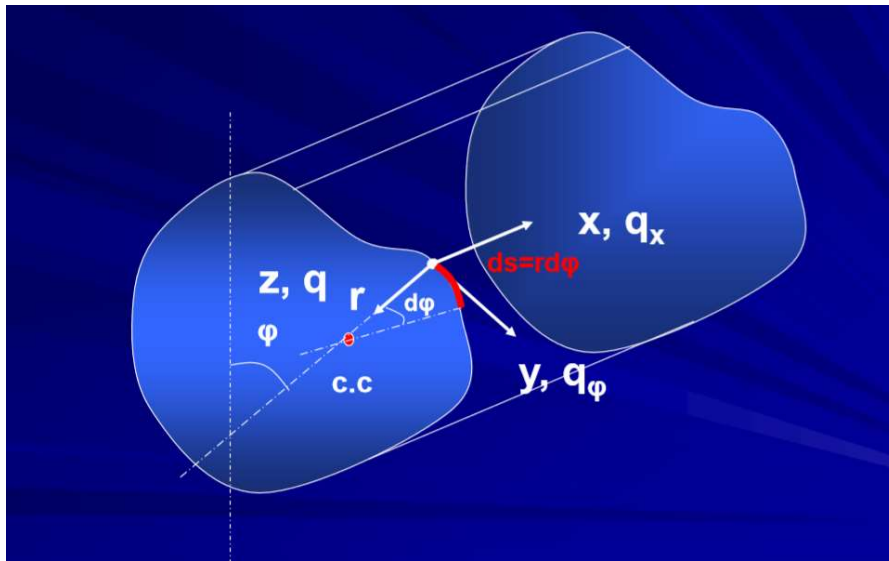




ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
Εργαστήριο Στατικής και Αντισεισμικών Ερευνών

ΜΕΜΒΡΑΝΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΚΕΛΥΦΩΝ



Διπλωματική εργασία

ΚΟΥΡΗΣ ΑΝΑΣΤΑΣΙΟΣ

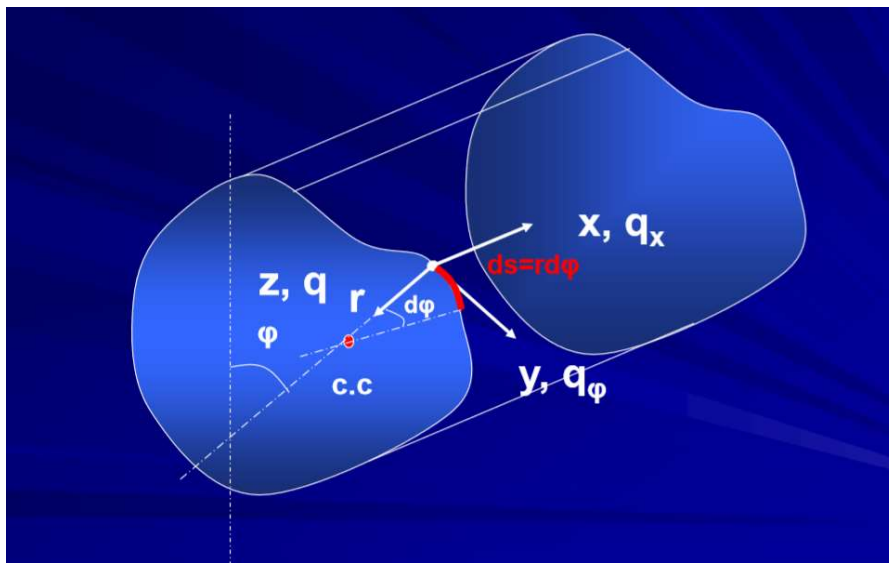
Επιβλέπων : Καθηγητής Β. Κουμούσης

Αθήνα , 2019



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
Εργαστήριο Στατικής και Αντισεισμικών Ερευνών

ΜΕΜΒΡΑΝΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΚΕΛΥΦΩΝ



Διπλωματική εργασία

ΚΟΥΡΗΣ ΑΝΑΣΤΑΣΙΟΣ

Επιβλέπων : Καθηγητής Β. Κουμούσης

Αθήνα , 2019

Copyright © Κούρης Αναστάσιος, 2019
Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση σε αρχείο πληροφοριών, διανομή, αναπαραγωγή, μετάφραση ή μετάδοση της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό, υπό οποιαδήποτε μορφή και με οποιοδήποτε μέσο επικοινωνίας, ηλεκτρονικό ή μηχανικό, χωρίς την προηγούμενη έγγραφη άδεια του συγγραφέα. Επιτρέπεται η αναπαραγωγή, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν στη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Η έγκριση της διπλωματικής εργασίας από τη Σχολή Πολιτικών Μηχανικών του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα (Ν. 5343/1932, Άρθρο 202).

Copyright © Kouris Anastasios, 2019
All Rights Reserved

Neither the whole nor any part of this diploma thesis may be copied, stored in a retrieval system, distributed, reproduced, translated, or transmitted for commercial purposes, in any form or by any means now or hereafter known, electronic or mechanical, without the written permission from the author. Reproducing, storing and distributing this thesis for non-profitable, educational or research purposes is allowed, without prejudice to reference to its source and to inclusion of the present text. Any queries in relation to the use of the present thesis for commercial purposes must be addressed to its author.

Approval of this diploma thesis by the School of Civil Engineering of the National Technical University of Athens (NTUA) does not constitute in any way an acceptance of the views of the author contained herein by the said academic organisation (L. 5343/1932, art. 202).

Κούρης Αναστάσιος (2019)
Μεμβρανική θεωρία κελυφών
Διπλωματική Εργασία
Εργαστήριο Στατικής και Αντισεισμικών Ερευνών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα.

Kouris Anastasios (2019)
Membrane theory of shells
Diploma Thesis
Laboratory of Structural Analysis and Antiseismic Research, National Technical University
of Athens, Greece

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η παρούσα εργασία αποτελεί διπλωματική εργασία στα πλαίσια του προπτυχιακού προγράμματος του τμήματος Πολιτικών Μηχανικών του ΕΜΠ. Με την περάτωση της εργασίας, αισθάνομαι την υποχρέωση να ευχαριστήσω ορισμένους από τους ανθρώπους που έπαιξαν πολύ σημαντικό ρόλο στην πραγματοποίησή της.

Πρώτο από όλους θέλω να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή της διπλωματικής εργασίας, Καθηγητή Β.Κουμούση για την πολύτιμη καθοδήγηση του και την εμπιστοσύνη και εκτίμηση που μου έδειξε. Στη συνέχεια θα ήθελα να ευχαριστήσω τους φίλους-φοιτητές-συναδέλφους οι οποίοι με τα πλούσια πνευματικά προσόντα και το ήθος τους συνέβαλαν ουσιαστικά στην ολοκλήρωση αυτής της εργασίας. Τις ευχαριστίες μου εκφράζω επίσης και στο στενό οικογενειακό περιβάλλον, δηλαδή τους γονείς μου, καθώς και τον αδερφό μου, που με υπομονή και κουράγιο πρόσφεραν την απαραίτητη ηθική συμπαράσταση για την ολοκλήρωση της διπλωματικής μου εργασίας.



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΤΑΤΙΚΗΣ και ΑΝΤΙΣΤΕΙΣΜΙΚΩΝ ΕΡΕΥΝΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Μεμβρανική θεωρία κελυφών

Κούρης Αναστάσιος

Επιβλέπων: Καθηγητής Β.Κουμούσης
2019

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Οι δομές με τη μορφή κελυφών συναντώνται σε πολλούς κλάδους της τεχνολογίας του πολιτικού μηχανικού. Η χρήση των κελυφών ως δομικό μέλος – στατικό σύστημα προκύπτει από τις εγγενείς ιδιότητές τους. Όταν είναι κατάλληλα σχεδιασμένα, ακόμα και πολύ λεπτά ελαστικά κελύφη, μπορούν να αναλάβουν μεγάλα φορτία. Συνεπώς, συναντώνται εκεί όπου το βάρος κατασκευής χρειάζεται να είναι μικρό ή λόγω της αρχιτεκτονικής τους ιδιαιτερότητας.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία, γίνεται προσπάθεια ανάλυσης διαφόρων εφαρμογών κελυφών στον τομέα του πολιτικού μηχανικού. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιείται μία εκ των δύο θεωριών ανάλυσης κελυφών, η Μεμβρανική θεωρία. Η συγκεκριμένη θεωρία αμελεί την ύπαρξη ροπών και τεμνουσών και επικεντρώνεται στις μεμβρανικές δυνάμεις.

Αρχικά, παρουσιάζονται οι απαιτούμενες πληροφορίες των γεωμετρικών όρων στο Κεφάλαιο 2 μετά τις εισαγωγικές έννοιες. Οι γεωμετρικές πληροφορίες συνδέονται με τη περίπλοκη γεωμετρία των κελυφών, όπου δηλαδή τα στοιχεία δεν είναι επίπεδο αλλά καμπυλωμένο στον τρισδιάστατο χώρο.

Παρακάτω, στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η γενική θεωρία κελυφών όπως και η ειδική μεμβρανική θεωρία. Περιλαμβάνονται, οι εξισώσεις ισορροπίας του στοιχείου κελύφους, οι κινηματικές εξισώσεις, συστατικές εξισώσεις και πληροφορίες για τις συνοριακές συνθήκες.

Στα επόμενα δύο κεφάλαια 4, 5 αναλύονται τα πιο σύνηθες σε χρήση, στο τομέα του πολιτικού μηχανικού, κελύφη. Στο κεφάλαιο 4 αναλύεται το κυλινδρικό κέλυφος και στο κεφάλαιο 5 τα κελύφη εκ περιστροφής. Το κάθε κεφάλαιο περιλαμβάνει γεωμετρική ανάλυση των παραμέτρων, εξαγωγή των εξισώσεων ισορροπίας και διάφορες γενικές λύσεις. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται κύριες πρακτικές εφαρμογές των παραπάνω δομών κελύφους. Στο κυλινδρικό κέλυφος εξετάζεται το κυκλικό κυλινδρικό κέλυφος σε διάφορες εφαρμογές, ενώ στα εκ περιστροφής τα σφαιρικό και το παραβολικό κέλυφος. Οι εφαρμογές συνδέονται με αντίστοιχες διάφορες φορτίσεις και συνοριακές συνθήκες κάθε φορά, που συναντώνται σε έργα πολιτικού μηχανικού. Οι λύσεις που προκύπτουν είναι μαθηματικές εκφράσεις και όχι αριθμητικές λύσεις.

Τελικώς, γίνεται σχολιασμός των αποτελεσμάτων των εφαρμογών και παρατίθενται διάφορες γενικές πληροφορίες για τη μεμβρανική θεωρία και τη σημασία της.



NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS
SCHOOL OF CIVIL ENGINEERING
LABORATORY OF STRUCTURAL ANALYSIS and ANTISEISMIC RESEARCH

DIPLOMA THESIS

Membrane theory of shells

Kouris Anastasios

Supervisor: Professor V. Koumoussis
2019

ABSTRACT

Shell structures are found in many branches of civil engineering. The use of shells as a structural member - static system results from their inherent properties. When properly designed, even very thin elastic shells can support large loads. Consequently, they are met where construction weight needs to be low or because of their architectural specificity.

In this thesis, an attempt is made to analyze various applications of shells in the sections of civil engineering. Specifically, one of the two shell analysis theories, the Membrane theory, is used. This theory neglects the existence of moments and normal shear forces and focuses on the membrane forces.

Firstly, in Chapter 2, the required information of the geometric terms is presented after the introductory concepts. The geometrical information is related to the complex geometry of the shells, where the element is not flat but curved in three-dimensional space.

The third chapter presents the general shell theory as well as the Membrane theory. It includes shell equilibrium equations, kinematic equations, constitutive equations and information on boundary conditions.

The next two chapters 4, 5 discuss the most commonly used shells in the field of civil engineering. In chapter 4 the cylindrical shell is analyzed and in chapter 5 the shells of revolution. Each chapter includes the geometrical analysis of parameters, extraction of equilibrium equations and various general solutions. Following, the main practical applications of the above shell structures are presented. In the cylindrical shell, the circular cylindrical shell is examined in various applications, while in shells of revolution, the spherical and parabolic shell. Applications are associated with different corresponding loads and boundary conditions each time, that are met in civil engineering projects. The resulting solutions are mathematical expressions rather than numerical solutions.

Finally, the results of the applications are commented upon and various general information on membrane theory and its significance is presented.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ	i
ΠΕΡΙΛΗΨΗ	ii
ABSTRACT.....	iii
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ	iv
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 – ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	1
1.1 Εισαγωγικές έννοιες	1
1.2 Συμπεριφορά κελυφών έναντι φορτίσεων.....	2
1.3 Παραδείγματα κελυφών και πλεονεκτήματα	3
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 - ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ.....	5
2.1 Καμπύλη στο χώρο	5
2.2 Επιφάνεια στο χώρο	6
2.3 Η πρώτη και δεύτερη θεμελιώδης μορφή των επιφανειών	7
2.4 Κύριες καμπυλότητες.....	9
2.5 Ακτίνα καμπυλότητας επίπεδης καμπύλης.....	10
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 - ΘΕΩΡΙΑ ΚΕΛΥΦΩΝ.....	11
3.1 Βασικές υποθέσεις.....	11
3.2 Κινηματικές σχέσεις.....	12
3.2.1 Μεταβολή των μετατοπίσεων κατά μήκος του πάχους.....	12
3.2.2 Σχέσεις μετατοπίσεων – παραμορφώσεων	13
3.3 Σχέσεις Τάσεων – Παραμορφώσεων	15
3.3.1 Ο νόμος του Hooke για λεπτά κελύφη.....	15
3.3.2 Εντατικά μεγέθη κελυφών	16
3.3.3 Ισορροπία του στοιχείου κελύφους	19
3.4 Συνοριακές συνθήκες	20
3.5 Μembranική θεωρία.....	20
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 - ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΑ ΚΕΛΥΦΗ	23
4.1 Εισαγωγικές έννοιες	23
4.2 Εξισώσεις κυλινδρικών κελυφών	24
4.3 Εφαρμογές κυκλικών κυλινδρικών κελυφών	26
4.3.1 Κυκλικό κυλινδρικό κέλυφος με υγρό και μεταβλητή πίεση	26
4.3.2 Περίπτωση σταθερής πίεσης σε κυκλικό κυλινδρικό κέλυφος με υγρό .	30

4.3.3 Ίδιο βάρος σε κυκλικό κυλινδρικό κέλυφος.....	31
4.3.4 Εφαρμογές σε κατακόρυφο κυλινδρικό κέλυφος.....	34
4.4 Εφαρμογές με μεταβλητή ακτίνα καμπυλότητας.	39
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 – ΚΕΛΥΦΗ ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ	43
5.1 Εισαγωγικές έννοιες	43
5.2 Εξισώσεις κελυφών εκ περιστροφής	44
5.3 Αξονοσυμμετρική φόρτιση.....	46
5.3.1 Σχέσεις αξονοσυμμετρικής φόρτισης.....	46
5.3.2 Εφαρμογές σε σφαιρικό κέλυφος.....	48
5.3.2.1 Κατακόρυφα φορτία σε σφαιρικό κέλυφος με κλειστή κορυφή.....	48
5.3.2.2 Κατακόρυφα φορτία σε σφαιρικό κέλυφος με ανοιχτή κορυφή.....	53
5.3.2.3 Σφαιρική δεξαμενή πλήρης με υγρό	55
5.3.3 Εφαρμογές σε παραβολικό κέλυφος εκ περιστροφής	58
5.3.3.1 Κατακόρυφα φορτία σε παραβολικό κέλυφος με κλειστή κορυφή .	59
5.3.3.2 Κατακόρυφα φορτία σε παραβολικό κέλυφος με ανοιχτή κορυφή .	64
5.4 Ασύμμετρη φόρτιση	68
5.4.1 Σχέσεις ασύμμετρης φόρτισης.....	68
5.4.2 Φορτία ανέμου σε κελύφη εκ περιστροφής	70
5.4.2.1 Σφαιρικό κέλυφος	71
5.4.2.2 Παραβολικό κέλυφος	72
5.4.3 Σεισμικά φορτία σε κελύφη εκ περιστροφής.....	74
5.4.3.1 Σφαιρικό κέλυφος	74
5.4.3.2 Παραβολικό κέλυφος	76
5.5 Σύγκριση σφαιρικού – παραβολικού κελύφους.....	77
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 – ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	79
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	83
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α – ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ MAPLE	85
A.1 Κυκλικό κυλινδρικό κέλυφος	85
A.2 Κέλυφος εκ περιστροφής – Αξονοσυμμετρική φόρτιση	86
A.3 Κέλυφος εκ περιστροφής – Γενική φόρτιση	87

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 – ΕΙΣΑΓΩΓΗ

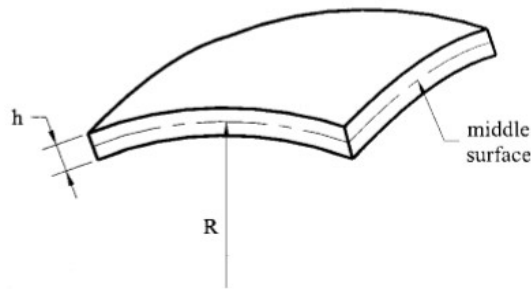
1.1 Εισαγωγικές έννοιες

Όλα τα έργα πολιτικού μηχανικού βρίσκονται στον τρισδιάστατο χώρο. Συνεπώς κάθε δομικό στοιχείο αυτών έχει τρεις διαστάσεις, όσο μικρές σχετικά και αν είναι αυτές. Βέβαια στην πράξη, οι θεωρίες που χρησιμοποιούνται για την ανάλυση αυτών αναφέρονται σε αυτά ως γραμμικά αμελώντας κάποια ή κάποιες από αυτές τις διαστάσεις. Οι δοκοί παραδείγματος χάρη, αναλύονται ως γραμμικό στοιχείο συγκεκριμένα ως γραμμή η οποία έχει όλες της μηχανικές ιδιότητες του στοιχείου. Η θεωρία της ελαστικότητας που εφαρμόζεται συνήθως δεν είναι τρισδιάστατη για την εύρεση των τάσεων. Όταν είναι αναγκαία η εύρεση των τάσεων σε τέτοια στοιχεία υπολογίζονται τα εντατικά μεγέθη (αξονική δύναμη, δύο τέμνουσες δυνάμεις, δύο καμπτικές ροπές και μία στρεπτική ροπή) σε κάθε διατομή του στοιχείου, δηλαδή τα αποτελέσματα των τάσεων (stress resultants).

Βέβαια, ορίζονται και στοιχεία των οποίων η γεωμετρία δεν επιτρέπει την εφαρμογή των παραπάνω θεωριών δηλαδή, τη θεώρησή τους ως γραμμή. Τα στοιχεία αυτά ως αποτέλεσμα, περιγράφονται από μία επιφάνεια, είτε επίπεδη είτε καμπύλη σε έναν ή δύο άξονες που έχει σταθερό πάχος, την τρίτη διάσταση δηλαδή. Συνεπώς, η εύρεση των τάσεων και των παραμορφώσεων δεν παρουσιάζει την ίδια ευκολία με ευθύγραμμα στοιχεία και οι θεωρίες που χρησιμοποιούνται λαμβάνουν υπόψη τους την διαφορετική γεωμετρία. Ο διαχωρισμός αυτών των στοιχείων εξαρτάται από την επιφάνεια περιγραφής που αποκαλείται μέση επιφάνεια. Εάν αυτή είναι επίπεδη τότε το στοιχείο ονομάζεται πλάκα ενώ αν είναι καμπύλη ονομάζεται κέλυφος.

Γενικά, κέλυφος ορίζεται ένα τρισδιάστατο στοιχείο το οποίο για την ανάλυση του περιγράφεται από μία καμπύλη επιφάνεια. Από το παραπάνω συμπεραίνεται πως το πάχος του κελύφους είναι αρκετά μικρότερο από τις άλλες διαστάσεις χωρίς να αμελείται από την ανάλυση. Επιπλέον, για την ανάλυση χρειάζεται η ελαστικότητα του υλικού του στοιχείου, η οποία δε χρειάζεται να είναι γραμμική, αλλά μπορεί το υλικό να υπακούει σε ελαστοπλαστικό νόμο. Βέβαια, στη συγκεκριμένη εργασία το υλικό θεωρείται ελαστικό – υπακούει στο νόμο του Hooke.

Κατά κύριο λόγο, ένα κέλυφος περιγράφεται από τη μέση επιφάνεια (middle surface) η οποία, έχει είτε σταθερό πάχος ή είτε διαφορετικό ανά σημείο. Γνωρίζοντας την γεωμετρία της μέσης επιφάνειας και το πάχος σε όλη την έκταση του στοιχείου τότε το κέλυφος έχει περιγράψει πλήρως γεωμετρικά. Όσον αφορά τα μηχανικά χαρακτηριστικά, η μέση επιφάνεια και το πάχος περιγράφουν το κέλυφος όπως μία δοκός περιγράφεται από τον άξονα και τη διατομή της σε κάθε σημείο.



Σχήμα 1.1

Τα κελύφη κατηγοριοποιούνται ως προς τη γεωμετρία και κυρίως σε σχέση με την μέση επιφάνεια. Τα κυριότερα είδη είναι τα κυλινδρικά (είτε κυκλικά είτε όχι) τα κωνικά και τα εκ περιστροφής. Τα παραπάνω έχουν κοινό πως για τον σχεδιασμό των επιφανειών χρειάζεται μια γενέτειρα καμπύλη ή ευθεία η οποία περιστρέφεται γύρω από έναν άξονα. Επιπλέον, τα κελύφη κατηγοριοποιούνται και ως προς το πάχος τους. Συγκεκριμένα χωρίζονται σε λεπτά και σε παχύ κελύφη (thin – thick shells). Από μηχανικής άποψης, ένα κέλυφος θεωρείται λεπτό εφόσον ικανοποιείται η παρακάτω συνθήκη:

$$\max\left(\frac{h}{R}\right) \leq \frac{1}{20} \quad (1.1)$$

όπου h το πάχος και R η ακτίνα καμπυλότητας της μέσης επιφάνειας.

Κατά κύριο λόγο το εύρος που κυμαίνεται το πάχος του κελύφους για τις περισσότερες εφαρμογές είναι:

$$\frac{1}{1000} \leq \frac{h}{R} \leq \frac{1}{20} \quad (1.2)$$

Αξίζει να σημειωθεί πως η κατηγοριοποίηση σε σχέση με το πάχος εξαρτάται και από άλλους παράγοντες όπως οι συνοριακές συνθήκες, η φόρτιση κ.α.

1.2 Συμπεριφορά κελυφών έναντι φορτίσεων

Οι διάφορες θεωρίες που χρησιμοποιούνται για την ανάλυση στοιχείων βασίζονται σε κοινές υποθέσεις όπως, πως οι διατομές παραμένουν επίπεδες ,πως οι παραμορφώσεις είναι μικρές κ.α. Βέβαια, η συμπεριφορά κάθε στοιχείου σε παρόμοια φόρτιση διαφέρει. Συγκεκριμένα, το κέλυφος έχει συμπεριφορά παρόμοια με πλάκα και τόξο για εγκάρσια φόρτιση. Το τόξο αντιστέκεται στην εγκάρσια φόρτιση με την δημιουργία αξονικής δύναμης μειώνοντας με αυτό τον τρόπο τη διάτμηση και τη ροπή. Για αυτό το λόγο τα τόξα υπερτερούν έναντι των δοκών για την παραλαβή εγκάρσιων φορτίων. Το κέλυφος κατά κύριο λόγο ισορροπεί τις εγκάρσιες φορτίσεις με εφελκυστικές και θλιπτικές τάσεις που αναφέρονται ως μεμβρανικές τάσεις. Αυτές οι τάσεις διανέμονται ομοιόμορφα σε ολόκληρο το πάχος του κελύφους. Βέβαια, η διατμητική δύναμη όπως και η καμπτική και στρεπτική ροπή δεν είναι μηδενικές για γενικό είδος φόρτισης. Παρόλα αυτά, η αποτελεσματικότητα του κελύφους ως προς γενική φόρτιση βασίζεται στην ύπαρξη των μεμβρανικών τάσεων. Συνεπώς, το κέλυφος έχει πλεονεκτήματα έναντι των πλακών.

Η κατάσταση όπου επικρατούν οι μεμβρανικές τάσεις είναι μία ιδανική κατάσταση η οποία πρέπει να επιδιώκεται κατά το σχεδιασμό. Το παραπάνω ισχύει σε σχέση με τα υλικά κατασκευής αφού είναι πιο αποτελεσματικά σε εφελκυσμό ή θλίψη παρά σε κάμψη διότι:

1. Οι ιδιότητες των υλικών μπορούν να χρησιμοποιηθούν στο μέγιστο εφόσον η διατομή εφελκύεται ή θλίβεται.
2. Οι μεμβρανικές τάσεις είναι πάντοτε μικρότερες από τις αντίστοιχες καμπτικές τάσεις για τα λεπτά κελύφη υπό τις ίδιες συνθήκες φόρτισης.

Σημαντική επιρροή στη συμπεριφορά του κελύφους έχει το πάχος του. Εφόσον ένα κέλυφος είναι λεπτό έχει τη δυνατότητα να ισορροπήσει τα εγκάρσια φορτία κυρίως με μεμβρανικές τάσεις και σχεδόν μηδενικές καμπτικές τάσεις. Γενικά, λόγω του μικρού πάχους το κέλυφος δεν μπορεί να αντέξει τις παραμορφώσεις που προκύπτουν από καθαρά καμπτικές συνθήκες. Οπότε, επιδιώκεται το κέλυφος να βρίσκεται σε μεμβρανική κατάσταση. Οι καμπτικές τάσεις κυρίως εμφανίζονται κοντά σε στηρίξεις ή σε περιοχές με γεωμετρικές ή λόγω φορτίων ασυνέχειες. Μακριά από αυτές επικρατούν οι μεμβρανικές τάσεις. Η εναλλαγή από καμπτικές σε μεμβρανικές τάσεις εξαρτάται από το πόσο λεπτό είναι το κέλυφος. Επιπλέον, το πάχος του κελύφους συνδέεται και με το βάρος του αλλά και την υψηλή του αντοχή. Βέβαια, τα παραπάνω ισχύουν εξολοκλήρου όταν επικρατεί εφελκυσμός. Σε περίπτωση που επικρατεί θλίψη, το κέλυφος κινδυνεύει από λυγισμό όπου το λεπτό πάχος του επιδρά αρνητικά. Συνεπώς, είναι επιθυμητό να επικρατεί εφελκυσμός στο μεγαλύτερο μέρος του δομικού στοιχείου.

1.3 Παραδείγματα κελυφών και πλεονεκτήματα

Γενικά τα λεπτά κελύφη ως δομικά στοιχεία λαμβάνουν ένα μεγάλο κομμάτι στα έργα πολιτικού μηχανικού. Κύρια παραδείγματα είναι οροφές μεγάλου μεγέθους (π.χ. κυλινδρικές ή σφαιρικές), δεξαμενές συγκράτησης υγρών (π.χ. σφαιρικές δεξαμενές), περιβλήματα πυρηνικών σταθμών ηλεκτροπαραγωγής και οροφές εκκλησιών από οπλισμένο σκυρόδεμα (θόλοι). Άλλα παραδείγματα κελυφών αποτελούν συστήματα σωληνώσεων, πύραυλοι και υποβρύχια. Η ευρεία εφαρμογή κελυφών στη μηχανική εξαρτάται από τα ακόλουθα πλεονεκτήματα:

- i. Αποτελεσματική μηχανική συμπεριφορά σε διάφορες φορτίσεις.
- ii. Υψηλή αντοχή και δομική ακεραιότητα.
- iii. Υψηλός λόγος αντοχή προς βάρος. Το κριτήριο αυτό χρησιμοποιείται συνήθως για την εκτίμηση της αποτελεσματικότητας ενός δομικού στοιχείου. Όσο μεγαλύτερος είναι ο λόγος, τόσο πιο βέλτιστη είναι η δομή. Σύμφωνα με αυτό το κριτήριο, τα κελύφη είναι ανώτερα από άλλα δομικά συστήματα που έχουν τις ίδιες διαστάσεις.
- iv. Αρκετά υψηλή δυσκαμψία.

Εκτός από τα παραπάνω μηχανικά πλεονεκτήματα, τα κελύφη διαθέτουν επίσης υψηλή αισθητική αξία σε αρχιτεκτονικά έργα λόγω της διαφορετικής γεωμετρίας τους. Όλα τα παραπάνω συμβάλλουν στην συχνή χρήση των κελυφών ως στατικά συστήματα σε έργα πολιτικού μηχανικού όπως φαίνεται παρακάτω.



(α)



(β)



(γ)



(δ)

Εικόνα 1.1 Κελύφη σε έργα πολιτικού μηχανικού.

(α) Σφαιρική δεξαμενή υγρού - (β) Περιβλήμα πυρηνικών σταθμών ηλεκτροπαραγωγής -
(γ) Τόξο προστασίας πυρηνικού σταθμού Τσέρνομπιλ - (δ) Τρούλος Αγίας Σοφίας

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 - ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΜΕΣΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ

2.1 Καμπύλη στο χώρο

Οποιαδήποτε καμπύλη στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων X-Y-Z μπορεί να περιγράψει μονοσήμαντα με τη βοήθεια τριών συναρτήσεων παραμετρικών, περιγράφοντας έτσι όλα τα σημεία της, ως εξής:

$$\mathbf{x}(t) = x_1(t)\bar{e}_1 + x_2(t)\bar{e}_2 + x_3(t)\bar{e}_3 \quad (2.1)$$

όπου t παράμετρος, $x_1, 2, 3$ οι παραμετρικές συναρτήσεις και $e_1, 2, 3$ τα μοναδιαία διανύσματα σε κάθε άξονα X,Y,Z. Η παραπάνω εξίσωση αποτελεί την παραμετρική έκφραση της καμπύλης.

Ο όρος \mathbf{x} αποκαλείται διάνυσμα θέσης και η μεταβολή αυτού ως προς το μήκος της καμπύλης s εκφράζεται:

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = \frac{dx_1}{ds} e_1 + \frac{dx_2}{ds} e_2 + \frac{dx_3}{ds} e_3 \quad (2.2)$$

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{ds} = \left(\frac{dx_1}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{ds}\right)^2 \quad (2.3)$$

Επίσης ισχύει πως:

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \quad (2.4)$$

Οπότε προκύπτει πως το εσωτερικό γινόμενο είναι ίσο με μονάδα:

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{ds} = 1 \quad (2.5)$$

Συνεπώς, το διάνυσμα $\frac{d\mathbf{x}}{ds} := \mathbf{t}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα. Επιπλέον, η παράγωγος ως προς τη παράμετρο t είναι:

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d\mathbf{x}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \quad (2.6)$$

Ορίζει δηλαδή, το εφαπτομενικό διάνυσμα αλλά δεν είναι κατ' ανάγκη μοναδιαίο.

Επιπλέον, το μήκος της καμπύλης ορίζεται από τον παρακάτω τύπο:

$$S = \int_I \|\dot{\mathbf{x}}\| dt \quad (2.7)$$

όπου $\dot{\mathbf{x}}$ η παράγωγος ως προς τη παράμετρο t .

Ακτίνα καμπυλότητας ρ ονομάζεται ο λόγος $R = \frac{1}{\kappa}$ όπου κ ορίζει τη καμπυλότητα της καμπύλης. Η καμπυλότητα μετράει το κατά πόσον η καμπύλη διαφέρει από την ευθεία. Προκύπτει από την (2.5) παραγωγίζοντας πως:

$$\frac{d(\mathbf{t} \cdot \mathbf{t})}{ds} = 2 \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{t}' = 0 \quad (2.8)$$

Συνεπώς, το διάνυσμα t είναι κάθετο με το t' . Επίσης, παραγωγίζοντας τη σχέση (2.6) παρατηρείται πως το διάνυσμα t' βρίσκεται στο επίπεδο των διανυσμάτων x' και x'' δηλαδή στο κύριο επίπεδο- x' και x'' παράγωγοι ως προς παράμετρο t . Άρα, το διάνυσμα $t' = K \cdot N$ όπου N το αντίστοιχο μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα. Ο όρος $K = \frac{1}{R}$ ορίζει την καμπυλότητα που αντιστοιχεί στην ακτίνα καμπυλότητας R .

2.2 Επιφάνεια στο χώρο

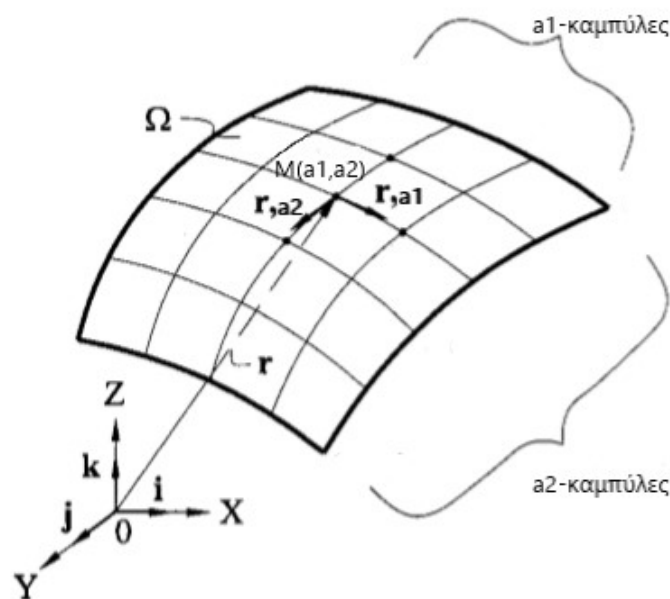
Ομοίως με τις καμπύλες, μία οποιαδήποτε επιφάνεια Ω στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων X - Y - Z μπορεί να περιγράψει μονοσήμαντα με τη βοήθεια τριών συναρτήσεων παραμετρικών, περιγράφοντας έτσι όλα τα σημεία της, ως εξής:

$$\mathbf{r}(a_1, a_2) = f_1(a_1, a_2)\bar{e}_1 + f_2(a_1, a_2)\bar{e}_2 + f_3(a_1, a_2)\bar{e}_3 \quad (2.9)$$

όπου a_1, a_2 παράμετροι, $f_1, 2, 3$ οι παραμετρικές συναρτήσεις και $e_1, 2, 3$ τα μοναδιαία διανύσματα σε κάθε άξονα X, Y, Z . Η παραπάνω εξίσωση αποτελεί την παραμετρική έκφραση της επιφάνειας Ω . Αν θέσουμε $a_1 = C_1, C_1 = \text{σταθερά}$ τότε η εξίσωση (2.9) έχει μονάχα μία παράμετρο την a_2 οπότε ορίζει μία καμπύλη στο χώρο βάση της εξίσωσης (2.1) με παράμετρο την a_2 . Ομοίως, εάν θέσουμε $a_2 = C_2, C_2 = \text{σταθερά}$, τότε ορίζεται καμπύλη στο χώρο με παράμετρο την a_1 . Οι καμπύλες αυτές ανήκουν στην επιφάνεια Ω της σχέσης (2.9) και ονομάζονται σε σχέση με την σταθερή παράμετρο κάθε φορά. Οπότε, υπάρχουν a_1 -καμπύλες με παράμετρο την a_2 και a_2 -καμπύλες με παράμετρο την a_1 όπως φαίνονται στο σχήμα 2.1. Ορίζονται, οι παράγωγοι του διανύσματος $\mathbf{r}(a_1, a_2)$ ως προς a_1, a_2 με τον παρακάτω τρόπο:

$$\mathbf{r}_{,1} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial a_1}, \quad \mathbf{r}_{,2} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial a_2} \quad (2.10)$$

Ειδική περίπτωση των παραμέτρων a_1, a_2 είναι όταν το εσωτερικό γινόμενο μηδενίζεται, δηλαδή $\mathbf{r}_{,1} \cdot \mathbf{r}_{,2} = 0$ για κάθε a_1, a_2 και άρα σε ολόκληρη την επιφάνεια Ω , όπου $\mathbf{r}_{,1}, \mathbf{r}_{,2}$ από την εξίσωση (2.10). Από το παραπάνω προκύπτει πως τα διανύσματα είναι αμοιβαία κάθετα μεταξύ τους και οι καμπυλόγραμμες συντεταγμένες a_1, a_2 είναι ορθογωνικές.



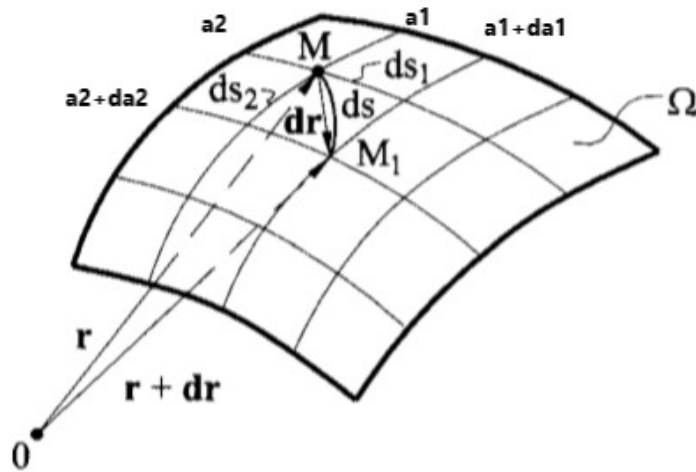
Σχήμα 2.1

2.3 Η πρώτη και δεύτερη θεμελιώδης μορφή των επιφανειών

Έστω ότι έχουμε δύο σημεία $M(a_1, a_2)$ και $M_1(a_1+da_1, a_2+da_2)$ αυθαίρετα κοντά μεταξύ τους και πως ανήκουν στην επιφάνεια Ω που περιγράφεται από τη σχέση (2.9). Επίσης, r και $r+dr$ ορίζουν τα διανύσματα θέσης αντίστοιχα. Το μήκος του τόξου ds που συνδέει τα σημεία M, M_1 είναι ίσο με $|dr|$ καθώς το $M \rightarrow M_1$, όπου dr το διάνυσμα που συνδέει τα σημεία M, M_1 δηλαδή το διαφορικό το οποίο ορίζεται ως εξής:

$$dr = r_{,1} \cdot da_1 + r_{,2} \cdot da_2 \quad (2.11)$$

όπου $r_{,i} = \frac{\partial r}{\partial a_i}$, $i = 1, 2$ η μερική παράγωγος του r ως προς a_i λόγω της (2.10).



Σχήμα 2.2

Το τετράγωνο αυτού του διαφορικού είναι:

$$dr * dr = r_{,1} \cdot r_{,1} \cdot (da_1)^2 + 2 \cdot r_{,1} \cdot r_{,2} \cdot (da_1 \cdot da_2) + r_{,2} \cdot r_{,2} \cdot (da_2)^2 \quad (2.12)$$

και θέτοντας $E = r_{,1} \cdot r_{,1}$, $F = r_{,1} \cdot r_{,2}$, $G = r_{,2} \cdot r_{,2}$, όπως και $ds^2 = |dr|^2 = dr \cdot dr$ προκύπτει:

$$ds^2 = E \cdot (da_1)^2 + 2F \cdot (da_1 \cdot da_2) + G \cdot (da_2)^2 \quad (2.13)$$

η οποία είναι η πρώτη θεμελιώδης μορφή της επιφάνειας Ω . Εάν, οι καμπυλόγραμμες συντεταγμένες είναι ορθογώνιες τότε ισχύει $F = 0$ και θέτωντας $A = \sqrt{E}$ και $B = \sqrt{G}$ προκύπτει η παρακάτω σχέση

$$ds^2 = A^2 \cdot (da_1)^2 + B^2 \cdot (da_2)^2 \quad (2.14)$$

όπου οι παράμετροι A, B ονομάζονται παράμετροι του Λαμέ (Lame parameters). Κατά μήκος των a_1, a_2 -καμπυλών ισχύει το παρακάτω:

$$ds_1 = A \cdot da_1 \quad \text{- καμπύλες με σταθερό } a_2$$

$$ds_2 = B \cdot da_2 \quad \text{- καμπύλες με σταθερό } a_1$$

και η σχέση (2.14) λόγω των δύο παραπάνω τροποποιείται στην παρακάτω

$$ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2 \quad (2.15)$$

Γενικά, η πρώτη θεμελιώδης μορφή σχετίζεται με τη μέτρηση αποστάσεων κατά μήκος ενός τόξου μεταξύ δύο σημείων που ανήκουν στην επιφάνεια Ω. Συνεπώς, η πρώτη μορφή περιγράφει την ουσιαστική γεωμετρία της επιφάνειας. Όμως, δεν περιλαμβάνει το συγκεκριμένο σχήμα αυτής. Για παράδειγμα, αλλαγές σε καμπυλότητες δεν περιγράφονται με τις παραμέτρους A και B. Έτσι, η αναπαράσταση της επιφάνειας μόνο από τις παραμέτρους αυτές είναι ανεπαρκής και η πρώτη θεμελιώδης μορφή πρέπει να συμπληρωθεί με τη δεύτερη θεμελιώδης μορφή.

