



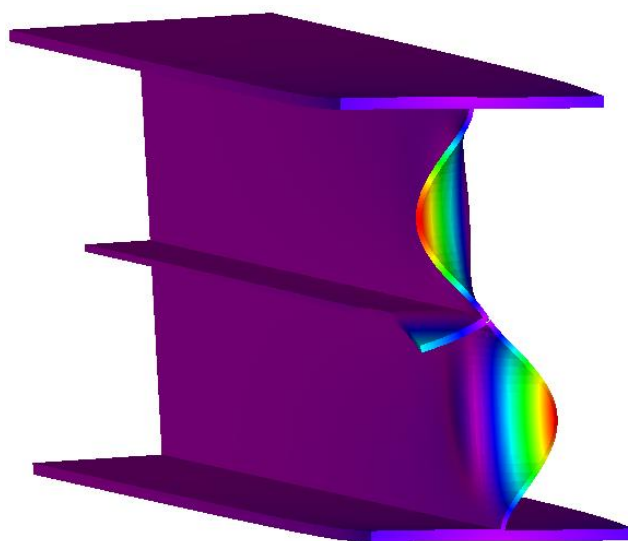
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Πολιτικών Μηχανικών

Τομέας Δομοστατικής

Εργαστήριο Στατικής & Αντισεισμικών Ερευνών

## **Ανάλυση ράβδων ανοικτών και κλειστών διατομών υπό αξονική φόρτιση με θεωρία δοκού ανώτερης τάξης**



Διπλωματική Εργασία

Χατζόπουλος Ζήνων

Επιβλέπων: Καθηγητής Ε.Μ.Π Ευάγγελος Σαπουντζάκης

Συνεπιβλέπουσα: Διδάκτωρ Μηχανικός Ε.Μ.Π Αμαλία Αργυρίδη

Αθήνα, Ιούλιος 2019



Copyright © Ζήνων Χατζόπουλος, 2019  
Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση σε αρχείο πληροφοριών, διανομή, αναπαραγωγή, μετάφραση ή μετάδοση της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό, υπό οποιαδήποτε μορφή και με οποιοδήποτε μέσο επικοινωνίας, ηλεκτρονικό ή μηχανικό, χωρίς την προηγούμενη έγγραφη άδεια του συγγραφέως. Επιτρέπεται η αναπαραγωγή, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν στη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Η έγκριση της διπλωματικής εργασίας από τη Σχολή Πολιτικών Μηχανικών του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων του συγγραφέως (Ν. 5343/1932, Άρθρο 202).

Copyright © Zinon Chatzopoulos, 2019  
All Rights Reserved

Neither the whole nor any part of this diploma thesis may be copied, stored in a retrieval system, distributed, reproduced, translated, or transmitted for commercial purposes, in any form or by any means now or hereafter known, electronic or mechanical, without the written permission from the author. Reproducing, storing and distributing this thesis for non-profitable, educational or research purposes is allowed, without prejudice to reference to its source and to inclusion of the present text. Any queries in relation to the use of the present thesis for commercial purposes must be addressed to its author.

Approval of this diploma thesis by the School of Civil Engineering of the National Technical University of Athens (NTUA) does not constitute in any way an acceptance of the views of the author contained herein by the said academic organisation (L. 5343/1932, art. 202).

Ζήνων Χατζόπουλος (2019)

Ανάλυση ράβδων ανοικτών και κλειστών διατομών υπό αξονική φόρτιση με θεωρία δοκού ανώτερης τάξης  
Εργαστήριο Στατικής & Αντισεισμικών Ερευνών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα.

Zinon Chatzopoulos (2019)

Analysis of open and hollow cross sections of beams under axial load according to higher order beam theory  
Institute of Structural Analysis and Antiseismic Research, National Technical University of Athens, Greece

## Ευχαριστίες

Φτάνοντας στο τέλος της φοίτησής μου στο Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους εκείνους που χωρίς την υποστήριξη και την βοήθειά τους δεν θα έφτανα στο παρόν αποτέλεσμα.

Πρώτα θα ήθελα να ευχαριστήσω τον αγαπημένο μου Αντιπρύτανη και Καθηγητή Ευάγγελο Σαπουντζάκη για την ευκαιρία που μου έδωσε να ασχοληθώ πάνω σε ένα πολύ ενδιαφέρον και σύγχρονο θέμα υπολογιστικής μηχανικής καθώς και για τις συνεχείς συμβουλές του καθ' όλη την διάρκεια των 2 χρόνων της συνεργασίας μας.

Στην συνέχεια θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα την διδάκτορα Αμαλία Αργυρίδη για την εκτεταμένη βοήθειά της πάνω σε οποιοδήποτε πρόβλημα αντιμετώπισα και για τις πολύ λεπτομερείς υποδείξεις της για την επιτυχή ολοκλήρωση της παρούσης εργασίας.

Τις ευχαριστίες μου εκφράζω και στους Καθηγητές Χαράλαμπο Γαντέ και Βλάση Κουμούση που δέχτηκαν να είναι μέλη της τριμελούς επιτροπής αξιολόγησης της διπλωματικής μου εργασίας καθώς και όλους τους καθηγητές της δομοστατικής κατεύθυνσης για τα εφόδια που μου έδωσαν σε όλη την πορεία μου.

Τέλος, θέλω να ευχαριστήσω του γονείς μου Νίκο και Ιωάννα, τους συγγενείς μου και τους φίλους μου, που με υπομονή και κουράγιο μου προσέφεραν την απαραίτητη ηθική συμπαράσταση για την ολοκλήρωση της διπλωματικής μου εργασίας.



*στην οικογένειά μου*







ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΤΑΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΕΙΣΜΙΚΩΝ ΕΡΕΥΝΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

## Ανάλυση ράβδων ανοικτών και κλειστών διατομών υπό αξονική φόρτιση με θεωρία δοκού ανώτερης τάξης

Ζήνων Χατζόπουλος

Επιβλέπων: Καθηγητής Ευάγγελος Σαπουντζάκης

Συνεπιβλέπουσα: Διδάκτωρ Αμαλία Αργυρίδη

Ιούνιος 2019

### ΠΕΡΙΛΗΨΗ

*Αντικείμενο της παρούσης εργασίας είναι η μελέτη τοπικών φαινομένων σε ανοιχτές και κλειστές λεπτότοιχες διατομές υπό αξονική φόρτιση με χρήση της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης. Κατά την ανάλυση των προβλημάτων εξετάζονται δοκοί ομογενούς διατομής διατηρώντας σταθερές τις εξωτερικές διαστάσεις λαμβάνοντας υπόψιν τα φαινόμενα στρέβλωσης και διαστρέβλωσης που οφείλονται σε αξονική, διατμητική, καμπτική, και στρεπτική συμπεριφορά. Η δοκός υποβάλλεται σε αξονική ή/και διατμητική καταπόνηση και δεσμεύεται με τις πλέον γενικές γραμμικές συνοριακές συνθήκες. Η ανάλυση γίνεται σε δύο στάδια. Στο πρώτο στάδιο, όπου χρησιμοποιείται η Μέθοδος των Συνοριακών Στοιχείων, γίνεται ανάλυση σε επίπεδο διατομής η οποία βασίζεται στο σχήμα διαδοχικής ισορροπίας και καθορίζει τις πιθανές μορφές της εντός και εκτός επιπέδου παραμόρφωσης. Στο δεύτερο στάδιο, όπου χρησιμοποιείται η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων, οι προαναφερθείσες μορφές παραμόρφωσης λαμβάνονται υπόψιν κατά την ανάλυση λυγισμού και πολλαπλασιάζονται με ανεξάρτητες παραμέτρους που περιγράφουν την συνεισφορά των τοπικών φαινομένων στην παραμόρφωση της δοκού. Τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την παραπάνω ανάλυση συγκρίνονται με αυτά που προκύπτουν από προσομοιώματα τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων, και προσομοιώματα με στοιχεία δοκού Timoshenko και Euler-Bernoulli, προκειμένου να διερευνηθεί η ακρίβεια της εξεταζόμενης μεθόδου. Τέλος, υπολογίζονται οι αξονικές μορφές στρέβλωσης και διαστρέβλωσης των διατομών καθώς και το πεδίο των τάσεων από γραμμική στατική ανάλυση το οποίο συγκρίνεται με το αντίστοιχο που προκύπτει από τις αναλύσεις των τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων.*





NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS  
SCHOOL OF CIVIL ENGINEERING  
INSTITUTE OF STEEL STRUCTURES

DIPLOMA THESIS

## **Analysis of open and hollow cross sections of beams under axial load according to higher order beam theory**

**Zinon Chatzopoulos**

Supervisor: Professor Evangelos Sapountzakis

Co-supervisor: Amalia Argyridi, Ph.D.

June 2019

### **ABSTRACT**

*In this thesis, a higher order beam theory is employed for local buckling analysis of beams of homogeneous open or hollow cross-section, while maintaining their external dimensions, taking into account warping and distortional phenomena due to axial loading, shear, flexure, and torsion. The beam is subjected to arbitrary axial, and/or transverse concentrated or distributed load, while its edges are restrained by the most general linear boundary conditions. The analysis consists of two stages. In the first stage, where the Boundary Element Method is employed, a cross sectional analysis is performed based on the so-called sequential equilibrium scheme establishing the possible in-plane (distortion) and out-of-plane (warping) deformation patterns of the cross-section. In the second stage, where the Finite Element Method is employed, the extracted deformation patterns are included in the buckling analysis multiplied by respective independent parameters expressing their contribution to the beam deformation. The four rigid body displacements of the cross-section together with the aforementioned independent parameters consist the degrees of freedom of the beam. The finite element equations are formulated with respect to the displacements and the independent warping and distortional parameters. The buckling load is calculated and compared with beam and 3d solid analysis results in order to validate the method and demonstrate its efficiency and accuracy. Finally, the axial warping and distortional modes of the cross sections are computed as well as the stress field from the linear static analysis and also compared with the one from 3d solid analysis results.*



## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

<b>1</b>	<b>ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....</b>	<b>15</b>
1.1	Περιγραφή του προβλήματος .....	15
1.2	Αντιμετώπιση του προβλήματος .....	15
1.3	Διάρθρωση της εργασίας.....	16
<b>2</b>	<b>ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ.....</b>	<b>19</b>
2.1	Συνιστώσες μετακινήσεων .....	19
2.2	Συνιστώσες γραμμικών παραμορφώσεων και τάσεων.....	21
2.3	Συνιστώσες μη γραμμικών παραμορφώσεων .....	23
2.4	Αρχή Δυνατών Έργων.....	25
2.5	Δυνατό έργο του γραμμικού μέρους των εσωτερικών δράσεων .....	25
2.6	Δυνατό έργο του μη-γραμμικού μέρους των εσωτερικών δράσεων .....	26
2.7	Δυνατό έργο του των εξωτερικών δράσεων .....	26
2.8	Καμπτικές και στρεπτικές μορφές.....	27
2.9	Αξονική μορφή .....	28
2.9.1	Διδιάστατο πρόβλημα συνοριακών τιμών .....	28
2.9.2	Σχήμα διαδοχικής ισορροπίας.....	29
2.9.3	Ύπαρξη λύσης .....	33
2.9.4	Παρατηρήσεις επί των αξονικών μορφών στρέβλωσης και διαστρέβλωσης.....	39
<b>3</b>	<b>ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ .....</b>	<b>43</b>
3.1	Συναρτήσεις σχήματος και επικόμβιες μετατοπίσεις.....	43
3.2	Αρχή δυνατών έργων.....	44
3.3	Γραμμικό μέρος ελαστικών δυνάμεων .....	45
3.4	Μη-γραμμικό μέρος ελαστικών δυνάμεων.....	45
3.5	Διάνυσμα φόρτισης .....	46
3.6	Μητρώο στιβαρότητας στοιχείου .....	47
3.7	Ολικό μητρώο στιβαρότητας και κριτήριο λυγισμού .....	48
3.8	Υπολογισμός αξονικών συναρτήσεων διαστρέβλωσης .....	49
3.9	Υπολογισμός αξονικών συναρτήσεων στρέβλωσης.....	50
<b>4</b>	<b>ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ.....</b>	<b>51</b>
4.1	Εισαγωγή.....	51
4.2	Αριθμητική εφαρμογή 1-Διατομές ανοιχτού τύπου-Πρότυπη φόρτιση I και II.....	52
4.2.1	Πρότυπη φόρτιση I.....	54
4.2.2	Πρότυπη φόρτιση II.....	69
4.2.3	Πρότυπη φόρτιση I και II .....	73

4.3	Αριθμητική εφαρμογή 2-Διατομές κλειστού τύπου-Πρότυπη φόρτιση I .....	80
4.4	Αριθμητική εφαρμογή 3-Ενισχυμένη ανοιχτή διατομή 500x300.5.13 .....	96
<b>5</b>	<b>ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ - ΣΤΟΧΟΙ ΓΙΑ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΕΡΕΥΝΑ.....</b>	<b>101</b>
5.1	Συμπεράσματα «ανοιχτών» διατομών.....	101
5.2	Συμπεράσματα «κλειστών» διατομών .....	102
<b>6</b>	<b>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....</b>	<b>103</b>

# 1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

## 1.1 Περιγραφή του προβλήματος

Η χρήση ραβδωτών φορέων που έχουν λεπτότοιχες διατομές συναντάται όλο και συχνότερα, τόσο για λόγους λειτουργικούς, όσο και αισθητικούς ή οικονομικούς. Η ανάγκη της αναβάθμισης και βελτιστοποίησης των κατασκευών είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με την ανάγκη για περαιτέρω διερεύνηση της ακριβούς συμπεριφοράς των στοιχείων. Για τον λόγο αυτό καθίσταται απαραίτητη η διασαφήνιση της σημασίας ανώτερων φαινομένων, όπως η στρέβλωση (warping) και η διαστρέβλωση (distortion), αντικείμενο που αποτελεί τον πυρήνα της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

Ως στρέβλωση ορίζεται η απώλεια της επιπεδότητας λόγω της ανομοιόμορφης κατανομής των παραμορφώσεων που αναπτύσσονται στη διατομή. Πρόκειται για ένα φαινόμενο μεγάλης σημασίας που εμφανίζεται κατά κόρον σε κιβωτιοειδείς και πτυχωτούς φορείς

Ως διαστρέβλωση ορίζεται η παραμόρφωση της διατομής εντός του επιπέδου της. Η αλλοίωση του αρχικού της σχήματος είναι ιδιαίτερα εμφανής σε περιπτώσεις λεπτότοιχων διατομών, όπου η εγκάρσια στιβαρότητα των τοιχωμάτων είναι μειωμένη. Το φαινόμενο αυτό αντιμετωπίζεται συνήθως μέσω κατάλληλων διαμορφώσεων (π.χ. μέσω της τοποθέτησης άκαμπτων διαφραγμάτων), ωστόσο πολλές φορές φορές η απόδοση της μεθόδου αυτής δεν αντισταθμίζει το κόστος και τις κατασκευαστικές δυσκολίες με τις οποίες συναρτάται, ενώ συχνά δημιουργεί στον φορέα και πρόσθετη ένταση.

## 1.2 Αντιμετώπιση του προβλήματος

Η ανάλυση των παραπάνω φαινομένων στην παρούσα εργασία πραγματοποιείται μέσω μιας εξελιγμένης μορφής της θεωρίας δοκού, η οποία αίρει τις παραδοχές που υπάρχουν στις ευρέως χρησιμοποιούμενες θεωρίες δοκού Euler-Bernoulli και Timoshenko. Η θεωρία δοκού ανώτερης τάξης η οποία λαμβάνει υπόψιν και φαινόμενα διατμητικής υστέρησης και φαινόμενα διαστρέβλωσης της διατομής είναι σε θέση να αποτυπώσει με μεγάλη ακρίβεια τόσο τις εκτός όσο και τις εντός επιπέδου παραμορφώσεις της.

Ο προτεινόμενος τρόπος ανάλυσης παρουσιάζει τα παρακάτω ιδιαίτερα χαρακτηριστικά:

- α) Παρέχει αποτελέσματα υψηλότερης ακρίβειας, με μικρό υπολογιστικό κόστος, αφού απαιτεί σαφώς λιγότερους βαθμούς ελευθερίας σε σχέση με τις μεθόδους των πεπερασμένων στοιχείων.
- β) Έχει εφαρμογή ακόμα και σε διατομές τυχαίας μορφής.
- γ) Δίνει τη δυνατότητα εύκολης προσομοίωσης των στηρίξεων και τον εξωτερικών φορτίσεων.
- δ) Δεν απαιτεί την κατασκευή πολλαπλών προσομοιομάτων προκειμένου να εκτελέσει παραμετρική ανάλυση
- ε) Δίνει τη δυνατότητα ανεξάρτητης ανάλυσης των επιμέρους δομικών φαινομένων, παρέχοντας έτσι καλύτερη εποπτεία των αποτελεσμάτων.

Στην παρούσα εργασία, για τη μελέτη των τοπικών φαινομένων λεπτότοιχων ράβδων με χρήση της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης, εξετάστηκαν προβλήματα δοκών τυχούσας ομογενούς διατομής και λήφθηκαν υπόψιν τα φαινόμενα στρέβλωσης και διαστρέβλωσης που προκαλούνται από αξονική, διατμητική, καμπτική και στρεπτική φόρτιση. Οι δοκοί υποβλήθηκαν σε αξονική ή διατμητική καταπόνηση και δεσμεύτηκαν με τις πλέον γενικές γραμμικές συνοριακές συνθήκες. Στην ανάλυση διακρίνονται δύο στάδια. Στο πρώτο στάδιο, όπου χρησιμοποιήθηκε η Μέθοδος των Συνοριακών Στοιχείων, πραγματοποιείται ανάλυση σε επίπεδο διατομής η οποία βασίζεται στο σχήμα διαδοχικής ισορροπίας και καθορίζει τις πιθανές μορφές της εντός και εκτός επιπέδου παραμόρφωσης. Στο δεύτερο στάδιο, όπου χρησιμοποιήθηκε η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων, οι προαναφερθείσες μορφές παραμόρφωσης λαμβάνονται υπόψιν κατά την ανάλυση λυγισμού και πολλαπλασιάζονται με ανεξάρτητες παραμέτρους που περιγράφουν την συνεισφορά των τοπικών φαινομένων στην παραμόρφωση της δοκού. Τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την παραπάνω ανάλυση συγκρίνονται με αυτά που προκύπτουν μέσω της χρήσης τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων και μέσω των θεωριών δοκού Timoshenko και Euler-Bernoulli προκειμένου να διερευνηθεί η ακρίβεια της εξεταζόμενης μεθόδου. Στην συνέχεια πραγματοποιείται γραμμική στατική ανάλυση όπου υπολογίζονται η ανομοιόμορφη κατανομή των ορθών και Von-mises τάσεων μέσω τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων και συγκρίνονται με τις αντίστοιχες της Θεωρίας Δοκού Ανώτερης Τάξης (HOBT) .

### 1.3 Διάρθρωση της εργασίας

Το υπόλοιπο της διπλωματικής εργασίας είναι διαρθρωμένο σε τέσσερα κεφάλαια.

- Στο κεφάλαιο 2 γίνεται περιγραφή του εξεταζόμενου προβλήματος, το οποίο είναι βασισμένο στη θεωρία δοκού ανώτερης τάξης. Γίνεται αναλυτική περιγραφή του πεδίου των μετακινήσεων και των τάσεων που διέπουν το πρόβλημα και αξιοποιώντας στοιχεία της θεωρίας ελαστικότητας και της αρχής δυνατών έργων γίνεται υπολογισμός των καμπτικών, στρεπτικών και αξονικών μορφών παραμόρφωσης.
- Στο κεφάλαιο 3 περιγράφεται η διαδικασία που ακολουθείται για την αριθμητική επίλυση του προβλήματος και τον τελικό υπολογισμό των μητρώων στιβαρότητας των στοιχείων καθώς επίσης και των συναρτήσεων στρέβλωσης και διαστρέβλωσης της διατομής.
- Στο κεφάλαιο 4 παρατίθενται οι αριθμητικές εφαρμογές που εξετάστηκαν. Στο πλαίσιο των αριθμητικών εφαρμογών έγινε χρήση της θεωρίας δοκού ανώτερης, της θεωρίας δοκού



Timoshenko, της θεωρίας δοκού Euler-Bernoulli ενώ έγινε και χρήση της μεθόδου των τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων.

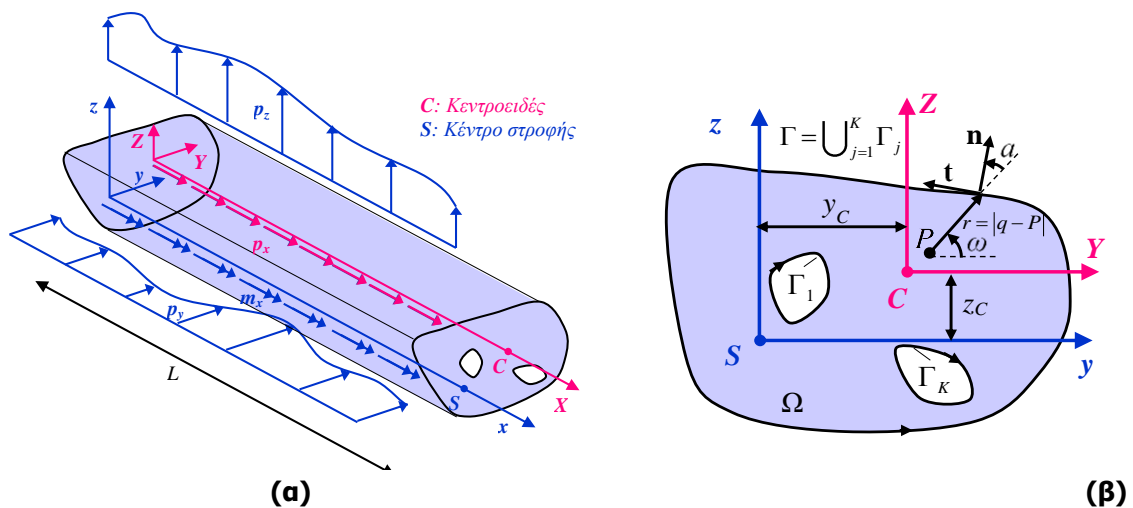
- Στο κεφάλαιο 5 παρατίθεται τα συμπεράσματα που προέκυψαν από τις αριθμητικές εφαρμογές του κεφαλαίου 4.



## 2 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

### 2.1 Συνιστώσες μετακινήσεων

Θεωρείται πρισματική ράβδος μήκους  $L$  (σχήμα 2.9.1-1α), διατομής τυχόντος σχήματος και εμβαδού  $A$ , η οποία παραμένει σταθερή κατά μη διαμήκη διεύθυνση του στοιχείου. Η διατομή αποτελείται από ομογενές υλικό με μέτρο ελαστικότητας  $E$  και λόγο Poisson  $\nu$  και καταλαμβάνει το διδιάστατο πολλαπλά συνεκτικό χωρίο  $\Omega$  που ανήκει στο επίπεδο  $y,z$  του οποίου το σύνορο συμβολίζεται ως  $\Gamma_j$  ( $j = 1, 2, \dots, K$ ). Οι καμπύλες που χαρακτηρίζουν το σύνορο  $\Gamma$  είναι τμηματικά συνεχείς, δηλαδή θεωρείται πως ενδέχεται να έχουν έναν πεπερασμένο αριθμό γωνιών. Στο σχήμα 2.9.1-1β  $CYZ$  είναι το κύριο καμπτικό σύστημα το οποίο διέρχεται από το κεντροειδές της διατομής  $C$ , ενώ με  $y_c, z_c$  συμβολίζονται οι συντεταγμένες του σε σχέση με το σύστημα αξόνων  $Syz$  το οποίο διέρχεται από το κέντρο στροφής της διατομής  $S$ . Ισχύει ότι  $Y = y - y_c$  και  $Z = z - z_c$ .



Σχήμα 0-1: Πρισματική δοκός υπό τυχαία φόρτιση (α), ομογενούς διατομής τυχαίου σχήματος που καταλαμβάνει το διδιάστατο χωρίο  $\Omega$  (β)

Η δοκός μπορεί να στηρίζεται με τις πλέον γενικές γραμμικές συνοριακές συνθήκες και υποβάλλεται σε συνδυασμένη δράση από τυχαία κατανομημένο ή συγκεντρωμένο αξονικό φορτίο  $p_x(X)$  κατά τη διεύθυνση του άξονα  $X$ , εγκάρσιο φορτίο  $p_y(x)$  και  $p_z(x)$  κατά τις διευθύνσεις  $y, z$ , αντίστοιχα, στρεπτική ροπή  $m_x(x)$  κατά τη διεύθυνση  $x$ , καμπτικές ροπές  $m_Y^P(x), m_Z^P(x)$  κατά τις διευθύνσεις  $Y, Z$ , αντίστοιχα, καθώς επίσης και καμπτικές  $m_{\phi_Y^S}(x), m_{\phi_Z^S}(x)$ , πρωτογενείς και δευτερογενείς στρεπτικές  $m_{\phi_x^P}(x), m_{\phi_x^S}(x)$ , και αξονικές ροπές στρέβλωσης, και τις ανώτερης τάξης ροπές  $m_{D_{xx}}^P(x), m_{D_{xx}}^S(x), m_{D_{Yx}}^P(x), m_{D_{Yx}}^S(x), m_{D_{Zx}}^P(x), m_{D_{Zx}}^S(x), m_{D_{xy}}^P(x), m_{D_{xy}}^S(x)$  οι οποίες από εδώ και στο εξής θα αναφέρονται ως ροπές διαστρέβλωσης. Το πεδίο των μετατοπίσεων θεωρείται ότι αποτελείται από δύο τμήματα: το τμήμα των κινήσεων

στερεού σώματος και το τμήμα της φαινομένων λόγω των άκρων (στρέβλωση και διαστρέβλωση). Υπό τα προαναφερθέντα φορτία και θεωρώντας ότι συμβαίνει κάποιο φαινόμενο που προκαλεί αστάθεια στη δοκό, το πεδίο μετατοπίσεων της δοκού ως προς το σύστημα αξόνων  $Syz$  κατά τη στιγμή έναρξης του φαινομένου του λυγισμού δίνεται ως

$$\begin{aligned} \bar{u}(x, y, z) = & \overbrace{u(x)}^{\text{Κίνηση Στερεού Σώματος}} \\ & + \overbrace{\eta_u^P(x)\phi_u^P(y, z) + \eta_Y^P(x)\phi_Y^P(y, z) + \eta_Z^P(x)\phi_Z^P(y, z) + \eta_x^P(x)\phi_x^P(y, z)}^{\text{Πρωτογενής Στρέβλωση}} + \\ & + \overbrace{\eta_u^S(x)\phi_u^S(y, z) + \eta_Y^S(x)\phi_Y^S(y, z) + \eta_Z^S(x)\phi_Z^S(y, z) + \eta_x^S(x)\phi_x^S(y, z)}^{\text{Δευτερογενής Στρέβλωση}} \end{aligned} \quad (1\alpha)$$

$$\begin{aligned} \bar{v}(x, y, z) = & \overbrace{v(x) - z \cdot \theta_x(x)}^{\text{Κίνηση Στερεού Σώματος}} \\ & + \overbrace{z_u^P(x)v_u^P(y, z) + z_Y^P(x)v_Y^P(y, z) + z_Z^P(x)v_Z^P(y, z) + z_x^P(x)v_x^P(y, z)}^{\text{Πρωτογενής Διαστρέβλωση (συνιστώσα κατά τον άξονα y)}} + \\ & + \overbrace{z_u^S(x)v_u^S(y, z) + z_Y^S(x)v_Y^S(y, z) + z_Z^S(x)v_Z^S(y, z) + z_x^S(x)v_x^S(y, z)}^{\text{Δευτερογενής Διαστρέβλωση (συνιστώσα κατά τον άξονα y)}} \end{aligned} \quad (1\beta)$$

$$\begin{aligned} \bar{w}(x, y, z) = & \overbrace{w(x) + y \cdot \theta_x(x)}^{\text{Κίνηση Στερεού Σώματος}} \\ & + \overbrace{z_u^P(x)w_u^P(y, z) + z_Y^P(x)w_Y^P(y, z) + z_Z^P(x)w_Z^P(y, z) + z_x^P(x)w_x^P(y, z)}^{\text{Πρωτογενής Διαστρέβλωση (συνιστώσα κατά τον άξονα z)}} + \\ & + \overbrace{z_u^S(x)w_u^S(y, z) + z_Y^S(x)w_Y^S(y, z) + z_Z^S(x)w_Z^S(y, z) + z_x^S(x)w_x^S(y, z)}^{\text{Πρωτογενής Διαστρέβλωση (συνιστώσα κατά τον άξονα z)}} \end{aligned} \quad (1\gamma)$$

όπου

$$\phi_Y^P(y, z) = -Z \quad (1\delta)$$

$$\phi_Z^P(y, z) = -Y \quad (1\epsilon)$$

και

$$\eta_Y^P = -\theta_Y(x) \quad (1\sigma\tau)$$

$$\eta_Z^P = \theta_Z(x) \quad (1\zeta)$$

όπου  $\bar{u}(x, y, z)$ ,  $\bar{v}(x, y, z)$ ,  $\bar{w}(x, y, z)$  είναι η αξονική και οι εγκάρσιες συνιστώσες μετατόπισης ως προς το σύστημα αξόνων  $Sxyz$ . Ως  $u(x)$  υποδηλώνεται η «μέση» αξονική παραμόρφωση στην διατομή,  $v(x)$ ,  $w(x)$  είναι οι συνιστώσες μετατόπισης του κέντρου διάτμησης κατά τους άξονες  $y, z$  αντίστοιχα, ενώ  $\theta_x(x)$  είναι η γωνία στροφής περί τον διαμήκη άξονα. Ως  $\eta_i^j(x)$  ( $i = u, Y, Z, x$  και  $j = P, S$ ) ορίζονται οι ανεξάρτητες παράμετροι στρέβλωσης, μέσω των οποίων περιγράφεται η ανομοιόμορφη κατανομή της πρωτογενούς ( $j = P$ ) ή δευτερογενούς ( $j = S$ ) στρέβλωσης η οποία οφείλεται σε αξονική φόρτιση ( $i = u$ ) ή σε κάμψη περί τον άξονα  $Y$  ( $i = Y$ ) ή  $Z$  ( $i = Z$ ) ή στρέψη περί τον άξονα  $x$  ( $i = x$ ). Ως  $z_i^j(x)$  ( $i = u, Y, Z, x$  και  $j = P, S$ ) ορίζονται οι ανεξάρτητες παράμετροι στρέβλωσης, μέσω των οποίων περιγράφεται η ανομοιόμορφη κατανομή της πρωτογενούς ( $j = P$ ) ή δευτερογενούς ( $j = S$ ) στρέβλωσης η οποία οφείλεται σε αξονική φόρτιση ( $i = u$ ) ή σε κάμψη περί τον άξονα  $Y$  ( $i = Y$ ) ή  $Z$  ( $i = Z$ ) ή στρέψη περί τον άξονα  $x$  ( $i = x$ ). Οι παράμετροι  $\eta_Y^P(x)$  και  $\eta_Z^P(x)$  σχετίζονται με τις αντίστοιχες καμπτικές στροφές  $\theta_Y(x)$ ,  $\theta_Z(x)$  λόγω κάμψης περί των αξόνων  $Y, Z$ , σύμφωνα με τις εξισώσεις (3στ-ζ). Παρά το γεγονός ότι οι παράμετροι  $\eta_Y^P(x)$  και  $\eta_Z^P(x)$  είναι κατά βάση στροφές στερεού σώματος, αναφέρονται ως ανεξάρτητες παράμετροι στρέβλωσης για λόγους γενικότητας, επειδή αντιστοιχούν στις παραμέτρους  $z_Y^P$  και  $z_Z^P$  που είναι οι πρωτογενείς παράμετροι διαστρέβλωσης και εισάγονται προκειμένου να περιγράψουν την ανομοιόμορφη κατανομή της πρωτογενούς καμπτικής διαστρέβλωσης λόγω κάμψης περί κυρίων αξόνων  $Y, Z$ , αντίστοιχα. Ως  $\phi_i^j(y, z)$  ( $i = u, Y, Z, x$  και  $j = P, S$ ) ορίζονται οι πρωτογενείς ( $j = P$ ) ή δευτερογενείς ( $j = S$ ) ανεξάρτητες συναρτήσεις στρέβλωσης, οι οποίες σχετίζονται με την αξονική φόρτιση ( $i = u$ ) ή διάτμηση λόγω κάμψης περί τους άξονες  $Y$  ( $i = Y$ ) ή  $Z$  ( $i = Z$ ) ή στρέψη περί τον άξονα  $x$  ( $i = x$ ). Ως  $v_i^j(y, z)$  ( $i = u, Y, Z, x$  και  $j = P, S$ ) ορίζονται οι πρωτογενείς ( $j = P$ ) ή δευτερογενείς ( $j = S$ ) συνιστώσες συναρτήσεων διαστρέβλωσης κατά τον άξονα  $y$  που σχετίζονται με την αξονική φόρτιση ( $i = u$ ) ή διάτμηση λόγω κάμψης περί τους άξονες  $Y$  ( $i = Y$ ) ή  $Z$  ( $i = Z$ ) ή στρέψη περί τον άξονα  $x$  ( $i = x$ ). Ως  $w_i^j(y, z)$  ( $i = u, Y, Z, x$  και  $j = P, S$ ) ορίζονται οι πρωτογενείς ( $j = P$ ) ή δευτερογενείς ( $j = S$ ) συνιστώσες των συναρτήσεων διαστρέβλωσης κατά τον άξονα  $z$  που σχετίζονται με την αξονική φόρτιση ( $i = u$ ) ή διάτμηση λόγω κάμψης περί τους άξονες  $Y$  ( $i = Y$ ) ή  $Z$  ( $i = Z$ ) ή στρέψη περί τον άξονα  $x$  ( $i = x$ ).

## 2.2 Συνιστώσες γραμμικών παραμορφώσεων και τάσεων

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (2α)-(2γ) στις σχέσεις της τρισδιάστατης θεωρίας ελαστικότητας

$$\varepsilon_{xx}^{lin} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \quad (2\alpha)$$

$$\varepsilon_{yy}^{lin} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \quad (2\beta)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{zz}^{lin} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \quad (2\gamma)$$

$$\gamma_{xy}^{lin} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \quad (2\delta)$$

$$\gamma_{xz}^{lin} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \quad (2\varepsilon)$$

$$\gamma_{yz}^{lin} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \quad (2\sigma\tau)$$

Λαμβάνουμε τις συνιστώσες του τανυστή της παραμόρφωσης ως

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{lin}_{6 \times 1} = \mathbf{D}^{lin}_{6 \times 2N_{dofs}} \cdot \mathbf{d}_{tot}_{2N_{dofs} \times 1} \quad (3\alpha)$$

όπου

$$\mathbf{d}_{tot}_{2N_{dofs} \times 1} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{N_{dofs} \times 1} \\ \mathbf{d}_{,x}_{N_{dofs} \times 1} \end{bmatrix} \quad (3\beta)$$

και  $\boldsymbol{\varepsilon}^{lin} = [\boldsymbol{\varepsilon}_{xx}^{lin} \ \boldsymbol{\varepsilon}_{yy}^{lin} \ \boldsymbol{\varepsilon}_{zz}^{lin} \ \boldsymbol{\varepsilon}_{xy}^{lin} \ \boldsymbol{\varepsilon}_{xz}^{lin} \ \boldsymbol{\varepsilon}_{yz}^{lin}]^T$  είναι το διάνυσμα των γραμμικών παραμορφώσεων το οποίο έχει γραφτεί ως γινόμενο δύο πινάκων. Ο ένας πίνακας ( $\mathbf{D}^{lin} = \mathbf{D}^{lin}(y, z, \varphi_i^j, v_i^j, w_i^j)$  όπου  $i = u, Y, Z, x$  και  $j = P, S$  - Παράρτημα) περιέχει εκφράσεις που αποτελούν συναρτήσεις των συντεταγμένων της διατομής, των συναρτήσεων στρέβλωσης και των συνιστωσών των συναρτήσεων διαστρέβλωσης, ενώ ο άλλος πίνακας περιέχει το διάνυσμα των μετατοπίσεων  $\mathbf{d}^T = [u(x), v(x), w(x), \theta_x(x), \eta_u^P(x), \eta_Y^P(x), \eta_Z^P(x), \eta_x^P(x), \eta_u^S(x), \eta_Y^S(x), \eta_Z^S(x), \eta_x^S(x), z_u^P(x), z_Y^P(x), z_Z^P(x), z_x^P(x), z_u^S(x), z_Y^S(x), z_Z^S(x), z_x^S(x)]^T$ ) και τις παραγώγους του ως προς τη μεταβλητή  $x$ . Ο συμβολισμός  $(\cdot)_i$  υποδηλώνει παραγωγή ως προς τη μεταβλητή  $i$ . Σύμφωνα με το σχήμα διαδοχικής ισορροπίας, σε κάθε στάδιο ισορροπίας προστίθενται τέσσερις μορφές παραμόρφωσης (μια λόγω αξονικής φόρτισης, μια λόγω κάμψης περί τον άξονα  $Y$ , μια λόγω κάμψης περί τον άξονα  $Z$ , και μια λόγω στρέψης περί τον άξονα  $x$ ), καθεμία εκ των οποίων συμπεριλαμβάνει μία συνάρτηση στρέβλωσης και μια συνάρτηση διαστρέβλωσης. Επομένως, ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας ( $\beta\epsilon$ ) κάθε κόμβου διαμορφώνεται ως εξής

$$N_{dofs} = \begin{matrix} \text{Στερεό Σώμα} \\ \text{Dofs} \end{matrix} 4 + \begin{matrix} \text{Στρέβλωση \&} \\ \text{Διαστρέβλωση} \end{matrix} 2 \cdot \begin{matrix} \text{Μορφές} \\ \text{Παραμόρφωσης} \end{matrix} 4 \cdot N_{\text{στάδια}} \quad (4)$$

όπου  $N_{\text{στάδια}}$  είναι ο αριθμός των διαδοχικών σταδίων ισορροπίας που συμμετέχουν στο μοντέλο. Το πεδίο μετατοπίσεων που συμπεριλαμβάνει μέχρι και δευτερογενείς μορφές παραμόρφωσης, το οποίο εκφράζεται μέσω της σχέσης (1), αντιστοιχεί σε  $N_{\text{στάδια}} = 2$  και  $N_{dofs} = 20$ . Στην περίπτωση όπου λαμβάνονται υπόψιν μέχρι και τριτογενείς μορφές παραμόρφωσης θα είναι  $N_{\text{στάδια}} = 3$  και  $N_{dofs} = 28$  κ.ο.κ.

Θεωρώντας μικρές παραμορφώσεις, εφαρμόζοντας τον τανυστή τάσεων Cauchy, οι συνιστώσες των γραμμικών τάσεων ορίζονται σε όρους γραμμικών παραμορφώσεων ως

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^{lin} \\ \sigma_{yy}^{lin} \\ \sigma_{zz}^{lin} \\ \sigma_{xy}^{lin} \\ \sigma_{xz}^{lin} \\ \sigma_{yz}^{lin} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\mu + \lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2\mu + \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2\mu + \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{lin} \\ \varepsilon_{yy}^{lin} \\ \varepsilon_{zz}^{lin} \\ \gamma_{xy}^{lin} \\ \gamma_{xz}^{lin} \\ \gamma_{yz}^{lin} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

ή

$$\boldsymbol{\sigma}_{6 \times 1}^{lin} = \mathbf{K}_{6 \times 6}^{Material} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{6 \times 1}^{lin} \quad (6)$$

όπου  $\mu = E/(2(1+\nu))$  και  $\lambda = \nu E/((1+\nu)(1-2\nu))$  είναι το μέτρο διάτμησης και ο συντελεστής Lamé του υλικού, αντίστοιχα. Μετά την αντικατάσταση της εξίσωσης (3α) στην εξίσωση (6) το διάνυσμα τάσεων μπορεί να γραφεί ως:

$$\boldsymbol{\sigma}_{6 \times 1}^{lin} = \mathbf{K}_{6 \times 6}^{Material} \cdot \mathbf{D}_{6 \times 2N_{dofs}}^{lin} \cdot \mathbf{d}_{2N_{dofs} \times 1}^{tot} \quad (7)$$

### 2.3 Συνιστώσες μη γραμμικών παραμορφώσεων

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (2α-2γ) στις ακόλουθες μη-γραμμικές (Green) σχέσεις παραμορφώσεων-μετατοπίσεων

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (8\alpha)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (8\beta)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (8\gamma)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \quad (8\delta)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \quad (8\epsilon)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \quad (8\sigma\tau)$$

και λαμβάνοντας υπόψιν πως

$$\left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 \ll \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}, \quad \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 \ll \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}, \quad \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 \ll \frac{\partial \bar{w}}{\partial z}$$

$$\left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \ll \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}, \quad \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) \ll \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}, \quad \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) \ll \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}$$

δηλαδή οι όροι  $\left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2, \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2, \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2, \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right), \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right),$  και  $\left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right),$  αγνοούνται καθώς θεωρούνται πολύ μικρότεροι σε σχέση με τους γραμμικούς και τους υπόλοιπους μη-γραμμικούς όρους. Οι μη γραμμικές τάσεις προκύπτουν ως:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \quad (9)$$

όπου  $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_{xx} \ \varepsilon_{yy} \ \varepsilon_{zz} \ \varepsilon_{xy} \ \varepsilon_{xz} \ \varepsilon_{yz}]^T$  είναι το διάνυσμα μη γραμμικών παραμορφώσεων το οποίο έχει γραφεί ως γινόμενο δύο πινάκων. Ο ένας πίνακας ( $\mathbf{D} = \mathbf{D}(y, z, \varphi_i^j, v_i^j, w_i^j)$  όπου  $i = u, Y, Z, x$  και  $j = P, S$  - Παράρτημα), περιέχει εκφράσεις που αποτελούν συναρτήσεις των συντεταγμένων της διατομής, των συναρτήσεων στρέβλωσης καθώς επίσης και των συνιστωσών των συναρτήσεων διαστρέβλωσης. Ο άλλος πίνακας ( $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{d}, \mathbf{d}_{,x})$  - Παράρτημα), και περιέχει εκφράσεις οι οποίες είναι συναρτήσεις των μετατοπίσεων και τον παραγώγων τους. Ως  $N_{Erows}$  ορίζεται ο αριθμός των σειρών του πίνακα  $\mathbf{E}$ .



