (Transportation cost):** Αναλόγως το προϊόν, ίσως επιβάλλεται η μεταφορά του με ιδιαίτερη προσοχή στους χώρους αποθήκευσης, ενώ σε πολλές περιπτώσεις χρειάζεται ειδικά οχήματα και εξοπλισμό όπως φορτηγά, γερανοί ή πλατφόρμες.
4. **Φόροι και ασφάλιση:** Σε πολλές περιπτώσεις τα αποθέματα είναι ασφαλισμένα για την κάλυψη βλαβών που μπορεί να προκύψουν από διάφορους μη αναμενόμενους παράγοντες. Ειδικότερα, υπάρχει μία σχέση αναλογίας ανάμεσα στην ποσότητα των αποθεμάτων, καθώς υψηλά επίπεδα μπορούν να οδηγήσουν και σε υψηλότερα ασφάλιστρα. Με παρόμοιο τρόπο μπορούν να αυξηθούν και οι φόροι.

Ως αποτέλεσμα, μία επιχείρηση μπορεί να στοχεύει στη διατήρηση μιας μικρότερης ποσότητας αποθεμάτων, έτσι ώστε να επιτύχει λιγότερα έξοδα, αλλά και να έχει τη δυνατότητα να αξιοποιήσει τα χρήματα σε άλλους πιο επικερδείς σκοπούς. Επιπλέον λόγοι, που δεν βασίζονται σε αποφάσεις της επιχείρησης, μπορούν να είναι μία επικείμενη κλοπή, φυσικές καταστροφές ή φθορά.

2.4 Λόγοι διατήρησης υψηλών αποθεμάτων

Με ανάλογο τρόπο κάθε επιχείρηση μπορεί να επιλέξει να αυξήσει τα αποθέματά της αναλόγως το στόχο που θέλει να πετύχει. Ένας από τους βασικούς λόγους για τη διατήρηση υψηλών επιπέδων αποθεμάτων είναι η ζήτηση των προϊόντων από τους πελάτες ή καταναλωτές. Εξίσου σημαντικά είναι επίσης το κόστος παραγγελίας και μεταφοράς και η πληρωμή των προμηθευτών. Αναλυτικότερα:

1. **Ζήτηση:** Η έγκαιρη ικανοποίηση της ζήτησης εξαρτάται άμεσα από την ποσότητα των αποθεμάτων ενός προϊόντος. Η παράδοση εντός σύντομου χρονικού διαστήματος συμβάλλει στην καλύτερη

εξυπηρέτηση των πελατών, ενώ παράλληλα αυξάνει τα επίπεδα ικανοποίησής τους.

2. **Κόστος παραγγελίας και μεταφοράς:** Αφορά το χρόνο και τους πόρους που πρέπει να αφιερώσει μια εταιρεία προκειμένου να βρει τους κατάλληλους προμηθευτές και να παραγγείλει την επιθυμητή ποσότητα προϊόντων. Κατά τη διάρκεια της παραγγελίας είναι προς όφελος της εταιρείας να προμηθευτεί μεγάλες ποσότητες, έτσι ώστε να μην χρειαστεί να αφιερώσει σύντομα πολύτιμο χρόνο. Με τον ίδιο τρόπο μπορεί να επωφεληθεί κατά τη διάρκεια της μεταφοράς, καθώς συμφέρει περισσότερο η μαζική μεταφορά από την μεμονωμένη.
3. **Πληρωμή προμηθευτών:** Σε πολλές περιπτώσεις, οι προμηθευτές κάνουν ειδικές εκπτώσεις όταν γίνεται παραγγελία μεγάλων ποσοτήτων, δημιουργώντας κίνητρο στις επιχειρήσεις να παραγγείλουν πολλά προϊόντα για να μειώσουν τα συνολικά έξοδά τους.

2.5 Είδη αποθεμάτων

Οι εταιρείες που διαθέτουν εμπορεύματα χρειάζεται να έχουν συγκεκριμένες μεθόδους προκειμένου να διαχειρίζονται το επίπεδο των αποθεμάτων τους. Για αυτό το λόγο, στη *Θεωρία Αποθεμάτων* υπάρχουν διάφορες κατηγορίες ανάλογα τον τρόπο δημιουργίας τους.

- **Κυκλικό απόθεμα (cycle inventory):** Ως κυκλικό απόθεμα εννοούμε την ποσότητα εκείνη που παρήγγειλε ο πελάτης και είναι άμεσα συνυφασμένη με το ύψος της παραγγελίας. Ουσιαστικά, πρόκειται για το απόθεμα που καθορίζεται από τη ζήτηση ενός προϊόντος όταν επικρατούν ομαλές συνθήκες στην αγορά.
- **Απόθεμα ασφαλείας (safety stock inventory):** Το απόθεμα ασφαλείας αφορά τα επιπλέον εμπορεύματα που διατηρεί μία εταιρεία ως απόθεμα, με σκοπό να ικανοποιήσει τη μελλοντική τους ζήτηση, όταν και αν αυτό

συμβεί. Πρόκειται για ένα επίπεδο ασφαλείας σε μη αναμενόμενες περιπτώσεις, όπως για παράδειγμα όταν υπάρχει έλλειψη ενός προϊόντος ή καθυστέρηση παράδοσης από τους προμηθευτές. Το απόθεμα ασφαλείας μπορεί να δημιουργηθεί είτε με την παραγγελία μεγαλύτερων ποσοτήτων από αυτήν που είναι αναγκαία, είτε όταν η παραγγελία γίνεται νωρίτερα από ό,τι πραγματικά χρειάζεται.

- **Απόθεμα αναμονής (anticipation inventory):** Πρόκειται για τα αποθέματα που προορίζονται για την κάλυψη μη αναμενόμενων αυξομειώσεων στη ζήτηση.
- **Απόθεμα σε κίνηση (pipeline inventory):** Αυτή η κατηγορία περιγράφει μία μεταβατική περίοδο, στην οποία ανήκουν τα αποθέματα που έχουν παραγγελθεί από την εταιρεία αλλά ακόμα δεν έχουν παραδοθεί από τον προμηθευτή. Με άλλα λόγια, αφορά τα αποθέματα που μετακινούνται από το ένα σημείο στο άλλο και μπορεί να εκφραστεί μαθηματικά ως η μέση ζήτηση αποθεμάτων ανάμεσα σε δύο διαδοχικές παραγγελίες.
- **Νεκρά ή αδιακίνητα αποθέματα:** Σε αυτήν την κατηγορία εμπίπτουν τα αποθέματα για τα οποία η ζήτηση είναι μειωμένη και έχουν υποστεί φθορές ή είναι τεχνολογικά ξεπερασμένα.
- **Εποχιακά αποθέματα (seasonal inventory):** Τα εποχιακά αποθέματα είναι άμεσα συνυφασμένα με τις χρονικές περιόδους όπου η ζήτηση είναι μεγαλύτερη από ό,τι συνήθως. Για παράδειγμα, αφορά γιορτές, όπως Χριστούγεννα ή Πάσχα, αλλά και τις περιόδους διακοπών κατά τους καλοκαιρινούς ή χειμερινούς μήνες.
- **Αποθέματα που διατηρούνται για άλλους λόγους:** Σε αυτήν την τελευταία κατηγορία ανήκουν τα αποθέματα που διατηρούνται για λόγους που δεν αναφέρθηκαν προηγουμένως. Ως παράδειγμα μπορούμε να αναφέρουμε τα αποθέματα που προέρχονται μετά από παραγγελίες μεγάλων ποσοτήτων που ως στόχο έχουν την απόκτηση εκπτώσεων.

2.6 Χαρακτηριστικά αποθεμάτων-Περιορισμοί

Κάθε μαθηματικό μοντέλο που δημιουργείται με στόχο να περιγράψει ένα σύστημα αποθεμάτων μπορεί να χωριστεί σε δύο ευρείς κατηγορίες, ανάλογα με τον τύπο της ζήτησης. Ως ζήτηση ορίζουμε τον αριθμό των προϊόντων που θα παρθούν από τα αποθέματα για να χρησιμοποιηθούν για διάφορους σκοπούς της εταιρείας κατά τη διάρκεια μιας συγκεκριμένης περιόδου. Εάν η μελλοντική ζήτηση μπορεί να προβλεφθεί με σχετική ακρίβεια, τότε μπορεί να χαρακτηριστεί ως *ντετερμινιστική*. Αντίθετα, ως *στοχαστική* ζήτηση εννοούμε τις περιπτώσεις εκείνες που δεν είναι δυνατόν να γίνουν προβλέψεις, λόγω της τυχαιότητας εμφάνισης των περιστατικών. Ωστόσο, ακόμα και τότε κατάλληλα στατιστικά μοντέλα μπορούν να κατασκευαστούν που να προσεγγίζουν όσο το δυνατόν περισσότερο την πραγματικότητα.

Ένα σύστημα αποθεμάτων χαρακτηρίζεται επίσης και από τις οικονομικές παραμέτρους που το καθορίζουν. Για παράδειγμα, μέσα σε αυτά τα ποσοτικά χαρακτηριστικά περιλαμβάνεται το κόστος που μπορεί να προκύψει όταν επηρεάζεται η φήμη της εταιρείας. Σε αυτήν την περίπτωση, μπορεί να παρατηρηθεί μία μείωση στις αγορές, καθώς οι πελάτες θα έχουν χάσει την εμπιστοσύνη τους στην αξιοπιστία της εταιρείας. Ένα παρόμοιου είδους κόστος (κόστος ευκαιρίας) μπορούμε να θεωρήσουμε όταν εξαντλείται το απόθεμα και δεν ικανοποιείται η ζήτηση των πελατών. Επιπλέον, υπάρχει ένα κόστος όσον αφορά τη διατήρηση των προϊόντων, όπως επίσης κάθε παραγγελίας που λαμβάνει χώρα.

Ένα ακόμη χαρακτηριστικό είναι ο χρόνος παράδοσης, που δηλώνει το χρόνο ανάμεσα στην τοποθέτηση μιας παραγγελίας, για την αναπλήρωση του αποθεματικού, και της παραλαβής των προϊόντων. Εάν ο χρόνος παράδοσης είναι σταθερός, τότε η διαδικασία μπορεί να προσχεδιαστεί και να προγραμματιστεί όποτε είναι απαραίτητο. Η πλειοψηφία των μοντέλων θεωρούν ότι η αναπλήρωση γίνεται άμεσα, υποθέτοντας είτε ότι η διανομή γίνεται άμεσα είτε επειδή έχει προβλεφθεί εκ των προτέρων και έχουν ληφθεί οι κατάλληλες αποφάσεις έτσι ώστε να μην υπάρχει μεγάλη περίοδος αναμονής.

Ένας ακόμα περιορισμός μπορεί να προκύψει με βάση την περιοδικότητα ελέγχου των επιπέδων των αποθεμάτων. Στη συνεχή επιθεώρηση, η παραγγελία

γίνεται με το που το επίπεδο πέσει κάτω από ένα συγκεκριμένο όριο. Όταν ο έλεγχος γίνεται ανά τακτά χρονικά διαστήματα, τότε πρόκειται για μία περιοδική επιθεώρηση. Σε αυτήν την περίπτωση, επιλέγονται κάποιες συγκεκριμένες χρονικές περίοδοι (όπως για παράδειγμα κάθε βδομάδα) και τότε λαμβάνεται η απόφαση, ακόμα και αν ο αριθμός των αποθεμάτων βρίσκεται νωρίτερα κάτω από τον απαιτούμενο στόχο.

3. ABC Ανάλυση

3.1 Εισαγωγή

Σε πολλές επιχειρήσεις παρουσιάζεται η ανάγκη να γίνει μια κατάταξη των προϊόντων τους ώστε ο εκάστοτε manager να μπορεί να εστιάζει την προσοχή του στα σημαντικότερα προϊόντα. Μια τέτοια κατάταξη μπορεί να επιτευχθεί μέσω της ABC ανάλυσης κατά την οποία τα προϊόντα μιας εταιρείας χωρίζονται σε 3 κατηγορίες (A, B και C) ανάλογα με κάποιο μέτρο σημαντικότητας. Σαν μέτρο σημαντικότητας μπορεί να χρησιμοποιηθεί είτε ο όγκος των πωλήσεων, είτε η χρηματική αξία των πωλήσεων, ή η κερδοφορία από την πώληση ενός τύπου προϊόντος. Τις περισσότερες φορές τα σπουδαιότερα προϊόντα (κατηγορία A) είναι εκείνα που χρίζουν μεγαλύτερης βαρύτητας, ωστόσο σε μερικές περιπτώσεις παρατηρείται η ανάγκη να ενισχυθούν τα προϊόντα με τις χαμηλότερες επιδόσεις (κατηγορία C). Συνήθως, μια ABC ανάλυση πραγματοποιείται παίρνοντας ένα τυχαίο δείγμα από 100 περίπου προϊόντα.

3.2 Παρουσίαση της μεθόδου

Αρχικά, διατάσσουμε τα προϊόντα μας σε φθίνουσα σειρά σύμφωνα με το μέτρο σημαντικότητας που επιθυμούμε. Στη συνέχεια, παίρνουμε τις αθροιστικές πωλήσεις, καθώς και το ποσοστό τους επί τις εκατό, ώστε να πάρουμε την ABC καμπύλη από το γράφημα του ποσοστού των αθροιστικών πωλήσεων (άξονας y) σε σχέση με τον αριθμό των διαφορετικών τύπων προϊόντων που έχουμε (άξονας x). Η μορφή μιας ABC καμπύλης είναι πάντοτε παρόμοια, καθώς διατάσσουμε τα προϊόντα μας σε φθίνουσα σειρά, προτού πάρουμε τις αθροιστικές πωλήσεις. Μοναδική εξαίρεση αποτελεί η σπάνια περίπτωση που όλα τα προϊόντα έχουν τον ίδιο όγκο πωλήσεων.

Κατόπιν, χωρίζουμε την καμπύλη μας σε τρεις περιοχές:

- Προϊόντα κατηγορίας A: είναι τα προϊόντα που πετυχαίνουν το 50% των συνολικών πωλήσεων

- Προϊόντα κατηγορίας C: τα οποία αφορούν το 50% των διαφορετικών προϊόντων, τα οποία πετυχαίνουν τα χειρότερα αποτελέσματα από πλευράς πωλήσεων
- Προϊόντα κατηγορίας B: που είναι τα προϊόντα που βρίσκονται μεταξύ των άλλων δύο κατηγοριών

Σε ορισμένες περιπτώσεις, είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί μια διαφορετική κατηγοριοποίηση, π.χ. χωρισμός σε τέσσερις κατηγορίες A,B,C και D. Ωστόσο και σε αυτήν την περίπτωση το τυπικό προϊόν κατηγορίας A είναι σημαντικά σπουδαιότερο της κατηγορίας B, το οποίο με τη σειρά του παραμένει πολύ πιο σημαντικό από εκείνο της κατηγορίας C.

