

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΧΗΜΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΙΙ: ΑΝΑΛΥΣΗΣ, ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΚΑΙ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΔΙΕΡΓΑΣΙΩΝ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ



Διπλωματική Εργασία
ΒΙΡΓΙΝΙΑ ΑΤΣΑΛΑΚΗ

**ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΧΩΡΟΥ ΛΥΣΕΩΝ
ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ
ΜΑΓΝΗΤΟ-ΥΔΡΟΣΤΑΤΙΚΗΣ**

Επιβλέπων Καθηγητής
ΑΝΔΡΕΑΣ Γ. ΜΠΟΥΝΤΟΥΒΗΣ

ΑΘΗΝΑ 2019

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε υπό την επίβλεψη του Καθηγητή κ. Ανδρέα Μπουντουβή στη Σχολή Χημικών Μηχανικών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον επιβλέποντα Καθηγητή κ. Α.Μπουντουβή για την πολύτιμη βοήθεια και τις συμβουλές του. Ένα μεγάλο ευχαριστώ θα ήθελα να πω στον Δρ Α.Σπυρόπουλο για την υπομονή του και την αμέριστη βοήθεια του καθ' όλη την διάρκεια της πραγματοποίησης της εργασίας. Ήταν πάντα διαθέσιμος για εύστοχες παρατηρήσεις και καθοριστική καθοδήγηση. Τους ευχαριστώ και τους δυο για τις πολύτιμες γνώσεις που μου έδωσαν.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Το αντικείμενο μελέτης αυτής της διπλωματικής εργασίας είναι η διερεύνηση του χώρου λύσεων μη γραμμικού προβλήματος, το οποίο περιγράφει την παραμόρφωση της ελεύθερης επιφάνειας ενός ρηχού στρώματος μαγνητικού ρευστού σε κυλινδρικό δοχείο μικρής ακτίνας όταν ασκείται σε αυτό κατακόρυφο μαγνητικό πεδίο.

Τα μαγνητικά ρευστά (γνωστά και ως ferrofluids) είναι συνθετικά κολλοειδή τα οποία λόγω της σύστασής τους όταν βρεθούν μέσα σε μαγνητικό πεδίο παρουσιάζουν μαγνητική πόλωση. Αρχικά, όσο αυξάνεται η ένταση του μαγνητικού πεδίου, η ελεύθερη επιφάνεια του ρευστού παραμένει περίπου επίπεδη και στη συνέχεια όταν η ένταση του πεδίου φτάσει και ξεπεράσει μια κρίσιμη τιμή η ελεύθερη επιφάνεια παραμορφώνεται και παρατηρούνται διάφορα μοτίβα. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται αστάθεια κάθετου πεδίου και μελετήθηκε πρώτα από τους Martin Cowley και Ronald Rosensweig (1967) . Οι αστάθειες προκαλούνται από τον ανταγωνισμό μεταξύ των μαγνητικών δυνάμεων, της επιφανειακής τάσης και της βαρύτητας.

Η επίλυση των εξισώσεων του μαθηματικού μοντέλου που περιγράφει το φυσικό πρόβλημα πραγματοποιείται υπολογιστικά με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων (finite elements) σε συνδυασμό με τη μέθοδο των σταθμισμένων υπολοίπων Galerkin και την επανάληψη Newton.

Η διερεύνηση του χώρου λύσεων γίνεται μεταβάλλοντας κάποιες από τις παραμέτρους του προβλήματος με βηματισμό. Συγκεκριμένα μεταβάλλουμε την ακτίνα (R) και το βάθος (D) του δοχείου, που περιέχει το μαγνητικό ρευστό, και την γωνία επαφής του ρευστού με τα τοιχώματα του δοχείου (θ_c). Κάθε φορά

υπολογίζεται μια οικογένεια λύσεων που αναπαρίσταται σε ένα διάγραμμα. Μια οικογένεια λύσεων προκύπτει από βηματισμό της έντασης του μαγνητικού πεδίου, που αποτελεί μια βασική παράμετρο του προβλήματος, ενώ οι υπόλοιπες παράμετροι παραμένουν σταθερές. Για τον βηματισμό της παραμέτρου χρησιμοποιείται βηματισμός μηδενικής τάξης και η μέθοδος μήκους τόξου (arc-length continuation).

Διερευνώνται μόνο αξονοσυμμετρικές παραμορφώσεις που παρουσιάζονται σε μικρό δοχείο όταν ασκηθεί ένταση μαγνητικού πεδίου από 0 μέχρι 300 Gauss. Οι παραμορφώσεις που παρατηρούμε είναι τύπου δακτυλίου και μιας κορυφής.

Στην παρούσα διπλωματική υπολογίζεται η κρίσιμη ακτίνα, για την οποία μεταβαίνουμε από λύσεις με παραμόρφωση μιας κορυφής σε παραμόρφωση τύπου δακτυλίου. Για δοχείο με κρίσιμη ακτίνα και κοντά σε αυτή εξετάζεται η συνύπαρξη λύσης κορυφής και δακτυλίου.

Επιπλέον, υπολογίζονται οι οικογένειες λύσεων για τις εξής τιμές των παραμέτρων : Για $\theta_c = 10^\circ$, $D=10$ mm, $R=14$ mm και $R=16$ mm για $B=[0, 200]$ Gauss. Για $\theta_c = 10^\circ$, $D=10$ mm, $R=17.5$ mm και $R=[18,22]$ mm για $B=[0, 300]$ Gauss. Για $R=18$ mm, $D=10$ mm και $\theta_c = [10^\circ-170^\circ]$ για $B=[0, 300]$ Gauss. Για $R=18$ mm, $\theta_c = 10^\circ$ και $D = [8,15]$ mm για $B=[0, 300]$ Gauss.

Τελικά διαπιστώθηκε ότι για ορισμένες τιμές των παραμέτρων συνυπάρχουν λύσεις κορυφής και τύπου δακτυλίου. Συγκεκριμένα πρόκειται για τα σετ παραμέτρων: (1) $\theta_c = 10^\circ$, $D=10$ mm και $R=17.5$ mm, (2) $\theta_c = [10^\circ-40^\circ]$, $D=10$ mm και $R=18$ mm, (3) $\theta_c = 10^\circ$, $D=[8,10]$ mm και $R=18$ mm

ABSTRACT

The topic of this thesis is the investigation of the solution space of a nonlinear problem, which describes the free surface distortion of a ferrofluid in a cylindrical pool of small diameter and depth when a vertical magnetic field is applied.

Ferrofluids (magnetic fluids) are synthetic colloids which, due to their composition when they are in a magnetic field, exhibit magnetic polarization. Initially, as the intensity of the magnetic field increases, the interface of the fluid remains approximately flat and then when the magnetic field strength reaches and exceeds threshold the free surface turns unstable and various patterns are observed. This phenomenon is called normal field instability and was first studied by Martin Cowley and Ronald Rosensweig (1967). Normal field instabilities result from force competition: magnetic forces, surface tension and gravity.

The equations representing the physical problem are solved by computational methods: Finite elements basis functions, Galerkin's method of weighted residuals and Newton iterations.

The solution space investigation is achieved by parametric continuation of the radius and depth of the pool containing the ferrofluid along with the contact angle of the ferrofluid with the side walls. Each time a family of solutions is plotted on a diagram. A solution space results from magnetic field continuation while the other parameters remain stable. Parametric continuation is accomplished by zero order continuation and arc-length continuation.

We investigate axisymmetric deformations formed in a small pool when magnetic field up to 300 Gauss is applied. The patterns observed are of ring- type or with one spike.

In this thesis, we calculate the critical radius, for which we go from solutions with a spike deformation to a ring deformation. For the pool with a critical radius and the one close to it, the coexistence of a spike and ring solution is examined.

Moreover, the solution space for the following parameter values is calculated: For $\theta_c=10^\circ$, $D=10$ mm, $R=14$ mm and $R=16$ mm for $B=[0, 200]$ Gauss. For $\theta_c=10^\circ$, $D=10$ mm, $R=17.5$ mm and $R=[18,22]$ mm for $B=[0, 300]$ Gauss. For $R=18$ mm, $D=10$ mm and $\theta_c=[10^\circ-170^\circ]$ for $B=[0, 300]$ Gauss. For $R=18$ mm, $\theta_c=10^\circ$ and $D=[8,15]$ mm for $B=[0, 300]$ Gauss.

Finally, it was found that for some parameter values, spike and ring solutions co-exist. These set of parameters are: (1) $\theta_c = 10^\circ$, $D = 10$ mm and $R = 17,5$ mm, (2) $\theta_c = [10^\circ,40^\circ]$, $D = 10$ mm and $R = 18$ mm, (3) $\theta_c = 10^\circ$, $D = [8,10]$ mm and $R = 18$ mm.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ	
ΠΕΡΙΛΗΨΗ.....	
ABSTRACT	
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ	
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1-ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	1
1.1 Μαγνητικά ρευστά (ferrofluids)	1
1.2 Εφαρμογές μαγνητικών ρευστών	2
1.3 Αστάθεια κάθετου μαγνητικού πεδίου (ή αστάθεια Rosensweig).....	3
1.3.1 Φυσική ερμηνεία αστάθειας κάθετου πεδίου	4
1.3.2 Κρίσιμη τιμή μαγνητικής επαγωγής	6
1.3.3 Φαινόμενο υστέρησης.....	6
1.4 Παραμορφώσεις επιφάνειας.....	7
1.4.1 Σχηματιζόμενες παραμορφώσεις	8
1.4.2 Μηχανισμός επιλογής παραμόρφωσης	9
1.4.3 Μαθηματική περιγραφή	11
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2- ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ.....	14
2.1 Το φυσικό σύστημα	14
2.2 Μαγνητο-υδροστατική ισορροπία των μαγνητικών ρευστών	15
2.2.1 Εξισώσεις μαγνητοστατικού πεδίου	16
2.2.2 Επauξημένη εξίσωση Young–Laplace	18
2.2.3 Εξίσωση διατήρησης όγκου	189

2.2.4 Συνοριακές συνθήκες.....	19
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3- ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ	22
3.1 Προβλήματα συνοριακών τιμών	23
3.2 Πεπερασμένα στοιχεία	24
3.3 Σταθμισμένα υπόλοιπα Galerkin	25
3.4 Μέθοδος Newton.....	28
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4- ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΧΩΡΟΥ ΛΥΣΕΩΝ.....	30
4.1 Βηματισμός παραμέτρων	31
4.1.1 Βηματισμός μηδενικής τάξης.....	31
4.1.2 Βηματισμός μήκους τόξου	31
4.2 Ευστάθεια των λύσεων	34
4.3 Ιδιάζοντα σημεία	35
4.4 Ατελείς διακλαδώσεις.....	36
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5- ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ.....	39
5.1 Εισαγωγή.....	39
5.2 Διερεύνηση χώρου λύσεων για δοχεία ακτίνας 14mm έως 22 mm	41
5.2.1 Διερεύνηση χωρου λύσεων για δοχεία ακτίνας 14, 16, 18 mm.....	41
5.2.2 Εντοπισμός κρίσιμης ακτίνας	43
5.2.3 Διερεύνηση χώρου λύσεων για δοχείο ακτίνας 17.5 mm.....	43
5.2.4 Διερεύνηση χώρου λύσεων για δοχείο ακτίνας 18 mm	46
5.2.5 Διερεύνηση χώρου λύσεων για δοχεία ακτίνας 18.5mm-22 mm	49
5.3 Διερεύνηση χώρου λύσεων για δοχεία βάθους 8 έως 15 mm	50
5.3.1 Διερεύνηση χώρου λύσεων για δοχεία βάθους 11mm-15 mm	50
5.3.2 Διερεύνηση χώρου λύσεων για δοχείο βάθους 8 mm.....	50
5.4 Διερεύνηση χώρου λύσεων για γωνίες επαφής 10° έως 170°	52
5.4.1 Διερεύνηση χώρου λύσεων για γωνίες επαφής 90°, 95°, 85°	52
5.4.2 Διερεύνηση χώρου λύσεων για γωνίες επαφής από 10° έως 170°	53
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....	56
ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ	59
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	61

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται αναφορά στα μαγνητικά ρευστά, τι είναι, ποιες είναι οι ιδιότητές τους και τι εφαρμογές έχουν. Στη συνέχεια περιγράφεται το φαινόμενο αστάθειας κάθετου μαγνητικού πεδίου και αναλύονται οι παραμορφώσεις της ελεύθερης επιφάνειας που προκύπτουν λόγω του φαινομένου.

1.1 Μαγνητικά ρευστά (ferrofluids)

Τα μαγνητικά ρευστά (γνωστά και ως ferrofluids) είναι συνθετικά κολλοειδή ρευστά, τα οποία, λόγω της σύστασής τους, όταν βρεθούν μέσα σε μαγνητικό πεδίο παρουσιάζουν μαγνητική πόλωση.

Τα μαγνητικά ρευστά παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον λόγω της αλληλεπίδρασης μεταξύ των υδροδυναμικών και μαγνητικών φαινομένων. Συνδυάζουν τις ιδιότητες των ρευστών (ασυμπίεστοτητα και συνεχή παραμόρφωση στην επιβολή οσοδήποτε μικρής διατμητικής τάσης) με τις μαγνητικές ιδιότητες των στερεών. Συμπεριφέρονται σαν ομογενή μέσα που μαγνητίζονται με ιδιότητες ρευστών ακόμα και στα πιο ισχυρά μαγνητικά πεδία (Rosensweig, 2004). Ως μαγνητικά σωματίδια, τα

οποία είναι υπεύθυνα για τις μαγνητικές ιδιότητες, χρησιμοποιούνται μαγνητικά νανοσωματίδια (5-10 nm), όπως οξειδία του σιδήρου (α - Fe_2O_3 , Fe_3O_4), ο σίδηρος ή το κοβάλτιο. Ως ρευστός φορέας, που είναι υπεύθυνος για τις μηχανικές και χημικές ιδιότητες χρησιμοποιείται πολικό ή μη πολικό ρευστό συνήθως το νερό ή υδρογονάνθρακες (Genc & Derin, 2014). Στην επιφάνεια των μαγνητικών σωματιδίων είναι απορροφημένα μακρομόρια ουσιών που εμποδίζουν την καθίζηση και τη συσσωμάτωση τους.

Η σύνθεση και η συστηματική έρευνα των ιδιοτήτων των μαγνητικών ρευστών ξεκίνησε το 1960 (Rosensweig 1965, Pappel 1965). Δημιουργήθηκαν, τυχαία στα πλαίσια άλλων πειραμάτων, στις ΗΠΑ, τουλάχιστον τρεις φορές το 1960. Η πιο γνωστή προσπάθεια είναι αυτή του Pappel (1965) στην NASA στην προσπάθεια του να ελέγξει το ρευστό καύσιμο των πυραύλων στις συνθήκες έλλειψης βαρύτητας του διαστήματος.

Η πρωτοποριακή έρευνα που χρηματοδοτήθηκε από την NASA, υπό την τεχνική ηγεσία του Ron Rosensweig, οδήγησε στην ανάπτυξη μιας μεγάλης ποικιλίας πρώιμων μαγνητικών υγρών για εμπορική χρήση.(Pappel, 1965)

1.2 Εφαρμογές μαγνητικών ρευστών

Τα μαγνητικά ρευστά έχουν έντονη παρουσία σε ιατρικές εφαρμογές. Οι πρώτες ιατρικές εφαρμογές προτάθηκαν στις αρχές της δεκαετίας του 70. Τα τελευταία χρόνια έχουν αποδειχθεί χρήσιμα σε διάφορες τεχνολογικές και βιοϊατρικές εφαρμογές, ενώ το περιθώριο ανάπτυξης νέων εφαρμογών είναι μεγάλο (Raj et al.1990, Bayat et al. 2009, Trahms 2009). Στις διάφορες εφαρμογές είτε εφαρμόζεται μαγνητικό πεδίο στα βιομαγνητικά ρευστά, είτε προστίθενται μαγνητικά σωματίδια σε ρευστό το οποίο στη συνέχεια καθοδηγείται με την βοήθεια μαγνητικού πεδίου. Μια εφαρμογή αποτελεί η μεταφορά φαρμακευτικών ουσιών (Y.-L. Liu, Chen, Shang, & Yin, 2019) στο ανθρώπινο σώμα με τη βοήθεια μαγνητικού ρευστού (magnetic drug-targeting) το οποίο καθοδηγείται από μαγνητικό πεδίο και χρησιμοποιείται ως φορέας του φαρμάκου, στοχεύοντας κυρίως θρόμβους αίματος (Torchilin, 1995) ή καρκινικά κύτταρα (J. Liu, Flores, & Sheng, 2001). Το πλεονέκτημα της μεθόδου είναι η τοπική

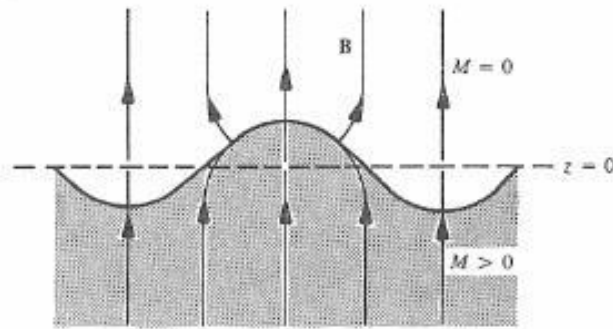
δράση του φαρμάκου και η μείωση των παρενεργειών. Τα σωματίδια είναι δυνατόν να αφαιρεθούν μετά τη χρήση τους ασκώντας το απαραίτητο πεδίο.(Fuh, Lin, & Lai, 2000)

Χρησιμοποιούνται, επίσης, για το διαχωρισμό μαγνητικών από μη μαγνητικών υλικών. Τα μαγνητικά υλικά κινούνται στις περιοχές του ισχυρότερου μαγνητικού πεδίου, ενώ τα μη μαγνητικά υλικά μετακινούνται στις περιοχές του χαμηλού μαγνητικού πεδίου. (Rinaldi, Chaves, Elborai, He, & Zahn, 2005)

1.3 Αστάθεια κάθετου μαγνητικού πεδίου (ή αστάθεια Rosensweig)

Η ελεύθερη επιφάνεια, σε δοχείο με μαγνητικό ρευστό σε ηρεμία υπό την επίδραση κάθετου στην ελεύθερη επιφάνεια, ομοιόμορφου μαγνητικού πεδίου, είναι πρακτικά επίπεδη, όταν η ένταση του πεδίου είναι μηδενική ή πολύ χαμηλή. Όταν η ένταση του πεδίου περάσει μια κρίσιμη τιμή η επιφάνεια στο δοχείο παραμορφώνεται έντονα και απότομα. Το ρευστό παραμένει σε ηρεμία σε μια νέα στατική ισορροπία.

Το φαινόμενο αυτό, που η ελεύθερη επιφάνεια ενός μαγνητικού ρευστού υπό την επίδραση επαρκώς υψηλού κατακόρυφου μαγνητικού πεδίου, αρχίζει να αλλάζει μορφή με τέτοιο τρόπο ώστε να σχηματίζονται κορυφές (spikes) διατεταγμένες σε κανονικά πολυγωνικά μοτίβα (συνήθως εξαγωνικά ή και τετραγωνικά), είναι γνωστό ως η αστάθεια κάθετου πεδίου (normal field instability) ή αστάθεια Rosensweig. (Cowley, M., & Rosensweig, R. (1967), Rosensweig (2014)).



Σχήμα 1.1: Σχηματική απεικόνιση του διαταραγμένου μαγνητικού πεδίου κοντά στην ελεύθερη επιφάνεια (Rosensweig 1985)

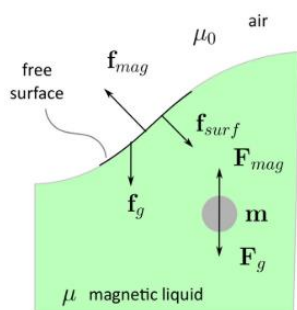
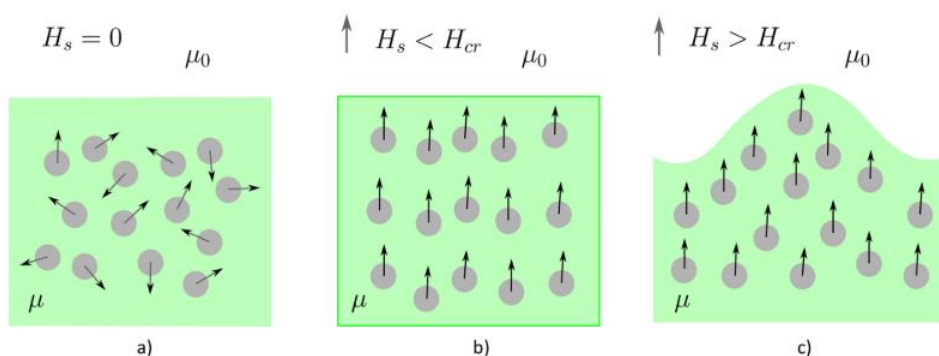
1.3.1 Φυσική ερμηνεία αστάθειας κάθετου πεδίου

Για την κατανόηση του φαινομένου της αστάθειας Rosensweig, πρέπει να εξεταστεί η ισορροπία των δυνάμεων που δρουν στο ρευστό σε ισορροπία. Αυτό συνεπάγεται την ισορροπία των βαρυτικών και μαγνητικών δυνάμεων σε κάθε μικρό όγκο μέσα στο ρευστό, και της επιφανειακής δύναμης στην ελεύθερη επιφάνεια του ρευστού. (Rosensweig (2014), H.H. Woodson(1968)).

