



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Διπλωματική Εργασία
**Διαχωρισμοί Heegaard & Χειρουργική
Dehn σε 3-πολλαπλότητες**

Ορέστης Λύγδας

Επιβλέπων:

Κοντοκώστας Δημήτριος (Επίκουρος Καθηγητής)

Τριμελής Επιτροπή:

Κοντοκώστας Δημήτριος (Επίκουρος Καθηγητής)

Λαμπροπούλου Σοφία (Καθηγήτρια)

Σμυρλής Γεώργιος (Αναπληρωτής Καθηγητής)

Αθήνα, Ιούνιος 2019



NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS

SCHOOL OF APPLIED MATHEMATICAL

AND PHYSICAL SCIENCES

Diploma Thesis

Heegaard splittings & Dehn surgery on 3-manifolds

Orestis Lygdas

Supervisor:

Kodokostas Dimitrios (Assistant Professor)

Three-member Committee:

Kodokostas Dimitrios (Assistant Professor)

Lambropoulou Sofia (Professor)

Smirlis George (Associate Professor)

Athens, June 2019

Ευχαριστίες

Θέλω να ευχαριστήσω πολλούς ανθρώπους σε αυτό το σημείο. Αρχικά θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέπων καθηγητή μου, κύριο Δημήτρη Κοντοκόστα για τη συνεχή βοήθειά του σε κάθε στάδιο αυτής της εργασίας. Οι εξηγήσεις του στα ζητήματα κατανόησης που μου προέκυπταν ήταν πάντα ακριβείς και εύστοχες, χωρίς τίποτε περιττό ή μη-ξεκάθαρο. Επίσης στο θέμα της οργάνωσης βοηθούσε πάντα χωρίς να αισθανθώ ποτέ πιεσμένος, το οποίο συνέβαλε στο να ολοκληρωθεί η εργασία χωρίς άγχος και με ιδιαίτερη ευχαρίστηση.

Στη συνέχεια, θέλω να ευχαριστήσω τους γονείς μου, Γιώργο Λύγδα και Μαρία Γρηγορίου, και την αδερφή μου, Μαριλένα Λύγδα. Νιώθω πολύ τυχερός που έχω αυτήν την οικογένεια κυρίως γιατί σε όλη μου τη ζωή αισθανόμουν την αγάπη τους, είχα τη στήριξή τους και ταυτόχρονα μπορούσα να συναναστρέφομαι μαζί τους το ίδιο άνετα όπως με τις παρέες μου. Ως ένα μεγάλο βαθμό οφείλω σ' αυτούς του ανθρώπους το ποιος είμαι.

Τέλος θέλω να ευχαριστήσω τους φίλους μου, τους ανθρώπους με τους οποίους έχουμε δεθεί όλα αυτά τα χρόνια και έχουμε διαμορφώσει σχέσεις τόσο δυνατές και ξεχωριστές που ακόμα και να μη βλέπουμε τόσο συχνά, σε κάθε συνάντησή μας είναι σαν μην έχει περάσει ούτε μέρα από την προηγούμενη φορά. Ευχαριστώ, λοιπόν, την Ευαγγελία, τον Παναγιώτη (Σ.), την Αγγελική, το Μήτσο, τον Ηλία, το Βαλεντίνο, τον Ντίνο, τον Τάκη, τον Κώστα, τον Παναγιώτη (Θ.) και το Θανάση.

Περίληψη

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι να παρουσιάσει κάποιες βασικές έννοιες και βασικά αποτελέσματα της Γεωμετρικής Τοπολογίας. Στο πρώτο κεφάλαιο αναφερόμαστε στους κόμπους και τους κρίκους. Εκτός από τον ορισμό τους, που είναι έτσι κι αλλιώς μια όχι προφανής διαδικασία, αναφέρουμε μια πράξη με την οποία από ήδη δοσμένους κόμπους «παίρνουμε» καινούργιους, το συνεκτικό άθροισμα. Επίσης, επειδή τους κόμπους προτιμούμε να τους παρουσιάζουμε μέσω επίπεδων προβολών τους, χρειάζεται να γνωρίζουμε υπό ποιες συνθήκες δύο δοσμένες προβολές αναπαριστούν «ισοδύναμους» κόμπους (στον ορισμό των κόμπων θα πούμε και πότε αυτοί θεωρούνται ισοδύναμοι). Αυτές ακριβώς οι συνθήκες διατυπώνονται στο θεώρημα Reidemeister που ακολουθεί. Τέλος, βασικό κομμάτι στη θεωρία κόμπων είναι η ταξινόμησή τους, κι αυτό μπορεί να γίνει μόνο αν έχουμε πρακτικούς τρόπους να ξεχωρίζουμε δύο δοσμένους κόμπους. Για το σκοπό αυτό αναζητούμε αντικείμενα που ονομάζουμε αναλλοίωτες των κόμπων και μια σχετικά απλή, αλλά χρήσιμη, αναλλοίωτη, το πολυώνυμο Kauffman, παρουσιάζεται στο τέλος του κεφαλαίου.

Στο δεύτερο κεφάλαιο περνάμε σε ένα διαφορετικό κομμάτι της Γεωμετρικής Τοπολογίας, τις 3-πολλαπλότητες. Αφού δώσουμε τον ορισμό, αναζητούμε γενικούς τρόπους περιγραφής αυτών των αντικειμένων. Ένας τέτοιος τρόπος είναι οι διαχωρισμοί Heegaard. Ουσιαστικά σε αυτό το σημείο βλέπουμε πως όλα τα αντικείμενα μιας μεγάλης κατηγορίας 3-πολλαπλοτήτων μπορεί να περιγραφεί από τον τρόπο που συγκολλούνται μεταξύ τους δύο απλούστερες 3-πολλαπλότητες, τα λεγόμενα σώματα-χερούλι, για τις οποίες έχουμε αρκετές πληροφορίες. Μετά από

την παρουσίαση αυτού του αποτελέσματος δίνουμε ένα παράδειγμα διαχωρισμού Heegaard της 3-σφαίρας S^3 και τελειώνουμε το κεφάλαιο με μια «παράλλαγή» των διαχωρισμών Heegaard, που είναι τα διαγράμματα Heegaard.

Στο τρίτο και τελευταίο κεφάλαιο παρουσιάζουμε ένα δεύτερο τρόπο περιγραφής 3-πολλαπλοτήτων, την ονομαζόμενη χειρουργική Dehn. Υπάρχει ένα βασικό κοινό χαρακτηριστικό με τους διαχωρισμούς Heegaard κι αυτό αφορά στο γεγονός ότι και οι δύο περιγραφές ουσιαστικά ανάγονται στη μελέτη των ομοιομορφισμών μεταξύ επιφανειών (2-πολλαπλοτήτων). Το μεγαλύτερο κομμάτι αυτού του κεφαλαίου έχει να κάνει με τη διατύπωση θεωρημάτων (και απόδειξη κάποιων από αυτά) που περιγράφουν τη διαδικασία της χειρουργικής Dehn και μας διαβεβαιώνουν ότι όντως μια μεγάλη κατηγορία από 3-πολλαπλότητες (η ίδια με τους διαχωρισμούς Heegaard) μπορεί να προκύψει από αυτή. Τέλος, αναφέρουμε κάποια παραδείγματα αυτής της πολύ ενδιαφέρουσας διαδικασίας.

Abstract

The purpose of this diploma thesis is to present some elementary notions and results from Geometric Topology. In the first chapter we discuss knots and links. Apart from their definition, which is not at all trivial, we mention the basic operation that gives us a new knot from two old ones, the connected sum. Also, we prefer to present the knots through their plane projections, so we need to know under which circumstances two given projections represent the "same" knot (we will specify what this means when we define knots rigorously). These circumstances are stated in the following Reidemeister theorem. In the final section of this chapter, we present a relatively simple, but useful, invariant of knots called the Kauffman polynomial. Invariants are objects that help us distinguish some knots from each other, meaning that they help us classify knots, which is an important open problem of Knot Theory.

In the second chapter, we discuss a different notion from Geometric Topology, the 3-manifolds. First we define these objects and then we try to find general methods to describe them. One of these methods is the Heegaard splitting of a 3-manifold. At this point, we conclude that a large category of 3-manifolds can be described with gluings of simpler 3-manifolds with boundary, called handlebodies. After that, we provide a basic example of a Heegaard splitting of the 3-sphere, S^3 . The chapter ends with the presentation of an "alternative" to the Heegaard splittings called Heegaard diagrams.

In the third and final chapter, we present a second method of describing 3-manifolds, called Dehn surgery. There is a basic com-

mon characteristic between these two methods which is the fact that they both can be reduced to the study of homeomorphisms between surfaces (2-manifolds). The majority of this chapter consists of statements of theorems (some of which are proved) which describe the Dehn surgery operation and show us that a large category of 3-manifolds can be obtained through it. Finally, we give some examples of this quite elegant operation.

Περιεχόμενα

1	Κόμποι και Κρίκοι	13
1.1	Διασθητική περιγραφή	13
1.2	Πολυγωνικοί κόμποι και κρίκοι	17
1.3	Λείοι κόμποι και κρίκοι	20
1.4	Συνεκτικό άθροισμα κόμπων	22
1.5	Επίπεδες ισοτοπίες και κινήσεις Reidemeister	25
1.6	Πολυώνυμο Kauffman	31
2	Διαχωρισμοί Heegaard 3-πολλαπλοτήτων	43
2.1	3-πολλαπλοτήτες	43
2.2	Διαχωρισμοί Heegaard	47
2.3	Διαχωρισμός Heegaard της S^3 σε δύο συμπαγείς τόρους	55
2.4	Διαγράμματα Heegaard	58
3	Χειρουργική Dehn σε 3-πολλαπλοτήτες	65
3.1	Θεώρημα Dehn-Lickorish	65
3.2	Πορίσματα του θεωρήματος Dehn-Lickorish	77
3.3	Ρητή χειρουργική κατά μήκος τετριμμένων κόμπων	82

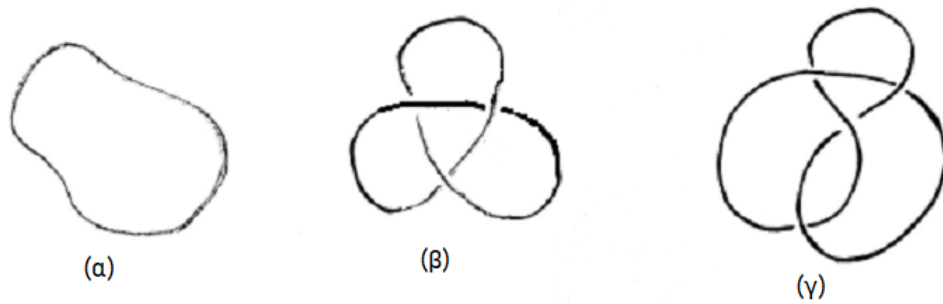
Κεφάλαιο 1

Κόμποι και Κρίκοι

1.1 Διαισθητική περιγραφή

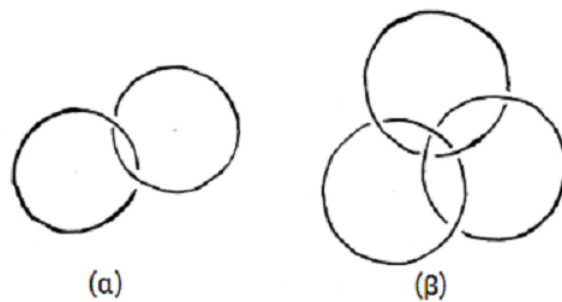
Στην καθημερινότητά μας συναντάμε συνέχεια κόμπους: στα κορδόνια των παπουτσιών, σε κορδέλες που στολίζουν δώρα, στα σχοινιά με τα οποία οι ναυτικοί δένουν τα πλοία στο λιμάνι και στις πρωτεΐνες και στο DNA που μελετούν οι βιολόγοι. Στα μαθηματικά οι κόμποι που μελετώνται σαφώς δεν είναι υλικοί και διαφέρουν από αυτούς που γνωρίζουμε στο γεγονός ότι δεν έχουν αρχή και τέλος - αυτά τα δύο σημεία είναι «κολλημένα». Μερικά παραδείγματα μαθηματικών κόμπων παρουσιάζονται στο Σχήμα 1.1. Πρώτος είναι ο τετριμμένος κόμπος, που δεν είναι ουσιαστικά «κομποδιασμένος» αλλά είναι χρήσιμος στη μελέτη μας με τον ίδιο τρόπο που όλα τα τετριμμένα μαθηματικά αντικείμενα είναι συνήθως χρήσιμα: δηλώνει την απουσία σύνθετης δομής, είναι ένα ουδέτερο στοιχείο, μια βάση από την οποία μπορούμε να ξεκινήσουμε και να χτίσουμε πιο σύνθετα αντικείμενα (ό,τι μπορεί να σημαίνει αυτό ανά περίπτωση). Δεύτερος είναι ο κόμπος τριφύλλι που είναι από τους πιο απλούς μη τετριμμένους κόμπους και τρίτος ο κόμπος σε σχήμα οχταριού.

Μια χρήσιμη και φυσιολογική επέκταση της έννοια του κόμπου είναι η έννοια του κρίκου, που είναι μια πεπερασμένη συλλογή κόμπων που έχουν «κομποδιαστεί» μεταξύ τους. Για παράδειγμα, κρίκο θεωρούμε



Σχήμα 1.1: (α) Τετριμμένος κόμπος, (β) Τρίφυλλος κόμπος, (γ) Οχτάρι κόμπος

κάθε πεπερασμένη συλλογή από τετριμμένους κόμπους μη μπλεγμένους μεταξύ τους (με το ίδιο σκεπτικό που θεωρούμε κόμπο τον τετριμμένο - τον μη-κόμπο). Κρίκο καλούμε επίσης ένα πεπερασμένο πλήθος τετριμμένων κόμπων που όμως είναι όντως συνδεδεμένοι μεταξύ τους, όπως ο κρίκος Hopf και τα δαχτυλίδια Borromeo (βλ. Σχήμα 1.2). Μια ι-



Σχήμα 1.2: (α) Κρίκος Hopf, (β) Δαχτυλίδια Borromeo

διατερότητα που παρουσιάζουν τα δαχτυλίδια Borromeo είναι ότι αν αφαιρέσουμε οποιοδήποτε από τα τρία, τα δύο που μένουν παύουν να είναι «κομποδιασμένα» μεταξύ τους. Άλλο παράδειγμα κρίκου είναι ο κρίκος Whitehead που, ενώ δε φαίνεται τόσο άμεσα όσο οι προηγούμενοι, αποτελείται από δύο «κομποδιασμένους» τετριμμένους κόμπους (βλ. Σχήμα 1.3).



Σχήμα 1.3: Κρίκος Whitehead

Διευκρινίζουμε σε αυτό το σημείο ότι η μαθηματική θεωρία που ασχολείται με αυτά που γράφουμε έως τώρα, ονομάζεται Θεωρία Κόμπων και αναφέρεται ταυτόχρονα στους κρίκους. Επομένως όταν θα γράφουμε για κόμπους, θα αναφερόμαστε και σε κρίκους, εκτός από περιπτώσεις που κάτι ισχύει μόνο για κόμπους ή κρίκους στις οποίες θα γράφουμε ρητά τους υπάρχοντες περιορισμούς.

Οι κόμποι και οι κρίκοι στους οποίους έχουμε αναφερθεί (και αυτοί στους οποίους σκοπεύουμε να αναφερθούμε) είναι γεωμετρικά αντικείμενα που «φυσιολογικά» τα φανταζόμαστε εμποδωμένα στον τριδιάστατο χώρο. Ενώ τα έχουμε περιγράψει σαν κορδόνια που έχουμε δέσει και στη συνέχεια ενώσαμε τα άκρα τους, άρα είναι μονοδιάστατα αντικείμενα, για να μπορέσουμε να έχουμε ενδιαφέροντα παραδείγματα αυτών των αντικειμένων χρειάζομαστε τρεις διαστάσεις στον περιβάλλοντα χώρο ώστε να μπορούμε να «δένουμε» χωρίς να δημιουργούμε αυτοτομές (αποδεικνύεται ότι στις τέσσερις διαστάσεις μπορούμε πάντα να τους «ξεκομποδιάσουμε» χωρίς αυτοτομές). Το πρόβλημα με τις αυτοτομές ουσιαστικά είναι ότι «χαλάνε» την τοπικά μονοδιάστατη εικόνα που έχουμε κατά νου γι' αυτά τα αντικείμενα. Παρόλα αυτά όταν θέλουμε να τα σχεδιάσουμε σε χαρτί για να έχουμε μια λιγότερο περίπλοκη εποπτεία αυτών, αναγκαζόμαστε να παρουσιάσουμε τον κόμπο προβαλλόμενο σε κάποιο επίπεδο κι επομένως με αυτοτομές που ονομάζουμε *σημεία διασταύρωσης*. Για τη μελέτη που εμείς σκοπεύουμε να κάνουμε, είναι χρήσιμο να θέσουμε, λοιπόν, κάποιους κανόνες για τις επίπεδες αναπαραστάσεις των κόμπων που θα χρησιμοποιήσουμε:

- (i) Σε κάθε σημείο του κόμπου, η εφαιπτομένη ευθεία, ή κάθε πλευρική

1.1 Διαισθητική περιγραφή

εφαπτομένη ευθεία αν σχηματίζεται γωνία, στο χώρο σε εκείνο το σημείο θα πρέπει να προβάλλεται στο επίπεδο που διαλέξαμε σε ευθεία, δηλαδή να μην προβάλλεται ολόκληρη σε μοναδικό σημείο. Αν δεν έχει εφαπτομένη ούτε πλευρικές εφαπτόμενες σε κάποιο σημείο, θα δούμε ότι δε θα είναι αντικείμενο που θα αποκαλούμε κόμπος.

- (ii) Σε κάθε σημείο διασταύρωσης θα πρέπει να προβάλλονται ακριβώς δύο σημεία του κόμπος.
- (iii) Σε κάθε σημείο διασταύρωσης, οι εφαπτόμενες (ή οι πλευρικές εφαπτόμενες αν έχουμε γωνίες) των δύο προβαλλόμενων σημείων στο χώρο θα πρέπει να έχουν διαφορετικές προβολές.
- (iv) Τα σημεία διασταύρωσης θα πρέπει να είναι πεπερασμένα.

Ενώ για την ανάδειξη κάποιων συγκεκριμένων χαρακτηριστικών των κόμπων ενδεχομένως θα χρειαζόμασταν διαφορετικούς κανόνες, για τη μελέτη που θέλουμε να κάνουμε θα υιοθετήσουμε τους παραπάνω κανόνες και θα θεωρούμε ως έγκυρες προβολές ενός κόμπος ή κρίκου μόνο αυτές που τους τηρούν. Επίσης αναφέρουμε ότι επειδή σε κάθε σημείο διασταύρωσης μιας έγκυρης προβολής συμπίπτουν δύο προβολές διαφορετικών τμημάτων του κόμπος, θα σημειώνουμε με τον προφανή τρόπο (όπως έχει ήδη γίνει στα προηγούμενα σχήματα) ποιο τμήμα του κόμπος βρίσκεται ψηλότερα και πιο χαμηλότερα σε σχέση με το επίπεδο προβολής, μιας και πρόκειται για πληροφορία που είναι αρκετά σημαντική και χαρακτηριστική για το αντικείμενο. Τέλος, υπάρχει κατηγορία κόμπων οι οποίοι δεν μπορούν να αναπαρασταθούν σε κάποιο επίπεδο με πεπερασμένο πλήθος σημείων διασταύρωσης. Τέτοιοι κόμπος δε θα μας απασχολήσουν σε αυτήν την εργασία, παρά το ενδιαφέρον που εμφανίζουν, εκτός από ένα σημείο που θα τους χρειαστούμε σε μία απόδειξη.

Είναι απαραίτητο να διευκρινίσουμε εδώ ότι όπως κι ένας υλικός κόμπος δεν αλλάζει ουσιαστικά αν μετακινήσουμε κάποιο κομμάτι του, αν φυσικά δεν κοπεί, έτσι κι οι μαθηματικοί κόμπος που θέλουμε να μελετήσουμε δε θα θεωρούμε ότι αλλάζουν ουσιαστικά με μικρές τοπικές κινήσεις που δεν προκαλούν αυτοτομές. Επομένως είναι δυνατόν να

φανταστούμε ότι, κάνοντας κάποιες μικρές τοπικές κινήσεις στο χώρο αν χρειαστεί, πάντα μπορούμε να βρούμε ένα επίπεδο προβολής ενός κόμβου ή κρίκου το οποίο να ικανοποιεί τους κανόνες που θέσαμε.

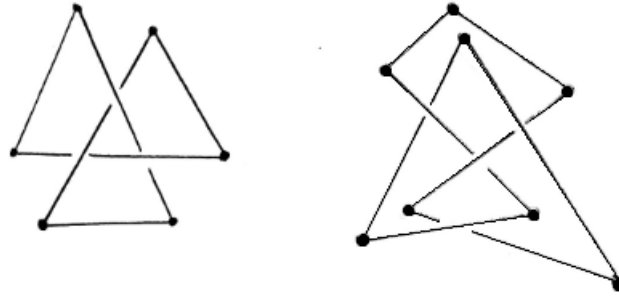
1.2 Πολυγωνικοί κόμβοι και κρίκοι

Θα προσπαθήσουμε, σ' αυτό το σημείο, να ορίσουμε με τρόπο ακριβή αυτά τα μαθηματικά αντικείμενα που θέλουμε να αντιστοιχούν στους υλικούς κόμβους με τον τρόπο που συζητήσαμε παραπάνω. Η πρώτη απόπειρα δεν είναι αυτή που βρίσκεται πιο κοντά στη διαίσθησή μας, αλλά μας δίνει σε πολλές περιπτώσεις πιο εύκολα κάποια επιθυμητά αποτελέσματα.

Ορισμός 1.2.1. (i) Πολυγωνικός κόμβος (ή κατά τμήματα γραμμικός κόμβος) θα ονομάζεται κάθε κλειστή, μη αυτοτεμνόμενη πολυγωνική γραμμή με πεπερασμένο πλήθος πλευρών στον Ευκλείδειο χώρο \mathbb{R}^3

(ii) Πολυγωνικός κρίκος (ή κατά τμήματα γραμμικός κρίκος) θα ονομάζεται μια πεπερασμένη οικογένεια από πολυγωνικούς κόμβους που δεν τέμνονται, αλλά που ενδεχομένως περιπλέκονται μεταξύ τους.

Επειδή στη δική μας προσέγγιση οι κόμβοι και οι κρίκοι μελετώνται ως γεωμετρικά αντικείμενα, θα τους λαμβάνουμε υπόψιν μας ως υποσύνολα του \mathbb{R}^3 . Ο λόγος που αυτό δεν είναι αυτονόητο, είναι ότι σε άλλες προσεγγίσεις ενδεχομένως κάποιος να ενδιαφέρεται για τις συναρτήσεις που περιγράφουν αυτές τις κατά τμήματα γραμμικές καμπύλες, ή τις εξισώσεις που δίνουν αυτές τις συναρτήσεις σε πεπλεγμένη μορφή. Ωστόσο σαν κόμβο δε θα θεωρούμε ουσιαστικά διαφορετικό κάποιον που προκύπτει από άλλον δοσμένο μέσω μικρών τοπικών κινήσεων, όπως εξηγούμε στη συνέχεια, κι ας διαφέρει τυπικά ως υποσύνολο του \mathbb{R}^3 . Παραδείγματα (προβολών) πολυγωνικών κόμβων είναι αυτά που φαίνονται στο Σχήμα 1.4, και οποιοσδήποτε άλλος κόμβος είναι σαν αυτούς που φανταζόμασταν στην προηγούμενη παράγραφο αλλά με «πλευρές» ευθείες γραμμές που σχηματίζουν γωνίες μεταξύ τους.



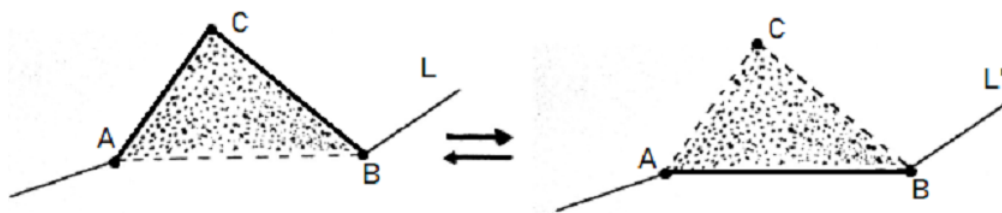
Σχήμα 1.4: Πολυγωνικοί κόμποι

Σχετικά με το πότε δύο κόμποι θα θεωρούνται ίδιοι, ή όπως προτιμούμε συνήθως να λέμε: «ισοδύναμοι», αυτό θα το καθορίσουμε αφού προσδιορίσουμε ποιες κινήσεις δεν προκαλούν σημαντικές αλλαγές. Σημαντική αλλαγή, πάντως, δεν είναι το που ακριβώς βρίσκονται οι κόμποι μες στον \mathbb{R}^3 ούτε ο αριθμός των σημείων διασταύρωσης μιας συγκεκριμένης προβολής τους.

Ορισμός 1.2.2. Στοιχειώδης κίνηση ονομάζεται η εξής διαδικασία: Έστω AC, CB πλευρές ενός πολυγωνικού κρίκου L (η περίπτωση των κόμπων είναι υποπερίπτωση αυτής) τέτοιες ώστε το τρίγωνο ABC που σχηματίζουν και το εσωτερικό του στο χώρο, να μην τέμνουν τον κρίκο σε κανένα άλλο σημείο (Σχήμα 1.5). Τότε αντικαθιστούμε τις AC, CB από την AB και καταλήγουμε στον κρίκο L' . Η αντίστροφη αντικατάσταση, υπό τις αντίστοιχες συνθήκες, ονομάζεται επίσης στοιχειώδης κίνηση.

Ορισμός 1.2.3. Δύο κόμποι K, K' ονομάζονται ισοδύναμοι αν υπάρχει πεπερασμένη ακολουθία κόμπων $K_0 = K, K_1, \dots, K_n = K'$ στην οποία κάθε επόμενος έχει προκύψει από τον προηγούμενο μέσω μιας στοιχειώδους κίνησης.

Σαν ιδιότητες ενός κόμπου, λοιπόν, δε θα θεωρούμε μόνο αυτές που έχει το αρχικό σύνολο σημείων που αποτελούν τον κόμπο, αλλά όλες τις ιδιότητες που έχουν οι διάφοροι ισοδύναμοι με αυτόν κόμποι.



Σχήμα 1.5: Στοιχειώδης κίνηση

Πλέον, είμαστε σε θέση να εξασφαλίσουμε ότι μπορούμε πάντα να βρούμε κάποιο επίπεδο προβολής ενός κόμπου K , ή κάποιου ισοδύναμου με αυτόν κόμπου K' , στο οποίο θα ισχύουν οι κανόνες που θέσαμε. Κατ' αρχάς μπορούμε να υποθέσουμε ότι δεν προβάλλονται σε κάποιο σημείο του επιπέδου προβολής δύο κορυφές του κόμπου. Αν υπάρχει τέτοια περίπτωση, μπορούμε με (τρεις το πολύ) στοιχειώδεις κινήσεις να απομακρύνουμε από το κοινό σημείο προβολής τη μία από αυτές τις δύο προβολές κορυφών. Γενικά η σύμπτωση δύο προβολών κορυφών σε ένα σημείο είναι κάτι που θα γινόταν αντιληπτό από το γεγονός ότι δε θα ήταν σημειωμένη κάποια από τις δύο φαινομενικές πλευρές ως αυτή που περνάει από πάνω ή από κάτω, παρόλα αυτά είναι επιθυμητό να μην εμφανίζονται τέτοιες συμπτώσεις για να μην προκύπτουν συγχύσεις. Έπειτα, αν υπάρχει φορέας κάποιας πλευράς εσωτερικού σημείου του K (ή φορέας κάποιας από τις δύο πλευρές που συναντώνται σε σημείο του κόμπου που είναι κορυφή) που να προβάλλεται σε σημείο, τότε μετακινώντας λίγο χωρίς να προκαλούμε αυτοτομές ένα από τα δύο άκρα της αντίστοιχης πλευράς, παίρνουμε ισοδύναμο αντικείμενο K' που προβάλλεται στο ίδιο επίπεδο ικανοποιώντας την πρώτη συνθήκη. Στη συνέχεια, αν σε κάποιο σημείο του επιπέδου προβάλλονται τρία σημεία του K , τότε μπορούμε να επιλέξουμε την πλευρά ενός από τα τρία σημεία και να μετακινήσουμε λίγο (στο χώρο) χωρίς να προκαλέσουμε αυτοτομές το ένα άκρο της ώστε να φύγει το σημείο αυτό από το σημείο διασταύρωσης των άλλων δύο (αν κάποιο από τα τρία είναι κορυφή μετακινούμε αυτό όπως στην αρχική περίπτωση που συζητήσαμε). Επιπλέον, αν υπάρχουν δύο σημεία του K που οι προβολές των πλευρών τους ταυτίζονται πάνω στο

επίπεδο, και αυτό διορθώνεται αν κινήσουμε το ένα άκρο μιας εκ των δύο πλευρών, όπως στις άλλες περιπτώσεις. Τέλος, όσον αφορά στο πεπερασμένο πλήθος των σημείων διασταύρωσης, δεδομένου ότι δεν υπάρχει κάποιο από τα προηγούμενα προβλήματα, αυτό θα ισχύει αυτόματα από τη στιγμή που ο ίδιος ο K έχει πεπερασμένο πλήθος πλευρών.