Η δεύτερη θεμελιώδης μορφή σχετίζεται με τη εύρεση καμπυλότητας σε ένα σημείο πάνω στην επιφάνεια. Η έννοια της καμπυλότητας σε ένα σημείο της επιφάνειας είναι παρόμοια με εκείνη σε επίπεδη καμπύλη. Ορίζουμε αρχικά το μοναδιαίο και μοναδικό κάθετο διάνυσμα $n(a_1, a_2)$ σε ένα σημείο P της επιφάνειας ως το κάθετο των r_1 και r_2 που ορίζουν το εφαπτομενικό επίπεδο.

$$n(a_1, a_2) = \frac{(r_1 \times r_2)}{|r_1 \times r_2|} \quad (2.16)$$

όπου το $(r_1 \times r_2)$ είναι το εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων r_1 και r_2 . Επίσης, ισχύουν τα παρακάτω:

$$|r_1 \times r_2| = |r_1||r_2|\sin\theta \quad (2.17)$$

$$(r_1 \cdot r_2) = |r_1||r_2|\cos\theta \quad (2.18)$$

Όπου θ η γωνία των διανυσμάτων r_1 και r_2 και χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς των E, F, G που φαίνονται παραπάνω προκύπτει πως:

$$\cos\theta = \frac{F}{\sqrt{EG}} \quad \text{και} \quad \sin\theta = \sqrt{\frac{EG-F^2}{EG}} \quad (2.19)$$

οπότε το διάνυσμα n ορίζεται ως εξής:

$$n(a_1, a_2) = \frac{(r_1 \times r_2)}{H} \quad , \quad H = \sqrt{EG - F^2} \quad (2.20)$$

Με την προϋπόθεση πως $H \neq 0$

Στη συνέχεια, εξετάζεται μια κανονική τομή με μοναδιαίο διάνυσμα n που κατευθύνεται προς το κέντρο καμπυλότητας της καμπύλης. Η καμπυλότητα αυτού του τμήματος, ονομάζεται κανονική καμπυλότητα και δηλώνεται με κ_n , έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\kappa_n = \frac{II}{I} = \frac{L \cdot (da_1)^2 + 2M \cdot (da_1 \cdot da_2) + N \cdot (da_2)^2}{E \cdot (da_1)^2 + 2F \cdot (da_1 \cdot da_2) + G \cdot (da_2)^2} \quad (2.21)$$

Παρατηρείται πως ο παρονομαστής είναι η πρώτη θεμελιώδης μορφή των επιφανειών. Επίσης, έχουμε πως:

$$L = r_1 \cdot n_1 \quad , \quad 2M = (r_1 \cdot n_2 + r_2 \cdot n_1) \quad , \quad N = r_2 \cdot n_2 \quad (2.22)$$

Επίσης, το διάνυσμα n όπως έχει οριστεί είναι κάθετο με τα διανύσματα r_1 και r_2 οπότε ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$r_1 \cdot n = 0 \quad \text{και} \quad r_2 \cdot n = 0 \quad (2.23)$$

Παραγωγίζοντας τις εξισώσεις 2.23 ως προς a_1 και a_2 προκύπτουν τα παρακάτω:

$$r_{,11} \cdot n + r_{,1} \cdot n_{,1} = 0 \xrightarrow{(2.22)} r_{,11} \cdot n + L = 0 \Rightarrow \mathbf{L} = -\mathbf{r}_{,11} \cdot \mathbf{n} \quad (2.24)$$

$$r_{,22} \cdot n + r_{,2} \cdot n_{,2} = 0 \xrightarrow{(2.22)} r_{,22} \cdot n + N = 0 \Rightarrow \mathbf{N} = -\mathbf{r}_{,22} \cdot \mathbf{n} \quad (2.25)$$

$$r_{,12} \cdot n + r_{,1} \cdot n_{,2} = 0 \Rightarrow r_{,1} \cdot n_{,2} = -r_{,12} \cdot n \quad (2.26)$$

$$r_{,21} \cdot n + r_{,2} \cdot n_{,1} = 0 \Rightarrow r_{,2} \cdot n_{,1} = -r_{,21} \cdot n \quad (2.27)$$

Αθροίζοντας κατά μέλη τις (2.26) και (2.27), με χρήση της σχέσης $r_{,12} = r_{,21}$, λόγω της (2.22) προκύπτει πως:

$$\mathbf{M} = -\mathbf{r}_{,12} \cdot \mathbf{n} \quad (2.28)$$

Στις παραπάνω σχέσεις: $r_{,ij} = \frac{\partial^2 r}{\partial a_i \partial a_j}$, $i, j = 1, 2$

Συνοψίζοντας, ο αριθμητής της σχέσης (2.21) ορίζει τη δεύτερη θεμελιώδης μορφή της επιφάνειας Ω και οι παράμετροι αυτής είναι τα L, M, N τα οποία ορίζονται από τις παραπάνω σχέσεις.

2.4 Κύριες καμπυλότητες

Θεωρούμε πως σε κάθε σημείο υπάρχουν 2 κάθετες διευθύνσεις όπου η τιμή της κανονικής καμπυλότητας μεγιστοποιείται - ελαχιστοποιείται. Από τη σχέση (2.21) παρατηρείται πως η τιμή της κανονικής καμπυλότητας εξαρτάται από το λόγο $\lambda = \frac{da_2}{da_1}$. Τροποποιώντας την (2.21) με τη παραπάνω σχέση προκύπτει η παρακάτω:

$$K(\lambda) = \frac{L+2M \cdot \lambda + N \cdot \lambda^2}{E+2F \cdot \lambda + G \cdot \lambda^2} \quad (2.29)$$

Παραγωγίζοντας ως προς λ και θέτοντας $\frac{dK(\lambda)}{d\lambda} = 0$ καταλήγουμε στην χαρακτηριστική εξίσωση:

$$(MG - NF) \cdot \lambda^2 + (LG - NE) \cdot \lambda + (LF - ME) = 0 \quad (2.30)$$

Από την οποία προκύπτει

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(LG-NE) \pm \sqrt{(LG-NE)^2 - 4(MG-NF)(LF-ME)}}{2(MG-NF)} \quad (2.31)$$

Μια από τις ρίζες, έστω η λ_1 , αντικαθίσταται στην εξίσωση (2.29), αντιστοιχεί στη μέγιστη τιμή της κανονικής καμπυλότητας, K_1 , ενώ η δεύτερη, λ_2 , αντιστοιχεί στην ελάχιστη τιμή K_2 . Εάν οι καμπυλόγραμμες συντεταγμένες είναι ορθογώνιες τότε ισχύει $F = M = 0$. Επίσης, αν οι διευθύνσεις των a_1, a_2 , συμπίπτουν με εκείνες των κυρίων καμπυλοτήτων, θέτοντας $da_1 = 0$, $da_2 = 0$ προκύπτουν οι κανονικές καμπυλότητες K_1, K_2 ως εξής:

$$k_1 = \frac{1}{R_1} = \frac{L}{E}, \quad k_2 = \frac{1}{R_2} = \frac{N}{G} \quad (2.32)$$

2.5 Ακτίνα καμπυλότητας επίπεδης καμπύλης

Έστω επίπεδη καμπύλη S με εξίσωση με τη παρακάτω μορφή:

$$y = F(x) \quad (2.33)$$

Τότε, η ακτίνα καμπυλότητας ορίζεται από τη παρακάτω σχέση ως εξής:

$$r = \pm \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} \quad (2.34)$$

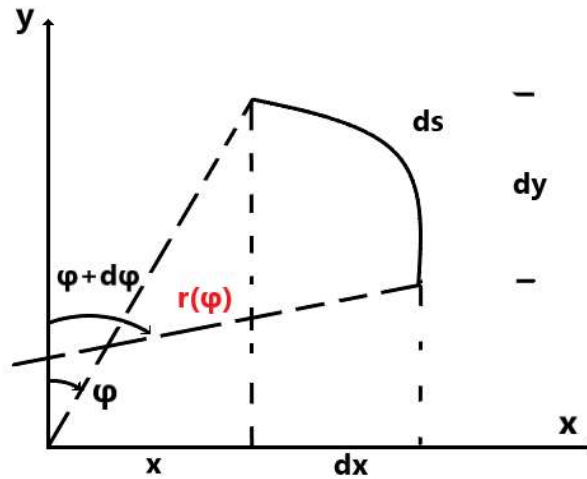
Η σχέση της ακτίνας καμπυλότητας είναι εύλογο να υπολογιστεί συναρτήσει γωνίας φ , ώστε να μπορεί να χρησιμοποιηθεί στις εξισώσεις των κελυφών.

Με βάση το παρακάτω σχήμα 2.3 ισχύουν και προκύπτουν τα παρακάτω:

$$ds = r d\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{r d\varphi}$$

$$r = \frac{1}{\cos\varphi} \frac{dx}{d\varphi} = \frac{1}{\cos\varphi} \frac{dx(\varphi)}{d\varphi}$$



Σχήμα 2.3

Επιπλέον, ισχύει πως:

$$\tan\varphi = -\frac{dy}{dx} = -y'(x) \rightarrow x = f(\tan\varphi) = x(\varphi)$$

Οπότε ισχύει πως:

$$r(\varphi) = \frac{1}{\cos\varphi} \frac{dx(\varphi)}{d\varphi} \quad (2.35)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 - ΘΕΩΡΙΑ ΚΕΛΥΦΩΝ

3.1 Βασικές υποθέσεις

Οι πιο συνηθισμένες θεωρίες κελυφών είναι αυτές που βασίζονται σε γραμμική ελαστικότητα. Οι γραμμικές θεωρίες περιγράφουν επαρκώς τάσεις και παραμορφώσεις για τα κελύφη που παρουσιάζουν μικρές ελαστικές παραμορφώσεις, δηλαδή παραμορφώσεις για τις οποίες θεωρείται ότι οι εξισώσεις ισορροπίας για τις παραμορφωμένες επιφάνειες είναι ίδιες με εκείνες των απαραμόρφωτων και εφαρμόζεται έπειτα ο νόμος του Hooke. Για τους σκοπούς της ανάλυσης, ένα κέλυφος θεωρείται ως ένα τρισδιάστατο σώμα και τότε μπορούν να εφαρμοστούν οι μέθοδοι της θεωρίας της γραμμικής ελαστικότητας. Βέβαια, ένας υπολογισμός που βασίζεται σε αυτές τις μεθόδους είναι γενικά πολύ δυσχερής και πολύπλοκος. Στη θεωρία των κελυφών χρησιμοποιείται επομένως μια εναλλακτική απλοποιημένη μέθοδος. Συγκεκριμένα, το τρισδιάστατο πρόβλημα της ισορροπίας του κελύφους και της τάνυσης του μειώνεται μονάχα στην ανάλυση της μεσαίας επιφάνειας του. Οι θεωρίες κελύφους διάφορων βαθμών ακρίβειας προέκυψαν, ανάλογα με τον βαθμό απλοποίησης των εξισώσεων ελαστικότητας.

Η γραμμική θεωρία των λεπτών κελυφών με αυθαίρετη μορφή της μεσαίας επιφάνειας προκύπτει με βάση τις υποθέσεις των Kirchhoff-Love. Ο Love ήταν ο πρώτος ερευνητής που παρουσίασε μια επιτυχημένη θεωρία κελύφους με βάση την κλασική γραμμική ελαστικότητα. Για να απλουστευθούν οι σχέσεις παραμόρφωσης – μετατόπισης, ο Love εφάρμοσε στη θεωρία του κελύφους τις υποθέσεις Kirchhoff που αναπτύχθηκαν αρχικά για τη θεωρία κάμψης πλακών μαζί με τη μικρή παραμόρφωση και τη λεπτότητα των παραδοχών του κελύφους. Το παραπάνω σύνολο υποθέσεων ονομάζεται οι υποθέσεις Kirchhoff-Love. Η θεωρία του Love των λεπτών ελαστικών κελυφών αναφέρεται επίσης ως πρώτη τάξης θεωρίας κελύφους. Οι υποθέσεις της θεωρίας είναι:

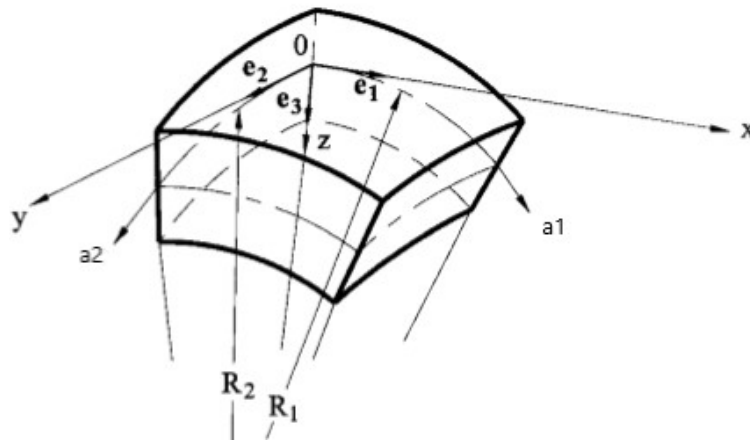
1. Κάθετες στην επιφάνεια αναφοράς παραμένουν κάθετες στην παραμορφωμένη επιφάνεια και μετά τη παραμόρφωση με σταθερό μήκος. Αυτή η υπόθεση υποδηλώνει ότι όλα τα παραμορφωσιακά μεγέθη (ορθή και διατμητική) προς την κατεύθυνση της καθέτου προς τη μεσαία επιφάνεια εξαφανίζονται.
2. Η εγκάρσια ορθή τάση είναι μικρή σε σχέση με τις άλλες δύο ορθές τάσεις και μπορεί να παραληφθεί.

Υποθέτουμε επίσης ότι οι μετατοπίσεις ενός αυθαίρετου σημείου του κελύφους είναι μικρές σε σχέση με το πάχος του h . Ως συνέπεια αυτής της παραδοχής, τα προϊόντα των μετατοπίσεων και των μερικών παραγώγων τους θα αμεληθούν ως ποσότητες δευτέρας τάξης. Επιπλέον, μπορούμε να αναφερθούμε σε όλους τους υπολογισμούς στην αρχική γεωμετρία του κελύφους και να διασφαλίσουμε ότι οι διαφορικές εξισώσεις θα είναι γραμμικές. Το υλικό θεωρούμε πως είναι ομοιογενές, ισότροπο και ότι υπακούει στον νόμο του Hooke. Η γενική γραμμική θεωρία των λεπτών κελυφών περιλαμβάνει τις κινηματικές εξισώσεις και τις στατικές εξισώσεις.

3.2 Κινηματικές σχέσεις

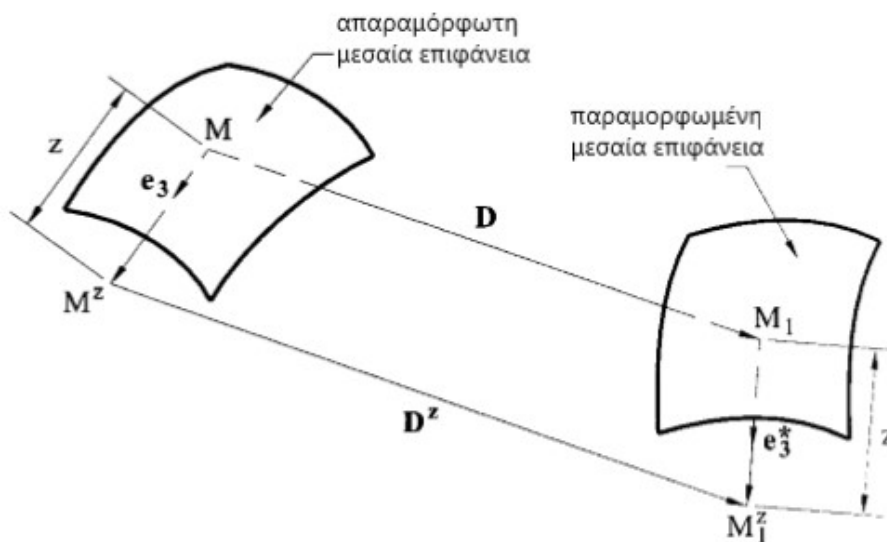
3.2.1 Μεταβολή των μετατοπίσεων κατά μήκος του πάχους

Αρχικά θεωρούμε πως το απαραμόρφωτο κέλυφος συνδέεται με τις καμπυλόγραμμες συντεταγμένες a_1, a_2 και πως οι γραμμές των κυρίων καμπυλοτήτων ταυτίζονται με τις καμπύλες a_1, a_2 που αναφέρθηκαν στο κεφάλαιο 2.2. Επιπλέον, θεωρούμε τα τρία μοναδιαία διανύσματα στο τοπικό σύστημα αξόνων e_1, e_2, e_3 όπως φαίνονται παρακάτω.



Σχήμα 3.1

Ας θεωρήσουμε και ένα σημείο M που ανήκει στη μεσαία επιφάνεια. Ως αποτέλεσμα κάποιας παραμόρφωσης, το σημείο αυτό μετακινείται από το M στη μη παραμορφωμένη μεσαία επιφάνεια σε ένα σημείο M_1 στην παραμορφωμένη μεσαία επιφάνεια με διάνυσμα μετατόπισης D όπως φαίνεται παρακάτω. Ομοίως, και ένα σημείο M^z σε απόσταση z από τη μεσαία επιφάνεια, δηλαδή στην διεύθυνση του e_3 με βάση το παραπάνω σχήμα, μετακινείται με διάνυσμα D^z .



Σχήμα 3.2

Έστω ότι οι προβολές του διανύσματος μετατόπισης D στις κατευθύνσεις του τοπικού συστήματος x, y, z , ονομάζονται u, v, w αντίστοιχα. Ομοίως για το διάνυσμα D^z

ονομάζονται u_z , v_z , w_z . Τότε οι μετατοπίσεις του σημείου M_z συνδέονται με εκείνες του M ως εξής:

$$\begin{aligned} u_z &= u - z \cdot \theta_1 \\ v_z &= v - z \cdot \theta_2 \\ w_z &= w \end{aligned} \quad (3.1)$$

όπου θ_1 και θ_2 είναι οι γωνίες περιστροφής της καθέτου στη μεσαία επιφάνεια γύρω από τις εφαπτόμενες στις γραμμές καμπυλόγραμμων συντεταγμένων a_1, a_2 και ορίζονται:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{u}{R_1} + \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial w}{\partial a_1} \\ \theta_2 &= \frac{v}{R_2} + \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial w}{\partial a_2} \end{aligned} \quad (3.2)$$

3.2.2 Σχέσεις μετατοπίσεων – παραμορφώσεων

Αρχικά, στην μεσαία επιφάνεια, οι παραμορφώσεις είναι τρεις, $\epsilon_1, \epsilon_2, \gamma_{12}$. Οι όροι ϵ_1, ϵ_2 αναφέρονται στην γραμμική παραμόρφωση, ενώ ο γ_{12} στην διατμητική παραμόρφωση της μεσαίας επιφάνειας. Σε σχέση με τις μετατοπίσεις u, v, w οι όροι $\epsilon_1, \epsilon_2, \gamma_{12}$ ορίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial u}{\partial a_1} + \frac{1}{AB} \cdot \frac{\partial A}{\partial a_2} \cdot v - \frac{w}{R_1} \\ \epsilon_2 &= \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial v}{\partial a_2} + \frac{1}{AB} \cdot \frac{\partial B}{\partial a_1} \cdot u - \frac{w}{R_2} \\ \gamma_{12} &= \frac{B}{A} \cdot \frac{\partial}{\partial a_1} \left(\frac{v}{B} \right) + \frac{A}{B} \cdot \frac{\partial}{\partial a_2} \left(\frac{u}{A} \right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

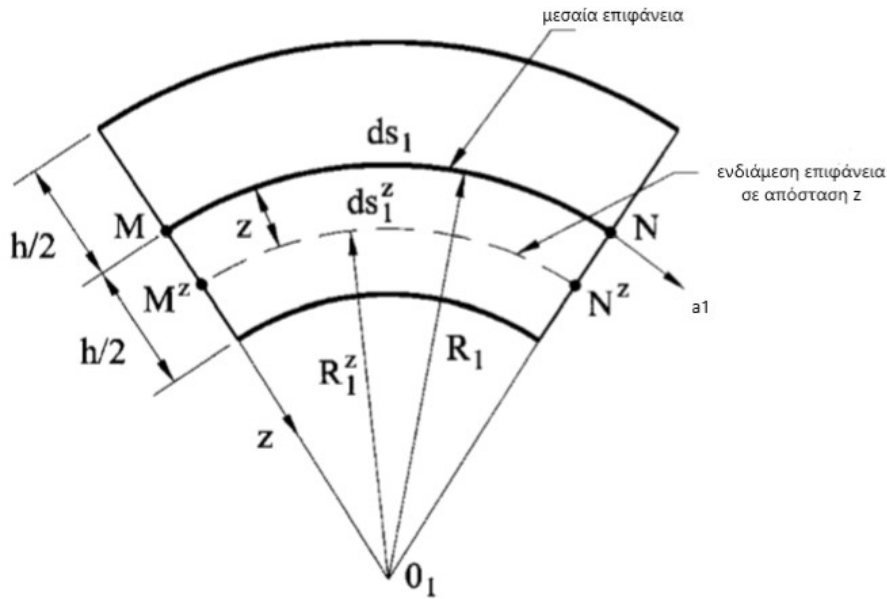
όπου A, B οι παράμετροι Lamé της μεσαίας επιφάνειας και R_1, R_2 οι ακτίνες καμπυλότητας αντίστοιχα. Οι παραμορφώσεις $\epsilon_3, \gamma_{13}, \gamma_{23}$ είναι ίσες με το μηδέν λόγω των υποθέσεων που αναφέρθηκαν παραπάνω στην αρχή του κεφαλαίου. Για να οριστούν, όπως ορίστηκαν και οι μετατοπίσεις σε κάποια απόσταση z από τη μεσαία επιφάνεια, οι παραμορφώσεις πρέπει όλοι οι όροι στις εξισώσεις να αναφέρονται στην επιφάνεια που απέχει z από τη μεσαία. Δηλαδή οι παράμετροι $-A_z, B_z$ της επιφάνειας όπως και οι ακτίνες καμπυλότητας R_{1z}, R_{2z} .

Ορίζουμε μέσα στο κέλυφος μια ισαπέχουσα επιφάνεια που βρίσκεται σε απόσταση z από τη μεσαία επιφάνεια, όπου $-\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}$. Λόγω της υπόθεσης 1 στην αρχή του κεφαλαίου οι ιδιότητες της μεσαίας επιφάνειας σε σχέση με την ορθογωνικότητα των συντεταγμένων ισχύει και στην ισαπέχουσα. Επίσης, τα σημεία που βρίσκονται σε μία κάθετο στη μεσαία επιφάνεια παραμένουν στην ίδια και μετά την παραμόρφωση.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται μία τομή κατά τη κάθετο στην μεσαία επιφάνεια και κατά τη διεύθυνση της συντεταγμένης a_1 . Παρατηρείτε πως το τόξο M_z-N_z αναφέρεται στην επιφάνεια z . Επίσης, ισχύει πως:

$$\begin{aligned} R_{1z} &= R_1 - z \\ ds_{1z} &= A_z \cdot da_1 = A \cdot \left(1 - \frac{z}{R_1} \right) da_1 \end{aligned}$$

$$A^z = A \cdot \left(1 - \frac{z}{R_1}\right) \quad (3.4)$$



Σχήμα 3.3

όπου A^z είναι η παράμετρος Lamé της επιφάνειας κατά την καμπυλόγραμμη συντεταγμένη a_1 και R_1^z η ακτίνα καμπυλότητας. Προφανώς ισχύει:

$$R_2^z = R_2 - z$$

$$B^z = B \left(1 - \frac{z}{R_2}\right) \quad (3.5)$$

όπου B^z είναι η παράμετρος Lamé της επιφάνειας κατά την καμπυλόγραμμη συντεταγμένη a_2 και R_2^z η ακτίνα καμπυλότητας.

Με αντικατάσταση των σχέσεων (3.1), (3.4), (3.5) στις σχέσεις (3.3) προκύπτουν οι παραμορφώσεις στην ισαπέχουσα επιφάνεια. Με χρήση και άλλων θεωρημάτων κυρίως γεωμετρικών αλλά και των υποθέσεων του Kirchhoff σε σχέση με το λόγο $\frac{h}{R_{\min}}$, ο οποίος μπορεί να παραληφθεί διότι κατά κύριο βαθμό η τιμή του είναι μικρότερη από $\frac{1}{50}$ και αρκετή άλγεβρα προκύπτουν οι παρακάτω τρεις σχέσεις παραμορφωσιακών μεγεθών στο πάχος του κελύφους.

$$\varepsilon_1^z = \varepsilon_1 + z \cdot \chi_1$$

$$\varepsilon_2^z = \varepsilon_2 + z \cdot \chi_2$$

$$\gamma_{12}^z = \gamma_{12} + 2z \cdot \chi_{12} \quad (3.6)$$

Οι σχέσεις (3.6) έχουν μεγάλη σημασία στη θεωρία των κελυφών. Εκφράζουν τις ορθές και διατμητικές παραμορφώσεις σε οποιοδήποτε σημείο του κελύφους ως γραμμικό συνδυασμό των ακόλουθων δύο όρων:

- a. Τις επίπεδες παραμορφώσεις της μεσαίας επιφάνειας που εκφράζονται με όρους μετατοπίσεων αντίστοιχα αυτής από τις εξισώσεις (3.3)

- b. Τις μεταβολές στην καμπυλότητα και τη στρέψη που δίδονται επίσης σε σχέση με τις μετατοπίσεις της μέσης επιφάνειας.

Τα ε_1 , ε_2 , γ_{12} χαρακτηρίζουν τις μεταβολές στις γραμμικές και γωνιακές διαστάσεις ενός διαφορικού στοιχείου της μεσαίας επιφάνειας, ενώ τα χ_1 , χ_2 , χ_{12} συνδέονται με τη μεταβολή στο σχήμα του κελύφους, δηλαδή με την κάμψη και την στρέψη του. Οι σχέσεις μεταξύ των παραμορφώσεων στο επίπεδο - οι αλλαγές στην καμπυλότητα και η στρέψη και οι μετατοπίσεις της μεσαίας επιφάνειας - ονομάζονται κινηματικές εξισώσεις. Καθορίζουν τις συνθήκες συμβατότητας των παραμορφώσεων και των μετατοπίσεων, κατάλληλα εξειδικευμένες για την υπό εξέταση θεωρία κελύφους. Συνολικά οι εξισώσεις έχουν ως εξής:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial u}{\partial a_1} + \frac{1}{AB} \cdot \frac{\partial A}{\partial a_2} \cdot v - \frac{w}{R_1}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial v}{\partial a_2} + \frac{1}{AB} \cdot \frac{\partial B}{\partial a_1} \cdot u - \frac{w}{R_2}$$

$$\gamma_{12} = \frac{B}{A} \cdot \frac{\partial}{\partial a_1} \left(\frac{v}{B} \right) + \frac{A}{B} \cdot \frac{\partial}{\partial a_2} \left(\frac{u}{A} \right)$$

$$\chi_1 = - \left[\frac{1}{A} \cdot \frac{\partial}{\partial a_1} \left(\frac{u}{R_1} + \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial a_1} \right) + \frac{1}{AB} \cdot \frac{\partial A}{\partial a_2} \left(\frac{v}{R_2} + \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial a_2} \right) \right]$$

$$\chi_2 = - \left[\frac{1}{B} \cdot \frac{\partial}{\partial a_2} \left(\frac{v}{R_2} + \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial a_2} \right) + \frac{1}{AB} \cdot \frac{\partial B}{\partial a_1} \left(\frac{u}{R_1} + \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial a_1} \right) \right]$$

$$\chi_{12} = - \left[\frac{1}{AB} \cdot \left(- \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial a_2} \frac{\partial w}{\partial a_1} - \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial a_1} \frac{\partial w}{\partial a_2} + \frac{\partial^2 w}{\partial a_1 \partial a_2} \right) + \frac{1}{R_1 B} \cdot \frac{\partial}{\partial a_2} \left(\frac{u}{A} \right) + \frac{1}{R_2 A} \cdot \frac{\partial}{\partial a_1} \left(\frac{v}{B} \right) \right]$$

$$\varepsilon_3 = 0$$

$$\gamma_{13} = 0$$

$$\gamma_{23} = 0$$

(3.7)

3.3 Σχέσεις Τάσεων – Παραμορφώσεων

3.3.1 Ο νόμος του Hooke για λεπτά κελύφη

Οι συστατικές εξισώσεις για ένα ομοιογενές κέλυφος σε απόσταση z από τη μεσαία επιφάνεια δίνονται παρακάτω.

$$\varepsilon_1^z = \frac{1}{E} [\sigma_1^z - \nu \cdot (\sigma_2^z + \sigma_3^z)] \quad , \quad \varepsilon_2^z = \frac{1}{E} [\sigma_2^z - \nu \cdot (\sigma_1^z + \sigma_3^z)]$$

$$\varepsilon_3^z = \frac{1}{E} [\sigma_3^z - \nu \cdot (\sigma_1^z + \sigma_2^z)]$$

$$\gamma^{z12} = \frac{1}{G} \cdot \tau^{z12} \quad , \quad \gamma^{z13} = \frac{1}{G} \cdot \tau^{z13} \quad , \quad \gamma^{z23} = \frac{1}{G} \cdot \tau^{z23}$$

(3.8)

όπου E , ν και G είναι το μέτρο ελαστικότητας, η αναλογία Poisson και το μέτρο διάτμησης αντίστοιχα. Η σχέση που ακολουθεί υπάρχει μεταξύ E και G :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.9)$$

και $\sigma_{1,2,3}$ οι ορθές τάσεις που εφαρμόζονται σε επίπεδα των οποίων οι κάθετες είναι παράλληλες στα a_1, a_2, Z αντίστοιχα - $\varepsilon_{1,2,3}$ οι αντίστοιχες παραμορφώσεις - $\tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}$ οι διατμητικές τάσεις - $\gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23}$ οι διατμητικές παραμορφώσεις. Με βάση στις υποθέσεις του Kirchhoff, και συγκεκριμένα την 1ή, παρατηρείται πως όλοι οι παράλληλοι όροι παραμορφώσεων με τον άξονα Z είναι μηδέν, οπότε:

$$\varepsilon^Z_3 = \gamma^Z_{13} = \gamma^Z_{23} = 0 \quad (3.10)$$

λόγω της παραπάνω προκύπτει πως οι διατμητικές τάσεις:

$$\tau^Z_{13} = \tau^Z_{23} = 0 \quad (3.11)$$

Η επόμενη παραδοχή του Kirchhoff για τα λεπτά κελύφη δηλώνει ότι η εγκάρσια ορθή τάση είναι αμελητέα σε σύγκριση με τις ορθές τάσεις στο επίπεδο (υπόθεση 2). Δηλαδή,

$$\sigma^Z_3 = 0 \quad (3.12)$$

Αυτή η υπόθεση αποδεικνύεται επειδή η ορθή τάση σ_{z3} στις εξωτερικές και εσωτερικές επιφάνειες του κελύφους είναι ίση με την ένταση του εφαρμοζόμενου εγκάρσιου εξωτερικού φορτίου. Επίσης, αποδεικνύεται πως οι ορθές τάσεις στο επίπεδο, σ_{z1} και σ_{z2} , είναι τουλάχιστον R/h φορές μεγαλύτερες από σ_{z3} . Λόγω της λεπτότητας του κελύφους, συμπεραίνεται ότι το σ_{z3} θα είναι επίσης μικρό στα εσωτερικά σημεία του κελύφους. Από τις σχέσεις (3.8) λυμένες ως προς τις τάσεις, προκύπτουν τα παρακάτω:

$$\sigma^Z_1 = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon^Z_1 + \nu \cdot \varepsilon^Z_2) \quad , \quad \sigma^Z_2 = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon^Z_2 + \nu \cdot \varepsilon^Z_1)$$

$$\tau^Z_{12} = G \cdot \gamma^Z_{12} = \frac{E}{2(1+\nu)} \cdot \gamma^Z_{12} \quad (3.13)$$

Στις παραπάνω σχέσεις αντικαθίστανται οι σχέσεις (3.6) οπότε προκύπτουν οι παρακάτω:

$$\sigma^Z_1 = \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_1 + \nu \cdot \varepsilon_2 + z \cdot (x_1 + \nu \cdot x_2)]$$

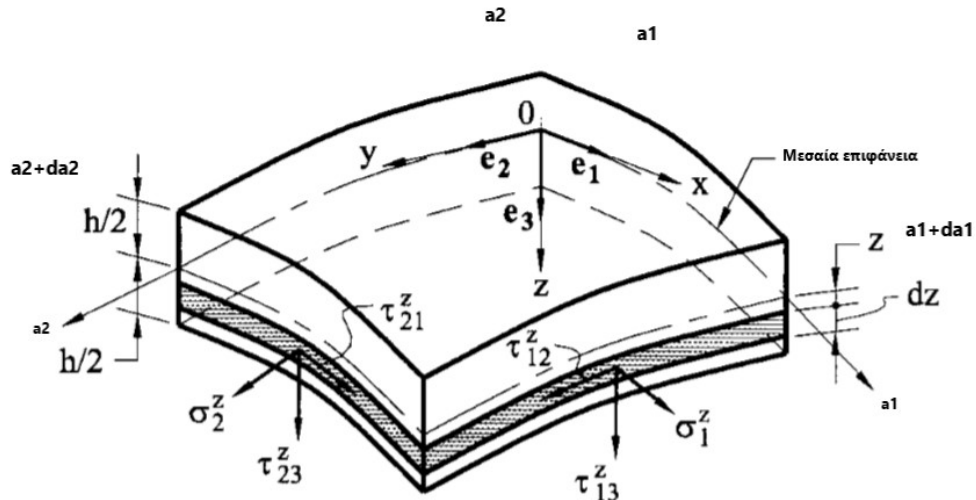
$$\sigma^Z_2 = \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_2 + \nu \cdot \varepsilon_1 + z \cdot (x_2 + \nu \cdot x_1)]$$

$$\tau^Z_{12} = \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{1}{2} \gamma_{12} + z \cdot x_{12} \right) \quad (3.14)$$

3.3.2 Εντατικά μεγέθη κελυφών

Στο παρακάτω 3.4 σχήμα φαίνεται ένα διαφορικό στοιχείο κελύφους με όρια τις καμπύλες γραμμές $a_1 - a_1+da_1, a_2 - a_2+da_2$. Επιπλέον, στο σχήμα φαίνονται και οι τάσεις που αναφέρθηκαν στο 3.3.1. Το ύψος αυτού του στοιχείου είναι σταθερό και ισούται με το πάχος κελύφους h . Οι τάσεις $\tau^Z_{13} = \tau^Z_{23}$ είναι μηδενικές λόγω της 3.11. Οι δείκτες 1, 2 και 3 αντιστοιχούν στους άξονες a_1, a_2 και z , αντίστοιχα. Όλες οι τάσεις παρουσιάζονται θετικές στο παραπάνω σχήμα. Εάν οι καμπυλόγραμμες συντεταγμένες είναι ορθογώνιες, τότε λόγω ισορροπίας ροπών πρέπει να ισχύει:

$$\tau^Z_{12} = \tau^Z_{21} \quad , \quad \tau^Z_{13} = \tau^Z_{31} \quad , \quad \tau^Z_{23} = \tau^Z_{32} \quad (3.15)$$



Σχήμα 3.4

Από την εξίσωση (3.14) παρατηρείται πως οι τάσεις κατανέμονται γραμμικά σε όλο το πάχος του ελαστικού κελύφους, επομένως, είναι εύκολο να ολοκληρωθούν οι τάσεις σε ολόκληρο το πάχος του κελύφους και να αντικατασταθούν από τα εντατικά μεγέθη (δυνάμεις και ροπές) που εφαρμόζονται στη μεσαία επιφάνεια. Με την πραγματοποίηση τέτοιων ολοκληρώσεων, οι παραλλαγές σε σχέση με το z εξαλείφονται πλήρως για να δώσουν μια δισδιάστατη θεωρία των λεπτών κελυφών. Λόγω της (3.4) ισχύει το παρακάτω :

$$ds_1^z = A^z \cdot da_1 dz = A \cdot \left(1 - \frac{z}{R_1}\right) da_1 dz, \text{ ομοίως για το } ds_2^z \quad (3.16)$$

Ορίζουμε την αξονική δύναμη N_1 του κελύφους ως αποτέλεσμα των ορθών τάσεων σ_1 που δρουν στην επίπεδη επιφάνεια YZ ανά μονάδα μήκους του στοιχείου. Έτσι, έχουμε τα εξής:

$$N_1 B da_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_1^z \cdot ds_2^z = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_1^z \cdot B \cdot \left(1 - \frac{z}{R_2}\right) da_2 dz$$

$$N_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_1^z \left(1 - \frac{z}{R_2}\right) dz \quad (3.17)$$

Επίσης, μπορούμε να ορίσουμε τη διατμητική δύναμη N_{12} και την εγκάρσια δύναμη διατμήσεως Q_1 , που είναι τα προκύπτοντα από τις διατμητικές τάσεις τ_{12} και τ_{13} , αντίστοιχα, που δρουν στην ίδια επίπεδη επιφάνεια yz ομοίως με την N_1 :

$$N_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{12}^z \left(1 - \frac{z}{R_2}\right) dz \quad (3.18)$$

$$Q_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{13}^z \left(1 - \frac{z}{R_2}\right) dz \quad (3.19)$$

Ομοίως για την επιφάνεια XZ προκύπτουν τα παρακάτω ανά μονάδα μήκους:

$$N_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_2^z \left(1 - \frac{z}{R_1}\right) dz \quad (3.20)$$

$$N_{21} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{21}^z \left(1 - \frac{z}{R_1}\right) dz \quad (3.21)$$

$$Q_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{23}^z \left(1 - \frac{z}{R_1}\right) dz \quad (3.22)$$

Στη συνέχεια ορίζουμε τις ροπές, καμπτικές και στρεπτικές αντίστοιχα ως γινόμενα τάσεων με απόσταση, δηλαδή ως εξής:

$$M_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma^z_{11} \cdot z \left(1 - \frac{z}{R_2}\right) dz \quad (3.23)$$

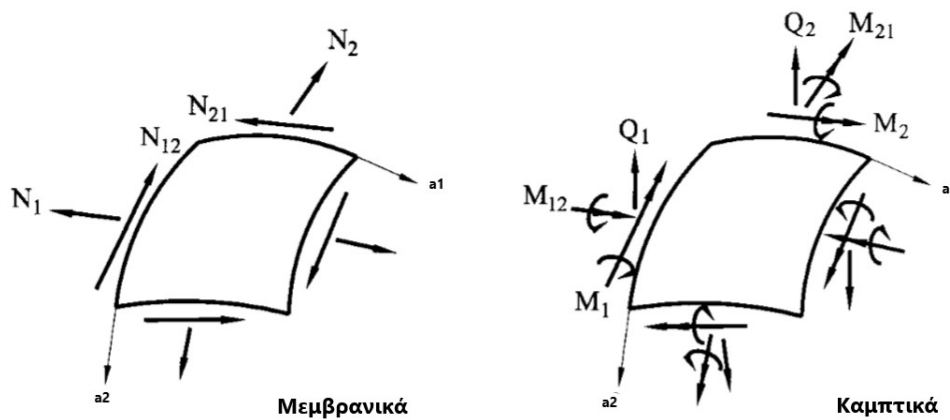
$$M_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau^z_{12} \cdot z \left(1 - \frac{z}{R_2}\right) dz \quad (3.24)$$

οι οποίες δρουν στο επίπεδο YZ και ομοίως στο επίπεδο XZ

$$M_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma^z_{22} \cdot z \left(1 - \frac{z}{R_1}\right) dz \quad (3.25)$$

$$M_{21} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau^z_{21} \cdot z \left(1 - \frac{z}{R_1}\right) dz \quad (3.26)$$

Αξίζει να σημειωθεί πως αν και λόγω της εξίσωσης (3.15) οι διατμητικές τάσεις είναι ίσες οι προκύπτουσες από αυτές ροπές M_{12} , M_{21} και δυνάμεις N_{12} , N_{21} δεν είναι ίσες αφού οι ποσότητες R_1 , R_2 δεν είναι ίσες για τυχαία γεωμετρία της μεσαίας επιφάνειας δηλαδή για ένα λεπτό κέλυφος με αυθαίρετη γεωμετρία. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι θετικές φορές των εντατικών μεγεθών χωρισμένα στα μεμβρανικά μεγέθη και στα καμπτικά μεγέθη. Επίσης, στην γενική γραμμική θεωρία των λεπτών κελυφών που έχει παρουσιαστεί παραπάνω, έξι εσωτερικές δυνάμεις, N_1 , N_{12} , N_{21} , N_2 , Q_1 και Q_2 και τέσσερις ροπές, M_1 , M_2 , M_{12} και M_{21} , χαρακτηρίζουν πλήρως την κατάσταση του κελύφους, αφού η γνώση αυτών των ποσοτήτων επιτρέπει τον προσδιορισμό όλων των τασικών συστατικών σε οποιοδήποτε σημείο του κελύφους.



Σχήμα 3.5

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, η γενική θεωρία των λεπτών κελυφών που παρουσιάστηκε βασίστηκε στις παραδοχές των Kirchhoff-Love που παρουσιάστηκε στο 3.1. Με βάση τα αποτελέσματα των στατικών σχέσεων.

1. Ως αποτέλεσμα της πρώτης παραδοχής των Kirchhoff-Love ισχύει $\gamma_{13} = 0, \gamma_{23} = 0$ και λόγω της (3.11) οι διατμητικές τάσεις $\tau_{13} = \tau_{23} = 0$. Βέβαια, υπολογίστηκαν οι διατμητικές δυνάμεις Q_1 , Q_2 ως ολοκληρώματα των παραπάνω τάσεων σε ολόκληρο το πάχος του κελύφους. Όμως, δεν μπορούν να προσδιορισθούν άμεσα ολοκληρώνοντας τις διατμητικές τάσεις στο πάχος του κελύφους όπως έγινε για τα άλλα εντατικά μεγέθη. Παρόλα αυτά, τα αποτελέσματα Q_1 και Q_2 πρέπει να διατηρηθούν για λόγους ισορροπίας.

2. Επίσης, ως αποτέλεσμα του συνόλου των υποθέσεων των Kirchhoff-Love ισχύει $\varepsilon_3 = \sigma_3 = 0$. Αν θέσουμε μόνο $\sigma_3 = 0$ τότε η έκφραση του ε_3 προκύπτει από την (3.8) ως εξής:

$$\varepsilon_3 = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$$

3.3.3 Ισορροπία του στοιχείου κελύφους

Θεωρούμε ένα διαφορικό στοιχείο που είναι απομονωμένο από ένα κέλυφος όπως στο σχήμα 3.4 και προσδιορίζεται η ισορροπία του υπό όλες τις εξωτερικές και εσωτερικές δυνάμεις. Οι εξωτερικές δυνάμεις θα περιλαμβάνουν και τα μερικά επιφανειακά φορτία εφαρμοζόμενα στην άνω και κάτω επιφάνεια του στοιχείου. Τα εξωτερικά φορτία εφαρμόζονται στην μεσαία επιφάνεια ανά μονάδα επιφάνειας (KN/m^2). Εξετάζοντας τις συνθήκες ισορροπίας αυτού του στοιχείου της μεσαίας επιφάνειας που φορτίζεται από τις εξωτερικές και τις εσωτερικές δυνάμεις και ροπές. Η ισορροπία οδηγεί στις ακόλουθες εξισώσεις :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a_1}(N_1 \cdot B) + \frac{\partial}{\partial a_2}(N_{21} \cdot A) + N_{12} \frac{\partial A}{\partial a_2} - N_2 \frac{\partial B}{\partial a_1} - Q_1 \frac{AB}{R_1} + p_1 \cdot AB &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial a_2}(N_2 \cdot A) + \frac{\partial}{\partial a_1}(N_{12} \cdot B) + N_{21} \frac{\partial B}{\partial a_1} - N_1 \frac{\partial A}{\partial a_2} - Q_2 \frac{AB}{R_2} + p_2 \cdot AB &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial a_1}(Q_1 \cdot B) + \frac{\partial}{\partial a_2}(Q_2 \cdot A) + N_1 \frac{AB}{R_1} + N_2 \frac{AB}{R_2} + p_3 \cdot AB &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial a_1}(B \cdot M_{12}) + \frac{\partial}{\partial a_2}(A \cdot M_2) - M_1 \frac{\partial A}{\partial a_2} + M_{21} \frac{\partial B}{\partial a_1} - Q_2 \cdot AB &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial a_2}(A \cdot M_{21}) + \frac{\partial}{\partial a_1}(B \cdot M_1) - M_2 \frac{\partial B}{\partial a_1} + M_{12} \frac{\partial A}{\partial a_2} - Q_1 \cdot AB &= 0 \\ N_{12} - N_{21} - \frac{M_{12}}{R_1} + \frac{M_{21}}{R_2} &= 0 \end{aligned} \quad (3.27)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις παριστάνουν ένα σύνολο μερικών διαφορικών εξισώσεων στατικής ισορροπίας ενός κελύφους στην γενική θεωρία λεπτών ελαστικών κελυφών. Αποδεικνύεται εύκολα πως η τελευταία εξίσωση είναι ταυτότητα. Αντικαθιστούμε τις εκφράσεις από τις σχέσεις (3.18), (3.21), (3.24), (3.26) και προκύπτουν τα παρακάτω:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{12}^z \left(1 - \frac{z}{R_2}\right) dz - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{21}^z \left(1 - \frac{z}{R_1}\right) dz - \frac{1}{R_1} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{12}^z \cdot z \left(1 - \frac{z}{R_2}\right) dz + \\ \frac{1}{R_2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{21}^z \cdot z \left(1 - \frac{z}{R_1}\right) dz = 0 \Rightarrow \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\tau_{12}^z - \tau_{21}^z) \cdot \left(1 - \frac{z}{R_1}\right) \left(1 - \frac{z}{R_2}\right) dz = 0 \quad \text{το οποίο ισχύει λόγω της (3.15)} \end{aligned}$$

Οπότε οι εξισώσεις ισορροπίας μειώνονται σε 5 εξισώσεις. Σε αυτές έχουμε συνολικά 10 αγνώστους και συγκεκριμένα 6 δυνάμεις $N_1, N_2, N_{12}, N_{21}, Q_1, Q_2$ και 4 ροπές M_1, M_2, M_{12}, M_{21} . Συνεπώς το σύστημα είναι 5 φορές υπερστατικό και για την επίλυσή του χρειάζονται πρόσθετες εξισώσεις συμβιβαστού των παραμορφώσεων

για να οδηγηθούμε σε συγκεκριμένες επιλύσεις θέτοντας κατάλληλες συνοριακές συνθήκες.