Ως αποτέλεσμα, τα προϊόντα τύπου A θα πρέπει να τυγχάνουν της μέγιστης δυνατής ανάλυσης και παρακολούθησης, ενώ τα προϊόντα τύπου B θα πρέπει να λαμβάνουν μια λογική φροντίδα, αλλά μικρότερη από εκείνη των προϊόντων της κατηγορίας A. Τέλος, τα προϊόντα τύπου C, παρόλο που αντιστοιχούν σε πολλά διαφορετικά αντικείμενα, αναλύονται περιστασιακά, εφόσον πετυχαίνουν λίγες πωλήσεις και δεν εμπλέκονται μεγάλα χρηματικά ποσά. Αποδεικνύεται στην πράξη ότι οι τεχνικές του ελέγχου αποθεμάτων πρέπει να εφαρμόζονται σε μία εταιρία και να εστιάζουν στα προϊόντα τύπου A, αφού κάθε βελτίωση σε αυτά μπορεί να αποφέρει το μεγαλύτερο δυνατό όφελος για την εταιρία.

3.3 Εφαρμογή της ABC ανάλυσης στην αλευροβιομηχανία Μύλοι Θράκης

Αρχικά, διατάξαμε σε φθίνουσα σειρά τα 122 προϊόντα της επιχείρησης με βάση τον ετήσιο όγκο των πωλήσεων σε 50kg σακιά. Στη συνέχεια, υπολογίσαμε τις αθροιστικές πωλήσεις, καθώς και το ποσοστό των αθροιστικών πωλήσεων επί τις εκατό. Κατόπιν, κάναμε τη γραφική παράσταση του ποσοστού των αθροιστικών πωλήσεων επί τις εκατό (άξονας y) σε σχέση με το ποσοστό επί τις εκατό των μονάδων (άξονας x) των διατεταγμένων 122 προϊόντων μας και πήραμε την παρακάτω ABC καμπύλη, όπου βλέπουμε ότι η περιοχή A είναι η περιοχή των προϊόντων τα οποία πετυχαίνουν το 50% των

συνολικών πωλήσεων, ενώ η περιοχή C αποτελεί την περιοχή του 50% των προϊόντων που πετυχαίνουν τα χειρότερα αποτελέσματα από πλευράς όγκου πωλήσεων. Η περιοχή B είναι η ενδιάμεση περιοχή των A και C. Επιπρόσθετα, παρατηρούμε ότι ισχύει ο κανόνας '20%-80%', όπου δηλαδή το μόλις 20% των σημαντικότερων προϊόντων είναι υπεύθυνο για το 80% περίπου του συνολικού όγκου των πωλήσεων.

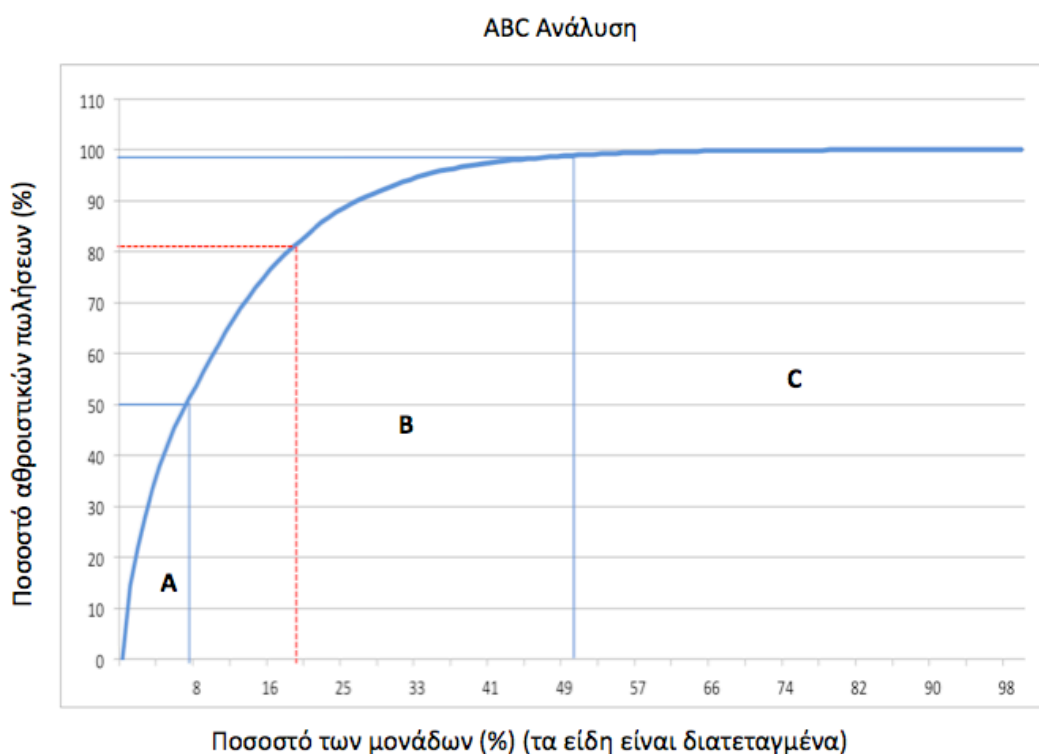


Figure 1: ABC διάγραμμα

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το τελευταίο προϊόν της κατηγορίας A είναι το 9^ο προϊόν, με ετήσιο όγκο πωλήσεων 35.841,5 50kg σακιά, δηλαδή μόλις το 7,38% των ειδών αντιπροσωπεύουν το 51,01% των συνολικών ετήσιων πωλήσεων, ενώ το τελευταίο προϊόν της κατηγορίας B είναι το 61^ο προϊόν, με ετήσιο όγκο πωλήσεων 995,5 50kg σακιά, δηλαδή το 50% των προϊόντων που είναι πιο σημαντικά (κατηγορίες A και B) είναι υπεύθυνα για το 98,87% των ετήσιων πωλήσεων της επιχείρησης.

α.α.	Περιγραφή ειδών	Ετήσιες πωλήσεις σε σακιά 50kg	Ποσοστό Αθροιστικών Πωλήσεων(%) (άξονας γ)
9.	ΑΛΕΥΡΙ ΘΡΑΚΙΩΤΙΚΟ ΚΙΤΡΙΝΟ ΧΟΝΔΡΟ	35.841,5	51,01
61.	ΑΛΕΥΡΙ ΓΕΡΜΑΝΙΚΗΣ ΣΙΚΑΛΗΣ ΟΛΙΚΗΣ ΑΛΕΣΗΣ	995,5	98,87

Πίνακας 1: Κατηγοριοποίηση προϊόντων

3.4 Συμπεράσματα

Με τη βοήθεια της ABC ανάλυσης συμπεράναμε πως τα προϊόντα που ανήκουν στην κατηγορία Α και θα πρέπει να αναλυθούν προσεχτικά από τα υπεύθυνα στελέχη της εταιρίας είναι τα 9 παρακάτω:

α.α.	Περιγραφή Προϊόντων	Ετήσιες πωλήσεις σε σακιά 50kg
1.	ΑΛΕΥΡΙ COMMON FLOUR	188.362,4
2.	ΑΛΕΥΡΙ 70% ΜΑΛΑΚΟ	95.448,6
3.	ΑΛΕΥΡΙ 70% ΔΥΝΑΤΟ	76.725,7
4.	ΑΛΕΥΡΙ ΦΙΝΟ ΦΥΛΛΟΥ	74.507,8
5.	ΑΛΕΥΡΙ ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ Μ (55 ΑΠΛΟ)	54.486,6
6.	ΑΛΕΥΡΙ ΚΡΑΦΤ ΣΗΡΙΤΑ	52.639,1
7.	ΑΛΕΥΡΙ 70% ΕΞΤΡΑ ΔΥΝΑΤΟ	46.505,5
8.	ΑΛΕΥΡΙ ΜΙΡΑΝΤΑ	36.672,4
9.	ΑΛΕΥΡΙ ΘΡΑΚΙΩΤΙΚΟ ΚΙΤΡΙΝΟ ΧΟΝΔΡΟ	35.841,5

Πίνακας 2: Προϊόντα κατηγορίας Α

Ωστόσο, πρέπει να υπογραμμίσουμε το γεγονός ότι υπάρχει περίπτωση προϊόντα τα οποία έχουν καταταγεί στην κατηγορία C, λόγω μικρού όγκου πωλήσεων, να είναι εξαιρετικής σημασίας για τους πελάτες της εταιρίας, με αποτέλεσμα να πρέπει να εξεταστούν και εκείνα ως προς άλλες παραμέτρους, για να τους αποδοθεί η κατάλληλη προσοχή και φροντίδα.

4. Το πρόβλημα της ανάμειξης

Ένα συνηθισμένο πρόβλημα επιχειρησιακής έρευνας είναι το πρόβλημα της ανάμειξης, δηλαδή η εύρεση του βέλτιστου συνδυασμού ανάμειξης της πρώτης ύλης με στόχο είτε την μεγιστοποίηση των εσόδων από την πώληση του τελικού προϊόντος είτε την ελαχιστοποίηση του κόστους ανάμειξης της πρώτης ύλης.

4.1 Εφαρμογή του προβλήματος ανάμειξης στην αλευροβιομηχανία Μύλοι Θράκης

4.1.1 Ορισμός του προβλήματος και καταγραφή δεδομένων

Επιλέξαμε τρία προϊόντα της εταιρίας (άλευρα) τα οποία παράγονται μέσω της ανάμειξης έξι διαφορετικών σιτηρών (πρώτη ύλη). Στόχος μας είναι να βρούμε τις βέλτιστες ποσότητες πρώτης ύλης που χρειαζόμαστε ώστε να επιτύχουμε το μικρότερο δυνατό κόστος παραγωγής των προϊόντων αυτών.

Για κάθε προϊόν γνωρίζουμε τρεις διαφορετικές συνταγές που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για να πάρουμε τα προϊόντα σύμφωνα με τις προδιαγραφές που απαιτούνται. Οι συνταγές αυτές, ή αλλιώς χαρμάνια όπως ονομάζονται στη γλώσσα των σιτηρών, μας δόθηκαν από το χημείο της αλευροβιομηχανίας και αποτυπώνονται στον παρακάτω πίνακα, όπου φαίνονται τα ποσοστά συμμετοχής κάθε σταριού σε κάθε χαρμάνι.

ΣΥΝΤΑΓΕΣ		Σ1	Σ2	Σ3	Σ4	Σ5	Σ6
Προϊόν 1	Χαρμάνι 1	0	0	0	0,40	0,60	0
	Χαρμάνι 2	0	0,30	0	0,20	0,50	0
	Χαρμάνι 3	0,16	0	0	0	0,84	0
Προϊόν 2	Χαρμάνι 1	0,36	0,21	0,11	0,22	0	0,10
	Χαρμάνι 2	0,20	0,30	0,20	0	0	0,30
	Χαρμάνι 3	0	0,50	0	0	0	0,50
Προϊόν 3	Χαρμάνι 1	0,50	0,34	0	0	0	0,16
	Χαρμάνι 2	0,70	0,30	0	0	0	0
	Χαρμάνι 3	0,30	0,40	0	0	0	0,30

Πίνακας 3: Συνταγές προϊόντων

Επιπρόσθετα, γνωρίζουμε τις τιμές των σιτηρών C_j , τις διαθέσιμες ποσότητές τους Σ_j , την απόδοση άλεσης α_j , καθώς και το ποσοστό γλουτένης που περιέχεται σε κάθε σίτο γ_j , και τα οποία φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

	$\Sigma 1$	$\Sigma 2$	$\Sigma 3$	$\Sigma 4$	$\Sigma 5$	$\Sigma 6$
Τιμές (€/tn)	252	218	218	205	198	197
Διαθέσιμες ποσότητες (σε tn)	2000	1000	500	3000	4000	300
Απόδοση άλεσης	0,78	0,775	0,77	0,76	0,76	0,77
Γλουτένη	0,36	0,29	0,28	0,29	0,25	0,27

Πίνακας 4: Δεδομένα ανά σιτηρό (πρώτη ύλη)

Εδώ, θα πρέπει να σημειώσουμε το γεγονός πως έχουμε τη δυνατότητα να προσθέσουμε ποσότητα ξηράς γλουτένης σε μορφή σκόνης σε κάθε χαρμάνι ώστε να επιτύχουμε για κάθε προϊόν το ποσοστό ελάχιστης απαιτούμενης γλουτένης, που είναι 0.26,0.31 και 0.50 για τα προϊόντα 1,2 και 3 αντίστοιχα. Η τιμή της ξηράς γλουτένης, C_ξ είναι 1.560 € τον τόνο.

Τέλος, είναι γνωστή η ετήσια ζήτηση των προϊόντων αυτών D_1, D_2, D_3 , που είναι 4.662,1.800 και 1.968 τόνοι, για τα προϊόντα 1,2 και 3 αντίστοιχα.

4.1.2 Μοντελοποίηση του προβλήματος

Κατόπιν, μπορούμε να προχωρήσουμε στη μοντελοποίηση του προβλήματος.

Ορισμός μεταβλητών:

Έστω

- X_{ij} , οι τόνοι σιτηρού j που θα χρησιμοποιηθούν για την παρασκευή του προϊόντος 1 με το χαρμάνι i
- Y_{ij} , οι τόνοι σιτηρού j που θα χρησιμοποιηθούν για την παρασκευή του προϊόντος 2 με το χαρμάνι i

- Z_{ij} , οι τόνοι σιτηρού j που θα χρησιμοποιηθούν για την παρασκευή του προϊόντος 3 με το χαρμάνι i
- ξ_{ip} η extra ξηρά γλουτένη για να παραχθεί το προϊόν p με τη συνταγή i

όπου $i=1,2,3$ για κάθε χαρμάνι,
 $j=1,2,3,4,5,6$ για κάθε σιτηρό και
 $p=1,2,3$ για κάθε προϊόν

Αντικειμενική συνάρτηση:

Στόχος είναι η ελαχιστοποίηση του κόστους παραγωγής των τελικών προϊόντων από την ανάμιξη της πρώτης ύλης.

$$\min C = \min \left[\left(\sum_{j=1}^6 \sum_{i=1}^3 (X_{ij} * C_j) + (Y_{ij} * C_j) + (Z_{ij} * C_j) \right) + \sum_{p=1}^3 \sum_{i=1}^3 (\xi_{ip} * C_{\xi}) \right]$$

Πιο συγκεκριμένα, για τον υπολογισμό του συνολικού κόστους που επιθυμούμε να ελαχιστοποιήσουμε, παίρνουμε τα επιμέρους αθροίσματα των γινομένων των ποσοτήτων κάθε σιτηρού που χρησιμοποιούνται για την παρασκευή κάθε προϊόντος για κάθε χαρμάνι, με τα αντίστοιχα κόστη των σιτηρών, και στη συνέχεια προσθέτουμε το γινόμενο της εξτρά γλουτένης που απαιτείται για κάθε χαρμάνι για κάθε προϊόν, με το κόστος της γλουτένης.

