Εθνικο Μετσοβιο Πολυτεχνειο

Σχολη Εφαρμοσμενων Μαθηματικων Και Φυσικων Επιστημων

Τομεας Μαθηματικων

Μη Γραμμικές Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

ΣΤΥΛΙΑΝΟΥ Κ. ΔΑΝΙΗΛΙΔΗ

Επιβλέπων: Κωνσταντίνος Χρυσαφίνος
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα 2019

(Υπογραφή)

. . . .

ΔΑΝΙΗΛΙΔΗΣ Κ. ΣΤΥΛΙΑΝΟΣ

Διπλωματούχος Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών Ε.Μ.Π.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Πρώτα απ΄ όλους θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον Δρ. Κώστα Χρυσαφίνο, καθηγητή ΣΕΜΦΕ, τόσο για τις κατευθύνσεις που μου προσέφερε, ως επιβλέπων καθηγητής της διπλωματικής μου εργασίας, όσο και για την συνεχή βοήθεια και άμεση ανταπόκρισή του σε δυσκολίες που αντιμετώπιζα κατα τη διάρκεια της συγγραφής της. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω του γονείς μου Κωνσταντίνο Δανιηλίδη και Συρμοθέα Καλαμάρη και την αδελφή μου Χριστίνα Δανιηλίδου, για την οικονομική και ηθική στήριξη που μου παρείχαν καθ΄ όλη την διάρκεια των σπουδών μου στο ΕΜΠ.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω απο καρδιάς τον αδελφικό φίλο και συμφοιτητή μου Αλέξανδρο Δελαπάσχο με τον οποίο συμπορευτήκαμε στη ΣΕΜΦΕ ζώντας μοναδικές στιγμές που θα μας ακολουθούν σε όλη μας τη ζωή.

Δ. Σ.

Αθήνα

Οκτώβρης 2019

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα διπλωματική εργασία πραγματεύεται ζητήματα επίλυσης μη γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων δευτέρας τάξεως. Συγκεκριμένα, στο 1ο Κεφάλαιο παρουσιάζονται συνοπτικά θέματα απο τη Θεωρία Μέτρου - Ολοκλήρωσης και την Συναρτησιακή Ανάλυση καθώς επίσης και αποτελέσματα απο την μελέτη των χώρων Sobolev. Στο 2ο κεφάλαιο γίνεται αναφορά σε βασικά αποτελέσματα απο την μελέτη των γραμμικών ελλειπτικών μερικών διαφορικών εξισώσεων 2ας τάξεως. Στο 3ο Κεφάλαιο γίνεται μία εισαγωγή στις μή γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις μέσω της μεθόδου του Λογισμού των Μεταβολών και παρουσιάζονται οι εξισώσεις Euler - Lagrange. Στο 4ο Κεφάλαιο μελετάται η ύπαρξη και μοναδικότητα ασθενούς λύσης για ένα ημιγραμμικό ελλειπτικό πρόβλημα μέσω της μεθόδου Galerkin, ενώ στο 5ο Κεφάλαιο παρουσιάζεται ο τρόπος εξαγωγής του υπο μελέτη ημιγραμμικού προβλήματος μέσω ελαχιστοποίησης κατάλληλου συναρτησιακού.
Τέλος είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι η συγγραφή του θεωρητικού μέρους της παρούσης εργασίας βασίστηκε κυρίως στο βιβλίο Partial Differential Equations του Lawrence C. Evans AMS.

Λέξεις κλειδιά: Μή γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις, ελλειπτικό πρόβλημα, μέθοδος Galerkin, εξίσωση Euler - Lagrange, ασθενής λύση, χώροι Sobolev.

Abstract

In this thesis,problems of solving nonlinear partial second order differential equations are analyzed.More specifically, in chapter 1, a brief overview of Measure Theory - Integration and Functional Analysis, as well as results from the study of the SobolevSpaces are presented. In Chapter 2,the basic results of the study of 2nd order linear elliptic partial differential equations are referred. In Chapter 3, the nonlinear partial differential equations using the Calculusof Variations Method are introduced and the Euler - Lagrange equations are presented. In Chapter 4, the existence and uniqueness of a weak solution to a semi-linear elliptic problem by the Galerkin method are examined, while in Chapter 5, the method of deriving the subject semi-linear problem, by minimizing an appropriate function, is analyzed. Lastly, it is important to note that the theoretical part of the thesis was mainly based on the book "Partial Differential Equations" (Lawrence Evans, AMS, 2010).

Key words: Nonlinear partial differential equations, elliptic problem, Galerkin Method, Euler - Lagrange equation, weak solution, Sobolev space.

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή στους χώρους Sobolev

1.1 Στοιχεία απο τη Θεωρία Μέτρου και τη Συναρτησιακή Ανάλυση

Πρωτού ξεκινήσουμε την περιγραφή των χώρων Sobolev κρίναμε σκόπιμο να κάνουμε μία σύντομη αναφορά πάνω σε στοιχεία απο την Θεωρία Μέτρου και Ολοκληρώσεως και τη Συναρτησιακή Ανάλυση που θα βοηθήσουν στην κατανόηση των εννοιών που θα ακολουθήσουν στις επόμενες ενότητες της εργασίας.

Χώροι με norm

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος. Μία συνάρτηση $\| \circ \| : V \longrightarrow \Re$ που ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες: [3]

1. $\|x\| \geq 0 \ \ \forall x \in V$
2. $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
3. $\|\lambda x\| = \mid \lambda \mid \|x\| \ \ \forall x \in V, \lambda \in \Re$
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \ \ \forall x, y \in V$ (τριγωνική ανισότητα)

καλείται norm και το ζεύγος $(V, \ \| \circ \|)$ καλείται **διανυσματικός χώρος με norm**.

Έστω $(x_n)_{n\in N}$ ακολουθία στοιχείων του διανυσματικού χώρου με norm V . Θα λέμε ότι *η ακολουθία συγκλίνει σε ένα στοιχείο* $x \in V$ ως προς την norm $\| \circ \|$ όταν και μόνον όταν

$$\|x_n - x\| \xrightarrow{n\to+\infty} 0.$$

Μία ακολουθία $(x_n)_{n\in N}$ στοιχείων ενός διανυσματικού χώρου θα καλείται Cauchy όταν και μόνον όταν ισχύει ότι:

$$\forall \epsilon > 0 \ \ \exists \ n_0 \in \mathbb{N} \ : \forall n, m \in \mathbb{N}, \ n, m \geq n_0 \ \text{ ισχύει ότι } \ \ \|x_n - x_m\| < \epsilon.$$

Ένας διανυσματικός χώρος με norm θα καλείται **πλήρης** εάν για κάθε ακολουθία στοιχείων του $(x_n)_{n\in N}$ που είναι Cauchy είναι και συγκλίνουσα στον χώρο αυτό.

Ένας διανυσματικός χώρος με norm θα καλείται **χώρος Banach** όταν είναι πλήρης ως προς την norm αυτού. Ένα κλασσικό παράδειγμα ενός χώρου Banach είναι ο $\mathbb{R}^n$ με οποιαδήποτε norm μπορεί να οριστεί σε αυτόν. [3]

Μέτρο Lebesque [5]

Στην Θεωρία Μέτρου αποδεικνύεται ότι υπάρχει μία οικογένεια υποσυνόλων του συνόλου $\mathbb{R}^n$, που συμβολίζεται με M ώστε να ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

1. $\mathbb{R}^n \in M$
2. Εάν $A \in M$ τότε και $A^c \in M$
3. Για κάθε αριθμήσιμη οικογένεια $(A_n)_{n\in N}$ στοιχείων της M συνεπάγεται ότι $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n \in M$.

Το ζεύγος (R^n, M) καλείται <u>χώρος Lebesgue μετρήσιμων συνόλων</u>. Στον χώρο αυτόν μπορούμε να ορίσουμε μία συνολοσυνάρτηση $m : M \longrightarrow [0, +\infty]$ ώστε για κάθε αριθμήσιμη οικογένεια $(A_n)_{n\in N}$ ξένων ανα δύο μετρήσιμων συνόλων ισχύει το εξής: [5]

$$m(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} m(A_n).$$

Η συνάρτηση αυτή είναι γνωστή ως **μέτρο του Lebesgue**.

Μερικά απο τα βασικά αποτελέσματα της Θεωρίας Μέτρου είναι τα εξής:

- Κάθε ανοικτό και κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ είναι Lebesgue μετρήσιμο. (Ως προς την συνήθη τοπολογία του R^n)
- Εάν $x_0 \in R^n$ και $B(x_0, \delta) = \{x \in R^n : \|x - x_0\| < \delta\}$ ανοιχτή μπάλα στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο x_0 και ακτίνα $\delta > 0$ έχει μέτρο Lebesgue όσος και ο $n-$ διάστατος όγκος της μπάλας.(π.χ. στον R είναι το μήκος διαστήματος, στον $\mathbb{R}^2$ είναι το εμβαδόν κυκλικού δίσκου, στον $\mathbb{R}^3$είναι ο όγκος σφαίρας)
- Εάν $A, B \in M$ ώστε $A \subset B$ τότε $m(A) \leq m(B)$.
- Τα σύνολα κατηγορίας G_δ και F_σ είναι Lebesgue μετρήσιμα.
- Για κάθε αριθμήσιμη οικογένεια $(A_n)_{n\in N}$ Lebesgue μετρήσιμων συνόλων ισχύει ότι: $m(\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n) \leq \sum\limits_{n=0}^{\infty} m(A_n)$.
- $m(\emptyset) = 0$.
- Αν K αριθμήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ τότε $m(K) = 0$.

Σημείωση: Λέμε ότι μία ιδιότητα ισχύει *σχεδόν παντού* (σ.π) σε ένα D υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ όταν ισχύει στο σύνολο D/N όπου $N \subseteq D$ με $m(N) = 0$.

Μετρήσιμες Συναρτήσεις και το ολοκλήρωμα Lebesgue [5]

Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Εάν για κάθε υποσύνολο U του R, το σύνολο $f^{-1}(U) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \in U\}$ είναι Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, τότε η συνάρτηση f καλείται **Lebesgue μετρήσιμη**.[5]

Στο σημείο αυτό αναφέρουμε δύο σημαντικά αποτελέσματα της Θεωρίας μέτρου για τις μετρήσιμες συναρτήσεις.

- Κάθε πραγματική συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε ένα μετρήσιμο υποσύνολο U του $\mathbb{R}^n$ είναι και Lebesgue μετρήσιμη σε αυτό.
- Κάθε πραγματική συνάρτηση που είναι σχεδόν παντού συνεχής σε μετρήσιμο σύνολο U θα είναι και Lebesgue μετρήσιμη σε αυτό.

Έστω $s : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, +\infty]$ μη αρνητική συνάρτηση που ορίζεται ως εξής:

$$s(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k \chi_{A_k}(x),\ a_k \geq 0,$$

όπου $(A_k)_{k=1}^n$ μία διαμέριση του $\mathbb{R}^n$ απο Lebesgue μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Τότε αποδεικνύεται εύκολα ότι η s είναι μετρήσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}^n$.Συναρτήσεις σαν την s καλούνται *απλές*.

Ορίζουμε τώρα το ολοκλήρωμα μιας απλής συνάρτησης s σε μετρήσιμο υποσύνολο U του $\mathbb{R}^n$ ως εξής:

$$\int\limits_U s(x)\mathrm{d}m(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k m(U \bigcap A_k),$$

όπου m το μέτρο Lebesgue στην οικογένεια M.(Ορίζουμε ότι αν $a_i = 0$ και $m(A_i) = \infty$ για κάποιο $1 \leq i \leq n$ τότε ορίζουμε $a_i m(A_i) = 0$) Είναι φανερό απο τον ορισμό του ολοκληρώματος ότι $0 \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} s(x)\mathrm{d}m(x) \leq \infty$.

Έστω τώρα $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, +\infty]$ μή αρνητική μετρήσιμη Lebesgue συνάρτηση. Τότε ορίζουμε το ολοκλήρωμα αυτής σε μετρήσιμο υποσύνολο U του $\mathbb{R}^n$ ως εξής:

$$\int\limits_U f(x)\mathrm{d}m(x) := sup\{\int\limits_U s(x)\mathrm{d}m(x) : 0 \leq s(x) \leq f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \text{όπου } s \text{ απλή}\}.$$

Έστω $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ μετρήσιμη Lebesgue συνάρτηση.Ορίζουμε δύο συναρτήσεις:

$$f^+(x) := max\{f(x), 0\},$$

$$f^{-}(x) := max\{-f(x), 0\} = -min\{f(x), 0\}.$$

Αποδεικνύεται ότι οι μη αρνητικές συναρτήσεις f^{+} και f^{-} είναι Lebesgue μετρήσιμες. Ορίζουμε λοιπόν το ολοκλήρωμα Lebesgue της συνάρτησης f στο μετρήσιμο υποσύνολο U του $\mathbb{R}^n$ ως εξής:

$$\int_U f(x)\mathrm{d}m(x) := \int_U f^{+}(x)\mathrm{d}m(x) - \int_U f^{-}(x)\mathrm{d}m(x).$$

Θα λέμε ότι το ολοκλήρωμα της συνάρτησης f υπάρχει, όταν τουλάχιστον ένα από τα ολοκληρώματα $\int_U f^{+}(x)\mathrm{d}m(x)$, $\int_U f^{-}(x)\mathrm{d}m(x)$ είναι πεπερασμένο.

Εάν και τα δύο ολοκληρώματα $\int_U f^{+}(x)\mathrm{d}m(x)$, $\int_U f^{-}(x)\mathrm{d}m(x)$ είναι πεπερασμένα τότε θα λέμε ότι η συνάρτηση f είναι **Lebesgue ολοκληρώσιμη** στο U. Αποδυκνείεται εύκολα ότι: Μία μετρίσιμη συνάρτηση είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη όταν και μόνον όταν ισχύει οτι:

$$\int_U |f(x)|\mathrm{d}m(x) < +\infty.$$

Το σύνολο όλων τον Lebesgue ολοκληρωσίμων συναρτήσεων στο U συμβολίζεται με $L^1(U)$. Έχουμε λοιπόν ότι αν $U \in M$ και $U \subseteq \mathbb{R}^n$:

$$L^1(U) := \{f : U \longrightarrow \mathbb{R} | f \text{ Lebesgue μετρήσιμη και} \int_U |f(x)|\mathrm{d}m(x) < +\infty\}.$$

Αποδεικνύεται ότι ο χώρος $L^1(U)$ είναι ένας διανυσματικός χώρος. Στον χώρο αυτόν μπορούμε να ορίσουμε μία απεικόνιση $\| \circ \| : L^1(U) \longrightarrow \mathbb{R}$ ως εξής:

$$\|f\|_{L^1(U)} := \int_U |f(x)|\mathrm{d}m(x).$$

Η απεικόνιση αυτή αποδεικνύεται ότι είναι μία norm στον χώρο $L^1(U)$. Έτσι λοιπόν το ζεύγος $(L^1(U), \| \circ \|_{L^1(U)})$ είναι ένας διανυσματικός χώρος με norm.

Οι χώροι L^p [1]

Εάν $p \in \mathbb{R}$ ώστε $1 \leq p < +\infty$ ορίζουμε τον χώρο $L^p(U)$ όπου $U \in M$ και $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ως εξής:

$$L^p(U) := \{f : U \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \ \textit{Lebesgue} \text{ μετρήσιμη ώστε } |f|^p \in L^1(U)\}.$$

Ο χώρος $L^p(U)$ αποδεικνύεται ότι είναι διανυσματικός χώρος στον οποίον μπορούμε να ορίσουμε μία απεικόνιση $\| \circ \| : L^p(U) \longrightarrow \mathbb{R}$ ως εξής:

$$\|f\|_{L^p(U)} := (\int_U |f(x)|^p \mathrm{d}mx)^{\frac{1}{p}}.$$

Η απεικόνιση αποδεικνύεται ότι είναι norm στον χώρο $L^p(U)$

Εάν $p = +\infty$ ορίζουμε τον χώρο $L^\infty(U)$ όπου $U \in M$ και $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ως εξής:

$$L^\infty(U) := \{f : U \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \textit{ Lebesgue } \text{μετρήσιμη και } \exists\, C \geq 0 \text{ ώστε } |f(x)| \leq C \text{ σχεδόν παντού στο } U\}$$

Ο χώρος $L^\infty(U)$ αποδεικνύεται ότι είναι διανυσματικός χώρος στον οποίον μπορούμε να ορίσουμε μία απεικόνιση $\| \circ \| : L^\infty(U) \longrightarrow \mathbb{R}$ ως εξής:

$$\|f\|_{L^\infty(U)} := \inf\{C \ : \ |f(x)| \leq C \text{ σχεδόν παντού στο } U\}.$$

Η απεικόνιση αποδεικνύεται ότι είναι norm στον χώρο $L^\infty(U)$.

Εστω $1 \leq p \leq +\infty$ και $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ώστε $U \in M$. Τότε ορίζουμε

$$L^p_{loc}(U) := \{f : U \longrightarrow \mathbb{R} : f\chi_K \in L^p(U) \ \ \forall\ K \subseteq U \ \ \text{συμπαγές}\}.$$

Παρατηρήσεις σχετικά με τους $L^p_{loc}(U)$.

- Ο χώρος $L^1_{loc}(U)$ συχνά καλείται στη διεθνή βιβλιογραφία ως χώρος των *τοπικά ολοκληρωσίμων* ή *τοπικά αθροισίμων* συναρτήσεων.
- Έστω συνάρτηση $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση και για κάθε $\phi \in C^\infty_c(U)$ (βλ. σελ. 6) ισχύει ότι $\phi f \in L^1(U)$. Τότε $f \in L^1_{loc}(U)$.
- Ο $L^p(U)$ είναι υπόχωρος του $L^1_{loc}(U)$ για κάθε $1 \leq p \leq +\infty$.

Φορέας (support) συνάρτησης [1]

Μια σημαντική έννοια που θα συναντάμε συχνά στη μελέτη που θα ακολουθήσει είναι αυτή του φορέα μιας συναρτήσεως. Έστω μετρήσιμη Lebesgue συνάρτηση $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ όπου U ανοιχτό σύνολο στη συνήθη τοπολογία του $\mathbb{R}^n$. Θεωρούμε οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων του U, $(U_i)_{i\in I}$ όπου I ένα σύνολο δεικτών με την ιδιότητα $\forall\ i \in I, f = 0$ σχεδόν παντού στο U_i. Αν τώρα θεωρήσουμε $K = \bigcup_{i\in I} U_i$ τότε $f = 0$ σχεδόν παντού στο K. Ορίζουμε λοιπόν τον φορέα της συναρτήσεως f ως εξής:

$$supp(f) := U \backslash K.$$

Σημείωση: Στην απλή περίπτωση μίας συνεχούς συναρτήσεως θα λέγαμε οτι φορέας της είναι το συμπλήρωμα του μεγαλύτερου ανοικτού υποσυνόλου του πεδίου ορισμού της, στο οποίο αυτή μηδενίζεται.Με άλλα λόγια θα λέγαμε ότι $supp(f) = \overline{\{x \in D_f : f(x) \neq 0\}}$, εάν $f \in C$

Βασικοί συμβολισμοί: ($U \subseteq \mathbb{R}^n$)

- $C_c(U) := \{f : U \longrightarrow \mathbb{R} : f$ συνεχής με φορέα συμπαγές υποσύνολο του $U\}$.
- $C^k(U) := \{f : U \longrightarrow \mathbb{R} : f$ συνεχής με συνεχείς μερικές παραγώγους μέχρι και τάξεως $k\}$.
- $C^\infty(U) := \bigcap\limits_{k=0}^{\infty} C^k(U)$.
- $C_c^\infty(U) := C^\infty(U) \bigcap C_c(U)$. Οι συναρτήσεις αυτές συχνά ονομάζονται και *συναρτήσεις δοκιμής*.

Μερικά απο τα αποτελέσματα της Συναρτησιακής Ανάλυσης για τους χώρους $L^p(U)$ είναι τα παρακάττω:

- Ο $L^p(U)$ είναι χώρος Banach $\forall\ 1 \leq p \leq +\infty$. (Ως προς την αντίστοιχη norm αυτού.)
- Αν $f \in L^1_{loc}(U)$ ώστε $\int\limits_U fu = 0, \forall u \in C_c(U)$ τότε $f = 0$ σχεδόν παντού στο U.
- Ο χώρος $C_c^\infty(U)$ είναι πυκνός στον $L^p(U)$ για $1 \leq p < +\infty$.

Γραμμικοί τελεστές - Δυικός διανυσματικού χώρου [3]

Έστω $(X, \|\circ\|_X),\ (Y, \|\circ\|_Y)$ διανυσματικοί χώροι με norm και $T : X \longrightarrow Y$ απεικόνιση. Τότε η απεικόνιση αυτή καλείται *γραμμικός τελεστής* όταν και μόνον όταν ισχύει:

$$T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y), \quad \forall x, y \in X \text{ και } \lambda, \mu \in R.$$

Το σύνολο όλων των γραμμικών τελεστών από τον χώρο $(X, \|\circ\|_X)$ στον χώρο $(Y, \|\circ\|_Y)$ το συμβολίζουμε με $L(X,Y)$ και αποδεικνύεται ότι είναι διανυσματικός χώρος.

