



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ, ΕΛΕΓΧΟΥ ΚΑΙ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗΣ

Αποκεντρωμένη Εκτίμηση και Έλεγχος Σχηματισμού
Συστημάτων Πολλών Πρακτόρων

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Χαραλαμπία Σταμούλη

Επιβλέπων: Χαράλαμπος Ψυλλάκης
Λέκτορας Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2019



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ, ΕΛΕΓΧΟΥ ΚΑΙ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗΣ

Αποκεντρωμένη Εκτίμηση και Έλεγχος Σχηματισμού
Συστημάτων Πολλών Πρακτόρων

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Χαραλαμπία Σταμούλη

Επιβλέπων: Χαράλαμπος Ψυλλάκης
Λέκτορας Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 24η Σεπτεμβρίου 2019.

.....
Χ. Ψυλλάκης
Λέκτορας Ε.Μ.Π.

.....
Κ. Τζαφέστας
Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Κ. Κυριακόπουλος
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2019

.....

Χαραλαμπία Σταμούλη

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Copyright © Χαραλαμπία Σταμούλη, 2019.

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Περίληψη

Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετάμε το πρόβλημα της ταυτόχρονης αποκεντρωμένης εκτίμησης και ελέγχου σχηματισμού για ομάδες ολόιδιων κινούμενων πρακτόρων με περιορισμένες δυνατότητες επικοινωνίας, αίσθησης και υπολογισμού, θεωρώντας μη κατευθυνόμενο δίκτυο επικοινωνίας. Το πρόβλημα μπορεί να χωριστεί σε δύο υποπρόβλήματα: το πρόβλημα της δυναμικής συναίνεσης μέσου όρου και το πρόβλημα σχηματισμού ελέγχου. Στο πρόβλημα της δυναμικής συναίνεσης μέσου όρου, μία ομάδα από πράκτορες συνεργάζεται προκειμένου να υπολογίσει το μέσο όρο τοπικά διαθέσιμων χρονομεταβαλλόμενων σημάτων αναφοράς. Στο πρόβλημα του αποκεντρωμένου ελέγχου σχηματισμού, κάθε πράκτορας κινείται με τρόπο τέτοιο ώστε το σύνολο των πρακτόρων να πετύχει έναν επιθυμητό σχηματισμό, ο οποίος κωδικοποιείται μέσω γεωμετρικών στατιστικών ροπών. Στο συνολικό πρόβλημα κάθε πράκτορας παράγει μία εκτίμηση του καθολικού σχηματισμού, η οποία έπειτα χρησιμοποιείται στον τοπικό ελεγκτή του, δημιουργώντας έτσι ένα βρόχο ανάδρασης μεταξύ των εκτιμητών και των ελεγκτών. Τόσο το πρωτόκολλο εκτίμησης όσο και το πρωτόκολλο ελέγχου είναι πλήρως αποκεντρωμένα με την έννοια ότι οι αντίστοιχοι αλγόριθμοι που εφαρμόζονται από κάθε πράκτορα βασίζονται μόνο σε τοπικούς υπολογισμούς και τοπική επικοινωνία με το σύνολο των γειτόνων του. Σχεδιάζουμε έναν καινοτόμο αλγόριθμο, που αποτελείται από έναν αποκεντρωμένο εκτιμητή και έναν ελεγκτή σχηματισμού. Ο εύρωστος αλγόριθμος αποκεντρωμένης εκτίμησης που προτείνουμε μπορεί να πετύχει φραγμένο σφάλμα εκτίμησης με πρακτική ασυμπτωτική σύγκλιση στο μηδέν στη μόνιμη κατάσταση, ακόμα και για πολύ γρήγορα χρονομεταβαλλόμενα σήματα αναφοράς. Ο εκτιμητής αυτός εξασφαλίζει προδιαγεγραμμένη επίδοση με την έννοια ότι ο ελάχιστος επιτρεπτός ρυθμός σύγκλισης, καθώς και η μέγιστη επιτρεπτή απόκλιση μεταξύ των εκτιμήσεων των πρακτόρων και το σφάλμα παρακολούθησης στη μόνιμη κατάσταση μπορούν να ρυθμιστούν οσοδήποτε μικρά εκ των προτέρων, μέσω κατάλληλης επιλογής συγκεκριμένων σχεδιαστικών παραμέτρων. Επιπλέον, η επίδοση συναίνεσης και παρακολούθησης είναι πλήρως ανεξάρτητες η μία από την άλλη. Ακόμα, εισάγουμε έναν αλγόριθμο παρακολούθησης της παραγωγής των σημάτων αναφοράς, ο οποίος επιτρέπει την επιλογή σχετικά μικρών κερδών. Όσον αφορά τον έλεγχο σχηματισμού, ο προτεινόμενος αλγόριθμος εξασφαλίζει σύγκλιση των καθολικών ροπών σχηματισμού στις επιθυμητές τιμές, ενώ παράλληλα ανεξαρτητοποιεί την επίδοση του εκτιμητή από την επίδοση του ελεγκτή. Τέλος, η ελάχιστη επιτρεπτή απόσταση μεταξύ δύο οποιωνδήποτε πρακτόρων μπορεί να προκαθοριστεί έτσι ώστε να επιτευχθεί αποφυγή συγκρούσεων μεταξύ των πρακτόρων.

Λέξεις κλειδιά: Συστήματα Πολλών Πρακτόρων, Αποκεντρωμένη Εκτίμηση, Δυναμική Συναίνεση Μέσου Όρου, Έλεγχος Σχηματισμού, Προδιαγεγραμμένη Επίδοση, Αποφυγή Συγκρούσεων Πρακτόρων

Abstract

In this thesis, we consider the distributed simultaneous estimation and formation control problem for swarms of identical mobile agents with limited communication, sensing and computation capabilities, under an undirected communication protocol. The problem can be divided in two parts: a dynamic average consensus problem and a formation control problem. In the dynamic average consensus problem, a group of agents cooperate in order to track the average of locally available time-varying reference signals. In the distributed formation control problem, each agent moves so that the swarm achieves a desired formation, which is encoded via geometric moment statistics within this framework. In the overall problem, each agent produces an estimate of the global formation statistics, which is then used in its local motion controller, thus creating a feedback connection between the estimators and controllers. Both the estimation and control protocol are purely distributed, since the respective algorithms implemented by each agent are based solely on local computations and local communication with its neighborhood set. A novel algorithm, consisting of a distributed estimator and a formation controller, is developed. A robust distributed estimation algorithm, capable of achieving bounded tracking error, with practical asymptotic convergence to zero even for fast time-varying reference signals, is introduced. The proposed estimator guarantees prescribed performance in the sense that the minimum allowable convergence rate, as well as the maximum allowable deviation among the agents' estimates and steady state tracking error can be set arbitrarily small a priori, via the appropriate selection of certain design parameters. Moreover, the consensus and the tracking performance are fully decoupled. Additionally, a tracking differentiator algorithm is introduced and incorporated in the estimator, thus allowing the selection of relatively small gains. Regarding the formation control scheme, it guarantees convergence of the global formation statistics to desired values, while decoupling the estimators' performance from the controllers' performance. Finally, a minimum allowable inter-agent distance can be predetermined so that inter-agent collision avoidance is achieved.

Keywords: Multi-Agent Systems, Distributed Estimation, Dynamic Average Consensus, Formation Control, Prescribed Performance, Inter-Agent Collision Avoidance

Ευχαριστίες

Η παρούσα εργασία εκπονήθηκε κατά το ακαδημαϊκό έτος 2018-2019 στον Τομέα Σημάτων, Ελέγχου και Ρομποτικής της Σχολής Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερος τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Χαράλαμπο Ψυλλάκη για τη βοήθειά του στην εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας, καθώς και για το ενδιαφέρον που μου καλλιέργησε μέσα από τα μαθήματά του για τα συστήματα αυτομάτου ελέγχου και τις πολύτιμες γνώσεις που μου μετέφερε όλα αυτά τα χρόνια. Επίσης, οφείλω να ευχαριστήσω θερμά τον καθηγητή κ. Κωνσταντίνο Κυριακόπουλο και το μεταδιδακτορικό ερευνητή κ. Χαράλαμπο Μπεχλιούλη για τη συνεχή καθοδήγηση και στήριξη που με προθυμία μου παρείχαν σε όλη τη διάρκεια αυτής της εργασίας.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τα μέλη της οικογένειάς μου και τους φίλους μου για τη διαρκή και αμέριστη υποστήριξη που μου παρείχαν όλα αυτά τα χρόνια.

Χαραλαμπία Σταμούλη,
Σεπτέμβριος 2019

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	1
2	Δυναμική Συναίνεση Μέσου Όρου	2
2.1	Σχετικές Προσεγγίσεις	2
2.2	Συνεισφορά	3
2.3	Βασικά Προκαταρκτικά Στοιχεία	3
2.3.1	Θεωρία Γράφων	3
2.3.2	Προδιαγεγραμμένη Επίδοση	4
2.3.3	Μετασχηματισμός Σφάλματος	5
2.3.4	Δυναμικά Συστήματα	6
2.4	Ορισμός Προβλήματος	6
2.5	Αλγόριθμος	7
2.5.1	Εκτιμητής Παραγώγων Σημάτων Αναφοράς	7
2.5.2	Εύρωστη Δυναμική Συναίνεση Μέσου Όρου	11
2.6	Αποτελέσματα Προσομοιώσεων	18
3	Αποκεντρωμένος Έλεγχος Σχηματισμού Συστημάτων Πολλών Πρακτόρων	25
3.1	Σχετικές Προσεγγίσεις	25
3.2	Συνεισφορά	26
3.3	Ορισμός Προβλήματος	27
3.4	Αλγόριθμος	28
3.4.1	Αποκεντρωμένη Εκτίμηση με Προδιαγεγραμμένη Επίδοση	28
3.4.2	Έλεγχος Σχηματισμού	29
3.5	Αποτελέσματα Προσομοιώσεων	34
4	Συμπεράσματα	38
5	Βιβλιογραφία	39

1 Εισαγωγή

Η πρόσφατη ανάπτυξη της μηχανοτρονικής και των ασύρματων επικοινωνιών έχει φέρει στη διάθεσή μας ένα νέο τεχνολογικό εργαλείο με πολλές δυνατότητες, τα λεγόμενα διασυνδεδεμένα συστήματα πολλών πρακτόρων ή εν συντομία πολυ-πρακτορικά συστήματα. Πιο συγκεκριμένα, η δημιουργία αισθητήρων και επενεργητών με χαμηλό κόστος, χαμηλή κατανάλωση ισχύος, μικρό μέγεθος και πολλές λειτουργίες ενέπνευσε αποφασιστικά την ιδέα των διασυνδεδεμένων πολυ-πρακτορικών συστημάτων και από τότε οι προοπτικές τους αυξάνονται ταχύτατα, λόγω της θετικής επίδρασης που έχουν στην καθημερινή μας ζωή χάρη στην προσαρμοστικότητα και τη λειτουργικότητά τους.

Ιδιαίτερα, στον τομέα των διασυνδεδεμένων πολυ-πρακτορικών συστημάτων, το πρόβλημα της δυναμικής συναίνεσης μέσου όρου, όπου μία ομάδα από πράκτορες στοχεύει στην παρακολούθηση του μέσου όρου δεδομένων τοπικών χρονομεταβαλλόμενων σημάτων αναφοράς, βασισμένη σε τοπική επικοινωνία μεταξύ γειτονικών πρακτόρων, παίζει πολύ σημαντικό ρόλο. Τα σήματα αναφοράς μπορεί να είναι μετρήσεις από αισθητήρες, όπως για παράδειγμα θέσεις πρακτόρων, τοπική θερμοκρασία, απόσταση από κάποιο στόχο κ.λπ. Είναι αξιοσημείωτο ότι η ικανότητα υπολογισμού του μέσου όρου χρονομεταβαλλόμενων σημάτων αναφοράς έχει αποδειχθεί χρήσιμη σε αναρίθμητες εφαρμογές και αυτό εξηγεί γιατί αποκεντρωμένες αλγοριθμικές λύσεις έχουν βρει εφαρμογή σε πολλά φαινομενικά διαφορετικά προβλήματα. Ένα κίνητρο για την ανάπτυξη τέτοιων αλγορίθμων αποτελεί η ανάγκη παρεμβολής κατανεμημένων δεδομένων [1, 2], σε περίπτωση που τα σύνολα δεδομένων προέρχονται από διαφορετικούς χρήστες οι οποίοι δεν επιθυμούν να μοιραστούν τις ιδιωτικές τους πληροφορίες με άλλους χρήστες. Άλλα παραδείγματα τέτοιων εφαρμογών συναντώνται στην αποκεντρωμένη εκτίμηση σε συνδυασμό με έλεγχο σχηματισμού [3–10], συγχώνευση δεδομένων από πολλούς αισθητήρες [11–20], διατήρηση της συνεκτικότητας ενός δικτύου [21], κυρτή βελτιστοποίηση [22–29] κ.λπ.

Σημαντική ερευνητική προσπάθεια έχει πραγματοποιηθεί ειδικά σε σχέση με τον έλεγχο διασυνδεδεμένων πολυ-πρακτορικών συστημάτων. Η συγκεντρωτική προσέγγιση στον πολυ-πρακτορικό έλεγχο, στην οποία ένας μοναδικός πράκτορας έχει πρόσβαση στις τοπικές πληροφορίες κάθε πράκτορα και μπορεί να δώσει εντολές σε κάθε πράκτορα, δεν είναι εύρωστη σε σφάλματα στον κεντρικό πράκτορα και δεν κλιμακώνει καλά με αύξηση του πλήθους των πρακτόρων. Για το λόγο αυτό, έχει αναπτυχθεί, και μάλιστα με ραγδαίους ρυθμούς, ο αποκεντρωμένος πολυ-πρακτορικός έλεγχος, ο οποίος επιτρέπει σε ένα σύνολο από πράκτορες, ενδεχομένως υποκείμενους σε περιορισμούς όσον αφορά τις αισθητηριακές και επικοινωνιακές τους δυνατότητες, να επιτελέσει καθολικές εργασίες χωρίς την εμπλοκή ενός κεντρικού ελεγκτή ή πρόσβαση σε καθολικές πληροφορίες. Ιδιαίτερη αξία στον τομέα του αποκεντρωμένου πολυ-πρακτορικού ελέγχου έχει ο έλεγχος σχηματισμού βασισμένος σε αποκεντρωμένη εκτίμηση, όπου τοπικοί ελεγκτές χρησιμοποιούν τοπικές

εκτιμήσεις του καθολικού σχηματισμού του συστήματος των πρακτόρων προκειμένου να το οδηγήσουν σε έναν επιθυμητό σχηματισμό. Για παράδειγμα, τέτοιοι αλγόριθμοι μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την κίνηση μίας πολυ-πρακτορικής ομάδας κατά μήκος ενός δεδομένου μονοπατιού [30]. Εφόσον η προσέγγιση είναι αποκεντρωμένη, τόσο οι νόμοι εκτίμησης όσο και οι νόμοι ελέγχου βασίζονται αποκλειστικά σε τοπικούς υπολογισμούς και τοπική επικοινωνία των πρακτόρων με τους γείτονές τους.

2 Δυναμική Συναίνεση Μέσου Όρου

2.1 Σχετικές Προσεγγίσεις

Το πρόβλημα της δυναμικής συναίνεσης μέσου όρου έχει μελετηθεί εκτενώς τα τελευταία χρόνια και πολλοί σχετικοί αλγόριθμοι έχουν προταθεί. Ο αναλογικός-ολοκληρωτικός εκτιμητής (PI) στο [3] εξασφαλίζει μηδενικό σφάλμα μόνιμης κατάστασης για σταθερές εισόδους (σήματα αναφοράς) και σταθερά, συνδεδεμένα και ισορροπημένα δίκτυα, ακόμα και υπό την παρουσία σφαλμάτων αρχικοποίησης. Οι αλγόριθμοι που παρουσιάζονται στα [31–33], όπως και ο PI εκτιμητής στο [3], δεν απαιτούν πρότερη γνώση σχετικά με τα σήματα αναφοράς και συνεπώς είναι ευρέως εφαρμόσιμοι. Ωστόσο, η ικανότητα σύγκλισης των προαναφερθέντων αλγορίθμων είναι εξασφαλισμένη μόνο όταν τα σήματα αναφοράς είναι σταθερά ή αργά μεταβαλλόμενα. Αυτό σημαίνει ότι η ικανότητα παρακολούθησης του μέσου όρου χειροτερεύει όταν τα σήματα αναφοράς μεταβάλλονται γρήγορα με το χρόνο. Στο [34] ο PI εκτιμητής γενικεύθηκε ώστε να πετυχαίνει μηδενικό σφάλμα μόνιμης κατάστασης για ορισμένες ομάδες χρονομεταβαλλόμενων σημάτων αναφοράς, συμπεριλαμβανομένων ημιτονοειδών εισόδων με γνωστές συχνότητες. Μία πρόσφατη εργασία στο [35] εισήγαγε ένα διακριτού χρόνου αλγόριθμο δυναμικής συναίνεσης μέσου όρου, ο οποίος εκμεταλλεύεται το μοντέλο των σημάτων αναφοράς και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επίτευξη οσοδήποτε μικρού σφάλματος μόνιμης κατάστασης. Ο αλγόριθμος αυτός εφαρμόζεται ακόμα κι όταν τα σήματα αποτελούνται από πεπερασμένο αριθμό άγνωστων συχνοτήτων ή υπάρχουν άπειρες συχνότητες, αρκεί τα σήματα να έχουν πεπερασμένο εύρος ζώνης. Οι προαναφερθείσες προσεγγίσεις [34,35] εισήγαγαν αλγορίθμους δυναμικής συναίνεσης μέσου όρου οι οποίες μπορούν να παρακολουθούν γρήγορα χρονικά μεταβαλλόμενα σήματα αναφοράς με μηδενικό ή αυθαίρετα μικρό σφάλμα μόνιμης κατάστασης. Σε κάθε περίπτωση, ο σχεδιασμός τους υποθέτει κάποια συγκεκριμένη πληροφορία σχετικά με τη φύση των σημάτων αναφοράς. Συγκεκριμένα, θεωρήθηκαν σήματα αναφοράς που έχουν είτε γνωστό μοντέλο [34], είτε πεπερασμένο εύρος ζώνης [35]. Εντούτοις, η υπόθεση κάποια πρότερης γνώσης όσον αφορά τα σήματα αναφοράς είναι συχνά μη ρεαλιστική. Οι συγγραφείς στο [36] πρότειναν ένα συνεχούς χρόνου αλγόριθμο δυναμικής συναίνεσης μέσου όρου ο οποίος μπορεί να παρακολουθήσει το μέσο όρο ενός συνόλου σημάτων

αναφοράς με φραγμένες παραγωγούς με μηδενικό σφάλμα σε πεπερασμένο χρόνο. Παρ' όλα αυτά, η ασυνέχεια του συγκεκριμένου αλγορίθμου, η οποία οφείλεται στη χρήση της συνάρτησης προσήμου, είναι πιθανόν να οδηγήσει στο ανεπιθύμητο φαινόμενο του chattering.

2.2 Συνεισφορά

Στην παρούσα εργασία, εισάγουμε έναν αποκεντρωμένο αλγόριθμο συναίνεσης μέσου όρου για πολυ-πρακτορικά συστήματα με χρονομεταβαλλόμενα σήματα αναφοράς θεωρώντας μη κατευθυνόμενες τοπολογίες επικοινωνίας, ο οποίος επιτυγχάνει πρακτικά μηδενικό σφάλμα παρακολούθησης στη μόνιμη κατάσταση. Οι κύριες συνεισφορές της εργασίας αυτής είναι: 1) επίτευξη συναίνεσης στην εκτίμηση με προκαθορισμένο αυθαίρετα χαμηλό ρυθμό σύγκλισης και προκαθορισμένο μέγιστο σφάλμα, 2) εύρωστη προδιαγεγραμμένη επίδοση παρακολούθησης χωρίς να απαιτείται κάποια πρότερη γνώση σε σχέση με το μοντέλο των σημάτων αναφοράς, 3) ανεξαρτητοποίηση της επίδοσης συναίνεσης και της επίδοσης παρακολούθησης και άρα απλοποίηση της επιλογής των κερδών, 4) αποφυγή του chattering χάρη στη συνέχεια του αλγορίθμου, και 5) απαίτηση σχετικά μικρών κερδών, χάρη στην εισαγωγή του προτεινόμενου πρωτόκολλου εκτίμησης των παραγωγών των σημάτων αναφοράς.