Η αστάθεια κάθετου πεδίου οφείλεται στον ανταγωνισμό της βαρύτητας και τα επιφανειακής τάσης με τη μαγνητική δύναμη. Αφενός η μαγνητική δύναμη ευνοεί την παραμόρφωση της επιφάνειας σε διεύθυνση παράλληλη στο πεδίο (δηλαδή κατακόρυφη παραμόρφωση). Αφετέρου η επιφανειακή τάση ευνοεί μείωση της επιφάνειας (δηλαδή μείωση της επιφανειακής ενέργειας) και η βαρύτητα ευνοεί την διατήρηση της επιφάνειας σε οριζόντια θέση (για μείωση της δυναμικής ενέργειας). Συνεπώς η επιφανειακή τάση και η βαρύτητα αντιτίθενται στη μαγνητική δύναμη γιατί η τελευταία θέλει να αυξήσει την επιφάνεια παραμορφώνοντάς την στην κατακόρυφη διεύθυνση και επίσης θέλει να απομακρύνει την επιφάνεια από την οριζόντια διαμόρφωσή της. Ακριβώς στην έναρξη της αστάθειας η επίδραση των μαγνητοστατικών δυνάμεων υπερνικά την επίδραση των σταθεροποιητικών επιφανειακών δυνάμεων και της βαρύτητας. (A. G. Boudounis, 1987)

Για την εξήγηση της μαγνητικής δράσης στο πρόβλημα θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί το μοντέλο του μαγνητικού διπόλου. Το μαγνητικό ρευστό θεωρείται

ως ένα συσσωμάτωμα μαγνητικών διπόλων που είναι, σε απουσία εξωτερικού μαγνητικού πεδίου, τυχαία προσανατολισμένα στο χώρο, όπου κάθε μικρός όγκος του υλικού έχει μηδενική καθαρή μαγνητική ροπή. Στη συνέχεια, μετά την εισαγωγή τέτοιου ρευστού στο χώρο που ασκείται το μαγνητικό πεδίο, η μαγνητική δύναμη θα ενεργήσει με τέτοιο τρόπο ώστε να ευθυγραμμίσει το δίπολο με το πεδίο και να το μετακινήσει προς το χαμηλότερο πεδίο.



- F_{mag} Μαγνητική δύναμη ανά μονάδα όγκου
- F_g Βαρυτική δύναμη ανά μονάδα όγκου
- f_{mag} Μαγνητική δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας
- f_{surf} Επιφανειακή δύναμη
- f_g Βαρυτική δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας
- m Μαγνητικό δίπολο
- μ_0 Διαπερατότητα κενού
- μ Απόλυτη διαπερατότητα μαγνητικού ρευστού

d)

Σχήμα 1.2: Σχηματική εξήγηση της αστάθειας Rosensweig στο μοντέλο του μαγνητικού διπόλου: α) Χωρίς εφαρμογή εξωτερικού μαγνητικού πεδίου, τυχαίος προσανατολισμός μορίων, β) εφαρμογή υπερκρίσιμου μαγνητικού πεδίου στο ρευστό, τα δίπολα ευθυγραμμίζονται στην κατεύθυνση του πεδίου γ). Το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο υπερβαίνει την κρίσιμη τιμή, αλλάζει η μορφή της ελεύθερης επιφάνειας. δ) Οι δυνάμεις μέσα στο μαγνητικό ρευστό και στην επιφάνειά του. (Trbušić, Beković, & Hamler, 2019)

1.3.2 Κρίσιμη τιμή μαγνητικής επαγωγής

Το σημείο αστάθειας στο οποίο η επιφανειακή διαμόρφωση του μαγνητικού ρευστού αλλάζει απότομα ονομάζεται κρίσιμο σημείο, B_c . Όταν η ένταση του εφαρμοζόμενου μαγνητικού πεδίου είναι μικρότερη από μια κρίσιμη τιμή, η ελεύθερη επιφάνεια του ρευστού παραμένει περίπου επίπεδη, εκτός από την περιοχή επαφής με τα τοιχώματα του δοχείου. Μετά από την κρίσιμη τιμή παρατηρείται παραμόρφωση της ελεύθερης επιφάνειας.

Κλασικές μέθοδοι ανάλυσης διαταραχής μπορούν να προβλέψουν την κρίσιμη τιμή εκδήλωσης της αστάθειας του μαγνητικού πεδίου (B_{cr}) για σύστημα με άπειρο βάθος και άπειρη ακτίνα (unbounded system).

Η κρίσιμη τιμή μαγνητικού πεδίου συναρτήσει του βάθους, D , του ρευστού στο δοχείο, (Boudouvis 1987 p.5-14):

$$B_{cr} = \sqrt{\left(\frac{g\Delta\rho}{k_i} + \sigma k_i\right) \frac{\mu}{\chi^2} (\tanh(k_i D) + \mu_r \coth(k_i D))} \quad (1.1)$$

Για θεωρητικά άπειρο βάθος μαγνητικού ρευστού στο δοχείο ($D \rightarrow +\infty$):

$$B_{cr} = \sqrt{\left(\frac{g\Delta\rho}{k_i} + \sigma k_i\right) \mu \frac{\mu_r + 1}{\chi^2}} \quad (1.2)$$

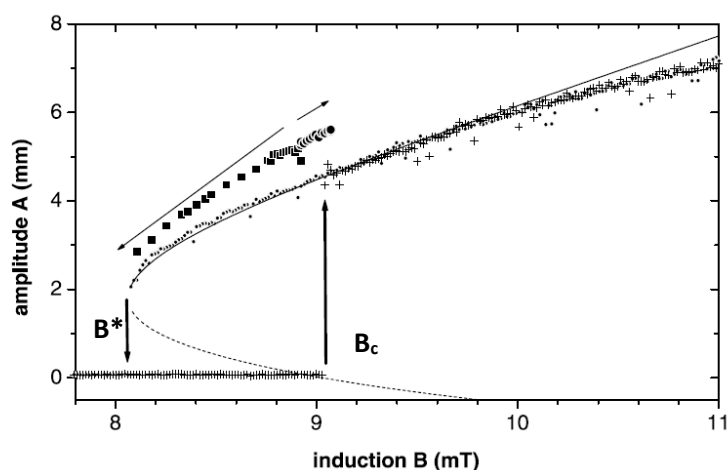
Αν η επιφάνεια πλησιάζει τον πάτο τότε μπορεί να εμφανιστεί ανομοιομορφία, καθώς κοντά στον πάτο το πεδίο δεν είναι ομοιόμορφο.

1.3.3 Φαινόμενο υστέρησης

Η εκδήλωση και εξέλιξη της αστάθειας κάθετου πεδίου συνοδεύεται από υστέρηση στην παραμόρφωση της επιφάνειας συναρτήσει της έντασης του πεδίου. Κατά την εκδήλωση οι αιχμές εμφανίζονται απότομα και αυξάνεται το ύψος τους καθώς η

ένταση αυξάνεται, ενώ για μειούμενη ένταση η εξαφάνιση των αιχμών συμβαίνει σε ένταση χαμηλότερη της κρίσιμης.

Στο διάγραμμα παρακάτω (Σχήμα 1.3) παρουσιάζεται το ύψος A ενός από τα εξαγωνικά μοτίβα που σχηματίζεται καθώς μεταβάλλεται η ένταση του πεδίου. Με σταυρούς παρουσιάζονται τα σημεία καθώς αυξάνεται η ένταση του μαγνητικού πεδίου. Καθώς αυξάνεται η ένταση γίνεται μια ξαφνική μεταπήδηση για B_c στο πάνω κλάδο της καμπύλης και παρατηρείται παραμόρφωση της ελεύθερης επιφάνειας-εξαγωνικό μοτίβο. Μειώνοντας το πεδίο, το ύψος μειώνεται μέχρι το B^* , όπου μεταπηδά απότομα στον κάτω κλάδο και η επιφάνεια επανέρχεται στη διαμόρφωση πριν την εκδήλωση της αστάθειας.



Σχήμα 1.3: Υστέρηση μεταξύ της δημιουργίας και της εξαφάνισης των αιχμών (Richter et al. 2005)

1.4 Παραμορφώσεις επιφάνειας

Η αστάθεια του πεδίου σε μαγνητικά ρευστά οδηγεί στην παραμόρφωση της ελεύθερης επιφάνειας. Η θεωρία προβλέπει ότι μια πληθώρα παραμορφώσεων, μονοδιάστατα και διδιάστατα στις συμμετρίες τους, είναι υποψήφιοι σχηματισμοί στην επιφάνεια του μαγνητικού ρευστού κατά την έναρξη της αστάθειας του πεδίου. (A. G. Boudouvis & Scriven, 1990).

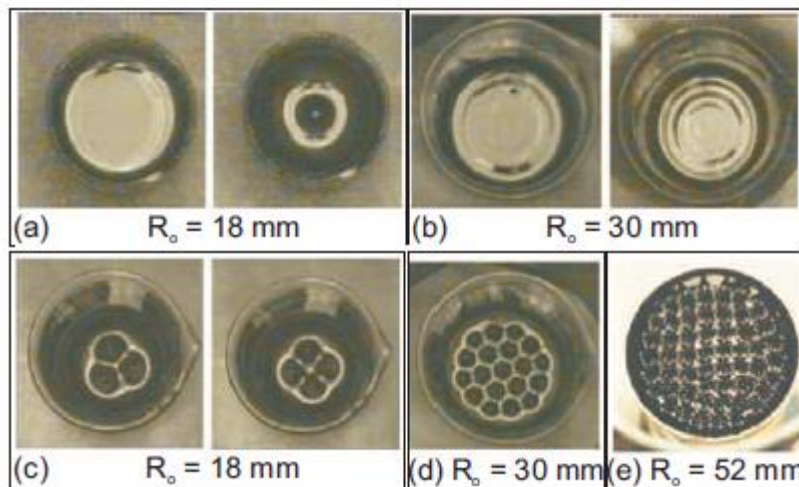
1.4.1. Σχηματιζόμενες παραμορφώσεις

Έχουν παρατηρηθεί στα πειράματα και αναφέρονται στην βιβλιογραφία διάφορες παραμορφώσεις. Τα μονοδιάστατα, είναι τύπου δακτυλίου (rings) ή με παραμόρφωση μιας κορυφής (spike). Η παραμόρφωση με μια κορυφή έχει το μέγιστο ύψος στο κέντρο της επιφάνειας, ενώ τα μοτίβα δακτυλίου έχουν ένα τοπικό ελάχιστο στο κέντρο της επιφάνειας.

Τα διδιάστατα είναι μοτίβα με εξαγωνική ή τετραγωνική συμμετρία. Τα μοτίβα έχουν μια εντυπωσιακή κανονικότητα. Τα πιο συνηθισμένα είναι τα εξαγωνικά μοτίβα. Τα εξαγωνικά μπορεί να μετατραπούν σε τετραγωνικά καθώς αυξάνεται η ένταση του μαγνητικού πεδίου (Abou, Wesfreid, & Roux, 2000). Συχνά πριν την εμφάνιση εξαγωνικού ή τετραγωνικού μοτίβου παρατηρούνται αξονοσυμμετρικές παραμορφώσεις τύπου δακτυλίου. Γενικά, παραμορφώσεις τύπου δακτυλίου εμφανίζονται συχνά σε αστάθειες και λίγο πριν την έναρξη της αστάθειας.

Σε πειράματα παρατηρήθηκε σχηματισμός ομόκεντρων δαχτυλιδιών σε δοχεία διαφόρων διαμέτρων, ακριβώς μετά την έναρξη της αστάθειας και πριν τον εμφανή σχηματισμό των κορυφών (Σχήμα 1.4-β.). Δείγματα από μερικές επιφανειακές παραμορφώσεις εμφανίζονται στο Σχήμα 1.4.

Στο Σχήμα 1.4 (α) σχηματίζεται μια κορυφή στο κέντρο του δοχείου και στο Σχήμα 1.4 (β) εμφανίζεται παραμόρφωση τύπου δακτυλίων. Στα δοχεία στο Σχήμα 1.4 (c), (d) και (e), εμφανίζονται μη αξονοσυμμετρικές παραμορφώσεις. Αν και τα δοχεία στο σχήμα Σχήμα 1.4 (α) και 1.4 (c) έχουν την ίδια διάμετρο, σχηματίζονται διαφορετικές παραμορφώσεις της επιφάνειας, δεδομένου ότι περιέχουν μαγνητικά ρευστά με διαφορετικές ιδιότητες. (Spyropoulos, Parathanasiou, & Boudounis, 2019)



Σχήμα 1.4: Παραμόρφωση (σε κάτοψη) ελεύθερης επιφάνειας σε μαγνητικό ρευστό υπό την επίδραση μαγνητικού πεδίου. Μια κορυφή (α) που παρατηρήθηκε σε ένταση πεδίου 178 Gauss. Παραμόρφωση τύπου δακτυλίου (β) παρατηρήθηκε στα 140 Gauss (αριστερά) και 161 Gauss (δεξιά). 3 ή 4 κορυφές (c) που παρατηρήθηκαν σε 167 Gauss και 172 Gauss αντίστοιχα. Εξαγωνικά μοτίβα (d) παρατηρήθηκαν στα 193 Gauss. Τετράγωνα μοτίβα (e) παρατηρήθηκαν στα 180 Gauss. (Spyropoulos et al., 2019)

1.4.2 Μηχανισμός επιλογής παραμόρφωσης

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει ο μηχανισμός επιλογής σχηματισμού παραμόρφωσης (pattern selection). Η εξαγωνική διάταξη είναι η πιο συνηθισμένη, όχι όμως και η μοναδική. Υπάρχουν διάφοροι παράγοντες που επηρεάζουν την παραμόρφωση που σχηματίζεται καθώς εφαρμόζεται μαγνητικό πεδίο.

Καθοριστικός παράγοντας επιλογής παραμόρφωσης στην επιφάνεια αποτελεί η σχετική ευστάθεια των μορφών αυτών ως προς όλες τις δυνατές διαταραχές. Δηλαδή, σε συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων οι παραμορφώσεις που παρατηρούνται είναι εκείνες που έχουν τη μεγαλύτερη ευστάθεια (και συνεπώς «επικρατούν») έναντι των υπολοίπων που, σύμφωνα με τη θεωρία, είναι «επιτρεπτές» και συνεπώς «υποψήφιες» παραμορφώσεις. Παρατηρείται ότι διάφοροι παράγοντες που αφορούν τη διεξαγωγή των πειραμάτων μπορεί να είναι αποφασιστικής σημασίας για το

σχηματισμό παραμορφώσεων (A. G. Boudounis, 1987). Για παράδειγμα, αν αυξηθεί απότομα η ένταση του μαγνητικού πεδίου παρατηρούνται τετραγωνικά μοτίβα αντί για εξαγωνικά.

Οι επιτρεπτοί σχηματισμοί εξαρτώνται και από γεωμετρικά χαρακτηριστικά του δοχείου. Συγκεκριμένα, ο σχηματισμός ενός μοτίβου προϋποθέτει επάρκεια χώρου στην επιφάνεια του ρευστού που περιορίζεται από το μέγεθος του δοχείου.

Η ακτίνα επηρεάζει τα μοτίβα που μπορούν να σχηματιστούν. Σε δοχεία μεγαλύτερης ακτίνας δημιουργούνται κορυφές (spikes) ρευστού και βυθίσεις σε εξαγωνική ή τετραγωνική διάταξη. Για δοχεία μικρής διαμέτρου και μικρού βάθους δεν σχηματίζεται κορυφή στο κέντρο του δοχείου. Όσο αυξάνεται η ένταση του πεδίου, στο κέντρο σχηματίζεται ένα μικρό βαθούλωμα. Πέρα από ένα ορισμένο πεδίο, η επιφάνεια παραμορφώνεται απότομα σε μορφή δακτυλίου. Σε αρκετά υψηλή ένταση πεδίου η επιφάνεια του κέντρου του δοχείου αγγίζει τον πάτο του δοχείου. (A. G. Boudounis, 1987). Για πολύ μικρά δοχεία (ακτίνας μικρότερη από 16 mm) σχηματίζεται μόνο μια κορυφή ενώ για λίγο μεγαλύτερα (18 mm) σχηματίζονται 2,3 και 4 κορυφές (Spyropoulos et al., 2019).

Παράλληλα, το βάθος αποτελεί άλλη μια σημαντική παράμετρο. Για δοχείο με συγκεκριμένη διάμετρο, αυξάνοντας το βάθος του ρευστού μέσα σε αυτό, αυξάνοντας δηλαδή τον όγκο του ρευστού, παρατηρούμε πως η εκδήλωση της αστάθειας εμφανίζεται σε μικρότερες εντάσεις πεδίου.

Επιπλέον τα πλευρικά τοιχώματα επιδρούν επηρεάζοντας την ομοιομορφία του πεδίου, λόγω διαβροχής των τοιχωμάτων και τοπικής παραμόρφωσής της επιφάνειας. Στα τοιχώματα είναι σε επαφή το μαγνητικό ρευστό και το μη μαγνητικό υλικό (αέρας και υλικό τοιχώματος του δοχείου). Όταν η ακτίνα του δοχείου είναι αρκούντως μεγάλη, θεωρείται ότι τα τοιχώματα δεν επιδρούν στο φαινόμενο και μπορούν να αγνοηθούν.

Εκτός από τη γεωμετρία, και οι υπόλοιπες πειραματικές συνθήκες καθορίζουν το μοτίβο που σχηματίζεται. Ανάλογα με το σχήμα που έχει το δοχείο, η ένταση του μαγνητικού πεδίου, ο ρυθμός μεταβολής του και οι ιδιότητες του μαγνητικού ρευστού

(π.χ. μαγνητική διαπερατότητα, επιφανειακή τάση), το σχήμα παραμόρφωσης που προκύπτει είναι αξονοσυμμετρικό ή διδιάστατο.

Πειραματικά έχει παρατηρηθεί ότι τετραγωνικά μοτίβα εμφανίζονται ευκολότερα σε ορθογώνια δοχεία παρά σε κυκλικά. Αντίθετα σε κυκλικά δοχεία ευνοούνται εξαγωνικά μοτίβα. Μετάβαση μεταξύ εξαγωνικών και τετραγωνικών μοτίβων μπορεί να γίνει για ένταση πεδίου αρκετά μακριά από την έναρξη της αστάθειας. (Allais and Wesfreid 1986)

Η ένταση του μαγνητικού πεδίου και ο τρόπος που μεταβάλλεται αυτή κατέχει σημαντικό ρόλο. Για παράδειγμα, σε πειράματα σε δοχείο ακτίνας 18 mm όταν η ένταση του μαγνητικού πεδίου αυξηθεί με αργό ρυθμό (0.1 Gauss /sec) εμφανίζονται 2 κορυφές, ενώ μια απότομη (σταδιακή) αύξηση ευνοεί 3 κορυφές (0 Gauss → 167 Gauss) ή 4 κορυφές (0 Gauss → 174 Gauss). Με αργή μείωση (0.1 Gauss /sec) της έντασης του πεδίου, η παραμόρφωση 4 κορυφών μετατρέπεται σε παραμόρφωση 2 κορυφών και περαιτέρω μείωση οδηγεί στην εξαφάνιση των δύο κορυφών και το σχηματισμό δακτυλίου (Spyropoulos et al., 2019).

Οι ιδιότητες του ρευστού επηρεάζουν τη σχετική ευστάθεια των πιθανών λύσεων. Στο μαθηματικό μοντέλο που περιγράφει το σύστημα υπεισέρχονται οι ιδιότητες του ρευστού, όπως πυκνότητα (ρ), επιφανειακή τάση (σ) και μαγνητική επιδεκτικότητα (μ_f).

Τέλος, πειραματικά, κάποιες φορές η ομοιομορφία δίνει την θέση της σε μη κανονικούς σχηματισμούς με ανισομεγέθεις κορυφές. Αυτό συμβαίνει, καθώς το σύστημα προσπαθεί να φιλοξενήσει περισσότερες κορυφές από αυτές που του επιτρέπουν τα όριά του. Βέβαια οι μη κανονικοί σχηματισμοί μπορεί να οφείλονται και σε πειραματικά σφάλματα αλλά και στην αδυναμία της πειραματικής διάταξης να λειτουργήσει με ιδανικό τρόπο.

1.4.3 Μαθηματική περιγραφή

Τα μοτίβα που εμφανίζονται στην επιφάνεια μαγνητικού ρευστού – αέρα, πέραν της συμμετρίας, εμφανίζουν περιοδικότητα. Αυτή η ιδιότητα μας επιτρέπει να εκφράσουμε τους διδιάστατους σχηματισμούς (προβολή στο επίπεδο των

τριδιάστατων σχηματισμών), αντιστοιχίζοντας σε κάθε έναν από αυτούς έναν κυματαριθμό (k_c).