## 2.4 Αρχή Δυνατών Έργων

Σύμφωνα με την Αρχή Δυνατών Έργων

$$\delta U = \delta W \quad (10)$$

ή

$$\delta U^{lin} + \delta U^G = \delta W \quad (11)$$

όπου ως  $\delta U$  και  $\delta W$  συμβολίζονται τα δυνατά έργα των εσωτερικών και των εξωτερικών δράσεων της δοκού, αντίστοιχα. Ως  $\delta U^{lin}$  and  $\delta U^G$  συμβολίζεται το γραμμικό και το μη-γραμμικό (το γεωμετρικό μητρώο στιβαρότητας θα προκύψει από αυτό) μέρος του δυνατού έργου των εσωτερικών δράσεων, αντίστοιχα.

## 2.5 Δυνατό έργο του γραμμικού μέρους των εσωτερικών δράσεων

Το δυνατό έργο του γραμμικού μέρους των εσωτερικών δράσεων την ράβδου δίνεται ως:

$$\delta U^{lin} = \int_V \left( \sigma_{xx}^{lin} \delta \varepsilon_{xx}^{lin} + \sigma_{yy}^{lin} \delta \varepsilon_{yy}^{lin} + \sigma_{zz}^{lin} \delta \varepsilon_{zz}^{lin} + \sigma_{xy}^{lin} \delta \gamma_{xy}^{lin} + \sigma_{xz}^{lin} \delta \gamma_{xz}^{lin} + \sigma_{yz}^{lin} \delta \gamma_{yz}^{lin} \right) dV = \int_V \left( \delta \boldsymbol{\varepsilon}^{linT} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{lin} \right) dV \quad (12)$$

όπου  $V$  ο όγκος της ράβδου. Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (3α) και (7) στην εξίσωση (12), η έκφραση του δυνατού έργου του γραμμικού μέρους των εσωτερικών δυνάμεων μπορεί να γραφεί ως:

$$\delta U^{lin} = \int_0^L \delta \mathbf{d}_{tot}^T \cdot \mathbf{K}_{lin}^{gc} \cdot \mathbf{d}_{tot} dx \quad (13a)$$

όπου

$$\mathbf{K}_{lin}^{gc} = \int_{\Omega} \mathbf{D}^{linT} \cdot \mathbf{K}_{Material} \cdot \mathbf{D}^{lin} d\Omega \quad (13b)$$

Ο πίνακας  $\mathbf{K}_{lin}^{gc}$  περιέχει τις γραμμικές γεωμετρικές σταθερές της διατομής της ράβδου.

## 2.6 Δυνατό έργο του μη-γραμμικού μέρους των εσωτερικών δράσεων

Το δυνατό έργο του μη-γραμμικού μέρους των εσωτερικών δράσεων την ράβδου που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του γεωμετρικού μητρώου στιβαρότητας δίνεται ως εξής:

$$\delta U^G = \int_V \left( \sigma_{xx}^{lin} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}^{lin} \delta \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz}^{lin} \delta \varepsilon_{zz} + \sigma_{xy}^{lin} \delta \gamma_{xy} + \sigma_{xz}^{lin} \delta \gamma_{xz} + \sigma_{yz}^{lin} \delta \gamma_{yz} \right) dV = \int_V \left( \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}^{lin} \right) dV \quad (14)$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (9) και (7) στην εξίσωση (14) η έκφραση του δυνατού έργου του μη-γραμμικού μέρους των εσωτερικών δράσεων παίρνει τη μορφή

$$\delta U^G = \int_0^L \delta \mathbf{E}^T \cdot \mathbf{K}_G^{gc} \cdot \mathbf{d}_{tot}^0 dx = \int_0^L \delta \mathbf{d}_{tot}^T \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{d}_{tot}} \right)^T \cdot \mathbf{K}_G^{gc} \cdot \mathbf{d}_{tot}^0 dx \quad (15\alpha)$$

όπου

$$\delta \mathbf{E}^T = \left( \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{d}} \cdot \delta \mathbf{d} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{d}_{,x}} \cdot \delta \mathbf{d}_{,x} \right)^T = \left( \delta \mathbf{d}^T \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{d}} \right)^T + \delta \mathbf{d}_{,x}^T \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{d}_{,x}} \right)^T \right) = \delta \mathbf{d}_{tot}^T \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{d}_{tot}} \right)^T \quad (15\beta)$$

$$\mathbf{K}_G^{gc} = \int_{\Omega} \mathbf{D}^T \cdot \mathbf{K}_{Material} \cdot \mathbf{D}^{lin} d\Omega \quad (15\gamma)$$

$\mathbf{K}_{lin}^{gc}$  είναι ένα πίνακας που περιέχει τις μη-γραμμικές γεωμετρικές σταθερές της διατομής της δοκού. Οι όροι των γραμμικών τάσεων της εξίσωσης 14 θεωρούνται αμετάβλητοι ως προς τα στοιχεία των μετακινήσεων του διανύσματος  $\mathbf{d}_{tot}$ .

## 2.7 Δυνατό έργο των εξωτερικών δράσεων

Το δυνατό έργο των εσωτερικών δράσεων την ράβδου δίνεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
\delta W &= \int_F (t_x \delta \bar{u} + t_y \delta \bar{v} + t_z \delta \bar{w}) dF = \int_F \left( \delta \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{t} \right) dF = \int_F \left( \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{d}} \delta \mathbf{d} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{d}_{,x}} \delta \mathbf{d}_{,x} \right)^T \cdot \mathbf{t} \right) dF \\
&= \int_F \left( \delta \mathbf{d}_{tot}^T \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{d}_{tot}} \right)^T \cdot \mathbf{t} \right) dF
\end{aligned} \tag{16}$$

όπου  $\mathbf{t}$  είναι το διάνυσμα που εφαρμόζεται στην παράπλευρη επιφάνεια της δοκού, συμπεριλαμβανομένων και των ακραίων διατομών, που ορίζονται ως  $F$ . Μετά από μερικές πράξεις το δυνατό έργο των εξωτερικών δράσεων μπορεί να γραφεί ως

$$\begin{aligned}
\delta W &= \int_0^L \left( \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} \left( \delta \mathbf{d}_{tot}^T \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{d}_{tot}} \right)^T \cdot \mathbf{t}_j \right) ds \right) dx \\
&+ \int_{\Omega^0} \left( \delta \mathbf{d}_{tot}^T \Big|_{x=0} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{d}_{tot}} \right)^T \Big|_{x=0} \cdot \mathbf{t} \Big|_{x=0} \right) d\Omega^0 + \int_{\Omega^L} \left( \delta \mathbf{d}_{tot}^T \Big|_{x=L} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{d}_{tot}} \right)^T \Big|_{x=L} \cdot \mathbf{t} \Big|_{x=L} \right) d\Omega^L
\end{aligned} \tag{17}$$

## 2.8 Καμπτικές και στρεπτικές μορφές

Ο υπολογισμός των συναρτήσεων στρέβλωσης  $\phi_i^j(y, z)$  ( $i = Y, Z, x$  και  $j = P, S, etc.$ ) και των συνιστωσών των συναρτήσεων διαστρέβλωσης  $v_i^j(y, z)$  και  $w_i^j(y, z)$  ( $i = Y, Z, x$  και  $j = P, S$ ) για καμπτικές ( $i = Y, Z$ ) και στρεπτικές ( $i = x$ ) μορφές, οι οποίες αναφέρθηκαν στην παράγραφο 3.1, επιτυγχάνεται με την επίλυση του αντίστοιχου προβλήματος συνοριακών τιμών, το οποίο μορφώνεται αξιοποιώντας τις εξισώσεις τοπικής ισορροπίας και τις αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες βάσει που προκύπτουν βάσει του σχήματος διαδοχικής ισορροπίας, όπως παρουσιάζεται στην αναφορά [23]. Το προαναφερθέν πρόβλημα επιλύεται μέσω της μεθόδου των συνοριακών στοιχείων. Πιο συγκεκριμένα, προκειμένου να υπολογιστούν οι εμπλεκόμενες συναρτήσεις στρέβλωσης και διαστρέβλωσης, η τοπική ισορροπία ικανοποιείται διαδοχικά μέσω της εισαγωγής επιπρόσθετων συναρτήσεων στρέβλωσης και διαστρέβλωσης, οι οποίες εξισορροπούν τα μη-εξισορροπημένα υπόλοιπα τάσεων [23]. Η υπολογιστική διαδικασία που σχετίζεται με την αξονική μορφή περιγράφεται στην ακόλουθη παράγραφο.

## 2.9 Αξονική μορφή

### 2.9.1 Διδιάστατο πρόβλημα συνοριακών τιμών

Ο υπολογισμός των συναρτήσεων στρέβλωσης  $\phi_u^j(y, z)$  ( $j = P, S, etc.$ ) και των συνιστωσών των συναρτήσεων διαστρέβλωσης  $v_u^j(y, z)$  και  $w_u^j(y, z)$  ( $j = P, S$ ) τις αξονικές μορφές, οι οποίες χρησιμοποιήθηκαν στην παράγραφο 3.1, επιτυγχάνεται με την επίλυση των αντίστοιχων προβλημάτων συνοριακών τιμών, το οποίο μορφώνεται αξιοποιώντας τις εξισώσεις τοπικής ισορροπίας και τις αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες βάσει που προκύπτουν βάσει του σχήματος διαδοχικής ισορροπίας, όπως περιγράφεται παρακάτω.

Βάσει του [23] για τον υπολογισμό των συναρτήσεων στρέβλωσης και διαστρέβλωσης προκύπτει από τις τοπικές εξισώσεις ισορροπίας το ακόλουθο πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\nabla^2 V + \frac{1+\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}} \left[ (\nabla \cdot \mathbf{U})_{,y} + \Phi_{,y} \right] = c^2 (-V) \quad (18\alpha)$$

$$\nabla^2 W + \frac{1+\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}} \left[ (\nabla \cdot \mathbf{U})_{,z} + \Phi_{,z} \right] = c^2 (-W) \quad (18\beta)$$

$$\mu (V_{,n} + V_{,y} n_y + W_{,y} n_z) + \lambda (V_{,y} + W_{,z}) n_y = -\lambda \Phi n_y \quad (18\gamma)$$

$$\mu (W_{,n} + V_{,z} n_y + W_{,z} n_z) + \lambda (V_{,y} + W_{,z}) n_z = -\lambda \Phi n_z \quad (18\delta)$$

$$\nabla^2 \Phi = c^2 \left( -\frac{2}{1-\bar{\nu}} \Phi - \frac{1+\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}} \nabla \cdot \mathbf{U}_{2 \times 1} \right) \quad (18\epsilon)$$

$$\Phi_{,n} = c^2 (-V n_y - W n_z) \quad (18\sigma\tau)$$

όπου  $\Phi = \Phi(y, z)$  είναι μία συνάρτηση στρέβλωσης,  $V = V(y, z)$ ,  $W = W(y, z)$  είναι οι συνιστώσες της εντός επιπέδου μορφής  $\mathbf{U} = \mathbf{U}(y, z)$  κατά τους άξονες  $y, z$ , αντίστοιχα,  $c$  είναι μία σταθερά που σχετίζεται με το μήκος διάδοσης των τοπικών φαινομένων,  $n_y, n_z$  είναι τα συνημίτονα κατεύθυνσης του εξωτερικού κάθετου διανύσματος  $\mathbf{n}$  της διατομής ως προς τους άξονες  $y, z$  και  $\bar{\nu} = \nu/(1-\nu)$  είναι το ενεργό μέτρο Poisson. Ως  $\nabla = ( )_{,y} \mathbf{i}_y + ( )_{,z} \mathbf{i}_z$  ορίζεται ο διδιάστατος διαφορικός τελεστής των μερικών παραγώγων μιας συνάρτησης. Υιοθετώντας μια κατάλληλη διακριτοποίηση της διατομής, το συζευγμένο πρόβλημα συνοριακών τιμών της εξίσωσης (18) οδηγεί στη μόρφωση ενός γενικευμένου προβλήματος ιδιοτιμών της μορφής

$$\mathbf{A}_{N \times N} \mathbf{W}_i^{dis} = c_i^2 \mathbf{B}_{N \times N} \mathbf{W}_i^{dis} \quad (19)$$

όπου  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  είναι γνωστοί πίνακες συντελεστών οι οποίοι εξαρτώνται από την διακριτοποίηση, ενώ  $c^2$ ,  $\mathbf{W}_i^{dis} = [\Phi_i^{dis} \quad \mathbf{U}_i^{dis}]^T$  είναι γενικευμένη ιδιοτιμή και ιδιοδιανύσμα των  $\mathbf{A}$  και  $\mathbf{B}$  αντίστοιχα. Η λύση του προβλήματος ιδιοτιμών (εξίσωση 19) παράγει ένα σύνολο  $N$  ιδιοτιμών  $c_i^2$  μαζί με τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα  $\mathbf{W}_i^{dis}$  ( $i = 1, \dots, N$ ) τα οποία αποτελούν μια βάση των μορφών παραμορφωσης της διατομής οι οποίες είναι κατάλληλες για την ανάλυση.

## 2.9.2 Σχήμα διαδοχικής ισορροπίας

Η ανάλυση που παρουσιάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο παρέχει ένα σύνολο εκμεταλλεύσιμων μορφών παραμόρφωσης, ωστόσο παρουσιάζει το ακόλουθο μειονέκτημα. Το αποκτηθέν σύνολο μορφών εμπεριέχει αξονικές, καμπτικές και στρεπτικές μορφές κατά σειρά σημαντικότητας, χωρίς ωστόσο κάποια διάκριση μεταξύ τους. Ως εκ τούτου, μια προσπάθεια διατήρησης του αριθμού των αγνώστων όσο το δυνατόν χαμηλότερα θα απαιτούσε τη διερεύνηση του αναλυτή, προκειμένου να εντοπίσει τις σχετικά σημαντικές μορφές (δηλαδή αυτές με τις μικρότερες ιδιοτιμές). Εναλλακτικά, στην περίπτωση όπου είναι επιθυμητή μία αυτοματοποιημένη επιλογή μορφών, ένας σχετικά μεγάλος προκαθορισμένος αριθμός μορφών θα πρέπει να χρησιμοποιείται για να διασφαλιστεί ότι όλοι οι μηχανισμοί (αξονικοί, καμπτικοί, στρεπτικοί) αναπαρίστανται ορθά από τις χρησιμοποιούμενες μορφές.

Επομένως, όπως παρουσιάζεται στο [23], η παραπάνω αδυναμία παρακάμπτεται μέσω της εκμεταλλευσης του σχήματος διαδοχικής ισορροπίας. Το σκεπτικό αυτό υιοθετείται στο παρόν κεφάλαιο προκειμένου να γίνει ο υπολογισμός των αξονικών μορφών. Πιο συγκεκριμένα, στην τελευταία ανάλυση, προκειμένου να υπολογιστούν οι συναρτήσεις στρέβλωσης και διαστρέβλωσης, γίνεται μια προσπάθεια ακολουθιακής ικανοποίησης της ισορροπίας μέσω της εισαγωγής επιπρόσθετων συναρτήσεων στρέβλωσης και διαστρέβλωσης, προκειμένου να εξισοροπηθούν τα μη-εξισοροπημένα υπόλοιπα τάσεων. Υπό το πρίσμα αυτό η  $i$ -οστή μορφή παραμόρφωσης  $\mathbf{W}_i$  αναλύεται ως

$$\mathbf{W}_i = \mathbf{w}_{i-1} + \mathbf{w}_i \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \mathbf{U}_i \end{Bmatrix}_{2 \times 1} = \begin{Bmatrix} \varphi_{i-1} \\ \mathbf{u}_{i-1} \end{Bmatrix}_{2 \times 1} + \begin{Bmatrix} \varphi_i \\ \mathbf{u}_i \end{Bmatrix}_{2 \times 1} \quad (20)$$

Θεωρώντας πως  $\mathbf{W}_{i-1}$  είναι μια ήδη προσδιορισμένη συνιστώσα της αξονικής μορφής, για τον υπολογισμό της  $i$ -οστή αξονικής μορφής διαστρέβλωσης οι εξισώσεις (18α-δ) γράφονται ως

$$\nabla^2 \tilde{V}_i + \frac{1+\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}} \left( \nabla \cdot \tilde{\mathbf{U}}_i \right)_{,y} = -\frac{1}{\mu} (b_y)_{i-1} \quad (21\alpha)$$

$$(t_y)_i = -\lambda \varphi_{i-1} n_y \quad (21\beta)$$

$$\nabla^2 \tilde{W}_i + \frac{1+\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}} \left( \nabla \cdot \tilde{\mathbf{U}}_i \right)_{,z} = -\frac{1}{\mu} (b_z)_{i-1} \quad (21\gamma)$$

$$(t_z)_i = -\lambda \varphi_{i-1} n_z \quad (21\delta)$$

όπου

$$(b_y)_{i-1} = \mu \left( \frac{1+\bar{v}}{1-\bar{v}} \varphi_{i-1,y} + v_{i-1} \right) \quad (21\epsilon)$$

$$(b_z)_{i-1} = \mu \left( \frac{1+\bar{v}}{1-\bar{v}} \varphi_{i-1,z} + w_{i-1} \right) \quad (21\sigma\tau)$$

$$(t_y)_i = \mu (\tilde{V}_{i,n} + \tilde{V}_{i,y} n_y + \tilde{W}_{i,y} n_z) + \lambda (\tilde{V}_{i,y} + \tilde{W}_{i,z}) n_y \quad (21\zeta)$$

$$(t_z)_i = \mu (\tilde{W}_{i,n} + \tilde{V}_{i,z} n_y + \tilde{W}_{i,z} n_z) + \lambda (\tilde{V}_{i,y} + \tilde{W}_{i,z}) n_z \quad (21\eta)$$

Ενώ για τον υπολογισμό της  $i$ -οστής μορφής στρέβλωσης οι εξισώσεις (18e-f) γράφονται ως

$$\nabla^2 \tilde{\Phi}_i = f_i \quad (22\alpha)$$

$$\tilde{\Phi}_{i,n} = -\tilde{V}_i n_y - \tilde{W}_i n_z \quad (22\beta)$$

όπου

$$f_i = -\frac{2}{1-\bar{v}} \varphi_{i-1} - \frac{1+\bar{v}}{1-\bar{v}} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{U}}_{i,2 \times 1} \quad (22\gamma)$$

Και έχοντας υπόψιν ότι έχει τεθεί

$$\mathbf{W}_i = c_i^2 \tilde{\mathbf{W}}_i \quad (23)$$

Στο σημείο αυτό υπογραμμίζεται πως οι όροι του  $\mathbf{W}_i$  στο δεξί μέρος των εξισώσεων (21,22) θεωρούνται υπολειπόμενοι όροι και έχουν παραληφθεί προκειμένου να υπάρχει ισορροπία στο επόμενο στάδιο  $i + 1$ . Το παραπάνω πρόβλημα μπορεί να επιλυθεί επαναληπτικά μέχρις ότου το σφάλμα που προκύπτει από τους υπολοιπούμενους όρους να ελαχιστοποιηθεί. Σημειώνεται επίσης πως η  $i$ -οστή μορφή  $\tilde{\mathbf{w}}_i$  η οποία υπολογίζεται μέσω των εξισώσεων (21,22) εκτιμάται ως προς τη σταθερά  $c_i^2$  η οποία υπολογίζεται έτσι ώστε να ικανοποιείται η ακόλουθη συνθήκη ορθογωνοποίησης

$$\int_{\Omega} \varphi_{i-1} \varphi_i d\Omega = 0 \quad (24)$$

Η οποία καθιστά τις συναρτήσεις στρέβλωσης δυνατές να παράγουν μη-συζευγμένες κανονικές κατανομές τάσης. Κάνοντας χρήση της ακόλουθη εξίσωσης

$$c_i^2 \tilde{\Phi}_i = \Phi_i \Leftrightarrow c_i^2 \tilde{\Phi}_i = \varphi_{i-1} + \varphi_i \quad (25)$$

και πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της επί  $\varphi_{i-1}$ , ολοκληρώνοντας καταλλήλως πάνω στην επιφάνεια της διατομής και λαμβάνοντας υπόψιν την εξίσωση (24), λαμβάνεται η ακόλουθη σχέση για τον υπολογισμό της σταθεράς  $c_i^2$

$$c_i^2 = \frac{\int_{\Omega} \varphi_{i-1} \varphi_{i-1} d\Omega}{\int_{\Omega} \varphi_{i-1} \tilde{\Phi}_i d\Omega} \quad (26)$$

Συνοψίζοντας, σύμφωνα με τις εξισώσεις (21,22), ο υπολογισμός της  $i$ -οστής αξονικής μορφής στρέβλωσης και διαστρέβλωσης αποτελείται από τρία στάδια, θεωρώντας πως  $\mathbf{W}_{i-1}$  είναι μια ήδη προσδιορισμένη συνιστώσα της αξονικής μορφής. Στο πρώτο στάδιο επιλύεται το πρόβλημα συνοριακών τιμών για τον υπολογισμό της  $i$ -οστής αξονικής μορφής διαστρέβλωσης προκειμένου να γίνει εκτίμηση του  $\tilde{\mathbf{U}}_i$ . Στο δεύτερο βήμα, γνωρίζοντας τις τιμές των  $\varphi_{i-1}$  και  $\tilde{\mathbf{U}}_i$ , επιλύεται το πρόβλημα συνοριακών τιμών για τον υπολογισμό της  $i$ -οστής αξονικής μορφής στρέβλωσης (εξίσωση 22) και έτσι υπολογίζεται η συνάρτηση  $\tilde{\Phi}_i$ . Τέλος, στο τρίτο στάδιο, εφαρμόζονται οι εξισώσεις (23), (26),(20) κατά τη σειρά αυτή προκειμένου να υπολογιστούν τα  $c_i^2$ ,  $\mathbf{W}_i$  και  $\mathbf{w}_i$ , αντίστοιχα. Στο αντίστοιχο πρόβλημα που παρουσιάζεται στην αναφορά [23] για τον υπολογισμό της  $i$ -οστής καμπτικής και στρεπτικής μορφής στρέβλωσης και διαστρέβλωσης, τα πρώτα δύο στάδια εκτελούνται με αντίστροφη σειρά απ' ότι στην παρούσα εργασία και ως αποτέλεσμα οι αντίστοιχες εξισώσεις διαφέρουν δεόντως. Αυτό συμβαίνει επειδή στην αναφορά [23], για  $i=1$  ισχύει  $\mathbf{w}_0 = [0 \ 0 \ 1]^T$  για κάμψη περί τον άξονα  $y$ ,  $\mathbf{w}_0 = [0 \ 1 \ 0]^T$  για κάμψη περί τον άξονα  $z$ , και  $\mathbf{w}_0 = [0 \ -y \ z]^T$  για στρέψη περί τον άξονα  $x$ , δηλαδή το διάνυσμα  $\mathbf{W}_0$  αντιστοιχεί σε διαστρεβλωτική μορφή στερεού σώματος. Έτσι το επόμενο βήμα είναι ο υπολογισμός της πρώτης μορφής στρέβλωσης. Αντίθετα, για το αξονικό πρόβλημα για  $i=1$  ισχύει  $\mathbf{w}_0 = [1 \ 0 \ 0]^T$ , δηλαδή αυτό το διάνυσμα  $\mathbf{W}_0$  αντιστοιχεί σε στρεβλωτική μορφή στερεού σώματος. Έτσι το επόμενο βήμα είναι ο υπολογισμός της αξονικής μορφής διαστρέβλωσης.

Όπως παρουσιάστηκε στην παράγραφο 3.1, όλες οι υπολογισμένες συναρτήσεις στρέβλωσης και διαστρέβλωσης πολλαπλασιάζονται με ανεξάρτητες παραμέτρους που λαμβάνουν υπόψιν

τους την ένταση του φαινομένου κατά μήκος της ράβδου, επόμενως οι συναρτήσεις περιγράφουν βασικά το μοτίβο της παραμόρφωσης της διατομής. Συνεπώς η μέγιστη τιμή τους είναι άνευ σημασίας ενώ δεν είναι απαραίτητη η διατήρηση της σύζευξης των μορφών διαστρέβλωσης. Στην παρούσα μελέτη, σε μια προσπάθεια μείωσης των συζεύξεων της καθολικής ανάλυσης, μετά τον υπολογισμό του διανύσματος  $\mathbf{u}_i$  και πριν τον υπολογισμό του διανύσματος  $\mathbf{u}_{i+1}$  προστείνεται μία επιπλέον διαδικασία ορθογωνοποίησης, προκειμένου τα  $\varphi_i$  και  $\mathbf{u}_i$  για τον μηχανισμό της αξονικής να είναι ορθογώνια στα  $\varphi_j$  και  $\mathbf{u}_j$ , αντίστοιχα, για  $1 \leq j \leq i-1$ . Η ορθογωνοποίηση αυτή αποτελείται από τον υπολογισμό των κατάλληλων σταθερών  $\alpha_k, \beta_k$  έτσι ώστε

$$\varphi_i = \hat{\varphi}_i + \alpha_k \varphi_j \quad \kappa = \sum_{n=1}^{i-2} n + j \quad \forall j \in [1, i-1] \quad (27\alpha, \beta)$$

$$\int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j d\Omega = 0 \quad (27\gamma)$$

και

$$\mathbf{u}_i = \hat{\mathbf{u}}_i + \beta_k \mathbf{u}_j \quad \kappa = \sum_{n=1}^{i-2} n + j \quad \forall j \in [1, i-1] \quad (28\alpha, \beta)$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{u}_i \mathbf{u}_j d\Omega = 0 \quad (28\gamma)$$

όπου ο συμβολισμός  $\hat{\varphi}_i$  και  $\hat{\mathbf{u}}_i$  έχει υιοθετηθεί προκειμένου να δηλώσει τις μορφές πριν την ορθογωνοποίηση τους. Επομένως, πολλαπλασιάζοντας τις εξισώσεις (27 $\alpha$ ) και (27 $\beta$ ) επί  $\varphi_j$  και  $\mathbf{u}_j$ , αντίστοιχα, ολοκληρώνοντας καταλλήλως πάνω στην επιφάνεια και λαμβάνοντας υπόψιν τις εξισώσεις (27 $\alpha$ ) και (27 $\beta$ ), οι σταθερές  $\alpha_k, \beta_k$  υπολογίζονται ως

$$\alpha_k = - \frac{\int_{\Omega} \hat{\varphi}_i \varphi_j d\Omega}{\int_{\Omega} \varphi_j \varphi_j d\Omega} \quad (29)$$

$$\beta_k = - \frac{\int_{\Omega} \hat{\mathbf{u}}_i \mathbf{u}_j d\Omega}{\int_{\Omega} \mathbf{u}_j \mathbf{u}_j d\Omega} \quad (30)$$



Αξίζει να σημειωθεί πως αυτή η διαδικασία ορθογωνοποίησης που παρουσιάζεται εδώ (εξ. (27-30)) υιοθετείται επίσης και για καμπτικές και στρεπτικές μορφές στρέβλωσης και διαστρέβλωσης και διαφέρει από αυτήν που παρουσιάζεται στην αναφορά [23] για τους μηχανισμούς εκείνους.

### 2.9.3 Ύπαρξη λύσης

Το φυσικό νόημα των μαθηματικών συνθηκών οι οποίες πρέπει να ικανοποιούνται για να υπάρχει λύση στο πρόβλημα της εξίσωσης (18) είναι η εξάλειψη του δυνατού έργου των στρεβλωτικών και διαστρεβλωτικών τάσεων πάνω στις παραμορφώσεις του στερεού σώματος.

$$\delta U_{Distortion} = 0 \quad (31\alpha)$$

$$\delta U_{warping} = 0 \quad (31\beta)$$

Σύμφωνα με την αναφορά [23] το κομμάτι των κυρίων τάσεων που αφορά τη διαστρέβλωση είναι

$$\sigma_{xx}^d = \lambda a_{,x} (V_{,y} + W_{,z}) \quad (32\alpha)$$

$$\sigma_{yy}^d = a_{,x} [(2\mu + \lambda)V_{,y} + \lambda W_{,z}] \quad (32\beta)$$

$$\sigma_{zz}^d = a_{,x} [\lambda V_{,y} + (2\mu + \lambda)W_{,z}] \quad (32\gamma)$$

$$\sigma_{xy}^d = \mu a_{,xx} V \quad (32\delta)$$

$$\sigma_{xz}^d = \mu a_{,xx} W \quad (32\epsilon)$$

$$\sigma_{yz}^d = \mu a_{,x} (W_{,y} + V_{,z}) \quad (32\sigma)$$

όπου η παράμετρος  $a = a(x)$  δηλώνει την «ένταση» της παραμόρφωσης κατά μήκος της ράβδου, ενώ το κομμάτι το τμήμα των τάσεων που αφορά τη στρέβλωση είναι

$$\sigma_{xx}^d = \lambda a_{,x} (V_{,y} + W_{,z}) \quad (33\alpha)$$

$$\sigma_{xx}^w = (2\mu + \lambda) a_{,x} \Phi \quad (33\beta)$$

$$\sigma_{zz}^w = \lambda a_{,x} \Phi \quad (33\gamma)$$

$$\sigma_{xy}^w = \lambda a \Phi_{,y} \quad (33\delta)$$

$$\sigma_{xz}^w = \lambda a \Phi_{,z} \quad (33\epsilon)$$

$$\sigma_{yz}^w = 0 \quad (33\sigma\tau)$$

και το τμήμα των παραμορφώσεων του στερεού σώματος είναι

$$\epsilon_{xx}^{RB} = u_{,x} \quad (34\alpha)$$

$$\epsilon_{yy}^{RB} = 0 \quad (34\beta)$$

$$\epsilon_{zz}^{RB} = 0 \quad (34\gamma)$$

$$\gamma_{xy}^{RB} = v_{,x} - z\theta_{x,x} \quad (34\delta)$$

$$\gamma_{xz}^{RB} = w_{,x} + y\theta_{x,x} \quad (34\epsilon)$$

$$\gamma_{yz}^{RB} = 0 \quad (34\sigma\tau)$$

Το δυνατό έργο των τάσεων διαστρέβλωσης έναντι του δυνατού έργου των ανηγμένων παραμορφώσεων του στερεού σώματος είναι:

$$\delta U_{Distortion} = \int_V (\sigma_{xx}^d \delta \epsilon_{xx}^{RB} + \sigma_{yy}^d \delta \epsilon_{yy}^{RB} + \sigma_{zz}^d \delta \epsilon_{zz}^{RB} + \sigma_{xy}^d \delta \gamma_{xy}^{RB} + \sigma_{xz}^d \delta \gamma_{xz}^{RB} + \sigma_{yz}^d \delta \gamma_{yz}^{RB}) dV \quad (35)$$

ενώ μετά από αντικατάσταση στις εξισώσεις (32) και (34) προκύπτει ότι

$$\delta U_{Distortion} = \int_V [\lambda a_{,x} (V_{,y} + W_{,z}) \delta u_{,x} + 0 + 0 + \mu a_{,xx} V (\delta v_{,x} - z \delta \theta_{x,x}) + \mu a_{,xx} W (\delta w_{,x} + y \delta \theta_{x,x}) + 0] dV \quad (36)$$

συνδυάζοντας τις εξισώσεις (31α) και (36) προκύπτει ότι

$$\delta U_{Distortion} = \int_V (\sigma_{xx}^d \delta \epsilon_{xx}^{RB} + \sigma_{yy}^d \delta \epsilon_{yy}^{RB} + \sigma_{zz}^d \delta \epsilon_{zz}^{RB} + \sigma_{xy}^d \delta \gamma_{xy}^{RB} + \sigma_{xz}^d \delta \gamma_{xz}^{RB} + \sigma_{yz}^d \delta \gamma_{yz}^{RB}) dV \quad (37)$$

Και θεωρώντας πως  $a_{,x}, a_{,xx}, \mu, \lambda \neq 0$  λαμβάνεται ότι

$$\int_{\Omega} (V_{,y} + W_{,z}) d\Omega = 0 \quad (38\alpha)$$

$$\int_{\Omega} V d\Omega = 0 \quad (38\beta)$$

$$\int_{\Omega} W d\Omega = 0 \quad (38\gamma)$$

$$\int_{\Omega} (-Vz + yW) d\Omega = 0 \quad (38\delta)$$

Το δυνατό έργο των διαστρελβτικών τάσεων πάνω στις δυνατές παραμορφώσεις του στερεού σώματος είναι:

$$\delta U_{Warping} = \int_V (\sigma_{xx}^w \delta \varepsilon_{xx}^{RB} + \sigma_{yy}^w \delta \varepsilon_{yy}^{RB} + \sigma_{zz}^w \delta \varepsilon_{zz}^{RB} + \sigma_{xy}^w \delta \gamma_{xy}^{RB} + \sigma_{xz}^w \delta \gamma_{xz}^{RB} + \sigma_{yz}^w \delta \gamma_{yz}^{RB}) dV \quad (39)$$

ενώ μετά από αντικατάσταση των εξισώσεων (33) και (34) προκύπτει ότι

$$\delta U_{Warping} = \int_V [(2\mu + \lambda) a_{,x} \Phi \delta u_{,x} + 0 + 0 + \lambda a \Phi_{,y} (\delta v_{,x} - z \delta \theta_{,xx}) + \lambda a \Phi_{,z} (\delta w_{,x} + y \delta \theta_{,xx}) + 0] dV \quad (40)$$

συνδυάζοντας τις εξισώσεις (31β) και (40) προκύπτει ότι

$$\int_V [(2\mu + \lambda) a_{,x} \Phi \delta u_{,x} + \lambda a \Phi_{,y} \delta v_{,x} + \lambda a \Phi_{,z} \delta w_{,x} + \lambda a (-z \Phi_{,y} + y \Phi_{,z}) \delta \theta_{,xx}] dV = 0 \quad (41)$$

Και υποθέτοντας πως  $a_{,x}, a_{,xx}, \mu, \lambda \neq 0$  προκύπτει ότι

$$\int_{\Omega} \Phi d\Omega = 0 \quad (42\alpha)$$

$$\int_{\Omega} \Phi_{,y} d\Omega = 0 \quad (42\beta)$$

$$\int_{\Omega} \Phi_{,z} d\Omega = 0 \quad (42\gamma)$$

$$\int_{\Omega} (-z\Phi_{,y} + y\Phi_{,z}) d\Omega = 0 \quad (42\delta)$$

Οι εξισώσεις (38) και (40) αποτελούν τις συνθήκες ύπαρξης λύσης του προβλήματος συνοριακών τιμών της εξίσωσης (18). Προκειμένου να εφαρμοστούν οι παραπάνω συνθήκες γίνονται οι παρακάτω θεωρήσεις αναφορικά με τις συναρτήσεις στρέβλωσης και διαστρέβλωσης

$$\Phi = \widehat{\Phi} + C^{\Phi} + C^{\Phi,y} \cdot Y + C^{\Phi,z} \cdot Z + C^{\Phi,x} \cdot \left( \varphi_x^P - \frac{Y}{A} \int_{\Omega} \varphi_{x,y}^P d\Omega - \frac{Z}{A} \int_{\Omega} \varphi_{x,z}^P d\Omega \right) \quad (43\alpha)$$

$$V = \widehat{V} + C^V - C^t \cdot Z + C^u \cdot Y \quad (43\beta)$$

$$W = \widehat{W} + C^W + C^t \cdot Y + C^u \cdot Z \quad (43\gamma)$$

όπου  $\widehat{\Phi}$ ,  $\widehat{V}$ ,  $\widehat{W}$  είναι η συνάρτηση στρέβλωσης και τα στοιχεία της συνάρτησης διαστρέβλωσης πριν την ικανοποίηση των εξισώσεων (38), (42), αντίστοιχα, ενώ  $C^{\Phi}$ ,  $C^{\Phi,y}$ ,  $C^{\Phi,z}$ ,  $C^{\Phi,x}$ ,  $C^V$ ,  $C^W$ ,  $C^t$ ,  $C^u$  είναι σταθερές που εισάγονται προκειμένου να ικανοποιηθούν οι εξισώσεις (38) και (42). Υπό το πρίσμα του σχήματος διαδοχικής ισορροπίας η εξισώσεις (43) γράφονται ως

$$\tilde{\Phi}_i = \widehat{\Phi}_i + C_i^{\Phi} + C_i^{\Phi,y} \cdot Y + C_i^{\Phi,z} \cdot Z + C_i^{\Phi,x} \cdot \left( \varphi_x^P - \frac{Y}{A} \int_{\Omega} \varphi_{x,y}^P d\Omega - \frac{Z}{A} \int_{\Omega} \varphi_{x,z}^P d\Omega \right) \quad (43\alpha)$$

$$\tilde{V}_i = \widehat{V}_i + C_i^V - C_i^t \cdot Z + C_i^u \cdot Y \quad (43\beta)$$

$$\tilde{W}_i = \widehat{W}_i + C_i^W + C_i^t \cdot Y + C_i^u \cdot Z \quad (43\gamma)$$

Προκειμένου η εξίσωση (21) να έχει λύση (πρόβλημα διαστρέβλωσης), σύμφωνα με την αναφορά [25], θα πρέπει να ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις

$$\int_{\Omega} (\mathbf{b}_y)_{i-1} d\Omega = - \int_{\Gamma} (\mathbf{t}_y)_i ds \quad (45\alpha)$$

$$\int_{\Omega} (\mathbf{b}_z)_{i-1} d\Omega = - \int_{\Gamma} (t_z)_i ds \quad (45\beta)$$

$$\int_{\Omega} (yb_z - zb_y)_{i-1} d\Omega = - \int_{\Gamma} (yt_z - zt_y)_i ds \quad (45\gamma)$$

Έπειτα από αντικατάσταση των εξισώσεων (21b και e) στην εξίσωση (45<sup>a</sup>) λαμβάνεται η σχέση

$$\mu \int_{\Omega} v_{i-1} d\Omega = \left( -\mu \frac{1+\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}} + \lambda \right) \int_{\Omega} \varphi_{i-1,y} d\Omega \quad (46)$$

Για  $i = 1$  λαμβάνοντας υπόψιν ότι  $\mathbf{w}_0 = [1 \ 0 \ 0]^T$ , η εξίσωση (46) δίνει ως αποτέλεσμα  $0 = 0$ , επομένως ικανοποιείται. Για  $i \geq 2$  λαμβάνεται  $\int_{\Omega} \varphi_{i-1,y} d\Omega = 0$  και  $\int_{\Omega} v_{i-1} d\Omega = 0$  ή έχοντας υπόψιν ότι  $\mathbf{w}_0 = [1 \ 0 \ 0]^T$  καθώς και τις εξισώσεις (20) και (23) λαμβάνεται  $\int_{\Omega} \tilde{\Phi}_{i,y} d\Omega = 0$  και  $\int_{\Omega} \tilde{V}_i d\Omega = 0$  για  $i \geq 1$ . Μετά από αντικατάσταση των εξισώσεων (44a και β) στην τελευταία έκφραση, λαμβάνεται η ακόλουθη σχέση

$$C_i^{\Phi,y} = -\frac{1}{A} \int_{\Omega} \hat{\Phi}_{i,y} d\Omega \quad \text{και} \quad C_i^V = -\frac{1}{A} \int_{\Omega} \hat{V}_i d\Omega \quad \forall i \geq 1 \quad (47)$$

Έπειτα από αντικατάσταση των εξισώσεων (21b και f) στην εξίσωση (45<sup>b</sup>) λαμβάνεται η σχέση

$$\mu \int_{\Omega} w_{i-1} d\Omega = \left( -\mu \frac{1+\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}} + \lambda \right) \int_{\Omega} \varphi_{i-1,z} d\Omega \quad (48)$$