Περιορισμοί:

- Καταρχάς, γνωρίζοντας τη διαθέσιμη ποσότητα για κάθε σιτηρό Σ_j , $j=1,2,\dots,6$ έχουμε 6 περιορισμούς με βάση τη διαθέσιμη ποσότητα των σιτηρών:

$$\triangleright \sum_{i=1}^3 X_{i1} + Y_{i1} + Z_{i1} \leq \Sigma_1$$

$$\triangleright \sum_{i=1}^3 X_{i2} + Y_{i2} + Z_{i2} \leq \Sigma_2$$

$$\triangleright \sum_{i=1}^3 X_{i3} + Y_{i3} + Z_{i3} \leq \Sigma_3$$

$$\triangleright \sum_{i=1}^3 X_{i4} + Y_{i4} + Z_{i4} \leq \Sigma_4$$

$$\triangleright \sum_{i=1}^3 X_{i5} + Y_{i5} + Z_{i5} \leq \Sigma_5$$

$$\triangleright \sum_{i=1}^3 X_{i6} + Y_{i6} + Z_{i6} \leq \Sigma_6$$

Παίρνουμε τα συνολικά αθροίσματα των ποσοτήτων κάθε σιτηρού που χρησιμοποιούνται για την παραγωγή κάθε προϊόντος από κάθε χαρμάνι και επιθυμούμε να μην ξεπερνούν τις διαθέσιμες ποσότητες κάθε σιτηρού.

- Επιπρόσθετα, γνωρίζοντας την ετήσια ζήτηση των προϊόντων D_1, D_2, D_3 έχουμε 3 περιορισμούς με βάση την ετήσια ζήτηση κάθε προϊόντος:

$$\triangleright \sum_{j=1}^6 \sum_{i=1}^3 X_{ij} \alpha_j + \xi_{i1} \geq D_1$$

$$\triangleright \sum_{j=1}^6 \sum_{i=1}^3 Y_{ij} \alpha_j + \xi_{i2} \geq D_2$$

$$\triangleright \sum_{j=1}^6 \sum_{i=1}^3 Z_{ij} \alpha_j + \xi_{i3} \geq D_3$$

Παίρνουμε δηλαδή τα επιμέρους γινόμενα των ποσοτήτων των σιτηρών που χρησιμοποιούνται για κάθε προϊόν για κάθε χαρμάνι με την αντίστοιχη απόδοση άλεσης κάθε σιτηρού, ώστε να μετατρέψουμε τις ποσότητες σιτηρών σε ποσότητες αλεύρων, και στη συνέχεια παίρνουμε τα αθροίσματα των ποσοτήτων αυτών με τις ποσότητες εξτρά γλουτένης που προσθέτουμε για κάθε χαρμάνι για κάθε προϊόν. Το συνολικό αυτό άθροισμα απαιτούμε να είναι μεγαλύτερο ή ίσο από τη ζητούμενη ποσότητα κάθε προϊόντος.

- Επίσης, έχουμε τους περιορισμούς με βάση την ελάχιστη απαιτούμενη γλουτένη που πρέπει να περιέχεται σε κάθε προϊόν:

$$\triangleright \sum_{j=1}^6 \sum_{i=1}^3 [(X_{ij} * \alpha_j) * x_{ij}] * \gamma_j + \xi_{i1} * 2,2 \geq \Gamma_1 * (\sum_{j=1}^6 \sum_{i=1}^3 X_{ij} * \alpha_j + \xi_{i1})$$

$$\triangleright \sum_{j=1}^6 \sum_{i=1}^3 [(Y_{ij} * \alpha_j) * y_{ij}] * \gamma_j + \xi_{i2} * 2,2 \geq \Gamma_2 * (\sum_{j=1}^6 \sum_{i=1}^3 Y_{ij} * \alpha_j + \xi_{i2})$$

$$\triangleright \sum_{j=1}^6 \sum_{i=1}^3 [(Z_{ij} * \alpha_j) * z_{ij}] * \gamma_j + \xi_{i3} * 2,2 \geq \Gamma_3 * (\sum_{j=1}^6 \sum_{i=1}^3 Z_{ij} * \alpha_j + \xi_{i3})$$

όπου x_{ij}, y_{ij}, z_{ij} τα ποσοστά συμμετοχής κάθε σταριού σε κάθε χαρμάνι σύμφωνα με τις συνταγές που έχουμε για κάθε προϊόν, και $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ τα ποσοστά ελάχιστης απαιτούμενης γλουτένης κάθε προϊόντος.

Αναλυτικότερα, αφού πάρουμε τις ποσότητες των αλεύρων μετά την άλεση κάθε σιτηρού για κάθε προϊόν ($X_{ij} * \alpha_j$, $Y_{ij} * \alpha_j$ και $Z_{ij} * \alpha_j$ αντίστοιχα) και τις πολλαπλασιάσουμε με τα αντίστοιχα ποσοστά συμμετοχής των αλεύρων βάση των συνταγών (x_{ij} , y_{ij} και z_{ij}), παίρνουμε τα συνολικά αθροίσματα των γινομένων αυτών των ποσοτήτων με τα ποσοστά γλουτένης που περιέχονται σε κάθε σιτηρό, αφού προσθέσουμε και το γινόμενο της ποσότητας της εξτρά γλουτένης κάθε χαρμανιού κάθε προϊόντος με τη σταθερά 2,2. Η σταθερά αυτή μας δόθηκε από το χημείο της βιομηχανίας και μετατρέπει την ξηρά γλουτένη σε υγρή ώστε να μπορέσουμε να την προσθέσουμε στη συνολική υγρή γλουτένη που περιέχεται σε κάθε προϊόν. Στο πρώτο μέλος του περιορισμού λοιπόν έχουμε τη συνολική γλουτένη κάθε προϊόντος σε τόνους. Στο δεύτερο μέλος τώρα μετατρέπουμε το ποσοστό της ελάχιστης απαιτούμενης υγρής γλουτένης κάθε προϊόντος Γ_p , $p=1,2,3$ σε ελάχιστη απαιτούμενη ποσότητα γλουτένης σε τόνους, μέσω των γινομένων των ποσοστών αυτών με τις ποσότητες των αλεύρων που πήραμε μετά την άλεση, αφού προσθέσουμε και την ποσότητα της εξτρά γλουτένης.

4.1.3 Επίλυση του προβλήματος

Για την επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού είναι διαθέσιμη μεγάλη ποικιλία λογισμικού, κατάλληλου όχι μόνο για μεγάλους υπολογιστές, αλλά ακόμα και για προσωπικούς υπολογιστές. Για το συγκεκριμένο πρόβλημα, το οποίο είναι ένα συνηθισμένο πρόβλημα μιας μεσαίας επιχείρησης, επιλέξαμε τον επιλυτή 'Solver', ο οποίος βρίσκεται ενσωματωμένος στο φύλλο εργασίας του προγράμματος Excel.

Καταρχάς, θα πρέπει να καταχωρήσουμε κατάλληλα τα δεδομένα του προβλήματός μας στο Excel, για να μπορέσει να τα επεξεργαστεί ο solver και να μας δώσει την επιθυμητή λύση. Όπως θα δούμε παρακάτω υπάρχουν 4 είδη κελιών, εκείνα που περιέχουν τα δεδομένα του προβλήματος, τα κελιά που περιέχουν τις μεταβλητές απόφασης, τα κελιά στα οποία γίνονται οι διάφοροι υπολογισμοί, καθώς και εκείνα που περιέχουν παρατηρήσεις και σχόλια για την επεξήγηση του προβλήματος. Όλα τα είδη κελιών διακρίνονται στις παρακάτω εικόνες όπου παρουσιάζεται η δομή του υπολογιστικού φύλλου Excel που χρησιμοποιήσαμε για την επίλυση του συγκεκριμένου προβλήματος.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Δεδομένα για Σιτηρά								
2			Καζάκι	Βουλγάρικο 4Α	Βουλγάρικο 3Α	Βουλγάρικο Α	Βουλγάρικο Γ	Ελληνικό	Γλουτένη
3		Τιμές (€/tn)	252	218	218	205	198	197	1560
4		Γλουτένη	0,36	0,29	0,28	0,29	0,25	0,27	2,2
5									
6									
7	Βέλτιστες Ποσότητες Σιτηρών σε tn		Καζάκι	Βουλγάρικο 4Α	Βουλγάρικο 3Α	Βουλγάρικο Α	Βουλγάρικο Γ	Ελληνικό	Extra Γλουτένη
8	70% Μαλακό	Χαρμάνι 1	0	0	0	0	0	0	0
9		Χαρμάνι 2	0	1000	0	0	3973,35	0	0
10		Χαρμάνι 3	0	0	500	634,55	0	0	0
11	Pizza Fan	Χαρμάνι 1	1985,57	0	0	0	26,65	300,00	0
12		Χαρμάνι 2	0	0	0	0	0	0	0
13		Χαρμάνι 3	0	0	0	0	0	0	0
14	Top Αμερικής	Χαρμάνι 1	0	0	0	0	0	0	0
15		Χαρμάνι 2	0	0	0	2365,45	0	0	170,26
16		Χαρμάνι 3	0	0	0	0	0	0	0
17			1985,57	1000,00	500,00	3000,00	4000,00	300	170,26
18			<=	<=	<=	<=	<=	<=	
19	Διαθέσιμη Ποσότητα Σιτηρών		2000	1000	500	3000	4000	300	
20									
21	Απόδοση Άλεσης		0,78	0,775	0,77	0,76	0,76	0,77	1

Εικόνα 1: Βέλτιστες ποσότητες σιτηρών

	C	D	E	F	G	H	I
17	=SUM(C8:C16)	=SUM(D8:D16)	=SUM(E8:E16)	=SUM(F8:F16)	=SUM(G8:G16)	=SUM(H8:H16)	=SUM(I8:I16)

Εικόνα 2: Ενσωματωμένες συναρτήσεις του Excel για τον υπολογισμό του περιορισμού της διαθέσιμης ποσότητας σιτηρών

Αρχικά, στην εικόνα 1, στα κελιά C3:I4, C19:H19 και C21:I21 παρουσιάζονται τα πρώτα δεδομένα του προβλήματος, σχετικά με την πρώτη ύλη μας τα σιτηρά, ενώ τα κελιά C8:I16 περιέχουν τις μεταβλητές απόφασης, που στην ουσία αποτελούν τη λύση του προβλήματός μας, καθώς πρόκειται για τις βέλτιστες ποσότητες σιτηρών και ξηράς γλουτένης που πρέπει να αναμείξουμε για να έχουμε το ελάχιστο κόστος ανάμειξης. Τα υπόλοιπα κελιά περιέχουν σχόλια και κατατοπιστικές πληροφορίες. Στην εικόνα 2, και πιο συγκεκριμένα στα κελιά C17:I17 πραγματοποιούνται οι υπολογισμοί των αθροισμάτων των ποσοτήτων κάθε σιτηρού, μέσω της συνάρτησης SUM του Excel, ώστε να ικανοποιείται ο περιορισμός της διαθέσιμης ποσότητας των σιτηρών.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
48	Συνολικό Κόστος		Καζάκι	Βουλγάρικο 4A	Βουλγάρικο 3A	Βουλγάρικο A	Βουλγάρικο Γ	Ελληνικό	Γλουτένη	
49	70% Μιαλακό	Χαρμάνι 1	0	0	0	0	0	0	0	0,00 €
50		Χαρμάνι 2	0	218.000,00	0	0	786.722,55	0	0	1.004.722,55 €
51		Χαρμάνι 3	0	0	109.000,00	130.082,44	0	0	0	239.082,44 €
52	Pizza Fan	Χαρμάνι 1	500.363,16	0	0	0	5.277,44	59.100,00	0	564.740,60 €
53		Χαρμάνι 2	0	0	0	0	0	0	0	0,00 €
54		Χαρμάνι 3	0	0	0	0	0	0	0	0,00 €
55	Top Αμερικής	Χαρμάνι 1	0	0	0	0	0	0	0	0,00 €
56		Χαρμάνι 2	0	0	0	484.917,56	0	0	265.600,69	750.518,24 €
57		Χαρμάνι 3	0	0	0	0	0	0	0	0,00 €
58			500.363,16 €	218.000,00 €	109.000,00 €	615.000,00 €	791.999,99 €	59.100,00 €	265.600,69 €	2.559.063,84 €

Εικόνα 3: Συνολικό κόστος παραγωγής των 3 προϊόντων

Στην εικόνα 3 στο κελί J58 βλέπουμε την τιμή της αντικειμενικής μας συνάρτησης, που αποτελεί το συνολικό κόστος παραγωγής των 3 προϊόντων, το οποίο και επιθυμούμε να ελαχιστοποιήσουμε, ενώ στα υπολοίπα κελιά πραγματοποιούνται διάφοροι βοηθητικοί υπολογισμοί για τον ορισμό της