Στην ειδική περίπτωση όπου ο χώρος Y είναι ο R τότε ο γραμμικός τελεστής καλείται *γραμμικό συναρτησιακό*. Εάν δε το συναρτησιακό αυτό είναι και συνεχής απεικόνιση τότε καλείται *συνεχές γραμμικό συναρτησιακό*. Το σύνολο όλων των συνεχών γραμμικών συναρτησιακών $T : X \longrightarrow R$ συμβολίζεται X^* και συχνά εμφανίζεται στην Ανάλυση με τον τίτλο *δυικός* του X. Με ανάλογο τρόπο μπορεί κανείς να ορίσει τον δισδυικό χώρο $X^{**} = (X^*)^*$. Θα συμβολίζουμε $f(x) :=< f, x > \quad f \in X^* \ \ x \in X$. Ο χώρος X^* είναι διανυσματικός χώρος στον οποίο μπορούμε να ορίσουμε μία norm ως εξής:

$$\|f\|_{X^*} := sup\{| < f, x > | : \|x\|_X \leq \ 1\}.$$

Ενας χώρος Banach X λέγεται ανακλαστικός όταν υπάρχει ισομορφισμός $J : X \longrightarrow X^{**}$ με $J(X) = X^{**}$. Με άλλα λόγια θα λέγαμε ότι αν ο χώρος X ειναι ανακλαστικός τότε για κάθε $f \in X^{**}$ υπάρχει $x \in X$ ώστε για κάθε $f^* \in X^*$ να ισχύει:

$$< f^{**}, f^* >=< f^*, x > .$$

Χώροι Hilbert [3] [1]

Έστω H ένας διανυσματικός χώρος. Μία συνάρτηση $(\circ, \circ) : H \times H \longrightarrow \Re$ που ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

1. $(x, y) = (y, x) \ \forall \ x, y \ \in H,$
2. $(x, x) \geq 0 \ \ \forall \ x \ \in H,$
3. $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,$
4. $(\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x, z) + \mu(y, z) \ \ \forall \ x, y, z \in H \ \ \lambda, \mu \in R.$

καλείται εσωτερικό γινόμενο και το ζεύγος $(H, \ (\circ, \circ))$ καλείται **διανυσματικός χώρος εσωτερικό γινόμενο**.

Μέσω του εσωτερικού γινομένου σε έναν διανυσματικό χώρο μπορώ να ορίσω μία απεικόνιση ως εξής:

$$\|x\| := ((x, x))^{\frac{1}{2}} \ \ \forall \ x \in H.$$

Αποδεικνύεται ότι η απεικόνιση αυτή ορίζει μία norm στον χώρο με εσωτερικό γινόμενο H. Θα λέμε οτι η norm αυτή επάγεται με φυσιολογικό τρόπο από το εσωτερικό γινόμενο στον χώρο αυτό.

Ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο H θα καλείται **χώρος Hilbert** όταν και μόνον όταν είναι χώρος Banach ως προς την norm που επάγεται απο το εσωτερικό του γινόμενο.

Παραδείγματα χώρων Hilbert

- Ο $\mathbb{R}^n$ με το εσωτερικό γινόμενο ανυσμάτων.
- Ο $L^2(U)$ όπου $U \subseteq \mathbb{R}^n$ με εσωτερικό γινόμενο

$$(f, g) := \int_U f \ g \ \mathrm{d}x.$$

- Ο χώρος Sobolev $W^{1,2}(U) = H^1(U)$ όπου $U \subseteq \mathbb{R}^n$ (βλπ. ενότητα χώρων Sobolev) με εσωτερικό γινόμενο

$$(f,g) := \int_U f\ g + Df\ Dg\ \mathrm{d}x.$$

Παρατηρούμε ότι:

$$(f,f) = \int_U f^2 + |Df|^2\ \mathrm{d}x = \int_U f^2\ \mathrm{d}x + \int_U |Df|^2\ \mathrm{d}x = \|f\|^2_{L^2(U)} + \sum_{i=1}^{n} \|f_{x_i}\|^2_{L^2(U)} = \|f\|^2_{W^{1,2}(U)}.$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι η norm που ορίζεται απο το παραπάνω εσωτερικό γινόμενο δεν είναι αλλή απο την norm του Sobolev.

Ορισμός 1.1 ([3])**.** *Έστω H χώρος Hilbert και $A \subseteq H$. Ορίζουμε ως ορθογώνιο συμπλήρωμα του A το σύνολο:*

$$A^{\perp} := \{x \in H : (x,u) = 0 \ \ \forall\ u \in H\}.$$

Πρόταση 1.1 ([3])**.** *Έστω H χώρος Hilbert και $A \subseteq H$. Τότε ο $A^{\perp}$ είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του H.*

Απόδειξη. [3] □

Πρόταση 1.2 ([3])**.** *Αν F είναι γραμμικός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert H τότε ισχύει ότι:*
$F \cap F^{\perp} = \{0_H\}$.

Απόδειξη. Έστω $x \in F \cap F^{\perp}$ τότε $(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_H$. □

Θεώρημα 1.1 ([3])**.** *Έστω H χώρος Hilbert και F κλειστός υπόχωρος του H. Τότε θα ισχύει ότι:*

1. *$F, F^{\perp}$ κλειστοί υπόχωροι του H.*
2. *$F \cap F^{\perp} = \{0_H\}$.*
3. *$H = F + F^{\perp}$.*

Απόδειξη. [3] □

Στο σημείο αυτό παραθέτουμε ένα από τα σπουδαιότερα θεωρήματα που αφορούν του χώρους Hilbert. και ακούει στο όνομα του ούγγρου μαθηματικού **Frigyes Riesz (1880 - 1956)**.

Θεώρημα 1.2 (Θεώρημα Riesz). *[[3]] Έστω H χώρος Hilbert. Τότε για κάθε $f \in H^*$ υπάρχει μοναδικό $x \in H$ τέτοιο ώστε για κάθε $y \in H$ να ισχύει ότι:*

$$< f, y >= (x, y).$$

Απόδειξη. [3] □

Για περισσότερες πληροφορίες και αποδείξεις των παραπάνω αποτελεσμάτων ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στα [1] και [3].

1.2 Ασθενής παράγωγος

Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό (άρα και Lebesgue μετρήσιμο). Υποθέτουμε επίσης ότι $k \in Z_+$ και $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ άνυσμα μη αρνητικών ακεραίων με την ιδιότητα $|a| := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = k$. Το άνυσμα αυτό καλείται *πολυδείκτης*. Υποθέτουμε επιπλέον ότι $\phi : U \longrightarrow \mathbb{R}$ ώστε $\phi \in C^k(U)$. Τότε συμβολίζουμε

$$D^\alpha \phi := \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1}\frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n}\ \phi.$$

[2]

Ορισμός 1.2 ([2]). *Υποθέτουμε ότι $u, v, \in L^1_{loc}(U)$ και α ένας πολυδείκτης. Θα λέμε ότι η v είναι α* ***τάξεως ασθενής μερική παράγωγος*** *της u και θα γράφουμε $D^\alpha u = v$ όταν και μόνον όταν ισχύει ότι:*

$$\int_U u\ D^\alpha \phi\ \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_U v\ \phi\ \mathrm{d}x\ \ , \forall\ \phi \in C_c^\infty(U).$$

Λήμμα 1.1 ([2]). *Εάν υποθέσουμε οτι η ασθενής μερική παράγωγος α τάξεως μίας συνάρτησης $u \in L^1_{loc}(U)$ υπάρχει, τότε είναι μοναδικά ορισμένη σχεδόν παντού στο U.*

Απόδειξη. Έστω οτι υπάρχουν δύο συναρτήσεις $\tilde{v},\ v, \in L^1_{loc}(U)$ ώστε:

$$\int_U u\ D^\alpha \phi\ \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_U v\ \phi\ \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_U \tilde{v}\ \phi\ \mathrm{d}x,\ \ \forall\ \phi \in C_c^\infty(U).$$

Τότε αφού οι $\tilde{v},\ v, \in L^1_{loc}(U)$ έπεται από ιδιότητες ολοκληρώματος Lebesgue ότι:

$$\int_U (v - \tilde{v})\phi\ \ \mathrm{d}x = 0,\ \ \forall \phi \in C_c^\infty(U).$$

Τότε από το δεύτερο αποτέλεσμα που δώσαμε στην εισαγωγική ενότητα 1.1 για τους χώρους L^p είναι άμεσο ότι $v - \tilde{v} = 0$ σχεδόν παντού στο U. □

Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στο [2] για περισσότερα παραδείγματα και ασκήσεις σχετικά με την έννοια της ασθενούς παραγώγου.

1.3 Οι χώροι Sobolev

Έστω $1 \leq p \leq +\infty$ και $k \in Z_+$ και $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό.

Ορισμός 1.3 ([2]). *Ορίζουμε ως χώρο **Sobolev** το σύνολο:*

$$W^{k,p}(U) := \{u \in L^1_{loc}(U) : \ \forall \ \alpha \ \textit{πολυδείκτη με} \ |\alpha| \leq k, \exists \ D^\alpha u \wedge \ D^\alpha u \in L^p(U)\}.$$

<u>Σημείωση</u>: Στον παραπάνω ορισμό όταν μιλάμε για μερική παράγωγο D^α, εννοούμε την ασθενή μερική παράγωγο τάξης α.

Στον χώρο Sobolev $W^{k,p}(U)$ ορίζουμε μία απεικόνιση $\| \circ \| : W^{k,p}(U) \longrightarrow \mathbb{R}$ ως εξής:

$$\|u\|_{W^{k,p}(U)} := \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(U)} \right)^{\frac{1}{p}}, \ 0 \leq p < +\infty,$$

$$\|u\|_{W^{k,\infty}(U)} := \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(U)}.$$

Θεώρημα 1.3 ([2]). *1. Το ζεύγος $(W^{k,p}(U), \ \| \circ \|_{W^{k,p}(U)}) \ \forall \ k \in N \backslash \{0\}$ και $1 \leq p \leq +\infty$ είναι διανυσματικός χώρος με norm.*

2. Ο χώρος $W^{k,p}(U)$ είναι ένας χώρος Banach ως προς την norm αυτού.

Απόδειξη. 1. (α′) Το σύνολο $W^{k,p}(U)$ σύμφωνα με τον Ορισμό 1.3 είναι ένα υποσύνολο του διανυσματικού χώρου $L^1_{loc}(U)$. Έστω $u, v \in W^{k,p}(U)$ και $\lambda \in \mathbf{R}$. Τότε $\forall \ \alpha$ με $|\alpha| \leq k$ θα υπάρχουν $u_\alpha, \ v_\alpha \in L^1_{loc}(U)$ ώστε:

$$\int_U u \ D^\alpha \phi \ \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_U u_\alpha \ \phi \ \mathrm{d}x, \tag{1}$$

$$\int_U v \ D^\alpha \phi \ \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_U v_\alpha \ \phi \ \mathrm{d}x, \tag{2}$$

για κάθε $\phi \in C^\infty_c(U)$. Οι συναρτήσεις u, v είναι στοιχεία του διανυσματικού χώρου $L^1_{loc}(U)$ ως στοιχεία του $W^{k,p}(U)$ άρα και το άθροισμα αυτών θα είναι στοιχείο του $L^1_{loc}(U)$. Συνεπώς έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}\int\limits_U (u+v)\ D^\alpha\phi\ \mathrm{d}x &\overset{(1)+(2)}{=} \int\limits_U u\ D^\alpha\phi\ \mathrm{d}x + \int\limits_U v\ D^\alpha\phi\ \mathrm{d}x = \\ = (-1)^{|\alpha|}\int\limits_U u_\alpha\phi\ \mathrm{d}x &+ (-1)^{|\alpha|}\int\limits_U v_\alpha\phi\ \mathrm{d}x = \\ = (-1)^{|\alpha|}\left(\int\limits_U u_\alpha\phi\ \mathrm{d}x + \int\limits_U v_\alpha\phi\ \mathrm{d}x\right) &\overset{u_\alpha\phi,\ v_\alpha\phi\in L^1_{loc}(U)}{=} (-1)^{|\alpha|}\int\limits_U (u_\alpha+v_\alpha)\ \phi\ \mathrm{d}x,\end{aligned}$$

όπου $u_\alpha + v_\alpha$ είναι στοιχείο του $L^1_{loc}(U)$. Άρα υπάρχουν και όλες οι παράγωγοι της συνάρτησης $u+v$ υπό την ασθενή έννοια. Επίσης, αφού $u, v \in W^{k,p}(U)$ θα πρέπει $u_\alpha, v_\alpha \in L^p(U)\quad \forall|\alpha| \leq k$. Ο $L^p(U)$ είναι διανυσματικός χώρος άρα και $u_\alpha + v_\alpha \in L^p(U)\ \ \forall\ |\alpha| \leq k$. Επίσης εύκολα αποδεικνύεται ότι $\forall\ \lambda \in \mathbf{R}\ \ \lambda u \in W^{k,p}(U)$. Συνεπώς ο $W^{k,p}(U)$ είναι διανυσματικός χώρος.

(β′) Η συνάρτηση $\|\circ\|_{W^{k,p}(U)}$ (όπως αυτή ορίζεται παραπάνω) είναι νόρμα.

- $$\|u\|_{W^{k,p}(U)} = \left(\sum_{0\leq|\alpha|\leq k}\|D^\alpha u\|^p_{L^p(U)}\right)^{\frac{1}{p}} \geq 0$$

- $$\|u\|_{W^{k,p}(U)} = 0 \Longleftrightarrow \left(\sum_{0\leq|\alpha|\leq k}\|D^\alpha u\|^p_{L^p(U)}\right)^{\frac{1}{p}} = 0 \Longleftrightarrow \|D^\alpha u\|^p_{L^p(U)} = 0\,\forall\ |\alpha|\leq k.$$

  Συνεπώς

  $$\|u\|^p_{L^p(U)} = 0 \overset{\|\circ\|_{L^p(U)}\text{ είναι νόρμα}}{\Longleftrightarrow} u = 0 \text{ σχεδόν παντού στο } U.$$

- Εάν $\lambda \in \mathbf{R}$ και $u \in W^{k,p}(U)$ τότε έχουμε ότι.

  $$\|\lambda u\|_{W^{k,p}(U)} = \left(\sum_{0\leq|\alpha|\leq k}\|D^\alpha \lambda u\|^p_{L^p(U)}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{0\leq|\alpha|\leq k}|\lambda|^p\|D^\alpha u\|^p_{L^p(U)}\right)^{\frac{1}{p}} =$$

  $$= \left(|\lambda|^p\sum_{0\leq|\alpha|\leq k}\|D^\alpha u\|^p_{L^p(U)}\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda|\ \|u\|_{W^{k,p}(U)}.$$

- Έστω $u, v \in W^{k,p}(U)$ τότε

$$\|u+v\|_{W^{k,p}(U)} = \left(\sum_{0\le|\alpha|\le k} \|D^\alpha (u+v)\|^p_{L^p(U)} \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{0\le|\alpha|\le k} \|D^\alpha u + D^\alpha v\|^p_{L^p(U)} \right)^{\frac{1}{p}} =$$

  Χρησιμοποιώντας τώρα την ανισότητα Holder (Appendix B σελίδα 707 του [2]) έχουμε:

$$\left(\sum_{0\le|\alpha|\le k} \|D^\alpha u + D^\alpha v\|^p_{L^p(U)} \right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{0\le|\alpha|\le k} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(U)} \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{0\le|\alpha|\le k} \|D^\alpha v\|^p_{L^p(U)} \right)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le \|u\|_{W^{k,p}(U)} + \|v\|_{W^{k,p}(U)}.$$

(Στην περίπτωση που $p = \infty$ η απόδειξη είναι τετριμμένη.)

2. Έστω $(u_m)_{m\in\mathbf{N}}$ ακολουθία στον χώρο $W^{k,p}(U)$ που είναι Cauchy ως προς την νόρμα του χώρου αυτού. Έστω $\epsilon > 0$ τότε:

$$\exists\, n_0 \in \mathbf{N} : \forall\, n, m \ge n_0 \quad \|u_n - u_m\|_{W^{k,p}(U)} < \epsilon \iff$$

$$\exists\, n_0 \in \mathbf{N} : \forall\, n, m \ge n_0 \quad \left(\sum_{0\le|\alpha|\le k} \|D^\alpha u_n + D^\alpha u_m\|^p_{L^p(U)} \right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon \iff$$

$$\exists\, n_0 \in \mathbf{N} : \forall\, n, m \ge n_0 \quad \sum_{0\le|\alpha|\le k} \|D^\alpha u_n + D^\alpha u_m\|^p_{L^p(U)} < \epsilon^p \iff$$

$$\|D^\alpha u_n + D^\alpha u_m\|^p_{L^p(U)} \le \sum_{0\le|\alpha|\le k} \|D^\alpha u_n + D^\alpha u_m\|^p_{L^p(U)} < \epsilon^p, \ \forall\, |\alpha| < k \iff$$

$$\forall\, |\alpha| < k \ \ \exists\, n_0 \in \mathbf{N} : \forall\, n, m \ge n_0 \quad \|D^\alpha u_n + D^\alpha u_m\|_{L^p(U)} < \epsilon.$$

Απο τα παραπάνω διαπιστώνουμε ότι για κάθε $|\alpha| < k$ η ακολουθία $(D^\alpha u_m)_{m\in\mathbf{N}}$ είναι Cauchy ως προς την νόρμα του χώρου $L^p(U)$. Όμως ο $L^p(U)$ είναι Banach ως προς την νόρμα του. Άρα για κάθε $|\alpha| < k$ θα υπάρχει $u_\alpha \in L^p(U)$ ώστε

$$D^\alpha u_m \xrightarrow{\|\circ\|_{L^p(U)}} u_\alpha.$$

Συγκεκριμένα για $|\alpha| = 0$ θα ισχύει ότι

$$u_m \xrightarrow{\|\circ\|_{L^p(U)}} u.$$

Αρκεί να δείξουμε ότι $u \in W^{k,p}(U)$. Έστω $\phi \in C_c^\infty(U)$. Τότε έχουμε ότι

$$\int_U u\ D^\alpha \phi \ \mathrm{d}x = \lim_{m\to\infty} \int_U u_m\ D^\alpha \phi \ \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_U u_m\ D^\alpha \phi \ \mathrm{d}x.$$

□

Θεώρημα 1.4 ([2]). *Υποθέτουμε ότι $u, v \in W^{k,p}(U)$ με $0 \le |\alpha| \le k$. Τότε ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:*

1. $D^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}(U)$.
2. $D^\alpha(D^\beta u) = D^\beta(D^\alpha u) = D^{\alpha+\beta}u$ *για κάθε ζεύγος απο πολυδείκτες* α, β *ωστε* $|\alpha| + |\beta| \le k$.
3. *Εάν* $B \subseteq U$ *ανοικτό τότε* $v \in W^{k,p}(B)$.
4. *Εάν* $\lambda, \mu \in R$ *τότε* $\lambda u + \mu v \in W^{k,p}(U)$. *Με άλλα λόγια ο* $W^{k,p}(U)$ *είναι ένας διανυσματικός χώρος.*
5. *Εάν* $\phi \in C_c^\infty(U)$ *τότε* $u\phi \in W^{k,p}(U)$.

Απόδειξη. [2] □

1.4 Προσέγγιση συναρτήσεων Sobolev απο συναρτήσεις του C^∞.

Ομαλοποιητικές ακολουθίες (mollifiers) [2]

Έστω $U \subseteq R^n$ ανοικτό και $\epsilon > 0$. Θα συμβολίζουμε $U_\epsilon := \{x \in U : dist(x, \partial U) > \epsilon\}$. Επιπλέον δοθείσης μιας συνάρτησης $\eta \in C^\infty(R^n)$ όπου

$$\eta(x) := \chi_{B(0,1)}\ C\ e^{(\frac{1}{\|x\|^2-1})},$$

όπου C σταθερά επιλεγμένη ώστε

$$\int_{R^n} \eta(x)\ \mathrm{d}x = 1.$$

Ορίζουμε $\forall \epsilon > 0$ την συνάρτηση

$$\eta_\epsilon(x) := \frac{1}{\epsilon^n}\ \eta(\frac{x}{\epsilon}).$$

Εύκολα μπορεί κανείς να διαπιστώσει ότι:

- $\eta_\epsilon \in C^\infty$.
- $\int\limits_{R^n} \eta_\epsilon(x)\ \mathrm{d}x = 1$.
- $supp(\eta_\epsilon) \subseteq B(0,\epsilon)$.

Σημείωση: Απο τα παραπάνω διαπιστώνουμε ότι $\eta_\epsilon \in C_c^\infty(R^n)$ καθώς $supp(\eta_\epsilon) \subseteq B(0,\epsilon)$ άρα $\overline{supp(\eta_\epsilon)} \subseteq \overline{B(0,\epsilon)}$ όπου το $B(0,\epsilon)$ είναι συμπαγές στο R^n άρα και το $supp(\eta_\epsilon)$ ώς κλειστό υποσύνολο θα είναι επίσης συμπαγές.

Δοθείσης τώρα μίας συνάρτησης $u \in L^1_{loc}(U)$ ορίζουμε την *ομαλοποιητική ακολουθία* της u ως εξής:

$$u^\epsilon(x) := \int\limits_U \eta_\epsilon(x-y)f(y)\ \mathrm{d}y = \int\limits_{B(0,\epsilon)} \eta_\epsilon(y)f(x-y)\ \mathrm{d}y$$

στο U_ϵ.

Αναφέρουμε μερικές από τις βασικές ιδιότητες των ομαλοποιητών.[2]

1. $u^\epsilon \in C^\infty(U_\epsilon)$.
2. $u^\epsilon \xrightarrow{\epsilon \longrightarrow 0} u$ σχεδόν παντού στο U.
3. Εάν $u \in C(U)$ τότε $u^\epsilon \xrightarrow{\text{ομοιόμορφα}} u$ σε συμπαγές υποσύνολο του U.
4. Εάν $1 \leq p < +\infty$ και $u \in L^p_{loc}(U)$ τότε $u^\epsilon \xrightarrow{\epsilon \longrightarrow 0} u$ στο $L^p_{loc}(U)$.