Για  $i = 1$  λαμβάνοντας υπόψιν ότι  $\mathbf{w}_0 = [1 \ 0 \ 0]^T$ , η εξίσωση (48) δίνει ως αποτέλεσμα  $0 = 0$ , επομένως ικανοποιείται. Για  $i \geq 2$  λαμβάνεται  $\int_{\Omega} \varphi_{i-1,z} d\Omega = 0$  και  $\int_{\Omega} w_{i-1} d\Omega = 0$  ή έχοντας υπόψιν ότι  $\mathbf{w}_0 = [1 \ 0 \ 0]^T$  καθώς και τις εξισώσεις (20) και (23) λαμβάνεται  $\int_{\Omega} \tilde{\Phi}_{i,z} d\Omega = 0$  και  $\int_{\Omega} \tilde{W}_i d\Omega = 0$  για  $i \geq 1$ . Μετά από αντικατάσταση των εξισώσεων (44a και c) στην τελευταία έκφραση, λαμβάνεται η ακόλουθη σχέση

$$C_i^{\Phi_{i,z}} = -\frac{1}{A_\Omega} \int_\Omega \widehat{\Phi}_{i,z} d\Omega \quad \text{και} \quad C_i^W = -\frac{1}{A_\Omega} \int_\Omega \widehat{W}_i d\Omega \quad \forall i \geq 1 \quad (49)$$

Έπειτα από αντικατάσταση των εξισώσεων (21β, ε και στ) στην εξίσωση (45γ) λαμβάνεται η σχέση

$$\int_\Omega (yw_{i-1} - zv_{i-1}) d\Omega = -\int_\Omega (y\varphi_{i-1,z} - z\varphi_{i-1,y}) d\Omega \quad (50)$$

Για  $i = 1$  λαμβάνοντας υπόψιν ότι  $\mathbf{w}_0 = [1 \ 0 \ 0]^T$ , η εξίσωση (50) δίνει ως αποτέλεσμα  $0 = 0$ , επομένως ικανοποιείται. Για  $i \geq 2$  λαμβάνεται  $\int_\Omega (y\varphi_{i-1,z} - z\varphi_{i-1,y}) d\Omega = 0$  και  $\int_\Omega (yw_{i-1} - zv_{i-1}) d\Omega = 0$  ή έχοντας υπόψιν ότι  $\mathbf{w}_0 = [1 \ 0 \ 0]^T$  καθώς και τις εξισώσεις (20) και (23) λαμβάνεται  $\int_\Omega (y\tilde{\Phi}_{i,z} - z\tilde{\Phi}_{i,y}) d\Omega = 0$  και  $\int_\Omega (y\tilde{W}_i - z\tilde{V}_i) d\Omega = 0$  για  $i \geq 1$ . Μετά από αντικατάσταση των εξισώσεων (44α, β και γ) στην τελευταία έκφραση, λαμβάνονται οι ακόλουθες σχέσεις

$$C_i^{\Phi_x} = -\frac{\int_\Omega (Y \cdot \widehat{\Phi}_{i,z} - Z \cdot \widehat{\Phi}_{i,y}) d\Omega}{\int_\Omega (Y \cdot \varphi_{x,z}^P - Z \cdot \varphi_{x,y}^P) d\Omega} \quad \text{και} \quad C_i^t = -\frac{\int_\Omega (-Z \cdot \widehat{V}_i + Y \cdot \widehat{W}_i) d\Omega}{\int_\Omega (Y^2 + Z^2) d\Omega} \quad \forall i \geq 1 \quad (51\alpha, \beta)$$

Προκειμένου η εξίσωση (22) να έχει λύση (πρόβλημα στρέβλωσης), σύμφωνα με την αναφορά [25], θα πρέπει να ισχύει

$$\int_\Omega f_i d\Omega = \int_\Gamma \tilde{\Phi}_{i,n} ds \quad (52)$$

Προκειμένου να ικανοποιείται αυτή η απαίτηση, με τη βοήθεια της σταθεράς  $Coeff(i)$  η εξίσωση (22c) τροποποιείται σε

$$f_i = -\frac{2}{1-\bar{\nu}} \cdot Coeff(i) \cdot \varphi_{i-1} - \frac{1+\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{U}}_{2 \times 1} \quad (53)$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (22β) και (53) στην εξίσωση (52) λαμβάνεται

$$Coeff(i) \cdot \int_{\Omega} \varphi_{i-1} d\Omega = -\bar{v} \int_{\Omega} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{U}}_i d\Omega \quad (54)$$

Για  $i = 1$  και έχοντας υπόψιν ότι  $\tilde{V}_1 = -vY$ ,  $\tilde{W}_1 = -vZ$  και  $\mathbf{w}_0 = [1 \ 0 \ 0]^T$  (για λεπτομέρειες βλ. παράγραφο 2.9.4), λαμβάνεται η ακόλουθη σχέση

$$Coeff(1) = -\bar{v} \frac{\int_{\Omega} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{U}}_1 d\Omega}{\int_{\Omega} \varphi_0 d\Omega} \Rightarrow Coeff(1) = \frac{2\bar{v}^2}{1+\bar{v}} \quad (55)$$

Για  $i \geq 2$  λαμβάνεται  $Coeff(i) = 1$ ,  $\int_{\Omega} \varphi_{i-1} d\Omega = 0$  και  $\int_{\Omega} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{U}}_i d\Omega = 0 \int_{\Omega} (yw_{i-1} - zv_{i-1}) d\Omega = 0$  ή έχοντας υπόψιν ότι  $\mathbf{w}_0 = [1 \ 0 \ 0]^T$  καθώς και τις εξισώσεις (20) και (23), και κάνοντας την υπόθεση ότι για λόγους απλότητας τελικά θα θεωρηθεί  $\varphi_i = \Phi_i$  λαμβάνεται  $\int_{\Omega} \tilde{\Phi}_i d\Omega = 0$  για  $i \geq 1$  και  $\int_{\Omega} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{U}}_i d\Omega = 0$  for  $i \geq 2$ . Έπειτα από αντικατάσταση την εξίσωσης (42<sup>α</sup>) και (42β) στην τελευταία έκφραση, αντίστοιχα, προκύπτει

$$C_i^{\Phi} = -\frac{1}{A} \int_{\Omega} \hat{\Phi}_i d\Omega \quad \forall i \geq 1 \text{ και } C_i^u = -\frac{1}{2A} \int_{\Omega} \nabla \cdot \hat{\mathbf{U}}_i d\Omega \quad \forall i \geq 2 \quad (56)$$

Είναι προφανές ότι οι παραπάνω εξισώσεις οδηγούν σε υπολογισμό των..... είναι σε συμφωνία με τις εξισώσεις (38), (42), το οποίο επιβεβαιώνει την αρχική τοποθέτηση του κεφαλαίου, δηλαδή ότι το φυσικό νόημα των συνθηκών ύπαρξης λύσης είναι η εξάλειψη του δυνατού έργου των τάσεων στρέβλωσης και διαστρέβλωσης έναντι των ανηγμένων παραμορφώσεων του στερεού σώματος

#### 2.9.4 Παρατηρήσεις επί των αξονικών μορφών στρέβλωσης και διαστρέβλωσης

Για  $i = 1$  λαμβάνοντας υπόψιν ότι  $\mathbf{w}_0 = [1 \ 0 \ 0]^T$ , (όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως), μέσω του οποίου υποδεικνύεται μια κίνηση στερεού σώματος της διατομής κατά τον άξονα  $x$ , το πρόβλημα της διαστρέβλωσης της εξίσωσης (21) μπορεί να γραφεί ως

$$\nabla^2 \tilde{V}_1 + \frac{1+\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}} \left( \nabla \cdot \tilde{\mathbf{U}}_1 \right)_{,y} = 0 \quad (57\alpha)$$

$$(t_y)_1 = -\lambda n_y \quad (57\beta)$$

$$\nabla^2 \tilde{W}_1 + \frac{1+\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}} \left( \nabla \cdot \tilde{\mathbf{U}}_1 \right)_{,z} = 0 \quad (57\gamma)$$

$$(t_z)_1 = -\lambda n_z \quad (57\delta)$$

όπου

$$(t_y)_1 = \mu (\tilde{V}_{1,n} + \tilde{V}_{1,y} n_y + \tilde{W}_{1,y} n_z) + \lambda (\tilde{V}_{1,y} + \tilde{W}_{1,z}) n_y \quad (57\epsilon)$$

$$(t_z)_1 = \mu (\tilde{W}_{1,n} + \tilde{V}_{1,z} n_y + \tilde{W}_{1,z} n_z) + \lambda (\tilde{V}_{1,y} + \tilde{W}_{1,z}) n_z \quad (57\sigma\tau)$$

Το παραπάνω πρόβλημα της διδιάστατης ελαστικότητας ικανοποιείται από τη λύση  $\tilde{V}_1 = -\nu Y$ ,  $\tilde{W}_1 = -\nu Z$  η οποία συμμορφώνεται με όλες τις σχετικές απαιτήσεις της παραγράφου 2.9.3. Αυτή η λύση παρουσιάζει ομοιόμορφη πλευρική συρρίκνωση της διατομής η οποία οφείλεται σε αξονική ένταση (μετατόπιση στερεού σώματος  $\mathbf{w}_0 = [1 \ 0 \ 0]^T$ ) λόγω του φαινομένου Poisson.

Αντικαθιστώντας τα  $\mathbf{w}_0 = [1 \ 0 \ 0]^T$ ,  $\tilde{V}_1 = -\nu Y$  and  $\tilde{W}_1 = -\nu Z$  in στις εξισώσεις (22a,b), (53) και (55) προκύπτει

$$\nabla^2 \tilde{\Phi}_1 = 2\nu \quad (58\alpha)$$

$$\tilde{\Phi}_{1,n} = \nu (Y n_y + Z n_z) \quad (58\beta)$$

Το παραπάνω πρόβλημα Poisson (εξίσωση (58)) ικανοποιείται από τη λύση  $\tilde{\Phi}_1 = \frac{\nu}{2} \left( Y^2 + Z^2 - \frac{I_p}{A} \right)$ , η οποία συμμορφώνεται σε όλες τις σχετικές απαιτήσεις της παραγράφου 2.9.3, όπου ... . Βάση του προαναφερθέντος ισχυρισμού (της παραγράφου 2.9.3),



ότι για λόγους απλοποίησης, τελικά λαμβάνεται  $\varphi_1 = \Phi_1$ , το οποίο ισοδυναμεί με τον ισχυρισμό ότι  $\varphi_0 = 0$ , εξίσωση (26), προκύπτει  $c_1^2 = 0$  επομένως επιλέγεται  $c_1^2 = 1$ . Έχοντας καθορίσει το ... και εφαρμόζοντας τις εξισώσεις (23) και (20) προκύπτει

$$\mathbf{w}_1 = \begin{Bmatrix} \frac{\nu}{2} \left( Y^2 + Z^2 - \frac{I_p}{A} \right) \\ -\nu Y \\ -\nu Z \end{Bmatrix} \quad (59)$$

Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειωθεί πως οι  $\varphi_1$ ,  $\nu_1$  και  $w_1$  της παραγράφου 2.9 αναλογούν στις  $\varphi_u^p$ ,  $\nu_u^p$  και  $w_u^p$  των προηγούμενων κεφαλαίων, αντίστοιχα.



## 3 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ

### 3.1 Συναρτήσεις σχήματος και επικόμβιες μετατοπίσεις

Σύμφωνα με την προτεινόμενη ανάλυση, το πρόβλημα του τοπικού λυγισμού ράβδων ομογενούς διατομής λαμβάνοντας υπόψιν φαινόμενα στρέβλωσης και διαστρέβλωσης που προκαλούνται από αξονική φόρτιση, διάτμηση, κάμψη ή στρέψη λύνεται αριθμητικά εφαρμόζοντας τη μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων (FEM) [26]. Βάσει της μεθόδου αυτής, οι συνιστώσες των μετατοπίσεων  $d_i(x)$  για  $i=1\dots N_{dofs}$  (του διανύσματος μετατόπισης  $\mathbf{d}$ ) εκφράζονται μέσω μίας συνάρτησης επικόμβιων μετατοπίσεων και συναρτήσεων σχήματος. Ένα στοιχείο τριών κόμβων ( $N_{nodes}=3$ ), στις θέσεις  $x=0, x=L/2$  και  $x=L$  έχει χρησιμοποιηθεί, όπου ως  $L$  ορίζεται το μήκος του στοιχείου και η αρχή του συστήματος συντεταγμένος βρίσκεται στο αριστερό του άκρο. Ως αποτέλεσμα, οι προαναφερθείσες συνιστώσες μετατόπισης εκφράζονται σε όρους επικόμβιων μετατοπίσεων ως

$$d_i(x) = f_1(x) \cdot d_{i1} + f_2(x) \cdot d_{i2} + f_3(x) \cdot d_{i3} \quad (60a)$$

όπου  $d_{i1}, d_{i2}, d_{i3}$  είναι οι επικόμβιες μετατοπίσεις της  $d_i$  συνιστώσας μετατόπισης στους κόμβους  $1(x=0)$ ,  $2(x=L/2)$  και  $3(x=L)$ , αντίστοιχα, ενώ οι συναρτήσεις σχήματος δίνονται από τις εκφράσεις

$$f_1(x) = 1 - \frac{3x}{L} + \frac{2x^2}{L^2} \quad (60\beta)$$

$$f_2(x) = \frac{4x}{L} - \frac{4x^2}{L^2} \quad (60\gamma)$$

$$f_3(x) = -\frac{x}{L} + \frac{2x^2}{L^2} \quad (60\delta)$$

Οι οποίες έχουν υπολογιστεί προκειμένου να εξασφαλίζεται ότι  $d_i = d_{i1}$  στη θέση  $x=0$ ,  $d_i = d_{i2}$  στη θέση  $x=L/2$  και  $d_i = d_{i3}$  στη θέση  $x=L$ . Επομένως, το διάνυσμα των επικόμβιων μετατοπίσεων ορίζεται ως

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & \theta_{x1} & \eta_{u1}^p & \eta_{v1}^p & \eta_{z1}^p & \eta_{x1}^s & \eta_{u1}^s & \eta_{v1}^s & \eta_{z1}^s & \eta_{x1}^p & z_{u1}^p & z_{v1}^p & z_{z1}^p & z_{x1}^p & z_{u1}^s & z_{v1}^s & z_{z1}^s & z_{x1}^s & \vdots \\ u_2 & v_2 & w_2 & \theta_{x2} & \eta_{u2}^p & \eta_{v2}^p & \eta_{z2}^p & \eta_{x2}^s & \eta_{u2}^s & \eta_{v2}^s & \eta_{z2}^s & \eta_{x2}^p & z_{u2}^p & z_{v2}^p & z_{z2}^p & z_{x2}^p & z_{u2}^s & z_{v2}^s & z_{z2}^s & z_{x2}^s & \vdots \\ u_3 & v_3 & w_3 & \theta_{x3} & \eta_{u3}^p & \eta_{v3}^p & \eta_{z3}^p & \eta_{x3}^s & \eta_{u3}^s & \eta_{v3}^s & \eta_{z3}^s & \eta_{x3}^p & z_{u3}^p & z_{v3}^p & z_{z3}^p & z_{x3}^p & z_{u3}^s & z_{v3}^s & z_{z3}^s & z_{x3}^s \end{bmatrix}^T \quad (61)$$

ή

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 & q_6 & q_7 & q_8 & q_9 & q_{10} & q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} & q_{15} & q_{16} & q_{17} & q_{18} & q_{19} & q_{20} & \vdots \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} & q_{25} & q_{26} & q_{27} & q_{28} & q_{29} & q_{30} & q_{31} & q_{32} & q_{33} & q_{34} & q_{35} & q_{36} & q_{37} & q_{38} & q_{39} & q_{40} & \vdots \\ q_{41} & q_{42} & q_{43} & q_{44} & q_{45} & q_{46} & q_{47} & q_{48} & q_{49} & q_{50} & q_{51} & q_{52} & q_{53} & q_{54} & q_{55} & q_{56} & q_{57} & q_{58} & q_{59} & q_{60} \end{bmatrix}^T \quad (62)$$

και το διάνυσμα της μετατόπισης μπορεί να γραφεί ως

$$\mathbf{d}_{N_{dofs} \times 1} = \mathbf{f}_{N_{dofs} \times N_{stiffness}} \cdot \mathbf{q}_{N_{stiffness} \times 1} \quad (63\alpha)$$

όπου

$$\mathbf{f}_{N_{dofs} \times N_{stiffness}} = \begin{bmatrix} f_1(x) & 0 & \cdots & 0 & f_2(x) & 0 & \cdots & 0 & f_3(x) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_1(x) & \cdots & 0 & 0 & f_2(x) & \cdots & 0 & 0 & f_3(x) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f_1(x) & 0 & 0 & \cdots & f_2(x) & 0 & 0 & \cdots & f_3(x) \end{bmatrix} \quad (63\beta)$$

$$N_{stiffness} = N_{dofs} \times N_{nodes} \quad (63\gamma)$$

### 3.2 Αρχή δυνατών έργων

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (11), (13<sup>α</sup>), (15<sup>α</sup>), (17) και αντικαθιστώντας την εξίσωση (63α) η αρχή δυνατών έργων μπορεί να γραφεί ως

$$\delta \mathbf{q}^T \cdot \mathbf{f}_s^{lin} + \delta \mathbf{q}^T \cdot \mathbf{f}_s^G = \delta \mathbf{q}^T \cdot \mathbf{P} \quad (64)$$

και λαμβάνοντας υπόψιν ότι  $\delta \mathbf{q}^T \neq 0$

$$\mathbf{f}_s^{lin} + \mathbf{f}_s^G = \mathbf{P} \quad (65)$$

όπου  $\mathbf{f}_s^{lin}$ ,  $\mathbf{f}_s^G$  και  $\mathbf{P}$  είναι γραμμικά και μη-γραμμικά μέρη των ελαχιστικών δυνάμεων και του διανύσματος φόρτισης, αντίστοιχα.

### 3.3 Γραμμικό μέρος ελαστικών δυνάμεων

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (63α) στην εξίσωση (13α) η έκφραση του δυνατού έργου του γραμμικού μέρους των εσωτερικών δυνάμεων μπορεί να γραφεί ως

$$\delta U^{lin} = \delta \mathbf{q}^T \left( \int_0^L \mathbf{f}_{tot}^T \cdot \mathbf{K}_{lin}^{gc} \cdot \mathbf{f}_{tot} dx \right) \cdot \mathbf{q} \quad (66\alpha)$$

$1 \times N_{stiffness}$      $0$      $N_{stiffness} \times 2N_{dofs}$      $2N_{dofs} \times 2N_{dofs}$      $2N_{dofs} \times N_{stiffness}$      $N_{stiffness} \times 1$

όπου

$$\mathbf{f}_{tot} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{f}_{,x} \end{bmatrix} \quad (66\beta) \quad (3-1)$$

$2N_{dofs} \times N_{stiffness}$      $N_{dofs} \times N_{stiffness}$      $N_{dofs} \times N_{stiffness}$

Επομένως οι αναπτυσσόμενες ελαστικές δυνάμεις εκτιμώνται ως

$$\mathbf{f}_s^{lin} = \left( \int_0^L \mathbf{f}_{tot}^T \cdot \mathbf{K}_{lin}^{gc} \cdot \mathbf{f}_{tot} dx \right) \cdot \mathbf{q} \quad (66\gamma) \quad (3-2)$$

$N_{stiffness} \times 1$      $0$      $N_{stiffness} \times 2N_{dofs}$      $2N_{dofs} \times 2N_{dofs}$      $2N_{dofs} \times N_{stiffness}$      $N_{stiffness} \times 1$

### 3.4 Μη-γραμμικό μέρος ελαστικών δυνάμεων

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (63α) στην εξίσωση (15α) η έκφραση του δυνατού έργου του μη-γραμμικού μέρους των εσωτερικών δυνάμεων μπορεί να γραφεί ως

$$\delta U^G = \delta \mathbf{q}^T \int_0^L \mathbf{Z}^T \cdot \mathbf{K}_G^{gc} \cdot \mathbf{f}_{tot} dx \cdot \mathbf{q}^0 \quad (67)$$

$1 \times N_{stiffness}$      $0$      $N_{stiffness} \times N_{Erows}$      $N_{Erows} \times 2N_{dofs}$      $2N_{dofs} \times N_{stiffness}$      $N_{stiffness} \times 1$

όπου

$$\mathbf{Z} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{d}_{tot}} \mathbf{f}_{tot} \quad (68\alpha)$$

$N_{Erows} \times N_{stiffness}$        $N_{Erows} \times 2N_{dofs}$        $2N_{dofs} \times N_{stiffness}$

Επομένως οι αναπτυσσόμενες ελαστικές δυνάμεις εκτιμώνται ως

$$\mathbf{f}_s^G = \int_0^L \mathbf{Z}^T \cdot \mathbf{K}_G^{gc} \cdot \mathbf{f}_{tot} dx \cdot \mathbf{q}^0 \quad (68\beta)$$

$N_{stiffness} \times 1$        $N_{stiffness} \times N_{Erows}$        $N_{Erows} \times 2N_{dofs}$        $2N_{dofs} \times N_{stiffness}$        $N_{stiffness} \times 1$

### 3.5 Διάνυσμα φόρτισης

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (63α) στην εξίσωση (15α) η έκφραση του δυνατού έργου του μη-γραμμικού μέρους των εσωτερικών δυνάμεων μπορεί να γραφεί ως

$$\delta W = \underbrace{\delta \mathbf{q}^T \int_0^L \left( \sum_{j=1}^K \int_{\Gamma_j} \mathbf{H}_j^T \cdot \mathbf{t}_j \right) ds}_{\text{Lateral Surface}} dx + \underbrace{\delta \mathbf{q}^T \int_{\Omega^0} \left( \mathbf{H}^T \cdot \mathbf{t} \Big|_{x=0} \right)}_{\text{Left end (x=0)}} d\Omega^0 + \underbrace{\delta \mathbf{q}^T \int_{\Omega^L} \left( \mathbf{H}^T \cdot \mathbf{t} \Big|_{x=L} \right)}_{\text{Right end (x=L)}} d\Omega^L \quad (69)$$

όπου

$$\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{d}_{tot}} \mathbf{f}_{tot} = \mathbf{H}_u \left( y, z, \varphi_i^j, v_i^j, w_i^j \right) \mathbf{f}_{tot}, \quad \text{όπου } i = u, Y, Z, x \text{ και } j = P, S \quad (70\alpha)$$

ή

$$\delta W = \delta \mathbf{q}^T \int_0^L \mathbf{p} dx + \delta \mathbf{q}^T \mathbf{P}_0 + \delta \mathbf{q}^T \mathbf{P}_L \quad (70\beta)$$

$1 \times N_{stiffness}$        $N_{stiffness} \times 1$        $1 \times N_{stiffness}$        $N_{stiffness} \times 1$        $1 \times N_{stiffness}$        $N_{stiffness} \times 1$

$$\mathbf{p} = \sum_{j=1}^K \left( \int_{\Gamma_j} \mathbf{H}_j^T \cdot \mathbf{t}_j \right) ds \quad (71\alpha)$$

$$\mathbf{P}_0 = \int_{\Omega^0} \left( \mathbf{H}^T \cdot \mathbf{t} \Big|_{x=0} \right) d\Omega^0 \quad (71\beta)$$

$$\mathbf{P}_L = \int_{\Omega^L} \left( \mathbf{H}^T \cdot \mathbf{t} \right) \Big|_{x=L} d\Omega^L \quad (71\gamma)$$

όπου  $\mathbf{p}$  είναι το κατανεμημένο διάνυσμα φόρτισης στο μήκος της ράβδου, ενώ  $\mathbf{P}_0$  και  $\mathbf{P}_L$  είναι τα συγκεντρωμένα φορτία που εφαρμόζονται στο αριστερό ( $x = 0$ ) και στο δεξί ( $x = L$ ) άκρο της ράβδου, αντίστοιχα. Επομένως οι αναπτυσσόμενες ελαστικές δυνάμεις εκτιμώνται ως

$$\mathbf{P} = \int_0^L \mathbf{p} dx + \mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_L \quad (72)$$

### 3.6 Μητρώο στιβαρότητας στοιχείου

Η εξίσωση (65), η οποία πρέπει να επιλυθεί, μπορεί να γραφεί ως

$$\mathbf{f}_s^{lin} + \mathbf{f}_s^G - \mathbf{P} = \mathbf{0} \quad (73)$$

ή

$$\mathbf{K} \cdot \delta\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (74)$$

όπου  $\mathbf{K}$  είναι το ολικό μητρώο στιβαρότητας του στοιχείου το οποίο υπολογίζεται μέσω της έκφρασης

$$\mathbf{K} = \frac{\partial \mathbf{f}_s^{lin}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{f}_s^G}{\partial \mathbf{q}} \quad (75)$$

Μετά την αντικατάσταση των εξισώσεων (67) και (69) το μητρώο στιβαρότητας λαμβάνεται ως

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{lin} + \mathbf{K}_G \quad (76a)$$

όπου

$$\mathbf{K}_{lin} = \int_0^L \mathbf{f}_{tot}^T \cdot \mathbf{K}_{lin}^{gc} \cdot \mathbf{f}_{tot} dx \quad (76\beta)$$

$N_{stiffness} \times N_{stiffness}$       $N_{stiffness} \times 2N_{dofs}$       $2N_{dofs} \times 2N_{dofs}$       $2N_{dofs} \times N_{stiffness}$

$$\mathbf{K}_G = \int_0^L \sum_{i=1}^{N_{Erows}} \mathbf{K}d^0(i) \cdot \mathbf{f}_{tot}^T \underbrace{\frac{\partial}{\partial \mathbf{d}_{tot}} \left( \frac{\partial \mathbf{E}^T}{\partial \mathbf{d}_{tot}}(:,i) \right)}_{2N_{dofs} \times 2N_{dofs}} \cdot \mathbf{f}_{tot} dx \quad (76\gamma)$$

$N_{stiffness} \times N_{stiffness}$       $N_{stiffness} \times 2N_{dofs}$       $2N_{dofs} \times 1$       $2N_{dofs} \times 1$       $2N_{dofs} \times N_{stiffness}$

$$\mathbf{K}d^0 = \mathbf{K}_G^{gc} \cdot \mathbf{d}_{tot}^0 = \mathbf{K}_G^{gc} \cdot \mathbf{f}_{tot} \cdot \mathbf{q}^0 \quad (76\delta)$$

$N_{Erows} \times 1$       $N_{Erows} \times 2N_{dofs}$       $2N_{dofs} \times 1$       $N_{Erows} \times 2N_{dofs}$       $2N_{dofs} \times N_{stiffness}$       $N_{stiffness} \times 1$

### 3.7 Ολικό μητρώο στιβαρότητας και κριτήριο λυγισμού

Διαχωρίζοντας τη ράβδο σε .. στοιχεία, εφαρμόζοντας στην εξίσωση (74) την μέθοδο άμεσης στιβαρότητας και λαμβάνοντας υπόψιν τις συνοριακές συνθήκες της ράβδου, το ολικό σύστημα εξίσωσης της δοκού μορφώνεται ως

$$(\mathbf{K}_{lin}^{tot} + \lambda \cdot \mathbf{K}_G^{tot}) \delta \mathbf{q}^{tot} = \mathbf{0} \quad (77)$$

Το φορτίο λυγισμού υπολογίζεται μέσω της λύσης του γενικευμένου προβλήματος ιδιοτιμών της εξίσωσης (77) όπου  $\mathbf{K}_{lin}^{tot}$  είναι το γραμμικό μητρώο στιβαρότητας και  $\mathbf{K}_G^{tot}$  είναι το συνολικό γεωμετρικό μητρώο στιβαρότητας όλης της ράβδου. Προκειμένου να προσεγγιστεί το γεωμετρικό μητρώο στιβαρότητας πρώτα επιχειρείται η εύρεση μιας γραμμικής στατικής λύσης προκειμένου να υπολογιστεί επικόμβιο διάνυσμα μετατοπίσεων της ράβδου που συμβολίζεται με  $\mathbf{q}_0^{tot}$  και για το οποίο ισχύει

$$\mathbf{q}_0^{tot} = \mathbf{K}_{lin}^{tot-1} \cdot \mathbf{P}^{tot} \quad (78)$$

Όπου  $\mathbf{P}^{tot}$  το συνολικό διάνυσμα φόρτισης για ολόκληρη τη ράβδο. Αφότου το  $\mathbf{q}^0$  (το οποίο είναι μέρος του  $\mathbf{q}_0^{tot}$ ) αντικατασταθεί στις εξισώσεις (76c,d) για κάθε στοιχείο, προκειμένου να υπολογιστεί το γεωμετρικό μητρώο στιβαρότητας κάθε στοιχείου και τελικά το γεωμετρικό μητρώο στιβαρότητας όλης της ράβδου, όπως αναφέρεται παραπάνω. Οι ιδιοτιμές  $\lambda$  αντιπροσωπεύουν τον συντελεστή του φορτίου που πολλαπλασιάζει το  $\mathbf{P}^{tot}$  και οδηγεί τη δοκό σε λυγισμό. Επομένως το διάνυσμα φόρτισης που προκαλεί λυγισμό έχει τη μορφή

$$\mathbf{P}_{cr} = \lambda \cdot \mathbf{P}^{tot} \quad (79)$$



Και τα ιδιοδιανύσματα  $\delta \mathbf{q}^{tot}$  είναι οι αντίστοιχες εικόνες παραμόρφωσης.

### 3.8 Υπολογισμός αξονικών συναρτήσεων διαστρέβλωσης

Η επίλυση του προβλήματος των εξισώσεων (21a-d), οι οποίες αποτελούν ένα πρόβλημα διδιάστατης ελαστικότητας υποβαλλόμενο σε γενικευμένες δυνάμεις (21 e-h), μπορεί να επιλυθεί με χρήση της μεθόδου των συνοριακών στοιχείων για τον τελεστή Navier [27-28] κατ'αναλογία με τον τρόπο που εφαρμόστηκε στην αναφορά [23] για τις καμπτικές και στρεπτικές μορφές διαστρέβλωσης. Η διαφορά στην παρούσα εργασία έγκειται στην ολοκληρωτική αναπαράσταση της λύσης η οποία λαμβάνεται ως

$$\boldsymbol{\varepsilon}(P)\tilde{\mathbf{U}}_i(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \mathbf{U}^*(r)\tilde{\mathbf{b}}_{i-1}(Q)d\Omega + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} [\mathbf{U}^*(r)\tilde{\mathbf{t}}_i(q) - \mathbf{T}^*(r)\tilde{\mathbf{U}}_i(q)] ds \quad (80\alpha)$$

όπου

$$\tilde{\mathbf{b}}_{i-1} = \mathbf{u}_{i-1} + \frac{1+\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}} \nabla \varphi_{i-1} \quad (80\beta)$$

$$\tilde{\mathbf{t}}_i = -\frac{2\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}} \varphi_{i-1} \mathbf{n} \quad (80\gamma)$$

$$\mathbf{U}^*(P,Q) = \begin{bmatrix} U_{\xi y}^* & U_{\eta y}^* \\ U_{\xi z}^* & U_{\eta z}^* \end{bmatrix} \quad (80\delta)$$

$$U_{\xi y}^* = -\frac{1}{2} \left[ (3-\bar{\nu}) \ln(r) - (1+\bar{\nu}) r_{,y}^2 + \frac{7-\bar{\nu}}{2} \right] \quad (80\epsilon)$$

$$U_{\eta y}^* = U_{\xi z}^* = \frac{1}{2} (1+\bar{\nu}) r_{,y} r_{,z} \quad (80\sigma)$$

$$U_{\eta z}^* = -\frac{1}{2} \left[ (3-\bar{\nu}) \ln(r) - (1+\bar{\nu}) r_{,y}^2 + \frac{7-\bar{\nu}}{2} \right] \quad (80\zeta)$$

$$\mathbf{T}^*(P,Q) = \begin{bmatrix} T_{\xi y}^* & T_{\eta y}^* \\ T_{\xi z}^* & T_{\eta z}^* \end{bmatrix} \quad (80\eta)$$

$$T_{\xi y}^* = -\frac{1+\bar{\nu}}{r} \left( \frac{1-\bar{\nu}}{1+\bar{\nu}} + 2r_{,y}^2 \right) r_{,n} \quad (80\iota)$$

$$T_{\eta y}^* = -\frac{1+\bar{\nu}}{r} \left( 2r_{,y} r_{,z} r_{,n} + \frac{1-\bar{\nu}}{1+\bar{\nu}} r_{,t} \right) \quad (80\kappa)$$

$$T_{\xi z}^* = -\frac{1+\bar{\nu}}{r} \left( 2r_{,y} r_{,z} r_{,n} - \frac{1-\bar{\nu}}{1+\bar{\nu}} r_{,t} \right) \quad (80\lambda)$$

$$T_{\xi y}^* = -\frac{1+\bar{\nu}}{r} \left( \frac{1-\bar{\nu}}{1+\bar{\nu}} + 2r_{,z}^2 \right) r_{,n} \quad (80\mu)$$

με  $r(P, Q) = |Q - P| = \sqrt{(\xi - y)^2 + (\eta - z)^2}$  με σημείο  $Q(\xi, \eta)$  το οποίο διαφοροποιείται επί του χωρίου (και συμβολίζεται ως  $q$  όταν βρίσκεται επί του συνόρου) της διατομής κατά τη διάρκεια της ολοκλήρωσης και της παραγωγίσις, ενώ το σημείο  $P(y, z)$  (or  $p$ ) διατηρείται σταθερό. Ισχύει επίσης  $\varepsilon(P) = \mathbf{I}$ ,  $(1/2)\mathbf{I}$  ή  $\mathbf{0}$  ανάλογα από το αν το σημείο  $P$  βρίσκεται στο χωρίο  $\Omega$ , στο σύνορο  $\Gamma$  ( $P \equiv p$ ) ή εκτός του  $\Omega$ , αντίστοιχα.

### 3.9 Υπολογισμός αξονικών συναρτήσεων στρέβλωσης

Έχοντας καθορίσει τις  $\tilde{V}_i$ ,  $\tilde{W}_i$  και τις παραγώγους τους ως προς τις μεταβλητές  $y, z$  η επίλυση το προβλήματος της εξίσωσης (22), που αφορά την αξονική μορφή στρέβλωσης, επιτυγχάνεται με χρήση της μεθόδου των Συνοριακών Στοιχείων στο πλαίσιο της μεθόδου των υποφορέων [27-28], κατ'αναλογία με τον τρόπο που εφαρμόστηκε στην αναφορά [23] για τις καμπτικές και στρεπτικές μορφές. Η διαφορά στην παρούσα εργασία έγκειται στην ολοκληρωτική αναπαράσταση της λύσης η οποία λαμβάνεται ως

$$\begin{aligned} \varepsilon(P) \tilde{\Phi}_i(P) = & -\frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \ln(r) \left[ \frac{2}{1-\bar{\nu}} \varphi_{i-1}(Q) + \frac{1+\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{U}}_i(Q) \right] d\Omega - \\ & -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left[ -\frac{r_{,n}}{r} \tilde{\Phi}_i(q) + \ln(r) \tilde{\Phi}_{i,n}(q) \right] ds \end{aligned} \quad (81)$$

Όπου  $\varepsilon(P) = \mathbf{I}$ ,  $(1/2)\mathbf{I}$  ή  $\mathbf{0}$  ανάλογα από το αν το σημείο  $P$  βρίσκεται στο χωρίο  $\Omega$ , στο σύνορο  $\Gamma$  ( $P \equiv p$ ) ή εκτός του  $\Omega$ , αντίστοιχα και  $r(P, Q) = |Q - P| = \sqrt{(\xi - y)^2 + (\eta - z)^2}$  με σημείο  $Q(\xi, \eta)$  το οποίο διαφοροποιείται επί του χωρίου (και συμβολίζεται ως  $q$  όταν βρίσκεται επί του συνόρου) της διατομής κατά τη διάρκεια της ολοκλήρωσης και της παραγωγίσις, ενώ το σημείο  $P(y, z)$  (or  $p$ ) διατηρείται σταθερό.

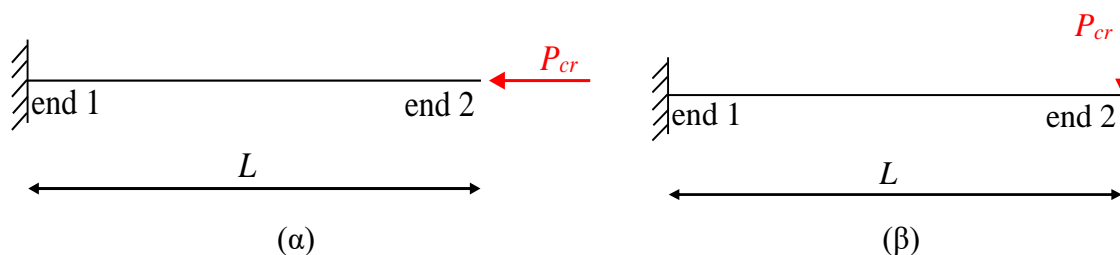
## 4 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

### 4.1 Εισαγωγή

Στα αριθμητικά παραδείγματα που ακολουθούν εξετάζονται διάφορες μορφές διατομών που σύμφωνα με τον Ευρωκώδικα 3 κατατάσσονται σε εκείνες που είναι ευαίσθητες σε τοπικά φαινόμενα. Το στατικό σύστημα είναι αυτό του προβόλου και είναι κοινό για όλες τις εξεταζόμενες περιπτώσεις διατομών. Η επίλυση γίνεται για 2 μορφές φόρτισης. Στην πρότυπη φόρτιση **I** ασκείται ομοιόμορφο θλιπτικό αξονικό φορτίο στο ελεύθερο άκρο του προβόλου, όπως φαίνεται στο σχήμα 1α και περιλαμβάνει διατομές κυρίως κατηγορίας 4 σε θλίψη (EN1993-1-1 §5.5) ενώ στην πρότυπη φόρτιση **II** περιλαμβάνονται διατομές που ικανοποιούν το ακόλουθο κριτήριο και που σύμφωνα με τον Ευρωκώδικα 3 (EN1993-1-1, §6.2.6, σχέση (6.22)) θεωρούνται λεπτότοιχες εφόσον δεν έχουν ενδιάμεσες ενισχύσεις :

$$\frac{h_w}{t_w} > \frac{72\varepsilon}{\eta}$$

όπου  $\varepsilon = 0.81$  για χάλυβα ποιότητας S355 και  $\eta = 1.0$  (συντηρητικότερη θεώρηση έναντι της τιμής  $\eta = 1.20$ ). Οι διατομές αυτές θεωρούνται ευαίσθητες σε τοπικά φαινόμενα που προκαλούνται από κατακόρυφα φορτία. Για τον λόγο αυτό εφαρμόζεται κατακόρυφο φορτίο μέσω διαφράγματος που τοποθετείται στο άκρο του προβόλου οπότε δεσμεύονται οι εντός επιπέδου μετατοπίσεις, και οι βαθμοί ελευθερίας που συνδέονται με τη διαστρέβλωσή της στο σημείο του διαφράγματος μηδενίζονται. Το φορτίο αυτό επιβάλλεται στο κεντρο του διαφράγματος (το οποίο ταυτίζεται με το κεντροειδές της διατομής) όπως υποδεικνύεται στο σχήμα 1β.



