



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ, ΕΛΕΓΧΟΥ ΚΑΙ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗΣ

Σχεδίαση Ευφυών Κατανεμημένων Νόμων
Ελέγχου για Σχηματισμό Διάταξης
Κινούμενων Ρομπότ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

της

ΔΗΜΗΤΡΑΣ ΚΑΛΥΒΑ

Επιβλέπων: Χαράλαμπος Ψυλλάκης
Λέκτορας Ε.Μ.Π.

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ
Αθήνα, Οκτώβριος 2019



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Σημάτων, Ελέγχου και Ρομποτικής
Εργαστήριο Συστημάτων Αυτομάτου Ελέγχου

Σχεδίαση Ευφυών Κατανεμημένων Νόμων Ελέγχου για Σχηματισμό Διάταξης Κινούμενων Ρομπότ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

της

ΔΗΜΗΤΡΑΣ ΚΑΛΥΒΑ

Επιβλέπων: Χαράλαμπος Ψυλλάκης
Λέκτορας Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 22η Οκτωβρίου 2019.

(Υπογραφή)

(Υπογραφή)

(Υπογραφή)

.....
Χαράλαμπος Ψυλλάκης
Λέκτορας
Ε.Μ.Π.

.....
Κωνσταντίνος Τζαφέστας
Αναπληρωτής Καθηγητής
Ε.Μ.Π.

.....
Κωνσταντίνος Κυριακόπουλος
Καθηγητής
Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Οκτώβριος 2019

(Υπογραφή)

.....
ΔΗΜΗΤΡΑ ΚΑΛΥΒΑ

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

© 2019 – All rights reserved



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Σημάτων, Ελέγχου και Ρομποτικής
Εργαστήριο Συστημάτων Αυτομάτου Ελέγχου

Copyright ©–All rights reserved Δήμητρα Καλύβα, 2019.

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Στην μνήμη της αγαπημένης μου Μητέρας

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω από καρδιάς τον επιβλέποντα καθηγητή κ. Χαράλαμπο Ψυλλάκη για την πολύτιμη βοήθεια και την καθοδήγηση που μου παρείχε κατά την εκπόνηση της εργασίας. Επίσης τον ευχαριστώ θερμά για τις γνώσεις και την αγάπη για το επιστημονικό αντικείμενο που αποκόμισα μέσω της συνεργασίας μας.

Περίληψη

Αντικείμενο της διπλωματικής εργασίας είναι η ανάπτυξη και υλοποίηση ενός προσαρμοστικού ευφυούς νόμου ελέγχου, για την επίλυση του προβλήματος συμφωνίας και διάταξης γύρω από έναν ηγέτη, ενός πολυπρακτορικού συστήματος που αποτελείται από κινητά ρομπότ. Το προς μελέτη σύστημα είναι μη γραμμικό με άγνωστη δυναμική για την εκμάθησή της οποίας χρησιμοποιούνται Νευρωνικά Δίκτυα Υψηλότερης Τάξης.

Το πρόβλημα προσεγγίζεται από δύο διαφορετικές οπτικές γωνίες, και ως εκ τούτου, πραγματοποιούνται δύο μελέτες για το ίδιο ρομποτικό σύστημα.

Στη μεν πρώτη, εξετάζεται ένας κατανεμημένος νόμος ελέγχου, για την δημιουργία του οποίου χρησιμοποιείται ο “PI Μετασχηματισμός Λάθους Συμφωνίας” [1]. Ο γράφος που αναπαριστά την μετάδοση της πληροφορίας μεταξύ των πρακτόρων έχει γεννητικό δέντρο με ρίζα τον ηγέτη. Αρχικά, αποδεικνύεται ότι η σύγκλιση του μετασχηματισμού σε μία μικρή γειτονιά περί της αρχής των αξόνων συνεπάγεται προσεγγιστικό leader-follower consensus των πρακτόρων. Έπειτα, γίνεται ο σχεδιασμός του νόμου ελέγχου χρησιμοποιώντας τεχνικές από την θεωρία Lyapunov, τον προσαρμοστικό έλεγχο, τη backstepping μεθοδολογία και τα νευρωνικά δίκτυα υψηλότερης τάξης.

Στην δεύτερη, εξετάζεται ένας κατανεμημένος νόμος ελέγχου για την επίτευξη leader-follower formation των πρακτόρων, ο οποίος εξασφαλίζει επιπρόσθετα την ιδιότητα της αποφυγής συγκρούσεων μεταξύ των κινητών ρομπότ. Για το σκοπό αυτό, εισάγεται μία συνάρτηση δυναμικού η οποία ενεργοποιείται μόνο όταν οι πράκτορες έχουν πλησιάσει περισσότερο από κάποιο επιτρεπτό όριο. Ο γράφος που αναπαριστά την μετάδοση της πληροφορίας μεταξύ των πρακτόρων έχει γεννητικό δέντρο με ρίζα τον ηγέτη ενώ ο υπογράφος που αναπαριστά την επικοινωνία μεταξύ των ακολούθων θα πρέπει να είναι μη κατευθυνόμενος.

Τέλος, τα προτεινόμενα σχήματα ελέγχου υλοποιούνται σε περιβάλλον Simulink/Matlab, ξεχωριστά για την κάθε περίπτωση. Οι προσομοιώσεις επιβεβαιώνουν τα θεωρητικά αποτελέσματα και την αποτελεσματικότητα της σχεδίασης του ελέγχου.

Λέξεις Κλειδιά

Συμφωνία, Σχηματισμός Διάταξης, Συνεργατικός / Προσαρμοστικός / Κατανεμημένος Έλεγχος, Πολυπρακτορικό Σύστημα, Κινητά Ρομπότ, Ηγέτης-Ακόλουθος, Αποφυγή Συγκρούσεων, Νευρωνικά Δίκτυα.

Abstract

The purpose of this diploma thesis is to develop and implement an intelligent adaptive control law, for leader follower consensus and formation of a multi-agent system consisting of mobile robots. Since the dynamics of the system to be examined are non-linear and unknown, Higher Order Neural Networks are employed in order to approximate it.

Two different approaches on the mobile robot cooperative control problem are considered. In the first one, we examine a distributed control law using a generalization of the so called "PI Consensus Error Transformation" [1] for leader-follower consensus. The graph representing the information transmission between the agents has a spanning tree with the leader as its root. Initially, it is proved that the convergence of the transformed variables to a small neighbourhood of the origin implies approximate leader-follower consensus of the agents. Then, distributed control laws are designed based on the new transformation, using results from Lyapunov theory, adaptive control, backstepping methodology and Higher Order Neural Networks.

In the second one, we examine distributed control laws for leader-follower formation of the multi-agent system that additionally ensure collision avoidance between all mobile robots. For this purpose, a potential function is introduced, which is activated only when the distance between two agents becomes less than or equal to some threshold value. In the second case, the graph representing the information transmission between the agents has a spanning tree with the leader as its root, while the sub-graph representing the communication between the followers must be undirected.

Finally, the aforementioned control laws for both approaches are implemented in Simulink/Matlab environment. The simulation results confirm our theoretical analysis and the effectiveness of the proposed control design.

Keywords

Consensus, Formation, Cooperative / Adaptive / Distributed Control, Multi-Agent System, Mobile Robots, Leader-Follower, Collision Avoidance, Neural Networks.

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες	3
Περίληψη	5
Abstract	7
Περιεχόμενα	10
Κατάλογος Σχημάτων	12
1 Εισαγωγή	13
1.1 Αντικείμενο της διπλωματικής	13
1.1.1 Συνεργατικό Σύστημα (Cooperative System)	13
1.1.2 Συγκεντρωμένο - Αποκεντρωμένο - Κατανεμημένο Σύστημα	14
1.1.3 Συνεργατικός Έλεγχος (Cooperative Control)	15
1.1.4 Συνεισφορά	18
1.2 Οργάνωση του τόμου	18
2 Θεωρητικό υπόβαθρο	19
2.1 Θεωρία Γράφων	19
2.1.1 Τα Είδη των Γράφων	19
2.1.2 Η Λαπλασιανή Μήτρα ενός Γράφου	19
2.2 Μαθηματικά Λήμματα	21
2.3 Θεωρία Προσέγγισης	22
3 Μαθηματικό Μοντέλο του Κινούμενου Ρομπότ Διαφορικής Οδήγησης	23
3.1 Εισαγωγή	23
3.2 Ολόνομοι και Μη-Ολόνομοι Περιορισμοί	23
3.3 Κινηματικοί Περιορισμοί του Ρομπότ Διαφορικής Οδήγησης	24
3.3.1 Περιορισμός (I): Όχι Πλευρική Ολίσθηση	27
3.3.2 Περιορισμός (II): Καθαρή Κύλιση	28
3.4 Δυναμικό Μοντέλο του Ρομπότ Διαφορικής Οδήγησης	30
3.4.1 Θεωρούμενο Σύστημα Αναφοράς: q	31

3.4.2	Θεωρούμενο Σύστημα Αναφοράς: q_c	37
4	Κατανεμημένος Νόμος Ελέγχου για την Συμφωνία των τροχιών ενός Συστήματος Ακόλουθων με την τροχιά ενός Ηγέτη	41
4.1	Εισαγωγή	41
4.2	Οργάνωση του Κεφαλαίου	42
4.3	Διατύπωση του Προβλήματος και Ορισμός των Παραμέτρων	42
4.4	Σχεδιασμός Νόμου Ελέγχου της Θέσης Διαμέσου της Ταχύτητας	50
4.5	Σχεδιασμός Νόμου Ελέγχου της Ταχύτητας Διαμέσου της Ροπής	53
4.6	Εισαγωγή Νευρωνικών Δικτύων στο Νόμο Ελέγχου	55
5	Αποτελέσματα Προσομοιώσεων Κεφαλαίου 4	67
5.1	Εισαγωγή	67
5.2	Πρώτη Συνδεσμολογία Πρακτόρων	68
5.3	Δεύτερη Συνδεσμολογία Πρακτόρων	74
6	Κατανεμημένος Νόμος Ελέγχου για την Διάταξη ενός Συστήματος Ακόλουθων γύρω από έναν Ηγέτη με Αποφυγή Συγκρούσεων	81
6.1	Εισαγωγή	81
6.2	Οργάνωση του Κεφαλαίου	82
6.3	Διατύπωση του Προβλήματος και Ορισμός των Παραμέτρων	82
6.4	Σχεδιασμός Νόμου Ελέγχου της Θέσης Διαμέσου της Ταχύτητας	88
6.5	Σχεδιασμός Νόμου Ελέγχου της Ταχύτητας Διαμέσου της Ροπής	95
6.6	Εισαγωγή Νευρωνικών Δικτύων στο Νόμο Ελέγχου	98
7	Αποτελέσματα Προσομοιώσεων Κεφαλαίου 6	109
7.1	Πρώτη Συνδεσμολογία Πρακτόρων	110
7.2	Δεύτερη Συνδεσμολογία Πρακτόρων	116
7.3	Τρίτη Συνδεσμολογία Πρακτόρων	122
8	Επίλογος	129
8.1	Σύνοψη και συμπεράσματα	129
8.2	Μελλοντικές επεκτάσεις	130
8.2.1	Επεκτάσεις πρώτου προβλήματος	130
8.2.2	Επεκτάσεις πρώτου και δεύτερου προβλήματος	130
	Παράρτημα	131
	Βιβλιογραφία	141

Κατάλογος Σχημάτων

1.1	Σύστημα Πολλαπλών Πρακτόρων - Multi-Agent System	14
1.2	Τρόποι Σύνδεσης των Πρακτόρων ενός Συστήματος	15
1.3	Συνεργατικός Έλεγχος Κινητών Ρομπότ	16
3.1	Κινητό Ρομπότ Διαφορικής Οδήγησης - Differential Drive Mobile Robot	24
4.1	Γράφος με Γεννητικό Δένδρο από τον Ηγέτη προς τους Ακόλουθους	44
5.1	Ισχυρά Συνεκτικός Κατευθυνόμενος Γράφος των Ακόλουθων	68
5.2	Τροχιές των Οχημάτων στο $x - y$ επίπεδο	68
5.3	Χρονική μεταβολή του διανύσματος μετασχηματισμών συμφωνίας των πρακτόρων	69
5.4	Χρονική μεταβολή του διανύσματος ταχυτήτων των πρακτόρων	69
5.5	Χρονική μεταβολή του διανύσματος θέσεων συμφωνίας των πρακτόρων κατά τον x -άξονα	70
5.6	Χρονική μεταβολή του διανύσματος θέσεων συμφωνίας των πρακτόρων κατά τον y -άξονα	70
5.7	Χρονική μεταβολή του διανύσματος των νευρωνικών δικτύων	71
5.8	Χρονική μεταβολή του διανύσματος ροπών των πρακτόρων	71
5.9	Ισχυρά Συνεκτικός Κατευθυνόμενος Γράφος των Ακόλουθων	74
5.10	Τροχιές των Οχημάτων στο $x - y$ επίπεδο	74
5.11	Χρονική μεταβολή του διανύσματος μετασχηματισμών συμφωνίας των πρακτόρων	75
5.12	Χρονική μεταβολή του διανύσματος ταχυτήτων των πρακτόρων	75
5.13	Χρονική μεταβολή του διανύσματος θέσεων συμφωνίας των πρακτόρων κατά τον x -άξονα	76
5.14	Χρονική μεταβολή του διανύσματος θέσεων συμφωνίας των πρακτόρων κατά τον y -άξονα	76
5.15	Χρονική μεταβολή του διανύσματος των νευρωνικών δικτύων	77
5.16	Χρονική μεταβολή του διανύσματος ροπών των πρακτόρων	77
6.1	Γράφος με Γεννητικό Δένδρο από τον Ηγέτη προς τους Ακόλουθους	84
6.2	Δυναμικό Αποφυγής Συγκρούσεων	86
6.3	Σχέση μεταξύ της απόστασης d_{ij} και των $\ \mathbf{a}_i\ $, $\ \mathbf{a}_j\ $	87
6.4	Σχηματισμός των Ακόλουθων γύρω από τον Ηγέτη	88

7.1	Συνεκτικός Μη Κατευθυνόμενος Γράφος των Ακόλουθων	110
7.2	Τροχιές των Οχημάτων στο $x - y$ επίπεδο	110
7.3	Χρονική μεταβολή του διανύσματος μετασχηματισμών συμφωνίας των πρακτόρων	111
7.4	Χρονική μεταβολή του διανύσματος ταχυτήτων των πρακτόρων	111
7.5	Χρονική μεταβολή του διανύσματος θέσεων συμφωνίας των πρακτόρων κατά τον x -άξονα	112
7.6	Χρονική μεταβολή του διανύσματος θέσεων συμφωνίας των πρακτόρων κατά τον y -άξονα	112
7.7	Χρονική μεταβολή του διανύσματος των νευρωνικών δικτύων	113
7.8	Χρονική μεταβολή του διανύσματος ροπών των πρακτόρων	113
7.9	Συνεκτικός Μη Κατευθυνόμενος Γράφος των Ακόλουθων	116
7.10	Τροχιές των Οχημάτων στο $x - y$ επίπεδο	116
7.11	Χρονική μεταβολή του διανύσματος μετασχηματισμών συμφωνίας των πρακτόρων	117
7.12	Χρονική μεταβολή του διανύσματος ταχυτήτων των πρακτόρων	117
7.13	Χρονική μεταβολή του διανύσματος θέσεων συμφωνίας των πρακτόρων κατά τον x -άξονα	118
7.14	Χρονική μεταβολή του διανύσματος θέσεων συμφωνίας των πρακτόρων κατά τον y -άξονα	118
7.15	Χρονική μεταβολή του διανύσματος των νευρωνικών δικτύων	119
7.16	Χρονική μεταβολή του διανύσματος ροπών των πρακτόρων	119
7.17	Συνεκτικός Μη Κατευθυνόμενος Γράφος των Ακόλουθων	122
7.18	Τροχιές των Οχημάτων στο $x - y$ επίπεδο	122
7.19	Χρονική μεταβολή του διανύσματος μετασχηματισμών συμφωνίας των πρακτόρων	123
7.20	Χρονική μεταβολή του διανύσματος ταχυτήτων των πρακτόρων	123
7.21	Χρονική μεταβολή του διανύσματος θέσεων συμφωνίας των πρακτόρων κατά τον x -άξονα	124
7.22	Χρονική μεταβολή του διανύσματος θέσεων συμφωνίας των πρακτόρων κατά τον y -άξονα	124
7.23	Χρονική μεταβολή του διανύσματος των νευρωνικών δικτύων	125
7.24	Χρονική μεταβολή του διανύσματος ροπών των πρακτόρων	125

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Αντικείμενο της διπλωματικής

Ένα σημαντικό πρόβλημα που συναντάται σε συστήματα πολλών πρακτόρων αποτελεί η εύρεση αποδοτικών μεθόδων για την μεταξύ τους συνεργασία, και ως εκ τούτου, την επίτευξη συλλογικών εργασιών. Ανάλογα με την φύση του εκάστοτε συστήματος, καθώς και των λειτουργιών που καλείται να φέρει εις πέρας, χρησιμοποιούνται διάφορες τεχνικές Αυτομάτου Ελέγχου. Σε αυτές συμπεριλαμβάνονται από κλασσικές μέθοδοι Μη-Γραμμικού ελέγχου μέχρι Ευφυείς Τεχνικές, όπως αλγόριθμοι εκπαίδευσης ασαφών συστημάτων, νευρωνικά δίκτυα και προσαρμοστικά νευροασαφή συστήματα.

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η αντιμετώπιση δύο συναφών προβλημάτων συνεργατικού ελέγχου, με διαφορετική λογική κάθε φορά. Ζήτημα του πρώτου προβλήματος αποτελεί η συμφωνία μίας ομάδας κινούμενων ρομπότ διαφορικής οδήγησης ως προς την τροχιά ενός κινούμενου ρομπότ-ηγέτη, κάνοντας χρήση του PI μετασχηματισμού λάθους συμφωνίας [1]. Στο δεύτερο τα ρομπότ-ακόλουθοι καλούνται να λάβουν μία συγκεκριμένη διάταξη γύρω από τον κινούμενο ηγέτη υιοθετώντας αντίστοιχη τροχιά με την δικιά του, ενώ πρέπει να εξασφαλίζεται ταυτόχρονα αποφυγή συγκρούσεων τόσο με τον ηγέτη όσο και μεταξύ των ακόλουθων. Εργασίες στις οποίες έχουν μελετηθεί αντίστοιχα προβλήματα αποτελούν οι [21]-[31].

Τόσο στο πρώτο όσο και στο δεύτερο πρόβλημα η δυναμική των κινούμενων ρομπότ διαφορικής οδήγησης έχει θεωρηθεί άγνωστη. Για την εκμάθησή της γίνεται online προσαρμοστικός έλεγχος με χρήση νευρωνικών δικτύων υψηλότερης τάξης (HONN). Αντίστοιχο πρόβλημα εκμάθησης της δυναμικής των ρομπότ έχει μελετηθεί στις εργασίες [3] και [4], ενώ τεχνικές χρήσης νευρωνικών δικτύων σε μοντέλα προσαρμοστικού ελέγχου μελετώνται στα άρθρα [11]-[15].

1.1.1 Συνεργατικό Σύστημα (Cooperative System)

Ένα συνεργατικό σύστημα ορίζεται ως ένα σύνολο από πολλαπλές δυναμικές οντότητες που μοιράζονται πληροφορίες για να επιτύχουν ένα κοινό στόχο.

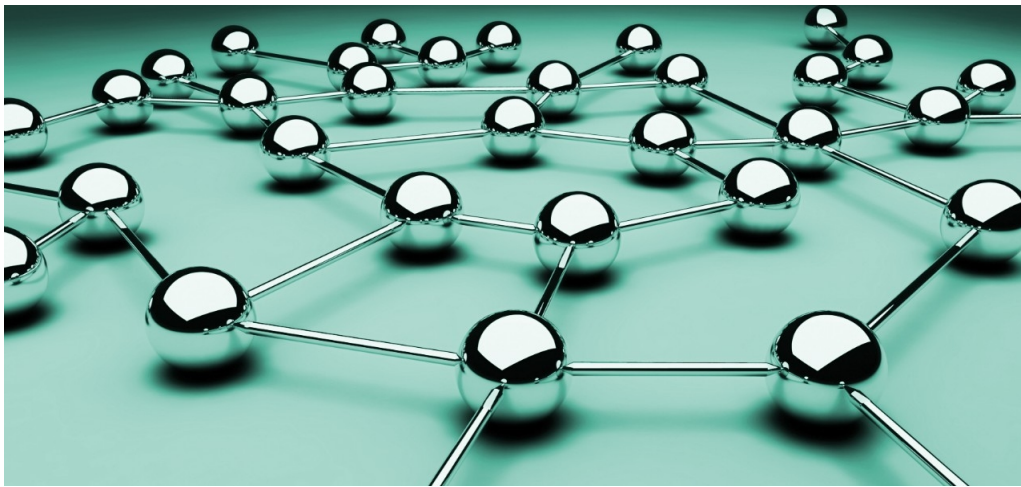
Παραδείγματα συνεργατικών συστημάτων ελέγχου μπορεί να περιλαμβάνουν:

- ρομπότ που λειτουργούν μέσα σε ένα σύστημα παραγωγής,
- μη επανδρωμένα αεροσκάφη σε επιχειρήσεις έρευνας και διάσωσης ή στρατιωτικές αποστολές επιτήρησης και επίθεσης,
- συστοιχίες μικροδορυφόρων που αποτελούν ένα καταναμημένο ραντάρ μεγάλου ανοίγματος

Τα συστήματα πολλαπλών πρακτόρων μπορούν να ανταπεξέλθουν σε προβλήματα που είναι δύσκολο ή αδύνατο να επιλυθούν από έναν μεμονωμένο πράκτορα, παρέχοντας έτσι καινοτόμες δυνατότητες και ιδιότητες στο σύστημα που απορρέουν από την συνεργατική δράση τους.

Η ευφυΐα μπορεί να περιλαμβάνει:

- αλγοριθμική αναζήτηση (algorithmic search),
- εποπτευόμενη μάθηση (supervised learning),
- ενισχυτική μάθηση (reinforcement learning) ή
- μηχανική μάθηση (machine learning - deep learning).



Σχήμα 1.1: Σύστημα Πολλαπλών Πρακτόρων - Multi-Agent System

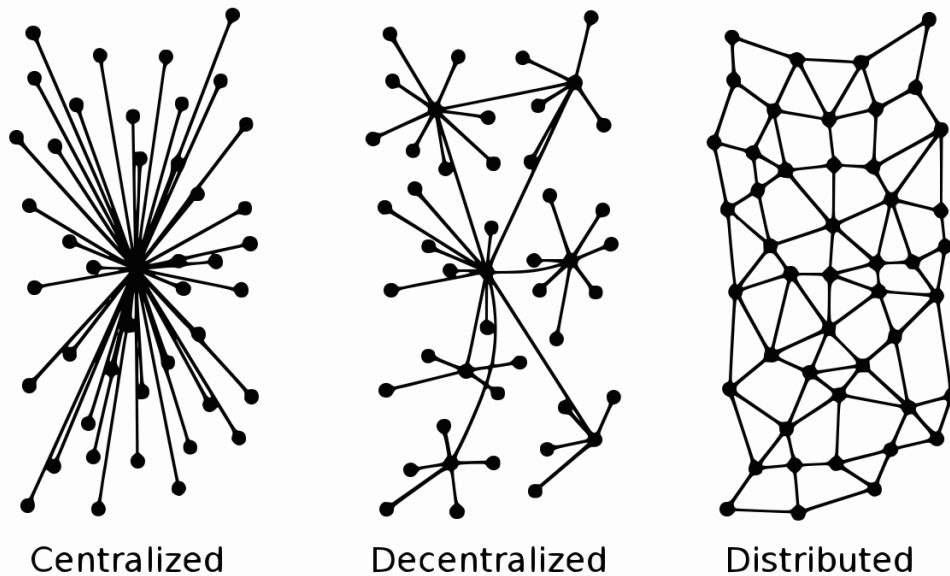
Ο όρος οντότητα συσχετίζεται συχνότερα με οχήματα ικανά για φυσική κίνηση όπως ρομπότ, αυτοκίνητα, πλοία και αεροσκάφη. Ωστόσο ο ορισμός επεκτείνεται σε μια γενικότερη έννοια οντότητας η οποία παρουσιάζει μία χρονικά εξαρτώμενη συμπεριφορά. Τέτοια παραδείγματα οντοτήτων είναι λόγω χάρη τα πολυπρακτορικά συστήματα που συναντώνται στα δίκτυα επικοινωνιών:

- Κινητά ad hoc δίκτυα (MANET - Mobile Ad hoc NETWORKS),
- Ασύρματα δίκτυα πλέγματος (WMN - Wireless Mesh Networks)
- Ασύρματα δίκτυα αισθητήρων (WSN - Wireless Sensor Networks)
- Έξυπνα δίκτυα ηλεκτρικής ενέργειας (Smart Grids).

1.1.2 Συγκεντρωμένο - Αποκεντρωμένο - Καταναμημένο Σύστημα

Ένα σύστημα λήψης αποφάσεων ελέγχου μπορεί να είναι Συγκεντρωμένο (Centralized), Αποκεντρωμένο (Decentralized) ή Καταναμημένο (Distributed). Η βασική διαφορά ανάμεσα στην λογική του συγκεντρωμένου και του αποκεντρωμένου ή καταναμημένου συστήματος

έγκειται στην δυνατότητα επικοινωνίας μεταξύ των πρακτόρων και την λήψη αποφάσεων ελέγχου μέσω αυτής. Αναλυτικότερα, στη μεν πρώτη περίπτωση, όλοι οι πράκτορες βρίσκονται σε άμεση συνεννόηση με έναν κεντρικό και ακολουθούν τις οδηγίες του, και άρα κάθε συγκεντρωμένο σύστημα μπορεί θεωρητικά να μοντελοποιηθεί ως μία ενιαία οντότητα. Ως εκ τούτου, ο βασικός πράκτορας επιμερίζεται αποκλειστικά τον έλεγχο της δομής και της συμπεριφοράς του συνολικού συστήματος. Αυτό φυσικά έχει ως αποτέλεσμα την πλήρη αποδιοργάνωση του συστήματος σε περίπτωση που υποστεί βλάβη ο κεντρικός πράκτορας. Αντίθετα, στην περίπτωση του αποκεντρωμένου και του κατανεμημένου συστήματος, κάθε πράκτορας βρίσκεται σε άμεση επικοινωνία μόνο με τους γείτονές του και αυτοοργανώνεται βάσει των συνθηκών και των λειτουργικών αναγκών της γειτονιάς του. Τόσο η αποκεντρωμένη όσο και η κατανεμημένη μορφή οργάνωσης δίνει στο σύστημα το πλεονέκτημα της αυτονομίας των πρακτόρων, καταρχήν από τον οδηγό τους, αλλά και από τους γείτονές τους, αφού οποιοσδήποτε πράκτορας και να πάθει βλάβη δεν πρόκειται να επηρεάσει αρνητικά την λειτουργία του συστήματος ακόμα και αν πρόκειται για τον οδηγό.



Σχήμα 1.2: Τρόποι Σύνδεσης των Πρακτόρων ενός Συστήματος

1.1.3 Συνεργατικός Έλεγχος (Cooperative Control)

Ο συνεργατικός έλεγχος συχνά ασχολείται με το πρόβλημα του ελέγχου ενός πολυπρακτορικού ρομποτικού συστήματος για την επίτευξη ενός κοινού στόχου, όπως και γίνεται στην παρούσα εργασία. Τα καθήκοντα των ρομποτικών συστημάτων περιλαμβάνουν μεταξύ άλλων:

- αναζήτηση,
- εξερεύνηση,
- επιτήρηση,
- επιχειρήσεις διάσωσης,

- χαρτογράφηση άγνωστων ή μερικώς γνωστών περιβαλλόντων και
- ανταπόκριση σε καταστάσεις έκτακτης ανάγκης.

Σε πραγματικές εφαρμογές, ο έλεγχος πολλαπλών ρομπότ συχνά περιπλέκεται από τους ακόλουθους παράγοντες:

- Περιορισμοί στους οποίους υπόκειται το ίδιο το ρομποτικό σύστημα εκ κατασκευής και οδηγούν σε μείωση αφενός του χώρου των δυνατών διατάξεων (configuration space) του ρομπότ και αφετέρου του χώρου εργασίας του (task space).
- Περιορισμοί πόρων όσον αφορά τις δυνατότητες αντίληψης κίνησης και επικοινωνίας.
- Η άγνωστη φύση του περιβάλλοντος απαιτεί από τα ρομποτικά συστήματα να είναι προσαρμοστικά στις περιβαλλοντικές αλλαγές, ακριβή στην απόκτηση πληροφοριών, έγκαιρα και έξυπνα στην λήψη αποφάσεων.
- Οι κατανεμημένες δομές πληροφορίας και υπολογισμού δεν μπορούν να είναι αυθαίρετες λόγω του γεωγραφικού διαχωρισμού και των περιορισμών επικοινωνίας.



Σχήμα 1.3: Συνεργατικός Έλεγχος Κινητών Ρομπότ

Οι κύριοι στόχοι του συνεργατικού ελέγχου ρομπότ περιλαμβάνουν την ανάπτυξη της μεθοδολογίας και του λογισμικού που επιτρέπουν:

- Δυναμική ανάθεση εργασιών.
- Δρομολόγηση οχήματος (path planning) και σχεδιασμός μονοπατιού χωρίς εμπόδια.
- Άμεση τροποποίηση της τροχιάς του εκάστοτε ρομπότ όταν δημιουργείται κίνδυνος συγκρούσεων του με γειτονικά σε αυτό οχήματα.
- Άμεση αλλαγή τροχιάς του οχήματος προς αποφυγή καινούργιων μη-αναμενόμενων εμποδίων.
- Κατανεμημένη και σε πραγματικό χρόνο λήψη αποφάσεων,
- Δημιουργία τροχιάς κάτω από μή-ολονομικούς περιορισμούς.

Το πρόβλημα συνεργατικού ελέγχου που μελετάται στην παρούσα εργασία, αποσκοπεί στην επίτευξη σχηματισμού διάταξης (formation) κινούμενων ρομπότ μέσω της επίλυσης ενός προβλήματος συμφωνίας (consensus) μεταξύ των πρακτόρων. Το πρωτόκολλο συμφωνίας είναι ένα δυναμικό σύστημα το οποίο διέπεται από την τοπολογία διασύνδεσης και την αρχική συνθήκη για κάθε ρομπότ-πράκτορα. Ο συνεργατικός έλεγχος αποτελεί ένα γενικό πρόβλημα το οποίο υποδιαιρείται σε πιο εξειδικευμένα, μερικά εκ των οποίων είναι τα ακόλουθα:

- Συνάντηση (Rendezvous)
- Κυκλική Επιδίωξη (Cyclic Pursuit)
- Έλεγχος Σχηματισμού (Formation Control)
- Συρρίκνωση (Flocking)

Αξίζει να σημειωθεί πως η ιδέα του τελευταίου προβλήματος, flocking, πηγάζει από την ίδια την φύση και συγκεκριμένα από την συνεργατική και παράλληλα αποκεντρωμένη συμπεριφορά που εμφανίζουν τα ζώα μεταξύ τους. Ανάλογα με το είδος στο οποίο αναφερόμαστε, η παραπάνω έννοια αποτυπώνεται στις ακόλουθες εκφράσεις:

- Swarming → Swarm of insects



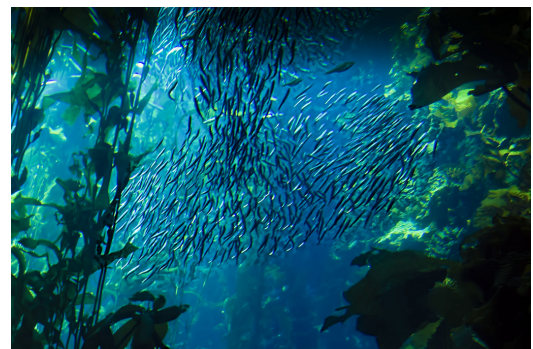
- Herding → Herd of tetrapods



- Flocking → Flock of birds



- Shoaling and Schooling → School of fish



1.1.4 Συνεισφορά

Σχετικά με την συνεισφορά της παρούσας διπλωματικής εργασίας, θα μπορούσε να θεωρηθεί ότι διαχωρίζεται στα ακόλουθα τρία μέρη.

- Πρώτον γίνεται κατάλληλη τροποποίηση του PI μετασχηματισμού λάθους συμφωνίας [1] ώστε να καταστεί δυνατή η εφαρμογή του σε προβλήματα leader follower consensus, ως εκ τούτου και formation, για την περίπτωση κινούμενου ηγέτη.
- Δεύτερον σχεδιάζεται νόμος ελέγχου για την αντιμετώπιση του προβλήματος leader follower formation, με κινούμενο ηγέτη και ταυτόχρονα εξασφάλιση αποφυγής συγκρούσεων μεταξύ όλων των πρακτόρων, ηγέτη και ακόλουθων.
- Τρίτον γίνεται σχεδιασμός προσαρμοστικού νόμου ελέγχου χρησιμοποιώντας νευρωνικά δίκτυα υψηλότερης τάξης HONN, για την online εκμάθηση της δυναμικής των χρησιμοποιηθέντων ρομπότ, η οποία και θεωρείται άγνωστη.

1.2 Οργάνωση του τόμου

Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται περιγραφή των προβλημάτων με τα οποία θα σχοληθεί η παρούσα εργασία καθώς και μία γενική ανάλυση του ευρύτερου αντικειμένου του αυτομάτου ελέγχου στο οποίο υπόκεινται αυτά. Στα επόμενα δύο κεφάλαια, 2 και 3, γίνεται ανασκόπηση του απαιτούμενου μαθηματικού υποβάθρου που χρειάζεται για την αντιμετώπιση των προβλημάτων. Συγκεκριμένα, παραθέτονται ορισμοί, ιδιότητες και λήμματα που πρόκειται να χρησιμοποιηθούν στην πορεία. Επίσης γίνεται εκτεταμένη εξέταση των κινηματικών περιορισμών των κινούμενων ρομπότ διαφορικής οδήγησης, πάνω στα οποία υλοποιούνται οι νόμοι ελέγχου, καθώς και αναλυτική εύρεση του δυναμικού μοντέλου τους. Στο κεφάλαιο 4 γίνεται διατύπωση του πρώτου προβλήματος και εύρεση του κατάλληλου νόμου ελέγχου για την αντιμετώπισή του, ενώ στο κεφάλαιο 5 παραθέτονται τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων που έγιναν για την υλοποίηση του ελεγκτή. Αντίστοιχα, στο κεφάλαιο 6 γίνεται διατύπωση και αντιμετώπιση του δεύτερου προβλήματος ελέγχου και στο κεφάλαιο 7 παραθέτονται τα αποτελέσματα των αντίστοιχων προσομοιώσεων. Τέλος, στο κεφάλαιο 8 τοποθετούνται τα συμπεράσματα και οι μελλοντικές επεκτάσεις των προβλημάτων.

Κεφάλαιο 2

Θεωρητικό υπόβαθρο

Στο παρόν κεφάλαιο γίνεται εκτεταμένη ανάλυση του θεωρητικού-μαθηματικού υποβάθρου που απαιτείται για την αντιμετώπιση των προβλημάτων ελέγχου που περιγράφονται στα κεφάλαια 4 και 6.

2.1 Θεωρία Γράφων

2.1.1 Τα Είδη των Γράφων

Οι γράφοι αποτελούν μαθηματικές δομές που χρησιμοποιούνται για την περιγραφή των σχέσεων μεταξύ κάθε ζεύγους οντοτήτων που ανήκουν σε ένα σύνολο. Ένας γράφος αποτελείται από “κορυφές” - “vertices”, οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους με “ακμές” - “edges”. Μαθηματικά ορίζεται ως ένα διατεταγμένο ζεύγος $G = (V, E)$, όπου V είναι το σύνολο των κορυφών του και E είναι το σύνολο των ακμών του.

Οι γράφοι χωρίζονται σε κατευθυνόμενους και μη κατευθυνόμενους, η διαφορά των οποίων έγκειται στην ύπαρξη και έλλειψη, αντίστοιχα, προσανατολισμού των ακμών τους. Ένας μη-κατευθυνόμενος γράφος θεωρείται συνεκτικός, όταν υπάρχει μονοπάτι μεταξύ κάθε ζεύγους των κορυφών του, δηλαδή όταν κάθε κορυφή είναι προσβάσιμη από κάθε άλλη. Ένας κατευθυνόμενος γράφος θεωρείται:

- ασθενώς συνεκτικός, εάν αντικαθιστώντας τα προσανατολισμένα άκρα του από μη-προσανατολισμένα, προκύπτει ένας συνεκτικός μη-κατευθυνόμενος γράφος,
- συνεκτικός, εάν υπάρχει ένα μονοπάτι προς μία τουλάχιστον κατεύθυνση μεταξύ κάθε ζεύγους των κορυφών του,
- ισχυρά συνεκτικός, εάν υπάρχει ένα μονοπάτι προς κάθε κατεύθυνση μεταξύ κάθε ζεύγους των κορυφών του.

2.1.2 Η Λαπλασιανή Μήτρα ενός Γράφου

Στην θεωρία γράφων, η Λαπλασιανή Μήτρα αποτελεί μία αναπαράσταση του γράφου υπό την μορφή ενός πίνακα.

Ορισμός 2.1. Δεδομένου ενός γράφου $G = (V, E)$ που αποτελείται από n κορυφές, η Λαπλασιανή Μήτρα $L_{n \times n}$ ορίζεται ως η διαφορά: $L = D - A$, όπου D είναι ο “πίνακας βαθμού”-“degree matrix” και A ο “πίνακας γειτνίασης”-“adjacency matrix” του γράφου.

Η μήτρα D αποτελεί έναν διαγώνιο πίνακα, κάθε διαγώνιο στοιχείο d_{ii} του οποίου ισούται με τον αριθμό των ακμών που συνδέονται με την αντίστοιχη κορυφή i , $\deg(v_i)$.

Η μήτρα A αποτελεί έναν τετραγωνικό πίνακα, κάθε στοιχείο a_{ij} του οποίου περιγράφει την σχέση μεταξύ των κορυφών i και j .

Συγκεκριμένα, για έναν απλό γράφο, όπου ο πίνακας γειτνίασης αποτελείται μόνο από μονάδες και μηδενικά, τα στοιχεία της Λαπλασιανής εκφράζονται από την σχέση:

$$L_{ij} = \begin{cases} \deg(v_i), & \text{εάν } i = j \\ -1, & \text{εάν } i \neq j \text{ και η κορυφή } v_i \text{ γειτνιάζει με την } v_j \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

όπου: $\deg(v_i)$ είναι ο βαθμός της κορυφής i .

Σημείωση 1. Ιδιότητες της Λαπλασιανής Μήτρας:

Για έναν μη-κατευθυνόμενο γράφο G , με λαπλασιανή L , της οποίας οι ιδιοτιμές είναι οι: $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{n-1}$ ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

- Ο πίνακας L είναι συμμετρικός.
- Ο πίνακας L είναι θετικά ημιορισμένος, δηλαδή $\lambda_i \geq 0$ για κάθε i .
- Ο πίνακας L είναι διαγώνια κυρίαρχος *diagonally dominant*. Δηλαδή, για κάθε γραμμή του πίνακα, το μέτρο του στοιχείου που ανήκει στην κύρια διαγώνιο είναι μεγαλύτερο ή ίσον από το άθροισμα των μέτρων των λοιπών στοιχείων της γραμμής:

$$\|l_{ii}\| \geq \sum_{j \neq i} \|l_{ij}\|, \quad \forall i$$

- Το άθροισμα της κάθε γραμμής καθώς και της κάθε στήλης του είναι μηδέν, $L\mathbf{1} = \mathbf{1}^T L = 0$.

- Η μικρότερη ιδιοτιμή του είναι το μηδέν, $\lambda_0 = 0$, καθώς το $v_0 = [1, 1, \dots, 1]^T$ αποτελεί ιδιοδιάνυσμά του, $Lv_0 = 0 = \lambda_0 v_0$.

- Ο αριθμός των συνεκτικών στοιχείων, *connected components*, του γράφου συμπίπτει με την διάσταση του μηδενοχώρου της Λαπλασιανής και την αλγεβρική πολλαπλότητα, *algebraic multiplicity* της μηδενικής ιδιοτιμής.

- Για ένα γράφο με πολλαπλά συνεκτικά στοιχεία, ο πίνακας L είναι μπλοκ διαγώνιος, *block diagonal*, όπου κάθε μπλοκ του αποτελεί την Λαπλασιανή Μήτρα που αντιστοιχεί στο κάθε στοιχείο.

2.2 Μαθηματικά Λήμματα

Λήμμα 2.1. [20] Έστω ένα leader-follower πολυπρακτορικό σύστημα στο οποίο συμβολίζουμε με L τη Laplacian του υπογράφου των followers και με G ένα διαγώνιο πίνακα $G = \text{diag}(g_1, g_2, \dots, g_n)$ με $g_i > 0$ αν υπάρχει ακμή από τον leader στον i follower. Εάν ο συνολικός γράφος έχει ένα γεννητικό δέντρο με ρίζα τον ηγέτη, τότε ο πίνακας $L + G$ είναι θετικά ορισμένος.

Λήμμα 2.2. [16] (Comparison Lemma) Θεωρούμε μία βαθμωτή διαφορική εξίσωση

$$\dot{u} = f(t, u), \quad u(t_0) = u_0 \quad (2.1)$$

όπου η συνάρτηση $f(t, u)$ είναι συνεχής ως προς t και τοπικά Lipschitz ως προς u , για κάθε $t \geq 0$ και για κάθε $u \in J \subset \mathbb{R}$. Έστω $[t_0, T)$ (το T μπορεί να είναι το άπειρο) το μέγιστο διάστημα ύπαρξης της λύσης $u(t)$, και θεωρούμε ότι $u(t) \in J$ για κάθε $t \in [t_0, T)$. Έστω $v(t)$ μία συνεχής συνάρτηση της οποίας η άνω δεξιά παράγωγος $D^+v(t)$ ικανοποιεί την διαφορική ανισότητα

$$D^+v(t) \leq f(t, v(t)), \quad v(t_0) \leq u_0 \quad (2.2)$$

με $v(t) \in J$ για κάθε $t \in [t_0, T)$. Τότε, $v(t) \leq u(t)$ για κάθε $t \in [t_0, T)$.

Τα ακόλουθα δύο λήμματα, (2.3) και (2.4), αποτελούν απόρροια του λήμματος (2.2).

Λήμμα 2.3. Αν ισχύει

$$\dot{V} \leq -\lambda V \quad \forall t \in [t_0, t_f) \quad (2.3)$$

με $\lambda > 0$, θετική σταθερά, και $V(t) \geq 0$, μη αρνητική συνάρτηση, τότε

$$V(t) \leq V(t_0)e^{-\lambda(t-t_0)} \quad (2.4)$$

Λήμμα 2.4. Αν ισχύει

$$\dot{V} \leq -v_1 V + v_2 \quad \forall t \in [t_0, t_f) \quad (2.5)$$

με $v_1, v_2 > 0$, θετικές σταθερές, και $V(t) \geq 0$, μη αρνητική συνάρτηση, τότε

$$V(t) \leq e^{-v_1(t-t_0)} \left[V(t_0) - \frac{v_2}{v_1} \right] + \frac{v_2}{v_1} \quad (2.6)$$

Λήμμα 2.5. [16] (Λήμμα Barbalat) Έστω συνάρτηση $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία πληροί τις παρακάτω προϋποθέσεις

- Το όριο $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \phi(\tau) d\tau$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο
- Η συνάρτηση $\phi(t)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, \infty)$

Τότε η ϕ συγκλίνει στο μηδέν, δηλαδή είναι

$$\phi(t) \rightarrow 0 \quad \text{για } t \rightarrow \infty \quad (2.7)$$

Σημειώνεται ότι ένας συχνά χρησιμοποιούμενος τρόπος να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $\phi(t)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, είναι να δειχθεί ότι η παράγωγός της είναι φραγμένη.

2.3 Θεωρία Προσέγγισης

Για την ικανότητα προσέγγισης μιας μη γραμμικής συνάρτησης μέσω ενός τεχνητού νευρωνικού δικτύου με ένα hidden layer μέσα σε ένα συμπαγές σύνολο ισχύει το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 2.1. [19] (*Universal Approximation Theorem*) Έστω $\phi(\cdot)$ μία μη-σταθερή, φραγμένη, μονοτονικά αύξουσα συνεχής συνάρτηση. Επίσης, έστω I_{m_0} ο m_0 διαστάσεων υπερκύβος-μονάδα $[0, 1]^{m_0}$. Ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων στο I_{m_0} συμβολίζεται $C(I_{m_0})$. Τότε για κάθε συνάρτηση $f \in C(I_{m_0})$ και $\epsilon > 0$, υπάρχει ακέραιος M και σετ πραγματικών σταθερών a_i , b_i και W_{ij} , όπου $i = 1, \dots, m_1$ και $j = 1, \dots, m_0$ τέτοια ώστε να ορίζεται η συνάρτηση

$$F(x_1, \dots, x_{m_0}) = \sum_{i=1}^{m_1} \alpha_i \phi \left(\sum_{j=1}^{m_0} W_{ij} x_j + b_i \right) \quad (2.8)$$

η οποία αποτελεί προσέγγιση της συνάρτησης $f(\cdot)$ με

$$|F(x_1, \dots, x_{m_0}) - f(x_1, \dots, x_{m_0})| < \epsilon \quad (2.9)$$

για κάθε x_1, \dots, x_{m_0} που ανήκουν στο χώρο του διανύσματος εισόδου.

Κεφάλαιο 3

Μαθηματικό Μοντέλο του Κινούμενου Ρομπότ Διαφορικής Οδήγησης

3.1 Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο γίνεται μελέτη των Κινηματικών Περιορισμών του Κινούμενου Ρομπότ Διαφορικής Οδήγησης, καθώς και αναλυτική εύρεση του Δυναμικού Μοντέλου του. Η θεωρία της ενότητας 3.2 έχει βασιστεί στο κεφάλαιο 11 του βιβλίου [17], ενώ για τις ενότητες 3.3 και 3.4 έχει χρησιμοποιηθεί υλικό σχετικά με τα χαρακτηριστικά μεγέθη (μάζες, ροπές αδράνειας κλπ) και την κινητική ενέργεια του ρομπότ διαφορικής οδήγησης από τις πηγές [2]-[10].

3.2 Ολόνομοι και Μη-Ολόνομοι Περιορισμοί

Η κύλιση των τροχών ενός οχήματος έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση κινηματικών περιορισμών. Αυτοί κατηγοριοποιούνται σε ολόνομους (holonomic) και μη-ολόνομους (non-holonomic) και περιορίζουν την τοπική ευκινησία του ρομπότ.

Έστω \mathbf{q} το διάνυσμα γενικευμένων συντεταγμένων που περιγράφει την διάταξη του συστήματος. Ολόνομοι ή ολοκληρώσιμοι, ονομάζονται οι περιορισμοί που μπορούν να γραφτούν υπό την μορφή

$$\mathbf{h}_i(\mathbf{q}) = \mathbf{0} \quad i = 1, \dots, k < n \quad (3.1)$$

Άν σε ένα μηχανικό σύστημα όλοι οι περιορισμοί μπορούν να εκφραστούν υπό την παραπάνω μορφή, τότε το συνολικό σύστημα καλείται Ολόνομο.

Οι περιορισμοί που περιλαμβάνουν γενικευμένες μεταβλητές \mathbf{q} και ταχύτητες $\dot{\mathbf{q}}$

$$\mathbf{a}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{0} \quad i = 1, \dots, k < n \quad (3.2)$$

ονομάζονται κινηματικοί (kinematic constraints). Συνήθως είναι γραμμικοί ως προς τις γενικευμένες ταχύτητες $\dot{\mathbf{q}}$, εξού και εκφράζονται με την Πφαφφιανή μορφή (Pfaffian form)

$$\mathbf{a}_i^T(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = 0 \quad i = 1, \dots, k < n \quad (3.3)$$

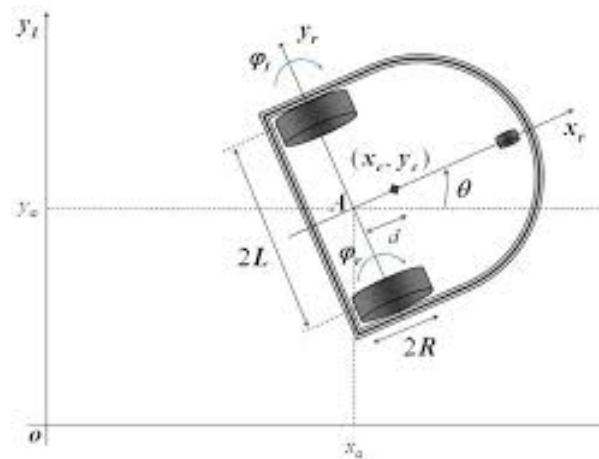
Θεωρώντας $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ τον πίνακα που περιλαμβάνει όλα τα διανύσματα $\mathbf{a}_i(\mathbf{q})$, η σχέση (3.3) μπορεί να διατυπωθεί και ως ακολούθως

$$\mathbf{A}^T(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (3.4)$$

Στην περίπτωση που οι παραπάνω κινηματικοί περιορισμοί δεν είναι ολοκληρώσιμοι, τότε θεωρούνται μη-ολόνομοι. Αν έστω και ένας περιορισμός του συστήματος υπάγεται σε αυτή την περίπτωση, τότε το συνολικό σύστημα θεωρείται Μη-Ολόνομο.

Το γεγονός αν ένα σύστημα είναι Ολόνομο ή Μη-Ολόνομο παίζει πολύ σημαντικό ρόλο, καθώς επηρεάζεται εντελώς διαφορετικά η ευκινησία του συστήματος σε κάθε περίπτωση. Στη μεν πρώτη περίπτωση, υπάρχει απώλεια προσβασιμότητας στον χώρο διατάξεων καθώς αν το n -διάστατο σύστημα υπόκειται σε k ολόνομικούς περιορισμούς, τότε η επιφάνεια στην οποία μπορεί να κινηθεί θα έχει διάσταση $(n - k)$. Στη δε δεύτερη περίπτωση, παρότι το σύστημα υφίσταται υποβάθμιση ως προς τον χώρο στον οποίο ανήκουν οι γενικευμένες ταχύτητες, $(n - k)$ -διάστατος υπόχωρος, εντούτοις, συνεχίζει να έχει πρόσβαση σε ολόκληρο τον n -διάστατο χώρο των διατάξεων.

3.3 Κινηματικοί Περιορισμοί του Ρομπότ Διαφορικής Οδήγησης



Σχήμα 3.1: Κινητό Ρομπότ Διαφορικής Οδήγησης - Differential Drive Mobile Robot

Στην παρούσα παράγραφο γίνεται ανάλυση των κινηματικών περιορισμών του ρομπότ, καθώς η γνώση τους είναι απαραίτητη για την μετέπειτα εξαγωγή του δυναμικού μοντέλου του.

Με βάση την γεωμετρία του κινητού ρομπότ διαφορικής οδήγησης που απεικονίζεται στο σχήμα

(3.1), ορίζουμε τα ακόλουθα σημεία:

- (x_c, y_c) : οι συντεταγμένες του κέντρου μάζας του ρομπότ
- (x, y) : οι συντεταγμένες του μέσου του ευθύγραμμου τμήματος που συνδέει τις δύο ρόδες του ρομπότ
- (x_{wR}, y_{wR}) : οι συντεταγμένες της δεξιάς ρόδας του ρομπότ
- (x_{wL}, y_{wL}) : οι συντεταγμένες της αριστερής ρόδας του ρομπότ

καθώς και τα παρακάτω μεγέθη:

- θ : η γωνία περιστροφής του συστήματος συντεταγμένων του ρομπότ ως προς το αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων
- $\dot{\phi}_R$: η γωνιακή ταχύτητα της δεξιάς ρόδας
- $\dot{\phi}_L$: η γωνιακή ταχύτητα της αριστερής ρόδας
- b : η απόσταση καθενός κινητήριου τροχού από τον άξονα συμμετρίας
- d : η απόσταση μεταξύ του κέντρου μάζας του ρομπότ και του μέσου του ευθύγραμμου τμήματος που συνδέει τις δύο ρόδες του ρομπότ
- r : η ακτίνα των κινητήριων τροχών
- m_c : η μάζα του ρομπότ χωρίς τους κινητήριους τροχούς και τους ρότορες των κινητήρων
- m_w : η μάζα καθενός κινητήριου τροχού συν τον ρότορα του κινητήρα του
- I_c : η ροπή αδρανείας του ρομπότ, χωρίς τους κινητήριους τροχούς και τους ρότορες των κινητήρων, γύρω από έναν κατακόρυφο άξονα διαμέσου της τομής του άξονα συμμετρίας με τον άξονα του τροχού οδήγησης
- I_w : η ροπή αδρανείας καθενός κινητήριου τροχού και του ρότορα του κινητήρα του, γύρω από τον άξονα της ρόδας
- I_m : η ροπή αδρανείας καθενός κινητήριου τροχού και του ρότορα του κινητήρα του, γύρω από την διάμετρο της ρόδας

Σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς, μπορούμε να ορίσουμε δύο συστήματα αναφοράς για το ρομπότ. Ένα βασισμένο στο διάνυσμα (x, y)

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} x & y & \theta & \phi_R & \phi_L \end{bmatrix}^T \quad (3.5)$$

και ένα βασισμένο στο διάνυσμα (x_c, y_c)

$$\mathbf{q}_c = \begin{bmatrix} x_c & y_c & \theta & \phi_R & \phi_L \end{bmatrix}^T \quad (3.6)$$

Όπως γίνεται φανερό από το σχήμα (3.1), οι συντεταγμένες του κέντρου μάζας του ρομπότ, (x_c, y_c) , συνδέονται με τις συντεταγμένες του μέσου του ευθυγράμμου τμήματος που συνδέει τις δύο ρόδες του ρομπότ, (x, y) , μέσω της σχέσης

$$x_c = x + d \cos \theta \quad (3.7)$$

$$y_c = y + d \sin \theta \quad (3.8)$$

Οι συντεταγμένες της δεξιάς ρόδας του ρομπότ μπορούν να εκφραστούν είτε συναρτήσει των (x, y) μέσω της σχέσης

$$x_{wR} = x + b \sin \theta \quad (3.9)$$

$$y_{wR} = y - b \cos \theta \quad (3.10)$$

είτε συναρτήσει των (x_c, y_c) μέσω της σχέσης

$$x_{wR} = x_c - d \cos \theta + b \sin \theta \quad (3.11)$$

$$y_{wR} = y_c - d \sin \theta - b \cos \theta \quad (3.12)$$

Ομοίως, οι συντεταγμένες της αριστερής ρόδας του ρομπότ εκφράζονται συναρτήσει των (x, y) μέσω της σχέσης

$$x_{wL} = x - b \sin \theta \quad (3.13)$$

$$y_{wL} = y + b \cos \theta \quad (3.14)$$

και συναρτήσει των (x_c, y_c) μέσω της

$$x_{wL} = x_c - d \cos \theta - b \sin \theta \quad (3.15)$$

$$y_{wL} = y_c - d \sin \theta + b \cos \theta \quad (3.16)$$

Παραγωγίζοντας τις (3.7)-(3.8) λαμβάνουμε

$$\dot{x}_c = \dot{x} - d\dot{\theta} \sin \theta \quad (3.17)$$

$$\dot{y}_c = \dot{y} + d\dot{\theta} \cos \theta \quad (3.18)$$

Παραγωγίζοντας τις (3.9)-(3.10) λαμβάνουμε

$$\dot{x}_{wR} = \dot{x} + b\dot{\theta} \cos \theta \quad (3.19)$$

$$\dot{y}_{wR} = \dot{y} + b\dot{\theta} \sin \theta \quad (3.20)$$

Παραγωγίζοντας τις (3.11)-(3.12) λαμβάνουμε

$$\dot{x}_{wR} = \dot{x}_c + d\dot{\theta} \sin \theta + b\dot{\theta} \cos \theta \quad (3.21)$$

$$\dot{y}_{wR} = \dot{y}_c - d\dot{\theta} \cos \theta + b\dot{\theta} \sin \theta \quad (3.22)$$

Παραγωγίζοντας τις (3.13)-(3.14) λαμβάνουμε

$$\dot{x}_{wL} = \dot{x} - b\dot{\theta} \cos \theta \quad (3.23)$$

$$\dot{y}_{wL} = \dot{y} - b\dot{\theta} \sin \theta \quad (3.24)$$

Παραγωγίζοντας τις (3.15)-(3.16) λαμβάνουμε

$$\dot{x}_{wL} = \dot{x}_c + d\dot{\theta} \sin \theta - b\dot{\theta} \cos \theta \quad (3.25)$$

$$\dot{y}_{wL} = \dot{y}_c - d\dot{\theta} \cos \theta - b\dot{\theta} \sin \theta \quad (3.26)$$

Το Σύστημα Συντεταγμένων του Ρομπότ, έστω (x^R, y^R) , συνδέεται με το Αδρανειακό Σύστημα Συντεταγμένων, έστω (x^I, y^I) , μέσω ενός πίνακα περιστροφής. Συγκεκριμένα, τα σημεία του (x^I, y^I) -επιπέδου προκύπτουν αν περιστραφούν αντιωρολογιακά τα σημεία του (x^R, y^R) -επιπέδου κατά γωνία θ . Μαθηματικά αυτή η σχέση περιγράφεται από τον ακόλουθο μετασχηματισμό

$$\begin{bmatrix} \dot{x}^I \\ \dot{y}^I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}^R \\ \dot{y}^R \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}^R \\ \dot{y}^R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}^I \\ \dot{y}^I \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Στην συνέχεια προχωράμε στην ανάλυση των κινηματικών περιορισμών του κινητού ρομπότ διαφορικής οδήγησης, οι οποίοι χωρίζονται σε δύο κατηγορίες.

3.3.1 Περιορισμός (I): Όχι Πλευρική Ολίσθηση

Αυτός ο περιορισμός δηλώνει ότι το ρομπότ μπορεί να κινείται μόνο σε καμπύλη τροχιά, προς τα εμπρός και προς τα πίσω, και όχι προς τα πλάγια. Στο πλαίσιο συντεταγμένων του ρομπότ αυτός ο περιορισμός μεταφράζεται ως το γεγονός ότι η ταχύτητα της κάθε ρόδας είναι μηδενική κατά μήκος του πλευρικού άξονα, δηλαδή του άξονα y .

$$\dot{y}^R = 0 \quad (3.28)$$

Εφαρμόζοντας τον περιορισμό (3.28) στην δεξιά ρόδα και κάνοντας χρήση του μετασχηματισμού (3.27) λαμβάνουμε ότι

$$\dot{y}_{wR}^R = -\dot{x}_{wR}^I \sin \theta + \dot{y}_{wR}^I \cos \theta = 0 \quad (3.29)$$

Αντικαθιστώντας τα \dot{x}_{wR}^I και \dot{y}_{wR}^I από τις σχέσεις (3.19) και (3.20) αντίστοιχα, στην (3.29), προκύπτει η εξίσωση

$$-\dot{x}^I \sin \theta + \dot{y}^I \cos \theta = 0 \quad (3.30)$$

Αντικαθιστώντας τα \dot{x}_{wR}^I και \dot{y}_{wR}^I από τις σχέσεις (3.21) και (3.22) αντίστοιχα, στην (3.29), προκύπτει η εξίσωση

$$-\dot{x}_c^I \sin \theta + \dot{y}_c^I \cos \theta - d\dot{\theta} = 0 \quad (3.31)$$

Εφαρμόζοντας τον περιορισμό (3.28) στην αριστερή ρόδα και κάνοντας χρήση του μετασχηματισμού (3.27) λαμβάνουμε ότι

$$\dot{y}_{wL}^R = -\dot{x}_{wL}^I \sin \theta + \dot{y}_{wL}^I \cos \theta = 0 \quad (3.32)$$

Αντικαθιστώντας τα \dot{x}_{wL}^I και \dot{y}_{wL}^I από τις σχέσεις (3.23) και (3.24) αντίστοιχα, στην (3.32), προκύπτει η εξίσωση

$$-\dot{x}^I \sin \theta + \dot{y}^I \cos \theta = 0 \quad (3.33)$$

Αντικαθιστώντας τα \dot{x}_{wL}^I και \dot{y}_{wL}^I από τις σχέσεις (3.25) και (3.26) αντίστοιχα, στην (3.32), προκύπτει η εξίσωση

$$-\dot{x}_c^I \sin \theta + \dot{y}_c^I \cos \theta - d\dot{\theta} = 0 \quad (3.34)$$

Βάσει των σχέσεων (3.30) και (3.33), προκύπτει ότι ο περιορισμός (3.28) εκφράζεται στο Αδρανειακό Σύστημα Συντεταγμένων από την εξίσωση

$$-\dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta = 0 \quad (3.35)$$

άν επιλεγεί ως διάνυσμα αναφοράς το (3.5) τόσο για την δεξιά όσο και για την αριστερή ρόδα. Βάσει των σχέσεων (3.31) και (3.34), προκύπτει ότι ο περιορισμός (3.28) εκφράζεται στο Αδρανειακό Σύστημα Συντεταγμένων από την εξίσωση

$$-\dot{x}_c \sin \theta + \dot{y}_c \cos \theta - d\dot{\theta} = 0 \quad (3.36)$$

άν επιλεγεί ως διάνυσμα αναφοράς το (3.6) τόσο για την δεξιά όσο και για την αριστερή ρόδα.

3.3.2 Περιορισμός (II): Καθαρή Κύλιση

Αυτός ο περιορισμός αντιπροσωπεύει το γεγονός ότι κάθε ρόδα διατηρεί ένα σημείο επαφής P με το δάπεδο. Δεν υπάρχει slipping της ρόδας στον διαμήκη άξονά της ούτε sliding στον ορθογώνιο άξονά της. Οι ταχύτητες των σημείων επαφής στο πλαίσιο συντεταγμένων του ρομπότ συνδέονται με τις ταχύτητες των ροδών σύμφωνα με τις ακόλουθες σχέσεις.

$$v_{PR}^R = r\dot{\phi}_R \quad (3.37)$$

$$v_{PL}^R = r\dot{\phi}_L \quad (3.38)$$

Εφαρμόζοντας τον περιορισμό (3.37) στην δεξιά ρόδα και κάνοντας χρήση του μετασχηματισμού (3.27) λαμβάνουμε ότι

$$\dot{x}_{wR}^R = \dot{x}_{wR}^I \cos \theta + \dot{y}_{wR}^I \sin \theta = r\dot{\phi}_R \quad (3.39)$$

Αντικαθιστώντας τα \dot{x}_{wR}^I και \dot{y}_{wR}^I από τις σχέσεις (3.19) και (3.20) αντίστοιχα, στην (3.39), προκύπτει η εξίσωση

$$\dot{x}^I \cos \theta + \dot{y}^I \sin \theta + b\dot{\theta} = r\dot{\phi}_R \quad (3.40)$$

Αντικαθιστώντας τα \dot{x}_{wR}^I και \dot{y}_{wR}^I από τις σχέσεις (3.21) και (3.22) αντίστοιχα, στην (3.39), προκύπτει η εξίσωση

$$\dot{x}_c^I \cos \theta + \dot{y}_c^I \sin \theta + b\dot{\theta} = r\dot{\phi}_R \quad (3.41)$$

Εφαρμόζοντας τον περιορισμό (3.38) στην αριστερή ρόδα και κάνοντας χρήση του μετασχηματισμού (3.27) λαμβάνουμε ότι

$$\dot{x}_{wL}^R = \dot{x}_{wL}^I \cos \theta + \dot{y}_{wL}^I \sin \theta = r\dot{\phi}_L \quad (3.42)$$

Αντικαθιστώντας τα \dot{x}_{wL}^I και \dot{y}_{wL}^I από τις σχέσεις (3.23) και (3.24) αντίστοιχα, στην (3.42), προκύπτει η εξίσωση

$$\dot{x}^I \cos \theta + \dot{y}^I \sin \theta - b\dot{\theta} = r\dot{\phi}_L \quad (3.43)$$

Αντικαθιστώντας τα \dot{x}_{wL}^I και \dot{y}_{wL}^I από τις σχέσεις (3.25) και (3.26) αντίστοιχα, στην (3.42), προκύπτει η εξίσωση

$$\dot{x}_c^I \cos \theta + \dot{y}_c^I \sin \theta - b\dot{\theta} = r\dot{\phi}_L \quad (3.44)$$

Βάσει της σχέσης (3.40) ο περιορισμός (3.37) εκφράζεται στο Αδρανειακό Σύστημα Συντεταγμένων από την εξίσωση

$$\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta + b\dot{\theta} = r\dot{\phi}_R \quad (3.45)$$

όσον αφορά την δεξιά ρόδα, ενώ, βάσει της σχέσης (3.43) ο περιορισμός (3.38) εκφράζεται στο Αδρανειακό Σύστημα Συντεταγμένων από την εξίσωση

$$\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta - b\dot{\theta} = r\dot{\phi}_L \quad (3.46)$$

όσον αφορά την αριστερή ρόδα, αν επιλεγεί ως διάνυσμα αναφοράς το (3.5).