αντικειμενικής συνάρτησης. Πιο αναλυτικά, η αντικειμενική συνάρτηση υπολογίζεται ως το άθροισμα από τα συνολικά κόστη κάθε σταριού, τα οποία υπολογίζονται στα κελιά C58:H58, εάν σε αυτά προσθέσουμε και το συνολικό κόστος της εξτρά γλουτένης που χρησιμοποιούμε, και το οποίο υπολογίζεται στο κελί I58. Ο υπολογισμός του κόστους πραγματοποιείται μέσω του πολλαπλασιασμού των βέλτιστων ποσοτήτων κάθε σταριού (κελιά C8:H16) και εξτρά γλουτένης (κελιά I8:I16) με τα αντίστοιχα κόστη κάθε σταριού και εξτρά γλουτένης (κελιά C3:I3). Οι υπολογισμοί αυτοί πραγματοποιούνται στα κελιά C49:I57. Στην εικόνα 4, βλέπουμε αναλυτικά τη μορφή των υπολογισμών που πραγματοποιήσαμε μέσω της επιλογής show formulas που υπάρχει στο excel.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
48	Συνολικό Κόστος		Καζάκινο	Βουλγάρικο 4Α	Βουλγάρικο 3Α	Βουλγάρικο Α	Βουλγάρικο Γ	Ελληνικό	Γλουτένη	
49	70% Μαλακό	Χαρμάνι 1	=C8*C53	=D8*D53	=E8*E53	=F8*F53	=G8*G53	=H8*H53	=I8*I53	=SUM(C49:I49)
50		Χαρμάνι 2	=C9*C53	=D9*D53	=E9*E53	=F9*F53	=G9*G53	=H9*H53	=I9*I53	=SUM(C50:I50)
51		Χαρμάνι 3	=C10*C53	=D10*D53	=E10*E53	=F10*F53	=G10*G53	=H10*H53	=I10*I53	=SUM(C51:I51)
52	Pizza Fan	Χαρμάνι 1	=C11*C53	=D11*D53	=E11*E53	=F11*F53	=G11*G53	=H11*H53	=I11*I53	=SUM(C52:I52)
53		Χαρμάνι 2	=C12*C53	=D12*D53	=E12*E53	=F12*F53	=G12*G53	=H12*H53	=I12*I53	=SUM(C53:I53)
54		Χαρμάνι 3	=C13*C53	=D13*D53	=E13*E53	=F13*F53	=G13*G53	=H13*H53	=I13*I53	=SUM(C54:I54)
55	Τορ Αμερικής	Χαρμάνι 1	=C14*C53	=D14*D53	=E14*E53	=F14*F53	=G14*G53	=H14*H53	=I14*I53	=SUM(C55:I55)
56		Χαρμάνι 2	=C15*C53	=D15*D53	=E15*E53	=F15*F53	=G15*G53	=H15*H53	=I15*I53	=SUM(C56:I56)
57		Χαρμάνι 3	=C16*C53	=D16*D53	=E16*E53	=F16*F53	=G16*G53	=H16*H53	=I16*I53	=SUM(C57:I57)
58			=SUM(C49:C57)	=SUM(D49:D57)	=SUM(E49:E57)	=SUM(F49:F57)	=SUM(G49:G57)	=SUM(H49:H57)	=SUM(I49:I57)	=SUM(C58:I58)

Εικόνα 4: Ενσωματωμένες συναρτήσεις του Solver για την εύρεση του ελάχιστου συνολικού κόστους

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
23	Ποσότητες μετά από Άλεση		Καζάκινο	Βουλγάρικο 4Α	Βουλγάρικο 3Α	Βουλγάρικο Α	Βουλγάρικο Γ	Ελληνικό	Γλουτένη	Άθροισμα κάθε χαρμανιού	
24	70% Μαλακό	Χαρμάνι 1	0	0	0	0	0	0	0	0	
25		Χαρμάνι 2	0	775	0	0	3019,74	0	0	3794,74	
26		Χαρμάνι 3	0	0	385	482,26	0	0	0	867,26	4662
27	Pizza Fan	Χαρμάνι 1	1548,74	0	0	0	20,26	231	0	1800,00	
28		Χαρμάνι 2	0	0	0	0	0	0	0	0	
29		Χαρμάνι 3	0	0	0	0	0	0	0	0	1800
30	Τορ Αμερικής	Χαρμάνι 1	0	0	0	0	0	0	0	0	
31		Χαρμάνι 2	0	0	0	1797,74	0	0	170,26	1797,74	
32		Χαρμάνι 3	0	0	0	0	0	0	0	0	1968

Εικόνα 5: Ποσότητες αλεύρων

Στην εικόνα 5 βλέπουμε τις ποσότητες αλεύρων που παράγονται μετά από την άλεση των σιτηρών. Πιο συγκεκριμένα, πολλαπλασιάζοντας τις βέλτιστες ποσότητες σιτηρών (κελιά C8:H16) με την απόδοση άλεσης κάθε σιτηρού (κελιά C21:H21), παίρνουμε τις ποσότητες αλεύρων που φαίνονται στα κελιά C24:H32. Στη συνέχεια, προσθέτοντας τις ποσότητες για κάθε χαρμάνι παίρνουμε το συνολικό άθροισμα ποσοτήτων κάθε χαρμανιού, το οποίο υπολογίζεται στα κελιά J24:J32, μέσω της εντολής sum στο excel. Η ποσότητα της γλουτένης παραμένει αναλλοίωτη κατά τη διάρκεια της άλεσης, όπως φαίνεται στα κελιά I24:I32. Έτσι, προσθέτοντας και την ποσότητα της γλουτένης, παίρνουμε τη συνολική ποσότητα κάθε προϊόντος στα κελιά K26,K29 και K32 για τα προϊόντα 1,2 και 3 αντίστοιχα, όπως φαίνεται στην εικόνα 6, όπου εμφανίζονται οι εντολές που χρησιμοποιήσαμε στο excel.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
23	Ποσότητες μετά από Άλεση		Καζάκικο	Βουλγάρικο 4Α	Βουλγάρικο 3Α	Βουλγάρικο Α	Βουλγάρικο Γ	Ελληνικό	Γλουτένη	Άθροισμα κάθε χαρμανιού	
24	70% Μαλακό	Χαρμάνι 1	=C8*C\$21	=D8*D\$21	=E8*E\$21	=F8*F\$21	=G8*G\$21	=H8*H\$21	=I8*I\$21	=SUM(C24:H24)	
25		Χαρμάνι 2	=C9*C\$21	=D9*D\$21	=E9*E\$21	=F9*F\$21	=G9*G\$21	=H9*H\$21	=I9*I\$21	=SUM(C25:H25)	
26		Χαρμάνι 3	=C10*C\$21	=D10*D\$21	=E10*E\$21	=F10*F\$21	=G10*G\$21	=H10*H\$21	=I10*I\$21	=SUM(C26:H26)	=SUM(I24;I24;I25;I25;I26;I26)
27	Pizza Fan	Χαρμάνι 1	=C11*C\$21	=D11*D\$21	=E11*E\$21	=F11*F\$21	=G11*G\$21	=H11*H\$21	=I11*I\$21	=SUM(C27:H27)	
28		Χαρμάνι 2	=C12*C\$21	=D12*D\$21	=E12*E\$21	=F12*F\$21	=G12*G\$21	=H12*H\$21	=I12*I\$21	=SUM(C28:H28)	
29		Χαρμάνι 3	=C13*C\$21	=D13*D\$21	=E13*E\$21	=F13*F\$21	=G13*G\$21	=H13*H\$21	=I13*I\$21	=SUM(C29:H29)	=SUM(I27;I27;I28;I28;I29;I29)
30	Τορ Αμερικής	Χαρμάνι 1	=C14*C\$21	=D14*D\$21	=E14*E\$21	=F14*F\$21	=G14*G\$21	=H14*H\$21	=I14*I\$21	=SUM(C30:H30)	
31		Χαρμάνι 2	=C15*C\$21	=D15*D\$21	=E15*E\$21	=F15*F\$21	=G15*G\$21	=H15*H\$21	=I15*I\$21	=SUM(C31:H31)	
32		Χαρμάνι 3	=C16*C\$21	=D16*D\$21	=E16*E\$21	=F16*F\$21	=G16*G\$21	=H16*H\$21	=I16*I\$21	=SUM(C32:H32)	=SUM(I30;I30;I31;I31;I32;I32)

Εικόνα 6: Ενσωματωμένες συναρτήσεις του Excel για τον υπολογισμό των ποσοτήτων των αλεύρων

	L	M	N	O	P	Q	R	S
23	Συνταγές Σταριών		Καζάκι	Βουλγάρικο 4A	Βουλγάρικο 3A	Βουλγάρικο Α	Βουλγάρικο Γ	Ελληνικό
24	70% Μαλακό	Χαρμάνι 1	0	0	0	0,4	0,6	0
25		Χαρμάνι 2	0	0,3	0	0,2	0,5	0
26		Χαρμάνι 3	0,16	0	0	0	0,84	0
27	Pizza Fan	Χαρμάνι 1	0,36	0,21	0,11	0,22	0	0,1
28		Χαρμάνι 2	0,2	0,3	0,2	0	0	0,3
29		Χαρμάνι 3	0	0,5	0	0	0	0,5
30	Τορ Αμερικής	Χαρμάνι 1	0,5	0,34	0	0	0	0,16
31		Χαρμάνι 2	0,7	0,3	0	0	0	0
32		Χαρμάνι 3	0,3	0,4	0	0	0	0,3

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
35	Ποσότητες Συνταγών		Καζάκι	Βουλγάρικο 4A	Βουλγάρικο 3A	Βουλγάρικο Α	Βουλγάρικο Γ	Ελληνικό	Γλουτένη	Άθροισμα κάθε χαρμανιού
36	70% Μαλακό	Χαρμάνι 1	0	0	0	0	0	0	0	0
37		Χαρμάνι 2	0	1154,06	0	754,48	1886,20	0	0	3794,74
38		Χαρμάνι 3	141,82	0	0	0	725,44	0	0	867,26
39	Pizza Fan	Χαρμάνι 1	654,33	379,25	197,37	389,62	0	179,43	0	1800,00
40		Χαρμάνι 2	0	0	0	0	0	0	0	0
41		Χαρμάνι 3	0	0	0	0	0	0	0	0
42	Τορ Αμερικής	Χαρμάνι 1	0	0	0	0	0	0	0	0
43		Χαρμάνι 2	1260,84	536,90	0	0	0	0	170,26	1797,74
44		Χαρμάνι 3	0	0	0	0	0	0	0	0

Εικόνα 7: Συνταγές προϊόντων και ποσότητες συνταγών

Στο πάνω μέρος της εικόνας 7, και πιο συγκεκριμένα στα κελιά N24:S32 βλέπουμε τα ποσοστά συμμετοχής κάθε σταριού στις συνταγές που χρησιμοποιεί η εταιρία για να παράξει τα προϊόντα. Στο κάτω μέρος τώρα, και στα κελιά C36:H44 υπολογίζουμε τις ποσότητες αλεύρων που θα πάρουμε με βάση αυτές τις συνταγές. Πολλαπλασιάζουμε δηλαδή τα ποσοστά συμμετοχής κάθε σιτηρού σε κάθε χαρμάνι με το συνολικό άθροισμα των ποσοτήτων αλεύρων κάθε χαρμανιού, που είδαμε στην προηγούμενη εικόνα. Το συνολικό άθροισμα των ποσοτήτων για κάθε χαρμάνι, κελιά J36:J44 παραμένει το ίδιο, κάτι που είναι απολύτως φυσιολογικό. Αυτές οι ποσότητες θα μας βοηθήσουν για τον υπολογισμό της απαιτούμενης γλουτένης κάθε προϊόντος, κάτι το οποίο θα δούμε παρακάτω, στις εικόνες 8 και 9.

	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
35	Γλουτένη		Καζάκινο	Βουλγάρικο 4Α	Βουλγάρικο 3Α	Βουλγάρικο Α	Βουλγάρικο Γ	Ελληνικό	Ποσότητα Υγρής Γλουτένης Αλεύρου κάθε Χαρμανιού σε tn	Ξηρά Γλουτένη σε tn	Υγρή Γλουτένη από Ξηρά σε tn
36	70% Μαλακό	Χαρμάνι 1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
37		Χαρμάνι 2	0	334,68	0	218,80	471,55	0	1.025,03	0	0
38		Χαρμάνι 3	51,05	0	0	0	181,36	0	232,41	0	0
39	Pizza Fan	Χαρμάνι 1	235,56	109,98	55,26	112,99	0	48,45	562,24	0	0
40		Χαρμάνι 2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
41		Χαρμάνι 3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
42	Top Αμερικής	Χαρμάνι 1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
43		Χαρμάνι 2	453,90	155,70	0	0	0	0	609,60	170,26	374,57
44		Χαρμάνι 3	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Εικόνα 8: Ποσότητες υγρής γλουτένης

	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
35	Γλουτένη		Καζάκινο	Βουλγάρικο 4Α	Βουλγάρικο 3Α	Βουλγάρικο Α	Βουλγάρικο Γ	Ελληνικό	Ποσότητα Υγρής Γλουτένης Αλεύρου κάθε Χαρμανιού σε tn
36	70% Μαλακό	Χαρμάνι 1	=C36*C\$4	=D36*D\$4	=E36*E\$4	=F36*F\$4	=G36*G\$4	=H36*H\$4	=SUM(N36:S36)
37		Χαρμάνι 2	=C37*C\$4	=D37*D\$4	=E37*E\$4	=F37*F\$4	=G37*G\$4	=H37*H\$4	=SUM(N37:S37)
38		Χαρμάνι 3	=C38*C\$4	=D38*D\$4	=E38*E\$4	=F38*F\$4	=G38*G\$4	=H38*H\$4	=SUM(N38:S38)
39	Pizza Fan	Χαρμάνι 1	=C39*C\$4	=D39*D\$4	=E39*E\$4	=F39*F\$4	=G39*G\$4	=H39*H\$4	=SUM(N39:S39)
40		Χαρμάνι 2	=C40*C\$4	=D40*D\$4	=E40*E\$4	=F40*F\$4	=G40*G\$4	=H40*H\$4	=SUM(N40:S40)
41		Χαρμάνι 3	=C41*C\$4	=D41*D\$4	=E41*E\$4	=F41*F\$4	=G41*G\$4	=H41*H\$4	=SUM(N41:S41)
42	Top Αμερικής	Χαρμάνι 1	=C42*C\$4	=D42*D\$4	=E42*E\$4	=F42*F\$4	=G42*G\$4	=H42*H\$4	=SUM(N42:S42)
43		Χαρμάνι 2	=C43*C\$4	=D43*D\$4	=E43*E\$4	=F43*F\$4	=G43*G\$4	=H43*H\$4	=SUM(N43:S43)
44		Χαρμάνι 3	=C44*C\$4	=D44*D\$4	=E44*E\$4	=F44*F\$4	=G44*G\$4	=H44*H\$4	=SUM(N44:S44)

Εικόνα 9: Υπολογισμός υγρής γλουτένης

Τις παραπάνω ποσότητες χρησιμοποιούμε για τον υπολογισμό της υγρής γλουτένης που περιέχεται σε κάθε χαρμάνι, οι οποίες υπολογίζονται στα κελιά T36:T44, ως το άθροισμα των κελιών N36:S36,N37:S37,...,N44:S44, όπου γίνονται οι επιμέρους πολλαπλασιασμοί των ποσοτήτων των συνταγών με τα ποσοστά γλουτένης που περιέχεται σε κάθε αλεύρι. Στα κελιά V36:V44, υπολογίζουμε την ποσότητα υγρής γλουτένης που θα έχουμε από την προσθήκη της εξτρά ξηρής γλουτένης(κελιά U36:U44), αν την πολλαπλασιάσουμε με τον συντελεστή 2,2, όπως μας υπέδειξαν από το χημείο της βιομηχανίας. Δηλαδή, είναι γνωστό πως μία μονάδα ξηράς γλουτένης αντιστοιχεί σε 2,2 μονάδες υγρής γλουτένης.