Σχήμα 4.1-1: Πρότυπη φόρτιση I (α), πρότυπη φόρτιση II (β)

## 4.2 Αριθμητική εφαρμογή 1-Διατομές ανοιχτού τύπου-Πρότυπη φόρτιση I και II

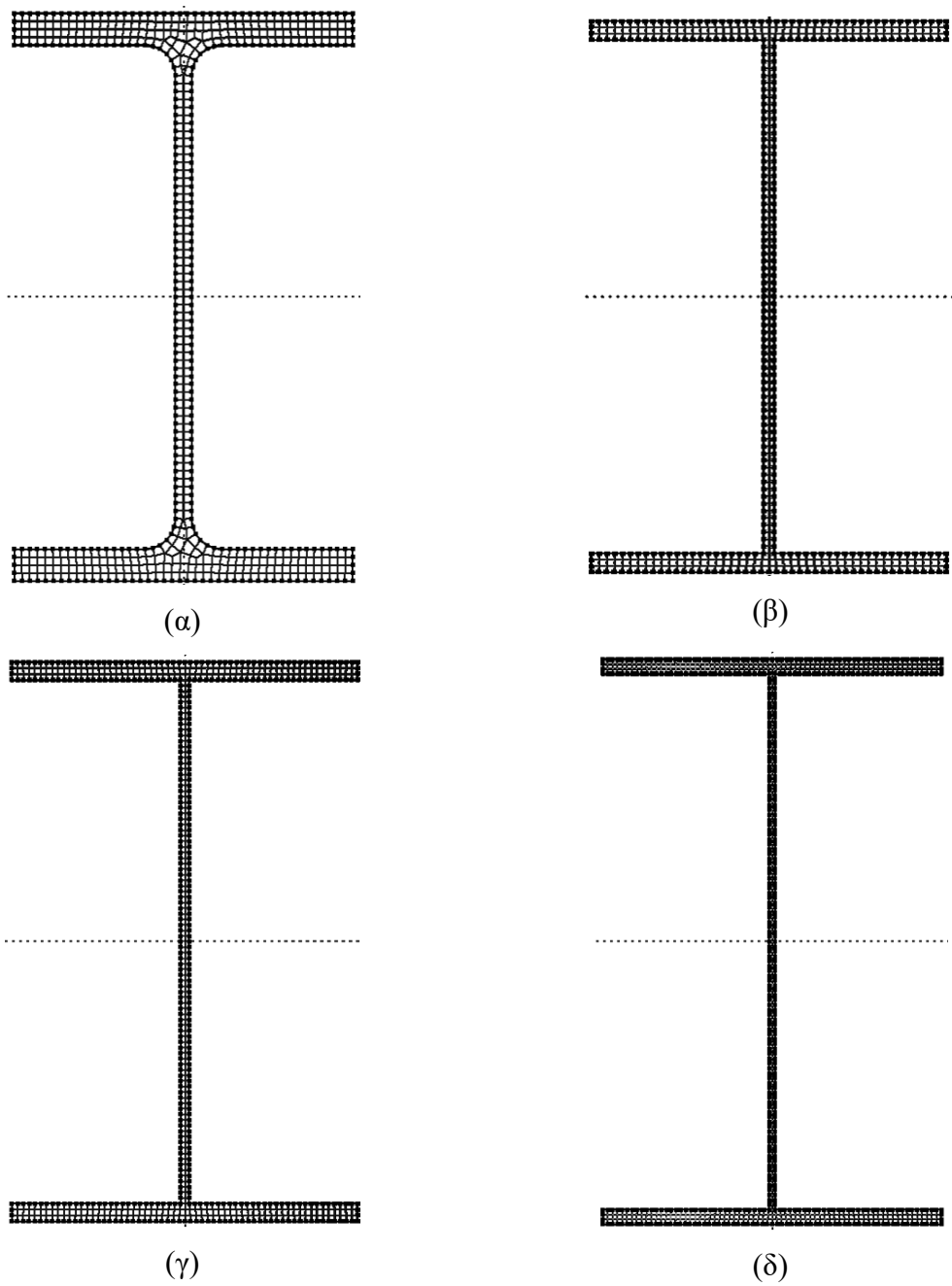
Στην πρώτη αριθμητική εφαρμογή εξετάζονται φορείς, στατικού συστήματος προβόλου ανοιχτών πρότυπων και συγκολλητών μεταλλικών διατομών ( $S355$ ,  $E=2.1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$ ,  $\mu=8.08 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$ ,  $\nu=0.3$ ) μορφής **I**. Τα προφίλ των διατομών αποτελούνται από τις (HEB500, 500x300.9.17, 500x300.7.16, 500x300.5.13) τα γεωμετρικά στοιχεία των οποίων διακρίνονται στον πίνακα 1. Το μήκος του προβόλου παραμένει σταθερό σε κάθε περίπτωση και ισούται με 2 μέτρα για την περίπτωση (i) και 5 μέτρα για την περίπτωση (ii).

Αρχικά υπολογίζεται το κρίσιμο φορτίο λυγισμού των παραπάνω φορέων σύμφωνα με την φόρτιση **I** και **II** με χρήση του λογισμικού HOBET. Το λογισμικό αυτό υλοποιεί την ανάλυση βάσει της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης, για διάφορους βαθμούς ελευθερίας ( $N_{\text{dofs}}$ ) κάθε στοιχείου, το οποίο χωρίζεται σε 40 πεπερασμένα στοιχεία, καθένα από τα οποία έχει δύο κόμβους. Η παραπάνω τιμή συγκρίνεται με την αντίστοιχη τιμή που λαμβάνεται από την ανάλυση λογισμικού με χρήση τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων, καθώς επίσης και με τα αποτελέσματα των θεωριών Timoshenko και Euler-Bernoulli, αντίστοιχα. Στην συνέχεια εξάγονται οι πρώτες 5 αξονικές μορφές στρέβλωσης και διαστρέβλωσης των παραπάνω διατομών μέσω των προαναφερθέντων συναρτήσεων. Τέλος υπολογίζεται το πεδίο των τάσεων από γραμμική στατική ανάλυση και πραγματοποιείται η αντίστοιχη σύγκριση με τις παραπάνω θεωρίες με έμφαση στο σημείο της πάκτωσης του προβόλου.

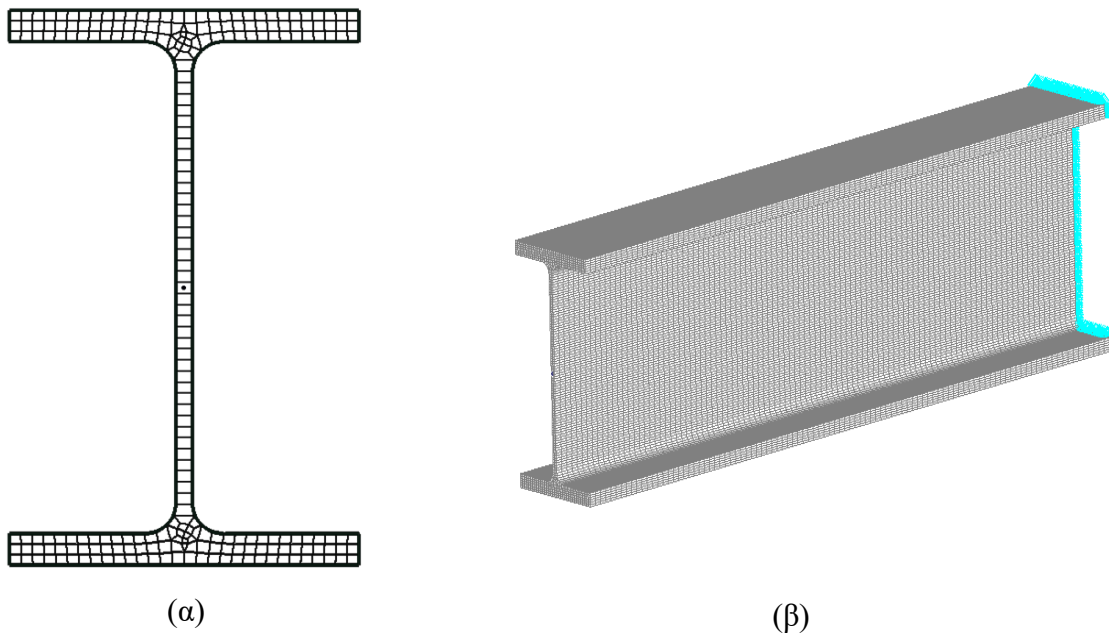
Η διακριτοποίηση της κάθε διατομής καθώς και ο αριθμός των διαμηκών πεπερασμένων στοιχείων από την ανάλυση του λογισμικού HOBET αναφέρονται στον πίνακα 2 ενώ στον πίνακα 3 παρουσιάζονται οι διακριτοποιήσεις που πραγματοποιήθηκαν από τις αναλύσεις τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων, Timoshenko και Euler-Bernoulli. Τα πλέγματα που χρησιμοποιήθηκαν για την ανάλυση μέσω της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης και των πεπερασμένων στοιχείων παρουσιάζονται στα σχήματα 1, 2 αντίστοιχα.

**Πίνακας 4.2-1: Γεωμετρικά-αδρανειακά στοιχεία εξεταζόμενων διατομών τύπου I**

Τύπος	h(m)	b(m)	$t_f$ (m)	$t_w$ (m)	A(m <sup>2</sup> )	I <sub>yy</sub> (m <sup>4</sup> )	I <sub>zz</sub> (m <sup>4</sup> )
HEB500	0.5	0.3	0.028	0.0145	$2.39 \times 10^{-2}$	$1.0724 \times 10^{-3}$	$1.2624 \times 10^{-4}$
Welded 1	0.5	0.3	0.017	0.009	$1.44 \times 10^{-2}$	$6.7103 \times 10^{-4}$	$7.6528 \times 10^{-5}$
Welded 2	0.5	0.3	0.016	0.007	$1.29 \times 10^{-2}$	$6.2221 \times 10^{-4}$	$7.2013 \times 10^{-5}$
Welded 3	0.5	0.3	0.013	0.005	$1.017 \times 10^{-2}$	$5.0696 \times 10^{-4}$	$5.8505 \times 10^{-5}$



**Σχήμα 4.2-1:** Πλέγματα που χρησιμοποιήθηκαν κατά την ανάλυση των διατομών μέσω της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης για τη διατομή HEB500 (α), 500×300.9.17 (β), 500×300.7.16 (γ), 500×300.5.16 (δ).



Σχήμα 4.2-2: Τυπική διάταξη (α) και πλέγμα (β) που χρησιμοποιήθηκαν κατά την ανάλυση μέσω τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων.

#### 4.2.1 Πρότυπη φόρτιση I

- Περίπτωση (i)

Πίνακας 4.2-1: Διακριτοποίηση διατομής μοντέλου που αναλύθηκε μέσω της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης

Διατομή	Μοντέλο	Διακριτοποίηση		
		Συνοριακά στοιχεία	Εγκάρσια Τετραεδρικά στοιχεία Στοιχεία Gauss Points	Διαμήκης (στοιχεία δοκού)
HEB500 2m		1,152	418	2x2 40
500×300.9.17 2m		1,260	528	2x2 40
500×300.7.16 2m		872	548	2x2 40
500×300.5.13 2m		1,092	421	2x2 40

**Πίνακας 4.2-2: Διακριτοποίηση διατομής μοντέλων βάσει μεθόδου τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων, θεωρίας δοκού Timoshenko και θεωρίας δοκού Euler-Bernoulli.**

Διατομή \ Μοντέλο	Τρισδιάστατα πεπερασμένα στοιχεία	Θεωρία δοκού Timoshenko	Θεωρία δοκού Euler-Bernoulli
HEB500 2m	48,600	80	80
500×300.9.17 2m	20,800	80	80
500×300.7.16 2m	25,350	80	80
500×300.5.13 2m	22,018	80	80

**Πίνακας 4.2-3: Σύγκριση κρίσιμου φορτίου λυγισμού όπως προέκυψε βάσει θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης και μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων.**

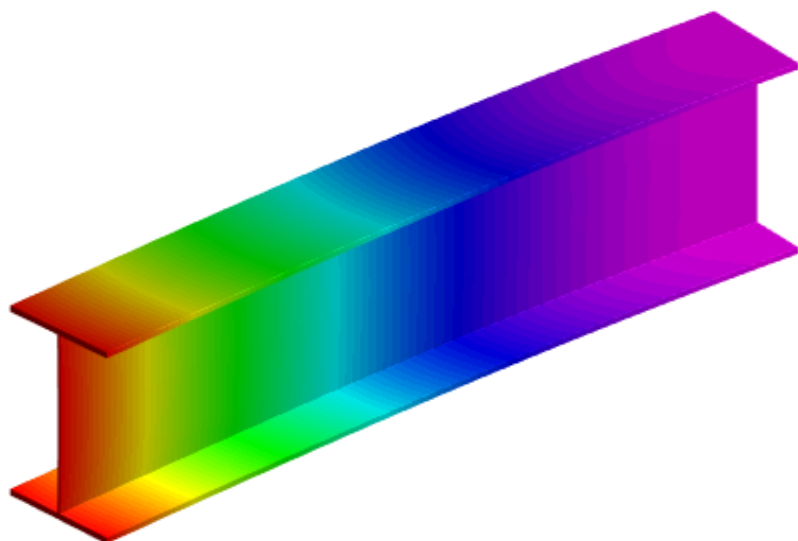
Διατομή \ Φορτίο λυγισμού	HOBT ( $N_{\text{dofs}}=76$ )	Τρισδιάστατα πεπερασμένα στοιχεία	Απόκλιση
HEB500 2m	14,893.79	14,871.00	0.14%
500×300.9.17 2m	3,614.49	3,538.66	2.14%
500×300.7.16 2m	2,123.48	1,994.7	6.45%
500×300.5.13 2m	870.12	801.66	8.54%

**Πίνακας 4.2-4: Σύγκριση κρίσιμου φορτίου λυγισμού βάσει της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης και της θεωρίας δοκού Timoshenko.**

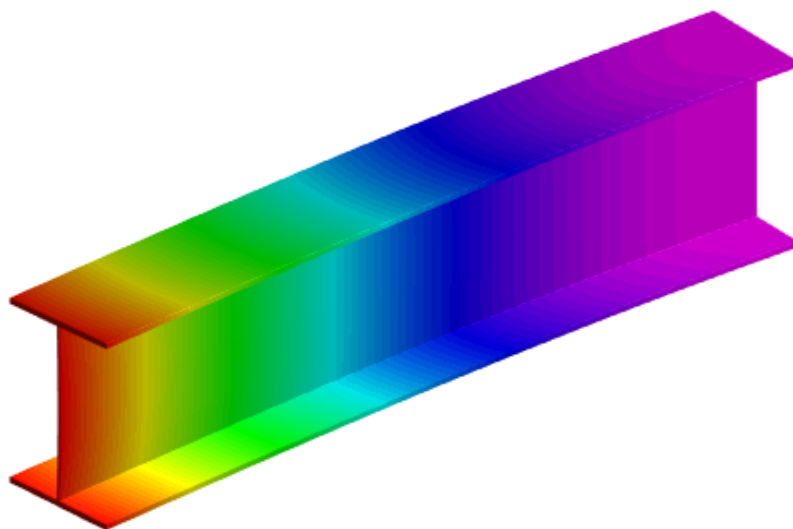
Διατομή \ Φορτίο λυγισμού	HOBT ( $N_{\text{dofs}}=76$ )	Θεωρία δοκού Timoshenko	Απόκλιση
HEB500 2m	14,893.79	8,611.81	42.17%
500×300.9.17 2m	3,614.49	1,713.04	52.60%
500×300.7.16 2m	2,123.48	1,309.11	38.35%
500×300.5.13 2m	870.12	666.21	23.43%

**Πίνακας 4.2-5: Σύγκριση κρίσιμου φορτίου λυγισμού βάσει θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης και θεωρίας δοκού Euler-Bernoulli.**

Διατομή \ Φορτίο λυγισμού	HOBT ( $N_{dofs}=76$ )	Θεωρία δοκού Euler-Bernoulli	Απόκλιση
HEB500 2m	14,893.79	8,611.81	42.17%
500×300.9.17 2m	3,614.49	1,713.04	52.60%
500×300.7.16 2m	2,123.48	1,309.11	38.35%
500×300.5.13 2m	870.12	666.21	23.43%

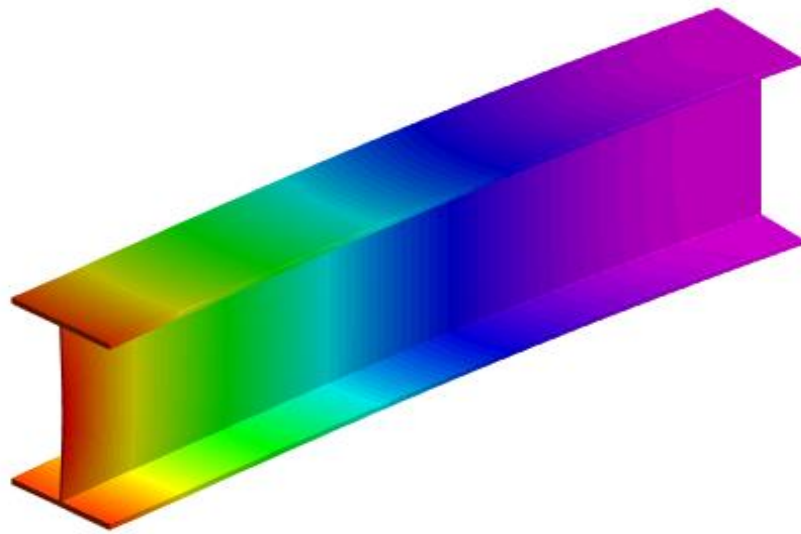


(α)

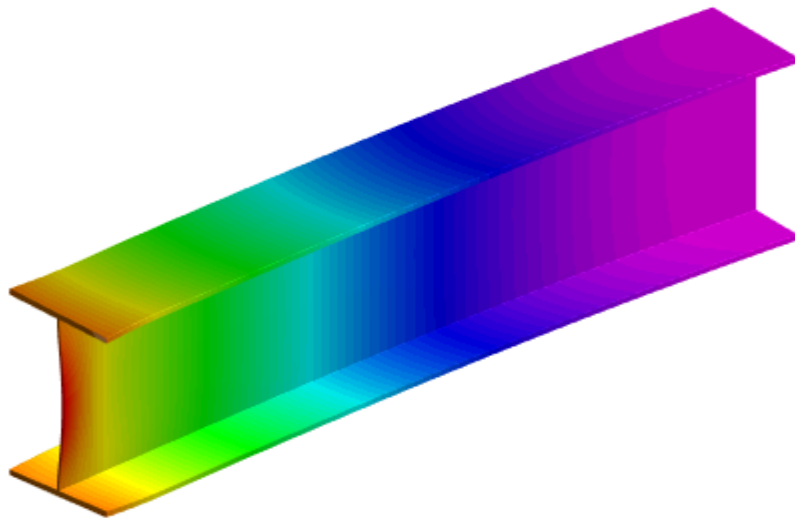


(β)

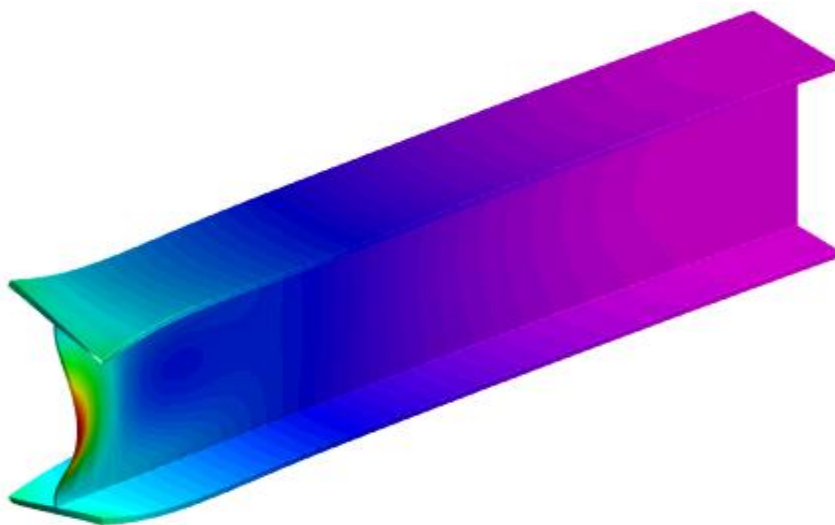




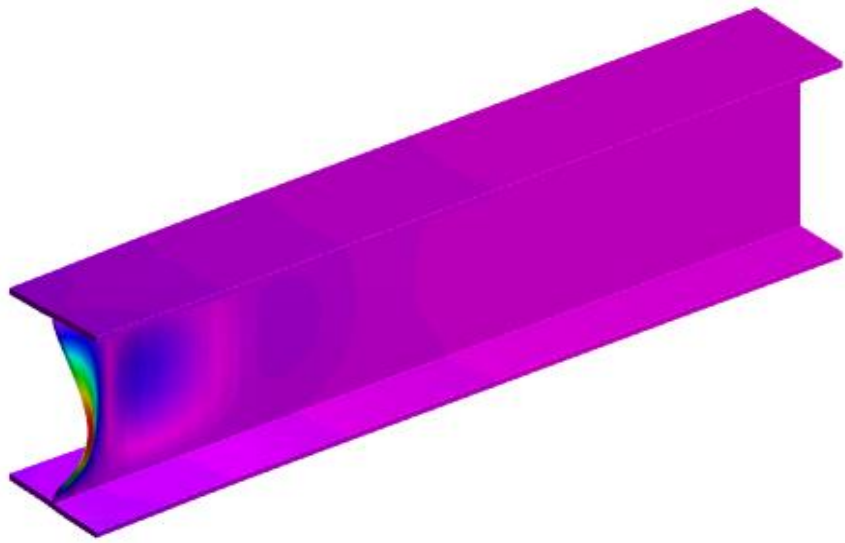
(γ)



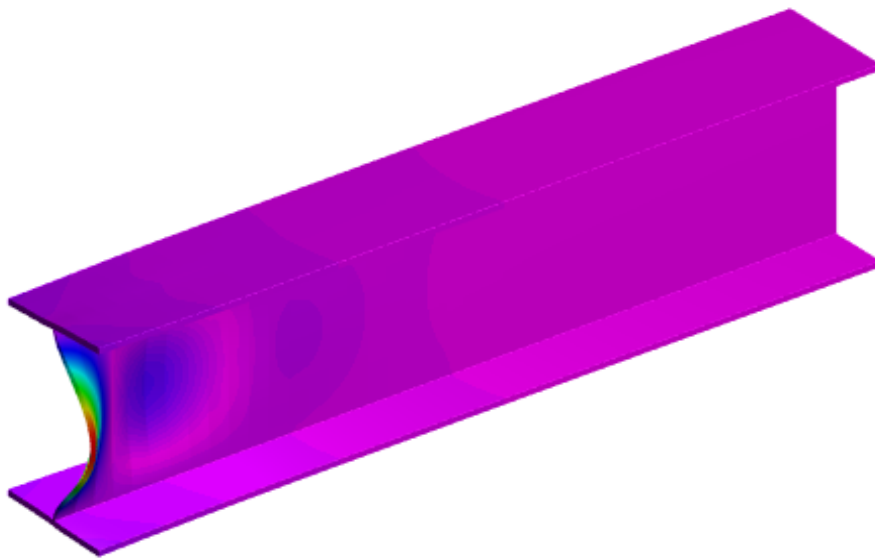
(δ)



(ε)

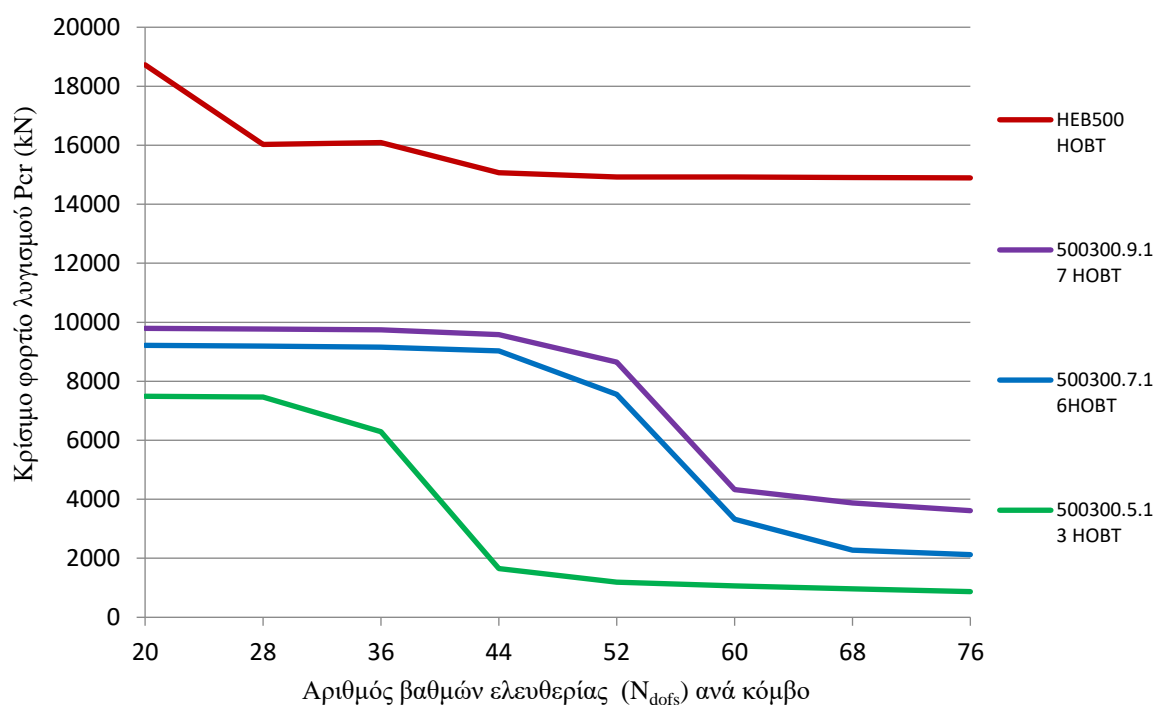


(στ)

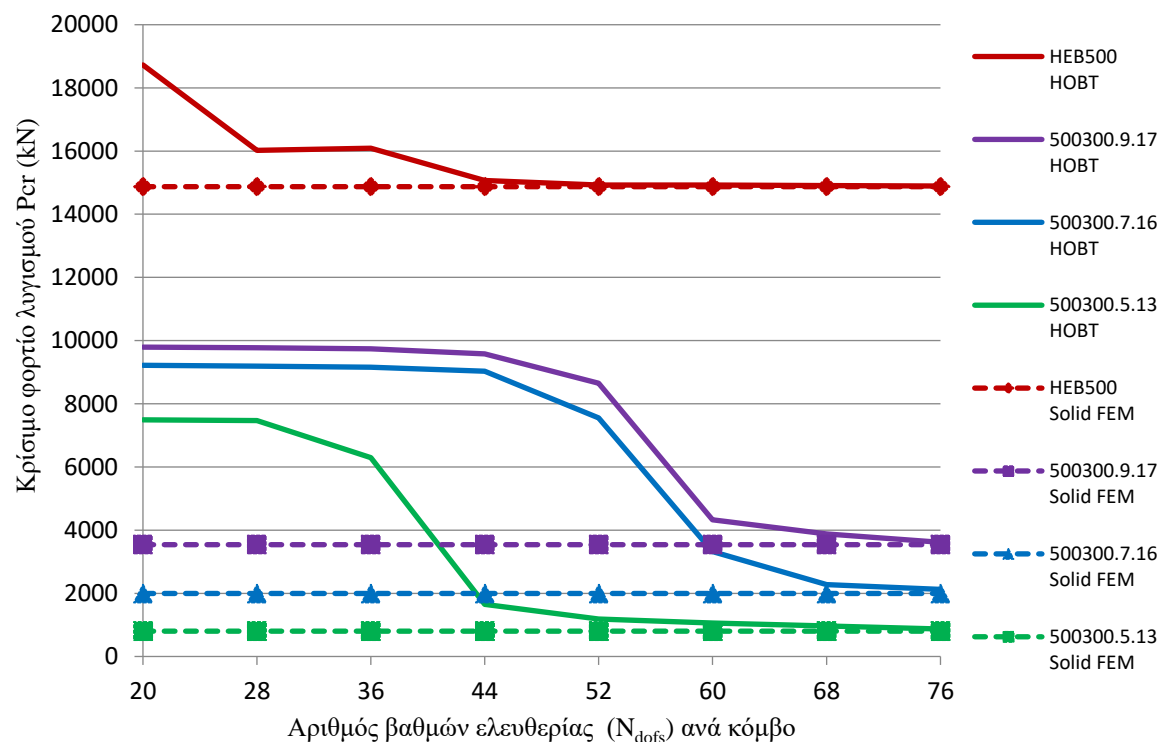


(ζ)

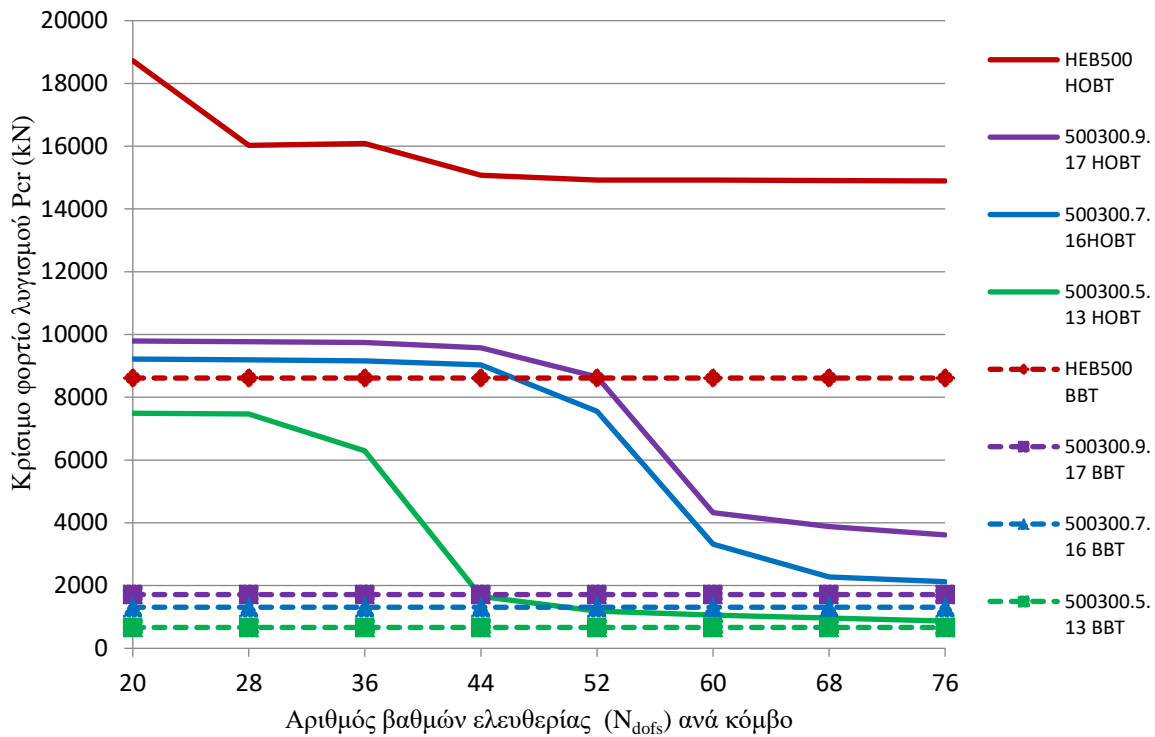
Σχήμα 4.2-1: Παραμορφωμένη εικόνα διατομής 500×300.7.16 μήκους 2.00m όπως αυτή προκύπτει μέσω της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης (HOBT) για 20 β.ε. ανά κόμβο (α), 28 β.ε. ανά κόμβο (β), 36 β.ε. ανά κόμβο (γ), 44 β.ε. ανά κόμβο (δ), 52 β.ε. ανά κόμβο (ε), 60 β.ε. ανά κόμβο (στ), 68 β.ε. ανά κόμβο (ζ)



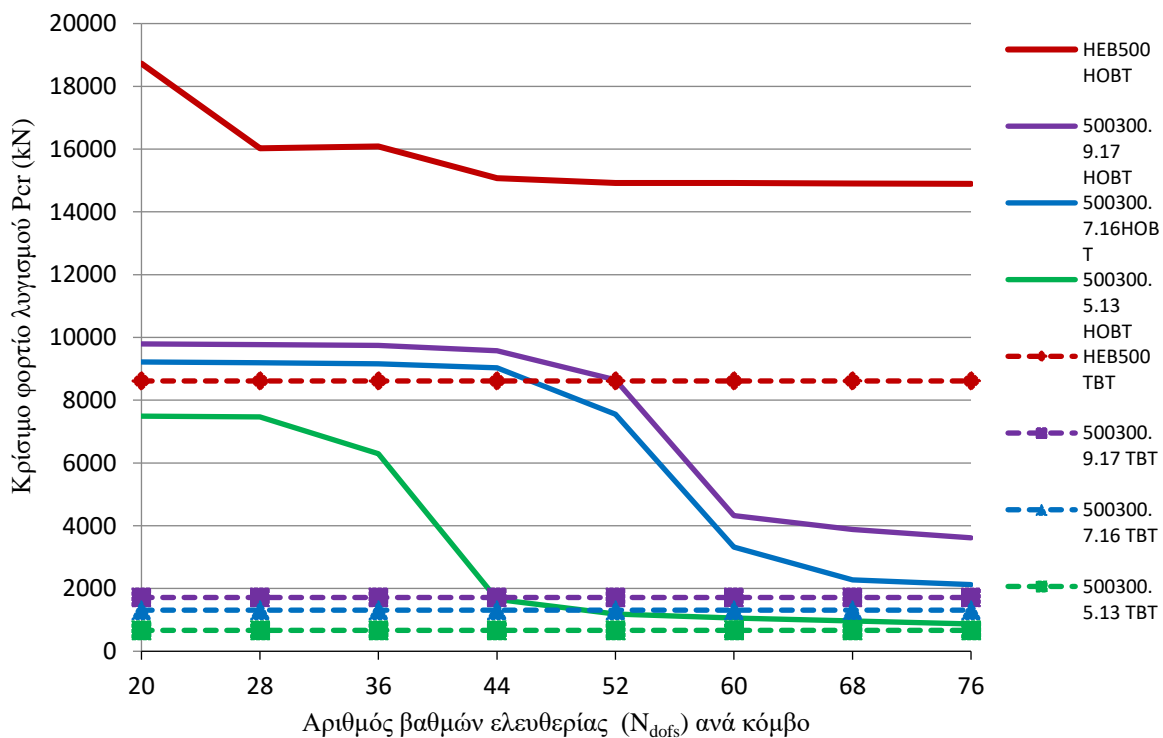
Σχήμα 4.2-2: Κρίσιμο φορτίο λυγισμού, όπως αυτό υπολογίζεται μέσω της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης (HOBt), για διάφορους βαθμούς ελευθερίας.



Σχήμα 4.2-3: Σύγκριση κρίσιμου φορτίου λυγισμού όπως αυτό προέκυψε από ανάλυση μέσω θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης (HOBt) και από ανάλυση με χρήση τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων.



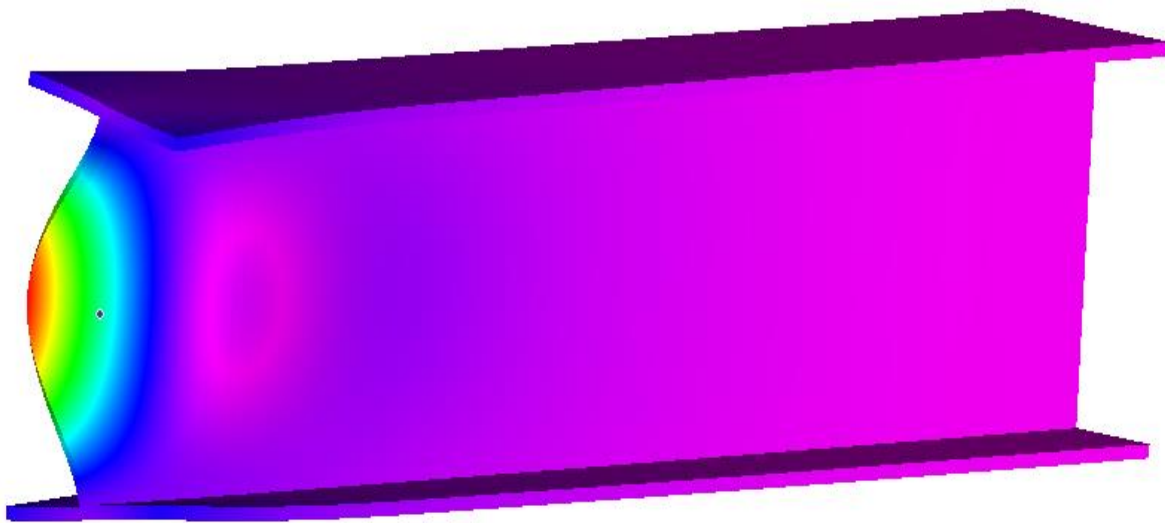
Σχήμα 4.2-6: Σύγκριση κρίσιμου φορτίου λυγισμού όπως αυτό προέκυψε από ανάλυση μέσω θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης (HOBt) και από ανάλυση με χρήση της θεωρίας δοκού Bernoulli.



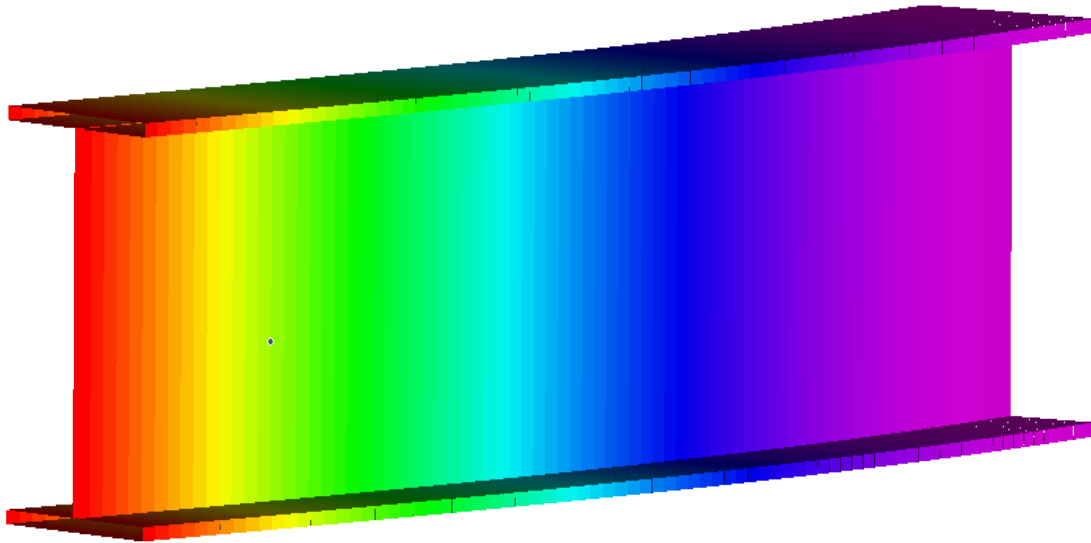
Σχήμα 4.2-7: Σύγκριση κρίσιμου φορτίου λυγισμού όπως αυτό προέκυψε από ανάλυση μέσω θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης (HOBt) και από ανάλυση με χρήση της θεωρίας δοκού Timoshenko.



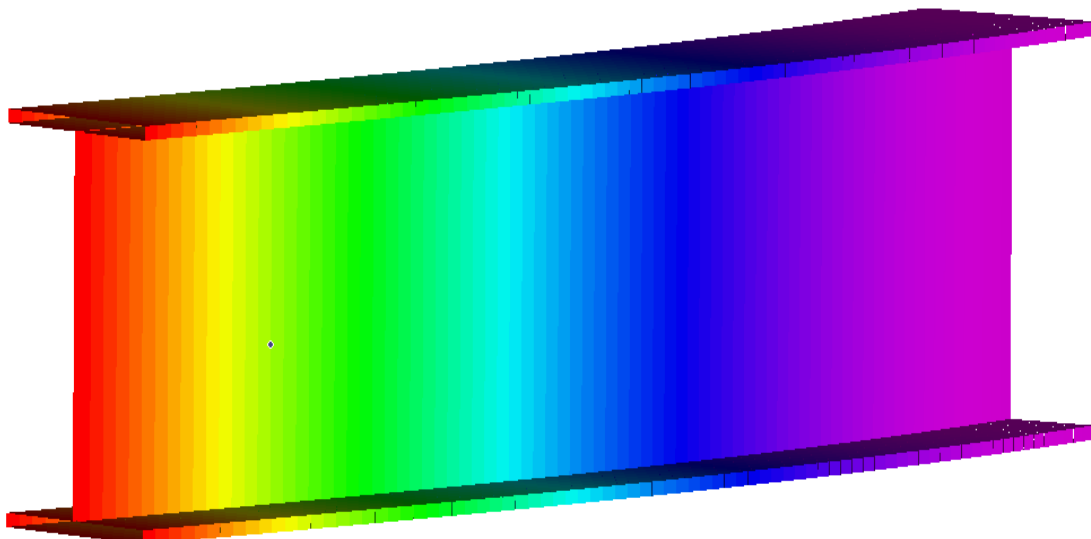
Σχήμα 4.2-8: Παραμορφωμένη εικόνα προβόλου μήκους 2m, διατομής 500x300.9.17, όπως όπως αυτή προέκυψε από την ανάλυση σύμφωνα με την θεωρία δοκού ανώτερης τάξης για  $N_{dofs}=76$ .



Σχήμα 4.2-9: Παραμορφωμένη εικόνα προβόλου μήκους 2m, διατομής 500x300.9.17, όπως όπως αυτή προέκυψε από την ανάλυση τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων.



Σχήμα 4.2-10: Παραμορφωμένη εικόνα προβόλου μήκους 2m, διατομής 500x300.9.17, όπως όπως αυτή προέκυψε από την ανάλυση μέσω της θεωρίας δοκού Euler-Bernoulli.



Σχήμα 4.2-11: Παραμορφωμένη εικόνα προβόλου μήκους 2m, διατομής 500x300.9.17, όπως όπως αυτή προέκυψε από την ανάλυση μέσω της θεωρίας δοκού Timoshenko.