1.3 Λείοι κόμποι και κρίκοι

Η μαθηματική εκδοχή των κόμπων που φαίνεται να βρίσκεται πιο κοντά στη εικόνα που έχουμε κατά νου από τους υλικούς κόμπους, είναι οι λείοι κόμποι που ορίζουμε στη συνέχεια.

Ορισμός 1.3.1. (i) Εμφύτευση του κύκλου S^1 στον \mathbb{R}^3 ονομάζεται μια $1-1$, επί και αμφισυνεχής απεικόνιση $f: S^1 \rightarrow f(S^1) \subseteq \mathbb{R}^3$.

(ii) Λείος κόμπος ονομάζεται η εικόνα του κύκλου S^1 μες στον \mathbb{R}^3 μέσω μιας απείρως παραγωγίσιμης εμφύτευσης με πουθενά μηδενική παράγωγο (η τελευταία συνθήκη σημαίνει ότι αν $f(t) = (x(t), y(t), z(t))$ είναι η εμφύτευση, τότε $(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}) \neq (0, 0, 0)$).

(iii) Λείος κρίκος ονομάζεται η εικόνα πεπερασμένων (για τη δική μας μελέτη) στο πλήθος ξένων ανά δύο κύκλων μες στον \mathbb{R}^3 μέσω μιας απείρως παραγωγίσιμης εμφύτευσης με πουθενά μηδενική παράγωγο.

Σχηματικά αυτοί οι κόμποι μοιάζουν όπως οι αυτοί που παρουσιάσαμε στα πρώτα σχήματα, πριν τους πολυγωνικούς. Οι συνθήκες άπειρης παραγωγισιμότητας και πουθενά μηδενικής παραγώγου απαιτούνται για να εξασφαλιστεί η ομαλότητα του κόμπου. Ενδεχομένως να μην είναι οι πιο ασθενείς συνθήκες που θα μπορούσαν να προσφέρουν αυτό το χαρακτηριστικό, ωστόσο για τη δική μας μελέτη δε θέλουμε να ασχοληθούμε με τόσες λεπτομέρειες περί παραγωγισιμότητας. Έτσι κι αλλιώς οι κόμποι είναι οι εικόνες αυτών των συναρτήσεων, δηλαδή τα υποσύνολα του \mathbb{R}^3 , όπως και στην περίπτωση των πολυγωνικών κόμπων, κι όχι οι συναρτήσεις καθεαυτές, οπότε σπανίως θα ενδιαφερόμαστε για τον τύπο αυτών των εμφυτεύσεων.

Ορισμός 1.3.2. (i) Διαφορομορφισμός μεταξύ δύο λείων κόμπων του \mathbb{R}^3 είναι μια $1 - 1$ και επί απεικόνιση από τον ένα στον άλλο που είναι διαφορίσιμη και η αντίστροφή της είναι επίσης διαφορίσιμη.

(ii) Δύο λείοι κόμποι K_0, K_1 θα καλούνται ισοτοπικοί αν υπάρχει μονο-παραμετρική οικογένεια διαφορομορφισμών $f_t: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $t \in [0, 1]$ τέτοια ώστε η f_0 να είναι ταυτοτική συνάρτηση, $f_1(K_0) = K_1$ και η απεικόνιση $F: \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ που δίνεται από τον τύπο $F(x, t) = f_t(x)$, να είναι διαφορίσιμη. Η οικογένεια αυτή ονομάζεται ισοτοπία που συνδέει τους κόμπους K_0 και K_1 .

Χρήσιμη ιδιότητα των ισοτοπιών κόμπων είναι ότι αν έχουμε ισοτοπικούς κόμπους με κάποιο κοινό τμήμα, τότε υπάρχει ισοτοπία μεταξύ τους που δεν μετακινεί κανένα σημείο έξω από μια περιοχή αυτού του τμήματος. Η απόδειξη αυτής της ιδιότητας δε θα μελετηθεί και παραπέμπουμε στο [2] για αυτήν, ενώ εμείς θα θεωρούμε δεδομένη την ισχύ της.

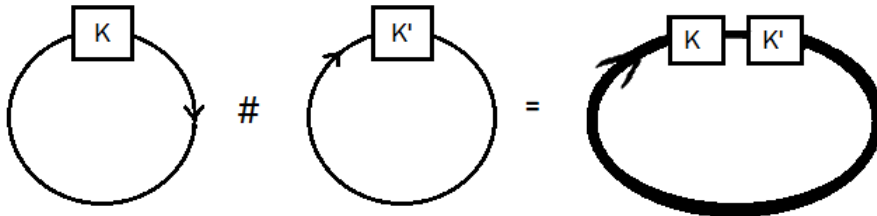
Μια φυσιολογική ερώτηση που προκύπτει μετά την παρουσίαση των δύο παραπάνω εκδοχών για τους κόμπους (την πολυγωνική και τη λεία), είναι αν από αυτές τις θεωρήσεις προκύπτει η ίδια θεωρία κόμπων. Αποδεικνύεται, και θα θεωρήσουμε δεδομένο ότι ισχύει χωρίς να δώσουμε κάποιο επιχειρήμα (για απόδειξη παραπέμπουμε επίσης στο [2]), ότι η απάντηση σε αυτήν την ερώτηση είναι καταφατική. Για την ακρίβεια αυτό που αποδεικνύεται είναι ότι υπάρχει μια $1 - 1$ και επί αντιστοιχία (ονομάζεται «εξομάλυνση») μεταξύ των κλάσεων ισοδυναμίας των πολυγωνικών κόμπων (αυτές που ορίζονται βάσει του χαρακτηρισμού των ισοδύναμων πολυγωνικών κόμπων που ορίσαμε) και των κλάσεων ισοτοπίας των λείων κόμπων. Όποια γεωμετρική ιδιότητα αποδεικνύεται επομένως για οποιοδήποτε από τα δύο είδη κόμπων θα ισχύει και για τα δύο, γεγονός που μας επιτρέπει να επιλέγουμε τη θεώρηση που μας διευκολύνει περισσότερο ανά περίπτωση. Παράδειγμα αυτού αποτελεί το ότι αφού αποδείξαμε για πολυγωνικούς κόμπους ότι υπάρχει επίπεδο προβολής του κόμπου που να ικανοποιεί τους κανόνες που θέσαμε, αυτομάτως αυτό ισχύει και για τους λείους κόμπους.

1.4 Συνεκτικό άθροισμα κόμπων

Σε αυτήν την παράγραφο, σκοπεύουμε να περιγράψουμε μια βασική πράξη μεταξύ κόμπων η οποία για να είναι καλώς ορισμένη απαιτεί να είναι προσανατολισμένοι οι κόμποι που χρησιμοποιούμε. Αυτό σημαίνει ότι εκτός του συνόλου σημείων που περιγράφει τον κόμπο, θεωρούμε δεδομένη και μια συγκεκριμένη φορά σχεδιασμού (από τις δύο δυνατές).

Ορισμός 1.4.1. (i) Συγκόλληση δύο ξένων μεταξύ τους τοπολογικών χώρων \mathcal{X}, \mathcal{Y} μέσω της συνεχούς συνάρτησης $f: A \rightarrow f(A) \subseteq \mathcal{Y}$, όπου $A \subseteq \mathcal{X}$, ονομάζουμε τον τοπολογικό χώρο πηλίκο που προκύπτει από τον $\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}$, αν ταυτίσουμε κάθε $x \in A$ με το $f(x) \in f(A)$ (αν θεωρήσουμε δηλαδή τη σχέση ισοδυναμίας $x \sim f(x)$). Συμβολίζεται συνήθως με $\mathcal{X} \cup_f \mathcal{Y}$.

(ii) Σύνθεση ή συνεκτικό άθροισμα δύο προσανατολισμένων κόμπων K, K' ονομάζεται ο κόμπος που προκύπτει αν αφαιρέσουμε δύο ανοιχτούς 1-δίσκους U, U' από τους K, K' αντίστοιχα, και συγκολλήσουμε τα σύνορά τους όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.6, με τέτοιο τρόπο ώστε να διατηρούνται οι προσανατολισμοί στο νέο κόμπο. Συμβολίζεται συνήθως με $K \# K'$.



Σχήμα 1.6: Συνεκτικό άθροισμα κόμπων

Όποτε αναφερόμαστε σε συνεκτικό άθροισμα κόμπων, θα θεωρούμε πάντα ότι αυτοί είναι δοσμένοι με συγκεκριμένο προσανατολισμό για να έχει νόημα η έκφραση. Επίσης, ο τρόπος με τον οποίο θεωρούμε ότι εμφανίζεται ο τοπολογικός χώρος που αντιστοιχεί στο συνεκτικό άθροισμα

μες στον \mathbb{R}^3 είναι αυτός που υπονοούμε στο Σχήμα 1.6, για να είμαστε διαισθητικά σίγουροι ότι το αποτέλεσμα είναι πάλι κόμπος. Τονίζουμε ότι δεν έχουμε προσπαθήσει να δώσουμε αυστηρό ορισμό του συνεκτικού άθροισματος για να αποφύγουμε τις πολλές τεχνικές λεπτομέρειες, καθώς ενδιαφερόμαστε για τη βασική ιδέα πίσω από αυτό.

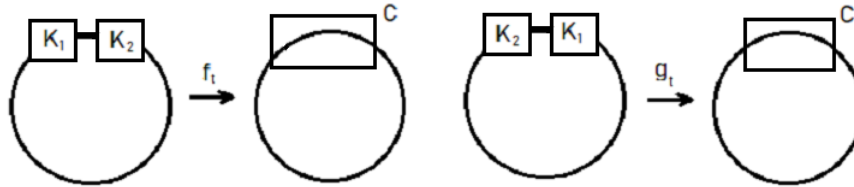
Σημαντική ιδιότητα του συνεκτικού άθροισματος είναι η αντιμεταθετικότητα του. Εποπτικά μπορούμε να φανταστούμε ότι αν έχουμε το συνεκτικό άθροισμα $K \# K'$, τότε αυτό είναι ισοτοπικό με το $K' \# K$, διότι μπορούμε να μικρύνουμε αρκετά τον K ώστε να τον μεταφέρουμε κατά μήκος ολόκληρου του K' προς τα «δεξιά» του. Μάλιστα αυτή η ισοτοπία μπορεί να έχει την ιδιότητα ότι δεν μετακινεί οτιδήποτε εκτός του σύνθετου κόμπου.

Μια προσέγγιση των κόμπων που δεν είναι ισοδύναμη με τις δύο που έχουμε αναφέρει (την πολυγωνική και τη λεία), είναι η ονομαζόμενη ως τοπολογική που ορίζει σαν κόμπο κάθε αμφισυνεχή εμφύτευση του S^1 στον \mathbb{R}^3 (αν εμφυτεύσουμε ταυτόχρονα περισσότερους κύκλους τότε θα πάρουμε έναν κρίκο). Δύο τοπολογικοί κόμποι είναι ισοτοπικοί, αν υπάρχει ισοτοπία που να τους συνδέει. Να σημειώσουμε ότι η ισοτοπία που συνδέει δύο τοπολογικούς κόμπους είναι οικογένεια ομοιομορφισμών, κι όχι διαφορομορφισμών. Τοπολογικοί κόμποι είναι και οι λείοι και οι πολυγωνικοί κόμποι, κι όσοι τοπολογικοί είναι ισοτοπικοί με κάποιον πολυγωνικό ή κάποιον λείο ονομάζονται ήμεροι. Όμως υπάρχουν και τοπολογικοί κόμποι που δεν είναι ισοτοπικοί με κάποιον πολυγωνικό ή λείο κόμπο κι αυτοί ονομάζονται άγριοι. Άγριοι κόμποι είναι κάποιιοι που έχουν, για παράδειγμα, άπειρα σημεία διασταύρωσης σε οποιαδήποτε επίπεδη προβολή τους, περίπτωση που δε λαμβάνουμε υπόψιν σύμφωνα με τους κανόνες που έχουμε θέσει εξ αρχής. Ωστόσο, ακολούθως παρουσιάζουμε ένα θεώρημα που η απόδειξή του κάνει χρήση ενός τέτοιου κόμπου.

Θεώρημα 1.4.2. *Αν ο κόμπος K_1 είναι μη τετριμμένος, τότε και το συνεκτικό άθροισμά του με οποιονδήποτε κόμπο K_2 είναι μη τετριμμένο.*

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει με εις άτοπο απαγωγή. Υποθέτουμε αρχικά ότι υπάρχει κόμπος K_2 μη τετριμμένος τέτοιος ώστε το συνεκτικό άθροισμα $K_1 \# K_2$ να είναι ο τετριμμένος κόμπος K_0 . Αφού τα $K_1 \# K_2$ και

$K_2 \# K_1$ είναι ισοτοπικά μεταξύ τους, λόγω της αντιμεταθετικότητας (υπό τις συγκεκριμένες προϋποθέσεις που προσδιορίσαμε) του συνεκτικού αθροίσματος, θα είναι και ισοτοπικά με τον τετριμμένο κόμπο K_0 , μιας και το $K_1 \# K_2$ είναι ο τετριμμένος κόμπος. Έστω f_t η ισοτοπία που συν-

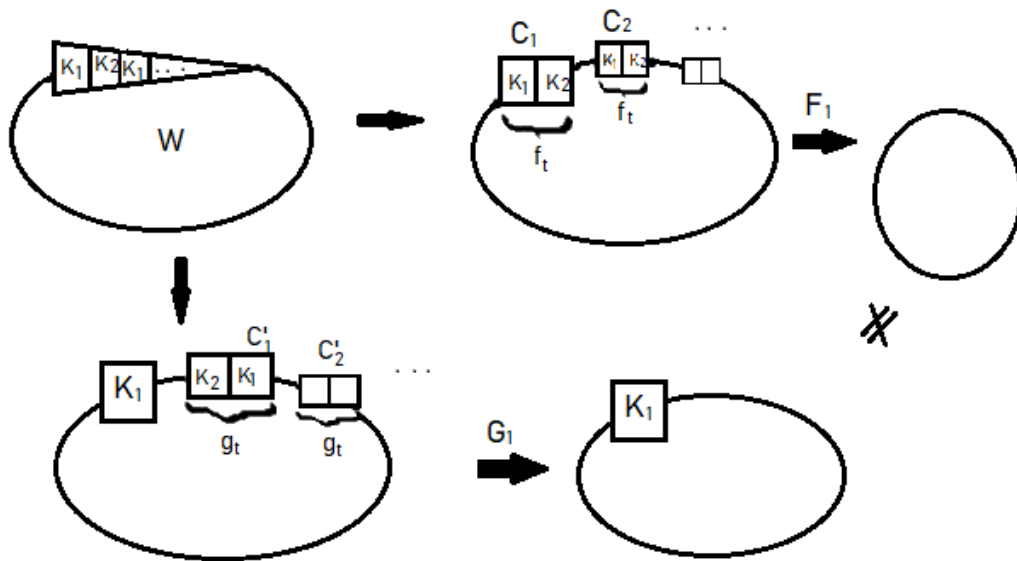


Σχήμα 1.7: Ισοτοπίες που δε μετακινούν ολόκληρο τον κόμπο

δέει τους $K_1 \# K_2$ και K_0 , και g_t η ισοτοπία που συνδέει τους $K_2 \# K_1$ και K_0 . Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η f_t δε μετακινεί τίποτα εκτός μιας περιοχής C του K_0 , κι ότι αντίστοιχα η g_t δε μετακινεί τίποτα εκτός μιας περιοχής C' του K_0 (βλ. Σχήμα 1.7).

Θεωρούμε τώρα έναν κόμπο W , πιθανώς άγριο, που σχηματίζεται όπως στο Σχήμα 1.8. Για να ορίσουμε ένα τέτοιο αντικείμενο μέσω κάποιας εμφύτευσης, μπορούμε να χωρίσουμε το ένα ημικύκλιο του S_1 σε αριθμησίμα άπειρα τόξα, με ολοένα και μικρότερο μήκος (η σειρά των μηκών που προκύπτει πρέπει να είναι συγκλίνουσα, π.χ. η $\sum \frac{1}{2^n}$) και σε κάθε τόξο να «δένουμε» εναλλάξ τους κόμπους K_1 και K_2 .

Εφαρμόζοντας την ισοτοπία F_t στον W , που ορίζεται να είναι η ισοτοπία f_t στους κύβους C_1, C_2, \dots και η ταυτοτική απεικόνιση εκτός αυτών των κύβων για κάθε $t \in [0, 1]$, καταλήγουμε στον K_0 , τον τετριμμένο κόμπο. Από την άλλη, αν εφαρμόσουμε την ισοτοπία G_t στον W , που ορίζεται να είναι η ισοτοπία g_t στους κύβους C'_1, C'_2, \dots και η ταυτοτική απεικόνιση εκτός αυτών των κύβων για κάθε $t \in [0, 1]$, καταλήγουμε στον K_1 . Αυτοί οι δύο κόμποι σαν ισοδύναμοι του W , θα έπρεπε να είναι ισοδύναμοι και μεταξύ τους, ωστόσο εξ υποθέσεως δεν είναι (βλ. Σχήμα 1.8), γεγονός που οδηγεί σε άτοπο. Επομένως, το συνεκτικό άθροισμα του K_1 με οποιονδήποτε κόμπο έχει σαν αποτέλεσμα μη τετριμμένο κόμπο. \square



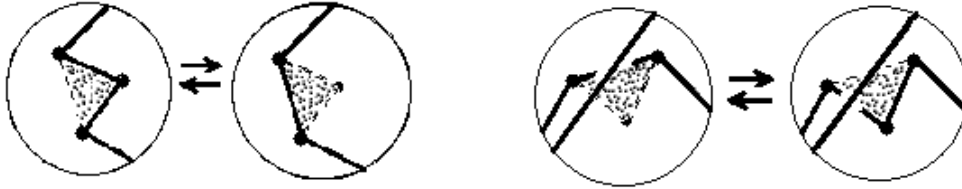
Σχήμα 1.8: Ο άγριος κόμπος W και οι δύο ισοτοπίες του

1.5 Επίπεδες ισοτοπίες και κινήσεις Reidemeister

Το επόμενο πολύ σημαντικό ζήτημα το οποίο θα μελετήσουμε σ' αυτήν την εισαγωγική παρουσίαση της μελέτης των κόμπων στα μαθηματικά, είναι ένα θεώρημα που μας υποδεικνύει τον τρόπο να εντοπίζουμε ισοδύναμους κόμπους μέσω επίπεδων διαγραμμάτων τους, δηλαδή επίπεδων προβολών τους που τηρούν τους αρχικούς κανόνες που έχουμε θέσει. Στην απόδειξη αυτού του θεωρήματος θα μας είναι πιο εύκολο να χρησιμοποιήσουμε την πολυγωνική εκδοχή των κόμπων, ωστόσο το αποτέλεσμα θα ισχύει και για λείους κόμπους, με βάση τα όσα έχουμε αναφέρει έως τώρα.

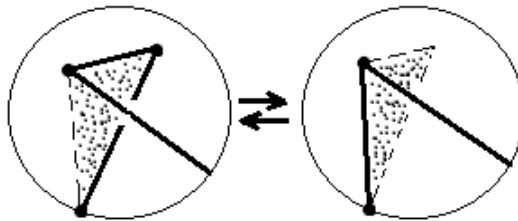
Ορισμός 1.5.1. Δύο διαγράμματα πολυγωνικών κόμπων καλούνται ισοδύναμα ή επιπέδως ισοτοπικά, αν και μόνο αν το ένα μπορεί να προκύψει από το άλλο μέσω μιας πεπερασμένης ακολουθίας κινήσεων σαν αυτές

του Σχήματος 1.9.



Σχήμα 1.9: Κινήσεις που χρησιμοποιούνται σε επίπεδη ισοτοπία

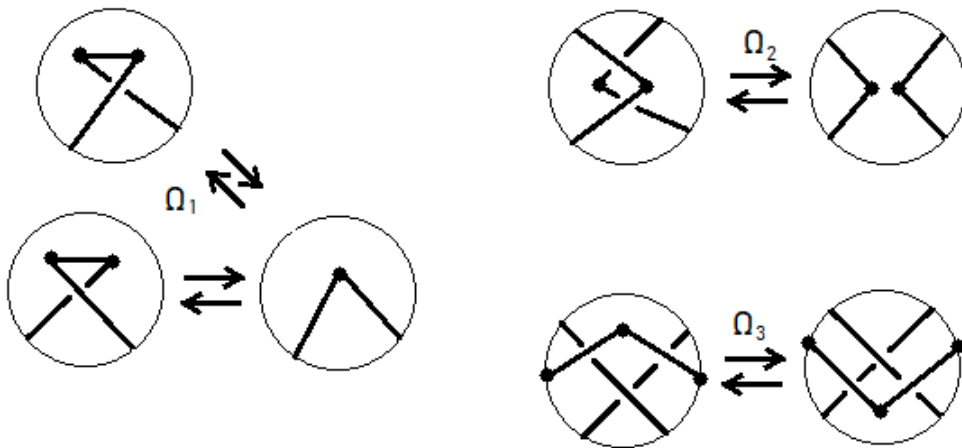
Αυτές οι κινήσεις, όπως βλέπουμε, δεν αλλάζουν τον αριθμό των σημείων διασταύρωσης του διαγράμματος, σε αντίθεση με την κίνηση στο Σχήμα 1.10. Παρόλα αυτά και η κίνηση στο Σχήμα 1.10 οδηγεί σε διάγραμμα ισοδύναμου κόμπου, αφού η επίπεδη αυτή κίνηση μπορεί να εμφανιστεί στις προβολές ενός κόμπου πριν και μετά από μια στοιχειώδη κίνηση στο χώρο.



Σχήμα 1.10: Αντιπαράδειγμα επίπεδης ισοτοπίας

Έτσι καταλήγουμε στο, μάλλον αναμενόμενο, συμπέρασμα ότι οι ισοτοπίες κόμπων στο χώρο δεν μπορούν να περιγραφούν πλήρως από επίπεδες ισοτοπίες διαγραμμάτων. Χρειαζόμαστε, επομένως κάποιες επιπλέον επιτρεπόμενες κινήσεις στα διαγράμματα.

Στο Σχήμα 1.11, παρουσιάζονται οι ονομαζόμενες κινήσεις Reidemeister (για πολυγωνικούς κόμπους), που συμβολίζονται με $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$. Η πρώτη κίνηση (Ω_1) είτε δημιουργεί είτε εξαφανίζει ένα σημείο διασταύρωσης, η δεύτερη κίνηση (Ω_2) είτε δημιουργεί είτε εξαφανίζει δύο σημεία



Σχήμα 1.11: Κινήσεις Reidemeister

διασταύρωσης και η τρίτη κίνηση (Ω_3) περνάει μια τρίτη πλευρά του κόμπου πάνω από ένα σημείο διασταύρωσης δύο άλλων πλευρών. Καμία από τις τρεις αυτές καταστάσεις δεν μπορούν να προκύψουν από επαναλαμβανόμενες κινήσεις επίπεδης ισοτοπίας. Σύμφωνα με το θεώρημα που ακολουθεί, αυτές οι κινήσεις επίπεδων διαγραμμάτων μαζί με τις επίπεδες ισοτοπίες είναι αρκετές για να περιγράψουν όλες τις χωρικές ισοτοπίες κόμπων.

Θεώρημα 1.5.2. (Reidemeister) *Δύο επίπεδα διαγράμματα κόμπων αντιστοιχούν σε ισοδύναμους κόμπους αν και μόνο αν μπορεί το ένα να προκύψει από το άλλο μέσω μιας πεπερασμένης ακολουθίας από κινήσεις Reidemeister και επίπεδες ισοτοπίες.*

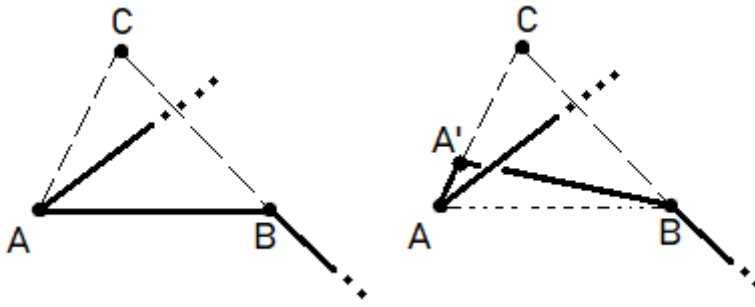
Απόδειξη. Αν δύο διαγράμματα πολυγωνικών κόμπων «συνδέονται» από μια ακολουθία κινήσεων Reidemeister και κινήσεων επίπεδης ισοτοπίας, τότε οι κόμποι που έχουν αυτές τις προβολές «συνδέονται» από μια σειρά από στοιχειώδεις κινήσεις στο χώρο, οπότε είναι ισοδύναμοι.

Μένει να αποδείξουμε ότι αν δύο κόμποι είναι ισοδύναμοι, τότε μπορούμε να πάρουμε το διάγραμμα του ενός από το διάγραμμα του άλλου μέσω πεπερασμένων κινήσεων επίπεδης ισοτοπίας και κινήσεων Reidemeister. Όμως, δύο πολυγωνικοί κόμποι είναι ισοδύναμοι αν συνδέο-

νται από πεπερασμένες στοιχειώδεις κινήσεις στο χώρο. Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι δύο κόμποι που ο ένας προκύπτει από τον άλλο μέσω μοναδικής στοιχειώδους κίνησης, έχουν διαγράμματα που συνδέονται με μια πεπερασμένη ακολουθία κινήσεων επίπεδων ισοτοπιών και κινήσεων Reidemeister. Έστω, λοιπόν, δύο κόμποι K, K' με τον δεύτερο να προκύπτει από τον πρώτο μέσω της στοιχειώδους κίνησης $AB \rightarrow AC \cup CB$. Θεωρούμε, επιπλέον, ότι οι δύο αυτοί κόμποι μας έχουν δοθεί μέσω έγκυρων προβολών τους σε κοινό επίπεδο προβολής που περιέχει το τρίγωνο ABC , ή που πιο γενικά δεν έχει άλλο σημείο των κόμπων K, K' εκτός ίσως από τα σημεία των πλευρών του τριγώνου ABC . Αυτή η θεώρηση μπορεί να γίνει χωρίς βλάβη της γενικότητας.

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η πλευρά DA του K που έχει σαν «πέρας» το A και η πλευρά BE που έχει σαν «αρχή» το B έχουν προβολές οι οποίες δεν έχουν κοινό σημείο με το εσωτερικό του τριγώνου ABC (θα το συμβολίζουμε με $\text{int}(ABC)$). Πράγματι, αν η DA έχει προβολή με κοινό σημείο με το $\text{int}(ABC)$, τότε μπορούμε να επιλέξουμε ένα σημείο A' επί του ευθυγράμμου τμήματος AC και να εκτελέσουμε μια κίνηση Ω_1 όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.12 (όμοια διαδικασία ακολουθείται αν αυτό ισχύει για την BE). Αυτό που πρέπει να προσέξουμε είναι ότι για την εκτέλεση της Ω_1 πρέπει να μην υπάρχει προβαλλόμενο σημείο του K εντός του τριγώνου που σχηματίζουν τα A, A' και το σημείο διασταύρωσης που δημιουργείται. Γι' αυτό το σημείο A' πρέπει να επιλεγεί αρκετά κοντά στο A και γι' αυτό δε θα μπορούσε, εν γένει, να είναι το C (σε μια τέτοια περίπτωση θα είχαμε εκφράσει τη στοιχειώδη κίνηση σε μια κίνηση Reidemeister και θα τελείωνε εκεί η δουλειά μας). Μετά από αυτή τη «διόρθωση» (θα δούμε στη συνέχεια γιατί είναι απαραίτητη), μπορούμε να συνεχίσουμε με το τρίγωνο $A'BC$ που ικανοποιεί τη συνθήκη που θέσαμε ώστε να καταλήξουμε με τον τρόπο που θα περιγράψουμε στην αντικατάσταση της AB από τις AC και CB .