3.4 Συνοριακές συνθήκες

Στα προηγούμενα τμήματα καταλήξαμε σε ένα σύνολο μερικών διαφορικών εξισώσεων λόγω κινηματικών και στατικών σχέσεων που πρέπει να ικανοποιούνται παντού στη μεσαία επιφάνεια. Ωστόσο, οι λύσεις των παραπάνω εξισώσεων, φυσικά, δεν προσδιορίζουν ακόμη πλήρως την τασική και παραμορφωσιακή κατάσταση σε ένα κέλυφος, εφόσον δεν υπόκεινται σε συνοριακές συνθήκες. Διακρίνουμε 3 περιπτώσεις αρχικά για τις συνοριακές συνθήκες.

1. Ένα κέλυφος δεν έχει όρια, δηλαδή είναι εντελώς κλειστό. Οι καμπύλες γραμμές συντεταγμένων a_1 και a_2 στη μεσαία επιφάνεια του κλειστού κελύφους είναι και αυτές κλειστές. Είναι προφανές ότι στην περίπτωση αυτή η έννοια των συνοριακών συνθηκών χάνει το νόημά της και στην περίπτωση πλήρους ή κλειστού κελύφους, οι συνοριακές συνθήκες αντικαθίστανται από τις συνθήκες περιοδικότητας.
2. Ένα κέλυφος είναι κλειστό σε σχέση με μία συντεταγμένη και ανοικτό σε σχέση με την άλλη, όπως για παράδειγμα στην περίπτωση των κυκλικών κυλινδρικών κελυφών. Είναι προφανές ότι προς την κατεύθυνση της κλειστής συντεταγμένης οι συνθήκες περιοδικότητας πρέπει να διαμορφωθούν ως συνοριακές συνθήκες. Από την άλλη, με την ανοικτή συντεταγμένη, απαιτείται επιλογή κατάλληλων συνοριακών συνθηκών που πρέπει να ικανοποιηθούν στην επίλυση των διαφορικών εξισώσεων που διέπουν τη γενική θεωρία κελύφους.
3. Ένα κέλυφος είναι ανοικτό όσον αφορά και τις δύο γραμμές συντεταγμένων a_1 και a_2 . Σε αυτή την περίπτωση, απαιτείται επιλογή συνοριακών συνθηκών και στις δύο κατευθύνσεις. Η συγκεκριμένη περίπτωση είναι και η πιο γενική.

3.5 Μεμβρανική θεωρία

Στο κεφάλαιο 1.2 φάνηκε ότι ένα λεπτό ελαστικό κέλυφος υποστηρίζει μια αυθαίρετη εξωτερική φόρτιση μέσω των μεμβρανικών τάσεων και καμπτικών τάσεων. Υπό τις κατάλληλες συνθήκες φόρτισης και συνοριακές συνθήκες, ωστόσο, οι προκύπτουσες καμπτικές τάσεις είναι είτε μηδέν, ή τόσο μικρές που μπορούν να αμεληθούν. Μια τέτοια τασική κατάσταση αναφέρεται ως μεμβρανική κατάσταση. Η αντίστοιχη θεωρία των λεπτών κελυφών που ασχολείται με αυτή την κατάσταση των τάσεων ονομάζεται μεμβρανική θεωρία των κελυφών. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η θεωρία της μεμβράνης αγνοεί όλες τις ροπές και συνεπώς και τις τέμνουσες δυνάμεις λόγω των εξισώσεων (3.27). Ισχύει:

$$M_1 = M_{12} = M_{21} = M_2 = Q_1 = Q_2 = 0 \quad (3.28)$$

Η παραμέληση των ροπών είναι δικαιολογημένη είτε όταν το κέλυφος έχει πολύ μικρή δυσκαμψία, είτε όταν οι αλλαγές στην καμπυλότητα και στην στροφή της μεσαίας επιφάνειας είναι πολύ μικρές, δηλαδή:

$$x_1 = x_{12} = x_2 \cong 0 \quad (3.29)$$

Οι εξισώσεις που διέπουν τη μεμβρανική θεωρία κελυφών μπορούν να ληφθούν απευθείας από τις εξισώσεις της γενικής θεωρίας των λεπτών κελυφών που προκύπτουν στο κεφάλαιο 3.3.3. Αντικαθιστούμε την (3.28) στις (3.27). Έτσι, για τη μεμβρανική θεωρία λεπτών κελυφών οι εξισώσεις έχουν ως εξής:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial a_1}(N_1 \cdot B) + \frac{\partial}{\partial a_2}(N_{21} \cdot A) + N_{12} \frac{\partial A}{\partial a_2} - N_2 \frac{\partial B}{\partial a_1} + p_1 \cdot AB &= 0 \\
 \frac{\partial}{\partial a_2}(N_2 \cdot A) + \frac{\partial}{\partial a_1}(N_{12} \cdot B) + N_{21} \frac{\partial B}{\partial a_1} - N_1 \frac{\partial A}{\partial a_2} + p_2 \cdot AB &= 0 \\
 N_1 \frac{1}{R_1} + N_2 \frac{1}{R_2} + p_3 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{3.30}$$

και επιπλέον ισχύει $N_{12}=N_{21}$. Οπότε οι άγνωστοι στις παραπάνω εξισώσεις είναι έμμεσα 3 όσες και οι εξισώσεις, οπότε το πρόβλημα της μεμβρανικής θεωρίας κελυφών είναι ισοστατικό. Αυτό σημαίνει ότι αν τα εξωτερικά φορτία, p_1 , p_2 και p_3 , είναι γνωστά, τότε οι μεμβρανικές δυνάμεις του κελύφους και άρα και οι τάσεις προσδιορίζονται με μοναδικό τρόπο από τις εξισώσεις (3.30). Επιπλέον, όσων αφορά τις παραμορφώσεις, αυτές συνδέονται με τις δυνάμεις λόγω των εξισώσεων (3.13) που αντικαθίστανται στις (3.18-3.26) και επιλύονται ως προς τις παραμορφώσεις.

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_1 &= \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial u}{\partial a_1} + \frac{1}{AB} \cdot \frac{\partial A}{\partial a_2} \cdot v - \frac{w}{R_1} = \frac{1}{Eh} \cdot (N_1 - \nu N_2) \\
 \varepsilon_2 &= \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial v}{\partial a_2} + \frac{1}{AB} \cdot \frac{\partial B}{\partial a_1} \cdot u - \frac{w}{R_2} = \frac{1}{Eh} \cdot (N_2 - \nu N_1) \\
 \gamma_{12} &= \frac{B}{A} \cdot \frac{\partial}{\partial a_1} \left(\frac{v}{B} \right) + \frac{A}{B} \cdot \frac{\partial}{\partial a_2} \left(\frac{u}{A} \right) = \frac{2(1+\nu)}{Eh} \cdot N_{12}
 \end{aligned}
 \tag{3.31}$$

Η μαθηματική διατύπωση της μεμβρανικής θεωρίας των κελυφών ολοκληρώνεται με την προσθήκη κατάλληλων συνοριακών συνθηκών. Στη μεμβρανική θεωρία, από τα παραπάνω προκύπτει ότι μόνο δύο συνοριακές συνθήκες μπορούν να καθοριστούν σε κάθε άκρο του κελύφους. Αν οι συνοριακές συνθήκες συνδέονται με τις τάσεις και άρα δυνάμεις, τότε μόνο οι N_1 , N_2 , και N_{12} καθορίζονται στις άκρες του κελύφους. Αν οι συνοριακές συνθήκες αναφέρονται σε όρους μετατοπίσεων, τότε μόνο τα στοιχεία μετατόπισης που είναι εφαιπτόμενα στη μεσαία επιφάνεια, δηλαδή u και v , πρέπει να καθορίζονται στο όριο του κελύφους. Στη μεμβρανική θεωρία είναι αδύνατο να χρησιμοποιηθούν ως συνοριακές συνθήκες οι μετατοπίσεις άκρων w και οι κλίσεις θ , δεδομένου ότι η εκχώρησή τους μπορεί να οδηγήσει στην εμφάνιση των αντίστοιχων συνοριακών εγκάρσιων διατμητικών δυνάμεων και των ροπών κάμψεως. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με τα γενικά αξιώματα της μεμβρανικής θεωρίας των λεπτών κελυφών που παρουσιάστηκαν παραπάνω.

Επιπλέον, οι διαφορικές εξισώσεις της μεμβρανικής θεωρίας κελυφών (3.30) και (3.31) είναι εξισώσεις διαφορετικών τάξεων. Συγκεκριμένα, οι λύσεις των εξισώσεων (3.30) είναι δευτέρας τάξης και λόγω αυτού οι λύσεις των εξισώσεων (3.31) είναι τετάρτης τάξης. Δεδομένου αυτών, οι συνοριακές συνθήκες δεν μπορούν να αφορούν μονάχα σε όρους τάσεων-δυνάμεων για μεμβρανικά κελύφη. Το σύνολο των συνοριακών συνθηκών θα πρέπει να αφορά και σε όρους μετατοπίσεων.

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, τα πλεονεκτήματα ενός κελύφους ως δομικό μέλος μπορούν να υλοποιηθούν πλήρως όταν ο μηχανισμός αντίστασης των φορτίων αποτελείται από εφελκυστικές ή και θλιπτικές τάσεις υπό συνθήκες

μεμβρανικής κατάστασης. Συγκεκριμένα, το εύρος εφαρμογής της μεμβρανικής θεωρίας συνδέεται με τις μετακινήσεις γραμμικών στοιχείων που ανήκουν στην μεσαία επιφάνεια του κελύφους. Αν ένα κέλυφος κάμπτεται χωρίς να δημιουργούνται παραμορφώσεις στην μεσαία επιφάνεια τότε το κέλυφος κάμπτεται εκτεταμένα. Γενικά, ισχύει ότι τα κελύφη παρουσιάζουν υψηλές αντοχές στις μεμβρανικές παραμορφώσεις. Λόγω αυτού, η κάμψη είναι πιο εύκολη να πραγματοποιηθεί παρά να την μεμβρανική κατάσταση όπου οι καμπτικές τάσεις είναι μηδέν.

Ωστόσο, υπάρχουν πολλές περιπτώσεις στις οποίες δεν είναι εφικτή η εκτεταμένη κάμψη. Υπάρχει το θεώρημα Lagrange, το οποίο ισχυρίζεται πως μία κυρτή κλειστή επιφάνεια δεν μπορεί να παραμορφωθεί εκτεταμένα, άρα και να καμφθεί. Για παράδειγμα, μια μπάλα Ring-Pong δεν μπορεί να λυγίσει εκτεταμένα. Οι κώνοι, οι κύλινδροι και οι κυρτοί θόλοι δεν μπορούν να κάμπτονται εκτεταμένα αν οι άκρες τους είναι ενισχυμένες με άκαμπτα δαχτυλίδια. Επειδή τα κελύφη παρουσιάζουν υψηλή αντοχή στις μεμβρανικές τάσεις, τα κελύφη που δεν μπορούν να καμφθούν εκτεταμένα είναι συνήθως πολύ δύσκαμπτα. Γενικά, η εφαρμογή της μεμβρανικής θεωρία κελυφών επιτρέπεται μόνο για κελύφη που δεν μπορούν να καμφθούν εκτεταμένα ή για κελύφη που παρουσιάζουν αρκετά μικρές καμπτικές τάσεις.

Παρακάτω παρουσιάζονται, χωρίς απόδειξη, οι γενικές συνθήκες υπό τις οποίες ισχύει η μεμβρανική θεωρία κελυφών. Αποδεικνύεται πως αυτές οι συνθήκες είναι απαραίτητες και επαρκείς για την ύπαρξη κατάστασης όπου δεν υπάρχουν καμπτικές τάσεις σε λεπτά κελύφη και πως αντιστοιχούν στο ελάχιστο της ενέργειας παραμόρφωσης που αποθηκεύεται από ένα κέλυφος κατά τη διάρκεια της τάνυσης. Οι συνθήκες αυτές έχουν ως εξής:

1. Τα όρια ενός κελύφους είναι απαλλαγμένα από εγκάρσιες διατμητικές δυνάμεις και ροπές. Τα φορτία που εφαρμόζονται στα όρια του κελύφους πρέπει να βρίσκονται σε επίπεδα που είναι εφαπτόμενα στη μεσαία επιφάνεια του κελύφους.
2. Οι ορθές μετατοπίσεις και περιστροφές στις άκρες του κελύφους είναι ελεύθερες δηλαδή, αυτές οι άκρες μπορούν να μετατοπιστούν ελεύθερα.
3. Το κέλυφος πρέπει να έχει ομαλά μεταβαλλόμενη και συνεχή επιφάνεια.
4. Τα συστατικά των επιφανειακών και ακραίων φορτίων πρέπει επίσης να είναι ομαλές και συνεχείς συναρτήσεις των καμπυλόγραμμων συντεταγμένων.

Εάν οι συνθήκες αυτές παραβιαστούν, ολόκληρες ή εν μέρει, εμφανίζονται καμπτικές τάσεις. Εάν αυτές δε μπορούν να εξαλειφθούν εντελώς τότε πρέπει να εντοπίζονται και να περιορίζονται. Έτσι, οι λύσεις που δίνονται από τη μεμβρανική θεωρία κελυφών πρέπει σε πολλές περιπτώσεις να συμπληρωθούν με μια λύση των εξισώσεων της καμπτικής θεωρίας κελυφών σε εκείνα τα μέρη του κελύφους όπου η κάμψη αποδεικνύεται σημαντική. Ο συνδυασμός των δύο θεωριών (καμπτικής και μεμβρανικής) αποτελεί μία από τις σημαντικές ιδέες βάσει των οποίων λύνεται η πλειοψηφία των προβλημάτων της θεωρίας του κελύφους. Θα πρέπει επίσης να σημειωθεί ότι ακόμη και αν οι μεμβρανικές τάσεις συνδυάζονται μερικές φορές με καμπτικές τάσεις, η μεμβρανική θεωρία δεν χάνει την σημασία της, επειδή ήδη σε μικρή απόσταση από μια ζώνη κάμψης, η κατάσταση των τάσεων μπορεί συνήθως να θεωρείται ως μεμβρανική, δηλαδή οι καμπτικές τάσεις είναι σχεδόν μηδενικές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 - ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΑ ΚΕΛΥΦΗ

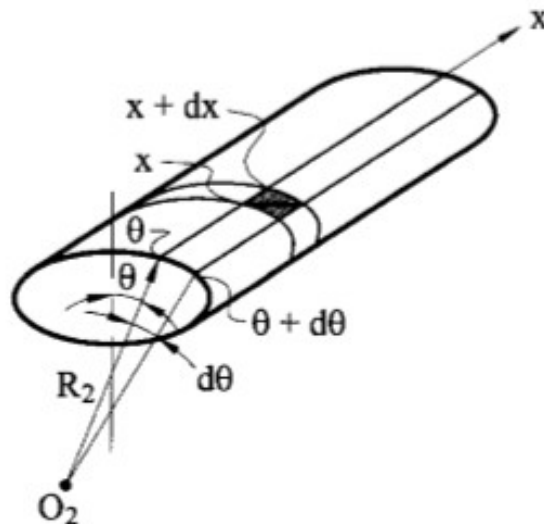
4.1 Εισαγωγικές έννοιες

Ένας κύλινδρος δημιουργείται μετακινώντας μια ευθεία γραμμή κατά μήκος μίας καμπύλης διατηρώντας παράλληλα την αρχική του θέση. Από τον ορισμό αυτό προκύπτει ότι μέσα από κάθε σημείο του κυλίνδρου μπορεί κανείς να περάσει μια ευθεία που ανήκει εξ ολοκλήρου πάνω σε αυτή την επιφάνεια. Αυτές οι γραμμές ονομάζονται γεννήτριες. Όλα τα επίπεδα που είναι κάθετα στις γεννήτριες τέμνουν τον κύλινδρο σε όμοιες καμπύλες, οι οποίες ονομάζονται διατομές του κυλίνδρου. Ο κύλινδρος ονομάζεται με βάση το σχήμα των διατομών του που προφανώς είναι όλες ίδιες μεταξύ τους. Οπότε, υπάρχουν κυκλικά, ελλειπτικά ή και άλλα κυλινδρικά κελύφη

Στα κυλινδρικά κελύφη, λόγω του ότι έχουν ευθείες γεννήτριες, η ακτίνα της καμπυλότητας στην διαμήκη κατεύθυνση είναι άπειρη. Θα δειχθεί παρακάτω ότι η εξαφάνιση μίας από τις δύο κύριες ακτίνες καμπυλότητας οδηγεί σε μια μεγάλη απλοποίηση στην ανάλυση τέτοιου τύπου κελυφών.

Ας εξετάσουμε ένα κυλινδρικό κέλυφος γενικού σχήματος, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα 4.1 . Χρησιμοποιούμε το κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων για να περιγράψουμε τη θέση ενός σημείου αναφοράς σε μια μεσαία επιφάνεια κυλινδρικού κελύφους. Έτσι, οι καμπύλες συντεταγμένες του σημείου αναφοράς μπορούν να ληφθούν ως:

$$a_1 = x \quad , \quad a_2 = \theta \tag{4.1}$$



Σχήμα 4.1

όπου το x είναι η απόσταση που μετράτε από κάποιο σημείο αναφοράς προς το σημείο υπό εξέταση και θ είναι η γωνία μεταξύ της καθέτου του κελύφους σε ένα σημείο και μίας καθέτου αναφοράς. Το κομμάτι του κελύφους μεταξύ των $x, x+dx,$

θ , $\theta+d\theta$ εξετάζεται παρακάτω και εάν ορίσουμε την πρώτη θεμελιώδης μορφή προκύπτει η παρακάτω:

$$ds^2 = dx^2 + R_2 \cdot d\theta^2 \quad (4.2)$$

όπου R_2 είναι η δεύτερη κύρια ακτίνα καμπυλότητας, ενώ η πρώτη R_1 κύρια ακτίνα είναι άπειρη. Συγκρίνοντας τη παραπάνω σχέση με τη σχέση (2.14), μπορούμε να πάρουμε τις παραμέτρους του Lamé για το κυλινδρικό κέλυφος γενικού σχήματος, ως εξής:

$$A = 1, \quad B = R_2(\theta) \quad (4.3)$$

και R_2 είναι συνάρτηση της γωνίας θ . Σε περίπτωση που η διατομή είναι κυκλική τότε η ακτίνα καμπυλότητας R_2 είναι σταθερή και ίση με την ακτίνα της κυκλικής διατομής του κελύφους, οπότε ισχύει:

$$A = 1, \quad B = R = \text{σταθερά} \quad (4.4)$$

4.2 Εξισώσεις κυλινδρικών κελυφών

Με βάση τα παραπάνω οι εξισώσεις (3.30) και (3.31) που ορίζουν τη μεμβρανική θεωρία τροποποιούνται σε σχέση με τις (4.1) και (4.3) και επίσης ονομάζουμε $N_1 \rightarrow N_x$, $N_2 \rightarrow N_s$ και $N_{12} = N_{21} \rightarrow N_{xs}$ οπότε προκύπτουν τα παρακάτω:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xs}}{\partial \theta} \cdot \frac{1}{R_2} + p_1 &= 0 \\ \frac{\partial N_s}{\partial \theta} \cdot \frac{1}{R_2} + \frac{\partial N_{xs}}{\partial x} + p_2 &= 0 \\ N_s \cdot \frac{1}{R_2} + p_3 &= 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

όπου p_1 , p_2 , p_3 τα φορτία στην διαμήκη διεύθυνση, εφαπτόμενα στην διατομή και κάθετα στην μεσαία επιφάνεια αντίστοιχα. Οι σχέσεις (4.5) εκφράζουν τα εντατικά μεγέθη των κυλινδρικών κελυφών. Ομοίως με αυτές προκύπτουν και οι παρακάτω σχέσεις για τις μετακινήσεις- παραμορφώσεις. Όπου $u \rightarrow u_x$, $v \rightarrow u_s$.

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{1}{Eh} \cdot (N_x - \nu N_s) \\ \epsilon_2 &= \frac{1}{R_2} \cdot \frac{\partial u_s}{\partial \theta} - \frac{w}{R_2} = \frac{1}{Eh} \cdot (N_s - \nu N_x) \\ \gamma_{12} &= \frac{\partial u_s}{\partial x} + \frac{1}{R_2} \cdot \frac{\partial u_x}{\partial \theta} = \frac{2(1+\nu)}{Eh} \cdot N_{xs} = \frac{1}{Gh} N_{xs} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Το παραπάνω σύστημα εξισώσεων (4.5) έχει γενική λύση με τη παρακάτω μορφή. Αρχικά, λύνουμε την τρίτη εξίσωση ως προς N_s όπου και προκύπτει :

$$N_s = -p_3 \cdot R_2 \quad (4.7)$$

Έπειτα, αντικαθίστανται η (4.7) στις δύο πρώτες εξισώσεις (4.5) και με ολοκλήρωση ως προς x προκύπτουν τα παρακάτω:

$$N_{xs} = - \int \left(p_2 + \frac{1}{R_2} \cdot \frac{\partial N_s}{\partial \theta} \right) dx + f_1(\theta)$$

$$N_x = - \int \left(p_1 + \frac{1}{R_2} \cdot \frac{\partial N_{xs}}{\partial \theta} \right) dx + f_2(\theta) \quad (4.8)$$

όπου $f_1(\theta)$ και $f_2(\theta)$ είναι άγνωστες συναρτήσεις του θ , που θα πρέπει να προσδιοριστούν από δύο συνοριακές συνθήκες. Οι συγκεκριμένες συνοριακές συνθήκες θα πρέπει, για μία σταθερή τιμή του x (το ένα άκρο του κελύφους ή το μέσο του π.χ.) μία από τις δυνάμεις N_x ή N_s να δίνεται ως αυθαίρετη συνάρτηση της γωνίας θ .

Ομοίως, επιλύεται και το σύστημα εξισώσεων (4.6) που αφορά τις μετακινήσεις. Για σταθερή τιμή του πάχους h ισχύει :

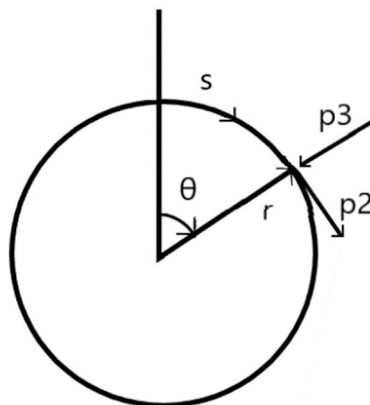
$$Eh \cdot u_x = \int (N_x - \nu \cdot N_s) dx + f_3(\theta)$$

$$Eh \cdot u_s = 2 \cdot (1 + \nu) \int N_{xs} dx - \frac{Eh}{R_2} \int \frac{\partial u_x}{\partial \theta} dx + f_4(\theta)$$

$$Eh \cdot w = Eh \frac{\partial u_s}{\partial \theta} - R_2(N_s - \nu \cdot N_x) \quad (4.9)$$

όπου $f_3(\theta)$ και $f_4(\theta)$ είναι δύο πρόσθετες αυθαίρετες συναρτήσεις που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να πληρώσουν δύο συνοριακές συνθήκες στις άκρες με σταθερό x του κελύφους. Οι παραπάνω εξισώσεις δηλαδή οι (4.7), (4.8), (4.9) αντιπροσωπεύουν μια πλήρη γενική λύση του προβλήματος του κυλινδρικού κελύφους κυλινδρικής μεμβράνης.

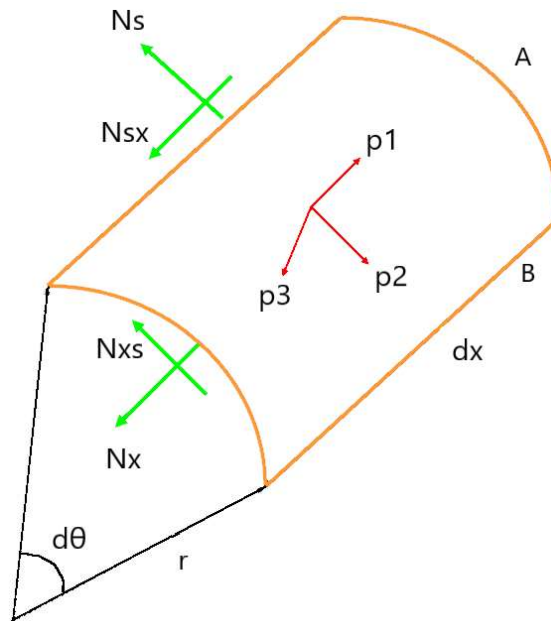
Θα πρέπει να σημειωθεί ότι αφού οι αυθαίρετες συναρτήσεις $f_{1,2,3,4}(\theta)$ έχουν μεταβλητή τη γωνία θ , οι συνοριακές συνθήκες μπορούν να οριστούν μόνο για σταθερή τιμή του x . Κατά κανόνα, δεν είναι δυνατή η ικανοποίηση συνοριακών συνθηκών στις διαμήκεις ακμές ενός ανοικτού κυλινδρικού κελύφους δηλαδή, για σταθερή τιμή του θ , όταν, για παράδειγμα, εξετάζεται ένα τμήμα ενός κυλινδρικού κελύφους. Το γεγονός αυτό αντιπροσωπεύει έναν σοβαρό περιορισμό της μεμβρανικής θεωρίας κελυφών όπως εφαρμόζεται σε ανοικτά κυλινδρικά κελύφη. Αυτός ο περιορισμός μπορεί να αντιμετωπιστεί μόνο συμπεριλαμβάνοντας την αντοχή στην κάμψη που έχει το κελύφος. Ωστόσο, τέτοιες δυσκολίες δεν προκύπτουν εάν το κελύφος είναι κλειστό σε σχέση με την συντεταγμένη θ .



Σχήμα 4.2 : Θετική διεύθυνση φορτίων p_2 , p_3 .

Σημαντικό είναι επίσης και οι θετικές φορές των φορτίων όπως και των δυνάμεων και των μετακινήσεων, οι οποίες φαίνονται στα σχήματα 4.2 και 4.3 για κυκλικό

κυλινδρικό κέλυφος. Στις άκρες A, B του κελύφους του σχήματος 4.3, εφαρμόζονται οι ίδιες δυνάμεις που φαίνονται στο σχήμα 4.3 με αντίθετη φορά όπως και τα μερικά διαφορικά αυτών. Εάν γραφτούν οι εξισώσεις ισορροπίας στους 3 άξονες και η συνισταμένη των ροπών ίση με μηδέν, θα προκύψουν οι εξισώσεις ισορροπίας (4.5).



Σχήμα 4.3

4.3 Εφαρμογές κυκλικών κυλινδρικών κελυφών

4.3.1 Κυκλικό κυλινδρικό κέλυφος με υγρό και μεταβλητή πίεση

Η κυριότερη χρήση κυλινδρικών κελυφών συναντάται σε δοχεία πίεσεως ή οροφές. Συγκεκριμένα, τα δοχεία είναι γεμάτο με υγρό ή αέριο που εφαρμόζει σταθερή ή μεταβλητή ακτινική πίεση. Οπότε σε αυτή τη περίπτωση τα φορτία p_1 , p_2 είναι μηδενικά και το p_3 είναι σταθερό ή μεταβλητό σε σχέση με τη γωνία. Το κέλυφος είναι οριζόντια τοποθετημένο. Συνεπώς το ίδιο βάρος θα επηρέαζε μόνο τα p_2 , p_3 . Βέβαια, δε λαμβάνεται στους υπολογισμούς διότι είναι πολύ μικρότερο από τις πιέσεις του υγρού ή αερίου. Συγκεκριμένα τα φορτία έχουν ως εξής:

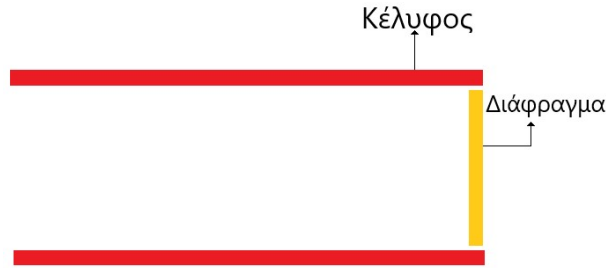
$$p_1 = p_2 = 0, \quad p_3 = -[P_0 - r \cdot \gamma_w \cdot \cos(\theta)] \quad (4.10)$$

όπου r : η ακτίνα του κελύφους, γ_w : το ειδικό βάρος του υγρού-αερίου, P_0 : η πίεση στον κεντροβαρικό άξονα της διατομής και θ η γωνία σε σχέση με τη κάθετο αναφοράς όπως φαίνεται στο σχήμα 4.2. Σε σχέση με τις συνοριακές συνθήκες, τα συγκεκριμένα δοχεία στηρίζονται με διαφράγματα στις άκρες του, δηλαδή σαν πώματα - δακτυλίδια, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.4. Μεταφράζοντας το παραπάνω σε εξισώσεις, οι αξονικές τάσεις N_x είναι μηδενικές στις άκρες όπως και η παραμόρφωση v ή αλλιώς u_s δηλαδή η αύξηση της περιφέρειας είναι μηδενική λόγω των δακτυλίων. Ισχύει:

$$N_x = u_s = 0, \quad \text{για } \chi = -L/2, L/2 \quad (4.11)$$

όπου L το συνολικό μήκος του κυλινδρικού κελύφους.

Χρησιμοποιώντας συμβολικό προγραμματισμό και τη MAPLE οι εξισώσεις (4.5) και (4.6) λύνονται αρκετά γρήγορα και εύκολα. Προκύπτουν τα παρακάτω:



Σχήμα 4.4

$$\begin{aligned}
 N_x &= \frac{1}{2} \cos(\theta) \cdot \gamma_w \cdot x^2 - \frac{x}{r} \cdot \frac{d}{d\theta} \cdot f_1(\theta) + f_2(\theta) \\
 N_s &= -\cos(\theta) \cdot \gamma_w \cdot r^2 + P_o \cdot r \\
 N_{xs} &= -r \cdot \sin(\theta) \cdot \gamma_w \cdot x + f_1(\theta)
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες που αφορούν το N_x δηλαδή τις (4.11) προκύπτει το παρακάτω σύστημα που έχει αγνώστους τις συναρτήσεις $f_1(\theta)$, $f_2(\theta)$ που έχει ως εξής:

$$N_x(-L/2, \theta) = 0$$

$$N_x(L/2, \theta) = 0$$

Από αυτές προκύπτουν πως οι συναρτήσεις $f_1(\theta)$, $f_2(\theta)$ ορίζονται ως εξής:

$$f_1(\theta) = 0$$

$$f_2(\theta) = -\frac{1}{8} \cos(\theta) \gamma_w L^2 \tag{4.13}$$

Συνεπώς οι δυνάμεις γίνονται:

$$\begin{aligned}
 N_x &= \frac{1}{2} \cos(\theta) \cdot \gamma_w \cdot x^2 - \frac{1}{8} \cos(\theta) \cdot \gamma_w \cdot L^2 \\
 N_s &= -\cos(\theta) \cdot \gamma_w \cdot r^2 + P_o \cdot r \\
 N_{xs} &= -r \cdot \sin(\theta) \cdot \gamma_w \cdot x
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

Παρακάτω επιλύονται οι σχέσεις (4.6) με βάση και τις σχέσεις (4.14) και προκύπτουν τα παρακάτω.

$$\begin{aligned}
 u_x &= \frac{1}{2} \frac{2 r^3 \cos(\theta) \gamma_w v x + \frac{1}{3} \cos(\theta) \gamma_w x^3 r - 2 P_o v r^2 x - \frac{1}{4} \cos(\theta) \gamma_w L^2 r x}{r E h} + f_3(\theta) \\
 u_s &= -\frac{1}{6} \frac{r^3 \sin(\theta) \gamma_w x^2 (3v + 6) - \frac{1}{4} \sin(\theta) \gamma_w r x^4 + \frac{3}{8} \sin(\theta) \gamma_w L^2 r x^2 + 6 f_3(\theta) r E h x}{r^2 E h} + f_4(\theta) \\
 w &= \frac{1}{E h r} \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} \cos(\theta) \gamma_w L^2 x^2 - E h f_3(\theta) x + E f_4(\theta) h r + \gamma_w \left(r^4 - r^2 x^2 + \frac{1}{24} x^4 \right) \cos(\theta) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{8} \cos(\theta) \gamma_w L^2 r^2 v - r^3 P_o \right)
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

Ομοίως με προηγουμένως εφαρμόζονται οι συνοριακές συνθήκες δηλαδή από την (4.11) αυτές που αφορούν την $u_s=0$ δηλαδή:

$$u_s(-L/2, \theta) = 0$$

$$u_s(L/2, \theta) = 0$$

Από αυτές προκύπτουν πως οι συναρτήσεις $f_3(\theta)$, $f_4(\theta)$ ορίζονται ως εξής:

$$f_3(\theta) = 0$$

$$f_4(\theta) = \frac{1}{384} \sin(\theta) \gamma_W L^2 \cdot \frac{(48r^2\nu+5L^2+96r^2)}{rEh} \quad (4.16)$$

Και οι τελικές σχέσεις των μετακινήσεων τροποποιούνται ως εξής:

$$u_x = \frac{\cos(\theta) \gamma_W}{Eh} \left[\frac{2r^2\nu x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}Lx^2}{2} \right] - \frac{P_o \nu r x}{Eh}$$

$$u_s = \frac{\sin(\theta) \gamma_W}{384rEh} [-(64r^2x^2(3\nu+6) - 16x^4 + 24L^2x^2) + L^2 \cdot (48r^2\nu + 5L^2 + 96r^2)]$$

$$w = \frac{\cos(\theta) \gamma_W}{Ehr} \left(-\frac{1}{16}L^2x^2 + \frac{1}{384}L^2(48r^2\nu + 5L^2 + 96r^2) + \left(r^4 - r^2x^2 + \frac{1}{24}x^4 \right) - \frac{1}{8}L^2r^2\nu \right) - \frac{r^2P_o}{Eh} \quad (4.17)$$

Για να γίνουν πιο κατανοητές οι παραπάνω σχέσεις κυρίως ως προς την κατανομή που ακολουθούν τα μεγέθη κατά μήκος του κελύφους και κατά μήκος της περιφέρειας του κύκλου, είτε μετακινήσεις είτε δυνάμεις, ας υπολογίσουμε τις τιμές αυτών στις άκρες αλλά και στο μέσο του κελύφους. Ελέγχουμε δηλαδή για $x = -L/2, 0, L/2$. Αντικαθιστούμε και προκύπτουν τα παρακάτω:

Πίνακας 4.1 Μεγέθη σε εγκάρσιες τομές

X	-L/2	0	L/2
N_x	0	$-\frac{1}{8} \cos(\theta) L^2 \gamma_W$	0
N_s	$-\cos(\theta) r^2 \gamma_W + P_o r$	$-\cos(\theta) r^2 \gamma_W + P_o r$	$-\cos(\theta) r^2 \gamma_W + P_o r$
N_{xs}	$\frac{1}{2} r \sin(\theta) \gamma_W L$	0	$-\frac{1}{2} r \sin(\theta) \gamma_W L$
u_x	$\frac{1}{24} \frac{\cos(\theta) \gamma_W (L^3 - 12Lr^2\nu) + 12LP_o r \nu}{Eh}$	0	$-\frac{1}{24} \frac{\cos(\theta) \gamma_W (L^3 - 12Lr^2\nu) + 12LP_o r \nu}{Eh}$
u_s	0	$\frac{\sin(\theta) L^2 \gamma_W (48r^2\nu + 5L^2 + 96r^2)}{384 rEh}$	0
w	$\frac{\cos(\theta) \gamma_W r^3 - P_o r^2}{Eh}$	$\frac{\cos(\theta) \gamma_W (5L^4 + 96L^2r^2 + 384r^4)}{384 rEh} - \frac{r^2 P_o}{Eh}$	$\frac{\cos(\theta) \gamma_W r^3 - P_o r^2}{Eh}$

Με βάση το παραπάνω πίνακα 4.1 παρατηρούνται τα εξής σε μία διατομή του κελύφους:

1. Οι δυνάμεις N_x , N_s είναι συναρτήσεις του συνημιτόνου $\cos(\theta)$, ενώ η N_{xs} του ημιτόνου $\sin(\theta)$.
2. Εκτός από τις 4 συνοριακές συνθήκες που είναι μηδέν παρατηρείται πως:
 - i. Η μετακίνηση u_x είναι ίση με μηδέν στο μέσο του κελύφους. Αυτό σημαίνει πως το κέλυφος μειώνει το μήκος συμμετρικά αφού και οι τιμές στις θέσεις $x=-L/2$, $x=L/2$ έχουν αντίθετο πρόσημο και ίδια τιμή.
 - ii. Η διατμητική δύναμη N_{xs} είναι ίση με μηδέν στο μέσο του κελύφους, ενώ έχει αντίθετο πρόσημο και ίδια τιμή στις άκρες του κελύφους.
3. Επίσης, η δύναμη N_s είναι σταθερή κατά μήκος του κελύφους και εξαρτάται μόνο από τη γωνία θ . Αυτό φαίνεται και από τις εξισώσεις (4.14) δηλαδή τις λύσεις των δυνάμεων.

Ομοίως με το παραπάνω πίνακα 4.1 ελέγχουμε και τρεις διαμήκεις τομές, δηλαδή για συγκεκριμένες τιμές της γωνίας θ . Ελέγχουμε δηλαδή για $\theta = 0, \pi/2, \pi$. Αντικαθιστούμε και προκύπτουν τα παρακάτω:

Πίνακας 4.2 – Μεγέθη σε διαμήκης τομές

θ	0	$\pi/2$	π
N_x	$\frac{1}{8}\gamma_w(4x^2 - L^2)$	0	$-\frac{1}{8}\gamma_w(4x^2 - L^2)$
N_s	$-r^2 \gamma_w + P_0 r$	$P_0 r$	$r^2 \gamma_w + P_0 r$
N_{xs}	0	$-r \gamma_w x$	0
θ	0	$\pi/2$	π
u_x	$\frac{1}{24} \left(\frac{x(24\gamma_w r^2 v - 3L^2 \gamma_w - 24P_0 r v)}{Eh} + \frac{4x^3 \gamma_w}{Eh} \right) +$	$-\frac{r P_0 v x}{Eh}$	$\frac{1}{24} \left(\frac{x(-24\gamma_w r^2 v + 3L^2 \gamma_w - 24P_0 r v)}{Eh} - \frac{4x^3 \gamma_w}{Eh} \right) -$
u_s	0	$\frac{\gamma_w L^2 (48vr^2 + 5L^2 + 96r^2)}{384 r Eh} - \frac{\gamma_w x^2 (192r^2 v + 24L + 384r^2)}{384r Eh} + \frac{x^4}{24r Eh}$	0
w	$\frac{\gamma_w (5L^4 + 96L^2 r^2 + 384r^4)}{384 r Eh} + \frac{\gamma_w x^2 (16x^2 - 24L^2 - 384r^2)}{384r Eh} - \frac{r^2 P_0}{Eh}$	$-\frac{r^2 P_0}{Eh}$	$-\frac{\gamma_w (5L^4 + 96L^2 r^2 + 384r^4)}{384 r Eh} - \frac{\gamma_w x^2 (16x^2 - 24L^2 - 384r^2)}{384r Eh} - \frac{r^2 P_0}{Eh}$

Με βάση τους παραπάνω πίνακες 4.1 και 4.2 παρατηρούνται τα εξής σε ένα κυκλικό κυλινδρικό κέλυφος:

1. Η δύναμη N_x έχει παραβολική κατανομή κατά μήκος, δηλαδή κατά x . Σε σχέση με μία δοκό η αξονική δύναμη N_x έχει κατανομή όπως η καμπτική ροπή. Αυτό βέβαια είναι λογικό αφού η ροπή είναι αποτέλεσμα των εσωτερικών αξονικών δυνάμεων επί την απόσταση από το κέντρο βάρους.
2. Η δύναμη N_{xs} έχει γραμμική κατανομή κατά μήκος. Ομοίως με τη N_x , η N_{xs} έχει όμοια κατανομή με την τέμνουσα δύναμη σε μία δοκό.
3. Η δύναμη N_s είναι ανεξάρτητη της μεταβλητής x . Εξαρτάται μόνο από τη φόρτιση.
4. Παρατηρείται πως:
 - i. Η μετακίνηση u_x δεν μηδενίζεται για κάποια συγκεκριμένη τιμή της γωνίας θ παρά μόνο στο μέσο του κελύφους.

- ii. Η μετακίνηση u_s μηδενίζεται όταν θ είναι ίση με μηδέν και π , δηλαδή στις τιμές όπου το ημίτονο μηδενίζεται.

Ένα σημαντικό σχόλιο πρέπει να αναφερθεί είναι πως από τις εξισώσεις (4.14) και (4.17) προκύπτει ότι οι δυνάμεις και οι μετατοπίσεις, κυρίως οι μετατοπίσεις, αυξάνονται χωρίς περιορισμό με αύξηση του μήκους του κελύφους. Αυτό είναι ένα φυσικό αποτέλεσμα της μεμβρανικής ανάλυσης ενός κυλινδρικού κελύφους στο οποίο όλα τα φορτία μεταδίδονται απευθείας στα άκρα του κελύφους. Επομένως, η περιοχή εφαρμογής της μεμβρανικής θεωρίας των κυλινδρικών κελυφών περιορίζεται στα αρκετά μικρά κελύφη για τα οποία ισχύει το παρακάτω:

$$L/R \ll \sqrt{R/h} \quad (4.18)$$

Έτσι, υπάρχουν διάφορες απαιτήσεις που διέπουν την εφαρμογή της μεμβρανικής θεωρίας των κυλινδρικών κελυφών. Αυτές οι απαιτήσεις αφορούν τον τύπο των υποστηρίξεων του κελύφους, και άρα τις συνοριακές συνθήκες, τον τύπο φόρτισης και το μήκος του κελύφους.