Θεώρημα 1.5. *Έστω $u \in W^{k,p}(U)$ όπου $U \subseteq R^n$ και $1 \leq p < +\infty$. Ορίζουμε την συνάρτηση*

$$u^\epsilon := \eta_\epsilon * u \text{ στο } U_\epsilon := \{x \in U : dist(x, \partial U) > \epsilon\}$$

όπου $\epsilon > 0$. Τότε ισχύουν τα παρακάτω:

1. *$u^\epsilon \in C^\infty(U_\epsilon)$.*
2. *$u^\epsilon \xrightarrow{\epsilon \longrightarrow 0} u$ στο $W^{k,p}(V)$ για κάθε V που περιέχεται συμπαγώς στο U.*

Απόδειξη. [2] □

Θεώρημα 1.6. *Έστω U ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του R^n και $u \in W^{k,p}(U)$ για $1 \leq p < +\infty$. Τότε μπορούμε να βρούμε ακολουθία $(u_n)_{n\in N}$ ώστε $u_n \in C^\infty(U) \cap W^{k,p}(U)$ $\forall$ $n \in N$ και*

$$\|u_n - u\|_{W^{k,p}(U)} \xrightarrow{n \longrightarrow +\infty} 0.$$

Απόδειξη. [2] □

Θήκη ∂U υποσυνόλου U του R^n

Έστω $U \subseteq R^n$ ανοικτό και φραγμένο. Θήκη του U (συμβολίζουμε με ∂U) ορίζεται ως το σύνολο των σημείων $x \in U$ με την ιδιότητα, κάθε ανοικτή μπάλα με κέντρο το x να περιέχει τόσο σημεία του U όσο και σημεία του συμπληρώματος αυτού.
Η θήκη ∂U θα λέμε ότι είναι C^k για $k \in N \backslash \{0\}$ όταν για κάθε σημείο αυτής $x_0 \in \partial U$ μπορούμε να βρούμε έναν θετικό αριθμό $\delta > 0$ και μία απεικόνιση $\gamma : R^{n-1} \longrightarrow R$ με $\gamma \in C^k$ ώστε:

$$B(x_0, \delta) \cap U = \{x \in R^n : x_n > \gamma(x_0, x_1, \cdots, x_{n-1})\}.$$

Θα λέμε ότι $\partial U \in C^\infty$ όταν $\gamma \in C^k \ \ \forall \ k \in N \backslash \{0\}$. Θα λέμε ότι η ∂U είναι αναλυτική όταν και η γ είναι αναλυτική συνάρτηση.

Παράδειγμα: Έστω $U = \{x \in R^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι $\partial U = \{x \in R^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$.

Παρατηρούμε από το παραπάνω σχήμα ότι υπάρχει ένα $0 < \delta < 1$ καθώς επίσης και μία συνάρτηση $\gamma : R \longrightarrow R$ με $\gamma(x_0) = -\sqrt{1 - x_0^2}$ ώστε $\gamma \in C^\infty$ και $x_1 > \gamma(x_0)$ Συνεπώς η θήκη του μοναδιαίου κύκλου είναι μια καμπύλη C^∞.

Θεώρημα 1.7. *Έστω $U \subseteq R^n$ ανοικτό και φραγμένο, με $\partial U \in C^1$. Υποθέτουμε επίσης ότι $u \in W^{k,p}(U)$ όπου $1 \leq p < +\infty$. Τότε υπάρχει ακολουθία συναρτήσεων $(u_n)_{n \in N}$ όπου $u_n \in C^\infty(\bar{U})$ ώστε:*

$$\|u_n - u\|_{W^{k,p}(U)} \xrightarrow{n \longrightarrow +\infty} 0.$$

Απόδειξη. [2] □

Σημείωση: Συμβολίζουμε με $\bar{U}$ το σύνολο των οριακών σημείων του συνόλου U. Δηλαδή $\bar{U} := \{x \in R^n : \forall \epsilon > 0 B(x, \epsilon) \cap U = \emptyset\}$.
Για παράδειγμα, στο άνω σχήμα το σύνολο των οριακών σημείων του ανοιχτού δίσκου είναι, ο ίδιος ο δίσκος μαζί με την περίμετρό του. Με άλλα λόγια θα λέγαμε ότι: $\bar{U} = U \cup \partial U$.

1.5 Επέκταση απο τον $W^{1,p}(U)$ στον $W^{1,p}(R^n)$

Στην ενότητα αυτή θα αναφερθούμε σε ένα απο τα σημαντικότερα θεωρήματα σχετικά με τους χώρους Sobolev. Το θεώρημα αυτό μας δίνει την απάντηση στο ερώτημα για το αν μία συνάρτηση που ανήκει σε έναν χώρο Sobolev $W^{1,p}(U)$ μπορεί να επεκταθεί στον χώρο $W^{1,p}(R^n)$. Αυτό δεν είναι πάντοτε δυνατό παρά μόνο όταν το υποσύνολο $U \subseteq R^n$ ικανοποιεί μία συγκεκριμένη ιδιότητα.

Θεώρημα 1.8 ([2]). *Έστω $U \subseteq R^n$ ανοικτό και φραγμένο με θήκη $\partial U \in C^1$. Επιλέγουμε ένα ανοικτό υποσύνολο $V \subseteq R^n$ ώστε το U να περιέχεται συμπαγώς στο V. Τότε υπάρχει ένας συνεχής γραμμικός τελεστής $E : W^{1,p}(U) \longrightarrow W^{1,p}(R^n)$, $1 \leq p \leq +\infty$ τέτοιος ώστε για κάθε συνάρτηση $u \in W^{1,p}(U)$ να ισχύουν τα παρακάτω:*

1. *$Eu = u$ σχεδόν παντού στο U.*
2. *$supp(Eu) \subseteq V$.*
3. *Ισχύει η ανισότητα*
$$\|Eu\|_{W^{1,p}(R^n)} \leq C \ \|u\|_{W^{1,p}(U)},$$
όπου η σταθερά C εξαρτάται απο τα p, V, U.

Απόδειξη. [2] και [1] □

Σημείωση: Για τον παραπάνω τελεστή η συνάρτηση Eu καλείτε *επέκταση* της u.

1.6 Τελεστής ίχνους

Θεώρημα 1.9 ([2]). *Έστω $U \subseteq R^n$ ανοικτό και φραγμένο με θήκη $\partial U \in C^1$. Υποθέτουμε επίσης ότι $1 \leq p < +\infty$. Τότε υπάρχει συνεχής γραμμικός τελεστής $T : W^{1,p}(U) \longrightarrow L^p(\partial U)$ έτσι ώστε να ισχύουν τα παρακάτω:*

1. *$Tu = u|_{\partial U}$ εάν $u \in W^{1,p}(U) \cap C(\bar{U})$.*
2. *Ισχύει η ανισότητα*
$$\|Tu\|_{L^p(\partial U)} \leq C \ \|u\|_{W^{1,p}(U)}, \ \forall u \in W^{1,p}(U)$$
όπου η σταθερά C εξαρτάται απο τα p, U.

Απόδειξη. [2] □

Σημείωση: Για τον παραπάνω τελεστή η συνάρτηση Tu καλείτε *ίχνος* της u στο ∂U.

Ο χώρος $W_0^{k,p}(U)$

Ορισμός 1.4 ([2]). *Ο χώρος* $W_0^{k,p}(U)$ *ορίζεται ως το κλείσιμο του χώρου* $C_c^\infty(U)$ *στον χώρο* $W^{k,p}(U)$.

Με άλλα λόγια θα λέγαμε ότι μία συνάρτηση $u \in W_0^{k,p}(U)$ όταν και μόνον όταν είναι οριακό σημείο του χώρου $C_c^\infty(U)$. Αυτό είναι ισοδύναμο με το να πούμε ότι: Εάν $u \in W_0^{k,p}(U)$ τότε υπάρχει ακολουθία συναρτήσεων $(u_n)_{n\in N}$, όπου $\underline{u_n \in C_c^\infty(U)}$ έτσι ώστε

$$\|u_n - u\|_{W^{k,p}(U)} \xrightarrow{n\longrightarrow+\infty} 0.$$

Στην ειδική περίπτωση όπου $p = 2$ θα γράφουμε $W_0^{k,2}(U) = H_0^k(U)$

Θεώρημα 1.10 ([2]). *Έστω* $U \subseteq R^n$ *ανοικτό και φραγμένο με θήκη* $\partial U \in C^1$. *Υποθέτουμε επίσης ότι* $u \in W^{k,p}(U)$. *Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

1. $u \in W_0^{k,p}(U)$.
2. $Tu = 0$ *στο* ∂U, *όπου* T *ο τελεστής τροχιάς της συνάρτησης* u.

Απόδειξη. [2] □

1.7 Χώροι Hölder

Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $0 < \gamma \leq 1$. Έστω επίσης συνάρτηση $u : U \longrightarrow \mathbb{R}$, Lipschitz για την οποία υπάρχει σταθερά C τέτοια ώστε:

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y| \quad (x, y \in U).$$

[2]

Ορισμός 1.5. *[2] Μία συνάρτηση* $u : U \longrightarrow \mathbb{R}$ *θα λέμε ότι είναι Hölder συνεχής με εκθέτη* γ *όταν και μόνον όταν υπάρχει σταθερά* C *ισχύει ότι:*

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^\gamma \quad (x, y \in U).$$

Ορισμός 1.6. *[2]*

1. *Εάν η* $u : U \longrightarrow \mathbb{R}$ *είναι συνεχής και φραγμένη, γράφουμε ότι*

$$\|u\|_{C(\bar{U})} := \sup_{x\in U} |u(x)|.$$

2. *Η γ - Hölder ημινόρμα της $u : U \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι η*

$$[u]_{C^{0,\gamma}(\bar{U})} := \sup_{x,y \in U \ x \neq y} \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^{\gamma}} \right\},$$

και η γ-Hölder νόρμα είναι η

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\bar{U})} := \|u\|_{C(\bar{U})} + [u]_{C^{0,\gamma}(\bar{U})}.$$

Ορισμός 1.7. *[2] Ο χώρος Hölder*

$$C^{k,\gamma}(\bar{U})$$

περιλαμβάνει όλες τις συναρτήσεις $u \in C^k(\bar{U})$ για τις οποίες το

$$\|u\|_{C^{k,\gamma}(\bar{U})} := \sum_{|\alpha| \leq K} \|D^{\alpha} u\|_{C(\bar{U})} + \sum_{|\alpha| = k} [D^{\alpha} u]_{C^{0,\gamma}(\bar{U})}$$

είναι πεπερασμένο.

Θεώρημα 1.11. *[2] Ο χώρος $C^{k,\gamma}(\bar{U})$ είναι χώρος Banach.*

1.8 Βασικές ανισότητες

Ορισμός 1.8 ([2])**.** *Έστω $1 \leq p < n$ όπου $n \in N$. Ορίζουμε ως Sobolev συζυγή του p και συμβολίζουμε με p^* την εξής ποσότητα:*

$$p^* := q = \frac{np}{n-p}.$$

Θεώρημα 1.12. *(Ανισότητα Gagliardo - Nirenberg - Sobolev)[[2]] Έστω ότι $1 \leq p < n$ (όπου n η διάσταση του χώρου R^n). Τότε για κάθε συνάρτηση $u \in C^1_c(R^n)$ υπάρχει σταθερά $C > 0$ που εξαρτάται απο το p και το n τέτοια ώστε να ισχύει η παρακάτω ανισότητα:*

$$\|u\|_{L^q(R^n)} \leq C \|Du\|_{L^p(R^n)}.$$

Απόδειξη. [2] □

Θεώρημα 1.13 ([2]). *Έστω $U \subseteq R^n$ ανοικτό και φραγμένο με θήκη $\partial U \in C^1$. Επιπλέον υποθέτουμε ότι $1 \le p < n$ και $u \in W^{1,p}(U)$. Τότε ισχύει η ανισότητα:*

$$\|u\|_{L^q(U)} \le C\|u\|_{W^{1,p}(U)}.$$

Όπου C σταθερά που εξαρτάται απο τα p, n και U. Δηλαδή η ισχύει ότι

$$W^{1,p}(U) \subseteq L^q(U).$$

Απόδειξη. [2] □

Θεώρημα 1.14 (Ανισότητα Poincare [2]). *Έστω $U \subseteq R^n$ ανοικτό και φραγμένο. Υποθέτουμε επίσης ότι $u \in W_0^{1,p}(U)$ όπου $1 \le p < n$. Τότε για κάθε $1 \le q \le p^*$ ισχύει η παρακάτω ανισότητα:*

$$\|u\|_{L^q(U)} \le C\|Du\|_{L^p(U)}.$$

Οπου C σταθερά που εξαρτάται απο τα p, q, n και U.

Απόδειξη. [2] □

Θεώρημα 1.15 (Ανισότητα Morrey). *[2] Έστω $n < p \le \infty$. Τότε υπάρχει σταθερά C που εξαρτάται μόνο απο το p και το n, τέτοια ώστε:*

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \le C \ \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)},$$

για κάθε $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$, όπου

$$\gamma := 1 - \frac{n}{p}.$$

Απόδειξη. [2] □

Ορισμός 1.9. *[2] Λέμε ότι η u^* είναι εκδοχή της συνάρτησης u όταν και μόνον όταν: $u = u^*$ σχεδόν παντού.*

Θεώρημα 1.16. *[2] Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και φραγμένο και $\partial U \in C^1$. Υποθέτουμε ότι $n < p \le +\infty$, και $u \in W^{1,p}(U)$. Τότε υπάρχει εκδοχή $u^* \in C^{0,\gamma}(\bar{U})$, για $\gamma = 1 - \frac{n}{p}$ και ισχύει η ανισότητα:*

$$\|u^*\|_{C^{0,\gamma}(\bar{U})} \le C \ \|u\|_{W^{1,p}(U)}.$$

Η σταθερά C εξαρτάται μόνο απο τα p, n και U.

Απόδειξη. [2] □

Θεώρημα 1.17 (Γενικές ανισότητες Sobolev)**.** *[2] Έστω $U \subseteq \mathbf{R}^n$ ανοικτό και φραγμένο, με $\partial U \in C^1$. Υποθέτουμε ότι $u \in W^{k,p}(U)$.*

1. *Εάν*
$$k < \frac{n}{p},$$
τότε $u \in L^q(U)$, όπου:
$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}.$$
Επιπλεόν ισχύει η ανισότητα:
$$\|u\|_{L^q(U)} \leq C \ \|u\|_{W^{k,p}(U)},$$
η σταθερά C εξαρτάται μόνο απο k, p, n και U.

2. *Εάν*
$$k > \frac{n}{p},$$
τότε $u \in C^{k-[\frac{n}{p}]-1,\ \gamma}(\bar{U})$, όπου:
$$\gamma = \begin{cases} [\frac{n}{p}] + 1 - \frac{n}{p}, \quad \frac{n}{p} \notin \mathbb{Z} \\ \text{κάθε θετικός ακέραιος μικρότερος της μονάδος, εάν } \frac{n}{p} \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$
Επιπλέον ισχύει η ανισότητα:
$$\|u\|_{C^{k-\frac{n}{p}-1,\gamma}(\bar{U})} \leq C \ \|u\|_{W^{k,p}(U)},$$
η σταθερά C εξαρτάται μόνο απο k, p, n, γ και U.

Απόδειξη. [2] □

1.9 Ο χώρος H^{-1}

Είδαμε προηγουμένως ότι $H^1(U)$ είναι ένας χώρος Hilbert όπου $H^1(U) = W^{1,2}(U)$. Άρα σύμφωνα με όσα αναφέραμε για τους χώρους Sobolev πρόκυται για χώρο που περιέχει Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις $u \in L^1_{loc}(U)$ ώστε να ισχύει επιπλέον ότι $u \in L^2(U)$ και οι μερικές παράγωγοι $u_{x_i} \ \ \forall\ i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ και είναι συναρτήσεις του $L^2(U)$. Όμως ο χώρος $H^1_0(U)$ περιέχει ειδικότερα όλες τις συναρτήσεις με τις παραπάνω ιδιότητες αλλά (σύμφωνα με το Θεώρημα 1.9) έχουν την επιπλέον ιδιότητα ότι μηδενίζονται στη θήκη του συνόλου U εάν βεβαίως αυτό είναι φραγμένο στο R^n

Ορισμός 1.10 ([2]). *Ορίζουμε τον χώρο $H^{-1}(U)$ όπου $U \subseteq R^n$ ως τον δυικό του $H^1_0(U)$. Δηλαδή*

$$H^{-1}(U) = (H^1_0(U))^*.$$

Σύμφωνα με αυτά που αναφέρθηκαν παραπάνω μπορούμε να διαπιστώσουμε εύκολα ότι ο χώρος $H^{-1}(U)$ περιέχει όλα τα συνεχή γραμμικά συναρτησιακά που είναι ορισμένα στον $H^1_0(U)$. Είναι δηλαδή τελεστές που λαμβάνουν ως ορίσματα συναρτήσεις του $H^1_0(U)$ και πεδίο τιμών το R.

Θεώρημα 1.18 ([2]).

1. *Ο χώρος $H^{-1}(U)$ είναι διανυσματικός χώρος στον οποίον μπορούμε να ορίσουμε μια norm ως εξής:*

$$\|f\|_{H^{-1}(U)} := sup\{ < f, u > : \|u\|_{H^1_0(U)} \leq 1 \ \}.$$

2. *Ισχύει ότι:*

$$H^1_0(U) \subseteq L^2(U) \subseteq H^{-1}(U).$$

3. *Έστω $f \in H^{-1}(U)$. Τότε υπάρχουν συναρτήσεις $f^0, f^1, \cdots, f^n$ ώστε $f^i \in L^2(U)\ \forall\ i \in \{0, 1, 2, \cdots, n\}$ τέτοιες ώστε:*

$$< f, v > = \int_U f^0\ v + \sum_{i=1}^{n} f^i\ \frac{\partial v}{\partial x_i}\ \mathrm{d}x \ \ \forall\ v \in H^1_0(U).$$

4. *Εάν $f^0, f^1, \cdots, f^n$ απο την (2) τότε ισχύει ότι:*

$$\|f\|_{H^{-1}(U)} = \inf\{(\sum_{i=1}^{n} \|f^i\|^2_{L^2(U)})^{\frac{1}{2}} : f^0, f^1, \cdots, f^n \text{ ικανοποιούν την (2)}\}.$$

5. *Ισχύει ότι:*

$$(f, u)_{L^2(U)} \ = < f, u > \ \ \forall \ \ f \in L^2(U) \subseteq H^{-1}(U), \ \ u \in H^1_0(U).$$

Απόδειξη. [2] □

Σημείωση: Όταν ισχύει η σχέση απο το σκέλος (2) του παραπάνω θεωρήματος θα γράφουμε

$$f = f^0 - \sum_{i=1}^{n} f^i_{x_i}.$$

2 Ελλειπτικές εξισώσεις δευτέρας τάξεως

2.1 Το ελλειπτικό πρόβλημα

[2]

Έστω $U \subseteq R^n$ ανοικτό και φραγμένο, $f : U \longrightarrow R$ και $u : \bar{U} \longrightarrow R$. Έστω επίσης L μερικός διαφορικός τελεστής ο οποίος γράφεται στις εξής μορφές:

$$Lu := -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (\alpha^{ij}(x) u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x) u_{x_i} + c(x)u, \quad \text{αποκλίνουσα μορφή}$$

$$Lu := -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha^{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x) u_{x_i} + c(x)u, \quad \text{μη αποκλίνουσα μορφή}$$

όπου α^{ij}, b^i, c συναρτησιακοί συντελεστές. Για την μελέτη που θα ακολουθήσει θα θεωρούμε ότι $\alpha^{ij} = \alpha^{ji} \;\; \forall\, i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

Θεωρούμε τωρα το παρακάτω πρόβλημα συνοριακών τιμών:

$$\begin{cases} Lu = f \text{ στο } U \\ u = 0 \text{ στο } \partial U. \end{cases}$$

Η διαφορική εξίσωση $Lu = f$ καλείται αποκλίνουσα ή μη-αποκλίνουσα ανάλογα με τη μορφή του μερικού διαφορικού τελεστή L ενώ η συνοριακή συνθήκη $u = 0$ στο ∂U καλείται *συνοριακή συνθήκη του Dirichlet.*

Ορισμός 2.1. *Ένας μερικός διαφορικός τελεστής L καλείται ελλειπτικός εάν και μόνον εαν υπάρχει σταθερά $\theta > 0$ τέτοια ώστε να ισχύει:*

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha^{ij}(x)\; \xi_i \xi_j \geq \theta\; \|\xi\|^2,$$

για κάθε x που ανήκει σχεδόν παντού στο U και κάθε άνυσμα $\xi \in R^n$.

Η ελλειπτικότητα στην παραπάνω σχέση προκύπτει από το γεγονός ότι για κάθε $x \in U$ ο συμμετρικός πίνακας είναι θετικά ορισμένος με την μικρότερη ιδιοτιμή του να είναι μεγαλύτερη ή ίση του θ.

2.2 Ασθενείς λύσεις

[2]

Ορισμός 2.2 (διγραμμική μορφή). *Έστω H Ένας διανυσματικός χώρος και $B : H \times H \longrightarrow K$ όπου K σύνολο που ονομάζεται πεδίο τιμών της απεικόνισης B. Τότε η απεικόνιση B θα καλείται διγραμμική μορφή όταν και μόνον όταν είναι γραμμική και ως προς τα δύο ορισματά της. Δηλαδή $\forall u, u_1, u_2, v, v_1, v_2 \in H$ και $\lambda \in R$ θα ισχύουν τα παρακάτω:*

1. $B[u_1 + u_2, v] = B[u_1, v] + B[u_2, v]$ *και* $B[\lambda u, v] = \lambda B[u, v]$,

2. $B[u, v_1 + v_2] = B[u, v_1] + B[u, v_2]$ *και* $B[u, \lambda v] = \lambda B[u, v]$.

Έστω ότι α^{ij}, b^i, c συναρτήσεις που ανήκουν στον χώρο $L^\infty(U)$ $\forall\, i, j \in \{1, 2, \cdots, \}$ και η $f \in L^2(U)$.