Συμβολίζουμε με K_0 την προβολή του K . Επειδή η $[AB] \rightarrow [AC] \cup [CB]$ είναι στοιχειώδης κίνηση, το εσωτερικό του ABC δεν τέμνεται από τον K , άρα το $K_0 \cap \text{int}(ABC)$ περιέχει προβολές τμημάτων του κόμπου που βρίσκονται αποκλειστικά είτε πάνω από το επίπεδο του ABC είτε κάτω από αυτό. Για να ξεχωρίζουμε στα επόμενα σχήματα ποια τμήματα προβάλλονται από πάνω θα χρησιμοποιούμε διπλή γραμμή. Τα τμήματα

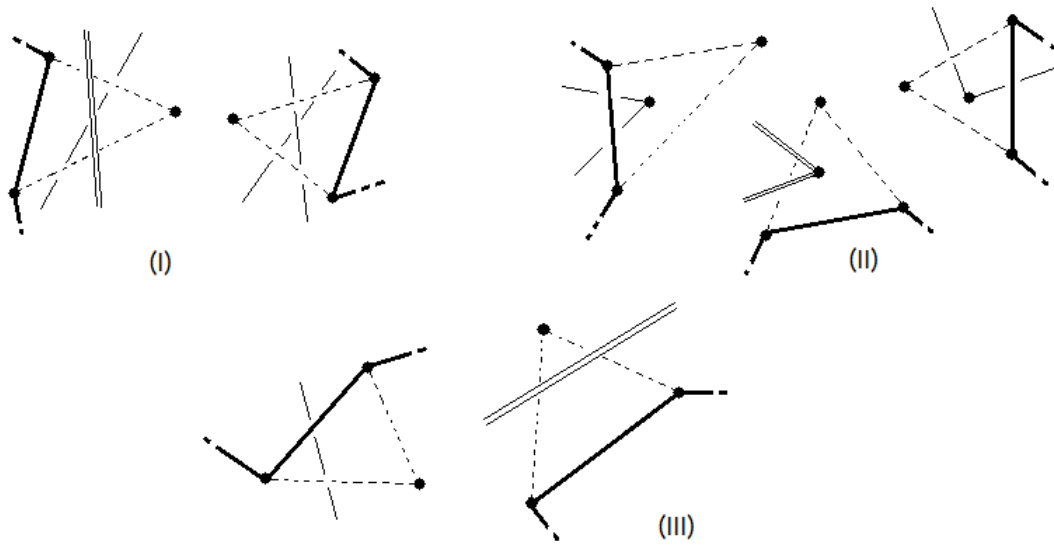


Σχήμα 1.12: «Διόρθωση» του τριγώνου ABC

που προβάλλονται από κάτω θα σχεδιάζονται με ενιαίες γραμμές πιο λεπτές από αυτές που θα χρησιμοποιούμε για να σχεδιάσουμε τα τμήματα του κόμπου που βρίσκονται πάνω στο επίπεδο του ABC.

Μια βασική ιδιότητα των πολυγωνικών σχημάτων είναι ότι μπορούν να χωριστούν σε πεπερασμένα στο πλήθος τρίγωνα. Κατασκευάζουμε ανά δύο ξένα τρίγωνα στο εσωτερικό του ABC που να το καλύπτουν όλο ως εξής (βλ. και Σχήμα 1.13): Πρώτα, για κάθε σημείο διασταύρωσης του διαγράμματος του κόμπου που βρίσκεται στο εσωτερικό του ABC σχηματίζουμε μικρό τρίγωνο Δ που να το περιέχει στο εσωτερικό του ώστε οι δύο προβολές των τμημάτων του K που έχουν την κοινή προβολή να τέμνουν δύο μόνο πλευρές του Δ . Αυτά τα καλούμε τρίγωνα Τύπου 1. Στη συνέχεια, για κάθε προβολή κορυφής του κόμπου, σχηματίζουμε μικρό τρίγωνο Δ' (θα τα ονομάζουμε Τύπου 2) που να την περιέχει ώστε οι δύο προβολές πλευρών που συναντιούνται σε αυτή να μην τέμνουν κάποια κορυφή του Δ' . Αυτό που μένει εντός του ABC και εκτός των δύο ειδών τριγώνων που έχουμε κατασκευάσει, περιέχει μόνο προβολές πλευρών του K και παραμένει πολυγωνικό σχήμα. Έτσι, χωρίζουμε αυτήν την επιφάνεια σε τρίγωνα Τύπου 3 που καθένα θα περιέχει τμήμα μίας μόνο πλευράς του K και σε τρίγωνα Τύπου 4 που θα έχουν κενό εσωτερικό.

Σκοπός μας είναι να ξεκινήσουμε από την AB και να χρησιμοποιήσουμε τα τρίγωνα που κατασκευάσαμε για να εκτελέσουμε κινήσεις Reidemeister και κινήσεις επίπεδης ισοτοπίας ώστε να φτάσουμε σταδιακά



Σχήμα 1.13: Παραδείγματα τριγώνων διαφόρων τύπων

στις AC, CB . Αυτό, πράγματι, μπορεί να επιτευχθεί: Στα τρίγωνα Τύπου 1, εκτελούμε την Ω_3 , στα Τύπου 2 και στα Τύπου 3, ανάλογα την περίπτωση, εφαρμόζουμε είτε επίπεδη ισοτοπία είτε Ω_2 και στα Τύπου 4 εφαρμόζουμε προφανώς επίπεδη ισοτοπία. Βασικό είναι να έχουμε συνεχώς υπόψιν ποιες προβολές προέρχονται από τμήματα που βρίσκονται πάνω από το ABC και ποιες προβολές προέρχονται από τμήματα που βρίσκονται κάτω από το ABC ώστε σε κάθε κίνηση που κάνουμε στο διάγραμμα να σημειώνουμε σωστά στα σημεία διασταύρωσης ποια προβολή αντιστοιχεί σε τμήμα που περνάει από πάνω και ποια σε τμήμα που περνάει από κάτω. Αυτή η διαδικασία έχει πεπερασμένο αριθμό βημάτων, οπότε σίγουρα τερματίζει. Τελικά θα έχουμε καταφέρει μέσω των επιτρεπόμενων κινήσεων των διαγραμμάτων να ολοκληρώσουμε την στοιχειώδη κίνηση που θέλαμε να κάνουμε εξ αρχής, κι αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. \square

1.6 Πολυώνυμο Kauffman

Μέχρι στιγμής σε όλη την παρουσίαση των κόμπων δεν έχουμε εξασφαλίσει κάποια πολύ βασικά αποτελέσματα, όπως για παράδειγμα το ότι ο τετριμμένος κόμπος και ο τρίφυλλος είναι πράγματι μη ισοτοπικοί μεταξύ τους. Γενικά τέτοια «αρνητικά» συμπεράσματα μη ισοτοπίας προκύπτουν συνήθως με τη χρήση αλγεβρικών αναλλοίωτων. Οι αναλλοίωτες είναι κάποια μαθηματικά αντικείμενα που αντιστοιχούν στις κλάσεις ισοτοπίας των κόμπων. Αν είναι διαφορετικά για δύο δοσμένους κόμπους, υποδηλώνουν ότι αυτοί είναι διαφορετικοί υπό την αυστηρή έννοια ότι ανήκουν σε διαφορετικές κλάσεις ισοτοπίας. Παρόλα αυτά, αν δύο κόμποι έχουν ίδια κάποια συγκεκριμένη αναλλοίωτη, δε σημαίνει ότι είναι απαραίτητα ισοτοπικοί.

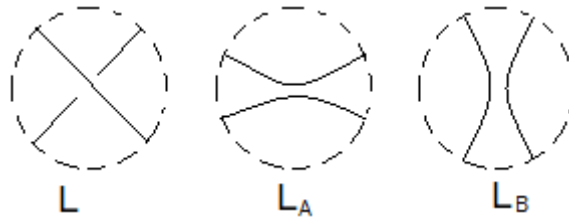
Η μελέτη των αναλλοίωτων είναι πολύ σημαντικό κομμάτι της Θεωρίας Κόμπων διότι συνδέεται προφανώς με το πρόβλημα ταξινόμησης όλων των διαφορετικών (κλάσεων ισοτοπίας) κόμπων. Αυτή η μελέτη έχει δώσει πολλά και ενδιαφέροντα αποτελέσματα, εμείς ωστόσο θα κάνουμε μια εισαγωγική παρουσίαση μιας μόνο και σχετικά απλής αναλλοίωτης για προσανατολισμένους κρίκους: το πολυώνυμο του Kauffman. Για να τονίσουμε σε αυτήν την παράγραφο το γεγονός ότι όσα γράφουμε ισχύουν για κρίκους, κι επειδή τις περισσότερες φορές θα αναφερόμαστε σε κρίκους, θα χρησιμοποιούμε αυτήν τη γενικότερη έννοια αντί των κόμπων.

Για τον ορισμό του πολυωνύμου του Kauffman, είναι απαραίτητο να εξοικειωθούμε πρώτα με το πολυώνυμο-αγκύλη.

Ορισμός 1.6.1. Το πολυώνυμο-αγκύλη ορίζεται για τυχαίο κρίκο L με μεταβλητές τις a, b, c , να είναι αυτό που ικανοποιεί τις σχέσεις που ακολουθούν:

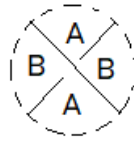
- (i) $\langle L \sqcup \bigcirc \rangle = c \langle L \rangle$ (το \sqcup σημαίνει ότι ο L δεν έχει κοινό σημείο με τον τετριμμένο κόμπος που συμβολίζεται από το \bigcirc),
- (ii) $\langle \bigcirc \rangle = 1$,
- (iii) $\langle L \rangle = a \langle L_A \rangle + b \langle L_B \rangle$,

όπου L_A, L_B είναι κρίκοι με διαγράμματα εντελώς όμοια με του L εκτός του κυκλικού δίσκου που είναι περιοχή ενός σημείου διασταύρωσής του, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.14, ενώ στο εσωτερικό αυτού του κυκλικού δίσκου έχουν τη μορφή του σχήματος.



Σχήμα 1.14: Διαγράμματα των κρίκων L, L_A, L_B

Η τρίτη συνθήκη περιγράφει στην πραγματικότητα τον τρόπο που υπολογίζουμε το συγκεκριμένο πολυώνυμο. Σε κάθε σημείο διασταύρωσης του κρίκου, ανάγουμε τον υπολογισμό του L στον υπολογισμό των πολυωνύμων δύο κρίκων με ένα λιγότερο σημείο διασταύρωσης, ώσπου στο τέλος θα μείνουμε με έναν τετριμμένο κρίκο του οποίου το πολυώνυμο-αγκύλη υπολογίζεται από τις δύο πρώτες συνθήκες. Έχει βέβαια σημασία ποιος κρίκος είναι ο L_A , που πολλαπλασιάζεται με a , και ποιος είναι ο L_B που πολλαπλασιάζεται με b , κι αυτό πρέπει να είναι ξεκάθαρο ανεξάρτητα από το πώς είναι τοποθετημένο το διάγραμμα στο επίπεδο. Για να αποφασίσουμε ποιος κρίκος είναι ο καθένας, θεωρούμε ότι «περπατάμε» στο τμήμα του κόμπου που περνάει «από πάνω» στο σημείο διασταύρωσης (βλ. Σχήμα 1.15): Πριν συναντήσουμε το σημείο διασταύρωσης, η περιοχή που βρίσκεται από αριστερά μας είναι η περιοχή A , όπως και η περιοχή που βρίσκεται στα δεξιά μας αφού περάσουμε το σημείο διασταύρωσης. Οι άλλες δύο υποπεριοχές που μένουν εντός του κυκλικού δίσκου με τον διακεκομμένο περίγραμμο συναποτελούν την περιοχή B . Έτσι, ο νέος κρίκος που το διάγραμμά του εντός του κυκλικού δίσκου αυτού περικλείει την περιοχή A είναι ο L_A κι ο άλλος είναι ο L_B .



Σχήμα 1.15: Οι περιοχές A και B

Για να έχουμε κάποιο πολυώνυμο ως αναλλοίωτη μιας κλάσης ισοτοπίας, αρκεί να ξέρουμε ότι είναι αναλλοίωτο ως προς τις κινήσεις επίπεδης ισοτοπίας και τις τρεις κινήσεις Reidemeister ενός διαγράμματος κάποιου κρίκου L της κλάσης. Επιχειρούμε να επιβάλλουμε κάποιες επιπλέον σχέσεις μεταξύ των a, b, c ώστε να έχουμε το πολυώνυμο-αγκύλη ως αναλλοίωτη. Ξεκινάμε με την κίνηση Ω_2 .

$$\begin{aligned}
 \langle \text{crossing} \rangle &= a \langle \text{loop} \rangle + b \langle \text{crossing} \rangle \\
 &= a[a \langle \text{loop} \rangle + b \langle \text{circle} \rangle] + \\
 &\quad b[a \langle \text{crossing} \rangle + b \langle \text{loop} \rangle] \\
 &= (a^2 + b^2 + abc) \langle \text{circle} \rangle + ab \langle \text{crossing} \rangle .
 \end{aligned}$$

Αν επιβάλλουμε να ισχύουν οι σχέσεις $ab = 1$ και $a^2 + b^2 + abc = 0$, τότε το πολυώνυμο-αγκύλη θα είναι αναλλοίωτο ως προς τη δεύτερη κίνηση Reidemeister. Αυτές οι σχέσεις είναι ισοδύναμες και με τις σχέσεις $b = a^{-1}$ και $c = -a^2 - b^2$.

Για την κίνηση Ω_3 υπολογίζουμε:

1.6 Πολυώνυμο Kauffman

$$\begin{aligned}
 \langle \text{Diagram 1} \rangle &= a \langle \text{Diagram 2} \rangle + b \langle \text{Diagram 3} \rangle \\
 \langle \text{Diagram 4} \rangle &= a \langle \text{Diagram 5} \rangle + b \langle \text{Diagram 6} \rangle
 \end{aligned}$$

Τα πολυώνυμα που πολλαπλασιάζονται με b και στις δύο σχέσεις είναι ίσα, αφού αντιστοιχούν σε επιπέδως ισοτοπικά διαγράμματα. Επίσης, αφού το πολυώνυμο-αγκύλη είναι αναλλοίωτο ως προς την Ω_2 , έχουμε:

$$\langle \text{Diagram 2} \rangle = \langle \text{Diagram 5} \rangle = \langle \text{Diagram 6} \rangle$$

Αυτό σημαίνει ότι και τα πολυώνυμα που πολλαπλασιάζονται με a και στις δύο σχέσεις είναι ίσα. Τελικά συμπεραίνουμε ότι το πολυώνυμο-αγκύλη είναι αναλλοίωτο και ως προς την τρίτη κίνηση Reidemeister.

Μένει να ελέγξουμε τι ισχύει για την πρώτη κίνηση Reidemeister:

$$\begin{aligned}
 \langle \text{Diagram 7} \rangle &= a \langle \text{Diagram 8} \rangle + b \langle \text{Diagram 9} \rangle = \lambda \langle \text{Diagram 10} \rangle \\
 \langle \text{Diagram 11} \rangle &= a \langle \text{Diagram 12} \rangle + b \langle \text{Diagram 13} \rangle = \lambda' \langle \text{Diagram 14} \rangle
 \end{aligned}$$

Στα παραπάνω έχουμε $\lambda = ac + b = a(-a^2 - a^{-2}) + a^{-1} = -a^3$ και $\lambda' = -a^{-3}$. Αυτό σημαίνει ότι αν δεν ισχύει $\lambda = \lambda' = 1$, που είναι ισοδύναμο με $a^3 = -1$, τότε το πολυώνυμο-αγκύλη δεν είναι αναλλοίωτο ως προς την Ω_1 .

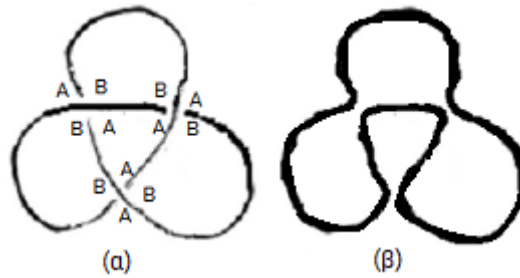
Το να επιβάλλουμε να ισχύει η σχέση $a^3 = -1$, όπως κάναμε στην περίπτωση της Ω_2 , θα έκανε από τη μία το πολυώνυμο αναλλοίωτο

ποσότητα για τους κρίκους, αλλά από την άλλη θα περιόριζε την ποικιλία των διαφορετικών πολυωνύμων-αγκύλη τόσο ώστε δε θα ήταν πλέον μια χρήσιμη αναλλοίωτη (δε θα ξεχώριζε για παράδειγμα τον τετριμμένο κόμπο από τον τρίφυλλο). Αυτό που εντέλει θα κάνουμε με το πολυώνυμο-αγκύλη είναι να το χρησιμοποιήσουμε για να ορίσουμε ένα άλλο πολυώνυμο (του Kauffman) που θα είναι αναλλοίωτο για προσανατολισμένους κρίκους.

Αυτό που είναι βασικό σε αυτό το σημείο είναι να εξετάσουμε αν υπάρχει για κάθε κρίκο αυτό το πολυώνυμο κι αν ορίζεται με μοναδικό τρόπο. Υπάρχει θεώρημα που αποδεικνύει ότι κάτι τέτοιο ισχύει, πριν όμως το αποδείξουμε, αξίζει να ασχοληθούμε με το πως υπολογίζεται αυτό το πολυώνυμο για δοσμένο κρίκο. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, ο υπολογισμός χρησιμοποιεί αρχικά την τρίτη συνθήκη του ορισμού του. Αυτό που έχει σημασία είναι ότι ο υπολογισμός μπορεί να γίνει «καταστρέφοντας» τα σημεία διασταύρωσης με οποιαδήποτε σειρά. Πράγματι, μετά από κάθε εφαρμογή της τρίτης συνθήκης, προκύπτουν δυο νέα διαγράμματα με ένα λιγότερο σημείο διασταύρωσης, ώσπου τελικά για ένα διάγραμμα με n σημεία διασταύρωσης παίρνουμε 2^n διαγράμματα τετριμμένων κρίκων. Το πολυώνυμο καθενός από αυτούς τους κρίκους, έχει ένα συγκεκριμένο «συντελεστή» από a και b που εξαρτάται από την επιλογή του L_A ή του L_B σε κάθε σημείο διασταύρωσης και στο τέλος αθροίζουμε αυτά τα πολυώνυμα με τους συντελεστές τους για να πάρουμε το πολυώνυμο-αγκύλη του αρχικού κρίκου. Με οποιαδήποτε σειρά κι αν «καταστρέφουμε» σημεία διασταύρωσης, τα τελικά 2^n διαγράμματα θα είναι ίδια και οι «συντελεστές» των πολυωνύμων τους θα είναι επίσης ίδιοι (μετατίθενται τα a, b μεταξύ τους), οπότε δεν μπορούμε να καταλήξουμε σε διαφορετικό πολυώνυμο.

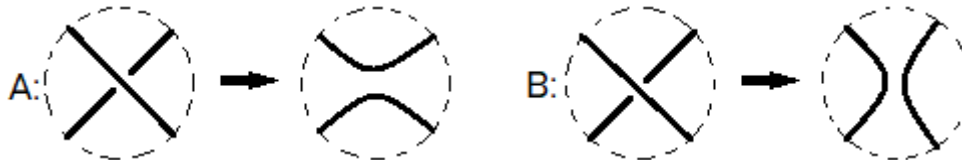
Για παράδειγμα, για τον τρίφυλλο κόμπο του Σχήματος 1.16α και το ένα από το οχτώ διαγράμματα, στο Σχήμα 1.16β, που προκύπτει κατά τη διαδικασία υπολογισμού του πολυωνύμου όπως περιγράψαμε, ανεξάρτητα από τη σειρά καταστροφής των σημείων διασταύρωσης, ο συντελεστής του συγκεκριμένου διαγράμματος θα είναι $a^2b = a^2a^{-1} = a$.

Θεώρημα 1.6.2. Για κάθε κρίκο L υπάρχει μοναδικό πολυώνυμο $\langle L \rangle$ που ικανοποιεί τις τρεις σχέσεις του ορισμού του πολυωνύμου-αγκύλη.



Σχήμα 1.16: (α) Ο τρίφυλλος κόμπος, (β) Διάγραμμα που προκύπτει κατά τον υπολογισμό του πολυωνύμου-αγκύλη του τρίφυλλου κόμπου

Απόδειξη. Αριθμούμε πρώτα τα σημεία διασταύρωσης του διαγράμματος που έχουμε για τον L , τα οποία έστω ότι είναι n στο πλήθος, και στο i -οστό σημείο διασταύρωσης αντιστοιχούμε κατάσταση $x_i = A$ ή $x_i = B$. Μια επιλογή κατάστασης για κάθε σημείο διασταύρωσης αντιστοιχεί σε μια κατάσταση του διαγράμματος. Έτσι για το διάγραμμα του L με τα n σημεία διασταύρωσης έχουμε 2^n δυνατές καταστάσεις του διαγράμματός του. Κάθε κατάσταση s του διαγράμματος αντιστοιχεί σε ένα διάγραμμα τετριμμένου κρίκου που προκύπτει από τον L αν καταστρέψουμε κάθε σημείο διασταύρωσής του σύμφωνα με την κατάστασή του, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.17.



Σχήμα 1.17: Αντιστοιχία κατάστασης σημείου διασταύρωσης με κρίκο L_A ή L_B

Για την κατάσταση s του L , συμβολίζουμε με $\alpha(s)$ και $\beta(s)$ τον αριθμό των σημείων διασταύρωσης με κατάσταση A και B αντίστοιχα, ενώ με $\gamma(s)$ τον αριθμό των μη τεμνόμενων κύκλων που υπάρχουν στο διάγραμμα τετριμμένου κρίκου που αντιστοιχεί στην κατάσταση s . Κα-

ταστρέφοντας, τώρα, σημεία διασταύρωσης με οποιαδήποτε σειρά και υπολογίζοντας το πολυώνυμο-αγκύλη με βάση τον ορισμό του, καταλήγουμε στο ότι πρέπει να ισχύει η σχέση:

$$\langle L \rangle = \sum_s a^{\alpha(s)} b^{\beta(s)} c^{\gamma(s)-1},$$

όπου $b = a^{-1}$, $c = -a^2 - a^{-2}$ και το άθροισμα λαμβάνεται πάνω σε όλες τις 2^n καταστάσεις του διαγράμματος του L . Αυτό σημαίνει ότι αν υπάρχει πολυώνυμο $\langle L \rangle$ για τον κρίκο L , αυτό θα πρέπει να ισούται με το πολυώνυμο που μόλις υπολογίσαμε, άρα είναι μοναδικό. Για να είμαστε σίγουροι ότι υπάρχει, πρέπει απλώς να ελέγξουμε αν για το πολυώνυμο που υπολογίσαμε στο δεξί μέλος της παραπάνω σχέσης ικανοποιούνται οι συνθήκες του ορισμού του πολυωνύμου-αγκύλη.

Για τις δύο πρώτες συνθήκες, είναι σχεδόν άμεσο το συμπέρασμα ότι ικανοποιούνται. Για την τρίτη συνθήκη, έστω ότι θέλουμε να την ελέγξουμε για το i -οστό σημείο διασταύρωσης. Χωρίζουμε το άθροισμα που υπολογίσαμε παραπάνω σε δύο αθροίσματα: το ένα πάνω από όλες τις καταστάσεις του διαγράμματος του L στις οποίες $x_i = A$ και το άλλο πάνω από τις υπόλοιπες καταστάσεις. Στο πρώτο άθροισμα μπορούμε να βγάλουμε κοινό παράγοντα ένα a αφού σε όλες τις καταστάσεις του έχουμε τουλάχιστον $x_i = A$, άρα $\alpha(s) \geq 1$. Αντίστοιχα στο δεύτερο άθροισμα μπορούμε να βγάλουμε κοινό παράγοντα ένα b . Αν L_A, L_B είναι οι κρίκοι που έχουμε προσδιορίσει στον ορισμό του πολυωνύμου-αγκύλη, τότε επαναλαμβάνοντας γι' αυτούς τη διαδικασία που κάναμε στην αρχή της απόδειξης, μπορούμε να βεβαιωθούμε ότι

$$\begin{aligned} \langle L \rangle &= \sum_s a^{\alpha(s)} b^{\beta(s)} c^{\gamma(s)-1} \\ &= a \sum_{s, x_i=A} a^{\alpha(s)-1} b^{\beta(s)} c^{\gamma(s)-1} + b \sum_{s, x_i=B} a^{\alpha(s)} b^{\beta(s)-1} c^{\gamma(s)-1} \\ &= a \langle L_A \rangle + b \langle L_B \rangle \end{aligned}$$

και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. \square

Είμαστε πλέον σε θέση να μιλήσουμε για το πολυώνυμο Kauffman. Από εδώ και στο εξής, μέχρι το τέλος της παραγράφου και του κεφα-

λαιίου, θα αναφερόμαστε σε προσανατολισμένους κρίκους, οπότε κάθε φορά που αναφερόμαστε σε κάποιον κρίκο θα θεωρούμε ότι έχει εφοδιαστεί με κάποιο συγκεκριμένο προσανατολισμό, ο οποίος θα σημειώνεται σχηματικά με βέλη.

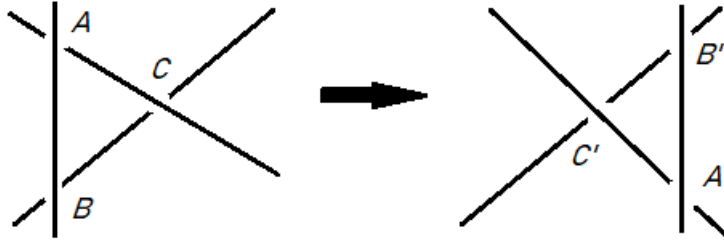
Ορισμός 1.6.3. Αριθμός στρέψης ενός προσανατολισμένου κρίκου L , που συμβολίζεται με $w(L)$, ονομάζεται το άθροισμα $w(L) = \sum_i \epsilon_i$, το οποίο λαμβάνεται πάνω απ' όλα τα σημεία διασταύρωσης και κάθε ϵ_i παίρνει τιμή 1 ή -1 ανάλογα με το πρόσημο του i -οστού σημείου διασταύρωσης που ορίζεται όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.18.



Σχήμα 1.18: Θετικό και αρνητικό σημείο διασταύρωσης

Μια βασική παρατήρηση σχετική με τον αριθμό στρέψης είναι ότι αν αλλάξουμε προσανατολισμό σε όλες τις συνιστώσες του κρίκου L τότε το $w(L)$ δεν αλλάζει. Αυτό σημαίνει ότι στους κρίκους που αποτελούνται από μοναδική συνιστώσα, δηλαδή στους κόμπους, δεν έχει σημασία ποιον προσανατολισμό θα διαλέξουμε από τους δύο δυνατούς, οπότε ο αριθμός στρέψης μπορεί να οριστεί και στους μη προσανατολισμένους κόμπους με μονοσήμαντο τρόπο. Επίσης, όταν εκτελούμε μια Ω_2 κίνηση, είτε δημιουργούμε είτε εξαφανίζουμε δύο σημεία διασταύρωσης που έχουν αντίθετα πρόσημα με οποιονδήποτε προσανατολισμό κι αν θεωρήσουμε τους κόμπους (βλ. Σχήμα 1.11), οπότε πάλι δεν αλλάζει ο αριθμός στρέψης. Για την Ω_3 κίνηση, όπως βλέπουμε στο Σχήμα 1.19, τα πρόσημα των σημείων διασταύρωσης A, B, C είναι ίδια με τα πρόσημα των σημείων A', B', C' αντίστοιχα, άρα τελικά ο αριθμός στρέψης είναι αναλλοίωτος και ως προς την τρίτη κίνηση Reidemeister. Ωστόσο για την πρώτη κίνηση Reidemeister δεν ισχύει το ίδιο, αφού είτε εμφανίζε-

ται είτε εξαφανίζεται ένα μόνο σημείο διασταύρωσης άρα υποχρεωτικά ο αριθμός στρέψης αλλάζει κατά ± 1 .