4.3.2 Περίπτωση σταθερής πίεσης σε κυκλικό κυλινδρικό κέλυφος με υγρό

Η διαφορά της συγκεκριμένης εφαρμογής με την προηγούμενη είναι η φόρτιση p_3 που είναι σταθερή. Δηλαδή, ισχύει:

$$p_1 = p_2 = 0, \quad p_3 = -P_0 \quad (4.19)$$

Οι συνοριακές συνθήκες είναι οι ίδιες με το προηγούμενο παράδειγμα δηλαδή οι εξισώσεις (4.10) και οι λύσεις έχουν, με χρήση συμβολικού προγραμματισμού και τη MAPLE, ως εξής:

$$N_x = -\frac{x}{r} \cdot \frac{d}{d\theta} \cdot f_1(\theta) + f_2(\theta)$$

$$N_s = P_0 \cdot r$$

$$N_{xs} = f_1(\theta) \quad (4.20)$$

Εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες που αφορούν το N_x δηλαδή τις (4.11) προκύπτει το παρακάτω σύστημα που έχει αγνώστους τις συναρτήσεις $f_1(\theta)$, $f_2(\theta)$ που έχει ως εξής:

$$N_x(-L/2, \theta) = 0$$

$$N_x(L/2, \theta) = 0$$

Από αυτές προκύπτουν πως οι συναρτήσεις $f_1(\theta)$, $f_2(\theta)$ ορίζονται ως εξής:

$$f_1(\theta) = 0$$

$$f_2(\theta) = 0 \quad (4.21)$$

Συνεπώς οι δυνάμεις γίνονται:

$$N_x = 0$$

$$N_s = P_0 \cdot r$$

$$N_{xs} = 0 \quad (4.22)$$

Παρακάτω επιλύονται οι σχέσεις (4.6), δηλαδή των μετατοπίσεων με βάση και τις σχέσεις (4.22) και προκύπτουν τα παρακάτω.

$$\begin{aligned}
 u_x &= -\frac{P_o \nu r x}{E h} + f_3(\theta) \\
 u_s &= -\frac{f_3, \theta(\theta) x}{r} + f_4(\theta) \\
 w &= \frac{-E h f_3, \theta(\theta) x + E f_4(\theta) h r - r^3 P_o}{E h r}
 \end{aligned}
 \tag{4.23}$$

Ομοίως με προηγούμενως εφαρμόζονται οι συνοριακές συνθήκες δηλαδή από την (4.11) αυτές που αφορούν την $u_s=0$ δηλαδή:

$$u_s(-L/2, \theta) = 0$$

$$u_s(L/2, \theta) = 0$$

Από αυτές προκύπτουν πως οι συναρτήσεις $f_3(\theta)$, $f_4(\theta)$ ορίζονται ως εξής:

$$f_3(\theta) = 0$$

$$f_4(\theta) = 0 \tag{4.24}$$

Και οι τελικές σχέσεις των μετακινήσεων τροποποιούνται ως εξής:

$$\begin{aligned}
 u_x &= -\frac{P_o \nu r x}{E h} \\
 u_s &= 0 \\
 w &= -\frac{r^2 P_o}{E h}
 \end{aligned}
 \tag{4.25}$$

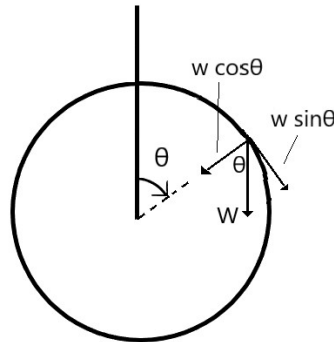
Εύκολα παρατηρείται πως, η περίπτωση της σταθερής πίεσης P_o διευκολύνει αρκετά τους υπολογισμούς, Επίσης τα αποτελέσματα είναι πιο κατανοητά λόγω του μικρότερου όγκου τους, δηλαδή οι εξισώσεις των μεγεθών είναι πιο σαφείς. Ο κύριος μηχανισμός αντίστασης της εσωτερικής πίεσης είναι η δύναμη N_s , η οποία είναι η μοναδική μη μηδενική δύναμη. Επίσης, η τιμή της είναι σταθερή κατά μήκος και κατά τη διατομή του κελύφους. Όσον αφορά τις μετακινήσεις, παρατηρείται μία αύξηση του μήκους του κελύφους u_x , η οποία είναι συμμετρική ως προς το μέσο του και έχει γραμμική κατανομή, σε αντίθεση με την w η οποία είναι σταθερή και έχει ίδια κατεύθυνση με τη πίεση. Συνεπώς σε αυτό το παράδειγμα όπου το κέλυφος δέχεται πίεση από την εσωτερική μεριά του, η μετακίνηση w έχει αρνητικό πρόσημο όπως και η πίεση ως φόρτιση και άρα έχουμε αύξηση της ακτίνας του κυκλικού κελύφους ίση με τη μετακίνηση w . Η μετακίνηση u_x μεταβάλλεται γραμμικά σε σχέση με την ακτίνα r σε αντίθεση με τη μετακίνηση w που μεταβάλλεται παραβολικά (r^2).

4.3.3 Ίδιο βάρος σε κυκλικό κυλινδρικό κέλυφος

Ομοίως με τα προηγούμενα σε αυτή την εφαρμογή εξετάζεται ένα οριζόντιο κυκλικό κυλινδρικό κέλυφος με φόρτιση το ίδιο βάρος του. Παρακάτω, στο σχήμα 4.5 φαίνεται πως το διάνυσμα του βάρους αναλύεται στις δύο διευθύνσεις των φορτίων δηλαδή των p_2, p_3 . Τα φορτία προκύπτουν ως εξής:

$$p_1 = 0, p_2 = \gamma \cdot h \cdot \sin(\theta), p_3 = \gamma \cdot h \cdot \cos(\theta) \quad (4.26)$$

όπου γ : το ειδικό βάρος του υλικού του κελύφους και h : το πάχος του κελύφους.



Σχήμα 4.5 : Διεύθυνση εφαρμογής βάρους.

Η διαδικασία που εφαρμόζετε είναι όμοια με τα δύο προηγούμενα παραδείγματα. Οπότε, οι συνοριακές συνθήκες είναι αυτές που ορίζονται από την εξίσωση (4.11). Οι λύσεις που προκύπτουν για αυτή τη φόρτιση με συμβολικό προγραμματισμό και τη MAPLE έχουν ως εξής :

$$N_x = \frac{1}{r} (\gamma h \cos(\theta) x^2 - x f_1(\theta) + f_2(\theta))$$

$$N_s = -\gamma h \cos(\theta) r$$

$$N_{xs} = -2 \gamma h \sin(\theta) x + f_1(\theta) \quad (4.27)$$

Εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες που αφορούν το N_x δηλαδή τις (4.11) προκύπτει το παρακάτω σύστημα που έχει αγνώστους τις συναρτήσεις $f_1(\theta)$, $f_2(\theta)$ που έχει ως εξής:

$$N_x(-L/2, \theta) = 0$$

$$N_x(L/2, \theta) = 0$$

Από αυτές προκύπτουν πως οι συναρτήσεις $f_1(\theta)$, $f_2(\theta)$ ορίζονται ως εξής:

$$f_1(\theta) = 0$$

$$f_2(\theta) = -\frac{1}{4r} \gamma h \cos(\theta) L^2 \quad (4.28)$$

Συνεπώς οι δυνάμεις γίνονται:

$$N_x = \frac{\gamma h \cos(\theta)}{4r} (4x^2 - L^2)$$

$$N_s = -\gamma h \cos(\theta) r$$

$$N_{xs} = -2 \gamma h \sin(\theta) x \quad (4.29)$$

Παρακάτω επιλύονται οι σχέσεις (4.6), δηλαδή των μετατοπίσεων με βάση και τις σχέσεις (4.29) και προκύπτουν τα παρακάτω.

$$u_x = \frac{\gamma h \cos(\theta) \cdot (12 r^2 v x + 4x^3 - 3 L^2 x)}{12 r E h} + f_3(\theta)$$

$$\begin{aligned}
 u_s &= \frac{\gamma h \sin(\theta) x^2 \cdot (2 x^2 - 36 r^2 \nu - 48 \gamma h r^2 - 3 L^2)}{24 r^2 E h} - \frac{f_{3, \theta} x}{r} + f_4(\theta) \\
 w &= \frac{f_{4, \theta} r - f_{3, \theta} x}{r} + \frac{\gamma h \cos(\theta) * (x^4 - 3 L^2 (x^2 + r^2 \nu) + 12 r^4 - 6 x^2 (\nu + 4) r^2)}{24 E h r^2}
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

Ομοίως με προηγουμένως εφαρμόζονται οι συνοριακές συνθήκες δηλαδή από την (4.11) αυτές που αφορούν την $u_s=0$ δηλαδή:

$$u_s(-L/2, \theta) = 0$$

$$u_s(L/2, \theta) = 0$$

Από αυτές προκύπτουν πως οι συναρτήσεις $f_3(\theta)$, $f_4(\theta)$ ορίζονται ως εξής:

$$f_3(\theta) = 0$$

$$f_4(\theta) = \frac{1}{192} \sin(\theta) \gamma L^2 \cdot \frac{(72 r^2 \nu + 5 L^2 + 96 r^2)}{r^2 E} \tag{4.31}$$

Και οι τελικές σχέσεις των μετακινήσεων τροποποιούνται ως εξής:

$$\begin{aligned}
 u_x &= \frac{\gamma h \cos(\theta) \cdot (12 r^2 \nu x + 4 x^3 - 3 L^2 x)}{12 r E h} \\
 u_s &= \frac{\gamma h \sin(\theta) x^2 \cdot (2 x^2 - 36 r^2 \nu - 48 \gamma h r^2 - 3 L^2)}{24 r^2 E h} \\
 &\quad + \frac{1}{192} \sin(\theta) \gamma L^2 \cdot \frac{(72 r^2 \nu + 5 L^2 + 96 r^2)}{r^2 E} \\
 w &= \frac{1}{192} \cos(\theta) \gamma L^2 \cdot \frac{(72 r^2 \nu + 5 L^2 + 96 r^2)}{r^2 E} \\
 &\quad + \frac{\gamma h \cos(\theta) * (x^4 - 3 L^2 (x^2 + r^2 \nu) + 12 r^4 - 6 x^2 (\nu + 4) r^2)}{24 E h r^2}
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

Ομοίως με το πρώτο παράδειγμα, οι παραπάνω σχέσεις είναι αρκετά δυσνόητες λόγω της πολυπλοκότητάς τους. Βέβαια οι παρατηρήσεις που έγιναν για τη φόρτιση (4.10) της πρώτης εφαρμογής θα δούμε πως ισχύουν και για τη φόρτιση (4.26). Αυτό συμβαίνει διότι έχουμε τις ίδιες συνοριακές συνθήκες και η φόρτιση είναι ανεξάρτητη του x και μόνο συνάρτηση της γωνίας θ . Λόγω πληρότητας παρουσιάζονται οι πίνακες με τα αποτελέσματα σε τομές εγκάρσιες, δηλαδή για σταθερή τιμή x έστω $-L/2$, 0 , $L/2$ και τομές διαμήκη, δηλαδή για σταθερή γωνία θ έστω 0 , $\pi/2$, π . Παρακάτω παρουσιάζονται οι τιμές στα άκρα και στο μέσο του κελύφους, πίνακας 4.3 και σε διαμήκης τομές, πίνακας 4.4.

Συνοπτικά, οι παρατηρήσεις που προκύπτουν είναι ίδιες με αυτές των πινάκων 4.1 και 4.2 σε σχέση με τις κατανομές των μεγεθών και τις ιδιότητες αυτών όπως παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο 4.3.1. Επιπλέον, παρατηρείται πως η μετακίνηση w μηδενίζεται για τιμές γωνίας θ ίσες με $\pi/2$ και $3\pi/2$ λόγω συμμετρίας στη διατομή όπως και η δύναμη N_s .

Πίνακας 4.3 Μεγέθη σε εγκάρσιες τομές

X	-L/2	0	L/2
Nx	0	$-\frac{1}{4r} \cos(\theta) L^2 \gamma h$	0
Ns	$-\cos(\theta) r \gamma h$	$-\cos(\theta) r \gamma h$	$-\cos(\theta) r \gamma h$
Nxs	$\sin(\theta) L \gamma h$	0	$-\sin(\theta) L \gamma h$
ux	$\frac{1}{12} \frac{\cos(\theta) \gamma L (L^2 - 6 r^2 v)}{Er}$	0	$-\frac{1}{12} \frac{\cos(\theta) \gamma L (L^2 - 6 r^2 v)}{Er}$
us	0	$\frac{\sin(\theta) L^2 \gamma (72vr^2 + 5L^2 + 96r^2)}{192 r^2 E}$	0
w	$\frac{\cos(\theta) \gamma r^2}{E}$	$\frac{\cos(\theta) \gamma (24L^2 r^2 v + 5L^4 + 96L^2 r^2 + 192r^4)}{192 r^2 E}$	$\frac{\cos(\theta) \gamma r^2}{E}$

Ομοίως, παρακάτω παρουσιάζονται οι τιμές για σταθερή γωνία θ.

Πίνακας 4.4 Μεγέθη σε διαμήκης τομές

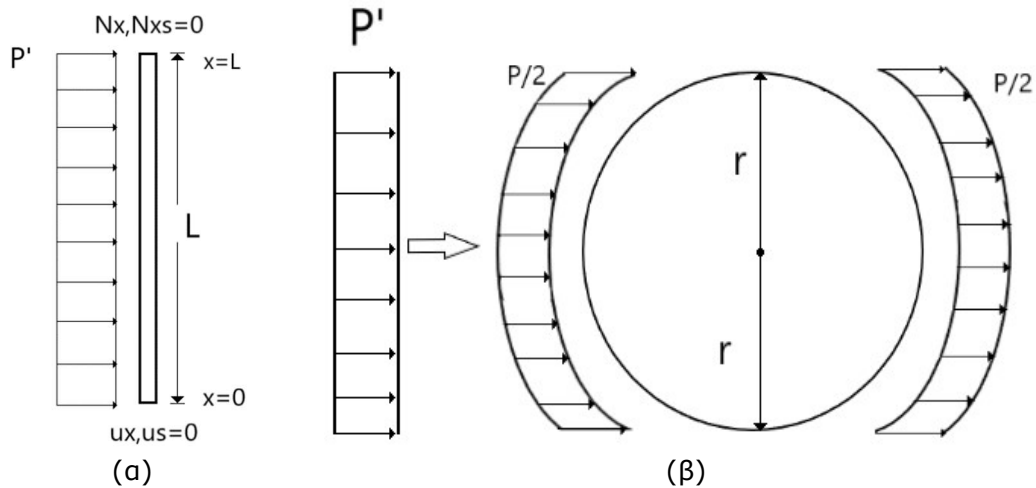
θ	0	π/2	π
Nx	$\frac{1}{4r} \gamma h (4x^2 - L^2)$	0	$-\frac{1}{4r} \gamma h (4x^2 - L^2)$
Ns	$-r \gamma h$	0	$r \gamma h$
Nxs	0	$-2 \gamma h x$	0
ux	$\frac{\gamma h (12 r^2 v x + 4x^3 - 3L^2 x)}{12 r E h}$	0	$-\frac{\gamma h (12 r^2 v x + 4x^3 - 3L^2 x)}{12 r E h}$
us	0	$\frac{\gamma h x^2 (2 x^2 - 36 r^2 v - 48 \gamma h r^2 - 3 L^2)}{24 r^2 E h} + \frac{1}{192} \gamma L^2 \cdot \frac{(72r^2v + 5L^2 + 96r^2)}{r^2 E}$	0
w	$\frac{1}{192} \gamma L^2 \cdot \frac{(72r^2v + 5L^2 + 96r^2)}{r^2 E} + \frac{\gamma h (x^4 - 3L^2(x^2 + r^2v) + 12r^4 - 6x^2(v+4)r^2)}{24Ehr^2}$	0	$-\frac{1}{192} \gamma L^2 \cdot \frac{(72r^2v + 5L^2 + 96r^2)}{r^2 E} - \frac{\gamma h (x^4 - 3L^2(x^2 + r^2v) + 12r^4 - 6x^2(v+4)r^2)}{24Ehr^2}$

4.3.4 Εφαρμογές σε κατακόρυφο κυλινδρικό κέλυφος

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα κατακόρυφο κυκλικό κυλινδρικό κέλυφος. Η συγκεκριμένη μορφή κελυφών συναντάται σε κατακόρυφες δεξαμενές κυρίως υγρών που στηρίζονται στη βάση τους με διάφραγμα και μπορεί να είναι ανοιχτές στην κορυφή τους. Τα συγκεκριμένα κελύφη καταπονούνται από οριζόντια φορτία P, π.χ. ανέμου. Ο συνδυασμός φόρτισης είναι ο παρακάτω:

$$p_1 = 0, p_2 = P/2 \cdot \sin(\theta), p_3 = P/2 \cdot \cos(\theta) \quad (4.33)$$

Το φορτίο P έχει κατανομή στη διατομή ίδια με εκείνη του ίδιου βάρους για το οριζόντιο κέλυφος. Η φόρτιση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα 4.6 όπως και οι συνοριακές συνθήκες.



Σχήμα 4.6 : (α) Όψη, (β) Κάτοψη διατομής

Το φορτίο $P/2$ που εφαρμόζεται στο κέλυφος, όπως φαίνεται στη φόρτιση (4.33), συνδέεται με το P' που φαίνεται στο σχήμα ως εξής, λόγω ισορροπίας:

$$P' \cdot 2r = 2 \cdot \frac{P}{2} \cdot \pi r \quad \Rightarrow \quad \frac{P}{2} = \frac{P'}{\pi} \quad (4.34)$$

Η διαδικασία της επίλυσης θα γίνει με τη φόρτιση της σχέσης (4.33). Σημασία θα πρέπει να δίνεται σε ποια μορφή δίνετε η οριζόντια φόρτιση, δηλαδή αν αναφέρεται στην επιφάνεια του κελύφους ή στην προβολή αυτής. Το φορτίο P μπορεί να είναι σταθερό καθ' ύψος ή και μεταβλητό. Επίσης, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.6 οι συνοριακές συνθήκες, στο ένα άκρο μηδενίζονται όλες οι δυνάμεις εκτός της N_s και στο άλλο μηδενίζονται όλες οι μετακινήσεις εκτός της w . Η δύναμη N_s και η μετακίνηση w ορίζονται από αλγεβρικές εξισώσεις οπότε δεν γίνεται να τοποθετηθούν ως συνοριακές συνθήκες.

Η διαδικασία επίλυσης είναι όμοια με τα προηγούμενα παραδείγματα οπότε παρουσιάζονται απευθείας οι σχέσεις των συναρτήσεων $f_{1,2,3,4}(\theta)$ και των δυνάμεων και των μετακινήσεων θεωρώντας πως το φορτίο P είναι σταθερό καθ' ύψος του κελύφους. Οπότε προκύπτουν ως εξής:

$$\begin{aligned} f_1(\theta) &= P \sin(\theta) L \\ f_2(\theta) &= \frac{1}{2r} L^2 \cos(\theta) P \\ f_3(\theta) &= 0, \quad f_4(\theta) = 0 \end{aligned} \quad (4.35)$$

Και οι σχέσεις των δυνάμεων και των μετακινήσεων:

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{1}{2r} P \cos(\theta) [L - x]^2 \\ N_s &= -\frac{1}{2} P \cos(\theta) r \\ N_{xs} &= P \sin(\theta) \cdot (L - x) \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$u_x = P \cos(\theta) \frac{x(vr^2 + L^2) - x^2 L + \frac{1}{3} x^3}{2 r E h}$$

$$\begin{aligned}
 u_s &= \frac{P \sin(\theta)x}{24r^2 E h} [x^3 - 4Lx^2 - (18 r^2v + 24r^2 - 6L^2)x + 48r^2L(v + 1)] \\
 w &= \frac{P \cos(\theta)}{24r^2 E h} [12r^2(L^2v + r^2) + 24xr^2L(v + 2) - 6x^2(vr^2 - L^2 + 4r^2) \\
 &\quad - x^3(4L - x)]
 \end{aligned}
 \tag{4.37}$$

Η κύρια διαφορά της παραπάνω φόρτισης αφορά τις συνοριακές συνθήκες, οι οποίες δεν είναι συμμετρικές. Λόγω αυτού, τα μεγέθη δεν έχουν συμμετρικά διαγράμματα είτε είναι δυνάμεις είτε είναι παραμορφώσεις. Ας θεωρήσουμε συγκεκριμένες τιμές των μεταβλητών δηλαδή της γεωμετρίας, του υλικού (έστω δομικός χάλυβας) και τη φόρτισης ώστε να σχεδιαστούν τα γραφήματα των δυνάμεων και των παραμορφώσεων. Έχουμε:

Πίνακας 4.5

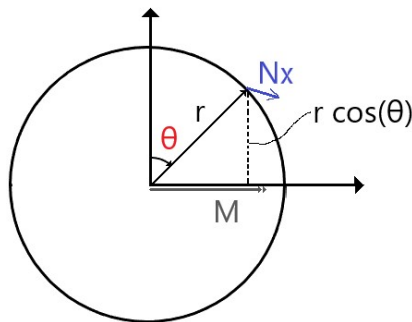
Γεωμετρία		Υλικό		Φόρτιση	
h(m)	0.05	E(KPa)	210000000	P(KN/m ²)	2
L(m)	10	γ(KN/m ³)	78.5		
r(m)	1	v	0.30		

Με βάση τις παραπάνω τιμές των μεταβλητών του πίνακα 4.6, προκύπτουν και οι σχέσεις όλων των μεγεθών. Οι σχέσεις των δυνάμεων έχουν μονάδα μέτρησης (KN/m) και οι παραμορφώσεις (m). Σημαντική παρατήρηση είναι πως η τιμή της εξωτερικής ροπής στο άκρο όπου έχουν μηδενιστεί οι μετακινήσεις u_x , u_s είναι ίση με τη τιμή της ροπής πακτώσεως, όπως φαίνεται παρακάτω.

$$N_x = \frac{1}{2} \frac{P}{r} \cos(\theta) [L - x]^2 \xrightarrow{\text{Πιν.4.5}}$$

$$N_x = \cos(\theta) [10 - x]^2$$

Η τιμή της ροπής λόγω αυτής της αξονικής N_x φαίνεται παρακάτω με τη βοήθεια του σχήματος 4.7 και προκύπτει ως εξής:



Σχήμα 4.7

$$M = \int_0^{2\pi} N_x \cdot r \cdot \cos(\theta) d\theta$$

Η τιμή του παραπάνω ολοκληρώματος προκύπτει ως εξής:

$$M = \pi(x - 10)^2$$

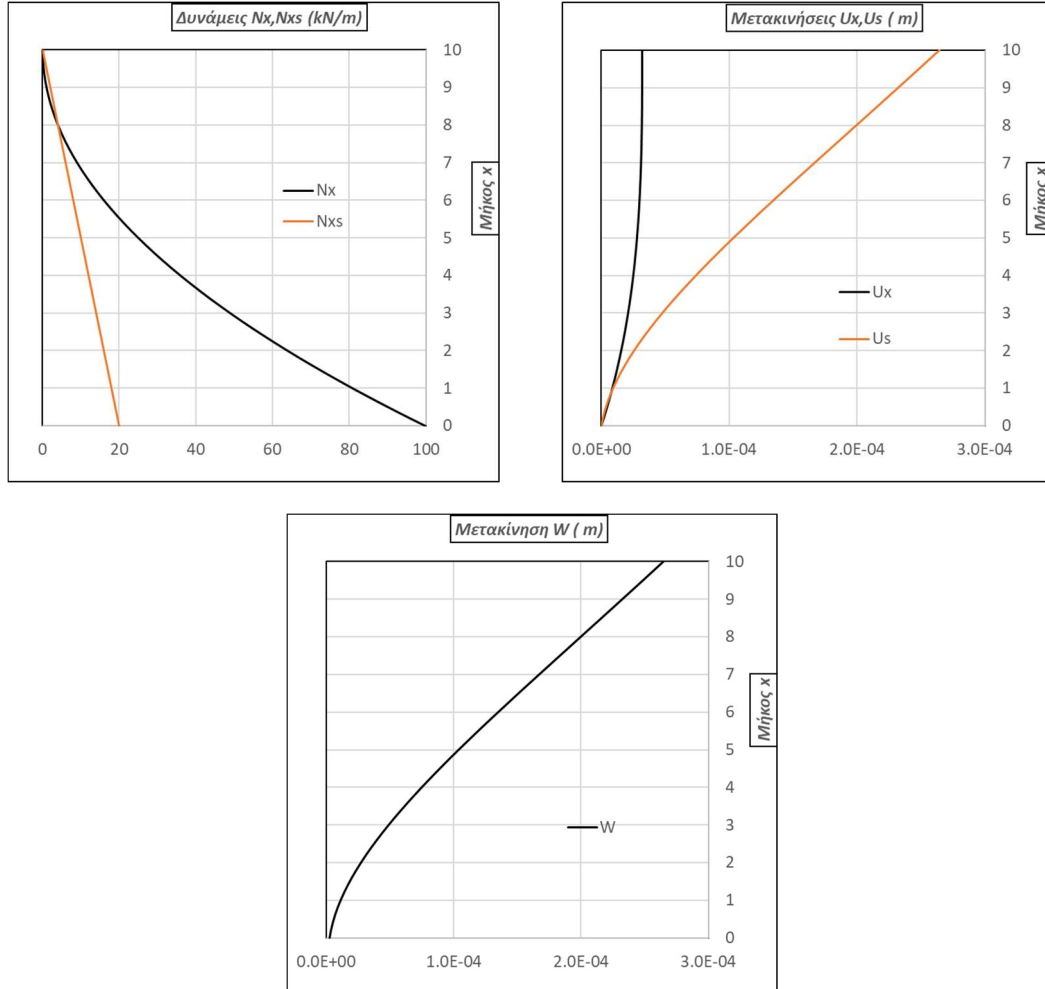
Οπότε για την βάση του κελύφους, δηλαδή για $x=0$, η τιμή της ροπής είναι ίση με:

$$M = 314.16 \text{ KNm}$$

Από την άλλη μεριά η τιμή της ροπής πακτώσεως προκύπτει ως εξής:

$$M = [P' * 2r] * \frac{L^2}{2} \xrightarrow{(4.34)} M = \left[\frac{P}{2} \pi * 2r \right] * \frac{L^2}{2} = \frac{2}{2} \pi * 2 * 1 * \frac{10^2}{2} = 314.16 \text{ KNm}$$

Παρακάτω φαίνονται τα διαγράμματα σε άξονες μήκους x και του αντίστοιχου μεγέθους. Οι δύναμη Nx είναι σε γωνία θ=0, ενώ η δύναμη Nxs σε γωνία θ=90° και αντίστοιχα για τις μετακινήσεις. Η δύναμη Ns είναι σταθερή.



Διαγράμματα 4.1 - Μεγέθη κυκλικού κυλινδρικού κελύφους σε οριζόντια φόρτιση

Εκτός από οριζόντια φορτία η συγκεκριμένη μορφή κυλινδρικού κελύφους μπορεί να υπόκειται και σε υδροστατικές πιέσεις π.χ. δεξαμενή που είναι γεμάτη από υγρό, έστω νερό, οπότε ασκείται υδροστατική πίεση τριγωνικής κατανομής αυξανόμενη με το βάθος όπως και ίδιο βάρος. Παρακάτω, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της φόρτισης (4.38), όπως φαίνεται παρακάτω και στο σχήμα 4.8, δηλαδή ίδιο βάρος και υδροστατική πίεση.

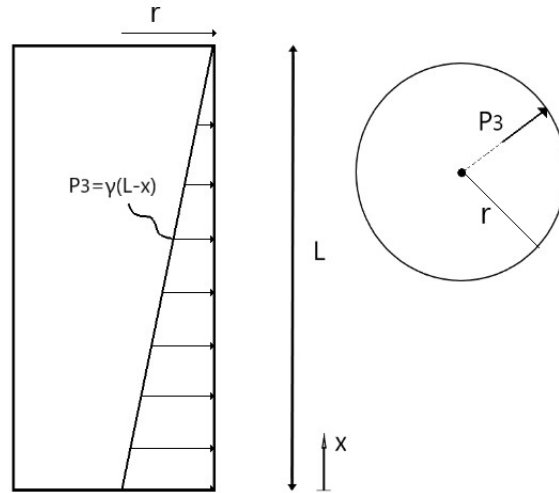
$$p1 = -\gamma \cdot h, p2 = 0, p3 = -\gamma_w (L - x) \tag{4.38}$$

Επιλύοντας την παραπάνω φόρτιση με τις συνοριακές συνθήκες που φαίνονται στο σχήμα (4.6), δηλαδή μηδενικές μετακινήσεις στη βάση και μηδενικές δυνάμεις στην οροφή, προκύπτουν οι παρακάτω συναρτήσεις f:

$$f1(\theta) = 0$$

$$f2(\theta) = -\gamma h L$$

$$f3(\theta) = 0, f4(\theta) = 0 \tag{4.39}$$



Σχήμα 4.8

Και οι σχέσεις των δυνάμεων και των μετακινήσεων:

$$N_x = \gamma h(x - L)$$

$$N_s = r \gamma_w (L - x)$$

$$N_{xs} = 0$$

(4.40)

$$u_x = \frac{1}{2} \frac{\gamma}{E} [x^2 - 2Lx] + \frac{1}{2} \frac{\gamma_w v r}{Eh} [x^2 - 2Lx]$$

$$u_s = 0$$

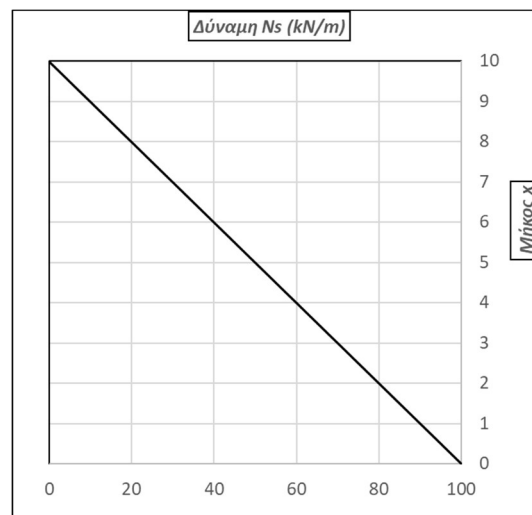
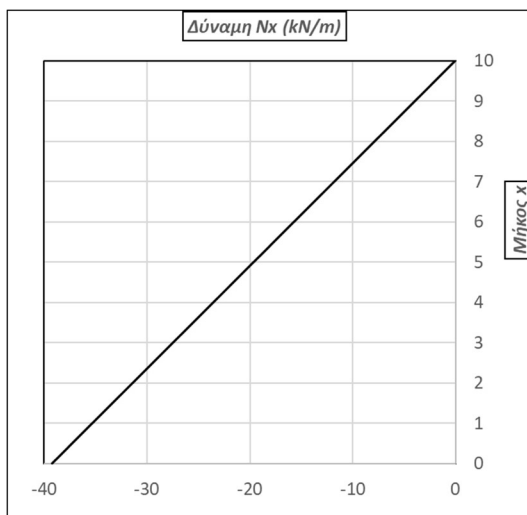
$$w = \frac{r \gamma v (x - L)}{E} + \frac{\gamma_w r^2 (x - L)}{Eh}$$

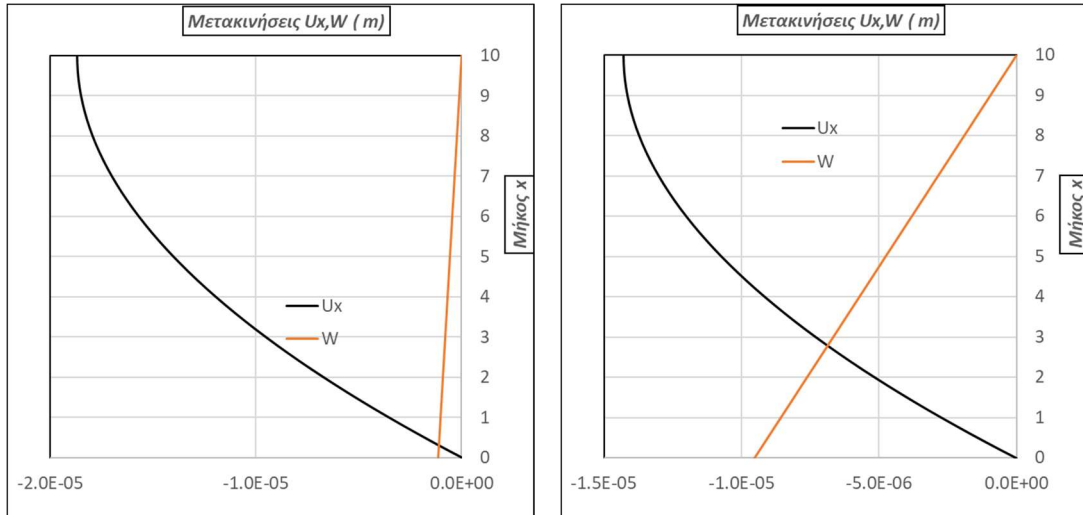
(4.41)

Ομοίως με προηγούμεως, παρουσιάζονται τα διαγράμματα των μεγεθών για τιμές του πίνακα 4.5 και ρευστό έστω νερό.

Μεγέθη λόγω ίδιου βάρους

Μεγέθη λόγω υδροστατικής πίεσης





Διαγράμματα 4.2 - Μεγέθη κυκλικού κυλινδρικού κελύφους λόγω Ι.Β. και υδροστατικής πίεσης

Παρατηρήσεις:

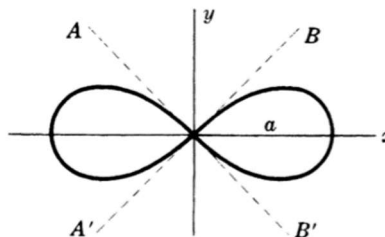
1. Η δύναμη N_x οφείλεται στο ίδιο βάρος, ενώ η N_s στην υδροστατική πίεση. Και οι δύο δυνάμεις είναι γραμμικές.
2. Οι μετακινήσεις U_x , W έχουν συνιστώσες λόγω και των δύο φορτίσεων, ενώ η U_s είναι μηδενική. Οι κατανομές τους είναι παρόμοιες στις δύο φορτίσεις.

4.4 Εφαρμογές με μεταβλητή ακτίνα καμπυλότητας.

Στο κεφάλαιο 2.5 παρουσιάζεται ο τρόπος υπολογισμού της ακτίνας καμπυλότητας εφόσον είναι γνωστές οι παραμετρικές σχέσεις των μεγεθών x , y ή εάν μπορούν αυτές να υπολογιστούν μέσω της εξίσωσης της καμπύλης με μορφή αυτή της εξίσωσης (2.33). Στα παραπάνω παραδείγματα η ακτίνα καμπυλότητας θεωρείται σταθερή, αφού η διατομή είναι κύκλος. Η μεμβρανική θεωρία των κυλινδρικών κελυφών είναι περιορισμένη από τη μορφή της ακτίνας καμπυλότητας δηλαδή τη συνάρτηση $r(\varphi)$. Η διαφορά σε σχέση με τις εξισώσεις που διέπουν την ανάλυση τέτοιων μελών είναι πως, στις εξισώσεις (4.5) και (4.6) του κεφαλαίου 4.2, ο όρος R_2 είναι και αυτός συνάρτηση της γωνίας θ . Οι λύσεις που φαίνονται στις εξισώσεις (4.7-9) δεν ισχύουν αφού έχει θεωρηθεί πως η ακτίνα καμπυλότητας είναι σταθερή.

Παρακάτω παρουσιάζονται διάφορες επίπεδες καμπύλες με τις αντίστοιχες εξισώσεις των ακτινών καμπυλότητων τους.

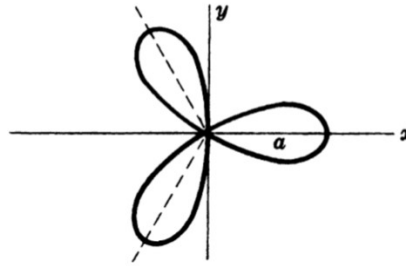
1. Lemniscate.



Σχήμα 4.9

Ακτίνα καμπυλότητας $r^2 = a^2 \cos(2\theta)$

2. Three-Leaved Rose



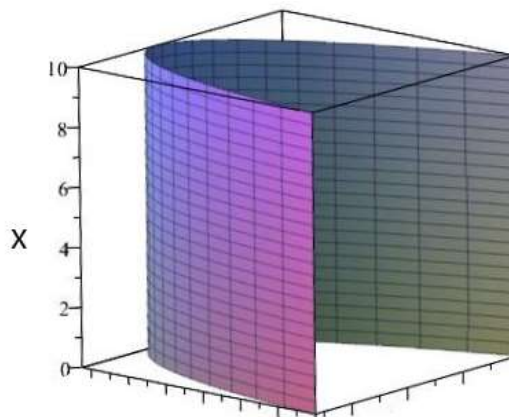
Σχήμα 4.10

Ακτίνα καμπυλότητας $r = a \cos(3\theta)$

Βάση των περιορισμών της μεμβρανικής θεωρίας που αναφέρθηκαν στον κεφάλαιο 3.5, και συγκεκριμένα πως το κέλυφος πρέπει να έχει ομαλά μεταβαλλόμενη και συνεχή επιφάνεια, προκύπτει πως η γεωμετρία της διατομής πρέπει να μην έχει «γωνίες» όπως φαίνεται π.χ. στο σχήμα 4.10 στο κέντρο των αξόνων. Επιπλέον, σημαντικά είναι και τα όρια της γωνίας θ . Στα παραπάνω σχήματα δεν φαίνεται ο άξονας από όπου μετράει η γωνία θ . Οι παραπάνω τρεις καμπύλες έχουν κοινό πως η ακτίνα καμπυλότητας είναι συνάρτηση συνημίτονου.

Και για τις 2 παραπάνω καμπύλες με χρήση συμβολικού προγραμματισμού και MAPLE λύνονται τα συστήματα των εξισώσεων. Λόγω του όγκου των αποτελεσμάτων αυτά δεν καταγράφονται εδώ. Μέσω των λύσεων αυτό που γίνεται σαφές είναι πως λόγω της μορφής που έχουν οι γεωμετρίες των καμπυλών υπάρχουν τιμές γωνιών όπου τα μεγέθη όπως π.χ. οι μετακινήσεις απειρίζονται, το οποίο πρακτικά δεν είναι σωστό.

Ενδεικτικά, ας θεωρήσουμε τη καμπύλη που φαίνεται στο σχήμα 4.10 με την εξίσωση καμπυλότητας: $r(\theta) = a \cos(3\theta)$ και αν θέσουμε $a=1$ οπότε $r(\theta) = \cos(3\theta)$. Η μορφή του κελύφους φαίνεται παρακάτω στο σχήμα 4.11 για εύρος γωνίας $\theta = \pi/4 - \pi/3$.



Σχήμα 4.11

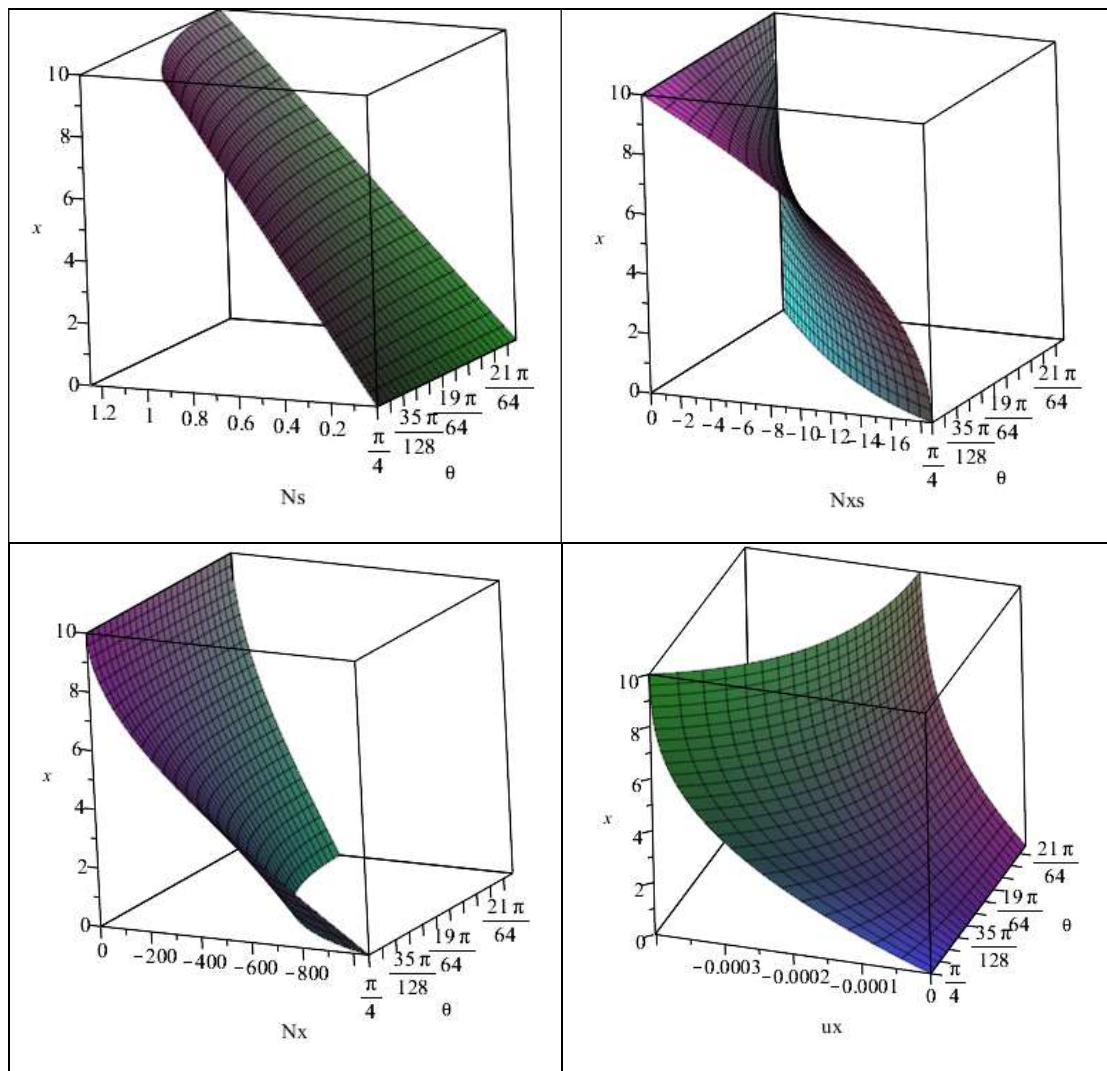
Με εφαρμογή τη φόρτιση της σταθερής ανεμοπίεσης ακτινικά εφαρμοσμένη, άρα φόρτιση όπως παρακάτω,:

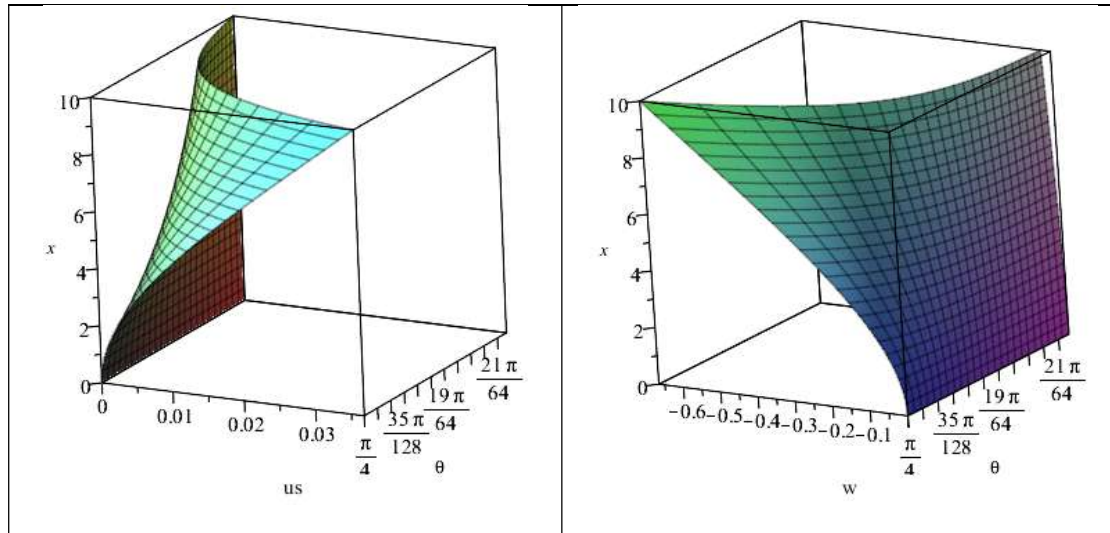
$$p_1 = 0, p_2 = 0, p_3 = P_0 \frac{x}{L}$$

και συνοριακές συνθήκες όπως του σχήματος 4.6 προκύπτουν μέσω MAPLE, οι λύσεις των εξισώσεων ισορροπίας των δυνάμεων αλλά και των μετακινήσεων. Εάν το εύρος γωνίας είναι π.χ. $0 - \pi$ τότε το κέλυφος «διπλώνει» και εμφανίζονται σημεία απειρισμού των μεγεθών εκτός από την δύναμη N_s η οποία υπολογίζεται αλγεβρικά. Παρακάτω, παρουσιάζονται τα διαγράμματα των δυνάμεων και των μετακινήσεων για δεδομένες τιμές των μεγεθών L, E, h, ν, P_0 , για να δειχθεί η μορφή τους. Οι τιμές φαίνονται στο παρακάτω πίνακα 4.6.