Βάσει της σχέσης (3.41) ο περιορισμός (3.37) εκφράζεται στο Αδρανειακό Σύστημα Συντεταγμένων από την εξίσωση

$$\dot{x}_c \cos \theta + \dot{y}_c \sin \theta + b\dot{\theta} = r\dot{\phi}_R \quad (3.47)$$

όσον αφορά την δεξιά ρόδα, ενώ, βάσει της σχέσης (3.44) ο περιορισμός (3.38) εκφράζεται στο Αδρανειακό Σύστημα Συντεταγμένων από την εξίσωση

$$\dot{x}_c \cos \theta + \dot{y}_c \sin \theta - b\dot{\theta} = r\dot{\phi}_L \quad (3.48)$$

όσον αφορά την αριστερή ρόδα, αν επιλεγεί ως διάνυσμα αναφοράς το (3.6).

Από τις σχέσεις (3.35), (3.45) και (3.46) ορίζεται ο Πίνακας Κινηματικών Περιορισμών του ρομπότ, ο οποίος πρέπει να επαληθεύει την εξίσωση

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (3.49)$$

για την περίπτωση όπου το διάνυσμα αναφοράς είναι το (3.5), και εκφράζεται ως

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 \\ \cos \theta & \sin \theta & b & -r & 0 \\ \cos \theta & \sin \theta & -b & 0 & -r \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

Από τις σχέσεις (3.79), (3.47) και (3.48) ορίζεται ο Πίνακας Κινηματικών Περιορισμών του κινητού ρομπότ, ο οποίος πρέπει να επαληθεύει την εξίσωση

$$\mathbf{A}_c(\mathbf{q}_c)\dot{\mathbf{q}}_c = \mathbf{0} \quad (3.51)$$

για την περίπτωση όπου το διάνυσμα αναφοράς είναι το (3.6), και εκφράζεται ως

$$\mathbf{A}_c(\mathbf{q}_c) = \begin{bmatrix} -\sin \theta & \cos \theta & -d & 0 & 0 \\ \cos \theta & \sin \theta & b & -r & 0 \\ \cos \theta & \sin \theta & -b & 0 & -r \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

Παρατηρούμε ότι οι σχέσεις (3.49) και (3.51) αποτελούν εκφράσεις περιορισμών σε Παραφραϊνή μορφή, αντίστοιχες της (3.4).

Για την ολοκλήρωση της μελέτης των κινηματικών περιορισμών προχωράμε στην εύρεση πινάκων $\mathbf{S}(\mathbf{q})$ και $\mathbf{S}_c(\mathbf{q}_c)$ οι οποίοι θα πρέπει να πληρούν τις ακόλουθες συνθήκες.

Όσον αφορά τον $\mathbf{S}(\mathbf{q})$ πρέπει να ικανοποιεί τις σχέσεις

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{S}(\mathbf{q}) = \mathbf{0} \quad \& \quad \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{S}(\mathbf{q}) \begin{bmatrix} \dot{\phi}_R \\ \dot{\phi}_L \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

ως εκ τούτου θεωρούμε τον πίνακα

$$\mathbf{S}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} \cos \theta & \frac{r}{2} \cos \theta \\ \frac{r}{2} \sin \theta & \frac{r}{2} \sin \theta \\ \frac{r}{2b} & -\frac{r}{2b} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

Ενώ, όσον αφορά τον $\mathbf{S}_c(\mathbf{q}_c)$ πρέπει να ικανοποιεί τις σχέσεις

$$\mathbf{A}_c(\mathbf{q}_c)\mathbf{S}_c(\mathbf{q}_c) = \mathbf{0} \quad \& \quad \dot{\mathbf{q}}_c = \mathbf{S}_c(\mathbf{q}_c) \begin{bmatrix} \dot{\phi}_R \\ \dot{\phi}_L \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

ως εκ τούτου θεωρούμε τον πίνακα

$$\mathbf{S}_c(\mathbf{q}_c) = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} \cos \theta - \frac{r}{2b}d \sin \theta & \frac{r}{2} \cos \theta + \frac{r}{2b}d \sin \theta \\ \frac{r}{2} \sin \theta + \frac{r}{2b}d \cos \theta & \frac{r}{2} \sin \theta - \frac{r}{2b}d \cos \theta \\ \frac{r}{2b} & -\frac{r}{2b} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

Εδώ ολοκληρώνεται η εξέταση των Κινηματικών Περιορισμών του κινητού ρομπότ διαφορικής οδήγησης, οι οποίοι συγκεντρωτικά εκφράζονται από τις σχέσεις (3.49), (3.50), (3.53) και (3.54) για την περίπτωση όπου σύστημα αναφοράς θεωρείται το (3.5). Και από τις σχέσεις (3.51), (3.52), (3.55) και (3.56) για την περίπτωση όπου σύστημα αναφοράς θεωρείται το (3.6).

3.4 Δυναμικό Μοντέλο του Ρομπότ Διαφορικής Οδήγησης

Για την εξαγωγή του Δυναμικού Μοντέλου του κινητού ρομπότ διαφορικής οδήγησης, θα κάνουμε χρήση του μοντέλου Lagrange. Αρχικά θα βρούμε την Δυναμική και την Κινητική Ενέργεια του συστήματος. Όσον αφορά την πρώτη, είναι μηδενική αφού κινείται στο xy -επίπεδο. Συνεπώς $V = 0$. Όσον αφορά την δεύτερη, αποτελείται από τρία μέρη:

– Την Κινητική Ενέργεια της ρομποτικής πλατφόρμας

$$K_c = \frac{1}{2}m_c v_c^2 + \frac{1}{2}I_c \dot{\theta}^2 \quad (3.57)$$

– Την Κινητική Ενέργεια της δεξιάς ρόδας

$$K_{wR} = \frac{1}{2}m_w v_{wR}^2 + \frac{1}{2}I_m \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_w \dot{\phi}_R^2 \quad (3.58)$$

– Την Κινητική Ενέργεια της αριστερής ρόδας

$$K_{wL} = \frac{1}{2}m_w v_{wL}^2 + \frac{1}{2}I_m \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_w \dot{\phi}_L^2 \quad (3.59)$$

όπου

$$v_i^2 = \dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 \quad (3.60)$$

Από τις σχέσεις (3.57), (3.58) και (3.59) λαμβάνουμε ότι η συνολική ενέργεια του ρομπότ διαφορικής οδήγησης είναι Κινητική και περιγράφεται από την εξίσωση

$$K = \frac{1}{2}m_c v_c^2 + \frac{1}{2}I_c \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_w (v_{wR}^2 + v_{wL}^2) + I_m \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_w (\dot{\phi}_R^2 + \dot{\phi}_L^2) \quad (3.61)$$

Λαμβάνοντας υπόψιν την (3.60), η (3.61) γράφεται εκ νέου

$$K = \frac{1}{2}m_c (\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2) + \frac{1}{2}I_c \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_w ((\dot{x}_{wR}^2 + \dot{y}_{wR}^2) + (\dot{x}_{wL}^2 + \dot{y}_{wL}^2)) + I_m \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_w (\dot{\phi}_R^2 + \dot{\phi}_L^2) \quad (3.62)$$

3.4.1 Θεωρούμενο Σύστημα Αναφοράς: \mathbf{q}

Προχωράμε στην ανάλυση του δυναμικού μοντέλου για την περίπτωση όπου το διάνυσμα αναφοράς είναι το (3.5). Για τον λόγο αυτό, αντικαθιστούμε τα (3.17), (3.18), (3.19), (3.20), (3.23) και (3.24) στην (3.62), η οποία και παίρνει την μορφή

$$K = \frac{1}{2}I_c \dot{\theta}^2 + I_m \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_w (\dot{\phi}_R^2 + \dot{\phi}_L^2) + \frac{1}{2}m_c \left[(\dot{x} - d\dot{\theta} \sin \theta)^2 + (\dot{y} + d\dot{\theta} \cos \theta)^2 \right] \quad (3.63)$$

$$+ \frac{1}{2}m_w \left[(\dot{x} + b\dot{\theta} \cos \theta)^2 + (\dot{y} + b\dot{\theta} \sin \theta)^2 \right] + \frac{1}{2}m_w \left[(\dot{x} - b\dot{\theta} \cos \theta)^2 + (\dot{y} - b\dot{\theta} \sin \theta)^2 \right]$$

Εκτελώντας τις πράξεις στην (3.63) προκύπτει ότι

$$K = \frac{1}{2}(m_c + 2m_w) (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + m_c d \dot{\theta} (-\dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta) + \frac{1}{2}(I_c + 2I_m + m_c d^2 + 2m_w b^2) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_w (\dot{\phi}_R^2 + \dot{\phi}_L^2) \quad (3.64)$$

Θέτοντας

$$m := m_c + 2m_w \quad \& \quad I := I_c + 2I_m + m_c d^2 + 2m_w b^2 \quad (3.65)$$

και αντικαθιστώντας τις (3.65) στην (3.64), η τελευταία γίνεται

$$K = \frac{1}{2}m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + m_c d \dot{\theta} (-\dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta) + \frac{1}{2}I \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_w (\dot{\phi}_R^2 + \dot{\phi}_L^2) \quad (3.66)$$

Έχοντας βρεί την ολική ενέργεια του συστήματος, προχωράμε στην εφαρμογή της εξίσωσης Lagrange η οποία, εν γένει, έχει την ακόλουθη μορφή

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{F} - \mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda} \quad (3.67)$$

με συνάρτηση Lagrange την

$$L = K - V \quad (3.68)$$

όπου K είναι η κινητική ενέργεια του συστήματος, εν προκειμένω η (3.64), και V είναι η δυναμική ενέργεια του συστήματος, εν προκειμένω είναι $V = 0$. Οπότε, στην περίπτωση μας θα είναι $L \equiv K$.

Αναλύοντας την (3.67) θα την φέρουμε τελικά στην ακόλουθη μορφή

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}(\mathbf{q}) + \boldsymbol{\tau}_d = \mathbf{B}(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau} - \mathbf{A}^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda} \quad (3.69)$$

η οποία και αποτελεί την γενική έκφραση της εξίσωσης Lagrange για το κινητό ρομπότ διαφορικής οδήγησης. Όσον αφορά τα μεγέθη της (3.69), παραθέτουμε τους ακόλουθους ορισμούς

- $\mathbf{M}(\mathbf{q})$: η συμμετρική και θετικά ορισμένη μήτρα αδράνειας του ρομπότ
- $\mathbf{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$: η κεντρομόλος και κοριόλις μήτρα
- $\mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}})$: η επιφανειακή τριβή
- $\mathbf{G}(\mathbf{q})$: το διάνυσμα του βαρυτικού πεδίου
- $\boldsymbol{\tau}_d$: φραγμένες άγνωστες διαταραχές συμπεριλαμβανομένης μη-δομημένης και μη-μοντελοποιημένης δυναμικής
- $\mathbf{B}(\mathbf{q})$: η μήτρα μετασχηματισμού εισόδου
- $\boldsymbol{\tau}$: το διάνυσμα εισόδου
- $\mathbf{A}(\mathbf{q})$: πίνακας συσχετιζόμενος με τους περιορισμούς
- $\boldsymbol{\lambda}$: το διάνυσμα των δυνάμεων περιορισμού

Καθώς το ρομπότ κινείται στο xy -επίπεδο έπεται ότι το βαρυτικό πεδίο του είναι μηδενικό και άρα θα έχουμε $\mathbf{G}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$. Επίσης θεωρούμε ότι δεν υπάρχει επιφανειακή τριβή, $\mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{0}$, ούτε άγνωστες διαταραχές, $\boldsymbol{\tau}_d = \mathbf{0}$. Κατ'επέκταση, στην περίπτωση μας, η εξίσωση (3.69) μπορεί να λάβει την απλοποιημένη μορφή

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{B}(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau} - \mathbf{A}^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda} \quad (3.70)$$

Θεωρώντας ως διάνυσμα ροπών το

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_R \\ \tau_L \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

έπεται ότι το διάνυσμα \mathbf{F} της (3.67) θα έχει την μορφή

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \tau_R & 0 \\ 0 & \tau_L \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

Προχωράμε στον υπολογισμό του $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial K}{\partial \mathbf{q}}$, που αποτελεί το αριστερό μέλος της (3.67). Λαμβάνοντας την μερική παράγωγο ως προς $\dot{\mathbf{q}}$ και ως προς \mathbf{q} της (3.66), παίρνουμε αντίστοιχα

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \begin{bmatrix} m\dot{x} - m_c d \dot{\theta} \sin \theta \\ m\dot{y} + m_c d \dot{\theta} \cos \theta \\ m_c d (-\dot{x} \sin \theta + \dot{y} \cos \theta) + I\dot{\theta} \\ I_w \dot{\phi}_R \\ I_w \dot{\phi}_L \end{bmatrix} \quad \& \quad \frac{\partial K}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_c d \dot{\theta} [-\dot{x} \cos \theta - \dot{y} \sin \theta] \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

Έπειτα, παραγωγίζοντας ως προς τον χρόνο την (3.73), προκύπτει

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) = \begin{bmatrix} m\ddot{x} - m_c d \ddot{\theta} \sin \theta - m_c d (\dot{\theta})^2 \cos \theta \\ m\ddot{y} - m_c d \ddot{\theta} \cos \theta - m_c d (\dot{\theta})^2 \sin \theta \\ m_c d [-\ddot{x} \sin \theta - \dot{x} \dot{\theta} \cos \theta + \ddot{y} \cos \theta - \dot{y} \dot{\theta} \sin \theta] + I\ddot{\theta} \\ I_w \ddot{\phi}_R \\ I_w \ddot{\phi}_L \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

Βάσει των σχέσεων (3.73) και (3.74), παίρνουμε τελικά ότι

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial K}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} m\ddot{x} - m_c d \ddot{\theta} \sin \theta - m_c d (\dot{\theta})^2 \cos \theta \\ m\ddot{y} - m_c d \ddot{\theta} \cos \theta - m_c d (\dot{\theta})^2 \sin \theta \\ m_c d (-\ddot{x} \sin \theta + \ddot{y} \cos \theta) + I\ddot{\theta} \\ I_w \ddot{\phi}_R \\ I_w \ddot{\phi}_L \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

Παρατηρούμε ότι ο παραπάνω πίνακας (3.75) μπορεί να γραφεί ως άθροισμα γινομένων πινάκων, και τελικά να λάβει την μορφή του αριστερού μέλους της (3.70), όπως φαίνεται ακολούθως

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial K}{\partial \mathbf{q}} &= \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} \quad (3.76) \\ &= \begin{bmatrix} m & 0 & -m_c d \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & m & m_c d \cos \theta & 0 & 0 \\ -m_c d \sin \theta & m_c d \cos \theta & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi}_R \\ \ddot{\phi}_L \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & -m_c d \dot{\theta} \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -m_c d \dot{\theta} \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi}_R \\ \dot{\phi}_L \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Οι μήτρες $\mathbf{M}(\mathbf{q})$, $\mathbf{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ και \mathbf{B} της εξίσωσης (3.70), βάσει της (3.76), δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m & 0 & -m_c d \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & m & m_c d \cos \theta & 0 & 0 \\ -m_c d \sin \theta & m_c d \cos \theta & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_w \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

$$\mathbf{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -m_c d \dot{\theta} \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -m_c d \dot{\theta} \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

Καθώς είναι $\mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{0}$, μπορούμε να απλοποιήσουμε την εξίσωση Lagrange (3.70) αν την πολλαπλασιάσουμε με τον πίνακα \mathbf{S}^T . Τότε θα είναι

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{S}^T \mathbf{V} \dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{S}^T \mathbf{B} \boldsymbol{\tau} - \mathbf{S}^T \mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda} \\ (\mathbf{S}^T \mathbf{M}) \ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{S}^T \mathbf{V}) \dot{\mathbf{q}} &= (\mathbf{S}^T \mathbf{B}) \boldsymbol{\tau} \end{aligned} \quad (3.80)$$

Ορίζουμε τους πίνακες

$$\mathbf{M}' := \mathbf{S}^T \mathbf{M} \quad \& \quad \mathbf{V}' := \mathbf{S}^T \mathbf{V} \quad \& \quad \mathbf{B}' := \mathbf{S}^T \mathbf{B} \quad (3.81)$$

Αντικαθιστώντας λοιπόν τις (3.81) στην (3.80), η εξίσωση Lagrange παίρνει την απλοποιημένη μορφή

$$\mathbf{M}' \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{V}' \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{B}' \boldsymbol{\tau} \quad (3.82)$$

Πολλαπλασιάζοντας τους πίνακες (3.54) και (3.77) προκύπτει η μήτρα \mathbf{M}'

$$\mathbf{M}' = \begin{bmatrix} m \frac{r}{2} \cos \theta - m_c d \frac{r}{2b} \sin \theta & m \frac{r}{2} \sin \theta + m_c d \frac{r}{2b} \cos \theta & I \frac{r}{2b} & I_w & 0 \\ m \frac{r}{2} \cos \theta + m_c d \frac{r}{2b} \sin \theta & m \frac{r}{2} \sin \theta - m_c d \frac{r}{2b} \cos \theta & -I \frac{r}{2b} & 0 & I_w \end{bmatrix} \quad (3.83)$$

Πολλαπλασιάζοντας τους πίνακες (3.54) και (3.78) προκύπτει η μήτρα \mathbf{V}'

$$\mathbf{V}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -m_c d \dot{\theta} \frac{r}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -m_c d \dot{\theta} \frac{r}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

Πολλαπλασιάζοντας τους πίνακες (3.54) και (3.79) προκύπτει η μήτρα \mathbf{B}'

$$\mathbf{B}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.85)$$

Καθώς η μεταβλητή $\dot{\mathbf{q}}$ μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει των $\dot{\phi}_R$ και $\dot{\phi}_L$, σύμφωνα με την σχέση (3.53), μπορούμε να εκφράσουμε την εξίσωση (3.82) συναρτήσει των γωνιακών ταχυτήτων, όπως θα αναλυθεί παρακάτω. Για τον λόγο αυτό, αρχικά ορίζουμε το διάνυσμα ταχυτήτων \mathbf{v}_{12}

$$\mathbf{v}_{12} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi}_R \\ \dot{\phi}_L \end{bmatrix} \quad (3.86)$$

Ως εκ τούτου, οι γενικευμένες μεταβλητές $\dot{\mathbf{q}}$ και $\ddot{\mathbf{q}}$ εκφράζονται μέσω των γωνιακών ταχυτήτων

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{S} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \mathbf{S}\mathbf{v}_{12} \quad (3.87)$$

$$\ddot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{S}} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \mathbf{S} \begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{S}}\mathbf{v}_{12} + \mathbf{S}\dot{\mathbf{v}}_{12} \quad (3.88)$$

Αντικαθιστώντας τις (3.87) και (3.88) στην (3.82), παίρνουμε την εξίσωση

$$\begin{aligned} \mathbf{M}' (\dot{\mathbf{S}}\mathbf{v}_{12} + \mathbf{S}\dot{\mathbf{v}}_{12}) + \mathbf{V}'\mathbf{S}\mathbf{v}_{12} &= \mathbf{B}'\boldsymbol{\tau} \\ (\mathbf{M}'\mathbf{S})\dot{\mathbf{v}}_{12} + (\mathbf{M}'\dot{\mathbf{S}} + \mathbf{V}'\mathbf{S})\mathbf{v}_{12} &= \mathbf{B}'\boldsymbol{\tau} \end{aligned} \quad (3.89)$$

Ορίζουμε τους πίνακες

$$\bar{\mathbf{M}} := \mathbf{M}'\mathbf{S} \quad \& \quad \bar{\mathbf{V}} := (\mathbf{M}'\dot{\mathbf{S}} + \mathbf{V}'\mathbf{S}) \quad \& \quad \bar{\mathbf{B}} := \mathbf{B}' \quad (3.90)$$

Αντικαθιστώντας λοιπόν τις (3.90) στην (3.89), η εξίσωση Lagrange γράφεται εκ νέου

$$\bar{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{v}}_{12} + \bar{\mathbf{V}}\mathbf{v}_{12} = \bar{\mathbf{B}}\boldsymbol{\tau} \quad (3.91)$$

Πολλαπλασιάζοντας τους πίνακες (3.83) και (3.54) προκύπτει η μήτρα $\bar{\mathbf{M}}$

$$\bar{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \frac{r^2}{4b^2}(mb^2 + I) + I_w & \frac{r^2}{4b^2}(mb^2 - I) \\ \frac{r^2}{4b^2}(mb^2 - I) & \frac{r^2}{4b^2}(mb^2 + I) + I_w \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

Αθροίζοντας, το γινόμενο του πίνακα (3.83) με την παράγωγο του (3.54), με το γινόμενο του πίνακα (3.84) με τον (3.54), προκύπτει η μήτρα $\bar{\mathbf{V}}$

$$\bar{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} 0 & m_c d \frac{r^2}{2b} \\ -m_c d \frac{r^2}{2b} & 0 \end{bmatrix} \dot{\theta} \quad (3.93)$$

Τέλος είναι

$$\bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.94)$$

Παρατηρούμε ότι οι γωνιακές ταχύτητες της δεξιάς και της αριστερής ρόδας $[\dot{\phi}_R \quad \dot{\phi}_L]^T$ σχετίζονται με την γραμμική και γωνιακή ταχύτητα του κέντρου μάζας του ρομπότ $[v \quad \omega]^T$ μέσω των σχέσεων

$$\begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} & \frac{r}{2} \\ \frac{r}{2b} & -\frac{r}{2b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_R \\ \dot{\phi}_L \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \dot{\phi}_R \\ \dot{\phi}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & \frac{b}{r} \\ \frac{1}{r} & -\frac{b}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} \quad (3.95)$$

Θέτοντας

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & \frac{b}{r} \\ \frac{1}{r} & -\frac{b}{r} \end{bmatrix} \quad \& \quad \mathbf{v}_w = \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} \quad (3.96)$$

η (3.95) γράφεται

$$\mathbf{v}_{12} = \mathbf{C}\mathbf{v}_w \quad (3.97)$$

Αντικαθιστώντας την (3.97) στην (3.91), λαμβάνουμε την εναλλακτική μορφή της εξίσωσης Lagrange

$$(\bar{\mathbf{M}}\mathbf{C})\dot{\mathbf{v}}_w + (\bar{\mathbf{V}}\mathbf{C})\mathbf{v}_w = \bar{\mathbf{B}}\boldsymbol{\tau} \quad (3.98)$$

Ορίζουμε τους πίνακες

$$\hat{\mathbf{M}} := \bar{\mathbf{M}}\mathbf{C} \quad \& \quad \hat{\mathbf{V}} := \bar{\mathbf{V}}\mathbf{C} \quad \& \quad \hat{\mathbf{B}} := \bar{\mathbf{B}} \quad (3.99)$$

Αντικαθιστώντας λοιπόν τις (3.99) στην (3.91), η εξίσωση Lagrange γράφεται εκ νέου

$$\hat{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{v}}_w + \hat{\mathbf{V}}\mathbf{v}_w = \hat{\mathbf{B}}\boldsymbol{\tau} \quad (3.100)$$

Πολλαπλασιάζοντας τους πίνακες (3.92) και (3.96) προκύπτει η μήτρα $\hat{\mathbf{M}}$

$$\hat{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} m\frac{r}{2} + I_w\frac{1}{r} & I\frac{r}{2b} + I_w\frac{b}{r} \\ m\frac{r}{2} + I_w\frac{1}{r} & -(m\frac{r}{2} + I_w\frac{1}{r}) \end{bmatrix} \quad (3.101)$$

Πολλαπλασιάζοντας τους πίνακες (3.93) και (3.96) προκύπτει η μήτρα $\hat{\mathbf{V}}$

$$\hat{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} m_c d\frac{r}{2b} & -m_c d\frac{r}{2} \\ -m_c d\frac{r}{2b} & -m_c d\frac{r}{2} \end{bmatrix} \quad (3.102)$$

Τέλος είναι

$$\hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.103)$$

Όσον αφορά την σχέση της μεταβλητής $\dot{\mathbf{q}}$ με το διάνυσμα ταχυτήτων \mathbf{v}_w , αντικαθιστώντας την (3.97) στην (3.87), προκύπτει

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{S}\mathbf{C}\mathbf{v}_w \quad (3.104)$$

Πολλαπλασιάζοντας τους πίνακες (3.54) και (3.96), προκύπτει η μήτρα

$$\hat{\mathbf{S}} = \mathbf{S}\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{r} & \frac{b}{r} \\ \frac{1}{r} & -\frac{b}{r} \end{bmatrix} \quad (3.105)$$

3.4.2 Θεωρούμενο Σύστημα Αναφοράς: q_c

Προχωράμε στην ανάλυση του δυναμικού μοντέλου για την περίπτωση όπου το διάνυσμα αναφοράς είναι το (3.6). Για τον λόγο αυτό, αντικαθιστούμε τα (3.21), (3.22), (3.25) και (3.26) στην (3.62), η οποία και παίρνει την μορφή

$$\begin{aligned} K = & \frac{1}{2}m_c (\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2) + \frac{1}{2}I_c\dot{\theta}^2 + I_m\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_w (\dot{\phi}_R^2 + \dot{\phi}_L^2) \\ & + \frac{1}{2}m_w \left[(\dot{x}_c + d\dot{\theta} \sin \theta + b\dot{\theta} \cos \theta)^2 + (\dot{y}_c - d\dot{\theta} \cos \theta + b\dot{\theta} \sin \theta)^2 \right] \\ & + \frac{1}{2}m_w \left[(\dot{x}_c + d\dot{\theta} \sin \theta - b\dot{\theta} \cos \theta)^2 + (\dot{y}_c - d\dot{\theta} \cos \theta - b\dot{\theta} \sin \theta)^2 \right] \end{aligned} \quad (3.106)$$

Εκτελώντας τις πράξεις στην (3.106) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} K = & \frac{1}{2}(m_c + 2m_w) (\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2) + 2m_w d\dot{\theta} (-\dot{x}_c \sin \theta - \dot{y}_c \cos \theta) \\ & + \frac{1}{2}(I_c + 2I_m + 2m_w d^2 + 2m_w b^2) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_w (\dot{\phi}_R^2 + \dot{\phi}_L^2) \end{aligned} \quad (3.107)$$

Θέτοντας

$$m := m_c + 2m_w \quad (3.108)$$

$$I_{oc} := I_c + 2I_m + 2m_w d^2 + 2m_w b^2 \quad (3.109)$$

και αντικαθιστώντας τις (3.108) και (3.109) στην (3.107), η τελευταία γίνεται

$$K = \frac{1}{2}m (\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2) + 2m_w d\dot{\theta} (\dot{x}_c \sin \theta - \dot{y}_c \cos \theta) + \frac{1}{2}I_{oc}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_w (\dot{\phi}_R^2 + \dot{\phi}_L^2) \quad (3.110)$$

Έχοντας βρεί την ολική ενέργεια του συστήματος, προχωράμε στην εφαρμογή της εξίσωσης Lagrange η οποία, έχει την μορφή (3.67), με συνάρτηση Lagrange την (3.68). Η κινητική ενέργεια του συστήματος, εν προκειμένω είναι η (3.110), και V είναι η δυναμική ενέργεια του συστήματος, εν προκειμένω είναι $V = 0$. Οπότε, στην περίπτωση μας θα είναι $L \equiv K$.

Σημειώνεται ότι, και σε αυτή την περίπτωση, ισχύει η ανάλυση (3.69)-(3.72), με την μόνη διαφορά ότι οι εξισώσεις (3.69) και (3.70) επαναδιατυπώνονται ως ακολούθως

$$M_c(q_c)\ddot{q}_c + V_c(q_c, \dot{q}_c)\dot{q}_c + F_c(\dot{q}_c) + G_c(q_c) + \tau_d = B_c(q_c)\tau - A_c^T(q_c)\lambda \quad (3.111)$$

$$M_c(q_c)\ddot{q}_c + V_c(q_c, \dot{q}_c)\dot{q}_c = B_c(q_c)\tau - A_c^T(q_c)\lambda \quad (3.112)$$

όπου για τις μήτρες και τα διανύσματα της (3.111) ισχύουν οι αντίστοιχοι ορισμοί.

Προχωράμε στον υπολογισμό του $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_c} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_c}$. Λαμβάνοντας την μερική παράγωγο ως προς \dot{q}_c και ως προς q_c της (3.110), παίρνουμε αντίστοιχα

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_c} = \begin{bmatrix} m\dot{x}_c + 2m_w d\dot{\theta} \sin \theta \\ m\dot{y}_c - 2m_w d\dot{\theta} \cos \theta \\ 2m_w d(\dot{x}_c \sin \theta - \dot{y}_c \cos \theta) + I_{oc}\dot{\theta} \\ I_w \dot{\phi}_R \\ I_w \dot{\phi}_L \end{bmatrix} \quad \& \quad \frac{\partial K}{\partial q_c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2m_w d\dot{\theta} [\dot{x}_c \cos \theta + \dot{y}_c \sin \theta] \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.113)$$

Έπειτα, παραγωγίζοντας ως προς τον χρόνο την (3.113), προκύπτει

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\mathbf{q}}_c} \right) = \begin{bmatrix} m\ddot{x}_c + 2m_w d\ddot{\theta} \sin \theta + 2m_w d(\dot{\theta})^2 \cos \theta \\ m\ddot{y}_c - 2m_w d\ddot{\theta} \cos \theta + 2m_w d(\dot{\theta})^2 \sin \theta \\ 2m_w d \left[-\dot{x}_c \sin \theta + \dot{x}_c \dot{\theta} \cos \theta - \dot{y}_c \cos \theta + \dot{y}_c \dot{\theta} \sin \theta \right] + I_{oc} \ddot{\theta} \\ I_w \ddot{\phi}_R \\ I_w \ddot{\phi}_L \end{bmatrix} \quad (3.114)$$

Βάσει των σχέσεων (3.113) και (3.114), παίρνουμε τελικά ότι

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\mathbf{q}}_c} \right) - \frac{\partial K}{\partial \mathbf{q}_c} = \begin{bmatrix} m\ddot{x}_c + 2m_w d\ddot{\theta} \sin \theta + 2m_w d(\dot{\theta})^2 \cos \theta \\ m\ddot{y}_c - 2m_w d\ddot{\theta} \cos \theta + 2m_w d(\dot{\theta})^2 \sin \theta \\ 2m_w d (\dot{x}_c \sin \theta - \dot{y}_c \cos \theta) + I_{oc} \ddot{\theta} \\ I_w \ddot{\phi}_R \\ I_w \ddot{\phi}_L \end{bmatrix} \quad (3.115)$$

Παρατηρούμε ότι ο παραπάνω πίνακας (3.115) μπορεί να γραφεί ως άθροισμα γινομένων πινάκων, και τελικά να λάβει την μορφή του αριστερού μέλους της (3.112), όπως φαίνεται ακολούθως

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\mathbf{q}}_c} \right) - \frac{\partial K}{\partial \mathbf{q}_c} &= \mathbf{M}_c(\mathbf{q}_c) \ddot{\mathbf{q}}_c + \mathbf{V}_c(\mathbf{q}_c, \dot{\mathbf{q}}_c) \dot{\mathbf{q}}_c \quad (3.116) \\ &= \begin{bmatrix} m & 0 & 2m_w d \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & m & -2m_w d \cos \theta & 0 & 0 \\ 2m_w d \sin \theta & -2m_w d \cos \theta & I_{oc} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_c \\ \ddot{y}_c \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi}_R \\ \ddot{\phi}_L \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2m_w d \dot{\theta} \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2m_w d \dot{\theta} \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{y}_c \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi}_R \\ \dot{\phi}_L \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Οι μήτρες $\mathbf{M}_c(\mathbf{q}_c)$, $\mathbf{V}_c(\mathbf{q}_c, \dot{\mathbf{q}}_c)$ και \mathbf{B}_c της εξίσωσης (3.112) να δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις

$$\mathbf{M}_c(\mathbf{q}_c) = \begin{bmatrix} m & 0 & 2m_w d \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & m & -2m_w d \cos \theta & 0 & 0 \\ 2m_w d \sin \theta & -2m_w d \cos \theta & I_{oc} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_w \end{bmatrix} \quad (3.117)$$

$$\mathbf{V}_c(\mathbf{q}_c, \dot{\mathbf{q}}_c) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2m_w d \dot{\theta} \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2m_w d \dot{\theta} \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.118)$$

$$\mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.119)$$

Καθώς είναι $\mathbf{A}_c \mathbf{S}_c = \mathbf{0}$, μπορούμε να απλοποιήσουμε την εξίσωση Lagrange αν την πολλαπλασιάσουμε με τον πίνακα \mathbf{S}_c^T . Τότε θα είναι

$$\mathbf{S}_c^T \mathbf{M}_c \ddot{\mathbf{q}}_c + \mathbf{S}_c^T \mathbf{V}_c \dot{\mathbf{q}}_c = \mathbf{S}_c^T \mathbf{B}_c \boldsymbol{\tau} - \mathbf{S}_c^T \mathbf{A}_c^T \boldsymbol{\lambda} \quad (3.120)$$

$$(\mathbf{S}_c^T \mathbf{M}_c) \ddot{\mathbf{q}}_c + (\mathbf{S}_c^T \mathbf{V}_c) \dot{\mathbf{q}}_c = (\mathbf{S}_c^T \mathbf{B}_c) \boldsymbol{\tau} \quad (3.121)$$

Ορίζουμε τους πίνακες

$$\mathbf{M}'_c := \mathbf{S}_c^T \mathbf{M}_c \quad \& \quad \mathbf{V}'_c := \mathbf{S}_c^T \mathbf{V}_c \quad \& \quad \mathbf{B}'_c := \mathbf{S}_c^T \mathbf{B}_c \quad (3.122)$$

Αντικαθιστώντας λοιπόν τις (3.122) στην (3.121), η εξίσωση Lagrange παίρνει την απλοποιημένη μορφή

$$\mathbf{M}'_c \ddot{\mathbf{q}}_c + \mathbf{V}'_c \dot{\mathbf{q}}_c = \mathbf{B}'_c \boldsymbol{\tau}_c \quad (3.123)$$

Πολλαπλασιάζοντας τους πίνακες (3.56) και (3.117) προκύπτει η μήτρα \mathbf{M}'_c

$$\mathbf{M}'_c = \begin{bmatrix} m \frac{r}{2} \cos \theta - m_c d \frac{r}{2b} \sin \theta & m \frac{r}{2} \sin \theta + m_c d \frac{r}{2b} \cos \theta & \frac{r}{2b} (I_{oc} - 2m_w d^2) & I_w & 0 \\ m \frac{r}{2} \cos \theta + m_c d \frac{r}{2b} \sin \theta & m \frac{r}{2} \sin \theta - m_c d \frac{r}{2b} \cos \theta & \frac{r}{2b} (2m_w d^2 - I_{oc}) & 0 & I_w \end{bmatrix} \quad (3.124)$$

Πολλαπλασιάζοντας τους πίνακες (3.56) και (3.118) προκύπτει η μήτρα \mathbf{V}'_c

$$\mathbf{V}'_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & m_w d r \dot{\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_w d r \dot{\theta} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.125)$$

Τέλος, πολλαπλασιάζοντας τους πίνακες (3.56) και (3.119), παίρνουμε

$$\mathbf{B}'_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.126)$$

Καθώς η μεταβλητή $\dot{\mathbf{q}}_c$ μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει των $\dot{\phi}_R$ και $\dot{\phi}_L$, σύμφωνα με την σχέση (3.55), μπορούμε να εκφράσουμε την εξίσωση (3.123) συναρτήσει των γωνιακών ταχυτήτων, όπως θα αναλυθεί παρακάτω.

Οι γενικευμένες μεταβλητές $\dot{\mathbf{q}}_c$ και $\ddot{\mathbf{q}}_c$ εκφράζονται μέσω των γωνιακών ταχυτήτων

$$\dot{\mathbf{q}}_c = \mathbf{S}_c \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \mathbf{S}_c \mathbf{v}_{12} \quad (3.127)$$

$$\ddot{\mathbf{q}}_c = \dot{\mathbf{S}}_c \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \mathbf{S}_c \begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{S}}_c \mathbf{v}_{12} + \mathbf{S} \dot{\mathbf{v}}_{12} \quad (3.128)$$

Αντικαθιστώντας τις (3.127) και (3.128) στην (3.123), παίρνουμε την εξίσωση

$$\begin{aligned} \mathbf{M}'_c (\dot{\mathbf{S}}_c \mathbf{v}_{12} + \mathbf{S}_c \dot{\mathbf{v}}_{12}) + \mathbf{V}'_c \mathbf{S}_c \mathbf{v}_{12} &= \mathbf{B}'_c \boldsymbol{\tau} \\ (\mathbf{M}'_c \mathbf{S}_c) \dot{\mathbf{v}}_{12} + (\mathbf{M}'_c \dot{\mathbf{S}}_c + \mathbf{V}'_c \mathbf{S}_c) \mathbf{v}_{12} &= \mathbf{B}'_c \boldsymbol{\tau} \end{aligned} \quad (3.129)$$

Ορίζουμε τους πίνακες

$$\bar{M}_c := M'_c S_c = \bar{M}, \quad \text{όπως περιγράφεται στην (3.92)} \quad (3.130)$$

$$\bar{V}_c := (M'_c \dot{S}_c + V'_c S_c) = \bar{V}, \quad \text{όπως περιγράφεται στην (3.93)} \quad (3.131)$$

$$\bar{B}_c := B'_c = \bar{B}, \quad \text{όπως περιγράφεται στην (3.94)} \quad (3.132)$$

Αντικαθιστώντας λοιπόν τις (3.130), (3.131) και (3.132) στην (3.129), η εξίσωση Lagrange γράφεται εκ νέου

$$\bar{M}_c \dot{v}_{12} + \bar{V}_c v_{12} = \bar{B}_c \tau \quad (3.133)$$

Αντικαθιστώντας την (3.95) στην (3.133), λαμβάνουμε την εναλλακτική μορφή της εξίσωσης Lagrange

$$(\bar{M}_c C) \dot{v}_w + (\bar{V}_c C) v_w = \bar{B}_c \tau \quad (3.134)$$

Ορίζουμε τους πίνακες

$$\hat{M}_c := \bar{M}_c C = \hat{M}, \quad \text{όπως περιγράφεται στην (3.101)} \quad (3.135)$$

$$\hat{V}_c := \bar{V}_c C = \hat{V}, \quad \text{όπως περιγράφεται στην (3.102)} \quad (3.136)$$

$$\hat{B}_c := \bar{B}_c = \hat{B}, \quad \text{όπως περιγράφεται στην (3.103)} \quad (3.137)$$

Αντικαθιστώντας λοιπόν τις (3.135), (3.136) και (3.137) στην (3.134), η εξίσωση Lagrange γράφεται εκ νέου

$$\hat{M}_c \dot{v}_w + \hat{V}_c v_w = \hat{B}_c \tau \quad (3.138)$$

Όσον αφορά την σχέση της μεταβλητής \dot{q}_c με το διάνυσμα ταχυτήτων v_w , αντικαθιστώντας την (3.97) στην (3.127), προκύπτει

$$\dot{q}_c = S_c C v_w \quad (3.139)$$

Πολλαπλασιάζοντας τους πίνακες (3.56) και (3.96), προκύπτει η μήτρα

$$\hat{S}_c = S_c C = \begin{bmatrix} \cos \theta & -d \sin \theta \\ \sin \theta & d \cos \theta \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{r} & \frac{b}{r} \\ \frac{1}{r} & -\frac{b}{r} \end{bmatrix} \quad (3.140)$$

Κεφάλαιο 4

Κατανεμημένος Νόμος Ελέγχου για την Συμφωνία των τροχιών ενός Συστήματος Ακόλουθων με την τροχιά ενός Ηγέτη

4.1 Εισαγωγή

Θεωρούμε μία ομάδα κινητών ρομπότ διαφορικής οδήγησης, όχι απαραίτητα ίδιας δυναμικής, τα οποία καλούνται να εκτελέσουν μία εργασία συνεργατικού ελέγχου. Συγκεκριμένα ζητείται να εκτελέσουν Leader-Follower Consensus, δηλαδή να συναντηθούν στην θέση ενός ρομπότ-ηγέτη, ο οποίος δεν είναι σταθερός σε ένα σημείο αλλά κινείται με άγνωστη ταχύτητα, και στην συνέχεια να ακολουθήσουν την τροχιά του. Σημειώνεται ότι η δυναμική του κάθε πράκτορα, συμπεριλαμβανομένου και του ηγέτη, θεωρείται άγνωστη από τους άλλους και θα γίνει online εκτίμησή της χρησιμοποιώντας τεχνικές προσαρμοστικού ελέγχου σε συνδυασμό με νευρωνικά δίκτυα. Όσον αφορά τον γράφο που αναπαριστά την μετάδοση της πληροφορίας μεταξύ των οχημάτων, αρκεί να αποτελεί ένα γεννητικό δέντρο με ρίζα τον ηγέτη. Ο υπογράφος δε που περιγράφει την επικοινωνία μεταξύ των ακόλουθων δεν διέπεται από κάποιον περιορισμό όσον αφορά την κατευθυντικότητα ή την συνεκτικότητά του. Για την επίτευξη των ανωτέρω, ο νόμος ελέγχου που θα σχεδιαστεί πρέπει να είναι αφενός κατανεμημένος, καθώς δεν πρόκειται για κεντροποιημένο σύστημα αλλά ο κάθε πράκτορας αυτενεργεί βάσει των ερεθισμάτων που λαμβάνει από την “γειτονιά” του, ενώ η πληροφορία του ηγέτη τον επηρεάζει μόνο στην περίπτωση που συνδέεται απευθείας μαζί του. Αφετέρου, πρέπει να είναι προσαρμοστικός, καθώς όπως προαναφέρθηκε η δυναμική των ρομπότ θεωρείται άγνωστη και πρέπει να γίνει προσέγγιση των άγνωστων συναρτήσεων.

4.2 Οργάνωση του Κεφαλαίου

Το παρόν κεφάλαιο δομείται ως εξής: Αρχικά γίνεται διατύπωση του προβλήματος και ορισμός όλων των παραμέτρων που θα χρησιμοποιηθούν στην ανάλυσή του. Έπειτα σχεδιάζεται ο νόμος ελέγχου θέσης των ρομπότ διαμέσου της ταχύτητάς τους, η οποία και θεωρείται είσοδος στο υπό έλεγχο σύστημα κινηματικής ανάλυσης των οχημάτων διαφορικής οδήγησης. Στην επόμενη παράγραφο σχεδιάζεται ο νόμος ελέγχου της ταχύτητας των ρομπότ διαμέσου της ροπής τους, η οποία και θεωρείται είσοδος στο υπό έλεγχο σύστημα δυναμικής ανάλυσης των οχημάτων διαφορικής οδήγησης. Τέλος, γίνεται εισαγωγή νευρωνικών δικτύων στην είσοδο του συνολικού συστήματος, έτσι ώστε να γίνει προσέγγιση των άγνωστων μη-γραμμικών συναρτήσεων που αφορούν την δυναμική των ρομπότ.

4.3 Διατύπωση του Προβλήματος και Ορισμός των Παραμέτρων

Για την σωστή τοποθέτηση του προβλήματος, αρχικά θα περιγράψουμε αναλυτικά τα διανύσματα και τους πίνακες που πρόκειται να χρησιμοποιηθούν στην ανάλυση που έπεται.

Το συνολικό διάνυσμα θέσεων των n ακόλουθων, διάστασης $2n \times 1$, είναι

$$\tilde{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} q_{1x} & q_{1y} & q_{2x} & q_{2y} & \cdot & \cdot & \cdot & q_{nx} & q_{ny} \end{bmatrix}^T \quad (4.1)$$

Το συνολικό διάνυσμα ταχυτήτων των n ακόλουθων, διάστασης $2n \times 1$, είναι

$$\tilde{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} v_{1R} & v_{1L} & v_{2R} & v_{2L} & \cdot & \cdot & \cdot & v_{nR} & v_{nL} \end{bmatrix}^T \quad (4.2)$$

Το διάνυσμα αποτελούμενο από την θέση του ηγέτη $\mathbf{q}_0 = [q_{0x} \quad q_{0y}]^T$ n -φορές, διάστασης $2n \times 1$, είναι

$$\tilde{\mathbf{q}}_0 = \begin{bmatrix} q_{0x} & q_{0y} & q_{0x} & q_{0y} & \cdot & \cdot & \cdot & q_{0x} & q_{0y} \end{bmatrix}^T \quad (4.3)$$

Το διάνυσμα αποτελούμενο από την ταχύτητα του ηγέτη $\mathbf{v}_0 = [v_{0x} \quad v_{0y}]^T$ n -φορές, διάστασης $2n \times 1$, είναι

$$\tilde{\mathbf{v}}_0 = \begin{bmatrix} v_{0x} & v_{0y} & v_{0x} & v_{0y} & \cdot & \cdot & \cdot & v_{0x} & v_{0y} \end{bmatrix}^T \quad (4.4)$$

Η Λαπλασιανή μήτρα που περιγράφει έναν γράφο αποτελούμενο από n κόμβους έχει διάσταση $n \times n$ και δίνεται από την σχέση

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} & -a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & -a_{1n} \\ -a_{21} & \sum_{j=1}^n a_{2j} & \cdot & \cdot & \cdot & -a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & \sum_{j=1}^n a_{nj} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Καθώς στο πρόβλημά μας η θέση του κάθε πράκτορα, που αποτελεί κόμβο του γράφου του συστήματος, είναι διάνυσμα δύο διαστάσεων, έπεται ότι η Λαπλασιανή μήτρα του συστήματός μας θα πρέπει να οριστεί ως $\hat{\mathbf{L}} = \mathbf{L} \otimes \mathbb{I}_2$ και θα έχει διάσταση $2n \times 2n$.

$$\hat{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} & 0 & -a_{12} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & -a_{1n} & 0 \\ 0 & \sum_{j=1}^n a_{1j} & 0 & -a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -a_{1n} \\ -a_{21} & 0 & \sum_{j=1}^n a_{2j} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & -a_{2n} & 0 \\ 0 & -a_{21} & 0 & \sum_{j=1}^n a_{2j} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_{n1} & 0 & -a_{n2} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \sum_{j=1}^n a_{nj} & 0 \\ 0 & -a_{n1} & 0 & -a_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \sum_{j=1}^n a_{nj} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Ορίζουμε ως \mathbf{R} τον διαγώνιο πίνακα διαστάσεων $n \times n$, ο οποίος περιγράφει την σχέση του κάθε ακόλουθου με τον ηγέτη. Συγκεκριμένα, κάθε στοιχείο της κυρίας διαγωνίου του, r_i θα είναι διάφορο του μηδενός αν ο ακόλουθος i έχει απευθείας πρόσβαση στον ηγέτη και μηδέν σε αντίθετη περίπτωση.

$$\mathbf{R} = \text{diag}(r_1, r_2, \dots, r_n) \quad (4.7)$$

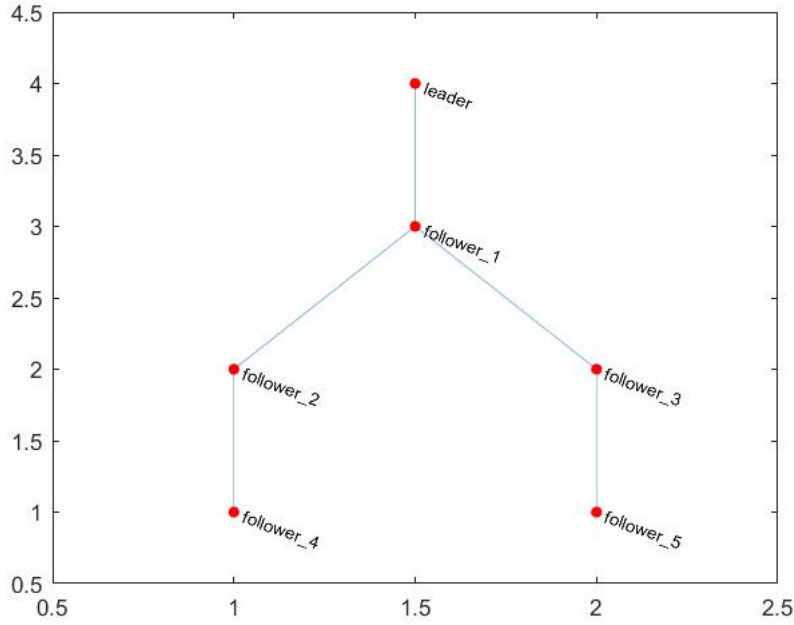
Καθώς όμως η θέση του κάθε πράκτορα είναι ένα διδιάστατο διάνυσμα, θα πρέπει να τροποποιηθεί αναλόγως και ο πίνακας \mathbf{R} ώστε να λάβουμε έναν νέο πίνακα διαστάσεων $2n \times 2n$, ο οποίος και περιγράφεται από την σχέση $\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \otimes \mathbb{I}_2$.

$$\hat{\mathbf{R}} = \text{diag}(r_1, r_1, r_2, r_2, \dots, r_n, r_n) \quad (4.8)$$

Για την επίλυση του προβλήματος του leader-follower consensus ορίζουμε τον μετασχηματισμό

$$\tilde{\mathbf{z}}(t) = \tilde{\mathbf{q}}(t) + \rho \int_0^t \left[\hat{\mathbf{L}}\tilde{\mathbf{q}}(s) + \hat{\mathbf{R}}(\tilde{\mathbf{q}}(s) - \tilde{\mathbf{q}}_0(s)) \right] ds \quad (4.9)$$

ο οποίος αποτελεί παραλλαγή του PI consensus error transformation [1], ούτως ώστε να συμπεριλαμβάνει την ύπαρξη ενός ηγέτη στο σύστημα των πρακτόρων. Οι πίνακες $\hat{\mathbf{L}}$ και $\hat{\mathbf{R}}$ πρέπει να είναι κατάλληλα ορισμένοι, ώστε η υποκείμενη τοπολογία γράφου του συστήματος να εμπεριέχει ένα Γεννητικό Δένδρο (Spanning Tree) από τον ηγέτη προς τους ακόλουθους. Στο παρακάτω σχήμα παραθέτουμε μία τέτοια τοπολογία γράφου, για την περίπτωση 1-ηγέτη και 5-ακόλουθων.



Σχήμα 4.1: Γράφος με Γεννητικό Δένδρο από τον Ηγέτη προς τους Ακόλουθους

Το διάνυσμα \tilde{z} είναι επίσης $2n \times 1$ διαστάσεων και περιγράφεται στην ακόλουθη εξίσωση

$$\tilde{z} = \begin{bmatrix} z_{1x} & z_{1y} & z_{2x} & z_{2y} & \cdot & \cdot & \cdot & z_{nx} & z_{ny} \end{bmatrix}^T \quad (4.10)$$

Καθώς το άθροισμα των στοιχείων της κάθε γραμμής του πίνακα $\hat{\mathbf{L}}$ ισούται με μηδέν, έπεται ότι θα ισχύει: $\hat{\mathbf{L}}\tilde{\mathbf{q}}_0 = 0$. Συνεπώς, ο μετασχηματισμός (4.9) μπορεί να γραφεί και ως ακολούθως

$$\begin{aligned} \tilde{z}(t) &= \tilde{\mathbf{q}}(t) + \rho \int_0^t \left[\hat{\mathbf{L}}(\tilde{\mathbf{q}}(s) - \tilde{\mathbf{q}}_0(s)) + \hat{\mathbf{R}}(\tilde{\mathbf{q}}(s) - \tilde{\mathbf{q}}_0(s)) \right] ds \\ \tilde{z}(t) &= \tilde{\mathbf{q}}(t) + \rho \int_0^t \left[(\hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{R}})(\tilde{\mathbf{q}}(s) - \tilde{\mathbf{q}}_0(s)) \right] ds \end{aligned} \quad (4.11)$$

Παραγωγίζοντας την σχέση (4.11) και λαμβάνοντας υπόψιν το γεγονός ότι για τα κινητά ρομπότ διαφορικής οδήγησης η θέση \mathbf{q} και η ταχύτητα \mathbf{v} συνδέονται μέσω του πίνακα \mathbf{S} βάσει της εξίσωσης $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{S}\mathbf{v}$, θέτοντας $\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{S}\mathbf{v}$ τελικά λαμβάνουμε ότι είναι $\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \tilde{\mathbf{v}}$ και στην περίπτωση μας $\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \tilde{\mathbf{v}}$. Το συνολικό διάνυσμα ταχυτήτων $\tilde{\mathbf{v}}$ των n ακόλουθων, διάστασης $2n \times 1$, έχει την μορφή

$$\tilde{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \bar{v}_{1x} & \bar{v}_{1y} & \bar{v}_{2x} & \bar{v}_{2y} & \cdot & \cdot & \cdot & \bar{v}_{nx} & \bar{v}_{ny} \end{bmatrix}^T \quad (4.12)$$

Έτσι, η παράγωγος του μετασχηματισμού (4.11) γράφεται ως ακολούθως

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{z}} &= \dot{\tilde{\mathbf{q}}}(t) + \rho (\hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{R}}) (\tilde{\mathbf{q}}(t) - \tilde{\mathbf{q}}_0(t)) \\ &= \tilde{\mathbf{v}} + \rho (\hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{R}}) (\tilde{\mathbf{q}}(t) - \tilde{\mathbf{q}}_0(t)) \end{aligned} \quad (4.13)$$

Στην πορεία θα αποδείξουμε ότι η σύγκλιση του μετασχηματισμού (4.11) οδηγεί πράγματι το σύστημα των n -ακόλουθων σε leader-follower consensus. Συγκεκριμένα θα εξεταστεί η περίπτωση όπου το $\tilde{\mathbf{z}}$ συγκλίνει σε μία γειτονιά του μηδενός, και θα εξαχθούν τα αντίστοιχα συμπεράσματα όσον αφορά την συμπεριφορά του συστήματος. Αρχικά ορίζουμε την χρονικά μεταβαλλόμενη συνάρτηση $\tilde{\mathbf{w}}(t)$ ως ακολούθως

$$\tilde{\mathbf{w}}(t) \equiv \int_0^t [(\hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{R}})(\tilde{\mathbf{q}}(s) - \tilde{\mathbf{q}}_0(s))] ds \quad (4.14)$$

Αντικαθιστώντας την συνάρτηση (4.14) στην σχέση (4.11), ο μετασχηματισμός $\tilde{\mathbf{z}}$ λαμβάνει την μορφή

$$\tilde{\mathbf{z}}(t) = \tilde{\mathbf{q}}(t) + \rho \tilde{\mathbf{w}}(t) \quad (4.15)$$

Αναδιατάσσοντας την (4.15) και αφαιρώντας το διάνυσμα $\tilde{\mathbf{q}}_0(t)$ εκατέρωθεν της εξίσωσης, προκύπτει ότι

$$\tilde{\mathbf{q}}(t) - \tilde{\mathbf{q}}_0(t) = \tilde{\mathbf{z}}(t) - \rho \tilde{\mathbf{w}}(t) - \tilde{\mathbf{q}}_0(t) \quad (4.16)$$

Παραγωγίζοντας την (4.14) παίρνουμε

$$\dot{\tilde{\mathbf{w}}}(t) = (\hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{R}})(\tilde{\mathbf{q}}(t) - \tilde{\mathbf{q}}_0(t)) \quad (4.17)$$

Αντικαθιστώντας την (4.16) στην (4.17), η παράγωγος του $\tilde{\mathbf{w}}$ δίνεται από την σχέση

$$\dot{\tilde{\mathbf{w}}}(t) = (\hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{R}})[\tilde{\mathbf{z}}(t) - \rho \tilde{\mathbf{w}}(t) - \tilde{\mathbf{q}}_0(t)] \quad (4.18)$$

Εκτελώντας πράξεις στην (4.18) παίρνουμε

$$\dot{\tilde{\mathbf{w}}}(t) = -\rho(\hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{R}})\tilde{\mathbf{w}}(t) + (\hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{R}})\tilde{\mathbf{z}}(t) - (\hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{R}})\tilde{\mathbf{q}}_0(t) \quad (4.19)$$

Η διαφορική εξίσωση (4.19) έχει ως λύση την συνάρτηση $\tilde{\mathbf{w}}(t)$

$$\tilde{\mathbf{w}}(t) = \tilde{\mathbf{f}}(t) - \tilde{\mathbf{g}}(t) \quad (4.20)$$

όπου οι συναρτήσεις $\tilde{\mathbf{f}}$ και $\tilde{\mathbf{g}}$ περιγράφονται από τα ακόλουθα ολοκληρώματα

$$\tilde{\mathbf{f}}(t) = \int_0^t e^{-\rho(\hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{R}})(t-s)} (\hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{R}})\tilde{\mathbf{z}}(s) ds \quad (4.21)$$

$$\tilde{\mathbf{g}}(t) = \int_0^t e^{-\rho(\hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{R}})(t-s)} (\hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{R}})\tilde{\mathbf{q}}_0(s) ds \quad (4.22)$$

Αντικαθιστώντας την σχέση (4.20) στην (4.16) και αναδιατάσσοντάς την, προκύπτει ότι

$$\tilde{\mathbf{q}}(t) - \tilde{\mathbf{q}}_0(t) = \tilde{\mathbf{z}}(t) - \rho \tilde{\mathbf{f}}(t) + [\rho \tilde{\mathbf{g}}(t) - \tilde{\mathbf{q}}_0(t)] \quad (4.23)$$

Έχοντας υποθέσει ότι το $\tilde{\mathbf{z}}$ προϊόντος του χρόνου θα συγκλίνει σε μία γειτονιά του μηδενός, λαμβάνουμε το ακόλουθο όριο

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\mathbf{z}}(t)\| \leq \epsilon \quad (4.24)$$

όπου η σταθερά ϵ δηλώνει την ακτίνα της σφαίρας που περιγράφει την περιοχή μέσα στην οποία θα εγκλωβιστεί τελικά το $\tilde{\mathbf{z}}$ με το πέρασ του χρόνου. Εν γένει, αποτελεί μία μικρή θετική

σταθερά, $\epsilon > 0$. Εφαρμόζοντας την τριγωνική ανισότητα στο ολοκλήρωμα της συνάρτησης (4.21) λαμβάνουμε ότι

$$\begin{aligned}\|\tilde{\mathbf{f}}(t)\| &= \left\| \int_0^t e^{-\rho(\hat{\mathbf{L}}+\hat{\mathbf{R}})(t-s)}(\hat{\mathbf{L}}+\hat{\mathbf{R}})\tilde{\mathbf{z}}(s)ds \right\| \\ &\leq \int_0^t \left\| e^{-\rho(\hat{\mathbf{L}}+\hat{\mathbf{R}})(t-s)}(\hat{\mathbf{L}}+\hat{\mathbf{R}})\tilde{\mathbf{z}}(s) \right\| ds \\ &\leq \int_0^t \left\| e^{-\rho(\hat{\mathbf{L}}+\hat{\mathbf{R}})(t-s)}(\hat{\mathbf{L}}+\hat{\mathbf{R}}) \right\| \|\tilde{\mathbf{z}}(s)\| ds\end{aligned}\quad (4.25)$$

Το ολοκλήρωμα (4.25) μπορεί να διασπαστεί σε δύο επιμέρους, για μία τυχαία χρονική στιγμή t , και άρα η ανισότητα τελικά να γίνει

$$\|\tilde{\mathbf{f}}(t)\| \leq \int_0^{t/2} \left\| e^{-\rho(\hat{\mathbf{L}}+\hat{\mathbf{R}})(t-s)}(\hat{\mathbf{L}}+\hat{\mathbf{R}}) \right\| \|\tilde{\mathbf{z}}(s)\| ds + \int_{t/2}^t \left\| e^{-\rho(\hat{\mathbf{L}}+\hat{\mathbf{R}})(t-s)}(\hat{\mathbf{L}}+\hat{\mathbf{R}}) \right\| \|\tilde{\mathbf{z}}(s)\| ds\quad (4.26)$$

Καθώς το $\tilde{\mathbf{z}}$ έχει υποτεθεί φραγμένο, έπεται ότι υπάρχει θετική πραγματική σταθερά η οποία λειτουργεί ως άνω φράγμα του, δηλαδή

$$\exists c > 0 : \quad \|\tilde{\mathbf{z}}(t)\| \leq c \quad \forall t \geq 0\quad (4.27)$$

Κάνοντας χρήση του $\epsilon - \delta$ ορισμού του ορίου συνάρτησης, η σχέση (4.24) μπορεί να επαναδιατυπωθεί ως ακολούθως

$$\forall \delta > 0 \quad \exists T > 0 : \quad \|\tilde{\mathbf{z}}(t)\| \leq (1 + \delta)\epsilon \quad \forall t \geq T\quad (4.28)$$

Αντικαθιστώντας τις ανισότητες (4.27) και (4.28) στα δύο ολοκληρώματα της σχέσης (4.26) αντίστοιχα, προκύπτει ότι για $t/2 \geq T$ είναι

$$\|\tilde{\mathbf{f}}(t)\| \leq c \int_0^{t/2} \left\| e^{-\rho(\hat{\mathbf{L}}+\hat{\mathbf{R}})(t-s)}(\hat{\mathbf{L}}+\hat{\mathbf{R}}) \right\| ds + (1 + \delta)\epsilon \int_{t/2}^t \left\| e^{-\rho(\hat{\mathbf{L}}+\hat{\mathbf{R}})(t-s)}(\hat{\mathbf{L}}+\hat{\mathbf{R}}) \right\| ds\quad (4.29)$$

Σημείωση 2. Δοθέντος ενός πίνακα \mathbf{A} , η συνάρτηση $f(\mathbf{A})$ μπορεί να εκφραστεί μέσω του επικαμπύλιου ολοκληρώματος

$$f(\mathbf{A}) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(\lambda)(\lambda\mathbb{I} - \mathbf{A})^{-1}d\lambda\quad (4.30)$$

όπου η κλειστή καμπύλη γ περικλείει το φάσμα του πίνακα \mathbf{A} και η συνάρτηση $f(\lambda)$ είναι αναλυτική σε ένα συνεκτικό σύνολο που περιέχει την καμπύλη γ . Η απόδειξη της σχέσης (4.30) παρατίθεται στο βιβλίο [18].