- Περίπτωση (ii)

**Πίνακας 4.2-12: Διακριτοποίηση διατομής μοντέλων βάσει μεθόδου τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων, θεωρίας δοκού Timoshenko και θεωρίας δοκού Euler-Bernoulli.**

Διατομή \ Μοντέλο	Τρισδιάστατα πεπερασμένα στοιχεία	Θεωρία δοκού Timoshenko	Θεωρία δοκού Euler-Bernoulli
500×300.9.17 5m	67,600	80	80
500×300.7.16 5m	62,600	80	80
500×300.5.13 5m	43,600	80	80

**Πίνακας 4.2-13: Σύγκριση κρίσιμου φορτίου λυγισμού όπως προέκυψε βάσει θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης και μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων.**

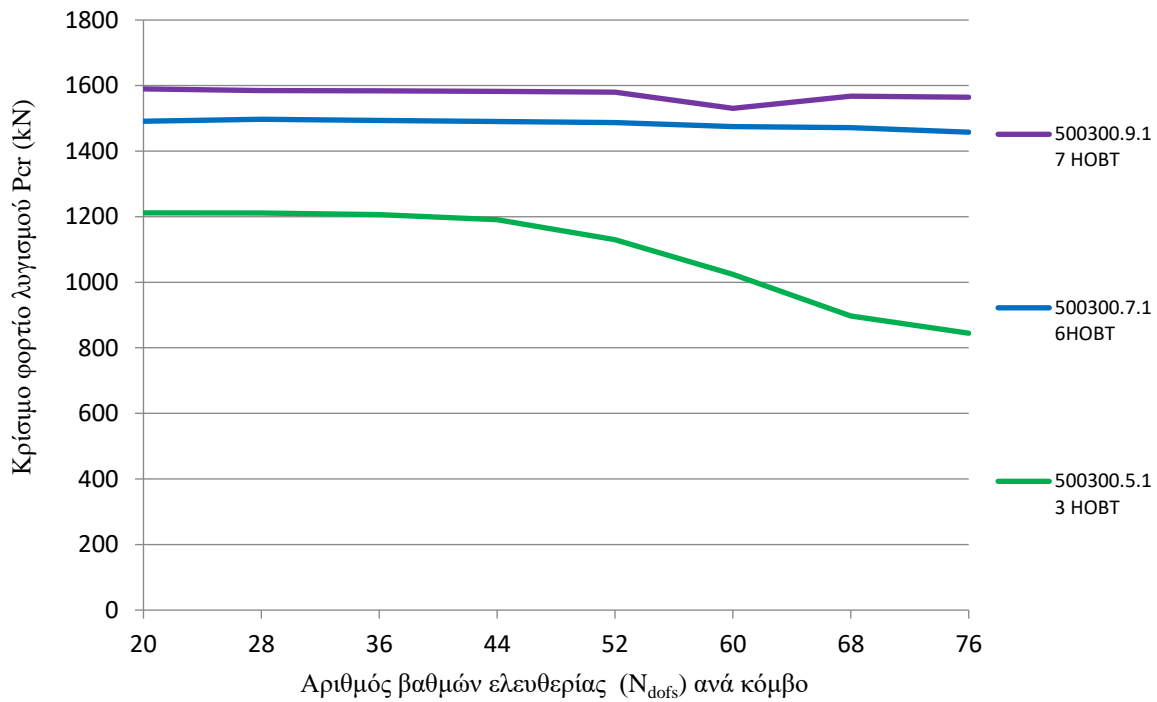
Διατομή \ Φορτίο λυγισμού	HOBt ( $N_{dofs}=76$ )	Τρισδιάστατα πεπερασμένα στοιχεία	Απόκλιση
500×300.9.17 5m	1,564.30	1,562.60	0.10%
500×300.7.16 5m	1,457.89	1,444.25	0.93%
500×300.5.13 5m	844.65	788.21	7.16%

**Πίνακας 4.2-14: Σύγκριση κρίσιμου φορτίου λυγισμού βάσει της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης και της θεωρίας δοκού Timoshenko.**

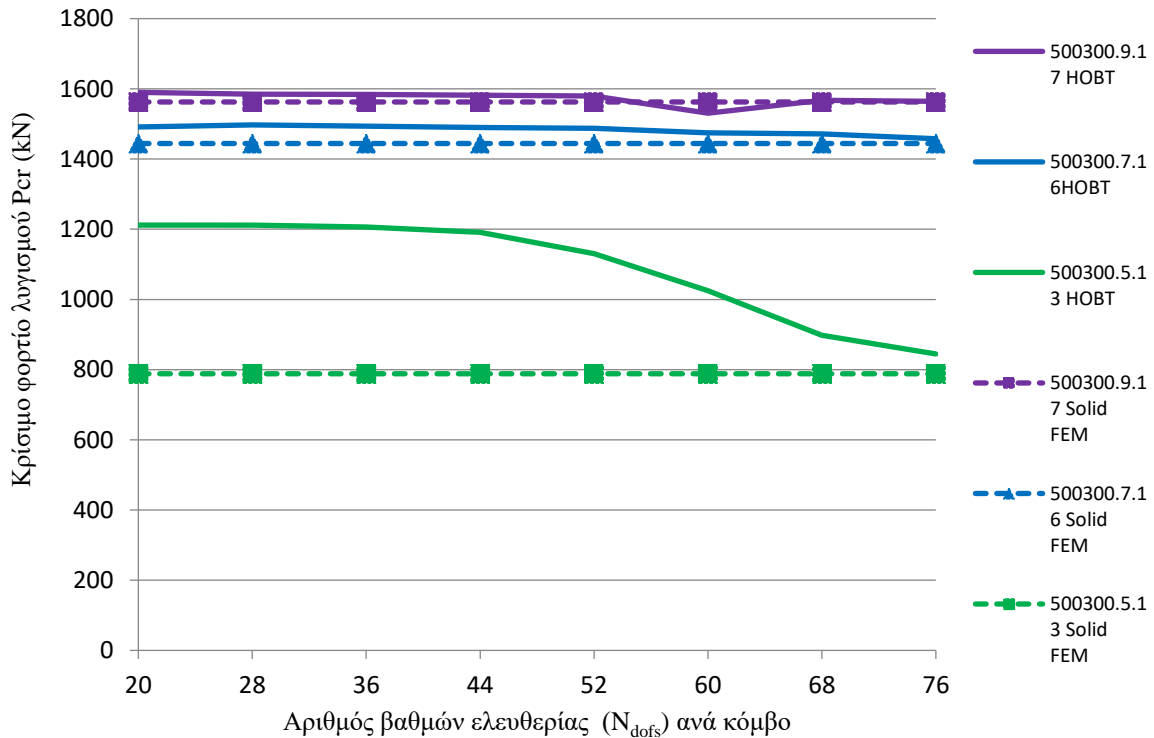
Διατομή \ Φορτίο λυγισμού	HOBt ( $N_{dofs}=76$ )	Θεωρία δοκού Timoshenko	Απόκλιση
500×300.9.17 5m	1,564.30	1,582.80	1.18%
500×300.7.16 5m	1,457.89	1,309.11	10.20%
500×300.5.13 5m	844.65	666.21	21.12%

**Πίνακας 4.2-15: Σύγκριση κρίσιμου φορτίου λυγισμού βάσει της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης και της θεωρίας δοκού Euler-Bernoulli.**

Διατομή \ Φορτίο λυγισμού	HOBt ( $N_{dofs}=76$ )	Θεωρία δοκού Euler-Bernoulli	Απόκλιση
500×300.9.17 5m	1,564.30	1,586.14	1.40%
500×300.7.16 5m	1,457.89	1,309.25	10.20%
500×300.5.13 5m	844.65	666.21	21.12%

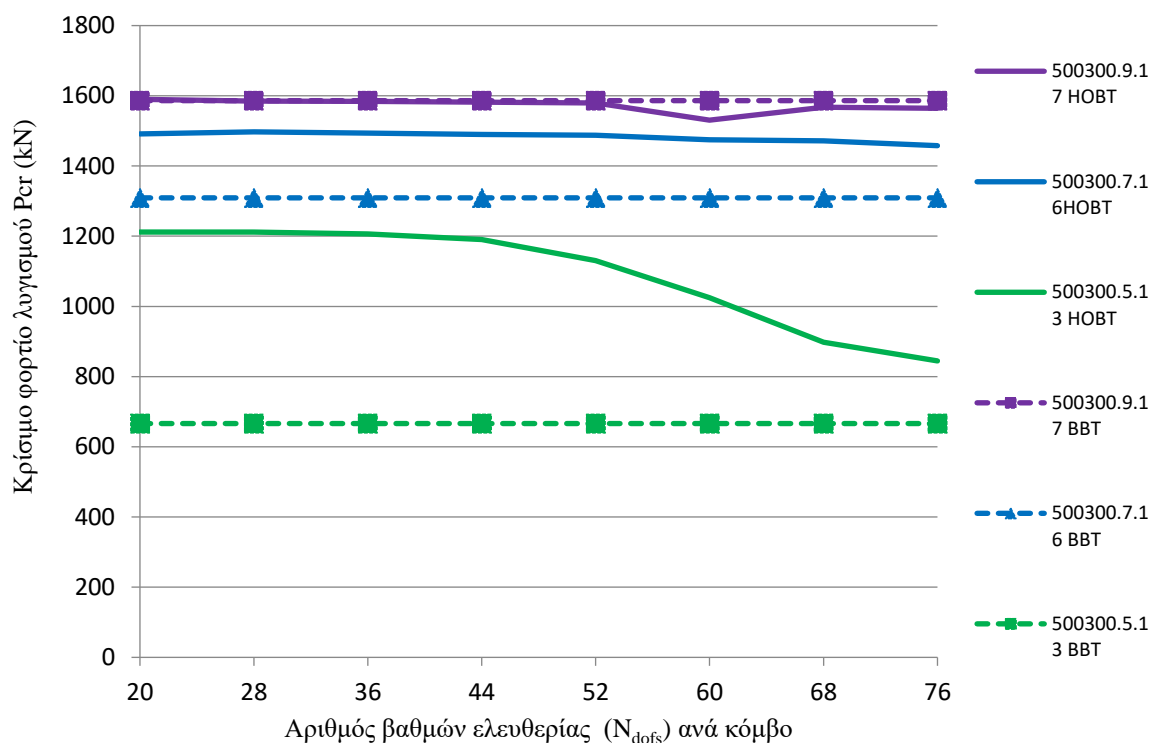


Σχήμα 4.2-12: Κρίσιμο φορτίο λυγισμού, όπως αυτό υπολογίζεται μέσω της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης (HOBT), για διάφορους βαθμούς ελευθερίας.

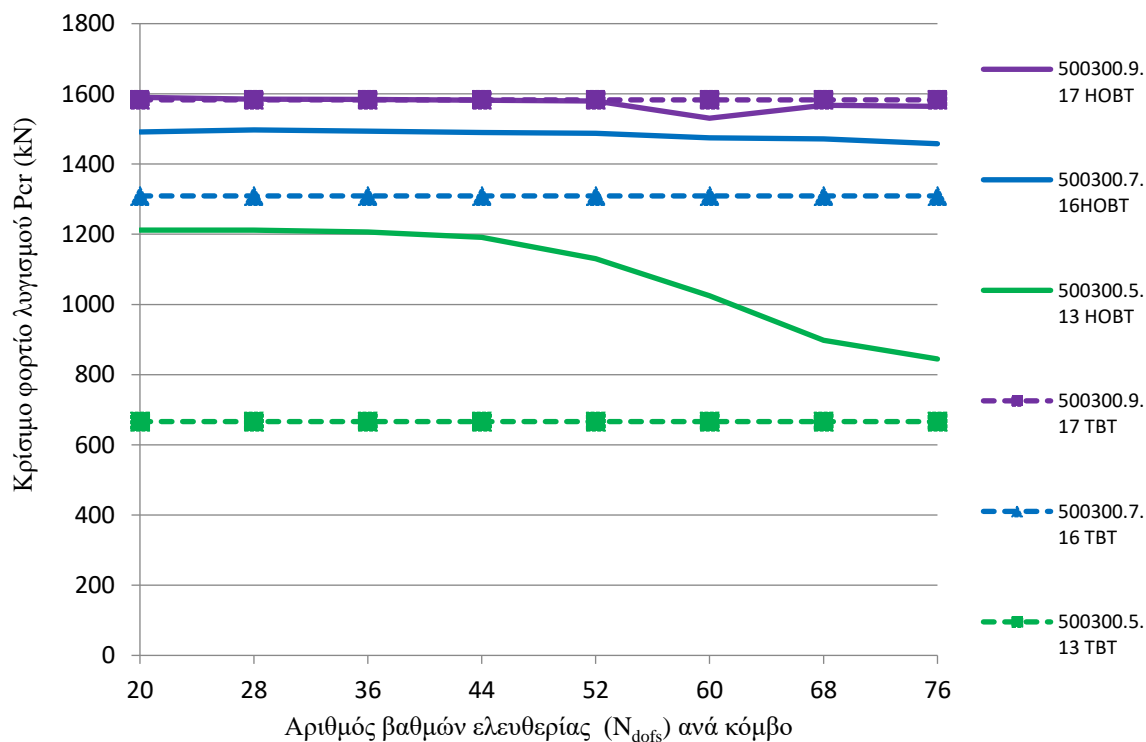


Σχήμα 4.2-13: Σύγκριση κρίσιμου φορτίου λυγισμού όπως αυτό προέκυψε από ανάλυση μέσω θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης (HOBT) και από ανάλυση με χρήση τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων.

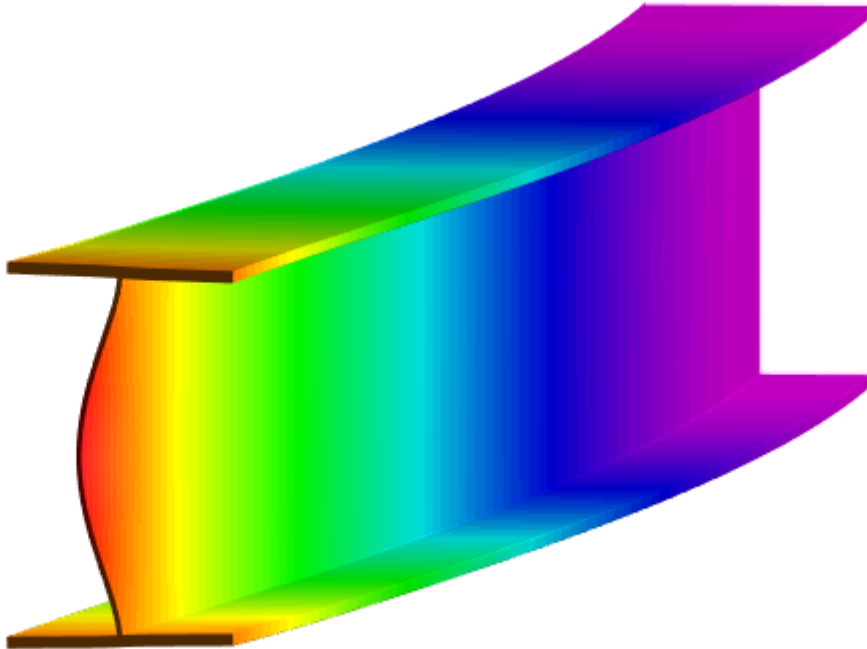




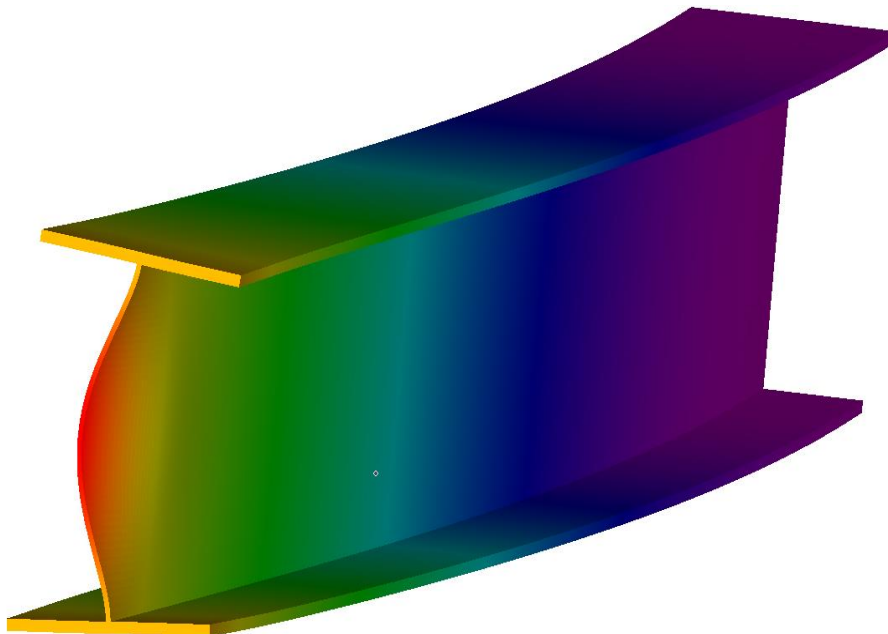
Σχήμα 4.2-14: Σύγκριση κρίσιμου φορτίου λυγισμού όπως αυτό προέκυψε από ανάλυση μέσω θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης (HOBt) και από ανάλυση με χρήση της θεωρίας δοκού Bernoulli.



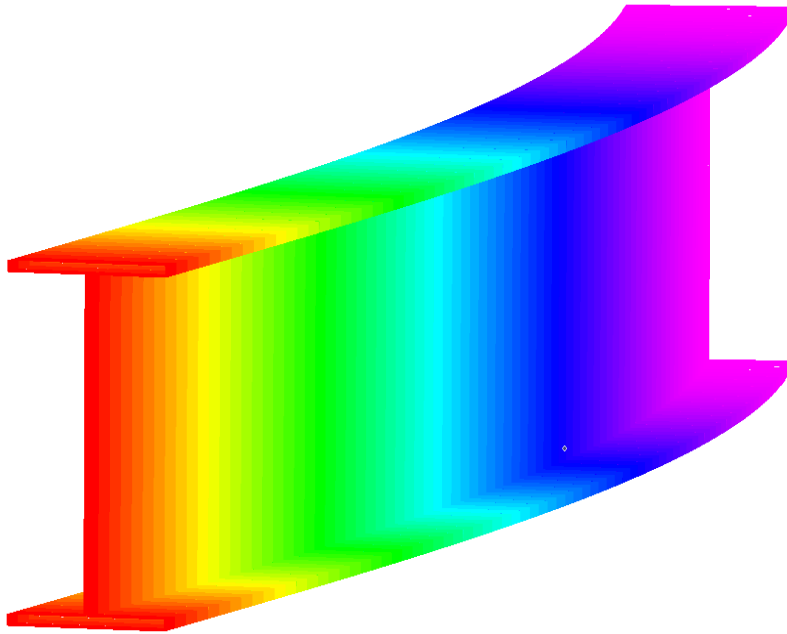
Σχήμα 4.2-15: Σύγκριση κρίσιμου φορτίου λυγισμού όπως αυτό προέκυψε από ανάλυση μέσω θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης (HOBt) και από ανάλυση με χρήση της θεωρίας δοκού Timoshenko.



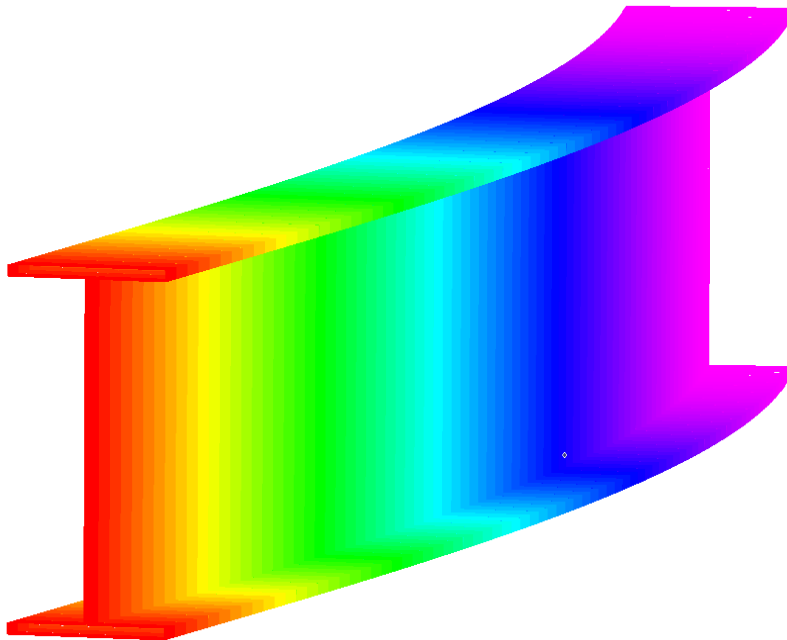
Σχήμα 4.2-16: Παραμορφωμένη εικόνα προβόλου μήκους 5m, διατομής 500x300.7.16, όπως όπως αυτή προέκυψε από την ανάλυση σύμφωνα με την θεωρία δοκού ανώτερης τάξης για  $N_{dofs}=76$ .



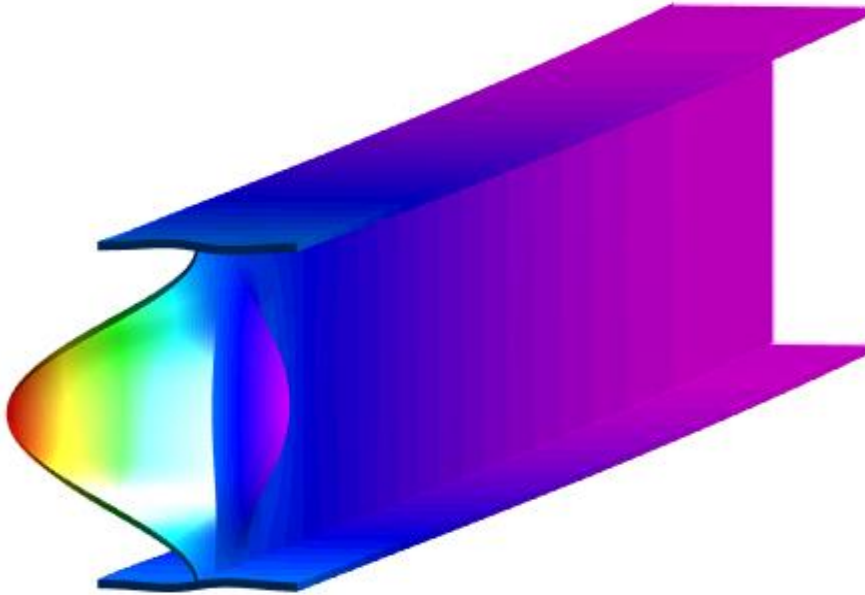
Σχήμα 4.2-17: Παραμορφωμένη εικόνα προβόλου μήκους 5m, διατομής 500x300.7.16, όπως όπως αυτή προέκυψε από την ανάλυση τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων.



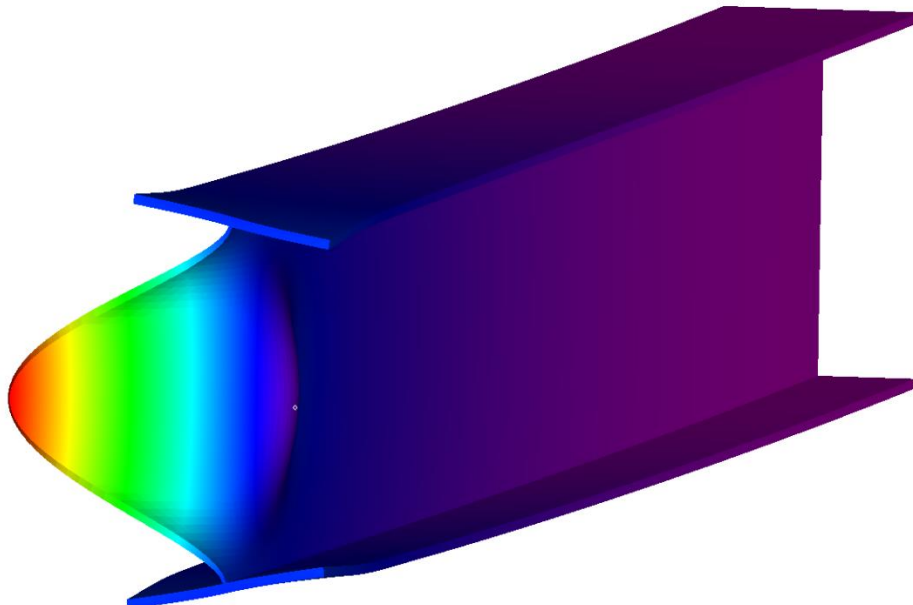
**Σχήμα 4.2-18:** Παραμορφωμένη εικόνα προβόλου μήκους 5m, διατομής 500x300.7.16, όπως όπως αυτή προέκυψε από την ανάλυση μέσω της θεωρίας δοκού Euler-Bernoulli.



**Σχήμα 4.2-19:** Παραμορφωμένη εικόνα προβόλου μήκους 5m, διατομής 500x300.7.16, όπως όπως αυτή προέκυψε από την ανάλυση μέσω της θεωρίας δοκού Timoshenko.



Σχήμα 4.2-20: Παραμορφωμένη εικόνα προβόλου μήκους 5m, διατομής 500x300.5.13, όπως όπως αυτή προέκυψε από την ανάλυση σύμφωνα με την θεωρία δοκού ανώτερης τάξης για  $N_{dofs}=76$ .



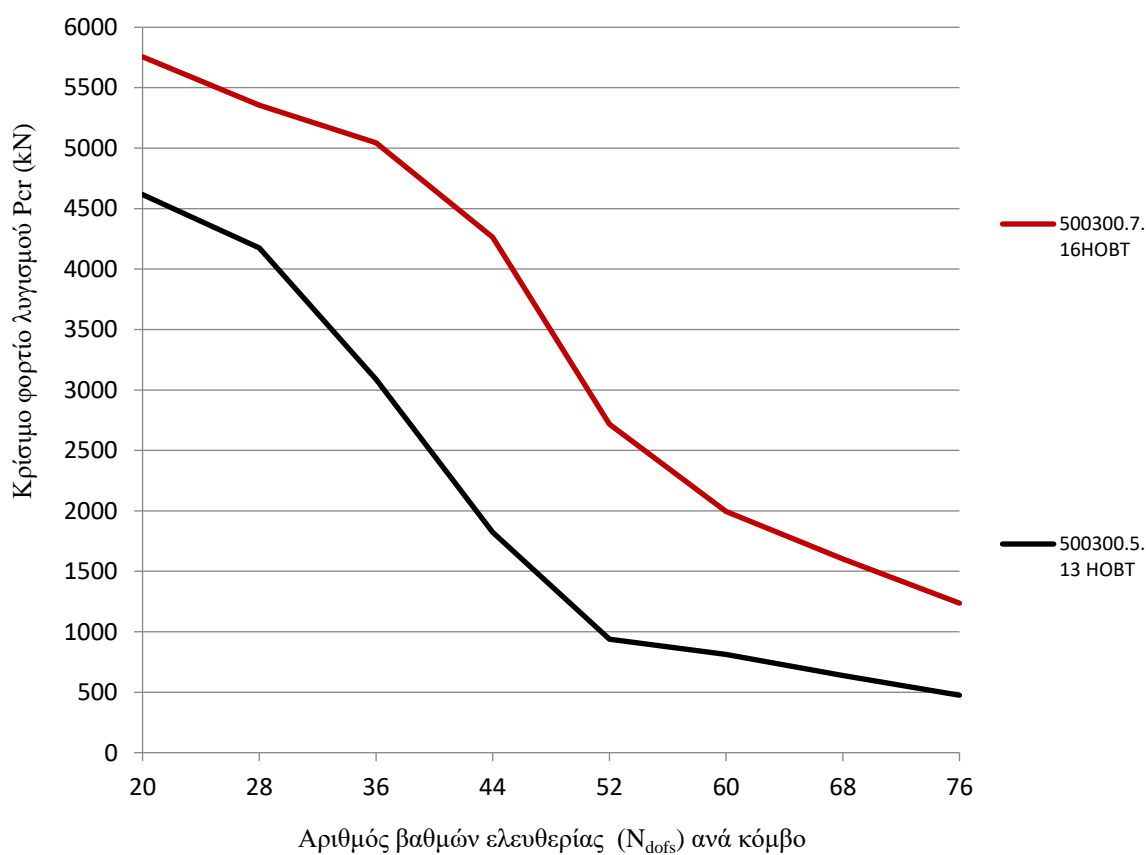
Σχήμα 4.2-21: Παραμορφωμένη εικόνα προβόλου μήκους 5m, διατομής 500x300.5.13, όπως όπως αυτή προέκυψε από την ανάλυση τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων.

#### 4.2.2 Πρότυπη φόρτιση II

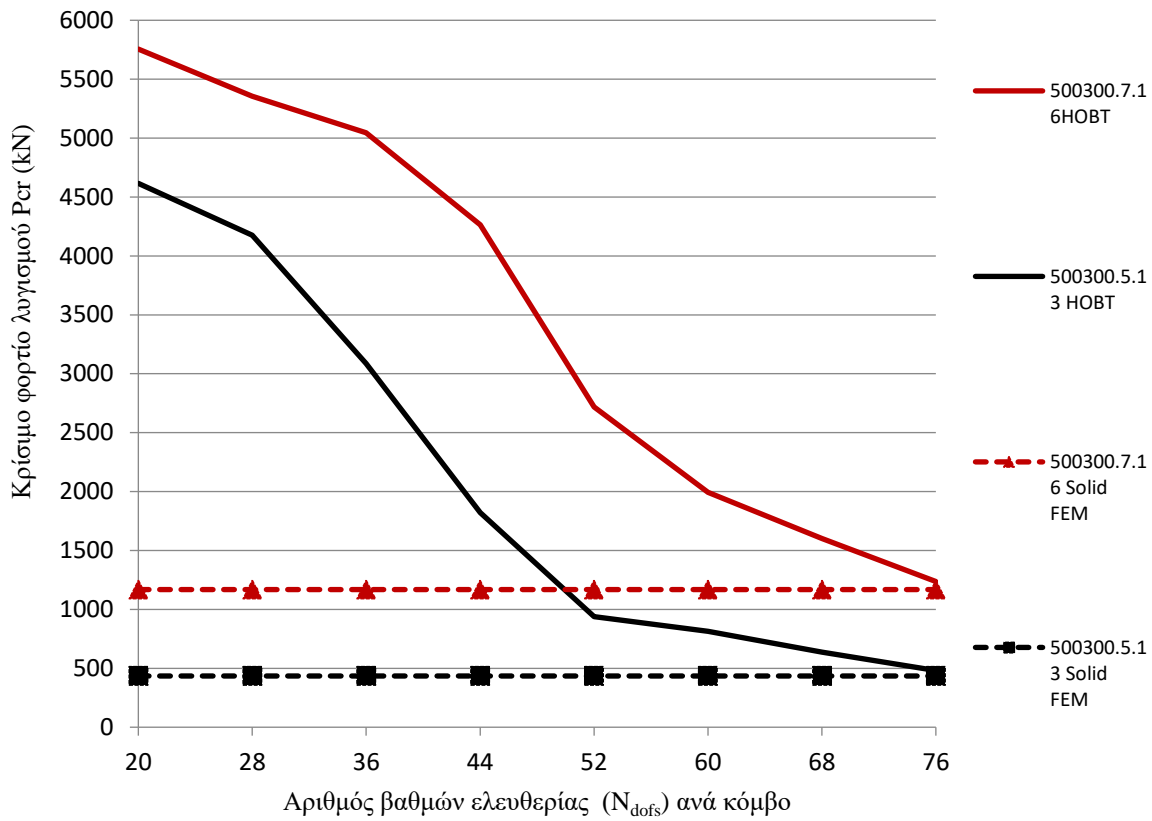
- Περίπτωση (i)

**Πίνακας 4.2-16: Σύγκριση κρίσιμου φορτίου λυγισμού όπως προέκυψε βάσει θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης και μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων.**

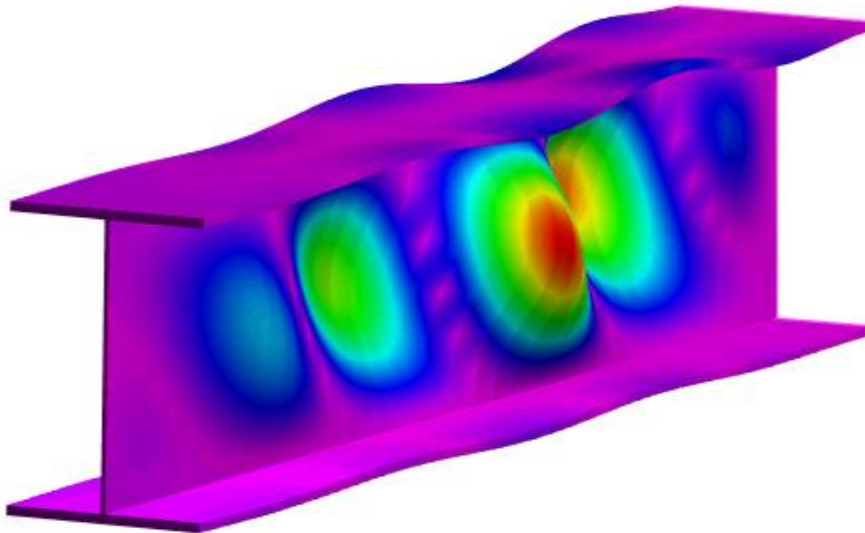
Φορτίο λυγισμού Διατομή	HOBT ( $N_{dofs}=76$ )	Τρισδιάστατα πεπερασμένα στοιχεία	Απόκλιση
500×300.7.16 2m	1,236.64	1,168.20	5.85%
500×300.5.13 2m	475.12	434.70	9.29%



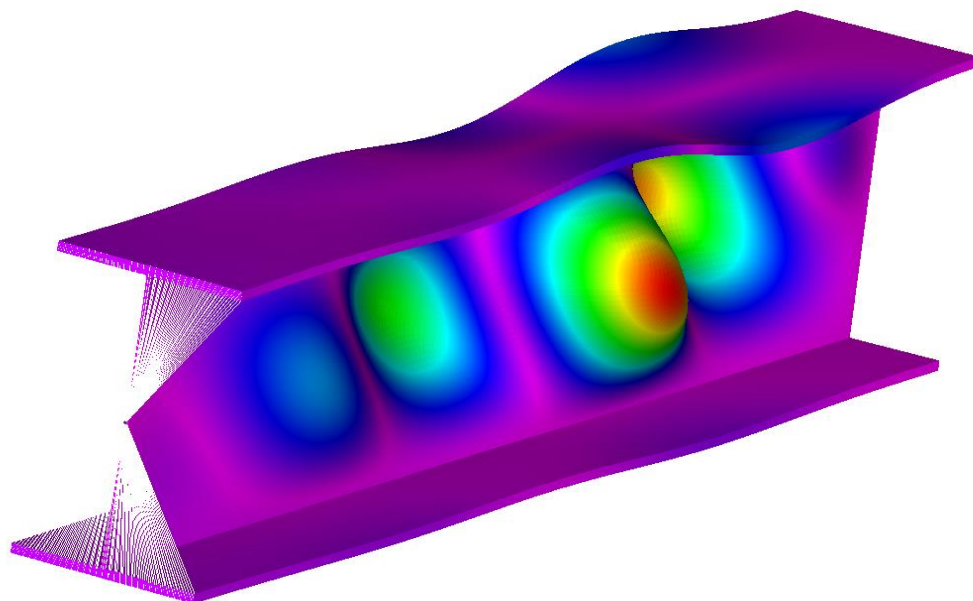
**Σχήμα 4.2-22: Κρίσιμο φορτίο λυγισμού, όπως αυτό υπολογίζεται μέσω της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης (HOBT), για διάφορους βαθμούς ελευθερίας.**



Σχήμα 4.2-23: Σύγκριση κρίσιμου φορτίου λυγισμού όπως αυτό προέκυψε από ανάλυση μέσω θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης (HOBT) και από ανάλυση με χρήση τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων.



Σχήμα 4.2-24: Παραμορφωμένη εικόνα προβόλου μήκους 2m, διατομής 500x300.7.16, όπως όπως αυτή προέκυψε από την ανάλυση σύμφωνα με την θεωρία δοκού ανώτερης τάξης για  $N_{dofs}=76$ .

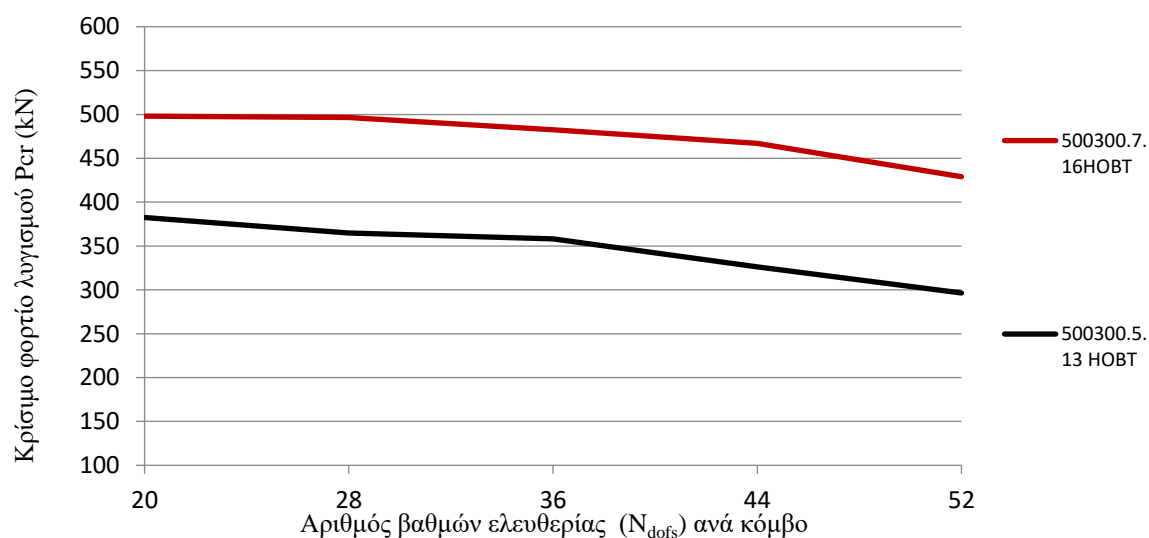


Σχήμα 4.2-25: Παραμορφωμένη εικόνα προβόλου μήκους 2m, διατομής 500x300.7.16, όπως όπως αυτή προέκυψε από την ανάλυση τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων.

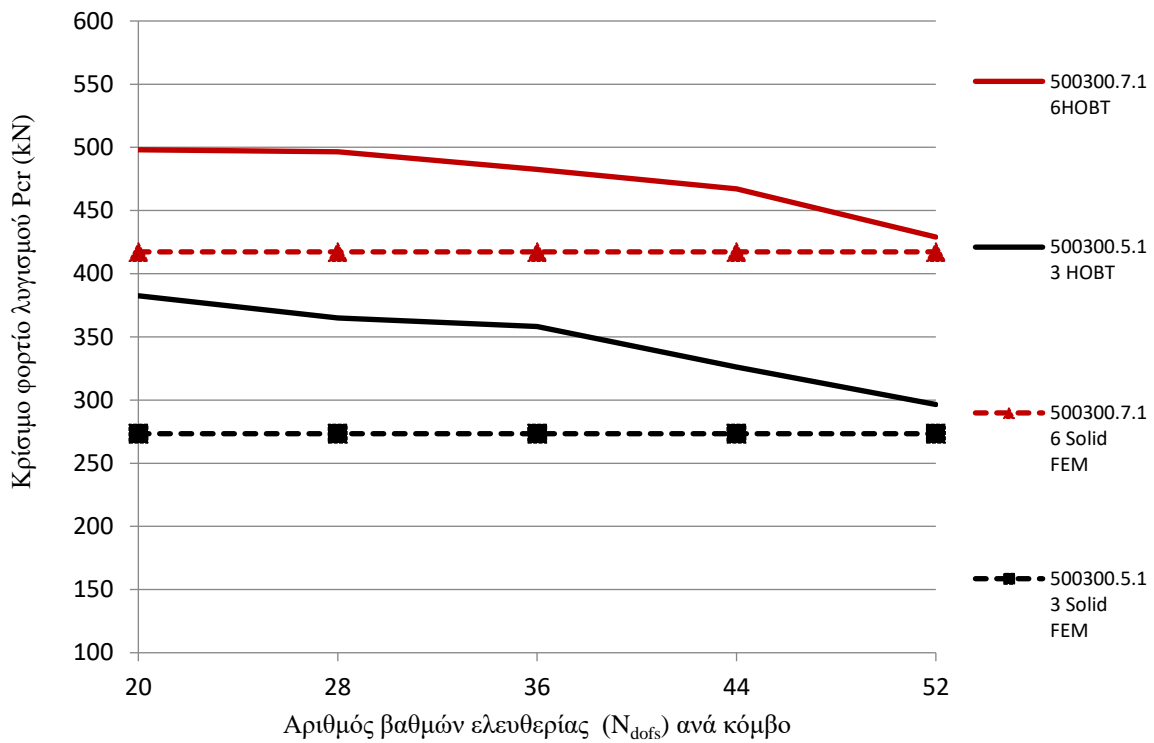
- Περίπτωση (ii)

Πίνακας 4.2-17: Σύγκριση κρίσιμου φορτίου λυγισμού όπως προέκυψε βάσει θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης και μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων.