Πίνακας 4.6

Γεωμετρία		Υλικό		Φόρτιση	
h(m)	0.05	E(KPa)	200000000	P(KN/m ²)	1.25
L(m)	10	γ (KN/m ³)	78.5		
		ν	0.30		





Διαγράμματα 4.3 - Μεγέθη κατακόρυφου κυλινδρικού κελύφους με μεταβλητή ακτίνα καμπυλότητας λόγω ακτινικής ανεμοπίεσης

Με βάση τα παραπάνω διαγράμματα παρατηρούνται τα παρακάτω:

1. Η μεταβλητή ακτίνα καμπυλότητας περιπλέκει αρκετά τις εξισώσεις των μεγεθών όπως και την ανάλυση αυτών.
2. Η δύναμη N_x παρουσιάζει αρκετά μεγαλύτερες τιμές σε σχέση με τις άλλες δύο δυνάμεις.
3. Οι μετακινήσεις επίσης, παρουσιάζουν μεγάλες τιμές σε σχέση με όλες τις προηγούμενες εφαρμογές του κεφαλαίου.

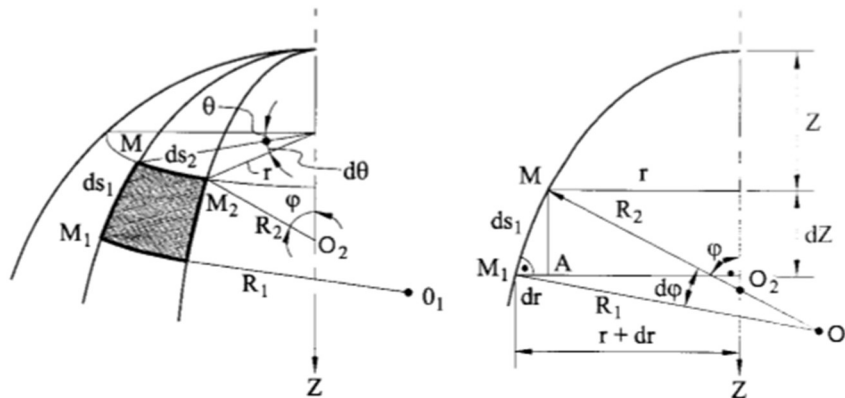
Τα παραπάνω ενδεχομένως οφείλονται στην «περίεργη» γεωμετρία. Το γεγονός πως η γεωμετρία του κυλινδρικού κελύφους δεν είναι «τέλεια» περιπλέκει τις εξισώσεις ισορροπίας. Επίσης, οι συνοριακές συνθήκες ταιριάζουν καλύτερα σε κλειστό κέλυφος και όχι ανοιχτό. Όπως φαίνεται στο 5^ο σχήμα η μετακίνηση u_s εκδηλώνεται όχι συμμετρικά αλλά προς τη γωνία $\theta = \pi/4$. Ομοίως, και η μετακίνηση w .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 – ΚΕΛΥΦΗ ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ

5.1 Εισαγωγικές έννοιες

Τα κελύφη εκ περιστροφής αποτελούν τη γενική κατηγορία των κυλινδρικών κελυφών, όπως και των κωνικών, αφού η μέση επιφάνειά τους δημιουργείται από την περιστροφή μίας καμπύλης σε σχέση με έναν άξονα που βρίσκεται στο επίπεδο αυτής της καμπύλης. Η καμπύλη ονομάζεται μεσημβρινός και λόγω της περιστροφής δημιουργείται ένας παράλληλος κύκλος. Εάν η καμπύλη είναι ευθεία τότε το αποτέλεσμα είναι κυλινδρικό ή κωνικό κέλυφος. Στη γενική περίπτωση, όμως το αποτέλεσμα είναι ένα κέλυφος εκ περιστροφής. Η ιδιαιτερότητα αυτών συνδέεται με τη γεωμετρία τους, η οποία είναι πολύπλοκη. Συγκεκριμένα, τα κελύφη εκ περιστροφής έχουν 2 γραμμές κύριων καμπυλοτήτων που καθιστά τις εξισώσεις αυτών αρκετά περίπλοκες σε σχέση με τα κυλινδρικά. Λόγω αυτού, είναι εύλογο να χρησιμοποιηθούν οι μεσημβρινοί και οι παράλληλοι κύκλοι ως καμπυλόγραμμες συντεταγμένες αφού σχηματίζουν ένα ορθογωνικό πλέγμα στην μέση επιφάνεια.

Κατασκευές από κελύφη εκ περιστροφής με μεσημβρινές καμπύλες και όχι ευθείες συναντώνται κυρίως σε σφαιρικές δεξαμενές, στηριζόμενες σε υποστυλώματα. Επίσης, ως περιβλήματα πύργων σταθμών παραγωγής ενέργειας και δομήματα με γεωμετρία μορφής καμπάνας περίπου παραβολική καμπύλη περιστροφής. Παρακάτω στο σχήμα 5.1 φαίνεται ένα κέλυφος εκ περιστροφής μαζί με τις γεωμετρικές του ιδιότητες.



Σχήμα 5.1

Ως καμπυλόγραμμες συντεταγμένες επιλέγουμε τη γωνία φ και τη γωνία θ που φαίνονται στο παραπάνω σχήμα. Η γωνία θ είναι η περιφερειακή γωνία που χαρακτηρίζει μια θέση ενός σημείου κατά μήκος του παράλληλου κύκλου, ενώ η γωνία φ είναι η μεσημβρινή γωνία, ορίζοντας μια θέση αυτού του σημείου κατά μήκος της μεσημβρινής καμπύλης. Ισχύει δηλαδή:

$$a_1 = \varphi, \quad a_2 = \theta \quad (5.1)$$

Χρησιμοποιείται δηλαδή το σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων. Με βάση το σχήμα 5.1 προκύπτουν οι παρακάτω χρήσιμες σχέσεις για τις ακτίνες καμπυλότητας και τη γενική γεωμετρία του κελύφους.

Τα μήκη των διαφορικών τμημάτων προκύπτουν ως εξής:

$$ds_1 = R_1 \cdot d\varphi = R_1 \cdot da_1 \text{ και } ds_2 = r \cdot d\theta = r \cdot da_2 \quad (5.2)$$

Οπότε οι παράμετροι Lamé της επιφάνειας είναι λόγω της (2.14) οι παρακάτω:

$$A = R_1 \text{ και } B = r = R_2 \cdot \sin\varphi \quad (5.3)$$

Επιπλέον, ισχύει λόγω γεωμετρίας το παρακάτω:

$$dr = R_1 \cdot d\varphi \cdot \cos\varphi$$

$$\frac{1}{r} \frac{dr}{d\varphi} = \frac{R_1}{R_2} \cot(\varphi) \quad (5.4)$$

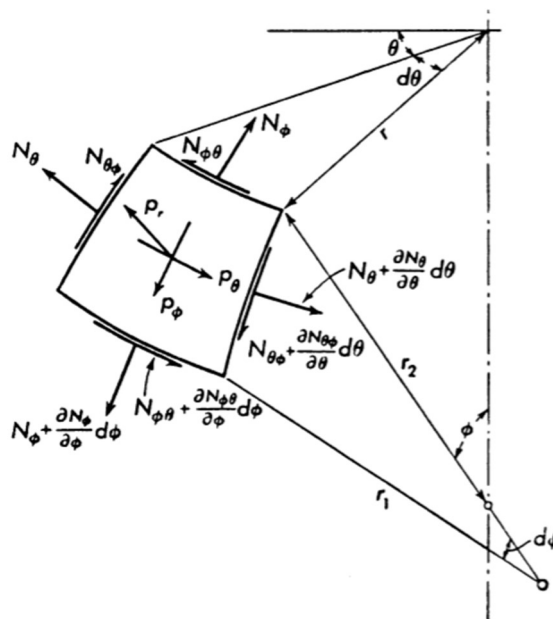
5.2 Εξισώσεις κελυφών εκ περιστροφής

Με αντικατάσταση των σχέσεων των συντεταγμένων (5.1), των παραμέτρων Lamé (5.3) όπως και της (5.4) στις σχέσεις των δυνάμεων της μεμβρανικής θεωρίας, δηλαδή στις σχέσεις (3.30), προκύπτουν οι σχέσεις ισορροπίας των κελυφών εκ περιστροφής. Επίσης, οι ακτίνες R_1 , R_2 , r όπως και φαίνεται είναι ανεξάρτητες της γωνίας θ και μονάχα συνάρτηση της γωνία φ . Οι σχέσεις προκύπτουν ως εξής:

$$\frac{\partial}{\partial\varphi} (N_\varphi \cdot r) + R_1 \frac{\partial N_{\varphi\theta}}{\partial\theta} - N_\theta R_1 \cos\varphi + r \cdot R_1 \cdot p_1 = 0$$

$$R_1 \frac{\partial N_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial}{\partial\varphi} (N_{\varphi\theta} \cdot r) + N_{\varphi\theta} R_1 \cos\varphi + r \cdot R_1 \cdot p_2 = 0$$

$$N_\varphi \frac{1}{R_1} + N_\theta \frac{1}{R_2} + p_3 = 0 \quad (5.5)$$



Σχήμα 5.2

Στο παραπάνω σχήμα παρουσιάζονται οι δυνάμεις που δρουν στο στοιχειώδες κέλυφος εκ περιστροφής όπως και τα φορτία.

Στις παραπάνω σχέσεις οι όροι p_i , ορίζουν τα φορτία στις διευθύνσεις φ , θ και τη κάθετη διεύθυνση κάθε φορά. Γενικά, οι φορτίσεις είναι συναρτήσεις και των δύο γωνιών, δηλαδή ισχύει:

$$p_i = p(\varphi, \theta), i = 1, 2, 3 \quad (5.6)$$

Οι σχέσεις (5.5) τροποποιούνται στις παρακάτω δύο εξισώσεις (5.7) εάν η τρίτη αλγεβρική εξίσωση λυθεί ως προς N_θ και αντικατασταθεί στις άλλες δύο. Δηλαδή οι σχέσεις γίνονται:

$$N_\theta = -N_\varphi \frac{R_2}{R_1} - R_2 \cdot p_3$$

Και με αντικατάσταση στις άλλες δύο προκύπτουν τα παρακάτω:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} (N_\varphi \cdot r) + R_1 \frac{\partial N_{\varphi\theta}}{\partial \theta} + N_\varphi R_2 \cos\varphi + R_2 R_1 (\cos\varphi \cdot p_3 + \sin\varphi \cdot p_1) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} (N_{\varphi\theta} \cdot r) + N_{\varphi\theta} R_1 \cos\varphi - R_2 \frac{\partial N_\varphi}{\partial \theta} + R_2 R_1 \left(\sin\varphi \cdot p_2 - \frac{dp_3}{d\theta} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (5.7)$$

Οι οποίες γενικώς δεν επιλύονται. Διακρίνονται δύο κατηγορίες σε σχέση με τη φόρτιση.

1. Κατηγορία 1^η : Φόρτιση ανεξάρτητη της γωνίας θ .
2. Κατηγορία 2^η : Φορτίσεις τυχαίες συναρτήσεις της γωνίας θ - Σειρές Fourier.

Η λύση της κατηγορία 1^η παρουσιάζεται παρακάτω. Αφού η φόρτιση είναι ανεξάρτητη της γωνίας θ , τότε οι παράγωγοι ως προς θ θα είναι μηδενικοί για όλα τα μεγέθη λόγω συμμετρίας. Συγκεκριμένα οι σχέσεις (5.7) τροποποιούνται και ισχύει το παρακάτω:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} (N_\varphi \cdot r) + N_\varphi R_2 \cos\varphi + R_2 R_1 (\cos\varphi \cdot p_3 + \sin\varphi \cdot p_1) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} (N_{\varphi\theta} \cdot r) + N_{\varphi\theta} R_1 \cos\varphi + R_2 R_1 \sin\varphi \cdot p_2 &= 0 \end{aligned} \quad (5.8)$$

Από τη δεύτερη εξίσωση προσδιορίζεται η δύναμη $N_{\varphi\theta}$, εφόσον το φορτίο P_2 καθοριστεί ως συνάρτηση της γωνίας φ και από τη πρώτη η δύναμη N_φ . Έπειτα, από την εξίσωση της N_θ με αντικατάσταση της N_φ προκύπτει και αυτή. Σε περίπτωση που το φορτίο P_2 είναι μηδενικό τότε η δύναμη $N_{\varphi\theta}$ είναι και αυτή μηδενική.

Όσων αφορά τις μετακινήσεις, ομοίως με τις εξισώσεις των δυνάμεων, με αντικατάσταση στις σχέσεις (3.31) τις σχέσεις (5.1), (5.3), (5.4) και πως οι παράγωγοι ως προς θ είναι μηδέν των μεγεθών R_1, r προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις για τις μετακινήσεις των κελυφών εκ περιστροφής.

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{w}{R_1} = \frac{1}{Eh} \cdot (N_\varphi - \nu N_\theta)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{R_1 r} \cdot \frac{\partial r}{\partial \varphi} \cdot u - \frac{w}{R_2} = \frac{1}{Eh} \cdot (N_\theta - \nu N_\varphi)$$

$$\gamma_{12} = \frac{r}{R_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{v}{r} \right) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{2(1+\nu)}{Eh} \cdot N_{\varphi\theta}$$
(5.9)

Ομοίως με τις δυνάμεις, εάν η φόρτιση είναι κατηγορίας 1^η τότε οι παράγωγοι ως προς θ είναι μηδέν, οπότε οι εξισώσεις (5.9) γίνονται:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{w}{R_1} = \frac{1}{Eh} \cdot (N_\varphi - \nu N_\theta)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{R_1 r} \cdot \frac{\partial r}{\partial \varphi} \cdot u - \frac{w}{R_2} = \frac{1}{Eh} \cdot (N_\theta - \nu N_\varphi)$$

$$\gamma_{12} = \frac{r}{R_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{v}{r} \right) = \frac{2(1+\nu)}{Eh} \cdot N_{\varphi\theta}$$
(5.10)

Επίσης εάν η φόρτιση P2 είναι μηδέν τότε από τα προηγούμενα η δύναμη N_{φθ} είναι μηδενική άρα από την τρίτη εξίσωση προκύπτει πως η μετακίνηση V είναι μηδενική ή σταθερή. Συνεπώς, οι εξισώσεις γίνονται δύο.

5.3 Αξονοσυμμετρική φόρτιση

5.3.1 Σχέσεις αξονοσυμμετρικής φόρτισης

Από τη κατηγορία 1^η των φορτίσεων για τα κελύφη εκ περιστροφής πιο σημαντική είναι η αξονοσυμμετρική φόρτιση. Η αξονοσυμμετρική φόρτιση υποθέτει πως το κέλυφος υποβάλλεται σε φόρτιση συμμετρική ως προς τον άξονα περιστροφής. Συνεπώς τα φορτία είναι μονάχα συναρτήσεις της γωνίας φ. Το ίδιο βάρος και το ομοιόμορφο κατανεμημένο χιόνι είναι τέτοιου είδους φορτίσεις. Σε αυτή τη περίπτωση οι εξισώσεις των δυνάμεων και των παραμορφώσεων απλουστεύονται αρκετά. Όλες οι παράγωγοι σε σχέση με τη γωνία θ θα είναι μηδενικοί αφού τα μεγέθη θα μένουν σταθερά στους παράλληλους κύκλους. Επίσης, το φορτίο P2 θεωρείται μηδενικό. Σε περίπτωση που δεν είναι μηδέν τότε στο κέλυφος προκαλείται στρεπτική ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής του. Λόγω των παραπάνω ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$p_1 = p_1(\varphi), p_3 = p_3(\varphi), p_2 = 0 \quad (5.11)$$

$$N_{\varphi\theta} = 0 \quad (5.12)$$

Οπότε οι σχέσεις των δυνάμεων για αξονοσυμμετρική φόρτιση τροποποιούνται στις (5.13). Η δεύτερη εξίσωση κανονικά είναι ταυτότητα αλλά σε περίπτωση που η φόρτιση P2 δεν είναι μηδενική τότε είναι μία ανεξάρτητη εξίσωση στρέψης του εκ περιστροφής κελύφους.

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (N_\varphi \cdot r) - N_\theta R_1 \cos \varphi + r \cdot R_1 \cdot p_1 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (N_{\varphi\theta} \cdot r) + N_{\varphi\theta} R_1 \cos \varphi + r \cdot R_1 \cdot p_2 = 0$$

$$N_{\varphi} \frac{1}{R_1} + N_{\theta} \frac{1}{R_2} + p_3 = 0 \quad (5.13)$$

Από τη πρώτη και τη τρίτη εξίσωση των σχέσεων (5.13) προκύπτουν οι δυνάμεις N_{φ} , N_{θ} . Συγκεκριμένα, η τρίτη εξίσωση λύνεται ως προς N_{θ} και αντικαθίστανται στην πρώτη μαζί με την εξίσωση (5.4). Μετά από άλγεβρα προκύπτει η παρακάτω σχέση υπολογισμού της δύναμης N_{φ} .

$$\frac{d}{d\varphi} (N_{\varphi} r \sin(\varphi)) + r R_1 (\cos(\varphi) \cdot p_3 + \sin(\varphi) \cdot p_1) = 0 \quad (5.14)$$

Ολοκληρώνοντας προκύπτει η δύναμη N_{φ} ως εξής:

$$[N_{\varphi} r \sin(\varphi)]_{\varphi_0}^{\varphi} = - \int_{\varphi_0}^{\varphi} r R_1 (\cos(\varphi) \cdot p_3 + \sin(\varphi) \cdot p_1) d\varphi \quad \eta$$

$$N_{\varphi} r \sin(\varphi) = - \int_{\varphi_0}^{\varphi} r R_1 (\cos(\varphi) \cdot p_3 + \sin(\varphi) \cdot p_1) d\varphi + N_{\varphi_0} b \sin(\varphi_0) \quad (5.15)$$

Όπου b η ακτίνα του παράλληλου κύκλου για γωνία φ_0 και η τιμή N_{φ_0} καθορίζεται από συνοριακές συνθήκες. Με βάση τη σχέση υπολογισμού της N_{φ} υπολογίζεται και η δύναμη N_{θ} εύκολα από τη παρακάτω εξίσωση αντικατάστασης που έχει ήδη χρησιμοποιηθεί παραπάνω, δηλαδή:

$$N_{\theta} = -N_{\varphi} \frac{R_2}{R_1} - R_2 \cdot p_3 \quad (5.16)$$

Όσων αφορά τις μετατοπίσεις, λόγω της συμμετρικής φόρτισης και πως το φορτίο p_2 είναι μηδενικό, η δύναμη $N_{\varphi\theta}$ είναι μηδενική όπως αναφέρθηκε παραπάνω. Λόγω αυτού η μετακίνηση V είναι και αυτή μηδενική, οπότε οι σχέσεις των παραμορφώσεων από την (5.10) γίνονται δύο σε αριθμό όπως φαίνονται παρακάτω.

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{w}{R_1} = \frac{1}{Eh} \cdot (N_{\varphi} - \nu N_{\theta})$$

$$\varepsilon_2 = \frac{u}{R_1} \cdot \cot(\varphi) - \frac{w}{R_2} = \frac{1}{Eh} \cdot (N_{\theta} - \nu N_{\varphi}) \quad (5.17)$$

Οι σχέσεις υπολογισμού των μετακινήσεων υπολογίζονται εύκολα εφόσον έχουν υπολογιστεί οι τιμές των N_{φ} , N_{θ} . Αρχικά, υπολογίζονται οι τιμές των παραμορφώσεων ε_1 , ε_2 σε σχέση με τις δυνάμεις N_{φ} , N_{θ} . Έπειτα, από τις εξισώσεις (5.17) απαλείφεται η μετακίνηση w και προκύπτει η παρακάτω σχέση:

$$\frac{1}{R_2} \left(\frac{du}{d\varphi} - u \cot(\varphi) \right) = \left(\frac{R_1}{R_2} \right) \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \quad (5.18)$$

Η παραπάνω εξίσωση πολλαπλασιάζεται με $R_2/\sin(\varphi)$ και προκύπτει έπειτα από μετασχηματισμούς:

$$\frac{d\left(\frac{u}{\sin(\varphi)}\right)}{d\varphi} = \frac{R_2}{\sin(\varphi)} \left(\frac{R_1}{R_2} \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \right) = F1(\varphi) \quad (5.19)$$

Η τιμή της συνάρτησης $F1(\varphi)$ είναι γνωστή εάν έχουν υπολογιστεί οι τιμές των δυνάμεων. Ολοκληρώνοντας την (5.19) προκύπτει η μετακίνηση u και η μετακίνηση w μετά από τη αντικατάσταση της u στις αρχικές σχέσεις:

$$u = \sin(\varphi) \int F1(\varphi)d\varphi + C1\sin(\varphi) \quad (5.20)$$

$$w = \cos(\varphi) \int F1(\varphi)d\varphi + C1 \cos(\varphi) - \varepsilon 2R^2 \quad (5.21)$$

Ομοίως με τις δυνάμεις χρειάζεται μία συνοριακή συνθήκη για να υπολογιστεί η τιμή της σταθεράς $C1$. Οι ορθές μετακινήσεις w για διάφορα σημεία ενός κελύφους, συμπεριλαμβανομένων των άκρων του, σχετίζονται με τις επαπτομενικές μετακινήσεις u . Συνεπώς, οι συνοριακές συνθήκες δεν πρέπει να επιβάλλονται ταυτόχρονα στις μετακινήσεις u και w . Έτσι, υπάρχει η ελευθερία να ορίζεται είτε η μετακίνηση u είτε η w σε ένα από τα όρια του κελύφους. Μέσω των εξισώσεων (5.20, 5.21) υπολογίζεται η σταθερά $C1$ εφόσον είναι γνωστή η συνοριακή συνθήκη.

5.3.2 Εφαρμογές σε σφαιρικό κέλυφος

Το σφαιρικό κέλυφος είναι από τα πιο βασικά που εφαρμόζεται σε έργα πολιτικού μηχανικού. Η κυριότερη πρακτική εφαρμογή του συναντάται σε σφαιρικές δεξαμενές ή σφαιρικούς θόλους. Το κύριο χαρακτηριστικό του σφαιρικού κελύφους είναι πως οι ακτίνες καμπυλότητας $R1, R2$ είναι ίσες με την ακτίνα της σφαίρας R . Το σφαιρικό κέλυφος μπορεί να είναι κλειστό στην κορυφή του ή ανοιχτό.

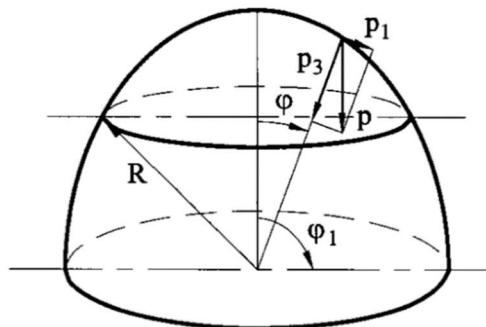
5.3.2.1 Κατακόρυφα φορτία σε σφαιρικό κέλυφος με κλειστή κορυφή

A) Ίδιο βάρος

Έστω ένα σφαιρικό κέλυφος όπως φαίνεται στο σχήμα 5.3 με ακτίνα R και εύρος γωνίας φ , $0 \leq \varphi \leq \varphi_1$, με φ_1 συνήθως $\leq 90^\circ$. Τα φορτία που ενδεχομένως δρουν σε ένα τέτοιο κέλυφος είναι το ίδιο βάρος του, πιθανών φορτία κινητά ή χιόνι αλλά και ακτινικές πιέσεις εφόσον είναι γεμάτο με υγρό. Το ίδιο βάρος ως φορτίο είναι και το πιο σύνθητες. Η κατανομή του ίδιου βάρους φαίνεται στο σχήμα 5.3 . Συγκεκριμένα. Το βάρος P χωρίζεται στα $P1, P3$ όπως φαίνεται παρακάτω:

$$p1 = p \sin(\varphi) , p2 = 0, p3 = p \cos(\varphi) \quad (5.22)$$

Οι εξισώσεις που ορίζουν ένα τέτοιο κέλυφος είναι οι (5.15, 5.16) για τις δυνάμεις και οι (5.17) για τις μετακινήσεις του σφαιρικού κελύφους.



Σχήμα 5.3

Συνεπώς, για τις δυνάμεις οι εξισώσεις τροποποιούνται ως εξής για σφαιρικό κέλυφος:

$$N_{\varphi} r \sin(\varphi) = - \int_0^{\varphi} rR(\cos(\varphi) \cdot p_3 + \sin(\varphi) \cdot p_1) d\varphi$$

$$N_{\theta} = -N_{\varphi} - R \cdot p_3$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις και με χρήση συμβολικού προγραμματισμού, προκύπτουν οι τιμές των δυνάμεων. Ισχύει πως:

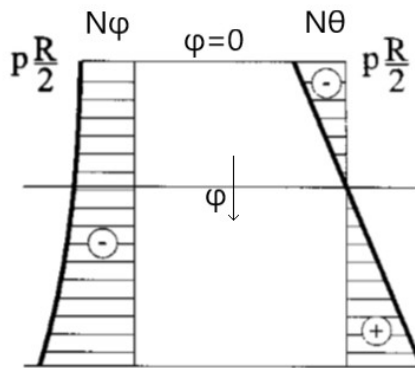
$$N_{\varphi} = - \frac{pR}{1+\cos(\varphi)}$$

$$N_{\theta} = -pR \left(\cos(\varphi) - \frac{1}{1+\cos(\varphi)} \right) \quad (5.23)$$

Στην κορυφή του κελύφους, δηλαδή για $\varphi=0$, πρέπει οι δυνάμεις να έχουν ίδια τιμή λόγω ισορροπίας σημείου. Το παραπάνω ισχύει και συγκεκριμένα :

$$N_{\varphi} = N_{\theta} = - \frac{pR}{2}$$

Παρακάτω φαίνονται οι κατανομές των δυνάμεων καθύψος του κελύφους.

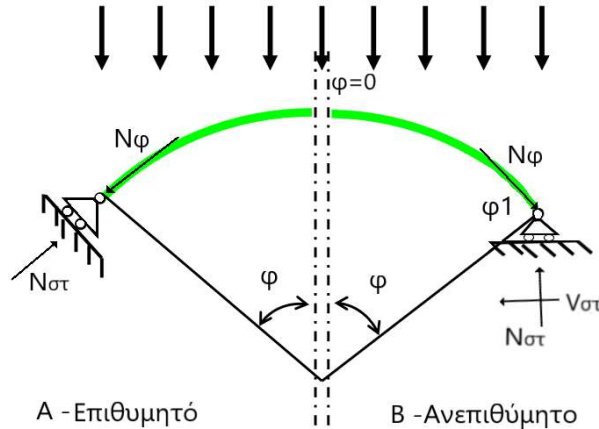


Σχήμα 5.4 : Διαγράμματα δυνάμεων

Παρατηρείται πως η δύναμη N_{φ} έχει ίδιο πρόσημο, δηλαδή θλιπτική, ενώ η N_{θ} αλλάζει πρόσημο για γωνία φ ίση με φ' . Για τη γωνία φ' ισχύει το παρακάτω:

$$\cos(\varphi') - \frac{1}{1 + \cos(\varphi')} = 0 \Rightarrow \varphi' \approx 51^{\circ}$$

Η γωνία φ ορίζει μία γραμμή μετάβασης στο σφαιρικό κέλυφος. Είναι προφανές πως εάν η μέγιστη τιμή της φ είναι μικρότερη από φ' , τότε η σφαίρα δεν υπόκειται σε εφελκυστικές δυνάμεις παρά μόνο σε θλιπτικές. Σημαντική παρατήρηση είναι πως η γραμμή μετάβασης συνδέεται με την δημιουργία καμπτικών τάσεων. Συγκεκριμένα ως εξεταστεί ο τρόπος στήριξης ενός τέτοιου κελύφους. Όπως φαίνεται παρακάτω στο σχήμα 5.5 η διεύθυνση της στήριξης πρέπει να είναι ίδια με την διεύθυνση της N_{φ} στη θέση στήριξης ώστε να μην αναπτύσσονται άλλες δυνάμεις.

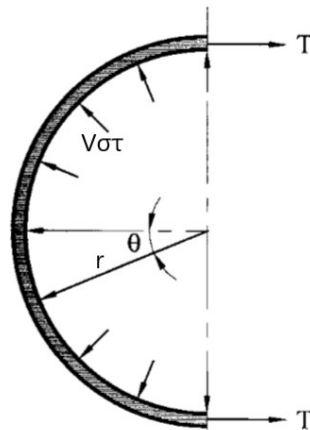


Σχήμα 5.5

Εάν η στήριξη γίνεται όπως φαίνεται στο σχήμα 5.5 Α, τότε η δύναμη $N\varphi$ παραλαμβάνεται ολόκληρη από τη στήριξη. Σε περίπτωση που η στήριξη γίνεται όπως στο Β τότε εμφανίζεται και οριζόντια συνιστώσα η οποία πρέπει να παραληφθεί από δακτύλιο. Η τιμή της $V_{στ}$ έχει ως εξής:

$$V_{στ} = -N\varphi(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_1) \quad (5.24)$$

Η δύναμη δρα σε ολόκληρη τη περίμετρο του δακτυλίου. Παρακάτω φαίνεται στο σχήμα 5.6 ο μισός δακτύλιος. Θεωρούμε πως ο δακτύλιος έχει ίδια ακτίνα r με το σφαιρικό κέλυφος στη βάση στήριξης.



Σχήμα 5.6

Με βάση το σχήμα η δύναμη T που δέχεται ο δακτύλιος είναι :

$$\begin{aligned} 2T &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} -N\varphi(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_1) \cdot \cos(\theta) \cdot (rd\theta) \Rightarrow T \\ &= -N\varphi(\varphi_1) \cdot r \cdot \cos(\varphi_1) \end{aligned}$$

Η τιμή της ακτίνας r στη βάση είναι $R \sin(\varphi_1)$ οπότε η σχέση γίνεται:

$$T = -N\varphi(\varphi_1) \cdot R \cdot \sin(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_1) \quad (5.25)$$

Και με χρήση της εξίσωσης (5.23) προκύπτει πως:

$$T = pR^2 \frac{\sin(\varphi_1) \cdot \cos(\varphi_1)}{1 + \cos(\varphi_1)} \quad (5.26)$$

Η διεύθυνση που δρα η δύναμη T είναι εκείνη που δρα και η δύναμη $N\theta$. Παρατηρείται πως υπάρχει μια ασυμβατότητα μεταξύ των τιμών των δύο δυνάμεων στη θέση μεταξύ του άκρου του κελύφους και του δακτυλίου. Η δύναμη T είναι θετική, δηλαδή εφελκυστική, σε όλο το εύρος της γωνίας φ_1 , δηλαδή για $0 \leq \varphi_1 < 90^\circ$ σε αντίθεση με την $N\theta$ που αλλάζει πρόσημο για $\varphi \approx 51^\circ$. Για $\varphi_1 \leq 51^\circ$ το σφαιρικό κέλυφος δέχεται θλιπτικές δυνάμεις (μεμβρανικές δυνάμεις $N\varphi$ και $N\theta$ αρνητικές), ενώ η δύναμη T είναι εφελκυστική, οπότε το κέλυφος συμπιέζεται ενώ ο δακτύλιος διαστέλλεται. Λόγω αυτού δημιουργείται κάμψη αφού, μονάχα με την μεμβρανική θεωρία η διαφορά στις παραμορφώσεις δε μπορεί να ικανοποιηθεί. Συνεπώς, η κάμψη που εμφανίζεται ικανοποιεί την παραμορφωσιακή ασυνέχεια. Βέβαια, τα αποτελέσματα της κάμψης είναι συνήθως σταθερά σε ένα σχετικά μικρό τμήμα του κελύφους δίπλα στη βάση οπότε το κέλυφος συνεχίζει να είναι υπό μεμβρανική εντατική κατάσταση.

Ομοίως με τις δυνάμεις, οι μετακινήσεις του σφαιρικού κελύφους υπολογίζονται από τη αρχική σχέση (5.17) και με τους ίδιους μετασχηματισμούς που οδηγούν στις σχέσεις (5.20-21). Προκύπτουν τα εξής:

$$F1(\varphi) = - \frac{R^2 \sin(\varphi) p (v+1)}{Eh} \frac{\cos(\varphi)+2}{(1+\cos(\varphi))^2} \quad (5.27)$$

Με αντικατάσταση της παραπάνω εξίσωσης στις σχέσεις (5.20-5.21) προκύπτουν οι τιμές των μετακινήσεων u και w . Η μετακίνηση v είναι μηδενική. Όσον αφορά τις συνοριακές συνθήκες, στη στήριξη η μετακίνηση u είναι μηδενική, δηλαδή ισχύει $u(\varphi_1)=0$. Από τη σχέση αυτή προκύπτει και η σταθερά $C1$ των εξισώσεων (5.20-5.21). Συνεπώς προκύπτουν τα παρακάτω:

$$u = \sin(\varphi) \frac{R^2 p (v+1)}{Eh} \left(\ln[\cos(\varphi) + 1] - \frac{1}{\cos(\varphi)+1} \right) + C1 \sin(\varphi) \quad (5.28)$$

$$C1 = \frac{R^2 p (v+1)}{Eh} \left(\frac{1}{\cos(\varphi_1)+1} - \ln[\cos(\varphi_1) + 1] \right) \quad (5.29)$$

Οπότε τελική σχέση υπολογισμού της μετακίνησης u :

$$u = \sin(\varphi) \frac{R^2 p (v+1)}{Eh} \left(\ln \frac{\cos(\varphi)+1}{\cos(\varphi_1)+1} + \frac{\cos(\varphi)-\cos(\varphi_1)}{(\cos(\varphi)+1)(\cos(\varphi_1)+1)} \right) \quad (5.30)$$

Ομοίως για τη μετακίνηση w , η τελική σχέση είναι η παρακάτω:

$$w = \cos(\varphi) \frac{R^2 p (v+1)}{Eh} \left(\ln \frac{\cos(\varphi)+1}{\cos(\varphi_1)+1} + \frac{\cos(\varphi)-\cos(\varphi_1)}{(\cos(\varphi)+1)(\cos(\varphi_1)+1)} \right) + \frac{R^2 p}{Eh} \left(\cos(\varphi) - \frac{v+1}{\cos(\varphi)+1} \right) \quad (5.31)$$

B) Κινητά φορτία

Ας θεωρήσουμε πως στο κλειστό σφαιρικό κέλυφος εφαρμόζονται κινητά ή φορτία χιονιού. Τα συγκεκριμένα φορτία είναι ομοιόμορφα κατανομημένα σε μία οριζόντια επιφάνεια, σε αντίθεση με το ίδιο βάρος που εφαρμόζεται στην επιφάνεια του κελύφους απευθείας. Συνεπώς, εάν το φορτίο που εφαρμόζεται στην οριζόντια επιφάνεια είναι Q , τότε το φορτίο που εφαρμόζεται στο κέλυφος έχει την ακόλουθη μορφή:

$$p_1 = Q \sin(\varphi) \cos(\varphi) , p_2 = 0, p_3 = Q \cos^2(\varphi) \quad (5.32)$$

Ακολουθώντας ίδια διαδικασία με προηγουμένως, προκύπτουν οι σχέσεις υπολογισμού των δυνάμεων και των παραμορφώσεων. Συγκεκριμένα, οι δυνάμεις έχουν ως εξής:

$$N_\varphi = -\frac{QR}{2}$$

$$N_\theta = -\frac{QR}{2}(2 \cos^2(\varphi) - 1) \quad (5.33)$$

Παρατηρείται πως η δύναμη N_φ είναι σταθερή σε ολόκληρο το κέλυφος, ενώ η δύναμη N_θ αλλάζει πρόσημο δηλαδή υπάρχει και σε αυτή τη φόρτιση μία γραμμή μετάβασης στο κέλυφος. Ισχύει πως

$$2 \cos^2(\varphi') - 1 = 0 \Rightarrow \varphi' = 45^\circ, 135^\circ$$

Η γωνία των 45° είναι εκείνη που ορίζει τη γραμμή μετάβασης αφού το εύρος γωνίας φ είναι συνήθως μέχρι 90° . Επιπλέον, υπολογίζεται και η δύναμη T που εφαρμόζεται στο δακτύλιο της στήριξης για μία τέτοια φόρτιση μέσω της σχέσης (5.25), η οποία προκύπτει ως εξής:

$$T = \frac{QR^2}{4} \cdot \sin(2\varphi) \quad (5.34)$$

Ομοίως με τις δυνάμεις υπολογίζονται και οι σχέσεις των μετακινήσεων, οι οποίες φαίνονται παρακάτω.

$$u = \sin(\varphi) \frac{R^2 Q (\nu+1)}{Eh} [\cos(\varphi) - \cos(\varphi_1)]$$

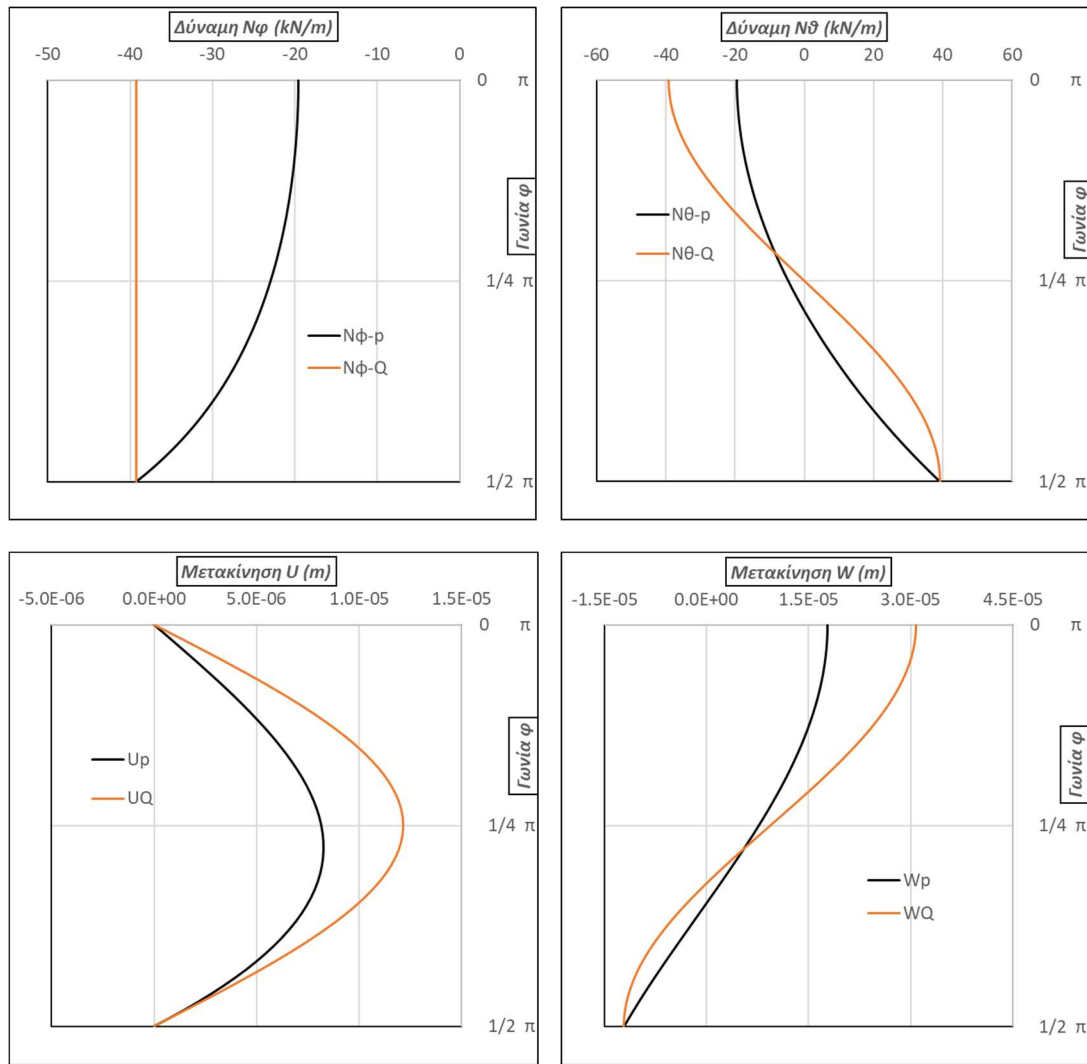
$$w = \cos(\varphi) \frac{R^2 Q (\nu+1)}{Eh} [\cos(\varphi) - \cos(\varphi_1)] + \frac{1}{2} \frac{R^2 Q}{Eh} [2 \cos^2(\varphi) - \nu - 1] \quad (5.35)$$

Ας θεωρήσουμε ένα σφαιρικό κέλυφος με τα παρακάτω χαρακτηριστικά

Πίνακας 5.1

Γεωμετρία		Υλικό	
R(m)	5.00	E(kPa)	210000000
h(m)	0.10	γ (kN/m ³)	78.5
Φ_1 ($^\circ$)	90.00 $^\circ$	ν	0.30

Επίσης, το φορτίο p του ίδιου βάρους είναι ίσο με $p = \gamma \cdot h = 78.5 \cdot 0.10 = 7.85$ kN/m² και η επιφάνεια εφαρμογής του είναι ίση με τη μισή επιφάνεια της σφαίρας ίση με $2\pi R^2$. Θεωρούμε πως το φορτίο Q , που έχει επιφάνεια εφαρμογής ίση με το εμβαδόν του κύκλου ακτίνας $r(\varphi_1) = r(90^\circ) = R$ και άρα $E = pR^2$, έχει τιμή ίση με $Q = p \cdot E_p / E_Q = 2 \cdot p = 15.7$ kN/m². Παρακάτω φαίνονται τα διαγράμματα των δυνάμεων και των μετακινήσεων για τις δύο φορτίσεις p, Q .