Θέτοντας στο ολοκλήρωμα (4.30) όπου $f(x) = e^x$ λαμβάνουμε την ακόλουθη έκφραση της εκθετικής μήτρας

$$e^{t\mathbf{A}} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} e^{t\lambda}(\lambda\mathbb{I} - \mathbf{A})^{-1}d\lambda\quad (4.31)$$

Λαμβάνοντας τη νόρμα της σχέσης (4.31) παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \|e^{t\mathbf{A}}\| &= \left\| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} e^{t\lambda} (\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} d\lambda \right\| \\ &\leq \left\| \frac{1}{2\pi i} \right\| \left\| \oint_{\gamma} e^{t\lambda} (\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} d\lambda \right\| \end{aligned} \quad (4.32)$$

Εφαρμόζοντας την τριγωνική ανισότητα στο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της (4.32) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \|e^{t\mathbf{A}}\| &\leq \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} \|e^{t\lambda} (\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\| d\lambda \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} |e^{t\lambda}| \|(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\| d\lambda \end{aligned} \quad (4.33)$$

Αν θεωρήσουμε ότι ο πίνακας \mathbf{A} είναι αρνητικά ορισμένος, δηλαδή όλες οι ιδιοτιμές του, $\lambda_j(\mathbf{A})$, βρίσκονται στο αριστερό ημισφαίριο, $Re\lambda_j(\mathbf{A}) \leq -\xi < -\sigma < 0$, $j = 1, 2, \dots, N$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η καμπύλη γ βρίσκεται αριστερά της γραμμής $Re(\lambda) = -\sigma < 0$ και για $t > 0$

$$|e^{t\lambda}| = |e^{tRe(\lambda) + jtIm(\lambda)}| = e^{tRe(\lambda)} |e^{jtIm(\lambda)}| = e^{tRe(\lambda)} \quad (4.34)$$

Καθώς όμως είναι

$$\begin{aligned} Re(\lambda) &\leq -\xi < -\sigma < 0 \\ e^{tRe(\lambda)} &\leq e^{-t\xi} < e^{-t\sigma} \end{aligned} \quad (4.35)$$

Αντικαθιστώντας την ανισότητα (4.35) στην (4.34) προκύπτει ότι

$$|e^{t\lambda}| < e^{-t\sigma} \quad (4.36)$$

Λαμβάνοντας υπόψιν την (4.36), η (4.33) γίνεται

$$\|e^{t\mathbf{A}}\| \leq \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} e^{-t\sigma} \|(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\| d\lambda \quad (4.37)$$

Θεωρώντας ότι το *resolvent* της μήτρας \mathbf{A} είναι φραγμένο στην καμπύλη γ , θα υπάρχει θετική σταθερά Λ τέτοια ώστε

$$\|(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\| < \Lambda \quad (4.38)$$

Λαμβάνοντας υπόψιν την (4.38), η (4.37) τελικά παίρνει την μορφή

$$\|e^{t\mathbf{A}}\| \leq \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} e^{-t\sigma} \Lambda d\lambda = \frac{1}{2\pi} e^{-t\sigma} \Lambda \int_0^{2\pi} de^{i\phi} = \frac{1}{2\pi} e^{-t\sigma} \Lambda 2\pi \quad (4.39)$$

Τελικά, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η νόρμα της εκθετικής μήτρας (4.31) εμφανίζει άνω φράγμα

$$\|e^{t\mathbf{A}}\| \leq \Lambda e^{-t\sigma} \quad (4.40)$$

όπου $-\sigma$ είναι μία αρνητική σταθερά, μεγαλύτερη του πραγματικού μέρους εκείνης της ιδιοτιμής του πίνακα \mathbf{A} που έχει την ελάχιστη απόσταση από την ευθεία $y = 0$ στο μιγαδικό επίπεδο.

Εξετάζοντας τώρα την ποσότητα $\|e^{-\rho(\hat{\mathbf{L}}+\hat{\mathbf{R}})(t-s)}(\hat{\mathbf{L}}+\hat{\mathbf{R}})\|$ που εμφανίζεται στα ολοκληρώματα της σχέσης (4.29), παρατηρούμε ότι

$$\|e^{-\rho(\hat{\mathbf{L}}+\hat{\mathbf{R}})(t-s)}(\hat{\mathbf{L}}+\hat{\mathbf{R}})\| \leq \|e^{-\rho(\hat{\mathbf{L}}+\hat{\mathbf{R}})(t-s)}\| \|(\hat{\mathbf{L}}+\hat{\mathbf{R}})\| \quad (4.41)$$

Καθώς ο πίνακας $(\hat{\mathbf{L}}+\hat{\mathbf{R}})$ είναι θετικά ορισμένος, έπεται ότι ο πίνακας $-\rho(\hat{\mathbf{L}}+\hat{\mathbf{R}})$ θα είναι αρνητικά ορισμένος, και άρα θα έχει όλες τις ιδιοτιμές του αυστηρά στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο. Ως εκ τούτου πληροί τις προϋποθέσεις εφαρμογής της ανισότητας (4.40), οπότε μπορούμε να εξάγουμε το ακόλουθο συμπέρασμα

$$\|e^{-\rho(\hat{\mathbf{L}}+\hat{\mathbf{R}})(t-s)}\| \leq \lambda e^{-\rho\lambda_1(t-s)} \quad (4.42)$$

όπου $\lambda, \rho\lambda_1$ κατάλληλες θετικές σταθερές.

Θεωρώντας σταθερά λ_1 τέτοια ώστε

$$\lambda_1 = \lambda \|(\hat{\mathbf{L}}+\hat{\mathbf{R}})\| \quad (4.43)$$

προκύπτει τελικά ότι υπάρχουν θετικές σταθερές $\rho_1, \lambda_1 > 0$ τέτοιες ώστε

$$\|e^{-\rho(\hat{\mathbf{L}}+\hat{\mathbf{R}})(t-s)}(\hat{\mathbf{L}}+\hat{\mathbf{R}})\| \leq \lambda_1 e^{-\rho\rho_1(t-s)} \quad (4.44)$$

Αντικαθιστώντας την (4.44) στα επιμέρους ολοκληρώματα της ανισότητας (4.29) και εκτελώντας πράξεις, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{f}}(t)\| &\leq c \int_0^{t/2} \lambda_1 e^{-\rho\rho_1(t-s)} ds + (1+\delta)\epsilon \int_{t/2}^t \lambda_1 e^{-\rho\rho_1(t-s)} ds \\ &= c\lambda_1 \frac{1}{\rho\rho_1} \left[e^{-\rho\rho_1(t-s)} \right]_0^{t/2} + (1+\delta)\epsilon\lambda_1 \frac{1}{\rho\rho_1} \left[e^{-\rho\rho_1(t-s)} \right]_{t/2}^t \end{aligned} \quad (4.45)$$

Τελικά, σύμφωνα με την (4.45), η νόρμα της $\tilde{\mathbf{f}}(t)$ είναι άνω φραγμένη από την συνάρτηση

$$\|\tilde{\mathbf{f}}(t)\| \leq \frac{c\lambda_1}{\rho\rho_1} \left[e^{-\rho\rho_1 t/2} - e^{-\rho\rho_1 t} \right] + \frac{(1+\delta)\epsilon\lambda_1}{\rho\rho_1} \left[1 - e^{-\rho\rho_1 t/2} \right] \quad (4.46)$$

Θεωρώντας ότι για $t \rightarrow \infty$ η ποσότητα $\delta \rightarrow 0$ και παίρνοντας το όριο στο άπειρο στην (4.46), καταλήγουμε στο εξής συμπέρασμα

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\mathbf{f}}(t)\| &\leq \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{c\lambda_1}{\rho\rho_1} \left[e^{-\rho\rho_1 t/2} - e^{-\rho\rho_1 t} \right] + \frac{(1+\delta)\epsilon\lambda_1}{\rho\rho_1} \left[1 - e^{-\rho\rho_1 t/2} \right] \right] \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\mathbf{f}}(t)\| &\leq \frac{\epsilon\lambda_1}{\rho\rho_1} \end{aligned} \quad (4.47)$$

Επανερχόμενοι τώρα στον ορισμό της συνάρτησης $\tilde{\mathbf{g}}(t)$ και εκτελώντας παραγοντική ολοκλήρωση στην σχέση (4.22) παρατηρούμε ότι είναι

$$\tilde{\mathbf{g}}(t) = \left[\frac{1}{\rho} e^{-\rho(\hat{\mathbf{L}}+\hat{\mathbf{R}})(t-s)} \tilde{\mathbf{q}}_0(s) \right]_0^t - \frac{1}{\rho} \int_0^t e^{-\rho(\hat{\mathbf{L}}+\hat{\mathbf{R}})(t-s)} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_0(s) ds \quad (4.48)$$

Πολλαπλασιάζοντας την (4.48) με ρ και εκτελώντας πράξεις παίρνουμε

$$\begin{aligned} \rho \tilde{\mathbf{g}}(t) &= \left[e^{-\rho(\hat{\mathbf{L}}+\hat{\mathbf{R}})(t-s)} \tilde{\mathbf{q}}_0(s) \right]_0^t - \int_0^t e^{-\rho(\hat{\mathbf{L}}+\hat{\mathbf{R}})(t-s)} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_0(s) ds \\ &= \left[\tilde{\mathbf{q}}_0(t) - e^{-\rho(\hat{\mathbf{L}}+\hat{\mathbf{R}})t} \tilde{\mathbf{q}}_0(0) \right] - \int_0^t e^{-\rho(\hat{\mathbf{L}}+\hat{\mathbf{R}})(t-s)} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_0(s) ds \end{aligned} \quad (4.49)$$

Αφαιρώντας την ποσότητα $\tilde{\mathbf{q}}_0(t)$ και στα δύο μέλη της σχέσης (4.49) συνεπάγεται ότι

$$\rho \tilde{\mathbf{g}}(t) - \tilde{\mathbf{q}}_0(t) = - \left[e^{-\rho(\hat{\mathbf{L}}+\hat{\mathbf{R}})t} \tilde{\mathbf{q}}_0(0) + \int_0^t e^{-\rho(\hat{\mathbf{L}}+\hat{\mathbf{R}})(t-s)} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_0(s) ds \right] \quad (4.50)$$

Λαμβάνοντας τη νόρμα της (4.50) και εφαρμόζοντας την τριγωνική ανισότητα έπεται ότι

$$\begin{aligned} \|\rho \tilde{\mathbf{g}}(t) - \tilde{\mathbf{q}}_0(t)\| &= \left\| e^{-\rho(\hat{\mathbf{L}}+\hat{\mathbf{R}})t} \tilde{\mathbf{q}}_0(0) + \int_0^t e^{-\rho(\hat{\mathbf{L}}+\hat{\mathbf{R}})(t-s)} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_0(s) ds \right\| \\ &\leq \left\| e^{-\rho(\hat{\mathbf{L}}+\hat{\mathbf{R}})t} \tilde{\mathbf{q}}_0(0) \right\| + \left\| \int_0^t e^{-\rho(\hat{\mathbf{L}}+\hat{\mathbf{R}})(t-s)} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_0(s) ds \right\| \\ &\leq \left\| e^{-\rho(\hat{\mathbf{L}}+\hat{\mathbf{R}})t} \tilde{\mathbf{q}}_0(0) \right\| + \int_0^t \left\| e^{-\rho(\hat{\mathbf{L}}+\hat{\mathbf{R}})(t-s)} \right\| \left\| \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_0(s) \right\| ds \end{aligned} \quad (4.51)$$

Καθώς το $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_0$ είναι φραγμένο, έπεται ότι

$$\exists q_s : \quad \left\| \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_0(t) \right\| \leq q_s \quad \forall t \geq 0 \quad (4.52)$$

Αντικαθιστώντας την σχέση (4.52) στην (4.51) παίρνουμε

$$\|\rho \tilde{\mathbf{g}}(t) - \tilde{\mathbf{q}}_0(t)\| \leq \left\| e^{-\rho(\hat{\mathbf{L}}+\hat{\mathbf{R}})t} \tilde{\mathbf{q}}_0(0) \right\| + q_s \int_0^t \left\| e^{-\rho(\hat{\mathbf{L}}+\hat{\mathbf{R}})(t-s)} \right\| ds \quad (4.53)$$

Έπειτα, λαμβάνοντας υπόψιν την ανισότητα (4.42), η (4.53) γίνεται

$$\|\rho \tilde{\mathbf{g}}(t) - \tilde{\mathbf{q}}_0(t)\| \leq \left\| e^{-\rho(\hat{\mathbf{L}}+\hat{\mathbf{R}})t} \tilde{\mathbf{q}}_0(0) \right\| + q_s \int_0^t \lambda e^{-\rho\rho_1(t-s)} ds \quad (4.54)$$

Τέλος, εκτελώντας πράξεις στην (4.54) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \|\rho \tilde{\mathbf{g}}(t) - \tilde{\mathbf{q}}_0(t)\| &\leq \left\| e^{-\rho(\hat{\mathbf{L}}+\hat{\mathbf{R}})t} \tilde{\mathbf{q}}_0(0) \right\| + q_s \lambda \frac{1}{\rho\rho_1} \left[e^{-\rho\rho_1(t-s)} \right]_0^t \\ &= \left\| e^{-\rho(\hat{\mathbf{L}}+\hat{\mathbf{R}})t} \tilde{\mathbf{q}}_0(0) \right\| + \frac{q_s \lambda}{\rho\rho_1} [1 - e^{-\rho\rho_1 t}] \end{aligned} \quad (4.55)$$

Λαμβάνοντας το όριο στο άπειρο στα μέλη της (4.55) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \|\rho \tilde{\mathbf{g}}(t) - \tilde{\mathbf{q}}_0(t)\| &\leq \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\left\| e^{-\rho(\hat{\mathbf{L}}+\hat{\mathbf{R}})t} \tilde{\mathbf{q}}_0(0) \right\| + \frac{q_s \lambda}{\rho\rho_1} [1 - e^{-\rho\rho_1 t}] \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \|\rho \tilde{\mathbf{g}}(t) - \tilde{\mathbf{q}}_0(t)\| \leq \frac{q_s \lambda}{\rho\rho_1} \end{aligned} \quad (4.56)$$

Λαμβάνοντας τη νόρμα της σχέσης (4.23) και εφαρμόζοντας την τριγωνική ανισότητα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{q}}(t) - \tilde{\mathbf{q}}_0(t)\| &= \|\tilde{\mathbf{z}}(t) - \rho \tilde{\mathbf{f}}(t) + [\rho \tilde{\mathbf{g}}(t) - \tilde{\mathbf{q}}_0(t)]\| \\ &\leq \|\tilde{\mathbf{z}}(t)\| + \rho \|\tilde{\mathbf{f}}(t)\| + \|\rho \tilde{\mathbf{g}}(t) - \tilde{\mathbf{q}}_0(t)\| \end{aligned} \quad (4.57)$$

Με δεδομένα τα όρια (4.24), (4.47) και (4.56), παίρνουμε το όριο στο άπειρο της (4.57)

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\mathbf{q}}(t) - \tilde{\mathbf{q}}_0(t)\| &\leq \lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\mathbf{z}}(t)\| + \rho \lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\mathbf{f}}(t)\| + \lim_{t \rightarrow \infty} \|\rho \tilde{\mathbf{g}}(t) - \tilde{\mathbf{q}}_0(t)\| \\ &\leq \epsilon + \rho \frac{\epsilon \lambda_1}{\rho \rho_1} + \frac{q_s \lambda}{\rho \rho_1} \end{aligned}$$

Έτσι, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\mathbf{q}}(t) - \tilde{\mathbf{q}}_0(t)\| \leq \epsilon + \epsilon \frac{\lambda_1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho} q_s \frac{\lambda}{\rho_1} \quad (4.58)$$

Όπως γίνεται φανερό από την ανισότητα (4.58), η πολλαπλασιαστική παράμετρος ρ του μετασχηματισμού $\tilde{\mathbf{z}}$ παίζει καθοριστικό ρόλο στην μείωση της απόκλισης που εμφανίζεται λόγω της ταχύτητας του ηγέτη. Ως εκ τούτου, πρέπει να επιλέγεται όσο το δυνατόν μεγαλύτερη γίνεται, ώστε να καθίσταται το σφάλμα q_s αρκούντως μικρό.

Η προηγούμενη ανάλυση αποτελεί την απόδειξη του παρακάτω Λήμματος σχετικά με το consensus των κινητών ρομπότ και τον μετασχηματισμό (4.9)

Λήμμα 4.6. Για ένα σύστημα πρακτόρων με κινούμενο ηγέτη, αν ο γράφος επικοινωνίας είναι γεννητικό δέντρο με ρίζα τον ηγέτη και

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\mathbf{z}}(t)\| \leq \epsilon \quad (4.59)$$

τότε συνεπάγεται ότι

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\mathbf{q}}(t) - \tilde{\mathbf{q}}_0(t)\| \leq \epsilon \left(1 + \frac{\lambda_1}{\rho_1}\right) + \frac{1}{\rho} q_s \frac{\lambda}{\rho_1} \quad (4.60)$$

όπου

- ϵ : $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\mathbf{z}}(t)\| \leq \epsilon$, ϵ μηδέν ή μικρή θετική σταθερά
- q_s : $\|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_0(t)\| \leq q_s \quad \forall t \geq 0$
- ρ_1, λ_1 : $\left\| e^{-\rho(\hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{R}})t} (\hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{R}}) \right\| \leq \lambda_1 e^{-\rho \rho_1 t} \quad \forall t \geq 0, \quad \lambda_1, \rho_1 > 0$
- ρ_1, λ : $\left\| e^{-\rho(\hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{R}})t} \right\| \leq \lambda e^{-\rho \rho_1 t} \quad \forall t \geq 0, \quad \lambda, \rho_1 > 0$

ή ισοδύναμα επιτυγχάνεται *Leader-Follower Consensus* των πρακτόρων, με μία μικρή απόκλιση η οποία και οφείλεται στην ταχύτητα του ηγέτη.

4.4 Σχεδιασμός Νόμου Ελέγχου της Θέσης Διαμέσου της Ταχύτητας

Σύμφωνα με το Λήμμα 4.6, για την επίτευξη του Leader-Follower Consensus θα πρέπει να σχεδιαστεί ένας νόμος ελέγχου τέτοιος ώστε στη μόνιμη κατάσταση να εξασφαλιστεί ότι θα είναι $\tilde{\mathbf{z}} = 0$.

Ως εκ τούτου λαμβάνουμε την παρακάτω Lyapunov-like συνάρτηση

$$V_0 = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{z}}^T \tilde{\mathbf{z}} \quad (4.61)$$

Παραγωγίζοντας την (4.61) και χρησιμοποιώντας την (4.13) έχουμε ότι

$$\dot{V}_0 = \tilde{\mathbf{z}}^T \left(\tilde{\mathbf{v}} + \rho \left(\hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{R}} \right) (\tilde{\mathbf{q}} - \tilde{\mathbf{q}}_0) \right) \quad (4.62)$$

Είμαστε σε θέση πλέον να ορίσουμε το νόμο ελέγχου, έστω $\tilde{\mathbf{v}}_c$, που πρέπει να εισαχθεί στην (4.62) και ο οποίος θα λάβει την θέση της εισόδου $\tilde{\mathbf{v}}$

$$\tilde{\mathbf{v}}_c = -\rho \left(\hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{R}} \right) (\tilde{\mathbf{q}} - \tilde{\mathbf{q}}_0) - k_1 \tilde{\mathbf{z}} \quad (4.63)$$

Σημειώνεται ότι το συνολικό διάνυσμα ταχυτήτων $\tilde{\mathbf{v}}_c$ των n ακόλουθων, διάστασης $2n \times 1$, θα έχει την μορφή

$$\tilde{\mathbf{v}}_c = \begin{bmatrix} \bar{v}_{c1x} & \bar{v}_{c1y} & \bar{v}_{c2x} & \bar{v}_{c2y} & \cdot & \cdot & \cdot & \bar{v}_{cnx} & \bar{v}_{cny} \end{bmatrix}^T \quad (4.64)$$

Αντικαθιστώντας την (4.63) στην (4.62), λαμβάνουμε ότι

$$\dot{V}_0 = -k_1 \|\tilde{\mathbf{z}}\|^2 \quad (4.65)$$

Απόπου προκύπτει ότι

$$\dot{V}_0 = -2k_1 V_0 \leq -k_1 V_0 \quad (4.66)$$

Εφαρμόζοντας το Λήμμα (2.3) στην ανισότητα (4.66) λαμβάνουμε ότι

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V_0(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\mathbf{z}}(t)\| = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{0} \quad (4.67)$$

Όπως αποδείχθηκε στο Κεφάλαιο 4, όπου γίνεται κινηματική και δυναμική ανάλυση του ρομπότ διαφορικής οδήγησης, ο πίνακας $\bar{\mathbf{S}}$ διαστάσεων 2×2 που περιγράφει την σχέση μεταξύ των διανυσμάτων θέσης και ταχύτητας ενός κινητού ρομπότ δίνεται από την ακόλουθη έκφραση για τον πράκτορα i

$$\bar{\mathbf{S}}_i = \begin{bmatrix} \frac{r_i}{2} \cos \theta_i - \frac{r_i}{2b_i} d_i \sin \theta_i & \frac{r_i}{2} \cos \theta_i + \frac{r_i}{2b_i} d_i \sin \theta_i \\ \frac{r_i}{2} \sin \theta_i + \frac{r_i}{2b_i} d_i \cos \theta_i & \frac{r_i}{2} \sin \theta_i - \frac{r_i}{2b_i} d_i \cos \theta_i \end{bmatrix}$$

και για το σύστημα των n πρακτόρων λαμβάνουμε το συνολικό πίνακα διαστάσεων $2n \times 2n$

$$\hat{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{S}}_1 & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \bar{\mathbf{S}}_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \cdot & \cdot & \cdot & \bar{\mathbf{S}}_n \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

Η μήτρα αδράνειας του κινητού ρομπότ διαφορικής οδήγησης έχει δειχθεί ότι είναι ένας πίνακας διαστάσεων 2×2 ο οποίος περιγράφεται από την ακόλουθη σχέση για τον κάθε πράκτορα

$$\bar{\mathbf{M}}_i = \begin{bmatrix} \frac{r_i^2}{4b_i^2} (m_i b_i^2 + I_i) + I_{wi} & \frac{r_i^2}{4b_i^2} (m_i b_i^2 - I_i) \\ \frac{r_i^2}{4b_i^2} (m_i b_i^2 - I_i) & \frac{r_i^2}{4b_i^2} (m_i b_i^2 + I_i) + I_{wi} \end{bmatrix}$$

και για το σύστημα των n πρακτόρων λαμβάνουμε το συνολικό πίνακα διαστάσεων $2n \times 2n$

$$\hat{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}_1 & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \bar{\mathbf{M}}_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \cdot & \cdot & \cdot & \bar{\mathbf{M}}_n \end{bmatrix} \quad (4.69)$$

Η Κεντρομόλος και Κοριόλις μήτρα ενός κινητού ρομπότ διαφορικής οδήγησης έχειδειχθεί ότι είναι ένας πίνακας διαστάσεων 2×2 ο οποίος έχει την παρακάτω μορφή για τον κάθε πράκτορα

$$\bar{\mathbf{V}}_i = \begin{bmatrix} 0 & \frac{m_{ci}d_i r_i^2}{2b_i} \\ -\frac{m_{ci}d_i r_i^2}{2b_i} & 0 \end{bmatrix} \dot{\theta}_i$$

και για το σύστημα των n πρακτόρων λαμβάνουμε το συνολικό πίνακα διαστάσεων $2n \times 2n$

$$\hat{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{V}}_1 & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \bar{\mathbf{V}}_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \cdot & \cdot & \cdot & \bar{\mathbf{V}}_n \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

Η μήτρα μετασχηματισμού εισόδου ενός κινητού ρομπότ διαφορικής οδήγησης έχει αποδειχθεί ότι συμπίπτει με τον μοναδιαίο πίνακα διαστάσεων 2×2 , δηλαδή είναι

$$\bar{\mathbf{B}}_i = \mathbb{I}_2$$

και για το σύστημα των n πρακτόρων λαμβάνουμε το συνολικό πίνακα διαστάσεων $2n \times 2n$

$$\hat{\mathbf{B}} = \mathbb{I}_{2n} \quad (4.71)$$

Τέλος, παραθέτουμε το διάνυσμα, μεγέθους $2n \times 1$, που περιγράφει την είσοδο ροπής του συστήματος της δυναμικής των ρομπότ

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}} = \begin{bmatrix} \tau_{1R} & \tau_{1L} & \tau_{2R} & \tau_{2L} & \cdot & \cdot & \cdot & \tau_{nR} & \tau_{nL} \end{bmatrix}^T \quad (4.72)$$

Λαμβάνοντας υπόψιν τους ορισμούς και τις σχέσεις (4.1)-(4.68), είμαστε σε θέση να διατυπώσουμε το ακόλουθο Λήμμα:

Λήμμα 4.7. Έστω n κινούμενα ρομπότ διαφορικής οδήγησης που περιγράφονται από την (3.55). Αν η ταχύτητα $\tilde{\mathbf{v}}$ επιλεγεί ως

$$\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{v}}_e = \hat{\mathbf{S}}^{-1} \left(-\rho \left(\hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{R}} \right) \left(\tilde{\mathbf{q}} - \tilde{\mathbf{q}}_0 \right) - k_1 \tilde{\mathbf{z}} \right)$$

και ο γράφος επικοινωνίας είναι γεννητικό δέντρο με ρίζα τον ηγέτη τότε $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\mathbf{z}}(t)\| = 0$ που συνεπάγεται *approximate leader-follower consensus* σύμφωνα με το Λήμμα 4.6.

4.5 Σχεδιασμός Νόμου Ελέγχου της Ταχύτητας Διαμέσου της Ροπής

Προχωράμε στην ανάλυση του συνολικού συστήματος το οποίο περιλαμβάνει την δυναμική των κινητών ρομπότ διαφορικής οδήγησης, και έχει την ακόλουθη μορφή

$$\dot{\tilde{z}} = \hat{\mathbf{S}}\tilde{v} + \rho \left(\hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{R}} \right) (\tilde{q} - \tilde{q}_0) \quad (4.73)$$

$$\dot{\tilde{v}} = -\hat{\mathbf{M}}^{-1} [\hat{\mathbf{V}}\tilde{v} + \hat{\mathbf{F}} + \hat{\tau}_d] + \hat{\mathbf{M}}^{-1} \tilde{\tau} \quad (4.74)$$

Όπως παρατηρείται, στην εξίσωση (4.74) δεν γίνεται χρήση της μήτρας μετασχηματισμού εισόδου $\hat{\mathbf{B}}$, καθώς αποτελεί έναν μοναδιαίο πίνακα και άρα μπορεί να παραληφθεί.

Σε αυτό το σύστημα αναζητάμε κατάλληλη είσοδο $\tilde{\tau}$ η οποία, σύμφωνα με το Λήμμα 4.7, θα οδηγήσει την ταχύτητα \tilde{v} στην επιθυμητή \tilde{v}_c , έτσι ώστε ο μετασχηματισμός \tilde{z} να συγκλίνει στο μηδέν.

Γι'αυτή την ανάλυση χρησιμοποιείται η τεχνική του Backstepping. Συγκεκριμένα γίνεται κατάλληλος συνδυασμός των μεθόδων Single-Integrator Backstepping, Generic Backstepping και Block Backstepping, τεχνικές οι οποίες αναλύονται διεξοδικά στο κεφάλαιο 14 του βιβλίου [16].

Για να μετατρέψουμε το πρόβλημα του Generic Backstepping σε απλοποιημένο Single-Integrator Backstepping, θα θεωρήσουμε μία νέα μεταβλητή εισόδου ως ακολούθως

$$\tilde{\tau}_1 = -\hat{\mathbf{M}}^{-1} [\hat{\mathbf{V}}\tilde{v} + \hat{\mathbf{F}} + \hat{\tau}_d] + \hat{\mathbf{M}}^{-1} \tilde{\tau} \quad (4.75)$$

$$\tilde{\tau} = \hat{\mathbf{M}}\tilde{\tau}_1 + \hat{\mathbf{V}}\tilde{v} + \hat{\mathbf{F}} + \hat{\tau}_d \quad (4.76)$$

Αντικαθιστώντας την σχέση (4.75) στην (4.74), το σύστημα εξισώσεων (4.73)-(4.74) λαμβάνει την ακόλουθη μορφή

$$\dot{\tilde{z}} = \hat{\mathbf{S}}\tilde{v} + \rho \left(\hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{R}} \right) (\tilde{q} - \tilde{q}_0) \quad (4.77)$$

$$\dot{\tilde{v}} = \tilde{\tau}_1 \quad (4.78)$$

Έπειτα, προσθαφαιρώντας το γινόμενο $\hat{\mathbf{S}}\tilde{v}_c$ στην σχέση (4.77), το σύστημα εξισώσεων (4.77)-(4.78) λαμβάνει την μορφή

$$\dot{\tilde{z}} = \hat{\mathbf{S}}\tilde{v} + \hat{\mathbf{S}}\tilde{v}_c - \hat{\mathbf{S}}\tilde{v}_c + \rho \left(\hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{R}} \right) (\tilde{q} - \tilde{q}_0) \quad (4.79)$$

$$\dot{\tilde{v}} = \tilde{\tau}_1 \quad (4.80)$$

Ορίζοντας μία νέα μεταβλητή λάθους, η οποία θα μετράει στο σφάλμα μεταξύ της πραγματικής ταχύτητας \tilde{v} και της επιθυμητής \tilde{v}_c

$$\tilde{e} = \tilde{v} - \tilde{v}_c \quad (4.81)$$

το σύστημα (4.79)-(4.80) τροποποιείται εκ νέου ως ακολούθως

$$\dot{\tilde{z}} = \left[\hat{\mathbf{S}}\tilde{v}_c + \rho \left(\hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{R}} \right) (\tilde{q} - \tilde{q}_0) \right] + \hat{\mathbf{S}}\tilde{e} \quad (4.82)$$

$$\dot{\tilde{e}} = \dot{\tilde{v}} - \dot{\tilde{v}}_c = \tilde{\tau}_1 - \dot{\tilde{v}}_c \quad (4.83)$$

Επιθυμούμε λοιπόν, με κατάλληλη επιλογή της ροπής εισόδου $\tilde{\tau}_1$, να επιτύχουμε ασυμπτωτική σύγκλιση του λάθους στο μηδέν, $\tilde{e} \rightarrow 0$, οπότε και θα εξασφαλιστεί $\tilde{v} \rightarrow \tilde{v}_c$.

Ως εκ τούτου λαμβάνουμε την ακόλουθη μη αρνητική Lyapunov-like συνάρτηση, η οποία αποτελεί επαυξημένη μορφή της (4.61)

$$V_\varepsilon = V_0 + \frac{1}{2} \tilde{e}^T \hat{M} \tilde{e} = \frac{1}{2} \tilde{z}^T \tilde{z} + \frac{1}{2} \tilde{e}^T \hat{M} \tilde{e} \quad (4.84)$$

Παραγωγίζοντας την συνάρτηση (4.84) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \dot{V}_\varepsilon &= \dot{V}_0 + \dot{\tilde{e}}^T \hat{M} \tilde{e} \\ &= \tilde{z}^T \left(\tilde{v} + \rho \left(\hat{L} + \hat{R} \right) \left(\tilde{q} - \tilde{q}_0 \right) \right) + \left(\tilde{\tau}_1 - \dot{\tilde{v}}_c \right)^T \hat{M} \tilde{e} \end{aligned} \quad (4.85)$$

Αντικαθιστώντας την έκφραση της ταχύτητας \tilde{v} από την (4.81), η παραπάνω εξίσωση, (4.85), επαναδιατυπώνεται ως ακολούθως

$$\begin{aligned} \dot{V}_\varepsilon &= \tilde{z}^T \left(\hat{S} \left(\tilde{e} + \tilde{v}_c \right) + \rho \left(\hat{L} + \hat{R} \right) \left(\tilde{q} - \tilde{q}_0 \right) \right) + \left(\tilde{\tau}_1 - \dot{\tilde{v}}_c \right)^T \hat{M} \tilde{e} \\ &= \tilde{z}^T \hat{S} \tilde{e} + \left(\tilde{\tau}_1 - \dot{\tilde{v}}_c \right)^T \hat{M} \tilde{e} + \tilde{z}^T \left(\hat{S} \tilde{v}_c + \rho \left(\hat{L} + \hat{R} \right) \left(\tilde{q} - \tilde{q}_0 \right) \right) \end{aligned} \quad (4.86)$$

Τέλος, βάσει της (4.66), η (4.86) θα λάβει την μορφή

$$\dot{V}_\varepsilon = \left(\tilde{z}^T \hat{S} + \left(\tilde{\tau}_1 - \dot{\tilde{v}}_c \right)^T \hat{M} \right) \tilde{e} - k_1 \|\tilde{z}\|^2 \quad (4.87)$$

Επιλέγουμε είσοδο $\tilde{\tau}_1$ τέτοια ώστε

$$\left(\tilde{\tau}_1 - \dot{\tilde{v}}_c \right)^T = \left(-k_2 \tilde{e}^T - \tilde{z}^T \hat{S} \right) \hat{M}^{-1} \quad (4.88)$$

Έτσι, αντικαθιστώντας την σχέση (4.88) στην (4.87) θα λάβουμε

$$\dot{V}_\varepsilon = -k_1 \|\tilde{z}\|^2 - k_2 \|\tilde{e}\|^2 \quad (4.89)$$

Για την μήτρα αδρανείας, σύμφωνα με τον ορισμό της, ισχύει η ακόλουθη ισότητα

$$\hat{M} = \hat{M}^T \Leftrightarrow \hat{M}^{-1} = \left(\hat{M}^{-1} \right)^T \quad (4.90)$$

Λύνοντας την σχέση (4.88) ως προς $\tilde{\tau}_1$, και λαμβάνοντας υπόψιν την ισότητα (4.90) παίρνουμε ότι

$$\tilde{\tau}_1 = \dot{\tilde{v}}_c + \hat{M}^{-1} \left(-k_2 \tilde{e} - \hat{S}^T \tilde{z} \right) \quad (4.91)$$

Αντικαθιστώντας τελικά την σχέση (4.91) στην (4.76) θα λάβουμε την είσοδο ροπής

$$\tilde{\tau} = -\hat{S}^T \tilde{z} - k_2 \tilde{e} + \hat{M} \dot{\tilde{v}}_c + \hat{V} \tilde{v} + \hat{F} + \hat{\tau}_d \quad (4.92)$$

με k_2 θετική σταθερά. Ισοδύναμα

$$\begin{aligned} \dot{V}_\varepsilon &= -k_1 \|\tilde{z}\|^2 - k_2 \|\tilde{e}\|^2 \\ &\leq -k_1 \left(\frac{1}{2} \tilde{z}^T \tilde{z} \right) - \frac{2k_2}{\lambda_{\max}(\hat{M})} \left(\frac{1}{2} \tilde{e}^T \hat{M} \tilde{e} \right) \end{aligned} \quad (4.93)$$

Θεωρώντας σταθερά k τέτοια ώστε $k > \max\{k_1, 2k_2/\lambda_{\max}(\hat{\mathbf{M}})\}$, η ανισότητα (4.93) γίνεται

$$\begin{aligned}\dot{V}_\varepsilon &\leq -k \left(\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{z}}^T \tilde{\mathbf{z}} + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{e}}^T \hat{\mathbf{M}} \tilde{\mathbf{e}} \right) \\ \dot{V}_\varepsilon &\leq -k V_\varepsilon\end{aligned}\quad (4.94)$$

Παρατηρούμε ότι στην ανισότητα (4.94) μπορούμε να εφαρμόσουμε το Λήμμα 2.3, και άρα να συμπεράνουμε την σύγκλιση των ποσοτήτων $\tilde{\mathbf{z}}$ και $\tilde{\mathbf{e}}$ στο μηδέν

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V_\varepsilon(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{0} \quad \& \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{e}}(t) = \mathbf{0} \quad \& \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (\tilde{\mathbf{v}}(t) - \tilde{\mathbf{v}}_c(t)) = \mathbf{0}\quad (4.95)$$

Λαμβάνοντας υπόψιν τους ορισμούς και τις σχέσεις (4.73)-(4.95), είμαστε σε θέση να διατυπώσουμε το ακόλουθο Λήμμα:

Λήμμα 4.8. *Δοθέντος του συστήματος δυναμικών εξισώσεων που περιγράφουν την κινηματική και δυναμική των ρομπότ διαφορικής οδήγησης*

$$\dot{\tilde{\mathbf{z}}} = \hat{\mathbf{S}} \tilde{\mathbf{v}} + \rho \left(\hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{R}} \right) (\tilde{\mathbf{q}} - \tilde{\mathbf{q}}_0) \quad (4.96)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{v}}} = -\hat{\mathbf{M}}^{-1} [\hat{\mathbf{V}} \tilde{\mathbf{v}} + \hat{\mathbf{F}} + \hat{\boldsymbol{\tau}}_d] + \hat{\mathbf{M}}^{-1} \tilde{\boldsymbol{\tau}} \quad (4.97)$$

Αν στο παραπάνω σύστημα η ροπή εισόδου $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$ λάβει την ακόλουθη μορφή

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{\tau}} &= -\hat{\mathbf{S}}^T \tilde{\mathbf{z}} - k_2 \tilde{\mathbf{e}} + \hat{\mathbf{M}} \dot{\tilde{\mathbf{v}}}_c + \hat{\mathbf{V}} \tilde{\mathbf{v}} + \hat{\mathbf{F}} + \hat{\boldsymbol{\tau}}_d \\ &= -\hat{\mathbf{S}}^T \tilde{\mathbf{z}} - k_2 (\tilde{\mathbf{v}} - \tilde{\mathbf{v}}_c) + \hat{\mathbf{M}} \dot{\tilde{\mathbf{v}}}_c + \hat{\mathbf{V}} \tilde{\mathbf{v}} + \hat{\mathbf{F}} + \hat{\boldsymbol{\tau}}_d\end{aligned}$$

και ο γράφος επικοινωνίας είναι γεννητικό δέντρο με ρίζα τον ηγέτη τότε $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\mathbf{z}}(t)\| = 0$ που συνεπάγεται *approximate leader-follower consensus* σύμφωνα με το Λήμμα 4.7.

4.6 Εισαγωγή Νευρωνικών Δικτύων στο Νόμο Ελέγχου

Στην συνέχεια θα εξετάσουμε την εισαγωγή νευρωνικών δικτύων στο νόμο ελέγχου που προτείνεται στο Λήμμα 4.8, ούτως ώστε να μπορεί να θεωρηθεί εντελώς άγνωστη η δυναμική των κινητών ρομπότ, δηλαδή οι πίνακες $\hat{\mathbf{M}}$, $\hat{\mathbf{V}}$, $\hat{\mathbf{F}}$ και $\hat{\boldsymbol{\tau}}_d$.

Σύμφωνα με το παραπάνω Λήμμα, η ροπή εισόδου λαμβάνει την μορφή

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}} = -\hat{\mathbf{S}}^T \tilde{\mathbf{z}} - k_2 \tilde{\mathbf{e}} + \underbrace{\hat{\mathbf{V}} \tilde{\mathbf{v}} + \hat{\mathbf{F}} + \hat{\boldsymbol{\tau}}_d + \hat{\mathbf{M}} \dot{\tilde{\mathbf{v}}}_c}_{\text{Higher Order Neural Networks}} \quad (4.98)$$

Αυτό το μέρος της εισόδου θα προσεγγιστεί από
Νευρωνικά Δίκτυα Υψηλότερης Τάξης
(Higher Order Neural Networks)

Από την Θεωρία Προσέγγισης, Θεώρημα 2.1, γνωρίζουμε ότι μπορούν να βρεθούν πίνακες και διανύσματα

$$\mathbf{W} : 2nm \times 2n \quad (4.99)$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{z}) : 2nm \times 1 \quad (4.100)$$

$$\boldsymbol{\epsilon} : 2n \times 1 \quad (4.101)$$

τα οποία προσεγγίζουν τη δυναμική των ρομπότ σύμφωνα με την ακόλουθη εξίσωση

$$\hat{\mathbf{V}}\dot{\mathbf{v}} + \hat{\mathbf{F}} + \hat{\boldsymbol{\tau}}_d + \hat{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{v}}_c = \mathbf{W}^T \mathbf{S}(\mathbf{z}) + \boldsymbol{\epsilon} \quad (4.102)$$

Το διάνυσμα $\mathbf{S}(\mathbf{z})$ αποτελείται από $2n$ διανύσματα $\mathbf{S}_i(\mathbf{z})$, το μήκος των οποίων είναι m και εξαρτάται από την τάξη των HONN που θα χρησιμοποιηθούν. Καθώς έχουμε επιλέξει να κάνουμε χρήση Νευρωνικών Δικτύων Δευτέρας Τάξης, έπεται ότι εν προκειμένω θα είναι $m = 15$, όπως θα φανεί και στην αναλυτική περιγραφή του διανύσματος $\mathbf{S}_i(\mathbf{z})$. Στην είσοδο $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ όμως, θα χρησιμοποιήσουμε μία προσέγγιση της συνάρτησης (4.102), η οποία θα έχει την μορφή

$$\hat{\mathbf{W}}^T \mathbf{S}(\mathbf{z}), \quad \hat{\mathbf{W}} : 2nm \times 2n \quad (4.103)$$

Ο νόμος ελέγχου (4.98) θα τροποποιηθεί κατάλληλα έτσι ώστε να περιλαμβάνει τα νευρωνικά δίκτυα με τα οποία θα προσεγγιστεί η άγνωστη δυναμική, καθώς και έναν έξτρα όρο του σφάλματος (robustness term) ο οποίος αποσκοπεί στον περιορισμό της απόκλισης που θα εμφανιστεί λόγω της παρουσίας των νευρωνικών δικτύων. Ο όρος αυτός λειτουργεί ως sliding-mode control σε δύο διαστάσεις. Ως εκ τούτου, ο νόμος ελέγχου περιγράφεται από την εξίσωση

$$\boldsymbol{\tau}_i = -\bar{\mathbf{S}}_i^T \mathbf{z}_i - k_2 \mathbf{e}_i - k_3 \frac{\mathbf{e}_i}{\|\mathbf{e}_i\|} + \hat{\mathbf{W}}_i^T ([1 \quad 1]^T \otimes \mathbf{S}_i(\mathbf{z})) \quad (4.104)$$

και μπορεί να γραφεί σε συμπαγή μορφή ως ακολούθως

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = -\bar{\mathbf{S}}^T \bar{\mathbf{z}} - k_2 \bar{\mathbf{e}} - k_3 \text{SGN}(\bar{\mathbf{e}}) + \hat{\mathbf{W}}^T \mathbf{S}(\mathbf{z}) \quad (4.105)$$

Το κέρδος k_3 αποτελεί μία θετική σταθερά το μέτρο της οποίας επιλέγεται ανάλογα με το μέγεθος της απόκλισης που εμφανίζεται, όπως θα φανεί στην πορεία της ανάλυσης.

Ορίζουμε την διαφορά μεταξύ της πραγματικής συνάρτησης (4.99) και της προσέγγισής της (4.103) ως

$$\bar{\mathbf{W}} = \mathbf{W} - \hat{\mathbf{W}}, \quad \bar{\mathbf{W}} : 2nm \times 2n \quad (4.106)$$

Όσον αφορά τους πίνακες $\hat{\mathbf{M}}$, $\hat{\mathbf{V}}$, $\hat{\mathbf{F}}$, $\hat{\boldsymbol{\tau}}_d$ που εμφανίζονται στις σχέσεις (4.98) και (4.102) υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{0} \quad \& \quad \hat{\boldsymbol{\tau}}_d = \mathbf{0} \quad (4.107)$$

Σε διαφορετική περίπτωση, αν αυτοί οι δύο όροι είναι άνω φραγμένοι σε νόρμα τότε η επίδραση τους μπορεί να εξαλειφθεί από τον robustness term $-k_3 \text{SGN}(\bar{\mathbf{e}})$ για αρκετά μεγάλο k_3 .

Ο πίνακας $\hat{\mathbf{M}}$, όπως έχει οριστεί στην σχέση (4.69), αποτελεί ένα σταθερό θετικά ορισμένο

πίνακα.

Ο πίνακας $\hat{\mathbf{V}}$, όπως έχει οριστεί στην σχέση (4.70), εξαρτάται από την μεταβλητή $\dot{\theta}$ και άρα από τις μεταβλητές v_R και v_L , αφού είναι $\dot{\theta} = \frac{r}{2b}v_R - \frac{r}{2b}v_L$. Δηλαδή εξαρτάται από το διάνυσμα $\tilde{\mathbf{v}}$, όπως έχει οριστεί στην σχέση (4.2).

Σύμφωνα με τα παραπάνω, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το διάνυσμα \mathbf{z} θα εξαρτάται από τα διανύσματα $\tilde{\mathbf{v}}$ και $\dot{\tilde{\mathbf{v}}}$, δηλαδή θα έχει την ακόλουθη μορφή

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} v_{1R} & v_{1L} & \dot{v}_{c1x} & \dot{v}_{c1y} & \cdot & \cdot & \cdot & v_{nR} & v_{nL} & \dot{v}_{cnx} & \dot{v}_{cny} \end{bmatrix}^T \quad (4.108)$$

Σύμφωνα με τον ορισμό του, το $\mathbf{S}(\mathbf{z})$ περιγράφεται από το ακόλουθο διάνυσμα

$$\mathbf{S}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1^T(\mathbf{z}) & \mathbf{S}_1^T(\mathbf{z}) & \mathbf{S}_2^T(\mathbf{z}) & \mathbf{S}_2^T(\mathbf{z}) & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{S}_n^T(\mathbf{z}) & \mathbf{S}_n^T(\mathbf{z}) \end{bmatrix}^T \quad (4.109)$$

Βάσει της σχέσης (4.108) το διάνυσμα $\mathbf{S}_i(\mathbf{z})$, όπου $i = 1, 2, \dots, n$, δομείται ως ακολούθως

$$\mathbf{S}_i(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} si_1 \\ si_2 \\ si_3 \\ si_4 \\ si_5 \\ si_6 \\ si_7 \\ si_8 \\ si_9 \\ si_{10} \\ si_{11} \\ si_{12} \\ si_{13} \\ si_{14} \\ si_{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \tanh(v_{iR}) \\ \tanh(v_{iL}) \\ \tanh(\dot{v}_{cix}) \\ \tanh(\dot{v}_{ciy}) \\ \tanh^2(v_{iR}) \\ \tanh(v_{iR}) \tanh(v_{iL}) \\ \tanh(v_{iR}) \tanh(\dot{v}_{cix}) \\ \tanh(v_{iR}) \tanh(\dot{v}_{ciy}) \\ \tanh^2(v_{iL}) \\ \tanh(v_{iL}) \tanh(\dot{v}_{cix}) \\ \tanh(v_{iL}) \tanh(\dot{v}_{ciy}) \\ \tanh^2(\dot{v}_{cix}) \\ \tanh(\dot{v}_{cix}) \tanh(\dot{v}_{ciy}) \\ \tanh^2(\dot{v}_{ciy}) \end{bmatrix} \quad (4.110)$$

Για λόγους πληρότητας παραθέτουμε αναλυτικά την μορφή που θα έχουν οι πίνακες \mathbf{W} , $\hat{\mathbf{W}}$ και $\tilde{\mathbf{W}}$.

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{1x} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} \\ \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{W}_{1y} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} \\ \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{W}_{2x} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} \\ \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{W}_{2y} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{W}_{nx} & \mathbf{0}_{m \times 1} \\ \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{W}_{ny} \end{bmatrix} \quad (4.111)$$

όπου τα $\mathbf{W}_{1x}, \mathbf{W}_{1y}, \dots, \mathbf{W}_{nx}, \mathbf{W}_{ny}$ αποτελούν σταθερά διανύσματα μεγέθους $m \times 1$.

$$\hat{\mathbf{W}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{W}}_{1x} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} \\ \mathbf{0}_{m \times 1} & \hat{\mathbf{W}}_{1y} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} \\ \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \hat{\mathbf{W}}_{2x} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} \\ \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \hat{\mathbf{W}}_{2y} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \cdot & \cdot & \cdot & \hat{\mathbf{W}}_{nx} & \mathbf{0}_{m \times 1} \\ \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{0}_{m \times 1} & \hat{\mathbf{W}}_{ny} \end{bmatrix} \quad (4.112)$$

όπου τα $\hat{\mathbf{W}}_{1x}, \hat{\mathbf{W}}_{1y}, \dots, \hat{\mathbf{W}}_{nx}, \hat{\mathbf{W}}_{ny}$ αποτελούν χρονικά μεταβαλλόμενα διανύσματα μεγέθους $m \times 1$.

$$\tilde{\mathbf{W}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{W}}_{1x} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} \\ \mathbf{0}_{m \times 1} & \tilde{\mathbf{W}}_{1y} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} \\ \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \tilde{\mathbf{W}}_{2x} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} \\ \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \tilde{\mathbf{W}}_{2y} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \cdot & \cdot & \cdot & \tilde{\mathbf{W}}_{nx} & \mathbf{0}_{m \times 1} \\ \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{0}_{m \times 1} & \tilde{\mathbf{W}}_{ny} \end{bmatrix} \quad (4.113)$$

όπου τα $\tilde{\mathbf{W}}_{1x}, \tilde{\mathbf{W}}_{1y}, \dots, \tilde{\mathbf{W}}_{nx}, \tilde{\mathbf{W}}_{ny}$ αποτελούν χρονικά μεταβαλλόμενα διανύσματα μεγέθους $m \times 1$.

Σύμφωνα με τους ορισμούς των πινάκων (4.110)-(4.112), τα διανύσματα $\mathbf{W}^T \mathbf{S}(z)$ και $\hat{\mathbf{W}}^T \mathbf{S}(z)$, μεγέθους $2n \times 1$, στην περίπτωση όπου $n = 5$ σχηματικά λαμβάνουν την μορφή του διαγράμματος νευρωνικών δικτύων που παρατίθεται στο Παράρτημα της εργασίας.

Όσον αφορά το διάνυσμα λάθους $\tilde{\mathbf{e}}$ θα έχει την επόμενη μορφή

$$\tilde{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} e_{1R} & e_{1L} & e_{2R} & e_{2L} & \cdot & \cdot & \cdot & e_{nR} & e_{nL} \end{bmatrix}^T \quad (4.114)$$

Ορίζουμε ένα νέο πίνακα, έστω \mathbf{J} , διαστάσεων $2nm \times 2n$, ο οποίος δίνεται από την έκφραση

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{0}_{m \times 1} \\ \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{1}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{0}_{m \times 1} \\ \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{1}_{m \times 1} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{0}_{m \times 1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{1}_{m \times 1} \end{bmatrix} \quad (4.115)$$

Προχωράμε στον υπολογισμό του γινομένου $\mathbf{S}(\mathbf{z})\tilde{\mathbf{e}}^T \circ \mathbf{J}$, όπου ο δηλώνει το Hadamard product.

Λαμβάνοντας το γινόμενο των πινάκων (4.109) και (4.114) προκύπτει ότι

$$\mathbf{S}(\mathbf{z})\tilde{\mathbf{e}}^T = \begin{bmatrix} e_{1R}\mathbf{S}_1(\mathbf{z}) & e_{1L}\mathbf{S}_1(\mathbf{z}) & \cdot & \cdot & \cdot & e_{nR}\mathbf{S}_1(\mathbf{z}) & e_{nL}\mathbf{S}_1(\mathbf{z}) \\ e_{1R}\mathbf{S}_1(\mathbf{z}) & e_{1L}\mathbf{S}_1(\mathbf{z}) & \cdot & \cdot & \cdot & e_{nR}\mathbf{S}_1(\mathbf{z}) & e_{nL}\mathbf{S}_1(\mathbf{z}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ e_{1R}\mathbf{S}_n(\mathbf{z}) & e_{1L}\mathbf{S}_n(\mathbf{z}) & \cdot & \cdot & \cdot & e_{nR}\mathbf{S}_n(\mathbf{z}) & e_{nL}\mathbf{S}_n(\mathbf{z}) \\ e_{1R}\mathbf{S}_n(\mathbf{z}) & e_{1L}\mathbf{S}_n(\mathbf{z}) & \cdot & \cdot & \cdot & e_{nR}\mathbf{S}_n(\mathbf{z}) & e_{nL}\mathbf{S}_n(\mathbf{z}) \end{bmatrix} \quad (4.116)$$

Έπειτα, υπολογίζοντας το γινόμενο των πινάκων (4.116) και (4.115) προκύπτει τελικά ότι

$$\mathbf{S}(\mathbf{z})\tilde{\mathbf{e}}^T \circ \mathbf{J} = \begin{bmatrix} e_{1R}\mathbf{S}_1(\mathbf{z}) & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} \\ \mathbf{0}_{m \times 1} & e_{1L}\mathbf{S}_1(\mathbf{z}) & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} \\ \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & e_{2R}\mathbf{S}_2(\mathbf{z}) & \mathbf{0}_{m \times 1} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} \\ \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{i \times 1} & e_{2L}\mathbf{S}_2(\mathbf{z}) & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \cdot & \cdot & \cdot & e_{nR}\mathbf{S}_n(\mathbf{z}) & \mathbf{0}_{m \times 1} \\ \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{0}_{m \times 1} & e_{nL}\mathbf{S}_n(\mathbf{z}) \end{bmatrix} \quad (4.117)$$

Βάσει των σχέσεων (4.109), (4.112), (4.114), (4.115), (4.116) και (4.117) ορίζουμε το $\hat{\mathbf{W}}$ έτσι ώστε να ικανοποιεί την ακόλουθη Διαφορική Εξίσωση (Update Law)

$$\dot{\hat{\mathbf{W}}} = -\gamma \left[\mathbf{S}(\mathbf{z})\tilde{\mathbf{e}}^T \circ \mathbf{J} + \sigma \hat{\mathbf{W}} \right] \quad (4.118)$$

Η παράμετρος γ που εμφανίζεται στο νόμο αναβάθμισης (4.118) ονομάζεται κέρδος προσαρμογής (adaptation gain), και είναι μία θετική σταθερά η οποία συμβάλλει στην ταχύτητα της σύγκλισης του αλγορίθμου. Αντίστοιχα, η παράμετρος σ ονομάζεται παράγοντας ολίσθησης (drift factor) και ρόλος της είναι να κρατάει τα βάρη $\hat{\mathbf{W}}$ φραγμένα. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να βελτιώνει την ευστάθεια του συστήματος αλλά ταυτόχρονα να αυξάνει το σφάλμα. Ως εκ τούτου, για το σ επιλέγεται μία μικρή θετική τιμή.

Θεωρούμε την ακόλουθη μη αρνητική Lyapunov-like συνάρτηση, η οποία αποτελεί επαυξημένη μορφή της (4.84)

$$V_{NN} = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{z}}^T \tilde{\mathbf{z}} + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{e}}^T \hat{\mathbf{M}} \tilde{\mathbf{e}} + tr \left\{ \frac{1}{2\gamma} \tilde{\mathbf{W}}^T \tilde{\mathbf{W}} \right\} \quad (4.119)$$

Παραγωγίζοντας την συνάρτηση (4.119) και κάνοντας χρήση των σχέσεων (4.73) και (4.83)

παίρνουμε

$$\begin{aligned}\dot{V}_{NN} &= \tilde{\mathbf{z}}^T \dot{\tilde{\mathbf{z}}} + \dot{\tilde{\mathbf{e}}}^T \hat{\mathbf{M}} \tilde{\mathbf{e}} + tr \left\{ \frac{1}{\gamma} \tilde{\mathbf{W}}^T \dot{\tilde{\mathbf{W}}} \right\} \\ &= \tilde{\mathbf{z}}^T \left(\hat{\mathbf{S}} \tilde{\mathbf{v}} + \rho \left(\hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{R}} \right) \left(\tilde{\mathbf{q}} - \tilde{\mathbf{q}}_0 \right) \right) + \left(\tilde{\tau}_1 - \dot{\tilde{\mathbf{v}}}_c \right)^T \hat{\mathbf{M}} \tilde{\mathbf{e}} + tr \left\{ \frac{1}{\gamma} \tilde{\mathbf{W}}^T \dot{\tilde{\mathbf{W}}} \right\}\end{aligned}$$

Το μέγεθος $\tilde{\mathbf{v}}$ γράφεται σαν συνάρτηση του σφάλματος $\tilde{\mathbf{e}}$, εξίσωση (4.81), και με δεδομένη την σχέση (4.66) τελικά παίρνουμε

$$\begin{aligned}\dot{V}_{NN} &= \tilde{\mathbf{z}}^T \left(\hat{\mathbf{S}} \left(\tilde{\mathbf{e}} + \tilde{\mathbf{v}}_c \right) + \rho \left(\hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{R}} \right) \left(\tilde{\mathbf{q}} - \tilde{\mathbf{q}}_0 \right) \right) + \left(\tilde{\tau}_1 - \dot{\tilde{\mathbf{v}}}_c \right)^T \hat{\mathbf{M}} \tilde{\mathbf{e}} + tr \left\{ \frac{1}{\gamma} \tilde{\mathbf{W}}^T \dot{\tilde{\mathbf{W}}} \right\} \\ &= \tilde{\mathbf{z}}^T \left(\hat{\mathbf{S}} \tilde{\mathbf{v}}_c + \rho \left(\hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{R}} \right) \left(\tilde{\mathbf{q}} - \tilde{\mathbf{q}}_0 \right) \right) + \tilde{\mathbf{z}}^T \hat{\mathbf{S}} \tilde{\mathbf{e}} + \left(\tilde{\tau}_1 - \dot{\tilde{\mathbf{v}}}_c \right)^T \hat{\mathbf{M}} \tilde{\mathbf{e}} + tr \left\{ \frac{1}{\gamma} \tilde{\mathbf{W}}^T \dot{\tilde{\mathbf{W}}} \right\} \\ &= -k_1 \|\tilde{\mathbf{z}}\|^2 + \tilde{\mathbf{z}}^T \hat{\mathbf{S}} \tilde{\mathbf{e}} + \left(\tilde{\tau}_1 - \dot{\tilde{\mathbf{v}}}_c \right)^T \hat{\mathbf{M}} \tilde{\mathbf{e}} + tr \left\{ \frac{1}{\gamma} \tilde{\mathbf{W}}^T \dot{\tilde{\mathbf{W}}} \right\}\end{aligned}$$

Έπειτα, αντικαθιστώντας την σχέση (4.75) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\dot{V}_{NN} &= -k_1 \|\tilde{\mathbf{z}}\|^2 + \tilde{\mathbf{z}}^T \hat{\mathbf{S}} \tilde{\mathbf{e}} + tr \left\{ \frac{1}{\gamma} \tilde{\mathbf{W}}^T \dot{\tilde{\mathbf{W}}} \right\} \\ &\quad + \left(-\hat{\mathbf{M}}^{-1} \left(\hat{\mathbf{V}} \tilde{\mathbf{v}} + \hat{\mathbf{F}} + \hat{\tau}_d \right) + \hat{\mathbf{M}}^{-1} \tilde{\tau} - \dot{\tilde{\mathbf{v}}}_c \right)^T \hat{\mathbf{M}} \tilde{\mathbf{e}} \\ &= -k_1 \|\tilde{\mathbf{z}}\|^2 + \tilde{\mathbf{z}}^T \hat{\mathbf{S}} \tilde{\mathbf{e}} + tr \left\{ \frac{1}{\gamma} \tilde{\mathbf{W}}^T \dot{\tilde{\mathbf{W}}} \right\} \\ &\quad + \left(\tilde{\tau} - \left(\hat{\mathbf{V}} \tilde{\mathbf{v}} + \hat{\mathbf{F}} + \hat{\tau}_d + \hat{\mathbf{M}} \dot{\tilde{\mathbf{v}}}_c \right) \right)^T \left(\hat{\mathbf{M}}^{-1} \right)^T \hat{\mathbf{M}} \tilde{\mathbf{e}}\end{aligned}$$

Από τις σχέσεις (4.102) και (4.105) η τελευταία τροποποιείται ως ακολούθως

$$\begin{aligned}\dot{V}_{NN} &= -k_1 \|\tilde{\mathbf{z}}\|^2 + \tilde{\mathbf{z}}^T \hat{\mathbf{S}} \tilde{\mathbf{e}} + tr \left\{ \frac{1}{\gamma} \tilde{\mathbf{W}}^T \dot{\tilde{\mathbf{W}}} \right\} \\ &\quad + \left(-\hat{\mathbf{S}}^T \tilde{\mathbf{z}} - k_2 \tilde{\mathbf{e}} - k_3 \text{SGN}(\tilde{\mathbf{e}}) + \hat{\mathbf{W}}^T \mathbf{S}(\mathbf{z}) - \left(\mathbf{W}^T \mathbf{S}(\mathbf{z}) + \boldsymbol{\epsilon} \right) \right)^T \tilde{\mathbf{e}} \\ &= -k_1 \|\tilde{\mathbf{z}}\|^2 - k_2 \tilde{\mathbf{e}}^T \tilde{\mathbf{e}} - k_3 \left(\text{SGN}(\tilde{\mathbf{e}}) \right)^T \tilde{\mathbf{e}} + tr \left\{ \frac{1}{\gamma} \tilde{\mathbf{W}}^T \dot{\tilde{\mathbf{W}}} \right\} \\ &\quad - \left(\mathbf{W}^T \mathbf{S}(\mathbf{z}) - \hat{\mathbf{W}}^T \mathbf{S}(\mathbf{z}) \right)^T \tilde{\mathbf{e}} - \boldsymbol{\epsilon}^T \tilde{\mathbf{e}}\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι, σύμφωνα με τον ορισμό της παραμέτρου SGN θα είναι

$$\begin{aligned}\left(\text{SGN}(\tilde{\mathbf{e}}) \right)^T \tilde{\mathbf{e}} &= \sum_i \left\{ \left(\frac{\mathbf{e}_i}{\|\mathbf{e}_i\|} \right)^T \mathbf{e}_i \right\} = \sum_i \{ \|\mathbf{e}_i\| \} \geq \|\mathbf{e}\| \Rightarrow \\ &\quad - \left(\text{SGN}(\tilde{\mathbf{e}}) \right)^T \tilde{\mathbf{e}} \leq -\|\mathbf{e}\|\end{aligned}\tag{4.120}$$

Τέλος, κάνοντας χρήση των (4.106) και (4.120), καταλήγουμε στην ανισότητα

$$\dot{V}_{NN} \leq -k_1 \|\tilde{\mathbf{z}}\|^2 - k_2 \|\tilde{\mathbf{e}}\|^2 - k_3 \|\tilde{\mathbf{e}}\| - \mathbf{S}^T(\mathbf{z}) \tilde{\mathbf{W}} \tilde{\mathbf{e}} - \boldsymbol{\epsilon}^T \tilde{\mathbf{e}} + tr \left\{ \frac{1}{\gamma} \tilde{\mathbf{W}}^T \dot{\tilde{\mathbf{W}}} \right\}\tag{4.121}$$

Προχωράμε στον υπολογισμό του γινομένου $\mathbf{S}^T(z)\tilde{\mathbf{W}}\tilde{\mathbf{e}}$.