Η συνάρτηση που εκφράζει την προβολή της επιφάνειας στο επίπεδο (x, y) (*planform function*), για τους σχηματισμούς που εμφανίζονται στο πείραμα, δίνεται (*Boudouvis and Scriven 1990*):

- **Εξάγωνα**

$$\varphi_h = \cos(k_c x) + \cos\left(\frac{k_c}{2}(x + \sqrt{3}y)\right) + \cos\left(\frac{k_c}{2}(x - \sqrt{3}y)\right) \quad (1.3)$$

- **Τετράγωνα**

$$\varphi_s = \cos\left(\frac{k_c}{\sqrt{2}}(x + y)\right) + \sin\left(\frac{k_c}{\sqrt{2}}(x - y)\right) \quad (1.4)$$

- **Δακτύλιοι (rings)**

$$\varphi_{ri} = J_0(k_c r), \text{ όπου } J_0 \text{ η συνάρτηση Bessel μηδενικής τάξης.} \quad (1.5)$$

- **Τμηματικός δακτύλιος (segmented rings)**

$$\varphi_{sr} = J_m(k_c r) \cos(m\theta) \text{ ή} \\ \varphi_{sr} = J_m(k_c r) \sin(m\theta), \text{ όπου } J_m \text{ η συνάρτηση Bessel } m \text{ τάξης.} \quad (1.6)$$

Επιπλέον, εκμεταλλευόμενοι την περιοδικότητα εξαγωνικών και τετραγωνικών μοτίβων, μπορούμε να προσδιορίσουμε τα μοτίβα πλήρως από δυο μη συγγραμμικά διανύσματα a_1 και a_2 (διανύσματα μετάβασης). Τα μοτίβα που εμφανίζονται στην επιφάνεια του ρευστού είναι περιοδική επανάληψη μιας δομής (unit pattern) με ορισμένη γεωμετρία. Με επανάληψη αυτής της μοναδιαίας δομής έχουμε τον

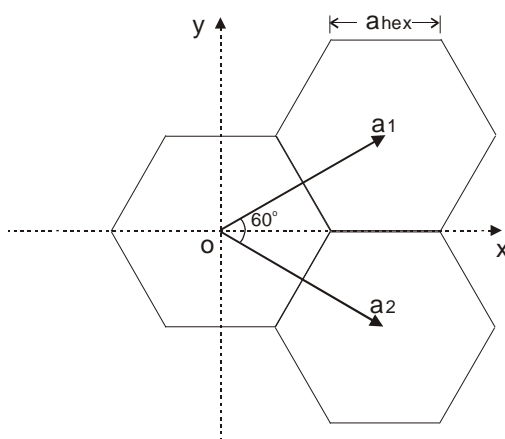
συνολικό σχηματισμό της επιφανείας. Το διάνυσμα που περιγράφει τους σχηματισμούς μπορεί να γραφτεί ως:

$$\mathbf{\Lambda} = \{m_1\mathbf{a}_1 + m_2\mathbf{a}_2\} \text{ με } m_1, m_2 \in \mathbf{N}^* \quad (1.7)$$

Στην περίπτωση των εξαγωνικών σχηματισμών, η μοναδιαία δομή είναι το εξάγωνο (Σχήμα 1.5). Επομένως, $|\mathbf{a}_1| = |\mathbf{a}_2|$ και $\left(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\right) = 60^\circ$ και τα διανύσματα είναι (A.

G. Boudouvis, 1987) :

$$\mathbf{a}_1 = a_{\text{hex}} \sqrt{3} \mathbf{e}_x \quad \text{και} \quad \mathbf{a}_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} a_{\text{hex}} (\sqrt{3} \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y) \quad (1.8)$$



Σχήμα 1.5: Γεωμετρία εξαγωνικού σχηματισμού

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

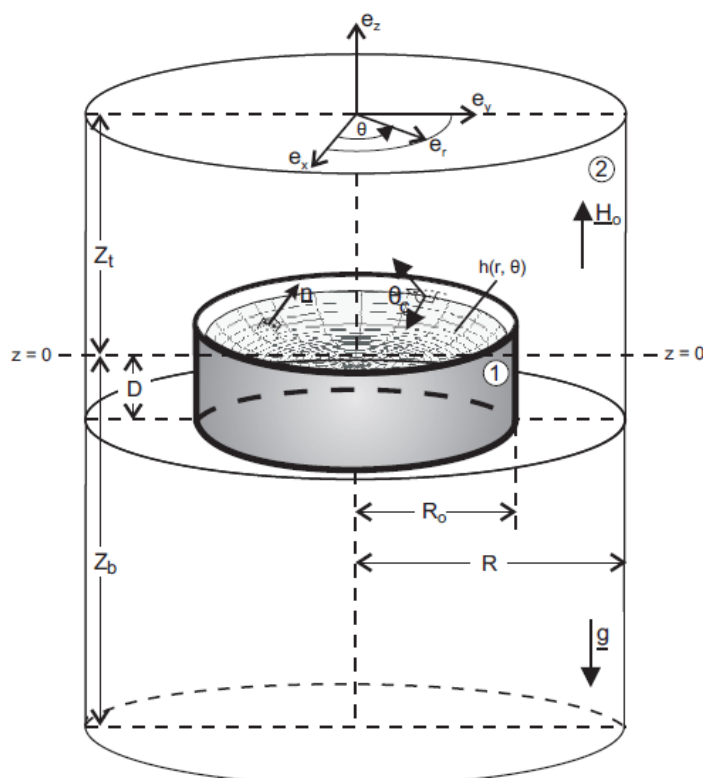
Σε αυτό το κεφάλαιο αναλύεται το μαθηματικό μοντέλο που περιγράφει την παραμόρφωση της ελεύθερης επιφάνειας μαγνητικού ρευστού υπό την επίδραση κατακόρυφου μαγνητικού πεδίου.

Το φυσικό πρόβλημα που αναλύεται αφορά στη μαγνητο-υδροστατική ισορροπία της ελεύθερης επιφάνειας ενός ρηχού στρώματος μαγνητικού ρευστού, που περιέχεται σε ένα δοχείο, υπό την επίδραση κατακόρυφου μαγνητικού πεδίου.

2.1 Το φυσικό σύστημα

Στο Σχήμα 2.1 φαίνεται ένα μικρό κυλινδρικό δοχείο με μαγνητικό ρευστό σε κατακόρυφο μαγνητικό πεδίο H_0 . Οι περιοχές που καταλαμβάνονται από μαγνητικό ρευστό σημειώνονται με 1, ενώ αυτές που καταλαμβάνονται από αέρα σημειώνονται

με 2. Το πεδίο που εφαρμόζεται μπορεί να παραχθεί είτε από ένα ζευγάρι σπειρών Helmholtz ή από ένα σωληνοειδές κατάλληλων διαστάσεων. Το πεδίο είναι ομοιόμορφο και με κατακόρυφο προσανατολισμό, σε μια περιοχή αρκούντως μακριά από το δοχείο. Η ομοιομορφία του πεδίου, ωστόσο, διαταράσσεται κοντά στο δοχείο, λόγω της ύπαρξης του μαγνητικού ρευστού.



Σχήμα 2.1: Κυλινδρικό δοχείο με μαγνητικό ρευστό σε μαγνητικό πεδίο.

2.2 Μαγνητο-υδροστατική ισορροπία των μαγνητικών ρευστών

Οι δυνάμεις καθορίζουν την ισορροπία της επιφάνειας του ρευστού. Στα ρευστά η ισορροπία της επιφάνειας καθορίζεται από τις τριχοειδείς δυνάμεις (δηλαδή την επιφανειακή τάση) και την υδροστατική πίεση (λόγω βαρύτητας). Ωστόσο, στα μαγνητικά ρευστά επιδρούν και οι μαγνητικές δυνάμεις όταν ασκείται μαγνητικό πεδίο.

Το μαγνητοστατικό δυναμικό μέσα στο μαγνητικό και μη-μαγνητικό μέσο σε ισορροπία διέπεται από ορισμένες ειδικές εξισώσεις Maxwell. Η ισορροπία των δυνάμεων μεταξύ των μαγνητικών και μη μαγνητικών μέσων εκφράζεται με την μαγνητικά επαυξημένη, μη γραμμική, διαφορική εξίσωση Young-Laplace. Οι μαγνητοστατικές δυνάμεις μέσα στο μαγνητικό ρευστό περιγράφονται από μια μη γραμμική μερική διαφορική εξίσωση για την κατανομή του μαγνητοστατικού δυναμικού. Το μαγνητικό πεδίο υπολογίζεται από τις θεμελιώδεις εξισώσεις ταυτόχρονα με το σχήμα της επιφάνειας του μαγνητικού ρευστού και το πρόβλημα που προκύπτει είναι μη γραμμικό.

Τα μαγνητικά ρευστά είναι ασυμπίεστα, επομένως, ο όγκος παραμένει σταθερός κατά την παραμόρφωση του ρευστού.

2.2.1 Εξισώσεις μαγνητοστατικού πεδίου

Οι εξισώσεις που ισχύουν για την κατανομή του μαγνητικού πεδίου μέσα και έξω από το μαγνητικό ρευστό έχουν ως εξής (Reitz *et al* ,1979), (Rosensweig ,1987):

Σύμφωνα με το νόμο του Ampere ή την αντίστοιχη εξίσωση του Maxwell (Reitz *et al*. 1979) το μαγνητικό πεδίο είναι αστρόβιλο:

$$\nabla \times \underline{H} = 0, \text{ δηλαδή, } \underline{H} \equiv \nabla u \quad (2.1)$$

όπου u είναι ένα μαγνητοστατικό δυναμικό.

Σύμφωνα με το νόμο του Gauss για το μαγνητισμό (Reitz *et al*. 1979), για την μαγνητική επαγωγή \underline{B} ισχύει:

$$\nabla \cdot \underline{B} = 0 \quad (2.2)$$

Η μαγνήτιση, το μαγνητικό πεδίο και η μαγνητική επαγωγή συνδέονται με την εξής σχέση:

$$\underline{B} = \mu_0 (\underline{H} + \underline{M}), \quad (2.3)$$

όπου $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ henry/m η μαγνητική διαπερατότητα του αέρα, \underline{M} η μαγνήτιση.

Η μαγνήτιση \underline{M} είναι μηδενική σε μη μαγνητικά υλικά. Στα μαγνητικά ρευστά, όταν δεν ασκείται μαγνητικό πεδίο, η μαγνήτιση είναι μηδενική επειδή τα ατομικά δίπολα είναι τυχαία προσανατολισμένα, δηλαδή δεν υπάρχει μόνιμη μαγνήτιση. Όταν ασκηθεί εξωτερικό μαγνητικό πεδίο, η μαγνήτιση λαμβάνει μη μηδενική τιμή, η οποία εξαρτάται από την ένταση του πεδίου. Στα μαγνητικά ρευστά, όπως και σε πολλά άλλα μαγνητικά υλικά, η μαγνητική επαγωγή, η μαγνήτιση και το μαγνητικό πεδίο είναι συγγραμμικά:

$$\underline{B} = \mu \underline{H} \quad (2.4)$$

$$\underline{M} = \chi \underline{H} \quad (2.5)$$

Όπου μ η μαγνητική διαπερατότητα του μαγνητικού ρευστού και χ η μαγνητική επιδεκτικότητα. Συνδέονται μεταξύ τους με την εξής σχέση:

$$\chi \equiv \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \quad (2.6)$$

Σε μη μαγνητικά ρευστά $\mu = \mu_0$ και $\chi = 0$.

Σε ισοτροπικά υλικά μ και χ εξαρτώνται μόνο από την ένταση του μαγνητικού πεδίου. Τα μαγνητικά υγρά είναι ισοτροπικά υλικά (Rosensweig 1987).

Από τις εξισώσεις 2.1, 2.2, 2.4, προκύπτει,

$$\nabla \cdot (\mu_1 \nabla u_1) = 0, \quad \nabla \cdot (\mu_2 \nabla u_2) = 0 \quad (2.7)$$

μέσα και έξω από το μαγνητικό ρευστό, αντίστοιχα. Αναφέρεται, για την κατανόηση των εξισώσεων που ακολουθούν, ότι οι δείκτες 1 και 2 αντιστοιχούν στις δυο φάσεις, υγρή (μαγνητική) και αέρια (μη μαγνητική), του Σχήματος 2.1. Έτσι μ_1 είναι η μαγνητική διαπερατότητα του μαγνητικού ρευστού και μ_2 η μαγνητική διαπερατότητα του αέρα.

Η εξίσωση (2.7) είναι η εξίσωση Maxwell που χρησιμοποιείται για την κατανομή του μαγνητικού δυναμικού u . Ανάγεται στην εξίσωση Laplace, $\nabla^2 u_2 = 0$, λόγω του ότι η μαγνητική διαπερατότητα μη μαγνητικών ρευστών – στην περίπτωση μας ο αέρας – είναι σταθερή.

Για μαγνητικά ρευστά η μαγνητική διαπερατότητα δίνεται από την εξίσωση Langevin (Rosensweig (1997)),

$$\frac{\mu(H)}{\mu_0} = 1 + \frac{3\chi_i}{\tau H}(\coth(\tau H) - \frac{1}{\tau H}) \quad (2.8)$$

όπου χ_i είναι η μαγνητική επιδεκτικότητα του ρευστού σε μικρές τιμές της έντασης του μαγνητικού πεδίου και τ είναι μια παράμετρος που υπολογίζεται από την προσαρμογή της εξίσωσης σε πειραματικές μετρήσεις μαγνήτισης στον κορεσμό. Σε μικρές τιμές έντασης του μαγνητικού πεδίου το μ λαμβάνεται, κατά προσέγγιση σταθερό, $\mu = (1 + \chi_i)\mu_0$.

2.2.2 Επαυξημένη εξίσωση Young-Laplace

Για να υπάρχει ισορροπία μιας επιφάνειας θα πρέπει όλες οι δυνάμεις που δρουν στην επιφάνεια να είναι σε ισορροπία (2ος Νόμος του Νεύτωνα). Οι δυνάμεις αυτές είναι η βαρύτητα, η επιφανειακή τάση και οι μαγνητικές δυνάμεις.

Το σχήμα της επιφάνειας καθορίζεται από τη μη γραμμική διαφορική εξίσωση Young-Laplace επαυξημένη με όρο μαγνητικής δύναμης:

$$-g\delta\rho z + \frac{1}{2}\mu_0\chi_1^2(\underline{n} \cdot \nabla u_1)^2 + \int_0^{H_i} M_1(H')dH + \sigma C = K, \quad z = h(r,\theta), \quad 0 \leq r \leq R_0 \quad (2.9)$$

όπου

g : επιτάχυνση της βαρύτητας

$\delta\rho$: διαφορά των πυκνοτήτων του ρευστού και του αέρα

z : κατακόρυφη μετατόπιση της ελεύθερης επιφάνειας από μια οριζόντια θέση αναφοράς

K : μια πίεση αναφοράς

σ : η επιφανειακή τάση του ρευστού

$C \equiv 2 \kappa = -\nabla_s \cdot \underline{n}$

κ : μέση τοπική καμπυλότητα

$\nabla_s(\cdot)$: τελεστής επιφανειακής απόκλισης

\underline{n} : μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην ελεύθερη επιφάνεια

$$\underline{n} = \frac{-h_r \underline{e}_r - (h_\theta/r) \underline{e}_\theta + \underline{e}_z}{\sqrt{1+h_r^2+(h_\theta/r)^2}} \quad (2.10)$$

Όπου τα διανύσματα $\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z$ είναι τα μοναδιαία στις διευθύνσεις r, θ, z , και οι δείκτες r, θ και z δηλώνουν παραγωγή στις διευθύνσεις r, θ και z . Από τις εξισώσεις (5) και (6) προκύπτει:

$$C = \frac{1}{r^2 [1+h_r^2+(h_\theta/r)^2]^{3/2}} \left[(r^2+r_\theta^2)h_{rr} - 2h_r h_\theta h_{r\theta} + (1+h_r^2)h_{\theta\theta} + 2\frac{h_r h_\theta^2}{r} + r h_r (1+h_r^2) \right] \quad (2.11)$$

2.2.3 Εξίσωση διατήρησης του όγκου

Η πίεση αναφοράς K της εξίσωσης (2.9) καθορίζεται από τη συνθήκη ασυμπίεστότητας του μαγνητικού ρευστού, δηλαδή από το ότι ο όγκος του ρευστού παραμένει σταθερός σε κάθε παραμόρφωση της ελεύθερης επιφάνειας:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{R_0} h r dr d\theta = 0 \quad (2.12)$$

2.2.4 Συνοριακές συνθήκες

Οι συνοριακές συνθήκες των εξισώσεων είναι:

$$u_1 = u_2, \mu_1 \underline{n} \cdot \nabla u_1 = \mu_2 \underline{n} \cdot \nabla u_2 \text{ στο } z = h(r, \theta) \text{ και } 0 \leq r \leq R_0 \quad (2.13)$$

$$u_1 = u_2, \mu_1 u_{1r} = \mu_2 u_{2r} \text{ στο } r = R_0 \text{ και } -D \leq z \leq h(R_0, \theta) \quad (2.14)$$

$$u_1 = u_2, \mu_1 u_{1z} = \mu_2 u_{2z} \text{ στο } z = -D \text{ και } 0 \leq r \leq R_0 \quad (2.15)$$

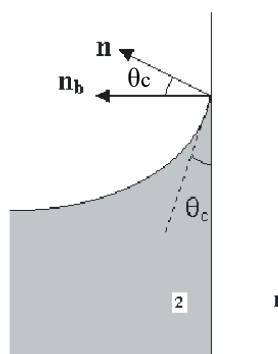
$$u_2 = 0 \text{ στο } z = -Z_b \quad (2.16)$$

$$u_{2z} = H_0 \text{ στο } z = Z_t, u_{2r} = 0 \text{ στο } r = R \quad (2.17)$$

$$h_r / \sqrt{(1+h_r^2+(h_\theta/r)^2)^{1/2}} = \cos\theta_c \text{ στο } r = R_0 \quad (2.18)$$

Οι εξισώσεις (2.13)– (2.15) περιγράφουν τη συνέχεια του μαγνητοστατικού δυναμικού και της κάθετης συνιστώσας της μαγνητικής επαγωγής σε επιφάνειες μεταξύ υλικών με διαφορετικές μαγνητικές ιδιότητες. Η εξίσωση (2.16) ορίζει μια τιμή αναφοράς για το δυναμικό και η εξίσωση (2.17) εισάγει τη συνθήκη ομοιομορφίας του μαγνητικού πεδίου μακριά από το δοχείο. Η εξίσωση (2.18) ορίζει τη γωνία επαφής θ_c του μαγνητικού ρευστού με τα τοιχώματα του δοχείου.

Η γωνία επαφής είναι μια φυσική ιδιότητα που εκφράζει τη διαβρεκτικότητα των τοιχωμάτων από το ρευστό. Η γωνία επαφής υπολογίζεται στη γραμμή επαφής (contact line) όπου συναντώνται οι τρεις φάσεις (μαγνητικό ρευστό, στερεό τοίχωμα, αέρας). Η γωνία επαφής θεωρείται συνοριακή συνθήκη. Για $\theta_c < 90^\circ$ το στερεό θεωρείται υδρόφιλο, δηλαδή το ρευστό διαβρέχει το στερεό τοίχωμα, ενώ για $\theta_c > 90^\circ$ το στερεό θεωρείται υδρόφοβο.



Σχήμα 2.2: Γωνία επαφής του μαγνητικού ρευστού με τα τοιχώματα $\theta_c < 90^\circ$. Το ρευστό αναρριχάται και διαβρέχει το στερεό τοίχωμα. Η γωνία (θ_c) σχηματίζεται μεταξύ των κάθετων διανυσμάτων στην επιφάνεια του ρευστού (n) και του στερεού τοιχώματος (n_b), όπως φαίνεται στο σχήμα.

Σημειώνεται ότι οι δυνάμεις του συστήματος είναι διατηρητικές, δηλαδή το έργο τους είναι ανεξάρτητο από τον δρόμο μετάβασης από τη μια κατάσταση στην άλλη και εξαρτάται μόνο από την αρχική και τελική κατάσταση του συστήματος. Στο σύστημα

μας η συνολική ενέργεια είναι το άθροισμα της δυναμικής ενέργειας λόγω βαρύτητας (E_g), της επιφανειακής ενέργειας (E_σ) και της μαγνητικής ενέργειας (E_m).

$$E_{\text{tot}} = E_g + E_\sigma + E_m \quad (2.19)$$

Η ενεργειακή ανάλυση συνίσταται στον υπολογισμό των ελαχίστων τιμών της συνολικής ενέργειας και χρησιμοποιείται συχνά ως εναλλακτική της ισορροπίας δυνάμεων. Στην παρούσα διπλωματική, όμως δεν θα χρησιμοποιηθεί.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ

Οι βασικές εξισώσεις (2.7), (2.9) και (2.12) μαζί με τις συνοριακές συνθήκες (εξισώσεις 2.13-2.18) αποτελούν το τριδιάστατο, μη γραμμικό και ελευθέρου συνόρου πρόβλημα το οποίο πρέπει να επιλυθεί ταυτόχρονα για το σχήμα της ελεύθερης επιφάνειας και την κατανομή του μαγνητικού πεδίου.