2.3 Βασικά Προκαταρκτικά Στοιχεία

2.3.1 Θεωρία Γράφων

Ένας μη κατευθυνόμενος γράφος $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ χρησιμοποιείται για την περιγραφή της τοπολογίας αλληλεπίδρασης ενός δικτύου αποτελούμενου από n πράκτορες, όπου το $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ συμβολίζει το σύνολο των κόμβων και το $\mathcal{E} = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_s\} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ το σύνολο των ακμών. Κάθε κόμβος αναπαριστά ένα πράκτορα και κάθε ακμή υποδηλώνει την ύπαρξη αμφίδρομης ανταλλαγής πληροφοριών μεταξύ δύο πρακτόρων, η οποία επιτυγχάνεται μέσω ασύρματης επικοινωνίας. Υποθέτουμε ότι ο γράφος είναι απλός, δηλαδή δεν περιέχει ιδιοβρόχους. Προκειμένου να απλοποιήσουμε τη θεωρητική ανάλυση του προτεινόμενου αλγορίθμου, αντικαθιστούμε κάθε μη κατευθυνόμενη ακμή \bar{e}_k μεταξύ δύο κόμβων v_i, v_j του \mathcal{G} με δύο κατευθυνόμενες ακμές, e_{ij} και e_{ji} , όπου το e_{ij} αναπαριστά μία ακμή από το v_j (ουρά) στο v_i (κεφαλή) και δείχνει ότι ο j πράκτορας μπορεί να στείλει πληροφορίες στον i πράκτορα. Έτσι, προκύπτει ο ισοδύναμος κατευθυνόμενος γράφος $\mathcal{G}^o = (\mathcal{V}, \mathcal{E}^o)$, όπου $\mathcal{E}^o = \{e_1, \dots, e_m\} = \{e_{ij}\}$, με $m = 2s$, $i = 1, 2, \dots, n$ και $j \in N_i$, όπου το $N_i = \{v_j : e_{ij} \in \mathcal{E}^o\}$ συμβολίζει το σύνολο των γειτόνων του v_i . Η προσβασιμότητα των πρακτόρων στην κατάσταση των γειτόνων τους περιγράφεται μέσω του $n \times m$ πίνακα πρόσπτωσης

$B = B(\mathcal{G}^o) = \{b_{ik}\}$, όπου:

$$b_{ik} = \begin{cases} -1 & , \text{αν } v_i \text{ είναι η ουρά του } e_k \\ 1 & , \text{αν } v_i \text{ είναι η κεφαλή του } e_k \\ 0 & , \text{αλλιώς} \end{cases}$$

με $i = 1, \dots, n$ και $k = 1, \dots, m$.

2.3.2 Προδιαγεγραμμένη Επίδοση

Η συγκεκριμένη υποενοότητα παρουσιάζει μία σύνοψη βασικών γνώσεων σχετικά με την προδιαγεγραμμένη επίδοση. Η ιδέα σχεδιασμού ελεγχτών που εξασφαλίζουν ορισμένα προκαθορισμένα χαρακτηριστικά επίδοσης χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά με σκοπό την παρακολούθηση εξόδου για συγκεκριμένες ομάδες μη γραμμικών συστημάτων [37–41]. Στο [42] εισήχθη ένας αποκεντρωμένος αλγόριθμος με σκοπό το συγχρονισμό άγνωστων μη γραμμικών πολυ-πρακτορικών συστημάτων. Έστω ότι το $e(t)$ συμβολίζει ένα γενικό βαθμωτό σφάλμα παρακολούθησης. Σε αυτή την εργασία, με τον όρο προδιαγεγραμμένη επίδοση εννοείται η επίτευξη σύγκλισης του σφάλματος $e(t)$ σε ένα προκαθορισμένο αυθαίρετα μικρό υπολειπόμενο σύνολο, με ταχύτητα σύγκλισης όχι μικρότερη από μία προκαθορισμένη τιμή. Συγκεκριμένα, το $e(t)$ πρέπει να εξελίσσεται μέσα σε μία προκαθορισμένη περιοχή η οποία φράσσεται από δεδομένες χρονικές συναρτήσεις, δηλαδή οι ανισότητες:

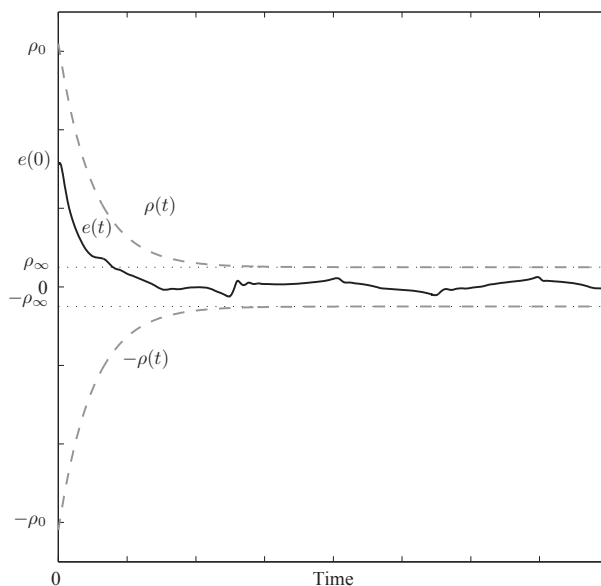
$$-\rho(t) < e(t) < \rho(t), \quad (1)$$

όπου $\rho(t)$ είναι μία ομαλή, φραγμένη συνάρτηση που ικανοποιεί τη σχέση $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) > 0$, γνωστή ως συνάρτηση επίδοσης, πρέπει να ισχύουν $\forall t \geq 0$.

Το Σχήμα 1 απεικονίζει τα παραπάνω για μία εκθετικά φθίνουσα συνάρτηση επίδοσης, που δίνεται:

$$\rho(t) = (\rho_0 - \rho_\infty)e^{-lt} + \rho_\infty,$$

όπου ρ_0, ρ_∞, l συμβολίζουν θετικές παραμέτρους. Συγκεκριμένα, η σταθερά ρ_0 επιλέγεται έτσι ώστε $\rho_0 > \max\{|e(0)|, \rho_\infty\}$. Επιπλέον, η παράμετρος $\rho_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) > 0$, η οποία αναπαριστά τη μέγιστη επιτρεπτή τιμή του σφάλματος μόνιμης κατάστασης, μπορεί να ρυθμιστεί σε μία τιμή αντίστοιχη της διακριτικής ικανότητας της συσκευής μέτρησης, έτσι ώστε το σφάλμα $e(t)$ να συγκλίνει πρακτικά στο μηδέν. Τέλος, η σταθερά l καθορίζει το ρυθμό μείωσης της $\rho(t)$ κι επομένως μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη επιβολή ενός κάτω φράγματος στο ρυθμό σύγκλισης του $e(t)$. Συνεπώς, η κατάλληλη επιλογή της συνάρτησης επίδοσης $\rho(t)$ επιβάλλει συγκεκριμένα χαρακτηριστικά επίδοσης στο σφάλμα παρακολούθησης $e(t)$.



Σχήμα 1: Γραφική απεικόνιση της προδιαγεγραμμένης επίδοσης μίας εκθετικής συνάρτησης επίδοσης $\rho(t)$.

2.3.3 Μετασχηματισμός Σφάλματος

Ας θεωρήσουμε μία γνησίως αύξουσα, περιττή και 1-1 συνάρτηση μετασχηματισμού $T : (-1, 1) \rightarrow (-\infty, \infty)$, η οποία θα χρησιμοποιηθεί ως μετασχηματισμός σφάλματος στη θεωρητική ανάλυση [37]. Σε αυτή την εργασία, υιοθετούμε το μετασχηματισμό:

$$T(\xi) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \xi}{1 - \xi} \right) \quad (2)$$

που πληρεί τις παραπάνω προϋποθέσεις. Η Ιακωβιανή (παράγωγος) του μετασχηματισμού $T(\cdot)$, που είναι αυστηρά θετική από κατασκευή, ορίζεται ως εξής:

$$J_T(\xi) = \frac{1}{1 - \xi^2}. \quad (3)$$

Ας ορίσουμε ακόμα τις συναρτήσεις $G_1 : [0, 1) \rightarrow [0, \infty)$, $G_2 : (-1, 0] \rightarrow [0, \infty)$, $H_1 : [0, 1) \rightarrow [0, \infty)$, $H_2 : (-1, 0] \rightarrow [0, \infty)$, που δίνονται:

$$\begin{aligned} G_1(\xi) &= T(\xi)J_T(\xi) \\ G_2(\xi) &= -T(\xi)J_T(\xi) \\ H_1(\xi) &= \xi T(\xi)J_T(\xi) \\ H_2(\xi) &= \xi T(\xi)J_T(\xi). \end{aligned}$$

Εφόσον οι G_1, H_1 είναι γνησίως αύξουσες, οι G_2, H_2 γνησίως φθίνουσες και όλες είναι επιρρίψιμες, τότε είναι επίσης αντιστρέψιμες. Έστω ότι τα $\bar{G}_1, \bar{G}_2, \bar{H}_1, \bar{H}_2$ συμβολίζουν τις αντίστροφες συναρτήσεις των G_1, G_2, H_1, H_2 , αντίστοιχα.

2.3.4 Δυναμικά Συστήματα

Ας ορίσουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(0) = x^0 \in \Omega_x, \quad (4)$$

όπου $f : \mathbb{R}_+ \times \Omega_x \rightarrow \mathbb{R}^n$ και $\Omega_x \subset \mathbb{R}^n$ ένα μη κενό ανοιχτό σύνολο.

Ορισμός 1. [43] Μία λύση $x(t)$ του προβλήματος αρχικών τιμών (4) είναι μεγιστοτική εάν δεν έχει γνήσια δεξιά επέκταση που είναι επίσης λύση του (4).

Για παράδειγμα, έστω το πρόβλημα αρχικών τιμών $\dot{x} = x^2, x(0) = 1$, του οποίου η λύση είναι $x(t) = \frac{1}{1-t}, \forall t \in [0, 1)$. Η λύση δεν μπορεί να οριστεί για $t > 1$, δηλαδή δεν υπάρχει γνήσια επέκταση του $x(t)$ δεξιά του $t = 1$ που είναι επίσης λύση του παραπάνω προβλήματος αρχικών τιμών. Συνεπώς, η λύση είναι μεγιστοτική.

Θεώρημα 1. [43] Έστω το πρόβλημα αρχικών τιμών (4). Έστω ότι η $f(t, x)$ είναι: α) τοπικά Lipschitz ως προς x σχεδόν για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, β) τμηματικά συνεχής ως προς t για κάθε σταθερό $x \in \Omega_x$ και γ) τοπικά ολοκληρώσιμη ως προς t για κάθε σταθερό $x \in \Omega_x$. Τότε, υπάρχει μεγιστοτική λύση $x(t)$ του (4) στο χρονικό διάστημα $[0, t_{max})$ με $t_{max} > 0$ τέτοια ώστε $x(t) \in \Omega_x, \forall t \in [0, t_{max})$.

Πρόταση 1. [43] Έστω ότι οι υποθέσεις του Θεωρήματος 1 ισχύουν. Για μία μεγιστοτική λύση $x(t)$ στο χρονικό διάστημα $[0, t_{max})$ με $t_{max} < \infty$ και για κάθε συμπαγές σύνολο $\Omega'_x \subset \Omega_x$ υπάρχει μία χρονική στιγμή $t' \in [0, t_{max})$ τέτοια ώστε $x(t') \notin \Omega'_x$.

Λήμμα 1. (Barbalat) [44] Αν η διαφορίσιμη συνάρτηση $f(t)$ έχει πεπερασμένο όριο καθώς $t \rightarrow \infty$, και αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, τότε $f(t) \rightarrow 0$ καθώς $t \rightarrow \infty$.

2.4 Ορισμός Προβλήματος

Έστω ένα σύνολο από n πράκτορες, όπου κάθε πράκτορας έχει δυνατότητα επικοινωνίας με άλλους πράκτορες, αποθήκευσης πληροφοριών και πραγματοποίησης τοπικών υπολογισμών. Υποθέτουμε ότι κάθε πράκτορας έχει ένα τοπικό, φραγμένο και συνεχές βαθμωτό σήμα αναφοράς, που συμβολίζεται ως $u_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$. Αυτό το σήμα μπορεί να είναι η έξοδος ενός αισθητήρα τοποθετημένου στον πράκτορα ή η έξοδος ενός άλλου αλγορίθμου που

εκτελεί ο πράκτορας. Έστω ότι το J_i αναπαριστά τις τοπικές πληροφορίες του πράκτορα i και το $\{I_j(t)\}_{j \in N_i}$ τις πληροφορίες που αυτός λαμβάνει μέσω της επικοινωνίας με τους γείτονές του.

Ο στόχος είναι ο σχεδιασμός, υπό το δικτυακό μοντέλο που περιγράφηκε στην υποενότητα 2.3.1, ενός αποκεντρωμένου αλγορίθμου που επιτρέπει σε κάθε πράκτορα να παρακολουθεί το μέσο όρο των χρονομεταβαλλόμενων εισόδων, που δίνεται:

$$u_{avg}(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i(t). \quad (5)$$

Πιο συγκεκριμένα, ο σχεδιαστικός στόχος ανάγεται στον καθορισμό, για κάθε πράκτορα $i \in \{1, \dots, n\}$, μίας κατάλληλης αποκεντρωμένης εντολής οδήγησης $c_i(J_i(t), \{I_j(t)\}_{j \in N_i})$ τέτοιας ώστε η δυναμική:

$$\dot{x}_i = c_i(J_i(t), \{I_j(t)\}_{j \in N_i}), \quad (6)$$

όπου $x_i(t) \in \mathbb{R}$ είναι η κατάσταση συναίνεσης, να επιτυγχάνει συναίνεση όσο το δυνατόν πιο κοντά στο μέσο όρο των σημάτων αναφοράς $u_{avg}(t)$.

Σημείωση 1. Η πολυ-πρακτορική αποκεντρωμένη εκτίμηση μίας ποσότητας έχει αποδειχθεί ουσιώδης σε διάφορες εφαρμογές. Για παράδειγμα, τρεις τέτοιες εφαρμογές εμπλέκουν την εκτίμηση: 1) των ροπών σχηματισμού (μέσος όρων των θέσεων των πρακτόρων και δυνάμεων αυτών), 2) του σημείου ελαχίστου μίας καθολικής κυρτής αντικειμενικής συνάρτησης, και 3) της εξέλιξης μίας τυχαίας διαδικασίας από θορυβώδεις μετρήσεις. Οι εφαρμογές αυτές εξετάζονται παρακάτω μέσω εκτενών προσομοιώσεων.

2.5 Αλγόριθμος

2.5.1 Εκτιμητής Παραγώγων Σημάτων Αναφοράς

Έστω ο ακόλουθος εκτιμητής παραγώγων:

$$\dot{\hat{y}} = -k_d \bar{\rho}^{-1}(t) J_T \left(\frac{\hat{y} - y}{\bar{\rho}(t)} \right) T \left(\frac{\hat{y} - y}{\bar{\rho}(t)} \right), \quad (7)$$

όπου το $y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ είναι το σήμα αναφοράς την παράγωγο του οποίου θέλουμε να εκτιμήσουμε, το $\hat{y}(t) \in \mathbb{R}$ είναι μία εκτίμηση του $y(t)$, τα $T(\cdot)$ και $J_T(\cdot)$ ορίζονται στις (2), (3), αντίστοιχα, το k_d είναι ένα θετικό κέρδος και το $\bar{\rho}(t)$ συμβολίζει μία εκθετική συνάρτηση επίδοσης της μορφής:

$$\bar{\rho}(t) = (\bar{\rho}^0 - \rho_\infty) e^{-t} + \rho_\infty,$$

όπου $\bar{\rho}^0$, l , ρ_∞ συμβολίζουν θετικές παραμέτρους επιλεγμένες κατάλληλα έτσι ώστε $\bar{\rho}^0 > \max\{|\tilde{y}(0)|, \rho_\infty\}$, και τα l , ρ_∞ να ενσωματώνουν τις επιθυμητές προδιαγραφές της μεταβατικής και μόνιμης κατάστασης, αντίστοιχα, όπως εξηγήθηκε στην υποενότητα 2.3.2.

Θεώρημα 2. Έστω ένα φραγμένο και συνεχές σήμα αναφοράς $y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, με φραγμένη πρώτη και δεύτερη παράγωγο. Ο εκτιμητής παραγώγων (7) συγκλίνει με την έννοια ότι το σφάλμα εκτίμησης της παραγώγου της εισόδου $\dot{\tilde{y}} = \dot{\hat{y}} - \dot{y}$ είναι φραγμένο και ικανοποιεί τη σχέση:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\tilde{y}}(t) = 0.$$

Απόδειξη. Έστω το κανονικοποιημένο σφάλμα:

$$\xi_{\tilde{y}} = \frac{\tilde{y}}{\bar{\rho}} = \frac{\hat{y} - y}{\bar{\rho}}. \quad (8)$$

Παραγωγίζοντας το $\xi_{\tilde{y}}$ ως προς το χρόνο, προκύπτει:

$$\dot{\xi}_{\tilde{y}} = f(t, \xi_{\tilde{y}}) = \bar{\rho}^{-1}(t) (\dot{\hat{y}} - \dot{\bar{\rho}}(t)\xi_{\tilde{y}}). \quad (9)$$

Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $T(\cdot)$ και την παράγωγο του $J_T(\cdot)$, ορίζουμε τα μετασχηματισμένα σφάλματα:

$$\varepsilon_{\tilde{y}} = T(\xi_{\tilde{y}}) \quad (10)$$

$$J_{T_{\tilde{y}}} = J_T(\xi_{\tilde{y}}). \quad (11)$$

Ας ορίσουμε ακόμα το ανοιχτό σύνολο $\Omega_\xi = (-1, 1)$.

Η υπόλοιπη απόδειξη ολοκληρώνεται σε τρεις φάσεις. Αρχικά, εξασφαλίζουμε την ύπαρξη μοναδικής μεγιστοτικής λύσης $\xi_{\tilde{y}}(t)$ στο σύνολο Ω_ξ σε ένα χρονικό διάστημα $[0, t_{max})$ (δηλαδή $\xi_{\tilde{y}}(t) \in \Omega_\xi, \forall t \in [0, t_{max})$). Έπειτα, αποδεικνύουμε ότι ο προτεινόμενος αλγόριθμος εκτίμησης παραγώγων εξασφαλίζει, για κάθε $t \in [0, t_{max})$, την εξέλιξη του $\xi_{\tilde{y}}(t)$ αυστηρά μέσα σε ένα συμπαγές υποσύνολο του Ω_ξ , οδηγώντας έτσι λόγω αντίφασης στο ότι $t_{max} = \infty$ και συνεπώς στο ότι το σφάλμα εκτίμησης $\tilde{y}(t)$ και τα μετασχηματισμένα σφάλματα $\varepsilon_{\tilde{y}}(t)$, $J_{T_{\tilde{y}}}(t)$ είναι φραγμένα για κάθε $t \geq 0$. Τέλος, επιβεβαιώνουμε ότι τα σήματα $\dot{\tilde{y}}$, $\ddot{\tilde{y}}$ είναι φραγμένα, ολοκληρώνοντας έτσι την απόδειξη με επίκληση του Λήμματος 1.