Λαμβάνοντας το γινόμενο των (4.109) και (4.113) προκύπτει ότι

$$\mathbf{S}^T(z)\tilde{\mathbf{W}} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1^T(z)\tilde{\mathbf{W}}_{1x} & \mathbf{S}_1^T(z)\tilde{\mathbf{W}}_{1y} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{S}_n^T(z)\tilde{\mathbf{W}}_{nx} & \mathbf{S}_n^T(z)\tilde{\mathbf{W}}_{ny} \end{bmatrix} \quad (4.122)$$

Πολλαπλασιάζοντας την (4.122) με την (4.114) παίρνουμε

$$\mathbf{S}^T(z)\tilde{\mathbf{W}}\tilde{\mathbf{e}} = \mathbf{S}_1^T(z)\tilde{\mathbf{W}}_{1x}e_{1R} + \mathbf{S}_1^T(z)\tilde{\mathbf{W}}_{1y}e_{1L} + \dots + \mathbf{S}_n^T(z)\tilde{\mathbf{W}}_{nx}e_{nR} + \mathbf{S}_n^T(z)\tilde{\mathbf{W}}_{ny}e_{nL} \quad (4.123)$$

Έπειτα προχωράμε στον υπολογισμό του $\text{tr} \left\{ \frac{1}{\gamma} \tilde{\mathbf{W}}^T \dot{\tilde{\mathbf{W}}} \right\}$. Αρχικά παρατηρούμε ότι, καθώς είναι $\tilde{\mathbf{W}} = \mathbf{W} - \hat{\mathbf{W}}$ και ο πίνακας \mathbf{W} είναι σταθερός οπότε $\dot{\mathbf{W}} = 0$, έπεται ότι παραγωγίζοντας την σχέση (4.106) και αντικαθιστώντας την σχέση (4.118) θα λάβουμε

$$\dot{\tilde{\mathbf{W}}} = -\dot{\hat{\mathbf{W}}} = \gamma \left[\mathbf{S}(z)\tilde{\mathbf{e}}^T \circ \mathbf{J} + \sigma \hat{\mathbf{W}} \right] \quad (4.124)$$

Πολλαπλασιάζοντας τώρα την σχέση (4.124) με $\tilde{\mathbf{W}}$ παίρνουμε

$$\frac{1}{\gamma} \tilde{\mathbf{W}}^T \dot{\tilde{\mathbf{W}}} = \tilde{\mathbf{W}}^T \mathbf{S}(z)\tilde{\mathbf{e}}^T \circ \mathbf{J} + \sigma \tilde{\mathbf{W}}^T \hat{\mathbf{W}} \quad (4.125)$$

Από τις σχέσεις (4.113) και (4.117) προκύπτει ότι

$$\tilde{\mathbf{W}}^T \mathbf{S}(z)\tilde{\mathbf{e}}^T \circ \mathbf{J} = \begin{bmatrix} e_{1R} \tilde{\mathbf{W}}_{1x}^T \mathbf{S}_1(z) & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & e_{1L} \tilde{\mathbf{W}}_{1y}^T \mathbf{S}_1(z) & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & e_{nR} \tilde{\mathbf{W}}_{nx}^T \mathbf{S}_n(z) & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & e_{nL} \tilde{\mathbf{W}}_{ny}^T \mathbf{S}_n(z) \end{bmatrix} \quad (4.126)$$

Επίσης οι σχέσεις (4.112) και (4.113) δίνουν

$$\tilde{\mathbf{W}}^T \hat{\mathbf{W}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{W}}_{1x}^T \hat{\mathbf{W}}_{1x} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\mathbf{W}}_{1y}^T \hat{\mathbf{W}}_{1y} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \tilde{\mathbf{W}}_{nx}^T \hat{\mathbf{W}}_{nx} & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \tilde{\mathbf{W}}_{ny}^T \hat{\mathbf{W}}_{ny} \end{bmatrix} \quad (4.127)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (4.126) και (4.127) στην (4.125) προκύπτει τελικά ότι

$$\frac{1}{\gamma} \tilde{\mathbf{W}}^T \dot{\tilde{\mathbf{W}}} = \tilde{\mathbf{W}}^T \mathbf{S}(z)\tilde{\mathbf{e}}^T \circ \mathbf{J} + \sigma \tilde{\mathbf{W}}^T \hat{\mathbf{W}} \quad (4.128)$$

$$= \begin{bmatrix} e_{1R} \tilde{\mathbf{W}}_{1x}^T \mathbf{S}_1(z) + \sigma \tilde{\mathbf{W}}_{1x}^T \hat{\mathbf{W}}_{1x} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & e_{nL} \tilde{\mathbf{W}}_{ny}^T \mathbf{S}_n(z) + \sigma \tilde{\mathbf{W}}_{ny}^T \hat{\mathbf{W}}_{ny} \end{bmatrix} \quad (4.129)$$

Λαμβάνοντας λοιπόν το $\text{tr} \left\{ \frac{1}{\gamma} \tilde{\mathbf{W}}^T \dot{\tilde{\mathbf{W}}} \right\}$ από την σχέση (4.128) παίρνουμε

$$\text{tr} \left\{ \frac{1}{\gamma} \tilde{\mathbf{W}}^T \dot{\tilde{\mathbf{W}}} \right\} = \sum_{i=1}^n \left\{ e_{iR} \tilde{\mathbf{W}}_{ix}^T \mathbf{S}_i(z) + \sigma \tilde{\mathbf{W}}_{ix}^T \hat{\mathbf{W}}_{ix} + e_{iL} \tilde{\mathbf{W}}_{iy}^T \mathbf{S}_i(z) + \sigma \tilde{\mathbf{W}}_{iy}^T \hat{\mathbf{W}}_{iy} \right\} \quad (4.130)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (4.123) και (4.130) στην (4.121) λαμβάνουμε ότι

$$\begin{aligned} \dot{V}_{NN} \leq & -k_1 \|\tilde{\mathbf{z}}\|^2 - k_2 \|\tilde{\mathbf{e}}\|^2 - k_3 \|\tilde{\mathbf{e}}\| - \epsilon^T \tilde{\mathbf{e}} - \sum_{i=1}^n \left\{ \mathbf{S}_i^T(z) \tilde{\mathbf{W}}_{ix} e_{iR} - \mathbf{S}_i^T(z) \tilde{\mathbf{W}}_{iy} e_{iL} \right\} \\ & + \sum_{i=1}^n \left\{ e_{iR} \tilde{\mathbf{W}}_{ix}^T \mathbf{S}_i(z) + \sigma \tilde{\mathbf{W}}_{ix}^T \hat{\mathbf{W}}_{ix} + e_{iL} \tilde{\mathbf{W}}_{iy}^T \mathbf{S}_i(z) + \sigma \tilde{\mathbf{W}}_{iy}^T \hat{\mathbf{W}}_{iy} \right\} \end{aligned} \quad (4.131)$$

Επίσης, καθώς τα $\mathbf{S}_i(z)$, $\tilde{\mathbf{W}}_{ix}$, $\tilde{\mathbf{W}}_{iy}$ είναι διανύσματα μεγέθους $(m \times 1)$, ισχύει ότι

$$\mathbf{S}_i^T(z) \tilde{\mathbf{W}}_{ix} e_{iR} = e_{iR} \tilde{\mathbf{W}}_{ix}^T \mathbf{S}_i(z) \quad (4.132)$$

$$\mathbf{S}_i^T(z) \tilde{\mathbf{W}}_{iy} e_{iL} = e_{iL} \tilde{\mathbf{W}}_{iy}^T \mathbf{S}_i(z) \quad (4.133)$$

Με βάση την σχέση (4.131) και λαμβάνοντας υπόψιν τις ισότητες (4.132) και (4.133) συνεπάγεται ότι

$$\dot{V}_{NN} \leq -k_1 \|\tilde{\mathbf{z}}\|^2 - k_2 \|\tilde{\mathbf{e}}\|^2 - k_3 \|\tilde{\mathbf{e}}\| - \epsilon^T \tilde{\mathbf{e}} + \sum_{i=1}^n \left\{ \sigma \tilde{\mathbf{W}}_{ix}^T \hat{\mathbf{W}}_{ix} + \sigma \tilde{\mathbf{W}}_{iy}^T \hat{\mathbf{W}}_{iy} \right\} \quad (4.134)$$

Πρωτού αναλύσουμε περισσότερο την σχέση (4.134), βασιζόμενοι στην εξίσωση (4.106) παρατηρούμε ότι το γινόμενο $\tilde{\mathbf{W}}_{ix}^T \hat{\mathbf{W}}_{ix}$ μπορεί να τροποποιηθεί όπως φαίνεται παρακάτω

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{W}}_{ix}^T \hat{\mathbf{W}}_{ix} &= \tilde{\mathbf{W}}_{ix}^T (\mathbf{W}_{ix} - \tilde{\mathbf{W}}_{ix}) \\ &= \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{W}}_{ix} + \tilde{\mathbf{W}}_{ix})^T (\mathbf{W}_{ix} - \tilde{\mathbf{W}}_{ix}) \\ &= \frac{1}{2} \left[\tilde{\mathbf{W}}_{ix} + (\mathbf{W}_{ix} - \hat{\mathbf{W}}_{ix}) \right]^T (\mathbf{W}_{ix} - \tilde{\mathbf{W}}_{ix}) \\ &= \frac{1}{2} \left[\tilde{\mathbf{W}}_{ix}^T \mathbf{W}_{ix} - \tilde{\mathbf{W}}_{ix}^T \tilde{\mathbf{W}}_{ix} + \mathbf{W}_{ix}^T \mathbf{W}_{ix} - \mathbf{W}_{ix}^T \tilde{\mathbf{W}}_{ix} - \hat{\mathbf{W}}_{ix}^T \mathbf{W}_{ix} + \hat{\mathbf{W}}_{ix}^T \tilde{\mathbf{W}}_{ix} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[-\tilde{\mathbf{W}}_{ix}^T \tilde{\mathbf{W}}_{ix} + \mathbf{W}_{ix}^T \mathbf{W}_{ix} - \hat{\mathbf{W}}_{ix}^T (\mathbf{W}_{ix} - \tilde{\mathbf{W}}_{ix}) \right] \end{aligned} \quad (4.135)$$

Έτσι, η σχέση (4.135) δίνει τελικά ότι

$$\tilde{\mathbf{W}}_{ix}^T \hat{\mathbf{W}}_{ix} = \frac{1}{2} \left[-\tilde{\mathbf{W}}_{ix}^T \tilde{\mathbf{W}}_{ix} + \mathbf{W}_{ix}^T \mathbf{W}_{ix} - \hat{\mathbf{W}}_{ix}^T \hat{\mathbf{W}}_{ix} \right] \quad (4.136)$$

Αντίστοιχη σχέση θα ισχύει και για το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\tilde{\mathbf{W}}_{iy}$ και $\hat{\mathbf{W}}_{iy}$

$$\tilde{\mathbf{W}}_{iy}^T \hat{\mathbf{W}}_{iy} = \frac{1}{2} \left[-\tilde{\mathbf{W}}_{iy}^T \tilde{\mathbf{W}}_{iy} + \mathbf{W}_{iy}^T \mathbf{W}_{iy} - \hat{\mathbf{W}}_{iy}^T \hat{\mathbf{W}}_{iy} \right] \quad (4.137)$$

Λαμβάνοντας υπόψιν τις σχέσεις (4.136) και (4.137), η (4.134) γράφεται

$$\begin{aligned} \dot{V}_{NN} \leq & -k_1 \|\tilde{\mathbf{z}}\|^2 - k_2 \|\tilde{\mathbf{e}}\|^2 - k_3 \|\tilde{\mathbf{e}}\| - \boldsymbol{\epsilon}^T \tilde{\mathbf{e}} + \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\sigma}{2} \left[-\tilde{\mathbf{W}}_{ix}^T \tilde{\mathbf{W}}_{ix} + \mathbf{W}_{ix}^T \mathbf{W}_{ix} - \hat{\mathbf{W}}_{ix}^T \hat{\mathbf{W}}_{ix} \right] \right\} \\ & + \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\sigma}{2} \left[-\tilde{\mathbf{W}}_{iy}^T \tilde{\mathbf{W}}_{iy} + \mathbf{W}_{iy}^T \mathbf{W}_{iy} - \hat{\mathbf{W}}_{iy}^T \hat{\mathbf{W}}_{iy} \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.138)$$

Αναδιατάσσοντας την (4.138) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \dot{V}_{NN} \leq & -k_1 \|\tilde{\mathbf{z}}\|^2 - k_2 \|\tilde{\mathbf{e}}\|^2 - k_3 \|\tilde{\mathbf{e}}\| - \boldsymbol{\epsilon}^T \tilde{\mathbf{e}} + \sum_{i=1}^n \left\{ -\frac{\sigma}{2} \left[\tilde{\mathbf{W}}_{ix}^T \tilde{\mathbf{W}}_{ix} + \tilde{\mathbf{W}}_{iy}^T \tilde{\mathbf{W}}_{iy} \right] \right\} \\ & + \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\sigma}{2} \left[\mathbf{W}_{ix}^T \mathbf{W}_{ix} + \mathbf{W}_{iy}^T \mathbf{W}_{iy} \right] - \frac{\sigma}{2} \left[\hat{\mathbf{W}}_{ix}^T \hat{\mathbf{W}}_{ix} + \hat{\mathbf{W}}_{iy}^T \hat{\mathbf{W}}_{iy} \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.139)$$

Λαμβάνοντας υπόψιν τον ορισμό του $tr \left\{ \tilde{\mathbf{W}}^T \tilde{\mathbf{W}} \right\}$, η (4.139) γίνεται

$$\dot{V}_{NN} \leq -k_1 \|\tilde{\mathbf{z}}\|^2 - k_2 \|\tilde{\mathbf{e}}\|^2 - k_3 \|\tilde{\mathbf{e}}\| - \boldsymbol{\epsilon}^T \tilde{\mathbf{e}} - \frac{\sigma}{2} tr \left\{ \tilde{\mathbf{W}}^T \tilde{\mathbf{W}} \right\} + \frac{\sigma}{2} tr \left\{ \mathbf{W}^T \mathbf{W} \right\} - \frac{\sigma}{2} tr \left\{ \hat{\mathbf{W}}^T \hat{\mathbf{W}} \right\} \quad (4.140)$$

Η (4.140) άνω φράσσεται από την συνάρτηση

$$\begin{aligned} \dot{V}_{NN} \leq & -k_1 \|\tilde{\mathbf{z}}\|^2 - k_2 \|\tilde{\mathbf{e}}\|^2 - k_3 \|\tilde{\mathbf{e}}\| + \|\boldsymbol{\epsilon}\| \|\tilde{\mathbf{e}}\| - \frac{\sigma}{2} tr \left\{ \tilde{\mathbf{W}}^T \tilde{\mathbf{W}} \right\} + \frac{\sigma}{2} tr \left\{ \mathbf{W}^T \mathbf{W} \right\} \quad (4.141) \\ \leq & -k_1 \|\tilde{\mathbf{z}}\|^2 - k_2 \|\tilde{\mathbf{e}}\|^2 - \|\tilde{\mathbf{e}}\| (k_3 - \|\boldsymbol{\epsilon}\|) - \frac{\sigma}{2} tr \left\{ \tilde{\mathbf{W}}^T \tilde{\mathbf{W}} \right\} + \frac{\sigma}{2} tr \left\{ \mathbf{W}^T \mathbf{W} \right\} \end{aligned}$$

Επιλέγοντας το κέρδος k_3 έτσι ώστε να ικανοποιεί την συνθήκη $k_3 \geq \|\boldsymbol{\epsilon}\|$ καταφέρνουμε να αναιρέσουμε την απόκλιση $\boldsymbol{\epsilon}$, όπως γίνεται φανερό από την σχέση (4.141). Ως εκ τούτου καταλήγουμε στην παρακάτω ανισότητα, η οποία περιγράφει το άνω φράγμα της παραγώγου της συνάρτησης τύπου-Lyapunov V_{NN}

$$\dot{V}_{NN} \leq -k_1 \|\tilde{\mathbf{z}}\|^2 - k_2 \|\tilde{\mathbf{e}}\|^2 - \frac{\sigma}{2} tr \left\{ \tilde{\mathbf{W}}^T \tilde{\mathbf{W}} \right\} + \frac{\sigma}{2} tr \left\{ \mathbf{W}^T \mathbf{W} \right\} \quad (4.142)$$

Υπενθυμίζουμε ότι η συνάρτηση V_{NN} έχει οριστεί στην σχέση (4.119) ως ακολούθως

$$V_{NN} = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{z}}^T \tilde{\mathbf{z}} + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{e}}^T \hat{\mathbf{M}} \tilde{\mathbf{e}} + tr \left\{ \frac{1}{2\gamma} \tilde{\mathbf{W}}^T \tilde{\mathbf{W}} \right\} \quad (4.143)$$

Οπότε, η (4.142) ισοδύναμα γράφεται

$$\dot{V}_{NN} \leq -2k_1 \left(\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{z}}^T \tilde{\mathbf{z}} \right) - \frac{2k_2}{\lambda_{max}(\hat{\mathbf{M}})} \left(\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{e}}^T \hat{\mathbf{M}} \tilde{\mathbf{e}} \right) - \sigma\gamma \left(tr \left\{ \frac{1}{2\gamma} \tilde{\mathbf{W}}^T \tilde{\mathbf{W}} \right\} \right) + \frac{\sigma}{2} tr \left\{ \mathbf{W}^T \mathbf{W} \right\} \quad (4.144)$$

Θεωρώντας μία νέα σταθερά Λ η οποία να ικανοποιεί τη συνθήκη

$$0 < \Lambda \leq \min \left\{ 2k_1, \frac{2k_2}{\lambda_{max}(\hat{\mathbf{M}})}, \sigma\gamma \right\} \quad (4.145)$$

και αντικαθιστώντας την στην ανισότητα, η (4.144) γράφεται

$$\dot{V}_{NN} \leq -\Lambda \left(\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{z}}^T \tilde{\mathbf{z}} \right) - \Lambda \left(\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{e}}^T \hat{\mathbf{M}} \tilde{\mathbf{e}} \right) - \Lambda \left(\text{tr} \left\{ \frac{1}{2\gamma} \tilde{\mathbf{W}}^T \tilde{\mathbf{W}} \right\} \right) + \frac{\sigma}{2} \text{tr} \{ \mathbf{W}^T \mathbf{W} \} \quad (4.146)$$

Ορίζουμε μία νέα σταθερά G σύμφωνα με την σχέση

$$G = \frac{\sigma}{2} \text{tr} \{ \mathbf{W}^T \mathbf{W} \} \quad (4.147)$$

Τελικά, οι σχέσεις (4.146) και (4.147) μας δίνουν την ανισότητα σύμφωνα με την οποία συνδέονται οι συναρτήσεις V_{NN} και \dot{V}_{NN}

$$\dot{V}_{NN} \leq -\Lambda V_{NN} + G \quad (4.148)$$

Εφαρμόζοντας το Λήμμα 2.4 στην ανισότητα (4.148), προκύπτει ότι το όριο στο άπειρο της Lyapunov-like συνάρτησης V_{NN} εμφανίζει άνω φράγμα

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V_{NN}(t) \leq \frac{G}{\Lambda} \quad (4.149)$$

Από την σχέση (4.119) προκύπτει ότι

$$\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{z}}^T \tilde{\mathbf{z}} \leq V_{NN} \quad \& \quad \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{e}}^T \hat{\mathbf{M}} \tilde{\mathbf{e}} \leq V_{NN} \quad (4.150)$$

Ισοδύναμα

$$\|\tilde{\mathbf{z}}\| \leq \sqrt{2V_{NN}} \quad (4.151)$$

$$\frac{\lambda_{\min}(\hat{\mathbf{M}})}{2} \|\tilde{\mathbf{e}}\|^2 \leq V_{NN} \quad \Rightarrow \quad \|\tilde{\mathbf{e}}\| \leq \sqrt{\frac{2}{\lambda_{\min}(\hat{\mathbf{M}})} V_{NN}} \quad (4.152)$$

Τέλος, παίρνοντας το όριο στο άπειρο των ανισοτήτων (4.151)-(4.152), και δεδομένης της (4.149), προκύπτει ότι

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\mathbf{z}}(t)\| \leq \sqrt{2 \frac{G}{\Lambda}} \quad \& \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\mathbf{e}}(t)\| \leq \sqrt{\frac{2}{\lambda_{\min}(\hat{\mathbf{M}})} \frac{G}{\Lambda}} \quad (4.153)$$

Δηλαδή, προϊόντος του χρόνου, τόσο ο PI-μετασχηματισμός όσο και το σφάλμα των ταχυτήτων θα εγκλωβιστούν σε μικρή περιοχή γύρω από το μηδέν, το μέγεθος της οποίας θα εξαρτάται από την σχέση των ποσοτήτων G και Λ . Ως εκ τούτου, η ταχύτητα $\tilde{\mathbf{v}}$ θα πλησιάσει πολύ την επιθυμητή $\tilde{\mathbf{v}}_e$ και αντίστοιχα το μέγεθος $\tilde{\mathbf{z}}$ θα πλησιάσει πολύ το μηδέν, διατηρώντας ωστόσο μία μικρή απόκλιση.

Εν συνεχεία διατυπώνεται το Λήμμα που συγκεντρώνει όλες τις ιδέες που αναπτύχθηκαν για το πρόβλημα συνεργατικού ελέγχου που εξετάστηκε στο παρόν κεφάλαιο.

Λήμμα 4.9. Έστω ένα πολυπρακτορικό σύστημα αποτελούμενο από κινητά ρομπότ διαφορικής οδήγησης. Προκειμένου να εκτελέσουν *Leader-Follower Consensus*, με μία μικρή απόκλιση οφειλόμενη στην ταχύτητα του ηγέτη, ορίζουμε τον ακόλουθο μετασχηματισμό

$$\tilde{\mathbf{z}}(t) = \tilde{\mathbf{q}}(t) + \rho \int_0^t \left[(\hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{R}}) (\tilde{\mathbf{q}}(s) - \tilde{\mathbf{q}}_0(s)) \right] ds$$

Δοθέντος του συστήματος δυναμικών εξισώσεων που περιγράφουν την κινηματική και δυναμική των ρομπότ διαφορικής οδήγησης

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{z}}} &= \hat{\mathbf{S}}\tilde{\mathbf{v}} + \rho (\hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{R}}) (\tilde{\mathbf{q}} - \tilde{\mathbf{q}}_0) \\ \dot{\tilde{\mathbf{v}}} &= -\hat{\mathbf{M}}^{-1} [\hat{\mathbf{V}}\tilde{\mathbf{v}} + \hat{\mathbf{F}} + \hat{\boldsymbol{\tau}}_d] + \hat{\mathbf{M}}^{-1} \tilde{\boldsymbol{\tau}} \end{aligned}$$

αν στο παραπάνω σύστημα χρησιμοποιηθεί ο ακόλουθος νόμος ελέγχου

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\tau}} &= -\hat{\mathbf{S}}^T \tilde{\mathbf{z}} - k_2 \tilde{\mathbf{e}} - k_3 \text{SGN}(\tilde{\mathbf{e}}) + \hat{\mathbf{W}}^T \mathbf{S}(\mathbf{z}) \\ \tilde{\mathbf{e}} &= \tilde{\mathbf{v}} - \tilde{\mathbf{v}}_c \\ k_2 &> 0 \quad \& \quad k_3 \geq \|\boldsymbol{\epsilon}\| \end{aligned}$$

όπου

$$\tilde{\mathbf{v}}_c = \hat{\mathbf{S}}^{-1} \left(-\rho (\hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{R}}) (\tilde{\mathbf{q}} - \tilde{\mathbf{q}}_0) - k_1 \tilde{\mathbf{z}} \right), \quad k_1 > 0$$

με νόμο προσαρμογής (*update law*) των νευρωνικών δικτύων (*HONN*)

$$\dot{\hat{\mathbf{W}}} = -\gamma \left[\mathbf{S}(\mathbf{z}) \tilde{\mathbf{e}}^T \circ \mathbf{J} + \sigma \hat{\mathbf{W}} \right], \quad \gamma, \sigma > 0$$

και ο γράφος επικοινωνίας είναι γεννητικό δέντρο με ρίζα τον ηγέτη, τότε τόσο ο παραπάνω μετασχηματισμός όσο και το σφάλμα ταχύτητας, με την πάροδο του χρόνου θα συγκλίνουν σε μία περιοχή κοντά στην αρχή. Δηλαδή θα είναι

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\mathbf{z}}(t)\| \leq \sqrt{2 \frac{G}{\Lambda}} \quad \& \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\mathbf{e}}(t)\| \leq \sqrt{\frac{2}{\lambda_{\min}(\hat{\mathbf{M}})} \frac{G}{\Lambda}}$$

όπου

$$\begin{aligned} G &= \frac{\sigma}{2} \sum_i (\|\mathbf{W}_{ix}\|^2 + \|\mathbf{W}_{iy}\|^2) \\ \Lambda &\in \left(0, \min \left\{ 2k_1, \frac{2k_2}{\lambda_{\max}(\hat{\mathbf{M}})}, \sigma\gamma \right\} \right) \end{aligned}$$

που συνεπάγεται *Approximate Leader-Follower Consensus*.

Κεφάλαιο 5

Αποτελέσματα Προσομοιώσεων Κεφαλαίου 4

5.1 Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο γίνεται παρουσίαση και ανάλυση των αποτελεσμάτων των προσομοιώσεων που υλοποιήθηκαν για το πρόβλημα ελέγχου του κεφαλαίου 5. Οι προσομοιώσεις έγιναν σε περιβάλλον Simulink, ενώ η οπτικοποίηση των αποτελεσμάτων έγινε σε περιβάλλον Matlab.

Το πολυπρακτορικό σύστημα που εξετάστηκε περιλαμβάνει ένα όχημα-ηγέτη και πέντε οχήματα-ακόλουθους. Σημειώνεται ότι όλα τα οχήματα αποτελούν κινητά ρομπότ διαφορικής οδήγησης. Η ορθότητα του προσαρμοστικού αλγορίθμου που προτάθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο επαληθεύεται για 3 διαφορετικές συνδεσμολογίες των ακόλουθων, δηλαδή για 3 διαφορετικούς ισχυρά συνεκτικούς κατευθυνόμενους γράφους που περιγράφουν την επικοινωνία μεταξύ των ακόλουθων. Ο ηγέτης σε κάθε περίπτωση θεωρείται ότι έχει άμεση επικοινωνία μόνο με έναν ακόλουθο έτσι ώστε να εξετάζεται το “χειρότερο” σενάριο.

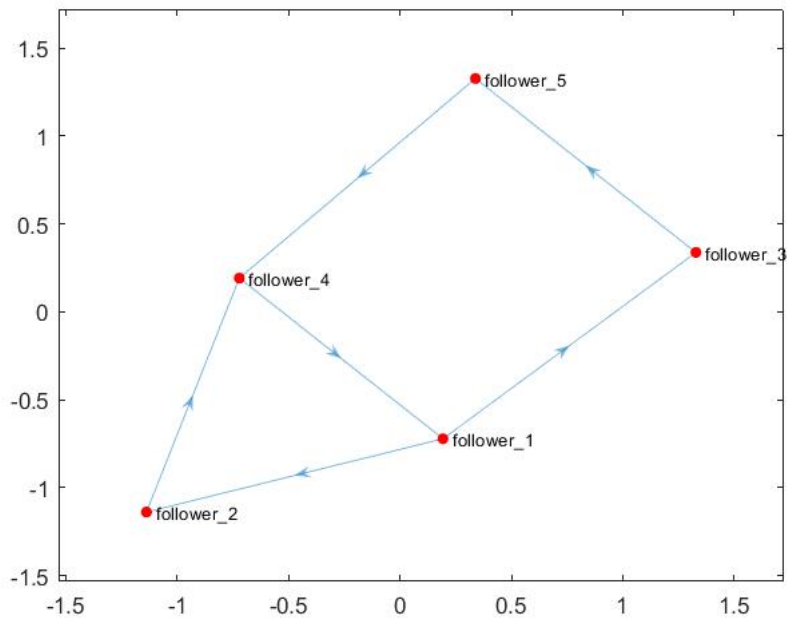
Στον επόμενο πίνακα παραθέτονται όλες εκείνες οι παράμετροι οι οποίες αρχικοποιούνται κατάλληλα για την ομαλή λειτουργία της εκάστοτε προσομοίωσης.

Παράμετροι Προσομοιώσεων

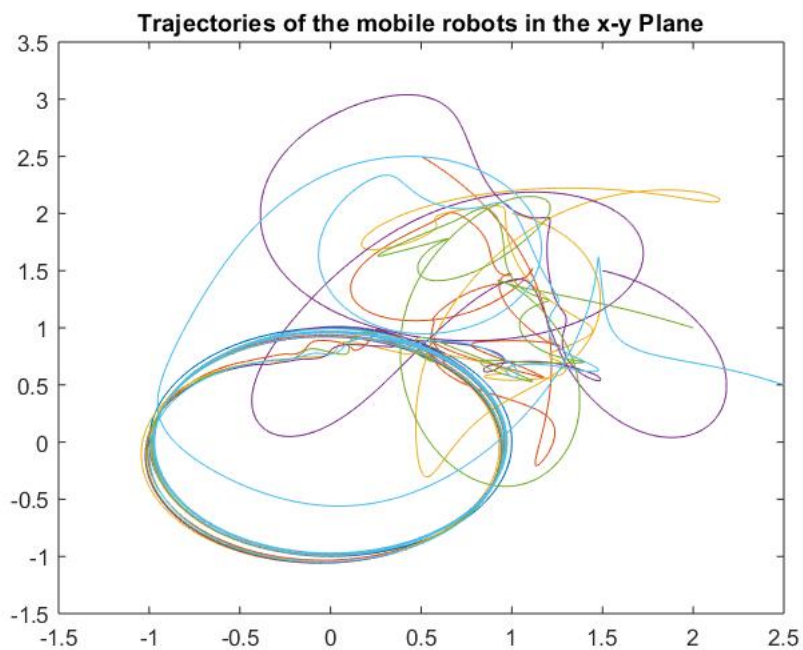
k_1	:	κέρδος της ταχύτητας εισόδου
k_2, k_3	:	κέρδη της ροπής εισόδου
ρ	:	πολλαπλασιαστική παράμετρος του PI μετασχηματισμού
γ	:	κέρδος προσαρμογής του νόμου αναβάθμισης των <i>HONN</i>
σ	:	παράγοντας ολίσθησης του νόμου αναβάθμισης των <i>HONN</i>
$\mathbf{q}_0(0)$:	διάνυσμα αρχικής θέσης του ηγέτη
$\mathbf{q}(0)$:	διάνυσμα αρχικών θέσεων του συνόλου των ακόλουθων

Όπως ήταν αναμενόμενο, η πολλαπλασιαστική παράμετρος ρ χρειάστηκε να λάβει αρκετά μεγάλη τιμή, και στις 3 προσομοιώσεις, ώστε να περιοριστεί σε μεγάλο βαθμό η απόκλιση της σύγκλισης. Αυτό όμως είχε ως αποτέλεσμα την ανάλογη αύξηση των κερδών k_1 και k_2 .

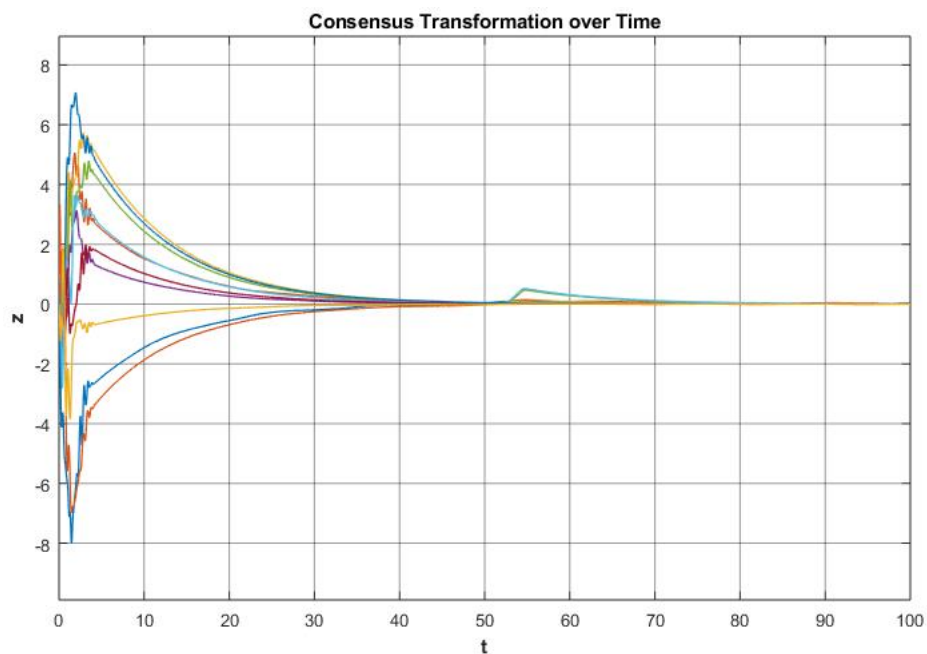
5.2 Πρώτη Συνδεσμολογία Πρακτόρων



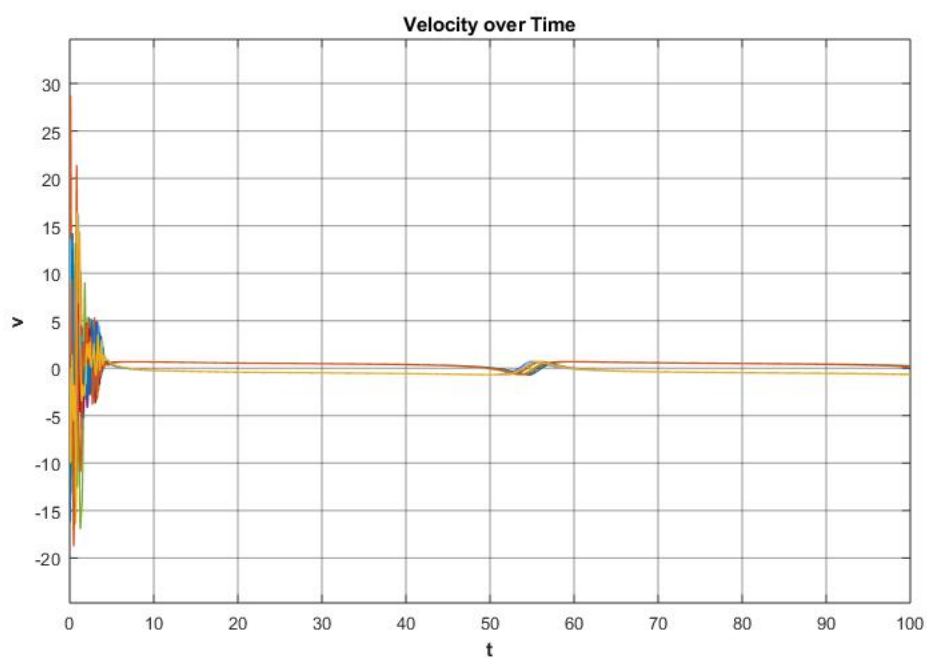
Σχήμα 5.1: Ισχυρά Συνεκτικός Κατευθυνόμενος Γράφος των Ακόλουθων



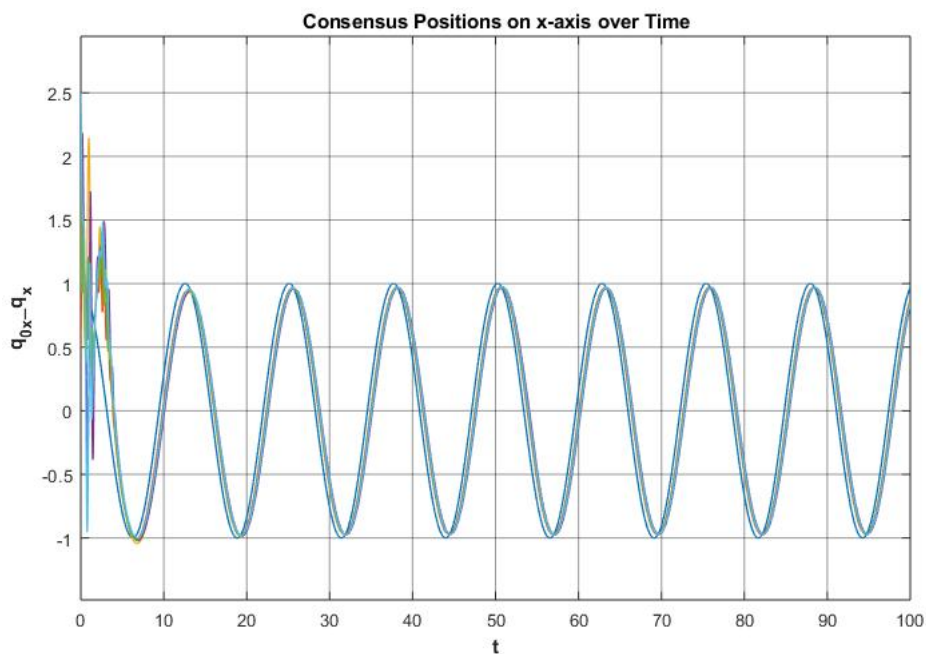
Σχήμα 5.2: Τροχιές των Οχημάτων στο $x - y$ επίπεδο



Σχήμα 5.3: Χρονική μεταβολή του διανύσματος μετασχηματισμών συμφωνίας των πρακτόρων



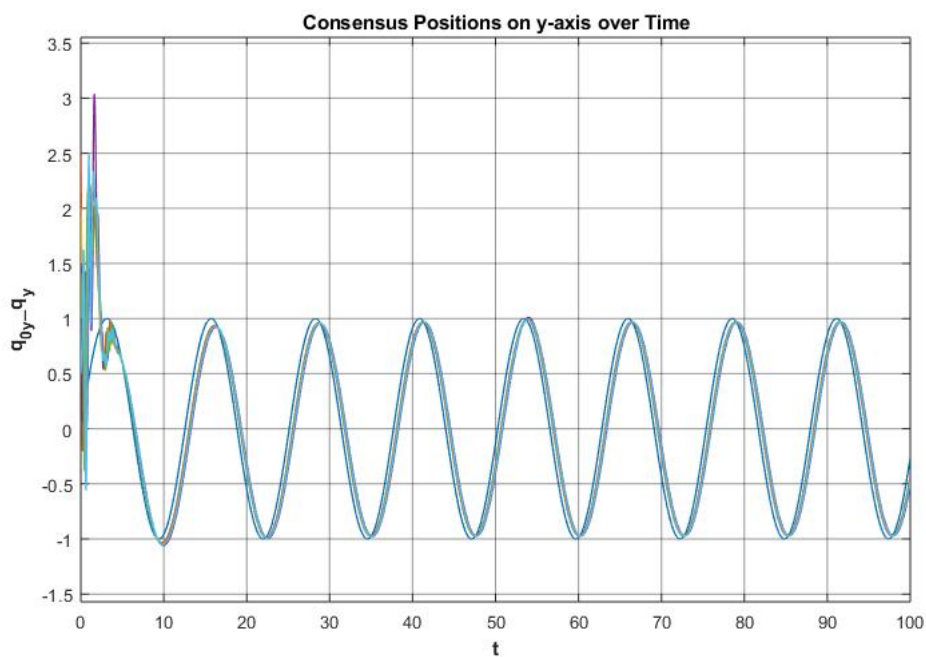
Σχήμα 5.4: Χρονική μεταβολή του διανύσματος ταχυτήτων των πρακτόρων



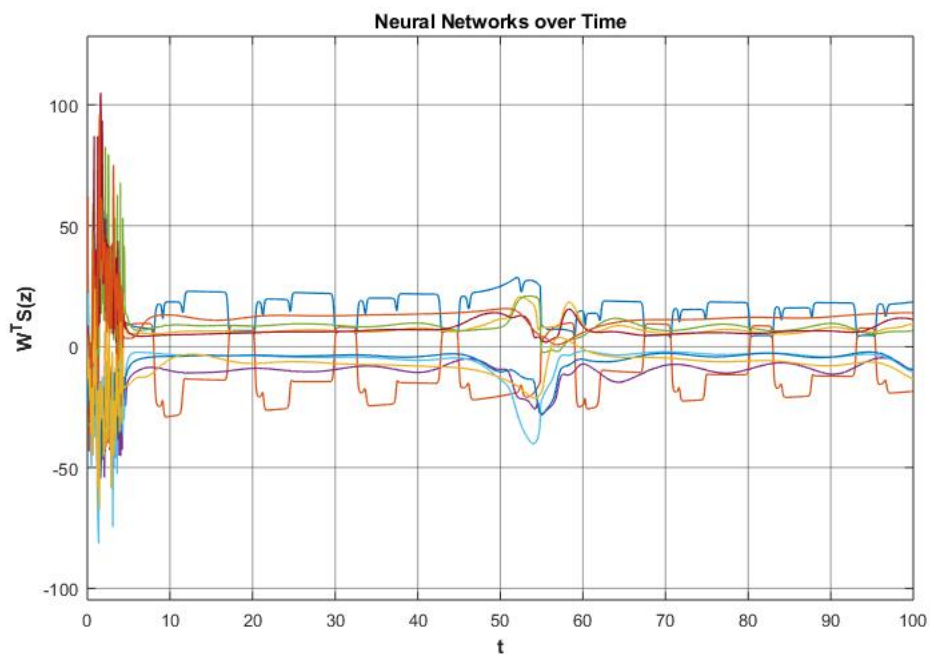
Σχήμα 5.5: Χρονική μεταβολή του διανύσματος θέσεων συμφωνίας των πρακτόρων κατά τον x -άξονα

$$k_1 = 0.1 \quad k_2 = 15 \quad k_3 = 40 \quad \rho = 15 \quad \gamma = 1 \quad \sigma = 0.001 \quad q_0(0) = [1 \quad 0]$$

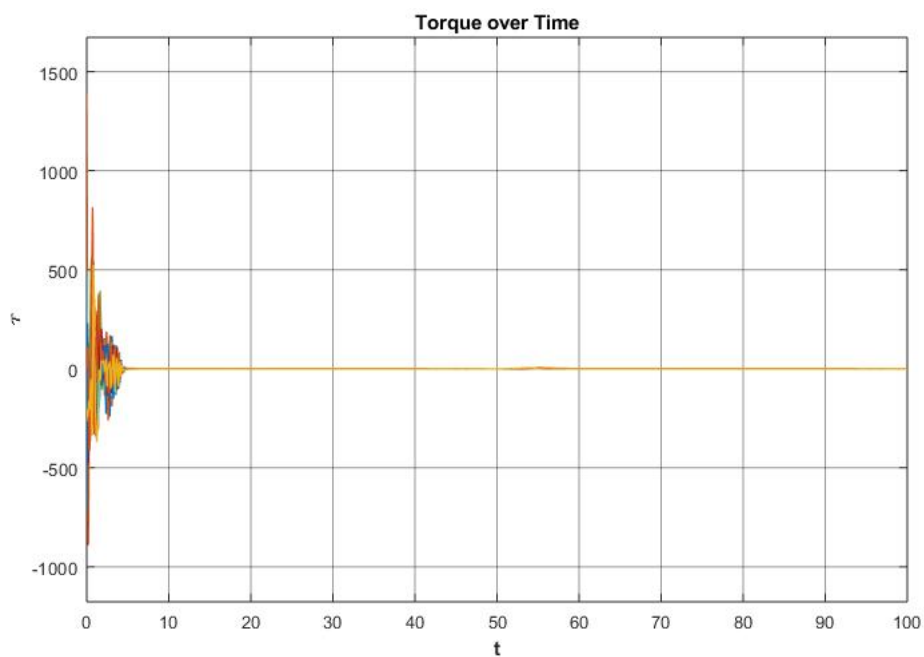
$$q(0) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 10 & 4 & 8 & 6 & 6 & 8 & 4 & 10 & 2 \end{bmatrix}$$



Σχήμα 5.6: Χρονική μεταβολή του διανύσματος θέσεων συμφωνίας των πρακτόρων κατά τον y -άξονα

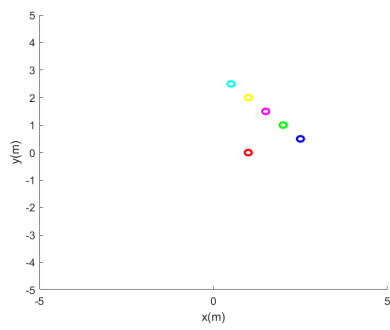
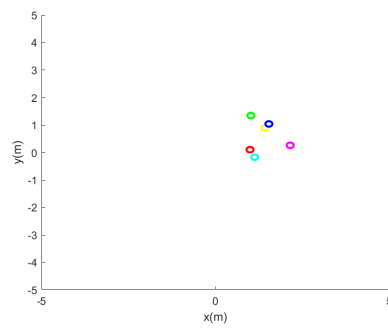
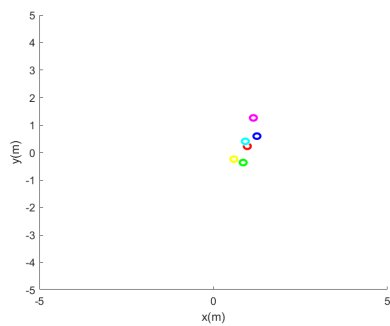
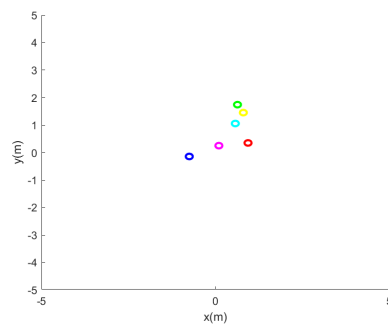
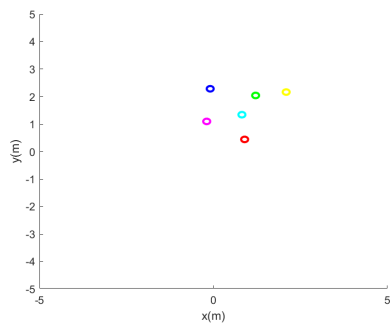
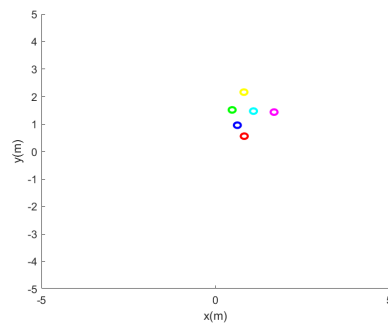
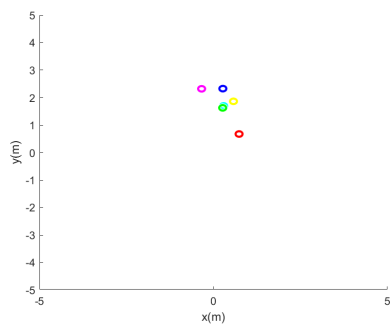
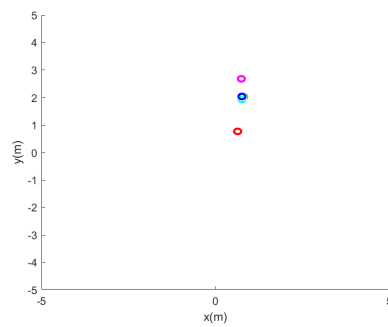


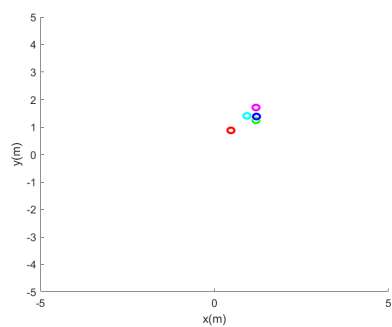
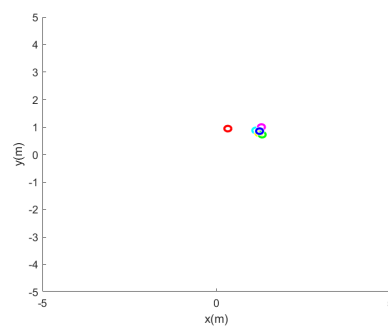
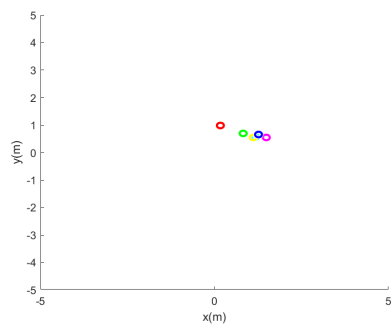
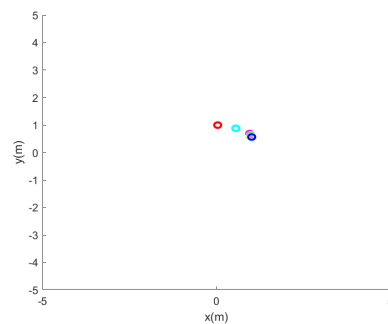
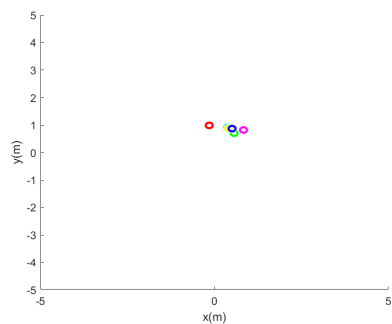
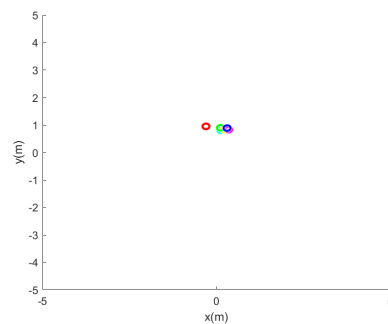
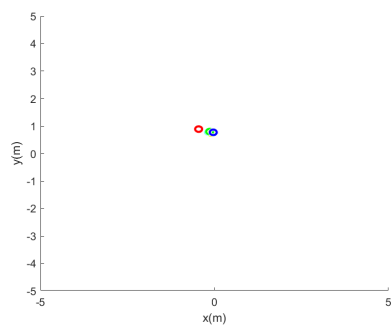
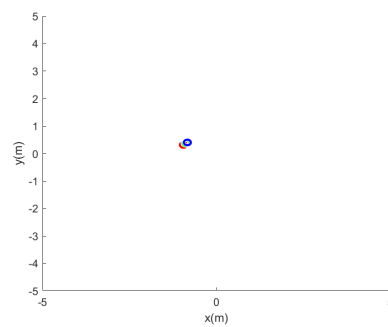
Σχήμα 5.7: Χρονική μεταβολή του διανύσματος των νευρωνικών δικτύων



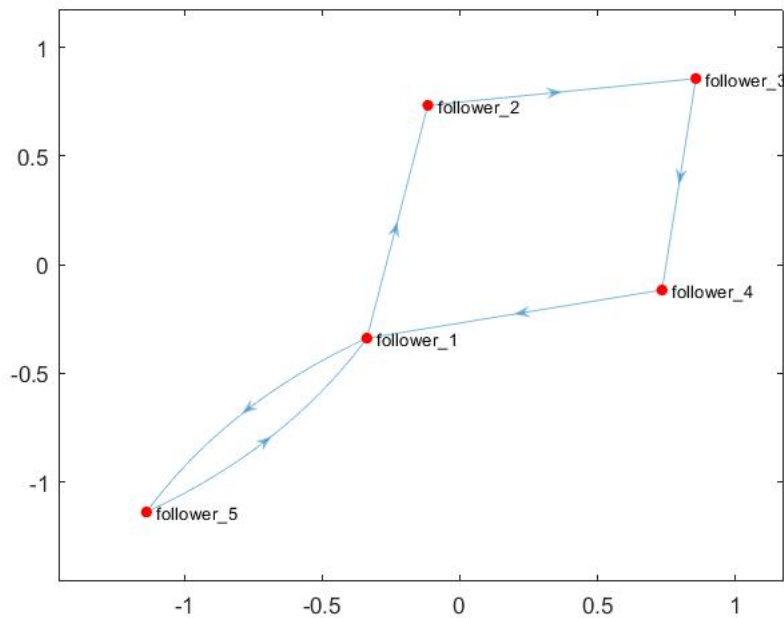
Σχήμα 5.8: Χρονική μεταβολή του διανύσματος ροπών των πρακτόρων

Ακολούθως παραθέτονται στιγμιότυπα από την κίνηση των οχημάτων. Σημειώνεται ότι ο πράκτορας που αντιστοιχεί στον ηγέτη εμφανίζεται με κόκκινο χρώμα.

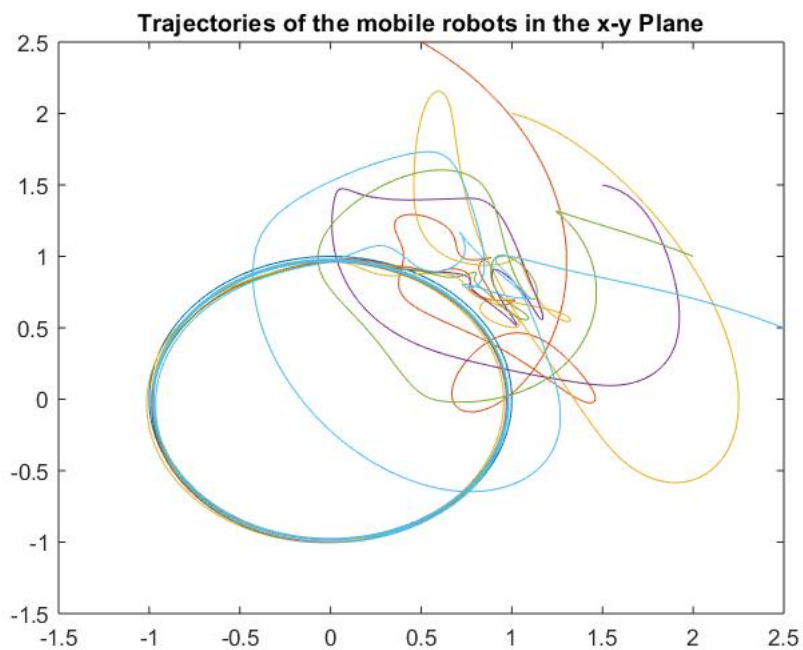
 $t = 0$  $t = 0.2126$  $t = 0.4640$  $t = 0.7181$  $t = 0.9186$  $t = 1.1913$  $t = 1.4845$  $t = 1.7597$

 $t = 2.1538$  $t = 2.4743$  $t = 2.7979$  $t = 3.0716$  $t = 3.4449$  $t = 3.7530$  $t = 4.0852$  $t = 5.6447$

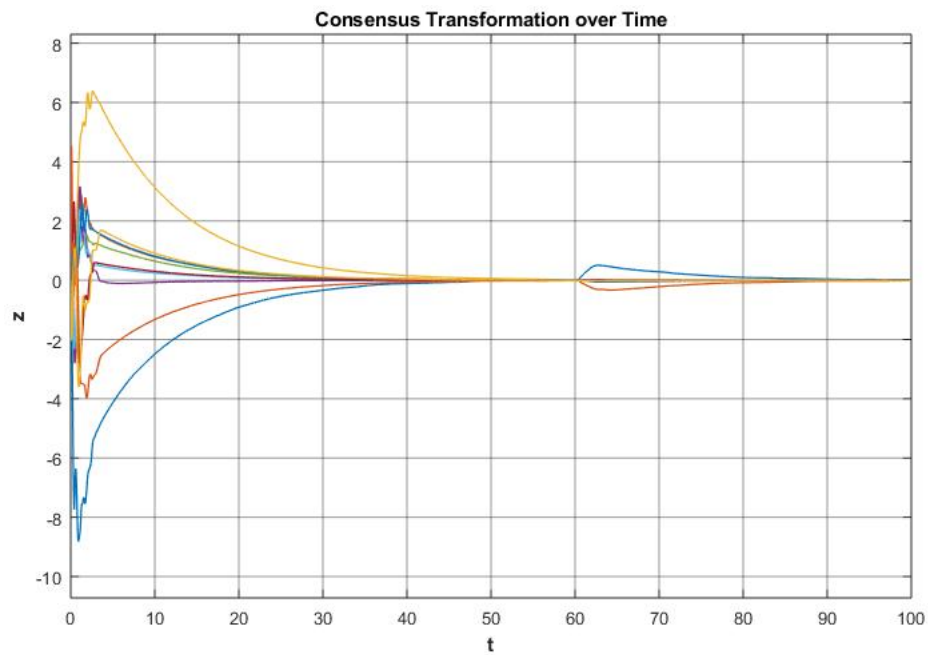
5.3 Δεύτερη Συνδεσμολογία Πρακτόρων



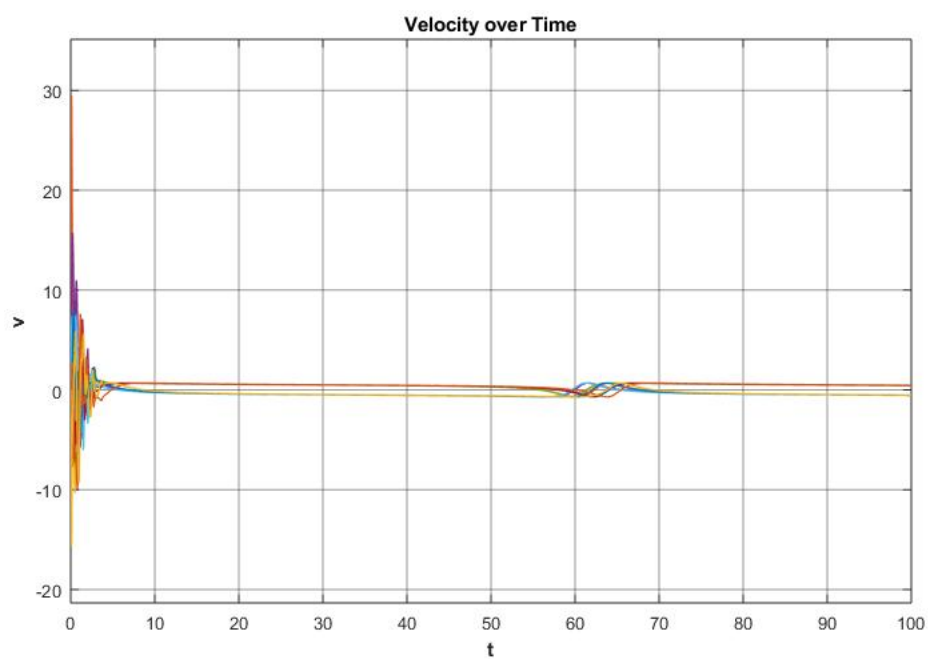
Σχήμα 5.9: Ισχυρά Συνεκτικός Κατευθυνόμενος Γράφος των Ακόλουθων



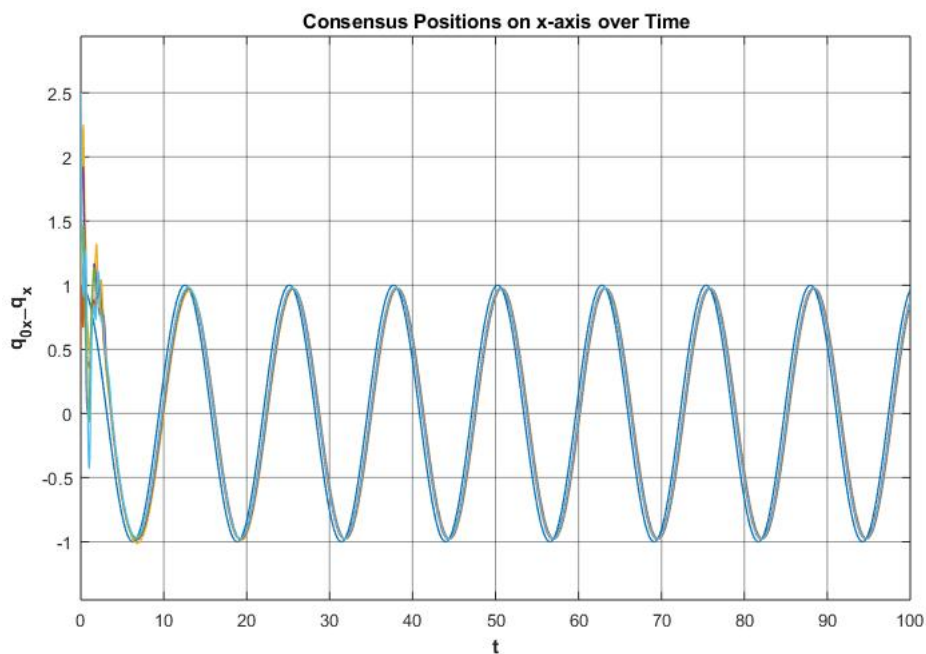
Σχήμα 5.10: Τροχιές των Οχημάτων στο $x - y$ επίπεδο



Σχήμα 5.11: Χρονική μεταβολή του διανύσματος μετασχηματισμών συμφωνίας των πρακτόρων



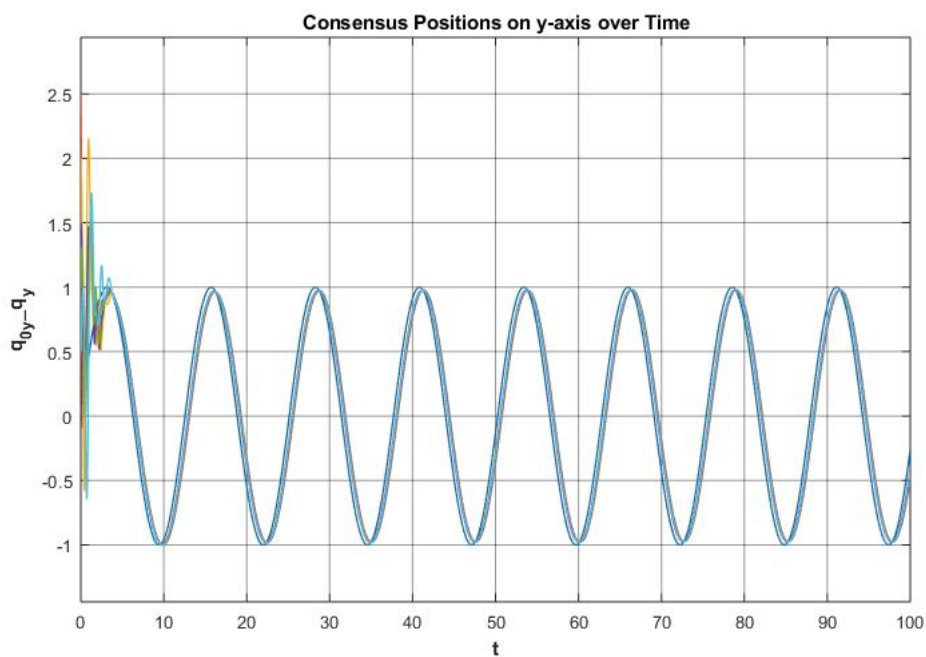
Σχήμα 5.12: Χρονική μεταβολή του διανύσματος ταχυτήτων των πρακτόρων



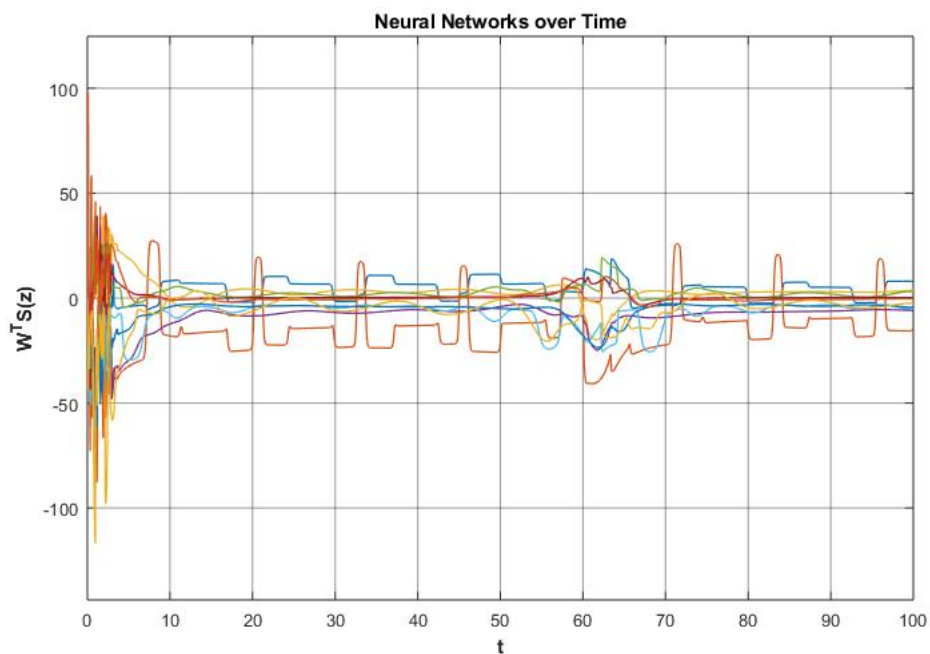
Σχήμα 5.13: Χρονική μεταβολή του διανύσματος θέσεων συμφωνίας των πρακτόρων κατά τον x -άξονα

$$k_1 = 0.1 \quad k_2 = 10 \quad k_3 = 40 \quad \rho = 15 \quad \gamma = 1 \quad \sigma = 0.001 \quad q_0(0) = [1 \quad 0]$$

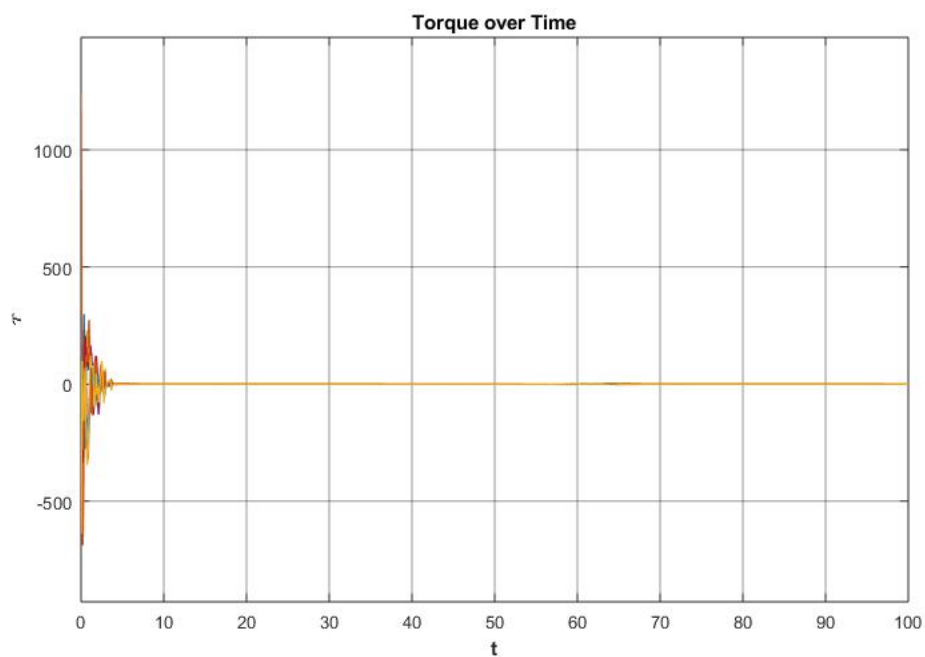
$$q(0) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 10 & 4 & 8 & 6 & 6 & 8 & 4 & 10 & 2 \end{bmatrix}$$



Σχήμα 5.14: Χρονική μεταβολή του διανύσματος θέσεων συμφωνίας των πρακτόρων κατά τον y -άξονα

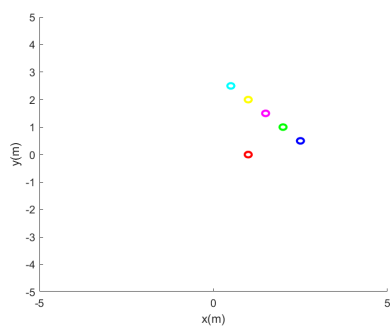
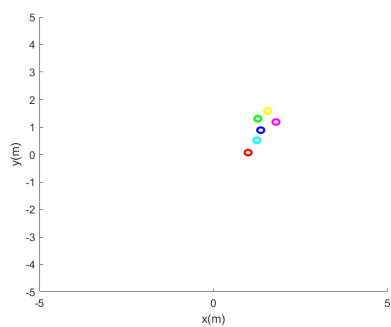
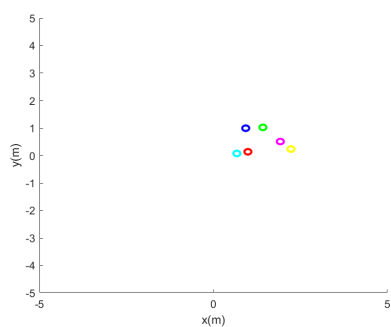
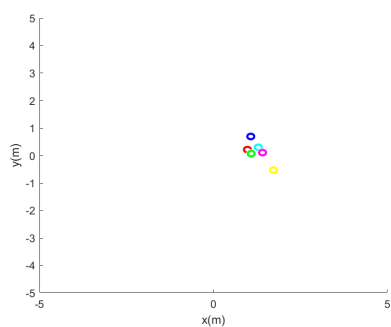
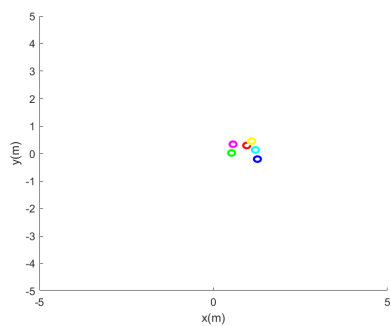
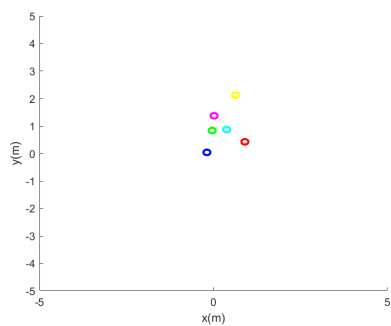
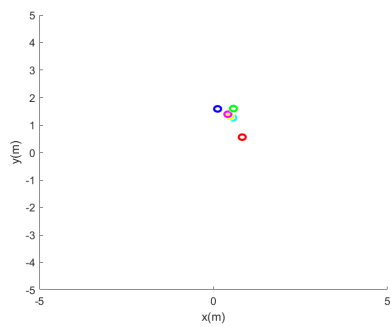
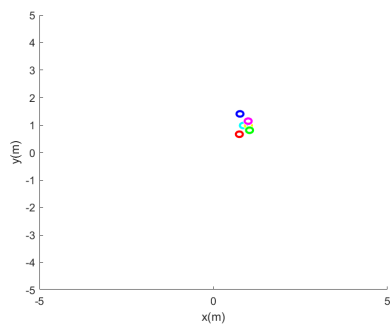


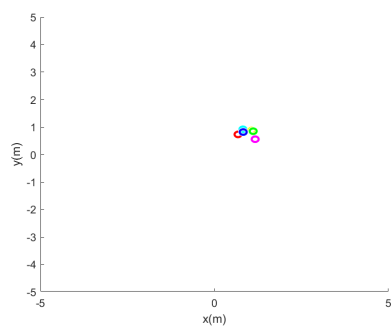
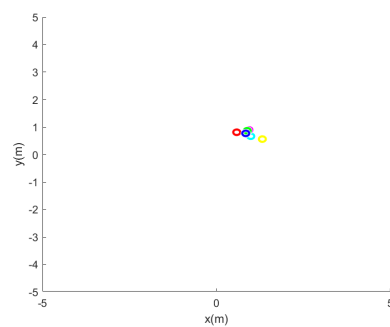
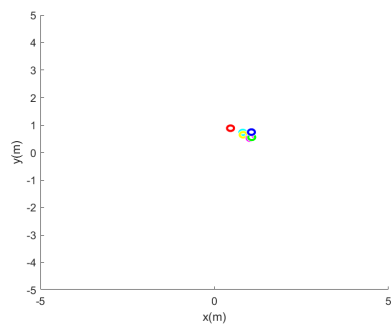
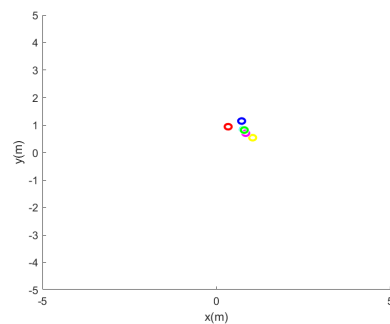
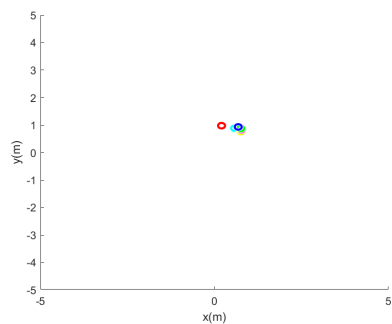
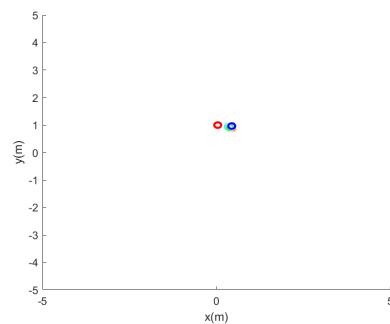
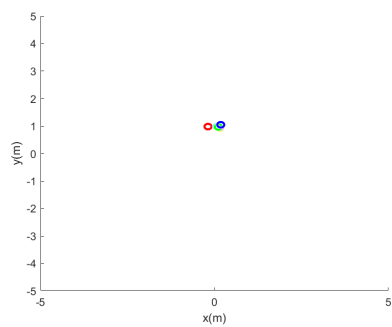
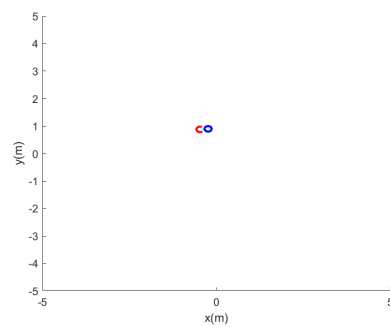
Σχήμα 5.15: Χρονική μεταβολή του διανύσματος των νευρωνικών δικτύων



Σχήμα 5.16: Χρονική μεταβολή του διανύσματος ροπών των πρακτόρων

Ακολουθώς παραθέτονται στιγμιότυπα από την κίνηση των οχημάτων. Σημειώνεται ότι ο πράκτορας που αντιστοιχεί στον ηγέτη εμφανίζεται με κόκκινο χρώμα.