Σχήμα 1.19: Ο αριθμός στρέψης είναι αναλλοίωτος ως προς την κίνηση Ω_3

Αυτό που είδαμε και στη μελέτη του πολυωνύμου-αγκύλη είναι ότι κι αυτό δεν ήταν αναλλοίωτο ως προς την πρώτη κίνηση Reidemeister. Μάλιστα κάθε φορά ανάλογα με το είδος του σημείου διασταύρωσης που προέκυπτε ή εξαφανιζόταν υπήρχε διαφορά στο πολυώνυμο-αγκύλη κατά ένα συντελεστή $(-a)^{\pm 3}$. Έχοντας υπόψιν αυτήν την παρατήρηση δίνουμε τον ορισμό του πολυωνύμου Kauffman:

Ορισμός 1.6.4. Πολυώνυμο Kauffman ενός προσανατολισμένου κρίκου L , το οποίο θα συμβολίζουμε με $K(L)$, λέγεται το πολυώνυμο

$$K(L) = (-a)^{-3w(L)} \langle |L| \rangle,$$

όπου $|L|$ είναι ο κρίκος L στον οποίο έχουμε αγνοήσει τον προσανατολισμό του.

Με τη βοήθεια της παρατήρησης που κάναμε πριν δώσουμε τον ορισμό, βλέπουμε ότι το πολυώνυμο Kauffman «κανονικοποιεί» υπό μία έννοια το πολυώνυμο-αγκύλη ώστε να το κάνει αναλλοίωτο και ως προς την Ω_1 κίνηση χρησιμοποιώντας τον αριθμό στρέψης. Μένει να εξακριβώσουμε αν όντως πετυχαίνει αυτόν τον στόχο.

Θεώρημα 1.6.5. Το πολυώνυμο $K(\cdot)$ είναι αναλλοίωτη ισοτοπίας για προσανατολισμένους κρίκους.

1.6 Πολυώνυμο Kauffman

Απόδειξη. Λόγω του Θεωρήματος 1.5.2 και του γεγονότος ότι οι κινήσεις επίπεδης ισοτοπίας δεν αλλάζουν τον υπολογισμό ούτε του $\langle |L| \rangle$ ούτε του $w(L)$, για να δείξουμε ότι το $K(L)$ είναι αναλλοίωτη για προσανατολισμένους κρίκους αρκεί να δείξουμε ότι είναι αναλλοίωτη για τις τρεις κινήσεις Reidemeister.

Έχουμε ήδη δει ότι και το πολυώνυμο-αγκύλη και ο αριθμός στρέψης είναι αναλλοίωτα ως προς τις κινήσεις Ω_2 και Ω_3 ενώ δεν είναι αναλλοίωτα ως προς την Ω_1 . Παρόλα αυτά, όπως μπορούμε να δούμε κάνοντας τους κατάλληλους υπολογισμούς οι αλλοιώσεις που προκαλούν στον υπολογισμό του $K(L)$ αλληλοαναιρούνται.

$$\langle \text{crossing} \rangle = -a^{-3} \langle \text{cup} \rangle \quad w(\text{crossing}) = w(\text{cup}) - 1$$

Υπολογίζουμε και το πολυώνυμο Kauffman:

$$K(\text{crossing}) = (-a^{-3})(-a^3)K(\text{cup}) = K(\text{cup}).$$

Με αντίστοιχο υπολογισμό για την άλλη εκδοχή της πρώτης κίνησης Reidemeister βλέπουμε ότι τελικά το πολυώνυμο Kauffman είναι όντως αναλλοίωτη και ως προς τις τρεις κινήσεις Reidemeister. \square

Ένα μικρό δείγμα της χρησιμότητας του πολυωνύμου Kauffman αποτελεί ο διαχωρισμός των δύο τρίφυλλων κόμπων. Υπολογίζουμε πρώτα τα πολυώνυμο-αγκύλη αυτών:

$$\begin{aligned}
 \langle \text{Diagram 1} \rangle &= a \langle \text{Diagram 2} \rangle + a^{-1} \langle \text{Diagram 3} \rangle \\
 &= \dots = a(-a^4 - a^{-4}) + a^{-1}(a^6) = a^{-7} - a^{-3} - a^{-5} \\
 \langle \text{Diagram 4} \rangle &= a^7 - a^3 - a^{-5}
 \end{aligned}$$

Για τους αριθμούς στρέψης έχουμε:

$$w(\text{Diagram 5}) = +3 \qquad w(\text{Diagram 6}) = -3$$

Τελικά μέσω των πολυωνύμων Kauffman βλέπουμε ότι οι δύο τρίφυλλοι κόμποι ανήκουν σε διαφορετικές κλάσεις ισοτοπίας.

$$\begin{aligned}
 K(\text{Diagram 7}) &= -a^{-16} + a^{-12} + a^{-4} \\
 K(\text{Diagram 8}) &= -a^{16} + a^{12} + a^4
 \end{aligned}$$

Κεφάλαιο 2

Διαχωρισμοί Heegaard 3-πολλαπλοτήτων

2.1 3-πολλαπλότητες

Βασικό αντικείμενο της μελέτης που παρουσιάζεται σε αυτήν τη διπλωματική είναι οι τριδιάστατες πολλαπλότητες. Ο λόγος που μας ενδιαφέρουν οι 3-πολλαπλότητες (όπως αποκαλούνται συνήθως) είναι το γεγονός ότι αντιλαμβανόμαστε τον χώρο γύρω μας ως τριδιάστατο και τοπικά Ευκλείδειο, που είναι ένα από τα βασικά χαρακτηριστικά των 3-πολλαπλοτήτων (θα δώσουμε τους ορισμούς στη συνέχεια). Επίσης, είμαστε περιορισμένοι ώστε να καταλαβαίνουμε τον κόσμο γύρω μας μόνο τοπικά, οπότε περιγράφοντάς τον και μελετώντας τον μέσω 3-πολλαπλοτήτων ίσως επιτύχουμε να εξάγουμε χρήσιμα συμπεράσματα για την ολική δομή του χώρου.

Σε αυτό το σημείο θεωρούμε χρήσιμο να υπενθυμίσουμε κάποιες βασικές έννοιες της συνολοθεωρητικής τοπολογίας (παραπέμπουμε γι' αυτές στο [6]):

Ορισμός 2.1.1. (i) Βάση περιοχών ενός τοπολογικού χώρου (X, T) ονομάζεται ένα σύνολο $B \subseteq T$ το οποίο είναι τέτοιο ώστε κάθε στοιχείο του T να γράφεται ως ένωση στοιχείων του B .

(ii) Ένας τοπολογικός χώρος (X, T) καλείται Hausdorff αν για δύο

2.1 3-πολλαπλότητες

σημεία του $x, y \in \mathcal{X}$, υπάρχουν $U_x, V_y \in \mathcal{T}$ ώστε $x \in U_x, y \in V_y$ και $U_x \cap V_y = \emptyset$.

- (iii) Ένας τοπολογικός χώρος $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ καλείται συμπαγής αν για κάθε ανοιχτό κάλυμμά του υπάρχει πεπερασμένο υποκάλυμμα.
- (iv) Ένας τοπολογικός χώρος $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ καλείται συνεκτικός αν δεν είναι ένωση δύο ξένων μεταξύ τους, μη κενών και ανοιχτών υποσυνόλων του.

Πλέον μπορούμε να γράψουμε τον ορισμό των τοπολογικών πολλαπλοτήτων:

Ορισμός 2.1.2. (i) Τοπολογική πολλαπλότητα διάστασης n ή απλά n -πολλαπλότητα καλείται ένας Hausdorff τοπολογικός χώρος M^n με αριθμησιμη βάση περιοχών αν για κάθε $x \in M^n$ υπάρχει ανοιχτή περιοχή του x ομοιομορφική με τον \mathbb{R}^n .

- (ii) Αν στο (i) θεωρήσουμε ότι μπορούν να υπάρχουν και σημεία του M^n που να μην έχουν ανοιχτή περιοχή ομοιομορφική με τον \mathbb{R}^n , αλλά να έχουν ανοιχτή περιοχή ομοιομορφική με τον \mathbb{R}_+^n , όπου $\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0\}$, τότε ο χώρος M^n καλείται n -πολλαπλότητα με σύνορο.
- (iii) Σε μια πολλαπλότητα με σύνορο, το σύνολο των σημείων της που δεν έχουν περιοχές ομοιομορφικές με τον \mathbb{R}^n καλείται σύνορο της πολλαπλότητας M^n και συμβολίζεται με ∂M^n .

Μια πολύ σημαντική παρατήρηση σχετική με τις n -πολλαπλότητες με σύνορο, είναι ότι το σύνορό τους είναι πάντα μια $(n-1)$ -πολλαπλότητα (για την περίπτωση $n=3$ το σύνορο είναι μια 2-πολλαπλότητα, ή όπως ονομάζεται συνήθως μια επιφάνεια). Επίσης, διευκρινίζουμε ότι οι 3-πολλαπλότητες με τις οποίες εμείς θα ασχοληθούμε κυρίως, θα έχουν την επιπλέον ιδιότητα να είναι συμπαγείς και συνεκτικοί τοπολογικοί χώροι. Από αυτό το σημείο κι έπειτα θα θεωρούμε ότι αναφερόμαστε μόνο σε τέτοιες 3-πολλαπλότητες εκτός αν σε κάποιο σημείο δηλώσουμε ότι κάποια από τις επιπλέον ιδιότητες δεν ισχύει.

Ο ορισμός που δώσαμε παραπάνω πράγματι αντιστοιχεί σε αυτό που ονομάζουμε τοπολογική 3-πολλαπλότητα, ωστόσο μπορεί κανείς να θεωρήσει ένα τέτοιο αντικείμενο με κάποια πρόσθετη δομή, όπως είδαμε να συμβαίνει κάτι αντίστοιχο στην περίπτωση των κόμπων. Για παράδειγμα μπορεί κανείς να θεωρήσει ότι μια τοπολογική πολλαπλότητα είναι εφοδιασμένη με κάποια διαφορίσιμη δομή ή με κάποια κατά τμήματα γραμμική δομή. Παρόλα αυτά, εξ αιτίας ενός πολύ σημαντικού και καθόλου άμεσου αποτελέσματος, γνωρίζουμε ότι οι τρεις αυτές θεωρήσεις για τις 3-πολλαπλότητες, είναι ισοδύναμες όσον αφορά στην ταξινόμηση των 3-πολλαπλοτήτων (παραπέμπουμε στα [3], [4], [5]). Διαισθητικά αυτό σημαίνει ότι για κάθε συμπαγή τοπολογική 3-πολλαπλότητα υπάρχει ομοιομορφική προς αυτήν κατά τμήματα γραμμική 3-πολλαπλότητα και ομοιομορφική προς αυτήν διαφορίσιμη πολλαπλότητα. Άρα για να φτάσουμε στο σημείο που θέλουμε, δηλαδή να περιγράψουμε βασικές κατασκευές που χρησιμοποιούνται για την παρουσίαση όλων των συμπαγών και προσανατολισίμων (θα ορίσουμε παρακάτω τι είναι η προσανατολισιμότητα) 3-πολλαπλοτήτων, αρκεί να ασχοληθούμε με τοπολογικές 3-πολλαπλότητες χωρίς κάποια επιπλέον δομή. Μοναδική εξαίρεση σε αυτό που μόλις αναφέραμε αποτελούν οι διαχωρισμοί Heegaard που χρησιμοποιούν μια βασική ιδιότητα των κατά τμήματα γραμμικών 3-πολλαπλοτήτων, την τριγωνοποίησή τους.

Σε αυτό το σημείο είναι χρήσιμο να επεκτείνουμε την έννοια του τετραέδρου και των στοιχείων του:

Ορισμός 2.1.3. Πλέον, θα καλούμε τετράεδρο μια 3-πολλαπλότητα που είναι ομοιομορφική με ένα φυσικά εμπεδωμένο στον \mathbb{R}^3 τετράεδρο T . Κορυφές, ακμές και έδρες θα καλούμε τις εικόνες των αντίστοιχων στοιχείων του τετραέδρου T μέσω του προαναφερθέντος ομοιομορφισμού.

Ορισμός 2.1.4. Μια 3-πολλαπλότητα M^3 θα καλείται τριγωνοποιημένη αν δίνεται ως πεπερασμένη ένωση τετραέδρων που ανά δύο έχουν αποκλειστικά μια κοινή έδρα ή μια κοινή ακμή ή μια κοινή κορυφή ή τίποτα κοινό. Το σύνολο αυτών των τετραέδρων θα καλείται τριγωνοποίηση της M^3 . Η M^3 θα καλείται τριγωνοποιήσιμη αν μπορεί να τριγωνοποιηθεί.

Όπως αναφέραμε παραπάνω κάθε 3-πολλαπλότητα είναι ομοιομορφική με κάποια κατά τμήματα γραμμική 3-πολλαπλότητα ($[3]$), και κάθε τέτοια κατά τμήματα γραμμική 3-πολλαπλότητα μπορεί (από τον ορισμό, τον οποίο δε θα δώσουμε για να μην παρεκκλίνουμε από το βασικό κομμάτι της παρουσιάσής μας) να δοθεί σαν πεπερασμένη ένωση τετραέδρων όπως αυτά που περιγράφονται στον ορισμό της τριγωνοποίησης, άρα κάθε 3-πολλαπλότητα είναι τριγωνοποιήσιμη.

Όσον αφορά στην έννοια της προσανατολισσιμότητας, αυτή γενικά είναι μια δυσνόητη ιδιότητα. Για τις 3-πολλαπλότητες ακολουθούμε τον ακόλουθο ορισμό (χωρίς αυτός να είναι ο μόνος που υπάρχει):

Ορισμός 2.1.5. (i) Σε τυχαίο σημείο τετραέδρου θεωρούμε είτε δεξιόστροφο είτε αριστερόστροφο σύστημα συντεταγμένων Σ που έχει σαν αρχή αξόνων αυτό το σημείο. Το τετράεδρο αυτό καλείται προσανατολισμένο. Ο επαγόμενος προσανατολισμός μιας έδρας E του τετραέδρου είναι το επίπεδο σύστημα αξόνων που σχηματίζουν οι δύο άξονες του Σ πάνω στην E , αν τοποθετήσουμε το Σ έτσι ώστε ο τρίτος άξονας να κατευθύνεται προς το εξωτερικό του τετραέδρου.

(ii) Μια τριγωνοποιημένη 3-πολλαπλότητα καλείται προσανατολισμένη αν τα τετράεδρα της τριγωνοποίησής της είναι προσανατολισμένα με συμβατό τρόπο, δηλαδή αν οι επαγόμενοι προσανατολισμοί σε μια κοινή έδρα δύο τετραέδρων είναι αντίθετοι. Προσανατολίσιμη καλείται μια 3-πολλαπλότητα που μπορεί να προσανατολιστεί. Οι δυνατοί προσανατολισμοί, για μια προσανατολίσιμη 3-πολλαπλότητα, είναι ακριβώς δύο.

Τελευταία έννοια που πρέπει να εισαγάγουμε πριν μιλήσουμε εντέλει για τους διαχωρισμούς Heegaard, είναι το σώμα-χερούλι, μια ειδική κατηγορία 3-πολλαπλοτήτων με σύνορο. Ένα σώμα-χερούλι M^3 με g χερούλια μπορεί να προκύψει με τον εξής τρόπο από μια διδιάστατη σφαίρα με g χερούλια N^2 : την τοποθετούμε με φυσικό τρόπο μέσα στον \mathbb{R}^3 και το συμπαγές υποσύνολο του \mathbb{R}^3 που αυτή φράσσει είναι το M^3 . Τέτοια αντικείμενα είναι, για παράδειγμα, ο συμπαγής 3-δίσκος που φράσσεται από τη 2-σφαίρα και ο συμπαγής τόρος που φράσσεται από τον τόρο

$S^1 \times S^1$. Βασικό χαρακτηριστικό αυτών των αντικειμένων που τα ταξινομεί έως ομοιομορφισμού, είναι ο αριθμός g των χερουλιών που έχουν, όπως ακριβώς συμβαίνει με τις διδιάστατες σφαίρες με χερούλια.

2.2 Διαχωρισμοί Heegaard

Χρησιμοποιώντας σώματα-χερούλι μπορούμε να κατασκευάσουμε άλλες 3-πολλαπλότητες με τον ακόλουθο τρόπο: Έστω δύο σώματα-χερούλι με g χερούλια το καθένα, M_1^3 και M_2^3 . Τα σύνορά τους ∂M_1^3 και ∂M_2^3 είναι ομοιομορφικά αφού είναι και τα δύο διδιάστατες σφαίρες με g χερούλια, οπότε θεωρούμε $f : \partial M_1^3 \rightarrow \partial M_2^3$ έναν ομοιομορφισμό τους. Η συγκόλληση (βλ. Ορισμό 1.4.1) των M_1^3 και M_2^3 μέσω του ομοιομορφισμού f των συνόρων τους θα συμβολίζεται με M_f^3 .

Πρόταση 2.2.1. *Ο τοπολογικός χώρος M_f^3 που μόλις περιγράψαμε είναι μια συμπαγής, συνεκτική, προσανατολισμένη 3-πολλαπλότητα χωρίς σύνορο.*

Απόδειξη. Ο χώρος M_f^3 είναι Hausdorff διότι για δύο τυχαία διαφορετικά σημεία του μπορούμε να βρούμε μια περιοχή για το καθένα έτσι ώστε αυτές να είναι ξένες μεταξύ τους. Οι εν λόγω περιοχές είναι οι αντίστοιχες αυτών που ικανοποιούν την ιδιότητα Hausdorff στις πολλαπλότητες M_1^3, M_2^3 , αν τα σημεία ανήκουν στο ίδιο σώμα-χερούλι. Αν ανήκουν σε διαφορετικά σώματα-χερούλι, τότε θεωρούμε για το κάθε σημείο ανοιχτή περιοχή που δεν τέμνει το κοινό σύνορο των πολλαπλοτήτων.

Επίσης ο M_f^3 έχει αριθμήσιμη βάση περιοχών, διότι κάθε ανοιχτό σύνολό του γράφεται σαν ένωση βασικών ανοιχτών των M_1^3, M_2^3 , που έχουν αριθμήσιμες βάσεις περιοχών ως πολλαπλότητες με σύνορο. Μένει να δείξουμε ότι κάθε σημείο του M_f^3 έχει περιοχή ομοιομορφική με τον \mathbb{R}^3 ώστε να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι ο χώρος αυτός είναι 3-πολλαπλότητα.

Για τυχαίο σημείο του M_1^3 που δεν ανήκει στο σύνορό του μπορούμε να βρούμε περιοχή του στο χώρο M_1^3 που να είναι ομοιομορφική με τον \mathbb{R}^3 (την «ίδια» περιοχή που έχει σε σημείο της πολλαπλότητας M_1^3). Το ίδιο ισχύει για τυχαίο σημείο του M_2^3 που δεν ανήκει στο σύνορό του.

Έστω τώρα σημείο $x \in \partial M_1^3 \subseteq M_1^3$, που είναι «ταυτισμένο» με το $f(x) \in \partial M_2^3$. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει περιοχή $U_1 \subseteq M_1^3$ ώστε το x να ανήκει στο σύνολο $U_1 \cap \partial M_1^3$, με τη U_1 να είναι ομοιομορφική με τον \mathbb{R}_+^3 κι άρα με τη «μισή μπάλα» $D_+^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1 \wedge z \geq 0\}$. Επίσης γνωρίζουμε ότι υπάρχει περιοχή $U_2 \subseteq M_2^3$ ώστε το $f(x)$ να ανήκει στο σύνολο $U_2 \cap \partial M_2^3$, με τη U_2 να είναι ομοιομορφική με την D_-^3 (η D_-^3 ορίζεται όπως η D_+^3 αλλάζοντας τη συνθήκη $z \geq 0$ με τη συνθήκη $z \leq 0$ · οι δύο αυτές μισές μπάλες είναι ομοιομορφικές μεταξύ τους). Έστω $f_1 : U_1 \rightarrow D_+^3$ ομοιομορφισμός με $f_1(x) = (0, 0, 0)$ και $f_2 : U_2 \rightarrow D_-^3$ ομοιομορφισμός με $f_2(f(x)) = (0, 0, 0)$.

Μπορούμε να βρούμε ακριβώς μικρή μισή μπάλα B στον \mathbb{R}_+^3 με κέντρο το $(0, 0, 0)$ τέτοια ώστε $A = f_1^{-1}(B) \cap \partial M_1^3 \subseteq U_1 \cap U_2$ (εδώ αναφερόμαστε στα U_1, U_2 σαν υποσύνολα του M_1^3 ώστε να έχουν μη κενή τομή πάνω στο σύνορο $\partial M_1^3 = \partial M_2^3$). Έπειτα, βρίσκουμε περιοχή του $x \equiv f(x)$ στο M_2^3 ομοιομορφική με μισή μπάλα που να έχει ως σύνορο το $A \equiv f(A)$ ως εξής: Θεωρούμε επίπεδο F παράλληλο στο επίπεδο $z = 0$ σε απόσταση μικρότερη από 1, στον \mathbb{R}_-^3 . Προβάλλουμε με ευθύγραμμα τμήματα το σύνολο $f_2(A)$ του επιπέδου $z = 0$ στην τομή $F \cap D_-^3$ κι ο «στερεός κύλινδρος» Δ που σχηματίζεται χωρίς να συμπεριλάβουμε τα σημεία πάνω στην τομή αυτή, είναι ομοιομορφικός με την D_-^3 με σύνορο το $f_2(A)$, ομοιομορφικό με έναν ανοιχτό διδιάστατο δίσκο, και η $f_2^{-1}(\Delta)$ είναι η περιοχή που θέλαμε.

Στη συνέχεια, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $\phi_1 : f_1(A) \rightarrow f_2(A)$ που δίνεται από τον τύπο $\phi_1 = f_2 \circ f \circ f_1^{-1}$ είναι ομοιομορφισμός ως σύνδεση ομοιομορφισμών. Θέλουμε να επεκτείνουμε τον ϕ_1 από το $f_1(A)$ σε όλο το σύνολο B με τιμές σε κάποια μισή μπάλα ομοιομορφική της D_+^3 που έχει σύνορο το $f_2(A)$. Για να το πετύχουμε αυτό κάνουμε τα εξής: Αν t είναι τυχαίο σημείο του B που ανήκει στην ακτίνα με αρχή το $(0, 0, 0)$ και πέρας ένα σημείο a ($a \notin B$, άρα $a \neq t$), τότε η επέκταση $\bar{\phi}_1$ το απεικονίζει σε σημείο του ευθύγραμμου τμήματος με αρχή το $\phi_1(0, 0, 0)$ και πέρας το a , έτσι ώστε

$$\frac{|t|}{|a - t|} = \frac{|\bar{\phi}_1(t) - \phi_1(0, 0, 0)|}{|a - \bar{\phi}_1(t)|}$$

όπου με απόλυτες τιμές συμβολίζουμε τα μέτρα των αντίστοιχων διανυ-

σμάτων στον \mathbb{R}^3 .

Έτσι, στο χώρο M_f^3 υπάρχει η περιοχή $f_1^{-1}(B) \cup_f f_2^{-1}(\Delta)$ του x η οποία είναι ομοιομορφική εικόνα ανοιχτής μπάλας στον \mathbb{R}^3 μέσω του ομοιομορφισμού G , όπου $G(z) = \overline{\Phi}_1(f_1(z))$ αν $z \in f_1^{-1}(B)$ και $G(z) = f_2(z)$ αν $z \in f_2^{-1}(\Delta)$ (δεν είναι πολύ δύσκολο να ελεγχθεί ότι όντως είναι ομοιομορφισμός μεταξύ της συγκεκριμένης περιοχής και της εικόνας της, η οποία μπορούμε σχετικά εύκολα να δούμε ότι είναι ομοιομορφική με ανοιχτή μπάλα). Για τη συνάρτηση G , σημειώνουμε λεπτομερώς μόνο το γιατί είναι πράγματι καλά ορισμένη: αν $z(\equiv f(z)) \in A$, όπου A είναι το κοινό σύνορο των $f_1^{-1}(B), f_2^{-1}(\Delta)$, τότε έχουμε $\overline{\Phi}_1(f_1(z)) = \phi_1(f_1(z)) = f_2 \circ f \circ f_1^{-1}(f_1(z)) = f_2(f(z)) = f_2(z)$, αφού $z \equiv f(z)$. Τελικά, όλα τα παραπάνω συνεπάγονται ότι ο τοπολογικός χώρος M_f^3 είναι μια 3-πολλαπλότητα χωρίς σύνορο.

Στη συνέχεια, έστω ότι έχουμε τυχαίο ανοιχτό κάλυμμα K της M_f^3 . Από αυτό προκύπτουν ανοιχτά καλύμματα K_1, K_2 για τις M_1^3, M_2^3 αντίστοιχα (παίρνοντας τομές των συνόλων του K με την εκάστοτε πολλαπλότητα), που είναι και οι δύο συμπαγείς πολλαπλότητες με σύνορο (αφού είναι σώματα-χερούλι). Για τα καλύμματα αυτά ξέρουμε λόγω συμπάγιας ότι υπάρχουν πεπερασμένα υποκαλύμματα. Άρα τα K_1, K_2 ορίζουν με φυσικό τρόπο δύο πεπερασμένα υποκαλύμματα του K , τέτοια ώστε καθένα να καλύπτει μία πολλαπλότητα εκ των M_1^3, M_2^3 . Επομένως η ένωση των δύο πεπερασμένων υποκαλυμμάτων είναι ένα πεπερασμένο υποκάλυμμα για την πολλαπλότητα M_f^3 . Καταλήγουμε, λοιπόν, στο συμπέρασμα ότι η M_f^3 είναι συμπαγής.

Για την απόδειξη της συνεκτικότητας θα υποθέσουμε αρχικά ότι η M_f^3 δεν είναι συνεκτική και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Πράγματι, αν υπάρχουν δύο μη κενά, ξένα μεταξύ τους και ανοιχτά στην M_f^3 υποσύνολα της M, M' τέτοια ώστε $M \cup M' = M_f^3$, τότε είτε η M_1^3 είτε η M_2^3 δεν είναι υποσύνολο κανενός από τα M, M' (δε γίνεται τα M, M' να είναι πολλαπλότητες M_1^3, M_2^3 διότι αυτές έχουν κοινό σύνορο σαν υποσύνολα της M_f^3). Έστω χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι η M_1^3 δεν είναι υποσύνολο κανενός από τα M, M' . Τότε τα σύνολα $M_1^3 \cap M, M_1^3 \cap M'$ είναι μη κενά, ξένα μεταξύ τους και ανοιχτά υποσύνολα του M_1^3 τέτοια ώστε $(M_1^3 \cap M) \cup (M_1^3 \cap M') = M_1^3$. Αυτό όμως είναι άτοπο διότι το σώμα-χερούλι M_1^3 είναι εξ ορισμού συνεκτικό.

Τελευταίο κομμάτι της απόδειξης είναι αυτό που σχετίζεται με την προσανατολισσιμότητα της M_f^3 . Σε αυτό το σημείο είναι απαραίτητο να αναφέρουμε ότι αποτελεί αποδεδειγμένο αποτέλεσμα - που στο εξής θα θεωρείται γνωστό - το γεγονός ότι αν έχουμε μια 3-πολλαπλότητα με σύνορο η οποία είναι προσανατολισμένη, τότε υπάρχει μοναδικός προσανατολισμός που επάγεται στο σύνορό της. Επίσης θεωρούμε γνωστό ότι η σφαίρα με g χερούλια είναι μια προσανατολίσιμη επιφάνεια ¹ και ότι το σώμα-χερούλι με g χερούλια χωρίς το σύνορο είναι προσανατολίσιμη 3-πολλαπλότητα.