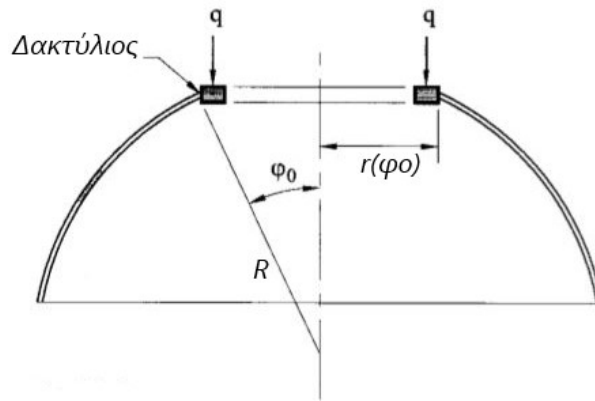
Διαγράμματα 5.1 - Μεγέθη κλειστού σφαιρικού κελύφους με τα στοιχεία του πίνακα 5.1

Παρατηρήσεις.

1. Και για τις δύο φορτίσεις οι τιμές των δυνάμεων και των μετακινήσεων για $\varphi=\pi/2$ (90°) είναι ίδιες. Ιδιαίτερα για τις δυνάμεις η τιμή και των δύο (N_φ , N_θ) είναι ίδια με διαφορετικό πρόσημο.
2. Η μετακίνηση u έχει παρόμοια κατανομή και παρουσιάζει μεγαλύτερες τιμές για τη φόρτιση Q σε σχέση με το ίδιο βάρος στις ενδιάμεσες τιμές της γωνίας φ .
3. Στην κορυφή της σφαίρας, οι τιμές των δυνάμεων για τη φόρτιση Q είναι διπλάσιες σε σχέση με το ίδιο βάρος όπως και η μετακίνηση w , ενώ η μετακίνηση u είναι μηδενική.

5.3.2.2 Κατακόρυφα φορτία σε σφαιρικό κέλυφος με ανοιχτή κορυφή

Για λόγους αρχιτεκτονικούς ή και λειτουργικούς, όπως π.χ. φωτισμός, ένα σφαιρικό κέλυφος μπορεί να έχει ανοιχτή κορυφή, η οποία συνήθως καλύπτεται με κάποια επικάλυψη όπως γυαλί. Επιπλέον, στην κορυφή τοποθετείται δακτύλιος για στήριξη της επικάλυψης. Τα επιπλέον φορτία που ασκούνται σε τέτοια κέλυφη είναι της ανωδομής, δηλαδή η επικάλυψη εάν υπάρχει όπως και ο δακτύλιος. Το φορτίο αυτό εφαρμόζεται περιμετρικά και είναι γραμμικό με τιμή q , όπως φαίνεται στο σχήμα 5.7.



Σχήμα 5.7

Η τιμή του φορτίου q μεταφράζεται ως συνοριακή συνθήκη στο σφαιρικό κέλυφος και συγκεκριμένα με εφαρμογή των σχέσεων 5.15-5.16 προκύπτουν οι δυνάμεις N_φ , N_θ για το σφαιρικό κέλυφος. Με φόρτιση όπως της σχέσης 5.22 δηλαδή ίδιο βάρος προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις μέσω συμβολικού προγραμματισμού των μεγεθών.

$$N_\varphi = \frac{1}{\sin(\varphi)^2} [pR(\cos(\varphi) - \cos(\varphi_0)) - q\sin(\varphi_0)]$$

$$N_\theta = -\frac{1}{\sin(\varphi)^2} [pR(\cos(\varphi) - \cos(\varphi_0)) - q\sin(\varphi_0)] - R\rho\cos(\varphi) \quad (5.36)$$

Με φόρτιση κινητού φορτίου όπως την 5.32 προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις των δυνάμεων.

$$N_\varphi = \frac{Q R \sin(\varphi_0)^2}{2 \sin(\varphi)^2} - \frac{1}{2} QR - \frac{q \sin(\varphi_0)}{\sin(\varphi)^2}$$

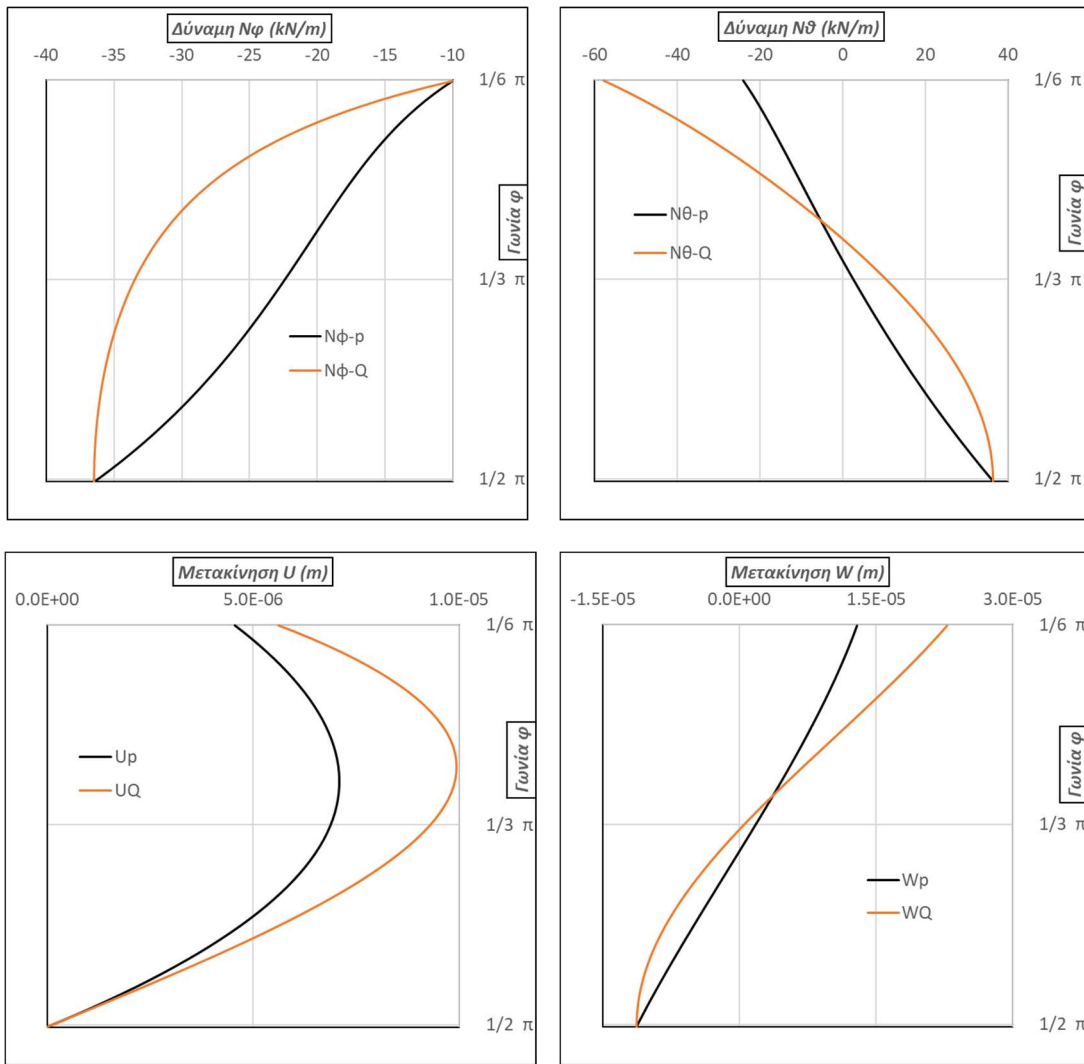
$$N_\theta = -\frac{Q R \sin(\varphi_0)^2}{2 \sin(\varphi)^2} + \frac{1}{2} QR + \frac{q \sin(\varphi_0)}{\sin(\varphi)^2} - RQ\cos(\varphi)^2 \quad (5.37)$$

Οι σχέσεις υπολογισμού των μετακινήσεων υπολογίζονται εύκολα με συμβολικό προγραμματισμό αλλά λόγω του όγκου τους δεν περιλαμβάνονται εδώ.

Παρακάτω φαίνονται τα διαγράμματα των δυνάμεων και των μετακινήσεων για τιμές υλικού και γεωμετρίας όπως στον πίνακα 5.2 και με γραμμικό φορτίο $q = 5\text{kN/m}^2$. Το συνολικό φορτίο είναι ίδιο και στις δύο επιμέρους φορτίσεις οπότε ισχύει πως $Q = 2\rho/\cos(\varphi_0)$ από γεωμετρία. Συνεπώς, το φορτίο $Q = 2 \cdot 7.85 / \cos 30 = 18.13\text{kN/m}^2$.

Πίνακας 5.2

<u>Γεωμετρία</u>		<u>Υλικό</u>	
R(m)	5.00	E(kPa)	210000000
h(m)	0.10	$\gamma(\text{kN/m}^3)$	78.5
$\Phi 1(^{\circ})$	30.00 $^{\circ}$	ν	0.30



Διαγράμματα 5.2 - Μεγέθη ανοιχτού σφαιρικού κελύφους με τα στοιχεία του πίνακα 5.2

Παρατηρήσεις.

1. Και για τις δύο φορτίσεις, οι τιμές των δυνάμεων και των μετακινήσεων για $\varphi = \pi/2$ (90°) είναι ίδιες. Ιδιαίτερα για τις δυνάμεις η τιμή και των δύο ($N\varphi$, $N\theta$) είναι ίδια με διαφορετικό πρόσημο. Στην ανοιχτή κορυφή, η δύναμη $N\theta$ για την κινητή φόρτιση είναι σαφώς μεγαλύτερη από την αντίστοιχη του ίδιου βάρους.
2. Στην φόρτιση Q , οι μετακινήσεις είναι μεγαλύτερες στην ανοιχτή κορυφή, ενώ είναι ίδιες στην στήριξη.

5.3.2.3 Σφαιρική δεξαμενή πλήρης με υγρό

Έστω σφαιρική δεξαμενή η οποία στηρίζεται περιμετρικά σε μία γωνία φ_0 με υποστυλώματα και δακτύλιο, όπως φαίνεται παρακάτω στο σχήμα 5.8. Διακρίνονται 2 περιοχές, 1^η για $0 \leq \varphi \leq \varphi_0$ και 2^η για $\varphi_0 < \varphi \leq \pi$. Η δεξαμενή είναι γεμάτη με υγρό ειδικού βάρους γ_w και αμελώντας το ίδιο βάρος, η φόρτιση είναι της παρακάτω μορφής :

$$p_1 = 0, p_2 = 0, p_3 = -\gamma_w R(1 - \cos(\varphi)) \quad (5.38)$$

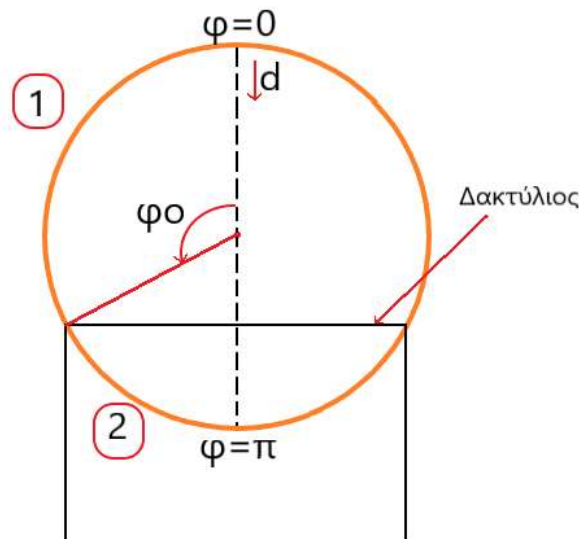
Οι σχέσεις υπολογισμού των δυνάμεων είναι διαφορετικές στις δύο περιοχές του κελύφους, δηλαδή στην στήριξη αλλάζουν. Για την εύρεση των σχέσεων των

δυνάμεων N_φ , N_θ χρησιμοποιείται η σχέση 5.14 αρχικά και έπειτα η σχέση 5.16. Οπότε προκύπτουν από την 5.14, οι σχέσεις της N_φ για τις δύο περιοχές. Η 5.14 με φόρτιση την 5.38 τροποποιείται στην παρακάτω:

$$\frac{d}{d\varphi} (N_\varphi r \sin(\varphi)) - r R (\cos(\varphi) \cdot \gamma_w R (1 - \cos(\varphi))) = 0$$

Επιλύοντας τη παραπάνω σχέση προκύπτει η σχέση υπολογισμού της N_φ που φαίνεται παρακάτω:

$$N_\varphi = \frac{1}{\sin(\varphi)^2} \gamma_w R^2 \left(-\frac{\cos(\varphi)^2}{2} + \frac{\cos(\varphi)^3}{3} + c \right) \quad (5.39)$$



Σχήμα 5.8

Η τιμή της σταθεράς c είναι διαφορετική για τις δύο περιοχές του σχήματος 5.8. Συγκεκριμένα, η τιμή της N_φ απειρίζεται για $\varphi=0$, π εκτός εάν η παρένθεση είναι ίση με μηδέν για να υπάρχει απροσδιόριστη μορφή, οπότε ισχύει το παρακάτω:

$$\varphi = 0, \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + c \right) = 0 \Rightarrow c_1 = \frac{1}{6}$$

$$\varphi = \pi, \left(-\frac{1}{2} + \frac{-1}{3} + c \right) = 0 \Rightarrow c_2 = \frac{5}{6}$$

Συνεπώς οι σχέσεις για κάθε περιοχή φαίνονται παρακάτω:

$$N_{\varphi 1} = \frac{1}{\sin(\varphi)^2} \gamma_w R^2 \left(-\frac{\cos(\varphi)^2}{2} + \frac{\cos(\varphi)^3}{3} + \frac{1}{6} \right)$$

$$N_{\varphi 2} = \frac{1}{\sin(\varphi)^2} \gamma_w R^2 \left(-\frac{\cos(\varphi)^2}{2} + \frac{\cos(\varphi)^3}{3} + \frac{5}{6} \right) \quad (5.40)$$

Οι σχέσεις υπολογισμού της δύναμης N_θ προκύπτουν με αντικατάσταση των παραπάνω στη σχέση 5.16. Οι τιμές για $\varphi=0$, π προκύπτουν με όριο και κανόνα L'Hospital και προκύπτει πως:

$$\varphi = 0, N_\theta = N_\varphi = 0$$

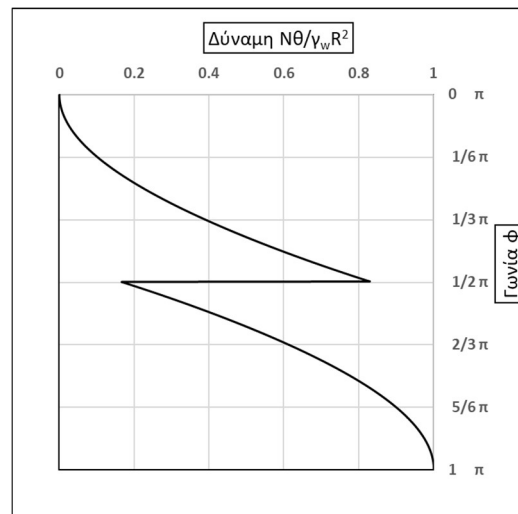
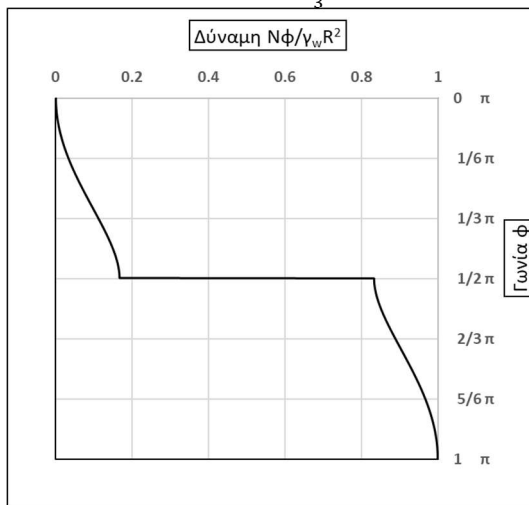
$$\varphi = \pi, N_{\theta} = N_{\varphi} = \gamma_w R^2$$

Σημαντικό σημείο είναι το σύνορο μεταξύ των δύο περιοχών δηλαδή για γωνία φ_0 και η εύρεση των δυνάμεων που δρουν στη στήριξη. Συγκεκριμένα, η δύναμη που δρα στο σημείο στήριξης είναι ίση με τη διαφορά $\Delta N_{2,1}$ για γωνία $\varphi = \varphi_0$ και προκύπτει πως:

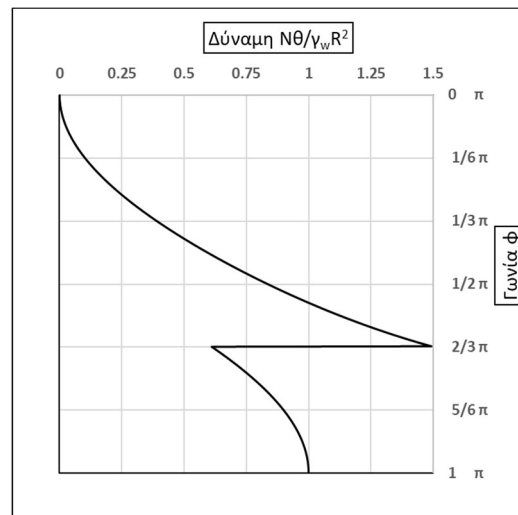
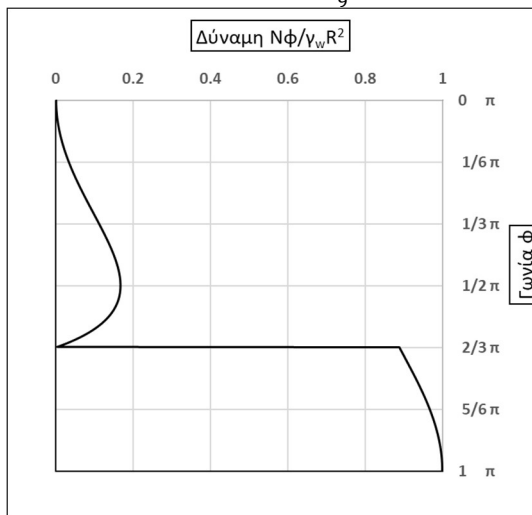
$$\Delta N = N_{\varphi 2} - N_{\varphi 1} = \frac{2}{3} \frac{\gamma_w R^2}{\sin(\varphi_0)^2} \quad (5.41)$$

Η ελάχιστη τιμή της δύναμης ΔN είναι για γωνία $\varphi_0 = \pi/2$. Η δύναμη που εφαρμόζεται στη στήριξη προφανώς εφάπτεται στο κέλυφος στο σημείο στήριξης ($\varphi = \varphi_0$). Παρακάτω, παρουσιάζονται τα διαγράμματα των δυνάμεων-τάσεων N_{φ} , N_{θ} για $\varphi_0 = \pi/2$ και $2\pi/3$ σε σχέση με την ποσότητα $\gamma_w R^2$.

$$\varphi_0 = \pi/2 \rightarrow \Delta N = \frac{2\gamma_w R^2}{3}$$



$$\varphi_0 = 2\pi/3 \rightarrow \Delta N = \frac{8\gamma_w R^2}{9}$$



Διαγράμματα 5.3 - Δυνάμεις κλειστής σφαιρικής δεξαμενής

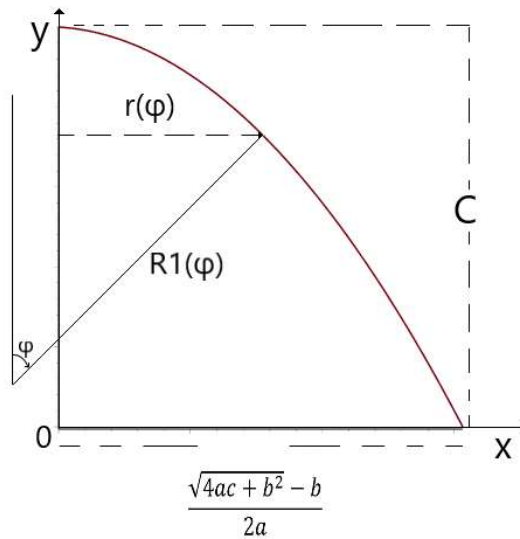
Παρατηρείτε πως η γωνία στήριξης φ_0 επηρεάζει τη μέγιστη τιμή της δύναμης N_{θ} . Το διάγραμμα της N_{θ} για στήριξη $\varphi_0 = 120^\circ$ φτάνει την τιμή $1.5 \gamma_w R^2$. Σε αντίθεση με τη δύναμη N_{φ} , η οποία από $\varphi > 90^\circ$ μειώνεται. Στο χαμηλότερο σημείο της δεξαμενής οι δυνάμεις έχουν ίδια τιμή και ίση με $\gamma_w R^2$.

5.3.3 Εφαρμογές σε παραβολικό κέλυφος εκ περιστροφής

Το παραβολικό κέλυφος είναι επίσης μαζί με το σφαιρικό ένα από τα βασικά που εφαρμόζεται σε έργα πολιτικού μηχανικού. Η εφαρμογή του συναντάται κυρίως ως σε παραβολικούς θόλους. Το παραβολικό κέλυφος έχει ακτίνες καμπυλότητας $R1, R2$ ως συναρτήσεις της γωνίας φ , δηλαδή $R1(\varphi), R2(\varphi)$. Ομοίως με το σφαιρικό, το παραβολικό κέλυφος μπορεί να είναι κλειστό στην κορυφή του ή ανοιχτό. Οι εξισώσεις που το περιγράφουν είναι ίδιες με εκείνες του σφαιρικού κελύφους με την εξαίρεση πως οι ακτίνες καμπυλότητας δεν είναι σταθερές. Τα κατακόρυφα φορτία που ασκούνται είναι το ίδιο βάρος, αλλά και κινητά φορτία όπως το χιόνι. Παρακάτω, υπολογίζονται οι ακτίνες καμπυλότητας συναρτήσει της γωνίας φ .

Έστω μία παραβολή στο XY επίπεδο όπως φαίνεται στο σχήμα 5.9. Η εξίσωση της παραβολής είναι της παρακάτω μορφής:

$$y(x) = c - [ax^2 + bx] \quad a > 0 \text{ \& } b, c \geq 0 \quad (5.42)$$



Σχήμα 5.9

Ο υπολογισμός της ακτίνας καμπυλότητας $R1(\varphi)$ βασίζεται στις σχέσεις του κεφαλαίου 2.5. Συγκεκριμένα, η ακτίνα καμπυλότητας υπολογίζεται με βάση τις δύο παρακάτω σχέσεις

$$\tan\varphi = -\frac{dy}{dx} = -y'(x) \rightarrow x = f(\tan\varphi) = x(\varphi)$$

$$r(\varphi) = \frac{1}{\cos\varphi} \frac{dx(\varphi)}{d\varphi}$$

Επομένως, προκύπτουν τα παρακάτω:

$$y'(x) = -2ax - b \rightarrow \tan\varphi = 2ax + b$$

$$x(\varphi) = \frac{\tan\varphi - b}{2a} \rightarrow \frac{dx(\varphi)}{d\varphi} = \frac{1}{2a} \frac{1}{\cos^2\varphi}$$

Τελικώς, προκύπτει:

$$R1(\varphi) = \frac{1}{2a} \frac{1}{\cos^3\varphi}$$

Σε σχέση με την άλλη ακτίνα καμπυλότητας, ισχύει με βάση το σχήμα 5.9 το παρακάτω:

$$r(\varphi) = x(\varphi) = \frac{\tan\varphi - b}{2a} = R_2(\varphi) \sin\varphi$$

$$R_2(\varphi) = \frac{\tan\varphi - b}{2a \sin\varphi}$$

Από τη σχέση του $x(\varphi)$ υπολογίζονται οι αντίστοιχες γωνίες. Οπότε, π.χ., για κλειστό παραβολικό κέλυφος στην κορυφή του ισχύει $x(\varphi)=0$ και άρα $\varphi = \arctan(b)$. Επίσης στο σημείο τομής της παραβολής με τον άξονα x η γωνία είναι $\varphi = \arctan(\sqrt{4ac+b^2})$. Γενικά, ο συντελεστής b θα θεωρηθεί μηδενικός στις παρακάτω εφαρμογές, οπότε οι γωνίες τροποποιούνται στις $\varphi_0=0$ και $\varphi_{\text{τομής}} = \arctan(\sqrt{4ac})$. Επιπλέον, η γωνία $\varphi_{\text{τομής}}$ θα θεωρηθεί ως η κατώτερη τιμή ή η γωνία στήριξης του κελύφους.

5.3.3.1 Κατακόρυφα φορτία σε παραβολικό κέλυφος με κλειστή κορυφή

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω τα κατακόρυφα φορτία είναι το ίδιο βάρος αλλά και κινητά φορτία που εφαρμόζονται σε οριζόντια επιφάνεια.

A) Ίδιο βάρος

Η φόρτιση του ίδιου βάρους είναι όμοια με την σχέση 5.22 δηλαδή τη παρακάτω:

$$p_1 = p \sin(\varphi), p_2 = 0, p_3 = p \cos(\varphi)$$

Με αντικατάσταση της παραπάνω φόρτισης και των σχέσεων των ακτινών καμπυλότητας στις σχέσεις (5.13) εκείνες δηλαδή των δυνάμεων όπως και στις (5.20-5.21) των μετακινήσεων προκύπτουν μέσω συμβολικού προγραμματισμού και της MAPLE οι σχέσεις υπολογισμού. Συγκεκριμένα, ισχύουν τα παρακάτω:

$$N_\varphi = \frac{1}{\sin(\varphi) \tan(\varphi)} \left[C_1 - \frac{1}{6} \frac{p}{a \cos(\varphi)^3} \right]$$

$$N_\theta = -\frac{1}{2} \frac{p}{a} - \frac{C_1 \cos(\varphi)^3}{\sin(\varphi)^2} + \frac{1}{6} \frac{p}{\sin(\varphi)^2 a}$$

Όπου C_1 σταθερά. Ο υπολογισμός της σταθεράς C_1 γίνεται με την σχέση ισορροπίας που ισχύει στη κλειστή κορυφή του κελύφους δηλαδή, πως για $\varphi=0$ ισχύει:

$$N_\varphi = N_\theta \rightarrow C_1 = \frac{1}{6} \frac{p}{a}$$

Και οι σχέσεις των δυνάμεων καταλήγουν στις παρακάτω.

$$N_\varphi = -\frac{1}{6a} \frac{(\cos(\varphi)^2 + \cos(\varphi) + 1) p}{(\cos(\varphi) + 1) \cos(\varphi)^2}$$

$$N_\theta = \frac{1}{6a} \frac{(\cos(\varphi)^2 - 2 \cos(\varphi) - 2) p}{\cos(\varphi) + 1}$$

(5.43)

Ομοίως με τις δυνάμεις υπολογίζονται και οι μετακινήσεις του παραβολικού εκ περιστροφής κελύφους. Η συνοριακή συνθήκη μέσω της οποίας υπολογίζεται η σταθερά C που υπάρχει στις εξισώσεις είναι πως για τη γωνία στήριξης, η μετακίνηση

U είναι μηδενική. Με βάση τα παραπάνω προκύπτουν οι σχέσεις υπολογισμού των μετακινήσεων U, W οι οποίες λόγω του όγκου τους δεν περιλαμβάνονται εδώ.

Με βάση τις εξισώσεις των δυνάμεων παρατηρείται πως αντίθετα με το σφαιρικό κέλυφος η δύναμη N_θ έχει σταθερό πρόσημο και συνεπώς δεν υπάρχει γραμμή μετάβασης. Επίσης, οι τιμές των δυνάμεων είναι αντιστρόφως ανάλογες με την καμπυλότητα της εξίσωσης της παραβολής που είναι ο συντελεστής a .

Ομοίως με τα σφαιρικά κελύφη στην στήριξη απαιτείται δακτύλιος για την παραλαβή της οριζόντιας συνιστώσας της δύναμης N_ϕ . Η οριζόντια δύναμη της στήριξης υπολογίζεται μέσω της σχέσης 5.24 και η συνολική δύναμη που δρα στον δακτύλιο είναι μέσω της εξίσωσης 5.25 και προκύπτει πως:

$$T = -N_\phi(\varphi_{\text{τομής}}) \cdot R_2(\varphi_{\text{τομής}}) \cdot \sin(\varphi_{\text{τομής}}) \cdot \cos(\varphi_{\text{τομής}}) = -N_\phi(\varphi_{\text{τομής}}) \cdot \frac{\sin(\varphi_{\text{τομής}})^2}{2a \cdot \cos(\varphi_{\text{τομής}})}$$

Και με χρήση της εξίσωσης (5.43) προκύπτει πως:

$$T = \frac{p}{12 a^2} \frac{1 - \cos(\varphi_{\text{τομής}})^3}{\cos(\varphi_{\text{τομής}})^3} \quad (5.44)$$

B) Κινητά φορτία

Η φόρτιση των κινητών φορτίων είναι όμοια με την σχέση 5.32 δηλαδή τη παρακάτω:

$$p_1 = Q \sin(\varphi) \cos(\varphi) \quad , p_2 = 0 \quad , p_3 = Q \cos^2(\varphi)$$

Με αντικατάσταση της παραπάνω φόρτισης και των σχέσεων των ακτινών καμπυλότητας στις σχέσεις (5.13) εκείνες δηλαδή των δυνάμεων όπως και στις (5.20-5.21) των μετακινήσεων προκύπτουν μέσω συμβολικού προγραμματισμού και της MAPLE οι σχέσεις υπολογισμού. Συγκεκριμένα, ισχύουν τα παρακάτω:

$$N_\phi = \frac{1}{\sin(\varphi) \tan(\varphi)} \left[C1 - \frac{1}{4} \frac{Q}{a \cos(\varphi)^2} \right]$$

$$N_\theta = -\frac{1}{2} \frac{\cos(\varphi) Q}{a} - \frac{C1 \cos(\varphi)^3}{\sin(\varphi)^2} + \frac{1}{4} \frac{\cos(\varphi) Q}{\sin(\varphi)^2 a}$$

Όπου C1 σταθερά. Ο υπολογισμός της σταθεράς C1 γίνεται με την ίδια σχέση ισορροπίας που περιγράφηκε προηγουμένως και προκύπτει:

$$N_\phi = N_\theta \quad \rightarrow \quad C1 = \frac{1}{4} \frac{Q}{a}$$

Συνεπώς, οι σχέσεις των δυνάμεων καταλήγουν στις παρακάτω.

$$N_\phi = -\frac{1}{4} \frac{Q}{a \cos(\varphi)}$$

$$N_\theta = -\frac{1}{4} \frac{Q \cos(\varphi)}{a} \quad (5.45)$$

Σε αντίθεση με τη φόρτιση του ίδιου βάρους, οι σχέσεις υπολογισμού των μετακινήσεων είναι πιο απλές στη συγκεκριμένη φόρτιση. Παρακάτω φαίνεται η τιμή της σταθεράς C, όπως αυτή προκύπτει μέσω της συνοριακής συνθήκης, πως για

γωνία στήριξης η μετακίνηση U είναι μηδενική. Συγκεκριμένα, προκύπτουν τα παρακάτω:

$$C = \frac{1}{6} \frac{Q(4a^2c^2 + 5ac + 1)}{a^2Eh\sqrt{4ac + 1}}$$

Και τελικώς οι μετακινήσεις υπολογίζονται ως εξής:

$$U = \frac{1}{24} \frac{\sin(\varphi) Q}{a^2Eh} \left[\frac{16a^2c^2 + 20ac + 4}{\sqrt{4ac + 1}} - \frac{3}{\cos(\varphi)} - \frac{1}{\cos(\varphi)^3} \right]$$

$$W = \frac{1}{24} \frac{Q}{a^2Eh} \left[\frac{\cos(\varphi) (16a^2c^2 + 20ac + 4)}{\sqrt{4ac + 1}} - \frac{3\nu + 1}{\cos(\varphi)^2} \right] \quad (5.46)$$

Ομοίως με προηγούμενως, η τιμή της δύναμης του δακτυλίου για κινητά φορτία υπολογίζεται και προκύπτει ως εξής, με βάση και την εξίσωση (5.45):

$$T = \frac{Q}{8a^2} \tan(\varphi_{\text{τομή}})^2 \quad (5.47)$$

Ας θεωρήσουμε ένα παραβολικό κέλυφος εκ περιστροφής με τα παρακάτω χαρακτηριστικά ώστε να σχεδιαστούν και να παρατηρηθούν οι καμπύλες των εξισώσεων.

Πίνακας 5.2

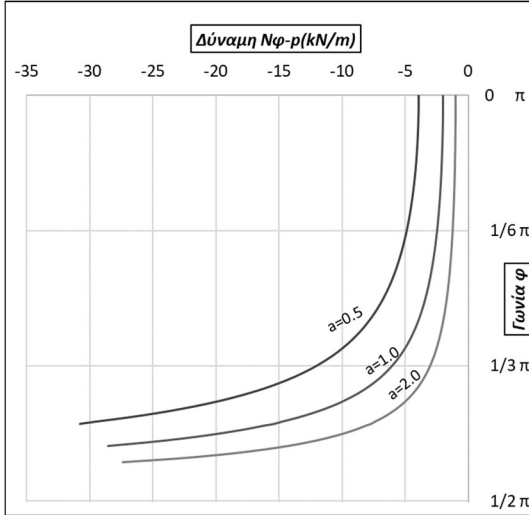
Γεωμετρία		Υλικό	
c(m)	5.00	E(kPa)	210000000
b	0	γ(kN/m ³)	78.5
φ ₁ (°)	0.00°	ν	0.30
φ _{τομής} (°)	tan ⁻¹ (√20a)		

Τα διαγράμματα θα σχεδιαστούν για διάφορες τιμές της καμπυλότητας a ώστε να παρατηρηθεί η επιρροή της. Επίσης, το φορτίο p του ίδιου βάρους είναι ίσο με $p = \gamma \cdot h = 78.5 \cdot 0.10 = 7.85 \text{ kN/m}^2$ και η επιφάνεια εφαρμογής του είναι ίση με την επιφάνεια του παραβολοειδούς στο χώρο η οποία προκύπτει ως εξής έπειτα από άλγεβρα:

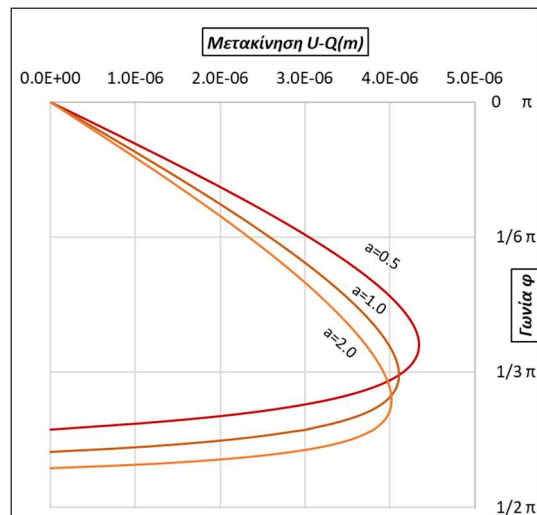
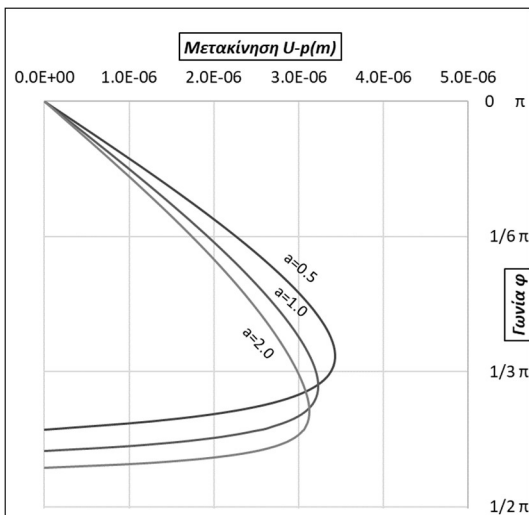
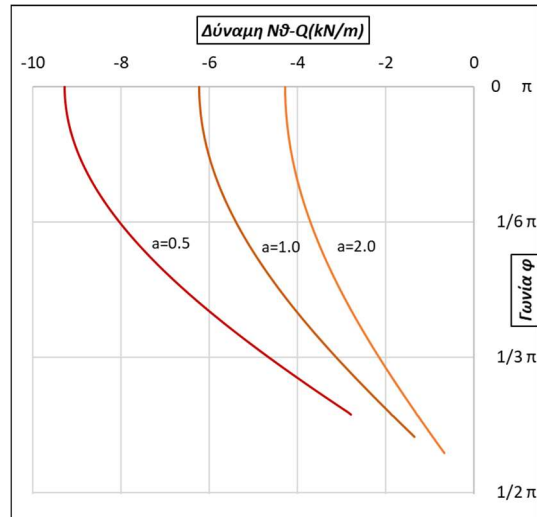
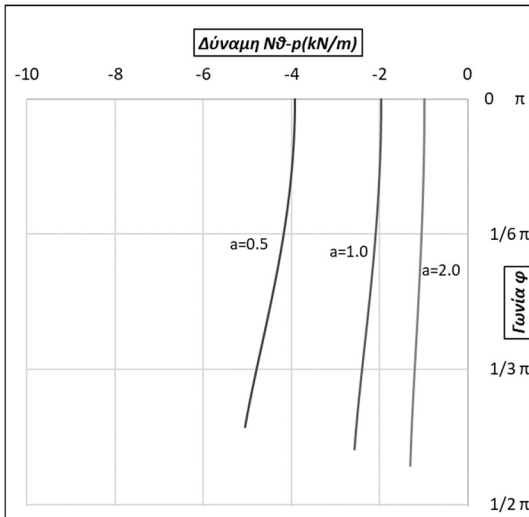
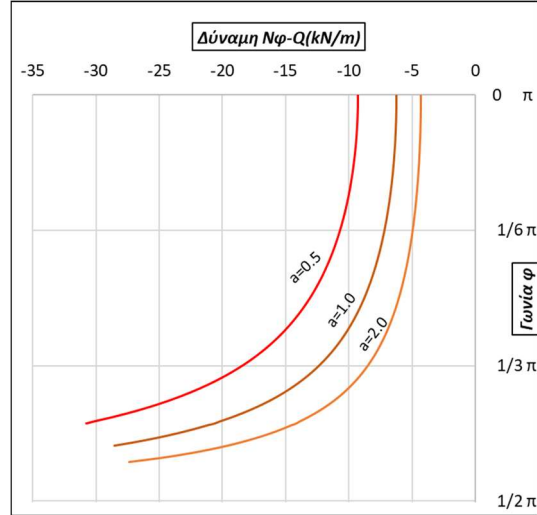
$$A_p = \frac{\pi}{6} \frac{(4r(\varphi_{\text{τομής}})^2 a^2 + 1)^{\frac{3}{2}} - 1}{a^2}$$

Θεωρούμε πως το φορτίο Q , που έχει επιφάνεια εφαρμογής ίση με το εμβαδόν του κύκλου ακτίνας $r(\varphi_1)$ και άρα $A_Q = \pi r(\varphi_{\text{τομής}})^2$, έχει τιμή ίση με $Q = p \cdot A_p / A_Q$. Παρακάτω, παρουσιάζονται τα διαγράμματα των δυνάμεων και των μετακινήσεων για τις δύο φορτίσεις p , Q για διάφορες τιμές της καμπυλότητας a όπως και για σταθερή καμπυλότητα για σύγκριση μεταξύ των δύο φορτίσεων.

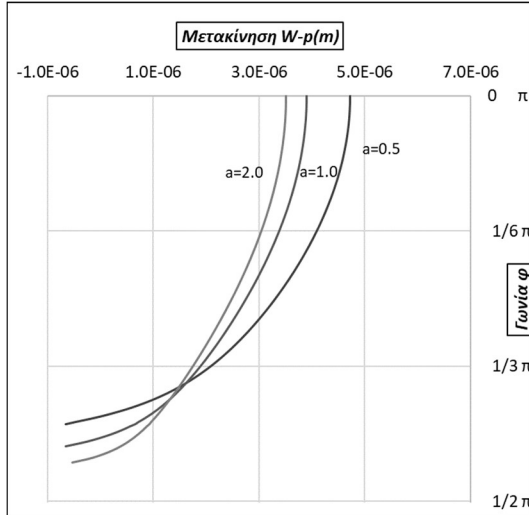
Φόρτιση p (Μεταβλητή καμπ.)



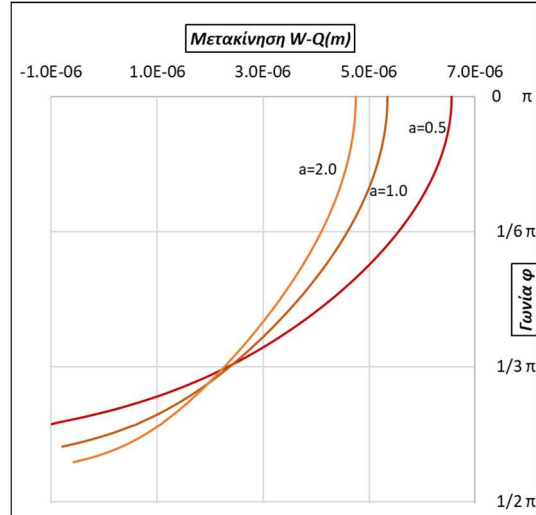
Φόρτιση Q (Μεταβλητή καμπ)



Φόρτιση p (Μεταβλητή καμπ.)