Φάση 1. Το σύνολο Ω_ξ είναι μη κενό και ανοιχτό. Επιπροσθέτως, οι παράμετροι της συνάρτησης επίδοσης $\bar{\rho}(t)$ έχουν επιλεχθεί έτσι ώστε να ικανοποιούν τη σχέση $\bar{\rho}^0 > \max\{|\tilde{y}(0)|, \rho_\infty\}$. Έτσι, συμπεραίνουμε ότι $|\xi_{\tilde{y}}(0)| = \left| \frac{\tilde{y}(0)}{\bar{\rho}^0} \right| < 1$, ή ισοδύναμα $\xi_{\tilde{y}}(0) \in \Omega_\xi$. Ακόμα, η συνάρτηση $f(t, \xi_{\tilde{y}})$ είναι συνεχής ως προς t και τοπικά Lipschitz ως προς

$\xi_{\tilde{y}}$. Συνεπώς, οι υποθέσεις του Θεωρήματος 1 ισχύουν και εξασφαλίζεται η ύπαρξη μίας μεγιστοποιητικής λύσης $\xi_{\tilde{y}}(t)$ του (9) σε ένα χρονικό διάστημα $[0, t_{max})$, τέτοιας ώστε $\xi_{\tilde{y}}(t) \in \Omega_{\xi}, \forall t \in [0, t_{max})$.

Φάση 2. Στη φάση 1 αποδείχθηκε ότι $\xi_{\tilde{y}}(t) \in \Omega_{\xi}, \forall t \in [0, t_{max})$, δηλαδή:

$$\xi_{\tilde{y}}(t) \in (-1, 1), \forall t \in [0, t_{max}), \quad (12)$$

από το οποίο συμπεραίνουμε ότι το $\tilde{y}(t)$ είναι απόλυτα φραγμένο από το $\bar{\rho}(t), \forall t \in [0, t_{max})$, λόγω της (8).

Παρατηρούμε ότι τα μετασχηματισμένα σφάλματα $\varepsilon_{\tilde{y}}(t), J_{T_{\tilde{y}}}(t)$ είναι καλώς ορισμένα για κάθε $t \in [0, t_{max})$, λόγω της (12). Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση Lyapunov:

$$V = \frac{1}{2} \varepsilon_{\tilde{y}}^2. \quad (13)$$

Παραγωγίζοντας τη (10) ως προς το χρόνο και αντικαθιστώντας την (9), παίρνουμε:

$$\dot{\varepsilon}_{\tilde{y}} = \bar{\rho}^{-1}(t) J_{T_{\tilde{y}}} (\dot{\tilde{y}} - \dot{\bar{\rho}}(t) \xi_{\tilde{y}}). \quad (14)$$

Χρησιμοποιώντας τις (8), (10) και (11), η (7) γίνεται:

$$\dot{\tilde{y}} = -k_d \bar{\rho}^{-1}(t) J_{T_{\tilde{y}}} \varepsilon_{\tilde{y}}, \quad (15)$$

άρα:

$$\dot{\tilde{y}} = -k_d \bar{\rho}^{-1}(t) J_{T_{\tilde{y}}} \varepsilon_{\tilde{y}} - \dot{\tilde{y}}. \quad (16)$$

Η παράγωγος της συνάρτησης επίδοσης δίνεται:

$$\dot{\rho}(t) = l(\rho_{\infty} - \bar{\rho}^0) e^{-lt}. \quad (17)$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $t \geq 0$ ισχύει:

$$|\dot{\rho}(t)| = -\dot{\rho}(t) \leq l(\bar{\rho}^0 - \rho_{\infty}) \quad (18)$$

$$\rho_{\infty} \leq \bar{\rho}(t) \leq \bar{\rho}^0. \quad (19)$$

Έστω ότι το $M \geq 0$ συμβολίζει το φράγμα του $\dot{\tilde{y}}(t)$ (δηλαδή $|\dot{\tilde{y}}(t)| \leq M, \forall t \geq 0$). Παραγωγίζοντας τη (13) ως προς το χρόνο και αντικαθιστώντας τις (14), (16), καταλήγουμε στο εξής:

$$\dot{V} = \varepsilon_{\tilde{y}} \bar{\rho}^{-1}(t) J_{T_{\tilde{y}}} (-k_d \bar{\rho}^{-1}(t) J_{T_{\tilde{y}}} \varepsilon_{\tilde{y}} - \dot{\tilde{y}} - \dot{\bar{\rho}}(t) \xi_{\tilde{y}}).$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι τα $\bar{\rho}(t), J_{T_{\tilde{y}}}$ αυστηρά θετικά και χρησιμοποιώντας τις (12), (18), (19), καθώς και το γεγονός ότι το $\dot{\tilde{y}}$ είναι φραγμένο, προκύπτει:

$$\dot{V} \leq -C_1 |\varepsilon_{\tilde{y}}| J_{T_{\tilde{y}}} (|\varepsilon_{\tilde{y}}| J_{T_{\tilde{y}}} - C_2),$$

όπου $C_1 = \frac{k_d}{(\bar{\rho}^0)^2} > 0$ και $C_2 = \frac{(\bar{\rho}^0)^2}{k_d \rho_\infty} (M + l(\bar{\rho}^0 - \rho_\infty)) > 0$. Επομένως, $\dot{V} < 0$ όταν:

$$|\varepsilon_{\bar{y}}| J_{T_{\bar{y}}} > C_2$$

ή ισοδύναμα όταν:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} G_1(\xi_{\bar{y}}) > C_2 & , \text{αν } \xi_{\bar{y}} \in [0, 1) \\ G_2(\xi_{\bar{y}}) > C_2 & , \text{αν } \xi_{\bar{y}} \in (-1, 0] \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \xi_{\bar{y}} > \bar{G}_1(C_2) & , \text{αν } \xi_{\bar{y}} \in [0, 1) \\ \xi_{\bar{y}} < \bar{G}_2(C_2) = -\bar{G}_1(C_2) & , \text{αν } \xi_{\bar{y}} \in (-1, 0] \end{cases} \\ \Leftrightarrow & |\xi_{\bar{y}}| > \bar{G}_1(C_2) \\ \Leftrightarrow & |\varepsilon_{\bar{y}}| > C_3 \end{aligned}$$

όπου $C_3 = T(\bar{G}_1(C_2)) > 0$. Συνεπώς, συμπεραίνουμε ότι:

$$|\varepsilon_{\bar{y}}(t)| \leq \varepsilon^* = \max\{|\varepsilon_{\bar{y}}(0)|, C_3\}, \forall t \in [0, t_{max}), \quad (20)$$

και εφαρμόζοντας την αντίστροφη λογαριθμική συνάρτηση στη (10) (δηλαδή την υπερβολική εφαπτομένη), παίρνουμε:

$$|\xi_{\bar{y}}(t)| \leq \bar{\xi}_{\bar{y}} = \tanh(\varepsilon^*) < 1, \forall t \in [0, t_{max}). \quad (21)$$

Σε αυτό το σημείο απομένει μόνο να δείξουμε ότι το t_{max} μπορεί να επεκταθεί στο ∞ . Προς αυτή την κατεύθυνση, παρατηρούμε από την (21) ότι $\xi_{\bar{y}}(t) \in \Omega'_\xi, \forall t \in [0, t_{max})$, όπου το $\Omega'_\xi = [-\bar{\xi}_{\bar{y}}, \bar{\xi}_{\bar{y}}]$ είναι ένα μη κενό και συμπαγές υποσύνολο του Ω_ξ . Έτσι, υποθέτοντας ότι $t_{max} < \infty$ και δεδομένου ότι $\Omega'_\xi \subset \Omega_\xi$, η Πρόταση 1 συνεπάγεται την ύπαρξη μίας χρονικής στιγμής $t' \in [0, t_{max})$, τέτοιας ώστε $\xi_{\bar{y}}(t') \notin \Omega'_\xi$, οδηγώντας ξεκάθαρα σε αντίφαση. Διαπιστώνουμε λοιπόν ότι $\xi_{\bar{y}}(t) \in \Omega'_\xi, \forall t \geq 0$, πράγμα που συνεπάγεται ότι:

$$|\varepsilon_{\bar{y}}(t)| \leq \varepsilon^* \quad (22)$$

$$|J_{T_{\bar{y}}}(t)| = J_{T_{\bar{y}}}(t) \leq J_T^* \quad (23)$$

όπου $J_T^* = J_T(\bar{\xi}_{\bar{y}})$, για κάθε $t \geq 0$. Επιπλέον, πολλαπλασιάζοντας την (21) με $\bar{\rho}(t)$ και χρησιμοποιώντας την (8), προκύπτει:

$$|\tilde{y}(t)| \leq \bar{\xi}_{\bar{y}} \bar{\rho}(t) < \bar{\rho}(t), \forall t \geq 0, \quad (24)$$

πράγμα που δείχνει ότι το σφάλμα εκτίμησης $\tilde{y}(t)$ σέβεται τις προδιαγραφές επίδοσης και το όριό του καθώς $t \rightarrow \infty$ είναι πεπερασμένο.

Φάση 3. Έστω ότι το $\bar{M} \geq 0$ συμβολίζει το φράγμα του $\dot{y}(t)$ (δηλαδή $|\dot{y}(t)| \leq \bar{M}$, $\forall t \geq 0$). Παραγωγίζοντας τη (16) ως προς το χρόνο και πραγματοποιώντας άμεσους αλγεβρικούς χειρισμούς, διαπιστώνουμε ότι:

$$\ddot{y} = k_d \bar{\rho}^{-2}(t) \left(\dot{\bar{\rho}}(t) J_{T_{\dot{y}}} \varepsilon_{\dot{y}} + J_{T_{\dot{y}}}^2 (2\xi_{\dot{y}} \varepsilon_{\dot{y}} + 1) (k_d \bar{\rho}^{-1}(t) J_{T_{\dot{y}}} \varepsilon_{\dot{y}} + \dot{y} + \dot{\bar{\rho}}(t) \xi_{\dot{y}}) \right) - \ddot{y}, \quad (25)$$

χάρη στις (9), (16). Επικαλούμενοι την τριγωνική ανισότητα στις (16), (25), και μετά τις (18), (19), (22), (23), καθώς και το γεγονός ότι τα \dot{y} , \ddot{y} είναι φραγμένα, εύκολα συμπεραίνουμε ότι τα $\dot{\bar{y}}$, $\ddot{\bar{y}}$ είναι φραγμένα, δηλαδή ότι $|\dot{\bar{y}}(t)| \leq C_4$ και $|\ddot{\bar{y}}(t)| \leq C_5$, $\forall t \geq 0$, όπου:

$$C_4 = \frac{k_d}{\rho_\infty} J_T^* \varepsilon^* + M,$$

$$C_5 = \frac{k_d}{\rho_\infty^2} \left(l(\bar{\rho}^0 - \rho_\infty) J_T^* \varepsilon^* + (J_T^*)^2 (2\varepsilon^* + 1) \left(\frac{k_d}{\rho_\infty} J_T^* \varepsilon^* + M + l(\bar{\rho}^0 - \rho_\infty) \right) \right) + \bar{M}.$$

Εφόσον το $\ddot{\bar{y}}$ είναι φραγμένο, το $\dot{\bar{y}}$ είναι ομοιόμορφα συνεχές. Επομένως, χρησιμοποιώντας την (24), και το Λήμμα 1, παίρνουμε:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\bar{y}}(t) = 0.$$

■

2.5.2 Εύρωστη Δυναμική Συναίνεση Μέσου Όρου

Έστω ότι κάθε πράκτορας εφαρμόζει τον ακόλουθο μη γραμμικό εκτιμητή δυναμικής συναίνεσης μέσου όρου:

$$\dot{x}_i = -k_r(x_i - u_i(t)) + \hat{u}_i(t) - k \sum_{j \in N_i} \rho_{ij}^{-1}(t) J_T \left(\frac{x_i - x_j}{\rho_{ij}(t)} \right) T \left(\frac{x_i - x_j}{\rho_{ij}(t)} \right) \quad (26)$$

$$\dot{\hat{u}}_i = -k_d \bar{\rho}_i^{-1}(t) J_T \left(\frac{\hat{u}_i - u_i}{\bar{\rho}_i(t)} \right) T \left(\frac{\hat{u}_i - u_i}{\bar{\rho}_i(t)} \right) \quad (27)$$

για κάθε $i \in \{1, \dots, n\}$, με θετικά κέρδη k_r , k , k_d , όπου $u_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ είναι το τοπικό σήμα αναφοράς, $x_i(t) \in \mathbb{R}$ είναι η τοπική εκτίμηση του μέσου όρου των σημάτων αναφοράς, $\hat{u}_i(t) \in \mathbb{R}$ είναι μία εκτίμηση του $u_i(t)$, τα $T(\cdot)$, $J_T(\cdot)$ ορίζονται στις (2), (3) αντίστοιχα, και τα $\rho_{ij}(t)$, $\bar{\rho}_i(t)$ συμβολίζουν τις συναρτήσεις επίδοσης οι οποίες ενσωματώνουν

τις επιθυμητές προδιαγραφές της μεταβατικής και μόνιμης κατάστασης για τα σφάλματα συναίνεσης και εισόδου, που δίνονται:

$$\delta_{ij}(t) = x_i(t) - x_j(t) \quad (28)$$

$$\tilde{u}_i(t) = \hat{u}_i(t) - u_i(t) \quad (29)$$

αντίστοιχα, $\forall t \geq 0$. Εφόσον κάθε συνάρτηση επίδοσης $\rho_{ij}(t)$ και κάθε σφάλμα συναίνεσης $\delta_{ij}(t)$ αντιστοιχούν σε ένα ζεύγος γειτονικών πρακτόρων, i και j , μπορούν επίσης να συμβολιστούν ως $\rho_k(t)$ και $\delta_k(t)$ αντίστοιχα, με το $k \in \{1, \dots, m\}$ να υποδηλώνει το δείκτη της αντίστοιχης ακμής του \mathcal{G}^o . Υιοθετούμε εκθετικές συναρτήσεις επίδοσης της μορφής:

$$\begin{aligned} \rho_{ij}(t) &= (\rho_{ij}^0 - \rho_\infty)e^{-lt} + \rho_\infty \\ &\Downarrow \\ \rho_k(t) &= (\rho_k^0 - \rho_\infty)e^{-lt} + \rho_\infty, \\ \bar{\rho}_i(t) &= (\bar{\rho}_i^0 - \rho_\infty)e^{-lt} + \rho_\infty \end{aligned}$$

$i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in N_i$, $k \in \{1, \dots, m\}$, όπου τα $\rho_k^0 = \rho_{ij}^0$, $\bar{\rho}_i^0$, l , ρ_∞ συμβολίζουν θετικές παραμέτρους επιλεγμένες κατάλληλα έτσι ώστε $\rho_{ij}^0 = \rho_{ji}^0 = \rho_k^0 > \max\{|\delta_k(0)|, \rho_\infty\}$, $\bar{\rho}_i^0 > \max\{|\tilde{u}_i(0)|, \rho_\infty\}$, και τα l , ρ_∞ καθορίζουν τις επιθυμητές προδιαγραφές της μεταβατικής και μόνιμης κατάστασης αντίστοιχα, όπως εξηγήθηκε λεπτομερώς στην υποενότητα 2.3.2.

Θεώρημα 3. Έστω τα φραγμένα και συνεχή σήματα αναφοράς $u_i(t)$, $i \in \{1, \dots, n\}$, με φραγμένες πρώτες και δεύτερες παραγώγους. Θεωρώντας συνεκτικό και μη κατευθυνόμενο γράφο επικοινωνίας \mathcal{G} , ο αποκεντρωμένος εκτιμητής (26), (27) επιτυγχάνει συναίνεση στο μέσο όρο, με εκθετικό ρυθμό όχι μικρότερο από $\min\{l, k_r\}$, που ικανοποιεί τη σχέση:

$$|x_i(t) - u_{avg}(t)| \leq \frac{\text{Diam}(\mathcal{G})\rho_\infty}{2} + \frac{\sup_{t \geq 0} |\dot{u}_{avg}(t)|}{k_r}$$

για κάθε $i \in \{1, \dots, n\}$ στη μόνιμη κατάσταση.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι η (27) εφαρμόζει τον προτεινόμενο εκτιμητή παραγώγων σημάτων αναφοράς, ο οποίος ορίζεται στην (7). Εφόσον οι υποθέσεις του Θεωρήματος 2 ισχύουν, είναι εξασφαλισμένο ότι τα σφάλματα εκτίμησης των παραγώγων των εισόδων $\dot{\tilde{u}}_i$ είναι φραγμένα, δηλαδή υπάρχουν σταθερές $a_i \geq 0$ τέτοιες ώστε:

$$|\dot{\tilde{u}}_i(t)| \leq a_i, \forall t \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad (30)$$

και ικανοποιούν τη σχέση:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{u}_i(t) = 0, \quad (31)$$

για κάθε $i \in \{1, \dots, n\}$. Θεωρούμε το κανονικοποιημένο διάνυσμα σφαλμάτων:

$$\xi_\delta = [\xi_{\delta_1}, \dots, \xi_{\delta_m}]^T := \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \rho_1 \\ \dots \\ \delta_m \\ \rho_m \end{bmatrix}^T \triangleq P^{-1}(t) \delta, \quad (32)$$

όπου $P(t) = \text{diag}([\rho_1(t), \dots, \rho_m(t)])$ και $\delta = [\delta_1, \dots, \delta_m]^T$. Έστω ότι το $x \triangleq [x_1, \dots, x_n]^T$ συμβολίζει το συνολικό διάνυσμα εκτιμήσεων του πολυ-πρακτορικού συστήματος και το $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ τον πίνακα πρόσπτωσης του γράφου \mathcal{G}^o , που κατασκευάζεται από τον \mathcal{G} όπως εξηγήθηκε στην υποενότητα 2.3.1. Παραγωγίζοντας το ξ_δ ως προς το χρόνο, προκύπτει:

$$\dot{\xi}_\delta = f(t, \xi_\delta) = P^{-1}(t) \left(\dot{\delta} - \dot{P}(t) \xi_\delta \right), \quad (33)$$

όπου $\dot{\delta} = B^T \dot{x}$, λόγω της (28). Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $T(\cdot)$ και την παράγωγό του $J_T(\cdot)$, ορίζουμε το μετασχηματισμένο διάνυσμα σφαλμάτων:

$$\varepsilon_\delta = [\varepsilon_{\delta_1}, \dots, \varepsilon_{\delta_m}]^T \triangleq [T(\xi_{\delta_1}), \dots, T(\xi_{\delta_m})]^T \quad (34)$$

και το διαγώνιο πίνακα:

$$J_{T_\delta} = \text{diag}([J_T(\xi_{\delta_1}), \dots, J_T(\xi_{\delta_m})]). \quad (35)$$

Ακόμα, ας ορίσουμε το σύνολο:

$$\Omega_\xi = \underbrace{(-1, 1) \times (-1, 1) \times \dots \times (-1, 1)}_{\mu \text{ τιμες}}.$$

Η υπόλοιπη απόδειξη ολοκληρώνεται σε τρεις φάσεις. Αρχικά, εξασφαλίζουμε την ύπαρξη μοναδικής μεγιστοτικής λύσης $\xi_\delta(t)$ στο σύνολο Ω_ξ σε ένα χρονικό διάστημα $[0, t_{max})$ (δηλαδή $\xi_\delta(t) \in \Omega_\xi, \forall t \in [0, t_{max})$). Έπειτα, αποδεικνύουμε ότι ο προτεινόμενος αλγόριθμος εκτίμησης εξασφαλίζει, για κάθε $t \in [0, t_{max})$, την εξέλιξη του $\xi_\delta(t)$ αυστηρά μέσα σε ένα συμπαγές υποσύνολο του Ω_ξ , οδηγώντας έτσι λόγω αντίφασης στο ότι $t_{max} = \infty$ και άρα $|\delta_k(t)| < \rho_k(t), \forall t \geq 0$, για κάθε $k \in \{1, \dots, m\}$. Τέλος, επιβεβαιώνουμε ότι ο μέσος όρος των σφαλμάτων παρακολούθησης $\tilde{x}(t) \triangleq x_{avg}(t) - u_{avg}(t) \in \mathbb{R}$, όπου το $x_{avg}(t)$ συμβολίζει το μέσο όρο των εκτιμήσεων των πρακτόρων, είναι ομοιόμορφα απόλυτα φραγμένο, ολοκληρώνοντας έτσι την απόδειξη επικαλούμενοι την τριγωνική ανισότητα.