Έχοντας υπόψιν όλα τα παραπάνω, ξεκινάμε πρώτα τριγωνοποιώντας την M_f^3 κι επομένως και την επιφάνεια που αποτελεί το σύνορο των M_1^3, M_2^3 . Η επιφάνεια αυτή είναι σφαίρα με g χερούλια, άρα προσανατολίσιμη, άρα θεωρούμε έναν προσανατολισμό της, έστω Π . Οι M_1^3, M_2^3 είναι προσανατολίσιμες 3-πολλαπλότητες με σύνορο, κι επομένως ένας προσανατολισμός κάποιας από τις δύο επάγει συγκεκριμένο προσανατολισμό στο σύνορό της. Επιλέγουμε έναν προσανατολισμό για την M_1^3 έτσι ώστε αυτός να επάγει τον Π στο σύνορο. Έπειτα επιλέγουμε έναν προσανατολισμό για την M_2^3 έτσι ώστε αυτός να επάγει τον αντίθετο προσανατολισμό από τον Π στο σύνορο. Εξ αιτίας των επιλογών που έχουμε κάνει πλέον, οποιοδήποτε τετράεδρο κι αν διαλέξουμε από την M_f^3 θα είναι προσανατολισμένο με συμβατό τρόπο ως προς τα υπόλοιπα. Έτσι συμπεραίνουμε ότι η M_f^3 είναι προσανατολίσιμη 3-πολλαπλότητα. \square

Ένας διαχωρισμός Heegaard είναι η κατά μία έννοια αντίστροφη διαδικασία αυτής που περιγράψαμε, δηλαδή μια διαδικασία που χωρίζει μια 3-πολλαπλότητας M^3 σε δύο σώματα-χερούλι που έχουν συγκεκριμένα χαρακτηριστικά και είναι υποσύνολά της:

Ορισμός 2.2.2. Διαχωρισμός Heegaard μιας 3-πολλαπλότητας M^3 είναι το τρισύνολο $\{S, M_1^3, M_2^3\}$, όπου τα $M_1^3, M_2^3 \subseteq M^3$ είναι σώματα-χερούλι

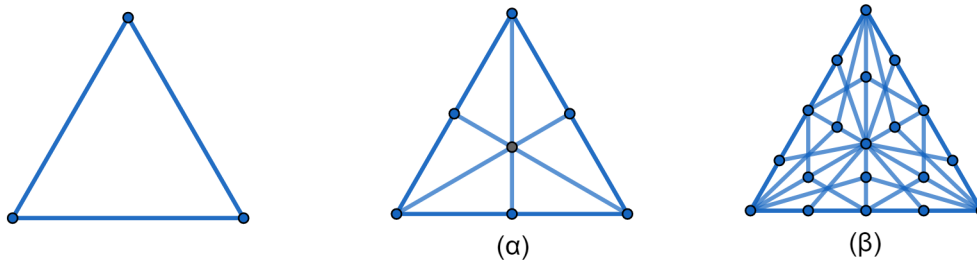
¹Σε αντιστοιχία με τις 3-πολλαπλότητες, έτσι και σε μια επιφάνεια αφού την τριγωνοποιήσουμε, σε κάθε τρίγωνο επιλέγουμε ένα σύστημα δύο συντεταγμένων (e_1, e_2) έτσι ώστε αν σε κοινή πλευρά δύο τριγώνων τοποθετήσουμε τα δύο συστήματα με τέτοιο τρόπο που να αναγκάζει τα διανύσματα e_2, e_2' να κατευθύνονται προς τα εσωτερικά των τριγώνων, τότε τα e_1, e_1' να είναι αντίρροπα. Οι δυνατοί προσανατολισμοί μιας προσανατολίσιμης επιφάνειας είναι ακριβώς δύο.

με ίδιο αριθμό χερουλιών g και κοινό σύνορο $\partial M_1^3 = \partial M_2^3 = S$. Η $S \subseteq M^3$ είναι μια επιφάνεια (με βάση την παρατήρηση που κάναμε μετά τον Ορισμό 2.1.2), και καλείται επιφάνεια Heegaard.

Ένα ερώτημα που προκύπτει σε αυτό το σημείο είναι αν κάθε 3-πολλαπλότητα έχει διαχωρισμό Heegaard κι αν όχι τότε υπό ποιες συνθήκες μπορούμε να εξασφαλίσουμε την ύπαρξη τέτοιου διαχωρισμού. Επιπλέον, μπορεί κανείς να αναρωτηθεί εάν για κάθε 3-πολλαπλότητα που έχει τουλάχιστον ένα τέτοιο διαχωρισμό αυτός είναι και μοναδικός. Στο πρώτο ερώτημα η απάντηση δίνεται από το ακόλουθο θεώρημα, ενώ στο δεύτερο ερώτημα θα δούμε με παραδείγματα ότι γενικά είναι δυνατό να υπάρχουν περισσότεροι του ενός διαχωρισμοί Heegaard μιας 3-πολλαπλότητας.

Θεώρημα 2.2.3. *Κάθε συμπαγής και συνεκτική 3-πολλαπλότητα (χωρίς σύνορο, όπως τις έχουμε ορίσει εξ αρχής) που είναι προσανατολίσιμη έχει διαχωρισμό Heegaard.*

Απόδειξη. Έστω M^3 μια συμπαγής, συνεκτική και προσανατολίσιμη 3-πολλαπλότητα κι έστω K μια τριγωνοποίηση της M^3 . Κάθε φυσικά εμπεδωμένο στον \mathbb{R}^3 τετράεδρο έχει βαρύκεντρο, δηλαδή ένα σημείο στο οποίο τέμνονται όλες οι διάμεσοί του (ευθύγραμμα τμήματα που ξεκινούν από κορυφές και καταλήγουν σε βαρύκεντρα απέναντι εδρών), και κάθε έδρα του χωρίζεται σε 6 μικρότερα τρίγωνα αν σχηματίσουμε τις τρεις διάμεσούς της. Για τετράεδρο όπως αυτό ορίζεται στον Ορισμό 2.1.3, βαρύκεντρο θα είναι η εικόνα του βαρύκεντρου του αρχικού τετραέδρου μέσω του ομοιομορφισμού και κάθε έδρα χωρίζεται σε 6 κομμάτια ομοιομορφικά με τρίγωνα από τις ομοιομορφικές εικόνες των διαμέσων της έδρας. Αν σε κάθε έδρα τυχαίου τετραέδρου T σχηματίσουμε αυτά τα 6 τρίγωνα (Σχήμα 2.1α), κι απ' αυτά σχηματίσουμε 6 τετράεδρα με τέταρτη κορυφή το βαρύκεντρο του T , τότε θα το έχουμε χωρίσει σε 24 μικρότερα τετράεδρα. Αν αυτό το κάνουμε για κάθε τετράεδρο της K , τότε καταλήγουμε σε αυτό που ονομάζουμε πρώτη βαρυκεντρική υποδιαίρεση K' της K . Αν επαναλάβουμε την ίδια διαδικασία για την K' (Σχήμα 2.1β), τότε καταλήγουμε στη δεύτερη βαρυκεντρική υποδιαίρεση K'' .



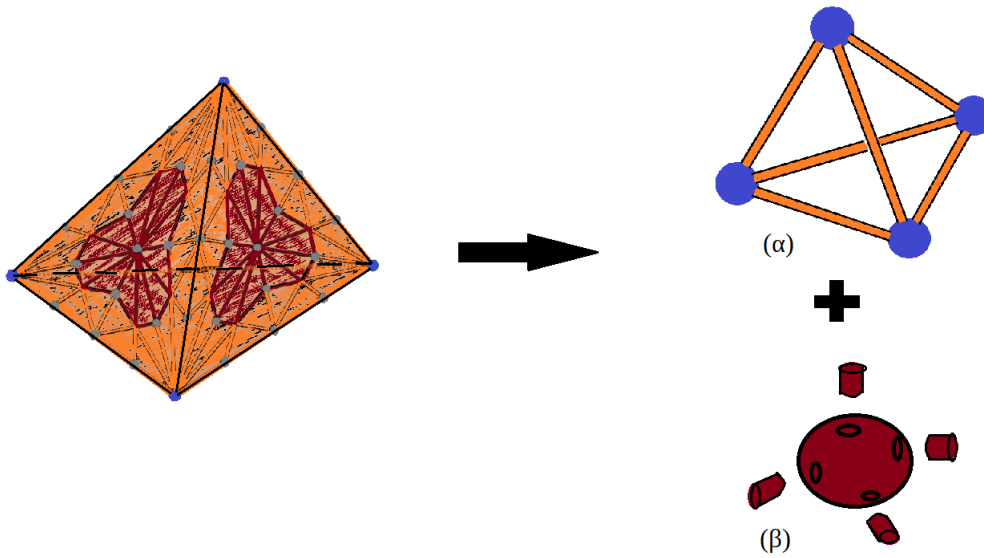
Σχήμα 2.1: (α) Πρώτη βαρυκεντρική υποδιαίρεση K' , (β) Δεύτερη βαρυκεντρική υποδιαίρεση K''

Ορίζουμε M_1^3 να είναι ο τοπολογικός υπόχωρος της M^3 που σχηματίζεται απ' όλα τα τετράεδρα της K'' που έχουν μη κενή τομή με τις ακμές των τετραέδρων της αρχικής τριγωνοποίησης K . Έπειτα ορίζουμε M_2^3 να είναι η κλειστότητα του συμπληρώματος του M_1^3 μες στην M^3 . Για το Θεώρημα 2.2.3 αρκεί να δείξουμε ότι οι χώροι M_1^3, M_2^3 είναι ομοιομορφικά σώματα-χερούλι, που σαν υποσύνολα της M^3 έχουν κοινό μόνο το σύνορό τους.

Όπως μπορούμε να δούμε και στο Σχήμα 2.2α, το M_1^3 είναι ομοιομορφικό με το αντικείμενο που προκύπτει αν θεωρήσουμε κάθε κορυφή της τριγωνοποίησης K μαζί με τα τετράεδρα της K'' που την περιέχουν, ως μια συμπαγή σφαίρα και κάθε κομμάτι ακμής της K μαζί με τα τετράεδρα του M_1^3 που το τέμνουν και που δεν έχουν κορυφές της K , ως ένα συμπαγή κύλινδρο.

Αντίστοιχα, από το Σχήμα 2.2β, βλέπουμε ότι το M_2^3 είναι ομοιομορφικό με το αντικείμενο που προκύπτει αν στο εσωτερικό κάθε τετραέδρου T της K θεωρήσουμε μια συμπαγή σφαίρα αποτελούμενη από τα τετράεδρα της K'' που έχουν σαν κορυφή το βαρύκεντρο του τετραέδρου T , με τέσσερις συμπαγείς «κύλινδρους» (οι οποίοι σχηματίζονται από τα τετράεδρα του M_2^3 που δεν έχουν ως κορυφή το βαρύκεντρο του τετραέδρου) σαν προεξοχές (η μορφή της βάσης κάθε κύλινδρου είναι αυτή που στο σχήμα έχει ζωγραφιστεί με κοκκινωπό χρώμα). Σε κάθε έδρα καταλήγει και μία απ' αυτές τις προεξοχές ώστε να συνδέεται με τα αντίστοιχα κομμάτια διπλανών τετραέδρων.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι τα M_1^3, M_2^3 μπορούν να κα-

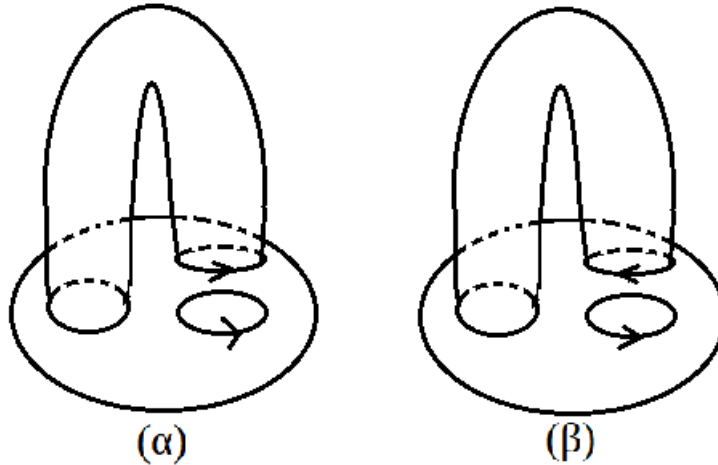


Σχήμα 2.2: Διάσπαση τετραέδρου σε κομμάτια των M_1^3, M_2^3

τασκευαστούν συγκολλώντας συμπαγείς κυλίνδρους («χερούλια») πάνω σε συμπαγείς σφαίρες. Ωστόσο, αυτή η κατασκευή δεν οδηγεί πάντα σε σώματα-χερούλι, οπότε πρέπει να την εξετάσουμε προσεκτικά για να δούμε αν θα έχει το επιθυμητό αποτέλεσμα.

Υποθέτουμε ότι πριν κάνουμε οποιαδήποτε συγκόλληση έχουμε μόνο συμπαγείς σφαίρες οι οποίες είναι τετριμμένα σώματα-χερούλι. Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι αν μέχρι ένα σημείο της κατασκευής έχουμε καταλήξει σε σώματα-χερούλι τότε και η επόμενη συγκόλληση θα έχει σαν αποτέλεσμα ένα σώμα-χερούλι (μπορούμε να πούμε ότι η απόδειξη είναι, υπό μία έννοια, επαγωγική). Σε αυτό το σημείο διακρίνουμε δύο περιπτώσεις: Αν η συγκόλληση «ενώνει» δύο διαφορετικά σώματα-χερούλι, τότε σίγουρα το αποτέλεσμα θα είναι σώμα-χερούλι (ουσιαστικά προσθέτω στο ένα σώμα-χερούλι τα χερούλια του άλλου). Αν, από την άλλη, η συγκόλληση «ενώνει» μέρη του ίδιου σώματος-χερούλι, τότε υπάρχει δυνατότητα να είναι μη προσανατολίσιμη η πολλαπλότητα με

σύνορο που θα προκύψει, εξ αιτίας του ομοιομορφισμού που θα έχει χρησιμοποιηθεί για τη συγκόλληση. Παράδειγμα ενός τέτοιου ομοιομορφισμού φαίνεται στο Σχήμα 2.3β.



Σχήμα 2.3: (α) Προσανατολισίμη συγκόλληση, (β) Μη προσανατολισίμη συγκόλληση

Ωστόσο, αν σε κάποιο βήμα συγκόλλησης, είτε για το M_1^3 είτε για το M_2^3 , προέκυπτε μη προσανατολισίμη πολλαπλότητα με σύνορο τότε τελικά η M^3 δε θα μπορούσε να είναι προσανατολισίμη 3-πολλαπλότητα², κάτι το οποίο αντιβαίνει στην υπόθεση ότι η M^3 είναι προσανατολισίμη. Άρα σε κάθε βήμα συγκόλλησης το αποτέλεσμα είναι προσανατολισίμη πολλαπλότητα με σύνορο και συγκεκριμένα είναι σώμα-χερούλι.

Τελευταίο γεγονός που πρέπει να εξετάσουμε είναι το ότι πρόκειται για ομοιομορφικά σώματα-χερούλι, όμως αυτό εξασφαλίζεται από το κοινό σύνορο που έχουν τα M_1^3, M_2^3 , που σημαίνει ότι έχουν και τον ίδιο αριθμό χερουλιών. Επομένως η τριάδα $\{\partial M_1^3, M_1^3, M_2^3\}$ είναι πράγματι ένας διαχωρισμός Heegaard της πολλαπλότητας M^3 . \square

²Είναι αποδεδειγμένη η ισχύς της ακόλουθης πρότασης: Αν μία n -πολλαπλότητα είναι προσανατολισίμη, τότε κάθε n -διάστατη υποπολλαπλότητά της είναι προσανατολισίμη. Σε αυτό το σημείο χρησιμοποιούμε την αντιθετοαντίστροφη αυτής της πρότασης.

2.3 Διαχωρισμός Heegaard της S^3 σε δύο συμπαγείς τόρους

Το πιο άμεσο παράδειγμα διαχωρισμού Heegaard είναι αυτό της 3-σφαίρας που δίνεται από τη συγκόλληση δύο συμπαγών 3-δίσκων. Ουσιαστικά είναι σα να «κόβουμε» τη 3-σφαίρα πάνω στον ισημερινό της, τη 2-σφαίρα.

Παρόλα αυτά, υπάρχει κι άλλος διαχωρισμός Heegaard για την 3-σφαίρα ο οποίος δεν είναι το ίδιο άμεσος. Πρόκειται για την αναπαράσταση της 3-σφαίρας σαν αποτέλεσμα συγκόλλησης δύο συμπαγών τόρων και για να δούμε πως μπορεί να γίνει αυτό γράφουμε αρχικά την 3-σφαίρα σαν υποσύνολο του μιγαδικού 2-χώρου \mathbb{C}^2 :

$$S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 + |w|^2 = 2\}.$$

Θα μπορούσαμε να την είχαμε γράψει ως υποσύνολο του \mathbb{R}^4 με προφανή τρόπο, ωστόσο η παραπάνω γραφή διευκολύνει κάποιους υπολογισμούς και κάποιες διαπιστώσεις που θα κάνουμε. Έστω, τώρα,

$$M_1^3 = \{(z, w) \in S^3 : |z| \leq |w|\}, M_2^3 = \{(z, w) \in S^3 : |z| \geq |w|\}.$$

Κατ' αρχάς, εύκολα βλέπουμε ότι για $(z, w) \in S^3$ ισχύει ότι

$$\begin{aligned} |z| &\leq |w| \\ \Leftrightarrow |z| &\leq \sqrt{2 - |z|^2} \\ \Leftrightarrow |z|^2 &\leq 2 - |z|^2 \\ \Leftrightarrow |z| &\leq 1, \end{aligned}$$

κι αντίστοιχα ισχύει ότι

$$|z| \geq |w| \Leftrightarrow |z| \geq 1.$$

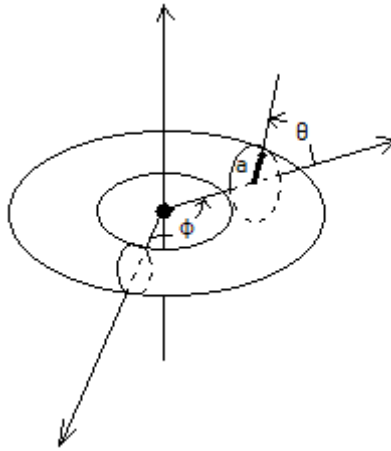
Άρα $M_1^3 = \{(z, w) \in S^3 : |z| \leq 1\}$, $M_2^3 = \{(z, w) \in S^3 : |z| \geq 1\}$, οπότε

$$M_1^3 \cap M_2^3 = \{(z, w) \in S^3 : |z| = |w|\} = \{(z, w) \in S^3 : |z| = |w| = 1\}.$$

2.3 Διαχωρισμός Heegaard της S^3 σε δύο συμπαγείς τόρους

Για να είναι όντως τα M_1^3, M_2^3 τα δύο «κομμάτια» ενός διαχωρισμού Heegaard της 3-σφαίρας, πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι είναι ομοιομορφικά σώματα-χερούλι (στην περίπτωση μας θα δούμε ότι είναι συμπαγείς τόροι).

Αρχικά, βλέπουμε ότι κάθε σημείο της S^3 μπορεί να γραφεί στη μορφή $(ae^{i\theta}, be^{i\phi})$, όπου $a, b \geq 0$ και $a^2 + b^2 = 2$. Πλέον η συνθήκη που προσδιορίζει τα σημεία του M_1^3 είναι ισοδύναμη με την $a \leq 1$. Έστω τώρα ένας συμπαγής τόρος που κάθε κατακόρυφη τομή του είναι ένας 2-δίσκος ακτίνας 1. Σε αυτόν τον τόρο χρησιμοποιούμε τις συντεταγμένες (a, θ, ϕ) που αντιστοιχούν στα μεγέθη που φαίνονται στο Σχήμα 2.4.



Σχήμα 2.4: Οι συντεταγμένες του συμπαγούς τόρου

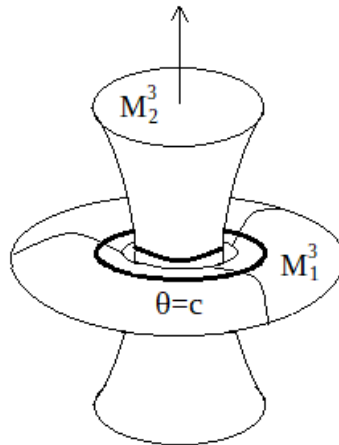
Με την ευκαιρία αυτής της παραμετροποίησης του τόρου, δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό που θα χρησιμοποιούμε συχνά στη συνέχεια.

Ορισμός 2.3.1. Σε έναν συμπαγή τόρο T που περιγράφεται με τις συντεταγμένες (a, θ, ϕ) που περιγράψαμε παραπάνω, η καμπύλη που σχηματίζεται από τα σημεία του συνόρου που ικανοποιούν την εξίσωση

- (i) $\phi = c$ (δηλαδή η τρίτη συντεταγμένη είναι ίση με c), όπου c είναι μια σταθερά από το διάστημα $[0, 2\pi)$, ονομάζεται μεσημβρινός,

- (ii) $\theta = c$ (δηλαδή η δεύτερη συντεταγμένη είναι ίση με c), όπου c είναι μια σταθερά από το διάστημα $[0, 2\pi)$, ονομάζεται παράλληλος.

Δεν είναι πολύ δύσκολη διαδικασία να επιβεβαιώσει κανείς ότι η αντιστοίχιση σημείων της πολλαπλότητας M_1^3 με σημεία του συμπαγούς τόρου που ορίσαμε, η οποία δίνεται από τον τύπο $(ae^{i\theta}, be^{i\phi}) \mapsto (a, \theta, \phi)$, είναι ομοιομορφισμός. Ο αντίστοιχος ομοιομορφισμός της M_2^3 με το συμπαγή τόρο δίνεται από την αντιστοίχιση $(ae^{i\theta}, be^{i\phi}) \mapsto (b, \phi, \theta)$. Επίσης οι δύο αυτές αντιστοιχίσεις δείχνουν ότι τα σύνορα των M_1^3, M_2^3 είναι ομοιομορφικά μεταξύ τους και ομοιομορφικά με τον τόρο $S^1 \times S^1$ (στην πρώτη αντιστοίχιση το βλέπουμε για $a = 1$ και στη δεύτερη για $b = 1$) που είναι το σύνορο του συμπαγούς τόρου που ορίσαμε. Τέλος, μια παρατήρηση που μπορεί να μας βοηθήσει στην οπτικοποίηση της συγκόλλησης των δύο συμπαγών τόρων που έχει σαν αποτέλεσμα την S^3 , είναι ότι κάθε παράλληλος του M_1^3 ($\theta = c$) είναι μεσημβρινός του M_2^3 κι ότι κάθε μεσημβρινός του M_1^3 ($\phi = c$) είναι παράλληλος του M_2^3 (βλ. Σχήμα 2.5).



Σχήμα 2.5: Η συγκόλληση των δύο τόρων που «δίνει» την S^3

Όλα τα παραπάνω αποδεικνύουν ότι οι υπόχωροι M_1^3, M_2^3 της S^3 είναι πράγματι σώματα-χερούλι με ένα χερούλι που είναι εμπεδωμένα μέσα στην S^3 κι έχουν τομή μόνο το κοινό σύνορό τους, τον τόρο $S^1 \times S^1$.

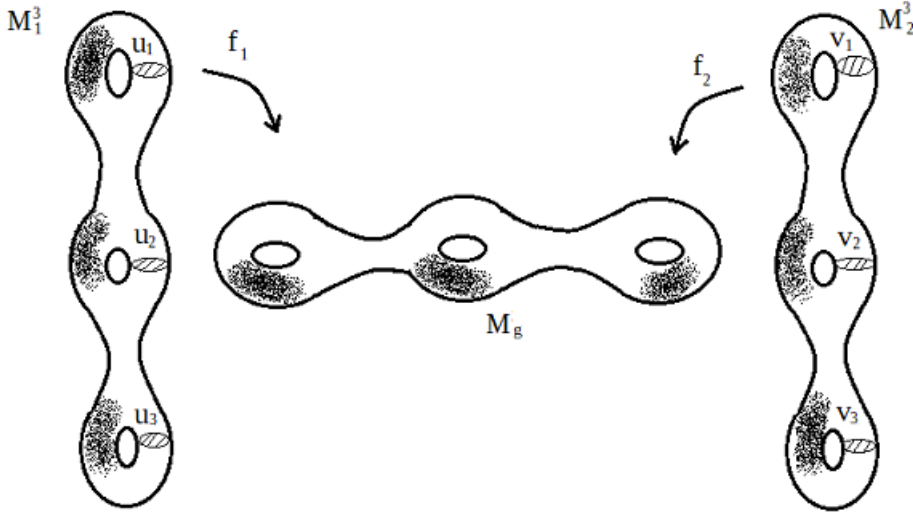
Επομένως αυτές οι 3-πολλαπλότητες αποτελούν πράγματι ένα, διαφορετικό από τον αρχικό, διαχωρισμό Heegaard της 3-σφαίρας.

2.4 Διαγράμματα Heegaard

Έστω διαχωρισμός Heegaard $\{S, M_1^3, M_2^3\}$ μιας προσανατολισιμής³ 3-πολλαπλότητας M^3 , όπου η $S = \partial M_1^3 = \partial M_2^3$ είναι σφαίρα με g χερούλια. Αν ονομάσουμε M_g το φυσικά εμπεδωμένο στον \mathbb{R}^3 σώμα-χερούλι με g χερούλια, N_g το σύνορό του κι αν τα M_1^3, M_2^3 είναι ομοιομορφικά με το M_g μέσω των ομοιομορφισμών f_1, f_2 αντίστοιχα, τότε η συνάρτηση $(f_2 \circ f_1^{-1})|_{N_g} : N_g \rightarrow N_g$ ($f_1^{-1}(N_g) = \partial M_1^3 = S = \partial M_2^3$ και $f_2(\partial M_2^3) = N_g$) είναι ομοιομορφισμός, ως σύνθεση ομοιομορφισμών, της N_g στον εαυτό της που περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο πρέπει να ταυτίσουμε τα σύνορα δύο αντιγράφων του M_g ώστε να έχουμε σαν αποτέλεσμα της συγκόλλησης το M^3 . Αυτό σημαίνει ότι ο συγκεκριμένος ομοιομορφισμός περιγράφει πλήρως τον αρχικό διαχωρισμό Heegaard της πολλαπλότητας M^3 . Αυτή η παρατήρηση μας οδηγεί στη σκέψη ότι αν υπάρχει κάποιος πρακτικός τρόπος να περιγράψουμε τέτοιους ομοιομορφισμούς (δηλαδή ομοιομορφισμούς σφαιρών με g χερούλια στον εαυτό τους), τότε θα έχουμε κι έναν πρακτικό τρόπο περιγραφής διαχωρισμών Heegaard. Θα δούμε, λοιπόν, στη συνέχεια ότι αρκεί να προσδιορίζουμε την εικόνα μόνο ορισμένων καμπυλών της επιφάνειας μέσω του ομοιομορφισμού που θέλουμε να περιγράψουμε.

Θεωρούμε φυσικές τοποδετήσεις εντός του \mathbb{R}^3 των M_1^3, M_2^3 , στις οποίες θα αναφερόμαστε με τα ίδια σύμβολα (τυπικά δεν είναι τα ίδια αντικείμενα με τα M_1^3, M_2^3 της προηγούμενης παραγράφου, είναι όμως ομοιομορφικά και στο εξής θα μας είναι πιο χρήσιμα με την καινούργια τοποθέτησή τους). Κατ' επέκταση, θα συμβολίζουμε με f_1, f_2 τους ομοιομορφισμούς των «νέων» M_1^3, M_2^3 με το M_g . Τώρα, πάνω στα σώματα-χερούλι M_1^3, M_2^3 θεωρούμε μεσημβρινούς u_1, \dots, u_g και v_1, \dots, v_g , όπως αυτοί που φαίνονται στο Σχήμα 2.6. Αν f είναι ο ομοιομορφισμός που περιγράφει με ποιον τρόπο πρέπει να συγκολλήσουμε τα σύνορα των

³Από αυτό το σημείο κι έπειτα, θα θεωρούμε κάθε 3-πολλαπλότητα που χρησιμοποιούμε προσανατολισιμη, εκτός αν αναφερθεί ρητά το αντίθετο.