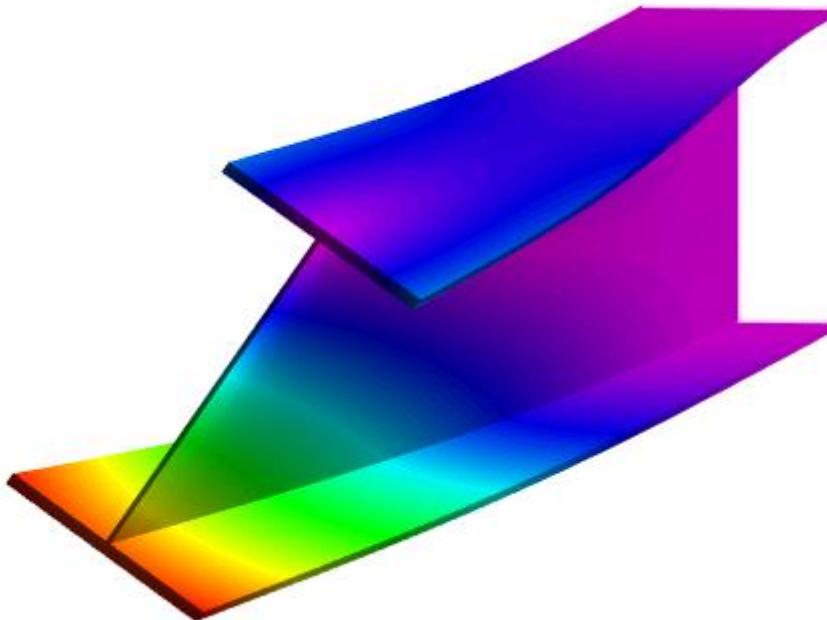
Φορτίο λυγισμού Διατομή	HOBT ( $N_{dofs}=76$ )	Τρισδιάστατα πεπερασμένα στοιχεία	Απόκλιση
500x300.7.16 5m	439.02	417.28	5.21%
500x300.5.13 5m	296.49	273.37	8.45%



Σχήμα 4.2-26: Σύγκριση κρίσιμου φορτίου λυγισμού όπως αυτό προέκυψε από ανάλυση μέσω θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης (HOBT) και από ανάλυση με χρήση τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων.

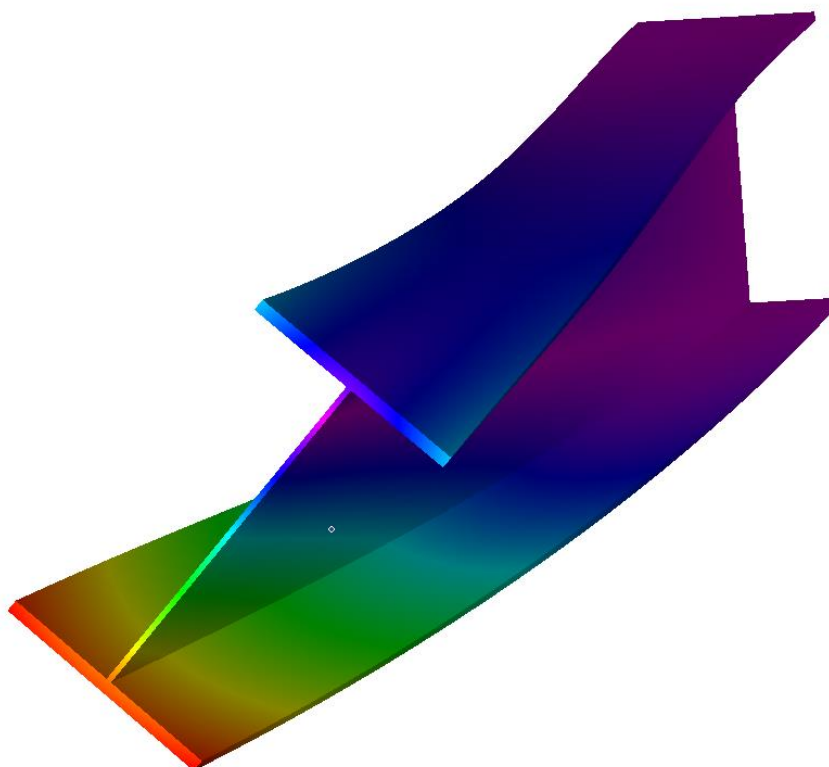


Σχήμα 4.2-27: Σύγκριση κρίσιμου φορτίου λυγισμού όπως αυτό προέκυψε από ανάλυση μέσω θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης (HOBT) και από ανάλυση με χρήση τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων.



Σχήμα 4.2-28: Παραμορφωμένη εικόνα προβόλου μήκους 5m, διατομής 500x300.7.16, όπως όπως αυτή προέκυψε από την ανάλυση σύμφωνα με την θεωρία δοκού ανώτερης τάξης για  $N_{dofs}=52$ .



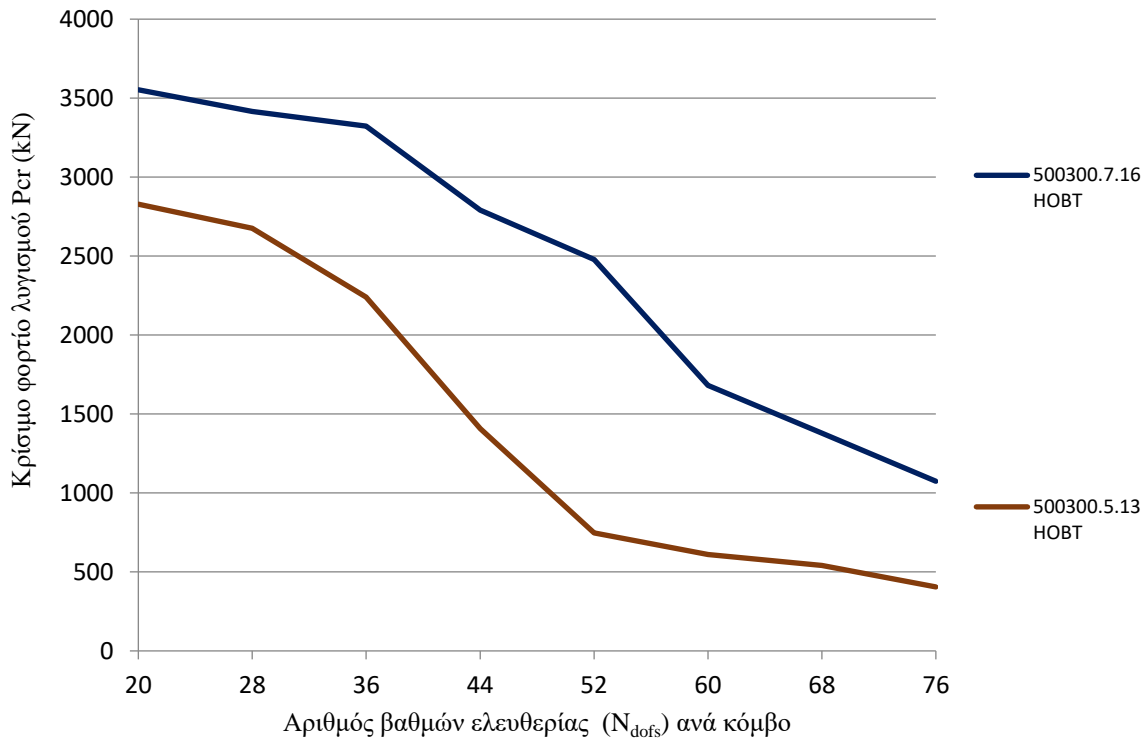


Σχήμα 4.2-29: Παραμορφωμένη εικόνα προβόλου μήκους 5m, διατομής 500x300.7.16, όπως όπως αυτή προέκυψε από την ανάλυση τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων.

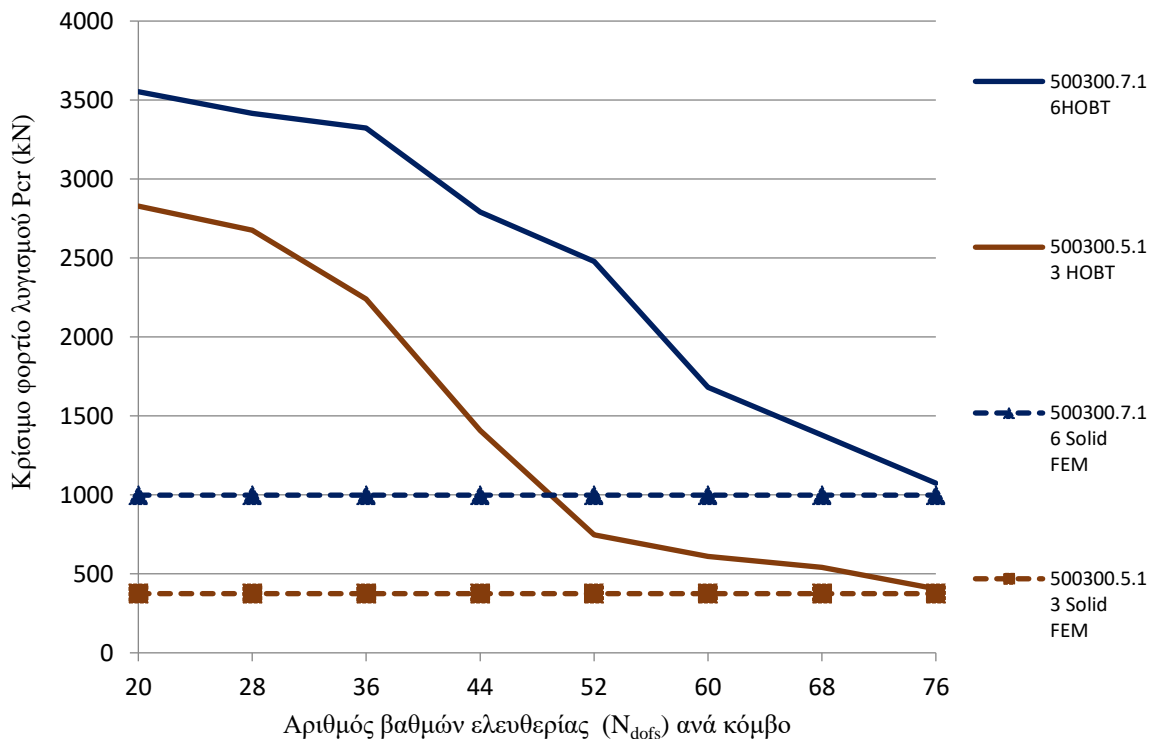
#### 4.2.3 Πρότυπη φόρτιση I και II

Πίνακας 4.2-18: Σύγκριση κρίσιμου φορτίου λυγισμού όπως προέκυψε βάσει θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης και μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων.

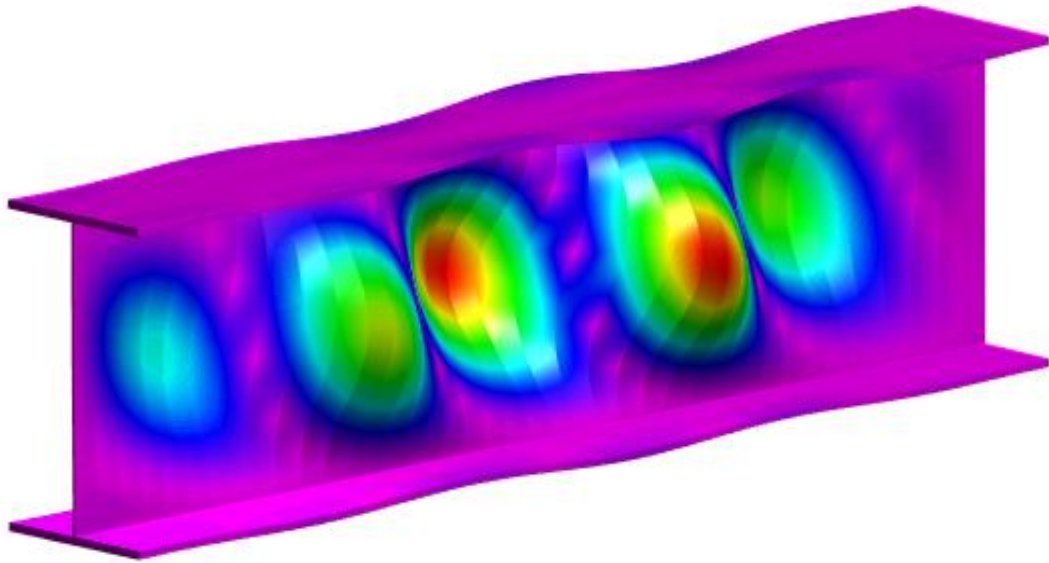
Διατομή \ Φορτίο λυγισμού	HOBT ( $N_{dofs}=76$ )	Τρισδιάστατα πεπερασμένα στοιχεία	Απόκλιση
500x300.7.16 2m	1,074.21	998.37	5.85%
500x300.5.13 2m	405.11	374.82	8.08%



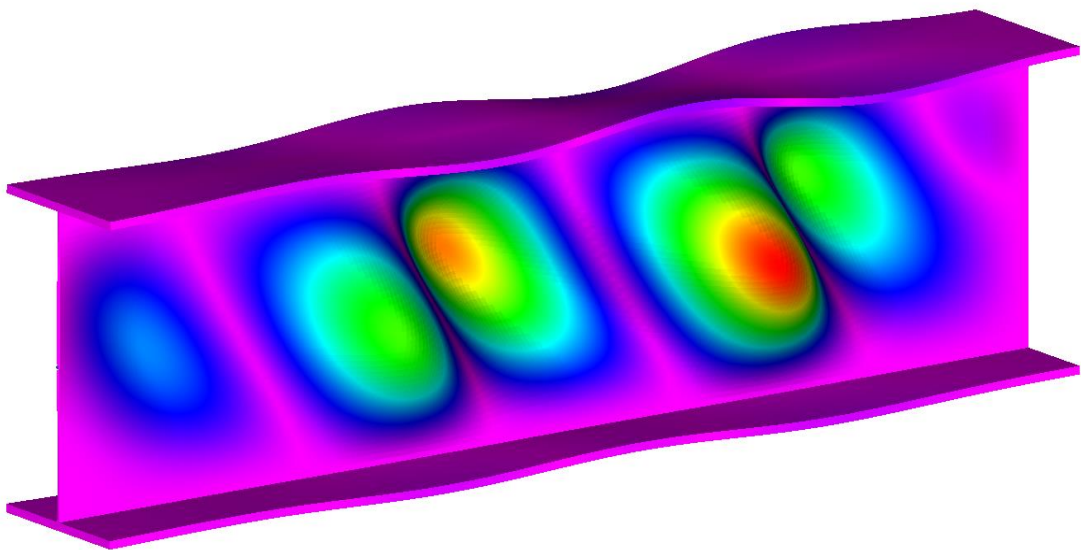
Σχήμα 4.2-30: Σύγκριση κρίσιμου φορτίου λυγισμού όπως αυτό προέκυψε από ανάλυση μέσω θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης (HOBT) και από ανάλυση με χρήση τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων.



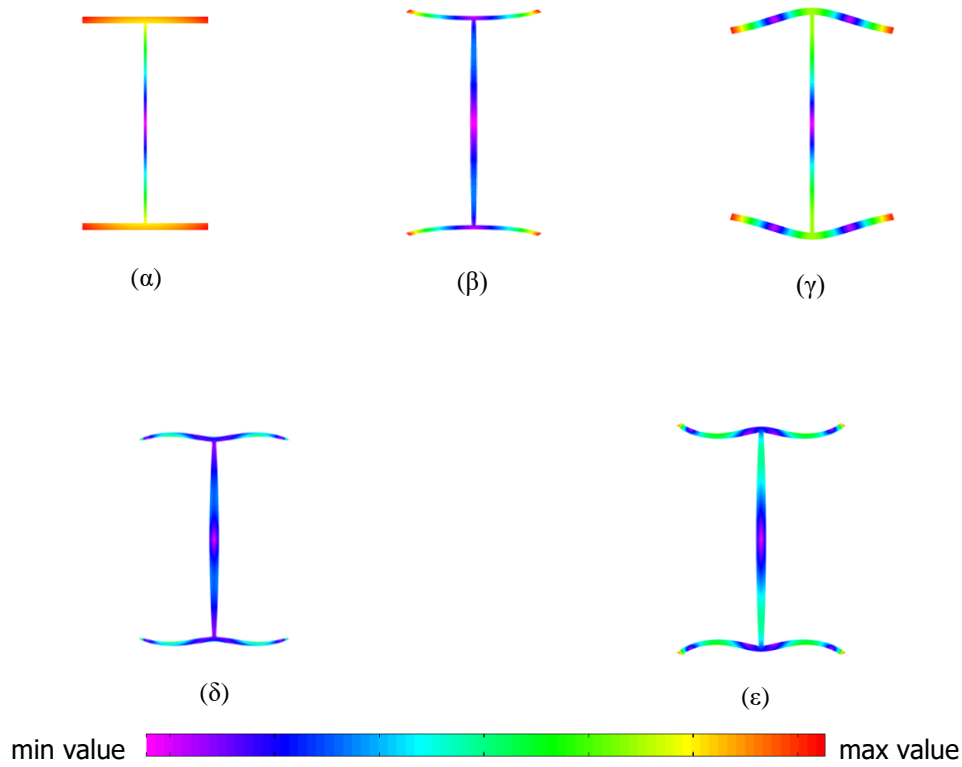
Σχήμα 4.2-31: Σύγκριση κρίσιμου φορτίου λυγισμού όπως αυτό προέκυψε από ανάλυση μέσω θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης (HOBT) και από ανάλυση με χρήση τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων.



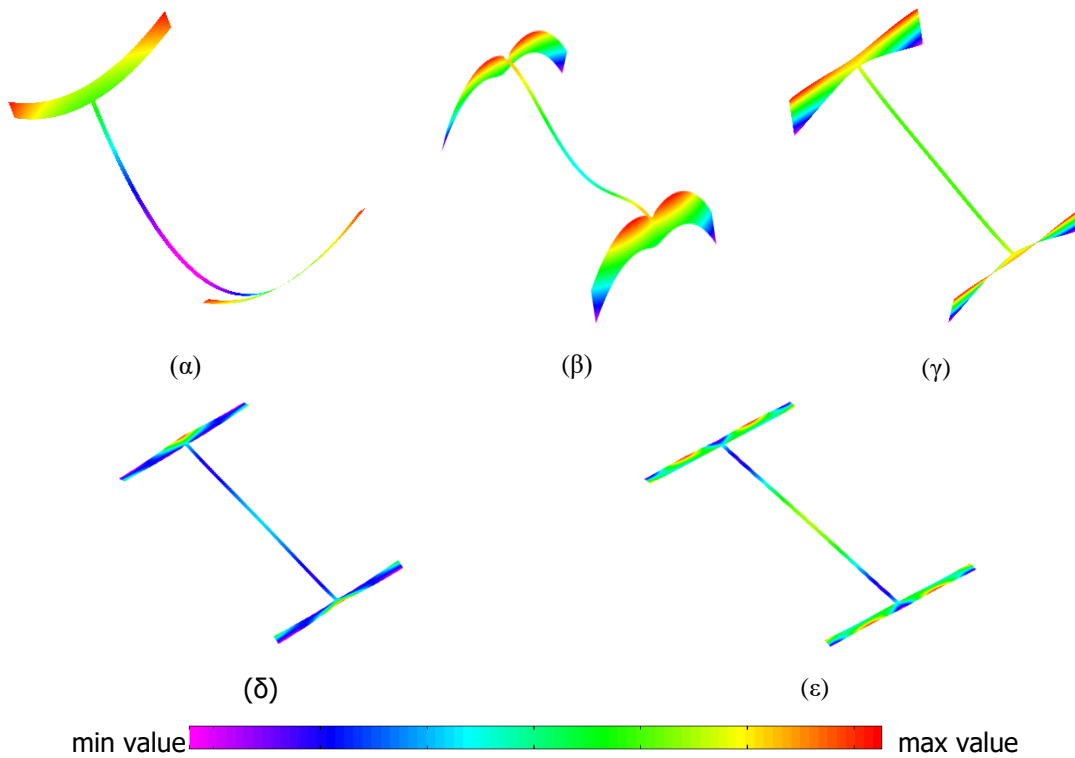
Σχήμα 4.2-32: Παραμορφωμένη εικόνα προβόλου μήκους 2m, διατομής 500x300.5.13, όπως όπως αυτή προέκυψε από την ανάλυση σύμφωνα με την θεωρία δοκού ανώτερης τάξης για  $N_{dofs}=76$ .



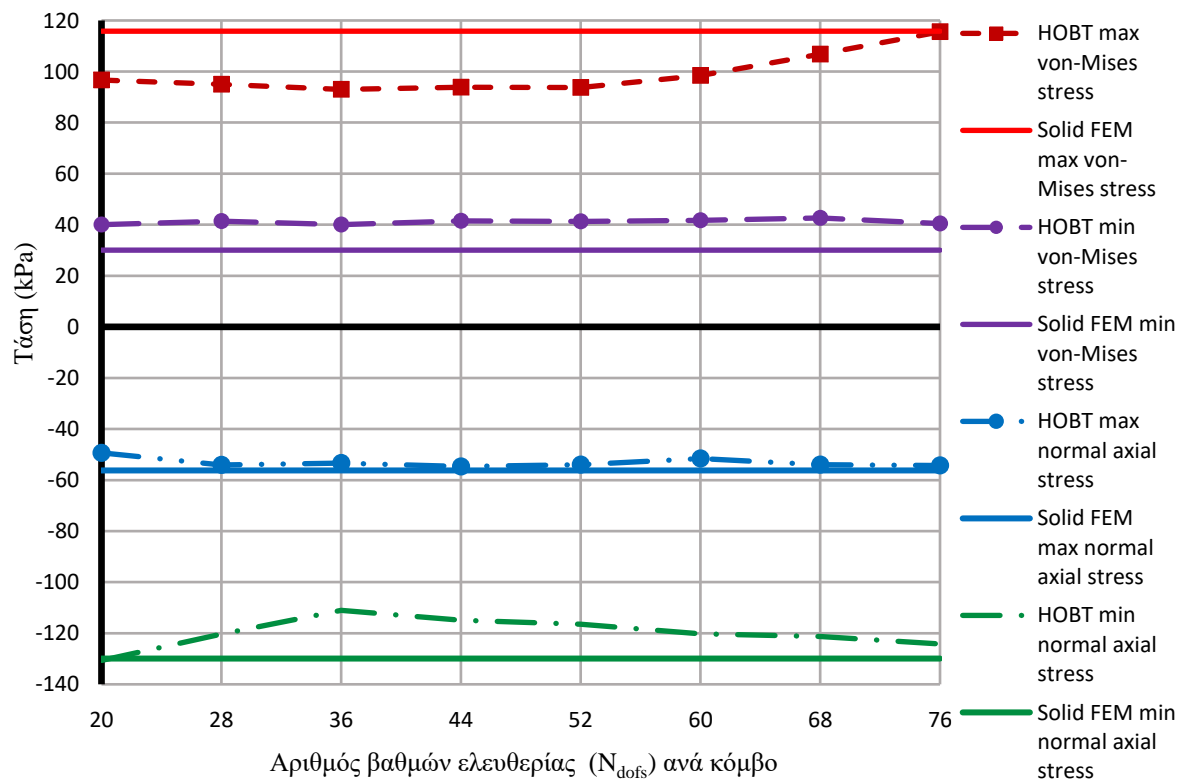
Σχήμα 4.2-33: Παραμορφωμένη εικόνα προβόλου μήκους 2m, διατομής 500x300.5.13, όπως όπως αυτή προέκυψε από την ανάλυση τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων.



**Σχήμα 4.2-34:** 1<sup>η</sup> (α), 2<sup>η</sup> (β), 3<sup>η</sup> (γ), 4<sup>η</sup> (δ), 5<sup>η</sup> (ε) αξονική μορφή διαστρέβλωσης της διατομής I ( $500 \times 300.9.17$ ), όπως υπολογίστηκε από την ανώτερη θεωρία δοκού.

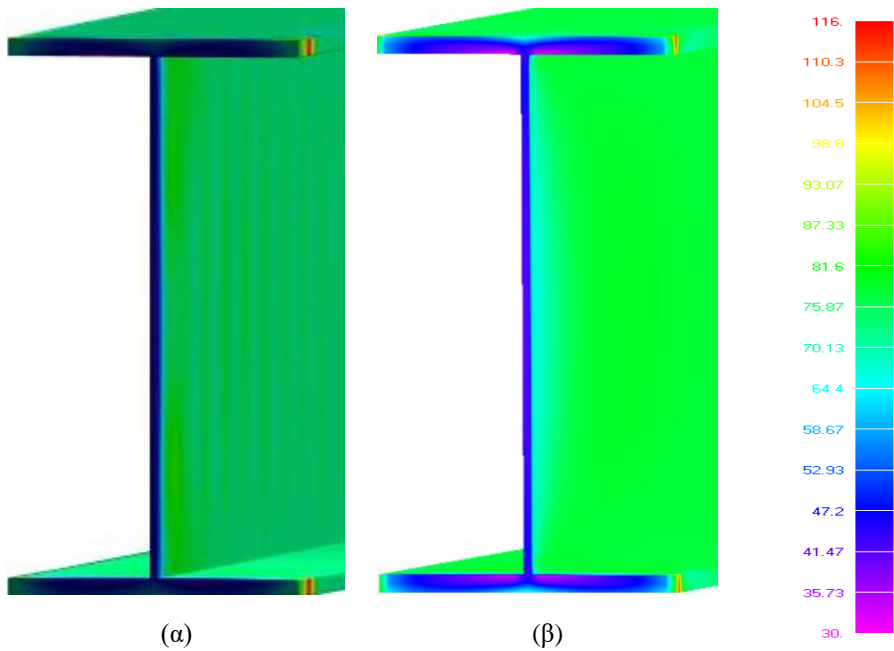


**Σχήμα 4.2-35:** 1<sup>η</sup> (α), 2<sup>η</sup> (β), 3<sup>η</sup> (γ), 4<sup>η</sup> (δ), 5<sup>η</sup> (ε) αξονική μορφή στρέβλωσης της διατομής of I ( $500 \times 300.9.17$ ), όπως υπολογίστηκε από την ανώτερη θεωρία δοκού.

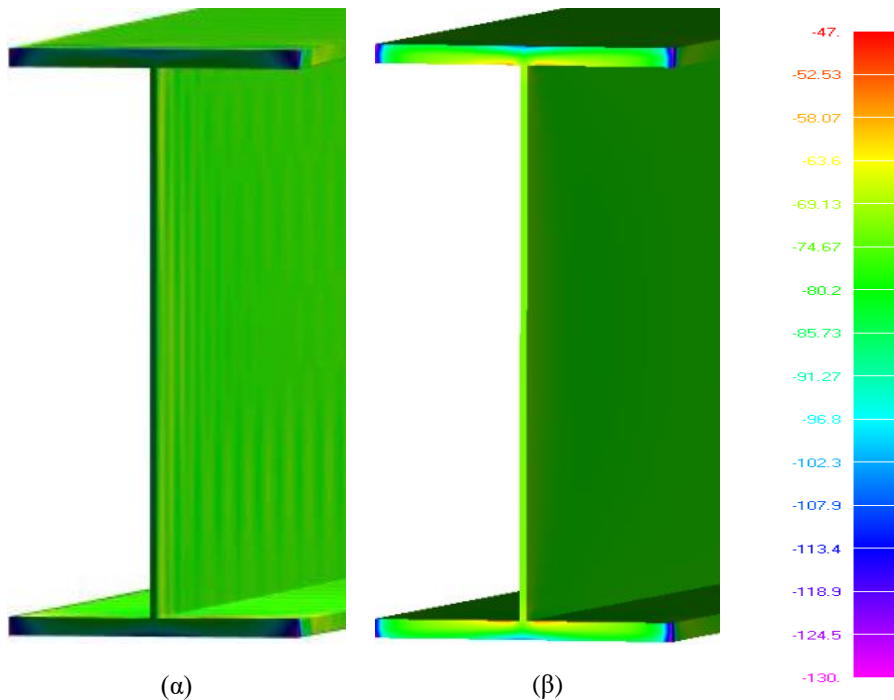


**Σχήμα 4.2-36:** Μέγιστες και ελάχιστες αξονικές και Von-Mises τάσεις της διατομής I ( $500 \times 300.7.16$ ) όπως προέκυψαν από την ανάλυση ανώτερης θεωρίας δοκού και τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων

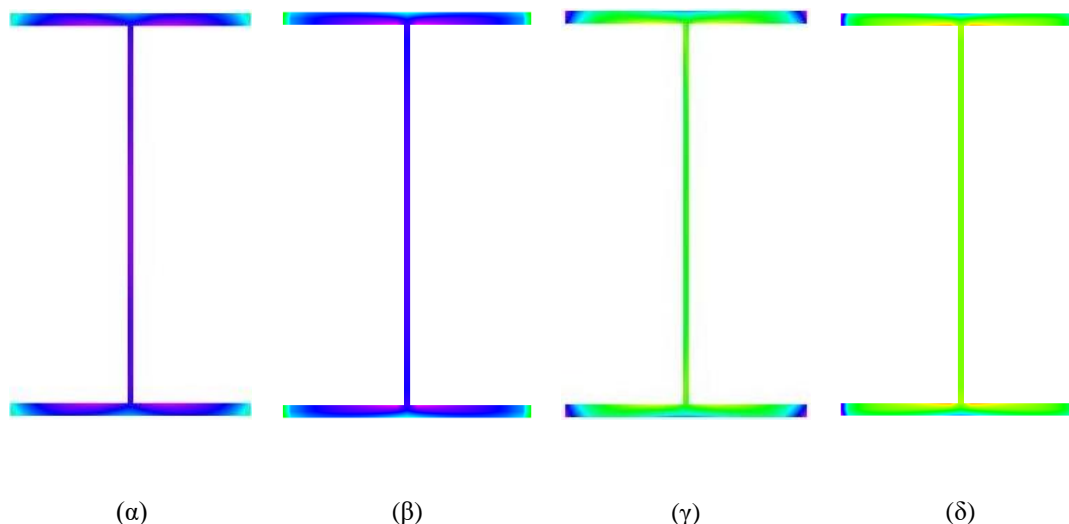
Σημείωση : Η αντίστοιχη ορθή τάση από την θεωρία Euler-Bernoulli ισούται με (αξονικό φορτίο) / (εμβαδόν διατομής) =  $-1\text{kN}/0.01287\text{m}^2 = -77.7 \text{ kPa}$ .



Σχήμα 4.2-37: Κατανομή τάσεων Von-Mises κοντά στη περιοχή της πάκτωσης όπως προέκυψε από την ανάλυση ανώτερης θεωρίας δοκού (α) και από την ανάλυση τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων (β).



Σχήμα 4.2-38: Κατανομή ορθών τάσεων κοντά στη περιοχή της πάκτωσης όπως προέκυψε από την ανάλυση ανώτερης θεωρίας δοκού (α) και από την ανάλυση τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων (β).



**Σχήμα 4.2-39:** Κατανομή τάσεων Von-Mises στην διατομή της πάκτωσης όπως προέκυψε από την ανάλυση ανώτερης θεωρίας δοκού (α) και από την ανάλυση τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων (β), Κατανομή ορθών τάσεων στη διατομή της πάκτωσης όπως προέκυψε από την ανάλυση ανώτερης θεωρίας δοκού (γ) και από την ανάλυση τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων (δ).

#### Σχόλια επί της αριθμητικής εφαρμογής 4.2

Η ανάλυση μέσω της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης είναι ικανή να δώσει πολύ ακριβή αποτελέσματα,. Πιο συγκεκριμένα παρατηρήθηκε ότι:

α) Όσο αυξάνονται οι βαθμοί ελευθερίας το φορτίο λυγισμού συγκλίνει προς κάποια συγκεκριμένη τιμή.

β) Για επαρκή αριθμό βαθμών ελευθερίας το κρίσιμο φορτίο λυγισμού που υπολογίζεται μέσω της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης ταυτίζεται με αυτό που υπολογίζεται μέσω της χρήσης τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων.

γ) Η μορφή της παραμόρφωσης που προκύπτει από την ανάλυση μέσω της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης αναπαριστά με μεγάλη ακρίβεια τις παραμορφώσεις που οφείλονται σε τοπικά φαινόμενα, και ταυτίζεται με αυτήν που προκύπτει από ανάλυση μέσω της χρήσης τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων.

δ) Για επαρκή αριθμό βαθμών ελευθερίας το ανομοιόμορφο πεδίο των τάσεων στην περιοχή της πάκτωσης που υπολογίζεται μέσω της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης ταυτίζεται με αυτό που υπολογίζεται μέσω της χρήσης τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων.

ε) Τόσο για το φορτίο λυγισμού όσο και για το πεδίο των τάσεων παρατηρείται μεγάλη απόκλιση στις τιμές της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης και των τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων από τις τιμές των θεωριών Bernoulli και Timoshenko.

στ) Το μήκος των 2 μέτρων επιλέχθηκε διότι σε σχέση και με τις εξωτερικές διαστάσεις των διατομών που παρέμειναν σταθερές παρατηρείται ότι κυριαρχεί ο τοπικός λυγισμός έναντι του

πλευρικού σε αντίθεση με το μήκος 5 μέτρων όπου τα τοπικά φαινόμενα είναι ηπιότερα ιδίως στις διατομές μεγαλύτερου πάχους και για τις 2 πρότυπες φορτίσεις.

### 4.3 Αριθμητική εφαρμογή 2-Διατομές κλειστού τύπου-Πρότυπη φόρτιση I

Στην δεύτερη αριθμητική εφαρμογή εξετάζονται φορείς, στατικού συστήματος προβόλου κλειστών πρότυπων μεταλλικών διατομών (S355,  $E=2.1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$ ,  $\mu=8.08 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$ ,  $\nu=0.3$ ) μορφής **RHS**. Τα προφίλ των διατομών αποτελούνται από τις (RHS500×300.20, RHS500×300.16, RHS500×300.12.5, RHS500×300.10, RHS500×300.8, RHS500×300.6.3) τα γεωμετρικά στοιχεία των οποίων διακρίνονται στον πίνακα 1. Το μήκος του προβόλου παραμένει σταθερό σε κάθε περίπτωση και ισούται με 2 μέτρα.

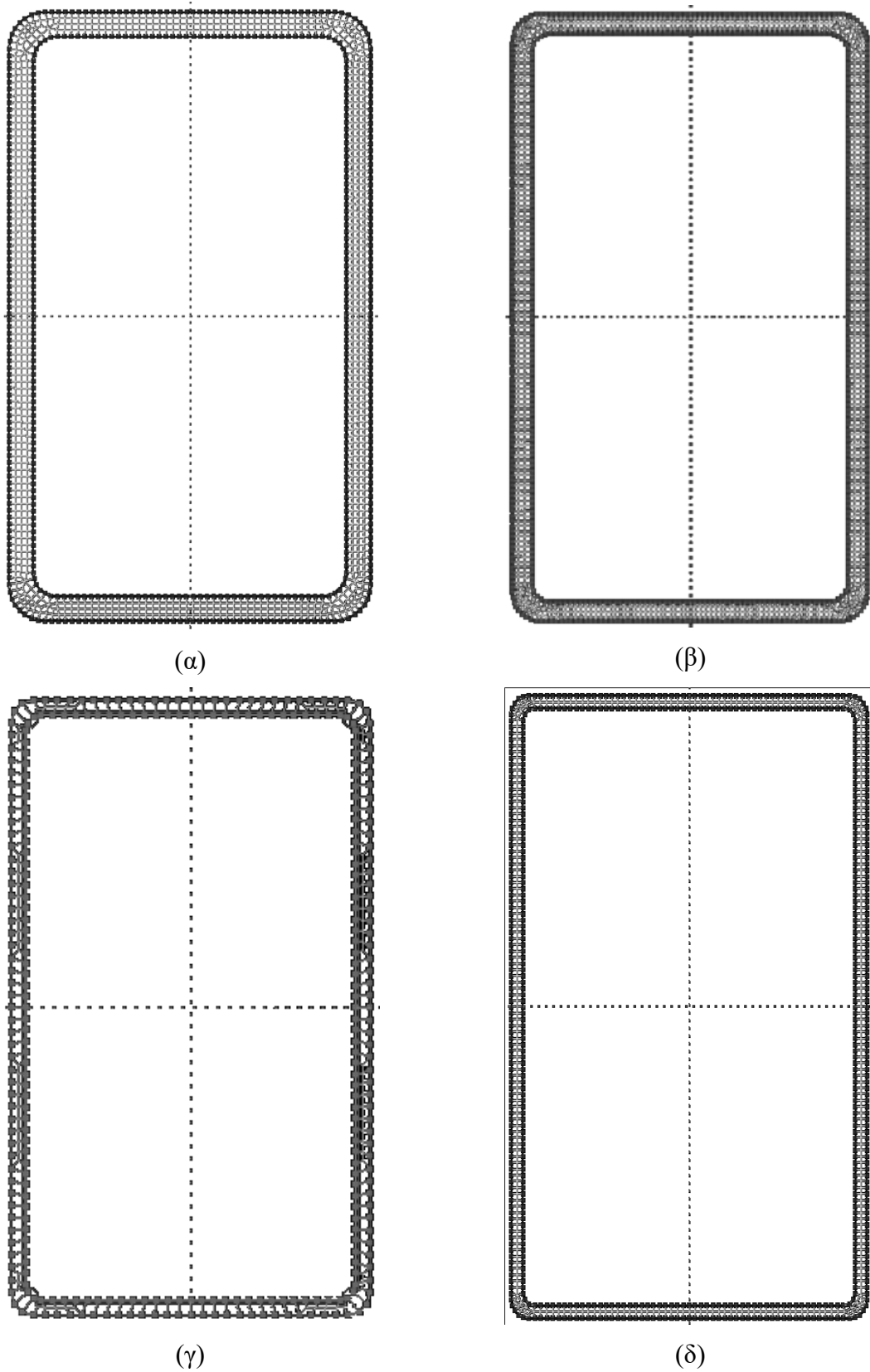
Αρχικά υπολογίζεται το κρίσιμο φορτίο λυγισμού των παραπάνω φορέων σύμφωνα με την φόρτιση **I** με χρήση του λογισμικού HOBOT. Το λογισμικό αυτό υλοποιεί την ανάλυση βάσει της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης, για διάφορους βαθμούς ελευθερίας ( $N_{\text{dofs}}$ ) κάθε στοιχείου, το οποίο χωρίζεται σε 40 πεπερασμένα στοιχεία, καθένα από τα οποία έχει δύο κόμβους. Η παραπάνω τιμή συγκρίνεται με την αντίστοιχη τιμή που λαμβάνεται από την ανάλυση λογισμικού με χρήση τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων, καθώς επίσης και με τα αποτελέσματα των θεωριών Timoshenko και Euler-Bernoulli, αντίστοιχα. Στην συνέχεια εξάγονται οι πρώτες 5 αξονικές μορφές στρέβλωσης και διαστρέβλωσης των παραπάνω διατομών μέσω των προαναφερθέντων συναρτήσεων. Τέλος υπολογίζεται το πεδίο των τάσεων από γραμμική στατική ανάλυση και πραγματοποιείται η αντίστοιχη σύγκριση με τις παραπάνω θεωρίες με έμφαση στο σημείο της πάκτωσης του προβόλου.

Η διακριτοποίηση της κάθε διατομής καθώς και ο αριθμός των διαμηκών πεπερασμένων στοιχείων από την ανάλυση του λογισμικού HOBOT αναφέρονται στον πίνακα 2 ενώ στον πίνακα 3 παρουσιάζονται οι διακριτοποιήσεις που πραγματοποιήθηκαν από τις αναλύσεις τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων, Timoshenko και Euler-Bernoulli. Τα πλέγματα που χρησιμοποιήθηκαν για την ανάλυση μέσω της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης και των πεπερασμένων στοιχείων παρουσιάζονται στα σχήματα 1-3 αντίστοιχα.