Ορισμός 2.3. *1. Ορίζουμε διγραμμική μορφή ως προς τον αποκλίνοντα μερικό διαφορικό τελεστή (όπως αυτός ορίστηκε παραπάνω), την απεικόνιση $B : H_0^1(U) \times H_0^1(U) \longrightarrow R$ ώστε:*

$$B[u, v] := \int_U \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha^{ij}(x)\ u_{x_i}\ v_{x_j} + \sum_{i=1}^n b^i(x) u_{x_i} v + c(x)\ u\ v\ \mathrm{d}x.$$

2. Θα λέμε ότι η συνάρτηση $u \in H_0^1(U)$ αποτελεί ασθενής λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} Lu = f \text{ στο } U \\ u = 0 \text{ στο } \partial U \end{cases}$$

εάν ισχύει ότι

$$B[u, v] = (f, v)_{L^2(U)}\ \ \forall\ v \in H_0^1(U).$$

Σημείωση: Βλέπουμε απο τον παραπάνω ορισμό ότι η ασθενής λύση ορίζεται ως μία συνάρτηση του χώρου $u \in H_0^1(U)$. Αυτό συμβαίνει διότι όπως εύκολα φαίνεται από το Θεώρημα 1.9 η συνάρτηση μηδενίζεται στη θήκη του συνόλου U. Συνεπώς θα ικανοποιεί και την συνθήκη του Dirichlet του προβλήματος συνοριακών τιμών.

Θεωρούμε τώρα πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} Lu = f^0 - \sum\limits_{i=1}^n f^i_{x_i} \text{ στο } U \\ u = 0 \text{ στο } \partial U \end{cases}$$

όπου ο L είναι αποκλίνων μερικός διαφορικός τελεστής και οι $f^i \in L^2(U) \quad \forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Μπορεί κανείς εύκολα να διαπιστώσει οτι η σηνάρτηση $f = f^0 - \sum\limits_{i=1}^{n} f^i_{x_i}$ είναι συνάρτηση του χώρου $H^{-1}(U)$ όπου $L^2(U) \subseteq H^{-1}(U)$. Είναι δηλαδή ένα συνεχές γραμμικό συναρτησιακό απο τον χώρο $H^1_0(U)$ στο R.

Ορισμός 2.4. *Θα λέμε ότι η συνάρτηση $u \in H^1_0(U)$ είναι ασθενής λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών*

$$\begin{cases} Lu = f^0 - \sum\limits_{i=1}^{n} f^i_{x_i} \ \textit{στο} \ U \\ u = 0 \ \textit{στο} \ \partial U \end{cases}$$

εάν και μόνον εάν ισχύει ότι:

$$B[u, v] \ = < f, v > = \int\limits_U f^0 \ v + \sum_{i=1}^{n} f^i v_{x_i} \ \mathrm{d}x \ \ \forall \ v \in H^1_0(U).$$

Σημείωση: Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφέρουμε ότι η παραπάνω θεώρηση του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} Lu = f \ \text{στο} \ U \\ u = 0 \ \text{στο} \ \partial U \end{cases}$$

μπορεί να δουλέψει και σε πρόβλημα συνοριακών τιμών που δεν απαιτεί απαραίτητα μηδενισμό της λύσης στη θήκη του συνόλου αλλα η λύση να ταυτίζεται με μία συνάρτηση στην θήκη του συνόλου. Έστω πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} Lu = f \ \text{στο} \ U \\ u = g \ \text{στο} \ \partial U \quad g \in H^1(U). \end{cases}$$

Η μόνη διαφορά με τις προηγούμενες θεωρήσεις είναι ότι τώρα απαιτούμε η λύση να είναι γενικότερα συνάρτηση του χώρου $H^1(U)$ και $U \in C^1$ ανοικτό υποσύνολο του R^n και φραγμένο. Θέτουμε τώρα $w := u - g$. Είναι προφανές ότι $w \in H^1_0(U)$ καθώς $H^1(U)$ είναι διανυσματικός χώρος άρα και ο γραμμικός συνδυασμός $w = u - g$ είναι στοιχείο του και $w = u - g = 0$ στο ∂U . Παρατηρούμε τώρα ότι η w θα ικανοποιεί το πρόβλημα

$$\begin{cases} Lw = f^* \ \text{στο} \ U \ \ \text{όπου} \ f^* = f - Lg \\ w = 0 \ \text{στο} \ \partial U. \end{cases}$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών που δεν απαιτεί μηδενισμό λύσης στη θήκη του συνόλου ανάγεται με φυσιολογικό τρόπο σε πρόβλημα που απαιτεί μηδενισμό της λύσης στη θήκη του συνόλου.

2.3 Ύπαρξη και μοναδικότητα ασθενών λύσεων

Ένα από τα σημαντικότερα προβλήματα για έναν μαθηματικό που ασχολείται με διαφορικές εξισώσεις είναι αυτό της ύπαρξης και μοναδικότητας λύσεων μιας διαφορικής εξίσωσης. Αυτό μπορεί να το δει κανείς παραδείγματος χάριν μέσω του θεωρήματος του Picard για συστήματα συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Με τις μερικές διαφορικές εξισώσεις.....; Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με τέτοιου είδους προβλήματα για μερικές διαφορικές εξισώσεις. Για τον σκοπό αυτό θα παρουσιάσουμε επιπλέον ένα σημαντικό θεώρημα απο την Συναρτησιακή Ανάλυση που ακούει στα ονόματα των μαθηματικών που τα απέδειξαν. Το θέωρημα Lax - Milgram.

2.3.1 Το θεώρημα Lax - Milgram

Υποθέτουμε ότι H είναι ένας χώρος Hilbert με norm που επάγεται απο το εσωτερικό του γινόμενο.

Θεώρημα 2.1 ([2]). *Έστω διγραμμική μορφή $B : H \times H \longrightarrow R$ για την οποία υπάρχουν σταθερές $\alpha, \beta > 0$ τέτοιες ώστε:*

1. $|B[u,v]| \leq \alpha \|u\| \, \|v\| \quad \forall \; u, v \in H,$
2. $\beta \|u\|^2 \leq B[u,u] \; \forall \; \; u \in H.$

Έστω επίσης $f : H \longrightarrow R$ ένα συνεχές γραμμικό συναρτησιακό που ορίζεται στον H. Τότε υπάρχει μοναδικό στοιχείο $u \in H$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$B[u,v] = < f, v > \quad \forall \; v \in H.$$

Απόδειξη. Έστω κάποιο στοιχείο $u \in H$. Ορίζουμε την απεικόνιση $T : H \longrightarrow R$ ως εξής:

$$Tv = B[u,v] \quad \text{με } v \in H.$$

Η απεικόνιση T είναι ένας γραμμικός τελεστής. Πράγματι, έστω $v_1, v_1 \in H$ και $\lambda, \mu \in R$. Τότε έχουμε ότι:

$$T(\lambda v_1 + \mu v_2) = B[u, \lambda v_1 + \mu v_2] \stackrel{\text{Η } B \text{ είναι διγραμμική μορφή}}{=} \lambda B[u, v_1] + \mu B[u, v_2] = \lambda T v_1 + \mu T v_2.$$

Απο την υπόθεση (1) του θεωρήματος προκύπτει ότι:

$$|Tv| \leq |B[u,v]| \leq \alpha \|u\| \|v\| \stackrel{M := \alpha\|u\|}{=} M \|v\| \;\; \forall v \in H.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ο T είναι ένα συνεχές γραμμικό συναρτησιακό στον χώρο Hilbert H. Το θεώρημα του Riesz μας εξασφαλίζει τώρα ότι για το γραμμικό συναρτησιακό T υπάρχει μοναδικό στοιχείο $w \in H$ τέτοιο ώστε

$$Tv =< T, v >= (w, v) \ \ \forall v \in H.$$

Αφού $Tv = B[u, v]$, ορίζουμε έναν τελεστή $A : H \longrightarrow H$ ως εξής:

$$Au = w \Leftrightarrow B[u, v] = (Au, v) = (w, v)$$

Ο τελεστής A είναι γραμμικός. Πράγματι, έστω $u_1, u_2 \in H$ και $\lambda, \mu \in R$. Τότε:

$$(A(\lambda u_1+\mu u_2), v) = B[\lambda u_1+\mu u_2, v] \overset{\text{Η } B \text{ είναι διγραμμική μορφή}}{=} \lambda B[u_1, v]+\mu B[u_2.v] = \lambda(Au_1, v)+\mu(Au_2, v).$$

Ο τελεστής A είναι φραγμένος. Πράγματι από την υποθεση (1) του θεωρήματος συμπεραίνουμε ότι:

$$\|Au\|^2 = (Au, Au) = B[u, Au] \overset{(1)}{\leq} \alpha\|u\|\|Au\| \Leftrightarrow \|Au\|(\|Au\|-\alpha\|u\|) \overset{\|Au\|\geq 0}{\leq} 0 \Leftrightarrow \|Au\| \leq \alpha\|u\| \ \ \forall u \in H.$$

Ο τελεστής A είναι 1-1. Αρκεί να δείξω ότι $Ker(A) = \{0_H\}$. Υπενθυμίζουμε ότι $Ker(A) := \{x \in H : Ax = 0_H\}$. Αφού A είναι γραμμικός τότε $A0_H = 0_H$. Άρα $0_H \in Ker(A)$.

Απο την υπόθεση (2) του θεωρήματος συμπεραίνουμε ότι:

$$\beta\|u\|^2 \leq B[u, u] = (Au, u) \overset{\text{ανισότητα Cauchy - Schwarz}}{\leq} \|Au\|\|u\| \Leftrightarrow \|u\|(\beta\|u\| - \|Au\|) \leq 0.$$

Όμως $\|u\| \geq 0 \ \ \forall \ u \in H$. Άρα,

$$\beta\|u\| \leq \|Au\| \quad \forall \ u \in H.$$

Έστω τώρα ότι $u \in Ker(A)$. Τότε $Au = 0_H$. Από την παραπάνω ανισότητα προκύπτει ότι:

$$\beta\|u\| \leq \|Au\| = \|0_H\| = 0.$$

Όμως $\beta \geq 0$ άρα

$$\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0_H$$

Συνεπώς

$$Ker(A) = \{0_H\}.$$

Η εικόνα του τελεστή $R(A)$ είναι κλειστό υποσύνολο του χώρου H. Έστω μία ακολουθία $(f_n)_{n\in N}$ με $f_n \in R(A)$ τέτοια ώστε

$$f_n \xrightarrow{n\longrightarrow+\infty} f.$$

Αρκεί να δείξουμε ότι $f \in R(A)$. Αφού $f_n \in R(A)$ θα υπάρχουν $u_n \in H$ ώστε $Au_n = f_n$. Όμως η ακολουθία $(f_n)_{n\in N}$ είναι συγκλίνουσα ως προς την επαγόμενη από το εσωτερικό γινόμενο norm του χώρου H και συνεπώς θα είναι και Cauchy σε αυτόν. Έστω $\epsilon > 0$. Από τον ορισμό της Cauchy ακολουθίας έχουμε ότι:

$$\text{για } \beta\epsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \in N \quad : \ \forall \ \ n,m \in N \text{ με } n,m \geq n_0 \ \text{ να ισχύει ότι } \|f_n - f_m\| < \beta\epsilon.$$

Όμως απο την ανισότητα $\beta\|u\| \leq \|Au\|$ που δείξαμε παραπάνω έχουμε ότι:

$$\beta\epsilon > \|f_n - f_m\| = \|Au_n - Au_m\| = \|A(u_n - u_m)\| \geq \beta\|u_n - u_m\|.$$

Απο τα παραπάνω βλέπουμε ότι για το δοθέν ϵ υπάρχει ένα δείκτης $n_0 \in N$ τέτοιος ώστε $\forall\ n,m \in N$ με $n,m \geq n_0$ ισχύει ότι $\|u_n - u_m\| < \epsilon$. Συνεπώς η ακολουθία $(u_n)_{n\in N}$ είναι Cauchy στον χώρο H και αφού ο H είναι πλήρης ως προς τη norm που επάγεται απο το εσωτερικό του γινόμενο η $(u_n)_{n\in N}$ ως Cauchy θα συγκλίνει μέσα σε αυτόν, δηλαδή υπάρχει $u \in H$ τέτοιο ώστε

$$u_n \xrightarrow{n\longrightarrow+\infty} u$$

Δείξαμε παραπάνω όμως, οτι ο τελεστής A είναι φραγμένος. Άρα απο το θεώρημα χαρακτηρισμού συνεχών τελεστών (βλέπε [4]) θα ισχύει ότι:

$$f_n = Au_n \xrightarrow{n\longrightarrow+\infty} Au$$

Όμως υποθέσαμε αρχικά ότι

$$f_n \xrightarrow{n\longrightarrow+\infty} f$$

και επειδή το όριο της ακολουθίας $(f_n)_{n\in N}$ είναι μοναδικό τότε θα ισχύει ότι:

$$Au = f$$

άρα $\underline{f \in R(A)}$.

Ισχυριζόμαστε τώρα ότι $H = R(A)$. Έστω προς απαγωγή σε άτοπο ότι $H \neq R(A)$. Αποδείξαμε παραπάνω ότι $R(A)$ είναι κλειστός υπόχωρος του H. Άρα με βάση το Θεώρημα 1.1 θα ισχύει $H = R(A) + R(A)^{\perp}$. Αυτό σημαίνει ότι αφού

$H \neq R(A)$ πρέπει να υπάρχει στοιχείο $w \in R(A)^{\perp}$ με $w \neq 0_H$ και $w \notin R(A)$. Τότε απο την υπόθεση (2) του θεωρήματος θα ισχύει ότι:

$$\beta \|w\|^2 \leq B[w,w] = (Aw, w) \overset{Aw \in R(A)}{=} 0 \overset{\beta \geq 0}{\Rightarrow} w = 0_H \quad (\text{άτοπο}).$$

Εφόσον $f \in H^*$ τότε από το θεώρημα του Riesz μπορούμε να βρούμε μοναδικό $w \in H$ ώστε να ισχύει ότι

$$< f, v >= (w, v) \ \ \forall \ v \in H$$

Όμως δείξαμε παραπάνω ότι $R(A) = H$ άρα θα υπάρχει $u \in H$ ώστε $Au = w$. Συνεπώς

$$< f, v >= (w, v) = (Au, v) = B[u, v] \ \ \forall \ v \in H$$

. Εφόσον δείξαμε ότι ο τελεστής A είναι 1-1 τότε το $u \in H$ ώστε $Au = w$ θα είναι μοναδικό.

□

Επιστρέφουμε τώρα στις αρχικές μας υποθέσεις για το πρόβλημα συνοριακών τιμων που συζητήσαμε στις προηγούμενες ενότητες. Τώρα ο χώρος $H_0^1(U)$ είναι ο χώρος Hilbert και η διγραμμική μορφή θα είναι η:

$$B[u, v] := \int_U \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha^{ij}(x) u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x) u_{x_i} v + c(x) uv \mathrm{d}x.$$

Θεώρημα 2.2 ([2]). *Υπάρχουν σταθερές $\alpha, \beta > 0$ και $\gamma \geq 0$ τέτοιες ώστε για την παραπάνω διγραμμική μορφή να ισχύουν τα εξής:*

1. $|B[u, v]| \leq \alpha \|u\|_{H_0^1(U)} \|v\|_{H_0^1(U)} \ \ \forall \ u, v \in H_0^1(U)$,
2. $\beta \|u\|^2_{H_0^1(U)} \leq B[u, u] + \gamma \|u\|^2_{L^2(U)} \ \ \forall \ u \in H_0^1(U)$.

Απόδειξη. [2] □

Θεώρημα 2.3 (Πρώτο θεώρημα ύπαρξης ασθενούς λύσεως). *[2]*

1. *Υπάρχει ένας αριθμός $\gamma \geq 0$ (παρμένος από το Θεώρημα 2.2) τέτοιος ώστε για κάθε αριθμό $\mu \geq \gamma$ και κάθε συνάρτηση $f \in L^2(U)$ υπάρχει μοναδική ασθενής λύση $u \in H_0^1(U)$ του προβλήματος συνοριακών τιμών:*

$$\begin{cases} Lu + \mu u = f \ \ \textit{στο} \ \ U \\ u = 0 \ \ \textit{στο} \ \ \partial U. \end{cases}$$

2. *Έστω* $f^0, f^1, \cdots, f^n$ *συναρτήσεις του* $L^2(U)$.*Τότε υπάρχει ασθενής λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών:*

$$\begin{cases} Lu + \mu u = f^0 - \sum_{i=1}^{n} f^i_{x_i} \text{ στο } U \\ u = 0 \text{ στο } \partial U. \end{cases}$$

Απόδειξη. Κάνει χρήση του θεωρήματος Lax-Milgram και του θεωρήματος 2.2. [2] □

Ορισμός 2.5. *[2]*

- *Ορίζουμε τον συζυγή τελεστή του* L *και συμβολίζουμε με* L^* *ως εξής:*

$$L^*v := -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\alpha^{ij}(x)v_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)v_{x_i} + (c(x) - \sum_{i=1}^{n} b^i_{x_i})v \text{ όπου } b^i \in C^1(\bar{U}) \ \forall\, i \in \{1, 2, \cdots, n\}.$$

- *Η συζυγής διγραμμική μορφή* $B^* : H^1_0(U) \times H^1_0(U) \longrightarrow R$ *ορίζεται ως εξής:*

$$B^*[v, u] = B[u, v] \quad \forall\ u, v, \in H^1_0(U).$$

- *Θα λέμε ότι μία συνάρτηση* $v \in H^1_0(U)$ *είναι ασθενής λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών*

$$\begin{cases} L^*v = f \text{ στο } U \\ v = 0 \text{ στο } \partial U, \end{cases}$$

όταν και μόνον όταν ισχύει ότι:

$$B^*[v, u] = (f, u) \ \ \forall\ u \in H^1_0(U).$$

Θεώρημα 2.4 (Δεύτερο θεώρημα ύπαρξης ασθενούς λύσεως). *[2]*

- *Ένα απο τα παρακάτω ισχύει*

  1. *Για κάθε συνάρτηση $f \in L^2(U)$ υπάρχει μοναδική λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών*
  $$\begin{cases} Lu = f \text{ στο } U \\ u = 0 \text{ στο } \partial U, \end{cases}$$
  2. *Υπάρχει ασθενής λύση $u(x) \neq 0 \quad \forall x \in U$ του ομογενούς προβλήματος αρχικών τιμών*
  $$\begin{cases} Lu = 0 \text{ στο } U \\ u = 0 \text{ στο } \partial U. \end{cases}$$

- *Εάν το ομογενές πρόβλημα συνοριακών τιμών*
  $$\begin{cases} Lu = 0 \text{ στο } U \\ u = 0 \text{ στο } \partial U \end{cases}$$
  έχει ασθενή λύση τότε η διάσταση του υποχώρου $N \subseteq H_0^1(U)$ στον οποίον ανήκει η λύση αυτή είναι πεπερασμένη και ισούται με την διάσταση του υποχώρου $N^* \subseteq H_0^1(U)$ των ασθενών λύσεων του προβλήματος συνοριακών τιμών
  $$\begin{cases} L^*v = 0 \text{ στο } U \\ v = 0 \text{ στο } \partial U. \end{cases}$$

- *Το πρόβλημα συνοριακών τιμών*
  $$\begin{cases} Lu = f \text{ στο } U \\ u = 0 \text{ στο } \partial U \end{cases}$$
  έχει ασθενή λύση εάν και μόνον εάν ισχύει ότι:
  $$(f, v) = 0 \ \ \forall\, v \in N^*.$$

Απόδειξη. [2] □

Θεώρημα 2.5 (Τρίτο θεώρημα ύπαρξης ασθενούς λύσεως). *[2]*

1. *Υπάρχει ένα το πολύ αριθμήσιμο υποσύνολο $\Sigma \subseteq R$ τέτοιο ώστε το πρόβλημα συνοριακών τιμών:*
$$\begin{cases} Lu = \lambda u + f \text{ στο } U \\ u = 0 \text{ στο } \partial U \end{cases}$$
έχει μοναδική ασθενή λύση για κάθε συνάρτηση $f \in L^2(U)$ όταν και μόνον όταν $\lambda \notin \Sigma$.

2. *Εάν το σύνολο Σ είναι άπειρο αριθμήσιμο τότε θα αποτελεί ένα σύνολο τιμών ακολουθίας που απειρίζεται θετικά.*

Απόδειξη. [2] □

Σημείωση: Το σύνολο Σ καλείται φάσμα του τελεστή L.
Στην ειδική περίπτωση όπου το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} Lu = \lambda u \text{ στο } U \\ u = 0 \text{ στο } \partial U \end{cases}$$

δέχεται μη τετριμμένη λύση $u \neq 0 \; \forall \; x \in U$ (εύκολα επαληθεύει κανείς ότι η συνάρτηση $u(x) = 0$ είναι λύση του παραπάνω προβλήματος) όταν και μόνο όταν $\lambda \in \Sigma$ τότε ο αριθμός λ καλείται **ιδιοτιμή** και η συνάρτηση u **ιδιοσυνάρτηση** που αντιστοιχεί στην παραπάνω ιδιοτιμή του προβλήματος συνοριακών τιμών.

Θεώρημα 2.6. *[2] Έστω $f \in L^2(U)$ και $u \in H_0^1(U)$ μοναδική λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών*
$$\begin{cases} Lu = \lambda u + f \text{ στο } U \\ u = 0 \text{ στο } \partial U, \end{cases}$$
όπου $\lambda \notin \Sigma$. Τότε υπάρχει σταθερά C τέτοια ώστε να ισχύει η παρακάτω ανισότητα

$$\|u\|_{L^2(U)} \leq C\|f\|_{L^2(U)}.$$

Η σταθερά C εξαρτάται από το λ, το σύνολο U και τους συντελεστές του ελλειπτικού τελεστή L.