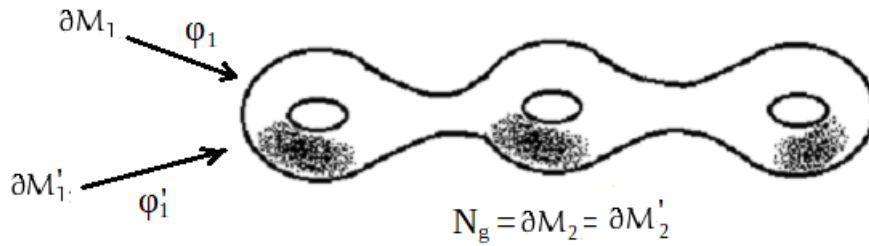
Σχήμα 2.6: Σύστημα μεσημβρινών πάνω στα M_1^3, M_2^3

«νέων» M_1^3, M_2^3 ώστε να έχουμε σαν αποτέλεσμα το M^3 , τότε επιλέγουμε ϕ_1 να είναι κάποιος ομοιομορφισμός του ∂M_1^3 στην N_g και ορίζουμε $\phi_2 = \phi_1 \circ f^{-1}$ ομοιομορφισμός του ∂M_2^3 στην N_g . Έτσι μπορούμε να γράψουμε τον f ως εξής: $f = \phi_2^{-1} \circ \phi_1$.

Ορισμός 2.4.1. (Πρώτη εκδοχή) Διάγραμμα Heegaard της πολλαπλότητας M^3 , ονομάζουμε το σύνολο των καμπυλών $\{\phi_1(u_i) \mid i = 1, \dots, g\} \cup \{\phi_2(v_i) \mid i = 1, \dots, g\}$ πάνω στη σφαίρα με g χερούλια, N_g .

Θεώρημα 2.4.2. Αν δύο 3-πολλαπλότητες M, M' έχουν ίδιο διάγραμμα Heegaard, τότε αυτές είναι ομοιομορφικές πολλαπλότητες.

Απόδειξη. Έστω $M_i, M'_i, i = 1, 2$, τα σώματα-χερούλι με g χερούλια που συγκολλούμε για να πάρουμε τις πολλαπλότητες M, M' αντίστοιχα. Με βάση τα προηγούμενα, θα συμβολίζουμε $\phi_i : \partial M_i \rightarrow N_g, i = 1, 2$ τους ομοιομορφισμούς που είναι τέτοιοι ώστε $f = \phi_2^{-1} \circ \phi_1$, όπου f είναι ο ομοιομορφισμός ταύτισης των συνόρων $\partial M_1, \partial M_2$. Αντίστοιχα τονούμενα σύμβολα θα χρησιμοποιούμε για την πολλαπλότητα M' . Επιπλέον, χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $M_2 = M'_2$ και $N_g = \partial M_2 = \partial M'_2$ (άρα $\phi_2 = \phi'_2 = \text{id}$ και $f = \phi_1, f' = \phi'_1$).



Σχήμα 2.7: Οι συμβολισμοί που θα χρησιμοποιήσουμε

Πλέον, με βάση τα όσα αναφέραμε, για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη αρκεί να καταφέρουμε να επεκτείνουμε τον ταυτοτικό ομοιομορφισμό $h_2 : M_2 \rightarrow M'_2$ σε έναν ομοιομορφισμό $h : M \rightarrow M'$. Πριν προχωρήσουμε στην περιγραφή αυτής της επέκτασης, αναφέρουμε ένα σημαντικό αποτέλεσμα το οποίο θα θεωρούμε δεδομένο (δεν είναι πολύ δύσκολο να αποδειχθεί): Ένας ομοιομορφισμός μεταξύ δύο ομοιομορφικών εικόνων κύκλων στο επίπεδο μπορεί να επεκταθεί στους 2-δίσκους που αυτοί φράσσουν, κι ένας ομοιομορφισμός μεταξύ δύο 2-σφαιρών στον τριδιάστατο χώρο μπορεί να επεκταθεί στους 3-δίσκους που αυτές φράσσουν.

Εξ υποθέσεως τα M, M' έχουν ίδιο διάγραμμα Heegaard. Αυτό σημαίνει ότι αν έχουμε μια αρίθμηση για τους μεσημβρινούς πάνω στο ∂M_1 , $u_i, i = 1, \dots, g$ (οι οποίοι, για παράδειγμα, είναι τοποθετημένοι όπως στο Σχήμα 2.6), μπορούμε να θεωρήσουμε αρίθμηση για τους μεσημβρινούς πάνω στο $\partial M'_1$, $u'_i, i = 1, \dots, g$, ώστε να ισχύει $\phi_1(u_i) = \phi'_1(u'_i), i = 1, \dots, g$. Έτσι, ο ομοιομορφισμός $s = \phi_1^{-1} \circ \phi'_1 : \partial M_1 \rightarrow \partial M'_1$ θα στέλνει τους u_i στους αντίστοιχους $u'_i, i = 1, \dots, g$. Επιπλέον, τα M_1, M'_1 που θεωρούμε έχουν φυσικές τοποθετήσεις μέσα στον \mathbb{R}^3 , οπότε οι μεσημβρινοί τους έχουν όλα τα σημεία τους πάνω σε κάποιο επίπεδο. Από το σημαντικό αποτέλεσμα που αναφέραμε προηγουμένως γνωρίζουμε ότι ο s μπορεί να επεκταθεί σε \bar{s} που να ορίζεται και σε ολόκληρους τους 2-δίσκους που φράσσουν οι μεσημβρινοί $u_i, i = 1, \dots, g$, εντός του M_1 , παίρνοντας τιμές στους 2-δίσκους που φράσσουν οι μεσημβρινοί $u'_i, i = 1, \dots, g$, εντός του M'_1 .

Αν κόψουμε, τώρα, τα M_1, M'_1 πάνω στους δίσκους αυτούς, τότε θα

πάρουμε σαν αποτέλεσμα δύο 3-δίσκους D, D' (Σχήμα 2.8), των οποίων τα σύνορα συνδέονται ομοιομορφικά (χρησιμοποιούμε κατάλληλα τον \bar{s} για τον ορισμό του εν λόγω ομοιομορφισμού). Επίσης τα εσωτερικά των D, D' είναι τα σημεία των M_1, M'_1 στα οποία δεν έχουμε καταφέρει ακόμα να επεκτείνουμε τον s . Ωστόσο, εξ αιτίας του σημαντικού αποτελέσματος που θεωρούμε δεδομένο, μπορούμε να επεκτείνουμε τον s σε όλο το δίσκο D ώστε να παίρνει τιμές σε όλο το δίσκο D' και να παραμένει ομοιομορφισμός. Έτσι, αφού συγκολλήσουμε ξανά πάνω στον D τους δίσκους που φράσσονται από τον ίδιο αρχικό μεσημβρινό, και πράξουμε ομοίως πάνω στον D' , η τελική επέκταση του s ορίζει με άμεσο τρόπο έναν ομοιομορφισμό $h_1 : M_1 \rightarrow M'_1$.



Σχήμα 2.8: Κόψιμο του M_1

Ορίζουμε λοιπόν τη συνάρτηση $h : M \rightarrow M'$ ώστε $h|_{M_1} = h_1$ και $h|_{M_2} = h_2$. Η h είναι καλά ορισμένη αφού για $x \in \partial M_1$ ($f(x) \in \partial M_2$), έχουμε $h_1(x) = s(x) = \phi_1^{-1} \circ \phi_1(x) = f'^{-1} \circ f(x)$ και $h_2(f(x)) = f(x)$, όπου $f(x) \equiv f'^{-1}(f(x))$ (λόγω συγκόλλησης), δηλαδή είναι το ίδιο σημείο του M' . Από το γεγονός ότι οι h_1, h_2 είναι ομοιομορφισμοί οι οποίοι συμφωνούν πάνω στο κοινό τους σύνορο, μπορούμε χωρίς μεγάλη δυσκολία να ελέγξουμε ότι εντέλει η h είναι ο ομοιομορφισμός που ψάχναμε. \square

Παρόλα αυτά, ενώ η πρώτη εκδοχή του ορισμού των διαγραμμάτων Heegaard είναι η κατάλληλη για να μπορέσουμε να αποδείξουμε το προηγούμενο θεώρημα, δεν πετυχαίνει τον αρχικό στόχο που θέσαμε: την περιγραφή του ομοιομορφισμού συγκόλλησης μεταξύ δύο σωμάτων-χερούλι μέσω των εικόνων ορισμένων καμπυλών πάνω στη σφαίρα με g χερούλια. Πράγματι, στον Ορισμό 2.4.1 χρησιμοποιούμε εμμέσως τον ομοιομορφισμό f μέσω των ϕ_1, ϕ_2 για να προσδιορίσουμε τις καμπύλες του διαγράμματος, οι οποίες ως εκ τούτου δε δίνονται ρητά. Αυτές οι

αδυναμίες της πρώτης εκδοχής του ορισμού, δεν υπάρχουν στη δεύτερη εκδοχή.

Ορισμός 2.4.3. (Δεύτερη εκδοχή) Το σύνολο $\{u_1, \dots, u_g\} \cup \{v_1, \dots, v_g\}$ του οποίου τα στοιχεία είναι ομοιομορφικές εικόνες κύκλων πάνω στη σφαίρα με g χερούλια, N_g , καλείται διάγραμμα Heegaard αν ικανοποιούνται οι εξής δύο συνθήκες:

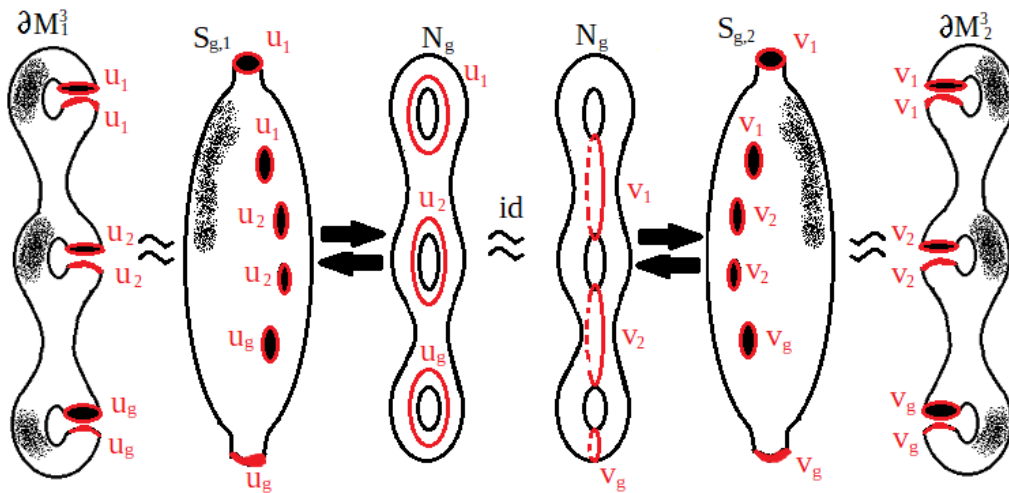
- (i) οι καμπύλες u_1, \dots, u_g είναι ανά δύο μη τεμνόμενες και το συμπλήρωμα της ένωσής τους είναι συνεκτικό, και
- (ii) οι καμπύλες v_1, \dots, v_g είναι ανά δύο μη τεμνόμενες και το συμπλήρωμα της ένωσής τους είναι συνεκτικό.

Πρόταση 2.4.4. Οι δύο εκδοχές των διαγραμμάτων Heegaard (Ορισμοί 2.4.1, 2.4.3) είναι ισοδύναμες, υπό την έννοια ότι ένα διάγραμμα Heegaard μιας 3-πολλαπλότητας όπως ορίζεται στην πρώτη εκδοχή είναι διάγραμμα Heegaard ως προς τη δεύτερη εκδοχή, κι ότι ένα διάγραμμα Heegaard ως προς τη δεύτερη εκδοχή είναι διάγραμμα Heegaard κάποιας 3-πολλαπλότητας M^3 , που αντιστοιχεί σε κάποιο διαχωρισμό Heegaard αυτής.

Απόδειξη. Αν έχουμε M^3 πολλαπλότητα με διάγραμμα Heegaard το σύνολο $\{\phi_1(u_i) \mid i = 1, \dots, g\} \cup \{\phi_2(v_i) \mid i = 1, \dots, g\}$ όπως ορίζεται στην πρώτη εκδοχή, τότε αυτό θα αποτελείται από ομοιομορφικές εικόνες μεσημβρινών (τοποθετημένων όπως έχουμε υποδείξει πάνω στα σώματα-χερούλι), άρα κύκλων. Επίσης οι καμπύλες $\{\phi_1(u_i) \mid i = 1, \dots, g\}$ είναι όντως ανά δύο μη τεμνόμενες με το συμπλήρωμα της ένωσής τους να είναι συνεκτικό, όπως οι ομοιομορφικές προεικόνες τους μέσω του ϕ_1 . Το ίδιο ισχύει και για τις $\{\phi_2(v_i) \mid i = 1, \dots, g\}$, οπότε τελικά το σύνολο $\{\phi_1(u_i) \mid i = 1, \dots, g\} \cup \{\phi_2(v_i) \mid i = 1, \dots, g\}$ είναι διάγραμμα Heegaard και ως προς τη δεύτερη εκδοχή.

Έστω, τώρα, ένα διάγραμμα Heegaard με βάση τη δεύτερη εκδοχή $\{u_1, \dots, u_g\} \cup \{v_1, \dots, v_g\}$. Μια βασική παρατήρηση που κάνουμε είναι ότι αν κόψουμε την N_g κατά μήκος g ανά δύο μη τεμνόμενων ομοιομορφικών εικόνων κύκλων πάνω της, οι οποίες είναι τέτοιες ώστε μετά το

κόψιμο να είναι συνεκτική η επιφάνεια που προκύπτει, τότε παίρνουμε τη σφαίρα S^2 με $2g$ «τρύπες». Έτσι, αν θεωρήσουμε δύο αντίγραφα της N_g , έστω N_1, N_2 , και κόψουμε το N_1 κατά μήκος των u_i και το N_2 κατά μήκος των v_i , τότε αυτά θα μετατραπούν σε σφαίρες με $2g$ τρύπες $S_{g,1}, S_{g,2}$. Με τη σειρά τους, αυτές οι $S_{g,1}, S_{g,2}$ μπορούν ομοιομορφικά να απεικονιστούν στα σύνορα δύο σωμάτων-χερούλι M_1^3, M_2^3 που έχουν κοπέι πάνω στους μεσημβρινούς τους, έτσι ώστε οι κύκλοι του συνόρου κάθε $S_{g,j}$ να αντιστοιχούν στους μεσημβρινούς του ∂M_j^3 , όπου $j = 1, 2$ (π.χ. όπως στο Σχήμα 2.9).



Σχήμα 2.9: Πώς από ένα διάγραμμα Heegaard παίρνουμε αντίστοιχο διαχωρισμό Heegaard

Αν, λοιπόν, συγκολλήσουμε τους μεσημβρινούς στα σύνορα των M_1^3, M_2^3 , τότε θα έχουμε ομοιομορφισμούς $\phi_1 : \partial M_1^3 \rightarrow N_g, \phi_2 : \partial M_2^3 \rightarrow N_g$, κι άρα έναν ομοιομορφισμό συγκόλλησης $f = \phi_2^{-1} \circ \phi_1$ των συνόρων $\partial M_1^3, \partial M_2^3$. Ο f περιγράφει ένα διαχωρισμό Heegaard του $M^3 = M_1^3 \cup_f M_2^3$ κι άρα το διάγραμμα Heegaard που είχαμε στην αρχή είναι διάγραμμα Heegaard της M^3 έτσι όπως αυτό ορίζεται στην πρώτη εκδοχή. \square

Κεφάλαιο 3

Χειρουργική Dehn σε 3-πολλαπλότητες

3.1 Θεώρημα Dehn-Lickorish

Μια βασική έννοια στην οποία θα αναφερόμαστε συχνά στο παρόν κεφάλαιο είναι αυτή της ισοτοπίας. Δίνουμε τον ορισμό:

Ορισμός 3.1.1. (i) Έστω \mathcal{X}, \mathcal{Y} τοπολογικοί χώροι και $f_0, f_1 : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ δύο απεικονίσεις μεταξύ αυτών. Αν υπάρχει οικογένεια απεικονίσεων $f_t : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}, t \in [0, 1]$ τέτοια ώστε η συνάρτηση $F : \mathcal{X} \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{Y}$ με τύπο $F(x, t) = f_t(x)$ να είναι συνεχής, τότε οι f_0, f_1 καλούνται ομοτοπικές. Η οικογένεια $f_t, t \in [0, 1]$ καλείται ομοτοπία που συνδέει τις f_0, f_1 .

(ii) Αν οι παραπάνω απεικονίσεις f_t είναι ομοιομορφισμοί, τότε η οικογένεια των f_t ονομάζεται ισοτοπία και οι ομοιομορφισμοί f_0, f_1 χαρακτηρίζονται ισοτοπικοί.

(iii) Ισοτοπία μεταξύ δύο υποχώρων A, B ενός τοπολογικού χώρου \mathcal{X} , ονομάζεται μια ισοτοπία $f_t : A \rightarrow f_t(A) \subseteq \mathcal{X}$ που είναι τέτοια ώστε η f_0 να είναι ταυτοτική εμφύτευση του A στον \mathcal{X} και $f_1(A) = B$.

Όπως έχουμε επισημάνει ήδη, ένας διαχωρισμός Heegaard περιγράφεται από έναν ομοιομορφισμό της σφαίρας με g χερούλια στον εαυτό της,

που ουσιαστικά περιγράφει έναν ομοιομορφισμό συγκόλλησης των συνόρων δύο ομοιομορφικών σωμάτων-χερούλι με g χερούλια. Εκτός από τους διαχωρισμούς Heegaard, υπάρχει άλλος ένας τρόπος περιγραφής των 3-πολλαπλοτήτων που θα μελετήσουμε, η χειρουργική Dehn, που επίσης περιγράφεται μέσω ομοιομορφισμών σφαιρών με χερούλια (συγκεκριμένα τόρων). Ένας πρακτικός τρόπος έμμεσου ορισμού τέτοιων ομοιομορφισμών είναι τα διαγράμματα Heegaard που μελετήσαμε. Βέβαια, διαφορετικά διαγράμματα Heegaard μπορεί να περιγράφουν ισοτοπικούς ομοιομορφισμούς συγκόλλησης, και σε αυτούς αποδεικνύεται ότι αντιστοιχεί η ίδια 3-πολλαπλότητα (έως ομοιομορφισμού). Θα μας ήταν χρήσιμο, λοιπόν, να γνωρίζουμε πότε δύο δοσμένοι διαφορετικοί ομοιομορφισμοί είναι μη-ισοτοπικοί. Σε αυτό βοηθάνε η ονομαζόμενη *στροφή Dehn* και το *θεώρημα Dehn-Lickorish* στα οποία αναφερόμαστε στη συνέχεια.

Μια βασική παρατήρηση που προστίθεται στα όσα έχουμε ήδη επισημάνει για τους ομοιομορφισμούς σφαιρών με χερούλια, είναι ότι ο ομοιομορφισμός που χρησιμοποιούμε για τη συγκόλληση δύο τέτοιων, ώστε να καταλήξουμε σε μια συγκεκριμένη 3-πολλαπλότητα, μπορεί να υποτεθεί ότι διατηρεί τον προσανατολισμό του συνόρου. Πράγματι, αν θεωρήσουμε δύο σώματα-χερούλι M_1^3, M_2^3 με g χερούλια εμπεδωμένα με φυσικό τρόπο εντός του \mathbb{R}^3 και $h : \partial M_1^3 \rightarrow \partial M_2^3$ έναν ομοιομορφισμό συγκόλλησης των συνόρων τους που έχει σαν αποτέλεσμα μια πολλαπλότητα M^3 , τότε κι ο ομοιομορφισμός $h' = (s|_{\partial M_2^3}) \circ h$, όπου $s : M_2^3 \rightarrow M_2^3$ είναι ομοιομορφισμός συμμετρίας ως προς κέντρο συμμετρίας του M_2^3 , έχει σαν αποτέλεσμα την M^3 . Όμως ο s αντιστρέφει τον προσανατολισμό του ∂M_2^3 . Επομένως, από τους h, h' , που σαν ομοιομορφισμοί συγκόλλησης έχουν το «ίδιο» αποτέλεσμα, ο ένας διατηρεί τον προσανατολισμό στο σύνορο κι ο άλλος τον αντιστρέφει, οπότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι στις συγκολλήσεις που κάνουμε χρησιμοποιούμε αυτόν που τον διατηρεί.

Ένα σημαντικό παράδειγμα ενός ομοιομορφισμού μιας προσανατολισμένης επιφάνειας (χωρίς σύνορο) N στον εαυτό της, που διατηρεί τον προσανατολισμό της και δεν είναι ισοτοπικός με την ταυτοτική απεικόνιση προκύπτει ως εξής: Έστω γ μια κλειστή καμπύλη πάνω στην N , τέτοια ώστε το συμπλήρωμά της ως προς την N , $N \setminus \gamma$, να είναι συνεκτι-

κό. Αν κόψουμε την N πάνω στη γ , κρατήσουμε σταθερό το ένα από τα δύο αντίγραφα της, στρέψουμε το άλλο κατά 360° και τα συγκολλήσουμε ξανά μεταξύ τους, τότε θα έχουμε καταλήξει σε ομοιομορφισμό της N στον εαυτό της με τις επιθυμητές ιδιότητες. Πιο συγκεκριμένα για την στροφή, θεωρούμε μια κυλινδρική περιοχή C του ενός αντιγράφου της γ πάνω στην «κομμένη» N και την απεικονίζουμε ομοιομορφικά έτσι ώστε η γ να εκτελέσει πλήρη στροφή και η άλλη άκρη της C να παραμείνει ακίνητη¹.

Με βάση αυτήν την περιγραφή, μπορούμε να ορίσουμε παρόμοιο ομοιομορφισμό ακόμα κι αν η γ έχει μη συνεκτικό συμπλήρωμα ή η επιφάνεια έχει σύνορο (αρκεί η γ να μην έχει κοινά σημεία με το σύνορο). Για την ακρίβεια, για τέτοια κλειστή καμπύλη γ , θεωρούμε κυλινδρική περιοχή της C στην N , χωρίς να κάνουμε κάποιο κόψιμο, με σύνορο τις ξένες μεταξύ τους καμπύλες γ_1, γ_2 (οι οποίες επίσης δεν πρέπει να έχουν κοινό σημείο με το σύνορο της επιφάνειας, αν υπάρχει). Επιλέγουμε κάποια από τις δύο να παραμείνει ακίνητη, στρέφουμε την άλλη κατά 360° και τα υπόλοιπα σημεία «ακολουθούν» την κίνηση αυτή όπως περιγράψαμε και στην προηγούμενη περίπτωση.

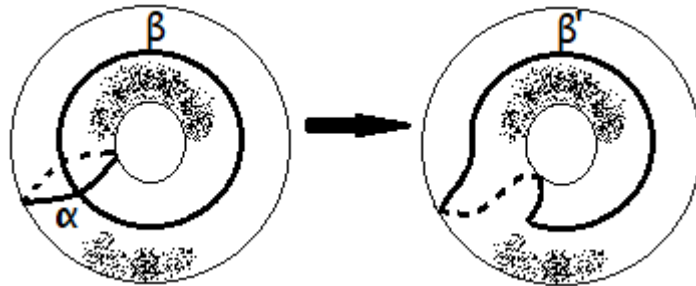
Ορισμός 3.1.2. Ένας ομοιομορφισμός μιας επιφάνειας που προκύπτει όπως περιγράψαμε παραπάνω, ονομάζεται στροφή Dehn πάνω στην καμπύλη γ (είτε η γ έχει συνεκτικό ή μη συνεκτικό συμπλήρωμα ως προς την επιφάνεια).

Στην ειδική περίπτωση των τόρων, μια στροφή Dehn πάνω σε ένα μεσημβρινό (υποθέτουμε ότι ο τόρος είναι σύνορο ενός συμπαγούς τόρου ώστε να μπορούμε να ξεχωρίζουμε μεσημβρινούς από παραλλήλους ανάλογα με το αν φράσσουν κάποιο 2-δίσκο της επιφάνειας ή όχι) γ , για παράδειγμα, στέλνει την παράλληλο β στην καμπύλη β' η οποία έχει διαφορετικό αριθμό περιστροφών γύρω από το μεσημβρινό δίσκο που φράσσει η γ (Σχήμα 3.1). Αυτό σημαίνει ότι η στροφή Dehn αυτή δεν είναι ισοτοπική με την ταυτοτική απεικόνιση του τόρου στον εαυτό του,

¹Αν l είναι το «μήκος» της κυλινδρικής περιοχής, τότε αυτός ο ομοιομορφισμός μπορεί να προκύψει αν κάθε σημείο στραφεί κατά $2\pi t/l$, όπου $0 \leq t \leq l$ είναι το ύψος του σημείου στον κύλινδρο C , ώστε $t = l$ να έχουν τα σημεία της γ .

3.1 Θεώρημα Dehn-Lickorish

διότι ισχύει γενικά πως ισοτοπικοί ομοιομορφισμοί διατηρούν τον αριθμό των περιστροφών που κάνει μία καμπύλη γύρω από ένα μεσημβρινό δίσκο και τον αριθμό των περιστροφών που κάνει γύρω από τον άξονα των παραλλήλων (δε θα το αποδείξουμε).



Σχήμα 3.1: Στροφή Dehn πάνω σε μεσημβρινό ενός τόρου

Ο βασικότερος, για τους σκοπούς μας, λόγος που μας ενδιαφέρουν οι στροφές Dehn είναι το ακόλουθο θεώρημα που ουσιαστικά μας λέει ότι απ' όλους τους ομοιομορφισμούς των προσανατολισμένων επιφανειών στον εαυτό τους, οι οποίοι διατηρούν τον προσανατολισμό, αρκεί να μελετήσουμε τις στροφές Dehn.

Θεώρημα 3.1.3. (Dehn-Lickorish (1)) Κάθε ομοιομορφισμός μιας προσανατολισμένης επιφάνειας (χωρίς σύνορο) που διατηρεί τον προσανατολισμό της, γράφεται ως μια πεπερασμένη σύνδεση στροφών Dehn και ομοιομορφισμών ισοτοπικών με την ταυτοτική απεικόνιση.

Κάτι που μάλλον δεν είναι αναμενόμενο, είναι το γεγονός ότι μας βολεύει περισσότερο να αποδείξουμε μια γενικότερη μορφή του θεωρήματος Dehn-Lickorish, κι όχι αυτή που διατυπώσαμε προηγουμένως.

Θεώρημα 3.1.4. (Dehn-Lickorish (2)) Έστω F προσανατολισμένη επιφάνεια με σύνορο ∂F . Αν $h : F \rightarrow F$ είναι ομοιομορφισμός, που απεικονίζει το σύνορο ταυτοτικά, τότε ο h γράφεται ως μια πεπερασμένη σύνδεση στροφών Dehn και ομοιομορφισμών ισοτοπικών με την ταυτοτική απεικόνιση. Αν $\partial F = \emptyset$, τότε ο h πρέπει να υποτεθεί ότι διατηρεί τον προσανατολισμό της F .

Αξίζει να σημειωθεί ότι η ιδιότητα του ομοιομορφισμού h της επιφάνειας με σύνορο, στη δεύτερη διατύπωση, να απεικονίζει το σύνορο ταυτοτικά, συνεπάγεται ότι θα διατηρεί και τον προσανατολισμό της επιφάνειας (άρα είναι και πιο ισχυρή σαν ιδιότητα του h). Πράγματι, αφού αναφερόμαστε σε προσανατολίσιμη επιφάνεια με σύνορο, ένας προσανατολισμός της επάγει και μοναδικό προσανατολισμό στο σύνορό της (αντίστοιχο αποτέλεσμα με αυτό που έχουμε αναφέρει για τις 3-πολλαπλότητες με σύνορο). Ο h είπαμε ότι δρα ταυτοτικά στο σύνορο, άρα επάγεται σε αυτό ο ίδιος προσανατολισμός από την επιφάνεια ακόμα και μετά την εφαρμογή του h . Αυτό δε θα μπορούσε να συμβαίνει αν άλλαζε ο προσανατολισμός ολόκληρης της επιφάνειας, οπότε ο h τον διατηρεί.