Φάση 1. Το σύνολο Ω_ξ είναι μη κενό και ανοιχτό. Επιπροσθέτως, οι παράμετροι των συναρτήσεων επίδοσης $\rho_k(t)$ έχουν επιλεχθεί έτσι ώστε να ικανοποιούν τη σχέση

$\rho_k^0 > \max\{|\delta_k(0)|, \rho_\infty\}$, για κάθε $k \in \{1, \dots, m\}$. Επομένως, συμπεραίνουμε ότι $|\xi_{\delta_k}(0)| = \left| \frac{\delta_k(0)}{\rho_k^0} \right| < 1$, $\forall k \in \{1, \dots, m\}$, πράγμα που συνεπάγεται ότι $\xi_\delta(0) \in \Omega_\xi$. Επιπλέον, η συνάρτηση $f(t, \xi_\delta)$ είναι συνεχής ως προς t και τοπικά Lipschitz ως προς ξ_δ . Συνεπώς, οι υποθέσεις του Θεωρήματος 1 ικανοποιούνται και εξασφαλίζεται η ύπαρξη μοναδικής μεγιστοτικής λύσης $\xi_\delta(t)$ της (33) σε ένα χρονικό διάστημα $[0, t_{max})$, τέτοιας ώστε $\xi_\delta(t) \in \Omega_\xi$, $\forall t \in [0, t_{max})$.

Φάση 2. Στη φάση 1 αποδείχθηκε ότι $\xi_\delta(t) \in \Omega_\xi$, $\forall t \in [0, t_{max})$, δηλαδή:

$$\xi_{\delta_k}(t) \in (-1, 1), \forall t \in [0, t_{max}), k = 1, \dots, m, \quad (36)$$

από το οποίο συμπεραίνουμε ότι το $\delta_k(t)$ είναι απόλυτα φραγμένο από το $\rho_k(t)$, $\forall t \in [0, t_{max})$, για κάθε $k \in \{1, \dots, m\}$.

Ακόμα, παρατηρούμε ότι το διάνυσμα μετασχηματισμένων σφαλμάτων ε_δ και ο πίνακας J_{T_δ} είναι καλώς ορισμένα για κάθε $t \in [0, t_{max})$, λόγω της (36). Έστω η υποψήφια συνάρτηση Lyapunov:

$$V = \frac{1}{2} \varepsilon_\delta^T \varepsilon_\delta + \frac{\gamma}{2} x^T x, \quad (37)$$

όπου το γ είναι μία θετική σταθερά. Χρησιμοποιώντας τις (26), (32), (34), (35), το \dot{x} γίνεται:

$$\dot{x} = -k_r(x - u) + \dot{u} - kBP^{-1}(t)J_{T_\delta}\varepsilon_\delta. \quad (38)$$

Παραγωγίζοντας την (34) ως προς το χρόνο, παίρνουμε:

$$\dot{\varepsilon}_\delta = P^{-1}(t)J_{T_\delta} \left(B^T \dot{x} - \dot{P}(t)P^{-1}(t)B^T x \right). \quad (39)$$

Εφόσον τα \dot{u}_i, \ddot{u}_i , $i = 1, \dots, n$, είναι φραγμένα, τα $\dot{\hat{u}}_i = \ddot{u}_i + \dot{u}_i$, $i = 1, \dots, n$, είναι επίσης φραγμένα. Έστω ότι τα $M_1, M_2 \in \mathbb{R}_+^n$ συμβολίζουν τα διανύσματα φραγμάτων των u, \hat{u} , όπου $u \triangleq [u_1, \dots, u_n]^T$ είναι το συνολικό διάνυσμα εισόδων και $\hat{u} \triangleq [\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_n]^T$ είναι το συνολικό διάνυσμα εκτιμήσεων των παραγώγων εισόδου. Αν $M_1^* = \max_{1 \leq i \leq n} M_{1_i}$ και

$M_2^* = \max_{1 \leq i \leq n} M_{2_i}$, συμπεραίνουμε ότι:

$$|u_i(t)| \leq M_1^* \quad (40)$$

$$|\dot{\hat{u}}_i(t)| \leq M_2^* \quad (41)$$

$\forall t \geq 0$, για κάθε $i \in \{1, \dots, n\}$. Παραγωγίζοντας την (37) ως προς το χρόνο και αντικαθιστώντας τις (38), (39), παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \dot{V} = & (\varepsilon_\delta^T P^{-1}(t)J_{T_\delta} B^T + \gamma x^T) \left(-k_r(x - u) + \dot{u} - kBP^{-1}(t)J_{T_\delta}\varepsilon_\delta \right) \\ & - \varepsilon_\delta^T P^{-1}(t)J_{T_\delta} \dot{P}(t)P^{-1}(t)B^T x. \end{aligned}$$

Έστω ότι το $|w| \in \mathbb{R}^q$ συμβολίζει το διάνυσμα που περιέχει την απόλυτη τιμή των στοιχείων του διανύσματος $w \in \mathbb{R}^q$ και $\mathbf{1} = [1, 1, \dots, 1]^T \in \mathbb{R}^n$. Επικαλούμενοι τις (40), (41), καθώς και το γεγονός ότι οι πίνακες P^{-1} , \dot{P} , J_{T_δ} είναι διαγώνιοι, μετά από μερικούς άμεσους αλγεβρικούς χειρισμούς καταλήγουμε στο εξής:

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\varepsilon_\delta^T P^{-1}(t) J_{T_\delta} \left((k_r + \gamma k) \mathbb{I}_{m \times m} + \dot{P}(t) P^{-1}(t) \right) B^T x \\ & + (k_r M_1^* + M_2^*) \left| \varepsilon_\delta^T P^{-1}(t) J_{T_\delta} B^T \mathbf{1} \right| - k \left\| B P^{-1}(t) J_{T_\delta} \varepsilon_\delta \right\|^2 - \gamma k_r (|x|^T |x| - 2|x|^T v), \end{aligned}$$

$$\text{όπου } v = \frac{1}{2} \left(M_1^* + \frac{M_2^*}{k_r} \right) \mathbf{1}.$$

Παρατηρούμε ότι το άθροισμα κάθε στήλης του B είναι μηδέν, από το οποίο προκύπτει ότι $B^T \mathbf{1} = [0, 0, \dots, 0]^T \in \mathbb{R}^m$. Ακόμη, το γεγονός ότι ο μετασχηματισμός $T(\cdot)$ είναι περιττός εξασφαλίζει ότι τα διανύσματα ε_δ , $\xi_\delta = P^{-1}(t) B^T x$ έχουν το ίδιο πρόσημο στα αντίστοιχα στοιχεία. Επιλέγουμε $\gamma = \frac{1}{k} (\theta - k_r - C_1)$, όπου $\theta > \max\{0, k_r + C_1\}$ και το C_1 είναι το ελάχιστο στοιχείο του πίνακα:

$$\dot{P}(t) P^{-1}(t) = \text{diag} \left(\left[\frac{\dot{\rho}_1(t)}{\rho_1(t)}, \dots, \frac{\dot{\rho}_m(t)}{\rho_m(t)} \right] \right),$$

για κάθε $t \geq 0$, που ορίζεται ως εξής:

$$C_1 = \frac{l(\rho_\infty - \max_{1 \leq k \leq m} \rho_k^0)}{\rho_\infty}.$$

Επομένως, συμπεραίνουμε ότι:

$$\begin{aligned} \dot{V} & \leq -\theta \varepsilon_\delta^T J_{T_\delta} \xi_\delta - \gamma k_r (\| |x| - v \|^2 - \|v\|^2) \\ & \leq -\theta (\varepsilon_\delta^T J_{T_\delta} \xi_\delta - (C_2 - 1)) \\ & < -\theta (\varepsilon_\delta^T J_{T_\delta} \xi_\delta - C_2), \end{aligned} \tag{42}$$

όπου $C_2 = \frac{\gamma k_r n}{4\theta} \left(M_1^* + \frac{M_2^*}{k_r} \right)^2 + 1 > 0$. Άρα, $\dot{V} < 0$ όταν:

$$\varepsilon_\delta^T J_{T_\delta} \xi_\delta \geq C_2 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^m \xi_{\delta_k} T(\xi_{\delta_k}) J_T(\xi_{\delta_k}) \geq C_2$$

ή ισοδύναμα όταν:

$$\xi_{\delta_k} T(\xi_{\delta_k}) J_T(\xi_{\delta_k}) \geq p_k,$$

για κάθε $k \in \{1, \dots, m\}$, όπου τα $p_k \geq 0$ είναι τέτοια ώστε $\sum_{k=1}^m p_k = C_2$, εφόσον οι H_1, H_2 είναι μη αρνητικές συναρτήσεις. Πιο συγκεκριμένα, $\dot{V} < 0$ όταν:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} H_1(\xi_{\delta_k}) > p_k & , \text{αν } \xi_{\delta_k} \in [0, 1) \\ H_2(\xi_{\delta_k}) > p_k & , \text{αν } \xi_{\delta_k} \in (-1, 0] \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \xi_{\delta_k} > \bar{H}_1(p_k) & , \text{αν } \xi_{\delta_k} \in [0, 1) \\ \xi_{\delta_k} < \bar{H}_2(p_k) = -\bar{H}_1(p_k) & , \text{αν } \xi_{\delta_k} \in (-1, 0] \end{cases} \\ \Leftrightarrow & |\xi_{\delta_k}| > \bar{H}_1(p_k) \\ \Leftrightarrow & |\varepsilon_{\delta_k}| > C_{3_k} \end{aligned}$$

όπου $C_{3_k} = T(\bar{H}_1(p_k)) \geq 0$, για κάθε $k \in \{1, \dots, m\}$. Συνεπώς, συμπεραίνουμε ότι:

$$|\varepsilon_{\delta_k}(t)| \leq \varepsilon_k^* = \max\{|\varepsilon_{\delta_k}(0)|, C_{3_k}\}, \forall t \in [0, t_{max}),$$

για κάθε $k \in \{1, \dots, m\}$, και εφαρμόζοντας την αντίστροφη υπερβολική συνάρτηση στην (34) (δηλαδή την υπερβολική εφαπτομένη), παίρνουμε:

$$|\xi_{\delta_k}(t)| \leq \bar{\xi}_{\delta_k} = \tanh(\varepsilon_k^*) < 1, \forall t \in [0, t_{max}), \quad (43)$$

για κάθε $k \in \{1, \dots, m\}$.

Σε αυτό το σημείο απομένει μόνο να δείξουμε ότι το t_{max} μπορεί να επεκταθεί στο ∞ . Προς αυτή την κατεύθυνση, παρατηρούμε από τη (43) ότι $\xi_{\delta}(t) \in \Omega'_\xi, \forall t \in [0, t_{max})$, όπου:

$$\Omega'_\xi = [-\bar{\xi}_{\delta_1}, \bar{\xi}_{\delta_1}] \times \dots \times [-\bar{\xi}_{\delta_m}, \bar{\xi}_{\delta_m}]$$

είναι ένα μη κενό συμπαγές υποσύνολο του Ω_ξ . Επομένως, υποθέτοντας ότι $t_{max} < \infty$ και δεδομένου ότι $\Omega'_\xi \subset \Omega_\xi$, η Πρόταση 1 συνεπάγεται την ύπαρξη μίας χρονικής στιγμής $t' \in [0, t_{max})$, τέτοιας ώστε $\xi_{\delta}(t') \notin \Omega'_\xi$, οδηγώντας ξεκάθαρα σε αντίφαση. Διαπιστώνουμε λοιπόν ότι $\xi_{\delta}(t) \in \Omega'_\xi, \forall t \geq 0$. Πολλαπλασιάζοντας τη (43) με $\rho_k(t)$ και χρησιμοποιώντας την (32), παίρνουμε:

$$|\delta_k(t)| \leq \bar{\xi}_{\delta_k} \rho_k(t) < \rho_k(t), \forall t \geq 0, k = 1, \dots, m, \quad (44)$$

πράγμα που συνεπάγεται ότι τα σφάλματα συναίνεσης $\delta_k(t), k = 1, \dots, m$, σέβονται τις προδιαγραφές επίδοσης.

Φάση 3. Πολλαπλασιάζοντας και τις δύο πλευρές της (38) από αριστερά με το $\frac{\mathbf{1}^T}{n}$ και χρησιμοποιώντας και πάλι την ιδιότητα $\mathbf{1}^T B = [0, 0, \dots, 0] \in \mathbb{R}^m$, καταλήγουμε στο εξής:

$$\dot{x}_{avg} = -k_r(x_{avg} - u_{avg}) + \dot{u}_{avg}, \quad (45)$$

από το οποίο προκύπτει ότι:

$$\dot{\tilde{x}} = -k_r \tilde{x} + \dot{\tilde{u}}_{avg}. \quad (46)$$

Έστω η συνάρτηση Lyapunov:

$$V_{\tilde{x}} = \frac{1}{2} \tilde{x}^2. \quad (47)$$

Παραγωγίζοντας τη (47) ως προς το χρόνο και αντικαθιστώντας τη (46), παίρνουμε:

$$\dot{V}_{\tilde{x}} = \tilde{x}(-k_r \tilde{x} + \dot{\tilde{u}}_{avg}),$$

το οποίο οδηγεί στην:

$$\dot{V}_{\tilde{x}} \leq -k_r |\tilde{x}| (|\tilde{x}| - C_4),$$

όπου $C_4 = \frac{\sup_{t \geq 0} |\dot{\tilde{u}}_{avg}(t)|}{k_r}$. Άρα, $\dot{V}_{\tilde{x}} < 0$ όταν $|\tilde{x}| > C_4$. Συνεπώς, το $\tilde{x}(t)$ είναι ομοιόμορφα απόλυτα φραγμένο (δηλαδή $\tilde{x}(t) \in \mathcal{L}_\infty$ και $|\tilde{x}| \leq C_4, \forall t \geq T$, για μία σταθερά $T \geq 0$) με εκθετικό ρυθμό k_r στο σύνολο:

$$X = \{\tilde{x} \in \mathbb{R} : |\tilde{x}| \leq C_4\}. \quad (48)$$

Επιπλέον, το απόλυτο φράγμα ρ_∞ όλων των σφαλμάτων συναίνεσης υποδεικνύει ότι:

$$|x_i - x_{avg}| \leq \frac{\text{Diam}(\mathcal{G})\rho_\infty}{2}. \quad (49)$$

Χρησιμοποιώντας τις (48), (49) και την τριγωνική ανισότητα, φτάνουμε στο απόλυτο φράγμα συναίνεσης μέσου όρου:

$$|x_i - u_{avg}| \leq \frac{\text{Diam}(\mathcal{G})\rho_\infty}{2} + \frac{\sup_{t \geq 0} |\dot{\tilde{u}}_{avg}|}{k_r}$$

με ελάχιστο επιτρεπτό εκθετικό ρυθμό σύγκλισης ίσο με $\min\{l, k_r\}$, ολοκληρώνοντας έτσι την απόδειξη. ■

Σημείωση 2. Ο προτεινόμενος αλγόριθμος είναι αποκεντρωμένος, εφόσον στην (26) ενσωματώνονται μόνο πληροφορίες από γειτονικούς πράκτορες. Επιπροσθέτως, σε αντίθεση με τις μέχρι τώρα προσεγγίσεις της αποκεντρωμένης συναίνεσης μέσου όρου, η επίδοση της παρακολούθησης του μέσου όρου και της συναίνεσης μπορούν να επηρεαστούν άμεσα και ανεξάρτητα (δηλαδή χωρίς η βελτίωση της μίας να επιδεινώνει την άλλη) μέσω κατάλληλης επιλογής ορισμένων σχεδιαστικών παραμέτρων. Πιο συγκεκριμένα, στην (26) παρατηρούμε ότι ο πρώτος και ο τρίτος όρος καθορίζουν την επίδοση παρακολούθησης

μέσου όρου και συναίνεσης αντίστοιχα, ενώ ο δεύτερος όρος ενσωματώνει τον αλγόριθμο εκτίμησης παραγώγων, που ορίζεται στην (27). Ο προτεινόμενος αλγόριθμος εκτίμησης παραγώγων μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση της παραγώγου των σημάτων αναφοράς, η οποία επιτρέπει την επιλογή μικρότερων κερδών, επιτυγχάνοντας έτσι μικρότερη ευαισθησία σε θόρυβο και διαταραχές. Επιπλέον, η μόνη πληροφορία που χρειάζεται να μεταδοθεί είναι η εκτίμηση του μέσου όρου, πράγμα που καθιστά το κόστος επικοινωνίας μικρότερο απ' ό,τι στην περίπτωση του PI εκτιμητή, όπου η εσωτερική κατάσταση του ολοκληρωτικού όρου πρέπει επίσης να μεταδοθεί. Ακόμα, ο εκτιμητής που σχεδιάσαμε, αντίθετα με αυτόν που προτείνεται στο [36], αποτρέπει το ανεπιθύμητο φαινόμενο του *chattering*, χάρη στη συνέχειά του. Τέλος, ο αλγόριθμος δεν απαιτεί καμία πρότερη γνώση όσον αφορά το μοντέλο των σημάτων αναφοράς (π.χ. οι παράγωγοι των σημάτων αναφοράς θεωρούνται άγνωστες).

Σημείωση 3. Η επίδοση παρακολούθησης μέσου όρου και συναίνεσης μπορούν να ρυθμιστούν ανεξάρτητα με κατάλληλη επιλογή των σχεδιαστικών παραμέτρων ρ_∞ , l , k_r , k και k_d . Συγκεκριμένα, επισημαίνουμε ότι η επίδοση συναίνεσης ρυθμίζεται αποκλειστικά από τις συναρτήσεις επίδοσης (π.χ. αύξηση του l και μείωση του ρ_∞ οδηγούν σε ταχύτερη σύγκλιση και ακριβέστερη συναίνεση, αντίστοιχα), ενώ η επίδοση παρακολούθησης μέσου όρου μπορεί να επηρεαστεί θετικά με αύξηση του k_r και μείωση του ρ_∞ , χωρίς όμως να αυτό να επιδεινώνει την επίδοση συναίνεσης.

2.6 Αποτελέσματα Προσομοιώσεων

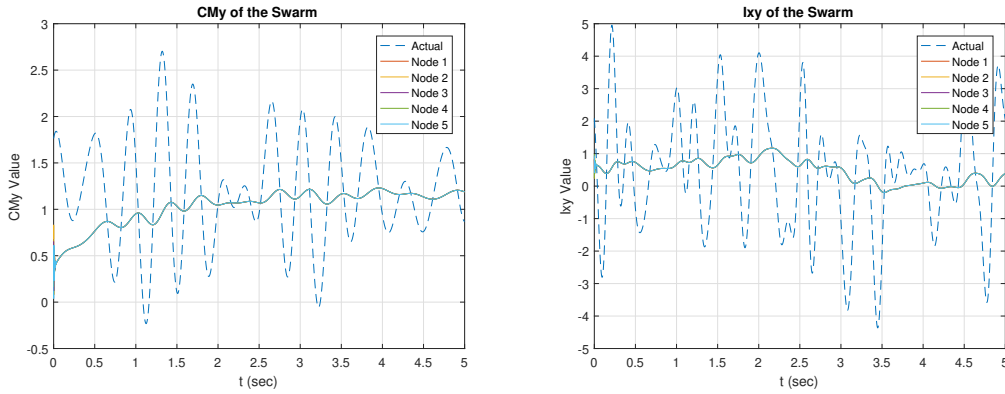
Έστω μία ομάδα από n πράκτορες που κινούνται σε ένα επίπεδο. Θεωρούμε ότι η θέση του i πράκτορα συμβολίζεται ως $p_i = [p_{ix}, p_{iy}]^T$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Κάθε πράκτορας μπορεί να επικοινωνήσει με τους γείτονές του, δηλαδή οι πράκτορες i και j μπορούν να επικοινωνήσουν μεταξύ τους, αν και μόνο αν $\|p_i - p_j\| \leq r_d$, όπου το r_d αναπαριστά την ακτίνα επικοινωνίας.