	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD
35	Ποσότητα Υγρής Γλουτένης Τελικού Μίγματος σε tn		Ελάχιστη Απαιτούμενη Γλουτένη σε tn	% Ελάχιστη απαιτούμενη υγρή γλουτένη	Μάζα Τελικού Μίγματος σε tn	Σύνολο Ποσότητας για κάθε Είδος Αλεύρου σε tn		Περιορισμός Ελάχιστης Ποσότητας
36	0	>=	0	0,26	0		>=	
37	1.025,03	>=	986,63	0,26	3.794,74		>=	
38	232,41	>=	225,49	0,26	867,26	4.662,00	>=	4662
39	562,24	>=	558,00	0,31	1.800,00		>=	
40	0	>=	0	0,31	0		>=	
41	0	>=	0	0,31	0	1.800,00	>=	1800
42	0	>=	0	0,50	0		>=	
43	984,17	>=	984,00	0,50	1.968,00		>=	
44	0	>=	0	0,50	0	1.968,00	>=	1968

Εικόνα 10: Υπολογισμός περιορισμών ελάχιστης απαιτούμενης γλουτένης και ζητούμενης ποσότητας προϊόντων

	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD
35	Ποσότητα Υγρής Γλουτένης Τελικού Μίγματος σε tn		Ελάχιστη Απαιτούμενη Γλουτένη σε tn	% Ελάχιστη απαιτούμενη υγρή γλουτένη	Μάζα Τελικού Μίγματος σε tn	Σύνολο Ποσότητας για κάθε Είδος Αλεύρου σε tn		Περιορισμός Ελάχιστης Ποσότητας
36	=SUM(T36+V36)	>=	=Z36*AA36	0,26	=J36+U36		>=	
37	=SUM(T37+V37)	>=	=Z37*AA37	0,26	=J37+U37		>=	
38	=SUM(T38+V38)	>=	=Z38*AA38	0,26	=J38+U38	=SUM(AA36:AA38)	>=	4662
39	=SUM(T39+V39)	>=	=Z39*AA39	0,31	=J39+U39		>=	
40	=SUM(T40+V40)	>=	=Z40*AA40	0,31	=J40+U40		>=	
41	=SUM(T41+V41)	>=	=Z41*AA41	0,31	=J41+U41	=SUM(AA39:AA41)	>=	1800
42	=SUM(T42+V42)	>=	=Z42*AA42	0,5	=J42+U42		>=	
43	=SUM(T43+V43)	>=	=Z43*AA43	0,5	=J43+U43		>=	
44	=SUM(T44+V44)	>=	=Z44*AA44	0,5	=J44+U44	=SUM(AA42:AA44)	>=	1968

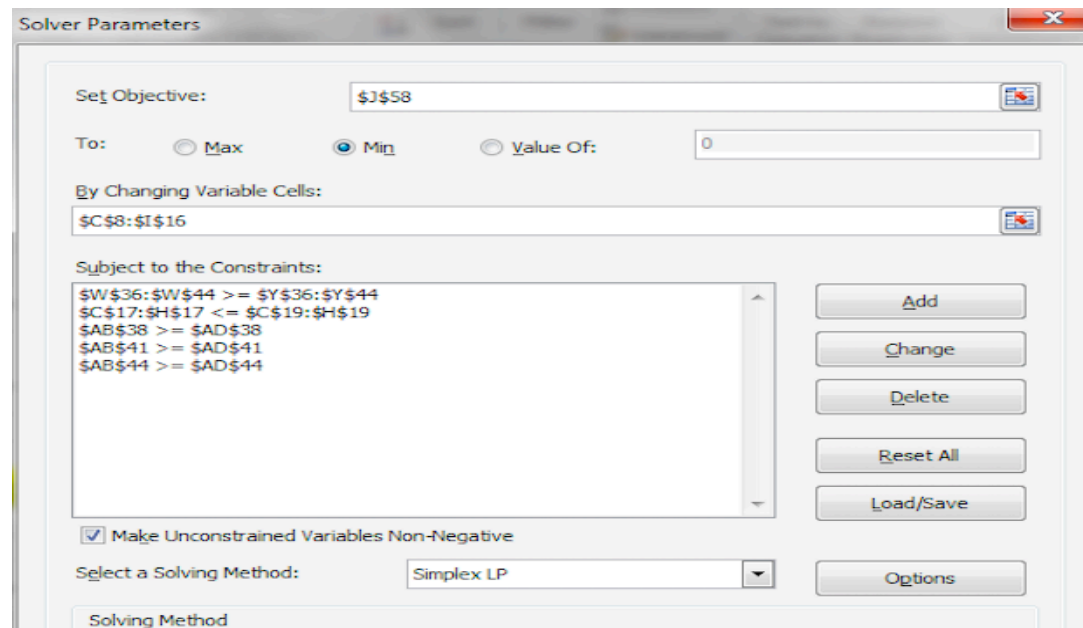
Εικόνα 11: Ενσωματωμένες συναρτήσεις στο Excel για την ικανοποίηση των περιορισμών ελάχιστης απαιτούμενης γλουτένης και ζητούμενης ποσότητας προϊόντων

Στη συνέχεια, στην εικόνα 10 βλέπουμε τους υπολογισμούς που πραγματοποιήσαμε προκειμένου να ικανοποιηθούν οι περιορισμοί της ελάχιστης απαιτούμενης υγρής γλουτένης που θα πρέπει να περιέχεται σε κάθε προϊόν, καθώς και ο περιορισμός της ελάχιστης ετήσιας ζήτησης των τριών προϊόντων, ενώ στην εικόνα 11 μέσω της εντολής show formulas του Excel βλέπουμε τις ενσωματωμένες συναρτήσεις του προγράμματος, τις οποίες χρησιμοποιήσαμε. Πιο συγκεκριμένα, στα κελιά W36:W44 υπολογίζουμε την τελική ποσότητα υγρής γλουτένης του τελικού μίγματος σε τόνους, αθροίζοντας τις ποσότητες υγρής γλουτένης κάθε χαρμανιού (κελιά T36:T44) με τις ποσότητες υγρής γλουτένης που έχουμε από τη μετατροπή της ξηράς γλουτένης σε υγρή (κελιά V36:V44). Επιπλέον, θέλουμε να υπολογίσουμε την ελάχιστη ποσότητα απαιτούμενης γλουτένης σε τόνους (κελιά Y36:Y44), ενώ γνωρίζουμε

το ποσοστό ελάχιστης απαιτούμενης γλουτένης (κελιά Z36:Z44), σύμφωνα με τις προδιαγραφές κάθε προϊόντος. Για τον συγκεκριμένο υπολογισμό είναι απαραίτητο να βρούμε την συνολική μάζα του τελικού μίγματος αλεύρων και ξηρής γλουτένης για κάθε χαρμάνι (κελιά AA36:AA44), η οποία εύκολα υπολογίζεται ως το άθροισμα των ποσοτήτων αλεύρων κάθε χαρμανιού και των ποσοτήτων εξτρά γλουτένης που προσθέτουμε σε κάθε χαρμάνι. Πολλαπλασιάζοντας λοιπόν, την συνολική μάζα του τελικού μίγματος με τα ποσοστά της ελάχιστης απαιτούμενης γλουτένης παίρνουμε τους περιορισμούς ελάχιστης απαιτούμενης γλουτένης όπως φαίνεται στα κελιά W36:Y44. Τέλος, στα κελιά AB38:AD38, AB41:AD41 και AB44:AD44 παίρνουμε τους περιορισμούς με βάση την ετήσια ζήτηση κάθε προϊόντος.

4.1.4 Αποτελέσματα – Συμπεράσματα

Έχοντας καταχωρήσει κατάλληλα τα δεδομένα μας λοιπόν, παίρνουμε τα επιθυμητά αποτελέσματα, χρησιμοποιώντας τον επιλυτή Solver του Excel όπως φαίνεται στην εικόνα 12.



Εικόνα 12: Ο επιλυτής Solver του Excel για το πρόβλημά μας

Αρχικά, ορίζουμε το κελί της αντικειμενικής μας συνάρτησης (Set Objective) ως το κελί J58, την οποία επιθυμούμε να ελαχιστοποιήσουμε (min), αφού αναζητούμε τον τρόπο ανάμειξης της πρώτης ύλης που θα μας δώσει το ελάχιστο κόστος παραγωγής των τριών προϊόντων που έχουμε επιλέξει. Στη συνέχεια, ορίζουμε τα κελιά που περιέχουν τις μεταβλητές απόφασεις (By Changing Variables Cells), τα οποία είναι τα C8:I16 και αφορούν τις βέλτιστες ποσότητες πρώτης ύλης που θα πρέπει να αναμειξουμε. Επιπρόσθετα, θέτουμε τα κελιά που αφορούν τους περιορισμούς που θα πρέπει να ικανοποιούνται (Subject to the Constraints). Πιο αναλυτικά, ο πρώτος περιορισμός W36:W44 \geq Y36:Y44, αφορά τον περιορισμό της ελάχιστης απαιτούμενης γλουτένης που πρέπει να περιέχεται σε κάθε προϊόν ανεξαρτήτως του χαρμανιού, δηλαδή ανεξαρτήτως του τρόπου ανάμειξης της πρώτης ύλης. Ο δεύτερος περιορισμός C17:H17 \leq C19:H19, αφορά τους έξι περιορισμούς διάθεσιμης ποσότητας κάθε σιτηρού, ενώ οι άλλοι τρεις περιορισμοί AB38 \geq AD38, AB41 \geq AD41 και AB44 \geq AD44 αφορούν τους περιορισμούς ετήσιας ζήτησης των τριών προϊόντων. Τέλος, επιλέγουμε ως μέθοδο επίλυσης (Select a Solving Method) τη μέθοδο Simplex LP, καθώς πρόκειται για ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού (Linear Programming).

Αφήνουμε τον solver να τρέξει μέσω της επιλογής "Solve" και λαμβάνουμε τα αποτελέσματα μας. Παρατηρούμε ότι ικανοποιούνται όλοι οι περιορισμοί που έχουμε θέσει. Επίσης, βλέπουμε ότι η αντικειμενική μας συνάρτηση παίρνει την τιμή 2.559.063,84 €, την οποία αν διαιρέσουμε με την συνολική παραγόμενη ποσότητα των 3 προϊόντων που είναι 8.430 τόνοι, συμπεραίνουμε πως η βέλτιστη ανάμειξη της πρώτης ύλης δίνει ελάχιστο συνολικό κόστος 303,57 € ανά τόνο.

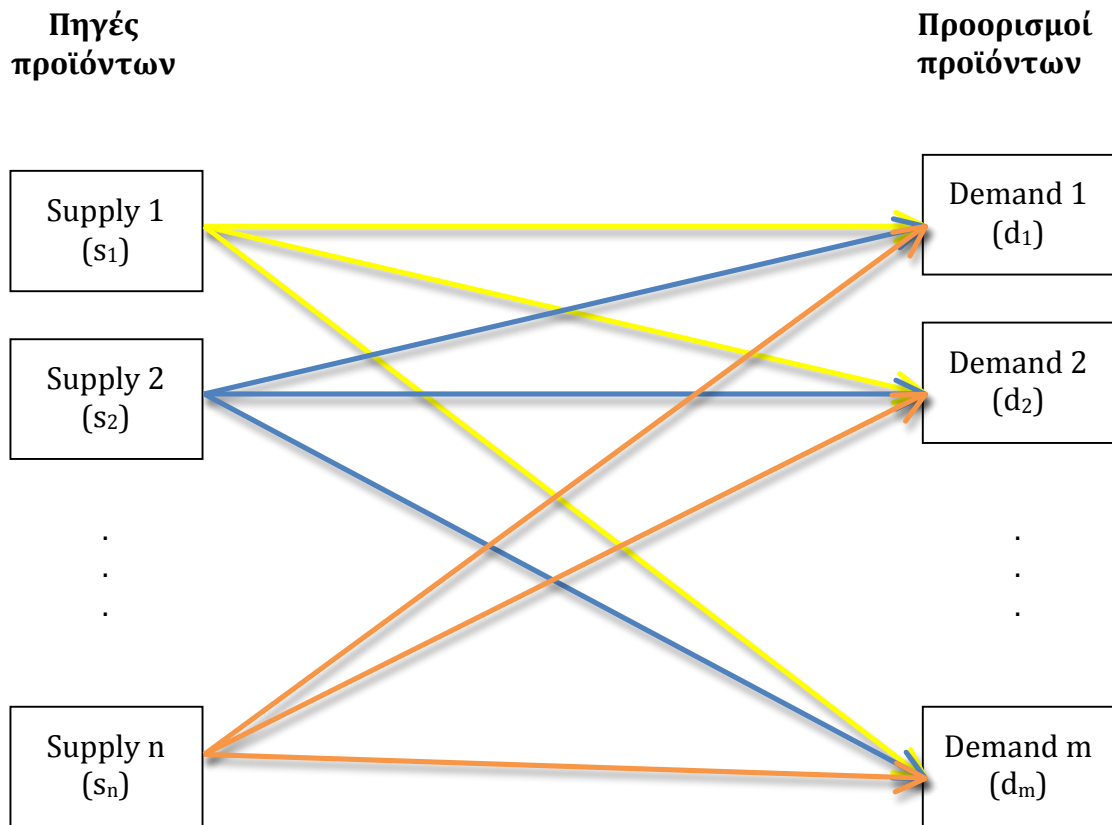
5. Το πρόβλημα της μεταφοράς

5.1 Εισαγωγή

Το πρόβλημα της μεταφοράς ανήκει στην ευρύτερη κατηγορία των προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού της Επιχειρησιακής Έρευνας. Το βασικό θέμα που πραγματεύεται το πρόβλημα της μεταφοράς είναι η αποστολή προϊόντων προερχόμενων από διάφορες πηγές σε διάφορους προορισμούς με το βέλτιστο τρόπο μεταφοράς. Κάθε επιχείρηση επιθυμεί να προσδιορίσει ένα βέλτιστο πλάνο μεταφοράς που να μειώνει στο ελάχιστο το συνολικό κόστος μεταφοράς, ενώ παράλληλα να ικανοποιούνται οι περιορισμοί προσφοράς και ζήτησης των προϊόντων. Αρχικά, ορίζεται το γενικό πρόβλημα, και στη συνέχεια παρουσιάζεται μια εφαρμογή του στην αλευροβιομηχανία Μύλοι Θράκης.