2.3.2 Η εξίσωση του Helmholtz

[2] Έστω συνάρτηση $u : U \subseteq R^n \longrightarrow R$ και ο μερικός διαφορικός τελεστής δευτέρας τάξεως

$$L := -\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \cdots - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} = -\Delta,$$

γνωστός και ως τελεστής του Laplace.

Ο παραπάνω τελεστής είναι ελλειπτικός. Πράγματι, έστω $\vec{g} = (g_1, g_2, \cdots, g_n) \in R^n$. Παρατηρούμε ότι $\alpha^{ij}(x) = \delta_{ij}$ (όπου δ_{ij} είναι το δέλτα του Kronecker) και από τον ορισμό του ελλειπτικού τελεστή (Ορισμός 2.1)

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha^{ij}(x) g_i g_j = \sum_{i=1}^{n} g_i^2 = 1 \cdot \|\vec{g}\|^2, \quad (\theta = 1).$$

Η εξίσωση

$$Lu = -\Delta u = \lambda u$$

είναι γνωστή στην ανάλυση ως εξίσωση του Helmholtz.

2.4 Το πρόβλημα κανονικότητας για ασθενείς λύσεις

Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με ένα σημαντικό ζήτημα που αφορά τις μερικές διαφορικές εξισώσεις που ακούει στον τίτλο κανονικότητα λύσης. Συγκεκριμένα θα παραθέσουμε θεωρήματα που μας εξασφαλίζουν εκείνες τις συνθήκες ώστε η λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης

$$Lu = f \text{ στο } U$$

να είναι ομαλή.

Θεωρούμε ότι $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και φραγμένο. Υποθέτουμε επίσης ότι $u \in H_0^1(U)$ είναι ασθενής λύση της διαφορικής εξίσωσης $Lu = f$ όπου L μερικός διαφορικός τελεστής σε αποκλίνουσα μορφή:

$$Lu = -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a^{i\,j}(x)\ u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n}\ b^i(x)\ u_{x_i}\ + c(x)\ u.$$

Θεώρημα 2.7. *[2] Έστω $\alpha^{ij}(x) \in C^1(U)$, $\ b^i(x) \in L^\infty(U)$ και $c(x) \in L^\infty(U)$ όπου $i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ και $f \in L^2(U)$. Υποθέτουμε επιπλέον ότι η $u \in H^1(U)$ είναι ασθενής λύση του ελλειπτικού προβλήματος $Lu = f$ στο U. Τότε*

$$u \in H^2_{loc}(U)$$

και επιπλέον για κάθε ανοικτό υποσύνολο του $V \subseteq U$ που περιέχεται συμπαγώς στο U ισχύει η ανισότητα

$$\|u\|_{H^2(V)} \leq C(\|f\|_{L^2(U)} + \|u\|_{L^2(U)}),$$

όπου η σταθερά C εξαρτάται από τα σύνολα V και U καθώς επίσης και από τους συντελεστές του ελλειπτικού τελεστή L.

Απόδειξη. [2] $\square$

Θεώρημα 2.8. *[2] Έστω $m \in N$, $\alpha^{ij}(x), b^i(x), c(x) \in C^{m+1}(U)$ όπου $i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ και $f \in H^m(U)$. Υποθέτουμε επιπλέον ότι η $u \in H^1(U)$ είναι ασθενής λύση του ελλειπτικού προβλήματος $Lu = f$ στο U.Τότε*

$$u \in H^{m+2}_{loc}(U)$$

και επιπλέον για κάθε υποσύνολο του $V \subseteq U$ που περιέχεται συμπαγώς στο U ισχύει η ανισότητα

$$\|u\|_{H^{m+2}(V)} \leq C(\|f\|_{H^m(U)} + \|u\|_{L^2(U)}),$$

όπου η σταθερά C εξαρτάται από τα σύνολα V και U, τον αριθμό m καθώς επίσης και από τους συντελεστές του ελλειπτικού τελεστή L.

Απόδειξη. [2] □

Θεώρημα 2.9. *[2] Έστω* $\alpha^{ij}(x), b^i(x), c(x) \in C^\infty(U)$ *όπου* $i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ *και* $f \in C^\infty(U)$. *Υποθέτουμε επιπλέον ότι η* $u \in H^1(U)$ *είναι ασθενής λύση του ελλειπτικού προβλήματος* $Lu = f$ *στο* U. *Τότε*

$$u \in C^\infty(U).$$

Απόδειξη. [2] □

Θεώρημα 2.10. *[2] Έστω* $\alpha^{ij}(x) \in C^1(\bar{U})$, $b^i(x)$, $c(x) \in L^\infty(U)$ *όπου* $i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ *και* $f \in L^2(U)$. *Υποθέτουμε επιπλέον ότι* $u \in H^1_0(U)$ *είναι ασθενής λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών*

$$\begin{cases} Lu = f \ \text{στο} \ U \\ u = 0 \ \text{στο} \ \partial U, \end{cases}$$

όπου $\partial U \in C^2$. *Τότε*

$$u \in H^2(U)$$

και επιπλέον ισχύει η ανισότητα

$$\|u\|_{H^2(U)} \leq C(\|f\|_{L^2(U)} + \|u\|_{L^2(U)}),$$

όπου η σταθερά C *εξαρτάται από το σύνολο* U *και από τους συντελεστές του ελλειπτικού τελεστή* L.

3 Το μη γραμμικό πρόβλημα - εξισώσεις Euler Lagrange

Θα ξεκινήσουμε το τρίτο κεφάλαιο της εργασίας μας δίνοντας στον αναγνώστη την βασική ιδέα του μη γραμμικού προβλήματος. Όταν μιλούμε για ένα μη γραμμικό πρόβλημα αναφερόμαστε σε μία μερική διαφορική εξίσωση η οποία μπορεί να γραφεί με την βοήθεια ενός *μη γραμμικού* μερικού διαφορικού τελεστή $A[\cdot]$ στη μορφή:

$$A[u] = 0$$

όπου u η άγνωστη συνάρτηση. [2]

Τα μη γραμμικά προβλήματα, σε αντίθεση με τα γραμμικά, δεν μπορούν τα κατηγοριοποιηθούν εύκολα. Κάθε μη γραμμικό πρόβλημα αποτελεί εν γένει ένα ξεχωριστό μαθηματικό πρόβλημα πίσω απο το οποίο υπάρχει συγκεκριμένο θεωρητικό πλαίσιο που το υποστηρίζει. Δεν υπάρχει λοιπόν μια γενική μαθηματική θεωρία που να λύνει μη γραμμικά προβλήματα. Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε με τις διάσημες εξισώσεις Euler - Lagrange που αποτελούν ένα απο τα θεμελιωδέστερα εργαλεία του κλάδου της Μαθηματικής Ανάλυσης που ακούει στο όνομα *Λογισμός των Μεταβολών*. Ο Λογισμός των Μεταβολών ασχολείται, γενικά, με την βελτιστοποίηση (ελαχιστοποίηση) συναρτησοειδών

$$I : K \longrightarrow \mathbf{R}$$

πάνω σε συγκεκριμένους συναρτησιακούς χώρους K.

Η βασικές αρχές του τέθηκαν κατά τη διάρκεια του 18ου αιώνα από τους κορυφαίους μαθηματικούς Leonhard Euler και Joseph-Louis Lagrange ανοιγωντας με αυτό τον τρόπο ένα νέο δρόμο στην μαθηματική επιστήμη και συγκεκριμένα στην Μαθηματική Ανάλυση. Το μαθηματικό αυτό εργαλείο που εξακολουθεί να αναπτύσεται μέχρι και σήμερα έχει βρει σημαντικότατες εφαρμογές σε πολλούς κλάδους των επιστημών της Μηχανικής, της Φυσικής και της Εφηρμοσμένης Ανάλυσης.

Στην παρούσα εργασία θα μελετήσουμε προβλήματα όπου ο τελεστής A που αναφέραμε παραπάνω αποτελεί παράγωγο (ως προς μία μεταβλητή που θα εξηγήσουμε παρακάτω) του συναρτησιακού I δηλαδή:

$$A[\cdot] = I'[\cdot].$$

Συνεπώς το μη γραμμικό πρόβλημα που θα μελετήσουμε μπορεί να γραφεί τώρα στη μορφή:

$$I'[u] = 0.$$

Η νέα αυτή μορφή του μη γραμμικού προβλήματος μας προσφέρει τώρα το πλεονέκτημα να αναζητήσουμε τις λύσεις του ως κρίσιμα σημεία του συναρτησιακού I σε κάποιον συναρτησιακό χώρο. Παραδείγματος χάριν εάν υποθέσουμε ότι υπάρχει συνάρτηση (στοιχείο συναρτησιακού χώρου) u που να ελαχιστοποιεί το συναρτησιακό I τότε αυτή θα ικανοποιεί την εξίσωση $I'[u] = 0$ άρα και την $A[u] = 0$.[2]

3.1 Πρώτη μεταβολή - Εξισώσεις Euler - Lagrange

Έστω σύνολο $U \subseteq \mathbf{R}^n$ ανοικτό (στη συνήθη τοπολογία του $\mathbf{R}^n$), φραγμένο με $\partial U \in C^\infty$. Δίνεται επίσης μία ομαλή συνάρτηση

$$L : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \times \overline{U} \longrightarrow \mathbf{R}.$$

Η L καλείται Λανγκρανζιανή ή αλλιώς Lagrangian.[2]

Συμβολισμός [2]

Για την ανάπτυξη της θεωρίας που θα ακολουθήσει ειναι απαραίτητο να επισημάνουμε τα εξής:

$$L = L(\vec{p}, z, \vec{x}) = L(p_1, p_2, \dots, p_n, z, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{όπου } \vec{p} \in \mathbf{R}^n, \quad z \in \mathbf{R}, \quad \vec{x} \in U.$$

Επίσης θα συμβολίζουμε:

$$D_pL = \begin{pmatrix} L_{p_1} \\ L_{p_2} \\ . \\ . \\ . \\ L_{p_n} \end{pmatrix}, \qquad D_zL = L_z = \tfrac{\partial L}{\partial z}, \qquad D_xL = \begin{pmatrix} L_{x_1} \\ L_{x_2} \\ . \\ . \\ . \\ L_{x_n} \end{pmatrix},$$

όπου

$$L_t = \frac{\partial L}{\partial t},$$

για $t = p_i, z, x_i \quad i \in \{1, 2, \dots n\}$.

Υποθέτουμε τώρα ότι το συναρτησιακό $I[\cdot\,]$ εκφράζεται με την παρακάτω ολοκληρωτική μορφή:

$$I[w] := \int_U L(Dw(\vec{x}), w(\vec{x}), \vec{x})\ \mathrm{d}x = \int_U L(w_{x_1}, w_{x_2}, \ldots, w_{x_n}, w, x_1, x_2, \ldots, x_n)\ \mathrm{d}x,$$

όπου $w : \overline{U} \longrightarrow \mathbf{R}$ ομαλή η οποία λέμε ότι ικανοποιεί την συνοριακή συνθήκη

$$w = g \quad \text{πάνω στο περίβλημα } \partial U.$$

Υποθέτουμε τώρα ότι $u : \overline{U} \longrightarrow \mathbf{R}$ είναι μία ομαλή συνάρτηση που ικανοποιεί την συνοριακή συνθήκη $u = g$ στο περίβλημα ∂U αλλά επιπλέον αποτελεί και σημείο ελαχίστου για το συναρτησιακό I που θεωρήσαμε πριν. **Τότε αυτή η συνάρτηση θα αποτελεί και μία λύση του μη γραμμικού προβλήματος** $A[w] = 0$ **ή αλλιώς** $I'[w] = 0$**.** [2]

<u>Σημείωση</u>
Αναφέραμε προηγουμένως ότι εν γένη το συναρτησιακό I ορίζεται σε έναν συναρτησιακό χώρο K. Στην προκειμένη περίπτωση ο χώρος αυτός αντιπροσωπεύει όλες εκείνες τις ομαλές συναρτήσεις $w : \overline{U} \longrightarrow \mathbf{R}$ που ικανοποιούν την συνοριακή συνθήκη $w = g$ πάνω στο περίβλημα ∂U.

Συνεχίζοντας την ανάπτυξη της θεωρίας, θεωρηθήσης της συνάρτησης ελαχίστου u ορίζουμε $i : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ μία πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής $\epsilon \in \mathbf{R}$ ως εξής:

$$i(\epsilon) := I[u + \epsilon v] = \int_U L(Du(\vec{x}) + \epsilon Dv(\vec{x}), u(\vec{x}) + \epsilon v(\vec{x}), \vec{x})\ \mathrm{d}x =$$

$$= \int_U L(u_{x_1} + \epsilon v_{x_1}, u_{x_2} + \epsilon v_{x_2}, \ldots, u_{x_n} + \epsilon v_{x_n}, u + \epsilon v, x_1, x_2, \ldots x_n)\ \ \mathrm{d}x \qquad (a)$$

όπου $v \in C_c^{\infty}(U)$.
Εφόσον $v \in C_c^{\infty}(U)$, τότε προφανώς θα ισχύει ότι

$$v|_{\partial U} = 0.$$

Άρα θα ισχύει ότι:

$$u + \epsilon v|_{\partial U} = u|_{\partial U} = g \quad \forall\ \epsilon \in \mathbf{R}.$$

Επίσης βλέπουμε ότι, αφού η u είναι σημείον ελαχίστου για το συναρτησιακό I τότε:

$$i(0) = I[u] \leq I[u + \epsilon v] = i(\epsilon) \quad \forall\ \epsilon \in \mathbf{R}.$$

Απο το παραπάνω και λόγο της ομαλότητος του συναρτησιακού I ως προς την πραγματική μεταβλητή ϵ (λόγο ομαλότητος της Λανγκρανζιανής) και αφού το 0 είναι εσωτερικό σημείον στο $\mathbf{R}$ τότε από το θεώρημα του Fermat για τα ακρότατα συνάρτησης διαπιστώνουμε ότι:

$$i'(0) = 0.$$

Απο την έκφραση της i (α) παραγωγίζουμε ως προς την μεταβλητή ϵ (Η παραγώγιση μπορεί να γίνει λόγο της ομαλότητος της Λανγρανζιανής):

$$i'(\epsilon) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon} \int\limits_U L(u_{x_1} + \epsilon v_{x_1}, u_{x_2} + \epsilon v_{x_2}, \ldots, u_{x_n} + \epsilon v_{x_n}, u + \epsilon v, x_1, x_2, \ldots x_n) \ \mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_U \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon} L(\underbrace{u_{x_1} + \epsilon v_{x_1}}_{p_1}, \underbrace{u_{x_2} + \epsilon v_{x_2}}_{p_2}, \ldots, \underbrace{u_{x_n} + \epsilon v_{x_n}}_{p_n}, \underbrace{u + \epsilon v}_{z}, x_1, x_2, \ldots x_n) \ \mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_U \frac{\partial}{\partial p_1} L(u_{x_1} + \epsilon v_{x_1}, u_{x_2} + \epsilon v_{x_2}, \ldots, u_{x_n} + \epsilon v_{x_n}, u + \epsilon v, x_1, x_2, \ldots x_n) v_{x_1} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial p_2} L(u_{x_1} + \epsilon v_{x_1}, u_{x_2} + \epsilon v_{x_2}, \ldots, u_{x_n} + \epsilon v_{x_n}, u + \epsilon v, x_1, x_2, \ldots x_n) v_{x_2} + \ldots +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial p_n} L(u_{x_1} + \epsilon v_{x_1}, u_{x_2} + \epsilon v_{x_2}, \ldots, u_{x_n} + \epsilon v_{x_n}, u + \epsilon v, x_1, x_2, \ldots x_n) v_{x_n} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z} L(u_{x_1} + \epsilon v_{x_1}, u_{x_2} + \epsilon v_{x_2}, \ldots, u_{x_n} + \epsilon v_{x_n}, u + \epsilon v, x_1, x_2, \ldots x_n) v \ \ \mathrm{d}x = .$$

Γράφοντας τα παραπάνω σε συνεπτυγμένη μορφή έχουμε:

$$i'(\epsilon) = \int\limits_U \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial p_i} L(u_{x_1} + \epsilon v_{x_1}, u_{x_2} + \epsilon v_{x_2}, \ldots, u_{x_n} + \epsilon v_{x_n}, u + \epsilon v, x_1, x_2, \ldots x_n) v_{x_i} +$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\ L(u_{x_1}+\epsilon v_{x_1},u_{x_2}+\epsilon v_{x_2},\ldots,u_{x_n}+\epsilon v_{x_n},u+\epsilon v,x_1,x_2,\ldots x_n)v\ \ \mathrm{d}x.$$

Από την συνθήκη $i'(0)=0$ και την προηγούμενη έκφραση έπεται ότι:

$$\int_U \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial p_i}\, L(u_{x_1},u_{x_2},\ldots,u_{x_n},u,x_1,x_2,\ldots x_n)v_{x_i}+\frac{\partial}{\partial z}\, L(u_{x_1},u_{x_2},\ldots,u_{x_n},u,x_1,x_2,\ldots x_n)v\,\mathrm{d}x=0.$$

Από την υπόθεση η συνάρτηση v έχει συμπαγές στήριγμα στο σύνολο U πράγμα που σημαίνει ότι $v|_{\partial U}=0$. Εφαρμόζοντας λοιπόν την ολοκλήρωση κατά μέρη στο παραπάνω ολοκλήρωμα έχουμε ότι:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\int_U \frac{\partial}{\partial p_i}\, L(\vec{Du},u,\vec{x})\ v_{x_i}\mathrm{d}x\right)+\int_U \frac{\partial}{\partial z}\ \ L(\vec{Du},u,\vec{x})\ v\ \mathrm{d}x=0.\ \ (b)$$

Με παραγώγιση κατά μέρη έχουμε ότι:

$$\int_U \frac{\partial}{\partial p_i}\, L(\vec{Du},u,\vec{x})\ v_{x_i}\mathrm{d}x=\frac{\partial}{\partial p_i}\, L(\vec{Du},u,\vec{x})\ v\Big|_{\partial U}-\int_U \left(\frac{\partial}{\partial p_i}\, L(\vec{Du},u,\vec{x})\right)_{x_i}\ v\ \mathrm{d}x=$$

$$=-\int_U \left(\frac{\partial}{\partial p_i}\, L(\vec{Du},u,\vec{x})\right)_{x_i}\ v\ \mathrm{d}x.\qquad (g)$$

Απο τις (b) και (g) έχουμε ότι:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(-\int_U \left(\frac{\partial}{\partial p_i}\, L(\vec{Du},u,\vec{x})\right)_{x_i}\ v\ \mathrm{d}x\right)+\int_U \frac{\partial}{\partial z}\ \ L(\vec{Du},u,\vec{x})\ v\ \mathrm{d}x=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow-\int_U \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial p_i}\, L(\vec{Du},u,\vec{x})\right)_{x_i}\ v\ \mathrm{d}x+\int_U \frac{\partial}{\partial z}\ \ L(\vec{Du},u,\vec{x})\ v\ \mathrm{d}x=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow-\int_U \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial p_i}\, L(\vec{Du},u,\vec{x})\right)_{x_i}\ +\frac{\partial}{\partial z}\ \ L(\vec{Du},u,\vec{x})\right)v\ \mathrm{d}x=0.\ \ (h)$$

Η (h) ισχύει για κάθε $v \in C_c^\infty(U)$. Τότε έπεται ότι:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial p_i} \ L(\vec{Du}, u, \vec{x}) \right)_{x_i} \ + \ \frac{\partial}{\partial z} \ L(\vec{Du}, u, \vec{x}) = 0 \quad \text{στο } U.} \ \text{(εξίσωση Euler - Lagrange)}$$

[2]

Η παραπάνω μερική διαφορική είσωση είναι δευτέρας τάξεως ημιγραμμική.

Από τα παραπάνω διαπιστώνουμε ότι *εάν μία συνάρτηση u αποτελεί ελάχιστο του συναρτησιακού I τότε θα πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση Euler - Lagrange.* Υπό αυτήν την έννοιαν θα λέγαμε ότι μπορούμε να αναζητούμε λύση της Euler - Lagrange ψάχνοντας σημείο ελαχίστου για το συναρτησιακό I στον χώρο όλων των ομαλών συναρτήσεων που ικανοποιούν την συνοριακή συνθήκη.