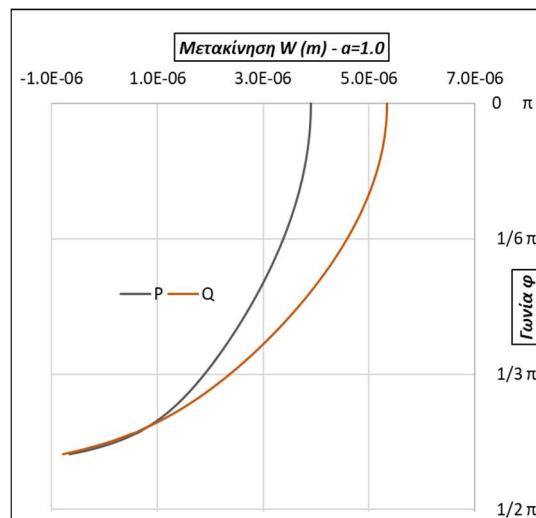
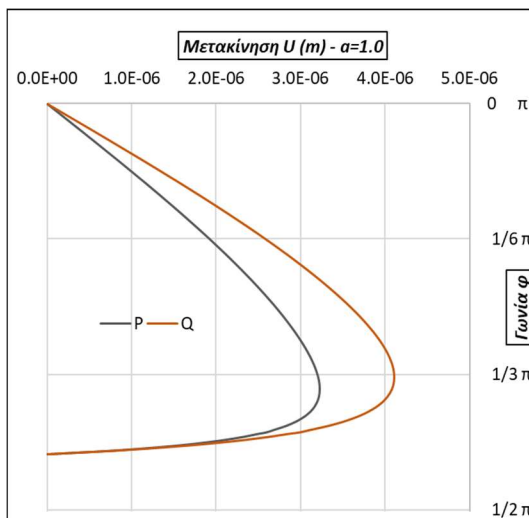
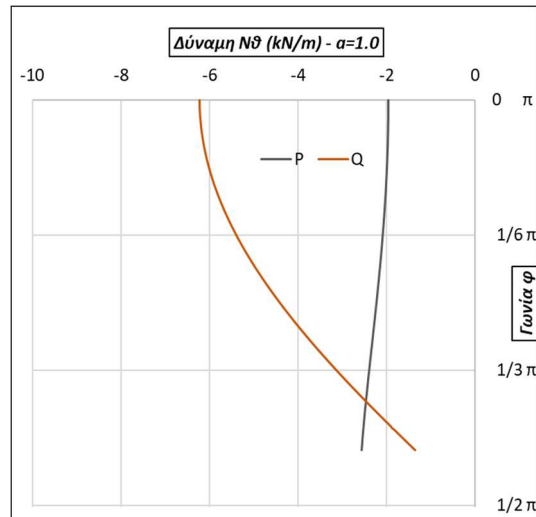
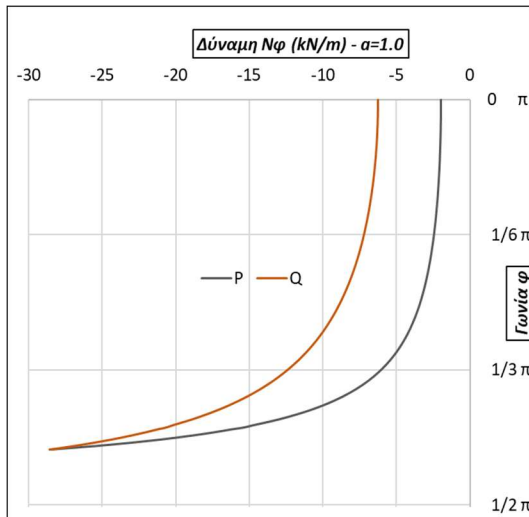


Φόρτιση Q (Μεταβλητή καμπ.)



Διαγράμματα 5.4 – Μεγέθη κλειστού παραβολικού κελύφους

Παρακάτω, παρουσιάζονται τα διαγράμματα για σταθερή καμπυλότητα, $a=1.0$ και για τις δύο φορτίσεις.



Διαγράμματα 5.5 – Σύγκριση φορτίσεων κλειστού παραβολικού κελύφους

Παρατηρήσεις.

1. Οι κατανομές των μεγεθών είναι αρκετά παρόμοιες και στις δύο φορτίσεις με εξαίρεση τη δύναμη N_θ . Η αύξηση της καμπυλότητας σημαίνει μείωση των τιμών των δυνάμεων όπως και των μετακινήσεων.
2. Και για τις δύο φορτίσεις οι τιμές της δύναμης N_φ και των μετακινήσεων για $\varphi = \varphi_{\text{τομής}}$ είναι ίδιες σε αντίθεση με τη δύναμη N_θ .

5.3.3.2 Κατακόρυφα φορτία σε παραβολικό κέλυφος με ανοιχτή κορυφή

Παρομοίως με το σφαιρικό κέλυφος εξετάζεται παρακάτω το παραβολικό με ανοιχτή κορυφή και κατανεμημένο φορτίο q στην κορυφή όπως φαίνεται στο σχήμα 5.7 για το σφαιρικό κέλυφος. Τα κατακόρυφα φορτία που εφαρμόζονται είναι το ίδιο βάρος αλλά και κινητά φορτία που εφαρμόζονται σε οριζόντια επιφάνεια όπως το χιόνι. Οι φορτίσεις του ίδιου βάρους αλλά και των κινητών φορτίων είναι όμοιες με προηγουμένως. Παρακάτω, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των σχέσεων υπολογισμού των μεγεθών μέσω συμβολικού προγραμματισμού και της MAPLE.

A) Ίδιο βάρος

$$N_\varphi = \frac{1}{\sin(\varphi) \tan(\varphi)} \left[C1 - \frac{1}{6} \frac{p}{a \cos(\varphi)^3} \right]$$

$$N_\theta = -\frac{1}{2} \frac{p}{a} - \frac{C1 \cos(\varphi)^3}{\sin(\varphi)^2} + \frac{1}{6} \frac{p}{\sin(\varphi)^2 a}$$

Όπου $C1$ σταθερά. Ο υπολογισμός της σταθεράς $C1$ γίνεται με την σχέση ισορροπίας που ισχύει στη ανοιχτή κορυφή του κελύφους δηλαδή, πως για $\varphi = \varphi_1$ ισχύει:

$$N_{\varphi_1} + \frac{q}{\sin(\varphi_1)} = 0 \rightarrow C1 = -q \tan(\varphi_1) + \frac{1}{6} \frac{p}{a \cos(\varphi_1)^3}$$

Και οι σχέσεις των δυνάμεων καταλήγουν στις παρακάτω.

$$N_\varphi = -\frac{1}{\sin(\varphi) \tan(\varphi)} \left[\frac{p}{6a} \left(\frac{1}{\cos(\varphi)^3} - \frac{1}{\cos(\varphi_1)^3} \right) + q \tan(\varphi_1) \right]$$

$$N_\theta = \frac{1}{6} \frac{p}{a} \left[\frac{1}{\sin(\varphi)^2} - 3 - \frac{\cos(\varphi)^3}{\cos(\varphi_1)^3 \sin(\varphi)^2} \right] + q \tan(\varphi_1) \frac{\cos(\varphi)^3}{\sin(\varphi)^2}$$

(5.48)

Ομοίως με τις δυνάμεις υπολογίζονται και οι μετακινήσεις του παραβολικού εκ περιστροφής κελύφους. Η συνοριακή συνθήκη είναι ίδια με προηγουμένως και προκύπτουν οι σχέσεις υπολογισμού των μετακινήσεων U , W οι οποίες λόγω του όγκου τους δεν περιλαμβάνονται εδώ.

Παρακάτω παρουσιάζεται η δύναμη T του δακτυλίου η οποία προκύπτει με παρόμοιο τρόπο όπως προηγουμένως.

$$T = -N_\varphi(\varphi_{\text{τομής}}) \cdot R_2(\varphi_{\text{τομής}}) \cdot \sin(\varphi_{\text{τομής}}) \cdot \cos(\varphi_{\text{τομής}}) = -N_\varphi(\varphi_{\text{τομής}}) \cdot \frac{\sin(\varphi_{\text{τομής}})^2}{2a \cdot \cos(\varphi_{\text{τομής}})}$$

Και με χρήση της εξίσωσης (5.48) προκύπτει πως:

$$T = \frac{1}{2a} \left[\frac{p}{6a} \left(\frac{1}{\cos(\varphi_{\text{τομή}})^3} - \frac{1}{\cos(\varphi 1)^3} \right) + q \tan(\varphi 1) \right] \quad (5.49)$$

B) Κινητά φορτία

$$N_{\varphi} = \frac{1}{\sin(\varphi) \tan(\varphi)} \left[C1 - \frac{1}{4} \frac{Q}{a \cos(\varphi)^2} \right]$$

$$N_{\theta} = -\frac{1 \cos(\varphi) Q}{2 a} - \frac{C1 \cos(\varphi)^3}{\sin(\varphi)^2} + \frac{1 \cos(\varphi) Q}{4 \sin(\varphi)^2 a}$$

Όπου C1 σταθερά. Ο υπολογισμός της σταθεράς C1 γίνεται με την σχέση ισορροπίας που ισχύει στη ανοιχτή κορυφή του κελύφους δηλαδή, πως για φ=φ1 ισχύει:

$$N_{\varphi 1} + \frac{q}{\sin(\varphi 1)} = 0 \rightarrow C1 = -q \tan(\varphi 1) + \frac{1}{4} \frac{Q}{a \cos(\varphi 1)^2}$$

Και οι σχέσεις των δυνάμεων καταλήγουν στις παρακάτω.

$$N_{\varphi} = -\frac{1}{\sin(\varphi) \tan(\varphi)} \left[\frac{Q}{4a} \left(\frac{1}{\cos(\varphi)^2} - \frac{1}{\cos(\varphi 1)^2} \right) + q \tan(\varphi 1) \right]$$

$$N_{\theta} = \frac{Q \cos(\varphi)}{4 a} \left[\frac{1}{\sin(\varphi)^2} - 2 - \frac{\cos(\varphi)^2}{\cos(\varphi 1)^2 \sin(\varphi)^2} \right] + q \tan(\varphi 1) \frac{\cos(\varphi)^3}{\sin(\varphi)^2}$$

(5.50)

Ομοίως με τις δυνάμεις υπολογίζονται και οι μετακινήσεις του παραβολικού εκ περιστροφής κελύφους. Η συνοριακή συνθήκη είναι ίδια με προηγουμένως και προκύπτουν οι σχέσεις υπολογισμού των μετακινήσεων U, W οι οποίες λόγω του όγκου τους δεν περιλαμβάνονται εδώ. Παρακάτω, υπολογίζεται η δύναμη T του δακτυλίου η οποία προκύπτει ως εξής:

$$T = \frac{1}{2a} \left[\frac{Q}{4a} \left(\frac{1}{\cos(\varphi_{\text{τομή}})^2} - \frac{1}{\cos(\varphi 1)^2} \right) + q \tan(\varphi 1) \right] \quad (5.49)$$

Ας θεωρήσουμε ένα παραβολικό κέλυφος εκ περιστροφής με τα παρακάτω χαρακτηριστικά ώστε να παρατηρηθούν οι καμπύλες των εξισώσεων.

Πίνακας 5.3

Γεωμετρία		Υλικό	
c(m)	5.00	E(kPa)	210000000
b(m)	0	γ(kN/m ³)	78.5
φ ₁ (°)	30.00°	ν	0.30
φ _{τομή} (°)	tan ⁻¹ (√20a)		

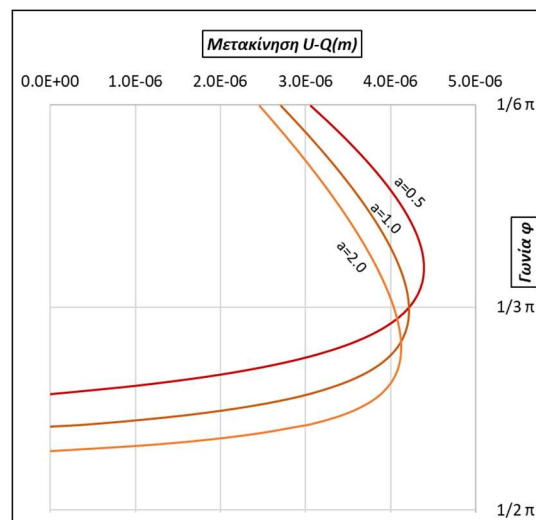
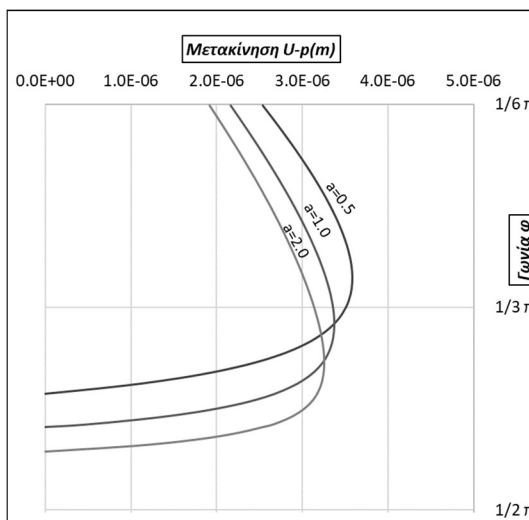
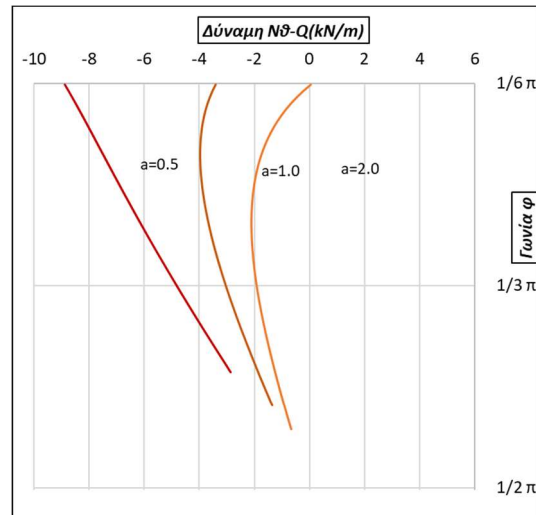
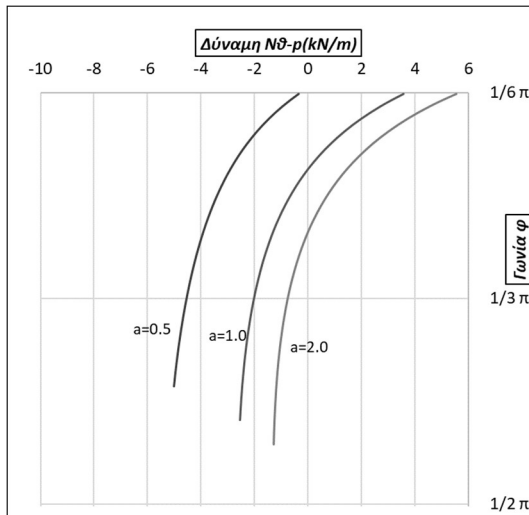
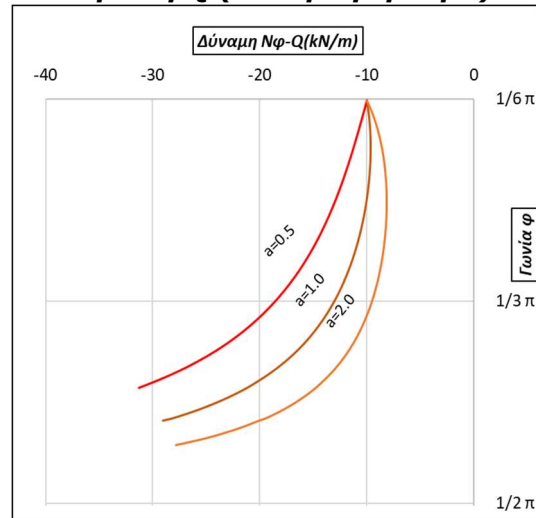
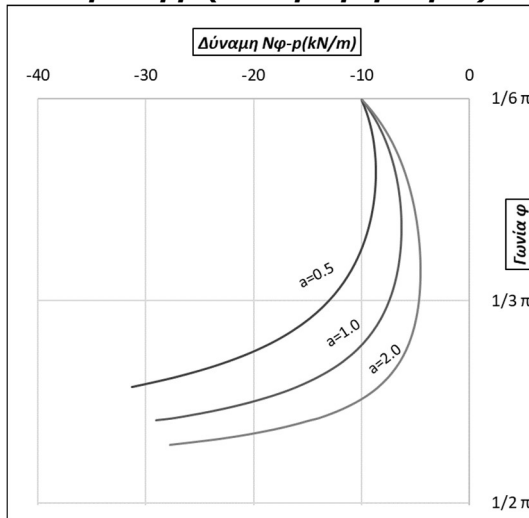
Τα διαγράμματα των μεγεθών θα σχεδιαστούν με τον ίδιο τρόπο όπως και για το κλειστό παραβολικό κέλυφος. Το ίδιο βάρος είναι ίδιο και αλλάζει η επιφάνεια εφαρμογής του η οποία προκύπτει ως εξής:

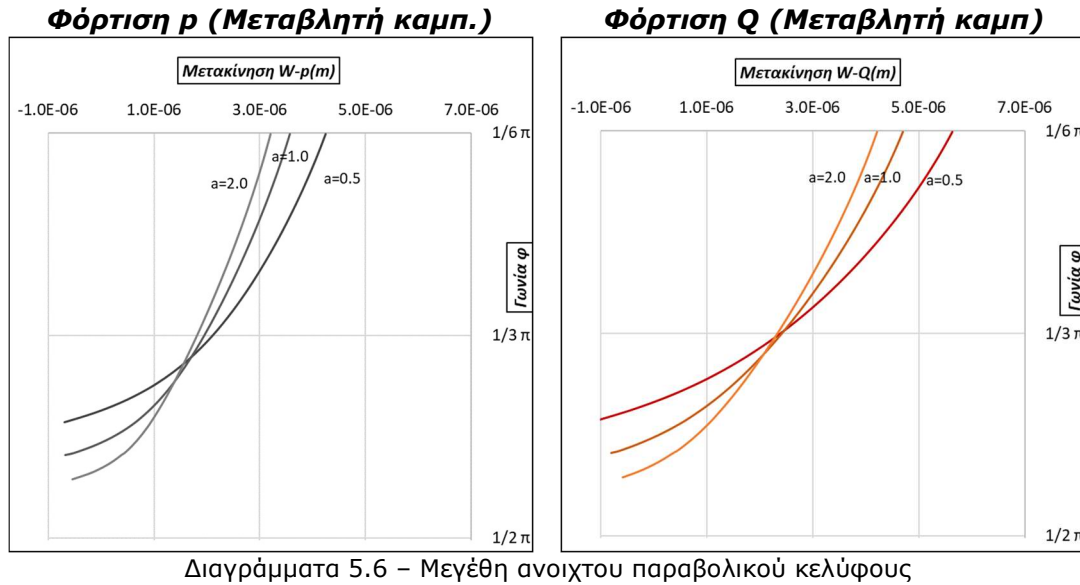
$$A_p = \frac{\pi}{6} \frac{(4 r(\varphi_{\text{τομή}})^2 a^2 + 1)^{\frac{3}{2}} - (4 r(\varphi 1)^2 a^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{a^2}$$

Παρακάτω φαίνονται τα διαγράμματα των μεγεθών για τις δύο φορτίσεις p , Q όπως και προηγουμένως για διάφορες τιμές της καμπυλότητας.

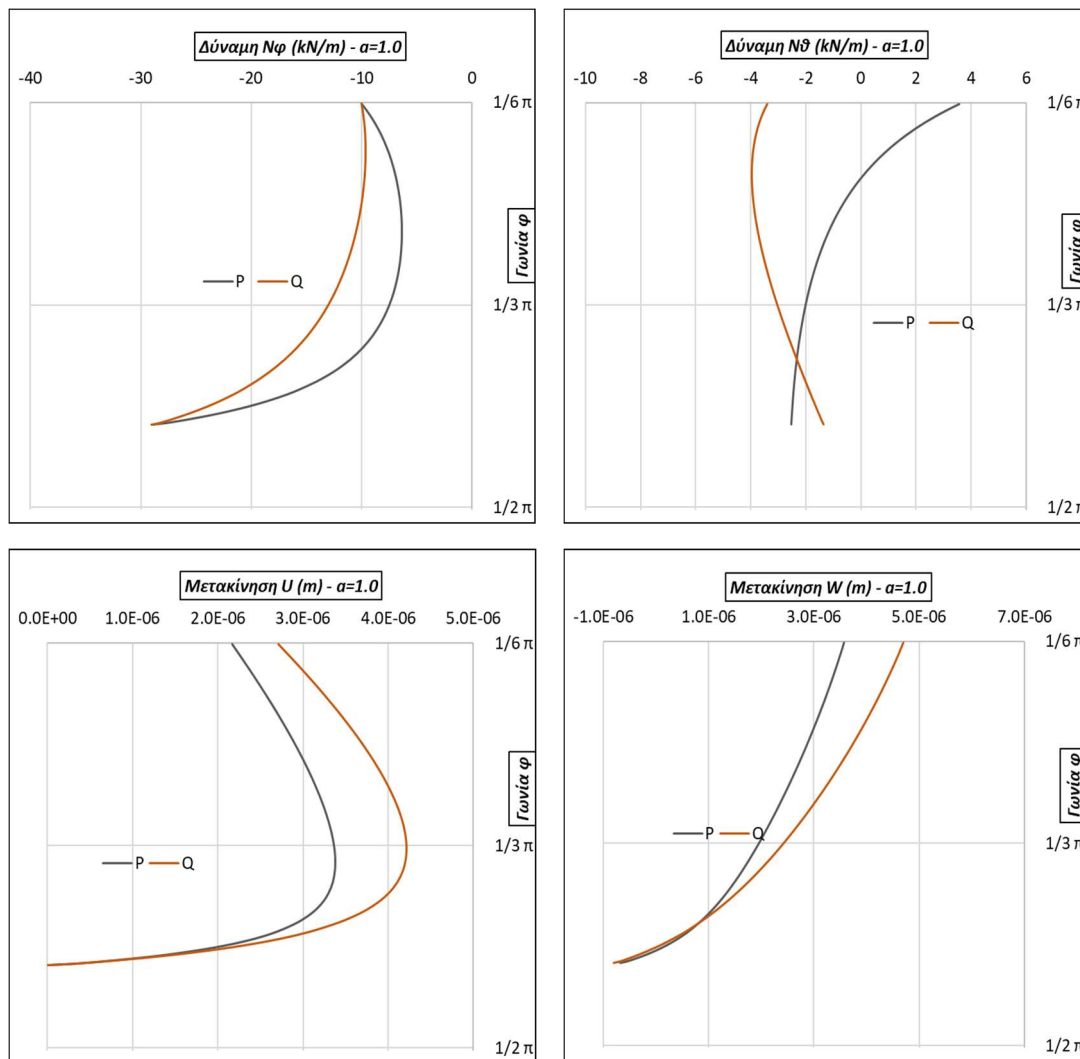
Φόρτιση p (Μεταβλητή καμπ.)

Φόρτιση Q (Μεταβλητή καμπ)





Παρακάτω, παρουσιάζονται τα διαγράμματα για σταθερή καμπυλότητα, $a=1.0$ και για τις δύο φορτίσεις.



Παρατηρήσεις.

1. Οι κατανομές των μεγεθών είναι αρκετά παρόμοιες και στις δύο φορτίσεις με εξαίρεση τη δύναμη $N\theta$. Η αύξηση της καμπυλότητας σημαίνει μείωση των τιμών των δυνάμεων όπως και των μετακινήσεων.
2. Και για τις δύο φορτίσεις οι τιμές της δύναμης $N\varphi$ και των μετακινήσεων για $\varphi = \varphi_{\text{τομής}}$ είναι ίδιες σε αντίθεση με τη δύναμη $N\theta$.

5.4 Ασύμμετρη φόρτιση

5.4.1 Σχέσεις ασύμμετρης φόρτισης

Η ασύμμετρη φόρτιση περιλαμβάνει φορτίσεις που μεταβάλλονται και κατά τη γωνία θ , συνεπώς είναι κατηγορίας 2. Οι γενικές εξισώσεις για τις δυνάμεις των κελυφών εκ περιστροφής είναι οι σχέσεις (5.7) οι οποίες φαίνονται παρακάτω.

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (N_{\varphi} \cdot r) + R_1 \frac{\partial N_{\varphi\theta}}{\partial \theta} + N_{\varphi} R_2 \cos \varphi + R_2 R_1 (\cos \varphi \cdot p_3 + \sin \varphi \cdot p_1) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (N_{\varphi\theta} \cdot r) + N_{\varphi\theta} R_1 \cos \varphi - R_2 \frac{\partial N_{\varphi}}{\partial \theta} + R_2 R_1 \left(\sin \varphi \cdot p_2 - \frac{dp_3}{d\theta} \right) = 0$$

Θεωρούμε τη παρακάτω αλλαγή μεταβλητών, δηλαδή:

$$N_{\varphi} = \frac{U}{R_2 \sin^2 \varphi}, \quad N_{\varphi\theta} = \frac{V}{R_2^2 \sin^2 \varphi} \quad (5.50)$$

Με αντικατάσταση των (5.50) και κάποιους μετασχηματισμούς προκύπτει το παρακάτω σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων.

$$\begin{aligned} \frac{R_2^2 \sin \varphi}{R_1} \frac{\partial U}{\partial \varphi} + \frac{\partial V}{\partial \theta} &= -(\cos \varphi \cdot p_3 + \sin \varphi \cdot p_1) R_2^3 \sin^2 \varphi \\ -\frac{R_2}{\sin \varphi} \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial \varphi} &= \left(\frac{dp_3}{d\theta} - \sin \varphi \cdot p_2 \right) R_1 R_2^2 \sin \varphi \end{aligned} \quad (5.51)$$

Παραγωγίζοντας τη πρώτη σχέση ως προς φ και τη δεύτερη ως προς θ και αφαιρώντας κατά μέλη τη δεύτερη από τη πρώτη, προκύπτει η παρακάτω δεύτερης τάξης μερική διαφορική εξίσωση:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_1 R_2 \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{R_2^2 \sin \varphi}{R_1} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{R_1 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} &= F(\varphi, \theta) \\ F(\varphi, \theta) &= -\frac{1}{R_1 R_2 \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} [(\cos \varphi \cdot p_3 + \sin \varphi \cdot p_1) R_2^3 \sin^2 \varphi] \\ &\quad + R_2 \left(\frac{dp_2}{d\theta} \sin \varphi - \frac{d^2 p_3}{d\theta^2} \right) \end{aligned} \quad (5.52)$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφτεί και στη παρακάτω μορφή:

$LU = F(\varphi, \theta)$, όπου L έχει τη παρακάτω μορφή:

$$L(\dots) \equiv \frac{1}{R_1 R_2 \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{R_2^2 \sin \varphi}{R_1} \frac{\partial(\dots)}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{R_1 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2(\dots)}{\partial \theta^2}$$

Οι παραπάνω σχέσεις επιλύονται εφόσον θεωρηθούν τα φορτία και τα μεγέθη ως σειρές Fourier. Συγκεκριμένα, ισχύουν τα παρακάτω.

$$p_1 = \sum_{n=0}^{\infty} p_{1n} \cos(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} p_{1n}^* \sin(n\theta), \quad p_2 = \sum_{n=0}^{\infty} p_{2n} \cos(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} p_{2n}^* \sin(n\theta)$$

$$p_3 = \sum_{n=0}^{\infty} p_{3n} \cos(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} p_{3n}^* \sin(n\theta)$$

Όπου οι όροι p_{in} και p_{in}^* είναι συναρτήσεις μονάχα της γωνίας φ . Για την μεμβρανική ανάλυση των κελυφών αρκεί να χρησιμοποιηθεί μόνο ένας από του δύο όρους έστω ο παρακάτω:

$$p_1^{(n)} = p_{1n} \cos(n\theta), \quad p_2^{(n)} = p_{2n} \sin(n\theta), \quad p_3^{(n)} = p_{3n} \cos(n\theta) \quad (5.53)$$

Επίσης, η μεταβλητή U ορίζεται από τη παρακάτω σχέση:

$$U = U_n \cos(n\theta) \quad (5.54)$$

Με αντικατάσταση των (5.53-5.56) στην σχέση (5.52) προκύπτει το παρακάτω:

$$\frac{1}{R_1 R_2 \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{R_2^2 \sin \varphi}{R_1} \frac{dU_n}{d\varphi} \right) - \frac{n^2}{R_1 \sin^2 \varphi} U_n = F_n(\varphi)$$

$$F_n(\varphi) = -\frac{1}{R_1 R_2 \sin \varphi} \frac{d}{d\varphi} [(\cos \varphi \cdot p_{3n} + \sin \varphi \cdot p_{1n}) R_2^3 \sin^2 \varphi + R_2 n (p_{2n} \sin \varphi + n p_{3n})] \quad (5.55)$$

Η οποία είναι μια διαφορική εξίσωση ως προς $U_n(\varphi)$. Επίσης, για τη μεταβλητή V ισχύει το παρακάτω:

$$V = V_n \sin(n\theta) \quad (5.56)$$

Υπολογίζοντας την $U_n(\varphi)$ και με αντικατάσταση των σχέσεων (5.53, 5.54, 5.56) στην πρώτη εξίσωση του αρχικού συστήματος εξισώσεων (5.51) υπολογίζεται και η μεταβλητή V_n και προκύπτει;

$$V_n(\varphi) = -\frac{R_2^2 \sin \varphi}{n R_1} \frac{dU_n}{d\varphi} - (\cos \varphi \cdot p_{3n} + \sin \varphi \cdot p_{1n}) R_2^3 \sin^2 \varphi \quad (5.57)$$

Έχοντας υπολογίσει τις μεταβλητές U_n , V_n υπολογίζονται και οι U , V οπότε μέσω των σχέσεων (5.50) και της τρίτης εξίσωσης από το αρχικό σύστημα (5.5) υπολογίζονται οι δυνάμεις σε μορφή όπως φαίνεται παρακάτω:

$$N\varphi^{(n)} = N\varphi_n \cos(n\theta), \quad N\varphi\theta^{(n)} = N\varphi\theta_n \sin(n\theta), \quad N\theta^{(n)} = N\theta_n \cos(n\theta) \quad (5.58)$$

Επίσης, αφού έχουν υπολογιστεί οι δυνάμεις, οι μετακινήσεις υπολογίζονται από το αρχικό σύστημα εξισώσεων στην παρακάτω μορφή:

$$u^{(n)} = u_n \cos(n\theta), \quad v^{(n)} = v_n \sin(n\theta), \quad w^{(n)} = w_n \cos(n\theta) \quad (5.59)$$

Οι σχέσεις των μετακινήσεων θα τροποποιηθούν στις παρακάτω:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{R_1} \cdot \frac{dun}{d\varphi} - \frac{wn}{R_1} = \frac{1}{Eh} \cdot (N_{\varphi n} - \nu N_{\theta n}) \\ \varepsilon_2 &= \frac{n}{r} \nu n + \frac{1}{R_1 r} \cdot \frac{\partial r}{\partial \varphi} \cdot un - \frac{wn}{R_2} = \frac{1}{Eh} \cdot (N_{\theta n} - \nu N_{\varphi n}) \\ \gamma_{12} &= \frac{r}{R_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\nu n}{r} \right) - \frac{n}{r} \cdot un = \frac{2(1+\nu)}{Eh} \cdot N_{\varphi \theta n}\end{aligned}\tag{5.60}$$

Συνεπώς, για γενική φόρτιση οι σχέσεις των δυνάμεων και των μετακινήσεων προκύπτουν από τις παραπάνω εξισώσεις. Ως εφαρμογή, θα χρησιμοποιηθούν τα σεισμικά φορτία και η ανεμοπίεση. Οι δύο φορτίσεις θα θεωρηθούν ως ισοδύναμες στατικές φορτίσεις.

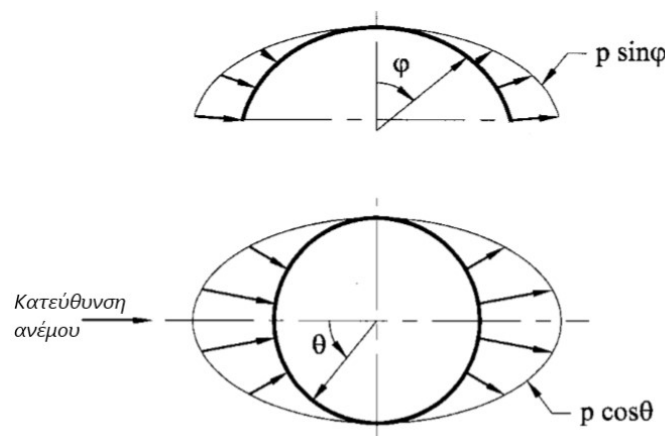
5.4.2 Φορτία ανέμου σε κελύφη εκ περιστροφής

Στη γενική περίπτωση ασύμμετρης φόρτισης θόλων - οροφών, οι εξισώσεις που τις περιγράφουν είναι εκείνες που παρουσιάστηκαν παραπάνω. Στην παρακάτω εφαρμογή, θεωρούνται τα φορτία ανέμου. Η τιμή και η κατανομή της έντασης του ανέμου μπορούν να καθοριστούν με τη δοκιμή μοντέλων σε αεροδυναμικές σήραγγες.

$$p_1 = 0, \quad p_2 = 0, \quad p_3 = p \sin(\varphi) \cos(\theta)\tag{5.61}$$

όπου p η τιμή της στατικής έντασης της ανεμοπίεσης. Η μορφή της φόρτισης φαίνεται στο σχήμα 5.10. Ο όρος n είναι ίσος με μονάδα αφού η φόρτιση είναι αντισυμμετρική και οι όροι $p_1 n$, $p_2 n$ επίσης. Με βάση τη φόρτιση της ανεμοπίεσης οι εξισώσεις προκύπτουν ως εξής:

$$\begin{aligned}\frac{1}{R_1 R_2 \sin \varphi} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{R_2^2 \sin \varphi}{R_1} \frac{dU_1}{d\varphi} \right) - \frac{1}{R_1 \sin^2 \varphi} U_1 &= F_1(\varphi) \\ F_1(\varphi) &= -p \left[\frac{1}{R_1 R_2 \sin \varphi} \frac{d}{d\varphi} (R_2^3 \sin^3 \varphi \cos \varphi) - R_2 \sin(\varphi) \right]\end{aligned}\tag{5.62}$$



Σχήμα 5.10

Η σχέση (5.62) τροποποιείται στην παρακάτω εφόσον εφαρμοστεί μία επιπλέον αλλαγή μεταβλητής:

$$U_1^* = U_1 R_2 \sin(\varphi)$$

$$\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{R_1 \sin\varphi} \frac{dU_1^*}{d\varphi} \right) = R_1 F_1(\varphi) \quad (5.63)$$

Με διπλή ολοκλήρωση της παραπάνω προκύπτει η συνάρτηση U_1^* και συνεπώς η U_1 . Έχοντας υπολογίσει την U_1 , η V_1 υπολογίζεται από τη σχέση (5.57) η οποία προκύπτει:

$$V_1(\varphi) = -\frac{R_2^2 \sin\varphi}{R_1} \frac{dU_1}{d\varphi} - p R_2^3 \cos\varphi \sin^3 \varphi \quad (5.64)$$

Από τις σχέσεις (5.50) υπολογίζονται οι δυνάμεις $N_{\varphi 1}$ και $N_{\varphi\theta 1}$ και η δύναμη $N_{\theta 1}$ από την τρίτη αλγεβρική αρχική εξίσωση.

Σε σχέση με τις μετακινήσεις, αφού έχουν υπολογιστεί οι σχέσεις των δυνάμεων, με χρήση των εξισώσεων (5.60) προκύπτουν και οι σχέσεις των μετακινήσεων σε μορφή όπως της σχέσης (5.59).

5.4.2.1 Σφαιρικό κέλυφος

Οι σχέσεις των μεγεθών για το σφαιρικό κέλυφος προκύπτουν, λαμβάνοντας υπόψη πως οι ακτίνες καμπυλότητας $R_1, R_2 = R$, τις παραπάνω εξισώσεις και με χρήση συμβολικού προγραμματισμού και τη MAPLE, ως εξής:

$$N_{\varphi 1} = \frac{1}{R^2 \sin(\varphi)^3} \left[-\frac{1}{3} \cos(\varphi)^4 R^3 p + \cos(\varphi)^2 R^3 p - \cos(\varphi) C_1 + C_2 \right]$$

$$N_{\theta 1} = -\frac{1}{R^2 \sin(\varphi)^3} \left[-\frac{1}{3} \cos(\varphi)^4 R^3 p + \cos(\varphi)^2 R^3 p - \cos(\varphi) C_1 + C_2 \right] - R p \sin(\varphi)$$

$$N_{\varphi\theta 1} = -\frac{1}{R^2 \sin(\varphi)^3} \left[\frac{1}{3} \cos(\varphi)^3 R^3 p - \cos(\varphi) R^3 p - \cos(\varphi) C_2 + C_1 \right]$$

Οι όροι C_1, C_2 είναι σταθερές ολοκλήρωσης. Εάν, το σφαιρικό κέλυφος είναι κλειστό στη κορυφή του, τότε οι εξισώσεις υπολογισμού των σταθερών C_1, C_2 προκύπτουν από την απαίτηση να υπάρχει το όριο έστω της $N_{\varphi 1}$ για $\varphi=0$. Με χρήση κανόνα L'Hospital, προκύπτουν:

$$C_1 = \frac{2}{3} R^3 p, \quad C_2 = 0$$

Και οι εξισώσεις τελικώς γίνονται:

$$N_{\varphi} = -\frac{R p \sin(\varphi) \cos(\varphi) (\cos(\varphi) + 2)}{3 \cos(\varphi)^2 + 2 \cos(\varphi) + 1} \cos(\theta)$$

$$N_{\theta} = -\frac{R p \sin(\varphi) (2 \cos(\varphi)^2 + 4 \cos(\varphi) + 3)}{3 \cos(\varphi)^2 + 2 \cos(\varphi) + 1} \cos(\theta)$$

$$N_{\varphi\theta} = -\frac{R p \sin(\varphi) (\cos(\varphi) + 2)}{3 \cos(\varphi)^2 + 2 \cos(\varphi) + 1} \sin(\theta)$$

(5.65)

Για σφαιρικό κέλυφος ανοιχτό τότε οι συνοριακές συνθήκες ορίζονται από τις τιμές των δυνάμεων $N_{\varphi 1}$ και $N_{\varphi\theta 1}$ στη γωνία του ανοίγματος φ_1 , έστω $N_{\varphi 0}$ και $N_{\varphi\theta 0}$, οπότε προκύπτουν οι σταθερές.

$$C_1 = \cos(\varphi_1) R^3 p \left(-\frac{1}{3} \cos(\varphi_1)^2 + 1 \right) + R^2 \sin(\varphi_1) (N_{\varphi 0} \cos(\varphi_1) - N_{\varphi\theta 0})$$

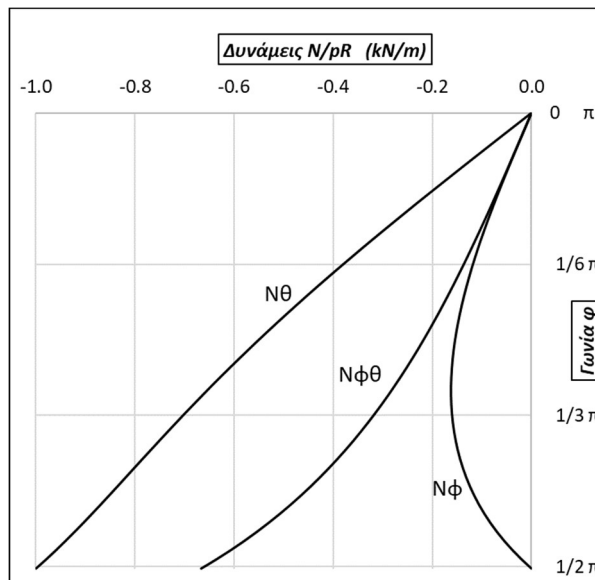
$$C2 = R^2 \sin(\varphi_1) (N\varphi_0 - \cos(\varphi_1) N\varphi\theta_0)$$

Και με αντικατάσταση προκύπτουν οι σχέσεις για τις δυνάμεις. Οι τελικές σχέσεις των δυνάμεων χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των μετακινήσεων

Οι μετακινήσεις υπολογίζονται από τις σχέσεις (5.60). Οι συνοριακές συνθήκες είναι πως για τη γωνία στήριξης οι μετακινήσεις $U1$, $V1$ είναι μηδενικές ενώ δε μηδενίζεται η μετακίνηση $W1$. Οι σχέσεις υπολογίζονται με συμβολικό προγραμματισμό, όμως δεν περιλαμβάνονται λόγω του όγκου τους. Ενδεικτικά αναφέρονται οι σταθερές $C3$, $C4$ οι οποίες για γωνία στήριξης $\pi/2-90^\circ$ προκύπτουν:

$$C3 = \frac{R^2 p(1 + \nu)}{Eh} , C4 = \frac{1}{3} \frac{R^2 p(1 + \nu)}{Eh}$$

Παρακάτω φαίνεται το διάγραμμα των δυνάμεων σε σχέση με τη φόρτιση p και την ακτίνα R . Οι δυνάμεις $N\varphi$, $N\theta$ αναφέρονται σε γωνία $\theta=0^\circ$, ενώ η δύναμη $N\varphi\theta$ σε γωνία $\theta=90^\circ$. Η γωνία στήριξης είναι 90° .



Διάγραμμα 5.8 Κατανομές δυνάμεων σφαιρικού κελύφους

Παρατηρήσεις.

1. Η δύναμη $N\varphi$ μηδενίζεται στη γωνία $\varphi=\pi/2$, σε αντίθεση με τις άλλες δύο. Η μέγιστη τιμή της $N\varphi$ παρατηρείται στη γωνία $\varphi \approx \pi/4$.
2. Η δύναμη $N\theta$ παρουσιάζει τη μέγιστη τιμή εκ των τριών στη στήριξη.
3. Όλες οι δυνάμεις μηδενίζονται στην κορυφή και είναι αρνητικές(θλιπτικές).

5.4.2.2 Παραβολικό κέλυφος

Οι σχέσεις των μεγεθών για το παραβολικό κέλυφος προκύπτουν με τον ίδιο τρόπο όπως και στο σφαιρικό. Οι ακτίνες καμπυλότητας $R1$, $R2$ δίνονται από τις εισαγωγικές σχέσεις του κεφαλαίου 5.3.3. Με αντικατάσταση των σχέσεων των $R1$, $R2$ στις παραπάνω εξισώσεις και με χρήση συμβολικού προγραμματισμού και τη MAPLE, προκύπτουν τα εξής:

$$N_{\varphi 1} = \frac{4 C2 a^3 \cos(\varphi)^5 + 2 C1 a^3 \cos(\varphi)^3 + \frac{1}{2} p \cos(\varphi)^4 - \frac{1}{3} p \cos(\varphi)^2 + \frac{1}{30} p}{a \cos(\varphi)^3 \sin(\varphi)^3}$$

$$N_{\theta 1} = -\frac{4C2a^3 \cos(\varphi)^5 + 2C1a^3 \cos(\varphi)^3 + \frac{1}{2}p\cos(\varphi)^4 - \frac{1}{3}p\cos(\varphi)^2 + \frac{1}{30}p}{a \cos(\varphi) \sin(\varphi)^3} - \frac{p\sin(\varphi)}{2a\cos(\varphi)}$$

$$N_{\varphi\theta 1} = \frac{4C1a^3 \cos(\varphi)^5 + 4C2a^3 \cos(\varphi)^5 - 2C1a^3 \cos(\varphi)^3 + \frac{1}{3}p\cos(\varphi)^2 - \frac{4}{30}p}{a \cos(\varphi)^2 \sin(\varphi)^3}$$

Οι όροι C1, C2 είναι σταθερές ολοκλήρωσης. Εάν, το παραβολικό κέλυφος είναι κλειστό στη κορυφή του, τότε οι εξισώσεις υπολογισμού των σταθερών C1, C2 προκύπτουν από την ίδια απαίτηση όπως στο σφαιρικό κέλυφος. Με χρήση κανόνα L'Hospital, προκύπτουν:

$$C1 = \frac{1}{12} \frac{p}{a^3}, \quad C2 = -\frac{11}{120} \frac{p}{a^3}$$

Και οι εξισώσεις τελικώς γίνονται:

$$N_{\varphi} = -\frac{p}{30a} \frac{\sin(\varphi) (11 \cos(\varphi)^3 + 7 \cos(\varphi)^2 - 2 \cos(\varphi) - 1)}{(\cos(\varphi)^2 + 2 \cos(\varphi) + 1) \cos(\varphi)^3} \cos(\theta)$$

$$N_{\theta} = \frac{p}{30a} \frac{\sin(\varphi) (11 \cos(\varphi)^3 - 8 \cos(\varphi)^2 - 32 \cos(\varphi) - 16)}{(\cos(\varphi)^2 + 2 \cos(\varphi) + 1) \cos(\varphi)} \cos(\theta)$$

$$N_{\varphi\theta} = -\frac{p}{30a} \frac{\sin(\varphi) (\cos(\varphi)^3 + 2 \cos(\varphi)^2 + 8 \cos(\varphi) + 4)}{(\cos(\varphi)^2 + 2 \cos(\varphi) + 1) \cos(\varphi)^2} \sin(\theta)$$

(5.66)

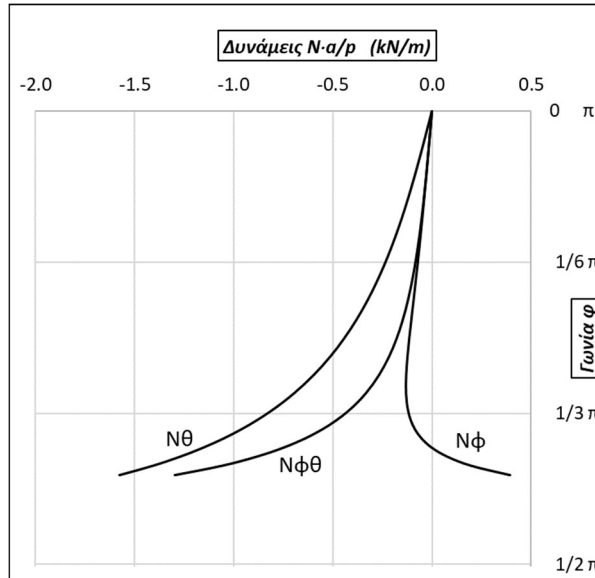
Σε περίπτωση που το παραβολικό κέλυφος είναι ανοιχτό τότε οι συνοριακές συνθήκες ορίζονται από τις τιμές των δυνάμεων $N_{\varphi 1}$ και $N_{\varphi\theta 1}$ στη γωνία του ανοίγματος $\varphi 1$, έστω $N_{\varphi 0}$ και $N_{\varphi\theta 0}$, και προκύπτουν οι αντίστοιχες σταθερές C1, C2.