Τέτοια προβλήματα που δεν είναι δυνατόν να υπολογιστούν με αναλυτικές μεθόδους, επιλύονται με σύγχρονες αριθμητικές μεθόδους.

Η μέθοδος που επιλέγεται για την προσεγγιστική επίλυση των εξισώσεων είναι η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων (finite elements) σε συνδυασμό με τη μέθοδο των σταθμισμένων υπολοίπων Galerkin (Galerkin weighted residuals) (Strang & Fix, 1973).

Με την μέθοδο Galerkin επιτυγχάνεται η διακριτοποίηση των εξισώσεων. Στην συνέχεια, με την μέθοδο Newton το πρόβλημα γραμμικοποιείται και τελικά επιλύεται με επαναληπτική μέθοδο τύπου Krylov (GMRES-Generalized minimal residual method).

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται οι βασικές μέθοδοι αριθμητικής ανάλυσης που θα χρησιμοποιηθούν για την επίλυση του προβλήματος.

3.1 Προβλήματα συνοριακών τιμών

Ένα Πρόβλημα Συνοριακών Τιμών (ΠΣΤ) αποτελείται από μια ή περισσότερες διαφορικές εξισώσεις κάτω από συγκεκριμένους περιορισμούς σε ένα χωρίο που ορίζουν συγκεκριμένες συνοριακές συνθήκες. Η λύση ενός προβλήματος συνοριακών τιμών συνίσταται στην εύρεση λύσης των διαφορικών αυτών εξισώσεων, η οποία να υπακούει στις συνοριακές συνθήκες.

Οι λύσεις των μη γραμμικών προβλημάτων συνοριακών τιμών δεν είναι απαραίτητως μοναδικές. Οι γενικές λύσεις τέτοιων διαφορικών εξισώσεων δύσκολα προσεγγίζονται αναλυτικά και συνήθως απαιτείται η χρήση αριθμητικών μεθόδων.

Η τυπική διατύπωση ενός προβλήματος συνοριακών τιμών είναι η εξής:

Να βρεθεί η λύση (ή οι λύσεις) u των εξισώσεων

$$Lu=f \text{ στο } D \quad (3.1\alpha)$$

$$Bu=g \text{ στο } \partial D \quad (3.1\beta)$$

Η λύση u είναι συνάρτηση της θέσης \underline{x} στο χωρίο D που είναι (υπο)περιοχή ενός μονο-, δι- ή τριδιάστατου Ευκλείδειου χώρου. Το διάνυσμα θέσης \underline{x} ορίζεται από τις συντεταγμένες x_i κάθε σημείου στο D :

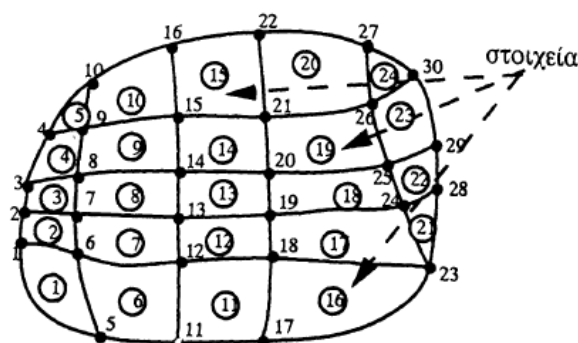
$$\underline{x}_i = \sum_{i=1}^n x_i \underline{e}_i \quad (3.2)$$

όπου \underline{e}_i είναι τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα στους άξονες συντεταγμένων και n η διάσταση του Ευκλείδειου χώρου. Με L συμβολίζεται ένας διαφορικός τελεστής, που δρα στη συνάρτηση u και με B ένας συνοριακός τελεστής ορισμένος στο σύνορο ∂D , του χωρίου D . Οι συναρτήσεις f και g είναι γνωστές συναρτήσεις θέσης, ορισμένες στα D και ∂D , αντίστοιχα. Γενικά, η (3.1-α) είναι μια διαφορική εξίσωση (ΔΕ), συνήθης ή με μερικές παραγώγους, και η (3-1-β) είναι οι συνοριακές συνθήκες που πρέπει να ικανοποιεί η λύση της διαφορικής εξίσωσης. (Μπουντουβής 1992)

3.2 Πεπερασμένα στοιχεία

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων (Finite Element Method- FEM) χρησιμοποιείται για την προσεγγιστική επίλυση μερικών διαφορικών εξισώσεων, που δε μπορούν να επιλυθούν με τη χρήση αναλυτικών μεθόδων.

Το χωρίο D και το σύνορο ∂D υποδιαιρούνται σε επάλληλα υποχωρία (sub-domains) πεπερασμένου πλήθους με το “άπλωμα” ενός πλέγματος (mesh). Καθένα από τα υποχωρία ονομάζεται στοιχείο (element). Στα όρια των επάλληλων στοιχείων αλλά και στο εσωτερικό των στοιχείων ορίζονται οι κόμβοι (nodes) του πλέγματος (Σχήμα 3.1). Το πλήθος των στοιχείων συμβολίζεται με NE και το πλήθος των κόμβων με N . Το μέγεθος, το σχήμα και το πλήθος των στοιχείων είναι αυθαίρετα. (Μπουντουβής 1992). Για να έχουμε όσο το δυνατόν μεγαλύτερη ακρίβεια στους υπολογισμούς η αρχική γεωμετρία πρέπει να χωρισθεί σε αρκετά μεγάλο αριθμό υποπεριοχών.



Σχήμα 3.1: Πλέγμα σε διάστατο χωρίο με αρίθμηση στοιχείων και κόμβων. Οι κόμβοι συμβολίζονται με (•). (Μπουντουβής 1992).

Η αναλυτική λύση u προσεγγίζεται από μια πεπερασμένη σειρά συναρτήσεων:

$$u(x) = \sum_{j=1}^N u_j \varphi^j(x) \quad (3.3)$$

Οι συναρτήσεις φ^j ονομάζονται συναρτήσεις βάσης (basis functions) και είναι πολυώνυμα, συνήθως πρώτου ή δευτέρου βαθμού. Το πλήθος, N , των συναρτήσεων βάσης είναι ίσο με το πλήθος των κόμβων του πλέγματος.

Οι συντελεστές u_i είναι οι τιμές της προσεγγιστικής λύσης στους κόμβους γι' αυτό ονομάζονται κομβικοί άγνωστοι (nodal unknowns). Επομένως για να βρεθεί η προσεγγιστική λύση αρκεί να προσδιοριστούν οι κομβικοί άγνωστοι (όταν είναι δεδομένες οι συναρτήσεις βάσης).

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων έχει μελετηθεί από το 1940, όμως η πρώτη της εφαρμογή έγινε 10 χρόνια αργότερα στην αεροναυπηγική. Τα επόμενα χρόνια υιοθετήθηκε από πολλούς κλάδους της επιστήμης. Λόγω των διαφόρων πλεονεκτημάτων που προσφέρει, η μέθοδος αυτή έχει ευρεία χρήση σε υπολογιστικά μοντέλα.

Η ακρίβεια των αποτελεσμάτων ελέγχεται με πύκνωση του πλέγματος και διαπίστωση της ανεξαρτησίας της λύσης από το πλέγμα.

Οι άγνωστοι $u(r, \theta, z) = [u_1(r, \theta, z), u_2(r, \theta, z)]$ και $h(r, \theta)$ προσεγγίζονται με διωνυμικές συναρτήσεις βάσης πεπερασμένων στοιχείων. Το δυναμικό προσεγγίζεται με τη σχέση

$$u(r, \theta, z) = \sum_{i=1}^N u_i \varphi^i(r, \theta, z) \quad (3.4)$$

Η θέση της επιφάνειας, $h(r, \theta)$ προσεγγίζεται με τη σχέση

$$h(r, \theta) = \sum_{j=1}^M h_j \psi^j(r, \theta) \quad (3.5)$$

όπου h_j οι m σε πλήθος τιμές της μετατόπισης της ελεύθερης επιφάνειας στους κόμβους και $\psi^j(r, \theta)$ οι διωνυμικές συναρτήσεις βάσης.

3.3. Σταθμισμένα υπόλοιπα Galerkin

Η προσεγγιστική λύση u , όπως υπολογίζεται από τη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων δεν ικανοποιεί (ακριβώς και σε κάθε σημείο) την ΔΕ (3.1α). Το υπόλοιπο είναι $Lu - f$.

Η μέθοδος Galerkin αναζητεί λύση του (3.1) που μηδενίζει καθένα από τα σταθμισμένα υπόλοιπα:

$$R_i \equiv \int_D (Lu - f) \varphi^i dS \quad (3.6)$$

Οι παράγοντες στάθμισης είναι οι ίδιες συναρτήσεις βάσης φ^i που χρησιμοποιούνται στην κατά της προσεγγιστικής λύσης u . Το πλήθος των υπολοίπων είναι ίσο με το πλήθος των συναρτήσεων βάσης και κατά συνέπεια ίσο με το πλήθος των κόμβων του πλέγματος. Με αντικατάσταση της u από την (3.4) στην (3.6) προκύπτει:

$$R_i \equiv \int_D \varphi^i (L \sum_{j=1}^N u_j \varphi^j) dS - \int_D f \varphi^i dS \quad (3.7)$$

Τα ολοκληρώματα στα υπόλοιπα (3.7) είναι συναρτήσεις μόνο των κομβικών αγνώστων u_j (αφού πρώτα εκτελεστούν οι παραγωγίσεις και οι ολοκληρώσεις στο χωρίο D). Επομένως, οι εξισώσεις (3.7) μπορούν να γραφτούν:

$$R_i (u_1, u_2, \dots, u_N) = 0, \quad i=1, 2, \dots, N \quad (3.8)$$

Στην παρούσα διπλωματική υπολογίζονται: τα υπόλοιπα του πεδίου R_ρ , τα υπόλοιπα της εξίσωσης Young - Laplace, R_{YL} , και το υπόλοιπο της εξίσωσης του όγκου R_v .

Υπόλοιπα Galerkin του Δυναμικού

Το υπόλοιπο προκύπτει πολλαπλασιάζοντας τις εξισώσεις (2.7.) με τις συναρτήσεις βάσεις φ^i και ολοκληρώνοντας στο τριδιάστατο χωρίο.

$$R_\rho^i = \iiint \varphi_i \nabla \cdot (\mu \nabla u) dV, \quad dV \equiv r dr d\theta dz, \quad \text{με } i = 1, 2, \dots, n \quad (3.9)$$

Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες της (3.9) και εφαρμογή του θεωρήματος απόκλισης έχουμε:

$$R_\rho^i = \iint \mu \varphi^i (\nabla u \cdot \underline{n}) dS - \iiint \mu \nabla \varphi^i \cdot \nabla u dV \quad (3.10)$$

Το επιφανειακό ολοκλήρωμα της (3.10) υπολογίζεται στο σύνορο των χωρίων 1 και 2 (Σχήμα 2.1). Το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα \underline{n} δείχνει κάθε φορά στο εξωτερικό των χωρίων. Οι συνοριακές συνθήκες τύπου Neumann (2.13-2.15) και (2.17) εισέρχονται στο ολοκλήρωμα αυτό. Πιο συγκεκριμένα για την ελεύθερη επιφάνεια, S , του μαγνητικού ρευστού ισχύει:

$$\iint_S \varphi^i \mu_1 \underline{n} \cdot \nabla u_1 - \mu_2 \underline{n} \cdot \nabla u_2 dS = 0 \quad (3.11)$$

Ο μηδενισμός του επιφανειακού ολοκληρώματος (3.11) προκύπτει από την συνοριακή συνθήκη (2.13). Ομοίως οι συνοριακές συνθήκες (2.14) και (2.15) μηδενίζουν τα αντίστοιχα επιφανειακά ολοκληρώματα. Οι μόνες επιφάνειες που συνεισφέρουν στο επιφανειακό ολοκλήρωμα της (3.10) είναι οι βάσεις του χωρίου 2 (συνοριακές εξισώσεις (2.16) και (2.17)). Συγκεκριμένα για την πάνω βάση, S_{top} , και από την συνοριακή συνθήκη (2.17) προκύπτει:

$$\iint_{S_{top}} \varphi^i \mu_2 \underline{n} \cdot \nabla u_2 \, dS = \mu_2 H_0 \iint_{S_{top}} \varphi^i \, dS$$

στο $z = Z_t$ και $dS \equiv r \, dr \, d\theta$ (3.12)

Για την κάτω βάση, στο $z = -Z_b$, όπου εκεί ορίζεται η συνοριακή συνθήκη τύπου Dirichlet (2.16) το επιφανειακό ολοκλήρωμα της (3.10) δεν χρειάζεται να υπολογιστεί. Οι εξισώσεις που θα προέκυπταν από τον υπολογισμό του ολοκληρώματος αυτού αντικαθίστανται με εξισώσεις των οποίων η λύση επιβάλλει προκαθορισμένη τιμή ($u_2 = 0$) στους αντίστοιχους κόμβους.

Υπόλοιπα της εξίσωσης Young - Laplace, R_{YL}

Προκύπτουν πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση (2.9) με τις συναρτήσεις βάσης ψ^i και ολοκληρώνοντας σε ένα διδιάστατο χωρίο, S'

$$R_{YL}^i = \iint_S \psi^i (-g\delta\rho z + \frac{1}{2}\mu_0\chi_i^2 (\underline{n} \cdot \nabla u_1)^2 + \int_0^{H_i} M_1(H')dH + \sigma C - K) \, dS' \quad (3.13)$$

$$\text{με } i = 1, 2, \dots, m$$

$$dS' = r \, dr \, d\theta.$$

Υπόλοιπο της Εξίσωσης του Όγκου, R_v

Το υπόλοιπο της εξίσωσης του όγκου, R_v , προκύπτει από την ολοκληρωτική εξίσωση 2.12 χωρίς να σταθμιστεί κατά Galerkin

$$R_v = \int_0^{2\pi} \int_0^{R_0} h r dr d\theta \quad (3.14)$$

Τα ολοκληρώματα στις εξισώσεις των υπολοίπων υπολογίζονται από το άθροισμα των συνεισφορών κάθε στοιχείου. Οι συνεισφορές αυτές προκύπτουν μέσω της ισοπαραμετρικής απεικόνισης και της αριθμητικής ολοκλήρωσης στον μοναδιαίο κύβο με την μέθοδο Gauss (Strang & Fix ,1973).

3.4 Μέθοδος Newton

Για την επίλυση μη γραμμικών συστημάτων αλγεβρικών εξισώσεων της μορφής:

$$F(x, \lambda) = 0 \quad (3.15)$$

όπου $F: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ είναι μια μη γραμμικών αλγεβρικών εκφράσεων, $u \in \mathbb{R}^N$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ μια παράμετρος βηματισμού, όταν το N είναι μικρό, χρησιμοποιείται η επαναληπτική μέθοδος Newton [Dennis & Schnabel (1996)]:

Ξεκινά με την επιλογή μιας αρχικής προσέγγισης της λύση του συστήματος x^0 . Σε κάθε βήμα η $(n+1)$ -προσέγγιση, x^{n+1} , προκύπτει από την n -προσέγγιση, x^n , με την επίλυση του συστήματος:

$$J((x^n, \lambda) \delta x^n = -F(x^n, \lambda) \quad (3.16)$$

Όπου, $n=0,1,2..$ μέχρι να συγκλίνει.

Και,

$$x^n = x^{n-1} + \delta x^n$$

J είναι η Ιακωβιανή (Jacobian) του συστήματος με στοιχεία τις μερικές παράγωγους των υπολοίπων Galerkin ως προς τους αγνώστους, δηλαδή $J_{ij} = \partial F_i / \partial x_j$. Ο ακέραιος n είναι ο μετρητής των επαναλήψεων και ο δείκτης n στα J και R δηλώνει υπολογισμό τους στην n -επανάληψη δηλαδή για $x = x^n$. Οι επαναλήψεις γίνονται μέχρι να συγκλίνει το σύστημα. Η μέθοδος Newton συγκλίνει τετραγωνικά στην λύση του

συστήματος όταν το x^0 είναι καλή προσέγγιση της λύσης. Τετραγωνική σύγκλιση σημαίνει ότι υπάρχει $c \in \mathbf{R}$ με $c \geq 0$ έτσι ώστε, αν u^* είναι η λύση του συστήματος, μετά από k επαναλήψεις της μεθόδου Newton, να ισχύει

$$\|x^{n+1} - x^*\|_2 \leq c \|x^n - x^*\|_2^2 \quad (3.17)$$

Συνεπώς, η μέθοδος Newton συγκλίνει σχετικά γρήγορα (όταν δεν αποκλίνει).

3.5 Υπολογιστική Ανάλυση

Από τις εξισώσεις των υπολοίπων Galerkin προκύπτει το σύστημα μη γραμμικών εξισώσεων που θα επιλύσουμε:

$$F(x) = 0, x \in \mathbf{R}^N$$

$$F(x) \equiv [R_p(x), R_{YL}(x), R_v(x)]: \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}^N \quad (3.18)$$

$$N = n + m + 1 \text{ και } x \equiv (u, h, K), u \in \mathbf{R}^n, h \in \mathbf{R}^m, K \in \mathbf{R}$$

Το σύστημα αυτό επιλύεται με την μέθοδο Newton, όπως περιγράφεται στο κεφάλαιο 3.4., όπου ο Ιακωβιανός πίνακας είναι ο εξής:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_p}{\partial u} & \frac{\partial R_p}{\partial h} & \frac{\partial R_p}{\partial K} \\ \frac{\partial R_{YL}}{\partial u} & \frac{\partial R_{YL}}{\partial h} & \frac{\partial R_{YL}}{\partial K} \\ \frac{\partial R_v}{\partial u} & \frac{\partial R_v}{\partial h} & \frac{\partial R_v}{\partial K} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Το υπόλοιπο R_p δεν εξαρτάται από το K συνεπώς $\frac{\partial R_p}{\partial K} = 0$. Επίσης το υπόλοιπο R_v δεν εξαρτάται από το u και το K συνεπώς $\frac{\partial R_v}{\partial u} = 0, \frac{\partial R_v}{\partial K} = 0$. Ο Ιακωβιανός πίνακας είναι μεγάλος, μη-συμμετρικός στη δομή και αραιός λόγω της περιορισμένης αλληλοεπικάλυψης των συναρτήσεων βάσης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΧΩΡΟΥ ΛΥΣΕΩΝ

Η πλήρης διερεύνηση του χώρου λύσεων των μη γραμμικών προβλημάτων γίνεται με βηματισμό (continuation) σε μια παράμετρο (p), που στην προκειμένη περίπτωση είναι η τιμή της έντασης του μαγνητικού πεδίου. Περιλαμβάνει την επίλυση προβλημάτων ιδιοτιμών καθώς και την εύρεση ιδιαζόντων σημείων (singular points), δηλαδή σημείων διακλάδωσης (bifurcation points) και σημείων στροφής (turning points).

Με τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τον βηματισμό στην παράμετρο σχεδιάζουμε διαγράμματα με ένα χαρακτηριστικό μέγεθος που σχετίζεται με τη λύση σε συνάρτηση με την παράμετρο. Στην παρούσα διπλωματική μελετάμε το ύψος της επιφάνειας του ρευστού στο κέντρο του δοχείου συναρτήσει της έντασης του μαγνητικού πεδίου. Οι συνεχείς καμπύλες σε αυτά τα διαγράμματα αποτελούν μια οικογένεια λύσεων και αντιπροσωπεύουν τις διαφορετικές καταστάσεις του μη γραμμικού συστήματος.

Τα σημεία στα οποία αλλάζει η μονοτονία της παραμέτρου βηματισμού ονομάζονται σημεία στροφής (turning points) και τα σημεία που δυο οικογένειες λύσεων διασταυρώνονται ονομάζονται σημεία διακλάδωσης (bifurcation points). Τα σημεία αυτά ονομάζονται ιδιάζοντα σημεία και αναλύονται παρακάτω στο κεφάλαιο 4.3.

4.1 Βηματισμός παραμέτρων

Για την διερεύνηση του χώρου λύσεων του προβλήματος πραγματοποιείται βηματισμός των παραμέτρων. Όταν δεν έχουμε ιδιάζοντα σημεία, μπορεί να γίνει βηματισμός μηδενικής ή πρώτης τάξης. Αλλιώς επιλέγουμε βηματισμό μήκους τόξου.

4.1.1 Βηματισμός μηδενικής τάξης

Ο πιο απλός βηματισμός είναι ο βηματισμός μηδενικής τάξης. Σε κάθε βήμα η παράμετρος (p) μεταβάλλεται κατά ένα βήμα δp , δηλαδή η νέα τιμή είναι $p + \delta p$. Είναι σημαντικό να δοθεί κατάλληλο βήμα ώστε να μπορεί να συγκλίνει η Newton.