3.2 Δεύτερη Μεταβολή

Συνεχίζουμε ακριβώς στην ιδία φιλοσοφία με την ενότητα 3.1 προς την εύρεση της δευτέρας μεταβολής του συναρτησιακού I μέσω του υπολογισμού της δευτέρας παραγώγου της πραγματικής συναρτήσεως $i : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$. Έχουμε λοιπόν:

$$i''(\epsilon) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\ i'(\epsilon) =$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon} \left(\int\limits_U \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial p_i}\ L(u_{x_1} + \epsilon v_{x_1}, u_{x_2} + \epsilon v_{x_2}, \ldots, u_{x_n} + \epsilon v_{x_n}, u + \epsilon v, x_1, x_2, \ldots x_n) v_{x_i} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial z}\ L(u_{x_1} + \epsilon v_{x_1}, u_{x_2} + \epsilon v_{x_2}, \ldots, u_{x_n} + \epsilon v_{x_n}, u + \epsilon v, x_1, x_2, \ldots x_n) v \ \ \mathrm{d}x \right) =$$

$$= \int\limits_U \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial p_i}\ L(u_{x_1} + \epsilon v_{x_1}, u_{x_2} + \epsilon v_{x_2}, \ldots, u_{x_n} + \epsilon v_{x_n}, u + \epsilon v, x_1, x_2, \ldots x_n) v_{x_i} \right) +$$
$$+ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon} \left(\frac{\partial}{\partial z}\ L(u_{x_1} + \epsilon v_{x_1}, u_{x_2} + \epsilon v_{x_2}, \ldots, u_{x_n} + \epsilon v_{x_n}, u + \epsilon v, x_1, x_2, \ldots x_n) v \right) \ \ \mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_U \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon} \left(\frac{\partial}{\partial p_i}\ L(u_{x_1} + \epsilon v_{x_1}, u_{x_2} + \epsilon v_{x_2}, \ldots, u_{x_n} + \epsilon v_{x_n}, u + \epsilon v, x_1, x_2, \ldots x_n) v_{x_i} \right) +$$
$$+ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon} \left(\frac{\partial}{\partial z}\ L(u_{x_1} + \epsilon v_{x_1}, u_{x_2} + \epsilon v_{x_2}, \ldots, u_{x_n} + \epsilon v_{x_n}, u + \epsilon v, x_1, x_2, \ldots x_n) v \right) \ \ \mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_U \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_1} L(u_{x_1} + \epsilon v_{x_1}, u_{x_2} + \epsilon v_{x_2}, \ldots, u_{x_n} + \epsilon v_{x_n}, u + \epsilon v, x_1, x_2, \ldots x_n) v_{x_1} + \right.$$
$$+ \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_2} L(u_{x_1} + \epsilon v_{x_1}, u_{x_2} + \epsilon v_{x_2}, \ldots, u_{x_n} + \epsilon v_{x_n}, u + \epsilon v, x_1, x_2, \ldots x_n) v_{x_2} + \ldots +$$
$$\left. + \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_n} L(u_{x_1} + \epsilon v_{x_1}, u_{x_2} + \epsilon v_{x_2}, \ldots, u_{x_n} + \epsilon v_{x_n}, u + \epsilon v, x_1, x_2, \ldots x_n) v_{x_n} \right) \ v_{x_i} +$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial p_i \partial z} L(u_{x_1}+\epsilon v_{x_1}, u_{x_2}+\epsilon v_{x_2}, \ldots, u_{x_n}+\epsilon v_{x_n}, u+\epsilon v, x_1, x_2, \ldots x_n) v \; v_{x_i} +$$

$$+\left(\frac{\partial^2}{\partial p_1 \partial z} L(u_{x_1}+\epsilon v_{x_1}, u_{x_2}+\epsilon v_{x_2}, \ldots, u_{x_n}+\epsilon v_{x_n}, u+\epsilon v, x_1, x_2, \ldots x_n) v_{x_1} +\right.$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial p_2 \partial z} L(u_{x_1}+\epsilon v_{x_1}, u_{x_2}+\epsilon v_{x_2}, \ldots, u_{x_n}+\epsilon v_{x_n}, u+\epsilon v, x_1, x_2, \ldots x_n) v_{x_2} + \ldots +$$

$$\left.\frac{\partial^2}{\partial p_n \partial z} L(u_{x_1}+\epsilon v_{x_1}, u_{x_2}+\epsilon v_{x_2}, \ldots, u_{x_n}+\epsilon v_{x_n}, u+\epsilon v, x_1, x_2, \ldots x_n) v_{x_n}\right) \; v +$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial z^2} L(u_{x_1}+\epsilon v_{x_1}, u_{x_2}+\epsilon v_{x_2}, \ldots, u_{x_n}+\epsilon v_{x_n}, u+\epsilon v, x_1, x_2, \ldots x_n) v^2 \;\; \mathrm{d}x =$$

$$i''(\epsilon) = \int\limits_U \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j} L(u_{x_1}+\epsilon v_{x_1}, u_{x_2}+\epsilon v_{x_2}, \ldots, u_{x_n}+\epsilon v_{x_n}, u+\epsilon v, x_1, x_2, \ldots x_n) v_{x_i} \; v_{x_j} +$$

$$+2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial z} L(u_{x_1}+\epsilon v_{x_1}, u_{x_2}+\epsilon v_{x_2}, \ldots, u_{x_n}+\epsilon v_{x_n}, u+\epsilon v, x_1, x_2, \ldots x_n) v \; v_{x_i} +$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial z^2} L(u_{x_1}+\epsilon v_{x_1}, u_{x_2}+\epsilon v_{x_2}, \ldots, u_{x_n}+\epsilon v_{x_n}, u+\epsilon v, x_1, x_2, \ldots x_n) v^2 \;\; \mathrm{d}x.$$

Λόγω του ότι το 0 είναι εσωτερικό σημείον στο $\mathbf{R}$, η συνάρτηση $i(\cdot)$ είναι ομαλή στο $\mathbf{R}$ και έχει τοπικό ελάχιστο στο 0 (βλπ. ενότητα 3.1)τότε από το γνωστό Θεώρημα της δεύτερης παραγώγου του Διαφορικού Λογισμού συμπεραίνουμε ότι πρέπει:

$$i''(0) \geq 0.$$

Θέτοντας $\epsilon = 0$ παίρνουμε την εξής έκφραση:

$$i''(0) = \int\limits_U \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j} L(u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n}, u, x_1, x_2, \dots x_n) v_{x_i}\ v_{x_j} +$$

$$+2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial z} L(u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n} + \epsilon v_{x_n}, u, x_1, x_2, \dots x_n) v\ v_{x_i} +$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial z^2} L(u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n}, u, x_1, x_2, \dots x_n) v^2 \ \ \mathrm{d}x.$$

Πιό συνοπτικά γράφουμε:

$$\boxed{\int\limits_U \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j} L(\vec{Du}, u, \vec{x}) v_{x_i}\ v_{x_j} + 2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial z} L(\vec{Du}, u, \vec{x}) v\ v_{x_i} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} L(\vec{Du}, u, \vec{x}) v^2 \ \ \mathrm{d}x \ \geq 0}.$$

Η παραπάνω ανισότητα ισχύει για κάθε συνάρτηση $v \in C_c^\infty(U)$. [2]

Ορίζουμε τώρα μία συνάρτηση $\rho : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ ως εξής:

$$\rho(x) := \begin{cases} x & \text{εάν } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1 - x & \text{εάν } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} .$$

και επιπλέον

$$\rho(x+1) = \rho(x) \qquad \forall \ \ x \in \mathbf{R}.$$

Μπορεί κανείς να δεί άμεσα οτι πρόκειται για μία συνεχή περιοδική συνάρτηση και παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ εκτός απο τις ¨γωνίες' του γραφήματός της δηλαδή το σύνολο $\{.., -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, 1+\frac{1}{2}, 2, ...\}$. Το Σύνολο αυτό είναι αριθμήσιμο και σύμφωνα με τη Θεωρία Μέτρου στο $\mathbf{R}$ το σύνολο αυτό έχει μέτρο μηδέν. Θα λέγαμε λοιπόν ότι:

$$|\rho'(x)| = 1 \qquad \text{σχεδόν παντού στο } \mathbf{R}$$

$$\rho(x) \in [0, \frac{1}{2}] \qquad \forall\ x \in \mathbf{R}.$$

Συνεχίζοντας θεωρούμε τώρα μία συνάρτηση $\zeta \in C_c^\infty(U)$. Έστω τυχαίο άνυσμα $\vec{\xi} \in \mathbf{R}^n$. Ορίζουμε συνάρτηση $v : U \subseteq \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ ως εξής:

$$v(\vec{x}) = v(x_1, x_2, ..., x_n) = \epsilon\, \rho \left(\frac{\vec{x} \cdot \vec{\xi}}{\epsilon} \right) \zeta(\vec{x}) = \epsilon\, \rho \left(\frac{x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + ... + x_n\xi_n}{\epsilon} \right) \zeta(x_1, x_2, .., x_n),$$

όπου

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \in U \qquad \text{και} \qquad \vec{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ . \\ . \\ . \\ \xi_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n.$$

Παρατηρούμε επίσης ότι:

$$v|_{\partial U} = \epsilon\ \rho|_{\partial U}\ \zeta|_{\partial U} \overset{\zeta \in C_c^\infty(U)}{=} 0.$$

Υπολογίζουμε ότι:

$$v_{x_i} = \frac{\partial v}{\partial x_i} = \epsilon\ \rho' \left(\frac{x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + ... + x_n\xi_n}{\epsilon} \right) \frac{\xi_i}{\epsilon}\ \zeta(x_1, x_2, ...x_n) + \epsilon\ \rho \left(\frac{\vec{x}.\vec{\xi}}{\epsilon} \right) \zeta_{x_i}(\vec{x}).$$

Στην περίπτωση που το $\epsilon \longrightarrow 0$ παίρνουμε

$$v_{x_i} = \rho' \left(\frac{x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + ... + x_n\xi_n}{\epsilon} \right) \xi_i\zeta(x_1, x_2, ...x_n) + O(\epsilon).$$

Επίσης έχουμε ότι:

$$|v_{x_i}| = \left| \rho' \left(\frac{\vec{x}.\vec{\xi}}{\epsilon} \right) \xi_i\zeta(x_1, x_2, ...x_n) + \epsilon\ \rho \left(\frac{\vec{x}.\vec{\xi}}{\epsilon} \right) \zeta_{x_i}(\vec{x}) \right| \leq$$

$$\leq \left| \rho' \left(\frac{\vec{x}.\vec{\xi}}{\epsilon} \right) \xi_i\zeta(x_1, x_2, ...x_n) \right| + \left| \epsilon\ \rho \left(\frac{\vec{x}.\vec{\xi}}{\epsilon} \right) \zeta_{x_i}(\vec{x}) \right| \leq$$

$$\leq |\xi_i\zeta(\vec{x})| + \epsilon\ \frac{1}{2}\ |\zeta_{x_i}(\vec{x})| \quad \text{σχεδόν παντού στο } U.$$

Όμως $\zeta \in C_c^{\infty}(U)$ στο φραγμένο υποσύνολο του $U \subseteq \mathbf{R}^n$. Άρα θα είναι και φραγμένη σε αυτό. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι όλες οι μερικές παράγωγοι της v είναι φραγμένες. Συνεπώς η v θα είναι και Lipschitz στο U με την επιπλέον ιδιότητα $v|_{\partial U} = 0$. Σύμφωνα με το [2].

Με αντικαταστάσεις λοιπόν παίρνουμε:

$$\int\limits_U \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j} L(\vec{Du}, u, \vec{x}) \left[\rho' \left(\frac{\vec{x}\cdot\vec{\xi}}{\epsilon}\right) \xi_i \zeta(\vec{x}) + O(\epsilon)\right] \left[\rho' \left(\frac{\vec{x}\cdot\vec{\xi}}{\epsilon}\right) \xi_j \zeta(\vec{x}) + O(\epsilon)\right] +$$

$$+2 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial z} L(\vec{Du}, u, \vec{x}) \left[\epsilon\, \rho \left(\frac{\vec{x}\cdot\vec{\xi}}{\epsilon}\right) \zeta(\vec{x})\right] \left[\rho' \left(\frac{\vec{x}\cdot\vec{\xi}}{\epsilon}\right) \xi_i \zeta(\vec{x}) + O(\epsilon)\right] +$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial z^2} L(\vec{Du}, u, \vec{x}) \left[\epsilon\, \rho \left(\frac{\vec{x}\cdot\vec{\xi}}{\epsilon}\right) \zeta(\vec{x})\right]^2 \mathrm{d}x \ \geq 0.$$

Θέτοντας τώρα $\epsilon \longrightarrow 0$ με $O(\epsilon) \longrightarrow 0$ παίρνουμε την ανισότητα:

$$\int\limits_U \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j} L(\vec{Du}, u, \vec{x}) \rho' \left(\frac{\vec{x}\cdot\vec{\xi}}{\epsilon}\right)^2 \xi_i\ \xi_j \zeta(\vec{x})^2\ \mathrm{d}x \geq 0 \ \ \forall\ \zeta \in C_c^{\infty}(U).$$

Καταλήγουμε λοιπόν στην παρακάτω χρήσιμη ανισότητα:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j} L(\vec{Du}, u, \vec{x}) \rho' \left(\frac{\vec{x}\cdot\vec{\xi}}{\epsilon}\right)^2 \xi_i\ \xi_j \geq 0.}$$

για $\vec{\xi} \in \mathbf{R}^n$ και $\vec{x} \in U \subseteq \mathbf{R}^n$. [2]

3.3 Ύπαρξη τοπικού ελαχίστου για το συναρτησιακό $I[\cdot]$

Στην ενότητα αυτήν θα ασχοληθούμε με ορισμένες συνθήκες που πρέπει να ικανοποιεί η Λανγκρανζιανή L ώστε το συναρτησιακό $I[\cdot]$ να έχει σημείον ελαχίστου (και κατ΄ επέκταση το μη γραμμικό πρόβλημα $A[u] = 0$) πάνω σε έναν κατάλληλο χώρο Sobolev.

Ξεκινούμε με το πρόβλημα του ελέγχου. Δοθέντως του συναρτησιακού:

$$I : K \longrightarrow \mathbf{R},$$

$$I[w] = \int_U L(w_{x_1}(\vec{x}), w_{x_2}(\vec{x}), ..., w_{x_n}(\vec{x}), w(\vec{x}), \vec{x}) \ \mathrm{d}x \quad \text{με} \ \ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \in U \subseteq \mathbf{R}^n,$$

όπου K είναι συναρτησιακός χώρος που περιέχει ¨κατάλληλες' συναρτήσεις $w : U \subseteq \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ που ικανοποιούν την συνοριακή συνθήκη

$$w|_{\partial U} = 0$$

ζητείται σημείον ελαχίστου στον χώρο αυτό. [2]

Πιεστικότητα [2]

Φιξάρουμε έναν αριθμό q με

$$1 < q < +\infty.$$

Έστω επίσης οτι υπάρχουν σταθερές $\alpha > 0$ και $\beta \geq 0$ τέτοιες ώστε:

$$L(\vec{p}, z, \vec{x}) = L(p_1, p_2, ..., p_n, z, x_1, x_2, ..., x_n) \geq \ \alpha(p_1^2 + p_2^2 + ... + p_n^2)^{\frac{q}{2}} - \beta$$

για κάθε

$$\vec{p} \in \mathbf{R}^n, \quad z \in \mathbf{R}, \quad \vec{x} \in U \subseteq \mathbf{R}^n.$$

Τότε απο τα παραπάνω έπεται ότι:

$$I[w] = \int\limits_U L(w_{x_1}(\vec{x}), w_{x_2}(\vec{x}), ..., w_{x_n}(\vec{x}), w(\vec{x}), \vec{x})\ \mathrm{d}x\ \geq$$

$$\geq \int\limits_U \alpha\ \left(w_{x_1}(\vec{x})^2 + w_{x_1}(\vec{x})^2 + ... + w_{x_1}(\vec{x})^2\right)^{\frac{q}{2}} - \beta\ \mathrm{d}x =$$

$$= \alpha \int\limits_U \left\|\vec{\nabla} w\right\|_2^q\ \mathrm{d}x - \beta \int\limits_U\ \mathrm{d}x =$$

$$= \alpha\ \left[\left(\int\limits_U \left\|\vec{\nabla} w\right\|_2^q\ \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}\right]^q - \beta\cdot\ m(U) \overset{[2]\ \text{σελ. } 702\ (v)}{=} \alpha\ \left\|\vec{\nabla} w\right\|_{L^q(U)}^q - \beta\cdot\ m(U).$$

Διαπιστώνουμε λοιπόν ότι:

$$\boxed{I[w] \geq \alpha\ \left\|\vec{\nabla} w\right\|_{L^q(U)}^q - \beta\cdot\ m(U).}$$

Η παραπάνω σχέση ονομάζεται *πιεστική συνθήκη για το συναρτησιακό* $I[\cdot]$.

Στη θέα αυτής της πιεστικής συνθήκης θα μπορούσαμε να επιλέξουμε τον χώρο K που ορίζεται το συναρτησιακό $I[]$ ως το σύνολο όλων εκείνων των συναρτήσεων που (όχι μονο είναι ομαλές στο U) βρίσκονται μέσα στον χώρο Sobolev [1] $W^{1,\ q}(U)$ που ικανοποιούν την συνοριακή συνθήκη $w|_{\partial U} = 0$. Ο κύριος λόγος αυτής της επιλογής είναι ουσιαστικά η παρουσία στη συνθήκη πιεστικότητας της νόρμας $\left\|\vec{\nabla} w\right\|_{L^q(U)} < +\infty$ η οποία θα είναι πεπερασμένη ποσότητα εφόσον εξασφαλίζεται τόσο η παραουσία των $u_{x_i}\ \ \forall\ \ i \in \{1, 2, ..., n\}$ όσο και το ότι $\|u_{x_i}\|_{L^q(U)} < +\infty$ δηλαδή $u_{x_i} \in L^q(U)$. Συνοπτικά θα γράφαμε:

$$K := \left\{w \in W^{1,\ q}(U)\ : w|_{\partial U} = g\ \ \right\}.$$

[1] $W^{1,\ q}(U) = \left\{u \in L^1_{loc}(U) : \exists\ u_{x_i}\ \forall\ \ i \in \{1, 2, ..., n\}\right.$ υπό την ασθενή έννοια και $\left. u_{x_i} \in L^q(U)\right\}$

Κάτω ημισυνέχεια - ασθενής σύγκλιση [2]

Θέτουμε:

$$m := inf\{I[w] : w \in K\}.$$

Θεωρούμε ακολουθία $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ ώστε $u_k \in K \ \ \forall\ k \in \mathbf{N}$ τέτοια ώστε:

$$I[u_k] \xrightarrow{k\longrightarrow+\infty} m.$$

Μια ακολουθία σαν αυτή θα καλείται *minimizing ακολουθία.*

Ορισμός 3.1. *Έστω X χώρος Banach, $(u_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset X$ και $u \in X$. Θα λέμε ότι η ακολουθία $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ συγκλίνει ασθενώς στο $u \in X$ και γράφουμε:*

$$u_k \rightharpoonup u \iff \forall\ u^* \in X^* \quad \Longrightarrow < u^*, u_k > \stackrel{|\cdot|}{\to} < u^*, u > .$$

Σημαντικά αποτελέσματα *(για περισσότερες λεπτομέρειες ο αναγνωστής μπορεί να δει το [1] σελ. 51)*

Έστω X χώρος Banach, $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ και $u \in X$. Τότε:

1. Εάν $u_k \longrightarrow u \Longrightarrow u_k \rightharpoonup u$
2. Εάν $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ είναι ασθενώς συγκλίνουσα στον X τότε είναι και φραγμένη στον χώρο αυτό.
3. $u_k \rightharpoonup u \implies \|u\|_X \leq \lim_{k\to\infty} \inf \|u_k\|_X .$
4. Εάν X είναι αυτοπαθής χώρος Banach και $(u_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset X$ φραγμένη στον X τότε υπάρχει υπακολουθία $(u_{k_j})_{j\in\mathbf{N}} \subset (u_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset X$ τέτοια ώστε $u_{k_j} \rightharpoonup u$ όπου $u \in X$.

Συμπάγεια [2]

Ορισμός 3.2. *Έστω X, Y χώροι Banach ώστε $X \subset Y$. Λέμε ότι ο X είναι συμπαγώς ενσφηνωμένος στον Y και θα γράφουμε $X \subset\subset Y$ όταν και μόνον όταν ισχύουν τα παρακάτω:*

1. $\|u\|_Y \le C \ \|u\|_X \quad \forall\ u \in X$ *και*
2. *Εάν $(u_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset X$ φραγμένη στον X, δηλαδή $\sup\limits_{k\in\mathbf{N}} \|u_k\|_X < +\infty$ τότε υπάρχει υπακολουθία $(u_{k_j})_{j\in\mathbf{N}} \subset (u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ τέτοια ώστε*

$$u_{k_j} \xrightarrow{\|\cdot\|_Y} u$$

όπου $u \in Y$.

Θεώρημα 3.1 (Relich - Kondrachov)**.** *[2] Έστω $U \subseteq \mathbf{R}^n$ ανοιχτό, φραγμένο με $\partial U \in C^1$. Υποθέτουμε επίσης ότι $1 \le p < n$. Τότε*

$$W^{1,\,p}(U) \subset\subset L^q(U) \quad \forall\ 1 \le q < \frac{pn}{n-p}.$$

Απόδειξη. [2] □

Ορισμός 3.3. *[2] Έστω $I[\cdot\,]$ συναρτησιακό τέτοιο ώστε $I : K \subseteq W^{1,\,q}(U) \longrightarrow \mathbf{R}$. Θα λέμε ότι το συναρτησιακό αυτό είναι ασθενώς κάτω ημισυνεχές όταν και μόνον όταν για κάθε ακολουθία $(u_k)_{k\in\mathbf{N}} \subseteq W^{1,\,q}(U)$ που συγκλίνει ασθενώς στο $u \in W^{1,\,q}(U)$ στον $W^{1,\,q}(U)$ δηλαδή $u_k \rightharpoonup u$ συνεπάγεται ότι*

$$I[u] \le \lim_{k\to+\infty} \inf I[u_k].$$

Θεώρημα 3.2 (Κάτω ασθενούς ημισυνέχειας)**.** *[2] Υποθέτουμε ότι η Λανγκρανζιανή $L = L(\vec{p}, z, \vec{x})$ είναι ομαλή κάτω φραγμένη και κυρτή ως προς το όρισμά της $\vec{p} \in \mathbf{R}^n$ για κάθε $z \in \mathbf{R}$ και $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$. Τότε η απεικόνιση $I[\cdot\,]$ είναι ασθενώς κάτω ημισυνεχής στον χώρο $W^{1,\,q}(U)$. δηλαδή*

$$\forall\ (u_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset W^{1,\,q}(U)\ : u_k \rightharpoonup u \in W^{1,\,q}(U) \implies I[u] \le \lim_{k\to+\infty} \inf\ I[u_k].$$

Απόδειξη. [2] σελ.446 - 447 □

Θεώρημα 3.3 (Ύπαρξη ελαχίστου). *[2] Έστω ότι υπάρχουν σταθερές* $\alpha > 0, \ \ \beta \geq 0$ *και* $1 < q < \infty$ *τέτοιες ώστε να ισχύει:*

$$L(\vec{p}, z, \vec{x}) \geq \alpha|\vec{p}|^q - \beta \qquad \forall \ \vec{p} \in \mathbb{R}^n, \ z \in \mathbb{R}, \ \ x \ \in U.$$

Έστω επίσης ότι η Λανγκρανζιανή είναι κυρτή ως προς την μεταβλητή $\vec{p}$ *και το σύνολο* K *είναι μη κενό. Τότε υπάρχει τουλάχιστον μία συνάρτηση* $u \in A$ *που λύνει το πρόβλημα:*

$$I[u] = \min_{w \in A} I[w].$$

Απόδειξη. [2] σελ. 448 - 449 □

Θεώρημα 3.4 (Μοναδικότητα ελαχίστου). *[2] Υποθέτουμε ότι:*

1. *η Λανγκρανζιανή* $L = L(\vec{p}, \vec{x})$ *δεν εξαρτάται απο το* z*,*
2. *υπάρχει σταθερά* $\theta > 0$ *τέτοια ώστε:*

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} L_{p_i p_j}(\vec{p}, \vec{x}) \ \xi_i \ \xi_j \geq \theta \ |\vec{\xi}|^2 \qquad \vec{p}, \ \ \vec{\xi} \in \mathbb{R}^n.$$

Τότε εάν υπάρχει ελάχιστο $u \in A$ *του συναρτησιακού* $I[\cdot]$*, θα είναι μοναδικό.*

Απόδειξη. [2] σελ. 449 □

3.4 Ασθενείς λύσεις της εξίσωσης Euler - Lagrange

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε τα βασικά θεωρήματα και τις συνθήκες που πρέπει να πληρεί η Λανγκρανζιανή L ώστε κάθε συνάρτηση $u \in K$, όπου:

$$K = \{w \in W^{1,q}(u) \;\mid\; w|_{\partial U} = g\},$$

είναι θέση ελαχίστου για το συναρτησιακό $I[\cdot]$, είναι ασθενής λύση της Euler - Lagrange.