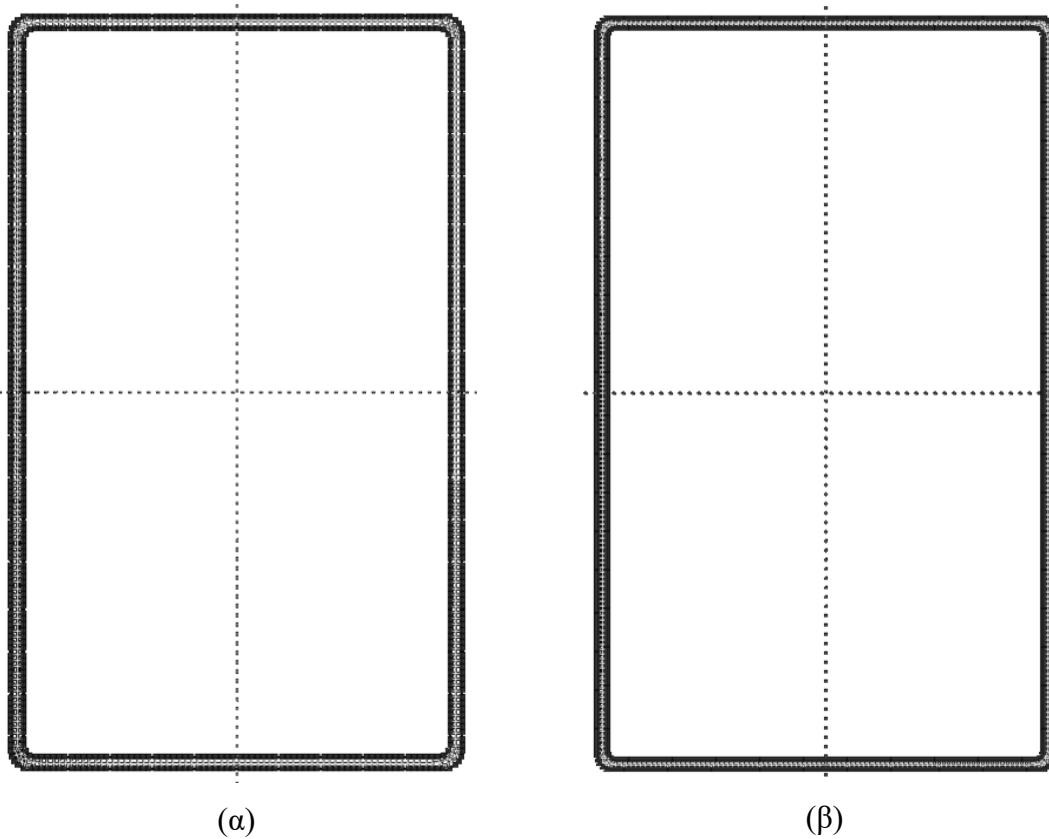
**Πίνακας 4.3-1: Γεωμετρικά-αδρανειακά στοιχεία εξεταζόμενων διατομών τύπου RHS**

Τύπος	h(m)	b(m)	$t_f$ (m)	A(m <sup>2</sup> )	I <sub>yy</sub> (m <sup>4</sup> )	I <sub>zz</sub> (m <sup>4</sup> )
RHS500×300.20	0.5	0.3	0.020	$3.00 \times 10^{-2}$	$9.8777 \times 10^{-4}$	$4.4078 \times 10^{-4}$
RHS500×300.16	0.5	0.3	0.016	$2.43 \times 10^{-2}$	$8.1783 \times 10^{-4}$	$3.6768 \times 10^{-4}$
RHS500×300.12.5	0.5	0.3	0.0125	$1.92 \times 10^{-2}$	$6.5813 \times 10^{-4}$	$2.9789 \times 10^{-4}$
RHS500×300.10	0.5	0.3	0.010	$1.55 \times 10^{-2}$	$5.3762 \times 10^{-4}$	$2.4439 \times 10^{-4}$
RHS500×300.8	0.5	0.3	0.008	$1.24 \times 10^{-2}$	$4.3712 \times 10^{-4}$	$1.9944 \times 10^{-4}$
RHS500×300.6.3	0.5	0.3	0.0063	$0.99 \times 10^{-2}$	$3.5014 \times 10^{-4}$	$1.6012 \times 10^{-4}$

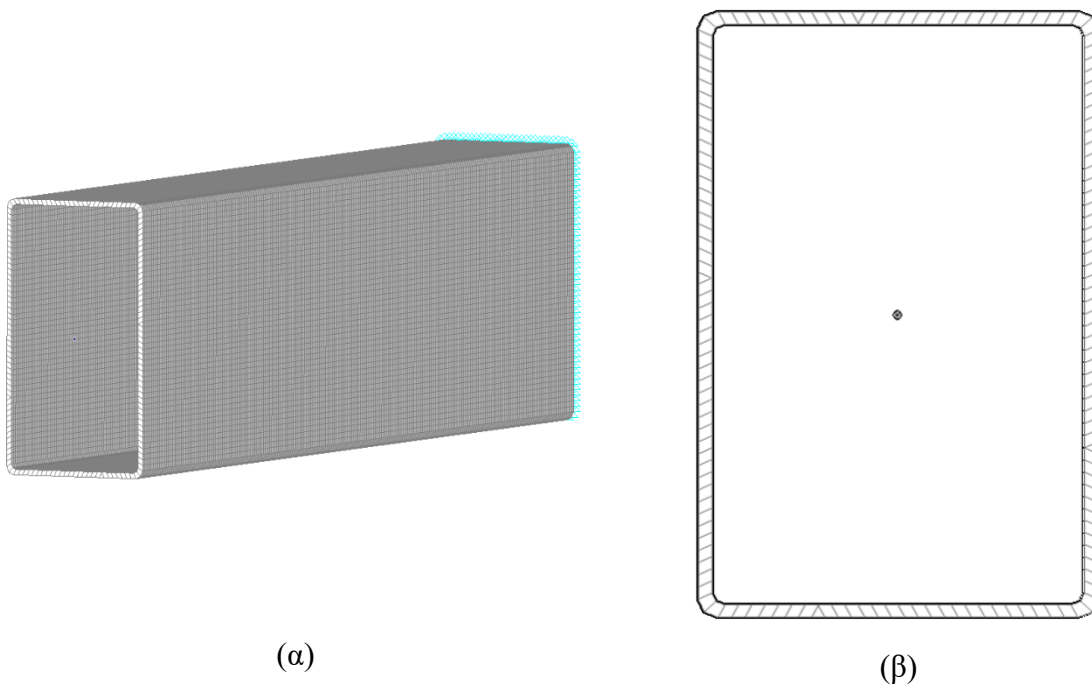




**Σχήμα 4.3-1:** Πλέγματα που χρησιμοποιήθηκαν κατά την ανάλυση των διατομών μέσω της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης για τη διατομή RHS500x300x20 (α), RHS500x300x16 (β), RHS500x300x12.5 (γ), RHS500x300x10 (δ).



Σχήμα 4.3-2: Πλέγματα που χρησιμοποιήθηκαν κατά την ανάλυση των διατομών μέσω της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης για τη διατομή RHS500x300x8 (α), RHS500x300x6.3 (β).



Σχήμα 4.3-3: Τυπική διάταξη (α) και πλέγμα (β) που χρησιμοποιήθηκαν κατά την ανάλυση μέσω τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων.

**Πίνακας 4.3-2: Διακριτοποίηση διατομής μοντέλου που αναλύθηκε μέσω της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης.**

Διατομή	Μοντέλο	Διακριτοποίηση		
		Συνοριακά στοιχεία	Εγκάρσια Τετραεδρικά στοιχεία Στοιχεία	Διαμήκης (στοιχεία δοκού) Gauss Points
RHS500×300.20		1,056	544	2x2
RHS500×300.16		1,164	474	2x2
RHS500×300.12.5		7,40	373	2x2
RHS500×300.10		928	496	2x2
RHS500×300.8		1,024	516	2x2
RHS500×300.6.3		1,010	628	2x2

**Πίνακας 4.3-3: Διακριτοποίηση διατομής μοντέλων βάσει μεθόδου τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων, θεωρίας δοκού Timoshenko και θεωρίας δοκού Euler-Bernoulli.**

Διατομή	Μοντέλο	Πεπερασμένα στοιχεία	Θεωρία δοκού Timoshenko	Θεωρία δοκού Euler-Bernoulli
RHS500×300.20		64,000	80	80
RHS500×300.16		62,400	80	80
RHS500×300.12.5		33,600	80	80
RHS500×300.10		31,200	80	80
RHS500×300.8		29,400	80	80
RHS500×300.6.3		22,600	80	80

**Πίνακας 4.3-4: Σύγκριση κρίσιμου φορτίου λυγισμού όπως προέκυψε βάσει θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης και μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων**

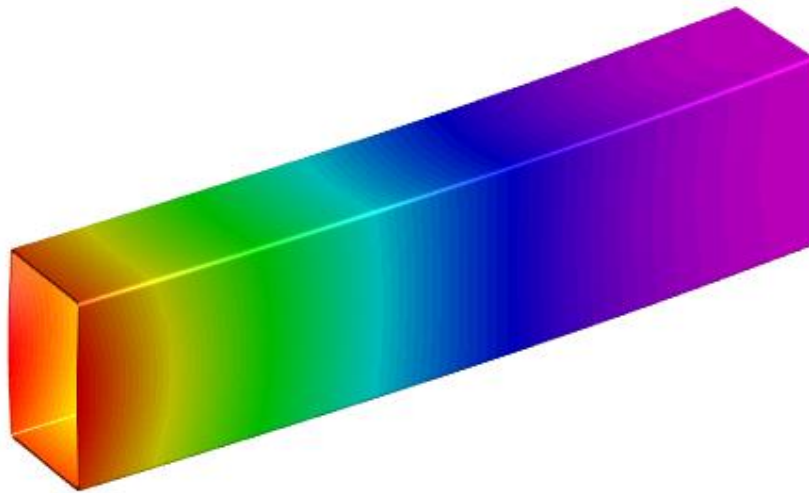
Φορτίο λυγισμού Διατομή	HOBΤ (N <sub>dofs</sub> =76)	Τρισδιάστατα πεπερασμένα στοιχεία	Απόκλιση
RHS500×300.20	29,658.81	28,910.30	2.59%
RHS500×300.16	15,589.76	14852,56	4.96%
RHS500×300.12.5	7,630.11	7,758.20	-1.65%
RHS500×300.10	4,051.42	4,245.46	-4.57%
RHS500×300.8	2,278.35	2,332.42	-4.29%
RHS500×300.6.3	1,209.34	1,110.43	8.91%

**Πίνακας 0-1: Σύγκριση κρίσιμου φορτίου λυγισμού βάσει της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης και της θεωρίας δοκού Timoshenko.**

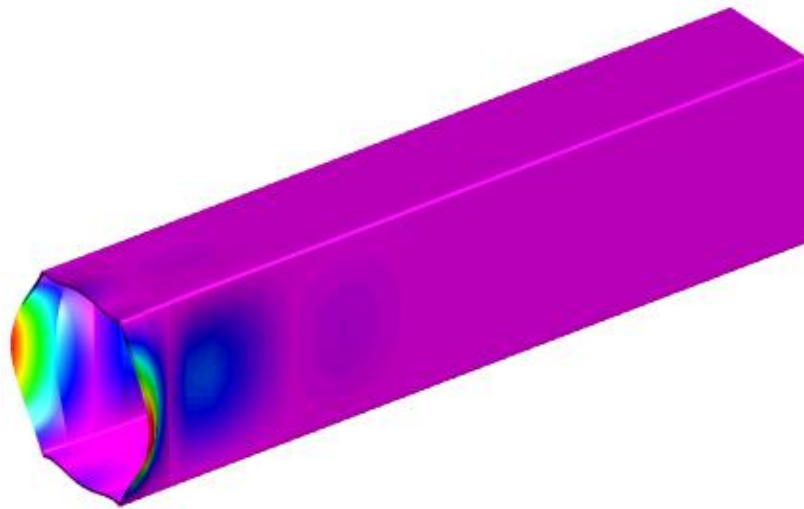
Φορτίο λυγισμού Διατομή	HOBΤ (N <sub>dofs</sub> =76)	Θεωρία δοκού Timoshenko	Απόκλιση
RHS500×300.20	29,658.81	54,003.61	82%
RHS500×300.16	15,589.76	44,690.21	186%
RHS500×300.12.5	7,630.11	35,956.57	372%
RHS500×300.10	4,051.42	29,379.93	625%
RHS500×300.8	2,278.35	23,896.47	949%
RHS500×300.6.3	1,209.34	19,089.26	1,478%

**Πίνακας 0-6: Σύγκριση κρίσιμου φορτίου λυγισμού βάσει της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης και της θεωρίας δοκού Euler-Bernoulli.**

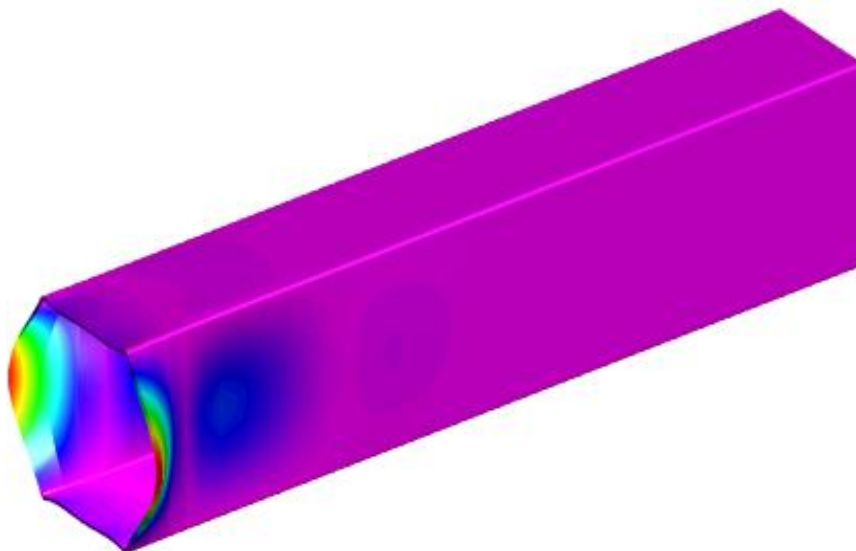
Φορτίο λυγισμού Διατομή	HOBΤ (N <sub>dofs</sub> =76)	Θεωρία δοκού Euler-Bernoulli	Απόκλιση
RHS500×300.20	29,658.81	54,454.27	84%
RHS500×300.16	15,589.76	48,486.28	211%
RHS500×300.12.5	7,630.11	39,093.44	413%
RHS500×300.10	4,051.42	31,985.66	690%
RHS500×300.8	2,278.35	26,051.50	1,043%
RHS500×300.6.3	1,209.34	20,831.10	1,622%



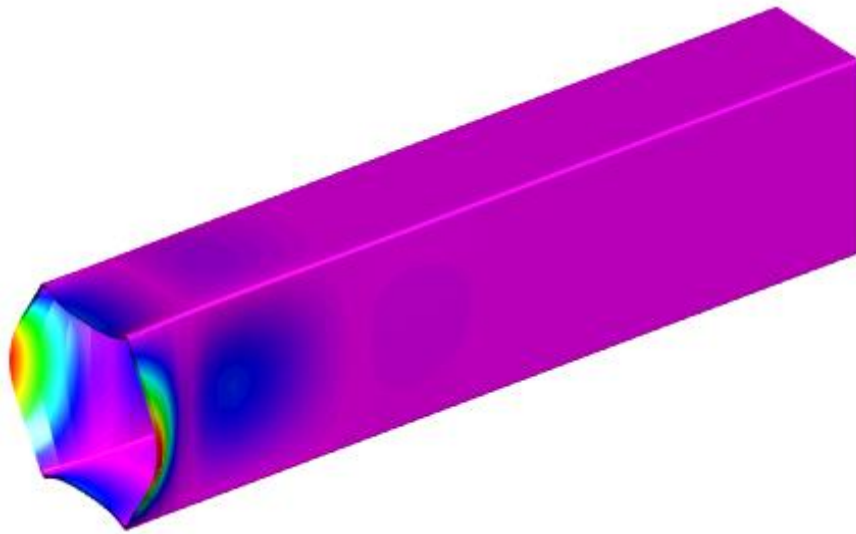
(α)



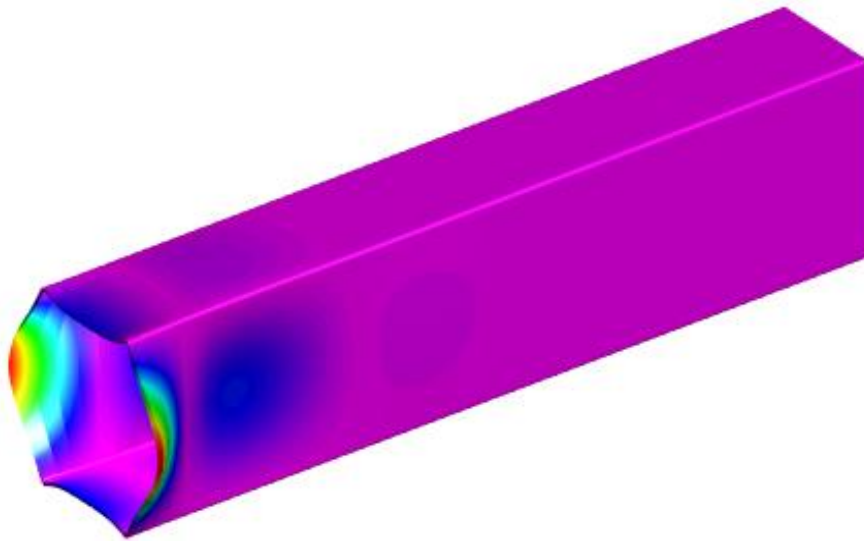
(β)



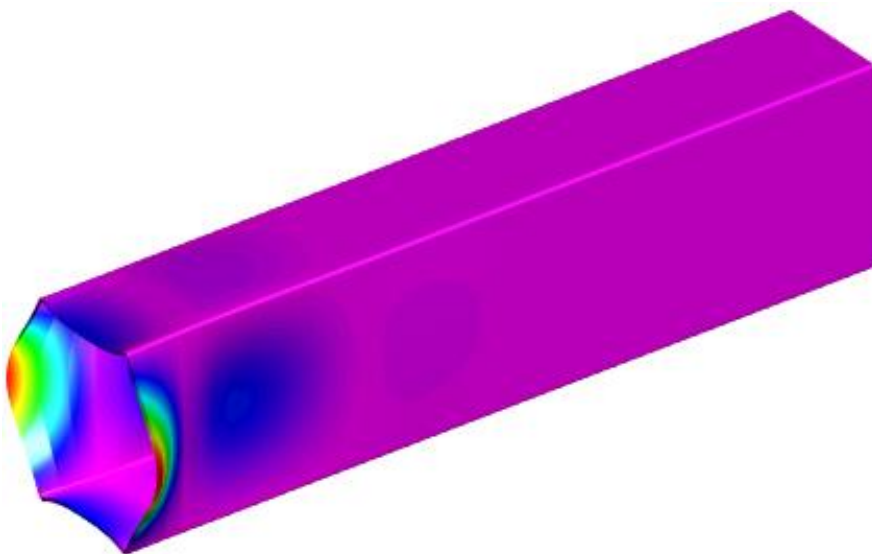
(γ)



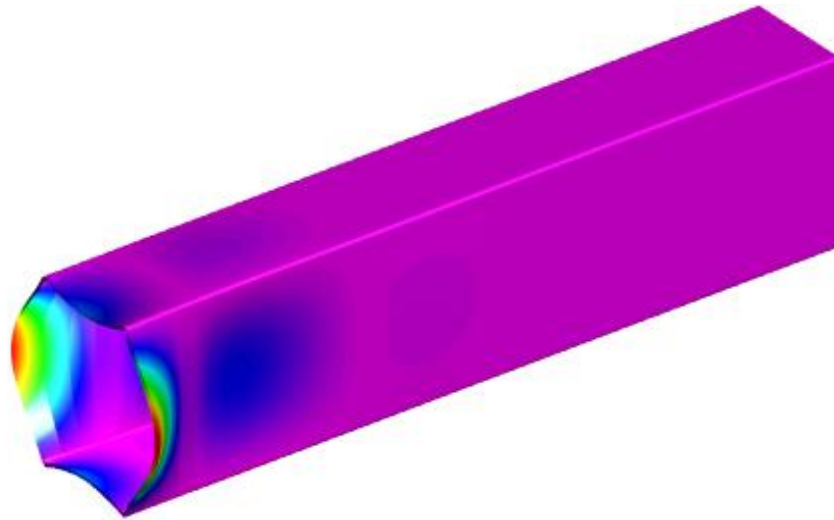
(δ)



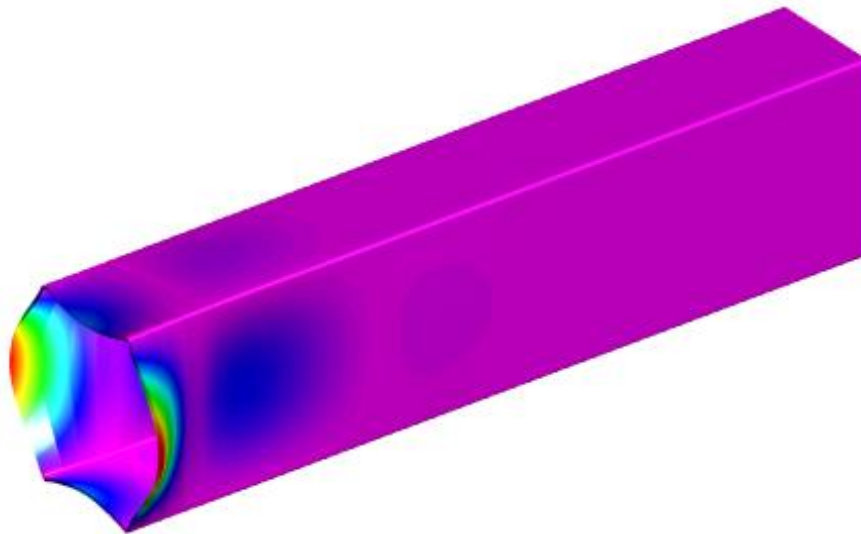
(ε)



(στ)

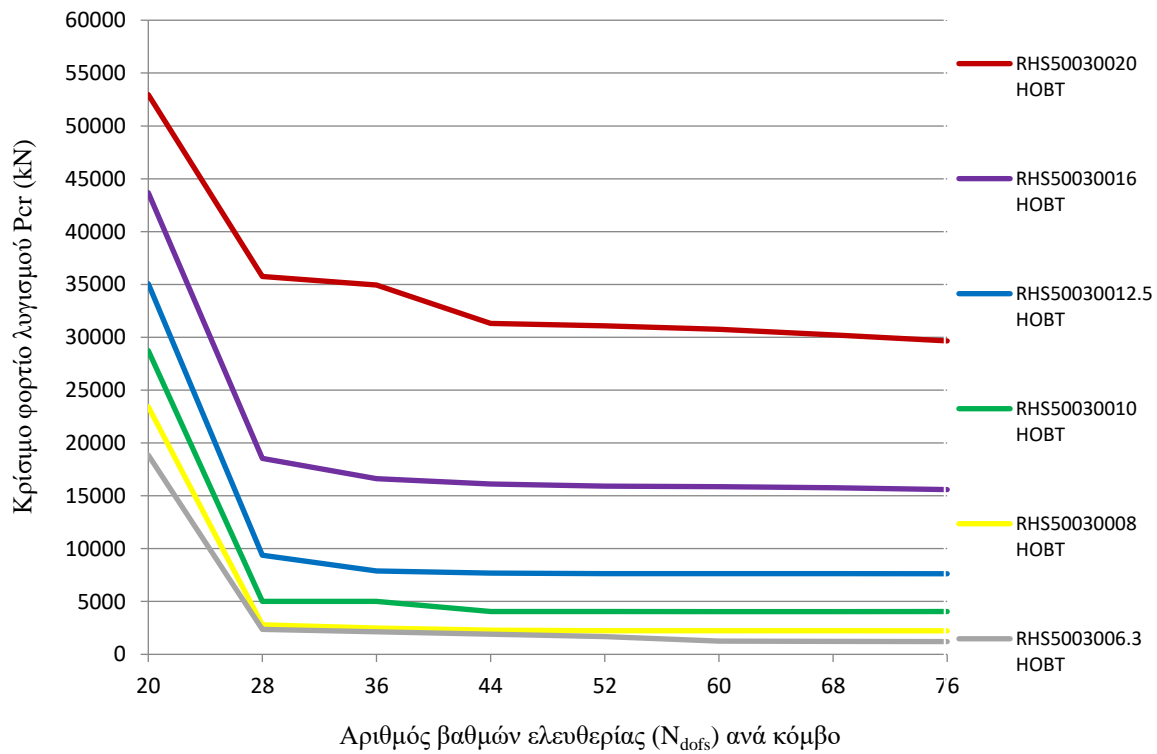


(ζ)

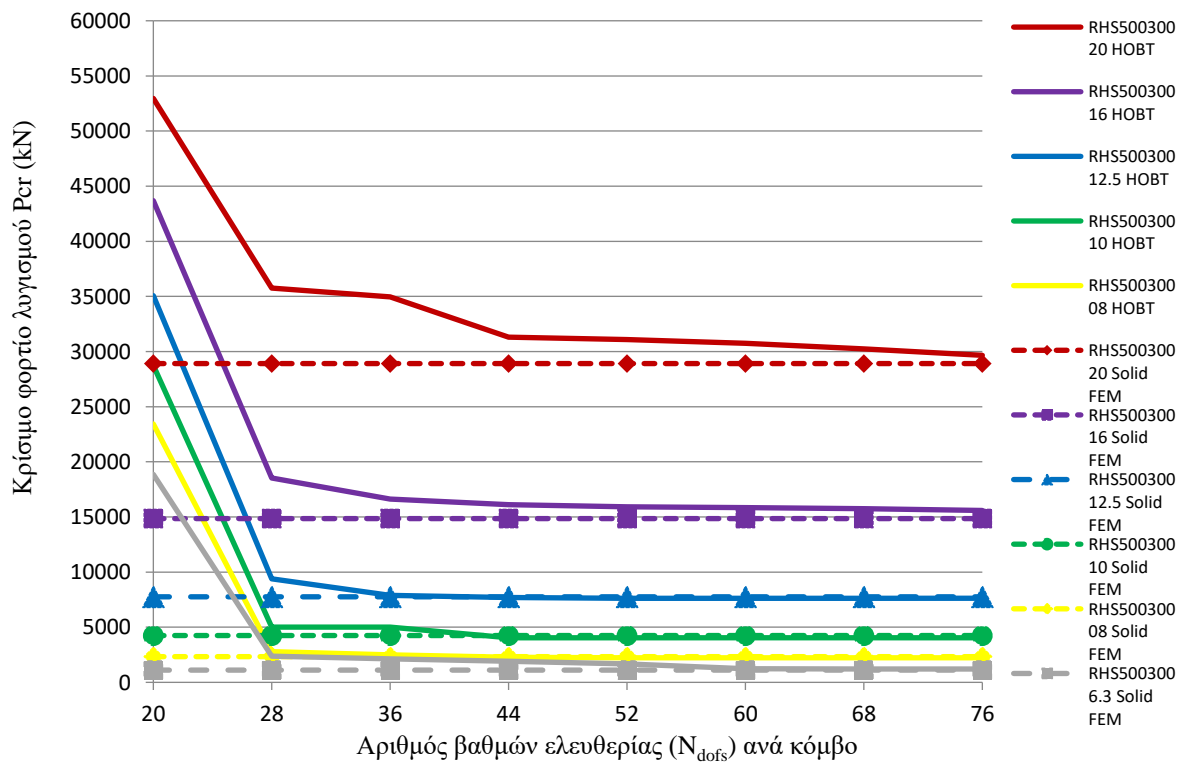


(η)

**Σχήμα 4.3-4:** Παραμορφωμένη εικόνα διατομής RHS500x300.8 μήκους 2.00m όπως αυτή προκύπτει μέσω της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης (HGBT) για 20 β.ε. ανά κόμβο (α), 28 β.ε. ανά κόμβο (β), 36 β.ε. ανά κόμβο (γ), 44 β.ε. ανά κόμβο (δ), 52 β.ε. ανά κόμβο (ε), 60 β.ε. ανά κόμβο (στ), 68 β.ε. ανά κόμβο (ζ), 76 β.ε. ανά κόμβο.

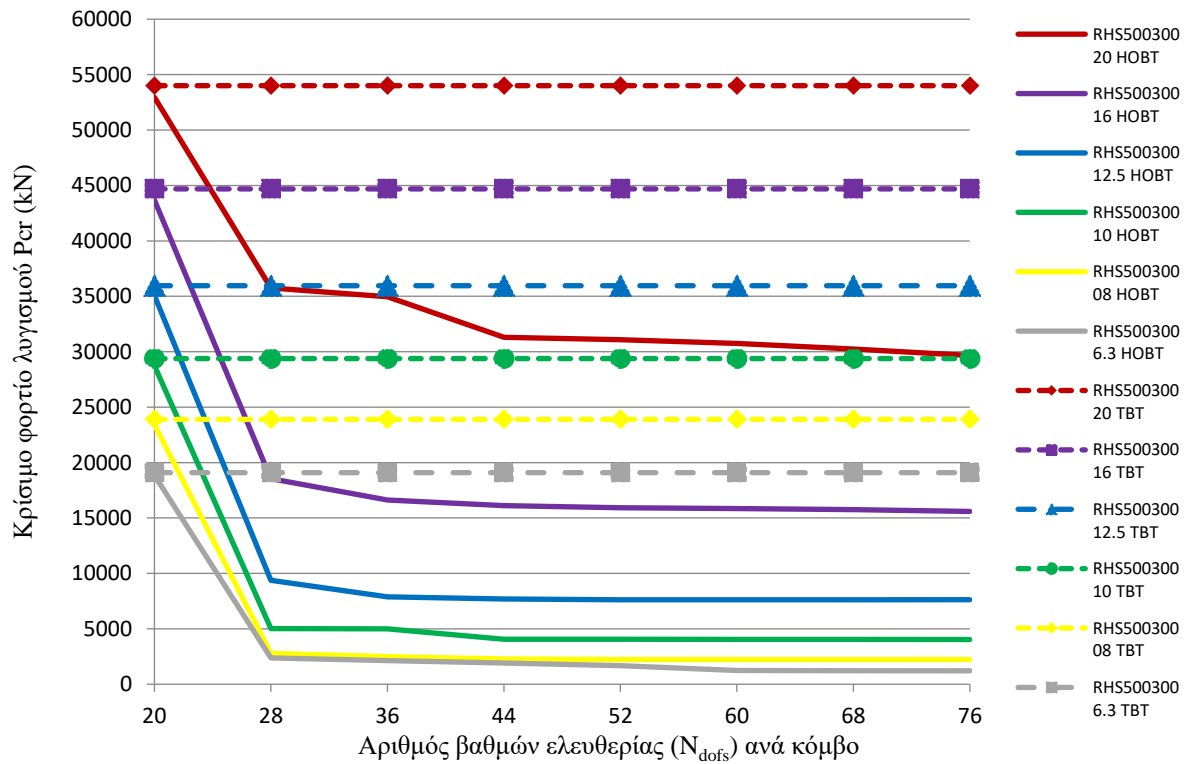


Σχήμα 4.3-5: Κρίσιμο φορτίο λυγισμού, όπως αυτό υπολογίζεται μέσω της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης (HOBT), για διάφορους βαθμούς ελευθερίας.

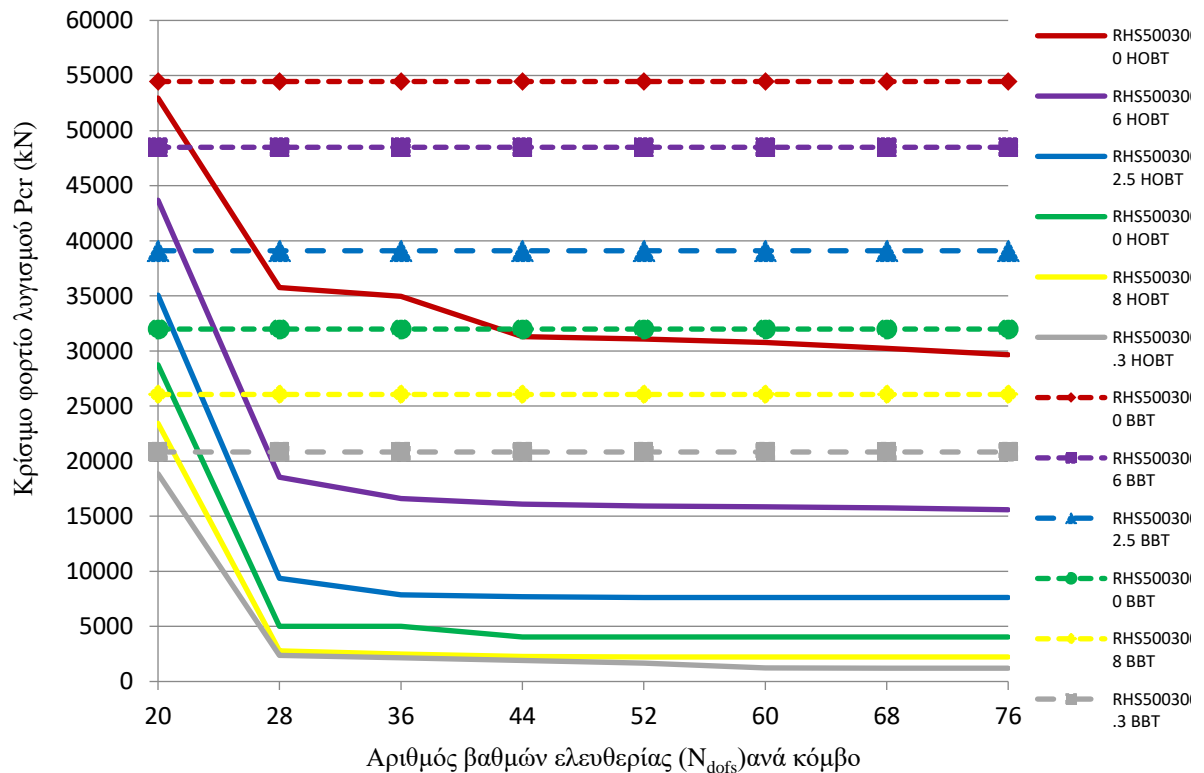


Σχήμα 4.3-6: Σύγκριση κρίσιμου φορτίου λυγισμού, όπως αυτό προέκυψε από ανάλυση μέσω θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης (HOBT) και από ανάλυση με χρήση τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων.

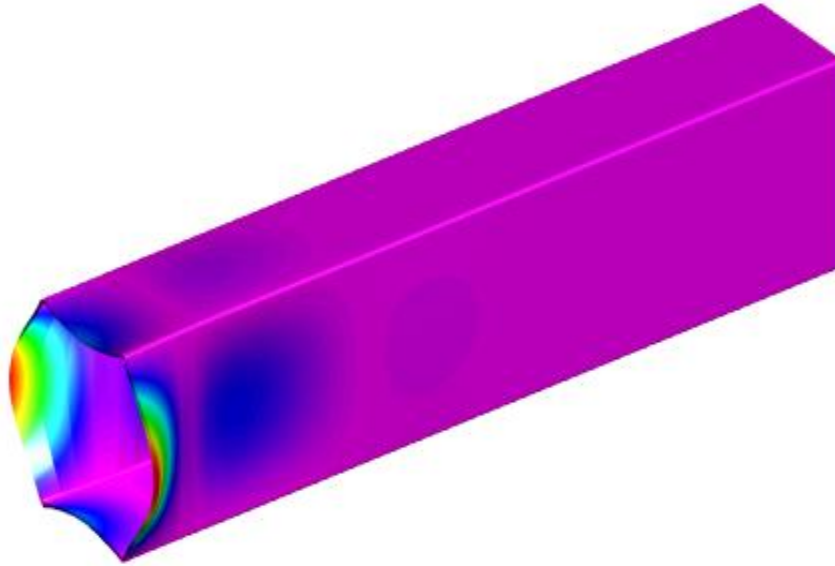




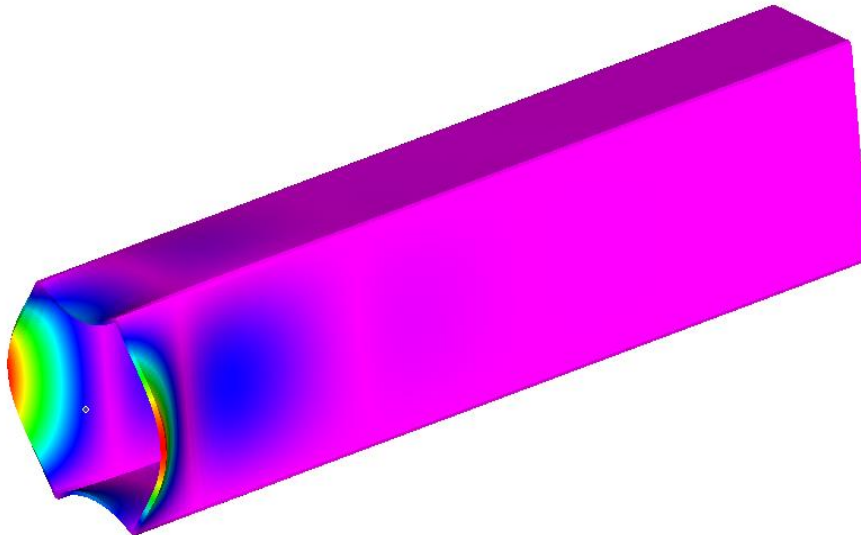
Σχήμα 4.2-7: Σύγκριση κρίσιμου φορτίου λυγισμού όπως αυτό προέκυψε από ανάλυση μέσω θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης (HOBT) και από ανάλυση με χρήση της θεωρίας δοκού Timoshenko.



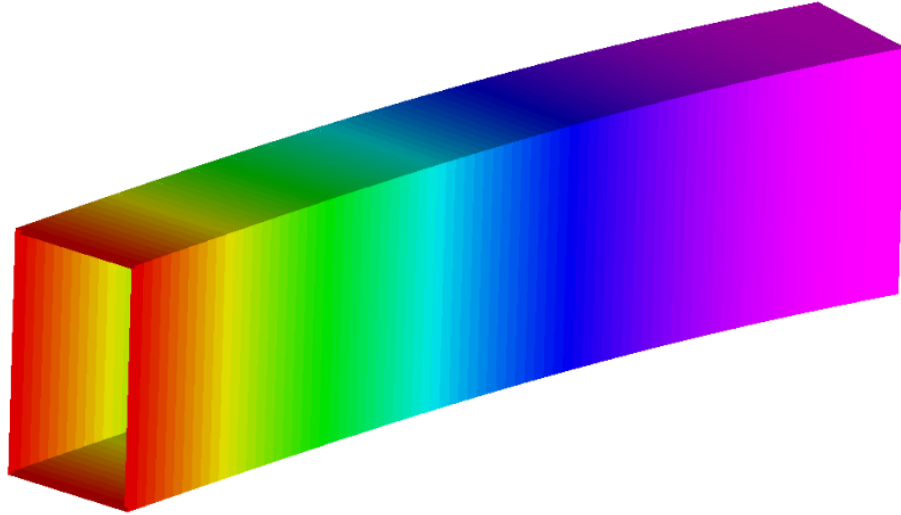
Σχήμα 4.2-8: Σύγκριση κρίσιμου φορτίου λυγισμού όπως αυτό προέκυψε από ανάλυση μέσω θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης (HOBT) και από ανάλυση με χρήση της θεωρίας δοκού Euler-Bernoulli.



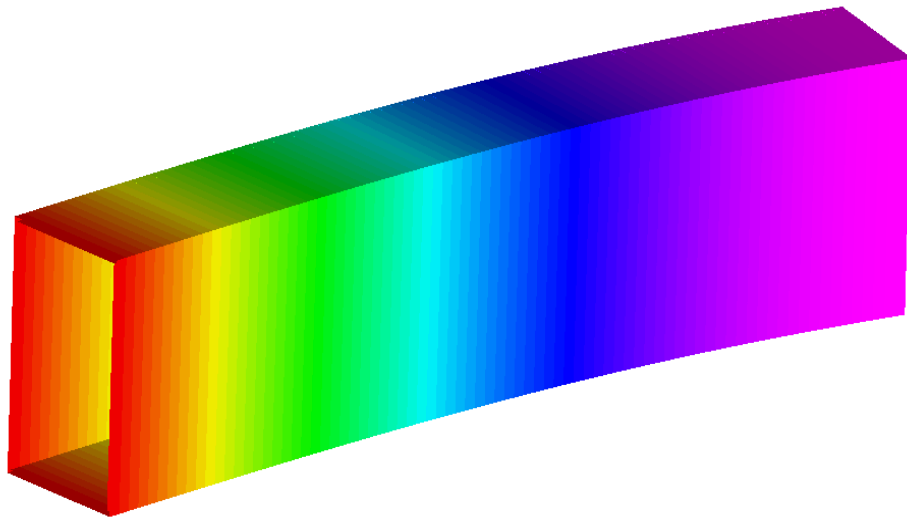
Σχήμα 4.3-9: Παραμορφωμένη εικόνα προβόλου μήκους 2m, διατομής RHS500x300.8 , όπως όπως αυτή προέκυψε από την ανάλυση σύμφωνα με την θεωρία δοκού ανώτερης τάξης για  $N_{dofs}=76$ .