Αυτή είναι η μέθοδος που χρησιμοποιούμε στην παρούσα διπλωματική όταν δεν είμαστε κοντά σε σημεία στροφής. Ορίζουμε το βήμα δp στον κώδικα και έτσι προκύπτει ο χώρος λύσεων. Επίσης, βηματισμός μηδενικής τάξης γίνεται και για την διερεύνηση του χώρου λύσεων σε δοχεία διαφορετικής γεωμετρίας και σε διαφορετική γωνία επαφής του ρευστού με τα τοιχώματα του δοχείου. Έτσι, κάθε φορά μεταβάλλουμε μια παράμετρο, την ακτίνα ή το βάθος του δοχείου ή την γωνία επαφής, με ένα συγκεκριμένο βήμα δp .

Εναλλακτικά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε βηματισμό πρώτης τάξης. Με αυτή την μέθοδο η αρχική εκτίμηση της νέας παραμέτρου λαμβάνει υπόψιν την ευαισθησία της λύσης. Στην παρούσα διπλωματική δε χρησιμοποιούμε την συγκεκριμένη μέθοδο.

4.1.2 Βηματισμός μήκους τόξου

Στην περίπτωση όμως που υπάρχει σημείο στροφής, η μέθοδος Newton δε συγκλίνει. Για να πραγματοποιηθεί ο βηματισμός στην παράμετρο θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί άλλη μέθοδος. Η μέθοδος αυτή ονομάζεται βηματισμός μήκους τόξου (arc-length continuation). Η μέθοδος χρησιμοποιείται στην παρούσα διπλωματική και περιγράφεται παρακάτω.

Με χρήση βηματισμού μηδενικής τάξης παρουσιάζεται αδυναμία σύγκλισης και μικρότερα μεγέθη βημάτων καθώς προσεγγίζεται το σημείο στροφής. Ο αλγόριθμος

βηματισμού μήκους τόξου (arc length continuation algorithm) έχει σχεδιαστεί για να μπορέσουν να επιλυθούν προβλήματα κοντά σε σημεία στροφής. Αυτό επιτυγχάνεται με χρήση μιας εναλλακτικής παραμέτρου μήκους τόξου s και μιας επιπλέον εξίσωσης μήκους τόξου. (Salinger et al., 2002)

Η χρήση της μεθόδου περιεγράφηκε με συστηματικό τρόπο για πρώτη φορά από τον Keller (1977).

Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα σύστημα της μορφής

$$R(u, \lambda) = 0 \quad (4.1)$$

όπου το u είναι ένα διάνυσμα που καθορίζει την κατάσταση του συστήματός μας, και το λ , είναι μια πραγματική φυσική παράμετρος. Οι λύσεις μπορούν να βρεθούν επιλύοντας το σύστημα:

$$R(u(s), \lambda(s)) = 0 \quad (4.2)$$

Έχουμε N εξισώσεις που αποτελούν τη βάση του μοντέλου και μια επιπλέον εξίσωση:

$$n(u(s), \lambda(s)) = 0 \quad (4.3)$$

Η (4.3) είναι η εξίσωση μήκους τόξου.

Δεδομένης μιας αρχικής εκτίμησης για το u , επιλύεται με τη μέθοδο Newton,

$$J \Delta u = -R \quad u^{new} = u + \Delta u \quad (4.4)$$

Όπου ο Ιακωβιανός πίνακας $J = \frac{\partial R}{\partial u}$. Η επανάληψη των u συγκλίνει όταν $\|\Delta u\|$ και/ή $\|R\|$ μειώνονται κάτω από κάποιο όριο.

Τα u και λ έχουν παραμετροποιηθεί συναρτήσεϊ του s , και μπορούν να ορισθούν από την σχέση:

$$\|du\|^2 + d\lambda^2 = ds^2 \quad (4.5)$$

Παραγωγίζοντας ως προς την παράμετρο s έχουμε:

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial s} \right\|^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial s} \right)^2 = 1 \quad (4.6)$$

Η εξίσωση αυτή γραμμικοποιείται ως εξής:

$$n(u(s), \lambda(s), s) = (x_i - x_{i-1}) \cdot \frac{\partial u_i}{\partial s} + (\lambda_i - \lambda_{i-1}) \frac{\partial \lambda_i}{\partial s} - \Delta s = 0 \quad (4.7)$$

Αυτός ο αλγόριθμος αναζητά λύσεις σταθερής κατάστασης σε προκαθορισμένα διαστήματα Δs .

Σε μορφή πίνακα γράφεται:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial R}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial x_i^T}{\partial s} & \frac{\partial \lambda}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R \\ n \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

όπου J , R , και Δx υπολογίζονται σε κάθε επανάληψη Newton. Για την επίλυση του συστήματος, είναι απαραίτητο να ενημερώνεται τόσο το λ , όσο και η καινούργια λύση u σε κάθε επανάληψη.

Επιλύοντας τα συστήματα:

$$Jz = -R \quad (4.9)$$

και

$$Jy = -\frac{\partial R}{\partial \lambda} \quad (4.10)$$

Προκύπτουν τα διανύσματα z και y . Τα Δx και $\Delta \lambda$ υπολογίζονται από:

$$\Delta \lambda = -(n + \frac{\partial u}{\partial s} \cdot z) / (\frac{\partial \lambda}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial s} \cdot y) \quad (4.11)$$

$$\Delta x = z + \Delta \lambda y \quad (4.12)$$

Το $\frac{\partial \lambda}{\partial s}$ υπολογίζεται από την εξής σχέση:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial s} = \frac{1}{\sqrt{1 + \|y\|^2}} \quad (4.13)$$

Επιπλέον ισχύει:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial \lambda}{\partial s} \frac{\partial u}{\partial \lambda} \quad (4.14)$$

Μετά την πρώτη επανάληψη υπολογίζεται το βήμα από την σχέση:

$$\Delta s = \Delta \lambda / \frac{\partial \lambda}{\partial s} \quad (4.15)$$

4.2 Ευστάθεια των λύσεων

Μια κατάσταση είναι ευσταθής όταν δεν αντικαθίσταται από άλλη σε μικρές διαταραχές που τείνουν να την απομακρύνουν από την ισορροπία. Αντίθετα είναι ασταθής όταν μικρές διαταραχές ενισχύονται και τελικά οδηγούν σε άλλη ευσταθή κατάσταση. Η ανάλυση της ευστάθειας των λύσεων σε μη γραμμικά προβλήματα με μικρές διαταραχές καθορίζεται από γραμμική ανάλυση ευστάθειας, και περιλαμβάνει επίλυση προβλημάτων ιδιοτιμών.

Για να προσδιοριστεί η ευστάθεια μιας λύσης u_0 του συστήματος (4.1) πρέπει να βρεθούν οι ιδιοτιμές του συστήματος:

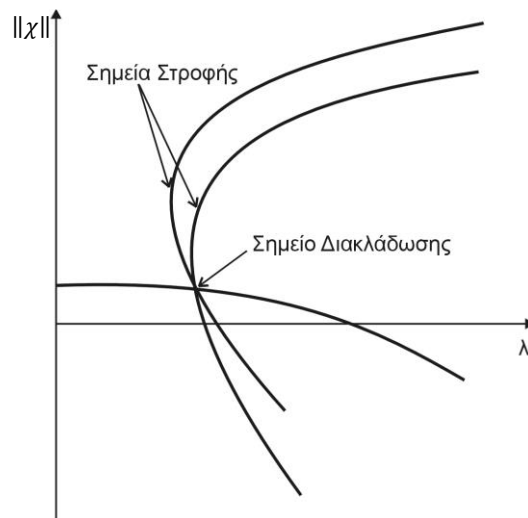
$$J(x_0) x = \lambda x \quad (4.16)$$

όπου $J(x_0)$ είναι ο Ιακωβιανός της μη γραμμικής συνάρτησης R που υπολογίστηκε στο σημείο x_0 .

Οι ιδιοτιμές καθορίζουν την ευστάθεια του συστήματος. Όταν όλες οι ιδιοτιμές είναι αρνητικές η αντίστοιχη διαταραχή μειώνεται εκθετικά με τον χρόνο και η κατάσταση ισορροπίας είναι ευσταθής. Όταν όμως, έστω και μια ιδιοτιμή είναι θετική η αντίστοιχη διαταραχή αυξάνεται εκθετικά με τον χρόνο και η κατάσταση ισορροπίας είναι ασταθής. Συνήθως δεν ενδιαφέρει ο υπολογισμός όλων των ιδιοτιμών. Ιδιαίτερου ενδιαφέροντος είναι οι ιδιοτιμές που είναι κοντά στο μηδέν. Αυτές ονομάζονται και «επικίνδυνες» ιδιοτιμές. Μια ενδεχόμενη αλλαγή του πρόσημου τους αλλάζει την ευστάθεια του συστήματος. Στα ιδιάζοντα σημεία του χώρου των λύσεων μια ή περισσότερες ιδιοτιμές έχουν τιμή ίση με το μηδέν.

4.3 Ιδιάζοντα σημεία

Τα ιδιάζοντα σημεία, αποτελούν σημεία ιδιαίτερου ενδιαφέροντος καθώς εκεί παρατηρείται αλλαγή πολυπλοκότητας και ευστάθειας των λύσεων. Στα σημεία διακλάδωσης καινούργιες οικογένειες λύσεων “ξεπηδούν” από μια συγκεκριμένη οικογένεια λύσεων, ενώ στα σημεία στροφής δεν υπάρχει λύση, σε γειτονικές, είτε μεγαλύτερες είτε μικρότερες τιμές, της παραμέτρου λ .



Σχήμα 4.1: Σημεία διακλάδωσης και στροφής του χώρου λύσεων της $F(x, \lambda) = 0$.

Η ευστάθεια της λύσης αλλάζει καθώς περνάμε από ένα σημείο στροφής. Αυτό σημαίνει ότι αν η λύση είναι ευσταθής, τότε η λύση μετά το σημείο στροφής θα είναι ασταθής.

Κοντά στα ιδιάζοντα σημεία, η ορίζουσα του Ιακωβιανού πίνακα προσεγγίζει το μηδέν, καθώς μία ή περισσότερες ιδιοτιμές του πίνακα αυτού αλλάζουν πρόσημο περνώντας από το μηδέν. Ένας απλός τρόπος ανίχνευσης των ιδιάζοντων σημείων είναι με την παρακολούθηση των μικρότερων ιδιοτιμών της Ιακωβιανής. Αυτό ισοδυναμεί με την επίλυση προβλημάτων ιδιοτιμών σε όλη τη διαδικασία βηματισμού παραμέτρων, με μεγάλο υπολογιστικό κόστος.

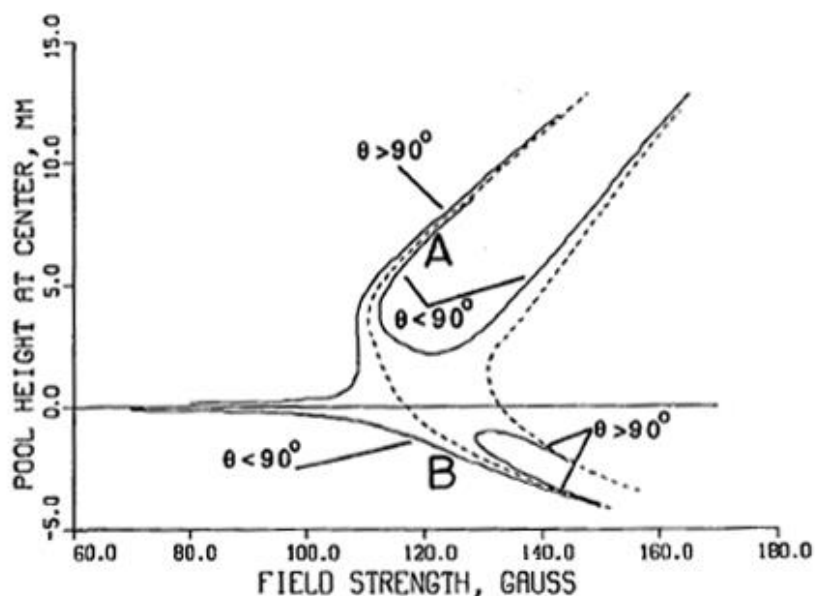
Τα σημεία στροφής δεν μπορούν να περάσουν απαρατήρητα κατά τον βηματισμό της παραμέτρου. Υπολογιστικά, ένα σημείο στροφής μπορεί εύκολα να εντοπιστεί από την αδυναμία σύγκλισης της μεθόδου Newton, σε περίπτωση που επιλέγεται βηματισμός μηδενικής ή πρώτης τάξης. Για την σύγκλιση στα σημεία αυτά πρέπει να χρησιμοποιηθούν ειδικές τεχνικές βηματισμού μήκους τόξου (κεφ 4.1.2). Σε περίπτωση που χρησιμοποιείται μέθοδος βηματισμού μήκους τόξου τα σημεία στροφής είναι τα σημεία που αλλάζει πρόσημο το βήμα, συνεπώς και πάλι δεν περνάνε απαρατήρητα. Σε κάθε περίπτωση η ανίχνευση ενός σημείου στροφής ολοκληρώνεται με έναν υπολογισμό της ιδιοτιμής σε κάθε πλευρά του ιδιάζοντος σημείου.

Από την άλλη, τα σημεία διακλάδωσης μπορούν να ξεπεραστούν χωρίς αισθητή επίδραση στη σύγκλιση των επανάληψεων της Newton, όταν το βήμα είναι αρκετά μεγάλο ώστε να ξεπεράσει το σημείο διακλάδωσης – κάτι που συμβαίνει συνήθως. Επομένως, είναι δυνατόν να υπολογιστούν οι απλές λύσεις με απλό βηματισμό της παραμέτρου. Για να διασφαλιστεί η ανίχνευση των σημείων διακλάδωσης, θα πρέπει να επιλυθούν προβλήματα ιδιοτιμών με μεγάλο υπολογιστικό κόστος.

4.4 Ατελείς διακλαδώσεις

Μικρές θετικές ή αρνητικές «ατέλειες» (imperfections) στην ιδανική περίπτωση έχουν επιπτώσεις στον σχηματιζόμενο κλάδο λύσεων. Στο σύστημα που μελετάμε ως τέλεια περίπτωση θεωρείται όταν η επιφάνεια είναι επίπεδη, δηλαδή όταν έχουμε δοχείο χωρίς σύνορα (unbounded pool). Τα τοιχώματα δημιουργούν «ατέλειες» (imperfections). Στην περίπτωση που λαμβάνονται υπόψιν τα τοιχώματα, τότε ως ιδανική περίπτωση θεωρείται όταν η γωνία επαφής του ρευστού με τα τοιχώματα του δοχείου είναι 90° . Βέβαια κοντά στα τοιχώματα, όπου μαγνητικό ρευστό έρχεται σε επαφή με μη μαγνητικό δημιουργούνται και άλλες ατέλειες που επηρεάζουν τα αποτελέσματα.

Από θεωρητικούς υπολογισμούς της παραμόρφωσης της ελεύθερης επιφάνειας συναρτήσει της έντασης του μαγνητικού πεδίου για γωνίες $\theta_c=85^\circ$ και $\theta_c=95^\circ$ προκύπτει το παρακάτω σχήμα (A. G. Boudounis, 1987):



Σχήμα 4.2: Επίδραση γωνίας επαφής στην παραμόρφωση της ελεύθερης επιφάνειας μαγνητικού ρευστού (αξονοσυμμετρικές παραμορφώσεις).

Με διακεκομμένες γραμμές παρουσιάζονται οι τέλει διακλαδώσεις (perfect bifurcation) και είναι για γωνία επαφής του μαγνητικού ρευστού με τα τοιχώματα του δοχείου $\theta_c = 90^\circ$. Με τις συνεχείς γραμμές παρουσιάζονται οι ατελείς διακλαδώσεις (imperfect bifurcation) για γωνίες επαφής 95° και 85° . Μελετάμε πάντα την συμπεριφορά για μικρή απόκλιση από την τέλεια κατάσταση, δηλαδή κοντά στις 90° και όχι για μεγάλη απόκλιση. Δηλαδή, η θεωρία αυτή δεν αναφέρεται σε γωνίες 10° . Σε κάθε περίπτωση όταν αποκλίνουμε από το τέλει, που στην περίπτωση μας είναι επίπεδη επιφάνεια (γωνία 90°), θα έχουμε δύο ασύνδετους κλάδους με μορφή όπως αυτή που φαίνεται στο σχήμα.4.2 Οι πάνω κλάδοι που συμβολίζονται με A σηματοδοτούν παραμόρφωση κορυφής, ενώ οι δύο κάτω που συμβολίζονται με B, παραμόρφωση δακτυλίου.

Πειραματικά η γωνία είναι μικρότερη από 90° . Η παραμόρφωση σε αυτή την περίπτωση πριν και αμέσως μετά την έναρξη της αστάθειας αναμένεται να ακολουθεί την κάτω καμπύλη και να σχηματίζεται παραμόρφωση τύπου δακτυλίου και στην συνέχεια μπορεί είτε να συνεχίζεται η ίδια παραμόρφωση με το ύψος στο κέντρο να μειώνεται είτε να μεταπηδήσει στην πάνω καμπύλη με αποτέλεσμα να σχηματιστεί παραμόρφωση κορυφής.

Ωστόσο σε δοχείο μικρής ακτίνας η επίδραση των τοιχωμάτων επηρεάζει την συμπεριφορά στο κέντρο. Στα τοιχώματα όπου έχουμε μαγνητικό και μη μαγνητικό ρευστό σε επαφή παρουσιάζονται διαφορετικά φαινόμενα που επηρεάζουν την συμπεριφορά της σχηματιζόμενης καμπύλης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

5.1. Εισαγωγή

Οι κώδικες που χρησιμοποιήσαμε είναι γραμμένοι σε γλώσσα προγραμματισμού Fortran 90. Οι υπολογισμοί έγιναν στην υπολογιστική συστοιχία (cluster) Ανδρομέδα, μια συστοιχία εγκατεστημένη στο Υπολογιστικό Κέντρο της Σχολής Χημικών Μηχανικών του Ε.Μ.Π. (<http://hpc.febui.chemeng.ntua.gr/>)

Χρησιμοποιούνται δύο πλέγματα για τον διαχωρισμό του δοχείου σε στοιχεία: το «Large» (περίπου 300000 εξισώσεις) και το «Small» (περίπου 150000 εξισώσεις). Έχοντας επιβεβαιώσει ότι τα αποτελέσματα που παίρνουμε με το πιο αραιό πλέγμα είναι ίδια με αυτά που παίρνουμε με το πυκνό, χρησιμοποιούμε το αραιό («Small») πλέγμα. Εξάιρεση αποτελεί η περίπτωση όπου η ακτίνα του δοχείου είναι 17.5 mm, η γωνία επαφής 10° και το βάθος 10 mm. Το πιο αραιό πλέγμα χρησιμοποιήθηκε για να μειωθεί ο υπολογιστικός χρόνος.

Η μέθοδος Newton συγκλίνει τις περισσότερες φορές σε 3 επαναλήψεις. Ο χρόνος που απαιτείται για να συγκλίνει η Newton και τελικά να υπολογίσουμε κάθε λύση για μια τιμή έντασης του μαγνητικού πεδίου είναι 1-2 λεπτά. Ο χρόνος είναι μικρός στην αρχή, αλλά όσο πλησιάζουμε σε σημείο στροφής αυξάνεται. Παράλληλα το βήμα

μεταβολής του μαγνητικού πεδίου στην αρχή είναι μεγάλο (ορίσαμε να ξεκινάει από 20 Gauss) και μικραίνει καθώς πλησιάζουμε σημείο στροφής (φτάνει μέχρι 0.1 Gauss).

Στους υπολογισμούς λαμβάνονται υπόψιν τα πλευρικά τοιχώματα. Αυτό σημαίνει ότι έχουν ληφθεί οι αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες που περιεγράφηκαν στο κεφάλαιο 2.2.3. και ορίζεται τιμή για την γωνία επαφής του ρευστού με το δοχείο. Η γωνία επαφής (θ_c) έχει μετρηθεί πειραματικά ίση με 10° και παραμένει πρακτικά σταθερή καθώς μεταβάλλεται η ένταση του πεδίου.

Ως $h=0$ έχει θεωρηθεί το ύψος της ελεύθερης επιφάνειας του ρευστού στο κέντρο του δοχείου όταν το πεδίο είναι μηδέν.

Οι παράμετροι που σχετίζονται με το μαγνητικό ρευστό είναι γνωστές από προηγούμενη μελέτη του εργαστηρίου (A. N. Spyropoulos, 2018) και αναφέρονται παρακάτω. Οι τιμές των παραμέτρων αυτών ορίζονται εξ αρχής στον κώδικα και δεν μεταβάλλονται.