Χρησιμοποιήσαμε τον προτεινόμενο εκτιμητή σε τρεις διαφορετικές εφαρμογές, δηλαδή για να εκτιμήσουμε: 1) τις ροπές σχηματισμού, 2) το σημείο ελαχίστου μίας καθολικής κυρτής αντικειμενικής συνάρτησης, και 3) την εξέλιξη μίας τυχαίας διαδικασίας από θορυβώδεις μετρήσεις (πραγματοποιήθηκε αποθορυβοποίηση μέσω ενός φίλτρου Kalman-Bucy που χρησιμοποιεί τον εκτιμητή για την εκτίμηση ορισμένων ποσοτήτων που εμπλέκονται στην υλοποίησή του). Θεωρήσαμε αβαρή γράφο και ακτίνα επικοινωνίας $r_d = 20$. Όσον αφορά τις προσομοιώσεις του προτεινόμενου εκτιμητή, οι παράγωγοι των εισόδων των πρακτόρων (π.χ. ταχύτητες) εκτιμήθηκαν με τη βοήθεια της προτεινόμενης διαδικασίας εκτίμησης παραγώγων σε όλα τα παραδείγματα, εκτός από το δεύτερο όπου θεωρήθηκαν άγνωστες. Στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας αναφερόμαστε στο σφάλμα παρακολούθη-

σης στη μόνιμη κατάσταση απλά ως σφάλμα μόνιμης κατάστασης.

Παράδειγμα 1 (Εκτίμηση σχηματισμού): Μπορούμε να κωδικοποιήσουμε μία αφαίρεση του σχηματισμού μίας ομάδας ρομπότ χρησιμοποιώντας ένα πεπερασμένο σύνολο γεωμετρικών ροπών [45]. Εδώ θεωρούμε ένα 5D διάνυσμα ροπών της μορφής:

$$f(p) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [p_{ix}, p_{iy}, p_{ix}^2, p_{iy}^2, p_{ixy}]^T.$$



Σχήμα 2: Ο PI εκτιμητής για τα p_{iy} , p_{ixy} με $n = 5$ και $\gamma = 1$.

Οι συγγραφείς στο [3] θεώρησαν τον PI εκτιμητή συναίνεσης μέσω του όρου:

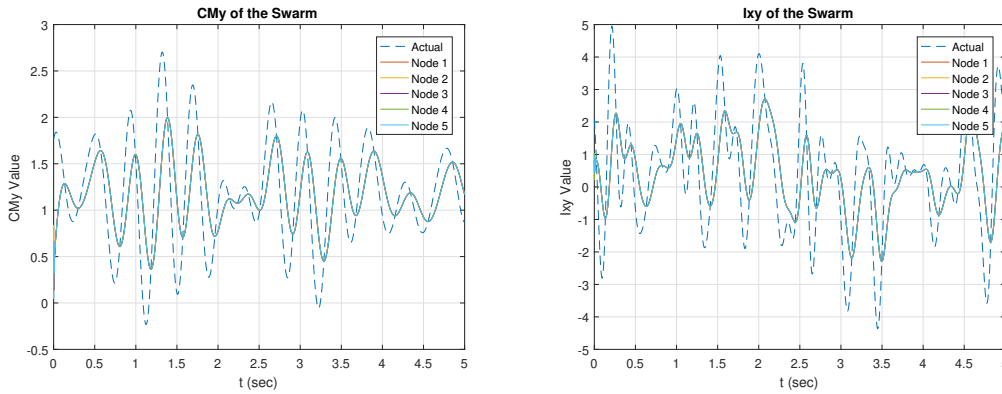
$$\begin{aligned} \dot{v}_i &= \gamma(u_i - v_i) - \sum_{j \neq i} a_{ij}[v_i - v_j] + \sum_{j \neq i} b_{ij}[w_i - w_j] \\ \dot{w}_i &= - \sum_{j \neq i} b_{ij}[v_i - v_j], \end{aligned}$$

όπου $u_i(t) \in \mathbb{R}$ είναι το σήμα αναφοράς του i πράκτορα (είσοδος του εκτιμητή), $v_i(t) \in \mathbb{R}$ η εκτίμηση του i πράκτορα για το μέσο όρο όλων των σημάτων αναφοράς, γ είναι ένα θετικό κέρδος και a_{ij} , b_{ij} είναι συναρτήσεις κέρδους. Προκειμένου να συγκρίνουμε τον προτεινόμενο εκτιμητή με τον PI εκτιμητή, προσομοιώσαμε ημιτονοειδή μοτίβα θέσης της μορφής:

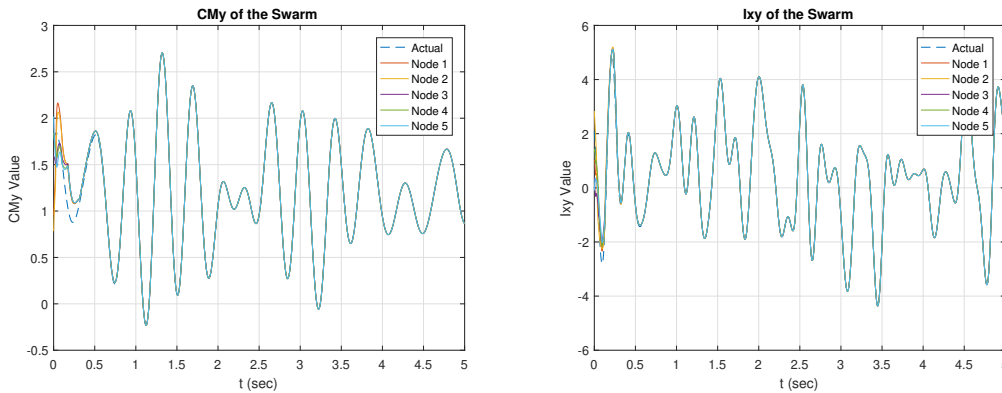
$$p_i(t) = \begin{bmatrix} A_{ix0} + A_{ix} \cos(\omega_{ix}t + \phi_{ix}) \\ A_{iy0} + A_{iy} \cos(\omega_{iy}t + \phi_{iy}) \end{bmatrix}, i \in \{1, \dots, n\},$$

τέτοια ώστε ο γράφος \mathcal{G} να παραμένει αμετάβλητος με το χρόνο.

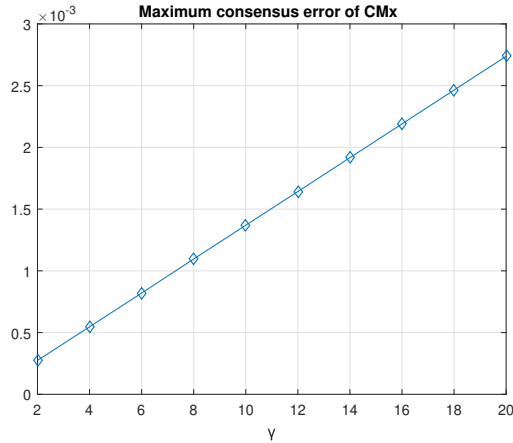
Συνολικά, χρησιμοποιήσαμε 5 εκτιμητές ανά πράκτορα, με τις εισόδους των εκτιμητών του i πράκτορα να συμβολίζονται ως $p_{ix}, p_{iy}, p_{ix}^2, p_{iy}^2, p_{ixy}, i \in \{1, \dots, n\}$. Για τους PI εκτιμητές επιλέξαμε $\gamma = 1, 10$ και συναρτήσεις κέρδους σύμφωνα με ένα ισότιμο σύστημα βαρών [46]: $a_{ij} = 50$ και $b_{ij} = 200$ όταν $\|p_i - p_j\| \leq 20$, και $a_{ij} = b_{ij} = 0$ αλλιώς (το γεγονός ότι αυτές οι συναρτήσεις κέρδους είναι ασυνεχείς είχε μικρή επίδραση στις προσομοιώσεις, αφού οι πράκτορες δεν κινούνταν μακριά ο ένας από τον άλλο). Για τους προτεινόμενους εκτιμητές επιλέξαμε $k = k_d = 4, k_r = 5, l = 10, \rho_\infty = 0.001$. Στα Σχήματα 2-4 παρουσιάζουμε την εκτίμηση κάθε πράκτορα για το μέσο όρο των εισόδων όλων των πρακτόρων, συναρτήσει του χρόνου.



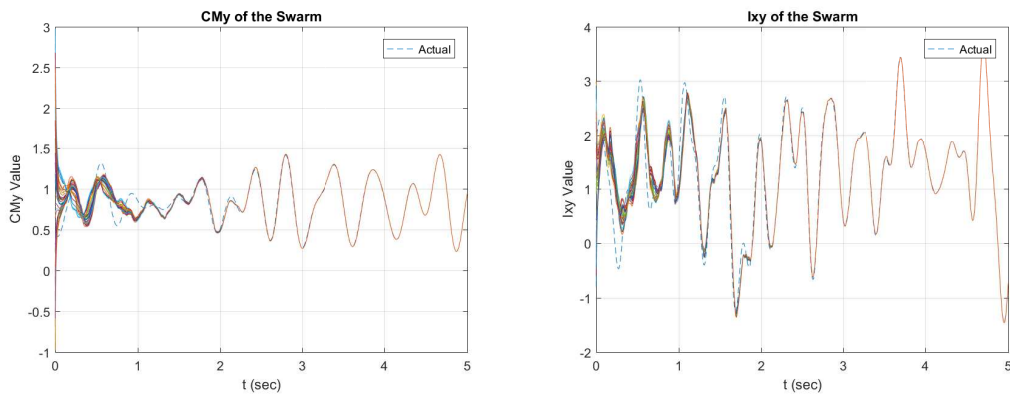
Σχήμα 3: Ο PI εκτιμητής για τα p_{iy}, p_{ixy} με $n = 5$ και $\gamma = 10$.



Σχήμα 4: Ο προτεινόμενος εκτιμητής για τα p_{iy}, p_{ixy} με $n = 5$.



Σχήμα 5: Το μέγιστο σφάλμα συναίνεσης του PI εκτιμητή για το p_{ix} συναρτῆσει του γ .

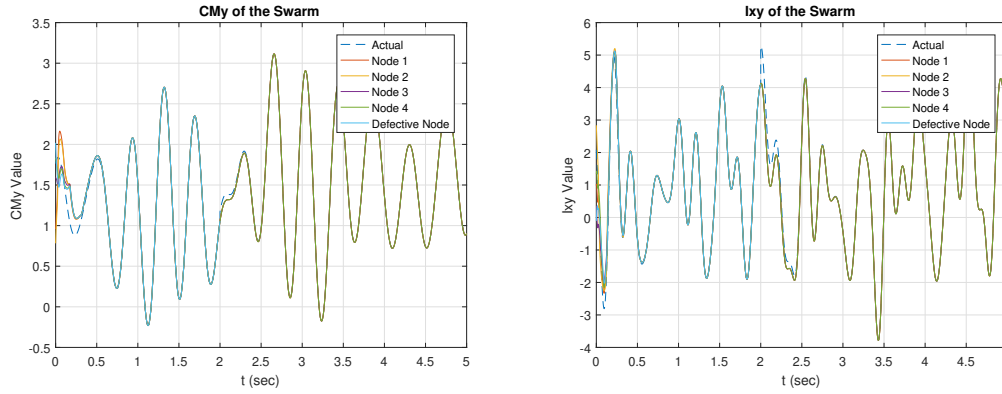


Σχήμα 6: Ο προτεινόμενος εκτιμητής για τα p_{iy} , p_{ixy} με $n = 50$.

Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε από τα Σχήματα 2 και 3, η αύξηση του γ στον PI εκτιμητή οδηγεί σε καλύτερη παρακολούθηση (δηλαδή σε μικρότερο σφάλμα μόνιμης κατάστασης), αλλά και σε χειρότερη συναίνεση, εφόσον το μέγιστο σφάλμα συναίνεσης αυξάνεται με το γ , όπως φαίνεται ενδεικτικά για το p_{ix} στο Σχήμα 5. Επομένως, υπάρχει ένας ανταγωνισμός μεταξύ της επίδοσης παρακολούθησης μέσου όρου και της επίδοσης συναίνεσης, ο οποίος καθορίζεται από το γ . Ωστόσο, στην προσέγγισή μας (βλ. Σχήμα 4), ο εκτιμητής επιτρέπει ανεξάρτητη ρύθμιση της επίδοσης παρακολούθησης μέσου όρου και της επίδοσης συναίνεσης, οπότε μπορεί να πετύχει ταυτόχρονα πρακτικά μηδενικό σφάλμα μόνιμης κατάστασης και αυθαίρετα χαμηλό μέγιστο σφάλμα συναίνεσης. Επιπλέον, τα

κέρδη που απαιτούνται για την επίτευξη αυτού είναι μικρότερα απ' ό,τι στην περίπτωση του PI εκτιμητή, λόγω της χρήσης του προτεινόμενου αλγορίθμου εκτίμησης παραγώγων.

Ακόμα, προσομοιώσαμε την εκτίμηση των ροπών χρησιμοποιώντας τον προτεινόμενο εκτιμητή για 50 πράκτορες, με $l = 1$ και τις υπόλοιπες παραμέτρους επιλεγμένες όπως προηγουμένως (βλ. Σχήμα 6). Τέλος, το Σχήμα 7 δείχνει τα αποτελέσματα του προτεινόμενου αλγορίθμου για μία ομάδα 5 πρακτόρων, ο ένας εκ των οποίων σταματά να λειτουργεί και άρα φεύγει από την ομάδα τη χρονική στιγμή $t = 2$. Επιλέξαμε $k = k_d = 4$, $k_r = 5$, $l = 10$ και $\rho_\infty = 0.001$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η αποτελεσματικότητα του αλγορίθμου είναι εξασφαλισμένη ακόμα και στην περίπτωση όπου κάποιος ελαττωματικός πράκτορας σταματά να λειτουργεί σε κάποια χρονική στιγμή, εφόσον βέβαια η αλλαγή αυτή δεν επηρεάζει τη συνεκτικότητα του υπόλοιπου δικτύου.



Σχήμα 7: Ο προτεινόμενος εκτιμητής για τα p_{iy} , p_{ixy} με έναν ελαττωματικό πράκτορα που σταματά να λειτουργεί τη χρονική στιγμή $t = 2$.

Παράδειγμα 2 (Εκτίμηση του σημείου ελαχίστου μίας κυρτής αντικειμενικής συνάρτησης): Στο πρόβλημα της αποκεντρωμένης κυρτής βελτιστοποίησης, κάθε πράκτορας έχει πρόσβαση σε μία τοπική αντικειμενική συνάρτηση $f_i : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, και οι πράκτορες συνεργάζονται προκειμένου να καθορίσουν το σημείο ελαχίστου της καθολικής αντικειμενικής συνάρτησης:

$$x^* = \operatorname{argmin} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i(x),$$

μέσω τοπικής επικοινωνίας με τους γείτονές τους.

Έστω ότι κάθε πράκτορας εφαρμόζει q μη γραμμικούς δυναμικούς εκτιμητές συναίνεσης

μέσου όρου της μορφής:

$$\dot{x}_{il} = -k_r \frac{\partial f_i}{\partial x_{il}} - k \sum_{j \in N_i} \rho_{il,j}^{-1}(t) J_T \left(\frac{x_{il} - x_{jl}}{\rho_{il,j}(t)} \right) T \left(\frac{x_{il} - x_{jl}}{\rho_{il,j}(t)} \right), \quad (50)$$

$l = 1, \dots, q$, με το x_{il} να συμβολίζει την εκτίμηση που παράγει ο i πράκτορας για το l στοιχείο του x^* , η οποία προκύπτει από την (26) μέσω αντικατάστασης του x_i με το $\frac{\partial f_i}{\partial x_{il}}$ στον πρώτο όρο και εφαρμογής $u_i(t) = 0, \forall t \geq 0$, για κάθε $i \in \{1, \dots, n\}$. Ο πρώτος όρος στην (50), ο οποίος καθορίζει την επίδοση παρακολούθησης όπως προηγουμένως, υποδεικνύει ότι η μερική παράγωγος της τοπικής συνάρτησης κόστους του i πράκτορα, f_i , ως προς καθεμία από τις μεταβλητές της προσεγγίζει το μηδέν με το πέρασμα του χρόνου. Καθένας από τους q εκτιμητές του i πράκτορα αντιστοιχεί σε μία μεταβλητή της συνάρτησης κόστους του, με το σύνολο των εκτιμητών να τον οδηγεί στο σημείο ελαχίστου της f_i .

Ακολουθώντας το [1], παρουσιάζουμε δύο παραδείγματα προσομοίωσης, στα οποία θεωρούμε στατικό τυχαίο γράφο. Για την πρώτη προσομοίωση, θεωρούμε ένα δίκτυο 18 πρακτόρων των οποίων οι τοπικές αντικειμενικές συναρτήσεις δίνονται:

$$\begin{aligned} f_i &= \sin(x + i), & f_{3+i} &= \cos(\ln(x + i)^2 + 1), \\ f_{6+i} &= (x + i)^{\frac{4}{3}} + e^{0.1(x+i)}, & f_{9+i} &= (x + i - 4)^4, \\ f_{12+i} &= (x + i + 3)^2, & f_{15+i} &= \frac{(x + i)^2}{\sqrt{(x + i)^2 + 1}}, \end{aligned}$$

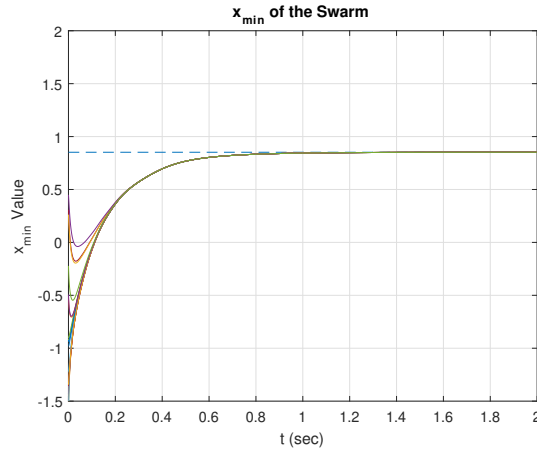
για $i = 1, 2, 3$. Εφόσον η καθολική συνάρτηση κόστους $f(x) = \sum_{i=1}^{18} f_i(x)$ είναι ισχυρά κυρτή, το καθολικό σημείο ελαχίστου x^* είναι μοναδικό. Επιλέξαμε $k = 4$, $k_r = 1$, $l = 10$ και $\rho_\infty = 0.001$.

Η δεύτερη προσομοίωση δείχνει την αποτελεσματικότητα του προτεινόμενου αλγορίθμου σε ένα πρόβλημα παρεμβολής. Σκοπός μας είναι η εύρεση μίας πρόβλεψης για την αξία ενός σπιτιού χρησιμοποιώντας τα UCI Housing σύνολα δεδομένων (διαθέσιμων στο <https://archive.ics.uci.edu/ml/machine-learning-databases/housing/>). Όπως και στο [1], θεωρούμε μία ομάδα από 6 πράκτορες, όπου ο i πράκτορας έχει 50 δείγματα δεδομένων και η τοπική του συνάρτηση κόστους δίνεται:

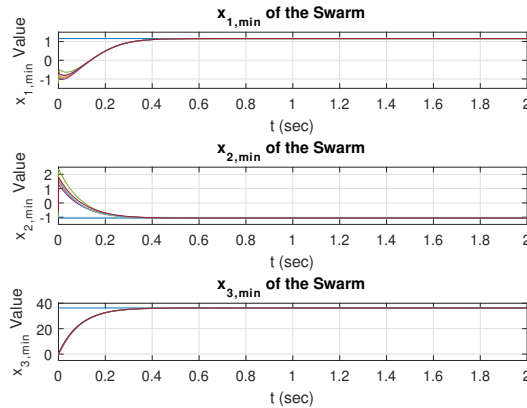
$$f_i(x_i) = \sum_{j=1}^{50} \frac{1}{2} (v_j - d_j^T x_i)^2, \quad i = 1, \dots, 6,$$

όπου $x_i \in \mathbb{R}^3$ είναι το διάνυσμα συντελεστών για το γραμμικό προβλέπτη, $\hat{v}_j = d_j^T x_i$ είναι η προβλεπόμενη μεσαία χρηματική τιμή του σπιτιού, $v_j \in \mathbb{R}$ είναι η πραγματική μεσαία

χρηματική τιμή του σπιτιού, $d_j = [c_j, p_j, 1]^T \in \mathbb{R}^3$, και $c_j, p_j \in \mathbb{R}$ η συχνότητα εγκλημάτων ανά πόλη και η χαμηλότερη κατάσταση του πληθυσμού, αντίστοιχα. Επιλέξαμε $\rho_\infty = 0.0001$ και τις υπόλοιπες παραμέτρους όπως προηγουμένως. Τα Σχήματα 8, 9 απεικονίζουν την εκτίμηση κάθε πράκτορα για το x^* , καθώς και το πραγματικό x^* , συναρτήσει του χρόνου, για τα δύο παραδείγματα αντίστοιχα.