5.2 Ορισμός του προβλήματος της μεταφοράς

Έστω ότι υπάρχουν n πηγές προϊόντων και m προορισμοί. Ορίζουμε ως c_{ij} , όπου $i=1,2,\dots,n$ και $j=1,2,\dots,m$ το κόστος μεταφοράς ανά μονάδα προϊόντος, από την i -οστή πηγή στον j -οστό προορισμό, και ως x_{ij} την ποσότητα που μεταφέρεται από την αντίστοιχη πηγή στον αντίστοιχο προορισμό, με το κόστος μεταφοράς να είναι ανάλογο του αριθμού των μονάδων που μεταφέρονται σε μια συγκεκριμένη διαδρομή. Επιπρόσθετα, ονομάζουμε s_i , $i=1,2,\dots,n$ την προσφερόμενη ποσότητα από την i -οστή πηγή, και d_j , $j=1,2,\dots,m$ τη ζητούμενη ποσότητα του j -οστού προορισμού. Σκοπός μας είναι να υπολογίσουμε τις τιμές των x_{ij} που ελαχιστοποιούν το συνολικό κόστος μεταφοράς, ικανοποιώντας παράλληλα τους περιορισμούς προσφοράς και ζήτησης.



Αφού ορίσαμε τις μεταβλητές μας, μπορούμε να προχωρήσουμε στη μαθηματική μοντελοποίηση του γενικού προβλήματος μεταφοράς:

Αντικειμενική συνάρτηση:

$$\text{minimize Cost} = \min c = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m C_{ij} X_{ij}$$

Υπό τους περιορισμούς:

$$\sum_{j=1}^m X_{ij} \leq s_i, i=1,2,\dots,n \text{ (περιορισμοί προσφοράς πηγών)}$$

$$\sum_{i=1}^n X_{ij} \geq d_j, j=1,2,\dots,m \text{ (περιορισμοί ζήτησης προορισμών)}$$

$X_{ij} \geq 0$, $i=1,2,\dots,n$ και $j=1,2,\dots,m$ (περιορισμοί μη αρνητικότητας)

Η δομή του συγκεκριμένου μοντέλου στηρίζεται στην προϋπόθεση ότι η συνολική προσφορά $\sum_{i=1}^n S_i$ είναι ίση με τη συνολική ζήτηση $\sum_{j=1}^m d_j$. Σε αυτή την περίπτωση, οι περιορισμοί ικανοποιούνται ως ισότητες. Εάν ένα πρόβλημα δεν είναι ισορροπημένο, μπορούμε να το μετατρέψουμε σε ισορροπημένο προσθέτοντας είτε μια υποθετική πηγή, σε περίπτωση που έχουμε υπερβάλλουσα ζήτηση, είτε έναν υποθετικό προορισμό, σε περίπτωση που έχουμε υπερβάλλουσα προσφορά.

5.3 Εφαρμογή του προβλήματος μεταφοράς στην αλευροβιομηχανία

Μύλοι Θράκης

5.3.1 Ορισμός του προβλήματος

Στην παρούσα ενότητα, αναλύεται το πρόβλημα της μεταφοράς των προϊόντων της αλευροβιομηχανίας Μύλοι Θράκης. Σκοπός μας είναι η εύρεση ενός βέλτιστου πλάνου μεταφοράς των προϊόντων της επιχείρησης ανά την Ελλάδα.

Το εργοστάσιο της επιχείρησης βρίσκεται στην έδρα της εταιρίας στην Αλεξανδρούπολη, όπου υπάρχουν ιδιόκτητες αποθήκες για τα προϊόντα. Επίσης, η εταιρία νοικιάζει αποθηκευτικούς χώρους σε Θεσσαλονίκη και Αθήνα, ώστε να μπορεί να επιτυγχάνει τη διασπορά των προϊόντων στον Ελλαδικό χώρο. Επομένως, υπάρχουν 3 «πηγές» προϊόντων η Έδρα, η Θεσσαλονίκη και η Αθήνα, για καθεμία εκ των οποίων γνωρίζουμε τη δυναμικότητά της.

Επιπρόσθετα, επιλέγουμε 20 από τους 55 συνολικά προορισμούς προϊόντων της επιχείρησης, για τους οποίους γνωρίζουμε τη συνολική ετήσια ζήτησή τους. Η επιλογή αυτή έγινε θέτοντας ως πρωταρχικό στόχο τη διασπορά των προϊόντων στο σύνολο της ελληνικής επικράτειας, λαμβάνοντας υπόψιν τους πιο αντιπροσωπευτικούς προορισμούς ανά την Ελλάδα. Επιπλέον, η

σύμπτυξη αυτή των προορισμών επιτεύχθηκε θεωρώντας ως έναν προορισμό τους νομούς οι οποίοι έχουν τα ίδια κόστη μεταφοράς των προϊόντων από κάθε αποθήκη. Παραδείγματος χάρη, θεωρήσαμε ως έναν προορισμό με την ονομασία Θεσσαλία τους νομούς Μαγνησίας, Καρδίτσας, Τρικάλων και Λάρισας, αφού το κόστος μεταφοράς των προϊόντων σε καθέναν από τους παραπάνω προορισμούς και από τις τρεις αποθήκες παραμένει αναλλοίωτο. Έτσι, συμπτήξαμε τους προορισμούς ανά την Ελλάδα από 55 σε 20.

Παίρνουμε λοιπόν τον παρακάτω πίνακα (πίνακας 5), οποίος περιέχει τα κόστη μεταφοράς σε ευρώ ανά τόνο των προϊόντων της επιχειρήσης από τις 3 αποθήκες-πηγές προς τους 20 προορισμούς ανά την Ελλάδα, καθώς και τη δυναμικότητα (προσφορά) κάθε αποθήκης, όπως και τη συνολική ετήσια ζήτηση κάθε προορισμού, ώστε επιλύοντας το πρόβλημα αυτό να αποφασίσουμε ποια αποθήκη θα πρέπει να προμηθεύει ποιον προορισμό.

ΑΠΟ/ΠΡΟΣ	ΕΔΡΑ	ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ	ΑΘΗΝΑ	ΖΗΤΗΣΗ (σε tn)
ΕΒΡΟ	27	100	100	1.714,412
ΑΤΤΙΚΗ	58	60	66	13.480,231
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ	49	57	100	3.755,221
ΘΕΣΣΑΛΙΑ	77	85	84	1.262,855
ΗΠΕΙΡΟ	62	70	84	536,090
ΚΡΗΤΗ	68	100	76	1.908,315
ΚΥΚΛΑΔΕΣ	83	100	91	157,004
ΔΩΔΕΚΑΝΗΣΑ	85	100	93	1.053,075
ΕΥΒΟΙΑ	60	100	68	362,735
ΚΕΡΚΥΡΑ	47	55	100	202,285
ΧΑΛΚΙΔΙΚΗ	55	63	100	311,515
ΑΡΓΟΛΙΔΑ	57	100	65	465,540
ΜΕΣΣΗΝΙΑ	67	100	75	190,892
ΑΙΤΩΛΟΑΚΑΡΝΑΝΙΑ	76	65	79	69,725
ΦΘΙΩΤΙΔΑ	61	55	69	308,940
ΠΕΛΛΑ	55	63	100	524,325
ΣΕΡΡΕΣ	40	60	100	665,760
ΛΕΣΒΟ	50	65	69	342,040
ΣΑΜΟ	45	100	61	332,090
ΚΕΦΑΛΛΟΝΙΑ	76	70	84	156,950
ΠΡΟΣΦΟΡΑ (σε tn)	14.500	5.000	8.300	27.800

Πίνακας 5: Τα κόστη μεταφοράς των προϊόντων

5.3.2 Μοντελοποίηση του προβλήματος

Ορισμός μεταβλητών:

Έστω X_{ij} οι ποσότητες αποστολής των προϊόντων σε τόνους από κάθε αποθήκη σε κάθε προορισμό, όπου $i=1,2,3$ για τις 3 αποθήκες και $j=1,2,3,\dots,20$ για τους 20 προορισμούς.

Αντικειμενική συνάρτηση:

Επιθυμούμε να ελαχιστοποιήσουμε το κόστος μεταφοράς των προϊόντων από τις αποθήκες στους προορισμούς:

$$\text{Minimize cost} = \min C = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^{20} C_{ij} X_{ij},$$

όπου C_{ij} το κόστος μεταφοράς των προϊόντων από την αποθήκη i στον προορισμό j

Υπό τους περιορισμούς:

Περιορισμοί προσφοράς:

$$\sum_{j=1}^{20} X_{1j} \leq 14.500 \text{ tn, περιορισμός προσφοράς αποθήκης } \mathbf{\text{Έδρας}} \text{ (Αλεξ/πόλη)}$$

$$\sum_{j=1}^{20} X_{2j} \leq 5.000 \text{ tn, περιορισμός προσφοράς αποθήκης } \mathbf{\text{Θεσσαλονίκης}}$$

$$\sum_{j=1}^{20} X_{3j} \leq 8.300 \text{ tn, περιορισμός προσφοράς αποθήκης } \mathbf{\text{Αθήνας}}$$

Περιορισμοί ζήτησης:

$$\sum_{i=1}^3 X_{i1} \geq 1.714,412 \text{ tn, περιορισμός ζήτησης νομού Έβρου}$$

$$\sum_{i=1}^3 X_{i2} \geq 13.480,231 \text{ tn, περιορισμός ζήτησης νομού Αττικής}$$

.

.

.

$$\sum_{i=1}^3 X_{i20} \geq 156,950 \text{ tn, περιορισμός ζήτησης νομού Κεφαλληνίας}$$

Περιορισμός μη αρνητικότητας:

$$X_{ij} \geq 0 \text{ για } i=1,2,3 \text{ και } j=1,2,\dots,20.$$

5.3.3 Επίλυση του προβλήματος - Ο αλγόριθμος του προβλήματος της μεταφοράς

Το συγκεκριμένο πρόβλημα θα επιλυθεί με τη βοήθεια του αλγορίθμου των προβλημάτων μεταφοράς. Η μέθοδος αυτή ξεκινά με την εύρεση μιας αρχικής βασικής εφικτής λύσης, η οποία εντοπίζεται με συγκεκριμένη μεθοδολογία. Στη συνέχεια, μέσω ενός κριτηρίου τερματισμού αποφασίζονται τα επόμενα βήματα. Αν ικανοποιείται το κριτήριο, έχει εντοπιστεί η βέλτιστη λύση, διαφορετικά πηγαίνουμε στο τρίτο βήμα με στόχο την περαιτέρω βελτίωση της τρέχουσας λύσης. Στο τέλος κάθε επανάληψης, πραγματοποιείται ο έλεγχος του κριτηρίου τερματισμού.

Πιο συγκεκριμένα, ο εντοπισμός της αρχικής λύσης πραγματοποιείται με μια από τις παρακάτω 3 μεθόδους:

- Μέθοδος Βορειοδυτικής Γωνίας
- Μέθοδος Ελάχιστου Κόστους
- Μέθοδος Vogel

Για το πρόβλημά μας, επιλέχθηκε η μέθοδος Vogel, καθώς τις περισσότερες φορές παράγει τη λύση που δίνει την καλύτερη τιμή στην αντικειμενική συνάρτηση.

5.3.3.1 Εύρεση αρχικής λύσης μέσω της μεθόδου Vogel

Όπως είδαμε και στον γενικό ορισμό του προβλήματος της μεταφοράς, σε κάθε πρόβλημα υπεισέρχονται m περιορισμοί προσφοράς και n περιορισμοί ζήτησης, δηλαδή συνολικά έχουμε $m+n$ περιορισμούς. Στα ισορροπημένα προβλήματα ωστόσο, όπως είναι και αυτό που μελετάμε, ένας περιορισμός είναι περιττός. Οδηγούμαστε λοιπόν σε ένα μοντέλο με $m+n-1$ ανεξάρτητες εξισώσεις περιορισμών, με αποτέλεσμα η βασική λύση να αποτελείται από $m+n-1$ βασικές μεταβλητές. Στο παράδειγμά μας, έχουμε $20+3-1=22$ βασικές μεταβλητές, άρα τόσες είναι και οι μεταβλητές που περιμένουμε να υπάρχουν στη λύση μας.

Η μέθοδος αυτή λαμβάνει υπόψη της το κόστος μεταφοράς ανά μονάδα προϊόντος. Θεωρούμε, λοιπόν, τον πίνακα με τα κόστη μεταφοράς που περιέχει τη συνολική προσφορά των αποθηκών και τη συνολική ζήτηση των προορισμών.

Σε κάθε επανάληψη της διαδικασίας υπολογίζουμε για κάθε γραμμή και για κάθε στήλη τη διαφορά ανάμεσα στα δύο μικρότερα κόστη, τα οποία αποτελούν και τα αντίστοιχα κόστη ευκαιρίας που προκύπτουν για την επιχείρηση, όταν δεν χρησιμοποιεί την καλύτερη δυνατή διαδρομή. Έπειτα, επιλέγουμε τη γραμμή ή τη στήλη στην οποία αντιστοιχεί η μεγαλύτερη διαφορά. Σε περίπτωση που υπάρχουν ισοδύναμες επιλογές, τότε η επιλογή είναι αυθαίρετη. Στη συγκεκριμένη γραμμή ή στήλη, επιλέγουμε το κελί που έχει το μικρότερο κόστος μεταφοράς ανά μονάδα προϊόντος και εκχωρούμε όσο το δυνατόν περισσότερες μονάδες προϊόντος, σεβόμενοι τους περιορισμούς προσφοράς και ζήτησης. Στη συνέχεια, προσαρμόζουμε κατάλληλα την προσφορά της αντίστοιχης στήλης και τη ζήτηση της αντίστοιχης γραμμής και διαγράφουμε τη γραμμή (αντίστοιχα στήλη) της οποίας η ζήτηση(προσφορά) έχει εξαντληθεί.

Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία για το νέο πίνακα που προκύπτει μέχρι να εξαντληθεί όλη η προσφορά και ταυτόχρονα να ικανοποιηθεί όλη η ζήτηση.

Για το παράδειγμά μας, παρουσιάζουμε τον αρχικό πίνακα (εικόνα 13) με τα κόστη μεταφοράς στον οποίο υπολογίζουμε όλες τις διαφορές με τον τρόπο που περιγράψαμε.