Συγκεκριμένα το μαγνητικό ρευστό που χρησιμοποιήθηκε είναι το APG J10 (Lot F112200A), της Ferrotec. Οι ιδιότητες του APG J10 είναι οι ακόλουθες: $\delta\rho = 1160 \text{ kg/m}^3$, $\sigma = 0.03 \text{ N/m}$, $\chi_i = 1.1$ και $M_s = 19.9 \text{ kA/m}$. Η πυκνότητα μετρήθηκε με φορητό μετρητή πυκνότητας και η επιφανειακή τάση με ζυγό ένα du Noüy. Για τη μαγνήτιση κορεσμού υπολογίστηκε η τιμή $M_s^* = 15.7 \text{ kA/m}$.

Μεταβάλλοντας την ένταση του μαγνητικού πεδίου (B) για εύρος τιμών 0 έως 300 Gauss προκύπτει μια οικογένεια λύσεων για συγκεκριμένες τιμές των άλλων παραμέτρων. Ο βηματισμός της έντασης του μαγνητικού πεδίου πραγματοποιείται αρχικά με βηματισμό μηδενικής τάξης. Το αρχικό βήμα που δίνεται στον κώδικα είναι 20 Gauss. Σε περίπτωση που υπάρχει αδυναμία τετραγωνικής σύγκλισης της επανάληψης Newton ο κώδικας μειώνει το βήμα στο μισό. Ωστόσο, σε περίπτωση που υπάρχει σημείο στροφής επιλέγουμε στον κώδικα την μέθοδο βηματισμού μήκους τόξου.

Οι παράμετροι που μεταβάλλουμε είναι η ακτίνα (R_0), το βάθος (D) και η γωνία επαφής (θ_c). Φυσικά κάθε φορά μεταβάλλουμε μόνο τη μια από τις τρεις παραμέτρους ενώ οι υπόλοιπες διατηρούν μια σταθερή τιμή αναφοράς. Δεν εξετάζουμε εξαγωνικά και τετραγωνικά μοτίβα, Έτσι, επικεντρωνόμαστε σε μικρά

δοχεία ,των οποίων η γεωμετρία δεν επιτρέπει σχηματισμό μοτίβων. Το εύρος τιμών που εξετάστηκε για την ακτίνα είναι από 14 έως 22 mm, για το βάθος από 8 έως 15 mm και για τη γωνία επαφής του ρευστού με το δοχείο από 10° έως 170°.

Στα επόμενα διαγράμματα απεικονίζονται οι διάφορες οικογένειες λύσεων. Σχεδιάζεται, η μεταβολή του σχετικού ύψους της ελεύθερης επιφάνειας στο κέντρο του δοχείου $h(r=0)/R_0$ συναρτήσει της έντασης του μαγνητικού πεδίου. Το σχετικό ύψος είναι αδιάστατο μέγεθος και είναι το ύψος h στο κέντρο του δοχείου προς την ακτίνα R_0 του δοχείου. Η ελάχιστη τιμή που μπορεί να φτάσει είναι $h(r=0)/R_0 = -D/R_0 \cong -10/18 \cong -0.55$. Κάθε μια από τις συνεχείς καμπύλες αναπαριστά τις λεγόμενες οικογένειες λύσεων (ονομάζονται και κλάδοι λύσεων) οι οποίες αντιπροσωπεύουν τις διαφορετικές καταστάσεις του μη-γραμμικού συστήματος.

Για συγκεκριμένες τιμές της έντασης του πεδίου, απεικονίζεται διδιάστατα η παραμόρφωση της ελεύθερης επιφάνειας ($h(r^*)/R_0, r^*$), όπου $r^*=r/R_0$. Ο κώδικας υπολογίζει τρισδιάστατες λύσεις, επομένως αφού επιβεβαιώσαμε ότι είναι αξονοσυμμετρικές κρατήσαμε μόνο τις δυο διαστάσεις για την απεικόνιση.

5.2 Διερεύνηση χώρου λύσεων για δοχεία ακτίνας 14mm έως 22 mm

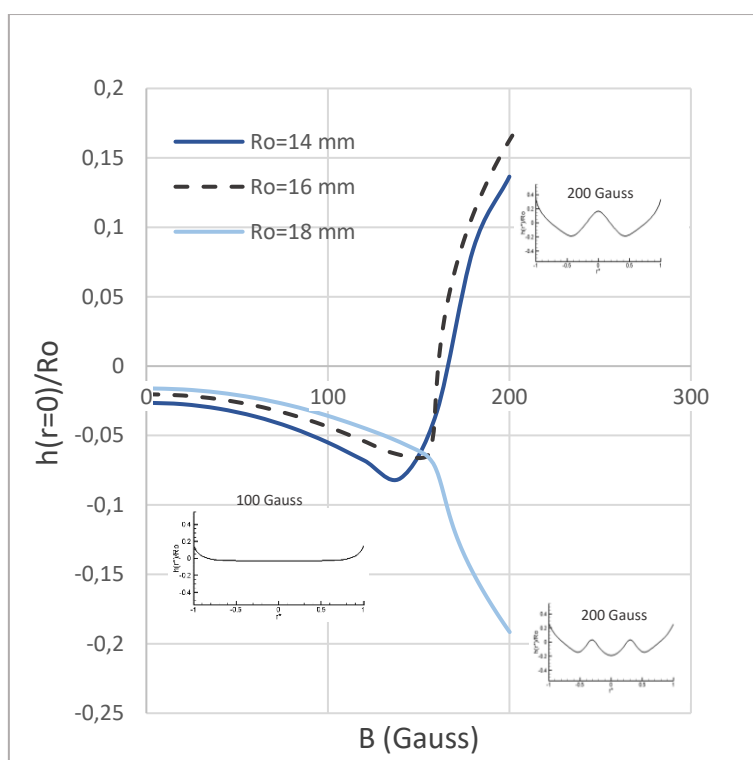
Σε όλους τους υπολογισμούς αυτής της ενότητας το βάθος του δοχείου είναι 10 mm και η γωνία επαφής του ρευστού με τα τοιχώματα του δοχείου 10°.

5.2.1 Διερεύνηση χώρου λύσεων για δοχεία ακτίνας 14 ,16 και 18 mm

Αρχικά γίνεται διερεύνηση των παραμορφώσεων που σχηματίζονται σε δοχεία ακτίνες 14, 16 και 18 mm. Το εύρος της έντασης του μαγνητικού πεδίου που μελετήθηκε ήταν από 0 μέχρι 200 Gauss.

Τα αποτελέσματα των υπολογισμών απεικονίζονται στο Σχήμα 5.1. Καθώς αυξάνεται η ένταση του μαγνητικού πεδίου η επιφάνεια του μαγνητικού ρευστού αρχίζει να παραμορφώνεται. Στην αρχή, η παραμόρφωση είναι μικρή: το ρευστό στα τοιχώματα αρχίζει να αναρριχάται ενώ στο κέντρο αρχίζει να βυθίζεται. Όταν η τιμή της έντασης

του μαγνητικού πεδίου περάσει από μια κρίσιμη τιμή, η παραμόρφωση είναι απότομη και σχηματίζεται κορυφή σε δοχεία με ακτίνες 14 mm και 16 mm και παραμόρφωση τύπου δακτυλίου για ακτίνα 18 mm. Περαιτέρω αύξηση της έντασης του μαγνητικού πεδίου έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση του ύψους της κορυφής για δοχεία με ακτίνες 14 mm και 16 mm και μείωση του ύψους στο κέντρο του δοχείου για ακτίνα 18 mm.



Σχήμα 5.1: Μεταβολή του σχετικού ύψους της ελεύθερης επιφάνειας στο κέντρο του δοχείου ($r=0$), συναρτήσει της έντασης του μαγνητικού πεδίου, για δοχεία ακτίνας 14 mm (μπλε γραμμή), 16 mm (διακεκομμένη μαύρη γραμμή) και 18 mm (γαλάζια γραμμή). Για τα 100 και 200 Gauss απεικονίζεται η λύση της ελεύθερης επιφάνειας ($h(r^*)/R_o, r^*$), όπου $r^*=r/R_o$.

Ήδη από πειράματα που έχουν πραγματοποιηθεί (A. G. Boudounis, 1987) και από υπολογισμούς (Spygourou et al., 2019), είχε παρατηρηθεί ότι για δοχεία ακτίνας 13 και 16 mm σχηματίζεται παραμόρφωση μιας κορυφής. Από την άλλη, για ακτίνα 18 mm είχε παρατηρηθεί παραμόρφωση τύπου δακτυλίου.

Έτσι προκύπτει το ερώτημα, αν σε ένα δοχείο που υπολογίζεται παραμόρφωση δακτυλίου μπορεί να υπάρχει παραμόρφωση μιας κορυφής.

Για να το απαντήσουμε όμως, πρέπει να βρεθεί πρώτα ποια είναι η κρίσιμη ακτίνα για την οποία αλλάζει η λύση, δηλαδή για ποια ακτίνα μεταβαίνουμε από σχηματισμούς μιας κορυφής σε σχηματισμούς τύπου δακτυλίου.

5.2.2 Εντοπισμός κρίσιμης ακτίνας

Εφόσον, λοιπόν, για 16 mm σχηματίζεται παραμόρφωση κορυφής ενώ για 18 mm παραμόρφωση τύπου δακτυλίου, η κρίσιμη ακτίνα θα βρίσκεται ανάμεσα στις τιμές αυτές.

Αρχικά γίνεται έλεγχος για δοχείο ακτίνας 17 mm, από όπου προκύπτει ότι σχηματίζεται και πάλι κορυφή. Επομένως η κρίσιμη ακτίνα θα ανήκει στο διάστημα 17-18 mm. Εξετάζουμε την παραμόρφωση στα 17.5 mm, όπου διαπιστώνεται ότι σχηματίζεται παραμόρφωση τύπου δακτυλίου. Η διερεύνηση συνεχίστηκε με αντίστοιχο τρόπο και καταλήξαμε ότι η κρίσιμη ακτίνα είναι $R_o^{cr} = 17.18$ mm.

5.2.3 Διερεύνηση χώρου λύσεων για δοχείο ακτίνας $R_o = 17.5$ mm.

Για να διερευνήσουμε αν υπάρχει κλάδος λύσεων μιας κορυφής εκτός από το κλάδο του δακτυλίου, επιλέγουμε δοχείο ακτίνας $R_o = 17.5$ mm.

Για $R_o = 17.5$ mm υπολογίζεται η καμπύλη παραμόρφωσης της ελεύθερης επιφάνειας καθώς αυξάνεται η ένταση του πεδίου από 0 έως 200 Gauss με βήμα 10 Gauss. Η μεταβολή του σχετικού ύψους της ελεύθερης επιφάνειας συναρτήσει της έντασης του μαγνητικού πεδίου αναπαρίσταται στο Σχήμα 5.2-καμπύλη (α) (κάτω πράσινη συνεχής γραμμή). Προκειται για μια παραμόρφωση τύπου δακτυλίου.

Για την διερεύνηση ακολουθείται η εξής μέθοδος: Στόχος είναι να χρησιμοποιήσουμε μια αρχική προσέγγιση κοντά στην λύση που αναμένουμε να υπολογίσουμε, δηλαδή λύση κορυφής. Η αρχική αυτή προσέγγιση θα είναι μια λύση κορυφής από δοχείο ακτίνας, κοντά στην ακτίνα που ψάχνουμε την λύση. Αρχικά, λοιπόν, εντοπίζεται μια λύση για δοχείο με $R_o < R_o^{cr}$ στο οποίο σχηματίζεται κορυφή. Στη συνέχεια,

χρησιμοποιούμε τη λύση αυτή ως αρχική προσέγγιση της λύσης του συστήματος για την επανάληψη Newton σε δοχείο ακτίνας 17.5 mm, όπου σχηματίζεται αρχικά παραμόρφωση τύπου δακτυλίου. Αν δεν υπάρχει σύγκλιση της επανάληψης Newton γίνεται βηματισμός παραμέτρων μέχρι να βρεθεί λύση, αν υπάρχει.

Χρησιμοποιήθηκε η λύση από δοχείο ακτίνας 17 mm στα $B=160$ Gauss. Διαπιστώνεται ότι η Newton δε συγκλίνει, επομένως δεν επαληθεύεται η λύση.

Δοκιμάζουμε άλλη λύση: γίνεται βηματισμός στην ακτίνα με βήμα 0.1 mm. Η λύση που χρησιμοποιείται τώρα είναι από δοχείο ακτίνας 17.1 mm στα $B=160$ Gauss. Πάλι δεν υπάρχει σύγκλιση. Ο βηματισμός στην ακτίνα δεν μπορεί να συνεχιστεί εφόσον για ακτίνα 17.2 mm σχηματίζεται δακτύλιος. Πρέπει να γίνει βηματισμός σε άλλη παράμετρο. Επιλέγουμε να μεταβάλλουμε την ένταση του μαγνητικού πεδίου με βήμα 10 Gauss. Η λύση που χρησιμοποιείται τώρα είναι από δοχείο ακτίνας 17 mm στα $B=170$ Gauss. Πραγματοποιείται σύγκλιση της μεθόδου Newton, οπότε διαπιστώνουμε ότι η μορφή της λύσης για δοχείο ακτίνας 17 mm στα $B=170$ Gauss είναι και λύση για δοχείο ακτίνας 17.5 mm.

Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε αυτή τη λύση σαν αρχική τιμή για δοχείο ακτίνας 17.5 mm και εξετάζουμε την επίδραση της μεταβολής της έντασης του μαγνητικού πεδίου σε αυτήν τη λύση. Εξετάστηκαν δυο περιπτώσεις. Στην πρώτη περίπτωση εξετάζεται η αύξηση του μαγνητικού πεδίου με βήμα 1 Gauss έως τα 200 Gauss και στη δεύτερη περίπτωση η μείωση με βήμα -0.1 Gauss. Στην δεύτερη περίπτωση επιλέγουμε μικρό βήμα καθώς πρέπει να είμαστε προσεκτικοί να μην οδηγηθούμε στον κλάδο λύσεων τύπου δακτυλίου.

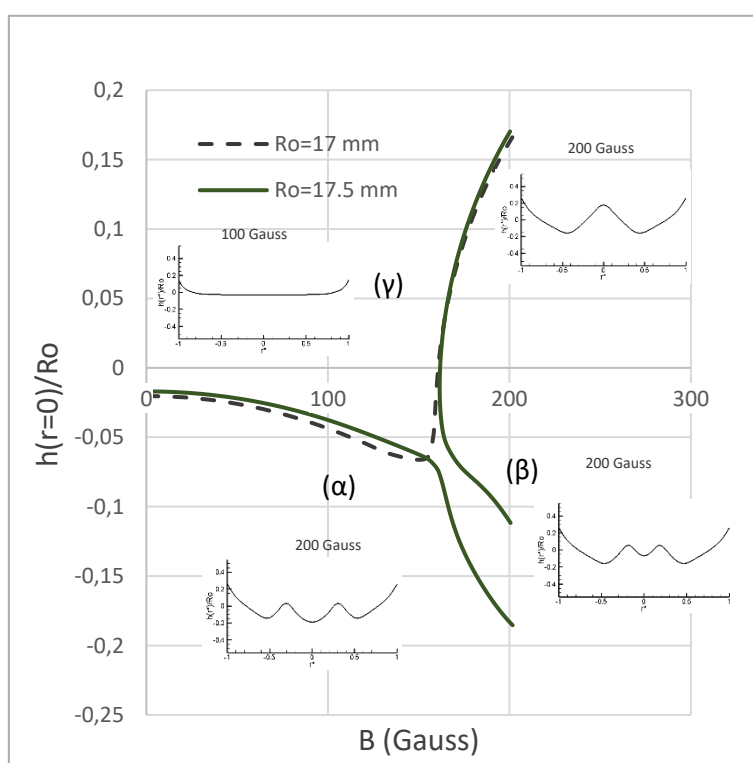
Καθώς αυξάνεται το πεδίο με βήμα 1 Gauss σχηματίζεται παραμόρφωση κορυφής, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.2. Παρατηρούμε ότι η παραμόρφωση είναι παρόμοια με αυτή που παρατηρείται για ακτίνα 17 mm.

Καθώς μειώνεται το πεδίο αναμένουμε να μειωθεί το ύψος της κορυφής μέχρι να εξαφανιστεί.

Πράγματι το ύψος μειώνεται καθώς μειώνεται η ένταση του μαγνητικού πεδίου μέχρι τα 162 Gauss. Γι' αυτήν την τιμή, όπου πλέον έχει σχεδόν εξαφανιστεί η κορυφή, η

Newton δε συγκλίνει. Είναι αρκετά πιθανό αυτό να οφείλεται σε σημείο στροφής. Για το λόγο αυτό, επαναλαμβάνουμε τους υπολογισμούς χρησιμοποιώντας την μέθοδο βηματισμού μήκους τόξου. Αρχικό βήμα δίνεται και πάλι -0.1 Gauss, το οποίο αυτή τη φορά αλλάζει με την μέθοδο μήκους τόξου, όπως περιγράφεται στο Κεφ 4.1.2

Τελικά, διαπιστώνουμε ότι η μέθοδος επιτρέπει να συνεχιστούν οι υπολογισμοί και προκύπτει η καμπύλη που φαίνεται στο Σχήμα 5.2. Στο διάγραμμα αναπαρίσταται η μεταβολή του ύψους στο κέντρο του δοχείου καθώς μεταβάλλεται η ένταση του μαγνητικού πεδίου μαζί με απεικονίσεις της παραμόρφωσης της επιφάνειας σε ορισμένες τιμές του μαγνητικού πεδίου. Παράλληλα απεικονίζεται η παραμόρφωση και για ακτίνα 17 mm. Στο σχήμα φαίνεται και η καμπύλη για 17.5 mm, η οποία έχει ήδη υπολογιστεί για την περίπτωση που εμφανίζεται αρχικά παραμόρφωση τύπου δακτυλίου και η ένταση του πεδίου μεταβάλλεται από 0 έως 200 Gauss. (Σχήμα 5.2-καμπύλη α)



Σχήμα 5.2: Μεταβολή του σχετικού ύψους της ελεύθερης επιφάνειας στο κέντρο του δοχείου ($r=0$), συναρτήσε της έντασης του μαγνητικού πεδίου, για δοχεία ακτίνας 16 mm (διακεκομμένη) και 18 mm (συνεχής γραμμή) . Για τα 100 και 200 Gauss απεικονίζεται η λύση της ελεύθερης επιφάνειας ($h(r^*)/R_o, r^*$), όπου $r^*=r/R_o$.

Παρατηρούμε ότι εμφανίζεται σημείο στροφής στα 161.6 Gauss. Από εκεί και μετά το βήμα γίνεται θετικό και η ένταση του πεδίου αρχίζει να αυξάνεται. Στα 161.8 Gauss το ύψος στο κέντρο είναι μηδέν και στην συνέχεια συνεχίζει να μειώνεται λαμβάνοντας αρνητικές τιμές σχηματίζοντας παραμόρφωση τύπου δακτυλίου αυτή τη φορά. Η διερεύνηση έγινε για ένταση πεδίου έως 200 Gauss.

Έτσι συμπεραίνουμε ότι για την ίδια οικογένεια λύσεων μεταβαίνουμε από παραμόρφωση μιας κορυφής (Σχήμα 5.2-γ) σε παραμόρφωση τύπου δακτυλίου (Σχήμα 5.2.-β). Άρα, όχι μόνο υπάρχει λύση μιας κορυφής στο δοχείο μας, αλλά αυτή συνδέεται και με μια παραμόρφωση τύπου δακτυλίου.

5.2.4 Διερεύνηση χώρου λύσεων για δοχείο ακτίνας 18 mm

Εξετάζουμε την παραμόρφωση για δοχείο ακτίνας 18 mm ακολουθώντας την ίδια μέθοδο που περιεγράφηκε για δοχείο ακτίνας 17.5 mm.

Εξετάζουμε την παραμόρφωση της ελεύθερης επιφάνειας καθώς μεταβάλλεται η ένταση του μαγνητικού πεδίου με βηματισμό μήκους τόξου από 0 έως 300 Gauss. Καταλήγουμε στην καμπύλη που φαίνεται στο Σχήμα 5.3.

Παρατηρούμε (Σχήμα 5.3) ότι πρόκειται για μια ενιαία καμπύλη που συνδέει τις δύο αξονοσυμμετρικές παραμορφώσεις (παραμόρφωση τύπου δακτυλίου και παραμόρφωση μιας κορυφής). Στην έναρξη της αστάθειας σχηματίζεται παραμόρφωση τύπου δακτυλίου η οποία σιγά σιγά εξαφανίζεται και δίνει την θέση της σε σχηματισμό κορυφής. Ουσιαστικά αρχικά έχουμε μια σταθερή παραμόρφωση τύπου δακτυλίου, στην συνέχεια αυτή η παραμόρφωση σταματάει να είναι σταθερή, μέχρι που ξαναγίνεται σταθερή και αρχίζει να σχηματίζεται κορυφή.