Σχήμα 8: Ο προτεινόμενος εκτιμητής για το x^* .

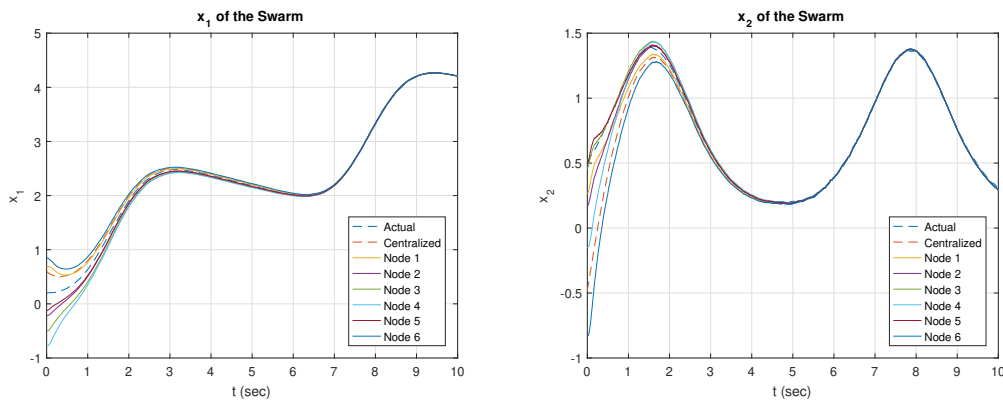


Σχήμα 9: Ο προτεινόμενος εκτιμητής για το $x^* = [x_1^* \quad x_2^* \quad x_3^*]^T$.

Παράδειγμα 3 (Εκτίμηση της εξέλιξης μίας τυχαίας διαδικασίας): Ακολουθώντας το [20], θεωρούμε μία ομάδα από πράκτορες με αισθητήρες οι οποίοι συνεργατικά προσπαθούν να καθορίσουν την εξέλιξη μίας τυχαίας διαδικασίας, λαμβάνοντας

ανεξάρτητες μετρήσεις. Όπως περιγράφεται στην ενότητα III του [20], ένας αλγόριθμος αποκεντρωμένης παρακολούθησης μέσου όρου μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση του πίνακα πληροφοριών $I(t)$ και του διανύσματος πληροφοριών $i(t)$ τα οποία χρησιμοποιούνται για την υλοποίηση ενός αποκεντρωμένου φίλτρου Kalman-Bucy. Προσομοιώσαμε το φίλτρο αυτό για ένα χρονομεταβλητό σύστημα υποθέτοντας την ύπαρξη θορύβου μέτρησης. Επιλέξαμε το γράφο και τις παραμέτρους όπως στην αντίστοιχη προσομοίωση στην ενότητα IV στο [20]. Εντούτοις, αντικαταστήσαμε τον εκτιμητή που χρησιμοποιείται στο [20] με τον προτεινόμενο εκτιμητή, με $k = k_d = 4$, $k_r = 5$, $l = 10$ και $\rho_\infty = 0.001$.

Στο Σχήμα 10 συγκρίνουμε την επίδοση αυτού του αποκεντρωμένου αλγορίθμου με τη συγκεντρωτική εκδοχή του. Πιο συγκεκριμένα, παρουσιάζουμε τις εκτιμήσεις κάθε πράκτορα για τα x_1 , x_2 , όπως προκύπτουν τόσο από το αποκεντρωμένο όσο και από το συγκεντρωτικό πρωτόκολλο, καθώς και την πραγματική τιμή τους, συναρτήσει του χρόνου. Είναι φανερό ότι ο αποκεντρωμένος αλγόριθμος αναχτά τα αποτελέσματα του συγκεντρωτικού και τις πραγματικές τιμές μετά από μια αρχική μεταβατική περίοδο.



Σχήμα 10: Ο προτεινόμενος εκτιμητής για τα x_1 , x_2 .

3 Αποκεντρωμένος Έλεγχος Σχηματισμού Συστημάτων Πολλών Πρακτόρων

3.1 Σχετικές Προσεγγίσεις

Τα τελευταία χρόνια το πρόβλημα ελέγχου σχηματισμού έχει μελετηθεί εκτενώς και πολλοί τρόποι αναπαράστασης του σχηματισμού ενός πολυ-πρακτορικού συστήματος έχουν προταθεί. Η πλειονότητα των υπάρχοντων αποτελεσμάτων επικεντρώνεται σε έλεγχο ακριβούς σχηματισμού, όπως ο έλεγχος σχηματισμού βασισμένος σε θέση όπου ο σχηματι-

σμός ενός συνόλου από πράκτορες περιγράφεται μέσω των θέσεων των πρακτόρων [6–9]. Μία πρόσφατη εργασία στο [10] εισήγαγε ένα πρωτόκολλο ελέγχου σχηματισμού βασισμένου σε θέση και προσανατολισμό για πολλαπλά άκαμπτα σώματα, ο οποίος πετυχαίνει αποφυγή εμποδίων και διατήρηση της συνεκτικότητας του δικτύου. Ωστόσο, οι προαναφερθείσες προσεγγίσεις [6–10] δεν κλιμακώνουν, διότι για μεγάλο πλήθος πρακτόρων το κόστος επικοινωνίας είναι αρκετά υψηλό και πιθανόν ανέφικτο σε πρακτικές εφαρμογές. Οι συγγραφείς στο [3] πρότειναν την κωδικοποίηση του σχηματισμού ενός συνόλου από πράκτορες μέσω ενός πεπερασμένου αριθμού γεωμετρικών ροπών, εξασφαλίζοντας έτσι τη δυνατότητα κλιμάκωσης του αλγορίθμου παράλληλης αποκεντρωμένης εκτίμησης και ελέγχου σχηματισμού που εισήγαγαν. Ο αλγόριθμος αυτός περιλαμβάνει τον PI εκτιμητή και έναν ελεγκτή που επιτυγχάνει σύγκλιση των καθολικών στατιστικών σχηματισμού στις επιθυμητές τιμές, εφόσον πληρούνται ορισμένες προϋποθέσεις. Συγκεκριμένα, λόγω της αλληλεξάρτησης μεταξύ της επίδοσης εκτίμησης και ελέγχου η ευστάθεια είναι εξασφαλισμένη μόνο όταν ικανοποιούνται συγκεκριμένες συνθήκες μικρού κέρδους. Εντούτοις, η ανάγκη επιλογής κερδών ελέγχου που ικανοποιούν δεδομένες συνθήκες μικρού κέρδους περιπλέκει την εφαρμογή του παραπάνω αλγορίθμου. Όσον αφορά τον PI εκτιμητή, όπως εξηγήθηκε και στην υποενότητα 2.1, η επίδοσή του χειροτερεύει όταν οι είσοδοι, δηλαδή οι τοπικές γεωμετρικές ροπές στην προκειμένη περίπτωση, μεταβάλλονται με το χρόνο.

3.2 Συνεισφορά

Στην παρούσα εργασία εισάγουμε έναν αλγόριθμο παράλληλης αποκεντρωμένης εκτίμησης και ελέγχου σχηματισμού για πολυ-πρακτορικά συστήματα υπό μη κατευθυνόμενες τοπολογίες δικτύου, ο οποίος εξασφαλίζει τη σύγκλιση των στατιστικών σχηματισμού του πολυ-πρακτορικού συστήματος στις επιθυμητές τιμές. Επιπλέον, η προτεινόμενη διαδικασία επιτυγχάνει αποφυγή συγκρούσεων μεταξύ των πρακτόρων με επιβολή ενός προκαθορισμένου κάτω φράγματος στην απόσταση κάθε ζεύγους πρακτόρων. Οι κύριες συνεισφορές του προτεινόμενου πρωτόκολλου περιλαμβάνουν: 1) δυνατότητα κλιμάκωσης με αύξηση του πλήθους των πρακτόρων, 2) επίτευξη συναίνεσης στην εκτίμηση με προκαθορισμένο αυθαίρετα χαμηλό ρυθμό σύγκλισης και προκαθορισμένο μέγιστο σφάλμα, 3) εύρωστη προδιαγεγραμμένη επίδοση παρακολούθησης, με ικανότητα επίτευξης πρακτικά μηδενικού σφάλματος μόνιμης κατάστασης ακόμα και για χρονομεταβαλλόμενες τοπικές γεωμετρικές ροπές, και 4) ανεξαρτητοποίηση της επίδοσης του εκτιμητή από την επίδοση του ελεγκτή, επιτρέποντας έτσι την άμεση επιλογή κερδών ελέγχου.

3.3 Ορισμός Προβλήματος

Θεωρούμε μία ομάδα από n πράκτορες, όπου κάθε πράκτορας έχει δυνατότητα ανταλλαγής πληροφοριών με άλλους πράκτορες, αποθήκευσης πληροφοριών και πραγματοποίησης τοπικών υπολογισμών. Έστω ότι το $p_i \in \mathbb{R}^r$ συμβολίζει τη θέση του i πράκτορα, για κάθε $i \in \{1, \dots, n\}$, και το $p = [p_1^T \dots p_n^T]^T \in \mathbb{R}^{rn}$ το συνολικό διάνυσμα θέσεων του πολυ-πρακτορικού συστήματος. Τότε, το σύνολο όλων των δυνατών διατάξεων του πολυ-πρακτορικού συστήματος μπορεί να αναπαρασταθεί από το $\mathcal{B} \triangleq \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{R}^{rn}$. Η τοπολογία του δικτύου αλληλεπίδρασης περιγράφεται μέσω ενός μη κατευθυνόμενου γράφου \mathcal{G} , ο οποίος μοντελοποιεί την ικανότητα των πρακτόρων να μεταδίδουν πληροφορίες σε άλλους πράκτορες μέσω ασύρματης επικοινωνίας. Συμβολίζουμε το σύνολο το γειτόνων του i πράκτορα ως N_i , $i \in \{1, \dots, n\}$.

Προκειμένου να περιγράψουμε το σχηματισμό ενός πολυ-πρακτορικού συστήματος, χρησιμοποιούμε ροπές πρώτης και δεύτερης τάξης. Οι r ροπές πρώτης τάξης καθορίζουν το κέντρο μάζας του συστήματος. Οι $r(r+1)/2$ ροπές δεύτερης τάξης περιέχουν $r(r-1)/2$ μεταβλητές που περιγράφουν τον προσανατολισμό των ορθογώνιων κύριων αξόνων αδράνειας του συστήματος και r μεταβλητές σχήματος που συνοψίζουν την επιμήκυνση του συστήματος κατά μήκος των κύριων αξόνων. Επομένως, μία αφαίρεση του σχηματισμού ενός πολυ-πρακτορικού συστήματος δίνεται από τις $r(r+1)/2$ μεταβλητές που περιγράφουν τη θέση και τον προσανατολισμό του πλαισίου κύριων αξόνων στο $SE(r)$ και τις r μεταβλητές σχήματος που περιγράφουν την επιμήκυνση του συστήματος κατά μήκος αυτών των αξόνων [47]. Έστω ότι το $triu : \mathbb{R}^{r \times r} \rightarrow \mathbb{R}^{r(r+1)/2}$ συμβολίζει το γραμμικό μετασχηματισμό που στοιβάζει την κύρια και τις άνω διαγωνίους ενός πίνακα σε ένα διάνυσμα. Για παράδειγμα, για $r = 3$, παίρνουμε:

$$triu \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{22} \\ a_{33} \\ a_{12} \\ a_{23} \\ a_{13} \end{bmatrix}. \quad (51)$$

Η συνάρτηση παραγωγής ροπών $\phi : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^L$, όπου $L = r(r+3)/2$, ορίζεται ως εξής:

$$\phi(p_i) = \begin{bmatrix} p_i \\ triu(p_i p_i^T) \end{bmatrix}. \quad (52)$$

Η διάταξη του πολυ-πρακτορικού συστήματος μπορεί να περιγραφεί χρησιμοποιώντας τη διανυσματική συνάρτηση $f : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^L$, που δίνεται:

$$f(p) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \phi(p_i). \quad (53)$$

Έστω ότι το $f^* \in Im(f)$ συμβολίζει το διάνυσμα επιθυμητών ροπών, που είναι γνωστό σε όλους τους πράκτορες. Θεωρούμε ότι κάθε πράκτορας έχει ένα σημειακό κινηματικό μοντέλο που ορίζεται από τον απλό ολοκληρωτή:

$$\dot{p}_i = u_i \quad (54)$$

όπου u_i είναι η είσοδος ελέγχου ταχύτητας. Επιπλέον, κάθε πράκτορας λαμβάνει μετρήσεις της μορφής:

$$z_i = M(p_i, P_i, f^*) \quad (55)$$

όπου το P_i συμβολίζει τις θέσεις άλλων πρακτόρων που επηρεάζουν ή συνεισφέρουν στις μετρήσεις του i πράκτορα. Ας ορίσουμε ακόμα τη συνάρτηση δυναμικού $J : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία κωδικοποιεί την επιθυμητή συμπεριφορά του πολυ-πρακτορικού συστήματος και δίνεται:

$$J(p) = [f(p) - f^*]^T \Gamma [f(p) - f^*], \quad (56)$$

όπου $\Gamma \in \mathbb{R}^{L \times L}$ είναι ένας κατάλληλα επιλεγμένος συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας.

Σκοπός μας είναι ο σχεδιασμός, υπό το προαναφερθέν μοντέλο δικτύου, ενός συνόλου δυναμικών τοπικών ελεγκτών ανάδρασης που επιτρέπουν σε κάθε πράκτορα να κινηθεί σε ένα σημείο ισορροπίας με τρόπο τέτοιο ώστε η τελική διάταξη του πολυ-πρακτορικού συστήματος p_{fin} να ικανοποιεί τη σχέση $f(p_{fin}) = f^*$. Πιο συγκεκριμένα, αναζητούμε ένα τοπικό ελεγκτή K , μία γεννήτρια σημάτων G και έναν αποκεντρωμένο εκτιμητή Q - R της μορφής:

$$u_i = K(p_i, z_i, x_i, y_i, S_i) \quad (57)$$

$$s_i = G(p_i, z_i, x_i, y_i, S_i) \quad (58)$$

$$\dot{x}_i = Q(p_i, z_i, x_i, y_i, S_i) \quad (59)$$

$$y_i = R(p_i, z_i, x_i, S_i), \quad (60)$$

όπου το s_i είναι το διάνυσμα σημάτων που ο i πράκτορας στέλνει στους γείτονές του, S_i είναι το σύνολο των σημάτων που ο i πράκτορας λαμβάνει από τους γείτονές του, y_i η τοπική εκτίμηση των καθολικών στατιστικών σχηματισμού και x_i η εσωτερική κατάσταση του τοπικού εκτιμητή, οι οποίοι συνδυαστικά πετυχαίνουν την ελαχιστοποίηση της συνάρτησης δυναμικού J .

3.4 Αλγόριθμος

3.4.1 Αποκεντρωμένη Εκτίμηση με Προδιαγεγραμμένη Επίδοση

Χρησιμοποιώντας τον εκτιμητή (26) που περιγράφηκε στην υποενότητα 2.5 και θεωρώντας τώρα ότι οι παράγωγοι των σημάτων αναφοράς είναι γνωστές, κάθε πράκτορας εφαρμόζει

τον ακόλουθο μη γραμμικό εκτιμητή δυναμικής συναίνεσης μέσου όρου:

$$\dot{w}_i = -k_r(w_i - v_i(t)) + \dot{v}_i(t) - k \sum_{j \in N_i} \rho_{ij}^{-1}(t) J_T \left(\frac{w_i - w_j}{\rho_{ij}(t)} \right) T \left(\frac{w_i - w_j}{\rho_{ij}(t)} \right) \quad (61)$$

για $i \in \{1, \dots, n\}$ με $k_r, k > 0$, όπου $v_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ είναι το τοπικό σήμα αναφοράς, $w_i(t) \in \mathbb{R}$ η τοπική εκτίμηση του μέσου όρου όλων των σημάτων αναφοράς (έξοδος του εκτιμητή), που συμβολίζεται ως v_{avg} , τα T, J_T ορίζονται στις (2), (3) αντίστοιχα και τα $\rho_{ij}(t), i \in \{1, \dots, n\}$ και $j \in N_i$, συμβολίζουν τις συναρτήσεις επίδοσης. Τότε, προκύπτει εύκολα από το Θεώρημα 3 η παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 2. Έστω τα φραγμένα και συνεχή σήματα αναφοράς $v_i(t), i \in \{1, \dots, n\}$, με φραγμένες πρώτες παραγώγους. Θεωρώντας συνεκτικό και μη κατευθυνόμενο γράφο επικοινωνίας \mathcal{G} , ο αποκεντρωμένος εκτιμητής (61) επιτυγχάνει συναίνεση στο μέσο όρο, με εκθετικό ρυθμό ίσο με $\min\{l, k_r\}$, που ικανοποιεί τη σχέση:

$$|w_i(t) - v_{avg}(t)| \leq \frac{\text{Diam}(\mathcal{G})}{2} \rho_\infty$$

για κάθε $i \in \{1, \dots, n\}$ στη μόνιμη κατάσταση.

3.4.2 Έλεγχος Σχηματισμού

Σε αυτή την περίπτωση κάθε πράκτορας χρησιμοποιεί L εκτιμητές προκειμένου να παράξει μία εκτίμηση του καθολικού σχηματισμού $f(p) \in \mathbb{R}^L$, με τον l εκτιμητή του να δίνεται:

$$\dot{x}_{il} = -k_r(x_{il} - \phi_l(p_i)) + [\nabla \phi_l(p_i)]^T \dot{p}_i - k \sum_{j \in N_i} \rho_{ij}^{-1}(t) J_T \left(\frac{x_{il} - x_{jl}}{\rho_{ij}(t)} \right) T \left(\frac{x_{il} - x_{jl}}{\rho_{ij}(t)} \right) \quad (62)$$

$$y_{il} = x_{il} \quad (63)$$

για κάθε $l \in \{1, \dots, L\}$ και $i \in \{1, \dots, n\}$, λόγω της (61). Επιπλέον, υποθέτουμε ότι κάθε πράκτορας λαμβάνει μη θορυβώδεις μετρήσεις της μορφής:

$$z_i = \begin{bmatrix} p_i \\ f^* \end{bmatrix} \quad (64)$$

και η γεννήτρια σημάτων του δίνεται:

$$s_i = y_i, \quad (65)$$

για κάθε $i \in \{1, \dots, n\}$.