Έστω πρόβλημα συνοριακών τιμών με μη γραμμική εξίσωση Euler - Lagrange:

$$\begin{cases} -\sum\limits_{i=1}^{n} (L_{p_i}(\nabla u, u, x))_{x_i} + L_z(\nabla u, u, x) = 0 & \text{στο } U \\ u = 0, & \text{στο } \partial U. \end{cases} \tag{10}$$

Ορισμός 3.4. *[2] Μία συνάρτηση $u \in K$ είναι ασθενής λύση του συνοριακού προβλήματος (10) Euler - Lagrange όταν και μόνο όταν ισχύει ότι:*

$$\int_U \sum_{i=1}^{n} L_{p_i}(\nabla u, u, x)\; v_{x_i} + L_z(\nabla u, u, x) = 0 \quad \forall\; v \in W_0^{1,q}(U).$$

Θεώρημα 3.5. *[2] Έστω $1 < q < +\infty$. Υποθέτουμε επίσης ότι η Λανγκρανζιανή L ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:*

1. $|L(p, z, x)| \leq C\;(|p|^q + |z|^q + 1)$,
2. $|\nabla_p L(p, z, x)| \leq C\;(|p|^{q-1} + |z|^{q-1} + 1)$,
3. $|\nabla_z L(p, z, x)| \leq C\;(|p|^{q-1} + |z|^{q-1} + 1)$,

για κάθε $p \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}$ και $x \in U$. Εάν μία συνάρτηση $u \in K$ και ικανοποιεί την σχέση:

$$I[u] = \min_{w \in K}\; I[w],$$

τότε είναι ασθενής λύση του συνοριακού προβλήματος (10).

Απόδειξη. [2] σελ. 451 □

4 Μέθοδος Galerkin σε ημιγραμμικό ελλειπτικό πρόβλημα

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε και θα εφαρμόσουμε την μέθοδο του Galerkin για το παρακάτω ημιγραμμικό πρόβλημα:

$$\left.\begin{array}{ll} -\Delta u + u^3 = f & \text{στο } U \\ u = 0, & \text{στο } \partial U \end{array}\right\}$$

όπου $f \in H^{-1}$.

Υποθέτουμε ότι, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό και φραγμένο με $n = 3$ καθώς επίσης και ότι $\partial U \in C^1$.

Βάση των Θεωρημάτων 1 και 2 της ενότητας 6.5.1. (σελ. 334 - 340) [2], θεωρούμε μια βάση $\{w_k\}_{k=1}^{+\infty}$ με $w_k \in H_0^1(U) \ \ \forall \ k \in \mathbb{N}$, με τις παρακάτω ιδιότητες:

1. Η βάση $\{w_k\}_{k=1}^{+\infty}$ είναι ορθογώνια στον $H_0^1(U)$ ως προς το εσωτερικό γινόμενο

   $$((u,v)) := \int_U \nabla u \ \cdot \nabla v \ \mathrm{d}x,$$

   με άμεσα επαγόμενη νόρμα την

   $$((u,u)) = \int_U |\nabla u|^2 \mathrm{d}x = \|\nabla u\|^2_{L^2(U)}.$$

   .

2. Η βάση $\{w_k\}_{k=1}^{+\infty}$ είναι ορθομοναδιαία στον $L^2(U)$ ως προς το εσωτερικό γινόμενο

   $$(u,v) := \int_U u \ \cdot v \ \mathrm{d}x,$$

   με άμεσα επαγόμενη νόρμα την

   $$(u,u) = \int_U u^2 \ \mathrm{d}x = \|u\|^2_{L^2(U)}.$$

Έστω $m \in \mathbb{N}$. Τότε ορίζουμε συνάρτηση

$$u_m := \sum_{k=1}^{m} d_m^k w_k \ \ \text{όπου} \ \ d_m^k \in \mathbb{R} \ \ \forall \ k \ \in \{1, 2, ...m\}.$$

Προφανώς η u_m είναι στοιχείο του χώρου $H_0^1(U)$ ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων της προαναφερθείσας βάσης του.
Έστω τώρα $v \in H_0^1(U)$. Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τη συνάρτηση αυτή στην υπό μελέτη διαφορική εξίσωση και ολοκληρώνουμε κατά μέλη στο ανοικτό και φραγμένο χωρίο U. Τότε θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
& & -\Delta u \ v + u^3 \ v = f \ v & \qquad \Longrightarrow \\
\Longrightarrow & & \int_U -\Delta u \ v + u^3 \ v\mathrm{d}x = \int_U f \ v\mathrm{d}x & \qquad \Longrightarrow \\
\Longrightarrow & & -\cancelto{0}{\sum_{k=1}^{n} u_{x_k} \ v \Big|_{\partial U}} + \int_U \nabla u \cdot \nabla v + u^3 \ v \ \mathrm{d}x = \int_U f \ v \ \mathrm{d}x & \qquad \Longrightarrow
\end{aligned}$$

Καταλήγουμε λοιπόν στην ασθενή ολοκληρωτική μορφή του ημιγραμμικού προβλήματος:

$$\boxed{\int_U \nabla u \cdot \nabla v + u^3 \ v \ \mathrm{d}x = \int_U f \ v \ \mathrm{d}x \qquad u, v \in H_0^1(U).}$$

όπου u η υποψήφια λύση και v τυχαία συνάρτηση του $H_0^1(U)$.

Βήμα 1ο

Αναζητούμε $u \in H_0^1(U)$ της μορφής

$$u_m := \sum_{k=1}^{m} d_m^k w_k \ \ \text{όπου} \ \ d_m^k \in \mathbb{R} \ \ \forall \ k \ \in \{1, 2, ...m\}.$$

Συνεπώς αναζητούμε $d_m^k \in \mathbb{R}$ για $k = 1, 2, \cdots m$ ώστε να ισχύει ότι:

$$\int_U \nabla \left(\sum_{k=1}^{m} d_m^k \ w_k \right) \cdot \nabla v \ \mathrm{d}x + \int_U \left(\sum_{k=1}^{m} d_m^k \ \nabla w_k \right)^3 \cdot v \ \mathrm{d}x = \int_U f \ v \ \mathrm{d}x, \quad \forall \ v \in H_0^1(U).$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση διαδοχικά $v = w_k$ για $k = 1, 2, \cdots, m$ καταλήγουμε στο παρακάτω σύστημα:

$$\begin{cases} \int\limits_U \nabla\left(\sum\limits_{k=1}^{m} d_m^k\ w_k\right)\cdot\nabla w_1 + \left(\sum\limits_{k=1}^{m} d_m^k\ w_k\right)^3\ w_1\ \mathrm{d}x = \int\limits_U\ f\ w_1\ \mathrm{d}x \\ \int\limits_U \nabla\left(\sum\limits_{k=1}^{m} d_m^k\ w_k\right)\cdot\nabla w_2 + \left(\sum\limits_{k=1}^{m} d_m^k\ w_k\right)^3\ w_2\ \mathrm{d}x = \int\limits_U\ f\ w_2\ \mathrm{d}x \\ \vdots \\ \int\limits_U \nabla\left(\sum\limits_{k=1}^{m} d_m^k\ w_k\right)\cdot\nabla w_m + \left(\sum\limits_{k=1}^{m} d_m^k\ w_k\right)^3\ w_m\ \mathrm{d}x = \int\limits_U\ f\ w_m\ \mathrm{d}x. \end{cases}$$

Το d_k^m είναι ανεξάρτητο του x συνεπώς:

$$\begin{cases} \int\limits_U \left[\left(\sum\limits_{k=1}^{m} d_m^k\ \nabla w_k\right)\cdot\nabla w_1 + \left(\sum\limits_{k=1}^{m} d_m^k\ w_k\right)^3\ w_1\ \right]\mathrm{d}x = \int\limits_U\ f\ w_1\ \mathrm{d}x \\ \int\limits_U \left[\left(\sum\limits_{k=1}^{m} d_m^k\ \nabla w_k\right)\cdot\nabla w_2 + \left(\sum\limits_{k=1}^{m} d_m^k\ w_k\right)^3\ w_2\ \right]\mathrm{d}x = \int\limits_U\ f\ w_2\ \mathrm{d}x \\ \vdots \\ \int\limits_U \left[\left(\sum\limits_{k=1}^{m} d_m^k\ \nabla w_k\right)\cdot\nabla w_m + \left(\sum\limits_{k=1}^{m} d_m^k\ w_k\right)^3\ w_m\ \right]\mathrm{d}x = \int\limits_U\ f\ w_m\ \mathrm{d}x. \end{cases}$$

Λόγω ορθογωνιότητας ως προς το εσωτερικό γινόμενο $((\cdot,\cdot))$ έχουμε ότι:

$$\int\limits_U \left(\sum_{i=1}^{m} d_m^i\ \nabla w_i\right)\cdot\nabla w_k\,\mathrm{d}x = \int\limits_U\ \sum_{i=1}^{m} d_m^i\ (\nabla w_i\cdot\nabla w_k)\ \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{m} d_m^i\ \int\limits_U\ \nabla w_i\cdot\nabla w_k\,\mathrm{d}x =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} d_m^i\ ((w_i, w_k)) = d_m^k\cdot\lambda_k \quad \forall\ \ k\in\{1,2,\cdots,m\}.$$

Όπου $\lambda_k > 0$ είναι οι ιδιοτιμές του διαφορικού τελεστή $-\Delta$ που αντιστοιχούν στις ιδιοσυναρτήσεις w_k με την ιδιότητα $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_m$. (βλπ. Θεώρημα 1 σελ. 335 του [2])

Συνεπώς καταλήγουμε:

$$\begin{cases} \lambda_1 \ d_m^1 + \int\limits_U \ \left(\sum\limits_{k=1}^{m} \ d_m^k \ w_k \right)^3 \ w_1 \ \mathrm{d}x = \int\limits_U \ f \ w_1 \ \mathrm{d}x \\ \lambda_2 \ d_m^2 + \int\limits_U \ \left(\sum\limits_{k=1}^{m} \ d_m^k \ w_k \right)^3 \ w_2 \ \mathrm{d}x = \int\limits_U \ f \ w_2 \ \mathrm{d}x \\ \vdots \\ \lambda_m \ d_m^m + \int\limits_U \ \left(\sum\limits_{k=1}^{m} \ d_m^k \ w_k \right)^3 \ w_m \ \mathrm{d}x = \int\limits_U \ f \ w_m \ \mathrm{d}x. \end{cases}$$

Καταλήγουμε λοιπον, σε ένα μη γραμμικό αλγεβρικό σύστημα m εξισώσεων με άγνωστο άνυσμα $(d_m^1, d_m^2, ..., d_m^m) \in \mathbb{R}^m$.

Στο σημείο αυτό θα προσπαθήσουμε να αποδείξουμε ότι το παραπάνω σύστημα έχει λύση σε κάποιον μετρικό χώρο $X \subset \mathbb{R}^m$. Για το σκοπό αυτό θα χρησιμοποιήσουμε το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 4.1 (Zeros of vector field)**.** *Έστω*

$$\boldsymbol{A} : \mathbb{R}^m \longmapsto \mathbb{R}^m$$

απεικόνιση που ικανοποιεί την συνθήκη:

$$\boldsymbol{A}(x)^T \cdot \ x \geq 0,$$

εάν $\|x\| = r, \quad x \in \mathbb{R}^n$, *για κάποιο* $r > 0$. *Τότε υπάρχει* $x_0 \in B(0, r)$ *τέτοιο ώστε*

$$\boldsymbol{A}(x_0) = 0.$$

Απόδειξη. [2] □

Ορίζουμε μία απεικόνιση

$$\mathbf{A} : \mathbb{R}^m \longmapsto \mathbb{R}^m$$

ως εξής:

$$\mathbf{A}(\vec{d}) = \begin{pmatrix} A_1(\vec{d}) \\ A_2(\vec{d}) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A_m(\vec{d}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \ d_m^1 + \int\limits_U \left(\sum\limits_{k=1}^m \ d_m^k w_k \right)^3 \ w_1 \ \mathrm{d}x - \int\limits_U \ f \ w_1 \ \mathrm{d}x \\ \lambda_2 \ d_m^2 + \int\limits_U \left(\sum\limits_{k=1}^m \ d_m^k w_k \right)^3 \ w_2 \ \mathrm{d}x - \int\limits_U \ f \ w_2 \ \mathrm{d}x \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda_m \ d_m^m + \int\limits_U \left(\sum\limits_{k=1}^m \ d_m^k w_k \right)^3 \ w_m \ \mathrm{d}x - \int\limits_U \ f \ w_m \ \mathrm{d}x \end{pmatrix}$$

όπου $\vec{d} = (d_m^1, d_m^2, ..., d_m^m)$.
Έχουμε λοιπόν:

$$\vec{d}^{\,T} \cdot \mathbf{A}(\vec{d}) \ = \begin{pmatrix} d_m^1 \\ d_m^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ d_m^m \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \ d_m^1 + \int\limits_U \left(\sum\limits_{k=1}^m \ d_m^k w_k \right)^3 \ w_1 \ \mathrm{d}x - \int\limits_U \ f \ w_1 \ \mathrm{d}x \\ \lambda_2 \ d_m^2 + \int\limits_U \left(\sum\limits_{k=1}^m \ d_m^k w_k \right)^3 \ w_2 \ \mathrm{d}x - \int\limits_U \ f \ w_2 \ \mathrm{d}x \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda_m d_m^m + \int\limits_U \left(\sum\limits_{k=1}^m \ d_m^k w_k \right)^3 \ w_m \ \mathrm{d}x - \int\limits_U \ f \ w_m \ \mathrm{d}x \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda_1 \ (d_m^1)^2 + \lambda_2 \ (d_m^2)^2 + \cdots + \lambda_m \ (d_m^m)^2 + \int\limits_U \left(\underbrace{\sum_{k=1}^m \ d_m^k w_k}_{u_m} \right)^4 \ \mathrm{d}x - \int\limits_U \ f \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^m \ d_m^k \ w_k}_{u_m} \ \mathrm{d}x \geq$$

$$\geq \lambda_1 \left\| \ \vec{d} \ \right\|_2^2 + \int\limits_U \ (u_m)^4 \ \mathrm{d}x \ - \int\limits_U \ f \cdot u_m \ \mathrm{d}x =$$

$$= \lambda_1 \left\| \ \vec{d} \ \right\|_2^2 + \|u_m\|_{L^4(U)}^4 - < f, u_m > \ \geq \ \lambda_1 \left\| \ \vec{d} \ \right\|_2^2 + \|u_m\|_{L^4(U)}^4 - \|f\|_{H^{-1}} \cdot \|u_m\|_{H_0^1(U)} \, . \quad (1)$$

Απο την γενικευμένη ανισότητα του Hölder για $\dfrac{1}{p_1}+\dfrac{1}{p_2}+\dfrac{1}{p_3}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}=1$ και $u_1=u,\quad u_2=u,\quad u_3=1$ έχουμε ότι:

$$\int\limits_U u\cdot u\cdot\ 1\ \mathrm{d}x \le \|u\|_{L^4(U)}\ \cdot\|u\|_{L^4(U)}\ \|1\|_{L^2(U)}\cdot$$

Συνεπώς θα έχουμε ότι:

$$\int\limits_U u^2\ \mathrm{d}x \le m(U)\cdot\|u\|^2_{L^4(U)}$$

$$\|u\|^2_{L^2(U)} \le m(U)\cdot\|u\|^2_{L^4(U)}$$

$$\|u\|_{L^2(U)} \le \sqrt{m(U)}\cdot\|u\|_{L^4(U)}\cdot\quad (2)$$

Από την ορθοκανονικότητα των ιδιοσυναρτήσεων της βάσης στον $L^2(U)$ προκύπτει ότι:

$$\|u_m\|^2_{L^2(U)}=(u_m,u_m)=\left(\sum_{i=1}^m\ d_m^i\ w_i,\ \sum_{j=1}^m\ d_m^j\ w_j\right)=\left\|\vec{d}\right\|_2^2.\quad (3)$$

Επίσης από την ορθογωνιότητα των ιδιοσυναρτήσεων ως προς το εσωτερικό γινόμενο $((\cdot,\cdot))$ έπεται ότι:

$$\|u_m\|^2_{H_0^1(U)}=(u_m,u_m)+((u_m,u_m))=\left\|\vec{d}\right\|_2^2+\lambda_1\ (d_m^1)^2+\lambda_2\ (d_m^1)^2+\cdots+\lambda_m\ (d_m^m)^2=$$

$$=(1+\lambda_1)\ (d_m^1)^2+(1+\lambda_2)\ (d_m^2)^2+\cdots+(1+\lambda_m)\ (d_m^m)^2\le(1+\lambda_m\ )\ \left\|\vec{d}\right\|_2^2.\quad (4)$$

Απο (1), (2), (3) και (4) έχουμε ότι:

$$(1)\ \underbrace{\ge}_{\epsilon-\text{ανισότητα του Cauchy}}\ \lambda_1\ \left\|\vec{d}\right\|_2^2+\left(\frac{1}{m(U)}\right)^4\cdot\|u_m\|^4_{L^2(U)}-\frac{\|f\|^2_{H^{-1}}}{4\ \epsilon}-\epsilon\ \|u_m\|^2_{H_0^1(U)}$$

$$\ge\lambda_1\ \left\|\vec{d}\right\|_2^2+\left(\frac{1}{m(U)}\right)^4\cdot\left\|\vec{d}\right\|_2^4-\frac{\|f\|^2_{H^{-1}}}{4\ \epsilon}-\epsilon\ \|u_m\|^2_{H_0^1(U)}$$

$$\ge\lambda_1\ \left\|\vec{d}\right\|_2^2+\left(\frac{1}{m(U)}\right)^4\cdot\left\|\vec{d}\right\|_2^4-\frac{\|f\|^2_{H^{-1}}}{4\epsilon}-\epsilon\ (\lambda_m+1)\ \left\|\vec{d}\right\|_2\ge$$

$$\geq \left[\lambda_1 - \epsilon\ (\lambda_m + 1)\right]\ \left\|\vec{d}\right\|_2^2 + \left(\frac{1}{m(U)}\right)^4 \cdot \left\|\vec{d}\right\|_2^4 - \frac{\|f\|_{H^{-1}}^2}{4\epsilon}$$

$$\underbrace{=}_{\epsilon=\dfrac{\lambda_1}{\lambda_m+1}} \left(\frac{1}{m(U)}\right)^4 \cdot \left\|\vec{d}\right\|_2^4 - \frac{\lambda_m + 1}{4\lambda_1}\,\|f\|_{H^{-1}}^2\,.$$

Από τα παραπάνω έπεται ότι για κάθε άνυσμα $\vec{d} \in \mathbb{R}^n$ που βρίσκεται στο εσωτερικό της ανοικτής σφαίρας με κέντρο το $0_{\mathbb{R}^n}$ και ακτίνα

$$r = \left(\frac{\lambda_m + 1}{4\lambda_1}\right)^{1/4} \cdot m(U) \cdot \sqrt{\|f\|_{H^{-1}}}$$

ικανοποιεί το παραπάνω Λήμμα.