Οι μετακινήσεις υπολογίζονται από τις σχέσεις (5.60). Οι συνοριακές συνθήκες είναι πως για τη γωνία στήριξης οι μετακινήσεις $U1$, $V1$ είναι μηδενικές ενώ δε μηδενίζεται η μετακίνηση $W1$. Οι σχέσεις υπολογίζονται με συμβολικό προγραμματισμό, όμως δεν περιλαμβάνονται λόγω του όγκου τους.

Παρακάτω φαίνεται το διάγραμμα των δυνάμεων σε σχέση με τη φόρτιση p και την καμπυλότητα της παραβολής a . Οι δυνάμεις N_{φ} , N_{θ} αναφέρονται σε γωνία $\theta=0^\circ$, ενώ η δύναμη $N_{\varphi\theta}$ σε γωνία $\theta=90^\circ$. Βάση των εξισώσεων παρατηρείται πως οι τιμές των δυνάμεων απειρίζονται για $\varphi=90^\circ$. Το παρακάτω διάγραμμα καταλήγει σε γωνία $\varphi \approx 72^\circ$.

Παρατηρήσεις.

1. Η δύναμη N_{θ} παρουσιάζει μεγαλύτερη αύξηση σε σχέση με την δύναμη $N_{\varphi\theta}$.
2. Η δύναμη N_{φ} έχει μικρότερες τιμές σε σχέση με τις άλλες δύο. Επίσης, το πρόσημο της αλλάζει μετά από $\varphi=66^\circ$.



Διάγραμμα 5.9 Κατανομές δυνάμεων παραβολικού κελύφους

5.4.3 Σεισμικά φορτία σε κελύφη εκ περιστροφής

Ομοίως με τα φορτία ανέμου(ανεμοπίεση) αναλύονται και τα οριζόντια σεισμικά φορτία. Η διαδικασία που ακολουθείται είναι όμοια με προηγουμένως. Θεωρούμε πως ο σεισμός δρα στη κατεύθυνση $\theta=0^\circ$ οπότε η φόρτιση που εφαρμόζεται στο κέλυφος είναι της παρακάτω μορφής:

$$p_1 = -P\cos(\varphi)\cos(\theta) \quad , \quad p_2 = P\sin(\theta) \quad , \quad p_3 = P\sin(\varphi)\cos(\theta) \quad (5.67)$$

όπου P η τιμή της στατικής έντασης της σεισμικής φόρτισης, δηλαδή $m \cdot Se(T)$, δηλαδή:

$$P = Se(T) \frac{\gamma h}{g}$$

Όπου, g: επιτάχυνση της βαρύτητας. Με βάση τη φόρτιση της (5.67) οι εξισώσεις προκύπτουν ως εξής:

$$\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{R_1 \sin\varphi} \frac{dU_1^*}{d\varphi} \right) = R_1 F_1(\varphi)$$

$$F_1(\varphi) = 2 P R_2(\varphi) \sin(\varphi)$$

$$V_1(\varphi) = - \frac{R_2^2 \sin\varphi}{R_1} \frac{dU_1}{d\varphi} \quad (5.68)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτουν οι δυνάμεις και εν συνεχεία οι μετακινήσεις.

5.4.3.1 Σφαιρικό κέλυφος

Οι σχέσεις των μεγεθών για το σφαιρικό κέλυφος προκύπτουν, λαμβάνοντας υπόψη πως οι ακτίνες καμπυλότητας $R_1, R_2 = R$, τις παραπάνω εξισώσεις και με χρήση συμβολικού προγραμματισμού και τη MAPLE, ως εξής:

$$N_{\varphi 1} = \frac{1}{R^2 \sin^3(\varphi)} [\cos(\varphi)^2 R^3 P - \cos(\varphi) C_1 + C_2]$$

$$N_{\theta 1} = - \frac{1}{R^2 \sin^3(\varphi)} [\cos(\varphi)^2 R^3 P - \cos(\varphi) C_1 + C_2] - R P \sin(\varphi)$$

$$N_{\varphi\theta 1} = -\frac{1}{R^2 \sin(\varphi)^3} [\cos(\varphi)^3 R^3 P - 2 \cos(\varphi) R^3 P - \cos(\varphi) C2 + C1]$$

Οι όροι C1, C2 είναι σταθερές ολοκλήρωσης. Εάν, το σφαιρικό κέλυφος είναι κλειστό στη κορυφή του, τότε οι εξισώσεις υπολογισμού των σταθερών C1, C2 προκύπτουν από την απαίτηση να υπάρχει το όριο έστω της $N_{\varphi 1}$ για $\varphi=0$. Με χρήση κανόνα L'Hospital, προκύπτουν:

$$C1 = 2 R^3 P \quad , \quad C2 = R^3 P$$

Και οι εξισώσεις τελικώς γίνονται:

$$N_{\varphi} = \frac{R P \sin(\varphi)}{\cos(\varphi)^2 + 2 \cos(\varphi) + 1} \cos(\theta)$$

$$N_{\theta} = -\frac{R P \sin(\varphi) (\cos(\varphi)^2 + 2 \cos(\varphi) + 2)}{\cos(\varphi)^2 + 2 \cos(\varphi) + 1} \cos(\theta)$$

$$N_{\varphi\theta} = -\frac{R P \sin(\varphi) (\cos(\varphi) + 2)}{\cos(\varphi)^2 + 2 \cos(\varphi) + 1} \sin(\theta)$$

(5.69)

Για σφαιρικό κέλυφος ανοιχτό τότε οι συνοριακές συνθήκες ορίζονται από τις τιμές των δυνάμεων $N_{\varphi 1}$ και $N_{\varphi\theta 1}$ στη γωνία του ανοίγματος φ_1 , έστω $N_{\varphi 0}$ και $N_{\varphi\theta 0}$, οπότε προκύπτουν οι σταθερές.

$$C1 = R^2 [N_{\varphi 0} \cos(\varphi_1) \sin(\varphi_1) + 2 \cos(\varphi_1) P R - N_{\varphi\theta 0} \sin(\varphi_1)]$$

$$C2 = R^2 [N_{\varphi 0} \sin(\varphi_1) + \cos(\varphi_1)^2 P R - N_{\varphi\theta 0} \sin(\varphi_1) \cos(\varphi_1)]$$

Και με αντικατάσταση προκύπτουν οι σχέσεις για τις δυνάμεις. Οι τελικές σχέσεις των δυνάμεων χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των μετακινήσεων

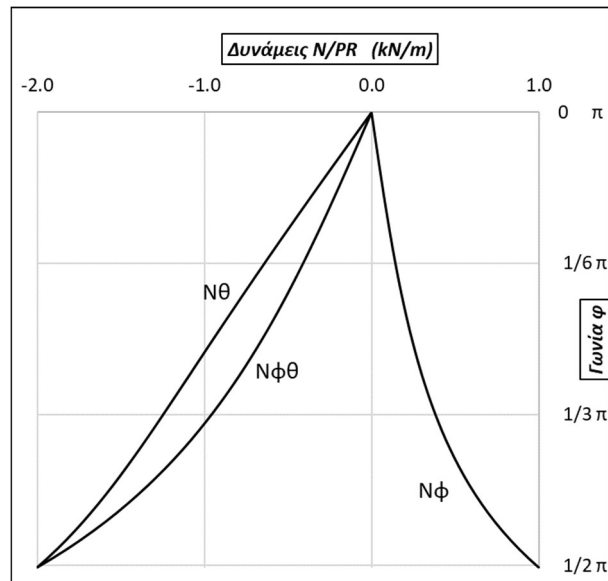
Οι μετακινήσεις υπολογίζονται από τις σχέσεις (5.60). Οι συνοριακές συνθήκες είναι πως για τη γωνία στήριξης οι μετακινήσεις U_1 , V_1 είναι μηδενικές ενώ δε μηδενίζεται η μετακίνηση W_1 . Οι σχέσεις υπολογίζονται με συμβολικό προγραμματισμό, όμως δεν περιλαμβάνονται λόγω του όγκου τους. Ενδεικτικά αναφέρονται οι σταθερές C3, C4 οι οποίες για γωνία στήριξης $\pi/2-90^\circ$ προκύπτουν:

$$C3 = \frac{3R^2 P(1 + \nu)}{Eh} \quad , \quad C4 = \frac{R^2 P(1 + \nu)}{Eh}$$

Παρακάτω φαίνεται το διάγραμμα των δυνάμεων σε σχέση με τη φόρτιση P και την ακτίνα R. Οι δυνάμεις N_{φ} , N_{θ} αναφέρονται σε γωνία $\theta=0^\circ$, ενώ η δύναμη $N_{\varphi\theta}$ σε γωνία $\theta=90^\circ$. Η γωνία στήριξης είναι 90° .

Παρατηρήσεις.

1. Η δύναμη N_{φ} είναι θετική(εφελκυστική), σε αντίθεση με τις άλλες δύο.
2. Οι δυνάμεις N_{θ} , $N_{\varphi\theta}$ έχουν διπλάσια τιμή από τη δύναμη N_{φ} στη βάση.
3. Όλες οι δυνάμεις μηδενίζονται στην κορυφή.



Διάγραμμα 5.10 Κατανομές δυνάμεων σφαιρικού κελύφους

5.4.3.2 Παραβολικό κέλυφος

Οι σχέσεις των μεγεθών για το παραβολικό κέλυφος προκύπτουν με τον ίδιο τρόπο όπως και στο σφαιρικό. Οι ακτίνες καμπυλότητας R_1, R_2 δίνονται από τις εισαγωγικές σχέσεις του κεφαλαίου 5.3.3. Με αντικατάσταση των σχέσεων των R_1, R_2 στις παραπάνω εξισώσεις και με χρήση συμβολικού προγραμματισμού και τη MAPLE, προκύπτουν τα εξής:

$$N_{\varphi 1} = \frac{4 \left(C_2 + \frac{1}{2} \frac{C_1}{\cos(\varphi)^2} + \frac{1}{60} \frac{P}{a^3 \cos(\varphi)^5} \right) a^2 \cos(\varphi)^2}{\sin(\varphi)^3}$$

$$N_{\theta 1} = - \frac{4 \left(C_2 + \frac{1}{2} \frac{C_1}{\cos(\varphi)^2} + \frac{1}{60} \frac{P}{a^3 \cos(\varphi)^5} \right) a^2 \cos(\varphi)^4}{\sin(\varphi)^3} - \frac{P \sin(\varphi)}{2a \cos(\varphi)}$$

$$N_{\varphi \theta 1} = \frac{4C_1 a^3 \cos(\varphi)^5 + 4C_2 a^3 \cos(\varphi)^5 - 2C_1 a^3 \cos(\varphi)^3 + \frac{1}{3} P \cos(\varphi)^2 - \frac{4}{15} P}{a \cos(\varphi)^2 \sin(\varphi)^3}$$

Οι όροι C_1, C_2 είναι σταθερές ολοκλήρωσης. Εάν, το παραβολικό κέλυφος είναι κλειστό στη κορυφή του, τότε οι εξισώσεις υπολογισμού των σταθερών C_1, C_2 προκύπτουν από την ίδια απαίτηση όπως στο σφαιρικό κέλυφος. Με χρήση κανόνα L'Hospital, προκύπτουν:

$$C_1 = - \frac{1}{12} \frac{P}{a^3}, \quad C_2 = \frac{1}{40} \frac{P}{a^3}$$

Και οι εξισώσεις τελικώς γίνονται:

$$N_{\varphi} = \frac{P}{30a} \frac{\sin(\varphi) (3 \cos(\varphi)^3 + 6 \cos(\varphi)^2 + 4 \cos(\varphi) + 2)}{(\cos(\varphi)^2 + 2 \cos(\varphi) + 1) \cos(\varphi)^3} \cos(\theta)$$

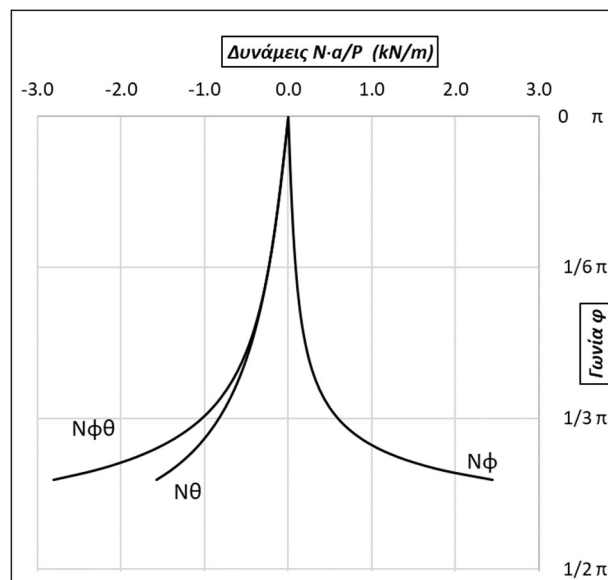
$$N_{\theta} = - \frac{P}{30a} \frac{\sin(\varphi) (3 \cos(\varphi)^3 + 21 \cos(\varphi)^2 + 34 \cos(\varphi) + 17)}{(\cos(\varphi)^2 + 2 \cos(\varphi) + 1) \cos(\varphi)} \cos(\theta)$$

$$N_{\phi\theta} = -\frac{P}{30a} \frac{\sin(\phi) (7 \cos(\phi)^3 + 14 \cos(\phi)^2 + 16 \cos(\phi) + 8)}{(\cos(\phi)^2 + 2 \cos(\phi) + 1) \cos(\phi)^2} \sin(\theta) \quad (5.70)$$

Σε περίπτωση που το παραβολικό κέλυφος είναι ανοιχτό τότε οι συνοριακές συνθήκες ορίζονται από τις τιμές των δυνάμεων $N_{\phi 1}$ και $N_{\phi\theta 1}$ στη γωνία του ανοίγματος $\phi 1$, έστω $N_{\phi 0}$ και $N_{\phi\theta 0}$, και προκύπτουν οι αντίστοιχες σταθερές $C 1$, $C 2$.

Οι μετακινήσεις υπολογίζονται από τις σχέσεις (5.60). Οι συνοριακές συνθήκες είναι πως για τη γωνία στήριξης οι μετακινήσεις $U 1$, $V 1$ είναι μηδενικές ενώ δε μηδενίζεται η μετακίνηση $W 1$. Οι σχέσεις υπολογίζονται με συμβολικό προγραμματισμό, όμως δεν περιλαμβάνονται λόγω του όγκου τους.

Παρακάτω φαίνεται το διάγραμμα των δυνάμεων σε σχέση με τη φόρτιση p και την καμπυλότητα της παραβολής a . Οι δυνάμεις N_{ϕ} , N_{θ} αναφέρονται σε γωνία $\theta=0^{\circ}$, ενώ η δύναμη $N_{\phi\theta}$ σε γωνία $\theta=90^{\circ}$. Βάση των εξισώσεων παρατηρείται πως οι τιμές των δυνάμεων απειρίζονται για $\phi=90^{\circ}$. Το παρακάτω διάγραμμα καταλήγει σε γωνία $\phi \approx 66^{\circ}$. Μετά από αυτή τη τιμή η δύναμη N_{ϕ} αλλάζει πρόσημο και γίνεται εφελκυστική.



Διάγραμμα 5.11 Κατανομές δυνάμεων παραβολικού κελύφους

Παρατηρήσεις.

1. Η δύναμη $N_{\phi\theta}$ παρουσιάζει μεγαλύτερη αύξηση σε σχέση με την δύναμη N_{θ} .
2. Η δύναμη N_{ϕ} έχει παρόμοιες τιμές με την δύναμη $N_{\phi\theta}$ και διαφορετικό πρόσημο.

5.5 Σύγκριση σφαιρικού – παραβολικού κελύφους

Με βάση τις παραπάνω εφαρμογές, γίνεται μία σύγκριση μεταξύ των δύο διαφορετικών γεωμετριών σε σχέση με τις μέγιστες τιμές των μεγεθών. Θεωρούμε πως οι τιμές της ακτίνας R και της καμπυλότητας a ικανοποιούν σε μεγάλο βαθμό τη παρακάτω εξίσωση:

$$a = \frac{1}{R}$$

Βάση των παραπάνω εφαρμογών παρατηρείται πως:

1. Το σφαιρικό κέλυφος παρουσιάζει μεγαλύτερες τιμές δυνάμεων και μετακινήσεων για κατακόρυφα φορτία.
2. Επίσης, το σφαιρικό παρουσιάζει μεγαλύτερες τιμές και για τα οριζόντια σεισμικά φορτία.
3. Σε αντίθεση, στο παραβολικό κέλυφος αναπτύσσονται μεγαλύτερες τιμές για τη φόρτιση της ανεμοπίεσης.

Συνεπώς, ως οροφή σε περιοχές όπου ο άνεμος δε προκαλεί μεγάλο φορτίο στη κατασκευή, το παραβολικό κέλυφος μπορεί να αναλάβει καλύτερα και με μεγαλύτερη απόδοση τα κατακόρυφα φορτία όπως και τα σεισμικά. Σε περίπτωση όμως όπου ο άνεμος είναι η κύρια μορφή οριζοντίων φορτίων τότε το σφαιρικό κέλυφος αναλαμβάνει καλύτερα την ανεμοπίεση. Οπότε αναλόγως τη χρήση και τη περιοχή κατασκευής, επιλέγεται και η αντίστοιχη μορφή γεωμετρίας. Σημασία, πρέπει επιπλέον να δοθεί στο συνολικό βάρος του φορέα ή την επιφάνεια που έχει, εφόσον η επιφάνεια που καλύπτει είναι κοινή και για τις δύο γεωμετρίες. Αυτό προκύπτει αφού το σφαιρικό κέλυφος παρουσιάζει αυξημένες τιμές μεγεθών για κατακόρυφα φορτία. Ο συνδυασμός των παραπάνω προσφέρει μία προσωρινή λύση στην επιλογή γεωμετρίας.

Βέβαια, το παραβολικό κέλυφος παρουσιάζει δυσκολία στη στήριξη. Συγκεκριμένα, η γωνία στήριξης δεν είναι δυνατόν να πάρει τιμή $\pi/2$ διότι απειρίζεται η δύναμη $N\varphi$. Αυτό σημαίνει πως στη στήριξη θα χρειαστεί δακτύλιος για να παραλάβει την οριζόντια συνιστώσα της δύναμης στήριξεως δηλαδή την $N\varphi$ ($\varphi = \varphi_{στηρ}$). Συνεπώς, αν και στο σφαιρικό κέλυφος αναπτύσσονται μεγαλύτερες δυνάμεις λόγω κατακόρυφων φορτίων είναι πιθανόν να συμφέρει η επιλογή του σε σχέση με το παραβολικό λόγω της ευκολότερης θεμελίωσής του.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 – ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στα προηγούμενα κεφάλαια 4, 5 παρουσιάστηκαν, προς ανάλυση των λεπτών ελαστικών κελυφών βάση της μεμβρανικής θεωρίας, διάφορα παραδείγματα. Η έμφαση δόθηκε στον υπολογισμό των μεγεθών (δυνάμεων και μετακινήσεων) όπως και στην εξήγηση των μηχανικών χαρακτηριστικών, ώστε να παρατηρηθούν οι πιο σημαντικές πτυχές της μεμβρανικής θεωρίας, όπως και τα αρνητικά και τα θετικά στοιχεία της. Γενικώς, έγινε χρήση σχετικών απλών και εξιδανικευμένων περιπτώσεων, οι οποίες μπορούν εύκολα να επιλυθούν αναλυτικά, με μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων ή με αριθμητικές μεθόδους, για να επεξηγηθούν τα κυριότερα σημεία.

Στις παραπάνω εφαρμογές έχει δοθεί έμφαση στην ανάλυση των επιφανειών και την εύρεση των μεγεθών και όχι στον σχεδιασμό αυτών ως δομικά μέλη. Είναι σαφές ότι η συγκεκριμένη μορφή μιας δομής έχει και την αναμενόμενη λειτουργία. Τα κυλινδρικά κελύφη χρησιμοποιούνται κυρίως για περιορισμό υγρών π.χ. και τα σφαιρικά – παραβολικά ως οροφές θόλων. Επίσης, τα υλικά κατασκευής (χάλυβας και / ή σκυρόδεμα) παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο. Ο σχεδιασμός των κελυφών μέσω της μεμβρανικής θεωρίας είναι δυνατός ως ένα βαθμό όπως παρουσιάζεται παρακάτω.

Η μεμβρανική θεωρία, όπως παρουσιάστηκε στα παραπάνω κεφάλαια, είναι αρκετή για να αναλύσει με μεγάλη ακρίβεια πολλές συνήθεις συνθήκες φόρτισης. Συνοπτικά, η θεωρία καλύπτει κατακόρυφα φορτία, οριζόντια φορτία αλλά και θερμοκρασιακές μεταβολές. Ωστόσο, στις περιοχές των συντοριακών συνθηκών παρουσιάζεται το μεγαλύτερο πρόβλημα της θεωρίας. Οι συντοριακές συνθήκες που εφαρμόζονται δεν είναι δυνατόν να περιγράψουν πλήρως την κατάσταση. Κύριο παράδειγμα, είναι οι συνθήκες στήριξης (άρθρωση-πάκτωση) αλλά και η σύνδεση μεταξύ κελυφών (π.χ. κυλινδρικό με σφαιρικό). Στις συγκεκριμένες θέσεις αναπτύσσονται καμπτικές τάσεις, τις οποίες η θεωρία έχει μηδενίσει. Αξίζει βέβαια να σημειωθεί, πως οι συγκεκριμένες τάσεις περιορίζονται σε μικρή επιφάνεια και μειώνονται γρήγορα κατά μήκος του κελύφους. Επίσης, πολλές κατασκευές κελυφών, όπως οροφές, δεξαμενές αποθήκευσης, δοχεία πίεσης κ.λπ., σχεδιάζονται σύμφωνα με τη μεμβρανική θεωρία και στις θέσεις εμφάνισης καμπτικών τάσεων χρησιμοποιείται η καμπτική θεωρία κελυφών.

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι, λόγω του μικρού πάχους του κελύφους, ακόμη και μικρές καμπτικές ροπές προκαλούν μεγάλες τασικές καταπονήσεις στο κέλυφος. Ως εκ τούτου, είναι πολύ σημαντικό να προσδιοριστεί σωστά η τασική κατάσταση για να διασφαλιστεί η αξιοπιστία του σχεδιασμού. Για το παραπάνω χρησιμοποιείται η καμπτική θεωρία. Συνεπώς, για μία ολοκληρωμένη λύση των εφαρμογών των κεφαλαίων 4, 5 αλλά και γενικά των κατασκευών, χρειάζονται και οι δύο θεωρίες.

Μπορεί να σχηματιστεί η εντύπωση ότι η μεμβρανική θεωρία των κελυφών δεν είναι σχεδόν καθόλου χρήσιμη λόγω των περιορισμών που αναφέρονται παραπάνω, κυρίως με τις συντοριακές συνθήκες. Ωστόσο, αυτό δεν ισχύει. Σε μερικές περιπτώσεις, η μεμβρανική θεωρία των κελυφών επιτρέπει σε κάποιον να αποκτήσει απλές και ταυτόχρονα επαρκώς ακριβείς λύσεις. Παραδείγματος χάρη, εφαρμόζεται στην ανάλυση των κυλινδρικών κελυφών όπου υπάρχουν εγκάρσιες ενισχύσεις

(stiffeners). Σε αυτή την περίπτωση, η εξωτερική φόρτιση που εφαρμόζεται στις μικρές-ίσες αποστάσεις μεταξύ των ενισχύσεων κατανέμεται από τα ενισχυτικά στοιχεία με τέτοιο τρόπο ώστε να ικανοποιείται η κατάσταση της αργής μεταβαλλόμενης παραμόρφωσης στην περιφερειακή κατεύθυνση, δηλαδή την us .

Συνοψίζοντας, η χρήση της μεμβρανική θεωρίας προσφέρει αρκετά θετικά στον μηχανικό. Μερικά από αυτά είναι:

1. Γρήγορα και σαφή αποτελέσματα σε μεγάλο εύρος εφαρμογών.
2. Ικανότητα σχεδίασης σε προκαταρκτικό στάδιο.
3. Ευκολία επιλογής της αρχικής γεωμετρίας του φορέα π.χ. μεταξύ σφαιρικού και παραβολικού κελύφους ή και υλικών κατασκευής. Τα υλικά κατασκευής συνδέονται με τις αναπτυσσόμενες τάσεις-δυνάμεις.

Επίσης, σε σχέση με τα υλικά κατασκευής, μεταλλικές κατασκευές παρουσιάζουν προβλήματα εάν θλιβόνται οπότε και κινδυνεύουν να λυγίσουν ενώ κατασκευές από οπλισμένο σκυρόδεμα εάν εφελκύνονται. Συνεπώς, η τασική κατάσταση συνδέεται με το υλικό κατασκευής. Στο 5^ο κεφάλαιο αναλύθηκαν σφαιρικές οροφές. Αυτές παρατηρήθηκε πως θλιβόντουσαν κατά κύριο λόγο, οπότε το υλικό κατασκευής θα ήταν οπλισμένο σκυρόδεμα.

Από την άλλη μεριά, η μεμβρανική θεωρία παρουσιάζει αρνητικά. Τα κυριότερα είναι:

1. Οι συνοριακές συνθήκες.
2. Αδυναμία υπολογισμού της ακριβής τασικής κατάστασης οπότε και των μεγεθών σχεδιασμού κοντά στις συνοριακές συνθήκες.
3. Η φόρτιση πρέπει να αναφέρεται σε ολόκληρη την επιφάνεια του κελύφους. Δεν γίνεται δηλαδή να είναι ένα σημειακό φορτίο.
4. Η γεωμετρία επίσης έχει περιορισμούς λόγω της μη ύπαρξης ροπών, άρα και γωνιών.

Με βάση τα παραπάνω, θα μπορούσε να ειπωθεί πως η μεμβρανική θεωρία δεν καλύπτει μεγάλο εύρος εφαρμογών. Αυτό όμως δε σημαίνει ότι δεν παρέχει επαρκεί και σαφές δεδομένα σε εφαρμογές όπου ικανοποιούνται τα κριτήρια της. Για απόδειξη του παραπάνω αρκεί ο υπολογισμός των μεγεθών σε διάφορα λογισμικά πεπερασμένων στοιχείων και σύγκριση των αποτελεσμάτων με τις μαθηματικές σχέσεις της μεμβρανικής θεωρίας. Επίσης, με χρήση της καμπτικής θεωρίας τα αποτελέσματα αυτής είναι σχεδόν ίσα με τα αποτελέσματα της μεμβρανικής θεωρίας.

Ωστόσο, ακόμη και τα κελύφη που δεν πληρούν όλες τις απαιτήσεις εξ ολοκλήρου μπορούν να κατασκευαστούν έτσι ώστε οι μεμβρανικές δυνάμεις να κυριαρχούν στο μεγαλύτερο μέρος του κελύφους, εκτός από τις εντοπισμένες περιοχές στις οποίες παραβιάζονται οι απαιτούμενες συνθήκες, κυρίως οι συνοριακές συνθήκες. Εν ολίγοις, πολλά κελύφη παρουσιάζουν βασικά τη μεμβρανική συμπεριφορά που ενισχύεται από την τοπική εξέχουσα καμπτική δράση. Αυτό βέβαια, δεν σημαίνει ότι όλα τα κελύφη μπορούν να σχεδιαστούν ώστε να λειτουργήσουν κυρίως ως μεμβράνες ή ότι όλα τα φαινόμενα κάμψης είναι κυρίως εντοπισμένα, αλλά αυτή η συμπεριφορά είναι ένα επιθυμητό και συχνά εφικτό αποτέλεσμα καλής σχεδίασης και προσεκτικής κατασκευής.

Τελικώς, η μεμβρανική θεωρία χρησιμοποιείται σε μεγάλο εύρος πρακτικών εφαρμογών και οι πληροφορίες που παρέχει είναι σημαντικές για τους μηχανικούς, σχεδιαστές. Η γνώση της συγκεκριμένης θεωρίας βοηθάει το μηχανικό να κατανοεί καλύτερα την αντίστοιχη κατασκευή και τις αναμενόμενες εντάσεις λόγω του

στατικού συστήματος αλλά και της φόρτισης. Ακόμη, μπορεί και παρέχει γρήγορα και εύκολα αποτελέσματα με σκοπό την αποτελεσματικότερη σχεδίαση του φορέα. Συνεπώς, συμβάλλει στην καλύτερη σχεδίαση των κατασκευών.

Κλείνοντας, αξίζει να αναφερθούν μελλοντικές χρήσεις των κελυφών ως στατικά συστήματα. Έχει παρατηρηθεί πως τα κελύφη έχουν χτιστεί πολύ λιγότερο από ότι στις αμέσως προηγούμενες δεκαετίες. Αυτό οφείλεται στην αυξημένη διαθεσιμότητα φθηνότερων προκατασκευασμένων συστημάτων και υλικών. Συγκεκριμένα, ένας από τους πιο διακεκριμένους μηχανικούς στον κόσμο, J. Schlaich, δηλώνει:

"Shells are the most honest structures."

"He, who cares about the shape of his structures, needs the shells."

"He, who cares about the genuine use of materials, does not want to miss the concrete shells."

Δείχνοντας έτσι τη μεγάλη σημασία των κελυφών στο κομμάτι του σχεδιασμού σε έργα πολιτικού μηχανικού.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Wilhelm Flugge, "Stresses in Shells", Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH 1973, Second Edition.
- [2] Eduard Ventsel, Theodor Krauthammer, "Thin Plates and Shells, Theory, Analysis and Applications", Marcel Dekker, Inc.
- [3] Phillip L. Gould, "Analysis of Shells and Plates", Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg London Paris Tokyo, 1988.
- [4] S. Timoshenko, S Woinowsky-Krieger, "Theory Of Plates And Shells", McGraw-Hill Book Company 1987, second edition.
- [5] J. Schlaich, "Do Concrete Shells Have a Future?", Bulletin of the IASS, no. 89 (December 1985): 38-46.
- [6] Θεμιστοκλής Μ. Ρασσιάς, "Μαθηματική Ανάλυση ΙΙ, Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών και ολοκληρωτικός λογισμός", Εκδόσεις Τσότρας 2014.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α – ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ MAPLE

A.1 Κυκλικό κυλινδρικό κέλυφος

Αρχικές εντολές – φόρτωση υποχρεωτικών διαδικασιών

```
> restart;
> with(plots):
> with(PDEtools, casesplit, declare);
> with(DEtools, gensys);
> declare(Nx(x,theta), Nxs(x,theta), Ns(x,theta), ux(x,theta), us(x,theta), w(x,theta));
> unassign(sols, solsbcs);
```

Εισαγωγή φορτίων – εφαρμογή κατακόρυφου κυκλικού κυλινδρικού

```
> p1(x,theta):=g*h; Ίδιο βάρος
> p2(x,theta):=0;
> p3(x,theta):=W*(L-x); Υδροστατική πίεση
```

Εξισώσεις δυνάμεων

```
> eq1:=diff(Nx(x,theta),x)+1/r*diff(Nxs(x,theta),theta)+p1(x,theta);
> eq2:=1/r*diff(Ns(x,theta),theta)+diff(Nxs(x,theta),x)+p2(x,theta);
> eq3:=Ns(x,theta)+p3(x,theta)*r;
```

Κινηματικές εξισώσεις

```
> eq4:=diff(ux(x,theta),x)-(1/(E*h)*(Nx(x,theta)-v*Ns(x,theta)));
> eq5:=diff(us(x,theta),theta)/r-w(x,theta)/r-1/(E*h)*(Ns(x,theta)-v*Nx(x,theta));
> eq6:=diff(us(x,theta),x)+diff(ux(x,theta),theta)/r-Nxs(x,theta)/(G*h);
```

Επίλυση εξισώσεων

```
sols:=pdsolve({eq1,eq2,eq3,eq4,eq5,eq6},{Ns(x,theta),Nxs(x,theta),Nx(x,theta),ux(x,theta),us(x,theta),w(x,theta)});
> assign(sols);
```

Συνοριακές συνθήκες – Προσοχή η θέση εφαρμογής των συνοριακών συνθηκών $x=0$, $x=L$

```
> bc1:=subs(x=L,Nx(x,theta));
> bc2:=subs(x=L,Nxs(x,theta));
> bc3:=subs(x=0,ux(x,theta));
> bc4:=subs(x=0,us(x,theta));
```

Επίλυση συνοριακών συνθηκών

```
> solsbcs:=dsolve({bc1,bc2,bc3,bc4},{_F1(theta),_F2(theta),_F3(theta),_F4(theta)});
> assign(solsbcs);
```

Τελικές σχέσεις μεγεθών

```
> Nx(x,theta):=eval(Nx(x,theta));
> Nxs(x,theta):=eval(Nxs(x,theta));
> Ns(x,theta):=eval(Ns(x,theta));
> ux(x,theta):=eval(ux(x,theta));
> us(x,theta):=eval(us(x,theta));
> w(x,theta):=eval(w(x,theta));
```

Αριθμητικό παράδειγμα – εισαγωγή δεδομένων

```
> h:=0.05;L:=10;r:=1;E:=210000000;g:=78.5;v:=0.3;W:=10;G:=E/2/(1+v);
```

Σχεδίαση γραφημάτων σε τρεις διαστάσεις

```
> plot3d(Ns(x,theta),x=0..L,theta=0..2*Pi,axes=boxed,caption="Ns");
> plot3d(Nxs(x,theta),x=0..L,theta=0..2*Pi,axes=boxed,caption="Nxs");
```



```
> plot3d(Nx(x,theta),x=0..L,theta=0..2*Pi,axes=boxed,caption="Nx");
> plot3d(ux(x,theta),x=0..L,theta=0..2*Pi,axes=boxed,caption="ux");
> plot3d(us(x,theta),x=0..L,theta=0..2*Pi,axes=boxed,caption="us");
> plot3d(w(x,theta),x=0..L,theta=0..2*Pi,axes=boxed,caption="w");
```

A.2 Κέλυφος εκ περιστροφής – Αξονοσυμμετρική φόρτιση

Αρχικές εντολές – φόρτωση υποχρεωτικών διαδικασιών

```
> restart;
> with(plots);
> with(PDEtools, casesplit, declare);
> with(DEtools, gensys);
> declare (Nf(f), Ntheta(f), U(f), W(f));
> unassign(solN, solbc);
```

Εισαγωγή γεωμετρίας – εφαρμογή σε κλειστή παραβολή

```
> R1(f):=1/(2*a*cos(f)^3);
> R2(f):=1/(2*a*sin(f))*(tan(f)-b);
> r(f):=R2(f)*sin(f);
> f1:=0;
> f2:=arctan((4*a*c)^(1/2));
```

Εισαγωγή φορτίων

```
> p1(f):=Q*sin(f)*cos(f);
> p3(f):=Q*cos(f)^2;
```

Εξισώσεις δυνάμεων – Η δεύτερη εξίσωση αμελείται

```
> eq1:=diff(Nf(f)*r(f),f)-Ntheta(f)*R1(f)*cos(f)+r(f)*R1(f)*p1(f);
> eq3:=Nf(f)/R1(f)+Ntheta(f)/R2(f)+p3(f);
```

Επίλυση εξισώσεων

```
> solN:=dsolve({eq1,eq3},{Nf(f),Ntheta(f)});
> assign(solN);
```

Κινηματικές εξισώσεις

```
> e1:=simplify((Nf(f)-v*Ntheta(f)))/(E*h);
> e2:=simplify((Ntheta(f)-v*Nf(f)))/(E*h);
> F1(f):=(R2(f)/sin(f))*(R1(f)/R2(f)*e1-e2);
```

```
> U(f):=sin(f)*int(F1(f),f)+C*sin(f);
> W(f):=cos(f)*int(F1(f),f)+C*cos(f)-e2*R2(f);
```

Συνοριακές συνθήκες – Προσοχή η συνοριακή συνθήκη για $f=f1$ (κλειστό κέλυφος οπότε ισορροπία μεταξύ δυνάμεων)

```
> A(f):=numer(Nf(f)-Ntheta(f)); Υπολογισμός αριθμητή
> bc1:=subs(f=f1,A(f));
> bc2:=subs(f=f2,U(f));
```

Επίλυση συνοριακών συνθηκών

```
> solbc:=solve({bc1,bc2},{C,_C1});
> assign(solbc);
```

Τελικές σχέσεις μεγεθών

```
> Nf(f):=eval(Nf(f));
> Ntheta(f):=eval(Ntheta(f));
> U(f):=eval(U(f));
> W(f):=eval(W(f));
```

Αριθμητικό παράδειγμα – εισαγωγή δεδομένων

```
> h:=0.10;g:=78.5;Q:=18.57;E:=210000000;v:=0.3;c:=5;a:=0.5;
```

Σχεδίαση γραφημάτων σε δύο διαστάσεις

```
> plot(Nf(f),f=f1..f2,axes=boxed,caption="Nf");
> plot(Ntheta(f),f=f1..f2,axes=boxed,caption="Ntheta");
> plot(U(f),f=f1..f2,axes=boxed,caption="U");
> plot(W(f),f=f1..f2,axes=boxed,caption="W");
```

A.3 Κέλυφος εκ περιστροφής – Γενική φόρτιση

Το συγκεκριμένο πρόγραμμα υπολογίζει τη μεταβολή κατά φ και δεν συμπεριλαμβάνει τους όρους $\sin(\theta)$, $\cos(\theta)$.

Αρχικές εντολές – φόρτωση υποχρεωτικών διαδικασιών

```
> restart;
> with(plots):
> with(PDEtools, casesplit, declare);
> with(DEtools, gensys);
> declare (Nf(f), Nft(f), Ntheta(f), U(f), V(f), W(f));
> unassign(solu, solbc, sol, solBC);
```

Εισαγωγή γεωμετρίας – Εφαρμογή σε κλειστή σφαίρα

```
> R1(f):=R;
> R2(f):=R;
> r(f):=R2(f)*sin(f);
> f1:=0;
> f2:=Pi/2;
```

Εισαγωγή φορτίων – Σεισμικό φορτίο

```
> p1(f):=-P*cos(f);
> p2(f):=P;
> p3(f):=P*sin(f);
```

Εξισώσεις δυνάμεων – Επίλυση εξισώσεων

```
> F1(f):=-diff((p3(f)*cos(f)+p1(f)*sin(f))*R2(f)^3*sin(f)^2,f)/(R1(f)*R2(f)*sin(f))+
R2(f)*(p2(f)*sin(f)+p3(f));
> EQU:=diff(diff(u(f),f)/(R1(f)*sin(f)),f)-R1(f)*F1(f);
> solu:=dsolve({EQU},{u(f)});
> assign(solu);
> u1(f):=u(f)/(R2(f)*sin(f));
> Nf1(f):=(u1(f)/(R2(f)*sin(f)^2));
> v1(f):=-R2(f)^2*sin(f)*diff(u1(f),f)/R1(f)-(p3(f)*cos(f)+p1(f)*sin(f))*R2(f)^3*
sin(f)^2;
> S1(f):=simplify(v1(f)/(R2(f)^2*sin(f)^2));
> Ntheta1(f):=-Nf1(f)*R2(f)/R1(f)-R2(f)*p3(f);
```

Συνοριακές συνθήκες δυνάμεων

```
> A(f):=numer(Nf1(f));
> bc1:=eval(subs(f=0,A(f)));
> B(f):=diff(numer(Nf1(f)),f)/sin(f);
> bc2:=eval(subs(f=0,B(f)));
> solbc:=solve({bc1,bc2},{_C1,_C2});
> assign(solbc);
```

Τελικές σχέσεις δυνάμεων

```
> Nf(f):=eval(Nf1(f));
> S(f):=eval(S1(f));
> Ntheta(f):=eval(Ntheta1(f));
```

Κινηματικές εξισώσεις και επίλυση

```
> e1(f):=simplify(Nf(f)-v*Ntheta(f))/(E*h);
> e2(f):=simplify(Ntheta(f)-v*Nf(f))/(E*h);
```

```

> g(f):=2*(1+v)*S(f)/(E*h);
> eq1:=diff(Un(f),f)/R1(f)-Wn(f)/R1(f)-e1(f);
> eq2:=Vn(f)/r(f)+Un(f)*cos(f)/r(f)-Wn(f)/R2(f)-e2(f);
> eq3:=r(f)*diff(Vn(f)/r(f),f)/R1(f)-Un(f)/r(f)-g(f);
> sol:=dsolve({eq1,eq2,eq3},{Un(f),Vn(f),Wn(f)});
> assign(sol);

```

Συνοριακές συνθήκες μετακινήσεων

```

> BC1:=eval(subs(f=f2,Un(f)));
> BC2:=eval(subs(f=f2,Vn(f)));
> solBC:=solve({BC1,BC2},{_C3,_C4});
> assign(solBC);

```

Τελικές σχέσεις μετακινήσεων

```

> U(f):=eval(Un(f));
> V(f):=eval(Vn(f));
> W(f):=eval(Wn(f));

```

Αριθμητικό παράδειγμα – εισαγωγή δεδομένων

```

> h:=0.1;g:=78.5;R:=5;E:=210000000;P:=0.16*h*g;v:=0.3;

```

Σχεδίαση γραφημάτων σε δύο διαστάσεις

```

> plot(Nf(f),f=f1..f2,axes=boxed,caption="Nf");
> plot(Ntheta(f),f=f1..f2,axes=boxed,caption="Ntheta");
> plot(U(f),f=f1..f2,axes=boxed,caption="U");
> plot(W(f),f=f1..f2,axes=boxed,caption="W");

```