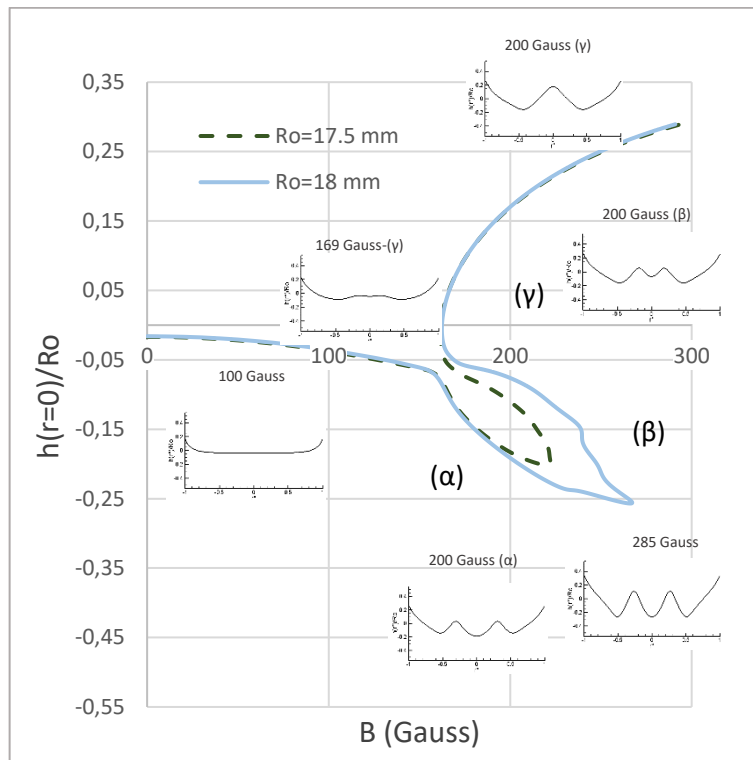
Αρχικά το μαγνητικό ρευστό είναι σχεδόν επίπεδο. Καθώς αυξάνεται το πεδίο και φτάνει στην κρίσιμη τιμή, το ύψος στο κέντρο του ρευστού αρχίζει να μειώνεται και σχηματίζεται παραμόρφωση τύπου δακτυλίου. Φτάνοντας στα 285 Gauss το πεδίο αρχίζει να μειώνεται και το ύψος του ρευστού στο κέντρο αρχίζει να αυξάνεται.

Επομένως έχουμε σημείο στροφής. Στη συνέχεια στα 168 Gauss, το μαγνητικό πεδίο αρχίζει να αυξάνεται. Άρα, συναντάμε δεύτερο σημείο στροφής. Μετά το σημείο αυτό το ύψος στο κέντρο αυξάνεται και αρχίζει να σχηματίζει παραμόρφωση κορυφής.

Στο διάγραμμα (5.3) συμβολίζουμε με (α) τον κλάδο που η παραμόρφωση είναι τύπου δακτυλίου με το ύψος στο κέντρο του ρευστού να μειώνεται καθώς αυξάνεται η ένταση του μαγνητικού πεδίου, με (β) συμβολίζουμε τον κλάδο μετά το πρώτο σημείο στροφής που το μαγνητικό πεδίο μειώνεται και ταυτόχρονα αυξάνεται το ύψος στο κέντρο του ρευστού και με (γ) τον κλάδο μετά το δεύτερο σημείο στροφής όπου το ύψος στο κέντρο του υγρού αυξάνεται καθώς αυξάνεται η ένταση του μαγνητικού πεδίου.

Στη συνέχεια, επαναλαμβάνουμε τους υπολογισμούς σε δοχείο ακτίνας 17.5 mm μεταβάλλοντας την ένταση του μαγνητικού πεδίου με βηματισμό μήκους τόξου από 0 έως 300 Gauss.

Με διακεκομμένη πράσινη γραμμή στο Σχήμα 5.3 απεικονίζεται η καμπύλη της παραμόρφωσης. Βλέπουμε και πάλι μια συνεχή καμπύλη όπου μια αρχική παραμόρφωση τύπου δακτυλίου δίνει την θέση της σε παραμόρφωση κορυφής.



Σχήμα 5.3: Μεταβολή του σχετικού ύψους της ελεύθερης επιφάνειας στο κέντρο του δοχείου ($r=0$), συναρτήσεως της έντασης του μαγνητικού πεδίου, για δοχεία ακτίνας 17.5 mm και 18 mm. Για τα 100, 200, 285 και 169 Gauss απεικονίζεται η λύση της ελεύθερης επιφάνειας ($h(r^*)/R_o, r^*$), όπου $r^*=r/R_o$.

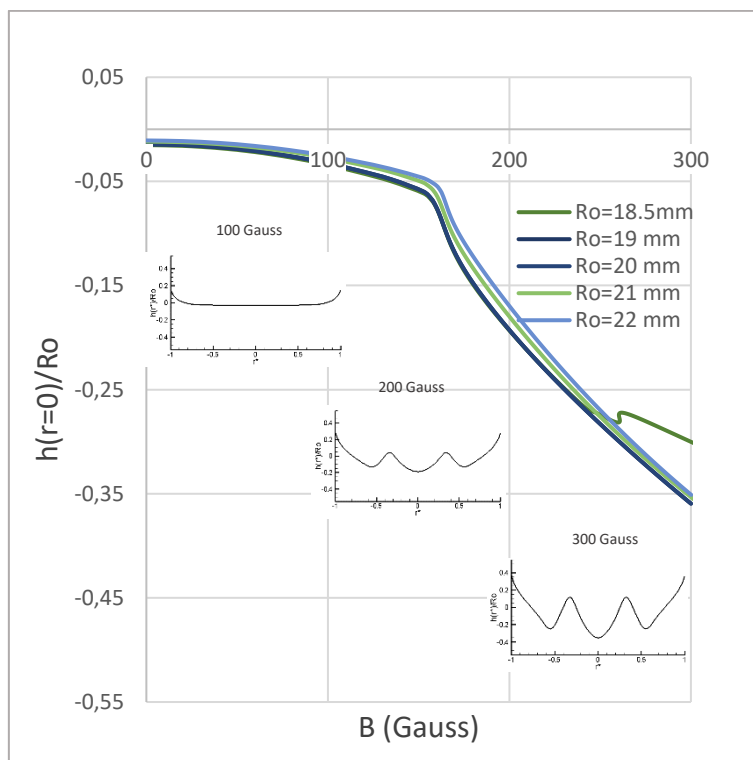
Στο δοχείο με ακτίνα 17.5 mm το σημείο στροφής, όπου το ύψος του ρευστού στο κέντρο αρχίζει να αυξάνεται, είναι 222 Gauss.

Παρατηρούμε ότι στα 18 mm η καμπύλη δεν είναι ομαλή. Αντίθετα στην περίπτωση που έχουμε δοχείο με ακτίνα 17.5 mm η καμπύλη είναι ομαλή. Η μη ομαλή καμπύλη για $R_o=18$ mm μας προβληματίζει και πρέπει να την εξετάσουμε. Θα μπορούσε να οφείλεται σε υπολογιστικό λάθος, για παράδειγμα είναι πιθανό το πλέγμα να μην δίνει σωστά αποτελέσματα. Επίσης, το δοχείο που μελετάμε είναι μικρού βάθους, επομένως, καθώς πλησιάζουμε τον πάτο του είναι πιθανό οι οριακές συνθήκες να παραποιούν το αποτέλεσμα. Έρευνα για την επίδραση του βάθους γίνεται στη συνέχεια (Κεφ 5.3). Το ενδεχόμενο να επηρεάζει το πλέγμα εξετάζεται μερικώς στο κεφάλαιο 5.4.2.

5.2.5 Διερεύνηση χώρου λύσεων για δοχεία ακτίνας 18.5mm-22 mm

Στην συνέχεια, εξετάζουμε αν σχηματίζεται αντίστοιχη καμπύλη για δοχεία μεγαλύτερης ακτίνας.

Ξεκινώντας από δοχείο ακτίνας 18.5 mm και στη συνέχεια από 19 mm μέχρι 22 mm με βήμα 1 mm υπολογίστηκαν οι κλάδοι μεταβάλλοντας την ένταση του πεδίου από 0 έως 300 Gauss. Όπως φαίνεται και στο σχήμα 5.4 εμφανίζεται μόνο παραμόρφωση τύπου δακτυλίου σε όλες τις περιπτώσεις.



Σχήμα 5.4: Μεταβολή του σχετικού ύψους της ελεύθερης επιφάνειας στο κέντρο του δοχείου ($r=0$), συναρτήσει της έντασης του μαγνητικού πεδίου, για δοχεία ακτίνας 18.5, 19, 20, 21 και 22 mm. Για τα 100, 200 και 300 Gauss απεικονίζεται η λύση της ελεύθερης επιφάνειας ($h(r^*)/R_o, r^*$), όπου $r^*=r/R_o$.

Αξιοσημείωτο είναι ότι για ακτίνα 18.5 mm η καμπύλη που υπολογίζουμε ακολουθεί την καμπύλη που σχηματίζεται για ακτίνα 18 mm, ενώ τελικά δεν εμφανίζεται σημείο στροφής και σχηματίζεται μόνο παραμόρφωση τύπου δακτυλίου.

5.3 Διερεύνηση χώρου λύσεων για δοχεία βάθους 8 mm έως 15 mm

Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω (5.2.4), σε δοχείο ακτίνας 18 mm, η καμπύλη δεν είναι ομαλή. Καθώς η παραμόρφωση στο κέντρο πλησιάζει τον πάτο του δοχείου, είναι πιθανό η ομοιομορφία του μαγνητικού πεδίου να επηρεάζεται, και τελικά να επηρεάζεται η καμπύλη που υπολογίζουμε. Για το λόγο αυτό διερευνάται η επίδραση του βάθους στην παραμόρφωση.

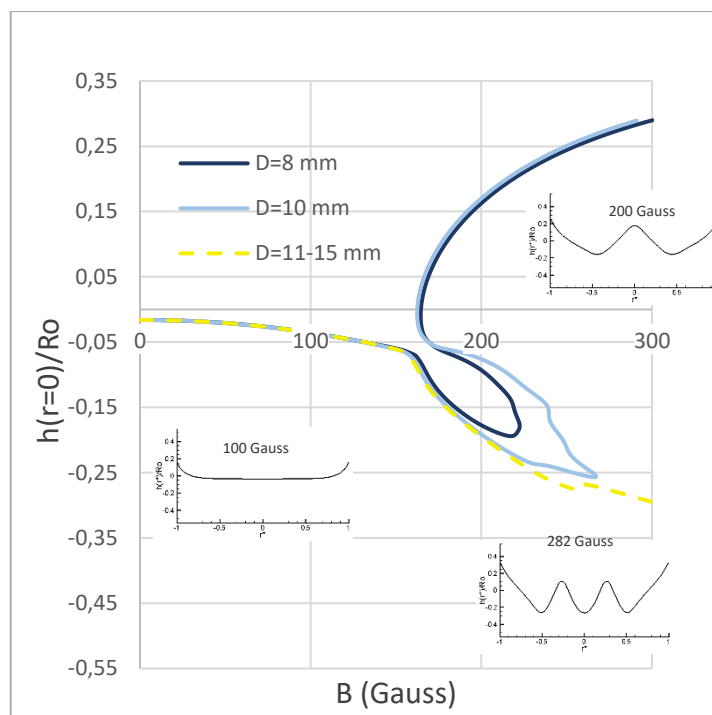
5.3.1 Διερεύνηση χώρου λύσεων για δοχείο βάθους 11-15 mm

Εξετάζουμε δοχείο μεγαλύτερου βάθους, συγκεκριμένα επιλέγουμε βάθος 15 mm και γωνία επαφής 10°. Διαπιστώνεται ότι σχηματίζεται μόνο παραμόρφωση τύπου δακτυλίου. Στην συνέχεια διερευνούμε για γωνία επαφής 40°, όπου πάλι σχηματίζεται η ίδια καμπύλη- δακτυλίου. Μετά για γωνία επαφής 10° μελετάμε τις παραμορφώσεις για βάθη 13, 12 και 11 mm και διαπιστώνουμε ότι και πάλι δεν παρατηρείται σχηματισμός κορυφής. Σε όλες τις περιπτώσεις η λύση δεν διαφέρει σημαντικά και το ύψος στο κέντρο του δοχείου ακολουθεί την κίτρινη καμπύλη (Σχήμα 5.5).

5.3.2 Διερεύνηση χώρου λύσεων για δοχείο βάθους 8 mm

Σε αυτό το σημείο κρίθηκε απαραίτητο να διερευνηθεί η περίπτωση μικρότερου βάθους από τα 10 mm. Αν ο σχηματισμός της μη ομαλής καμπύλης οφείλεται στο μικρό βάθος του δοχείου αναμένουμε να παρατηρήσουμε και πάλι μη ομαλή

καμπύλη. Μετά από τους υπολογισμούς προκύπτει η καμπύλη που φαίνεται στο (Σχήμα 5.5).



Σχήμα 5.5: Μεταβολή του σχετικού ύψους της ελεύθερης επιφάνειας στο κέντρο του δοχείου ($r=0$), συναρτήσει της έντασης του μαγνητικού πεδίου, σε δοχεία ακτίνας 18 mm για βάθος 8 mm (μπλε σκούρο), 10 mm (γαλάζιο) και από 11 έως 15 mm (κίτρινη διακεκομμένη). Για τα 250 Gauss απεικονίζεται η λύση της ελεύθερης επιφάνειας ($h(r^*)/R_o, r^*$), όπου $r^*=r/R_o$.

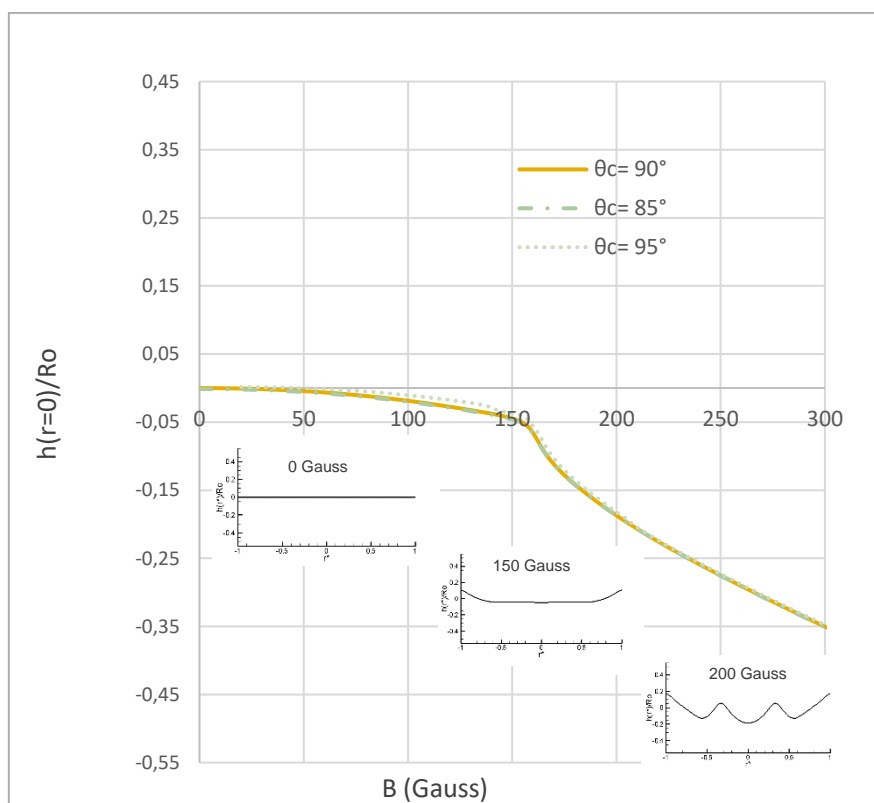
Η καμπύλη που δημιουργείται είναι ομαλή, όπως ήταν και σε δοχείο ακτίνας 17.5 mm. Άρα καταλήγουμε ότι η αρχική μας υπόθεση δεν υποστηρίζεται καθώς για δοχείο μικρότερου βάθους υπολογίζεται ομαλή καμπύλη. Παράλληλα παρατηρούμε ότι η καμπύλη για βάθος 8 mm μοιάζει αρκετά με την καμπύλη που σχηματίζεται όταν η ακτίνα του δοχείου είναι 17.5 mm και το βάθος 10 mm.

5.4 Διερεύνηση χώρου λύσεων για γωνία επαφής 10° έως 170°

Παρουσιάζεται η μελέτη της επίδρασης της γωνίας επαφής θ_c του μαγνητικού ρευστού με τα τοιχώματα του δοχείου, στην παραμόρφωση της ελεύθερης επιφάνειας, καθώς μεταβάλλεται η ένταση του μαγνητικού πεδίου από 0 έως 300 Gauss σε δοχείο ακτίνας 18 mm. Το εύρος γωνιών που μελετήθηκε είναι από 10° έως 170°.

5.4.1 Διερεύνηση χώρου λύσεων για γωνίες επαφής 90°, 95°, 85°

Αρχικά, εξετάζονται οι περιπτώσεις των 90°, 95° και 85° με στόχο να διερευνηθεί αν οι καμπύλες ακολουθούν τις καμπύλες της θεωρίας (Κεφ 4.4, Σχήμα 4.2).



Σχήμα 5.6 :Μεταβολή του σχετικού ύψους της ελεύθερης επιφάνειας στο κέντρο του δοχείου ($r=0$), συναρτήσει της έντασης του μαγνητικού πεδίου για γωνίες επαφής 85°, 90° και 95°. Η ακτίνα του δοχείου είναι $R_o=18$ mm και το βάθος $D=10$ mm. Για συγκεκριμένες τιμές της έντασης του πεδίου απεικονίζεται η παραμόρφωση της ελεύθερης επιφάνειας($h(r^*)/R_o, r^*$), όπου $r^*=r/R_o$.

Ο κλάδος που σχηματίζεται φαίνεται στο Σχήμα 5.6. Μεταβάλλοντας ελαφρώς την τιμή της γωνίας επαφής από την «τέλεια» κατάσταση (90°) παρατηρούμε ότι δεν αλλάζει σημαντικά η παραμόρφωση της ελεύθερης επιφάνειας.

5.4.2. Διερεύνηση χώρου λύσεων για γωνίες επαφής από 10° έως 170°

Στην συνέχεια, μελετήσαμε η συμπεριφορά για εύρος από 10° έως 170° με βήμα 10° .

Τα αποτελέσματα συγκεντρώνονται στο Σχήμα 5.7. Παρατηρήσαμε ότι για τα συγκεκριμένα εύρη γωνιών οι λύσεις σχεδόν ταυτίζονται, με εξαίρεση τη λύση για γωνία 130° . Πραγματοποιήσαμε, λοιπόν, ομαδοποίηση αυτών των γωνιών, ώστε να μπορέσουμε να παρατηρήσουμε τις ποιοτικές διαφορές τους. Συγκεκριμένα η ομαδοποίηση γίνεται ως εξής: γωνία 10° έως 40° , 50° έως 60° , 70° έως 120° και 140° έως 170° .

Για συγκεκριμένες τιμές της έντασης του πεδίου, που παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον, απεικονίζεται η λύση της ελεύθερης επιφάνειας.

Στην περίπτωση που η γωνία επαφής είναι από 10° έως 40° (Σχήμα 5.7-α) η παραμόρφωση είναι ίδια με αυτή που περιγράψαμε στο κεφάλαιο 5.2.4. και απεικονίζεται στο Σχήμα 5.3 με γαλάζια συνεχή γραμμή.

Για γωνία επαφής από 50° έως 60° (Σχήμα 5.7-β-διακεκομμένη γραμμή) η καμπύλη που υπολογίζουμε ακολουθεί την καμπύλη που σχηματίζεται για γωνίες 10° - 40° , αλλά τελικά δεν εμφανίζεται σημείο στροφής και σχηματίζεται μόνο παραμόρφωση τύπου δακτυλίου.