Επιθυμούμε να σχεδιάσουμε ένα νόμο ελέγχου βασισμένο στην κλίση της συνάρτησης δυναμικού J . Έστω ότι το $J_{cr} = \{p \in \mathcal{B} : \nabla J(p) = 0\}$ συμβολίζει το σύνολο που περιέχει τα κρίσιμα σημεία του J . Εφόσον ακόμα κι ένα αυστηρά τοπικό ελάχιστο p της J (όπου $\nabla J(p) = 0$ και $f(p) \neq f^*$) μπορεί να είναι ευσταθές σημείο ισορροπίας του νόμου κλίσης $\dot{p} = -\nabla J(p)$, χρειάζεται να επιβεβαιώσουμε ότι το πολυ-πρακτορικό σύστημα αποφεύγει να κολλήσει σε τέτοια σημεία. Δεδομένου ενός κλειστού συνόλου διατάξεων $\mathcal{D} \subset \mathcal{B}$ ενός πολυ-πρακτορικού συστήματος και ενός διανύσματος-στόχου $f^* \in f(\mathcal{D})$, συμβολίζουμε τον κώνο όλων των συμμετρικών, θετικά ορισμένων πινάκων Γ τέτοιων ώστε κανένα αυστηρά τοπικό ελάχιστο (κακό κρίσιμο σημείο) της J στο \mathcal{D} να μην είναι τοπικό ελάχιστο της J , ως $\mathcal{G}(f^*, \mathcal{D})$.

Κατασκευάζουμε έναν αρχικό (ανεφάρμοστο) τοπικό ελεγκτή κλίσης, που ορίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= u_i \\ &= K^{initial}(p, f^*) \\ &= -\frac{\partial J}{\partial p_i} \\ &= -[\mathcal{J}\phi(p_i)]^T \Gamma[f(p) - f^*] \end{aligned} \tag{66}$$

όπου το $\mathcal{J}\phi(\cdot)$ συμβολίζει την $L \times r$ Ιακωβιανή του ϕ , λόγω της (56). Αντικαθιστώντας το $f(p)$ στην (66) με την τοπική εκτίμησή του y_i , κλιμακώνοντας την προσπάθεια ελέγχου κατά $[\mathbb{I}_{r \times r} + D_i^T D_i]^{-1}$, όπου $D_i = \frac{\partial f}{\partial p_i} \in \mathbb{R}^{L \times r}$, και επικαλούμενοι τις (56), (63), παίρνουμε τον πραγματικό τοπικό νόμο ελέγχου:

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= u_i \\ &= K(p_i, z_i, x_i, y_i, S_i) \\ &= -[\mathbb{I}_{r \times r} + D_i^T D_i]^{-1} \frac{\partial J}{\partial p_i} \Big|_{f=x_i} \\ &= -[\mathbb{I}_{r \times r} + D_i^T D_i]^{-1} [\mathcal{J}\phi(p_i)]^T \Gamma[x_i - f^*] \end{aligned} \tag{67}$$

για κάθε $i \in \{1, \dots, n\}$.

Θεώρημα 4. Κάθε τροχιά του συστήματος (62), (63), (65), (67) είναι φραγμένη στο χρόνο και το θετικό οριακό σύνολό της L^+ αποτελείται από σημεία ισορροπίας. Επιπλέον, αν $f^* \in f(\mathcal{D})$, όπου $\mathcal{D} = \bigcup_{n=r+1}^{\infty} \mathbb{R}^{rn}$, και επιλέξουμε επαρκώς μικρό ρ_{∞} , τότε υπάρχει ένας υπολογίσιμος πίνακας $\Gamma \in \mathcal{G}(f^*, \mathcal{D})$ τέτοιος ώστε όταν μία τροχιά του συστήματος προσεγγίζει ένα θετικό οριακό σύνολο που περιέχει ένα κακό σημείο ισορροπίας (δηλαδή ένα σημείο ισορροπίας που αντιστοιχεί σε ένα κακό κρίσιμο σημείο της J), μία μικρή διαταραχή να την οδηγεί εκτός μιας γειτονιάς αυτού του συνόλου για πάντα.

Απόδειξη. Θεωρούμε τα διανύσματα $e_\phi = [e_{\phi_1}^T \dots e_{\phi_n}^T]^T$ και $e_f = [e_{f_1}^T \dots e_{f_n}^T]^T$, όπου:

$$e_{\phi_i} = \frac{d}{dt}\phi(p_i) \quad (68)$$

$$e_{f_i} = f(p) - x_i \quad (69)$$

για κάθε $i \in \{1, \dots, n\}$. Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 2, καθώς και το Αντίστροφο Θεώρημα Lyapunov, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει μία γνήσια συνάρτηση $U(e_f)$ που ικανοποιεί την ανισότητα:

$$\dot{U} \leq -\min\{l, k_r\}U + a \left(e_\phi, \frac{1}{\rho_\infty} \right) \quad (70)$$

όπου a είναι μια συνάρτηση που ανήκει στην κλάση \mathcal{KL} .

Επικαλούμενοι το Θεώρημα Μέσης Τιμής, παίρνουμε:

$$\left. \frac{\partial J}{\partial f^j} \right|_{f=f} - \left. \frac{\partial J}{\partial f^j} \right|_{f=x_i} = H_{ij}e_{f_i} \quad (71)$$

όπου $H_{ij} = \left. \frac{\partial^2 J}{\partial f^j \partial f} \right|_{f=\tilde{f}_{ij}}$, με κάθε $\tilde{f}_{ij} = f - \alpha_j(f - x_i) = f - \alpha_j e_{f_i}$, $0 \leq \alpha_j \leq 1$, να βρίσκεται στο τμήμα της γραμμής μεταξύ του f και του x_i . Έτσι, η αλλαγή στην προσπάθεια ελέγχου λόγω της αντικατάστασης του $f(p)$ από το x_i δίνεται:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial J}{\partial p_i} \right|_{f=f} - \left. \frac{\partial J}{\partial p_i} \right|_{f=x_i} &= \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \right)^T \left(\left. \frac{\partial J}{\partial f} \right|_{f=f} - \left. \frac{\partial J}{\partial f} \right|_{f=x_i} \right) \\ &= D_i^T H_i e_{f_i} \end{aligned} \quad (72)$$

όπου ο $H_i = [H_{i1}^T \dots H_{iL}^T]^T$ θα καλείται ο εσσιανός πίνακας του συστήματος. Παραγωγίζοντας την (56) ως προς το χρόνο και αντικαθιστώντας τις (67), (68), (69), (72),

παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
\dot{J} &= \sum_{i=1}^n \dot{p}_i^T \frac{\partial J}{\partial p_i} \Big|_{f=f} \\
&= \sum_{i=1}^n \dot{p}_i^T [\mathbb{I}_{r \times r} + D_i^T D_i] [\mathbb{I}_{r \times r} + D_i^T D_i]^{-1} \left(\frac{\partial J}{\partial p_i} \Big|_{f=x_i} \right. \\
&\quad \left. + D_i^T H_i e_{f_i} \right) \\
&= - \sum_{i=1}^n \dot{p}_i^T [\mathbb{I}_{r \times r} + D_i^T D_i] \dot{p}_i + \sum_{i=1}^n e_{\phi_i}^T H_i e_{f_i} \\
&= - \sum_{i=1}^n \dot{p}_i^T \dot{p}_i - \sum_{i=1}^n e_{\phi_i}^T e_{\phi_i} + \sum_{i=1}^n e_{\phi_i}^T H_i e_{f_i} \\
&= -\dot{p}^T \dot{p} - e_{\phi}^T e_{\phi} + e_{\phi}^T H e_f
\end{aligned} \tag{73}$$

όπου H είναι ο block διαγώνιος πίνακας με blocks H_i , $i \in \{1, \dots, n\}$.

Έπειτα, θεωρούμε τη συνάρτηση αποθήκευσης:

$$V(p, e_f) = J(p) + \gamma U(e_f) \tag{74}$$

όπου γ είναι μια θετική σταθερά. Παραγωγίζοντας τη V ως προς το χρόνο και χρησιμοποιώντας τις (70), (73) καταλήγουμε στο εξής:

$$\dot{V} \leq -\dot{p}^T \dot{p} - e_{\phi}^T e_{\phi} + e_{\phi}^T H e_f - \gamma \min\{l, k_r\} U(e_f) + \gamma a \left(e_{\phi}, \frac{1}{\rho_{\infty}} \right). \tag{75}$$

Συμπληρώνοντας το τετράγωνο στην (75), παίρνουμε:

$$\dot{V} \leq -\dot{p}^T \dot{p} + \frac{1}{4} \|H e_f\|^2 - \gamma \min\{l, k_r\} U(e_f) + \gamma a \left(e_{\phi}, \frac{1}{\rho_{\infty}} \right) \tag{76}$$

το οποίο με επιλογή επαρκώς μεγάλου γ και πολύ μικρού ρ_{∞} δίνει $\dot{V} \leq 0, \forall t \geq 0$, εφόσον η a ως προς το $\frac{1}{\rho_{\infty}}$. Συνεπώς, η $V(t)$ είναι μη αύξουσα κατά μήκος των τροχιών στο χρόνο. Αφού οι $J(p)$, $U(e_f)$ είναι γνήσιες, η $V(p, e_f)$ είναι επίσης γνήσια και όλα τα σήματα είναι φραγμένα στο χρόνο. Επιπροσθέτως, από το Θεώρημα LaSalle, συμπεραίνουμε ότι κάθε τροχιά συγκλίνει στο μη κενό, συμπαγές, συνεκτικό θετικό οριακό σύνολό της L^+ , το οποίο περιέχει μόνο σημεία ισορροπίας της μορφής $(p, e_f) = (p^*, 0)$ όπου $p^* \in J_{cr}$. Επομένως, η V άρα και η J είναι σταθερές σε κάθε θετικό οριακό σύνολο. Ακόμα, κάθε

θετικό οριακό σύνολο που περιέχει ένα τουλάχιστον κακό σημείο ισορροπίας πρέπει να περιέχει μόνο κακά σημεία ισορροπίας.

Σε αυτό το σημείο απομένει μόνο να δείξουμε ότι υπό συγκεκριμένες συνθήκες κάθε θετικό οριακό σύνολο που περιέχει κακά σημεία ισορροπίας είναι ισχυρά ασταθές, δηλαδή ασταθές με την έννοια του Lyapunov και μη ελκυστικό [3]. Συγκεκριμένα, πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι όταν μία τροχιά προσεγγίζει ένα τέτοιο σύνολο, μία μικρή διαταραχή θα την οδηγήσει εκτός μιας γειτονιάς αυτού του συνόλου για πάντα.

Προς αυτή την κατεύθυνση, υποθέτουμε ότι $f^* \in f(\mathcal{D})$, όπου $\mathcal{D} = \bigcup_{n=r+1}^{\infty} \mathbb{R}^{rn}$. Τότε, από το Θεώρημα 2 του [3], υπάρχει ένας πίνακας $\Gamma \in \mathcal{G}(f^*, \mathcal{D})$, που μπορεί εύκολα να υπολογιστεί όπως εξηγείται στο [3]. Έστω ότι το L_b^+ συμβολίζει ένα θετικό οριακό σύνολο που αποτελείται από κακά σημεία ισορροπίας. Τότε, το L_b^+ μπορεί να γραφεί ως $L_b^+ = L_0^+ \times \{0\} \times \{0\}$, όπου $L_0^+ \subset \mathcal{D} \cap J_{cr}$. Παρατηρούμε ότι η ϕ πολυωνυμική και άρα υποαναλυτική συνάρτηση, από το οποίο συμπεραίνουμε ότι η J είναι επίσης υποαναλυτική και επίσης από το Θεώρημα 10 του [3], η J είναι τοπικά σταθερή στο J_{cr} . Συνεπώς, κάθε σημείο $p \in L_0^+$ έχει μία ανοιχτή γειτονιά N_p τέτοια ώστε η J να είναι σταθερή στο σύνολο $cl(N_p) \cap J_{cr}$. Αν ορίσουμε το ανοιχτό σύνολο $N = \bigcup \{N_p : p \in L_0^+\}$, τότε το σύνολο $\mathcal{O} = N \times \mathbb{R}^{rn} \times \mathbb{R}^{L \times n}$ είναι μία ανοιχτή γειτονιά του L_b^+ . Επιπλέον, από το Λήμμα 11 του [3], προκύπτει ότι η J είναι σταθερή στο $cl(N) \cap J_{cr}$. Έστω \mathcal{U} οποιοδήποτε ανοιχτό σύνολο τέτοιο ώστε $L_b^+ \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$, και έστω $(p^*, 0) \in L_b^+ \cap \mathcal{U}$. Εφόσον το p^* δεν είναι τοπικό ελάχιστο της J (από υπόθεση), υπάρχει ένα σημείο $(\bar{p}, 0) \in \mathcal{U}$ τέτοιο ώστε $J(\bar{p}) < J(p^*)$ και άρα $V(\bar{p}, 0) < V(p^*, 0)$. Έστω ότι το $L_1^+ \times \{0\} \times \{0\}$ συμβολίζει το θετικό οριακό σύνολο της τροχιάς που ξεκινά από το $(\bar{p}, 0)$. Τότε η J είναι σταθερή στο L_1^+ , και λαμβάνοντας υπόψη ότι η V μη αύξουσα κατά μήκος των τροχιών διαπιστώνουμε ότι η τιμή της J στο L_1^+ είναι αυστηρά μικρότερη της τιμής της στο $cl(N) \cap J_{cr}$. Επομένως, αφού $L_1^+ \subset J_{cr}$, συμπεραίνουμε ότι $L_1^+ \cap cl(N) = \emptyset$, πράγμα που συνεπάγεται ότι η τροχιά που ξεκινά από το $(\bar{p}, 0)$ τελικά φεύγει από την ανοιχτή γειτονιά \mathcal{O} του L_b^+ για πάντα, δηλαδή το L_b^+ είναι ισχυρά ασταθές. ■

Σημείωση 4. Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι ο εκτιμητής στην (62) και ο ελεγκτής στην (67) σχηματίζουν ένα διασυνδεδεμένο σύστημα ανάδρασης. Συγκεκριμένα, ο εκτιμητής λαμβάνει το u_i ως είσοδο από τον ελεγκτή, ενώ ο ελεγκτής λαμβάνει το x_i ως είσοδο από τον εκτιμητή. Ωστόσο, σε αντίθεση με το [3], η επίδοση του εκτιμητή είναι ανεξάρτητη από την επίδοση του ελεγκτή, εφόσον η ευρωστία της επίδοσης συναίνεσης εξασφαλίζεται μέσω των συναρτήσεων επίδοσης και ο αλγόριθμος επιτυγχάνει τόσο συναίνεση εκτίμησης όσο και παρακολούθηση του μέσου όρου με εκθετικό ρυθμό σύγκλισης και πρακτικά μηδενικό σφάλμα μόνιμης κατάστασης ανεξαρτήτως του φράγματος της εισόδου ελέγχου u_i . Η ρύθμιση της επίδοσης συναίνεσης και παρακολούθησης μέσου όρου εξηγήθηκαν αναλυτικά στη Σημείωση 3. Όσον αφορά τον πίνακα κέρδους του ελεγκτή Γ , μπορεί εύκολα να υπολογιστεί όπως εξηγείται στο [3].

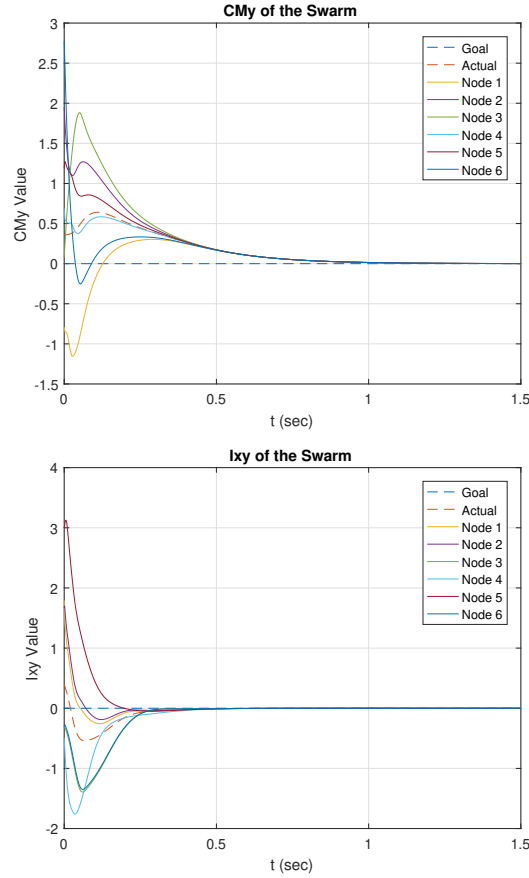
Σημείωση 5. Ο προτεινόμενος αλγόριθμος μπορεί να επεκταθεί ώστε να πετύχει έλεγχο σχηματισμού με αποφυγή συγκρούσεων μεταξύ των πρακτόρων. Οι συγγραφείς στο [48] πρότειναν έναν ελεγκτή σχήματος βασισμένο σε περιοχή για μια ομάδα πρακτόρων-ρομπότ, ο οποίος εξασφαλίζει την κίνηση των πρακτόρων μέσα σε μια επιθυμητή περιοχή, με τους πράκτορες να διατηρούν μεταξύ τους μια ελάχιστη απόσταση. Σε αυτή την περίπτωση το διάνυσμα μετρήσεων της (55) παίρνει τη μορφή $z_i = [p_i^T \ P_i^T \ f^{*T}]^T$, όπου το P_i συμβολίζει τις θέσεις των πρακτόρων των οποίων η απόσταση από τον i πράκτορα δεν ξεπερνά την ακτίνα αίσθησης r_s , ή ισοδύναμα τους πράκτορες που ανήκουν στη γειτονιά αίσθησης του i πράκτορα, έστω N_{s_i} . Έτσι, επικαλούμενοι την (67), κατασκευάζουμε ένα νέο ελεγκτή, που ορίζεται για κάθε $i \in \{1, \dots, n\}$ ως εξής:

$$u_i = -[\mathbb{I}_{r \times r} + D_i^T D_i]^{-1} \frac{\partial J}{\partial p_i} \Big|_{f=x_i} - k_c \frac{\partial Q_{Lij}(\Delta x_{ij})}{\partial \Delta x_{ij}} \quad (77)$$

όπου k_c είναι ένα θετικό κέρδος και το $\frac{\partial Q_{Lij}(\Delta x_{ij})}{\partial \Delta x_{ij}}$ ορίζεται όπως στο [48], με εξαίρεση ότι το N_i αντικαθίσταται από το N_{s_i} και η ελάχιστη επιτρεπτή απόσταση μεταξύ των πρακτόρων συμβολίζεται ως r_c . Επισημαίνουμε ότι απαιτείται η επιλογή ενός σχετικά μεγάλου κέρδους k_c έτσι ώστε να είναι εξασφαλισμένη η επίτευξη του επιθυμητού r_c . Επιπλέον, ένας συγκεκριμένος επιθυμητός σχηματισμός δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί ταυτόχρονα με οποιοδήποτε r_c , δηλαδή υπάρχουν περιπτώσεις ανέφικτων σχηματισμών.

3.5 Αποτελέσματα Προσομοιώσεων

Σε αυτή την υποενότητα παρουσιάζουμε δύο προσομοιωμένα παραδείγματα. Το πρώτο παράδειγμα δείχνει την αποτελεσματικότητα των παραπάνω θεωρητικών αποτελεσμάτων. Το δεύτερο παράδειγμα αποτελεί μία εφαρμογή του προτεινόμενου αλγόριθμου, η οποία επιτρέπει την κίνηση ενός πολυ-πρακτορικού συστήματος κατά μήκος ενός δεδομένου μονοπατιού μέσα σε ένα χώρο με εμπόδια χωρίς συγκρούσεις.

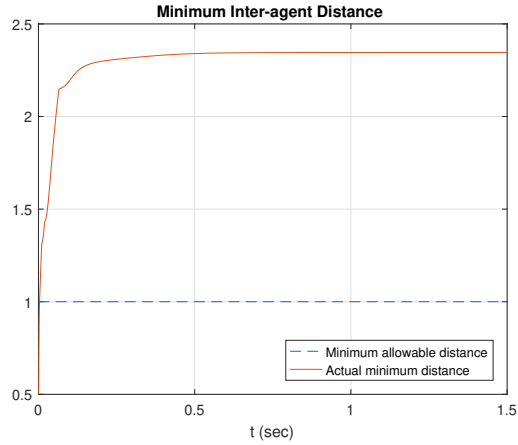


Σχήμα 11: Ο προτεινόμενος αλγόριθμος για τα CM_y , I_{xy} .