	A	B	C	D	E	F
1	ΑΠΟ/ΠΡΟΣ	ΕΔΡΑ	ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ	ΑΘΗΝΑ	ΖΗΤΗΣΗ	ΔΙΑΦΟΡΕΣ
2	ΕΒΡΟ	27	100	100	1.714,41	73
3	ΑΤΤΙΚΗ	58	60	66	13.480,23	2
4	ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ	49	57	100	3.755,22	8
5	ΘΕΣΣΑΛΙΑ	77	85	84	1.262,86	7
6	ΗΠΕΙΡΟ	62	70	84	536,09	8
7	ΚΡΗΤΗ	68	100	76	1.908,32	8
8	ΚΥΚΛΑΔΕΣ	83	100	91	157,00	8
9	ΔΩΔΕΚΑΝΗΣΑ	85	100	93	1.053,08	8
10	ΕΥΒΟΙΑ	60	100	68	362,74	8
11	ΚΕΡΚΥΡΑ	47	55	100	202,29	8
12	ΧΑΛΚΙΔΙΚΗ	55	63	100	311,52	8
13	ΑΡΓΟΛΙΔΑ	57	100	65	465,54	8
14	ΜΕΣΣΗΝΙΑ	67	100	75	190,89	8
15	ΑΙΤΩΛΟΑΚΑΡΝΑΝΙΑ	76	65	79	69,73	11
16	ΦΘΙΩΤΙΔΑ	61	55	69	308,94	6
17	ΠΕΛΛΑ	55	63	100	524,33	8
18	ΣΕΡΡΕΣ	40	60	100	665,76	20
19	ΛΕΣΒΟ	50	65	69	342,04	15
20	ΣΑΜΟ	45	100	61	332,09	16
21	ΚΕΦΑΛΛΟΝΙΑ	76	70	84	156,95	6
22	ΠΡΟΣΦΟΡΑ	14.500	5.000	8.300		
23	ΔΙΑΦΟΡΕΣ	13	2	4		

Εικόνα 13: Αρχικός πίνακας διαφορών μεθόδου Vogel

Η μέγιστη διαφορά στα κόστη προκύπτει στη 1η γραμμή και έχει τιμή ίση με 73. Επομένως, επιλέγουμε την πρώτη γραμμή (ΕΒΡΟΣ) και μέσα σε αυτή, στο κελί με το μικρότερο κόστος, 'ΕΔΡΑ-ΕΒΡΟΣ' (27), εκχωρούμε 1.714,41 μονάδες, που είναι η μέγιστη επιτρεπόμενη ποσότητα (ζήτηση < προσφοράς). Ενημερώνουμε τη ζήτηση και την προσφορά της γραμμής και της στήλης του κελιού 'ΕΔΡΑ-ΕΒΡΟΣ'.

$$\text{Νέα προσφορά από ΕΔΡΑ } 14.500 - 1.714,41 = 12.785,59$$

$$\text{Νέα ζήτηση από ΕΒΡΟ } 1.714,41 - 1.714,41 = 0$$

Άρα διαγράφουμε την 1η γραμμή και υπολογίζουμε τις νέες διαφορές, όπως φαίνεται στην εικόνα 14.

	A	B	C	D	E	F
1	ΑΠΟ/ΠΡΟΣ	ΕΔΡΑ	ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ	ΑΘΗΝΑ	ΖΗΤΗΣΗ	ΔΙΑΦΟΡΕΣ
2	ΕΒΡΟ	27	100	100	0	73
3	ΑΤΤΙΚΗ	58	60	66	13.480,23	2
4	ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ	49	57	100	3.755,22	8
5	ΘΕΣΣΑΛΙΑ	77	85	84	1.262,86	7
6	ΗΠΕΙΡΟ	62	70	84	536,09	8
7	ΚΡΗΤΗ	68	100	76	1.908,32	8
8	ΚΥΚΛΑΔΕΣ	83	100	91	157,00	8
9	ΔΩΔΕΚΑΝΗΣΑ	85	100	93	1.053,08	8
10	ΕΥΒΟΙΑ	60	100	68	362,74	8
11	ΚΕΡΚΥΡΑ	47	55	100	202,29	8
12	ΧΑΛΚΙΔΙΚΗ	55	63	100	311,52	8
13	ΑΡΓΟΛΙΔΑ	57	100	65	465,54	8
14	ΜΕΣΣΗΝΙΑ	67	100	75	190,89	8
15	ΑΙΤΩΛΟΑΚΑΡΝΑΝΙΑ	76	65	79	69,73	11
16	ΦΘΙΩΤΙΔΑ	61	55	69	308,94	6
17	ΠΕΛΛΑ	55	63	100	524,33	8
18	ΣΕΡΡΕΣ	40	60	100	665,76	20
19	ΛΕΣΒΟ	50	65	69	342,04	15
20	ΣΑΜΟ	45	100	61	332,09	16
21	ΚΕΦΑΛΛΟΝΙΑ	76	70	84	156,95	6
22	ΠΡΟΣΦΟΡΑ	12.785,59	5.000	8.300		
23	ΔΙΑΦΟΡΕΣ	13	2	4		
24		5	2	4		

Εικόνα 14: Πίνακας νέων διαφορών μεθόδου Vogel

Επαναλαμβάνοντας την συγκεκριμένη διαδικασία μέχρι να εξαντληθεί όλη η προσφορά και ταυτόχρονα να ικανοποιηθεί όλη η ζήτηση παίρνουμε τους παρακάτω δύο πίνακες:

	A	B	C	D	E	F	G
1	ΑΠΟ/ΠΡΟΣ	ΕΔΡΑ	ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ	ΑΘΗΝΑ	ΖΗΤΗΣΗ	ΔΙΑΦΟΡΕΣ	
2	ΕΒΡΟ	27	100	100	0	73	
3	ΑΤΤΙΚΗ	58	60	66	0	2	
4	ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ	49	57	100	0	8	
5	ΘΕΣΣΑΛΙΑ	77	85	84	0	7	
6	ΗΠΕΙΡΟ	62	70	84	0	8	
7	ΚΡΗΤΗ	68	100	76	0	8	
8	ΚΥΚΛΑΔΕΣ	83	100	91	0	8	
9	ΔΩΔΕΚΑΝΗΣΑ	85	100	93	0	8	
10	ΕΥΒΟΙΑ	60	100	68	0	8	
11	ΚΕΡΚΥΡΑ	47	55	100	0	8	
12	ΧΑΛΚΙΔΙΚΗ	55	63	100	0	8	
13	ΑΡΓΟΛΙΔΑ	57	100	65	0	8	
14	ΜΕΣΣΗΝΙΑ	67	100	75	0	8	
15	ΑΙΤΩΛΟΑΚΑΡΝΑΝΙΑ	76	65	79	0	11	
16	ΦΘΙΩΤΙΔΑ	61	55	69	0	6	
17	ΠΕΛΛΑ	55	63	100	0	8	
18	ΣΕΡΡΕΣ	40	60	100	0	20	
19	ΛΕΣΒΟ	50	65	69	0	15	
20	ΣΑΜΟ	45	100	61	0	16	
21	ΚΕΦΑΛΛΟΝΙΑ	76	70	84	0	6	14
22	ΠΡΟΣΦΟΡΑ	0	0	0			
23	ΔΙΑΦΟΡΕΣ	13	2	4			
24		5	5	1			
25		2	10	3			
26		2		18			
27		8					
28		2					
29		2					
30		3					
31		3					
32		18					

Εικόνα 15: Πίνακας με το σύνολο των διαφορών της μεθόδου Vogel

Στην εικόνα 15 φαίνονται οι υπολογισμοί όλων των διαφορών μέχρι να μηδενιστούν η συνολική προσφορά και η συνολική ζήτηση, ενώ στην εικόνα 16 φαίνονται οι ποσότητες που εκχωρήσαμε σε κάθε κελί, σύμφωνα με τη μέθοδο που περιγράψαμε, οι οποίες αποτελούν τη βασική αρχική εφικτή λύση του προβλήματός μας. Στο κελί Υ12 παίρνουμε την τιμή της αντικειμενικής μας συνάρτησης, δηλαδή του συνολικού κόστους μεταφοράς των προϊόντων σε όλους τους προορισμούς, το οποίο και επιθυμούμε να ελαχιστοποιήσουμε. Η τιμή αυτή υπολογίζεται μέσω της formulas sumproduct του Excel, δηλαδή μέσω του αθροίσματος των επιμέρους γινομένων κάθε κόστους με την ποσότητα αποστολής κάθε προϊόντος από κάθε αποθήκη σε κάθε προορισμό.

	U	V	W	X	Y
1	ΑΠΟ/ΠΡΟΣ	ΕΔΡΑ	ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ	ΑΘΗΝΑ	ΖΗΤΗΣΗ
2	ΕΒΡΟ	1714,41			1.714,41
3	ΑΤΤΙΚΗ	715,85	4464,39	8300,00	13.480,24
4	ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ	3755,22			3.755,22
5	ΘΕΣΣΑΛΙΑ	1262,86			1.262,86
6	ΗΠΕΙΡΟ	536,09			536,09
7	ΚΡΗΤΗ	1908,32			1.908,32
8	ΚΥΚΛΑΔΕΣ	157,00			157,00
9	ΔΩΔΕΚΑΝΗΣΑ	1053,08			1.053,08
10	ΕΥΒΟΙΑ	362,74			362,74
11	ΚΕΡΚΥΡΑ	202,29			202,29
12	ΧΑΛΚΙΔΙΚΗ	311,52			311,52
13	ΑΡΓΟΛΙΔΑ	465,54			465,54
14	ΜΕΣΣΗΝΙΑ	190,89			190,89
15	ΑΙΤΩΛΟΑΚΑΡΝΑΝΙΑ		69,73		69,73
16	ΦΘΙΩΤΙΔΑ		308,94		308,94
17	ΠΕΛΛΑ	524,33			524,33
18	ΣΕΡΡΕΣ	665,76			665,76
19	ΛΕΣΒΟ	342,04			342,04
20	ΣΑΜΟ	332,09			332,09
21	ΚΕΦΑΛΛΟΝΙΑ		156,95		156,95
22	ΠΡΟΣΦΟΡΑ	14.500	5.000	8.300	1.658.020,20

Εικόνα 16: Αρχική βασική λύση

5.3.3.2 Το κύριο μέρος της μεθόδου της μεταφοράς

Αφού εντοπίσαμε μία βασική αρχική λύση με τη βοήθεια της μεθόδου Vogel, προχωράμε στα επόμενα βήματα του αλγορίθμου της μεταφοράς, προκειμένου να καταλήξουμε σε μια βέλτιστη λύση. Μέσω της μεθόδου ανακατανομής των εκχωρήσεων (Modified Distribution Method – MODI) θα αποφασίσουμε ποια μεταβλητή θα εισέλθει στη βασική λύση και ποια μεταβλητή θα την εγκαταλείψει. Στη συνέχεια, αν ικανοποιείται το κριτήριο τερματισμού έχουμε εντοπίσει τη βέλτιστη λύση, διαφορετικά επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία έως ότου να φτάσουμε στη βέλτιστη λύση.

Περιγραφή της Μεθόδου ανακατανομής των εκχωρήσεων (MODI):

1. Μόνο για τα κατειλημμένα κελιά του πίνακα υπολογίζουμε βοηθητικές τιμές u_i , $i=1,\dots,20$ για κάθε γραμμή και v_j , $j=1,2,3$ για κάθε στήλη. Ο υπολογισμός των τιμών αυτών προκύπτει από το σύστημα των εξισώσεων $u_i + v_j = c_{ij}$, όπου c_{ij} το μοναδιαίο κόστος μεταφοράς από κάθε αποθήκη σε κάθε προορισμό, θέτοντας αυθαίρετα $u_1 = 0$ αφού έχουμε μια μεταβλητή παραπάνω από τις εξισώσεις ($20+3=23$ μεταβλητές, $20+3-1=22$ εξισώσεις).
2. Υπολογίζουμε για κάθε κενό κελί (μη βασική μεταβλητή) το αντίστοιχο κόστος ευκαιρίας e_{ij} , από τη σχέση $e_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$. Αν όλα τα e_{ij} είναι μη αρνητικά (κριτήριο τερματισμού), τότε έχουμε εντοπίσει τη βέλτιστη λύση, διαφορετικά προχωρούμε στο βήμα 3. Αν δεν υπάρχει κάποιο αρνητικό κόστος ευκαιρίας, αλλά υπάρχουν μηδενικά κόστη τότε έχουμε εναλλακτικές βέλτιστες λύσεις.
3. Επιλέγουμε το μικρότερο αρνητικό e_{ij} , δηλαδή εκείνο με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή, και το κελί στο οποίο υπάρχει αυτό το κόστος, αντιστοιχεί στην εισερχόμενη μεταβλητή.
4. Κατασκευάζουμε ένα κλειστό μονοπάτι, ξεκινώντας από το κελί που έχουμε επιλέξει να εισέλθει στη λύση και καταλήγοντας πίσω σε αυτό, πραγματοποιώντας άλματα μόνο πάνω σε κατειλημμένα κελιά,

κινούμενοι οριζόντια ή κάθετα και κάνοντας μία μόνο στάση σε κάθε γραμμή ή στήλη που επιλέγουμε.

5. Δίνουμε διαδοχικά θετικά και αρνητικά πρόσημα στα διάφορα κελιά του μονοπατιού ξεκινώντας με '+' για το εισερχόμενο.
6. Επιλέγουμε ως εξερχόμενο το κελί με τη μικρότερη τρέχουσα εκχώρηση μεταξύ αυτών που έχουν '-', και το οποίο δίνει όλη την ποσότητα του στο εισερχόμενο κελί.
7. Στα κελιά του μονοπατιού με θετικό πρόσημο προσθέτουμε την ποσότητα του εξερχόμενου κελιού και αντίστοιχα την αφαιρούμε από εκείνα με αρνητικό πρόσημο. Έτσι, παίρνουμε τη νέα βέλτιστη λύση.

Στο παράδειγμά μας τώρα, προκειμένου να εντοπίσουμε τη βέλτιστη λύση προχωράμε στα παρακάτω βήματα:

1. Υπολογίζουμε τα u_i , $i=1,2,\dots,20$ και v_j , $j=1,2,3$ επιλύοντας ένα σύστημα 22 εξισώσεων με 23 αγνώστους, θέτοντας $u_1 = 0$.
2. Υπολογίζουμε για όλα τα κενά κελιά τα κόστη ευκαιρίας $e_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$ και παίρνουμε τον πίνακα 6:

	H	I	J	K	L	M
1	ΑΠΟ/ΠΡΟΣ	ΕΔΡΑ	ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ	ΑΘΗΝΑ	ΖΗΤΗΣΗ	U_i
2	ΕΒΡΟ	1.714,41	71	65	1.714,41	0
3	ΑΤΤΙΚΗ	715,85	4.464,39	8.300,00	13.480,231	31
4	ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ	3.755,22	6	43	3.755,22	22
5	ΘΕΣΣΑΛΙΑ	1.262,86	6	-1	1.262,86	50
6	ΗΠΕΙΡΟ	536,09	6	14	536,09	35
7	ΚΡΗΤΗ	1.908,32	30	0	1.908,32	41
8	ΚΥΚΛΑΔΕΣ	157,00	15	0	157,00	56
9	ΔΩΔΕΚΑΝΗΣΑ	1.053,08	13	0	1.053,08	58
10	ΕΥΒΟΙΑ	362,74	38	0	362,74	33
11	ΚΕΡΚΥΡΑ	202,29	6	45	202,29	20
12	ΧΑΛΚΙΔΙΚΗ	311,52	6	37	311,52	28
13	ΑΡΓΟΛΙΔΑ	465,54	41	0	465,54	30
14	ΜΕΣΣΗΝΙΑ	190,89	31	0	190,89	40
15	ΑΙΤΩΛΟΑΚΑΡΝΑΝΙΑ	13	69,73	8	69,73	36
16	ΦΘΙΩΤΙΔΑ	8	308,94	8	308,94	26
17	ΠΕΛΜΑ	524,33	6	37	524,33	28
18	ΣΕΡΡΕΣ	665,76	18	52	665,76	13
19	ΛΕΣΒΟ	342,04	13	11	342,04	23
20	ΣΑΜΟ	332,09	53	8	332,09	18
21	ΚΕΦΑΛΛΟΝΙΑ	8	156,95	8	156,95	41
22	ΠΡΟΣΦΟΡΑ	14.500	5.000	8.300		
23						
24	V_j	27	29	35		

Πίνακας 6: Πίνακας με τα u_i, v_j και τα κόστη ευκαιρίας e_{ij} της μεθόδου MODI

3. Παρατηρούμε την ύπαρξη ενός αρνητικού κόστους (-1), επομένως συμπεραίνουμε πως δεν έχουμε εντοπίσει βέλτιστη λύση. Επιλέγουμε

λοιπόν το κελί 'ΑΘΗΝΑ- ΘΕΣΣΑΛΙΑ' ως το κελί που θα εισέλθει στη βασική λύση.