Βήμα 2ο

Στο Βήμα 1 αποδείξαμε ότι $\forall\ m \in \mathbb{N}$ υπάρχουν $\{d_m^k \in \mathbb{R} | k = 1, 2, ..., m\}$ τέτοια ώστε να ικανοποιούν το σύστημα:

$$\begin{cases} \int\limits_U \nabla u_m \cdot \nabla w_1 + u_m^3\ w_1\ \mathrm{d}x = \int\limits_U\ f\ w_1\ \mathrm{d}x \\ \int\limits_U \nabla u_m \cdot \nabla w_2 + u_m^3\ w_2\ \mathrm{d}x = \int\limits_U\ f\ w_2\ \mathrm{d}x \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \int\limits_U \nabla u_m \cdot \nabla w_m + u_m^3\ w_m\ \mathrm{d}x = \int\limits_U\ f\ w_m\ \mathrm{d}x. \end{cases}$$

Απο το παραπάνω προκύπτει:

$$\begin{cases} \int\limits_U \nabla u_m \cdot \nabla d_m^1\ w_1 + u_m^3\ d_m^1 w_1\ \mathrm{d}x = \int\limits_U\ f\ d_m^1 w_1\ \mathrm{d}x \\ \int\limits_U \nabla u_m \cdot \nabla d_m^2 w_2 + u_m^3\ d_m^2 w_2\ \mathrm{d}x = \int\limits_U\ f\ d_m^2 w_2\ \mathrm{d}x \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \int\limits_U \nabla u_m \cdot \nabla d_m^m w_m + u_m^3\ d_m^m w_m\ \mathrm{d}x = \int\limits_U\ f\ d_m^m w_m\ \mathrm{d}x. \end{cases}$$

Αθροίζουμε κατά μέλη τις εξισώσεις του συστήματος και λαμβάνουμε:

$$\int\limits_U |\nabla u_m|^2\ \mathrm{d}x + \int\limits_U u_m^4\ \mathrm{d}x = \int\limits_U f\ u_m\ \mathrm{d}x$$

ή αλλιώς:

$$\|\nabla u_m\|^2_{L^2(U)} + \|u_m\|^4_{L^4(U)} = \int\limits_U f\ u_m\ \mathrm{d}x. \qquad (5)$$

Για το συγκεκριμένο πρόβλημα, όπου $n = 3,\ \ p = 2,\ \ p^* = \dfrac{2 \cdot 3}{3 - 2} = 6$ με εφαρμογή της Poincare έπεται ότι:

$$\|u\|_{L^2(U)} \leq C_p\ \ \|\nabla u\|_{L^2(U)}\,,$$

όπου $C_p > 0$ η σταθερά Poincare. Επίσης:

$$\|u\|^2_{H_0^1(U)} = \|u\|^2_{L^2(U)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(U)} \leq (C_p^2 + 1)\ \ \|\nabla u\|^2_{L^2(U)}\,. \qquad (6)$$

Απο (5) και (6) προκύπτει ότι:

$$\frac{1}{C_p^2+1}\ \|u_m\|^2_{H_0^1(U)}+\|u_m\|^4_{L^4(U)} = < f, u_m > \leq \|f\|_{H^{-1}}\ \|u_m\|_{H_0^1(U)} \leq \frac{1}{4\epsilon}\ \|f\|^2_{H^{-1}}+\epsilon\,\|f\|^2_{H^{-1}}\,.$$

Από το 1ο και το τελευταίο σκέλος της παραπάνω ανισότητας προκύπτει:

$$\frac{1}{C_p^2+1}\ \|u_m\|^2_{H_0^1(U)} - \epsilon\,\|u_m\|^2_{H_0^1(U)} + \|u_m\|^4_{L^4(U)} \leq \frac{1}{4\epsilon}\ \|f\|^2_{H^{-1}}$$

$$\left(\frac{1}{C_p^2+1}-\epsilon\right)\ \|u_m\|^2_{H_0^1(U)} + \|u_m\|^4_{L^4(U)}\ \leq \frac{1}{4\epsilon}\ \|f\|^2_{H^{-1}}\,.$$

Για $\epsilon = \dfrac{1}{4(C_p^2+1)}$ πέρνουμε:

$$\frac{3}{4(C_p^2+1)}\ \|u_m\|^2_{H_0^1(U)}+\frac{3}{4(C_p^2+1)}\ \|u_m\|^4_{L^4(U)} \leq \left(\frac{1}{C_p^2+1}-\epsilon\right)\ \|u_m\|^2_{H_0^1(U)}+\|u_m\|^4_{L^4(U)} \leq$$

$$\leq (1+C_p^2)\ \ \|f\|^2_{H^{-1}}\,.$$

Τέλος προκύπτει ότι:

$$\boxed{\|u_m\|^2_{H_0^1(U)} + \|u_m\|^4_{L^4(U)} \leq \frac{4}{3}\ (1+C_p^2)^2\,\|f\|^2_{H^{-1}} \qquad \forall\ \ m\in\mathbb{N}.} \quad (7)$$

Βήμα 3ο

Από το Βήμα 2ο διαπιστώνουμε εύκολα ότι η ακολουθία $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη στον $H_0^1(U)$. Λόγω του ότι $H_0^1(U) \subset\subset L^2(U)$, θα υπάρχει υπακολουθία $(u_{m_j})_{j\in\mathbb{N}} \subset (u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε:

$$u_{m_j} \rightharpoonup u \text{ στον } H_0^1(U)$$

και

$$u_{m_j} \longrightarrow u \text{ στον } L^2(U).$$

Ορίζω τον τελεστή

$$T : H_0^1(U) \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$Tu := \int_U\ \nabla u\cdot\nabla w_k\ \mathrm{d}x \qquad \forall\ v\in H_0^1(U).$$

Ο τελεστής T είναι προφανώς γραμμικός (λόγω διγραμμικής μορφής βλ. κεφάλαιο 2) αλλά και φραγμένος στον χώρο $H_0^1(U)$. Πράγματι:

$$|Tu| = \left| \int\limits_U \nabla u \cdot \nabla w_k \, \mathrm{d}x \right| \leq |((u, w_k))| \leq \|u\| \underbrace{\|w_k\|}_{=\lambda_k} \leq \lambda_k \|u\| = \lambda_k \|\nabla u\|_{L^2(U)} \leq c \|u\|_{H_0^1(U)} .$$

Άρα λόγω της ασθενούς σύγκλισης θα ισχύει ότι:

$$Tu_{m_j} = \int\limits_U \nabla u_{m_j} \cdot \nabla w_k \, \mathrm{d}x \longrightarrow \int\limits_U \nabla u \cdot \nabla w_k \, \mathrm{d}x = Tu \quad \forall\ k = 1, 2, 3, ...$$

Παρατηρούμε από την (7) ότι η υπακολουθία (u_{m_j}) είναι φραγμένη. Εφόσον $H_0^1(U) \subset\subset L^3(U)$ τότε θα υπάρχει υπακολουθία $(u_{m_{j_l}})_{l\in\mathbb{N}}$ και $\overline{u} \in H_0^1(U)$ ώστε:

$$u_{m_{j_l}} \rightharpoonup \overline{u} \text{ στον } H_0^1(U)$$

και

$$u_{m_{j_l}} \longrightarrow \overline{u} \text{ στον } L^3(U). \quad (8)$$

Είναι προφανές ότι, εφόσον $u_{m_j} \rightharpoonup u$ στον $H_0^1(U)$ τότε $u_{m_{j_l}} \rightharpoonup u$ στον $H_0^1(U)$. Λόγω μοναδικότητας του ορίου θα έπεται ότι: $u = \overline{u}$. (9)

$$\int\limits_U (u_{m_{j_l}}^3 - u^3)\, w_k \, \mathrm{d}x = \int\limits_U (u_{m_{j_l}} - u)\, (u_{m_{j_l}}^2 + u_{m_{j_l}}\, u + u^2)\, w_k \, \mathrm{d}x \quad \underbrace{\leq}_{\text{Holder ανισότητα}}$$

$$\leq \left\| u_{m_{j_l}} - u \right\|_{L^3(U)} \left\| u_{m_{j_l}}^2 + u_{m_{j_l}}\, u + u^2 \right\|_{L^3(U)} \|w_k\|_{L^3(U)} \quad \underbrace{\leq}_{\text{Minkowski ανισότητα}}$$

$$\leq \left\| u_{m_{j_l}} - u \right\|_{L^3(U)} \cdot \left(\left\| u_{m_{j_l}}^2 \right\|_{L^3(U)} + \left\| u_{m_{j_l}}\, u \right\|_{L^3(U)} + \left\| u^2 \right\|_{L^3(U)} \right) \cdot \|w_k\|_{L^3(U)} . \quad (1'')$$

Έχουμε επιπλέον ότι:

$$\left\| u^2 \right\|_{L^3(U)} = \left(\int\limits_U u^6 \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{3}} = \left[\left(\int\limits_U u^6 \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{6}} \right]^2 = \|u\|_{L^6(U)}^2$$

καθώς επίσης και

$$\|u\ v\|_{L^3(U)} = \left(\int\limits_U u^3\ v^3\ \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{3}} \underbrace{\leq}_{\text{Holder ανισότητα}} \|u\|_{L^6(U)} \cdot \|v\|_{L^6(U)} \,.$$

Συνεπώς απο $(1'')$ έχουμε:

$$\leq \left\|u_{m_{j_l}} - u\right\|_{L^3(U)} \cdot \left(\left\|u_{m_{j_l}}\right\|^2_{L^6(U)} + \left\|u_{m_{j_l}}\right\|_{L^6(U)}\ \|u\|_{L^6(U)} + \|u\|^2_{L^6(U)}\right) \cdot \|w_k\|_{L^3(U)} \,. \quad (2'')$$

Λόγω του ότι, $H_0^1(U) \subset L^6(U)$ θα υπάρχει $J \geq 0$ ώστε:

$$\|u_m\|_{L^6(U)} \leq J\ \|u_m\|_{H_0^1(U)} \underbrace{\leq}_{\text{Βήμα 2ο}} J\ \frac{2}{\sqrt{3}}\ (1 + C_p^2)\ \|\ f\|_{H^{-1}} = E$$

καθώς επίσης και:

$$\|u\|_{L^6(U)} \leq J\ \|u\|_{H_0^1(U)} = M.$$

Από την $(2'')$ θα έχουμε:

$$\int\limits_U (u^3_{m_{j_l}} - u^3)\ w_k\ \mathrm{d}x \leq \left\|u_{m_{j_l}} - u\right\|_{L^3(U)} \cdot \underbrace{(K^2 + K\ M + M^2) \cdot E}_{G \geq 0} = G\ \left\|u_{m_{j_l}} - u\right\|_{L^3(U)} .$$

Συνεπώς από (8)+(9) θα έχουμε:

$$\int\limits_U (u^3_{m_{j_l}} - u^3)\ w_k\ \mathrm{d}x \leq G\ \left\|u_{m_{j_l}} - u\right\|_{L^3(U)} \longrightarrow 0$$

ή αλλιώς

$$\int\limits_U u^3_{m_{j_l}}\ w_k\ \mathrm{d}x \longrightarrow \int\limits_U u^3\ w_k\ \mathrm{d}x\ \ \forall\ k = 1, 2, 3, ... \quad (A)$$

Επίσης από πριν έχουμε:

$$\int\limits_U \nabla u_{m_{j_l}} \cdot \nabla w_k\ \mathrm{d}x \longrightarrow \int\limits_U \nabla u \cdot \nabla w_k\ \mathrm{d}x\ \ \forall\ k = 1, 2, 3, ... \quad (B)$$

Απο (A)+(B) προκύπτει:

$$\lim_{l \longrightarrow \infty} \int\limits_U \nabla u_{m_{j_l}} \cdot \nabla w_k\ \mathrm{d}x + \int\limits_U u^3_{m_{j_l}}\ w_k\ \mathrm{d}x = \lim_{l \longrightarrow \infty} \int\limits_U f\ w_k\ \mathrm{d}x$$

$$\int_U \nabla u \cdot \nabla w_k \ \mathrm{d}x + \int_U u^3 \ w_k \ \mathrm{d}x = \int_U f \ w_k \ \mathrm{d}x \qquad \forall \ k = 1, 2, 3, ...$$

Συνεπώς θα ισχύει ότι θα υπάρχει $u \in H_0^1(U)$ που να επαληθεύει την ολοκληρωτική μορφή του ημιγραμμικού ελλειπτικού προβλήματος:

$$\boxed{\int_U \nabla u \cdot \nabla v \ \mathrm{d}x + \int_U u^3 \ v \ \mathrm{d}x = \int_U f \ v \ \mathrm{d}x \quad \forall \ v \in H_0^1(U)}.$$

Βήμα 4ο

Στο τελευταίο βήμα της μεθόδου του Galekrin θα δείξουμε ότι η ασθενής λύση του προβλήματος είναι μοναδική.

Έστω λοιπόν $u, \overline{u} \in H_0^1(U)$ δύο λύσεις του ελλειπτικού προβλήματος. Τότε από το συμπέρασμα του Βήματος 3 προκύπτει:

$$\int_U \nabla\overline{u} \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x + \int_U \overline{u}^3 \, v \, \mathrm{d}x = \int_U \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x + \int_U u^3 \, v \, \mathrm{d}x$$

$$\int_U \nabla(\overline{u} - u) \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x + \int_U (\overline{u}^3 - u^3) \, v \, \mathrm{d}x = 0 \qquad \forall \, v \in H_0^1(U).$$

Εφόσον $H_0^1(U)$ διανυσματικός χώρος επιλέγω $v := \overline{u} - u$. Τότε προκύπτει από την προηγούμενη εξίσωση ότι:

$$\int_U |\nabla(\overline{u} - u)|^2 \, \mathrm{d}x + \int_U (\overline{u} - u)^2 \, (\overline{u}^2 + \overline{u} \, u + u^2) \, \mathrm{d}x = 0$$

ισοδύναμα έχουμε ότι:

$$\|\nabla(\overline{u} - u)\|^2_{L^2(U)} + \int_U (\overline{u} - u)^2 \, (\overline{u}^2 + \overline{u} \, u + u^2) \, \mathrm{d}x = 0. \quad (6'')$$

Έχουμε επίσης ότι:

$$u^2 + u\overline{u} + \overline{u}^2 \geqslant \frac{1}{2} \, (u^2 + \overline{u}^2).$$

Απο ανισότητα Poincare προκύπτει ότι:

$$\|\overline{u} - u\|^2_{L^2(U)} \leq Y^2 \, \|\nabla(\overline{u} - u)\|^2_{L^2(U)} \leq Y^2 \, \|\nabla(\overline{u} - u)\|^2_{L^2(U)} + Y^2 \, \frac{1}{2} \int_U (u^2 + \overline{u}^2)(\overline{u} - u)^2 \mathrm{d}x \leq$$

$$\leq Y^2 \, \|\nabla(\overline{u} - u)\|^2_{L^2(U)} + Y^2 \int_U (\overline{u} - u)^2 \, (\overline{u}^2 + \overline{u} \, u + u^2) \, \mathrm{d}x = 0.$$

Απο τα παραπάνω διαπιστώνουμε ότι:

$$\|\overline{u} - u\|_{L^2(U)} = 0$$

και

$$\|\nabla(\overline{u} - u)\|_{L^2(U)} = 0.$$

Είναι άμεσο από τον ορισμό της νόρμας του Sobolev ότι:

$$\|\overline{u} - u\|^2_{H^1_0(U)} = \|\overline{u} - u\|^2_{L^2(U)} + \|\nabla(\overline{u} - u)\|^2_{L^2(U)} = 0 + 0 = 0.$$

Καταλήγουμε λοιπόν στο ότι:

$$u = \overline{u} \quad \text{σχεδόν παντού στον } H^1_0(U).$$

5 Ύπαρξη λύσης μέσω της εξίσωσης Euler - Lagrange

Στο κεφάλαιο αυτό θα προσπαθήσουμε να δείξουμε την ύπαρξη λύσης του ημιγραμμικού ελλειπτικού προβλήματος που παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο 4 μέσω της θεωρίας του Λογιμού των Μεταβολών που παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 3.

Θεωρούμε το ημιγραμμικό ελλειπτικό πρόβλημα:

$$\left.\begin{array}{ll} -\Delta u + u^3 = f & \text{στο } U \\ u = 0, & \text{στο } \ \partial U \end{array}\right\}$$

όπου $f \in H^{-1}$.

Υποθέτουμε ότι, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό και φραγμένο με $n = 3$ καθώς επίσης και ότι $\partial U \in C^1$.

Ορίζουμε το συναρτησιακό:

$$I : H_0^1(U) \longrightarrow \mathbb{R}$$

ως εξής:

$$I[u] := \int\limits_U \ \frac{1}{2} \cdot |\nabla u|^2 + \frac{1}{4}\ u^4 - f \cdot u \ \mathrm{d}x.$$

Θα αναζητήσω συνάρτηση $u \in H_0^1(U)$, που να ελαχιστοποιεί το παραπάνω συναρτησιακό. Θεωρώ συνάρτηση μιας μεταβλητής

$$i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad i(\tau) := I[u + \tau v] \quad v \in H_0^1(U).$$

Θεωρώντας ότι η u ελαχιστοποιεί το συναρτησιακό τότε θα ισχύει ότι:

$$i(\tau) := I[u + \tau v] \geq I[u] = i(0).$$

Συνεπώς θα πρέπει να ισχύει ότι:

$$\left.\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}\tau}\right|_{\tau=0} = 0.$$

Από τον ορισμό της παραγώγου έπεται ότι:

$$i'(0) = \lim_{\tau \longrightarrow 0} \frac{i(\tau) - i(0)}{\tau} = \lim_{\tau \longrightarrow 0} \frac{I[u+\tau v] - I[u]}{\tau} =$$

$$= \lim_{\tau \longrightarrow 0} \frac{\int\limits_U \frac{1}{2} \, |\nabla u + \tau \ \nabla v|^2 + \frac{1}{4} \, (u+\tau v)^4 - f \cdot u - \tau f \cdot v \ \mathrm{d}x - \int\limits_U \frac{1}{2} \cdot |\nabla u|^2 + \frac{1}{4} \ u^4 - f \cdot u \ \mathrm{d}x}{\tau} =$$

$$= \lim_{\tau \longrightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \int\limits_U \ |\nabla u|^2 + \tau^2 |\nabla v|^2 + 2\tau \nabla u \cdot \nabla v \ - |\nabla u|^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{4} \int\limits_U (u+\tau v)^4 - u^4 \ \mathrm{d}x - \int\limits_U \tau f v \ \mathrm{d}x}{\tau} =$$

$$= \lim_{\tau \longrightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \int\limits_U \ \tau^2 |\nabla v|^2 + 2\tau \nabla u \cdot \nabla v \ \mathrm{d}x + \frac{1}{4} \int\limits_U [(u+\tau v)^2 - u^2] \cdot [(u+\tau v)^2 + u^2] \ \mathrm{d}x - \int\limits_U \tau f v \ \mathrm{d}x}{\tau} =$$

$$= \lim_{\tau \longrightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \int\limits_U \ \tau^2 |\nabla v|^2 + 2\tau \nabla u \cdot \nabla v \ \mathrm{d}x + \frac{1}{4} \int\limits_U [2\tau u v + \tau^2 v^2] \cdot [2u^2 + 2u\tau v + \tau^2 v^2] \ \mathrm{d}x - \int\limits_U \tau f v \ \mathrm{d}x}{\tau} =$$

$$= \lim_{\tau \longrightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \int\limits_U \ \tau^2 |\nabla v|^2 + 2\tau \nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}x + \frac{1}{4} \int\limits_U 4\tau u^3 v + 6\tau^2 u^2 v^2 + 2\tau^3 u v^3 + 2u\tau^3 v^3 + \tau^4 v^4 - \tau f v \mathrm{d}x}{\tau} =$$

$$= \lim_{\tau \longrightarrow 0} \frac{1}{2} \int\limits_U \ \tau |\nabla v|^2 + 2\nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}x + \frac{1}{4} \int\limits_U 4u^3 v + 6\tau u^2 v^2 + 2\tau^2 u v^3 + 2u\tau^2 v^3 + \tau^3 v^4 - f v \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_U \ 2\nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}x + \frac{1}{4} \int\limits_U 4u^3 v - f v \ \mathrm{d}x = \boxed{\int\limits_U \ \nabla u \cdot \nabla v + u^3 \ v - f \ v \ \mathrm{d}x = 0} \quad \forall \, v \in H_0^1(U).$$

Η παραπάνω εξίσωση αποτελεί την ασθενή ολοκληρωτική μορφή του ημιγραμμικού ελλειπτικού προβλήματος, όπως αυτή περιγράφηκε στο Κεφάλαιο 4, ενώ ταυτόχρονα αποτελεί και την εξίσωση Euler - Lagrange που αντιστοιχεί στο συναρτησιακό I.

Στο σημείο αυτό είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι εάν η υποψήφια συνάρτηση $u \in H_0^1(U)$ είναι σημείο ελαχίστου για το συναρτησιακό $I[\cdot]$ τότε αυτόματα αποτελεί και ασθενή λύση για το συνοριακό πρόβλημα με εξίσωση την Euler - Lagrange, που στην προκειμένη περίπτωση είναι το υπό μελέτη ημιγραμμικό ελλειπτικό πρόβλημα, ([2] σελ. 433.) εάν ισχύουν οι ανισοτικές σχέσεις του Θεωρήματος 3.5 που παρατέθηκε στο Κεφάλαιο 3.

Συνεπώς η εύρεση ασθενούς λύσης για το ημιγραμμικό πρόβλημα, μέσω της συγκεκριμένης μεθόδου, προυποθέτει εύρεση θέσεως ελαχίστου στην κλάση K (βλ. Κεφάλαιο 3) για το συναρτησιακό $I[\cdot]$.

Αναφορές

[1] Haim Brezis, *Συναρτησιακή Ανάλυση, Θεωρία και Εφαρμογές,* Πανεπιστημιακές εκδόσεις Ε.Μ.Π., Αθήνα 1997.

[2] Lawrence C. Evans, *Partial Differential Equations,* American Mathematical Society, Rhode Island Second Edition 2010.

[3] Αργυρός Σπυρίδων, Σημειώσεις Παραδόσεων Συναρτησιακής Ανάλυσης, Αθήνα, Δεύτερη Έκδοση, 2004.

[4] Αργυρός Σπυρίδων, Σημειώσεις Παραδόσεων Πραγματικής Ανάλυσης, Αθήνα, Τρίτη Έκδοση, 2011.

[5] Σαραντόπουλος Ιωάννης, Μια εισαγωγή στη Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωση, Αθήνα, 2018.