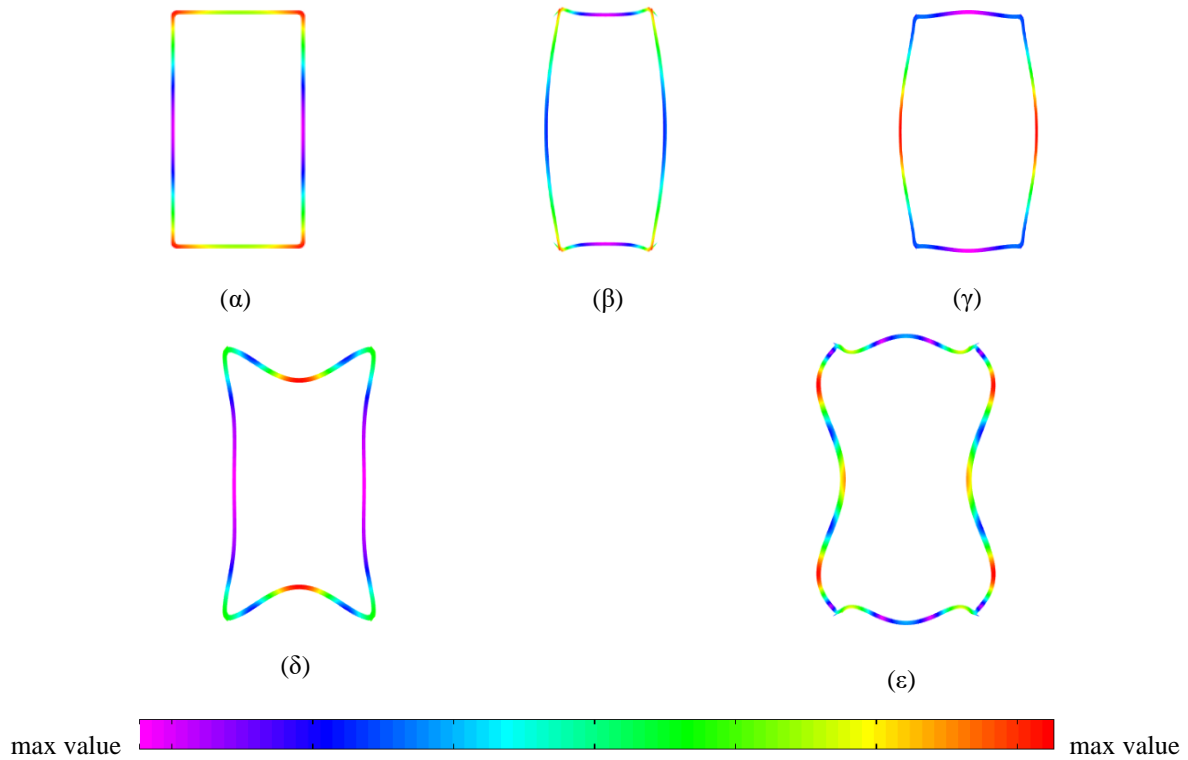
Σχήμα 4.3-10: Παραμορφωμένη εικόνα προβόλου μήκους 2m, διατομής RHS500x300.8 , όπως όπως αυτή προέκυψε από την ανάλυση τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων.



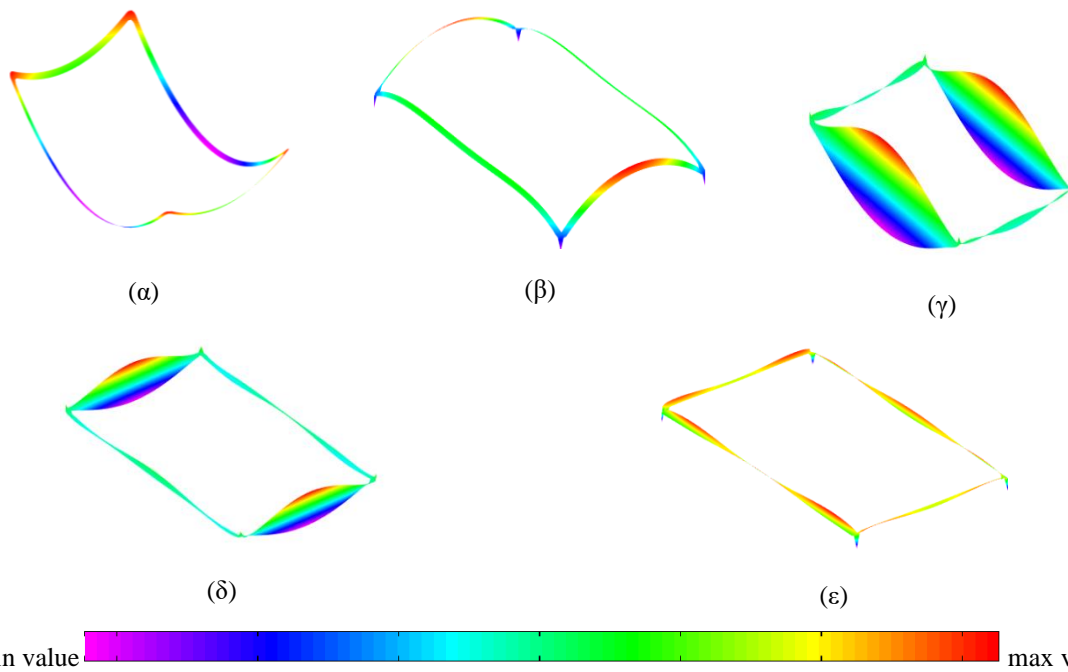
**Σχήμα 4.3-11:** Παραμορφωμένη εικόνα προβόλου μήκους 2m, διατομής RHS500x300.8 , όπως όπως αυτή προέκυψε από την ανάλυση σύμφωνα με την θεωρία δοκού Euler-Bernoulli .



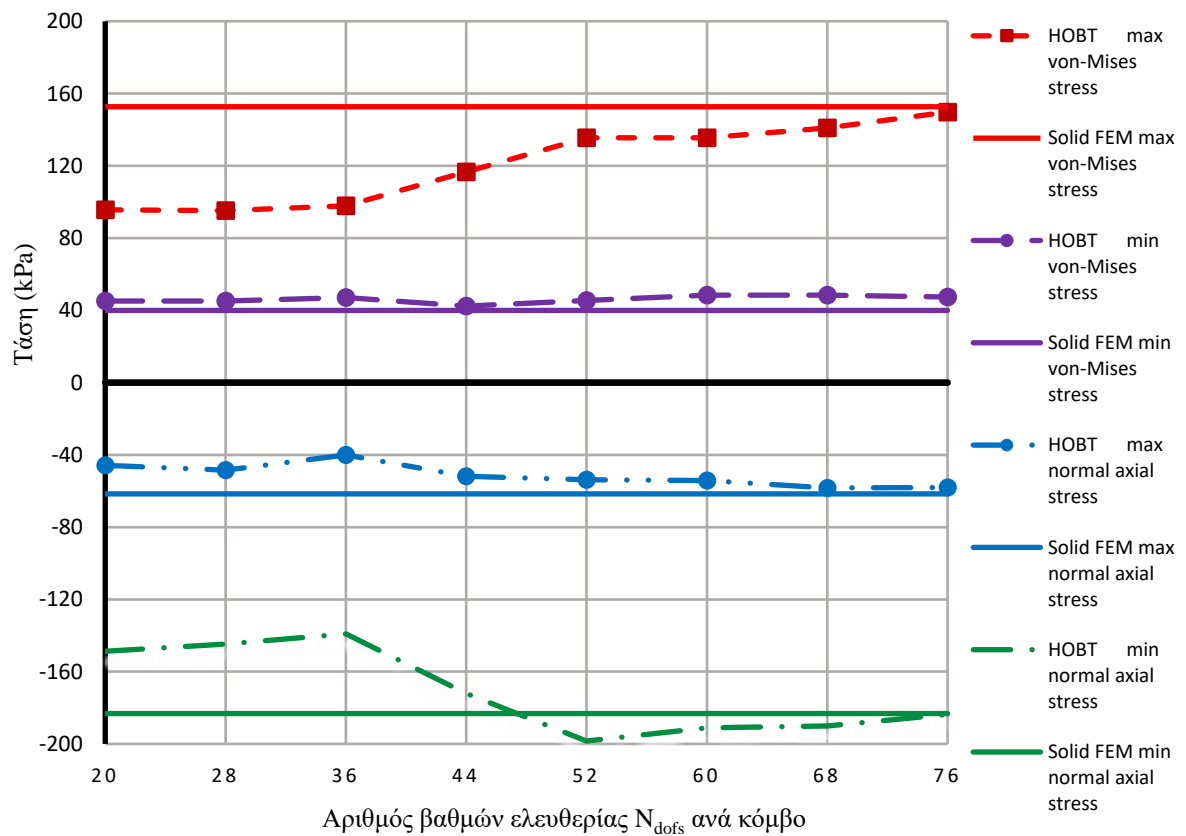
**Σχήμα 4.3-12:** Παραμορφωμένη εικόνα προβόλου μήκους 2m, διατομής RHS500x300.8 , όπως όπως αυτή προέκυψε από την ανάλυση σύμφωνα με την θεωρία δοκού Timoshenko .



Σχήμα 4.3-13: 1<sup>η</sup> (α), 2<sup>η</sup> (β), 3<sup>η</sup> (γ), 4<sup>η</sup> (δ), 5<sup>η</sup> (ε) αξονική μορφή διαστρέβλωσης της διατομής RHS500x300. 8, όπως υπολογίστηκε από την ανώτερη θεωρία δοκού.

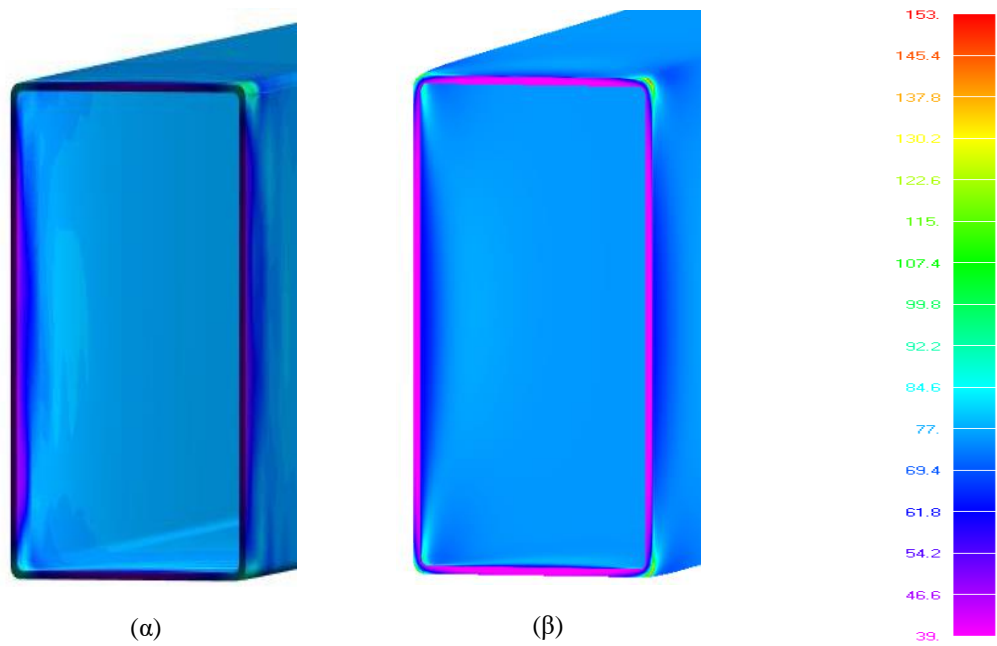


Σχήμα 4.3-14: 1<sup>η</sup> (α), 2<sup>η</sup> (β), 3<sup>η</sup> (γ), 4<sup>η</sup> (δ), 5<sup>η</sup> (ε) αξονική μορφή στρέβλωσης της διατομής RHS500x300. 8, όπως υπολογίστηκε από την ανώτερη θεωρία δοκού.

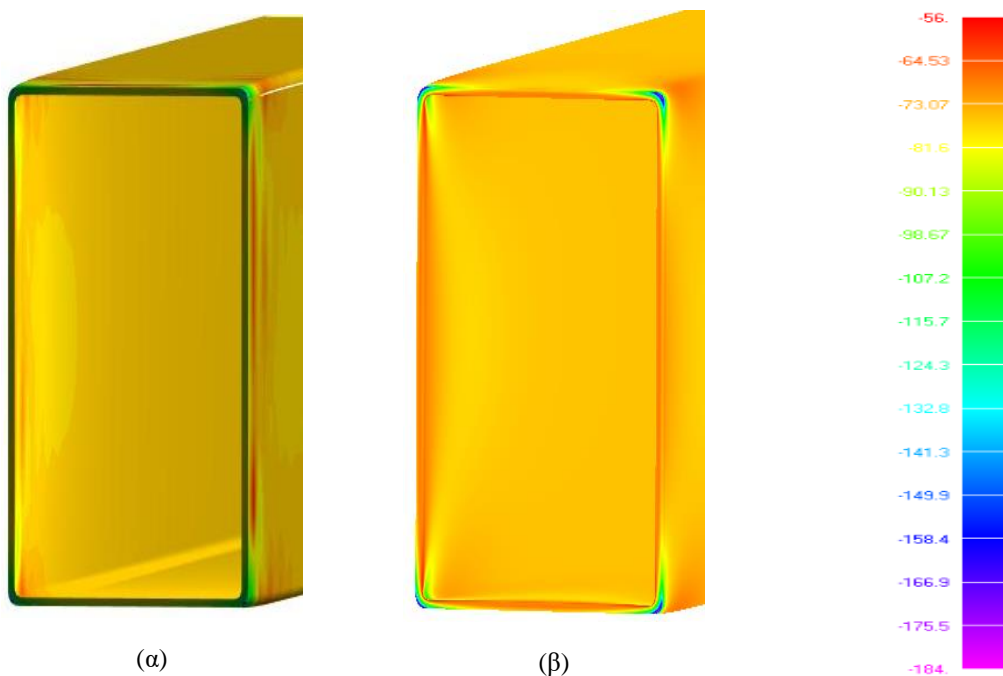


**Σχήμα 4.3-15:** Μέγιστες και ελάχιστες αξονικές και Von-Mises τάσεις της διατομής RHS500x300.8, όπως προέκυψαν από την ανάλυση ανώτερης θεωρίας δοκού και τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων.

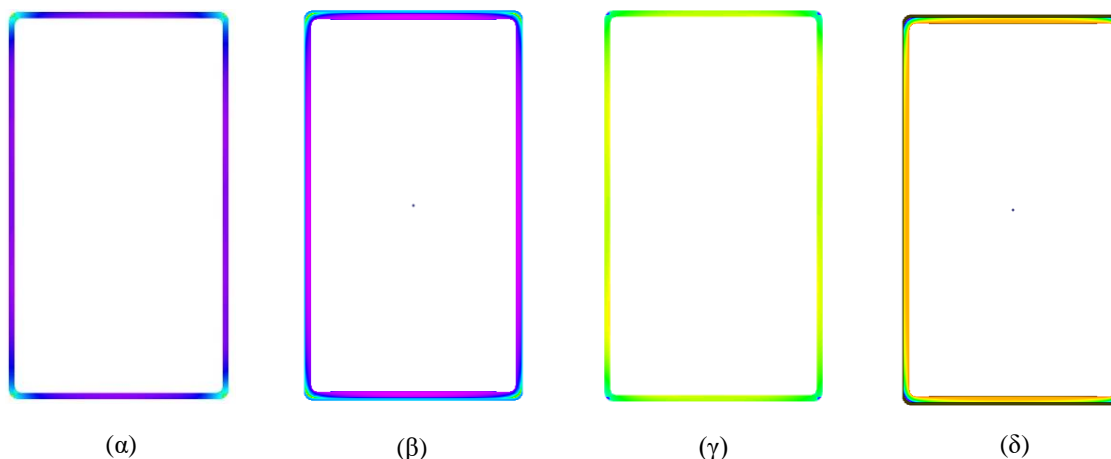
Σημείωση : Η αντίστοιχη ορθή τάση από την θεωρία Euler-Bernoulli ισούται με  
 (αξονικό φορτίο) / (εμβαδόν διατομής) =  $-1\text{kN}/0.0124\text{m}^2 = -80.645\text{ kPa}$ .



Σχήμα 4.3-16: Κατανομή τάσεων Von-Mises κοντά στη περιοχή της πάκτωσης όπως προέκυψε από την ανάλυση ανώτερης θεωρίας δοκού (α) και από την ανάλυση τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων (β).



Σχήμα 4.3-17: Κατανομή ορθών τάσεων κοντά στη περιοχή της πάκτωσης όπως προέκυψε από την ανάλυση ανώτερης θεωρίας δοκού (α) και από την ανάλυση τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων (β).



**Σχήμα 4.3-18:** Κατανομή τάσεων Von-Mises στην διατομή της πάκτωσης όπως προέκυψε από την ανάλυση ανώτερης θεωρίας δοκού (α) και από την ανάλυση τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων (β), Κατανομή ορθών τάσεων στη διατομή της πάκτωσης όπως προέκυψε από την ανάλυση ανώτερης θεωρίας δοκού (γ) και από την ανάλυση τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων (δ).

### Σχόλια επί της αριθμητικής εφαρμογής 4.3

Η ανάλυση μέσω της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης είναι ικανή να δώσει πολύ ακριβή αποτελέσματα,. Πιο συγκεκριμένα παρατηρήθηκε ότι:

α) Όσο αυξάνονται οι βαθμοί ελευθερίας το φορτίο λυγισμού συγκλίνει προς κάποια συγκεκριμένη τιμή.

β) Για επαρκή αριθμό βαθμών ελευθερίας το κρίσιμο φορτίο λυγισμού που υπολογίζεται μέσω της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης ταυτίζεται με αυτό που υπολογίζεται μέσω της χρήσης τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων.

γ) Η μορφή της παραμόρφωσης που προκύπτει από την ανάλυση μέσω της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης αναπαριστά με μεγάλη ακρίβεια τις παραμορφώσεις που οφείλονται σε τοπικά φαινόμενα, και ταυτίζεται με αυτήν που προκύπτει από ανάλυση μέσω της χρήσης τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων.

δ) Για επαρκή αριθμό βαθμών ελευθερίας το ανομοιόμορφο πεδίο των τάσεων στην περιοχή της πάκτωσης που υπολογίζεται μέσω της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης ταυτίζεται με αυτό που υπολογίζεται μέσω της χρήσης τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων.

ε) Τόσο για το φορτίο λυγισμού όσο και για το πεδίο των τάσεων παρατηρείται μεγάλη απόκλιση στις τιμές της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης και των τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων από τις τιμές των θεωριών Bernoulli και Timoshenko.

στ) Το μήκος των 2 μέτρων επιλέχθηκε διότι σε σχέση και με τις εξωτερικές διαστάσεις των διατομών που παρέμειναν σταθερές παρατηρείται ότι κυριαρχεί ο τοπικός λυγισμός έναντι του πλευρικού όπως για παράδειγμα σε ένα πρόβολο μεγαλύτερου μήκους και άρα τα φαινόμενα στρέβλωσης και διαστρέβλωσης είναι εντονότερα .

#### 4.4 Αριθμητική εφαρμογή 3-Ενισχυμένη ανοιχτή διατομή 500x300.5.13

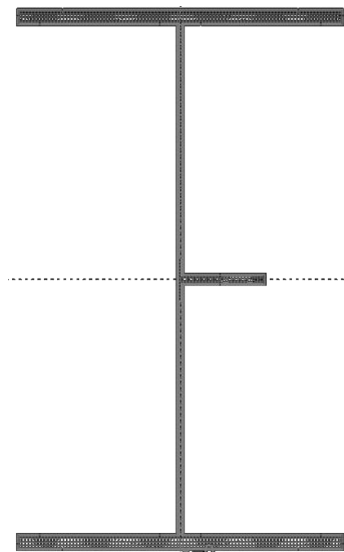
Στην τρίτη αριθμητική εφαρμογή εξετάζονται φορέας, στατικού συστήματος προβόλου ανοιχτής συγκολλητής μεταλλικής διατομής ( $S355$ ,  $E=2.1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$ ,  $\mu=8.08 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$ ,  $\nu=0.3$ ) μορφής **I**. Το προφίλ της διατομής αποτελείται από την 500x300.5.13 η οποία ενισχύεται με διαμήκη νεύρωση στην μέση του κορμού της με ορθογωνική διατομή 75x8. Στόχος του παραδείγματος είναι η διερεύνηση των δυνατοτήτων της ανώτερης θεωρίας δοκού στα μονοπάτια της μη γραμμικής θεωρίας λυγισμού, της ανελαστικής συμπεριφοράς καθώς και της μεταλυγισμικής αντοχής των πλακών. Οι διαστάσεις των διαμήκων νευρώσεων επιλέγονται έτσι ώστε να μην υπάρχει κίνδυνος στρεπτικού λυγισμού.

Αρχικά υπολογίζεται το κρίσιμο φορτίο λυγισμού του παραπάνω φορέα σύμφωνα με την φόρτιση **I** με χρήση του λογισμικού HOBT. Το λογισμικό αυτό υλοποιεί την ανάλυση βάσει της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης, για διάφορους βαθμούς ελευθερίας ( $N_{\text{dofs}}$ ) κάθε στοιχείου, το οποίο χωρίζεται σε 40 πεπερασμένα στοιχεία, καθένα από τα οποία έχει δύο κόμβους. Η παραπάνω τιμή συγκρίνεται με την αντίστοιχη τιμή που λαμβάνεται από την ανάλυση λογισμικού με χρήση τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων.

Η διακριτοποίηση της διατομής καθώς και ο αριθμός των διαμηκών πεπερασμένων στοιχείων από την ανάλυση του λογισμικού HOBT αναφέρονται στον πίνακα 2 ενώ στον πίνακα 3 παρουσιάζονται οι διακριτοποιήσεις που πραγματοποιήθηκαν από τις αναλύσεις τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων. Το πλέγμα που χρησιμοποιήθηκε για την ανάλυση μέσω της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης παρουσιάζεται στο σχήμα 1.

**Πίνακας 4.4-1: Γεωμετρικά-αδρανειακά στοιχεία εξεταζόμενων διατομών τύπου I**

Τύπος	h(m)	b(m)	$t_f$ (m)	$t_w$ (m)	A(m <sup>2</sup> )	$I_{yy}$ (m <sup>4</sup> )	$I_{zz}$ (m <sup>4</sup> )
500x300.5.13- 75x8	0.5	0.3	0.013	0.005	$1.077 \times 10^{-2}$	$5.0696 \times 10^{-4}$	$5.9693 \times 10^{-5}$



**Σχήμα 4.4-1: Πλέγμα που χρησιμοποιήθηκε κατά την ανάλυση της διατομής μέσω της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης για τη διατομή 500x300.5.13-75x8.**



**Πίνακας 4.4-2: Διακριτοποίηση διατομής μοντέλου που αναλύθηκε μέσω της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης.**

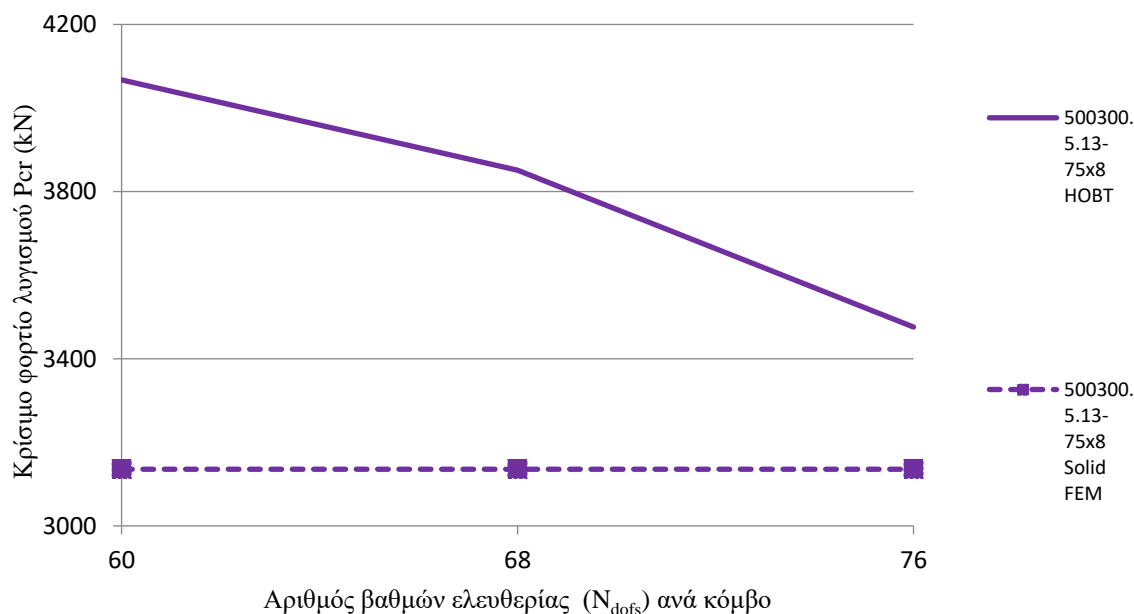
Διατομή	Μοντέλο	Διακριτοποίηση		
		Συνοριακά στοιχεία	Εγκάρσια Τετραεδρικά στοιχεία Στοιχεία Gauss Points	Διαμήκης (στοιχεία δοκού)
500×300.5.13-75x8 2m		780	606	2x2

**Πίνακας 4.4-3: Διακριτοποίηση διατομής μοντέλων βάσει μεθόδου τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων.**

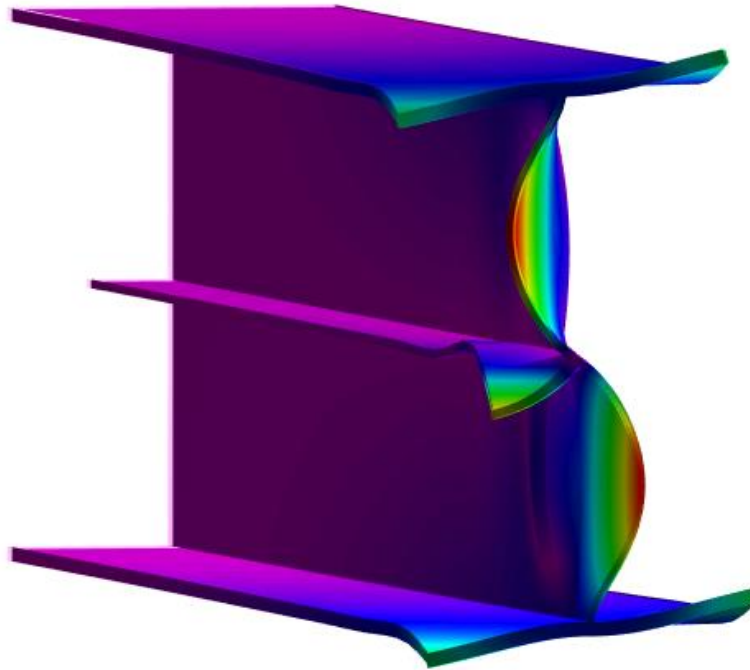
Διατομή	Μοντέλο	Τρισδιάστατα πεπερασμένα στοιχεία
500×300.5.13-75x8 2m		17550

**Πίνακας 4.4-4: Σύγκριση κρίσιμου φορτίου λυγισμού όπως προέκυψε βάσει θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης και μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων.**

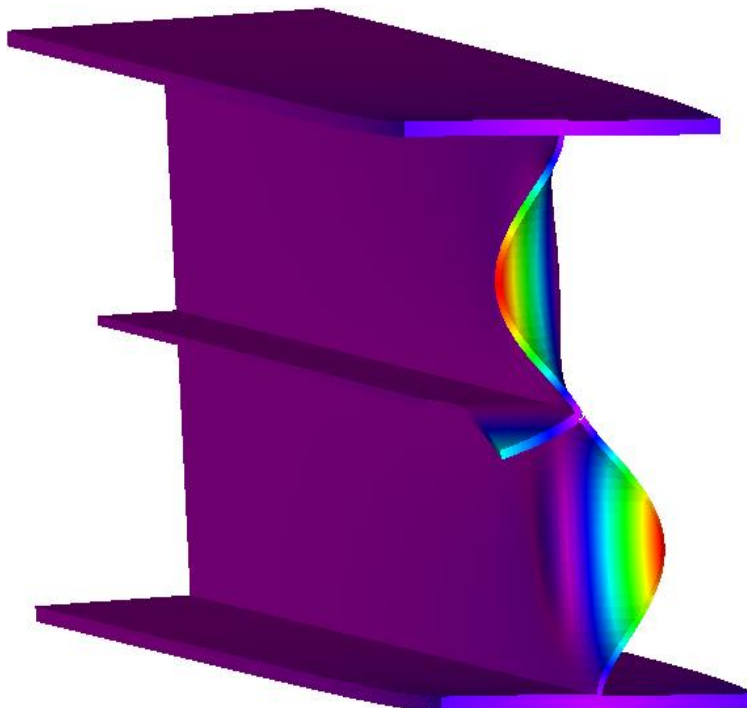
Διατομή	Φορτίο λυγισμού HOBT ( $N_{dofs}=76$ )	Τρισδιάστατα πεπερασμένα στοιχεία	Απόκλιση
500×300.5.13-75x8 2m	3475.89	3135.60	10.85%



**Σχήμα 4.4-2: Σύγκριση κρίσιμου φορτίου λυγισμού, όπως αυτό προέκυψε από ανάλυση μέσω θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης (HOBT) και από ανάλυση με χρήση τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων.**



**Σχήμα 4.4-3:** Παραμορφωμένη εικόνα προβόλου μήκους 2m, διατομής 500x300.5.13-75x8, όπως όπως αυτή προέκυψε από την ανάλυση σύμφωνα με την θεωρία δοκού ανώτερης τάξης για  $N_{dofs}=76$ .



**Σχήμα 4.4-4:** Παραμορφωμένη εικόνα προβόλου μήκους 2m, διατομής 500x300.5.13-75x8, όπως όπως αυτή προέκυψε από την ανάλυση τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων.

### Σχόλια επί της αριθμητικής εφαρμογής 4.4

Η ανάλυση μέσω της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης είναι ικανή να δώσει ικανοποιητικά αποτελέσματα ακόμα και σε μια πιο πολύπλοκη περίπτωση διατομής. Συνεπώς γεννώνται ερωτήματα για περαιτέρω έρευνα σε θέματα κύρτωσης πλακών όπως:

- Μη γραμμική θεωρία λυγισμού
- Μεταλυγισμική συμπεριφορά πλακών
- Ανελαστική ανάλυση και μη γραμμικότητα υλικού



## 5 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ - ΣΤΟΧΟΙ ΓΙΑ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

### 5.1 Συμπεράσματα «ανοιχτών» διατομών

Από την ανάλυση στοιχείων όλων των διατομών «ανοικτού τύπου» οι οποίες θεωρούνται ευαίσθητες σε τοπικά φαινόμενα για αξονική ή/και διατμητική φόρτιση, βάσει του Ευρωκώδικα 3, προέκυψαν τα ακόλουθα συμπεράσματα:

- Τα τοπικά φαινόμενα έχουν σημαντική επίδραση τόσο στη μορφή της παραμόρφωσης όσο και στο κρίσιμο φορτίο λυγισμού της διατομής. Αυτό επιβεβαιώνεται από τη ταχύτητα σύγκλισης των προβόλων 2 μέτρων (σε σχέση με αυτούς των 5 μέτρων όπου κυριαρχεί ο καθολικός λυγισμός) όπου απαιτείται αυξημένος αριθμός βαθμών ελευθερίας για να υπάρξει σύγκλιση με τα τρισδιάστατα πεπερασμένα στοιχεία οπότε οι κλασσικές θεωρίες Euler-Bernoulli και Timoshenko αδυνατούν να υπολογίσουν με ακρίβεια.
- Λόγω των παραδοχών τους, οι θεωρίες δοκού Timoshenko και Euler-Bernoulli δεν επιτρέπουν την ακριβή περιγραφή της συμπεριφοράς λεπτότοιχων στοιχείων τα οποία υπόκεινται σε τοπικό λυγισμό. Ως συνέπεια, τα αποτελέσματα που εξάγονται από αναλύσεις μέσω των θεωριών Timoshenko και Euler-Bernoulli είναι ιδιαίτερα συντηρητικά.
- Για επαρκή αριθμό βαθμών ελευθερίας το ανομοιόμορφο πεδίο των τάσεων στην περιοχή της πάκτωσης που υπολογίζεται μέσω της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης ταυτίζεται με αυτό που υπολογίζεται μέσω της χρήσης τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων. Παρατηρείται ότι η αξονική τάση που υπολογίζεται από την θεωρία δοκού ανώτερης τάξεως για το ανομοιόμορφο πεδίο των τάσεων είναι σχεδόν η διπλάσια από αυτήν της θεωρίας Euler-Bernoulli.
- Υπάρχει σύγκλιση ακόμα και σε αρκετά λεπτές διατομές (σε συνδυασμό με το ύψος) για τις ανάγκες του Πολιτικού Μηχανικού.

## 5.2 Συμπεράσματα «κλειστών» διατομών

Από την ανάλυση στοιχείων όλων των διατομών «κλειστού τύπου» οι οποίες θεωρούνται ευαίσθητες σε τοπικά φαινόμενα για αξονική ή/και διατμητική φόρτιση, βάσει του Ευρωκώδικα 3, προέκυψαν τα ακόλουθα συμπεράσματα:

- Τα τοπικά φαινόμενα έχουν σημαντική επίδραση τόσο στη μορφή της παραμόρφωσης όσο και στο κρίσιμο φορτίο λυγισμού της διατομής. Αυτό επιβεβαιώνεται τόσο από τις αναλύσεις με χρήση της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης, όσο και από τις αναλύσεις με χρήση τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων.
- Κυρίαρχο ρόλο στη μορφή της αξονικής παραμόρφωσης των στοιχείων έχει το φαινόμενο της διαστρέβλωσης. Κατ'επέκταση, οι κλασσικές θεωρίες δοκού Timoshenko & Euler-Bernoulli, στις οποίες υπάρχει η παραδοχή της επιπεδότητας της διατομής, αδυνατούν να προσεγγίσουν την τιμή κρίσιμου φορτίου λυγισμού και την μορφή παραμόρφωσης της δοκού με ακρίβεια και αντίθετα με την περίπτωση των ανοιχτών διατομών δίνουν τιμές αρκετά αυξημένες και άρα κατά της ασφαλείας.
- Για επαρκή αριθμό βαθμών ελευθερίας το ανομοιόμορφο πεδίο των τάσεων στην περιοχή της πάκτωσης που υπολογίζεται μέσω της θεωρίας δοκού ανώτερης τάξης ταυτίζεται με αυτό που υπολογίζεται μέσω της χρήσης τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων. Παρατηρείται ότι η αξονική τάση που υπολογίζεται από την θεωρία δοκού ανώτερης τάξεως για το ανομοιόμορφο πεδίο των τάσεων είναι σχεδόν η διπλάσια από αυτήν της θεωρίας Euler-Bernoulli.
- Υπάρχει σύγκλιση ακόμα και σε αρκετά λεπτές διατομές για τις ανάγκες του Πολιτικού Μηχανικού.

## 6 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] E. Reissner, Analysis of shear lag in box beams by the principle of minimum potential energy. *Quarterly of Applied Mathematics*, 4 (3), 268 – 278, 1946.
- [2] R. Schardt, Lateral Torsional and Distortional Buckling of Channel- and Hat-Sections. *Journal of Constructional Steel Research*, 31 (2-3), 243-265, 1994b.
- [3] I.S. Sohal, W.F. Chen, Local and post-buckling behavior of tubular beam-columns. *ASCE Journal of Structural Engineering*, 114 (5), 1073–1090, 1988.
- [4] D. Henriques, R. Gonçalves, D. Camotim, GBT-based finite element to assess the buckling behaviour of steel-concrete composite beams. *Thin-Walled Structures*, 107, 207–220, 2016.
- [5] J. Davies, P. Leach, D. Heinz, Second-order generalised beam theory. *Journal of Constructional Steel Research*, 31 (2-3), 221–241, 1994.
- [6] R. Gonçalves, D. Camotim, GBT local and global buckling analysis of aluminium and stainless steel columns. *Computers and Structures*, 82 (17–19), 1473–1484, 2004.
- [7] P.B. Dinis, D. Camotim, N. Silvestre, On the local and global buckling behaviour of angle, t-section and cruciform thin-walled members. *Thin-Walled Structures*, 48 (10-11), 786–797, 2010
- [8] R. Gonçalves, D. Camotim, Elastic buckling of uniformly compressed thin-walled regular polygonal tubes. *Thin-Walled Structures*, 71, 35–45, 2013.
- [9] R. Gonçalves, D. Camotim, Buckling behaviour of thin-walled regular polygonal tubes subjected to bending or torsion. *Thin-Walled Structures*, 73, 185–197, 2013.
- [10] C. Basaglia, D. Camotim, R. Goncalves, A. Graca, GBT-based assessment of the buckling behaviour of cold-formed steel purlins restrained by sheeting. *Thin-Walled Structures*, 72, 217–229, 2013.
- [11] S. Ádány, B.W. Schafer, Buckling Mode Decomposition of Single-Branched Open Cross-Section Members via Finite Strip Method: Derivation. *Thin-Walled Structures*, 44 (5), 563-584, 2006a.
- [12] S. Ádány, B.W. Schafer, Buckling Mode Decomposition of Single-Branched Open Cross-Section Members via Finite Strip Method: Application and Examples. *Thin-Walled Structures*, 44 (5), 585-600, 2006b.
- [13] M. Bradford, R. Johnson, Inelastic buckling of composite bridge girders near internal supports. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers Part 2-Research and Theory*, 83, 143–159, 1987.
- [14] S.A. Karamanos, J.L. Tassoulas, Tubular members. I: Stability analysis and preliminary results. *Journal of Engineering Mechanics*, 122 (1), 64–71, 1996.
- [15] S.A. Karamanos, J.L. Tassoulas, Tubular members II: local buckling and experimental verification. *Journal of Engineering Mechanics*, 122 (1), 72–78, 1996.
- [16] S.A. Karamanos, Bending instabilities of elastic tubes, *International Journal of Solids and Structures*, 39 (8), 2059-2085, 2002.
- [17] S. Houliara, S.A. Karamanos, Buckling and post-buckling of long pressurised elastic thin-walled tubes under in-plane bending. *Int. J. Nonlinear Mech.*, 41 (4), 491-511, 2006.

- [18] T. Aoki, Y. Migita, Y. Fukumoto, Local buckling strength of closed polygon folded section columns. *J Constr Steel Res*, 20 (4), 259–70, 1991.
- [19] W. H. Wittrick, A unified approach to the initial buckling of stiffened panels in compression. *Aeronautical Quarterly*, 19 (3), 265-283, 1968.
- [20] C.E. Kurt, R.C. Johnson, Cross sectional imperfections and columns stability. *Journal of the Structural Division*, 104 (12), 1869-1883, 1978.
- [21] N. Koseko, T. Aoki, Y. Fukumoto, The local buckling strength of the octagonal section steel columns. *Proceedings of the Japan Society of Civil Engineers*, 330, 27-36, 1983.
- [22] E.J. Sapountzakis, J.A. Dourakopoulos, Flexural – Torsional Buckling Analysis of Composite Beams by BEM Including Shear Deformation Effect. *Mechanics Research Communications*, 35 (8), 497-516, 2008.
- [23] I.C. Dikaros, E.J. Sapountzakis, Distortional Analysis of Beams of Arbitrary Cross Section by BEM. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, 143 (10): 04017118, DOI:10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001340, 2017.
- [24] Z.P. Bažant, L. Cedolin, Stability of Structures – Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories. *World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd*, 2010.
- [25] J.T. Katsikadelis, Boundary Elements. Theory and Applications. *Symeon Publications*, Athens, 1999.
- [26] W. Weaver, P.R. Johnston, Finite Elements for Structural Analysis, *Prentice Hall*, New Jersey, 1984.
- [27] J.T. Katsikadelis, The Analog Equation Method. A Boundary – only Integral Equation Method for Nonlinear Static and Dynamic Problems in General Bodies. *Theoretical and Applied Mechanics*, 27, 13-38, 2002.
- [28] G. Beer, I. Smith, C. Duenser, The boundary element method with programming — For engineers and scientists. *Springer*, New York, 2008.
- [29] Ansys Mechanical APDL Release 15.0 UP20131014.
- [30] MSC/NASTRAN for Windows, Finite Element Modelling and Post Processing System, Help System Index, Version 4.0, USA, 1999.
- [31] I. C. Dikaros, E.J. Sapountzakis, Distortional Analysis of Beams of Arbitrary Cross Section by BEM. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, 143 (10): 04017118, DOI:10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001340, 2017.
- [32] A. K. Argyridi, E. J. Sapountzakis, E. I. Tsalamegka, Higher order beam theory in local buckling analysis of beams – Application in standard steel profiles, *Proceedings of the Eighth International Conference of Thin-Walled Structures, Lisbon, Portugal, 2018*
- [33] A. K. Argyridi, E. J. Sapountzakis, Advanced analysis of arbitrarily shaped axially loaded beams including axial warping and distortion. *Thin-Walled Structures*, vol 134, pp 127-147, 2019.
- [34] A. K. Argyridi, E. J. Sapountzakis, “Higher Order Beam Theory for Linear Local Buckling Analysis”, *Engineering Structures*, 2018.
- [35] A. K. Argyridi, E. J. Sapountzakis, Z.N. Chatzopoulos “Local Buckling Analysis of Thin- or Thick- Walled Beams Employing Advanced Beam Elements”, *Proc. of The Thirteenth*



---

*International Conference on Computational Structures Technology CST2018*, Sitges, Barcelona, Spain, 4-6 September, 2018.