4. Χαράζουμε το κλειστό μονοπάτι 'ΑΘΗΝΑ-ΘΕΣΣΑΛΙΑ', 'ΕΔΡΑ-ΘΕΣΣΑΛΙΑ', 'ΕΔΡΑ-ΑΤΤΙΚΗ', 'ΑΘΗΝΑ-ΑΤΤΙΚΗ', 'ΑΘΗΝΑ-ΘΕΣΣΑΛΙΑ' όπως φαίνεται στον πίνακα 7:

	H	I	J	K	L	M
1	ΑΠΟ/ΠΡΟΣ	ΕΔΡΑ	ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ	ΑΘΗΝΑ	ΖΗΤΗΣΗ	U_i
2	ΕΒΡΟ	1.714,41	71	65	1.714,41	0
3	ΑΤΤΙΚΗ	715,85	4.464,39	8.300,00	13.480,231	31
4	ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ	3.755,22	6	43	3.755,22	22
5	ΘΕΣΣΑΛΙΑ	1.262,86	6	-1	1.262,86	50
6	ΗΠΕΙΡΟ	536,09	6	14	536,09	35
7	ΚΡΗΤΗ	1.908,32	30	0	1.908,32	41
8	ΚΥΚΛΑΔΕΣ	157,00	15	0	157,00	56
9	ΔΩΔΕΚΑΝΗΣΑ	1.053,08	13	0	1.053,08	58
10	ΕΥΒΟΙΑ	362,74	38	0	362,74	33
11	ΚΕΡΚΥΡΑ	202,29	6	45	202,29	20
12	ΧΑΛΚΙΔΙΚΗ	311,52	6	37	311,52	28
13	ΑΡΓΟΛΙΔΑ	465,54	41	0	465,54	30
14	ΜΕΣΣΗΝΙΑ	190,89	31	0	190,89	40
15	ΑΙΤΩΛΟΑΚΑΡΝΑΝΙΑ	13	69,73	8	69,73	36
16	ΦΘΙΩΤΙΔΑ	8	308,94	8	308,94	26
17	ΠΕΛΛΑ	524,33	6	37	524,33	28
18	ΣΕΡΡΕΣ	665,76	18	52	665,76	13
19	ΛΕΣΒΟ	342,04	13	11	342,04	23
20	ΣΑΜΟ	332,09	53	8	332,09	18
21	ΚΕΦΑΛΛΟΝΙΑ	8	156,95	8	156,95	41
22	ΠΡΟΣΦΟΡΑ	14.500	5.000	8.300		
23						
24	V_j	27	29	35		

Πίνακας 7: Πίνακας εντοπισμού του κλειστού μονοπατιού της μεθόδου MODI

5. Δίνουμε θετικό πρόσημο στο εισερχόμενο κελί (ΑΘΗΝΑ-ΘΕΣΣΑΛΙΑ), αρνητικό πρόσημο στο επόμενο (ΕΔΡΑ-ΘΕΣΣΑΛΙΑ), θετικό στο κελί (ΕΔΡΑ-ΑΤΤΙΚΗ) και αρνητικό πρόσημο στο κελί (ΑΘΗΝΑ-ΑΤΤΙΚΗ)
6. Επιλέγουμε ως εξερχόμενο το κελί 'ΕΔΡΑ-ΘΕΣΣΑΛΙΑ', ως το κελί με τη μικρότερη ποσότητα μεταξύ αυτών με '-' (αφού $1.262,86 < 8.300$). Επομένως, προσθέτουμε το σύνολο της συγκεκριμένης ποσότητας στο εισερχόμενο κελί 'ΑΘΗΝΑ-ΘΕΣΣΑΛΙΑ'.
7. Τέλος, προσθέτουμε και αφαιρούμε την συγκεκριμένη ποσότητα από στα κελιά 'ΕΔΡΑ-ΑΤΤΙΚΗ' και 'ΑΘΗΝΑ-ΑΤΤΙΚΗ' αντίστοιχα σύμφωνα με

το πρόσημο που τους έχουμε δώσει και παίρνουμε τη νέα τρέχουσα λύση στον πίνακα 8, στον οποίο φαίνεται και η νέα βελτιωμένη τιμή της αντικειμενικής μας συνάρτησης.

	U	V	W	X	Y
1	ΑΠΟ/ΠΡΟΣ	ΕΔΡΑ	ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ	ΑΘΗΝΑ	ΖΗΤΗΣΗ
2	ΕΒΡΟ	1714,41			1.714,41
3	ΑΤΤΙΚΗ	1978,70	4464,39	7037,14	13.480,23
4	ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ	3755,22			3.755,22
5	ΘΕΣΣΑΛΙΑ			1262,86	1.262,86
6	ΗΠΕΙΡΟ	536,09			536,09
7	ΚΡΗΤΗ	1908,32			1.908,32
8	ΚΥΚΛΑΔΕΣ	157,00			157,00
9	ΔΩΔΕΚΑΝΗΣΑ	1053,08			1.053,08
10	ΕΥΒΟΙΑ	362,74			362,74
11	ΚΕΡΚΥΡΑ	202,29			202,29
12	ΧΑΛΚΙΔΙΚΗ	311,52			311,52
13	ΑΡΓΟΛΙΔΑ	465,54			465,54
14	ΜΕΣΣΗΝΙΑ	190,89			190,89
15	ΑΙΤΩΛΟΑΚΑΡΝΑΝΙΑ		69,73		69,73
16	ΦΘΙΩΤΙΔΑ		308,94		308,94
17	ΠΕΛΛΑ	524,33			524,33
18	ΣΕΡΡΕΣ	665,76			665,76
19	ΛΕΣΒΟ	342,04			342,04
20	ΣΑΜΟ	332,09			332,09
21	ΚΕΦΑΛΛΟΝΙΑ		156,95		156,95
22	ΠΡΟΣΦΟΡΑ	14.500	5.000	8.300	1.656.756,76

Πίνακας 8: Νέα τρέχουσα λύση

Εάν υπολογίσουμε εκ νέου τις ποσότητες u_i, v_j και e_{ij} , καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως η λύση που έχουμε επιλέξει είναι η βέλτιστη, όπως φαίνεται και στον πίνακα 9, αφού δεν περιέχει αρνητικά κόστη ευκαιρίας, με αποτέλεσμα να ικανοποιείται το κριτήριο τερματισμού της μεθόδου.

	N	O	P	Q	R	S
1	ΑΠΟ/ΠΡΟΣ	ΕΔΡΑ	ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ	ΑΘΗΝΑ	ΖΗΤΗΣΗ	U_i
2	ΕΒΡΟ	1.714,41	71	65	1.714,41	0
3	ΑΤΤΙΚΗ	1.978,70	4.464,39	7.037,14	13.480,23	31
4	ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ	3.755,22	6	43	3.755,22	22
5	ΘΕΣΣΑΛΙΑ	1	7	1262,86	1.262,86	49
6	ΗΠΕΙΡΟ	536,09	6	14	536,09	35
7	ΚΡΗΤΗ	1.908,32	30	0	1.908,32	41
8	ΚΥΚΛΑΔΕΣ	157,00	15	0	157,00	56
9	ΔΩΔΕΚΑΝΗΣΑ	1.053,08	13	0	1.053,08	58
10	ΕΥΒΟΙΑ	362,74	38	0	362,74	33
11	ΚΕΡΚΥΡΑ	202,29	6	45	202,29	20
12	ΧΑΛΚΙΔΙΚΗ	311,52	6	37	311,52	28
13	ΑΡΓΟΛΙΔΑ	465,54	41	0	465,54	30
14	ΜΕΣΣΗΝΙΑ	190,89	31	0	190,89	40
15	ΑΙΤΩΛΟΑΚΑΡΝΑΝΙΑ	13	69,73	8	69,73	36
16	ΦΘΙΩΤΙΔΑ	8	308,94	8	308,94	26
17	ΠΕΛΛΑ	524,33	6	37	524,33	28
18	ΣΕΡΡΕΣ	665,76	18	52	665,76	13
19	ΛΕΣΒΟ	342,04	13	11	342,04	23
20	ΣΑΜΟ	332,09	53	8	332,09	18
21	ΚΕΦΑΛΛΟΝΙΑ	8	156,95	8	156,95	41
22	ΠΡΟΣΦΟΡΑ	14.500	5.000	8.300		
23						
24	V_j	27	29	35		

Πίνακας 9: Πίνακας με τα νέα u_i, v_j και e_{ij}

5.3.4 Συμπεράσματα

Επομένως, προτείνουμε στη εταιρία ένα πλάνο μεταφοράς όπως αυτό που ακολουθεί στον πίνακα 10, με τις ποσότητες αποστολής προϊόντων σε τόνους από κάθε αποθήκη σε κάθε προορισμό, ώστε να ικανοποιούνται οι περιορισμοί προσφοράς και ζήτησης, και το οποίο έχει σαν συνολικό ελάχιστο κόστος 1.656.757 ευρώ.

	U	V	W	X	Y
1	ΑΠΟ/ΠΡΟΣ	ΕΔΡΑ	ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ	ΑΘΗΝΑ	ΖΗΤΗΣΗ
2	ΕΒΡΟ	1714			1.714
3	ΑΤΤΙΚΗ	1979	4464	7037	13.480
4	ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ	3755			3.755
5	ΘΕΣΣΑΛΙΑ			1263	1.263
6	ΗΠΕΙΡΟ	536			536
7	ΚΡΗΤΗ	1908			1.908
8	ΚΥΚΛΑΔΕΣ	157			157
9	ΔΩΔΕΚΑΝΗΣΑ	1053			1.053
10	ΕΥΒΟΙΑ	363			363
11	ΚΕΡΚΥΡΑ	202			202
12	ΧΑΛΚΙΔΙΚΗ	312			312
13	ΑΡΓΟΛΙΔΑ	466			466
14	ΜΕΣΣΗΝΙΑ	191			191
15	ΑΙΤΩΛΟΑΚΑΡΝΑΝΙΑ		70		70
16	ΦΘΙΩΤΙΔΑ		309		309
17	ΠΕΛΛΑ	524			524
18	ΣΕΡΡΕΣ	666			666
19	ΛΕΣΒΟ	342			342
20	ΣΑΜΟ	332			332
21	ΚΕΦΑΛΛΟΝΙΑ		157		157
22	ΠΡΟΣΦΟΡΑ	14.500	5.000	8.300	1.656.757 €

Πίνακας 10: Τελική λύση του προβλήματος

6. Ανασκόπηση - Συμπεράσματα

Συνοψίζοντας, είδαμε την ανάλυση τριών σημαντικών ενοτήτων της Επιχειρησιακής Έρευνας μέσω της εφαρμογής τους στον αληθινό κόσμο των επιχειρήσεων. Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα που μας έδωσε η ανάλυσή μας με τα πραγματικά αποτελέσματα της βιομηχανίας εντοπίσαμε τον κοινό τόπο που υπάρχει ανάμεσα στην επιστημονική θεωρία και στην πρακτική εφαρμογή της. Πιο συγκεκριμένα, μέσω της ABC ανάλυσης μας δόθηκε η δυνατότητα να κατατάξουμε τα 122 προϊόντα της εταιρίας με βάση τον ετήσιο όγκο των πωλήσεών τους. Παρατηρήσαμε, πως τα προϊόντα που ανήκουν στην κατηγορία Α είναι πράγματι τα προϊόντα που χρίζουν ιδιαίτερης μελέτης και ανάλυσης από τους managers της εταιρίας. Επιπλέον, μέσω του προβλήματος της ανάμειξης καταφέραμε να βρούμε ένα βέλτιστο τρόπο ανάμειξης της πρώτης ύλης για την παραγωγή τριών σημαντικών προϊόντων της βιομηχανίας με το ελάχιστο δυνατό κόστος, κάτι που κατά τη σημερινή εποχή αποτελεί πρόβλημα υψίστης σημασίας για το σύνολο των επιχειρήσεων. Τέλος, επιλύοντας ένα πρόβλημα μεταφοράς για τα προϊόντα της συγκεκριμένης βιομηχανίας καταφέραμε να εντοπίσουμε και να προτείνουμε το βέλτιστο πλάνο μεταφοράς των προϊόντων της ανά την ελληνική επικράτεια.

Βιβλιογραφία

A) Ελληνική Βιβλιογραφία

- [1] Κιόχος Π., Θάνος Γ., Σαλαμούρης Δ., Κιόχος Α., *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Αθήνα: Σύγχρονη Εκδοτική, 2002.
- [2] Κολέτσος Ι. και Στογιάννης Δ., *Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα*. Αθήνα: Εκδόσεις Συμεών, 2012.
- [3] Υψηλάντης Π., *Επιχειρησιακή Έρευνα*. Αθήνα: Εκδόσεις Προπομπός, 2010.

B) Διεθνής Βιβλιογραφία

- [1] Blumenfeld Dennis, *Operations Research Calculations Handbook*. Second edition. USA: CRC Press Taylor & Francis Group, 2009.
- [2] Hillier Frederick S. and Lieberman Gerald J., *Introduction to Operations Research*. Seventh edition. USA: McGraw-Hill, 2001.
- [3] Topcu Ilker & Kabak Ozgur, *Lecture Notes, Operations Research I*. Istanbul Technical University, 2018.
- [4] Winston Wayne L., *Operations Research: Applications and Algorithms*. Fourth edition. Canada: Thompson Brooks/Cole, 2004.