 $t = 0$  $t = 0.1444$  $t = 0.2786$  $t = 0.4396$  $t = 0.5978$  $t = 0.8854$  $t = 1.1935$  $t = 1.4628$

 $t = 1.6500$  $t = 1.8979$  $t = 2.1798$  $t = 2.4548$  $t = 2.7300$  $t = 3.0690$  $t = 3.5146$  $t = 4.1308$

Κεφάλαιο 6

Κατανεμημένος Νόμος Ελέγχου για την Διάταξη ενός Συστήματος Ακόλουθων γύρω από έναν Ηγέτη με Αποφυγή Συγκρούσεων

6.1 Εισαγωγή

Θεωρούμε μία ομάδα κινητών ρομπότ διαφορετικής οδήγησης, όχι απαραίτητως ίδιας δυναμικής, τα οποία καλούνται να εκτελέσουν μία εργασία συνεργατικού ελέγχου. Συγκεκριμένα ζητείται να εκτελέσουν Leader-Follower Formation, δηλαδή να λάβουν ένα συγκεκριμένο σχήμα και ταυτόχρονα να ακολουθήσουν την τροχιά ενός ρομπότ-ηγέτη. Το σχήμα που θα λάβουν μπορεί να σχετίζεται με την θέση του ηγέτη και να τον περιστοιχίζει με καθορισμένο τρόπο. Σημειώνεται ότι η δυναμική του κάθε πράκτορα, συμπεριλαμβανομένου και του ηγέτη, θεωρείται άγνωστη από τους άλλους και θα γίνει online εκτίμησή της, χρησιμοποιώντας τεχνικές προσαρμοστικού ελέγχου σε συνδυασμό με νευρωνικά δίκτυα. Όσον αφορά τον γράφο που αναπαριστά την μετάδοση της πληροφορίας μεταξύ των οχημάτων, αρκεί να αποτελεί ένα γεννητικό δέντρο με ρίζα τον ηγέτη, ενώ ο υπογράφος που περιγράφει την επικοινωνία μεταξύ των ακόλουθων, πρέπει να είναι μη-κατευθυνόμενος. Για την επίτευξη των ανωτέρω, ο νόμος ελέγχου που θα σχεδιαστεί πρέπει να είναι αφενός κατανεμημένος, καθώς δεν πρόκειται για ένα κεντροποιημένο σύστημα αλλά ο κάθε πράκτορας αυτενεργεί βάσει των ερεθισμάτων που λαμβάνει από την “γειτονιά” του, και αφετέρου πρέπει να είναι προσαρμοστικός. Πέρα από την προαναφερθείσα συνεργατική συμπεριφορά, καθίσταται απαραίτητο ο νόμος ελέγχου να εξασφαλίζει και αποφυγή συγκρούσεων μεταξύ των οχημάτων, τόσο των ακόλουθων όσο και του ηγέτη, έτσι ώστε το πρόβλημα να έχει πρακτική αξία και να δύναται να υλοποιηθεί με πραγματικά οχήματα διαφορετικής οδήγησης.

6.2 Οργάνωση του Κεφαλαίου

Το παρόν κεφάλαιο δομείται ως εξής: Αρχικά γίνεται διατύπωση του προβλήματος και ορισμός όλων των παραμέτρων που θα χρησιμοποιηθούν στην ανάλυσή του. Έπειτα σχεδιάζεται ο νόμος ελέγχου θέσης των ρομπότ διαμέσου της ταχύτητάς τους, η οποία και θεωρείται είσοδος στο υπό έλεγχο σύστημα κινηματικής ανάλυσης των οχημάτων διαφορικής οδήγησης. Στην επόμενη παράγραφο σχεδιάζεται ο νόμος ελέγχου της ταχύτητας των ρομπότ διαμέσου της ροπής τους, η οποία και θεωρείται είσοδος στο υπό έλεγχο σύστημα δυναμικής ανάλυσης των οχημάτων διαφορικής οδήγησης. Τέλος, γίνεται εισαγωγή νευρωνικών δικτύων στην είσοδο του συνολικού συστήματος, έτσι ώστε να γίνει προσέγγιση των άγνωστων μη-γραμμικών συναρτήσεων που αφορούν την δυναμική των ρομπότ.

6.3 Διατύπωση του Προβλήματος και Ορισμός των Παραμέτρων

Για την μελέτη του προβλήματος θα εξεταστούν δύο αντιπροσωπευτικά σημεία του κάθε πράκτορα. Το ένα σημείο θα αντιπροσωπεύει το κέντρο του formation, δηλαδή εκείνο το σημείο ως προς το οποίο οι πράκτορες θα πρέπει να συμφωνήσουν, ενώ το δεύτερο σημείο θα αποτελεί την πραγματική θέση τους στο επίπεδο (x, y) . Τα παραπάνω σημεία περιγράφονται από τα διδιάστατα διανύσματα \mathbf{q}_i και \mathbf{q}_i^* αντίστοιχα, για τον κάθε ένα ξεχωριστά, και από τα $\tilde{\mathbf{q}}$ και $\tilde{\mathbf{q}}^*$ αντίστοιχα, για το σύνολο του συστήματος. Τα διανύσματα $\tilde{\mathbf{q}}$ και $\tilde{\mathbf{q}}^*$ συνδέονται μέσω της σχέσης $\tilde{\mathbf{q}}^* = \tilde{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{a}}$, όπου $\tilde{\mathbf{a}}$ είναι ένα σταθερό διάνυσμα αποτελούμενο από διδιάστατα διανύσματα \mathbf{a}_i διαφορετικά για κάθε πράκτορα. Επιθυμούμε λοιπόν οι πράκτορες να εκτελέσουν leader-follower consensus ως προς τις θέσεις \mathbf{q}_i και ως εκ τούτου να επιτευχθεί leader-follower formation ως προς τις θέσεις \mathbf{q}_i^* . Το σχήμα που θα λάβουν κατά το formation θα καθοριστεί από τα σταθερά διανύσματα \mathbf{a}_i και την σχέση που έχουν μεταξύ τους και με την θέση του ηγέτη. Σημειώνεται ότι για τον ηγέτη έχει θεωρηθεί ότι $\mathbf{a}_0 = \mathbf{0}$, δηλαδή είναι $\mathbf{q}_0^* = \mathbf{q}_0$.

Για την σωστή τοποθέτηση του προβλήματος, αρχικά θα περιγράψουμε αναλυτικά τα διανύσματα και τους πίνακες που πρόκειται να χρησιμοποιηθούν στην ανάλυση που έπεται.

Το συνολικό διάνυσμα θέσεων των n ακόλουθων για το πρόβλημα του consensus control, διάστασης $2n \times 1$, είναι

$$\tilde{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} q_{1x} & q_{1y} & q_{2x} & q_{2y} & \cdot & \cdot & \cdot & q_{nx} & q_{ny} \end{bmatrix}^T \quad (6.1)$$

Το συνολικό διάνυσμα θέσεων των n ακόλουθων για το πρόβλημα του formation control, διάστασης $2n \times 1$, είναι

$$\tilde{\mathbf{q}}^* = \begin{bmatrix} q_{1x}^* & q_{1y}^* & q_{2x}^* & q_{2y}^* & \cdot & \cdot & \cdot & q_{nx}^* & q_{ny}^* \end{bmatrix}^T \quad (6.2)$$

Το συνολικό διάνυσμα ταχυτήτων των n ακόλουθων, διάστασης $2n \times 1$, είναι

$$\tilde{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} v_{1R} & v_{1L} & v_{2R} & v_{2L} & \cdot & \cdot & \cdot & v_{nR} & v_{nL} \end{bmatrix}^T \quad (6.3)$$

Το συνολικό διάνυσμα σταθερών των n ακόλουθων, διάστασης $2n \times 1$, είναι

$$\tilde{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} a_{1x} & a_{1y} & a_{2x} & a_{2y} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nx} & a_{ny} \end{bmatrix}^T \quad (6.4)$$

Το διάνυσμα αποτελούμενο από την θέση του ηγέτη $\mathbf{q}_0 = [q_{0x} \ q_{0y}]^T$ n -φορές, διάστασης $2n \times 1$, είναι

$$\tilde{\mathbf{q}}_0 = \begin{bmatrix} q_{0x} & q_{0y} & q_{0x} & q_{0y} & \cdot & \cdot & \cdot & q_{0x} & q_{0y} \end{bmatrix}^T \quad (6.5)$$

Το διάνυσμα αποτελούμενο από την ταχύτητα του ηγέτη $\mathbf{v}_0 = [v_{0x} \ v_{0y}]^T$ n -φορές, διάστασης $2n \times 1$, είναι

$$\tilde{\mathbf{v}}_0 = \begin{bmatrix} v_{0x} & v_{0y} & v_{0x} & v_{0y} & \cdot & \cdot & \cdot & v_{0x} & v_{0y} \end{bmatrix}^T \quad (6.6)$$

Η Λαπλασιανή μήτρα που περιγράφει έναν γράφο αποτελούμενο από n κόμβους έχει διάσταση $n \times n$ και δίνεται από την σχέση

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} & -a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & -a_{1n} \\ -a_{21} & \sum_{j=1}^n a_{2j} & \cdot & \cdot & \cdot & -a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & \sum_{j=1}^n a_{nj} \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

Καθώς στο πρόβλημά μας η θέση του κάθε πράκτορα, που αποτελεί κόμβο του γράφου του συστήματος, είναι διάνυσμα δύο διαστάσεων, έπεται ότι η Λαπλασιανή μήτρα του συστήματός μας θα πρέπει να οριστεί ως $\hat{\mathbf{L}} = \mathbf{L} \otimes \mathbb{I}_2$ και θα έχει διάσταση $2n \times 2n$.

$$\hat{\mathbf{L}} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} & 0 & -a_{12} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & -a_{1n} & 0 \\ 0 & \sum_{j=1}^n a_{1j} & 0 & -a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -a_{1n} \\ -a_{21} & 0 & \sum_{j=1}^n a_{2j} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & -a_{2n} & 0 \\ 0 & -a_{21} & 0 & \sum_{j=1}^n a_{2j} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_{n1} & 0 & -a_{n2} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \sum_{j=1}^n a_{nj} & 0 \\ 0 & -a_{n1} & 0 & -a_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \sum_{j=1}^n a_{nj} \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

Ορίζουμε ως \mathbf{R} τον διαγώνιο πίνακα διαστάσεων $n \times n$, ο οποίος περιγράφει την σχέση του κάθε ακόλουθου με τον ηγέτη. Συγκεκριμένα, κάθε στοιχείο της κυρίας διαγωνίου του, r_i θα είναι διάφορο του μηδενός άν ο ακόλουθος i έχει απευθείας πρόσβαση στον ηγέτη.

$$\mathbf{R} = \text{diag}(r_1, r_2, \dots, r_n) \quad (6.9)$$

Καθώς όμως η θέση του κάθε πράκτορα είναι ένα διδιάστατο διάνυσμα, θα πρέπει να τροποποιηθεί αναλόγως και ο πίνακας \mathbf{R} ώστε να λάβουμε έναν νέο πίνακα διαστάσεων $2n \times 2n$, ο

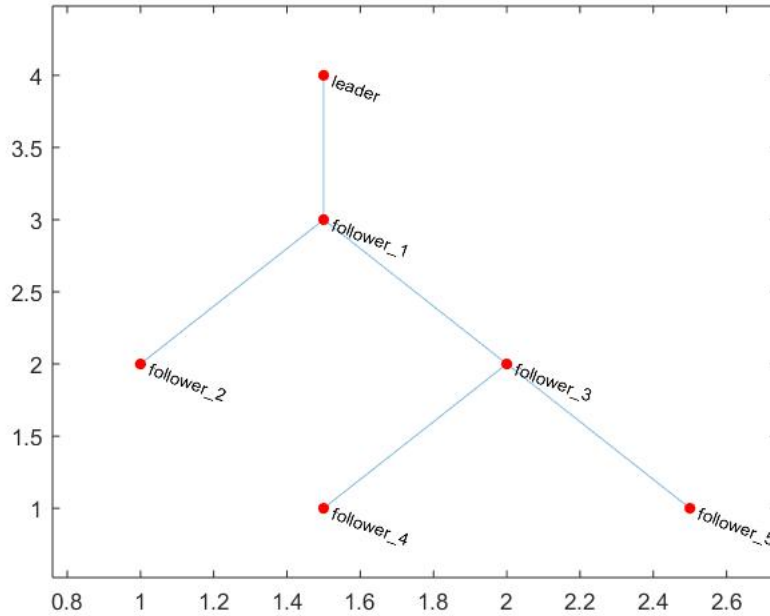
οποίος και περιγράφεται από την σχέση $\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \otimes \mathbb{I}_2$.

$$\hat{\mathbf{R}} = \text{diag}(r_1, r_1, r_2, r_2, \dots, r_n, r_n) \quad (6.10)$$

Για την επίλυση του προβλήματος του leader-follower consensus ορίζουμε τον μετασχηματισμό

$$\tilde{\mathbf{z}} = -\hat{\mathbf{L}}\tilde{\mathbf{q}} - \hat{\mathbf{R}}(\tilde{\mathbf{q}} - \tilde{\mathbf{q}}_0) \quad (6.11)$$

Οι πίνακες $\hat{\mathbf{L}}$ και $\hat{\mathbf{R}}$ πρέπει να είναι κατάλληλα ορισμένοι, ώστε η υποκείμενη τοπολογία γράφου του συστήματος να εμπεριέχει ένα Γεννητικό Δένδρο (Spanning Tree) με ρίζα τον ηγέτη, ενώ ο υπογράφος που αναπαριστά τη σύνδεση των ακόλουθων πρέπει να είναι μη-κατευθυνόμενος έτσι ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη $\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{L}}^T$. Για την μήτρα $\hat{\mathbf{R}}$, η προϋπόθεση αυτή πληρούται ούτως η άλλως αφού αποτελεί διαγώνιο πίνακα. Στο παρακάτω σχήμα παραθέτουμε μία τέτοια τοπολογία γράφου, για την περίπτωση 1-ηγέτη και 5-ακόλουθων.



Σχήμα 6.1: Γράφος με Γεννητικό Δένδρο από τον Ηγέτη προς τους Ακόλουθους

Το διάνυσμα $\tilde{\mathbf{z}}$ είναι επίσης $2n \times 1$ διαστάσεων και περιγράφεται στην ακόλουθη εξίσωση

$$\tilde{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} z_{1x} & z_{1y} & z_{2x} & z_{2y} & \cdot & \cdot & \cdot & z_{nx} & z_{ny} \end{bmatrix}^T \quad (6.12)$$

Με βάση τον τρόπο που έχει οριστεί η εναλλαγή της πληροφορίας στον γράφο, τα z_{ix} και z_{iy} είναι μεταβλητές που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την σχεδίαση ελεγκτή στον πράκτορα i .

Καθώς το άθροισμα των στοιχείων της κάθε γραμμής του πίνακα $\hat{\mathbf{L}}$ ισούται με μηδέν, έπεται ότι θα ισχύει: $\hat{\mathbf{L}}\tilde{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{0}$. Συνεπώς, ο μετασχηματισμός (6.11) μπορεί να γραφεί και ως ακολούθως

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{z}} &= -\hat{\mathbf{L}}(\tilde{\mathbf{q}} - \tilde{\mathbf{q}}_0) - \hat{\mathbf{R}}(\tilde{\mathbf{q}} - \tilde{\mathbf{q}}_0) \\ \tilde{\mathbf{z}} &= -(\hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{R}})(\tilde{\mathbf{q}} - \tilde{\mathbf{q}}_0) \end{aligned} \quad (6.13)$$

Από την σχέση (6.13) γίνεται φανερό ότι, καθώς είναι $\det(\hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{R}}) \neq 0$ αν $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{0}$ τότε και $\lim_{t \rightarrow \infty} (\tilde{\mathbf{q}}(t) - \tilde{\mathbf{q}}_0(t)) = \mathbf{0}$, δηλαδή πράγματι, η σύγκλιση του παραπάνω μετασχηματισμού οδηγεί σε leader-follower formation. Σύμφωνα με το Λήμμα 2.1, το γεγονός ότι $\det(\hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{R}}) \neq 0$ εξασφαλίζεται επειδή υπάρχει ένα γεννητικό δέντρο από τον ηγέτη στους ακόλουθους, οπότε και η μήτρα $\hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{R}}$ είναι θετικά ορισμένη.

Παραγωγίζοντας την σχέση (6.13) και λαμβάνοντας υπόψιν το γεγονός ότι για τα κινητά ρομπότ διαφορικής οδήγησης η θέση \mathbf{q} και η ταχύτητα \mathbf{v} συνδέονται μέσω του πίνακα \mathbf{S} βάσει της εξίσωσης $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{S}\mathbf{v}$, θέτοντας $\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{S}\mathbf{v}$ τελικά λαμβάνουμε ότι είναι $\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \tilde{\mathbf{v}}$ και στην περίπτωση μας $\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \tilde{\mathbf{v}}$.

Το συνολικό διάνυσμα ταχυτήτων $\tilde{\mathbf{v}}$ των n ακόλουθων, διάστασης $2n \times 1$, έχει την μορφή

$$\tilde{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \bar{v}_{1x} & \bar{v}_{1y} & \bar{v}_{2x} & \bar{v}_{2y} & \cdot & \cdot & \cdot & \bar{v}_{nx} & \bar{v}_{ny} \end{bmatrix}^T \quad (6.14)$$

Έτσι, η παράγωγος του μετασχηματισμού (6.13) γράφεται ως ακολούθως

$$\dot{\tilde{\mathbf{z}}} = -(\hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{R}})(\dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_0) = -(\hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{R}})(\tilde{\mathbf{v}} - \tilde{\mathbf{v}}_0) \quad (6.15)$$

Επιθυμούμε να βρούμε την είσοδο $\tilde{\mathbf{v}}_e$ του παραπάνω συστήματος η οποία θα εξασφαλίσει leader-follower consensus ($\tilde{\mathbf{z}} \rightarrow \mathbf{0}$) ως προς τα διανύσματα \mathbf{q}_i , και άρα leader-follower formation ως προς τα διανύσματα \mathbf{q}_i^* . Ωστόσο επιθυμούμε παράλληλα να επιτευχθεί αποφυγή συγκρούσεων μεταξύ όλων των πρακτόρων, καθώς και μεταξύ του ηγέτη και των ακόλουθων, ως προς τις θέσεις \mathbf{q}_i^* .

Για την μελέτη του προβλήματος αποφυγής συγκρούσεων θα χρειαστεί να εισάγουμε δύο νέες συναρτήσεις, για την περιγραφή των οποίων είναι απαραίτητη η πρότερη διατύπωση των ορισμών των ακόλουθων παραμέτρων.

Ορίζουμε ως r_i την ακτίνα του μικρότερου δυνατού κύκλου μέσα στον οποίο εμπεριέχεται ο συνολικός χώρος που πιάνει το ρομπότ i στο $x - y$ επίπεδο και ως r_0 την ακτίνα του κύκλου που αντιστοιχεί στον ηγέτη. Επίσης, ως r_{ij} καλείται το άθροισμα των ακτίνων των ρομπότ i και j , δηλαδή είναι $r_{ij} = r_i + r_j$. Τέλος, θεωρούμε θετική σταθερά ε το μέγεθος της οποίας παρουσιάζει άνω και κάτω φράγματα, τα οποία προκύπτουν βάσει της γεωμετρίας της διάταξης του συστήματος των πρακτόρων, όπως θα φανεί στην παρακάτω ανάλυση.

Λαμβάνοντας υπόψιν τους ορισμούς των r_{ij} και ε , τα Δυναμικά Αποφυγής Συγκρούσεων περιγράφονται από τις παρακάτω σχέσεις

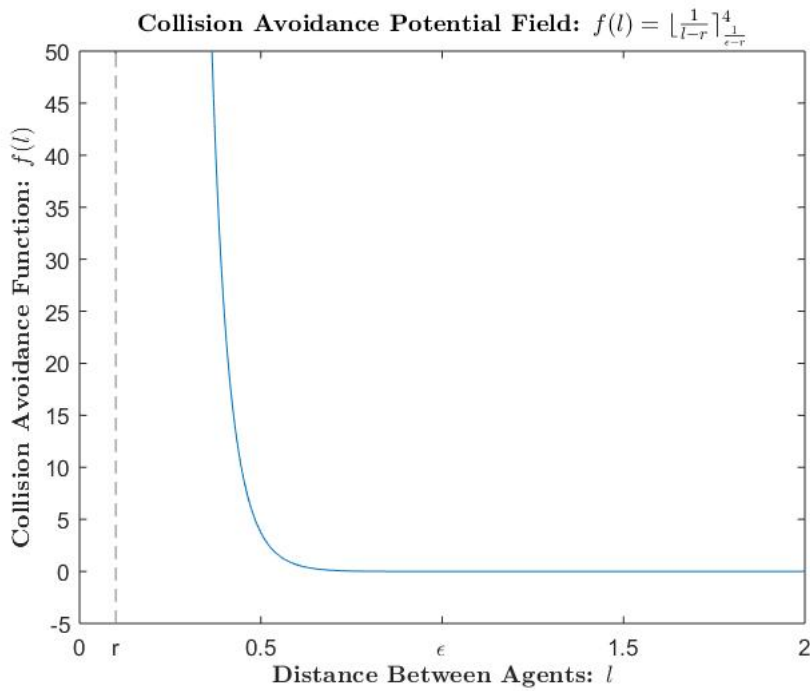
$$\left[\frac{1}{\|\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_j^*\| - r_{ij}} \right]_{\frac{1}{\varepsilon - r_{ij}}}^4 = \begin{cases} \left(\frac{1}{\|\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_j^*\| - r_{ij}} - \frac{1}{\varepsilon - r_{ij}} \right)^4, & \text{αν } \|\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_j^*\| < \varepsilon \\ 0, & \text{αν } \|\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_j^*\| \geq \varepsilon \end{cases} \quad (6.16)$$

$$\left[\frac{1}{\|\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_0\| - r_{i0}} \right]_{\frac{1}{\varepsilon - r_{i0}}}^4 = \begin{cases} \left(\frac{1}{\|\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_0\| - r_{i0}} - \frac{1}{\varepsilon - r_{i0}} \right)^4, & \text{αν } \|\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_0\| < \varepsilon \\ 0, & \text{αν } \|\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_0\| \geq \varepsilon \end{cases} \quad (6.17)$$

Η συνάρτηση (6.16) αφορά την αποφυγή συγκρούσεων των ακόλουθων μεταξύ τους, ενώ η συνάρτηση (6.17) αφορά την αποφυγή συγκρούσεων του κάθε ακόλουθου με τον ηγέτη. Ουσιαστικά αποτελούν συνεχείς και διαφορίσιμες συναρτήσεις οι οποίες μηδενίζονται όταν

η απόσταση $\|\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_j^*\|$, $\|\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_0\|$ αντίστοιχα, είναι μεγαλύτερη/ίση του ε , και λαμβάνουν πολύ μεγάλη τιμή όταν οι προηγούμενες αποστάσεις γίνουν μικρότερες του ε . Θεωρητικά απειρίζονται στο όριο $\|\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_j^*\| \rightarrow r_{ij}$, $\|\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_0\| \rightarrow r_{i0}$ αντίστοιχα, δηλαδή μόλις η απόσταση μεταξύ δύο πρακτόρων γίνει ίση με το άθροισμα των ακτίνων τους, πράγμα το οποίο υποδεικνύει ότι απαγορεύεται τα οχήματα να ακουμπήσουν μεταξύ τους. Υπό αυτή την έννοια θεωρούμε ότι κάθε πράκτορας μπορεί να δει κάθε άλλον, και άρα να προσπαθήσει να τον αποφύγει, εφόσον αυτός έρθει σε απόσταση μικρότερη από ε .

Στην παρακάτω γραφική παράσταση εμφανίζεται η γενική μορφή του Δυναμικού Αποφυγής Συγκρούσεων, βάσει του οποίου έχουν δομηθεί οι σχέσεις (6.16) και (6.17). Σημειώνεται ότι με l καλείται η απόσταση μεταξύ δύο πρακτόρων, ενώ οι παράμετροι που αφορούν το άθροισμα των ακτίνων τους και το κατώφλι έχουν λάβει τις τιμές $r = 0.1$ και $\varepsilon = 1$ αντίστοιχα.



Σχήμα 6.2: Δυναμικό Αποφυγής Συγκρούσεων

Όπως γίνεται φανερό από το σχήμα, η συνάρτηση πράγματι μηδενίζεται όταν η τιμή της απόστασης l γίνει ίση με ε , ενώ απειρίζεται όταν το l τείνει στην τιμή του r , πράγμα το οποίο περιγράφεται από την κατακόρυφη ασύμπτωτη που εμφανίζεται στην θέση $l = r$.

Καθώς μας ενδιαφέρει να αποφεύγεται η σύγκρουση μεταξύ οποιουδήποτε ζεύγους πρακτόρων (i, j) , αλλά και οποιουδήποτε ζεύγους ακόλουθου-ηγέτη $(i, 0)$, θα λάβουμε τα συνολικά Δυναμικά Αποφυγής Συγκρούσεων V_{CAF} και V_{CAL} αντίστοιχα, ως ακολούθως

$$V_{CAF} = \sum_i \sum_j \left[\frac{1}{\|\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_j^*\| - r_{ij}} \right]^4 \frac{1}{\varepsilon - r_{ij}} \quad (6.18)$$

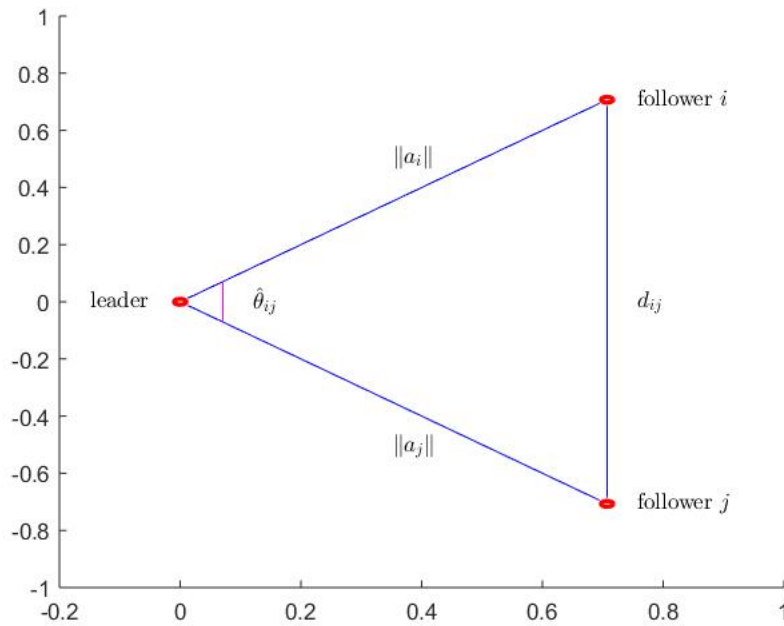
$$V_{CAL} = \sum_i \left[\frac{1}{\|\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_0\| - r_{i0}} \right]_{\frac{1}{\varepsilon - r_{i0}}}^4 \quad (6.19)$$

Όσον αφορά την επιλογή της σταθεράς ε που χρησιμοποιείται στα δυναμικά αποφυγής συγκρούσεων, πρέπει να πληροί κάποιες προϋποθέσεις ουτως ώστε να μην εμποδιστεί η διαδικασία του formation. Συγκεκριμένα, αν αναλογιστούμε το γεγονός ότι το τελικό σχήμα που θα λάβει η διάταξη εξαρτάται από τα διδιάστατα διανύσματα \mathbf{a}_i των ακόλουθων και την σχέση που έχουν μεταξύ τους καθώς και με την θέση του ηγέτη, αλλά και το γεγονός ότι οι πράκτορές μας δεν αποτελούν σημειακές μάζες αλλά οχήματα με διαστάσεις, τότε το μέγεθος του ε αποκτά άνω και κάτω φράγμα.

Για την ανάλυση αυτών των φραγμάτων ορίζουμε ως d_{ij} την ευκλείδεια απόσταση μεταξύ των πρακτόρων i και j , η οποία χρησιμοποιώντας το νόμο των συνημιτόνων μπορεί να γραφεί συναρτήσει των $\|\mathbf{a}_i\|$, $\|\mathbf{a}_j\|$ και της μεταξύ τους γωνίας έστω $\hat{\theta}_{ij}$, ως ακολούθως

$$d_{ij} = \sqrt{\|\mathbf{a}_i\|^2 + \|\mathbf{a}_j\|^2 - 2\|\mathbf{a}_i\|\|\mathbf{a}_j\|\cos(\hat{\theta}_{ij})} \quad (6.20)$$

Ο νόμος των συνημιτόνων (6.20) ισχύει αν αναλογιστούμε το γεγονός ότι κάθε ζεύγος ακόλουθων, έστω πράκτορες i και j , στην επιθυμητή κατάσταση θα πρέπει να εμφανίζει μία διάταξη της παρακάτω μορφής σε σχέση με την θέση του ηγέτη.



Σχήμα 6.3: Σχέση μεταξύ της απόστασης d_{ij} και των $\|\mathbf{a}_i\|$, $\|\mathbf{a}_j\|$

Είναι σαφές πως προκειμένου να μην υπάρχει η δυνατότητα να ακουμπήσουν οποιαδήποτε δύο οχήματα, το ε θα πρέπει να είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα μεταξύ των ακτίνων δύο οποιονδήποτε πρακτόρων, r_{ij} , καθώς και οποιουδήποτε ζεύγους ακόλουθου-ηγέτη, r_{i0} .

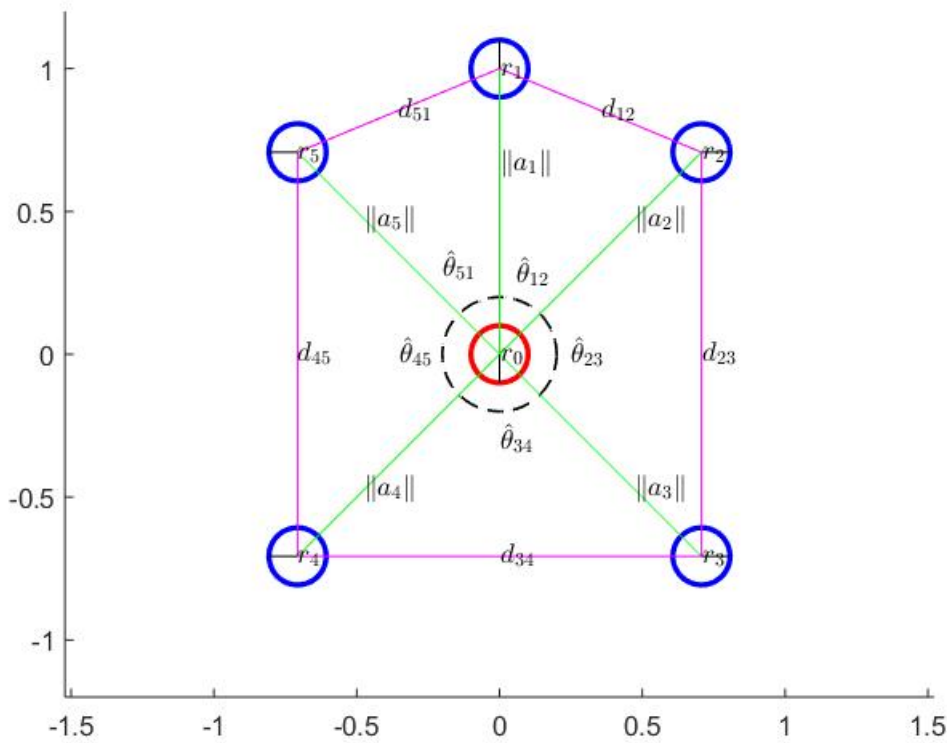
Επίσης, προκειμένου τα οχήματα να μπορούν να πιάσουν τις επιθυμητές θέσεις γύρω από τον

ηγέτη, θα πρέπει το ε να είναι μικρότερο από την ευκλείδεια απόσταση μεταξύ δύο οποιονδήποτε πρακτόρων, d_{ij} , καθώς και μεταξύ οποιουδήποτε ζεύγους ακόλουθου-ηγέτη, $\|\mathbf{a}_i\|$ στην τελική κατάσταση.

Οι παραπάνω περιορισμοί περιγράφονται μαθηματικά από την ακόλουθη ανισοτική σχέση

$$\max_{i,j \in \{1, \dots, n\}} \{r_{ij}, r_{i0}\} < \varepsilon < \min_{i,j \in \{1, \dots, n\}} \{d_{ij}, \|\mathbf{a}_i\|\} \quad (6.21)$$

Οι παραπάνω ορισμοί των μεγεθών r_i , $\|\mathbf{a}_i\|$, d_{ij} και $\hat{\theta}_{ij}$ συνοψίζονται στο ακόλουθο σχήμα, το οποίο παρουσιάζει έναν δυνατό σχηματισμό των πρακτόρων ο οποίος και θα υλοποιηθεί πρακτικά στην πειραματική ανάλυση του προβλήματος. Συγκεκριμένα, οι ακόλουθοι, μπλέ κύκλοι, καλούνται να αποκτήσουν τέτοια διάταξη ώστε να περιστοιχίζουν συμμετρικά τον ηγέτη, κόκκινος κύκλος, η οποία και θα πρέπει να διατηρείται όποια και να είναι η τροχιά που διαγράφει ο ηγέτης ανά πάσα χρονική στιγμή.



Σχήμα 6.4: Σχηματισμός των Ακόλουθων γύρω από τον Ηγέτη

6.4 Σχεδιασμός Νόμου Ελέγχου της Θέσης Διαμέσου της Ταχύτητας

Για την επίτευξη και των δύο προαναφερθέντων στόχων, θα πρέπει να σχεδιαστεί ένας νόμος ελέγχου, τέτοιος ώστε στη μόνιμη κατάσταση να εξασφαλιστεί ότι θα είναι $\tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{0}$ και

$$\sum_i \sum_j \left[\frac{1}{\|\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_j^*\| - r_{ij}} \right]_{\frac{1}{\varepsilon - r_{ij}}}^4 = 0 \text{ και } \sum_i \left[\frac{1}{\|\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_0\| - r_{i0}} \right]_{\frac{1}{\varepsilon - r_{i0}}}^4 = 0.$$

Ως εκ τούτου λαμβάνουμε την παρακάτω μη αρνητική Lyapunov-like συνάρτηση

$$V_0 = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{z}}^T (\hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{R}})^{-1} \tilde{\mathbf{z}} + \frac{1}{4} \sum_i \sum_j \left[\frac{1}{\|\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_j^*\| - r_{ij}} \right]_{\frac{1}{\varepsilon - r_{ij}}}^4 + \frac{1}{4} \sum_i \left[\frac{1}{\|\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_0\| - r_{i0}} \right]_{\frac{1}{\varepsilon - r_{i0}}}^4 \quad (6.22)$$

Παραγωγίζοντας την (6.22) και χρησιμοποιώντας την (6.15) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \dot{V}_0 = & -\tilde{\mathbf{z}}^T (\tilde{\mathbf{v}} - \tilde{\mathbf{v}}_0) - \sum_i \sum_j \left[\frac{1}{\|\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_j^*\| - r_{ij}} \right]_{\frac{1}{\varepsilon - r_{ij}}}^3 \frac{(\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_j^*)^T (\tilde{\mathbf{v}}_i - \tilde{\mathbf{v}}_j)}{(\|\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_j^*\| - r_{ij})^2 \|\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_j^*\|} \\ & - \sum_i \left[\frac{1}{\|\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_0\| - r_{i0}} \right]_{\frac{1}{\varepsilon - r_{i0}}}^3 \frac{(\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_0)^T (\tilde{\mathbf{v}}_i - \mathbf{v}_0)}{(\|\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_0\| - r_{i0})^2 \|\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_0\|} \end{aligned} \quad (6.23)$$

Στην (6.23) χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\dot{\mathbf{q}}_i^* = \tilde{\mathbf{v}}_i$ αφού $\dot{\mathbf{q}}_i^* = \dot{\mathbf{q}}_i + \dot{\mathbf{a}}_i$ και $\dot{\mathbf{a}}_i = \mathbf{0}$, καθώς τα \mathbf{a}_i είναι σταθερά διανύσματα.

Παρατηρούμε ότι γενικά ισχύει η ακόλουθη σχέση

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_j (\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_j^*)^T (\tilde{\mathbf{v}}_i - \tilde{\mathbf{v}}_j) &= \sum_i \sum_j (\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_j^*)^T \tilde{\mathbf{v}}_i - \sum_i \sum_j (\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_j^*)^T \tilde{\mathbf{v}}_j \\ &= \sum_i \sum_j (\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_j^*)^T \tilde{\mathbf{v}}_i + \sum_i \sum_j (\mathbf{q}_j^* - \mathbf{q}_i^*)^T \tilde{\mathbf{v}}_j \end{aligned} \quad (6.24)$$

Αν κάνουμε μία αναδιάταξη στα i, j έχουμε ότι είναι

$$\sum_i \sum_j (\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_j^*)^T \tilde{\mathbf{v}}_i = \sum_i \sum_j (\mathbf{q}_j^* - \mathbf{q}_i^*)^T \tilde{\mathbf{v}}_j \quad (6.25)$$

Αντικαθιστούμε την σχέση (6.25) στην (6.24) και προκύπτει η ακόλουθη εξίσωση σχετικά με τα αθροίσματα

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_j (\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_j^*)^T \tilde{\mathbf{v}}_i + \sum_i \sum_j (\mathbf{q}_j^* - \mathbf{q}_i^*)^T \tilde{\mathbf{v}}_j &= 2 \sum_i \sum_j (\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_j^*)^T \tilde{\mathbf{v}}_i \\ \sum_i \sum_j (\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_j^*)^T (\tilde{\mathbf{v}}_i - \tilde{\mathbf{v}}_j) &= 2 \sum_i \sum_j (\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_j^*)^T \tilde{\mathbf{v}}_i \end{aligned} \quad (6.26)$$

Αντικαθιστώντας την σχέση (6.26) στην (6.23) λαμβάνουμε ότι

$$\begin{aligned} \dot{V}_0 = & -\tilde{\mathbf{z}}^T (\tilde{\mathbf{v}} - \tilde{\mathbf{v}}_0) - 2 \sum_i \sum_j \left[\frac{1}{\|\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_j^*\| - r_{ij}} \right]_{\frac{1}{\varepsilon - r_{ij}}}^3 \frac{(\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_j^*)^T \tilde{\mathbf{v}}_i}{(\|\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_j^*\| - r_{ij})^2 \|\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_j^*\|} \\ & - \sum_i \left[\frac{1}{\|\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_0\| - r_{i0}} \right]_{\frac{1}{\varepsilon - r_{i0}}}^3 \frac{(\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_0)^T (\tilde{\mathbf{v}}_i - \mathbf{v}_0)}{(\|\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_0\| - r_{i0})^2 \|\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_0\|} \end{aligned} \quad (6.27)$$

Επίσης, παρατηρούμε ότι

$$\sum_i \sum_j \left[\frac{1}{\|\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_j^*\| - r_{ij}} \right]_{\frac{1}{\varepsilon - r_{ij}}}^3 \frac{(\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_j^*)^T}{(\|\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_j^*\| - r_{ij})^2 \|\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_j^*\|} = 0 \quad (6.28)$$

καθώς στο σύνολό του αποτελεί άθροισμα αντίθετων όρων.

Πολλαπλασιάζοντας την σχέση (6.28) με το διάνυσμα \mathbf{v}_0 λαμβάνουμε την ακόλουθη ισότητα

$$\sum_i \sum_j \left[\frac{1}{\|\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_j^*\| - r_{ij}} \right]_{\frac{1}{\varepsilon - r_{ij}}}^3 \frac{(\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_j^*)^T \mathbf{v}_0}{(\|\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_j^*\| - r_{ij})^2 \|\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_j^*\|} = 0 \quad (6.29)$$

Αφαιρώντας την σχέση (6.29) από την (6.27) λαμβάνουμε τελικά ότι η παράγωγος της Lyapunov-like συνάρτησης δίνεται από την σχέση

$$\begin{aligned} \dot{V}_0 = & -\tilde{\mathbf{z}}^T (\tilde{\mathbf{v}} - \tilde{\mathbf{v}}_0) - 2 \sum_i \sum_j \left[\frac{1}{\|\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_j^*\| - r_{ij}} \right]_{\frac{1}{\varepsilon - r_{ij}}}^3 \frac{(\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_j^*)^T (\tilde{\mathbf{v}}_i - \mathbf{v}_0)}{(\|\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_j^*\| - r_{ij})^2 \|\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_j^*\|} \\ & - \sum_i \left[\frac{1}{\|\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_0\| - r_{i0}} \right]_{\frac{1}{\varepsilon - r_{i0}}}^3 \frac{(\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_0)^T (\tilde{\mathbf{v}}_i - \mathbf{v}_0)}{(\|\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_0\| - r_{i0})^2 \|\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_0\|} \end{aligned} \quad (6.30)$$

Προκειμένου να γράψουμε την (6.30) σε πιο συμπαγή μορφή, θα ορίσουμε πίνακες $\hat{\mathbf{N}}_F$ και $\hat{\mathbf{N}}_L$, μεγέθους $2n \times 1$, ως

$$\hat{\mathbf{N}}_F = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{F1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{N}_{Fn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \sum_j \left[\frac{1}{\|\mathbf{q}_1^* - \mathbf{q}_j^*\| - r_{1j}} \right]_{\frac{1}{\varepsilon - r_{1j}}}^3 \frac{(\mathbf{q}_1^* - \mathbf{q}_j^*)}{(\|\mathbf{q}_1^* - \mathbf{q}_j^*\| - r_{1j})^2 \|\mathbf{q}_1^* - \mathbf{q}_j^*\|} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 2 \sum_j \left[\frac{1}{\|\mathbf{q}_n^* - \mathbf{q}_j^*\| - r_{nj}} \right]_{\frac{1}{\varepsilon - r_{nj}}}^3 \frac{(\mathbf{q}_n^* - \mathbf{q}_j^*)}{(\|\mathbf{q}_n^* - \mathbf{q}_j^*\| - r_{nj})^2 \|\mathbf{q}_n^* - \mathbf{q}_j^*\|} \end{bmatrix} \quad (6.31)$$

$$\hat{\mathbf{N}}_L = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{L1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{N}_{Ln} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[\frac{1}{\|\mathbf{q}_1^* - \mathbf{q}_0\| - r_{10}} \right]_{\frac{1}{\varepsilon - r_{10}}}^3 \frac{(\mathbf{q}_1^* - \mathbf{q}_0)}{(\|\mathbf{q}_1^* - \mathbf{q}_0\| - r_{10})^2 \|\mathbf{q}_1^* - \mathbf{q}_0\|} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \left[\frac{1}{\|\mathbf{q}_n^* - \mathbf{q}_0\| - r_{n0}} \right]_{\frac{1}{\varepsilon - r_{n0}}}^3 \frac{(\mathbf{q}_n^* - \mathbf{q}_0)}{(\|\mathbf{q}_n^* - \mathbf{q}_0\| - r_{n0})^2 \|\mathbf{q}_n^* - \mathbf{q}_0\|} \end{bmatrix} \quad (6.32)$$

Οι σχέσεις (6.31) και (6.32) δίνουν τις ακόλουθες ισότητες

$$2 \sum_i \sum_j \left[\frac{1}{\|\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_j^*\| - r_{ij}} \right]_{\frac{1}{\varepsilon - r_{ij}}}^3 \frac{(\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_j^*)^T (\tilde{\mathbf{v}}_i - \mathbf{v}_0)}{(\|\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_j^*\| - r_{ij})^2 \|\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_j^*\|} = \hat{\mathbf{N}}_F^T (\tilde{\mathbf{v}} - \tilde{\mathbf{v}}_0) \quad (6.33)$$

$$\sum_i \left[\frac{1}{\|\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_0\| - r_{i0}} \right]_{\frac{1}{\varepsilon - r_{i0}}}^3 \frac{(\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_0)^T (\tilde{\mathbf{v}}_i - \mathbf{v}_0)}{(\|\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_0\| - r_{i0})^2 \|\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_0\|} = \hat{\mathbf{N}}_L^T (\tilde{\mathbf{v}} - \tilde{\mathbf{v}}_0) \quad (6.34)$$

Αντικαθιστώντας λοιπόν τις σχέσεις (6.33) και (6.34) στην (6.30) λαμβάνουμε την ακόλουθη συμπαγή μορφή της \dot{V}_0

$$\begin{aligned} \dot{V}_0 = & -\tilde{\mathbf{z}}^T (\tilde{\mathbf{v}} - \tilde{\mathbf{v}}_0) - \hat{\mathbf{N}}_F^T (\tilde{\mathbf{v}} - \tilde{\mathbf{v}}_0) - \hat{\mathbf{N}}_L^T (\tilde{\mathbf{v}} - \tilde{\mathbf{v}}_0) \\ = & -(\tilde{\mathbf{z}} + \hat{\mathbf{N}}_F + \hat{\mathbf{N}}_L)^T (\tilde{\mathbf{v}} - \tilde{\mathbf{v}}_0) \end{aligned} \quad (6.35)$$

Παρατηρούμε ότι η σχέση (6.35) μπορεί να γραφεί υπό την μορφή αθροισμάτων, σύμφωνα με τους ορισμούς των διανυσμάτων $\tilde{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{N}}_F, \hat{\mathbf{N}}_L, \tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{v}}_0$, όπως αυτοί περιγράφονται στις σχέσεις (6.12), (6.31), (6.32), (6.14) και (6.6) αντίστοιχα.

$$\dot{V}_0 = - \sum_i \left\{ (\mathbf{z}_i + \mathbf{N}_{Fi} + \mathbf{N}_{Li})^T (\tilde{\mathbf{v}}_i - \mathbf{v}_0) \right\} \quad (6.36)$$

Είμαστε σε θέση πλέον να ορίσουμε το νόμο ελέγχου, έστω $\tilde{\mathbf{v}}_c$, που πρέπει να εισαχθεί στην (6.36) και ο οποίος θα λάβει την θέση της εισόδου $\tilde{\mathbf{v}}$. Σημειώνεται ότι το συνολικό διάνυσμα ταχυτήτων $\tilde{\mathbf{v}}_c$ των n ακόλουθων, διάστασης $2n \times 1$, θα έχει την μορφή

$$\tilde{\mathbf{v}}_c = \begin{bmatrix} \bar{v}_{c1x} & \bar{v}_{c1y} & \bar{v}_{c2x} & \bar{v}_{c2y} & \cdot & \cdot & \cdot & \bar{v}_{cnx} & \bar{v}_{cny} \end{bmatrix}^T \quad (6.37)$$

όπου είναι

$$\bar{v}_{ci} = k_1 (\mathbf{z}_i + \mathbf{N}_{Fi} + \mathbf{N}_{Li}) + k_2 \left(\frac{\mathbf{z}_i + \mathbf{N}_{Fi} + \mathbf{N}_{Li}}{\|\mathbf{z}_i + \mathbf{N}_{Fi} + \mathbf{N}_{Li}\|} \right) \quad (6.38)$$

Το πρώτο μέρος της $\tilde{\mathbf{v}}_c$ αποτελεί έναν κλασσικό έλεγχο ανατροφοδότησης κατάστασης, ενώ το δεύτερο μέρος λειτουργεί ως sliding mode control σε δύο διαστάσεις. Ως εκ τούτου, ο νόμος ελέγχου μπορεί να γραφεί σε συμπαγή μορφή ως ακολούθως

$$\tilde{\mathbf{v}}_c = k_1 (\tilde{\mathbf{z}} + \hat{\mathbf{N}}_F + \hat{\mathbf{N}}_L) + k_2 \text{SGN}(\tilde{\mathbf{z}} + \hat{\mathbf{N}}_F + \hat{\mathbf{N}}_L) \quad (6.39)$$

Αντικαθιστώντας το νόμο ελέγχου (6.38) στην (6.36), παίρνουμε

$$\dot{V}_0 = - \sum_i \left\{ (\mathbf{z}_i + \mathbf{N}_{Fi} + \mathbf{N}_{Li})^T \left(k_1 (\mathbf{z}_i + \mathbf{N}_{Fi} + \mathbf{N}_{Li}) + k_2 \left(\frac{\mathbf{z}_i + \mathbf{N}_{Fi} + \mathbf{N}_{Li}}{\|\mathbf{z}_i + \mathbf{N}_{Fi} + \mathbf{N}_{Li}\|} \right) - \mathbf{v}_0 \right) \right\} \quad (6.40)$$

Εκτελώντας πράξεις στα αθροίσματα, η (6.40) επαναδιατυπώνεται ως ακολούθως

$$\dot{V}_0 = \sum_i \left\{ -k_1 \|\mathbf{z}_i + \mathbf{N}_{Fi} + \mathbf{N}_{Li}\|^2 - k_2 \|\mathbf{z}_i + \mathbf{N}_{Fi} + \mathbf{N}_{Li}\| + (\mathbf{z}_i + \mathbf{N}_{Fi} + \mathbf{N}_{Li})^T \mathbf{v}_0 \right\} \quad (6.41)$$

Παρατηρούμε ότι το τρίτο άθροισμα της (6.41) εμπεριέχει το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $(\mathbf{z}_i + \mathbf{N}_{Fi} + \mathbf{N}_{Li})$ και \mathbf{v}_0 , στο οποίο αν εφαρμόσουμε την ανισότητα Cauchy–Schwarz, η (6.41) γίνεται

$$\begin{aligned} \dot{V}_0 &\leq \sum_i \left\{ -k_1 \|\mathbf{z}_i + \mathbf{N}_{Fi} + \mathbf{N}_{Li}\|^2 - k_2 \|\mathbf{z}_i + \mathbf{N}_{Fi} + \mathbf{N}_{Li}\| + \|\mathbf{v}_0\| \|\mathbf{z}_i + \mathbf{N}_{Fi} + \mathbf{N}_{Li}\| \right\} \\ &= \sum_i \left\{ -k_1 \|\mathbf{z}_i + \mathbf{N}_{Fi} + \mathbf{N}_{Li}\|^2 - (k_2 - \|\mathbf{v}_0\|) \|\mathbf{z}_i + \mathbf{N}_{Fi} + \mathbf{N}_{Li}\| \right\} \end{aligned} \quad (6.42)$$

Η ταχύτητα \mathbf{v}_0 του ηγέτη δεν μπορεί να γίνει αυθαίρετα μεγάλη, και άρα θα υπάρχει κάποιο άνω φράγμα το οποίο και δεν δύναται να υπερβεί, έστω $\sup\{\|\mathbf{v}_0\|\}$. Τότε η (6.42) γίνεται

$$\dot{V}_0 \leq \sum_i \left\{ -k_1 \|\mathbf{z}_i + \mathbf{N}_{Fi} + \mathbf{N}_{Li}\|^2 - (k_2 - \sup\{\|\mathbf{v}_0\|\}) \|\mathbf{z}_i + \mathbf{N}_{Fi} + \mathbf{N}_{Li}\| \right\} \quad (6.43)$$

Επιλέγοντας κατάλληλο κέρδος k_2 ώστε να ικανοποιεί την ανισότητα

$$k_2 \geq \sup\{\|\mathbf{v}_0\|\} \quad (6.44)$$

έπεται ότι το δεύτερο μέρος της ανισότητας (6.43) θα περιέχει καθαρά μη-θετικούς όρους, και άρα μπορούμε να λάβουμε ένα λιγότερο αυστηρό άνω φράγμα της \dot{V}_0 ως ακολούθως

$$\begin{aligned}\dot{V}_0 &\leq \sum_i \{-k_1 \|z_i + N_{Fi} + N_{Li}\|^2\} \\ \dot{V}_0 &\leq -k_1 \|\tilde{z} + \hat{N}_F + \hat{N}_L\|^2\end{aligned}\quad (6.45)$$

Για την απόδειξη της Πρότασης που ακολουθεί στην συνέχεια της ανάλυσης, είναι απαραίτητη η γνώση της μορφής των παραγώγων των διανυσμάτων \hat{N}_F και \hat{N}_L . Παραγωγίζοντας λοιπόν την σχέση (6.31), λαμβάνουμε ότι

$$\dot{\hat{N}}_F = \begin{bmatrix} \dot{N}_{F1}^T & \cdot & \cdot & \cdot & \dot{N}_{Fn}^T \end{bmatrix}^T \quad (6.46)$$

όπου

$$\begin{aligned}\dot{N}_{Fi} = & \sum_j \left\{ 2 \left[\frac{1}{\|\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_j^*\| - r_{ij}} \right]^3 \frac{(\bar{v}_i - \bar{v}_j)}{\frac{1}{\varepsilon - r_{ij}} \left(\|\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_j^*\| - r_{ij} \right)^2 \|\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_j^*\|} \right. \\ & - 2 \left[\frac{1}{\|\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_j^*\| - r_{ij}} \right]^2 \frac{(\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_j^*)^T (\bar{v}_i - \bar{v}_j) (\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_j^*)}{\left(\|\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_j^*\| - r_{ij} \right)^2 \|\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_j^*\|^2} \\ & \cdot \left. \left[\frac{3}{\left(\|\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_j^*\| - r_{ij} \right)^2} + \left[\frac{1}{\|\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_j^*\| - r_{ij}} \right] \frac{1}{\varepsilon - r_{ij}} \left(\frac{2}{\|\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_j^*\| - r_{ij}} + \frac{1}{\|\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_j^*\|} \right) \right] \right\}\end{aligned}\quad (6.47)$$

Ομοίως, παραγωγίζοντας την σχέση (6.32) παίρνουμε ότι

$$\dot{\hat{N}}_L = \begin{bmatrix} \dot{N}_{L1}^T & \cdot & \cdot & \cdot & \dot{N}_{Ln}^T \end{bmatrix}^T \quad (6.48)$$

όπου

$$\begin{aligned}\dot{N}_{Li} = & \left[\frac{1}{\|\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_0\| - r_{i0}} \right]^3 \frac{(\bar{v}_i - \mathbf{v}_0)}{\frac{1}{\varepsilon - r_{i0}} \left(\|\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_0\| - r_{i0} \right)^2 \|\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_0\|} \\ & - \left[\frac{1}{\|\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_0\| - r_{i0}} \right]^2 \frac{(\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_0)^T (\bar{v}_i - \mathbf{v}_0) (\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_0)}{\frac{1}{\varepsilon - r_{i0}} \left(\|\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_0\| - r_{i0} \right)^2 \|\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_0\|^2} \\ & \cdot \left[\frac{3}{\left(\|\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_0\| - r_{i0} \right)^2} + \left[\frac{1}{\|\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_0\| - r_{i0}} \right] \frac{1}{\varepsilon - r_{i0}} \left(\frac{2}{\|\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_0\| - r_{i0}} + \frac{1}{\|\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_0\|} \right) \right]\end{aligned}\quad (6.49)$$

Επανερχόμενοι στην ανισότητα (6.45), είμαστε σε θέση να διατυπώσουμε την ακόλουθη Πρόταση.