Λίνουμε, τώρα, ένα όνομα στους ομοιομορφισμούς των οποίων την ύπαρξη θα αποδείξουμε μέσω του Θεωρήματος Dehn-Lickorish:

Ορισμός 3.1.5. *Θα ονομάζουμε c -ομοιομορφισμό μιας επιφάνειας (ενδεχομένως με σύνορο) N , έναν ομοιομορφισμό ισοτοπικό με μια σύνδεση στροφών Dehn και ομοιομορφισμών ισοτοπικών με την ταυτοτική απεικόνιση.*

Βάση της απόδειξης του Θεωρήματος 3.1.4, είναι το αποτέλεσμα που αποδεικνύουμε στη συνέχεια.

Λήμμα 3.1.6. *Έστω α, β κλειστές καμπύλες πάνω στην επιφάνεια (που ενδεχομένως έχει και σύνορο) F , καθεμία από τις οποίες δεν έχει κοινά σημεία με το σύνορο της F (αν υπάρχει). Επιπλέον υποθέτουμε ότι το συμπλήρωμα, ως προς την F , καθεμιάς από τις δύο αυτές καμπύλες είναι συνεκτικό. Τότε υπάρχει ένας c -ομοιομορφισμός της F που απεικονίζει την α στην β .*

Απόδειξη. Αν η F είναι η S^2 , το Λήμμα ισχύει τετριμμένα διότι δεν υπάρχουν κλειστές καμπύλες της S^2 με συνεκτικό συμπλήρωμα. Στη συνέχεια θεωρούμε την F διαφορετική από την S^2 .

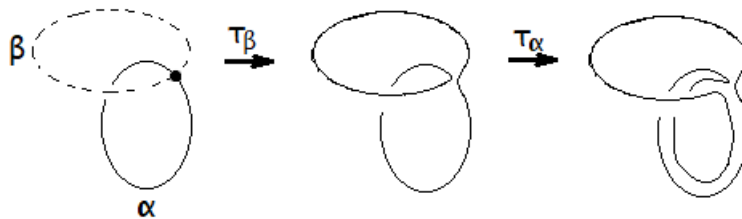
Πρέπει να λάβουμε υπόψιν μας όλες τις διαφορετικές τοποθετήσεις που μπορεί να έχουν αρχικά οι δύο καμπύλες α και β . Είναι βασικό το γεγονός ότι μπορούμε να υποθέσουμε πως αυτές τέμνονται σε πεπερασμένο αριθμό σημείων. Πράγματι, αν υπάρχουν άπειρα σημεία τομής

3.1 Θεώρημα Dehn-Lickorish

λόγω ταύτισης τους σε κάποιο τμήμα, μπορούμε να αντικαταστήσουμε την β με κάποια ελαφρώς μετακινήμενη ισοτοπική της, έστω β' , η οποία τέμνει την α σε πεπερασμένο πλήθος σημείων.

Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στον αριθμό των σημείων τομής των δύο καμπυλών. Έτσι διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις.

Πρώτη περίπτωση: οι α και β έχουν ακριβώς ένα σημείο τομής. Λόγω του ότι οι α, β έχουν υποτεθεί κλειστές που δεν έχουν κοινά σημεία με το σύνορο της επιφάνειας (αν υπάρχει), μπορούμε να εκτελέσουμε στροφές Dehn πάνω σε αυτές, έστω τ_α, τ_β , αντίστοιχα. Με τη βοήθεια του Σχήματος 3.2, μπορούμε να δούμε ότι ο ομοιομορφισμός $\tau_\alpha \circ \tau_\beta$ απεικονίζει την α σε ισοτοπική της β . Διαισθητικά, εκτελώντας πρώτα τη στροφή τ_β , «αναγκάζουμε» την α να «ακολουθήσει» τη β , και στη συνέχεια εκτελώντας με κατάλληλη φορά την τ_α , «ακυρώνουμε την πορεία» της α καταλήγοντας σε καμπύλη β' , ισοτοπική της β . Η ισοτοπία μεταξύ των β', β , μπορεί να επεκταθεί σε ισοτοπία ολόκληρης της επιφάνειας F . Αν s είναι ο τελικός ομοιομορφισμός αυτής της ισοτοπίας, τότε ο c -ομοιομορφισμός που δέλουμε για το Λήμμα, είναι ο $s \circ \tau_\alpha \circ \tau_\beta$.

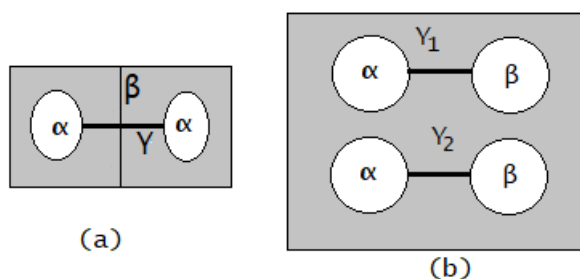


Σχήμα 3.2: Οι α και β έχουν μοναδικό σημείο τομής

Δεύτερη περίπτωση: οι α και β δεν έχουν σημείο τομής. Θα προσπαθήσουμε να βρούμε μια καμπύλη γ η οποία έχει συμπλήρωμα που είναι συνεκτικό και τέμνει (χωρίς να εφάπτεται) καθεμία από τις α, β σε ακριβώς ένα σημείο. Αν το καταφέρουμε, τότε θα έχουμε ανάγκη αυτήν την περίπτωση στην προηγούμενη, αφού με βάση αυτά που περιγράψαμε μπορούμε να «στείλουμε» την α στη γ και τη γ στη β μέσω c -ομοιομορφισμών, η σύνθεση των οποίων θα είναι ένας c -ομοιομορφισμός που στέλνει την α στην β .

Κόβουμε την F πάνω στην α και φέρνουμε την επιφάνεια έτσι ώστε να βλέπουμε τους κύκλους α σε πρόσοψη (Σχήμα 3.3). Διακρίνουμε δύο υποπεριπτώσεις:

(a) Αν κόβοντας πάνω στην β γίνεται μη συνεκτική η επιφάνεια, τότε μια καμπύλη γ που ενώνει σημεία των δύο κύκλων α που πριν το κόψιμο ταυτίζονταν, θα τέμνει υποχρεωτικά τη β (αν δεν είχαν κοινά σημεία, τότε μετά από κόψιμο της F πάνω στη β , οι δύο κύκλοι α θα ανήκαν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα, άρα αν τους συγκολλούσαμε θα παρέμενε μη συνεκτική η επιφάνεια· αυτό όμως θα σήμαινε ότι κόβοντας την F πάνω στη β παίρνουμε μη συνεκτική επιφάνεια, που είναι άτοπο). Επίσης, μπορούμε να επιλέξουμε τη γ έτσι ώστε να μην τέμνει τη β σε περισσότερα από ένα σημεία. Όπως βλέπουμε και στο Σχήμα 3.3a, μετά τη συγκόλληση των α , η γ θα είναι κλειστή καμπύλη με συνεκτικό συμπλήρωμα και θα τέμνει τις α, β σε ακριβώς ένα σημείο έκαστη, όπως θέλαμε.

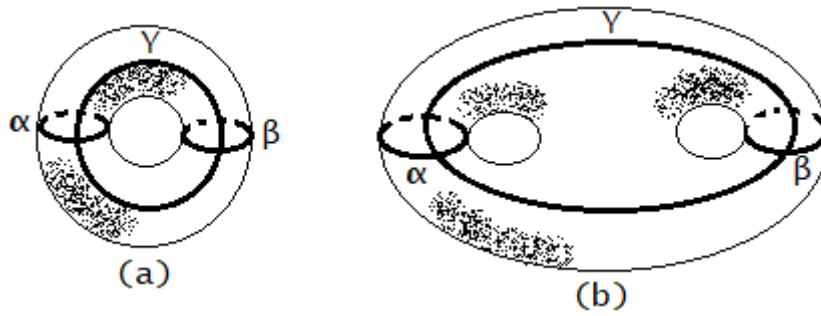


Σχήμα 3.3: Οι α και β δεν έχουν σημείο τομής

(b) Αν κόβοντας πάνω στη β η επιφάνεια δε «χωρίζεται», τότε ενώνουμε με καμπύλη γ_1 σημείο ενός κύκλου α με σημείο ενός κύκλου β και τα αντίστοιχα σημεία τους στους άλλους κύκλους α και β με άλλη καμπύλη γ_2 , η οποία φροντίζουμε να μην έχει κοινά σημεία με τη γ_1 (Σχήμα 3.3b). Μετά την συγκόλληση πάνω στους α, β θα έχουμε την καμπύλη $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ με τις επιθυμητές ιδιότητες.

Χαρακτηριστικά παραδείγματα των δύο υποπεριπτώσεων της δεύτερης περίπτωσης είναι αυτά που φαίνονται στο Σχήμα 3.4.

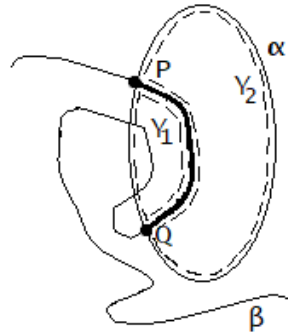
Τρίτη περίπτωση: οι α και β έχουν $n > 1$ σημεία τομής, όπου n



Σχήμα 3.4: Παράδειγμα για τη δεύτερη περίπτωση

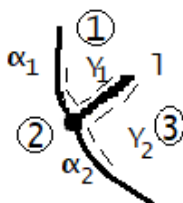
είναι κάποιος φυσικός αριθμός. Σε αυτήν την περίπτωση θα δείξουμε ότι υπάρχει καμπύλη γ που δε «χωρίζει» την επιφάνεια στα δύο, έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με την α και λιγότερα από n κοινά σημεία με τη β . Αυτό θα είναι αρκετό, διότι θα ξεκινάμε από την α , θα τη «στέλνουμε» στη γ που θα τέμνει τη β σε λιγότερα σημεία και επαγωγικά θα καταλήξουμε σε καμπύλη με ένα ή κανένα κοινό σημείο με τη β , που είναι περιπτώσεις που έχουμε ήδη μελετήσει.

Έστω τώρα δύο διαδοχικά πάνω στη β σημεία τομής των α, β , έστω τα P, Q . Το ότι είναι διαδοχικά πάνω στη β σημαίνει ότι το τμήμα l της β που έχει σαν άκρα τα P, Q τέμνει την α μόνο σε αυτά τα σημεία. Επομένως, τα P, Q κόβουν την α σε δύο κομμάτια, έστω α_1, α_2 . Θεωρούμε τις καμπύλες $\gamma_1 = \alpha_1 \cup l, \gamma_2 = \alpha_2 \cup l$ (Σχήμα 3.5).



Σχήμα 3.5: Οι α και β έχουν περισσότερα από ένα σημεία τομής

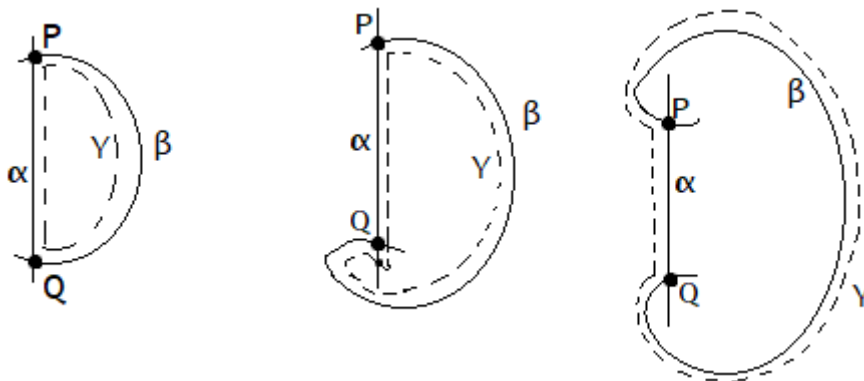
Ισχυριζόμαστε ότι κάποια από τις γ_1, γ_2 δε χωρίζει την F σε δύο κομμάτια. Πράγματι, αν και οι δύο είχαν αυτήν την ιδιότητα, τότε για να πάμε από την περιοχή 1 στην περιοχή 2 ή από την περιοχή 3 στην περιοχή 2 (Σχήμα 3.6), πρέπει υποχρεωτικά να τμήσουμε την α_1 ή την α_2 . Αυτό σημαίνει ότι αν κόψουμε την F πάνω στην α , οι περιοχές 1



Σχήμα 3.6: Οι περιοχές 1, 2 και 3 κοντά στα P, Q

και 3 δε θα συνδέονται με την περιοχή 2, δηλαδή η επιφάνεια θα είναι μη συνεκτική. Αυτό όμως είναι άτοπο διότι από εξ υποθέσεως η α έχει συνεκτικό συμπλήρωμα.

Έστω, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι η γ_1 είναι αυτή που δε διασπά την F . Αν την μετακινήσουμε λίγο ώστε να απομακρυνθεί από τις α, β όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.7, τότε καταλήγουμε στην καμπύλη γ με τις ιδιότητες που θέλαμε, κι εδώ ολοκληρώνεται η απόδειξη. \square



Σχήμα 3.7: Πιθανές μορφές της καμπύλης γ

Σ' αυτό το σημείο είναι απαραίτητο να αναφέρουμε δύο πολύ βασικά αποτελέσματα που θα χρησιμοποιήσουμε χωρίς απόδειξη στη συνέχεια. Το πρώτο σχετίζεται με τις προσανατολίσιμες επιφάνειες (με ή χωρίς σύνορο) και το δεύτερο έχει να κάνει με τους ομοιομορφισμούς των 2-δίσκων (με ή χωρίς σύνορο).

Θεώρημα 3.1.7. (Ταξινόμηση των προσανατολίσιμων επιφανειών) *Οι επιφάνειες στις οποίες αναφερόμαστε στη συνέχεια υποθέτουμε ότι είναι συμπαγείς και συνεκτικές.*

- (i) *Οι προσανατολίσιμες επιφάνειες (χωρίς σύνορο) ταξινομούνται με βάση τον αριθμό $g \in \{0, 1, \dots\}$ των χερουλιών που έχουν (δηλαδή ο αριθμός χερουλιών προσδιορίζει, μέχρι ομοιομορφισμού, την επιφάνεια).*
- (ii) *Οι προσανατολίσιμες επιφάνειες με σύνορο ταξινομούνται με βάση τον αριθμό $g \in \{0, 1, \dots\}$ των χερουλιών και τον αριθμό $k \in \{1, 2, \dots\}$ των τρυπών που έχουν (τρύπες είναι ομοιομορφικές εικόνες κύκλων που αποτελούν το σύνορο της επιφάνειας).*

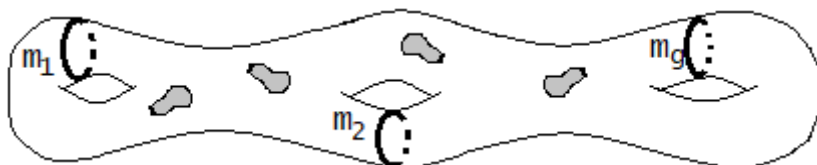
Για την απόδειξη παραπέμπουμε στο [7].

Θεώρημα 3.1.8. *Αν $h : D_n^2 \rightarrow D_n^2$ είναι ένας ομοιομορφισμός του 2-δίσκου με n τρύπες ο οποίος είναι ταυτοτικός πάνω στο σύνορο, τότε αυτός θα είναι ισοτοπικός με μια πεπερασμένη σύνδεση στροφών Dehn πάνω σε (κλειστές) καμπύλες του D_n^2 . Για $n = 0$ ισχύει ότι κάθε ομοιομορφισμός του D^2 που είναι ταυτοτικός στο σύνορο είναι ισοτοπικός με την ταυτοτική απεικόνιση του D^2 .*

Παρατηρώντας τη διατύπωση του Θεωρήματος 3.1.8, βλέπουμε ότι υπάρχει μια ομοιότητα με το Θεώρημα 3.1.4 (Dehn-Lickorish). Στην πραγματικότητα, στην απόδειξη που ακολουθεί επιχειρούμε να αναγάγουμε τον χαρακτηρισμό μέσω στροφών Dehn του τυχαίου ομοιομορφισμού μιας προσανατολισμένης επιφάνειας F με ή χωρίς σύνορο, στον χαρακτηρισμό μέσω τέτοιων στροφών ενός ομοιομορφισμού του 2-δίσκου με n τρύπες.

Απόδειξη. (για το Θεώρημα 3.1.4)

Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1.7, η F είναι ομοιομορφική με μια φυσικά εμπεδωμένη στον \mathbb{R}^3 σφαίρα που έχει g χερούλια και k τρύπες, έστω $S_{g,k}^2$ (υποθέτουμε ότι είτε $g \neq 0$ είτε $k \neq 0$: αν όχι, τότε η F είναι η S^2 και είναι γνωστό αποτέλεσμα που προκύπτει από το Θεώρημα 3.1.8 ότι κάθε ομοιομορφισμός της S^2 που διατηρεί τον προσανατολισμό της είναι ισοτοπικός με την ταυτοτική απεικόνισή της, δηλαδή σε αυτήν την περίπτωση το συμπέρασμα ισχύει τετριμμένα). Πάνω στην F θεωρούμε τις ομοιομορφικές εικόνες των μεσημβρινών της $S_{g,k}^2$ (Σχήμα 3.8) που φροντίζουμε να μην έχουν κοινά σημεία με το σύνορο, έστω m_1, m_2, \dots, m_g . Στο εξής, θα αποκαλούμε τις καμπύλες αυτές «μεσημβρινούς της F ». Μια χρήσιμη παρατήρηση είναι το ότι αν κόψουμε την F κατά μήκος των μεσημβρινών αυτών, θα έχουμε σαν αποτέλεσμα μια σφαίρα με $k + 2g$ τρύπες, ή αλλιώς ένα δίσκο με $k + 2g - 1$ τρύπες.



Σχήμα 3.8: Η επιφάνεια F με g χερούλια και k τρύπες και οι μεσημβρινοί της m_1, m_2, \dots, m_g

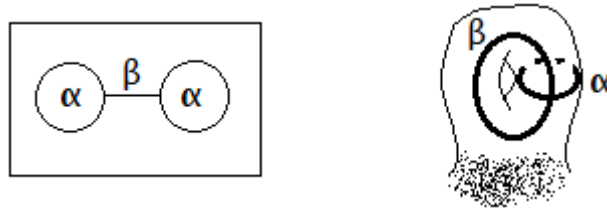
Μέσω του ομοιομορφισμού $h : F \rightarrow F$, ο μεσημβρινός m_1 απεικονίζεται σε μια καμπύλη $h(m_1)$ που έχει συνεκτικό συμπλήρωμα (ως προς την F). Από το Λήμμα 3.1.6 ξέρουμε ότι υπάρχει ένας c -ομοιομορφισμός f_1 που να απεικονίζει την $h(m_1)$ στη m_1 . Υπάρχουν δύο περιπτώσεις: είτε οι προσανατολισμοί των $f_1 \circ h(m_1)$ και m_1 ταυτίζονται, είτε είναι αντίθετοι. Αν έχουν ίδιο προσανατολισμό, τότε μέσω ενός ομοιομορφισμού f'_1 ισοτοπικού με τον f_1 μπορούμε να έχουμε τον ομοιομορφισμό $f'_1 \circ h$ να δρα ταυτοτικά πάνω στην m_1 (ισχύει γενικά ότι κάθε ομοιομορφισμός του S^1 που διατηρεί τον προσανατολισμό του είναι ισοτοπικός με την ταυτοτική απεικόνισή του). Επειδή, λοιπόν, η καμπύλη m_1 χωρίζει μια μικρή κυλινδρική περιοχή της, U , σε δύο κομμάτια U_1, U_2 και ο ομοιομορφισμός $f'_1 \circ h$ διατηρεί τον προσανατολισμό της F (είναι ισοτοπικός με

3.1 Θεώρημα Dehn-Lickorish

τον f_1 που είναι c -ομοιομορφισμός κι άρα διατηρεί τον προσανατολισμό) απεικονίζοντας την καμπύλη ταυτοτικά, συμπεραίνουμε ότι τα σημεία κάθε περιοχής U_i κοντά στην m_1 , παραμένουν στην U_i , δηλαδή δεν «αλλάζουν πλευρά». Έτσι, βλέπουμε ότι ο $f'_1 \circ h$ είναι ομοιομορφισμός της επιφάνειας που προκύπτει αν κόψουμε την F πάνω στην m_1 (για την ακρίβεια επάγει φυσιολογικά έναν ομοιομορφισμό αυτής της επιφάνειας), ο οποίος μάλιστα είναι ταυτοτικός στο σύνορο.

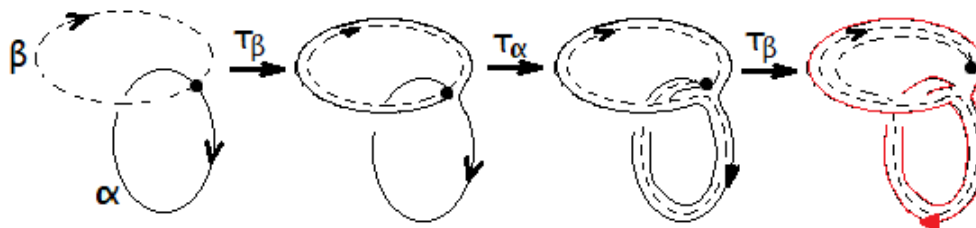
Επαναλαμβάνοντας αυτή τη διαδικασία και για τους g μεσημβρινούς, καταλήγουμε σε έναν ομοιομορφισμό του δίσκου με $k + 2g - 1$ τρύπες στον εαυτό του, τον $h' = f'_g \circ \dots \circ f'_1 \circ h$, που είναι ταυτοτικός στο σύνορο. Από το Θεώρημα 3.1.8 βλέπουμε ότι ο h' είναι ισοτοπικός με μια σύνδεση στροφών Dehn, έστω τ , άρα ο h είναι ισοτοπικός με τον ομοιομορφισμό $f_1^{-1} \circ \dots \circ f_g^{-1} \circ \tau$ κι εντέλει με μια σύνδεση στροφών Dehn, όπως θέλαμε.

Μένει να ελέγξουμε τι γίνεται σε περίπτωση που οι $h(m_1), m_1$ δεν έχουν τον ίδιο προσανατολισμό. Αφού η m_1 έχει συνεκτικό συμπλήρωμα στην F , τότε μπορούμε να βρούμε καμπύλη β που να τέμνει την m_1 σε ακριβώς ένα σημείο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.9 (όπως στην πρώτη περίπτωση του Λήμματος 3.1.6).



Σχήμα 3.9: Η καμπύλη β που τέμνει την α σε μοναδικό σημείο

Συμβολίζουμε με α την m_1 και α^{-1} την καμπύλη που ταυτίζεται ως σύνολο σημείων με την m_1 , αλλά έχει αντίθετο προσανατολισμό. Όπως μπορούμε να δούμε στο Σχήμα 3.10, ο ομοιομορφισμός $\tau = \tau_\beta \circ \tau_\alpha \circ \tau_\beta$, όπου τ_α, τ_β είναι οι στροφές Dehn πάνω στις καμπύλες α, β , αντίστοιχα, στέλνει τις καμπύλες α, β στις β, α^{-1} αντίστοιχα (για την ακρίβεια σε ισοτοπικές τους).



Σχήμα 3.10: Σύνθεση των στροφών Dehn $\tau_\beta \circ \tau_\alpha \circ \tau_\beta$

Έτσι, αν εφαρμόσουμε δύο φορές αυτόν τον ομοιομορφισμό (δηλαδή εφαρμόσουμε τον $\tau \circ \tau$), τότε θα καταφέρουμε να στείλουμε την α στην α^{-1} , η οποία έχει τον ίδιο προσανατολισμό με την $h(m_1)$. Επομένως, η σύνθεση $f'_1 = (\tau \circ \tau)^{-1} \circ f_1$ είναι c -ομοιομορφισμός που στέλνει την $h(m_1)$ στην m_1 έτσι ώστε αυτές να έχουν τον ίδιο προσανατολισμό. Αυτή, όμως, είναι η προηγούμενη περίπτωση που μελετήσαμε και καταλήξαμε στο επιθυμητό συμπέρασμα, άρα η απόδειξη ολοκληρώθηκε. \square

3.2 Πορίσματα του θεωρήματος Dehn-Lickorish

Όπως αναφέραμε στην αρχή της προηγούμενης παραγράφου ένας άλλος τρόπος παρουσίασης των 3-πολλαπλοτήτων, εκτός των διαχωρισμών Heegaard που μελετήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, είναι αυτή που ονομάζεται χειρουργική Dehn. Το αποτέλεσμα που περιγράφει τη βασική διαδικασία της χειρουργικής Dehn και μας εξασφαλίζει ότι κάθε προσανατολίσιμη 3-πολλαπλότητα (συμπαγής και συνεκτική) μπορεί να προκύψει με αυτόν τον τρόπο είναι το θεώρημα που ακολουθεί (χωρίς απόδειξη), το οποίο είναι ουσιαστικά πόρισμα του Θεωρήματος Dehn-Lickorish.

Θεώρημα 3.2.1. *Κάθε προσανατολίσιμη 3-πολλαπλότητα (χωρίς σύνορο) M^3 μπορεί να προκύψει αν κόψουμε μερικούς ξένους ανά δύο συμπαγείς τόρους από την 3-σφαίρα, S^3 , και τους συγκολλήσουμε ξανά αλλά με διαφορετικό ομοιομορφισμό των συνόρων τους. Επιπλέον, μπορούμε να υποδέσουμε ότι αυτοί οι τόροι δεν είναι κομποδιασμένοι μες στην S^3 .*

3.2 Πορίσματα του θεωρήματος Dehn-Lickorish

Ένα δεύτερο πόρισμα του Θεωρήματος Dehn-Lickorish είναι το Θεώρημα Rokhlin. Το θεώρημα αυτό είναι σημαντικό γενικά για τη θεωρία των πολλαπλοτήτων κι εμάς μας ενδιαφέρει για έναν επιπλέον λόγο: η απόδειξη χρησιμοποιεί μια «χειρουργική διαδικασία».

Θεώρημα 3.2.2. (Rokhlin) *Κάθε προσανατολίσιμη 3-πολλαπλότητα (χωρίς σύνορο), είναι το σύνορο μιας 4-πολλαπλότητας με σύνορο.*

Πριν γράψουμε την απόδειξη δίνουμε έναν ορισμό που θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια:

Ορισμός 3.2.3. *Θα λέμε ότι μια n -πολλαπλότητα (χωρίς σύνορο) M^n είναι φραγμένη, αν υπάρχει $(n+1)$ -πολλαπλότητα με σύνορο, έστω W^{n+1} , τέτοια ώστε $\partial W^{n+1} = M^n$.*

Να σημειώσουμε ότι η έννοια της φραγμένης πολλαπλότητας, ακόμα κι αν αυτή είναι εμποδωμένη μέσα σε κάποιον μετρικό χώρο, δε σχετίζεται με την έννοια του φραγμένου υποσυνόλου ενός μετρικού χώρου.

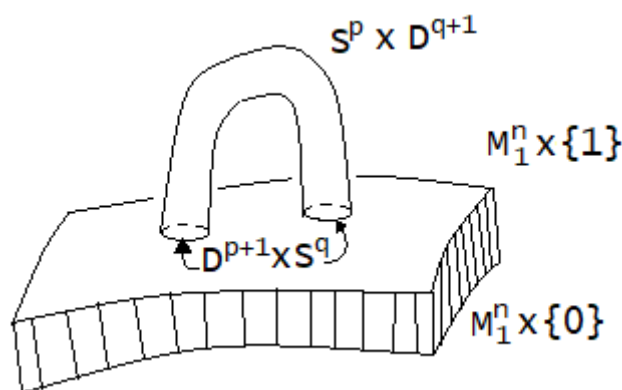
Απόδειξη. Η πορεία της απόδειξης είναι η εξής: Αρχικά θα περιγράψουμε μια χειρουργική διαδικασία για πολλαπλότητες οποιασδήποτε διάστασης, κατά την οποία πολλαπλότητες που είναι φραγμένες μετατρέπονται σε άλλες που είναι επίσης φραγμένες. Έπειτα θα δείξουμε ότι αυτή η διαδικασία μπορεί να ακολουθηθεί στη γενική περίπτωση του Θεωρήματος 3.2.1, δηλαδή θα δούμε ότι η τυχαία πολλαπλότητα M^3 μπορεί να προκύψει από την S^3 ακριβώς από τέτοιες χειρουργικές διαδικασίες. Τότε, όμως, θα έχουμε καταλήξει στο ότι κάθε 3-πολλαπλότητα M^3 είναι φραγμένη, αφού η S^3 είναι σύνορο του D^4 , άρα φραγμένη, και η διαδικασία είπαμε ότι θα διατηρεί αυτήν την ιδιότητα.