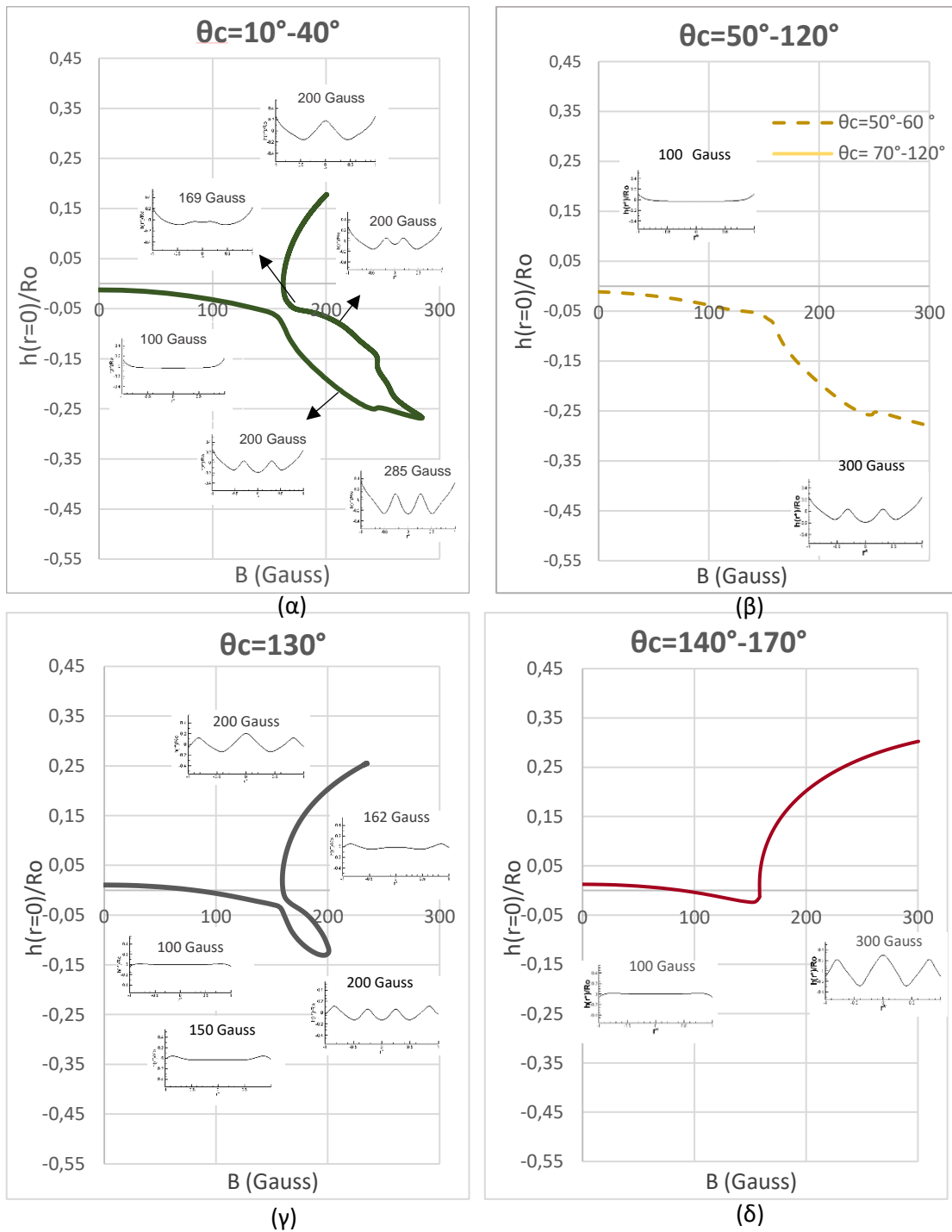
Για γωνία επαφής από 70° έως 120° (Σχήμα 5.7-β-συνεχής γραμμή) εμφανίζεται μόνο παραμόρφωση τύπου δακτυλίου.

Η γωνία 130° (Σχήμα 5.7-γ) αποτελεί την κρίσιμη γωνία, όπου εμφανίζεται και παραμόρφωση τύπου δακτυλίου και μιας κορυφή. Αναλυτικότερα, στα 150 Gauss αρχίζει να σχηματίζεται παραμόρφωση τύπου δακτυλίου με το ύψος στο κέντρο του δοχείου να μειώνεται καθώς αυξάνεται η ένταση του πεδίου μέχρι τα 200 Gauss που

εμφανίζεται σημείο στροφής. Η ένταση του πεδίου αρχίζει να μειώνεται και παράλληλα το ύψος της επιφάνειας στο κέντρο του δοχείου αυξάνεται μέχρι τα 162 Gauss. Στα 159 Gauss έχουμε το επόμενο σημείο στροφής. Πλέον αυξάνεται η ένταση του πεδίου μαζί με το ύψος της επιφάνειας στο κέντρο του δοχείου και σχηματίζεται κορυφή.

Για γωνία επαφής από 140° έως 170° (Σχήμα 5.7-δ) σχηματίζεται μόνο παραμόρφωση κορυφής.

Συμπερασματικά, παρατηρούμε ότι παραμόρφωση της ελεύθερης επιφάνειας σε αρχικό σχηματισμό δακτυλίου και στη συνέχεια κορυφής εμφανίζεται στο εύρος γωνιών 10° έως 40° και σε γωνία 130° . Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι στην πρώτη περίπτωση η καμπύλη είναι μη ομαλή ενώ στην δεύτερη είναι ομαλή.



Σχήμα 5.7: Μεταβολή του σχετικού ύψους της ελεύθερης επιφάνειας στο κέντρο του δοχείου ($r=0$), συναρτήσει της έντασης του μαγνητικού πεδίου για γωνία επαφής 10° έως 170° . Η ακτίνα του δοχείου είναι $R_0=18$ mm και το βάθος $D=10$ mm. Για συγκεκριμένες τιμές της έντασης του πεδίου απεικονίζεται η παραμόρφωση της ελεύθερης επιφάνειας ($h(r^*)/R_0, r^*$), όπου $r^*=r/R_0$.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετήσαμε την επίδραση της ακτίνας, του βάθους του δοχείου και της γωνίας επαφής του μαγνητικού υγρού στο τοίχωμα του δοχείου, στην παραμόρφωση της επιφάνειας ενός μαγνητικού ρευστού υπό την επίδραση κατακόρυφου μαγνητικού πεδίου. Διερευνήθηκε ο χώρος λύσεων σε δοχείο μικρών διαστάσεων, ακτίνας από 14 έως 22 mm και βάθους από 8 έως 15 mm. Παράλληλα διερευνήθηκε η επίδραση της γωνίας επαφής του ρευστού με τα τοιχώματα του δοχείου σε εύρος τιμών από 10° έως 170° .

Σε δοχείο με ακτίνα από 14 έως 17.18 mm εμφανίζεται παραμόρφωση κορυφής στην επιφάνεια του μαγνητικού ρευστού καθώς αυξάνεται η ένταση του μαγνητικού πεδίου. Από εκεί και μετά μέχρι τα 22 mm εμφανίζεται παραμόρφωση δακτυλίου. Για δοχεία ακτίνας 17.5 και 18 mm εμφανίζονται και οι δύο παραμορφώσεις. Σημειώνεται ότι για αυτούς τους υπολογισμούς το βάθος ήταν 10 mm και η γωνία επαφής του ρευστού με τα τοιχώματα του δοχείου ήταν 10° .

Παράλληλα, μελετήσαμε την επίδραση της γωνίας επαφής του ρευστού με τα τοιχώματα του δοχείου, σε δοχείο ακτίνας 18 mm και βάθους 10 mm (Σχήμα 5.7). Για γωνίες από 10° έως 40° καθώς και 130° έχουμε και παραμόρφωση τύπου δακτυλίου και κορυφής. Για γωνίες από 50° έως 120° έχουμε παραμόρφωση τύπου δακτυλίου και για γωνίες από 140° έως 170° έχουμε παραμόρφωση κορυφής.

Επιπλέον, οι υπολογισμοί έδειξαν ότι το βάθος του δοχείου επηρεάζει τις παραμορφώσεις (Σχήμα 5.5). Για δοχείο με βάθος 8 mm σχηματίζεται ενιαίος κλάδος λύσεων που συνδέει την παραμόρφωση τύπου δακτυλίου με την παραμόρφωση μιας

κορυφής. Στην περίπτωση που το βάθος ήταν από 11 έως 15 mm παρατηρήθηκε μόνο παραμόρφωση τύπου δακτυλίου.

Το σημαντικό συμπέρασμα που προέκυψε από την παρούσα διπλωματική είναι ότι υπάρχει σύνδεση μεταξύ του σχηματισμού δακτυλίου και του σχηματισμού κορυφής σε ορισμένες περιπτώσεις (Σχήμα 5.3). Διαπιστώθηκε ότι σε αυτές τις περιπτώσεις καθώς μεταβάλλεται η ένταση του μαγνητικού πεδίου με βηματισμό μήκους τόξου, η ελεύθερη επιφάνεια αρχικά παραμορφώνεται σχηματίζοντας δακτύλιο. Το ύψος στο κέντρο του δοχείου μειώνεται μέχρι μια ελάχιστη τιμή, όπου υπάρχει σημείο στροφής (turning point). Στη συνέχεια η ένταση του μαγνητικού πεδίου αρχίζει να μειώνεται και το ύψος στο κέντρο του δοχείου να αυξάνεται μέχρι το επόμενο σημείο στροφής. Από το σημείο αυτό και μετά η ένταση του μαγνητικού πεδίου και το ύψος στο κέντρο του δοχείου αυξάνονται και σχηματίζεται παραμόρφωση μιας κορυφής.

Αξιοσημείωτο είναι ότι, για δοχείο ακτίνας 18 mm, βάθους 10 mm και γωνίας 10° έως 40° (Σχήμα 5.3-γαλάζια καμπύλη), η καμπύλη που συνδέει τη λύση της κορυφής και του δακτυλίου δεν είναι ομαλή. Είναι πιθανόν η ανομοιομορφία να οφείλεται στην μικρή τιμή του βάθους του δοχείου. Ωστόσο ένα τέτοιο ενδεχόμενο δεν υποστηρίζεται από το γεγονός ότι, αφού σε δοχείο με μικρότερο βάθος (8 mm) σχηματίζεται ομαλή καμπύλη.

Παράλληλα, μεταβάλλοντας την γωνία επαφής του ρευστού με το δοχείο παρατηρούμε ότι και πάλι σχηματίζεται μια ομαλή καμπύλη που συνδέει την παραμόρφωση δακτυλίου με την παραμόρφωση μιας κορυφής, όταν η γωνία είναι 130° και μια μη ομαλή όταν η γωνία είναι από 10° έως 40° .

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει και η «ευαισθησία» του κλάδου λύσεων που συνδέει την παραμόρφωση τύπου δακτυλίου και κορυφής. Ακόμα και μια μικρή μεταβολή των παραμέτρων, επηρεάζει τον κλάδο και τελικά παρατηρούμε είτε παραμόρφωση μόνο δακτυλίου είτε μόνο μιας κορυφής.

Τα αποτελέσματα συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα:

R_o (mm)	D (mm)	θ_c (°)	Παραμόρφωση
14-17.18	10	10	Κορυφή
18	10	140 -170	Κορυφή
19-22	10	10	Δακτύλιος
18	11-15	10	Δακτύλιος
18	10	50 -120	Δακτύλιος
18	10	10 -40	Δακτύλιος & Κορυφή
17.5	10	10	Δακτύλιος & Κορυφή
18	8	10	Δακτύλιος & Κορυφή
18	10	130	Δακτύλιος & Κορυφή

Πίνακας 1: Συγκεντρωτικός πίνακας αποτελεσμάτων

Σημειώνεται ότι οι 3 τελευταίοι συνδυασμοί του πιο πάνω πίνακα δίνουν ομοιόμορφο κλάδο λύσεων που ενώνει παραμορφώσεις τύπου δακτυλίου και κορυφής.

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

Για τη διερεύνηση της μη ομαλής καμπύλης (Σχήμα 5.3.) που συνδέει τη λύση κορυφής με τη λύση τύπου δακτυλίου, προτείνεται η χρήση διαφορετικού τύπου πλέγματος. Το πλέγμα που χρησιμοποιήσαμε είναι δομημένο. Η χρήση μη δομημένου και προσαρμοστικού πλέγματος (unstructured and adaptive mesh) θα βοηθούσε προς αυτή την κατεύθυνση. Σε ένα τέτοιο πλέγμα υπολογίζονται οι μερικές παράγωγοι της λύσης και ανάλογα με την κλίση εντοπίζονται τα «επικίνδυνα» σημεία και γίνεται τοπική πύκνωση, ενώ εκεί που αυτό δεν είναι απαραίτητο το πλέγμα επιλέγεται αραιό.

Επόμενο βήμα είναι η διερεύνηση μη αξονοσυμμετρικών σχηματισμών. Ήδη γνωρίζουμε ότι ένα δοχείο με ακτίνα 18 mm μπορεί να φιλοξενήσει 2, 3 και 4 κορυφές. (Spygroulos et al., 2019). Θα ήταν ιδιαίτερα ενδιαφέρον να εξεταστεί αν υπάρχει κάποια σύνδεση μεταξύ αυτών των σχηματισμών, αντίστοιχη με αυτή που προέκυψε για την μετάβαση από την παραμόρφωση τύπου δακτυλίου σε κορυφή.

Επιπλέον, θα πρέπει να ελεγχθεί αν μπορεί να υπάρξει παραμόρφωση κορυφής και σε δοχεία ακτίνας μεγαλύτερης από 18 mm. Για την διερεύνηση αυτή μπορούμε να ακολουθήσουμε τη μέθοδο που περιγράφεται στην παράγραφο 5.2.3.

Παράλληλα, πρέπει πειραματικά, να εντοπιστεί η παραμόρφωση μιας κορυφής που υπολογίσαμε στο δοχείο των 18 mm. Αυτό θα μπορούσε να συμβεί με απότομη αύξηση της έντασης του μαγνητικού πεδίου, ώστε να «ξεπεράσουμε» τους πιο ευσταθείς σχηματισμούς 2, 3 και 4 κορυφών.

Τέλος, κρίνεται απαραίτητος ο υπολογισμός των «κρίσιμων» ιδιοτιμών του κλάδου λύσεων που συνδέει την παραμόρφωση τύπου δακτυλίου με την παραμόρφωση της κορυφής για τη διερεύνηση της ευστάθειας των παραμορφώσεων αυτών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- A.G. BOUDOUVIS *, J.L. PUCHALLA **, L. E. S. *+ and R. E. R. +. (1987). Normal field instability and patterns in pools of ferrofluid. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, c, 307–310.
- Abbott, J. P. (1978). An efficient algorithm for the determination of certain bifurcation points. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 4(1), 19–27.
- Abou, B., Wesfreid, J. E., & Roux, S. (2000). The normal field instability in ferrofluids: Hexagon-square transition mechanism and wavenumber selection. *Journal of Fluid Mechanics*, 416, 217–237.
- Bacri, J., & Salin, D. (1984). First-order transition in the instability of a magnetic fluid interface To cite this version : HAL Id : jpa-00232381.
- Boudouvis, A. G. (1987). *Mechanisms of surface instabilities and pattern formation in ferromagnetic liquids*. University of Minnesota, USA.
- Boudouvis, A. G., & Scriven, L. E. (1990). Multifurcation of patterns in ferrofluids. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 85(1–3), 155–158.
- Boudouvis, Andrewas G., Puchalla, J. L., & Scriven, L. E. (1988). Interaction of capillary

- wetting and fringing magnetic field in ferrofluid systems. *Journal of Colloid And Interface Science*, 124(2),
- Cowley, M. D. & Rosensweig, R. E. (1967) The interfacial stability of a ferromagnetic fluid. *Journal of Fluid Mechanics* 30 (4), 671–688.
- Elliptic, F. O. R. N. (1982). ARC-LENGTH CONTINUATION AND MULTI-GRID TECHNIQUES FOR NONLINEAR ELLIPTIC EIGENVALUE PROBLEMS*. *Energy*, (2), 173–194.
- Engel, A., Langer, H., & Chetverikov, V. (1999). Non-linear analysis of the surface profile resulting from the one-dimensional Rosensweig instability. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 195(1), 212–219.
- Felicia, L. J., Vinod, S., & Philip, J. (2015). Recent Advances in Magnetorheology of Ferrofluids (Magnetic Nanofluids)—A Critical Review. *Journal of Nanofluids*, 5(1), 1–22.
- Fuh, C. B., Lin, L. Y., & Lai, M. H. (2000). Analytical magnetopheresis of magnetically susceptible particles. *Journal of Chromatography A*, 874(1), 131–142.
- Gailitis, A. (1977). Formation of the hexagonal pattern on the surface of a ferromagnetic fluid in an applied magnetic field. *Journal of Fluid Mechanics*, 82(3), 401–413.
- Genc, S., & Derin, B. (2014). Synthesis and rheology of ferrofluids: A review. *Current Opinion in Chemical Engineering*, 3, 118–124.
- Gollwitzer, C., Rehberg, I., & Richter, R. (2010). From phase space representation to amplitude equations in a pattern-forming experiment. *New Journal of Physics*, 12.

- Gollwitzer, C., Spyropoulos, A. N., Papathanasiou, A. G., Boudouvis, A. G., & Richter, R. (2009). The normal field instability under side-wall effects: Comparison of experiments and computations. *New Journal of Physics*, 11.
- Gollwitzer, Christian, Matthies, G., Richter, R., Rehberg, I., & Tobiska, L. (2007). The surface topography of a magnetic fluid: A quantitative comparison between experiment and numerical simulation. *Journal of Fluid Mechanics*, 571, 455–474.
- Groves, M. D., Lloyd, D. J. B., & Stylianou, A. (2017). Pattern formation on the free surface of a ferrofluid: Spatial dynamics and homoclinic bifurcation. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 350, 1–12.
- Huitfeldt, J. (n.d.). Nonlinear eigenvalue problems prediction of bifurcation points and branch switching. *October*, (1), 1–22.
- Iooss, G., & Joseph, D. D. (1990). Imperfection Theory and Isolated Solutions Which Perturb Bifurcation BT - Elementary Stability and Bifurcation Theory. In G. Iooss & D. D. Joseph (Eds.) (pp. 29–41). New York, NY: Springer New York.
- Ivanov, A. O., & Kuznetsova, O. B. (2001). Magnetic properties of dense ferrofluids: An influence of interparticle correlations. *Phys. Rev. E*, 64(4), 41405.
- Knieling, H., Rehberg, I., & Richter, R. (2010). The growth of localized states on the surface of magnetic fluids. *Physics Procedia*, 9(2), 199–204.
- Lange, A., Richter, R., & Tobiska, L. (2007). *Linear and nonlinear approach to the Rosensweig instability*. *GAMM-Mitt.* (Vol. 30).
- Liu, J., Flores, G. A., & Sheng, R. (2001). In-vitro investigation of blood embolization in cancer treatment using magnetorheological fluids. *Journal of Magnetism and*

Magnetic Materials, 225(1-2), 209–217.

Liu, Y.-L., Chen, D., Shang, P., & Yin, D.-C. (2019). A review of magnet systems for targeted drug delivery Ya-Li. *Journal of Controlled Release*, 302(April), 90–104.

Papathanasiou, A. G., & Boudouvis, A. G. (1998). Three-dimensional instabilities of ferromagnetic liquid bridges. *Computational Mechanics*, 21(4), 403–408.

Papell, S. S. (1965). Low Viscosity Magnetic Fluid Obtained By the Colloidal Suspension Of Magnetic Particles, 9–12.

Richter, R., & Lange, A. (2009). *Colloidal Magnetic Fluids* (Vol. 763).

Richter, Reinhard. (2011). Mag(net)ic Liquid Mountains. *Europhysics News*, 42(3), 17–19.

Richter, Reinhard, & Barashenkov, I. V. (2005). Two-dimensional solitons on the surface of magnetic fluids. *Physical Review Letters*, 94(18), 1–4.

Rinaldi, C., Chaves, A., Elborai, S., He, X., & Zahn, M. (2005). Magnetic fluid rheology and flows. *Current Opinion in Colloid and Interface Science*, 10(3–4), 141–157.

Rosensweig, R. E. (2004). Ferrofluids: Introduction. *Encyclopedia of Materials: Science and Technology*, (1993), 3093–3102.

Ruuge, E. K., & Rusetski, A. N. (1993). Magnetic fluids as drug carriers: Targeted transport of drugs by a magnetic field. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 122(1–3), 335–339.

Salinger, A. A. G., Bou-Rabee, N. M., Pawlowski, R. P., Wilkes, E. D., Burroughs, E. A., Lehoucq, R. B., & Romero, L. A. (2002). LOCA 1.0 Library of continuation

- algorithms: theory and implementation manual. *Sandia National Laboratories*, SAND2002-0396, (October). Retrieved from
- Siettos, C. I., Papadopoulos, D. T., Boudouvis, A. G., & Chronopoulos, A. T. (1996). Stability analysis of magnetohydrostatic equilibrium by the finite element method and Arnoldi and Lanczos eigensolvers. *Advances in Engineering Software*, 27(1-2), 145–153.
- Silber, M., & Knobloch, E. (1988). Pattern selection in ferrofluids. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 30(1-2), 83–98.
- Spyropoulos, A. N., Palyvos, J. A., & Boudouvis, A. G. (2004). Bifurcation detection with the (un)preconditioned GMRES(m). *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(42-44), 4707–4716.
- Spyropoulos, A. N., Papathanasiou, A. G., & Boudouvis, A. G. (2019). The 2-3-4 spike competition in the Rosensweig instability. *Journal of Fluid Mechanics*, 870, 389–404.
- Strogatz, S. H. (1994). *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology and chemistry*. Book.
- Torchilin, V. P. (1995). Targeting of drugs and drug carriers within the cardiovascular system. *Advanced Drug Delivery Reviews*, 17(1), 75–101.
- Trbušić, M., Beković, M., & Hamler, A. (2019). Magnetic field distribution in a magnetic liquid spike. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 479(February), 185–191.
- Trbušić, M., Beković, M., Trlep, M., & Hamler, A. (2019). Nonlinear analysis of

magnetic liquid free surface deformation in a 3D space. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 482(March), 364–369.

Μπουντουβής, Α. Γ. (1992). Υπολογιστική ανάλυση με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων- Εισαγωγικές Σημειώσεις. Αθήνα: Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.