Πρόταση 6.1. *Καθώς είναι*

$$\dot{V}_0 \leq -k_1 \|\tilde{z} + \hat{N}_F + \hat{N}_L\|^2$$

έπεται ότι θα ισχύει

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{z}(t) + \hat{N}_F(t) + \hat{N}_L(t)\| = 0 \quad (6.50)$$

Απόδειξη. Ολοκληρώνοντας κατά μέλη την σχέση (6.45) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \dot{V}_0(\tau) d\tau &\leq -k_1 \int_0^\infty \|\tilde{z}(\tau) + \hat{N}_F(\tau) + \hat{N}_L(\tau)\|^2 d\tau \\ V_0(t = \infty) - V_0(t = 0) &\leq -k_1 \int_0^\infty \|\tilde{z}(\tau) + \hat{N}_F(\tau) + \hat{N}_L(\tau)\|^2 d\tau \end{aligned} \quad (6.51)$$

Από την (6.51) συμπεραίνουμε ότι το ολοκλήρωμα $\int_0^\infty \|\tilde{z}(\tau) + \hat{N}_F(\tau) + \hat{N}_L(\tau)\|^2 d\tau$ υπάρχει και είναι φραγμένο, άρα και πεπερασμένο, όπως φαίνεται από την ακόλουθη ανισότητα

$$\int_0^\infty \|\tilde{z}(\tau) + \hat{N}_F(\tau) + \hat{N}_L(\tau)\|^2 d\tau \leq \frac{1}{k_1} (V_0(t = 0) - V_0(t = \infty)) \quad (6.52)$$

Σημειώνεται ότι καμία εκ των ποσοτήτων $V_0(t = 0)$ και $V_0(t = \infty)$ δεν απειρίζεται, καθώς αφενός η κατάσταση εκκίνησης του συστήματος δεν περιλαμβάνει συγκρούσεις μεταξύ των πρακτόρων, και αφετέρου, δεδομένου ότι η συνάρτηση V_0 έχειδειχθεί ότι είναι φθίνουσα, δεν δύναται να απειρίζεται στην μόνιμη κατάσταση. Ως εκ τούτου, εξασφαλίζεται ότι δεν θα υπάρχουν συγκρούσεις καθόλη την διάρκεια λειτουργίας του συστήματος. Άρα τα διανύσματα \hat{N}_F και \hat{N}_L δεν απειρίζονται καμία χρονική στιγμή. Συγκρίνοντας την σχέση (6.31) με τις (6.46) και (6.47) συμπεραίνουμε ότι, αν η διανυσματική συνάρτηση \hat{N}_F είναι φραγμένη το ίδιο θα ισχύει και για την $\dot{\hat{N}}_F$. Ομοίως, συγκρίνοντας την σχέση (6.32) με τις (6.48) και (6.49) συμπεραίνουμε ότι, αν η διανυσματική συνάρτηση \hat{N}_L είναι φραγμένη το ίδιο θα ισχύει και για την $\dot{\hat{N}}_L$.

Θεωρούμε την συνάρτηση

$$F(t) = \int_0^t \|\tilde{z}(\tau) + \hat{N}_F(\tau) + \hat{N}_L(\tau)\|^2 d\tau \quad (6.53)$$

Η (6.53) είναι χρονικά μεταβαλλόμενη και σύμφωνα με την (6.52) έχει πεπερασμένο όριο για $t \rightarrow \infty$. Η συνάρτηση $\dot{F}(t)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής αφού η $\ddot{F}(t)$ είναι φραγμένη. Πράγματι είναι

$$\ddot{F}(t) = 2 \left(\tilde{z} + \hat{N}_F + \hat{N}_L \right)^T \left(\dot{\tilde{z}} + \dot{\hat{N}}_F + \dot{\hat{N}}_L \right) \quad (6.54)$$

Βάσει της παραπάνω ανάλυσης, τα διανύσματα \tilde{z} , \hat{N}_F , \hat{N}_L , $\dot{\tilde{z}}$, $\dot{\hat{N}}_F$ και $\dot{\hat{N}}_L$ παραμένουν φραγμένες συναρτήσεις καθόλη την διάρκεια λειτουργίας του συστήματος. Κατ'επέκταση το ίδιο θα ισχύει και για την $\ddot{F}(t)$ λόγω της σχέσης (6.54).

Συνεπώς, η συνάρτηση $F(t)$ πληροί τις προϋποθέσεις του Λήμματος Barbalat (2.5), εφαρμόζοντας το οποίο λαμβάνουμε ότι

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{F}(t) &= 0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{z}(t) + \hat{N}_F(t) + \hat{N}_L(t)\|^2 &= 0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{z}(t) + \hat{N}_F(t) + \hat{N}_L(t)\| &= 0 \end{aligned} \quad (6.55)$$

Η σχέση (6.55) ολοκληρώνει την απόδειξη της Πρότασης καθώς συμπίπτει με την (6.50). \square

Πρόταση 6.2. Καθώς είναι

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{z}(t) + \hat{N}_F(t) + \hat{N}_L(t)\| = 0$$

έπεται ότι θα ισχύει

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V_0(t) = 0$$

δηλαδή λόγω της προηγούμενης πρότασης, η συνάρτηση V_0 προϊόντος του χρόνου θα βρεθεί στο Ολικό της Ελάχιστο. Αυτό θα συμβαίνει σχεδόν για όλες τις δυνατές αρχικές καταστάσεις του συστήματος. Εκείνες οι αρχικές καταστάσεις για τις οποίες δεν θα ισχύει η πρόταση αφορούν τα σαγματικά σημεία της συνάρτησης V_0 .

Όπως αποδείχθηκε στο Κεφάλαιο 4, που αφορά την κινηματική και δυναμική ανάλυση του ρομπότ διαφορικής οδήγησης, ο πίνακας \bar{S} διαστάσεων 2×2 που αφορά την σχέση μεταξύ των διανυσμάτων θέσης και ταχύτητας ενός κινητού ρομπότ διαφορικής οδήγησης δίνεται από την ακόλουθη σχέση για τον πρακτορα i

$$\bar{S}_i = \begin{bmatrix} \frac{r_i}{2} \cos \theta_i - \frac{r_i}{2b_i} d_i \sin \theta_i & \frac{r_i}{2} \cos \theta_i + \frac{r_i}{2b_i} d_i \sin \theta_i \\ \frac{r_i}{2} \sin \theta_i + \frac{r_i}{2b_i} d_i \cos \theta_i & \frac{r_i}{2} \sin \theta_i - \frac{r_i}{2b_i} d_i \cos \theta_i \end{bmatrix}$$

και για το σύστημα των n πρακτόρων λαμβάνουμε το συνολικό πίνακα διαστάσεων $2n \times 2n$

$$\hat{S} = \begin{bmatrix} \bar{S}_1 & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \bar{S}_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \cdot & \cdot & \cdot & \bar{S}_n \end{bmatrix} \quad (6.56)$$

Η μητρα αδράνειας ενός κινητού ρομπότ διαφορικής οδήγησης έχειδειχθεί ότι είναι ένας πίνακας διαστάσεων 2×2 ο οποίος περιγράφεται από την ακόλουθη σχέση για τον κάθε πράκτορα

$$\bar{M}_i = \begin{bmatrix} \frac{r_i^2}{4b_i^2} (m_i b_i^2 + I_i) + I_{wi} & \frac{r_i^2}{4b_i^2} (m_i b_i^2 - I_i) \\ \frac{r_i^2}{4b_i^2} (m_i b_i^2 - I_i) & \frac{r_i^2}{4b_i^2} (m_i b_i^2 + I_i) + I_{wi} \end{bmatrix}$$

και για το σύστημα των n πρακτόρων λαμβάνουμε το συνολικό πίνακα διαστάσεων $2n \times 2n$

$$\hat{M} = \begin{bmatrix} \bar{M}_1 & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \bar{M}_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \cdot & \cdot & \cdot & \bar{M}_n \end{bmatrix} \quad (6.57)$$

Η Κεντρομόλος και Κοριοίλις μήτρα ενός κινητού ρομπότ διαφορικής οδήγησης έχειδειχθεί ότι είναι ένας πίνακας διαστάσεων 2×2 ο οποίος περιγράφεται από την ακόλουθη σχέση για

τον κάθε πράκτορα

$$\bar{\mathbf{V}}_i = \begin{bmatrix} 0 & \frac{m_{ci}d_i r_i^2}{2b_i} \\ -\frac{m_{ci}d_i r_i^2}{2b_i} & 0 \end{bmatrix} \dot{\theta}_i$$

και για το σύστημα των n πρακτόρων λαμβάνουμε το συνολικό πίνακα διαστάσεων $2n \times 2n$

$$\hat{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{V}}_1 & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \bar{\mathbf{V}}_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \cdot & \cdot & \cdot & \bar{\mathbf{V}}_n \end{bmatrix} \quad (6.58)$$

Η μήτρα μετασχηματισμού εισόδου ενός κινητού ρομπότ διαφορικής οδήγησης έχει αποδειχθεί ότι συμπίπτει με τον μοναδιαίο πίνακα διαστάσεων 2×2 , δηλαδή είναι

$$\bar{\mathbf{B}}_i = \mathbb{I}_2$$

και για το σύστημα των n πρακτόρων λαμβάνουμε το συνολικό πίνακα διαστάσεων $2n \times 2n$

$$\hat{\mathbf{B}} = \mathbb{I}_{2n} \quad (6.59)$$

Τέλος, η είσοδος του συστήματος της δυναμικής των ρομπότ δίνεται από το ακόλουθο διάνυσμα ροπών με διάσταση $2n \times 1$

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}} = \begin{bmatrix} \tau_{1R} & \tau_{1L} & \tau_{2R} & \tau_{2L} & \cdot & \cdot & \cdot & \tau_{nR} & \tau_{nL} \end{bmatrix}^T \quad (6.60)$$

Λαμβάνοντας υπόψιν τους ορισμούς και τις σχέσεις (6.1)-(6.56), είμαστε σε θέση να διατυπώσουμε το ακόλουθο Λήμμα

Λήμμα 6.10. Έστω n κινούμενα ρομπότ διαφορικής οδήγησης που περιγράφονται από την (3.55). Αν η ταχύτητα $\tilde{\mathbf{v}}$ επιλεγεί ως

$$\tilde{\mathbf{v}}_c = \hat{\mathbf{S}}^{-1} \left(k_1(\tilde{\mathbf{z}} + \hat{\mathbf{N}}_F + \hat{\mathbf{N}}_L) + k_2 \text{SGN}(\tilde{\mathbf{z}} + \hat{\mathbf{N}}_F + \hat{\mathbf{N}}_L) \right) \quad (6.61)$$

και ο γράφος επικοινωνίας είναι γεννητικό δέντρο με ρίζα τον ηγέτη τότε

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\mathbf{z}}(t)\| = 0 \quad \& \quad \lim_{t \rightarrow \infty} V_{CAF}(t) = 0 \quad \& \quad \lim_{t \rightarrow \infty} V_{CAL}(t) = 0$$

που συνεπάγεται *leader-follower formation* με αποφυγή συγκρούσεων.

6.5 Σχεδιασμός Νόμου Ελέγχου της Ταχύτητας Διαμέσου της Ροπής

Προχωράμε στην ανάλυση του συνολικού συστήματος το οποίο περιλαμβάνει την δυναμική των κινητών ρομπότ διαφορικής οδήγησης, και έχει την ακόλουθη μορφή

$$\dot{\tilde{\mathbf{z}}} = -(\hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{R}})[\hat{\mathbf{S}}\tilde{\mathbf{v}} - \tilde{\mathbf{v}}_0] \quad (6.62)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{v}}} = -\hat{\mathbf{M}}^{-1}[\hat{\mathbf{V}}\tilde{\mathbf{v}} + \hat{\mathbf{F}} + \hat{\boldsymbol{\tau}}_d] + \hat{\mathbf{M}}^{-1}\tilde{\boldsymbol{\tau}} \quad (6.63)$$

Όπως παρατηρείται, στην εξίσωση (6.63) δεν γίνεται χρήση της μήτρας μετασχηματισμού εισόδου $\hat{\mathbf{B}}$, καθώς αποτελεί έναν μοναδιαίο πίνακα και άρα μπορεί να παραληφθεί.

Σε αυτό το σύστημα αναζητάμε κατάλληλη είσοδο $\tilde{\tau}$ η οποία, σύμφωνα με το Λήμμα 6.10, θα οδηγήσει την ταχύτητα $\tilde{\mathbf{v}}$ στην επιθυμητή $\tilde{\mathbf{v}}_c$, έτσι ώστε τόσο ο μετασχηματισμός $\tilde{\mathbf{z}}$ όσο και τα δυναμικά αποφυγής συγκρούσεων, με την πάροδο του χρόνου, να συγκλίνουν στο μηδέν. Γι'αυτή την ανάλυση χρησιμοποιείται η τεχνική του Backstepping. Συγκεκριμένα γίνεται κατάλληλος συνδυασμός των μεθόδων Single-Integrator Backstepping, Generic Backstepping και Block Backstepping, τεχνικές οι οποίες αναλύονται διεξοδικά στο κεφάλαιο 14, του βιβλίου [16].

Για να μετατρέψουμε το πρόβλημα του Generic Backstepping σε απλοποιημένο Single-Integrator Backstepping, θα θεωρήσουμε μία νέα μεταβλητή εισόδου ως ακολούθως

$$\tilde{\tau}_1 = -\hat{\mathbf{M}}^{-1}[\hat{\mathbf{V}}\tilde{\mathbf{v}} + \hat{\mathbf{F}} + \hat{\tau}_d] + \hat{\mathbf{M}}^{-1}\tilde{\tau} \quad (6.64)$$

$$\tilde{\tau} = \hat{\mathbf{M}}\tilde{\tau}_1 + \hat{\mathbf{V}}\tilde{\mathbf{v}} + \hat{\mathbf{F}} + \hat{\tau}_d \quad (6.65)$$

Αντικαθιστώντας την σχέση (6.64) στην (6.63), το σύστημα εξισώσεων (6.62)-(6.63) λαμβάνει την ακόλουθη μορφή

$$\dot{\tilde{\mathbf{z}}} = -(\hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{R}})[\hat{\mathbf{S}}\tilde{\mathbf{v}} - \tilde{\mathbf{v}}_0] \quad (6.66)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{v}}} = \tilde{\tau}_1 \quad (6.67)$$

Έπειτα, προσθαφαιρώντας το γινόμενο $\hat{\mathbf{S}}\tilde{\mathbf{v}}_c$ στην σχέση (6.66), το σύστημα εξισώσεων (6.66)-(6.67) λαμβάνει την μορφή

$$\dot{\tilde{\mathbf{z}}} = -(\hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{R}})[\hat{\mathbf{S}}\tilde{\mathbf{v}} + \hat{\mathbf{S}}\tilde{\mathbf{v}}_c - \hat{\mathbf{S}}\tilde{\mathbf{v}}_c - \tilde{\mathbf{v}}_0] \quad (6.68)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{v}}} = \tilde{\tau}_1 \quad (6.69)$$

Ορίζοντας μία νέα μεταβλητή λάθους, η οποία θα μετράει το σφάλμα μεταξύ της πραγματικής ταχύτητας $\tilde{\mathbf{v}}$ και της επιθυμητής $\tilde{\mathbf{v}}_c$

$$\tilde{\mathbf{e}} = \tilde{\mathbf{v}} - \tilde{\mathbf{v}}_c \quad (6.70)$$

το σύστημα (6.68)-(6.69) τροποποιείται εκ νέου ως ακολούθως

$$\dot{\tilde{\mathbf{z}}} = -(\hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{R}})[\hat{\mathbf{S}}\tilde{\mathbf{v}}_c - \tilde{\mathbf{v}}_0] - (\hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{R}})\hat{\mathbf{S}}\tilde{\mathbf{e}} \quad (6.71)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{e}}} = \dot{\tilde{\mathbf{v}}} - \dot{\tilde{\mathbf{v}}}_c = \tilde{\tau}_1 - \dot{\tilde{\mathbf{v}}}_c \quad (6.72)$$

Επιθυμούμε λοιπόν, με κατάλληλη επιλογή της ροπής εισόδου $\tilde{\tau}_1$, να επιτύχουμε ασυμπτωτική σύγκλιση του λάθους στο μηδέν, $\tilde{\mathbf{e}} \rightarrow \mathbf{0}$, οπότε και θα εξασφαλιστεί $\tilde{\mathbf{v}} \rightarrow \tilde{\mathbf{v}}_c$. Ως εκ τούτου λαμβάνουμε την ακόλουθη μη αρνητική Lyapunov-like συνάρτηση

$$V_\varepsilon = \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{e}}^T \hat{\mathbf{M}}\tilde{\mathbf{e}} \quad (6.73)$$

Παραγωγίζοντας την συνάρτηση (6.73) παίρνουμε

$$\dot{V}_\varepsilon = \dot{\tilde{\mathbf{e}}}^T \hat{\mathbf{M}}\tilde{\mathbf{e}} = (\tilde{\tau}_1 - \dot{\tilde{\mathbf{v}}}_c)^T \hat{\mathbf{M}}\tilde{\mathbf{e}} \quad (6.74)$$

Επιλέγουμε είσοδο $\tilde{\tau}_1$

$$(\tilde{\tau}_1 - \dot{\tilde{v}}_c)^T = -k_3 \tilde{e}^T \hat{M}^{-1} \quad (6.75)$$

έτσι ώστε αντικαθιστώντας την σχέση (6.75) στην (6.74) να λάβουμε

$$\dot{V}_\varepsilon = -k_3 \tilde{e}^T \tilde{e} = -k_3 \|\tilde{e}\|^2 \quad (6.76)$$

Για την μήτρα αδρανείας, σύμφωνα με τον ορισμό της, ισχύει η ακόλουθη ισότητα

$$\hat{M} = \hat{M}^T \Leftrightarrow \hat{M}^{-1} = (\hat{M}^{-1})^T \quad (6.77)$$

Λύνοντας την σχέση (6.75) ως προς $\tilde{\tau}_1$, και λαμβάνοντας υπόψιν την ισότητα (6.77) παίρνουμε τελικά ότι

$$\tilde{\tau}_1 = \dot{\tilde{v}}_c - k_3 \hat{M}^{-1} \tilde{e} \quad (6.78)$$

Αντικαθιστώντας τελικά την σχέση (6.78) στην (6.65) θα λάβουμε την είσοδο ροπής

$$\tilde{\tau} = -k_3 \tilde{e} + \hat{M} \dot{\tilde{v}}_c + \hat{V} \tilde{v} + \hat{F} + \hat{\tau}_d \quad (6.79)$$

με k_3 θετική σταθερά. Ισοδύναμα

$$\begin{aligned} \dot{V}_\varepsilon &= -k_3 \|\tilde{e}\|^2 \leq -\frac{2k_3}{\lambda_{max}(\hat{M})} \left(\frac{1}{2} \tilde{e}^T \hat{M} \tilde{e} \right) \\ \dot{V}_\varepsilon &\leq -\frac{2k_3}{\lambda_{max}(\hat{M})} V_\varepsilon \end{aligned} \quad (6.80)$$

Παρατηρούμε ότι στην ανισότητα (6.80) μπορούμε να εφαρμόσουμε το Λήμμα 2.3, και άρα να συμπεράνουμε την σύγκλιση των ποσοτήτων e και \tilde{v} στο μηδέν

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V_\varepsilon(t) = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{e}(t) = \mathbf{0} \quad \& \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (\tilde{v}(t) - \tilde{v}_c(t)) = \mathbf{0} \quad (6.81)$$

Λαμβάνοντας υπόψιν τους ορισμούς και τις σχέσεις (6.62)-(6.81), είμαστε σε θέση να διατυπώσουμε το ακόλουθο Λήμμα:

Λήμμα 6.11. *Δοθέντος του συστήματος δυναμικών εξισώσεων που περιγράφουν την κινηματική και δυναμική των ρομπότ διαφορικής οδήγησης*

$$\dot{\tilde{z}} = -(\hat{L} + \hat{R})[\hat{S}\tilde{v} - \tilde{v}_0] \quad (6.82)$$

$$\dot{\tilde{v}} = -\hat{M}^{-1}[\hat{V}\tilde{v} + \hat{F} + \hat{\tau}_d] + \hat{M}^{-1}\tilde{\tau} \quad (6.83)$$

Αν στο παραπάνω σύστημα η ροπή εισόδου $\tilde{\tau}$ λάβει την ακόλουθη μορφή

$$\begin{aligned} \tilde{\tau} &= -k_3 \tilde{e} + \hat{M} \dot{\tilde{v}}_c + \hat{V} \tilde{v} + \hat{F} + \hat{\tau}_d \\ &= -k_3 (\tilde{v} - \tilde{v}_c) + \hat{M} \dot{\tilde{v}}_c + \hat{V} \tilde{v} + \hat{F} + \hat{\tau}_d \end{aligned}$$

και ο γράφος επικοινωνίας είναι γεννητικό δέντρο με ρίζα τον ηγέτη τότε

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{z}(t)\| = 0 \quad \& \quad \lim_{t \rightarrow \infty} V_{CAF}(t) = 0 \quad \& \quad \lim_{t \rightarrow \infty} V_{CAL}(t) = 0$$

που συνεπάγεται *leader-follower formation* με αποφυγή συγκρούσεων σύμφωνα με το Λήμμα 6.10.

6.6 Εισαγωγή Νευρωνικών Δικτύων στο Νόμο Ελέγχου

Στην συνέχεια θα εξετάσουμε την εισαγωγή νευρωνικών δικτύων στο νόμο ελέγχου που προτείνεται στο Λήμμα 6.11, ούτως ώστε να μπορεί να θεωρηθεί εντελώς άγνωστη η δυναμική των κινητών ρομπότ, δηλαδή οι πίνακες \hat{M} , \hat{V} , \hat{F} και $\hat{\tau}_d$. Σύμφωνα με το παραπάνω Λήμμα, η ροπή εισόδου λαμβάνει την μορφή

$$\tilde{\tau} = -k_3\tilde{e} + \underbrace{\hat{V}\tilde{v} + \hat{F} + \hat{\tau}_d + \hat{M}\dot{\tilde{v}}_c}_{(6.84)} \quad (6.84)$$

Αυτό το μέρος της εισόδου θα προσεγγιστεί από
Νευρωνικά Δίκτυα Υψηλότερης Τάξης
(Higher Order Neural Networks)

Από την Θεωρία Προσέγγισης, Θεώρημα 2.1, γνωρίζουμε ότι μπορούν να βρεθούν πίνακες και διανύσματα

$$W : 2nm \times 2n \quad (6.85)$$

$$S(z) : 2nm \times 1 \quad (6.86)$$

$$\epsilon : 2n \times 1 \quad (6.87)$$

τα οποία προσεγγίζουν τη δυναμική των ρομπότ σύμφωνα με την ακόλουθη εξίσωση

$$\hat{V}\tilde{v} + \hat{F} + \hat{\tau}_d + \hat{M}\dot{\tilde{v}}_c = W^T S(z) + \epsilon \quad (6.88)$$

Το διάνυσμα $S(z)$ αποτελείται από $2n$ διανύσματα $S_i(z)$, το μήκος των οποίων είναι m και εξαρτάται από την τάξη των HONN που θα χρησιμοποιηθούν. Καθώς έχουμε επιλέξει να κάνουμε χρήση Νευρωνικών Δικτύων Δευτέρας Τάξης, έπεται ότι, εν προκειμένω, θα είναι $m = 15$, όπως θα φανεί και στην αναλυτική περιγραφή του διανύσματος $S_i(z)$. Στην είσοδο $\tilde{\tau}$ όμως, θα χρησιμοποιήσουμε μία προσέγγιση της συνάρτησης (6.88), η οποία θα έχει την μορφή

$$\hat{W}^T S(z), \quad \hat{W} : 2nm \times 2n \quad (6.89)$$

Ο νόμος ελέγχου (6.84) θα τροποποιηθεί κατάλληλα έτσι ώστε να περιλαμβάνει τα νευρωνικά δίκτυα με τα οποία θα προσεγγιστεί η άγνωστη δυναμική, καθώς και έναν έξτρα όρο του σφάλματος ο οποίος αποσκοπεί στον περιορισμό της απόκλισης που θα εμφανιστεί λόγω της παρουσίας των νευρωνικών δικτύων. Ο όρος αυτός λειτουργεί ως sliding-mode control σε δύο διαστάσεις. Ως εκ τούτου, ο νόμος ελέγχου περιγράφεται από την εξίσωση

$$\tau_i = -k_3 e_i - k_4 \frac{e_i}{\|e_i\|} + \hat{W}_i^T ([1 \quad 1]^T \otimes S_i(z)) \quad (6.90)$$

και μπορεί να γραφεί σε συμπαγή μορφή ως ακολούθως

$$\tilde{\tau} = -k_3\tilde{e} - k_4 \text{SGN}(\tilde{e}) + \hat{W}^T S(z) \quad (6.91)$$

Το κέρδος k_4 αποτελεί μία θετική σταθερά το μέτρο της οποίας επιλέγεται ανάλογα με το μέγεθος της απόκλισης που εμφανίζεται, όπως θα φανεί στην πορεία της ανάλυσης.

Ορίζουμε την διαφορά μεταξύ της πραγματικής συνάρτησης (6.85) και της προσέγγισής της (6.89) ως

$$\tilde{W} = W - \hat{W} \quad \tilde{W} : 2nm \times 2n \quad (6.92)$$

Όσον αφορά τους πίνακες \hat{M} , \hat{V} , \hat{F} , $\hat{\tau}_d$ που εμφανίζονται στις σχέσεις (6.84) και (6.88) υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι

$$\hat{F} = 0 \quad \& \quad \hat{\tau}_d = 0 \quad (6.93)$$

Σε διαφορετική περίπτωση, αν αυτοί οι δύο όροι είναι άνω φραγμένοι σε νόρμα τότε η επίδραση τους μπορεί να εξαλειφθεί από τον robustness term $-k_4 SGN(\tilde{e})$ για αρκετά μεγάλο k_4 .

Ο πίνακας \hat{M} , όπως έχει οριστεί στην σχέση (6.57), αποτελεί ένα σταθερό θετικά ορισμένο πίνακα.

Ο πίνακας \hat{V} , όπως έχει οριστεί στην σχέση (6.58), εξαρτάται από την μεταβλητή θ και άρα από τις μεταβλητές v_R και v_L , αφού είναι $\theta = \frac{r}{2b}v_R - \frac{r}{2b}v_L$. Δηλαδή εξαρτάται από το διάνυσμα \tilde{v} , όπως έχει οριστεί στην σχέση (6.3).

Σύμφωνα με τα παραπάνω, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το διάνυσμα z θα εξαρτάται από τα διανύσματα \tilde{v} και $\dot{\tilde{v}}$, δηλαδή θα έχει την ακόλουθη μορφή

$$z = \begin{bmatrix} v_{1R} & v_{1L} & \dot{v}_{c1x} & \dot{v}_{c1y} & \cdot & \cdot & v_{nR} & v_{nL} & \dot{v}_{cnx} & \dot{v}_{cny} \end{bmatrix}^T \quad (6.94)$$

Σύμφωνα με τον ορισμό του, το $S(z)$ περιγράφεται από το ακόλουθο διάνυσμα

$$S(z) = \begin{bmatrix} S_1^T(z) & S_1^T(z) & S_2^T(z) & S_2^T(z) & \cdot & \cdot & S_n^T(z) & S_n^T(z) \end{bmatrix}^T \quad (6.95)$$

Βάσει της σχέσης (6.94) το διάνυσμα $S_i(z)$, όπου $i = 1, 2, \dots, n$, δομείται ως ακολούθως

$$S_i(z) = \begin{bmatrix} si_1 \\ si_2 \\ si_3 \\ si_4 \\ si_5 \\ si_6 \\ si_7 \\ si_8 \\ si_9 \\ si_{10} \\ si_{11} \\ si_{12} \\ si_{13} \\ si_{14} \\ si_{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \tanh(v_{iR}) \\ \tanh(v_{iL}) \\ \tanh(\dot{v}_{cix}) \\ \tanh(\dot{v}_{ciy}) \\ \tanh^2(v_{iR}) \\ \tanh(v_{iR}) \tanh(v_{iL}) \\ \tanh(v_{iR}) \tanh(\dot{v}_{cix}) \\ \tanh(v_{iR}) \tanh(\dot{v}_{ciy}) \\ \tanh^2(v_{iL}) \\ \tanh(v_{iL}) \tanh(\dot{v}_{cix}) \\ \tanh(v_{iL}) \tanh(\dot{v}_{ciy}) \\ \tanh^2(\dot{v}_{cix}) \\ \tanh(\dot{v}_{cix}) \tanh(\dot{v}_{ciy}) \\ \tanh^2(\dot{v}_{ciy}) \end{bmatrix} \quad (6.96)$$

Για λόγους πληρότητας παραθέτουμε αναλυτικά την μορφή που θα έχουν οι πίνακες \mathbf{W} , $\hat{\mathbf{W}}$ και $\tilde{\mathbf{W}}$.

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{1x} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} \\ \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{W}_{1y} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} \\ \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{W}_{2x} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} \\ \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{W}_{2y} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{W}_{nx} & \mathbf{0}_{m \times 1} \\ \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{W}_{ny} \end{bmatrix} \quad (6.97)$$

όπου τα $\mathbf{W}_{1x}, \mathbf{W}_{1y}, \dots, \mathbf{W}_{nx}, \mathbf{W}_{ny}$ αποτελούν σταθερά διανύσματα μεγέθους $m \times 1$.

$$\hat{\mathbf{W}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{W}}_{1x} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} \\ \mathbf{0}_{m \times 1} & \hat{\mathbf{W}}_{1y} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} \\ \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \hat{\mathbf{W}}_{2x} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} \\ \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \hat{\mathbf{W}}_{2y} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \cdot & \cdot & \cdot & \hat{\mathbf{W}}_{nx} & \mathbf{0}_{m \times 1} \\ \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{0}_{m \times 1} & \hat{\mathbf{W}}_{ny} \end{bmatrix} \quad (6.98)$$

όπου τα $\hat{\mathbf{W}}_{1x}, \hat{\mathbf{W}}_{1y}, \dots, \hat{\mathbf{W}}_{nx}, \hat{\mathbf{W}}_{ny}$ αποτελούν χρονικά μεταβαλλόμενα διανύσματα μεγέθους $m \times 1$.

$$\tilde{\mathbf{W}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{W}}_{1x} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} \\ \mathbf{0}_{m \times 1} & \tilde{\mathbf{W}}_{1y} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} \\ \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \tilde{\mathbf{W}}_{2x} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} \\ \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \tilde{\mathbf{W}}_{2y} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \cdot & \cdot & \cdot & \tilde{\mathbf{W}}_{nx} & \mathbf{0}_{m \times 1} \\ \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{0}_{m \times 1} & \tilde{\mathbf{W}}_{ny} \end{bmatrix} \quad (6.99)$$

όπου τα $\tilde{\mathbf{W}}_{1x}, \tilde{\mathbf{W}}_{1y}, \dots, \tilde{\mathbf{W}}_{nx}, \tilde{\mathbf{W}}_{ny}$ αποτελούν χρονικά μεταβαλλόμενα διανύσματα μεγέθους $m \times 1$.

Σύμφωνα με τους ορισμούς των πινάκων (6.96)-(6.98), τα διανύσματα $\mathbf{W}^T \mathbf{S}(z)$ και $\hat{\mathbf{W}}^T \mathbf{S}(z)$, μεγέθους $2n \times 1$, στην περίπτωση όπου $n = 5$ σχηματικά λαμβάνουν την μορφή του διαγράμματος νευρωνικών δικτύων που παρατίθεται στο Παράρτημα της εργασίας.

Όσον αφορά το διάνυσμα λάθους $\tilde{\mathbf{e}}$ θα έχει την επόμενη μορφή

$$\tilde{\mathbf{e}} = \left[e_{1R} \quad e_{1L} \quad e_{2R} \quad e_{2L} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad e_{nR} \quad e_{nL} \right]^T \quad (6.100)$$

Ορίζουμε ένα νέο πίνακα, έστω \mathbf{J} , διαστάσεων $(2n \times m) \times 2n$, ο οποίος δίνεται από την έκφραση

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{0}_{m \times 1} \\ \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{1}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{0}_{m \times 1} \\ \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{1}_{m \times 1} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{0}_{m \times 1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{1}_{m \times 1} \end{bmatrix} \quad (6.101)$$

Προχωράμε στον υπολογισμό του γινομένου $\mathbf{S}(\mathbf{z})\tilde{\mathbf{e}}^T \circ \mathbf{J}$, όπου ο δηλώνει το Hadamard product.

Λαμβάνοντας το γινόμενο των πινάκων (6.95) και (6.100) προκύπτει ότι

$$\mathbf{S}(\mathbf{z})\tilde{\mathbf{e}}^T = \begin{bmatrix} e_{1R}\mathbf{S}_1(\mathbf{z}) & e_{1L}\mathbf{S}_1(\mathbf{z}) & \cdot & \cdot & \cdot & e_{nR}\mathbf{S}_1(\mathbf{z}) & e_{nL}\mathbf{S}_1(\mathbf{z}) \\ e_{1R}\mathbf{S}_1(\mathbf{z}) & e_{1L}\mathbf{S}_1(\mathbf{z}) & \cdot & \cdot & \cdot & e_{nR}\mathbf{S}_1(\mathbf{z}) & e_{nL}\mathbf{S}_1(\mathbf{z}) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ e_{1R}\mathbf{S}_n(\mathbf{z}) & e_{1L}\mathbf{S}_n(\mathbf{z}) & \cdot & \cdot & \cdot & e_{nR}\mathbf{S}_n(\mathbf{z}) & e_{nL}\mathbf{S}_n(\mathbf{z}) \\ e_{1R}\mathbf{S}_n(\mathbf{z}) & e_{1L}\mathbf{S}_n(\mathbf{z}) & \cdot & \cdot & \cdot & e_{nR}\mathbf{S}_n(\mathbf{z}) & e_{nL}\mathbf{S}_n(\mathbf{z}) \end{bmatrix} \quad (6.102)$$

Έπειτα, υπολογίζοντας το γινόμενο των πινάκων (6.102) και (6.101) προκύπτει τελικά ότι

$$\mathbf{S}(\mathbf{z})\tilde{\mathbf{e}}^T \circ \mathbf{J} = \begin{bmatrix} e_{1R}\mathbf{S}_1(\mathbf{z}) & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} \\ \mathbf{0}_{m \times 1} & e_{1L}\mathbf{S}_1(\mathbf{z}) & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} \\ \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & e_{2R}\mathbf{S}_2(\mathbf{z}) & \mathbf{0}_{m \times 1} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} \\ \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & e_{2L}\mathbf{S}_2(\mathbf{z}) & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \cdot & \cdot & \cdot & e_{nR}\mathbf{S}_n(\mathbf{z}) & \mathbf{0}_{m \times 1} \\ \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_{m \times 1} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{0}_{m \times 1} & e_{nL}\mathbf{S}_n(\mathbf{z}) \end{bmatrix} \quad (6.103)$$

Βάσει των σχέσεων (6.95), (6.98), (6.100), (6.101), (6.102) και (6.103) ορίζουμε το $\hat{\mathbf{W}}$ έτσι ώστε να ικανοποιεί την ακόλουθη Διαφορική Εξίσωση (Update Law)

$$\dot{\hat{\mathbf{W}}} = -\gamma \left[\mathbf{S}(\mathbf{z})\tilde{\mathbf{e}}^T \circ \mathbf{J} + \sigma \hat{\mathbf{W}} \right] \quad (6.104)$$

Η παράμετρος γ που εμφανίζεται στο νόμο αναβάθμισης (6.104) ονομάζεται κέρδος προσαρμογής (adaptation gain), και είναι μία θετική σταθερά η οποία συμβάλει στην ταχύτητα της σύγκλισης του αλγορίθμου. Αντίστοιχα, η παράμετρος σ ονομάζεται παράγοντας ολίσθησης (drift factor) και ρόλος της είναι να κρατάει τα βάρη $\hat{\mathbf{W}}$ φραγμένα. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα

να βελτιώνει την ευστάθεια του συστήματος αλλά ταυτόχρονα να αυξάνει το σφάλμα. Ως εκ τούτου, για το σ επιλέγεται μία μικρή θετική τιμή.

Θεωρούμε την ακόλουθη μη αρνητική Lyapunov-like συνάρτηση

$$V_{NN} = V_\epsilon + tr \left\{ \frac{1}{2\gamma} \tilde{\mathbf{W}}^T \tilde{\mathbf{W}} \right\} = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{e}}^T \hat{\mathbf{M}} \tilde{\mathbf{e}} + tr \left\{ \frac{1}{2\gamma} \tilde{\mathbf{W}}^T \tilde{\mathbf{W}} \right\} \quad (6.105)$$

Παραγωγίζοντας την συνάρτηση (6.105) και κάνοντας χρήση της σχέσης (6.72) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \dot{V}_{NN} &= \dot{\tilde{\mathbf{e}}}^T \hat{\mathbf{M}} \tilde{\mathbf{e}} + tr \left\{ \frac{1}{\gamma} \tilde{\mathbf{W}}^T \dot{\tilde{\mathbf{W}}} \right\} \\ &= (\tilde{\boldsymbol{\tau}}_1 - \dot{\tilde{\mathbf{v}}}_c)^T \hat{\mathbf{M}} \tilde{\mathbf{e}} + tr \left\{ \frac{1}{\gamma} \tilde{\mathbf{W}}^T \dot{\tilde{\mathbf{W}}} \right\} \end{aligned} \quad (6.106)$$

Έπειτα, αντικαθιστώντας την σχέση (6.64) στην (6.106) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \dot{V}_{NN} &= \left(-\hat{\mathbf{M}}^{-1} (\hat{\mathbf{V}} \tilde{\mathbf{v}} + \hat{\mathbf{F}} + \hat{\boldsymbol{\tau}}_d) + \hat{\mathbf{M}}^{-1} \tilde{\boldsymbol{\tau}} - \dot{\tilde{\mathbf{v}}}_c \right)^T \hat{\mathbf{M}} \tilde{\mathbf{e}} + tr \left\{ \frac{1}{\gamma} \tilde{\mathbf{W}}^T \dot{\tilde{\mathbf{W}}} \right\} \\ &= (\tilde{\boldsymbol{\tau}} - (\hat{\mathbf{V}} \tilde{\mathbf{v}} + \hat{\mathbf{F}} + \hat{\boldsymbol{\tau}}_d + \hat{\mathbf{M}} \dot{\tilde{\mathbf{v}}}_c))^T (\hat{\mathbf{M}}^{-1})^T \hat{\mathbf{M}} \tilde{\mathbf{e}} + tr \left\{ \frac{1}{\gamma} \tilde{\mathbf{W}}^T \dot{\tilde{\mathbf{W}}} \right\} \end{aligned} \quad (6.107)$$

Από τις σχέσεις (6.88) και (6.91), η εξίσωση (6.107) τροποποιείται ως ακολούθως

$$\begin{aligned} \dot{V}_{NN} &= \left(-k_3 \tilde{\mathbf{e}} - k_4 \text{SGN}(\tilde{\mathbf{e}}) + \hat{\mathbf{W}}^T \mathbf{S}(\mathbf{z}) - (\mathbf{W}^T \mathbf{S}(\mathbf{z}) + \boldsymbol{\epsilon}) \right)^T \tilde{\mathbf{e}} + tr \left\{ \frac{1}{\gamma} \tilde{\mathbf{W}}^T \dot{\tilde{\mathbf{W}}} \right\} \\ &= -k_3 \tilde{\mathbf{e}}^T \tilde{\mathbf{e}} - k_4 (\text{SGN}(\tilde{\mathbf{e}}))^T \tilde{\mathbf{e}} - (\mathbf{W}^T \mathbf{S}(\mathbf{z}) - \hat{\mathbf{W}}^T \mathbf{S}(\mathbf{z}))^T \tilde{\mathbf{e}} - \boldsymbol{\epsilon}^T \tilde{\mathbf{e}} + tr \left\{ \frac{1}{\gamma} \tilde{\mathbf{W}}^T \dot{\tilde{\mathbf{W}}} \right\} \end{aligned} \quad (6.108)$$

Παρατηρούμε ότι, σύμφωνα με τον ορισμό της παραμέτρου SGN θα είναι

$$\begin{aligned} (\text{SGN}(\tilde{\mathbf{e}}))^T \tilde{\mathbf{e}} &= \sum_i \left\{ \left(\frac{\mathbf{e}_i}{\|\mathbf{e}_i\|} \right)^T \mathbf{e}_i \right\} = \sum_i \{ \|\mathbf{e}_i\| \} \geq \|\mathbf{e}\| \Rightarrow \\ &-(\text{SGN}(\tilde{\mathbf{e}}))^T \tilde{\mathbf{e}} \leq -\|\mathbf{e}\| \end{aligned} \quad (6.109)$$

Τέλος, κάνοντας χρήση των (6.92) και (6.109) στην (6.108) καταλήγουμε στην ανισότητα

$$\dot{V}_{NN} \leq -k_3 \|\tilde{\mathbf{e}}\|^2 - k_4 \|\mathbf{e}\| - \mathbf{S}^T(\mathbf{z}) \tilde{\mathbf{W}} \tilde{\mathbf{e}} - \boldsymbol{\epsilon}^T \tilde{\mathbf{e}} + tr \left\{ \frac{1}{\gamma} \tilde{\mathbf{W}}^T \dot{\tilde{\mathbf{W}}} \right\} \quad (6.110)$$

Προχωράμε στον υπολογισμό του γινομένου $\mathbf{S}^T(\mathbf{z}) \tilde{\mathbf{W}} \tilde{\mathbf{e}}$.

Λαμβάνοντας το γινόμενο των (6.95) και (6.99) προκύπτει ότι

$$\mathbf{S}^T(\mathbf{z}) \tilde{\mathbf{W}} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1^T(\mathbf{z}) \tilde{\mathbf{W}}_{1x} & \mathbf{S}_1^T(\mathbf{z}) \tilde{\mathbf{W}}_{1y} & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{S}_n^T(\mathbf{z}) \tilde{\mathbf{W}}_{nx} & \mathbf{S}_n^T(\mathbf{z}) \tilde{\mathbf{W}}_{ny} \end{bmatrix} \quad (6.111)$$

Πολλαπλασιάζοντας την (6.111) με την (6.100) παίρνουμε

$$\mathbf{S}^T(\mathbf{z}) \tilde{\mathbf{W}} \tilde{\mathbf{e}} = \mathbf{S}_1^T(\mathbf{z}) \tilde{\mathbf{W}}_{1x} e_{1R} + \mathbf{S}_1^T(\mathbf{z}) \tilde{\mathbf{W}}_{1y} e_{1L} + \dots + \mathbf{S}_n^T(\mathbf{z}) \tilde{\mathbf{W}}_{nx} e_{nR} + \mathbf{S}_n^T(\mathbf{z}) \tilde{\mathbf{W}}_{ny} e_{nL} \quad (6.112)$$

Έπειτα προχωράμε στον υπολογισμό του $tr \left\{ \frac{1}{\gamma} \tilde{\mathbf{W}}^T \dot{\tilde{\mathbf{W}}} \right\}$. Αρχικά παρατηρούμε ότι, καθώς είναι $\tilde{\mathbf{W}} = \mathbf{W} - \hat{\mathbf{W}}$ και ο πίνακας \mathbf{W} είναι σταθερός οπότε $\dot{\tilde{\mathbf{W}}} = \mathbf{0}$, έπεται ότι παραγωγίζοντας την σχέση (6.92) και αντικαθιστώντας την σχέση (6.104) θα λάβουμε

$$\dot{\tilde{\mathbf{W}}} = -\dot{\hat{\mathbf{W}}} = \gamma \left[\mathbf{S}(z) \tilde{\mathbf{e}}^T \circ \mathbf{J} + \sigma \hat{\mathbf{W}} \right] \quad (6.113)$$

Πολλαπλασιάζοντας τώρα την σχέση (6.113) με $\tilde{\mathbf{W}}$ παίρνουμε

$$\frac{1}{\gamma} \tilde{\mathbf{W}}^T \dot{\tilde{\mathbf{W}}} = \tilde{\mathbf{W}}^T \mathbf{S}(z) \tilde{\mathbf{e}}^T \circ \mathbf{J} + \sigma \tilde{\mathbf{W}}^T \hat{\mathbf{W}} \quad (6.114)$$

Από τις σχέσεις (6.99) και (6.103) προκύπτει ότι

$$\tilde{\mathbf{W}}^T \mathbf{S}(z) \tilde{\mathbf{e}}^T \circ \mathbf{J} = \quad (6.115)$$

$$\begin{bmatrix} e_{1R} \tilde{\mathbf{W}}_{1x}^T \mathbf{S}_1(z) & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & e_{1L} \tilde{\mathbf{W}}_{1y}^T \mathbf{S}_1(z) & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & e_{nR} \tilde{\mathbf{W}}_{nx}^T \mathbf{S}_n(z) & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & e_{nL} \tilde{\mathbf{W}}_{ny}^T \mathbf{S}_n(z) \end{bmatrix}$$

Επίσης οι σχέσεις (6.98) και (6.99) δίνουν

$$\tilde{\mathbf{W}}^T \hat{\mathbf{W}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{W}}_{1x}^T \hat{\mathbf{W}}_{1x} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\mathbf{W}}_{1y}^T \hat{\mathbf{W}}_{1y} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \tilde{\mathbf{W}}_{nx}^T \hat{\mathbf{W}}_{nx} & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \tilde{\mathbf{W}}_{ny}^T \hat{\mathbf{W}}_{ny} \end{bmatrix} \quad (6.116)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (6.115) και (6.116) στην (6.114) προκύπτει τελικά ότι

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\gamma} \tilde{\mathbf{W}}^T \dot{\tilde{\mathbf{W}}} = \tilde{\mathbf{W}}^T \mathbf{S}(z) \tilde{\mathbf{e}}^T \circ \mathbf{J} + \sigma \tilde{\mathbf{W}}^T \hat{\mathbf{W}} \\ = & \begin{bmatrix} e_{1R} \tilde{\mathbf{W}}_{1x}^T \mathbf{S}_1(z) + \sigma \tilde{\mathbf{W}}_{1x}^T \hat{\mathbf{W}}_{1x} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & e_{nL} \tilde{\mathbf{W}}_{ny}^T \mathbf{S}_n(z) + \sigma \tilde{\mathbf{W}}_{ny}^T \hat{\mathbf{W}}_{ny} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.117)$$

Λαμβάνοντας λοιπόν το $tr \left\{ \frac{1}{\gamma} \tilde{\mathbf{W}}^T \dot{\tilde{\mathbf{W}}} \right\}$ από την σχέση (6.6) παίρνουμε

$$tr \left\{ \frac{1}{\gamma} \tilde{\mathbf{W}}^T \dot{\tilde{\mathbf{W}}} \right\} = \sum_{i=1}^n \left\{ e_{iR} \tilde{\mathbf{W}}_{ix}^T \mathbf{S}_i(z) + \sigma \tilde{\mathbf{W}}_{ix}^T \hat{\mathbf{W}}_{ix} + e_{iL} \tilde{\mathbf{W}}_{iy}^T \mathbf{S}_i(z) + \sigma \tilde{\mathbf{W}}_{iy}^T \hat{\mathbf{W}}_{iy} \right\} \quad (6.118)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (6.112) και (6.118) στην (6.110) λαμβάνουμε ότι

$$\begin{aligned} \dot{V}_{NN} &\leq -k_3\|\tilde{e}\|^2 - k_4\|\tilde{e}\| - \epsilon^T \tilde{e} \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \left\{ S_i^T(z) \tilde{W}_{ix} e_{iR} + S_i^T(z) \tilde{W}_{iy} e_{iL} \right\} \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \left\{ e_{iR} \tilde{W}_{ix}^T S_i(z) + \sigma \tilde{W}_{ix}^T \hat{W}_{ix} + e_{iL} \tilde{W}_{iy}^T S_i(z) + \sigma \tilde{W}_{iy}^T \hat{W}_{iy} \right\} \end{aligned} \quad (6.119)$$

Επίσης, καθώς τα $S_i(z)$, \tilde{W}_{ix} , \tilde{W}_{iy} είναι διανύσματα μεγέθους $(m \times 1)$, προκύπτουν οι παρακάτω ισότητες

$$S_i^T(z) \tilde{W}_{ix} e_{iR} = e_{iR} \tilde{W}_{ix}^T S_i(z) \quad (6.120)$$

$$S_i^T(z) \tilde{W}_{iy} e_{iL} = e_{iL} \tilde{W}_{iy}^T S_i(z) \quad (6.121)$$

Με βάση την σχέση (6.119) και λαμβάνοντας υπόψιν τις ισότητες (6.120) και (6.121) συνεπάγεται ότι

$$\dot{V}_{NN} \leq -k_3\|\tilde{e}\|^2 - k_4\|\tilde{e}\| - \epsilon^T \tilde{e} + \sum_{i=1}^n \left\{ \sigma \tilde{W}_{ix}^T \hat{W}_{ix} + \sigma \tilde{W}_{iy}^T \hat{W}_{iy} \right\} \quad (6.122)$$

Πρωτού αναλύσουμε περισσότερο την σχέση (6.122), βασιζόμενοι στην εξίσωση (6.92) παρατηρούμε ότι το γινόμενο $\tilde{W}_{ix}^T \hat{W}_{ix}$ μπορεί να τροποποιηθεί όπως φαίνεται παρακάτω

$$\begin{aligned} \tilde{W}_{ix}^T \hat{W}_{ix} &= \tilde{W}_{ix}^T (W_{ix} - \tilde{W}_{ix}) \\ &= \frac{1}{2} (\tilde{W}_{ix} + \tilde{W}_{ix})^T (W_{ix} - \tilde{W}_{ix}) \\ &= \frac{1}{2} \left[\tilde{W}_{ix} + (W_{ix} - \hat{W}_{ix}) \right]^T (W_{ix} - \tilde{W}_{ix}) \\ &= \frac{1}{2} \left[\tilde{W}_{ix}^T W_{ix} - \tilde{W}_{ix}^T \tilde{W}_{ix} + W_{ix}^T W_{ix} - W_{ix}^T \tilde{W}_{ix} - \hat{W}_{ix}^T W_{ix} + \hat{W}_{ix}^T \tilde{W}_{ix} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[-\tilde{W}_{ix}^T \tilde{W}_{ix} + W_{ix}^T W_{ix} - \hat{W}_{ix}^T (W_{ix} - \tilde{W}_{ix}) \right] \end{aligned} \quad (6.123)$$

Έτσι, η σχέση (6.123) δίνει τελικά ότι

$$\tilde{W}_{ix}^T \hat{W}_{ix} = \frac{1}{2} \left[-\tilde{W}_{ix}^T \tilde{W}_{ix} + W_{ix}^T W_{ix} - \hat{W}_{ix}^T \tilde{W}_{ix} \right] \quad (6.124)$$

Αντίστοιχη σχέση θα ισχύει και για το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων \tilde{W}_{iy} και \hat{W}_{iy}

$$\tilde{W}_{iy}^T \hat{W}_{iy} = \frac{1}{2} \left[-\tilde{W}_{iy}^T \tilde{W}_{iy} + W_{iy}^T W_{iy} - \hat{W}_{iy}^T \tilde{W}_{iy} \right] \quad (6.125)$$

Λαμβάνοντας υπόψιν τις σχέσεις (6.124) και (6.125), η (6.122) γράφεται

$$\begin{aligned} \dot{V}_{NN} &\leq -k_3\|\tilde{e}\|^2 - k_4\|\tilde{e}\| - \epsilon^T \tilde{e} + \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\sigma}{2} \left[-\tilde{W}_{ix}^T \tilde{W}_{ix} + W_{ix}^T W_{ix} - \hat{W}_{ix}^T \tilde{W}_{ix} \right] \right\} \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\sigma}{2} \left[-\tilde{W}_{iy}^T \tilde{W}_{iy} + W_{iy}^T W_{iy} - \hat{W}_{iy}^T \tilde{W}_{iy} \right] \right\} \end{aligned} \quad (6.126)$$

Αναδιατάσσοντας την (6.126) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \dot{V}_{NN} \leq & -k_3 \|\tilde{\mathbf{e}}\|^2 - k_4 \|\tilde{\mathbf{e}}\| - \boldsymbol{\epsilon}^T \tilde{\mathbf{e}} + \sum_{i=1}^n \left\{ -\frac{\sigma}{2} \left[\tilde{\mathbf{W}}_{1x}^T \tilde{\mathbf{W}}_{1x} + \tilde{\mathbf{W}}_{1y}^T \tilde{\mathbf{W}}_{1y} \right] \right\} \\ & + \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\sigma}{2} \left[\mathbf{W}_{1x}^T \mathbf{W}_{1x} + \mathbf{W}_{1y}^T \mathbf{W}_{1y} \right] - \frac{\sigma}{2} \left[\hat{\mathbf{W}}_{1x}^T \hat{\mathbf{W}}_{1x} + \hat{\mathbf{W}}_{1y}^T \hat{\mathbf{W}}_{1y} \right] \right\} \end{aligned} \quad (6.127)$$

Λαμβάνοντας υπόψιν τον ορισμό του $tr \{ \tilde{\mathbf{W}}^T \tilde{\mathbf{W}} \}$, η (6.127) γίνεται

$$\dot{V}_{NN} \leq -k_3 \|\tilde{\mathbf{e}}\|^2 - \boldsymbol{\epsilon}^T \tilde{\mathbf{e}} - \frac{\sigma}{2} tr \{ \tilde{\mathbf{W}}^T \tilde{\mathbf{W}} \} + \frac{\sigma}{2} tr \{ \mathbf{W}^T \mathbf{W} \} - \frac{\sigma}{2} tr \{ \hat{\mathbf{W}}^T \hat{\mathbf{W}} \} \quad (6.128)$$

Η (6.128) άνω φράσσεται από την συνάρτηση

$$\begin{aligned} \dot{V}_{NN} \leq & -k_3 \|\tilde{\mathbf{e}}\|^2 - k_4 \|\tilde{\mathbf{e}}\| + \|\boldsymbol{\epsilon}\| \|\tilde{\mathbf{e}}\| - \frac{\sigma}{2} tr \{ \tilde{\mathbf{W}}^T \tilde{\mathbf{W}} \} + \frac{\sigma}{2} tr \{ \mathbf{W}^T \mathbf{W} \} \\ \leq & -k_3 \|\tilde{\mathbf{e}}\|^2 - \|\tilde{\mathbf{e}}\| (k_4 - \|\boldsymbol{\epsilon}\|) - \frac{\sigma}{2} tr \{ \tilde{\mathbf{W}}^T \tilde{\mathbf{W}} \} + \frac{\sigma}{2} tr \{ \mathbf{W}^T \mathbf{W} \} \end{aligned} \quad (6.129)$$

Επιλέγοντας το κέρδος k_4 έτσι ώστε να ικανοποιεί την συνθήκη $k_4 \geq \|\boldsymbol{\epsilon}\|$ καταφέρνουμε να ανατρέσουμε την απόκλιση $\boldsymbol{\epsilon}$, όπως γίνεται φανερό από την σχέση (6.129). Ως εκ τούτου καταλήγουμε στην παρακάτω ανισότητα, η οποία περιγράφει το άνω φράγμα της παραγώγου της συνάρτησης τύπου-Lyapunov V_{NN}

$$\dot{V}_{NN} \leq -k_3 \|\tilde{\mathbf{e}}\|^2 - \frac{\sigma}{2} tr \{ \tilde{\mathbf{W}}^T \tilde{\mathbf{W}} \} + \frac{\sigma}{2} tr \{ \mathbf{W}^T \mathbf{W} \}$$

Υπενθυμίζουμε ότι η συνάρτηση V_{NN} έχει οριστεί στην σχέση (6.105) ως ακολούθως

$$V_{NN} = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{e}}^T \hat{\mathbf{M}} \tilde{\mathbf{e}} + tr \left\{ \frac{1}{2\gamma} \tilde{\mathbf{W}}^T \tilde{\mathbf{W}} \right\} \quad (6.130)$$

Οπότε, η (6.130) ισοδύναμα γράφεται

$$\dot{V}_{NN} \leq -\frac{2k_3}{\lambda_{max}(\hat{\mathbf{M}})} \left(\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{e}}^T \hat{\mathbf{M}} \tilde{\mathbf{e}} \right) - \sigma\gamma \left(tr \left\{ \frac{1}{2\gamma} \tilde{\mathbf{W}}^T \tilde{\mathbf{W}} \right\} \right) + \frac{\sigma}{2} tr \{ \mathbf{W}^T \mathbf{W} \} \quad (6.131)$$

Θεωρώντας μία νέα σταθερά Λ η οποία να ικανοποιεί τη συνθήκη

$$0 < \Lambda \leq \min \left\{ \frac{2k_3}{\lambda_{max}(\hat{\mathbf{M}})}, \sigma\gamma \right\} \quad (6.132)$$

και αντικαθιστώντας την στην ανισότητα, η (6.131) γράφεται

$$\dot{V}_{NN} \leq -\Lambda \left(\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{e}}^T \hat{\mathbf{M}} \tilde{\mathbf{e}} \right) - \Lambda \left(tr \left\{ \frac{1}{2\gamma} \tilde{\mathbf{W}}^T \tilde{\mathbf{W}} \right\} \right) + \frac{\sigma}{2} tr \{ \mathbf{W}^T \mathbf{W} \} \quad (6.133)$$

Ορίζουμε μία νέα σταθερά G σύμφωνα με την σχέση

$$G = \frac{\sigma}{2} tr \{ \mathbf{W}^T \mathbf{W} \} \quad (6.134)$$

Τελικά, οι σχέσεις (6.133) και (6.134) μας δίνουν την ανισότητα σύμφωνα με την οποία συνδέονται οι συναρτήσεις V_{NN} και \dot{V}_{NN}

$$\dot{V}_{NN} \leq -\Lambda V_{NN} + G \quad (6.135)$$

Εφαρμόζοντας το Λήμμα 2.4 στην ανισότητα (6.135), προκύπτει ότι το όριο στο άπειρο της Lyapunov-like συνάρτησης V_{NN} εμφανίζει άνω φράγμα

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V_{NN}(t) \leq \frac{G}{\Lambda} \quad (6.136)$$

Από την σχέση (6.105) προκύπτει ότι

$$\frac{1}{2} \tilde{e}^T \hat{M} \tilde{e} \leq V_{NN} \quad (6.137)$$

Ισοδύναμα

$$\frac{\lambda_{\min}(\hat{M})}{2} \|\tilde{e}\|^2 \leq V_{NN} \Rightarrow \|\tilde{e}\| \leq \sqrt{\frac{2}{\lambda_{\min}(\hat{M})} V_{NN}} \quad (6.138)$$

Τέλος, παίρνοντας το όριο στο άπειρο της ανισότητας (6.138), και δεδομένης της (6.136), προκύπτει ότι

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{e}(t)\| \leq \sqrt{\frac{2}{\lambda_{\min}(\hat{M})} \frac{G}{\Lambda}} \quad (6.139)$$

Δηλαδή, προΐόντος του χρόνου, το σφάλμα των ταχυτήτων θα εγκλωβιστεί σε μία μικρή περιοχή γύρω από το μηδέν, το μέγεθος της οποίας θα εξαρτάται από την σχέση των ποσοτήτων G και Λ . Ως εκ τούτου, η ταχύτητα \tilde{u} θα πλησιάσει πολύ την επιθυμητή \tilde{u}_e , διατηρώντας ωστόσο μία μικρή απόκλιση από αυτήν.

Στην συνέχεια διατυπώνεται το Λήμμα που συγκεντρώνει όλες τις ιδέες που αναπτύχθηκαν για το πρόβλημα συνεργατικού ελέγχου που εξετάστηκε στο παρόν κεφάλαιο.

Λήμμα 6.12. Έστω ένα πολυπρακτορικό σύστημα αποτελούμενο από κινητά ρομπότ διαφορικής οδήγησης. Προκειμένου να εκτελέσουν *Leader-Follower Formation*, αποφεύγοντας παράλληλα τις συγκρούσεις, ορίζουμε τον μετασχηματισμό

$$\tilde{\mathbf{z}} = -\hat{\mathbf{L}}\tilde{\mathbf{q}} - \hat{\mathbf{R}}(\tilde{\mathbf{q}} - \tilde{\mathbf{q}}_0)$$

καθώς και τα δυναμικά

$$V_{CAF} = \sum_i \sum_j \left[\frac{1}{\|\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_j^*\| - r_{ij}} \right]_{\frac{1}{\varepsilon - r_{ij}}}^4 \quad \& \quad V_{CAL} = \sum_i \left[\frac{1}{\|\mathbf{q}_i^* - \mathbf{q}_0\| - r_{i0}} \right]_{\frac{1}{\varepsilon - r_{i0}}}^4$$

Δοθέντος του συστήματος δυναμικών εξισώσεων που περιγράφουν την κινηματική και δυναμική των ρομπότ διαφορικής οδήγησης

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{z}}} &= -(\hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{R}})[\hat{\mathbf{S}}\tilde{\mathbf{v}} - \tilde{\mathbf{v}}_0] \\ \dot{\tilde{\mathbf{v}}} &= -\hat{\mathbf{M}}^{-1}[\hat{\mathbf{V}}\tilde{\mathbf{v}} + \hat{\mathbf{F}} + \hat{\boldsymbol{\tau}}_d] + \hat{\mathbf{M}}^{-1}\tilde{\boldsymbol{\tau}} \end{aligned}$$

αν στο παραπάνω σύστημα χρησιμοποιηθεί ο ακόλουθος νόμος ελέγχου

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\tau}} &= -k_3\tilde{\mathbf{e}} - k_4\text{SGN}(\tilde{\mathbf{e}}) + \hat{\mathbf{W}}^T\mathbf{S}(z) \\ \tilde{\mathbf{e}} &= \tilde{\mathbf{v}} - \tilde{\mathbf{v}}_c \\ k_3 &> 0 \quad \& \quad k_4 \geq \|\boldsymbol{\epsilon}\| \end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{v}}_c &= \hat{\mathbf{S}}^{-1} \left(k_1(\tilde{\mathbf{z}} + \hat{\mathbf{N}}_F + \hat{\mathbf{N}}_L) + k_2\text{SGN}(\tilde{\mathbf{z}} + \hat{\mathbf{N}}_F + \hat{\mathbf{N}}_L) \right) \\ k_1 &> 0 \quad \& \quad k_2 \geq \sup\{\|\mathbf{v}_0\|\} \end{aligned}$$

με νόμο προσαρμογής (*update law*) των νευρωνικών δικτύων (*HONN*)

$$\dot{\hat{\mathbf{W}}} = -\gamma \left[\mathbf{S}(z)\tilde{\mathbf{e}}^T \circ \mathbf{J} + \sigma\hat{\mathbf{W}} \right] \quad \gamma, \sigma > 0$$

και ο γράφος επικοινωνίας είναι γεννητικό δέντρο με ρίζα τον ηγέτη, τότε το σφάλμα ταχύτητας, άρα και ο μετασχηματισμός $\tilde{\mathbf{z}}$, με την πάροδο του χρόνου θα συγκλίνουν σε μία περιοχή κοντά στην αρχή. Δηλαδή θα είναι

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{\mathbf{e}}(t)\| \leq \sqrt{\frac{2}{\lambda_{\min}(\hat{\mathbf{M}})} \frac{G}{\Lambda}}$$

όπου

$$\begin{aligned} G &= \frac{\sigma}{2} \sum_i (\|\mathbf{W}_{ix}\|^2 + \|\mathbf{W}_{iy}\|^2) \\ \Lambda &\in \left(0, \min \left\{ \frac{2k_2}{\lambda_{\max}(\hat{\mathbf{M}})}, \sigma\gamma \right\} \right) \end{aligned}$$

που συνεπάγεται *Leader-Follower Formation* με αποφυγή συγκρούσεων.