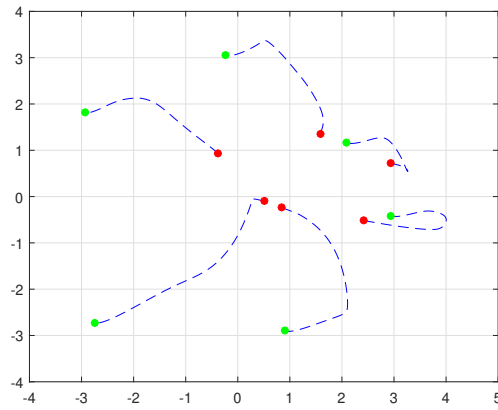
Έστω μία ομάδα αποτελούμενη από $n = 6$ πράκτορες που κινούνται σε ένα επίπεδο και έστω ότι το δίκτυο επικοινωνίας των πρακτόρων αναπαρίσταται από έναν τυχαίο σταθερό γράφο. Αν η θέση του i πράκτορα συμβολίζεται ως $p_i = [p_{ix} \ p_{iy}]^T$, τότε τα στατιστικά σχηματισμού του πολυ-πρακτορικού συστήματος δίνονται από το διάνυσμα:

$$f(p) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [p_{ix} \ p_{iy} \ p_{ix}^2 \ p_{iy}^2 \ p_{ix}p_{iy}].$$

Παράδειγμα 1: Προσομοιώσαμε τον προτεινόμενο αλγόριθμο με σκοπό να πετύχουμε καθολικά στατιστικά σχηματισμού $f^* = [0 \ 0 \ 5 \ 5 \ 0]^T$. Οι παράμετροι του εκτιμητή ορίστηκαν ως $k = 4$, $k_r = 5$, $l = 10$, $\rho_\infty = 0.001$ και ο πίνακας κέρδους του ελεγκτή ως $\Gamma = \text{diag}(5, 5, 5, 5, 5)$. Επιλέξαμε ελάχιστη επιτρεπτή απόσταση μεταξύ των πρακτόρων $r_c = 1$ και κέρδος $k_c = 150$.



Σχήμα 12: Ελάχιστη απόσταση μεταξύ των πρακτόρων.

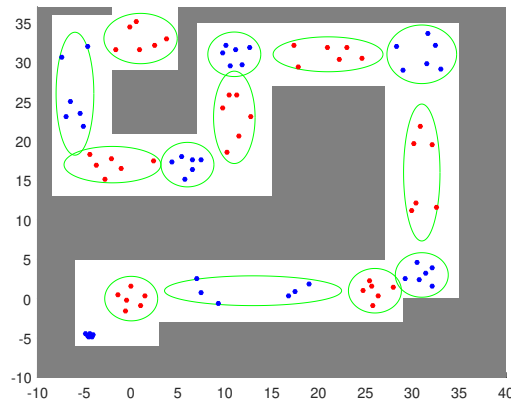


Σχήμα 13: Τροχιές πρακτόρων (τα κόκκινα και τα πράσινα σημεία αντιπροσωπεύουν τις αρχικές και τις τελικές θέσεις των πρακτόρων αντίστοιχα).

Στο Σχήμα 11 παρουσιάζουμε τις εκτιμήσεις κάθε πράκτορα για τις καθολικές ροπές αδράνειας CM_y (δεύτερη συνιστώσα του f) και I_{xy} (πέμπτη συνιστώσα του f), καθώς και τις πραγματικές τιμές τους, σε σύγκριση με τις επιθυμητές τιμές. Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η αποκεντρωμένη διαδικασία επιτυγχάνει σύγκλιση των στατιστικών σχηματισμού στις επιθυμητές τιμές με μηδενικό σφάλμα μόνιμης κατάστασης. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 12, η κίνηση των πρακτόρων σέβεται την ελάχιστη επιτρεπτή απόσταση μεταξύ δύο οποιωνδήποτε πρακτόρων, επιτυγχάνοντας έτσι την αποφυγή μεταξύ τους συγκρούσεων. Ακόμα, είναι φανερό από το Σχήμα 12 ότι η εφαρμοσιμότητα του αλγορίθμου είναι

εξασφαλισμένη ακόμα κι όταν η αρχική ελάχιστη απόσταση μεταξύ των πρακτόρων είναι μικρότερη από r_c . Τέλος, το Σχήμα 13 απεικονίζει τις τροχιές των πρακτόρων καθώς αυτοί κινούνται για να πετύχουν τον επιθυμητό σχηματισμό.

Παράδειγμα 2: Η κίνηση ενός πολυ-πρακτορικού συστήματος κατά μήκος ενός συγκεκριμένου μονοπατιού μέσα σε ένα χώρο με εμπόδια μπορεί να περιγραφεί από διαδοχικούς σχηματισμούς του κατά μήκος του μονοπατιού. Πιο συγκεκριμένα, οι ροπές πρώτης τάξης μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την αναπαράσταση διακριτών σημείων της επιθυμητής τροχιάς, ενώ οι ροπές δεύτερης τάξης μπορούν να επιλεχθούν έτσι ώστε να επιτυγχάνεται αποφυγή εμποδίων. Επομένως, η διαδοχική εφαρμογή του προτεινόμενου πρωτόκολλου με σκοπό την επίτευξη κατάλληλα ορισμένων διαδοχικών σχηματισμών εξασφαλίζει την κίνηση του πολυ-πρακτορικού συστήματος κατά μήκος της επιθυμητής τροχιάς χωρίς συγκρούσεις.



Σχήμα 14: Διαδοχικοί καθολικοί σχηματισμοί και αντίστοιχες ελλείψεις ομοιόμορφης πυκνότητας κατά την κίνηση ενός πολυ-πρακτορικού συστήματος κατά μήκος ενός δεδομένου μονοπατιού.

Έστω ότι θέλουμε το κέντρο μάζας του προαναφερθέντος πολυ-πρακτορικού συστήματος, το οποίο αρχικά συμπίπτει με το σημείο $(-4.4, -4.7)$, να φτάσει στο σημείο $(1, 33)$, μέσω της κίνησης των πρακτόρων μέσα στο χώρο που απεικονίζεται στο Σχήμα 14 (τα εμπόδια απεικονίζονται με γκρι και ο ελεύθερος χώρος με άσπρο). Πρώτα σχεδιάσαμε ένα εφικτό μονοπάτι και μετά καθορίσαμε τα αντίστοιχα στατιστικά σχηματισμού. Οι παράμετροι του αλγορίθμου επιλέχθηκαν όπως στο Παράδειγμα 1, εκτός από τον πίνακα κέρδους του ελεγκτή Γ , ο οποίος επιλέχθηκε όπως εξηγείται στο [3] για κάθε σχηματισμό, και την ελάχιστη απόσταση μεταξύ των πρακτόρων, η οποία επιλέχθηκε ίση με 0.7. Το Σχήμα

14 δείχνει την αρχική διάταξη του πολυ-πρακτορικού συστήματος (αρχικά οι πράκτορες δεν είναι ευδιάκριτοι επειδή είναι πολύ κοντά ο ένας στον άλλο), καθώς και τις διατάξεις που αντιστοιχούν στους διαδοχικούς επιθυμητούς σχηματισμούς (αναπαρίστανται με δύο διαφορετικά χρώματα εναλασσόμενα για λόγους ευκρίνειας). Κάθε επιθυμητός σχηματισμός αναπαρίσταται από μία έλλειψη ομοιόμορφης πυκνότητας με τις αντίστοιχες ροπές πρώτης και δεύτερης τάξης και την ίδια μάζα με το πολυ-πρακτορικό σύστημα. Παρατηρούμε ότι οι πράκτορες μπορούν να ακολουθήσουν το επιθυμητό μονοπάτι αποφεύγοντας τη σύγκρουση με τα εμπόδια του χώρου.

4 Συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία μελετήσαμε το πρόβλημα ελέγχου σχηματισμού βασισμένου σε αποκεντρωμένη εκτίμηση για συστήματα πολλών πρακτόρων. Κατ' αρχάς, προτείναμε ένα πρωτόκολλο αποκεντρωμένης εκτίμησης που επιτρέπει στους πράκτορες να εκτιμήσουν το μέσο όρο των χρονομεταβαλλόμενων εισόδων τους, ακόμα κι όταν οι εισοδοί μεταβάλλονται γρήγορα με το χρόνο. Αποδείξαμε ότι ο αλγόριθμος αυτός μπορεί να εξασφαλίσει προδιαγεγραμμένη επίδοση στη μεταβατική περίοδο και τη μόνιμη κατάσταση, χάρη στην εισαγωγή των συναρτήσεων επίδοσης. Πιο συγκεκριμένα, μπορούμε να καθορίσουμε εκ των προτέρων ένα κάτω φράγμα για το ρυθμό σύγκλισης, καθώς και άνω φράγματα για την απόκλιση μεταξύ των εκτιμήσεων των πρακτόρων και το σφάλμα παρακολούθησης στη μόνιμη κατάσταση. Ακόμα, καταφέραμε να άρουμε την αλληλεξάρτηση των επιδόσεων συναίνεσης και παρακολούθησης, οι οποίες μπορούν να ρυθμιστούν ανεξάρτητα μέσω κατάλληλης επιλογής συγκεκριμένων σχεδιαστικών παραμέτρων. Παρουσιάσαμε επίσης έναν αλγόριθμο εκτίμησης παραγώγων, ο οποίος συμπεριλήφθη στον αλγόριθμο αποκεντρωμένης εκτίμησης, επιτρέποντας έτσι την επιλογή σχετικά χαμηλών κερδών.

Επειτα, ο προτεινόμενος εκτιμητής ενσωματώθηκε στον αλγόριθμο παράλληλης αποκεντρωμένης εκτίμησης και ελέγχου σχηματισμού που σχεδιάσαμε. Αποδείξαμε ότι ο αλγόριθμος αυτός εξασφαλίζει σύγκλιση των στατιστικών σχηματισμού ενός πολυ-πρακτορικού συστήματος στις επιθυμητές τιμές, ακόμα και για γρήγορα χρονομεταβαλλόμενες τοπικές γεωμετρικές ροπές. Επιπλέον, ανεξαρτητοποιήσαμε την επίδοση του εκτιμητή από αυτή του ελεγκτή, απλοποιώντας κατ' αυτό τον τρόπο την επιλογή των κερδών ελέγχου. Τέλος, παρουσιάσαμε εκτενείς προσομοιώσεις προκειμένου να επιβεβαιώσουμε τα θεωρητικά αποτελέσματα και να δείξουμε την ευρεία εφαρμοσιμότητα του αλγορίθμου που αναπτύξαμε.

5 Βιβλιογραφία

- [1] Z. Li, Z. Ding, J. Sun, and Z. Li, “Distributed adaptive convex optimization on directed graphs via continuous-time algorithms,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 63, no. 5, pp. 1434–1441, 2018.
- [2] S. S. Ram, A. Nedic, and V. V. Veeravalli, “A new class of distributed optimization algorithms: Application to regression of distributed data,” *Optim. Methods Softw.*, vol. 27, no. 1, pp. 71–88, 2012.
- [3] P. Yang, R. A. Freeman, and K. M. Lynch, “Multi-agent coordination by decentralized estimation and control,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 53, no. 11, pp. 2480–2496, 2008.
- [4] J. A. Fax and R. M. Murray, “Information flow and cooperative control of vehicle formations,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 49, no. 9, pp. 1465–1476, 2004.
- [5] W. Ren, “Multi-vehicle consensus with a time-varying reference state,” *Systems and Control Letters*, vol. 56, no. 2, pp. 474–483, 2007.
- [6] K. D. Listmann, M. V. Masalawala, and J. Adamy, “Consensus for formation control of nonholonomic mobile robots,” in *IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, 2009, pp. 3886–3891.
- [7] M. Porfiri, G. D. Roberson, and D. J. Stilwell, “Tracking and formation control of multiple autonomous agents: A two-level consensus approach,” *Automatica*, vol. 43, no. 8, pp. 1318–1328, 2007.
- [8] R. Olfati-Saber, J. A. Fax, and R. M. Murray, “Consensus and cooperation in networked multi-agent systems,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 95, no. 1, pp. 215–233, 2007.
- [9] F. Dorfler and B. Francis, “Formation control of autonomous robots based on cooperative behavior,” in *Proceedings of the European Control Conference*, Aug. 2009, pp. 2432–2437.
- [10] C. K. Verginis, A. Nikou, and D. V. Dimarogonas, “Position and orientation based formation control of multiple rigid bodies with collision avoidance and connectivity maintenance,” in *IEEE Conf. on Decision and Control*, Dec. 2017, pp. 411–416.

- [11] J. Cortés, “Distributed kriged kalman filter for spatial estimation,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 54, no. 12, pp. 2816–2827, December 2009.
- [12] K. M. Lynch, I. B. Schwartz, P. Yang, and R. A. Freeman, “Decentralized environmental modeling by mobile sensor networks,” *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 24, no. 3, pp. 710–724, June 2008.
- [13] R. Olfati-Saber, “Distributed kalman filter with embedded consensus filters,” in *IEEE Conf. on Decision and Control*, 2005, pp. 8179–8184.
- [14] R. Olfati-Saber and J. S. Shamma, “Consensus filters for sensor networks and distributed sensor fusion,” in *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, Seville, Spain, 2005, pp. 6698–6703.
- [15] R. Olfati-Saber, “Kalman-consensus filter : Optimality, stability, and performance,” *IEEE Conf. on Decision and Control*, pp. 7036–7042, 2009.
- [16] A. T. Kamal, J. A. Farrell, and A. K. Roy-Chowdhury, “Information weighted consensus filters and their application in distributed camera networks,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 58, no. 12, pp. 3112–3125, 2013.
- [17] W. Qi, P. Zhang, and Z. Deng, “Robust sequential covariance intersection fusion kalman filtering over multi-agent sensor networks with measurement delays and uncertain noise variances,” *Acta Automatica Sinica*, vol. 40, no. 11, pp. 2632–2642, 2014.
- [18] G. Wang, N. Li, and Y. Zhang, “Diffusion distributed kalman filter over sensor networks without exchanging raw measurements,” *Signal Processing*, vol. 132, pp. 1–7, 2017.
- [19] R. Aragues, C. Sagues, and Y. Mezouar, “Feature-based map merging with dynamic consensus on information increments,” *Autonomous Robots*, vol. 38, no. 3, p. 243259, 2015.
- [20] W. Ren and U. M. Al-Saggaf, “Distributed kalman-bucy filter with embedded dynamic averaging algorithm,” *IEEE Systems Journal*, vol. PP, no. 99, pp. 1–9, 2017.
- [21] P. Yang, R. A. Freeman, G. J. Gordon, K. M. Lynch, S. S. Srinivasa, and R. Suktankar, “Decentralized estimation and control of graph connectivity for mobile sensor networks,” *Automatica*, vol. 46, no. 2, pp. 390–396, 2010.

- [22] A. Nedic and A. Ozdaglar, “Distributed subgradient methods for multi-agent optimization,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 54, no. 1, pp. 48–61, 2009.
- [23] B. Johansson, M. Rabi, and M. Johansson, “A randomized incremental subgradient method for distributed optimization in networked systems,” *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 20, no. 3, pp. 1157–1170, 2009.
- [24] J. Wang and N. Elia, “A control perspective for centralized and distributed convex optimization,” in *IEEE Conf. on Decision and Control*, Orlando, Florida, 2011, pp. 3800–3805.
- [25] M. Zhu and S. Martínez, “On distributed convex optimization under inequality and equality constraints,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 57, no. 1, pp. 151–164, 2012.
- [26] J. Lu and C. Y. Tang, “Zero-gradient-sum algorithms for distributed convex optimization: the continuous-time case,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 57, no. 9, pp. 2348–2354, 2012.
- [27] B. Ghahserifard and J. Cortés, “Distributed continuous-time convex optimization on weight-balanced digraphs,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 59, no. 3, pp. 781–786, 2014.
- [28] S. S. Kia, J. Cortés, and S. Martínez, “Distributed convex optimization via continuous-time coordination algorithms with discrete-time communication,” *Automatica*, vol. 55, pp. 254–264, 2015.
- [29] G. Qu and N. Li, “Accelerated distributed nesterov gradient descent for convex and smooth functions,” in *IEEE Conf. on Decision and Control*, 2017, pp. 2260–2267.
- [30] S. P. Hou, C. C. Cheah, and J. J. E. Slotine, “Dynamic region following formation control for a swarm of robots,” in *IEEE International Conf. on Robotics and Automation*, May 2009, pp. 1929–1934.
- [31] D. P. Spanos, R. Olfati-Saber, and R. M. Murray, “Dynamic consensus on mobile networks,” in *IFAC World Congress*, Prague, Czech Republic, Jul. 2005.
- [32] R. A. Freeman, P. Yang, and K. M. Lynch, “Stability and convergence properties of dynamic average consensus estimators,” in *IEEE Conf. on Decision and Control*, San Diego, CA, Dec. 2006, pp. 398–403.

- [33] S. S. Kia, J. Cortés, and S. Martínez, “Dynamic average consensus under limited control authority and privacy requirements,” *International Journal on Robust and Nonlinear Control*, vol. 25, no. 13, pp. 1941–1966, 2015.
- [34] H. Bai, R. A. Freeman, and K. M. Lynch, “Robust dynamic average consensus of time-varying inputs,” in *IEEE Conf. on Decision and Control*, Atlanta, GA, Dec. 2010, pp. 3104–3109.
- [35] B. V. Scoy, R. A. Freeman, and K. M. Lynch, “Feedforward estimators for the distributed average tracking of bandlimited signals in discrete time with switching graph topology,” in *IEEE Conf. on Decision and Control*, Dec. 2016, pp. 4284–4289.
- [36] F. Chen, Y. Cao, and W. Ren, “Distributed average tracking of multiple time-varying reference signals with bounded derivatives,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 57, no. 12, pp. 3169–3174, 2012.
- [37] C. P. Bechlioulis and G. A. Rovithakis, “Robust adaptive control of feedback linearizable mimo nonlinear systems with prescribed performance,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 53, no. 9, pp. 2090–2099, 2008.
- [38] —, “Adaptive control with guaranteed transient and steady state tracking error bounds for strict feedback systems,” *Automatica*, vol. 45, no. 2, pp. 532–538, 2009.
- [39] —, “Prescribed performance adaptive control for multi-input multi-output affine in the control nonlinear systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 55, no. 5, pp. 1220–1226, 2010.
- [40] —, “Robust partial-state feedback prescribed performance control of cascade systems with unknown nonlinearities,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 56, no. 9, pp. 2224–2230, 2011.
- [41] —, “A low-complexity global approximation-free control scheme with prescribed performance for unknown pure feedback systems,” *Automatica*, vol. 50, no. 4, pp. 1217–1226, 2014.
- [42] —, “Decentralized robust synchronization of unknown high order nonlinear multi-agent systems with prescribed transient and steady state performance,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 62, no. 1, pp. 123–134, 2017.
- [43] E. D. Sontag, *Mathematical Control Theory*. London, U. K.: Springer, 1998.

- [44] J. J. Slotine and W. Li, *Applied Nonlinear Control*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1991.
- [45] J. Bochnak, M. Coste, and M. F. Roy, *Real Algebraic Geometry*, ser. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Berlin: Springer-Verlag, 1998, vol. 36.
- [46] R. A. Freeman, P. Yang, and K. M. Lynch, “Distributed estimation and control of swarm formation statistics,” in *American Control Conference*, 2006.
- [47] C. Belta and V. Kumar, “Abstraction and control for groups of robots,” *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 20, no. 5, pp. 865–875, Oct. 2004.
- [48] C. C. Cheah, S. P. Hou, and J. J. E. Slotine, “Region-based shape control for a swarm of robots,” *Automatica*, vol. 45, no. 10, pp. 2406–2411, 2009.