Έστω τυχαίοι θετικοί ακέραιοι αριθμοί p, q . Η πολλαπλότητα $S^p \times S^q$ είναι φραγμένη και είναι σύνορο των πολλαπλοτήτων $D^{p+1} \times S^q$ και $S^p \times D^{q+1}$. Σε τυχαία πολλαπλότητα M_1^n διάστασης $n = p + q + 1$, αντιστοιχούμε πολλαπλότητα M_2^n που προκύπτει αν από την πρώτη αφαιρέσουμε μια υποπολλαπλότητα $D^{p+1} \times S^q$ και συγκολλήσουμε μία $S^p \times D^{q+1}$, μέσω του φυσικού ομοιομορφισμού των συνόρων τους. Υποθέτουμε ότι η M_1^n είναι φραγμένη και σκοπός μας, για το πρώτο κομμάτι της απόδειξης, είναι να καταλήξουμε στο ότι και η M_2^n είναι φραγμένη.

Διατυπώνουμε κι αποδεικνύουμε ένα λήμμα που θα μας βοηθήσει στη συνέχεια:

Λήμμα 3.2.4. Υπάρχει πολλαπλότητα με σύνορο W^{n+1} της οποίας το σύνορο είναι η (ξένη) ένωση των M_1^n και M_2^n .

Απόδειξη. Έστω η πολλαπλότητα με σύνορο $W_0^{n+1} = M_1^n \times [0, 1]$. Παρατηρούμε ότι το σύνορό της αποτελείται από δύο αντίγραφα του M_1^n , τα $M_1^n \times \{0\}$ και $M_1^n \times \{1\}$. Έστω, τώρα, το χερούλι $D^{p+1} \times D^{q+1}$, του οποίου το σύνορο είναι η ένωση των πολλαπλοτήτων $S^p \times D^{q+1}$, $D^{p+1} \times S^q$ που έχουν τομή την πολλαπλότητα $S^p \times S^q$. Αν συγκολλήσουμε πάνω σε μία υποπολλαπλότητα $D^{p+1} \times S^q$ της $M_1^n \times \{1\}$ το αντίστοιχο μέρος του συνόρου του χερουλιού (με το φυσικό ομοιομορφισμό) (Σχήμα 3.11), τότε θα πάρουμε τη ζητούμενη πολλαπλότητα W^{n+1} . Πράγματι, το ένα



Σχήμα 3.11: Προσθήκη χερουλιού

μέρος του συνόρου της W^{n+1} θα είναι η πολλαπλότητα $M_1^n \times \{0\}$ και το άλλο θα έχει προκύψει από το $M_1^n \times \{1\}$ αφαιρώντας την $D^{p+1} \times S^q$ και συγκολλώντας στη θέση της την $S^p \times D^{q+1}$, άρα θα είναι η πολλαπλότητα που ονομάσαμε M_2^n (για την ακρίβεια ομοιομορφική αυτής), ξένη ως προς την $M_1^n \times \{0\}$. \square

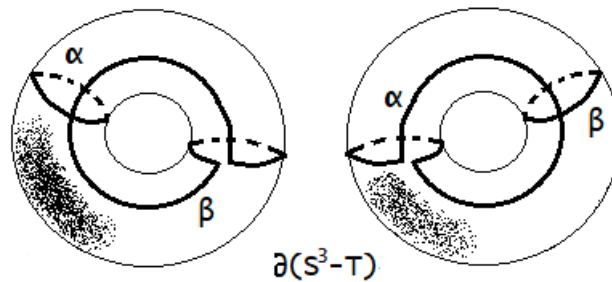
Αν, λοιπόν, $M_1^n = \partial U^{n+1}$ και θέσουμε V^{n+1} να είναι το αποτέλεσμα της συγκόλλησης των πολλαπλοτήτων των U^{n+1} , W^{n+1} πάνω στο κοινό τους σύνορο M_1^n , τότε $M_2^n = \partial V^{n+1}$, δηλαδή όντως η M_2^n είναι φραγμένη.

3.2 Πορίσματα του θεωρήματος Dehn-Lickorish

Για 3-πολλαπλότητες αυτή η διαδικασία αντιστοιχεί στους ακεραίους $p = q = 1$. Στη συγκεκριμένη αυτήν περίπτωση αφαιρούμε μια πολλαπλότητα $D^2 \times S^1$ και συγκολλούμε στη θέση της μια $S^1 \times D^2$. Αυτές οι πολλαπλότητες είναι και οι δύο συμπαγείς τόροι και ο φυσικός ομοιομορφισμός των συνοριακών τόρων τους αντιστρέφει τις παραλλήλους με τους μεσημβρινούς. Αυτήν τη διαδικασία την ονομάζουμε *εναλλαγή τόρου*.

Με τη νέα ορολογία, το δεύτερο και τελευταίο κομμάτι της απόδειξής μας μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: Στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.1 κόβουμε συμπαγείς τόρους από την S^3 και τους επανατοποθετούμε με διαφορετικό ομοιομορφισμό του συνόρου τους. Εμείς θέλουμε να δείξουμε, τώρα, ότι στη χειρουργική του Θεωρήματος 3.2.1 αρκεί να εκτελούμε μόνο εναλλαγές τόρων.

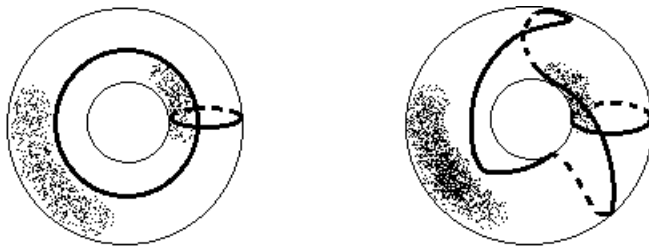
Έστω α ένας μεσημβρινός ενός συμπαγούς τόρου T που αφαιρούμε από την S^3 και β ένας μεσημβρινός του συμπαγούς τόρου που συγκολλούμε στη θέση του. Στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.1, την οποία δεν παραθέτουμε, προκύπτει ότι οι τοποδετήσεις που ενδέχεται να έχουν οι δύο αυτές καμπύλες πάνω στο σύνορο της πολλαπλότητας $S^3 - T$ είναι αυτές που φαίνονται στο Σχήμα 3.12.



Σχήμα 3.12: Μεσημβρινοί του τόρου που αφαιρούμε κι αυτού που συγκολλούμε στο σύνορο της $S^3 - T$

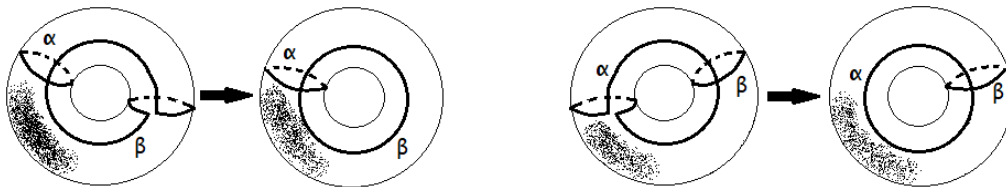
Ο λόγος που εστιάζουμε στους μεσημβρινούς, είναι το ότι ισχύει πως το αποτέλεσμα της συγκόλλησης του συνόρου ενός συμπαγούς τόρου σε έναν διδιάστατο τόρο στο σύνορο μιας 3-πολλαπλότητας εξαρτάται μόνο από την εικόνα, μέσω του ομοιομορφισμού συγκόλλησης, του με-

σημβρινού. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι έχουμε δύο ομοιομορφισμούς συγκόλλησης, h_1, h_2 που στέλνουν το μεσημβρινό στην ίδια καμπύλη, αλλά την παράλληλο σε διαφορετικές, τότε μπορούμε να δούμε ότι το αποτέλεσμα της συγκόλλησης είναι το ίδιο (έως ομοιομορφισμού των 3-πολλαπλοτήτων): Συγκεκριμένα, μέσω πεπερασμένων ισοτοπιών και στροφών Dehn (που έχουν επεκταθεί σε όλο το συμπαγή τόρο) γύρω από τον μεσημβρινό δίσκο του τόρου, μπορούμε να φέρουμε την τυχαία παράλληλο στη συνήθη εκδοχή της (Σχήμα 3.13). Αυτές οι κινήσεις όμως, δεν επηρεάζουν την 3-πολλαπλότητα που προκύπτει (είναι ισοτοπίες του συμπαγούς τόρου).



Σχήμα 3.13: Συνήθης και τυχαία παράλληλος στον τόρο

Έτσι, με ισοτοπίες του συμπαγούς τόρου T πριν την αφαίρεση ή μετά την επανατοποθέτησή του, γίνεται να φέρουμε τις ενδεχόμενες τοποθετήσεις των α και β πάνω στο $\partial(S^3 - T)$ (Σχήμα 3.12), στις πιο ειδικές τοποθετήσεις του Σχήματος 3.14.



Σχήμα 3.14: Κάθε συγκόλληση τόρου στη διαδικασία της χειρουργικής του Θεωρήματος 3.2.1 είναι ισοδύναμη με μια εναλλαγή τόρου

Όλα τα παραπάνω ισχύουν για όσους τόρους κι αν χρειαστεί να α-

φαιρέσουμε και να επανατοποθετήσουμε. Επομένως, όλες οι χειρουργικές διαδικασίες που εκτελούνται στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.1 είναι ισοδύναμες με εναλλαγές τόρων, κι αυτό ολοκληρώνει την απόδειξή μας. \square

3.3 Ρητή χειρουργική κατά μήκος τετριμμένων κόμπων

Στην προηγούμενη παράγραφο διατυπώσαμε το Θεώρημα 3.2.1 που δηλώνει ότι οποιαδήποτε τυχαία συμπαγής, συνεκτική και προσανατολισίμη 3-πολλαπλότητα χωρίς σύνορο μπορεί να προκύψει από την S^3 κόβοντας από αυτήν συμπαγείς τόρους που δεν είναι κομποδιασμένοι, και συγκολλώντας τους πίσω μέσω ενός ομοιομορφισμού ειδικής μορφής που ονομάσαμε εναλλαγή τόρου (αντιστρέφει μεσημβρινούς και παραλλήλους). Αναμένουμε ενδεχομένως ότι το να συγκολλούμε τους τόρους με έναν ομοιομορφισμό που απλά αντιστρέφει παραλλήλους και μεσημβρινούς είναι η πιο βολική επιλογή για την εφαρμογή αυτού του θεωρήματος, ωστόσο αυτό δεν ισχύει σε όλες τις περιπτώσεις. Γενικά όπως ισχυριστήκαμε και στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.2, για τον προσδιορισμό του ομοιομορφισμού συγκόλλησης αρκεί να γνωρίζουμε πού απεικονίζεται ο μεσημβρινός α του συμπαγούς τόρου T , έστω σε μια καμπύλη J του συνόρου του T , $S^1 \times S^1$.

Συμβολισμός 3.3.1. *Αν α είναι ένας προσανατολισμένος μεσημβρινός του T και β μια προσανατολισμένη παράλληλος του T , τότε θα γράφουμε $J = p\alpha + q\beta$, όπου p, q είναι ακέραιοι αριθμοί, αν η J είναι κλειστή καμπύλη του ∂T που εκτελεί περιστροφές p φορές κατά μήκος της α και q φορές κατά μήκος της β . Για αρνητικές τιμές του p ή του q θεωρούμε ότι οι περιστροφές γίνονται με αντίθετη φορά από αυτή της α ή της β αντίστοιχα.*

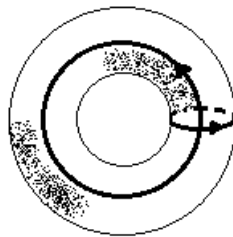
Στη συνέχεια παραθέτουμε χωρίς απόδειξη ένα βασικό θεώρημα που περιγράφει κάποιες ιδιότητες της καμπύλης $p\alpha + q\beta$ που σχετίζονται με τους p, q .

Θεώρημα 3.3.2. (i) *Αν η καμπύλη $p\alpha + q\beta$ είναι κλειστή και δεν τέμνει τον εαυτό της, τότε είτε οι ακέραιοι p, q είναι πρώτοι μεταξύ τους, είτε κάποιος από τους δύο είναι 0 κι ο άλλος είναι ± 1 .*

(ii) *Αν δύο κλειστές καμπύλες του τόρου που δεν τέμνουν τον εαυτό τους είναι ομοτοπικές, τότε είναι και ισοτοπικές μεταξύ τους.*

Με λίγα λόγια, από το πρώτο κομμάτι του Θεωρήματος αυτού συμπεραίνουμε ότι οι p, q δεν έχουν κοινούς διαιρέτες, κι από το δεύτερο, σε συνδυασμό με ένα άλλο βασικό αποτέλεσμα που μας λέει ότι οι καμπύλες της μορφής $p\alpha + q\beta$ με ίδιους p, q είναι ομοτοπικές, συμπεραίνουμε ότι οι ακέραιοι p, q προσδιορίζουν την $p\alpha + q\beta$ έως ισοτοπίας.

Έστω ότι αφαιρούμε έναν συμπαγή, μη κομποδιασμένο τόρο T (δηλαδή μια σωληνοειδή ϵ -περιοχή του τετριμμένου κόμπου K_0) από την S^3 , τον οποίο επανατοποθετούμε με διαφορετικό ομοιομορφισμό του συνόρου του. Συγκεκριμένα, έστω ότι τον μεσημβρινό του T , α , τον ταυτίζουμε με την καμπύλη $p\alpha + q\beta$. Προφανώς, αν $p = 1, q = 0$, τότε το αποτέλεσμα αυτής της (τετριμμένης) διαδικασίας θα είναι η S^3 . Αν $p = -1, q = 0$, δεν είναι ιδιαίτερα δύσκολο να δούμε ότι το αποτέλεσμα θα είναι πάλι η S^3 . Αντίστοιχα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η συγκόλληση πάνω στην καμπύλη $p\alpha + q\beta$ είναι ισοδύναμη με τη συγκόλληση πάνω στην καμπύλη $-p\alpha - q\beta$. Επομένως δεν έχει ουσιαστική διαφορά αν διαλέξουμε ένα συγκεκριμένο προσανατολισμό της α κι ένα συγκεκριμένο προσανατολισμό της β αντί για τους αντίθετούς τους. Έτσι κάνουμε τη σύμβαση ότι οι α, β έχουν τους προσανατολισμούς που φαίνονται στο Σχήμα 3.15.



Σχήμα 3.15: Προσανατολισμοί του μεσημβρινού και της παραλλήλου

3.3 Ρητή χειρουργική κατά μήκος τετριμμένων κόμπων

Εξ αιτίας του Θεωρήματος 3.3.2, το αποτέλεσμα της διαδικασίας της χειρουργικής που περιγράφουμε προσδιορίζεται πλήρως από το ρητό αριθμό p/q (λόγω του πρώτου μέρους του θεωρήματος το κλάσμα αυτό είναι ανάγωγο άρα αν το γνωρίζουμε, ξέρουμε ακριβώς τους p, q , που σημαίνει ότι ξέρουμε έως ισοτοπίας και την καμπύλη $p\alpha + q\beta$, με βάση όσα έχουμε εξηγήσει).

Ορισμός 3.3.3. (i) Ο ρητός αριθμός $r = p/q$ καλείται δείκτης πλαισίωσης ή απλώς πλαισίωση του τετριμμένου κόμπου K_0 .

(ii) Η διαδικασία χειρουργικής Dehn της S^3 κατά μήκος τετριμμένων κόμπων όπως την έχουμε περιγράψει, που προσδιορίζεται από το ρητό αριθμό r καλείται ρητή χειρουργική με δείκτη πλαισίωσης r . Το αποτέλεσμά της θα συμβολίζεται με \bigcirc^r .

Ακολουθούν ορισμένα παραδείγματα ρητής χειρουργικής, σε μορφή αποδεδειγμένων προτάσεων, για διάφορες τιμές του δείκτη πλαισίωσης r .

Πρόταση 3.3.4. $\bigcirc^0 \approx S^1 \times S^2$ (το σύμβολο \approx χρησιμοποιείται εδώ για να δηλώσουμε την ύπαρξη ομοιομορφισμού μεταξύ των δύο αντικειμένων που συσχετίζονται μέσω αυτού).

Απόδειξη. Όπως είδαμε στην παράγραφο 2.3, η S^3 μπορεί να προκύψει από τη συγκόλληση δύο συμπαγών τόρων T_1, T_2 μέσω ενός ομοιομορφισμού των συνόρων τους $h: \partial T_1 \rightarrow \partial T_2$ που εναλλάσσει μεσημβρινούς και παραλλήλους. Η ρητή χειρουργική με δείκτη πλαισίωσης $r = 0$ μπορεί να προκύψει κόβοντας τον T_1 από την S^3 και συγκολλώντας τον μέσω μιας εναλλαγής τόρου. Αυτό θα έχει σαν αποτέλεσμα τη συγκόλληση των T_1, T_2 μέσω ομοιομορφισμού των συνόρων τους που στέλνει μεσημβρινούς σε μεσημβρινούς και παραλλήλους σε παραλλήλους. Έτσι, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η συγκόλληση γίνεται μέσω της ταυτοτικής απεικόνισης των συνόρων τους. Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι η συγκόλληση των συνόρων δύο D^2 ταυτοτικά έχει αποτέλεσμα την S^2 , άρα η συγκόλληση των T_1, T_2 πάνω στα σύνορά τους έχει σαν αποτέλεσμα την πολλαπλότητα $S^1 \times S^2$. \square

Πριν συνεχίσουμε με το επόμενο παράδειγμα, είναι απαραίτητο να δώσουμε τον ορισμό μιας μεγάλης κατηγορίας 3-πολλαπλοτήτων που παίζει κεντρικό ρόλο στη θεωρία.

Ορισμός 3.3.5. Φακοειδής χώρος $L(p, q)$, όπου p, q είναι μεταξύ τους πρώτοι ακέραιοι, ονομάζεται η 3-πολλαπλότητα που προκύπτει αν στη μοναδιαία $S^3 \subseteq \mathbb{C}^2$ (δηλαδή στην $S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 + |w|^2 = 1\}$) ταυτίσουμε το τυχαίο σημείο (z, w) με τα σημεία της μορφής

$$(\exp(2k\pi i/p)z, \exp(2k\pi i q/p)w),$$

όπου $k \in \{1, \dots, p-1\}$.

Μπορεί ναδειχθεί ότι ο φακοειδής χώρος $L(p, q)$ μπορεί να προκύψει από τη συγκόλληση δύο συμπαγών τόρων μέσω ενός ομοιομορφισμού των συνόρων τους που στέλνει το μεσημβρινό α του ενός στην καμπύλη $q\alpha + p\beta$ του άλλου.

Πρόταση 3.3.6. $\mathbb{O}^{p/q} \approx L(p, q)$.

Απόδειξη. Αν στην S^3 αφαιρέσουμε το συμπαγή τόρο T_1 (οι συμβολισμοί είναι ίδιοι με αυτούς της Πρότασης 3.3.4) και τον συγκολλήσουμε πάλι με ομοιομορφισμό που στέλνει το μεσημβρινό του α στην καμπύλη του $p\alpha + q\beta$, δηλαδή αν κάνουμε ρητή χειρουργική με δείκτη πλαισίωσης p/q , τότε θα τον έχουμε απεικονίσει στην καμπύλη $q\alpha + p\beta$ του T_2 . Σύμφωνα με την παρατήρηση που κάναμε μετά τον ορισμό των φακοειδών χώρων, αυτή η συγκόλληση δύο συμπαγών τόρων έχει σαν αποτέλεσμα το χώρο $L(p, q)$. \square

Πρόταση 3.3.7. $\mathbb{O}^{\pm 1/n} \approx S^3$.

Απόδειξη. Από την προηγούμενη Πρόταση 3.3.6, έχουμε ότι $\mathbb{O}^{\pm 1/n} = L(\pm 1, n)$. Εξ ορισμού των φακοειδών χώρων όμως, αν $p = 1$, ουσιαστικά δε συμβαίνει καμία ταύτιση σημείων της S^3 , δηλαδή $L(\pm 1, n) = S^3$. \square

Πρόταση 3.3.8. $\mathbb{O}^r \approx \mathbb{O}^{1/(\pm n + \frac{1}{r})}$.

3.3 Ρητή χειρουργική κατά μήκος τετριμμένων κόμπων

Απόδειξη. Έστω $r = p/q$. Από τον ορισμό των φακοειδών χώρων, έχουμε ότι ο $L(p, q)$ προκύπτει αν στην S^3 ταυτίσουμε το σημείο (z, w) με τα σημεία

$$(\exp(2k\pi i/p)z, \exp(2k\pi i q/p)w),$$

όπου $k \in \{1, \dots, p-1\}$, ή, ισοδύναμα, με τα σημεία

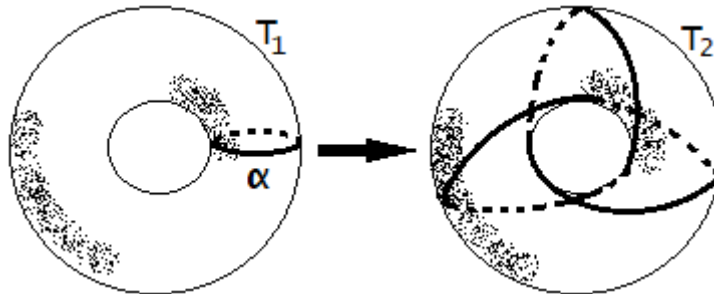
$$(\exp(2k\pi i/p)z, \exp(2k\pi i(q \pm np)/p)w),$$

όπου $k \in \{1, \dots, p-1\}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Άρα $L(p, q) = L(p, q \pm np)$, οπότε: $\mathbb{O}^{p/q} \approx \mathbb{O}^{p/(q \pm np)} \approx \mathbb{O}^{1/(\pm n + \frac{1}{q})}$. \square

Σχετικά με το αποτέλεσμα της τελευταίας Πρότασης 3.3.8, πρέπει να τονίσουμε ότι δεν είναι καθόλου άμεσο αν προσπαθήσουμε να το δείξουμε βρίσκοντας έναν ομοιομορφισμό f μεταξύ των αντικειμένων M^3 και N^3 που προκύπτουν από τη σφαίρα μετά από ρητή χειρουργική με δείκτη πλαισίωσης r και $1/(\pm n + \frac{1}{q})$ αντίστοιχα. Θα επιχειρήσουμε στη συνέχεια να περιγράψουμε αυτόν τον f .

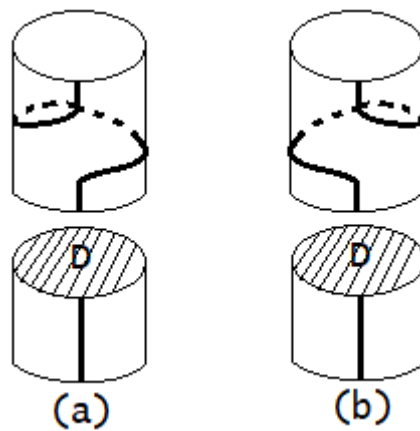
Όπως είδαμε και στην απόδειξη της Πρότασης 3.3.6, η πολλαπλότητα που προκύπτει από την S^3 μετά από χειρουργική με δείκτη πλαισίωσης $r = p/q$, έστω M^3 , μπορεί να προκύψει αν συγκολλήσουμε δύο συμπαγείς τόρους T_1, T_2 μέσω ενός ομοιομορφισμού των συνόρων τους που στέλνει το μεσημβρινό α του T_1 στην καμπύλη $q\alpha + p\beta$ του ∂T_2 (π.χ. στο Σχήμα 3.16 για $r = 2/3$).



Σχήμα 3.16: Ρητή χειρουργική με πλαίσιο 2/3

Αυτή η καμπύλη τέμνει έναν τυχαίο μεσημβρινό δίσκο D του T_2 σε p σημεία. Εκτελούμε, τώρα, n διαδοχικές στροφές Dehn του ∂T_2

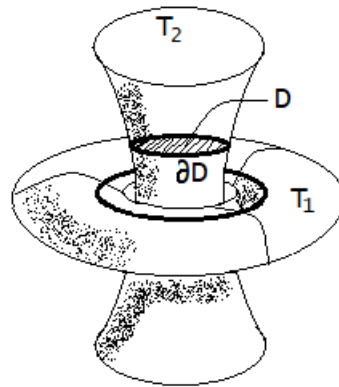
πάνω στον D , όλες με την ίδια φορά, τις οποίες επεκτείνουμε (δεν είναι δύσκολο) στο συμπαγή τόρο, κι ονομάζουμε T'_2 το αποτέλεσμα. Έστω h_2 ο ομοιομορφισμός που μόλις περιγράψαμε, ανάμεσα στο συμπαγή τόρο T_2 και τον T'_2 . Η καμπύλη $q\alpha + p\beta$, μέσω του h_2 , μετατρέπεται στην καμπύλη $(q \pm np)\alpha + p\beta$ (για κάθε στροφή Dehn έχουμε p καινούργιες περιστροφές γύρω από το μεσημβρινό δίσκο), όπου το πρόσημο του np είναι θετικό αν οι στροφές γίνουν με τη φορά της α που έχουμε συμφωνήσει να θεωρούμε θετική (Σχήμα 3.17a), ή αρνητικό αν γίνουν αντίθετα (Σχήμα 3.17b).



Σχήμα 3.17: Αντίθετες στροφές

Με βάση τα προηγούμενα, η καμπύλη $(q \pm np)\alpha + p\beta$ αντιστοιχεί σε χειρουργική με δείκτη πλαισίωσης $p/(q \pm np) = 1/(\pm n + \frac{1}{q})$. Αν δηλαδή ταυτίσουμε το μεσημβρινό α του T_1 μ' αυτήν την καμπύλη του T'_2 , θα προκύψει η πολλαπλότητα N^3 . Ονομάζουμε, λοιπόν, T'_1 το συμπαγή τόρο $N^3 - T'_2$ (το αποτέλεσμα του κοψίματος του T'_2 από την πολλαπλότητα N^3). Αυτός είναι ομοιομορφικός του T_1 , αφού και οι δύο είναι κυλινδρικές ϵ -περιοχές του τετριμμένου κόμπου, κι έστω h_1 ο ομοιομορφισμός που τους συνδέει (εποπτικά μοιάζει με στροφή του T_1 κατά μήκος της παραλλήλου του που ταυτίζεται με το σύνορο του δίσκου D του T_2).

3.3 Ρητή χειρουργική κατά μήκος τετριμμένων κόμπων



Σχήμα 3.18: Οι στροφές γίνονται κατά μήκος του μεσημβρινού του T_2 , ο οποίος ταυτίζεται με την παράλληλο του T_1

Εντέλει, ο ζητούμενος ομοιομορφισμός $f : M^3 \rightarrow N^3$ είναι αυτός που στον περιορισμό του στον T_1 ισούται με τον h_1 και στον περιορισμό του στον T_2 ισούται με τον h_2 .

Βιβλιογραφία

- [1] V. V. Prasolov & A. B. Sossinsky, *Knots, links, braids and 3-manifolds - An introduction to the new invariants*, American Mathematical Society, 1997.
- [2] G. Burde & H. Zieschang, *Knots*, de Gruyter, Berlin, 1986.
- [3] E. E. Moise, *Affine structures in 3-manifolds. V: The triangulation theorem and Hauptvermutung*, Annals of Mathematics (2) 57 (1952), 547-560.
- [4] E. E. Moise, *Affine structures in 3-manifolds. VII: Invariance of knot types; local tame imbedding*, Annals of Mathematics (2) 59 (1954), 159-170.
- [5] J. R. Munkres, *Elementary Differential Topology*, Annals of Mathematics Studies, vol.54, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1966.
- [6] N. Bourbaki, *General Topology, Part I*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [7] S. C. Carlson, *Topology of Surfaces, Knots, and Manifolds: A First Undergraduate Course*, Wiley, New York, 2001.