Κεφάλαιο 7

Αποτελέσματα Προσομοιώσεων Κεφαλαίου 6

Στο παρόν κεφάλαιο γίνεται παρουσίαση και ανάλυση των αποτελεσμάτων των προσομοιώσεων που υλοποιήθηκαν για το πρόβλημα ελέγχου του κεφαλαίου 5. Οι προσομοιώσεις έγιναν σε περιβάλλον Simulink, ενώ η οπτικοποίηση των αποτελεσμάτων έγινε σε περιβάλλον Matlab.

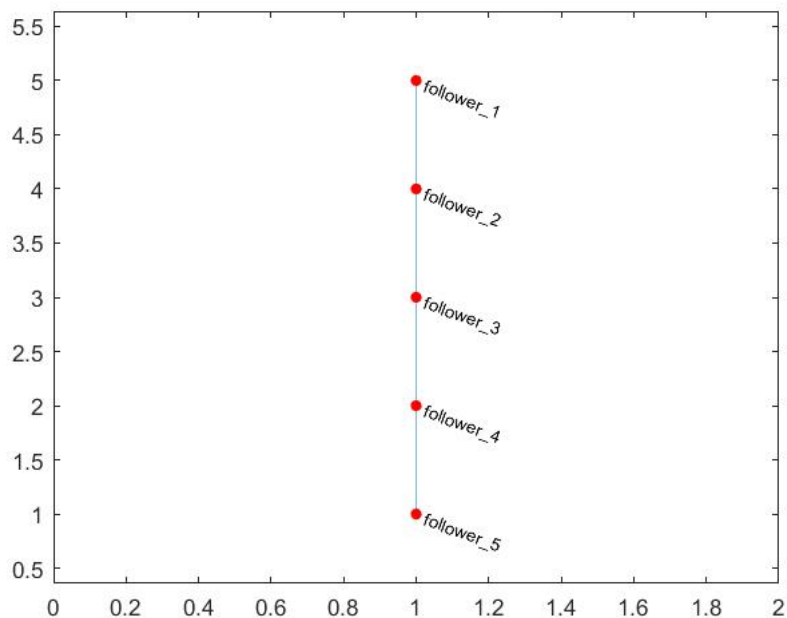
Το πολυπρακτορικό σύστημα που εξετάστηκε περιλαμβάνει ένα όχημα-ηγέτη και πέντε οχήματα-ακόλουθους. Σημειώνεται ότι όλα τα οχήματα αποτελούν κινητά ρομπότ διαφορικής οδήγησης. Η ορθότητα του προσαρμοστικού αλγορίθμου που προτάθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο επαληθεύεται για 3 διαφορετικές συνδεσμολογίες των ακόλουθων, δηλαδή για 3 διαφορετικούς μη κατευθυνόμενους γράφους που περιγράφουν την επικοινωνία μεταξύ των ακόλουθων. Επίσης, σε κάθε μία από τις 3 περιπτώσεις οι ακόλουθοι καλούνται να λάβουν διαφορετικό σχηματισμό διάταξης. Ο ηγέτης σε κάθε περίπτωση θεωρείται ότι έχει άμεση επικοινωνία μόνο με έναν ακόλουθο έτσι ώστε να εξετάζεται το “χειρότερο” σενάριο.

Στον επόμενο πίνακα παραθέτονται όλες εκείνες οι παράμετροι οι οποίες αρχικοποιούνται κατάλληλα για την ομαλή λειτουργία της εκάστοτε προσομοίωσης.

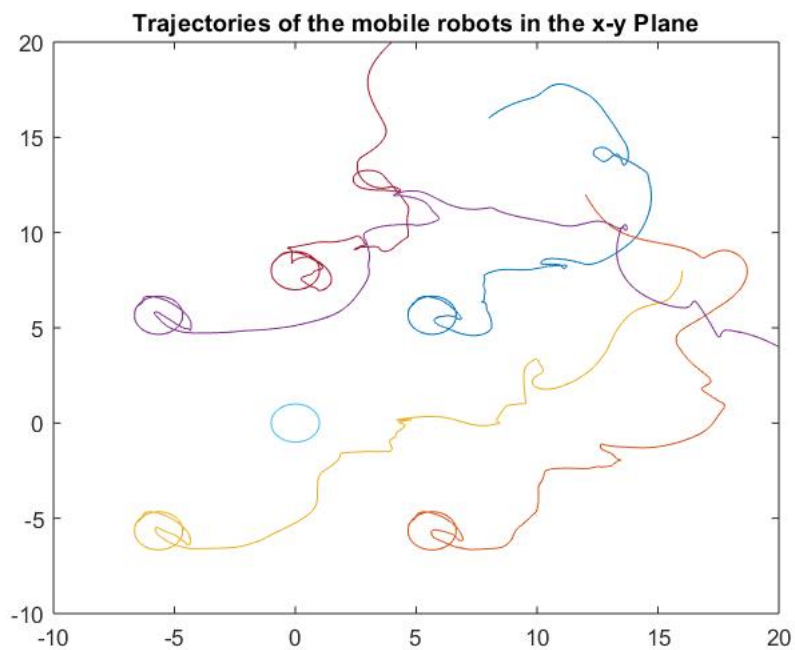
Παράμετροι Προσομοιώσεων

k_1, k_2	:	κέρδη της ταχύτητας εισόδου
k_3, k_4	:	κέρδη της ροπής εισόδου
ε	:	κατώφλι ενεργοποίησης των δυναμικών αποφυγής συγκρούσεων
r_0	:	ακτίνα του κύκλου που αντιστοιχεί στον ηγέτη
\mathbf{r}	:	διάνυσμα των ακτίνων των κύκλων που αντιστοιχούν στους ακόλουθους
γ	:	κέρδος προσαρμογής του νόμου αναβάθμισης των <i>HONN</i>
σ	:	παράγοντας ολίσθησης του νόμου αναβάθμισης των <i>HONN</i>
$\mathbf{q}_0(0)$:	διάνυσμα αρχικής θέσης του ηγέτη
$\mathbf{q}^*(0)$:	διάνυσμα αρχικών θέσεων του συνόλου των ακόλουθων
\mathbf{a}	:	σταθερό διάνυσμα που καθορίζει την διάταξη που θα λάβει το σύστημα

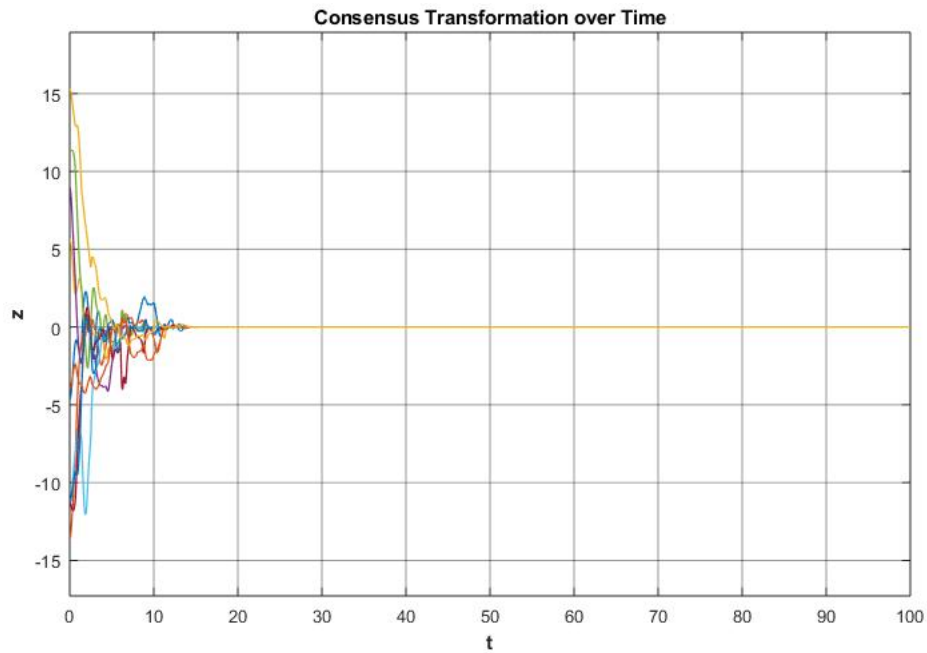
7.1 Πρώτη Συνδεσμολογία Πρακτόρων



Σχήμα 7.1: Συνεκτικός Μη Κατευθυνόμενος Γράφος των Ακόλουθων



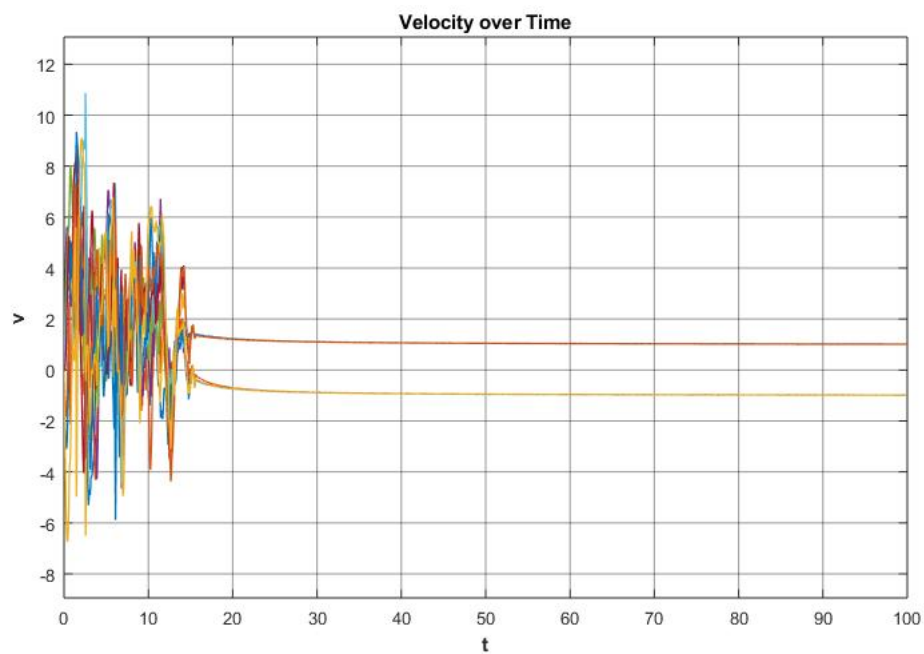
Σχήμα 7.2: Τροχιές των Οχημάτων στο $x - y$ επίπεδο



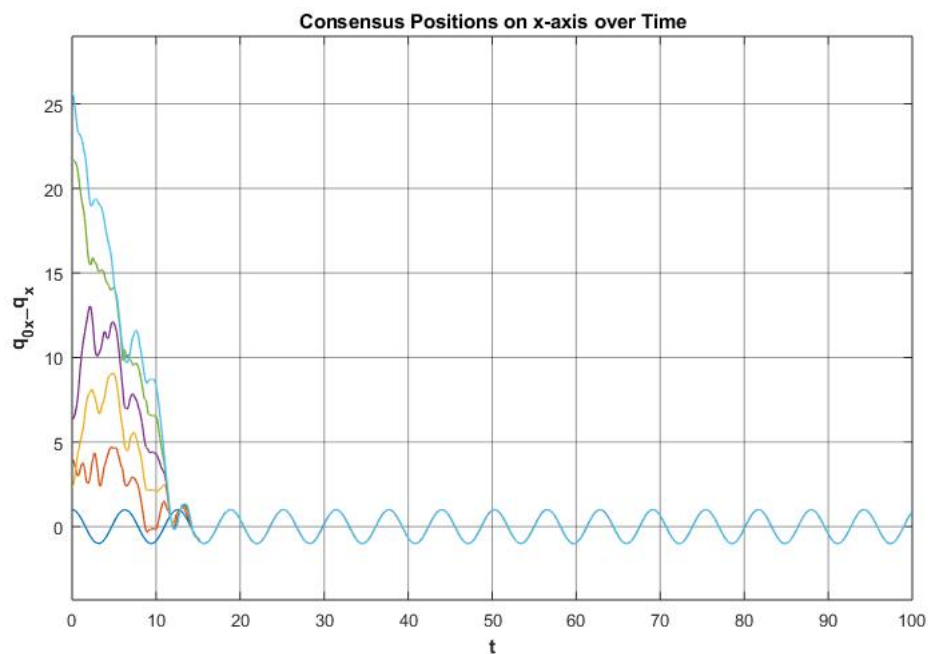
Σχήμα 7.3: Χρονική μεταβολή του διανύσματος μετασχηματισμών συμφωνίας των πρακτόρων

$$k_1 = 0.1 \quad k_2 = 5 \quad k_3 = 5 \quad k_4 = 20 \quad \varepsilon = 4 \quad r_0 = 2 \quad \gamma = 1 \quad \sigma = 0.001$$

$$r = \begin{bmatrix} 1 & 1.5 & 0.5 & 1 & 1.5 \end{bmatrix} \quad q_0(0) = [1 \quad 0]$$



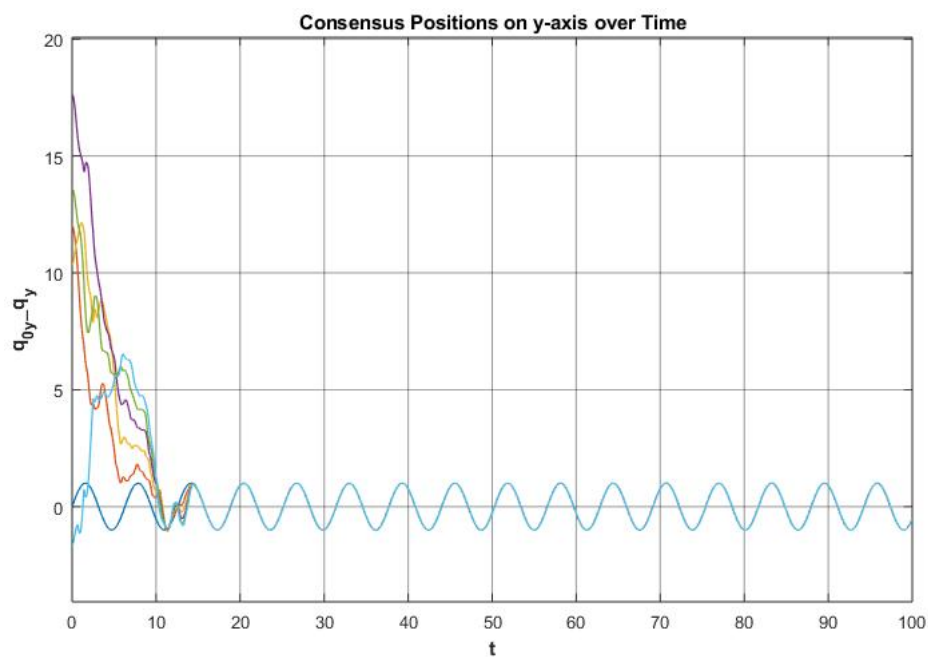
Σχήμα 7.4: Χρονική μεταβολή του διανύσματος ταχυτήτων των πρακτόρων



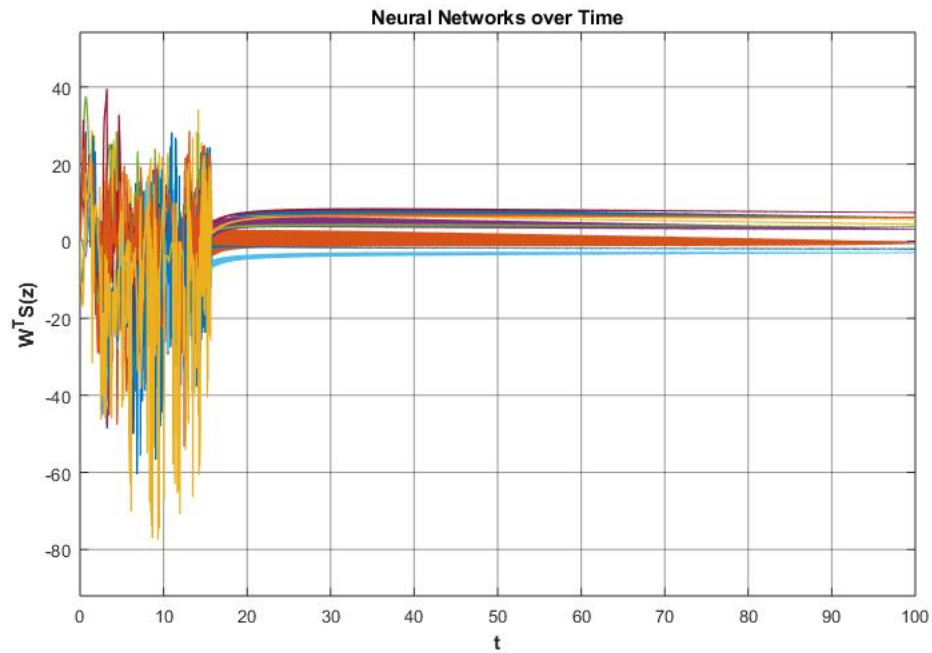
Σχήμα 7.5: Χρονική μεταβολή του διανύσματος θέσεων συμφωνίας των πρακτόρων κατά τον x -άξονα

$$q^*(0) = \begin{bmatrix} 4 & 20 & 8 & 16 & 12 & 12 & 16 & 8 & 20 & 4 \end{bmatrix}$$

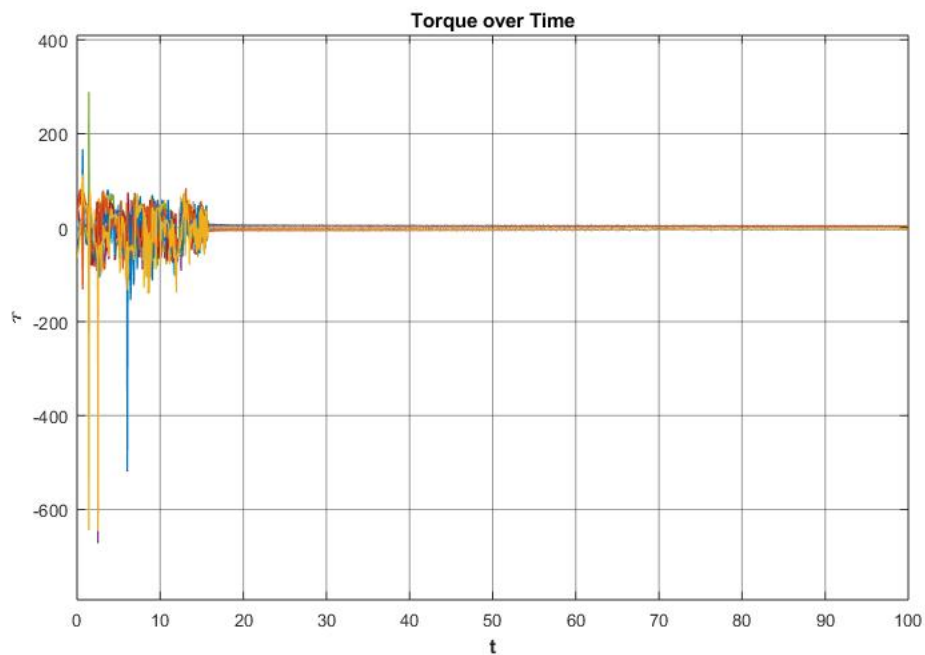
$$a = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 4\sqrt{2} & 4\sqrt{2} & 4\sqrt{2} & -4\sqrt{2} & -4\sqrt{2} & -4\sqrt{2} & -4\sqrt{2} & 4\sqrt{2} \end{bmatrix}$$



Σχήμα 7.6: Χρονική μεταβολή του διανύσματος θέσεων συμφωνίας των πρακτόρων κατά τον y -άξονα

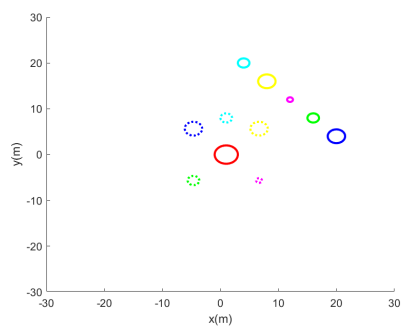
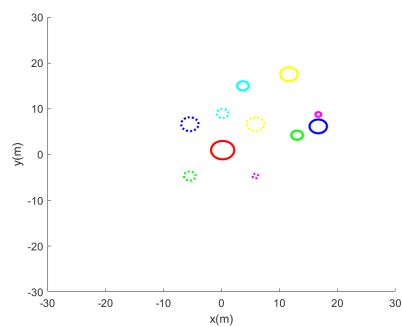
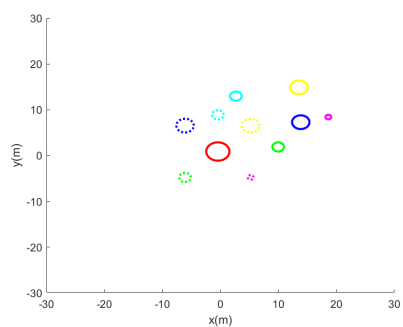
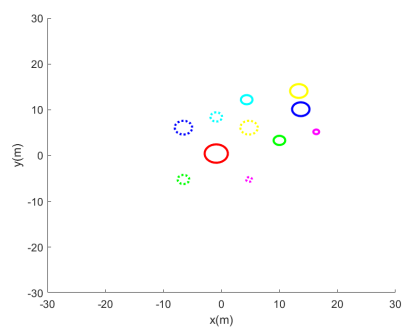
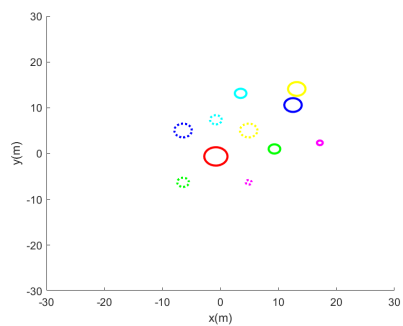
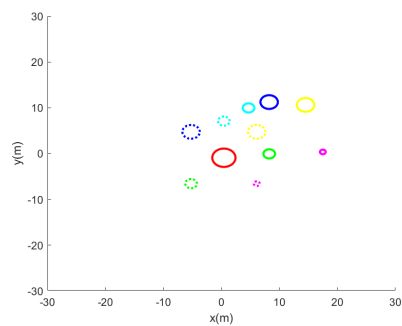
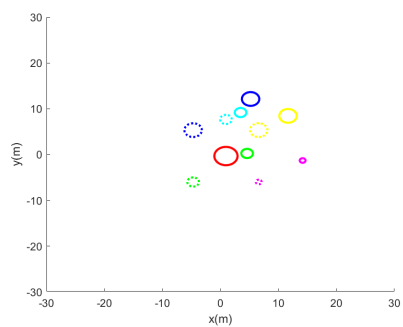
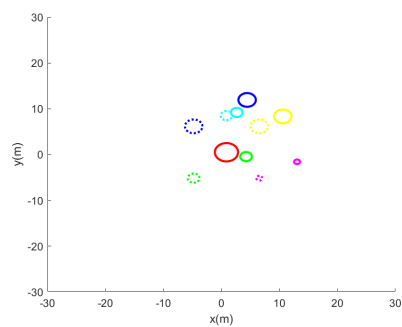


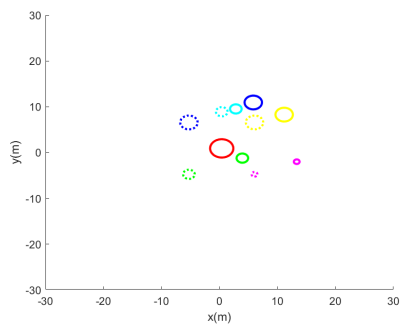
Σχήμα 7.7: Χρονική μεταβολή του διανύσματος των νευρωνικών δικτύων



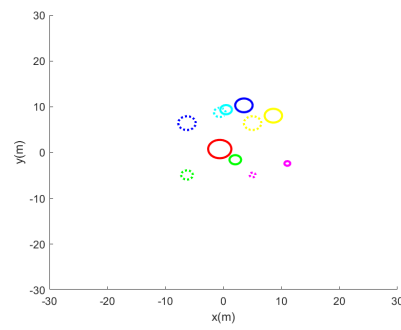
Σχήμα 7.8: Χρονική μεταβολή του διανύσματος ροπών των πρακτόρων

Ακολούθως παραθέτονται στιγμιότυπα από την κίνηση των οχημάτων. Σημειώνεται ότι ο πράκτορας που αντιστοιχεί στον ηγέτη εμφανίζεται με κόκκινο χρώμα. Επίσης, με συνεχόμενη γραμμή περιγράφονται οι πραγματικές θέσεις των πρακτόρων κάθε χρονική στιγμή και με διακεκομμένη γραμμή οι επιθυμητές θέσεις που καλούνται να λάβουν ιδανικά. Τέλος, τα οχήματα λαμβάνουν τα σχήματα κύκλων, οι ακτίνες των οποίων καθορίζονται από το διάνυσμα r .

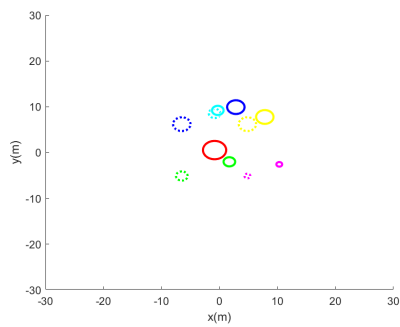
 $t = 0$  $t = 1.3606$  $t = 2.0369$  $t = 2.6830$  $t = 3.8045$  $t = 5.1450$  $t = 5.9549$  $t = 6.8150$



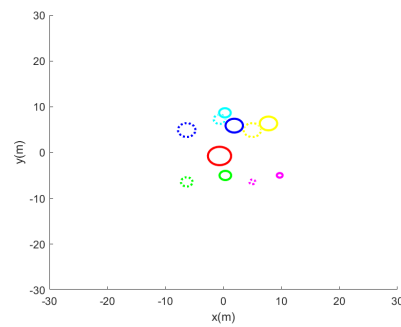
$t = 7.4501$



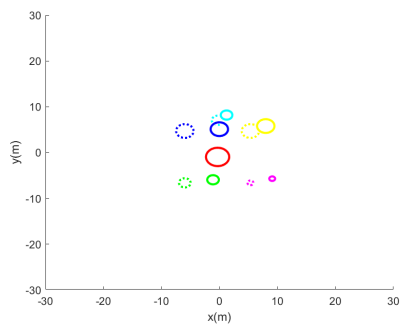
$t = 8.5414$



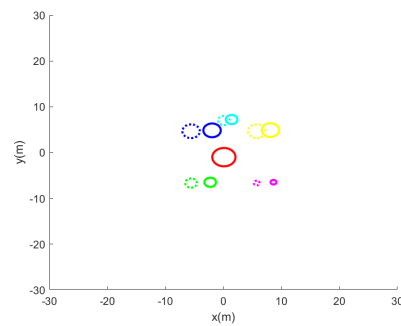
$t = 8.8460$



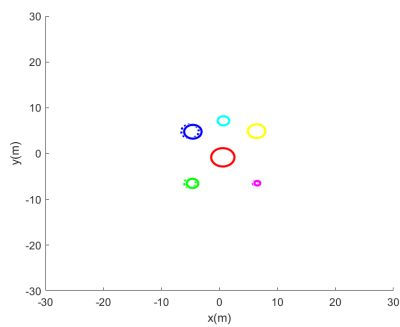
$t = 10.2530$



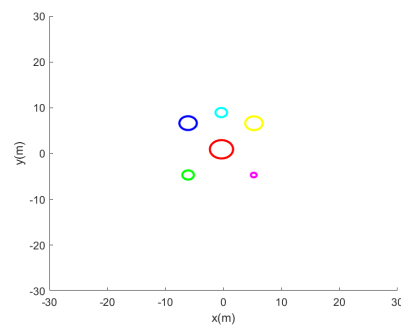
$t = 10.6727$



$t = 11.0692$

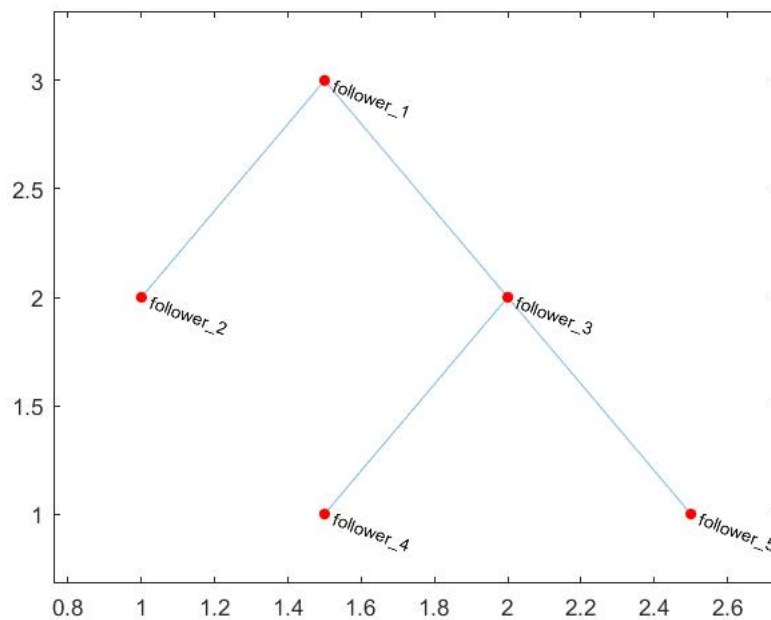


$t = 11.6161$

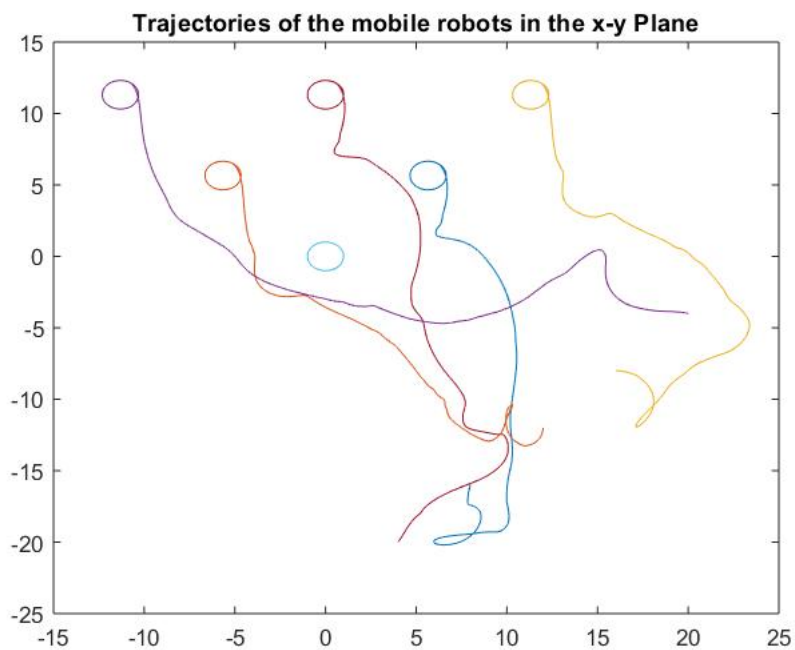


$t = 14.4842$

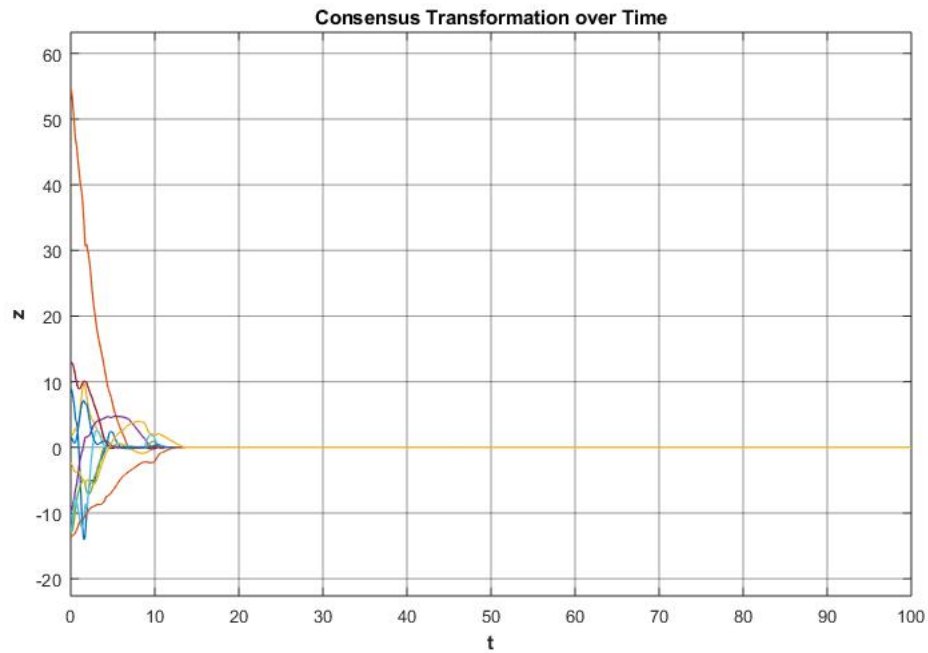
7.2 Δεύτερη Συνδεσμολογία Πρακτόρων



Σχήμα 7.9: Συνεκτικός Μη Κατευθυνόμενος Γράφος των Ακόλουθων



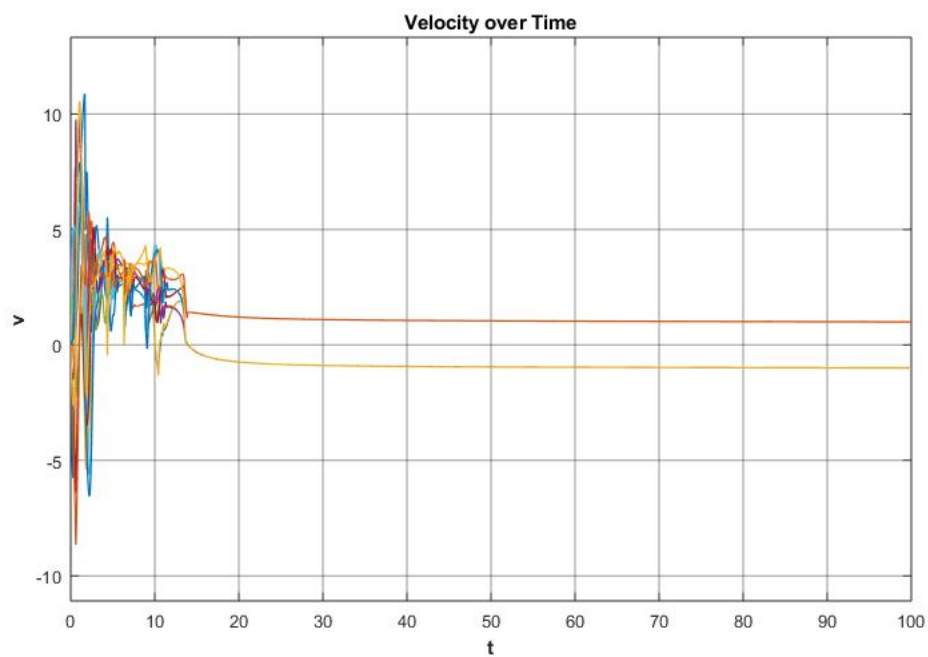
Σχήμα 7.10: Τροχιές των Οχημάτων στο $x - y$ επίπεδο



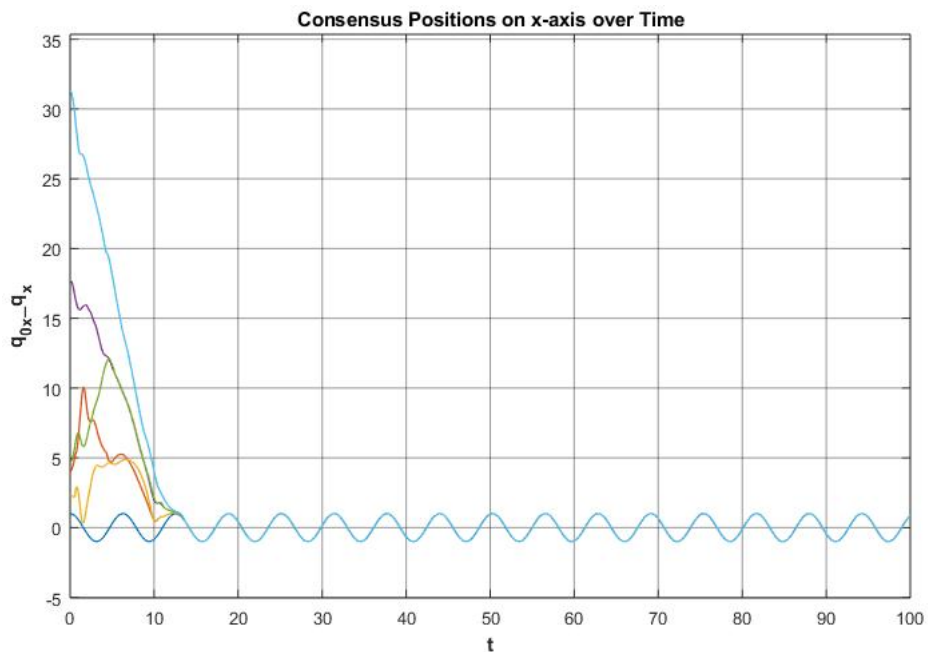
Σχήμα 7.11: Χρονική μεταβολή του διανύσματος μετασχηματισμών συμφωνίας των πρακτόρων

$$k_1 = 0.1 \quad k_2 = 3 \quad k_3 = 10 \quad k_4 = 20 \quad \varepsilon = 4 \quad r_0 = 2 \quad \gamma = 1 \quad \sigma = 0.001$$

$$r = \begin{bmatrix} 1 & 1.5 & 0.5 & 1 & 1.5 \end{bmatrix} \quad q_0(0) = [1 \quad 0]$$



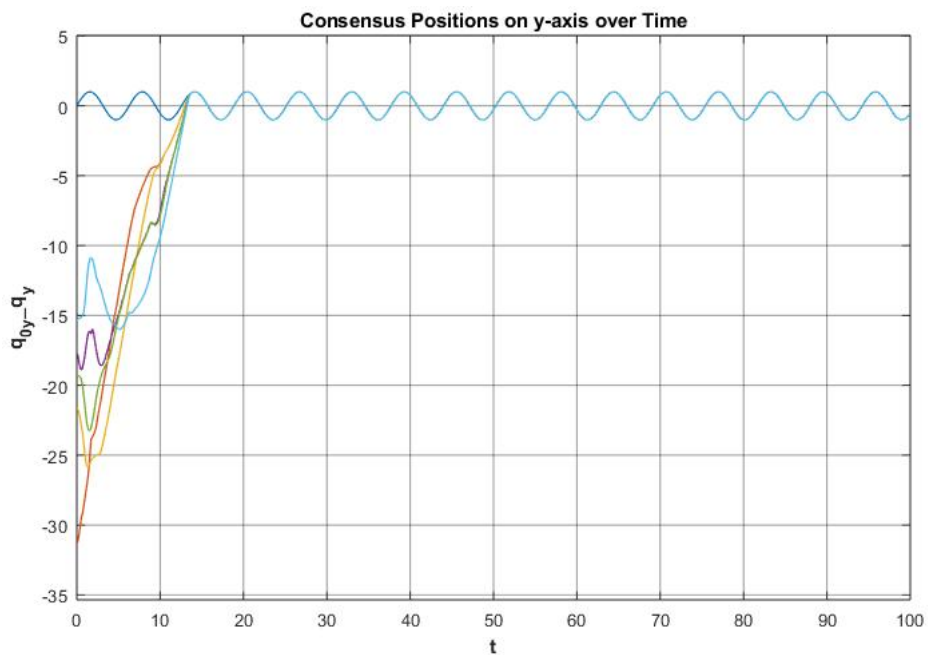
Σχήμα 7.12: Χρονική μεταβολή του διανύσματος ταχυτήτων των πρακτόρων



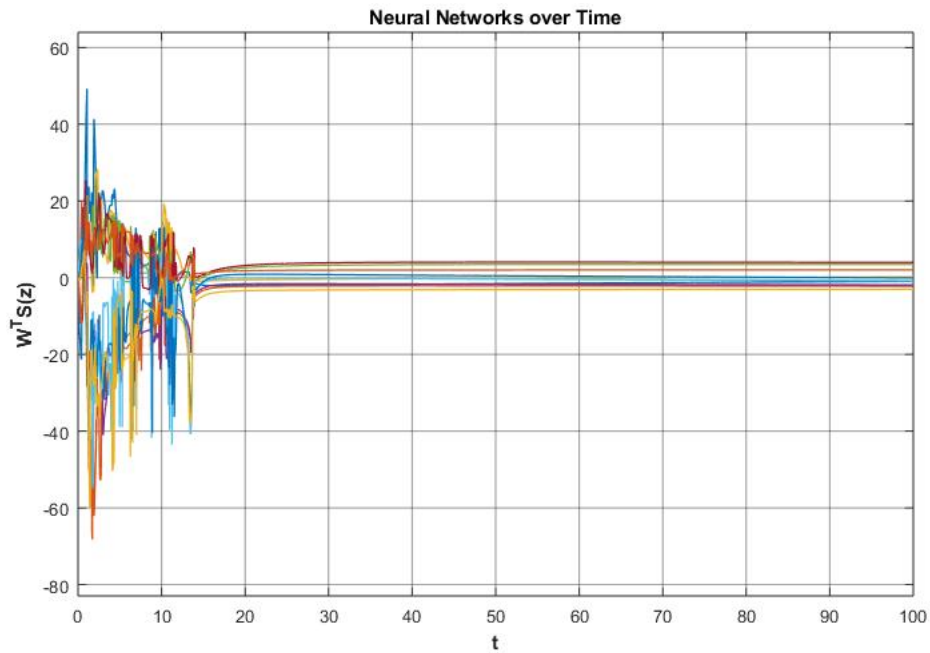
Σχήμα 7.13: Χρονική μεταβολή του διανύσματος θέσεων συμφωνίας των πρακτόρων κατά τον x -άξονα

$$q^*(0) = \begin{bmatrix} 4 & -20 & 8 & -16 & 12 & -12 & 16 & -8 & 20 & -4 \end{bmatrix}$$

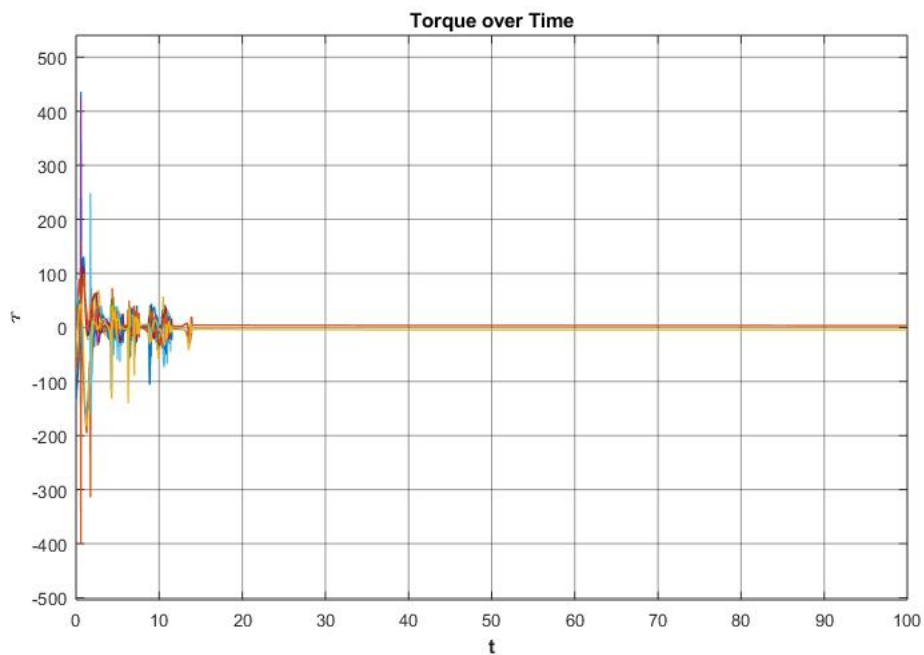
$$a = \begin{bmatrix} 0 & 8\sqrt{2} & 4\sqrt{2} & 4\sqrt{2} & -4\sqrt{2} & 4\sqrt{2} & 8\sqrt{2} & 8\sqrt{2} & -8\sqrt{2} & 8\sqrt{2} \end{bmatrix}$$



Σχήμα 7.14: Χρονική μεταβολή του διανύσματος θέσεων συμφωνίας των πρακτόρων κατά τον y -άξονα

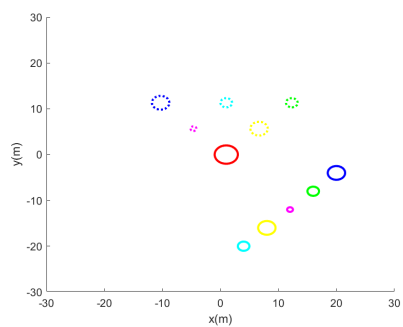
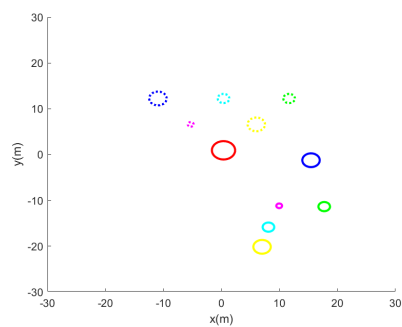
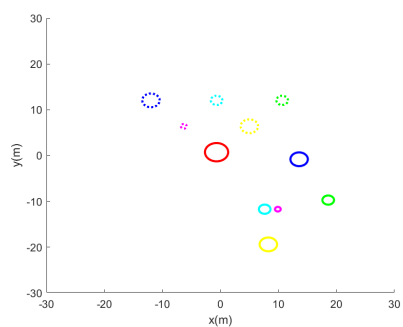
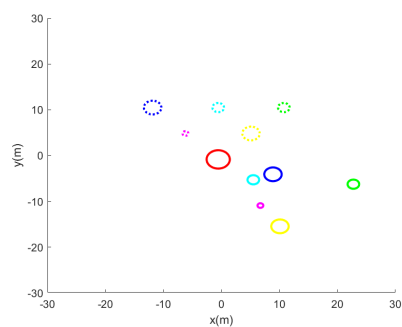
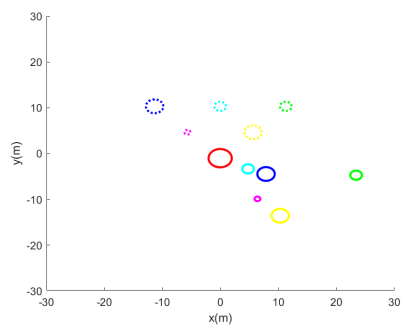
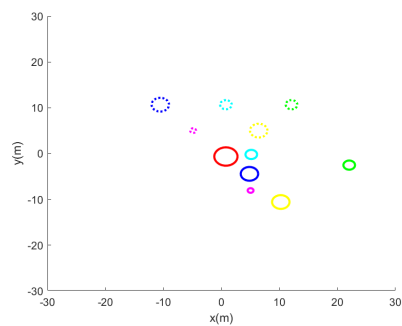
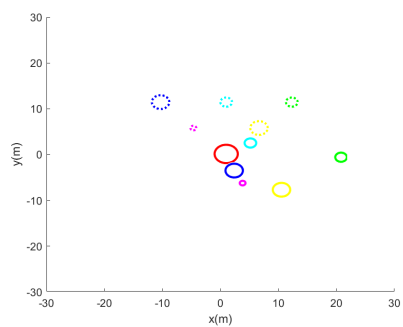
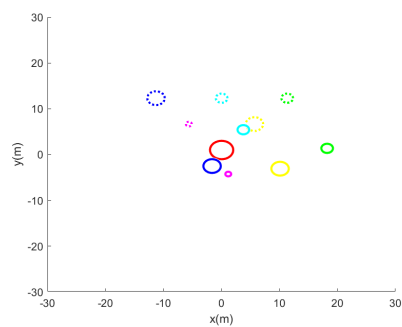


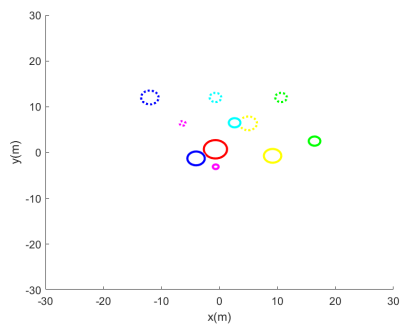
Σχήμα 7.15: Χρονική μεταβολή του διανύσματος των νευρωνικών δικτύων



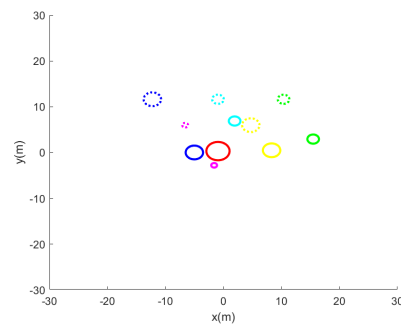
Σχήμα 7.16: Χρονική μεταβολή του διανύσματος ροπών των πρακτόρων

Ακολουθώς παραθέτονται στιγμιότυπα από την κίνηση των οχημάτων. Σημειώνεται ότι ο πράκτορας που αντιστοιχεί στον ηγέτη εμφανίζεται με κόκκινο χρώμα. Επίσης, με συνεχόμενη γραμμή περιγράφονται οι πραγματικές θέσεις των πρακτόρων κάθε χρονική στιγμή και με διακεκομμένη γραμμή οι επιθυμητές θέσεις που καλούνται να λάβουν ιδανικά. Τέλος, τα οχήματα λαμβάνουν τα σχήματα κύκλων, οι ακτίνες των οποίων καθορίζονται από το διάνυσμα r .

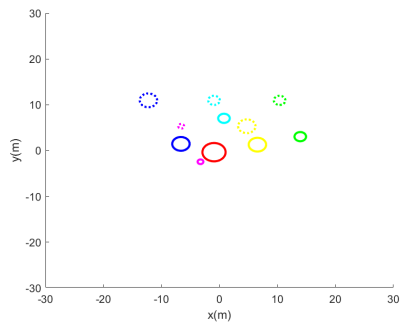
 $t = 0$  $t = 1.2068$  $t = 2.3043$  $t = 4.1215$  $t = 4.6671$  $t = 5.5895$  $t = 6.4246$  $t = 7.8242$



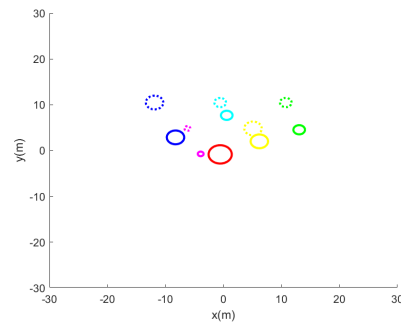
$t = 8.6192$



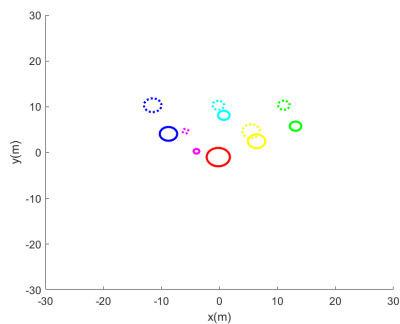
$t = 9.0933$



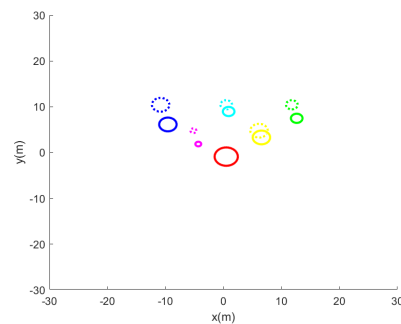
$t = 9.7770$



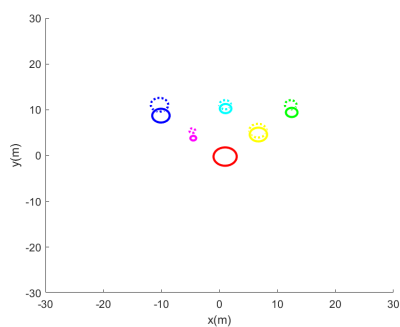
$t = 10.3955$



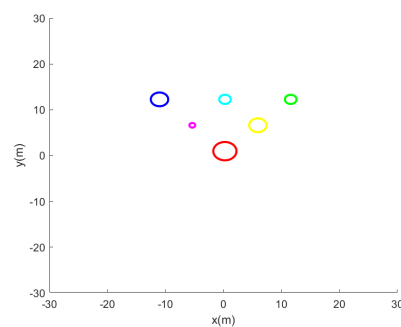
$t = 10.7942$



$t = 11.4945$

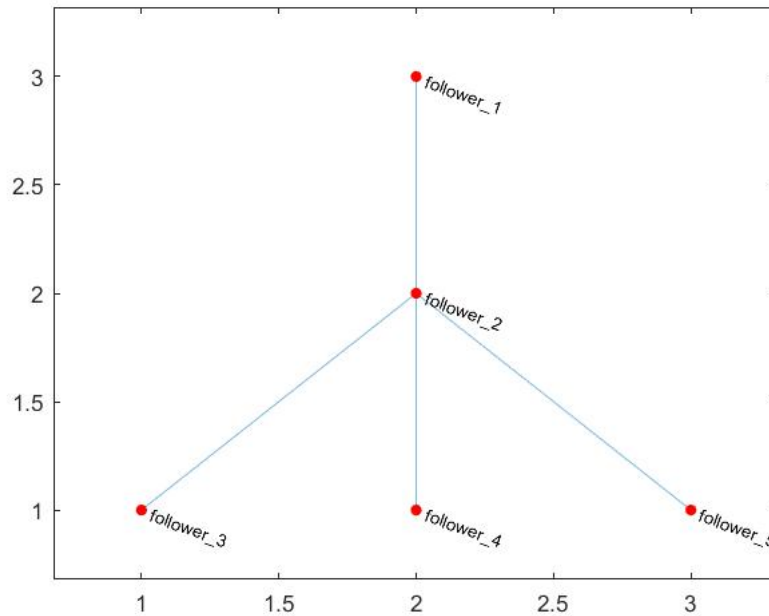


$t = 12.3498$

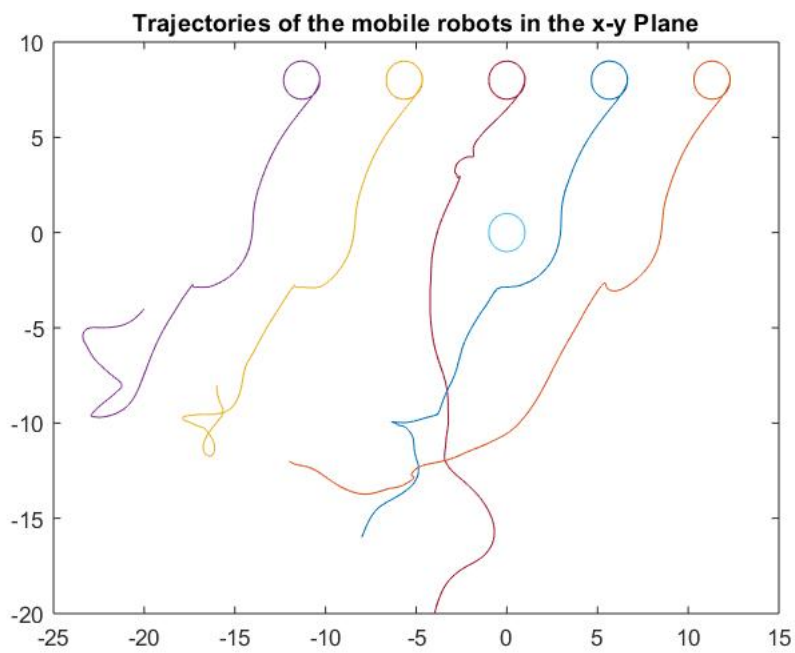


$t = 13.8884$

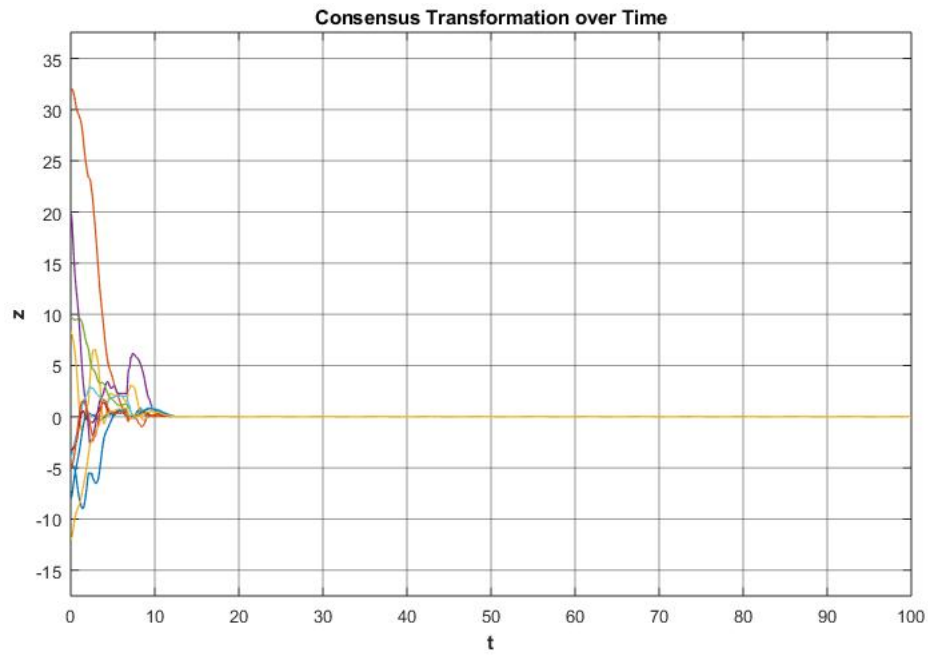
7.3 Τρίτη Συνδεσμολογία Πρακτόρων



Σχήμα 7.17: Συνεχτικός Μη Κατευθυνόμενος Γράφος των Ακόλουθων



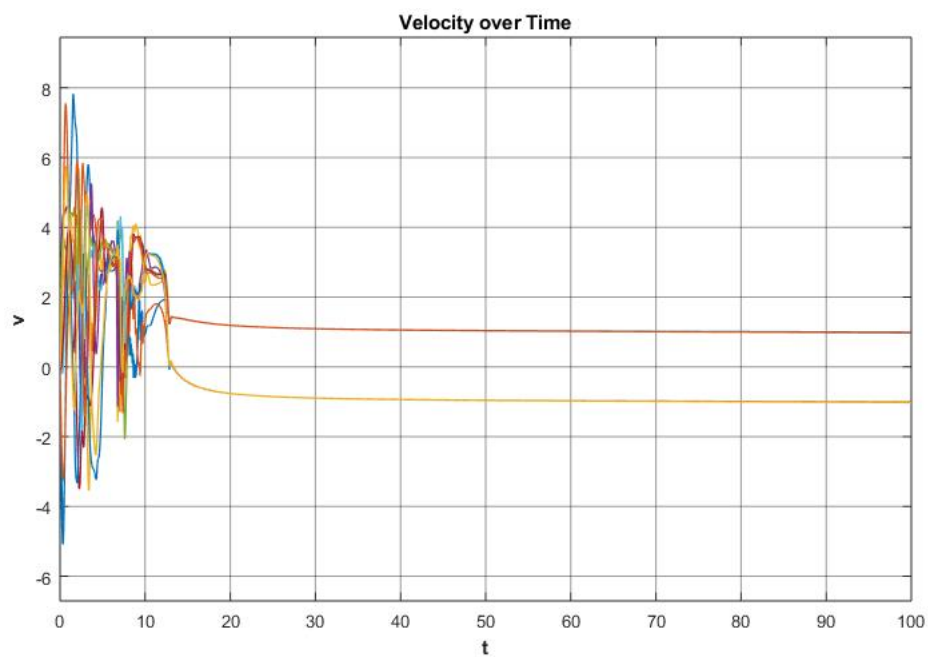
Σχήμα 7.18: Τροχιές των Οχημάτων στο $x - y$ επίπεδο



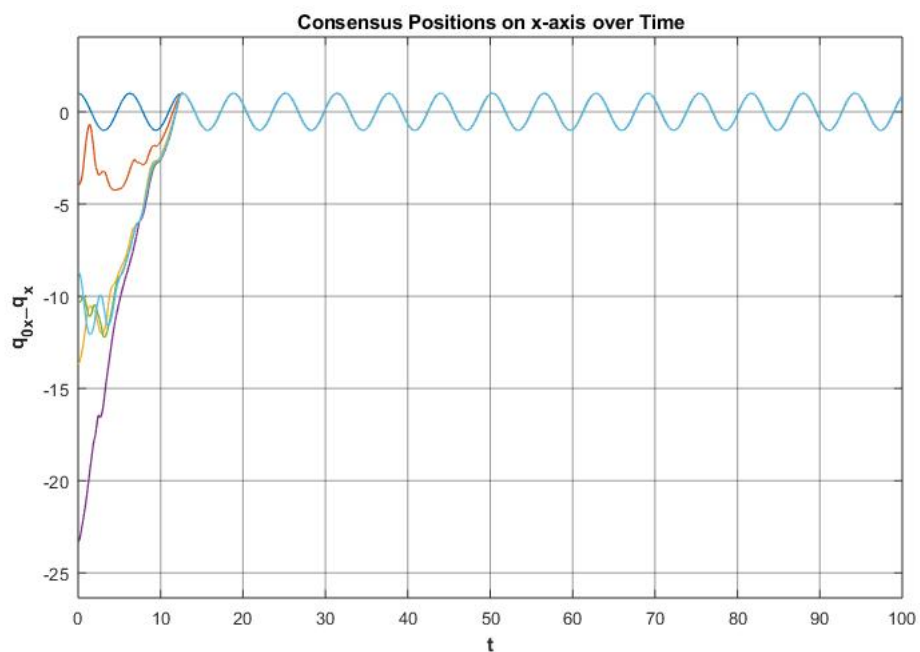
Σχήμα 7.19: Χρονική μεταβολή του διανύσματος μετασχηματισμών συμφωνίας των πρακτόρων

$$k_1 = 0.1 \quad k_2 = 3 \quad k_3 = 5 \quad k_4 = 20 \quad \varepsilon = 4 \quad r_0 = 2 \quad \gamma = 1 \quad \sigma = 0.001$$

$$r = \begin{bmatrix} 1 & 1.5 & 0.5 & 1 & 1.5 \end{bmatrix} \quad q_0(0) = [1 \quad 0]$$



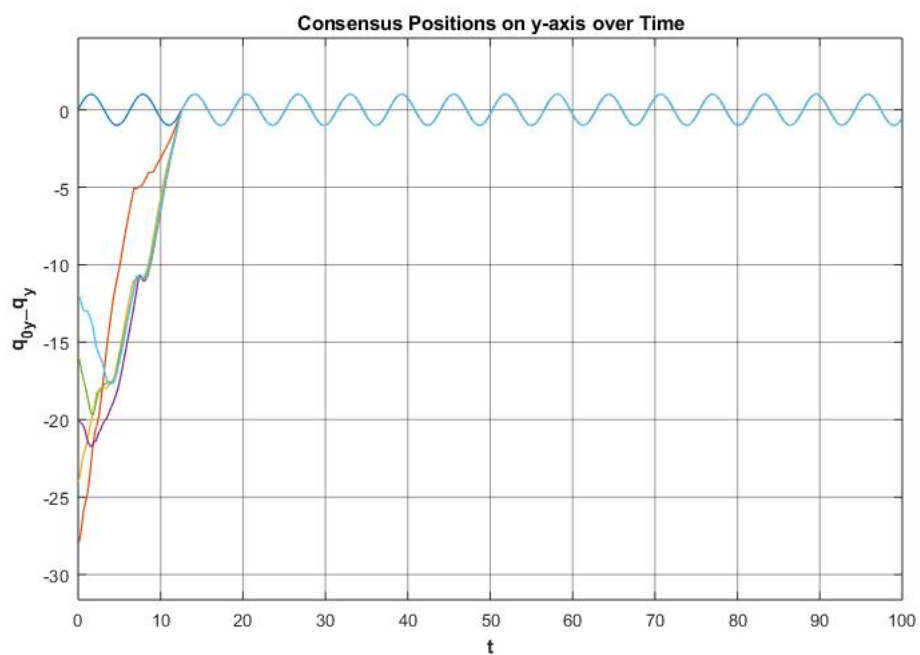
Σχήμα 7.20: Χρονική μεταβολή του διανύσματος ταχυτήτων των πρακτόρων



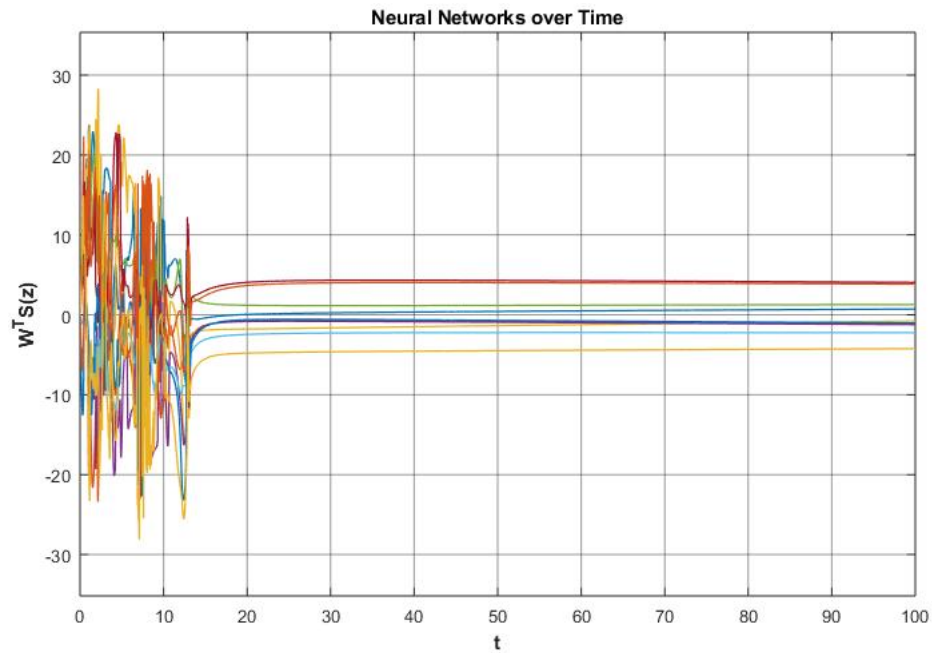
Σχήμα 7.21: Χρονική μεταβολή του διανύσματος θέσεων συμφωνίας των πρακτόρων κατά τον x -άξονα

$$q^*(0) = \begin{bmatrix} -4 & -20 & -8 & -16 & -12 & -12 & -16 & -8 & -20 & -4 \end{bmatrix}$$

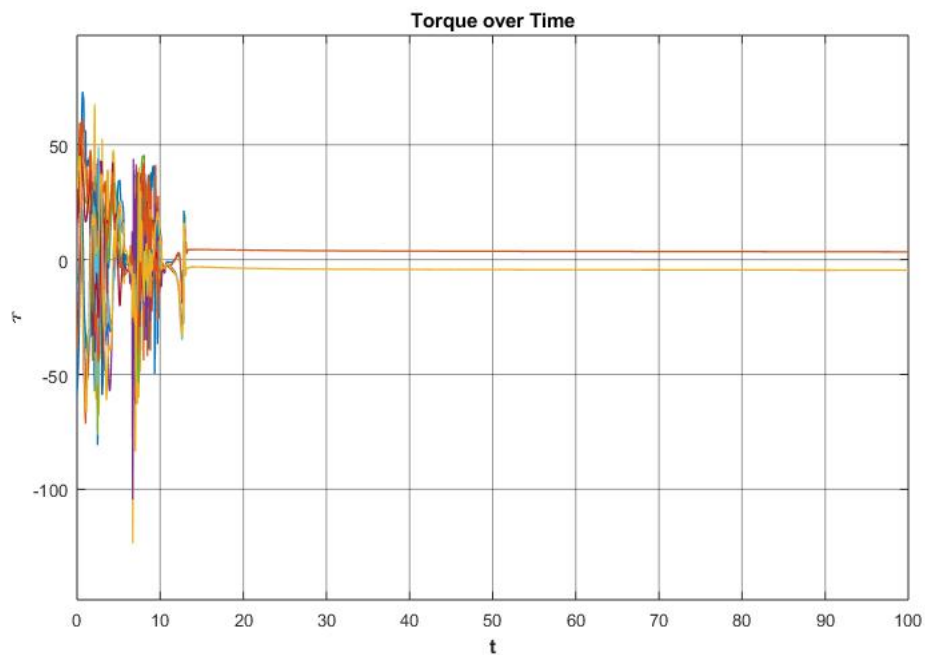
$$a = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 4\sqrt{2} & 8 & 8\sqrt{2} & 8 & -4\sqrt{2} & 8 & -8\sqrt{2} & 8 \end{bmatrix}$$



Σχήμα 7.22: Χρονική μεταβολή του διανύσματος θέσεων συμφωνίας των πρακτόρων κατά τον y -άξονα

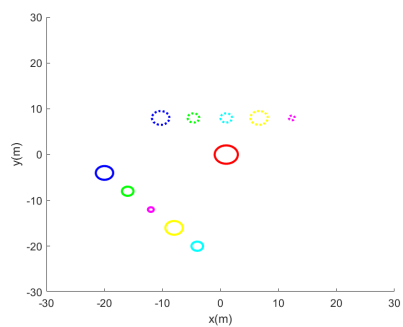
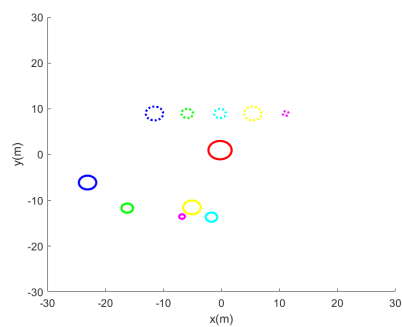
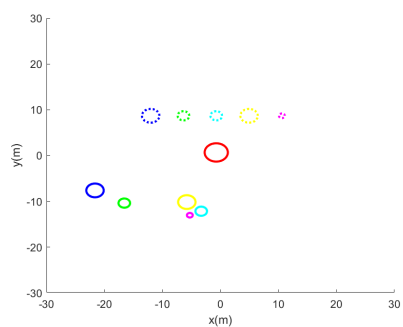
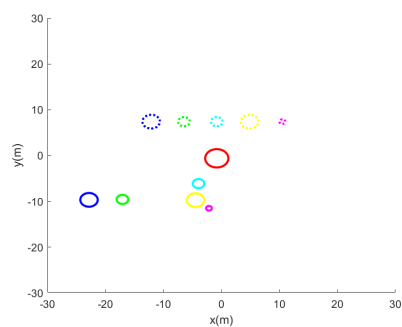
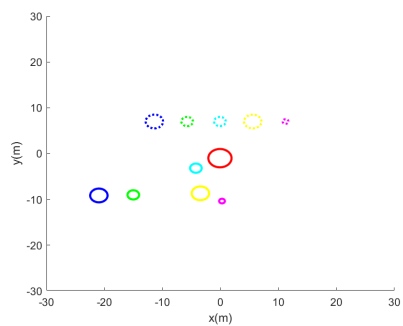
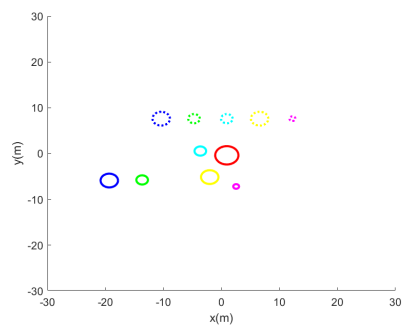
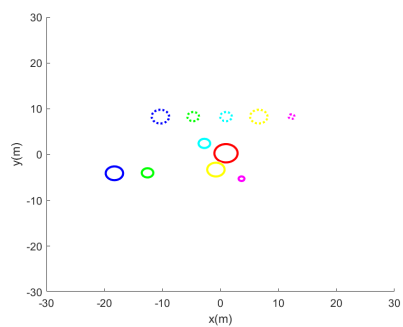
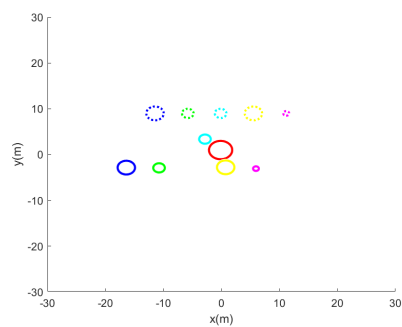


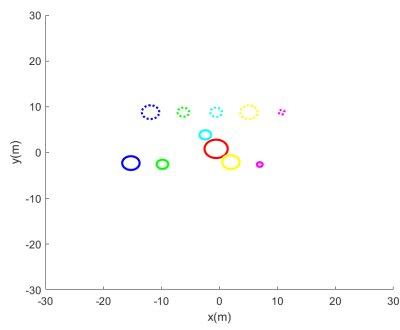
Σχήμα 7.23: Χρονική μεταβολή του διανύσματος των νευρωνικών δικτύων



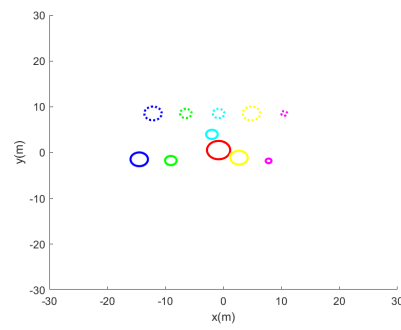
Σχήμα 7.24: Χρονική μεταβολή του διανύσματος ροπών των πρακτόρων

Ακολουθώς παραθέτονται στιγμιότυπα από την κίνηση των οχημάτων. Σημειώνεται ότι ο πράκτορας που αντιστοιχεί στον ηγέτη εμφανίζεται με κόκκινο χρώμα. Επίσης, με συνεχόμενη γραμμή περιγράφονται οι πραγματικές θέσεις των πρακτόρων κάθε χρονική στιγμή και με διακεκομμένη γραμμή οι επιθυμητές θέσεις που καλούνται να λάβουν ιδανικά. Τέλος, τα οχήματα λαμβάνουν τα σχήματα κύκλων, οι ακτίνες των οποίων καθορίζονται από το διάνυσμα r .

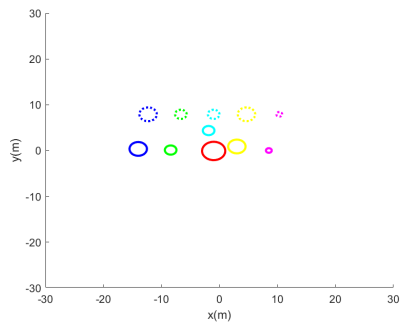
 $t = 0$  $t = 1.8154$  $t = 2.3823$  $t = 3.7742$  $t = 4,6246$  $t = 5,8963$  $t = 6,5803$  $t = 8,0010$



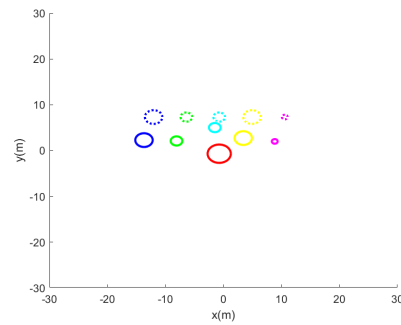
$t = 8,4677$



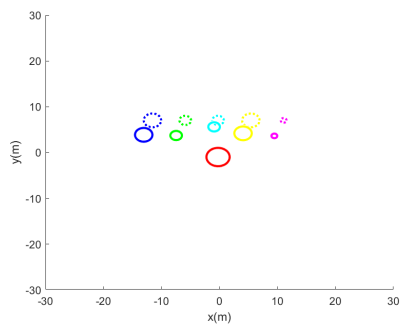
$t = 8,8480$



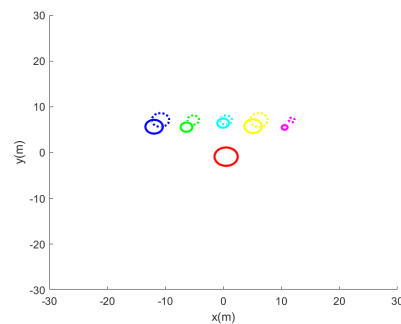
$t = 9,5047$



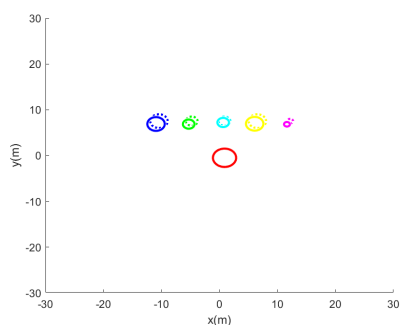
$t = 10,1726$



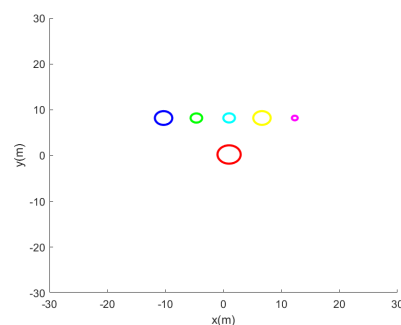
$t = 10,7510$



$t = 11,4703$



$t = 12,0657$



$t = 12,8083$

Κεφάλαιο 8

Επίλογος

Στο παρόν κεφάλαιο γίνεται σύνοψη της μελέτης που εκπονήθηκε στα πλαίσια της διπλωματικής εργασίας, καθώς και παράθεση πιθανών επεκτάσεων των προβλημάτων που εξετάστηκαν.

8.1 Σύνοψη και συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία προτάθηκαν δύο νέοι αλγόριθμοι για την αντιμετώπιση προβλημάτων συνεργατικού ελέγχου, βασισμένοι σε τεχνικές consensus. Σε κάθε περίπτωση το σύστημα αποτελείται από έναν ηγέτη και n ακόλουθους, και η επικοινωνία μεταξύ των ακόλουθων περιγράφεται από έναν ισχυρά συνεκτικό γράφο, ο οποίος στην πρώτη περίπτωση μπορεί να είναι κατευθυνόμενος, ενώ στην δεύτερη περίπτωση πρέπει απαραίτητως να είναι μη-κατευθυνόμενος. Όσον αφορά την επικοινωνία με τον ηγέτη, αρκεί να υπάρχει ένα γεννητικό δένδρο με ρίζα εκείνον προς τους ακόλουθους. Για την εύρεση των επιθυμητών εισόδων ελέγχου του εκάστοτε προς μελέτη συστήματος, δημιουργήθηκαν κατάλληλες συναρτήσεις τύπου-Lyapunov και με κλασσικά εργαλεία μη-γραμμικού ελέγχου εξήχθησαν τα αντίστοιχα συμπεράσματα σύγκλισης. Τέλος, και στα δύο συστήματα εισήχθησαν Νευρωνικά Δίκτυα Υψηλότερης Τάξης για την εκμάθηση των άγνωστων συναρτήσεων, ενώ πάλι αποδείχθηκε μαθηματικά η σύγκλισή τους.

Όσον αφορά το πρώτο πρόβλημα ελέγχου που αντιμετωπίστηκε, έγινε κατάλληλη επέκταση του PI μετασχηματισμού λάθους συμφωνίας ώστε να είναι δυνατή η επίτευξη leader-follower consensus με κινούμενο ηγέτη. Ωστόσο εμφανίζεται απόκλιση μεταξύ της επιθυμητής και της μόνιμης κατάστασης του συστήματος, η οποία και οφείλεται στην ύπαρξη της ταχύτητας του ηγέτη, αλλά μπορεί να αντιμετωπιστεί μέσω κατάλληλης επιλογής των παραμέτρων της σχεδίασης.

Όσον αφορά το δεύτερο πρόβλημα ελέγχου, υλοποιήθηκε leader-follower formation των πρακτόρων με επιτυχή αποφυγή συγκρούσεων μεταξύ των οχημάτων. Μάλιστα με το νόμο ελέγχου που επιλέχθηκε, κατέστη δυνατή η εξάλειψη του σφάλματος που εμφανίζεται στο σύστημα λόγω της χρήσης των νευρωνικών δικτύων για την εκμάθηση της άγνωστης δυναμικής των κινούμενων ρομπότ, και παρά την επίδρασή τους ο χρησιμοποιούμενος μετασχηματισμός συμφωνίας, και ως εκ τούτου σχηματισμού διάταξης των πρακτόρων, τείνει ασυμπτωτικά

στο μηδέν.

8.2 Μελλοντικές επεκτάσεις

8.2.1 Επεκτάσεις πρώτου προβλήματος

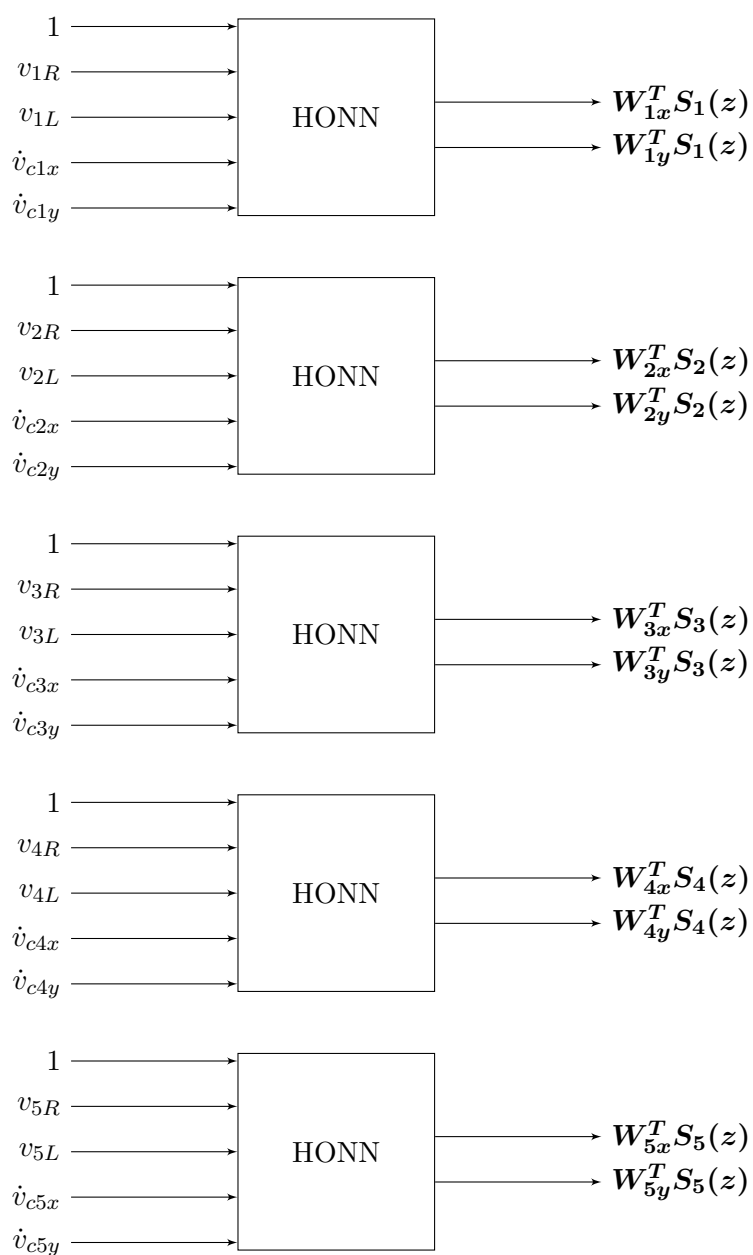
- Μηδενισμός της απόκλισης που εμφανίζεται στο Leader Follower Consensus λόγω της χρήσης του PI Μετασχηματισμού Λάθους Συμφωνίας.
- Κατάλληλη τροποποίηση του νόμου ελέγχου ώστε να αποφεύγονται οι συγκρούσεις μεταξύ των οχημάτων, ηγέτη-ακόλουθων και ακόλουθων μεταξύ τους.

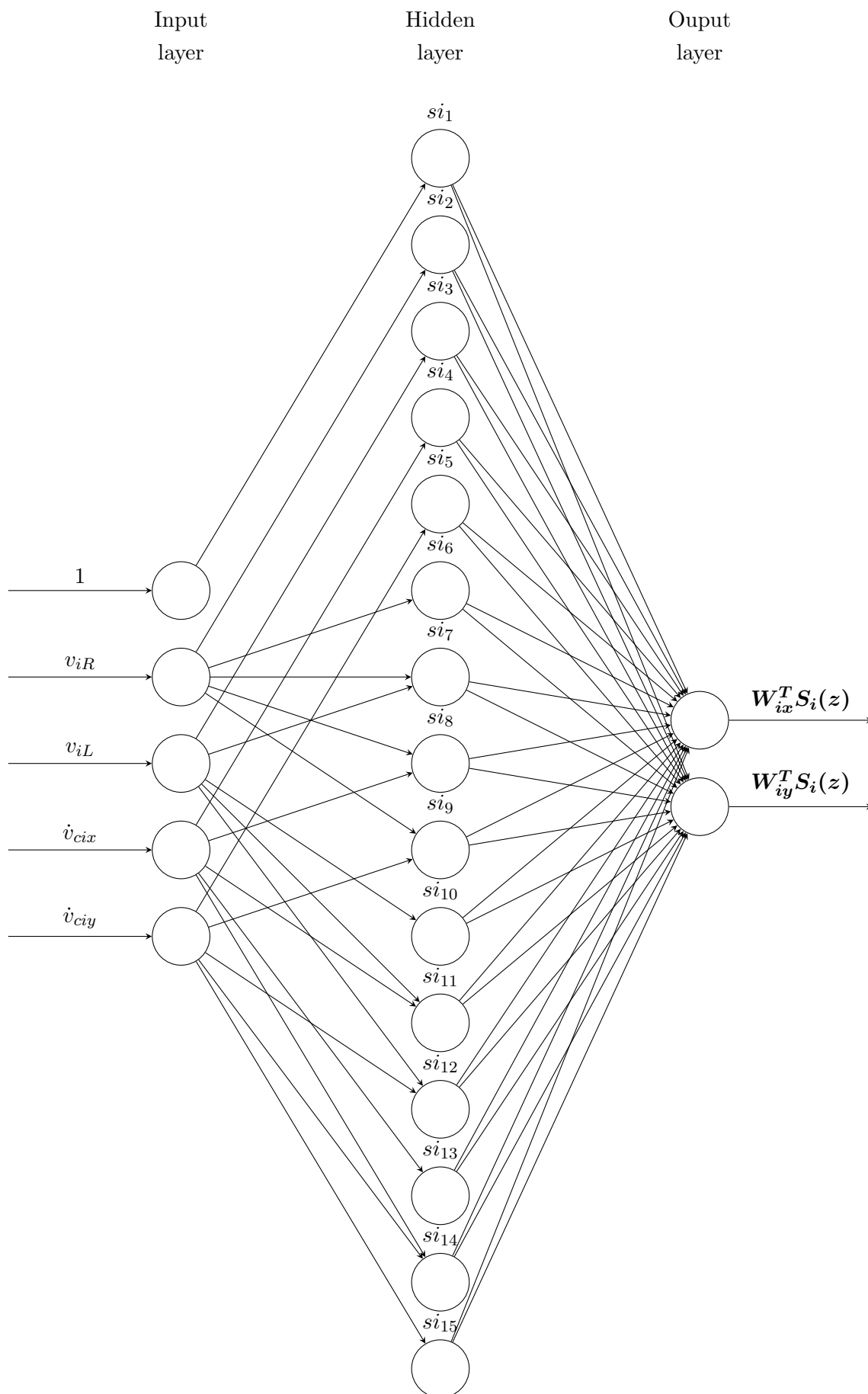
8.2.2 Επεκτάσεις πρώτου και δεύτερου προβλήματος

- Ενσωμάτωση της γωνίας θ των κινητών ρομπότ στις Lyapunov-like συναρτήσεις, ούτως ώστε να γίνει επαλήθευση της ορθότητας της κατεύθυνσης που λαμβάνουν τα οχήματα.
- Αναβάθμιση του ελεγκτή ώστε να υπάρχει δυνατότητα αποφυγής στατικών ή και κινούμενων εμποδίων.
- Ευελιξία όσον αφορά την επικοινωνία μεταξύ των πρακτόρων ώστε αυτή να μην περιγράφεται αποκλειστικά από έναν σταθερό γράφο, αλλά να υπάρχει δυνατότητα μεταβολής της ανάλογα με τις ανάγκες του συστήματος κάθε χρονική στιγμή.
- Τριδιάστατη επέκταση του προβλήματος και εφαρμογή του σε μη επανδρωμένα αεροσκάφη, UAVs.

Παράρτημα

Διάγραμμα Νευρωνικών Δικτύων





Υπολογισμός Παραγώγων

Στην παρούσα παράγραφο θα γίνει αναλυτικός υπολογισμός των πρώτων και δεύτερων παραγώγων των Δυναμικών Αποφυγής Συγκρούσεων. Σημειώνεται ότι, καθώς όλες οι μεταβλητές μας είναι χρονικά μεταβαλλόμενες, ως εκ τούτου λαμβάνονται αποκλειστικά οι χρονικές παράγωγοι των συναρτήσεων.

- Υπολογισμός της παραγώγου του δυναμικού (6.18)

$$\begin{aligned}
\dot{V}_{CAF} &= \left(\frac{1}{4} \sum_i \sum_j \left[\frac{1}{\|q_i^* - q_j^*\| - r_{ij}} \right]_{\frac{1}{\epsilon - r_{ij}}}^4 \right)' \\
&= \sum_i \sum_j \left[\frac{1}{\|q_i^* - q_j^*\| - r_{ij}} \right]_{\frac{1}{\epsilon - r_{ij}}}^3 \left(\frac{1}{\|q_i^* - q_j^*\| - r_{ij}} \right)' \\
&= \sum_i \sum_j \left[\frac{1}{\|q_i^* - q_j^*\| - r_{ij}} \right]_{\frac{1}{\epsilon - r_{ij}}}^3 \frac{-1}{\left(\|q_i^* - q_j^*\| - r_{ij} \right)^2} (\|q_i^* - q_j^*\| - r_{ij})' \\
&= \sum_i \sum_j \left[\frac{1}{\|q_i^* - q_j^*\| - r_{ij}} \right]_{\frac{1}{\epsilon - r_{ij}}}^3 \frac{-1}{\left(\|q_i^* - q_j^*\| - r_{ij} \right)^2} \left(\sqrt{(q_i^* - q_j^*)^T (q_i^* - q_j^*)} \right)' \\
&= \sum_i \sum_j \left[\frac{1}{\|q_i^* - q_j^*\| - r_{ij}} \right]_{\frac{1}{\epsilon - r_{ij}}}^3 \frac{-1}{\left(\|q_i^* - q_j^*\| - r_{ij} \right)^2} \frac{\left((q_i^* - q_j^*)^T (q_i^* - q_j^*) \right)'}{2\sqrt{(q_i^* - q_j^*)^T (q_i^* - q_j^*)}} \\
&= \sum_i \sum_j \left[\frac{1}{\|q_i^* - q_j^*\| - r_{ij}} \right]_{\frac{1}{\epsilon - r_{ij}}}^3 \frac{-1}{\left(\|q_i^* - q_j^*\| - r_{ij} \right)^2} \frac{2(q_i^* - q_j^*)^T (\bar{v}_i - \bar{v}_j)}{2\|q_i^* - q_j^*\|} \\
\dot{V}_{CAF} &= - \sum_i \sum_j \left[\frac{1}{\|q_i^* - q_j^*\| - r_{ij}} \right]_{\frac{1}{\epsilon - r_{ij}}}^3 \frac{(q_i^* - q_j^*)^T (\bar{v}_i - \bar{v}_j)}{\left(\|q_i^* - q_j^*\| - r_{ij} \right)^2 \|q_i^* - q_j^*\|} \quad (8.1)
\end{aligned}$$

- Υπολογισμός της παραγώγου του δυναμικού (6.19)

$$\begin{aligned}
\dot{V}_{CAL} &= \left(\frac{1}{4} \sum_i \left[\frac{1}{\|q_i^* - q_0\| - r_{i0}} \right]_{\frac{1}{\epsilon - r_{i0}}}^4 \right)' \\
&= \sum_i \left[\frac{1}{\|q_i^* - q_0\| - r_{i0}} \right]_{\frac{1}{\epsilon - r_{i0}}}^3 \left(\frac{1}{\|q_i^* - q_0\| - r_{i0}} \right)' \\
&= \sum_i \left[\frac{1}{\|q_i^* - q_0\| - r_{i0}} \right]_{\frac{1}{\epsilon - r_{i0}}}^3 \frac{-1}{(\|q_i^* - q_0\| - r_{i0})^2} (\|q_i^* - q_0\| - r_{i0})' \\
&= \sum_i \left[\frac{1}{\|q_i^* - q_0\| - r_{i0}} \right]_{\frac{1}{\epsilon - r_{i0}}}^3 \frac{-1}{(\|q_i^* - q_0\| - r_{i0})^2} \left(\sqrt{(q_i^* - q_0)^T (q_i^* - q_0)} \right)' \\
&= \sum_i \left[\frac{1}{\|q_i^* - q_0\| - r_{i0}} \right]_{\frac{1}{\epsilon - r_{i0}}}^3 \frac{-1}{(\|q_i^* - q_0\| - r_{i0})^2} \frac{\left((q_i^* - q_0)^T (q_i^* - q_0) \right)'}{2\sqrt{(q_i^* - q_0)^T (q_i^* - q_0)}} \\
&= \sum_i \left[\frac{1}{\|q_i^* - q_0\| - r_{i0}} \right]_{\frac{1}{\epsilon - r_{i0}}}^3 \frac{-1}{(\|q_i^* - q_0\| - r_{i0})^2} \frac{2(q_i^* - q_0)^T (\bar{v}_i - v_0)}{2\|q_i^* - q_0\|} \\
\dot{V}_{CAL} &= - \sum_i \left[\frac{1}{\|q_i^* - q_0\| - r_{i0}} \right]_{\frac{1}{\epsilon - r_{i0}}}^3 \frac{(q_i^* - q_0)^T (\bar{v}_i - v_0)}{(\|q_i^* - q_0\| - r_{i0})^2 \|q_i^* - q_0\|} \tag{8.2}
\end{aligned}$$

Στην επικείμενη ανάλυση θα θεωρούμε δεδομένο ότι για κάθε διάνυσμα x είναι

$$(\|x\|)' = \frac{x^T \dot{x}}{\|x\|}$$

- Υπολογισμός της παραγώγου της διανυσματικής συνάρτησης (6.31)

$$\dot{\hat{N}}_F = \begin{bmatrix} \dot{N}_{F1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{N}_{Fn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(2 \sum_j \left[\frac{1}{\|q_1^* - q_j^*\| - r_{1j}} \right]_{\frac{1}{\epsilon - r_{1j}}}^3 \frac{(q_1^* - q_j^*)}{(\|q_1^* - q_j^*\| - r_{1j})^2 \|q_1^* - q_j^*\|} \right)' \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \left(2 \sum_j \left[\frac{1}{\|q_n^* - q_j^*\| - r_{nj}} \right]_{\frac{1}{\epsilon - r_{nj}}}^3 \frac{(q_n^* - q_j^*)}{(\|q_n^* - q_j^*\| - r_{nj})^2 \|q_n^* - q_j^*\|} \right)' \end{bmatrix}$$

Ακολούθως προχωράμε στον υπολογισμό της παραγώγου \dot{N}_{Fi} , η οποία και θα είναι ίδια για κάθε $i = 1, \dots, N$.

$$\begin{aligned}
\dot{N}_{Fi} &= \left(2 \sum_j \left[\frac{1}{\|q_i^* - q_j^*\| - r_{ij}} \right]_{\frac{1}{\epsilon - r_{ij}}}^3 \frac{(q_i^* - q_j^*)}{\left(\|q_i^* - q_j^*\| - r_{ij} \right)^2 \|q_i^* - q_j^*\|} \right)' \\
&= 6 \sum_j \left[\frac{1}{\|q_i^* - q_j^*\| - r_{ij}} \right]_{\frac{1}{\epsilon - r_{ij}}}^2 \left(\frac{1}{\|q_i^* - q_j^*\| - r_{ij}} \right)' \frac{(q_i^* - q_j^*)}{\left(\|q_i^* - q_j^*\| - r_{ij} \right)^2 \|q_i^* - q_j^*\|} \\
&\quad + 2 \sum_j \left[\frac{1}{\|q_i^* - q_j^*\| - r_{ij}} \right]_{\frac{1}{\epsilon - r_{ij}}}^3 \frac{(\bar{v}_i - \bar{v}_j)}{\left(\|q_i^* - q_j^*\| - r_{ij} \right)^2 \|q_i^* - q_j^*\|} \\
&\quad + 2 \sum_j \left[\frac{1}{\|q_i^* - q_j^*\| - r_{ij}} \right]_{\frac{1}{\epsilon - r_{ij}}}^3 \frac{(q_i^* - q_j^*)}{\|q_i^* - q_j^*\|} \left(\frac{1}{\left(\|q_i^* - q_j^*\| - r_{ij} \right)^2} \right)' \\
&\quad + 2 \sum_j \left[\frac{1}{\|q_i^* - q_j^*\| - r_{ij}} \right]_{\frac{1}{\epsilon - r_{ij}}}^3 \frac{(q_i^* - q_j^*)}{\left(\|q_i^* - q_j^*\| - r_{ij} \right)^2} \left(\frac{1}{\|q_i^* - q_j^*\|} \right)' \\
&= 6 \sum_j \left[\frac{1}{\|q_i^* - q_j^*\| - r_{ij}} \right]_{\frac{1}{\epsilon - r_{ij}}}^2 \frac{-\left(\|q_i^* - q_j^*\| - r_{ij} \right)'}{\left(\|q_i^* - q_j^*\| - r_{ij} \right)^2} \frac{(q_i^* - q_j^*)}{\left(\|q_i^* - q_j^*\| - r_{ij} \right)^2 \|q_i^* - q_j^*\|} \\
&\quad + 2 \sum_j \left[\frac{1}{\|q_i^* - q_j^*\| - r_{ij}} \right]_{\frac{1}{\epsilon - r_{ij}}}^3 \frac{(\bar{v}_i - \bar{v}_j)}{\left(\|q_i^* - q_j^*\| - r_{ij} \right)^2 \|q_i^* - q_j^*\|} \\
&\quad + 2 \sum_j \left[\frac{1}{\|q_i^* - q_j^*\| - r_{ij}} \right]_{\frac{1}{\epsilon - r_{ij}}}^3 \frac{(q_i^* - q_j^*)}{\|q_i^* - q_j^*\|} \frac{-2 \left(\|q_i^* - q_j^*\| - r_{ij} \right)'}{\left(\|q_i^* - q_j^*\| - r_{ij} \right)^4} \left(\|q_i^* - q_j^*\| - r_{ij} \right)' \\
&\quad + 2 \sum_j \left[\frac{1}{\|q_i^* - q_j^*\| - r_{ij}} \right]_{\frac{1}{\epsilon - r_{ij}}}^3 \frac{(q_i^* - q_j^*)}{\left(\|q_i^* - q_j^*\| - r_{ij} \right)^2} \frac{-1}{\|q_i^* - q_j^*\|^2} \left(\|q_i^* - q_j^*\| \right)' \\
&= -6 \sum_j \left[\frac{1}{\|q_i^* - q_j^*\| - r_{ij}} \right]_{\frac{1}{\epsilon - r_{ij}}}^2 \frac{(q_i^* - q_j^*)^T (\bar{v}_i - \bar{v}_j)}{\left(\|q_i^* - q_j^*\| - r_{ij} \right)^2 \|q_i^* - q_j^*\|} \frac{(q_i^* - q_j^*)}{\left(\|q_i^* - q_j^*\| - r_{ij} \right)^2 \|q_i^* - q_j^*\|} \\
&\quad + 2 \sum_j \left[\frac{1}{\|q_i^* - q_j^*\| - r_{ij}} \right]_{\frac{1}{\epsilon - r_{ij}}}^3 \frac{(\bar{v}_i - \bar{v}_j)}{\left(\|q_i^* - q_j^*\| - r_{ij} \right)^2 \|q_i^* - q_j^*\|} \\
&\quad - 2 \sum_j \left[\frac{1}{\|q_i^* - q_j^*\| - r_{ij}} \right]_{\frac{1}{\epsilon - r_{ij}}}^3 \frac{(q_i^* - q_j^*)}{\|q_i^* - q_j^*\|} \frac{2}{\left(\|q_i^* - q_j^*\| - r_{ij} \right)^3} \frac{(q_i^* - q_j^*)^T (\bar{v}_i - \bar{v}_j)}{\|q_i^* - q_j^*\|} \\
&\quad - 2 \sum_j \left[\frac{1}{\|q_i^* - q_j^*\| - r_{ij}} \right]_{\frac{1}{\epsilon - r_{ij}}}^3 \frac{(q_i^* - q_j^*)}{\left(\|q_i^* - q_j^*\| - r_{ij} \right)^2} \frac{1}{\|q_i^* - q_j^*\|^2} \frac{(q_i^* - q_j^*)^T (\bar{v}_i - \bar{v}_j)}{\|q_i^* - q_j^*\|}
\end{aligned}$$

Τελικά λαμβάνουμε ότι η παράγωγος του N_{Fi} δίνεται από την εξίσωση

$$\begin{aligned} \dot{N}_{Fi} = & -6 \sum_j \left[\frac{1}{\|q_i^* - q_j^*\| - r_{ij}} \right]_{\frac{1}{\epsilon - r_{ij}}}^2 \frac{(q_i^* - q_j^*)^T (\bar{v}_i - \bar{v}_j) (q_i^* - q_j^*)}{\left(\|q_i^* - q_j^*\| - r_{ij} \right)^4 \|q_i^* - q_j^*\|^2} \\ & + 2 \sum_j \left[\frac{1}{\|q_i^* - q_j^*\| - r_{ij}} \right]_{\frac{1}{\epsilon - r_{ij}}}^3 \frac{(\bar{v}_i - \bar{v}_j)}{\left(\|q_i^* - q_j^*\| - r_{ij} \right)^2 \|q_i^* - q_j^*\|} \\ & - 4 \sum_j \left[\frac{1}{\|q_i^* - q_j^*\| - r_{ij}} \right]_{\frac{1}{\epsilon - r_{ij}}}^3 \frac{(q_i^* - q_j^*)^T (\bar{v}_i - \bar{v}_j) (q_i^* - q_j^*)}{\left(\|q_i^* - q_j^*\| - r_{ij} \right)^3 \|q_i^* - q_j^*\|^2} \\ & - 2 \sum_j \left[\frac{1}{\|q_i^* - q_j^*\| - r_{ij}} \right]_{\frac{1}{\epsilon - r_{ij}}}^3 \frac{(q_i^* - q_j^*)^T (\bar{v}_i - \bar{v}_j) (q_i^* - q_j^*)}{\left(\|q_i^* - q_j^*\| - r_{ij} \right)^2 \|q_i^* - q_j^*\|^3} \end{aligned} \quad (8.3)$$

Η σχέση (8.3) μπορεί να λάβει την πιο συμπαγή μορφή

$$\begin{aligned} \dot{N}_{Fi} = & \sum_j \left\{ 2 \left[\frac{1}{\|q_i^* - q_j^*\| - r_{ij}} \right]_{\frac{1}{\epsilon - r_{ij}}}^3 \frac{(\bar{v}_i - \bar{v}_j)}{\left(\|q_i^* - q_j^*\| - r_{ij} \right)^2 \|q_i^* - q_j^*\|} \right. \\ & - 2 \left[\frac{1}{\|q_i^* - q_j^*\| - r_{ij}} \right]_{\frac{1}{\epsilon - r_{ij}}}^2 \frac{(q_i^* - q_j^*)^T (\bar{v}_i - \bar{v}_j) (q_i^* - q_j^*)}{\left(\|q_i^* - q_j^*\| - r_{ij} \right)^2 \|q_i^* - q_j^*\|^2} \\ & \cdot \left. \left[\frac{3}{\left(\|q_i^* - q_j^*\| - r_{ij} \right)^2} + \left[\frac{1}{\|q_i^* - q_j^*\| - r_{ij}} \right]_{\frac{1}{\epsilon - r_{ij}}} \left(\frac{2}{\|q_i^* - q_j^*\| - r_{ij}} + \frac{1}{\|q_i^* - q_j^*\|} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (8.4)$$

- Υπολογισμός της παραγώγου της διανυσματικής συνάρτησης (6.32)

$$\dot{\hat{N}}_L = \begin{bmatrix} \dot{N}_{L1} \\ \vdots \\ \dot{N}_{Ln} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\left[\frac{1}{\|q_1^* - q_0\| - r_{10}} \right]_{\frac{1}{\epsilon - r_{10}}}^3 \frac{(q_1^* - q_0)}{\left(\|q_1^* - q_0\| - r_{10} \right)^2 \|q_1^* - q_0\|} \right)' \\ \vdots \\ \left(\left[\frac{1}{\|q_n^* - q_0\| - r_{n0}} \right]_{\frac{1}{\epsilon - r_{n0}}}^3 \frac{(q_n^* - q_0)}{\left(\|q_n^* - q_0\| - r_{n0} \right)^2 \|q_n^* - q_0\|} \right)' \end{bmatrix}$$

Ακολουθώντας προχωράμε στον υπολογισμό της παραγώγου \dot{N}_{Li} , η οποία και θα είναι ίδια για κάθε $i = 1, \dots, N$.

$$\begin{aligned}
\dot{N}_{Li} &= \left(\left[\frac{1}{\|q_i^* - q_0\| - r_{i0}} \right]_{\frac{1}{\epsilon - r_{i0}}}^3 \frac{(q_i^* - q_0)}{(\|q_i^* - q_0\| - r_{i0})^2 \|q_i^* - q_0\|} \right)' \\
&= 3 \left[\frac{1}{\|q_i^* - q_0\| - r_{i0}} \right]_{\frac{1}{\epsilon - r_{i0}}}^2 \left(\frac{1}{\|q_i^* - q_0\| - r_{i0}} \right)' \frac{(q_i^* - q_0)}{(\|q_i^* - q_0\| - r_{i0})^2 \|q_i^* - q_0\|} \\
&\quad + \left[\frac{1}{\|q_i^* - q_0\| - r_{i0}} \right]_{\frac{1}{\epsilon - r_{i0}}}^3 \frac{(\bar{v}_i - v_0)}{(\|q_i^* - q_0\| - r_{i0})^2 \|q_i^* - q_0\|} \\
&\quad + \left[\frac{1}{\|q_i^* - q_0\| - r_{i0}} \right]_{\frac{1}{\epsilon - r_{i0}}}^3 \frac{(q_i^* - q_0)}{\|q_i^* - q_0\|} \left(\frac{1}{(\|q_i^* - q_0\| - r_{i0})^2} \right)' \\
&\quad + \left[\frac{1}{\|q_i^* - q_0\| - r_{i0}} \right]_{\frac{1}{\epsilon - r_{i0}}}^3 \frac{(q_i^* - q_0)}{(\|q_i^* - q_0\| - r_{i0})^2} \left(\frac{1}{\|q_i^* - q_0\|} \right)' \\
&= 3 \left[\frac{1}{\|q_i^* - q_0\| - r_{i0}} \right]_{\frac{1}{\epsilon - r_{i0}}}^2 \frac{- (\|q_i^* - q_0\| - r_{i0})'}{(\|q_i^* - q_0\| - r_{i0})^2} \frac{(q_i^* - q_0)}{(\|q_i^* - q_0\| - r_{i0})^2 \|q_i^* - q_0\|} \\
&\quad + \left[\frac{1}{\|q_i^* - q_0\| - r_{i0}} \right]_{\frac{1}{\epsilon - r_{i0}}}^3 \frac{(\bar{v}_i - v_0)}{(\|q_i^* - q_0\| - r_{i0})^2 \|q_i^* - q_0\|} \\
&\quad + \left[\frac{1}{\|q_i^* - q_0\| - r_{i0}} \right]_{\frac{1}{\epsilon - r_{i0}}}^3 \frac{(q_i^* - q_0)}{\|q_i^* - q_0\|} \frac{-2 (\|q_i^* - q_0\| - r_{i0})}{(\|q_i^* - q_0\| - r_{i0})^4} (\|q_i^* - q_0\| - r_{i0})' \\
&\quad + \left[\frac{1}{\|q_i^* - q_0\| - r_{i0}} \right]_{\frac{1}{\epsilon - r_{i0}}}^3 \frac{(q_i^* - q_0)}{(\|q_i^* - q_0\| - r_{i0})^2} \frac{-1}{\|q_i^* - q_0\|^2} (\|q_i^* - q_0\|)' \\
&= -3 \left[\frac{1}{\|q_i^* - q_0\| - r_{i0}} \right]_{\frac{1}{\epsilon - r_{i0}}}^2 \frac{(q_i^* - q_0)^T (\bar{v}_i - v_0)}{(\|q_i^* - q_0\| - r_{i0})^2 \|q_i^* - q_0\|} \frac{(q_i^* - q_0)}{(\|q_i^* - q_0\| - r_{i0})^2 \|q_i^* - q_0\|} \\
&\quad + \left[\frac{1}{\|q_i^* - q_0\| - r_{i0}} \right]_{\frac{1}{\epsilon - r_{i0}}}^3 \frac{(\bar{v}_i - v_0)}{(\|q_i^* - q_0\| - r_{i0})^2 \|q_i^* - q_0\|} \\
&\quad - \left[\frac{1}{\|q_i^* - q_0\| - r_{i0}} \right]_{\frac{1}{\epsilon - r_{i0}}}^3 \frac{(q_i^* - q_0)}{\|q_i^* - q_0\|} \frac{2}{(\|q_i^* - q_0\| - r_{i0})^3} \frac{(q_i^* - q_0)^T (\bar{v}_i - v_0)}{\|q_i^* - q_0\|} \\
&\quad - \left[\frac{1}{\|q_i^* - q_0\| - r_{i0}} \right]_{\frac{1}{\epsilon - r_{i0}}}^3 \frac{(q_i^* - q_0)}{(\|q_i^* - q_0\| - r_{i0})^2} \frac{1}{\|q_i^* - q_0\|^2} \frac{(q_i^* - q_0)^T (\bar{v}_i - v_0)}{\|q_i^* - q_0\|}
\end{aligned}$$

Τελικά λαμβάνουμε ότι η παράγωγος του N_{Li} δίνεται από την εξίσωση

$$\begin{aligned} \dot{N}_{Li} = & -3 \left[\frac{1}{\|q_i^* - q_0\| - r_{i0}} \right]_{\frac{1}{\epsilon - r_{i0}}}^2 \frac{(q_i^* - q_0)^T (\bar{v}_i - v_0) (q_i^* - q_0)}{(\|q_i^* - q_0\| - r_{i0})^4 \|q_i^* - q_0\|^2} \\ & + \left[\frac{1}{\|q_i^* - q_0\| - r_{i0}} \right]_{\frac{1}{\epsilon - r_{i0}}}^3 \frac{(\bar{v}_i - v_0)}{(\|q_i^* - q_0\| - r_{i0})^2 \|q_i^* - q_0\|} \\ & - 2 \left[\frac{1}{\|q_i^* - q_0\| - r_{i0}} \right]_{\frac{1}{\epsilon - r_{i0}}}^3 \frac{(q_i^* - q_0)^T (\bar{v}_i - v_0) (q_i^* - q_0)}{(\|q_i^* - q_0\| - r_{i0})^3 \|q_i^* - q_0\|^2} \\ & - \left[\frac{1}{\|q_i^* - q_0\| - r_{i0}} \right]_{\frac{1}{\epsilon - r_{i0}}}^3 \frac{(q_i^* - q_0)^T (\bar{v}_i - v_0) (q_i^* - q_0)}{(\|q_i^* - q_0\| - r_{i0})^2 \|q_i^* - q_0\|^3} \end{aligned} \quad (8.5)$$

Η σχέση (8.5) μπορεί να λάβει την πιο συμπαγή μορφή

$$\begin{aligned} \dot{N}_{Li} = & \left[\frac{1}{\|q_i^* - q_0\| - r_{i0}} \right]_{\frac{1}{\epsilon - r_{i0}}}^3 \frac{(\bar{v}_i - v_0)}{(\|q_i^* - q_0\| - r_{i0})^2 \|q_i^* - q_0\|} \\ & - \left[\frac{1}{\|q_i^* - q_0\| - r_{i0}} \right]_{\frac{1}{\epsilon - r_{i0}}}^2 \frac{(q_i^* - q_0)^T (\bar{v}_i - v_0) (q_i^* - q_0)}{(\|q_i^* - q_0\| - r_{i0})^2 \|q_i^* - q_0\|^2} \\ & \cdot \left[\frac{3}{(\|q_i^* - q_0\| - r_{i0})^2} + \left[\frac{1}{\|q_i^* - q_0\| - r_{i0}} \right]_{\frac{1}{\epsilon - r_{i0}}} \left(\frac{2}{\|q_i^* - q_0\| - r_{i0}} + \frac{1}{\|q_i^* - q_0\|} \right) \right] \end{aligned} \quad (8.6)$$

- Υπολογισμός της παραγώγου του διανύσματος \bar{v}_{ci}

Από την σχέση (8.7) παίρνουμε ότι το διδιάστατο διάνυσμα \bar{v}_{ci} έχει την ακόλουθη μορφή

$$\bar{v}_{ci} = k_1 (z_i + N_{Fi} + N_{Li}) + k_2 \left(\frac{z_i + N_{Fi} + N_{Li}}{\|z_i + N_{Fi} + N_{Li}\|} \right) \quad (8.7)$$

Παραγωγίζοντας την (8.7) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \dot{\bar{v}}_{ci} = & k_1 (\dot{z}_i + \dot{N}_{Fi} + \dot{N}_{Li}) + k_2 \left(\frac{\dot{z}_i + \dot{N}_{Fi} + \dot{N}_{Li}}{\|z_i + N_{Fi} + N_{Li}\|} \right) \\ & + k_2 (z_i + N_{Fi} + N_{Li}) \frac{-1}{\|z_i + N_{Fi} + N_{Li}\|^2} (\|z_i + N_{Fi} + N_{Li}\|)' \\ = & k_1 (\dot{z}_i + \dot{N}_{Fi} + \dot{N}_{Li}) + k_2 \left(\frac{\dot{z}_i + \dot{N}_{Fi} + \dot{N}_{Li}}{\|z_i + N_{Fi} + N_{Li}\|} \right) \\ & + k_2 (z_i + N_{Fi} + N_{Li}) \frac{-1}{\|z_i + N_{Fi} + N_{Li}\|^2} \frac{(z_i + N_{Fi} + N_{Li})^T (\dot{z}_i + \dot{N}_{Fi} + \dot{N}_{Li})}{\|z_i + N_{Fi} + N_{Li}\|} \end{aligned}$$

Τελικά λαμβάνουμε ότι η παράγωγος του \bar{v}_{ci} δίνεται από την εξίσωση

$$\begin{aligned} \dot{\bar{v}}_{ci} = & \left(k_1 + \frac{k_2}{\|z_i + N_{Fi} + N_{Li}\|} \right) (\dot{z}_i + \dot{N}_{Fi} + \dot{N}_{Li}) \\ & - k_2 \frac{(z_i + N_{Fi} + N_{Li})^T (\dot{z}_i + \dot{N}_{Fi} + \dot{N}_{Li}) (z_i + N_{Fi} + N_{Li})}{\|z_i + N_{Fi} + N_{Li}\|^3} \end{aligned} \quad (8.8)$$

όπου τα z_i , N_{Fi} και N_{Li} δίνονται από τις σχέσεις (6.13), (6.31) και (6.32) αντίστοιχα, ενώ τα \dot{z}_i , \dot{N}_{Fi} και \dot{N}_{Li} δίνονται από τις σχέσεις (6.15), (8.4) και (8.6) αντίστοιχα.

Σύμφωνα με τις σχέσεις (6.37) και (6.39) λαμβάνουμε ότι το συνολικό διάνυσμα \tilde{v}_c αποτελείται από τα επιμέρους διανύσματα (8.7)

$$\tilde{v}_c = \begin{bmatrix} \bar{v}_{c1} \\ \bar{v}_{c2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{v}_{cn} \end{bmatrix} \quad (8.9)$$

και η παράγωγός του από τα διανύσματα (8.8) αντίστοιχα

$$\dot{\tilde{v}}_c = \begin{bmatrix} \dot{\bar{v}}_{c1} \\ \dot{\bar{v}}_{c2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{\bar{v}}_{cn} \end{bmatrix} \quad (8.10)$$

Τελικά, η είσοδος ταχύτητας \tilde{v}_c , που σχεδιάζεται για τον έλεγχο της θέσης των ρομπότ, συνδέεται με την (8.9) μέσω της εξίσωσης

$$\tilde{v}_c = \hat{S}^{-1} \tilde{v}_c \quad (8.11)$$

και η παράγωγός της με τις (8.9) και (8.10) μέσω της σχέσης

$$\dot{\tilde{v}}_c = \left(\hat{S}^{-1} \right)' \tilde{v}_c + \hat{S}^{-1} \dot{\tilde{v}}_c \quad (8.12)$$

Βιβλιογραφία

- [1] H.E. Psillakis, “PI consensus error transformation for adaptive cooperative control of nonlinear multi-agent systems,” *Journal of the Franklin Inst.*, in press, doi: 10.1016/j.jfranklin.2019.09.024
- [2] R. Fierro and F. L. Lewis, “Control of a nonholonomic mobile robot: backstepping kinematics into dynamics,” *Proc. of 1995 34th IEEE Conf. on Decision and Control*, New Orleans, LA, USA, pp. 3805-3810 vol.4., 1995.
- [3] R.B. Fierro and F.L Lewis, “Robust Practical Point Stabilization of a Nonholonomic Mobile Robot Using Neural Networks,” *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, vol. 20, pp. 295-317, 1996.
- [4] R. Fierro and F.L. Lewis, “Control of a nonholonomic mobile robot using neural networks,” *IEEE Trans. on Neural Networks*, vol. 9, no. 4, pp. 589-600, July 1998.
- [5] T. Fukao, H. Nakagawa and N. Adachi, “Adaptive tracking control of a nonholonomic mobile robot,” in *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 16, no. 5, pp. 609-615, Oct. 2000.
- [6] Xiaoping Yun and Yoshio Yamamoto, “On Feedback Linearization of Mobile Robots,” Technical Report MS-CIS-92-45, 1992.
- [7] X. Yun and Y. Yamamoto, “Internal dynamics of a wheeled mobile robot,” *Proceedings of 1993 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS '93)*, Yokohama, Japan, 1993, pp. 1288-1294 vol.2.
- [8] Y. Yamamoto and Xiaoping Yun, “Coordinating locomotion and manipulation of a mobile manipulator,” in *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 39, no. 6, pp. 1326-1332, June 1994.
- [9] Dhaouadi, Rached and Ahmad Abu Hatab. “Dynamic Modelling of Differential-Drive Mobile Robots using Lagrange and Newton-Euler Methodologies: A Unified Framework.” *ICRA 2013* (2013).
- [10] Elsayed, Mohamed & Hammad, Abdallah & Hafez, Ashraf & Mansour, Hala. (2017). “Real Time Trajectory Tracking Controller based on Lyapunov Function for Mo-

- bile Robot.” *International Journal of Computer Applications*, 168. 1-6. 10.5120/ijca2017914540.
- [11] D. Wang and Jie Huang, “Neural network-based adaptive dynamic surface control for a class of uncertain nonlinear systems in strict-feedback form,” in *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 16, no. 1, pp. 195-202, Jan. 2005.
- [12] T. Li, D. Wang, G. Feng and S. Tong, “A DSC Approach to Robust Adaptive NN Tracking Control for Strict-Feedback Nonlinear Systems,” in *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, vol. 40, no. 3, pp. 915-927, June 2010.
- [13] M. M. Polycarpou and P. A. Ioannou, “Neural networks as on-line approximators of nonlinear systems,” *Proceedings of the 31st IEEE Conference on Decision and Control*, Tucson, AZ, USA, 1992, pp. 7-12 vol.1.
- [14] J.A. Farrell and M.M. Polycarpou, “*Adaptive Approximation Based Control: Unifying Neural, Fuzzy and Traditional Adaptive Approximation Approaches.*” John Wiley and Sons, 2006.
- [15] G. A. Rovithakis and M. A. Christodoulou, “Adaptive control of unknown plants using dynamical neural networks,” in *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, vol. 24, no. 3, pp. 400-412, March 1994.
- [16] Hassan K. Khalil, “*Nonlinear Systems.*” Prentice Hall, 2002
- [17] Bruno Siciliano, Lorenzo Sciavicco, Giuseppe Oriolo, Luigi Villani, “*Robotics: Modelling, Planning and Control.*” Springer, 2009
- [18] S. K. Godunov, “*Modern Aspects of Linear Algebra,*” Translations of Mathematical Monographs, 1998, 303 pp
- [19] Simon Haykin, “*Neural Networks: A Comprehensive Foundation.*” 2nd Ed., Prentice Hall PTR Upper Saddle River, NJ, 1998
- [20] F. Lewis, H. Zhang, K. Movric and D. Abhijit. “*Cooperative control of multi-agent systems. Optimal and adaptive design approaches.*,” Springer, 2014.
- [21] K. D. Listmann, M. V. Masalawala and J. Adamy, “Consensus for formation control of nonholonomic mobile robots,” 2009 *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Kobe, 2009, pp. 3886-3891.
- [22] G. W. Gamage, G. K. I. Mann and R. G. Gosine, “Leader follower based formation control strategies for nonholonomic mobile robots: Design, implementation and experimental validation,” *Proceedings of the 2010 American Control Conference*, Baltimore, MD, 2010, pp. 224-229.

- [23] Sheng, Long & Pan, Ya-Jun & Xu, J.-X. (2012). “Consensus Formation Control for a Class of Networked Multiple Mobile Robot Systems.” *Journal of Control Science and Engineering*. 2012.
- [24] R. Grandi, R. Falconi and C. Melchiorri, “Coordination and control of autonomous mobile robot groups using a hybrid technique based on Particle Swarm Optimization and Consensus,” 2013 *IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics (ROBIO)*, Shenzhen, 2013, pp. 1514-1519.
- [25] Wang, Wei & Huang, Jiangshuai & Wen, Changyun & Fan, Huijin. (2014). “Distributed adaptive control for consensus tracking with application to formation control of nonholonomic mobile robots.” *Automatica*. 50. 1254–1263. 10.1016/j.automatica.2014.02.028.
- [26] Peng, Zhaoxia & Yang, Shichun & Guoguang, Wen & Rahmani, Ahmed. (2014). “Distributed Consensus-Based Robust Adaptive Formation Control for Nonholonomic Mobile Robots with Partial Known Dynamics.” *Mathematical Problems in Engineering*. 2014. 1-12.
- [27] Peng, Zhaoxia & Guoguang, Wen & Rahmani, Ahmed & yu, Yongguang. (2013). “Distributed Consensus-Based Formation Control for Multiple Nonholonomic Mobile Robots with A Specified Reference Trajectory.” *International Journal of Systems Science*. 46.
- [28] Dong, Longfei & Chen, Yangzhou & Qu, Xiaojun. (2016). “Formation Control Strategy for Nonholonomic Intelligent Vehicles Based on Virtual Structure and Consensus Approach.” *Procedia Engineering*.
- [29] A. Bautista-Castillo, C. López-Franco and E. Nuño, “Consensus-based formation control for multiple nonholonomic robots,” 2016 *IEEE International Autumn Meeting on Power, Electronics and Computing (ROPEC)*, Ixtapa, 2016, pp. 1-6.
- [30] Mohamed Maghenem, Abraham Bautista-Castillo, Emmanuel Nuno, Antonio Di Loria and Elena Panteley. “Consensus-based Formation Control of Nonholonomic Robots using a Strict Lyapunov Function.” (2017).
- [31] Guzey, Haci Mehmet & Dierks, T. & Sarangapani, Jag & Acar, L.. (2017). “Hybrid Consensus-based Control of Nonholonomic Mobile Robot Formation.” *Journal of Intelligent & Robotic Systems*.
- [32] J. P. Desai, J. P. Ostrowski and V. Kumar, “Modeling and control of formations of nonholonomic mobile robots,” in *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 17, no. 6, pp. 905-908, Dec. 2001.
- [33] W. Ren, “Consensus strategies for cooperative control of vehicle formations,” in *IET Control Theory & Applications*, vol. 1, no. 2, pp. 505-512, March 2007.

- [34] S. Khoo, L. Xie and Z. Man, “Robust Finite-Time Consensus Tracking Algorithm for Multirobot Systems,” in *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 14, no. 2, pp. 219-228, April 2009.
- [35] R. Olfati-Saber, J. A. Fax and R. M. Murray, “Consensus and Cooperation in Networked Multi-Agent Systems,” in *Proceedings of the IEEE*, vol. 95, no. 1, pp. 215-233, Jan. 2007.
- [36] Falconi, Riccardo & Sabattini, Lorenzo & Secchi, Cristian & Fantuzzi, Cesare & Melchiorri, Claudio. (2014). “Edge-weighted consensus-based formation control strategy with collision avoidance.” *Robotica*.
- [37] Hong, Yiguang & Hu, Jiangping & Gao, Lixin. (2006). “Tracking Control for Multi-Agent consensus with an Active Leader and Variable Topology.” *Automatica*. 1177-1182.
- [38] Z. Hou, L. Cheng and M. Tan, “Decentralized Robust Adaptive Control for the Multiagent System Consensus Problem Using Neural Networks,” in *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, vol. 39, no. 3, pp. 636-647, June 2009.
- [39] Hu, Guoqiang. (2011). “Robust consensus tracking for an integrator-type multi-agent system with disturbances and unmodelled dynamics.” *International Journal of Control*. 84. 1-8.
- [40] Kaizuka, Yusuke & Tsumura, Koji. (2011). “Consensus Via Distributed Adaptive Control.” *IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline)*. 18.
- [41] S. Khoo, L. Xie and Z. Man, “Leader-follower consensus control of a class of nonholonomic systems,” 2010 *11th International Conference on Control Automation Robotics & Vision*, Singapore, 2010, pp. 1381-1386.
- [42] Ren, Wei. “Multi-vehicle consensus with a time-varying reference state.” *Systems & Control Letters* 56 (2007): 474-483.
- [43] Ren, Wei & Moore, Kevin & Chen, YangQuan. (2007). “High-Order and Model Reference Consensus Algorithms in Cooperative Control of MultiVehicle Systems.” *Journal of Dynamic Systems Measurement and Control-transactions of The Asme - J DYN SYST MEAS CONTR*.
- [44] P. M. Patre, W. MacKunis, K. Kaiser and W. E. Dixon, “Asymptotic Tracking for Uncertain Dynamic Systems via a Multilayer NN Feedforward and RISE Feedback Control Structure,” 2007 *American Control Conference*, New York, NY, 2007, pp. 5989-5994.
- [45] T. Dierks and S. Jagannathan, “Neural Network Control of Mobile Robot Formations Using RISE Feedback,” in *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, vol. 39, no. 2, pp. 332-347, April 2009.

